



**УНИВЕРЗИТЕТ ПРИВРЕДНА АКАДЕМИЈА У НОВОМ САДУ**  
**ФАКУЛТЕТ ЗА ЕКОНОМИЈУ И ИНЖЕЊЕРСКИ МЕНАѢМЕНТ**  
**У НОВОМ САДУ**

**ПРИМЕНА КОНЦЕПТА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ НА**  
**ТРЖИШТИМА У НАСТАЈАЊУ У КОНТЕКСТУ**  
**БАЗЕЛСКИХ СТАНДАРДА**

Докторска дисертација

**Ментор:**  
**Проф. др Марко Иваниш**

**Кандидат:**  
**Лука М. Филиповић**

Нови Сад, 2018.



**UNIVERSITY BUSINESS ACADEMY IN NOVI SAD**

**FACULTY OF ECONOMICS AND ENGINEERING MANAGEMENT  
IN NOVI SAD**

**APPLICATION OF THE VALUE AT RISK CONCEPT IN  
THE EMERGING MARKETS IN THE CONTEXT OF BASEL  
STANDARDS**

Doctoral dissertation

**Mentor:**

**Professor Dr Marko Ivaniš**

**Candidate:**

**Luka M. Filipović**

Novi Sad, 2018

## КЉУЧНИ ПОДАЦИ О ЗАВРШНОМ РАДУ

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Лука М. Филиповић
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	<b>Проф. др Марко Иваниш</b> , редовни професор на Факултету за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, ужа научна област Финансије и банкарство, изабран у звање 19.10 2017. године, Факултет за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, Универзитет Привредна академија у Новом Саду
Наслов рада:	ПРИМЕНА КОНЦЕПТА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ НА ТРЖИШТИМА У НАСТАЈАЊУ У КОНТЕКСТУ БАЗЕЛСКИХ СТАНДАРДА
Језик публикације (писмо):	Српски (ћирилица)
Физички опис рада:	Унети број: Страница 163 Поглавља 5 Референци 140 Табела 8 Слика 8 Графикона 49 Прилога 41
Научна област:	Финансије, финансијска тржишта
Предметна одредница, кључне речи:	<b>Кључне речи:</b> финансијска тржишта, тржишта у настајању, тржишни ризик, вредност при ризику, портфолио хартија од вредности, берзански индекс, GARCH модели, волатилност.
Извод (апстракт или резиме) на језику завршног рада:	Како би се испитале могућности примене концепта вредности при ризику на тржиштима у настајању, у дисертацији је извршено тестирање апликативности модела вредности при ризику на тржиштима капитала у настајању Србије, Румуније, Бугарске и Црне Горе, у контексту задовољавања правила валидности модела вредности при ризику, дефинисана од стране Базелског комитета за супервизију банака. Тачније, у дисертацији је извршено тестирања апликативности шест модела вредности при ризику како би се одговорило на питање да ли модели који се заснивају на

претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији приноса (IID) (основни и изведени модели), као и модели који су засновани на једноставним техникама за моделирање волатилности, могу поуздано да се користе на тржиштима која су предмет проучавања у овом раду. Тестирани модели су варијанса-коваријанса, *RiskMetric* модел и четири модела историјске симулације: стандардни модел историјске симулације (HS), модел огледала историјске симулације (MHS), филтрирани модел историјске симулације (FHS) и динамични модел историјске симулације (DHS). Реч је о најпознатијим и најчешће коришћеним моделима вредности при ризику.

Поред ових модела извршено је тестирање и новог полупараметарског модела, ARMA(p,q)-GARCH(p,q)MHS, који је развијен у дисертацији, како би се одговорило на питање да ли овај модел генерше супериорније процене ризика у односу на претходно поменуто модела вредности при ризику.

За тестирање валидности модела коришћени су дневни логаритамски приноси берзанских индекса: Belexline (Србија), Sofix (Бугарска), ВЕТ (Румунија), Мопех (Црна Гора). Процене VaR тржишних индекса вршиле су се дневно за холдинг период од једног дана, на узорку од 500 дана података, за период од фебруара 2014. до фебруара 2017. године и то за ниво поверења 99%. За тестирање валидности модела, коришћени су Куріес-ов и Christoffersen-ов модел, као и Doufor Монте Карло тест технике.

Резултати истраживања указују да је на овим тржиштима услед присуства ARCH ефекта и значјаног одступања од претпоставке нормалности дистрибуције приноса, боље користи непараметарске моделе вредности при ризику који могу да кооптирају дебеле репове, него параметарске моделе који се заснивају на једноставним техникама безусловне (VCV модел) и условне волатилности (RM модел). Резултати тестрања модела, такође, указују да примена динамичног модела историјске симулације доприноси значајном унапређењу апликативности историјске симулације на тржиштима у настајању, као и да

	употреба новог полупараметарског модела, који је развијен у дисертацији, генерише супериорније процене вредности при ризику на изабраним тржишима капитала у односу на традиционалне и широко коришћене моделе вредности при ризику.
Датум одбране: (Попуњава накнадно одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник комисије: <b>Проф. др Марко Царић</b> , редовни професор на Факултету за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, ужа научна област: Мултидисциплинарна економска, изабран 20.02.2012. године, Правни факултет за привреду и правосуђе у Новом Саду, Универзитет Привредна академија у Новом Саду; Члан: <b>Проф. др Светлана Игњатијевић</b> , ванредни професор, ужа научна област: Пословна и међународна економија, изабрана у звање 21.04.2016. године и доцент, ужа научна област: Финансије и банкарство, изабрана 19.10.2017. године., Факултет за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, Универзитет Привредна академија у Новом Саду; Члан: <b>Проф. др Марко Иваниш</b> ( <i>ментор</i> ), редовни професор на Факултету за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, ужа научна област Финансије и банкарство, изабран у звање 19.10.2017. године, Факултет за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, Универзитет Привредна академија у Новом Саду.
Напомена:	Аутор докторске дисертације потписао је следеће Изјаве: 1. Изјава о ауторству, 2. Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и 3. Изјава о коришћењу. Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику.
УДЦ:	336.76: 005.334 330.143.12 330.05.055.2/.4

## KEY DATA ON THE FINAL THESIS

Paper model:	Doctoral dissertation
Author's first and last name:	Luka M. Filipović
Mentor (title, first name, last name, vocation, institution)	Professor Dr Marko Ivanis, Professor at the Faculty of Economics and Engineering Management in Novi Sad, narrow scientific field Finances and Banking.
Title of the paper:	APPLICATION OF THE VALUE AT RISK CONCEPT IN THE EMERGING MARKETS IN THE CONTEXT OF BASEL AND STANDARDS
Language of publication (letter):	Serbian (Cyrillic)
Design of the paper:	Number of: Pages 163 Subheadings 5 References 140 Tables 8 Pictures 8 Charts 49 Attachments 41
Scientific field:	Finance, Financial markets
Guidelines, key words:	<b>Key words:</b> financial markets, emerging markets, market risk, value at risk, portfolio of securities, stock index, GARCH models, volatility.
Extract (abstract or summary) in the language of the final paper:	In order to examine the possibilities of applying the value at risk concept in emerging markets, in the dissertation it was examined the applicability of the value at risk models on capital markets in the emerging markets in countries of Serbia, Romania, Bulgaria and Montenegro, in the context of meeting the rules of validity of the value at risk model, defined by the Basel Committee for Supervision of Banks. More precisely, in the dissertation, the applicability testing of six risk models was performed in order to answer whether the models based on

---

the assumption of identical and independent distribution of yield (IID) (basic and derived models), as well as models based on simple techniques for modeling volatility, can be reliably used in the markets that are the subject of study in this paper. The tested models are the Variance-covariance model, the RiskMetric model and four models of the historical simulation: the standard model of historical simulation (HS), the historical simulation model of the historical simulation (MHS), the filtered historical simulation model (FHS) and the dynamic model of historical simulation (DHS). These are the most well-known and most frequently used models of value at risk. In addition to these models, the testing of the new semi-parametric ARMA (p, q) -GARCH (p, q) MHS model was carried out and developed in the dissertation, to answer the question of whether this model generates superior risk assessments in relation to the previously mentioned value model at risk.

The daily logarithmic yields of stock exchange indexes were used to test the validity of the model: Belexline (Serbia), Sofix (Bulgaria), BET (Romania), Monex (Montenegro). Estimates of VaR market indexes were carried out daily for a holding period of one day, on a sample of 500 days of data, for the period from February 2014 to February 2017, for a confidence level of 99%. To test the validity of the model, Kupiec's and Christoffersen's models, as well as the Doufor Monte Carlo test technique were used.

Due to the presence of the ARCH effect and the significant deviation from the assumption of normal yield distribution the results of the research indicate that in these markets it is better to use non-parametric value at risk models that can cope with fat tail, rather than parametric models based on simple unconditional (VCV model) and conditional volatility (RM model) models. The results of the testing of the model also indicate that the application of the dynamic model of historical simulation contributes to a significant improvement in the applicability of historical simulation in the emerging markets, and that the use of the new semi-parametric model developed in the dissertation generates superior risk appraisals at selected capital markets in a relationship to traditional and widely used models of value at risk.

Defence date: (filled in subsequently by the appropriate service)	
Members of the Board: (title, first name, last name, vocation, institution)	<p>1. Chairman: <b>Professor Dr Marko Carić</b>, Professor at the Faculty of Economics and Engineering Management in Novi Sad, Multidisciplinary economics, appointed to the rank on the 20<sup>th</sup> of February 2012. Law Faculty of Economics and Justice in Novi Sad, University Privredna akademija in Novi Sad;</p> <p>2. Member: <b>Professor Dr Svetlana Ignjatijević</b>, Associate Professor at the Faculty of Economics and Engineering Management in Novi Sad, narrow scientific field Business and International Economics, appointed to rank on 21<sup>st</sup> April 2016. Assistant Professor, narrow scientific field Finance and Banking. Faculty of Economics and Engineering Management in Novi Sad, University Privredna akademija in Novi Sad;</p> <p>3. Member: <b>Professor Dr Marko Ivaniš</b> (<i>mentor</i>), Professor at the Faculty of Economics and Engineering Management in Novi Sad, narrow scientific field Finance and Banking, appointed to the rank on the 19<sup>th</sup> of October 2017, Faculty of Economics and Engineering Management in Novi Sad, University Privredna akademija in Novi Sad.</p>
Note:	<p>Author of the doctoral dissertation has signed the following statements:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Statement of Authorship,</li> <li>2. Statement that the printed and e-version of the doctoral thesis are identical,</li> <li>3. Statement of copyright licences.</li> </ol> <p>These statements are kept at the Faculty both in printed and electronic form.</p>
UDC	<p>336.76: 005,334 330.143.12 330.05.055.2/4</p>



## САДРЖАЈ

УВОД.....	9
<b>Глава I – КОНЦЕПТ ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ (Value at Risk – VaR) .....</b>	<b>19</b>
1. Порекло и историјски развој концепта вредности при ризику .....	19
2. Основни постулати и претпоставке концепта вредности при ризику ..	23
3. Предности и недостаци концепта вредности при ризику.....	27
4. Искуства у примени концепта вредности при ризику.....	31
<b>Глава II – VaR МЕТОДОЛОГИЈА .....</b>	<b>34</b>
1. Параметарска вредност при ризику .....	34
2. Инкрементална вредност при ризику .....	41
3. Маргинална вредност при ризику .....	44
4. Ограничења у процени вредности при ризику .....	46
5. Алтернативни концепти и методологије .....	50
<b>Глава III – МОДЕЛИ ЗА ПРОЦЕНУ ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ .....</b>	<b>59</b>
1. Модели вредности при ризику засновани на IID претпоставци .....	59
1.1. Варијанса-коваријанса модел вредности при ризику .....	60
1.2. Стандардни модел историјске симулације (HS) .....	63
1.3. Модел огледала историјске симулације (MHS).....	66
2. Модели способни да кооптирају временски променљиву волатиност ..	68
2.1. Филтрирани модел историјске симулације (FHS) .....	69
2.2. RiskMetrics модел вредности при ризику .....	72
3. Динамични модел историјске симулације (DHS) .....	75
4. Нови полупараметарски модел вредности при ризику – $ARMA(p,q)$ - $GARCH(p,q)MHS$ .....	77
5. Компарација модела са аспекта апликативности на тржиштима у настајању .....	80
<b>Глава IV – МОДЕЛИ ЗА ОЦЕНУ ИСПРАВНОСТИ МОДЕЛА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ .....</b>	<b>82</b>
1. Traffic light приступ Базелског комитета за супервизију банака.....	82
2. Курјес-ов тест безусловног покрића .....	85
3. Christoffersen-ов тест условног покрића.....	87
4. Недостаци и ограничења тестова заснованих на броју прекорачења ..	89
5. Модели условног и безусловног покрића засновани на Monte Carlo симулацијама .....	91

5.1. <i>Difour</i> тест процедуре засноване на <i>p</i> -вредностима .....	90
5.2. <i>Ziggel</i> -ов тест условног и безусловног покрића.....	94
<b>Глава V – ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ .....</b>	<b>98</b>
1. Преглед ранијих емпиријских истраживања примене модела вредности при ризику на изабраним тржиштима .....	98
2. Емпиријско истраживање .....	101
2.1. <i>Варијабле и методологија истраживања</i> .....	102
2.2. <i>Процена тржишног ризика на изабраним тржиштима</i> .....	101
3. Тестирање валидности тестираних модела .....	111
4. Валидација резултата тестирања валидности модела применом <i>Difour</i> тест процедуре засноване на <i>p</i> -вредностима.....	115
5. Дискусија .....	118
<b>ЗАКЉУЧАК.....</b>	<b>122</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>129</b>
<b>ПРИЛОГ 1 .....</b>	<b>140</b>
<b>ПРИЛОГ 2.....</b>	<b>156</b>

## УВОД

Пропаст *Long Term Capital Management-a* '98. године, као последице Руске дужничке кризе, као и низ значајних економских криза које су јој претходиле, попут валутне кризе у Азији '97. године, слома Америчког кредитног тржишта '94. године, те слома Јапанске берзе '87. године, утицали су на развој великог броја методологија и концепата за мерење и управљање тржишним ризицима у савременим пословним финансијама. Свакако својом популарношћу и распрострањеношћу посебно се истиче концепт вредности при ризику (*Value at Risk – VaR*), који представља методолошки оквир за мерење и процену тржишних ризика којима су изложени учесници на финансијским тржиштима. Своју популарност концепт дугује, пре свега, Базелском комитету за супервизију банка, који је 2004. године, у циљу повећања финансијске стабилности, те јачању прудеционе контроле, прописао низ правила за мерење и управљање тржишним ризицима, познатим под називом Базел II стандард. У оквиру овог стандарда, Базелски комитет за супервизију банка прописао је и низ квалитативних и квантитативних правила за мерење тржишног ризика применом интерних модела вредности при ризику. Дефинисањем ових правила уважене су две чињенице: 1) да се банке међусобно разликују по степену ризичности њихових портфолија; 2) да се не може дефинисати јединствен стандард, који ће одговарати свим банкама. Са друге стране, прописивањем стандарда банке су добиле могућност да ниво адекватности капитала за покриће потенцијалних губитака утврђују, не на основу неког заједничког стандарда, наметнутог од стране централних банака, већ на основу стварне изложености њихових портфолија тржишном ризику. Другим речима, добиле су могућност да ниво адекватности капитала детерминишу у складу са својом филозофијом пословања. Поштовањем стандарда постижу се два значајна ефекта: 1) стабилност финансијског система, на макроекономском нивоу и 2) минимизирање капиталног оптерећења, са аспекта банке јер се издваја капитал у складу са стварном ризичношћу банчиног портфолија тржишном ризику.

Интересовање Базелског комитета за супервизију банака за питање регулисања проблематике управљања тржишним ризиком потекло је из чињенице да су банке услед смањене дисинтермедијације и ерозије маржи из традиционалног банкарства биле приморане да прошири опсег својих активности. Другим речима, банке су биле приморане да повећају обим трговачких активности. Како у трговању различитим типовима активе тржишни ризик не потиче само из отворених и незаштићених позиција, већ и од имперфектне корелације између тих позиција, Базелски комитет за супервизију банака био је заинтересован за прописивање инструмената који ће уважавати степен корелације

између позиција у портфолију. Будући да концепт вредности при ризику узима у обзир све факторе тржишног ризика који утучу на вредност портофлија, те да се укупан ризик портофолија изражава у облику једног броја који у себи интегрише и рефлектује степен корелисаности између тих позиција, овај концепт је био идеалан инструмент за Базелски комитет за супервизију банака. Банкама је остављена могућност да саме изаберу моделе вредности при ризику које ће користити за процену тржишног ризика.

Валидна процена вредности при ризику захтева испуњење одређених економетријских услова. Сам концепт изграђен је на претпоставци да су финансијска тржишта ефикасна, односно да цене финансијске активе следе мартингали процес, што је еквивалентано претпоставци да су серије приноса са финансијских тржишта идентично и независно дистрибуиране. Принос портфолија се посматра као случајна варијабла, што омогућава да се дистрибуцији промена вредности портфолија припише одговарајућа дистрибуција вероватноће, чиме је омогућена лака квантификација изложености ризику. Међутим, поменуте кризе с краја деведесетих година прошлог века, као и најновија светска економска криза (слом америчког хипотекарног тржишта 2008. године) указују на то да су финансијска тржишта неефикасна. Тачније, присуство стохастичке волатиности на њима, затим, асиметрије, аутокорелације и неравнотеже, јасано сведоче у приолог да је број фактора ризика већи од броја финансијске активе, који инвеститори држе у својим портфолијима. Другим рчима, то значи да тржишта нису ефикасна. Отуда је волатилност финансијских тржишта доминантан фактор који утиче на вредност финансијске активе и на понашање партиципаната на финансијским тржиштима. Још су Mandelbrot (1963, 1972) и Fama (1965) показали да серије приноса са финансијских тржишта, када следе одређене шаблоне кретања, тада не следе правило случајног хода, као и да волатилности нису константне током времена. Истраживања спроведена током последњих десетак година Louzis, Xanthopoulos-Sisinis and Refenes (2014), Mora-Valencia and Javier (2014), Rossignolo, Fethib and Shaban (2012, 2013), Cui *et al.* (2013), Tseng (2011), Žiković (2010), Bahadur (2008), McNeil-a (2005), Christofferson (2003) и Diamandis *et al.* (2011), Şener, Baronyana and Mengütürk (2012), Rossignolo, Fethib and Shaban (2012, 2013), Cui *et al.* (2013), Louzis, Xanthopoulos-Sisinis and Refenes (2014) and Del Brio, Mora-Valencia and Javier (2014) и др., указују:

1) да постоји већи степен корелације између волатилности (квадрата приноса), него између нивоа приноса; 2) да постоји ефекат леврица; 3) да се екстремни догађаји појављују у кластерима. У оваквим условима доводи се у питање сама валидност концепта и могућност примене модела вредности при ризику. Нарочито ово питање треба поставити када је реч о тржиштима у настајању, која се одликују снажном серијалношћу; појавом да се волатилности јављају у кластерима. Бројни аутори попут, Мирјанић (2009), Rossignolo

*et al.* (2012, 2013), Радивојевић (2014, 2016), Милојковић (2017), Filipović *et al.* (2017) и др. указују да основни узрочник серијалности и хетероскедастичности на овим тржиштима јесте аутокорељација, која се објашњава „ефектом трговине”, те чињеницом да је на овим тржиштима појам вредности прилично замагљен, будући да информације нису широко распрострањене. Хартијама од вредности већих компанија се у већој мери и тргује, па у складу са тим се нове информације пристигле на тржиште прво одражавају на цене акција великих компанија, а тек касније на акције мањих издавалаца. Управо та временска разлика доводи до појаве позитивне корелације између цена акција, што има за последицу појаву кластера волатилности, тј. појаве да се велике промене у цени активе следе велике промене, а мале следе мале. У контексту основне претпоставке концепта, серијалност би значила да тренутне опсервације представљају део серије промена цена и приноса које нису случајне варијабле.

Најновија истраживања са тржишта у настајању у смислу задовољена правила Базелског комитета у погледу валидности процене тржишног ризика, као што су истраживања Diamandis *et al.* (2011), Şener, Baronyana and Mengütürk (2012), Rossignolo, Fethib and Shaban (2012, 2013), Cui *et al.* (2013), Louzis, Xanthopoulos-Sisinis and Refenes (2014) and Del Brio, Mora-Valencia и Javier (2014), укзују да је неопходна употреба модела (нарочито оних који се заснивају на теорији екстремне вредности) који уважавају ефекат променљиве волатилности, односно оне који могу да кооптирају карактеристике серије приносе који одступају од претпоставке о идентичној и независној дистрибуцији. Закључци ових истраживања компатибилни су са резултатима ранијих истраживања (Lucas (2000), Berkowitz и O'Brien (2002), Wong, Cheng и Wong (2002), Gencay and Selcuk (2004), Harmantzis *et al.* (2006), која показују да модели вредности при ризику нису дали поуздане процене када волатилности нису биле константе током времена, односно када није била испуњена претпоставка о идентичној и независној дистрибуцији приноса. Резултати ових истраживања показују да када нису испуњене ове претпоставке модели вредности при ризику могу да генеришу процене ризика које у најбољем случају задовољавају особину условног покрића, али не и независности прекорачења.

Имајући у виду претходно апострофирано **предмет истраживања** у докторској дисертацији јесте испитивање могућности примене концепта вредности при ризику на тржиштима у настајању, у контексту задовољавања правила валидности модела вредности при ризику, дефинисана од стране Базелског комитета за супервизију банака. Фокус је био на емпијском истраживању, које је спроведено на примеру тржишта у настајању следећих земаља: Србије, Румуније, Бугарске и Црне Горе.

Сходно формулисаном предмету, **основни циљ** истраживања у докторској дисертацији јесте трагање за одговором на питање да ли модели вредности при ризику

који се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији приноса (основни и изведени модели), као и модели који су способни да кооптирају временски променљиву волатилност (хетероскедастичност), а засновани су на једноставним моделима за моделирање волатилности, могу поуздано да се користе на тржиштима која су предмет проучавања у раду. Процена валидности модела извршена је применом Курјесовог теста безусловног покрића и Christoffersen-овог теста условног покрића. Ови тестови изабрани су имајући у виду распрострањеност њихове употребе. Међутим, обзиром на то да се ови тестови заснивају на одређеним асимптотским претпоставкама, те да имају ограничену моћ у разликовању исправних од неисправних модела вредности при ризику за величину узорка дефинисану од стране Базелског комитета за супервизију банака, у раду су добијени подаци валидности модела подвргнути верификацији. За ту сврху коришћена је *Dufour* тест процедура заснована на *Monte Carlo* симулацији  $p$ -вредности. Модели вредности при ризику који су тестирани су варијанса-коваријанса модел, *RiskMetrics* модел и модели историјске симулације, као што су стандардни модел историјске симулације (*HS*), модел огледала историјске симулације (*MHS*), филтрирани модел историјске симулације (*FHS*) и динамични модел историјске симулације (*DHS*).

Респектујући претходно, могуће је било дефинисати и сет конгруентних и субординирајућих циљева, који укратко подразумевају: прво, испитивање карактеристика изабраних тржишта у настајању у контексту компатибилности са претпоставком о идентичној и независној дистрибуцији приноса портфолија; друго, развој новог (полупараметарског) модела вредности при ризику, који је адекватан за тржишта која су предмет проучавања у раду. У вези са тим, поред горе наведених модела у дисертацији је тестирана и апликативност новог модела који је развијен.

Сагласно предмету и постављеним циљевима истраживања, докторска дисертација полази од следећих хипотеза:

- 1) да серије приноса хартија од вредности на изабраним тржиштима одступају од претпоставке о идентичној и независној дистрибуцији (присутна је аутокорељација и хетероскедастичност);
- 2) да модели који се заснивају на једноставним техникама за моделирање волатилности дају боље резултате, у смислу условног и безусловног поркића ризика, у односу на непараметарске моделе вредности при ризику који се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији;
- 3) да примена динамичног модела историјске симулације доприноси значајном унапређењу апликативности историјске симулације на тржиштима у настајању;

- 4) да употреба новог полупараметарског модела, који је развијен у дисертацији, генерише супериорније процене вредности при ризику на изабраним тржишима капитала у односу на традиционалне и широко коришћене моделе вредности при ризику.

У складу са природом опредељеног предмета и основним циљем истраживања, а уважавајући општу сложеност анализиране проблематике, у раду су примењена квалитативна и квантитативна методологија. Резултат примењених методологија истраживања јесте разумевање појединачне ситуације, односно предмета који се истражује, кроз компарацију изабраних релевантних индикатора и фактора који се проучавају. При томе, коришћен је скуп методских поступака и техника који су омогућили тестирање постављених научних хипотеза.

Истраживање апликативности концепта и модела вредности при ризику базирано је на савременим теоријским достигнућима и емпиријским сазнањима из области савремене портфолио терорије и знања из области управљања финансијским ризицима. Аналитички научни метод је коришћен за идентификовања релевантних фактора и карактеристика изабраних тржишта. Дескриптивни метод коришћен је за представљање теоријских постулата концепта вредности при ризику, опис модела и представљање постојећих резултата и открића у области примене концепта вредности при ризику, док је метод синтезе коришћен у сврху извођења одређених општих закључака у погледу могућности примене концепта и апликативности тестираних модела на изабраним тржиштима.

За тестирање прве хипотеза коришћена је аутокорелациона функција, парцијална аутокорелациона функција, *Ljung-Box*-ов  $Q$  тест за детектовање аутокорелације и *Lagrange*-ов LM тест за идентификовање присуства *ARCH* ефекта. За тестирање осталих хипотеза у раду коришћени су *Kupiec*-ов тест безусловног покрића и *Christofferson*-ов тест условног покрића. Будући да се ови тестови заснивају на асимптотским аргументима, те да отуда имају малу моћ детектовања исправних од неисправних модела, њихови резултати подвргнути су верификацији. За ту сврху коришћена је *Dofour* тест, техника заснована на *Monte Carlo* симулацији  $p$ -вредности. У моделирању волатилности примењивани су *GARCH* модели, док су основни постулати из теорије екстремне вредности коришћени приликом израде динамичког модела историјске симулације.

Да би се утврдило да ли боље резултате постижу непараметарски модели засновани на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији или модели заснвани на једноставним техникама моделирања волатилности у раду је коришћен и компаративни метод. Предмет компаративне анализе подвгнуте су и процене које су добијене применом динамичног модела историјске симулације и новог полупараметарског модела који је развијен у раду. Процене првог модела компарирани су са проценама стандардног модела

историјске симулације, како би се одговорило на питање да ли његова примена на тржиштима у настајању доводи до унапређења апликативности историсјке симулације. Процене новог модела компариране су са проценама добијених од стране свих модела како би се одговорило на питање да ли нови поупараметарски модел, који је развијен у дисертацији, даје супериорније процене у односу на традиционалне моделе вредности при ризику, који су широко распрострањени и најчешће коришћени модели на развијеним финансијским тржиштима.

Емпиријски подаци презентовани су у форми табела и графикана, с циљем да помогну у откривању карактеристичних тенденција и специфичности.

Рад се, поред увода, закључних разматрања и прилога, састоји од пет делова, у којима се кроз примену различитих метода истраживања проучава претходно дефинисани предмет истраживања. У наставку увода дисертације, прецизније је дефинисано свих пет делова рада.

Током последње две деценије концепт вредности при ризику постао је широко прихваћен инструмент у управљању ризицима у банкама и другим финансијским институцијама. Концепт не представља само интерно оруђе за процену и контролу изложености билансних/ванбилансних позиција ризику, већ је званичан инструмент и мера за квантификовање потенцијалних губитка услед изложености банкарских портфолија тржишном ризику. Међутим, иако сâм појам вредност при ризику није био у широкој употреби пре средине деведесетих година прошлог века, његово порекло лежи даље у прошлости. Корени концепта налазе се у *Markowitz*-евој портфолио теорији и хипотези о ефикасном тржишту. Отуда, **први део** рада под називом „Концепт вредности при ризику“ започет је прегледом порекла и историјског развоја концепта. Посебан фокус је био на теоријским постулатима на којима концепт почива. Анализа, у овом делу рада је настављена изучавањем предности и недостатака концепта, с посебним освртом на степен (не)компатибилности између основних постулата на којима концепт почива и карактеристика реалног окружења, а пре свега карактеристика тржишта у настајању. У овом делу рада, представљена су и анализирана искуства у примени концепта у великим светским банкама.

У **другом делу**, под називом „Методологија концепта вредности при ризику“ представљена је и детаљно анализирана методологија на којој почива процена вредности при ризику. Тачније, предмет проучавања у овом делу рада били су параметри према којима се врши процена вредности при ризику и поступци за израчунавање параметарске процене вредности при ризику. Такође, представљени су и детаљно анализирани поступци за израчунавање инкрименталне и маргиналне вредности при ризику. Будући да је концепт изграђен на одређеним постулатима, те отуда има и одређених ограничења,



---

последњих пар године све већи број аутора фокусира се на развој алтернативних методологија за мерење и управљање тржишним ризицима. Неки представљају супститут за концепт вредности при ризику, док се други све више користе као његова допуна. Тако да је фокус анализе на крају овог дела рада био и на представљању алтернативних методологија и концепата за мерење тржишнг ризика, као што су условна вредност при ризику, анализа сценарија, тестирање екстрмних догађаја и вредновање капиталне активе.

Процена вредности при ризику врши се уз помоћ модела вредности при ризику, који су детаљно описани и анализирани у **трећем делу** рада под називом „Модел за процену вредности при ризику“. Посебна пажња усмерена је на моделе који се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији, као и на моделе који су способни да кооптирају временски променљиву волатилност, која је карактеристична за тржишта у настајању, а који се заснивају на једноставним техникама моделирања волатилности. Разлог зашто се у раду проучавају ови модели јесте чињеница да примена модела вредности при ризику представља балнас између поузданости процене ризика и компелксности имплементације модела (трошкова примене модела). Будући да једноствни модели за моделирање временски променљиве волатилности, попут модела из фамилије *ARCH* модела, дају прилично поуздане пороцене, то је у раду био фокус на оне моделе који се базирају на *GARCH* моделима. Посебна пажња биће посвећена варијанса-коваријанса моделу, *RiskMatrics* моделу и моделима историјске симулације, као што су стандардни модел историјске симулације (HS), моделу огледала историјске симулације (MHS), филтрираном моделу историјске симулације (FHS) и динамичном моделу историјске симулације (DHS), који представља најновије унапређење историјске симулације.

У наредном кораку фокус је на развоју новог полупараметарског модела са идејом и циљем да се развије нови модел који ће спадати у групу модела историјске симулације, а који ће бити адекватан за тржишта у настајању. Сусрећемо се са два основна недостатка историјске симулације. Први, да се заснива на претпоставци да су серије приноса идентично и независно дистрибуиране, те када ова претпоставка није испуњена њена употреба је лимитирана и у најбоњем случају може произвести процене које ће задовољити критеријум безусловног покрића. Други недостатак јесте да је са њеном применом тешко може проценити реп дистрибуције за величину узорка и ниво поверења који прописује Базел II стандард. Отуда, примена историјске симулације на тржиштима у настајању и нема великог смисла у контексту задовољавања правила валидности модела Базелског комитета за супервизију банака, иако поједини аутори, попут Радивојевића и сарадника (2009, 2010ц) сматрају историјску симулацију изузетно прикладном за неефикасна тржишта, на којима се уочава да је матрица корелације између хартија од вредности

нестабилна и подложна брзим променама. Како модел огледала историјске симулације (MHS) донекле решава број недовољног броја опсервација које спадају у реп дистрибуције, то је идеја да се он унапреди инкорпорирањем приноса који ће задовољвати претпоставку о идентичној и независној дистрибуције (IID) приноса. Основна намера је да се оригинални подаци трансформишу у IID приносе, помоћу модела који може да кооптира аутокорељацију како у приносима, тако и у квадратима приноса, а који ће истовремено бити једноставан за имплементацију. Други речима, намера је да се применом  $ARMA(p,q)$  -  $GARCH(p,q)$  модела кооптирају обе зависности, те да се такви подаци по принципу огледала мултипликују. На овај начин би се добио довољан број опсервација за процену ризика у репу дистрибуције према правилима и захтевима Базел II стандарда. Применом овог решења, отклонио би се још један недостатак историјске симулације, а то је брзо опадање броја опсервација са повећањем холдинг периода.

Будући да су сви модели изграђени на одређеним претпоставкама, којима се настојало да се поједноставе реални тржишни услови, то је неопходно да модели буду тестирани са аспекта валидности њихових процена ризика. Отуда је у **четвртном делу** рада фокус на представљању и анализи модела за оцену исправности модела вредности при ризику. Анализа је започета представљањем основних правила Базелског комитета за супервизију банака за тестирање валидности интерних банкарских модела. Тачније, анализа је започета представљањем *Traffic light* приступа, који је прописан у оквиру Приступа интерних модела вредности при ризику као стандард по коме се врши процена валидности и исправности модела VaR-а. Анализа је затим настављена представљањем тестова безусловног и условног покрића. Значајан недостатак *Kupiec*-овог и *Christoffersen*-овог теста јесте да имају малу статистичку моћ у препознавању исправних од неисправних модела вредности при ризику за величину узорка дефинисану Базел II стандардом. Оба теста изграђена су на асимптотским аргументима, који могу створити тешкоће када се примењују на узорцима коначне величине. Бројни аутори, попут, Christoffersen and Pelletier (2004), Hurlin *et al.* (2008), Berkowitz, Christoffersen and Pelletier (2008), Ziggel *et al.* (2013), показали су да када је мали број прекорачења вредности при ризику, постоји значајно одступање између асимптотске и емпиријске дистрибуције вероватноће. Из тог разлога резултате ових тестова треба подвргнути верификацији. За ту сврху се користе различите симулационе технике засноване, пре свега на *Monte Carlo* симулацијама. Једна таква техника представљена је и детаљно анализирана у овом делу рада. Последњих година развијени су бројни нови модели за тестирање валидности модела вредности при ризику, који се базирају на симулационим техникама. Најпознатији такав модел предмет је анализе на крају овог дела рада.

**Пети део** рада посвећен је емпиријском истраживању. Тачније у овом делу рада приказани су резултати оригиналног емпиријског истраживања. Пре почетка анализе представљени су резултати ранијих емпиријских истраживања и тестирања различитих модела вредности при ризику на изабраним тржиштима. Затим су објашњени методологија и варијабле истраживања. Истраживање је спроведено на тржиштима капитала земљама Србије, Румуније, Бугарске и Црне Горе. У ту сврху коришћени су општи берзански индекси. Подаци су прикупљени са званичних сајтова ових берзи, као и са *Bloomberg*-овог сајта. Период истраживања обухватио је период од новембра 2013. до новембра 2016. године. Период новембар 2013. – 2015. године коришћен је за калибрирање модела волатилности и израчунавање иницијалних процена вредности при ризику, док је остатак коришћен за процену валидности модела. Процена вредности при ризику и подешавање модела извршено је према правилима Базелског комитета за супервизију банака. Резултати тестова валидности подвргнути су валидацији применом *Dufour* тест процедуре засноване на  $p$ -вредностима, уз напомену да је симулација извршена на узорку од 10.000 понављања за величину узорка која одговара периоду тестирања валидности модела вредности при ризику. На крају су добијени резултати дискутовани с аспеката прихватања и одбацивања формулисаних хипотеза на којима се заснива дисертација.

У закључном делу рада сумирани су резултати до којих се дошло у истраживању и изнети су закључци у вези са њима.

У складу са предметом и циљем истраживања, постављеним хипотезама и примењеним методама истраживања на основу теоријско методолошке, али и емпиријске анализе дошло се до релевантних закључака о могућностима примене концепта и модела вредности при ризику, чије су апликативности тестиране у дисертацији. Посебно треба истаћи значај таквог истраживања када је реч о моделу огледала историјске симулације. У домаћој литератури готово да и није био предмет изучавања, а и у странијој литератури је овај модел био предмет проучавања код малог броја аутора, и његова апликативност је тестирана за развијена тржишта. Дакле, основни допринос рада огледа се у пружању одговора домаћој публици на питања као што су:

1) да ли модели који се заснивају на претпоставци о IID могу да се користе на тржиштима у настајању. Нарочито је ово важно питање када се има увиду да је заступљеност модела историјске симулације у банкама око 73% (према истраживањима Perignon-a и Smith-a (2010)). Ови налази ће посебно бити интересантни менаџерима ризика у банкама које послују у овим земљама;

2) да ли модели који се заснивају на једноставним техникама моделирања волатилности могу поуздано да се користе имајући у виду основне карактеристике ових

тржишта. Посебан допринос дисертације огледа се у развоју новог модела, који је дизајниран тако да погодује примени на тржиштима каква су тржишта у настајању.

Допринос укупне анализе састоји се у сагледавању применљивости концепта вредности при ризику на финансијским тржиштима у настајању.

У томе се огледа оправданост ове теме и потреба за радом на овој проблематици. Практичан допринос дисертације огледа се у томе што ће налази до којих се дошло бити од користи менаџерима ризика у банкама и другим финансијским институцијама.

## Глава I

# КОНЦЕПТ ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ (Value at Risk – VaR)

### 1. Порекло и историјски развој концепта вредности при ризику

Концепт VaR представља методолошки оквир за мерење и процену тржишних ризика, којима су изложени учесници на финансијским тржиштима. Нуди интегрисани начин управљања тржишним ризицима комбиновањем свих фактора ризика, уважавајући степене њихове корелисаности у један показатељ који представља једноставну и конзистентну меру ризика за различите позиције и различите врсте ризика. На тај начин омогућава лако разумевање изложености ризику и компарацију различитих финансијских инструмената, који до примене овог концепта нису били упоредиви.<sup>1</sup> До средине деведесетих година прошлог века, могао се наћи под бројним именима, као што су *Capital at Risk - CaR*, *Daily Earnings at Risk - DEaR*, *Dollars at Risk – DaR*, *Money at Risk – MaR* и слично. Међутим, широка употреба овог назива почиње од 1993. године, када је Група 30 (*Group of Thirty*) одабрала концепт као "најбољу праксу" за финансијске деривате. Иако поједини аутори попут Guldemann-a (2000) истичу да је концепт "Вредност при ризику" настао у оквиру *J.P. Morgan* банке још пре 1985. године, први аутор који је понудио квантитативни пример за процену ризика портфолија састављеног од десет обвезница био је Leavens.<sup>2</sup> Мада нигде експлицитно није споменуо VaR, разматрани пример може се сматрати првом икада објављеном VaR-ом као мером ризика. Међутим, данас у стручним и академским круговима преовладава мишљење да је VaR као концепт, а пре свега као мера ризика, настао у оквиру *J.P. Morgan* банке, на идејама *Til Guldemann* и *Jacques Longerstaeu*, који су по налогу свога шефа *Dennis Weatherstone-a*, менаџера *J.P.Morgan*

<sup>1</sup> Radivojevic, N., et al. (2010), *Aplikativnost istorijske simulacije vrednosti pri riziku na tržištu kapitala Srbije*, Industrija, Vol. 38 br. 3, str. 20.

<sup>2</sup> Шире видети: Leavens, H., Dickson, H., (1945), *Diversification of investments*, Trusts and Estates, Vol. 80, No.5, pp. 469-473. 1984 године, Ken Garbade из Bankers Trust-a је у интерним документима представио софистицирану меру ризика портфолија, засновану на матрици варијанса-коваријанса. Отуда, неки аутори истичу да је он први творац VaR-a.

банке, требали да развију систем за мерење и управљање тржишним ризицима. Овај систем је у стању да обухвати велики број активе коју банка поседује у свом портфолију, корелацију између позиција портфолија, а да истовремено буде лак за разумевање и једноставан за употребу. Из свега наведеног, произашла је *RiskMetrics* методологија за мерење и управљање тржишним ризиком.<sup>3</sup>

Сам концепт почива на теоријским основама савремене портфолио теорије. Тачније, сазнање да, под одређеним претпоставкама, варијанса очекиване стопе приноса портфолија представља адекватну меру ризика<sup>4</sup> који је иманентан том приносу, уз уважавање ефекта ефикасне диверсификација у функцији редуковања укупног ризика портфолија, представља основ концепта VaR. Отуда, бројни аутори истичу да се корен концепта налази у *Markowitz*-евој портфолио анализи, тачније у моделу за израчунавање варијансе приноса портфолија (*mean-variance model*). *Markowitz* је унапредио портфолио теорију открићем да се ефикасна диверсификација изводи увођењем у разматрање, поред приноса ( $r$ ) и ризика ( $\sigma$ ) и треће варијабле - међузависност кретања приноса појединачних хартија од вредности које се налазе унутар портфолија, тј. њихова корелација ( $\sigma_{ij}$ ). Увођењем ове варијабле, инвеститори су добили могућност да формирају портфолије који ће им донети веће приносе уз исти ризик, односно исте приносе уз нижи ризик. Управо концепт VaR почива на овом уважавању степена корелисаности између фактора ризика који детерминишу вредност портфолија.

Разлика између *Markowitz*-еве портфолио анализи и концепта огледа се у следећем:

1. Портфолио теорија објашњава ризик у категоријама варијансе и/или концепта бета коефицијента, док VaR интерпретира ризик у облику максималног могућег губитка;
2. VaR је флексибилнији у решавању статистичких проблема, као што су приноси чија расподела одступа од нормалне расподеле

Другим речима, *Markowitz*-ева портфолио анализа заснива се на претпоставци да принос портфолија следи нормалну дистрибуцију. У том случају ризик портфолија се

<sup>3</sup> Ј.П. Морган је 1994. године јавно објавио на Интернету технички документ, који у потпуности описује ову методу за управљање тржишним ризицима. Уз технички документ били су приложени и потребни подаци за израчунавање VaR. Управо бесплатна понуда RiskMetrics на Интернету је послужила као значајан подстрек за ширење концепта вредности при ризику.

<sup>4</sup> Поповић, С, (1998), *Анализа корелативног односа између два вриједносна папира у портфолио контексту*, Берза, бр. 2, Службени гласник „Тржишта новца”, Београд, стр. 13.

израчунава помоћу матрице варијанса-коваријанса. Уколико ова претпоставка није испуњена, примена *Markowitz*-еве портфолио анализе је неадекватна и непоуздана. Уз то, ограничење теорије огледа се и у изузетној комплексности израчунавања матрице. За портфолио од  $n$  хартија од вредности, потребно је  $(n)$  варијанси и  $(n^2 - n)/2$  коваријанси.<sup>5</sup> Укупан број података који се захтева за израчунавање ефикасних портфолија јесте  $n(n + 3)/2$ . Концепт VaR отишао је корак даље. Могуће је проценити (квантификовати) ризик и за портфолија која садрже нелинеарности, јер концепт почива на идеји да принос портфолија представља случајну варијаблу, при чему његова дистрибуција не мора да буде позната тј. не ограничава се на могућност да је нормална. Управо то што се принос портфолија посматра као случајна варијабла омогућава да се његовој дистрибуцији (дистрибуцији вредности портфолија) припишу одговарајуће вероватноће. То омогућава да се ризик портфолија једноставно квантификује, док то што се не претпоставља која је дистрибуција у питању омогућава да ризик квантификује за различите типове портфолија. Отуда, поједини аутори истучу да концепт представља природну прогресију *Markowitz*-еве портфолио анализе наводећи да методологија на којој почива концепт представља резултат интегрисања савремене портфолио теорије, која се фокусира на вредновање и сензитивност финансијске активе и статистичке анализе која проучава понашање фактора ризика.<sup>6</sup>

Права експанзија концепта започета је 1996. године, када је Базелски комитет за супервизију банака прописао VaR као званичну меру тржишног ризика. Тачније када је усвојио амандман на Базел I стандард (*Overview of the Amendment of Capital Accord to Incorporate Market Risk*).<sup>7</sup> У циљу јачања прудеционе контроле и повећања стабилности финансијске стабилности, као и отклањања извора конкурентске нелојалности, Базелски

<sup>5</sup> Шире видети: Haugen, R., (2001), *Modern Investment Theory*, fourth edition, Prentice Hall International.

<sup>6</sup> Шире видети: Radivojevic, N., et al., (2010), *Testing the Applicability of Parametric and Nonparametric Methods of Value at Risk at the Serbian Capital Market*, Banking, No. 11-12, pp. 48.

<sup>7</sup> Први капитални захтеви за банке усвојени су после Велике економске кризе, када је усвјен Закон о хартијама од вредности у САД (*the Securities Exchange Act*), по коме се од банака захтевало да своје зајмове држе 2000% испод акцијског капитала. Деценијама након тога банке су трагале и радиле на развоју мере ризика и метода за њихово мерење, како би се осигурале да су испуниле овај капитални захтев. Са повећањем тржишних ризика и развојем тржишта деривата, раних седамдесетих година XX века, капитални захтеви су редефинисани и проширени 1975. у тзв. Правило униформног нето капитала (*Uniform Net Capital Rule*) према коме су банке дужне да финансијска средства категоришу у дванаест класе, на основу ризика, при чему је сваку класу дефиниса посебан капитални захтев. Захтев се кретао у распону од 0% за краткорочне трезорске записе до 30% за акције. Банке су морали да извештавају о својим капиталним прорачунима у квартално.

комитет супервизију банака је 1988. године усвојио Споразум о капиталу (*International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards*), познат као Базел I стандард, чија је примена почела 1992. године. Реч је о документу којим је дефинисан сет правила пруденционе контроле банака, која се односе на адекватност капитала. Стандардом је прописана обавеза мерења адекватности капитала применом дефинисаног стандарда тзв. ратца имовине и капитала (*Assets to Capital Multiple*). Увођењем овог стандарда елиминисане су разлике у погледу различитих капиталних захтева између појединих јурисдикција и нелојалне конкуренције, јер, пре увођења стандарда капитални захтеви су се одређивали на нивоу националних регулатива. Таква ситуација је доводила банке које послују у земљама са мање ригорозном регулативом у позицију нелојалне конкурентске предности<sup>8</sup> у односу на оне које долазе из земаља где су ти захтеви били виши. Међутим, основни недостатак Базел I стандарда огледао се у томе што се јединствена мера наметнула за све банке, без обзира на стварну изложеност њихових портфолија тржишном ризику. Отуда је Базелски комитет за супервизију банака усвојио низ инструкција и амандмана на Базел I стандард 1996., 2001. и 2003. године, који су коначну форму добили 2004. године, у облику Базел II стандарда. Амандманом из 1996. године, поред Стандардизованог приступа, банке су добиле могућност да адекватност капитала за покриће тржишних ризика утврђују применом интерних модела за процену VaR јер је овим амандманом прописан Приступ интерних модела VaR. Другим речима, амандманом из 1996. године, банкама је дата могућност да процену максималног потенцијалног губитка портфолија који може настати услед изложености тржишном ризику, врше саме, применом интерних модела VaR. Овим је уведен нови инструмент за управљање и процену тржишних ризика – интерни модели VaR; а тиме VaR постаје званична мера тржишног ризика, прописана од стране Базелског комитета за супервизију банака.

Усвајањем Приступа интерних модела VaR уважене су две чињенице: 1) да се банке међусобно разликују по степену ризичности њихових портфолија; 2) да се не може дефинисати јединствен стандард, који ће одговарати свим банкама. Са друге стране, банке су добиле могућност да ниво адекватности капитала за покриће потенцијалних губитака утврђују, не на основу неког заједничког стандарда (ратца имовине и капитала из Базел I

<sup>8</sup> Јапанске и друге банке из далекоисточних земаља су на овај начин остваривале конкурентску предност у односу на банке из Европе и САД.



стандрата), наметнутог од стране централних банака, већ на основу стварне изложености њихових портфолија тржишном ризику. Другим речима, добиле су могућност да ниво адекватности капитала детерминишу у складу са својом филозофијом пословања, што је утицало на прогресиван развој модела VaR јер банке желе да развију и да користе моделе који ће им обезбедити највећи степен сигурности уз што нижу стопу капиталног оптерећења. Наравно, у овоме су вођене мотивом да задовоље, са једне стране своје стејкхолдере, који теже ка остваривању што већих профита, и задовољање критеријума и услова у погледу валидности и исправности модела VaR, који су неметнути од стране регулаторних органа, са друге стране.

Дакле, имајући у виду претхоно речено, може се закључити да се концепт развијао и развија дуж две паралелне линије: портфолио теорије и Приступа интерних модела VaR за израчунавање адекватности капитала за покриће тржишног ризика.

## 2. Основни постулати и претпоставке концепта вредности при ризику

Концепт VaR почива на виђењу приноса портфолија као случајне варијабле која следи одређену дистрибуцију, што омогућава да се дистрибуцији промена вредности портфолија припише одговарајућа дистрибуција вероватноће. То даље омогућава да се ризик портфолија израчуна директно на основу дистрибуције приноса портфолија. Још 1900. године *Louis Bachelier* открио је и доказао да се приноси финансијске активе могу описати помоћу модела случајног хода (*random walk*).<sup>9</sup> Модел сугерише да принос портфолија зависи од фиксног параметра ( $\mu$ ) и случајне варијабле ( $\varepsilon_t$ ), што се може приказати следећим изразом:

$$r_t = \mu + \sigma \varepsilon_t \quad (I\ 2.1)$$

уз  $\varepsilon_t^{10} \sim IID\ N(0, 1)$

при чему су:

<sup>9</sup> Tapiero, C., (2004), *Risk and Financial Management: Mathematical and Computational Methods*, John Wiley and Sons, New Jersey, p. 16.

<sup>10</sup> У литератури је ( $\varepsilon_t$ ) позната као процес Gauss-ов бели шум (*Gaussian white noise*).

$r_t$  - принос портфолија

$\mu$  - константа (средина)

$\sigma$  - волатилност промене цене активе (варијанса приноса портфолија)

$\varepsilon_t$  - нормално дистрибуирана случајна варијабла

Ако се модел представи у најопштијем облику  $P_t = \mu + CP_{t-1} + \varepsilon_t$ , при чему  $P$  је ознака за цену исказану у логаритамском облику, може се приметити да модел представља специјалан случај ауторегресионог модела првог реда AR(1), код којег је параметар модела  $|C|=1$ . У том контексту случајни ход је стохастички, нестационаран процес код кога је варијанса линеарна функција времена.<sup>11</sup>

Претпоставка да случајна грешка модела ( $\varepsilon_t$ ) следи идентичну и независну дистрибуцију значи:

- да се будуће промене у цени активе (вредности портфолија) не могу предвидети на основу историјског кретања цена (не постоји аутокорелација – приноси су међусобно независни један од другог током времена, тј. нису аутокорелирани);
- да се варијанса не мења током времена (да показују особину хомоскедастичности);
- да је процес временски-непроменљив, тј. његово условно очекивање остаје непромењено.

Све наведено представља основне постулате на којима је изграђена хипотеза о ефикасном тржишту, која гласи да ефикасно тржиште јесте тржиште на коме текућа цена одражава све расположиве информације о одређеној хартији од вредности, тј. тржиште је ефикасно ако вреднује финансијску активу по цени која одражава све релевантне информације везане за ту активу.<sup>12</sup>

Имајући у виду претходно речено, може се закључити да концепт VaR почива на хипотези о ефикасном тржишту. Међутим, емпијска истраживања говоре у прилог супротном. Она говоре да финансијска тржишта нису ефикасна, да постоји корелација између приноса односно цена актива и да волатилности нису хомоскедастичне. Још

<sup>11</sup> Младеновић, З., (2010), *Увод у економетрију*, Економски факултет у Београду, Београд, стр. 208.

<sup>12</sup> Шире видети: Fama, E., (1970), *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*, The Journal of Finance, No. 25, pp. 383-417.

шездесетих година прошлог века *Mandelbrot* (1963) и *Fama* (1965) показали су да серије дневних приноса хартија од вредности имају дистрибуцију која одступа од горе наведених постулата. Наиме, историјски подаци о кретању цена и приноса показују да се прогресија цена и приноса у једном периоду најбоље описује и корелира прогресији цене и приноса ранијег периода. Велика аутокорелација финансијских временских серија, указује на постојање периода високе и ниске волатилности познате као груписање. Груписање подразумева да су велике промене цене финансијске активе праћене периодима великих промена, а мале промене периодима малих промена<sup>13</sup>. То сугерише да су промене цене финансијске активе у наредном периоду повезане са променама текућих цена – постоји аутокорелација која доводи до кластера (груписања волатилности). Други назив за груписања волатилности јесте “серијалност”, односно тренутне опсервације представљају део серије промена цене и приноса које нису случајне варијабле.<sup>14</sup> Истраживања су показала да тржишта у нижим стадијумима развоја имају већи степен серијалности.<sup>15</sup> Такође, уочено је да учесници на финансијским тржиштима реагују на сваку нову информацију тако што продају постојеће и купују нове хартије од вредности. То изазива промене у њиховим ценама, а тиме и у одговарајућим стопама приноса. Детаљније сагледавање нове информације може довести до пада обима трансакција и до смиривања тржишта. Према томе, долазак нове вести утиче на раст волатилности стопа приноса, која се смањује током времена. Поновни раст волатилности вероватно ће се јавити са новом информацијом. То значи да стопе приноса финансијских инструмената пролазе кроз фазе ниске и високе волатилности односно да нису идентично дистрибуиране. При томе, постоји већи степен корелисаности између волатилности приноса него између нивоа приноса. Уочено је да степен волатилности може зависити и од тога да ли нову вест инвеститори третирају као позитивну или негативну<sup>16</sup>, при чему је волатилност израженија уколико информација има негативан карактер.

<sup>13</sup> Knight, J., Satchell, S., (2007, *Forecasting Volatility in the Financial Markets*. 3<sup>rd</sup> ed., Elsevier, Butterworth-Heinemann, Oxford. p. 3.

<sup>14</sup> Mirjanić, B., (2009), *Mogućnosti i ograničenja primene Markovitzve teorije na tržištima kapitala u nastajanju: primer Republike Srbije*, Magistrski rad, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, str. 42.

<sup>15</sup> Theodore, T., 1999. *The Challenge of Mixing Emerging Country Stocks with U.S. Stocks*, у књизи: Bruner, Ross Paul, 1999. *Global Equity Selection Strategies*. Glenlake Publishing Company, Chicago.

<sup>16</sup> Младеновић, З., Младеновић, П., оп. цит. стр. 34.

Дакле, постојање кластера волатилности приноса финансијске активе доводи у питање валидност модела случајног хода.<sup>17</sup> Отуда су бројни аутори предложили модел који може да кооптира постојање кластера волатилности:

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \sigma_{t|t-1} \varepsilon_t \quad (\text{I } 2.2)$$

односно исказан преко приноса портфолија:

$$r_t = \sigma_{t|t+1} \varepsilon_t \quad (\text{I } 2.3)$$

Управо на овом моделу изграђен је и најпознатији модел за процену вредности при ризику - *RiskMetrics* модел, као и читав низ других, данас веома атрактивних и често примењиваних модела. С тога се може рећи да концепт VaR почива на моделу случајног хода који кооптира постојање кластера волатилности, односно временски променљиве волатилности.

Разлика између првог и другог модела јесте у томе што у првом моделу ( $\varepsilon_t$ ) представља процес *Gaus*-ов бели шум и дефинисана је као *IID* случајна грешка. У другом моделу она представља маргинални инкремент за који важи да је то случајна, али не независна грешка која је некорелисана, али не нужно стационарна.<sup>18</sup> Тако да овај тип случајне грешке омогућава да се кооптира постојање кластера волатилности, односно временски променљиве волатилности.

<sup>17</sup> Шире видети: Fama, E., 1965. *The Behavior of Stock-Market Prices*. The Journal of Business, Vol. 38, No.1, pp. 34 -105.

<sup>18</sup> Tavella, D., (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing: An Introduction to Computational Finance*, John Wiley and Sons, Chichester, p. 14.

### 3. Предности и недостаци концепта вредности при ризику

Као и сваки концепт или теорија и концепт, VaR има низ предности и ограничења, којих треба бити свестан приликом његове примене. Иако је првобитно био намењен за мерење ризика на тржишту финансијских деривата, концепт је врло брзо постао широко прихваћен инструмент за мерење и управљање тржишним и кредитним ризицима у финансијским институцијама. Своју популарност, концепт, пре свега дугује чињеници да је једноставан за имплементацију и лак за разумевање. Наиме, из саме дефиниције дате у уводном делу ове дисертације, где је речено да је то методолошки оквир који представља интегрисани начин управљања тржишним ризицима комбиновањем свих фактора ризика, уважавајући степене њихове корелисаности у један показатељ који представља једноставну и конзистентну меру ризика за различите позиције и различите врсте ризика. Наслућују се три основне његове предности: 1) лак за разумевање; 2) омогућава агрегацију утицаја различитих фактора ризика у један број ризика и 3) омогућава компарацију различитих врста ризика за различите портфолије и активе.<sup>19</sup>

VaR се изражава у новачним јединицима или процентима од вредности финансијске активе или портфолија. То га чини врло лаким и разумљивим и за тумачење изложености ризику портфолија од стране свих стејкхолдера банке који нису експерти за ризик. Другим речима, ово га чини погодним за комуницирање (извештавање) у оквиру банке, али и између банака и регулатоних органа. Поред тога, уважава ефекат корелације и утицаја различитих фактора ризика на вредност портфолија. Ово не само да омогућава агрегацију ризика, већ њено исказивање једним бројем, што даље још више олакшава разумевање ризичности портфолија као и даљу комуникацију. Наиме, износ VaR у апсолутном износу представља потенцијални губитак. То могу лако разумети сви у банци. Поред тога, овај потенцијални губитак једнак је нивоу капитала, који је потребно издвојити, у облику капиталних резерви за његово покриће. На тај начин, утврђивањем VaR у апсолутном износу истовремено значи и утврђивање нивоа захтеваног капитала, који одговара стварној изложености финансијске институције ризику и њеној пословној филозофији. На тај начин се постиже минимизирање трошка капитала (капитално

<sup>19</sup> Видети у: Grayling, S., (1998), *VaR: Understanding and Applying Value at Risk*, London.

оптерећење) са једне, и повећање профитабилности финансијске институције у складу са стратегијом пословања финансијске институције, са друге стране.

Имајући у виду ове две предности лако се може извести и трећа предност концепта, а то је да омогућава компарацију ризика за различите врсте ризика и различите портфолије јер се ризик изражава у истим јединицама. До појаве концепта ово није било могуће. Наиме, ризичност акција се мерила и изражавала различитим јединицама у односу на ризичност обвезница или финансијских деривата. Управо ова особина довела је да се VaR користи за буџетирање ризика. VaR се користи за поређење успешности између различитих организационих јединца на основу рача између приноса и преузетог ризика. Као корак даље користи се за дефинисање лимита<sup>20</sup> трговања. Сваки појединац или организациони део зна до којег износа потенцијалног губитка може да преузима ризичне активности. На тај начин се омогућава и лакша контрола пословања финансијске институције. То значи да концепт представља добар *ex ante* оквир за оцену ризичности инвестиционих одлука и трговачких активности. Тако може да се користи као алтернатива традиционалним мерама перформанси портфолија, као што су *Sharpe*-ов, *Trayner*-ов и *Jensen*-ов индекс. Стављањем у однос премије за ризик индивидуалне позиције и маргиналне VaR добија се тзв. *T*-рацио, који представља добар инструмент за оптимизацију портфолија. У портфолио се укључују позиције са највећим рациом, тако да се добије портфолио у коме све позиције имају једнаке рацие.<sup>21</sup>

С обзиром на то да омогућава лакшу контролу, то је могуће користити VaR као основ за награђивање менаџера и запослених у банкама.<sup>22</sup> Такође, помаже у откривању било каквих трендова у понашању појединаца, организационих делова, или банке у целини.<sup>23</sup>

Са развојем савремене информационе технологије и прилагођених софтвера, концепт постаје једноставан за примену и у случају веома комплексних портфолија, која

<sup>20</sup> Лимити ризика представљају износе потенцијалних губитака који могу настати предузимање одређених активности на тржишту. Видети у Pearson, N., (2002), *Risk budgeting: Portfolio Problem Solving with Value at Risk*, John Wiley and Sons, Chichester.

<sup>21</sup> Радивојевић, Н., (2014), *Управљање тржишним ризицима на финансијским тржиштима у настајању применом модела вредности при ризику*, Докторска дисертација, Економски факултет у Крагујевцу, стр. 81.

<sup>22</sup> Khindanova, I., Rachev, S., (2000), *Value at Risk: recent advances*, Working Paper, University of California, Santa Barbara and University of Karlsruhe, Germany, p. 3.

<sup>23</sup> Шире видети: Krause, A., (2003), *Exploring the limitations of value at risk: how good is it in practice*, The journal of risk finance, winter, pp. 19-29.

садрже поред основних финансијских инструмената и позиције у изведеним (финансијским дериватима) инструментима. Даље ово значи да не морате да будете експерт за статистику или економетрију да би сте проценили ризик неког портфолија, већ је довољно само да унесете историјске податке, а софтвер ће све неопходне калкулације извршити уместо вас.

Дакле, концепт VaR јесте користан и широко распрострањен инструмент за мерење и управљање тржишним ризиком. Међутим, опасности од широко распрострањене употребе концепта јесте претерано ослањање на његове резултате, њихово погрешно тумачење, па чак и злоупотребе. С тога је императив да свако ко користи концепт буде свестан његових ограничења. Пре свега, сам концепт заснован је на идеји ефикасног тржишта. Економске кризе с краја деведесетих година прошлог века, као и последња светска економска криза (слом америчког хипотекарног тржишта 2008. године) указују на то да су финансијска тржишта неефикасна. Присуство стохастичке волатиности на њима, асиметрије, аутокорељације и неравнотеже јасано сведоче у приолог да је број фактора ризика већи од броја финансијске активе, који инвеститори држе у својим портфолијима. Другим рчима, то значи да тржишта нису ефикасна. Најновија истраживања као што су Louzis, Xanthopoulos-Sisinis and Refenes and Del Bri (2014), Mora-Valencia and Javier (2014), Rossignolo, Fethib and Shaban (2012, 2013), Cui *et al.* (2013), Tseng (2011), Žiković (2010), Bahadur (2008), као и нека мало старија попут McNeil (2005), Christofferson (2003) показују: 1) да постоји већи степен корелације између волатилности (квадрата приноса), него између нивоа приноса; 2) да постоји ефекат леврица; 3) да се екстремни догађаји појављују у кластерима. У оваквим условима доводи се у питање сама валидност концепта и могућност примене модела вредности при ризику. Нарочито ово питање треба поставити када је реч о тржиштима у настајању, која се одликују снажном временски променљивом волатилношћу која се групише у периоде ниске и високе варијабилности, што су у својим истраживањима закључили аутори попут Мирјанић (2009), Rossignolo *et al.* (2012, 2013), Радивојевић (2014, 2016а), Милојковић (2017) и др.).

Невезано од овога, бројни критичари истичу да концепт ствара лажан осећај сигурности, нарочит ако се процене VaR врше према упутству Базел II стандарда. Када се говори о процени VaR у контексту Базел II стандарда, многи верују да је процена VaR максимални губитак који банка може да изгуби. Што није тачно. Према Базел II стандарду

банке су дужне да процене VaR врше за ниво поверења од 99% (о чему ће бити више речи у четвртом делу рада). У реалности, процена ризика за ниво поверења од 99% је веома далеко од 100% процене. Наиме, према правилима Базел II стандарда очекивано је да губитак свега 2 до 3 пута годишње буде већи од процене VaR, што у реалности није поуздана чињеница. Независно од броја прекорачења, VaR не говори ништа о најгорем могућем сценарију, тј. о највећем могућем губитку. Отуда су развијени бројни концептни који превазилазе ово ограничење, о чему ће више речи бити у наставку дисертације.

Када се говори о примени концепта као инструмента за буџетирање ризика не сме се заборавити чињеница да VaR незадовољава увек особину адитивности. Збир индивидуалних вредности процена VaR не мора бити увек једнак збиру појединачних VaR имовине (о овој осбини биће више речи у наставку дисертације). Поред тога, различити модели за процену VaR могу довести до различитих процена. Данас постоји широк спектар модела који могу да се користе, што је корисно јер могу да се користе за различите ситуације; различите портфолије и врсте ризика. Међутим, различити модели генеришу различите процене код истих портфолија, тако да се репрезентативност VaR-а доводи у питање. Независно од овога, валидност процене зависи и од величине узорка и од периода узрковања, тако да је процена вредности при ризику подложна ефекту узрковања. Сам избор података се мора посматрати у контексту избора теоријске дистрибуције, која се користи за процену VaR.

Ни један други систем управљања ризицима који је развијен до данас не адресира све ове аспекте у оквиру једног система, а да је при томе једноставан за употребу и да је разумљив свим менаџерима и запосленима у банци. Због тога концепт се показао као веома користан алат, упркос његовим недостацима. Међутим, постојање одређених недостатака и лимита ограничавају степен до којег се процене вредности при ризику могу користити. Процену не треба узети као тачан број, већ као индикацију о томе о коликом степену ризика је банчин портфолио изложен. Правилна употреба концепта га чини изузетим инструментом за управљање ризицима. Међутим, претерано ослањање на његове резултате и доношње одлуке искључиво на основу њих ће вероватно бити и контрапродуктивно. Нема система за управљање ризицима који може заменити искуство и менаџера. Предности једноставности концепта VaR-а не може се потценити. Много прецизнији и напреднији системи за управљање ризицима, који доносиоцима одлука нису



разумљиви, далеко су мање вредни него лако разумљив систем, чак и ако он даје само грубу процену ризика.

#### 4. Искуства у примени концепта вредности при ризику

Иако нема тачних записа када и где се први пут појавио концепт VaR, са сигурношћу се може рећи да је примани циљ његовог настанка био да се систематизују мерења изложености ризику за финансијске институције, које послују на безри, преко ефикаснијег управљања њиховим портфолијом. Пре појаве концепта VaR већина финансијских институција које су се бавиле трговачким активностима на безрама су мериле ризик на *desk to desk* основи, без вођења рачуна о стварној изложености њихових портфолија тржишном ризику.

Експанзија концепта започиње у јулу 1993. године када је Група 30 (*The Group of Thirty*) у свом извештају (*The Global Derivatives Study*) препоручила финансијским институцијама да користе конзистентне мере за израчунавање дневне изложености тржишном ризику њихове позиције у дериватима и пореде их са дефинисаним границама изложености по основу тржишног ризика. За ту сврху Група 30 препоручила је употребу VaR-а за временски хоризонт од једног дана за ново поверења од 99%. Врло брзо слично одобрење уследило је од стране Међународне асоцијације за свопове и деривате (*The International Swaps and Derivatives Association*). У извештају Групе 30 указано је на неколико значајних особина вредности при ризику које су одговорне за широку употребу концепта међу финансијским институцијама, као што је особина да је у питању конзистентна мера ризика, која омогућава компарацију ризичности различитих портфолија за различите врсте и групе ризика, да се изражава у новчаним јединицама, да је у питању пробабилистичка мера ризика, те да је могуће израчунати је за различите нивое поверења и сл.<sup>24</sup>

Најпознатија употреба VaR-а јесте у *J.P. Morgan* банци, која је 1994. године објавила извештај под називом Технички документ у коме је објашњена употреба

<sup>24</sup> Шире видети: Global Derivatives Study Group, (1993), *Derivatives: Practices and Principles* (Washington, D.C), Board of Governors of the Federal Reserve System, (1993), SR Letter 93-69, pp. 1 -22.

интерног модела вредности при ризику тзв. *RiskMetrics* модела. Многи верују да је концепт доживео оволику популарност захваљујући бившем председнику *J.P. Morgan* банке, *Dennis Weatherstone*-у, који је захтевао да му се сваког дана подноси извештај о укупној изложености ризику портфолија банке. Поред *J.P.Morgan*, водеће инвестиционе банке у САД су прихватиле VaR као интерни инструмент за мерење и управљање тржишним ризицима, до 1996. године, о чему сведоче истраживања *Hendriks*-а (1996). Највећу корист од прихватања концепта имале су у смањењу капиталног оптерећења по основу захтева за издвајање адекватности капитала за покриће потенцијалних губитака услед изложености портфолија тржишном ризику.

Данас говото да нема озбиљније финансијске институције које не користе концепт VaR-а за процену изложености тржишном ризику својих позиција. Занимљиво је да данас бројне финансијске институције кристе VaR за дефинисање хец политике и процену ефеката појединачних трансакција на укупан ризик портфолија. Менаџери у тим финансијским институцијама га користе за процену учинка својих запослених, али и за алокацију капитала по линијама трговања и резерви за покриће потенцијалних губитака по појединачним трансакцијама.<sup>25</sup> Бројне финансијске институције, попут клириншких кућа, пре су изложене ризику од посредовања него услед изложености тржишном ризику позиција које оне држе у власништу. Такве институције, данас користе VaR за процену иложености кредитном ризику њихових клијента приликом поствљања услова њиховог кредитирања.

Интересантна су и искуства и занимљиви примери употебе VaR-а од стране нефинансијских институција. Оне користе VaR за оцену ризичности својих новчаних токова, као и за процену хец одлуке.<sup>26</sup> Пионири у примени концепта VaR за оцену тржишног ризика су два немачка конгломерата *Veba* и *Simens*.<sup>27</sup> Са применом концепта VaR у овим конгломератима дошло је из потребе да се путем управљања ризиком смањи волатилност и нестабилност новчаних токова и истовремено повећава капацитете задуживања код поверилаца.

<sup>25</sup> Видети у: Rod A. Beckström and Alyce R. Campbell, *The Future of Firm-Wide Risk Management*, Beckström, P., Campbell, A., (1995), *An Introduction to VAR*, Palo Alto, Ca.: CAATS Software, Inc.

<sup>26</sup> Компаније користе VaR за процену да ли су потенцијални губици већи од трошкова осигурања или не. На основу тога доносе одлуке о куповини осигурања.

<sup>27</sup> Шире видети: Priest, A., (1997), *Veba's Way with VAR*, in Grayling, S., editor, *VAR: Understanding and Applying Value at Risk*, London, pp. 355-357.

Упркос бројним предностима концепта VaR, свакако треба истаћи и негативна искуства са њим. Чак и у ситуацији када се концепт правилно употреби примена концепта не гарантује потпуну сигурност јер увек постоји одређена вероватноћа да ће се десити нежељени догађаји који нису покривени проценом вредности при ризику. Занимљиво искуство у примени VaR-а имала је компанија *Procter & Gamble*, која је током 1993. године у пословима са дериватима (у пословима са писаним *Bankers Trust nym* опцијама) претрпела губике у износу од 150 милиона долара. Занимљив пример јесте *Barings* банка која је банкротирала 1995. када је претрпљен губитак од 1,3 милијарде долара услед спекулативне трговине њиховог трејдера *Nick Leeson-a*. Такође, интересантан пример јесте и пропст *The Orange County Investment Pool-a*, која је банкротирала након губитка вредности на финансијском тржишту за око 1,5 милијарди долара, као и пропаст *MG Refining & Marketing-a*, филијале *Metallgesellschaft AG-a* из Немачке усед губитка од 1,3 милијарде долара у пословима трговине нафте.

## Глава II

### VaR МЕТОДОЛОГИЈА

#### 1. Параметарска вредност при ризику

Вредност при ризику представља број који репрезентује потенцијалну максималну негативну промену будуће вредности портфолија током одређеног периода.<sup>28</sup> Другим речима, указује менаџерима ризика колико могу да изгубе током одређеног временског периода за дати ниво поверења, услед негативних кретања тржишних фактора ризика, под нормалним тржишним условима<sup>29</sup> при чему се под нормалним тржишним условима подразумева "нормално" кретања тржишта које може бити прекорачено само у малом и прецизно дефинисаном проценту. Дакле у питању је мера губитка за коју постоји ниска, унапред одређена вероватноћа да ће стварни губитак бити већи.<sup>30</sup> Овако представљена VaR јесте нумеричка вредност при ризику. Међутим, VaR има и своју параметарску нотацију која проистиче из математике дефиниције вредности при ризику. Математичка дефиниција VaR-а гласи да за дати ниво поверења (при чему  $\alpha \in (0,1)$ ), VaR портфолија за  $\alpha$  током одређеног холдинг периода  $t$ , представља најмањи број  $k \in \mathfrak{R}$  тако да вероватноћа настанка губитка током холдинг периода већа од  $k$  је  $\alpha$ , што се исказује на следећи начин:

$$Pr(r < -VaR) = \int_{-\infty}^{-VaR} dF_{\Delta P}(r) = 1 - cl = \alpha \quad (\text{II 1.1.})$$

при чему су:

$f(r)$  - функција густине вероватноће приноса портфолија

$F_{\Delta P}(r)$  - кумулатив функције вероватноће приноса портфолија

$cl$  - ниво поверења

<sup>28</sup> JP Morgan, Reuters, RiskMatics, Technical Document, Fourth Edition, New York, December, 1996. p. 7.

<sup>29</sup> Уз претпоставку да се портфолиом не управља током тог периода, што је еквивалентно претпоставци о непромењеној структури портфолија. Ово се односи да се губици остварени у једним позицијама не надокнађују добицима оствареним у другим.

<sup>30</sup> Jorion, P., (2003), *Financial Risk Manager*, John Wiley and Sons, New Jersey, p. 246.

На основу израза (II 1.1.) јасно се уочава да је за израчунавање параметарске VaR неопходно познавати два параметра: холдинг период и ниво поверења за који се врши процена. Холдинг период представља период за који се врши процена VaR-а, док ниво поверења представља вероватноћу за коју се врши процена VaR-а, односно вероватноћу да потенцијални губитак неће бити већи од VaR-а. Избор ова два параметра зависи од великог броја фактора, али пре свега од става менаџмента банке према ризику, тј. од политике банке и од сврхе за коју се процена VaR-а врши. Тако, ако се процена VaR-а врши за потребе извештавања, односно за утврђивање адекватности капитала, онда се ова процена врши у складу са Базел II стандардом. Према овом стандарду банке су дужне да своје дневне процене VaR-а израчунавају за ниво поверења од 99%. Базелски комитет за супервизију банака је овако висок ниво поверења поставио како би се редуковао ризик од банкротства. Међутим, ако се процена врши за потребе интерног извештавања избор параметара зависи искључиво од става менаџмента према ризику.<sup>31</sup> За потребе интерног извештавања уобичајено је да се користе нижи нивои поверења. Тако *J.P. Morgan* користи ниво поверења од 95%, *Citybank* од 95,4%, док *Bankers Trust* користи ниво поверења од 99%.<sup>32</sup> Избор параметара зависи и од таквих фактора као што су врста и природа портфолија или степен ликвидности тржишта. Идеално је да дужина холдинг периода буде једнака времену које је потребно да се ликвидира одређена позиција (време које је потребно да се позиција конвертује у новац)<sup>33</sup>. У случају да се ради о ниско ликвидним позицијама или о плитком тржишту, препоручљива је употреба дужег холдинг периода и обратно, што важи у случају ликвидних позиција и портфолија и развијености тржишта. Дужи холдинг период препоручује се и у условима финансијске кризе јер у таквим околностима ликвидност значајно опада, те су погоднији дужи холдинг периоди, обратно важи у случају високо ликвидних позиција и развијених тржишта.<sup>34</sup> Када је реч о избору ниво поверења треба имати у виду, да без обзира на сврху за коју се врши процена VaR-а, виши нивоа поверења креира веће, али и мање вероватне износе VaR-а. Отуда, када се процене VaR-а користе за тестирање исправности модела VaR-а, треба избегавати екстремно високе нивое поверења. У случају одсуства прописа препоручљива је употреба

<sup>31</sup> Alexander, C., (2008), оп., цит., стр. 14.

<sup>32</sup> Dowd, K., (1998), *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, John Wiley and Sons, Chichester, p. 53.

<sup>33</sup> Dowd, K., (1998) оп., цит., стр. 51.

<sup>34</sup> Alexander, C., (2008), оп., цит., стр. 15.

нивоа поверења у распону од од 95 до 99% јер они представљају добар компромис између онога шта банка жели да постигне, са аспекта сигурости и покрића потенцијалних губиката са једне и прецизности процене, са друге стране.<sup>35</sup> Варирањем ових параметара добијају се корисне информације о дистрибуцији приноса портфолија и потенцијалним губицима.

Поред ова два параметра, за израчунавање параметарске VaR неопходо је да буду начињене и испуњене одређене статистичке претпоставке. Прва претпоставка се односи на услов стационарности. Стационарност се односи на претпоставку да је једнако вероватно да ће се 1% флукуација у приносима портфолија десити у сваком тренутку у времену. Стационарност је уобичајена претпоставка у финансијској економији и значајно поједностављује израчунавања параметарске VaR. Уколико она није испуњена, онда приноси портфолија неће бити *IID*, тако да ће се разликовати у односу на дистрибуцију на основу које је изведена. Друга претпоставка се односи на услов о фиксној структури портфолија. Овај услов се односи на захтев да структура портфолија остане непромењена током холдинг периода и потиче из чињенице да мале промене у пондерима позиција портфолија могу да доведу до значајних промена у вредности односно ризичности портфолија. Добро је позната чињеница да варијанса (ризик) портфолија зависи како од степена корелисаности између позиција портфолија, тако и од њихових учешћа у структури портфолија. Тако свака промена у пондерима доводи до промене у варијанси. Блиско повезана претпоставка са првом претпоставком јесте претпоставка о интертемпоралној непредвидивости. Ова претпоставка се односи на услов да су флукуације приноса портфолија независне једна од друге. Ово је еквивалентно претпоставци о случајном ходу (*random walk*), која може бити представљена као претпоставка да је очекивана стопа приноса портфолија једнака нули. Другим речима, ако је средња вредност приноса портфолија једнака нули, одна најбоља процена сутрашње промене вредности портфолија јесте данашњи принос портфолија. Не постоји релевантна информација доступна у тренутку  $t$  која може помоћи у процени приноса портфолија у тренутку  $t+1$ .

---

<sup>35</sup> Henrard, M., (2005), оп., цит., стр. 10.

Следећа претпоставка се односи на услов не-негативности. Овај захтев се односи на услов да финансијска средства немају негативну вредност, мада финансијски деривати могу нарушити ову претпоставку.

Најважнија претпоставка за израчунавање параметарске VaR јесте претпоставка која се односи на избор теоријске дистрибуције, која може на најбољи начин да опише кретање основних фактора тржишног ризика. Она је круцијална за детерминисање будућег приноса портфолија, а тиме и за VaR. Уобичајено је да се претпоставља да серија приноса портфолија следи нормалну дистрибуцију (Bams и Whitehouse, (2001), (2005)). У том случају процена VaR-а своди се на утврђивање  $(\alpha)^{36}$  квантил дистрибуције приноса портфолија помоћу трансформације  $f(\Delta P)$  у стандардизовану нормалну дистрибуцију  $\Phi(z)$ , при чему је  $(z)$  стандардизована случајна варијабла за коју важи  $z \sim N(0, 1)$ .

Како је  $\Pr(r < -VaR) = \alpha$  применом нормалне стандардизоване трансформације се добија следећи израз:

$$\Pr\left(\left[\frac{r - \mu}{\sigma}\right] < \left[\frac{-VaR_{\alpha} - \mu}{\sigma}\right]\right) = \alpha \quad (\text{II 1.2})$$

С обзиром да је  $[r - \mu]/\sigma_t \sim N(0,1)$  добија се:

$$\Pr\left(z < \left[\frac{-VaR_{\alpha} - \mu}{\sigma}\right]\right) = \alpha \quad (\text{II 1.3})$$

односно,

$$\Pr(z < -z_{\alpha}) = \alpha \quad (\text{II 1.4})$$

при чему је

$$-z_{\alpha} = \left[\frac{-VaR_{\alpha} - \mu}{\sigma}\right] \quad (\text{II 1.5})$$

тј. вредност квантила стандардизоване нормалне дистрибуције, који кореспондира са нивоом поверења  $(1-\alpha)$ .

Сређивањем израза (II 2.2.5) добија се:

---

<sup>36</sup> Предзнак  $(-)$  указује да је реч о квантилу који се односи на леви реп дистрибуције.

$$VaR_{\alpha} = z_{\alpha} \sigma - \mu \quad (\text{II 1.6})$$

Овако добијена VaR представља параметарску процену јер обухвата оцену параметара дистрибуције приноса портфолија, уместо да се посматрају само квантили емпиријске дистрибуције. Укључивањем вредности портфолија (P) у израз лако се утврђује VaR у новчаном износу.

Под претпоставком нормалности дистрибуције параметарска VaR има још две значајне особине: 1) способност трансформације процена VaR по нивоима поверења и 2) способност трансформације процена VaR за различите нивое поверења. Прва трансформација се спроводи примено правила "квадратног корена времена":

$$VaR_T = VaR_t \sqrt{T} \quad (\text{II 1.7})$$

односно, рачна квадратног корена два холдинг периода:

$$VaR_t = \sqrt{t/T} VaR_T \quad (\text{II 1.8})$$

при чему је  $T > t$ .

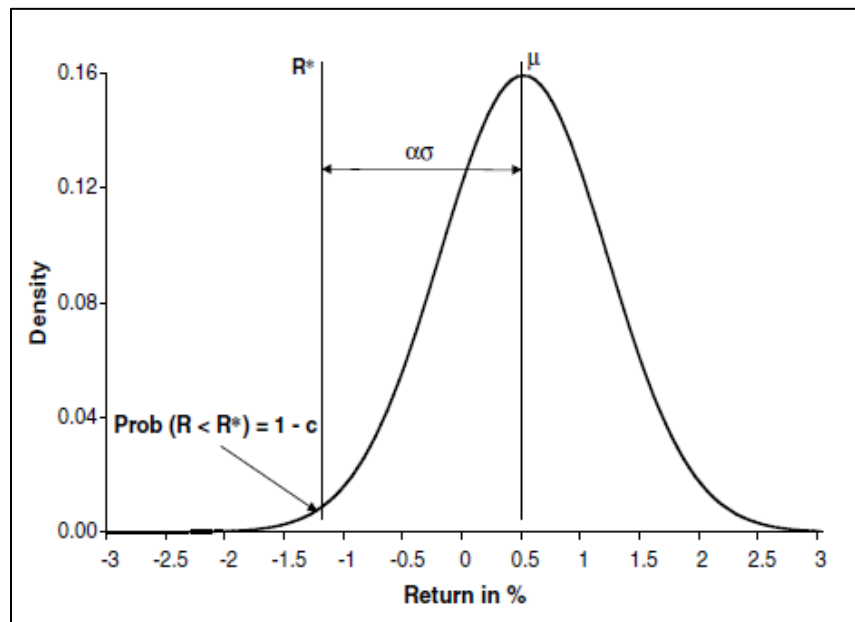
Друга трансформација се спроводи применом рачна два нивоа поверења:

$$VaR_{c1} = (c1/c2) VaR_{c2}$$

Детерминисање параметарске VaR под претпоставком нормалности серије приноса портфолија може се графички приказати као на Слици 1:



**Слика 1. Вредност при ризику под претпоставком да серије приноса портфолија следе нормалну дистрибуцију**

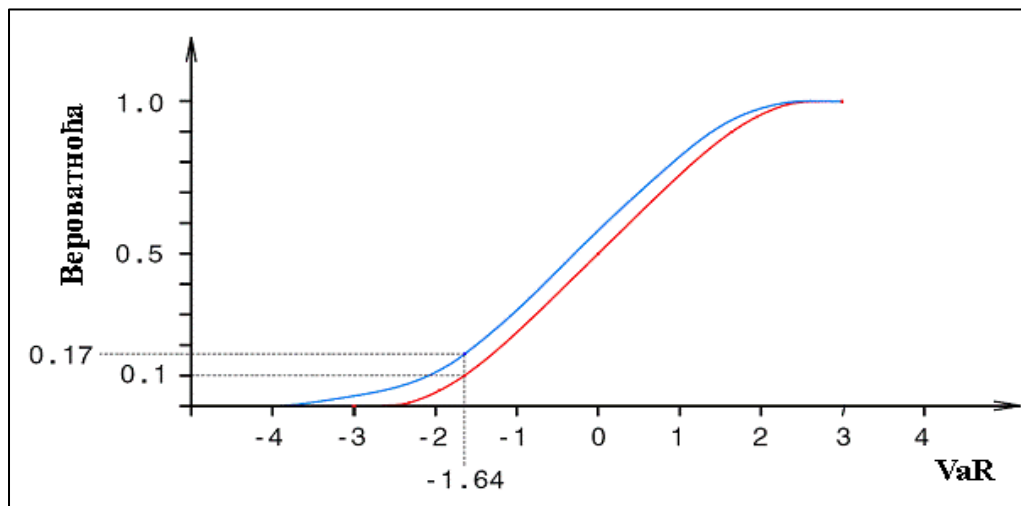
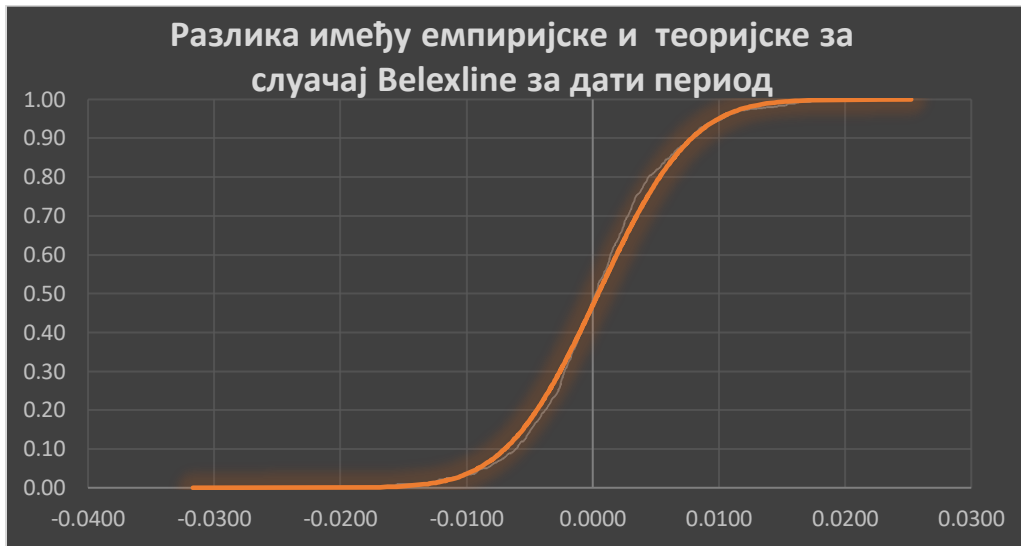


Извор: Прорачун аутора добијен коришћењем Монте Карло симулације у *Microsoft Excel* програму на узорку од 10000 симулација начињене под претпоставком да серија приноса портфолија следе  $N(0,5;\sigma^2)$

Као што се види са графика, VaR предствља вредност одсечка на кривој (*cutoff*) са сталном вероватноћом  $\alpha = (1-cl)$  да ће доћи до прекорачења.

Сваку од претпоставки треба испитати приликом процене VaR-а. Употреба историјских података имплицира да се дистрибуција приноса не мења током времена (претпоставка стационарности). Међутим, емпиријска истраживања јасно указују да ова претпоставка не стоји, већ да је за серије приноса са финансијских тржишта карактеристична појава аутокорељације и хетероскедастичности (особина да се варијанса током времена мења). То значи да серије приноса нису *IID*, односно да претпоставка о стационарности и интерполарној непредвидивости (случајном ходу) не стоје. Претпоставка да је средња вредност серије приноса једнака нули, такође је у крајњу руку дискутабилна, јер је познато да хартије од вредности имају позитиван очекивани принос. Бројна емпиријска истраживања показују да и претпоставка о нормалности дистрибуције серије приноса портфолија не стоји. Импликације прихватања ове претпоставке најбоље се могу видети на примеру који је приказан на слици 2.

Слике 2. и 2.1. Разлика између кумулатвне емпиријске и стандардизоване нормлане дистрибуције



Извор: Прорачун аутора добијен коришћењем Монте Карло симулације у *Microsoft Excel* програму на узорку од 10000 симулација

Као што се примећује на слици 2, у случају постојања разлике између емпиријске криве дистрибуције (слика 2 и плава линија на слици 2.1) и нормалне криве дистрибуције (црвена линија на слици 2.1) процене VaR ће се разликовати. У случају прихватања претпоставке да серија приноса портфолија следи нормалну дистрибуцију, процена VaR-а за ниво поверења од 90% ће одговарати вредности стандардизоване нормалне случајне варијабле, 1,64. У случају ослањања на емпиријску дистрибуцију, која има дебље репове у односу на нормалну дистрибуцију, при овом нивоу поверења процена VaR одговара

вредност 2. Будући да бројна емпиријска истраживања показују да серије приноса не следе нормалну дистрибуцију, већ да имају дебље репове, у апликацијама често користи претпоставка да серије приноса следе *Леви* дистрибуцију.<sup>37</sup>

## 2. Инкрементална вредност при ризику

У последњих неколико година инкременталана VaR постала је стандардни инструмент за доношење хец-портфолијо одлука тј. инструмент за сагледавање ефекта од додавања нових инструмената у портфолију на VaR портфолија. Овако исказану инкременталану VaR треба схватити као разлику између VaR портфолија после и пре укључивања нових позиција, што се математички може исказати на следећи начин.<sup>38</sup>

$$IVaR = VaR_{p+a} - VaR_p \quad (\text{II } 2.1)$$

при чему су:

$IVaR$  - инкрементална VaR

$VaR_p$  - VaR портфолија пре укључивања нових позиција

$VaR_{p+a}$  - VaR портфолија након укључивања нових позиција

$a$  - вектор нових позиција исказан у новчаном облику

Јасно је да инкременталана VaR може бити позитивна, уколико нови инструмент повећава ризик портфолија, односно негативна ако се нови инструмент понаша као хец или нула ако је инструмент неутралан с аспекта редуковања ризика портфолија. Међутим, утврђивање прецизне вредности инкременталане VaR није тако једноставно, као што што се чини на основу израза (II 2.1), нарочито у случају разматрања великог броја инструмената. Из тог разлога развијене су бројне апроксимативне формуле. Прецизније,

<sup>37</sup> Krause, a., (2003), *Exploring the limitations of value at risk: how good is it in practice?*, The Journal of Risk Finance, Winter, pp. 19-28. Детаљније о Леви дистрибуцији видети у Xiong, J., X., Idzorek, T., (2011), "The Impact of Skewness and Fat Tails on the Asset Allocation Decision", *Financial Analysts Journal*, Vol. 67, No. 2, pp. 23-35. Xiong, J., X., (2010), *Using Truncated Lévy Flight to Estimate Downside Risk*, *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, Vol. 3, No. 3, 231–242.

<sup>38</sup> Израчунавање инкременталане VaR на овакав начин је у литератури познат као "пре и после" приступ (Dowd, K., (1998), оп., цит. стр. 48).

потребе банака и других финансијских институција за 1) хец и шпекулативним пословима са опцијама и 2) редуковање ризика у ризик-принос анализи (*risk-return analysis*)<sup>39</sup> довеле су до два незнатно различита приступа инкременталаној VaR. То су додавања ризика (*risk adding model*) и удруживања ризика (*risk pooling model*), у оквиру којих су развијене бројне апроксимативне формуле за њено израчунавање. Приступ додавања ризика се заснива на идеји да се повећа вредност инвестираног новца, укључивањем активе која доприноси редуковању укупног ризика портфолија. Ова нова актива представља хец инструмент. Други приступ заснива се на идеји очувања вредности инвестираног новца константним удруживањем портфолија са новим инструментом смањењем пондера постојећих инструмената портфолија. Међутим, независно од приступа најчешће коришћен начин за израчунавање инкременталне VaR јесте као производа VaR портфолија и бета коефицијента ( $\beta$ ) инструмента који се разматра за укључивање у портфолију уз уважавање текућег портфолија.

У случају додавања ризика инкременталана VaR израчунава се на следећи начин:<sup>40</sup>

$$IVaR \approx \beta * VaRp * a \quad (\text{II 2.2})$$

при чему  $a > 0$ , односно  $a < 0$  указује на куповину, односно продају инструмента.

У случају приступа удруживања ризика инкременталана VaR израчунава се на следећи начин:

$$IVaR \approx a * (\beta - 1) * VaRp \quad (\text{II 2.3})$$

при чему је  $a > 0$ .

Питање које се често поставља јесте колико треба уложити у нови инструмент како би се максимално минимизирао ризик портфолија, што је у литератури познато као "најбољи хец" (*the best hedge*)<sup>41</sup>. Вредност коју треба уложити у нови инструмент може се представити следећим изразом:

$$a^* = -\rho \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_i^2} \quad (\text{II 2.4})$$

при чему ( $a^*$ ) представља оптималан износ који треба уложити у нову позицију (i).

<sup>39</sup> Tasche, D, Tibiletti, L., (2002), *A shortcut to sign Incremental Value-at-Risk for risk allocation*, Working paper.

<sup>40</sup> Vujnović, M., (2007), "VaR analiza kreditnog portfolija banaka", Trag, Beograd, str. 33.

<sup>41</sup> "Најбољи хец" представља додатну вредност коју треба инвестирати у одређену позицију да би се минимизирао укупан ризик портфолија.

Изрази (II 2.2) и (II 2.3) указују да се утицај на VaR, додавањем новог инструмента у портфолију може једноставно израчунати без значјаног губитка трошкова и времена потребног за израчунавање инкременталне VaR. Међутим, упркос предностима које проистичу из рачунарске једноставност израчунавања инкременталне VaR применом (II 2.2) и (II 2.3), постављају се спонтано два питања: 1) с квантитативне тачке гледишта, да ли су изрази (II 2.2) и (II 2.3) задовољавајуће апроксимативне функције и 2) може ли се знак од маргиналног ефекта новог инструмента одредити помоћу знака на десној страни израза (II 2.2). Другим речима, да ли знак бета коефицијента представља прихватљив инструмент за дискриминацију профитабилних инструмената (актива). Што се тиче првог питања бројни аутори истичу да вредност  $a$  треба да буде безначајно мала у односу на вредност целог портфолија, будући да су у основу ових израза Taylor-ове апроксимације. Другим речима, изрази (II 2.2) и (II 2.3) су применљиви у случају веома малог прилогођавања протфолија. Друго питање је мање јасно. Интуиција сугерише позитиван одговор, односно да инкременталана VaR има исти знак као и знак бета коефицијента инструмента који се разматра за укључивање у портфолио. Да ли је ово дискриминационо правило тачно? Нажалост, одговор је не, у готово свим случајевима. Критичне тачке су:

- 1) Знаци бета коефицијената нису сигнал за знак инкременталне VaR, чак и услучају дистрибуција са елиптичним контурама<sup>42</sup>; Једноставније речено, честа заблуда која се може наћи у литератури јесте да је знак бета коефицијента довољан да направи разлику између жељених и нежељених инструмената. Међутим, чак и у случају нормалне дистрибуције познавање знака коефицијента корелације, као и бета коефицијента није довољно за дискриминацију жељеног инструмента. Без обзира на знак коефицијента корелације и величине  $a$  укључивање новог инструмента у портфолио је пожељно увек када је стандардна девијација тог инструмента мања у односу на стандардну девијацију текућег портфолија. У супротном, када је стандардна девијација новог инструмента већа од стандардне девијације текућег портфолија, укључивање новог инструмента зависи од три фактора: њиховог коефицијента корелације, величине  $a$  и њихових варијанси. Честа заблуда је да и када је коефицијент корелације позитиван, а стандардна девијација новог

<sup>42</sup> Елиптичне дистрибуције називају се елиптичне јер имају елипсоидне контуре густине. У ове дистрибуције спадају нормална дистрибуција, Студентова, Cauchy-јева дистрибуција и сл.

инструмента већа од стандардне девијације текућег портфолија, укључивање таквог инструмента довешће до повећања VaR пртфолија и варијансе, те такав инструменет увек терба одбацити. У случају када је  $X \sim N(0,1)$  текући портфолио и  $Y \sim N(0,1.5)$  нови инструмент, укључивање таквог инструмента може довести до редуковања укупне варијансе, чак и у случају позитивног коефицијента корелације.

- 2) Редуковање варијансе не доприноси редуковању VaR-а; У случају дистрибуција које не спадају у фамилију елиптичних дистрибуција, стратегија минимизирања варијансе у циљу редуковања VaR може бити апсолутно погрешна.
- 3) Резултати су различиту у зависности од тога да ли је дистрибуција стабилна или нестабилна.

### 3. Маргинална вредност при ризику

Према Jorion-у инкрименталана VaR може се израчунати применом *Taylor*-ове апроксимација првог реда<sup>43</sup>. Наиме, под условом да је испуњена претпоставка за примену *Taylor*-ове апроксимација првог реда, тј. да је вредност  $a$  безначајно мала у односу на вредност целог портфолија инкрименталана VaR може се израчунати на следећи начин:<sup>44</sup>

$$IVaR \approx (\Delta VaR)' x a \quad (\text{II } 3.1)$$

при чему је

$$\Delta VaR_i = \frac{\partial VaR}{\partial x_i} = \frac{\partial VaR}{\partial w_i P} = z_\alpha \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = z_\alpha \frac{\sigma_{ip}}{\sigma_p} \quad (\text{II } 3.2)$$

и где су:

$\partial VaR$  - парцијални извод  $VaR$

$w_i$  - учешће  $i$ -те позиције у структури портфолија (пондер)

$\Delta VaR_i$  - маргинална вредност при ризику  $i$ -те позиције

$\sigma_{ip}$  - коваријанса приноса  $i$ -те позиције и приноса портфолија

$z_\alpha$  - вредност стандардизоване случајне варијабле која

---

<sup>43</sup> Видети у Woolbridge, M., J., (2003), *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*, MIT press, Massachusetts.

<sup>44</sup> Jorion, P., (2007), оп., цит., стр. 169.

*кореспондира са нивоом поверења*

$x_i$  - учешће  $i$ -те позиције у структури портфолија исказана у новчаном облику

$P$  - вредност портфолија

Израз (II 3.2) представља тзв. маргиналну VaR, која изражава ефекат промене учешћа  $i$ -те позиције у структури пондера портфолија на промену ризика портфолија. Она представља специфичан случај инкременталне VaR. У случају портфолија који садржи линеарности и када се процена VaR врши применом линеарних модела вредности при ризику, а апроксимација је прецизна. У том случају збир маргиналних VaR једнак је укупном ризику портфолија. У супротном, код портфолија која садрже опције, као и када се процена врши применом симулационих модела сума маргиналних VaR је само апроксимативно једнака укупном ризику портфолија.<sup>45</sup>

Поред маргиналне и инкременталне вредности често примењивана је и тзв. компонентна VaR. Компонентна VaR служи да се сагледа ефекат затварања одређене позиције на промену ризика портфолија, тј. VaR портфолија. Наравно, ово се може сагледати разматрањем VaR-а сваког инструмента из портфолија. Међутим, то је ефикасан начин само када је волатилност портфолија линеарна функција инструмента из његовог састава. У супротном, њихово разматрање није корисно. У таквој ситуацији користи се линеарне апроксимације инкременталне VaR, тј. компонентна VaR, која се дефинише преко маргиналне VaR:

$$CVaR_i = (\Delta VaR_i) w_i P \quad (\text{II 3.3})$$

при чему је:

$CVaR_i$  - компонентна VaR

Компонентна  $CVaR_i$  мери утицај затварања одређене позиције на ризик портфолија. Употреба овакве мере ризика има низ значајних особина:<sup>46</sup>

- сума компонентних VaR је једнака VaR портфолија;

<sup>45</sup> Исто, стр. 33.

<sup>46</sup> Вујновић, М., (2007), оп., цит., стр. 32.

- ако се једна компонента искључи из портфолија,  $CVaR_i$  пружа добру оцену будуће промене ризика портфолија;
- $CVaR_i$  ће бити негативна за позиције портфолија, које се понашају као хедж инструменти.

Приликом употребе компоненте VaR треба бити свестан њених ограничења и то пре свега чињеница да је поуздана само ако се процена VaR врши применом параметарских модела, који се заснивају на претпоставци да су приноси портфолија нормално дистрибуирани.<sup>47</sup>

#### 4. Ограничења у процени вредности при ризику

VaR је заснована на историјским подацима, тј. на употеби историјске дистрибуције промене вредности, односно приноса портфолија. Међутим, за процену ризика неке инвестиције, није важно колико је он био у прошлости, већ колики ризик постоји током холдинг периода, отуда дистрибуција будућих промена вредности, односно приноса портфолија јесте релевантна.<sup>48</sup> Докле год ова дистрибуција историјских приноса портфолија остаје стабилна, тј. не мења се током времена, то се VaR релативно лако може проценити на основу ње. Међутим, у стварности ситуација је мало другачија. Наиме, варијанса приноса портфолија и корелације између инструментата унутар портфолија се континуирано мењају. Другим речима, дистрибуција није стабилна, не показује особуну стационарности, док волатилност показује особину хетероскедастичности. У таквим околностима ослањање на дистрибуцију историјских података може да доведе до неадекватних процена VaR и одступања у утврђивању егзактних вредности ризика.

У теорији су изведени, а у пракси често коришћени модели који на адекватан начин кооптирају овај проблем. Тако да се у проценама VaR-а често користе модели временских серија који су у стању да кооптирају временски променљиве условне хетероскедастичности, попут модела из фамилије ARCH (*Autoregressive Conditional*

<sup>47</sup> Alexander, C., (2008), оп., цит., стр. 57.

<sup>48</sup> Први аутор који је указао на ограничења VaR будући да се заснива на историсјким подацима био је Hendricks, D., (1996), који је у свом раду *Evaluation of value-at-risk models using historical data*, Economic Policy Review, Federal Reserve Bank of New York, указао на проблем тачности процене ризика применом историјских података. Beder (1995) је била прва која је указала на недостатке концепта вредности при ризику у свом раду *VaR: Seductive but dangerous*, Financial Analysts Journal, Vol. 51, No. 5, pp. 12-24.



*Heteroscedasticity*) модела или модела за процену имплицитне волатилности. Проблем код употребе ових модела настаје када се користе кратке временске серије података. Како екстремни догађаји који узрокују велике губитке се у принципу ретко јављају, то често нису укључени у серију података која се користе за процену VaR-а. Са друге стране, нико и не жели да своје будуће процене гради на веома старим подацима. Отуда, често процене VaR-а су у ствари само процене ризика у „нормалним“ тржишним околностима. Екстремни догађаји, као што су слом берзи, у овим проценама нису укључени у процену. Оно што нарочито није укључено у ове процене јесте чињеница да кореалције у већини случајева теже да се мењају (повећавају) током времена утичући негативно да ефекат диверсификације не буде онакав какав се очекује. Да би се превазишао овај недостатак, ефикасна употреба VaR-а подразумева и коришћење стрес тестова. То је и разлог зашто је Базелски комитет за супервизију банака прописао вршење тестирања валидности модела VaR-а и њихову примену у комбинацији са стрес тестовима.

Нажалост, чак и са уважавањем овог проблема и даље остаје проблем са проценом саме VaR. Будући да је права дистрибуција вероватноће у принципу непозната, она мора бити оцењена на основу историјског сета података. Отуда, ефикасна оцена нижих репова дистрибуције јесте есенцијална за процену VaR-а. Међутим, компликације настају из чињенице да је реп дистрибуције одређен са само неколико података о историјским приносима портфолија, те је грешка процене приликом оцене репа дистрибуције велика.<sup>49</sup>

*Krause* (2003) је показао да стандардна грешка  $c$ -квантила ( $\hat{q}$ ) може се утврдити на следећи начин:

$$SE(\hat{q}) = \sqrt{\frac{c(1-c)}{Tf(q)^2}} \quad (\text{II 4.1})$$

при чему је

$SE(\hat{q})$  - стандардна грешка  $c$ -квантила

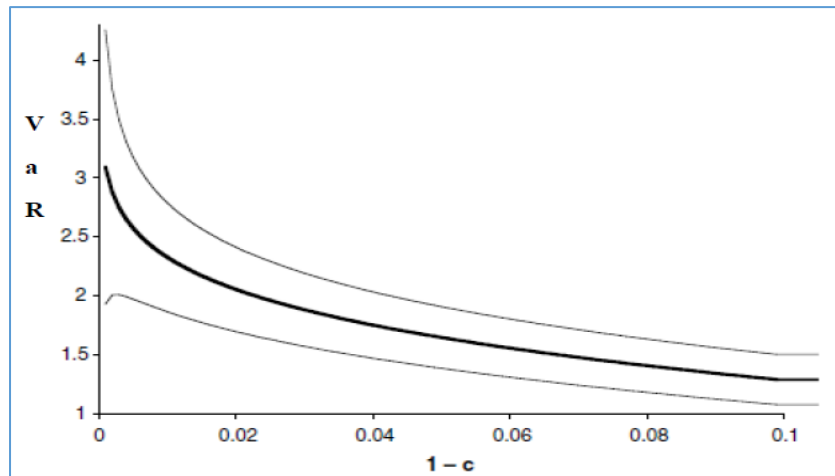
$T$  - укупна број опсервација

$f(\cdot)$  - функција густине оцењена за  $q$ -квнтил

<sup>49</sup> Шире видети: *Krause, A., (2003), Exploring the Limitations of Value at Risk: How Good Is It in Practice, Journal of Risk Finance, winter, pp. 19-28.*

На слици 3 приказана је оцена интервала поверења такве оцене. График приказује процену VaR за холдин период од једног дана за различите нивое поверења за интервале поверења од 95% за нормалну дистрибуцију приноса са 250 опсервација, што одговара за годину дана дневних података.

**Слика 3. Оцена грешке VaR**



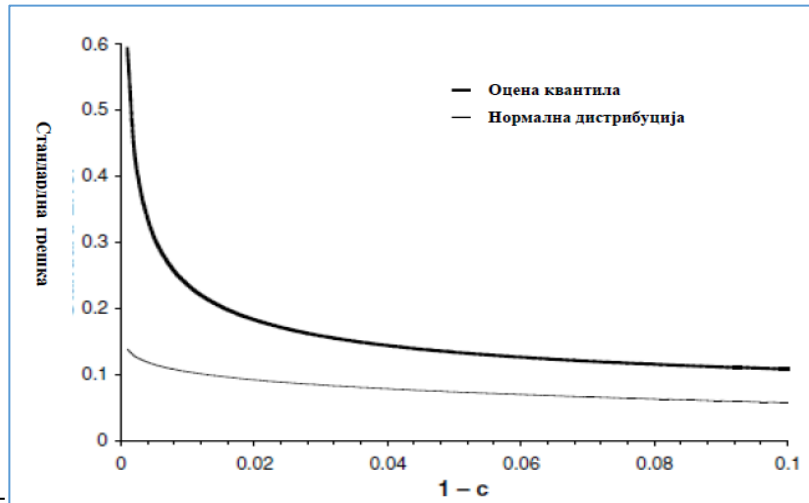
Извор: (Krause, A., (2003), *Exploring the Limitations of Value at Risk: How Good Is It in Practice*, Journal of Risk Finance, winter, p. 24.)

Једноставно је уочити да је грешка процене значајна и да се повећава са повећањем нивоа поверења. У случају експлицитне претпоставке да дистрибуција приноса портфолија следи нормалну дистрибуцију, информације о целој дистрибуцији се могу употребити за оцену репа дистрибуције. У том случају стандардна грешка оцене се значајно редукује:

$$SE(q) = \left( \sigma \alpha \sqrt{\frac{1}{2T}} \right)^2 \quad (\text{II 4.2})$$

На слици 4. приказане су две стандардне грешке под претпоставком да серија приноса следи стандардизовану нормалну дистрибуцију, уз напомену да  $T$  износи 250 опсервација дневних приноса. Иако је оцена грешке редукована, и даље треба имати на уму да је ово постигнуто под претпоставком да серија приноса следи нормалну дистрибуцију. Ваљаност ове претпоставке је дискутабилна имајући у виду бројна истраживања, о којима је већ било речи или ће тек бити поменута у овој дисертацији.

**Слика 4. Стандардна грешка процене VaR при употеби параметарске и непараметарске процене**



Извор: (Krause, A., (2003), *Exploring the Limitations of Value at Risk: How Good Is It in Practice*, Journal of Risk Finance, winter, p. 24.)

Даља оцена грешке може бити изведена поредећи процену VaR са максималном VaR која је конзистентна са подацима. Овај однос може бити изведен применом *Biernaumé-Chebyshev*-е теореме, према којој свака случајна варијаблиа  $x$  са коначном варијансом  $\sigma$  и очекиваном средњом вредношћу  $\mu$  је

$$Prob(|x - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (\text{II 4.3})$$

Под претпоставком да се ради о симетричној дистрибуцији добија се

$$Prob(x - \mu \leq \varepsilon) \leq \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad (\text{II 4.4})$$

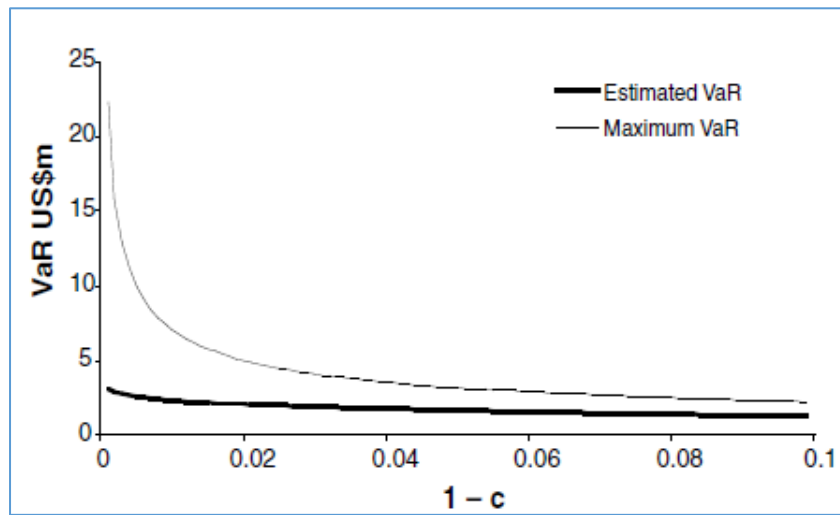
Имајући у виду дефиницију VaR-а на основу ње и горњег израза лако се може извести закључак да је максимална VaR, за дати ниво поверења и број опсервација ( $T$ )

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2cl}} .$$

На слици 5 дат је приказ поређења максималне VaR и процене VaR под претпоставком да су приноси нормално дистрибуирани.

Са слике се јасно уочава да разлика може бити значајна, нарочито за више нивое поверења.

Слика 5. Максимална VaR и процењена VaR



Извор: (Krause, A., (2003), *Exploring the Limitations of Value at Risk: How Good Is It in Practice*, Journal of Risk Finance, winter, p. 25.)

Управо овај резултат Stahl (1997) котишти да оправда чињеницу да је Базелски комитет за супервизију банака у оквиру Базел II стандарда поставио услов да се дневне процене VaR множе са фактором 3 за ниво поверења од 99%.

Имајући у виду ове економетријске проблеме у оцени VaR-а, може се закључити да је она далеко од прецизне мере ризика. Из тог разлога развијене и у пракси се користе и другу концепти и методологије за процену ризика, било као допуна или алтернатива концепту VaR.

## 5. Алтернативни концепти и методологије

Када се говори о алтернативама концепту VaR незаобилазна тема јесте концепт очекиваног губитка (*Expected Shortfall - ES*), који се у литератури може наћи често под називом условна VaR (*Conditional Value at Risk - CVaR*). Може се рећи да је овај концепт настао на идејама концепта VaR, те као такав отклања одређене његове недостатке. Наиме, како је већ истакнуто у дисертацији, основни недостатак концепта VaR јесте тај што VaR као мера губитка не испуњава увек све особине кохерентне мере ризика, тј. често не испуњава услов субадитивности; VaR портфолијо не само да је мањи од вредности збира VaR вредности његових позиција (што би према основама Markowitz-еве

портфолијо теорије требало да буде јер је ризик портфолија мањи од збира ризика индивидуалних позиција из његовог састава<sup>50</sup>), већ је често и већа. Artzner (1999) је показао да VaR као мера ризика не испуњава особине кохерентне мере ризика, тј. оне мере ризика која је способна да детерминише минимални износ капитала у смислу адекватности капитала дефинисане правилима Базел II стандарда, који треба уложити да би се обезбедило да будућа вредност портфолија (позиције) буде прихватљива. Другим речима, Artzner је са сарадницима утврдио да CVaR испуњава следеће услове:

1.  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$  при чему је  $\lambda > 0$  (хомогеност)
2.  $\rho(X) \geq \rho(Y)$  ако је  $X$  а  $Y$  (монотоност)
3.  $\rho(X + n) = \rho(X) - n$  (непроменљив на транслацију)
4.  $\rho(X) + \rho(Y) \leq \rho(X + Y)$  (субадитивност)

при чему су:

$\rho$  - мера ризика

$X$  - губитак

$n$  - било који број

$\lambda$  - позитиван број

Хомогеност је особина која указује да је кохерентна мера ризика линеарна функција величина позиција.<sup>51</sup> У контексту Базел II стандарда ово значи да је адекватност капитала пропорционална вредности портфолија. Монотоност се односи на то да се са повећањем ризика повећава и ниво захтеваног капитала за покриће потенцијалних губитака. То значи да ако портфолијо системски има мање приносе од неког другог, онда ће он сигурно имати већи ризик од другог портфолија. Ова два услова заједно имплицирају да је функција  $\rho(\cdot)$  конвексна, што је у складу са хипотезом о рационалном инвеститору, односно аверзији према ризику. *Непроменљив на транслацију* се односи на то да ако се одређени износ инвестира у безризичну активу, ризик портфолија ће се смањити за тај износ.<sup>52</sup> Четврти захтев кохерентности односи се на услов да ризик

<sup>50</sup> О овом ефекту детаљније видети у Markowitz, H., (1991), *Foundations of Portfolio Theory*, Journal of Finance, Vol. 46, No. 2, pp. 32-71. Pattarathammas, S., et al., (2008), "Value at Risk and Expected Shortfall under Extreme Value Theory Framework: An Empirical Study on Asian Markets", *Working Paper*, pp. 1-13.

<sup>51</sup> Prigent, L. J., (2007), оп., цит., стр. 38.

<sup>52</sup> Malevergne, Y., Sornette, D., (2006), *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer-Verlag, Berlin, p. 5.

портфолија буде мањи или у најгорем случају једнак збиру вредности индивидуалних ризика позиција из његовог састава. Ово је иначе и кључни захтев да би нека мера ризика била кохерентна јер 1) гарантује конзервативну процену ризика; када се додају позиције у портфолио, горња граница ризика не може бити већа од суме ризика индивидуалних позиција; 2) уважава се ефекат диверсификације као средства за редуковање ризика.<sup>53</sup> Acerbi, Nordiod and Sirtori (2008) наводе да VaR пати од двоструке не-адитивности; не-адитивност у позицијама и у факторима ризика, и наводе да је она кохерентна мера ризика само када је испуњена претпоставка да приноси следе нормалну дистрибуцију (или неку сличну елиптичну дистрибуцију).

С обзиром на то да VaR често не уважава овај захтев кохерентности, отуда Artzner и сарадници истичу да не може да буде промовисана у меру економског губитка, па тај примат додељују CVaR. Дугим речима, CVaR су прогласили за меру економског капитала јер је у стању да детерминише минимални износ капитала (ниво адекватности капитала према Базел II стандарду) који треба уложити у безризичну активу да би се очувала позиција.

У основи CVaR представља величину губитка, који се може очекивати под условом да је једнак или већи од VaR за дати ниво поверења. Математички CVaR може се изразити на следећи начин:<sup>54</sup>

$$CVaR_{\alpha} = -E[X|X \geq VaR_{\alpha}(X)] \quad (\text{II } 5.1)$$

при чему су:

$VaR_{\alpha}$  - VaR за дати ниво поверења

( $r$ ) - губитак портфолија

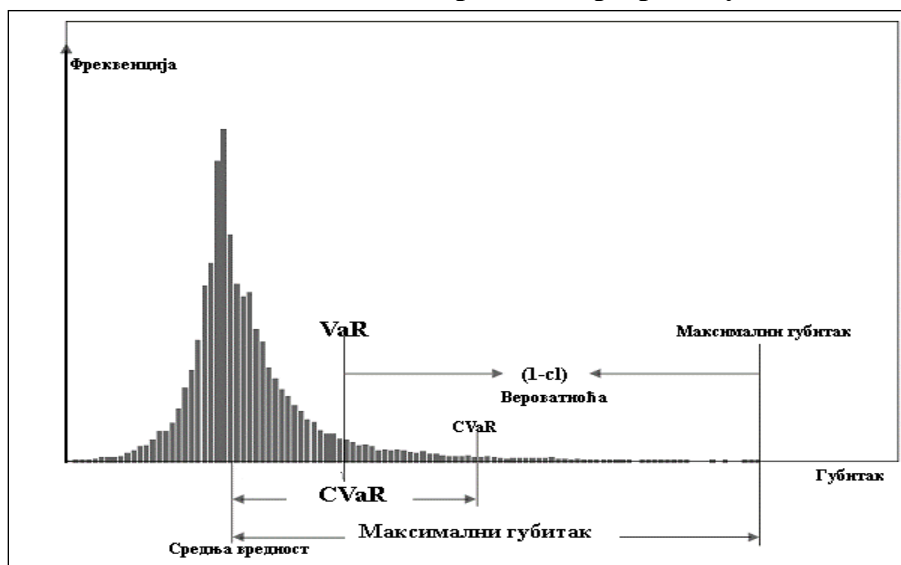
Као и у случају VaR и CVaR захтева *a priori* да буде познати ниво поверења и холдинг период.

Графички може се представити као на слици 1.

<sup>53</sup> Voit, J., (2007), оп., цит., стр. 305.

<sup>54</sup> Шире видети: Acerbi, C., Tasche, D., (2002), *On the coherence of expected shortfall*, Journal of Banking and Finance, Vol. 26. pp. 1487-1503.

Слика 6. Условна вредност при ризику



Извор: (Радивојевић, Н., (2014), *Управљање тржишним ризицима на финансијским тржиштима у настајању применом модела вредности при ризику*, Докторска дисертација, Економски факултет у Крагујевцу, стр. 89.)

Претходно речено, CVaR представља просечну вредност губитака који су већи од VaR-а за дати ниво поверења, јасно се уочава са слике 6. На овај начин концепт CVaR отклања још један недостатак концепта VaR јер може да кооптира губитке који су већи од вредности VaR. Rockafellar и Uryasev (2008) истичу да је ово и добра и лоша особина концепта CVaR. Наиме, када реп дистрибуције није адекватно моделиран, процене VaR-а су супериорније у односу на процене CVaR.

У случају дискретне дистрибуције разликују се два случаја CVaR: 1) када је губитак стриктно већи у доносу на VaR (CVaR<sup>+</sup>), односно 2) када је мањи или једнак VaR (CVaR). CVaR<sup>+</sup> је познат као „средњи мањак“. Иако би се са слике могло закључити да CVaR једнака просеку губитака већих од VaR-а за дати ниво поверења, то није тачно. Моделирајући дистрибуције помоћу сценарија и истичући да се CVaR може добити упросечавањем фракционалног броја сценарија, Rockafellar и Uryasev (2008) су претходно речено доказали служећи се следећим примером: Нека CVaR<sub>α</sub><sup>+</sup>(X) условна очекивања (X) тако да је  $X > VaR_α(X)$ :<sup>55</sup>

$$CVAR^+_{\alpha}(X) = E[X | X > VaR_{\alpha}(X)] \quad (II 5.2)$$

<sup>55</sup> Шире видети: Rockafellar R. T., Uryasev, S. P., (2000), *Optimization of conditional value at risk*, Journal of Risk, Vol. 2, pp. 21-42. Rockafellar R. T., Uryasev, S. P., (2008), *Value at Risk vs. Conditional Value at Risk in Risk Management and Optimization*, INFORMS.

$CVaR_\alpha(X)$  се може дефинисати алтернативно као пондерисани принос  $VaR_\alpha(X)$  and  $CVaR^+_\alpha(X)$ , као што следи. Ако је  $F_X(VaR_\alpha(X)) < 1$ , тако да постоји шанса да губитак буде већи од  $VaR_\alpha(X)$ , тада

$$CVaR_\alpha(X) = \lambda_\alpha(X) VaR_\alpha(X) + (1 - \lambda_\alpha(X)) CVaR^+_\alpha(X) \quad (\text{II } 5.3)$$

где је

$$\lambda_\alpha(X) = \frac{F_X(VaR_\alpha(X)) - \alpha}{1 - \alpha} \quad (\text{II } 5.4)$$

а ако је  $F_X(VaR_\alpha(X)) = 1$ , тако да је  $VaR_\alpha(X)$  веће од стварног губитка, тада  $CVaR_\alpha(X)$  је једнака  $VaR_\alpha(X)$ .

Израз  $CVaR$  приказан једанчином (4.2.) указује да  $CVaR$  није дефинисана као условно очекивање. Функција  $CVaR^-_\alpha(X) = E[X | X \geq VaR_\alpha(X)]$  поклата се са  $CVaR_\alpha(X)$  за случај континуиране дистрибуције губитака, међутим за опште расподеле она је дисконтинуирана и није конвексна.

Основни недостак овог концепта јесте да се имплицитно заснива на хипотези о рационалном инвеститору који има аверзију према ризику. Тачније на претпоставци да рационални инвеститори имају конкавну функцију корисности тј. да ће улагати у ризичније хартије од вредности само ако им је тај виши ризик компензиран премијом за ризик, односно у хартију која доноси већи принос у истој класи ризика<sup>56</sup>. Посматрано из призме хипотезе о рационалном инвеститору ово значи да са повећањем степена инверзије према ризику, крива брже расте и има веће пондере. Међутим, како у контексту концепта  $CVaR$  сви губици у репу дистрибуције, изнад  $VaR$ -а, приписују исти значај (пондер), то имплицира да инвеститор има неутралан став према ризику у региону репа дистрибуције изнад одређеног прага, односно нивоа поверења, што и није баш реална пртпоставка.

Иако  $CVaR$  испуњава све особине кохерентне мере ризика, његова примена још увек није на оном нивоу на којем би се очекивало имајући у виду његове предности у односу на концепт  $VaR$ . Један од разлога за то, свакако, јесте чињеница да није препознат

---

<sup>56</sup> Савремена портфолио теорија претпоставља да инвеститори имају конкавну функцију корисности тј. да имају аверзију према ризику. То значи да ће инвеститори улагати у ризичније хартије од вредности само ако им је тај виши ризик компензиран премијом, односно у хартију која доноси већи принос у истој класи ризика.



од стране Базелског комитета за супервизију банака, као што је то случај са концептом VaR.

Када се говори о алтернативама концепту VaR-а свакако треба споменути још и анализу сценарија и екстремних догађаја, који се све више користе као допуна концепту VaR, и САРМ. Будући да је управљање финансијским ризицима веома захтевно и широко подручје, логичан је развој многобројних метода за његово мерење и управљање.

Анализа сценарија нуди користан начин за процену потенцијалног губитка, путем анализирања вредности позиција или портфолија под различитим, арбитрарно детерминисаним сценаријима. Корелације су динамичне, не статичне, и с тога се различите претпоставке корелације користе у различитим сценаријима. Сценарија могу бити са једним фактором. примера ради, процена резултата промене каматних стопа, или могу бити мултифакторска, дозвољавајући низ сценарија каматне стопе, комбиновано са променом девизних курсева и променом прихода. Анализа сценарија представља користан додатак концепту VaR, омогућавајући менаџерима ризика да детерминишу како би се неки портфолио понашао под унапред детерминисаним сетом сценарија.

Иако је анализа сценарија интуитивно привлачна, она има своја ограничења. Примера ради, иако сценарио повећања каматних стопа може бити користан, у реалном свету, криве приноса се не померају у паралели. У реалном животу, криве приноса постају стрме и спљоштене (равне) на непредвидиве начине широм спектра рочности, и с тога не могу сви модели да потуно кооптирају ова кретања.

Тестирање екстремних догађаја је слично анализи сценарија, али је дизајнирано да процени перформансу под мање фреквентним, али значајнијим тржишним кретањима. Тестирање екстремних догађаја допушта менаџерима ризика да детерминишу какав би утицај имала серија изложености портфолија екстремним тржишним условима. Такође и овде је могуће сагледати ефекат једног или већег броја фактора ризика на изложеност банчиног портфолија тржишном ризику. *Derivative Policy Group* је 1995. године дала препоруке за коришћење специфичне смернице за факторе ризика.<sup>57</sup>

---

<sup>57</sup> Шире видети: Crouhy, M., Robert, N. (2006). *The Essentials of Risk Management*, McGraw-Hill, New York. Препоруке за коришћење специфичне смернице за факторе ризика су: Паралелено померање криве приноса од плус или минус 100 индексних поена; Увртање криве приноса од плус или минус 25 индексних поена; Промену вредности индекса акцијског капитала од плус или минус 10%; Промену валуте од плус или минус 6%; Промену волатилности од плус или минус 20%.

Ове екстремне варијације цене и стопе, могу драматично утицати на вредност портфолија са јаком нелинеарношћу и великим негативним гамама. Оваква портфолија праве губитке било да цене расту или опадају, а магнитуда губитака се убрзава како се повећава промена цене. Треба истаћи да ова велика кретања могу бити комбинована са променама у корелацији између фактора ризика које су присутне и током нормалних тржишних услова. У кризним ситуацијама, корелације између фактора ризика мењају се како се волатилности повећавају, тако да коефицијенти корелације могу имати чак и екстремну позитивну вредност (+1), а како многа тржиша колабирају у исто време и ликвидност пресушује, тако да банкарске позиције остају отоврене.

Упркос чинејници да је тестирање екстремних догађаја важан инструмент у управљању тржишним ризиком, не може рећи колико је вероватно да ће се неки одређени догађај десити.

Модел вредновања капиталне активе (*Capital Asset Pricing Model – CAPM*) произлази директно из *Markowitz*-еве модерне портфолио теорије и представља линеарни, равнотежни модел приноса на инвестиције који објашњава приносе безризичне активе помоћу корелације приноса појединачне инвестиције и приноса тржишног портфолија, што се приказује следећом формулом:

$$r_p = r_f + \beta (r_m - r_f) \quad (\text{II } 5.5)$$

при чему су:

$r_p$  - принос портфолија

$r_f$  - безризична стопа приноса

$r_m$  - стопа приноса тржишног портфолија

CAPM модел је изграђен на одређеним претпоставкама којима су се настојали представити реални тржишни услови. Будући да је изграђен на темељима *Markowitz*-евог модела *mean – variance*, модел је изграђен на следећим претпоставкама:

- финансијска тржишта су ефикасна,
- нема трансакционих трошкова и трошкова опорезивања,

- инвеститори имају на располагању све информације везане за дешавања на тржишту,
- ниједан инвеститор није довољно велики да би утицао на тржиштуру цену,
- сви имају једнак временски хоризонт.

Поред ових претпоставки, које су заједничке свим моделима изграђеним на темељима *Markowitz*-еве теорије, у *CAPM* су уграђене још две претпоставке:<sup>58</sup>

- Инвеститори могу без ограничења да позајмљују и пласирају финансијска средства по безризичној стопи приноса;
- Учесници на финансијском тржишту имају иста очекивања у односу на принос и њему припадајућем ризику.

Међутим, без обзира на низ претпоставки којима се поједностављује слика реалности, модел омогућава успостављање одређене везе између ризика и величине премије на ризик која је потребна да се компензира ризик.<sup>59</sup> Другим речима, *CAPM* представља оквир за оцену релативне атрактивности ризичне активе тако што процењује ценовни диференцијал у односу на тржиштуру вредност. Како се системски ризик не може елиминисати диверсификацијом, инвеститори, према *CAPM*, за системску компоненту укупног ризика очекују компензацију у виду стопе приноса. С обзиром на то да инвеститори имају аверзију према ризику, они захтевају да принос тржишног портфолија буде већи од приноса неризичне активе. Та разлика се назива ризико премија, и одговара ризику држања тржишног портфолија.<sup>60</sup> Ризико премија је једнака производу цене ризика и количине преузетог ризика, при чему је цена ризика једнака разлици очекиване стопе приноса тржишног портфолија и приноса безризичне активе, док се количина ризика изражава бета коефицијентом. Бета коефицијент представља однос између системског ризика инволвираног у појединачну ризичну активу/портфолио и системског ризика тржишног портфолија<sup>61</sup> и може се приказати следећом формулом:

<sup>58</sup> R. Roll, (1977). *A critique of the asset pricing theory test*, Journal of Financial Economics, Vol. 4, No. 2, p. 138.

<sup>59</sup> Шире видети: Pavlović, V., Mumović, S. (2005). *Izazovi CAPM modela*, Finansije, Ministarstvo finansija RS, Beograd, br. 1-6, str.126-143.

<sup>60</sup> Milojković, D. (2014). *Upravljanje rizicima portfolija hartija od vrednosti primenom savremene portfolio teorije*, Magistarski rad, Ekonomski fakultet u Kragujevcu,

<sup>61</sup> Radivojevic, N. (2009). *Istraživanje mogućnosti formiranja optimalnog portfolija akcija na tržištu kapitala Srbije*, Magistarski rad, fakultet u Kragujevcu, Kragujevac, str. 34.

$$\beta = \frac{\rho_{m,p} \sigma_p}{\sigma_m} \quad (\text{II } 5.6)$$

при чему су:

$\rho_{m,p}$  - коефицијент корелације између портфолија и тржишног портфолија

$\sigma_m$  - стандардна девијација тржишног портфолија

$\sigma_n$  - стандардна девијација портфолија

Предност *CAPM* модела налази се у његовој једноставности. Међутим, дебата о корисности модела је још увек актуелна. Ране емпиријске анализе показале су да бета коефицијент релативно добро предвиђа принос портфолија сачињеног од обичних акција. Међутим, најновија истраживања откривају бројна ограничења концепта. Теоретичари истичу да је основни недостак модела налази у његовој спецификацији. Наиме, концепт почива на употреби тржишног портфолија. Да би модел могао да се ефикасно користи неопходно је утврдити принос тржишног портфолија.<sup>62</sup> Међутим, то је скоро немогуће учинити. Поред ове критике у литератури се наводе још три значајна ограничења модела. Прво ограничење је познато као ефекат величине. Уочено је да обичне акције предузећа са малом тржишном капитализацијом доносе више приносе у поређењу са акцијама предузећа са високом тржишном капитализацијом, *ceteris paribus*.<sup>63</sup> Друга аномалија се огледа у чињеници да акција са ниским односом цена/зарада (P/E), и тржишне и књиговодствене вредности (P/B), остварују боље перформансе него акције са високим вредностима ових показатеља. Трећа аномалија се односи на јануарски ефекат; појава да се остварује већи принос на акције ако се у њима налазе дуге позиције у периоду од децембра до јануара, него у било ком другом периоду сличне дужине. Поред ових ограничења модел занемарује да постоји сегментни однос између приноса и бета коефицијента.<sup>64</sup>

Упркос својим ограничењима, *CAPM* остаје практичан водич за одређивање ризика и приноса који се могу захтевати на тржиштима капитала.

<sup>62</sup> Шире видети: Stancic, P., Radivojevic, N., Cupic, M., Stancic, V., (2011), *Testing the applicability of the capm in the serbian stock market*, GFTF Business Review, Vol. 1, No.3. pp. 15-21.

<sup>63</sup> Milojković, D., str. 69.

<sup>64</sup> Детаљније видети у: Stancic, V, Petrovic, E., Radivojevic, N (2015), *Conditional relationship of beta and returns: a case study of the Belgrade Stock Exchange*, Teme, vol. 39, br. 4, str. 1165-1182.

## Глава III

### МОДЕЛИ ЗА ПРОЦЕНУ ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

#### 1. Модели вредности при ризику засновани на *IID* претпоставци

На претходним странама ове дисертације већ је било речи о претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији. Укратко она подразумева да ће дистрибуција будућих приноса портфолија бити идентична прошлој дистрибуцији, као и да између приноса портфолија не постоји аутокорељација. Другим речима, ова претпоставка еквивалентна је претпоставци стационарности и у услову коваријанса случајних грешака приноса портфолија једнака је нули.

$$\sigma_{\varepsilon_t \varepsilon_{t/k}} = 0 \text{ за свако } k \neq 0$$

при чему је

$\sigma_{\varepsilon_t \varepsilon_{t/k}}$  - коваријанса

Претпоставка да су приноси портфолија *IID* имплицира:

- да су у сваком тренутку ( $t$ ) приноси дистрибуирани са средином нула и варијансом ( $\sigma^2$ ) (идентично дистрибуирани), односно да се средина и варијанса не мењају током времена (да показују особину хомоскедастичности);
- да су приноси међусобно независни један од другог током времена, тј. да нису аутокорељисани.

Ово је веома значајна претпоставка јер значајно поједностављује процену VaR-а. Ако она није испуњена, онда приноси портфолија неће бити *IID*, тако да ће се разликовати у односу на дистрибуцију на основу које је изведена.

Модели вредности при ризику који се заснивају на овој претпоставци спадају у групу и параметарских, и непараметарских модела вредности при ризику, од којих су

најпознатији варијанса-коваријанса модел и стандардни модел историјске симулације, као и модел огледала историјске симулације, који представља специфични модел стандардног модела историјске симулације.

### **1.1 Варијанса-коваријанса модел вредности при ризику**

Варијанса-коваријанса модел вредности при ризику, у литератури још познат под називом линеарни VaR модел, представља најједноставнији параметарски модел вредности при ризику. Заједничка одлика параметарских модела јесте да се заснивају на претпоставци да дистрибуција приноса портфолија, односно промене вредности портфолија следи, тј. одговара некој одређеној теоријској дистрибуцији. Другим речима, та теоријска дистрибуција приписује се прикупљеним емпиријским подацима, те се на основу емпиријских података врши оцена статистичких параметара за ту дистрибуцију. Варијанса-коваријанса модел вредности при ризику заснива се на претпоставци да серија приноса портфолија следи нормалну дистрибуцију, те као таква представља директну апликацију *Markowitz*-еве портфолио анализе на пољу управљања тржишним ризицима. Претпоставка нормалности дистрибуције серије приноса портфолија значајно поједностављује израчунавање VaR-а, будући да је одређена са прва два момента; средином и варијансом. Другим речима, процена VaR-а представља производ између стандардне девијације портфолија и скалара ( $z_\alpha$ ), који одражава вредност из таблице стандардизоване нормалне дистрибуције која кореспондира са нивоом поверења за који се врши процена VaR-а. Математички, претходно речено може се представити на следећи начин:

$$\text{VaR} = -P^* z_\alpha \sigma \quad (\text{III } 1.1.1)$$

при чему су:

$P$  – текућа вредност портфолија,

$z_\alpha$  – вредност из табле нормалне расподеле која кореспондира са изабраним нивоом поверења,

$\sigma$  – стандардна девијација приноса портфолија током подређеног временског периода.

Дакле, када се процена врши за један финансијски инструмент, примена овог модела изузетно једноставна. Међутим, у случају сложеног портфолија, који садржи велики број позиција, процена је нешто сложенија због потребе да се израчуна матрица варијанси и коваријанси, али ипак је то и даље најједноставнији параметарски модел вредности при ризику.

VaR применом овог модела, за случај портфолија, израчунава се на следећи начин:

$$VaR = z_{\alpha} \sqrt{w' \Sigma w} \quad (\text{III 1.1.2})$$

при чему су:

$w$  - вектор апсолутних пондера портфолија

$w'$  - транспонован ( $w$ )

$\Sigma$  - матрица варијанса- коваријанса

$z_{\alpha}$  - вредност стандаризоване нормалне променљиве која кореспондира са нивоом поверења

Варијанса портфолија израчунава се применом следећег израза:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} \quad (\text{III 1.1.3})$$

при чему су:

$\sigma_p^2$  - варијанса портфолија

$w_i/w_j$  - учешће  $i$ -те /  $j$ -те хартије од вредности у портфолију

$N$  - укупан број хартија од вредности у саставу портфолија

$\sigma_{ij}$  - коваријанса стопа приноса  $i$ -те и  $j$ -те хартије од вредности

Основна предност овог модела огледа се у једноставности њене примене. Када је испуњена претпоставка о *IID*, односно када серија приноса портфолија следи нормалну дистрибуцију, процена VaR добијена применом овог модела лако је могуће

трансформисати за различите холдинг периоде применом правила „квадратног корена времена“ (T):<sup>65</sup>

$$VaR_T = VaR_t \sqrt{T} \quad (\text{III 1.1.4})$$

Друга предност примене овог модела огледа се у чињеници да када су претпоставке модела испуњене, трансформација процене VaR-а за различите нивое поверења се изводи једноставно применом следећег израза:

$$VaR_{cl_1} = (cl_1/cl_2) VaR_{cl_2} \quad (\text{III 1.1.5})$$

где су:

$cl_1/cl_2$  - ниво поверења

$VaR_{cl_1}$  - процена VaR за ниво поверења  $cl_1$

$VaR_{cl_2}$  - процена VaR за ниво поверења  $cl_2$

Основни недостатак овог модела огледа се у реалности претпоставке да серија приноса портфолија следи нормалну дистрибуцију, односно претпоставка о IID. Наиме, као што је већ претходно наведено, бројна истраживања Tseng-а (2011), Žiković-а (2010), Bahadur-а (2008), McNeil-а (2005), Karlsson-а (2003), Christofferson-а (2003) и др., указују да серије приноса портфолија одступају од нормалне дистрибуције, тј. да серије приноса портфолија имају дебље репове у односу на нормалану дистрибуцију, виши врх и тањи струк (*thin waist*) него што се предвиђа нормалном дистрибуцијом, као и да се приноси јављају у кластерима, што је последица присуства аутокорељације. Основни разлози за појаву аутокорељације за тржишта у настајању, пре свега су:<sup>66</sup>

- Појава несинхроног трговања појединим хартијама од вредности. Обично се акцијама малих предузећа ређе тргује него акцијама великих, тако да се нове информације најпре одразе на цене великих предузећа, па са временским закашњењем на акције мањих. Тај временски размак може узроковати позитивну повезаност кретања цена акција.

<sup>65</sup> Jorion, P., (2003), оп., цит., стр. 377.

<sup>66</sup> Радивојевић, Н., (2009), *Истраживање формирања оптималног портфолија на тржишту капитала Србије*, Магистарски рад, Економски факултет у Крагујевцу, стр. 97.



- Трговање на основу потребе. Овде се мисли на трансакције инвеститора који не тргују на основу информација, већ из разлога ликвидности.
- Брзи раст тржишта у развоју. Привреде које су у развоју, расту веома брзо, тако да аутокорељација цена на тржиштима капитала може настати као резултат економског раста.

У случају портфолија која садрже опције тј. нелинарне инструменте, примена овог модела није могућа. У случају комплексних портфолија са линеарним инструментима (у случају великог броја инструмената) примена овог модела постаје изузетно компликована, због великог броја података потешких за израчунавање матрице варијансе-коваријансе. Примера ради за портфолио од  $n$  инструмената, потребно је  $(n)$  варијанси и  $(n^2 - n)/2$  коваријанси. Укупан број података који се захтева за израчунавање ефикасних портфолија јесте  $n(n + 3)/2$ . Сем тога, применом израза (III 1.1.2) добија се безусловна оцена волатилности портфолија, што није у складу са појавом кластера волатилности, односно чињеницом да волатилност показује особину да се током времена мења (хетероскедастичност), те се модел не може примењивати у случају појаве кластера волатилности, односно волатилности која је временски променљива.

### ***1.2 Стандардни модел историјске симулације (HS)***

Најједноставнији непараметарски модел вредности при ризику јесте стандардни модел историјске симулације. Заснива се на претпоставци да се историја понавља, односно да ће дистрибуција будућих приноса портфолија бити идентична дистрибуцији приноса портфолија из недавне прошлости. Другим речима, модел се индиректно заснива на претпоставци стационарности тј. на идентичној дистрибуцији приноса. За разлику од параметарских модела, који дистрибуцији приноса приписују одговарајућу теоријску дистрибуцију, у случају стандардног модела историјске симулације процена VaR-а се изводи искључивао на основу емпиријске дистрибуције. Тачније, процена се врши на тај начин што се будућа дистрибуција приноса симулира на основу дистрибуције прошлих

приноса, а затим се са ње читава предност VaR-а за одређени ниво поверења. Математички то се може исказати на следећи начин:<sup>67</sup>

$$VaR_{N=I|N}^{cl} \equiv r_w((T+1)cl) \quad (\text{III 1.2.1})$$

при чему је  $r_w((T+1)cl)$  преузет из уређеног низа приноса  $\{r_w(1), r_w(2), \dots, r_w(T)\}$ .

На основу израза (III 1.2.1) може се приметити да се сваком опажају (приносу) приписује исти пондер, односно придаје исти значај без обзира на старост тог податка. То значи да сваки принос, без обзира када се догодио, докле год се налази у узорку на основу којег се врши симулација будуће дистрибуције приноса портфолија, са истим интензитетом утиче на процену VaR-а. Овакав начин пондерисања еквивалентан је претпоставци да су историјски симулирани приноси *IID*.<sup>68</sup>

То што се модел не заснива на некој теоријској дистрибуцији, омогућава му да се кооптирају дебели репови и друге девијације које не могу да се кооптирају применом линеарног модела вредности при ризику. Међутим, са друге стране то што се модел заснива на претпоставци да су приноси портфолија *IID*, онемогућава да се на адекватан начин кооптира временски променљива волатилност, односно појава кластера приноса и особина хетероскедастности. Још један недостатак стандардног модела историјске симулације потиче из начина пондерисања приноса. Наиме, то што се сваком приносу (опажају) без обзира на његову старост, приписује исти пондер  $1/T$ , доводи до појаве „ефекта духа“. То је појава да неки принос све време докле је у узорку на основу којег се врши симулација будуће дистрибуције приноса портфолија утиче на процену VaR-а, а само дан касније, у тренутку  $T+1$ , нема никакав утицај. У случају да је реч о екстрмном приносу, његов утицај на процену VaR-а је значајан и након истека  $T$  дана, односно у дану  $T+1$  нема више никакав утицај и вредност VaR-а значајно опада.<sup>69</sup> Како би се решио овај проблем *Boudoukh, Richardson and Whitelaw* развили су модел историјске симулације који

<sup>67</sup> Живковић. С., (2007), оп., цит., стр. 331.

<sup>68</sup> Pritsker, M., (2001), *The Hidden Dangers of Historical Simulation*, Board of Governors of the Federal Reserve System, p. 3.

<sup>69</sup> Детаљније о проблемима историјске симулације видети у Cheung, H., Powell, R., (2012), *Anybody can do Value at Risk: A Nonparametric Teaching Study*, Australasian Accounting Business and Finance Journal, Vol. 6, No. 1, pp. 111-123.

опажајима различите старости додељује различите пондере.<sup>70</sup> Примесе од које су пошли у развоју модела јесте зашто прихватити да поједини историјски опажај, принос ( $T - i$ ) има једнаку вредност као и новији принос у тренутку ( $T$ ) и да принос само дан старији ( $T - i - 1$ ) нема никакву важност. Приписујући приносима различите старости различите пондере, који одражавају њихову старост у узорку, не само да се решава проблем „ефекта духа“, већ се решава и проблем адекватнијег кооптирања временски променљиве волатилности.

Ова верзија стандардног модела историјске симулације једноставна је за имплементацију и спроводи се у три корака: Први корак подразумева да се сваком од најскоријих приноса остварених у периоду од  $T-1$  до  $T$ :  $r_t, r_{t-1}$  до  $r_{t-n+1}$  додели одговарајући пондер:  $[(1-\lambda)/(1-\lambda^T)]$ ,  $[(1-\lambda)/(1-\lambda^T)] \lambda, \dots, [(1-\lambda)/(1-\lambda^T)] \lambda^{T-1}$

при чему су:

$T$	- број опажаја
$r_t$	- принос у тренутку ( $t$ )
$\lambda$	- фактор опадања
$[(1-\lambda)/(1-\lambda^T)]$	- константа

Константа  $[(1-\lambda)/(1-\lambda^T)]$  обезбеђује да збир пондера буде један.

Након што се опажајима приноса доделе одговарајући пондери, конструише се хистограм дистрибуције приноса прилагођених за додељене пондере, са којег се, на исти начин као код стандардног модела историјске симулације утврђује процена VaR.

На жалост, бројна емпиријска истраживања показују да се модел не понаша онако како би се очекивало на основу теорјских основа на којима почива. О томе сведоче истраживања Prikisten-a (2001), Žikovića (2007, 2010), Станчића и сарадника (2013), Радивојевића и сарадника (2014, 2016а) и других.

<sup>70</sup> У литератури овај модел познат је под називом BRW модел. Међутим, у овом раду модел се назива онако како су га назвали његови творци у свом раду *The Best of Both Worlds: A hybrid Approach to Calculating Value at Risk, Risk*, Vol. 11. No. 5. May, 1998.

### 1.3 Модел огледала историјске симулације (MHS)

Значајан недостатак стандардног модела историјске симулације огледа се и у чињеници да је применом историјске симулације тешко проценити VaR за екстремно високе нивое поверења. Нарочито за холдинг периоде дуже од једног дана услед наглог смањења броја података. Тако на пример узорак од 500 дана дневних података брзо се смањи на узорак са 50 опсервација десетодневних података о приносу портфолија. У овом случају скоро је немогуће проценити VaR за екстремно висок ниво поверења. Са оваквим узорком реална процена VaR-а могућа је тек за ниво поверења од 98%, будући да се у том случају процена VaR-а поклапа са највећим историјским губитком из узорка.<sup>71</sup> Стварна вероватноћа, при нормалним тржишним условима, да се поново забележи екстремни губитак свакако је мања од (1-ниво поверења).

Једно од решења за овај проблем јесте да се повећа број података. Међутим, повећање податка тј. периода узорковања даље појачава проблем „ефекта духа“, будући да са повећањем периода узорковања расте вероватноћа да се у узорак укључи неки веома стар екстремни принос који ће имати велики утицај на процену VaR+a, а који неће бити релевантан за текуће тржишне услове. Сем тога, са повећањем периода узорковања расте и вероватноћа да дистрибуција прошлих приноса не одговара будућој, те расте вероватноћа да дође до кршења претпоставке о стационарности. За тржишта у настајању која имају кратку историју берзанског трговања недостатак довољног броја података је нарочито присутан. Поред тога, нико не воли да прави будуће процене на веома старим подацима.

Како би решио овај проблем стандардног модела историјске симулације, а истовремено избегао замке од једноставног повећања периода узорковања, Holton (1998) је предложио да се прикупљени подаци дуплирају, по принципу ефекта огледала. На тај начин се удвостручава (повећава) број података уз смањење стандардне грешке. Дуплирање податка се постиже множењем историјских приноса са (-1). Така добијени нови подаци се укључују у период узорковања и тиме се дуплира број података. Овакав начин дуплирања података значи да се повећава и број податка који се налазе у репу дистрибуције, што омогућава да се врши процена VaR-а за екстремне нивое поверења применом релативно малог броја податка о

<sup>71</sup> Radivojević, N., et al. (2016), *MHS model vrednosti pri riziku, Ekonomski vidici*, XXI, br.1. str. 17. Друштво Економиста, Београд

приносу портфолија из недавне прошлости за који постоји велика вероватноћа да адекватно репрезентују дистрибуцију будућих приноса. Овакав начин мултипликовања података нарочито је користан када се процена VaR-а врши за холдинг периоде дуже од једног дана.

Претходно речено математички може се исказати на следећи начин:

$$VaR_{\hat{N}=1|\hat{N}}^{cl} \equiv r_w((\hat{T} + 1)cl) \quad (\text{III 1.3.1})$$

при чему је  $r_w((\hat{T} + 1)cl)$  преузет из уређеног низа приноса  $\{r_w(1), r_w(2), \dots, r_w(\hat{T})\}$ .

Израз (III 1.3.1) је скоро идентичан изразу (III 1.2.1). Једина разлика је у томе што је у изразу (III 1.3.1)  $\hat{T}$  представља скуп реалних и пресликаних вредности. На основу израза (III 1.3.1) лако се може закључити да је процедура око утврђивања вредности VaR-а идентична као код стандардног модела историјске симулације.

Модел огледала историјске симулације, како се у литератури још назива модел пресликане историјске симулације, оваквим начином умножавања не решава проблем карактеристичан за све моделе историјске симулације, а који се односи на избор адекватног периода узорковања. Избор адекватног периода узорковања и даље остаје пресудна детерминанту валидности процене VaR-а применом историјске симулације. Тако и у случају овог модела валидност процене тржишног ризика зависи од испуњености претпоставке стационарности, односно о *IID* дистрибуцији, тј. од избора адекватног периода узорковања.

Модел огледала историјске симулације задржава исти систем пондерисања и придавања значаја историјским подацима, тако да је и овде евидентан проблем „ефекта духа“.

## 2. Модели способни да кооптирају временски променљиву волатиност

За разлику од претходно описаних модела вредности при ризику који се заснивају на претпоставци о *IID*, који нису способни да кооптирају временски променљиву волатиност, модели који ће бити описани у овом делу дисертације су развијени како би ефикасно кооптирала појаву кластера волатилности и особину хетероскедастичности. Уобичајена појава када је реч о приносама финансијских инструмента јесте појава да мале промене у цени следе периоде малих промена, а да велике следе периоде великих. Ова појава је позната као серијалност и резултира појаву кластера волатилности. Последица је присуства аутокорелације у серији приноса. Из визуре статистике и теорије вероватноће ова појава позната је као хетероскедастичност, а значи да се варијанса приноса портфолија мења са протоком времена.

Другим речима, ово значи да модели који се заснивају на процени безусловне варијансе, као што је то варијанса-коваријанса модел вредности при ризику, или модели који се заснивају на претпоставци стационарности, односно *IID* претпоставци неће моћи на адекватан начин да кооптирају временски променљиву волатилност.

Два најпознатија и најједноставнија модела вредности при ризику која су у стању да кооптирају временски променљиву волатилност јесу *RiskMetrics* модел вредности при ризику и филтрирани модел историјске симулације. Реч је веома распрострањеним и често коришћеним моделима вредности при ризику. Разлог њихове распрострањеност налази се како у једноставности имплементације, тако и у њиховој поузданости.

## 2.1. Филтрирани модел историјске симулације (FHS)

Модел историјске симулације који су до сада разматрани у дисертацији ослобођени су било какве претпоставке о структури приноса. Отуда се често истиче да су ови модели вредности при ризику погодни за тржишта у настајању за која је карактеристично да се корелација између фактора тржишног ризика континуирано мења. Будући да они не оперишу са матрицама варијансе-коваријансе, евидентно је зашто су они погодни за овакве услове. За разлику од ових модела, модели *Monte Carlo* симулације почивају на другачијем приступу. Они полазе од става да је структура приноса, односно функција дистрибуције приноса портфолија позната; да се генерисањем великог броја вредности случајне променљиве, у складу са теоријом вероватноће и законом великих бројева, може извести жељена мера ризика. Другим речима, ови модели заснивају се на ставу да се промене у вредности портфолија могу описати помоћу одговарајућег стохастичког процеса и да се довољним бројем понављања тог процеса може симулирати дистрибуција приноса портфолија, која конвергира ка стварној (мада и даље непознатој) дистрибуцији. Затим се на основу ње може утврдити вероватноћа настанка нежељеног приноса, односно проценити тржишни ризик.

Обе ове групе модела имају својих и предности и недостака. Тако на пример, модели примена модела историјске симулације има смисла када прикупљени подаци могу да кооптирају карактеристика дистрибуције приноса које не може да кооптира ниједан параметарски модел вредности при ризику. Са друге стране, модели *Monte Carlo* симулације препоручљиви су када модел прилично верно репрезентује реалност. Под тим условима, бројни аутори попут Duffie and Pan (1997), као и So (2008) истичу да модели *Monte Carlo* симулација представља најбољу методологију за процену VaR-a.

Филтрирани модел историјске симулације (FHS) представља покушај да се комбинују најбоље одлике од обе ове групе модела на веома интуитиван начин. У развоју филтрираног модела историјске симулације *Christofferson* полази од претпоставке да су процена волатилности портфолија приноса хартија од вредности добијене применом *GARCH* модела адекватне за процену тржишног ризика, али да спецификација дистрибуције стандардизованих приноса, као што су нормална или студентова *T* дистрибуција, нису адекватне за податке са финансијских тржишта, те да је потребно на

основу историјских података о приносима портфолија извести закључак о дистрибуцији приноса.<sup>72</sup>

Идеја на којој почива филтрирани модел историјске симулације се најједноставније може представити на следећи начин:

На основу серије приноса портфолија  $\{r_{t+l-\tau}\}_{\tau=1}^m$  могуће је добити GARCH оцену волатиности (варијансе и стандардне девијације приноса портфолија) и израчунати историјске стандардизоване приносе применом следећег израза:<sup>73</sup>

$$\hat{z}_{t+l-\tau} = r_{t+l-\tau} / \sigma_{t+l-\tau} \quad (\text{III 2.1.1})$$

при чему су:

$\hat{z}$  - стандардизован принос портфолија

$\sigma_{t+l-\tau}$  - Оцена стандардне девијације добијена применом GARCH модела

уз напомену да се оцене стандардне девијације применом GARCH модела изачунавају применом следећег израза:

$$\sigma_{t+l}^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t+l-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t+l-j}^2 \quad (\text{III 2.1.2})$$

при чему су:

$\alpha_i$  - параметар који одређује колико јако промене приноса утичу на волатилност

$\beta_j$  - параметар који одређује промене волатилности у времену

$\omega$  - константа која описује дугорочни просек кретања варијансе

<sup>72</sup> Детаљније о FHS видети у Pritsker, M., (2001), *Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy Versus Computational Time*, Working Paper, Wharton Financial Institutions Center, pp. 1-66. Слично овом моделу Barone-Adesi, G. и сарадници су представили свој модел, детаљнијевидети у Barone-Adesi, G. and K. Giannopoulos (2001). *Non-parametric VaR techniques. Myths and realities*. Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena Spa 30, pp. 167-181. Hull и White, (1998) су предсравили свој филтрирани модел историјске симулације, Hull, J., A. White, (1998), "Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk", *Journal of Risk*, Vol. 1, No. 1, pp. 5-19.

<sup>73</sup> Christoffersen, P., (2003), *Elements of Financial Risk Management*, Academic Press, London, pp. 111.



Применом израза (III 2.2.1) добија се сет стандардизованих приноса портфолија  $\{\hat{z}_{t+l-\tau}\}_{\tau=1}^m$ . Уместо да се применом неког стохастичког процеса, односно применом генератора случајних вредности који се базира на некој теоријској дистрибуцији, као у случају модела *Monte Carlo* симулације, могуће је генерисати симулиране вредности на основу сета симулираних стандардизованих приноса  $\{\hat{z}_{t+l-\tau}\}_{\tau=1}^m$ . Генерисање симулираних вредности приноса портфолија може се извести генерисањем дискретне униформне случајне варијабле у интервалу  $[1,m]$ . На основу великог броја понављања генерише се дистрибуција хипотетичких симулираних (будућих) приноса портфолија:<sup>74</sup>

$$\begin{aligned} \hat{z}_{1,1} &\rightarrow \hat{r}_{1,t+1} \rightarrow \sigma_{1,t+2}^2 \dots \hat{z}_{1,k} \rightarrow \hat{r}_{1,t+k} \\ \sigma_{t+1}^2 &\rightarrow \hat{z}_{2,1} \rightarrow \hat{r}_{2,t+1} \rightarrow \sigma_{2,t+2}^2 \dots \hat{z}_{2,k} \rightarrow \hat{r}_{2,t+k} \\ \hat{z}_{FH,1} &\rightarrow \hat{r}_{FH,t+1} \rightarrow \sigma_{FH,t+2}^2 \dots \hat{z}_{FH,k} \rightarrow r_{FH,t+k} \end{aligned}$$

при чему је FH колико је пута поновљен процес симулације из сваког податка који репрезентује симулирани будући принос портфолија, на пример 1000 пута, и где је k хоризонт за који се врши процена ризика изражен у броју дана.

На основу FH низа дневних симулираних приноса портфолија за дан t+1 могуће је израчунати k-дана принос портфолија примено следећег израза:<sup>75</sup>

$$\hat{r}_{i,t+1:t+k} = \sum_{k=1}^K \hat{r}_{i,t+k} \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, FH \quad (\text{III 2.1.3})$$

На основу FH серије k-дана приноса портфолија могуће је направити низ од k-дана приноса  $\{\hat{r}_{i,t+k:t+k}\}_{i=1}^{FH}$  на основу којег је могуће проценити VaR за холдинг период од k-дана.<sup>76</sup>

$$VaR_{i+1:t+k} = -\text{percentile} \left\{ \left\{ \hat{r}_{i,t+k:t+k} \right\}_{i=1}^{FH}, 100p \right\} \quad (\text{III 2.1.4})$$

У случају да је k=1, варијанса је позната и процена VaR се добија применом следећег израза:<sup>77</sup>

<sup>74</sup> Оп. цит. стр. 112.

<sup>75</sup> Исто, стр. 112.

<sup>76</sup> Исто, стр. 113.

$$VaR_{t+1} = -\sigma_{t+1} \text{percentile} \left\{ \left\{ \hat{z}_{t+1-\tau} \right\}_{\tau=1}^m, 100p \right\} \quad (\text{III 2.1.5})$$

Значајна предност овог модела у односу на остале моделе историјске симулације јесте да је могуће генерисати велики број приноса јер је симулације могуће неограничено понављати, тако нема ограничења на мали број података из узорка. Један од основних проблема модела историјске симулације јесте да је тешко одредити реп дистрибуције са малим бројем података. Ово је нарочито евидентно када се процена VaR-а врши за дуже временске хоризонте. Такође, треба нагласити да овај модел представља комбинацију модела који се заснива на условној оцени волатилности, која се комбинује са историјском симулацијом за стандардизоване приносе, чиме се задржава предност добијања условне оцене волатилности, али без ослањања на претпоставку везану за реп дистрибуције.

## 2.2 RiskMetrics модел вредности при ризику

RiskMetrics модел представља најпознатији модел вредности при ризику. Развијен је од стране *J. P. Morgan* банке и јавно објављен 1994. године. У теоријском смислу модел представља унапређење варијанса-коваријанса модел вредности при ризику. Као и варијанса-коваријанса модел и *RiskMetrics* модел почива на претпоставци да серија приноса портфолија следи нормалну дистрибуцију. Те отуда процена VaR-а применом овог модела се добија применом следећег израза:

$$VaR = -P^* z_{\alpha} \sigma_t \quad (\text{III 2.2.1})$$

при чему је

$\sigma_t$  - условна стандардна девијација портфолија

Разлика између израза (III 1.1.) и (III 2.1.1.) јесте у оцени варијансе, односно стандардне девијације портфолија. У првом случају реч је о безусловној оцени, док у случају RiskMetrics модел реч је о условној оцени волатилности која је добијена применом следећег израза:<sup>78</sup>

<sup>77</sup> Исто, стр. 113.

<sup>78</sup> Исто, стр. 47.

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\lambda^T} \sum_{n=1}^T \lambda^{n-1} r_{it-n}^2} \quad (\text{III.2.2.2})$$

са коваријансом

$$\sigma_{ij} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^T} \sum_{n=1}^T \lambda^{n-1} r_{it-n} r_{jt-n} \quad (\text{III 2.2.3})$$

при чему су:

$\sigma_t$  - стандардна девијација портфолија

$\sigma_{ij}$  - коваријанса  $i$ -те и  $j$ -те стопе приноса

$r_{ij}$  - стопа приноса  $i$ -тог / $j$ -тог фактора ризика портфолија

$T$  - укупан број опсервација

$\lambda$  - фактор опадања

Израз (III 2.2.2) представља оцену волатиности приноса портфолија добијен применом система експоненцијално опадајућих пондера, са константним фактором опадања ( $\lambda$ ), у литератури познат под називом приступа експоненцијално пондерисаних покретних средина (*Exponentially Weighted Moving Average – EWMA*), при чему фактор опадања може узимати вредности у интервалу  $0 > \lambda > 1$ . У случају да је ( $\lambda$ ) једнака јединици оцена волатилности применом EWMA је еквивалентна оцени волатилности која се добија применом приступа једнако пондерисаних покретних средина. У том случају добија се безусловна оцена волатиности. Другим речима, приступ једнако пондерисаних покретних средина, који је у основи израза (III 2.2.1) јесте специјалан случај EWMA. Коефицијент  $(1-\lambda)/(1-\lambda^T)$  се појављује у изразу јер је сума  $\sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} = (1-\lambda^T)/(1-\lambda)$  или приближно  $1/(1-\lambda)$ , када  $T \rightarrow \infty$ .

Предност примене оваквог начина пондерисања огелда се у могућности кооптирања временски променљиве волатилности јер фактор опадања одражава утицај прошлих опсервација на оцену текуће волатилности. Приносима различите старости приписују се различити пондери, који експоненцијално опадају са старошћу опсервације. Тиме се наглашава значај и утицај новијих приноса у односу на оне из даље прошлости и елиминише “ефекат духа“ јер како екстрмни принос постаје све старији, тако се његов утицај по експоненцијалном стопом смањује на процену VaR-а.

Примена оваквог начина пондерисања има и прагматичну страну, с аспекта економетрије. Наиме, под претпоставком да је средина временске серије приноса портфолија једнака нули и да се предвиђа варијанса за период (t+1), на основу информација расположивих у тренутку (t) рекурзивни облик се добија на основу следећег израза:<sup>79</sup>

$$\begin{aligned}\sigma_{1t+1|t}^2 &= (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i r_{1t-i}^2 = \\ &= (1-\lambda)(r_{1t}^2 + \lambda r_{1t-1}^2 + \lambda^2 r_{1t-2}^2 + \dots) = \\ &= (1-\lambda)r_{1t}^2 + \lambda(1-\lambda)(r_{1t-1}^2 + \lambda r_{1t-2}^2 + r_{1t-3}^2) = \\ &= \lambda\sigma_{1t|t-1}^2 + (1+\lambda)r_{1t}^2\end{aligned}\tag{III 2.2.4}$$

Кореновањем израза (III 2.4) се добија израз за оцену *RiskMetrics* волатилности:<sup>80</sup>

$$\sigma_{1t|t+1} = \sqrt{\lambda\sigma_{1t|t-1}^2 + (1+\lambda)r_{1t}^2}\tag{III 2.2.5}$$

На основу претхоно реченог лако се може закључити да поузданост оцене зависи од избора фактора опадања. У условима велике волатилности, нижи фактор опадања је пожељнији јер значи брже опадање утицаја ранијих приноса. Обратно је у условима мање волатилности. Међутим, кључно питање је како утврдити оптималан фактор опадања. *J.P. Morgan* банка предложила је приступ за израчунавање оптималног фактора опадања. У основи *J.P. Morgan* приступ представља пондерисани просек оптималних фактора опадања за све временске серије података из њихове базе:<sup>81</sup>

Упркос својим предностима које се огледају у једноставности примене овог модела и могућности кооптирања временски променљиве волатилности, и овај модел има низ ограничења, која се огледају пре свега у немогућности кооптирања дебелих репова, будући да почива на претпоставци о нормлној дистрибуцији приноса, а такође игнорише ефекат леверица (Laloux et al., 1999), као и чињеницу да дугорочна просечна одступање (дугорочна варијанса) теже да буде релативно стабилна током времена.

<sup>79</sup> J.P.Morgan, (1996), оп., цит., стр. 81-82.

<sup>80</sup> Исто, стр. 82.

Нотација у субскрипту " $t+1|t$ " наглашава чињеницу да се ради о временски условној волатилности, што је у складу са постојањем позитивне аутокорелације између волатилности.

<sup>81</sup> J.P.Morgan, (1996), оп., цит., стр. 99.

### 3. Динамични модел историјске симулације (DHS)

До сада представљени модели у дисертацији засновали су се или на претпоставци нормалности дистрибуције или на претпоставци о *IID*. Основни проблем са којим се суочавају менаџери ризика јесте како да се кооптирају и дебелу репови и временски променљива волатилност. Интересантно решење за овој проблем представио је Вее (2012). Он је предложио употребу тзв. динамичког модела историјске симулације (DHS). Модел се заснива на комбинацији историјске симулације и условне оцене волатилности.

За лакше разумевање DHS модела потребно је поћи од уопштеније варијанте модела случајног хода од оног који је представљеним изразом (III 3.1) према коме принос портфолија детерминисан је двема компонентама: стохастичком компонентом  $\varepsilon_t$  и детерминистичком компонентом  $\sigma_{t|t+1}$  тј.

$$r_t = \sigma_{t|t+1} \varepsilon_t \quad (\text{III 3.1})$$

при чему је  $\varepsilon_t$  случајна варијабла са средином нула и варијансом 1 која следи са  $D(\Theta)$  дистрибуцију и простором параметра  $\Theta$ , док је  $\sigma_{t|t+1}$  условна варијанса, уз напомену да је  $r_t$  принос портфолија исказан у логаритамском облику, односно:

$$\varepsilon_t \sim D(\Theta), E(\varepsilon_t) = 0, \text{Var}(\varepsilon_t) = 1,$$

$$\sigma_{t|t+1}^2 = f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_1; \zeta)$$

при чему је  $f(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_1; \zeta)$  израз за израчунавање условне варијансе са параметром  $\zeta$ . Уколико се у израз укључи компонента за условну средину добија се модел случајног хода на којем почива *RiskMetrics* модел, о чему је било речи у првом делу дисертације.

Полазећи од става да је могуће кооптирати дебеле репове  $\varepsilon_t$  применом *ad hoc* претпоставке о дистрибуцији  $\varepsilon_t$ , Вее је предложио да се за стохастичну компоненту модела исказаног изразом (III 3.1) користи стандардизована случајна варијанбла ( $\varepsilon_t$ ), која следи студентову  $T$  дистрибуцију. Ова претпоставка прихватљива је будући да је студентова  $T$  дистрибуција са пар степени слободе, дистрибуција са дебелим реповима. Овако специфициран модел вредности при ризику може се исказати на следећи начин:

$$VaR( cl ) = \sigma_{t+1|t} \varepsilon_{cl} \sqrt{\frac{v-2}{v}} \quad (\text{III } 3.2)$$

$$\varepsilon_{cl} = T_v^{-1}( cl ), v > 2 \quad (\text{III } 3.3)$$

уз напомену да је условна варијасна добијена применом *GARCH* модела за овену волатилности и при чему су:

- $\varepsilon_{cl}$  - квантил студентова *T* дистрибуције са *v* степени слободe са *cl* нивоом поверења
- T* - кумулатив густине дистрибуције студентове *T* дистрибуције
- $\sqrt{v-2}/v$  - реципротет стандардне девијације за студентову *T* дистрибуцију

Друга могућност јесте да се стохастична комонента модела (III 3.2) специфицира као случајна варијабла која следи уопштену дистрибуцију резидуала (General Error Disribution – GED). У овој варијанти процена VaR-а добија се применом следећег израза:

$$VaR( cl ) = \sigma_{t+1|t} \varepsilon_{cl}, \text{ при чему је}$$

$$\varepsilon_{cl} = G_{v,0,1}^{-1}( cl ) \quad (\text{III } 3.4)$$

при чему су:

- $\varepsilon_{cl}$  - квантил *GED* са *v* параметром облика, средином нула и варијансом један
- $G_{v,0,1}$  - кумулатив густине *GED* дистрибуције

уз напомену да је оцена параметара *GARCH* модела добија максимизирањем *GED* функције веродостојности. Овако добијени модели вредности при ризику представљају динамичне моделе који су способни да кооптирају дебеле репове. Међутим, они су ипак ограничени претпоставком везаном за дистрибуцију резидуала. Стога је Вее предложио једноставнију варијанту која не захтева било какву претпоставку везану за дистрибуцију резидуала. Предложио је да се историјска симулација комбинује са условном оценом волатилности. Такав модел назива динамички модел историјске симулације. Овај модел је идентичан претходно описаним моделима само што се не поставља претпоставка везана за

облик дистрибуције резидуала. Другим речима, *DHS* модел оцењује квантил  $\varepsilon_{cl}$  користећи емпириски квантил резидуала, што се може исказати на следећи начин:

$$VaR(cl) = \sigma_{t+1|t} \varepsilon_{cl} \text{ при чему је } \varepsilon_{cl} = \mathcal{E}[c|n] \quad (\text{III } 3.5)$$

при чему емпиријски квантил за ниво поверења  $cl$  је  $k$  –реда резидуал, уз напомену да је  $k = n*cl$ .

Овако специфициран модел, теоријски посматрано, способан је да кооптира и временски променљиву волатилност јер се процена условне варијансе добија применом GARCH модела, а и дебеле репове јер се оцена квантила заснивана на емпиријској оцени. Нажалост, бројна истраживања показују да се модел не понаша како би се то очекивало, на основу његових теоријских основа на којима почива.

#### 4. Нови полупараметарски модел вредности при ризику –

##### *ARMA(p,q)-GARCH(p,q)MHS*

У овом делу дисертације биће развијен и представљен нови полупараметарски модел. Модел је означен као нови полупараметарски модел вредности при ризику, *ARMA(p,q)-GARCH(p,q)* – модел огледала историјске симулације. У развоју модела пошло се од идеје је да се развије нови модел, који ће спадати у групу модела историјске симулације, а који ће бити адекватан за тржишта у настајању. Сусрећемо се са два основна недостатка историјске симулације. Први, да се заснива на претпоставци да су серије приноса идентично и независно дистрибуиране, те када ова претпоставка није испуњена употреба модела историјске симулације је лимитирана. У оваквим условима примена модела историјске симулације, у најбољем случају, може да произведе процене које ће задовољити критеријум безусловног покрића, али не и особину независне дистрибуције прекорачења. Тако да добијене процене вредности при ризику неће задовољити особину условног покрића. Други недостатак историјске симулације огледа се у томе што је њеном применом тешко могуће проценити реп дистрибуције за величину узорка и ниво поверења који прописује Базел II стандард. Овај проблем постаје све евидентнији како се повећава холдинг период за који се врши процена, о чему је већ било речи у овом делу дисертације. Отуда, примена историјске симулације на тржиштима у настајању нема великог смисла у контексту задовољавања правила валидности модела Базелског комитета за супервизију банака, иако поједини аутори, попут Радивојевића и сарадника (2009, 2010а) истичу да историјска симулација изузетно прикладним за неефикасна тржишта, на којима се уочава

да је матрица корелације између хартија од вредности нестабилна и подложна брзим променама.

Како модел огледала историјске симулације (MHS) донекле решава број недовољног броја опсервација које спадају у реп дистрибуције, о чему је већ било речи у дисертацији, идеја је да се он унапреди инкорпорирањем приноса који ће задовољвати претпоставку о идентичној и независној дистрибуције (IID) приноса. Основна намера је да се оригинални подаци трансформишу у IID приносе, помоћу модела који може да кооптира аутокорелацију и у приносима и у квадратима приноса, а који ће истовремено бити једноставан за имплементацију. Другим речима, намера је да се применом ARMA(p,q)-GARCH(p,q) модела кооптирају обе зависности, те да се такви подаци по принципу огледала мултипликују. На овај начин добија се довољан број опсервација за процену ризика (репа дистрибуције) према правилима и захтевима Базел II стандарда.

Дакле имплементација новог модела изводи се у пар корака. Први корак подразумева уклапање ARMA(p,q) модела у серију историјских приноса, како би се обезбедили IID резидуали:

$$r_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (\text{III 4.1})$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{\sigma_t^2} \quad (\text{III 4.2})$$

при чему  $\eta_t \sim \text{IID } N(0,1)$

Други корак подразумева уклапање GARCH(p,q) модела у добијене резидуале:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (\text{III 4.3})$$

У трећем кораку резидуали ( $\varepsilon_t$ ) добијени применом ARMA(p,q) модела се деле одговарајућим условним GARCH(p,q) предвиђањима волатилности ( $\sigma_t$ ), како би се добили стандардизовани резидуали ( $z_t$ ):

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \quad (\text{III 4.4})$$

Како би се утврдило да ли су добијени стандардизовани резидуали стварно IID, предвиђа се употреба одговарајућих тестова, попут Ljung Vox-ов Q теста и теста за



детектовање ARCH ефекта. У случају да добијену резидуали не задовоље критеријум *IID*, модел предвиђа могућност примене неког другог ауторегресионог модела условне хетероскедастичности.

У наредном кораку врши се генерисање серије истосријских приноса применом стандардизованих резидуала:

$$\hat{r}_{t+1} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i r_{t-i+1} + \sum_{i=1}^q \theta_i z_{t-i+1} + z_{t+1} \quad (\text{III } 4.5)$$

На тај начин се добијају приноси који задовољавају претпоставку о *IID*. Затим се овако добијени приноси мултипликују по принципу огледала. Сваки принос се множи са -1.

Претходно речено математички може се исказати на следећи начин:

$$VaR_{\hat{N}=1|\hat{N}}^{cl} \equiv r_w((\hat{T} + 1)cl) \quad (\text{III } 4.6)$$

при чему је  $r_w((\hat{T} + 1)cl)$  преузет из уређеног низа приноса  $\{r_w(1), r_w(2), \dots, r_w(\hat{T})\}$ , уз напомену да  $\hat{T}$  представља скуп реалних и прсликаних вредности.

Применом овог решења, не само да се добијају приноси који су адекватни за примену модела историјске симулације (испњена је претпоставка о *IID* приносима, о чему је већ било речи у дисертацији), већ се отклања још један недостатак историјске симулације, а то је брзо опадање броја опсервација са повећањем холдинг периода. Другим речима, представљени модел искоришћава предности непараметарских модела јер је ослобођен претпоставке везане за дистрибуцију приноса. Оцена квантила заснована је на емпиријској дисрибуцији. На тај начин омогућава да се коопритају дебели репови и друге девијације емпиријске дистрибуције. Са друге стране, примена *GARCH* модела омогућава да се искористе предности примене условне оцене волатилности, што омогућава да се кооптира временски променљива волатилност.

## 5. Компарација модела са аспекта апликативности на тржиштима у настајању

Сви модели вредности при ризику изграђени су на одређеним претпоставкама помоћу којих се настојало што реалније представити тржишну реалност. Отуда, апликативност неког модела на одређеном тржишту зависи, пре свега, од степена компатибилности између карактеристика реалног окружења и претпоставки на којима модел почива. Међутим, без обзира на којим претпоставкама су модели вредности при ризику изграђени, сви они имају одређених предности и недостатка када се примењују на одређеном тржишту.

За тржишта у настајању, која су предмет проучавања у овој дисертацији, непараметарски модели тј. модели историјске симулације представљају ваљаније решење у односу на моделе који се заснивају на претпоставци нормалности дистрибуције приноса тј. у односу на параметарске модела, као што су варијанса-коваријанса или *RiskMetrics* модел. Будући да бројна емпиријска истраживања показују да серије приноса са ових тржишта не следе нормалну дистрибуцију и да им се матрица корелације између сваког пара позиција у портфолију континуирано мења, јасно је да примена варијансе-коваријансе модела није исправна. Како варијанса као мера ризика портфолија зависи од корелације између свака два пара позиција из портфолија, то у условима где се корелација стално мења процена варијансе заснована на историјским приносима није реална, а тиме није реална ни процена VaR-а. Сем тога, овај модел почива на безусловној оцени волатилностим, а како емпиријска истраживања показују ова се тржишта одликују појавом кластера волатилности (хетероскедастичношћу варијансе) то је његова примена неадекватна. Са друге стране, претпоставка нормалности дистрибуције ограничава и примену *RiskMetrics* модела на овим тржиштима.

Како је основна карактеристика модела историјске симулације да при процени VaR не полазе од претпоставке о аналитичкој форми расподеле, нити о степену и смеру корелације између фактора ризика, односно позиција портфолија, то моделе вредности при ризику из ове групе чини веома прикладним за неефикасна тржишта, на којима се уочава да је матрица корелације између фактора ризика, односно позиција портфолија нестабилна и подложна брзим променама. Међутим, уз своје многобројне предности над

варијанса-коваријанса и *RiskMetrics* моделима, ни модели историјске симулације не представља идеално решење за процену тржишног ризика на изузетно варијабилним и неефикасним тржиштима, каква су тржишта у настајању која су предмет проучавања у овој дисертацији, будући да се базирају на претпоставци о *IID* приноса. Емпиријска истраживања показују да су серије приноса портфолија на тржишту у настајању хетероскедастичне и да постоји значајна аутокорелација између приноса. Тако да претпоставка о *IID* приносама није реална за тржиште у настајању.

Имајући у виду теоријске основне на којима је развијен нови полупараметарски модел, у дисертацији означен као  $ARMA(p,q)$ - $GARCH(p,q)$  – модел огледала историјске, његова примена на тржиштима у настајању треба да обезбеди супериорније процене VaR-а у односу на све претходно описане модела.

## Глава IV

# МОДЕЛИ ЗА ОЦЕНУ ИСПРАВНОСТИ МОДЕЛА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

### 1. *Traffic light* приступ Базелског комитета за супервизију банака

Базелски комитет за супервизију банака, 1996. године, дефинисао је низ квалитативних и квантитативних правила које би банке требало да испуне како би могле да утврђују ниво адекватности капитала за покриће тржишних ризика применом интерних модела вредности при ризику. Тај скуп правила, који је коначну форму добио 2004. године, познат је под називом Базел II стандард. Усвајањем Базел II стандарда, чија је примена отпочела 2008. године<sup>82</sup> у земљама Европске Уније, банке су добиле могућност да ниво капитала, који треба да издвоје у облику резерви за покриће потенцијалних губитака услед изложености њихових портфолија тржишним ризицима, утврђују у складу са стварном изложеношћу њихових портфолија тржишном ризику. На тај начин се постиже да трошак капитала буде складу са стварном изложеношћу банке тржишним ризицима, а не резултат неког екстерно наметнутог стандарда. Наиме, Базел I стандардом није уважена чињеница да банке поседују различите портфолије, који се разликују према степену изложености тржишном ризику и да би банкама требало дозволити да саме мере изложеност тржишним ризицима, већ је постојао јединствен стандард за све банке, у облику минималне стопе адекватности капитала од 8% од укупног, односно 4% од основног капитала у односу на ризико пондерисану активу.

Базел II стандардом прописано је да банке процене VaR-а врше дневно и то на основу следећих квантитативних критеријума:

---

<sup>82</sup> Усвајањем Директиве о адекватности капитала (Capital Adequacy Directive - CAD3), 2005. године, Базел II стандард постао је обавезан за све земље Европске уније. Преко ове директиве, Европска комисија је одредбе Базел II стандарда прилагодила домаћим финансијским институцијама. Остале европске земље то покушавају да ураде кроз законе и прописе централних банака. У већини ових земаља примена стандарда отпочела је 2011/2012. године.

- десетодневног холдинг периода; приликом процене VaR-а банка мора да користи факторе који одражавају волатилност цена у периоду од 10 дана;
- за ниво поверења од 99%; овај ниво поверења изабран је јер кореспондира губитку који је сваких 100 дана већи од VaR-а, односно 2 до 3 пута годишње;
- временска серија података не може да буде краћа од 1 године (осим у случају значајног повећања волатилности цена када коришћење краће временске серије може бити оправдано);
- временска серија података мора бити ажурирана најмање једанпут у току три месеца, а по потреби и чешће, нарочито у случају значајних промена тржишних цена.

Ниво адекватности капитала који банке треба да издвоје за покриће потенцијалних губитака услед изложености њихових портфолија тржишном ризику применом интерних модела вредности при ризику једнак је већој од следеће две вредности:<sup>83</sup>

- VaR израчунатој на крају претходног радног дана, која је по потреби увећана за капитални захтев за ризик неизмирења обавезе, односно за специфични ценовни ризик уколико није инкорпориран у модел и
- просечне VaR израчунате за претходних 60 радних дана и помножене фактором скалирања 3 увећаним за плус фактор у складу са резултатима тестирања валидности модела и по потреби увећане за капитални захтев за ризик неизмирења обавеза, односно специфични ценовни ризик уколико није инкорпориран у модел.

Базел II стандардом није прописано које модела вредности при ризику банке треба да користе за израчунавање адекватности капитала, али се од банака захтева да континуирано преиспитују своје моделе у погледу њихове исправности, тј. способности за прецизно предвиђања максималног губитка, који може настати за ниво поверења и

---

<sup>83</sup> Радивојевић, Н., (2011), "Капитални захтеви Народне банке Србије за покриће тржишног ризика банака: приступ интерних модела вредности при ризику", *Ревизор*, вол. 14, бр. 53, стр. 105.

временски хоризинт дефинисаним стандардом. За ту сврху Базелски комитет за супервизију банака прописао је тзв. *traffic light* приступ (приступ семафора).

*Traffic light* приступ подразумева да се дневне процене VaR-a, начињене за ниво поверења и холдинг период дефинисани Базел II стандардом континуирано пореде са одговарајућим дневним резултатима трговања у последњих 250 трговачких дана. У зависности од броја прекорачења (дана када је стварни губитак био већи у односу на процену VaR-a) модели се, према овом приступу сврставају у три зоне: зелену, жуту и црвену. Отуда и назив приступа семафор (*traffic light*). У зелену зону сврставају се сви модели који током последњих 250 трговачких дана нису направили већи број прекорачења од четири. За такве моделе сматра се да су исправни, и у том случају од банака се захтева да процену VaR-a мултиликују са фактором скалирања 3. Модели који генеришу већи број прекорачења од четири, а мањи од десет, сврставају се у жуту зону. Такви модели се не одбацују *a priori* као неисправни, већ се од банке захтева да докажу разлоге оволиког броја прекорачења. У овом случају фактор скалирања се увећава од 0,4 до 0,85 у зависности од броја прекорачења. Сви модели који генеришу већи број прекорачења од десет, сматрају се неисправним. Границе зона су изабране тако да се направи баланс између статистичких грешака I и II типа, тј. могућности да се исправан модел класификује као неисправан, односно могућности да се неисправан модел класификује као исправан. Тако на пример, вероватноћа да ће исправан модел генерисати 10 прекорачења за ниво поверења и холдонг период дефинисан Базел II стандардом износи свега 0,01%. Управо, овако мала вероватноћа настанка грешке I типа разлог је зашто је усвојено правило да се сви модели, који производе 5% и више прекорачења од укупног броја дана за који се спроводи процена валидности, аутоматски одбаце као неисправни.

Значајан недостак овог приступа огледа се у чињеници да је вероватноћа настанка грешке II типа изузетно велика. Примера ради у случају нивоа поверења од 97% она износи 12,8%, док у случају нивоа поверења од 98% она износи 43,9%.<sup>84</sup> Из тог разлога је

---

<sup>84</sup> О овим нивоима поверења шире видети у: Basel Committee on Banking Supervision, (1996), *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk*, Report, No. 24, BIS, Basel, pp. 48-56. Basel Committee on Banking Supervision, (2004), *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A revised framework*, BIS, pp. 1-322. Basel Committee on Banking Supervision, (2004), "Bank failures in Mature Economies", Working Paper, No. 13, BIS, pp. 1-66. Basel Committee on Banking Supervision, (2002), "Quantitative Impact Study 3", Technical Document, BIS, pp. 1-164.

Базелски комитет прописао да се тест валидности спроводи за ниво поверења од 95%. Друга значајна критика упућена на рачун *triffic light* приступа односи се на фактор скалирања. Критичари приступа постављају питање зашто постоји фактор скалирања 3 за исправне моделе. Уколико је модел исправан онда нема разлога да се банка додатно кажњава у смилсу повећања њеног капиталног оптрећења. Постоје аутори који се залажу за повећање фактора скалирања у случају модела који спадају у жуту зону, попут *Goorbergh*-а и *Vlaar*-а, истичући да максимално повећање фактора скалирања са 3 на 4 није недовољно и да мотивише банке да своје моделе подесе тако да потцењују стварни ниво тржишног ризика.<sup>85</sup>

Следећа критика приступа односи се на период од 250 трговачих дана. Критичари доводе у сумњу да је овај период довољан да се процени реп дистрибуције. Alexander (2008) истиче да би процена исправности модела била валидна потребно је чак, реда величине, 10 година података о дневним резултатима трговања.

## 2. Кирјес-ов тест безусловног покрића

Један од најпопуларнијих тестова за испитивање исправности модела вредности при ризику јесте *Кирјес*-ов тест безусловног покрића. У литератури је овај модел познат и под назвом тест броја прекорачења. Тест се заснива на броју односно фреквенцији прекорачења (броја дана када је стварни губитак био већи од процене VaR-а) током одређеног временског хоризонта. Фреквенција односно стопа прекорачења представља однос између броја прекорачења и броја трговачких дана за који се врши тествање исправности модела вредности при ризику. Очекивани број прекорачења, односно стопа прекорачења једнака је 1 минус ниво поверења ( $cl$ ) за који се врши процена VaR-а. Другим речима, очекивани број прекорачења једнак је  $(1 - cl)N$  при чему је  $N$  укупан број опсервација тј. дана за који се врши испитивање исправности модела вредности при ризику. Чест је случај да број прекорачења не буде тачно једнак  $(1 - cl) N$ . Будући да стопа

---

<sup>85</sup> Goorbergh, R., Vlaar, P., (1999), *Value at Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?* Working paper, p. 5.

прекорачења може бити већа или нижа у односу на очекивану стопу прекорачења, *Kupiec* је, полазећи од става да низ прекорачења и погодака следи *Bernoulli*-ијев процес, односно биномну дистрибуцију са вероватноћом ( $p$ ), при чему ( $p$ ) је један минус ниво поверења ( $1 - c$ ):

$$\Pr(T|N, p) = \binom{N}{T} p^T (1-p)^{N-T} \quad (\text{IV 2.1})$$

*Kupiec* је развио тест веродостојности (LR) за испитивање да ли је стопа прекорачења конзистентна очекиваној стопи:<sup>86</sup>

$$LR = 2 \left[ \log \left( \left( \frac{T}{N} \right)^T \left( 1 - \frac{T}{N} \right)^{N-T} \right) - \log (p^T (1-p)^{N-T}) \right] \quad (\text{IV 2.2})$$

Другим речима, развио је тест за тестирање следећих хипотеза:

$$H_0 : T / N = p$$

$$H_1 : T / N \neq p$$

LR рацио следи  $\chi^2$  дистрибуцију са једним степеном слободe, те се нулта хипотеза прихвата ако је вредност LR рациа мања од критичне вредности  $\chi^2$  теста. У супротном се прихвата алтернативна хипотеза и модел се одбацује као неисправан.

Будући је реч о биномној дистрибуцији, једноставно ју је утврдити за одређени ниво поверења и временски хоризонт зоне прихватања, односно одбацивања модела. У табели 1 приказане су зоне прихватања односно одбацивања модела вредности при ризику као неисправних.

**Табела 1. Број дозвољених прекорачења према правилима Базелског комитета**

Ниво поверења <i>VaR-a</i>	Број дозвољених прекорачења		
	$T = 250$ дана	$T = 500$ дана	$T = 1000$ дана
99%	$N < 7$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
97,5%	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
95%	$6 < N < 21$	$16 < N < 36$	$37 < N < 65$
92,5%	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$	$59 < N < 65$
90%	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

Извор: Jorion, P., (1997), *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, University of California, Irvine, McGraw Hill, New York, p. 136.

<sup>86</sup> Goorbergh, R., Vlaar, P., (1999), оп., цит., стр. 7.



Табела приказана на претходној страни, такође показује да са повећањем величине узорка интервал  $N/T$  се смањује. Мањи интервал  $N/T$  значи ригорознији тест валидности, јер се модел лакше одбацује. Међутим, приликом тестирања модела потребно је знати да постоји могућност значајних промена у инвестиционим позицијама након што се начине предвиђања ризика за предстојећи период. То значи да само предвиђање престаје да буде корисно, али не и да је модел концептуално погрешан.

Два су основна недостатка *Kupiec*-овог теста безусловног покрића. Прво, тест има малу статистичку моћ за узорак дефинисан од стране Базелског комитета за супервизију банака. Тест је заснован на асимптотској претпоставци, која ствара тешкоће када се примењује на коначне узорке<sup>87</sup>. Друго, тест се фокусира само на особину безусловног покрића (број прекорачења), при чему не води рачуна о времену када су се прекорачења десила. О недостацима овог теста биће више речи у наставку дисертације.<sup>88</sup>

### 3. Christoffersen-ов тест условног покрића

Christoffersen (1998) је развио тест условног покрића, који истовремено води рачуна како о броју прекорачења (уважава особину условног покрића), тако и о особини независности прекорачења. Особина независности прекорачења односи се на то да ли јучерашње прекорачење односно погодак, утиче на данашње прекорачење односно погодак. Ове четири могуће ситуације представио је помоћу *Markov*-љевог низа првог реда са транзитном матрицом вероватноће:<sup>89</sup>

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}$$

<sup>87</sup> О овом тесту видети шире у: Radivojevic, N., et. al. (2016a), *The new hybrid VaR approach based on EVT*, Estudios de Economía, June, Vol. 43, No. 1. pp. 42-43.

<sup>88</sup> На основама овог теста Hass је 2001. године развио нови тест заснован на броју прекорачења. Детаљније видети у Hass, M., (2001), *“New Methods in Backtesting”*, Working paper, Financila Engineering, Research center caesar, Bonn, pp. 1-20.

<sup>89</sup> Viridi, K. N., (2011), *A Review of Backtesting Methods for Evaluating Value at Risk*, International Review of Business Research Papers, Vol. 7, No. 4, p. 18.

при чему су  $\pi_{01}$  - условна вероватноћа да ће након поготка да наступи прекорачење и  $\pi_{11}$  - условне вероватноће да ће након поготка да уследи ново прекорачење, при чему су:<sup>90</sup>

$$\pi_{01} = \frac{T_{01}}{T_{00} + T_{01}} \quad \pi_{11} = \frac{T_{11}}{T_{10} + T_{11}} \quad \pi = \frac{T_{01} + T_{11}}{T_{00} + T_{01} + T_{10} + T_{11}}$$

уз напомену да  $1 - \pi_{01}$  представља условну вероватноћу да ће након поготка наступити погодак, односно  $1 - \pi_{11}$  представља условну вероватноћу да ће након прекорачења уследити погодак.

За испитивање особине назависности прекорачења *Christoffersen* је предложио следећи тест веродостојности, који тестира нулту хипотезу као да је условна вероватноћа настанка прекорачења ( $\pi_{11}$ ) ( $I_{t+1}=1$ ) након претходног ( $I_t=1$ ) иста као и условна вероватноћа настанка прекорачења ( $\pi_{01}$ ) ( $I_{t+1}=1$ ) након дана у коме се прекорачење није десило ( $I_t=0$ ), односно алтернативна гласи да оне нису исте, тј.  $\pi_{11} \neq \pi_{01}$ :

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[ (1 - \pi)^{T_{00} + T_{11}} \pi^{T_{01} + T_{11}} \right] + 2 \ln \left[ (1 - \pi_{01})^{T_{00}} \pi_{01}^{T_{01}} (1 - \pi_{11})^{T_{10}} \pi_{11}^{T_{11}} \right] \quad (IV 3.1)$$

Уколико су погоци и прекорачења независни током времена, вероватноћа да ће се сутра појавити прекорачење не зависи од тога да ли се прекорачење десило данас или није. То што имплицира да су све три вероватноће једнаке тј.  $\pi_{11} = \pi_{01} = \pi$ .

$LR_{ind}$  рацио следи  $\chi^2$  дистрибуцију са једним степеном слободе, те се нулта хипотеза прихвата ако је вредност  $LR_{ind}$  рациа мања од критичне вредности  $\chi^2$  теста.

За тестирање обе особине *Christoffersen* је предложио следећи тест веродостојности:

$$LR_c = LR_{ind} + LR \quad (IV 3.2)$$

при чему су:

$LR_c$  - рацио условног покрића

$LR_{ind}$  - рацио независности дистрибуције прекорачења

$LR$  - рацио безусловног покрића

<sup>90</sup> Исто, стр. 886.

уз напомену да  $LR_c$  рацио следи  $\chi^2$  дистрибуцију са два степена слободe и чињенице да је могуће да се деси да модел не задовољи једну од ове две особине, а да вредност  $LR_c$  рациа буде мања од критичне вредности, али у том случају модел се не прихвата као исправан.

Слично као и у случају претходног теста, основни недостак и код овог теста јесте да има малу статичичку моћ детектовања испавних од неисравних модела за величину узорка дефинисану од стране Базелског комитета. Други недостатак односи се на слабост теста независности прекорачења, будући да се он фокусира само на зависност између суседних погодака, односно прекорачења. Тест не уважава чињеницу да је могуће да прекорачење или погодак од пре два или више дана утиче на ново прекорачење односно на нови погодак. Такође и о недостакту овог теста биће више речи у наставку дисертације.

#### **4. Недостаци и ограничења тестова заснованих на броју прекорачења**

Претходно описана три теста за испитивање исправности модела вредности при ризику сврставају се у групу модела заснованих на броју прекорачења. Евидентна је сличност између *traffic light* приступа и *Kupiec*-овог теста безусловног покрића. Једина разика је у томе што је *Kupiec*-ов тест безусловног покрића двострани тест, код кога се води рачуна и о већем и мањем броју прекорачења у односу на очекивану стопу прекорачења, док *traffic light* приступ води рачуна само о броју прекорачења изнад очекиване стопе прекорачења. Међутим, за банку је подједнако важно да ли је њен модел сувише конзервативан исто и као то да ли је неисправан јер представља беспотребно капитално оптерећење (издвајање већих резерви за покриће губитака од стварно потребног).

Међутим, и *Kupiec*-ов тест безусловног и *Christoffersen*-ов тест условног покрића имају значајан недостатак који се огледа у малој статистичкој снази тестова у разликовању исправних од неисправних модела, када се примењују на ограничене узорке. Бројни аутори су показали да када је број прекорачења сувише мали постоји значајна разлика између асимптотске дистрибуције и њене коначне аналогије (Christoffersen and Pelletier (2004), Hurlin *et al.* (2008), Berkowitz, Christoffersen and Pelletier (2008), Ziggel *et al.*

(2013)). Разлика у критичним вредностима оба теста када се примењују на коначне узорке у односу на асимптотске вредности, на примеру узорка дефинисану од стране Базел II стандарда приказана је у табели 2, уз напомену да је симулација извршан применом *Monte Carlo* симулације 10.000 понављања узорка од 253 трговачка дана.

**Табела 2. Разлика у критичким вредностима у случају коначног узорка и асимптотских вредности за Купиес-ов тест безусловног и Christoffersen-ов тест условног покрића**

*\*Напомена: Вредности у заградама представљају квантиле који кореспондирају са асимптотским вредностима код коначних узорка*

	Ниво поверења		
	1%	5%	10%
	LR <sub>uc</sub> Statistic		
асимптотска вред. $\chi^2(1)$	6,6348	3,8414	2,7055
Коначни узорак	5,497	5,025	3,555
	(0,49%)	(9,49%)	(12,19%)
	LR <sub>cc</sub> Statistic		
асимптотска вред $\chi^2(2)$	9,21	5,9915	4,605
Коначни узорак	6,007	5,015	5,005
	(0,20%)	(1,10%)	(11,79%)

Извор: (Radivojevic, N., et. al. (2016a), *The new hybrid VaR approach based on EVT*, Estudios de Economia, June, Vol. 43, No. 1. p. 52).

На основу података из табеле 2, јасно се може закључити да тестови имају тенденцију потцењивања правог нивоа ризика за величину узорка дефинисану од стране Базелског комитета за супервизију банака. То значи да ослањање искључиво на ове тестове није довољно, те да је неопходна валидација њихових резултата применом симулационих тест технике. Због велике вероватноће од настанка статистичке грешке I и II типа, процена ових тестова се сврди за ниво поверења од 95%, будући да за тај ниво поверења оба теста сугеришу за модел буде одбијен као неисправан само уколико постоје јаки докази за то.

Често апострофирани недостаци ових тестова јесу да *Kupiec*-ов тест безусловног покрића не води рачуна о особини независности прекорачења, а да *Christoffersen*-ов тест условног покрића не води рачуна о аутокорељацији иземљу прекорачења односно погодака која нису суседна. У пракси се често дешава да неки догађај утиче на приносе портфолија

са извесним закашњењем. Ту врсту зависности између приноса *Christofferson*-ов тест условног покрића не може да детектује.

Значајну групу модела чине модели за оцену валидности модела вредности при ризику који се заснивају на функцији губитка. Најпознатије моделе из ове групе чине модели које су развили Lopez (1995, 1997) и Blanco и Ihle (1998). Crnkovic и Drachman (1997) године предложили су модел за евалуацију валидности модела вредности при ризику који се заснива на целој дистрибуцији, а не само на једном нивоу поверења. Сличан модел заснован на Rosenblatt-овој трансформацији предложио је Berkowitz са сарадницима (2001).

## 5. Модели условног и безусловног покрића засновани на *Monte Carlo* симулацијама

Будући да тестови засновани на броју прекорачења, а пре свега *traffic light* приступ који је прописан од стране Базелског комитета за супервизију банака, имају малу статистичку моћ у детектовању исправних од неисправних модела вредности при ризику, јавила се потреба да се њихови резултати верификују. Отуда су развијене бројне тест технике које су засноване на моделима *Monte Carlo* симулације. Тачније основа ових техника налази се у доказима *Dufour*-а (2006)<sup>91</sup> који је показао да је помоћу симулационих техника могуће испитати нулту хипотезу код статистичких тестова на примеру коначних узорака. *Malecka* (2014) истиче да се основна предност ове процедуре огледа у чињеници да обезбеђује егзактне резултате за тестове који се заснивају на дистрибуцији коначних узорака, али под условом да се могу симулирати.<sup>92</sup> Једноставније речено, *Dufour* је показао да тестови као што су *Kupiec*-ов тест безусловног покрића и *Christofferson*-ов тест

---

<sup>91</sup> Шире видети: Dufour, J.M. (2006). *Monte Carlo Tests with Nuisance Parameters: A General Approach to Finite-Sample Inference and Nonstandard Asymptotics in Econometrics*, Journal of Econometrics 133; 443-477.

<sup>92</sup> Malecka, M. (2014). *Duration-Based Approach to VaR Independence Backtesting*, Statistics in Transition, 15 (4); 627–636. Међу првим ауторима који су изнели сумњу у валидност процене вредности при ризику били су Rootzen, H., Klaupelberg, C. (1999). *A single number can't hedge against economic catastrophes*, Ambio, Vol. 28, No. 6, pp. 550-555. Preprint.

условног поркића који се заснивају на асимптотским претпоставкама и које важе само ако се ради са бесконачним узорцима, могу да дају поуздане процене и када се примене на коначне узорке. Тачије *Dufour* је показао да је могуће изранучати  $p$ -вредност неке асимптотске функције на основу њене коначне аналогије. Ради лакшег објашњења добро је послужити се следећим примером:

Нека је  $(S)$  статистика датог теста континуиране функције преживљавања  $G(\cdot)$ , као што је  $Prob[S_i = S_j] = 0$ . Теоријска  $p$ -вредност од теста  $G(\cdot)$  може се апроксимирати помоћу њене емпиријске аналогије, што се може написати на следећи начин:

$$\hat{G}_M(x) = 1/M \sum_{i=1}^M I(S_i \geq x) \quad (\text{IV } 5.1)$$

при чему  $I(\cdot)$  јесте индикатор функције.

У овом случају,  $(S_i)$  је тест статистика за узорке симулиране за нулту хипотезу. *Dufour* (2006) је показао да ако је  $(M)$  довољно велико, без обзора на вредност  $(S_0)$ , теоријски региону критичне вредности  $G(S_0) < \alpha$ , са асимптотском номиналном величином  $(\alpha)$  је еквивалентна региону критичне вредности  $\hat{p}_M(S_0) \leq \alpha_1$ , са  $\hat{p}_M(S_0) = \frac{M\hat{G}_M(S_0) + 1}{M + 1}$  и  $\forall \alpha_1$ . Када је  $Prob[S_i = S_j] \neq 0$ , или када је могуће за дату симулацију теста пронаћи неку вредност за  $(S)$  два или више пута, емпиријска функција преживљавања може се написати на следећи начин:

$$\tilde{G}_M(S_0) = 1/M \sum_{i=1}^M I(S_i \leq S_0) + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I(S_i = S_0) \times I(U_i \geq U_0) \quad (\text{IV } 5.2)$$

при чему је  $(U_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$  кореспондира са реализацијама униформне  $[0, 1]$  варијабле.

Претходно описано може се свести на следећи исказ, *Dufour* је показао да је могуће изранучати  $p$ -вредност неке асимптотске функције на основу њене коначне аналогије.

### 5.1. *Dufour*-ов тест процедуре засноване на $p$ -вредностима

Полазећи од израза (IV 5.2), а имајући у виду недостатке тестова заснованих на броју прекорачења када се примењују на узорке величине дефинисаном од стране Базелског комитета за супервизију банака, *Christofferson* (2008) је предложио следећу процедуру за верификацију резултата *Kupiec*-ов теста безусловног покрића:

- 1) Први корак подразумева да се генерише 9.999 узорака случајне *IID Bernoulli* ( $p$ ) варијабле са вероватноћом  $p$ , уз напомену да величина узорка мора да буде једнака величини стварног узорка.
- 2) Други корак подразумева да се на основу ових вештачких узорака израчуна 9.999 вредности LR рачица, означених као  $\{L\tilde{R}(i)\}_{i=1}^{9.999}$ .
- 3) Коначно, симулиране  $p$ -вредности израчунавају се као облик симулираних LR рачица које су веће од вредности LR рачица израчунатог на основу стварног узорка применом следећег израза:

$$p - value = \frac{1}{10.000} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{9.999} I(L\tilde{R}(i) > LR) \right\} \quad (IV 5.1.1)$$

при чему  $I(\cdot)$  узима вредности 1 ако је аргумент тачан и нула у свим осталим случајевима.

Исту процедуру предложио је и у случају *Christofferson*-овог теста условног поркића. У случају овог теста уместо LR, врши се симулација  $LR_c$ , тако да се  $p$ -вредност добија применом следећег израза:

$$p - value = \frac{1}{10.000} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{9.999} I(L\tilde{R}_c(i) > LR_c) \right\} \quad (IV 5.1.2)$$

Уколико су  $p$ -вредности мање од критичне  $p$ -вредности модели вредности при ризику одбацују се као неисправни.

## 5.2. Ziggel-ов тест условног и безусловног покрића

Полазећи од недостатака *Kupiec*-овог теста безусловног покрића и алтернативног теста, који су предложили *Hurlin* и сарадници (2008)<sup>93</sup>, а који се заснива на примени ортонормалних полинома и генерализоване методе момента за оцену параметара (*Generalized method of moments – GMM*) предложено од стране *Bontemps* (2006), *Ziggel* и сарадници (2013)<sup>94</sup> предложили су начин како унапредити тест безусловног покрића, без повећања рачунарске комплексности. Наиме, без значајних модификација оба ова теста, није могуће изградити једностране интервале поверења и тестирати одвојено да ли је модел сувише конзервативан или потцењује стварну изложеност ризику, што је за банку од посебног интересовања. Друго, примена оба теста на коначним узорцима је више него дискутабилна. Отуда су они предложили следећи тест безусловног покрића:

$$MCS_{uc} = \sum_{t=1}^N I_t(p) + \varepsilon \quad (\text{IV } 5.2.1)$$

при чему је  $MCS_{uc}$  – статистика теста за особину безусловног покрића добијена применом *Monte Carlo* симулације и  $I_t$  индикатор функција која се исказује на следећи начин:<sup>95</sup>

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1 & \text{за } r_{t+1} > VaR_{t+1} \\ 0 & \text{за } r_{t+1} \leq VaR_{t+1} \end{cases}$$

Индикатор функције ( $I_{t+1}$ ) узима вредност један када је губитак у тренутку ( $t+1$ ) већи од процене  $VaR$ -а начињене за тај дан, односно узима вредност нула, када је губитак мањи или једнак  $VaR$ -у. На тај начин се добија низ података састављених од нула и јединица, који се подудара са историјом када су губици били већи, односно мањи од  $VaR$ -а.  $\varepsilon$  представља малу и континуирано дистрибуирану случајну варијаблу која служи да прекине везу између вредности тестова. Критичне вредности тестова рачунају се помоћу

<sup>93</sup> Шире видети: *Hurlin, C., Colletaz, G., Tokpavi, S. and Candelon, B. (2008). Backtesting Value-at-Risk: A GMM Duration-Based Test. Working Paper, pp. 1 -40.*

<sup>94</sup> Шире видети: *Ziggel, D., et al. (2013), A New Set of Improved Value-at-Risk Backtests, Workpeper, pp. 1-50.*

<sup>95</sup> Исто, стр. 3.



*Monte Carlo* симулације, уместо примене егзактне или асимптотске дистрибуције. Када су  $n$  и  $p$  познати, позната је и дистрибуција статистике теста, тако да није потребно да се утврђује асимптотска дистрибуција. Примена ове процедуре захтева да се симулира велики број реализације статистике теста под нултом хипотезом (тј. хипотезом о безусловном покрићу да је стопа прекарачења једнака очекиваној стопи прекорачења). Додавањем случајне варијабле обезбеђује се да тест задржи жељену величину упркос чињеници да број *Monte Carlo* симулација за добијање критичне вредности тежи ка бесконачности. Без додавања случајне варијабле статистика теста би имала дискретну дистрибуцију и не би могли да се постигну сви могући нивои, уз напомену да избор случајне варијабле није од критичног значаја за тестирање нулте хипотезе. Интуитивно, претпоставља се да је случајна варијабла нормално дистрибуирана. Независно од тога, потребно је осигурати да статистика теста за  $\nu - 1$  прекорачења буде мања од статистике теста за  $\nu$  прекорачења.

За тестирање особине независности прекорачења, уместо *Christoffersen*-овог рација веродостојности приказаног изразом (IV 3.1) у раду, *Ziggel* и сарадници предложили су употребу следећег теста:

$$MCS_{iid} = T_I^2 + (N - T_m)^2 + \sum_{i=1}^m (T_i - T_{i-1})^2 + \varepsilon \quad (\text{IV 5.2.2})$$

при чему је  $MCS_{iid}$  – статистика теста за особину независности прекорачења добијена применом *Monte Carlo* симулације.

Тест почива на принципима *Run*-теста који су предложили *Wald* и *Wolfowitz* (1940).<sup>96</sup> Прецизније говорећи, основна идеја од које су аутори пошли у развоју теста јесте да сума квадрата дурације (време које протекне између два прекорачења) између та два прекорачења јесте минимална, уколико су прекорачења егзактно распоређења током целог периода узорковања. Ако се прекорачења дешавају у кластерима, онда ће сума квадрата расти. Поред тога,  $MCS_{iid}$  омогућава да се открију и систематичности у појави кластера. Примера ради, откривање да ли се прекорачења јављају у циклусима или су сезонска појава.

<sup>96</sup> О *Run* тесту шире видети: Wald, A. and J. Wolfowitz (1940): *On a Test Whether Two Samples are from the Same Population*, *The Annals of Mathematical Statistics*, 11(2), 147–162.

Као и у случају претходног теста и овде се не праве претпоставке везане за дистрибуцију, већ се статистика теста изводи на основу *Monte Carlo* симулације, уз напомену да критиче вредности треба израчунати за сваки од  $m$  вредности јер су потребне дурације између прекорачења, а не њихов апсолутан број. Такође као и претходном тесту користи се континуирана случајна варијабла  $\varepsilon$  за прекидање веза између тестова.

За тестирање особине условног покрића, *Ziggel* и сарадници предложили су употребу следећег теста

$$MCS_{cc} = a \cdot f(MCS_{uc}) + (1 - a)g(MCS_{iid}), 0 \leq a \leq 1 \quad (IV\ 5.2.3)$$

при чему су:

$MCS_{cc}$  - статистика теста за особину условног покрића добијена применом *Monte Carlo* симулације, а  $a$  је пондер учешћа теста безусловног покрића у комбинованом тесту условног покрића, уз напомену да се прва компонента израза (IV 5.2.3) добија применом следећег израза:

$$f(MCS_{uc}) = \left| \frac{\left( \varepsilon + \sum_{T=1}^N I_t \right) / N - p}{p} \right| \quad (IV\ 5.2.4)$$

Овај израз мери (у процентима) девијацију између очекиване и стварне стопе прекорачења. За добијање једностраног теста овај израз се мултипликује са  $I\left\{ \sum_{T=1}^N I_t / N \geq p \right\}$  или са  $I\left\{ \sum_{T=1}^N I_t / N \leq p \right\}$  у зависности од тога шта је циљ, да ли да се испита да ли модел потцењује или прецењује стварни ниво ризика.

Друга компонетна израза (IV 5.7) добија се примено следећег израза:

$$g(MCS_{iid}) = \frac{MCS_{iid} - \hat{r}}{\hat{r}} I\{MCS_{iid} \geq \hat{r}\} \quad (IV\ 5.2.5)$$

при чему  $\hat{r}$  представља оцену очекиване вредности теста  $MCS_{iid}$  под нултом хипотезом. Ова компонента мери девијацију у процентима између суме квадрата очекиване и стварне дурације. Такође и овде  $\varepsilon$  има исту улогу и сврху и овде се не чине претпоставке везане за

дистрибуцију теста већ се критичне вредности добијају применом Monte Carlo симулције за сваку комбинацију  $N$  и  $\alpha$ .

Основна предност теста јесте што омогућава пондерацију тестова, али се поставља једно питање које се односи на величину пондера  $\alpha$ . Наравно, он може бити арбитрарно изабран. Међутим, у случају величине узорка дефинисане Базел II стандардом ( $N = 250$  трговачких дана и  $p$  једнако  $1 - 99\%$ ) очекивани број прекорачења је сувише мали, и у овом случају банке и регулаторни органи су више заинтересовани за број прекорачења него за особину независности прекорачења, те треба изабрати већи пондер. Обратно је у случају великих узорака, која обухватају *bull* и *bear* фазе у развоју тржишта. У том случају предност треба дати особини независности прекорачења, те треба изабрати мањи пондер. Ако модел вредности при ризику није довољно флексибилан да се прилагоди овим променама може да доведе до не-идентично дистрибуираних прекорачења, иако је тест показује исправн безусловно покриће. Стога менаџери ризика имају потребу да прилагођавају значај једног или другог теста у тесту условног покрића. Ово прилагођавање је више практичне природе, а не математички задатак.

## Глава V

# ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

### 1. Преглед ранијих емпиријских истраживања примене модела вредности при ризикy на изабраним тржиштима

Последњих пар година појавио се велики број радова који су посвећени тестирању апликативности модела вредности при ризику на тржиштима у настајању. Бројни су разлози за то, али пре свега ти се разлози налазе у чињеници да су ова тржишта постала интересантна за улагање, будући да нуде екстремно високе приносе (Peavy (1997), Barry, et. al. (1998), Goetzmann, Jorion (1999), (Nutti (2009), Bekaert et al (1995, 1997, 2002, 2003, 2005, 2007). Иако постоји велики број радова у којима је тестиран модел вредности при ризику на овим тржиштима, ипак постоји одређени број радова који су посвећени овој проблематици, а тичу се тржишта капитала Србије, Бугарске, Румуније и Црне Горе. Најзначајнија истраживања везана за апликативност модела вредности при ризику на тржишту капитала Србије спровели су Радивојевић и сарадници (2010а, 2010б, 2014, 2016б), Терзић (2014), Милојевић и Терзић (2014), као и Ђаковић и сарадници (2014).

Радивојевић и сарадници (2010а) проучавали су апликативност стандардног модела историјске симулације на примеру оптималног портфолија формираног од десет акција које се котирају на Београдској берзи током 2007. године. Показали су да стандардни модел историјске симулације може поуздано да се користи на тржишту акција Србије. Међутим и сами аутори, због кратког периода тестирања валидности модела, позивају на опрез приликом прихватања резултата истраживања. Као критеријум валидности модела у раду је коришћен само број прекорачења, с тим да је модел тестиран на узорку од 60 дана података. Поред овог истраживања Радивојевић и сарадници (2010б) проучавали су апликативност варијанса-коваријанса модела вредности при ризику и његове перформансе

поредили са перформансама стандардног модела историјске симулациј. Резултати тог истраживања показују да варијанса-коваријанса модел даје боље процене тржишног ризика на тржишту капитала Србије. Истраживање је спроведено током 2009. године и основни недостатак је такође кратак период узорковања у коме је вршено испитивање исправности оба модела. Сем тога, за тестирање коришћен је само тест безусловног покрића.

Једно од свеобухватнијих истраживања везаних за апликативност најпознатијих модела вредности при ризику на тржишту капитала спровели су Милојевић и Терзић. Они су испитивали пет модела вредности при ризику: *RiskMetrics*, модел историјске симулације, филтрирани модел историјске симулације, као модел који се заснива на *EWMA* и *GARCH* моделима процене ризика. Тачније користили су три верзије *GARCH* модела (који се базира на претпоставци нормалности, студентовој  $T$  дистрибуцији и уопштеној дистрибуцији резидуала). Тестирање су спровели у периоду до 2005 до 2013. године. Резултати њиховог истраживања показују да модели вредности при ризику засновани на *GARCH* моделу са студентовом  $T$  дистрибуцијом иновација, као и филтрирани модел историјске симулације заснован на *GARCH* моделу са студентовом  $T$  дистрибуцијом иновација, генеришу супериорније процене с аспекта безусловног и условног покрића. Слично истраживање спровели су Радивојевић и сарадници (2016a) на тржишту капитала Црне Горе током економске кризе 2009. до 2013. године. Тестирали су најпознатије и најчешће коришћене параметарске и непараметарске моделе вредности при ризику, као што су *RiskMetrics* заснован на различитим техникама моделирања дневне волатилности, стандардни модел историјске симулације, стандардни модел *Monte Carlo* симулације, *BRW* модел са фактором опадања од 0,99 и 0,95 и сл. Њихово истраживање показује да је најбоље перформансе постигао тзв. хибридни модел историјске симулације који је заснован на теорији екстремне вредности, те да га прати *RiskMetrics* модел који се заснива на нелинеарном *GARCH* моделу. Истраживање показује да остали модели нису могли да задовоље правила Базелског комитета за супервизију банака у погледу исправности модела. Закључци овог истраживања показују да је за ово и слична овом тржишту неопходно развити оптималан модел који је у стању да кооптрира карактеристике оваквих тржишта. Занимљиво истраживање представили су Радивојевић и

сарадници (2016) у коме су преставили нови *bootstrap* модел историјске симулације заснован на *ARMA-GARCH* моделу и његове перформансе пореди на стандардним моделом историјске симулације на тржишту капитала Румуније. Резултати овог истраживања компатибилни су са закључцима њиховог претходног истраживања у погледу неопходности развоја, односно модификације постојећих модела вредности при ризику у складу са карактеристикама тржишта у настајању.

Ђаковић и сарадници (2014) упозоравају да различити модели, параметарски и непараметарски дају различите процене ризика на тржишту капитала Србије и да из тог разлога при процени ризика треба прихвати холонистички приступ, тј. узети у разматрање процене више различитих модела приликом доношења инвестиционих одлука.

Џиковић (2006, 2007, 2008, 2009 и 2010) је био међу првим ауторима који је тестирао апликативност најпопуларнијих параметарских и непараметарских модела вредности при ризику у контексту развијених финансијских тржишта а на тржишту капитала Бугарске и Румуније. Тачније, он је тестирао апликативност најпопуларнијих модела VaR-а на примеру десет тржишта у настајању земаља чланица ЕУ (Румуније, Бугарске, Словеније, Словачке, Мађарске, Чешке, Естоније, Литваније, Летоније, Кипра, Малте и Пољске). Резултати његовог истраживања показују да модели који су развијени у контексту развијених финансијских тржишта не могу поуздано да се користе на тржиштима у настајању каква су тржишта капитала Бугарске и Румуније. Још 2010. године Џиковић је представио свој хибридни модел историјске симулације који је развијен у контексту тржишта у настајању и показао да је за ова тржишта неопходно развити модел који је у стању да кооптира и дебеле репове и временски променљиву волатилност. До истих закључака дошли су и Diamandis et. al. (2011), Şener, Baronyana and Mengütürk (2012), Rossignolo, Fethib and Shaban (2013), Louzis, Xanthopoulos-Sisinis and Refenes (2014) и Del Brio, Mora-Valencia and Javier (2014). Закључци њихових истраживања сугеришу да је за тржишта у настајању неопходно развити модел вредности при ризику који ће бити адекватан карактеристикама датог тржишта.

## 2. Емпиријско истраживање

У овом делу дисертације представљени су резултати оригиналног емпиријског истраживања тестирања апликативности шест модела вредности при ризику како би се одговорило на питање да ли модели који се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији приноса (IID) (основни и изведени модели), као и модели који су способни да кооптирају временски променљиву волатилност (хетероскедастичност), а засновани су на једноставним техникама за моделирање волатилности, могу поуздано да се користе на тржиштима која су предмет проучавања у овом раду. Тестирани модели су варијанса-коваријасна, *RiskMetric* модел и четири модела историјске симуације: стандардни модел историјске симулације (HS), модел огледала историјске симулације (MHS), филтрирани модел историјске симулације (FHS) и динамични модел историјске симулације (DHS). Реч је о најпознатијим и најчешће коришћеним моделима вредности при ризику.

Поред ових модела извршено је тестирање и новог полупараметарског модела који је развијен у дисертацији, како би се одговорило на питање да ли овај модел генерше супериорније процене ризика у односу на претходно поменуте модела вредности при ризику.

Резултати истраживања, подаци и методологија који су коришћени представљени су у наставку рада.

## 2.1. Варијабле и методологија истраживања

За тестирање апликативности модела коришћени су дневни логаритамски приноси берзанских индекса. Тестирани индекси су Belexline (Србија), Sofix (Бугарска), BET (Румунија), Мопех (Црна Гора). Реч је о општим берзанским индексима. Подаци су прикупљени са званичних сајтова берзи ових земаља, као и са *Bloomberg*-овог сајта.<sup>97</sup> Период истраживања је од фебруара 2014. до фебруара 2017. године. Период фебруар 2014 – 2016. године коришћен је за калибрирање модела волатилности и израчунавање иницијалних процена вредности при ризику, уз напомену да су процене вршене за временски хоризонт од једног дана, док је остатак података коришћен за процену валидности модела.

Логаритамски приноси генерисани су на следећи начин:

$$r_{i,t} = \ln \left( \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} \right) \quad (\text{V 2.1})$$

при чему су:

$r_{i,t}$  - логаритамски принос за дан ( $t$ )

$P_{i,t}$  - вредност посматраног индекса на затварању за текући дан

$P_{i,t-1}$  - вредност посматраног индекса на затварању претходног дана

Дневне процене VaR-а код модела историјске симулиције утврђене су као квантили емпиријске дистрибуције приноса, уз напомену да је у случају *MHS* модела временска серија историјских приноса мултипликована са -1 и на тај начин је број података удвостручен. У случају *FHS* модела, дневне процене VaR-а добијене су на тај начин што је серија историјских стандардизованих приноса добијена тако што је серија приноса стављена у однос са прогнозама текуће волатилности начињене применом применом *GARCH*(1,1) модела. Оцене параметара *GARCH*(1,1) модела добијене су максимизирањем

---

<sup>97</sup>Подаци доступни на: [belexline.rs](http://belexline.rs), [montenegroberza.com](http://montenegroberza.com), [bse-sofia.bg](http://bse-sofia.bg), [bvb.ro](http://bvb.ro), [bloomberg.com](http://bloomberg.com)



*Gaus*-ове логаритамске квази функције веродостојности.<sup>98</sup> Поступак је затим настављен како је описано у другом делу рада. Процене VaR-а применом *DHS* модела добијене су применом израза (V2.1), уз напомену да је су оцене параметара *GARCH* (1,1) модела са студентовом  $T$  дистрибуцијом иновација извршене применом квази функције веродостојности.

Дневне процене VaR-а код модела који се заснивају на једноставним техникама моделирања волатилности, варијанса-коваријанса модел и *RiskMetrics* модел, добијене су применом приступа једнако пондерисаних покретних просека за оцену дневне волатилности, односно приступа експоненцијално пондерисаних покретних средина са фактором опадања од 0,94. Овај фактор изабран је у складу са препорукама из Техничког документа о употреби *RiskMetrics* модела за процену тржишног ризика за холдинг период од једног дана.

Дневне процене VaR-а применом новог полупараметрског модела који је престављен у дисертацији добијене су под претпоставком да се приноси могу уклопити у *ARMA*( $p,q$ ) модел, односно да се условна волатилност на овим тржиштима може адекватно кооптирати помоћу најједноставнијег *GARCH*(1,1) модела<sup>99</sup>. На тај начин је избегнуто тестирање хипотеза везаних за аутокорелацију и *ARCH* ефекат.

Анализа карактеристика изабраних тржишта извршена је на основу дистрибуције дневних логаритамских приноса индекса, будући да они представљају најбоље апроксимације приноса тржишних портфолија на овим тржиштима. Анализа је извршена за цео период посматрања. Поред визуелне анализе (одступања емпиријске од нормалне дистрибуције и QQ графика), за тестирање нормалности и аутокорелације коришћене су анализе трећег и четвртог момента централне тенденције (анализа коефицијента

---

<sup>98</sup> Због нелинеарне форме *GARCH*( $p,q$ ) модела за оцењивање параметара није погодан метод најмањих квадрата. Пошто функција може имати више локалних максимума, различити алгоритми дају различите вредности оцењених параметара. Из тог разлога рачунарски програмски пакети често постављају захтев кориснику да сам изабере "адекватну" иницијалну вредност параметара, као и критеријум конвергенције. Најчешће се користе следећи алгоритми: различите варијанте *Gaus-Newton*-ове методе (као што су *Berndt-Hall-Hall-Hausman*-ова (БННН) метод и *Marquardt*-ов алгоритам) и *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*-ов (BFGS) алгоритам. Ове методе су углавном асимптотски еквивалентне, али дају различита решења стандардних грешака за мале узорке.

<sup>99</sup> О *GARCH* моделима детаљније видети у Bollerslev, T., (1986), *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327.

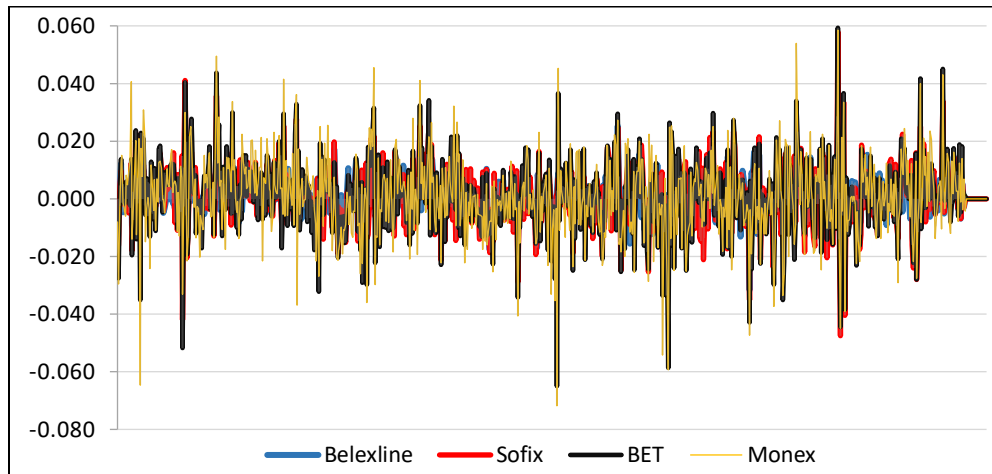
спљоштености и асиметрије), *Jarque-Bera* тест, аутокорелационе функције (ACF), парцијалне аутокорелационе функције (PACF) и *Ljung-Box Q*-тест. За детектовање присуства кластера волатилности и *ARCH(1)* ефекта коришћен је *Lagrange*-ов мултипликатор за *ARCH(1)* модел. Сви тестови су спроведени за ниво поверења од 95%.

## ***2.2. Процена тржишног ризика на изабраним тржиштима***

У овом делу рада приказане су дневне процене VaR-а начињене за ниво поверења од 99%, будући да је овај ниво поверења прописан од сртане Базелског комитета за супервизију банака. Дневне процене VaR-а начињене применом тестираних модела, као и стварно кретање приноса индекса, приказане су на сликама од **A13** до **A40** што се може видети на крају ове дисертације, уз напомену да су модели означени као **VCV500, RM500, HS500, MHS500, FHS500, DHS500** и **ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500**. Уобичајено је да се модели означавају оним бројем који одражава **величину узорка** на основу које се врши процена VaR-а. Како се у овом раду процене тржишног ризика врше на узорку од приближно две године дневних података о приносима општих берзанских индекса, што је еквивалентно 500 опсервација, то су модели обележени како је претходно описано.

У циљу тестирања прве хипотезе постављене у дисертацији, која гласи да серије приноса хартија од вредности на изабраним тржиштима одступају од претпоставке о идентичној и независној дистрибуцији (присутна је аутокорелација и хетероскедастичност) у раду је извршена анализа основних карактеристика дистрибуције серије приноса општих берзанских индекса, пре него што су направљене процене VaR-а. Кретање дневних логаритамских приноса тестираних индекса приказано је на слици 7, док су у табели 7.1 приказани резултати дескриптивне статистичка анализе.

**Слика 7. Кретање приноса изабраних индекса током целог посматраног периода**



Извор: Прорачуни аутора коришћењем софтвера: Gretl; Gnu Regression, Econometrics and Time-series Library

Са слике 7. не могу се јасно уочити периоди високе и ниске волатилности, што је прва индикација постојања аутокорелације и хетероскедастичности. Стога је неопходна детаљанија статистичка анализа, која је започета анализом основних карактеристика дистрибуције приноса изабраних тржишних индекса. Основне карактеристике дистрибуције изабраних индекса приказани су у табели 3.

**Табела 3. Основне карактеристике индекса**

\*Напомена: р-вредности су приказане у заградама.

	<b>Belexline</b>	<b>Sofix</b>	<b>BET</b>	<b>Monex</b>
Средина	0,0004	0,0001	0,0002	0,0001
Стандардна грешка	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003
Стандардна девијација	0,0058	0,0081	0,0083	0,0069
Варијанса	0,0000	0,0001	0,0001	0,0000
Коефицијент спљоштености	5,1018	11,0650	11,3922	5,8974
Коефицијент асиметрије	0,0335	0,0693	-1,0589	-0,0611
Распон	0,0569	0,1038	0,0981	0,0625

ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА  
ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

Минималне вредности	-0,0317	-0,0474	-0,0653	-0,0302
Максималне вредности	0,0252	0,0564	0,0328	0,0323
Број опсервација	755	740	755	755
Jerque-Bera тест	136,902 (1,8e-03)	1977,22 (0,000)	2318,64 (0,000)	259,127 (5,3e-057)
Doornik-Hansen тест	89,008 (4,6e-02)	592,942 (1,7e-129)	334,823 (1,9e-073)	144,927 (3,3e-032)
Shapiro-Wilk тест	0,980 (1,3e-008)	0,910 (1,6e-020)	0,9219 (2,5e-019)	0,9574 (5,5e-014)

Извор: Прорачуни аутора коришћењем програма: *Microsoft Excel*

Дескриптивна статистичка анализа основних карактеристика дистрибуције дневних логаритамских приноса индекса делимично потврђује резултате ранијих емпиријских истраживања. Наиме, стандардне девијације су у складу са просеком земаља у развоју из ЕУ. То имплицира на релативно висок ниво флукутација у вредности дневних приноса, што потврђује и разлика између минималних и максималних вредности. Анализа средине приноса показује да су просечани приноси на релативно ниском нивоу, што је изненађујуће када се има у виду преовлађујући став да тржишта у развоју имају веће стопе приноса и да нуде могућност остваривања високе премије за ризик.<sup>100</sup> Једно од објашњења за случај тржишта капитала у Србији и Црној Гори може се наћи у смањењу инвестиционих активности, пре свега недовољног броја квалитетних страних инвеститора, у посматраном периоду. Анализа даље открива да индекси имају лептокуртичну дистрибуцију, што потврђује анализа коефицијената асиметрије и спљоштености, као и визуелна анализа одступања дистрибуције приноса индекса у односу на нормлану дистрибуцију, приказане на сликама од А1 до А4, што се може видети на крају ове

<sup>100</sup> Dailami, M., Atkin, M., (1990), *Stock Markets in Developing Countries*, Country Economics Department - The World Bank and Economics Department - International Finance Corporation, Working Paper 515, pp. 38; Harvey, C. R., (1995), *Predictable risks and returns in emerging markets*, The Review of Financial Studies, No. 8, pp. 773-816; Bekaert, G., Harvey C. R., (1997), *Emerging Equity Market Volatility*, Journal of Financial Economics, No. 43, pp. 29-78. Bekaert, G., Harvey, C. R., (1995), *Time-varying world market integration*, Journal of Finance, Vol. 50, No. 2, pp. 403-444. Bekaert, G., Harvey, C. R., (2005), *Capital Markets: An Engine for Economic Growth*, Catalyst Monograph Series, Catalyst Institute.

дисертације у прилогу. Коефицијенти спљоштености крећу се од 5,8 до 11,39. Ово значи да постоји већа вероватноћа настанка екстремних догађаја (позитивних и негативних) него што предвиђа нормална дистрибуција, односно да индекси имају дебље репове у односу на нормалну дистрибуцију.

Визуелна анализа дистрибуције дневних логаритамских приноса индекса (слике од А1 до А4 на крају рада) показују значајно одступање од нормлане дистрибуције. Вредности *Jerque-Bera* теста потврђују ове налазе. У циљу добијања робусних оцена, поред овог теста у табели 7. приказани су и резултати *Doornik-Hansen* теста и *Shapiro-Wilk* теста. Резултати ових тестова потврђују налазе *Jerque-Bera* теста.

Постојање лептокуртичне дистрибуције дневних логаритамских приноса индекса индикација су присуства аутокорељације у приносима. Како би се формално испитало присуство аутокорељације у наставку рада извршена је анализа *ACF*, *PACF* и спроведен *Ljung-Box Q* тест. Резултати *ACF*, *PACF* и *Ljung-Box Q* теста, који су приказани у табели А1 (са легом до десет дана) показују да у случају индекса *Belexline* и *Monex* постоји значајна аутокорељација првог реда, док у случају *Sofix* и *BET* индекса аутокорељација јавља се у каснијим доцњама. Претходно констатовано, лако се може уочити са графика који су приказани на сликама од А9 до А12 које се налазе на крају ове дисертације, уз напомену да су корелограми дати за доцње до 20 дана.

За тестирање постојања *ARCH* ефекта коришћен је *Engel-ov* тест који почива на израчунавању *Lagrange*-овог мултипликатора за *ARCH(1)* модел. Резултати теста су приказани у табели 4.

**Табела 4. Резултати за ARCH ефекат првог реда**

	<b>Belexline</b>	<b>Sofix</b>	<b>BET</b>	<b>Monex</b>
<b>Вредност теста</b>	0,4996	9,0008	29,5653	0,0810
<b>Р- вредност</b>	0,4796	0,0026	5,40e-008	0,7759

Извор: Прорачуни аутора коришћењем програма; *Microsoft Excel*

Резултати *Engel*-овог теста су изненађујући, будући да тест открива присуство *ARCH* ефекта првог реда само на тржиштима капитала Бугарске и Румуније. Изненађујуће је да овај ефекат није идентификован на мање развијеним тржиштима од ова два, као што су тржиште капитала Србије и Црне Горе. Ови резултати указују да приноси нису *IID*. Тачније, вредности ових тестова указују да постоји или значајна аутокорелација између квадрата приноса или *ARCH* ефекта код тестираних индекса, односно да велике промене теже да следе велике промене, а да мале теже да буду праћене малим променама. Ово значи да приноси нису *IID*. Добијањем ових података доказана је прва хипотеза да серије приноса хартија од вредности на изабраним тржиштима одступају од претпоставке о идентичној и независној дистрибуцији (присутна је аутокорелација и хетероскедастичност). У оваквим околностима претпоставка о *IID* приносима је неадекватна и лимитира апликативност модела вредности при ризику који се заснивају на њој.

Добијени резултати претхоно описаних тестова указују да приноси морају бити трансформисани у *IID* приносе. Другим речима, потребно је моделирати приносе као *ARMA-GARCH* процес, како би се успешно кооптирале обе зависности. Прецизније речено, приносе индекса *Belexline* и *Monex* потребно је моделирати као *ARMA(q,p)-GARCH(0,0)* будући да нема *ARCH* ефекта, а да је присутна аутокорелација првог реда, док приносе индекса *Sofix* и *BET* треба моделирати као *ARMA(4,4)-GARCH(1,1)* односно *ARMA(6,6)-GARCH(1,1)* процес, имајући у виду корелограм.

Оцене параметара *GARCH(1,1)* модела су дате у табели 5.

**Табела 5. Оцене параметара модела волатилности**

\*Напомена: У заградама су дате вредности стандардних грешака. \* оцене параметара нису статистички значајне, \*\* статистички значајна оцена за ниво поверења од 10%.

	<b>Belexline</b>	<b>Sofix</b>	<b>BET</b>	<b>Monex</b>
<b>Параметри модела <i>GARCH(1,1)</i></b>				
<b><math>\alpha</math></b>	0,0809 (0,0253)	0,3790 (0,1365)	0,1854 (0,0771)	0,0373* (0,0300)
<b><math>\beta</math></b>	0,8670	0,5104	0,7269	0,9282

ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА  
ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

	(0,0434)	(0,0993)	(0,0844)	(0,0603)
$\omega$	1,81e-06 (9,6e-07)**	1,06e-05 (3,2e-06)	7,25e-06 (3,2e-06)	1,6e-06* (1,7e-06)
<b>Параметри модела <math>GARCH(1,1)-t(d)</math></b>				
$\alpha$	0,0972 (0,0329)	0,1651 (0,0779)	0,1448 (0,0416)	0,0775* (0,0437)
$\beta$	0,8325 (0,0652)	0,6597 (0,1070)	0,7394 (0,0748)	0,8505 (0,0765)
$\omega$	2,46e-06 ** (1,4e-06)	1,07e-05 (3,92e-06)	7,92e-06 (3,3e-06)	5,01e-06 (3,34e-06)
$\nu$	6,3939 (1,5260)	4,59894 (0,7204)	4,63544 (0,8287)	3,1948 (0,3736)

Извор: Прорачуни аутора коришћењем програма: *Microsoft Excel*

Оцене параметара једначине средине и једначине условне варијансе  $ARMA(p,q)$ - $GARCH(1,1)$  процеса за тестиране индексе су дате у табели 6.

**Табела 6. Оцене параметара  $ARMA(p,q)$ - $GARCH(1,1)$  процеса**

\*Напомена: У заградама су дате вредности стандардних грешака. \* оцене параметара нису статистички значајне, \*\* статистички значајна оцена за ниво поверења од 10%.

	<b>Belexline</b>	<b>Sofix</b>	<b>BET</b>	<b>Monex</b>
<b>Параметри</b>				
<b>C</b>	0,0004** (0,0002)	-	-	0,0000 (0,0002)
<b>AR(1)</b>	0,1392 (0,0360)	0,7450 (0,1555)	0,0002 (0,0646)	0,0763 (0,0363)
<b>AR(2)</b>	-	-1,03501 (0,2254)	0,9857 (0,1089)	
<b>AR(3)</b>	-	0,4806 (0,1998)	-1,4359 (0,1457)	
<b>AR(4)</b>	-	-0,6514 (0,1264)	0,3831 (0,1220)	

ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА  
ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

<b>AR(5)</b>	-	-	-1,1942 (0,0851)	
<b>AR(6)</b>	-	-	0,7340 (0,0537)	-
<b>MA(1)</b>	-	-0,6980 (0,1542)	-0,9828 (0,0506)	-
<b>MA(2)</b>	-	0,9324 (0,2141)	1,4830 (0,0884)	-
<b>MA(3)</b>	-	-0,4155 (0,1804)	-0,4589 (0,1196)	-
<b>MA(4)</b>	-	0,6997 (0,108)	1,3377 (0,0988)	-
<b>MA(5)</b>	-	-	-0,8353 (0,0665)	-
<b>MA(6)</b>	-	-	0,9321 (0,0415)	-
<b><math>\alpha</math></b>	0,0817 (0,0213)	0,2428 (0,0404)	0,08649 (0,0299)	0,0377 (0,0182)
<b><math>\beta</math></b>	0,8676 (0,0322)	0,7094 (0,0431)	0,8278 (0,0542)	0,9270 (0,0384)
<b><math>\omega</math></b>	3,40e-08 (1,39e-08)	1,32e-07 (4,29e-08)	1,63e-07 (6,94e-08)	9,87e-09* (7,02e-09)

Извор: Прорачуни аутора коришћењем програма: *Microsoft Excel*

Имајући у виду основне карактеристике изабраних тржишта, треба очекивати да различити модели буду различито ефикасни на различитим тржиштима. Због значајног одступања дистрибуције серије приноса индекса у односу на претпоставку нормалности може се очекивати да ће модел *VCV* имати најслабије перформансе, односно да нови полупараметарски модел вредности при ризику, који је развијен у дисертацији, покаже најбоље перформансе, будући да ће приноси бити трансформисани у *IID* приносе, те да су у основи модели историјске симулације ефикасни у кооптирању дебелих репова. Такође,



за очекивати је да *DHS* модел произведе прилично поуздане процене на свим тржиштима, будући да серије приноса са ових тржишта имају дебеле репове. Прилично поуздане процене тржишног ризика треба очекивати од стандардног модела историјске симулације на тржиштма капитала Србије и Црне Горе, будући да на њима није забележен *ARCH* ефекат, док је очекивано да *FHS* модел дође до бољих процене у односу на остале моделе историјске симулације, са изузетком у односу на нови модел, на тржиштима где постији *ARCH* ефекат.

### 3. Тестирање валидности тестираних модела

У овом делу рада представљени су резултати тестирања валидности изабраних модела вредности при ризику. Како је већ истакнуто у раду, модели су тестирани на тај начин што су њихове процене VaR-а поређене са стварним кретањима приноса тестираних индекса за последњих 252 трговачких дана тј. за период од 1. фебруара 2016. до 1. фебруара 2017. године. Кад год је стварни губитак био већи у односу на процену VaR-а забележено је прекорачење. Кретање стварног приноса у односу на дневне процене VaR-а за сваки индекс и сваки модел је графички приказано на сликама од A13 до A40 што се може видети на крају дисертације у прилогу. Према *Jorion*-у (2007) валидан модел мора да генерише број прекорачења који је једнак производу величине узорка и један минус ниво поверења за који се врши процена ризика, тј. у овом случају,  $252 \times (1-99\%)$ . У овом случају то значи да укупан број прекорачења, тј. дана када је стварни губитак био већи од процене VaR-а начињене за тај дан, не сме да буде већи од 3(три). За формално тестирање валидности модела у раду су коришћени *Kupiec*-ов тест безусловног покрића и *Christoffersen*-ов тест условног покрића. Оба теста срповедена су за ниво поверења од 95%, јер за тај ниво поверења оба теста показују добре перформансе, у смислу баланса између статистичке грешке I и II типа.

Број прекорачења и резултати тестирања условног и безусловног покрића сваког модела за сваки индекс приказани су у табели 7.

#### Табела 7. Број прекорачења и резултати *Kupiec*-овог теста безусловног и *Christoffersen*-овог теста условног покрића

\*Напомена: у случају када модел није забележи прекорачење није било могуће израчунати вредност теста. У случају нивоа поверења од 99%, самтра се да је модел задовољио критеријум, док се у случају 95% сматра да модел није задовољио критеријум, јер је за банку подједнако важно да модел не производи премали број прекорачења као ни превелики. О овоме видети у претходним деловима дисертације.

ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА  
ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

Куріес-ов теста безусловног покрића (LRuc рацио)									
	VCV500			RM500			HS500		
Индекс	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност
BELEXline	2	0,125	0,724	4	0,698	0,403	2	0,125	0,724
Sofix	9	9,661	0,002	2	0,125	0,724	3	0,076	0,783
BET	3	0,076	0,783	4	0,698	0,403	8	7,297	0,007
Monex	3	0,076	0,783	4	0,698	0,403	3	0,076	0,783
	FHS500			MHS500			DHS500		
Индекс	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност
BELEXline	2	0,125	0,724	0	-	-	3	0,076	0,783
Sofix	2	0,125	0,724	1	1,213	0,271	4	0,698	0,403
BET	3	0,076	0,783	2	0,125	0,724	2	0,125	0,724
Monex	2	0,125	0,724	2	0,125	0,724	2	0,125	0,724
	ARMA(p,q)-GARCH(1,1)- MHS500								
Индекс	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност
BELEXline	3	0,076	0,783						
Sofix	3	0,076	0,783						
BET	1	1,213	0,271						
Monex	2	0,125	0,724						
Christoffersen-ов теста условног покрића (LRcc рацио)									
	VCV500			RM500			HS500		
Индекс	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност
BELEXline	2	0,125	0,939	4	0,698	0,705	2	0,125	0,939
Sofix	9	9,661	0,008	2	0,125	0,939	3	0,076	0,963

ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА  
ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

BET	3	0,076	0,963	4	0,698	0,705	8	7,297	0,026
Monex	3	0,076	0,963	4	0,698	0,705	3	0,076	0,963
	<b>FHS500</b>			<b>MHS500</b>			<b>DHS500</b>		
<b>Индекс</b>	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност
BELEXline	2	0,125	0,939	0	-	-	3	0,076	0,963
Sofix	2	0,125	0,939	1	1,214	0,545	4	0,698	0,705
BET	3	0,076	0,963	2	0,125	0,939	2	0,125	0,939
Monex	2	0,125	0,939	2	0,125	0,939	2	0,125	0,939
	<b>ARMA(p,q)-GARCH(1,1)- MHS500</b>								
<b>Индекс</b>	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност	бр. прек.	Критична вредност	р- вредност
BELEXline	3	0,076	0,963						
Sofix	3	0,076	0,963						
BET	1	1,214	0,545						
Monex	2	0,125	0,939						

Извор: Прорачуни аутора коришћењем програма: *Microsoft Excel*

Занимљив податак је да ниједан модел није генерисао кластер волатилности. Према *Jorion*-у валидне процене тржишног ризика, на свим тржиштима, генерисали су следећи модели вредности при ризику: *FHS*, *MHS* и *ARMA(p,q)-GARCH(1,1)* модел, уз напомену да је *MHS* модел генерисао сувише конзервативне процене ризика, што с аспекта профитабилности банака представља негативну чињеницу. Имајући у виду ову чињеницу могуће је очекивати да модел не прође тест безусловног и условног покрића. Остали модели су на једном или више тржишта генерисали већи број прекорачења од очекиваног. Тачније, према овом критеријуму најслабије перформансе показао је *RM* модел, који није задовољио *Jorion*-ов критеријум чак на три тржишта, што је донекле и очекивано када се има у виду да се овај модел заснива на претпоставци нормалности дистрибуције, а да на појединим тржиштима није присутан *ARCH* ефекат, те примена технике моделирана

волатилности заснована на приступу експоненцијално пондерисаних покретних просека, није имала утицаја на процене ризика у односу на *VCV* модел, који почива на истој претпоставци, али на још једноставнијој техници моделирања волатилности. Међутим, треба истаћи да број прекорачења није превелики у односу на очекивани, с обзиром на то да није забележено груписање прекорачења, реално је очекивати да овој модели прође тест безусловног и условног покрића и да покаже боље перформансе у односу на *VCV* модел. Остали модели нису задовољили *Jorion*-ов критеријум на по једном тржишту, уз напомену да је *VCV* модел генерисао највећи број прекорачења на једном тржишту (на тржишту капитала Бугарске, што се може објаснити чињеницом да на овом тржишту постоји значајно одступање серије приноса индекса у односу на нормалну дистрибуцију). Затим следи *HS* модел који је генерисао чак осам прекорачења на тржишту капитала Румуније. И ово је очекивано када се има у виду да постоји значајан *ARCH* ефекат на овом тржишту капитала. Објашњење зашто је *HS* модел генерисао очекивани број прекорачења на тржишту капитала Бугарске, иако на овом тржишту, такође, присуство значајног *ARCH* ефекта може се наћи у чињеници да је на овом тржишту постојао екстрмни принос који је током периода узорковања утицао на процену *VaR*-а (што се може закључити на основу распона између минималне и максималне вредности приноса током периода узорковања).

За формално испитивање валидности тестираних модела у дисертацији су коришћени, како је истакнуто на претходним странама, *Kupiec*-ов и *Christoffersen*-ов тест. Резултати ових тестова, такође су приказани у табели 7. Резултати *Kupiec*-овог и *Christoffersen*-овог теста су очекивани имајући у виду резултате *Jorion*-овог критеријума. Два модела, *VCV* и *HS* на тржиштима капитала Бугарске, односно Румуније нису прошла оба ова теста. Остали модели су на свим тржиштима задовољили услове безусловног и условног покрића, уз напомену да за *MHS* модел на тржишту капитала Србије није било могуће израчунати вредности за оба теста будући да није било прекорачења, те се са сигурношћу само може констатовати да овај модел, на овом тржишту, производи сувише конзервативне процене ризике, што како је већ речено у раду, с аспекта профитабилности банке није пожељно. Такође, како је већ констатовано на претходним странама, *RM* остварио је боље перформансе, с аспекта *Kupiec*-овог и *Christoffersen*-овог теста у основу на *VCV*

модел, иако се према *Jorion*-овом критеријуму чинило обратно, о чему је већ било речи на претходним странама.

#### **4. Валидација резултата тестирања валидности модела применом *Dufour* тест процедуре засноване на *p*-вредностима**

*Kupiec*-ов тест безусловног покрића и *Christoffersen*-ов тесту условног покрића имају малу статистичку моћ детектовања валидних од неисправних модела вредности при ризику када се примењују на узорак величине прописане од стране Базелског комитета за супервизију банака (*Christoffersen and Pelletier (2004), Hurlin et al. (2008), Berkowitz, Christoffersen and Pelletier (2008), Ziggel et al. (2013)*). Имајући у виду овај недостатак оба теста, да би се доказале односно оповргле хипотезе везане за валидност и перформансе тестираних модела вредности при ризику у дисертацији, неопходна је валидација односно верификација резултата тестирања валидности модела. За ту сврху у дисертацији коришћена је *Dofuor*-ова тест процедура заснована на *p*-вредности, уз напомену да је *Dofuor*-ова тест процедура спроведена применом *Monte Carlo* симулације. Тачније, применом *Monte Carlo* симулација симулирано је десет хиљада симулација узорака величине 252 трговачка дана, уз претпоставку да серија погодатка односно прекорачења следе *Bernouli*-еву расподелу са вероватноћом једнаком једном минути нивоа поверења. На овај начин извршена је симулација за оба теста. Резултати симулације, за сваки модел и тржиште, приказани су у табели 8., уз напомену да се стопа изводљивости симулације кретала од 0,801 до 0,878 у случају *Kupiec*-овог, односно од 0,769 до 0,813 у случају *Christofferson*-овог теста.

**Табела 8. Резултати валидације резултата *Kupiec*-овог теста безусловног и *Christoffersen*-овог теста условног покрића применом *Dofuor* теста процедуре засноване на *p*-вредностима**

ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА  
ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

Резултати валидације Курјес-овог теста безусловног покрића (LRuc рацио)						
	VCV500		RM500		HS500	
Индекс	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност
BELEXline	11,256	0,001	8,346	0,003	21,087	0,000
Sofix	17,026	0,000	3,301	0,700	2,468	0,116
BET	3,258	0,071	1,259	0,261	3,078	0,079
Monex	1,734	0,188	11,003	0,000	9,374	0,002
	FHS500		MHS500		DHS500	
Индекс	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност
BELEXline	8,003	0,005	9,064	0,003	0,158	0,691
Sofix	0,302	0,583	2,671	0,102	0,302	0,583
BET	2,701	0,100	0,981	0,322	1,287	0,257
Monex	3,670	0,055	1,582	0,286	3,010	0,083
	ARMA(p,q)-GARCH(1,1)- MHS500					
Индекс	Критична вредност	р-вредност				
BELEXline	1,905	0,168				
Sofix	1,374	0,241				
BET	0,906	0,342				
Monex	0,983	0,322				
Резултати валидације Christoffersen-овог теста условног покрића (LRcc рацио)						
	VCV500		RM500		HS500	
Индекс	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност
BELEXline	10,971	0,004	14,531	0,000	9,347	0,009
Sofix	34,502	0,000	2,302	0,316	4,698	0,096

ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ АПЛИКАТИВНОСТИ ИЗАБРАНИХ МОДЕЛА  
ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ

BET	5,364	0,068	4,386	0,112	6,901	0,032
Monex	13,001	0,002	20,070	0,000	17,320	0,000
	<b>FHS500</b>		<b>MHS500</b>		<b>DHS500</b>	
<b>Индекс</b>	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност
BELEXline	11,907	0,003	13,672	0,001	4,005	0,135
Sofix	1,333	0,514	4,831	0,089	5,027	0,081
BET	7,001	0,030	30,040	0,000	4,001	0,136
Monex	5,973	0,051	3,607	0,165	6,904	0,035
	<b>ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500</b>					
<b>Индекс</b>	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност	Критична вредност	р-вредност
BELEXline	4,907	0,086				
Sofix	3,580	0,167				
BET	10,008	0,007				
Monex	3,904	0,140				

Извор: Прорачуни аутора коришћењем програма: *Microsoft Excel*

Као што се може видети из табеле 8, најслабије резултате постигли су *VCV* и *HS* модел. Ови модели нису задовољили *Kupiec*-ов тест безусловног покрића у сличају два тржишта, на тржишту капитала Србије и Бугарске, одосно на тржишту капитала Србије и Црне Горе, односно *Christoffersen*-ов тест условног покрића у случају три тржишта, на тржишту капитала Србије, Бугарске и Црне Горе, односно Србије, Румуније и Црне Горе. Основни разлог за овако слабе резултате ова два модела може се наћи у чињеници да све серије приноса значајно одступају од претпоставке нормалности дистрибуције приноса, односно да је на два тржишта забележено значајно присуство *ARCH* ефекта. Модели који су успели да коопитрају ове карактеристике дистрибуције серије приноса индекса забележили су боље резултате. Најбоље перформансе забележили су *DHS* и *ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS* модел, који нису задовољили само *Christoffersen*-ов тест условног

покрића и то на тржишту капитала Црне Горе, односно Румуније. Затим следи *DHS*, а потом *FHS* модел. Занимљиво да је добре резултате постигао *MHS* модел, што се може образложити чињеницом да су екстремни приноси утицали на добро, пре свега, безусловно покриће ризика на овим тржиштима. Занимљиво је истаћи да *MHS* модел на истим тржиштима као и *HS* модел није задовољио критеријум безусловног и условног покрића, сем на тржишту капитала Црне Горе где је задовољио оба критеријума у односу на *HS* модел.

## 5. Дискусија

Имајући у виду резултате анализе основних карактеристика дистрибуције дневних логаритамских приноса тестираних индекса, који су представљени у табелама 3, 4 и А1, као и на основу њихових графичких илустрација (слике од А1 до А4 – у прилогу на крају ове дисертације) и QQ графика (слике од А5 до А8 – такође у прилогу на крају дисертације), јасно се може закључити да серије приноса нису *IID*. Овакви резултати анализе основних карактеристика дистрибуције дневних логаритамских приноса тестираних индекса, у посматраном периоду, јасно имплицирају да хипотеза  $X_1$ , **серије приноса хартија од вредности на изабраним тржиштима одступају од претпоставке о идентичној и независној дистрибуцији (присутна је аутокорелација и хетероскедастичност)** јесте доказана и може бити прихваћена као валидна. Помало је изненађујућа чињеница да на мање развијеним тржиштима капитала, попут Српског и Црногорског тржишта, није забележено значајније присуство *ARCH* ефекта првог реда. Резултати *ACF*, *PACF* и *Ljung-Box Q* теста, који су приказани у прилогу дисертације, у табели А1 (са легом до десет дана) показују да постоји значајна аутокорелација првог реда на тржиштима капитала Србије и Црне Горе, док је на тржиштима капитала Бугарске и Румуније присутна аутокорелације вишег реда, тј, јавља се у каснијим доцњама. Такође, резултати тестова нормалности дистрибуције приноса јасно показују да код свих индекса серије приноса нису нормално дистрибуиране, што је у складу са резултатима бројних аутора који су се бавили овом области.



Основне карактеристике тестираних индекса, као и прихватање хипотезе  $X_1$ , имплицирају да се процене VaR применом модела вредности при ризику, који се заснивају на претпоставци *IID*, не могу сматрати валидним на овим тржиштима, већ да их је потребно додатно тестирати, а процене ризика извршити применом комплекснијих модела вредности при ризику. Ово се нарочито намеће као важан закључак када се узму у разматрање резултати валидности према *Jorion*-овом критеријуму, односно имају у виду резултати *Kupiec*-овог и *Christofferson*-овог теста, те резултати валидације резултата ових тестова. Наиме, валидација резултата *Kupiec*-овог и *Christofferson*-овог теста открива да су управо *VCV* и *HS* модели имали најслабије резултате, односно да су модели код којих су приноси трансформисани у *IID* приносе, постигли задовољавајуће резултате тестова валидности модела вредности при ризику.

Резултати *Kupiec*-овог и *Christofferson*-овог теста показују да је *HS* модел постигао исте перформансе на тестираним тржиштима као и *VCV* модел вредности при ризику. Овакав закључак потврђују и резултати валидације резултата ова два теста валидности модела вредности при ризику. Међутим, *HS* модел постигао је слабије перформансе у односу на други модел вредности при ризику који се заснива на једноставној техници моделирања волатилности, тј. у односу на *RM* модел. *RM* модел је постигао значајније боље перформансе са аспекта *Kupiec*-овог и *Christofferson*-овог теста, и не тако убедљиве са аспекта валидације резултата тестирања валидности модела вредности при ризику. Добијањем оваквих резултата може се прихватити закључак да *RM* модел, који се заснива на једноставној техници моделирања волатилности даје боље резултате, у смислу условног и безусловног поркића ризика, у односу на *HS* модел. Међутим, када се у обзир узму и резултати тестирања валидности и валидације ових резултата другог непараметаског модела вредности при ризику који се заснива на претпоставци о *IID* приносима, може се извести другачији закључак. Наиме, *MHS* модел је остварио боље резултате у односу на оба модела вредности при ризику, која се заснивају на једноставним техникама моделирања волатилности. Овакви резултати тестирања валидности модела вредности при ризику, као и резултати валидације ових резултата, имплицирају да хипотеза  $X_2$ , која гласи да **модели који се заснивају на једноставним техникама за моделирање волатилности дају боље резултате, у смислу условног и безусловног поркића ризика,**

у односу на непараметарске моделе вредности при ризику који се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији, не може бити прихваћена као валидна и треба је одбацити.

Одбацавањем ове хипотезе може се извести закључак да је на овим тржиштима услед присуства *ARCH* ефекта и значјаног одступања од претпоставке нормалности дистрибуције приноса, боље користи непараметарске моделе вредности при ризику који могу да кооптирају дебеле репове, него параметарске моделе који се заснивају на једноставним техникама безусловне (*VCV* модел) и условне волатилности (*RM* модел). Овакви резултати указују да је за неефикасна тржишта, на којима је уочено да су матрице корелације између хартија од вредности нестабилне и да подлежу брзим променама, прикладнија употреба модела који не полазе од аналитичке форме дистрибуције нити од степена и смера корелације између хартија од вредности.

Даља анализа добијених резултата тестирања валидности непараметарских модела вредности при ризику, као и анализа валидације тих података јасно указују да *DHS* модел представља значајно унапређење стандардног модела историјске симулације. Наиме, *DHS* модел је поред новог полупараметарског модела вредности при ризику, који је развијен у дисертацији, показао најбоље перформансе. Овакви резултати имплицирају да хипотеза *X3*, која гласи **да примена динамичног модела историјске симулације доприноси значајном унапређењу апликативности историјске симулације на тржиштима у настајању**, јесте доказана и може бити прихваћена као валидна.

Резултати тестирања валидности апликативности новог полупараметарског модела вредности при ризику, који је развијен у дисертацији, показују да је он, уз *DHS* модел, постигао најбоље перформансе. Разлог томе може се наћи у чињеници да су приноси трансформисани применом одговарајућих модела како би се кооптирале обе зависности тј. аутокорелација и у приносима и у квадратима приноса. Поред тога искоришћене су предности мултипликовања серије података приликом процене репа дистрибуције применом историјске симулације, тако да је резултат тога био у проценама ризика које су супериорније у односу на процене добијене применом осталих модела. Добијањем оваквих резултата може се констатовати да је хипотеза *X4*, која гласи **да употреба новог полупараметарског модела, који је развијен у дисертацији, генерише супериорније**

**процене вредности при ризику на изабраним тржишима капитала у односу на традиционалне и широко коришћене моделе вредности при ризику, јесте доказана и може се прихватити као валидна.**

Прихватање хипотезе Х4 јесте веома важно, како за регулаторне органе, тако и за менаџере банака које послују на овим тржиштима јер указује на неопходност трансформације оригиналних података и ефикасног кооптирања како дебелих репова и лептокуртичне дистрибуције, тако и појаве аутокореалције и хетерскедстичности.

---

## ЗАКЉУЧАК

Низ финансијски катастрофа и економских криза током осамдесетих и почетком деведесетих година XX века утицали су на пораст интересовања Базелског комитета за супервизију банака за питање регулисања проблематике управљања тржишним ризицима. Наиме, услед јачања конкуренције изазване дерегулацијом на глобалном финансијском тржишту, банке су се суочиле са смањеном дисинтермедијације и ерозијом маржи из традиционалног пословања банака, што је за последицу имало проширење њиховог опсега активности. Другим речима, последица таквог сценарија на светском финансијском тржишту јесте да су банке повећале обим својих трговачких активности, што је утицало на повећање капиталног оптерећења које је у функцији одржавања адекватности капитала јер су банке на ове изазове реаговале проширивањем својих активности улазећи у ризичните трговачке активности и интензивирањем дужничко-поверилачких односа са клијентима са ниским кредитним рејтингом. Механизми осигурања депозита нису допринели повећању стабилности финансијског тржишта, већ напротив, његовој нестабилности кроз подупирање моралног хазарда на страни депонената (Радивојевић, 2014). Како у трговању различитим типовима активе тржишни ризик не потиче само из отворених и незаштићених позиција, већ и од имперфектне корелације између тих позиција, то је Базелски комитет за супервизију банака био заинтересован за прописивање инструмента који ће уважавати степен корелације између свих позиција у портфолију банке.

На темељима хипотезе о ефикасном тржишту и Markowitz-еве портфолио анализе, 1993. године, *Til Guldman* и *Jacques Longerstaeu* развили су концепт вредност при ризику. Захваљујући својој једноставности, са једне, али и ефикасности процене тржишног ризика, са друге стране, концепт је врло брзо постао стандардни инструмент за процену тржишног ризика у банкама и другим финансијским институцијама. Концепт нуди могућност агрегирања (квантификовња) укупног ризика којем је изложен портфолио банке у један број, при томе уважавајући степен корелисаности између свих позиција портфолија банке. На тај начин концепт омогућава лако разумевање изложености ризику и компарацију различитих финансијских инструмената, који до његове појаве нису били упоредиви. Управо ове карактеристике утицале су да Базелски комитет за супервизију банака 2004. године, кроз низ правила за мерење и управљање тржишним ризицима, која су коначну форму добила у облику стандарда, познатог под називом Базел II стандард, *VaR* пропише као званичну меру тржишног ризика. У оквиру овог стандарда, Базелски

комитет за супервизију банка прописао је и низ квалитативних и квантитативних правила, која банке морају да испуне да би могле детерминисати адекватност капитала за покриће тржишних ризика применом интерних модела вредности при ризику. Све ово утицало је на развој великог броја различитих интерних модела за процену *VaR*-а. Међутим, валидна процена *VaR*-а захтева испуњење одређених економетријских услова. Сви модели су изграђени на одређеним теоријским претпоставкама, тако да се направи баланс између ефикасности имплементације, са једне, и статистичке прецизности процене тржишног ризика са друге стране, при чему је у основи свих модела као и самог концепта уткана идеја да се принос посматра као случајана варијабла која следи мартингали процес, односно варијабла која је идентично и независно дистрибуирана. Тачно је да ово омогућава да се квантификује вероватноћа настанка жељеног односно нежељеног приноса. Међутим, бројна истраживања, о којима је било речи у дисертацији, попут истраживања Mandelbrot (1963), Fama (1965), Lintner (1965), Louzis, Xanthopoulos-Sisinis and Refenes (2014) and Del Brio, Mora-Valencia and Javier (2014), (Rossignolo, Fethib and Shaban (2012, 2013), Cui *et al.* (2013), Tseng (2011), Žikovic (2010), Bahadur (2008), McNeil (2005), Christofferson (2003) и др. указују да се серије приноса са финансијских тржишта не понашају као случајна варијабла која следи мартингали процес, већ да следе одређене шаблоне кретања и да велике промене у приносима теже да следе велике, а мале мале промене. Аутори попут, Мирјанић (2009), Rossignolo *et al.* (2012, 2013), Радивојевић (2014, 2016), Милојковић (2017) и др. ово објашњавају појавом аутокорелације, коју описују помоћу тзв. „ефекта трговине”. Хартијама од вредности већих компанија се у већој мери и тргује, тако да се нове информације пристигле на тржиште прво одражавају на цене акција великих компанија, а тек касније на акције мањих издавалаца. Управо та временска разлика доводи до појаве позитивне корелације између цена акција, што има за последицу појаву кластера волатилности, тј. појаве да се велике промене у цени активе следе велике промене, а мале следе мале. Другим речима, последица овога јесте да приноси не следе концепт случајног хода, већ да се понашају према одређеним шабонима.

Све ово указује да сам концепт, као и већина модела вредности при ризику нису компатибилни са карактеристикама финансијских тржишта. Нарочито карактеристике тржишта у настајању нису у скаду са претпоставкама концепта. Шта више, може се извести опште правило да што је тржиште на нижем ступњу развоја, то његове карактеристике више одступају од уобичајних поставки модела вредности при ризику. Отуда се њихова апликативност и доводи у питање на овим тржиштима.

Како би се одговорило на питање да ли модели вредности при ризику који се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији приноса (основни и

изведени модели), као и модели који се способни да кооптирају временски променљиву волатилност (хетероскедастичност), а засновани су на једноставним техникама за моделирање волатилности, могу поуздано да се користе на тржишту капитала Србије, Бугарске, Румуније и Црне Горе, у дисертацији је извршено тестирање валидности два параметарска модела вредности при ризику и четири модела историјске симулације. Тестирани модели су варијанса-коваријанса (VCV) и *RiskMetrics* (RM), стандардни модел историјске симулације (HS), модел огледала историјске симулације (MHS), филтрирани модел историјске симулације (FHS) и динамични модел историјске симулације (DHS). Прва два модела су најпознатија и најједноставнија параметарска модела вредности при ризику која се заснивају на једноставним техникама моделирања волатилности. Друга два су најпознатија и најједноставнија непараметарска модела вредности при ризику која се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији, док последња два модела представљају веома популарне полупараметарске моделе вредности при ризику који су изведена из стандардног модела историјске симулације. Поред ових модела у дисертацији је извршено тестирање новог полупараметарског модела. Реч је о модификованом моделу огледала историјске симулације.

За тестирање валидности модела коришћени су дневни логаритамски приноси општих берзанских индекса. Тестирани су индекси Belexline (Србија), Sofix (Бугарска), ВЕТ (Румунија), Мonex (Црна Гора). Подаци су прикупљени са *Bloomberg*-овог веб сајта, као и са званичних интернет сајтова берзи ових земаља. Период истраживања је од фебруара 2014. до фебруара 2017. године. Период фебруар 2014 – 2016. године коришћен је за калибрање модела волатилности и израчунавање иницијалних процена вредности при ризику, уз напомену да су процене извршене за временски хоризонт од једног дана, док је остатак података коришћен за процену валидности модела. Модели су подешени према упутствима Базелског комитета за супервизију банака. Тачније према упутствима из Базел II стандарда. Као што је већ приказано у дисертацији, тестирање валидности модела је извршено применом два најпознатија теста безусловног и условног покрића, тј. применом *Kupiec*-овог и *Christoffersen*-овог теста. Оба теста су спроведена за ниво значајности од 95%, будући да за тај ниво поверења показују најбољу статистичку снагу у детектовању исправних од неисправних модела. За коришћење ова два теста је одлучено, упркос чињеници да је Базелски комитет за супервизију банака прописао примену тзв. *Traffic light* приступа јер је за банку подједнако важно да ли су модели сувише конзервативни, да ли су неисправни, да ли задовољавају само особину безусловног покрића (број прекорачења), као и особину независности прекорачења (условно покриће). Како су оба теста заснована на асимптотским претпоставкама која важе за узорке који теже

ка бесконачности, њихова примена на ограниченим узорцима јесте прилично дискутабилна и непоуздана. Из тог разлога резултати тестирања валидности модела подвргнути су валидацији применом *Dufour* теста процедуре засноване на  $p$ -вредностима, уз напомену да је симулација извршена на узорку од 10.000 понављања за величину узорка која одговара периоду тестирања валидности модела вредности при ризику, применом *Monte Carlo* симулације.

Бројна истраживања показују да је неопходно развити модел вредности при ризику који ће бити одговарајући за конкретно тржиште. Имајући у виду та истраживања, у дисертацији је развијен нов модел за процену тржишног ризика на тржиштима која су предмет проучавања у овој дисертацији. Модел је назван нови полупараметарски модел вредности при ризику који се базира на моделу огледала историјске симулације и означен је као **ARMA(p,q)-GARCH(p,q) – MHS** модел. Изграђен је на основама стандардног модела историјске симулације и представља унапређење модела огледала историјске симулације. Дизајниран је тако да се искористе предности стандардног модела и модела огледала историјске симулације и параметарских модела за процену *VaR*-а, уз услов да буде једноставан за имплементацију. Овако осмишљен модел може да кооптира и дебеле репове (лептокуртичну дистрибуцију) и временски променљиву волатилност (хетероскедастичност). Основна идеја приликом развоја модела јесте да се приноси који нису *IID*, трансформишу како би били погодни за примену стандардног модела историјске симулације, односно да се искористе предности од мултипликовања серије приноса у процени ризика који спада у сам реп дистрибуције (процене ризика за екстрмно високе нивое поверења). Идеја је била да се обе зависности и у приносима и у квадратима приноса кооптирају применом **ARMA(p,q)-GARCH(p,q)** модела, те да се тако трансформисани подаци мултипликују по *Holton*-овом принципу огледала. На овај начин би се добио довољан број опсервација за процену ризика (репа дистрибуције) према правилима и захтевима Базел II стандарда. Применом овог решења, отклонио би се још један недостатак историјске симулације, а то је брзо опадање броја опсервација са повећањем холдинг периода. Будући да се заснива на **ARMA(p,q)-GARCH(p,q)** модела, модел није рачунски интензиван као други модели, који успешно кооптирају превелику спљоштеност и временско варирање волатилности, а који се заснивају на превеликом броју параметара које треба проценити применом максимизирања функције веродостојности. Број параметара који се оцењује одређен је структуром **ARMA(p,q)-GARCH(p,q)** модела. Са друге стране, модел је флексибилан јер је остављена могућност примене различитих *ARCH* модела у зависности од специфичности тржишта.

Пре него што се приступило тестирању валидности модела вредности при ризику, у дисертацији је извршена анализа основних карактеристика изабраних тржишта. То је учињено применом дескриптивне статистичке анализе дистрибуције дневних логаритамских приноса тестираних берзанских индекса у посматраном периоду, од 1. фебруара 2014. до 1. фебруара 2017. године.

Спроведена анализа основних карактеристика дистрибуције дневних логаритамских приноса индекса указује да емпиријска дистрибуција код свих индекса одступа од претпоставке нормалности, односно да је лептокуртична. Анализа је даље открила да приноси нису *IID*. У случају два индекса Sofix и BET постоји значајан *ARCH* ефекат првог реда, док у случају индекса Belexline и Monex присутна је значајна аутокорељација првог реда. У случају друга два индекса, аутокорељација јавља се у каснијим доцљама. Сами резултати *Engel*-овог теста су помало изненађујући, будући да на мање развијеним тржиштима од ова четири тржишта није забележен значајан *ARCH* ефекта првог реда. У сваком случају добијени резултати су показали да приноси треба да буду трансформисани у *IID* приносе, и то применом **ARMA(q,p)-GARCH(0,0)** модела у случају индекса Belexlin и Monex, односно применом **ARMA(4,4)-GARCH(1,1)** и **ARMA(6,6)-GARCH(1,1)** модела у случају индекса Sofix и BET.

Дакле, анализа основних карактеристика тестираних индекса указују да прва хипотеза  $H_1$ , која гласи да серије приноса хартија од вредности на изабраним тржиштима одступају од претпоставке о идентичној и независној дистрибуцији (присутна је аутокорељација и хетероскедастичност) јесте потврђена и валидна. Прихватање ове хипотезе значи да процене VaR применом модела вредности при ризику, који се заснивају на претпоставци *IID*, се не могу сматрати валидним на овим тржиштима, већ да их је потребно додатно тестирати и процене ризика извршити применом комплекснијих модела вредности при ризику. Валидација резултата *Kupiec*-овог и *Christofferson*-овог теста открива да су управо *VCV* и *HS* модели имали најслабије резултате, односно да су модели код којих су приноси трансформисани у *IID* приносе, постигли задовољавајуће резултате тестова валидности модела вредности при ризику.

Присуство аутокорељације и *ARCH* ефекта у супротности је са претпоставком на којој почивају модели историјске симулације. Међутим, резултати тестирања валидности модела, као и њихова верификација, указују да је *HS* модел постигао исте перформансе на тестираним тржиштима као и *VCV* модел и нешто слабије перформансе у односу на *RM* модел. Прецизније, *RM* модел је постигао значајније боље перформансе с аспекта *Kupiec*-



овог и *Christofferson*-овог теста, али не тако убедљиво с аспекта валидације резултата тестирања валидности модела вредности при ризику. Међутим, када се у анализу укључе резултати тестирања валидности *MHS* модела, долази се до закључка да друга хипотеза  $X_2$ , која гласи да **модели који се заснивају на једноставним техникама за моделирање волатилности дају боље резултати, у смислу условног и безусловног поркића ризика, у односу на непараметарске моделе вредности при ризику који се заснивају на претпоставци о идентичној и независној дистрибуцији**, треба одбацити. Одбацивање ове хипотезе имплицира да на овим тржиштима већи утицај има одсуство од претпоставке нормалности и појава дебелих репова, него утицај ARCH ефекта на процену ризика. Другим речима, за ова тржишта прихватљивији су модели који могу да кооптирају дебеле репове и лептокуртичниост, него модели који могу да кооптирају временски променљиву волатилност.

Тестирање апликативности *DHS* модела није било предмет проучавања на тржиштима у настајању која су предмет проучавања у овој дисертацији. Отуда се није могао извести поуздан закључак о степену апликативности и поузданост примене овог модела на тржиштима у настајању. Прихватањем хипотезе  $X_3$ , која гласи да **примена динамичног модела историјске симулације доприноси значајном унапређењу апликативности историјске симулације на тржиштима у настајању**, али и одбацивањем хипотезе  $X_2$ , јасне су индикације могућности примене овог модела на тржиштима у настајању.

Резултати *Kupiec*-овог и *Christoffersen*-овог теста, као и њихова верификација, показују да је нови полу-параметарски модел који је развијен у дисертацији, задовољио услове валидности Базелског комитета за супервизију банака на свим тржиштима. Изузетак је само у случају тржишног индекса ВЕТ, где резултати Monte Carlo симулације показују да модел не може генерисати поуздане процене тржишног ризика. Компарација ових резултата са резултатима тестова валидности осталих модела, јасно указују да је **ARMA(p,q)-GARCH(p,q) – MHS** модел остварио супериорније процене тржишног ризика. Прецизније, модел је генерисао супериорније процене у односу на све моделе, осим **DHS** модела који такође није прошао тест валидације на једном тржишту, тј. на тржишту капитала Црне Горе. Добијањем оваквих резултата потврђена је четврта хипотеза  $X_4$  која гласи да **да употреба новог полупараметарског модела, који је**

---

**развијен у дисертацији, генерише супериорније процене вредности при ризику на изабраним тржишима капитала у односу на традиционалне и широко коришћене моделе вредности при ризику.**

Доказивањем хипотезе Х4 као валидне долази се до далекосежне импликације, како за регулаторне органе, тако и за менаџере банака јер указује на неопходност развоја модела који ће бити адекватан за одређено тржиште или групу сличних тржишта. Добијени резултати су у складу са резултати истраживања Diamandis-a (2011), Şener-a, Baronyana и Mengütürk (2012), Rossignolo-a, Fethib-a и Shaban-a (2012, 2013), Cui-a (2013), Louzis-a и сарадника (2014), Del Brío-a и -a (2014), која сугеришу на неопходност развоја модела вредности при ризику који ће бити адекватан за мерење тржишног ризика на тржишма у настајању. Развој модела, који је представљен у дисертацији, управо представља покушај у проналажењу таквог модела за тржишта у настају земаља из ЕУ.

---

## ЛИТЕРАТУРА

### A. Къице:

1. Bekaert, G., Harvey, C. R., (2005), *Capital Markets: An Engine for Economic Growth*, Catalyst Monograph Series, Catalyst Institute.
2. Bruner, Ross Paul, 1999. *Global Equity Selection Strategies*.Glenlake Publishing Company, Chicago.
3. Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. (2006), *Essentials of Risk Management*, McGraw Hill.
4. Crnkovic, C., Drachman, J., (1997), “*Quality Control in VaR: Understanding and Applying Value-at-Risk*”, London, Risk Publications.
5. Dowd, K. (1998), *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, John Wiley and Sons, Chichester.
6. Haugen, R., (2001), *Modern Investment Theory*, fourth edition, Prentice Hall International.
7. Grayling, S., (1998), “*VaR: Understanding and Applying Value at Risk*“, London.
8. Jorion, P., (2003), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, McGraw Hill, New York.
9. Jorion, P., (2007), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 3th edition, McGraw Hill, New York.
10. Knight, J., Satchell, S., (2007, “*Forecasting Volatility in the Financial Markets*”. 3<sup>rd</sup> ed.,Elsevier, Butterworth-Heinemann, Oxford. p. 3. Lewis, E., (1973), *Methods of Statistical analysis in Economics and Business*, Houghton Mifflin Company, Boston.
11. Pearson, N., (2002), “*Risk budgeting: Portfolio Problem Solving with Value at Risk*“, John Wiley and Sons, Chichester.
12. Priest, A., (1997), *Veba's Way with VAR*, in Grayling, S., editor, *VaR: Understanding and Applying Value at Risk*, London.
13. Reilly, F., Brown, C.K., (2003), *Investment Analysis Portfolio Management*, McGraw Hill, New York.
14. Tavella, D., (2002), *Quantitative Methods in Derivatives Pricing: An Introduction to Computational Finance*, John Wiley and Sons, Chichester.

- 
15. Tapiero, C., (2004), *Risk and Financial Management: Mathematical and Computational Methods*, John Wiley and Sons, New Jersey.
  16. Terence, M., Raphael, M., (2008), *The Econometric Modeling of Financial Time Series*, Cambridge University Press, Cambridge.
  17. Vujnović, M., (2007), “*VaR analiza kreditnog portfolija banaka*“, Trag, Beograd.
  18. Žikovic, S., (2010), “*Market Risk in Transitions Countries: Value at Risk Approach*”, Sveučilište u Rijeci, Ekonomski fakultet u Rijeci, Rijeka.
  19. Woolbridge, M., J., (2003), *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*, MIT press, Massachusetts.

**Б. Чланци:**

1. Alexander, C., (2005), “The present and future of financial risk management”, *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 3, No. 1. pp. 3-25
2. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., Heath, D., (1997), “Thinking Correctly”, *Risk*, Vol. 10, No. 11, pp. 68-71
3. Artzner, P., F. Delbaen, J. Elber and D. Heath (1999), “Coherent measures of risk”, *Mathematical Finance*, No. 9, pp. 203-228.
4. Acerbi, C., Tasche, D., (2002), "On the coherence of expected shortfall", *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26. pp. 1487-1503.
5. Bahadur, S., (2008), "Volatility Analysis of Nepalese Stock Market", *The Journal of Nepalese Business Studies*, Vol. V, No. 1, pp. 76-84.
6. Bams, D., Wielhouwer, J., (2005), “An evaluation framework for alternative VaR-models” *Journal of International Money and Finance*, Vol. 24, No. 6, pp. 994-958
7. Bams, D., Wielhouwer, J., (2001), “Empirical Issues in Value at Risk Estimation: Time varying Volatility, Fat tails and Parameter Uncertainty”, *Astin Bulletin*, Vol. 31, No. 2. pp. 299-316
8. Barry, C. B., Peavy, J. W., Rodriguez, M., (1998), “Performance Characteristics of Emerging Capital Markets”, *Financial Analysts Journal*, Vol. 54. No. 2, pp. 72-80
9. Barry C. B., Rodriguez, M., (2004),”Risk and Return Characteristics of Property Indices in Emerging Markets”, *Emerging Markets Review*, Vol. 5, No. 2, 131-159

- 
10. Bee, M. (2012). "Dynamic value-at-risk models and the peaks-over-threshold method for market risk measurement: an empirical investigation during a financial crisis", *Journal of Risk Model Validation*, 2 (2); 3–45.
  11. Beder, T.S., (1995), "VaR: Seductive but dangerous", *Financial Analysts Journal*, Vol. 51, No. 5, pp. 12-24.
  12. Bekaert, G., Harvey, C. R., Lundblad, C., Siegel, S., (2007), "Global growth opportunities and market integration", *Journal of Finance*, Vol. 62, No. 3, pp. 1081-1137
  13. Bekaert, G., Harvey, C. R., Ng, A., (2005), "Market integration and contagion", *Journal of Business*, Vol. 78, No. 1, pp. 39-69
  14. Bekaert, G., Harvey, C. R., (2003), "Emerging market finance", *Journal of Empirical Finance*, Vol.10, No. 1-2, pp. 3-55
  15. Bekaert, G., Harvey, C. R., Lumsdaine, R. L., (2002), "The dynamics of emerging market equity flows", *Journal of International Money and Finance*, Vol. 21, No. 3, pp. 295-350
  16. Bekaert, G., Harvey, C. R., (1997), "Emerging equity market volatility", *Journal of Financial Economics*, Vol. 43, No.1, pp. 29-77
  17. Bekaert, G., Harvey, C. R., (1995), "Time-varying world market integration", *Journal of Finance*, Vol. 50, No. 2, pp. 403-444
  18. Berkowitz, J., O'Brien, J., (2002), "How Accurate Are Value at Risk", *Journal of Finance*, Vol. 57, No. 3, pp. 1093-1111
  19. Blanco, C., Ihle, G., (1998), "How good is your VaR? Using backtesting to assess system performance", *Financial Engineering News*, August. pp. 1–2.
  20. Bollerslev, T., (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 307-327.
  21. Boudoukh J., Richardson M., Whitelaw F. R., (1998), "The Best of Both Worlds: A hybrid Approach to Calculating Value at Risk", *Risk*, Vol.11, No 5, pp. 64-67
  22. Campbell, S., (2007), "A Review of Backtesting and Backtesting Procedures", *Journal of Risk*, Vol. 9, No. 2, pp. 1-17
  23. Cheung, H., Powell, R., (2012), "Anybody can do Value at Risk: A Nonparametric Teaching Study", *Australasian Accounting Business and Finance Journal*, Vol. 6, No. 1, pp. 111-123.
  24. Christoffersen, P. and S. Goncalves, (2005), "Estimation Risk in Financial Risk Management", *Journal of Risk*, Vol. 7, No. 3, pp. 1-28.

- 
25. Christoffersen, P., Pelletier, D., (2004), “Backtesting Value at Risk: A Duration-Based Approach”, *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 2, No. 1, pp. 84-10
  26. Christoffersen, P., Jacobs, K., (2004), “Which GARCH Model for Option Valuation?”, *Management Science*, Vol. 50, No. 9, pp. 1204-1221
  27. Christoffersen, P., Hahn J., Inoue A., (2001), “Testing and Comparing Value-at-Risk Measures”, *Journal of Empirical Finance*, Vol. 8, No. 3, pp. 325-342
  28. Christoffersen, P., (1998), “Evaluating Interval Forecasts”, *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, pp. 841-862.
  29. Cui, X., Zhu, S., Sun, X. and Li, D. (2013), “Nonlinear portfolio selection using approximate parametric Value-at-Risk”, *Journal of Banking & Finance* 37; 2124–2139
  30. Da Silva, L.C.A. & de Melo Mendez, B.V. (2003), “Value-at-Risk and Extreme Returns in Asian Stock Markets“, *International Journal of Business*, Vol. 8, No. 1, pp. 17-40.
  31. Del Brio, E. B., Mora-Valencia, A. and Javier, P. (2014), “VaR performance during the subprime and sovereign debt crises: An application to emerging markets”, *Emerging Markets Review* 20; 23–41
  32. Diamandis, F.P., Anastassios A., Kouretas, G. P. and Zarangas, L. (2011), “Value at Risk for long and short trading positions: Evidence from developed and emerging equity markets”, *International Review of Financial Analysis* 20; 165-176.
  33. Dufour, J.M. (2006), “Monte Carlo Tests with Nuisance Parameters: A General Approach to Finite-Sample Inference and Nonstandard Asymptotics in Econometrics”, *Journal of Econometrics*, No. 133, 443-477.
  34. Đakovic, V., et. al. (2014), „Parametric and Nonparametric VaR Daily Returns Estimation”, *Industria*, Vol. 42, No. 4, pp. 43 -54.
  35. Engle, R., (2001), “GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models in Applied Econometrics”, *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 15, No. 4, pp.157–168.
  36. Fama, E., French, K., (1993), “The Common Risk  $\beta$  Factors in the Returns of Stocks and Bonds”, *Journal of Financial Economics*, Vol. 33, pp. 3-56.
  37. Fama, E., (1970), *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*, *The Journal of Finance*, No. 25, pp. 383-417.
  38. Fama, E., French, K., (1968), “The Risk, Return and Equilibrium – Some Clarifying Comments”, *Journal of Finance*, Vol. 23, No. 1, pp. 29-49.

- 
39. Giannopoulos, K. and R. Tunaru (2005). "Coherent risk measures under filtered historical simulation", *Journal of Banking & Finance*, No. 29, pp. 979-996.
  40. Goetzmann, W., Jorion, P., (1999), " Re-Emerging Markets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 34, No. 1. pp. 1-32.
  41. Gencay, R., Selcuk, F., Ulugulyagci, A., (2003), "High volatility, thick tails and extreme value theory in value-at-risk estimations", *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 33, No. 3, pp. 337-356.
  42. Harmantzis, F. C., Miao L., Chien Y. (2006) "Empirical study of value-at-risk and expected shortfall model with heavy tails", *Journal of Risk Finance*, Vol. 7, No. 2, pp. 117- 135
  43. Hassan, M. K., Haque M., Lawrence S. B., (2006), "An Empirical Analysis of Emerging Stock Markets of Europe", *Quarterly Journal of Business and Economics*, Vol. 45, No. 1-2, pp. 31-52.
  44. Hendricks, D., (1996), "Evaluation of value-at-risk models using historical data", *Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, April, pp. 39-69.
  45. Hull, J., A. White, (1998), "Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk", *Journal of Risk*, Vol. 1, No. 1, pp. 5-19.
  46. Jorion, P., (1985), "International Portfolio Diversification with Estimation Risk", *Journal of Business*, Vol.58, No.3, pp. 259-278.
  47. Kupiec, P., (1995), "Techniques for verifying the approach of risk measurement models", *Journal of Derivatives*, Vol. 2, No. 4, pp. 73-84.
  48. Kupiec, P., O'Brien, J. M., (1995), "The Use of Bank Measurement Models for Regulatory Capital Purposes," FEDS Working Paper, No. 95- 11.
  49. Krause, a., (2003), Exploring the limitations of value at risk: how good is it in practice?, *The Journal of Risk Finance*, Winter, pp. 19-28.
  50. Laloux L., P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, M. Potters (1999). *Noise Dressing of Financial Correlation Matrices*, *Physical Review Letters*, No. 83, 1467–1471.
  51. Lucas, Andre. (2000). "A note on optimal estimation from a risk management perspective under possibly misspecified tail behavior." *Journal of Business and Economic Statistics*,18(1): 31-39.
  52. Leavens, H., Dickson, H., (1945), "Diversification of investments", *Trusts and Estates*, Vol. 80, No.5, pp. 469-473.

- 
53. Lintner, J., (1965), "Security prices, risk and maximal gains from diversification", *Journal of Finance*, Vol. 20, No. pp. 587-616.
54. Mandelbrot, B., (1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, Vol. 36, No. 4, pp. 394-419.
55. Mandelbrot, B. (1972). "Certain speculative prices (1963)", *The Journal of Business* Vol. 45, No. 4, pp, 542-543.
56. Markowitz, H., (1991), "Foundations of Portfolio Theory", *Journal of Finance*, Vol. 46, No. 2, pp. 32-71.
57. Markowitz, H., (1990), "Normative Portfolio Analysis: Past, Present and Future", *Journal of Economics and Business*, Vol.42, No.2, pp. 341-347.
58. Markowitz, H., (1952), "Portfolio Selection", *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.
59. Mladenovic, Z., Mladenovic, P., (2006), "Estimation of the value at risk parameter: econometric analysis and the extreme value theory approach", *Economic Annals*, Vol. 51, No. 171, pp. 32-73.
60. Milojević M. and Terzić I., 2014. Modeling market risk in frontier equity markets- Evidence from Serbia. *CBU International Conference Proceedings*, pp 75-81.
61. Mirjanić, B., Branković, N., (2012), "Modeliranje volatilitnosti tržišnih indeksa akcija beogradske berze: belex15 i belexline", *Časopis za ekonomiju i tržišne komunikacije*, Vol. 2, br. 2, str. 336-356.
62. Nuti, M.D. (2009), "The impact of the global crisis on transition economies", *Economic Annals*, Vol. 54, No. 181, pp. 7-20.
63. Peavy, J. W., (1997), "Emerging Markets: Time to Invest?" *Emerging Markets Quarterly*, Vol. 1, No. 3, pp. 40-48.
64. Pritsker, M., (2001a), "The Hidden Dangers of Historical Simulation", *Board of Governors of the Federal Reserve System*, pp. 60-61.  
доступно на: <http://www.gloriamundi.org/picsresources/mphd.pdf> (датум ажурирања 19.10.2016.)
65. Radivojevic, N., et. al. (2016a), „The new hybrid VaR approach based on EVT”, *Estudios de Economia*, June, 2016. pp. 29-52.



- 
66. Radivojevic, N., et. al. (2016), „Testing value-at-risk models in emerging markets during crises: a case study on South Eastern European countries”, *Journal of Risk Model Validation* Vol. 10, No. 2, pp. 1–24.
67. Radivojevic, N., et. al. (2015), „The analysis of the modified RiskMetrics models performance on emerging markets: A case study of financial markets of former Yugoslav countries“, *Poslovna ekonomija*, No. 1. pp. 141-158.
68. Радивојевић, Н., Милојковић, Д., Ђурчић, Н., (2015), “Апликативност непараметарских модела историјске симулације на тржиштима у настајању”, *Пословна економија*, бр. 2., стр. 89-106.
69. Радивојевић., Н., (2011), “Капитални захтеви Народне банке Србије за покриће тржишног ризика банака: приступ интерних модела вредности при ризику”, *Ревизор*, вол. 14, бр. 53, стр. 101-111.
70. Radivojevic, N., et. al. (2010a), “*Testing the Applicability of Parametric and Nonparametric Methods of Value at Risk at the Serbian Capital Market*”, *Banking*, No. 11-12, pp. 46-61.
71. Радивојевић, Н., ет ал (2010б), “Апликативност историјске симулације вредности при ризику на тржишту капитала Србије” *Индустрија*, вол. 38, бр. 3, стр. 19-29.
72. Radivojevic, N., Stojkovic, D., (2010ц), “*The limitation of application of continuous trading methods on the belgrade stock exchange*”, International Scientific Conference, Contemporary Issues in Economics, Business and Management, Faculty of Economics, University of Kragujevac, december, pp. 165-170.
73. Радивојевић, Н., ет ал (2009), “Ограничење примене савремене портфолио теорије на тржиштима у настајању – пример српског тржишта капитала” *Индустрија*, Економски институт, вол 37, бр. 4, стр. 1-13.
74. Радивојевић, Н.,(2009), “Мogućност формирања оптималног портфолија на тржишту капитала Србије”, *Финансије*, Министарство Финансија РС, год. LXIV, бр. 1-6, стр. 170-182.
75. Radivojevic, N., Stancic, V., (2015), “The applicability of modified risk metrics model at emerging markets”, *International scientific conference, Contemporary Issues in Economics, Business and Management*, Faculty of Economics, university of Kragujevac, pp. 573-580
76. Roll, R., Ross, S., The Arbitrage Theory Approach to Strategic Portfolio Planning, *Financial Analysts Journal*, Vol. 40, No. 3, 1984, pp. 342-362.

- 
77. Roll, R., Ross, S., (1980), "An Empirical Investigation of Arbitrage Pricing Theory", *Journal of Finance*, Vol. 35, No. 5, pp. 87-98.
  78. Rootzen, H., Klaupelberg, C. (1999). "A single number can't hedge against economic catastrophes", *Ambio*, Vol. 28, No. 6, pp. 550-555. Preprint.
  79. Ross, S., (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 341-346.
  80. Rossignolo, A., Fethib, M., Shaban, M., (2012), "Value-at-Risk models and Basel capital charges Evidence from Emerging and Frontier stock markets," *Journal of Financial Stability*, No. 8, pp. 303-319.
  81. Rossignolo, F. Adrian, Meryem Duygun Fethib, Mohamed Shaban (2013), "Market crises and Basel capital requirements: Could Basel III have been different? Evidence from Portugal, Ireland, Greece and Spain (PIGS)," *Journal of Banking & Finance*, Vol. 37, pp. 1323-1339.
  82. Şener, Emrah, Baronyana, Sayad, Mengütürk, Levent. (2012). "Ranking the predictive performances of value-at-risk estimation methods," *International Journal of Forecasting*, (28):849–873.
  83. Stancic, P., et al., (2013), "Testing The Applicability Of The Brw Approach In The Emerging Stock Markets", *Actual Problems of Economics*, No. 6, June, pp. 480-486.
  84. Stancic, V, Petrovic, E., Radivojevic, N (2015), „Conditional relationship of beta and returns: a case study of the Belgrade Stock Exchange", *Teme*, vol. 39, br. 4, str. 1165-1182.
  85. Su E, Knowles, W.T., (2006), "Asian Pacific Stock Market Volatility Modeling and Value at Risk Analysis", *Emerging Markets Finance and Trade*, Vol. 42, No.2, pp. 18 – 62.
  86. Zikovic, S., Filer, R., (2013), "Ranking of VaR and ES Models: Performance in Developed and Emerging Markets", *Czech Journal of Economics and Finance*, Vol. 63, No. 4, p. 327.
  87. Zikovic, S., Prohaska, Z., (2010), "Optimization of Decay Factor in Time Weighted (BRW) Simulation, Implications for VaR performance in Mediterranean Countries, *Ekonomski istraživanja*, Vol. 23, No. 1, pp. 73-85.
  88. Žikovic, S., Aktan, B., (2009), "Global financial crisis and VaR performance in emerging markets: A case of EU candidate states – Turkey and Croatia", *Journal of Economics and Business*, Vol. 27, No. 1, pp. 149-170.

- 
89. Žiković, S., (2008), "Quantifying extreme risks in stock markets: A case of former Yugoslavian states", *Zbornik radova Ekonomskog fakulteta u Rijeci*, Vol. 26, No. 1, pp. 41-68.
  90. Žiković, S., (2007), "Testing Popular VaR Models in EU New Member and Candidate States", *Journal of Economics and Business*, No. 25, pp. 325-346.
  91. Xiong, J., X., Idzorek, T., (2011), "The Impact of Skewness and Fat Tails on the Asset Allocation Decision", *Financial Analysts Journal*, Vol. 67, No. 2, pp. 23-35.
  92. Xiong, J., X., (2010), "Using Truncated Lévy Flight to Estimate Downside Risk", *Journal of Risk Management in Financial Institutions*, Vol. 3, No. 3, 231–242.
  93. Wong, C. S. M., Cheng, Y. W., Wong, Y. P. C., (2003), "Market risk management of banks: Implications from the accuracy of VaR forecasts", *Journal of Forecasting*, Vol 22, No. 1, pp. 22-33.

#### ***Ц. Остали извори:***

1. Acerbi, C., Nardod, C., Sirtori, C., (2008), "Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management" *Working Paper*.
2. Barone-Adesi, G. and K. Giannopoulos (2001). Non-parametric VaR techniques. Myths and realities. *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena Spa* 30, pp. 167-181.
3. Basel Committee on Banking Supervision, (2004), "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards - A revised framework", BIS, pp. 1-322.
4. Basel Committee on Banking Supervision, (2004), "Bank failures in Mature Economies", *Working Paper*, No. 13, BIS, pp. 1-66.
5. Basel Committee on Banking Supervision, (2002), "Quantitative Impact Study 3", *Technical Document*, BIS, pp. 1-164.
6. Basel Committee on Banking Supervision, (1996), "Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risk", *Report*, No. 24, BIS, pp. 1-56.
7. Berkowitz, J., Christoffersen, P., Pelletier, D., (2007), Evaluating Value-at-Risk Models with Desk-Level Data, *Manuscript*, North Carolina State University, pp. 1-36.

- 
8. Christoffersen, P., (2008), "Backtesting", *Working Paper*, Desautels Faculty of Management, McGill University, pp. 1-14.
  9. Filipović, L., Ljutić, B., Mirjanić, B. (2017) "Enterprise Risk Management through the Value at Risk Concept; Analysis of Belgrade Stock Exchange index", Collection of works, International scientific conference ITEMA, Budapest, pp. 613-621.
  10. Hass, M., (2001), "New Methods in Backtesting", Working paper, Financial Engineering, Research center caesar, Bonn, pp. 1-20.
  11. IMF International Financial Statistics Yearbooks 2001–2008, pp. 1-1068.
  12. Khindanova, I., Rachev, S., (2000), "Value at Risk: recent advances", *Working Paper*, University of California, Santa Barbara and University of Karlsruhe, Germany, pp. 1-52.
  13. Dowd, K., (2007), "Backtesting Market Risk Models", *Manuscript*, Nottingham University Business School, Nottingham, pp. 1-8.
  14. Hurlin, C., Colletaz, G., Tokpavi, S. and Candelon, B. (2008). "Backtesting Value-at-Risk: A GMM Duration-Based Test". *Working Paper*, pp. 1 -40.
  15. Lopez, J., (1997), "Regulatory Evaluation of Value at Risk Models", *Research paper*, No. 9710, Federal Reserve Bank of New York, pp. 1-37.
  16. Lopez, J., (1995) "Evaluating the Predictive Accuracy of Volatility Models," *Research Paper*, No. 9524, Federal Reserve Bank of New York, pp. 1-43.
  17. Mirjanić, B., (2009), „Mogućnosti i ograničenja primene Markovijevske teorije na tržištima kapitala u nastajanju: primer Republike Srbije“, Magistrski rad, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd, str. 1-126.
  18. Милојковић, Д., (2014), "Управљање ризицима портфолија хартија од вредности применом савремене портфолио теорије", *Магистарски рад*, Економски факулте у Крагујевцу, стр. 1-130.
  19. Милојковић, Д., (2017), „Тестирање апликативности var модела на тржиштима у настајању у условима економске кризе, радни материјал, стр. 1-14.
  20. Pattarathammas, S., et al., (2008), "Value at Risk and Expected Shortfall under Extreme Value Theory Framework: An Empirical Study on Asian Markets", *Working Paper*, pp. 1-13.
  21. Pritsker, M., (2001), "Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy Versus Computational Time", *Working Paper*, Wharton Financial Institutions Center, pp. 1-66.

- 
22. Радивојевић, Н., (2014), “Управљање тржишним ризицима на финансијским тржиштима у настајању применом модела вредности при ризику”, *Докторска дисертација*, Економски факултет у Крагујевцу, стр. 1 -366.
  23. Rod A. Beckström and Alyce R. Campbell, “The Future of Firm-Wide Risk Management,” у Beckström, P., Campbell, A., (1995), *An Introduction to VAR*, ,Palo Alto, Ca.: CAATS Software, Inc.
  24. Tauchen, G.E. (1997), “New Minimum Chi-Square Methods in Empirical Finance,” in D.M. Kreps and K.F. Wallis, eds., *Advances in Economic Theory and Econometrics*, Seventh World Congress, Vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge.
  25. Tseng, J. J., Li, S. P., (2011), "Asset returns and volatility clustering in financial time series", *Working Paper*, pp. 1-29.
  26. Ziggel, D., et al. (2013), „A New Set of Improved Value-at-Risk Backtests“, *Workpeper*, pp. 1-50.
  27. Zikovic, S., (2007), “Measuring Market Risk in EU New Member States”, *Proceedings of 13th Dubrovnik Economic Conference*, Croatian National Bank, Dubrovnik, pp. 1-39.
  28. Zikovic S., (2006), “Applying Hybrid Approach To Calculating VaR In Croatia”, *Proceeding Of International Conference Of The Faculty Of Economics In Sarajevo – From Transition To Sustainable Development: The Path To European Integration*, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, pp. 50-71.

---

## ПРИЛОГ 1

У прилогу 1 ове дисертације приказан је списак табела, као и саме табеле тестова за дневне логаритамске приносе анализираних берзанских индекса. Сви тестови су извршени коришћењем софтвера: *Gretl*; *Gnu Regression, Econometrics and Time-series Library* и *Microsoft Excel* програма.

### **Списак табела**

- A1. Табела А1. Резултати АCF, PACF и Ljung Box Q теста за дневне логаритамске приносе тестираних индекса

### **Списак слика (графикона)**

- A1. Дистрибуција дневних логаритамских приноса Belexline
- A2. Дистрибуција дневних логаритамских приноса Sofix
- A3. Дистрибуција дневних логаритамских приноса ВЕТ
- A4. Дистрибуција дневних логаритамских приноса Monex
- A5. QQ дијаграм за Belexline индекс
- A6. QQ дијаграм за Sofix индекс
- A7. QQ дијаграм за ВЕТ индекс
- A8. QQ дијаграм за MONEX20 индекс
- A9. Графички приказ резултата АCF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Belexline индекса
- A10. Графички приказ резултата АCF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Sofixиндекса
- A11. Графички приказ резултата АCF и PACF теста за дневне логаритамске приносе ВЕТ индекса
- A12. Графички приказ резултата АCF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Monex индекса
- A13. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене VCV500 VaR
- A14. Кретање приноса Sofix индекса у односу на дневне процене VCV500 VaR
- A15. Кретање приноса ВЕТ индекса у односу на дневне процене VCV500 VaR
- A16. Кретање приноса Monex индекса у односу на дневне процене VCV500 VaR

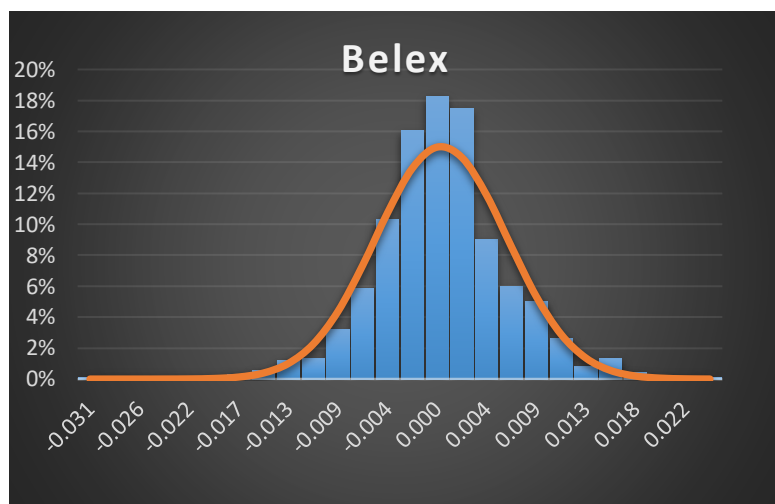
- 
- A17. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене RM500 VaR
- A18. Кретање приноса Sofix индекса у односу на дневне процене RM500 VaR
- A19. Кретање приноса BET индекса у односу на дневне процене RM500 VaR
- A20. Кретање приноса Monex индекса у односу на дневне процене RM500 VaR
- A21. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене HS500 VaR
- A22. Кретање приноса Sofix индекса у односу на дневне процене HS500 VaR
- A23. Кретање приноса BET индекса у односу на дневне процене HS500 VaR
- A24. Кретање приноса Monex индекса у односу на дневне процене HS500 VaR
- A25. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене FHS500 VaR
- A26. Кретање приноса Sofix индекса у односу на дневне процене FHS500 VaR
- A27. Кретање приноса BET индекса у односу на дневне процене FHS500 VaR
- A28. Кретање приноса Monex индекса у односу на дневне процене FHS500 VaR
- A29. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене MHS500 VaR
- A30. Кретање приноса Sofix индекса у односу на дневне процене MHS500 VaR
- A31. Кретање приноса BET индекса у односу на дневне процене MHS500 VaR
- A32. Кретање приноса Monex индекса у односу на дневне процене MHS500 VaR
- A33. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене DHS500 VaR
- A34. Кретање приноса Sofix индекса у односу на дневне процене DHS500 VaR
- A35. Кретање приноса BET индекса у односу на дневне процене DHS500 VaR
- A36. Кретање приноса Monex индекса у односу на дневне процене DHS500 VaR
- A37. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR
- A38. Кретање приноса Sofix индекса у односу на дневне процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR
- A39. Кретање приноса BET индекса у односу на дневне процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR
- A40. Кретање приноса Monex индекса у односу на дневне процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR

Табела А1. Резултати ACF, PACF и Ljung Box Q теста за дневне логаритамске приносе тестираних индекса

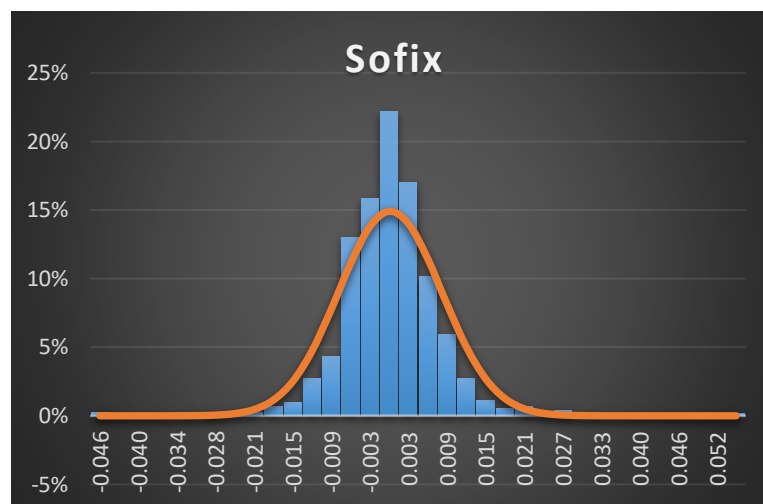
	Belexline индекс				Sofix индекс			
Лег	ACF	PACF	Q-стат.	р-вредност	ACF	PACF	Q-стат.	р-вредност
1	0,1395	0,1395	14,6946	0,0000	0,0445	0,0445	1,4711	0,2250
2	0,0388	0,0199	15,8223	0,0000	-0,0813	-0,0835	6,4178	0,0400
3	0,0309	0,0231	16,5373	0,0010	-0,0356	-0,0288	7,3602	0,0610
4	0,0461	0,0385	18,1336	0,0010	0,1136	0,1110	16,9933	0,0020
5	-0,0290	-0,0430	18,7689	0,0020	0,0258	0,0108	17,4922	0,0040
6	-0,0308	-0,0248	19,4806	0,0030	-0,0509	-0,0378	19,4321	0,0030
7	0,0181	0,0265	19,7272	0,0060	0,0006	0,0157	19,4325	0,0070
8	0,0910	0,0893	26,1052	0,0010	0,0175	-0,0005	19,6597	0,0120
9	-0,0170	-0,0395	26,3275	0,0020	-0,0571	-0,0666	22,1197	0,0090
10	0,0089	0,0113	26,3940	0,0030	-0,0399	-0,0244	23,3198	0,0100
	BET индекс				Mopex индекс			
Лег	ACF	PACF	Q-стат.	р-вредност	ACF	PACF	Q-стат.	р-вредност
1	0,0035	0,0035	0,0090	0,9240	0,0759	0,0760	4,4163	0,0360
2	0,0354	0,0354	0,9755	0,6140	0,0355	0,0299	5,3752	0,0680
3	-0,0451	-0,0454	2,5242	0,4710	-0,0455	-0,0509	6,9546	0,0730
4	0,0066	0,0059	2,5581	0,6340	0,0138	0,0203	7,1062	0,1300
5	-0,0109	-0,0077	2,6465	0,7540	0,0657	0,0676	10,3775	0,0650
6	-0,0776	-0,0808	7,2332	0,3000	0,0037	-0,0104	10,3877	0,1090
7	-0,0022	-0,0003	7,2369	0,4050	0,0514	0,0494	12,4116	0,0880
8	0,0113	0,0160	7,3352	0,5010	0,0237	0,0231	12,8358	0,1180
9	0,0092	0,0016	7,3979	0,5960	-0,0209	-0,0312	13,1713	0,1550
10	0,0556	0,0565	9,7693	0,4610	-0,0126	-0,0094	13,2907	0,2080



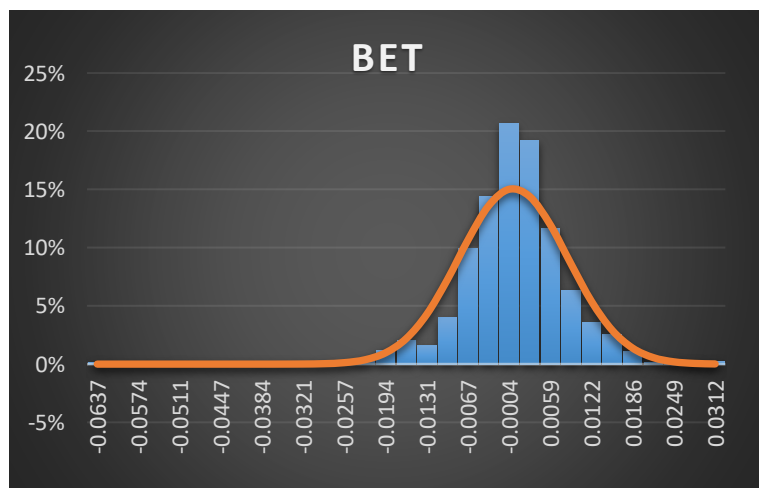
**Слика А1. Дистрибуција дневних логаритамских приноса Belexline**



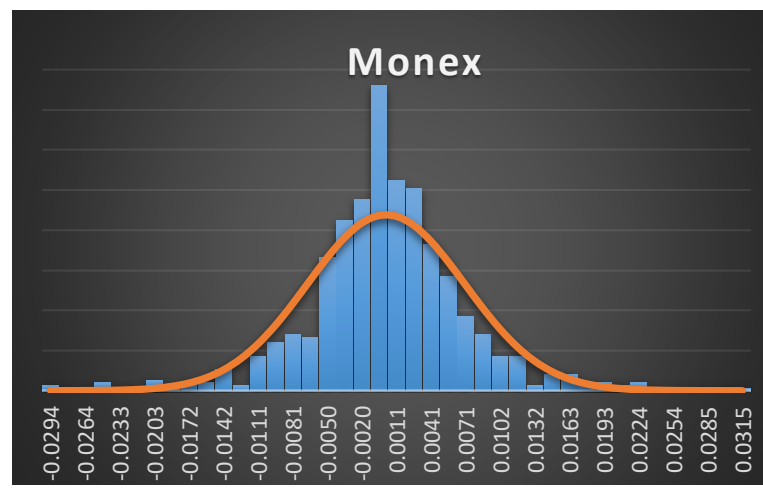
**Слика А2. Дистрибуција дневних логаритамских приноса Sofix**



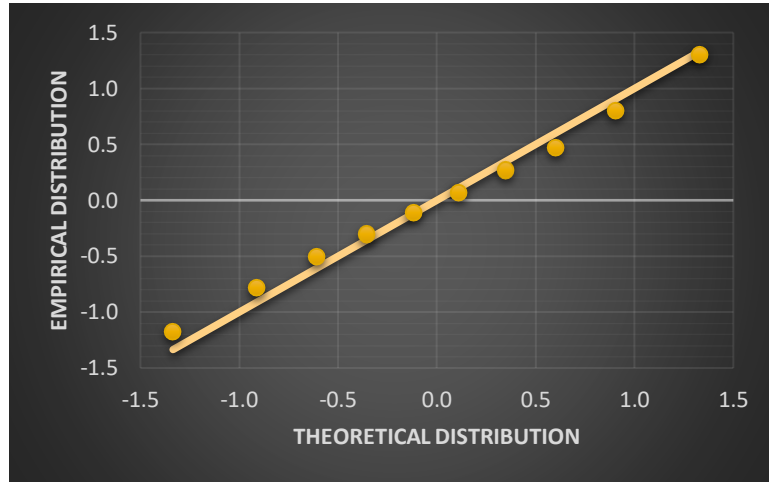
**Слика А3. Дистрибуција дневних логаритамских приноса ВЕТ**



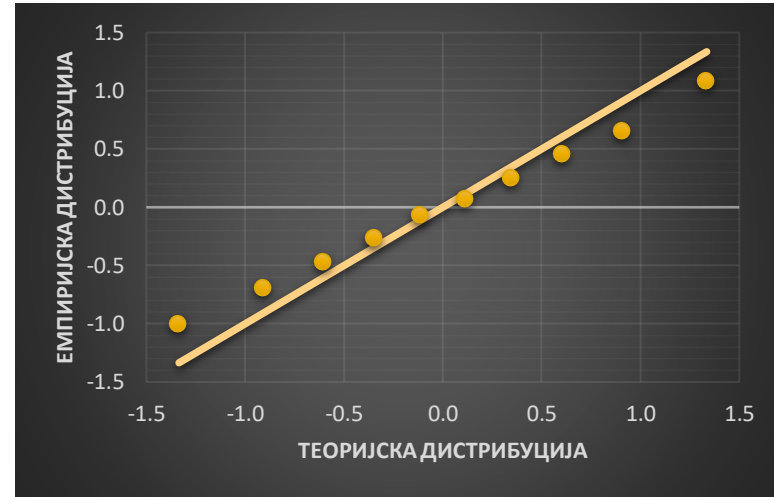
**Слика А4. Дистрибуција дневних логаритамских приноса Monex**



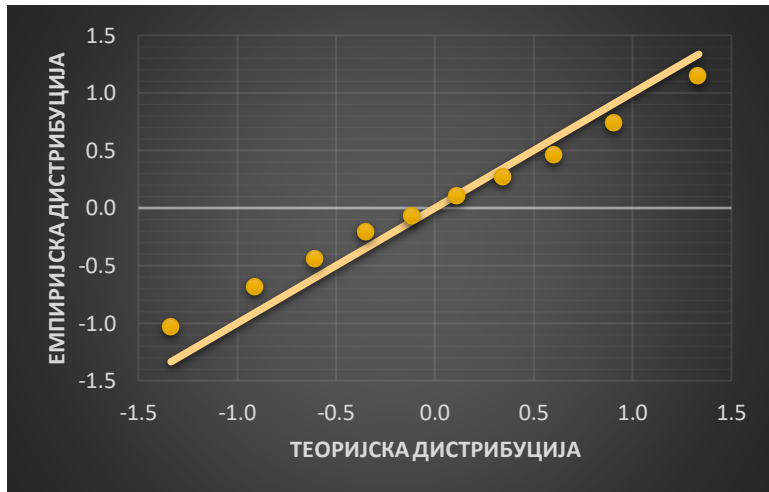
Слика А5. QQ дијаграм за Belexline индекс



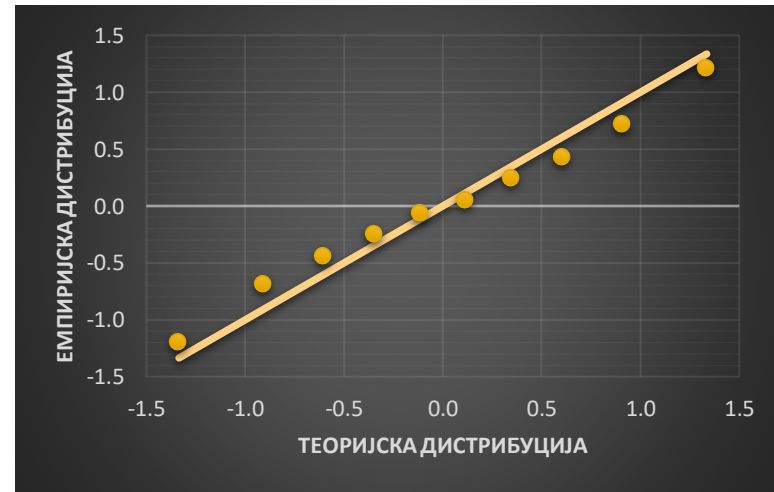
Слика А6. QQ дијаграм за Sofix индекс



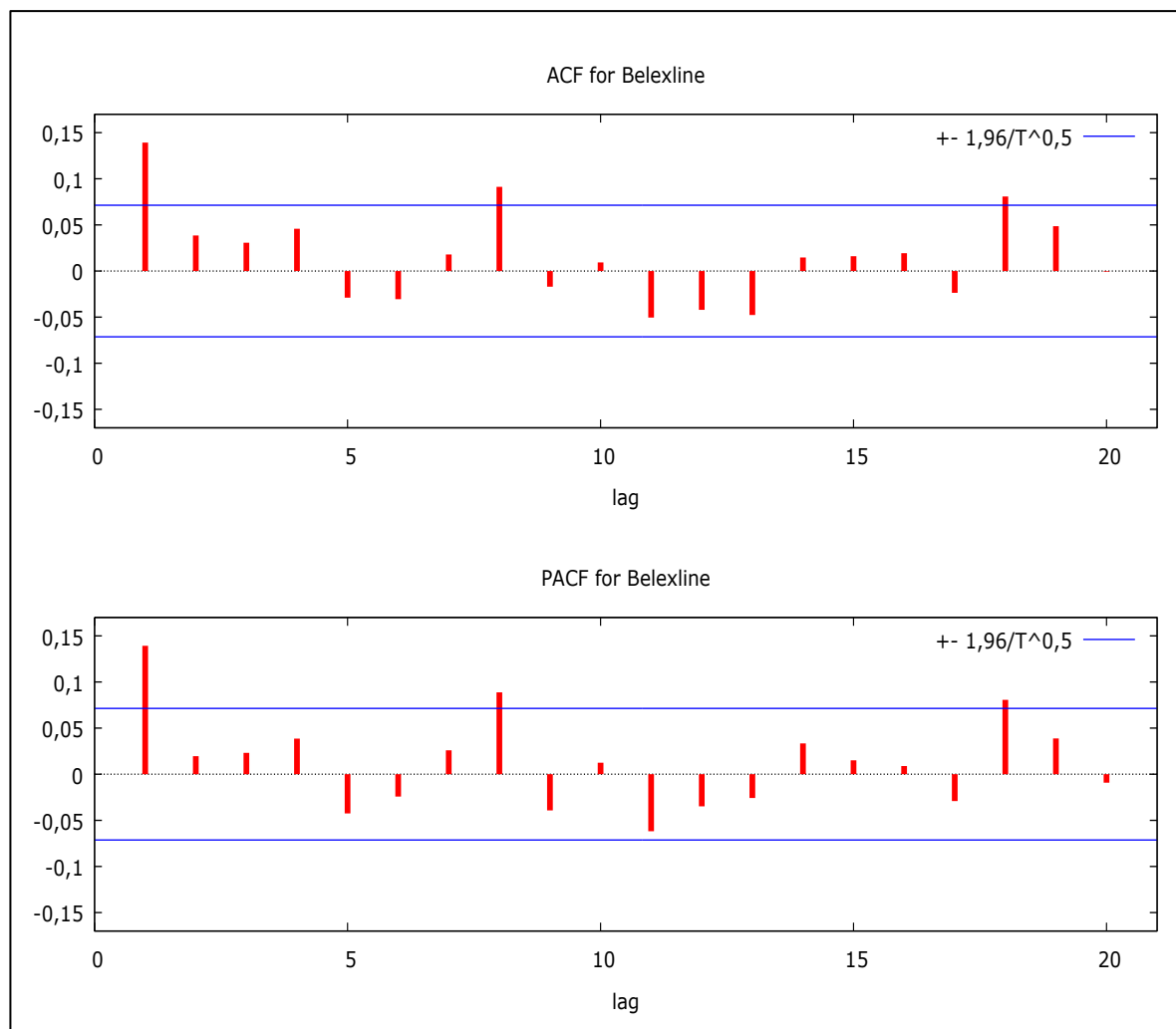
Слика А7. QQ дијаграм за ВЕТ индекс



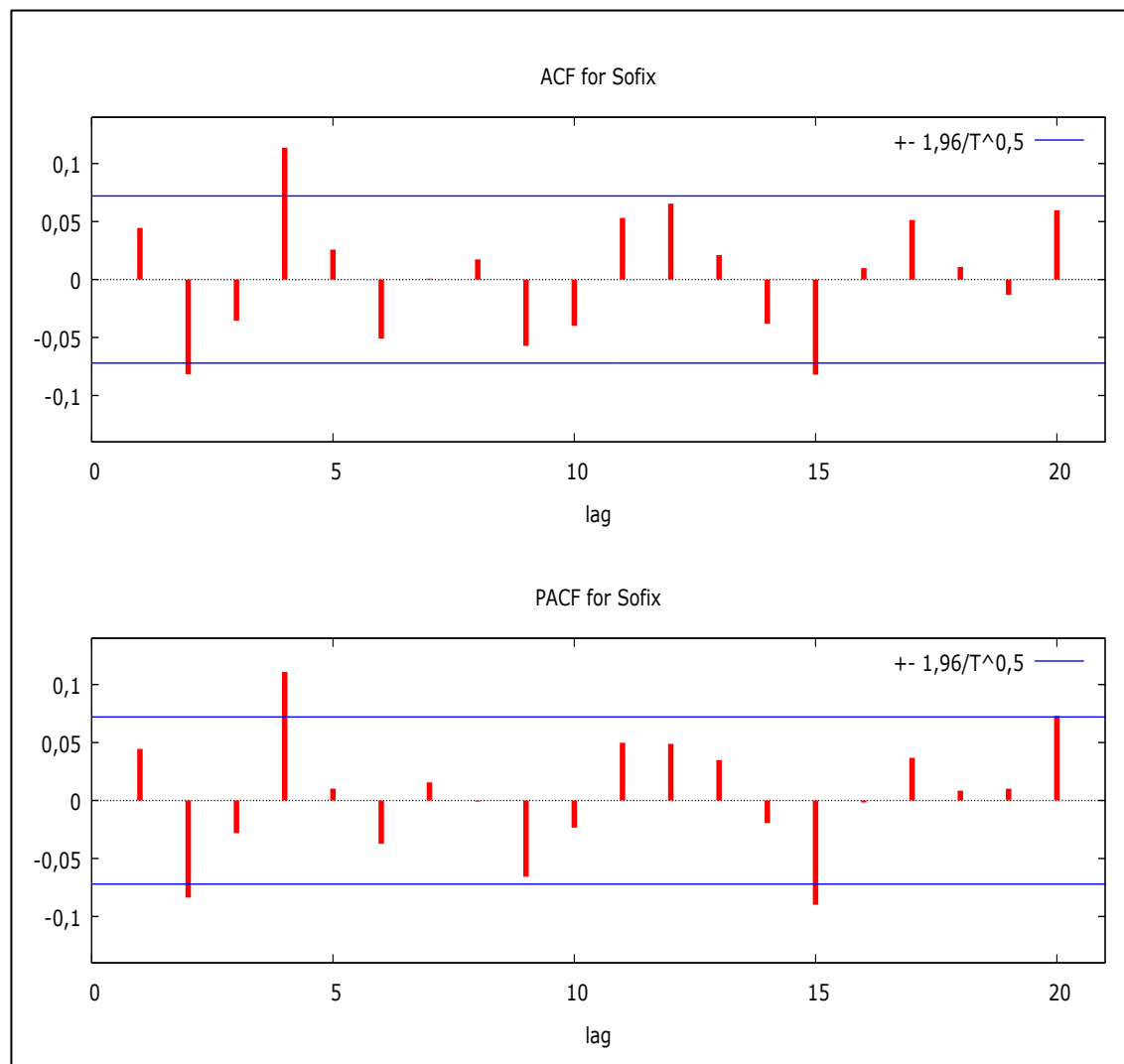
Слика А8. QQ дијаграм за Monex индекс



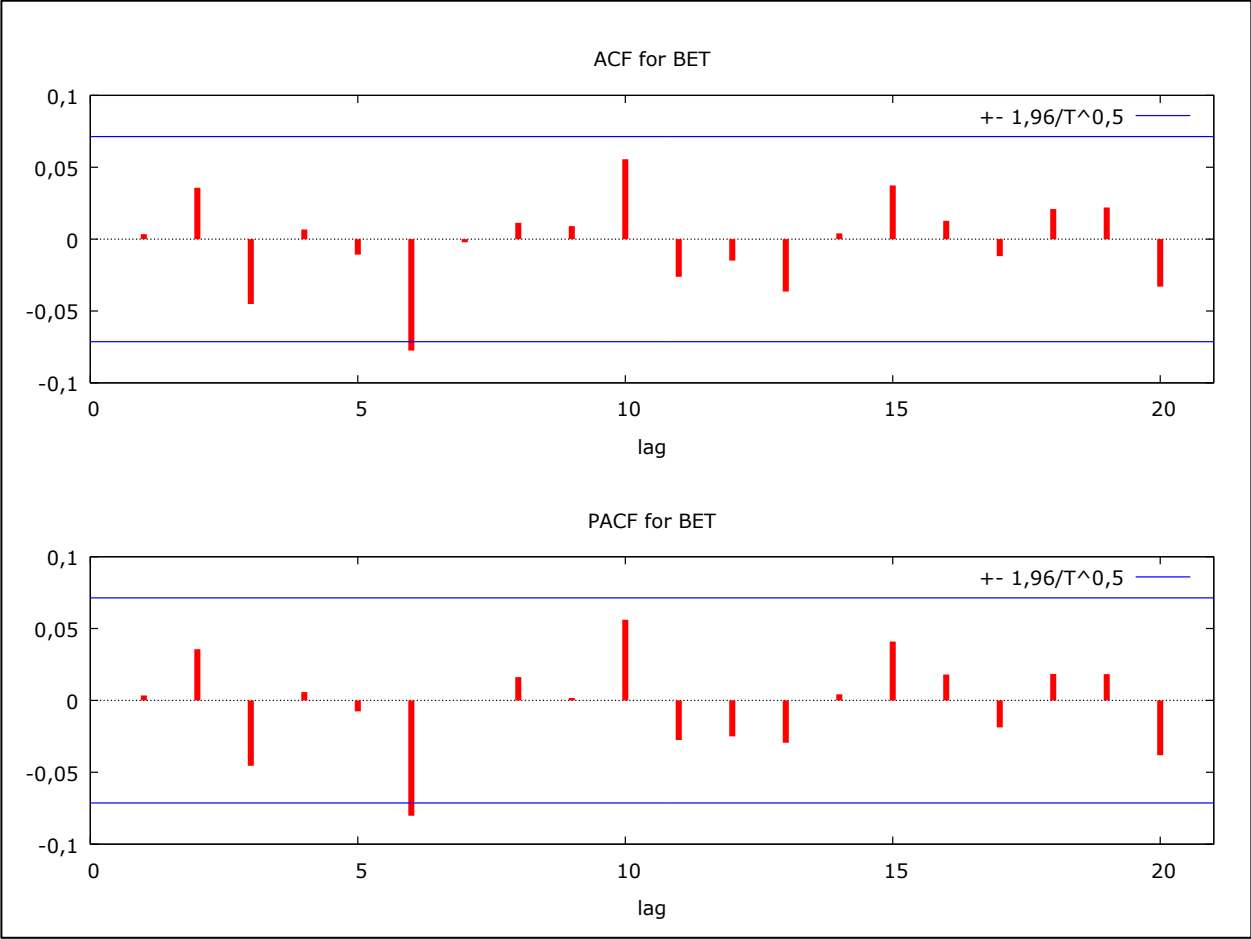
Слика А9. Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Belexline индекса



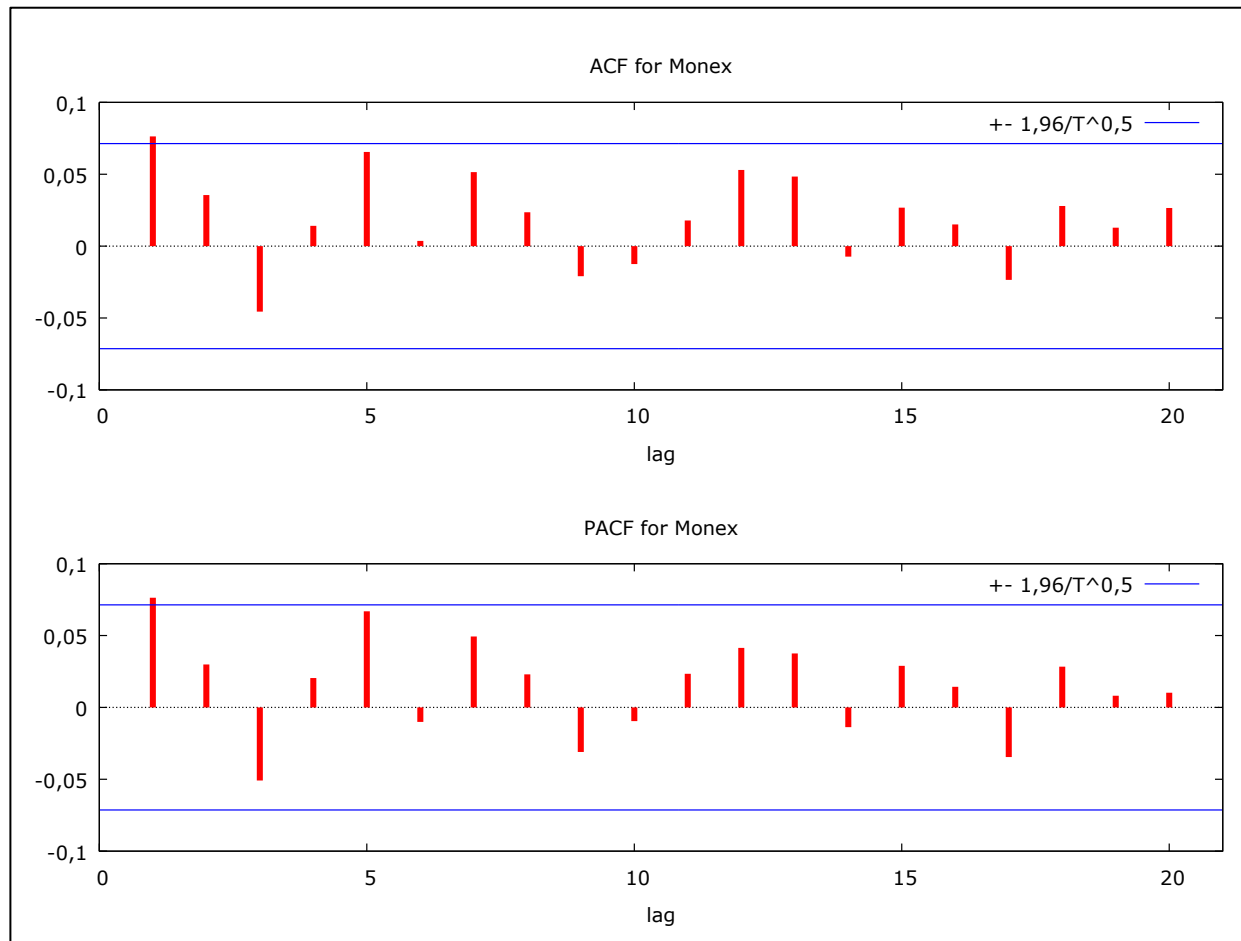
Слика А10. Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Sofix индекса



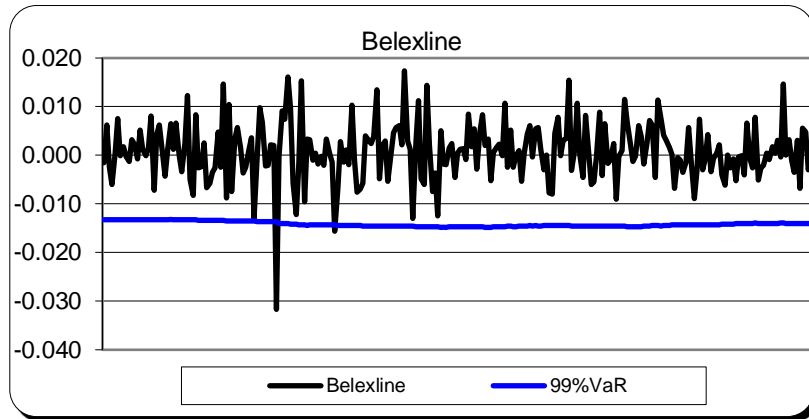
Слика A11. Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе ВЕТ индекса



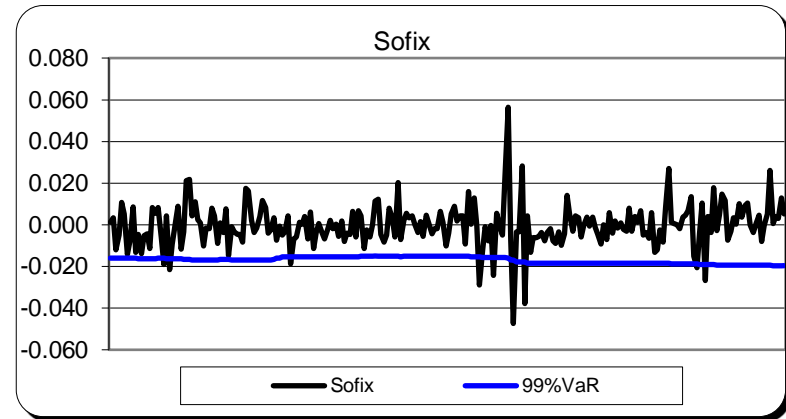
Слика A12. Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Monex индекса



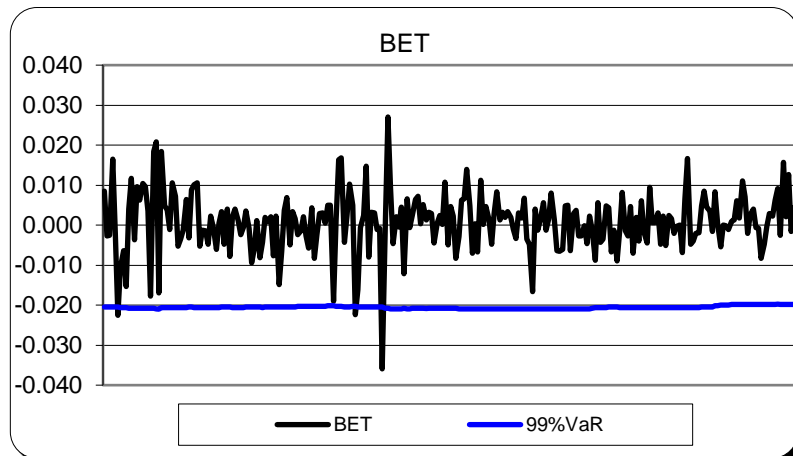
Слика А13. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене VCV500 VaR



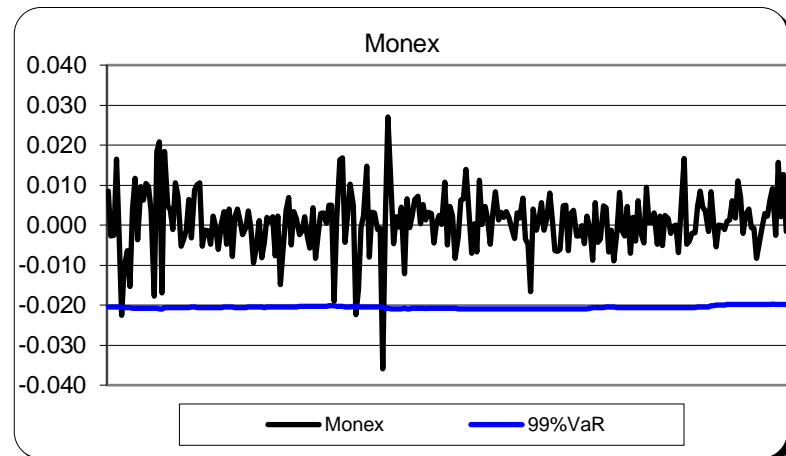
Слика А14. Кретање приноса Sofix индекса у односу на процене VCV500 VaR



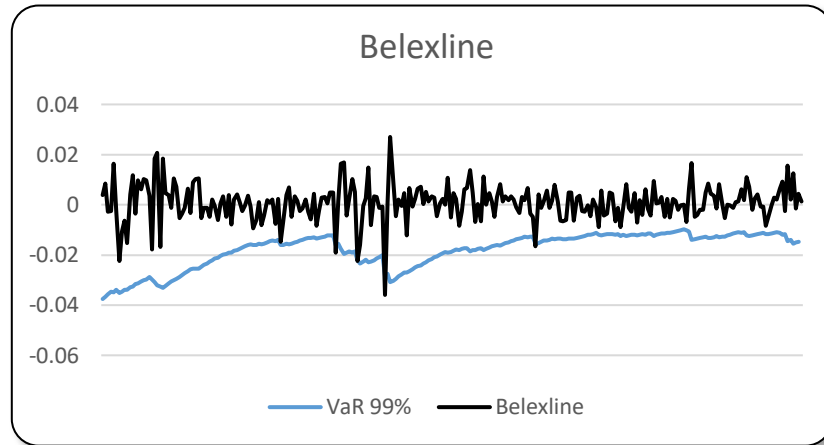
Слика А15. Кретање приноса BET индекса у односу на процене VCV500 VaR



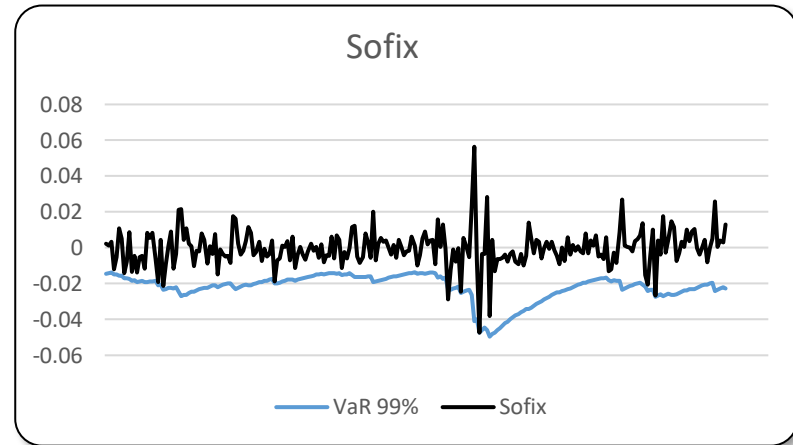
Слика А16. Кретање приноса Monex индекса у односу на процене VCV500 VaR



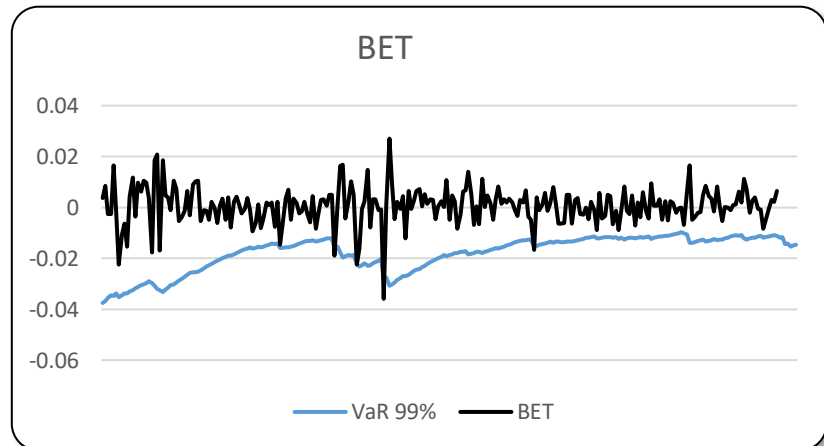
**Слика А17. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене RM500 VaR**



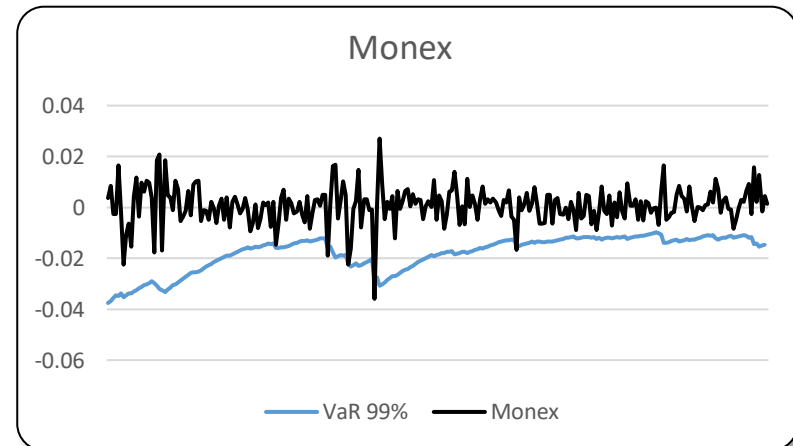
**Слика А18. Кретање приноса Sofix индекса у односу на процене RM500 VaR**



**Слика А19. Кретање приноса BET индекса у односу на процене RM500 VaR**

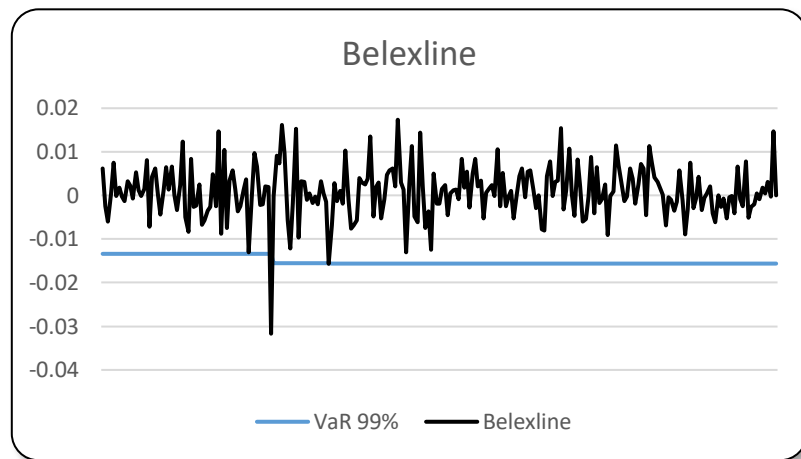


**Слика А20. Кретање приноса Monex индекса у односу на процене RM500 VaR**

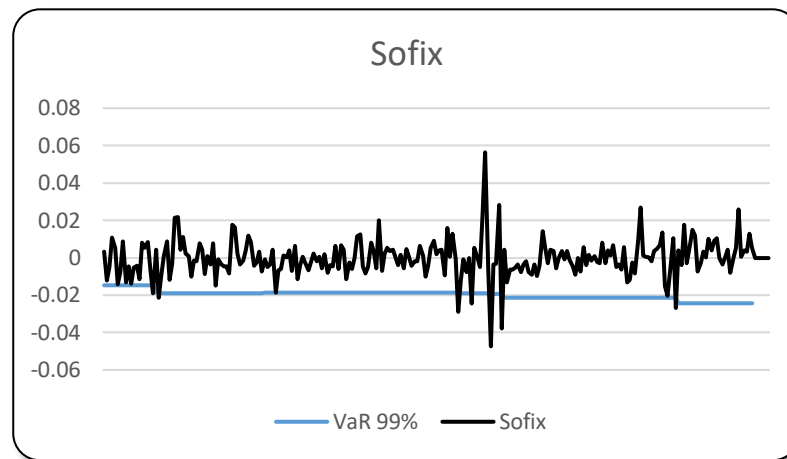




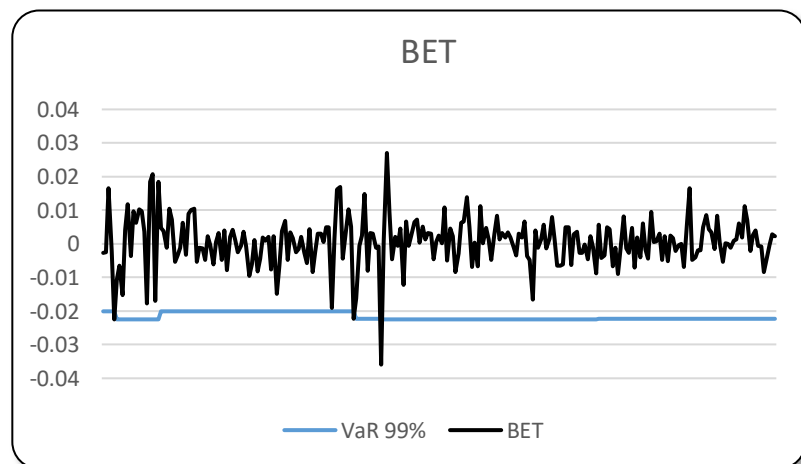
**Слика А21. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене HS500 VaR**



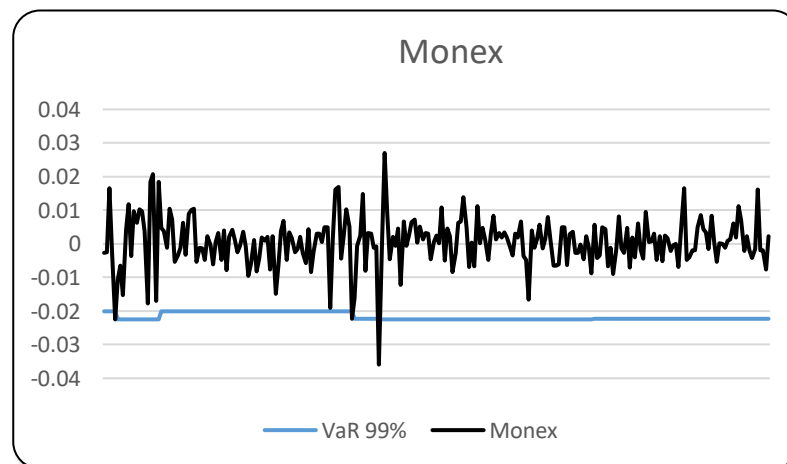
**Слика А22. Кретање приноса Sofix индекса у односу на процене HS500 VaR**



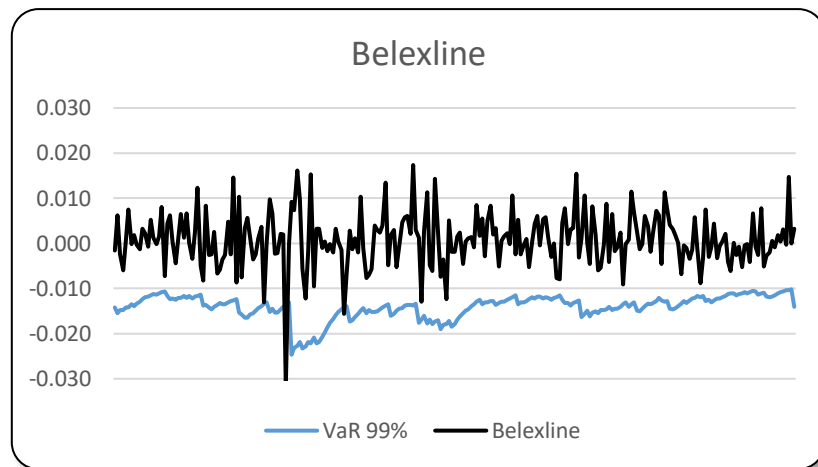
**Слика А23. Кретање приноса BET индекса у односу на процене HS500 VaR**



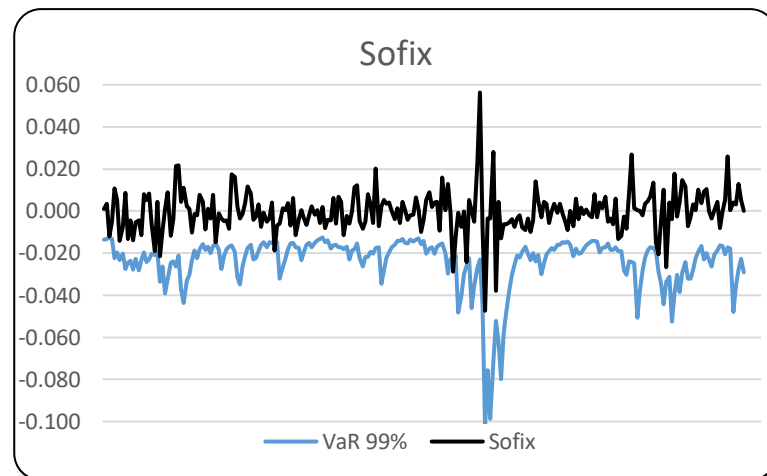
**Слика А24. Кретање приноса Monex индекса у односу на процене HS500 VaR**



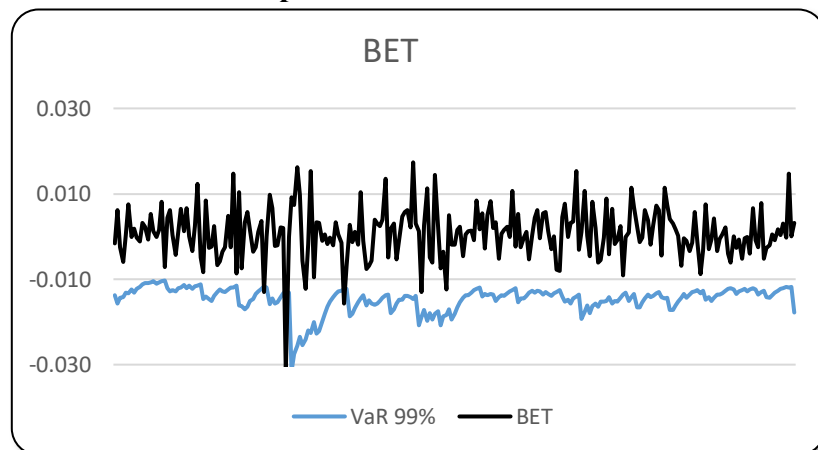
**Слика A25. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене FHS500 VaR**



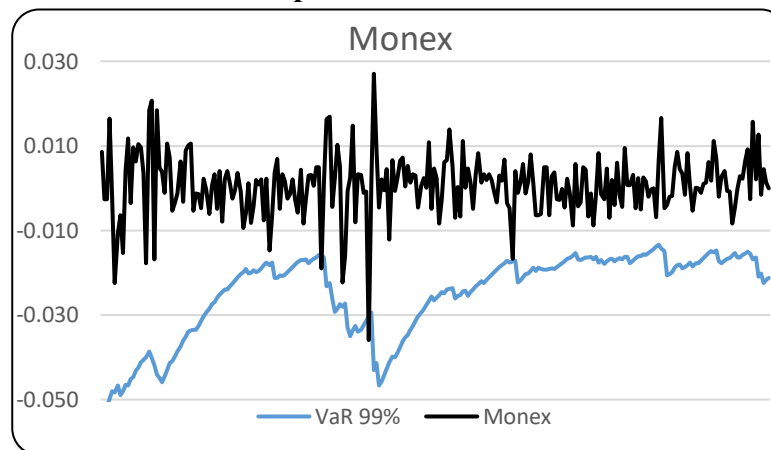
**Слика A26. Кретање приноса Sofix индекса у односу на процене FHS500 VaR**



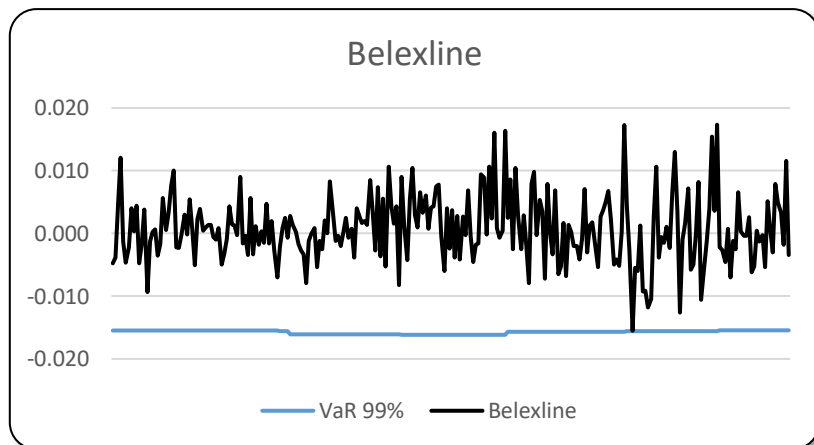
**Слика A27. Кретање приноса BET индекса у односу на процене FHS500 VaR**



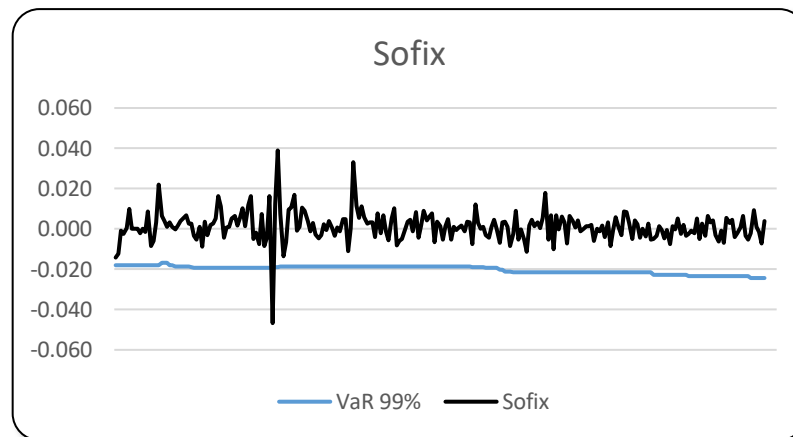
**Слика A28. Кретање приноса Monex индекса у односу на процене FHS500 VaR**



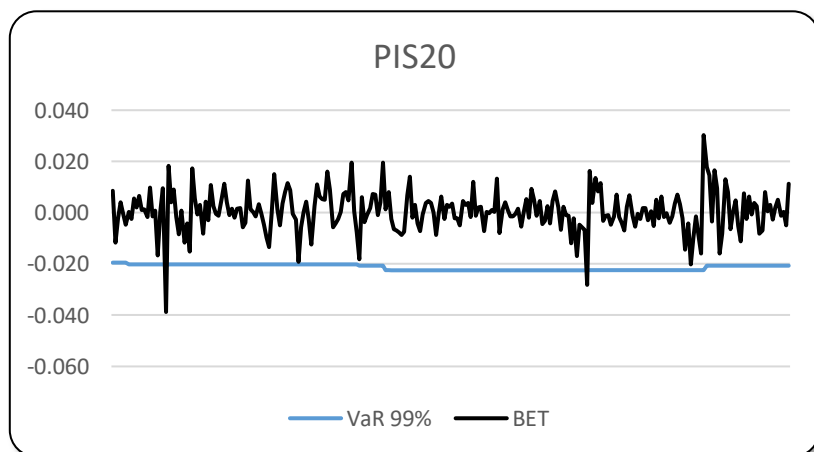
**Слика А29. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене MHS500 VaR**



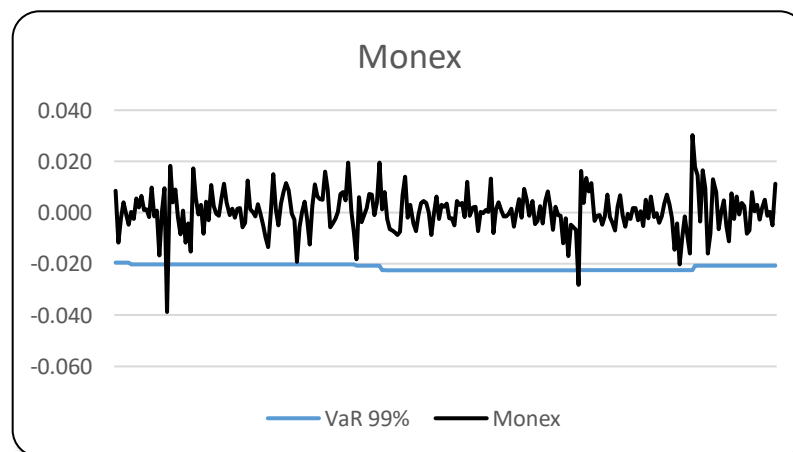
**Слика А30. Кретање приноса Sofix индекса у односу на процене MHS500 VaR**



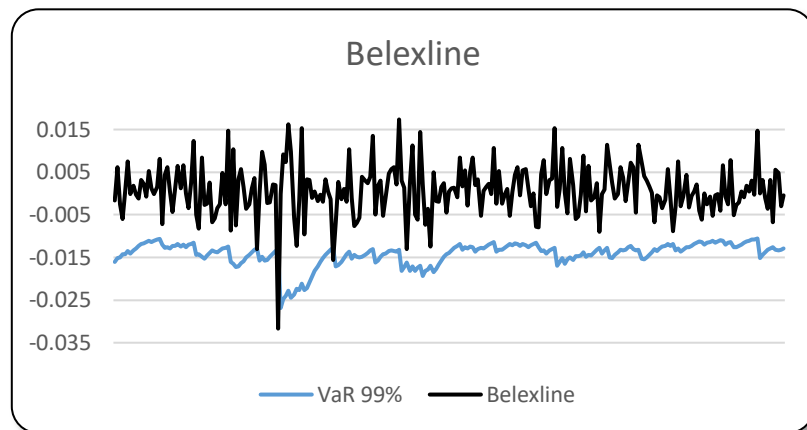
**Слика А31. Кретање приноса BET индекса у односу на процене MHS500 VaR**



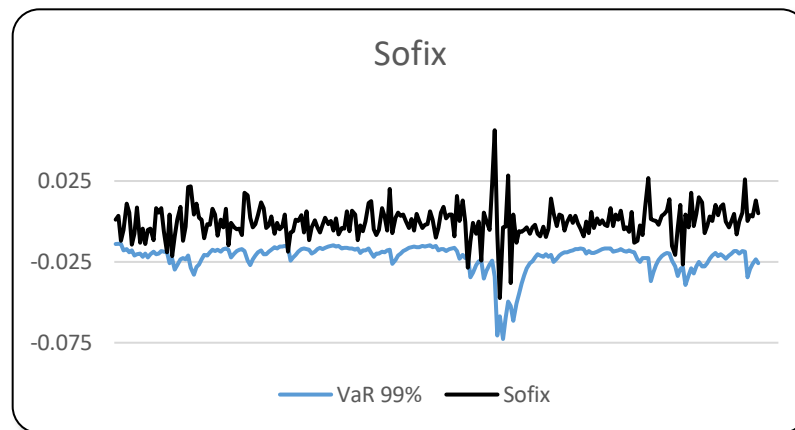
**Слика А32. Кретање приноса Monex индекса у односу на процене MHS500 VaR**



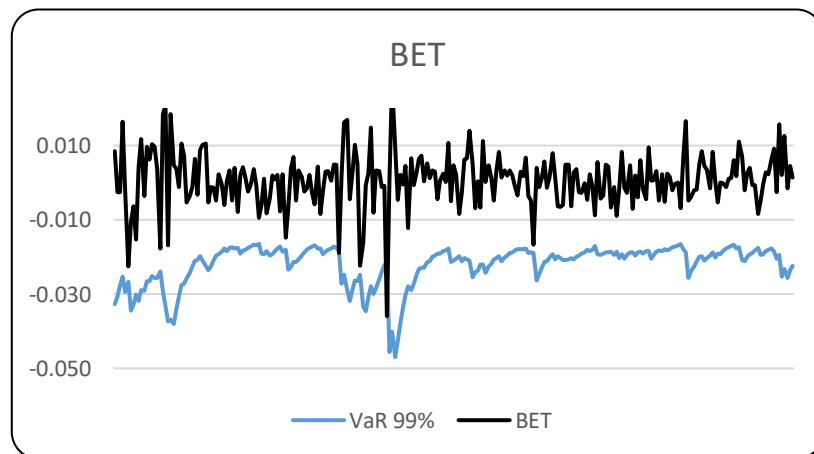
**Слика А33. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене DHS500 VaR**



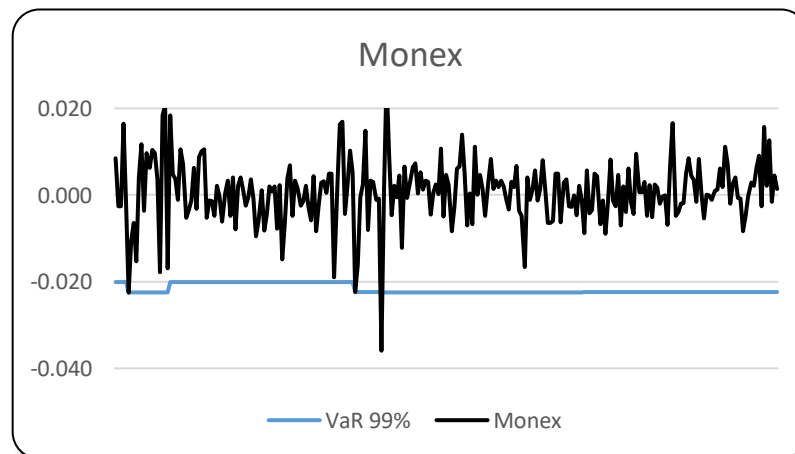
**Слика А34. Кретање приноса Sofix индекса у односу на процене DHS500 VaR**



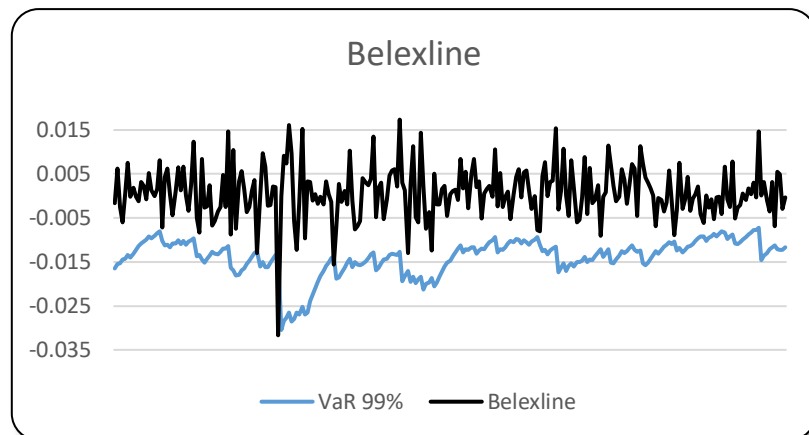
**Слика А35. Кретање приноса BET индекса у односу на процене DHS500 VaR**



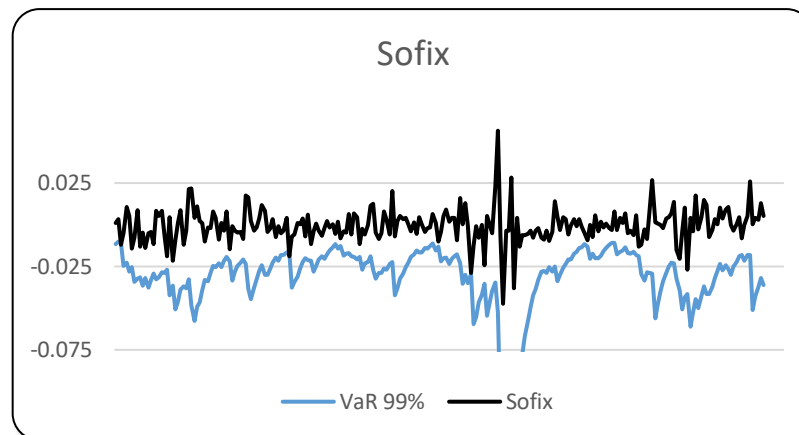
**Слика А36. Кретање приноса Monex индекса у односу на процене DHS500 VaR**



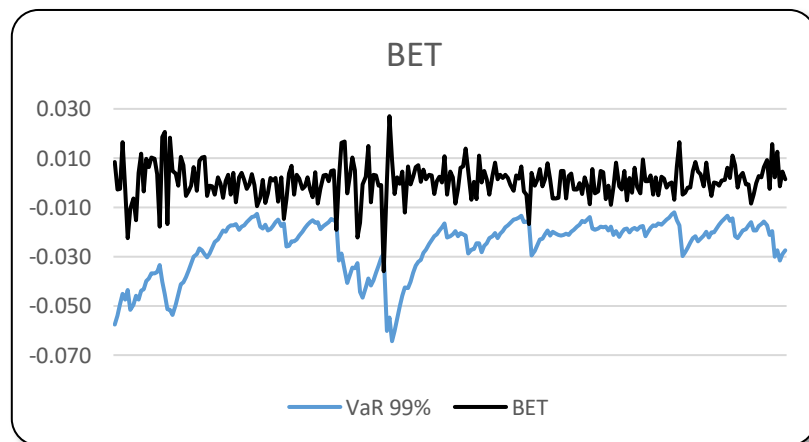
Слика А37. Кретање приноса Belexline индекса у односу на процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR



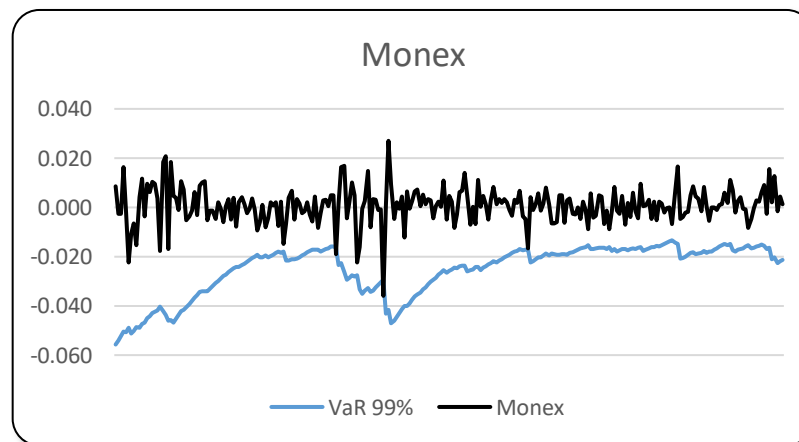
Слика А38. Кретање приноса Sofix индекса у односу на процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR



Слика А39. Кретање приноса BET индекса у односу на процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR



Слика А40. Кретање приноса Monex индекса у односу на процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-MHS500 VaR



## ПРИЛОГ 2:

У прилогу 2 ове дисертације приказан је попис свих табела, слика, графикана, дијаграма и корелограма, затим је наведена биографија аутора, изјава о ауторству, изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада, као и изјава о коришћењу докторске дисертације.

- прилог 2.1 Попис слика, табела, графикана, дијаграма и корелограма
- прилог 2.2 Биографија
- прилог 2.3 Изјава о ауторству
- прилог 2.4 Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада
- прилог 2.5 Изјава о коришћењу

### Прилог 2.1

ТАБЕЛЕ	Стр.
Табела 1. Број дозвољених прекорачења према правилима Базелског комитета	86
Табела 2. Разлика у критичким вредностима у случају коначног узорка и асимптотских вредности за Курјес-ов тест безусловног и Christoffersen-ов тест условног покрића	90
Табела 3. Основне карактеристике индекса	105
Табела 4. Резултати за ARCH ефекат првог реда	107
Табела 5. Оцене параметара модела волатилности	108
Табела 6. Оцене параметара $ARMA(p,q)$ - $GARCH(1,1)$ процес	109
Табела 7. Број прекорачења и резултати Курјес-овог теста безусловног и Christoffersen-ов тест условног покрића	111
Табела 8. Резултати валидације резултата Курјес-овог теста безусловног и Christoffersen-овог теста условног покрића применом Dofour теста процедуре засноване на $p$ -вредностима	115
Табела A1. Резултати ACF, PACF и Ljung Box Q теста за дневне логаритамске приносе тестираних индекса	142

<b>СЛИКЕ</b>	<b>Стр.</b>
Слика 1. Вредност при ризику под претпоставком да серије приноса портфолија следе нормалну дистрибуцију	39
Слике 2. и 2.1. Разлика између кумулатвне емпиријске и стандардизоване нормлане дистрибуције	40
Слика 3. Оцена грешке VaR	48
Слика 4. Стандардна грешка процене VaR при употеби параметарске и непараметарске процене	49
Слика 5. Максимална VaR и процењена VaR	50
Слика 6. Условна вредност при ризику	53
Слика 7. Кретање приноса изабраних индекса током целог посматраног периода	105

<b>ГРАФИКОНИ; ДИЈАГРАМИ; КОРЕЛОГРАМИ</b>	<b>Стр.</b>
Дистрибуција дневних логаритамских приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индексе	143
QQ дијаграм за Belexline, Sifix, Monex i Bet индексе	144
Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Belexline индекса	145
Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Sofix индекса	146
Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе BET индекса	147
Графички приказ резултата ACF и PACF теста за дневне логаритамске приносе Monex индекса	148
Кретање приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индекса у односу на процене VCV500 VaR	149
Кретање приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индекса у односу на процене RM500 VaR	150
Кретање приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индекса у односу на процене HS500 VaR	151
Кретање приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индекса у односу на процене FHS500 VaR	152
Кретање приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индекса у односу на процене MHS500 VaR	153
Кретање приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индекса у односу на процене DHS500 VaR	154
Кретање приноса Belexline, Sifix, Monex i Bet индекса у односу на процене ARMA(p,q)-GARCH(1,1)*MHS500 VaR	155

## Прилог 2.2

### БИОГРАФИЈА

Лука М. Филиповић је рођен 1984. године у Београду, општина Савски венац. Средњу Другу економску школу у Београду завршио је 2003. године и стекао диплому економског техничара.

Након завршетка студија на Факултету за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду Универзитет привредна академија, 2012. године стекао је звање дипломирани економиста (15.09.2012). Звање мастер правник стекао је на Правном факултету за привреду и правосуђе у Новом Саду, Универзитет привредна академија, 2014. године одбраном мастер рада на тему „Међународни систем зелене карте" (03.04.2014). Тема мастер рада се односи на осигурање од аутоодговорности. Године 2014. Уписао је докторске студије на Факултету за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, Универзитет привредна академија, смер Пословна економија. Течно говори и пише енглески и немачки језик.

Поседује Сертификат о похађању и успешном полагању напредног нивоа енглеског језика (09.12.2006) као и Сертификат о похађању и успешном полагању курса пословног енглеског језика (08.12.2006), King's School of English, London. У раду користи MS Office пакет, Интернет, статистичко-економетријски софтверске пакете EViews и Gretl. Поседује Сертификат о похађању и успешном полагању ECDL – European Computer Driving Licence курса, Syllabus Version 4.0(23.01.2008).

Сертификат о завршеном тренингу у организацији GS1 Global Office, Брисел, под називом „Basic of GS1 System Training" стекао је 2008. године (15.02.2008). Сертификат о похађању и успешној реализацији стручне радионице у организацији GS1 Global Office, Брисел, под називом „Bar code and identification key Workshop", стекао је 2009. године (10.09.2009).

У јануару 2016. године стекао је Сертификат о успешном похађању курса Београдске берзе под називом „Техничка и фундаментална анализа са симулацијом трговања" (22.01.2016).

У јуну 2016. године стекао је Сертификат о успешном похађању дводелног курса "Менаџмент залиха"(16.06.2016).

У фебруару 2017. године стекао је Сертификат о успешном похађању курса Београдске берзе под називом "Основи берзанског пословања" (13.02.2017).

#### **Радно и професионално искуство:**

У периоду од 2001. до 2002. године. био је запослен у компанији „AiM invest“ на радном месту сарадника задуженог за анализу домаћег тржишта капитала.

Од 2002. до 2007. године у „Asimex doo“ био је ангажован на радном месту сарадника књиговодствено-финансијских послова.

Од 2007. до 2012. године био је запослен у Међународној асоцијацији за нумерисање артикала EAN бар код симболизацијом и радио фреквентном симболизацијом, као и стандардизацију истих, „GS1 Србија“ на радном месту секретара тима за подршку корисницима.



Од 2012 до 2013. године у Београдској пословној школи - Високој школи струковних студија био је запослен, на пословима сарадника за међународну сарадњу. У оквиру међународне сарадње Београдске пословне школе - Високе школе струковних студија допринео је развоју делатности установе, посебно у сегменту учлањења БПШ-ВШСС у Међународну асоцијацију високошколских установа Уједињених нација – PRME UN.

Од 2013 до 2017. године био је запослен у Београдској пословној школи-Високој школи струковних студија као стручни сараднику настави, на предметима основних струковних студија Пословне финансије и Осигурање студијски програм: Финансије, рачуноводство и банкарство, од октобра 2015. године на предмеду основних струковних студија Финансијска тржишта, студијски програм: Финансије рачуноводство и банкарство.

Од октобра 2017. године запослен је у предузећу за ревизију, рачуноводство, порески и финансијски консалтинг EuroAudit из Београда и обавља послове ревизора.

У току каријере учествовао је на бројним научним и стручним конференцијама и објавио радове у часописима и зборницима у земљи и иностранству:

1. **Вуковић Б., Филиповић Л.** (2014) „*Интереси мањинских акционара при консолидовању финансијских извештаја*“, Економски погледи – часопис за питања економске теорије и праксе, 16/4, децембар 2014., Економски факултет Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици стр. 45-61. ISSN 1450-7951. (M52);
2. **Мирјанић Б., Филиповић Л.** (2016) *Утицај специфичних карактеристика акција са prime и standard листнга Београдске Берзе на инвестиционе одлуке*“XII International May conference on strategic management IMKSM 2016 Publisher: University of Belgrade, Technical Faculty in Bor, Management Department" стр. 18-29. ISBN: 978-86-6305-042-6 (M33);
3. **Филиповић Л, Мирјанић Б.** (2016) "Финансијска анализа и оцена кредитног бонитета привредног друштва. Студија Случаја: Алева ад Нови Кнежевац". Часопис Економија-Теорија и пракса, година IX, број 3. Универзитет Привредна академија, Факултет за економију и инжењерски менаџмент, Нови Сад, стр.16-31. ISSN 2217–5458. (M53);
4. **Ivaniš, M, Ožegović, L, Filipović, L.** (2017). *Liquidity management by financial indicators*, VII International Symposium „Engineering Management and Competitiveness“ 2017, Tehnical faculty „Mihajlo Pupin“, University of Novi Sad, Zrenjanin June 2017, Zrenjanin, Serbia, стр. 231-236, ISSN 2217-8147 (M33);
5. **Filipović, L., Đorđević, Z., Pavićević, I.** (2017), *The attributes of effective Audit Committees for improving the quality of corporate governance in Serbia and Montenegro: From the harmonisation of national regulations towards advancement of business practice*, International scientific conference EMAN 2017, Ljubljana, Slovenia, стр. 159-165, ISBN 978-86-80194-06-6 (M33);
6. **Filipović, L., Ljutić, B., Mirjanić, B.** (2017), *Enterprise risk management through the value at risk concept*, International scientific conference ITEMA 2017, Budapest, Hungary, 2017. стр. 613-621, ISBN 978-86-80194-08-0 (M33);

7. **Filipović, L.** (2017) *Upravljanje dugoročnim i trajnim kapitalom u cilju održive finansijske stabilnosti preduzeća*, Економија теорија и пракса, Факултет за економију и инжењерски менаџмент у Новом Саду, стр. 33-46. ISSN 2217–5458 **(M52)**;
8. **Ljutić, B., Filipović, L.** (2018), *Valuation Approaches for Corporate Investments and Takeovers in Medium-sized Enterprises: Comparative Case Study of Selected Enterprises in Montenegro and Serbia*, 10<sup>th</sup> EPIEM/ESTIEM 4<sup>th</sup> May 2018, Graz, Austria стр. 1-5. ISBN 978-3-58125-601-7 **(M33)**;
9. **Filipović, L., Mirjanić, B., Ljutić, B.** (2018), *Technical analysis investment in Ripple XRP digital currency*, International scientific conference EMAN 2018, Ljubljana, Slovenia, рад је прихваћен и биће објављен у зборнику радова у мају 2018. године **(M33)**;
10. **Filipović, L., Mirjanić, B.** (2018) *Modeliranje volatilnosti deviznog kursa dinara prema evru primenom ARCH/GARCH modela*, рад прихваћен и очекује се објава у неком од наредних бројева, **(M51)**.
11. **Filipović, L., Mirjanić, B., Soleša, D.** (2018) *Application of Value at risk modelson the markets of Romania and Bulgaria*, the Journal of Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research ECECSR- рад је узет у разматрање и прихваћен је, објава се очекује крајем 2018. године у броју 4/2018 **(M24)**;

## Прилог 2.3

### ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Потписани: Филиповић М. Лука

Број уписа: ДП 005/2015

#### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

#### **ПРИМЕНА КОНЦЕПТА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ НА ТРЖИШТИМА У НАСТАЈАЊУ У КОНТЕКСТУ БАЗЕЛСКИХ СТАНДАРДА**

резултат сопственог истраживачког рада,

да предложена докторска дисертација у целини, ни у деловим, није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,

да су резултати коректно наведени и

да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

-----,-----  
(Место) (Датум)

**Потпис**

## Прилог 2.4

### ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА

Име и презиме аутора: Филиповић М. Лука

Број уписа: ДП 005/2015

Студијски програм: ПОСЛОВНА ЕКОНОМИЈА

Наслов рада: **ПРИМЕНА КОНЦЕПТА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ НА ТРЖИШТИМА У  
НАСТАЈАЊУ У КОНТЕКСТУ БАЗЕЛСКИХ СТАНДАРДА**

Ментор: **проф. др Марко Иваниш**

#### Потписани

**Изјављујем** да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу Дигитална библиотека дисертација Универзитета Привредна академија у Новом Саду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за стицање научног назива доктор наука/доктор уметности, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама Дигиталне библиотеке дисертација, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета Привредна академија у Новом Саду.

-----,-----  
(Место) (Датум)

**Потпис**

## Прилог 2.5

### ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитет Привредна академија у Новом Саду да у Дигиталну библиотеку дисертација Универзитета Привредна академија у Новом Саду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

#### **ПРИМЕНА КОНЦЕПТА ВРЕДНОСТИ ПРИ РИЗИКУ НА ТРЖИШТИМА У НАСТАЈАЊУ У КОНТЕКСТУ БАЗЕЛСКИХ СТАНДАРДА**

Докторску дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталну библиотеку дисертација Универзитета Привредна академија у Новом Саду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
- 2. Ауторство – некомерцијално**
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

-----,  
(Место) (Датум)

**Потпис**