



**UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET**



DRAGANA U. ŽIVALJEVIĆ

**DIREKTNA SINTEZA DIGITALNIH
FILTARA ZA PODOPSEŽNO
KODOVANJE**

DOKTORSKA DISERTACIJA

NIŠ, 2017.



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



DRAGANA U. ŽIVALJEVIĆ

**DIREKTNA SINTEZA DIGITALNIH FILTERA
ZA PODOPSEŽNO KODOVANJE**

DOKTORSKA DISERTACIJA

NIŠ, 2017.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING



DRAGANA U. ŽIVALJEVIĆ

**DIRECT SYNTHESIS OF DIGITAL FILTERS
SUITABLE FOR SUBBAND CODING**

PHD THESIS

NIŠ, 2017.



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET



DRAGANA U. ŽIVALJEVIĆ

**DIREKTNA SINTEZA DIGITALNIH FILTARA
ZA PODOPSEŽNO KODOVANJE**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor:

Dr Saša Nikolić

Komisija za ocenu i odbranu doktorske disertacije:

Dr Saša Nikolić, vanredni profesor, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Dr Gradimir Milovanović, akademik Srpske akademije nauka i umetnosti

Dr Zlata Cvetković, redovni profesor, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Dr Goran Stančić, docent, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Dr Nebojša Raičević, vanredni profesor, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu

Datum odbrane: _____

NIŠ, 2017.

Deo rezultata prikazanih u disertaciji proistekao je iz istraživanja u okviru projekta TR 33008 – "Novi pristup oblikovanju kablovskog pribora u cilju povećanja efikasnosti energetske vodova", kao i u okviru projekta III 44004 – "Razvoj i integracija tehnologija projektovanja inteligentnog mehatroničkog interfejsa za primenu u medicini (HUMANISM)", finansiranog od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

The work presented here was partially supported by the Ministry of Education, Science and Technological development of Republic of Serbia, under the project TR 33008 – "A new approach to modeling of cable accessories in order to increase the efficiency of power transmission lines", and also under the project III 44004 – "Development and integration of design technology of intelligent mechatronic interface for medical applications (HUMANISM)".

Ova teza je urađena na Elektronskom fakultetu u Nišu pod rukovodstvom dr Saše Nikolića, vanrednog profesora Elektronskog fakulteta. Profesoru Nikoliću se zahvaljujem na korisnim savetima i sugestijama tokom izrade ove doktorske disertacije.

Zahvaljujem se i ostalim članovima komisije: dr Gradimiru Milovanoviću, dr Zlati Cvetković, dr Goranu Stančiću i dr Nebojši Raičeviću na saradnji, stručnoj pomoći i savetima.

Posebnu zahvalnost dugujem profesoru dr Vidosavu Stojanoviću koji je bio uključen u sve segmente rada ove disertacije. Njegova stručnost, znanje i bezrezervna podrška su u najvećoj meri doprineli kvalitetu ove teze.

Ogromnu zahvalnost dugujem svojim roditeljima i sestri na razumevanju i podršci tokom izrade ove disertacije.

I Autor

Ime i prezime	Dragana U. Živaljević
Datum i mesto rođenja	14.02.1972, Niš, Republika Srbija
Sadašnje zaposlenje	Univerzitet u Nišu Elektronski fakultet, Niš Katedra za teorijsku elektrotehniku

II Doktorska disertacija

Naslov	Direktna sinteza digitalnih filtara za podopsežno kodovanje
Ključne reči	Digitalni filtri, Eliptički filtar, Butterworthov filtar, Newton-Raphsonov metod, sistem nelinearnih jednačina
Naučna oblast	Teorijska elektrotehnika
Uža naučna oblast	Teorijska elektrotehnika
UDK broj	(621.272.544+004.383.3):004.4 MATLAB
Ustanova i mesto gde je disertacija rađena	Univerzitet u Nišu Elektronski fakultet, Niš Katedra za teorijsku elektrotehniku
Mentor	Dr Saša Nikolić

III Tok prijave doktorske disertacije

Datum prijave teme doktorske disertacije	08.01.2013.
Broj odluke i datum prihvatanja teme doktorske disertacije	NSV 07/03-003/13-005,11.04.2013.
Komisija za pisanje izveštaja o naučnoj zasnovanosti teme doktorske disertacije	1. Dr Saša Nikolić, van. prof. 2. Dr Gradimir Milovanović, akademik SANU 3. Dr Zlata Cvetković, red. prof. 4. Dr Goran Stančić, docent 5. Dr Nebojša Raičević, van. prof.
Komisija za ocenu i odbranu doktorske disertacije	1. Dr Saša Nikolić, van. prof. 2. Dr Gradimir Milovanović, akademik SANU 3. Dr Zlata Cvetković, red. prof. 4. Dr Goran Stančić, docent 5. Dr Nebojša Raičević, van. prof.
Datum odbrane	2017.

Rezime

U disertaciji su obrađene dvokanalne QMF banke u sistemima sa beskonačnim impulsnim odzivom. U okviru ovog istraživanja predložena je direktna sinteza nove klase rekurzivnih digitalnih filtara, kao prototipske funkcije koja zadovoljava uslov za komplementarnu dekompoziciju. Kako karakteristika slabljenja nove klase filtara leži u oblasti između Butterworthovih i Eliptičkih karakteristika slabljenja, nova klasa je nazvana Prelazna klasa filtara.

Realizacija nove banke filtara izvršena je komplementarnom dekompozicijom prototipske prenosne funkcije na dva *allpass* filtra čijim se sabiranjem, odnosno oduzimanjem, dobijaju prenosne funkcije niskofrekvencijskog i visokofrekvencijskog filtra. Prednost ovakvih sistema je da se isti hardver koristi za realizaciju i NF i VF prenosne funkcije. Realizacija komplementarnih IIR filtara zasnovana na paralelnoj vezi dva *allpass* filtra odlikuje se malom osetljivošću karakteristike slabljenja na promenu dužine digitalne reči.

U okviru analize Prelazne klase filtara obrađene su funkcije neparnog reda sa jednom, dve, tri i četiri konačne nule prenosa. Za sve tipove Prelazne klase filtara izvršeno je poređenje sa Butterworthovim i Eliptičkim filtrom istog reda. Pokazano je da Prelazni filtri imaju bolju selektivnost u odnosu na Butterworthov fitar, a lošiju u odnosu na Eliptički. Međutim, kako je Eliptički filtar projektovan korišćenjem bilinearne transformacije, njegovi polovi nisu čisto imaginarni a realni delovi polova se povećavaju sa povećanjem reda filtra. Ovo rezultira u grešci amplitudske karakteristike visokopropusnog filtra, što znači da Prelazni filtri postižu veću tačnost pri komplementarnoj dekompoziciji u odnosu na Eliptičke filtre. Zatim, praktična realizacija nove klase je jednostavnija u odnosu na Eliptički filtar s obzirom da ima parove konjugovano-kompleksnih nula na jediničnom krugu i višestruku nulu u $z = -1$. Kako nova klasa ima aproksimativno ekvidistantni raspored polova, može se realizovati sa manjom dužinom digitalne reči u odnosu na Eliptički filtar.

Za klasu Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa dati su koeficijenti prenosne funkcije u zatvorenom obliku. Primena ovako dobijenih koeficijenata je značajna jer se pri konverziji frekvencije odabiranja zahteva filtar sa najmanjom mogućom kompleksnošću.

Pogodnim izborom filtara banki analize i sinteze ispunjen je uslov za uklanjanje efekata *aliasinga*. Pokazano je da se amplitudska izobličenja kod IIR banke filtara mogu u potpunosti potisnuti pa je nelinearnost fazne karakteristike dominantno izobličenje. Za postizanje približno savršene rekonstrukcije signala predložena je korekcija grupnog kašnjenja faznim korektorom i izvršena analiza uticaja reda faznog korektora na tačnost rekonstrukcije signala.

Ključne reči: Digitalni filtri, Banke filtara, Komplementarna dekompozicija, Podopsežno kodovanje, IIR filtri, Butterworthovi filtri, Eliptički filtri, Prelazna klasa filtara, Newton-Raphsonov metod.

I Author	
Name of candidate	Dragana U. Živaljević
Date and place of birth	14.02.1972, Niš, Republic of Serbia
Employment	University of Niš Faculty of Electronic Engineering, Niš Dept. of Theoretical Electrical Engineering
II PhD thesis	
Thesis Title	Direct synthesis of digital filters suitable for subband coding
Keywords	Digital filters, Elliptic filter, Butterworth filter, Newton-Raphson method, System of non-linear equations
Scientific area	Theoretical Electrical Engineering
Specialized scientific area	Theoretical Electrical Engineering
UDK number	(621.272.544+004.383.3):004.4 MATLAB
Address	University of Niš Faculty of Electronic Engineering, Niš Dept. of Theoretical Electrical Engineering
Supervisor	Dr Saša Nikolić
III Submission of PhD	
Submission date of PhD thesis title	08.01.2013.
Decision number and date of PhD thesis acceptance	NSV 07/03-003/13-005, 11.04.2013.
Examination Committee for PhD Thesis Examination/Acceptance Report	1. Dr. Saša Nikolić, Assoc. Prof. 2. Dr. Gradimir Milovanović, Academician 3. Dr. Zlata Cvetković, Full Prof. 4. Dr. Goran Stančić, Asst. Prof. 5. Dr. Nebojša Raičević, Assoc. Prof.
Examination Committee of PhD thesis	1. Dr. Saša Nikolić, Assoc. Prof. 2. Dr. Gradimir Milovanović, Academician 3. Dr. Zlata Cvetković, Full Prof. 4. Dr. Goran Stančić, Asst. Prof. 5. Dr. Nebojša Raičević, Assoc. Prof.
Examination Defence Date:	2017.

Abstract

In this PhD thesis two-channel QMF IIR filter banks have been discussed. As a part of this research, direct synthesis of a new IIR filter class, as a lowpass prototype function which satisfies condition for complementary decomposition, has been proposed. Since attenuation characteristic of the new filter class lies in the area between the Butterworth's and the Elliptic's attenuation characteristics of the same order, new class has been referred to as Transitional Butter-Elliptic filters.

Transfer function of the the lowpass prototype function was separated into two allpass filters by complementary decomposition. Then, lowpass and highpass filters, as power symmetric filter pair, are obtained using those allpass filters. The main advantage of complementary IIR filters based on parallel connection of two allpass filters, is its smaller sensitivity to digital word length change compared to standard filters and low-cost implementation since the same hardware is used for the lowpass and the highpass transfer function.

Within the analysis of the new filter class, transfer functions of the odd order with one, two, three and four extremal values of attenuation characteristics in the passband and in the stopband, has been discussed. All types of Transitional filters have been compared with the Butterworth's and the Elliptic's filters of the same order. It is shown that in comparison with Butterworth filter, the Transitional filter has better selectivity but lower selectivity than Elliptic filter. However, the proposed new filter class has pure imaginary poles and accuracy in complementary decomposition is at very high level, which the Elliptic filter cannot achieve. Also, the practical realization of the new filter class is easier than for the Elliptic filter since the new class has conjugate-complex zeros on the unit circle and one multiple zero at $z = -1$. Further, poles and zeros of the Elliptic filter are accumulated near the passband edge and the distance between them decreases as the filter order increases. This requires a very long digital word length for high-order filter realization. The new class filter has approximately equidistant arrangement of poles so it can be realized with shorter digital word length than it is required for the Elliptic filter realization.

For Transitional filters class with one extremum of multiplicity L in the passband and in the stopband, closed-form expression for the transfer function coefficients has been obtained. Application of these kind of filters is significant since for sample rate conversion the lowest-complexity filter is required.

With appropriate selection of filters in analysis and synthesis section, the conditions for

removing the aliasing effects are fulfilled. Magnitude distortions in IIR filter bank can also be completely eliminated and therefore output signal of the QMF bank has only phase distortion. In order to obtain nearly perfect reconstruction of the output signal, the allpass equalizer has been proposed for group delay compensation. Also, effect of the equalizer order on the accuracy of signal reconstruction has been analyzed.

Keywords: Digital filters, Filter banks, Complementary decomposition, Subband coding, IIR filters, Butterworth filters, Elliptic filters, Transitional Butter-Elliptic filters, Newton-Raphson method.

Skraćenice koje su korišćene u tekstu

- IIR filtar - Rekurzivni filtar (Infinite Impulse Response filter)
- FIR filtar - Nerekurzivni filtar (Finite Impulse Response filter)
- NF filtar - Niskopropusni filtar
- VF filtar - Visokopropusni filtar
- QMF banka - Kvadratura banka filtara (Quadrature Mirror Filter bank)
- SBC - Podopsežno kodovanje (Sub-Band Coding)
- PR - Savršena rekonstrukcija (Perfect Reconstruction)
- NPR - Približno savršena rekonstrukcija (Nearly Perfect Reconstruction)
- VHDL - Programski jezik za implementaciju hardvera (VHSIC Hardware Description Language)

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Istorijat razvoja banki filtara	2
1.2	Tok doktorske disertacije	6
2	Osnovni teorijski principi sistema za podopsežno kodovanje	9
2.1	Kvadratura banka filtara	9
2.1.1	Filtarska banka analize	10
2.1.2	Filtarska banka sinteze	11
2.1.3	Dvokanalna banka filtara za podopsežno kodovanje	12
2.1.4	Standardne Kvadrature banke filtara sa približno savršenom rekonstrukcijom	14
2.1.5	Osobine filtara Kvadrature banke filtara	17
3	Nova banka filtara pogodna za podopsežno kodovanje	22
3.1	Aproksimacija	23
3.2	Klasa prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa	25
3.2.1	Primeri klase Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa	31
3.2.2	Poređenje klase Prelaznih filtara sa Eliptičkim i Butterworthovim filtrom	41
3.2.3	Komplementarna dekompozicija Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa	47
3.2.4	Projektovanje Prelaznog filtra sedmog reda za slučaj $L = 1$ i $M = 5$	50
3.3	Klasa Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa	52
3.3.1	Primeri klase Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa	57

3.3.2	Komplementarna dekompozicija Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa	61
3.4	Klasa prelaznih filtara sa tri konačne nule prenosa	64
3.5	Klasa prelaznih filtara sa četiri konačne nule prenosa	68
3.6	Analiza rezultata	70
4	Korekcija faznog izobličenja u IIR bankama filtara	72
4.1	Korekcija faznog izobličenja kvadrature banke filtara	74
4.1.1	Korekcija faznog izobličenja NF-VF filtarskog para	78
4.2	Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja NF-VF filtarskog para (varijanta 1)	84
4.3	Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja funkcije distorzije (varijanta 2) .	88
4.3.1	Korekcija faznog izobličenja QMF banke filtara sa prototipskom funkcijom petog reda	88
4.3.2	Korekcija faznog izobličenja QMF banke filtara sa Prelaznom klasom filtara sedmog reda	95
4.3.3	Korekcija faznog izobličenja QMF banke filtara sa Prelaznom klasom filtara devetog reda	98
5	Zaključak	100
5.1	Doprinosi disertacije	101
5.2	Pregled ostvarenih rezultata	102
5.3	Pravci budućih istraživanja	103
6	Prilozi	104
6.1	Polifazna reprezentacija prenosne funkcije	104
6.2	Dekompozicija rekurzivnih filtara na <i>allpass</i> filtre	105
6.2.1	Projektovanje NF/VF frekvencijskog para	108
6.3	Kriterijumi komplementarnosti	112
	Literatura	115

1

Uvod

U sistemima za digitalnu obradu signala, često je potrebno menjati frekvenciju odmeravanja zbog čega se se ovakvi sistemi nazivaju *multirate* ili diskretni sistemi sa višestrukim odmeravanjem. Njihov razvoj započeo je pre više od tri decenije i jos uvek se usavršavaju. Primenu nalaze u obradi govornih i audio signala, obradi slike, obradi video signala, tehnikama za otklanjanje šuma, skremblovanju, adaptivnoj obrada signala, implementaciji wavelet transformacija itd. Ova tehnika nudi mnoge prednosti kao što je smanjenje kompleksnosti prilikom proračuna, smanjenje zahteva za memorijskim skladištenjem, veća brzina rada itd. Detaljni aspekti teorije banki digitalnih filtara dati su u [1].

Banke filtara se generalno dele na dvokanalne i višekanalne banke. Dvokanalne banke filtara se uopšteno mogu podeliti na tri tipa: QMF banke, ortogonalne banke filtara i biortogonalne banke filtara. Ove banke se mogu projektovati tako da imaju savršenu rekonstrukciju (PR) ili približno savršenu rekonstrukciju (NPR). Kod NPR se dozvoljava izvesna distorzija u odnosu na idealno definisani sistem pa su filtri znatno nižeg reda nego kod banke sa savršenom rekonstrukcijom. QMF i biortogonalne banke filtara mogu se projektovati upotrebom filtara i sa linearnom i sa nelinearnom fazom dok ortogonalne banke filtara uvek koriste filtre nelinearne faze [2].

Dvokanalne QMF banke dekomponuju ulazni signal na dva frekvencijska podopsega, koji se pojedinačno obrađuju sa nižom frekvencijom odmeravanja i na izlazu formiraju ponovo jedan kompozitni signal. Za realizaciju filtara u dvokanalnoj banci mogu se koristiti filtri sa

konačnim impulsnim odzivom (FIR) ili filtri sa beskonačnim impulsnim odzivom (IIR). FIR filtri se više koriste u praksi zbog stabilnosti i jednostavne mogućnosti realizacije linearne fazne karakteristike. Njihov nedostatak je visok red prenosne funkcije što znači veći broj konstanti množenja i veće kašnjenje signala. Prednost IIR filtara je nizak red prenosne funkcije što znači mali broj konstanti množenja i malo kašnjenje signala. Nedostatak rešenja zasnovanih na IIR filtrima su složenija rešenja za realizaciju linearne fazne karakteristike i veći uticaj konačne dužine digitalne reči. Zato, prilikom projektovanja banke filtara treba obratiti pažnju na izbor specifikacija kako bi se obezbedila minimalna distorzija signala kao i implementacija strukture male kompleksnosti.

Osobine banke filtara zavise od karakteristika pojedinačnih filtara od kojih je banka formirana. Samim tim, izbor NF prototipskog filtra je najvažniji korak u projektovanju banke filtara jer sve ostale karakteristike sistema proističu iz njegovih karakteristika. Ovaj filter treba da omogući konverziju frekvencije odabiranja sa minimalnom distorzijom signala. Generalno gledano, postoji veliki broj mogućnosti za izbor prenosne funkcije prototipa NF filtra. Optimalan izbor je uvek prilagođen konkretnoj primeni. Ako je razdvajanje signala po podkanalima primaran zahtev, projektuju se selektivni filtri uz ograničenja koja nameću zahtevi PR ili NPR. Ako je očuvanje talasnog oblika signala primaran zahtev, projektuju se manje selektivni filtri sa, po mogućstvu, maksimalno ravnom karakteristikom grupnog kašnjenja i osobinama koje omogućavaju PR ili NPR. Aproksimacija željene prenosne funkcije predstavlja u većini slučajeva složen matematički problem [3].

1.1 Istorijat razvoja banki filtara

Da bi se shvatio princip funkcionisanja, prednosti i značaj *multirate* sistema, najpre treba sagledati nastanak i dalji tok razvoja banki filtara, podopsežnog kodovanja i ostalih aspekata *multirate* sistema [4].

Obrada digitalnog signala u sistemu sa samo jednom frekvencijom odmeravanja (*singlerate*) može se realizovati šemom sa jednim ulazom i jednim izlazom koju čine elementi za kašnjenje, elementi za sabiranje i množenje dva signala kao i množenja signala konstantom. U *multirate* sistemima uvode se dva nova bloka: decimator i interpolator. Decimator je uređaj koji redukuje učestanost odmeravanja nekim faktorom D i taj postupak se naziva decimacija (*down-sampling*). Interpolator, sa druge strane, povećava učestanost odmeravanja D puta a

sam proces se naziva interpolacija. Ove promene učestanosti odmeravanja mogu se primeniti na samom ulazu ili izlazu sistema ili u unutrašnjosti sistema zavisno od primene.

Jedna od primena decimatora može se pokazati na sledećem primeru; Ako se posmatra analogni signal koji treba konvertovati u digitalni, treba najpre ograničiti frekvencijski opseg tog signala jednim niskopropusnim filtrom (*antialiasing* filtrom) a zatim izvršiti njegovo odmeravanje i digitalizacija. U ovom slučaju niskopropusni filter mora imati veoma uzanu prelaznu oblast. Drugo rešenje ovog problema je primeniti niskopropusni filter sa, recimo, duplo širom prelaznom oblašću pa zatim povećati njegovu učestanost odmeravanja faktorom dva, pre nego se izvrši digitalizacija, kako bi se izbegao *aliasing*. Ovaj digitalni signal se zatim propusti kroz digitalni filter linearne faze i smanji mu se frekvencija odmeravanja dva puta. Na taj način izbacuje se upotreba *antialiasing* niskopropusnog filtra sa uskom prelaznom oblašću koji je ne samo skup već unosi i fazna izobličenja.

Treba naglasiti da je moguće izvršiti decimaciju i interpolaciju i faktorima koji nisu celi brojevi. Na primer, konvertovanje digitalnog signala frekvencije odmeravanja 48kHz (koji se koristi u studiju) u digitalni signal frekvencije odmeravanja 44.1kHz (na CD-u), što je česta pojava u audio obradi [5]. U [6], autori su poredili FIR i IIR filtre u ulozi interpolatora, i pri tome obradili teoriju interpolacije i celobrojnim i razlomljenim faktorom.

Najjednostavnije rešenje problema promene frekvencije odmeravanja izvršilo bi se tako što bi se digitalni signal prvo konvertovao u kontinualni a zatim ponovo uradilo njegovo odmeravanje drugom frekvencijom odmeravanja ali je ovaj metod skup i koristi analogne komponente koje unose izvesnu grešku. *Multirate* sistemi direktno menjaju frekvenciju odmeravanja u digitalnom domenu primenom decimatora, interpolatora i digitalnih filtara i ovaj način je tačniji i mnogo pogodniji. Ova tehnika ima mnogo primena a neke od njih se baziraju na tzv. podopsežnom kodovanju koje se implementira pomoću kvadrature banki filtara (QMF - Quadrature Mirror Filter banks). Rani radovi u kojima se ova tehnika pominje su [6–8] a jedna od najranijih primena bila je u obradi digitalne muzike [9, 10].

U kvadrature banci filtara digitalni signal $x(n)$ se propušta kroz par digitalnih filtara (NF i VF) koji se nazivaju filtri analize a izlazi ovih filtara su podopsežni signali, odnosno signali koji su ograničeni po nekom opsegu frekvencija. Zatim se vrši decimacija ovih signala faktorom dva i kvantizacija i signal se dalje prenosi. Na prijemnoj strani signali se rekombinuju u jedan $\hat{x}(n)$ primenom interpolatora faktorom dva i filtrima sinteze. Signal $\hat{x}(n)$ predstavlja aproksimaciju signala $x(n)$.

Ovakva šema podopsežnog kodovanja predložena je sedamdesetih godina [11–15] i pokazala se kao veoma efikasna u kodiranju govora [16]. Prvi uređaj za kodiranje govora, vokoder (VOice enCODER), izumeo je Homer Dudley 1939. godine, i prvobitno je bio namenjen za kompresiju govornih signala i njihov siguran prenos putem bakarnih telefonskih žica, a zatim se koristio u drugom svetskom ratu za prenos i kriptovanje govora. Osamdesetih godina, vokoder se dosta primenjivao kao sintetizer robotskog zvuka u tada popularnoj muzici i u naučno-fantastičnim filmovima. Njegova osnovna funkcija je da na osnovu ulaznog signala sintetizuje izlazni signal koji je ili identičan ulaznom signalu ili njegova modifikovana verzija. On u sebi sadrži dve banke filtara *bandpass* signala i princip rada zasniva na promeni periode odabiranja ulaznog signala.

Efikasnost podopsežnog kodovanja je takođe pokazana i kod obrade muzičkih signala. Kod obrade digitalnog muzičkog signala, koji uobičajeno koristi 16 bita po odmerku (pri frekvenciji odmeravanja od 44kHz), primenom podopsežnog kodovanja postignuto je značajno smanjenje broja bita po odmerku, pri čemu je kvalitet zvuka neznatno smanjen [17]. Ovo je našlo primenu kod digitalnih kompaktnih kaset (DCC). [18].

Signal na izlazu, $\hat{x}(n)$, koji se rekonstruiše iz podopsežnih signala, razlikuje se od ulaznog signala, $x(n)$, jer prisustvo decimatora i interpolatora unosi greške u vidu *aliasinga* i *imagininga*. Medjutim, došlo se do načina da se ove greške (osim greške pri kvantizaciji) prevaziđu pravilnim izborom filtara.

Sedamdesetih godina, uvedene su kvadraturne banke filtara koje signal razdvajaju na dva podopsega. Dalji napredak u razvoju banki filtara bio je uvođenje pojma polifazne dekompozicije [19], čime se intenzivira njihova praktična primena s obzirom da pruža mogućnost obrade pri najnižoj frekvenciji odmeravanja što u velikoj meri smanjuje potrebu za velikom brzinom procesora. Polifazna dekompozicija je upotrebljiva u skoro svakoj primeni *multirate* obrade signala i uvek postiže ogromnu efikasnost prilikom proračuna.

Croisier je pokazao u [11] da se greške *aliasinga* koje potiču od postupka decimacije, mogu potpuno eliminisati u dvokanalnoj QMF banci adekvatnim izborom filtara sinteze. Ako je ovim izborom postignuto da izlaz sistema bez prisustva *aliasinga* bude zakašnjena replika ulaznog signala, takav sistem bi bio sistem sa osobinom savršene rekonstrukcije (PR - Perfect Reconstruction). U slučaju da ova osobina ne važi, to znači da sistem ima izobličenja drugog tipa. Ako se pri projektovanju filtra ne zadaju stroge specifikacije kao što su velika vrednost slabljenja u nepropusnom opsegu ili velika strmina u prelaznoj oblasti i sl. nije teško projekto-

vati filtre u banci filtara tako da važi uslov savršene rekonstrukcije. Sa druge strane, ako se ove specifikacije ne zahtevaju onda se podopsežno kodovanje ne može iskoristiti u potpunosti, jer je recimo važno zadati vrednosti slabljenja u propusnom i nepropusnom opsegu.

Autori radova [20–22], nezavisno su dokazali da se kod dvokanalne QMF banke perfektna rekonstrukcija može ostvariti i kada se zadaju potrebne vrednosti slabljenja, pod uslovom da se sva četiri filtra banke filtara adekvatno projektuju.

Rezultati dobijeni za dvokanalne banke filtara generalizovani su za slučaj M -kanalne kvadraturne banke filtara [23–34]. Ovu ideju najpre je pomenuo Nussbaumer a zatim i Rothweiler u radu [35] gde je princip QMF banki proširen na proizvoljan broj jednakih opsega. Kombinacijom osobina kvadraturnih filtara sa polifaznim mrežama dobijena je nova struktura koja zahteva 35% manje izračunavanja u odnosu na tada postojeće. Ovde je opisana teorija operacija polifaznih kvadraturnih filtara kao, tehnike za njenu implementaciju i simulacija 16 Kbits/s koda primenom ovih filtara. U okviru ove ideje izdvajaju se i nove klase QMF banki kao što su pseudo QMF banke, paraunitarne, kosinusno-modulacione itd.

U pseudo QMF bankama moguće je aproksimativno ukidanje *aliasinga* koje je u nekim slučajevima dovoljno [36]. Autori radova [23, 37] nezavisno su pokazali kako formulisati uslove perfektne rekonstrukcije u matricnoj formi. Takođe se prvi put pokazalo da pristup rešavanja preko polifaznih komponenti vodi ka značajnom teorijskom uprošćavanju [30, 32, 38].

U radovima [32, 39, 40] razmatrani su sistemi u kojima je banka filtara ograničena tako da ima paraunitarne polifazne matrice. U ovoj klasi banki filtara, koje se nazivaju paraunitarne banke filtara, mogu se zadati proizvoljne vrednosti slabljenja i u isto vreme postići perfektna rekonstrukcija. Inače, paraunitarna osobina banki filtara i paraunitarne matrice izučavane su prvobitno u klasičnoj teoriji električnih mreža, a tek kasnije je utvrđena i njihova primena kod banki filtara.

Isti autori su zatim razvili tzv. kosinusno-modulacionu banku filtara [33, 41–43]. Ove banke filtara imaju prednost da je cena implementacije filtra određena cenom jednog prototipskog filtra, jer se svi ostali filtri dobijaju na osnovu njega.

Konačno, celokupna istraživanja na temu banki filtara proširena su na slučaj neuniformnih širina opsega kao i na decimaciju razlomljenim brojem [44–46].

Dalji razvoj išao je u pravcu podopsežnog kodovanja višedimenzionih signala što je našlo primenu u kodovanju i kompresiji slika. Sistematičnu postavku teorije multidimenzionih signala dao je Vetterli u [47]. Ova ideja je zatim primenjena na kodiranje slika u [48]. Od tada je

sledio veliki napredak u višedimenzionim *multirate* sistemima [49–56].

Podopsežno kodovanje je našlo primenu i u adaptivnim sistemima i statističkoj obradi signala [57–61], zatim u komunikacijama kod transmupleksinga [62], brze konverzije iz analognog u digitalni signal [63] itd. Kasnijih godina uočena je veza između *multirate* filter banki i wavelet transformacija [64–66]. Pokazano je da je wavelet analiza u tesnoj vezi sa tzv. octave-band filterbankama koje su uvedene ranih sedamdesetih za analizu zvučnih signala.

Ovim je dat pregled nastanka *multirate* sistema koji se odnosi na period od sedamdesetih do devedestih godina kao i na neke pravce u kojima je ova oblast krenula da se razvija u tom periodu [4]. Sve ovo rezultiralo je da cela teorija *multirate* sistema doprinese projektovanju sistema koji se lako projektuju i implementiraju pa je tako sa razvojem tehnologije na svim poljima i ona doživela ekspanziju u primeni u svim oblastima obrade signala.

1.2 Tok doktorske disertacije

U tezi su obrađene QMF banke filtera sa beskonačnim impulsnim odzivom (IIR) i približno savršenom rekonstrukcijom (NPR).

U drugoj glavi dati su osnovni teorijski principi koji se odnose na dvokanalnu rekurzivnu kvadraturnu banku filtera [67–69]. Objasnjen je pojam dvokanalne banke filtera i njenih sastavnih delova. Zatim je izvršena analiza procesa kroz koje prolazi digitalni signal doveden na ulaz ovakve banke filtera. U banci analize ulazni signal se razdvaja na dva podopsežna kanala, jedan sa niskopropusnim i drugi sa visokopropusnim filtrom posle kojih sledi decimator. Ovi signali, koji sada imaju duplo nižu frekvenciju odmeravanja, idu na obradu zavisno od primene banke filtera, posle koje se u svakom kanalu vrši interpolacija signala i filtriranje da bi se na izlazu ova dva signala rekonstruisala u jedan. Funkcija izlaznog signala, koja zavisi od ulaznog signala i prenosnih funkcija filterbanki analize i sinteze, u sebi nosi amplitudsko izobličenje, fazno izobličenje i preklapanje spektra (*aliasing*). Kako je cilj da izlazni signal banke filtera bude zakasnela replika ulaznog signala, ova izobličenja treba ukloniti.

Komponenta izlaznog signala nastala usled *aliasinga*, koji se javlja kao posledica procesa decimacije, poništava se adekvatnim izborom niskopropusnih i visokopropusnih filtera u bankama analize i sinteze. Ovde treba naglasiti da je početak projektovanja banke filtera izbor niskopropusnog prototip filtera, koji dalje specificira filtre analize i sinteze. Na osnovu

veze NF i VF filtara sa prototipskom funkcijom, zaključuje se da su ova dva filtra simetrična u odnosu na frekvenciju $\pi/2$ zbog čega se nazivaju kvadraturni filtri, odnosno banka filtara postaje kvadraturna banka filtara.

Prenosna funkcija distorzije izlaznog signala sadrži još amplitudsko i fazno izobličenje. Da bi banka filtara postigla savršenu rekonstrukciju, idealno je da prenosna funkcija distorzije bude jednaka liniji za kašnjenje. U tu svrhu, na filtre analize i sinteze primenjena je polifazna reprezentacija čime se dobija jednostavniji oblik funkcije distorzije. Ako se usvoji da su polifazne komponente *allpass* funkcije, iz funkcije distorzije se eliminiše amplitudsko izobličenje i kao smetnja preostaje samo fazno izobličenje definisano faznim karakteristikama ovih *allpass* funkcija. Ovako izvedena prenosna funkcija odnosi se na dvokanalne banke filtara kako sa beskonačnim (IIR) tako i sa konačnim impulsnim odzivom (FIR), što znači da se za oba tipa isti hardver koristi za realizaciju niskopropusnog (NF) i visokopropusnog (VF) dela banke filtara. Dakle, pri projektovanju rekurzivne banke filtara, koja je predmet proučavanja ove teze, potrebno je izvršiti dekompoziciju prenosne funkcije prototipskog NF filtra na dva *allpass* filtra čijim se sabiranjem, odnosno oduzimanjem dobijaju prenosne funkcije NF i VF dela filterske banke analize (sinteze).

U daljoj analizi precizirani su uslovi koje funkcija niskopropusnog prototipskog filtra treba da ispuni kao deo rekurzivne kvadraturne banke filtara. Kako je napred usvojeno da je ova prenosna funkcija zbir dve *allpass* funkcije pokazano je da, kao takva, zadovoljava uslov komplementarnosti po snazi. To dalje implicira da ona mora biti *halfband* filtar, odnosno da je na polovini frekvencijskog opsega ($\pi/2$) njena vrednost 0.5, što za odgovarajuću funkciju slabljenja iznosi 3dB. Polovi ovakvog filtra nalaze se na imaginarnoj osi, a nule na jedničnom krugu.

Treća glava posvećena je definisanju niskopropusne prototipske funkcije, što je već istaknuto kao polazna tačka projektovanja banke filtara. Izbor ove funkcije je bitan jer utiče na sveukupne osobine banke filtara s obzirom da se i filtri analize i filtri sinteze generišu na osnovu njene prenosne funkcije. Od poznatih aproksimacija, samo Butterworthova i Eliptička prenosna funkcija ispunjavaju potrebne i dovoljne uslove da bi se primenile kao prototipska funkcija. U ovoj glavi predlaže se nova klasa filtara koja ispunjava ove uslove i koja je nazvana Prelazna klasa filtara jer se njene karakteristike slabljenja prostiru između karakteristika slabljenja Butterworthovog i Eliptičkog filtra. Opisan je proces projektovanja Prelaznih filtara za klase funkcija sa jednom, dve, tri i četiri konačne nule prenosa. Za klasu Prelaznih filtara

sa jednom konačnom nulom prenosa, koeficijenti prenosne funkcije izvedeni su u zatvorenom obliku što značajno olakšava postupak projektovanja. Za sve klase Prelaznih filtara date su karakteristike slabljenja uporedno sa Butterworthovim i Eliptičkim karakteristikama slabljenja kako bi se ustanovile prednosti i mane u odnosu na ova dva filtra. Takođe su u tabelama date vrednosti polova i nula za sve klase Prelaznih filtara. Kako bi poređenje bilo korektno, svi rezultati su prikazani za minimalnu vrednost slabljenja u nepropusnom opsegu od 40dB. Neki od ovih tipova Prelaznih filtara obrađeni su u radovima [70–80].

U četvrtoj glavi predložena je korekcija faznog izobličenja uvođenjem IIR faznih korektora koji se efikasno dobijaju primenom MATLAB softvera. U prvoj glavi pokazano je da se amplitudsko izobličenje može u potpunosti potisnuti i da je preostalo fazno izobličenje kao posledica nelinearnih faznih karakteristika *allpass* filtara u prenosnoj funkciji distorzije QMF banke. Kaskadnim povezivanjem faznih korektora sa postojećim *allpass* funkcijama može se dobiti konstantno sveukupno grupno kašnjenje. Razmatrana je korekcija grupnog kašnjenja kod QMF banke Prelaznog tipa filtara, Butterworthovog i Eliptičkog filtra pri čemu je izvršena i analiza uticaja reda faznog korektora na tačnost rekonstrukcije signala.

2

Osnovni teorijski principi sistema za podopsežno kodovanje

U mnogim praktičnim aplikacijama za digitalnu obradu signala javlja se potreba za promenom frekvencije odmeravanja (*sampling rate*) signala. Sistem koji koristi više frekvencija odmeravanja prilikom obrade signala naziva se *multirate* sistem (sistem sa višestrukim odmeravanjem). Osnovni spektar signala koji se obrađuje, razdvaja se na više frekvencijskih podopsega sa manjom frekvencijom odmeravanja koji se zatim obrađuju nezavisno. Ovakva implementacija obezbeđuje da se aritmetičke operacije izvode na nižoj frekvenciji odmeravanja i na taj način se smanjuje opterećenje pri radu onoliko puta koliki je faktor konverzije čime je dalja obrada signala značajno olakšana i ubrzana. Najčešća upotreba višebrzinskih sistema prisutna je kod kodiranja audio i video signala.

2.1 Kvadratura banka filtara

Osnovni gradivni blokovi *multirate* sistema su banke filtara. Prilikom projektovanja banki filtara važno je postići dobru frekvencijsku selektivnost između podopsega i takođe zadovoljavajuću rekonstrukciju ulaznog signala pri čemu je idealno da izlazni signal bude zakasnela replika ulaznog signala, $y[n] = x[n - d]$ [69, str.141-146].

Banku filtara za podopsežno kodovanje čine filtarska banka analize i filtarska banka sinteze. Banka analize vrši dekompoziciju ulaznog signala na podopsežne signale koji se nezavisno obrađuju, a zatim se obrađeni signali dovode na banku sinteze koja vrši rekonstrukciju podopsežnih signala u jedan izlazni signal. Osnovni problemi koji se javljaju prilikom projek-

tovanja ovih banki je pojava *aliasinga* ili preklapanja spektra kao posledica decimacije i pojava neželjenih spektralnih likova (imaging) posle interpolacije. Kako bi se ovi problemi potisnuli ili potpuno uklonili koriste se odgovarajući filtri čije se prenosne funkcije biraju tako da se omogući konverzija frekvencije odmeravanja sa minimalnom distorzijom signala.

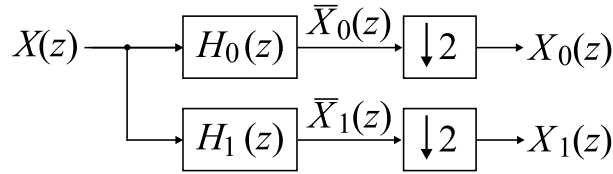
Dvokanalna banka filtra za podopsežno kodovanje koja ispunjava uslov komplementarnosti po snazi je Kvadratura banka filtra (Quadrature Mirror Filter bank). Čine je banka analize gde se ulazni signal razdvaja na dva dela sa filtrima $[H_0(z), H_1(z)]$ i banka sinteze sa filtrima $[G_0(z), G_1(z)]$. Na strani banke analize, vrši se proces decimacije faktorom dva, tako da se svaki od signala može kasnije obrađivati pri frekvenciji odmeravanja upola nižom od one koju poseduje ulazni signal. Pre nego se izvrši sinteza signala na izlazu, uvodi se za svaki kanal interpolator, odnosno frekvencija odmeravanja se množi sa dva, da bi se na kraju kombinacijom ova dva signala dobio jedan izlazni. Operacija decimacije na strani banke analize uvodi pojavu preklapanja spektra (*aliasinga*) koja se može eliminisati na strani banke sinteze. Ovo se postiže odgovarajućim izborom prenosnih funkcija $H_0(z), H_1(z), G_0(z), G_1(z)$.

2.1.1 Filtarska banka analize

Filtarska banka analize definiše se kao sistem sa jednim ulazom i dva izlaza koje čine dva paralelno vezana filtra, $[H_0(z), H_1(z)]$, nakon kojih se odvija decimacija faktorom dva, slika 2.1. Ovi filtri imaju ulogu suzbijanja *aliasinga*, tj. ograničavaju spektar signala na polovinu polazne frekvencije odmeravanja.

Rastavljanje ulaznog signala $X(z)$ vrši se uvođenjem polifazne dekompozicije. Polifazne komponente se dobijaju odmeravanjem ulaznog niza posle čega svaka polifazna komponenta sadrži po jednu nulu između svaka dva susedna odmerka. Kako su za dalju obradu potrebni samo nenulti odmerci, nulti odmerci se moraju ukloniti iz polifaznih nizova pomoću decimacije faktorom dva. Pre decimacije, druga polifazna komponenta pomera se na levo za jedan odmerak kako bi svi odmerci bili sačuvani i kako bi rekonstrukcija bila moguća. Kao rezultat, obe polifazne komponente operišu sa dva puta većom periodom odmeravanja od periode originalnog signala.

Nakon polifazne dekompozicije signala $X(z)$ na niskopropusni, $H_0(z)$, i visokopropusni



Sl. 2.1: Dvokanalna filtarska banka analize.

filtrar, $H_1(z)$, izlazni signali imaju oblik:

$$\bar{X}_0(z) = X(z) \cdot H_0(z), \quad (2.1)$$

$$\bar{X}_1(z) = X(z) \cdot H_1(z).$$

Ovi signali se, kao što je već opisano, dovode na decimatore pa su Z-transformacije signala na izlazu iz decimatora:

$$X_0(z) = \frac{1}{2} [\bar{X}_0(z^{1/2}) + \bar{X}_0(-z^{1/2})] \quad (2.2)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{2} [\bar{X}_1(z^{1/2}) + \bar{X}_1(-z^{1/2})]$$

gde drugi član nastaje usled preklapanja spektra (*aliasinga*). Zamenom jednačine (2.1) u (2.2) sledi

$$X_0(z) = \frac{1}{2} X(z^{1/2}) \cdot H_0(z^{1/2}) + \frac{1}{2} X(-z^{1/2}) \cdot H_0(-z^{1/2}) \quad (2.3)$$

$$X_1(z) = \frac{1}{2} X(z^{1/2}) \cdot H_1(z^{1/2}) + \frac{1}{2} X(-z^{1/2}) \cdot H_1(-z^{1/2})$$

što se može prikazati i u matičnoj formi:

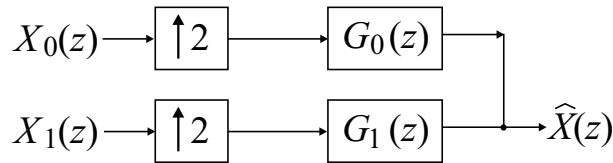
$$\begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z^{1/2}) & H_0(-z^{1/2}) \\ H_1(z^{1/2}) & H_1(-z^{1/2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X(z^{1/2}) \\ X(-z^{1/2}) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Filtarska banka sinteze

Filtarska banka sinteze kombinuje dva odvojena signala u jedan, dakle ima dva ulaza i jedan izlaz, slika 2.2. Filtriranje se vrši nakon operacije interpolacije. Uloga filtarskog para sinteze $[G_0(z), G_1(z)]$ je da oslabi nepoželjne periodične spektre koji se javljaju u novom opsegu (images).

Ulaznim signalima u banku sinteze se smanjuje perioda odmeravanja tako što se između dva susedna odmerka doda jedna nula, odnosno signali na izlazu interpolatora imaju dva puta višu frekvenciju odmeravanja od onih koji su dovedeni na ulaz banke sinteze. Spektar signala na izlazu interpolatora je dva puta periodično ponovljen spektar originalnog signala i u novom

opsegu se javlja jedan neželjeni spektralni lik. Prilikom filtriranja, koje sledi posle interpolacije, odmerci nultih vrednosti se popunjavaju nenultim vrednostima. U frekvencijskom domenu filtriranje se vidi kao odstranjivanje neželjenih periodičnih spektara na izlazu.



Sl. 2.2: Dvokanalna filtarska banka sinteze.

Izlazni signal iz banke sinteze ima oblik

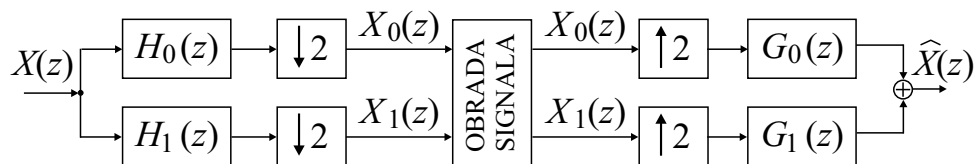
$$\hat{X}(z) = G_0(z) \cdot X_0(z^2) + G_1(z) \cdot X_1(z^2) \quad (2.5)$$

ili u matričnom obliku:

$$\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0(z^2) \\ X_1(z^2) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

2.1.3 Dvokanalna banka filtara za podopsežno kodovanje

Filtarska banka analize zajedno sa filtarskom bankom sinteze formira banku filtara za podopsežno kodovanje, slika 2.3. Ako su frekvencijski odzivi polifaznih komponenti banke filtara komplementarni po snazi (Prilog 6.3), ona je tada Kvadratura banka filtara.



Sl. 2.3: Dvokanalna banka filtara za podopsežno kodovanje.

Filtarska banka analize preko svojih filtara $H_0(z)$ i $H_1(z)$ rastavlja ulazni signal $X(z)$ na dva podopsežna signala $X_0(z)$ i $X_1(z)$. Ovi signali se obrađuju zasebno zavisno od aplikacije, ali se u ovom slučaju uzima da su signali pre i posle obrade identični, kako bi se tačno utvrdile greške koje unosi banka filtara. Tako se signali sa izlaza banke analize vode direktno na banku sinteze koja filtrima $G_0(z)$ i $G_1(z)$, iz podopsežnih signala, rekonstruiše izlazni signal $\hat{X}(z)$.

Osnovni zahtev pri projektovanju banke filtara za podopsežno kodovanje je da banke analize i sinteze budu takve da izlazni signal $\hat{X}(z)$ bude što je moguće bliži ili, ako je moguće, potpuno

isti kao originalni signal $X(z)$. U isto vreme, važno je ostvariti i dobru selektivnost tako da snaga šuma u podopsežnim kanalima nije mnogo veća od snage šuma originalnog signala.

Rekonstruisani signal, $\hat{X}(z)$, razlikuje se od ulaznog, $X(z)$, iz tri razloga: preklapanje spektra (*aliasing*), amplitudsko i fazno izobličenje. U daljem tekstu pokazaće se da je moguće projektovati filter tako da se sve ove distorzije mogu znatno redukovati ili eliminisati.

Veza između izlaznog, $\hat{X}(z)$, i ulaznog signala, $X(z)$, dvokanalne banke filtra prikazane na slici 2.3 je:

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(z) &= G_0(z)X_0(z^2) + G_1(z)X_1(z^2) = \\
 &= \frac{1}{2}G_0(z) \cdot [X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z)] \\
 &\quad + \frac{1}{2}G_1(z) \cdot [X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z)] = \\
 &= \frac{1}{2}[G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)] \cdot X(z) \\
 &\quad + \frac{1}{2}[G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)] \cdot X(-z) = \\
 &= T(z)X(z) + F(z)X(-z).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

odnosno

$$\hat{X}(z) = \begin{bmatrix} X(z) & X(-z) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Funkcija $F(z)$ naziva se pojačanje *aliasinga* i predstavlja komponentu koja je posledica *aliasinga* usled decimacije i nepoželjnih spektara usled interpolacije. Očigledno je da izborom filtra na sledeći način: $G_0(z) = H_1(-z)$ i $G_1(z) = -H_0(-z)$, ova komponenta postaje jednaka nuli,

$$F(z) = \frac{1}{2}[G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z)] = 0, \tag{2.9}$$

i u tom slučaju dobija se banka filtra bez *aliasinga*.

Pod pretpostavkom da su uklonjeni efekti *aliasinga* i nepoželjnih spektara usled interpolacije, izlazna funkcija banke filtra je: $\hat{X}(z) = T(z)X(z)$. Funkcija $T(z)$ predstavlja prenosnu funkciju banke filtra i naziva se prenosna funkcija distorzije celokupne banke filtra. Ako ova funkcija nije *allpass*, odnosno ako amplituda ove funkcije nije jednaka konstanti, tada je u odziv banke filtra unešeno amplitudsko izobličenje. Takođe ako fazna karakteristika funkcije $T(z)$ nije linearna, postoji fazno izobličenje.

Zaključak je da prenosna funkcija distorzije, $T(z)$, opisuje kvalitet rekonstrukcije i ako je

jednaka funkciji kašnjenja tj. $T(z) = z^{-k}$, tada banka filtra postiže savršenu rekonstrukciju, i važi

$$T(z) = \frac{1}{2}[G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z)] = z^{-k}, \quad (2.10)$$

što u vremenskom domenu znači

$$\hat{x}(n) = x(n-k). \quad (2.11)$$

Na osnovu ovoga može se formulirati cilj projektovanja dvokanalne banke filtra za podopsežno kodovanje: banke analize i sinteze moraju se odabrati tako da bude zadovoljena jednačina

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-k} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Kao dodatni uslov treba uzeti i zahtev za dobrom selektivnošću.

2.1.4 Standardne Kvadrature banke filtra sa približno savršenom rekonstrukcijom

Prvo predloženo rešenje koje zadovoljava uslov za eliminaciju *aliasinga* daje filtre koji su komplementarni po snazi zbog čega su nazvani Kvadrature filtri. Ako postupak projektovanja započne sa odgovarajućim niskopropusnim prototipom $H(z)$, tada se mogu specificirati sledeća četiri filtra:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= H(z), \\ H_1(z) &= H(-z), \\ G_0(z) &= H(z), \\ G_1(z) &= -H(-z). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Zamenom ove četiri jednačine u uslov (2.9) zaključujemo da važi $F(z) = 0$, odnosno da su *aliasing* komponente potpuno poništene. Rezultat je izvanredan s obzirom da je teorema odmeravanja narušena u kanalima banke filtra, ali je zadovoljena u celokupnoj banci filtra.

Treba uočiti da je $H(-z)$ visokopropusni filter ako je $H(z)$ niskopropusni. Ovo se može

zaključiti ako se $z = e^{j\omega}$ zameni sa $e^{j(\omega-\pi)}$, odnosno promena znaka z ekvivalentna je pomeranju frekvencijskog odziva za π . Amplitudske karakteristike NF i VF filtera su prema tome $H_0(\omega) = H(\omega)$ i $H_1(\omega) = H(\omega - \pi)$, respektivno, što znači da su simetrične u odnosu na frekvenciju $\pi/2$ (mirror-image symmetry) [67, str.835]

Zamenom (2.13) u funkciju distorzije (2.10) dobija se uslov koji prototip filter $H(z)$ treba da ispuni da bi se ostvarila perfektna rekonstrukcija:

$$T(z) = \frac{1}{2}(H^2(z) - H^2(-z)) = z^{-k}. \quad (2.14)$$

Dalja identifikacija uslova koje treba da ispuni funkcija $H(z) = H_0(z)$ dobija se uvođenjem polifazne reprezentacije signala (Prilog 6.1). Kako je polifazna reprezentacija niskopropusnog filtera

$$H_0(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2), \quad (2.15)$$

a odgovarajućeg visokopropusnog

$$H_1(z) = E_0(z^2) - z^{-1}E_1(z^2). \quad (2.16)$$

Filteri analize dobijaju oblik

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_0(z^2) \\ z^{-1}E_1(z^2) \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

a filteri sinteze

$$\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}E_1(z^2) & E_0(z^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Kvadrature IIR banke filtera sa potisnutom amplitudskom distorzijom

Zamenom jednačine (2.15) u (2.14) funkcija distorzije izražena preko polifaznih komponenti dobija oblik

$$T(z) = 2z^{-1}E_0(z^2)E_1(z^2), \quad (2.19)$$

i ovaj izraz važi za bilo koju rekurzivnu ili nerekurzivnu kvadraturnu banku, takođe sa linearnom ili nelinearnom fazom.

Kako je idealno da funkcija distorzije ima oblik z^{-k} odnosno da ima jediničnu amplitudu i linearnu fazu, i kako su ovde predmet razmatranja rekurzivni filtri, uslov za potiskivanje amplitudske distorzije se postiže ako su filtri $E_0(z^2)$ i $E_1(z^2)$ *allpass*. (Uočiti da je kod nerekurzivnih (FIR) filtara dovoljan uslov za potiskivanje amplitudske distorzije da filtri $E_0(z^2)$ i $E_1(z^2)$ budu linije za kašnjenje.) Dalje, usvajanjem polifaznih komponenti kao

$$E_0(z) = \frac{A_0(z)}{2} \quad \text{i} \quad E_1(z) = \frac{A_1(z)}{2}, \quad (2.20)$$

gde su $A_0(z)$ i $A_1(z)$ *allpass* filtri, odnosno važi $|A_0(e^{j\omega})| = |A_1(e^{j\omega})| = 1$, funkcija distorzije dobija formu

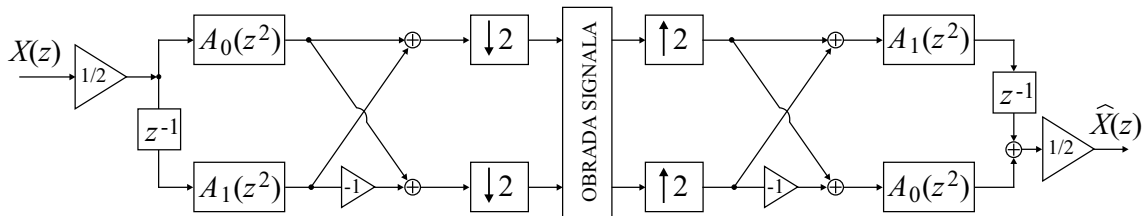
$$T(z) = \frac{1}{2}z^{-1}A_0(z^2)A_1(z^2), \quad (2.21)$$

čime je pokazano da je prenosna funkcija distorzije postala *allpass* funkcija, odnosno amplitudska distorzija je potisnuta i preostaje fazna distorzija kao smetnja koja je definisana faznim karakteristikama *allpass* funkcija $A_0(z)$ i $A_1(z)$.

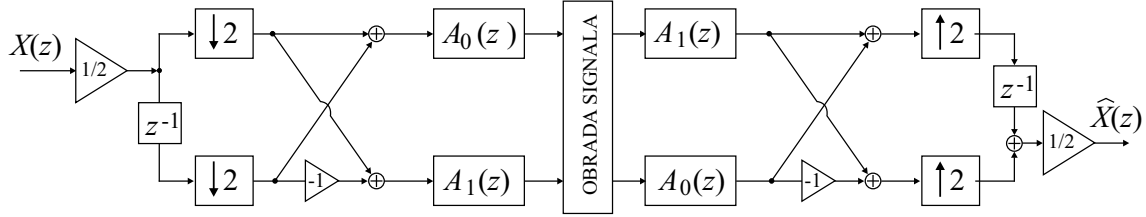
Niskopropusni, $H_0(z)$, i visokopropusni, $H_1(z)$, filtri banke analize imaju formu:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \frac{1}{2}(A_0(z^2) + z^{-1}A_1(z^2)) \\ H_1(z) &= \frac{1}{2}(A_0(z^2) - z^{-1}A_1(z^2)). \end{aligned} \quad (2.22)$$

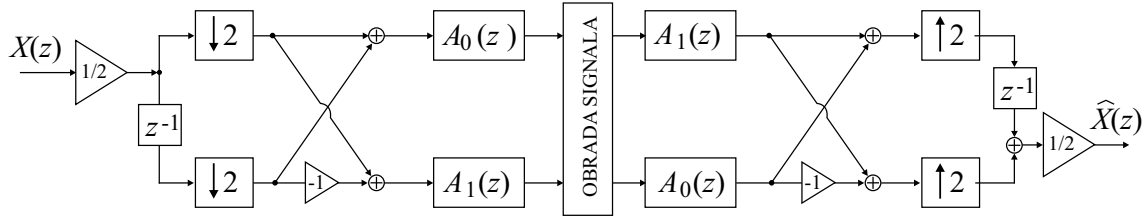
Šema kvadrature banke filtara, kod koje je eliminisan *aliasing* i amplitudska distorzija, sada dobija oblik prikazan na Sl. 2.4, a primenom poznatih identiteta može se pokazati da je ova šema ekvivalentna Sl. 2.5 odnosno Sl. 2.6. Ovde treba istaći prednost banke filtara da se isti hardver koristi za realizaciju i niskopropusnog (NF) i visokopropusnog (VF) filtra, što daje veliku uštedu prilikom realizacije.



Sl. 2.4: Kvadratura banka filtara sa eliminisanim *aliasingom* i amplitudskom distorzijom.



Sl. 2.5: Šema ekvivalentna šemi sa Sl. 2.4 kada se na nju primeni identitet dat u [4, str.119].



Sl. 2.6: Šema ekvivalentna šemama na Sl. 2.4 i Sl. 2.5.

2.1.5 Osobine filtara Kvadrature banke filtara

Potrebno je dalje precizirati uslove koje filtarska funkcija H_0 treba da ispuni kao polazna tačka u projektovanju rekurzivne Kvadrature banke filtara.

Može se lako pokazati iz jednačina (2.22), i kada se uzme u obzir da je proizvod dve *allpass* funkcije $A(z)A(z^{-1}) = 1$, da važi:

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_0(-z)H_0(-z^{-1}) = 1, \quad (2.23)$$

što u frekvencijskom domenu dobija formu

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_0(e^{j(\omega-\pi)})|^2 = 1, \quad (2.24)$$

odnosno da je **filtarska funkcija H_0 komplementarna po kriterijumu snage** (Prilog 6.3). Ovo takođe znači da je funkcija $H_0(z)H_0(z^{-1})$ ili funkcija kvadrata amplitudske karakteristike, $|H_0(e^{j\omega})|^2$, *halfband* filtar tj. simetrična u odnosu na $\pi/2$. Za granice propusnog i nepropusnog opsega važi relacija $\omega_s = \pi - \omega_p$, odnosno ω_p i ω_s su podjednako udaljeni od $\pi/2$. Na sredini frekvencijskog opsega njena vrednost je $1/2$

$$\left| H_0(e^{j\omega}) \right|_{\omega=\pi/2}^2 = \frac{1}{2} \quad (2.25)$$

što za odgovarajuću funkciju slabljenja iznosi 3dB ispod maksimalne vrednosti, slika 2.7. Takođe, ova funkcija ima jednaka odstupanja u oscilacijama u propusnom i nepropusnom

opsegu, $\Delta_p = \Delta_s$ (minimaks karakteristika).

Dalje, s obzirom na (6.11) i (6.13) i da se radi o funkciji sa realnim koeficijentima, sledi da je **filterska funkcija** $H_0(z)$ **komplementarna po allpass kriterijumu** (Prilog 6.3) što podrazumeva da važi:

$$H_0(z) + H_0(-z) = A(z). \quad (2.26)$$

Na slici 2.8 pokazano je da je i funkcija amplitudske karakteristike, $|H(e^{j\omega})|$, simetrična u odnosu na $\pi/2$ kao i da su pikovi oscilacija u propusnom i nepropusnom opsegu jednaki, $\delta_p = \delta_s = \delta$. Odgovarajuća karakteristika slabljenja $a = -20 \log |H_0(e^{j\omega})|$ ima oblik dat na slici 2.9.

Kako je *halfband* filter simetričan po snazi sledi da su i pikovi oscilacija kvadrata amplitudske karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu jednaki, odnosno $\Delta_p = \Delta_s$, što je označeno na slici 2.7. Maksimalno slabljenje u propusnom opsegu iznosi $R_p = -10 \log(1 - \delta_p)^2$ a minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu $R_s = -10 \log \delta_s^2$. Iz uslova $\Delta_p = \Delta_s$ sledi $1 - (1 - \delta_p)^2 = \delta_s^2$, što daje relaciju:

$$10^{-\frac{R_p}{10}} + 10^{-\frac{R_s}{10}} = 1, \quad (2.27)$$

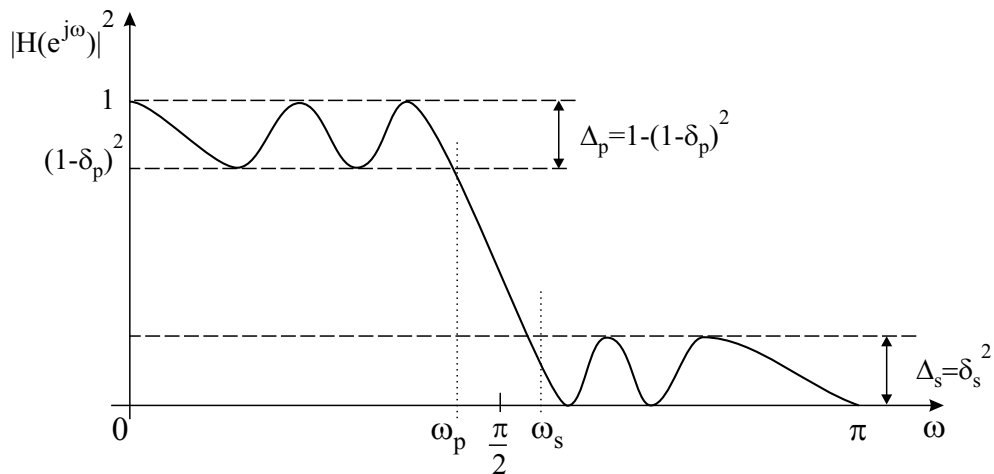
pa se za zadato R_s , maksimalno slabljenje u propusnom opsegu izračunava kao

$$R_p = -10 \log_{10} \left(1 - 10^{-R_s/10} \right). \quad (2.28)$$

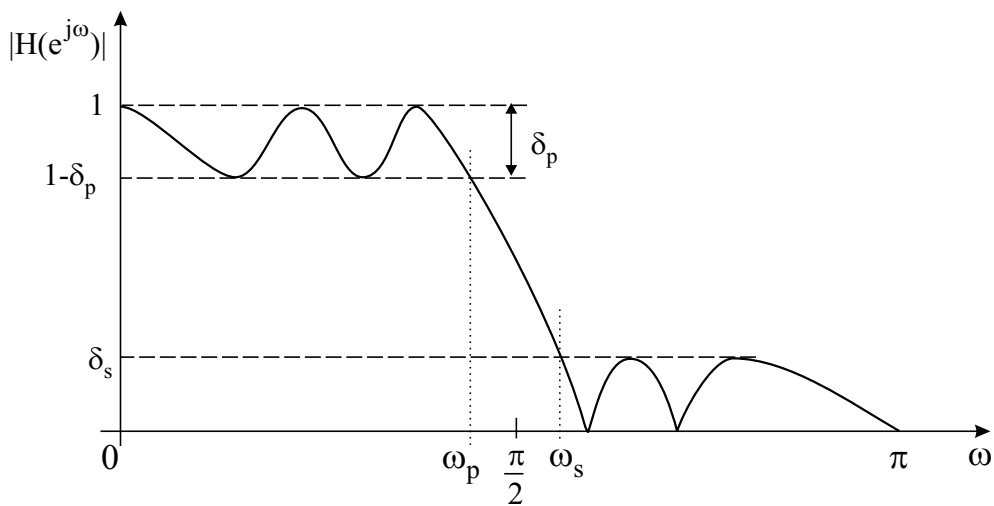
Što se tiče visokopropusnog filtra $H_1(z)$, s obzirom da je usvojeno da je $H_1(z) = H_0(-z)$ sledi da je i par $[H_0(z), H_1(z)]$ komplementaran po snazi (Prilog 6.3)

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 1. \quad (2.29)$$

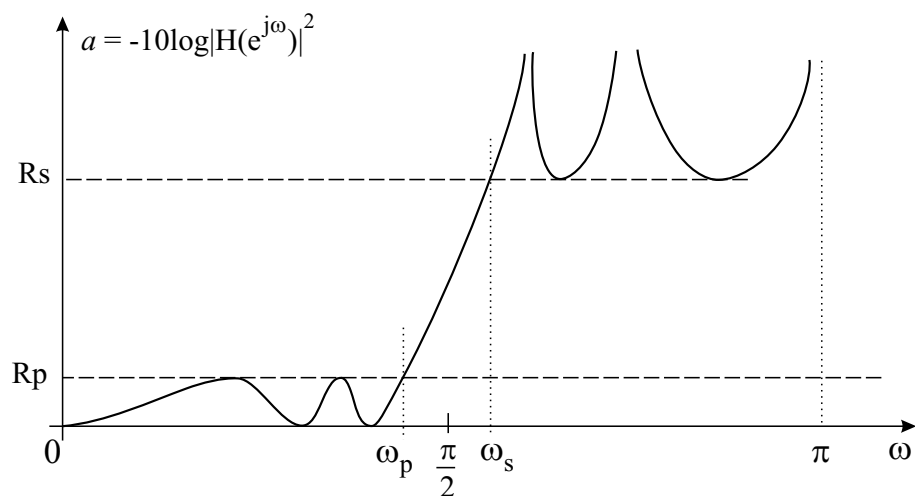
Na osnovu prethodne diskusije može se zaključiti da su prenosne funkcije $[H_0(z), H_1(z)]$ rekurzivne funkcije neparnog reda minimalne faze, za čije amplitudske odzive važi [68, str.259]:



Sl. 2.7: Grafik funkcije kvadrata amplitudske karakteristike halfband rekurzivnog filtra petog reda.



Sl. 2.8: Grafik funkcije amplitudske karakteristike halfband rekurzivnog eliptičkog filtra petog reda.



Sl. 2.9: Grafik funkcije karakteristike slabljenja halfband rekurzivnog eliptičkog filtra petog reda.

$$\begin{aligned}
1 - \delta < |H_0(e^{j\omega})| < 1 \quad \text{i} \quad |H_1(e^{j\omega})| \leq \delta \quad \text{za} \quad \omega \in [0, \omega_p] \\
1 - \delta < |H_1(e^{j\omega})| < 1 \quad \text{i} \quad |H_0(e^{j\omega})| \leq \delta \quad \text{za} \quad \omega \in [\omega_s, \pi] \\
|H_0(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{za} \quad \omega = \omega_c \\
\delta = 10^{-R_s/20}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

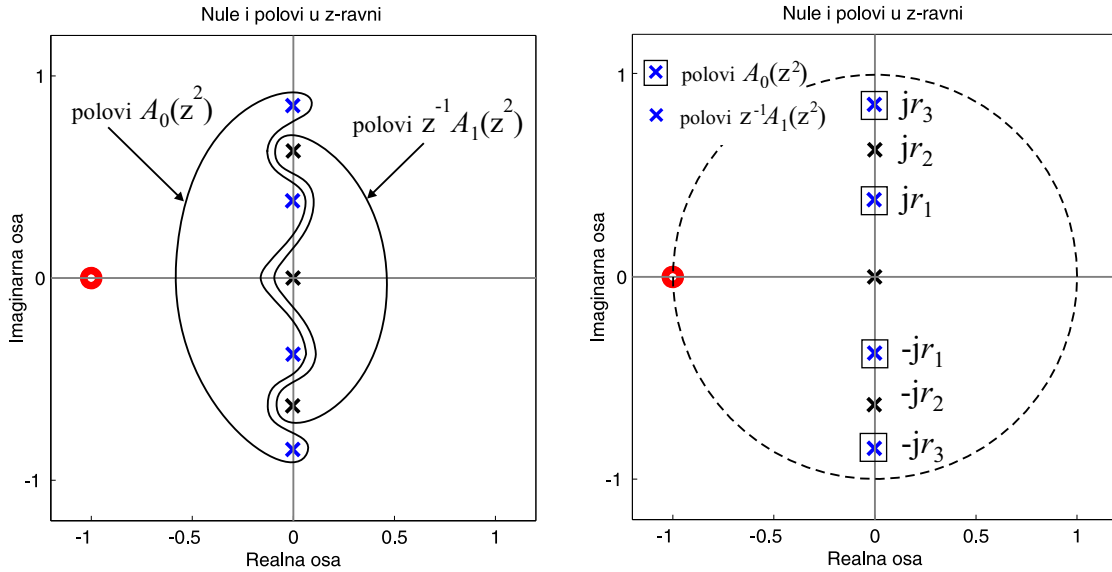
gde su ω_p i ω_s ivice propusnog i nepropusnog opsega respektivno, ω_c granična frekvencija a R_s minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu.

Implementaciona struktura ovog para $[H_0(z), H_1(z)]$ zasnovana je na paralelnoj vezi dva *allpass* filtra, kao što je dato jednačinama (2.22), a projektovanje ovih filtara detaljno je obrazloženo u narednoj sekciji.

Projektovanje *allpass* filtara u rekurzivnoj Kvadraturnoj banci filtara

Filtarski par $[H_0(z), H_1(z)]$ je dvostruko komplementaran, i po kriterijumu *allpass* funkcije i po kriterijumu snage. Iz druge osobine sledi da se ove dve prenosne funkcije mogu prikazati kao suma i razlika dva *allpass* filtra $a_0(z)$ i $a_1(z)$ odnosno kao $H_0(z) = (a_1(z) + a_2(z))/2$ i $H_1(z) = (a_1(z) - a_2(z))/2$ (Prilog 6.2). Ako su pri tome $[H_0(z), H_1(z)]$ *halfband* filtri minimalne faze, tada su nule njihovih prenosnih funkcija smeštene na jediničnom krugu a polovi njihovih prenosnih funkcija na imaginarnoj osi u z -ravni pa sledi da se ove jednačine mogu izraziti u formi datoj jednačinama (2.22). Pri tome se praktično usvaja da su *allpass* filtri $a_0(z) = A_0(z^2)$ i $a_1(z) = z^{-1}A_1(z^2)$ pa se može primeniti poznata tehnika dekompozicije rekurzivnih filtara na *allpass* filtre (Prilog 6.2).

Ako je red filtra $H_0(z)$ jednak N , obzirom da se radi o filtru neparnog reda, jedan pol je u koordinatnom početku a ostali polovi na imaginarnoj osi su konjugovano kompleksni. Ako poluprečnike konjugovano kompleksnih polova označimo sa r_i tako da $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{(N-1)/2} < 1$ kao što je prikazano na slici 2.10, tada polovi sa neparnim koeficijentima pripadaju filtru $A_0(z^2)$ a pol u koordinatnom početku $r_0 = 0$ i polovi sa parnim koeficijentima pripadaju filtru $A_1(z^2)$.



Sl. 2.10: Postupak dekompozicije halfband filtra na dva allpass subfiltra.

Filtar $H_0(z)$ je u tom slučaju jednak:

$$H_0(z) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\prod_{k=2,4,\dots}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{\alpha_k + z^{-2}}{1 + \alpha_k z^{-2}}}_{A_0(z^2)} + z^{-1} \underbrace{\prod_{k=1,3,\dots}^{\frac{N-1}{2}-1} \frac{\alpha_k + z^{-2}}{1 + \alpha_k z^{-2}}}_{A_1(z^2)} \right), \quad (2.31)$$

gde se konstante α_k računaju kao kvadrati modula njihovih polova, $\alpha_k = (r_k)^2$, $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, (N-1)/2$.

Amplitudska karakteristika VF filtra $H_1(z)$ je simetrična istoj karakteristici NF filtra $H_0(z)$ u odnosu na frekvenciju $\pi/2$, odnosno važi:

$$|H_1(e^{j(\frac{\pi}{2}-\omega)})| = |H_0(e^{j(\frac{\pi}{2}+\omega)})|. \quad (2.32)$$

Od poznatih funkcija, rekurzivne *halfband* filtre daju jedino Butterworthov i Eliptički filter, dok Čebiševljevi filtri prve i druge vrste ne mogu formirati simetrični amplitudski odziv iz razloga što nemaju oscilacije istovremeno i u propusnom i u nepropusnom opsegu. U ovoj tezi predložena je nova klasa funkcija koja ostvaruje sve uslove za projektovanje *halfband* filtra a čiji se amplitudski odziv prostire između amplitudskih odziva Butterworthovog i Eliptičkog filtra.

3

Nova banka filtara pogodna za podopsežno kodovanje

Uloga filtara koji ulaze u sastav kvadraturne banke filtara je da eliminišu uticaj decimacije i interpolacije. Ograničenja kojima podležu ovi filtri, kako bi ostvarili ovu ulogu, data su u prethodnom poglavlju. Kako su svi filtri u filtar banci direktno povezani sa prototipskom niskopropusnom funkcijom tako će sve osobine filtar banke zavisiti od ove prototipske funkcije i njen izbor predstavlja početnu tačku u projektovanju banke filtara.

Od poznatih filtara, zadate uslove koje prototipska funkcija mora da ispuni, zadovoljavaju samo Butterworthov i Eliptički filtar s obzirom da samo oni imaju jednak broj ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu, dok Chebyshevljevi filtri prvog tipa imaju oscilacije samo u propusnom opsegu, a inverzni Chebyshevljevi filtri samo u nepropusnom opsegu, čime je onemogućena simetrija koju zahteva *halfband* filtar.

U ovom poglavlju predložena je nova aproksimacija prototipske filtarske funkcije pogodna za komplementarnu dekompoziciju a samim tim i primenu u Kvadraturnim bankama filtara. Karakteristika slabljenja ovih filtara prostire se između karakteristika slabljenja Butterworthovog i Eliptičkog filtra pa se iz tog razloga ona označava kao Prelazna klasa filtara. Opisana je tehnika projektovanja nove klase i na osnovu rezultata analizirane su njene prednosti i mane u odnosu na poznate filtre. Takođe, na svim graficima su date uporedne karakteristike svih triju klasa filtara kako bi se omogućilo njihovo poređenje.

U primerima koji su dati za klase Prelaznih filtara, karakteristike slabljenja niskopropusnih filtara nacrtane su u dve razmere iz razloga što su amplitude maksimuma u propusnom opsegu veće oko 10^4 puta od amplitude minimuma u nepropusnom opsegu. Tako je radi preglednosti,

karakteristika slabljenja na levoj polovini grafika uvećana u odnosu na istu karakteristiku koja se nalazi na desnoj polovini.

Sve karakteristike slabljenja su date za minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu od $R_s = 40\text{dB}$, da bi poređenje među klasama Prelaznih filtara bilo adekvantno. Kako je cilj izvršiti komplementarnu dekompoziciju, vrednost maksimuma slabljenja u propusnom opsegu računa se iz (2.28). Međutim, Prelazni filter se može projektovati i za proizvoljnu vrednost R_p , nezavisno od R_s , ali u tom slučaju komplementarna dekompozicija nije moguća.

Za svaku klasu filtara date su tabele sa položajem polova i nula. Obzirom da se prezentovani rezultati odnose na *halfband* filtre kod kojih se svi polovi nalaze na imaginarnoj osi, u svim tabelama su izostavljeni polovi u koordinatnom početku, odnosno $p_0 = 0.0000i$, kako ne bi bilo nepotrebnog ponavljanja. U delu, gde su navedeni uglovi koje nule prenosne funkcije zaklapaju sa pozitivnim smerom realne ose, izostavljeni su uglovi nula koje se nalaze na realnoj osi tj. koje zaklapaju ugao 180° .

3.1 Aproksimacija

Opšti oblik karakteristične funkcije, koja definiše novu klasu kako analognih tako i rekurzivnih digitalnih filtara, dat je izrazom

$$\psi_N(x) = x^M \prod_{i=1}^L \frac{x_{0i}^2 - x^2}{1 - x_{0i}^2 x^2} \quad (3.1)$$

gde je x frekvencijska promenljiva, N je red filtra ($N = M + 2L$), x_{0i} ($i = 1, 2, \dots, L$) su nule karakteristične funkcije ($x_{0i} < 1$) dok su $1/x_{0i} > 1$ polovi karakteristične funkcije. Na frekvenciji ($x = 1$), koja je u isto vreme i $x_{3\text{dB}}$ granična frekvencija filtra, važi $\psi(1) = 1$. Za vrednosti $L = 0$ i $M > 1$ predložena karakteristična funkcija daje Butterworthov polinom dok za $L > 1$ i $M = 0$ ili $M = 1$, rezultat je Eliptička funkcija parnog i neparnog reda, respektivno.

Nova klasa filtara pogodnih za komplementarnu dekompoziciju dobija se za vrednosti $L \geq 1$ i $M > 1$ i na dalje će se nazivati Prelazni Butter-Eliptički filtri ili samo Prelazni filtri. Kvadrat amplitudske karakteristike ovog filtra ima oblik

$$|H_0(x)|^2 = \frac{1}{1 + \psi_N^2(x)}. \quad (3.2)$$

Ako je x analogna ugaona frekvencija $x = \Omega$, jednačina (3.2) predstavlja amplitudsku karakter-

istiku analogne niskopropusne prenosne funkcije. Kako bi se ova funkcija primenila i za sintezu rekurzivnih digitalnih filtara, koriste se trigonometrijske transformacije za frekvencijsku promenljivu x , pri čemu za aproksimaciju propusnika niskih frekvencija postoje tri mogućnosti

$$x = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega_c}{2}}, \quad (3.3)$$

$$x = \frac{\tan \frac{\omega}{2}}{\tan \frac{\omega_c}{2}} \quad (3.4)$$

i

$$x = \frac{\sec \frac{\omega}{2}}{\sec \frac{\omega_c}{2}}, \quad (3.5)$$

gde je ω digitalna ugaona frekvencija a ω_c granična ugaona frekvencija propusnog opsega filtra. Jednačina (3.3) [81] vodi ka prenosnoj funkciji sa višestrukom nulom u koordinatnom početku, koja nije pogodna za komplementarnu dekompoziciju. Jednačine (3.4) i (3.5) vode ka prenosnoj funkciji NF filtra sa višestrukom nulom u $z = -1$ ($\omega = \pi$). Međutim, jednačina (3.5) daje prenosnu funkciju koja ima lošije karakteristike u odnosu na jednačinu (3.4), [82, 83].

Kao što je u prethodnom poglavlju već pokazano, dvokanalna banka filtara sastoji se od banke analize i banke sinteze kao i jednice za obradu signala između ove dve banke. Za rekonstrukciju bez *aliasinga*, banka filtara treba da zadovolji sledeće uslove u z domenu:

$$H_0(-z)G_0(z) + H_1(-z)G_1(z) = 0,$$

gde su $H_0(z), H_1(z)$ filtri analize i $G_0(z), G_1(z)$ filtri sinteze, koji se biraju tako da važi: $G_0(z) = H_1(-z)$ i $G_1(z) = -H_0(-z)$ kako bi se u potpunosti izbegle greške pri *aliasingu*.

U cilju dobijanja komplementarnog para, $[H_0(z), H_1(z)]$, potrebni i dovoljni uslovi koje treba ispuniti su:

(a) Uslov komplementarnosti po snazi,

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_1(z)H_1(z^{-1}) = 1,$$

gde je $H_0(z)$ filtar propusnik niskih frekvencija, a $H_1(z) = H_0(-z)$ njegov komplementarni filtar, propusnik visokih frekvencija,

(b) Polovi filtara smešteni su na imaginarnoj osi,

(c) Nule filtara nalaze se na jediničnom krugu u z ravni.

Na osnovu prethodno navedenih uslova, frekvencijska promenljiva data jednačinom (3.4) je jedina prihvatljiva. Tako se, za projektovanje nove klase *halfband* filtara, usvaja oblik frekvencijske promenljive dat kao

$$x^2 = \tan^2 \frac{\omega}{2} = -\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} \Big|_{z=e^{j\omega}}, \quad (3.6)$$

pri čemu je $z = e^{j\omega}$ i $\tan(\omega_c/2) = 1$, obzirom da je za *halfband* filter $\omega_c = \pi/2$.

Kako bi se ostvarila komplementarna dekompozicija, prenosne funkcije $H_0(z)$ i $H_1(z)$ rastavljene su na dva *allpass* filtra, $A_0(z)$ i $A_1(z)$, na sledeći način:

$$H_0(z) = \frac{1}{2}[A_0(z^2) + z^{-1}A_1(z^2)] \quad (3.7)$$

i

$$H_1(z) = \frac{1}{2}[A_0(z^2) - z^{-1}A_1(z^2)]. \quad (3.8)$$

Neophodno je odrediti prenosnu funkciju na osnovu poznate funkcije kvadrata amplitudske karakteristike na jediničnom krugu, (3.2). Poznati parametri ove funkcije su: stepen zaravnjenja u koordinatnom početku, M , broj konačnih nula prenosa, stepen višestrukosti konačne nule prenosne funkcije, L , i minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu, R_s . Cilj je odrediti koeficijente b_i i a_i niskopropusne prenosne funkcije

$$H_0(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N+1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N+1} a_i z^{-i}}, \quad (3.9)$$

pri čemu koeficijenti visokopropusne prenosne funkcije, $H_1(z)$, imaju iste vrednosti sem što u brojiocu neparni koeficijenti imaju suprotan znak. Koeficijenti *allpass* filtara neparnog reda su realni dok su kod parnog reda kompleksni i ovaj slučaj se u ovom radu neće razmatrati.

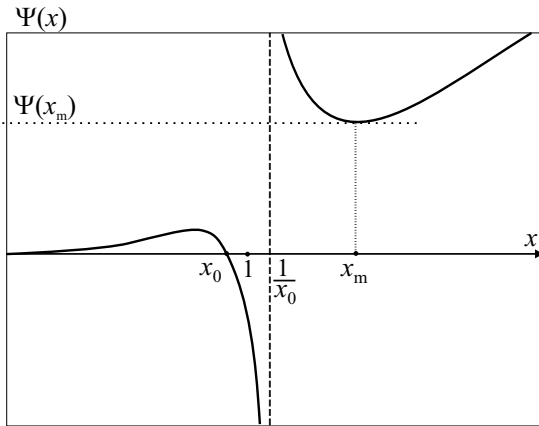
3.2 Klasa prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa

Ako su nule karakteristične funkcije $\psi_N(x)$ predložene jednačinom (3.1), jednake tj. $x_{01} = x_{02} = x_{03} = \dots = x_{0L} = x_0$, onda je to karakteristična funkcija sa višestrukom nulom koja ima

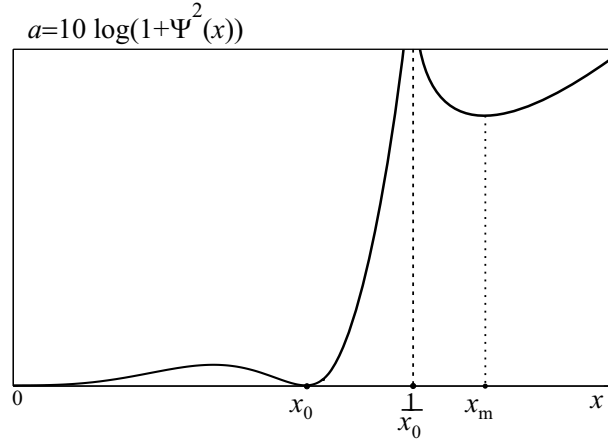
formu [72–74, 76–79]:

$$\psi_N(x) = x^M \left(\frac{x_0^2 - x^2}{1 - x_0^2 x^2} \right)^L \quad (3.10)$$

gde je red filtra $N = M + 2L$, pri čemu je M neparan broj jer se analiziraju samo filtri neparnog reda. Ovaj oblik daje prenosnu funkciju koja ima jednu konačnu nulu prenosa, odnosno po jedan ekstremum u propusnom i nepropusnom opsegu, Sl.3.1.



Sl. 3.1: Grafik karakteristične funkcije za $L \geq 1$, $M > 1$ i $x_{01} = \dots = x_{0L} = x_0$.



Sl. 3.2: Grafik karakteristike slabljenja za $L \geq 1$, $M > 1$ i $x_{01} = \dots = x_{0L} = x_0$.

Podešavanje vrednosti minimalnog slabljenja u nepropusnom opsegu

Za određeni red filtra, odnosno za zadate parametre M i L , treba odrediti vrednost $x_0 < 1$ tako da karakteristična funkcija daje karakteristiku slabljenja, $a = 10 \log(1 + \psi^2(x))$, koja u nepropusnom opsegu ima minimalnu vrednost jednaku zadatoj vrednosti R_s . Pri tome, sa povećavanjem vrednosti x_0 , vrednost minimuma karakteristike slabljenja se smanjuje.

Za slučaj karakteristične funkcije sa jednom konačnom nulom prenosa ovaj problem se može jednostavno rešiti programskom petljom tako što se zada proizvoljna vrednost $x_0 < 1$, proračuna minimum funkcije slabljenja $a = 10 \log(1 + \psi^2(x))$ u nepropusnom opsegu i ispituje da li je dobijena vrednost manja ili veća u odnosu na zadatu vrednost R_s , a zatim se na osnovu toga povećava ili smanjuje vrednost x_0 , Sl.3.2. Za izračunavanje ekstremnih vrednosti funkcije slabljenja koristi se jednačina

$$M(1 - x_0^2 x^2)(x_0^2 - x^2) + 2Lx^2(x_0^4 - 1) = 0, \quad (3.11)$$

dobijena izjednačavanjem prvog izvoda funkcije slabljenja sa nulom.

Takođe, ovaj problem se može svesti na rešavanje sistema dve nelinearne jednačine Newton-Raphsonovim metodom gde je nepoznati vektor $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_m]^T$. Za početne vrednosti ovog vektora, $\mathbf{x}^0 = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_m]^T$, važi $1 < x_m < 1/x_0 < \infty$. Sistem nelinearnih jednačina predstavljen u formi $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, ima oblik

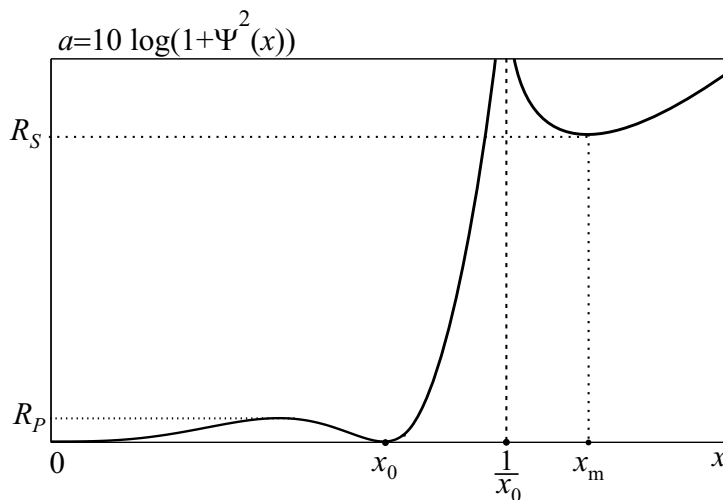
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(x)|_{x=x_m} - \sqrt{10^{R_s/10} - 1} \\ \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_m} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

i rešava se iterativnom procedurom gde su relacije između trenutnih vrednosti \mathbf{x} , $x^{(i)}$, i novih vrednosti \mathbf{x} dobijenih posle jedne iteracije, $x^{(i+1)}$, mogu izraziti u matricnoj formi $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \lambda \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)})$, tj.

$$\begin{bmatrix} x_0^{(i+1)} \\ x_m^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^{(i)} \\ x_m^{(i)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^i}{\partial x_0} & \frac{\partial f_1^i}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2^i}{\partial x_0} & \frac{\partial f_2^i}{\partial x_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

gde je \mathbf{J} Jakobijanova matrica a $\lambda \in (0, 1]$ parametar koji obezbeđuje konvergenciju rešenja. Na početku iterativne procedure vrednost λ postavlja se na vrednost $\lambda = 0.1$. Kada je ispunjen uslov $\max \{f_j^{(i)}\} \leq \epsilon$, gde je ϵ vrlo mali broj (na primer 10^{-4}), usvaja se $\lambda = 1$.

Kao rezultat ove numeričke procedure, dobijena je funkcija slabljenja $a = -20 \log |H_0(x)|$ čija je minimalna vrednost u nepropusnom opsegu jednaka zadatoj vrednosti R_s , i na osnovu koje se vrednost maksimuma slabljenja u propusnom opsegu računa kao $R_p = -10 \log(1 - 10^{-R_s/10})$, Sl.3.3.



Sl. 3.3: Grafik karakteristike slabljenja za $L \geq 1$ i $M > 1$ nakon proračuna konačne vrednosti x_0 .

**Određivanje koeficijenata digitalne prenosne funkcije
i formiranje komplementarne visokopropusne funkcije**

Zamenom frekvencijske promenljive (3.6) u (3.10), pri čemu je $z = e^{j\omega}$, karakteristična funkcija u digitalnom domenu dobija oblik

$$\psi_N(z) = (-1)^{\frac{M}{2}} \frac{(z-1)^M \cdot [x_0^2(z+1)^2 + (z-1)^2]^L}{(z+1)^M \cdot [x_0^2(z-1)^2 + (z+1)^2]^L}. \quad (3.14)$$

Ako se polinomi u brojiocu i imeniocu preurede kao:

$$\begin{aligned} x_0^2(z-1)^2 + (z+1)^2 &= (1+x_0^2)[z^2 + z\alpha + 1] \\ x_0^2(z+1)^2 + (z-1)^2 &= (1+x_0^2)[z^2 - z\alpha + 1] \\ \alpha &= 2 \frac{1-x_0^2}{1+x_0^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

karakteristična funkcija se može predstaviti na sledeći način:

$$\psi_N(z) = (-1)^{\frac{M}{2}} \frac{P(-z)}{P(z)} \quad (3.16)$$

pri čemu je

$$P(z) = (z+1)^M (z^2 + z\alpha + 1)^L. \quad (3.17)$$

Kvadrat amplitudske karakteristike u z ravni dat jednačinom (3.2), jednak je:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}, \quad (3.18)$$

i zamenom karakteristične jednačine (3.14) u (3.2), dobija se

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{P^2(z)}{P^2(z) + (-1)^M P^2(-z)}. \quad (3.19)$$

odnosno

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{(z+1)^{2M} (z^2 + z\alpha + 1)^{2L}}{(z+1)^{2M} (z^2 + z\alpha + 1)^{2L} + (-1)^M (z-1)^{2M} (z^2 - z\alpha + 1)^{2L}}. \quad (3.20)$$

Kako bi se odredila prenosna funkcija $H(z)$ treba odrediti nule i polove funkcije (3.20) u z

ravni i usvojiti polove koji se nalaze unutar jediničnog kruga. Nule ove funkcije su $z = -1$ reda $2M$ i $z_{1,2} = (x_0^2 - 1 \pm j2x_0)/(x_0^2 + 1)$ reda $2L$ i kako su sve dvostruke, treba samo odbaciti svaku drugu nulu, odnosno dobiće se nule u $z = -1$ reda M i $z_{1,2} = (x_0^2 - 1 \pm j2x_0)/(x_0^2 + 1)$ reda L .

Problem izračunavanja polova može se pojednostaviti pošto se koeficijenti polinoma u brojiocu i imeniocu mogu izraziti u zatvorenom obliku. Ako se prenosna funkcija 3.20 predstavi kao

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{Q(z)}{N(z)} \quad (3.21)$$

tada se imenilac

$$N(z) = Q(z) + (-1)^M Q(-z) \quad (3.22)$$

gde je $Q(z) = P^2(z)$, može predstaviti

$$N(z) = \sum_{i=0}^{4L+2M} g_i z^i \quad (3.23)$$

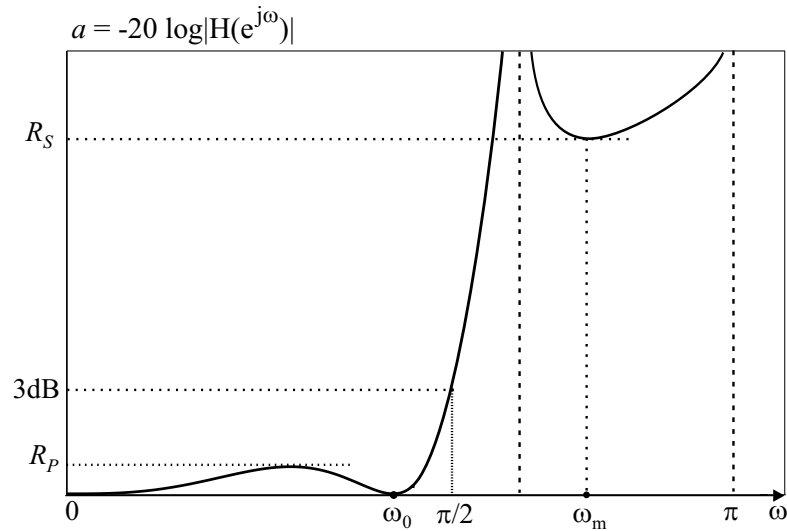
$$g_i = [1 + (-1)^{M+i}] \sum_{j=0}^{4L} \sum_{k=0}^{2L} \binom{2M}{i-j} \binom{2L}{k} \binom{k}{j-k} \alpha^{2k-j}.$$

Primenom naredbe `roots` na ovako izgenerisane koeficijente u programskom paketu MATLAB dobijaju se polovi funkcije (3.20). Zatim se izdavaju polovi unutar jediničnog kruga i dobija prenosna funkcija u digitalnom domenu $H_0(z)$. Kako moduo dobijene prenosne funkcije nije jednak jedinici za vrednost $\omega = 0$, treba je pomnožiti konstantom k koja će osigurati da $|H(0)| = 1$,

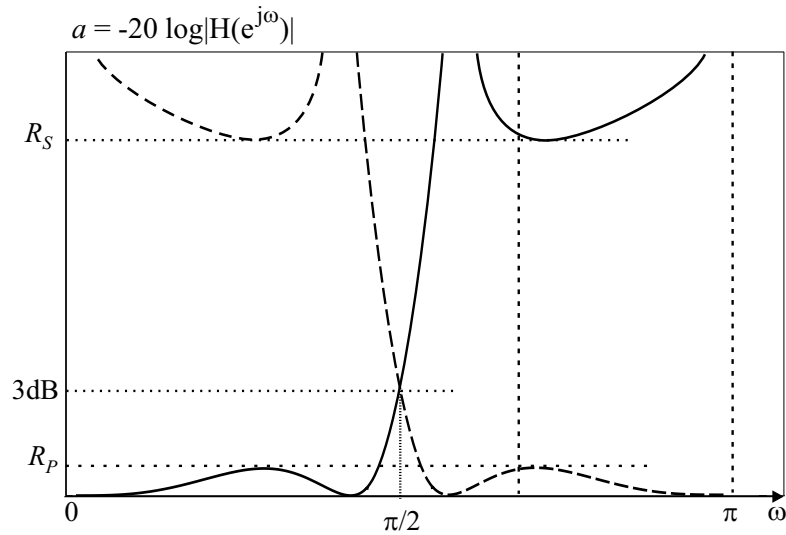
$$k = \frac{\sum_{i=0}^{N+1} a_i}{\sum_{i=0}^{N+1} b_i}. \quad (3.24)$$

Grafik funkcije slabljenja u digitalnom domenu $a = -20 \log |H_0(e^{j\omega})|$ data je na Sl. 3.4.

Primenom postupka komplementarne dekompozicije, koji je detaljno opisan u prethodnoj glavi, izdvajaju se polovi prenosne funkcije $H_0(z)$, formiraju dva *allpass* filtra i primenom jednačina (3.7-3.8) dobijaju niskopropusna i visokopropusna prenosna funkcija koje čine komplementarni par, Sl. 3.5.



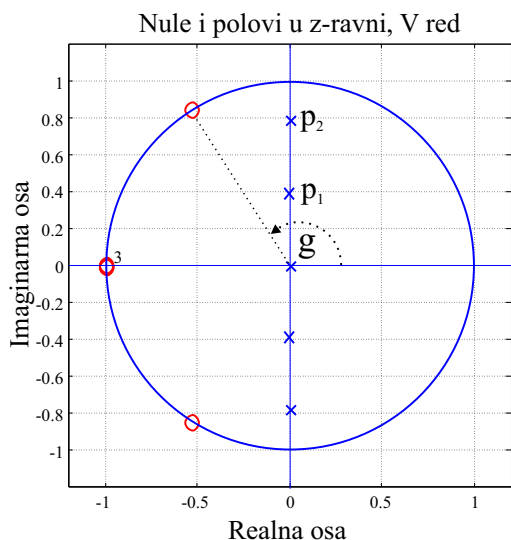
Sl. 3.4: Grafik karakteristike slabljenja za $L \geq 1$ i $M > 1$ u digitalnom domenu.



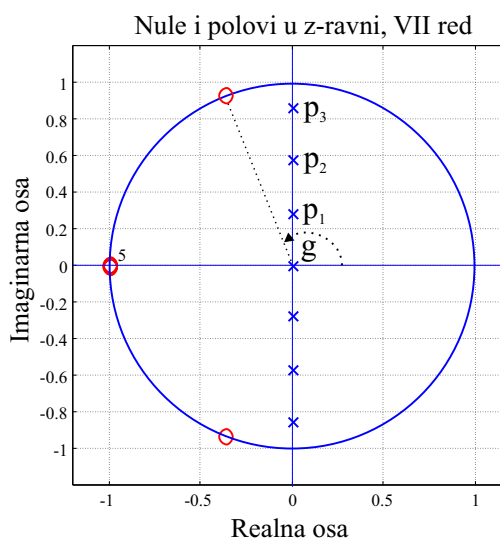
Sl. 3.5: Grafik NF-VF komplementarnog para za $L \geq 1$ i $M > 1$ u digitalnom domenu.

3.2.1 Primeri klase Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa

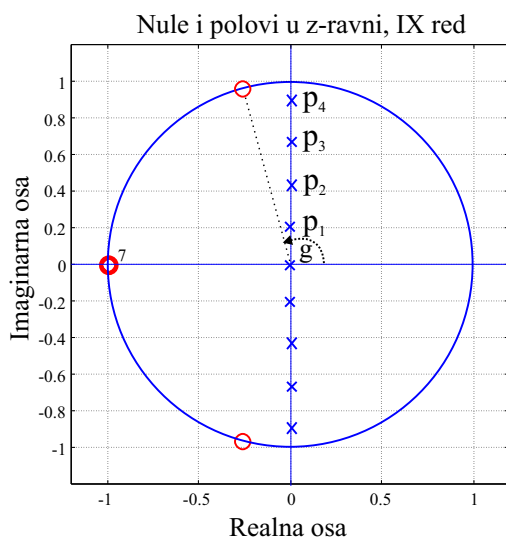
U ovom delu prikazani su rezultati klase filtara sa jednom konačnom nulom prenosa (sa po jednim ekstremumom u propusnom i nepropusnom opsegu) za peti, sedmi, deveti i jedanaesti red i to za stepene visestrukosti $L = 1, \dots, 4$. Za sve klase Prelaznih filtara koje se analiziraju prikazani su položaji polova i nula u z ravni na slikama 3.6-3.15, a u Tabeli 3.1 su date brojne vrednosti imaginarnih vrednosti polova i uglova koje nule prenosa funkcije zaklapaju sa pozitivnim smerom realne ose.



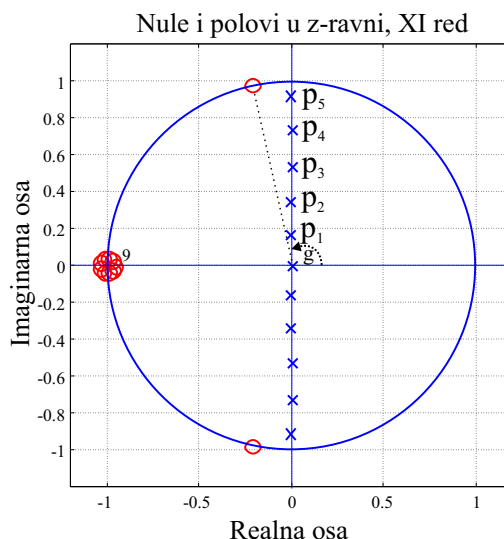
Sl. 3.6: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 1$, $M = 3$.



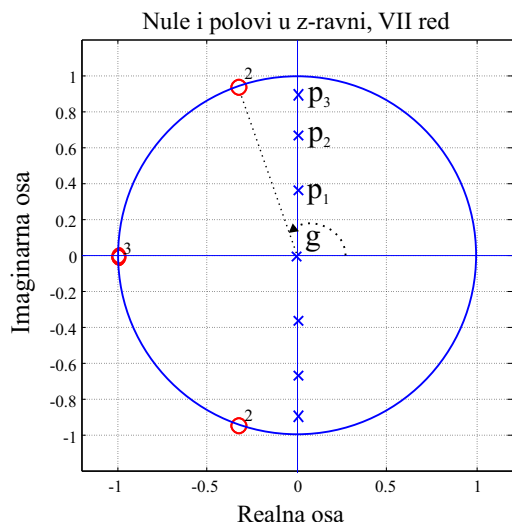
Sl. 3.7: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 1$ i $M = 5$.



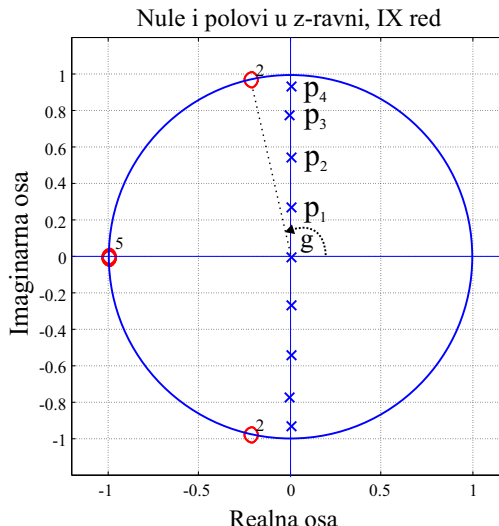
Sl. 3.8: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 1$ i $M = 7$.



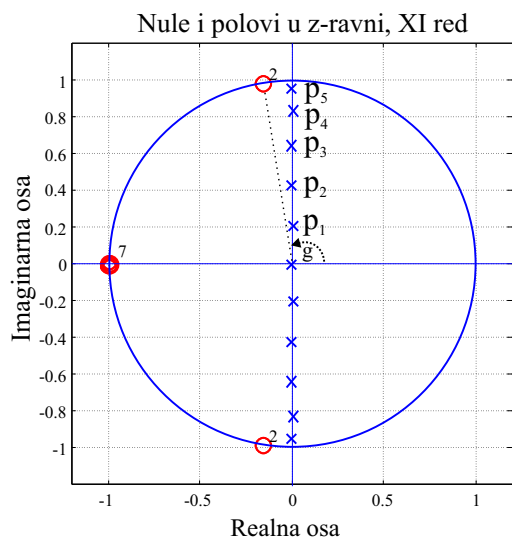
Sl. 3.9: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 1$ i $M = 9$.



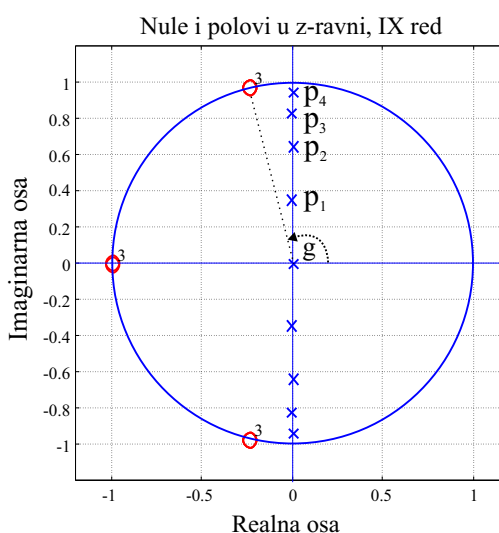
Sl. 3.10: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 2$, $M = 3$.



Sl. 3.11: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 2$ i $M = 5$.



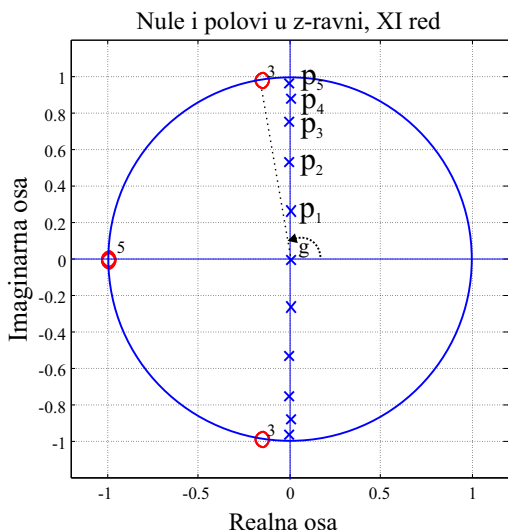
Sl. 3.12: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 2$, $M = 7$.



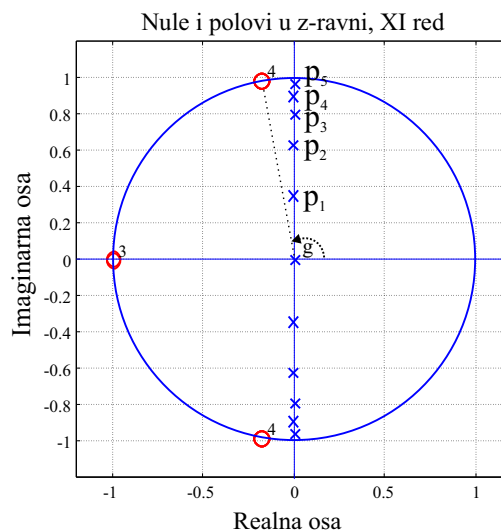
Sl. 3.13: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 3$ i $M = 3$.

Na slikama 3.16-3.19 je prikazana promena karakteristike slabljenja kada se za istu vrednost L , menja stepen zaravnjenja u koordinatnom početku, M , za vrednosti od 3 do 9.

Za slučaj kada je stepen višestrukosti konjugovano-kompleksne nule prenosne funkcije jednak $L = 1$, prikazane su uporedne karakteristike slabljenja petog ($M = 3$), sedmog ($M = 5$), devetog ($M = 7$) i jedanaestog reda ($M = 9$), Sl. 3.16. Za stepen višestrukosti $L = 2$ date su uporedne karakteristike slabljenja za sedmi ($M = 3$), deveti ($M = 5$), jedanaesti ($M = 7$) i trinaesti red ($M = 9$), Sl.3.17. Za $L = 3$ date su iste karakteristike za deveti ($M = 3$), jedanaesti ($M = 5$), trinaesti ($M = 7$) i petnaesti ($M = 9$) red, Sl.3.18, i za $L = 4$ date su karakteristike za jedanaesti ($M = 3$), trinaesti ($M = 5$), petnaesti ($M = 7$) i sedamnaesti ($M = 9$) red filtra,



Sl. 3.14: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 3$ i $M = 5$.



Sl. 3.15: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $L = 4$ i $M = 3$.

Sl.3.19. Redovi veći od jedanaestog se neće na dalje razmatrati jer su nepogodni za realizaciju a vidi se iz prikazanih slika da su strmine karakteristika slabljenja u prelaznoj oblasti za veće redove približno jednake.

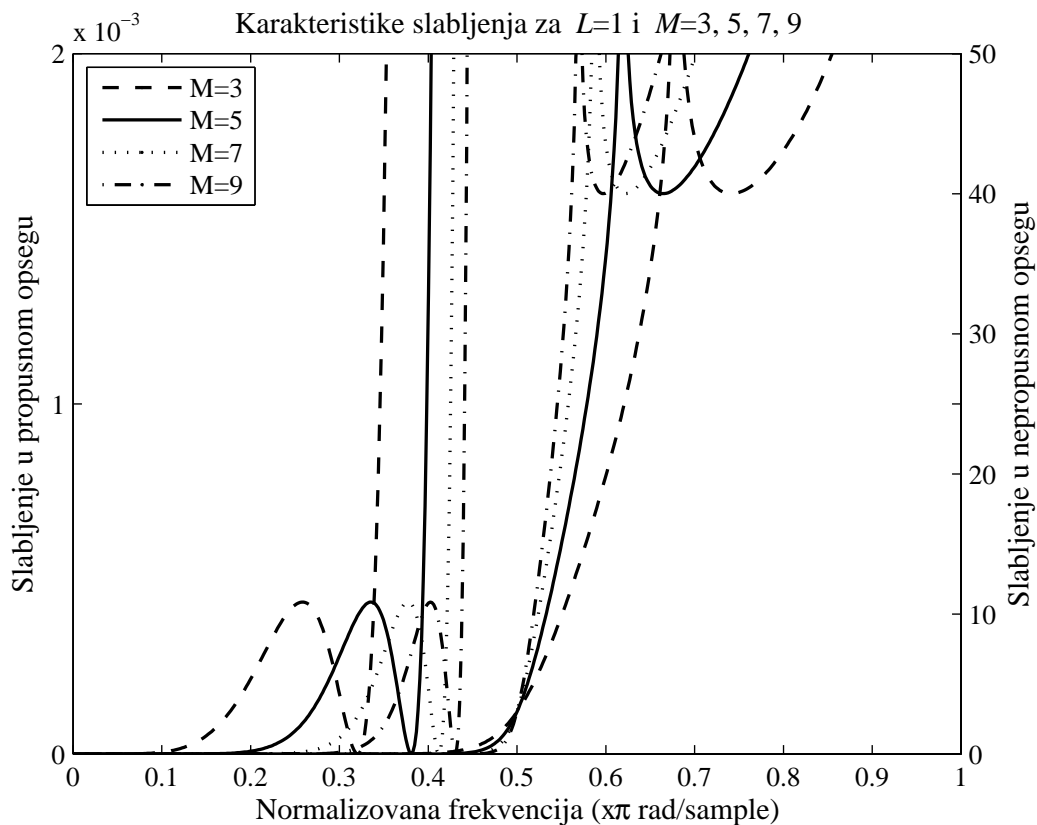
Na slikama 3.20-3.22 prikazane su karakteristike slabljenja istog reda dobijenog za različite stepene višestrukosti nule prenosne funkcije, L .

Poređenje karakteristika slabljenja sedmog reda, Prelazne klase filtara sa jednom konačnom nulom prenosa, za slučaj stepena višestrukosti nule prenosne funkcije $L = 1$ ($M = 5$) i $L = 2$ ($M = 3$) prikazano je na Sl. 3.20. Poređenje devetog reda Prelazne klase za slučajeve $L = 1$ ($M = 7$) zatim $L = 2$ ($M = 5$) i $L = 3$ ($M = 3$) dato je na Sl. 3.21 a poređenje jedanaestog reda za slučajeve $L = 1$ ($M = 9$), $L = 2$ ($M = 7$), $L = 3$ ($M = 5$) i $L = 4$ ($M = 3$) može se videti na Sl. 3.22. Na osnovu ovih rezultata može se zaključiti da se za isti red filtra prelazni frekvencijski opseg smanjuje sa povećanjem višestrukosti L , odnosno da povećanje L pozitivno utiče na selektivnost filtra.

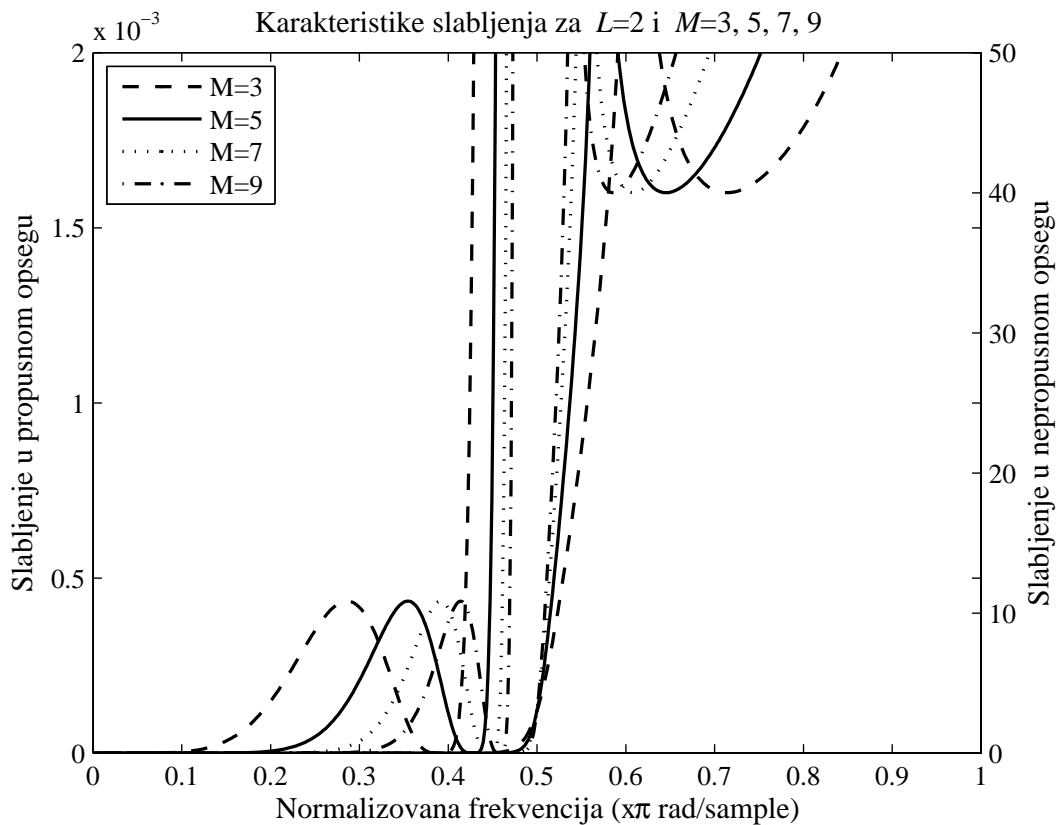
Odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija Prelazne klase filtara za peti, sedmi, deveti i jedanaesti red filtra, za sve slučajeve višestrukosti L , dati su u tabeli 3.2. Koeficijenti brojioca su obeleženi sa b a imenioca sa a .

Tab. 3.1: Položaji polova i nula koji odgovaraju slikama 3.6-3.15.

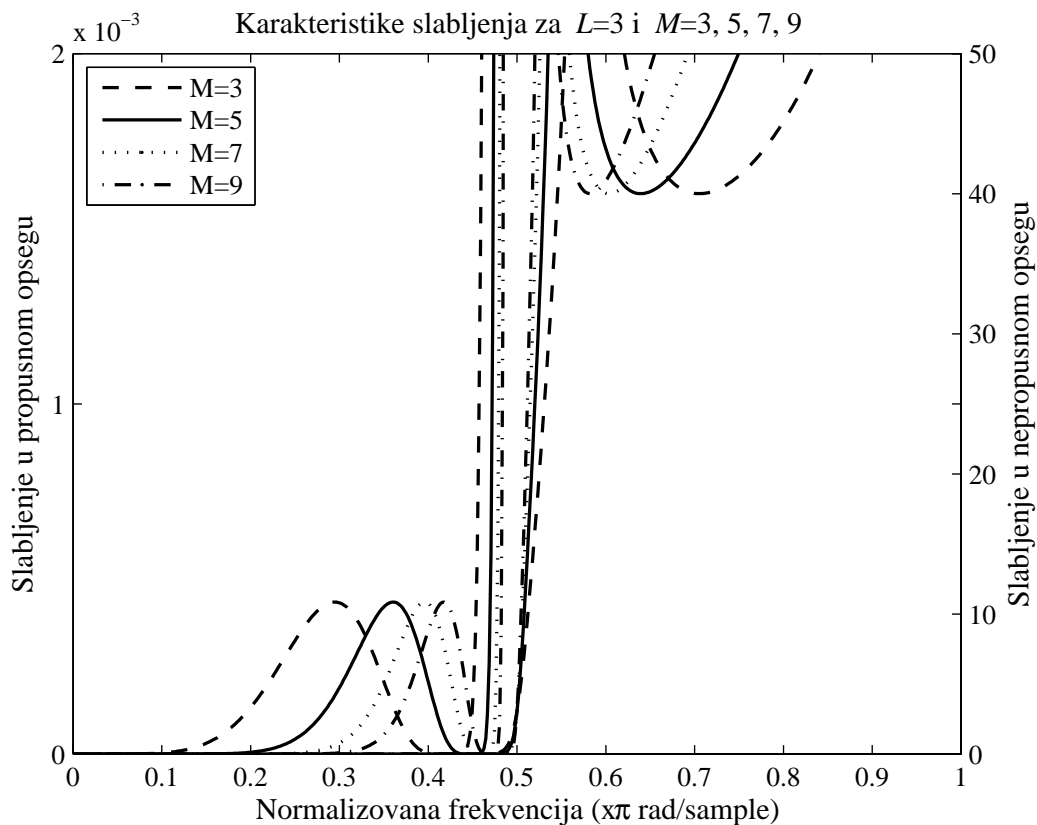
red	Vred	VIIred	IXred	XIred
	$L = 1$ $M = 3$	$L = 1$ $M = 5$	$L = 1$ $M = 7$	$L = 1$ $M = 9$
$\pm p_1$	$\pm 0.3896i$	$\pm 0.2777i$	$\pm 0.2104i$	$\pm 0.1678i$
$\pm p_2$	$\pm 0.7859i$	$\pm 0.5697i$	$\pm 0.4328i$	$\pm 0.3431i$
$\pm p_3$		$\pm 0.8570i$	$\pm 0.6692i$	$\pm 0.5322i$
$\pm p_4$			$\pm 0.8935i$	$\pm 0.7317i$
$\pm p_5$				$\pm 0.9154i$
$\pm \gamma$	$\pm 122.2890^\circ$	$\pm 111.4247^\circ$	$\pm 105.8252^\circ$	$\pm 102.4920^\circ$
		$L = 2$ $M = 3$	$L = 2$ $M = 5$	$L = 2$ $M = 7$
$\pm p_1$		$\pm 0.3581i$	$\pm 0.2688i$	$\pm 0.2069i$
$\pm p_2$		$\pm 0.6700i$	$\pm 0.5414i$	$\pm 0.4234i$
$\pm p_3$		$\pm 0.8975i$	$\pm 0.7732i$	$\pm 0.6452i$
$\pm p_4$			$\pm 0.9321i$	$\pm 0.8288i$
$\pm p_5$				$\pm 0.9497i$
$\pm \gamma$		$\pm 109.6510^\circ$	$\pm 102.9344^\circ$	$\pm 99.5282^\circ$
			$L = 3$ $M = 3$	$L = 3$ $M = 5$
$\pm p_1$			$\pm 0.3492i$	$\pm 0.2662i$
$\pm p_2$			$\pm 0.6402i$	$\pm 0.5333i$
$\pm p_3$			$\pm 0.8228i$	$\pm 0.7509i$
$\pm p_4$			$\pm 0.9449i$	$\pm 0.8807i$
$\pm p_5$				$\pm 0.9636i$
$\pm \gamma$			$\pm 103.8065^\circ$	$\pm 99.0677^\circ$
				$L = 4$ $M = 3$
$\pm p_1$				$\pm 0.3457i$
$\pm p_2$				$\pm 0.6288i$
$\pm p_3$				$\pm 0.7963i$
$\pm p_4$				$\pm 0.8944i$
$\pm p_5$				$\pm 0.9665i$
$\pm \gamma$				$\pm 100.5747^\circ$



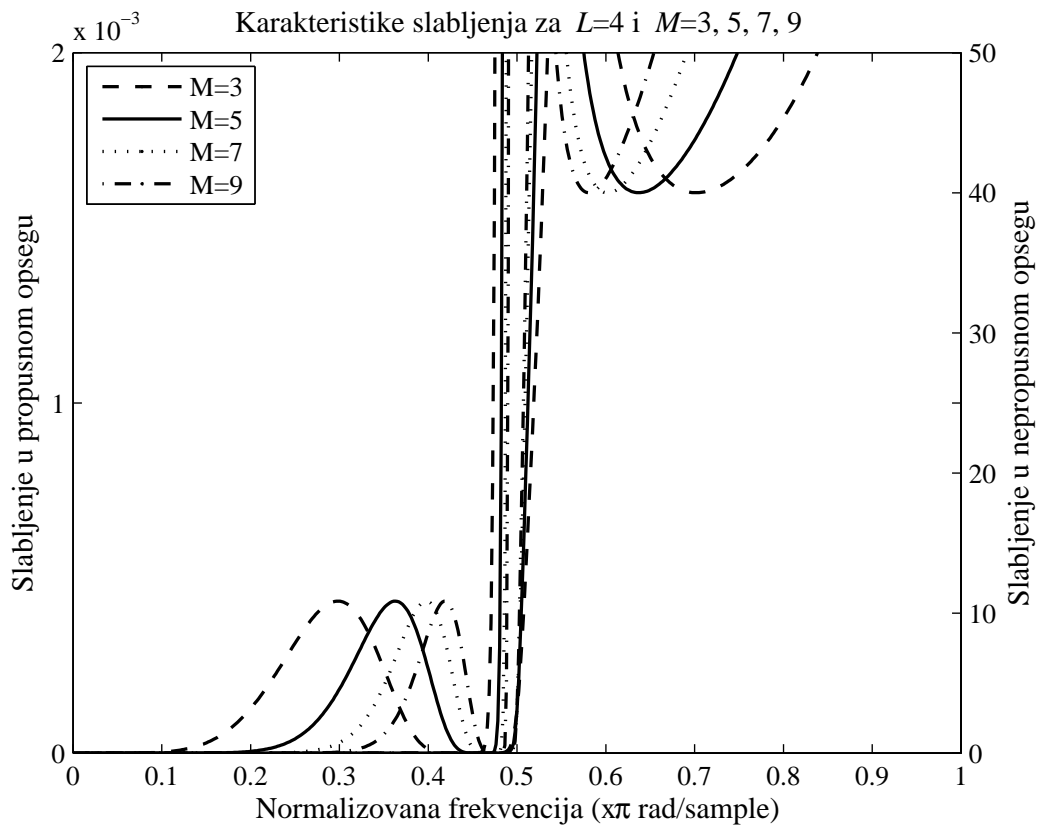
Sl. 3.16: Karakteristike slabljenja za klasu Prelaznih filtara $L = 1$ i $M > 1$.



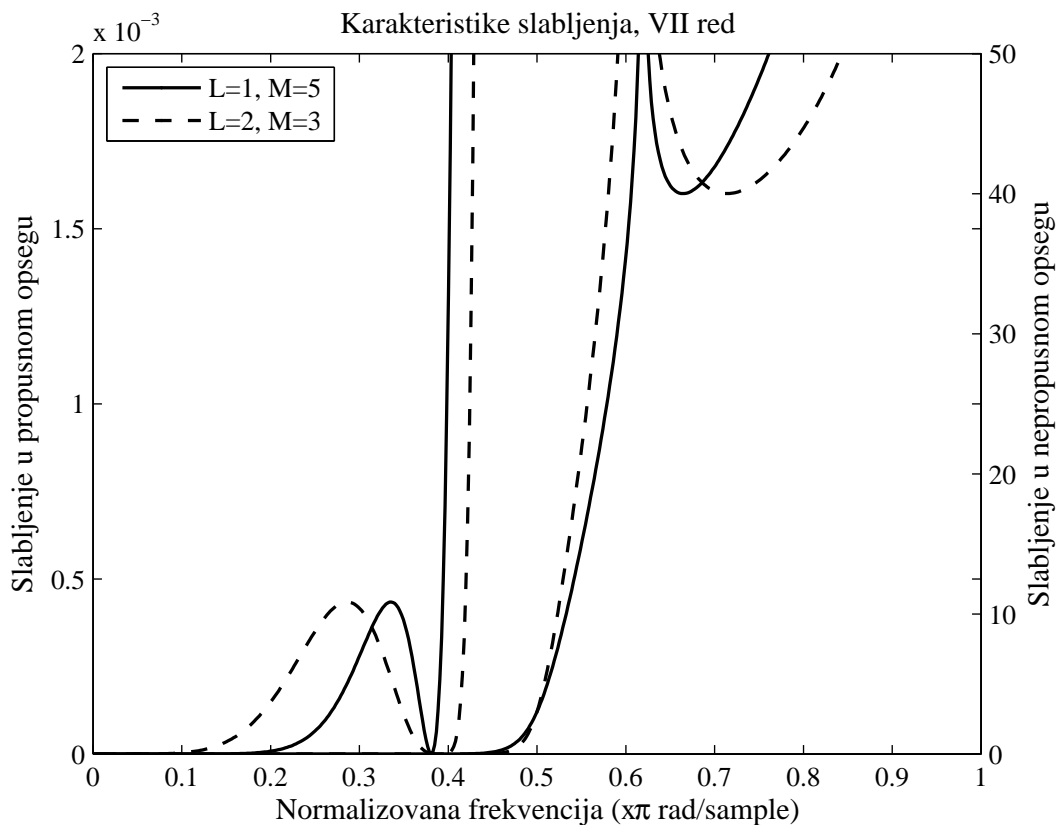
Sl. 3.17: Karakteristike slabljenja za klasu Prelaznih filtara $L = 2$ i $M > 1$.



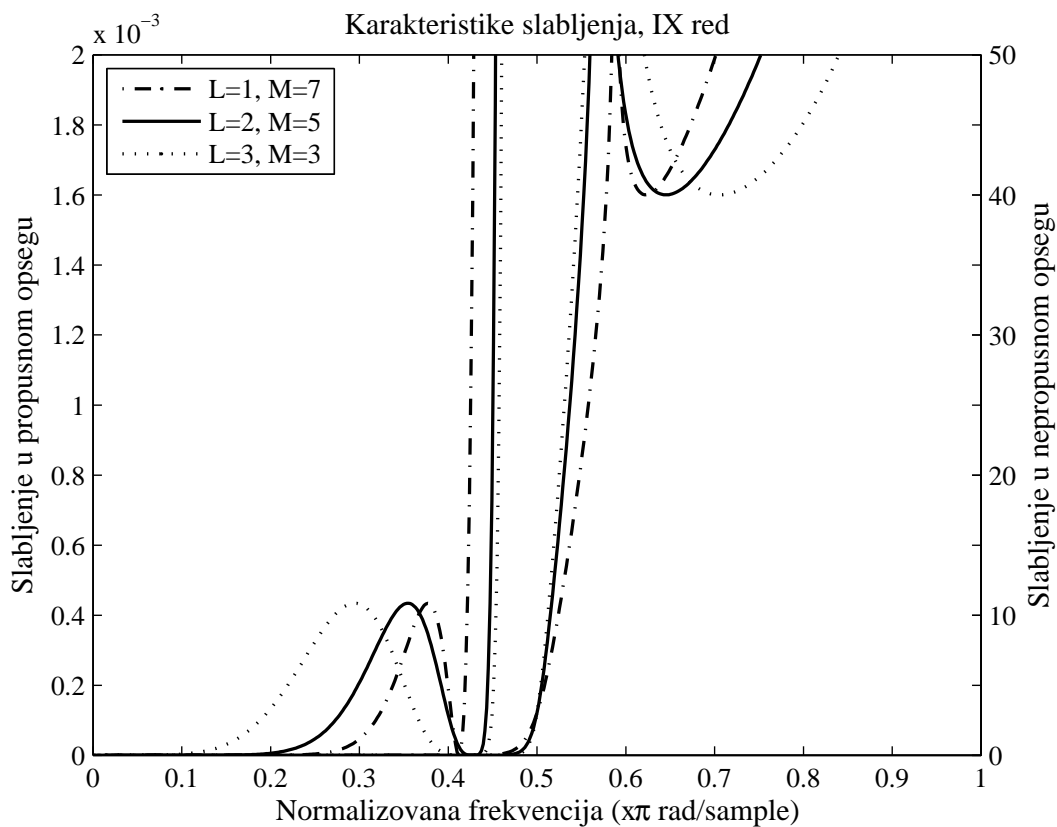
Sl. 3.18: Karakteristike slabljenja za klasu Prelaznih filtara $L = 3$ i $M > 1$.



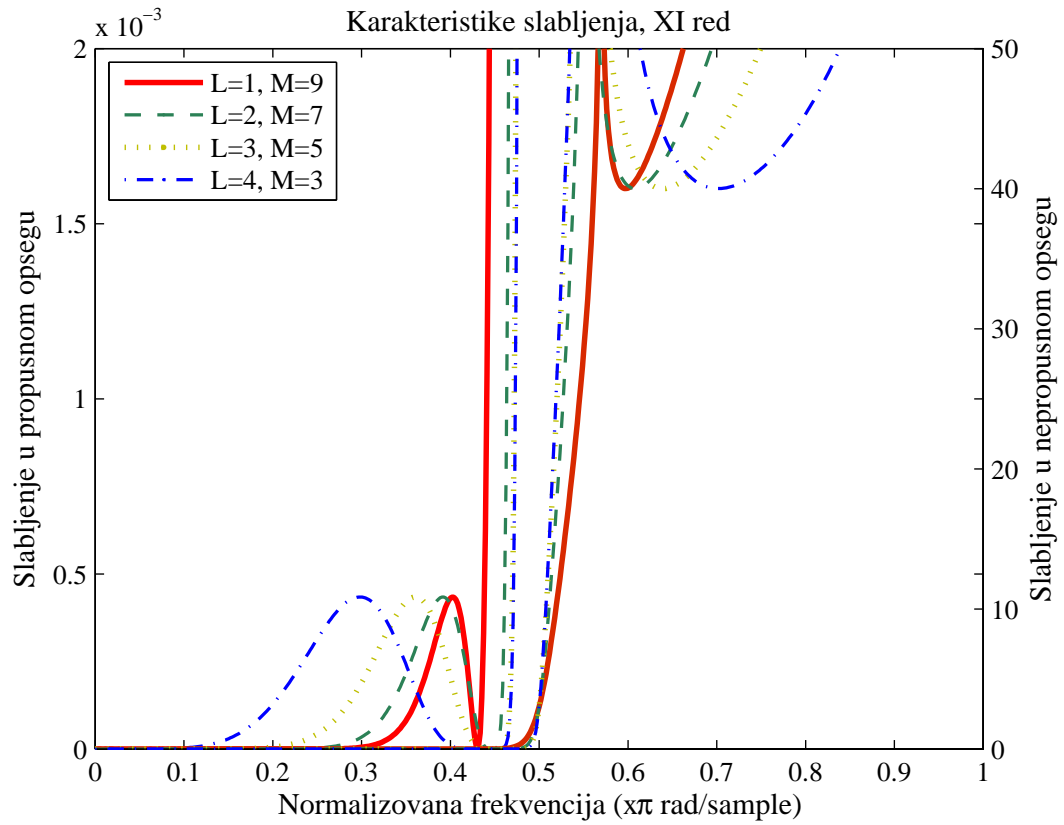
Sl. 3.19: Karakteristike slabljenja za klasu Prelaznih filtara $L = 4$ i $M > 1$.



Sl. 3.20: Karakteristike slabljenja sedmog reda klase Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa za različite vrednosti stepena višestrukosti nule prenosne funkcije, L .



Sl. 3.21: Karakteristike slabljenja devetog reda klase Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa za različite vrednosti stepena višestrukosti nule prenosne funkcije, L .



Sl. 3.22: Karakteristike slabljenja jedanaestog reda klase Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa za različite vrednosti stepena višestrukosti nule prenosne funkcije, L .

Tab. 3.2: Koeficijenti prenosnih funkcija čije su karakteristike slabljenja date na slikama 3.20-3.22.

Vred		VIIred		IXred		XIred	
$L = 1, M = 3$		$L = 1, M = 5$		$L = 1, M = 7$		$L = 1, M = 9$	
b	a	b	a	b	a	b	a
0.0759	1.0000	0.0283	1.0000	0.0099	1.0000	0.0033	1.0000
0.3088	0.0000	0.1623	0.0000	0.0748	0.0000	0.0315	0.0000
0.5469	0.7694	0.4150	1.1362	0.2558	1.4778	0.1366	1.8025
0.5469	0.0000	0.6317	0.0000	0.5296	0.0000	0.3628	0.0000
0.3088	0.0938	0.6317	0.3201	0.7440	0.6544	0.6627	1.0826
0.0759	0.0000	0.4150	0.0000	0.7440	0.0000	0.8838	0.0000
		0.1623	0.0184	0.5296	0.0931	0.8838	0.2548
		0.0283	0.0000	0.2558	0.0000	0.6627	0.0000
				0.0748	0.0030	0.3628	0.0213
				0.0099	0.0000	0.1366	0.0000
						0.0315	0.0004
						0.0033	0.0000
		$L = 2, M = 3$		$L = 2, M = 5$		$L = 2, M = 7$	
		b	a	b	a	b	a
		0.0517	1.0000	0.0216	1.0000	0.0080	1.0000
		0.2244	0.0000	0.1273	0.0000	0.0616	0.0000
		0.4900	1.3826	0.3601	1.8319	0.2229	2.2270
		0.7096	0.0000	0.6662	0.0000	0.5168	0.0000
		0.7096	0.5224	0.8948	1.0763	0.8685	1.7336
		0.4900	0.0000	0.8948	0.0000	1.1159	0.0000
		0.2244	0.0464	0.6662	0.2208	1.1159	0.5576
		0.0517	0.0000	0.3601	0.0000	0.8685	0.0000
				0.1273	0.0110	0.5168	0.0671
				0.0216	0.0000	0.2229	0.0000
						0.0616	0.0020
						0.0080	0.0000

Nastavak tabele 3.2

Vred	VIIred	IXred		XIred	
		$L = 3, M = 3$		$L = 3, M = 5$	
		<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
		0.0413	1.0000	0.0185	1.0000
		0.1829	0.0000	0.1103	0.0000
		0.4532	2.1015	0.3344	2.6233
		0.7975	0.0000	0.7024	0.0000
		1.0354	1.4891	1.1193	2.5071
		1.0354	0.0000	1.3980	0.0000
		0.7975	0.3999	1.3980	1.0490
		0.4532	0.0000	1.1193	0.0000
		0.1829	0.0302	0.7024	0.1781
		0.0413	0.0000	0.3344	0.0000
				0.1103	0.0082
				0.0185	0.0000
				$L = 4, M = 3$	
				<i>b</i>	<i>a</i>
				0.0354	1.0000
				0.1581	0.0000
				0.4322	2.8832
				0.8646	0.0000
				1.3212	3.1136
				1.6321	0.0000
				1.6321	1.5368
				1.3212	0.0000
				0.8646	0.3313
				0.4322	0.0000
				0.1581	0.0224
				0.0354	0.0000

3.2.2 Poređenje klase Prelaznih filtara sa Eliptičkim i Butterworthovim filtrom

Već je pomenuto da se karakteristike slabljenja klase Prelaznih filtara nalaze između karakteristika slabljenja Eliptičkog i Butterworthovog filtra, pa su ovde prikazane njihove uporedne karakteristike. Da bi poređenje imalo smisla najpre su Eliptički filter i Butterworthov projektovani tako da budu istog reda kao i Prelazni filtri, i za iste vrednosti R_s i R_p kao i Prelazni filtri sa kojima se vrši poređenje ($R_s = 40\text{dB}$). Takođe, da bi se dobili i komplementarni visokopropusni filtri, Eliptički i Butterworthov filter su projektovani da budu *halfband* odnosno da im se polovi nalaze na imaginarnoj osi, tj. da im granična frekvencija bude tačno na polovini frekvencijskog opsega, $\omega_c = \pi/2$ (ili, ako frekvencijska osa nije normalizovana, $\omega_c = Fs/4$, gde je F_s frekvencija odmeravanja). Projektovanje se najpre izvrši za zadate vrednosti R_s i R_p tako da se dobije isti red kao kod Prelaznog filtra a zatim se vrednost propusnog opsega povećava tako da vrednost karakteristike slabljenja na polovini frekvencijskog opsega iznosi 3dB a da se pri tome red filtra ne poveća.

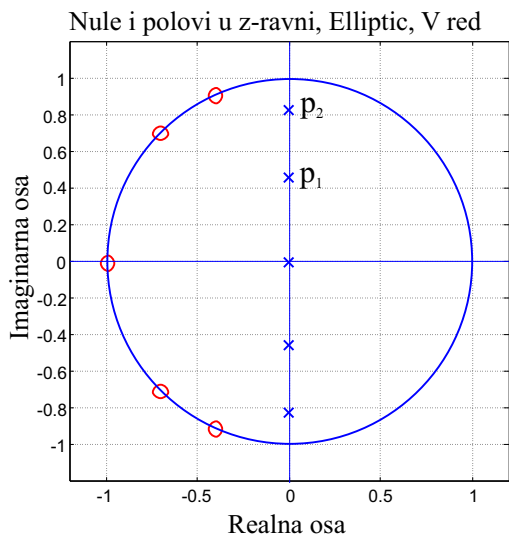
Na slikama 3.23-3.26 su prikazani položaji polova i nula Eliptičkih *halfband* filtara petog, sedmog, devetog i jedanaestog reda, a u Tabeli 3.3 su date odgovarajuće vrednosti imaginarnih delova polova i uglova koje nule zaklapaju sa pozitivnim smerom realne ose.

Na slikama 3.27-3.30 su prikazani položaji polova i nula Butterworthovih *halfband* filtara petog, sedmog, devetog i jedanaestog reda, a u Tabeli 3.4 su date odgovarajuće vrednosti imaginarnih delova polova i uglova koje nule zaklapaju sa pozitivnim smerom realne ose.

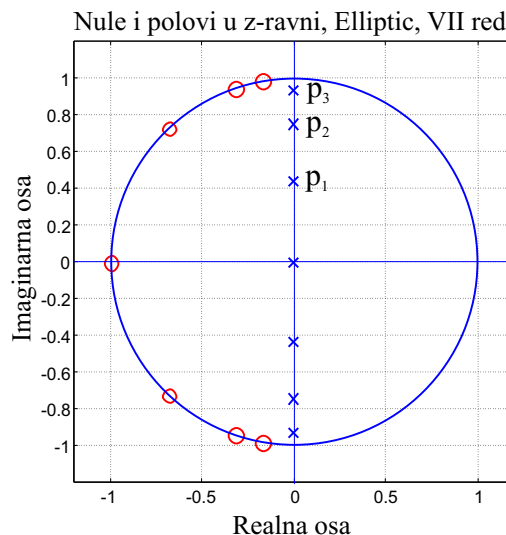
Tab. 3.3: Položaji polova i nula Eliptičkog filtra koji odgovaraju slikama 3.23-3.26.

red	Vred	VIIred	IXred	XIred
$\pm p_1$	$\pm 0.4594i$	$\pm 0.4385i$	$\pm 0.4353i$	$\pm 0.4348i$
$\pm p_2$	$\pm 0.8280i$	$\pm 0.7456i$	$\pm 0.7335i$	$\pm 0.7316i$
$\pm p_3$		$\pm 0.9285i$	$\pm 0.8914i$	$\pm 0.8858i$
$\pm p_4$			$\pm 0.9712i$	$\pm 0.9558i$
$\pm p_5$				$\pm 0.9886i$
$\pm \gamma_1$	$\pm 114.4150^\circ$	$\pm 99.7467^\circ$	$\pm 93.8481^\circ$	$\pm 91.5166^\circ$
$\pm \gamma_2$	$\pm 135.3194^\circ$	$\pm 108.7083^\circ$	$\pm 97.4271^\circ$	$\pm 92.9298^\circ$
$\pm \gamma_3$		$\pm 133.3707^\circ$	$\pm 107.8128^\circ$	$\pm 97.0664^\circ$
$\pm \gamma_4$			$\pm 133.0653^\circ$	$\pm 107.6736^\circ$
$\pm \gamma_5$				$\pm 133.0178^\circ$

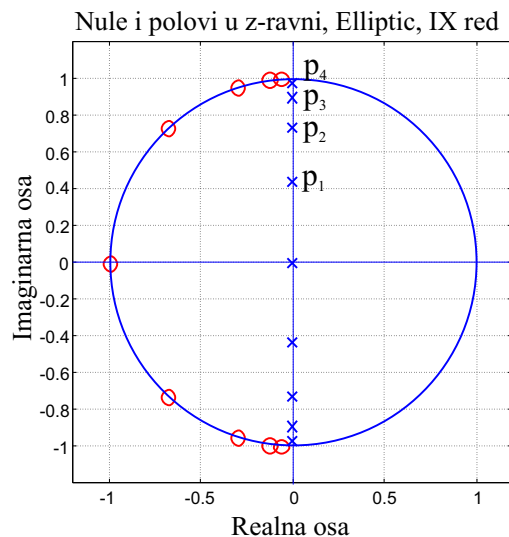
Na slikama 3.31-3.34 prikazane su uporedne *halfband* karakteristike slabljenja Prelaznih, Eliptičkih i Butterworthovih filtara istog reda (i to za peti, sedmi, deveti i jedanaesti red). Sve



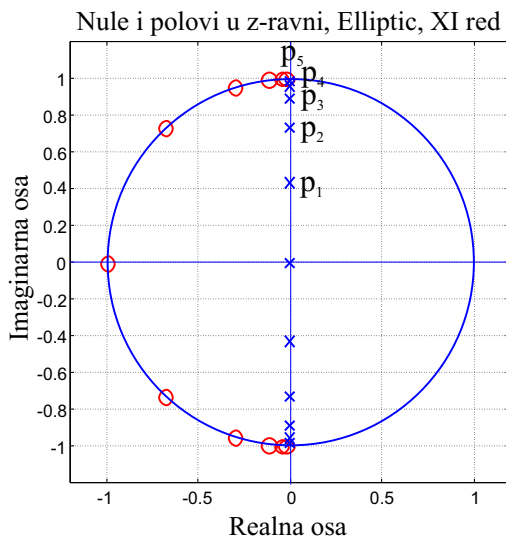
Sl. 3.23: Raspored nula i polova u z ravni Eliptičkog filtra V reda.



Sl. 3.24: Raspored nula i polova u z ravni Eliptičkog filtra VII reda.



Sl. 3.25: Raspored nula i polova u z ravni Eliptičkog filtra IX reda.



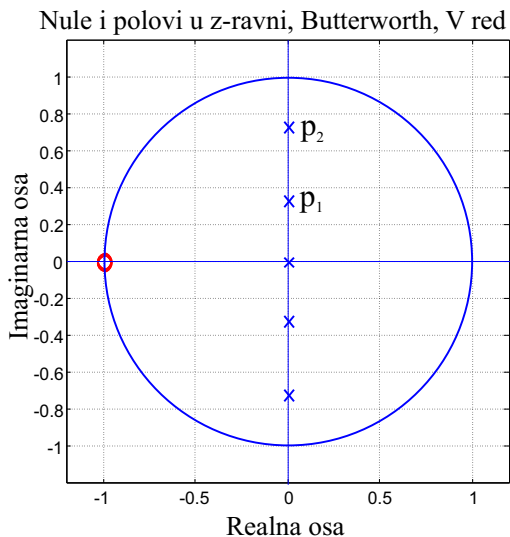
Sl. 3.26: Raspored nula i polova u z ravni Eliptičkog filtra XI reda.

Tab. 3.4: Položaji polova i nula Butterworthovog filtra koji odgovaraju slikama 3.27-3.30.

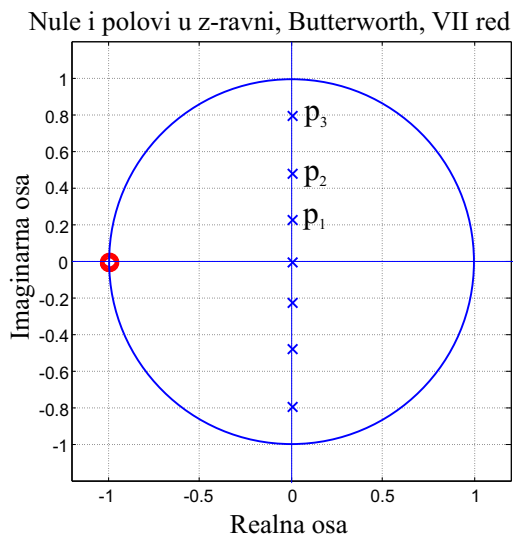
red	Vred	VIIred	IXred	XIred
$\pm p_1$	$\pm 0.3249i$	$\pm 0.2282i$	$\pm 0.1763i$	$\pm 0.1438i$
$\pm p_2$	$\pm 0.7265i$	$\pm 0.4816i$	$\pm 0.3640i$	$\pm 0.2936i$
$\pm p_3$		$\pm 0.7975i$	$\pm 0.5774i$	$\pm 0.4567i$
$\pm p_4$			$\pm 0.8391i$	$\pm 0.6427i$
$\pm p_5$				$\pm 0.8665i$

karakteristike slabljenja Prelaznih filtara nalaze se između karakteristika Eliptičkog i Butterworthovog filtra.

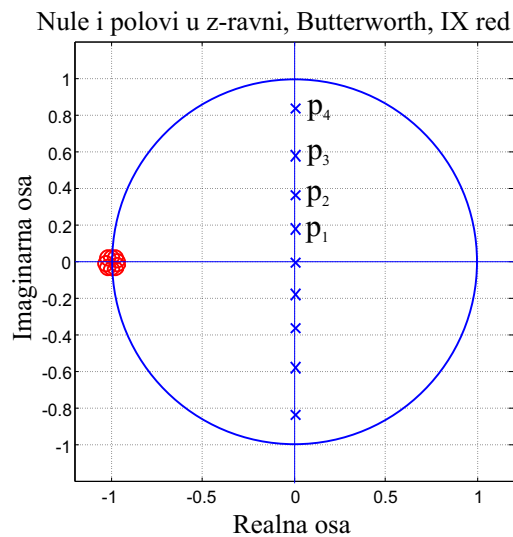
Odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija za Eliptički *halfband* filtar petog, sedmog,



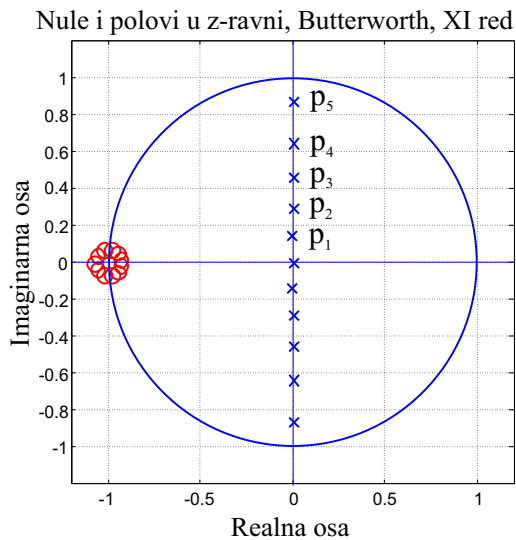
Sl. 3.27: Raspored nula i polova u z ravni Butterworthovog filtra V reda.



Sl. 3.28: Raspored nula i polova u z ravni Butterworthovog filtra VII reda.



Sl. 3.29: Raspored nula i polova u z ravni Butterworthovog filtra IX reda.



Sl. 3.30: Raspored nula i polova u z ravni Butterworthovog filtra XI reda.

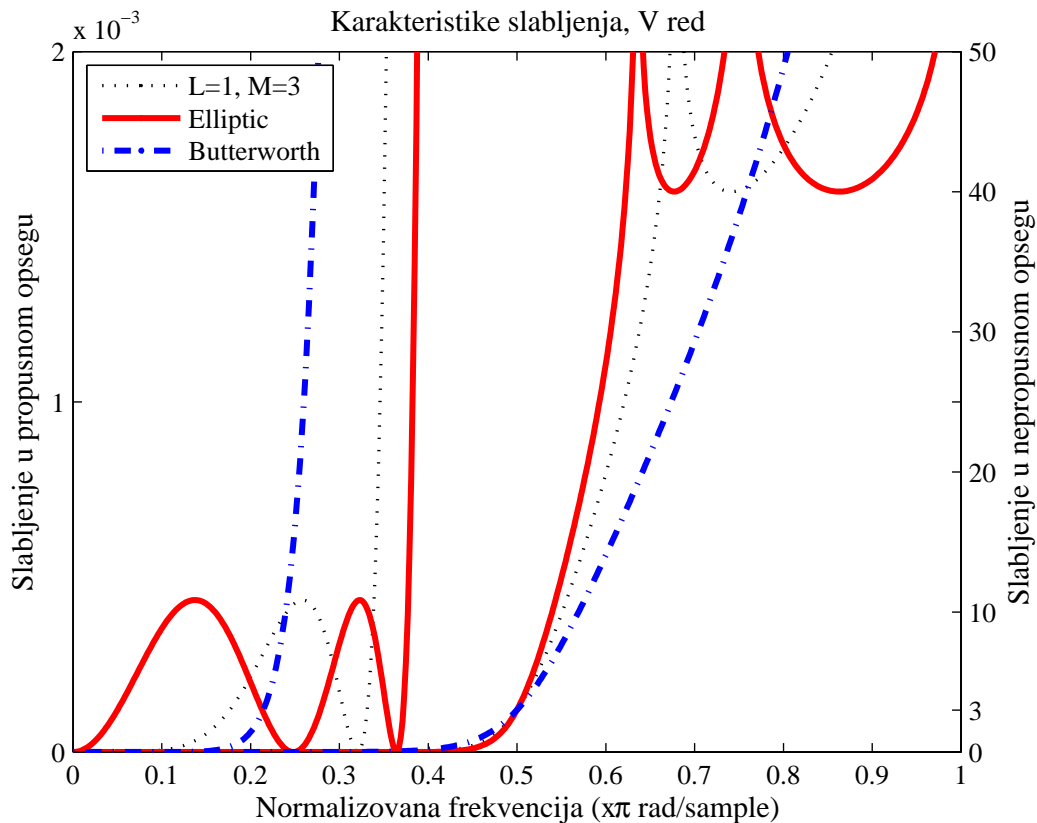
devetog i jedanaestog reda dati su u Tabeli 3.5 a odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija za Butterworthov *halfband* filtar petog, sedmog, devetog i jedanaestog reda dati su u Tabeli 3.6.

Tab. 3.5: Koeficijenti prenosnih funkcija Eliptičkih halfband filtara koji odgovaraju slikama 3.31-3.34.

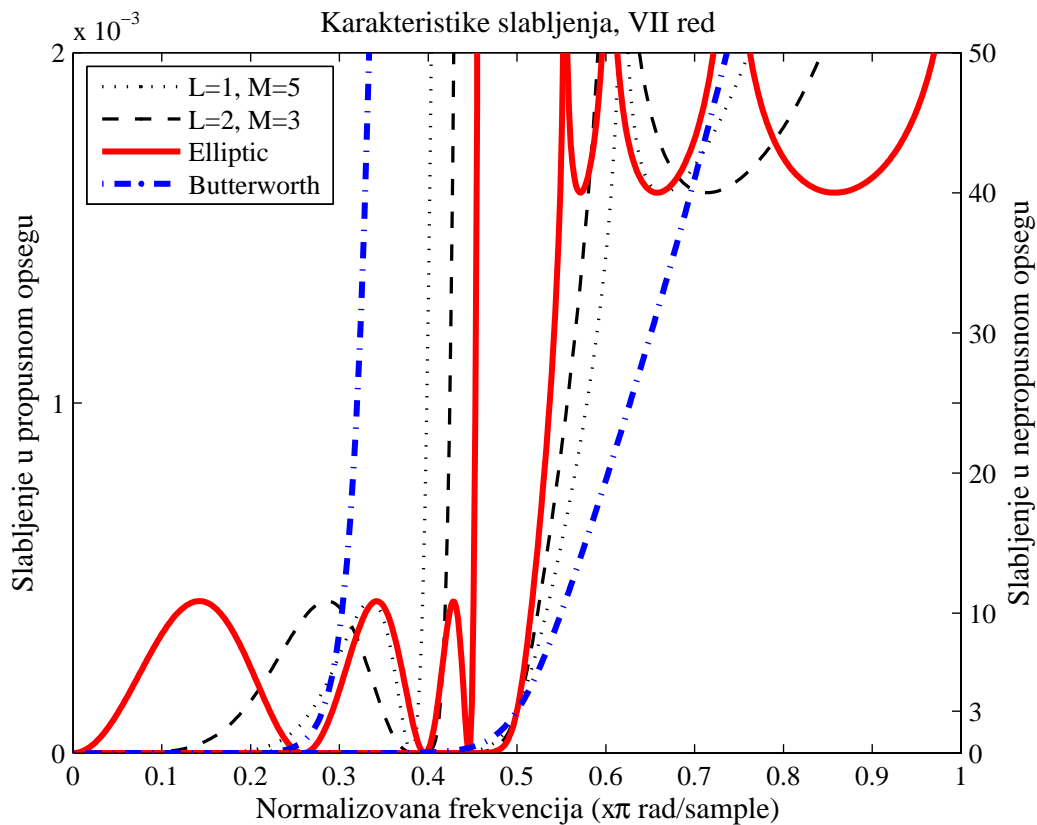
Vred		VIIred		IXred		XIred	
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
0.1055	1.0000	0.0829	1.0000	0.0753	1.0000	0.0725	1.0000
0.3428	0.0000	0.2779	0.0000	0.2537	0.0000	0.2445	0.0000
0.5723	0.8966	0.5733	1.6103	0.6035	2.4653	0.6549	3.3996
0.5723	0.0000	0.7931	0.0000	0.9903	0.0000	1.2012	0.0000
0.3428	0.1447	0.7931	0.7519	1.2670	2.1156	1.8075	4.4149
0.1055	0.0000	0.5733	0.0000	1.2670	0.0000	2.1819	0.0000
		0.2779	0.0921	0.9903	0.7224	2.1819	2.6920
		0.0829	0.0000	0.6035	0.0000	1.8075	0.0000
				0.2537	0.0764	1.2012	0.7477
				0.0753	0.0000	0.6549	0.0000
						0.2445	0.0709
						0.0725	0.0000

Tab. 3.6: Koeficijenti prenosnih funkcija Butterworthovih halfband filtara koji odgovaraju slikama 3.31-3.34.

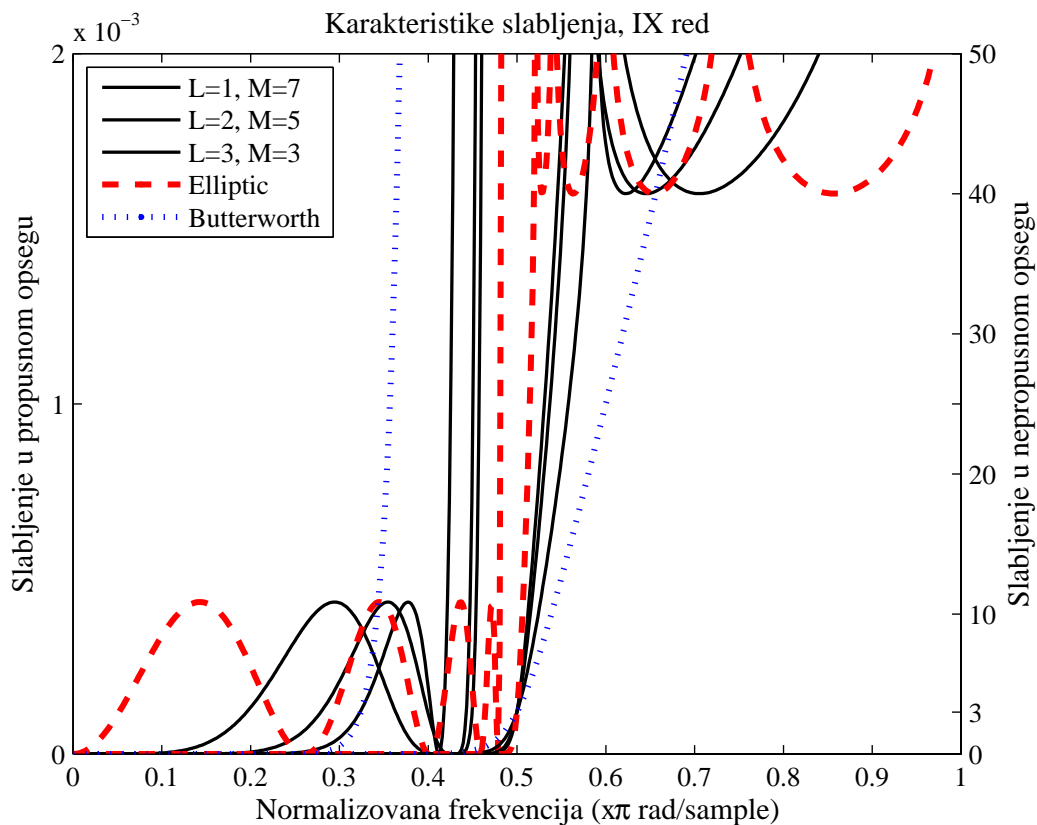
Vred		VIIred		IXred		XIred	
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
0.0528	1.0000	0.0166	1.0000	0.0052	1.0000	0.0016	1.0000
0.2639	0.0000	0.1160	0.0000	0.0466	0.0000	0.0178	0.0000
0.5279	0.6334	0.3479	0.9200	0.1865	1.2010	0.0890	1.4793
0.5279	0.0000	0.5798	0.0000	0.4353	0.0000	0.2671	0.0000
0.2639	0.0557	0.5798	0.1927	0.6529	0.4085	0.5341	0.7013
0.0528	0.0000	0.3479	0.0000	0.6529	0.0000	0.7478	0.0000
		0.1160	0.0077	0.4353	0.0427	0.7478	0.1262
		0.0166	0.0000	0.1865	0.0000	0.5341	0.0000
				0.0466	0.0010	0.2671	0.0079
				0.0052	0.0000	0.0890	0.0000
						0.0178	0.0001
						0.0016	0.0000



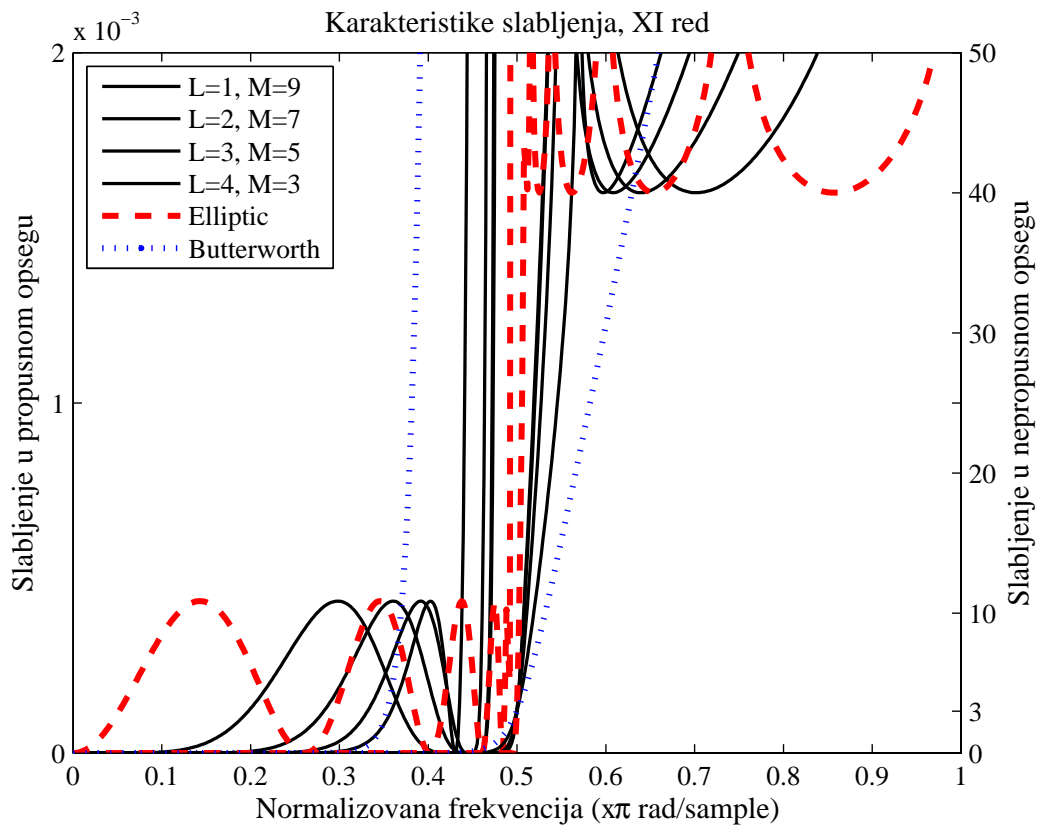
Sl. 3.31: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra petog reda.



Sl. 3.32: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra sedmog reda.



Sl. 3.33: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra devetog reda.



Sl. 3.34: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra jedanaestog reda.

3.2.3 Komplementarna dekompozicija Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa

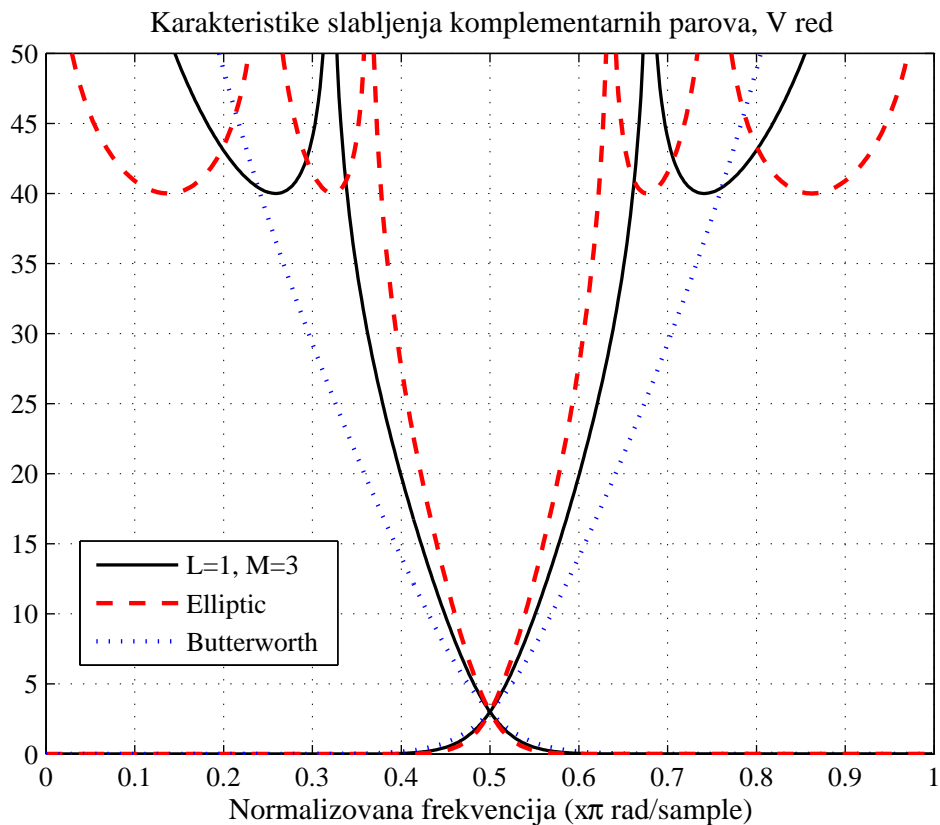
Prenosne funkcije Prelaznih, Eliptičkih i Butterworthovih filtara rastavljaju se na *allpass* filtre tako što jedna grupa polova formira prvu *allpass* prenosnu funkciju $A_0(z)$, a preostali polovi - drugu *allpass* funkciju $z^{-1}A_1(z)$.

Niskopropusni/visokopropusni filter se dobija sabiranjem/oduzimanjem ovih *allpass* filtara, (2.22).

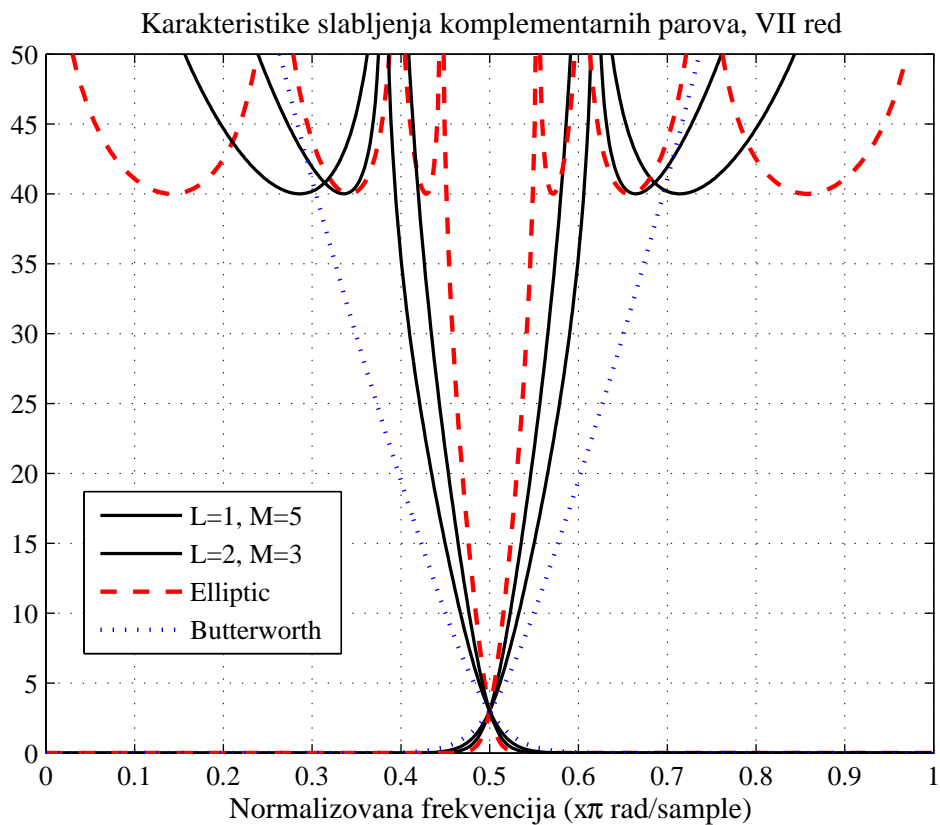
Na slikama 3.35-3.38 prikazani su komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra petog, sedmog, devetog i jedanaestog reda. U Tabeli 3.7 date su prenosne funkcije *allpass* filtara dobijenih komplementarnom dekompozicijom Prelaznih filtara petog, sedmog, devetog i jedanaestog reda, za sve slučajeve višestrukosti L napred analizirane.

Tab. 3.7: *Allpass* filtri dobijeni komplementarnom dekompozicijom prenosnih funkcija Prelaznih filtara sa jednom konačnom nulom prenosa.

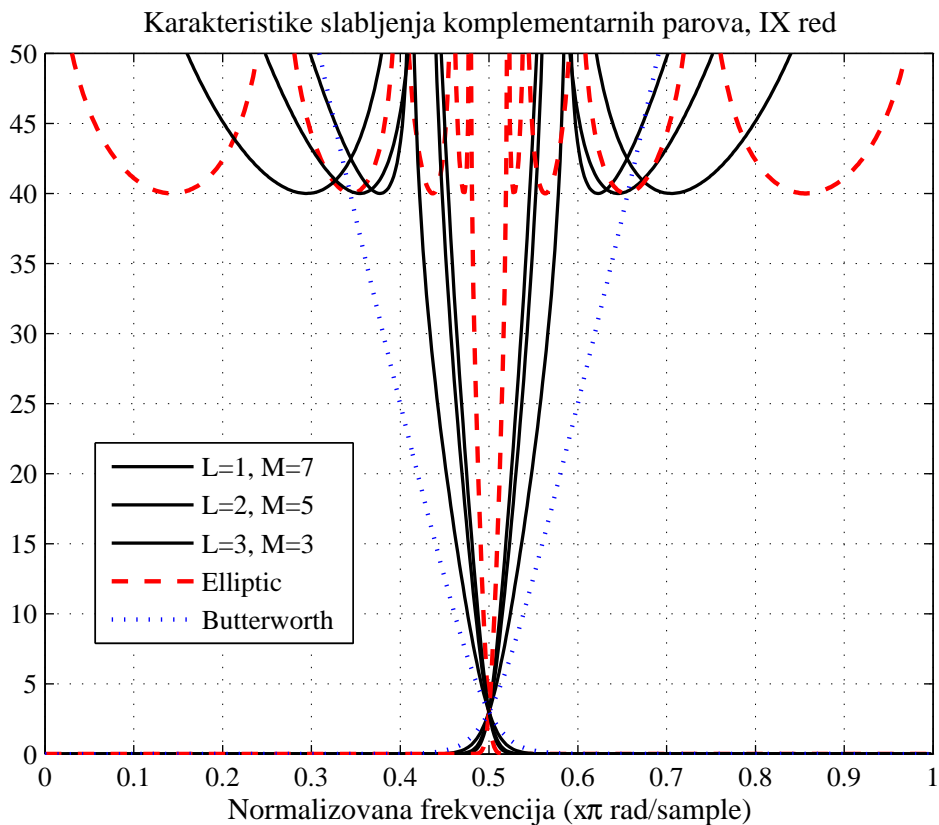
red	<i>allpass</i>	$A_0(z)$	$z^{-1}A_1(z)$
V	$(L = 1, M = 3)$	$\frac{0.1518+z^{-2}}{1+0.1518z^{-2}}$	$\frac{0.6176z^{-1}+z^{-3}}{1+0.6176z^{-2}}$
VII	$(L = 1, M = 5)$	$\frac{0.05664+0.8116z^{-2}+z^{-4}}{1+0.8116z^{-2}+0.05664z^{-4}}$	$\frac{0.3246z^{-1}+z^{-3}}{1+0.3246z^{-2}}$
	$(L = 2, M = 3)$	$\frac{0.1033+0.9337z^{-2}+z^{-4}}{1+0.9337z^{-2}+0.1033z^{-4}}$	$\frac{0.4489z^{-1}+z^{-3}}{1+0.4489z^{-2}}$
IX	$(L = 1, M = 7)$	$\frac{0.01982+0.4921z^{-2}+z^{-4}}{1+0.4921z^{-2}+0.01982z^{-4}}$	$\frac{0.1495z^{-1}+0.9857z^{-3}+z^{-5}}{1+0.9857z^{-2}+0.1495z^{-4}}$
	$(L = 2, M = 5)$	$\frac{0.04319+0.6701z^{-2}+z^{-4}}{1+0.6701z^{-2}+0.04319z^{-4}}$	$\frac{0.2546z^{-1}+1.162z^{-3}+z^{-5}}{1+1.162z^{-2}+0.2546z^{-4}}$
	$(L = 3, M = 3)$	$\frac{0.08256+0.7989z^{-2}+z^{-4}}{1+0.7989z^{-2}+0.08256z^{-4}}$	$\frac{0.3659z^{-1}+1.303z^{-3}+z^{-5}}{1+1.303z^{-2}+0.3659z^{-4}}$
XI	$(L = 1, M = 9)$	$\frac{0.006683+0.2689z^{-2}+1.149z^{-4}+z^{-6}}{1+1.149z^{-2}+0.2689z^{-4}+0.006683z^{-6}}$	$\frac{0.06304z^{-1}+0.6531z^{-3}+z^{-5}}{1+0.6531z^{-2}+0.06304z^{-4}}$
	$(L = 2, M = 7)$	$\frac{0.01607+0.4318z^{-2}+1.361z^{-4}+z^{-6}}{1+1.361z^{-2}+0.4318z^{-4}+0.01607z^{-6}}$	$\frac{0.1231z^{-1}+0.8661z^{-3}+z^{-5}}{1+0.8661z^{-2}+0.1231z^{-4}}$
	$(L = 3, M = 5)$	$\frac{0.0371+0.6294z^{-2}+1.563z^{-4}+z^{-6}}{1+1.563z^{-2}+0.6294z^{-4}+0.0371z^{-6}}$	$\frac{0.2206z^{-1}+1.06z^{-3}+z^{-5}}{1+1.06z^{-2}+0.2206z^{-4}}$
	$(L = 4, M = 3)$	$\frac{0.0708+0.7798z^{-2}+1.688z^{-4}+z^{-6}}{1+1.688z^{-2}+0.7798z^{-4}+0.0708z^{-6}}$	$\frac{0.3163z^{-1}+1.195z^{-3}+z^{-5}}{1+1.195z^{-2}+0.3163z^{-4}}$



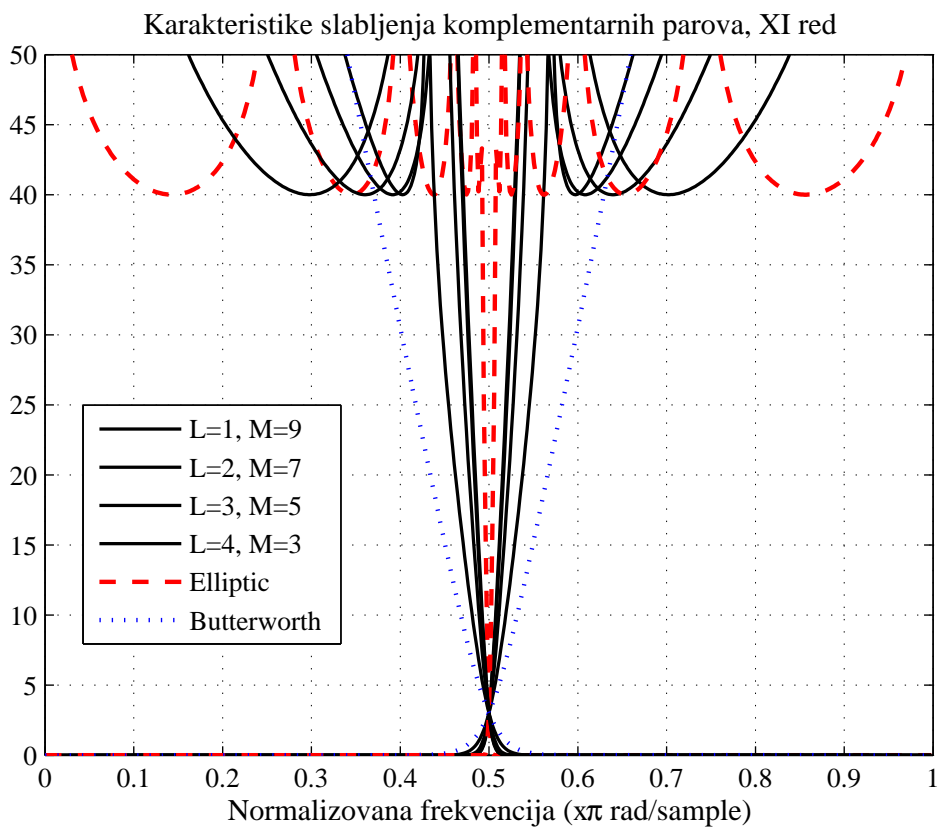
Sl. 3.35: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra petog reda.



Sl. 3.36: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra sedmog reda.



Sl. 3.37: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra devetog reda.



Sl. 3.38: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra jedanaestog reda.

3.2.4 Projektovanje Prelaznog filtra sedmog reda za slučaj $L = 1$ i $M = 5$

Karakteristična funkcija Prelaznog filtra sedmog reda, za slučaj $L = 1$ i $M = 5$, ima oblik:

$$\psi_7(x) = x^5 \left(\frac{x_0^2 - x^2}{1 - x_0^2 x^2} \right). \quad (3.25)$$

Za zadatu vrednost maksimalnog slabljenja $R_s = 40\text{dB}$, nula ove funkcije iznosi $x_0 = 0.6818$.

Kvadrat amplitudske funkcije u digitalnom domenu dobija se zamenom frekvencijske promenljive (3.6) u (3.25) a zatim zamenom tog izraza u (3.2). Nule prenosne funkcije u digitalnom domenu su $z_0 = -1$ (petog reda) i $z_{1,2} = (x_0^2 - 1 \pm j2x_0)/(x_0^2 + 1) = -0.3653 \pm 0.9309i$, odnosno uglovi koje zaklapaju ove nule za realnom osom su $\gamma_0 = 180^\circ$ i $\gamma_{1,2} = \pm 111.4247^\circ$, respektivno, Tabela 3.1. Polovi se računaju primenom naredbe `roots` na polinom generisan izrazom (3.23). Usvajaju se polovi unutar jediničnog kruga koji imaju vrednosti: $p_0 = 0.0000$, $p_{1,2} = \pm 0.2777i$, $p_{3,4} = \pm 0.5697i$ i $p_{5,6} = \pm 0.8570i$, Tabela 3.1. Prenosna funkcija niskopropusnog filtra ima oblik:

$$H_0(z) = k \frac{\sum_{i=0}^6 (z - z_i)}{\sum_{i=0}^6 (z - p_i)},$$

što daje

$$H(z) = k \frac{z^7 + 5.7306z^6 + 14.6528z^5 + 22.3055z^4 + 22.3055z^3 + 14.6528z^2 + 5.7306z + 1}{z^7 + 1.1362z^5 + 0.3201z^3 + 0.0184z},$$

odnosno ako se brojioc i imenioc podeli najvećim stepenom z

$$H(z^{-1}) = k \frac{1 + 5.7306z^{-1} + 14.6528z^{-2} + 22.3055z^{-3} + 22.3055z^{-4} + 14.6528z^{-5} + 5.7306z^{-6} + z^{-7}}{1 + 1.1362z^{-2} + 0.3201z^{-4} + 0.0184z^{-6}}.$$

Kako ova prenosna funkcija ne ispunjava uslov da je $H(1) = 1$, brojioc prenosne funkcije se množi konstantom $k = 0.0283$, što konačno daje prenosnu funkciju niskopropusnog Prelaznog filtra sedmog reda, (Tabela 3.2):

$$H(z^{-1}) = \frac{0.0283 + 0.1623z^{-1} + 0.4150z^{-2} + 0.6317z^{-3} + 0.6317z^{-4} + 0.4150z^{-5} + 0.1623z^{-6} + 0.0283z^{-7}}{1 + 1.1362z^{-2} + 0.3201z^{-4} + 0.0184z^{-6}}. \quad (3.26)$$

Karakteristika slabljenja $a = -20 \log H(z)$ ove funkcije ima izgled dat na Sl. 3.20. Komplementarnom dekompozicijom, ova prenosna funkcija je rastavljena na dva *allpass* filtra (Tabela 3.7):

$$H_0 = \frac{0.05664 + 0.8116z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.8116z^{-2} + 0.05664z^{-4}} + \frac{0.3246z^{-1} + z^{-3}}{1 + 0.3246z^{-2}},$$

čijim se oduzimanjem dobija prenosna funkcija visokopropusnog filtra:

$$H(z) = \frac{0.0283 - 0.1623z^{-1} + 0.4150z^{-2} - 0.6317z^{-3} + 0.6317z^{-4} - 0.4150z^{-5} + 0.1623z^{-6} - 0.0283z^{-7}}{1 + 1.1362z^{-2} + 0.3201z^{-4} + 0.0184z^{-6}}. \quad (3.27)$$

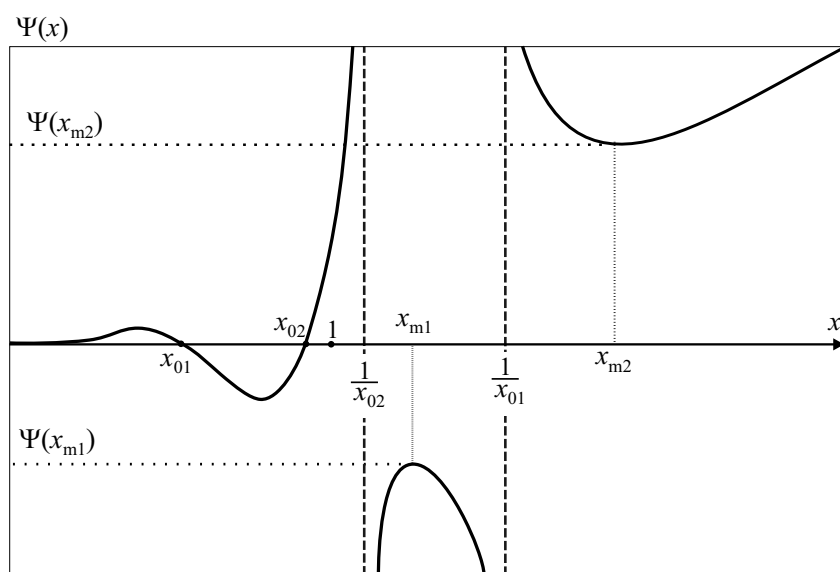
Karakteristike slabljenja niskopropusne i visokopropusne funkcije prelaznog filtra sedmog reda date su na Sl. 3.36.

3.3 Klasa Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa

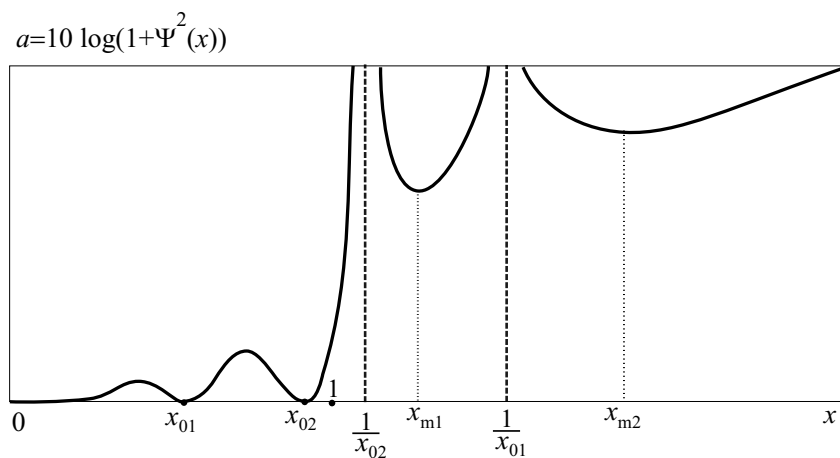
Karakteristična funkcija $\psi_N(x)$ predložena jednačinom (3.1), postaje karakteristična funkcija sa dve konačne nule prenosa (sa po dva ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu), ako ima formu [70, 77, 80]:

$$\psi_N(x) = x^M \frac{x_{01}^2 - x^2}{1 - x_{01}^2 x^2} \frac{x_{02}^2 - x^2}{1 - x_{02}^2 x^2} \quad (3.28)$$

gde je N red filtra ($N = M + 4$), x_{01} i x_{02} su celi brojevi manji od jedinice ($x_{01} < x_{02} < 1$) i predstavljaju konačne nule prenosne funkcije a M je stepen zaravnjenja u koordinatnom početku.



Sl. 3.39: Grafik karakteristične funkcije za $x_{01} < x_{02} < 1$.



Sl. 3.40: Grafik karakteristike slabljenja za $x_{01} < x_{02} < 1$.

Na slici 3.39 dat je grafik ove karakteristične funkcije za proizvoljne vrednosti $x_{01} < x_{02} < 1$

a na slici 3.40 njena odgovarajuća funkcija slabljenja.

Podešavanje vrednosti minimalnog slabljenja u nepropusnom opsegu

Kako bi se ostvarila komplementarna dekompozicija, karakteristiku slabljenja, $a = 10\log(1 + \psi^2(x))$, treba podesiti tako da ekstremne vrednosti u nepropusnom opsegu, $a(x_{m1})$ i $a(x_{m2})$, budu jednake zadatoj vrednosti R_s , kao što je prikazano na Sl. 3.41. Drugim rečima, treba proračunati vrednosti x_{01} i x_{02} na osnovu zadate vrednosti minimuma slabljenja u nepropusnom opsegu, R_s , kao i vrednosti M koja određuje red filtra.

Ovaj problem se može rešiti Newton-Raphsonovim metodom za rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Treba odrediti nepoznati vektor sa elementima $\mathbf{x} = [x_{01}, x_{02}, x_{m1}, x_{m2}]^T$. Prvi korak pri rešavanju je postavljanje početnih vrednosti vektora \mathbf{x} , $\mathbf{x}^0 = [x_{01}, x_{02}, x_{m1}, x_{m2}]^T$, koji ispunjava uslov $1 < 1/x_{02} < x_{m1} < 1/x_{01} < x_{m2} < \infty$ (na primer $\mathbf{x}^0 = [0.7, 0.9, 1.2, 1.7]^T$).

Niz četiri nelinearne jednačine može se izraziti kao $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, gde

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(x)|_{x=x_{m1}} + \sqrt{10^{R_s/10} - 1} \\ \psi(x)|_{x=x_{m2}} - \sqrt{10^{R_s/10} - 1} \\ \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_{m1}} \\ \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_{m2}} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

i ovaj sistem se mora rešiti iterativnom procedurom, odnosno Newton-Raphsonovim metodom. Relacije između trenutnih vrednosti \mathbf{x} , $x^{(i)}$, i novih vrednosti \mathbf{x} dobijenih posle jedne iteracije, $x^{(i+1)}$, mogu se izraziti u matričnoj formi $\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \lambda \mathbf{J}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(i)})$, tj.

$$\begin{bmatrix} x_{01}^{(i+1)} \\ x_{02}^{(i+1)} \\ x_{m1}^{(i+1)} \\ x_{m2}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01}^{(i)} \\ x_{02}^{(i)} \\ x_{m1}^{(i)} \\ x_{m2}^{(i)} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_{02}} & \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial x_{m2}} \\ \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_{02}} & \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f_2^{(i)}}{\partial x_{m2}} \\ \frac{\partial f_3^{(i)}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_3^{(i)}}{\partial x_{02}} & \frac{\partial f_3^{(i)}}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f_3^{(i)}}{\partial x_{m2}} \\ \frac{\partial f_4^{(i)}}{\partial x_{01}} & \frac{\partial f_4^{(i)}}{\partial x_{02}} & \frac{\partial f_4^{(i)}}{\partial x_{m1}} & \frac{\partial f_4^{(i)}}{\partial x_{m2}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \\ f_3^{(i)} \\ f_4^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

gde je \mathbf{J} Jakobijanova matrica a $\lambda \in (0, 1]$ parametar koji obezbeđuje konvergenciju rešenja. Na početku iterativne procedure vrednost λ postavlja se na vrednost $\lambda = 0.1$. Kada je ispunjen uslov $\max \{f_j^{(i)}\} \leq \varepsilon$, gde je ε vrlo mali broj (na primer 10^{-4}), usvaja se $\lambda = 1$.

Za ovaj pristup potreban je prvi i drugi izvod karakteristične funkcije, pri čemu prvi izvod ima oblik:

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = x^M \frac{x_{01}^2 - x^2}{1 - x_{01}^2 x^2} \frac{x_{02}^2 - x^2}{1 - x_{02}^2 x^2} \cdot \left[\frac{M}{x} + 2x \frac{x_{01}^4 - 1}{(x_{01}^2 - x^2)(1 - x_{01}^2 x^2)} + 2x \frac{x_{02}^4 - 1}{(x_{02}^2 - x^2)(1 - x_{02}^2 x^2)} \right]. \quad (3.31)$$

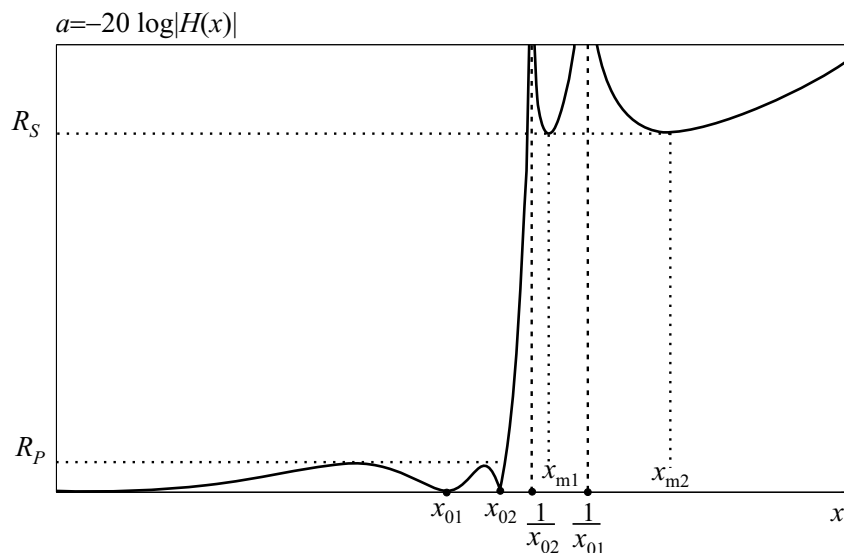
Ova procedura može se uprostiti u smislu izbegavanja drugih izvoda koji se javljaju u Jakobijanovoj matrici u funkcijama f_3 i f_4 . U isto vreme broj nelinearnih jednačina koje treba rešiti Newton-Raphsonovim metodom je duplo manji. Tako, zadati problem se može rešiti u sledećim koracima:

1. Postavljanje početnih uslova $\mathbf{x}^0 = [\mathbf{x}_{01}, \mathbf{x}_{02}]^T$.
2. Određivanje vrednosti x_{m1} i x_{m2} kao nule jednačine (3.31), ili, ako se ova jednačina pojednostavi dobija se simetrični polinom $S(x) = d_0 - d_2 x^2 + d_4 x^4 - d_2 x^6 + d_0 x^8$ čiji su koeficijenti $d_0 = M x_{01}^2 x_{02}^2$, $d_2 = (x_{01}^2 + x_{02}^2)(2 + M - 2x_{01}^2 x_{02}^2 + M x_{01}^2 x_{02}^2)$ i $d_4 = 4 - 4x_{01}^4 x_{02}^4 + M(1 + 2x_{01}^2 x_{02}^2 + x_{02}^4 + x_{01}^4(1 + x_{02}^4))$.
Usvajaju se rešenja pozitivna i veća od jedinice.
3. Ako je uslov $|f_1| + |f_2| < \varepsilon$ zadovoljen, prethodne vrednosti x_{01}, x_{02}, x_{m1} i x_{m2} su konačne i ovo je kraj numeričke procedure. Ako ne, ide se na sledeći korak.
4. Računaju se nove vrednosti x_{01} i x_{02} Newton-Raphsonovim metodom za rešavanje sistema nelinearnih jednačina:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(x)|_{x=x_{m1}} + \sqrt{10^{R_s/10} - 1} \\ \psi(x)|_{x=x_{m2}} - \sqrt{10^{R_s/10} - 1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

i vraća se nazad na korak 2.

Kao rezultat ovog iterativnog postupka, dobija se mini-max funkcija slabljenja $a = -20 \log |H_0(x)|$ i u propusnom i u nepropusnom opsegu, Sl.3.41. Ako je minimalna vrednost slabljenja u nepropusnom opsegu zadata kao, R_s , onda se vrednost maksimuma slabljenja u propusnom opsegu dobija iz $R_p = -10 \log(1 - 10^{-R_s/10})$.



Sl. 3.41: Grafik mini-max karakteristike slabljenja nakon rešavanja sistema nelinearnih jednačina.

Određivanje koeficijenata digitalne prenosne funkcije niskopropusnog filtra i projektovanje NF/VF komplementarnog para

Zamenom frekvencijske promenljive (3.6) u (3.28), pri čemu je $z = e^{j\omega}$, dobija se karakteristična funkcija u digitalnom domenu $\psi_N(z)$ a zatim se ona zamenjuje u jednačinu (3.2) koja je ekvivalentna sa (3.18).

Naredni korak je proračun polova i nula u z ravni funkcije (3.18) tj. kvadrata digitalne amplitudske funkcije $H(z)H(z^{-1})$. Kao rezultat se dobija da su svi polovi ove funkcije na imaginarnoj osi a sve nule na jediničnom krugu i dvostruke. Usvajanjem polova unutar jediničnog kruga i odbacivanjem svih duplikata nula, dobija se digitalna niskopropusna prenosna funkcija,

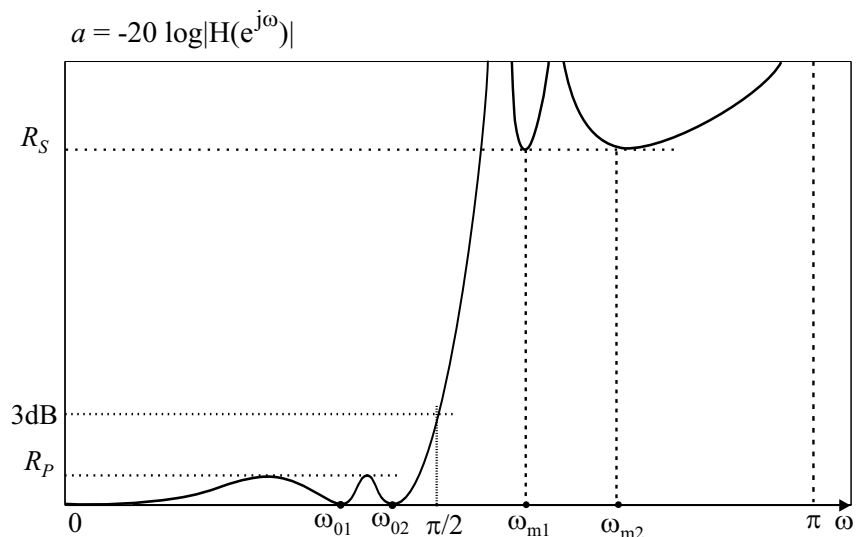
$$H_0(z) = k \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (z - z_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} (z - p_i)}. \quad (3.33)$$

Ovu funkciju treba pomnožiti konstantom k koja će osigurati da važi $|H(0)| = 1$, (3.24). Konačno, određuju se koeficijenti prenosne funkcije u brojiocu b_i i imeniocu a_i :

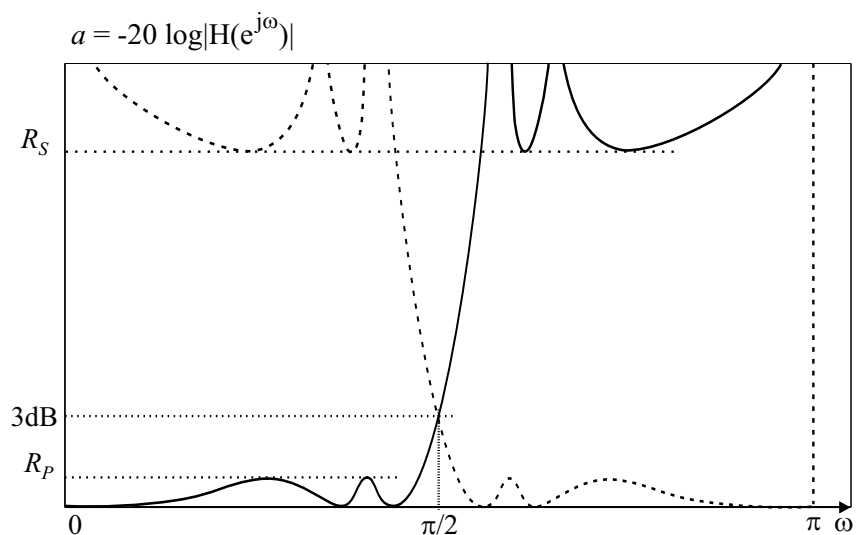
$$H_0(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N+1} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N+1} a_i z^{-i}},$$

čija je karakteristika slabljenja prikazana na Sl. 3.42.

Primenom postupka komplementarne dekompozicije, koji je detaljno opisan u prethodnoj glavi, ova prenosna funkcija razdvaja se na dva *allpass* filtra i primenom jednačina (3.7-3.8) dobijaju niskopropusna i visokopropusna prenosna funkcija koje čine komplementarni par, Sl. 3.43. Koeficijenti visokopropusne prenosne funkcije, $H_1(z)$, imaju iste vrednosti sem što u brojiocu neparni koeficijenti imaju suprotan znak.



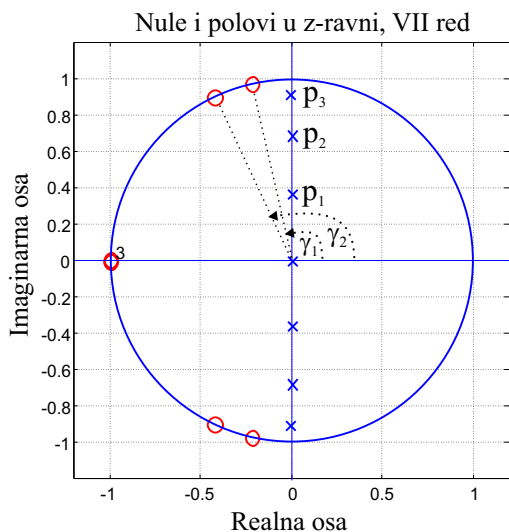
Sl. 3.42: Grafik mini-max karakteristike slabljenja digitalnog Prelaznog filtra u ω domenu.



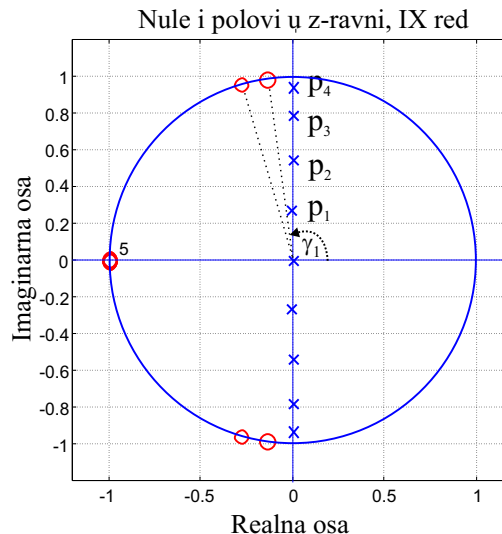
Sl. 3.43: Grafik NF/VF komplementarnog para Prelaznog filtra sa dve konačne nule prenosa.

3.3.1 Primeri klase Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa

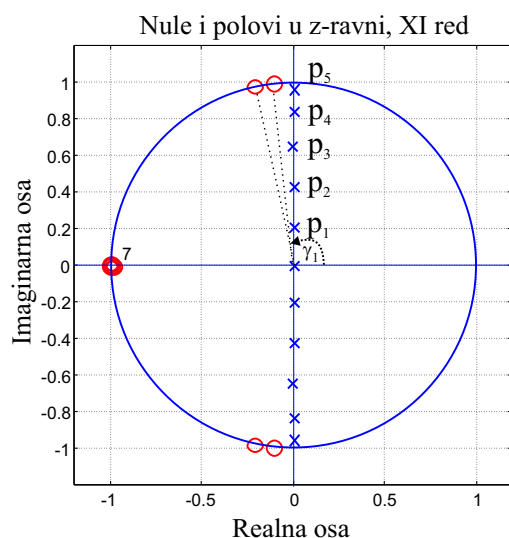
U ovom delu prikazani su rezultati klase filtara sa dve konačne nule prenosa (sa po dva ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu) za sedmi, deveti, jedanaesti i trinaesti red. Na slikama 3.44-3.47 prikazani su položaji polova i nula u z ravni, a u Tabeli 3.8 su date brojne vrednosti imaginarnih vrednosti polova i uglova koje nule prenosne funkcije zaklapaju sa pozitivnim smerom realne ose.



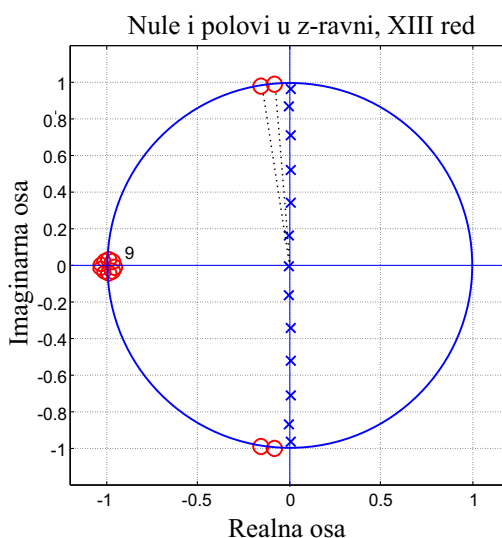
Sl. 3.44: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $M = 3$.



Sl. 3.45: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $M = 5$.



Sl. 3.46: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $M = 7$.



Sl. 3.47: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $M = 9$.

Na slikama 3.48-3.50 prikazane su uporedne *halfband* karakteristike slabljenja Prelaznih, Eliptičkih i Butterworthovih filtara sedmog, devetog i trinaestog reda. Sve karakteristike

slabljenja Prelaznih filtara nalaze se između karakteristika Eliptičkog i Butterworthovog filtra.

Na Sl. 3.51 prikazane su karakteristike slabljenja Prelaznog filtra sedmog ($M = 3$), devetog ($M = 5$) i jedanaestog ($M = 7$) reda.

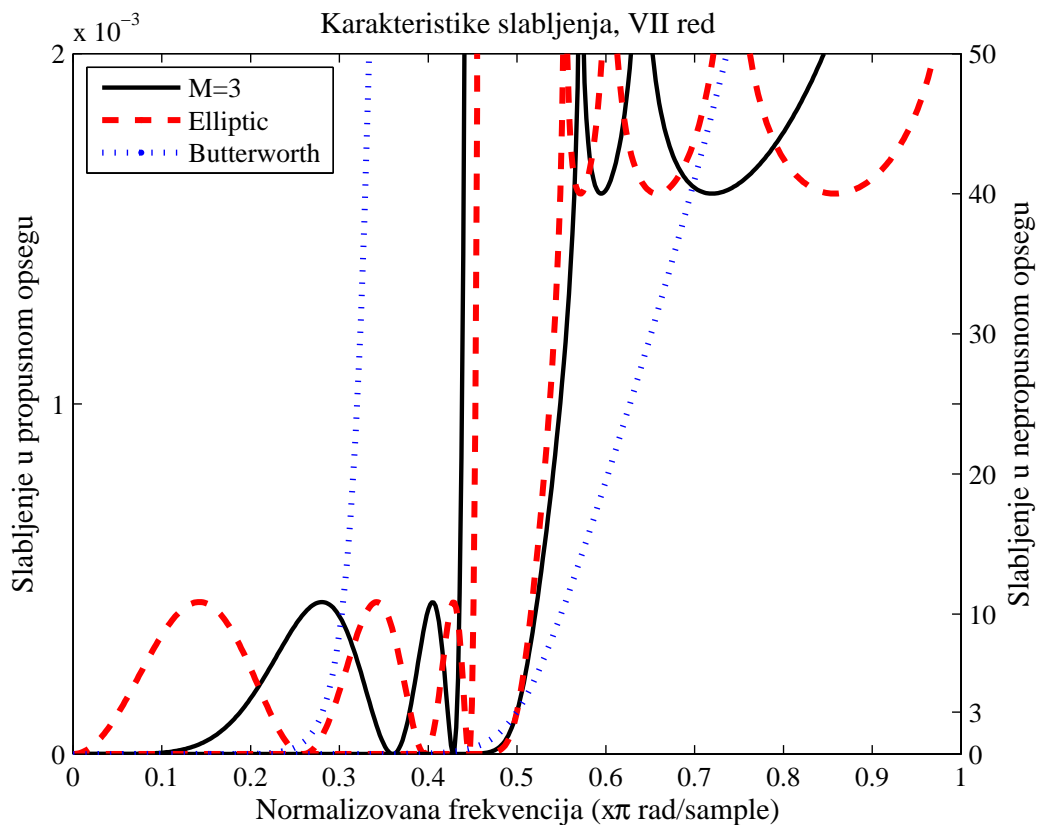
Odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa dati su u Tabeli 3.9. Radi poređenja, koeficijenti prenosnih funkcija za Eliptički *halfband* filter sedmog, devetog i jedanaestog reda nalaze se Tabeli 3.5 a odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija za Butterworthov *halfband* filter sedmog, devetog i jedanaestog reda u Tabeli 3.6.

Tab. 3.8: Položaji polova i nula Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa koji odgovaraju Sl.3.44-Sl.3.47.

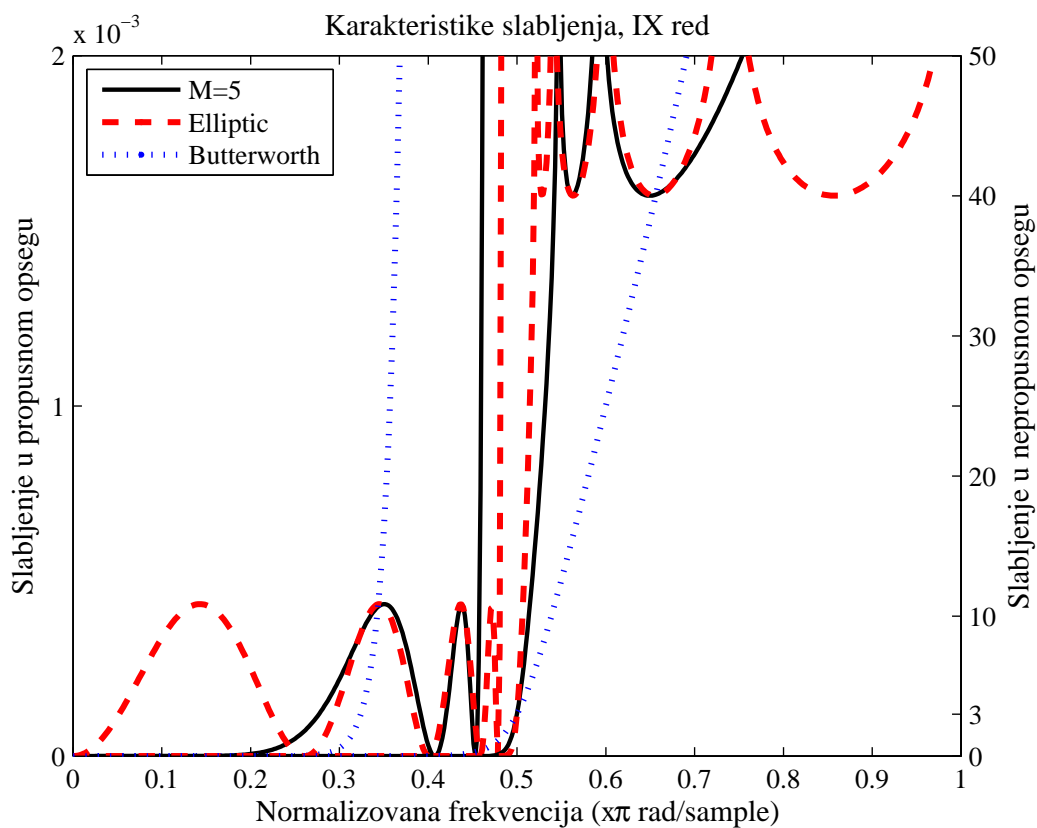
red	VIIred $M = 3$	IXred $M = 5$	XIred $M = 7$	XIIIred $M = 9$
$\pm p_1$	$\pm 0.3629i$	$\pm 0.2703i$	$\pm 0.2075i$	$\pm 0.1664i$
$\pm p_2$	$\pm 0.6823i$	$\pm 0.5458i$	$\pm 0.4250i$	$\pm 0.3398i$
$\pm p_3$	$\pm 0.9069i$	$\pm 0.7825i$	$\pm 0.6490i$	$\pm 0.5249i$
$\pm p_4$		$\pm 0.9385i$	$\pm 0.8361i$	$\pm 0.7144i$
$\pm p_5$			$\pm 0.9545i$	$\pm 0.8688i$
$\pm p_5$				$\pm 0.9641i$
$\pm \gamma_1$	$\pm 102.9206^\circ$	$\pm 98.4367^\circ$	$\pm 96.1969^\circ$	$\pm 94.8793^\circ$
$\pm \gamma_2$	$\pm 115.1647^\circ$	$\pm 106.6474^\circ$	$\pm 102.2855^\circ$	$\pm 99.6942^\circ$

Tab. 3.9: Koeficijenti prenosnih funkcija Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa koji odgovaraju Sl.3.51.

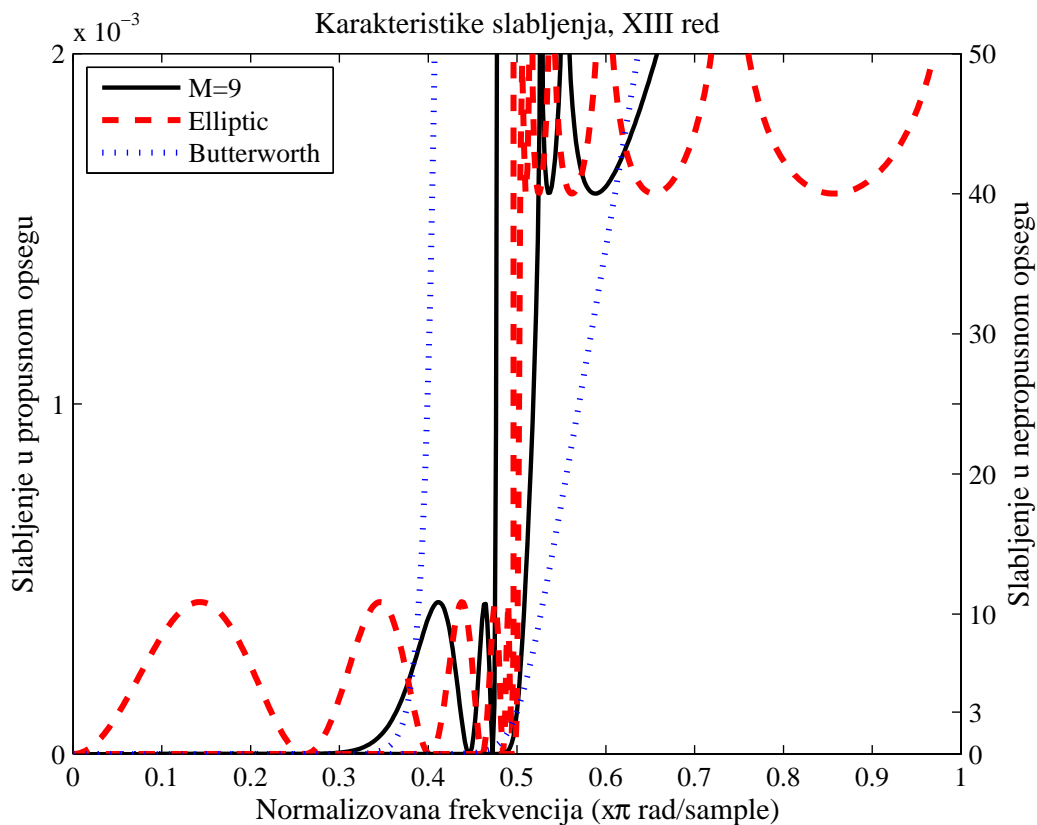
VIIred		IXred		XIred		XIIIred	
b	a	b	a	b	a	b	a
0.0542	1.0000	0.0224	1.0000	0.0083	1.0000	0.0029	1.0000
0.2328	0.0000	0.1312	0.0000	0.0631	0.0000	0.0274	0.0000
0.5023	1.4197	0.3690	1.8641	0.2278	2.2549	0.1227	2.6133
0.7221	0.0000	0.6793	0.0000	0.5266	0.0000	0.3493	0.0000
0.7221	0.5526	0.9098	1.1150	0.8827	1.7771	0.7148	2.5227
0.5023	0.0000	0.9098	0.0000	1.1327	0.0000	1.1230	0.0000
0.2328	0.0504	0.6793	0.2326	1.1327	0.5781	1.3987	1.1062
0.0542	0.0000	0.3690	0.0000	0.8827	0.0000	1.3987	0.0000
		0.1312	0.0117	0.5266	0.0702	1.1230	0.2184
		0.0224	0.0000	0.2278	0.0000	0.7148	0.0000
				0.0631	0.0021	0.3493	0.0166
				0.0083	0.0000	0.1227	0.0000
						0.0274	0.0003
						0.0029	0.0000



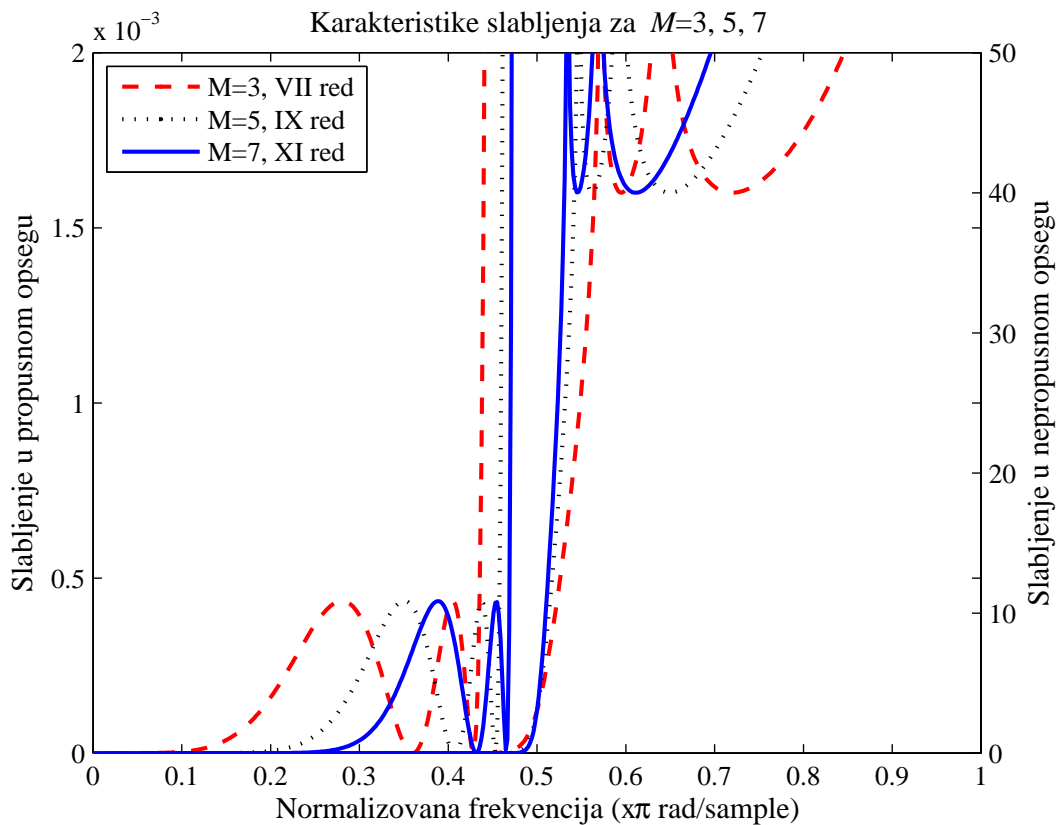
Sl. 3.48: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra sedmog reda.



Sl. 3.49: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra devetog reda.



Sl. 3.50: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterwothovog filtra trinaestog reda.



Sl. 3.51: Karakteristike slabljenja Prelaznog filtra sedmog, devetog i jedanaestog reda.

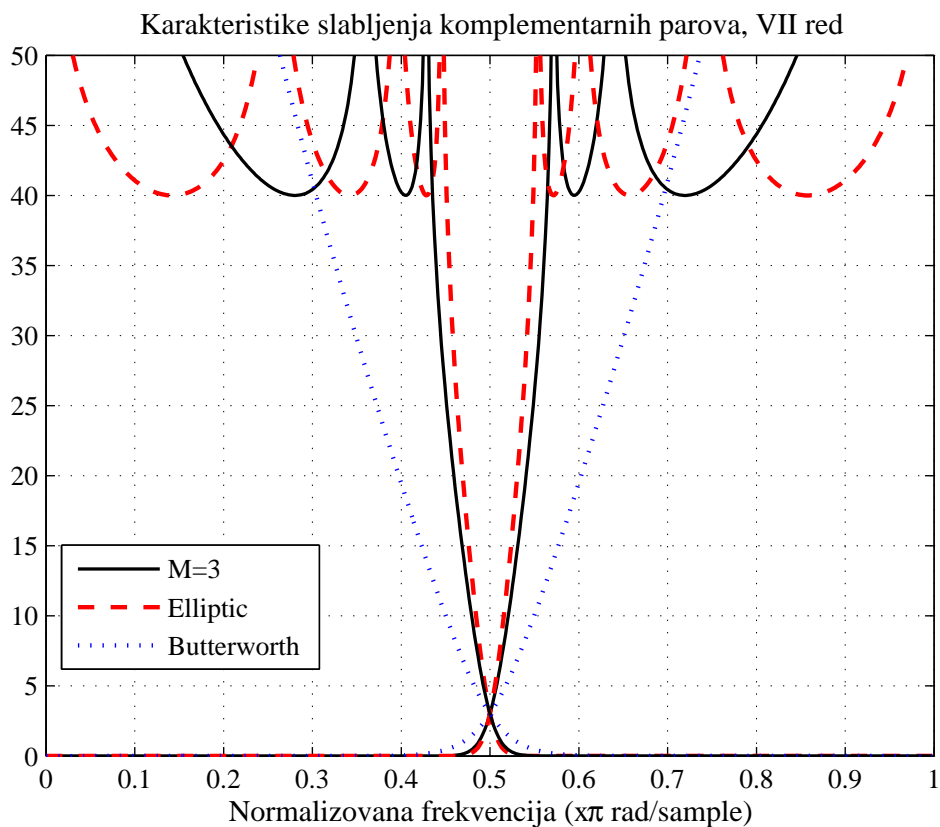
3.3.2 Komplementarna dekompozicija Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa

Prenosne funkcije Prelaznih, Eliptičkih i Butterworthovih filtara rastavljaju se na *allpass* filtre postupkom koji je opisan u prethodnoj glavi. U Tabeli 3.10 date su prenosne funkcije *allpass* filtara dobijenih komplementarnom dekompozicijom Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa za sedmi, deveti, jedanaesti i trinaesti red.

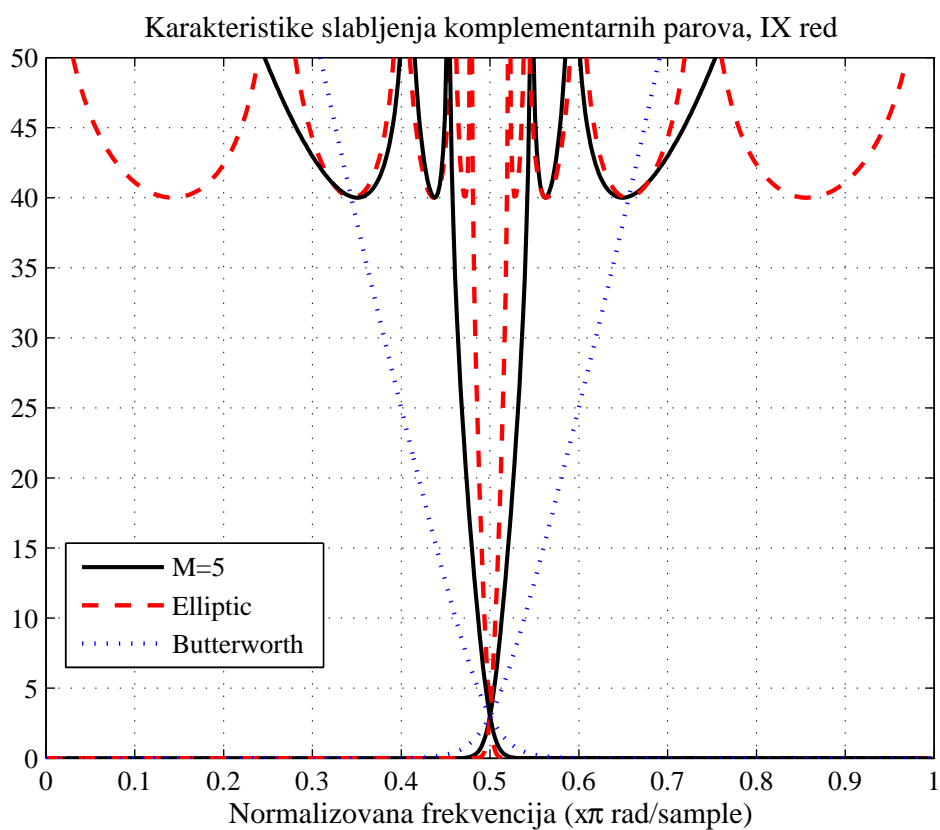
Na slikama 3.52-3.55 prikazani su komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra sedmog, devetog, jedanaestog i trinaestog reda.

Tab. 3.10: *Allpass filtri dobijeni komplementarnom dekompozicijom prenosnih funkcija Prelaznih filtara sa dve konačne nule prenosa.*

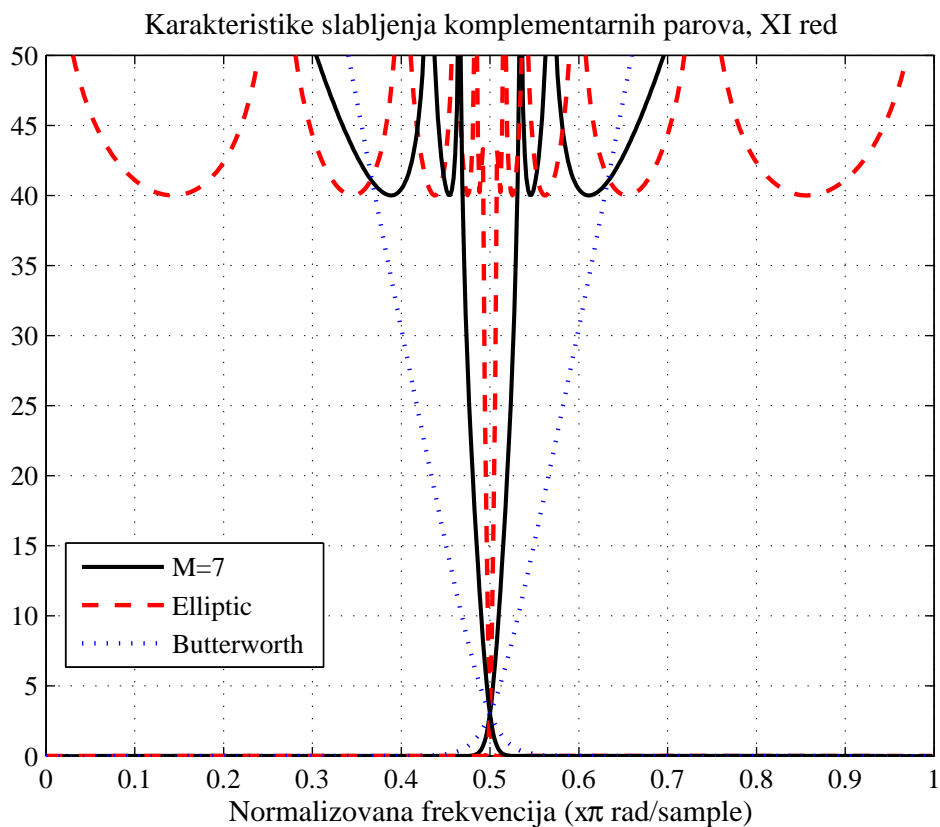
	$A_0(z)$	$z^{-1}A_1(z)$
VII ($M = 3$)	$\frac{0.1083 + 0.9541z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.9541z^{-2} + 0.1083z^{-4}}$	$\frac{0.4656z^{-1} + z^{-3}}{1 + 0.4656z^{-2}}$
IX ($M = 5$)	$\frac{0.04473 + 0.6854z^{-2} + z^{-4}}{1 + 0.6854z^{-2} + 0.04473z^{-4}}$	$\frac{0.2624z^{-1} + 1.179z^{-3} + z^{-5}}{1 + 1.179z^{-2} + 0.2624z^{-4}}$
XI ($M = 7$)	$\frac{0.01652 + 0.4411z^{-2} + 1.375z^{-4} + z^{-6}}{1 + 1.375z^{-2} + 0.4411z^{-4} + 0.01652z^{-6}}$	$\frac{0.1262z^{-1} + 0.8796z^{-3} + z^{-5}}{1 + 0.8796z^{-2} + 0.1262z^{-4}}$
XIII ($M = 9$)	$\frac{0.00576 + 0.2365z^{-2} + 1.058z^{-4} + z^{-6}}{1 + 1.058z^{-2} + 0.2365z^{-4} + 0.00576z^{-6}}$	$\frac{0.05476z^{-1} + 0.6406z^{-3} + 1.555z^{-5} + z^{-7}}{1 + 1.555z^{-2} + 0.6406z^{-4} + 0.05476z^{-6}}$



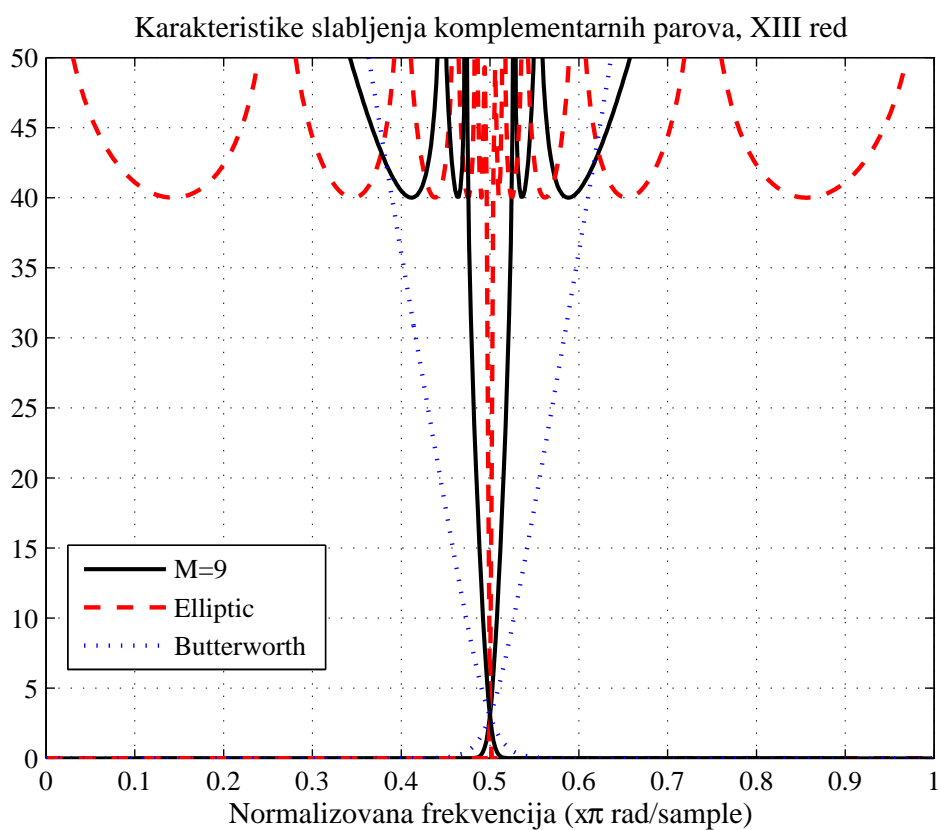
Sl. 3.52: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra sedmog reda.



Sl. 3.53: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra devetog reda.



Sl. 3.54: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra jedanaestog reda.



Sl. 3.55: Komplementarni NF/VF parovi Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra trinaestog reda.

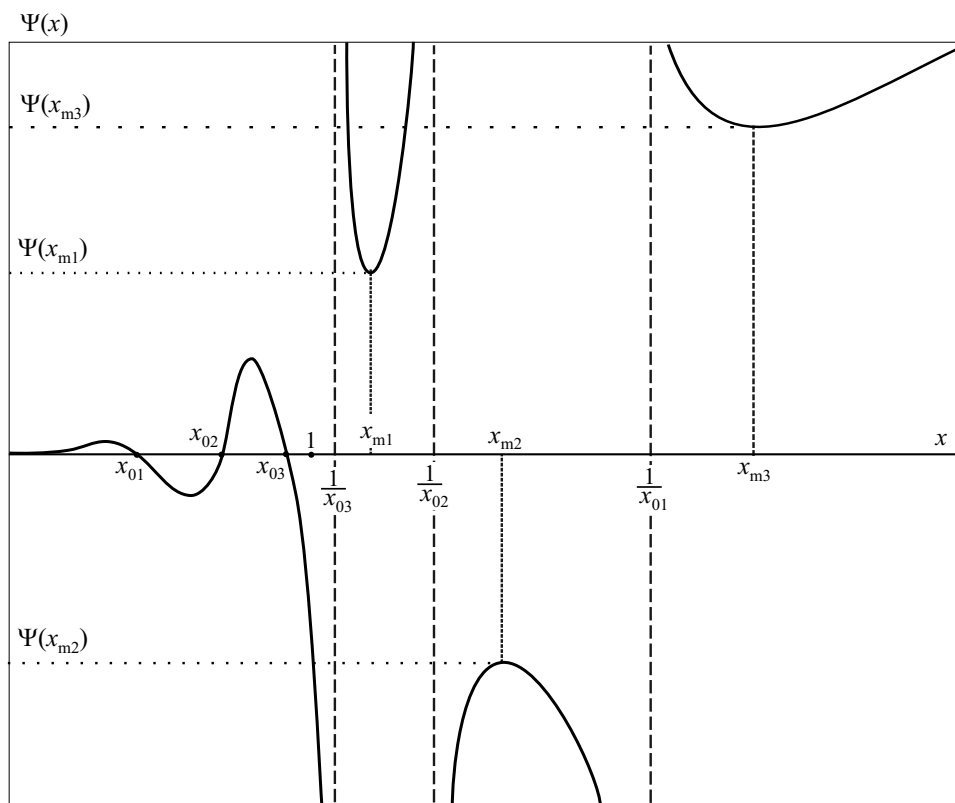
3.4 Klasa prelaznih filtara sa tri konačne nule prenosa

Karakteristična funkcija $\psi_N(x)$ predložena jednačinom (3.1), postaje karakteristična funkcija sa tri konačne nule prenosa (sa po tri ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu), ako ima formu:

$$\psi_N(x) = x^M \frac{x_{01}^2 - x^2}{1 - x_{01}^2 x^2} \frac{x_{02}^2 - x^2}{1 - x_{02}^2 x^2} \frac{x_{03}^2 - x^2}{1 - x_{03}^2 x^2} \quad (3.34)$$

gde je N red filtra ($N = M + 6$), M je stepen zaravnjenja u koordinatnom početku a x_{01} , x_{02} i x_{03} su celi brojevi manji od jedinice ($x_{01} < x_{02} < x_{03} < 1$) i predstavljaju nule prenosne funkcije.

Na slici 3.56 dat je grafik ove karakteristične funkcije za proizvoljne vrednosti $x_{01} < x_{02} < x_{03} < 1$ a na slici 3.57 njena odgovarajuća funkcija slabljenja.

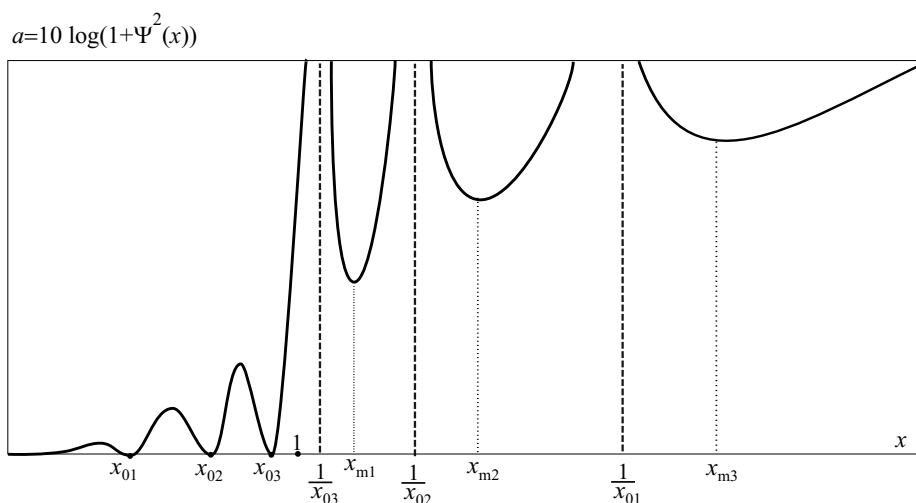


Sl. 3.56: Grafik karakteristične funkcije Prelazne klase filtara sa tri konačne nule prenosa.

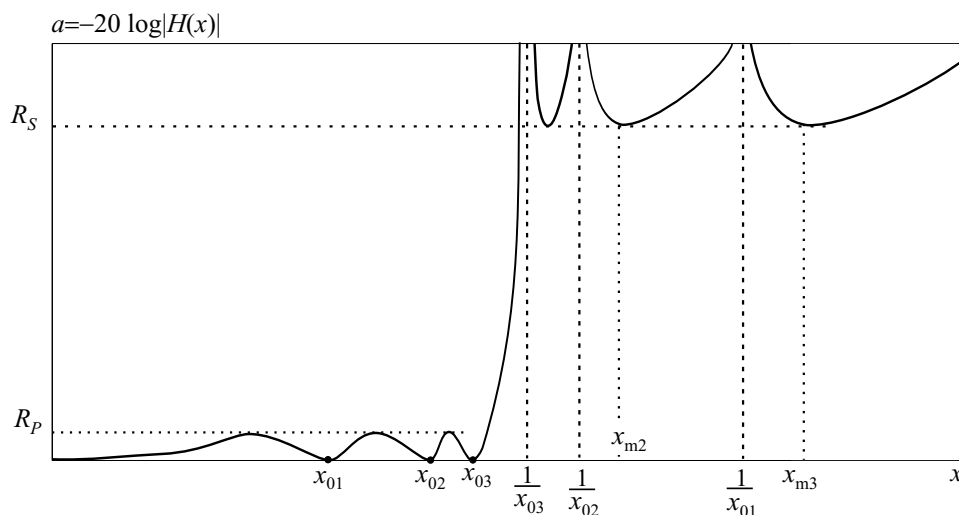
Postupkom koji je opisan za prelazne filtre sa dve konačne nule prenosa, karakteristiku slabljenja, $a = 10 \log(1 + \psi^2(x))$, treba podesiti tako da ekstremne vrednosti u nepropusnom opsegu, $a(x_{m1})$, $a(x_{m2})$ i $a(x_{m3})$, budu jednake zadatoj vrednosti R_s , kao što je prikazano na Sl. 3.58. Drugim rečima, treba proračunati vrednosti x_{01} , x_{02} i x_{03} na osnovu zadate vrednosti minimuma slabljenja u nepropusnom opsegu, R_s , kao i vrednosti M koja određuje red filtra.

Newton-Raphsonovim metodom rešava se sistem od šest nelinearnih jednačina ili, ako se uzme skraćena procedura (prethodno opisana za Prelazne filtre sa po dva ekstremuma), sistem od tri nelinearne jednačine. Mini-max funkcija slabljenja $a = -20 \log |H_0(x)|$ dobijena nakon ove iterativne procedure prikazana je na Sl.3.58.

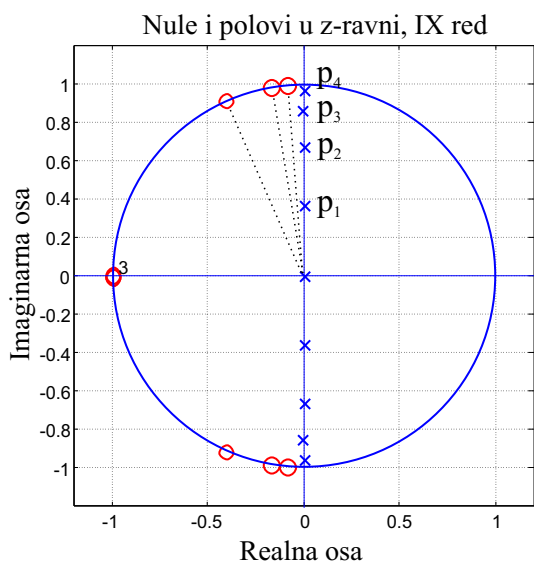
Na slikama 3.59-3.60 prikazani su položaji polova i nula u z ravni za deveti i jedanaesti red Prelazne klase filtara sa tri konačne nule prenosa. Na Sl.3.61 prikazane su uporedne karakteristike slabljenja devetog, jedanaestog i trinaestog reda. Na Sl. 3.62-3.63 poredene su karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterwothovog filtra devetog i jedanaestog reda.



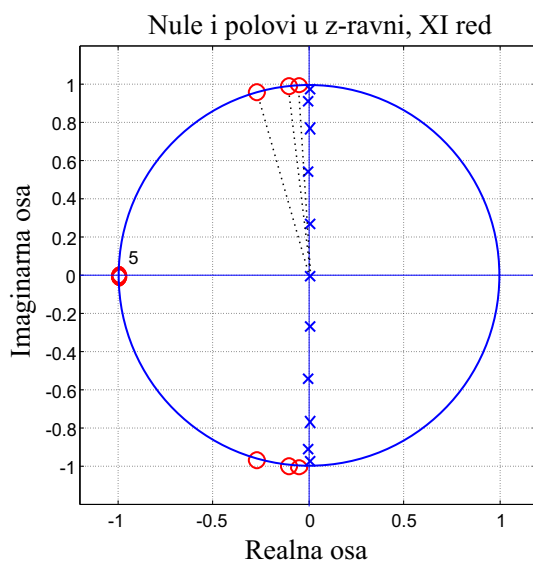
Sl. 3.57: Grafik karakteristike slabljenja Prelazne klase filtara sa tri konačne nule prenosa.



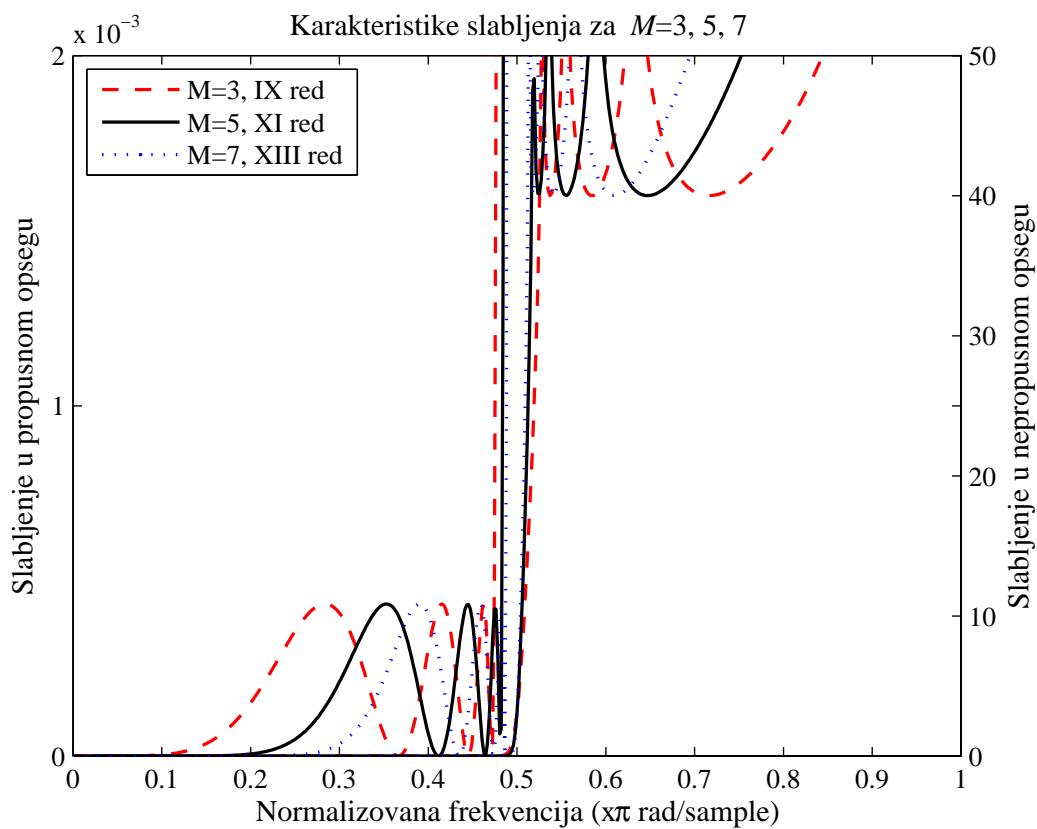
Sl. 3.58: Grafik karakteristike slabljenja Prelazne klase filtara sa tri konačne nule prenosa nakon rešavanja sistema nelinearnih jednačina.



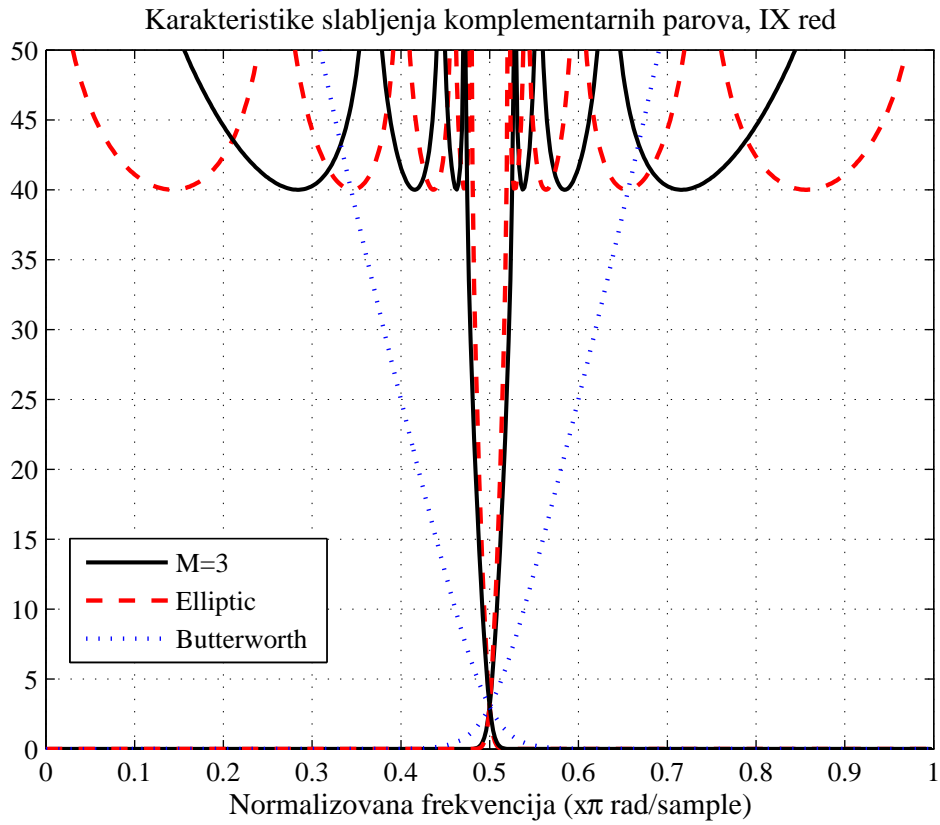
Sl. 3.59: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $M = 3$.



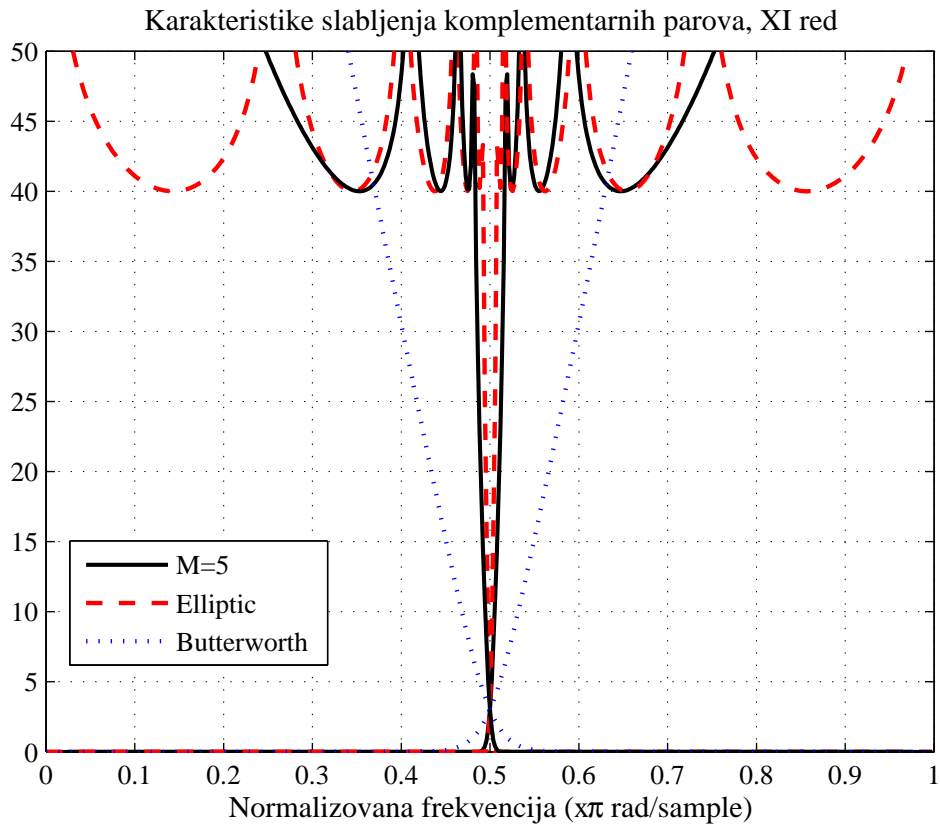
Sl. 3.60: Raspored nula i polova u z ravni za klasu $M = 5$.



Sl. 3.61: Karakteristike slabljenja devetog, jedanaestog i trinaestog reda Prelazne klase filtara sa tri konačne nule prenosa.



Sl. 3.62: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra devetog reda.



Sl. 3.63: Karakteristike slabljenja Prelaznog, Eliptičkog i Butterworthovog filtra jedanaestog reda.

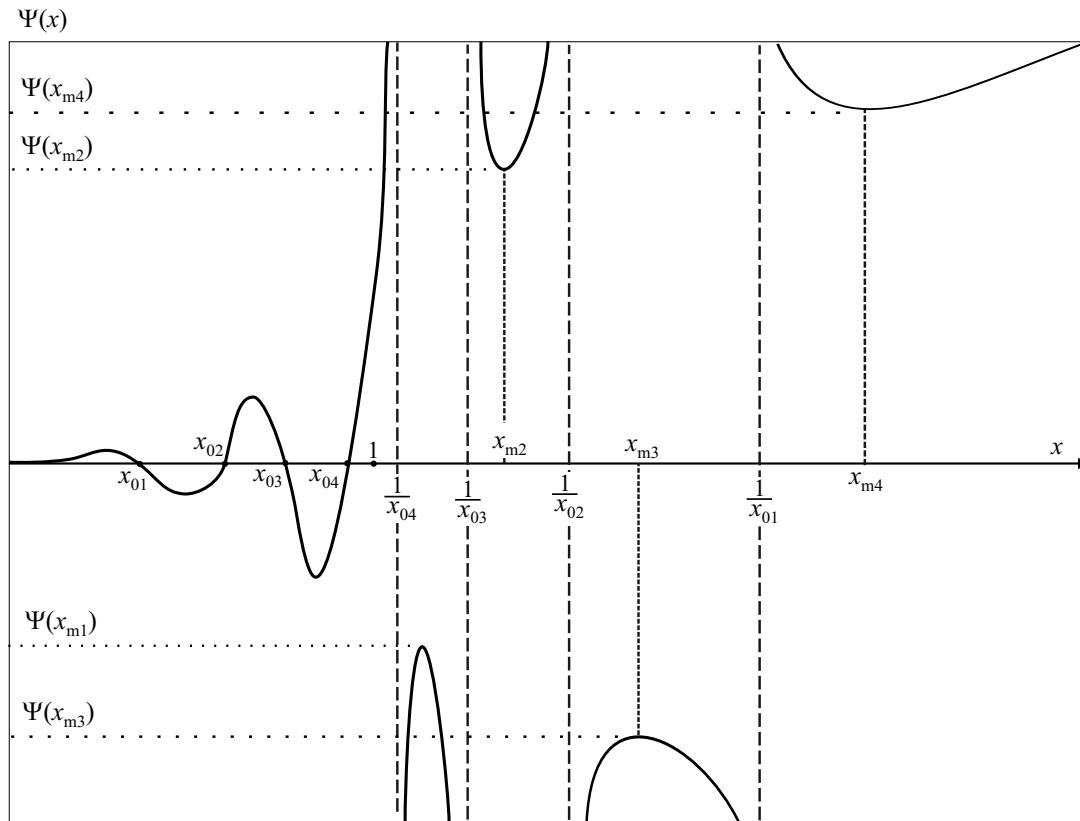
3.5 Klasa prelaznih filtara sa četiri konačne nule prenosa

Karakteristična funkcija $\psi_N(x)$ predložena jednačinom (3.1), postaje karakteristična funkcija sa četiri konačne nule prenosa (sa po četiri ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu), ako ima formu:

$$\psi_N(x) = x^M \frac{x_{01}^2 - x^2}{1 - x_{01}^2 x^2} \frac{x_{02}^2 - x^2}{1 - x_{02}^2 x^2} \frac{x_{03}^2 - x^2}{1 - x_{03}^2 x^2} \frac{x_{04}^2 - x^2}{1 - x_{04}^2 x^2} \quad (3.35)$$

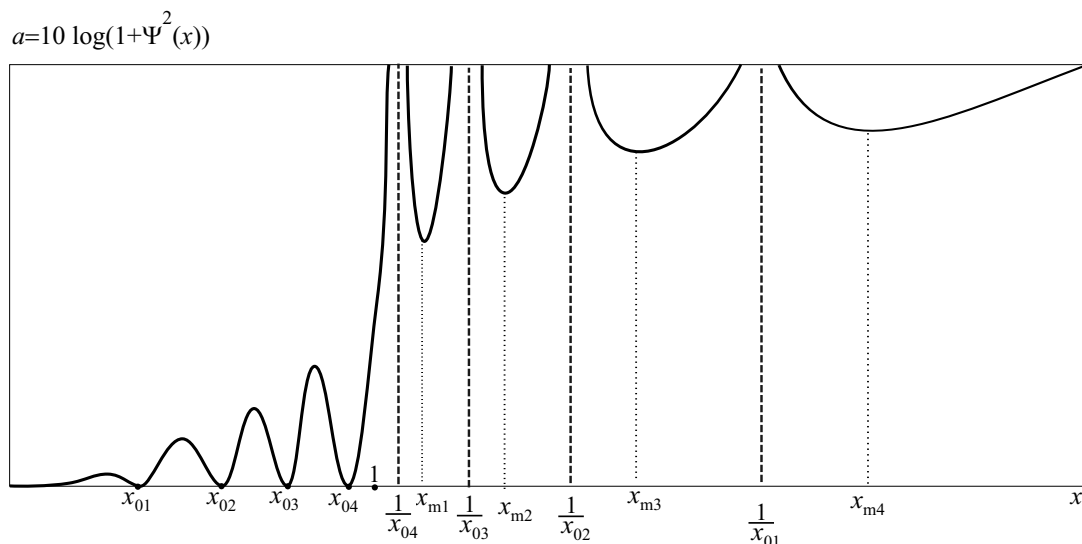
gde je N red filtra ($N = M + 8$), M je stepen zaravnjenja u koordinatnom početku a x_{01}, x_{02}, x_{03} i x_{04} su celi brojevi manji od jedinice ($x_{01} < x_{02} < x_{03} < x_{04} < 1$) i predstavljaju nule prenosne funkcije.

Na slici 3.64 dat je grafik ove karakteristične funkcije za proizvoljne vrednosti $x_{01} < x_{02} < x_{03} < x_{04} < 1$ a na slici 3.65 njena odgovarajuća funkcija slabljenja.



Sl. 3.64: Grafik karakteristične funkcije Prelazne klase filtara sa četiri konačne nule prenosa.

Postupkom koji je opisan za prelazne filtre sa dve konačne nule prenosa, karakteristiku slabljenja, $a = 10 \log(1 + \psi^2(x))$, treba podesiti tako da ekstremne vrednosti u nepropusnom opsegu, $a(x_{m1}), a(x_{m2}), a(x_{m3})$ i $a(x_{m4})$ budu jednake zadatoj vrednosti R_s , kao što je prikazano na Sl. 3.66. Drugim rečima, treba proračunati vrednosti x_{01}, x_{02}, x_{03} i x_{04} na osnovu zadate

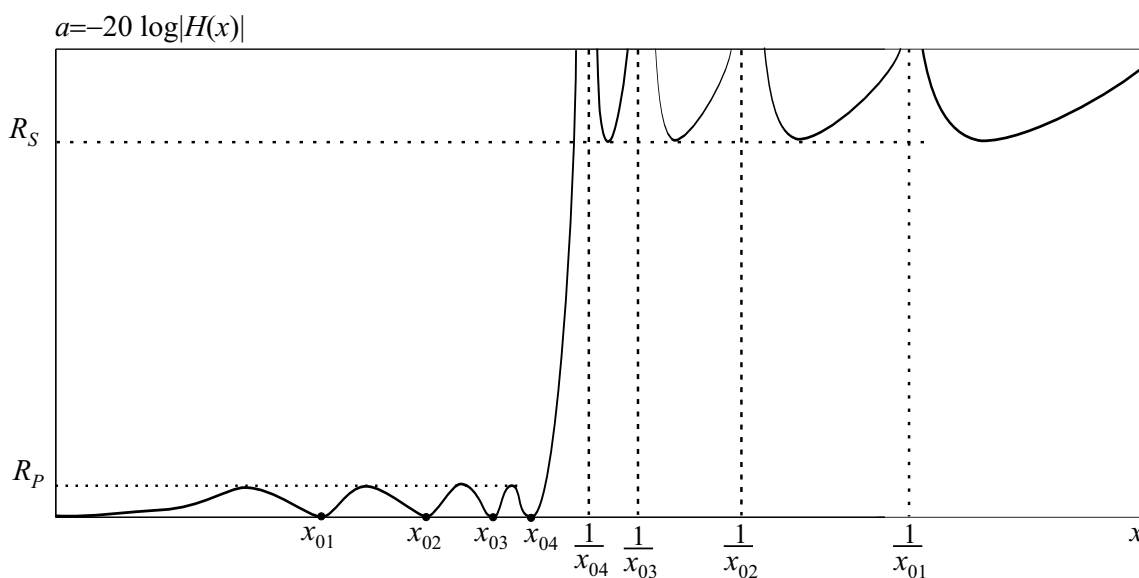


Sl. 3.65: Grafik karakteristike slabljenja Prelazne klase filtara sa četiri konačne nule prenosa.

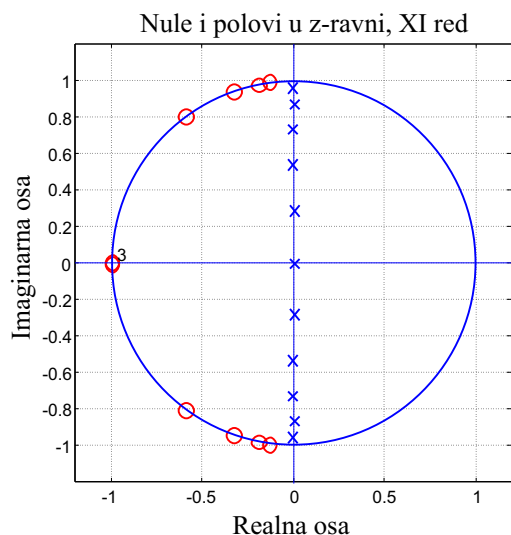
vrednosti minimuma slabljenja u nepropusnom opsegu, R_s , kao i vrednosti M koja određuje red filtra.

Newton-Raphsonovim metodom rešava se sistem od osam nelinearnih jednačina ili, ako se uzme skraćena procedura (prethodno opisana za Prelazne filtre sa po dva ekstremuma), sistem od četiri nelinearne jednačine. Mini-max funkcija slabljenja $a = -20 \log |H_0(x)|$ dobijena nakon ove iterativne procedure prikazana je na Sl.3.66.

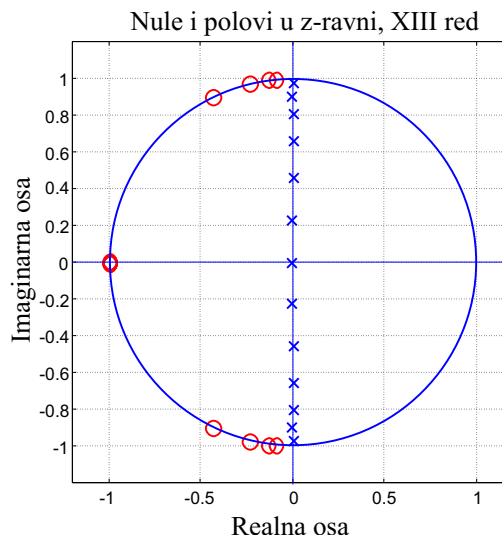
Na slikama 3.67-3.68 prikazani su položaji polova i nula u z ravni za jedanaesti i trinaesti red Prelazne klase filtara sa četiri konačne nule prenosa.



Sl. 3.66: Grafik karakteristike slabljenja Prelazne klase filtara sa četiri konačne nule prenosa nakon proračuna konačne vrednosti x_0 .



Sl. 3.67: Raspored nula i polova u z ravni za $M = 3$.



Sl. 3.68: Raspored nula i polova u z ravni za $M = 5$.

Kako je kod funkcije sa tri konačne nule prenosa deveti red filtra najmanji mogući red a kod funkcije sa četiri konačne nule prenosa najmanji jedanaesti, i kako su ovo relativno visoke vrednosti za praktičnu implementaciju, za ova dva tipa dato je samo po dva primera. Naravno, ukoliko bi to bilo potrebno moguće je izvesti i više redove filtara.

3.6 Analiza rezultata

Na osnovu prethodnih rezultata može se zaključiti da Prelazni filtri imaju bolju selektivnost od Butterworthovih fitara, a lošiju u poređenju sa Eliptičkim. Međutim, kako je Eliptički filtar projektovan korišćenjem bilinearne transformacije, njegovi polovi nisu čisto imaginarni pri čemu se realni delovi polova povećavaju sa povećanjem reda filtra. Ovo rezultira u grešci amplitudske karakteristike VF filtra, što znači da Prelazni filtri postižu veću tačnost pri komplementarnoj dekompoziciji u odnosu na Eliptičke filtre. Ako se poredi sa pomenutim filtrima može se zaključiti sledeće:

- (a) Predložena klasa prelaznih filtara ima polove sa čisto imaginarnim delom čime je obezbeđena visoka tačnost pri komplementarnoj dekompoziciji koju Eliptički filtar ne može postići.
- (b) Praktična realizacija Prelaznih filtara je jednostavnija u odnosu na realizaciju Eliptičkog filtra jer su parovi konjugovano-kompleksnih nula na jediničnom krugu a jedna višestruka nula u $z = -1$.

- (c) Polovi i nule Eliptičkog filtra akumulirani su u okolini granice propusnog opsega i njihovo međusobno rastojanje se smanjuje sa porastom reda filtra. Ovo zahteva veliku dužinu digitalne reči pri realizaciji filtara visokog reda. Prelazna klasa filtara ima aproksimativno ekvidistantni raspored polova pa se može realizovati sa manjom dužinom digitalne reči nego što je potrebno kod realizacije Eliptičkog filtra.
- (d) Prelazna klasa filtara ima veću stabilnost s obzirom da su polovi bliži koordinatnom početku.

4

Korekcija faznog izobličenja u IIR bankama filtara

KAo što je napred pokazano, odgovarajućim izborom filtara analize i sinteze (2.13) potisnuto je preklapanje spektra (aliasing) a zatim je primenom polifazne reprezentacije i usvajanjem allpass filtara kao polifaznih komponenti, potisnuto i amplitudsko izobličenje u odzivu kvadrature banke filtara, čime je preostalo fazno izobličenje koje potiče od faznih izobličenja allpass filtara kojima se realizuju NF-VF filtarski parovi.

U literaturi se mogu naći brojne metode za korekciju faznog izobličenja u QMF bankama [2, 84–97]. U radu [86] dat je pregled nekih metoda za korekciju fazne karakteristike kao i njihovo poređenje (projektovanje faznih korektora, aproksimacija IIR filtara sa mini-maks karakteristikom grupnog kašnjenja, simultana optimizacija amplitudske i fazne karakteristike itd). U radu [89] predložena je banka filtara sa približno savršenom rekonstrukcijom u kojoj su filtri analize halfband IIR filtri a filtri sinteze FIR filtri. Ova banka filtara daje savršeno linearnu faznu karakteristiku, odnosno konstantno grupno kašnjenje, a koeficijenti FIR filtara se projektuju tako da je amplitudski odziv približno jednak jedinici. U radu [90] dato je projektovanje IIR kvadrature filter banke sa približno savršenom rekonstrukcijom primenom FIR faznih korektora.

Postoji nekoliko pristupa za projektovanje IIR faznih korektora [98] čiji je cilj redukovanje kompleksnog izračunavanja koeficijenata prenosne funkcije. U radu [84], Kidambi je predložio metod za projektovanje i optimizaciju linearne fazne karakteristike. Optimalni koeficijenti korektora grupnog kašnjenja dobijeni su rešavanjem sistema linearnih jednačina koje uključuju primenu Toeplitz-plus-Hankel matrice. Ovaj metod je efikasan u pogledu izračuna-

vanja ako se poredi sa standardnom metodom za rešavanje sistema linearnih jednačina direktnim izračunavanjem inverzne matrice i množenjem, s obzirom da izračunavanje inverzne matrice može prouzrokovati numeričke probleme za veće redove filtra. U radu [97], autori koriste trigonometrijske identitete [96] i metod odmeravanja frekvencije kako bi izračunali Toeplitz-plus-Hankel matricu formulom u zatvorenom obliku a ne numeričkim metodom.

U ovoj glavi razmatra se korekcija faznog izobličenja, odnosno korekcija grupnog kašnjenja Prelazne klase filtara primenom standardnih *allpass* korektora (u literaturi se mogu naći kao *phase-equalizing allpass filters* ili *delay equalizers*). Fazni korektor (korektor grupnog kašnjenja) povećava grupno kašnjenje u određenom frekvencijskom opsegu. To može biti samo propusni opseg filtra ili celokupni frekvencijski opseg. Pokazano je da se najbolji rezultati dobijaju kada se vrši korekcija grupnog kašnjenja u celokupnom frekvencijskom opsegu. Time se postiže da se isti korektor grupnog kašnjenja može primeniti kako za filter propusnik niskih frekvencija tako i za filter propusnik visokih frekvencija. Treba imati u vidu da filtri koji čine QMF banku filtara imaju iste polove koji leže na imaginarnoj osi, a da nule na jediničnom krugu nemaju uticaja na faznu karakteristiku filtra.

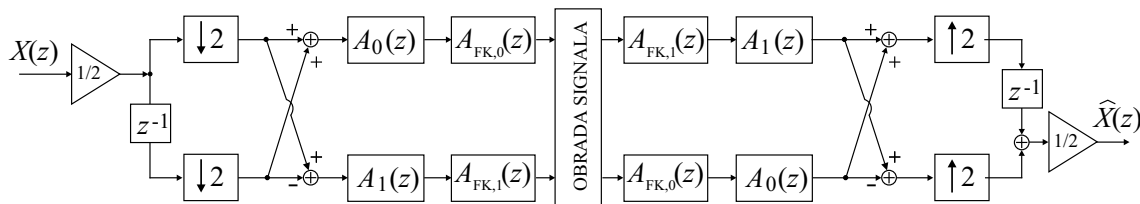
Fazni korektor prvog reda ima veće grupno kašnjenje na niskim frekvencijama dok je kod faznog korektora drugog reda moguće podešavanje maksimalne vrednosti grupnog kašnjenja na izabranoj frekvenciji. Pošto se fazni korektor formira od sekcija prvog i drugog reda kaskadno vezanih to fazni korektor neparnog reda uvek sadrži sekciju prvog reda a fazni korektor parnog reda se sastoji samo od sekcija drugog reda. Korišćenjem većeg broja sekcija dobija se manja relativna greška u aproksimaciji konstantnog grupnog kašnjenja ali se time istovremeno povećava kompleksnost kvadrature banke filtara. Red faznog korektora zavisi od reda prenosne funkcije IIR filtra za čiju se kompenzaciju koristi (Butterworth, Chebyshev i sl.) a takođe se pri njegovom izboru balansira između kompleksnosti konačne implementacije i veličine relativne greške u aproksimaciji karakteristike grupnog kašnjenja.

Treba napomenuti da se u nekim slučajevima, zahtevane specifikacije za banku filtara uspešno postižu i FIR filtrima sa linearnom faznom karakteristikom, pa se tu postavlja granica primene IIR filtara u sprezi sa korektorom grupnog kašnjenja. Naime, red korektora grupnog kašnjenja može da bude znatno viši od reda filtra čija se karakteristika koriguje, tako da rezultujući red njihove kaskadne veze bude približno istog reda kao i kod FIR banke filtara.

Problem kod optimizacionih procedura za izračunavanje koeficijenata *allpass* filtara je postavljanje početnih uslova što zahteva dobro poznavanje oblika funkcije grupnog kašnjenja.

4.1 Korekcija faznog izobličenja kvadrature banke filtera

Nelinearni odziv fazne karakteristike IIR filtra, $H(z)$, može se korigovati kaskadnim povezivanjem faznog korektora (korektora grupnog kašnjenja), $A_{FK}(z)$, tako da prenosna funkcija $H(z)A_{FK}(z)$ aproksimira konstantno grupno kašnjenje u propusnom opsegu, kao što je prikazano na Sl. 4.1. Kako je amplitudski odziv faznog korektora $|A_{FK}(e^{j\omega})|$ jednak jedinici, amplitudski odziv kaskadne veze ostaje jednak $|H(e^{j\omega})|$, dok je grupno kašnjenje kaskadne veze jednako sumi grupnih kašnjenja funkcija $H(z)$ i $A_{FK}(z)$. Korektor grupnog kašnjenja, $A_{FK}(z)$, se projektuje tako da grupno kašnjenje kaskadne veze bude približno konstantno u celokupnom frekvencijskom opsegu $0 < f < F_s/2$, gde je F_s frekvencija odmeravanja. Kako se fazno izobličenje povećava kada su polovi prenosne funkcije filtra bliži jediničnom krugu (što se dešava kada red filtra raste), uloga faznih korektora je da u celokupnu prenosnu funkciju unese polove i nule koji će kompenzovati uticaj ovih polova.



Sl. 4.1: Dvokanalna banka filtera sa faznim korektorima.

Prenosna funkcija dvokanalne banke filtera sa faznim korektorima, prikazana šemom na Sl. 4.1, može se predstaviti kao zbir prenosne funkcije *aliasinga* i prenosne funkcije distorzije, odnosno

$$\widehat{X}(z) = T(z)X(z) + F(z)X(-z) \quad (4.1)$$

gde je funkcija distorzije, $T(z)$, data izrazom

$$T(z) = \frac{1}{2}z^{-1}A_0(z^2)A_{FK,0}(z^2)A_{FK,1}(z^2)A_1(z^2), \quad (4.2)$$

dok je prenosna funkcija *aliasinga* jednaka nuli, $F(z) = 0$.

Ukupno grupno kašnjenje, $\tau_g(\omega)$, prenosne funkcije $T(z)$ je

$$\tau_g(\omega) = \tau_{BF}(\omega) + \tau_{FK}(\omega), \quad (4.3)$$

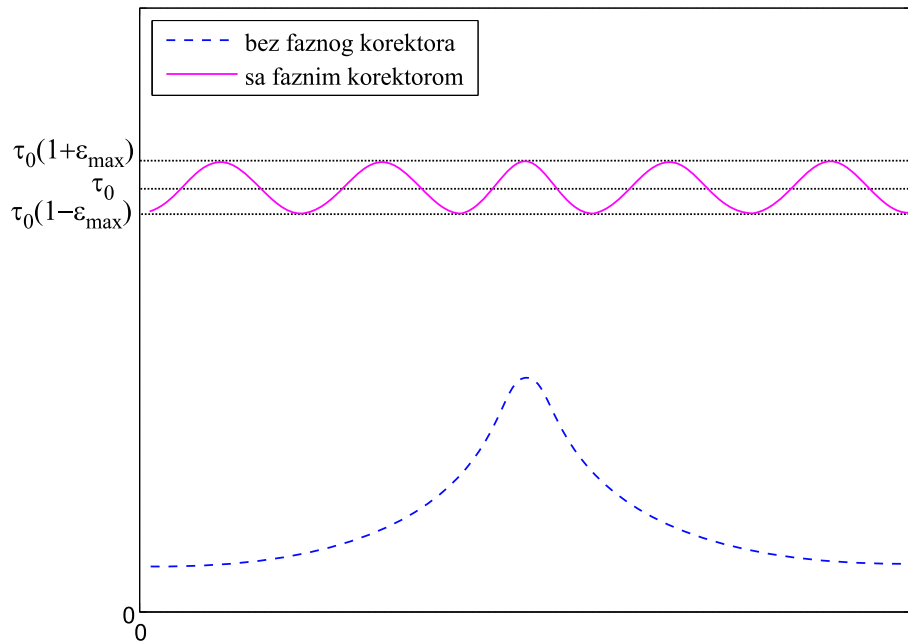
gde je $\tau_{BF}(\omega)$ grupno kašnjenje banke filtara koje treba kompenzovati, a koje potiče od prenosne funkcije proizvoda $A_0(z^2)A_1(z^2)$, dok je $\tau_{FK}(\omega)$ grupno kašnjenje faznog korektora $A_{FK,0}(z)A_{FK,1}(z)$. Koeficijente prenosne funkcije faznog korektora kao i srednju vrednost konstantnog grupnog kašnjenja, τ_0 , treba izračunati tako da se minimizira vrednost

$$\varepsilon = \max_{\omega \in [0, \pi]} |\tau_{BF}(\omega) + \tau_{FK}(\omega) - \tau_0|, \quad (4.4)$$

odnosno da maksimalna vrednost odstupanja ukupnog grupnog kašnjenja od srednje vrednosti τ_0 , bude minimalna na intervalu $\omega \in [0, \pi]$ [99]. Na ovaj način postiže se mini-maks aproksimacija konstantnog grupnog kašnjenja

$$\tau_g(\omega) = \tau_0(1 \pm \varepsilon_{\max}) \quad (4.5)$$

prikazana na Sl. 4.2, odnosno aproksimacija linearne fazne karakteristike oblika $\phi(\omega) = -\tau_0\omega$, što je i bio cilj numeričkog metoda.



Sl. 4.2: Mini-maks aproksimacija konstantnog grupnog kašnjenja.

Koeficijenti prenosne funkcije faznog korektora $A_{FK}(z)$ u ovoj glavi dobijaju se primenom MATLAB naredbe `iirgrpdelay`, čija je sintaksa `[num,den] = iirgrpdelay(N,f,edges,a)`. Ova naredba daje na izlazu brojioc (`num`) i imenioc (`den`) faznog korektora za zadate argumente: `N` - red prenosne funkcije faznog korektora (mora biti paran), `f` - vektor frekvencija u opsegu od 0 do 1, ivice opsega

(edges) u kome se vrši korekcija faznog izobličenja i vektor a koji ima isti broj elemenata kao i vektor f i koji za svaku vrednost frekvencije u zadanom opsegu računa razliku između maksimalne vrednosti grupnog kašnjenja u celom opsegu i vrednosti grupnog kašnjenja na toj frekvenciji.

Primer za proračun faznog korektora za eliptički filter četvrtog reda ima sledeći tok:

1. $[Be, Ae] = \text{ellip}(4, 1, 40, 0.2)$; projektovanje Eliptičkog filtera četvrtog reda;
2. $f = 0:0.001:0.2$; zadavanje vektora frekvencija u kojem se vrši korekcija grupnog kašnjenja, u ovom slučaju samo u propusnom opsegu;
3. $g = \text{grpdelay}(Be, Ae, f, 2)$; Izračunavanje vrednosti grupnog kašnjenja eliptičkog filtera na zadanom opsegu frekvencija;
4. $a = \max(g) - g$; proračun vektora a ;
5. $[num, den] = \text{iirgrpdelay}(8, f, [0 \ 0.2], a)$; proračun brojioca (num) i imenioca (den) faznog korektora osmog reda na zadanom opsegu frekvencija.

U naredbi `iirgrpdelay` može se postaviti uslov da grupno kašnjenje bude konstantno samo u propusnom opsegu, $\omega \in [0, 0.5\pi]$ za niskopropusni filter, odnosno u opsegu $\omega \in [0.5\pi, \pi]$ za visokopropusni filter. Međutim, kako se u QMF banci nalazi komplementarni NF-VF filter, i kako i NF i VF filter imaju nule na jediničnom krugu koje ne utiču na faznu karakteristiku a polovi im se nalaze na imaginarnoj osi, funkcija grupnog kašnjenja ima isti oblik i za NF i za VF filter pa samim tim i fazni korektor za NF i VF filter ima istu prenosnu funkciju. Zato su u ovom poglavlju prikazani rezultati dobijeni kada se naredba `iirgrpdelay` primeni na celi frekvencijski opseg, $\omega \in [0, \pi]$, čime se dobija fazni korektor koji se istovremeno može primeniti i na niskopropusnu i na visokopropusnu prenosnu funkciju.

Razmatrane su dve varijante korekcije fazne karakteristike. Prva varijanta je da se fazni korektor projektuje za niskopropusnu funkciju, odnosno da su vektori Be i Ae brojioc i imenioc NF prenosne funkcije. Na taj način se istovremeno dobija fazni korektor i za visokopropusnu funkciju. Isti fazni korektor bi se u tom slučaju postavio i u banci analize (posle NF filtera) i u banci sinteze (posle VF filtera), što znači da onda u celoj QMF banci postoje četiri ista fazna korektora a prenosna funkcija na izlazu banke filtera je data jednačinom (4.2).

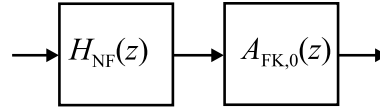
Druga varijanta je da se fazni korektor projektuje direktno u odnosu na funkciju distorzije, odnosno da su vektori Be i Ae - brojioc i imenioc prenosne funkcije distorzije $T(z) =$

$0.5z^{-1}A_1(z)A_2(z)$. U ovom slučaju projektuje se jedan fazni korektor koji se može postaviti ili u banci analize ili u banci sinteze, pa QMF banka ima ukupno dva fazna korektora a prenosna funkcija je data jednačinom (4.12). Ovde treba naglasiti da naredba `iirgrpdelay` generiše fazne korektore samo parnog reda.

Ove rezultate treba porediti sa QMF bankama koje za prototipsku funkciju imaju FIR filter i razmotriti prednosti primene IIR filtera sa faznim korektorom u ovoj formi.

4.1.1 Korekcija faznog izobličenja NF-VF filtarskog para

Kaskadna sprega filtra propusnika niskih frekvencija $H_{NF}(z)$ i faznog korektora $A_{FK,0}(z)$ prikazana je na Slici 4.3. Kao što je napred napomenuto, za korekciju grupnog kašnjenja filtra propusnika visokih frekvencija, $H_{VF}(z)$, koristi se isti fazni korektor $A_{FK,1}(0) = A_{FK,0}(z)$.



Sl. 4.3: Korekcija fazne karakteristike niskopropusne funkcije faznim korektorom.

A) Korekcija faznog izobličenja niskopropusne i visokopropusne funkcije Prelaznog, Butterworthovog i Eliptičkog filtra petog reda

Kada se MATLAB naredba `iirgrpdelay` primeni na niskopropusnu funkciju Prelaznog tipa filtera petog reda u frekvencijskom opsegu $0 \leq \omega \leq \pi$, Sl. 4.3, kao rezultat se dobija fazni korektor sa prenosnom funkcijom osmog reda:

$$A_{FK}(z) = \frac{0.0576 - 0.09209z^{-2} + 0.1773z^{-4} - 0.3843z^{-6} + z^{-8}}{1 - 0.3843z^{-2} + 0.1773z^{-4} - 0.09209z^{-6} + 0.0576z^{-8}}. \quad (4.6)$$

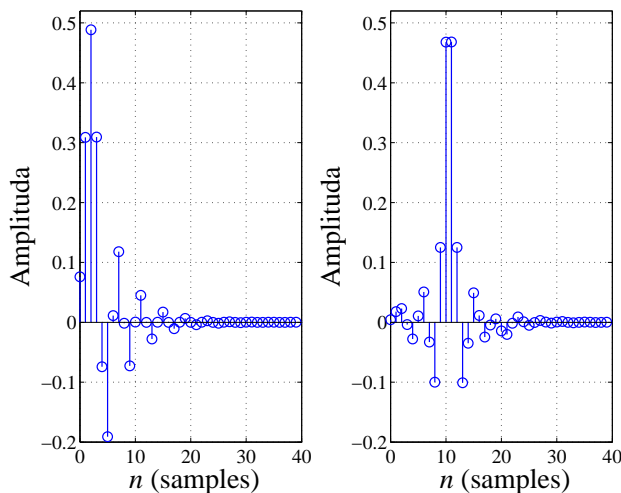
Ako se isti postupak primeni na Eliptički filter petog reda dobija se fazni korektor osmog reda prenosne funkcije

$$A_{FK}(z) = \frac{0.09471 - 0.1378z^{-2} + 0.2329z^{-4} - 0.4407z^{-6} + z^{-8}}{1 - 0.4407z^{-2} + 0.2329z^{-4} - 0.1378z^{-6} + 0.09471z^{-8}}, \quad (4.7)$$

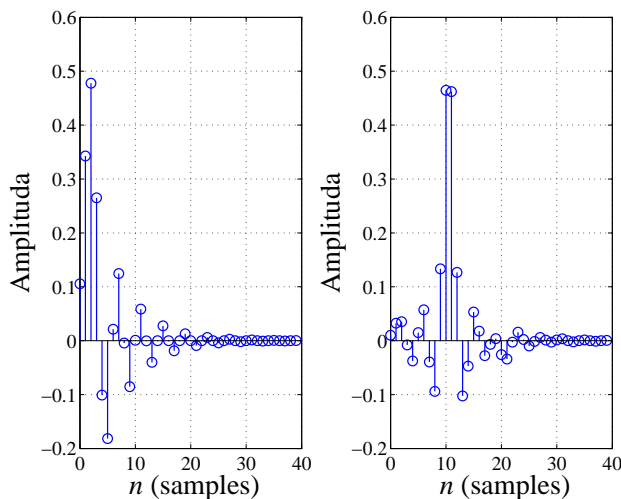
dok je prenosna funkcija faznog korektora osmog reda primenjena na Butterworthov filter petog reda

$$A_{FK}(z) = \frac{0.02793 - 0.05394z^{-2} + 0.1232z^{-4} - 0.3163z^{-6} + z^{-8}}{1 - 0.3163z^{-2} + 0.1232z^{-4} - 0.05394z^{-6} + 0.02793z^{-8}}. \quad (4.8)$$

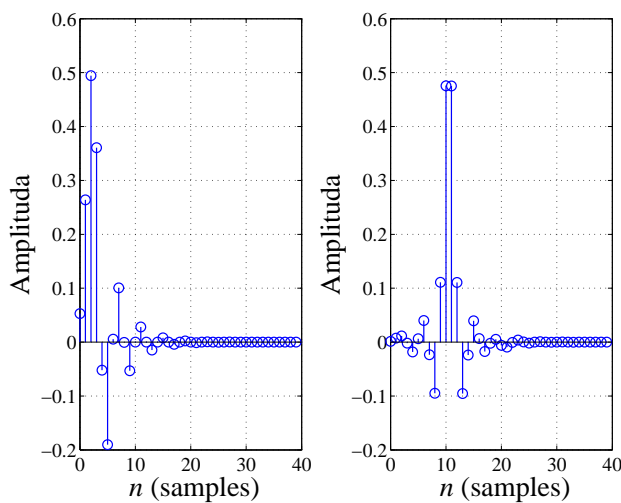
Poređenje grupnih kašnjenja Prelaznog, Butterworthovog i Eliptičkog filtra petog reda dato je na Sl. 4.7, a impulzni odzivi za ove slučajeve, pre i posle primene faznih korektora, prikazani su na slikama 4.4, 4.5 i 4.6. Može se uočiti da su nakon fazne korekcije svi impulzni odzivi postali simetrični što je karakteristika filtera sa konstantnim grupnim kašnjenjem.



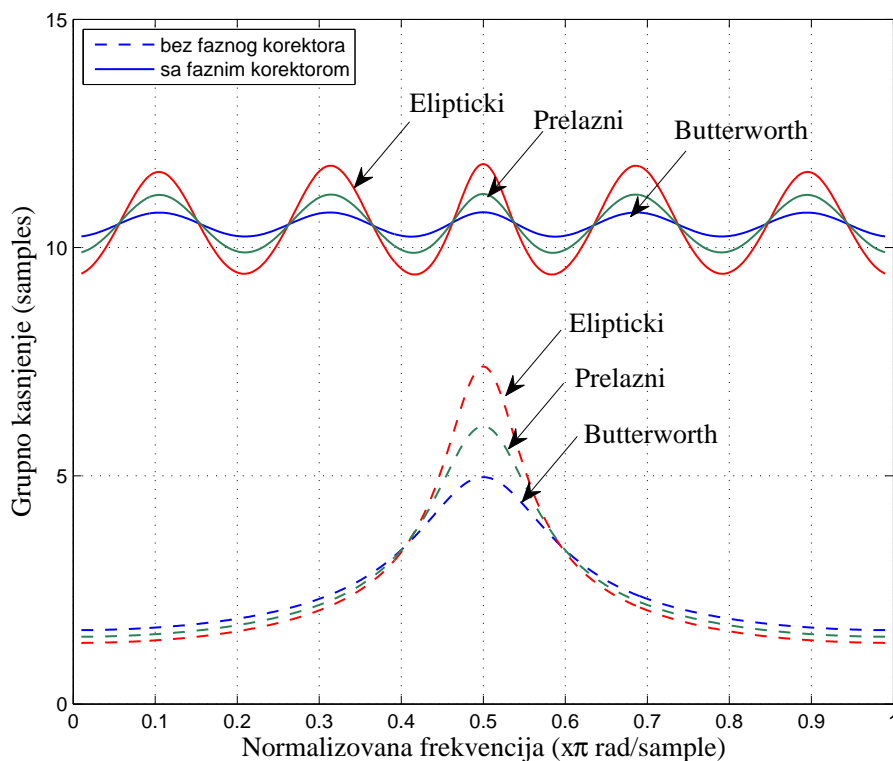
Sl. 4.4: Impulsni odziv NF Prelaznog filtra V reda pre i posle primene faznog korektora VIII reda.



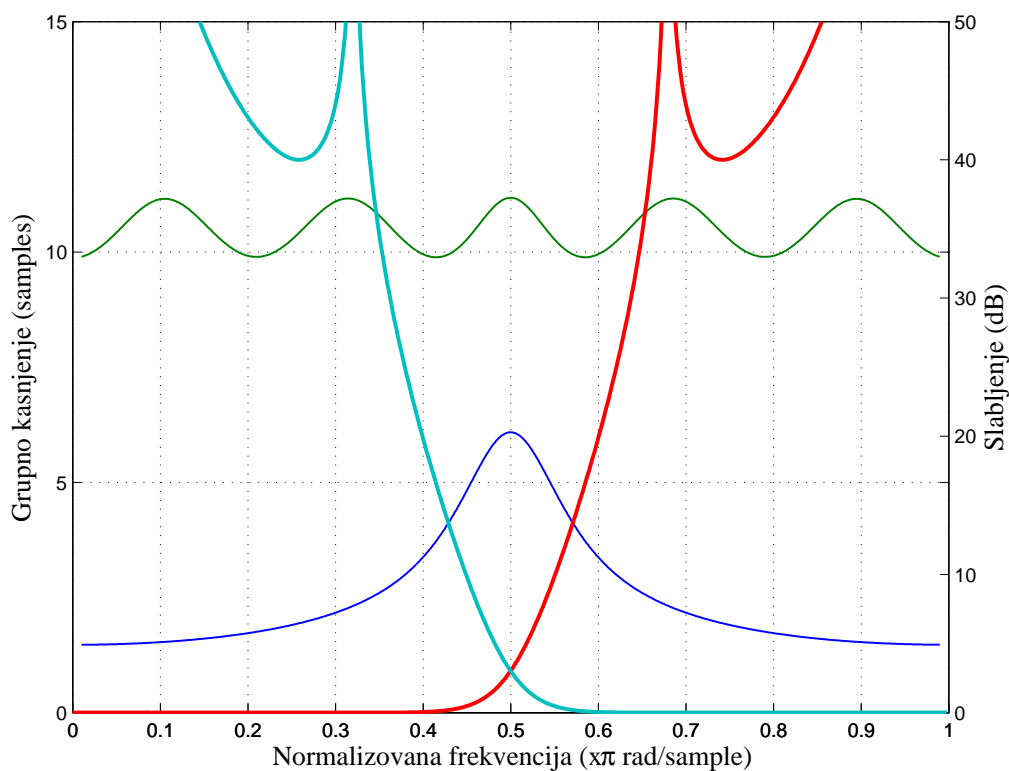
Sl. 4.5: Impulsni odziv NF Eliptičkog filtra V reda pre i posle primene faznog korektora VIII reda.



Sl. 4.6: Impulsni odziv NF Butterworthovog filtra V reda pre i posle primene faznog korektora VIII reda.



Sl. 4.7: Grupna kašnjenja niskopropusne prototipske funkcije Eliptičkog, Prelaznog i Butterworthovog filtra V reda, pre i posle primene faznih korektora VIII reda.



Sl. 4.8: Grupna kašnjenja pre i posle fazne korekcije i karakteristike slabljenja NF-VF filterskog para Prelaznog filtra V reda.

B) Korekcija faznog izobličenja niskopropusne i visokopropusne funkcije Prelaznog filtra sedmog i devetog reda

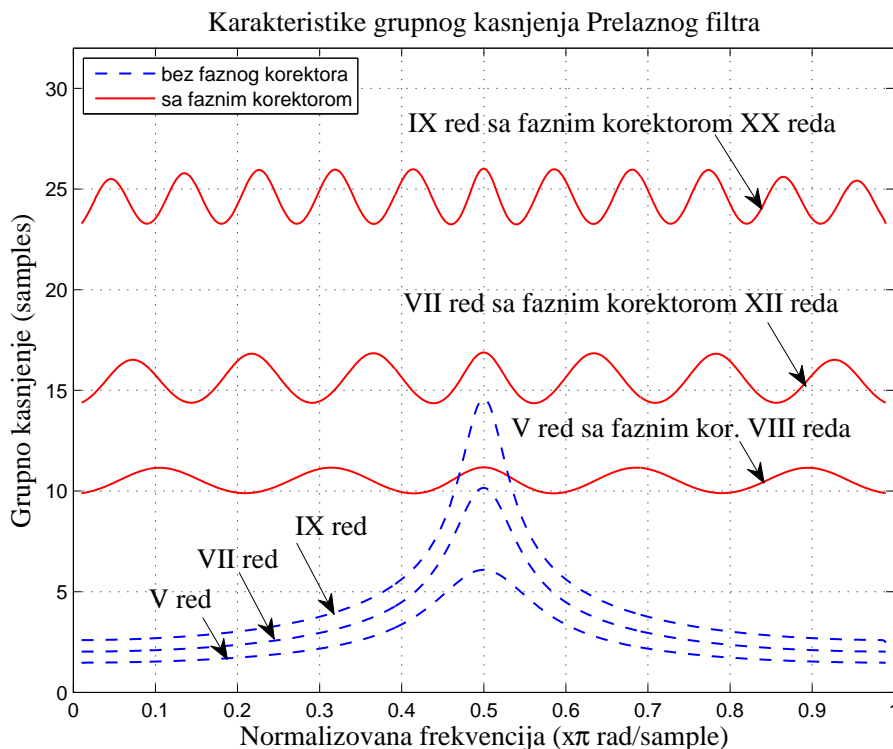
Kada se naredba `iirgrpdelay` primeni na niskopropusnu funkciju Prelaznog tipa filtera sedmog reda u frekvencijskom opsegu $0 \leq \omega \leq \pi$, Sl. 4.3, kao rezultat se dobija fazni korektor dvanaestog reda prenosne funkcije

$$A_{FK}(z) = \frac{0.06266 - 0.08775z^{-2} + 0.1249z^{-4} - 0.1935z^{-6} + 0.3224z^{-8} - 0.5484z^{-10} + z^{-12}}{1 - 0.5484z^{-2} + 0.3224z^{-4} - 0.1935z^{-6} + 0.1249z^{-8} - 0.08775z^{-10} + 0.06266z^{-12}}, \quad (4.9)$$

a ako se primeni na Prelazni tip filtera devetog reda dobija se fazni korektor dvadesetog reda prenosne funkcije

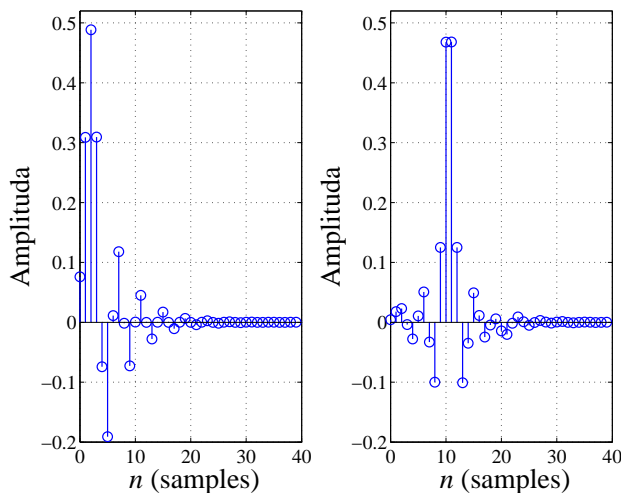
$$A_{FK}(z) = \frac{0.03846 - 0.05251z^{-2} + 0.06504z^{-4} - 0.08447z^{-6} + 0.1145z^{-8} - 0.1563z^{-10} + 0.2214z^{-12} - 0.32z^{-14} + 0.4799z^{-16} - 0.7077z^{-18} + z^{-20}}{1 - 0.7077z^{-2} + 0.4799z^{-4} - 0.32z^{-6} + 0.2214z^{-8} - 0.1563z^{-10} + 0.1145z^{-12} - 0.08447z^{-14} + 0.06504z^{-16} - 0.05251z^{-18} + 0.03846z^{-20}} \quad (4.10)$$

Grupna kašnjenja petog, sedmog i devetog reda niskopropusne prototipske funkcije Prelaznog filtra pre i posle primene faznih korektora osmog, dvanaestog i dvadesetog reda respektivno, prikazane su na Sl. 4.9, a impulsni odzivi za ove slučajeve, pre i posle primene faznih korektora, prikazani su na slikama 4.10, 4.11 i 4.12. Posle fazne korekcije na izlazu sistema dobijaju se simetrični impulsni odzivi.

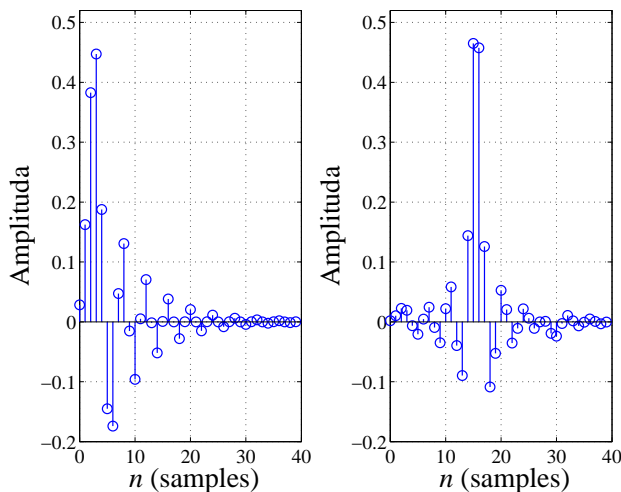


Sl. 4.9: Grupna kašnjenja V, VII i IX reda niskopropusne prototipske funkcije Prelaznog filtra pre i posle primene faznih korektora VIII, XII i XX reda respektivno.

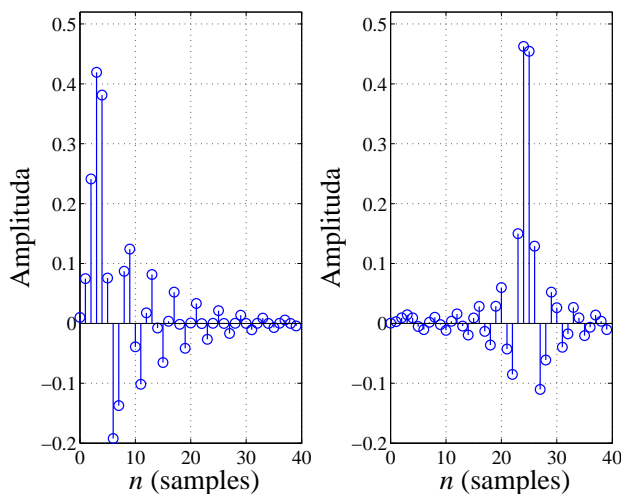
Može se zaključiti da je prilikom fazne korekcije prenosne funkcije NF-VF fildarskog para, Sl. 4.3, srednja vrednost grupnog kašnjenja, τ_0 , jednaka zbiru reda faznog korektora i polovine reda niskopropusne (visokopropusne) prenosne funkcije, $\tau_0 = N/2 + N_{FK}$. Tako je za NF fildar petog reda na kome je primenjen fazni korektor osmog reda, $\tau_0 = 10.5$, za NF fildar sedmog reda sa faznim korektorom dvanaestog reda $\tau_0 = 15.5$ i za NF fildar devetog reda sa faznim korektorom dvadesetog reda, $\tau_0 = 24.5$, Sl. 4.9.



Sl. 4.10: Impulsni odziv NF Prelaznog filtra V reda pre i posle primene faznog korektora VIII reda.



Sl. 4.11: Impulsni odziv NF Prelaznog filtra VII reda pre i posle primene faznog korektora XII reda.



Sl. 4.12: Impulsni odziv NF Prelaznog filtra IX reda pre i posle primene faznog korektora XX reda.

4.2 Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja NF-VF filterskog para (varijanta 1)

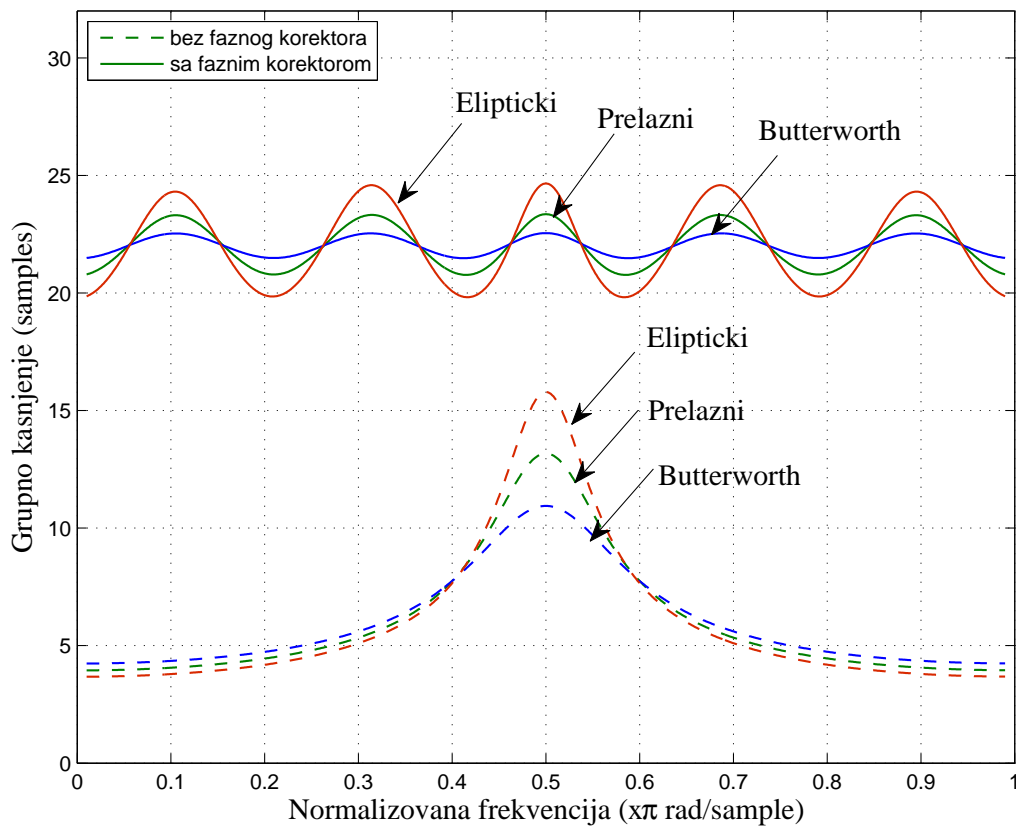
Fazni korektori, dati u prethodnom odeljku, mogu se primeniti i na niskopropusnu i na visokopropusnu funkciju u kvadraturnoj filter banci, odnosno $A_{FK,0}(z) = A_{FK,1}(z)$, s obzirom da NF i VF prenosne funkcije imaju iste polove koji leže na imaginarnoj osi, a njihove nule prenosa se nalaze na jediničnom krugu u z -ravni te nemaju uticaja na faznu karakteristiku (nule NF prenosne funkcije nalaze se u levoj poluravni, a nule VF prenosne funkcije u desnoj z -poluravni). Kao rezultat se dobija QMF banka sa ukupno četiri fazna korektora - dva za banku analize i dva za banku sinteze. Zamenom $A_{FK,0}(z) = A_{FK,1}(z)$ u (4.2), dobija se da je funkcija distorzije:

$$T(z) = \frac{1}{2}z^{-1}A_0(z^2)A_1(z^2)A_{FK,0}^2(z^2). \quad (4.11)$$

Na Sl. 4.13 prikazana su grupna kašnjenja funkcije distorzije Eliptičkog, Prelaznog i Butterworthovog filtra petog reda, pre i posle primene faznog korektora osmog reda za niskopropusnu i za visokopropusnu funkciju, odnosno pre i posle postavljanja četiri fazna korektora u QMF banci kao što je prikazano na Sl. 4.1. Uočava se da mini-maks karakteristika sva tri filtra osciluje oko vrednosti $\tau_0 = 22$, dok je maksimalna relativna greška konstantnog grupnog kašnjenja, ϵ_{max} , različita za ova tri tipa filtra i najmanja je za Butterworthov a najveća za Eliptički filter.

Na slikama 4.14, 4.16 i 4.18 prikazane su nule i polovi faznih korektora za Prelazni, Eliptički i Butterworthov filter respektivno. Na slikama 4.15, 4.17 i 4.19 date su nule i polovi funkcija distorzija posle fazne korekcije za Prelazni, Eliptički i Butterworthov filter respektivno.

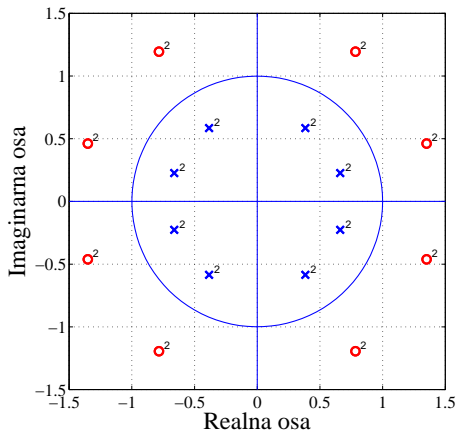
Na slikama 4.20, 4.21 i 4.22 prikazani su impulsni odzivi na izlazu kvadraturne banke filtera, pre i posle fazne korekcije za Prelazni, Eliptički i Butterworthov filter respektivno. Ovde treba napomenuti da je za sva tri tipa filtera petog reda, red funkcije distorzije, koji je pre korekcije bio šestog reda (*allpass* filter drugog reda, *allpass* filter trećeg reda i linija za kašnjenje), posle korekcije uvećan za šesnaest, što se može zaključiti i na osnovu impulsnih odziva funkcija distorzije jer je kašnjenje signala dvadeset dva (šesnaest plus šest). Može se uočiti da je u sva tri slučaja impulsni odziv približno zakasnela replika ulaznog signala. Kao što se moglo i očekivati, impulsni odziv Prelaznog filtra se nalazi između Butterworthovog i Eliptičkog im-



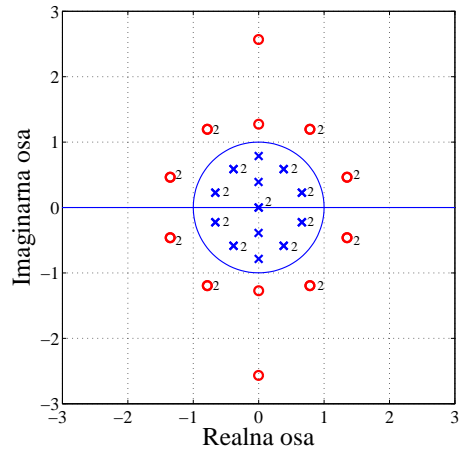
Sl. 4.13: Grupna kašnjenja funkcije distorzije Eliptičkog, Prelaznog i Butterworthovog filtra V reda, pre i posle primene četiri fazna korektora VIII reda.

pulsnog odziva. Drugim rečima, korektorom osmog reda najbolja korekcija grupnog kašnjenja je izvršena na Butterworthovom filtru. Međutim, Butterworthov filter ima druge nedostatke kao što je mala selektivnost.

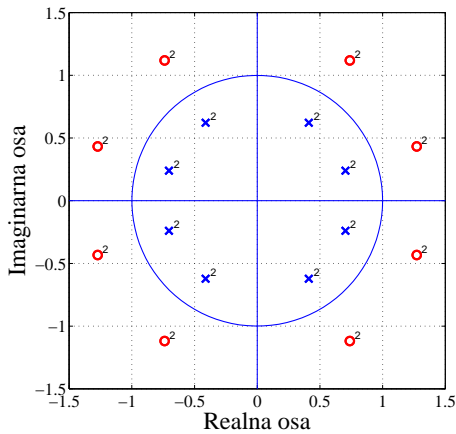
4.2. Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja NF-VF filterškog para (varijanta 1)



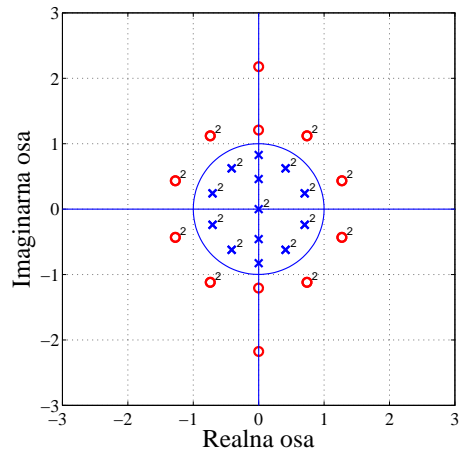
Sl. 4.14: Nule i polovi faznog korektora VIII reda primenjenog na Prelazni filter V reda.



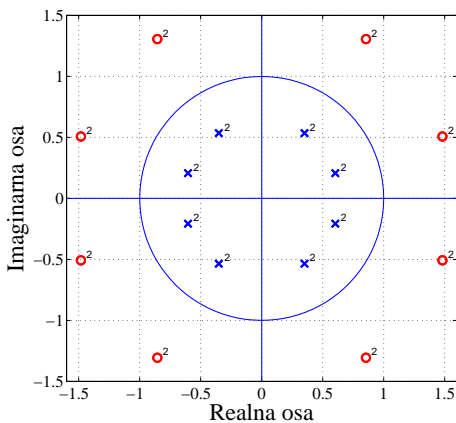
Sl. 4.15: Nule i polovi funkcije distorzije Prelaznog filtra V reda nakon fazne korekcije.



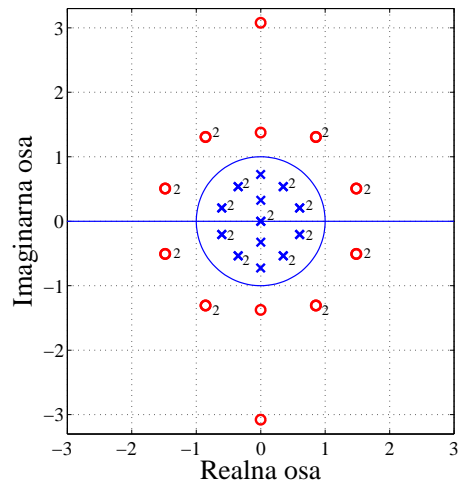
Sl. 4.16: Nule i polovi faznog korektora VIII reda primenjenog na Eliptički filter V reda.



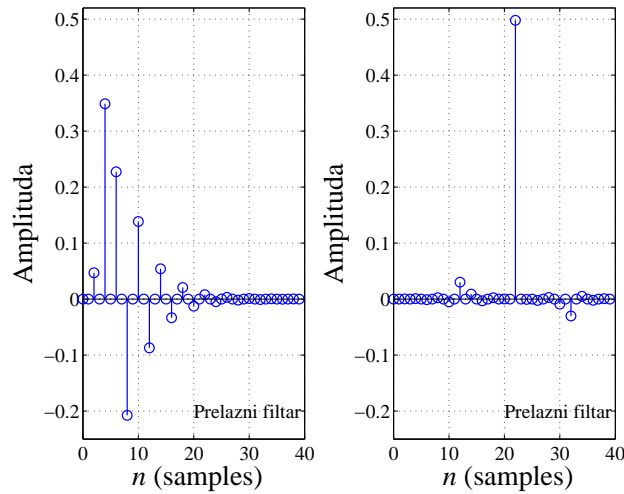
Sl. 4.17: Nule i polovi funkcije distorzije Eliptičkog filtra V reda nakon fazne korekcije.



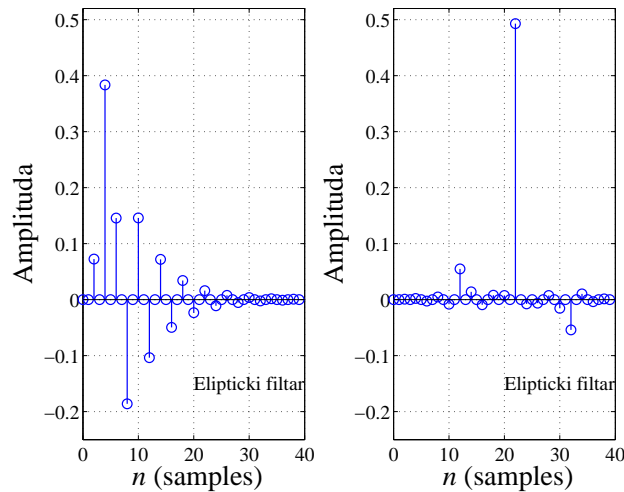
Sl. 4.18: Nule i polovi faznog korektora VIII reda primenjenog na Butterworthov filter V reda.



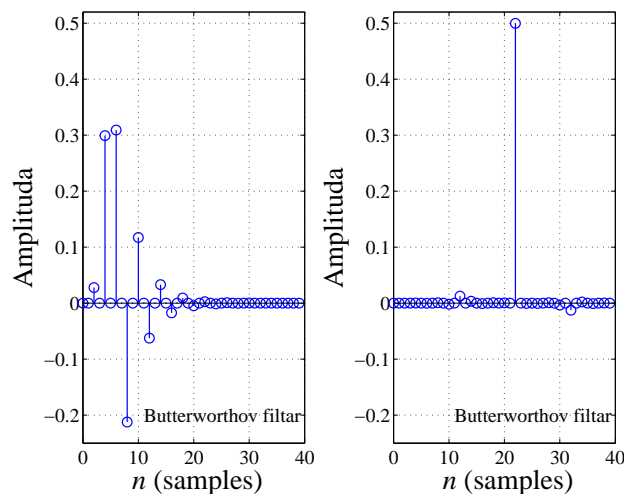
Sl. 4.19: Nule i polovi funkcije distorzije Butterworthovog filtra V reda nakon fazne korekcije.



Sl. 4.20: Impulsni odziv funkcije distorzije Prelaznog filtra V reda pre (levo) i posle (desno) primene četiri fazna korektora VIII reda.



Sl. 4.21: Impulsni odziv funkcije distorzije Eliptičkog filtra V reda pre (levo) i posle (desno) primene četiri fazna korektora VIII reda.



Sl. 4.22: Impulsni odziv funkcije distorzije Butterworthovog filtra V reda pre (levo) i posle (desno) primene četiri fazna korektora VIII reda.

4.3 Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja funkcije distorzije (varijanta 2)

U daljem tekstu biće pokazano da se red faznog korektora može redukovati kada se fazni korektor primeni direktno na funkciju distorzije tako da važi $A_{FK} = A_{FK,0} \cdot A_{FK,1}$, Sl. 4.1. Može se usvojiti da je fazni korektor $A_{FK,0}(z) = 1$ a da je fazni korektor $A_{FK,1}(z) = A_{FK}(z)$ onaj kojim vršimo korekciju grupnog kašnjenja. Kao rezultat se dobija QMF banka sa potisnutim faznim izobličenjem a ukupna funkcija distorzije je data jednačinom

$$T(z) = \frac{1}{2}z^{-1}A_0(z^2)A_{FK}(z^2)A_1(z^2). \quad (4.12)$$

U ovom slučaju u celoj QMF banci primenjuju se dva fazna korektora, po jedan u svakoj liniji QMF banke, ili u banci sinteze ili u banci analize.

4.3.1 Korekcija faznog izobličenja QMF banke filtara sa prototipskom funkcijom petog reda

Za QMF banku kojoj je prototipska funkcija Prelazne klase petog reda, rezultat je fazni korektor dvanaestog reda pa je red faznog korektora, a i ukupne funkcije distorzije, smanjen za četiri u odnosu na prethodni metod korekcije faznih izobličenja (varijantu 1). Njegova prenosna funkcija je

$$A_{FK}(z) = \frac{0.06315 - 0.1155z^{-2} + 0.1907z^{-4} - 0.3079z^{-6} + 0.4953z^{-8} - 0.762z^{-10} + z^{-12}}{1 - 0.762z^{-2} + 0.4953z^{-4} - 0.3079z^{-6} + 0.1907z^{-8} - 0.1155z^{-10} + 0.06315z^{-12}}. \quad (4.13)$$

Za QMF banku kojoj je prototipska funkcija Butterworthov filtar petog reda, rezultat je takođe fazni korektor dvanaestog reda. Njegova prenosna funkcija je

$$A_{FK}(z) = \frac{0.02491 - 0.05058z^{-2} + 0.09691z^{-4} - 0.183z^{-6} + 0.3453z^{-8} - 0.6321z^{-10} + z^{-12}}{1 - 0.6321z^{-2} + 0.3453z^{-4} - 0.183z^{-6} + 0.09691z^{-8} - 0.05058z^{-10} + 0.02491z^{-12}}. \quad (4.14)$$

Za QMF banku kojoj je prototipska funkcija Eliptički filtar petog reda, rezultat je fazni korektor šesnaestog reda, tako da se u ovom slučaju ne postiže redukovanje reda ukupne funkcije distorzije u odnosu na varijantu 1 (kada je korekcija grupnog kašnjenja izvršena na NF-VF

filtrarskom paru). Prenosna funkcija ovog faznog korektora je:

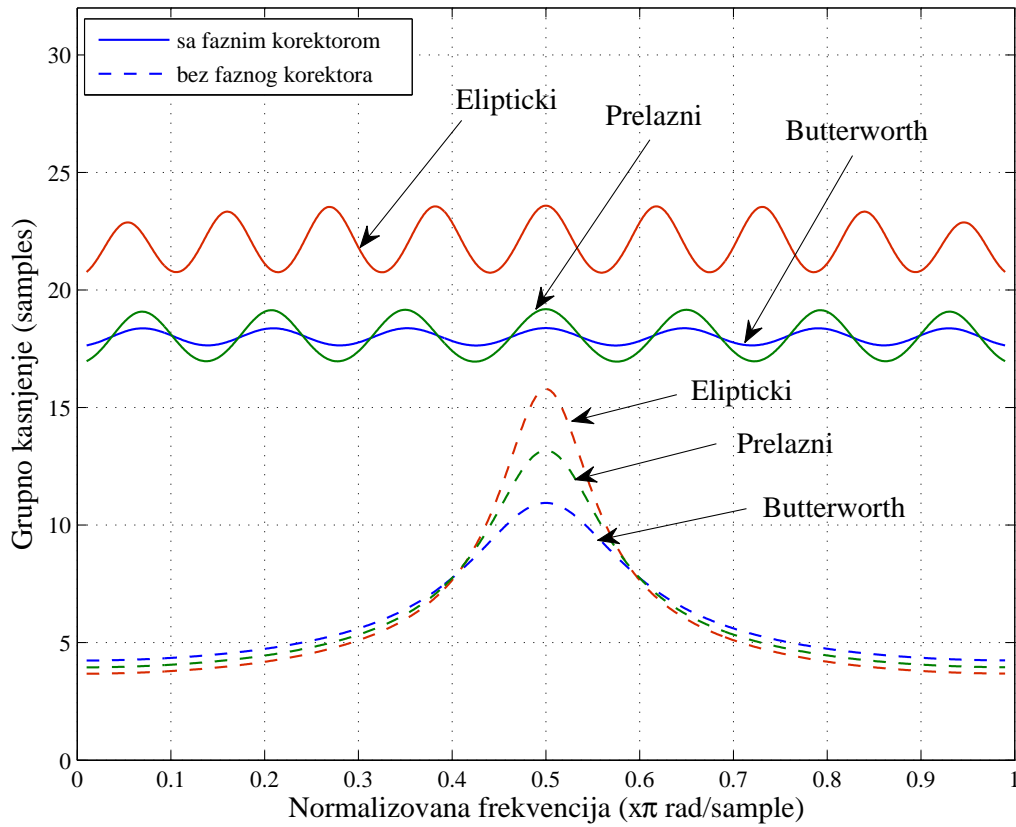
$$A_{FK}(z) = \frac{0.053 - 0.09579z^{-2} + 0.1423z^{-4} - 0.2088z^{-6} + 0.3058z^{-8} - 0.4418z^{-10} + 0.6362z^{-12} - 0.8558z^{-14} + z^{-16}}{1 - 0.8558z^{-2} + 0.6362z^{-4} - 0.4418z^{-6} + 0.3058z^{-8} - 0.2088z^{-10} + 0.1423z^{-12} - 0.09579z^{-14} + 0.053z^{-16}} \quad (4.15)$$

Na Sl. 4.23 date su uporedne karakteristike grupnog kašnjenja funkcije distorzije Eliptičkog, Prelaznog i Butterworthovog filtra petog reda, pre i posle primene faznog korektora pri čemu je u slučaju Prelaznog i Butterworthovog filtra primenjen fazni korektor dvanaestog reda a na Eliptički filter fazni korektor šesnaestog reda.

Uočava se da mini-maks karakteristika grupnog kašnjenja osciluje oko vrednosti koja je ujedno i red funkcije distorzije, odnosno kod Prelaznog i Butterworthovog filtra osciluje oko vrednosti $\tau_0 = 18$ (red funkcije distorzije pre korekcije je bio šest a red faznog korektora je dvanaest), a mini-maks karakteristika Eliptičkog filtra osciluje oko vrednosti $\tau_0 = 22$ (šest plus šesnaest). Maksimalna relativna greška konstantnog grupnog kašnjenja, ε_{max} , najmanja je kod Butterworthovog a najveća kod Eliptičkog filtra.

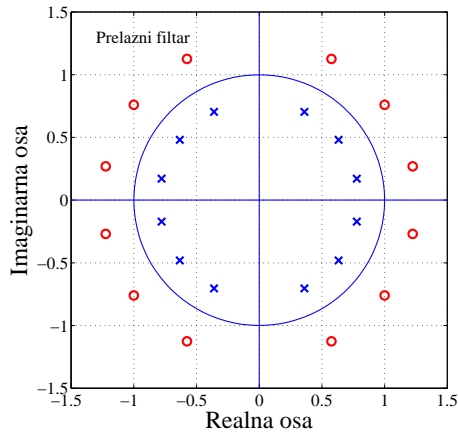
Na Sl. 4.24, date su nule i polovi faznog korektora dvanaestog reda, datog jednačinom (4.13), a nule i polovi funkcije distorzije QMF banke posle fazne korekcije za Prelazni filter prikazane su na Sl. 4.25. Na Sl. 4.26, date su nule i polovi faznog korektora dvanaestog reda, datog jednačinom (4.14), a nule i polovi funkcije distorzije QMF banke posle fazne korekcije za Butterworthov filter date su na Sl. 4.27. Na Sl. 4.28, date su nule i polovi faznog korektora šesnaestog reda, datog jednačinom (4.15), a nule i polovi funkcije distorzije QMF banke posle fazne korekcije za Eliptički filter, prikazane su na Sl. 4.29.

Na slikama 4.30, 4.31 i 4.32 prikazani su impulsni odzivi na izlazu kvadrature banke filtara, pre i posle fazne korekcije za Prelazni, Butterworthov i Eliptički filter respektivno. Kako je ukupni red funkcije na izlazu za Prelazni i Butterworthov filter osamnaest, a za Eliptički filter dvadeset dva, za toliko odmeraka je i pomeren izlazni signal. Za sve tipove filtara izlazni signal iz QMF banke je zakasnela replika ulaznog signala, što je i bio cilj projektovanja faznih korektora.

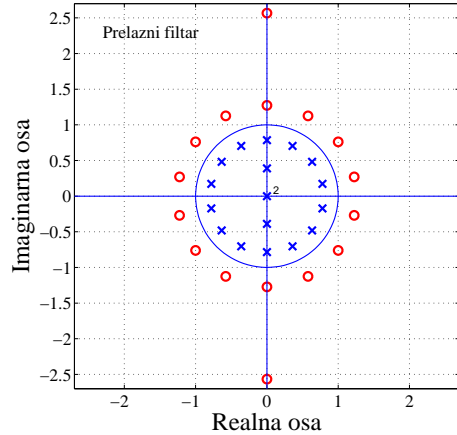


Sl. 4.23: Grupna kašnjenja funkcije distorzije Eliptičkog, Prelaznog i Butterworthovog filtra V reda, pre i posle primene faznih korektora XVI reda za Eliptički a XII reda za Prelazni i Butterworthov filter.

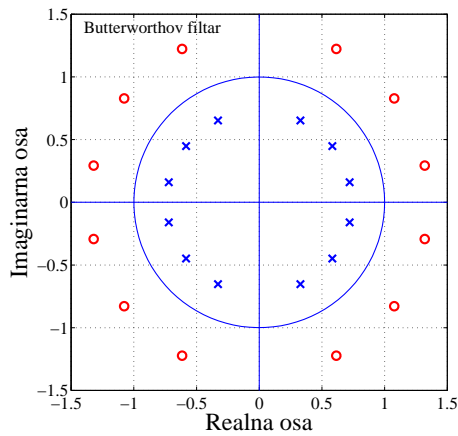
4.3. Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja funkcije distorzije (varijanta 2)



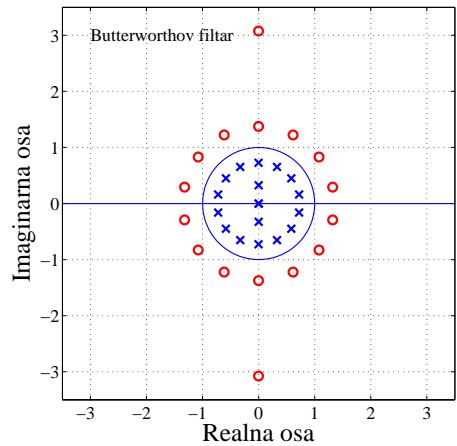
Sl. 4.24: Nule i polovi u z ravni faznog korektora dvanaestog reda za Prelazni filter.



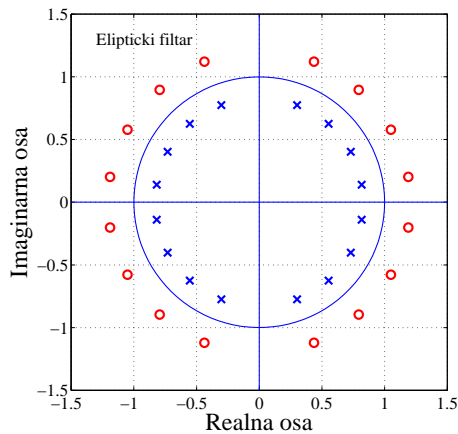
Sl. 4.25: Nule i polovi funkcije distorzije QMF banke sa primenjenim faznim korektorom.



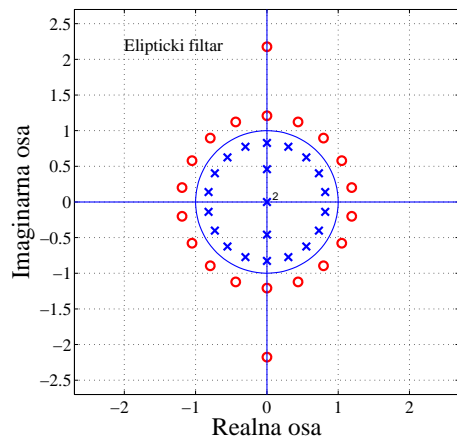
Sl. 4.26: Nule i polovi u z ravni faznog korektora dvanaestog reda za Butterworthov filter.



Sl. 4.27: Nule i polovi funkcije distorzije QMF banke sa primenjenim faznim korektorom.

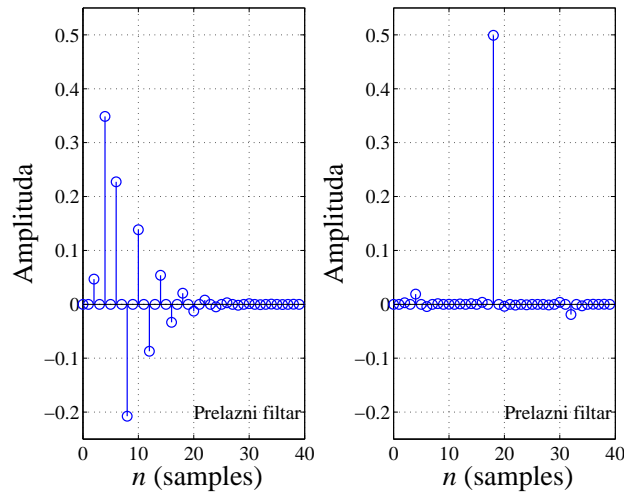


Sl. 4.28: Nule i polovi u z ravni faznog korektora šesnaestog reda za Eliptički filter.

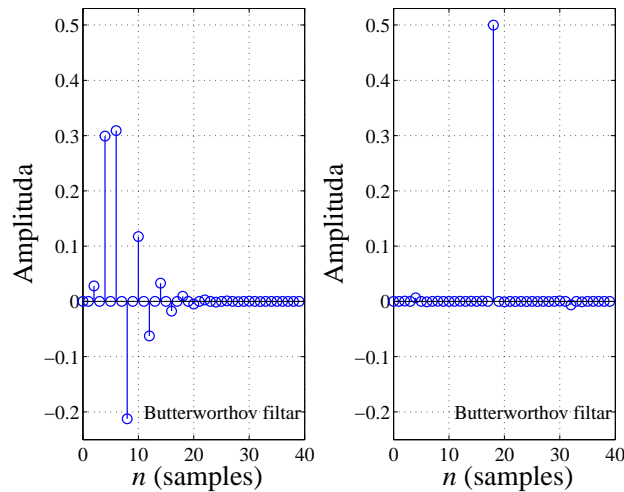


Sl. 4.29: Nule i polovi funkcije distorzije QMF banke sa primenjenim faznim korektorom.

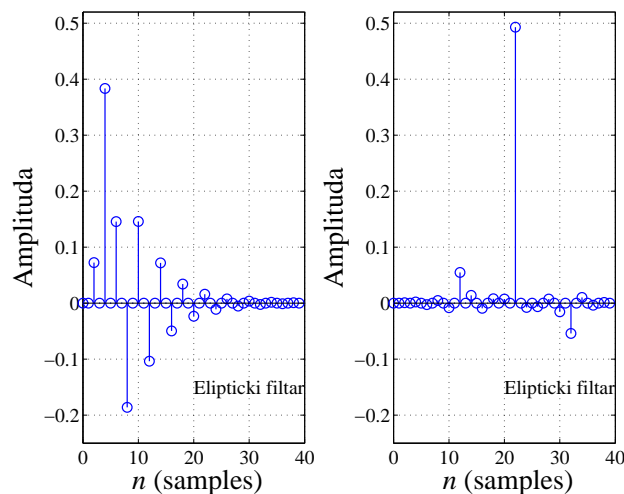
4.3. Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja funkcije distorzije (varijanta 2)



Sl. 4.30: Impulsni odziv funkcije distorzije Prelaznog filtra V reda pre (levo) i posle (desno) primene faznog korektora XII reda.

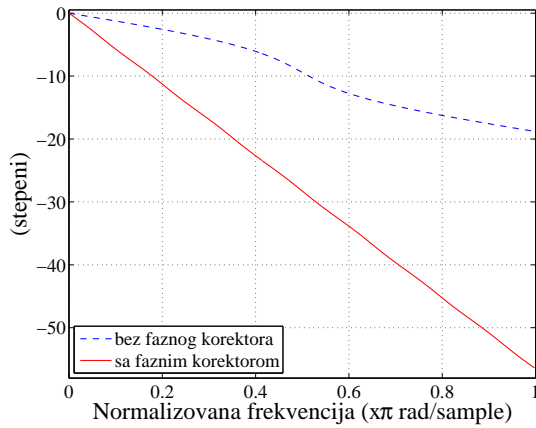


Sl. 4.31: Impulsni odziv funkcije distorzije Butterworthovog filtra V reda pre (levo) i posle (desno) primene faznog korektora XII reda.

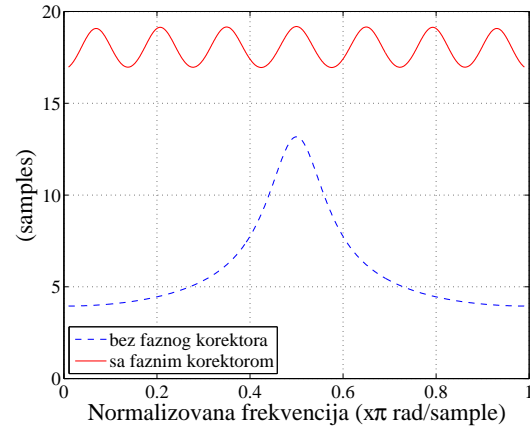


Sl. 4.32: Impulsni odziv funkcije distorzije Eliptičkog filtra V reda pre (levo) i posle (desno) primene faznog korektora XVI reda.

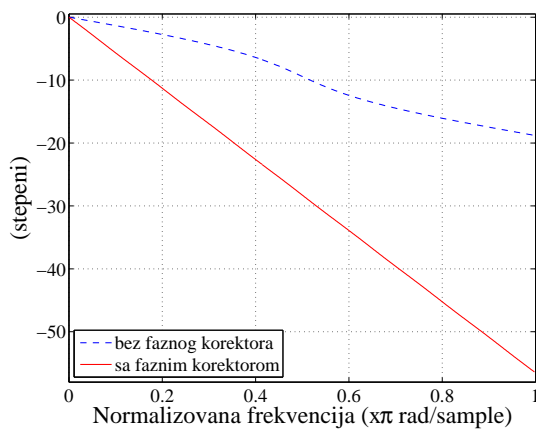
4.3. Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja funkcije distorzije (varijanta 2)



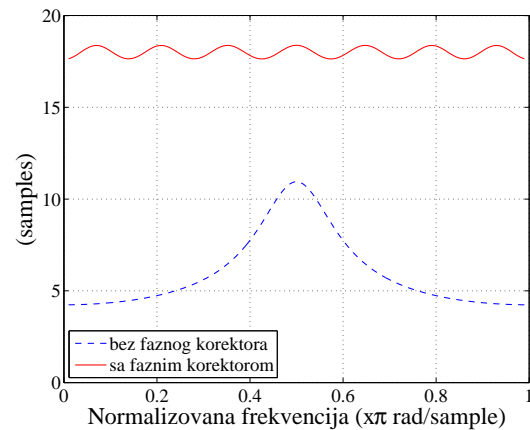
Sl. 4.33: Fazne karakteristike funkcije distorzije sa i bez faznog korektora za Prelazni filter.



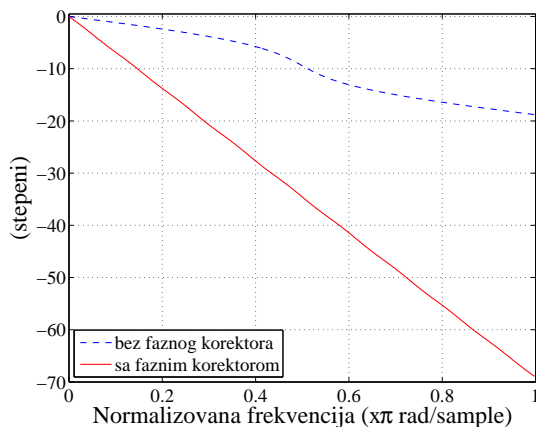
Sl. 4.34: Grupna kašnjenja funkcije distorzije sa i bez faznog korektora za Prelazni filter.



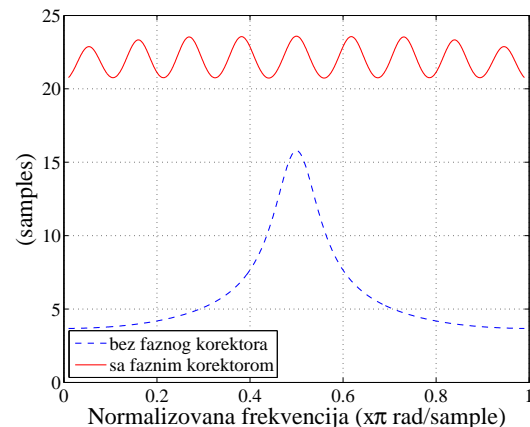
Sl. 4.35: Fazne karakteristike funkcije distorzije sa i bez faznog korektora za Butterworthov filter.



Sl. 4.36: Grupna kašnjenja funkcije distorzije sa i bez faznog korektora za Butterworthov filter.



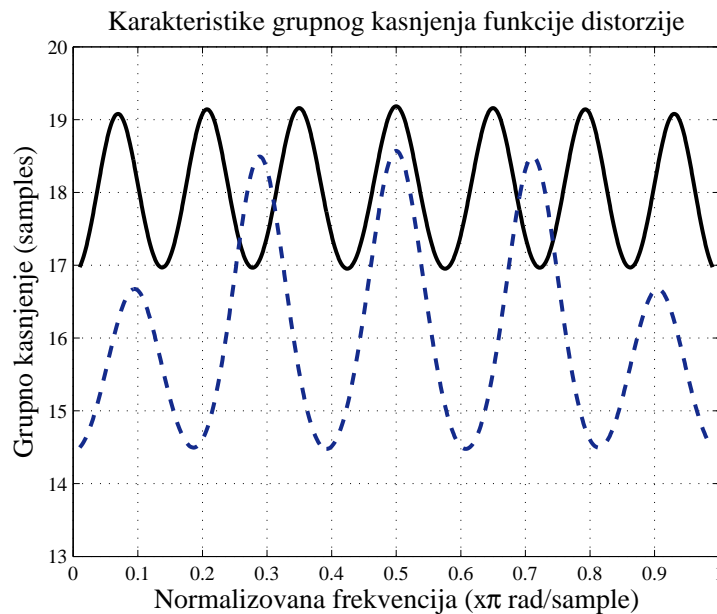
Sl. 4.37: Fazne karakteristike funkcije distorzije sa i bez faznog korektora za Eliptički filter.



Sl. 4.38: Grupna kašnjenja funkcije distorzije sa i bez faznog korektora za Eliptički filter.

Na slikama 4.33, 4.35 i 4.37 prikazane su fazne karakteristike na izlazu kvadrature banke filtara, pre i posle fazne korekcije za Prelazni, Butterworthov i Eliptički filtar respektivno. Na slikama 4.34, 4.36 i 4.38 prikazane su karakteristike grupnog kašnjenja na izlazu kvadrature banke filtara, pre i posle fazne korekcije za Prelazni, Butterworthov i Eliptički filtar respektivno, gde se vidi da je korektorom postignuta mini-maks (*equiripple*) karakteristika grupnog kašnjenja.

Slika 4.39 ilustruje koji je kriterijum poslužio za izbor reda faznog korektora. Za slučaj QMF banke sa Prelaznim filtrom nije bilo pogodno primeniti fazni korektor nižeg reda od dvanaestog, jer faznim korektorom desetog reda nije postignuta željena mini-maks karakteristika.



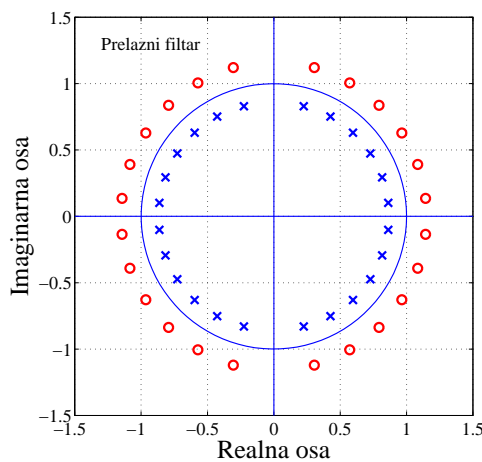
Sl. 4.39: Karakteristika grupnog kašnjenja funkcije distorzije petog reda kada se primeni fazni korektor desetog (isprekidana linija) i dvanaestog (puna linija) reda.

4.3.2 Korekcija faznog izobličenja QMF banke filtara sa Prelaznom klasom filtara sedmog reda

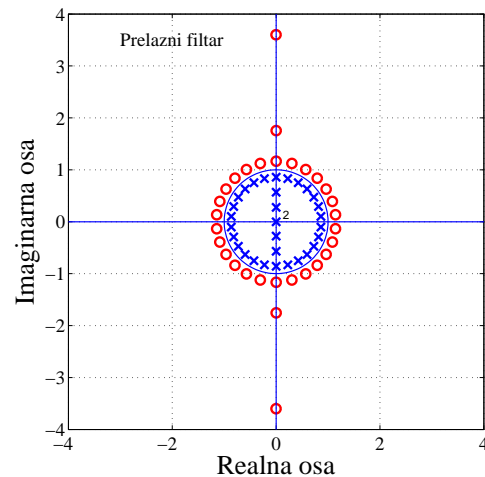
Za QMF banku u kojoj je prototipska funkcija Prelazna klasa filtara sedmog reda, rezultat je fazni korektor dvadeset četvrtog reda. Prenosna funkcija ovog faznog korektora je

$$A_{FK}(z) = \frac{0.03189 - 0.05896z^{-2} + 0.08681z^{-4} - 0.1202z^{-6} + 0.1658z^{-8} - 0.2248z^{-10} + 0.3069z^{-12} - 0.415z^{-14} + 0.5598z^{-16} - 0.7419z^{-18} + 0.954z^{-20} - 1.114z^{-22} + z^{-24}}{1 - 1.114z^{-2} + 0.954z^{-4} - 0.7419z^{-6} + 0.5598z^{-8} - 0.415z^{-10} + 0.3069z^{-12} - 0.2248z^{-14} + 0.1658z^{-16} - 0.1202z^{-18} + 0.08681z^{-20} - 0.05896z^{-22} + 0.03189z^{-24}} \quad (4.16)$$

a njegovi polovi i nule prikazani su na Sl. 4.40. Polovi i nule konačne prenosne funkcije QMF banke sa ovim faznim korektorom prikazani su na Sl. 4.41. Na Sl. 4.42 prikazane su fazne karakteristike prenosne funkcije QMF banke sa Prelaznom klasom sedmog reda, pre i posle uvođenja faznog korektora gde se vidi da se dobija linearna fazna karakteristika primenom korektora. Na Sl. 4.43 prikazane su karakteristike grupnog kašnjenja prenosne funkcije QMF banke pre i posle uvođenja korektora.



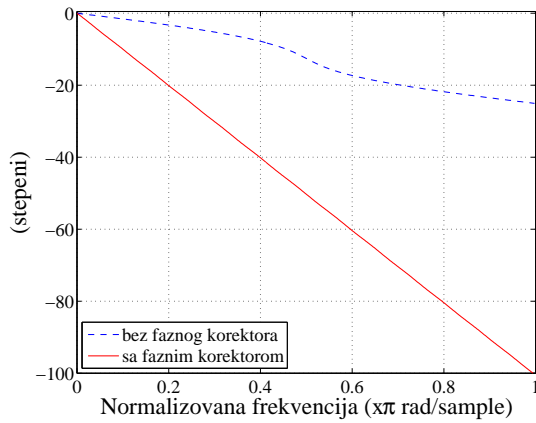
Sl. 4.40: Raspoored nula i polova u z ravni faznog korektora dvadeset četvrtog reda.



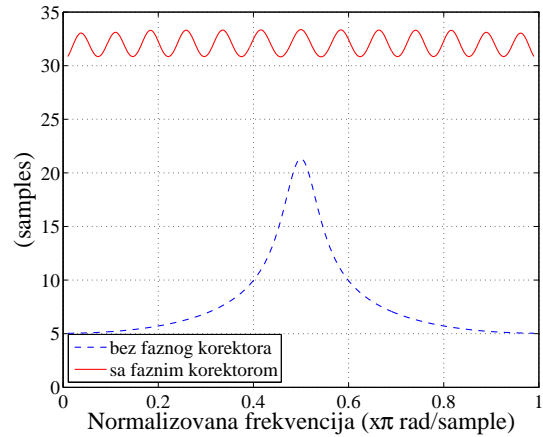
Sl. 4.41: Nule i polovi funkcije distorzije QMF banke sa primenjenim faznim korektorom.

Na slici 4.44 prikazani su impulsni odzivi QMF banke sa prototipskim Prelaznim filtrom sedmog reda pre i posle primene faznog korektora. Na desnoj slici vidi se da je izlazni signal iz QMF banke zakasnela replika ulaznog signala, pri čemu kašnjenje odziva iznosi trideset dva odmerka, koliki je red funkcije distorzije na izlazu QMF banke. Na slici 4.45 može se videti

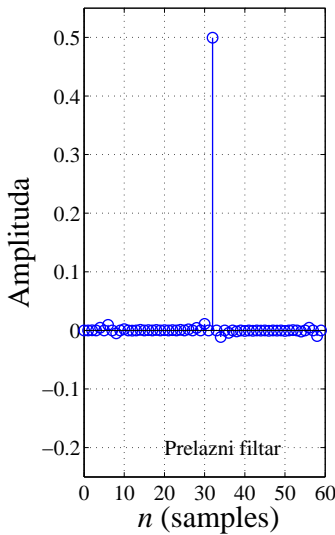
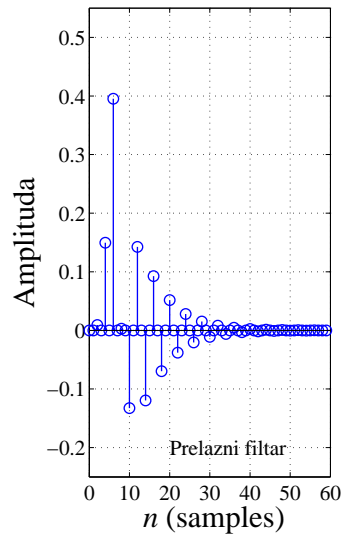
4.3. Banka filtara sa korekcijom faznog izobličenja funkcije distorzije (varijanta 2)



Sl. 4.42: Fazne karakteristike funkcije distorzije sa i bez faznog korektora.

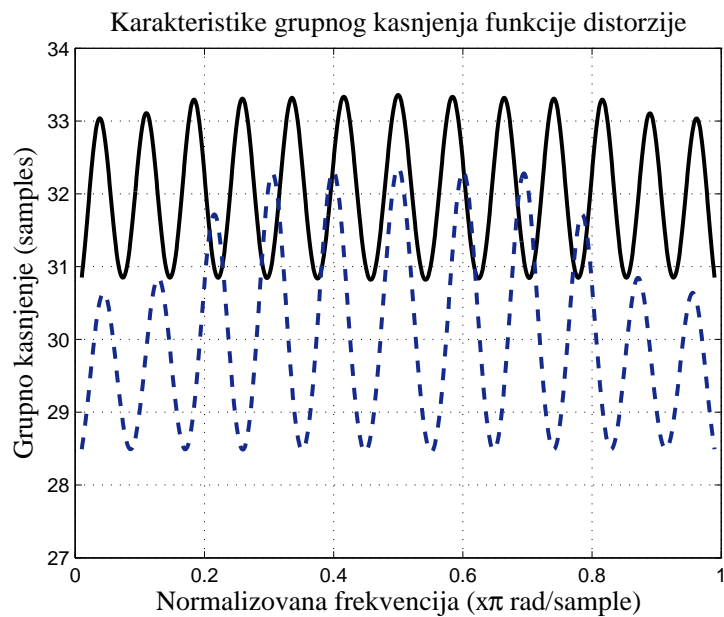


Sl. 4.43: Grupna kašnjenja funkcije distorzije sa i bez faznog korektora.



Sl. 4.44: Impulsni odziv QMF banke, sa prototipskom funkcijom Prelaznog filtra sedmog reda, bez faznog korektora (levo) i sa faznim korektorom (desno) dvadeset četvrtog reda.

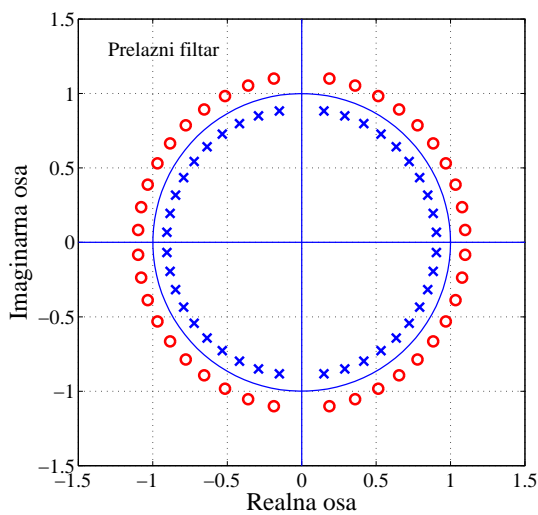
da korektor dvadeset četvrtog reda daje bolju karakteristiku grupnog kašnjenja u odnosu na korektor dvadeset drugog reda.



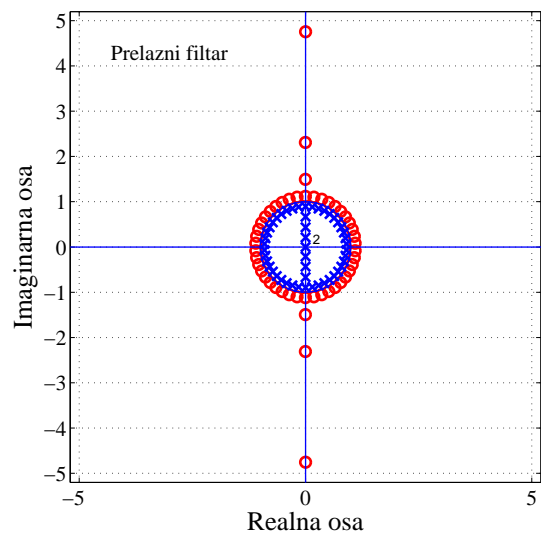
Sl. 4.45: Mini-maks karakteristika grupnog kašnjenja funkcije distorzije kada se primeni fazni korektor dvadeset četvrtog (isprekidana linija) i dvadeset drugog (puna linija) reda.

4.3.3 Korekcija faznog izobličenja QMF banke filtara sa Prelaznom klasom filtara devetog reda

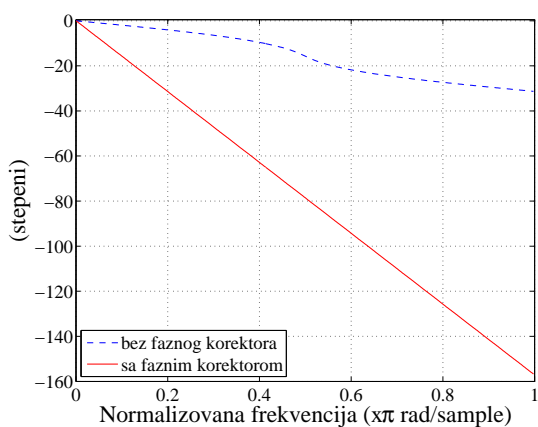
Za QMF banku u kojoj je prototipska funkcija Prelazna klasa filtara devetog reda, rezultat je fazni korektor četrdesetog reda. Njegovi polovi i nule prikazani su na Sl. 4.46 a polovi i nule konačne prenosne funkcije QMF banke sa ovim faznim korektorom prikazani su na Sl. 4.47. Na Sl. 4.48 prikazane su fazne karakteristike prenosne funkcije QMF banke sa Prelaznom klasom filtara devetog reda, pre i posle uvođenja faznog korektora. Na Sl. 4.49 prikazane su karakteristike grupnog kašnjenja pre i posle uvođenja korektora kojim je postignuta mini-maks karakteristika.



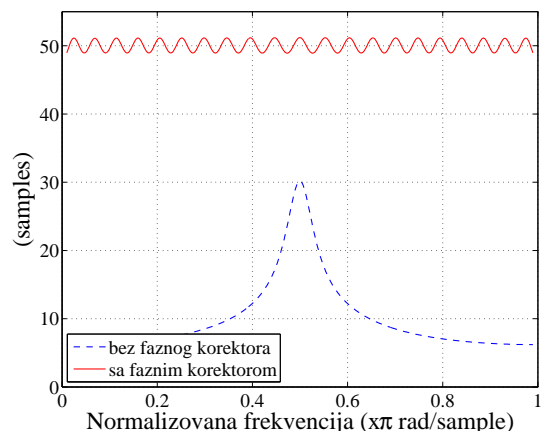
Sl. 4.46: Raspored nula i polova u z ravni faznog korektora četrdesetog reda.



Sl. 4.47: Nule i polovi funkcije distorzije QMF banke sa primenjenim faznim korektorom.

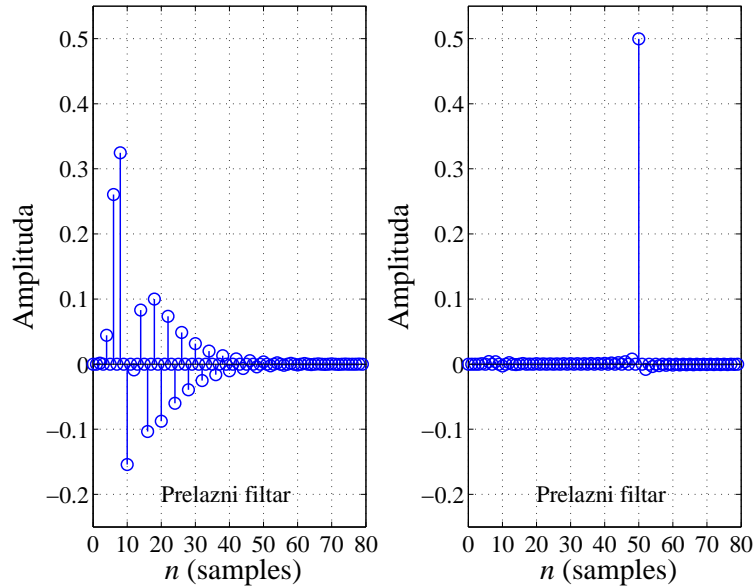


Sl. 4.48: Fazne karakteristike funkcije distorzije sa i bez faznog korektora.



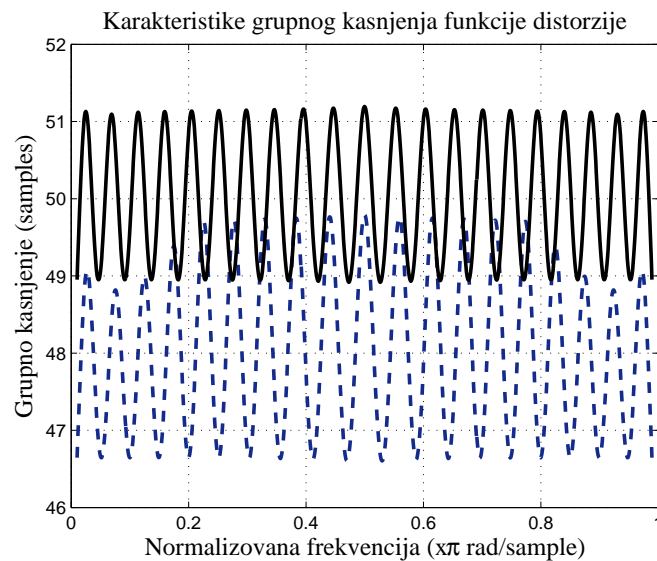
Sl. 4.49: Grupna kašnjenja funkcije distorzije sa i bez faznog korektora.

Na slici 4.50 prikazani su impulsni odzivi QMF banke sa prototipskim Prelaznim filtrom devetog reda pre i posle primene faznog korektora. Na desnoj slici vidi se da je izlazni signal iz QMF banke zakasnela replika ulaznog signala, pri čemu kašnjenje iznosi pedeset odmeraka, koliki je red funkcije distorzije na izlazu QMF banke.



Sl. 4.50: Impulsni odziv QMF banke, sa prototipskom funkcijom Prelaznog filtra devetog reda, bez faznog korektora (levo) i sa faznim korektorom (desno) četrdesetog reda.

Na slici 4.51 prikazano je da fazni korektor četrdesetog reda daje bolju karakteristiku grupnog kašnjenja u odnosu na korektor trideset osmog reda.



Sl. 4.51: Mini-maks karakteristika grupnog kašnjenja funkcije distorzije kada se primeni fazni korektor tridesetosmog (isprekidana linija) i četrdesetog (puna linija) reda.

5

Zaključak

M*ultirate* sistemi, u kojima se obrada signala obavlja na više različitih frekvencija odmeravanja, značajno su razvijeni u poslednje dve decenije i imaju široku primenu u svim oblastima obrade signala. Banke filtara, kao elementi *multirate* sistema, dele se na dvokanalne i višekanalne banke. Dvokanalne banke filtara se uopšteno mogu podeliti na tri tipa: QMF banke, ortogonalne banke filtara i biortogonalne banke filtara. Za realizaciju filtara u dvokanalnoj banci mogu se koristiti prenosne funkcije sa konačnim impulsnim odzivom (FIR) ili prenosne funkcije sa beskonačnim impulsnim odzivom (IIR).

Pri projektovanju banki digitalnih filtara osnovni zahtev je da izlazni signal sadrži što je moguće manja izobličenja. Ta izobličenja mogu biti fazna, amplitudska ili posledica preklapanja spektra (*aliasing*). Ako par banka analize-banka sinteze ispunjava uslov savršene rekonstrukcije, signal na izlazu banke sinteze biće skalirana i zakašnjena replika signala sa ulaza. Osobine banke filtara zavise od karakteristika pojedinačnih filtara od kojih je banka formirana. Samim tim, izbor NF prototipskog filtra je najvažniji korak u projektovanju banke filtara jer sve ostale karakteristike sistema proističu iz njegovih karakteristika.

U ovoj tezi obrađene su dvokanalne QMF banke u sistemima sa beskonačnim impulsnim odzivom. QMF banka deli ulazni signal na dva frekvencijska podopsega, koji se pojedinačno obrađuju sa nižom frekvencijom odmeravanja, i na izlazu formira ponovo jedan kompozitni signal. Ovo kao rezultat daje NPR sistem što znači da na izlazu postoji fazno izobličenje. Realizacija IIR banke filtara se zasniva na dekompoziciji prototipske prenosne funkcije na dva *allpass* filtra čijim se sabiranjem, odnosno oduzimanjem, dobijaju prenosne funkcije niskopropusnog i visokopropusnog filtra. Prednost ovakvih sistema je da se isti hardver koristi za realizaciju i NF i VF prenosne funkcije što znači da je prilikom njihove praktične implementacije potreban upola manji broj množača [4, str. 89]. Realizacija komplementarnih IIR

filtrara zasnovana na paralelnoj vezi dva *allpass* filtra odlikuje se malom osetljivošću karakteristike slabljenja na promenu dužine digitalne reči [70].

5.1 Doprinosi disertacije

- Predložena je direktna sinteza nove klase rekurzivnih digitalnih filtara, kao prototipske funkcije koja zadovoljava uslov za komplementarnu dekompoziciju. (Od poznatih filtara, komplementarnu dekompoziciju moguće je izvesti samo kod Butterworthovog i Eliptičkog filtra, s obzirom da je neophodan uslov da karakteristika slabljenja ima jednak broj ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu.) Kako karakteristika slabljenja nove klase filtara leži u oblasti između Butterworthovih i Eliptičkih karakteristika slabljenja, nova klasa je nazvana Prelazna klasa filtara. Njena prenosna funkcija projektovana je tako da zadovoljava sve uslove komplementarne dekompozicije tj. svi polovi nalaze se na imaginarnoj osi a sve nule leže na jediničnom krugu.

Izračunavanje koeficijenata prenosne funkcije Prelazne klase filtara formulisano je kao inverzni problem i izvedeno po sledećem postupku. Data je funkcija kvadrata amplitudske karakteristike Prelaznih IIR filtara, sa po jednim, po dva, po tri i po četiri ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu. Numerički postupak za utvrđivanje ekstremnih vrednosti karakteristike slabljenja, u cilju da se ova funkcija podesi tako da ima mini-maks (equiripple) karakteristiku u propusnom i nepropusnom opsegu, izvršen je u analognom domenu (na osnovu zadate vrednosti minimalnog slabljenja u nepropusnom opsegu).

Korišćenjem odgovarajuće frekvencijske promenljive, analogna prenosna funkcija preslikana je u digitalni domen. Kao rezultat dobijena je prenosna funkcija niskopropusnog filtra sa svim polovima na imaginarnoj osi i svim nulama na jediničnom krugu u z ravni. Zatim su usvojeni polovi koji leže unutar jediničnog kruga na osnovu kojih je dobijena digitalna prenosna funkcija prototipskog NF filtra. Ova funkcija je razložena na dva *allpass* filtra komplementarnom dekompozicijom. Konačno, niskopropusni i visokopropusni filtri, kao komplementarni par, izvedeni su iz ovih *allpass* filtara [70].

- Za klasu Prelaznih filtara sa po jednim ekstremumom u propusnom i nepropusnom opsegu dati su koeficijenti prenosne funkcije u zatvorenom obliku (odjeljak 3.2). Primena ovako dobijenih koeficijenata je značajna jer se pri konverziji frekvencije odabiranja zahteva filter sa najmanjom mogućom kompleksnošću.

- Pogodnim izborom filtara banki analize i sinteze ispunjen je uslov za uklanjanje efekata *aliasinga*. Pokazano je da se amplitudska izobličenja kod IIR banke filtara mogu u potpunosti potisnuti pa je nelinearnost fazne karakteristike dominantno izobličenje. Za postizanje približno savršene rekonstrukcije signala predložena je korekcija grupnog kašnjenja faznim korektorom i izvršena analiza uticaja reda faznog korektora na tačnost rekonstrukcije signala.

5.2 Pregled ostvarenih rezultata

U okviru analize Prelazne klase filtara obrađene su funkcije neparnog reda sa po jednim, po dva, po tri i po četiri ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu. Karakteristike slabljenja na svim graficima date su za minimalnu vrednost slabljenja u nepropusnom opsegu od 40dB kako bi se omogućilo poređenje svih tipova filtara. Na polovini frekvencijskog opsega vrednost slabljenja iznosi 3dB s obzirom da su u pitanju *halfband* filtri.

- Za Prelaznu klasu filtara sa po jednim ekstremumom u propusnom i nepropusnom opsegu analizirane su karakteristike slabljenja na dva načina. Najpre je izvršeno poređenje ovih karakteristika za isti stepen višestrukosti konjugovano-kompleksne nule prenosne funkcije, pri čemu se red filtra menja. Zatim je prikazano poređenje ovih karakteristika za isti red filtra ali za različite stepene višestrukosti. Za slučajeve višestrukosti $L = 1, \dots, 4$ dati su položaji polova i nula za peti, sedmi, deveti i jedanaesti red filtra kao i odgovarajući koeficijenti prenosnih funkcija.

Takođe je izvršeno poređenje Prelazne klase filtara petog, sedmog, devetog i jedanaestog reda sa Butterworthovim i Eliptičkim filtrom istog reda. Pokazano je da Prelazni filtri imaju bolju selektivnost u odnosu na Butterworthov filter, a lošiju u odnosu na Eliptički. Međutim, kako je Eliptički filter projektovan korišćenjem bilinearne transformacije, njegovi polovi nisu čisto imaginarni a realni delovi polova se povećavaju sa povećanjem reda filtra. Ovo rezultira u grešci amplitudske karakteristike VF filtra, što znači da Prelazni filtri postižu veću tačnost pri komplementarnoj dekompoziciji u odnosu na Eliptičke filtre.

Opisan je postupak komplementarne dekompozicije Prelazne klase filtara na dva *allpass* filtra čije su prenosne funkcije takođe date za peti, sedmi, deveti i jedanaesti red filtra. Za sve ove mogućnosti prikazane su karakteristike slabljenja NF/VF komplementarnog para, dobijenog sabiranjem/oduzimanjem *allpass* filtara.

- Za klasu Prelaznih filtara sa po dva ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu

date su *halfband* karakteristike slabljenja za sedmi, deveti, jedanaesti i trinaesti red, što odgovara vrednosti stepena zaravnjenja u koordinatnom početku $M = 3$, $M = 5$, $M = 7$ i $M = 9$, respektivno. Za sve slučajeve dati su položaji polova i nula tabelarno i grafički kao i koeficijenti prenosnih funkcija. Objasnen je postupak komplementarne dekompozicije, date prenosne funkcije *allpass* filtera i prikazane odgovarajuće karakteristike slabljenja dobijenih NF/VF komplementarnih parova.

- Za klasu Prelaznih filtera sa po tri ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu date su *halfband* karakteristike slabljenja za deveti i jedanaesti red a za klasu prelaznih filtera sa po četiri ekstremuma u propusnom i nepropusnom opsegu za jedanaesti i trinaesti red.

- Na osnovu ovih rezultata došlo se do sledećih zaključaka:

(a) Predložena klasa Prelaznih filtera ima polove sa čisto imaginarnim delom čime je obezbeđena visoka tačnost pri komplementarnoj dekompoziciji koju Eliptički filter ne može postići.

(b) Praktična realizacija nove klase je jednostavnija u odnosu na Eliptički filter obzirom da ima parove konjugovano-kompleksnih nula na jediničnom krugu i višestruku nulu u $z = -1$.

(c) Polovi Eliptičkog filtera akumulirani su u okolini ivice propusnog opsega i rastojanje između njih se smanjuje sa porastom reda filtera. Ovo zahteva veliku dužinu digitalne reči za implementaciju filtera visokog reda. Nova klasa ima aproksimativno ekvidistantni raspored polova pa se može realizovati sa manjom dužinom digitalne reči u odnosu na Eliptički filter.

(d) Nova klasa filtera ima veću stabilnost obzirom da su polovi smešteni bliže koordinatnom početku.

5.3 Pravci budućih istraživanja

Kao logičan nastavak prikazanih rezultata, može se analizirati komplementarna dekompozicija za klasu Prelaznih filtera parnog reda kod kojih su koeficijenti *allpass* filtera kompleksni, pa je samim tim i njihova implementacija drugačija.

Naredni korak je praktična realizacija Prelazne klase filtera u cilju testiranja i verifikacije prikazanih rezultata. Opisivanje hardverske implementacije, u cilju da realizuje i izvršava određeni skup logičkih funkcija, vrši se VHDL programskim jezikom. Ovaj jezik tekstualno opisuje osnovne delove hardverske implementacije i veze između njih kako bi se oni konačno postavili na blokove FPGA čipa.

6

Prilozi

6.1 Polifazna reprezentacija prenosne funkcije

Uvođenje polifazne reprezentacije digitalnih filtara pruža efikasnu implementaciju decimacionih i interpolacionih filtara i naročito je važna za razvoj banki filtara. Polifazna reprezentacija može se pokazati na primeru faktorisanja rekurzivnog filtra u sumu faktora prvog reda [4, str.120-121], pri čemu se svaki faktor prvog reda može transformisati na sledeći način

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-az^{-1}} &= \frac{1+az^{-1}}{1-a^2z^{-2}} = \frac{1}{1-a^2z^{-2}} + z^{-1} \frac{a}{1-a^2z^{-2}} \\ &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Prenosna funkcija digitalnog filtra $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ (koji u opštem slučaju može biti i nerekurzivan i rekurzivan kao i nekauzalan i kauzalan) može se predstaviti preko M polifaznih komponenti kao $H(z) = E_0(z^M) + z^{-1}E_1(z^M) + \dots + z^{-(M-1)}E_{M-1}(z^M)$, ali je za primenu dvokanalne banke filtara od interesa dekompozicija na dve polifazne komponente. Ako bi se dati niz podelio na dva dela, na deo sa samo parnim koeficijentima i drugi, sa samo neparnim, dobio bi se oblik:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-2n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-(2n+1)}\tag{6.2}$$

odnosno

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-2n} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-2n}.\tag{6.3}$$

Ako se ove sume označe sa $E_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n)z^{-n}$ i $E_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(2n+1)z^{-n}$ tada je polifazna reprezentacija niskopropusnog filtra

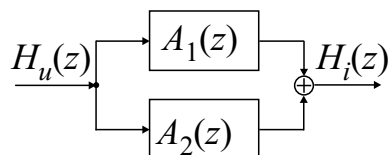
$$H(z) = E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2), \quad (6.4)$$

a odgovarajućeg visokopropusnog

$$H(z) = E_0(z^2) - z^{-1}E_1(z^2). \quad (6.5)$$

6.2 Dekompozicija rekurzivnih filtara na *allpass* filtre

Rekurzivni digitalni filtri se mogu rastaviti na podfiltre odnosno predstaviti kao paralelna veza, u opštem slučaju proizvoljnog broja, *allpass* filtara [100–102]. Prenosna funkcija *allpass* filtra višeg reda se može izraziti kao kaskadna sekcija *allpass* filtara prvog i drugog reda. Mnoge klase filtara, projektovane na bazi *allpass* filtara, pokazale su se kao veoma pogodne u velikom broju aplikacija za obradu signala i implementaciji. Sistemi u kome je rekurzivni filter konstruisan kao paralelna veza dva *allpass* filtra pokazali su se kao izuzetno efikasni, Sl. 6.1. Ovi *allpass* filtri dobijaju se tako što se izračunaju položaji polova početne prenosne funkcije a zatim se jedan deo polova iskoristi za formiranje jednog *allpass* filtra a ostali deo polova za formiranje drugog.

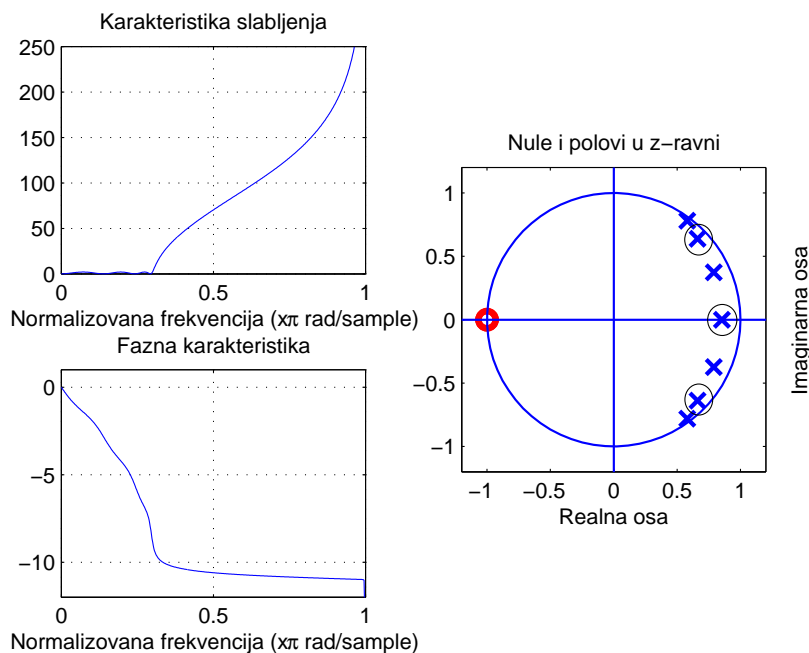


Sl. 6.1: Rastavljanje ulazne prenosne funkcije na dva *allpass* filtra.

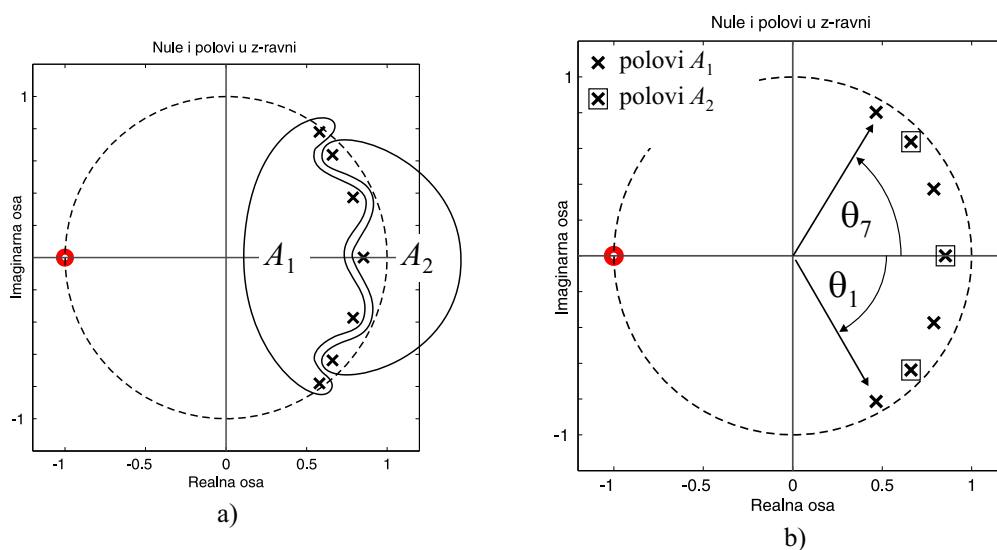
Primer 1. Osnovni princip ovog postupka može se pokazati na primeru Chebyshevlfjevog filtra čiji su parametri: normalizovana granična frekvencija propusnog opsega $f_c = 0.3$, normalizovana granična frekvencija nepropusnog opsega $f_s = 0.5$, maksimalno slabljenje u propusnom opsegu $R_p = 2\text{dB}$ i minimalno slabljenje u nepropusnom opsegu $R_s = 60\text{dB}$. Ova parametre ispunjava prenosna funkcija Chebyshevlfjevog fitra sedmog reda koja ima oblik

$$H_u = \frac{0.0001z^7 + 0.0006z^6 + 0.0018z^5 + 0.0030z^4 + 0.0030z^3 + 0.0018z^2 + 0.0006z + 0.0001}{z^7 - 4.912z^6 + 11.46z^5 - 16.18z^4 + 14.83z^3 - 8.795z^2 + 3.13z - 0.5185}. \quad (6.6)$$

Polovi ovog filtra su: $0.5798 \pm 0.7805i, 0.6608 \pm 0.6381i, 0.8533, 0.7889 \pm 0.3736i$ i



Sl. 6.2: Karakteristika slabljenja, fazna karakteristika i položaj polova i nula za Chebyshevlfjev filter čija je prenosna funkcija data jednačinom (6.6).

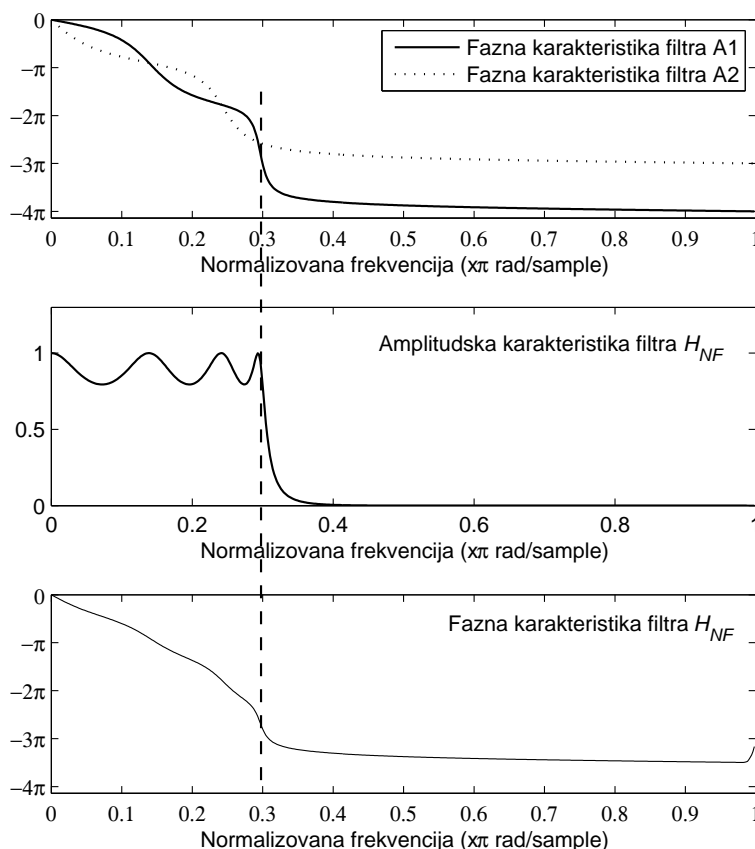


Sl. 6.3: Postupak odvajanja polova pri dekompoziciji na dva allpass subfiltra A_1 i A_2 .

0.8553. Za jedan allpass filter, A_1 , usvajaju se polovi $0.5798 \pm 0.7805i$ i $0.7889 \pm 0.3736i$ a za drugi, A_2 , preostali 0.8553 i $0.6608 \pm 0.6381i$ kao što je prikazano na slici 6.3a).

Usvojeni polovi definišu imenioce ovih filtara a brojioci se jednoznačno dobijaju na osnovu opšteg oblika prenosne funkcije allpass filtra N -tog reda

$$A(z) = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-(N-n)}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}. \quad (6.7)$$



Sl. 6.4: Sinteza Chebyshevljevog niskoropusnog filtra.

Na taj način polazni niskoropusni filter sedmog reda rastavljen je na dva *allpass* filtra četvrtog i trećeg reda čije su prenosne funkcije:

$$A_1(z) = \frac{0.7202z^4 - 2.375z^3 + 3.537z^2 - 2.737z + 1}{z^4 - 2.737z^3 + 3.537z^2 - 2.375z + 0.7202} \quad (6.8)$$

i

$$A_2(z) = \frac{-0.72z^3 + 1.972z^2 - 2.175z + 1}{z^3 - 2.175z^2 + 1.972z - 0.72}. \quad (6.9)$$

Fazne karakteristike ovih filtara su prikazane na slici 6.4a. Može se uočiti da su u propusnom opsegu fazne karakteristike približno iste, što znači da su komponente signala koje se sabiraju na izlazu, u fazi, pa je amplitudska karakteristika u propusnom opsegu približno jednaka 2 (ali ne veća). Iz tog razloga se uvodi faktor 1/2. U nepropusnom opsegu fazna razlika ova dva *allpass* filtra je π , usled čega komponente poništavaju jednu drugu pa je rezultujući amplitudski odziv jednak približno nuli [4, str.86].

U opštem slučaju, fazni odziv *allpass* filtra reda N opada monotono od 0 do $-N\pi$ kada ω raste od 0 do π . Sledi da je fazna razlika dva *allpass* filtra reda M i N jednaka $(M - N)\pi$ za

vrednost $\omega = \pi$. Ako je cilj da se postigne amplitudska karakteristika koja odgovara niskopropusnom filtru, redovi filtara treba da se razlikuju za jedan stepen.

Ako se frekvencijski odzivi *allpass* filtara predstave u obliku $A_1 = e^{j\phi_{a1}(\omega)}$ i $A_2 = e^{j\phi_{a2}(\omega)}$, frekvencijski odziv funkcije H_i je:

$$H_i(e^{j\omega}) = e^{j\phi_{a1}(\omega)} + e^{j\phi_{a2}(\omega)} = 2 \cos\left(\frac{\phi_{a1}(\omega) - \phi_{a2}(\omega)}{2}\right) e^{j\frac{\phi_{a1}(\omega) + \phi_{a2}(\omega)}{2}} \quad (6.10)$$

i za vrednost $\omega = 0$ iznosi $H_i(e^{j0}) = 2$ dok za $\omega = \pi$ ima vrednost $H_i(e^{j\pi}) = 0$.

Amplitudska funkcija sadrži u sebi razliku faza *allpass* filtara. Kada, za neki opseg frekvencija, ova razlika teži nuli tada kosinusna funkcija u amplitudskom odzivu teži jedinici, odnosno taj frekvencijski opseg je propusni opseg filtra i definiše njegovu prirodu. Sa druge strane, frekvencijski opseg gde je ova razlika faza približna vrednosti π , biće nepropusni opseg, odnosno amplitudski odziv biće jednak nuli.

Ovom analizom pokazano je da se niskopropusni filtar može izraziti kao suma dve stabilne *allpass* funkcije:

$$H_{NF}(z) = \frac{1}{2}(A_1(z) + A_2(z)). \quad (6.11)$$

Razdvajanje polova može da se generalizuje na sledeći način. Ako su polovi polaznog filtra z_1, z_2, \dots, z_N a njihovi uglovi $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$, označeni tako da važi $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$ kao na slici 6.3b), tada su polovi koji pripadaju A_1 - oni sa neparnim indeksima, z_{2k+1} , a polovi A_2 sa parnim, z_{2k} .

6.2.1 Projektovanje NF/VF frekvencijskog para

Visokopropusni rekurzivni filtar $H_{VF}(z)$ može se izvesti iz niskopropusnog $H_{NF}(z)$ ako se niskopropusni filtar može izraziti kao suma dve stabilne *allpass* funkcije, (6.11).

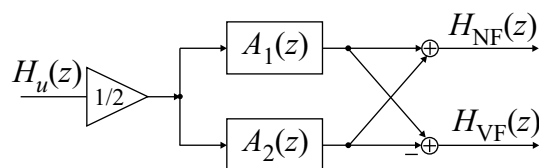
Na osnovu napred izloženog, kako bi dobili prenosnu funkciju koja odgovara visokopropusnom filtru, frekvencijska karakteristika ovog filtra ima oblik:

$$H_{VF}(e^{j\omega}) = 2 \sin\left(\frac{\phi_{a1}(\omega) - \phi_{a2}(\omega)}{2}\right) e^{j\frac{\phi_{a1}(\omega) + \phi_{a2}(\omega)}{2}} \quad (6.12)$$

odnosno prenosne funkcije *allpass* filtara se oduzimaju

$$H_{VF}(z) = \frac{1}{2}(A_1(z) - A_2(z)) \quad (6.13)$$

što se može prikazati šemom na slici 6.5.



Sl. 6.5: Formiranje NF/VF para sabiranjem/oduzimanjem prenosnih funkcija dva *allpass* filtra.

Ako se iskoriste dobijeni *allpass* filtri u primeru Chebyshevljevog filtra iz prethodne sekcije, za sintezu visokopropusnog filtra, tada je njegova prenosna funkcija

$$H_{VF} = \frac{0.7201z^7 - 3.942z^6 + 10.12z^5 - 15.63z^4 + 15.63z^3 - 10.12z^2 + 3.942z - 0.7201}{z^7 - 4.912z^6 + 11.46z^5 - 16.18z^4 + 14.83z^3 - 8.795z^2 + 3.13z - 0.5185}. \quad (6.14)$$

a amplitudska i fazna karakteristika imaju oblik kao na slici 6.6. Operacija oduzimanja ukazuje da je fazni odziv jednog *allpass* filtra pomeren za π pa je fazna razlika *allpass* signala za frekvencije manje od granične (0.3) jednaka π , a za veće od granične, jednaka nuli, odnosno, komponente *allpass* filtara za normalizovane frekvencije manje od 0.3 se oduzimaju pa amplitudski odziv teži nuli, a za ostale frekvencije se sabiraju pa je amplitudski odziv jednak jedinici.

Na ovaj način se niskopropusni i visokopropusni filtar mogu implementirati po ceni jednog, s obzirom da je razlika samo u izlazu, odnosno da li se koristi sabirač ili oduzimač. Sabiranjem ove dve prenosne funkcije, H_{LP} i H_{HP} dobija se

$$H_{NF}(z) + H_{VF}(z) = A_1(z) \quad (6.15)$$

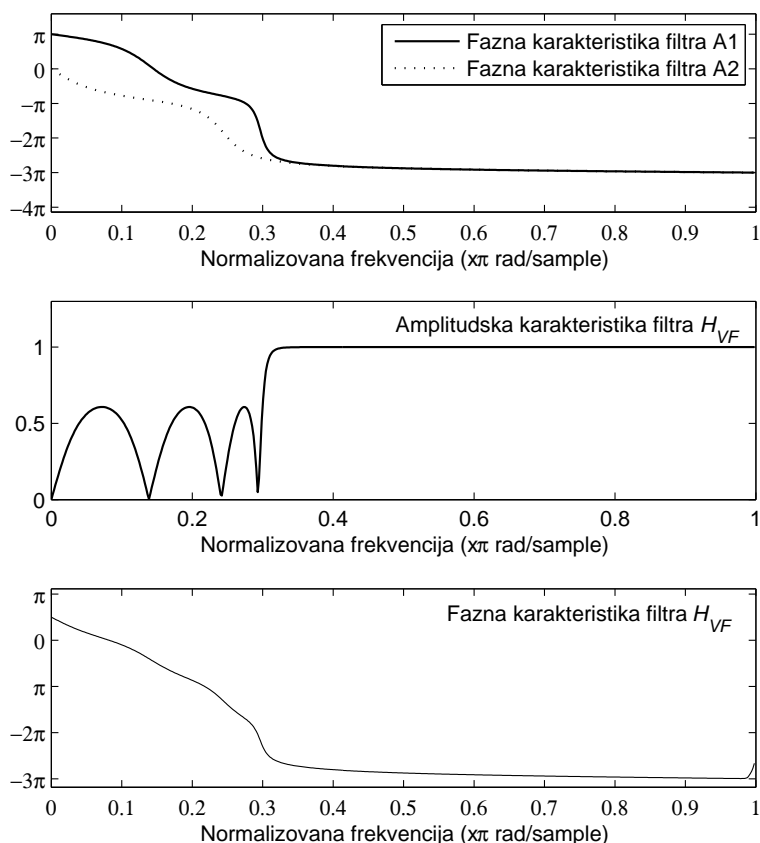
odnosno niskopropusni i visokopropusni filtar, izraženi preko sume *allpass* filtara, čine komplementarni par po *allpass* funkciji.

Pored ovog kriterijuma, ove prenosne funkcije zadovoljavaju i komplementarnost po snazi, što se lako može dokazati zamenom jednačina sa \cos i \sin

$$|H_{NF}(e^{j\omega})|^2 + |H_{VF}(e^{j\omega})|^2 = 1 \quad (6.16)$$

tj. oni su dvostruko komplementarni. Ovo znači da je ukupna snaga ulaznog signala raspodeljena podjednako na NF i VF izlaze što je veoma korisna osobina recimo kod filtara za razdvajanje opsega signala u procesu kodiranja govora.

Može se još pomenuti da je ovaj postupak moguće iskoristiti i za dobijanje filtra propusnika opsega i nepropusnika opsega ali da se u tom slučaju redovi *allpass* filtara moraju razlikovati



Sl. 6.6: Sinteza Chebyshevljevog visokopropusnog filtra.

za dva stepena. Takođe, postoje i druge metode za projektovanje NF/VF filtarskog para, ali one nisu predmet razmatranja ove teze.

Prethodno opisani postupak projektovanja rekurzivnog NF/VF filtarskog para može se podeliti na tri etape:

1. Određivanje reda niskopropusnog filtra na osnovu zadatih specifikacija i projektovanje prenosne funkcije filtra standardnim postupkom;
2. Raspodela polova, tako određene prenosne funkcije, na dva dela prema utvrđenom pravilu, i formiranje prenosnih funkcija dva *allpass* filtra;
3. Izračunavanje prenosne funkcije niskopropusnog filtra sabiranjem prenosnih funkcija *allpass* filtara a visokopropusnog - njihovim oduzimanjem. Na kraju, proračun vrednosti koeficijenata prenosnih funkcija NF/VF filtarskog para.

Ovim postupkom, svi klasični tipovi filtara (Butterworth, Chebyshev, Elliptic,...) mogu

se realizovati kao paralelna veza dva *allpass* filtra pod uslovom da je red ovih filtara neparan jer su samo tada koeficijenti *allpass* filtara realni brojevi. Kod parnog reda filtra, koeficijenti prenosnih funkcija *allpass* filtara su imaginarni brojevi, pri čemu su koeficijenti *allpass* filtra A_2 konjugovano-kompleksni brojevi koeficijenata A_1 , pa se u tom slučaju mora primeniti drugi postupak.

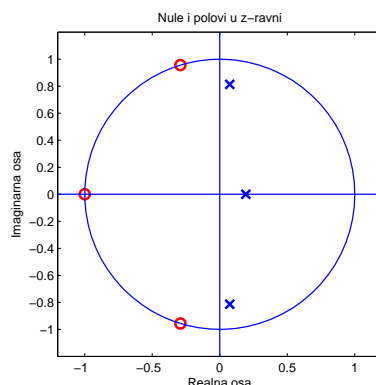
Primer 2. Eliptički filtar ispunjava zadate specifikacije $R_p = 0.5$, $R_s = 20$, $\omega_p = 0.45$ i $\omega_s = 0.6$ za red filtra $N = 3$.

Prenosna funkcija ovog filtra ima oblik:

$$H(z) = \frac{0.2376z^3 + 0.376z^2 + 0.376z + 0.2376}{z^3 - 0.3405z^2 + 0.6968z - 0.129} \quad (6.17)$$

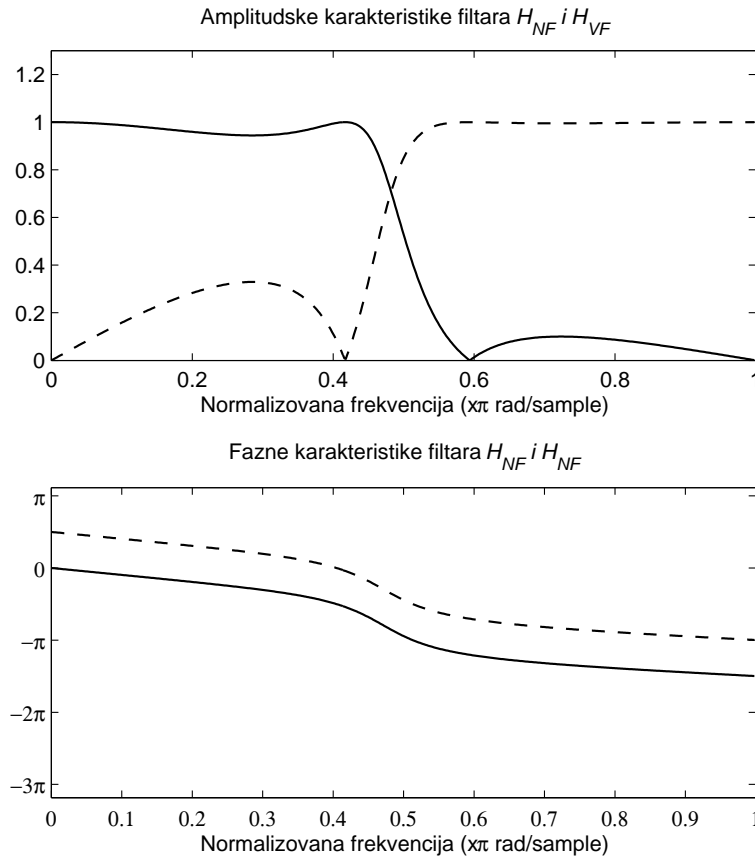
i može se izraziti kao polovina zbira *allpass* filtara:

$$A_1(z) = \frac{0.6683z^2 - 0.1474z + 1}{z^2 - 0.1474z + 0.6683} \quad \text{i} \quad A_2(z) = \frac{-0.1931z + 1}{z - 0.1931}. \quad (6.18)$$



Sl. 6.7: Raspored polova Eliptičkog filtra trećeg reda za $R_p = 0.5$, $R_s = 20$, $\omega_p = 0.45$ i $\omega_s = 0.6$.

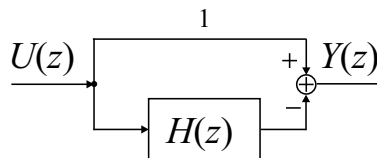
Specijalan slučaj niskopropusnih filtara neparnog reda su *halfband* fitri kod kojih su ivice propusnog i nepropusnog opsega locirane simetrično oko $\pi/2$ a svi polovi prenosne funkcije smešteni na imaginarnoj osi. Pri realizaciji decimacije ili interpolacije faktorom dva, *halfband* fitri nude posebne uštede prilikom proračuna jer se *allpass* fitri mogu realizovati pri nižoj frekvenciji odmeravanja i stoga su posebno važni pri projektovanju banki filtara.



Sl. 6.8: Amplitudske i fazne karakteristike Eliptičkog niskopropusnog (puna linija)/visokopropusnog (isprekidana linija) para.

6.3 Kriterijumi komplementarnosti

Komplementiranje predstavlja izvođenje nove prenosne funkcije od već postojeće. Najjednostavniji primer bio bi kada se iz prenosne funkcije $H(z)$ dobija njena komplementarna prenosna funkcija $H_C(z)$ koja je njen jedinični komplement, slika 6.9.



Sl. 6.9: Izvođenje jedinične komplementarne funkcije.

$$Y(z) = U(z) - H(z)U(z) = [1 - H(z)]U(z) = H_C(z)U(z), \quad (6.19)$$

odnosno

$$H_C(z) + H(z) = 1. \quad (6.20)$$

Odgovarajući frekvencijski odziv $H(e^{j\omega})$ je realna i parna funkcija na opsegu $0 \leq \omega \leq \pi$. Za bilo koju vrednost frekvencije ω , suma frekvencijskih odziva funkcija $H(z)$ i $H_C(z)$ je jednaka jedinici, odnosno za $z = e^{j\omega}$ važi

$$H_C(e^{j\omega}) + H(e^{j\omega}) = 1. \quad (6.21)$$

Komplementiranjem niskopropusnog filtra dobija se visokopropusni.

Ako su inverzne Z transformacije redom $H_C(n) \rightarrow H_C(z)$, $h(n) \rightarrow H(z)$ i $\delta(n) \rightarrow 1$ tada u vremenskom domenu važi

$$h_C(n) + h(n) = \delta(n), \quad (6.22)$$

što pokazuje da ceo ovaj proces pretpostavlja da impulsni odzivi imaju neparan broj koeficijenata.

Kako bi definisali različite kriterijume po kojima se neki par filtara smatra komplementarnim, razmatraće se par filtara $[H(z), H_C(z)]$, pri čemu su $H(z)$ i $H_C(z)$ njihove prenosne funkcije [68, str.243-244], [4, str.157-159]. Treba naglasiti da postoje filtarski parovi koji su istovremeno komplementarni po dva kriterijuma tj dvostruko komplementarni.

Filtarski par komplementaran po snazi

Par filtara $[H(z), H_C(z)]$ čine komplementarni par filtara simetričan po snazi (power complementary filter pair) ako je suma kvadrata njihovih amplitudskih odziva jednaka pozitivnoj konstanti, tj.

$$|H(e^{j\omega})|^2 + |H_C(e^{j\omega})|^2 = K, \quad (6.23)$$

gde je konstanta K obično jednaka jedinici. Za ovakav par, kvadrati amplitudskih odziva na graničnoj učestanosti ω_c su jednaki $|H(e^{j\omega_c})|^2 = |H_C(e^{j\omega_c})|^2 = K/2$, tj. karakteristike slabljenja na ovoj učestanosti su približno 3 dB ispod maksimalne vrednosti.

Filtarski par komplementaran po amplitudi

Par filtara $[H(z), H_C(z)]$ je komplementaran po amplitudi (magnitude complementary filter pair) ako je suma njihovih amplitudskih odziva jednaka pozitivnoj konstanti, tj.

$$|H(e^{j\omega})| + |H_C(e^{j\omega})| = K, \quad (6.24)$$

gde je konstanta K obično jednaka jedinici. Za ovakav par kvadrati amplitudskih odziva na graničnoj učestanosti ω_c su jednaki $|H(e^{j\omega_c})| = |H_C(e^{j\omega_c})| = K/2$, tj. karakteristike slabljenja na ovoj učestanosti su približno 6 dB ispod maksimalne vrednosti.

Filtarski par komplementaran po *allpass* funkciji

Par filtara $[H(z), H_C(z)]$ je komplementaran po *allpass* funkciji (*allpass* complementary filter pair) ako je suma njihovih prenosnih funkcija jednaka prenosnoj funkciji *allpass* filtra, tj.

$$H(z) + H_C(z) = A(z). \quad (6.25)$$

Filtarski par komplementaran po kašnjenju

Par filtara $[H(z), H_C(z)]$ je komplementaran po kašnjenju (delay complementary filter pair) ako je suma njihovih prenosnih funkcija jednaka funkciji kašnjenja, tj.

$$H(z) + H_C(z) = Kz^{-n_0}, \quad (6.26)$$

gde je konstanta K obično jednaka jedinici a n_0 nenegativan ceo broj.

Literatura

- [1] R. E. Crochiere and L. R. Rabiner, *Multirate digital signal processing*, N. P. Hall, Ed. New York: Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [2] S. K. Agrawal and O. P. Sahu, "Two-channel quadrature mirror filter bank: An overview," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, p. 11pp, 2013. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/815619>
- [3] L. Milić and J. Čertić, "Obrada signala primenom digitalnih banki filtara," in *24. Simpozijum o novim tehnologijama u poštanskom i telekomunikacionom saobraćaju, PosTel 2006*, Beograd, Srbija, Dec. 12-13, 2006, pp. 121–134.
- [4] P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, N. Prentice-Hall, Ed. New York: Englewood Cliffs, 1993.
- [5] P. Bloom, "High-quality digital audio in the entertainment industry: an overview of achievements and challenges," *IEEE ASSP magazine*, vol. 2, pp. 2–25, Oct. 1985.
- [6] R. Schafer and L. Rabiner, "A digital signal processing approach to interpolation," *Pmc. of the IEEE*, vol. 61, pp. 692–702, June 1973.
- [7] R. Meyer and C. Burrus, "A unified analysis of multirate and periodically time varying digital filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-22, pp. 162–168, Mar. 1975.
- [8] G. Oetken, T. Parks, and W. Schussler, "New results in the design of digital interpolators," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-23, no. 3, pp. 301–309, June 1975.
- [9] G. W. McNally, "Digital audio in broadcasting," *IEEE ASSP magazine*, vol. 2, Special issue, pp. 26–44, Oct. 1985.
- [10] P. J. Berkhout and L. D. Eggermont, "Digital audio systems," *IEEE ASSP magazine*, vol. 2, Special issue, pp. 45–67, Oct. 1985.
- [11] A. Croisier, D. Esteban, and C. Galand, "Perfect channel splitting by use of interpolation/decimation/tree decomposition techniques," in *Proceedings of the International Symposium on Information Science and Systems*, Patras, Greece, Aug. 1976, pp. 443–446.
- [12] R. Crochiere, "On the design of subband coders for low bit rate speech communication," *Bell System Tech. J.*, vol. 56, pp. 747–771, May - June 1977.
- [13] D. Esteban and C. Galand, "Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes," in *Proc. IEEE International Conf. Acoust. Speech and Signal Proc.*, May 1977, pp. 191–195.
- [14] T. Barnwell, "Sub-band coder design incorporating recursive quadrature filters and optimum ADPCM coders," *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-30, pp. 751–765, Oct. 1982.
- [15] C. Galand and H. J. Nussbaumer, "New quadrature mirror filter structures," *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-32, pp. 522–531, June 1984.

-
- [16] R. Crochiere, S. Webber, and J. Flanagan, "Digital coding of speech in subbands," *Bell System Tech. J.*, vol. 55, pp. 1069–1085, Oct. 1976.
- [17] R. Van der wall and R. N. J. Veldhuis, "Subband coding of stereophonic digital audio signals," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1991. ICASSP-91., 1991 International Conference on*, vol. 5, Apr. 1991, pp. 3601–3604.
- [18] A. Fettweis, T. Leickel, M. Bolle, and U. Sauvagerd, "Realization of filter banks by means of wave digital filters," in *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, New Orleans, May 1990, pp. 2013–2016.
- [19] M. Bellanger, G. Bonnerot, and M. Coudreuse, "Digital filtering by polyphase network: application to sample rate alternation and filter banks," *IEEE Trans. on Acoust. Speech and Signal Proc.*, vol. ASSP-24, pp. 109–114, Apr. 1976.
- [20] M. Smith and T. P. Barnwell, "A procedure for designing exact reconstruction filter banks for tree-structured subband coders," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '84.*, vol. 9, Mar. 1984, pp. 421–424.
- [21] M. J. T. Smith and I. Barnwell, T. P., "Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 3, pp. 434–441, June 1986.
- [22] F. Mintzer, "Filters for distortion-free two-band multirate filter banks," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, no. 3, pp. 626–630, June 1985.
- [23] M. Smith and T. Barnwell, "A unifying framework for analysis/synthesis systems based on maximally decimated filter banks," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '85.*, vol. 10, Apr. 1985, pp. 521–524.
- [24] M. J. T. Smith and T. P. Barnwell, "A new filter bank theory for time-frequency representation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 35, no. 3, pp. 314–327, Mar. 1987.
- [25] P. Chu, "Quadrature mirror filter design for an arbitrary number of equal bandwidth channels," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, no. 1, pp. 203–218, Feb. 1985.
- [26] R. Cox, "The design of uniformly and nonuniformly spaced pseudoquadrature mirror filters," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 5, pp. 1090–1096, Oct. 1986.
- [27] J. Masson and Z. Picel, "Flexible design of computationally efficient nearly perfect QMF filter banks," in *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP '85.*, vol. 10, Apr. 1985, pp. 541–544.
- [28] J. Princen and A. Bradley, "Analysis/synthesis filter bank design based on time domain aliasing cancellation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 5, pp. 1153–1161, Oct. 1986.
- [29] G. Wackersreuther, "Some new aspects of filters for filter banks," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 5, pp. 1182–1200, Oct. 1986.
- [30] V. Martin, "Filter banks allowing perfect reconstruction," *Signal Processing*, vol. 10, no. 3, pp. 219–244, Apr. 1986.
- [31] P. Vaidyanathan and T. Nguyen, "Eigenfilters: A new approach to least-squares FIR filter design and applications including nyquist filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 34, no. 1, pp. 11–23, Jan. 1987.

-
- [32] P. Vaidyanathan, "Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having the perfect-reconstruction property," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-35, no. 4, pp. 476–492, Apr. 1987.
- [33] H. S. Malvar, "Modulated QMF filter banks with perfect reconstruction," *Electronics Letters*, vol. 26, no. 13, pp. 906–907, June 1990.
- [34] A. N. Akansu and Y. Liu, "On-signal decomposition techniques," *Optical Engineering*, vol. 30, no. 7, pp. 912–920, July 1991.
- [35] J. Rothweiler, "Polyphase quadrature filters—a new subband coding technique," in *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing - ICASSP*, vol. 9, Mar 1983, pp. 421–424.
- [36] H. Nussbaumer, "Pseudo QMF filter bank," in *IBM Tech. disclosure Bulletin*, vol. 24, Nov. 1981, pp. 3081–3087.
- [37] T. Ramstad, "Analysis/synthesis filter banks with critical sampling," in *International conference on Digital Signal processing, 5-8 September, 1984, Florence, Italy*, Sept. 1984, pp. 130–134.
- [38] T. Nguyen, "Near-perfect-reconstruction pseudo-QMF banks," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 1, pp. 65–76, Jan. 1994.
- [39] T. Nguyen and P. Vaidyanathan, "Maximally decimated perfect-reconstruction FIR filter banks with pairwise mirror-image analysis (and synthesis) frequency responses," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 36, no. 5, pp. 693–706, May 1988.
- [40] M. Vetterli and D. Le Gall, "Perfect reconstruction FIR filter banks: some properties and factorizations," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 1057–1071, July 1989.
- [41] T. Ramstad and J. Tanem, "Cosine-modulated analysis-synthesis filterbank with critical sampling and perfect reconstruction," in *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1991. ICASSP-91*, vol. 3, Apr. 1991, pp. 1789–1792.
- [42] R. Koilpillai and P. Vaidyanathan, "New results on cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction," in *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-91*, vol. 3, Apr. 1991, pp. 1793–1796.
- [43] ———, "Cosine-modulated FIR filter banks satisfying perfect reconstruction," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 4, pp. 770–783, Apr. 1992.
- [44] P.-Q. Hoang and P. Vaidyanathan, "Non-uniform multirate filter banks: theory and design," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 1, May 1989, pp. 371–374.
- [45] J. Kovacevic and M. Vetterli, "Perfect reconstruction filter banks with rational sampling factors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 6, pp. 2047–2066, June 1993.
- [46] K. Nayebi, T. Barnwell, and M. Smith, "The design of perfect reconstruction nonuniform band filter banks," in *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP-91*, vol. 3, Apr. 1991, pp. 1781–1784.
- [47] M. Vetterli, "Multidimensional sub-band coding:some theory and algorithms," *Signal Processing*, vol. 6, pp. 97–112, Apr. 1984.
- [48] J. Woods and S. D. O'Neil, "Subband coding of images," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 5, pp. 1278–1288, Oct. 1986.

-
- [49] R. Ansari and C.-L. Lau, "Two-dimensional IIR filters for exact reconstruction in tree-structured sub-band decomposition," *Electronics Letters*, vol. 23, no. 12, pp. 633–634, June 1987.
- [50] E. Viscito and J. Allebach, "Design of perfect reconstruction multi-dimensional filter banks using cascaded smith form matrices," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 1, June 1988, pp. 831–834.
- [51] —, "The analysis and design of multidimensional FIR perfect reconstruction filter banks for arbitrary sampling lattices," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 1, pp. 29–41, Jan. 1991.
- [52] M. Smith and S. Eddins, "Analysis/synthesis techniques for subband image coding," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 8, pp. 1446–1456, Aug. 1990.
- [53] T. Chen and P. Vaidyanathan, "Least common right/left multiples of integer matrices and applications to multidimensional multirate systems," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'92 Proceedings*, vol. 2, May 1992, pp. 935–938.
- [54] —, "Multidimensional multirate filters and filter banks derived from one-dimensional filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 5, pp. 1749–1765, May 1993.
- [55] R. Bamberger and M. Smith, "A filter bank for the directional decomposition of images: theory and design," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 4, pp. 882–893, Apr. 1992.
- [56] J. Kovacevic and M. Vetterli, "Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n ," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 533–555, Mar. 1992.
- [57] A. Gilloire, "Experiments with sub-band acoustic echo cancellers for teleconferencing," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP '87*, vol. 12, Apr. 1987, pp. 2141–2144.
- [58] V. Sathe and P. Vaidyanathan, "Efficient adaptive identification and equalization of band-limited channels using multirate/multistage FIR filters," in *Conference on Signals, Systems and Computers, Conference Record Twenty-Fourth Asilomar*, vol. 2, Nov. 1990, pp. 740–744.
- [59] —, "Analysis of the effects of multirate filters on stationary random inputs, with application in adaptive filtering," in *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-91*, vol. 3, Apr. 1991, pp. 1681–1684.
- [60] A. Gilloire and M. Vetterli, "Adaptive filtering in subbands with critical sampling: analysis, experiments, and application to acoustic echo cancellation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, no. 8, pp. 1862–1875, Aug. 1992.
- [61] J. Shynk, "Frequency-domain and multirate adaptive filtering," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 9, no. 1, pp. 14–37, Jan. 1992.
- [62] M. Vetterli, "Perfect transmultiplexers," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP '86, Tokyo, Japan*, vol. 11, Apr. 1986, pp. 2567–2570.
- [63] A. Petraglia and S. Mitra, "High speed A/D conversion using QMF banks," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, vol. 4, May 1990, pp. 2797–2800.
- [64] I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets," *Comm. Pure and Appl. Math*, vol. 41, no. 7, pp. 909–996, Oct. 1988.

- [65] S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, no. 7, pp. 674–693, July 1989.
- [66] —, "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 315, no. 1, pp. 69–87, Sep 1989.
- [67] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. New Jersey: Prentice Hall, 1988.
- [68] L. Milić, *Multirate Filtering for Digital Signal Processing: MATLAB Applications*. Hershey New York: Information Science Reference (an imprint of IGI Global), 2009.
- [69] N. Fliege, *Multirate Digital Signal Processing: Multirate Systems, Filter Banks, Wavelets*. West Sussex P019 IUD. England: John Wiley and Son, 1994.
- [70] D. Živaljević and V. Stojanović, "Transitional Butter-Elliptic filter suitable for complementary decomposition," *Inverse Problems in Science and Engineering (IPSE)*, vol. 20, no. 1, pp. 117–125, Jan. 2012. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1080/17415977.2011.624626>.
- [71] —, "A new class of complementary IIR digital filters based on all-pass sections," *Electrotehnica and Electronica E+E, Sofia, Bulgaria*, vol. 45, no. 1-2, pp. 26–29, Jan. 2010.
- [72] —, "Complementary IIR filter synthesis without transformation variable," in *XVI International Symposium on Electrical Apparatus and Technologies SIELA 2009*, vol. II, Bourgas, Bulgaria, June 04-06, 2009, pp. 251–258.
- [73] —, "Quadrature mirror IIR filter synthesis without transformation variable," in *4th International PhD-seminar on Computation of Electromagnetic Fields, CEMBEF 2009*, Niš, Serbia, Aug. 28-30, 2009, pp. 127–131.
- [74] —, "A new class of complementary IIR digital filters based on all-pass sections," in *9th International Conference on applied electromagnetics PES 2009*, Niš, Serbia, Aug. 31/Sept. 02 2009, pp. 109–110 (extended abstract), CD–08_5 (full paper).
- [75] N. Stamenković, D. Živaljević, and V. Stojanović, "Design of quadrature mirror filter bank using approximation in s-domain," in *9th International Conference on applied electromagnetics PES 2009*, Niš, Serbia, Aug. 31/Sept. 02 2009, pp. 111–112 (extended abstract), CD–08_6 (full paper).
- [76] D. Živaljević and V. Stojanović, "Round-off noise calculation in QMF IIR filter by using parallel connection of two allpass sections," in *10th International Conference on applied electromagnetics PES 2011*, Niš, Serbia, Sept. 25-29, 2011, pp. 167–168 (extended abstract), CD–09_4 (full paper).
- [77] —, "Complementary decomposition of IIR filters," in *6th International PhD Seminar on Computational electromagnetics and bioeffects of electromagnetic fields - CEMBEF 2012*, Novi Sad, Serbia, June 28-30, 2012, pp. 31–36.
- [78] —, "Direktna sinteza IIR filtara pogodna za komplementarnu dekompoziciju," in *52. konferencija ETRAN*, Palić, Srbija, June 08-12, 2008, CD-EK.1.1.
- [79] —, "Direktna sinteza IIR filtara parnog reda pogodna za komplementarnu dekompoziciju," in *DOGS 2008 (Digitalna obrada govora i slike)*, Kelebija, Srbija, Oct. 02-03, 2008, pp. 209–212.
- [80] —, "Direktna sinteza IIR filtara neparnog reda pogodna za komplementarnu dekompoziciju," in *XVI Telecommunications forum, TELFOR 2008*, Beograd, Srbija, Nov. 25-27, 2008, pp. 436–439, CD–05_16. [Online]. Available: http://2008.telfor.rs/files/radovi/05_16.pdf

-
- [81] V. S. Stojanovic and S. V. Nikolic, "Direct design of transitional Butterworth-Chebyshev recursive digital filters," *Electronics Letters*, vol. 29, no. 3, pp. 286–287, 1993.
- [82] S. Hazra and S. D. Roy, "A comparison of digital tan and sine filters with the generating analog filter," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 292, no. 3, pp. 225–230, Sept. 1971. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003271900548>
- [83] R. Otnes, "An elementary design procedure for digital filters," *Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 3, pp. 330–335, Sept. 1968.
- [84] S. S. Kidambi, "Weighted least-squares design of recursive allpass filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 6, pp. 1553–1557, June 1996.
- [85] B. Rakovich and D. Rabrenovich, "Method of synthesis of phase-correcting networks," *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 115, no. 1, pp. 57–67, Jan. 1968.
- [86] S. Powell and P. Chau, "A technique for realizing linear phase IIR filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, no. 11, pp. 2425–2435, Nov. 1991.
- [87] J. Willson, A.N. and H. Orchard, "An improvement to the Powell and Chau linear phase IIR filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 10, pp. 2842–2848, Oct. 1994.
- [88] B. Djokic, M. Popovic, and M. Lutovac, "A new improvement to the Powell and Chau linear phase IIR filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 6, pp. 1685–1688, June 1998.
- [89] P. Lowenborg, H. Johansson, and L. Wanhammar, "A class of two-channel IIR/FIR filter banks," in *10th European Signal Processing Conference*, Sept. 2000, pp. 1–4.
- [90] E. Galijasevic and J. Kliewer, "On the design of near-perfect-reconstruction IIR QMF banks using FIR phase-compensation filters," in *Proceedings of the 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, ISPA 2001*, June 2001, pp. 530–534.
- [91] J.-H. Lee and I.-C. Niu, "Minimax design of two-channel IIR QMF banks with arbitrary group delay," *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, vol. 148, no. 6, pp. 384–390, Dec. 2001.
- [92] J.-H. Lee and Y.-H. Yang, "Design of two-channel linear-phase QMF banks based on real IIR all-pass filters," *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, vol. 150, no. 5, p. 331, Oct. 2003.
- [93] M. Quelhas, A. Petraglia, and M. Petraglia, "Efficient group delay equalization of discrete-time IIR filters," in *12th European Signal Processing Conference*, Sept. 2004, pp. 125–128.
- [94] —, "Robust group delay equalization of discrete-time filters using neural networks," in *14th European Signal Processing Conference*, Sept. 2006, pp. 1–4.
- [95] J. Kliewer and Brka, "Near-perfect-reconstruction low-complexity two-band IIR/FIR QMF banks with FIR phase-compensation filters," *Signal Processing*, vol. 86, no. 1, pp. 171–181, Feb. 2006.
- [96] Y.-D. Jou and F.-K. Chen, "Least-squares design of FIR filters based on a compacted feedback neural network," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 54, no. 5, pp. 427–431, May 2007.
- [97] L.-C. Su, Y.-D. Jou, and F.-K. Chen, "Improved computing-efficiency least-squares algorithm with application to all-pass filter design," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, p. 8pp, 2013.

-
- [98] S. Chan, H. Chen, and C. Pun, "The design of digital all-pass filters using second-order cone programming (socp)," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 52, no. 2, pp. 66–70, Feb. 2005.
- [99] D. Živaljević, "Sinteza rekurzivnih digitalnih filtara sa mini-max aproksimacijom konstantnog grupnog kašnjenja," Master's thesis, Univerzitet u Nišu, Niš, Srbija, 2007.
- [100] R. Ansari and B. Liu, "A class of low-noise computationally efficient recursive digital filters with applications to sampling rate alterations," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, no. 1, pp. 90–97, Feb. 1985.
- [101] T. Saramaki, "On the design of digital filters as a sum of two all-pass filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 32, no. 11, pp. 1191–1193, Nov. 1985.
- [102] P. Vaidyanathan, S. Mitra, and Y. Neuvo, "A new approach to the realization of low-sensitivity IIR digital filters," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 2, pp. 350–361, Apr. 1986.

Biografija autora

Dragana Živaljević rođena je 14.02.1972. godine u Nišu. Osnovnu školu "Ćele Kula" kao i gimnaziju "Bora Stanković" završila je u Nišu. Elektronski fakultet u Nišu upisala je školske 1991/92 godine gde je i diplomirala 12.12.2001. godine i stekla zvanje diplomiranog inženjera elektrotehnike na smeru za Automatiku i elektroniku. Diplomski rad, koji je radila pri Katedri za Matematiku, iz predmeta Matematički metodi, pod naslovom "Ortogonalni polinomi i primena u teoriji upravljanja" odbranila je sa ocenom 10 (deset).

Za asistenta-pripravnika na Elektronskom fakultetu u Nišu pri Katedri za Teorijsku elektrotehniku, izabrana je 07.05.2002. godine. Angažovana je na izvođenju računskih i laboratorijskih vežbi iz predmeta Osnovi elektrotehnike, Elektrotehnike I, Elektrotehnike II, kao i na izvođenju računskih vežbi iz predmeta Teorija električnih kola, Elektromagnetika, Signali i sistemi i Digitalna obrada signala. Od 14.10.-14.12.2002. godine boravila je na Tehničkom univerzitetu u Ilmenauu (Nemačka) u okviru zajedničkog projekta "Theoretical Electrical Engineering (TEE)" koji podržava DAAD program "Academic reconstruction of South Eastern Europe, Stability pact", a u kome su učestvovali Katedra za Teorijsku elektrotehniku Elektronskog fakulteta u Nišu, Tehnički fakultet u Sofiji i Tehnički fakultet u Ilmenauu, Nemačka. Takođe, u okviru istog projekta bila je učesnik letnjih škola Elektromagnetike u Budvi (Crna Gora) 2004. godine, na Ohridu (Makedoniji) 2005. godine i u Banja Luci (Republika Srpska) 2006. godine. Na istom univerzitetu u Nemačkoj boravila je i u periodu od 19.09. - 07.12.2010. godine u okviru obnovljenog, Joint German-South-Eastern European Network, projekta "ELISE - University Network for Academic Training in EE&IT in South-Eastern Europe (SEE)" koji je podržavao DAAD program, gde je radila na simulaciji decimacionog filtra izrađenog u superprovodnoj tehnologiji u programskom paketu "SIMULINK". Septembra 2010. godine, u okviru istog projekta, učestvovala je na Međunarodnoj konferenciji "XI International Workshop on Optimization and Inverse Problems in Electromagnetism, OIPE 2010" organizovanog na Tehničkom Univerzitetu u Sofiji, Bugarska. Poslediplomske studije pri Katedri za Teorijsku elektrotehniku Elektronskog fakulteta u Nišu upisala je novembra 2002. godine i položila sve ispite sa prosečnom ocenom 10.00 (deset). Magistarsku tezu pod naslovom "Sinteza rekurzivnih digitalnih filtara sa mini-max aproksimacijom konstantnog grupnog kašnjenja", pod mentorstvom profesora dr Vidosava S. Stojanovića, odbranila je 05.05.2007.



Izjava 1.

IZJAVA O AUTORSTVU

Izjavljujem da je doktorska disertacija, pod naslovom

”Direktna sinteza digitalnih filtara za podopsežno kodovanje”

koja je odbranjena na Elektronskom fakultetu Univerziteta u Nišu:

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da ovu disertaciju, ni u celini, niti u delovima, nisam prijavljivala na drugim fakultetima, niti univerzitetima;
- da nisam povredila autorska prava, niti zloupotrebila intelektualnu svojinu drugih lica.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa autorstvom i dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i u publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, 05.05.2017.

Autor disertacije: mr Dragana U. Živaljević

Potpis autora disertacije:



Izjava 2.

**IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANOG I ELEKTRONSKOG OBLIKA
DOKTORSKE DISERTACIJE**

Ime i prezime autora: **Dragana Živaljević**

Naslov disertacije: **"Direktna sinteza digitalnih filtara za podopsežno kodovanje"**

Mentor: **prof. dr Saša Nikolić**

Izjavljujem da je štampani oblik moje doktorske disertacije istovetan elektronskom obliku, koji sam predala za unošenje u **Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu.**

U Nišu, 05.05.2017.

2. Alubaseva

Potpis autora disertacije:



Izjava 3.

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku "Nikola Tesla" da, u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom:

”Direktna sinteza digitalnih filtara za podopsežno kodovanje”.

Disertaciju sa svim priložima predala sam u elektronskom obliku, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučila.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo - nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo - nekomercijalno - bez prerade (CC BY-NC-SA)
4. Autorstvo - nekomercijalno - deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo - bez prerade (CC BY-ND)
6. Autorstvo - deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

U Nišu, 05.05.2017.

Autor disertacije: mr Dragana Živaljević

Potpis autora disertacije: