

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
Машински факултет

ВЕЋУ ДОКТОРСКИХ СТУДИЈА

Предмет: Реферат о урађеној докторској дисертацији кандидата **Милана С. Цајића**,
дипл. инж. маш. –мастер

Одлуком бр. 811/2 од 20.04.2017. године, именовани смо за чланове Комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације кандидата **Милана С. Цајића**, **дипл. инж. маш.–мастер**, под насловом

Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела

После прегледа достављене Дисертације и других пратећих материјала и разговора са Кандидатом, Комисија је сачинила следећи

РЕФЕРАТ

1. УВОД

1.1. Хронологија одобравања и израде дисертације

Кандидат Милан Цајић, дипл. инж. маш.–мастер, уписао је прву годину докторских студија на Машинском факултету Универзитета у Београду школске 2010/2011. године. Кандидат је поднео захтев за одобрење теме докторске дисертације број 1107/1 од 27.05.2013. године на Катедри за механику Машинског факултета Универзитета у Београду. Кандидат је за ментора предложио др Михаила Лазаревића, редовног професора Машинског факултета у Београду. На основу сагласности Катедре за механику број 1107/02 од 10.06.2013. године, Наставно-научно веће Машинског факултета у Београду донело је 13.06.2013. године Одлуку број 1107/3 о именовању Комисије за оцену подобности теме и кандидата за израду докторске дисертације и научне заснованости теме докторске дисертације у саставу:

- др Михаило Лазаревић, редовни професор (ментор), Машински факултет у Београду
- др Александар Обрадовић, редовни професор, Машински факултет у Београду
- др Томислав Шекара, ванредни професор, Електротехнички факултет у Београду

Комисија за оцену подобности теме и кандидата за израду докторске дисертације и научне заснованости теме докторске дисертације је 20.06.2013 године поднела Наставно-научном већу Машинског факултета у Београду Извештај број 1107/04, у коме предлаже Наставно-научном већу Машинског факултета у Београду да одобри

тему докторске дисертације под насловом „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“, наводећи да Кандидат испуњава све законом предвиђене услове за израду докторске дисертације, и да је предложена тема научно утемељена и адекватна и да пружа могућност остваривања значајних научних доприноса. Одлуком Наставно-научног већа број 1107/5 од 27.06.2013. године прихваћена је тема докторске дисертације под насловом: „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“ кандидата Милана Цајића, дипл. инж. маш.–мастер, док је за ментора именован др Михаило Лазаревић, редовни професор.

Веће научних области техничких наука Универзитета у Београду донело је Одлуку број 61206-3386/2-13 од 08.07.2013. године којом се даје сагласност на предлог теме докторске дисертације кандидата Милана Цајића, дипл. инж. маш.–мастер, под насловом: „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“.

Декан Машинског факултета је дана 11.07.2013. године донео закључак број 1457/1 од 11.07.2013. године којим се одобрава рад на теми докторске дисертације „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“, кандидата Милана Цајића, дипл. инж. маш.–мастер, и којим се за ментора именује др Михаило Лазаревић, редовни професор.

На основу обавештења проф. др Михаила Лазаревића да је кандидат Милан Цајић, дипл. инж. маш.–мастер, завршио докторску дисертацију под насловом: „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“ и предлога Катедре за механику број 811/1 од 06.04.2017. године, Наставно-научно веће Машинског факултета у Београду је на седници одржаној 20.04.2017. године донело Одлуку број 811/2 којом се именују чланови Комисије за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације у саставу:

- др Михаило Лазаревић, редовни професор (ментор), Машински факултет у Београду
- др Александар Обрадовић, редовни професор, Машински факултет у Београду
- др Душан Зорица, виши научни сарадник, Математички институт САНУ у Београду
- др Борислав Гајић, виши научни сарадник, Математички институт САНУ у Београду
- др Немања Зорић, доцент, Машински факултет у Београду

1.2. Научна област дисертације

Докторска дисертација под насловом „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“ припада области техничких наука-машинству, ужој научној области Механика, за коју је Машински факултет Универзитета у Београду матичан.

1.3. Биографски подаци о кандидату

Кандидат Милан Цајић је рођен у Нишу 29-тог марта 1984. године. Основну школу “Вук Караџић” завршио је у Горњем Матејевцу код Ниша. Средњу електротехничку школу „Никола Тесла“ у Нишу, рачунарски смер, завршио је 2003. године. Машински факултет, Универзитета у Нишу, уписао је 2005. године, где је јануара 2011. године дипломирао на Катедри за мехатронику са просечном оценом на студијама 8,66. Дипломски рад под насловом „*Пројектовање мерног места за статичко испитивање одбојно-вучне опреме железничких возила*”, ментор проф. др Душан Стаменковић, је одбранио са оценом 10, чиме је стекао звање дипломираног машинског инжењера, еквивалент мастер. Исте године уписује докторске студије на Машинском факултету, Универзитета у Београду. На докторским студијама положио је све испите предвиђене Програмом усавршавања са просечном оценом 10,00. Такође, у оквиру припреме истраживача-приправника и доктораната, Милан Цајић је одслушао курсеве из више области механике у двогодишњем трајању, које је у оквиру семинара “Математичке методе механике у примени” држала, тадашњи управник Одељења за механику Математичког института САНУ и руководилац пројекта ОИ 174001, проф. др Катица (Стевановић) Хедрих.

Научно-истраживачким радом бави се од 2011. године када почиње са радом у Математичком институту САНУ у звању истраживач-приправник на пројекту из механике ОИ 174001 под називом „*Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала*“. Године 2012. је унапређен у звање истраживач-сарадник. На завршној години дипломских студија боравио је три месеца на Институту за техничку механику, Катедра за механику континуума, Универзитета у Карлсруеу (KIT), Немачка, у оквиру програма размене студената студентске организације IAESTE. У 2013. години, на другој години докторских студија добио је стипендију WUS Austria за посету Институту за биомеханику, Техничког Универзитета у Грацу, у оквиру програма једномесечне посете Аустрији студената и истраживача из Србије и других балканских држава.

Учествовао је на преко двадесет националних и међународних научних скупова у земљи и иностранству, међу којима су конференције Европског друштва за механику као што је ESMC 2012 и ENOC 2014, конференција Немачког друштва за механику и примењену математику GAMM 2013, конгреси Српског друштва за механику и др. До сада је публикувао једанаест коауторских радова у часописима међународног значаја са СЦИ листе, пет рада у часописима националног значаја и коаутор је једне монографије националног значаја. Поред истраживачког рада, ангажовао се и на промоцији науке у оквиру манифестације „Мај месец математике“ коју организују Центар за промоцију науке и Математички институт САНУ. Један је од организатора Мини-симпозијума „Нелокална теорија у структурној механици“, одржаног 24. априла 2017. године у Београду и подржаног од Математичког института САНУ и пројекта ОИ 174001.

Милан Цајић је рецензирао више радова за домаће конференције и међународне часописе: *Applied Mathematical Modelling, Mathematical Problems in Engineering, Physica B, Mathematical problems in Engineering, Thermal Science, Composite Part B*. Од 2016. године је учесник на двогодишњем пројекту под називом „*Фракционог реда управљање и моделирање механичког понашања наноматеријала и наноструктура*“ финансираном у оквиру програма билатералне сарадње између Републике Србије и Народне Републике Кине.

Кандидат одлично познаје рад у следећим програмским пакетима: Wolfram Mathematica, MatLab, Comsol Multiphysics, Corel Draw, Office. Од програмских језика има солидно знање из: C за микроконтролере и Fortran. Кандидат одлично влада енглеским језиком и познаје основе немачког.

Од 2012. године члан је Српског друштва за механику а које је оснивач и колективни члан међународне научне организације IUTAM.

2. ОПИС ДИСЕРТАЦИЈЕ

2.1. Садржај дисертације

Докторска дисертација кандидата Милана Цајића, дипл. инж. маш.–мастер, под насловом „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“ написана је на српском језику, садржи: 167 страна формата А4, 57 слика и 4 табеле.

Докторска дисертација садржи следећа поглавља:

1. Увод
2. Хибридни елементи фракционог типа у динамици система крутих тела
3. Осцилације наноштапа и наногреде са пригушењем фракционог типа
4. Фракциони модели са два времена ретардације и два фракциона параметра
5. Осцилације система више спрегнутих нехомогених наногреда
6. Осцилације наноплоче на вискоеластичној подлози
7. Нелинеарна анализа наногреде на фракционој виско-Pasternak-овој подлози.
Комбинована резонанца
8. Закључна разматрања и научни допринос дисертације
9. Литература

На крају дисертације дат је списак од 146 референци у оквиру пописа коришћене литературе. Осим наведеног, докторска дисертација садржи резиме на српском и енглеском језику, садржај, биографију аутора, Изјаву о ауторству, Изјаву о истоветности штапане и електронске верзије докторског рада и Изјаву о коришћењу.

2.2. Кратак приказ појединачних поглавља

У **првом поглављу** кандидат Милан Цајић даје:

- Опште напомене везане за коришћену терминологију и области истраживања у оквиру дисертације
- Преглед релевантне научне литературе како би се утврдили досадашњи научни резултати у оквиру разматраних области;
- Формулисање проблема истраживања и приказ одговарајућих дефиниција и конститутивних релација;
- Дефинисање циља и задатака истраживања;

У **другом поглављу** представљен је систем више крутих тела везаних у отворени кинематички ланац без гранања, где тела међусобно формирају кинематичке парове V класе и допунски повезана су елементима чија су својства описана конститутивним релацијама са изводима фракционог реда. За систем са произвољним бројем крутих тела дате су и одговарајуће *Lagrange*-ове једначине друге врсте у коваријантној форми. Описана је и процедура добијања израза за генералисане силе које потичу од елемената фракционог реда у систему крутих тела. Показано је да је функција деформације елемента, тј. померања у општем случају, сложена функција генералисаних координата. Предложена је примена нумеричке шеме Атанацковић-Станковић за апроксимацију фракционог извода, где се фракциони извод своди на формулу у којој фигуришу први извод сложене функције и момент функције. За овако апроксимираних фракционе изводе дато је неколико нумеричких примера понашања генералисаних сила током времена за фракционе вискоеластичне елементе са и без актуатора, пиезо-вискоеластичне и магнетнореолошке елементе, где су генералисане координате задате за случај роботског система са три степени слободне кретања. Такође, за исти механички систем робота са три степени слободне кретања одређен је одзив неуправљаног робота са везаним фракционо вискоеластичним елементом са и без актуатора. Извршена је апроксимација фракционог извода нумеричком формулом Атанацковић-Станковић, и добијени систем обичних диференцијалних једначина решен је применом функције `ode45` у програмском пакету `Matlab`.

У **трећем поглављу** анализиране су слободне осцилације вискоеластичног наноштапа и наногреде са наночестицом користећи модификовану диференцијалну форму нелокалног напона t_{xx} конститутивне једначине Ерингена и конститутивну релацију локалног напона σ_{xx} у функцији локалне деформације ε_{xx} фракционог Kelvin-Voigt вискоеластичног тела

$$t_{xx} - \mu \frac{d^2 t_{xx}}{dx^2} = E_0 (\varepsilon_{xx}(t) + \tau_\sigma^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon_{xx}(t)).$$

Изведене су једначине кретања система фракционог реда и предложено је решење методом раздвајања променљивих, као и увођење услова компатибилности на месту додате масе на наногреди. Графички су приказана решења обичних диференцијалних једначина за амплитудне функције и различите граничне услове. Решење фракционе диференцијалне једначине за временску функцију приказано је у *Laplace*-овом и временском домену у облику одговарајућих геометријских редова. Детаљном параметарском анализом утврђено је да промена фракционог параметра и времена ретарације знатно утиче на временску функцију и пригушење у систему.

У четвртом поглављу анализиран је проблем слободних трансверзалних осцилација просто ослоњене нанограде на фракционој вискоеластичној подлози, применом модификације нелокалне фракционе *Kelvin-Voigt*-ове конститутивне релације. На основу *Euler-Bernoulli*-јеве теорије греда и датих конститутивних релација изведена је парцијална диференцијална једначина кретања система фракционог реда са два времена ретардације и два фракциона параметра, где је предложено решење методом раздвајања променљивих. Предложена је метода за решавање фракционих диференцијалних једначина базирана на *Laplace*-овој трансформацији, инверзној *Mellin-Fourier*-овој трансформацији и *Cauchy*-јевом рачуну остатака. Извршена је параметарска анализа у комплексном и временском домену, где су показани утицаји различитих параметара модела на конјуговано комплексне вредности корена и осцилације система током времена. Истакнуте су предности и недостаци фракционог *Kelvin-Voigt*-овог вискоеластичног модела, где је показано да фреквенција система расте са порастом времена ретардације (параметра пригушења) за мање вредности фракционог параметра, што није могуће уочити само на основу анализе у временском домену. Такође, показано је да нелокални параметар смањује имагинарни део корена карактеристичне једначине који представља кружну фреквенцију система. Анализа осцилација нанограде током времена је показала знатан утицај промене реда фракционих извода, у конститутивним релацијама нанограде и вискоеластичног слоја, на пригушене осцилације система.

Такође, у четвртом поглављу су разматране и слободне трансверзалне осцилације прости нанограде на вискоеластичној подлози под утицајем више наночестица као концентрисаних маса и аксијалног магнетног поља. Утицај магнетног поља које делује у аксијалном правцу нанограде је моделиран *Lorentz*-овом силом и добијена фракциона парцијална диференцијална једначина кретања система са два времена ретардације и два фракциона параметра. Једначина кретања је решена применом исте методе као за први пример из четвртог поглавља, базиране на *Laplace*-овој и *Mellin-Fourier*-овој трансформацији и *Cauchy*-јевом рачуну остатака. Нумеричке симулације су урађене са параметрима који одговарају угљеничној наноцеви и полимерној матрици тако да могу представљати модел наносензора масе. На основу извршене анализе, показано је да повећање нелокалног параметра, масе и броја наночестица утиче на смањење кружне фреквенције система и пораст амплитуде осциловања. Такође, показано је да повећање јачине магнетног поља, које дејствује у аксијалном правцу, утиче на повећање фреквенције и смањење амплитуде осциловања. Код промене фракционог параметра и параметра пригушења примећени су исти ефекти на пригушене осцилације и кружну фреквенцију нанограде као у претходном примеру из четвртог поглавља.

У петом поглављу анализиран је сложен систем више вискоеластично спрегнутих нехомогених нанограде фракционог реда. Разматран је случај просто ослоњених нанограде спрегнутих у систем „слободног ланца“, где прва и последња нанограде у систему нису спрегнуте са непокретном основом. На основу нелокалне фракционе *Kelvin-Voigt*-ове конститутивне релације и *Euler-Bernoulli*-јеве теорије греда, изведен је систем спрегнутих парцијалних диференцијалних једначина кретања са два времена ретардације и фракциона параметра. Применом *Laplace*-ове трансформације, одговарајућих смена, сопствених вектора и сопствених вредности одговарајуће матрице система добијен је систем распрегнутих алгебарских једначина у функцији сопствених вредности и почетних услова. Применом *Mellin-Fourier*-ове формуле, *Cauchy*-јевог рачуна остатака и применом одговарајућих смена, добијене су једначине осцилација система нехомогених нанограде. На основу датих нумеричких примера и почетних услова на првој наногреди, испитан је утицај различитих параметара

нанограде и вискоеластичног слоја на осцилације нанограде. Показано је да ред фракционог извода и параметар пригушења значајно утичу на смањено или увећано пригушење осцилација у систему, док нелокални параметар повећава амплитуду осциловања на сличан начин као код система са једном наноградом. Примећене су мање амплитуде осциловања и извесно кашњење за нанограде које су даље од прве нанограде у систему за коју су задати почетни услови.

У **шестом поглављу** разматран је проблем трансверзалних осцилација просто ослоњене ортотропне наноплоче на вискоеластичној подлози. Усвојена је модификована, нелокална и проширена фракциона *Kelvin-Voigt*-ова конститутивна релација за ортотропну плочу, док је вискоеластични слој представљен релацијом сила-померање за вискоеластични модел са фракционим оператором. Парцијалне диференцијалне једначине кретања фракционог реда су изведене применом *Kirchhoff-Love*-ове теорије плоча и датих конститутивних релација са четири фракциона параметра и два времена ретардације. Предложено је решење једначине кретања методом раздвајања променљивих, *Laplace*-овом и *Mellin-Fourier*-овом трансформацијом и *Cauchy*-јевим рачуном остатака. Корени карактеристичне једначине у комплексном домену са више времена ретардације и фракционих параметара добијени су увођењем смена, поларних координата и одређивањем нула одговарајуће трансцендентне једначине, следствено. Из нумеричких симулација показано је да се и код проширеног *Kelvin-Voigt*-овог модела јавља аномалија у виду смањења фреквенције система са порастом параметра пригушења за мале вредности фракционог параметра. Такође, показано је да промена фракционих параметара вискоеластичног слоја, који је представљен моделом са фракционим оператором, има мали утицај на кружну фреквенцију система и не показује недостатке уочене код *Kelvin-Voigt*-овог модела. Као и код нанограде, повећање нелокалног параметра утиче на смањење фреквенције система.

У **седмом поглављу** разматра се проблем нелинеарних осцилација еластичне нанограде на фракционој виско-*Pasternak* подлози. Анализирана је комбинована резонанца у два случаја, када су исте фреквенције спољашњег и аксијалног оптерећења два пута веће (супер-хармонијска резонанца) и кад су два пута мање (суб-хармонијска резонанца) од основне фреквенције система. Применом *von Kármán*-ове геометријске нелинеарности за нанограду и конститутивне релације за фракциони виско-*Pasternak*-ов слој, изведена је нелинеарна парцијална диференцијална једначина кретања система фракционог реда. *Galerkin*-овом дискретизацијом парцијалних једначина добијена је нелинеарна диференцијална једначина са фракционим изводима и кубном нелинеарношћу, за коју је предложено решење методом више временских скала. Добијена су апроксимативна аналитичка решења амплитудно-фреквентне карактеристике система за случај стационарног стања просто ослоњене и обострано уклештене нанограде. Параметарска анализа показала је значајан утицај промене фракционог параметра, нелокалног параметра, коефицијената фракционог виско-*Pasternak*-овог слоја, спољашњег и аксијалног оптерећења на амплитудно-фреквентну карактеристику разматраног система.

У **осмом поглављу** детаљно су систематизовани остварени научни резултати и дати правци могућих, односно будућих истраживања заснованих на резултатима постигнутих у овој докторској дисертацији.

3. ОЦЕНА ДИСЕРТАЦИЈЕ

3.1. Савременост и оригиналност

Докторска дисертација под насловом „*Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела*“ кандидата Милана Цајића, дипл. инж. маш.–мастер, представља савремен и оригиналан приступ у истраживању проблема у оквиру динамике система крутих тела као и механике структура на малим скалама са својствима дисипације механичке енергије описаним моделима са фракционим изводима. Оригиналност у приступу решења проблема огледа се у радовима који су публиковани у истакнутим светским часописима и саопштењима на међународним научним скуповима, од којих треба издвојити конференције Европског друштва за механику ENOC 2014 и интернационалне конференције из фракционог рачуна и његових примена ICFDA 2014, на којима је кандидат Милан Цајић изложио научне радове везано за тему дисертације. У дисертацији су коришћене постојеће и нове конститутивне релације, уз оригинална побољшања истих, као и налажење одговарајућих решења линеарних и нелинеарних фракционих диференцијалних једначина применом аналитичких, нумеричких и апроксимативних метода. Дисертација се може оценити веома успешном, узевши у обзир да је кандидат Милан Цајић дао нове моделе и њихова решења, а који могу бити од великог значаја за будућа истраживања.

3.2. Осврт на референтну и коришћену литературу

Због сложености теме доктората, која обухвата више области и метода, коришћена је обимна литература из теорије и примене фракционог рачуна, динамике система крутих и деформабилних тела, нелокалне структурне механике, нанотехнологија и наноинжењерства и др. У уводном делу сваког поглавља, а нарочито првог, дата је анализа и преглед постојећег стања у релевантним областима са приказом метода примењених у спроведеним истраживањима. На тај начин, дат је релевантан приказ постојећег стања у домену коме припадају проблеми разматрани у докторској дисертацији. Коришћена научна литература је послужила као почетна основа кандидату за формирање прегледа досадашњих истраживања у предметној области, као и за конципирање смерница и формулација, а што је показано у деловима тезе у којима су изложени оригинални доприноси. Највећи број библиографских јединица представљају радови из истакнутих међународних часописа, проширени са извесним бројем научних монографија, књига и зборника радова.

3.3. Опис и адекватност примењених научних метода

За истраживања у овој докторској дисертацији примењене су следеће научне методе:

Методе математичког моделирања у теорији вискоеластичности фракционог реда;

Методе аналитичке механике и динамике система крутих тела;

Методе моделирања у нелокалној структурној механици;

Методе комплексне анализе и интегралних трансформација;

Методе линеарне алгебре;

Нумеричке методе и апроксимативне методе за решавање нелинеарних диференцијалних једначина фракционог реда;

Методе анализе нелинеарне динамике.

Све изабране методе су адекватне за проблематику истраживања и правилно су коришћене у фази развијања теоријских модела, анализи резултата на бази спроведене симулације и при извођењу релевантних закључака.

3.4. Применљивост остварених резултата

Резултати докторске дисертације кандидата Милана Цајића, дипл. инж.маш. применљиви су у научном смислу, али могу имати и одговарајућу практичну примену у домену роботике и динамике система крутих тела као и наноинжењерству код пројектовања наносензора и нанорезонатора заснованих на наноструктурама. Развијен математички модел роботског система са три степени слободе, у коме је везан елемент са вискоеластичним својствима фракционог реда, може послужити као основа са развој општије теорије дискретних механичких система са елементима фракционог реда. Развијени математички модели наноструктура применом модификованих нелокалних фракционих конститутивних релација могу послужити као основа за анализу динамике сложенијих наноструктура узимањем у обзир ефеката дисипације механичке енергије као и ефеката мале скале присутних код структура нанометарских димензија.

3.5. Оцена достигнутих способности кандидата за самостални научни рад

Кандидат је током израде дисертације показао да је самосталан у постављању, препознавању и решавању научно-истраживачких задатака као и да успешно влада научно-истраживачким методама. Посебно, кандидат је поред поседовања завидног знања из теоријске механике и савремене комплексне и нумеричке анализе такође показао и завидно знање у примени актуелне и савремене теорије фракционог рачуна, што свакако пружа солидну основу за даљи квалитетан самосталан научно-истраживачки рад. То је потврђено бројним испитима које је кандидат положио на докторским студијама, из групе предмета Катедре за механику, као и бројним (ко)ауторским радовима.

4. ОСТВАРЕНИ НАУЧНИ ДОПРИНОС

4.1. Приказ остварених научних доприноса

Научни допринос ове докторске дисертације се темељи на проширивању и продубљивању научних сазнања и достигнућа у области примене модела вискоеластичног тела фракционог реда у динамици дискретних система крутих тела и нелокалној структурној механици. На основу изложеног целокупног материјала који је дат у докторској дисертацији, досадашње искуство и научно-истраживачки рад кандидата, као и објављене радове, научни резултати овог рада могу се

систематизовати и сумирати кроз следеће опште и посебне доприносе.

Развијен је унапређени математички модел роботског система са три степени слободе кретања и који је повезан елементом са вискоеластичним својствима фракционог реда, чиме је омогућена и квалитативна и квантитативна анализа његових динамичких карактеристика.

Развијен је и предложен оригинални приступ у одређивању генералисаних сила елемената са својствима описаним конститутивним релацијама фракционог реда, као сложене функције генералисаних координата, апроксимацијом фракционог извода применом одговарајуће нумеричке шеме.

Одређен је одзив неуправљаног роботског система са три степени слободе кретања, где је предложен иновативни приступ за решавање система три нелинеарне диференцијалне једначине фракционог реда, применом нумеричке шеме за апроксимацију фракционих извода и увођењем допунских диференцијалних једначина које су затим решене применом познатих нумеричких метода.

На бази конститутивних релација фракционе вискоеластичности, изведене су модификоване конститутивне релације нелокалне теорије еластичности тако да укључују ефекте мале скале, као и ефекте дисипације механичке енергије са применом у моделима наноструктура, тачније, структура облика плоче или греде нанометарских димензија.

Разрађене су аналитичке методе базиране на методи раздвајања променљивих, Лапасовој трансформацији, Мелин-Фуријеовој трансформацији, Кошијевом рачуну остатака и методама комплексне анализе за решавање линеарних фракционих диференцијалних једначина са више времена ретардације/релаксације и фракциона параметра, тако да омогућавају анализу у комплексном и временском домену.

Дат је општи поступак за одређивања сопствених вредности, сопствених вектора и временског одзива система наногреда спрегнутих фракционим вискоеластичним слојевима.

Реализован је и дат посебан допринос у анализи случаја комбиноване (параметарске и спољашње) резонанце наногреде на подлози са својствима фракционог реда, где је примењена проширена метода више временских скала за одређивање амплитудно-фреквентне карактеристике система.

Сви ови теоријски резултати, подвргнути су стандардним поступцима симулације, из чега су проистекли временски одзиви за анализу линеарних и амплитудно-фреквентне карактеристике нелинеарних система.

4.2. Критичка анализа резултата истраживања

На основу прегледа литературе и сагледавања постојећих решења из области докторске дисертације, констатујемо да су овде презентовани резултати истраживања оригинални, значајни и да се могу применити у даљим теоријским истраживањима. Истовремено, на основу увида у задате циљеве истраживања и резултате представљене у докторској

дисертацији, може се закључити да су пружени одговори на сва релевантна питања и решени проблеми са којима се кандидат сусрео у току истраживања. Установљене чињенице истраживања су корак напред и воде ка унапређењу постојећих метода за анализу динамике система крутих тела са фракционим елементима, као и динамичког понашања сложених система наноструктура. Исто тако, синтезом конститутивних релација нелокалне еластичности и фракционе вискоеластичности, дат је значајан допринос развоју нових модела којима се могу анализирати и својства дисипације и пригушења фракционог реда у наноструктурама. Методе разрађене у овом раду за решавање линеарних и нелинеарних фракционих диференцијалних једначина на бази аналитичких, апроксимативних и нумеричких поступака поседују велику примењивост не само у оквиру разматране теорије, већ и шире.

4.3. Верификација научних доприноса

Научни доприноси кандидата Милана Цајића, дипл. инж. маш.–мастер, верификовани су следећим радовима:

Радови у истакнутим међународним часописима (M22)

1. **Цајић, М., & Lazarević, М. Р.** (2014). Fractional order spring/spring-pot/actuator element in a multibody system: Application of an expansion formula. *Mechanics Research Communications*, 62, 44-56. (IF = **1,828** за 2015. годину), [doi: 0.1016/j.mechrescom.2014.08.009](https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2014.08.009)
2. **Цајић, М., Karličić, D., & Lazarević, М.** (2017). Damped vibration of a nonlocal nanobeam resting on viscoelastic foundation: fractional derivative model with two retardation times and fractional parameters. *Meccanica*, 52(1-2), 363-382. (IF = **1,400** за 2015. годину) First Online: 31 March 2016, [doi: 10.1007/s11012-016-0417-z](https://doi.org/10.1007/s11012-016-0417-z)

Научни радови у часописима међународног значаја верификованих посебном одлуком, категорија (M24)

3. **Цајић, М., Karličić, D., & Lazarević, М.** (2015). Nonlocal vibration of a fractional order viscoelastic nanobeam with attached nanoparticle. *Theoretical and Applied Mechanics*, 42(3), 167-190. doi.org/10.2298/TAM1503167C
4. **Цајић, М., & Lazarević, М.** (2013). Equations of Motion of Robotic System With Piezo-Modified Viscoelastic and Magnetorheological Elements of Fractional Order. *PAMM*, 13(1), 227-228. [doi: 10.1002/pamm.201310109](https://doi.org/10.1002/pamm.201310109)

Научни радови саопштени на скупу међународног значаја, штампани у целини, категорија (M33)

5. **Цајић, М., Karličić, D., Lazarević, М.** (2014). *Vibration of an orthotropic nanoplate resting on a viscoelastic foundation: nonlocal and fractional derivative viscoelasticity approach*. Proceedings of the International Conference on Fractional Differentiation and

Its Applications (ICFDA 2016), July 18 - 20, 2016, Novi Sad, Serbia. (ISBN 978-86-7892-830-7)

6. **Cajić, M. S.**, Lazarević, M. P., & Šekara, T. B. (2014). *Robotic system with viscoelastic element modeled via fractional Zener model*. Proceedings of the International Conference Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA 2014), June 23-25, 2014, Catania, Italy. (ISBN 978-1-4799-2592-6)
7. **Cajić, M.**, Lazarević, M. (2014). *Generalized Forces of the Robotic System with Fractional Order Thermoviscoelastic Element*. Proceedings of the XLIX International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies (ICEST 2014). (ISBN 978-86-6125-109-2)

Саопштења са међународних скупова штампана у изводу (M34)

8. **Cajić, M.**, Karličić, D., Lazarević, M. (2014). *Nonlocal axial vibration of a fractional order viscoelastic nanorod*. Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), July 6 - 11, 2014 Vienna, Austria, (ISBN 978-3-200-03433-4).

Поглавље у националној монографији (M45)

9. Lazarević, M., Vidaković, J., **Cajić, M.**, Mandić, P. (2014). *Generalisane sile od piezo-viskoelastičnog i magneto-reološkog elementa u robotskom sistemu*, poglavlje u monografiji „Prilog modeliranju i upravljanju robotskih i adaptronskih sistema“, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, (ISBN 978-86-7083-833-8).

Радови по позиву штампани у изводу на конференцијама националног значаја M62

10. **Cajić, M.** *Response of a three degree of freedom robotic system with fractional order elements*. Mini-symposium „Non-Linear theoretical basis in description of real world phenomena“, 25th May, 2016, Belgrade, Serbia, (ISBN 978-86-7746-629-9)
http://www.mi.sanu.ac.rs/novi_sajt/research/seminars/nonlinearDynamics.php
11. **Cajić, M.**, Lazarević, M., Karličić, D. *Nonlocal elasticity and fractional viscoelasticity models of nanobeams and nanoplates*. Mini-symposium „Fractional Calculus with Applications in problems of Diffusion, control and dynamics of complex systems“, 13th July, 2016, Belgrade, Serbia. (ISBN 978-86-7746-613-8)
http://www.mi.sanu.ac.rs/novi_sajt/research/seminars/nonlinearDynamics.php


5. ЗАКЉУЧАК И ПРЕДЛОГ

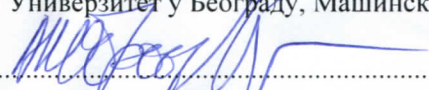
На основу прегледа и детаљне анализе докторске дисертације под називом „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“ кандидата **Милана С. Цајића**, дипл. инж. маш. – мастер, Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације констатује да је докторска дисертација урађена према свим стандардима у научно-истраживачком раду, као и да испуњава све услове предвиђене Законом о високом образовању и да је у складу са Статутом и Правилником о докторским студијама Машинског факултета Универзитета у Београду. Комисија са задовољством констатује да је кандидат **Милан С. Цајић**, дипл. инж. маш.-мастер, на основу резултата и закључака приказаних у докторској дисертацији, успешно завршио докторску дисертацију у складу са предвиђеним предметом и постављеним циљевима истраживања при чему је кандидат дошао до оригиналних научних резултата који су и успешно верификовани. Комисија такође сматра да је кандидат кроз дисертацију показао завидан ниво стручног и теоријског знања које ће му омогућити успешан будући самостални научно-истраживачки рад.

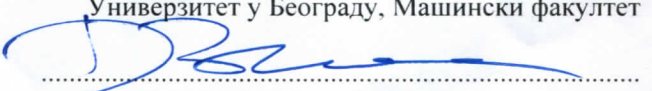
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације закључила је да докторска дисертација под називом „**Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела**“ представља вредан и оригиналан научни рад кандидата са научним доприносима у области машинства, ужа научна област Механика па сагласно томе и сходно члану 37. Правилника о докторским студијама Машинског факултета Универзитета у Београду, Комисија предлаже Наставно-научном већу Машинског факултета у Београду да Реферат прихвати, дисертацију стави на увид јавности и упуту Реферат на коначно усвајање Већу научних области техничких наука Универзитета у Београду, а да се након тога кандидат позове на јавну одбрану.

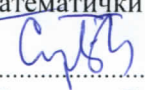
У Београду 10.05.2017. год.

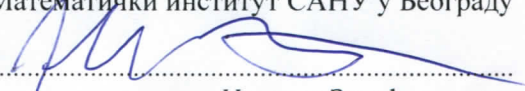
ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ


.....
др Михаило Лазаревић, редовни професор, ментор,
Универзитет у Београду, Машински факултет


.....
др Александар Обрадовић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет


.....
др Душан Зорица, виши научни сарадник,
Математички институт САНУ у Београду


.....
др Борислав Гајић, виши научни сарадник,
Математички институт САНУ у Београду


.....
др Немања Зорић, доцент,
Универзитет у Београду, Машински факултет