UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Manuela Muzika Dizdarević

PRIMENA GREBNEROVIH BAZA NA PROBLEME POPLOČAVANJA

doktorska disertacija

Beograd, 2017

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Manuela Muzika Dizdarević

APPLICATION OF THE GRÖBNER BASES THEORY TO TILING PROBLEMS

Doctoral thesis

Belgrade, 2017

Mentor:

dr. Rade Živaljević, naučni savetnik, Matematički institut SANU i redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet

Članovi komisije:

dr. Aleksandar Lipkovski, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
dr. Siniša Vrećica, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
dr. Zoran Petrović, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
dr. Branislav Prvulović, docent, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane:

Zahvalnost

Zahvaljujem se svom mentoru, prof. dr. Radetu Živaljeviću na strpljenju, trudu, razumevanju, pomoći i konstantnoj podršci koju mi je pružio. Zahvalnost je tim veća što sam od prof. Radeta Živaljevića imala priliku da proteklih godina učim matematiku u najlepšem smislu te reči.

Zahvaljujem se prof. dr. Aleksandru Lipkovskom na savetima, podršci i saradnji tokom mojih studija.

Zahvaljujem se doc. dr. Branislavu Prvuloviću na korisnim primedbama i sugestijama.

Zahvaljujem se svom suprugu Damiru i roditeljima koji su mi pomogli da doktorsku disertaciju privedem kraju.

Hvala Sanji što je strpljivo i predano čuvala Sofiju proteklih meseci dok sam ja pisala ovaj rad.

Hvala mojoj drugarici Danieli na pomoći oko izrade slika, a pre svega na konstantnom ohrabrivanju i razumevanju.

Posveta

Ovaj rad posvećujem mojim devojčicama Heleni i Sofiji

REZIME

Predmet ove doktorske disertacije je primena algebarskih tehnika na jednu od centralnih tema kombinatorike i diskretne geometrije - poliomino popločavanja. Poliomino popločavanja su interesantna ne samo matematičarima nego i fizičarima i biolozima, a imaju i primenu u računarskim naukama. U ovoj disertaciji akcenat je stavljen na mogućnost da se posebna klasa problema popločavanja koja su invarijantna u odnosu na delovanje konačne grupe reši primenom teorije Grebnerovih baza za prstene polinoma nad prstenom celih brojeva $\mathbb{Z}$. Metoda koja se koristi odražava duboku povezanost između algebre, geometrije i kombinatorike.

Originalni naučni doprinos ove disertacije na prvom mestu je sadržan u razvoju metode za analizu popločavanja u ravni koja su invarijantna u odnosu na delovanje konačne podgrupe grupe transformacija koje posmatranu rešetku slikaju u samu sebe, a zatim i u poopštenjima rezultata koji su dobili poznati matematičari Konvej i Lagarias o popločavanju trougaonog regiona u heksagonalnoj rešetki u ravni.

U prvoj glavi iznesene su osnove teorije Grebnerovih baza. Posebna pažnja posvećena je Grebnerovim bazama za prstene polinoma sa koeficijentima iz prstena celih brojeva $\mathbb{Z}$ jer se u radu zbog prirode problema upravo koriste algoritmi za određivanje Grebnerovih baza za polinome nad prstenom $\mathbb{Z}$. U drugoj glavi su iznesene osnovne činjenice o pravilnim rešetkama u ravni i dat je prikaz osnovnih pojmova poliomino popločavanja u kvadratnim i šestougaonim rešetkama.

Treća glava disertacije posvećena je proučavanju $\mathbb{Z}$-popločavanja u kvadratnoj rešetki u ravni koja su invarijantna u odnosu na delovanje grupe generisane centralnom simetrijom u odnosu na koordinatni početak. Jedan od koraka u razmatranju ovog problema bio je određivanje prstena invarijanti prstena polinoma $\mathbb{Z}[x, y, u, v]$ u odnosu na delovanje grupe C_2 za šta je korištena teorija Grebnerovih baza.

Četvrta glava disertacije odnosi se na analizu $\mathbb{Z}$-popločavanja u heksagonalnoj rešetki u ravni koja su simetrična u odnosu na rotaciju ravni za ugao od $120°$. Osnovni rezultat četvrte glave je teorema koja daje uslove za simetrično popločavanje trougaonog regiona u ravni T_N, gde je N broj heksagona koji se nalaze na svakoj od stranica trougla. Pomenuta teorema predstavlja jedno od mogućih poopštenja poznatog rezultata Konveja i Lagariasa o popločavanju trougla.

Peta glava disertacije daje još jedno od poopštenja rezultata Konveja i Lagariasa koje se sada odnosi na određivanje uslova popločavanja trougaonog regiona T_N u heksagonalnoj rešetki ali ne baznim oblicima od po tri vezane ćelije nego baznim oblicima od n vezanih ćelija, pri čemu je n proizvoljan prirodan broj.

Ključne reči: $\mathbb{Z}$-popločavanja, simetrična $\mathbb{Z}$-popločavanja, Grebnerove baze, rešetke u ravni, prsten invarijanti

Naučna oblast: Matematika

Uža naučna oblast: Algebra

UDK broj: 512.713:[514.174:519.146](043.3)

ABSTRACT

Subject of this doctoral thesis is the application of algebraic techniques on one of the central topics of combinatorics and discrete geometry - polyomino tiling. Polyomino tilings are interesting not only to mathematicians, but also to physicists and biologists, and they can also be applied in computer science. In this thesis we put some emphasis on possibility to solve special class of tiling problems, that are invariant under the action of finite group, by using theory of Gröbner basis for polynomial rings with integer coefficients. Method used here reflects deep connection between algebra, geometry and combinatorics.

Original scientific contribution of this doctoral thesis is, at the first place, in developing a techniques which enable us to consider not only ordinary $\mathbb{Z}$-tiling problems in the lattice but the problems of tilings which are invariant under some subgroups of the symmetry group of the given lattice. Besides, it provides additional generalizations, originally provided by famous mathematicians J. Conway and J. Lagarias, about tiling of the triangular region in the hexagonal lattice.

Here is a summary of the content of the theses. In the first chapter we give an exposition of the Gröbner basis theory. Especially, we emphasize Gröbner basis for polynomial rings with integer coefficients. This is because, in this thesis, we use algorithms for determining Gröbner basis for polynomials with integer coefficients. Second chapter provides basic facts about regular lattices in the plane. Also, this chapter provides some fundamental terms of polyomino tiling in the square and hexagonal lattice.

Third chapter of this thesis is about studying $\mathbb{Z}$-tilings in the square lattice, which are invariant under the subgroup G of the group of all isometric transformations of the lattice which is generated by the central symmetry. One of the steps to resolve this problem was to determine a ring of invariants P^G and its generators and relations among them. We use Gröbner basis theory to achieve this.

Forth chapter covers the analysis of $\mathbb{Z}$-tilings in the hexagonal lattice which are symmetric with respect to the rotation of the plane for the angle of $120°$. Main result of the fourth chapter is the theorem which gives conditions for symmetric tiling of the triangular region in plane T_N, where N is the number of hexagons on each side of triangle. This theorem is one of the possible generalizations of the well known result, provided by Conway and Langarias.

Chapter five provides another generalization of Conway and Lagarias result. This generalization is about determining conditions of tiling of triangular region T_N in the hexagonal lattice not only with tribones, but with n-bones, where n-bone is basic shape of n connected cells in the hexagonal lattice, and n is arbitrary integer.

Keywords: $\mathbb{Z}$-tilings, symmetric $\mathbb{Z}$-tilings, Göbner bases, lattice in the plane, ring of invariants

Research area: Mathemetics

Research subarea: Algebra

UDC number: 512.713:[514.174:519.146](043.3)

Sadržaj

Uvod

Centralna tema ove disertacije je primena teorije Grebnerovih baza na probleme popločavanja u ravni. Umetnost popločavanja površina počela se razvijati veoma davno. Svaka civilizacija stvorila je neki, sebi svojstven, vid popločavanja koji je podrazumevao popločavanje ravne ili zakrivljene površine kamenčićima, delićima keramike, drveta ili nekog drugog materijala tako da se delići međusobno ne preklapaju niti među njima postoje praznine. Sa druge strane, razmatranje matematičkih svojstava popločavanja je prilično novo i još uvek nedovoljno istraženo.

Problem popločavanja se prvi put u matematici javlja u radu Solomona Golomba 1954. godine "Checker Board and Polyominoes". Golomb je prvi definisao poliomino kao figuru u ravni koja se sastoji od n vezanih kvadratića tako da je presek svaka dva zajednička stranica, vrh ili prazan skup. U radovima [12] i [13], te i knjizi [14] Golomb se bavi posebnom klasom problema popločavanja fokusiranom na pitanje koji poliomino oblici imaju osobinu da se sa konačno mnogo njihovih kopija, dopuštajući pri tome rotacije i refleksije, može popločati pravougaoni region.

40 godina nakon Golomba problemi popločavanja ponovo se aktualiziraju u radu [8] Konveja i Lagariasa. Oni su definisali pojam $\mathbb{Z}$-popločavanja i razvili tehniku "homoloških grupa popločavanja". Potrebne uslove za postojanje popločavanja oni izvode iz kombinatorno-grupne invarijante koju su nazvali "boundary word"a koja se na određen način pridružuje granici baznog oblika i regiona koji se želi popločati.

Profinjenje metode iz rada Konveja i Lagariasa dao je M.Reid u radovima [22] i [23] gde je uveo teoriju " tiling homotopy "grupa i za neke slučajeve popločavanja je pomenute grupe potpuno odredio.

O. Bodini i B. Novel su u svom radu [6] prvi uveli algebarske tehnike, konkretno Grebnerove baze, za rešavanje problema običnog $\mathbb{Z}$-popločavanja, koje su im omogućile da pitanje da li se neki region može popločati datim oblicima svedu na pitanje pripadnosti idealu u prstenu polinoma.

U prvoj glavi ovog rada izložene su osnove iz teorije Grebnerovih baza. Izlaganje je inspirisano klasičnim knjigama [9] i [10]. Posebna pažnja je posvećena Grebnerovim bazama za prstene polinoma nad prstenom celih brojeva $\mathbb{Z}$, koje se u ovom radu koriste. Osnove te teorije i pojednostavljeni algoritam izloženi su prema radu [18], a naprednije verzije datog algoritma implementirane su u softver *Wolfram Mathematica* 9 koje su korištene za konkretna izračunavanja.

Druga glava rada posvećena je rešetkama i popločavanju, kao matematičkom pojmu. Rešetke, relevantne za algebru kao i za geometriju, zaslužuju posebnu pažnju jer su one prostor za poliomino popločavanja. Zato su posebno razmotrene dve klase pravilnih rešetki, kvadratna i šestougaona rešetka. Takođe, u drugoj glavi su definisani pojmovi popločavanje, $\mathbb{Z}-$popločavanje i simetrično $\mathbb{Z}-$popločavanje.

U drugom delu disertacije koji se odnosi na glave 3, 4 i 5, izneti su novi rezultati koji ilustruju prelepu interakciju između algebre i konveksne i diskretne geometrije. U trećoj glavi se bavimo popločavanjima tribonima u kvadratnoj rešetki u ravni koja su invarijantna u odnosu na centralnu simetriju, dok su u četvrtoj glavi razmotrena simetrična popločavanja trougaonog regiona u heksagonalnoj rešetki tribonima invarijantna u odnosu na grupu generisanu rotacijom za ugao od $120°$. Za rešavanje oba problema uvedene su i razrađene nove tehnike kojima se problem popločavanja najpre svodi na problem pripadnosti odgovarajućem modulu, a zatim se dalje, koristeći specifične osobine rešetki, prevodi na problem pripadnosti idealu. Sve ovo se dešava u prstenima koji su invarijantni podprsteni prstena polinoma nad prstenom celih brojeva. Kako se klasični rezultati teorije invarijanti odnose na prstene polinoma sa koeficijentima iz polja, što ovde nije slučaj, primenjene su modifikovane tehnike za određivanje generatora i relacija među njima koje takođe uključuju primenu teorije Grebnerovih baza.

U petoj glavi se opet vraćamo na obična $\mathbb{Z}-$popločavanja u heksagonalnoj rešetki. Razmotrena su popločavanja trougaonog regiona koji na svakoj svojoj stranici ima jednak broj heksagona i to $n-$bonima gde je n proizvoljan prirodan broj. Naravno, opet smo koristili Grebnerove baze s tim da smo sada direktnim računom odredili Grebnerovu bazu ideala generisanog $n-$bonima. Tako smo dobili i odgovor na pitanje kada je moguće $n-$bonima popločati trougaoni region, što predstavlja poopštenje rezultata Konveja i Lagariasa o popločavanju trougla tribonima.

Glava 1

Grebnerove baze

1.1 Uređenja u skupu monoma i deljenje polinoma u prstenu $k[x_1, x_2, \dots x_n]$

Sa k ćemo označavati algebarski zatvoreno polje.

Definicija 1.1.1. *Monom u promenljivim $x_1, x_2, \dots, x_n$ je proizvod oblika*

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

pri čemu su svi eksponenti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nenegativni celi brojevi. Stepen monoma $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$ definiše se sa

$$deg(x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

Ako sa α označimo uređenu $n - torku$ nenegativnih celih brojeva $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ onda možemo koristiti kraću oznaku

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Ako je $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ onda je $x^\alpha = 1$.

Definicija 1.1.2. *Polinom f u promenljivim $x_1, x_2, \dots, x_n$ sa koeficijentima iz polja k je konačna linearna kombinacija monoma sa koeficijentima iz polja k. Polinom ćemo zapisivati u obliku*

$$f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in k$$

pri čemu se sumiranje vrši po konačnom broju $n-$*torki* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. *Skup svih polinoma u promenljivim* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *i sa koeficijentima iz polja* k *označavamo sa* $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Prvi uslov za definisanje operacije deljenja u skupu polinoma više nezavisnih promenljivih jeste postojanje uređenja u skupu monoma.
U skupu monoma jedne promenljive relacija uređenja je definisana na jedini mogući način sa:

$$1 < x < x^2 < \cdots < x^n < x^{n+1} < \cdots$$

Međutim, u skupu monoma više promenljivih relacija uređenja sa potrebnim osobinama može se definisati na više načina, a svako od tih uređenja korisno je u nekom kontekstu. Definisati uređenje u skupu monoma u n promenljivih isto je što i definisati uređenje u skupu uređenih $n-$torki nenegativnih celih brojeva. Naime, između skupa monoma u n promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i uređenih $n-$torki nenegativnih celih brojeva postoji bijektivno preslikavanje po kojem se svakom monomu $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$ pridružuje uređena $n-$torka $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ njegovih eksponenata. Ako postoji uređenje $<$ u skupu $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ onda ono inducira uređenje u skupu monoma, jer ako je $\alpha > \beta$ u $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ onda možemo reći da je i $x^\alpha > x^\beta$.

Definicija 1.1.3. *Monomijalno uređenje* $>$ *je relacija* $>$ *na* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *ili što je isto relacija u skupu monoma oblika* x^α $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *za koju vredi:*

i) $>$ *je totalno uređenje na* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$;

ii) ako je $\alpha > \beta$ *i* $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *onda je* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$;

iii) $>$ *je dobro uređenje na* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, *tj. svaki neprazan podskup od* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *ima minimalni element.*

Tri najčešće korištena uređenja su leksikografsko, garduirano leksikografsko i obrnuto graduirano leksikografsko uređenje. Definišimo ih i navedimo odgovarajuće primere.

Definicija 1.1.4 (Leksikografski poredak)**.** *Neka su* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *i* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ *iz* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. *Reći ćemo da je* $\alpha >_{lex} \beta$ *ako je u razlici* $\alpha - \beta$ *krajnji levi element različit od nule pozitivan. Ako je* $\alpha >_{lex} \beta$ *pisat ćemo* $x^\alpha > x^\beta$.

Primetimo da u skupu polinoma u n promenljivih postoji $n!$ različitih leksikografskih uređenja jer svaki poredak promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ određuje jedan leksikografski poredak u skupu monoma.

Primer 1.1.1. *U odnosu na leksikografski poredak za koji je $x_1 > x_2 > x_3$ imamo da je*

> $x_1^5 x_2^3 x_3^7 >_{lex} x_1^3 x_2^7 x_3^{10}$ *jer je* $(5,3,7) - (3,7,10) = (2,-4,-3)$*, a krajnji levi element u* $(2,-4,-3)$ *različit od nule je pozitivan;*
>
> $x_1 >_{lex} x_2^{123} x_3^{567}$ *jer je* $(1,0,0) - (0,123,567) = (1,-123,-567)$*, a krajnji levi element različit od nule, u ovom slučaju* 1*, je pozitivan.*

Kao što se vidi iz poslednjeg primera leksikografskom poretku "važan" je samo stepen najveće promenljive u monomu, a ukupni stepen monoma je potpuno zanemaren. Ukoliko pak, ukupni stepen monoma ne želimo zanemariti možemo koristiti graduirani leksikografski poredak koji se definiše na sledeći način:

Definicija 1.1.5 (Graduirani leksikografski poredak)**.** *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Kažemo da je $\alpha >_{grlex} \beta$ ako je*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > \sum_{i=1}^{n} \beta_i = |\beta| \ \ \textit{ili je} \ \ |\alpha| = |\beta| \ \ \textit{i} \ \ \alpha >_{lex} \beta.$$

Primer 1.1.2. *Neka nam $>_{grlex}$ označava graduirani leksikografski poredak za koji je $x_1 > x_2 > x_3$*

> $x_1^3 x_2^4 x_3^5 >_{grlex} x_1^3 x_2^4 x_3^4$ *jer je* $|(3,4,5)| = 12 > 11 = |(3,4,4)|$*;*
>
> $x_1^5 x_2^4 x_3^2 >_{grlex} x_1^3 x_2^4 x_3^4$ *jer je* $|(5,4,2)| = |(3,4,4)|$ *i* $(5,4,2) >_{lex} (3,4,4)$*.*

Pored ova dva uređenja koja smo upravo definisali često se sreće i obrnuti graduirani leksikografski poredak koji u odnosu na već definisane ima tu prednost da značajno povećava efikasnost procedura u kojima se koristi.

Definicija 1.1.6 (Obrnuti graduirani leksikografski poredak)**.** *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Kažemo da je $\alpha >_{grevlex} \beta$ ako je*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > \sum_{i=1}^{n} \beta_i = |\beta|, \ \ \textit{ili je} \ \ |\alpha| = |\beta|$$

a u razlici $\alpha - \beta$ krajnji desni element različit od nule je negativan.

Primer 1.1.3. *Neka nam* $>_{grevlex}$ *označava obrnuti graduirani leksikografski poredak za koji je* $x_1 > x_2 > x_3$:

$x_1^4 x_2^5 x_3^2 >_{grevlex} x_1^4 x_2^2 x_3^3$ *jer je* $|(4,5,2)| = 11 > 9 = |(4,2,3)|$*;*

$x_1^3 x_2^2 x_3^2 >_{grevlex} x_1^2 x_2 x_3^4$ *jer je* $|(3,2,2)| = 7 = |(2,1,4)|$, *ali je u razlici* $(3,2,2) - (2,1,4) = (1,1,-2)$ *krajnji desni element negativan.*

Uređenje koje se definiše u skupu monoma može se proširiti do uređenja u prstenu polinoma. Ako je $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \dots, x_n]$ i $>$ uređenje na skupu monoma u promenljivim $x_1, \dots, x_n$, onda monome koji se javljaju u polinomu f možemo redati u rastućem ili opadajućem redosledu s obzirom na dato uređenje.

Definicija 1.1.7. *Neka je* $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \dots, x_n]$ *polinom različit od nule i neka je* $>$ *uređenje u skupu monoma. Definišemo:*

i) Multistepen polinoma f : $multideg(f) = max\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \ : \ a_\alpha \neq 0\}$

ii) Vodeći koeficijent polinoma f : $LC(f) = a_{multideg(f)} \in k$

iii) Vodeći monom od f : $LM(f) = x^{multideg(f)}$

iv) Vodeći član od f: $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$

Primer 1.1.4. *Neka je* $f = 2x_1^4 - 4x_1^2 x_2^3 + 5x_1^2 x_2^2 x_3 - 4x_3^4$ *i neka je* $>$ *graduirani leksikografski poredak za koji je* $x_1 > x_2 > x_3$. *Tada je*

i) $multideg(f) = (2,3,0)$

ii) $LC(f) = -4$

iii) $LM(f) = x_1^2 x_2^3$

iv) $LT(f) = -4x_1^2 x_2^3$

Napomenimo da su ovo najčešće korištena monomijalna uređenja i da se svako uređenje na skupu monoma može zadati odgovarajućom matricom. Većina programskih paketa koja omogućava izračunavanje Grebnerovih baza, dopušta i definisanje specifičnih uređenja zadavanjem odgovarajuće matrice.

Sada kada imamo definisano uređenje u skupu polinoma više nezavisnih promenljivih, možemo dati i algoritam za deljenje u skupu polinoma $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, koji predstavlja proširenje poznatog algoritma za deljenje u prstenu $k[x]$, s tom razlikom što sada polinom f delimo ne jednim polinomom nego celim skupom polinoma $f_1, f_2, \dots, f_k$.
Algoritam za deljenje u prstenu $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ glasi:
Neka je na skupu $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ definisano uređenje $>$ i neka je $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ uređena $k-$torka polinoma iz $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Svaki polinom $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ može biti napisan kao

$$f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_k f_k + r$$

gde su $a_i, r \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $r = 0$ ili je r linearna kombinacija monoma sa koeficijentima iz k od kojih nijedan nije deljiv sa $LM(f_1), LM(f_2), \dots, LM(f_k)$. Polinom r zovemo ostatkom deljenja polinoma f sa F. Ako je, osim toga i $a_i f_i \neq 0$, onda je $multideg(f) \geq multideg(a_i f_i)$

1.2 Grebnerova baza

Sada kada imamo definisan algoritam za deljenje u prstenu polinoma više nezavisnih promenljivih, prirodno je zapitati se da li se odgovor na pitanje da li dati polinom $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ pripada idealu $I = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ može dobiti primenom algoritma za deljenje skupom polinoma $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ na polinom f. Odgovor na to pitanje je delimično potvrdan. Naime, ako je ostatak pri deljenju polinoma f skupom $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ jednak nuli onda je jasno da $f \in I$. Međutim, ako je pomenuti ostatak različit od nule to ne znači da polinom f nije sadržan u idealu I. Ipak postoje baze ideala I, za koje je ostatak pri deljenju polinoma f datom bazom jedinstven i koje omogućavaju da se da nedvosmislen odgovor na pitanje pripada li polinom f idealu I ili ne. Takve baze zovu se Grebnerove baze ideala I.

Ako je dato uređenje u skupu monoma prstena $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, onda svaki polinom f ima jedinstven vodeći član $LT(f)$, pa za svaki ideal $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ možemo definisati i ideal generisan vodećim članovima svih polinoma ideala I.

Definicija 1.2.1. *Neka je $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ideal različit od $\{0\}$.*

i) Sa $LT(I)$ označavamo skup vodećih članova polinoma ideala I, tj.

$$LT(I) = \{cx^\alpha \ : \ \text{postoji } f \in I \text{ takvo da je } LT(f) = cx^\alpha\},$$

ii) Sa $\langle LT(I)\rangle$ označavamo ideal generisan svim elementima skupa $LT(I)$

Pretpostavimo da ideal I ima konačan skup generatora, tj. da je $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle$. Napomenimo da postoji razlika između idala $\langle LT(I)\rangle$ i ideala $\langle LT(f_1), LT(f_2), \ldots, LT(f_k)\rangle$, jer u svakom slučaju vredi da je $\langle LT(f_1), LT(f_2), \ldots, LT(f_k)\rangle \subset \langle LT(I)\rangle$, ali da obrnuta inkluzija ne mora uvek biti zadovoljena.

Propozicija 2.1. *Neka je $I \subset k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Tada vredi sledeće:*

i) $\langle LT(I)\rangle$ je monomijalni ideal;

ii) Postoje polinomi $g_1, g_2, \ldots, g_k \in I$ takvi da je $\langle LT(I)\rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_k)\rangle$.

Dokaz: *i)* Vodeći monomi $LM(g)$ elemenata iz I koji su različiti od nule, generišu monomijalni ideal $\langle LM(g) \ : \ g \in I - \{0\}\rangle$, a kako se $LM(g)$ i $LT(g)$ razlikuju samo za nenultu konstantu vredi da je $\langle LM(g) \ : \ g \in I - \{0\}\rangle = \langle LT(I)\rangle$, što znači da je $\langle LT(I)\rangle$ monomijalni ideal.

ii) Kako je ideal $\langle LT(I)\rangle$ generisan monomima $LM(g)$ za $g \in I - \{0\}$, iz Diksonove leme sledi da postoji konačno mnogo polinoma $g_1, g_2, \ldots g_k \in I$ takvih da je $\langle LT(I)\rangle = \langle LM(g_1), LM(g_2), \ldots, LM(g_k)\rangle$ a kako se $LT(g_i)$ i $LM(g_i)$ razlikuju za nenultu konstantu imamo da je
$\langle LT(I)\rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_k)\rangle$, čime je naša tvrdnja dokazana.
□

Iskoristimo sada propoziciju 2.1 i algoritam za deljenje polinoma da pokažemo da je svaki ideal I prstena polinoma generisan konačnim skupom.

Teorema 2.2 (*Hilbertova teorema o bazi*)**.** *Za svaki ideal $I \in k[x_1, \ldots, x_n]$ postoji konačan skup generatora, tj. $I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_t\rangle$ za neke $g_1, \ldots, g_t \in k[x_1, \ldots, x_n]$.*

Dokaz: Ako je $I = \{0\}$ onda je $\{0\}$ skup koji generiše ideal I i konačan je.

Pretpostavimo da je $I \neq \{0\}$ iz propozicije 2.1 sledi da postoje $g_1, \ldots, g_t \in I$ takvi da je $\langle LT(I)\rangle = \langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t)\rangle$. Pokažimo da je $I = \langle g_1, \ldots, g_t\rangle$. Očigledno je

$\langle g_1, \ldots, g_t \rangle \subset I$ jer svako $g_i \in I$. Pokažimo da vredi i obrnuta inkluzija. Neka je $f \in I$ proizvoljan polinom. Ako za unapred određeno monomijalno uređenje primenimo algoritam za deljenje na f i skup $\{g_1, \ldots, g_t\}$, onda f možemo pisati u obliku

$$f = a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t + r$$

pri čemu nijedan član od r nije deljiv sa $LT(g_1), \ldots, LT(g_t)$.

$$r = f - a_1 g_1 - \cdots - a_t g_t \in I$$

Ako bi imali da je $r \neq 0$ to bi značilo da $LT(r) \in \langle LT(I) \rangle = \rangle LT(g_1), \ldots, LT(g_t) \rangle$ što je moguće samo ako neko od $LT(g_1), \ldots, LT(g_t)$ deli $LT(r)$, što je protivno našoj pretpostavci. Dakle, $r = 0$ pa je

$$f = a_1 g_1 + \cdots + a_t g_t \in \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$$

čime je dokaz kompletiran.

$\square$

Nas će interesovati baze $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ ideala I koje imaju osobinu da je vodeći član svakog polinoma $f \in I$ deljiv vodećim članom bar jednog od polinoma iz baze $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$.

Definicija 1.2.2 (Grebnerova baza)**.** *Neka je $>$ fiksno uređenje u prstenu $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ i neka je $I \subset k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ proizvoljan ideal. Grebnerova baza ideala I s obzirom na uređenje $>$ je konačna familija polinoma $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ za koju je $G \subset I$ i*

$$\langle LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_k) \rangle = I$$

Posledica 2.3. *Svaki ideal $I \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \neq \{0\}$ ima Grebnerovu bazu. Štaviše, svaka Grebnerova baza ideala I je baza ideala I.*

Dokaz: Neka je $I \neq \{0\}$ proizvoljan ideal. Iz teoreme 2.2 sledi da ideal I ima konačnu bazu $\{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$. Baza $\{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ konstruisana u dokazu teoreme 2.2 je prema definiciji Grebnerova baza ideala I.
Druga tvrdnja takođe sledi iz dokaza teoreme 2.2. Naime, ako je
$\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t) \rangle$ onda je i $I = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ pa je G baza ideala I. $\square$

Propozicija 2.4. *Neka je $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ Grebnerova baza ideala $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ i neka je $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ proizvoljan polinom. Postoji jedinstven polinom $r \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ sa sledećim osobinama:*

(i) Nijedan član polinoma r nije deljiv niti jednim članom skupa $\{LT(g_1), LT(g_2), \dots, LT(g_k)\}$,

(ii) Postoji $g \in I$ takvo da je $f = g + r$
Polinom r je ostatak deljenja polinoma f skupom G.

Dokaz: Ako na polinom f i skup G primenimo algoritam za deljenje polinoma više promenljivih dobit ćemo polinome $a_1, a_2, \dots, a_k$ i r za koje je

$$f = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_k g_k + r$$

pri čemu za polinom r vredi (i), a ako stavimo da je $g = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_k g_k \in I$, onda je zadovoljen i uslov (ii). Dakle, polinom r sa traženim osobinama postoji.
Da bismo dokazali jedinstvenost, pretpostavimo da postoje r' i g' koji zadovoljavaju uslove (i) i (ii) takvi da je $f = g + r = g' + r'$. To bi značilo da je $r - r' = g' - g \in I$, pa ako je $r \neq r'$ onda imamo da $LT(r - r') \in \langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2), \dots, LT(g_k) \rangle$, a to bi značilo da je $r - r'$ deljivo sa $LT(g_i)$ za neko i, što je nemoguće jer nijedan član od r i r' nije deljiv niti jednim elementom skupa $\{LT(g_1), LT(g_2), \dots, LT(g_k)\}$. Dakle, $r - r'$ mora biti jednako nuli, čime smo dokazali i jedinstvenost.
□

Ostatak r iz gornje propozicije zvaćemo *normalna forma polinoma f*.
Primetimo da je ostatak r jedinstven iako polinomi $a_1, a_2, \dots, a_k$ koji se dobijaju iz algoritma za deljenje polinoma f sa G ne moraju biti jedinstveni i zavise od redosleda deljenja polinomima $g_i \in G$. Zbog toga imamo da vredi sledeća posledica.

Posledica 2.5. *Neka je $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ Grebnerova baza ideala $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ i neka je $f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ proizvoljan polinom. $f \in I$ ako i samo ako je ostatak deljenja f sa G jednak nuli.*

Definicija 1.2.3. *Sa $\overline{f}^F$ ćemo označavati ostatak deljenja polinoma f uređenom $s-$torkom polinoma $F = (f_1, f_2, \dots f_s)$. Ako je F Grebnerova baza onda s obzirom na prethodnu propoziciju, F možemo posmatrati kao skup.*

Definicija 1.2.4 ($S-$polinom)**.** *Neka su $f, g \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomi različiti od nule.*

(i) Neka je $multideg(f) = \alpha$ i $multideg(g) = \beta$. Stavimo da je $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ gde je $\gamma_i = max(\alpha_i, \beta_i)$, za $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Kažemo da je x^γ najmanji zajednički sadržalac $LM(f)$ i $LM(g)$ i pišemo $NZS(LM(f), LM(g)) = x^\gamma$

(ii) $S-$polinom polinoma f i g definiše se sa:

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g$$

Na primer, ako je $f = x^3y^2 - x^2y^3$ i $g = 3x^4y + y^2$ i ako u $\mathbb{R}[x, y]$ uzmemo graduirani leksikografski poredak, onda je $\gamma = (4, 2)$ i

$$\begin{aligned} S(f,g) &= \frac{x^4y^2}{x^3y^2} \cdot f - \frac{x^4y^2}{3x^4y} \cdot g = \\ &= x \cdot f - \frac{1}{3} \cdot y \cdot g = \\ &= -x^3y^3 - \frac{1}{3}y^3 \end{aligned}$$

$S-$polinomi omogućavaju nam da damo veoma koristan kriterij za utvrđivanje kada je neki skup Grebnerova baza ideala na kome se zasniva algoritam za efektivno određivanje Grebnerove baze datog ideala, a taj kriterij se zove *Buhbergerov kriterij* i on glasi:

Neka je $I \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ideal. Skup $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ je Grebnerova baza ideala I ako i samo ako je G baza ideala I i ako je za svaki par $i \neq j$ ostatak deljenja polinoma $S(f, g)$ sa G jednak nuli.

1.3 Buhbergerov algoritam

Videli smo da svaki ideal $I \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ima Grebnerovu bazu, ali teorema koja nam garantuje egzistenciju te Grebnerove baze ne pruža informaciju o tome kako tu bazu i odrediti. Tako dolazimo do ključnog pitanja u teoriji, a to je kako za dati ideal $I \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ odrediti njegovu Grebnerovu bazu? Odgovor na to pitanje daje Buhbergerov algoritam, koji zajedno sa Buhbergerovim kriterijem predstavlja najznačajniji doprinos Buhbergera samoj teoriji Grebnerovih baza.

Mi ćemo navesti veoma pojednostavljenu verziju Buhbergerovog algoritma koja nije implementirana u matematičkim računarskim paketima u tom obliku jer ima mnogo efikasnijih i unapređenijih metoda, ali koja pregledno daje osnovni princip na kojem počiva svaki algoritam za određivanje Grebnerove baze.

Teorema 3.1 (Buhbergerov algoritam)**.** *Neka je* $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle \neq 0$ *ideal u prstenu* $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$*. Grebnerova baza ideala* I *se može konstruisati u konačno mnogo koraka koristeći sledeći algoritam:*

Input: $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *baza ideala* I

Output: Grebnerova baza $G = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ *ideala* I *za koju je* $F \subset G$

$G := F$

REPEAT

$\quad G' := G$

$\quad$ *FOR svaki par* $p, q \in G', p \neq q$ *DO*

$\quad\quad S := \overline{S(p,q)}^{G'}$

$\quad\quad$ *IF* $S \neq 0$ *THEN* $G := G \cup \{S\}$

UNTIL $G = G'$

Dokaz: Neka je $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$. Stavimo da je

$$\langle G \rangle = \langle g_1, g_2, \ldots, g_t \rangle$$

$$\langle LT(G) \rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2), \ldots, LT(g_t) \rangle$$

Pokažimo najpre da je $G \subset I$ u svakom koraku posmatranog algoritma. Jasno je da to vredi u prvom koraku, a u svakom sledećem koraku mi uvećavamo G dodajući mu ostatak $\overline{S = S(p,q)}^{G}$ za $p, q \in G'$. Kako $G \subset I$, to su $p, q, S(p,q)$ iz I, a kako delimo skupom $G' \subset I$ imamo da je i $G \cup \{S\} \subset I$. Kako G sadrži bazu ideala I, to je i G baza ideala I. Algoritam se završava onda kada je $G = G'$, tj onda kada je $S = \overline{S(p,q)}^{G'} = 0$ za sve $p, q \in G$ što prema Buhbergerovom kriteriju znači da je G Grebnerova baza datog ideala I.

Ostaje nam još da pokažemo da se algoritam zaista završava. Posmatrajmo šta se dešava pri prolazu kroz glavnu petlju. Skup G se sastoji od G', što je staro G, i nenultih ostataka $S-$polinoma elemenata od G'. Kako je $G' \subset G$ imamo da je

$$\langle LT(G')\rangle \subset \langle LT(G)\rangle \tag{1.1}$$

Ako je $G' \neq G$ tvrdimo da je $\langle LT(G')\rangle$ strogo sadržano u $\langle LT(G)\rangle$. Da bismo to pokazali pretpostavimo da je nenula ostatak r S-polinoma dodat skupu G. Kako je r ostatak deljenja sa G' to $LT(r)$ nije deljivo vodećim članovima elemenata iz G', pa $LT(r) \notin \langle LT(G')\rangle$, a $LT(r) \in \langle LT(G)\rangle$, što smo i hteli pokazati.
Prema (1.1), ideali koji se dobiju uzastopnim iteracijama petlje formiraju rastući niz ideala u $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, a kako je to Neterin prsten, posmatrani lanac je stacionaran što znači da jednog trenutka postaje $\langle LT(G')\rangle = \langle LT(G)\rangle$, tj. $G = G'$, a iz toga sledi da se naš algoritam završava nakon konačno mnogo koraka čime je teorema dokazana. $\square$

Lema 3.2. *Neka je G Grebnerova baza ideala I i neka je $p \in G$ polinom za koji je $LT(p) \in \langle LT(G - \{p\})\rangle$. Tada je i $G - \{p\}$ takođe Grebnerova baza ideala I.*

Dokaz:
Znamo da je $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$. Ako je $p \in G$ polinom takav da je

$LT(p) \in \langle LT(G - \{p\})\rangle$ onda je $\langle LT(G - \{p\})\rangle = \langle LT(G)\rangle$, pa iz definicije Grebnerove baze imamo da je i $G - \{p\}$ takođe Grebnerova baza ideala I, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Definicija 1.3.1 (Minimalna Grebnerova baza)**.** *Minimalna Grebnerova baza ideala $I \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je Grebnerova baza od I za koju vredi:*

i) $LC(p) = 1$ *za svaki polinom* $p \in G$

ii) *Za svako* $p \in G$, $LT(p) \notin \langle LT(G - \{p\})\rangle$

Definicija 1.3.2 (Reducirana Grebnerova baza)**.** *Reducirana Grebnnerova baza ideala $I \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je Grebnerova baza ideala I za koju vredi:*

i) $LC(p) = 1$ *za svaki polinom* $p \in G$

ii) *Za svako* $p \in G$ *nijedan monom polinoma* p *nije u idealu* $\langle LT(G - \{p\})\rangle$

Propozicija 3.3. *Neka je $I \subset k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ i $I \neq 0$. Za dato uređenje u skupu monoma ideal I ima jedinstvenu reduciranu Grebnerovu bazu.*

Dokaz: Neka je G minimalna Grebnerova baza ideala I. Kažemo da je $g \in G$ reducirano za G ako nijedan monom od g nije u $\langle LT(G - \{g\})\rangle$. Naš cilj je da modifikujemo svako $g \in G$ tako da bude zadovoljen navedeni uslov.
Primetimo prvo da ako je g reducirano za G onda je g reducirano i za svaku drugu minimalnu Grebnerovu bazu ideala I koja sadrži g i ima isti skup vodećih članova što sledi iz činjenice da reduciranje uključuje samo vodeće članove.
Neka je $g \in G$ i neka je $g' = \overline{g}^{G-\{g\}}$. Stavimo da je $G' = (G - \{g\}) \cup \{g'\}$. Tvrdimo da je G' minimalna Grebnerova baza ideala I. Primetimo da je $LT(g) = LT(g')$, pa kada g reduciramo polinomima iz $G - \{g\}$, $LT(g)$ postaje ostatak jer nije deljiv nijednim elementom iz $LT(G - \{g\})$. To znači da je $\langle LT(G)\rangle = \langle G'\rangle$. g' je sadržano u I, pa je G' Grebnerova baza i to minimalna, a g' je reducirano za G' po konstrukciji.
Primenjujmo sada gornju proceduru na elemente iz G dok svi ne postanu reducirani. Pri tome se Grebnerova baza menja ali jednom reduciran element ostaje reduciran jer se pri ovoj promeni Grebnerove baze ne menjaju vodeći članovi njenih polinoma, tako da na kraju imamo reduciranu Grebnerovu bazu.
Ostalo nam je još da dokažemo jedinstvenost reducirane Grebnerove baze. Pretpostavimo da postoje dve reducirane Grebnerove baze G i $\tilde{G}'$ ideala I. Obe ove baze su minimalne što znači da imaju iste vodeće članove, tj.

$$LT(G) = LT(\tilde{G}).$$

Dakle, za svako $g \in G$ postoji $\tilde{g} \in \tilde{G}$ takvo da je $LT(g) = LT(\tilde{g})$. Posmatrajmo $g - \tilde{g}$, Kako $g - \tilde{g} \in I$ i kako je G Grebnerova baza ideala I, imamo da je $\overline{g - \tilde{g}}^G = 0$. Kako je $LT(g) = LT(\tilde{g})$ ovi se članovi međusobno ponište, a oni koji preostanu nisu deljivi vodećim članovima iz G niti iz $\tilde{G}$ jer su obe ove baze reducirane po pretpostavci. Iz toga sledi da je $\overline{g - \tilde{g}}^G = g - \tilde{g}$, pa je $g = \tilde{g}$. Odavde zaključujemo da je zapravo $G = \tilde{G}$, čime smo dokazali jedinstvenost reducirane Grebnerove baze. □

Matematički programski paketi poput Volfram Matematike, Mejpla, Singulara i drugih imaju implementirane naprednije verzije Buhbergerovog algoritma koje kao rezultat daju reduciranu Grebnerovu bazu za dati ideal.

Interesantna posledica činjenice da je reducirana Grebnerova baza jedinstvena je sledeći način na koji lako možemo utvrditi da li su dva ideala $I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ i $J = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle$ jednaka. Naime, jednostavno izračunamo reducirane Grebnerove baze ovih ideala i ako su one jednake, onda su jednaki i ideali, a ako nisu, onda ni ideali I i J nisu jednaki.

1.4 Grebnerova baza u prstenu $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

Kako se u ovom radu bavimo problemima popločavanja ambijentna algebarska struktura je prsten polinoma nad prstenom celih brojeva $\mathbb{Z}$. Zbog toga ćemo razmotriti neke probleme vezane za definiciju Grebnerove baze u prstenu polinoma sa koeficijentima iz prstena celih brojeva $\mathbb{Z}$, premda većina definicija i rezultata vredi u opštijoj strukturi prstena polinoma nad prstenom glavnih ideala.

Grebnerova baza u prstenu polinoma nad poljem omogućava nam da odredimo kanonsku formu proizvoljnog polinoma, koja se dobija redukcijom datog polinoma polinomima Grebnerove baze pri čemu se dobija ostatak koji ne zavisi od redosleda obavljenih redukcija, tj. jedinstven je. Međutim, kada su koeficijenti polinoma iz proizvoljnog prstena definicije Grebnerove baze, kanonske forme i ostatka prestaju da vrede u obliku u kakvom smo ih do sada upoznali. Zbog toga ćemo definisati pojam jake Grebnerove baze koja u prstenu polinoma sa koeficijentima iz $\mathbb{Z}$ ima slične osobine kao i Grebenerova baza koju smo ranije definisali za slučaj polja. Postoji i pojam slabe Grebnerove baze, ali se njime ovde nećemo baviti. Napomenimo još da ćemo ubuduće, i kada se to ne bude eksplicitno spominjalo, pod pojmom Grebnerove baze uvek podrazumevati jaku Grebnerovu bazu. Pre nego pređemo na definicije razmotrit ćemo malo bliže kako izgleda deljenje tj.

redukcija polinoma u $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

U prstenu $\mathbb{Z}$ će nam trebati relacija uređenja iz klase totalnih uređenja. Označavat ćemo je sa $>>$. Za $a \in \mathbb{Z}$ ćemo sa $|a|$ označavati Euklidovu normu elementa a. Od uređenja ćemo zahtevati da ako je $|a_1| > |a_2|$ onda vredi i $a_1 >> a_2$.

U daljem ćemo smatrati da je uređenje u prstenu $\mathbb{Z}$ dato sa:

$$\cdots - 2 >> 2 >> -1 >> 1 >> 0$$

Neka su nam dati proizvod ax^α monoma x^α i celog broja a, i polinom $f = \sum_i a_{\alpha_i} x^{\alpha_i}$ sa vodećim članom $a_{\alpha_1}x^{\alpha_1}$. Reći ćemo da polinom f reducira ax^α ako

$$x^{\alpha_1}|x^\alpha$$

U tom slučaju koristeći Euklidov algoritam za deljenje u prstenu $\mathbb{Z}$ možemo odrediti brojeve b i r takve da je $a = a_1b + r$ pri čemu je $b \neq 0$ i $|r| < |a_1|$ i tada redukcijom ax^α sa f smatramo polinom

$$ax^\alpha - b\frac{x^\alpha}{x^{\alpha_1}}f$$

Kažemo da polinom f reducira polinom g ako f reducira neki monom polinoma g. Primetimo da redukcija zavisi od odabranog poretka. Kao i u slučaju polja dati polinom f možemo reducirati skupom polinoma F. U tom slučaju kažemo da F reducira f ako postoji polinom $g \in F$ koji reducira f. U suštini može postojati više takvih polinoma i svaki od njih može dati drugačiju redukciju. Suština Grebnerove baze je određivanje familije za koju se dobija jedinstven rezultat nakon što se izvedu sve redukcije bez obzira na njihov redosled.

Ovakav oblik redukcije polinoma omogućava nam da primenimo algoritam vrlo sličan originalnom Buhbergerovom algoritmu da bismo dobili traženu bazu. Pa ipak, bilo je potrebno blizu 30 godina da se od prvobitnog algoritma dođe do ove generalizacije. Algoritam za konverziju Grebnerove baze za različita uređenja poznat kao "Gröbner Walkše može produžiti i na slučaj prstena polinoma nad Euklidovim domenima.

Sada ćemo definisati dva tipa $S-$polinoma. Kombinacijom vodećih koeficijenata ovih polinoma postiže se cilj izbacivanja istog. Ovo je u slučaju Euklidovih domena moguće samo ako jedan od vodečih članova deli onaj drugi ili ako dopustimo množenje koeficijenata faktorom $\neq 1$.

Definicija 1.4.1. *Neka su dati polinomi* $f = \sum a_i x^{\alpha_i}$ *i* $g = \sum b_i x^{\alpha_i}$ *pri čemu je* $LM(f) = x^{\alpha_1}$ *i* $LM(g) = x^{\beta_1}$. *Pretpostavimo, bez ograničenja opštosti, da je* $|a_1| \leq |b_1|$.
Neka je $d = NZD(a_1, b_1)$ *i neka su* $\overline{a_1}$ *i* $\overline{b_1}$ *celi brojevi takvi da je* $d = a_1\overline{a_1} + b_1\overline{b_1}$. *Stavimo da je* $x^\gamma = NZS(x^{\alpha_1}, x^{\beta_1})$ *i da je* $s = NZS(a_1, b_1)$.
Polinome $S_1(f,g)$ *i* $S_2(f,g)$ *definišemo sa*

$$S_1(f,g) = \overline{a_1}\frac{x^\gamma}{LM(f)} \cdot f + \bar{b}_1\frac{x^\gamma}{LM(g)} \cdot g$$

$$S_2(f,g) = \frac{s}{a_1}\frac{x^\gamma}{LM(f)} \cdot f - \frac{s}{b_1}\frac{x^\gamma}{LM(g)} \cdot g$$

Primetimo da je vodeći koeficijent polinoma $S_1(f,g)$ jednak d i da je $LM(S_1(f,g)) = x^\gamma$. Ako je b_1 deljivo sa a_1 onda je $\overline{a_1} = 1$ i $\overline{b_1} = 0$, pa je tada $S_1(f,g) = \frac{x^\gamma}{LM(f)} \cdot f$ i samo je S_2 od značaja. Kako celi brojevi $\overline{a_1}$ i $\overline{b_1}$ za koje vredi $d = a_1\overline{a_1} + b_1\overline{b_1}$ nisu jedinstveni, ni polinom $S_1(f,g)$ nije jedinstven, ali to u našem razmatranju nije važno. Važno je samo da se brojevi sa ovom osobinom uvek mogu odrediti. Definišimo sada $S-$polinom te pojmove jake Grebnerove baze i jake standardne reprezentacije.

Definicija 1.4.2. *Neka su dati polinomi $f = \sum a_i x^{\alpha_i}$ i $g = \sum b_i x^{\alpha_i}$ pri čemu je $LM(f) = x^{\alpha_1}$ i $LM(g) = x^{\beta_1}$. Pretpostavimo da je $|a_1| \leq |b_1|$. Ako a_1 deli b_1, onda je $S(f,g) = S_2(f,g)$, a u suprotnom je $S(f,g) = S_1(f,g)$.*

Definicija 1.4.3. *Konačan skup polinoma $G \subseteq \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ zove se jaka Grebnerova baza nad prstenom $\mathbb{Z}$ s obzirom na dato uređenje $\geq$ ako za svaki polinom $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ postoji jedinstvena kanonska redukcija polinomima iz skupa G. Drugim rečima, bez obzira na to koji polinom iz G koristimo u nekom koraku procesa, kada iscrpimo sve moguće redukcije dobit ćemo jedinstvenu formu ostatka.*

Definicija 1.4.4. *Neka je $G = \{g_1, g_2 \ldots, g_n\} \subseteq \mathbb{Z}[x_1, x_2 \ldots, x_n]$ skup polinoma i neka je $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ proizvoljno. $f = \sum h_j g_j$ je jaka standardna reprezentacija polinoma f s obzirom na skup G i u odnosu na dato uređenje ako je $LT(f) = LT(h_j g_j)$ za neko j i $LM(h_k g_k) < LM(f)$ za sve $k \neq j$.*

Vidimo da u jakoj standardnoj reprezentaciji eliminišemo po jedan vodeći član sa tačno jednim sabirkom. Postoji i slaba standarna reprezentacija u kojoj su dopušteni višestruki članovi sa istim vodećim monomom, što se koristi pri konstrukciji slabe Grebnerove baze ali se, kao što smo već napomenuli, time ovde nećemo baviti.

Sada ćemo razmotriti Buhbergerov pristup određivanja Grebnerove baze redukcijom $S-$polinoma.

Teorema 4.1. *Neka nam je dat skup polinoma $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ u prstenu $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ i uređenje $>$. Neka je $I = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$. Sledeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) Svaki polinom $g \in I$ ima jaku standardnu reprezentaciju polinomima skupa G, *ii) Svako $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ima kanonsku redukciju polinomima skupa G. Drugim rečima, G je Grebnerova baza s obzirom na dato uređenje.*

Dokaz: $i) \Rightarrow ii)$

Pretpostavimo da svako $g \in I$ ima jaku reprezentaciju polinomima skupa G. Neka je $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ proizvoljno i neka su h_1 i h_2 potpuno reducirani ostaci nastali redukcijom polinoma f polinomima skupa G. Jasno je da $h_1 - h_2 \in I$, pa ovaj polinom ima jaku standardnu reprezentaciju. Neka je $LT(h_1 - h_2) = cx^\gamma$ i neka je $h_1 - h_2 = \sum q_j g_j$ jaka standardna reprezentacija za koju je $LT(q_k g_k) = cx^\gamma$. Označimo sa a_1 i a_2 koeficijente koje stoje uz x^γ u polinomima h_1 i h_2 redom. Ako bismo imali da je $a_1 = 0$ to bi značilo da je $LT(h_2) = cx^\gamma$, pa h_2 ne bi bilo reducirano do kraja što je kontradikcija sa našom pretpostavkom. Dakle mora biti $a_1 \neq 0$, a iz istog je razloga i $a_2 \neq 0$. To znači da $(a_1 - a_a)x^\gamma$ ne deli ni $a_1 x^\gamma$ ni $a_2 x^\gamma$ reducirano skupom G iz čega sledi da $LC(g_k) = b_k$ deli $a_1 - a_2$. Štaviše, mora biti $\frac{a_1}{b_k} - \frac{a_2}{b_k} = 0$ jer u suprotnom h_1 i h_2 ne bi bili potpuno reducirani. Dakle, $a_1 - a_2 = 0$, tj. $LC(h_1 - h_2) = 0$ iz čega sledi da je $h_1 - h_2 = 0$ tj. $h_1 = h_2$.
$ii) \Rightarrow i)$

Neka je $f \in I$ proizvoljno i neka je $LM(f) = x^\gamma$. Kako $f \in I$, to postoje polinomi $q_j \in \mathbb{Z}$ takvi da je $f = \sum_j q_j g_j$. Treba pokazati da je ovo jaka reprezentacija. $f = \sum_j q_j g_j$ je slaba reprezentacija pa je $max(q_j g_j) = x^\gamma$. Neka je $J = \{j \ : \ LM(q_j g_j) = x^\gamma$. Pretpostavimo da je $|J| > 1$, da je x^γ najmanji monom sa ovom osobinom i da je $|c|$ najmanji koeficijent za koji ne postoji jaka standardna reprezentacija koja uključuje ovaj monom kao vodeći. Ove su pretpostavke održive jer radimo u dobro uređenom skupu monoma nad totalno uređenim Euklidovim domenom.
Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je $J = \{1, 2, \ldots, m\}$. Neka je

$$\bar{c} = NZD(LC(g_1), LC(g_2), \ldots, LC(g_m))$$

i neka su $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$\bar{c} = s_1 LC(g_1) + s_2 LC(g_2) + \cdots + s_m LC(g_m)$$

Stavimo da je $x^{\beta_j} = \frac{x^{\gamma_j}}{LM(g_j)}$ za $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ i

$$g = s_1 x^{\beta_1} g_1 + s_2 x^{\beta_2} g_2 + \cdots = s_m x^{\beta_m} g_m$$

Jasno je da je $LT(g) = \overline{c}x^{\gamma}$. Ako bi imali da je $|\overline{c}| = |c|$ onda bi to značilo da je $m = 1$ što je u suprotnosti sa našom pretpostavkom. Kako je $|\overline{c}| \leq |LC(q_j g_j)|$ za sve $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zaključujemo da je $|\overline{c}| < |c|$.

Zbog izbora koeficijenta c zaključujemo da postoji jaka standardna reprezentacija polinoma g za koju je $LM(g) = x^{\gamma}$, $LM(s_k x^{\beta_k} g_k) = x^{\gamma}$ za tačno jedno k, a za sve druge je $LM(s_j x^{\beta_j} g_j) < x^{\gamma}$. Kako je

$$c = LC(q_1 g_1) + LC(q_2 g_2) + \cdots + LC(q_m g_m)$$

$$\overline{c} = NZD(LC(g_1) + LC(g_2) + \cdots + LC(g_m))$$

zaključujemo da $\overline{c}|c$ pa postoji ceo broj d takav da je $c = d\overline{c}$.

Neka je $\overline{f} = f - dg$. Kako je $LM(\overline{f}) < x^{\gamma}$ postoji jaka standardna reprezentacija polinoma f. Neka je data sa $\overline{f} = \sum_j p_j g_j$. Iz ovoga sledi da je

$$d \sum_j q_j g_j = \sum_j p_j g_j$$

jaka standardna reprezentacija polinoma f, čime je teorema dokazana. □

Teorema 4.2. *Neka nam je dat skup polinoma $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ u prstenu $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ i uređenje $>$. Sledeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) G je Grebnerova baza s obzirom na dato uređenje.

ii) Za svaka dva polinoma $g_1, g_2 \in G$ imamo da je

$$S_1(g_1, g_2) \longrightarrow 0 \;\; i \;\; S_2(g_1, g_2) \longrightarrow 0$$

.

iii) Za svaka dva polinoma $g_1, g_2 \in G$ imamo da je

$$S(g_1, g_2) \longrightarrow 0$$

Dokaz: $i) \Rightarrow ii)$ Sledi neposredno iz definicija.

$ii) \Rightarrow i)$ Neka je $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ i neka je f iz ideala generisanog skupom G. Tada postoje polinomi $h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takvi da je $f = \sum_j h_j g_j$. Neka je

$x^\gamma = max(LM(h_j g_j))$ i neka je $J = \{j \ : \ LM(h_j g_j) = x^\gamma\}$. Stavimo da je $LM(f) = x^{\overline{\gamma}}$. Pretpostavimo da je x^γ različito od $x^{\overline{\gamma}}$ i da je minimalno među svim takvim reprezentacijama. Skup J ima više od jednog elementa, jer ako bi J bio jednoelementni skup, onda bismo imali da je $x^\gamma = x^{\overline{\gamma}}$ i f bi imao jaku standardnu reprezentaciju, a mi pretpostavljamo da to nije tačno.

Dakle, mora biti $x^\gamma > x^{\overline{\gamma}}$ i tada postoje najmanje dva elementa u skupu J jer postoje najmanje dva člana u reprezentaciji koja uključuju monom x^γ i koja se međusobno poništavaju. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $J = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Stavimo da je

$$\begin{aligned} g_j &= a_j x^{\alpha_j} + r_j \\ h_j &= b_j x^{\beta_j} + q_j \end{aligned}$$

gde je $LM(g_j) = x^{\alpha_j}$ i $LM(h_j) = x^{\beta_j}$. Primetimo da je $x^{\alpha_j} x^{\beta_j} = x^\gamma$ za $1 \leq j \leq m$. Neka je

$$x^{\alpha_{1,2}} = NZS(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}), \qquad v = \frac{x^\gamma}{x^{\alpha_{1,2}}}, \qquad u_1 = \frac{x^{\alpha_{1.2}}}{x^{\alpha_1}}, \qquad u_2 = \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_2}}$$

Vidimo da je

$$\begin{aligned} x^{\beta_1} &= \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_1}} \frac{x^\gamma}{x^{\alpha_{1,2}}} = u_1 v \\ x^{\beta_2} &= \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_2}} \frac{x^\gamma}{x^{\alpha_{1,2}}} = u_2 v \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \cdots + |a_m b_m|$ minimalan koeficijent u svim reprezentacijama f koji stoji uz x^γ. Takva reprezentacija postoji jer je $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dobro uređen prsten polinoma nad totalno uređenim Euklidovim domenom. Neka je

$$a = NZD(a_1, a_2)$$

i neka su $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ takvi celi brojevi da je $a = a_1 \overline{a}_1 + a_2 \overline{a}_2$

Stavimo da je

$$e_1 = \frac{NZS(a_1, a_2)}{a_1} \qquad e_2 = -\frac{NZS(a_1, a_2)}{a_2}$$

To znači da su e_1 i e_2 brojevi najmanji po normi i takvi da je $e_1 a_1 + e_2 a_2 = 0$.

Sada je

$$\begin{aligned} S_1(g_1, g_2) &= \overline{a}_1 \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_1}} g_1 + \overline{a}_2 \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_2}} g_2 \\ S_2(g_1, g_2) &= e_1 \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_1}} g_1 + e_2 \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_2}} g_2 \end{aligned}$$

Za neki ceo broj d je $b_1a_1 + b_2a_2 = ad$, pa postoji i ceo broj e takav da je

$$b_1 = \overline{a}_1 d + ee_1 \qquad b_2 = \overline{a}_2 d = ee_2$$

Pošto je $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ i $a = NZD(a_1, a_2)$ to je

$$|b_1a_1| + |b_2a_2| > |da|$$

Imamo da je

$$\begin{aligned} h_1g_1 &= (aa_1 + ee_1)u_1vg_1 + q_1g_1 = (aa_2 + ee_2)u_2vg_2 + q_2g_2 \\ &= avS_1(g_1, g_2) + evS_2(g_1, g_2) + (q_1g_1 + q_2g_2) \end{aligned}$$

$S-$ polinomi se po pretpostavci reduciraju na nulu. Sada je

$$vLM(S_2(g_1, g_2)) < x^\gamma, \qquad LM(q_1, g_1) < x^\gamma, \qquad LM(q_2, g_2) < x^\gamma$$

Kako je osim toga i $LC(dvS_1(g_1, g_2)) = da$, dobijamo reprezentaciju od $h_1g_1 + h_2g_2$ u vidu sume $\sum p_kg_k$ gde stavljajući da je $K = \{k \ : \ LM(p_kg_k) = x^\gamma\}$ dobijamo

$$\sum_{k \in K} |LC(p_kg_k)| = |ac| < |b_1a_1| + |b_2a_2|$$

Ako sa ovom reprezentacijom zamenimo $h_1g_1 + h_2g_2$ u posmatranoj reprezentaciji polinoma f dobit ćemo kontradikciju sa pretpostavkom o minimalnosti koeficijenta $|a_1b_1| + \cdots + |a_mb_m|$.
Jasno je da iz $ii) \Rightarrow iii)$.

Dokažimo da iz $iii) \Rightarrow ii)$

Pretpostavimo da za svaki par p_1, p_2 polinoma iz G $S(p_1, p_2) \xrightarrow{G} 0$. Neka je $p_j = c_jx^{\gamma_j} = r_j$, gdje je $LM(p_j) = x^{\gamma_j}$ za $j = 1, 2$. Pretpostavimo da je $|c_1| \leq |c_2|$. Ako $c_1 | c_2$ onda se $S_1(p_1, p_2)$ skupom G trivijalno reducira na nulu pa je $S_2(p_1, p_2) = S(p_1, p_2)$ a ono se po pretpostavci reducira na nulu. Pretpostavimo zato da $c_1 \nmid c_2$. Neka je

$$c = NZD(c_1, c_2)$$

i neka su $\overline{c}_1, \overline{c}_2 \in \mathbb{Z}$ takvi celi brojevi za koje je $c_1\overline{c}_1 + c_2\overline{c}_2 = c$.
Neka su $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ takvi da je $c_1 = d_1c$ i $c_2 = d_2c$. Tada je

$$d_1\overline{c}_1 + d_2\overline{c}_2 = 1$$

a $\overline{c}_1$ i $\overline{c}_2$ su relativno prosti.
Stavimo da je

$$NZS(x^{\gamma_1}, x^{\gamma_2}) = x^{\gamma}, \qquad s_1 = \frac{x^{\gamma}}{x^{\gamma_1}}, \qquad s_2 = \frac{x^{\gamma}}{x^{\gamma_2}}$$

Tada je

$$\begin{aligned} q &= S_1(p_1, p_2) = c_1\overline{c}_1 s_1 x^{\gamma_1} + \overline{c}_1 s_1 r_1 = \overline{c}_2 c_2 s_2 x^{\gamma_2} + \overline{c}_2 s_2 r_2 = \\ &= cx^{\gamma} + \overline{c}_1 s_1 r_1 + \overline{c}_2 s_2 r_2 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} S_2(p_1, p_2) &= (d_2 c_1 s_1 x^{\gamma_1} + d_2 s_1 r_1) - (d_1 c_2 s_2 x^{\gamma_2} + d_1 s_2 r_2) = \\ &= d_2 s_1 r_1 - d_1 s_2 r_2 \end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} h_1 &= S_2(p_1, q) = c_1 s_1 x^{\gamma_1} = s_1 r_1 - d_1(cx^{\gamma} + \overline{c}_1 s_1 r_1 + \overline{c}_2 s_2 r_2) = \\ &= (1 - d_1\overline{c}_1) s_1 r_1 - d_1 \overline{c}_2 s_2 r_2 = \overline{c}_2 d_2 s_1 r_1 - \overline{c}_2 d_1 s_2 r_2 = \\ &= \overline{c}_2 S_2(p_1, p_2) \end{aligned}$$

Slično se dobije da je i

$$h_2 = S_2(p_2, q) = \overline{c}_1 S_2(p_1, p_2)$$

Po definiciji $S-$polinoma imamo da je $S_2(p_j, q) = S(p_j, q)$ za $j = 1, 2$. Kako su $\overline{c}_1$ i $\overline{c}_2$ relativno prosti dobijamo da je $S_1(h_1, h_2) = S_2(p_1, p_2)$. Ovo znači da uz uslov da $S_1(p_1, p_2)$ nije trivijalan $S_2(p_1, p_2)$ možemo dobiti iz $S_(p_1, p_2)$, čime je teorema dokazana. □

Navedimo sada kriterije koji omogućavaju da se u procedurama za računanje Grebnerovih baza ideala znatno smanji broj potrebnih operacija, čime same procedure postaju efikasnije.

Teorema 4.3 (Buhbergerov kriterij 1)**.** *Neka je $g_j = a_j x^{\alpha_j} + h_j$ i $LM(g_j) = x^{\alpha_j}$ za $j \in \{1, 2\}$ i neka $a_1 | a_2$. Ako su vodeći monomi polinoma g_1 i g_2 uzajamno prosti tj. ako je $NZS(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}) = x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2}$ tada se $S(g_1, g_2)$ reducira na nulu, pa je prema tome suvišan.*

Dokaz: Kako po pretpostavci $a_1|a_2$, imamo da je $NZS(a_1, a_2) = a_2$. Sada je

$$\begin{aligned} S(g_1, g_2) &= \frac{a_2}{a_1}x^{\alpha_2}(a_1x^{\alpha_1} + h_1) - x^{\alpha_1}(a_2x^{\alpha_2} + h_2) = \\ &= \frac{a_2}{a_1}x^{\alpha_2}h_1 - x^{\alpha_1}h_2 = \\ &= \frac{a_2}{a_1}x^{\alpha_2}(g_1 - a_1x^{\alpha_1}) - x^{\alpha_1}(g_2 - a_2x^{\alpha_2}) = \\ &= \frac{a_2}{a_1}x^{\alpha_2}g_1 - x^{\alpha_1}g_2 \end{aligned}$$

odakle je jasno da $S(g_1, g_2) \xrightarrow{G} 0$, što smo i trebali pokazati. □

Teorema 4.4 (Buhbergerov kriterij 2)**.** *Neka je $g_j = a_jx^{\alpha_j} + h_j$ i $LM(g_j) = x^{\alpha_j}$ za $j \in \{1, 2, 3\}$ i neka $x^{\alpha_3}|NZS(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2})$. Ako polinomi $S(p_1, p_3)$ i $S(p_2, p_3)$ imaju jaku standardnu reprezentaciju i ako $a_1|a_3|a_2$ ili $a_3|a_1|a_2$ onda i $S(p_1, p_2)$ ima jaku standardnu reprezentaciju, pa se prema tome može izostaviti.*

Dokaz: Neka je $\frac{NZS(x^{\alpha_i}, x^{\alpha_j})}{x^{\alpha_i}} = u_{i,j}$.
Pretpostavimo da polinomi $S(g_1, g_3)$ i $S(g_2, g_3)$ imaju jaku standardnu reprezentaciju polinomima skupa G, tj. da se sa G reduciraju na nulu. Po pretpostavci teoreme $x^{\alpha_3}|NZS(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2})$ što znači da $u_{1,3}|u_{1,2}$ i da $u_{2,3}|u_{2,1}$. Ako pretpostavimo da $a_3|a_1|a_2$ onda imamo da je

$$\begin{aligned} S(p_1, p_3) &= u_{1,3}p_1 - \frac{a_1}{a_3}u_{3,1}p_3 \\ S(p_2, p_3) &= u_{2,3}p_2 - \frac{a_2}{a_3}u_{3,2}p_3 \end{aligned}$$

Izrazimo li iz ovih jednačina p_1 i p_2 i uvrstimo ih u

$$\begin{aligned} S(p_1, p_2) &= \frac{a_2}{a_1}u_{1,2}p_1 - u_{2,1}p_2 = \\ &= \frac{a_2}{a_1}u_{1,2}(\frac{1}{u_{1,3}}(S(p_1, p_3) = \frac{a_1}{a_3}u_{3,1}p_3)) - u_{2,1}\frac{1}{u_{2,3}}(S(p_2, p_3) + \frac{a_2}{a_3}u_{2,3}p_3) = \\ &= \frac{a_2}{a_1}\frac{u_{1,2}}{u_{1,3}}S(p_1, p_3) - \frac{u_{2,1}}{u_{2,3}}S(p_2, p_3) + \frac{a_2}{a_3}p_3(\frac{u_{1,2}u_{3,1}}{u_{1,3}} - \frac{u_{2,1}u_{3,2}}{u_{2,3}}) \end{aligned}$$

i imajući u vidu da je izraz u poslednjoj zagradi jednak nuli zaključujemo da se $S(p_1, p_2)$ reducira na nulu skupom G kadgod se i $S(p_1, p_3)$ i $S(p_2, p_3)$ reduciraju na nulu. Slično bi postupili u slučaju kada $a_1|a_3|a_2$. Ovim je teorema dokazana.

Teorema 4.5. *Neka je* $p_j = a_j x^{\alpha_j} + h_j$ *i* $LM(g_j) = x^{\alpha_j}$ *za* $j \in \{1,2,3\}$ *i neka je* $x^{\alpha_{i,j}} = NZS(x^{\alpha_i}, x^{\alpha_j})$*. Pretpostavimo da* $x^{\alpha_3} | x^{\alpha_{1,2}}$*. Označimo sa* d *najveći zajednički delilac brojeva* a_1 *i* a_2 *,a sa* $\overline{a}_1$ *i* $\overline{a}_2$ *cele brojeve takve da je* $a_1\overline{a_1} + a_2\overline{a_2} = d$*. Pretpostavimo da* $a_3 | d$*. Drugim rečima pretpostavimo da vodeći član od* p_3 *dijeli vodeći član polinoma* $S(p_1, p_2)$*. Tada je polinom* $S(p_1, p_2)$ *suvišan.*

Dokaz: Stavimo da je $u_{i,j} = \frac{x^{\alpha_{i,j}}}{x^{\alpha_i}}$, za $i, j = 1, 2, 3$ i da je $d = a_3 \cdot c$. Neka je $\frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_3}} = v$. Sada imamo da je:

$$S(p_1, p_2) = \overline{a}_1 u_{1,2} p_1 + \overline{a}_2 u_{2,1} p_2 = d x^{\alpha_{1,2}} + \overline{a}_1 u_{1,2} h_1 + \overline{a}_2 u_{2,1} h_2$$

$$S(p_1, p_3) = (a_1 x^{\alpha_1} + h_1) u_{1,3} - \frac{a_1}{a_3}(a_3 x^{\alpha_3} + h_3) u_{1,3} = u_{1,3} h_1 - \frac{a_1}{a_3} u_{3,1} h_3$$

Slično dobijamo da je

$$S(p_2, p_3) = u_{2,3} h_2 - \frac{a_2}{a_3} u_{3,2} h_3$$

Osim toga,

$$\frac{u_{1,2} u_{3,1}}{u_{1,3}} = \frac{u_{2,1} u_{3,2}}{u_{2,3}} = \frac{x^{\alpha_{1,2}}}{x^{\alpha_3}} = v$$

i

$$\overline{a}_1 \frac{a_1}{a_3} = \overline{a}_2 \frac{a_2}{a_3} - c = \frac{1}{a_3}(\overline{a}_1 a_1 + \overline{a}_2 a_2) - c = \frac{d}{a_3} - c = 0$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned} S(p_1, p_2) &- cvp_3 - \overline{a}_1 \frac{u_{1,2}}{u_{1,3}} S(p_1, p_3) - \overline{a}_2 \frac{u_{2,1}}{u_{2,3}} S(p_2, p_3) = \\ &= dx^{\alpha_{1,2}} = \overline{a}_1 u_{1,2} h_1 + \overline{a}_2 u_{2,1} h_2 - (dx^{\alpha_{1,2}} + cvh_3) = \\ &= -(\overline{a}_1 u_{1,2} h_1 - \overline{a}_1 \frac{a_1}{a_3} \frac{u_{1,2} u_{3,1}}{u_{1,3}} h_3) - (\overline{a}_2 u_{2,1} h_2 - \overline{a}_2 \frac{a_2}{a_3} \frac{u_{2,1} u_{3,2}}{u_{2,3}} h_3) = \\ &= (\overline{a}_1 \frac{a_1}{a_3} \frac{u_{1,2} u_{3,1}}{u_{1,3}} + \overline{a}_2 \frac{a_2}{a_3} \frac{u_{2,1} u_{3,2}}{u_{2,3}} - cv) = 0 \end{aligned}$$

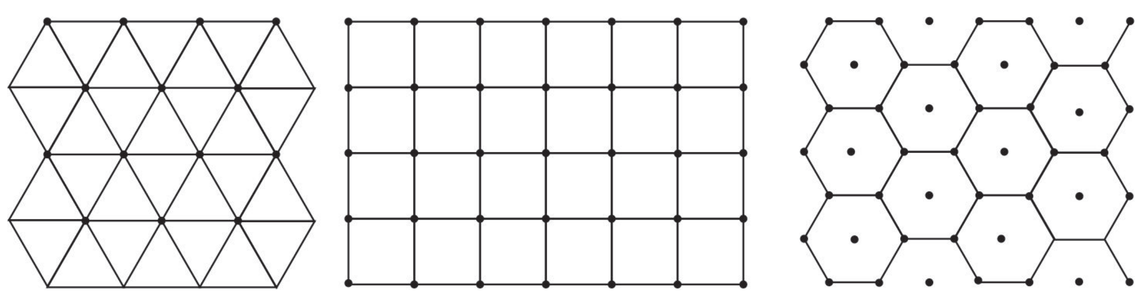
Odavde vidimo da se $S(p_1, p_2)$ reducira na nulu skupom G ako se i $S(p_1, p_3)$ i $S(p_2, p_3)$ reduciraju na nulu, čime je naša teorema dokazana. $\square$

Glava 2

Rešetke i popločavanja

Rešetka u prostoru $\mathbb{R}^n$ je podgrupa grupe $(\mathbb{R}^n, +)$ izomorfna grupi $(\mathbb{Z}^n, +)$. To znači da je za svaku bazu prostora $\mathbb{R}^n$ podgrupa svih linearnih kombinacija baznih vektora sa celobrojnim koeficijentima - rešetka.

Mi ćemo se baviti rešetkama u realnoj ravni, tj u prostoru $\mathbb{R}^2$. U afinoj ravni postoji samo jedna rešetka $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ koja je zapravo skup tačaka oblika (m, n), gde $m, n \in \mathbb{Z}$. Međutim, u Euklidovoj ravni postoje različite rešetke, pri čemu rešetku možemo posmatrati i kao popločavanje ravni elementarnim ćelijama. Ako pod pravilnom rešetkom smatramo popločavanje ravni pravilnim poligonima onda u Euklidovoj ravni postoje samo tri pravilne rešetke: trougaona, kvadratna i šestougaona.



Slika 2.1: Trougaona, kvadratna i šestougaona rešetka u ravni

Mi ćemo se u ovom radu baviti problemima popločavanja u kvadratnoj (Glava 3) i šestougaonoj (Glava 4 i Glava 5) rešetki. Kako te dve rešetke nećemo koristiti istovremeno, ne postoji opasnost od zabune, pa ćemo same rešetke i relevantne pojmove koji su za njih vezani označavati u oba slučaja istim simbolima.

2.1 Kvadratna rešetka

Definicija 2.1.1. *Dvodimenzionalna rešetka Λ u Euklidovoj ravni je grupa oblika*

$$\{n_1\vec{v_1} + n_2\vec{v_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Ako je osim toga $|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}|$ i $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ kažemo da je rešetka Λ kvadratna rešetka.

Vektore $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ zovemo baznim vektorima rešetke Λ.

Definicija 2.1.2. *Neka je L matrica čije su kolone bazni vektori $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ kvadratne rešetke. Tada je*

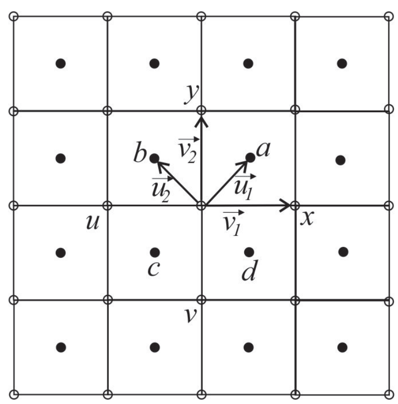
$$a_{k,l} = \{L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 \in [k, k+1), x_2 \in [l, l+1), k, l \in \mathbb{Z}\}$$

elementarna ćelija rešetke Λ. Ćelija $a = a_{0,0} = \{Lx : x \in [0,1)^2\}$ je fundamentalna elementarna ćelija.

Neka su $\vec{u_1}$ i $\vec{u_2}$ radijus-vektori baricentara elementarnih ćelija $a_{0,0}$ i $a_{-1,0}$. Označimo sa $\overline{\Lambda}$ kvadratnu rešetku generisanu vektorima $\vec{u_1}$ i $\vec{u_2}$. Očigledno je da vredi:

$$\begin{aligned} \vec{v_1} &= \vec{u_1} - \vec{u_2} \\ \vec{v_2} &= \vec{u_1} + \vec{u_2} \end{aligned}$$

pa rešetku Λ možemo smatrati podrešetkom rešetke $\overline{\Lambda}$.



Slika 2.2: Rešetke Λ i $\overline{\Lambda}$

Rešetka Λ je podrešetka rešetke $\overline{\Lambda}$ indeksa 2. Označimo li crnim tačkama baricentre elementarnih ćelija rešetke Λ, onda je jasno da te tačke čine jednu klasu količničke rešetke $\overline{\Lambda}/\Lambda \cong \mathbb{Z}_2$.

Ako belim tačkama označimo tačke rešetke Λ onda one zajedno sa skupom svih crnih tačaka čine rešetku $\overline{\Lambda}$. Skup svih crnih tačaka rešetke $\overline{\Lambda}$ je invarijantan u odnosu na translacije za vektore $n_1\vec{v_1} + n_2\vec{v_2}$, gde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Ove translacije određuju delovanje grupe translacija na skup elementarnih ćelija, tj. delovanje grupe belih na skup crnih tačaka.

Postoji prirodna identifikacija između rešetke Λ i grupe Γ svih translacija elementarnih ćelija te rešetke.

Grupa Γ je slobodna grupa s dva generatora $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$. Neka je H multiplikativna grupa sa četiri generatora, x, y, u, v i relacijama među generatorima $xu = 1$ i $yv = 1$. Tada postoji izomorfizam $\phi : H \longrightarrow \Gamma$ definisan na bazi na sledeći način

$$\begin{aligned} \phi(x) = \vec{v_1}, \quad \phi(u) = -\vec{v_1}, \\ \phi(y) = \vec{v_2}, \quad \phi(v) = -\vec{v_2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ako formiramo grupne prstene $\mathbb{Z}[\Gamma]$ i $\mathbb{Z}[H]$ tada postoji izomorfizam između grupnih prstena induciran izomorfizmom ϕ.

Prsten

$$\mathbb{Z}[\Gamma] \cong \mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}[x, y, u, v]/\langle xu - 1, yv - 1\rangle,$$

ćemo zvati prstenom translacija u odnosu na koje je rešetka Λ invarijantna i označavat ćemo ga sa P.

Neka je A slobodna Abelova grupa generisana svim elementarnim ćelijama a_{lk} rešetke Λ, ili što je isto, svim crnim tačkama rešetke $\overline{\Lambda}$. Definišimo preslikavanje

$$\psi : P \times A \longrightarrow A$$

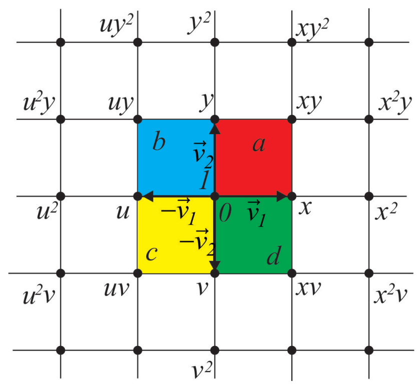
sa

$$\psi(p, a_{k,l}) = a_{k+n_1, l+n_2} \tag{2.2}$$

gde je $\phi(p) = n_1\vec{v_1} + n_2\vec{v_2}$,

Preslikavanje ψ definiše delovanje prstena P na skup A. S obzirom na ovo delovanje, grupa A se može posmatrati i kao modul nad prstenom P generisan samo jednom elementarnom ćelijom, na primer, fundamentalnom elementarnom ćelijom a. Ovaj modul ćemo označavati sa $P(A)$. Iako je modul $P(A)$ generisan nad prstenom P samo jednim elementom, nama će biti udobnije da ga posmatramo kao modul sa četiri generatora a, b, c, d, pri čemu su relacije među generatorima date sa

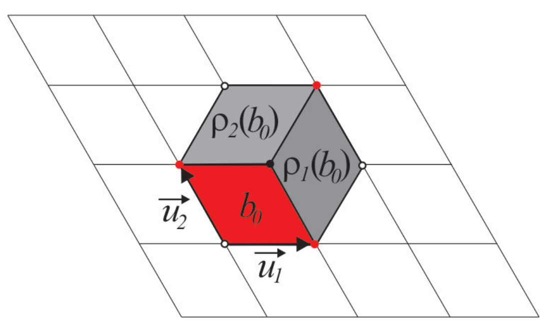
$$\begin{aligned} ua &= b \quad va = d \\ uva &= c \end{aligned}$$



Slika 2.3: Rešetka Λ, i modul $P(A)$

2.2 Šestougaona rešetka

Neka nam sada $\overline{\Lambda}$ označava dvodimenzionalnu rešetku $\{n_1\vec{u_1} + n_2\vec{u_2} : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ u Euklidovoj ravni za koju je $|\vec{u_1}| = |\vec{u_2}|$ i $\angle(\vec{u_1}, \vec{u_2}) = 120°$.



Slika 2.4: Rešetka $\overline{\Lambda}$ i šestougao

Neka je L matrica čije su kolone vektori $\vec{u_1}$ i $\vec{u_2}$

$$b_0 = \{L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 \in [0,1], x_2 \in [0,1]\}$$

Označimo sa ρ_1 rotaciju romba b_0 oko gornjeg desnog vrha za ugao od $120°$ i sa ρ_2 rotaciju b_0 oko istog vrha za ugao od $240°$.

Stavimo da je

$$a_{1,0} = b_0 \cup \rho_1(b_0) \cup \rho_2(b_0)$$

Označimo crnom bojom tačku rešetke $\overline{\Lambda}$ koja se nalazi u centru heksagona $a_{1,0}$, a njegove vrhove naizmenično označimo belim i crvenim tačkama počevši od donjeg levog ugla. Vektore $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ definišimo na sledeći način:

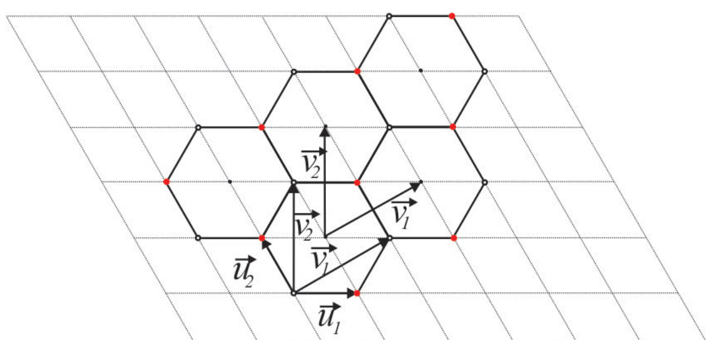
$$\begin{aligned} \vec{v_1} &= 2\vec{u_1} + \vec{u_2} \\ \vec{v_2} &= \vec{u_1} + 2\vec{u_2} \end{aligned}$$

Neka je Λ rešetka generisana vektorima $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$ tj. neka je:

$$\Lambda = \{n_1\vec{v_1} + n_2\vec{v_2} : \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Grupu Λ možemo posmatrati i kao slobodnu Abelovu grupu translacija u ravni za vektore oblika $n_1\vec{v_1} + n_2\vec{v_2}$, gde $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Pustimo li da grupa Λ deluje na heksagon $a_{0,1}$ dobićemo popločavanje ravni heksagonima tj. dobićemo heksagonalnu rešetku u ravni.



Slika 2.5: Rešetke Λ i $\overline{\Lambda}$

Rešetka Λ je podrešetka rešetke $\overline{\Lambda}$ indeksa 3, a klase količničke grupe $\overline{\Lambda}/\Lambda$ su upravo skupovi belih, crnih i crvenih tačaka rešetke $\overline{\Lambda}$.

Svaka crna tačka reprezentuje po jedan šestougao. Skup, crnih tačaka rešetke $\overline{\Lambda}$ je invarijantan u odnosu na delovanje skupa belih tačaka, tj. rešetke Λ, ispoljeno kroz translacije, pa postoji prirodna identifikacija rešetke Λ i grupe translacija Γ ćelija heksagonalne rešetke u ravni.

Označimo sa K multiplikativnu grupu generisanu sa tri elementa x, y i z koja su povezana relacijom $xyz = 1$. Kako je Γ slobodna Abelova grupa generisana vektorima $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$, možemo definisati izomorfizam $\phi : K \to \Gamma$ sa:

$$\phi(x) = \vec{v_1} \qquad \phi(y) = \vec{v_2}$$
$$\phi(z) = -\vec{v_1} - \vec{v_2}$$

Izomorfizam ϕ inducira izomorfizam grupnih prstena

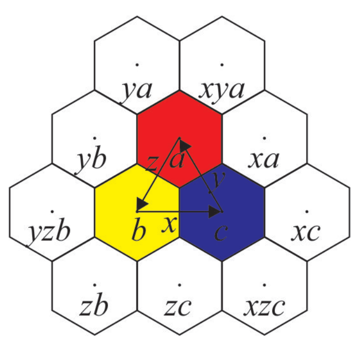
$$\mathbb{Z}[\Gamma] \cong \mathbb{Z}[K] \cong \mathbb{Z}[x, y, z]/\langle xyz - 1\rangle$$

Prsten $\mathbb{Z}[x, y, z]/\langle xyz - 1\rangle$ ćemo označiti sa P. Neka je A slobodna Abelova grupa generisana svim heksagonima rešetke $\overline{\Lambda}$. Kao i u slučaju kvadratne rešetke možemo definisati delovanje prstena P na skup A u odnosu na koje A postaje modul nad prstenom P koji označavamo sa $P(A)$.

Iako je ovaj modul generisan samo jednim elementom, nama će u daljem radu sa popločavanjem u heksagonalnoj rešetki (glava 4) biti udobnije da ga posmatramo kao modul generisan sa tri susedne ćelije šestougla, koje ćemo označiti sa a, b i c.

Veza između generatornih elemenata modula $P(A)$ data je sa

$$b = za$$
$$c = ya$$



Slika 2.6: Generatori modula $P(A)$

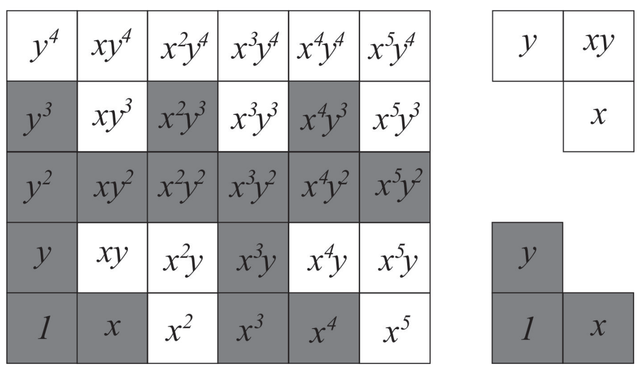
2.3 Popločavanja i $\mathbb{Z}$-popločavanja

Mi ćemo se baviti popločavanjima regiona u ravni oblicima koji predstavljaju unije elementarnih ćelija posmatarne rešetke. Te oblike ćemo zvati poliominima. Popločavanja koja ćemo razmatrati nisu particije u strogom smislu te reči zbog toga što delovi kojima se popločavanje vrši imaju zajedničku granicu. Naša popločavanja predstavljaju particije u smislu da je region ravni koji posmatramo prekriven familijom kompaktnih skupova od kojih svaki ima nepraznu unutrašnjost pri čemu su sve unutrašnjosti međusobno disjunktne.

Pre nego damo formalne definicije, ukazat ćemo na razliku između popločavanja i $\mathbb{Z}-$popločavanja. Razmotrimo sledeći primer:

Primer 2.3.1.

Pretpostavimo da želimo popločati region u kvadratnoj rešetki 6×5 "L-oblicima". Jedan od načina na koji to možemo učiniti predstavljen je na slici 2.7.



Slika 2.7: Popločavanje regiona 6×5 L-oblicima

Dodelimo sada svakoj elementarnoj ćeliji posmatranog regiona uređeni par prirodnih brojeva (m, n), tako da m označava vrstu a n kolonu u kojoj se ćelija nalazi. Kako postoji bijektivno preslikavanje između skupa uređenih parova prirodnih brojeva i monoma u promenljivim x i y pri čemu uređenom paru (m, n) odgovara monom $x^m y^n$, to svakoj elementarnoj ćeliji pridružujemo monom, a uniji ćelija sumu odgovarajućih monoma, tj. polinom. Na taj način $L-$oblicima $L_1 = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ i $L_2 = \{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ pridružujemo polinome $f_{L_1} = 1 + x + y$ i $f_{L_2} = x + y + xy$, a regionu 6×5 polinom $f = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4)$. Sada popločavanje predstavljeno na gornjoj slici algebarski zapisujemo kao dekompoziciju polinoma f datu sa:

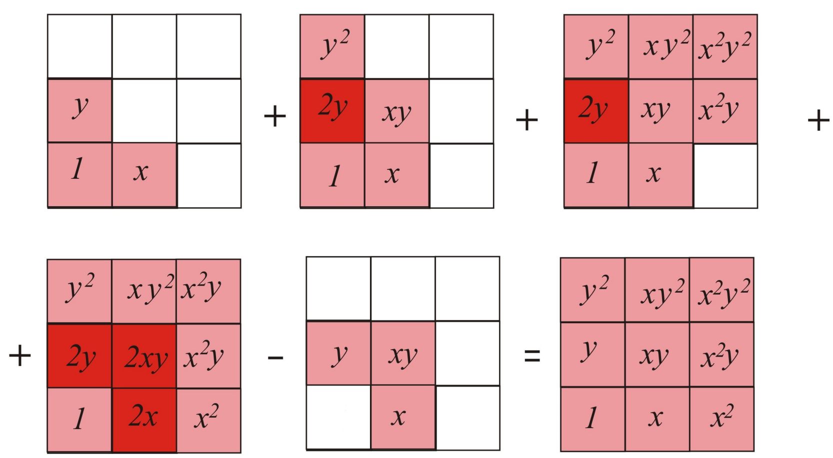
$$\begin{aligned} f &= f_{L_1} + x^3 f_{L_1} + y^2 f_{L_1} + x^2y^2 f_{L_1} + x^4y^2 f_{L_1} + \\ &\quad x f_{L_2} + x^4 f_{L_2} + y^3 f_{L_2} + x^2y^3 f_{L_2} + x^4y^3 f_{L_2} \\ &= (1 + x^3 + y^2 + x^2y^2 + x^4y^2) f_{L_1} + (x + x^4 + y^3 + x^2y^3 + x^4y^3) f_{L_2} \end{aligned}$$

Primetimo da u slučaju ovakvog popločavanja polinomi sa kojima radimo imaju koeficijente u skupu prirodnih brojeva, a $(\mathbb{N}, +)$ je polugrupa pa skup svih polinoma u promenljivim x i y sa koeficijentima iz $\mathbb{N}$ nema ni minimalnu strukturu prstena. To ograničenje je osnovni razlog zbog kojeg se uvodi $\mathbb{Z}$-popločavanje.

Da bismo ilustrovali razliku između običnog i $\mathbb{Z}$-popločavanja razmotrimo još jedan primer:

Primer 2.3.2.

Popločajmo region 3×3 translatima $L-$oblika iz prethodnog primera s tom razlikom što sada svakoj elementarnoj ćeliji dodeljujemo ceo broj koji, ukoliko je pozitivan označava broj pločica koje se na toj ćeliji nalaze, a ukoliko je negativan označava odsustvo prekrivajućih pločica na toj ćeliji.



Slika 2.8: $\mathbb{Z}$-popločavanje 3×3 regiona

Popločavanje sa slike 2.8 zapisujemo sa:

$$\begin{aligned} f_{3\times 3} &= f_{L_1} + x f_{L_1} + y f_{L_1} - f_{L_2} + xy f_{L_2} \\ &= (1 + x + y) f_{L_1} + (xy - 1) f_{L_2} \end{aligned}$$

Ovaj primer nas navodi na zaključak da je oblast određenu polinomom f moguce $\mathbb{Z}$-popločati oblicima L_1 i L_2 ako i samo ako polinom f možemo napisati u obliku sume polinoma koji predstavljaju oblike kojima vršimo popločavanje pomnožene elementima prstena $\mathbb{Z}[x, y]$, odnosno, ako i samo ako f pripada idealu generisanom polinomima f_{L_1} i f_{L_2}, a vredi i obrnuto.

Primetimo da je sada kada svi polinomi imaju koeficijente u prstenu celih brojeva ambijentni algebarski prostor prsten polinoma sa koeficijentima iz $\mathbb{Z}$ što je komutativan prsten sa jedinicom.

Ograničenje sa kojim se sada susrećemo ogleda se u činjenici da je redukcija polinoma uz zadani poredak promenljivih, koja se vrši pri računanju Grebnerove baze, samo djelimično izvodljiva, jer koeficijenti polinoma nisu elementi polja. Zbog toga ćemo računati jaku Grebnerovu bazu koristeći modifikovane algoritme implementirane u softveru *Mathematica 9*.

Pređimo sada na definisanje osnovnih pojmova koje ćemo koristiti.

Definicija 2.3.1. *Poliomino T je konačan podskup rešetke Λ koji svaku elementarnu ćeliju a sadrži sa njenom višestrukošću w_a koja može biti pozitivna ili negativna. Drugim rečima, $T = \sum w_a a$ pri čemu $w_a \in \mathbb{Z}$ i $a \in \Lambda$.*

Poliomino T je konačan region koji se sastoji od elementarnih ćelija rešetke Λ sa odgovarajućim višestrukostima ali koje ne moraju nužno biti povezane.

Poliomino koji koristimo u popločavanju zvat ćemo *bazni oblik*. Neka je $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ skup baznih oblika kojima želimo poločati region T rešetke Λ. $T_1, T_2, \dots, T_n$ i T su elementi modula $P(A)$. Region T možemo $\mathbb{Z}-$popločati elementima skupa $\mathcal{T}$ ako i samo ako T možemo napisati u obliku sume $T_1, T_2, \dots, T_n$ sa koeficijentima iz prstena P, na sledeći način:

$$T = p_1T_1 + p_2T_2 + \cdots + p_nT_n$$

Dakle, T možemo popločati elementima skupa $\mathcal{T}$ ako i samo ako T pripada podmodulu modula $P(A)$ koji je generisan sa $T_1, T_2, \dots, T_n$.

Tako dolazimo do propozicije:

Propozicija 3.1. *Poliomino T možemo $\mathbb{Z}-$popločati elementima skupa $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ako i samo ako $T \in P(\mathcal{T})$, gde je $P(\mathcal{T})$ $P-$podmodul modula $P(A)$ generisan elementima skupa $\mathcal{T}$.*

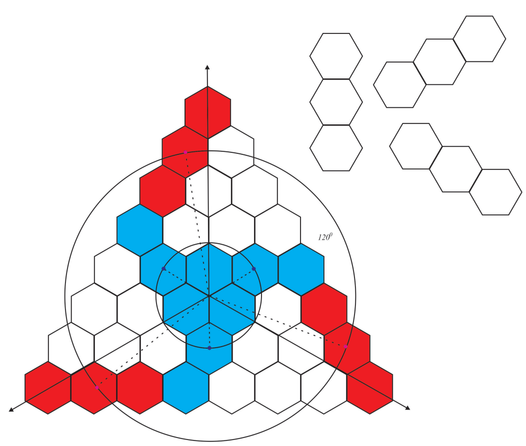
2.4 Simetrična popločavanja

Pojam simetrije je prisutan u prirodnim naukama i umetnosti jednako koliko i u matematici. Simetrija je usko vezana za pojam lepote i iako svako od nas intuitivno razume pojam simetrije, nije ga uvek jednostavno definisati.

Intuitivno, simetrično popločavanje regiona rešetke Λ je ono koje dopušta da se sve pločice istovremeno podignu, pomere u ravni na neki način (zarotiraju, transliraju...), a zatim ponovo prekriju polazni region tako da dobijemo potpuno istu dekompoziciju kakvu smo imali na početku. Preduslov za postojanje simetričnog popločavanja jeste da je i sam region koji želimo popločati , kao i skup baznih oblika kojim popločavanje vršimo simetričan. Pre nego damo formalne definicije, pogledajmo sledeći primer.

Primer 2.4.1.

Pretpostavimo da želimo popločati trougaoni region u heksagonalnoj rešetki oblicima od po tri vezana heksagona u jednom pravcu, koje ćemo zvati triboni ali tako da je popločavanje simetrično u odnosu na rotaciju za ugao od 120° oko centra trougla.



Slika 2.9: Simetrično popločavanje trougaonog regiona

To znači da ako se u dekompoziciji nalazi crveni tribon na levoj strani od gornjeg vrha trougla, onda u poplovcavanju mora postojati i njegova rotacija za ugao od 120° odnosno, 240°. Drugim rečima popločavanje mora biti invarijantno u odnosu na grupu rotacija rešetke generisanu rotacijom oko centra trougla za 120°.

Neka je S_Λ grupa svih izometrijskih transformacija rešetke Λ. Mi ćemo razmatrati popločavanja regiona unutar rešetke koja su invarijantna u odnosu na neku konačnu podgrupu G grupe S_Λ. Napomenimo da je i Γ jedna od podgrupa grupe S_Λ i da je to grupa svih translacija rešetke Λ koja je beskonačna i generisana sa dva elementa.

Neka je G konačna podgrupa grupe S_Λ. Grupa G deluje na skup svih elementarnih ćelija rešetke Λ, a samim tim i na modul $P(A)$. Međutim, delovanje grupe G na elemente grupnog prstena P ne mora biti trivijalno.

Označimo sa P^G skup svih elemenata prstena P koji su invarijantni u odnosu na delovanje grupe G. P^G je podprsten prstena P. Kako je P^G i sam prsten, on deluje na elemente grupe A, i na isti način kao ranije, A se može posmatrati i kao modul nad prstenom P^G. Taj modul ćemo označavati sa A^G.

Pretpostavimo da je skup $\mathcal{T}$ osnovnih oblika kojima popločavamo invarijantan u odnosu na delovanje grupe G. Jedno od interesantnih pitanja za čijim odgovorom tragamo glasi: Kada je moguće $G-$invarijantni region T $G-$simetrično $\mathbb{Z}-$popločati translatima elemenata skupa $\mathcal{T}$?

Ako sa $P^G(\mathcal{T})$ označimo P^G-modul simetričnih poliomina generisanih elementima skupa $\mathcal{T}$, onda nam odgovor na gornje pitanje daje propozicija 4.1 koja je simetrični analogon propozicije 3.1.

Propozicija 4.1. *Neka je $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ $G-$invarijantan skup baznih oblika i neka je T $G-$invarijantan region rešetke Λ. T možemo $G-$simetrično $\mathbb{Z}-$popločati elementima skupa $\mathcal{T}$ ako i samo ako $T \in (P(\mathcal{T}))^G$, gde je $(P(\mathcal{T}))^G$ P^G-podmodul modula $(P(A))^G$ generisan elementima skupa $\mathcal{T}$.*

Glava 3

Popločavanje tribonima u kvadratnoj rešetki simetrično u odnosu na koordinatni početak

U ovoj glavi ćemo se baviti problemom $\mathbb{Z}-$popločavanja tribonima u kvadratnoj rešetki koje je simetrično u odnosu na koordinatni početak. Sa Λ ćemo označavati kvadratnu rešetku, sa S_Λ grupu izometrijskih preslikavanja u odnosu na koju je rešetka invarijantna, a sa G podgrupu grupe S_Λ koja je generisana simetrijom u odnosu na koordinatni početak. Kako je ova simetrija inverzna sama sebi, očigledno je $|G| = 2$ pa je $G \cong C_2$.

Tribonom nazivamo poliomino koji se sastoji od tri uzastopne vezane elementarne ćelije rešetke. U kvadratnoj rešetki tribon može biti vertikalan ili horizontalan. Drugim rečima tribon je translat jednog od sledeća dva poliomina

$$\begin{aligned} V_a &= a(1+y+y^2) \\ H_a &= a(1+x+x^2) \end{aligned}$$

Označimo sa

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \{&a(1+x+x^2), a(1+y+y^2), b(1+u+u^2), b(1+y+y^2) \\ &c(1+u+u^2), c(1+v+v^2), d(1+x+x^2), d(1+v+v^2)\} \end{aligned}$$

skup baznih oblika kojima želimo popločavati region u našoj rešetki. Jasno je da je i sam skup $\mathcal{T}$ invarijantan u odnosu na grupu G.

Naša namera je da iskoristimo kriterij iz propozicije 4.1 (glava 2) na $\mathbb{Z}$-popločavanje invarijantno u odnosu na grupu G. U tom cilju ćemo najpre odrediti podprsten svih elemenata prstena P koji su invarijantni u odnosu na grupu G a zatim i generatorne elemente modula $(P(\mathcal{T}))^G$.

3.1 Prsten invarijanti

Odredimo generatorne elemente i relacije među njima u prstenu P^G.
Osnovni alati teorije invarijanti kao što su teorema Emi Neter, Molienova teorema i druge, odnose se na prstene polinoma oblika $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, pri čemu je k polje karakteristike nula. Videli smo da priroda problema popločavanja zahteva rad sa prstenima polinoma čiji su koeficijenti iz prstena celih projeva $\mathbb{Z}$. Zbog toga smo prinuđeni koristiti druge tehnike koje uključuju i računanje jake Grebnerove baze za ideale iz prstena čiji su koeficijenti celi brojevi.

Definicija 3.1.1. *Neka je G podgrupa grupe permutacija S_n, i $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skup promenljivih. Grupa G deluje na skup $\mathbb{X}$ na sledeći način:*

$$g \star x_i = x_{g(i)}$$

za sve $g \in G$. Kažemo da je polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ invarijantan u odnosu na delovanje grupe G ako je

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \ldots, x_{g(n)})$$

za svako $g \in G$. Skup svih invarijantnih polinoma u odnosu na delovanje grupe G označavamo sa $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^G$.

Primetimo da je skup $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^G$ zatvoren za sabiranje i množenje svojih elemenata, a kako sadrži i konstantne polinome to je $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^G$ podprsten prstena $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Neka je G podgrupa grupe S_4, generisana proizvodom dve transpozicije.
$g = (13)(24)$. g je inverzno samo sebi pa je $|G| = 2$ i $G \cong C_2$.

Neka su s_1, s_2 i t binomi iz prstena $\mathbb{Z}[x,y,u,v]/\langle xu-1, yv-1\rangle$ dati sa

$$\begin{aligned} s_1 &= x+u \\ s_2 &= y+v \\ t &= xy+uv \end{aligned}$$

Binomi s_1, s_2 i t su $G-$invarijantni, i mi tvrdimo da oni zajedno sa jedinicom 1, generišu prsten $(\mathbb{Z}[x,y,u,v]/\langle xu-1, yv-1\rangle)^G$.

Lema 1.1. *Polinom*

$$g_{mn} = x^m y^n + u^m v^n \in \mathbb{Z}[x,y,u,v]^G$$

Za svako $m, n \in \mathbb{N}$ može biti napisan kao polinom u promenljivim s_1, s_2, t sa koeficijentima iz skupa $\mathbb{Z}$.

Dokaz: Neka je najpre $n=1$.

Za $m=1$ imamo da vredi

$$g_{11} = xy + uv = t$$

Zbog,

$$s_1 g_{11} = (x+u)(xy+uv) = x^2 y + u^2 v + y + v$$

imamo da je

$$g_{21} = s_1 g_{11} - s_2 = s_1 t - s_2$$

Prema tome, vidimo da za $n=1$ i $m \in \{1,2\}$ polinom g_{mn} možemo napisati kao polinom u promenljivim s_1,s_2 i t. Pretpostavimo sada da za svako $k < m$ polinom g_{k1} možemo predstaviti kao polinom u s_1, s_2 i t.

Kako je

$$\begin{aligned} s_1 g_{m-1,1} &= (x+u)(x^{m-1}y + u^{m-1}v) = \\ &= x^m y + u^m v + x^{m-2} y + u^{m-2} v = \\ &= g_{m1} + g_{m-2,1}, \end{aligned}$$

imamo da vredi relacija

$$g_{m,1} = s_1 g_{m-1,1} - g_{m-2,1}$$

Odavde zbog induktivne pretpostavke zaključujemo da i g_{m1} možemo napisati kao polinom u promenljivim s_1, s_2 i t.

Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je naša tvrdnja tačna za svako $m \in \mathbb{N}$.

Neka je sada m proizvoljan ali fiksan prirodan broj. Već smo videli da vredi:

$$g_{m,1} \in \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]$$

Za $n = 2$, imamo

$$g_{m2} = s_2 g_{m1} - (x^n + u^n)$$

$x^n + u^n$ je simetričan polinom iz $\mathbb{Z}[x, u]$ pa može biti napisan kao polinom u elementarnim simetričnim funkcijama $x+u$ and xu. Ovo znači da u prstenu $\mathbb{Z}[x, y, u, v]/\langle xu-1, yv-1\rangle$, $x^n + u^n$ možemo napisati kao polinom u $x + u = s_1$, iz čega zaključujemo da $g_{m2} \in \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]$.

Pretpostavimo sada da za svako $k < n$ polinom g_{mk} može biti predstavljen kao polinom u s_1, s_2 i t. Imamo da vredi sledeće:

$$\begin{aligned} s_2 g_{m,n-1} &= (y + v)(x^m y^{n-1} - u^m v^{n-1}) = \\ &= x^m y^n + u^m v^n + x^m y^{n-1} + u^m v^{n-1} = \\ &= g_{mn} + g_{m,n-2} \end{aligned}$$

pa je

$$g_{m,n} = s_2 g_{m,n-1} - g_{m,n-2}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke sada zaključujemo da $g_{m,n}$ može biti napisan kao polinom u promenljivim s_1, s_2 i t.

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da za svako $m, n \in \mathbb{N}$ polinom $g_{mn} \in \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]$. □

Sledeća lema može biti dokazana na isti način:

Lema 1.2. *Polinom*

$$h_{m,n} = x^m v^n + u^m y^n \in \mathbb{Z}[x, y, u, v]^G$$

Za svako $m, n \in \mathbb{N}$ može biti napisan kao polinom u promenljivim s_1, s_2, t sa koeficijentima iz skupa $\mathbb{Z}$.

Teorema 1.3. *Prsten* $(\mathbb{Z}[x,y,u,v]/\langle xu-1, yv-1\rangle)^G$ *je generisan sa* 1, s_1,s_2 *i* t. *Štaviše,*

$$(\mathbb{Z}[x,y,u,v]/\langle xu-1, yv-1\rangle)^G \cong \mathbb{Z}[s_1,s_2,t]/\langle\Theta\rangle$$

pri čemu je

$$\Theta := s_1^2 + s_2^2 - s_1 s_2 t + t^2 - 4 = 0$$

Dokaz: Svaki polinom može biti napisan na jedinstven način u obliku sume homogenih komponenti. Polinom $f \in \mathbb{Z}[x,y,u,v]$ je invarijantan u odnosu na delovanje grupe G ako i samo ako si i njegove homogene komponente invarijantne u odnosu na delovanje grupe G. Za proizvoljan polinom $f \in (\mathbb{Z}[x,y,u,v]/\langle xu-1, yv-1\rangle)^G$ njegove homogene komponente mogu imati jedan od sledećih oblika:

$$\begin{aligned} g_{mn} &= x^m v^n + u^m y^n \\ h_{m,n} &= x^m v^n + u^m y^n \end{aligned}$$

Iz leme 1.1 i leme 1.2 sledi da f možemo napisati kao polinom u promenljivim s_1, s_2, and t.

Odredimo sada ideal I koji je generisan svim algebarskim relacijama između s_1,s_2 i t. Za ideal I kažemo da je *ideal svih relacija među generatorima* ili *ideal sizigija*. Iskoristit ćemo sledeću propoziciju :

Propozicija 1.4. (D. Cox, J. Little and D. O'Shea [9, Chapter 7, §4, Proposition 3]) *Ako je* $k[x_1,\ldots,x_n]^G = k[f_1,\ldots,f_n]$, *posmatrajmo ideal*

$$J_F = \langle f_1 - y_1, \ldots, f_m - y_m\rangle \subset k[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$$

(i) *I_F je $n-ti$ eliminacioni ideal od J_F. Prema tome, $I_F = J_f \cap k[y_1,\ldots,y_m]$*

(ii) *Fiksirajmo monomijali poredak u prstenu $k[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]$ tako da su monomi koji sadrže bilo koju od promenljivih $x_1,\ldots,x_n$ veći nego monomi u promenljivim $k[y_1,\ldots,y_m]$ i neka je G Grebnerova baza ideala J_F. Tada vredi: $G \cap k[y_1,\ldots,y_m]$ je Grebnerova baza ideala I_F u monomijalnom urđenju induciranom na $k[y_1,\ldots,y_m]$.*

Gornja propozicija vredi i za prstene polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Formirajmo ideal

$$J = \langle x+u-a, y+v-b, xy+uv-c, xu-1, yv-1\rangle$$

Za leksikografski poredak promenljivih $x > y > u > v > s_1 > s_2 > t$ Grebnerova baza ideala I sastoji se od sledećih polinoma

$$\begin{array}{ll}
-4+t^2+s_1^2-ts_1s_2+s_2^2, & 1+v^2-vs_2, -4u-2tv+2s_1+ts_2+vs_1s_2+us_2^2-s_1s_2^2 \\
-2u-tv+s_1+uvs_2, & -4+t^2+2us_1+tvs_1-tus_2-2vs_2-ts_1s_2+2s_2^2 \\
-tu-2v+uvs_1+s_2, & -2tu-t^2v+ts_1-2s_2+t^2s_2+us_1s_2+tvs_1s_2-vs_2^2-ts_1s_2^2+s_2^3 \\
u+x-s_1 & -2+tuv+us_1-tus_2-vs_2+s_2^2 \\
v+y-s_2, & -3+t^2+u^2+us_1+tvs_1-tus_2-2vs_2-ts_1s_2+2s_2^2 \\
 & -t+2uv-vs_1-us_2+s_1s_2
\end{array}$$

Iz propozicije 1.4 sledi da je ideal relacija među generatorima dat sa

$$I = \langle -4+t^2+s_1^2-ts_1s_2+s_2^2 \rangle$$

iz čega zaključujemo da je

$$(\mathbb{Z}[x,y,u,v]/\langle xu-1, yv-1\rangle)^G \cong \mathbb{Z}[s_1,s_2,t]/\langle s_1^2+s_2^2-s_1s_2t+t^2-4\rangle$$

□

3.2 Podmodul $(P(\mathcal{T}))^G$ generisan tribonima

Odredimo sada skup generatora modula $(P(\mathcal{T}))^G$, pri čemu je $\mathcal{T}$ skup tribona.

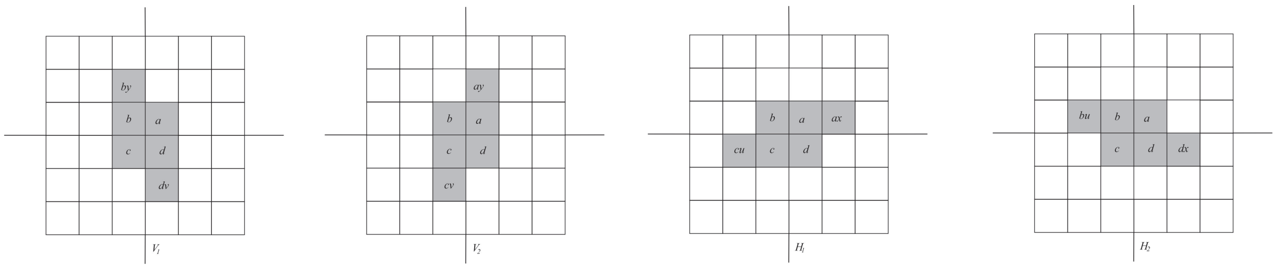
$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \;=\;& \{a(1+x+x^2), a(1+y+y^2), b(1+u+u^2), b(1+y+y^2) \\
& c(1+u+u^2), c(1+v+v^2), d(1+x+x^2), d(1+v+v^2)\}
\end{aligned}$$

Napomenimo da u modulu $(P(A))^G$ vrede sledeće relacije među generatorima koje ćemo koristiti u izračunavanjima

$$b = ua, \quad d = va$$
$$c = uva$$

Stavimo da je:

$$V_1 = a+d+dv+c+b+by$$
$$V_2 = ay+a+d+b+c+cv$$
$$H_1 = b+a+ax+cu+c+d$$
$$H_2 = bu+b+a+c+d+dx$$



Slika 3.1: Parovi poliomina simetrični u odnosu na koordinatni početak V_1,V_2, H_1 i H_2

Lema 2.1. *Za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ polinomi*

$$\begin{aligned} V_{1x^m} &= x^m(a+d+dv) + u^m(c+b+by) \\ V_{2x^m} &= x^m(a+b+by) + u^m(cv+c+d) \end{aligned}$$

mogu biti napisani u obliku sume V_1 i V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G.

Dokaz: Za $m = 1$ imamo da je

$$V_{1x} = x(a+d+dv) + u(c+b+by)$$

Zbog,

$$\begin{aligned} s_1V_1 &= (x+u)[(a+d+dv)+(c+b+by)] \\ &= [x(a+d+dv)+u(c+b+by)] + [u(a+d+dv)+x(c+b+by)] \\ &= V_{1x} + [(b+c+cv)+(d+a+ay)] \\ &= V_{1x} + V_2 \end{aligned}$$

vredi relacija

$$V_{1x} = s_1V_1 - V_2 = s_1V_{1x^0} - V_{2x^0}$$

Pretpostavimo sada da za svako $k \leq m$ polinom V_{1x^m} može biti predstavljen kao suma V_1 i V_2 sa koeficijentima u prstenu P^G. Iz relacije,

$$\begin{aligned} s_1V_{1x^m} &= (x+u)[x^m(a+d+dv)+u^m(c+b+by)] \\ &= [x^{m+1}(a+d+dv)+u^{m+1}(c+b+by)] + [x^{m-1}(a+d+dv)+u^{m-1}(c+b+by)] \\ &= V_{1x^{m+1}} + V_{1x^{m-1}} \end{aligned}$$

imamo da je

$$V_{1x^{m+1}} = s_1V_{1x^m} - V_{1x^{m-1}}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke i gornje relacije zaključujemo da i polinom $V_{1x^{m+1}}$ takođe može biti predstavljen u obliku sume V_1 and V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G.

Tvrdimo da se i polinom V_{2x^m} za priozvoljno $m \in \mathbb{N}$ može napisati kao zbir V_1, V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G. Za $m = 1$ imamo da je

$$\begin{aligned} s_1 V_2 &= (x+u)[(d+a+ay)+(b+c+cv)] \\ &= [x(d+a+ay)+u(b+c+cv)]+[(c+b+by)+(a+d+dv)] \; lll \\ &= V_{2x}+V_1 \end{aligned}$$

iz čega sledi da je $V_{2x} = s_1 V_2 - V_1$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vredi za sve k za koje je $1 \leq k \leq m$. Kako je

$$\begin{aligned} s_1 V_{2x^m} &= (x+u)[x^m(d+a+ay)+u^m(b+c+cv)] \\ &= [x^{m+1}(d+a+ay)+u^{m+1}(b+c+cv)]+[x^{m-1}(d+a+ay)+u^{m-1}(b+c+cv)] \\ &= V_{2x^{m+1}}+V_{2x^{m-1}} \end{aligned}$$

to vredi relacija

$$V_{2x^{m+1}} = s_1 V_{2x^m} - V_{2x^{m-1}}$$

pa na osnovu induktivne pretpostavke vidimo da se i V_{2x^m} može napisati u željenom obliku. Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da se za svako $m \in \mathbb{N}$ polinom V_{2x^m} Može napisati u obliku zbira V_1 i V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G. $\square$

Lema 2.2. *Za svako $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ polinomi*

$$\begin{aligned} V_{ax^m y^n} &= ax^m y^n(1+y+y^2)+cu^m v^n(1+v+v^2) \\ V_{bu^m y^n} &= bu^m y^n(1+y+y^2)+dx^m v^n(1+v+v^2) \end{aligned}$$

mogu biti napisani u obliku sume V_1 i V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G.

Dokaz: Razmotrimo prvo polinom $V_{ax^m y^n}$.

Za $m = 0$ i $n = 0$ imamo da vredi sledeća relacija:

$$\begin{aligned} s_2 V_2 - V_1 &= (y+v)(d+a+ay+b+c+cv)-(dv+d+a+c+b+by) \\ &= a(1+y+y^2)+c(1+v+v^2) \\ &= V_{ax^0 y^0} = V_a \end{aligned}$$

Za $m = 1$ i $n = 0$ i za $m = 0$ i $n = 1$ imamo

$$\begin{aligned} s_1 V_a &= (x+u)[a(1+y+y^2)+c(1+v+v^2)] \\ &= [ax(1+y+y^2)+cu(1+v+v^2)]+[b(1+y+y^2)+d(1+v+v^2)] \\ &= V_{ax}+V_b \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} s_2 V_a &= (y+v)[a(1+y+y^2)+c(1+v+v^2)] \\ &= [ay(1+y+y^2)+cv(1+v+v^2)]+[av(1+y+y^2)+cy(1+v+v^2)] \\ &= V_{ay}+V_2 \end{aligned}$$

što znači da vrede relacije:

$$\begin{aligned} V_{ax} &= s_1 V_a - V_b \\ V_{ay} &= s_2 V_a - V_2 \end{aligned}$$

Kako je,

$$\begin{aligned} tV_a - V_1 &= (xy+uv)[a(1+y+y^2)+c(1+v+v^2)] - [(c+b+by)+(a+d+dv)] \\ &= [axy(1+y+y^2)+cuv(1+v+v^2)] \\ &= V_{axy} \end{aligned}$$

za $m = 1$ i $n = 1$, imamo $V_{axy} = tV_a - V_1$.

Iskoristimo opet matematičku indukciju. Neka je $n = 1$. Za $m = 2$ zbog:

$$\begin{aligned} s_1 V_{axy} - V_a &= (x+u)[axy(1+y+y^2)+cuv(1+v+v^2)] - [a(1+y+y^2)+c(1+v+v^2)] \\ &= ax^2y(1+y+y^2)+cu^2v(1+v+v^2) \\ &= V_{ax^2y} \end{aligned}$$

imamo da je

$$V_{ax^2y} = s_1 V_{axy} - V_a$$

Vidimo da za $n = 1$ i $m = 2$ $V_{ax^my^n}$ možemo napisati u obliku sume V_1 and V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G. Pretpostavimo sada da isto vredi i za svaki polinom V_{ax^ky} gde je $2 \leq k \leq m$. Zbog,

$$\begin{aligned} s_1 V_{ax^my} &= (x+u)[ax^my(1+y+y^2)+cu^mv(1+v+v^2)] \\ &= [ax^{m+1}y(1+y+y^2)+cu^{m+1}v(1+v+v^2)]+ \\ &+ [ax^{m-1}y(1+y+y^2)+cu^{m-1}v(1+v+v^2)] \\ &= V_{ax^{m+1}y}+V_{ax^{m-1}y} \end{aligned}$$

imamo da je

$$V_{ax^{m+1}y} = s_1 V_{ax^m y} - V_{ax^{m-1}y}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke vidimo da i polinom $V_{ax^{m+1}y}$ možemo napisati u obliku zbira V_1 and V_2 sa koeficijentima iz P^G. Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da se polinom oblika $V_{ax^m y}$ može za svako $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ napisati u obliku zbira V_1 i V_2 sa koeficijentima iz P^G.

Neka je sada m proizvoljan ali fiksan prirodan broj. Već smo pokazali da za $n = 1$ polinom $V_{ax^m y}$ ima željene osobine. Pretpostavimo sada da isto vredi i za $V_{ax^m y^k}$ gde je $1 \leq k \leq n$.

Zbog:

$$\begin{aligned}
s_2 V_{ax^m y^n} &= (y+v)[ax^m y^n(1+y+y^2) + cu^m v^n(1+v+v^2)] \\
&= [ax^m y^{n+1}(1+y+y^2) + cu^m v^{n+1}(1+v+v^2)]+ \\
&+ [ax^m y^{n-1}(1+y+y^2) + cu^m v^{n-1}(1+v+v^2)] \\
&= V_{ax^m y^{n+1}} + V_{ax^m y^{n-1}}
\end{aligned}$$

imamo da vredi relacija

$$V_{ax^m y^{n+1}} = s_2 V_{ax^m y^n} - V_{ax^m y^{n-1}}$$

Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da za svako $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ polinom $V_{ax^m y^n}$ može biti napisan kao suma V_1 i V_2 sa koeficijentima u prstenu P^G.

Pokažimo sada da se i polinom $V_{bu^m y^n}$ može predstaviti u obliku sume polinoma V_1 i V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G. Za $m = 0$ i $n = 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
s_2 V_1 &= (y+v)[(a+d+dv) + (c+b+by)] \\
&= [b(1+y+y^2) + d(1+v+v^2)] + [(d+a+ay) + (b+c+cv)] \\
&= V_b + V_2
\end{aligned}$$

Pa vredi $V_b = s_2 V_1 - V_2$.

Za $m = 1$ i $n = 0$ i za $m = 0$ i $n = 1$ imamo da je:

$$\begin{aligned}
s_1 V_b &= (x+u)[b(1+y+y^2) + d(1+v+v^2)] \\
&= [bu(1+y+y^2) + dx(1+v+v^2)] + [a(1+y+y^2) + c(1+v+v^2)] \\
&= V_{bu} + V_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2V_b &= (y+v)[b(1+y+y^2)+d(1+v+v^2)] \\
&= [by(1+y+y^2)+dv(1+v+v^2)]+[(c+b+by)+(a+d+dv)] \\
&= V_{by}+V_1
\end{aligned}$$

što znači da vrede relacije

$$\begin{aligned}
V_{bu} &= s_1V_b - V_a \\
V_{by} &= s_2V_b - V_1
\end{aligned}$$

Iskoristimo opet matematičku indukciju. Neka je $n = 0$. Videli smo da polinom V_{bu} možemo napisati kao zbir V_1 i V_2. Pretpostavimo da to vredi i za sve polinome V_{bu^k} za $1 \leq k \leq m$. Kako je:

$$\begin{aligned}
s_1V_{bu^m} &= (x+u)[bu^m(1+y+y^2)+dx^m(1+v+v^2)] \\
&= [bu^{m+1}(1+y+y^2)+dx^{m+1}(1+v+v^2)]+[bu^{m-1}(1+y+y^2)+dx^{m-1}(1+v+v^2)] \\
&= V_{bu^{m+1}}+V_{bu^{m-1}}
\end{aligned}$$

imamo da vredi relacija

$$V_{bu^{m+1}} = s_1V_{bu^m} - V_{bu^{m-1}}$$

Iz gornje relacije na osnovu induktivne pretpostavke zaključujemo da V_{bu^m} možemo napisati u obliku sume V_1 and V_2 sa koeficijentima iz prstena P^G za svaki prirodan broj m. Neka je sada m proizvoljan ali fiksan prirodan broj i neka je $n = 1$. Tada je:

$$\begin{aligned}
s_2V_{bu^m} &= (y+v)[bu^m(1+y+y^2)+dx^m(1+v+v^2)] \\
&= [bu^my(1+y+y^2)+dx^mv(1+v+v^2)]+[u^m(c+b+by)+x^m(a+d+dv) \\
&= V_{bu^my}+V_{1x^m}
\end{aligned}$$

što znači da vredi

$$V_{bu^my} = s_2V_{bu^m} - V_{1x^m}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke i leme 2.1 vidimo da i polinom V_{bu^my} možemo napisati u obliku zbira V_1 and V_2 sa koeficijentima iz P^G. Pretpostavimo da to vredi i za sve $1 \leq k \leq n$. Imamo:

$$\begin{aligned}
s_2V_{bu^my^n} &= (y+v)[bu^my^n(1+y+y^2)+dx^mv^n(1+v+v^2)] \\
&= [bu^my^{n+1}(1+y+y^2)+dx^mv^{n+1}(1+v+v^2)]+ \\
&+ [bu^my^{n-1}(1+y+y^2)+dx^mv^{n-1}(1+v+v^2)] \\
&= V_{bu^my^{n+1}}+V_{bu^my^{n-1}}
\end{aligned}$$

tj.

$$V_{bu^m y^{n+1}} = s_2 V_{bu^m y^n} - V_{bu^m y^{n-1}}$$

Zbog induktivne pretpostavke iz gornje relacije sledi da naša tvrdnja vredi i za $n+1$. Prema principu matematičke indukcije zaključujemo da se polinom oblika $V_{bx^m y^n}$ može za svako $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i svako $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ napisati u obliku zbira V_1 i V_2 sa koeficijentima iz P^G čime je dokaz leme kompletiran.

□

Sledeće dve leme dokazujemo na isti način kao prethodne.

Lema 2.3. *Za svako $m \in \mathbb{N}$ polinomi*

$$\begin{aligned} H_{1y^m} &= y^m(ax+a+b) + v^m(cu+c+d) \\ H_{2y^m} &= y^m(a+b+bu) + v^m(c+d+dx) \end{aligned}$$

se mogu napisati u obliku zbira H_1 i H_2 sa koeficijentima iz prstena P^G.

Lema 2.4. *Za svako $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ polinomi*

$$\begin{aligned} H_{ax^m y^n} &= ax^m y^n(1+x+x^2) + cu^m v^n(1+u+u^2) \\ H_{bu^m y^n} &= bu^m y^n(1+u+u^2) + du^m v^n(1+x+x^2) \end{aligned}$$

mogu biti napisani u obliku sume H_1 i H_2 sa koeficijentima iz prstena P^G.

Teorema 2.5. *Modul $(P(\mathcal{T}))^G \subset (P(A))^G$ $G-$invarijantnih poliomina koji se mogu simetrično u odnosu na koordinatni početak $\mathbb{Z}-$popločati elementima skupa $\mathcal{T}$ generisan je kao modul nad prstenom P^G $G-$simetričnim parovima tribona V_1, V_2, H_1 i H_2.*

Proof: Očigledno je da prozvoljan par vertikalnih tribona koji su simetrični s obzirom na koordinatni početak može imati jedan od sledeća četiri oblika

$$\begin{aligned} V_{1x^m} &= x^m(a+d+dv) + u^m(c+b+by) \\ V_{2x^m} &= x^m(a+b+by) + u^m(cv+c+d) \\ V_{ax^m y^n} &= ax^m y^n(1+y+y^2) + cu^m v^n(1+v+v^2) \\ V_{bu^m y^n} &= bu^m y^n(1+y+y^2) + du^m v^n(1+v+v^2) \end{aligned}$$

a prizvoljan par horizontalnih tribona koji su simetrični u odnosu na koordinatni početak može imati jedan od oblika

$$\begin{aligned}
H_{1y^m} &= y^m(ax+a+b)+v^m(cu+c+d)\\
H_{2y^m} &= y^m(a+b+bu)+v^m(c+d+dx)\\
H_{ax^my^n} &= ax^my^n(1+x+x^2)+cu^mv^n(1+u+u^2)\\
H_{bu^my^n} &= bu^my^n(1+u+u^2)+du^mv^n(1+x+x^2)
\end{aligned}$$

Iz lema 2.1 i 2.2 sledi da proizvoljan vertikalni, a iz lema 2.3 i 2.4 sledi da proizvoljan horizontalni par centralno-simetričnih tribona može biti napisan u obliku sume V_1, V_2, H_1 i H_2 sa koeficijentima u prstenu P^G što znači da su oni elementi modula generisanog sa V_1, V_2, H_1 i H_2 nad prstenom P^G. Obrnuta inkluzija je očigledna pa zaključujemo da je modul svih parova centralno simetričnih tribona generisan sa V_1, V_2, H_1 i H_2 .

□

3.3 Prsteni $\overline{P}$ i P

Već smo videli da rešetku Λ možemo posmatrati i kao podrešetku rešetke $\overline{\Lambda}$. Na isti način na koji smo formirali grupni prsten $P = \mathbb{Z}[x, y, u, v]/\langle xu - 1, yv - 1\rangle$ rešetke Λ, možemo formirati i grupni prsten rešetke $\overline{\Lambda}$. Označimo grupni prsten rešetke $\overline{\Lambda}$ sa

$$\overline{P} = \mathbb{Z}[a, b, c, d]/\langle ac - 1, bd - 1\rangle$$

Svi strukturni rezultati koje smo dokazali da vrede za prsten P vrede takođe i za prsten $\overline{P}$. Tako postoji izomorfizam

$$(\mathbb{Z}[a, b, c, d]/\langle ac - 1, bd - 1\rangle)^G \cong \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]/\langle s_1^2 + s_2^2 - s_1 s_2 t + t^2 - 4\rangle \tag{3.1}$$

gde je $s_1 = a + c$, $s_2 = b + d$ i $t = ab + cd$.

Činjenica da je Λ podrešetka rešetke $\overline{\Lambda}$ indeksa 2 omogućava nam da definišemo $\mathbb{Z}_2-$graduaciju u prstenima $\overline{P}$ i P prema ostatku koji stepen daje pri deljenju sa 2.

Prsteni $\overline{P}^G$ i P^G nasleđuju $\mathbb{Z}_2-$graduaciju iz prstena $\overline{P}$.

Prsten $\overline{P}^G$ je $\mathbb{Z}-$generisan sa 1 i binomima oblika $a^mb^n + c^md^n$, $a^md^n + c^mb^n$ gde je $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Slično je i prsten P^G $\mathbb{Z}-$generisan sa 1 i binomima $x^my^n + u^mv^n$ i $x^mv^n + u^my^n$. Kako je, $x = ad$, $y = ab$, $u = bc$ and $v = cd$ vidimo da je prsten P^G očigledno podprsten prstena $\overline{P}^G$ svih elemenata graduiranih nulom u $\mathbb{Z}_2$. Podskup svih elemenata prstena $\overline{P}^G$ koji su graduirani sa $1 \in \mathbb{Z}_2$ je upravo skup elemenata modula $(P(A))^G$. Ova karakterizacija nam omogućava da damo sledeću propoziciju:

Propozicija 3.1. *Neka je* $(P(\mathcal{T}))^G \subseteq (P(A))^G$ P^G-*podmodul modula* $(P(A))^G$ *generisan skupom* $\mathcal{T}$. *Neka je* $I_{(P(\mathcal{T}))^G}$ *ideal u prstenu* $\overline{P}^G$ *generisan skupom* $\mathcal{T}$. *Pretpostavimo da* $p \in (P(A))^G$. *Tada imamo da:*

$$p \in (P(\mathcal{T}))^G \Longleftrightarrow p \in I_{(P(\mathcal{T}))^G}$$

Dokaz: Implikacija $p \in (P(\mathcal{T}))^G \Longrightarrow p \in I_{(P(\mathcal{T}))^G}$ je očigledna. Ako je $p \in I_{(P(\mathcal{T}))^G}$ i $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_k p_k$ pri čemu su elementi $p_i \in \mathcal{T}$ i homogeni su (u smislu $\mathbb{Z}_2-$graduacije) a elementi $\alpha_i \in \overline{P}^G$ onda možemo pretpostaviti da svi $\alpha_i \in P^G$ (u suprotnom bi se ti elementi međusobno poništili).

□

Gornja propozicija nam omogućava da 'problem pripadnosti podmodulu' svedemo na 'problem pripadnosti idealu' u prstenu $\overline{P}^G$. Zbog izomorfizma (3.1) 'problem pripadnosti idealu' za ideal generisan skupom $\mathcal{T}$ postaje 'problem pripadnosti idealu' za ideal

$$J_{(P(\mathcal{T}))^G} = I_{(P(\mathcal{T}))^G} + \langle s_1^2 + s_2^2 - s_1 s_2 t + t^2 - 4 \rangle \subset \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]$$

3.4 Ideal $J_{(P(\mathcal{T}))^G}$ i njegova Grebnerova baza

Sada ćemo izraziti elemente ideala $I_{(P(\mathcal{T}))^G}$ u promenljivim s_1, s_2 i t i odrediti njegovu Grebnerovu bazu

Propozicija 4.1. *Izraženi u promenljivim* s_1, s_2 *i* t *u prstenu* $\overline{P}^G$ *polinomi* V_1, V_2, H_1 *i* H_2 *imaju sledeću formu:*

$$\begin{aligned} V_1 &= s_2(1+t) \\ V_2 &= s_1(1+t) \\ H_1 &= s_1(1+s_1 s_2 - t) \\ H_2 &= s_2(1+s_1 s_2 - t) \end{aligned}$$

Dokaz:

Dokaz se izvodi direktnim izračunavanjem. Na primer:

$$\begin{aligned} H_1 &= b + a + ax + cu + c + d \\ &= (a+c) + (b+d) + a^2 d + bc^2 \\ &= s_1 + s_2 + (a+c)(ad+bc) - abc - adc \\ &= s_1 + s_2 + s_1(s_1 s_2 - t) - s_2 \\ &= s_1(1 + s_1 s_2 - t) \end{aligned}$$

□

Formirajmo ideal $J_{(P(\mathcal{T}))^G}$:

$$J_{(P(\mathcal{T}))^G} = \langle s_2(1+t), s_1(1+t), s_1(1+s_1s_2-t), s_2(1+s_1s_2-t), s_1^2+s_2^2-s_1s_2t+t^2-4\rangle$$

Koriseći softver *Wolfram Mathematica 9.0* odredili smo Grebnerovu bazu ideala $J_{(P(\mathcal{T}))^G}$.

Propozicija 4.2. *Grebnerovu bazu $GJ_{(P(\mathcal{T}))^G}$ ideala $J_{(P(\mathcal{T}))^G} \subset \overline{P}^G$ s obzirom na leksikografski poredak promenljivih s_1, s_2 i t čine sledeći polinomi:*

$$\begin{array}{lll} -4-4t+t^2+t^3, & s_2+s_2t, & 16-15s_2^2+3s_2^4-4t^2, \\ 4s_2-5s_2^3+s_2^5, & 2s_1+5s_2-s_2^3, & s_1+s_1t, \\ 8+s_1s_2-5s_2^2+s_2^4-2t^2, & -12+s_1^2+6s_2^2-s_2^4+3t^2 & \end{array}$$

3.5 Popločavanje regiona S_n

Sada kada smo odredili generatore i Grebnerovu bazu ideala $J_{(B(\mathcal{T}))^G}$ iskoristit ćemo te rezultate da ispitamo kada je moguće popločati region u ravni S_n koji je simetričan u odnosu na koordinatni početak. Region S_n koji želimo popločati predstavljen je na slici 3.2 i ima šupljinu u sredini. n je broj kvadratića koji se nalaze na svakoj od strana regiona S_n. Posmatrani region je simetričan u odnosu na koordinatni početak, pa je element P^G-modula A^G.

Označimo sa □ operaciju na modulu A koja svakom elementu modula dodaje elemente koji su njemu simetrični s obzirom na xu, yv ose i s obzirom na koordinatni početak. Na primer:

$$\square(ax^2y) = ax^2y + bu^2y + cu^2v + dx^2y$$

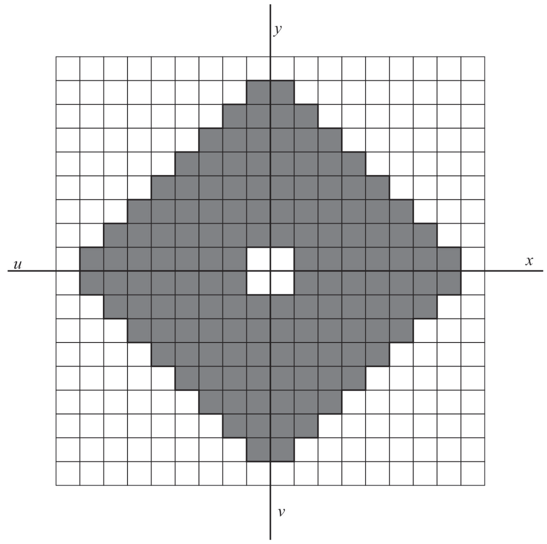
Ako definišemo ideal I sa

$$I = \langle a(1+x+x^2), a(1+y+y^2)\rangle$$

onda se lako vidi da vredi sledeća propozicija:

Propozicija 5.1. *Za $f \in P(A)$ imamo:*

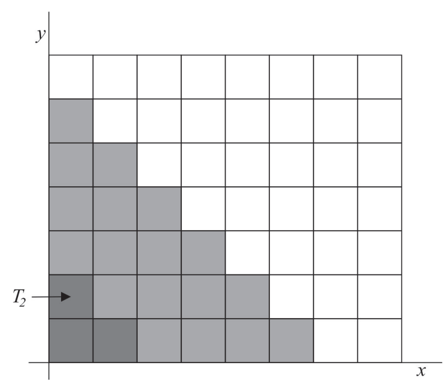
a) Ako $f \in I$ onda $\square f \in I_{(P(\mathcal{T}))^G}$



Slika 3.2: Region S_8

b) Ako $f_1 \equiv_I f_2$ *onda* $\Box f_1 \equiv_{I_{(P(\mathcal{T}))^G}} \Box f_2$

Razmotrimo sada detaljnije trougaoni region T_n koji se nalazi u prvom kvadrantu i predstavljen je na slici 3.3.



Slika 3.3: Regioni T_6 i T_2

Neka je

$$Hl_n = a(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

Tada imamo da je:

$$\begin{aligned} T_n &= Hl_n + yHl_{n-1} + y^2Hl_{n-2} + \cdots + ay^{n-1} \\ T_2 &= a(1 + x + y) \end{aligned}$$

Lema 5.2. *Ako je* $m \equiv n\,(mod\ 3)$ *onda je i*

a) $ax^m \equiv_I ax^n$

b) $ay^m \equiv_I ay^n$

Lema 5.3. *Za proizvoljno* $n \in \mathbb{N}$ *imamo da je*

$$Hl_n + yHl_{n-1} + y^2Hl_{n-2} \equiv_I x^{n-2}T_2$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
&Hl_n + yHl_{n-1} + y^2Hl_{n-2} = \\
&a(1 + x \cdots + x^{n-1}) + ay(1 + x \cdots + x^{n-2}) + ay^2(1 + x \cdots + x^{n-3}) = \\
&a(1 + x + x^2 \cdots + x^{n-3})(1 + y + y^2) + ax^{n-2}(1 + x + y)
\end{aligned}$$

□

Iz leme 5.2 i leme 5.3 sledi

Propozicija 5.4.

$$T_n \equiv_I \begin{cases} kT_2 & \text{if} \quad n = 3k - 1 \\ kxT_2 & \text{if} \quad n = 3k \\ kx^2T_2 + a & \text{if} \quad n = 3k + 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Iz propozicije 5.1 i teoreme 5.4 dobijamo:

Propozicija 5.5. *Polinom kojim opisujemo region* S_n *kongruentan je mod* $J_{(P(\mathcal{T}))^G}$ *sa*

$$k[a(1 + x + y) + b(1 + u + y) + c(1 + u + v) + d(1 + x + v)] - (a + b + c + d) \quad (n = 3k - 1)$$

$$k[ax(1 + x + y) + bu(1 + u + y) + cu(1 + u + v) + dx(1 + x + v)] - (a + b + c + d) \quad (n = 3k)$$

$$k[ax^2(1 + x + y) + bu^2(1 + u + y) + cu^2(1 + u + v) + dx^2(1 + x + v)] \quad (n = 3k + 1)$$

Dokaz sledeće propozicije sledi iz propozicije 5.5 direktnim izračunavanjem ili upotrebom odgovarajućeg softvera.

Propozicija 5.6. *Polinom oblasti S_n u prstenu $\overline{P}^G$ kongruentan je mod $J_{(B(\mathcal{T}))^G}$ sa $kP-Q$ pri čemu je:*

- *Za $n = 3k - 1$*

$$P = -s_1 - s_2 + s_1^2 s_2 + s_1 s_2^2$$

$$Q = s_1 + s_2$$

- *Za $n = 3k$*

$$P = -s_1 - 9s_2 + s_1^2 s_2 - s_1 s_2^2 + s_1^3 s_2^2 + 2s_2^3 + s_1^2 s_2^3 - s_1^2 s_2 t - 3s_1 s_2^2 t + 2s_2 t^2$$

$$Q = s_1 + s_2$$

- *Za $n = 3k + 1$*

$$\begin{aligned} P \;=\; & s_1 - 7s_2 - 10s_1 s_2^2 + s_1^3 s_2^2 + 2s_2^3 - s_1^2 s_2^3 + s_1^4 s_2^3 + 2s_1 s_2^4 + s_1^3 s_2^4 + s_1 t + 13s_2 t - \\ & -2s_1^2 s_2 t - s_1 s_2^2 t - 2s_1^3 s_2^2 t - 3s_2^3 t - 4s_1^2 s_2^3 t + 2s_2 t^2 + s_1^2 s_2 t^2 + 6s_1 s_2^2 t^2 - 3s_2 t^3 \end{aligned}$$

$$Q = 0$$

Teorema 5.7. *Neka je S_n region kvadratne rešetke predstavljen na slici 3.2 gde je n broj kvadratića rešetke koji se nalaze na svakoj od njegovih stranica. Region S_n je moguće simetrično s obzirom na koordinatni početak, $\mathbb{Z}-$popločati tribonima ako i samo ako je $n = 3k + 1$ za neki ceo broj k.*

Dokaz:

Iz propozicije 5.6 polinom koji je kongruentan polinomu oblasti S_n može se opisati u promenljivim s_1, s_2 i t u obliku $kP - Q$.

Uz pomoć softvera *Wolfram Mathematica 9.0* možemo odrediti ostatke $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ redukcije polinoma P i Q sa grebnerovom bazom $GJ_{(P(\mathcal{T}))^G}$ ideala $J_{(P(\mathcal{T}))^G}$. Tako dobijamo:

If $n = 3k - 1$	$\overline{P} = s_1 + 7s_2 - 2s_2^3$	$\overline{Q} = s_1 + s_2$
If $n = 3k$	$\overline{P} = s_1 + 2s_2 + s_2^3$	$\overline{Q} = s_1 + s_2$
If $n = 3k + 1$	$\overline{P} = 0$	$\overline{Q} = 0$

Vidimo da je ostatak pri deljenju polinoma $kP - Q$ Grebenrovom bazom ideala $J_{(B(\mathcal{T}))^G}$ jednak nuli samo u slučaju $n = 3k + 1$. U preostala dva slučaja polinom $kP - Q$ se ne može reducirati na nulu jer zbog strukture polinoma koji čine Grebnrovu bazu uvek dobijamo ostatak koji je jednak sumi monoma s_1, s_2 and s_2^3 a taj ostatak se ne može dalje reducirati. □

Glava 4

Popločavanje u heksagonalnoj rešetki simetrično u odnosu na rotaciju za ugao od 120°

Sada ćemo se baviti problemom simetričnog $\mathbb{Z}-$popločavanja tribonima u šestougaonoj rešetki u ravni. Označimo sa S_{hex} grupu svih izometrijskih preslikavanja u odnosu na koja je posmatrana šestougaona rešetka invarijantna. Neka je O jedna od belih tačaka rešetke $\overline{\Lambda}$ koju ćemo zvati koordinatni početak i neka su a, b i c tri susedna šestougla koje ćemo smatrati generatorima modula $P(A)$ kako je prikazano na slici2.6. Razmatrat ćemo popločavanja invarijantna u odnosu na podgrupu G grupe S_{hex} koja je generisana rotacijom za ugao od 120° oko zajedničkog vrha O generatornih heksagona a, b i c.

Grupa G ima tri elementa, identičko preslikavanje, rotaciju ρ za ugao od 120° i rotaciju ρ^2 za ugao od 240°, pa je $|G| = 3$ što znači da je $G \cong C_3$.

Tribonom ćemo i sada zvati poliomino koji s sastoji od tri susjedne ćelije. U heksagonalnoj rešetki tribon je translat jednog od sledećih oblika:

$$\begin{aligned} T_x(a) &= a(x^{-1} + 1 + x) \\ T_y(a) &= a(y^{-1} + 1 + y) \\ T_z(a) &= a(z^{-1} + 1 + z) \end{aligned}$$

Označimo sa $\mathcal{T}$ skup tribona.

$$\mathcal{T} = \{T_x(a), T_y(a), T_z(a)\}$$

Skup $\mathcal{T}$ je skup baznih oblika i invarijantan je u odnosu na grupu C_3. Da bi iskoristili kriterije za $G-$simetrično $\mathbb{Z}-$ popločavanje navedene u glavi 2 prvo ćemo da odredimo podprsten prstena P čiji su elementi invarijantni u odnosu na delovanje grupe C_3, a zatim i da nađemo generatore modula $(P(\mathcal{T}))^{C_3}$.

4.1 Delovanje grupe C_3 na prsten $P = \mathbb{Z}[x, y, z]/\langle xyz - 1\rangle$

Ranije smo rekli da grupa $G \cong C_3$ deluje na elemente modula $P(A)$ pri čemu delovanje grupe G na elemente prstena P ne mora da bude (i u našem slučaju nije) trivijalno. Skup svih elemenata koji su invarijantni u odnosu na delovanje grupe C_3 je podprsten prstena P koji ćemo u skladu sa uobičajemim oznakama, označiti sa P^{C_3}.

Grupa permutacija S_3 deluje na prsten $\mathbb{Z}[x, y, z]$ permutirajući promenljive x, y i z, a prsten svih polinoma koji su invarijantni u odnosu na ovo delovanje označavamo sa $\mathbb{Z}[x, y, z]^{S_3}$. Znamo da je taj prsten generisan elementarnim simetričnim funkcijama

$$\sigma_1 = x + y + z, \quad \sigma_2 = xy + yz + zx, \quad \sigma_3 = xyz$$

Polinomi oblika

$$\begin{array}{ll} \sigma_3^p = x^p y^p z^p & (p \geq 0) \\ \Delta(x^p y^p z^q) = x^p y^p z^q + y^p z^p x^q + z^p x^p y^q & (p \neq q) \\ H(x^p y^q z^r) = x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p x^q y^r + y^p x^q z^r + x^p z^q y^r + z^p y^q x^r & (p \neq q \neq r \neq p) \end{array} \tag{4.1}$$

takođe čine $\mathbb{Z}-$ bazu prstena $\mathbb{Z}[x, y, z]^{S_3}$

Grupu C_3 možemo posmatrati i kao podgrupu grupe permutacija S_3. C_3 je tada pogrupa od S_3 generisana na primer, tročlanim ciklusom $(1, 2, 3)$ koji na skup promenljivih $\{x, y, z\}$ deluje tako da x menja sa y, y sa z i z sa x.

Polinomi koji čine bazu prstena invarijanti $\mathbb{Z}[x, y, z]^{C_3}$ su oblika

$$\begin{array}{ll} x^p y^p z^p & (p \geq 0) \\ \Delta(x^p y^q z^r) = x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p x^q y^r & (p, q, r) \neq (p, p, p) \end{array} \tag{4.2}$$

Na skupu $\mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3}$ možemo definisati preslikavanje I sa

$$I(p(x,y,z)) = p(y,x,z)$$

Jasno je da vredi $I^2 = id$, tj, I je involucija na $\mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3}$.

Ako definišemo monomorfizam $\alpha : \mathbb{Z}[x,y,z]^{S_3} \to \mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3}$ sa $\alpha(x^p y^p z^p) = x^p y^p z^p$, onda je $\mathrm{Im}(\alpha)$ skup fiksnih tačaka involucije I.

Tako imamo da vredi:

$$\alpha(\Delta(x^p y^p z^q)) = \Delta(x^p y^p z^q) \ \text{ i } \ \alpha(H(x^p y^q z^r)) = \Delta(x^p y^q z^r) + I(\Delta(x^p y^q z^r)). \tag{4.3}$$

Ovo na daje osnov za sledeću propoziciju:

Propozicija 1.1. *Dijagram*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \langle xyz-1\rangle^{S_3} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[x,y,z]^{S_3} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2] & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha'' & \\ 0 & \longrightarrow & \langle xyz-1\rangle^{C_3} & \longrightarrow & \mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}[x,y,z]/\langle xyz-1\rangle)^{C_3} & \longrightarrow 0 \end{array} \tag{4.4}$$

je komutativan, pri čemu je $\langle xyz-1\rangle \subset \mathbb{Z}[x,y,z]$ glavni ideal generisan sa $xyz-1$. Horizontalni nizovi su egzaktni i razloživi (rascepljivi), a vertikalni homomorfizmi α, α' i α'' injektivni.

Dokaz: Egzaktnost prve vrste u dijagramu posledica je činjenice da je $\mathbb{Z}[x,y,z]^{S_3} = \mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]$ i da je $\langle xyz-1\rangle^{S_3} = \mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3](\sigma_3-1)$. Eksplicitni zapis S_3-invarijantnih i C_3-invarijantnih polinoma u prstenu $\mathbb{Z}[x,y,z]$ ((4.1) and (4.2)) omogućava nam da na sličan način opišemo i invarijantne polinome u idealu (podmodulu) $\langle xyz-1\rangle = \langle \sigma_3 - 1\rangle$. Na primer, bazni S_3-invarijantni polinomi u $\langle \sigma_3-1\rangle^{S_3}$ su oblika:

$$\sigma_3^p(\sigma_3-1), \quad \Delta(x^p y^p z^q)(\sigma_3-1), \quad H(x^p y^q z^r)(\sigma_3-1). \tag{4.5}$$

Slično, C_3-invarijantni polinomi u $\langle \sigma_3-1\rangle^{C_3}$ su dati sa:

$$\sigma_3^p(\sigma_3-1) \quad \text{and} \quad \Delta(x^p y^p z^q)(\sigma_3-1). \tag{4.6}$$

Niz $\mathbb{Z}[C_3]$-modula,

$$0 \to \langle xyz-1\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{Z}[x,y,z]/\langle xyz-1\rangle \to 0 \tag{4.7}$$

je egzaktan niz.

Ideal $\langle xyz-1\rangle$ možemo posmatrati i kao slobodan $\mathbb{Z}$-podmodul modula $\mathbb{Z}[x,y,z]$ generisan binomima:

$$x^p y^q z^r (xyz-1) = x^{p+1}y^{q+1}z^{r+1} - x^p y^q z^r$$

Ovi binomi su C_3-invarijantni ako i samo ako je $p=q=r$. Iz toga lako možemo zaključiti kakva je struktura $\langle xyz-1\rangle$ kao $\mathbb{Z}[C_3]$-modula. Ovaj modul možemo napisati u obliku direktne sume $\langle xyz-1\rangle \cong T \oplus F$ $\mathbb{Z}[C_3]$-modula gdje je T trivijalan, a F je slobodan $\mathbb{Z}[C_3]$-modul.

Odatle sledi da je:

$$H^1(C_3; \langle xyz-1\rangle) \cong 0$$

a iz dugog egzaktnog niza u kohomologiji sledi egzaktnost druge vrste u dijagramu (4.4),

$$0 \to \langle \sigma_3 - 1\rangle^{C_3} \longrightarrow \mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3} \longrightarrow (\mathbb{Z}[x,y,z]/\langle xyz-1\rangle)^{C_3} \to 0. \tag{4.8}$$

Specijalno, vredi i:

$$(\mathbb{Z}[x,y,z]/\langle xyz-1\rangle)^{C_3} \cong \mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3}/\langle xyz-1\rangle^{C_3}. \tag{4.9}$$

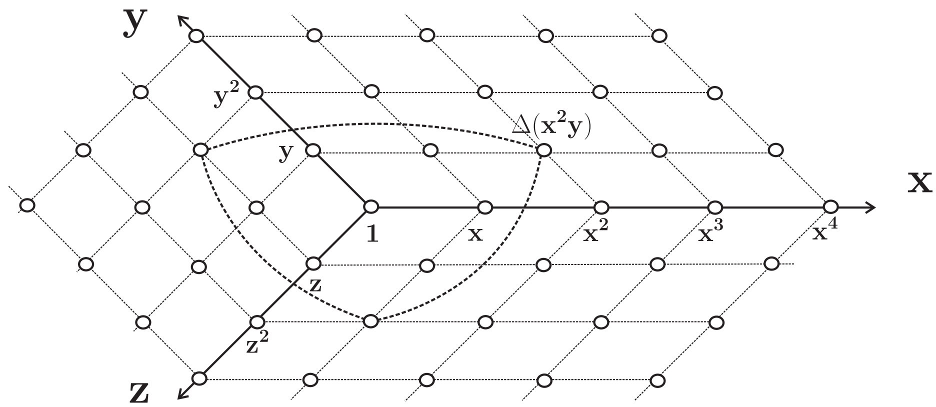
Injektivnost homomorfizama α i α' sledi iz (4.3). Da bi dokazali injektivnost od α'' primetimo da je (u smislu (4.2) i (4.6)) $\mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3}/\langle xyz-1\rangle^{C_3}$ izomorfno podmodulu $\mathbb{Z}[x,y,z]^{C_3}$ generisanom sa $1 = x^0y^0z^0, \Delta(x^p) = x^p + y^p + z^p$ i $\Delta(x^py^q) = x^py^q + y^pz^q + z^px^q$ (gde je $(p,q) \neq (0,0)$). Slično, zbog (4.1) i (4.5) zaključujemo da je $\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2] \cong \mathbb{Z}[x,y,z]^{S_3}/\langle xyz-1\rangle^{S_3}$ generisan sa $1 = x^0y^0z^0, \Delta(x^p), \Delta(x^py^p)$ i $H(x^py^q)$. Iz toga i (4.3) zaključujemo da je i α'' takođe injektivno. $\square$

Prsten P je kao slobodan $\mathbb{Z}$-modul generisan monomima $x^py^qz^r$ koji nisu deljivi sa xyz, tj. monomima $x^py^qz^r$ koji zadovoljavaju najmanje jedan od uslova $p=0, q=0, r=0$. Svaki od tih monoma pridružen je beloj tački rešetke $\overline{\Lambda}$ odnosno XYZ-koordinatnom sistemu (slika 4.1).

Prsten P^{C_3} of C_3-invarijantnih polinoma je kao slobodni $\mathbb{Z}$-modul generisan "trouglovima", odnosno polinomima oblika

$$\Delta(x^py^q) = x^py^q + y^pz^q + z^px^q$$

gde je $p>0$ ili $q>0$ i konstantnim monomom $1 = x^0y^0z^0$. Primetimo da je $\Delta(x^py^q)$ i C_3-simetrizirana verzija polinoma x^py^q. Takođe, $\Delta(1) = 3 = 1+1+1$. Napomenimo da je $x^p y^q$ vodeći monom polinoma $\Delta(x^p y^q)$ u odnosu na graduirani leksikografski poredak za $x > y > z$ pa ćemo ubuduće i polinome $\Delta(y^k) = \Delta(z^k)$ uvek označavati sa $\Delta(x^k)$.



Slika 4.1: Polinom $\Delta(x^2y) = x^2y + y^2z + z^2y$ kao jedan od Δ-polinoma koji generiše (nad $\mathbb{Z}$) prsten C_3-invarijantnih polinoma u P.

Lema 1.2. *U prstenu $P = \mathbb{Z}[x, y, z]/\langle xyz - 1\rangle$ vrede sledeći identiteti:*

$$\Delta(xy)\Delta(x^{p-1}y^{q-1}) = \Delta(x^py^q) + \Delta(x^{p-1}y^{q-2}) + \Delta(x^{p-2}y^{q-1}) \quad (p \geq 2, q \geq 2) \tag{4.10}$$

$$\Delta(x)\Delta(x^{p-1}y^q) = \Delta(x^py^q) + \Delta(x^{p-1}y^{q+1}) + \Delta(x^{p-2}y^{q-1}) \quad \text{za } p \geq 2 \text{ i } q \geq 1 \tag{4.11}$$

$$\Delta(x)\Delta(x^py^{q-1}) = \Delta(x^py^q) + \Delta(x^{p+1}y^{q-1}) + \Delta(x^{p-1}y^{q-2}) \quad \text{za } p \geq 1 \text{ i } q \geq 2 \tag{4.12}$$

$$\Delta(x)\Delta(x^{p-1}) = \Delta(x^p) + \Delta(x^{p-1}y) + \Delta(xy^{p-1}) \quad \text{za } p \geq 2 \tag{4.13}$$

$$\Delta(xy)\Delta(x^{p-1}) = \Delta(x^py) + \Delta(x^{p-2}) + \Delta(xy^p) \quad \text{za } p \geq 2. \tag{4.14}$$

Kako je preslikavanje α'' injektivno (propozicija 1.1) prsten $\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$ možemo smatrati podprstenom prstena $P = \mathbb{Z}[x, y, z]/\langle xyz - 1\rangle$, tako da su i prsten P i prsten P^{C_3} moduli nad prstenom $\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$.

Teorema 1.3. *Prsten $P^{C_3} = (\mathbb{Z}[x, y, z]/\langle xyz-1\rangle)^{C_3}$ C_3-invarijantnih polinoma je izomorfan (kao modul nad prstenom $P_\sigma = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$) slobodnom modulu $P_\sigma \cdot 1 \oplus P_\sigma \cdot \theta$ ranga 2 gde je $\theta = \Delta(x^2y)$ (Slika 4.1). Osim toga,*

$$\Theta = \Theta(\sigma_1, \sigma_2, \theta) := \theta^2 - (\sigma_1\sigma_2 - 1)\theta + \sigma_2\Delta(x^2y^2) + \sigma_1\sigma_2 + \Delta(x^3) = 0 \tag{4.15}$$

pa postoji izomorfizam prstena ,

$$(\mathbb{Z}[x,y,z]/\langle xyz-1\rangle)^{\mathbb{Z}_3} \cong \mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2][\theta]/\langle\Theta\rangle \tag{4.16}$$

pri čemu je ideal $\langle\Theta\rangle$ glavni ideal prstena $\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2][\theta]$ generisan sa Θ.

Dokaz: Po definiciji imamo da je $\Delta(x)=\sigma_1, \Delta(xy)=\sigma_2, \theta=\Delta(x^2y)$ i $\theta'=\Delta(xy^2)$. Pokažimo sada da je prsten P^{C_3} C_3-invarijantnih polinoma u prstenu P generisan kao $\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2]$-modul sa 1 i θ.

- Ako je $p\geq 2$ i $q\geq 2$ onda iz identiteta (4.10) (lema 1.2) sledi da polinom $\Delta(x^py^q)$ može biti predstavljen u leksikografskom poretku manjim Δ-polinomima pomnoženim elementima iz $\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2]$.

- Ako je $p\geq 3$ i $q=1$ onda iz leme 1.2 (jednakost (4.11)) sledi da polinom $\Delta(x^py)$ može biti reduciran leksikografski manjim Δ-polinomima.

- Ako je $p\geq 2$ onda je polinom $\Delta(x^p)$ prema lemi 1.2 (jednakost (4.13)) moguće reducirati leksikografski manjim Δ-polinomima.

Zbog simetrije zaključujemo da isto vredi i za polinome oblika $\Delta(xy^q)$. Dakle, svi Δ-polinomi mogu biti napisani u obliku sume $\theta,\theta',\sigma_1,\sigma_2$ i 1 sa koeficijentima iz prstena $\mathbb{Z}$. Kako je, osim toga, $\theta+\theta'=\sigma_1\sigma_2-3$ (jednakost (4.14)) Zaključujemo da je

$$P^{C_3}=\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2]\cdot 1+\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2]\cdot\theta. \tag{4.17}$$

Sombol za sumu“+” u gornjoj formuli može biti zamenjen simbolom direktne sume “$\oplus$”. Naime, ako je $P+Q\theta=0$ za neko $P,Q\in\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2]$ onda (zamenjujući promenljive x i y) imamo da je $P+Q\theta'=0$ što je moguće samo u slučaju. $P=Q=0$.

Iz (4.17) imamo da je $\theta^2=P+Q\theta$ za neke, $P,Q\in\mathbb{Z}[\sigma_1,\sigma_2]$ što nas direktnim izračunavanjem dovodi do jednakosti (4.15) i izomorfizma (4.16). $\square$

4.2 Podmodul modula $(P(A))^{C_3}$ generisan skupom tribona

Već smo rekli da je tribon (ili triomino) figura u rešetki koju čine tri susedne ćelije koje dele zajedničku stranicu. Ako je $A=x^py^qa$ crna tačka $\overline{\Lambda}-$rešetke u XOY uglu, onda su triboni sa centrom u tački A dati sa:

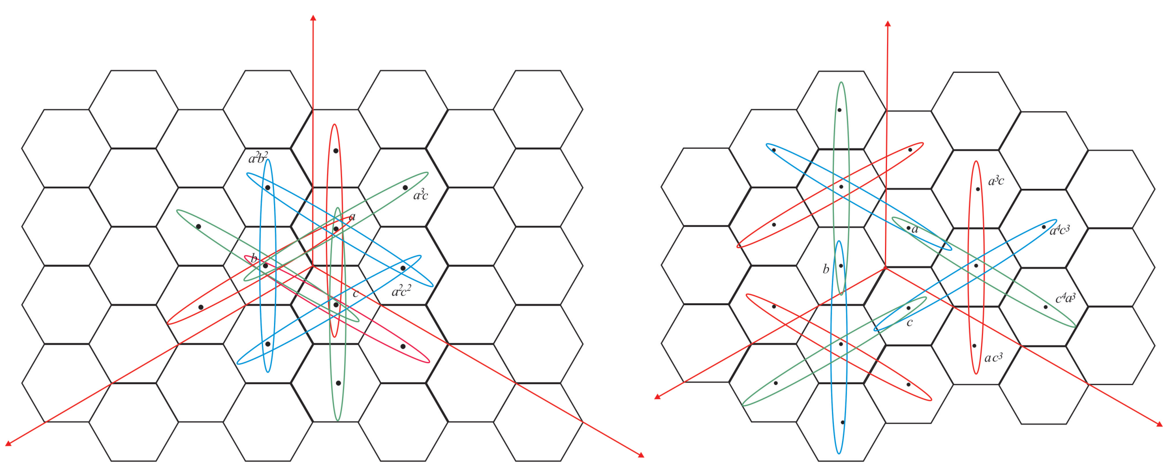
$$
\begin{aligned}
T_x(A) &= x^p y^q a(x^{-1}+1+x) \\
T_y(A) &= x^p y^q a(y^{-1}+1+y) \\
T_z(A) &= x^p y^q a(z^{-1}+1+z)
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Sa $\Delta(T_x(A))$ označavat ćemo triplet tribona od kojih je prvi translat T_x tribona tako da mu je centar u tački A, drugi njegova rotacija za ugao od $120°$ i treći njegova rotacija za ugao od $240°$ oko tačke O. Tako imamo da je, na primer:

$$
\begin{aligned}
\Delta(T_y(A)) &= \Delta(x^p y^q a T_x) \\
&= x^p y^q a(y^{-1}+1+y) + y^p z^q a(z^{-1}+1+z) + z^p x^q a(x^{-1}+1+x) \\
&= \Delta(x^p y^{q-1} a) + \Delta(x^p y^q a) + \Delta(x^p y^{q+1} a)
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

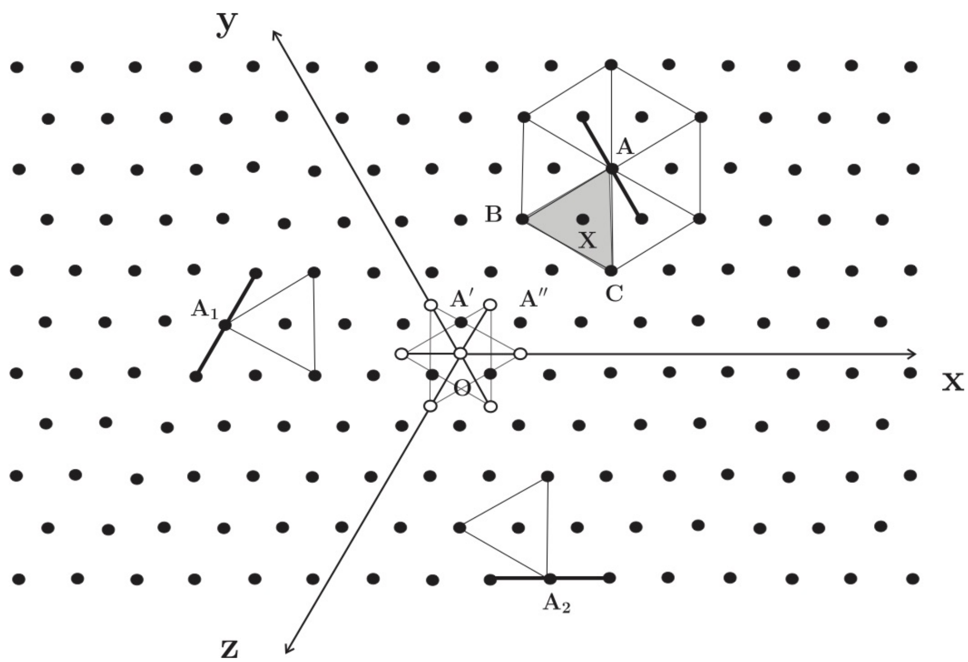
Teorema 2.1. *Podmodul $P(\mathcal{T})^{C_3} \subset P(A)^{C_3}$ svih poliomina u heksagonalnoj rešetki koje je moguće $\mathbb{Z}-$popločati elementima skupa $\mathcal{T}$ tako da popločavanje bude invarijantno u odnosu na grupu C_3 koja je generisana rotacijom za ugao od $120°$, kao modul nad prstenom P^{C_3}, generisan je sledećim C_3-simetričnim tripletima tribona*

$$
\Delta(T_x(a)),\ \Delta(T_y(a)),\ \Delta(T_z(a)),\ \Delta(T_x(ax)),\ \Delta(T_y(ax)),\ \Delta(T_z(ax)). \tag{4.20}
$$



Slika 4.2: Tripleti tribona $\Delta(T_x(a))$, $\Delta(T_y(a))$, $\Delta(T_z(a))$, $\Delta(T_x(ax))$, $\Delta(T_y(ax))$, $\Delta(T_z(ax))$

Dokaz: Neka je $A = Ma = x^p y^q a \in A_{hex}$ heksagon koji je predstavljen crnom tačkom u $\angle XOY$ uglu rešetke $\overline{\Lambda}$ i $M = x^p y^q \in P$ odgovarajuća bela tačka (Figure 4.3). Tri tribona sa koji imaju centar u tački $A = Ma$ su MaT_x, MaT_y, MaT_z. Pokažimo da je svaki od



Slika 4.3: Δ-polinomi i $(P(\mathcal{T}))^{C_3}$ modul

njima pridruženih C_3-simetričnih tripleta tribona $\Delta(MaT_x), \Delta(MaT_y), \Delta(MaT_z)$ sadržan u P^{C_3}-modulu generisanom sa šest navedenih tribona. (4.20).

Na slici 4.3 je predstavljen slučaj za $M = x^4y^3$ i tribon $MaT_y = x^4y^3(y^{-1} + 1 + y)a$. Iskoristit ćemo ovaj specijalan slučaj da opišemo opšti postupak koji nam omogućava da triplete $\Delta(MaT_x), \Delta(MaT_y), \Delta(MaT_z)$ predstavimo preko tripleta koji su u neposrednoj blizini koordinatnog početka O.

Neka su $\Delta(x) = x+y+z = \sigma_1$ i $\Delta(xy) = xy+yz+zx = \sigma_2$ dva trougla sa vrhovima u belim tačkama rešetke $\overline{\Lambda}$ koji su predstavljeni na slici 4.3. Ako transliramo ove trouglove tako da okružino tačku A dobićemo pravilni šestougao. Pretpostavimo da koordinatni početak O nije sadržan u centru ovog šestougla. Odatle sledi da jedan od šest trouglova koji okružuju tačku A (osenčeni trougao ABC na slici 4.3) ima osobinu da segment OA preseca stranicu BC nasuprot vrha A. (Primetimo da koordinatni početak O može biti na segmentu BC a to se dešava u slučaju kada je $A \in \{ya, xya\}$.)

Direkta posledica ovoga je da su dužine segmenata OB, OC, OX strogo manje od dužine segmenta OA. Zaista, prema konstrukciji imamo da je $\angle ACO \geq 60^\circ \geq \angle CAO$, i da je najmanje jedna od ovih nejednakosti stroga nejednakost. U našem slučaju trougao

ABC je translat trougla $\Delta(xy)$ (druga mogućnost bi bila translat trougla $\Delta(x)$). Kako je $\Delta(xy)X = A + B + C$ imamo da vredi:

$$\Delta(xy)(y^{-1} + 1 + y)X = (y^{-1} + 1 + y)A + (y^{-1} + 1 + y)B + (y^{-1} + 1 + y)C \qquad (4.21)$$

Stavimo da je $\Delta_Y = \Delta((y^{-1} + 1 + y)Y)$. Simetrizirajući jednakost (4.21) i sabirajući (drugim recima, primenjujući Δ-operator na obe strane jednakosti (4.21)) dobijamo da je

$$\Delta(xy)\Delta_X = \Delta_A + \Delta_B + \Delta_C. \qquad (4.22)$$

Vidimo, dakle, da se svaki C_3-simetrični triplet tribona Δ_A može predstaviti u obliku sume tripleta tribona koji su bliže koordinatnom početku u slučaju kada šestougao koji okružuje tačku A ne sadrži koordinatni početak O u svojoj unutrašnjosti.

Slučajevi koji nam preostaju tj. kada je $A' = a$ i $A'' = xa$ odnose se upravo na šest C_3-simetričnih tripleta tribona koji su navedeni u teoremi. $\square$

4.3 Rešetke, moduli i prsteni

Tačke rešetke $\overline{\Lambda}$ koja je generisana vektorima $\vec{u_1}$ i $\vec{u_2}$ (glava 2) označavali smo crnom, crvenom i belom bojom da bi istakli činjenicu da skupovi pomenutih tačaka čine klase količničke grupe $\overline{\Lambda}/\Lambda$, gde je Λ podrešetka rešetke $\overline{\Lambda}$ indeksa 3 generisana vektorima $\vec{v_1}$ i $\vec{v_2}$.

Grupni prsten rešetke Λ je prsten $P = \mathbb{Z}[x, y, z]/\langle xyz - 1\rangle$. Na isti način na koji je formiran prsten P možemo formirati i grupni prsten $\overline{P}$ rešetke $\overline{\Lambda}$. Promenljive prstena $\overline{P}$ ćemo označiti sa a, b i c, pa tako imamo da je

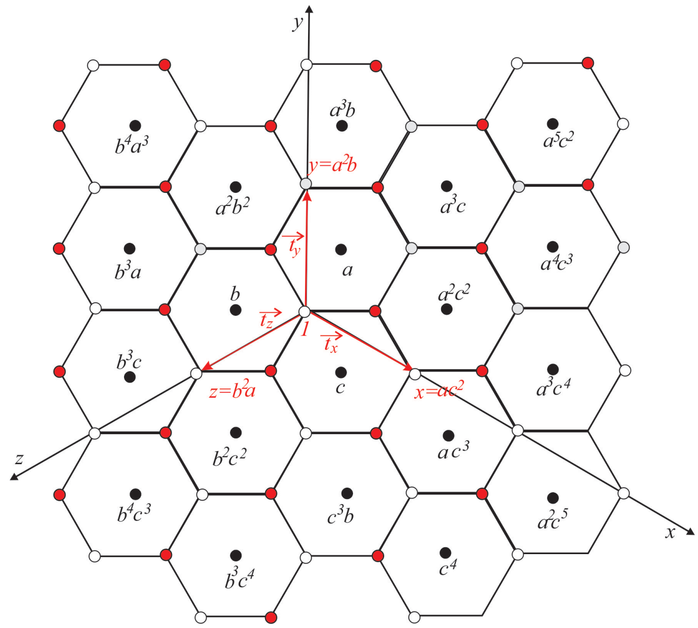
$$\overline{P} = \mathbb{Z}[a, b, c]/\langle abc - 1\rangle$$

Svi strukturni rezultati koji su dokazani za prsten P, vrede i za prsten $\overline{P}$. Iz teoreme1.3 sledi da postoji izomorfizam

$$(\mathbb{Z}[a, b, c]/\langle abc - 1\rangle)^{C_3} \cong \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, \theta]/\langle\Theta\rangle$$

gde je $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$, $\theta = a^2b + b^2c + c^2a$ i

$$\Theta = \theta^2 - (\sigma_1\sigma_2 - 1)\theta + \sigma_2\Delta(a^2b^2) + \sigma_1\sigma_2 + \Delta(a^3)$$



Slika 4.4: Rešetka $\overline{\Lambda}$ i njena podrešetka Λ

Ako u prstenu $\overline{P}$ definišemo graduaciju po stepenima mod 3, onda je podprsten P prsten svih elemenata koji su u $\overline{P}$ graduiranih nulom. Prsteni $\overline{P}^{C_3}$ i P^{C_3} prirodno nasleđuju graduaciju iz prstena $\overline{P}$

Svaka crna tačka rešetke $\overline{\Lambda}$ reprezentuje po jednu heksagonalnu ćeliju , tj. predstavlja po jedan element modula $P(A)$, a kao element prstena $\overline{P}$ graduirana je jedinicom.
Kako je $x = ac^2$, $y = a^2b$ i $c = b^2a$, $\Delta-$polinomi $\Delta(x^py^q) = x^py^q + y^pz^q + z^px^q$ koji u prstenu P zajedno sa 1 generišu prsten P^{C_3} graduirani su nulom u prstenu $\overline{P}$, a tripleti tribona koji generišu modul $(P(\mathcal{T}))^{C_3}$ $\Delta(x^py^qa) = x^py^qa + y^pz^qb + z^px^qc$ graduirani su u prstenu $\overline{P}$ sa jedinicom. Ova činjenica nam omogućava da postavimo sledeću propoziciju koja se dokazuje na isti način kako je dokazana propozicija 3.1 u glavi 3.

Propozicija 3.1. *Neka je $M \subset (P(A))^{C_3}$ $P^{C_3}-$podmodul modula $P(A)$ i neka je $I_M \subset \overline{P}^{C_3}$ ideal u prstenu $\overline{P}^{C_3}$ generisan sa M. Ako je $p \in (P(A))^{C_3}$ onda je*

$$p \in M \Longleftrightarrow p \in I_M$$

Ova propozicija nam omogućava da problem pripadnosti podmodulu svedemo na problem pripadnosti idealu u prstenu $\overline{P}^{C_3}$.

4.4 Ideal generisan tribonima

Izrazimo sada polinome koji generišu ideal $I_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ u promenljivim s_1, s_2, t u prstenu $\overline{P}^{C_3}$.

Propozicija 4.1.

$$\begin{array}{rcl} \Delta(T_x(a)) & = & 2s_2^2 - 3s_1 \\ \Delta(T_y(a)) & = & s_1t - s_2^2 + 3s_1 \\ \Delta(T_z(a)) & = & s_1^2s_2 - s_1t - s_2^2 \\ \Delta(T_x(ax)) & = & s_2^2t - s_1^2s_2 + 2s_2^2 - s_1t \\ \Delta(T_y(ax)) & = & s_1^2s_2 - s_2^2 - 3s_1 \\ \Delta(T_z(ax)) & = & s_2^3s_1 - s_2^2t - 2s_1^2s_2 - s_2^2 + 3s_1 + s_1t \end{array} \tag{4.23}$$

Dokaz: Gornje relacije se dokazuju direktnim izračunavanjem sledeći algoritam opisan u teoremi 1.3. Na primer:

$$\Delta(T_x(a)) = \Delta(a^2b^2 + a + a^2c^2) = 2\Delta(a^2b^2) + \Delta(a) = 2s_2^2 - 4s_1 + s_1 = 2s_2^2 - 3s_1.$$

Kako je

$$\Delta(a^3b) = \Delta(a)\Delta(a^2b) - \Delta(a^2b^2) - \Delta(a) = s_1t - (s_2^2 - 2s_1) - s_1 = s_1t - s_2^2 + s_1$$

zaključujemo da vredi

$$\Delta(T_y(a)) = \Delta(c + a + a^3b) = 2s_1 + \Delta(a^3b) = s_1t - s_2^2 + 3s_1.$$

□

Označimo sa $J'_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ ideal u prstenu $\overline{P}$ koji je generisan gore navedenim polinomima, tj.

$$\begin{array}{rcl} J'_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}} = & \langle & 2s_2^2 - 3s_1, s_1t - s_2^2 + 3s_1, s_1^2s_2 - s_1t - s_2^2, \\ & & s_2^2t - s_1^2s_2 + 2s_2^2 - s_1t, s_1^2s_2 - s_2^2 - 3s_1, s_2^3s_1 - s_2^2t - 2s_1^2s_2 - s_2^2 + 3s_1\rangle \end{array}$$

Na osnovu propozicije 3.1 problem pripadnosti modulu reduciran je na problem pripadnosti idealu za ideal $I_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ u prstenu $\overline{P}^{C_3} \cong \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]/\langle\Theta\rangle$ odnosno na problem pripadnosti idealu

$$J_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}} := J'_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}} + \langle\Theta\rangle \subset \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]. \tag{4.24}$$

gde je Θ je polinom određen u teoremi 1.3 (relacija 4.16) .

Uz pomoć programskog paketa *Wolfram Mathematica* 9.0 odredili smo Grebnerovu bazu ideal $J_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$.

Propozicija 4.2. *Grebnerova baza* $GJ_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ *ideala* $J_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}} \subset \mathbb{Z}[s_1, s_2, t]$ *s obzirom na leksikografski poredak promenljivih* s_1, s_2, t *data je sledećim polinomima*

$$\begin{array}{cccc} 27+9t+3t^2 & -27+t^3 & 9s_2+3s_2t+s_2t^2 & 3s_2^2 \\ s_2^2t & s_2^4 & 3s_1+s_2^2 & s_2^2+s_1t \\ s_1s_2^3 & s_1^2s_2 & 9+s_1^3+s_2^3+3t+t^2 & \end{array} \tag{4.25}$$

4.5 Trougaoni region T_N

Odredimo sada pogodnu formu polinoma u prstenu $\overline{P}^{C_3}$ kojim je opisan trougaoni region T_N gde je N broj heksagona na svakoj od stranica trougla. Centar trougla T_N nalazi se u centru koordinatnog početka O i on sam je invarijantan u odnosu na delovanje grupe C_3.
U cilju da dobijemo što lepšu i kompaktniju formu traženog polinoma prvo ćemo razmotriti sledeće:

Neka je $I \subset \mathbb{Z}[x, y]$ ideal,

$$I = \langle 1 + x + x^2, 1 + y + y^2, 1 + xy + (xy)^2 \rangle. \tag{4.26}$$

Kao što je uobičajeno, za p i q ćemo reći da su kongruentni mod I ako je $p - q \in I$. Izvedimo neke jednostavne kongruencije koje će nam biti potrebne u daljem računu.

Lema 5.1. *Ako je* $m - n$ *deljivo sa* 3 *onda je,*

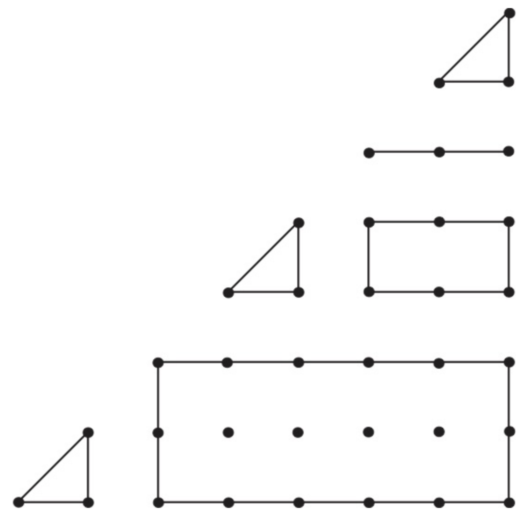
$$x^m \equiv_I x^n \qquad y^m \equiv_I y^n \qquad (xy)^m \equiv_I (xy)^n. \tag{4.27}$$

Lema 5.2.

$$L_k := 1 + x + \dots x^{k-1} \equiv_I \begin{cases} 0 & \textit{ako je } k \equiv 0 \ \textit{mod } 3 \\ 1 & \textit{ako je } k \equiv 1 \ \textit{mod } 3 \\ 1+x & \textit{ako je, } k \equiv 2 \ \textit{mod } 3. \end{cases} \tag{4.28}$$

Lema 5.3.

$$\Box_k := (1 + x + \dots x^{k-1})(1 + y + \dots y^{k-1}) \equiv_I \begin{cases} 0 & \textit{ako je } k \equiv 0 \ \textit{mod } 3 \\ 1 & \textit{ako je } k \equiv 1 \ \textit{mod } 3 \\ x^2y^2 & \textit{ako je } k \equiv 2 \ \textit{mod } 3. \end{cases} \tag{4.29}$$



Slika 4.5: Dokaz relacije $\Delta_{3n-1} \equiv_I n\Delta_2$.

Njutnov poligon polinoma $\Box_k$ je kvadrat sa vrhovima $\{(0,0),(0,k-1),(k-1,0),(k-1,k-1)\}$ koji ima tačno k celobrojnih tačaka na svakoj od strana. Slično, polinom

$$\Delta_k = L_k + xyL_{k-1} + (xy)^2 L_{k-2} + \ldots + (xy)^{k-1} L_0 \tag{4.30}$$

sadrži sve monome koji su pridruženi parovima celobrojnih tačaka unutar trougla sa vrhovima $\{(0,0),(k-1,0),(k-1,k-1)\}$ (Δ_8 je prikazan na slici 4.5).

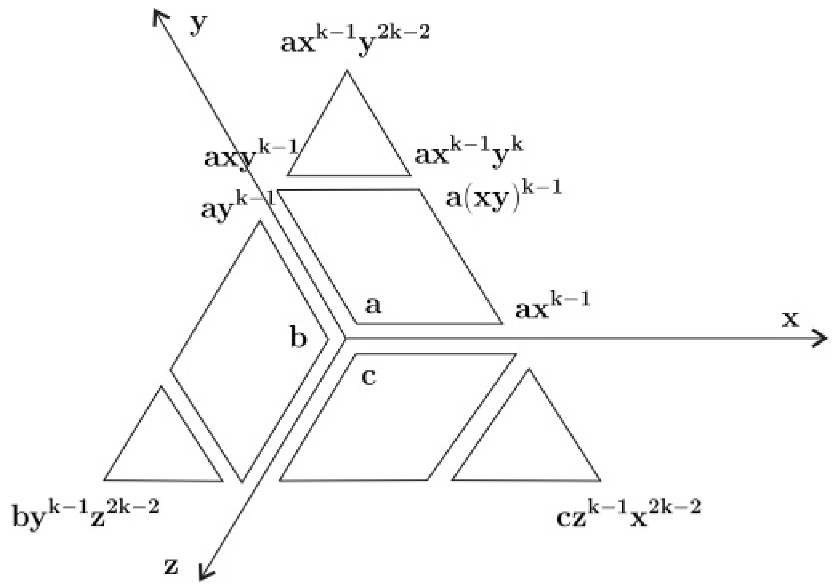
Lema 5.4.

$$\begin{array}{llll} \Delta_{3n-1} & \equiv_I \; n\Delta_2 & \equiv_I & n(1+x+xy) \\ \Delta_{3n} & \equiv_I \; \Delta_{3n-1} & \equiv_I & n\Delta_2 \\ \Delta_{3n+1} & \equiv_I \; n\Delta_2 + 1 & & \end{array} \tag{4.31}$$

Trougaoni region T_N koji razmatramo prikazan je na slici 4.6. Vrhovi trougla T_N su crne tačke rešetke $\overline{\Lambda}$ kojima odgovaraju sledeći monomi

$$ax^{k-1}y^{2k-2} \qquad by^{k-1}z^{2k-2} \qquad cz^{k-1}x^{2k-2}.$$

Dovoljno će biti da odredimo klasu ekvivalencije $\equiv_I$ polinoma A_k koji je jednk sumi svih monoma polinoma T_m koji su sadržani unutar ugla xOy. A_k možemo posmatrati kao sumu $B_k + C_k$ gde je B_k paralelogram sa vrhovima $a, ax^{k-1}, ay^{k-1}, a(xy)^{k-1}$ a C_k je polinom pridružen trouglu čiji su vrhovi dati sa: $axy^k, ax^{k-1}y^k$ i $ax^{k-1}y^{2k-2}$. Kako je $B_k = a \cdot \Box_k$ i $C_k = axy^k\Delta_k$ iskoristit ćemo leme 5.1, 5.3 i 5.4 da odredimo A_k.



Slika 4.6: Dekompozicija trougla T_m

Propozicija 5.5.

$$A_k \equiv_I \begin{cases} dax\Delta_2 & za \quad k = 3d \\ a + daxy\Delta_2 & za \quad k = 3d+1 \\ ax^2y^2 + axy^2(d\Delta_2 + 1) & za \quad k = 3d+2. \end{cases} \tag{4.32}$$

Dokaz:

$$B_k = a \cdot \Box_k \equiv_I \begin{cases} 0 & \text{za} \quad k = 3d \\ a & \text{za} \quad k = 3d+1 \\ ax^2y^2 & \text{za} \quad k = 3d+2. \end{cases} \tag{4.33}$$

Kako je, osim toga

$$axy^k \equiv_I \begin{cases} ax & \text{za} \quad k = 3d \\ axy & \text{za} \quad k = 3d+1 \\ axy^2 & \text{za} \quad k = 3d+2, \end{cases} \tag{4.34}$$

$$C_k = axy^k\Delta_{k-1} \equiv_I \begin{cases} dax\Delta_2 & \text{za} \quad k = 3d \\ daxy\Delta_2 & \text{za} \quad k = 3d+1 \\ axy^2(d\Delta_2 + 1) & \text{za} \quad k = 3d+2. \end{cases} \tag{4.35}$$

Imajući u vidu da je $A_k = B_k + C_k$ i sabirajući odgovarajuće jednakosti za (4.33) i (4.35) dobijamo našu tvrdnju. $\Box$

Propozicija 5.6. *Δ-polinom od A_k jednak je $\Delta(A_k) = P + dQ$ gde je,*

$(k = 3d)$ $\quad P = 0 \quad Q = 3s_1 - 3s_1^2 s_2 + s_1 s_2^3$

$(k = 3d + 1)$ $\quad P = s_1 \quad Q = 9s_1 - 6s_1^2 s_2 + s_1^3 s_2^2 + 4s_1 t - 2s_1^2 s_2 t + s_1 t^2$

$(k = 3d + 2)$

$$P = 11s_1 + s_1^4 - 9s_1^2 s_2 + 5s_2^2 + s_1^3 s_2^2 - s_1 s_2^3 + 4s_1 t - 2s_1^2 s_2 t + s_2^2 t + s_1 t^2$$
$$Q = 24s_1 + s_1^4 - 11s_1^2 s_2 + s_1^5 s_2 - 3s_1^3 s_2^2 + 4s_1 s_2^3 + 8s_1 t - s_1^4 t - s_1^2 s_2 t + 3s_1 t^2.$$

Dokaz: Iz propozicije 5.5 sledi da je,

$$A_k = \begin{cases} d(a^2c^2 + a^3c^4 + a^4c^3) & \text{ako je} \quad k = 3d \\ a + d(a^3c + a^4c^3 + a^5c^2) & \text{ako je} \quad k = 3d + 1 \\ (a^5c^2 + a^4) + d(a^4 + a^5c^2 + a^6c) & \text{ako je} \quad k = 3d + 2. \end{cases} \tag{4.36}$$

Ostatak dokaza provodi se direktnim izračunavanjem ili upotrebom nekog programskog paketa (npr. Wolfram Mathematica 9.0). $\square$

Ispitajmo sada da li polinom $\Delta(A_k)$ koji je opisan u propoziciji 5.6 pripada (za razne vrednosti od k) podmodulu $(P(\mathcal{T}))^{C_3}$ iz teoreme 2.1.

Primenimo propoziciju 4.2 da odredimo ostatke $\overline{P}^G$ i $\overline{Q}^G$ polinoma P i Q iz propozicije 5.6 pri deljenju sa Grebnerovom bazom $GJ_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$.

Propozicija 5.7. *Neka su P_i i Q_i polinomi za koje je $\Delta(A_{3d+i}) = P_i + dQ_i$ (propozicija 5.6). Ostaci koji se dobiju pri deljenju ovih polinoma polinomima Grebnerove baze $GJ_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ jednaki su:*

$$\begin{array}{ll} \overline{P_0}^G = 0 & \overline{Q_0}^G = -s_2^2 \\ \overline{P_1}^G = s_1 & \overline{Q_1}^G = -s_2^2 \\ \overline{P_2}^G = -s_1 & \overline{Q_2}^G = -s_2^2 \end{array} \tag{4.37}$$

4.6 Popločavanje regiona T_N

Razmotrimo sada mogućnost popločavanja trougaonog regiona T_N tribonima simetrično u odnosu na grupu C_3. Imat ćemo tri slučaja, $N = 3k - 1$, $N = 3k$ i $N = 3k + 1$, gde je N broj heksagona, odnosno crnih tačaka na svakoj od stranica trougla. Kako trougao

T_N mora biti invarijantan u odnosu na rotacije za ugao od 120° i 240° slučaj kada je $N = 3k + 1$ odnosi se na trougao koji u centru ima heksagon koji je i sam invarijantan u odnosu na grupu C_3 pa analiza tog slučaja izlazi iz okvira ovog rada. Ispitajmo zato sta se dešava kada je $N = 3k - 1$ i $N = 3k$.

4.6.1 Trougao T_{3k-1}

Teorema 6.1. *Neka je $T_N = T_{3k-1}$ C_3-invarijantan trougao u heksagonalnoj rešetki predstavljen na slici 4.6 gde je N broj crnih tačaka odnosno heksagona na svakoj od strana trougla. Trougao T_N moguće je simetrično u odnosu na grupu C_3 $\mathbb{Z}-$popločati tribonima ako i samo ako je $k = 9r$ za neki ceo broj r. Prvi trougao koji dopušta takvo popločavanje je T_{26}.*

Dokaz: Iz propozicije 5.6 imamo da je polinom $\Delta(A_k)$, koji je jednak sumi svih monoma unutar trougaonog regiona $T_N = T_{3k-1}$, kongruentan mod $J_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ polinomu predstavljenom (kao polinom u promenljivim s_1, s_2 i t) u obliku sume $\Delta(A_{3d+i}) = P_i + dQ_i$ za $i \in \{0, 1, 2\}$.

Prema propoziciji 5.7 ostaci ovih polinoma pri deljenju sa Grebnerovom bazom $GJ_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ dati su sa:

Kako su vodeći članovi polinoma Grebnerove baze dati sa(4.25)

$$\begin{array}{cccc} 3t^2 & t^3 & s_2t^2 & 3s_2^2 \\ s_2^2t & s_2^4 & 3s_1 & s_1t \\ s_1s_2^3 & s_1^2s_2 & s_1^3 & \end{array} \tag{4.38}$$

Vidimo da se polinom $P_i + dQ_i$ može reducirati na nulu ako i samo ako je $i = 0$ i $d = 3r$ za neki ceo broj r. Drugim rečima popločavanje je moguće ako i samo ako je $k = 3d = 9r$ $(N = 27r - 1)$. □

4.6.2 Trougao $T_N = T_{3k}$

U ovom slučaju konveksno zatvorenje skupa svih crnih tačaka rešetke preseka trougla T_{3k} sa uglom xOy je trapez čiji su vrhovi monomi $a, ax^k, ay^{k-1}, ax^{2k-1}y^{k-1}$. Označimo sa A_k sumu svih takvih monoma. Podelimo ovaj trapez na romb sa vrhovima $a, ax^{k-1}, ay^{k-1}, a(xy)^{k-1}$

i jednakostranični trougao sa vrhovima $ax^k, ax^k y^{k-1}, ax^{2k-1}y^{k-1}$. Sumu monoma u ova dva regiona označimo redom sa B_k i C_k. Tako imamo da vredi: $A_k = B_k + C_k$.

Klasa mod I polinoma $B_k = a \cdot \Box_k$ je kao i u slučaju $N = 3k-1$ data relacijom (4.33). Slično imamo i da je $C_k = ax^k \nabla_k$ pri čemu je ∇_k suma svih monoma u trouglu sa vrhovima $1, y^{k-1}, (xy)^{k-1}$. Zamenjujući promenljive x i y u trouglu Δ_k dobijamo trougao ∇_k tako da se sledeća lema dobija iz leme 5.4.

Lema 6.2.

$$\begin{array}{lllll} \nabla_{3n-1} & \equiv_I & n\nabla_2 & \equiv_I & n(1+x+xy) \\ \nabla_{3n} & \equiv_I & \nabla_{3n-1} & \equiv_I & n\nabla_2 \\ \nabla_{3n+1} & \equiv_I & n\nabla_2 + 1 & & \end{array} \tag{4.39}$$

Slično,

$$ax^k \equiv_I \begin{cases} a & \text{ako je} \quad k = 3d \\ ax & \text{ako je} \quad k = 3d+1 \\ ax^2 & \text{ako je} \quad k = 3d-1, \end{cases} \tag{4.40}$$

$$C_k = ax^k \nabla_k \equiv_I \begin{cases} da\nabla_2 & \text{ako je} \quad k = 3d \\ ax(d\nabla_2 + 1) & \text{ako je} \quad k = 3d+1 \\ dax^2\nabla_2 & \text{ako je} \quad k = 3d-1. \end{cases} \tag{4.41}$$

I na kraju,

Propozicija 6.3.

$$A_k = \begin{cases} da\nabla_2 & = & d(a + a^3b + a^3c) & k = 3d \\ a + ax(d\nabla_2 + 1) & = & (a + a^2c^2) + d(a^2c^2 + a^3c + a^4c^3) & k = 3d+1 \\ ax^2y^2 + dax^2\Delta_2 & = & a^5c^2 + d(a^3c^4 + a^4c^3 + a^5c^5) & k = 3d-1. \end{cases} \tag{4.42}$$

Pridruženi Δ-polinomi dati su sa:

Propozicija 6.4. *Δ-polinom od A_k jednak je $\Delta(A_k) = P + dQ$ pri čemu je,*

$(k = 3d)$ $\qquad P = 0 \qquad Q = s_1^2 s_2 - 2s_2^2$

$(k = 3d+1)$ $\qquad P = -s_1 + s_2^2 \qquad Q = -s_1^2 s_2 - 2s_2^2 + s_1 s_2^3 - s_2^2 t$

$(k = 3d-1)$

$$P = 7s_1 - 5s_1^2 s_2 + 3s_2^2 + s_1^3 s_2^2 - s_1 s_2^3 + 4s_1 t - 2s_1^2 s_2 t + s_2^2 t + s_1 t^2$$
$$Q = 2s_1^2 s_2 + 4s_2^2 - 4s_1 s_2^3 + s_2^5.$$

Propozicija 6.5. *Neka su* P_i *i* Q_i *polinomi za koje je* $\Delta(A_{3d+i}) = P_i + dQ_i$ *(Propozicija 6.4). Ostaci deljenja ovih polinoma Grebnerovom bazom* $GJ_{(P(\mathcal{T}))^{C_3}}$ *dati su sa:*

$$\begin{array}{ll} \overline{P_0}^G = 0 & \overline{Q_0}^G = s_2^2 \\ \overline{P_1}^G = -s_1 + s_2^2 & \overline{Q_1}^G = s_2^2 \\ \overline{P_{-1}}^G = s_1 & \overline{Q_{-1}}^G = s_2^2 \end{array} \tag{4.43}$$

Na sličan način kao u dokazu teoreme 6.1 dolazimo do sledećeg rezultata.

Teorema 6.6. *Neka je* $T_N = T_{3k}$ C_3*-simetrični trougaoni region u heksagonalnoj rešetki sa* $3k$ *heksagona na svakoj od svojih stranica. Trougao* T_N *moguće je* C_3-*simetrično* $\mathbb{Z}-$*popločati tribonima ako i samo ako je* $k = 9r$ *za neki ceo broj* r*. Prvi trougao sa tom osobinom je* T_{27}.

Glava 5

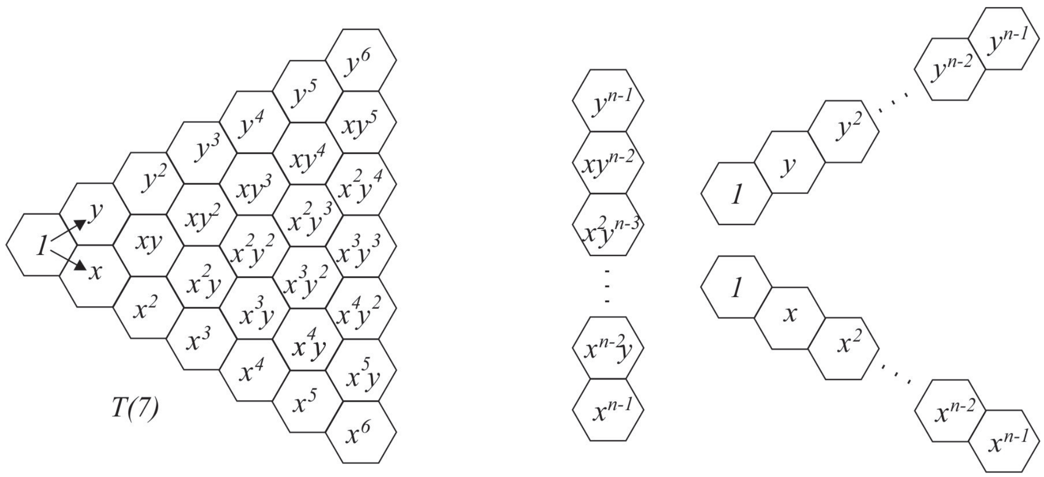
Popločavanja $n-$bonima u heksagonalnoj rešetki

U ovoj glavi ćemo se baviti $\mathbb{Z}$-popločavanjima trougaonog regiona heksagonalne rešetke u ravni n-bonima, gde $n \in \mathbb{N}$, sa ciljem da poopštimo poznati rezultat Konveja i Lagariasa, [8] koji glasi:

Teorema 0.1. *(Conway-Lagarias) Trougaoni region T_n u heksagonalnoj rešetki moguće je $\mathbb{Z}-$popločati tribonima ako i samo ako je $n = 9r$ ili je $n = 9r + 8$ pri čemu je r ceo broj ≥ 0.*

U glavi 4 smo razmatrali popločavanja tribonima u šestougaonoj rešetki koja si invarijantna u odnosu na rotacije za ugao od 120° i 240°, a sada nas zanima $\mathbb{Z}$-popločavanje trougaonog regiona koji na svakoj strani ina jednak broj heksagona. Mogućnost $\mathbb{Z}$-popločavanja regiona ne zavisi od njegovog položaja u ravni heksagonalne rešetke, pa bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je trougaoni region smešten u xOy ugao sa vrhom u baznom heksagonu a. Kako su uglovi jednakostraničnog trougla 60°, trougao ne izlazi iz xOy-ugla. Sada uzimajući da je $a = 1$, problem pripadnosti podmodulu svodimo na problem pripadnosti idealu I_n u prstenu $\mathbb{Z}[x, y]$ koji je generisan odgovarajućim skupom $n-$bona.

Kao i ranije, trougaonom regionu $T(n)$ dužine stranice n i $n-$bonima $b_1(n), b_2(n)$ i $b_3(n)$ pridružit ćemo odgovarajuće polinome u prstenu $\mathbb{Z}[x, y]$.



Slika 5.1: Region $T(7)$ i $n-$boni

Na primer, za $n = 4$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
T(4) &= (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + (x^2 + xy + y^2) + (x + y) + 1 \\
b_1(4) &= x^3 + x^2 + x + 1 \\
b_2(4) &= y^3 + y^2 + y + 1 \\
b_3(4) &= x^3 + x^2y + xy^2 + y^3
\end{aligned}
$$

Za proivoljno $n \in \mathbb{N}$ je:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \textstyle\sum_{0 \leq i,j \leq n-1, i+j \leq n-1} x^i y^j \\
b_1(n) &= x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \\
b_2(n) &= y^{n-1} + y^{n-2} + \cdots + y + 1 \\
b_3(n) &= x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}
\end{aligned}
$$

Označimo sa I_n ideal generisan tribonima

$$I_n = \langle b_1(n), b_2(n), b_3(n) \rangle$$

5.1 Grebnerova baza ideala I_n

Stavimo da je

$$\begin{aligned} g_1(n) &= b_1(n) \\ g_2(n) &= b_2(n) \\ g_3(n) &= nT(n-1) \\ g_4(n) &= b_3(n) - b_1(n) - b_2(n) \\ GBI_n &= \{g_1(n), g_2(n), g_3(n), g_4(n)\} \end{aligned}$$

Pokažimo da je GBI_n Grebnerova baza ideala I_n u odnosu na leksikografski poredak promenljivih u prstenu $\mathbb{Z}[x,y]$ za koji je $x > y$. U tom cilju ćemo prvo dokazati sledeće leme:

Lema 1.1. *Vodeći članovi polinoma $g_1(n)$, $g_2(n)$, $g_3(n)$ i $g_4(n)$ s obzirom na leksikografski poredak promenljivih u prstenu $\mathbb{Z}[x,y]$ za $x > y$ su redom dati sa*

$$\begin{aligned} LT(g_1(n)) &= x^{n-1} & \qquad LT(g_2(n)) &= y^{n-1} \\ LT(g_3(n)) &= nx^{n-2} & \qquad LT(g_4(n)) &= x^{n-2}y \end{aligned}$$

Dokaz: Tvrdnja sledi iz činjenice da je:

$$\begin{aligned} g_1(n) &= x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 \\ g_2(n) &= y^{n-1} + y^{n-2} + \cdots + y + 1 \\ g_3(n) &= n((x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + y^{n-2}) + (x^{n-3} + x^{n-4}y + \cdots + y^{n-3}) + \ldots \\ &\quad \cdots + (x^2 + xy + y^2) + (x + y) + 1) \\ g_4(n) &= (x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) - (x^{n-1} + \cdots + 1) - (y^{n-1} + \cdots + 1) \\ &= (x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2}) - (x^{n-2} + \cdots + x + 1) - (y^{n-2} + \cdots + y + 1) \end{aligned}$$

□

Lema 1.2. *Skup GBI_n je baza ideala I_n.*

Dokaz:

Očigledno je $I_n = \langle b_1(n), b_2(n), b_3(n)\rangle \subseteq \langle GBI_n\rangle$, pa dokažimo da vredi i obrnuta inkluzija. Jasno je da $g_1(n), g_2(n)$ i $g_4(n)$ pripadaju idealu I_n, pa trebamo još pokazati da isto vredi i za $g_3(n)$. Iz

$$\begin{aligned}(x-1)T(n-1) &= (x-1)[(x^{n-2}+x^{n-3}y+\cdots+xy^{n-3}+y^{n-2})+\\ &\quad +(x^{n-3}+x^{n-4}y+\cdots+y^{n-3})+\cdots+(x^2+xy+y^2)+(x+y)+1)]\\ &= x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+x^{n-2}+x^{n-3}y+\cdots+xy^{n-3}+\cdots+x^2+xy+x-\\ &\quad -x^{n-2}-x^{n-3}y-\cdots-x^{n-3}-x^{n-4}y-\cdots-y^{n-3}-\cdots-x-y-1\\ &= (x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})-(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1)\\ &= b_3(n)-b_2(n)\end{aligned}$$

zaključujemo da $(x-1)T(n-1)\in I_n$, a to znači i da svaki proizvod ovog polinoma sa $(x^{k-1}+\cdots+1)$ takođe pripada idealu I_n. Sabirajući proizvode:

$$\begin{gathered}(x-1)T(n-1)\\ (x^2-1)T(n-1)\\ \vdots\\ (x^{n-1}-1)T(n-1)\end{gathered}$$

imamo da je

$$\sum_{k=1}^{n-1}(x^k-1)T(n-1)=(b_1(n)-n)T(n-1)\in I_n$$

pa i $g_3(n)=nT(n-1)\in I_n$ Dakle, skup GBI_n je baza ideala I_n. □

Lema 1.3. *$S-$polinom $S(g_2(n),g_4(n))$ se skupom GBI_n reducira na nulu.*

Dokaz:

$$\begin{aligned}S(g_2(n),g_4(n)) &= x^{n-2}g_2(n)-y^{n-2}g_4(n)\\ &= x^{n-2}(y^{n-1}+\cdots+1)-y^{n-2}[(x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2})-\\ &\quad -(x^{n-2}+\cdots+1)-(y^{n-2}+\cdots+1)]\\ &= x^{n-2}y^{n-1}+x^{n-2}y^{n-2}+x^{n-2}(y^{n-3}+\cdots+1)-\\ &\quad -x^{n-2}y^{n-1}-x^{n-3}y^{n}-\cdots+x^{n-2}y^{n-2}+x^{n-3}y^{n-2}+\ldots\\ &= 2x^{n-2}y^{n-2}+\ldots\end{aligned}$$

što znači da je $LT(S(g_2(n),g_4(n))=2x^{n-2}y^{n-2}$, pa ćemo redukciju početi polinomom $g_4(n)$, čiji je vodeći član jednak $x^{n-2}y$.

Stavimo da je $A(n)=2(y^{n-3}+\cdots+1)+(y^{n-4}+\cdots+1)+\cdots+(y+1)+1$ i posmatrajmo polinom:

$$\begin{aligned}
S(g_2(n), g_4(n)) - A(n)g_4(n) &= x^{n-2}g_2(n) - y^{n-2}g_4(n) - A(n)g_4(n) \\
&= x^{n-2}g_2(n) - (b_2(n-1) + b_2(n-2) + \cdots + b_2(1))g_4(n) \\
&= x^{n-2}g_2(n) - B(n)g_4(n)
\end{aligned}$$

za $b_2(n-1) + b_2(n-2) + \cdots + b_2(1) = B(n)$. Kako je

$$\begin{aligned}
B(n) &= (y^{n-2} + \cdots + 1) + (y^{n-3} + \cdots + 1) + \cdots + (y+1) + 1 \\
&= \tfrac{y^{n-1}-1}{y-1} + \tfrac{y^{n-2}-1}{y-1} + \cdots + \tfrac{y^2-1}{y-1} + \tfrac{y-1}{y-1} \\
&= \tfrac{(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1)-n}{y-1}
\end{aligned}$$

imamo da vredi jednakost:

$$(y-1)B(n) = b_2(n) - n$$

Koristeći gornju jednakost i činjenicu da je $(x-y)g_4(n) = (y-1)g_1(n) - (x-1)g_2(n)$, vodeći član polinoma $x^{n-2}g_2(n) - B(n)g_4(n)$, ćemo odrediti posmatrajući racionalni algebarski izraz:

$$\begin{aligned}
x^{n-2}g_2(n) - B(n)g_4(n) &= x^{n-2}g_2(n) - \tfrac{g_2(n)-n}{y-1} \cdot \tfrac{(y-1)g_1(n)-(x-1)g_2(n)}{x-y} \\
&= x^{n-2}g_2(n) - \tfrac{g_2(n)-n}{y-1} \cdot \tfrac{(y-1)g_1(n)}{x-y} + \tfrac{(g_2(n)-n)(x-1)g_2(n)}{(y-1)(x-y)} \\
&= \tfrac{x^{n-2}(x-y)g_2(n)-(g_2(n)-n)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{x-y} + \ldots \\
&= \tfrac{nx^{n-1}-x^{n-2}yg_2(n)-\ldots}{x-y} + \ldots
\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je $LT(x^{n-2}g_2(n) - B(n)g_4(n)) = nx^{n-2}$ što je upravo $LT(g_3(n))$, pa redukciju nastavljamo polinomom $g_3(n)$. Kako je, osim toga,

$$\begin{aligned}
B_2(n)[b_3(n) - b_1(n)] &= B_2(n)[x^{n-2}(y-1) + x^{n-3}(y^2-1) + \cdots + (y^{n-1}-1)] \\
&= B_2(n)(y-1)[\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k-1}(\sum_{j=0}^{k-1} y^j)] \\
&= [\textstyle\sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k-1}(\sum_{j=0}^{k-1} y^j)](g_2(n) - n) \\
&= T(n-1)b_2(n) - nT(n-1)
\end{aligned}$$

imamo da vredi

$$\begin{aligned}
x^{n-2}g_2(n) - B(n)g_4(n) - g_3(n) &= x^{n-2}g_2(n) - B(n)(g_3(n) - g_1(n) - g_2(n)) - g_3(n) \\
&= x^{n-2}g_2(n) + B(n)g_n(n) - T(n-1)b_2(n) + g_3(n) - g_3(n) \\
&= (x^{n-2} - T(n-1) - B_2(n))g_2(n)
\end{aligned}$$

Dakle,

$$S(g_2(n), g_4(n)) = A(n)g_4(n) - g_3(n) + [x^{n-2} - T(n-1) - B_2(n)]g_2(n)$$

iz čega sledi da se $S(g_2(n), g_4(n))$ reducira na nulu skupom GBI_n.

$\square$

Teorema 1.4. *GBI_n je Grebnerova baza ideala I_n u prstenu $\mathbb{Z}[x, y]$ s obzirom na leksikografski poredak promenljivih za koji je $x > y$.*

Dokaz: Iz Leme 1.2 sledi da je GBI_n baza ideala I_n. Da bi dokazali da je to Grebnerova baza posmatranog ideala trebamo pokazati sa se svi $S-$polinomi polinoma $g_1(n), g_2(n), g_3(n)$ i $g_4(n)$ reduciraju na nulu skupom GBI_n.

Kako polinomi $g_1(n)$ i $g_2(n)$ imaju vodeće monome koji su relativno prosti, njihov $S-$polinom se prema teoremi 4.3 glava 1, reducira na nulu skupom GBI_n. Isto vredi i za polinome $g_2(n)$ i $g_3(n)$. Iz leme 1.3 sledi sa se $S-$polinom polinoma $g_2(n)$ i $g_4(n)$ reducira na nulu skupom GBI_n, pa nam ostaje još da razmotrimo $S-$polinome $S(g_1(n), g_3(n))$, $S(g_1(n), g_4(n))$ i $S(g_3(n), g_4(n))$. Krenimo redom:

$$\begin{aligned} S(g_1(n), g_3(n)) &= ng_1(n) - xg_3(n) \\ &= n(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) - xn(b_3(n-1) + b_3(n-2) + \cdots + b_3(1)) \\ &= nx^{n-1} + ng_1(n-1) - nx^{n-1} - nx(yb_3(n-2) + b_3(n-2) + \cdots + b_3(1)) \end{aligned}$$

Kako je $LT(S(g_1(n), g_3(n))) = -nx^{n-2}y$, polinom $S(g_1(n), g_3(n))$ ćemo reducirati sa $-ng_4(n)$, pa imamo da je

$$\begin{aligned} S(g_1(n), g_3(n)) + ng_4(n) = & \\ &= ng_1(n-1) - nx(yb_3(n-2) + b_3(n-2) + \cdots + b_3(1)) + \\ &\quad n(g_3(n) - g_1(n) - g_2(n)) = \\ &= ng_1(n-1) - nx(yb_3(n-2) + b_3(n-2) + \cdots + b_3(1)) + \\ &\quad nb_3(n) - ng_1(n-1) - nx^{n-1} - ng_2(n) \\ &= -n[b_3(n) + x(b_3(n-1) + b_3(n-2) \cdots + b_3(1)) + b_2(n)] \\ &= -n[b_3(n) + (xb_3(n-2) + y^{n-1}) + \cdots + (xb_3(1) + y) + 1] \\ &= = n[b_3(n) + b_3(n-1) + \cdots + b_3(1)] \\ &= -g_3(n) \end{aligned}$$

Vidimo, dakle, da je

$$S(g_1(n), g_3(n)) = -ng_4(n) - g_3(n)$$

što znači da se $S(g_1(n), g_3(n))$ skupom GBI_n reducira na nulu.
Posmatrajmo sada $S-$polinom polinoma $g_1(n)$ i $g_2(n)$. Imamo:

$$\begin{aligned}
S(g_1(n), g_4(n)) = &\ yg_1(n) - xg_4(n)\\
= &\ y(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) - x((x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \cdots + xy^{n-2}) -\\
&-(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1) - (y^{n-2} + y^{n-3} + \cdots + 1))\\
= &\ y(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1) - y(x^{n-1} + \cdots + x^2y^{n-3}) +\\
&+x(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1) + x(y^{n-2} + y^{n-3} + \cdots + 1)\\
= &\ yb_1(n) - y(x^{n-1}y + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}) +\\
&+x(x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + 1) + x(y^{n-1} + y^{n-3} + \cdots + 1) + y^n\\
= &\ -y(b_3(n) - b_1(n) - b_2(n)) + x(x^{n-2} + \cdots + 1) +\\
&+x(y^{n-1} + \cdots + 1) + y^n - yb_2(n)\\
= &\ -yg_4(n) + (x^{n-1} + \cdots + 1) - 1 + xb_2(n) - (y^{n-1} + \cdots + y)\\
= &\ g_1(n) + (x-1)g_2(n) - yg_4(n)
\end{aligned}$$

odakle se vidi da se i $S(g_1(n), g_4(n))$ reducira na nulu skupom GBI_n.
Razmotrimo još i $S(g_3(n), g_4(n))$:

$$\begin{aligned}
S(g_3(n), g_4(n)) = &\ yg_3(n) - ng_4(n)\\
= &\ ny(b_3(n-1) + b_3(n-2) + \cdots + b_3(1)) - n(b_3(n) - b_1(n) - b_2(n))\\
= &\ n(yb_3(n-1) + x^{n-1}) + n[(yb_3(n-2) + x^{n-2}) + \cdots + (yb_3(1) + x) + 1] -\\
&-nb_3(n) + nb_1(n) + nb_2(n) - n(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)\\
= &\ nb_3(n) + n(b_3(n-1) + b_3(n-2) + \cdots + b_3(1)) -\\
&-nb_3(n) + nb_1(n) + nb_2(n) - nb_1(n)\\
= &\ ng_2(n) + g_3(n)
\end{aligned}$$

$S-$polinom polinoma $g_3(n)$ i $g_4(n)$ se reducira na nulu skupom GBI_n, čime je dokaz naše teoreme kompletiran. □

5.2 Trougaoni region $T(n)$ i njegova dekompozicija

Sada ćemo razmotriti moguće ostatke koji nastaju pri deljenju polinoma kojim je opisan region $T(n)$ sa Grebnerovom bazom ideala generisanog tribonima tj, sa GBI_n.

Lema 2.1. *Pretpostavimo da su $q(x)$ količnik i $r(x)$ ostatak koji se dobiju deljenjem polinoma $P(x) \in \mathbb{Z}[x,y]$ binomom $x^n - 1$, tj. da je*

$$p(x) = q(x)(x^n - 1) + r(x) \tag{5.1}$$

Ako stavimo da je $P(x,y) = \frac{p(x)-p(y)}{x-y}$ i $R(x,y) = \frac{r(x)-r(y)}{x-y}$ onda je

$$\overline{P(x,y)}^{GBI_n} = \overline{R(x,y)}^{GBI_n} \tag{5.2}$$

Osim toga, ako se $R(x,y)$ ne može dalje reducirati polinomima skupa GBI_n, onda je ostatak koji se dobije deljenjem $P(x,y)$ Grebnerovom bazom GBI_n dat sa:

$$\overline{P(x,y)}^{GBI_n} = \overline{R(x,y)}^{GBI_n} = R(x,y) = \frac{r(x)-r(y)}{x-y}$$

Dokaz: Uvrštavajući relaciju 5.1 u $P(x,y)$ imamo

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \tfrac{q(x)(x^n-1)+r(x)-(q(y)(y^n-1)+r(y))}{x-y} \\ &= \tfrac{q(x)-q(y)}{x-y}(x^n-1) + q(y)\tfrac{x^n-y^n}{x-y} + \tfrac{r(x)-r(y)}{x-y} \\ &= \tfrac{q(x)-q(y)}{x-y}(x-1)(x^{n-1}+\cdots+1) + q(y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+y^{n-1}) + \tfrac{r(x)-r(y)}{x-y} \\ &= \tfrac{q(x)-q(y)}{x-y}(x-1)b_1(n) + q(y)b_3(n) + \tfrac{r(x)-r(y)}{x-y} \end{aligned}$$

Kako $b_1(n)$ i $b_3(n)$ pripadaju idealu $\langle GBI_n \rangle$, to isto vredi i za $(q(x)-q(y))b_1(n)+q(y)b_3(n)$, čime je relacija 5.2 dokazana.

Ostatak leme je direktna posledica dokazanog. $\square$

Lema 2.2. *Stavimo da je $b_3(0) = 0$ i da je*

$$b_3(m) = x^{m-1} + x^{m-2}y + \cdots + xy^{m-2} + y^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Tada vredi:

$$\overline{b_3(m)}^{GBI_n} = b_3(r_m^n)$$

pri čemu je $r_m^n = m - \lfloor m/n \rfloor n$ ostatak koji se dobije pri deljenju m sa n.

Dokaz: Ako stavimo da je $p(x) = x^m$, onda polinom $P(x,y)$ postaje $b_3(m)$. Ako je r_m^n ostatak deljenja m sa n onda je $x^{r_m^n}$ ostatak deljenja $b_3(m)$ sa $x^n - 1$, jer je

$$\begin{aligned} x^m &= (x^{m-n} + x^{m-2n} + \cdots + x^{r_m^n})(x^n - 1) + x^{r_m^n} \\ &= (x^{m-n} + x^{m-2n} + \cdots + x^{r_m^n})(x-1)g_1(n) + x^{r_m^n} \end{aligned}$$

Polinom $R(x,y) = b_3(r_m^n)$ ne možemo reducirati nijednim elementom skupa GBI_n jer je $LT(b_3(r_m^n)) = x^{r_m^n - 1}$, pa je $\overline{b_3(r_m^n)}^{GBI_n} = b_3(r_m^n)$ što sledi iz drugog dela leme 2.1.
□

Propozicija 2.3. *Za svaki ceo broj $n \geq 1$ niz polinoma $\alpha_m = \alpha_m^n = \overline{T(m)}^{GBI_n}$ je periodičan sa periodom n^2, gde je $T(m) = \sum_{k=1}^{m} b_3(k)$.*
Ako je $1 \leq m \leq n^2 - 2$, onda je

$$\overline{T(m)}^{GBI_n} = \sum_{k=1}^{m} b_3(r_k^n) \neq 0 \tag{5.3}$$

a ako je $m \in \{n^2 - 1, n^2\}$, onda je

$$\overline{T(m)}^{GBI_n} = 0 \tag{5.4}$$

Štaviše ako je $m = pn + q$ za $0 \leq p \leq n-1$ i $1 \leq q \leq n$ tada je

$$\overline{T(m)}^{GBI_n} \equiv_{I_n} pT(n-1) + T(q) \tag{5.5}$$

Pre nego pređemo na dokaz teoreme razmotrimo jednakost 5.5 za $m = 10$ i $n = 4$. Kako je $10 = 2 \cdot 4 + 2$, $p = 2$ i $q = 2$, a

$$T(10) = b_3(10) + b_3(9) + \cdots + b_3(2) + b_3(1)$$

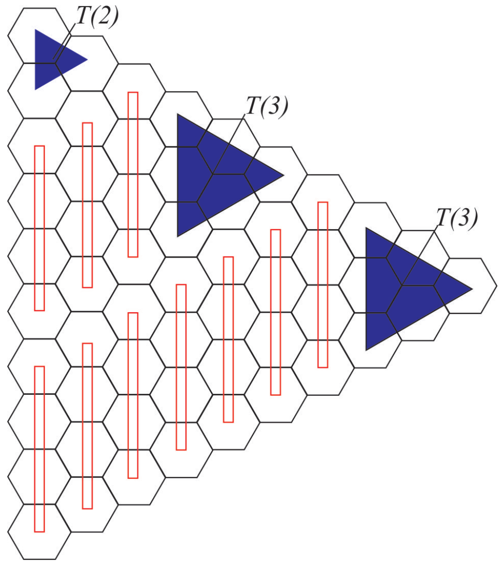
Na osnovu leme 2.2 imamo da je

$$\begin{aligned}
\overline{b_3(10)}^{GBI_4} &= \overline{b_3(6)}^{GBI_4} = \overline{b_3(2)}^{GBI_2} = x + y \\
\overline{b_3(9)}^{GBI_4} &= \overline{b_3(5)}^{GBI_4} = \overline{b_3(1)}^{GBI_4} = 1 \\
\overline{b_3(8)}^{GBI_4} &= \overline{b_3(4)}^{GBI_4} = 0 \\
\overline{b_3(7)}^{GBI_4} &= \overline{b_3(3)}^{GBI_4} = x^2 + xy + y^2
\end{aligned}$$

a iz toga sledi da je:

$$\begin{aligned}
\overline{T(10)}^{GBI_4} &\equiv_{I_4} 2 \cdot (b_3(3) + b_3(2) + b_3(1)) + (b_3(2) + b_3(1)) \\
&\equiv_{I_4} 2T(3) + T(2)
\end{aligned}$$

što se lepo vidi na slici 5.2.



Slika 5.2: Dekompozicija $T(10)$ za $n = 4$

Dokaz: Dokažimo prvo da vredi relacija 5.5. Neka je $m = pn + q$ za $0 \leq q < n$. To znači da postoji tačno p brojeva između 1 i $m - q$ koji su kongruentni sa $0, 1, \ldots, n-1$ modulo n. Kako je

$$T(m) = b_3(m) + b_3(m-1) + b_3(m-2) + \cdots + b_3(2) + b_3(1)$$

na osnovu leme 2.2 zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \overline{T(m)}^{GBI_n} &\equiv_{I_n} p(b_3(n) + b_3(n-1) + \cdots + b_3(1)) + (b_3(m-q) + \cdots + b_3(m)) \\ &\equiv_{I_n} pT(n-1) + (b_3(q) + \cdots + b_3(1)) \\ &\equiv_{I_n} pT(n-1) + T(q) \end{aligned}$$

Ako je $p = n$ i $q = 0$ onda imamo da je

$$\overline{T(m)}^{GBI_n} \equiv_{I_n} nT(n-1) \equiv_{I_n} 0$$

jer $nT(n-1) = g_3(n) \in I_n$.

Ako je $m = n^2 - 1$, onda možemo pisati da je $m = (n-1)n + (n-1)$, pa relacija 5.5 postaje

$$\overline{T(m)}^{GBI_n} \equiv_{I_n} (n-1)T(n-1) + T(n-1) \equiv_{I_n} 0$$

čime smo pokazali da vredi i relacija 5.4.

U ostalim slučajevima je jasno da je $\overline{T(m)}^{GBI_n} \neq 0$. Dokažimo sada periodičnost niza brojeva α^n_m.

Pretpostavimo da je α^n_m periodično sa periodom n^2 na intervalu $[1, jn^2]$ za neki ceo broj $j \geq 1$. Neka je $d \in [jn^2 + 1, (j+1)n^2]$. Tada je

$$\alpha^n_d = \overline{T(d)}^{GBI_n} = \overline{A + B}^{GBI_n}$$

za $A = T(jn^2)$ i $B = \sum_{k=jn^2+1}^{d} b_3(k)$. Iz 5.4 sledi da je $\overline{A}^{GBI_n} = 0$, pa je

$$\alpha^n_d = \overline{B}^{GBI_n} \equiv_{I_n} \sum_{k=jn^2+1}^{d} b_3(r^n_k) \equiv_{I_n} \sum_{k=1}^{d'} b_3(r^n_k)$$

pri čemu je $d' = d - \lfloor d/n^2 \rfloor n^2$ Iz relacije 5.3 zaključujemo da je gornja suma reducirana, pa je $\alpha^n_d = \sum_{k=1}^{d'} b_3(r^n_k) = \alpha^n_{d'}$, za $d' \in [0, n^2]$ čime smo pokazali i periodičnost posmatranog niza.

□

Sada možemo dati glavni razultat koji se odnosi na popločavanje trougla $T(m)$ $n-$bonima za razne vrednosti $n \in \mathbb{N}$

Teorema 2.4. *Trougaoni region $T(m)$ u heksagonalnoj rešetki u ravni moguće je $\mathbb{Z}$-popločati n-bonima ako i samo ako je*

$$m \equiv -1 (mod\ n^2) \quad ili\ je \quad m \equiv 0 (mod\ n^2) \tag{5.6}$$

Dokaz: Trougaoni region $T(m)$ moguće je popločati n-bonima ako i samo ako je polinom kojim je $T(m)$ opisan u prstenu $\mathbb{Z}[x, y]$ moguće napisati u obliku sume polinoma koji opisuju n-bone pomnožene elementima prstena $\mathbb{Z}[x, y]$. Dakle, popločavanje regiona $T(m)$ je moguće ako i samo ako $T(m) \in I_n$, tj. ako je ostatak koji se dobije deljenjem polinoma $T(m)$ skupom polinoma Grebnerove baze ideala I_n jednak nuli, a to se prema propoziciji 2.3 dešava upravo ako je zadovoljen uslov 5.6. □

Bibliografija

[1] W. W. Adams and P. Loustaunau. *An introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics 3, American Mathematical Society, Providence, 1994.

[2] A. Barvinok. *Integer Points in Polyhedra*, European Mathematical Society, 2008.

[3] M. Beck and S. Robins. *Computing the Continuous Discretely*, Springer 2007.

[4] T. Becker and V. Weispfenning. *Gröbner Bases*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[5] M. Berger. *Geometry Revealed*, Springer-Verlag, 2010.

[6] O. Bodini and B. Nouvel. Z-Tilings of Polyominoes and Standard Basis, In *Combinatorial Image Analysis*, Springer (2004), 137–150.

[7] J.N. Cederberg. *A Cours in Modern Geometries*, Springer 2001.

[8] J.H. Conway and J.C. Lagarias. Tiling with Polyominoes and Combinatorial Group Theory, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 53 (1990), 183–208.

[9] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms*, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2007.

[10] D. Cox, J. Little and D. O'Shea. *Using Algebraic Geometry*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 2005.

[11] D. Fuchs and S. Tabachnikov. *Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics*, A.M.S., 2007.

[12] S.W. Golomb. Polyominoes which Tile Rectangles, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 51 (1989), 117–124.

[13] S.W. Golomb. Tiling with Polyominoes, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 1 (1966), 280–296.

[14] S.W. Golomb. *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*, Princeton Univ. Press 1996.

[15] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, Second edition, Springer, 2003.

[16] B. Grünbaum and G.C. Shephard. *Tilings and Patterns*, W.H. Freeman and Compann, New York, 1987.

[17] S. Lang. *Algebra*, Revised third edition, Springer-Verlag, New York, 2002.

[18] D. Lichtblau. Revisiting strong Gröbner bases over Euclidean domains, *Wolfram Library Archive*, `http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/7522`.

[19] M. Muzika Dizdarevic. Symmetric Tilings in the Square Lattice, *Matematički Vesnik*, (to appear).

[20] M. Muzika Dizdarević, M. Timotijević, R.T. Živaljević. Signed Polyomino Tilings by n-in-line Polyoninoes and Gröbner bases, *Publications de l'Institut Mathématique*, 99 (113), 2016, 31–42.

[21] M. Muzika Dizdarević, R.T. Živaljević. Simmetric Polyomino Tilings, Tribones, Ideals and Gröbner bases, *Publications de l'Institut Mathématique*, 98 (112), 2015, 1–23.

[22] M. Reid. Tile Homotopy Groups, *L'Enseignement Mathèmatique* **4**9 (2003), no.1–2, 123–155.

[23] M. Reid. Tiling Rectangles and Half Strip with Congruent Polyominoes, *Journal of Combinatorial Theory*, Series A 80 (1997), 106–123.

[24] I.R. Shafarevich and A.O. Remizov. *Linear Algebra and Geometry*, Springer-Verlag, 2013.

[25] B. Sturmfels. *Algorithms in Invariant Theory* (2nd ed.), Springer 2008.

[26] B. Sturmfels. *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, American Mathematical Society, Providence, 1995.

[27] R.R. Thomas. *Lectures in Geometric Combinatorics*, American Mathematical Society, 2006.

[28] W. Thurston. Conway's tiling groups, *Amer. Math. Monthly* 97 (1990), 757–773.

BIOGRAFIJA

Mnuela Muzika Dizdarević rođena je u Sarajevu 30. 09. 1975. godine, gde je završila osnovnu školu i Drugu gimnaziju-matematički smer. Nakon srednje škole upisala je studij matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu te isti završila odbranom diplomskog rada sa temom "Linearne reprezentacije konačnih grupa ". Kao jedan od 10 najboljih studenata Sarajevskog univerziteta bila je stipendista Grada Grenobla. Nakon osnovnog studija, upisala je magistarski studij iz oblasti algebra na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Magistarski rad na temu "Divizori na torusnim varijetetima"rađen pod mentorstvom prof.dr. Aleksandra Lipkovskog odbranila je u septembru 2010. godine. Iste godine je upisala doktorske studije na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Od oktobra 2001. godine zaposlena je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu kao asistent na predmetima Katedre za algebru i geometriju Odsjeka za matematiku. Od 2003. do 2005. godine bila je zaposlena kao profesor matematike u gimnaziji, a u periodu od 2005. do 2007. godine i na Ekonomskom fakultetu u Sarajevu, kao spoljni saradnik na Katedri za kvantitativnu ekonomiju.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а: Мануела Музика Диздаревић

број уписа: 2010/2010

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Примена Гребнерових база на проблеме поплочавања

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 25.04.2017. године

Manuela Muzika Dizdarević

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора : Мануела Музика Диздаревић

Број уписа: 2010/2010

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Примена Гребнерових база на проблеме поплочавања

Ментор: проф. др. Раде Живаљевић

Потписани: Мануела Музика Диздаревић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 25. 04. 2017. године

Manuela Muzika Dizdarević

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Примена Гребнерових база на проблеме поплочавања

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 25. 04. 2017. године

Marinela Marinka Dizdarević

1. **Ауторство -** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално** – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално** – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство -** делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.