UNIVERZITET U NOVOM SADU
**FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U NOVOM SADU**

Vera Miler Jerković

# PRIMENA UOPŠTENIH INVERZA U REŠAVANJU FAZI LINEARNIH SISTEMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2018.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

# КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

| | |
|---|---|
| Редни број, **РБР**: | |
| Идентификациони број, **ИБР**: | |
| Тип документације, **ТД**: | Монографска документација |
| Тип записа, **ТЗ**: | Текстуални штампани материјал |
| Врста рада, **ВР**: | Докторска дисертација |
| Аутор, **АУ**: | Вера Милер Јерковић |
| Ментор, **МН**: | Проф. др Биљана Михаиловић, Проф. др Бранко Малешевић |
| Наслов рада, **НР**: | Примена уопштених инверза у решавању фази линеарних система |
| Језик публикације, **ЈП**: | српски |
| Језик извода, **ЈИ**: | српски и енглески |
| Земља публиковања, **ЗП**: | Република Србија |
| Уже географско подручје, **УГП**: | АП Војводина |
| Година, **ГО**: | 2018. |
| Издавач, **ИЗ**: | ауторски репринт |
| Место и адреса, **МА**: | Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6 |
| Физички опис рада, **ФО**:<br>(поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога) | 5/116 /49/1/9/0/0 |
| Научна област, **НО**: | Примењена математика |
| Научна дисциплина, **НД**: | Фази математика, примењена линеарна алгебра |
| Предметна одредница/Кqучне речи, **ПО**: | Фази линеарни системи, уопштени инверзи, сингуларна матрица |
| **УДК** | |
| Чува се, **ЧУ**: | Библиотека Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови сад |
| Важна напомена, **ВН**: | |
| Извод, **ИЗ**: | Предмет изучавања докторске дисертације јесте постављање универзалне методе за решавање фази линеарних система применом блоковске репрезентације уопштених инверза матрице. Пре свега, постављен је потребан и довољан услов за егзистенцију решења фази линеарног система. Затим је дата тачна алгебарска форма решења и на крају је представљен ефикасан алгоритам. |
| Датум прихватања теме, **ДП**: | 26.10.2017. |
| Датум одбране, **ДО**: | |

| | | |
|---|---|---|
| Чланови комисије, **КО**: | Председник: | др Тибор Лукић, ванредни професор |
| | Члан: | др Петар Ђапић, доцент |
| | Члан: | др Ивана Јововић, доцент |
| | Члан, ментор: | Проф. др Бранко Малешевић |
| | Члан, ментор: | Проф. др Биљана Михаиловић |

Потпис ментора

Образац **Q2.HA.06-05**- Издање 1

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

# KEY WORDS DOCUMENTATION

| | |
|---|---|
| Accession number, **ANO**: | |
| Identification number, **INO**: | |
| Document type, **DT**: | Monigraphic publication |
| Type of record, **TR**: | Textual printed material |
| Contents code, **CC**: | PhD thesis |
| Author, **AU**: | Vera Miler Jerković |
| Mentor, **MN**: | Professor Biljana Mihailović, PhD; Professor Branko Malešević, PhD |
| Title, **TI**: | Application of generalized inversis on solving fuzzy linear szstems |
| Language of text, **LT**: | Serbian |
| Language of abstract, **LA**: | Serbian, English |
| Country of publication, **CP**: | Republic of Serbia |
| Locality of publication, **LP**: | Provice of Vojvodina |
| Publication year, **PY**: | 2018 |
| Publisher, **PB**: | Author's reprint |
| Publication place, **PP**: | Novi Sad, Faculty of Tehnical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad |
| Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes) | 5/116 /49/1/9/0/0 |
| Scientific field, **SF**: | Applied Mathematics |
| Scientific discipline, **SD**: | Fuzzy Mathematics, Applied linear algebra |
| Subject/Key words, **S/KW**: | Fuzzy linear systems, generalized inverses, singular matrix |
| **UC** | |
| Holding data, **HD**: | Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad |
| Note, **N**: | |
| Abstract, **AB**: | The subject of research of thesis is setting universal method for solving fuzzy linear systems using a block representation of generalized inversis of a matrix. A necessary and sufficienf condition for the existence solutions of fuzzy linear systems is given. The exact algebraic form of any solutiof fuzzy linear system is established. |
| Accepted by the Scientific Board on, **ASB**: | 26.10.2017. |
| Defended on, **DE**: | |

| | | |
|---|---|---|
| Defended Board, **DB**: | President: | Tibor Lukić, PhD, associate professor |
| | Member: | Petar Đapić, PhD, assistant professor |
| | Member: | Ivana Jovović, PhD, assistant professor |
| | Member, Mentor: | Branko Malešević, PhD, full professor |
| | Member, Mentor: | Biljana Mihailović, PhD, associate professor |

| Menthor's sign |
|---|
| |

# *PREDGOVOR*

Predmet istraživanja doktorske disertacije jeste postavljanje originalne metode za rešavanje fazi linearnih sistema primenom uopštenih inverza matrice. Fazi linearni sistem (FLS), u zapisu $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{Y}$, gde su elementi matrice $\tilde{A}$ i vektora $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$ fazi brojevi, prvi su posmatrali Buckley i Qu [10] krajem prošlog veka. Nekoliko godina kasnije, Friedman i dr. [20] predstavili su metodu za rešavanje kvadratnog i regularnog fazi linearnog sistema oblika $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, gde je matrica $A$ realna i regularna matrica koeficijenata, a $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$ vektori fazi brojeva, pri čemu je vektor $\tilde{X}$ nepoznat. Primena fazi linearnih sistema je širokog spektra: inženjerstvo [43], statistika [35], ekonomiji [45], itd.

Idejni tvorci uopštenih inverza matrice su E.H. Moore [34] i R. Penrose [41]. U literaturi se najčešće proučavaju sledećih osam tipskih osobina uopštenih inverza matrice: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1^k\}, \{5^k\}, \{6^k\}$, koje pojedinačno ili u kombinaciji jedne sa drugima, određuju različite tipove inverza. Najprimenljiviji uopšteni inverz matrice je $\{1, 2, 3, 4\}$-inverz proizvoljne kompleksne ili realne matrice, koji je definisan kao rešenje sistema četiri matrične jednačine. Ovaj inverz je u literaturi poznat pod imenom svojih idejnih tvoraca kao Moore-Penroseov inverz. Detaljan pregled teorijskih rezultata o uopštenim inverzima i njihovim primenama može se pronaći u literaturi [9, 11, 22, 25, 31].

Friedman i dr. [20] prezentovali su metod za rešavanje kvadratnog fazi linearnog sistema koji je zasnovan na definicijama slabih i jakih fazi rešenja. Efikasnost ove metode i smislenost definisanja slabih fazi rešenja mnogi autori dovode u pitanje [6, 24], jer se pokazalo da slaba rešenja uopšte nisu rešenja fazi linearnih sistema. Takođe, dovoljan uslov (predstavljen u [20], pogledati dodatno objašnjenje u [21]) za postojanje jedinstvenih rešenja kvadratnih FLS-a nije i potreban uslov [3]. Ovo je bio jedan od motiva istraživanja, čiji su rezultati prezentovani u ovoj doktorskoj disertaciji. U disertaciji se predstavlja efikasna metoda za rešavanje fazi linearnih sistema, koja razjašnjava pitanje određivanja jakih fazi rešenja. Takođe, ova originalna metoda daje tačnu algebarsku formu bilo kojeg rešenje fazi linearnog sistema kao i algoritam koji opisuje postupak rešavanja.

Sadržina doktorske disertacije podeljena je u pet poglavlja.

U prvom poglavlju doktorske disertacije predstavljene su definicije fazi skupa i fazi skupovnih operacija, njihova reprezentacija preko odgovarajućih funkcija pripadnosti, kao i adekvatni primeri. Zatim, predstavljen je pojam fazi broja svojim definicijama i osobinama, uz odgovarajuće primere. Posebna pažnja, u ovog poglavlja, posvećena je fazi linearnim sistemima. Pored definisanja i pregleda osobina fazi linearnog sistema, ovde je prezentovana osnova za rešavanje istih. Osnovna metoda, za rešavanje fazi linearnih sistema, bazirana je na ideji da se ovaj sistem zameni klasičnim linearnim sistemom i na taj način dođe do rešenja. Kako se fazi linearni sistem, kao i klasični linearni sistem, može posmatrati kao kvadratni i pravougaoni, u ovom delu poglavlja, prezentovan je pregled dosadašnjih metoda za rešavanje prvo kvadratnih fazi linearnih sistema, a zatim i pravougaonih fazi linearnih sistema. Kao prezentacija nekih metoda, naveden je primer kvadratnog fazi linearnog sistema koji je rešen upotrebom tri različite metode, poznate u literaturi.

U drugom poglavlju predstavljaju se uopšteni inverzi matrice. Navedene su definicije, osobine i teoreme koje najbolje opisuju uopštene inverze matrice. Predstavljena je i blokovska reprezentacija uopštenih inverza matrice. Koristeći ovu tehniku, uopšteni $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ i $\{4\}$-inverzi matrice, kao i njihove kombinacije, prezentovani su preko blokova. Grupni inverz je, takođe, predstavljen pomoću blokovske reprezentacije. Navedeni su primeri za klasično određivanje uopštenih inverza date matrice. Takođe, kroz primere, prezentovana je i tehnika blokovske reprezentacije za određivanje nekih uopštenih inverza date matrice. U ovom poglavlju opisana je i EP matrica svojom definicijom, teoremama i osobinama. Kod ove specifične matrice, pokazano je koji uopšteni inverzi matrice su jednaki.

U trećem i četvrtom poglavlju predstavljen je originalni doprinos ove doktorske disertacije.

U trećem poglavlju opisana je metoda za rešavanje fazi linearnih sistema primenom najpoznatijeg uopštenog inverza matrice - Moore-Pernoseovog inverza, odnosno, primenom uopštenog $\{1,3\}$-inverza matrice i uopštenog $\{1,4\}$-inverza matrice. U ovom poglavlju formulisan je i dokazan potreban i dovoljan uslov za egzistenciju rešenja fazi linearnih sistema, na osnovu kojeg je napravljen algoritam za rešavanje fazi linearnih sistema, sa određivanjem tačne algebarske forme rešenja fazi linearnih sistema. Efikasnost ove metode ilustrovana je brojnim numeričkim primerima.

U četvrtom poglavlje je prezentovana metoda za rešavanje kvadratnog fazi linearnog sistema, čija matrica koeficijenata može biti regularna ili singularna, upotrebom kombinacije uopštenih $\{1\}, \{2\}$ i $\{5\}$-inverza matrice koja se naziva grupni inverzi matrice. Demonstrirana je i metoda za rešavanje kvadratnog fazi linearnog sistema upotrebom uopštenog $\{1\}$-inverza matrice. Kao poseban deo ovog poglavlja, prikazano je rešavanje fazi linearnih sistema čija je matrica koeficijenata EP matrica. Efikasnost metode ilustrovana je brojnim numeričkim primera.

U petom poglavlju izvedeni su zaključci ovog istraživanja.

********

*Zahvaljujem se mentorima prof. dr Biljani Mihailović i prof. dr Branku Malešević na ukazanom poverenju, velikoj podršci, dostupnosti u svakom trenutku, otvorenosti i uloženom trudu i vremenu. Posebno im se zahvaljujem na tome što su me uveli u ovu interesantnu i aktuelnu oblast matematike.*

*Zahvaljujem se članovima komisije prof. dr Ivani Jovović, prof. dr Tiboru Lukiću i prof. dr Petru Đapiću koji su svojim sugestijama dali doprinos konačnoj formi doktorske disertacije.*

*Zahvalnost dugujem prof. dr Mirjani Popović i dr Milici Janković na nesebičnoj podršci i korisnim savetima.*

*Najviše se zahvaljujem svom suprugu, sinovima, roditeljima i bratu na velikoj ljubavi, razumevanje i bezuslovnoj podršci.*

*Istraživanje je finansijski podržano od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Vlade Republike Srbije, u okviru projekta ON* 175016.

*Vera Miler Jerković*

# *Abstract*

The topic of research of this thesis is presentation of the original method for solving fuzzy linear systems using generalized inverses of a matrix. Development of science and technology has motivated investigation of methods for solving fuzzy linear systems, which parameters are rather represented by fuzzy numbers than numbers. Buckley and Qu [10] observed the fuzzy linear system, in the form $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{Y}$, at the end of the last century. After them, Friedman et al. [20] proposed a method for solving a square FLS, in the form $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, which matrix $A$ is matrix of real coefficient and $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$ are fuzzy number vectors, while $\tilde{X}$ is unknown.

E.H. Moore [34] and R. Penrose [41] presented generalized inverses of matrices, in the middle of the last century. The next generalized $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1^k\}, \{5^k\}$, $\{6^k\}$-inverse are using individually or in combination with each others. The most popular generalized inverse is the Moore-Penrose inverse of a matrix which is defined as a unique solution of the system of four matrix equations. The overview of theoretical aspects and applications of generalized inverses, can be found in textbooks [9, 11].

The goal of this thesis is to present the method which, using the block representation of generalized inverses of matrices, formulates a necessary and sufficient condition for the existence of solutions of fuzzy linear systems and gives the exact algebraic form of any solution. In addition, an efficient algorithm for determination all solutions of fuzzy linear systems is presented.

The thesis is organized as follows.

In the first chapter, the basic properties, definitions and theorems about fuzzy sets, fuzzy numbers and fuzzy linear systems are recalled.

In the second chapter a brief review of generalized inverses of a matrix and a block representation of generalized inverses is given.

In the third chapter, we present a new, original method for solving a general fuzzy linear system, using the most popular a generalized inverse of a matrix - the Moore-Penrouse inverse. Especially, this method using generalized $\{1, 3\}$-inverse or generalized $\{1, 4\}$-inverse when the arbitrary, real coefficient matrix of a fuzzy linear

systems is the full rank matrix by columns or rows. The algorithm for solving a fuzzy linear system based on the Moore-Penrose inverse of a matrix is given. The proposed method is illustrated by numerical examples.

In the four chapter, we present a new method for solving a square fuzzy linear system, using the group inverse of a matrix as well as using arbitrary generalized $\{1\}$-inverse. We, also, give method for solving a square fuzzy linear systems which real coefficient matrix is EP matrix. The proposed method is illustrated by numerical examples.

In the fifth chapter, the conclusion of the thesis is given.

# Sadržaj

# *POGLAVLJE I*

## 1. FAZI LINEARNI SISTEM

### *1.1. Fazi skup*

Do današnjih dana, fazi teorija se veoma razvila i pronašla primenu u mnogim oblastima. Prve temelje fazi skupova i fazi operacija postavio je Lotfi A. Zadeh [47] 1965. godine. Fazi skup (eng. fuzzy set) se u literaturi definiše na više načina, u zavisnosti od skupa vrednosti funkcije pripadnosti. Najzastupljenija definicija fazi skupa (uobičajenog fazi skupa) je data pomoću njegove funkcije pripadnosti (eng. membership function) koja elementima univerzalnog skupa dodeljuje realne brojeve iz intervala $[0,1]$. Vrednosti (stepeni pripadnosti, eng. membership grades) koje se funkcijom pripadnosti dodeljuju elementima univerzalnog skupa takođe mogu biti zatvoreni intervali realnih brojeva iz $[0,1]$, uobičajeni fazi skupovi definisani na intervalu $[0,1]$, elementi parcijalno uređenog skupa $L$, te na taj način dobijamo intervalno-vrednosne fazi skupove, fazi skupove tipa 2, $L$-fazi skupove, koji neće biti razmatrani u ovoj doktorskoj disertaciji. Više detalja moguće je pronaći u literaturu [15, 16, 23, 47, 48].

**Definicija 1.** ***Fazi skup*** *$M$ na univerzalnom skupu $\mathcal{X}$ je definisan funkcijom $\mu_M : \mathcal{X} \to [0,1]$ koja se naziva* ***funkcija pripadnosti*** *fazi skupa $M$, a njene vrednosti $\mu_M(\chi)$ predstavljaju stepen pripadnosti elemenata $\chi$ fazi skupu $M$.*

$\Upsilon(\mathcal{X},[0,1])$ predstavlja familiju svih fazi skupova na univerzalnom skupu $\mathcal{X}$ sa vrednostima u intervalu $[0,1]$. Uobičajeno je da se fazi skupovi imenuju i po obliku grafika funkcije pripadnosti, koji mogu biti u obliku trougla, trapeza, zvona, zvezde, itd. U praksi se najčešće upotrebljavaju trougaoni i trapezoidni fazi skupovi. U sledećem primeru prikazujemo trapezoidne fazi skupove.

**Primer 1.** *[23] Posmatrajmo tri fazi skupa $M_1$, $M_2$ i $M_3$ koji predstavljaju grupe "mladih osoba", "osoba srednjeg doba" i "starijih osoba". Funkcije pripadnosti $\mu_{M_i}, i \in \{1,2,3\}$, koje su trapozoidnog oblika, definisane su na univerzalnim skupom $\mathcal{X} = [0,100]$ na sledeći način:*

$$\mu_{M_1}(\chi) = \begin{cases} 1, & \chi \leq 20, \\ (35-\chi)/15, & 20 < \chi < 35, \\ 0, & \chi \geq 35. \end{cases}$$

$$\mu_{M_2}(\chi) = \begin{cases} 0, & \chi \leq 20 \vee \chi \geq 60, \\ (\chi-20)/15, & 20 < \chi < 35, \\ (60-\chi)/15, & 45 < \chi < 60, \\ 1, & 35 \leq \chi \leq 45. \end{cases}$$

$$\mu_{M_3}(\chi) = \begin{cases} 0, & \chi \leq 45, \\ (\chi-45)/15, & 45 < \chi < 60, \\ 1, & \chi \geq 60. \end{cases}$$

*Fazi skupovi $M_1$, $M_2$ i $M_3$ su ilustrovani na Slici 1.*

Operacije nad fazi skupovima dajemo sledećom definicijom:

**Definicija 2.** *Za proizvoljne fazi skupove $M_1, M_2 \in \Upsilon(\mathcal{X}, [0,1])$, čije su funkcije pripadnosti $\mu_{M_1}$ i $\mu_{M_2}$, definisane su sledeće operacije:*

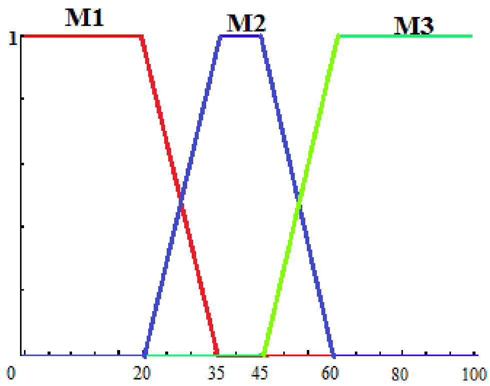
- ***fazi-komplement**: Komplement fazi skupa $M_1$ jeste $\overline{M_1}$ ako važi da je za svako $\chi \in \mathcal{X}$:*

$$\mu_{\overline{M_1}}(\chi) = 1 - \mu_{M_1}(\chi);$$

- ***fazi-presek**: Presek dva fazi skupa $M_1$ i $M_2$ ($M_1 \cap M_2$) definisan je za svako $\chi \in \mathcal{X}$ sa:*

$$\mu_{M_1 \cap M_2}(\chi) = min\{\mu_{M_1}(\chi),\ \mu_{M_2}(\chi)\};$$

Slika 1: Trapezoidni fazi skupovi




- ***fazi-unija***: *Unija dva fazi skupa* $M_1$ *i* $M_2$ $(M_1 \cup M_2)$ *definisana je za svako* $\chi \in \mathcal{X}$ *sa:*

$$\mu_{M_1 \cup M_2}(\chi) = max\{\mu_{M_1}(\chi),\ \mu_{M_2}(\chi)\};$$

- ***fazi-podskup***: *Fazi skupa* $M_1$ *je podskup fazi skupa* $M_2$ $(M_1 \subseteq M_2)$ *ako i samo ako za svako* $\chi \in \mathcal{X}$ *važi:*

$$\mu_{M_1}(\chi) \leq \mu_{M_2}(\chi);$$

- ***fazi-jednakost***: *Dva fazi skupa* $M_1$ *i* $M_2$ *su jednaka* $(M_1 = M_2)$ *ako i samo ako za svako* $\chi \in \mathcal{X}$ *važi:*

$$\mu_{M_1}(\chi) = \mu_{M_2}(\chi);$$

Sledećim definicijama predstavljamo osnovne karakteristike fazi skupa.

**Definicija 3.** *Za proizvoljni fazi skup* $M \in \Upsilon(\mathcal{X}, [0,1])$, *čija je funkcija pripadnosti* $\mu_M$, *definišemo:*

- ***nosač (eng. support):*** $supp(M) = \{\chi \in \mathcal{X} \mid \mu_M(\chi) > 0\}$;

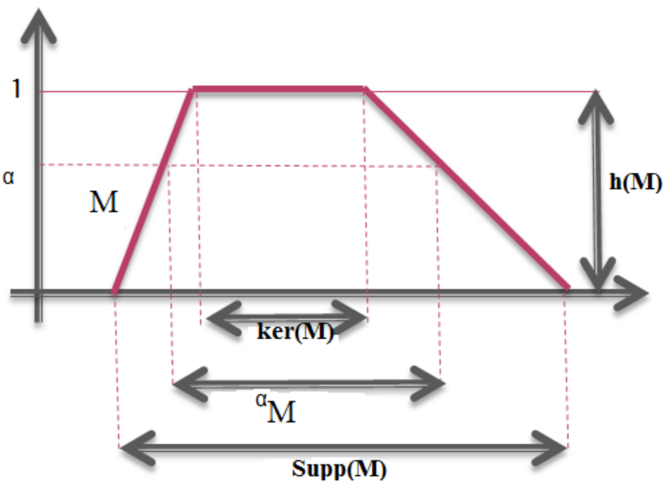
- ***visina (eng. height):***

$$h(M) = \sup_{\chi \in \mathcal{X}} \mu_M(\chi);$$

- ***jezgro (eng. kernel):*** $ker(M) = \{\chi \in \mathcal{X} \mid \mu_M(\chi) = 1\}$.

**Definicija 4.** *Za proizvoljni fazi skup* $M \in \Upsilon(\mathcal{X}, [0,1])$, *čija je funkcija pripadnosti* $\mu_M$, *i* $\alpha \in [0,1]$, *definišemo:*

Slika 2: Osobine fazi skupa M




- ***α-presek (eng. α-cut):*** $^{\alpha}M = \{\chi \in \mathcal{X} \mid \mu_M(\chi) \geq \alpha\}$;
- ***strogi α-presek (eng. strong α-cut):*** $^{\alpha^+}M = \{\chi \in \mathcal{X} \mid \mu_M(\chi) > \alpha\}$.

Na Slici 2 prikazane su osobine fazi skupa $M$. Nosač fazi skupa $M$ je klasičan skup elemenata $\chi \in \mathcal{X}$ takvih da je $\mu_M(\chi) > 0$, te na osnovu Definicije 3 i 4 nosač fazi skupa $M$ je jednak strogom 0-preseku koji obeležavamo sa $^{0^+}M$. Prazan fazi skup je onaj fazi skup čiji je nosač prazan, odnosno $\mu_M(\chi) = 0$, za svako $\chi \in \mathcal{X}$. Fazi skup, čiji se nosač sastoji od samo jednog elementa skupa $\mathcal{X}$ i važi $\mu_M(\chi) = 1$, naziva se fazi singlton (eng. fuzzy singleton). Jezgro fazi skupa $M$ sastoji se od elemenata čiji je stepen pripadnosti jednak 1, pa se često naziva $1 - presek$ i obeležava sa $^{1}M$. Visina fazi skupa $M$ je supremum vrednosti funkcije pripadnosti $\mu_M$ na celom prostoru $\mathcal{X}$. Fazi skup, čija visina iznosi 1, naziva se normalizovanim fazi skupom. Ukoliko je visina fazi skupa $M$ manja od 1, odnosno $h(M) < 1$, takav fazi skup se naziva subnormalizovanim fazi skupom. U sledećem primeru prikazujemo karakteristike fazi skupova definisanih u Primeru 1.

**Primer 2.** *Fazi karakteristike fazi skupova $M_1$, $M_2$ i $M_3$, definisanih u Primeru 1, za $\alpha \in [0,1]$, su:*

*Fazi skup $M_1$:*

- *visina:* $h(M_1) = 1$,

- *nosač:* $supp(M_1) = (0, 35)$,
- *jezgro:* $ker(M_1) = [0, 20]$,
- *$\alpha$-presek:* ${}^{\alpha}M_1 = [0, 35 - 15\alpha]$, $\alpha \in (0, 1]$, ${}^{0}M_1 = \mathcal{X}$,
- *strogi $\alpha$-presek:* ${}^{\alpha^+}M_1 = (0, 35 - 15\alpha)$, $\alpha \in [0, 1)$, ${}^{1^+}M_1 = \emptyset$.

*Fazi skup $M_2$:*

- *visina:* $h(M_2) = 1$,
- *nosač:* $supp(M_2) = (20, 60)$,
- *jezgro:* $ker(M_2) = [35, 45]$,
- *$\alpha$-presek:* ${}^{\alpha}M_2 = [15\alpha + 20, 60 - 15\alpha]$, $\alpha \in (0, 1]$, ${}^{0}M_2 = \mathcal{X}$,
- *strogi $\alpha$-presek:* ${}^{\alpha^+}M_2 = (15\alpha + 20, 60 - 15\alpha)$, $\alpha \in [0, 1)$, ${}^{1^+}M_2 = \emptyset$.

*Fazi skup $M_3$:*

- *visina:* $h(M_3) = 1$,
- *nosač:* $supp(M_3) = (45, 100)$,
- *jezgro:* $ker(M_3) = [60, 100]$,
- *$\alpha$-presek:* ${}^{\alpha}M_3 = [15\alpha + 45, 100]$, $\alpha \in (0, 1]$, ${}^{0}M_3 = \mathcal{X}$,
- *strogi $\alpha$-presek:* ${}^{\alpha^+}M_3 = (15\alpha + 45, 100)$, $\alpha \in [0, 1)$, ${}^{1^+}M_3 = \emptyset$.

Za reprezentaciju fazi skupova veoma su važni $\alpha$-preseci, koji su u stvari klasični skupovi. U nastavku predstavljamo osobine $\alpha$-preseka.

**Tvrđenje 1.** *Za bilo koji fazi skup $M \in \Upsilon(\mathcal{X}, [0, 1])$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ takve da je $\alpha_1 < \alpha_2$, važi:*

- ${}^{\alpha_1}M \supseteq {}^{\alpha_2}M$ *i* ${}^{\alpha_1^+}M \supseteq {}^{\alpha_2^+}M$,
- ${}^{\alpha_1}M \cap {}^{\alpha_2}M = {}^{\alpha_2}M$ *i* ${}^{\alpha_1^+}M \cap {}^{\alpha_2^+}M = {}^{\alpha_2^+}M$,

- ${}^{\alpha_1}M \cup {}^{\alpha_2}M = {}^{\alpha_1}M$ *i* ${}^{\alpha_1^+}M \cup {}^{\alpha_2^+}M = {}^{\alpha_1^+}M$.

**Tvrđenje 2.** *Za* $\alpha \in [0,1]$ *i fazi skupove* $M_1, M_2 \in \Upsilon(\mathcal{X}, [0,1])$ *važi:*

- ${}^{\alpha^+}M \subseteq {}^{\alpha}M$,
- ${}^{\alpha}(M_1 \cap M_2) = {}^{\alpha}M_1 \cap {}^{\alpha}M_2$ *i* ${}^{\alpha^+}(M_1 \cap M_2) = {}^{\alpha^+}M_1 \cap {}^{\alpha^+}M_2$,
- ${}^{\alpha}(M_1 \cup M_2) = {}^{\alpha}M_1 \cup {}^{\alpha}M_2$ *i* ${}^{\alpha^+}(M_1 \cup M_2) = {}^{\alpha^+}M_1 \cup {}^{\alpha^+}M_2$,
- ${}^{\alpha}(\overline{M}) = {}^{(1-\alpha)^+}\overline{M}$,
- ${}^{\alpha}(\overline{M}) \neq {}^{\alpha}\overline{M}$ *i* ${}^{\alpha^+}(\overline{M}) \neq {}^{\alpha^+}\overline{M}$.
- *Za fazi skupove* $M_1, M_2 \in \Upsilon(\mathcal{X}, [0,1])$ *važi:*
  - $M_1 \subseteq M_2 \Leftrightarrow {}^{\alpha}M_1 \subseteq {}^{\alpha}M_2$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$,
  - $M_1 \subseteq M_2 \Leftrightarrow {}^{\alpha^+}M_1 \subseteq {}^{\alpha^+}M_2$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$,
  - $M_1 = M_2 \Leftrightarrow {}^{\alpha}M_1 = {}^{\alpha}M_2$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$,
  - $M_1 = M_2 \Leftrightarrow {}^{\alpha^+}M_1 = {}^{\alpha^+}M_2$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$.

## *1.2. Fazi broj*

D. Dubois i H. Prade su 1978. godine [14], predstavili pojam *fazi broja* (eng. fuzy number), njegovu funkciju pripadnosti i definisali osnovne aritmetičke operacije, kao što su sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje. Neznatno drugačiju definiciju fazi broja predstavili su Goetshel i Voxman 1983. godine [18]. Dijkman i dr. [13] su 1983. godine predstavili osam klasa fazi brojeva, odredili devet operacija nad njima kao i vezu između tih operacija. Fazi brojevi su specijalni predstavnici fazi skupova, čije detaljnije osobine ćemo dati u nastavku ove doktorske disertacije. Fazi brojeve, koji će biti definisani u nastavku, obeležavaćemo sa $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, itd. Delovi teksta koji slede objavljeni su u [27, 28, 33].

**Definicija 5.** *Fazi skup* $\tilde{u}$ *sa funkcijom pripadnosti* $\tilde{u} : \mathbb{R} \to [0,1]$ *naziva se* ***fazi brojem*** *ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

- $\tilde{u}$ *je polu-neprekidna sa gornje strane,*

- *$\tilde{u}(x) = 0$ izvan nekog intervala $[c, d]$,*

- *Postoje realni brojevi $a$ i $b$ takvi da $c \leq a \leq b \leq d$*

  - *$\tilde{u}(x)$ je monotono rastuća na $[c, a]$,*

  - *$\tilde{u}(x)$ je monotono opadajuća na $[b, d]$,*

  - *$\tilde{u}(x) = 1$ za $a \leq x \leq b$.*

Skup svih fazi brojeva obeležen je sa $\mathcal{E}$. Kako je funkcija $\tilde{u} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ poluneprekidna sa gornje strane ako i samo ako je $\{\tilde{u} \geq \alpha\}$ zatvoren skup za sve $\alpha \in (0, 1]$, dobijamo da je $\alpha$-presek za svako $\alpha \in (0, 1]$, u stvari klasičan skup, ograničen zatvoreni interval, obeležen sa $[\tilde{u}]_\alpha$, takav da važi:

$$[\tilde{u}]_\alpha = [\underline{u}(\alpha),\ \overline{u}(\alpha)],\ \alpha \in (0, 1],$$

gde je $\underline{u}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \tilde{u}(x) \geq \alpha\}$ i $\overline{u}(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : \tilde{u}(x) \geq \alpha\}$. Nosač fazi broja $\tilde{u}$, definisan sa $supp(\tilde{u}) = cl(x \in \mathbb{R} : \tilde{u}(x) > 0)$, gde $cl$ označava zatvaranje skupa, je ograničen skup. Koristeći oznake $\underline{u}$ i $\overline{u}$, fazi broj $\tilde{u}$ se može definisati u parametarskom obliku kao par funkcija $(\underline{u}, \overline{u})$, gde je $\underline{u} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ neopadajuća, sa leva neprekidna funkcija, dok je $\overline{u} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ nerastuća, sa leva-neprekidna funkcija i $\underline{u}(\alpha) \leq \overline{u}(\alpha)$, za svako $\alpha \in [0, 1]$.

**Definicija 6.** *Za proizvoljne fazi brojeve $\tilde{u} = (\underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha))$ i $\tilde{v} = (\underline{v}(\alpha), \overline{v}(\alpha))$, i realni broj $k$, za svako $\alpha \in [0, 1]$, definišemo:*

- ***sabiranje:*** $[\tilde{u} + \tilde{v}]_\alpha = [\underline{u}(\alpha) + \underline{v}(\alpha),\ \overline{u}(\alpha) + \overline{v}(\alpha)]$;

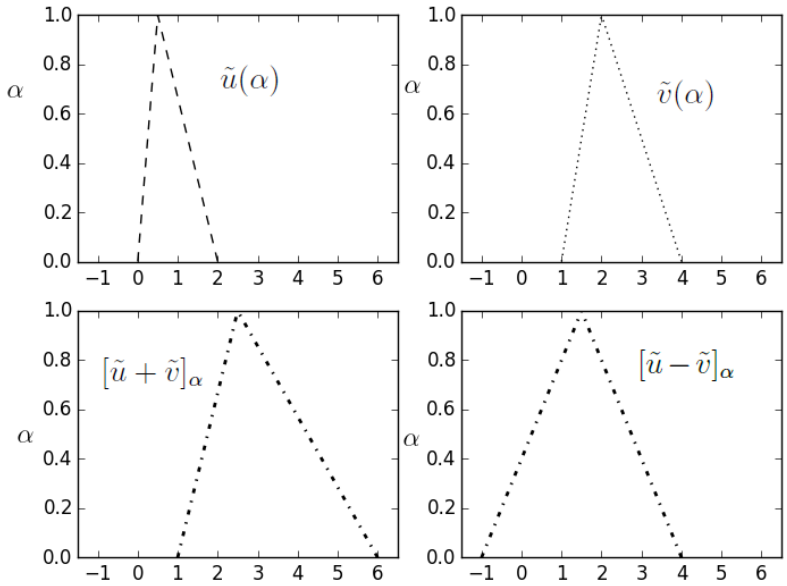
- ***množenje skalarom:***

$$[k\tilde{u}]_\alpha = \begin{cases} [k\underline{u}(\alpha),\ k\overline{u}(\alpha)], & k \geq 0 \\ [k\overline{u}(\alpha),\ k\underline{u}(\alpha)], & k < 0; \end{cases}$$

- ***jednakost:*** $\tilde{u} = \tilde{v} \iff \forall \alpha \in [0, 1] \quad (\underline{u}(\alpha) = \underline{v}(\alpha) \ \wedge \ \overline{u}(\alpha) = \overline{v}(\alpha))$.

**Primer 3.** *Odrediti zbir i razliku fazi brojeva $\tilde{u}$ i $\tilde{v}$ datih sa $\tilde{u}(\alpha) = (1 + \alpha, 4 - 2\alpha)$ i $\tilde{v}(\alpha) = (0.5\alpha, 2 - 1.5\alpha)$.*

*Kako se svaki fazi broj može predstaviti kao par funkcija $(\underline{u}, \overline{u})$, sledi da je $\underline{u}(\alpha) = 1+\alpha$,* Slika 3: Sabiranje i oduzimanje fazi brojeva




$\overline{u}(\alpha) = 4-2\alpha$, $\underline{v}(\alpha) = 0.5\alpha$ *i* $\overline{v}(\alpha) = 2-1.5\alpha$. *Koristeći prethodnu definiciju sabiranja i oduzimanja fazi brojeva (pogledati Definiciju 6), dobija se da je za svako* $\alpha \in [0,1]$*:* $[\tilde{u}+\tilde{v}]_\alpha = [1+1.5\alpha, 6-3.5\alpha]$ *i* $[\tilde{u}-\tilde{v}]_\alpha = [-1+2.5\alpha, 4-2.5\alpha]$. *Na Slici 3 prikazani su zbir i razlika fazi brojeva* $\tilde{u}(\alpha)$ *i* $\tilde{v}(\alpha)$.

## *1.3. Fazi linearni sistem*

U mnogim oblastima primenjene matematike, inženjerstva, ekonomije dolazi do potrebe za rešavanjem sistema linearnih jednačina, čije je parametre potrebno predstaviti fazi brojevima. Ova činjenica nas navodi na na postojanje veoma jakog motiva za usavršavanjem metode pomoću koje će se rešavati *fazi linearni sistem (FLS)*. Fazi linearni sistem, u zapisu $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{Y}$, gde su elementi matrice $\tilde{A}$ i vektora $\tilde{Y}$ i nepoznatog vektora $\tilde{X}$ fazi brojevi, prvi su posmatrali Buckley i Qu 1991. [10]. Nekoliko godina kasnije, Friedman i dr. [20] su 1998. predstavili metodu za rešavanje kvadratnog, regularnog FLS-a oblika $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, sa realnom matricom koeficijenata i vektorima fazi brojeva $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$, pri čemu je $\tilde{X}$ nepoznati vektor. Abbasbandy i Alavi [1] 2005. i Ezzati [19] 2010. daju različite metode za rešavanje FLS-a oblika $A\tilde{X} = \tilde{Y}$. Pod uticajem Firiedmana i dr., Allahviranlo [4] je 2004. predstavio metod za rešavanje kvadratnog, regularnog FLS-a, a Allahviranlo i Ghanbari [7] uvode 2012. metod za dobijanje njegovih algebarskih rešenja. Assady [8] je 2005. dao metodu za rešavanje pravougaonih FLS-a. Allahviranlo i Kermani [5] 2006., Abbasbandy i dr. [2] 2008. i Otadi i dr. [37] 2015. takođe su se bavili ovim problemom. Nikuie [36] je 2013. proučavao singularne FLS-e. Wang i Zheng [49] su 2006. rešavali nekonzistentne fazi linearne sisteme.

Friedman i dr. su definisali slaba i jaka rešenja fazi linearnog sistema [20]. Efikasnost ove metode mnogi autori dovode u pitanje. Ezzati je 2010. pronašao primer na kojem je pokazao da slabo rešenje nije vektor fazi brojeva [19]. Allahviranlo i dr. su 2012. takođe, prikazali na primeru da slabo rešenje, dobijeno Friedmanovom i dr. metodom, nije vektor fazi brojeva [7]. Lodwick i Dubois 2015. navode da slaba rešenja nisu uopšte rešenja fazi linearnih sistema [24].

U nastavku slede osnovne definicije, osobine i teoreme vezane za fazi linearne sisteme. Više detalja moguće je pronaći u literaturu [6, 15, 19, 20]. Delovi teksta koji slede objavljeni su u radovima [27, 28].

Neka je sa $\mathcal{M}^{n\times n}$ obeležena klasa svih kvadratnih $n \times n$ realnih matrica, $n \in \mathbb{N}$ i sa $\mathcal{M}_r^{n\times n}$ podklasa od $\mathcal{M}^{n\times n}$ koja sadrži matrice čiji je rang $r$, $r \leq n$. Neka $\mathcal{M}^{m\times n}$ obeležena klasu svih $m \times n$ realnih matrica, $m, n \in \mathbb{N}$ i $\mathcal{M}_r^{m\times n}$ obeležava podklasu od $\mathcal{M}^{m\times n}$ koja sadrži matrice čiji je rang $r$, $r \leq \min\{m, n\}$. Matricu $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{m\times n}$ nazivamo nenegativnom matricom ako su joj svi elementi nenegativni, odnosno ako važi $a_{ij} \geq 0$, za svako $i, j$. Matricu $|A| = [|a_{ij}|] \in \mathcal{M}^{m\times n}$ nazivamo matricom apsolutnih vrednosti elemenata matrice $A$. $I$ predstavlja jediničnu matricu reda $m \times n$, dok $O$ predstavlja nula matricu reda $m \times n$.

Vektor fazi brojeva obeležavaćemo sa $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ čije su komponente fazi brojevi, tj. $\tilde{x}_i \in \mathcal{E}$, za svako $i = 1, 2, \cdots, n$. Vektore fazi brojeva obeležavaćemo i sa $\tilde{Y}$, $\tilde{U}$, itd. Klasičan funkcionalni vektor označićemo sa $X = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, \ldots, -\overline{x}_n)^T$, gde su njegove komponente $\underline{x}_i$ i $\overline{x}_i$ funkcije na intervalu $[0, 1]$. Klasične funkcionalne vektore obeležavaćemo i sa $Y$, $U$, itd.

**Definicija 7.** *Neka je dat vektor fazi brojeva* $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m)^T$, $\tilde{y}_i \in \mathcal{E}$, $i = 1, \ldots, m$ *i realna matrica koeficijenata* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. *Sistem jednačina:*

$$
\begin{aligned}
a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + a_{1n}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_1, \\
a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + \ldots + a_{2n}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}\tilde{x}_1 + a_{m2}\tilde{x}_2 + \ldots + a_{mn}\tilde{x}_n &= \tilde{y}_m.
\end{aligned} \tag{1}
$$

*gde je $\tilde{X}$ nepoznati vektor fazi brojeva $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)^T$, $\tilde{x}_j \in \mathcal{E}$, $1 \le j \le n$, naziva se **Fazi Linearni Sistem (FLS)**.*

Fazi linearni sistem (1), u matričnom obliku, za vektore fazi brojeva $\tilde{X}, \tilde{Y}$ gde je $\tilde{X}$ nepoznato, predstavlja se kao:

$$
A\tilde{X} = \tilde{Y}, \tag{2}
$$

gde je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{m\times n}$. U Definiciji 8 definisana su rešenja FLS-a.

**Definicija 8.** *Vektor fazi brojeva $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \ldots, \tilde{u}_n)^T$, gde su $\tilde{u}_j, 1 \le j \le n$, fazi brojevi dati u parametarskoj formi $(\underline{u}_j(\alpha), \overline{u}_j(\alpha))$, sa $\alpha$-presecima $[\tilde{u}_j]_\alpha = \big[\underline{u}_j(\alpha), \overline{u}_j(\alpha)\big]$, $\alpha \in [0,1]$, zove se rešenje FLS-a (1), ako za svako $\alpha \in [0,1]$ važi*

$$
\Big[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{u}_j\Big]_\alpha = [\tilde{y}_i]_\alpha, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
$$

Na osnovu Definicije 6, očigledno je da su za svako $\alpha \in [0,1]$, sledeći uslovi su zadovoljeni:

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}\, \underline{u}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\, \overline{u}_j(\alpha) = \underline{y}_i(\alpha),
$$

i

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}\, \overline{u}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\, \underline{u}_j(\alpha) = \overline{y}_i(\alpha),
$$

gde su $a_{ij}^{+} = a_{ij} \vee 0$ i $a_{ij}^{-} = (-a_{ij}) \vee 0$, za $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$.

Da bi se rešio FLS (1), dovoljno je rešiti sledeći intervalni sistem za svako $\alpha \in [0,1]$ [7]:

$$
\begin{aligned}
a_{11}[\tilde{x}_1]_\alpha + a_{12}[\tilde{x}_2]_\alpha + \cdots + a_{1n}[\tilde{x}_n]_\alpha &= [\tilde{y}_1]_\alpha, \\
a_{21}[\tilde{x}_1]_\alpha + a_{22}[\tilde{x}_2]_\alpha + \cdots + a_{2n}[\tilde{x}_n]_\alpha &= [\tilde{y}_2]_\alpha, \\
&\vdots \\
a_{m1}[\tilde{x}_1]_\alpha + a_{m2}[\tilde{x}_2]_\alpha + \cdots + a_{mn}[\tilde{x}_n]_\alpha &= [\tilde{y}_m]_\alpha,
\end{aligned} \tag{3}
$$

gde je $[\tilde{X}]_\alpha = ([\tilde{x}_1]_\alpha, [\tilde{x}_2]_\alpha, \ldots, [\tilde{x}_n]_\alpha)^T$ i $[\tilde{Y}]_\alpha = ([\tilde{y}_1]_\alpha, [\tilde{y}_2]_\alpha, \ldots, [\tilde{y}_m]_\alpha)^T$, za $\alpha \in [0,1]$. Matrična forma familije intervalnih sistema je $A[\tilde{X}]_\alpha = [\tilde{Y}]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$. Rešenje je intervalni vektor $[\tilde{U}]_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, čije su komponente $n$ intervala $[\tilde{u}_j]_\alpha = [\underline{u}_j(\alpha), \overline{u}_j(\alpha)]$, $\underline{u}_j(\alpha) \leq \overline{u}_j(\alpha)$, za svako $\alpha \in [0,1]$, takve da $(\underline{u}_j, \overline{u}_j)$ određuje parametarsku formu fazi broja $\tilde{u}_j$, za $1 \leq j \leq n$.

Prethodno opisan postupak čini osnovu za rešavanje fazi linearnih sistema. Prvo se dati FLS (1), gde je matrica $A \in \mathcal{M}^{m\times n}$, zameni sa familijom intervalnih sistema (3), i onda, ako rešenje sistema (1) postoji, za rešavanje (3), za svako $\alpha \in [0,1]$, dovoljno je rešiti familiju $2m \times 2n$ klasičnih linearnih sistema:

$$
SX(\alpha) = Y(\alpha), \quad \alpha \in [0,1], \tag{4}
$$

gde su za svako $\alpha \in [0,1]$ elementi matrice $S = [s_{kp}]$, $1 \leq k \leq 2m$, $1 \leq p \leq 2n$, definisani sa:

$$
s_{kp} = \begin{cases} a_{ij}^+, & k = i, p = j \text{ ili } k = i+m, p = j+n, \\ a_{ij}^-, & k = i+m, p = j \text{ ili } k = i, p = j+n, \end{cases}
$$

i gde su klasični funkcionalni vektori dati sa:

$$
\begin{aligned}
X &= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, -\overline{x}_2, \ldots, -\overline{x}_n)^T, \\
Y &= (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_m, -\overline{y}_1, -\overline{y}_2, \ldots, -\overline{y}_m)^T,
\end{aligned}
$$

i pri čemu je vektor $X$ nepoznat. Familiju klasičnih linearnih sistema (4) obeležavaćemo skraćeno sa $SX = Y$. Matrica $S$ može se predstaviti i na sledeći način:

$$
S = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}, \tag{5}
$$

gde su matrice $B$ i $C$ date sa $B = [a_{ij}^+]_{m\times n}$ i $C = [a_{ij}^-]_{m\times n}$, gde su $a_{ij}^+ = a_{ij} \vee 0$ i $a_{ij}^- = (-a_{ij}) \vee 0$, za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Matrica $S$ naziva se *pridružena matrica*

FLS-u (1). Familiju sistema $SX = Y$ možemo predstaviti i u zapisu:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ -\overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ -\overline{Y} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

gde su vektori $\underline{X}$, $\overline{X}$, $\underline{Y}$ i $\overline{Y}$ definisani sa:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \end{bmatrix}; \quad \overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{bmatrix}; \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_m \end{bmatrix}; \quad \overline{Y} = \begin{bmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \\ \vdots \\ \overline{y}_m \end{bmatrix}.$$

Fazi linearni sistem (1) koji ima rešenje (pogledati Definiciju 8) nazivamo konzistentnim (saglasnim) FLS-om. Familija klasičnih linearnih sistema (4) može da ima jedno, beskonačno rešenja ili da bude bez rešenja. Međutim, rešenje, kada postoji, ne mora da bude adekvatno za definisanje vektora fazi brojeva. Nas će, u buduće, interesovati samo ona rešenja familije sistema (4) koja su adekvatna za definisanje vektora fazi brojeva i zvaćemo ih reprezentativnim rešenjima. Ovim rešenjima ćemo se detaljnije baviti u Poglavlju III.

U slučaju kada je matrica $S$ regularna ($m = n$), rešenje familije sistema (4) jeste oblika $X = S^{-1}Y$. Međutim, ovo rešenje je adekvatno za reprezentaciju vektora fazi brojeva $\tilde{X}$ samo ako FLS (1) ima rešenje. Poznato je u literaturi da je nenegativnost matrice $S^{-1}$ dovoljan uslov, ali ne i potreban uslov za postojanje rešenja FLS-a (1), za (*posebno*) dat vektor $Y$ (pogledati Teoremu 23 , Poglavlje III), što se i ilustruje kroz sledeći primer.

**Primer 4.** *[28] Rešimo sledeći* $2 \times 2$ *fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} \tilde{x}_1 & + & 3\tilde{x}_2 & = & (3.5 + 6\alpha, 15.5 - 6\alpha) \\ -2\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (-15.5 + 7\alpha, -1.5 - 7\alpha) \end{array}.$$

*Matrica koeficijenata* $A$ *i matrice* $B$ *i* $C$ *su:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Matrica $S$ je oblika:*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

*dok su vektori $\underline{X}$, $-\overline{X}$, $\underline{Y}$ i $-\overline{Y}$:*

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix}; \quad -\overline{X} = \begin{bmatrix} -\overline{x}_1 \\ -\overline{x}_2 \end{bmatrix}; \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} 3.5+6\alpha \\ -15.5+7\alpha \end{bmatrix}; \quad -\overline{Y} = \begin{bmatrix} -15.5+6\alpha \\ 1.5+7\alpha \end{bmatrix};$$

*Familija sistema (4), odnosno (6) je oblika:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ -\overline{x}_1 \\ -\overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5+6\alpha \\ -15.5+7\alpha \\ -15.5+6\alpha \\ 1.5+7\alpha \end{bmatrix}.$$

*Klasičan inverz pridružene regularne matrice $S$ je:*

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{35} & \frac{3}{35} & -\frac{6}{35} & \frac{18}{35} \\ \frac{12}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{2}{35} & -\frac{6}{35} \\ -\frac{6}{35} & \frac{18}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{3}{35} \\ \frac{2}{35} & -\frac{6}{35} & \frac{12}{35} & -\frac{1}{35} \end{bmatrix}.$$

*Jedinstveno rešenje familije sistema $SX = Y$ jeste $X^0 = S^{-1}Y$:*

$$X^0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^0 \\ \underline{x}_2^0 \\ -\overline{x}_1^0 \\ -\overline{x}_2^0 \end{bmatrix} = S^{-1}Y = S^{-1} \begin{bmatrix} 3.5+6\alpha \\ -15.5+7\alpha \\ -15.5+6\alpha \\ 1.5+7\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3\alpha \\ 0.5+\alpha \\ -8+3\alpha \\ -2.5+\alpha \end{bmatrix}.$$

*Kako je $\underline{x}_i^0(\alpha) \leq \overline{x}_i^0(\alpha)$, za $\alpha \in [0,1]$, $i = 1,2$, i kako su $\underline{x}_1^0$ i $\underline{x}_2^0$ su monotono rastuće funkcije, dok su $\overline{x}_1^0$ i $\overline{x}_2^0$ monotono opadajuće funkcije, levo-neprekidne na jediničnom intervalu, $X^0$ je adekvatni vektor za predstavljanje vektora fazi brojeva $\tilde{X}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)^T$.*

*Jedinstveno rešenje posmatranog FLS-a dato je sa*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^0 &= (2+3\alpha, 8-3\alpha), \\ \tilde{x}_2^0 &= (0.5+\alpha, 2.5-\alpha), \end{aligned}$$

*odnosno, fazi brojevi* $\tilde{x}_1^0$ *i* $\tilde{x}_2^0$ *su dobro definisani, jer su za svako* $\alpha \in [0,1]$*, njegovi* $\alpha$*-preseci su dati odgovarajućim intervalima:*

$$[\tilde{x}_1^0]_\alpha = [2+3\alpha, 8-3\alpha], \quad [\tilde{x}_2^0]_\alpha = [0.5+\alpha, 2.5-\alpha].$$

**Napomena 1.** *(i) Friedman i dr. [20] koriste termin "*jako fazi rešenje*" da imenuju rešenje* $X^0$ *familije sistema* $SX = Y$ *adekvatnog za reprezentaciju vektora fazi brojeva* $\tilde{X}^0$*, koje je rešenje FLS-a, odnosno, rešenje familije intervalnih linearnih sistema (3).*

*(ii) Allahviranlo i Ghanbari [7] upotrebljavaju termin "*algebarsko rešenje*" da imenuju rešenje* $\tilde{X}^0$ *fazi linearnog sistema, koji u isto vreme mora biti i vektor fazi brojeva.*

*(iii) Da bi rešenje* $X^0$ *familije sistema* $SX = Y$ *bilo adekvatna reprezentacija vektora fazi brojeva* $\tilde{X}^0$*, neophodni uslovi moraju biti zadovoljeni:*

*(1) za svako* $\alpha \in [0,1]$*, i svako* $i = 1, \ldots, n$*, važi:* $\underline{x}_i^0(\alpha) \leq \overline{x}_i^0(\alpha)$*,*

*(2) za svako* $i = 1, \ldots, n$*,* $\underline{x}_i^0$ *(odnosno* $\overline{x}_i^0$*) su monotono neopadajuće (odnosno, monotono nerastuće) levo-neprekidne funkcije na jediničnom intervalu.*

*Prethodna dva uslova obezbeđuju da je* $X^0$ *jako fazi rešenje sistema* $SX = Y$*, što je ekvivalentno činjenici da je* $\tilde{X}^0$ *vektor fazi brojeva, koji je u isto vreme i rešenje FLS-a (1).*

U nastavku doktorske disertacije sledi pregled najzastupljenijih metoda za rešavanje $n \times n$ fazi linearnih sistema.

### *1.3.1. Kvadratni Fazi Linearni Sistemi*

Kvadratni FLS-i, po prirodi pridružene matrice, mogu se podeliti na singularne i regularne. Većina istraživača posvećena je rešavanju kvadratnih i regularnih FLS-a.

U ovoj sekciji predstavljamo tri najpopularnije metode za rešavanje kvadratnog i regularnog FLS-a: Friedmanovu [20], Ezzatijevu [19] i Allahviranlovu [7] metodu.

*1.3.1.1 Fridmanov metod za rešavanje kvadratnih i regularnih FLS-a*

Ideja ove metode jeste da se FLS (1), gde je matrica koeficijenata $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times n}$ regularna, zameni familijom klasičnih linearnih sistema (4), gde je $S = [s_{kp}] \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$. Naredne teoreme i definicija detaljnije je moguće pogledati u radu [20].

**Teorema 1.** *Matrica $S$ je regularna ako i samo ako su obe matrice $A = B - C$ i $|A| = B + C$ regularne.*

**Teorema 2.** *Ako matrica $S^{-1}$ postoji, ona mora imati istu strukturu kao i matrica $S$ (5), odnosno*

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}.$$

*Matrice $D$ i $E$ definisane su kao*

$$D = \tfrac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}\right] \text{ i } E = \tfrac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}\right].$$

**Teorema 3.** *Jedinstveno rešenje familije sistema (4) za proizvoljno dat vektor $Y$ je reprezentativno rešenje $X^0 = S^{-1}Y$ ako i samo ako je $S^{-1}$ nenegativna.*

Kao što je već poznato u literaturi, nenegativnost matrice $S^{-1}$ je restriktivan uslov (klasa nenegativnih matrica sa ovom osobinom je klasa nenegativnih uopštenih permutacionih matrica (Teorema 4 u [20])), ali to nije potreban uslov za postojanje rešenja od (1), za (posebno) dat vektor fazi brojeva $\tilde{Y}$ (pogledati [3, 21, 28]).

Sledećom definicijom, koja je kritikovana od strane drugih autora (pogledati [6, 19, 24]), uvodi se pojam jakih i slabih fazi rešenja FLS-a (1).

**Definicija 9.** *Neka je sa $X^0 = \{(\underline{x}_i^0(\alpha),\ -\overline{x}_i^0(\alpha)),\ 1 \leq i \leq n\}$ obeleženo jedinstveno rešenje familije sistema (4). Vektor fazi brojeva $\tilde{U} = \{(\underline{u}_i(\alpha),\ \overline{u}_i(\alpha)),\ 1 \leq i \leq n\}$, definisan sa:*

$$\begin{aligned} \underline{u}_i(\alpha) &= \min\{\underline{x}_i^0(\alpha),\ \overline{x}_i^0(\alpha),\ \underline{x}_i^0(1),\ \overline{x}_i^0(1)\} \\ \overline{u}_i(\alpha) &= \max\{\underline{x}_i^0(\alpha),\ \overline{x}_i^0(\alpha),\ \underline{x}_i^0(1),,\ \overline{x}_i^0(1)\}, \end{aligned} \tag{7}$$

*naziva se fazi rešenje sistema (1).*

Ukoliko su $(\underline{x}_i^0(\alpha),\ \overline{x}_i^0(\alpha)),\ \ 1 \leq i \leq n$ svi fazi brojevi i $\underline{x}_i^0(\alpha) = \underline{u}_i(\alpha),\ \overline{x}_i^0(\alpha) = \overline{u}_i(\alpha)$, $1 \leq i \leq n$, tada $\tilde{U}$ predstavlja jako fazi rešenje. U suprotnom, $\tilde{U}$ je slabo fazi rešenje. Slaba rešenja nisu rešenja od (1) [6]. Friedman i dr. [20], na osnovu Definicije 9, tvrde da slaba rešenja uvek daju vektor fazi brojeva, što ipak nije uvek slučaj [6] (pogledati Primer 5).

**Primer 5.** *[6] Dat je* $2 \times 2$ *fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (\underline{y}_1(\alpha),\ \overline{y}_1(\alpha)) \\ \tilde{x}_1 & + & 2\tilde{x}_2 & = & (\underline{y}_2(\alpha),\ \overline{y}_2(\alpha)) \end{array},$$

*gde su* $\underline{y}_1(\alpha)$ *i* $\overline{y}_1(\alpha)$ *dati sa:*

$$\underline{y}_1(\alpha) = \begin{cases} -14 + 8\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -11 + 2\alpha,\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \qquad \overline{y}_1(\alpha) = \begin{cases} -1 - 13\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -6 - 3\alpha,\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases}$$

*a,* $\underline{y}_2(\alpha)$ *i* $\overline{y}_2(\alpha)$ *dati sa:*

$$\underline{y}_2(\alpha) = \begin{cases} -24 + 12\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -21 + 6\alpha,\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \qquad \overline{y}_2(\alpha) = \begin{cases} -2 - 18\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -7 - 8\alpha,\ \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases}$$

*Prvo moramo rešiti sledeću familiju sistema (4), kada je* $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1^0 \\ \underline{x}_2^0 \\ -\overline{x}_1^0 \\ -\overline{x}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 + 8\alpha \\ -24 + 12\alpha \\ 1 + 13\alpha \\ 2 + 18\alpha \end{bmatrix},$$

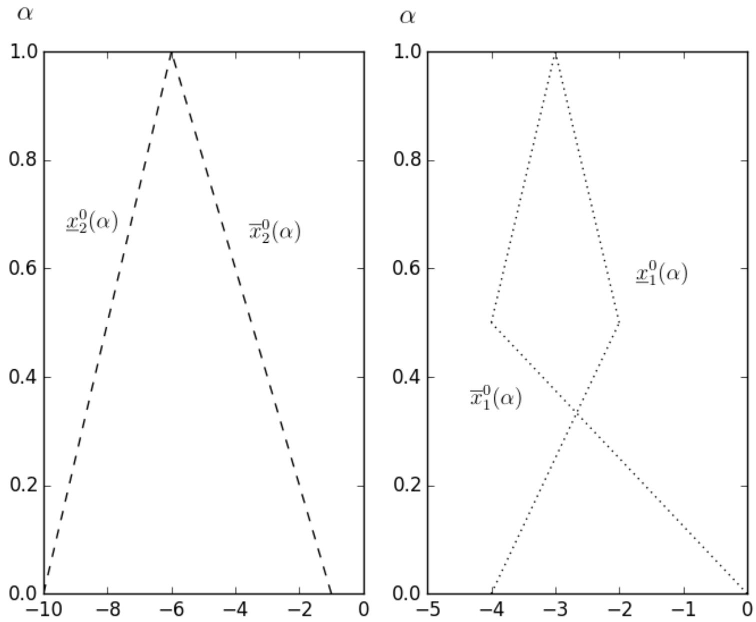
*i familiju sistema (4), kada je* $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1^0 \\ \underline{x}_2^0 \\ -\overline{x}_1^0 \\ -\overline{x}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 + 2\alpha \\ -21 + 6\alpha \\ 6 + 3\alpha \\ 7 + 8\alpha \end{bmatrix}.$$

*Kada rešimo ove dve familije klasičnih linearnih sistema dobijamo:*

$$\underline{x}_1^0(\alpha) = \begin{cases} -4 + 4\alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -1 - 2\alpha, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad \overline{x}_1^0(\alpha) = \begin{cases} -8\alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -5 + 2\alpha, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases}$$

Slika 4: Fazi broj $x_2^0(\alpha)$ i nefazi broj $x_1^0(\alpha)$




$$i \qquad \underline{x}_2^0(\alpha) = -10 + 4\alpha, \quad \overline{x}_2^0(\alpha) = -1 - 5\alpha.$$

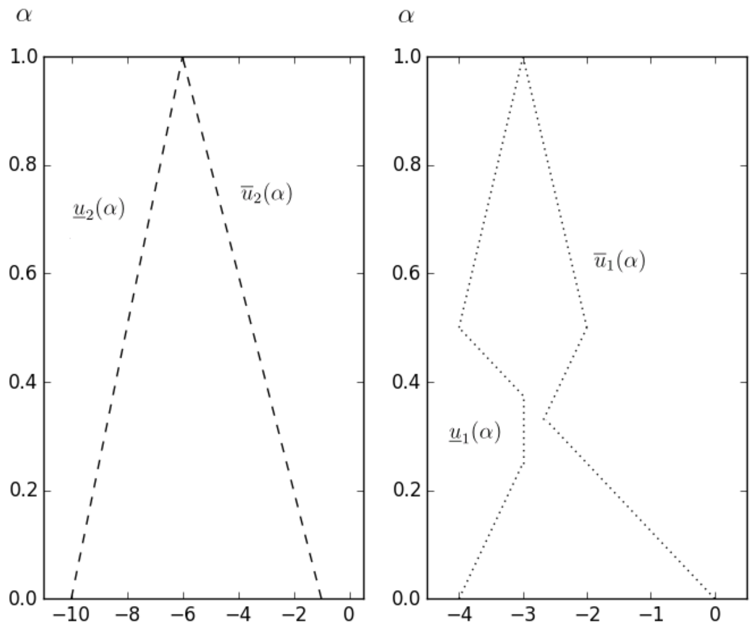
*Kako je $\underline{x}_2^0(\alpha) \leq \overline{x}_2^0(\alpha)$, za $\alpha \in [0,1]$, i kako je $\underline{x}_2^0$ monotono neopadajuća funkcija a $\overline{x}_2^0$ monotono nerastuća funkcija, levo-neprekidne na jediničnom intervalu, zaključujemo da je $x_2^0$ fazi broj, dok $x_1^0$ nije fazi broj jer je $\overline{x}_1^0(\alpha) < \underline{x}_1^0(\alpha)$, za $\alpha > \frac{1}{3}$, i $\underline{x}_1^0$ nije monotono neopadajuća funkcija a $\overline{x}_1^0$ nije monotono nerastuća funkcija za $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ (pogledati Sliku 4). Prema tome, $X^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$ nije vektor fazi brojeva. Prema Definiciji 9 dobijamo:*

$$\underline{u}_1(\alpha) = \begin{cases} -4 + 4\alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}, \\ -3, & \frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{8}, \\ -8\alpha, & \frac{3}{8} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -5 + 2\alpha, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \qquad \overline{u}_1(\alpha) = \begin{cases} -8\alpha, & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{3}, \\ -4 + 4\alpha, & \frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ -1 - 2\alpha, & \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \end{cases}$$

$$i \qquad \underline{u}_2(\alpha) = -10 + 4\alpha, \quad \overline{u}_2(\alpha) = -1 - 5\alpha.$$

*Očigledno je da je $\tilde{u}_2(\alpha)$ fazi broj, dok $\tilde{u}_1(\alpha)$ nije fazi broj (pogledati Sliku 5). Možemo zaključiti da kada je $\tilde{U}$ slabo fazi rešenje on nije uvek vektor fazi brojeva, što je u suprotnosti sa Definicijom 9.*

Slika 5: Fazi broj $\tilde{u}_2(\alpha)$ i nefazi broj $\tilde{u}_1(\alpha)$




*1.3.1.2 Ezzatijev metod za rešavanje kvadratnih i regularnih FLS-a*

Ezzati [19] je primetio da rešenja nekih pridruženih sistema (4), gde je $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$, dobijena Friedmanovom metodom, nisu odgovarajuća za reprezentaciju vektora fazi brojeva, te ni rešenja polaznog fazi linearnog sistema (1), gde je $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ regularna matrica. U cilju rešavanja sistema (1), Ezzati prvo rešava sledeći sistem:

$$A(\underline{X} + \overline{X}) = (\underline{Y} + \overline{Y}), \tag{8}$$

gde je $\underline{X} + \overline{X} = (\underline{x}_1 + \overline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n + \overline{x}_n)^T$ i $\underline{Y} + \overline{Y} = (\underline{y}_1 + \overline{y}_1, \cdots, \underline{y}_n + \overline{y}_n)^T$. Dalje se pretpostavlja da je rešenje ovog sistema

$$Đ = (đ_1, đ_2, \cdots, đ_n)^T = (\underline{x}_1 + \overline{x}_1, \underline{x}_2 + \overline{x}_2, \cdots, \underline{x}_n + \overline{x}_n)^T .$$

Koristeći činjenicu da je $A\tilde{X} = \tilde{Y}$ ekvivalentno da $(B - C)\tilde{X} = \tilde{Y}$, sledi za svako $\alpha \in [0, 1]$:

$$B\underline{X}(\alpha) - C\overline{X}(\alpha) = \underline{Y}(\alpha),$$
$$B\overline{X}(\alpha) - C\underline{X}(\alpha) = \overline{Y}(\alpha),$$

gde su matrice $B$ i $C$ definisane na već pomenuti način. Ubacivanjem smene $\overline{X} = Đ - \underline{X}$ u prvu, i smene $\underline{X} = Đ - \overline{X}$ u drugu gornju jednačinu dobijaju se sledeće jednačine, za $\alpha \in [0,1]$:

$$(B+C)\underline{X}(\alpha) = \underline{Y}(\alpha) + C\text{Đ}(\alpha),$$
$$(B+C)\overline{X}(\alpha) = \overline{Y}(\alpha) + C\text{Đ}(\alpha).$$

Ukoliko inverz matrice $B+C$ postoji, rešenje FLS je, za svako $\alpha \in [0,1]$, definisano sa :

$$\underline{X}(\alpha) = (B+C)^{-1}(\underline{Y}(\alpha) + C\text{Đ}(\alpha)), \tag{9}$$

$$\overline{X}(\alpha) = (B+C)^{-1}(\overline{Y}(\alpha) + C\text{Đ}(\alpha)). \tag{10}$$

*1.3.1.3 Allahviranlov metod za rešavanje kvadratnih i regularnih FLS-a*

Allahviranlo predstavlja novi metod za rešavanje kvadratnog i regularnog FLS [7], koji se zasniva na činjenici da su $\alpha$-preseci FLS-a (1) familija intervalnih linearnih sistema (3). Allahviranlova metoda za rešavanje kvadratnog FLS-a bazira se na posmatranju sledećeg sistema, za svako $\alpha \in [0,1]$:

**Definicija 10.** *Sistem $n \times n$:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\in [\tilde{y}_1]_\alpha , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\in [\tilde{y}_2]_\alpha , \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &\in [\tilde{y}_m]_\alpha , \end{aligned} \tag{11}$$

*gde je matrica koeficijenata $A = [a_{ij}]$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$ realna matrica reda $n$ i gde $[\tilde{y}_i]_\alpha = \left[\underline{y}_i(\alpha), \overline{y}_i(\alpha)\right]$ označava $\alpha$-presek fazi broja $\tilde{y}_i$, za $1 \le i \le n$, naziva se* $\alpha$-inkluzivni intervalni linearni sistem ($\alpha$ -IILS).

Allahviranlo dalje definiše:

$$\underline{x}_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^+ \, \underline{y}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^- \, \overline{y}_j(\alpha), \tag{12}$$

$$\overline{x}_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^+ \, \overline{y}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^- \, \underline{y}_j(\alpha), \tag{13}$$

za svako $i = 1, \ldots, n$ i svako $\alpha \in [0,1]$, gde je matrica $G = [g_{ij}]_{n\times n}$ inverzna matrica matrice $A$, odnosno $G = A^{-1}$, $g_{ij}^{+} = g_{ij} \vee 0$ i $g_{ij}^{-} = (-g_{ij}) \vee 0$, za sve $i$ i $j$. Na osnovu sledeće teoreme, Allahviranlo daje dovoljan uslov za postojanje i jedinstvenost algebarskog rešenja FLS-a (1).

**Teorema 4.** *Neka je $D = |A|$ i vektor $\Theta_\alpha = (\theta_1(\alpha), \theta_2(\alpha), \cdots, \theta_n(\alpha))^T$ rešenje sistema $D\Theta_\alpha = W_\alpha$, gde je $W_\alpha = (w_1(\alpha), w_2(\alpha), \cdots, w_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$ i neka za $i = 1, 2, \cdots, n$ važi*

$$w_i(\alpha) = \underline{y}_i(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}\ \underline{x}_j^{*}(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\ \overline{x}_j^{*}(\alpha), \tag{14}$$

*gde su $a_{ij}^{+} = a_{ij} \vee 0$ i $a_{ij}^{-} = (-a_{ij}) \vee 0$, $i,j = 1, \ldots, n$. Pretpostavimo da familija zatvorenih intervala definiše $\alpha$-preseke fazi brojeva za svako $i = 1, 2, \cdots, n$:*

$$\left\{ [\underline{x}_i^{*}(\alpha) + \theta_i(\alpha), \overline{x}_i^{*}(\alpha) - \theta_i(\alpha)] \mid \alpha \in [0,1] \right\}. \tag{15}$$

*Tada, vektor fazi brojeva $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)^T$, gde su $\alpha$-preseci $[\tilde{x}_i]_\alpha$ fazi broja $\tilde{x}_i$ definisani sa (15), predstavlja jedinstveno algebarsko rešenje FLS-a (1).*

U sledećem primeru, fazi linearni sistem je rešen pomoću Friedmanove, Ezzatijeve i Allahviranlove metode [27].

**Primer 6.** *[27] Dat je $2 \times 2$ fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} \tilde{x}_1 & + & 3\tilde{x}_2 & = & (3.5 + 6\alpha, 15.5 - 6\alpha) \\ -2\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (-15.5 + 7\alpha, -1.5 - 7\alpha) \end{array}.$$

*Matrice $A$, $B$ i $C$ ovog FLS-a su:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Friedmanova metoda</u>

*Inverzna matrica matrice $S$ definisane sa (5) je (pogledati Primer 4):*

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{35} & \frac{3}{35} & -\frac{6}{35} & \frac{18}{35} \\ \frac{12}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{2}{35} & -\frac{6}{35} \\ -\frac{6}{35} & \frac{18}{35} & -\frac{1}{35} & \frac{3}{35} \\ \frac{2}{35} & -\frac{6}{35} & \frac{12}{35} & -\frac{1}{35} \end{bmatrix}.$$

*Rešenje* $X^0 = S^{-1}Y$ *familije sistema (4),* $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$*, je adekvatano za reprezentaciju vektora fazi brojeva, te je rešenje FLS-a* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$ *dato sa*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (2+3\alpha, 8-3\alpha),\\ \tilde{x}_2 &= (0.5+\alpha, 2.5-\alpha).\end{aligned}$$

*Ezzatijeva metoda*

*Inverzna matrica zbira matrica* $B$ *i* $C$ *jeste matrica*

$$(B+C)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

*Vektor* $Đ$ *je* $Đ = (10,3)^T$*, a zatim koristeći jednačine (9) i (10) dobijamo:*

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \right),$$

$$\begin{bmatrix} -\overline{x}_1 \\ -\overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -\overline{y}_1 \\ -\overline{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

*Sledi da je rešenje FLS-a* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$*:*

$$\tilde{x}_1 = (2+3\alpha, 8-3\alpha), \qquad \tilde{x}_2 = (0.5+\alpha, 2.5-\alpha).$$

*Allahviranlova metoda*

*Koristeći jednačine (12) i (13), dobijamo:*

$$\begin{aligned}[\tilde{x}_1^*]_\alpha &= [1.143+3.857\alpha, 8.857-3.857\alpha],\\ [\tilde{x}_2^*]_\alpha &= [-1.214+2.714\alpha, 4.214-2.714\alpha].\end{aligned}$$

*Na osnovu (14) dobija se:*

$$\begin{aligned}w_1(\alpha) &= 6(1-\alpha),\\ w_2(\alpha) &= 3.429(1-\alpha).\end{aligned}$$

*Rešavanjem sledećeg klasičnog linearnog sistema* $D\Theta_\alpha = W_\alpha$*, gde je* $D = |A|$*:*

$$\begin{aligned}\theta_1(\alpha) + 3\theta_2(\alpha) &= 6(1-\alpha),\\ 2\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha) &= 3.429(1-\alpha),\end{aligned}$$

*dobija se jedinstveno rešenje* $\Theta_\alpha = (0.857(1-\alpha), 1.714(1-\alpha))^T$. *Na osnovu (15), rešenje je vektor fazi brojeva* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$, *definisan* $\alpha$*-presecima:*

$$\begin{aligned} [\tilde{x}_1]_\alpha &= [2+3\alpha, 8-3\alpha], \\ [\tilde{x}_2]_\alpha &= [0.5+\alpha, 2.5-\alpha]. \end{aligned}$$

*1.3.2. Pravougaoni Fazi Linearni Sistemi*

U ovoj sekciji prezentujemo dve metode za rešavanje $m \times n$ fazi linearnih sistema (1): Abbasbandy i dr. [2] metoda i Asady i dr. [8] metoda.

*1.3.2.1 Abbasbandyjev metod za rešavanje pravougaonih FLS-a*

Abbasbandy i dr. posmatrali su pravougaoni fazi linearni sistem (1), čija je matrica koeficijenata $A \in \mathcal{M}^{m\times n}$ punog ranga, odnosno, rešavali su familiju klasičnih linearnih sistema (4), čija je matrica $S \in \mathcal{M}^{2m\times 2n}$ punog ranga. Oni su pronašli samo jedno rešenje FLS-a upotrebom uopštenog inverza matrice, tačnije upotrebom Moore-Penroseovog inverza (videti Definiciju 13). Sledeće teoreme i posledice predstavljaju osnovu Abbasbandyjeve metode [2] :

**Posledica 1.** *Matrica* $S$ *je punog ranga po vrstama (kolonama) ako i samo ako su obe matrice* $A = B - C$ *i* $B + C$ *punog ranga po vrstama (kolonama).*

**Teorema 5.** *Moore-Penroseov inverz nenegativne matrice* $S$*, koja je punog ranga, jeste oblika*

$$S^\dagger = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

*gde su matrice* $D$ *i* $E$ *oblika*

$$D = \tfrac{1}{2}\left[(B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger\right] \text{ i } E = \tfrac{1}{2}\left[(B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger\right].$$

**Posledica 2.** *Minimalno rešenje familije sistema (4) je* $X^0 = S^\dagger Y$.

**Teorema 6.** *Vektor* $X^0 = S^\dagger Y$ *je reprezentativno rešenje familije sistema (4), gde je matrica* $S$ *pridružena matrica konzistentnog FLS-a (1) u kome je vektor fazi brojeva* $\tilde{X}$ *nepoznat a vektor fazi brojeva* $\tilde{Y}$ *proizvoljno dat, ako i samo ako je matrica* $S^\dagger$ *nenegativna.*

#### 1.3.2.2 *Asadyev metod za rešavanje pravougaonih FLS-a*

Asady je posmatrao FLS (1), čija je matrica koeficijenata $A \in \mathcal{M}^{m\times n}$, $m \le n$, i oslanjajući se na Friedmanov metod postavio je uslove za postojanje jednog rešenja FLS-a. Rešenje je pronašao koristeći metodu najmanjih kvadrata. Svoju metodu je potkrepio sledećom lemom i teoremom [8]:

**Lema 1.** *Rang matrice $S$ je $2m$ ako i samo ako rang obe matrice $A = B - C$ i $B + C$ iznosi $m$.*

**Teorema 7.** *Vektor $X^0 = S^T(SS^T)^{-1}Y$ je reprezentativno rešenje familije sistema (4) , gde je matrica $S$ pridružena matrica FLS-a (1) u kome je vektor fazi brojeva $\tilde{X}$ nepoznat a vektor fazi brojeva $\tilde{Y}$ proizvoljno dat, ako su nedijagonalni elementi matrice $(SS^T)^{-1}$ nenegativni.*

# *POGLAVLJE II*

## 2. UOPŠTENI INVERZI

Među prvim tvorcima teorije o uopštenom inverzu matrice bili su E.H. Moore (1920.) [34] i R. Penrose (1955.) [41]. U literaturi [9, 11] se najčešće proučavaju sledećih osam tipskih osobina uopštenih inverza matrice: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1^k\}, \{5^k\}, \{6^k\}$, koje pojedinačno ili u kombinaciji jedne sa drugima, određuju različite tipove inverza. Pojam *uopšteni inverz matrice* može se zameniti pojmovima *generalizovan inverz matrice* ili *pseudoinverz matrice.* Uopšteni inverz matrice, koji ima najširu primenu, naziva se *Moore-Penroseov inverz matrice.* Postoji više ekvivalentnih definicija ovog inverza [9, 34, 41]. Moore-Penroseov inverz matrice, uopšteni $\{1,3\}$-inverz matrice i uopšteni $\{1,4\}$-inverzi matrice imaju minimax osobine i iz tog razloga s upotrebljavaju prilikom rešavanja linearnih sistema. Takođe, uopšteni $\{1,3\}$-inverz matrice upotrebljava se kod rešavanja linearnih sistema upotrebom metode najmanjih kvadrata [42]. Uopšteni $\{1,2,5\}$-inverz matrice (grupni inverz) i uopšteni $\{1^k,2,5\}$-inverz matrice (Drazinov inverz) imaju primenu kod rešavanja singularnih diferencijalni jednačina, kod Markovljevih lanaca, itd. Uopšteni $\{2\}$-inverz matrice upotrebljava se prilikom rešavanja sistema nelinearnih jednačina. Više o primenama ovih inverza može se pronaći u [9, 11, 26].

## 2.1. *Uopšteni inverzi matrice i njihove kombinacije*

U ovom delu predstavljaju se definicije, osobine i teoreme vezane za uopšteni $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ i $\{4\}$ -inverz matrice, kao i za njihove kombinacije. Uopštene $\{5\}$ i $\{1^k\}$-inverze nećemo razmatrati ponaosob ali ćemo ih koristiti u kombinaciji sa drugim uopštenim inverzima matrice. U nastavku predstavljamo definicije uopštenih inverza matrice (više detalja dato je u [9, 11, 17, 25]). Delovi teksta koji slede objavljeni su u [28, 30].

Neka je data $F$ realna matrica, dimenzija $m \times n$, sa rangom $r$ ($F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r = rang(F)$). Matrica $F \in \mathcal{M}^{m\times n}$ je matrica punog ranga ako i samo ako važi $rang(F) = r = \min\{m, n\}$. Sistem od četiri Penrosove jednačine za matricu $F$ predstavljen je sa:

$$FGF = F, \tag{P1}$$

$$GFG = G, \tag{P2}$$

$$(FG)^{\mathrm{T}} = FG, \tag{P3}$$

$$(GF)^{\mathrm{T}} = GF, \tag{P4}$$

gde je matrica $G \in \mathcal{M}^{n\times m}$ nepoznata. U slučaju kada $F \in \mathcal{C}_r^{m\times n}$, gde je sa $\mathcal{C}^{n\times n}$ obeležena klasa svih $m \times n$ kompleksnih matrica, $m, n \in \mathbb{N}$ i sa $\mathcal{C}_r^{m\times n}$ podklasa od $\mathcal{C}^{m\times n}$ koja sadrže matrice čiji je rang $r$, osobine (P3) i (P4) zamenjuju se, redom, sa:

$$(FG)^* = FG,$$

$$(GF)^* = GF,$$

gde je matrica $G \in \mathcal{C}^{n\times m}$ nepoznata. Oznakom $F^*$ obeležavamo konjugovano transponovanu matricu matrice $F$.

Za kvadratnu, realnu matricu $F$ sa rangom $r$ i indeksom $k$ ($F \in \mathcal{M}_r^n$, $r \leq n$, $r = rang(F)$, $ind(F) = k$), dodatne matrične jednačine su definisane sa:

$$FG = GF \tag{P5}$$

$$F^kGF = F^k. \tag{P6}$$

$$F^kG = GF^k \tag{P7}$$

$$FG^k = G^kF \tag{P8}$$

**Definicija 11.** *Broj $k$ je indeks matrice $F$, u oznaci $ind(F) = k$, gde je $k$ najmanji nenegativan broj takav da važi jednakost $rang(F^k) = rang(F^{k+1})$.*

**Definicija 12.** *Za bilo koju matricu $F \in \mathcal{M}^{m\times n}$, neka je sa $\mathcal{H}\{i, j, \dots h\}$ označen skup svih matrica $G \in \mathcal{M}^{n\times m}$ koje zadovoljavu matrične jednačine $(Pi), (Pj), \dots, (Ph)$ iz sistema matričnih jednačinama (P1) do (P8). Matrica $G \in \mathcal{H}\{i, j, \dots, h\}$ se zove **uopšteni** $\{i, j, \dots, h\}$**-inverz** matrice $F$ i obeležava se sa $F^{(i,j,\dots,h)}$.*

Iz Definicije 12, jasno je da se matrica $G$, koja zadovoljava po jednu matričnu jednačinu iz skupa jednačina (P1) do (P5), naziva uopštenim $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$ ili $\{5\}$-inverzom matrice $F$, redom. Kada matrica $G$ zadovoljava matričnu jednačinu (P6), (P7) odnosno (P8), naziva se uopštenim $\{1^k\}$, $\{5^k\}$ odnosno $\{6^k\}$-inverzom matrice $F$.

U nastavku dajemo najprimenljivije kombinacije uopštenih inverza matrice.

**Definicija 13.** *Za bilo koju matricu $F \in \mathcal{M}^{m\times n}$, neka je data matrica $G \in \mathcal{M}^{n\times m}$ koja zadovoljava sistem od četiri matrične jednačine od (P1) do (P4). Matrica $G$ naziva se **Moore-Penrose inverz** matrice $F$ i obeležava se sa $F^\dagger$ ili $F^{(1,2,3,4)}$.*

Rešenje sistema sačinjenog od četiri matrične jednačine (P1) - (P4) uvek postoji i jedinstveno je. Koristićemo oznaku $F^{(1,3)}$ za ***uopšteni*** $\{1, 3\}$***-inverz*** matrice $F$, koji zadovoljava dve matrične jednačine (P1) i (P3). U opštem slučaju, ova matrica nije jedinstvena. Slično, sa $F^{(1,4)}$ obeležavaćemo ***uopšteni*** $\{1, 4\}$***-inverz*** matrice $F$, koji zadovoljava dve matrične jednačine (P1) i (P4), koji takođe, ne mora biti jedinstven.

**Definicija 14.** *Za bilo koju matricu $F \in \mathcal{M}^{n\times n}$, čiji je $ind(F) = k$, neka je data matrica $G \in \mathcal{M}^n$ koja zadovoljava sistem od tri matrične jednačine (P2), (P5) i (P6). Matrica $G$ naziva se **Drazinov inverz** matrice $F$ i obeležava se sa $F^\diamondsuit$ ili $F^{(1^k,2,5)}$.*

Rešenje sistema sačinjenog od tri matrične jednačine (P2), (P5) i (P6) uvek postoji i jedinstveno je.

**Definicija 15.** *Za bilo koju matricu $F \in \mathcal{M}^{n\times n}$, čiji je $ind(F) = 1$, neka je data matrica $G \in \mathcal{M}^n$ koja zadovoljava sistem od tri matrične jednačine (P1), (P2) i (P5). Matrica $G$ naziva se **grupni inverz** matrice $F$ i obeležava se sa $F^\sharp$ ili $F^{(1,2,5)}$.*

Rešenje sistema sačinjenog od tri matrične jednačine (P1), (P2) i (P5) kada postoji je jedinstveno.

Ukoliko je matrica $F$ regularna matrica, tada su Moore-Penroseov inverz, Drazinov inverz i grupni inverz matrice $F$ jednaki su sa klasičnim inverzom matrice $F$, odnosno $F^{\dagger} = F^{\diamondsuit} = F^{\sharp} = F^{-1}$. U slučaju kada je indeks matrice $F$ jednak 1, Drazinov inverz i grupni inverz matrice $F$ su jednaki, odnosno $F^{\diamondsuit} = F^{\sharp}$.

Postoji nekoliko načina za određivanje Moore-Penrosovog inverza, grupnog inverza i Drazinovog inverza neke matrice. Moore-Penroseov inverz matrice može se izračunati upotrebom singularno vrednosne dekompozicije ($SVD$) [9, 17]. $SVD$-a matrice $F$, $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, definiše se na sledeći način:

$$F = U \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] V^T,$$

gde su matrice $U$ i $V$ odgovarajuće unitarne matrice (realna matrica je unitarna ako su joj inverzna i transponovana matrica jednake) i matrica $\Sigma$ dijagonalna matrica. Dijagonalni elementi se nazivaju singularnim vrednostima i dobijaju se tako što se odrede kvadratni koreni sopstvenih vrednosti matrice $FF^T$ ili matrice $F^TF$. Moore-Penroseov inverz realne matrice $F$ je:

$$G = F^{\dagger} = V \left[\begin{array}{c|c} \Sigma^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] U^T.$$

U Primeru 7 prikazujemo postupak određivanje Moore-Penroseovog inverza date matrice pomoću $SVD$.

**Primer 7.** *Za datu matricu*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*odrediti Moore-Penroseov inverz koristeći $SVD$ metodu.*
*Matrice $U$, $\Sigma$ i $V$ su:*

$$U=\begin{bmatrix} -\frac{427}{996} & \frac{505}{791} & -\frac{140}{219} \\ -\frac{203}{626} & -\frac{663}{862} & -\frac{239}{434} \\ -\frac{382}{453} & -\frac{23}{800} & \frac{95}{177} \end{bmatrix}, \quad \Sigma=\begin{bmatrix} \frac{3227}{831} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{391}{148} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{193}{199} \end{bmatrix},$$

$$V=\begin{bmatrix} -\frac{809}{957} & -\frac{273}{908} & -\frac{38}{671} & -\frac{261}{596} \\ -\frac{17}{207} & -\frac{45}{149} & -\frac{613}{744} & \frac{377}{798} \\ \frac{237}{547} & -\frac{7}{486} & -\frac{314}{659} & -\frac{527}{689} \\ -\frac{259}{859} & \frac{379}{419} & -\frac{259}{859} & 0 \end{bmatrix}.$$

*Moore-Penroseov inverz matrice $F$ je oblika:*

$$F^{\dagger}=\begin{bmatrix} -\frac{7}{33} & -\frac{5}{33} & \frac{14}{33} \\ -\frac{1}{33} & \frac{4}{33} & \frac{2}{33} \\ \frac{4}{33} & \frac{17}{33} & -\frac{8}{33} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Teorema 8 i Teorema 9 opisuju postupak dobijanja Drazinovog inverza date matrice pomoću Jordanove forme i karakterističnog polinoma, redom. Detalje Teoreme 8 mogu se pronaći u [9], dok se detalji Teoreme 9, kao i Posledice 3, mogu pronaći u radovima [25, 30].

**Teorema 8.** *Neka je $F \in \mathcal{M}_r^{n\times n}$, $r = rang(F)$, $ind(F) = k$. Ako se pretpostavi da je Jordanova forma matrice $F$ sledećeg oblika*

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = E^{-1}FE,$$

*gde je matrica $E$ regularna, matrica $D$ regularna reda $r$ i matrica $N$ nilpotentna takva da je $N^k = 0$. Tada se Drazinov inverz matrice $F$ može prestaviti na sledeći način:*

$$F^{\diamondsuit} = E\begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}E^{-1}.$$

*Ako je $ind(F) = 1$, onda je $N = 0$.*

Za matricu $F \in \mathcal{M}^{n\times n}$, indeksa $ind(F) = k$, neka je dat minimalni polinom:

$$\mu(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \ldots + c_k x^k,$$

za $c_k \neq 0$. $q$-polinom definišemo na sledeći način:

$$q(x) = -\frac{1}{c_k}(x^{m-k-1} + c_{m-1}x^{m-k-2} + \ldots + c_{k+1}).$$

Vezu između minimalnog polinoma i $q$-polinom dajemo sledećom formulom:

$$\mu(x) = c_k x^k (1 - xq(x)). \tag{16}$$

**Teorema 9.** *Za kvadratnu matricu $F \in \mathcal{M}^{n\times n}$, čiji je $ind(F) = k$ i odgovarajući q-polinom, jedinstveno rešenje sistema od tri matrične jednačine (P2), (P5) i (P6), iskazano preko q-polinom, je dato sa:*

$$F^{\diamondsuit} = F^k \cdot (q(F))^{k+1}.$$

Ukoliko je $ind(F) = k \leq 1$, Drazinov inverz je jednak grupnom inverzu date matrice $F$ ($F^{\diamondsuit} = F^{\sharp}$). Ukoliko je $ind(F) = 0$, matrica $F$ je regularna i tada važi $F^{\diamondsuit} = F^{\sharp} = F^{-1}$. U sledećem primeru prikazujemo $q$-polinom metodu za određivanje Drazinovog inverza date matrice.

**Primer 8.** *Za datu matricu*

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

*odrediti Drazinov inverz upotrebom q-polinoma.*

*Matrica $F$ je indeksa 2 jer je $rang(F^2) = rang(F^3)$ (prema Definiciji 11). Minimalni polinom matrice $F$ jeste polinom oblika $\mu(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ pa je $c_2x^2 = x^2$. q-polinom matrice $F$ je $q(x) = 2 - x$. Lako se proverava da važi (16):*

$$\begin{aligned} \mu(x) &= c_2x^2(1 - xq(x)) \\ &= x^2(1 - x(2 - x)) \\ &= x^2(1 - 2x + x^2) \\ &= x^4 - 2x^3 + x^2. \end{aligned}$$

*Upotrebom Teoreme 9, Drazinov inverz matrice $F$ dobija se pomoću izraza $F^{\diamondsuit} = F^k \cdot (q(F))^{k+1}$. Pošto je $k = 2$, matrice $F^2$ i $(q(F))^3$ su oblika:*

$$F^2 = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 11 & 11 \\ 2 & 7 & 9 & 9 \\ -1 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad (q(F))^3 = \begin{bmatrix} -1 & -11 & -20 & -8 \\ -2 & -7 & -17 & -5 \\ -5 & -2 & 1 & -19 \\ 7 & 10 & 17 & 25 \end{bmatrix},$$

*pa, sledi da je Drazinov inverz matrice $F$:*

$$F^{\diamondsuit} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Posledica 3.** *Za kvadratnu matricu $F \in \mathcal{M}^{n \times n}$, čiji je $ind(F) = 1$ i odgovarajući q-polinom, jedinstveno rešenje sistema od tri matrične jednačine (P1), (P2) i (P5), iskazano preko q-polinoma, je dato sa*

$$F^{\sharp} = F \cdot (q(F))^2.$$

U Primeru 9 prikazujemo $q$-polinom metodu za određivanje grupnog inverza date matrice.

**Primer 9.** *Odrediti grupni inverz matrice*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

*upotrebom q-polinoma.*

*Minimalni polinom matrice $F$ jeste polinom oblika $\mu(x) = x^3 - 3x$. q-polinom matrice $F$ je $q(x) = \frac{x}{3}$. Indeks matrice $F$ je 1 ($k = 1$) jer je $rang(F) = rang(F^2)$ (prema*

*Definiciji 11). Lako se proverava da važi (16):*

$$\begin{aligned}\mu(x) &= c_1 x^1(1 - xq(x)) \\ &= -3x(1 - x \cdot \frac{x}{3}) \\ &= -3x(1 - \frac{x^2}{3}) \\ &= x^3 - 3x.\end{aligned}$$

*Grupni inverz matrice $F$ dobija se pomoću izraza $F^\sharp = F \cdot (q(F))^2$ (pogledati Posledicu 3). Pošto je matrica $(q(F))^2$ oblika:*

$$(q(F))^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix},$$

*dobijamo da je grupni inverz matrice $F$:*

$$F^\sharp = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

## *2.2. Blok reprezentacija uopštenih inverza matrice*

Predstavljanje uopštenih inverza matrice putem blokovske reprezentacije prvi je uveo C. A. Rohde 1964. godine [44]. V. Perić je 1982. godine [42], oslanjajući se na Rohdeov metod, razmatrao uopšteni $\{1, 2, 3\}$-inverz matrice i uopšteni $\{1, 2, 4\}$-inverz matrice i nazvao ih desnom, odnosno levom reciprokom matrice. Takođe, posmatrao je uopšteni $\{1, 2\}$-inverz matrice i uopšteni $\{1, 3\}$-inverz matrice i nazvao ih $g12$-reciproka, odnosno $g13$-reciproka matrice. B. Malešević je 1998. godine [25], u svojoj magistarskoj tezi, predstavio više tipova uopštenih inverza matrice pomoću Rohdeove metode.

U nastavku, prikazujemo uopštene inverze matrice predstavljene pomoću blok matrica (za detalje pogledati [25, 30, 42, 44]). Delovi teksta koji slede objavljeni su u [30].

Neka je matrica $F \in \mathcal{M}^{m\times n}$. Proširena matrica matrice $F$ elementarnim transformacijama po vrstama i kolonama svodi se na matricu sledećeg oblika:

$$\left[\begin{array}{c|c} F & I_m \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} E_r & Q \\ \hline P & 0 \end{array}\right],$$

gde je $I_m$ jedinična matrica reda $m$ a $I_n$ jedinična matrica reda $n$ i gde je $E_r \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$ matrica sa $r$ jedinica na prvih $r$ mesta glavne dijagonale i na svim ostalim mestima sa nula elementima. Matrice $P$ and $Q$ su realne, kvadratne i regularne matrice ($Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$). Matrice $Q$ i $P$ zadovoljavaju sledeću jednakost:

$$QFP = E_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{17}$$

Matrica $E_r$ predstavlja normalnu formu matrice $F$.

Uopšteni inverz matrice $F$, $G \in \mathcal{H}\{i, j, \ldots, h\}$, može se definisati putem *blok reprezentacije*:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} Z_0 & Z_1 \\ \hline Z_2 & Z_3 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{18}$$

gde su $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$. Dimenzije podmatrica $Z_0$, $Z_1$, $Z_2$ i $Z_3$ su $r \times r$, $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$ i $(n-r) \times (m-r)$, redom. Proizvodi matrica $Q \cdot Q^{\mathrm{T}}$ i $P^{\mathrm{T}} \cdot P$ postoje u sledećim oblicima:

$$Q \cdot Q^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{c|c} W_1 & W_2 \\ \hline W_3 & W_4 \end{array}\right], \tag{19}$$

i

$$P^{\mathrm{T}} \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right], \tag{20}$$

gde su podmatrice dimenzija $W_1 \in \mathcal{M}^{r\times r}$, $W_2 \in \mathcal{M}^{r\times(m-r)}$, $W_3 \in \mathcal{M}^{(m-r)\times r}$, $W_4 \in \mathcal{M}^{(m-r)\times(m-r)}$ i $T_1 \in \mathcal{M}^{r\times r}$, $T_2 \in \mathcal{M}^{r\times(n-r)}$, $T_3 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times r}$ i $T_4 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times(n-r)}$. Matrice $W_4$ i $T_4$ su regularne.

Sledećim teoremama predstavljamo uopštene inverze matrice pomoću blok reprezentacije [30].

**Teorema 10.** ***(uopšten {1}-inverz)*** *Neka su za matricu* $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m,n\}$, *određene regularne matrice* $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ *i* $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ *takve da važi (17). Matrica* $G$ *oblika (18) zadovoljava matričnu jednačinu (P1) ako i samo ako važi:*

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \\ \hline Z_2 & Z_3 \end{array}\right] \cdot Q,$$

*gde su* $Z_1 \in \mathcal{M}^{r\times(m-r)}$, $Z_2 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times r}$ *i* $Z_3 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times(m-r)}$ *proizvoljne podmatrice.*

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po vrstama, podmatrice $Z_1$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (21) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline Z_2 \end{array}\right] \cdot Q.$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po kolonama, podmatrice $Z_2$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (21) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \end{array}\right] \cdot Q.$$

**Teorema 11.** ***(uopšten {2}-inverz)*** *Neka su za matricu* $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m,n\}$, *određene regularne matrice* $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ *i* $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ *takve da važi (17). Matrica* $G$ *oblika (18) zadovoljava matričnu jednačinu (P2) ako i samo ako podmatrice* $Z_0 \in \mathcal{M}^{r\times r}$, $Z_1 \in \mathcal{M}^{r\times(m-r)}$, $Z_2 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times r}$ *i* $Z_3 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times(m-r)}$ *ispunjavaju matrične jednačine:*

$$Z_0^2 = Z_0,\ Z_0Z_1 = Z_1,\ Z_2Z_0 = Z_2 \text{ i } Z_2Z_1 = Z_3.$$

**Posledica 4.** ***(uopšten {1,2}-inverz)*** *Neka su za matricu* $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m,n\}$, *određene regularne matrice* $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ *i* $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ *takve da važi (17). Matrica* $G$ *oblika (18) zadovoljava matrične jednačine (P1) i (P2) ako i samo ako važi:*

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \\ \hline Z_2 & Z_1Z_2 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{21}$$

*gde su* $Z_1 \in \mathcal{M}^{r\times(m-r)}$ *i* $Z_2 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times r}$ *proizvoljne podmatrice.*

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po vrstama, podmatrica $Z_1$ dimenzionalno nestaje. U tom slučaju, matrica $G$ (21) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline Z_2 \end{array}\right] \cdot Q.$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po kolonama, podmatrica $Z_2$ dimenzionalno nestaje. U tom slučaju, matrica $G$ (21) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \end{array}\right] \cdot Q.$$

**Teorema 12.** ***(uopšten {3}-inverz)*** *Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m, n\}$, određene regularne matrice $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ takve da važi (17). Neka je određena i kvadratna matrica $QQ^T$ u vidu blok matrice oblika (19). Matrica $G$ oblika (18) zadovoljava matričnu jednačinu (P3) ako i samo ako podmatrice $Z_0 \in \mathcal{M}^{r\times r}$ i $Z_1 \in \mathcal{M}^{r\times(m-r)}$ zadovoljavaju matrične jednačine:*

$$(W_1 - W_2W_4^{-1}W_2^T)Z_0^T = Z_0(W_1 - W_2W_4^{-1}W_2^T) \ i \ Z_1 = -Z_0W_2W_4^{-1}.$$

**Posledica 5.** ***(uopšten {1,3}-inverz)*** *Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m, n\}$, određene regularne matrice $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ takve da važi (17). Neka je određena i kvadratna matrica $QQ^T$ u vidu blok matrice oblika (19). Matrica $G$ oblika (18) zadovoljava matrične jednačine (P1) i (P3) ako i samo ako važi:*

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -W_2W_4^{-1} \\ \hline Z_2 & Z_3 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{22}$$

*gde su $Z_2 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times r}$ i $Z_3 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljne podmatrice.*

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po vrstama, podmatrice $W_2$, $W_4$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (22) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline Z_2 \end{array}\right] \cdot Q.$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po kolonama, podmatrice $Z_2$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaje. U tom slučaju, matrica $G$ (22) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -W_2W_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q.$$

**Posledica 6.** *(**uopšten {1,2,3}-inverz**) Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m, n\}$, određene regularne matrice $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ takve da važi (17). Neka je određena i kvadratna matrica $QQ^T$ u vidu blok matrice oblika (19). Matrica $G$ oblika (18) zadovoljava matrične jednačine (P1), (P2) i (P3) ako i samo ako važi:*

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -W_2W_4^{-1} \\ \hline Z_2 & Z_2(-W_2W_4^{-1}) \end{array}\right] \cdot Q, \tag{23}$$

*gde je $Z_2 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times r}$ proizvoljna podmatrica.*

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po vrstama, podmatrice $W_2$ i $W_4$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (23) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline Z_2 \end{array}\right] \cdot Q.$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po kolonama, podmatrica $Z_2$ dimenzionalno nestaje. U tom slučaju, matrica $G$ (23) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -W_2W_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q.$$

**Teorema 13.** *(**uopšten {4}-inverz**) Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m, n\}$, određene regularne matrice $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ takve da važi (17). Neka je određena i kvadratna matrica $P^TP$ u vidu blok matrice oblika (20). Matrica $G$ oblika (18) zadovoljava matričnu jednačinu (P4) ako i samo ako podmatrice $Z_0 \in \mathcal{M}^{r\times r}$ i $Z_2 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times r}$ zadovoljavaju matrične jednačine:*

$$Z_0^T(T_1 - T_2T_4^{-1}T_2^T) = (T_1 - T_2T_4^{-1}T_2^T)Z_0 \ \ i \ \ Z_2 = -T_4^{-1}T_3Z_0.$$

**Posledica 7.** *(**uopšten {1,4}-inverz**) Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m, n\}$, određene regularne matrice $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ takve da važi (17). Neka je* *određena i kvadratna matrica $P^TP$ u vidu blok matrice oblika (20). Matrica $G$ oblika (18) zadovoljava matrične jednačine (P1) i (P4) ako i samo ako važi:*

$$G = P \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & Z_3 \end{array} \right] \cdot Q, \tag{24}$$

*gde su $Z_1 \in \mathcal{M}^{r\times(m-r)}$ i $Z_3 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljne podmatrice.*

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po vrstama, podmatrice $Z_1$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (24) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[ \begin{array}{c} I_r \\ \hline -T_4^{-1}T_3 \end{array} \right] \cdot Q.$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po kolonama, podmatrice $T_3$, $T_4$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (24) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \end{array} \right] \cdot Q.$$

**Posledica 8.** ***(uopšten {1,2,4}-inverz)*** *Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m,n\}$, određene regularne matrice $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ takve da važi (17). Neka je određena i kvadratna matrica $P^TP$ u vidu blok matrice oblika (20). Matrica $G$ oblika (18) zadovoljava matrične jednačine (P1), (P2) i (P4) ako i samo ako važi:*

$$G = P \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \\ \hline -T_4^{-1}T_3 & (-T_4^{-1}T_3)Z_1 \end{array} \right] \cdot Q, \tag{25}$$

*gde je $Z_1 \in \mathcal{M}^{r\times(m-r)}$ proizvoljna podmatrica.*

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po vrstama, podmatrica $Z_1$ dimenzionalno nestaje. U tom slučaju, matrica $G$ (25) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[ \begin{array}{c} I_r \\ \hline -T_4^{-1}T_3 \end{array} \right] \cdot Q.$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po kolonama, podmatrice $T_3$ i $T_4$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (25) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[ \begin{array}{c|c} I_r & Z_1 \end{array} \right] \cdot Q.$$

**Posledica 9.** ***(uopšten {1,3,4}-inverz)*** *Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$, $r < min\{m,n\}$, određene regularne matrice $Q \in \mathcal{M}^{m\times m}$ i $P \in \mathcal{M}^{n\times n}$ takve da važi (17). Neka je određena i kvadratna matrica $P^T P$ u vidu blok matrice oblika (20). Matrica $G$ oblika (18) zadovoljava matrične jednačine (P1), (P3) i (P4) ako i samo ako važi:*

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -W_2 W_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1} T_3 & Z_3 \end{array}\right] \cdot Q, \tag{26}$$

*gde je $Z_3 \in \mathcal{M}^{(n-r)\times(m-r)}$ proizvoljna podmatrica.*

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po vrstama, podmatrice $W_2$, $W_4$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (26) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline -T_4^{-1} T_3 \end{array}\right] \cdot Q.$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $G$ punog ranga po kolonama, podmatrice $T_3$, $T_4$ i $Z_3$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $G$ (26) postaje oblika:

$$G = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -W_2 W_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q.$$

**Teorema 14.** ***(Moore-Penroseov inverz)*** *Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{m\times n}$ određene realne, regularne, kvadratne matrice $Q$ i $P$ takve da zadovoljavaju (17) i čiji su proivodi matrice $Q \cdot Q^{\mathrm{T}}$ i $P^{\mathrm{T}} \cdot P$ definisani sa (19) i (20). Jedinstveno rešenje sistema matričnih jednačina (P1), (P2), (P3) i (P4) dato je sa:*

$$F^{\dagger} = F^{(1,2,3,4)} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -W_2 \cdot -W_4^{-1} \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 & T_4^{-1} \cdot T_3 \cdot W_2 \cdot -W_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q. \tag{27}$$

U slučaju kada je $m = r$, odnosno kada je matrica $F$ punog ranga po vrstama, podmatrice $W_2$ i $W_4$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $F^{\dagger}$ (27) postaje oblika:

$$F^{\dagger} = F^{(1,4)} = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \end{array}\right] \cdot Q. \tag{28}$$

U slučaju kada je $n = r$, odnosno kada je matrica $F$ punog ranga po kolonama, podmatrice $T_3$ i $T_4$ dimenzionalno nestaju. U tom slučaju, matrica $F^\dagger$ (27) postaje oblika:

$$F^\dagger = F^{(1,3)} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -S_2 \cdot S_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q. \tag{29}$$

U sledećem primeru, prikazan je postupak određivanja Moore-Penroseovog inverza matrice upotrebom blok reprezentacije.

**Primer 10.** *Odrediti Moore-Penroseov inverz matrice $F$, date u Primeru 7. Elementarnim transformacijama na vrstama i kolonama proširene matrice*

$$\left[\begin{array}{c|c} F & I_3 \\ \hline I_4 & 0 \end{array}\right]$$

*određuju se regularne, kvadratne matrice $P$ i $Q$, koje su oblika:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

*takve da je $QFP = E_3$. Proizvodi $P^TP$ i $QQ^T$ su oblika:*

$$P^TP = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 0 & 11 \end{array}\right], \quad QQ^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

*Podmatrice $T_1$, $T_2$, $T_3$ i $T_4$ dobijamo od matrice $P^TP$ i one su oblika:*

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}.$$

*Matrica $F$ punog ranga po vrstama, podmatrice $W_2$ i $W_4$ dimenzionalno nestaju, pa je*

*Moore-Penroseov inverz matrice $F$ oblika (28)(pogledati Teoremu 14):*

$$F^{\dagger} = F^{(1,4)} = P \cdot \left[\begin{array}{c} I_r \\ \hline -T_4^{-1} \cdot T_3 \end{array}\right] \cdot Q = P \cdot \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & 0 \end{array}\right] \cdot Q = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{7}{33} & -\frac{5}{33} & \frac{14}{33} \\ -\frac{1}{33} & \frac{4}{33} & \frac{2}{33} \\ \frac{4}{33} & \frac{17}{33} & -\frac{8}{33} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right].$$

U slučaju kada je matrica $F$ regularna, kvadratna matrica, $m = n = r$, Moore-Penroseov inverz matrice $F$ ($F^{\dagger}$) izjednačava se sa klasičnim inverznom matrice $F$ ($F^{-1}$). U tom slučaju, matrica $F^{\dagger}$ (27) je oblika:

$$F^{\dagger} = F^{-1} = PQ.$$

**Teorema 15.** ***(grupni inverz)*** *Neka su za matricu $F \in \mathcal{M}_r^{n \times n}$, čiji je indeks jednako 1 ($ind(F) = 1$), određene realne, regularne, kvadratne matrice $Q$ i $P$ koje zadovoljavaju (17) i čiji proizvod zadovoljava:*

$$Q \cdot P = \left[\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{array}\right] \tag{30}$$

*gde je $V_4 \in \mathcal{M}^{(n-r)x(n-r)}$ regularna podmatrica. Jedinstveno rešenje sistema od tri matrične jednačine (P1), (P2) i (P5) dato je sa:*

$$F^{\sharp} = P \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_r & -V_2 \cdot V_4^{-1} \\ \hline -V_4^{-1} \cdot V_3 & V_4^{-1} \cdot V_3 \cdot V_2 \cdot V_4^{-1} \end{array}\right] \cdot Q. \tag{31}$$

Sledi primer koji opisuje određivanje grupnog inverza matrice pomoću blok reprezentacije.

**Primer 11.** *Odrediti grupni inverz matrice $F$ date u Primeru 9.*

*Elementarnim transformacijama na vrstama i kolonama proširene matrice*

$$\left[\begin{array}{c|c} F & I_3 \\ \hline I_3 & 0 \end{array}\right]$$

*određuju se regularne, kvadratne matrice $P$ i $Q$:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

*takve da je $QFP = E_2$. Proizvod $QP$ je oblika:*

$$QP = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ \hline -1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

*Podmatrice $V_1$, $V_2$, $V_3$ i $V_4$ su oblika:*

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}.$$

*Matrice $V_2 \cdot V_4^{-1}$, $V_4^{-1} \cdot V_3$ i $V_4^{-1} \cdot V_3 \cdot V_2 \cdot V_4^{-1}$ su oblika:*

$$V_2 \cdot V_4^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad V_4^{-1} \cdot V_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad V_4^{-1} \cdot V_3 \cdot V_2 \cdot V_4^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

*Na osnovu Teoreme 15, grupni inverz matrice $F$ je oblika:*

$$F^{\sharp} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

## *2.3. EP matrice*

H. Schwerdtfeger [46] je 1950. godine uveo pojam $EP$ matrice. $EP$ matrice su od velikog značaja jer su kod ovih matrica Moore-Penroseov inverz, Drazinov inverz i grupni inverz matrice izjednačeni, pa je samim tim i primena u rešavanju sistema linearnih jednačina ili sistema diferencijalnih jednačina olakšana. Takođe, jedan od bitnijih razloga što se proučavaju $EP$ matrice jeste njena osobina komutativnosti sa Moore-Penroseovim inverzom [11, 40]. Više detalja nalazi se u literaturi [9], [11, 12, 38, 39, 40, 46].

**Definicija 16.** *Neka je data matrica $F \in \mathcal{M}_r^{n\times n}$. Ako je zadovoljeno $F^\dagger F = FF^\dagger$ tada se matrica $F$ naziva **EP matricom**.*

**Teorema 16.** *Matrica $F \in \mathcal{M}_r^{n\times n}$ je $EP$ matrica ako i samo ako postoji invertibilna matrica $M$ takva da je $F^T = MF$.*

U slučaju kada je matrica $F \in \mathcal{C}^{n\times n}$, uslov u prethodnoj teoremi se zamenjuje sa $F^* = MF$.

**Teorema 17.** *Neka je $F \in \mathcal{M}_r^{n\times n}$. Matrica $F$ je EP matrica ako i samo ako je grupni inverz matrice $F$ jednak Moore-Penroseovom inverzu matrice $F$, odnosno $F^\sharp = F^\dagger$.*

**Posledica 10.** *Svaka singularna EP matrica je indeksa 1.*

**Teorema 18.** *Neka je $F \in \mathcal{M}_r^{n\times n}$. Matrica $F$ je EP matrica ako i samo ako je Drazinov inverz matrice $F$ jednak Moore-Penroseovom inverzu matrice $F$, odnosno $F^\diamondsuit = F^\dagger$.*

U sledećem primeru prikazan je postupak određivanja uopštenog inverza EP matrice.

**Primer 12.** *[30] Odrediti Moore-Penroseov inverz, Drazinov inverz i grupni invez matrice*

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Rang matrice $F$ je 2. Indeks matrice $F$ je 1 jer $rang(F) = rang(F^2)$ (prema Definiciji 11). Pretpostavku da je matrica $F$ EP matrica dokazujemo pomoću Definicije 16. Kako je matrica $F^\dagger$ oblika:*

$$F^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{25}{144} & \frac{7}{144} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{144} & \frac{25}{144} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix},$$

*proizvod matrica $F$ i $F^\dagger$ je isti kao proizvod matrica $F^\dagger$ i $F$, odnosno:*

$$F \cdot F^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad i \;\; F^\dagger \cdot F = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

*pa, sledi da je matrica $F$ $EP$ matrica. Kako je matrica $F$ $EP$ matrica, važi da je $F^\dagger = F^\diamondsuit = F^\sharp$ (Teorema 17 i Teorema 18). Kako su sva tri uopštena inverza jednaka, dovoljno je odrediti samo jedan uopšten inverz matrice $F$. Odredićemo grupni inverz matrice prema Teoremi 15. Elementarnim transformacijama na vrstama i kolonama proširene matrice*

$$\left[\begin{array}{c|c} F & I_5 \\ \hline I_5 & 0 \end{array}\right]$$

*određujemo regularne, kvadratne matrice $P$ i $Q$, koje su oblika:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

*takve da je $QFP = E_2$. Proizvod $QP$ je oblika:*

$$QP = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & -5 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 6 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

*Podmatrice $V_1$, $V_2$, $V_3$ i $V_4$ su oblika:*

$$V_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

*Matrice* $V_2 \cdot V_4^{-1}$, $V_4^{-1} \cdot V_3$ *i* $V_4^{-1} \cdot V_3 \cdot V_2 \cdot V_4^{-1}$ *su oblika:*

$$V_2 \cdot V_4^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad V_4^{-1} \cdot V_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} \\ 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$V_4^{-1} \cdot V_3 \cdot V_2 \cdot V_4^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{25}{144} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

*Na osnovu Teoreme 15, grupni inverz matrice F je oblika:*

$$F^{\sharp} = F^{\dagger} = F^{\diamondsuit} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{25}{144} & \frac{7}{144} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{144} & \frac{25}{144} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

# POGLAVLJE III

## 3. METODA ZA REŠAVANJE FLS-a UPOTREBOM MOORE-PENROSEovog INVERZA MATRICE

U ovom poglavlju disertacije predstavljamo originalnu metodu za rešavanje fazi linearnog sistema (1), čija je realna matrica koeficijenata proizvoljne dimenzije $m \times n$. Osnova ove metode je u zameni fazi linearnog sistema (1) familijom klasičnih linearnih sistema (4), što u stvari predstavlja Friedmanovom i dr. [20] pristupu za rešavanje FLS-a. Friedmanova definicija slabih rešenja je sporna, te je izazvala veliku polemiku autora [6, 24], a u radovima [3, 19] je pokazano da ovako definisana slaba fazi rešenja ne zadovoljavaju jednačine fazi linearnog sistema (1), dakle, ne mogu se nazivati njegovim resenjima. Takođe, dovoljan uslov, predstavljen u [20], za postojanje jedinstvenog rešenja kvadratnog, regularnog FLS-a nije i potreban uslov [3, 21]. Ovo je ujedno bio i podsticaj za istraživanje iz kojeg je nastala ova doktorska disertacija. U ovom poglavlju predstavljamo metod za određivanje svih rešenja FLS-a, sa jasno i precizno formulisanim algoritmom za njihovo određivanje, koji u dosadašnjim radovima, koji se zasnivaju na Friedmanovom pristupu, nismo pronašli.

Upotrebom blokovske reprezentacije uopštenih inverza matrice, formulisan je potreban i dovoljan uslov za postojanje rešenja, dobijena je tačna algebarska forma rešenja (tzv. jakih fazi rešenja, algebarskih rešenja) i dat je efikasan algoritam za određivanje svih rešenja fazi linearnog sistema, čija je matrica koeficijenata realna. Ova nova metoda se ilustruje brojnim numeričkim primera, među kojima je i primer motivisan primenom u problemima odlučivanja i agregacije intervalnih podataka. Originalni rezultati su publikovani u [28].

## *3.1. Struktura uopštenog $\{1,l\}$-inverza, $l \in \{3,4\}$, matrice $S$*

U ovoj sekciji predstavljaju se važni originalni teorijski rezultati za rešavanje $m\times n$ fazi linearnog sistema (1), publikovani u [28]. Primenom blokovske reprezentacije uopštenih inverza dat je potreban i dovoljan uslov za blokovsku strukturu uopštenog $\{1,l\}$-inverza, $l \in \{3,4\}$, matrice $S$, pridružene matrice $m \times n$ fazi linearnom sistemu (1). Takođe, dokazana je teorema koja obezbeđuje dovoljan uslov za dobijanje reprezentativnog vektora rešenja $X^0$ sistema (4), za dati proizvoljni reprezentativni vektor $Y$, kada je $S^{\{1,l\}}$, $l \in \{3,4\}$, nenegativna matrica. Sve teoreme su prikazane i za opšti $m \times n$ FLS.

**Definicija 17.** *[7] Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times n}$, i $|A| = [|a_{ij}|] \in \mathcal{M}^{n\times n}$. Matrica $A$ je kompletno regularna ako su obe matrice $A$ i $|A|$ regularne.*

Definicija 17 implicira da je kvadratni FLS singularan ako matrica $A$ nije kompletno regularna matrica, odnosno, ako je matrica $S$ singularna.

**Definicija 18.** *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{m\times n}$, i $|A| = [|a_{ij}|] \in \mathcal{M}^{m\times n}$. Matrica*

*(ii) $A$ je kompletno punog ranga po vrstama ako su obe matrice $A$ i $|A|$ punog ranga po kolonama.*

*(iii) $A$ je kompletno punog ranga po kolonama ako su obe matrice $A$ i $|A|$ punog ranga po vrstama.*

**Lema 2.** *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{m\times n}$. Matrica $S$ je punog ranga po kolonama (vrstama) ako i samo ako je matrica $A$ kompletno punog ranga po kolonama (vrstama).*

*Dokaz.* Neka je $A = [a_{ij}]$ realna matrica dimenzija $m \times n$ i $|A| = [|a_{ij}|]$. Kako je $A = B - C = [a^+_{ij}] - [a^-_{ij}]$ i $|A| = B + C = [a^+_{ij}] + [a^-_{ij}]$, koristeći elementarne transformacije, dobija se:

$$S = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B-C & C \\ C-B & B \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B-C & C \\ 0 & B+C \end{bmatrix}.$$

Očigledno, tvrđenje važi. $\square$

Ističemo da ukoliko je vektor fazi brojeva $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T$ rešenje FLS-a (1), tada je $X = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \dots, -\overline{x}_1, \dots, -\overline{x}_n)^T$ rešenje familije klasičnih linearnih sistema (4). Međutim, ako je dato rešenje sistema (4), $X = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \dots, -\overline{x}_1, \dots, -\overline{x}_n)^T$, tada dobijene funkcije $\underline{x}_i$, $\overline{x}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, ne moraju biti odgovarajuće za parametarsku reprezentaciju ni jednog vektora fazi brojeva, pa u tom slučaju, FLS (1) nema rešenje u skladu sa Definicijom 8. Tada se može pristupiti traženju aproksimativnih rešenja, što nije predmet izučavanja ove doktorske disertacije.

Ako je vektor $X = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \dots, -\overline{x}_1, \dots, -\overline{x}_n)^T$ takav da pridruženi vektor $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T$ je vektor fazi brojeva, tada je $X$ reprezentativni vektor za $\tilde{X}$. Sa druge strane, za dati vektor fazi brojeva $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)^T$, njegov reprezentativni vektor je uvek $X = (\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \dots, -\overline{x}_1, \dots, -\overline{x}_n)^T$. Očigledno, familija klasičnih linearnih sistema (4) može imati beskonačno rešenja ili jedinstveno vektor rešenje. Međutim, rešenje, ako postoji, ne mora da bude reprezentativni vektor nekog vektora fazi brojeva. Prema tome, posmatraćemo samo reprezentativna rešenja familije klasičnih linearnih sistema (4). Reći ćemo da je FLS (1) konzistentant fazi linearni sistem ako ima rešenje (pogledati Definiciju 8).

U Teoremi 19 dajemo potreban i dovoljan uslov za blokovsku strukturu uopštenog $\{1, l\}$-inverza, $l \in \{3, 4\}$, pridružene matrice $S$ FLS-u (1).

**Teorema 19.** *Neka je $A$ matrica koeficijenata FLS-a (1) kompletno punog ranga po kolonama (vrstama). Uopšteni $\{1, l\}$-inverz, $l \in \{3, 4\}$, pridružene matrice $S$ je:*

$$S^{(1,l)} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}, \tag{32}$$

*ako i samo ako*

$$D = \frac{1}{2}\left[(B + C)^{(1,l)} + (B - C)^{(1,l)}\right], \tag{33}$$

$$E = \frac{1}{2}\left[(B + C)^{(1,l)} - (B - C)^{(1,l)}\right]. \tag{34}$$

1. *Kada je matrica $S$ punog ranga po kolonama, tada je l=3.*
2. *Kada je $S$ punog ranga po vrstama, tada je l=4.*

*Dokaz.* Neka je $A$ matrica koeficijenata FLS-a (1) kompletno punog ranga po kolonama (vrstama) i $S$ pridružena matrica oblika (5). Prema Lemi 2, dobija se da je matrica $S$ punog ranga po kolonama (vrstama).

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da je uopšteni $\{1,l\}$-inverz matrice $S$ ($S^{(1,l)}$, $l \in \{3,4\}$) oblika (32), gde su matrice $D, E \in \mathcal{M}^{n\times m}$. Dokaz, da matrice $D$ i $E$ zadovoljavaju jednačine (33) i (34), sledi.

Osobina (P1) daje:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

Množenjem prve dve matrice dobija se:

$$\begin{bmatrix} BD+CE & BE+CD \\ CD+BE & CE+BD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

Odnosno,

$$\begin{bmatrix} (BD+CE)B+(BE+CD)C & (BD+CE)C+(BE+CD)B \\ (CD+BE)B+(CE+BD)C & (CD+BE)C+(CE+BD)B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

Sledi da je

$$(BD+CE)B+(BE+CD)C = B,$$
$$(BD+CE)C+(BE+CD)B = C.$$

Sabiranjem i oduzimanjem prethodnih jednačina, dobijaju se:

$$(BD+CE)(B+C)+(BE+CD)(C+B) = B+C,$$
$$(CD+BE)(B-C)+(CE+BD)(C-B) = C-B.$$

Prva jednačina ekvivalenta je sa (35), dok je druga ekvivalentna sa (36)

$$(B+C)(D+E)(B+C) = B+C, \tag{35}$$
$$(B-C)(D-E)(B-C) = B-C. \tag{36}$$

Osobina (P3) daje:

$$\left(\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}.$$

Odnosno,

$$\left(\begin{bmatrix} BD+CE & BE+CD \\ CD+BE & CE+BD \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

odakle se dobijaju sledeće jednačine:

$$(BD+CE)^{\mathrm{T}} = BD+CE, \tag{37}$$

$$(BE+CD)^{\mathrm{T}} = BE+CD. \tag{38}$$

Jednačine (37) i (38) ekvivalentne su sa sledećim jednačinama:

$$(BD)^{\mathrm{T}} + (CE)^{\mathrm{T}} = BD+CE,$$
$$(BE)^{\mathrm{T}} + (CD)^{\mathrm{T}} = BE+CD,$$

odnosno sa

$$D^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = BD+CE,$$

$$E^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = BE+CD.$$

Sabirajući i oduzimanjem prethodne dve jednačine, sledi da je:

$$(D^{\mathrm{T}}+E^{\mathrm{T}})B^{\mathrm{T}} + (E^{\mathrm{T}}+D^{\mathrm{T}})C^{\mathrm{T}} = B(D+E)+C(E+D),$$
$$(D^{\mathrm{T}}-E^{\mathrm{T}})C^{\mathrm{T}} + (E^{\mathrm{T}}-D^{\mathrm{T}})B^{\mathrm{T}} = C(D-E)-B(E-D),$$

odnosno

$$((B+C)(D+E))^{\mathrm{T}} = (B+C)(D+E), \tag{39}$$

$$((B-C)(D-E))^{\mathrm{T}} = (B-C)(D-E). \tag{40}$$

Osobina (P4) daje:

$$\left(\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\left(\begin{bmatrix} DB+EC & DC+EB \\ EB+DC & EC+DB \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} DB+EC & EB+DC \\ EB+DC & EC+DB \end{bmatrix}.$$

Sledi da je

$$(DB+EC)^{\mathrm{T}} = DB+EC, \tag{41}$$

$$(DC+EB)^{\mathrm{T}} = DC+EB. \tag{42}$$

Jednačine (41) i (42) ekvivalentne su sa:

$$(DB)^{\mathrm{T}} + (EC)^{\mathrm{T}} = DB+EC,$$
$$(DC)^{\mathrm{T}} + (EB)^{\mathrm{T}} = DC+EB,$$

odnosno sa

$$B^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} = DB+EC,$$
$$C^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} = DC+EB.$$

Sabiranjem i oduzimanjem prethodnih jednačina dobijamo:

$$\left(B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}\right)D^{\mathrm{T}} + \left(C^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}\right)E^{\mathrm{T}} = D(B+C)+E(C+B),$$
$$\left(B^{\mathrm{T}}-C^{\mathrm{T}}\right)E^{\mathrm{T}} + \left(C^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}\right)D^{\mathrm{T}} = E(B-C)-D(C-B),$$

odnosno

$$((D+E)(B+C))^{\mathrm{T}} = (D+E)(B+C), \tag{43}$$

$$((D-E)(B-C))^{\mathrm{T}} = (D-E)(B-C). \tag{44}$$

Očigledno je da jednačine (35), (36), (39), (40), (43) i (44) impliciraju sledeće jednakosti

$$(B+C)^{(1,l)} = D+E,$$
$$(B-C)^{(1,l)} = D-E,$$

pa, sabiranjem i oduzimanjem prethodne dve jednačine, dobija se

$$D = \frac{1}{2}\left((B+C)^{(1,l)} + (B-C)^{(1,l)}\right),$$
$$E = \frac{1}{2}\left((B+C)^{(1,l)} - (B-C)^{(1,l)}\right),$$

za $l \in \{3,4\}$.

$\Leftarrow$ Dokazujemo da za matrice $D$ i $E$, određene sa (33) i (34), matrica oblika

$$G = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

jeste $S^{(1,l)}$, $l \in \{3, 4\}$.

Sabiranjem i oduzimanjem (33) i (34), dobija se

$$D + E = (B + C)^{(1,l)} \quad \text{i} \quad D - E = (B - C)^{(1,l)}, \quad \text{za } l = 3, 4.$$

Sledi da je

$$(B + C)(D + E)(B + C) = B + C, \tag{45}$$

$$(B - C)(D - E)(B - C) = B - C. \tag{46}$$

Za $l = 3$ sledi:

$$(D + E)^{\mathrm{T}}(B + C)^{\mathrm{T}} = (B + C)(D + E), \tag{47}$$

$$(D - E)^{\mathrm{T}}(B - C)^{\mathrm{T}} = (B - C)(D - E). \tag{48}$$

Za $l = 4$ sledi:

$$(B + C)^{\mathrm{T}}(D + E)^{\mathrm{T}} = (D + E)(B + C), \tag{49}$$

$$(B - C)^{\mathrm{T}}(D - E)^{\mathrm{T}} = (D - E)(B - C). \tag{50}$$

Dokaz osobine (P1), odnosno $SGS = S$, dajemo u nastavku.

Jednačine (45) i (46) impliciraju da je

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(B - C) \\ &= \frac{1}{2}(B + C)(D + E)(B + C) + \frac{1}{2}(B - C)(D - E)(B - C) \\ &= (BD + CE)B + (BE + CD)C, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) \\ &= \frac{1}{2}(B + C)(D + E)(B + C) - \frac{1}{2}(B - C)(D - E)(B - C) \\ &= (BE + CD)B + (BD + CE)C, \end{aligned}$$

prema tome

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix},$$

pa tako jednačina $SGS = S$ važi, odnosno osobina (P1) je zadovoljena.

Osobinu (P3), odnosno $(SG)^{\mathrm{T}} = SG$ dokazujemo u nastavku.

Jednačine (47) i (48) impliciraju:

$$\begin{aligned} BD + CE &= \frac{1}{2}(B+C)(D+E) + \frac{1}{2}(B-C)(D-E) \\ &= \frac{1}{2}(D+E)^{\mathrm{T}}(B+C)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}(D-E)^{\mathrm{T}}(B-C)^{\mathrm{T}} \\ &= D^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = (BD+CE)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} CD + BE &= \frac{1}{2}(B+C)(D+E) - \frac{1}{2}(B-C)(D-E) \\ &= \frac{1}{2}(D+E)^{\mathrm{T}}(B+C)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(D-E)^{\mathrm{T}}(B-C)^{\mathrm{T}} \\ &= D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = (CD+BE)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

dakle

$$\left( \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} \right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

pa je $(SG)^{\mathrm{T}} = SG$, tj. osobina (P3) je zadovoljena.

Osobinu (P4), odnosno $(GS)^{\mathrm{T}} = GS$ dokazujemo na sledeći način. Jednačine (49) i (50) impliciraju:

$$\begin{aligned} DB + EC &= \frac{1}{2}(D+E)(B+C) + \frac{1}{2}(D-E)(B-C) \\ &= \frac{1}{2}(B+C)^{\mathrm{T}}(D+E)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}(B-C)^{\mathrm{T}}(D-E)^{\mathrm{T}} \\ &= B^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} = (DB+EC)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} DC + EB &= \frac{1}{2}(D+E)(B+C) - \frac{1}{2}(D-E)(B-C) \\ &= \frac{1}{2}(B+C)^{\mathrm{T}}(D+E)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(B-C)^{\mathrm{T}}(D-E)^{\mathrm{T}} \\ &= C^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} = (DC+EB)^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

dakle

$$\left(\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix},$$

odnosno $(GS)^{\mathrm{T}} = GS$, pa je osobina (P4) zadovoljena.

Na osnovu prethodno dokazanog, očigledno je da je $G = S^{(1,l)}$ za $l \in \{3,4\}$. □

Sledi dokaz teoreme za opšti $m \times n$ fazi linearni sistem.

**Teorema 20.** *Neka je A matrica koeficijenata FLS-a (1). Moore-Penroseov inverz pridružene matrice S ($S^{\dagger}$) je oblika:*

$$S^{\dagger} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}, \tag{51}$$

*ako i samo ako je*

$$D = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{\dagger} + (B-C)^{\dagger}\right], \tag{52}$$

$$E = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{\dagger} - (B-C)^{\dagger}\right]. \tag{53}$$

*Dokaz.* $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je Moore-Penroseov inverz pridružene matrice $S$ ($S^{\dagger}$) oblika (51), gde su matrice $D, E \in \mathcal{M}^{n\times m}$. Dokaz, da matrice $D$ i $E$ zadovoljavaju jednačine (52) i (53), sledi.

Osobina (P1) daje jednačine (35) i (36) (pogledati dokaz Teoreme 19). Osobina (P2) daje:

$$\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}.$$

Dalje, sledi da je

$$(DB + EC)D + (DC + EB)E = D,$$
$$(DB + EC)E + (DC + EB)D = E.$$

Sabiranjem i oduzimanjem prethodnih jednačina dobija se:

$$(D+E)(B+C)(D+E) = D+E, \tag{54}$$

$$(D-E)(B-C)(D-E) = D-E. \tag{55}$$

Osobina (P3) daje jednačine (39) i (40) (pogledati dokaz Teoreme 19), dok osobina (P4) daje jednačine (43) i (44) (pogledati dokaz Teoreme 19). Očigledno je da jednačine (35), (36), (54), (55), (39), (40), (43) i (44) impliciraju sledeće jednakosti:

$$(B+C)^\dagger = D+E,$$
$$(B-C)^\dagger = D-E,$$

pa, sabiranjem i oduzimanjem prethodne dve jednačine, dobija se

$$D = \frac{1}{2}\left((B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger\right),$$
$$E = \frac{1}{2}\left((B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger\right).$$

$\Leftarrow$ Dokazujemo da za matrice $D$ i $E$, određene sa (52) i (53), matrica oblika

$$G = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

jeste $S^\dagger$.
Sabiranjem i oduzimanjem (52) i (53), dobija se

$$D+E = (B+C)^\dagger, \tag{56}$$
$$D-E = (B-C)^\dagger. \tag{57}$$

Dokaz osobine (P1), odnosno $SGS = S$, osobine (P3), odnosno $(SG)^{\mathrm{T}} = SG$, i osobine (P4), odnosno $(GS)^{\mathrm{T}} = GS$, pogledati u dokazu Teoreme 19.
Dokaz osobine (P2), odnosno $GFG = G$, sledi. Jednačine (56) i (57) impliciraju:

$$(D+E)(B+C)(D+E) = D+E,$$
$$(D-E)(B-C)(D-E) = D-E.$$

Odnosno,

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(D+E) + \frac{1}{2}(D-E) \\ &= \frac{1}{2}(D+E)(B+C)(D+E) + \frac{1}{2}(D-E)(B-C)(D-E) \\ &= (DB+EC)D + (DC+EB)C, \end{aligned}$$

i

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}(D+E) - \frac{1}{2}(D-E) \\
&= \frac{1}{2}(D+E)(B+C)(D+E) - \frac{1}{2}(D-E)(B-C)(D-E) \\
&= (DC+EB)D + (DB+EC)C.
\end{aligned}
$$

Prema tome, jednačina $GFG = G$, odnosno osobina (P2), važi.

Na osnovu prethodno dokazanog, očigledno je da je $G = S^{\dagger}$. $\square$

Teorema 21 obezbeđuje dovoljan uslov za dobijanje reprezentativnog vektora rešenja $X^0$ sistema (4), za bilo koji proizvoljni reprezentativni vektor $Y$.

**Teorema 21.** *Neka je matrica koeficijenata $A$ kompletno punog ranga po kolonama (vrstama) konzistentnog FLS (1) za dato $\tilde{Y}$. Ako je $S^{(1,l)}$, $l \in \{3,4\}$, nenegativna matrica, tada, jedno od rešenja familije klasičnih linearnih sistema (4) jeste reprezentativni vektor $X^0$ definisan sa:*

*1. $X^0 = S^{(1,3)}Y$, kada je $S$ matrica punog ranga po kolonama,*

*2. $X^0 = S^{(1,4)}Y$, kada je $S$ matrica punog ranga po vrstama,*

*a pridruženi vektor fazi brojeva $\tilde{X}^0$ je jedno od rešenja FLS (1).*

*Dokaz.* Za dato $Y$, neka je $X^0 = (\underline{x}_1^0, \ldots, \underline{x}_n^0, \ldots, -\overline{x}_1^0, \ldots, -\overline{x}_n^0)^T$ rešenje familije sistema (4), dobijeno pomoću $X^0 = S^{(1,l)}Y$, za $l = 3, 4$. Prema Teoremi 19, sledi da $S^{(1,l)}$ ima istu strukturu kao i $S$, odnosno:

$$
S^{(1,l)} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},
$$

gde su $D = [d_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times m}$ i $E = [e_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times m}$ . Prema tome, za svako $i = 1, \ldots, n$ i svako $\alpha \in [0,1]$, dobija se

$$
\underline{x}_i^0(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}\ \underline{y}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{m} e_{ij}\ \overline{y}_j(\alpha), \tag{58}
$$

$$
\overline{x}_i^0(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}\ \overline{y}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{m} e_{ij}\ \underline{y}_j(\alpha). \tag{59}
$$

Stoga,

$$
\overline{x}_i^0(\alpha) - \underline{x}_i^0(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} (d_{ij} + e_{ij})\ \left(\overline{y}_j(\alpha) - \underline{y}_j(\alpha)\right). \tag{60}
$$

Kako za svako $j = 1, \ldots, m$ i svako $\alpha \in [0,1]$ važi: $\overline{y}_j(\alpha) \geq \underline{y}_j(\alpha)$, i $d_{ij} \geq 0$ i $e_{ij} \geq 0$, za svako $i$ i $j$, dobija se $\overline{x}_i^0(\alpha) \geq \underline{x}_i^0(\alpha)$, za $\alpha \in [0,1]$ i $i = 1, \ldots, n$. Kako su $d_{ij}$ i $e_{ij}$ nenegativni, za svako $i, j$, prema (58) i (59), sledi da za svako $i$ funkcija $\underline{x}_i^0(\alpha)$, odnosno $\overline{x}_i^0(\alpha)$, je neopadajuća, odnosno nerastuća, i levo-neprekidna kao linearna kombinacija neopadajućih, odnosno nerastućih, funkcija na jediničnom intervalu. Prema tome, $\tilde{X}^0 = (\tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_n^0)^T$ je vektor fazi brojeva. Kako je $SX = Y$ familija konzistentnih sistema, sledi da je $X^0$ jedno od njegovih rešenja, i prema konstrukciji matrice $S$, sledi da je $\tilde{X}^0$ rešenje FLS-a (1). $\square$

Sledeća teorema obezbeđuje opšti rezultat za $m \times n$ FLS.

**Teorema 22.** *Neka je $A$ matrica koeficijenata konzistentnog FLS-a (1), za dato $\tilde{Y}$. Ako je $S^\dagger$ nenegativna matrica, tada jedno od rešenja familije klasičnih linearnih sistema (4) jeste reprezentativni vektor $X^0 = S^\dagger Y$, i pridruženi vektor fazi brojeva $\tilde{X}^0$ je jedno od rešenja FLS (1).*

U literaturi je već poznato da nenegativnost matrice $S^{-1}$ nije potreban uslov za postojanje rešenja fazi linearnog sistema (1). Prema tome, potrebno je odrediti potreban i dovoljan uslov za dobijanja rešenja FLS-a (1). Prvi bitan korak jeste pronalaženje jednog vektora fazi brojeva, koji će biti početni vektor za određivanje svih rešenja. U nastavku, predstavljajamo takve fazi vektore.
Uvodimo sledeće oznake $A^{(1,l)} = H = [h_{ij}]$, $l = 3, 4$. $H \in \mathcal{M}^{n \times m}$ i $|H| = [|h_{ij}|]$. Kako je, $H = H^+ - H^- = [h_{ij}^+] - [h_{ij}^-]$ i $|H| = H^+ + H^- = [h_{ij}^+] + [h_{ij}^-]$, matricu $S_H \in \mathcal{M}^{2n \times 2m}$ definišemo na sledeći način:

$$S_H = \begin{bmatrix} H^+ & H^- \\ H^- & H^+ \end{bmatrix}. \tag{61}$$

**Teorema 23.** *Neka je matrica koeficijenata $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{m \times n}$ konzistentnog FLS-a (1) kompletno punog ranga po kolonama (vrstama), za dato $\tilde{Y}$ i $H = [h_{ij}] = A^{(1,l)}$, za $l = 3$ ($l = 4$). Neka je $X^* = S_H Y$, gde je matrica $S_H$ oblika (61). Sledeća tvrđenja važe:*

*(i) $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \ldots, \tilde{x}_n^*)^T$ je vektor fazi brojeva.*

*(ii) Ako je* $|A|^{(1,l)} = |A^{(1,l)}|$, *tada* $\tilde{X}^*$ *je rešenje FLS-a (1).*

*Dokaz.* (i) Odredimo prvo $X^* = S_H Y$. Za svako $i = 1, \ldots, n$ i svako $\alpha \in [0,1]$ važi:

$$\underline{x}_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}^+ \; \underline{y}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{m} h_{ij}^- \; \overline{y}_j(\alpha), \tag{62}$$

$$\overline{x}_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}^+ \; \overline{y}_j(\alpha) - \sum_{j=1}^{m} h_{ij}^- \; \underline{y}_j(\alpha). \tag{63}$$

Oduzimanjem (63) i (62), za svako $\alpha \in [0,1]$, dobijamo:

$$\overline{x}_i^*(\alpha) - \underline{x}_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} |h_{ij}| \; \left(\overline{y}_j(\alpha) - \underline{y}_j(\alpha)\right). \tag{64}$$

Kako za svako $j = 1, \ldots, m$ i svako $\alpha \in [0,1]$ važi: $\overline{y}_j(\alpha) \geq \underline{y}_j(\alpha)$, i $|h_{ij}| \geq 0$, za svako $i$ i $j$, dobija se $\overline{x}_i^*(\alpha) \geq \underline{x}_i^*(\alpha)$, za $\alpha \in [0,1]$ i $i = 1, \ldots, n$. Kako su $|h_{ij}|$ nenegativni, za $i, j$, prema (62) i (63), sledi da za svako $i$ funkcija $\underline{x}_i^*(\alpha)$, odnosno $\overline{x}_i^*(\alpha)$, je neopadajuća, odnosno nerastuća, i levo-neprekidna za svako $\alpha \in [0,1]$. Prema tome, $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \ldots, \tilde{x}_n^*)^T$, gde je $\tilde{x}_i^* = (\underline{x}_i^*, \overline{x}_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$, je vektor fazi brojeva.

(ii) Sa druge strane, sabiranjem (62) i (63), za svako $\alpha \in [0,1]$, dobijamo:

$$\overline{x}_i^*(\alpha) + \underline{x}_i^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} \left(\overline{y}_j(\alpha) + \underline{y}_j(\alpha)\right), \; i = 1, \ldots, n. \tag{65}$$

Kako je $H = [h_{ij}] = (B - C)^{(1,l)} = A^{(1,l)}$, za $l = 3\,(l = 4)$, i matrica $A$ kompletnog punog ranga po kolonama (vrstama) (što znači da je $A^\dagger = A^{(1,3)}$, odnosno $A^\dagger = A^{(1,4)}$, pogledati Teoremu 14 i jednakosti (29) i (28)) i koristeći osobinu $(A^\dagger)^\dagger = A$ sledi

$$\left(A^{(1,l)}\right)^{(1,l)} = H^{(1,l)} = (H^+ - H^-)^{(1,l)} = B - C = A, \;\text{ za } l = 3\,(l = 4).$$

Analogno, $\{1, l\}$-inverz matrice $|A|$ punog ranga po kolonama (vrstama) označen je sa

$$G = [g_{ij}] = (B + C)^{(1,l)} = |A|^{(1,l)}, \;\text{ za } l = 3\,(l = 4),$$

i ako se dodatno pretpostavi da je $|A|^{(1,l)} = G = |H| = |A^{(1,l)}|$, tada sledi da je

$$\left(|A|^{(1,l)}\right)^{(1,l)} = |H|^{(1,l)} = (H^+ + H^-)^{(1,l)} = B + C = |A|, \;\text{ za }\; l = 3\,(l = 4).$$

Primenom Teoreme 19, sledi da je $S = S_H^{(1,l)}$, gde je $S = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}$. Kako je $SX = Y$ familija konzistentnih sistema, jednačina (65) je ekvivalentna sa

$$\overline{y}_i(\alpha) + \underline{y}_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\overline{x}_j^*(\alpha) + \underline{x}_j^*(\alpha)\right), \; i = 1, \ldots, m, \tag{66}$$

i jednačina (64) (iz dela (i) ovog dokaza) je ekvivalentna sa

$$\overline{y}_i(\alpha) - \underline{y}_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \left(\overline{x}_j^*(\alpha) - \underline{x}_j^*(\alpha)\right), \; i = 1, \ldots, m. \tag{67}$$

Očigledno, za svako $i$ i $j$ važi $a_{ij}^+ = \dfrac{a_{ij} + |a_{ij}|}{2}$ i $a_{ij}^- = \dfrac{|a_{ij}| - a_{ij}}{2}$, pa, sabiranjem i oduzimanjem (66) i (67), za svako $\alpha \in [0, 1]$, dobijamo tvrđenje. $\square$

Napominjemo da pomoću Teoreme 21 dobijamo jedno od rešenja familije klasičnih linearnih sistema (4), koji je reprezentativni vektor $X^0$, uz uslov da je $S^{(1,l)}$, $l \in \{3, 4\}$, nenegativna matrica. Upotrebom Teoreme 23 (i) dobijamo $X^*$ pomoću nenegativne matrice $S_H$ te je zato $X^*$ *uvek* vektor fazi brojeva i on može biti rešenje FLS-a (1) ili će se pomoću njega dobiti *sva* ostala rešenje (ukoliko postoje) FLS-a (1).

Sledi teorema za opšti $m \times n$ fazi linearni sistem.

**Teorema 24.** *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{m \times n}$ matrica koeficijenata konzistentnog FLS-a (1), za dato $\tilde{Y}$ i neka je $H = [h_{ij}] = A^\dagger$. Takođe, neka je $X^* = S_H Y$, gde je matrica $S_H$ oblika (61). Sledeća tvrđenja važe:*

*(i) $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \ldots, \tilde{x}_n^*)^T$ je vektor fazi brojeva.*

*(ii) Ako je $|\,A\,|^\dagger = |\,A^\dagger\,|$, tada $\tilde{X}^*$ je rešenje FLS-a (1).*

Primetimo da su osobine nenegativnost matrice $S^\dagger$, uslov predstavljen u prethodnoj teoremi $|\,A\,|^\dagger = |\,A^\dagger\,|$ i $S^\dagger = S_H$ međusobno ekvivalentni. Dakle, ako je poslednji uslov zadovoljen, dobija se da je $X^* = X^0$. Međutim, generalno važi da $S^\dagger \neq S_H$, pa $X^*$ nije rešenje familije sistema $SX = Y$, ali se svi reprezentativni vektori mogu dobiti, pa i ako $S^\dagger$ nije nenegativna, što će i biti ilustrovano primerom (pogledati Primer 14) jer, kao što je gore već objašnjeno, $X^* = S_H Y$ je uvek reprezentativni vektor za vektor fazi brojeva $\tilde{X}^*$, pa i kada FLS (1) nije konzistentan.

## *3.2. Potreban i dovoljan uslov za postojanje rešenja FLS-a*

U ovoj sekciji dokazana je teorema kojom se obezbeđuje potreban i dovoljan uslov za postojanje tačne algebarske forme rešenja fazi linearnog sistema (1). Predstavlja se i efikasan algoritam, na osnovu kojeg se rešava $m \times n$ FLS, gde su matrica koeficijenata $A$, kao i vektor fazi brojeva $\tilde{Y}$, proizvoljno dati. Rezultati su publikovani u [28].

Zbog prezentacije opšte metode za rešavanje fazi linearnog sistema (1), najvažnije algebarske činjenice naglašavamo još jednom:
$X^0 = (\underline{x}_1^0, \ldots, \underline{x}_n^0, \ldots, -\overline{x}_1^0, \ldots, -\overline{x}_n^0)^T$ jeste rešenje $2m \times 2n$ familije sistema $SX = Y$ ako i samo ako su zbir $\overline{X}^0 + \underline{X}^0$ i razlika $\overline{X}^0 - \underline{X}^0$ pridruženih $n \times 1$ vektora $\underline{X}^0 = (\underline{x}_1^0, \ldots, \underline{x}_n^0, )^T$ i $\overline{X}^0 = (\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_n^0)^T$ rešenja sledećih familija $m \times n$ klasičnih linearnih sistema:

$$A(\overline{X} + \underline{X}) = \overline{Y} + \underline{Y}, \tag{68}$$

$$|A|(\overline{X} - \underline{X}) = \overline{Y} - \underline{Y}. \tag{69}$$

Ako je $\overline{X}^0 - \underline{X}^0$ nenegativno i ako su sve komponente od $\overline{X}^0$ i $\underline{X}^0$ adekvantne funkcije, u analitičkom smislu (levo-neprekidne/neprekidne, strogo monotone/monotone), takvo dobijeno rešenje $X^0$ je reprezentativni vektor od $\tilde{X}^0$, koje je rešenje FLS-a (1). Obrnuto, ako je $\tilde{X}^0$ rešenje FLS-a (1), tada zbir i razlika pridruženih $n \times 1$ klasičnih vektora $\overline{X}^0 = (\overline{x}_1^0, \ldots, \overline{x}_n^0)^T$ i $\underline{X}^0 = (\underline{x}_1^0, \ldots, \underline{x}_n^0)^T$ moraju biti rešenja sledećih familija sistema (68) i (69), pa je posledično, $X^0$ rešenje familije sistema $SX = Y$.

Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{m \times n}$, matrica koeficijenata i neka je $|A| = [|a_{ij}|]$. Takođe, neka je

$$A^\dagger = (B - C)^\dagger = D - E = H = [h_{ij}].$$

Očigledno, ako je $m = n$ i $A$ kompletno regularna (pogledati Definiciju 17), sledi da je

$$A^\dagger = A^{-1} = (B - C)^{-1} = D - E = H = [h_{ij}],$$

dok za $m \neq n$ i $A$ kompletno punog ranga po kolonama (vrstama), sledi da je

$$A^\dagger = A^{(1,l)} = (B - C)^{(1,l)} = D - E = H = [h_{ij}], \quad l = 3\,(l = 4).$$

**Lema 3.** *Neka je $A$ matrica koeficijenata konzistentnog FLS-a (1) za dato $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)^T$. Neka je $X^* = S_H Y$, gde je $S_H$ oblika (61). Tada je (68) familija konzistentnih klasičnih linearnih sistema i važi $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$.*

*Dokaz.* Neka je $\tilde{X}^0$ jedno od rešenja konzistentnog FLS-a (1). Prema tome, za svako $\alpha \in [0,1]$ zbir vektora $\overline{X}^0 + \underline{X}^0$ je rešenje familije sistema (68), pa je (68) familija konzistentnih sistema. Iz definicije $X^*$, dobija se (62) i (63), pa sledi da je $\overline{X}^* + \underline{X}^* = H\left(\overline{Y} + \underline{Y}\right)$, gde je $H = A^\dagger$. Jedno od rešenja familije sistema (68) je $\overline{X}^* + \underline{X}^*$, pa sledi da je $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$. □

Očigledno, Lema 3 implicira da ako je $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) \neq \overline{Y} + \underline{Y}$, FLS (1) nema rešenja. Prema tome, $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$ je potreban uslov (ali ne i dovoljan) za konzistentnost FLS-a (1). Jednakost $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$ ekvivalentna je sa konzistentnošću familije sistema (68), pa tako u slučaju kada je matrica $A$ regularna, ovaj uslov je zadovoljen za *svako* dato $\tilde{Y}$. Međutim, u slučaju kada je matrica $A$ singularna ili pravougaonog oblika, konzistentnost familije sistema (68) zavisi ne samo od matrice koeficijenata $A$ nego i od *posebno* datog vektora fazi brojeva $\tilde{Y}$. Verifikaciju konzistentnosti familije sistema (68), umesto Kronecker - Cappelijevom teoremom, proveravaćemo ispitivanjem jednakosti $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$.

U Teoremi 25 predstavljen je potreban i dovoljan uslov za postojanje rešenja FLS-a (1), čija je matrica koeficijenata $A$ proizvoljna. Štaviše, tačna algebarska forma rešenja je ustanovljena.

**Teorema 25.** *Neka je $A$ matrica koeficijenata FLS-a (1) za dato $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)^T$, takvo da je za $X^* = S_H Y$, gde je $S_H$ oblika (61), zadovoljeno $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$. Neka su $\Lambda = (\lambda_1(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha))^T$ i $\Theta = (\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, rešenja sistema $A\Lambda = O$ i $|A|\Theta = W$, redom, gde $O = (0, \ldots, 0)^T$ je $m \times 1$ nula vektor, i $W = (w_1(\alpha), \ldots, w_m(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, definisan sa $W = \underline{Y} - [\, A^+ \; A^- \,] X^*$, gde je $[\, A^+ \; A^- \,]$ $m \times 2n$ matrica. Sledeća tvrđenja važe:*

*(i) Za svaki $2n \times 1$ vektor $X^{*\Lambda} = (\underline{x}_1^{*\Lambda}, \ldots, \underline{x}_n^{*\Lambda}, -\overline{x}_1^{*\Lambda}, \ldots, -\overline{x}_n^{*\Lambda})^T$, definisan sa $\underline{X}^{*\Lambda} = \underline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda$ i $\overline{X}^{*\Lambda} = \overline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda$, važi:*

$$A\left(\overline{X}^{*\Lambda} + \underline{X}^{*\Lambda}\right) = \overline{Y} + \underline{Y}.$$

*(ii)* *Za svaki* $2n\times 1$ *vektor* $X^{*\Lambda,\Theta} = (\,\underline{x}_1^{*\Lambda.\Theta},\ldots,\underline{x}_n^{*\Lambda,\Theta},-\overline{x}_1^{*\Lambda,\Theta},\ldots,-\overline{x}_n^{*\Lambda,\Theta}\,)^T$*, definisan sa* $\underline{X}^{*\Lambda,\Theta} = \underline{X}^{*\Lambda}+\Theta$ *i* $\overline{X}^{*\Lambda,\Theta} = \overline{X}^{*\Lambda}-\Theta$*, gde se* $X^{*\Lambda}$ *dobija uslovom (i), važi:*

$$A\left(\overline{X}^{*\Lambda,\Theta}+\underline{X}^{*\Lambda,\Theta}\right) = \overline{Y}+\underline{Y},$$

$$|A|\left(\overline{X}^{*\Lambda,\Theta}-\underline{X}^{*\Lambda,\Theta}\right) = \overline{Y}-\underline{Y}.$$

*(iii)* $\tilde{X} = (\,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n\,)^T$*,* $\tilde{x}_i = (\underline{x}_i,\overline{x}_i)$*,* $i=1,\ldots,n$*, je rešenje FLS-a (1) ako i samo ako postoje* $\Lambda = (\lambda_1(\alpha),\ldots,\lambda_n(\alpha))^T$ *i* $\Theta = (\theta_1(\alpha),\ldots,\theta_n(\alpha))^T$*, takvi da* $A\Lambda = O$ *i* $|A|\Theta = W$*, za svako* $\alpha\in[0,1]$*, i familija intervala* $\left\{[\underline{x}_i^*(\alpha)+\frac{1}{2}\lambda_i(\alpha)+\theta_i(\alpha),\ \overline{x}_i^*(\alpha)+\frac{1}{2}\lambda_i(\alpha)-\theta_i(\alpha)]\,|\,\alpha\in[0,1]\right\}$ *određuje* $\alpha$*-preseke fazi brojeva, i* $\tilde{x}_i = (\underline{x}_i^*+\frac{1}{2}\lambda_i+\theta_i, \overline{x}_i^*+\frac{1}{2}\lambda_i-\theta_i)$*, za sva* $i=1,\ldots,n$*.*

*Dokaz.* (i) Neka je $\Lambda$ rešenje $A\Lambda = O$. Neka je $X^{*\Lambda} = (\,\underline{x}_1^{*\Lambda},\ldots,\underline{x}_n^{*\Lambda},-\overline{x}_1^{*\Lambda},\ldots,-\overline{x}_n^{*\Lambda}\,)^T$, za svako $\Lambda$, $2n\times 1$ vektor definisan sa $\underline{X}^{*\Lambda} = \underline{X}^*+\frac{1}{2}\Lambda$ i $\overline{X}^{*\Lambda} = \overline{X}^*+\frac{1}{2}\Lambda$. Kako je $A(\overline{X}^*+\underline{X}^*) = \overline{Y}+\underline{Y}$, odnosno $\overline{X}^*+\underline{X}^*$ je jedno od rešenja familije linearnih sistema (68), sledi da je

$$\begin{aligned} A\left(\overline{X}^{*\Lambda}+\underline{X}^{*\Lambda}\right) &= A\left(\overline{X}^*+\frac{1}{2}\Lambda+\underline{X}^*+\frac{1}{2}\Lambda\right)\\ &= A\left(\overline{X}^*+\underline{X}^*\right)+A\Lambda\\ &= \overline{Y}+\underline{Y}. \end{aligned}$$

(ii) Neka je $\Theta$ rešenje sistema $|A|\Theta = W$, ne nužno jedinstveno. Za svako $\Theta$, neka $X^{*\Lambda,\Theta} = (\,\underline{x}_1^{*\Lambda,\Theta},\ldots,\underline{x}_n^{*\Lambda,\Theta},-\overline{x}_1^{*\Lambda,\Theta},\ldots,-\overline{x}_n^{*\Lambda,\Theta}\,)^T$ je $2n\times 1$ vektor definisan sa $\underline{X}^{*\Lambda,\Theta} = \underline{X}^{*\Lambda}+\Theta$ i $\overline{X}^{*\Lambda,\Theta} = \overline{X}^{*\Lambda}-\Theta$, za neko $X^{*\Lambda}$ dobijeno pod (i). Prema (i) sledi da je $\overline{X}^{*\Lambda}+\underline{X}^{*\Lambda}$ jedno od rešenja familije sistema (68) pa sledi

$$A\left(\overline{X}^{*\Lambda,\Theta}+\underline{X}^{*\Lambda,\Theta}\right) = A\left(\overline{X}^{*\Lambda}-\Theta+\underline{X}^{*\Lambda}+\Theta\right) = \overline{Y}+\underline{Y}.$$

Da bi se verifikovala druga jednakost (tj. $|A|\left(\overline{X}^{*\Lambda,\Theta}-\underline{X}^{*\Lambda,\Theta}\right) = \overline{Y}-\underline{Y}$), prvo ćemo pokazati da je vektor $W = (w_1(\alpha),\ldots,w_m(\alpha))^T$, $\alpha\in[0,1]$, definisan sa $W = \underline{Y}-\underline{S}X^*$, gde je $\underline{S} = [\,B\ \ C\,]$ $m\times 2n$ matrica i $B = A^+$, $C = A^-$. Dokazaćemo da je $W = \overline{S}X^*-\overline{Y}$, gde je $\overline{S} = [\,-C\ \ -B\,]$ $m\times 2n$ matrica. Kako je $\overline{X}^*+\underline{X}^*$ jedno od rešenja familije sistema (68), sledi

$$\begin{aligned}
\overline{Y}+\underline{Y} &= A(\overline{X}^*+\underline{X}^*)\\
&= A\overline{X}^*+A\underline{X}^*\\
&= [\,A \quad -A\,]\,X^*\\
&= [\,B-C \quad C-B\,]\,X^*\\
&= [\,B \quad C\,]\,X^*+[\,-C \quad -B\,]\,X^*.
\end{aligned}$$

Sada, pošto je $2W=\underline{Y}-\overline{Y}+\overline{S}X^*-\underline{S}X^*$, dobija se:

$$\begin{aligned}
|A|(\overline{X}^{*\Lambda,\Theta}-\underline{X}^{*\Lambda,\Theta}) &= |A|(\overline{X}^{*\Lambda}-\Theta-\underline{X}^{*\Lambda}-\Theta)\\
&= |A|(\overline{X}^*+\frac{1}{2}\Lambda-\Theta-\underline{X}^*-\frac{1}{2}\Lambda-\Theta)\\
&= |A|\overline{X}^*-|A|\underline{X}^*-2|A|\Theta\\
&= [\,-|A| \quad -|A|\,]\,X^*-2W\\
&= [\,-(B+C) \quad -(B+C)\,]\,X^*+\overline{Y}-\underline{Y}+\underline{S}X^*-\overline{S}X^*\\
&= [\,-B-C \quad -B-C\,]\,X^*+\overline{Y}-\underline{Y}+[\,B+C \; B+C\,]\,X^*\\
&= \overline{Y}-\underline{Y}.
\end{aligned}$$

(iii) ($\Leftarrow$) Pretpostavljamo da je $\tilde{X}$ vektor fazi brojeva, definisan sa $\tilde{x}_i=(\underline{x}_i,\overline{x}_i)=(\underline{x}_i^*+\frac{1}{2}\lambda_i+\theta_i,\overline{x}_i^*+\frac{1}{2}\lambda_i-\theta_i)$, $i=1,\dots,n$, za neko $\Lambda$ i $\Theta$ takvo da važi $A\Lambda=O$ i $|A|\Theta=W$. Prema (ii), sledi da $X^{*\Lambda,\Theta}=X=(\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_n,\dots,-\overline{x}_1,\dots,-\overline{x}_n)^T$ je rešenje familije sistema $SX=Y$ (4), što znači da je $\tilde{X}$ rešenje FLS-a (1).

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da je vektor fazi brojeva $\tilde{X}$ proizvoljno rešenje FLS-a (1), tada $\underline{X}$ i $\overline{X}$ moraju zadovoljavati familije sistema (68) i (69). Kako je rešenje u obliku Moore-Penroseovog inverza matrice, postoje $n\times 1$ vektori $V_1$ i $V_2$ takvi da važi:

$$\begin{aligned}
\overline{X}+\underline{X} &= A^\dagger(\overline{Y}+\underline{Y})+V_1,\\
\overline{X}-\underline{X} &= |A|^\dagger(\overline{Y}-\underline{Y})+V_2.
\end{aligned}$$

Važe sledeće oznake $H=A^\dagger$, $G=|A|^\dagger$. Sabiranjem i oduzimanjem prethodnih jednačina, i uzimajući u obzir da je $X^* = S_H Y$, dobija se, redom:

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{2}\Big(\left(A^\dagger + |A|^\dagger\right)\overline{Y} - \left(|A|^\dagger - A^\dagger\right)\underline{Y} + V_1 + V_2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big((H+|H|)\overline{Y} - (|H|-H)\underline{Y} + (G-|H|)(\overline{Y}-\underline{Y}) + V_1 + V_2\Big) \\
&= H^+\overline{Y} - H^-\underline{Y} + \frac{1}{2}(G-|H|)(\overline{Y}-\underline{Y}) + \frac{1}{2}(V_1+V_2) \\
&= \overline{X}^* + \frac{1}{2}(G-|H|)(\overline{Y}-\underline{Y}) + \frac{1}{2}(V_1+V_2) = \\
&= \overline{X}^* + \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}\Big((G-|H|)(\underline{Y}-\overline{Y}) - V_2\Big),
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\underline{X} &= \underline{X}^* + \frac{1}{2}(G-|H|)(\underline{Y}-\overline{Y}) + \frac{1}{2}(V_1-V_2) \\
&= \underline{X}^* + \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}\Big((G-|H|)(\underline{Y}-\overline{Y}) - V_2\Big).
\end{aligned}$$

Sada, neka su $\Lambda$ i $\Theta$ $n \times 1$ vektori takvi da je

$$\Lambda = V_1 \quad \text{i} \quad \Theta = \frac{1}{2}\Big((G-|H|)(\underline{Y}-\overline{Y}) - V_2\Big).$$

Na osnovu prethodnih razmatranja, jasno je da važi:

$$\overline{X} = \overline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda - \Theta, \tag{70}$$

$$\underline{X} = \underline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda + \Theta. \tag{71}$$

Sabiranjem (70) i (71), dobija se $\overline{X} + \underline{X} = \overline{X}^* + \underline{X}^* + \Lambda$. Kako su $\overline{X} + \underline{X}$ i $\overline{X}^* + \underline{X}^*$ rešenja familije sistema (68), važi

$$\begin{aligned}
\overline{Y} + \underline{Y} &= A(\overline{X} + \underline{X}) \\
&= A(\overline{X}^* + \underline{X}^* + \Lambda) \\
&= A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) + A\Lambda \\
&= \overline{Y} + \underline{Y} + A\Lambda,
\end{aligned}$$

prema tome, $A\Lambda = O$. Oduzimanjem (70) i (71) dobija se $\overline{X} - \underline{X} = \overline{X}^* - \underline{X}^* - 2\Theta$ i

$\overline{X} - \underline{X}$, jedno od rešenja familije sistema (69), pa je

$$\begin{aligned} \overline{Y} - \underline{Y} &= |A|(\overline{X} - \underline{X}) \\ &= |A|(\overline{X}^* - \underline{X}^* - 2\Theta) \\ &= |A|(\overline{X}^* - \underline{X}^*) - 2|A|\Theta \\ &= 2W + \overline{Y} - \underline{Y} - 2|A|\Theta. \end{aligned}$$

Ova činjenica implicira da važi $|A|\Theta = W$. Prema tome, trvđenje je zadovoljeno.

$\square$

Na osnovu prethodno dobijenih rezultata, predstavljamo efikasan algoritam koji opisuje originalni metod za rešavanje $m \times n$ fazi linearnog sistema, čiji su matrica koeficijenata $A$ i vektor fazi brojeva $\tilde{Y}$ proizvoljno dati.

**Algoritam 1**

Korak 1. Određujemo $X^* = S_H Y$. ($\leftrightarrow$ Za svako $i = 1, \ldots, n$ izračunati (62) i (63).) Ako je zadovoljeno $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$, sledi Korak 2.

Korak 2. Za svako rešenje $\Lambda = (\lambda_1(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$ familije klasičnih homogenih sistema $A\Lambda = O$, gde je $O = (0, \ldots, 0)^T$, $m \times 1$ nula vektor, računamo sledeće:

$$\underline{x}_i^{*\Lambda} = \underline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i, \quad \text{i} \quad \overline{x}_i^{*\Lambda} = \overline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i,$$

za $i = 1, \ldots, n$, gde su $\underline{x}_i^*$ i $\overline{x}_i^*$ određeni u Koraku 1.

Korak 3. Određujemo $W = (w_1(\alpha), \ldots, w_m(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, definisano sa $W = \underline{Y} - \underline{S}X^*$, gde je $X^*$ dobijeno u Koraku 1 i gde je $\underline{S} = [\,B \;\; C\,]$ ($B = A^+$, $C = A^-$) $m \times 2n$ matrica.

$$\begin{aligned} (\leftrightarrow \text{ Za svako } i &= 1, \ldots, m \text{ odrediti :} \\ w_i(\alpha) &= \underline{y}_i(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+ \, \underline{x}_j^*(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^- \, \overline{x}_j^*(\alpha).) \end{aligned}$$

Korak 4. Ako familija klasičnih sistema $|A|\Theta = W$, gde je $W = (w_1(\alpha), \ldots, w_m(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, ima rešenje $\Theta = (\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, tada za $i = 1, \ldots, n$

izračunati:

$$\underline{x}_i = \underline{x}_i^{*\Lambda} + \theta_i, \quad \text{i} \quad \overline{x}_i = \overline{x}_i^{*\Lambda} - \theta_i.$$

Ako za neko $\Lambda$ i $\Theta$, za sva $i = 1,\ldots,n$, familija intervala $\{[\underline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) + \theta_i(\alpha), \overline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) - \theta_i(\alpha)] \,|\, \alpha \in [0,1]\}$ određuje $\alpha$-preseke fazi broja, tada vektor fazi brojeva $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_n)^T$ jeste rešenje FLS-a (1). U suprotnom, FLS (1) nema rešenja.

Korak 5. Za sva određena $\Lambda$ i $\Theta$, dobijena Korakom 2 i Korakom 4, biraju se samo ona koja su dopustiva, odnosno ona za koja za svako $\alpha \in [0,1]$ važi:

$$\theta_i(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_i^*(\alpha) - \underline{x}_i^*(\alpha)}{2}, \text{ za svako } i = 1,\ldots,n,$$

a $\underline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) + \theta_i(\alpha)$, (odnosno, $\overline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) - \theta_i(\alpha)$) moraju biti ograničene nerastuće (odnosno, neopadajuće) levo-neprekidne funkcije, za svako $i = 1,\ldots,n$. Ukoliko ne postoje takva $\Lambda$ i $\Theta$, FLS (1) je nekonzistentan i tada se može pristupiti traženju njegovih aproksimativna rešenja.

## *3.3. Primeri*

Prethodno opisanu originalnu metodu ilustrujemo kroz nekoliko numeričkih primera. U Primeru 13, posmatrana su dva slučaja singularnog FLS-a. U prvom slučaju, matrica $A$ je regularna matrica dok je u drugom slučaju matrica $|A|$ regularna matrica. U Primeru 14 je prikazana univerzalnost predložene metode. Naime, u ovom primeru prikazano je da ako je početni vektor rešenje $X^0 = S^\dagger Y$, cela procedura može da se uradi analogno. Primer 15 prikazuje slučaj u kojima fazi linearni sistem nema rešenje. Na kraju, u Primeru 16 je prikazana primena dobijenih rezultata kod problema odlučivanja. Algoritam 2 (napisan za softver Python) može koristiti za određivanje Moore-Penroseovog inverza matrice punog ranga. Primeri su publikovani u [28].

---

Algoritam 2. Pravougaona matrica punog ranga

---

1. Ulaz: Matrica $A$ je dimenzija $(m \times n)$
2. Izračunati matrice $P$ i $Q$ upotrebom (17)

3. Izračunati podmatrice $W_2$, $W_4$, $T_3$ i $T_4$ upotrebom (19) i (20)
4. Odrediti uopšteni $\{1,\ 3\}$-inverz matrice $A$ upotrebom (29)
5. Odrediti uopšteni $\{1,\ 4\}$-inverz matrice $A$ upotrebom (28)

---

**Primer 13.** *a) Neka je dat sledeći fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} \tilde{x}_1 & - & \tilde{x}_2 & = & (-3+2\alpha, 1-2\sqrt{\alpha}) \\ -\tilde{x}_1 & - & \tilde{x}_2 & = & (-3+\sqrt{\alpha}+\alpha, 1-\alpha-\sqrt{\alpha}) \end{array}.$$

*Matrica koeficijenata $A$ je regularna, iako je matrica $|A|$ singularna. Prema tome, Moore-Penroseov inverz i klasičan inverz matrice $A$ su izjednačeni i oblika:*

$$A^{\dagger} = A^{-1} = H = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

*Izračunajmo $X^*$:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (-2+1.5\alpha+0.5\sqrt{\alpha},\ 2-1.5\sqrt{\alpha}-0.5\alpha), \\ \tilde{x}_2^* &= (-1+1.5\sqrt{\alpha}+0.5\alpha,\ 3-1.5\alpha-0.5\sqrt{\alpha}). \end{aligned}$$

*Kako je $A$ regularna, familija homogenih sistema $A\Lambda = O$ ima samo trivijalno rešenje $\Lambda_0 = (0,0)^T$. Prema tome, dobija se da je $\tilde{X}^{*\Lambda_0} = \tilde{X}^*$. Dalje, za svako $\alpha \in [0,1]$, dobijamo: $w_1(\alpha) = -3+2\alpha-(1.5\alpha+0.5\sqrt{\alpha}-2)+(-1.5\alpha-0.5\sqrt{\alpha}+3) = 2-\alpha-\sqrt{\alpha}$ i $w_2(\alpha) = \sqrt{\alpha}+\alpha-3+(-1.5\sqrt{\alpha}-0.5\alpha+2)+(-1.5\alpha-0.5\sqrt{\alpha}+3) = 2-\alpha-\sqrt{\alpha}$.*

*Sledeća familija klasičnih sistema:*

$$\begin{aligned} \theta_1(\alpha)+\theta_2(\alpha) &= 2-\alpha-\sqrt{\alpha} \\ \theta_1(\alpha)+\theta_2(\alpha) &= 2-\alpha-\sqrt{\alpha} \end{aligned},$$

*ima beskonačno mnogo rešenja $\Theta = (\theta_1(\alpha), \theta_2(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, takvih da je $\theta_i(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_i^*(\alpha)-\underline{x}_i^*(\alpha)}{2} = \frac{4-2\alpha-2\sqrt{\alpha}}{2}$, $i = 1,2$, za svako $\alpha \in [0,1]$, što je potrebno da uslov $\overline{x}_i(\alpha) \geq \underline{x}_i(\alpha)$ bude zadovoljen za $i = 1,2$ i svako $\alpha \in [0,1]$. Neka je klasa funkcija na $[0,1]$, gde je $0 \leq C_i \leq 1$, za $i = 1,2,3$ definisana sa:*

$$\begin{aligned} \theta_1(\alpha) &= 2C_1 - C_2\alpha - C_3\sqrt{\alpha}, \\ \theta_2(\alpha) &= 2-2C_1-(1-C_2)\alpha-(1-C_3)\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

*Iako je podklasa ovih funkcija za $C_2+C_3=2C_1$ dopustiva, rešenje za dati fazi linearni sistem dobiće se samo ako je monotonost $\underline{x}_i$ i $\overline{x}_i$ obezbeđena, dakle za $C_3=0.5$. Prema tome, računajući $\underline{x}_i=\underline{x}_i^*+\theta_i$ i $\overline{x}_i=\overline{x}_i^*-\theta_i$, za $i=1,2$, dobija se klasa rešenja sa beskonačnim brojem rešenja $\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)^T$ u sledećem obliku, gde je $0\leq K\leq 1$, $\alpha\in[0,1]$:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= ((1.5-K)\alpha-1.5+K,\ -\sqrt{\alpha}-(0.5-K)\alpha+1.5-K),\\ \tilde{x}_2 &= (\sqrt{\alpha}+(-0.5+K)\alpha+0.5-K,\ -(0.5+K)\alpha+1.5+K).\end{aligned}$$

*b) Neka je dat FLS, gde je $A$ singularna matrica a $|A|$ regularna matrica:*

$$\begin{array}{rcrcrcl}\tilde{x}_1 & & & - & 2\tilde{x}_3 & = & (1+3\alpha,7-3\alpha)\\ -\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & & & = & (-8+3\alpha,-2-3\alpha)\\ & & \tilde{x}_2 & - & 2\tilde{x}_3 & = & (-5+4\alpha,3-4\alpha)\end{array}.$$

*Moore-Penroseov inverz matrice koeficijenata $A$ je $A^\dagger=H$:*

$$H=\begin{bmatrix}0.2222 & -0.3333 & -0.1111\\ -0.1111 & 0.3333 & 0.2222\\ -0.2222 & 0.0000 & -0.2222\end{bmatrix}.$$

*Kako je $X^*$ reprezentativni vektor za $\tilde{X}^*$, dobijamo:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^* &= \frac{1}{9}(5+19\alpha,\ 43-19\alpha),\\ \tilde{x}_2^* &= \frac{1}{9}(-41+20\alpha,\ -1-20\alpha),\\ \tilde{x}_3^* &= \frac{1}{9}(-20+14\alpha,\ 8-14\alpha).\end{aligned}$$

*Dalje, $\Lambda=(4f(\alpha),4f(\alpha),2f(\alpha))^T$, $f(\alpha)\in\mathcal{F}^*$, je rešenje sistema $A\Lambda=O$, gde $\mathcal{F}^*$ (zavisi od $\tilde{X}^*$) označava klasu funkcija na jediničnom interval $y=f(\alpha)$, takvih da su adekvatne funkcije $\underline{x}^{*\Lambda}$ i $\overline{x}^{*\Lambda}$ ograničene nerastuće, odnosno neopadajuće, levo-neprekidne funkcije. Sledi:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^{*\Lambda} &= \frac{1}{9}(5+19\alpha+2f(\alpha),\ 43-19\alpha+2f(\alpha)),\\ \tilde{x}_2^{*\Lambda} &= \frac{1}{9}(-41+20\alpha+2f(\alpha),\ -1-20\alpha+2f(\alpha)),\\ \tilde{x}_3^{*\Lambda} &= \frac{1}{9}(-20+14\alpha+f(\alpha),\ 8-14\alpha+f(\alpha)).\end{aligned}$$

*Za svako* $\Lambda$*, sledi* $w_1(\alpha) = \frac{20}{9}(1-\alpha)$*,* $w_2(\alpha) = \frac{12}{9}(1-\alpha)$ *i* $w_3(\alpha) = \frac{12}{9}(1-\alpha)$*,* $\alpha \in [0,1]$*. Kako je matrica* $|A|$ *regularna, sistem* $|A|\Theta = W$ *ima jedinstveno rešenje* $\Theta = (\frac{10}{9}(1-\alpha), \frac{2}{9}(1-\alpha), \frac{5}{9}(1-\alpha))^T, \alpha \in [0,1]$*, koje zadovoljava potreban uslov* $\theta_i(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_i^*(\alpha) - \underline{x}_i^*(\alpha)}{2}$*, za svako* $i = 1,2,3$ *i svako* $\alpha \in [0,1]$*. Upotrebom Koraka 4, moguće je dobiti celu klasu rešenja SS:*

$$\mathcal{SS} = \{\,(\,\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3\,)^T \mid \tilde{x}_i = (\underline{x}_i^{*\Lambda} + \theta_i, \overline{x}_i^{*\Lambda} - \theta_i),\;\; y = f(\alpha) \in \mathcal{F}^*, \alpha \in [0,1]\},$$

*koje sadrže beskonačno mnogo vektora fazi brojeva* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3)^T$*, gde za* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$*,* $\alpha \in [0,1]$*, sledi:*

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= (\frac{15}{9} + \alpha + 2f(\alpha),\; \frac{33}{9} - \alpha + 2f(\alpha)\,),\\
\tilde{x}_2 &= (-\frac{39}{9} + 2\alpha + 2f(\alpha),\; -\frac{3}{9} - 2\alpha + 2f(\alpha)\,),\\
\tilde{x}_3 &= (-\frac{15}{9} + \alpha + f(\alpha),\; \frac{3}{9} - \alpha + f(\alpha)\,).
\end{aligned}$$

*Na primer, ako se uzme da je* $\Lambda_1 = (-\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{8}{3})^T$*,* $f_1(\alpha) = -\frac{4}{3}$*,* $\alpha \in [0,1]$*, dobija se rešenje* $\tilde{X}_{\Lambda_1}$ *(pogledati Sliku 6):*

$$\tilde{X}_{\Lambda_1} = ((-1+\alpha, 1-\alpha\,),\; (-7+2\alpha, -3-2\alpha),\; (-3+\alpha, -1-\alpha\,))^T.$$

**Primer 14.** *Dat je* $2 \times 3$ *fazi linearni sistem.*

$$\begin{array}{ccccccc}
2\tilde{x}_1 & & & - & \tilde{x}_3 & = & (\alpha, 2-\alpha) \\
\tilde{x}_1 & + & 3\tilde{x}_2 & & & = & (4+\alpha, 7-2\alpha)
\end{array}.$$

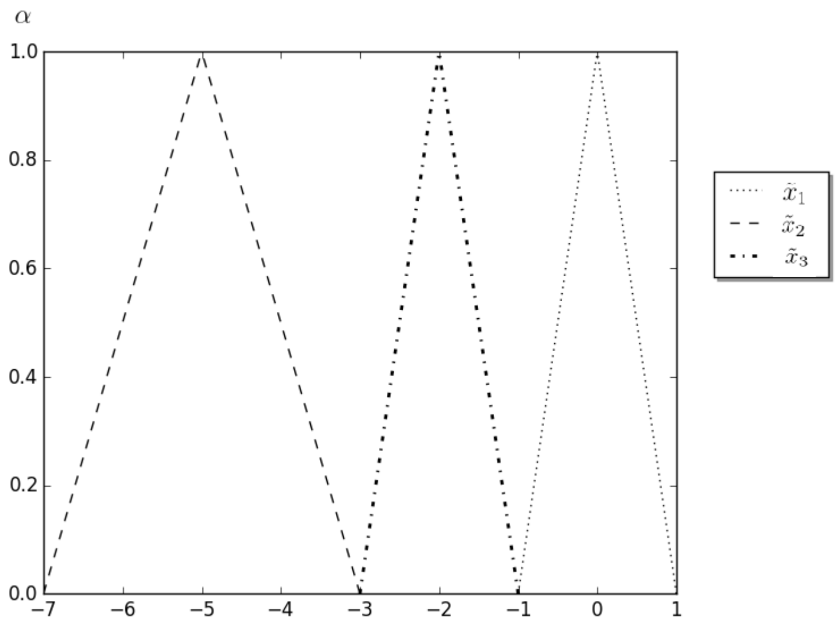
*Matrice B, C i S, sa celobrojnim vrednostima, prethodnog FLS-a iznose:*

$$A^+ = B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^- = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slika 6: Primer 13 b)




*Matrica $S^{(1,4)} = S^{\dagger}$, čiji je $r(S) = 4$, određuje se pomoću (28).*

*Matrice $P$, $Q$ i podmatrice $T_3$ i $T_4$, sa racionalnim vrednostima i preciznošću na tri decimale, date su sa:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.167 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.167 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & -15 \\ -0.5 & 0.167 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 46 & 0 \\ 0 & 1.278 \end{bmatrix}.$$

*Uopšteni $\{1,4\}$-inverz pridružene matrice $S$ je oblika:*

$$S^{(1,4)} = \begin{bmatrix} 0.391 & 0.022 & 0 & 0 \\ -0.130 & 0.326 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.217 & -0.043 \\ 0 & 0 & 0.391 & 0.022 \\ 0 & 0 & -0.130 & 0.326 \\ 0.217 & -0.043 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Jedno od rešenja familije sistema $SX = Y$ je $X^0 = S^{(1,4)}Y$ dato sa:*

$$\underline{X}^0 = \begin{bmatrix} 0.087 + 0.413\alpha \\ 1.304 + 0.196\alpha \\ -0.130 + 0.130\alpha \end{bmatrix}, \qquad \overline{X}^0 = \begin{bmatrix} 0.935 - 0.435\alpha \\ 2.022 - 0.522\alpha \\ 0.174 - 0.174\alpha \end{bmatrix}.$$

*Kako su $\underline{x}_i^0 \leq \overline{x}_i^0, i = 1,2,3,$ i kako su $\underline{x}_i^0, i = 1,2,3$ monotono rastuće funkcije i $\overline{x}_i^0, i = 1,2,3$ monotono opadajuće funkcije, $X^0$ je reprezentativni vektor od $\tilde{X}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0, \tilde{x}_3^0)^T$, što je i jedno od rešenja posmatranog FLS-a, dato sa:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^0 &= (\,0.0868 + 0.413\alpha,\ 0.9345 - 0.4347\alpha\,), \\ \tilde{x}_2^0 &= (\,1.304 + 0.1957\alpha,\ 2.0219 - 0.5218\alpha\,), \\ \tilde{x}_3^0 &= (\,-0.1303 + 0.1304\alpha,\ 0.174 - 0.1739\alpha\,). \end{aligned}$$

*Sada, cela procedura, opisana Algoritmom 1, može da se primeni na $\tilde{X}^0$, umesto na $\tilde{X}^*$. Primenom Koraka 2, dobija se $\Lambda = (-6f(\alpha), 2f(\alpha), -12f(\alpha))^T$, $f(\alpha) \in \mathcal{F}^0$, $\alpha \in [0,1]$. Dalje, po Koraku 3, sledi $W = (0,0,0)^T$, $\alpha \in [0,1]$. Primetimo da $\tilde{X}^0$, pa i svi $\tilde{X}^{0\Lambda}$, su već rešenja FLS-a. Prema Koraku 4, sledi da je $\Theta = (-3g(\alpha), g(\alpha), 6g(\alpha))^T$, $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{0\Lambda}$, $\alpha \in [0,1]$, takvo da su zadovoljena potrebna ograničenja:*

$$-3g(\alpha) \leq 0.424(1-\alpha),\ g(\alpha) \leq 0.359(1-\alpha),\ 6g(\alpha) \leq 0.152(1-\alpha). \quad (*)$$

*Rešenje $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ FLS-a, gde $f(\alpha) \in \mathcal{F}^0$, $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{0\Lambda}$, $\alpha \in [0,1]$, takvo da je $(*)$ zadovoljeno, ima sledeću formu:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (\,0.0868 + 0.413\alpha - 3f(\alpha) - 3g(\alpha),\ 0.9345 - 0.4347\alpha - 3f(\alpha) + 3g(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_2 &= (\,1.304 + 0.1957\alpha + f(\alpha) + g(\alpha),\ 2.0219 - 0.5218\alpha + f(\alpha) - g(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_3 &= (\,-0.1303 + 0.1304\alpha - 6f(\alpha) + 6g(\alpha),\ 0.174 - 0.1739\alpha - 6f(\alpha) - 6g(\alpha)\,). \end{aligned}$$

**Primer 15.** *Dat je fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{ccccc} 2\tilde{x}_1 & - & \tilde{x}_2 & = & (\alpha, 2-\alpha) \\ 2\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (-2+\alpha, 1-2\alpha) \end{array}.$$

*Matrica koeficijenata $A$ je regularna, dok je matrica $|A|$ singularna. Prema tome,*

$$A^{\dagger} = A^{-1} = H = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

*$X^*$ je dato sa:*

$$\begin{array}{ccl} \tilde{x}_1^* & = & (-0.5+0.5\alpha,\ 0.75-0.75\alpha), \\ \tilde{x}_2^* & = & (-2+\alpha,\ 0.5-1.5\alpha). \end{array}$$

*Kako je $A$ regularna, familija homogenih sistema $A\Lambda = O$ ima samo trivijalno rešenje $\Lambda_0 = (0,0)^T$. Prema tome, $\tilde{X}^{*\Lambda_0} = \tilde{X}^*$. Dalje, za svako $\alpha \in [0,1]$, imamo da su $w_1(\alpha) = 1.5 - 1.5\alpha$ i $w_2(\alpha) = 1 - \alpha$.*

*Sledeća familija klasičnih sistema*

$$\begin{array}{rcl} 2\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha) & = & 1.5 - 1.5\alpha \\ 2\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha) & = & 1 - \alpha \end{array},$$

*nema rešenje. U ovom slučaju može se pristupiti traženju aproksimativna rešenja datog fazi linearnog sistema, što nije predmet ove doktorske disertacije.*

**Primer 16.** *Razmatra se skup od dve različite valute, $Valuta_i$, $i = 1,2$ i tri različite menjačnjice, $Menjačnjica_j$, $j = 1,2,3$, sa merama važnosti svake od valuta po menjačnjici:*

| | $Valuta_1$ | $Valuta_2$ |
|---|---|---|
| $Menjačnjica_1$ | 0.5 | 0.5 |
| $Menjačnjica_2$ | 0.7 | 0.3 |
| $Menjačnjica_3$ | 0.6 | 0.4 |

,

*gde su spojene razlike deviznih kurseva (informacije se nepotpune, aproksimativno uzete (kupovni, srednji, prodajni kurs)) u svim tim menjačnjicama poznate. Odgovarajući FLS je:*

$$
\begin{aligned}
&0.5\tilde{x}_1 + 0.5\tilde{x}_2 = (0.75 + 1.25\alpha, 3.25 - 1.25\alpha) \\
&0.7\tilde{x}_1 + 0.3\tilde{x}_2 = (0.85 + 1.15\alpha, 3.15 - 1.15\alpha) \ . \\
&0.6\tilde{x}_1 + 0.4\tilde{x}_2 = (0.8 + 1.2\alpha, 3.2 - 1.2\alpha)
\end{aligned}
$$

*Prema tome,*

$$
H = \begin{bmatrix} -1.6667 & 2.3333 & 0.3333 \\ 3.3333 & -2.6667 & 0.3333 \end{bmatrix}.
$$

*Dobija se:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1^* &= (\,-3.16667 + 5.16667\alpha,\ 7.16667 - 5.16667\alpha\,), \\
\tilde{x}_2^* &= (\,-5.63333 + 7.63333\alpha,\ 9.63333 - 7.63333\alpha\,).
\end{aligned}
$$

*Kako je* $\Lambda_0 = (0,0)^T$ *jedinstveno rešenje sistema* $A\Lambda = O$, $\alpha \in [0,1]$, *sledi da je* $\tilde{X}^{*\Lambda_0} = \tilde{X}^*$. *Dalje, za svako,* $\alpha \in [0,1]$, *imamo:*

$$
\begin{aligned}
w_1(\alpha) &= -5.15\alpha + 5.15 = 5.15(1-\alpha), \\
w_2(\alpha) &= 4.756668 - 4.756668\alpha = 4.756668(1-\alpha), \\
w_3(\alpha) &= 4.953334 - 4.953334 = 4.953334(1-\alpha).
\end{aligned}
$$

*Sledeća familija linearnih sistema:*

$$
\begin{array}{lcrcr}
0.5\theta_1(\alpha) & + & 0.5\theta_2(\alpha) & = & 5.15(1-\alpha) \\
0.7\theta_1(\alpha) & + & 0.3\theta_2(\alpha) & = & 4.756668(1-\alpha) \ , \\
0.6\theta_1(\alpha) & + & 0.4\theta_2(\alpha) & = & 4.953334(1-\alpha)
\end{array}
$$

*ima jedinstveno dopustivo rešenje* $\Theta = (4.16667(1-\alpha),\ 6.13333(1-\alpha)\,)^T$, $\alpha \in [0,1]$. *Jedinstveno rešenje FLS-a je* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$, *gde su* $\tilde{x}_1 = (\,1+\alpha, 3-\alpha), \tilde{x}_2 = (\,0.5 + 1.5\alpha,\ 3.5 - 1.5\alpha\,)$, $\alpha \in [0,1]$. *Fazi-vrednosne razlike deviznih kurseva (kupovni, srednji, prodajni) su trougaoni fazi brojevi i to za Valuta*$_1$ *je* $(1,2,3)$, *dok za Valuta*$_2$ *je* $(0.5, 2, 3.5)$.

# *POGLAVLJE IV*

## 4. METODA ZA REŠAVANJE KVADRATNIH FLS-a PRIMENOM UOPŠTENOG INVERZA MATRICE

U četvrtom poglavlju disertacije prezentujemo metodu za rešavanje kvadratnih fazi linearnih sistema (1) upotrebom uopštenih inverza matrice. Prvo, prikazujemo novu metodu za rešavanje kvadratnog FLS-a, koja se zasniva na upotrebi grupnog inverza matrice. Originalni rezultati su publikovani u [29]. Zatim opisujemo postupak rešavanje specijalnog slučaja kvadratnog fazi linearnog sistema, kada mu je pridružena matrica $S$ singularna EP matrica. Originalni rezultati ovog dela su publikovani u [32]. Na kraju ovog poglavlja predstavljamo uopštenje metode za rešavanje kvadratnog FLS upotrebom bilo kojeg uopštenog $\{1\}$-inverza matrice. Originalni rezultati su publikovani u [33].

Podsećamo da za bilo koji vektor fazi brojeva $\tilde{X}$ pridruženi $2n \times 1$ klasičan funkcionalni vektor $X = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, \ldots, -\overline{x}_n)^T$ naziva se reprezentativnim vektorom vektora fazi brojeva $\tilde{X}$. Pridruženi $n \times 1$ klasični funkcionalni vektori $\underline{X}$ i $\overline{X}$ definisani su sa $\underline{X} = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)^T$, odnosno sa $\overline{X} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)^T$. Ako je vektor fazi brojeva $\tilde{X}$ rešenje FLS-a (1), čija je matrica koeficijenata $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, tada pridruženi $2n \times 1$ funkcionalni vektor $X = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, -\overline{x}_1, \ldots, -\overline{x}_n)^T$, mora biti rešenje familije klasičnih linearnih sistema (4), gde je matrica $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$ oblika (5).

Indeks matrice $A$, obeležen sa $ind(A)$, jeste najmanji nenegativni broj $k$ za koji važi $rang(A^{k+1}) = rang(A^k)$ (pogledati Definiciju 11). Napominjemo da kada je matrica $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ regularna tada je njen indeks jednak 0 ($ind(A) = 0$), a rang joj je $n$ ($rang(A) = n$). Indeks nula matrice iznosi 1 ($ind(O) = 1$) jer je $A^0 = I_n$ i kada je matrica $A$ nula matrica, a rank nula matrice je 0 ($rang(O) = 0$). Rang jedinične matrice $I_n$ je $n$ ($rang(I_n) = n$). Prema Definiciji 11 zaključujemo da je matrica $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ indeksa 1 ako i samo ako $rang(A^1) = rang(A^2)$. Takođe, matrica $A$ je indeksa 0 ako i samo ako je $rang(A^1) = rang(A^0) = n$. Grupni inverz matrice $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ postoji ako i samo ako je $ind(A) \leq 1$, gde trivijalno kada je $ind(A) = 0$, njen grupni inverz je jednak njenom klasičnom inverzu ($A^\sharp = A^{-1}$).

**Teorema 26.** *[9] Kvadratna singularna matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times n}$ ima grupni inverz ($A^\sharp$) ako i samo ako je $ind(A) = 1$.*

**Lema 4.** *Neka je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $|A| = [|a_{ij}|] \in \mathcal{M}^{n\times n}$, i pridružena matrica $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$. Tada važi:*

$$ind(S) = 0 \text{ ako i samo ako } ind(A) = 0 \text{ i } ind(|A|) = 0.$$

*Dokaz.* Friedman i dr. [20] dokazali su da je matrica $S$ regularna ako i samo ako su obe matrice $|A|$ i $A$ regularne. Kako za bilo koju regularnu matricu važi $ind(A) = 0$ ($rang(A^1) = rang(A^0) = rang(I_n) = n$), tvrđenje važi.

□

## 4.1. Rešavanje FLS-a upotrebom grupnog inverza matrice

Prvi deo ovog poglavlja posvećujemo prikazivanju metode za rešavanje kvadratnog fazi linearnog sistema (1, čija je matrica koeficijenata $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, upotrebom kombinacije uopštenih {1}-inverza, {2}-inverza i {5}-inverza, koja se naziva grupni inverz matrice. Pomoću blokovske reprezentacije grupnog inverza matrice formulisan je potreban i dovoljan uslov za postojanje rešenja kvadratnog fazi linearnog sistema, dobijena je tačna algebarska forma rešenja i prezentovan je efikasan algoritam za određivanje svih rešenja kvadratnog fazi linearnog sistema. Ovu novu metodu ilustrujemo kroz brojne numeričke primere. Originalni rezultati su publikovani u [29].

Teoremom 27 dajemo potreban i dovoljan uslov za blokovsku strukturu grupnog inverza matrice $S$, pridružene singularne matrice kvadratnom FLS-u (1), kada je $ind(S) = 1$. Grupni inverz date matrice $S$ u nastavku obeležavamo sa $S^\sharp$.

**Teorema 27.** *Neka je $S$ pridružena matrica kvadratnog, singularnog FLS-a (1) čiji je $ind(S) = 1$. Grupni inverz singularne matrice $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$ definisan je sa:*

$$S^{\sharp} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} \tag{72}$$

*ako i samo ako*

$$D = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{\sharp} + (B-C)^{\sharp}\right] \quad i \quad E = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{\sharp} - (B-C)^{\sharp}\right]. \tag{73}$$

*Dokaz.* $\Rightarrow$ Neka je $S$ kvadratna, singularna matrica pridružena FLS-u (1) oblika (5). Pretpostavimo da je grupni inverz matrice $S$ ($S^{\sharp}$) dat u obliku (72), gde su matrice $D, E \in \mathcal{M}^{n\times n}$. Dokažimo da su matrice $D$ i $E$ definisane sa (73).

Osobina (P1) daje jednačine (35) i (36) (pogledati dokaz Teoreme 19). Osobina (P2) nam daje jednačine (54) i (55) (pogledati dokaz Teoreme 20).

Osobina (P5) implicira:

$$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}.$$

Prema tome

$$BD + CE = DB + EC,$$
$$BE + CD = DC + EB.$$

Sabiranjem i oduzimanjem poslednje dve jednačine dobijamo jednačine (74) i (75):

$$(B+C)(D+E) = (D+E)(B+C), \tag{74}$$
$$(B-C)(D-E) = (D-E)(B-C). \tag{75}$$

Očigledno je da jednačine (35), (36), (54), (55), (74) i (75) impliciraju:

$$(B+C)^{\sharp} = D+E,$$
$$(B-C)^{\sharp} = D-E,$$

pa, sabiranjem i oduzimanjem prethodne dve jednačine, dobijamo:

$$D = \frac{1}{2}\left((B+C)^{\sharp} + (B-C)^{\sharp}\right),$$
$$E = \frac{1}{2}\left((B+C)^{\sharp} - (B-C)^{\sharp}\right).$$

$\Leftarrow$ Sledi dokaz da ako su matrice $D$ i $E$ oblika (73), tada matrica

$$G = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

jeste $S^\sharp$.

Sabiranjem i oduzimanjem jednačina $D = \frac{1}{2}\left[(B+C)^\sharp + (B-C)^\sharp\right]$ i $E = \frac{1}{2}\left[(B+C)^\sharp - (B-C)^\sharp\right]$, dobijamo:

$$D + E = (B+C)^\sharp, \tag{76}$$

$$D - E = (B-C)^\sharp. \tag{77}$$

Dokaz osobine (P1), odnosno $SGS = S$, dat je u dokazu Teoreme 19. Dokaz osobine (P2), odnosno $SG = GS$, dat je u dokazu Teoreme 20. Dokaz osobine (P5), odnosno $SG = GS$, sledi. Jednačine (76) i (77) daju:

$$(B+C)(D+E) = (D+E)(B+C),$$
$$(B-C)(D-E) = (D-E)(B-C),$$

pa je

$$\begin{aligned} BD + CE &= \frac{1}{2}(B+C)(D+E) + \frac{1}{2}(B-C)(D-E) \\ &= \frac{1}{2}(D+E)(B+C) + \frac{1}{2}(D-E)(B-C) \\ &= DB + EC, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} BE + CB &= \frac{1}{2}(B+C)(D+E) - \frac{1}{2}(B-C)(D-E) \\ &= \frac{1}{2}(D+E)(B+C) - \frac{1}{2}(D-E)(B-C) \\ &= DC + EB, \end{aligned}$$

što implicira da važi $SG = GS$, odnosno osobina (P5), čime je kompletiran dokaz tvrđenja $G = S^\sharp$. $\square$

**Posledica 11.** *Neka je data matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times n}$, $|A| = [|a_{ij}|] \in \mathcal{M}^{n\times n}$, i pridružena matrica $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$ oblika (72). Tada važi:*

$$ind(S) \le 1 \text{ ako i samo ako } ind(A) \le 1 \text{ i } ind(|A|) \le 1.$$

Na osnovu Posledice 11 i Leme 4 može se zaključiti da važi da je $ind(S) = 1$ ako i samo ako $(ind(A), ind(|A|)) \in \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Sledi teorema koja obezbeđuje dovoljan uslov za dobijanje reprezentativnog vektor rešenja $X^0$ familije klasičnih linearnih sistema (4) za bilo koji proizvoljni reprezentativni vektor $Y$.

**Teorema 28.** *Neka je $S$ pridružena matrica, čiji je $ind(S) = 1$, kvadratnom, konzistentnom i singularnom FLS-u (1), za dati $\tilde{Y}$. Ako je $S^\sharp$ nenegativna matrica, tada, jedno od rešenja familije klasičnih linearnih sistema (4) jeste reprezentativni vektor $X^0 = S^\sharp Y$, i tada vektor fazi brojeva $\tilde{X}^0$ jeste jedno od rešenja FLS-a (1).*

*Dokaz.* Dokaz je analogan dokazu Teoreme 21. □

U nastavku određujemo jedan vektor fazi brojeva, koji će služiti kao početni vektor za određivanje svih rešenja. Neka je $A^\sharp = M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times n}$ i $|M| = [|m_{ij}|]$. Kako je $M = M^+ - M^- = [m_{ij}^+] - [m_{ij}^-]$ i $|M| = M^+ + M^- = [m_{ij}^+] + [m_{ij}^-]$, matricu $S_M \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$ definišemo na sledeći način:

$$S_M = \begin{bmatrix} M^+ & M^- \\ M^- & M^+ \end{bmatrix}, \tag{78}$$

gde su $M^+ = [m_{ij}^+]$ i $M^- = [m_{ij}^-]$, za svako $i, j = 1, \ldots, n$.
Dokaz Teoreme 29 dajemo u matričnoj formi. Napominjemo da je $\overline{X} \geq \underline{X}$ je zadovoljeno ako i samo ako važi da je $\overline{x}_i \geq \underline{x}_i$, za svako $\alpha \in [0,1]$.

**Teorema 29.** *Neka je $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ matrica koeficijenata kvadratnog, konzistentnog i singularnog FLS-a (1) za dato $\tilde{Y}$, takva da važi $(ind(A), ind(|A|)) \in \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$. Neka je $X^* = S_M Y$, gde je matrica $S_M$ oblika (78) i gde je $M = A^\sharp$. Sledeća tvrđenja važe:*

*(i) $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \ldots, \tilde{x}_n^*)^T$ jeste vektor fazi brojeva.*

*(ii) Ako je zadovoljeno $|A|^\sharp = |A^\sharp|$, tada $\tilde{X}^*$ jeste rešenje FLS-a (1).*

*Dokaz.* (i) Neka je $X^* = S_M Y$. Važi da je:

$$\underline{X}^* = [M^+ \ M^-]Y, \tag{79}$$

$$\overline{X}^* = [-M^- \ -M^+]Y. \tag{80}$$

Oduzimanjem (80) i (79) dobijamo:

$$\begin{aligned}\overline{X}^* - \underline{X}^* &= [-M^- \ \ -M^+]\,Y - [M^+ \ \ M^-]\,Y \\ &= [-(M^+ + M^-) \ \ -(M^+ + M^-)]\,Y = [-|M| \ \ -|M|\,]\,Y,\end{aligned}$$

pa je

$$\overline{X}^* - \underline{X}^* \;=\; |M|\left(\overline{Y} - \underline{Y}\right). \tag{81}$$

Kako za svako $\alpha \in [0,1]$ važi $\overline{Y} \geq \underline{Y}$ i matrica $|M|$ je nenegativna, dobijamo da je $\overline{X}^* \geq \underline{X}^*$, za svako $\alpha \in [0,1]$. Prema jednačinama (79) i (80), jer su matrice $M^+$ i $M^-$ nenegativne, važi da je za svako $i$, $\underline{x}_i^*(\alpha)$ (odnosno $\overline{x}_i^*(\alpha)$) neopadajuća (odnosno nerastuća) i levo-neprekidna funkcija kao linearna kombinacija neopadajućih (odnosno nerastućih) levo-neprekidnih funkcija na jediničnom intervalu. Prema tome, $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \ldots, \tilde{x}_n^*)^T$, gde je $\tilde{x}_i^* = (\underline{x}_i^*, \overline{x}_i^*)$, $i = 1, \ldots, n$, vektor fazi brojeva.

(ii) Sabiranjem jednačina (79) i (80) dobijamo:

$$\begin{aligned}\overline{X}^* + \underline{X}^* &= [-M^- \ \ -M^+]\,Y + [M^+ \ \ M^-]\,Y \\ &= [\,(M^+ - M^-) \ \ -(M^+ - M^-)]\,Y = [\,M \ \ -M\,]\,Y.\end{aligned}$$

Sledi da je

$$\overline{X}^* + \underline{X}^* \;=\; M\left(\overline{Y} + \underline{Y}\right). \tag{82}$$

Uslov $(ind(A), ind(|A|)) \in \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ implicira $ind(S) = 1$ (Posledica 11 i Lema 4). Prema Teoremi 27 sledi da je matrica $S^\sharp$ oblika:

$$S^\sharp = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

gde su $D + E = |A|^\sharp$ i $D - E = A^\sharp$. Kako je $A^\sharp = M$, i služeći se pretpostavkom da je $|\,A\,|^\sharp = |\,A^\sharp\,| = |\,M\,|$, tada je

$$|M| = M^+ + M^- = D + E \quad \text{i} \quad M = M^+ - M^- = D - E.$$

Dobijamo da su matrice $D$ i $E$ izjednačene sa matricama $M^+$ i $M^-$, redom ($D = M^+$ i $E = M^-$). Kako je $S^\sharp = S_M$, sledi da je matrica $S_M$ oblika: $S_M = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}$.

$SX = Y$ je familija konzistentnih sistema, pa je $X^*$ je jedno od njegovih rešenja. Jednačina (82) implicira:

$$\overline{Y} + \underline{Y} = A\left(\overline{X}^* + \underline{X}^*\right), \tag{83}$$

dok, (81) implicira:

$$\overline{Y} - \underline{Y} = |A|\left(\overline{X}^* - \underline{X}^*\right). \tag{84}$$

Za svako $A$, $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, važi $A^+ = \dfrac{1}{2}(A + |A|)$ i $A^- = \dfrac{1}{2}(|A| - A)$. Sabiranjem i oduzimanjem (83) i (84) dobijamo:

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= A^+\overline{X}^* - A^-\underline{X}^* = \left[-A^- \ \ -A^+\right] X^*, \\ \underline{Y} &= -A^-\overline{X}^* + A^+\underline{X}^* = \left[A^+ \ A^-\right] X^*. \end{aligned}$$

Prema tome, tvrđenje važi. □

Sledi teorema kojom je dat potreban i dovoljan uslov za postojanje rešenja kvadratnog FLS-a (1), čija je pridružena matrica $ind(S) \leq 1$.

**Lema 5.** *Neka je $A$ matrica koeficijenata kvadratnog i konzistentnog FLS-a (1) za dato $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)^T$. Neka je $X^* = S_M Y$, gde je $S_M$ oblika (78). Tada je (68) familija konzistentnih klasičnih linearnih sistema i važi $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$.*

*Dokaz.* Dokaz je analogan dokazu Leme 3. □

**Teorema 30.** *Neka je $A$ matrica koeficijenata kvadratnog FLS-a (1), takvog da je $ind(S) \leq 1$, za dato $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)^T$. Neka je $X^* = S_M Y$, gde je $S_M$ oblika (78), takvo da važi $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$. Neka su $\Lambda = (\lambda_1(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha))^T$, i $\Theta = (\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, rešenja sistema $A\Lambda = O$ i $|A|\Theta = W$, redom, gde $O = (0, \ldots, 0)^T$ je $n \times 1$ nula vektor, i $W = (w_1(\alpha), \ldots, w_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, definisan sa $W = \underline{Y} - [\,A^+ \ A^-\,]X^*$ ( gde $[\,A^+ \ A^-\,]$ je $n \times 2n$ matrica). Sledeća tvrđenja važe:*

*(i) Za svaki $2n \times 1$ vektor $X^{*\Lambda} = (\underline{x}_1^{*\Lambda}, \ldots, \underline{x}_n^{*\Lambda}, -\overline{x}_1^{*\Lambda}, \ldots, -\overline{x}_n^{*\Lambda})^T$, definisan sa $\underline{X}^{*\Lambda} = \underline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda$ i $\overline{X}^{*\Lambda} = \overline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda$, važi:*

$$A\left(\overline{X}^{*\Lambda} + \underline{X}^{*\Lambda}\right) = \overline{Y} + \underline{Y}.$$

*(ii)* *Za svaki* $2n \times 1$ *vektor* $X^{*\Lambda,\Theta} = (\underline{x}_1^{*\Lambda,\Theta}, \ldots, \underline{x}_n^{*\Lambda,\Theta}, -\overline{x}_1^{*\Lambda,\Theta}, \ldots, -\overline{x}_n^{*\Lambda,\Theta})^T$, *definisan sa* $\underline{X}^{*\Lambda,\Theta} = \underline{X}^{*\Lambda} + \Theta$ *i* $\overline{X}^{*\Lambda,\Theta} = \overline{X}^{*\Lambda} - \Theta$, *gde je* $X^{*\Lambda}$ *dobijeno pod (i), važi:*

$$A\left(\overline{X}^{*\Lambda,\Theta} + \underline{X}^{*\Lambda,\Theta}\right) = \overline{Y} + \underline{Y},$$
$$|A|\left(\overline{X}^{*\Lambda,\Theta} - \underline{X}^{*\Lambda,\Theta}\right) = \overline{Y} - \underline{Y}.$$

*(iii)* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$, $\tilde{x}_i = (\underline{x}_i, \overline{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *je rešenje FLS-a (1) ako i samo ako postoje* $\Lambda = (\lambda_1(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha))^T$ *i* $\Theta = (\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_n(\alpha))^T$, *takvi da* $A\Lambda = O$ *i* $|A|\Theta = W$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$, *i familija intervala* $\left\{[\underline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) + \theta_i(\alpha),\ \overline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) - \theta_i(\alpha)] \mid \alpha \in [0,1]\right\}$ *određuje* $\alpha$*-preseke fazi brojeva, i* $\tilde{x}_i = (\underline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i + \theta_i, \overline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i - \theta_i)$, *za sva* $i = 1, \ldots, n$.

*Dokaz.* Koristeći činjenicu da je $M = A^\sharp$, dokaz ove teoreme je analogan dokazu Teoreme 25. □

**Algoritam 3**

Korak 1. Određujemo $X^* = S_M Y$. ($\leftrightarrow$ Za svako $i = 1, \ldots, n$ izračunati (79) i (80)). Ako je zadovoljeno $A(\overline{X}^* + \underline{X}^*) = \overline{Y} + \underline{Y}$, sledi Korak 2.

Korak 2. Za svako rešenje $\Lambda = (\lambda_1(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$ familije klasičnih homogenih sistema $A\Lambda = O$, gde je $O = (0, \ldots, 0)^T$, $n \times 1$ nula vektor, računamo sledeće:

$$\underline{x}_i^{*\Lambda} = \underline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i, \quad \text{i} \quad \overline{x}_i^{*\Lambda} = \overline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i,$$

za $i = 1, \ldots, n$, gde je $\underline{x}_i^*$ i $\overline{x}_i^*$ određeno u Koraku 1.

Korak 3. Određujemo $W = (w_1(\alpha), \ldots, w_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, koje je definisano sa $W = \underline{Y} - \underline{S}X^*$, gde je $X^*$ dobijeno u Koraku 1 i $\underline{S} = [\,B\ \ C\,]$ ($B = A^+$, $C = A^-$) je $n \times 2n$ matrica.

$$\begin{aligned}
(\leftrightarrow\ \text{Za svako } i &= 1, \ldots, m \text{ odrediti :}\\
w_i(\alpha) &= \underline{y}_i(\alpha) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^+\ \underline{x}_j^*(\alpha) + \sum_{j=1}^{n}\ a_{ij}^-\ \overline{x}_j^*(\alpha).)
\end{aligned}$$

Korak 4. Ako je rešenje $\Theta = (\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, familije klasičnih sistema $|A|\Theta = W$, gde je $W = (w_1(\alpha), \ldots, w_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, tada za $i = 1, \ldots, n$ odrediti:

$$\underline{x}_i = \underline{x}_i^{*\Lambda} + \theta_i, \quad \text{i} \quad \overline{x}_i = \overline{x}_i^{*\Lambda} - \theta_i.$$

Korak 5. Za sva određena $\Lambda$ i $\Theta$, dobijena Korakom 2 i Korakom 4, biraju se samo ona koja su dopustiva, odnosno ona za koja za svako $\alpha \in [0,1]$ važi:

$$\theta_i(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_i^*(\alpha) - \underline{x}_i^*(\alpha)}{2}, \text{ za svako } i = 1, \ldots, n,$$

a $\underline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) + \theta_i(\alpha)$, (odnosno, $\overline{x}_i^*(\alpha) + \frac{1}{2}\lambda_i(\alpha) - \theta_i(\alpha)$) moraju biti ograničene nerastuće (odnosno, neopadajuće) levo-neprekidne funkcije, za svako $i = 1, \ldots, n$.

**Primeri**

U nastavku prikazujemo primere kojima ilustrujemo efikasnost prethodno opisane metode za rešavanje kvadratnog fazi linearnog sistema. U Primeru 17 rešen je singularni FLS, takav da su mu obe matrice $A$ i $|A|$ singularne i $ind(S) = 1$. U Primeru 18, Primer 13b, je ponovo rešen pomoću grupnog inverza matrice $A$. Primeri su publikovani u [29].

Dajemo Algoritam 4 (napisan za softver Python) koji se koristi za određivanje grupnog inverza matrice $A$, $ind(A) \leq 1$, putem blokovske reprezentacije matrica.

---

Algoritam 4. Matrica $A$ je singularna sa $ind(A) = 1$

---

1. Ulaz: Matrica $A$ je dimenzija $(n \times n)$
2. Odrediti matrice $P$ i $Q$ upotrebom (17)
3. Odrediti podmatrice $V_1$, $V_2$, $V_3$ i $V_4$ upotrebom (30)
4. Odrediti grupni inverz matrice $A$ upotrebom (31)

---

**Primer 17.** *Dat je singularni $2 \times 2$ fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} -2\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (-1 + 3\alpha,\ 3 - \alpha) \\ 4\tilde{x}_1 & - & 2\tilde{x}_2 & = & (-6 + 2\alpha,\ 2 - 6\alpha) \end{array}.$$

*Primenom Algoritma 4, grupni inverz matrice A određen je na sledeći način:*

$$M = A^{\sharp} = \begin{bmatrix} -0.125 & 0.0625 \\ 0.25 & -0.125 \end{bmatrix},$$

*gde su matrice $P$, $Q$ i podmatrice $V_1$, $V_2$, $V_3$ i $V_4$ date sa:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

*i*

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -0.25 \end{bmatrix}, \quad V_3 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}.$$

*Vektor fazi brojeva $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*)^T$ je:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (\,-0.75 + 0.25\alpha,\ 0.25 - 0.75\alpha\,), \\ \tilde{x}_2^* &= (\,-0.5 + 1.5\alpha,\ 1.5 - 0.5\alpha\,). \end{aligned}$$

*Korakom 2 dobijamo da je rešenja familije klasičnih sistema $A\Lambda = 0$, $\Lambda = (2f(\alpha), 4f(\alpha))^T$, za proizvoljnu funkciju $f(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, gde je $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$ ( $\mathcal{F}^*$ označava klasu dopustivih funkcija koje zavise od $\tilde{X}^*$, takvih da su adekvatne funkcije $\underline{x}^{*\Lambda}$ i $\overline{x}^{*\Lambda}$ ograničene nerastuće, odnosno neopadajuće, levo-neprekidne funkcije, za svako $i = 1, \ldots, n$). Sledi:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^{*\Lambda} &= (\,-0.75 + 0.25\alpha + f(\alpha),\ 0.25 - 0.75\alpha + f(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_2^{*\Lambda} &= (\,-0.5 + 1.5\alpha + 2f(\alpha),\ 1.5 - 0.5\alpha + 2f(\alpha)\,). \end{aligned}$$

*Za svako $\Lambda$ i $\alpha \in [0,1]$, dobija se:*

$$\begin{aligned} w_1(\alpha) &= -1 + 3\alpha - (1.5\alpha - 0.5) - 1.5\alpha + 0.5 = 0, \\ w_2(\alpha) &= -6 + 2\alpha - (\alpha - 3) - \alpha + 3 = 0. \end{aligned}$$

*Primetimo da je $W = (0,0)^T$, $\alpha \in [0,1]$, što znači da dobijeno $\tilde{X}^*$ i $\tilde{X}^{*\Lambda}$, za svako $\Lambda = (2f(\alpha), 4f(\alpha))^T$, $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$, jeste rešenje posmatranog FLS-a.*
*Opšta forma bilo kojeg rešenja sledeće familije klasičnih linearnih sistema:*

$$\begin{array}{ccccc} 2\theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & = & 0 \\ 4\theta_1(\alpha) & + & 2\theta_2(\alpha) & = & 0 \end{array},$$

*jeste $\Theta = (g(\alpha), -2g(\alpha))^T$, gde $g(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$ je proizvoljna funkcija na jediničnom intervalu. Neka $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*\Lambda}$, $\alpha \in [0,1]$ ($\mathcal{F}^{*\Lambda}$ zavisi od $\tilde{X}^{*\Lambda}$). Dodatno potrebno* *ograničenje je:*

$$\theta_1(\alpha) \le \frac{\overline{x}_1^*(\alpha) - \underline{x}_1^*(\alpha)}{2} = \frac{1-\alpha}{2},$$
$$\theta_2(\alpha) \le \frac{\overline{x}_2^*(\alpha) - \underline{x}_2^*(\alpha)}{2} = 1-\alpha.$$

*Kako je* $\theta_2(\alpha) = -2\theta_1(\alpha)$*,* $\alpha \in [0,1]$*, dobija se* $0.5\alpha - 0.5 \le \theta_1(\alpha) \le 0.5 - 0.5\alpha$*, za svako* $\alpha \in [0,1]$*. Na posletku,* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T \in SS$*, gde je* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$*,* $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*\Lambda}$*, i* $0.5\alpha - 0.5 \le g(\alpha) \le -0.5\alpha + 0.5$*, za svako* $\alpha \in [0,1]$*:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (\,-0.75 + 0.25\alpha + f(\alpha) + g(\alpha),\ 0.25 - 0.75\alpha + f(\alpha) - g(\alpha)\,),\\ \tilde{x}_2 &= (\,-0.5 + 1.5\alpha + 2f(\alpha) - 2g(\alpha),\ 1.5 - 0.5\alpha + 2f(\alpha) + 2g(\alpha)\,).\end{aligned}$$

*Na primer, (pogledati Sliku 7) za dopustivo* $g(\alpha) = \frac{\alpha-1}{4}$*, i* $\Lambda = (1 - 0.5\alpha, 2-\alpha)^T$*,* $\alpha \in [0,1]$*, dobija se:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (\,-0.5 + 0.25\alpha,\ 1 - 1.25\alpha\,),\\ \tilde{x}_2 &= (\,1 + 0.5\alpha,\ 2 - 0.5\alpha\,),\end{aligned}$$

*za* $g(\alpha) = \frac{\alpha-1}{4}$*, i* $\Lambda = (-4, -8)^T$*,* $\alpha \in [0,1]$*, dobija se:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (\,-3 + 0.5\alpha,\ -1.5 - \alpha\,),\\ \tilde{x}_2 &= (\,-4 + \alpha,\ -3\,),\end{aligned}$$

*za* $g(\alpha) = \frac{\alpha-1}{4}$*, i* $\Lambda = (6, 12)^T$*,* $\alpha \in [0,1]$*, dobija se:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (\,2 + 0.5\alpha,\ 3.5 - \alpha\,),\\ \tilde{x}_2 &= (\,6 + \alpha,\ 7\,),\ \textit{itd.}\end{aligned}$$

*U nastavku, određujemo grupni inverz pridružene matrice* $S$*. Matrice* $P$ *i* $Q$ *i submatrice* $V_1$*,* $V_2$*,* $V_3$ *i* $V_4$ *su:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

*i*

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Grupni inverz pridružene matrice $S$ je:*

$$S^\sharp = \begin{bmatrix} 0 & 0.0625 & 0.125 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.125 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0.0625 \\ 0 & 0.125 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Sledi da je:*

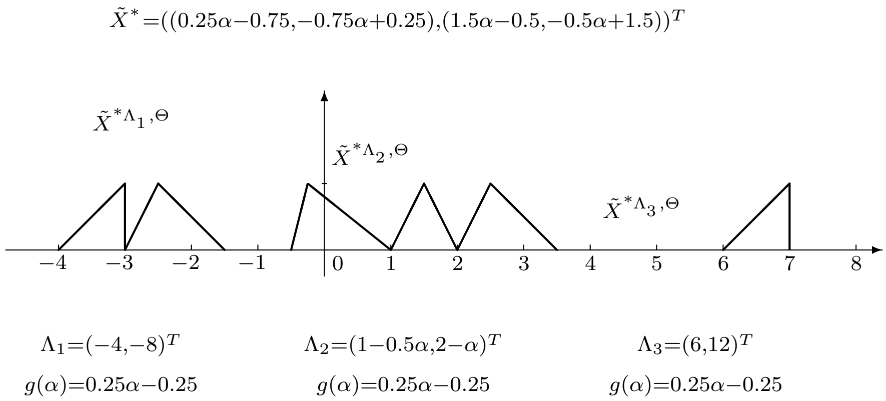
$$X^0 = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^0(\alpha) \\ \underline{x}_2^0(\alpha) \\ -\overline{x}_1^0(\alpha) \\ -\overline{x}_2^0(\alpha) \end{bmatrix} = S^\sharp Y = S^\sharp \begin{bmatrix} -1+3\alpha \\ -6+2\alpha \\ -3+\alpha \\ -2+6\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75+0.25\alpha \\ -0.5+1.5\alpha \\ -0.25+0.75\alpha \\ -1.5+0.5\alpha \end{bmatrix}.$$

*Upotrebom Teoreme 28, pošto je $S^\sharp$ nenegativna, rešenje posmatranog FLS-a jeste $\tilde{X}^0 = (\tilde{x}_1^0, \tilde{x}_2^0)^T$, dato sa:*

$$\tilde{x}_1^0 = (-0.75 + 0.25\alpha,\ 0.25 - 0.75\alpha),$$
$$\tilde{x}_2^0 = (-0.5 + 1.5\alpha,\ 1.5 - 0.5\alpha).$$

*Sva druga rešenja FLS-a mogu se odrediti primenom Algoritma 4, počevši od $\tilde{X}^0$ (napominjemo da nenegativnost matrice $S^\sharp$ implicira $\tilde{X}^0 = \tilde{X}^*$).*

Slika 7: Primer 17




**Primer 18.** *Posmatrajmo singularni fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcrcl} \tilde{x}_1 & & & - & 2\tilde{x}_3 & = & (1+3\alpha,\ 7-3\alpha) \\ -\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & & & = & (-8+3\alpha,\ -2-3\alpha) \\ & & \tilde{x}_2 & - & 2\tilde{x}_3 & = & (-5+4\alpha,\ 3-4\alpha) \end{array}.$$

*Grupni inverz matrice $A$ je:*

$$M = A^\sharp = \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.67 \\ -0.33 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0.33 & -0.67 \end{bmatrix}.$$

*Sledi da je*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (\,-1.67+3.67\alpha,\ 5.67-3.67\alpha\,), \\ \tilde{x}_2^* &= (\,-5+2\alpha,\ -1-2\alpha\,), \\ \tilde{x}_3^* &= (\,-4.67+3.67\alpha,\ 2.67-3.67\alpha\,). \end{aligned}$$

*Rešenje familije klasičnih linearnih sistema $A\Lambda = 0$ je $\Lambda = (4f(\alpha), 4f(\alpha), 2f(\alpha))^T$, $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$. Stoga, sledi da je:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^{*\Lambda} &= (\,-1.67+3.67\alpha+2f(\alpha),\ 5.67-3.67\alpha+2f(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_2^{*\Lambda} &= (\,-5+2\alpha+2f(\alpha),\ -1-2\alpha+2f(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_3^{*\Lambda} &= (\,-4.67+3.67\alpha+f(\alpha),\ 2.67-3.67\alpha+f(\alpha)\,). \end{aligned}$$

*Za svako* $\Lambda$ *i* $\alpha \in [0,1]$, *dobija se:*

$$\begin{aligned} w_1(\alpha) &= 8 - 8\alpha, \\ w_2(\alpha) &= 2.67 - 2.67\alpha, \\ w_3(\alpha) &= 5.33 - 5.33\alpha. \end{aligned}$$

*Familija klasični linearnih sistem:*

$$\begin{array}{ccccccc} \theta_1(\alpha) & & & + & 2\theta_3(\alpha) & = & 8 - 8\alpha \\ \theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & & & = & 2.67 - 2.67\alpha \\ & & \theta_2(\alpha) & + & 2\theta_3(\alpha) & = & 5.33 - 5.33\alpha \end{array},$$

*ima jedinstveno dopustivo rešenje* $\Theta = (2.67 - 2.67\alpha,\ 0,\ 2.67 - 2.67\alpha)^T$. *Stoga, za proizvoljno rešnje* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3)^T$, *gde je* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$, *je:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (\,1 + \alpha + 2f(\alpha),\ 3 - \alpha + 2f(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_2 &= (\,-5 + 2\alpha + 2f(\alpha),\ -1 - 2\alpha + 2f(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_3 &= (\,-2 + \alpha + f(\alpha),\ -\alpha + f(\alpha)\,). \end{aligned}$$

*Na primer, ako uzmemo da je* $\Lambda_1 = (-4, -4, -2)^T$, $\alpha \in [0,1]$, *dobija se sledeće rešenje:*

$$\tilde{X}_{\Lambda_1} = ((\,-1 + \alpha,\ 1 - \alpha\,), (\,-7 + 2\alpha,\ -3 - 2\alpha\,), (\,-3 + \alpha,\ -1 - \alpha\,))^T.$$

### *4.2. FLS sa EP matricom - Jednakost Moore-Penroseovog inverza, Drazinog inverza i grupnog inverza matrice*

Od posebnog interesa su fazi linearnih sistemi sa pridruženom matricom $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$ indeksa $ind(S) = 1$ i za koje važi osobina $S^\dagger S = SS^\dagger$, gde je $S^\dagger$ Moore-Penroseov inverz matrice $S$. Ovaj tip matrice naziva se singularna EP matrica i za nju je karakteristično da su joj Moore-Penroseov inverz, Drazinov inverz i grupni inverz jednaki (pogledati Poglavlje II). Originalni rezultati publikovani su u [29, 32].

**Lema 6.** *Neka je data matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}^{n\times n}$ *i* $|A| = [|a_{ij}|] \in \mathcal{M}^{n\times n}$ *i pridružena matrica* $S \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$, *oblika (5). Matrice* $A$ *i* $|A|$ *su EP matrice ako i samo ako je matrica* $S$ *EP matrica.*

*Dokaz.* ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da su matrica $A$ i matrica $|A|$ $EP$ matrice. Dokažimo da važi $S^\dagger \cdot S = S \cdot S^\dagger$, gde su matrice $S$ i $S^\dagger$ oblika (5) i (51), redom, i matrice $D$ i $E$ date sa:

$$D = \tfrac{1}{2}\left[(B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger\right] \text{ i } E = \tfrac{1}{2}\left[(B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger\right].$$

Kako se matrice $A$ i $|A|$ mogu predstaviti sa $A = B-C$ i $|A| = B+C$, prema Definiciji 16, važi:

$$(B-C)^\dagger(B-C) = (B-C)(B-C)^\dagger, \tag{85}$$

$$(B+C)^\dagger(B+C) = (B+C)(B+C)^\dagger. \tag{86}$$

Sabiranjem leve strane ove dve jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned}(B-C)^\dagger(B-C) + (B+C)^\dagger(B+C) &= ((B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger)B \\ &+ ((B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger)C \\ &= 2DB + 2EC,\end{aligned}$$

dok sabiranjem desne strane gornjih jednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned}(B-C)(B-C)^\dagger + (B+C)(B+C)^\dagger &= B((B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger) \\ &+ C((B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger) \\ &= 2BD + 2CE,\end{aligned}$$

što znači da je

$$2DB + 2EC = 2BD + 2CE. \tag{87}$$

Oduzimanjem jednačina (86) i (85), leve strane, dobijamo:

$$\begin{aligned}(B+C)^\dagger(B+C) - (B-C)^\dagger(B-C) &= ((B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger)B \\ &+ ((B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger)C \\ &= 2EB + 2DC,\end{aligned}$$

dok oduzimanjem jednačina (86) i (85), desne strane, dobijamo:

$$\begin{aligned}(B+C)(B+C)^\dagger - (B-C)(B-C)^\dagger &= B((B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger) \\ &+ C((B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger) \\ &= 2BE + 2CD,\end{aligned}$$

što znači da je

$$2EB + 2DC = 2BE + 2CD. \tag{88}$$

Jednačine (87) i (88) impliciraju:

$$\begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix},$$

što dalje implicira da je $S^\dagger \cdot S = S \cdot S^\dagger$, za matrice $S$ i $S^\dagger$ oblika (5) i (51), redom, pa prema Definiciji 16 sledi da je matrica $S$ $EP$ matrica.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je matrica $S$ $EP$ matrica. Tada, prema Teoremi 17 sledi $S^\dagger = S^\sharp$. Matrica $S^\dagger$ je oblika (51) (Teorema 20), dok su matrice $D$ i $E$ definisane sa:

$$D = \frac{1}{2}\left[(B+C)^\dagger + (B-C)^\dagger\right] \text{ i } E = \frac{1}{2}\left[(B+C)^\dagger - (B-C)^\dagger\right].$$

Matrica $S^\sharp$ je oblika (72) (Teorema 27), dok su matrice $D$ i $E$ definisane sa:

$$D = \frac{1}{2}\left[(B+C)^\sharp + (B-C)^\sharp\right] \text{ i } E = \frac{1}{2}\left[(B+C)^\sharp - (B-C)^\sharp\right].$$

Kako važi:

$$S^\dagger = S^\sharp = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix}$$

sledi da je $(B+C)^\dagger = (B+C)^\sharp$, odnosno $(B-C)^\dagger = (B-C)^\sharp$. Kako je matrica $A = B - C$ i matrica $|A| = B + C$, prema Teoremi 17 dobijamo da su matrice $A$ i $|A|$ $EP$ matrice. $\square$

Za FLS-e (1) sa pridruženom singularnom $EP$ matricom važe tvrđenja Teorema 27, 28, 29 i 30.

U nastavku dajemo primere kvadratnih FLS-a, čija je matrica koeficijenata $A$ $EP$ matrica.

**Primer 19.** *[29] Dat je fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} \tilde{x}_1 & - & 2\tilde{x}_2 & = & (-7.5+0.5\alpha,\ 0.5-7.5\alpha) \\ -2\tilde{x}_1 & + & 4\tilde{x}_2 & = & (-1+15\alpha,\ 15-\alpha) \end{array}.$$

*Matrica $A$ je EP matrica jer važi da je $A^\dagger A = AA^\dagger$ (prema Definiciji 16), odnosno:*

$$A^\dagger A = AA^\dagger = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 \\ -0.4 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

*Grupni inverz, Drazin inverz i Moore-Penroseov inverz matrice $A$ su jednaki i oblika:*

$$M = A^{\sharp} = A^{\diamondsuit} = A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0.04 & -0.08 \\ -0.08 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

*Primenom Algoritma 3, određujemo $\tilde{X}^* = S_M Y$:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (\,-1.5 + 0.1\alpha,\ 0.1 - 1.5\alpha\,), \\ \tilde{x}_2^* &= (\,-0.2 + 3\alpha,\ 3 - 0.2\alpha\,). \end{aligned}$$

*Za rešenje $\Lambda = (4f(\alpha),\ 2f(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, familije klasičnih linearnih sistema $A\Lambda = 0$, za proizvoljnu funkciju $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$, gde $\mathcal{F}^*$ označava klasu funkcija na jediničnom intervalu takvih da su adekvatne funkcije $\underline{x}^{*\Lambda}$ i $\overline{x}^{*\Lambda}$ ograničene nerastuće, odnosno neopadajuće, levo-neprekidne funkcije, za svako $i = 1, \ldots, n$. Dalje dobijamo:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^{*\Lambda} &= (\,-1.5 + 0.1\alpha + 2f(\alpha),\ 0.1 - 1.5\alpha + 2f(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_2^{*\Lambda} &= (\,-0.2 + 3\alpha + f(\alpha),\ 3 - 0.2\alpha + f(\alpha)\,). \end{aligned}$$

*Za svako $\Lambda$ i $\alpha \in [0,1]$ sledi da je $W = (0,0)^T$, $\alpha \in [0,1]$. Posmatrajmo rešenje $\Theta = (\theta_1(\alpha), \theta_2(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, sledeće familije linearnih sistema:*

$$\begin{array}{rcrcl} \theta_1(\alpha) & + & 2\theta_2(\alpha) & = & 0 \\ 2\theta_1(\alpha) & + & 4\theta_2(\alpha) & = & 0 \end{array},$$

*takvo da za svako $\alpha \in [0,1]$ budu zadovoljena sledeća ograničenja:*

$$\begin{aligned} \theta_1(\alpha) &\leq \frac{\overline{x}_1^*(\alpha) - \underline{x}_1^*(\alpha)}{2} = 0.8 - 0.8\alpha, \\ \theta_2(\alpha) &\leq \frac{\overline{x}_2^*(\alpha) - \underline{x}_2^*(\alpha)}{2} = 1.6 - 1.6\alpha. \end{aligned}$$

*Kako je $\theta_1(\alpha) = -2\theta_2(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, ubacivanjem $g(\alpha) = \theta_2(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, dobijamo $\tilde{X} = (\,\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T \in SS$, gde je $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*_\Lambda}$, $\alpha \in [0,1]$ i $0.4\alpha - 0.4 \leq g(\alpha) \leq -0.8\alpha + 0.8$, za svako $\alpha \in [0,1]$, pa je:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (\,-1.5 + 0.1\alpha + 2f(\alpha) - 2g(\alpha),\ 0.1 - 1.5\alpha + 2f(\alpha) + 2g(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_2 &= (\,-0.2 + 3\alpha + f(\alpha) + g(\alpha),\ 3 - 0.2\alpha + f(\alpha) - g(\alpha)\,). \end{aligned}$$

*Matrica $S$ je EP matrica sa $ind(S) = 1$ (jer je $ind(A) = ind(|A|) = 1$ i matrice $A$ i $|A|$ su EP matrice) pa je prema tome Moore-Penroseov inverz matrice $S$ je jednak* *grupnom inverzu (koji je jednak Drazinovom inverzu) matrice* $S$ $(S^\dagger = S^\sharp = S^\diamondsuit)$, *i oblika je:*

$$S_M = S^\dagger = S^\sharp = S^\diamondsuit = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0.08 \\ 0 & 0.16 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0.04 & 0 \\ 0.08 & 0 & 0 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

*Kako je matrica* $S^\sharp$ *nenegativna,* $X^0 = S^\sharp Y$ *je reprezentativni vektor od* $\tilde{X}^0$, *dat sa:*

$$\tilde{x}_1^0 = (-1.5 + 0.1\alpha,\ 0.1 - 1.5\alpha),$$
$$\tilde{x}_2^0 = (-0.2 + 3\alpha,\ 3 - 0.2\alpha).$$

*Vektor fazi brojeva* $\tilde{X}^0$ *je rešenje FLS-a jer je* $\tilde{X}^0 = \tilde{X}^*$ *(kao što je objašnjeno u Primeru 17). Da bi se dobila druga rešenja, Algoritam 3 se primenjuje na* $\tilde{X}^0$.

**Primer 20.** *[32] Dat je fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} \tilde{x}_1 & - & \tilde{x}_2 & = & (\alpha,\ 2-\alpha) \\ -\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (-0.3+\alpha,\ 1.7-\alpha) \end{array}.$$

*Matrica* $A$ *je EP matrica (prema Definiciji 16), pa, sledi da su grupni inverz, Drazin inverz i Moore-Penroseov inverz matrice* $A$ *jednaki. Primenom Algoritma 4, sledi da je grupni inverz matrice* $A$:

$$M = A^\sharp = A^\diamondsuit = A^\dagger = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

*Zatim, primenom Algoritma 3, određuje se* $\tilde{X}^* = S_M Y$:

$$\tilde{x}_1^* = (-0.425 + 0.5\alpha,\ 0.575 - 0.5\alpha),$$
$$\tilde{x}_2^* = (-0.575 + 0.5\alpha,\ 0.425 - 0.5\alpha).$$

*Za vektor rešenja* $\Lambda = (2f(\alpha), 2f(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, *familija klasičnih linearnih sistema* $A\Lambda = 0$, *takvih da* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$, *dobija se* $\tilde{X}^{*\Lambda}$:

$$\tilde{x}_1^{*\Lambda} = (-0.425 + 0.5\alpha + f(\alpha),\ 0.575 - 0.5\alpha + f(\alpha)),$$
$$\tilde{x}_2^{*\Lambda} = (-0.575 + 0.5\alpha + f(\alpha),\ 0.425 - 0.5\alpha + f(\alpha)).$$

*Za svako* $\Lambda$ *i* $\alpha \in [0,1]$ *sledi* $W = (0.85, 0.85)^T$, $\alpha \in [0,1]$.

*Posmatra se rešenje* $\Theta = (\theta_1(\alpha), \theta_2(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, *sledeće familije linearnih sistema:*

$$\begin{array}{rcrcl} \theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & = & 0.85 \\ \theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & = & 0.85 \end{array},$$

*takvo da za svako* $\alpha \in [0,1]$ *budu zadovoljena sledeća ograničenja:*

$$\theta_1(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_1^*(\alpha) - \underline{x}_1^*(\alpha)}{2} = 0.5 - 0.5\alpha,$$
$$\theta_2(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_2^*(\alpha) - \underline{x}_2^*(\alpha)}{2} = 0.5 - 0.5\alpha.$$

*Kako je* $\theta_1(\alpha) = -\theta_2(\alpha) + 0.85$, $\alpha \in [0,1]$, *ubacivanjem* $g(\alpha) = \theta_2(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, *dobija se* $\tilde{X} = (\,\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T \in SS$, *gde je* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*\Lambda}$, $\alpha \in [0,1]$, *i* $0.5\alpha + 0.35 \leq g(\alpha) \leq -0.5\alpha + 0.5$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$, *pa je*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= (\,-0.425 + 0.5\alpha + f(\alpha) - g(\alpha) + 0.85,\ +0.575 - 0.5\alpha + f(\alpha) + g(\alpha) - 0.85\,), \\ \tilde{x}_2 &= (\,-0.575 + 0.5\alpha + f(\alpha) + g(\alpha),\ 0.425 - 0.5\alpha + f(\alpha) - g(\alpha)\,). \end{aligned}$$

*Moore-Penroseov inverz matrice* $S$ *je jednak grupnom inverzu (koji je jednak Drazinom inverzu) matrice* $S$ ($S^\dagger = S^\sharp = S^\diamondsuit$). *Grupni inverz matrice* $S$ *je:*

$$S_M = S^\dagger = S^\sharp = S^\diamondsuit = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

*Kako je matrica* $S^\sharp$ *nenegativna,* $X^0 = S^\sharp Y$ *je reprezentativni vektor od* $\tilde{X}^0$, *dat sa:*

$$\tilde{x}_1^0 = (\,-0.425 + 0.5\alpha,\ 0.575 - 0.5\alpha\,),$$
$$\tilde{x}_2^0 = (\,-0.575 + 0.5\alpha,\ 0.425 - 0.5\alpha\,).$$

*Vektor fazi brojeva* $\tilde{X}^0$ *je rešenje FLS-a,* $\tilde{X}^0 = \tilde{X}^*$ *(kao što je objašnjeno u Primeru 17). Da bi se dobila druga rešenja, Algoritam 3 se primenjuje na* $\tilde{X}^0$.

## *4.3. Rešavanje FLS-a upotrebom uopštenog* $\{1\}$*-inverza matrice*

Treći deo ovog poglavlja posvećen je uopštavanju prikazane metode za rešavanje kvadratnog fazi linearnog sistema (1) primenom bilo kojeg uopštenog $\{1\}$-inverza matrice. Originalni rezultati su publikovani u [33]. Potrebno je naglasiti da se primenom bilo kojeg upoštenog $\{1\}$-inverza matrice možemo rešiti FLS (1) proizvoljnih dimenzija.

Sledi teorema koja predstavlja dovoljan uslov za dobijanje rešenje FLS-a (1), čija je matrica koeficijenata $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$.

Neka je $A^{(1)}$ proizvoljni uopšteni $\{1\}$-inverz matrice $A$. Uvodimo sledeće oznake: $A^{(1)} = N = [n_{ij}]$, i $|N| = [|n_{ij}|]$. Neka je matrica $S_N \in \mathcal{M}^{2n\times 2n}$, definisana sa:

$$S_N = \begin{bmatrix} N^+ & N^- \\ N^- & N^+ \end{bmatrix}, \tag{89}$$

gde je $N^+ = [n_{ij}^+]$, i $N^- = [n_{ij}^-]$, za svako $i, j = 1, \ldots, n$.

**Teorema 31.** *Neka je kvadratni FLS (1), čija je matrica koeficijenata $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$, konzistentan. Neka je $X^* = S_N Y$, gde je matrica $S_N$ oblika (89) i gde je $N \in \mathcal{M}^{n\times n}$ proizvoljni uopšteni $\{1\}$-inverz matrice $A$, $N = A^{(1)}$, i matrica $S_N$ oblika (89). Sledeća tvrđenja važe:*

*(i)* $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \ldots, \tilde{x}_n^*)^T$ *je vektor fazi brojeva.*

*(ii) Ako je $|N|$ jedan od uopštenih $\{1\}$-inverza matrice $|A|$, tada $\tilde{X}^*$ jeste rešenje FLS-a (1).*

**Teorema 32.** *Neka je $A \in \mathcal{M}^{n\times n}$ matrica koeficijenata kvadratnog i konzistentog FLS-a (1) za dato $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)^T$. Neka je $X^* = S_N Y$ i $W = \underline{Y} - [A^+ \; A^-]X^*$. Sledeća tvrđenja važe:*

*(i) Ako je $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$, $\tilde{x}_i = (\underline{x}_i, \overline{x}_i) = (\underline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i + \theta_i, \overline{x}_i^* + \frac{1}{2}\lambda_i - \theta_i)$, $i = 1, \ldots, n$, vektor fazi brojeva, za neko $\Lambda = (\lambda_1(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha))^T$ i $\Theta = (\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, takvo da $A\Lambda = O$, gde je $O = (0, \ldots, 0)^T$ je $n \times 1$ nula vektor i $|A|\Theta = W$, tada $\tilde{X}$ jeste rešenje FLS-a (1).*

*(ii) Za bilo koji rešenje $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$, $\tilde{x}_i = (\underline{x}_i, \overline{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, FLS-a (1), postoje $\Lambda = (\lambda_1(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha))^T$ i $\Theta = (\theta_1(\alpha), \ldots, \theta_n(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, takvi da je $A\Lambda = O$, gde je $O = (0, \ldots, 0)^T$ je $n \times 1$ nula vektor i $|A|\Theta = W$, i $\underline{X} = \underline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda + \Theta$, $\overline{X} = \overline{X}^* + \frac{1}{2}\Lambda - \Theta$.*

Kroz nekoliko numeričkih primera sledi demonstracija efikasnosti predstavljene metode za rešavanje kvadratnih FLS-a (1) upotrebom bilo kojeg uopštenog $\{1\}$- inverza matrice. Zbog jednostavnosti, posmatramo trougaone fazi brojeve. U Primeru 21 rešavamo FLS, čija je matrica koeficijenata $A$ kompletno regularna, pa je prema tome, rešenje jedinstveno. U Primerima 22 i 23 posmatramo FLS-i, čija je matrica $A$ regularna, u prvom slučaju, i matrica $|A|$ regularna, u drugom slučaju. U Primeru 24 prezentujemo FLS čije su obe matrice $A$ i $|A|$ singularne. U Primeru 25 prikazano je rešavanje FLS-a kada je $ind(A) = 2$ i $ind(|A|) = 1$.

**Primer 21.** *[33] Dat je $2 \times 2$ fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} \tilde{x}_1 & + & 3\tilde{x}_2 & = & (3.5 + 6\alpha,\ 15.5 - 6\alpha) \\ -2\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (-15.5 + 7\alpha,\ -1.5 - 7\alpha) \end{array}.$$

*Matrice $A$, $B$ i $C$ ovog FLS-a su:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ A^+ = B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^- = C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Kako su obe matrice $A$ i $|A|$ regularne, sledi da je $ind(A) = 0$ i $ind(|A|) = 0$. Klasičan inverz matrice $A$ jeste matrica:*

$$N = A^{-1} = A^{\dagger} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Primenom Algoritma 3, Korakom 1, određujemo $X^* = S_N Y$ i dobijamo da je:*

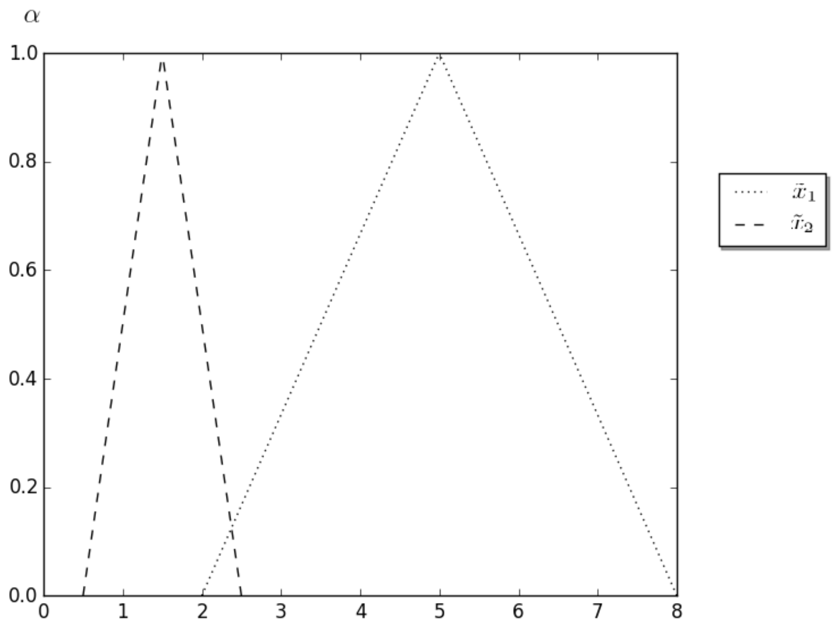
$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (1.143 + 3.857\alpha,\ 8.857 - 3.857\alpha), \\ \tilde{x}_2^* &= (-1.214 + 2.714\alpha,\ 4.214 - 2.714\alpha). \end{aligned}$$

*Kako je $A$ regularna matrica, familija homogenih linearnih sistema $A\Lambda = O$ ima samo trivijalno rešenje $\Lambda_0 = (0,0)^T$. Prema tome, sledi da je $\tilde{X}^{*\Lambda_0} = \tilde{X}^*$. Primenom Koraka 3, dobijamo $W = (w_1(\alpha), w_2(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, odnosno:*

$$W = (6(1-\alpha),\ 3.429(1-\alpha))^T.$$

*Familija klasičnih linearnih sistem $|A|\Theta = W$ ima jedinstveno rešenje $\Theta = (0.857(1-\alpha), 1.714(1-\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, jer je $|A|$ regularna matrica. Da bi se dobio vektor fazi*

Slika 8: Primer 21




*brojeva, odnosno da bi $\overline{x}_i(\alpha) \geq \underline{x}_i(\alpha)$ bilo zadovoljeno za $i = 1,2$ i svako $\alpha \in [0,1]$, $\Theta$ mora da zadovoljava sledeći uslov $\theta_i(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_i^*(\alpha) - \underline{x}_i^*(\alpha)}{2}$, $i = 1,2$, za svako $\alpha \in [0,1]$. Dobijeno $\Theta$ je dopustivo, pa, prema tome, sledi da jedinstveno rešenje ovog FLS-a, dobijeno Korakom 4, $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$, jeste oblika (pogledati Sliku 8):*

$$\tilde{X} \;=\; ((2+3\alpha,\ 8-3\alpha),(0.5+\alpha,\ 2.5-\alpha))^T.$$

**Primer 22.** *[33] Dat je sledeći fazi linearni sistem:*

$$\begin{array}{rcrcl} 2\tilde{x}_1 & - & \tilde{x}_2 & = & (3\alpha,\ 7-4\alpha) \\ -2\tilde{x}_1 & - & \tilde{x}_2 & = & (3\alpha,\ 7-4\alpha) \end{array}.$$

*Matrica koeficijenata $A$ je regularna sa $ind(A) = 0$, dok je matrica $|A|$ singularna sa $ind(|A|) = 1$. Klasičan inverz matrice $A$ je:*

$$N = A^{-1} = A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

*Određujemo $X^* = S_N Y$ i dobijamo pridruženi vektor fazi brojeva $\tilde{X}^*$:*

$$\tilde{X}^* \;=\; ((-1.75+1.75\alpha,\ 1.75-1.75\alpha),(-7+4\alpha,\ -3\alpha))^T.$$

*Kako je* $\Lambda_0 = (0,0)^T$ *jedinstveno rešenje familije klasičnih linearnih sistema* $A\Lambda = O$, $\tilde{X}^{*\Lambda_0} = \tilde{X}^*$. *Dalje, za* $\alpha \in [0,1]$, *dobijamo:*

$$
\begin{aligned}
w_1(\alpha) &= 3\alpha - 2(1.75\alpha - 1.75) + (-3\alpha) = 3.5 - 3.5\alpha, \\
w_2(\alpha) &= 3\alpha + 2(-1.75\alpha + 1.75) + (-3\alpha) = 3.5 - 3.5\alpha.
\end{aligned}
$$

*Sledeća familija sistema ima beskonačno mnogo rešenja* $\Theta = (\theta_1(\alpha), \theta_2(\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$:

$$
\begin{aligned}
2\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha) &= 3.5 - 3.5\alpha \\
2\theta_1(\alpha) + \theta_2(\alpha) &= 3.5 - 3.5\alpha
\end{aligned}
.
$$

*Klasa rešenja linearnih funkcija, definisanih na* $[0,1]$, *prethodne familije sistema je:*

$$
\begin{aligned}
\theta_1(\alpha) &= C_1 - C_2\alpha, \\
\theta_2(\alpha) &= 3.5 - 2C_1 - (3.5 - 2C_2)\alpha.
\end{aligned}
$$

*Ova klasa funkcija je dopustiva ako je monotonost* $\underline{x}_i$ *i* $\overline{x}_i$ *obezbeđena sa potrebnim uslovima* $\theta_i(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_i^*(\alpha) - \underline{x}_i^*(\alpha)}{2}$, $i = 1,2$, *za svako* $\alpha \in [0,1]$, *stoga* $C_1 = C_2 = C$, *gde je* $0 < C < 1.75$. *Prema tome, računajući* $\underline{x}_i = \underline{x}_i^* + \theta_i$ *i* $\overline{x}_i = \overline{x}_i^* - \theta_i$, *za* $i = 1,2$, *dobija se klasa rešenja sa beskonačnim brojem rešenja* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$, *za* $0 < C < 1.75$, *u sledećoj formi:*

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= ((1.75 - C)\alpha - 1.75 + C,\ (-1.75 + C)\alpha + 1.75 - C), \\
\tilde{x}_2 &= ((0.5 + 2C)\alpha - 3.5 - 2C,\ (0.5 - 2C)\alpha - 3.5 + 2C).
\end{aligned}
$$

**Primer 23.** *[33] Dat je singularni fazi linearni sistem dimenzija* $3 \times 3$.

$$
\begin{array}{ccccccl}
\tilde{x}_1 & & & - & \tilde{x}_3 & = & (-8 + 10\alpha,\ 10 - 8\alpha) \\
\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & + & 2\tilde{x}_3 & = & (-29 + 20\alpha,\ 20 - 29\alpha) \\
3\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & & & = & (-27 + 22\alpha,\ 22 - 27\alpha)
\end{array}
.
$$

*Matrica koeficijenata* $A$ *je singularna sa* $ind(A) = 1$, *dok je matrica* $|A|$ *regularna sa* $ind(|A|) = 0$. *Rešenja se dobijaju upotrebom grupnog inverza singularne matrice* $A$, *čiji je indeks* 1. *Grupni inverz matrice* $A$ *je oblika:*

$$
N = A^\sharp = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 & 0 \\ -3.5 & -1 & 0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},
$$

*pa, sledi da je* $\tilde{X}^*$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^* &= (\,-26.5+25\alpha,\ 25-26.5\alpha\,),\\ \tilde{x}_2^* &= (\,-68.5+68\alpha,\ 68-68.5\alpha\,),\\ \tilde{x}_3^* &= (\,-18.5+15\alpha,\ 15-18.5\alpha\,).\end{aligned}$$

*Rešenje familije klasičnih linearnih sistema* $A\Lambda = 0$ *je* $\Lambda = (2f(\alpha), -6f(\alpha), 2f(\alpha))^T$, $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$. $\mathcal{F}^*$ *(zavisi od* $\tilde{X}^*$*) označava klasu funkcija na jediničnim intervalom* $y = f(\alpha)$, *takvih da adekvatne funkcije* $\underline{x}^{*\Lambda}$ *i* $\overline{x}^{*\Lambda}$ *su ograničene nerastuće, odnosno neopadajuće, levo-neprekidne funkcije, za svako* $i = 1, \ldots, n$. *Sledi:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^{*\Lambda} &= (\,-26.5+25\alpha+f(\alpha),\ 25-26.5\alpha+f(\alpha)\,),\\ \tilde{x}_2^{*\Lambda} &= (\,-68.5+68\alpha-3f(\alpha),\ 68-68.5\alpha-3f(\alpha)\,),\\ \tilde{x}_3^{*\Lambda} &= (\,-18.5+15\alpha+f(\alpha),\ 15-18.5\alpha+f(\alpha)\,).\end{aligned}$$

*Za svako* $\Lambda$ *i* $\alpha \in [0,1]$, *dobija se* $W = (33.5-33.5\alpha,\ 103-103\alpha\ , 121-121\alpha)^T$, $\alpha \in [0,1]$. *Sledeća familija klasičnih linearnih sistema:*

$$\begin{array}{ccccccc} \theta_1(\alpha) & & & + & \theta_3(\alpha) & = & 33.5-33.5\alpha \\ \theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & + & 2\theta_3(\alpha) & = & 103-103\alpha \\ 3\theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & & & = & 121-121\alpha \end{array} ,$$

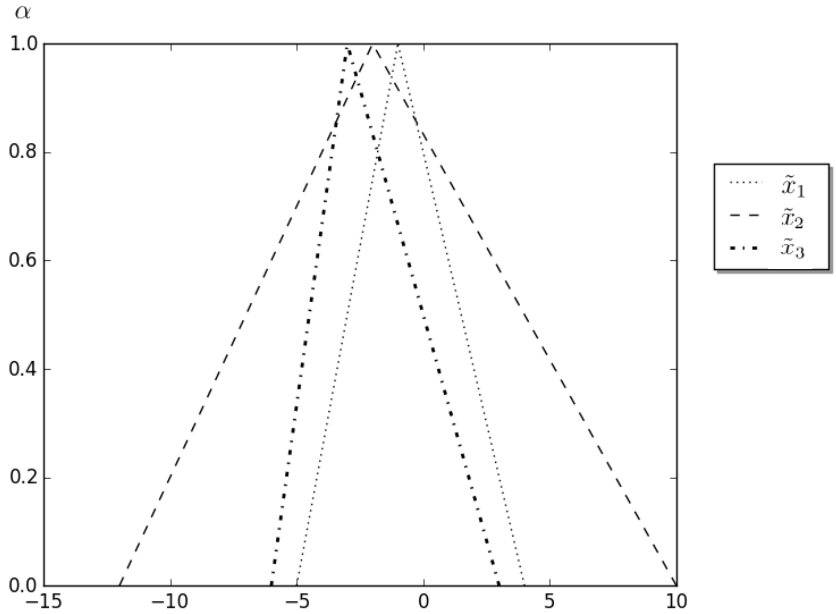
*ima jedinstveno rešenje* $\Theta = (21.25-21.25\alpha,\ 57.25-57.25\alpha,\ 12.25-12.25\alpha)^T$, *za* $\alpha \in [0,1]$. *Skup rešenja SS ovog FLS-a ima beskonačno mnogo rešenja* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T \in SS$, *za* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$, *dato u obliku:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (\,-5.25+3.75\alpha+f(\alpha),\ 3.75-5.25\alpha+f(\alpha))\,),\\ \tilde{x}_2 &= (\,-11.25+10.75\alpha-3f(\alpha),\ 10.75-11.25\alpha-3f(\alpha)\,),\\ \tilde{x}_3 &= (\,-6.25+2.75\alpha+f(\alpha),\ 2.75-6.75\alpha+f(\alpha)\,).\end{aligned}$$

*Na primer, ako se uzme da je* $\Lambda = (0.5(1+\alpha),\ -1.5(1+\alpha),\ 0.5(1+\alpha))^T$, $\alpha \in [0,1]$, *rešenje* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ *(pogledati Sliku 9) je dato sa:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (\,-5+4\alpha,\ 4-5\alpha\,),\\ \tilde{x}_2 &= (\,-12+10\alpha,\ 10-12\alpha\,),\\ \tilde{x}_3 &= (\,-6+3\alpha,\ 3-6\alpha\,).\end{aligned}$$

Slika 9: Primer 23




**Primer 24.** *[33] Dat je sledeći FLS:*

$$\begin{array}{rcrcl} -2\tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & = & (-1+3\alpha,\ 3-\alpha) \\ 4\tilde{x}_1 & - & 2\tilde{x}_2 & = & (-6+2\alpha,\ 2-6\alpha) \end{array}.$$

*Obe matrice $A$ i $|A|$ su singularne sa $ind(A) = ind(|A|) = 1$. Znači da je matrica koeficijenata $A$ kompletno singularna. U ovom primeru za određivanje rešenja upotrebićemo Moore-Penroseov inverz singularne matrice $A$, koji je oblika:*

$$M = A^{\dagger} = \begin{bmatrix} -0.08 & 0.16 \\ 0.04 & -0.08 \end{bmatrix}.$$

*Dobijamo da je $\tilde{X}^* = ((-1.2+0.4\alpha,\ 0.4-1.2\alpha\,), (-0.2+0.6\alpha,\ 0.6-0.2\alpha\,))^T$, primenom Algoritma 3, Korak 1. Korak 2 nam daje $\Lambda = (2f(\alpha), 4f(\alpha))^T$, $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$, pa je $\tilde{X}^{*\Lambda} = (\tilde{x}_1^{*\Lambda}, \tilde{x}_2^{*\Lambda})^T$, odnosno:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^{*\Lambda} &= (-1.2+0.4\alpha+f(\alpha), 0.4-1.2\alpha+f(\alpha))\,, \\ \tilde{x}_2^{*\Lambda} &= (-0.2+0.6\alpha+2f(\alpha), 0.6-0.2\alpha+2f(\alpha)\,)\,. \end{aligned}$$

*Korak 3 daje $W = (0,0)^T$, $\alpha \in [0,1]$, što znači da je dobijeno $\tilde{X}^*$ rešenje datog FLS-a, i da je, takođe, $\tilde{X}^{*\Lambda}$, za svako $\Lambda = (2f(\alpha), 4f(\alpha))^T$, $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$, $\alpha \in [0,1]$. Na* *kraju, primenom Koraka 4, dobijaju se sva rešenja* $|A|\Theta = W$*,* $\Theta = (g(\alpha), -2g(\alpha))^T$*,* $\alpha \in [0,1]$*, gde je* $g(\alpha)$*,* $\alpha \in [0,1]$*, proizvoljna funkcija na jediničnom intervalu. Za svako* $\Lambda$ *i* $\alpha \in [0,1]$*, zahteva se da* $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*\Lambda}$*, (*$\mathcal{F}^{*\Lambda}$*,* $\alpha \in [0,1]$*, zavisi od* $\tilde{X}^{*\Lambda}$*), i da za svako* $\alpha \in [0,1]$ *ispunjena dodatna potrebna ograničenja:*

$$\theta_1(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_1^{*\Lambda} - \underline{x}_1^{*\Lambda}}{2} = \frac{\overline{x}_1^*(\alpha) - \underline{x}_1^*(\alpha)}{2} = 0.8(1-\alpha),$$
$$\theta_2(\alpha) \leq \frac{\overline{x}_2^{*\Lambda} - \underline{x}_2^{*\Lambda}}{2} = \frac{\overline{x}_2^*(\alpha) - \underline{x}_2^*(\alpha)}{2} = 0.4(1-\alpha).$$

*Kako je* $\theta_2(\alpha) = -2\theta_1(\alpha)$*,* $\alpha \in [0,1]$*, sledi* $0.2\alpha - 0.2 \leq \theta_1(\alpha) \leq 0.8 - 0.8\alpha$*, za sva* $\alpha \in [0,1]$*. Na kraju, dobija se* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T \in SS$*, gde je* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$*,* $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*\Lambda}$*,* $\alpha \in [0,1]$*, i* $0.2\alpha - 0.2 \leq g(\alpha) \leq -0.8\alpha + 0.8$*, za svako* $\alpha \in [0,1]$*:*

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= (-1.2 + 0.4\alpha + f(\alpha) + g(\alpha),\ 0.4 - 1.2\alpha + f(\alpha) - g(\alpha)),\\ \tilde{x}_2 &= (-0.2 + 0.6\alpha + 2f(\alpha) - 2g(\alpha),\ 0.6 - 0.2\alpha + 2f(\alpha) + 2g(\alpha)).\end{aligned}$$

*Na primer, za dopustivo* $f(\alpha) = -0.15\alpha$ *i* $g(\alpha) = -0.1 + 0.1\alpha$*,* $\alpha \in [0,1]$*, dobija se rešenje:*

$$\tilde{X} = ((-1.3 + 0.35\alpha,\ 0.5 - 1.45\alpha), (0.1\alpha,\ 0.4 - 0.3\alpha))^T.$$

**Primer 25.** *[29] Posmatrajmo sledeći fazi linearni sistem:*

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = (-4 + 3\alpha, 2 - 3\alpha)$$
$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = (-4 + 3\alpha, 2 - 3\alpha)$$

*Matrice* $A$ *i* $|A|$ *su singularne, s'tim da je* $ind(A) = 2$ *i* $ind(|A|) = 1$*. Matrice* $A$ *i* $|A|$ *su:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad |A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*U Tabeli 1 dati su grupni inverz, Drazinov inverz , Moore-Penroseov inverz i bilo koji uopšteni* $\{1\}$*-inverz ovih matrica. U Tabela 1, kolona* $F^{(1)}$*, predstavlja uopšteni* $\{1\}$*-inverz matrice* $A$ *i matrice* $|A|$*, koji se dobija pomoću Teoreme 10. Prema Algoritmu 3, da bismo rešili početni FLS potrebno je da odredimo uopšteni inverz matrice* $A$*. Na primer, ako uzmemo da su* $a = 0$*,* $b = -2$ *i* $c = 2$ *dobićemo uopšteni* $\{1\}$*- inverz matrice* $A$ *oblika:*

| $F$ | $F^{\sharp}$ | $F^{\diamondsuit}$ | $F^{\dagger}$ | $F^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $A,\ ind(A)=2$ | $--$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1-a+b+c & a \\ b & c \end{bmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R}$ |
| $\lvert A\rvert,\ ind(A)=1$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1-a-b-c & a \\ b & c \end{bmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R}$ |

Tabela 1: Uopšteni inverzi matrica $A$ i $|A|$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Prema Algoritmu 3 sledi:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (\,-4+3\alpha,\ 2-3\alpha\,), \\ \tilde{x}_2^* &= (\,-12+12\alpha,\ 12-12\alpha\,). \end{aligned}$$

*Rešenje familije sistema* $A\Lambda = 0$ *je* $\Lambda = (2f(\alpha), 2f(\alpha))^T,\ f(\alpha) \in F^*,\ \alpha \in [0,1]$, *gde* $\mathcal{F}^*$ *(zavisi od* $\tilde{X}^*$*) obeležava klasu funkcija na jediničnom intervalu* $y = f(\alpha)$, *takvih da adekvatne funkcije* $\underline{x}^{*\Lambda}$ *i* $\overline{x}^{*\Lambda}$ *su ograničene nerastuće, odnosno neopadajuće, levo-neprekidne funkcije, za svako* $i = 1, \ldots, n$. *Sledi:*

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^{*\Lambda} &= (\,-4+3\alpha+f(\alpha),\ 2-3\alpha+f(\alpha)\,), \\ \tilde{x}_2^{*\Lambda} &= (\,-12+12\alpha+f(\alpha),\ 12-12\alpha+f(\alpha)\,). \end{aligned}$$

*Za svako* $\Lambda$ *i* $\alpha \in [0,1]$ *dobijamo:*

$$\begin{aligned} w_1(\alpha) &= 12-12\alpha, \\ w_2(\alpha) &= 12-12\alpha. \end{aligned}$$

*Sledeći familija sistema:*

$$\begin{array}{ccccc} \theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & = & 12-12\alpha \\ \theta_1(\alpha) & + & \theta_2(\alpha) & = & 12-12\alpha \end{array}.$$

*ima beskonačno mnogo rešenja* $\Theta = (g(\alpha), 12 - 12\alpha - g(\alpha))^T$*,* $\alpha \in [0,1]$*, gde je* $g(\alpha)$ *proizvoljna funkcija na jediničnom intervalu. Za svako* $\Lambda$ *zahteva se da* $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*\Lambda}$ *(*$\mathcal{F}^{*\Lambda}$ *zavisi od* $\tilde{X}^{*\Lambda}$*),* $\alpha \in [0,1]$*, ispunjava dodatna ograničenja:*

$$\theta_1(\alpha) \le \frac{\overline{x}_1^{*\Lambda} - \underline{x}_1^{*\Lambda}}{2} = \frac{\overline{x}_1^{*}(\alpha) - \underline{x}_1^{*}(\alpha)}{2} = 3(1-\alpha),$$
$$\theta_2(\alpha) \le \frac{\overline{x}_2^{*\Lambda} - \underline{x}_2^{*\Lambda}}{2} = \frac{\overline{x}_2^{*}(\alpha) - \underline{x}_2^{*}(\alpha)}{2} = 12(1-\alpha).$$

*Na kraju dobijamo* $\tilde{X} = (\,\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T \in SS$*, gde je* $f(\alpha) \in \mathcal{F}^*$*,* $g(\alpha) \in \mathcal{F}^{*\Lambda}$*, i* $0 \le g(\alpha) \le 3 - 3\alpha$*, za svako* $\alpha \in [0,1]$*:*

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= (-4 + 3\alpha + f(\alpha) + g(\alpha),\;\; 2 - 3\alpha + f(\alpha) - g(\alpha))\,,\\
\tilde{x}_2 &= (f(\alpha) - g(\alpha),\;\; f(\alpha) + g(\alpha)\,)\,.
\end{aligned}$$

*Na primer, za dopustivo* $f(\alpha) = 1$ *i* $g(\alpha) = 2 - 2\alpha$*,* $\alpha \in [0,1]$*, dobijamo:*

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1 &= (\,-1 + \alpha,\; 1 - \alpha\,),\\
\tilde{x}_2 &= (\,-1 + 2\alpha,\; 3 - 2\alpha\,).
\end{aligned}$$

# *POGLAVLJE V*

## 5. ZAKLJUČAK

Glavni doprinos ove doktorske disertacije jeste formulacija precizne i efikasne metode na osnovu koje se može rešiti bilo koji konzistentan fazi linearni sistem. U slučaju singularnosti fazi linearnog sistema, za rešavanje istog upotrebljavaju se uopšteni inverzi matrice. U ovoj disertaciji, prestavljena je originalna metoda za rešavanje pravougaonih fazi linearnih sistema, čija je matrica koeficijenata proizvoljna i realna matrica, upotrebom Moore-Penroseovog inverza matrice. Takođe, prezentovana je i metoda za rešavanje kvadratnih fazi linearnih sistema, koja, u određenim slučajevima, može da koristi grupni inverz matrice, koji je u tim slučajevima jednak Drazinovom inverzu matrice ili jednostavno proizvoljni uopšteni $\{1\}$-inverz matrice. Predstavljena je originalna metoda i dat potreban i dovoljan uslov za postojanje rešenja fazi linearnog sistema, kao i tačna algebarska forma opšteg rešenja. Uz priloženi algoritam i brojne numeričke primere ilustrovali smo efikasnost ove metode.

# *Bibliografija*


[1] S. Abbasbandy, M. Alavi, A method for solving fuzzy linear systems, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2, 37–43, 2005.

[2] S. Abbasbandy, M. Otadi, M. Mosleh, Minimal solution of general dual fuzzy linear systems, Chaos, Solitions and Fractals. 37, 1113–1124, 2008.

[3] T. Allahviranlo, A comment on fuzzy linear systems (Discussion), Fuzzy Sets and Systems, 140, pp:559, 2003.

[4] T. Allahviranlo, Numerical methods for fuzzy systems of linear equations, Applied Mathematics and Computation. 155, 493–502, 2004.

[5] T. Allahviranlo, M.A. Kermani, Solution of a fuzzy system of linear equation, Applied Mathematics and Computation. 175, 519–531, 2006.

[6] T. Allahviranlo, M. Ghanbari, A.A. Hosseinzadeh, E. Haghi, R. Nuraei, A note on Fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Syst. 177, 87–92, 2011.

[7] T. Allahviranlo, M. Ghanbari, On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory, Applied Mathematical Modelling. 36, 5360–5379, 2012.

[8] B. Asady, S. Abbasbandy, M. Alavi, Fuzzy general linear systems, Applied Mathematics and Computation. 169, 34–40, 2005.

[9] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized Inverses, Theory and Applications, Springer, New York, 2003.

[10] J.J. Buckley, Y. Qu, Solving systems of linear fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems 43, 33–43, 1991.

[11] S.L. Cambell, C.D. Meyer, Inverses of Linear Transformations, Siam, Philadelphia, 2009.

[12] S.L. Cambell, Some Remarks on EP Matrices and Generalized Inverses, Linear Algebra and Its Applications, 3, 275–278, 1970.

[13] J.G. Dijkman, H. van Haering, S.J. de Lange, Fuzzy numbers, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 92(2), 301–341, 1983.

[14] D. Dubois, H. Prade, Operation on fuzzy numbers, Internat. J. of Systems Sci., 9, 613–626, 1978.

[15] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[16] D. Dubois, H. Prade, Fundamentals of Fuzzy sets, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol. 1, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[17] G. Golub, W. Kahan, Calculating the singular values and pseudo-inverse of matrix, J. SIAM Numer. Anal., Ser. B, 2(2), 205–224, 1965.

[18] R. Goetshe, W. Voxman, Topological properties of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems, 10, 87–99, 1983.

[19] R. Ezzati, Solving fuzzy linear systems, Soft. Comput. 15, 193–197, 2011.

[20] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Syst. 96, 201–209, 1998.

[21] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Author's replay (Discussion), Fuzzy Sets and Systems 140, pp: 561, 2003.

[22] I. Jovović, B. Malešević, A note of solutions of the matrix equations AXB=C, Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, ser. A: Appl.Math.Inform. and Mech., 6, 45–55, 2014.

[23] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic-Theory and Applications, Pretice Hall, New Jersey, 1995.

[24] W.A. Lodwick, D. Dubois, Interval linear systems as a necessary step in fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Syst. 281, 227–251, 2015.

[25] B. Malesević, Grupna funkcionalna jednačina (magistarski rad). Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1998.

[26] B. Malesević, I.Jovović, M.Makragić, B.Radicić, A note on solutions of linear systems, ISNR ALgebra, ISSN:2090-6293, Article ID 142124, 1–6, 2013.

[27] B. Malešević, B. Mihailović, V. Miler Jerković, Metode rešavanja nesingularnih fazi linearnih sistema, The second Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, 110–116, Novi Sad, June 23-24th 2017. ISBN 978-86-7892-945-8.

[28] B. Mihailović, V. Miler Jerković, B. Malešević, Solving fuzzy linear systems using a block reprezentation of generalized inverses: The Moore-Penrose inverse, Fuzzy Sets and Systems, accepted, Available online 10 November 2017. DOI:10.1016/j.fss.2017.11.007.

[29] B. Mihailović, V. Miler Jerković, B. Malešević, Solving Fuzzy Linear Systems using a Block Representation of Generalized Inverses: The Group Inverse, Fuzzy Sets and Systems, on revision.

[30] V. Miler Jerković, B. Malešević, Block representation of generalized inverses of matrices, Proceedings of the fifth Symposium "Mathematics and applications", organized by Faculty of Mathematics, University of Belgrade and Serbian Academy of Sciences and Arts, 1, 176–185, 2014.

[31] V. Miler Jerković, M. Janković, B. Banjac, B. Malešević, B. Mihailović, Applications of the generalized {1,4} inverse in restoration of blurred images, The 5th ICGG Conference MoNGeomentrija 2016, 62–68, Belgrade 23-26 June 2016. ISBN 978-86-7466-613-5

[32] V. Miler Jerković, M. Janković, B. Malešević, B. Mihailović, Solving Fuzzy Linear Systems with EP matrix using a block representation of generalized inverses, 13th Symposium on Neurel Networks and Applications (NEUREL), Belgrade November 22-26, 2016. ISBN 978-1-5090-1530-6/16.

[33] V. Miler Jerković, B. Mihailović, B. Malešević, A new method for solving square fuzzy linear systems, EUSFLAT 2017, The 10th Conference of the European

Society for Fuzzy Logic and Technology, 278–289, Warsaw, Poland, September 11-15, 2017. DOI 10.1007/978-3-319-66824-6 25.

[34] E. H. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix, Bulletin of the American Mathematical Society, 26, 394–395, 1920.

[35] H.T. Nguyen, B. Wu, Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data, Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[36] M. Nikuie, Singular fuzzy linear systems, App. Math. and Comp. Intel. 2, 157–168, 2013.

[37] M. Otadi, M. Mosleh, Minimal solution of fuzzy linear systems, Iranian Journal of Fuzzy Systems. 12, 89–99, 2015.

[38] M.H. Pearl, On normal and EPr matrices, Mich. Math. J., 8, 1–5, 1959.

[39] M.H. Pearl, On normal and EPr matrices, Mich. Math. J., 8, 33–37, 1961.

[40] M.H. Pearl, On generalized inverses of matrices, Proc. Camb. Philos. Soc., 62, 673–677, 1966.

[41] R. Penrose, A generalized inverses for matrices, Mathematical Proccedings of the Cambridge Philosophical Society, 51, 406–413, 1955.

[42] V. Perić, Generalizirana reciproka matrice (in Serbo-Croatian), Matematika (Zagreb), 11, 40—57, 1982.

[43] S.S. Rao, L. Chen, Numerical solution of fuzzy linear equations in engineering analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43(3), 391–408, 1998.

[44] C.A. Rohde, Contribution of the theory, computation and application of generalized inverses (PhD disserattion), University of North Carolina at Releigh, 1964.

[45] R. Saikia, D. Sarma, A Case study on an Economic problem by using Fuzzy linear Equations,IJSRSET, 1(6), 391–394, 2015.

[46] H. Schwerdtfeger, Introduce to linear algebra and theory of matrices, Groningen, 1950.

[47] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and control, 8(3), 338–353, 1965.

[48] H.J. Zimmermann, Fuzzy set theory and its applications, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[49] K. Wang, B. Zheng, Incosistent fuzzy linear systems, Applied Mathematics and Computation. 181, 973–981, 2006.