

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Rajko M. Savanović

**ANALIZA MOGUĆNOSTI DEFINISANJA I
REALIZACIJE DRŽAVNOG PROSTORNOG
GEODETSKOG REFERENTNOG SISTEMA
NA BAZI GLOBALNOG TERESTRIČKOG
REFERENTNOG SISTEMA**

Doktorska disertacija

Beograd, 2017.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Rajko M. Savanović

**ANALYSIS OF DEFINITION AND
REALIZATION POSSIBILITY OF THE
NATIONAL SPATIAL GEODETIC
REFERENCE SYSTEM BASED ON GLOBAL
TERRESTRIAL REFERENCE SYSTEM**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2017.

INFORMACIJE O MENTORU I ČLANOVIMA KOMISIJE

Mentor:

Dr Dragan Blagojević, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Članovi komisije:

Dr Ivan R. Aleksić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Dr Milorad Janić, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu, Šumarski fakultet

Datum odbrane: _____, Beograd

Zahvalnost

Želim da izrazim posebnu zahvalnost mentoru disertacije prof. dr Draganu Blagojeviću na svesrdnoj podršci, korisnim savetima i sugestijama tokom celokupnog rada na izradi doktorske disertacije.

Zahvalnost dugujem i prof. dr Ivanu R. Aleksiću na pažljivom pregledu i sugestijama za unapređenje sadržaja i teksta disertacije.

Zahvaljujem se takođe članu komisije za pregled i ocenu doktorske disertacije prof. dr Miloradu Janiću sa Šumarskog fakulteta u Beogradu na prihvatanju učešća u komisiji kao i uloženom trudu i pažnji pri pregledu rada.

Veoma sam zahvalan kolegi Bo-Gunnar Reit-u iz Švedske, autoru švedskog modela direktne projekcije, koji mi je bezrezervno pružio svu potrebnu literaturu, stručna i lična iskustva u primeni modela direktne projekcije, kao i softversku podršku pri obradi podataka u eksperimentalnom delu rada.

Zahvalan sam kolegama iz Republičkog geodetskog zavoda, posebno Vanču Božinovu rukovodiocu Sektora za geodetske radove, na tehničkoj podršci i ustupljenim podacima koji su poslužili kao osnova eksperimentalnih istraživanja u okviru disertacije.

I na kraju posebnu zahvalnost izražavam mojoj porodici koji su me uvek podržavali, ohrabivali i davali snagu svih ovih godina.

Autor

ANALIZA MOGUĆNOSTI DEFINISANJA I REALIZACIJE DRŽAVNOG PROSTORNOG GEODETSKOG REFERENTNOG SISTEMA NA BAZI GLOBALNOG TERESTRIČKOG REFERENTNOG SISTEMA

Rezime

Doktorska disertacija posvećena je formulisanju odgovarajućeg modela transformacije prostornih podataka između globalnog i lokalnog geodetskog referentnog sistema na području Republike Srbije, pri čemu se u najvećoj meri obuhvataju distorzije i deformacije u realizaciji jednog ili oba sistema.

U cilju istraživanja novih načina modelovanja distorzija geodetske mreže određeni su globalni transformacioni parametri primenom međudatumske Helmertove T7D transformacije sličnosti i FIT transformacijom zasnovanoj na modelu direktne projekcije. Distorzije su modelovane primenom sledećih modela: Briggs-og MCS modela, LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km, TIN modela sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za eksponent $e = 1.00$ i za eksponent $e = 2.00$.

Međusobnim poređenjem statističkih pokazatelja utvrđeno je da se najbolji rezultati modelovanja distorzija u tačkama geodetske mreže dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, sa korelacionom dužinom od 30 km i to nakon FIT transformacije, tj. primenom FIT+LSC30 modela. Za vrednosti standardne devijacije razlike reziduala po koordinatnim osama dobija se $\sigma_{dE} = 0.044\text{m}$ i $\sigma_{dN} = 0.041\text{m}$, dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja $\sigma_{dp} = 0.043\text{m}$.

Ključne reči: geodetski referentni sistem, geodetski datum, metod najmanjih kvadrata, Helmertova transformacija, direktna projekcija, modelovanje distorzija, predikcija reziduala.

Naučna oblast: Geodezija

Uža naučna oblast: Referentne geodetske mreže

UDK: 528.3(043.3)

ANALYSIS OF DEFINITION AND REALIZATION POSSIBILITY OF THE NATIONAL SPATIAL GEODETIC REFERENCE SYSTEM BASED ON GLOBAL TERRESTRIAL REFERENCE SYSTEM

Summary

Doctoral dissertation is dedicated to the formulation of an appropriate model of spatial information transformation between the global and local geodetic reference system on the territory of the Republic of Serbia, whereby distortions and deformations in the realization of one or both systems are largely taken into account.

In order to study new ways of geodetic network distortion modeling, global transformation parameters have been determined using Helmert T7D datum transformation of similarities and FIT transformation based on the model of direct projection. Distortions have been modeled using the following models: Briggs MCS model, LSC model with correlation length of 30km, TIN model with weight $p_i = 1/d_i^e$ for the exponent $e = 1.00$ and for the exponent $e = 2.00$.

Through mutual comparison of statistical indicators, it has been found that the best results of distortion modeling in geodetic network points are obtained using collocation by the least squares method, with the correlation length of 30 km, this being done after FIT transformation, i.e. applying FIT + LSC30 model. For the difference of the residuals standard deviation values obtained on coordinate axes are: $\sigma_{dE} = 0.044\text{m}$ and $\sigma_{dN} = 0.041\text{m}$, while the standard deviation of the horizontal position vector is $\sigma_{dp} = 0.043\text{m}$.

Key words: geodetic reference system, geodetic datum, least squares method, Helmert transformation, direct projection, distortion modeling, residuals prediction.

Scientific field: Geodesy

Field of academic expertise: Geodetic reference networks

UDK: 528.3(043.3)

SADRŽAJ

Spisak skraćenica	i
Spisak tabela	iv
Spisak slika	vi
1. Uvod	1
1.1. Predmet i cilj naučnog istraživanja	1
1.2. Polazne hipoteze istraživanja	4
1.3. Struktura doktorske disertacije	7
1.4. Stanje u oblasti istraživanja	9
1.4.1. Transformacija u Nemačkoj	9
1.4.2. Transformacija u Velikoj Britaniji	12
1.4.3. Transformacija u Austriji	16
1.4.4. Transformacija u Australiji	18
1.4.5. Transformacija u Švedskoj	21
1.4.6. Transformacija u Srbiji	25
2. Koordinatni sistemi u geodeziji	30
2.1. Referentni sistemi i okviri	31
2.2. Terestrički koordinatni sistemi	32
2.2.1. Terestrički geocentrični sistemi	32
2.2.1.1. <i>Kretanje polova i nepravilna rotacija Zemlje</i>	32
2.2.1.2. <i>Srednji i trenutni terestrički sistem</i>	34
2.2.1.3. <i>Geodetski koordinatni sistemi</i>	36
2.2.2. Pravougla i krivolinijske koordinate tačke na referentnom elipsoidu	37
2.2.2.1. <i>Vektor položaja tačke izražen preko geodetske širine</i>	41
2.2.2.2. <i>Vektor položaja tačke izražen preko geocentrične i redukovane širine</i>	43
2.2.2.3. <i>Veza između geodetske, geocentrične i redukovane širine</i>	44

2.2.2.4. Vektor položaja tačke koja se nalazi iznad referentnog <i>elipsoida</i>	44
2.2.2.5. Transformacija koordinata iz srednjih trestričkih pravougljih u <i>geodetske koordinate</i>	46
2.2.3. Geodetski datumi	49
2.2.3.1. Parametri položajnog datuma	50
2.2.3.2. Uspostavljanje datuma	53
2.2.3.3. Transformacije datuma	54
2.2.4. Terestrički topocentrični sistemi	57
2.2.4.1. Lokalni astronomski sistem	57
2.2.4.2. Lokalni geodetski sistem	60
2.3. Nebeski koordinatni sistemi	62
2.3.1. Ekliptički sistem	63
2.3.2. Sistem rektascenzije (Nebeski ekvatorski sistem)	64
2.3.3. Sistem časovnog ugla (Mesni ekvatorski sistem)	66
2.3.4. Horizontski sistem	67
2.4. Orbitalni sistem	68
2.4.1. Orbitalni koordinatni sistem	69
2.4.2. Transformacija iz orbitalnog u srednji terestrički sistem	70
2.4.3. Topocentrične koordinate satelita	71
3. Geodetski datum i datumaska transformacija	73
3.1. Definicija i realizacija geodetskog datuma	73
3.1.1. Klasični terestrički geodetski datum	76
3.1.2. Savremeni satelitski geodetski datum	77
3.1.3. Potreba za datumskom transformacijom	81
3.2. Važniji transformacioni modeli	83
3.2.1. Familija affine transformacije	83
3.2.2. Familija Helmertove transformacije sličnosti	85
3.2.3. Polinomske transformacije	88
3.2.4. Opšta aritmetička sredina	89
3.2.5. Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata	90

3.3. Koncept Helmertove transformacije sličnosti	92
3.3.1. Transformacija sličnosti u pravouglim koordinatama	92
3.3.2. Transformacija sličnosti u geografskim koordinatama	95
3.3.3. Funkcionalni model transformacije sličnosti	97
3.3.4. Stohastički model transformacije sličnosti	99
3.4. Neki aspekti transformacije sličnosti	100
3.4.1. Uticaj tačnosti visina tačaka	100
3.4.2. Uticaj aproksimacije trigonometrijskih funkcija	102
3.4.3. Uticaj tačnosti transformacionih parametara	104
3.5. Ocenjivanje po metodi najmanjih kvadrata	105
3.5.1. Najvažniji rezultati ocenjivanja	105
3.5.2. Eliminacija parametara	107
3.5.3. Sekvencijalno MNK ocenjivanje	108
3.5.4. Rekurzivno MNK ocenjivanje	109
4. Modeliranje distorzije	111
4.1. Model grid transformacije	112
4.2. TIN model – mreža trouglova	115
4.3. Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata (LSC)	117
4.3.1. Pokretna sredina	118
4.3.2. Empirijska funkcija kovarijanse	119
4.3.3. Predikcija po metodi najmanjih kvadrata	122
4.4. Površ minimalne zakrivljenosti (MCS)	124
4.4.1. Briggs-ov algoritam	124
4.4.2. Splajnovi s napetošću	127
4.5. Transformacija podelom područja na konačne elemente (FEM) ...	130
4.6. Transformacija po modelu uklapanja projekcije – FIT model	136
4.6.1. Prelaz iz (φ, λ) u (x, y) zasnovan na TM projekciji sa formulama Gauss-Krüger-a	137
4.6.2. Uklapanje projekcije zasnovano na TM projekciji sa formulama Gauss-Krüger-a	139

4.6.3. Uklapanje projekcije kombinovano sa Helmertovom transformacijom u ravni	142
4.6.4. Iskustva u upotrebi modela uklapanja projekcije	143
5. Mogućnosti primene različitih modela transformacije na području Srbije	145
5.1. Raspoloživi podaci	145
5.1.1. Preuzimanje i priprema podataka	145
5.1.2. Kontrola kvaliteta preuzetih podataka	147
5.2. Određivanje transformacionih parametara na osnovu Helmertove T7D transformacije sličnosti	149
5.2.1. Globalno određivanje parametara	149
5.2.2. Formiranje grida tačaka	152
5.2.3. Predikcija reziduala primenom Briggs-og MCS modela	154
5.2.4. Predikcija reziduala primenom LSC modela	158
5.2.5. Predikcija reziduala primenom TIN modela	162
5.2.5.1. <i>Predikcija reziduala primenom TIN100 modela</i>	162
5.2.5.2. <i>Predikcija reziduala primenom TIN200 modela</i>	166
5.3. Određivanje transformacionih parametara na osnovu FIT modela transformacije	170
5.3.1. Određivanje parametara direktne projekcije	170
5.3.2. Predikcija reziduala primenom Briggs-og MCS modela	174
5.3.3. Predikcija reziduala primenom LSC modela	178
5.3.4. Predikcija reziduala primenom TIN modela	182
5.3.4.1. <i>Predikcija reziduala primenom TIN100 modela</i>	182
5.3.4.2. <i>Predikcija reziduala primenom TIN200 modela</i>	186
6. Upoređenje različitih modela transformacije	191
6.1. Upoređenje novih transformacionih modela	191
6.1.1. Upoređenje modela zasnovanih na T7D modelu transformacije	191
6.1.2. Upoređenje modela zasnovanih na FIT modelu transformacije	193
6.1.3. Upoređenje LSC30 modela nakon T7D i FIT transformacije	196

6.2. Službeni transformacioni model u Srbiji	197
6.2.1. Postupak i realizacija transformacionog modela GRIDER	197
6.2.2. Predikcija reziduala primenom modela GRIDER	198
6.3. Upoređenje modela LSC30 zasnovanog na FIT transformaciji i modela GRIDER	202
7. Zaključak i preporuke	204
Literatura	214
Prilozi	219
Biografija	235

Spisak skraćenica

AGD66	Australian Geodetic Datum 1966
AGD84	Australian Geodetic Datum 1984
AGREF	Austrian Geodynamic Reference Frame
AGROS	Aktivna Geodetska Referentna Osnova Srbije
AMON	Austrian Monitoring Network
APOS	Austrian Positioning System
AREF	Austrian Reference Frame
BEV	Bundesamt für Eich-und Vermessungswesen
BIH	Bureau International de l'Heure
CHAMP	Challenging Minisatellite Payload
CIO	Conventional International Origin
COPAG	COntinuous Patched Georeferencing
CTS	Conventional Terrestrial Sistem
CTRS	Conventional Terrestrial Reference System
DFHRS	Digital Finite element Height Reference Surface
DFLBF	Digitale Finite element LageBezugsFläche
DHDN	Deutsches Haupt Dreieck Netz
DORIS	Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite
DREF91	German Reference Frame 1991
ED50	European Datum 1950
ED79	European Datum 1979
ETRF2000	European Terrestrial Reference Frame 2000
ETRS89	European Terrestrial Reference System 1989
EUREF	IAG Reference Frame Sub-Commission for Europe
EVRS	European Vertical Reference System
FEM	Finite Elements Method
FIT	Švedski model uklapanja projekcije
GALILEO	GNSS sistem nazvan po astronomu Galileo Galilei
GDA94	Geocentric Datum of Australia 1994

GIS	Geographic Information System
GLONASS	Global Navigation Satellite System
GNSS	Global Navigation Satellite System
GPS	Global Positioning System
GRS80	Geodetic Reference System 1980
IAG	International Association of Geodesy
ICSM	Intergovernmental Committee on Surveying and Mapping
IERS	International Earth Rotation Service and Reference Systems Service
IPMS	International Polar Motion Service
ITRF	IERS Terrestrial Reference Frame
ITRS	International Terrestrial Reference System
IUGG	International Union of Geodesy and Geophysics
LLR	Lunar Laser Ranging
LSC	Least Square Collocation
LSC30	Kolokacije po metodi najmanjih kvadrata za korelaciju dužinu od 30 km
MCS	Minimum Curvature Surface
MGI	Militar-Geographisches Institut
MNK	Metod najmanjih kvadrata
MOVA	MOVing Average
MRE	Multiple Regression
MSL	Srednji nivo mora
NAD27	North American Datum 1927
NAD83	North American Datum 1983
NAVSTAR	Navigation Satellite Timing and Ranging GPS
ODN	Ordnance Datum Newlyn
OLG	Opservatorija Lustbuhel-Graz
ORB	Orbitalni koordinatni sistem
OSGB36	Ordnance Survey Great Britain 1936
OSTN02	Ordnance Survey TraNsformation 2002
RGZ	Republički geodetski zavod Srbije

RTFE	Real Time Finite Element
SAPOS	Satellitenpositionierungsdienst der deutscher Landsvermessung
SLR	Satellite Laser Ranging
SREF	Srpska referentna GPS mreža
SWEREF99	SWEdish REference Frame 1999
TIN	Triangulated Irregular Network
TIN100	Modelovanje mreže trouglova sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za $e = 1.00$
TIN200	Modelovanje mreže trouglova sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za $e = 2.00$
TM	Transverzalna Merkatorova projekcija
TPS	Terrestrial Positioning System
TRF	Terrestrial Reference Frame
TRS	Terrestrial Reference System
TSPL	Tension SPLines
T7D	Transformacija 7-parametarska Datumaska
UTM	Universal Transverse Mercator
VLBI	Very Long Baseline Radio Interferometry
WGS84	World Geodetic System 1984
YUREF	Jugoslovenski referentni okvir

Spisak tabela

Tabela 1.1:	<i>Metode datumskih transformacija koordinata u Australiji</i>	19
Tabela 1.2:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama</i>	29
Tabela 2.1:	<i>Terestrički elipsoidi</i>	38
Tabela 5.1:	<i>Standardne devijacije za skup od 4509 zajedničkih tačaka</i>	148
Tabela 5.2:	<i>Ocene parametara globalne Helmertove transformacije</i>	151
Tabela 5.3:	<i>Statistika vrednosti popravaka dobijenih na osnovu parametara</i>	151
Tabela 5.4:	<i>Osnovni parametri grida tačaka na teritoriji Republike Srbije</i>	152
Tabela 5.5:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po Briggs-om MCS modelu nakon T7D transformacije</i>	154
Tabela 5.6:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po LSC30 modelu nakon T7D transformacije</i>	158
Tabela 5.7:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN100 modelu nakon T7D transformacije</i>	162
Tabela 5.8:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN200 modelu nakon T7D transformacije</i>	166
Tabela 5.9:	<i>Statistika vrednosti popravaka zajedničkih tačaka dobijenih na osnovu parametara direktne projekcije određenih na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka</i>	172
Tabela 5.10:	<i>Određene vrednosti parametara direktne projekcije na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka</i>	172
Tabela 5.11:	<i>Statistika vrednosti popravaka dobijenih na osnovu FIT transformacije za skup od 4490 tačaka na području Republike Srbije</i>	173
Tabela 5.12:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije</i>	175

Tabela 5.13:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po LSC30 modelu nakon FIT transformacije</i>	179
Tabela 5.14:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN100 modelu nakon FIT transformacije</i>	183
Tabela 5.15:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN200 modelu nakon FIT transformacije</i>	187
Tabela 6.1:	<i>Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja nakon T7D transformacije</i>	192
Tabela 6.2:	<i>Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja nakon FIT transformacije</i>	194
Tabela 6.3:	<i>Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja za model LSC30</i>	196
Tabela 6.4:	<i>Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po modelu GRIDER</i>	199
Tabela 6.5:	<i>Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja za modele LSC30 i GRIDER</i>	203

Spisak slika

<i>Slika 1.1:</i>	Položaj permanentnih stanica pziционog servisa SAPOS	10
<i>Slika 1.2:</i>	Levo - reziduali transformacije na osnovu jednog seta parametara, a desno - reziduali transformacije na osnovu 177 polja (vrednost reziduala je 0.02m)	11
<i>Slika 1.3:</i>	Aktivne GPS tačke u V. Britaniji	12
<i>Slika 1.4:</i>	TIN na području južne Engleske (Ordnance Survey, 2002)	15
<i>Slika 1.5:</i>	Interpolacija transformacionog pomaka	15
<i>Slika 1.6:</i>	Permanentne stanice GPS mreže u Austriji	17
<i>Slika 1.7:</i>	Nehomogenost međudaturnskih tačaka u Austriji	18
<i>Slika 1.8:</i>	Upoređenje modela distorzije na test mreži Victorian Network, istočna i zapadna komponenta (ibid.)	20
<i>Slika 1.9:</i>	Reziduali – 7-parametarska transformacija	24
<i>Slika 1.10:</i>	Reziduali – Direktna projekcija	24
<i>Slika 1.11:</i>	Lokacije tačaka referentne GPS mreže Republike Srbije (SREF)	26
<i>Slika 1.12:</i>	Lokacije tačaka aktivne geodetske referentne osnove Republike Srbije (AGROS)	27
<i>Slika 2.1:</i>	Kretanje pola	33
<i>Slika 2.2:</i>	Položaj tačke koja se uniformno kreće duž ekvatora	34
<i>Slika 2.3:</i>	Terestrički i geodetski koordinatni sistem	35
<i>Slika 2.4:</i>	Referentni elipsoid	39
<i>Slika 2.5:</i>	Različite širine	40
<i>Slika 2.6:</i>	Tangenta na meridijansku elipsu	41
<i>Slika 2.7:</i>	Tačka iznad referentnog elipsoida	44
<i>Slika 2.8:</i>	Meridijanski presek Zemlje	49
<i>Slika 2.9:</i>	Orjentacija elipsoida prema geoidu	51
<i>Slika 2.10:</i>	Geodetski i lokalni geodetski koordinatni sistem	58
<i>Slika 2.11:</i>	Ekliptički koordinatni sistem	63
<i>Slika 2.12:</i>	Sistem rektascenzije (Nebeski ekvatorski sistem)	65
<i>Slika 2.13:</i>	Sistem satnog ugla (Mesni ekvatorski sistem)	66
<i>Slika 2.14:</i>	Horizontski sistem	67

<i>Slika 2.15:</i> Keplerovi elementi orbite	69
<i>Slika 2.16:</i> Topocentrične koordinate satelita	71
<i>Slika 3.1:</i> Lokalni i geocentrični datum	75
<i>Slika 3.2:</i> Određivanje ortometrijskih visina	76
<i>Slika 3.3:</i> Internacionalni terestički referentni sistem (ITRS)	78
<i>Slika 3.4:</i> Svetski geodetski sistem 1984 (WGS84)	79
<i>Slika 3.5:</i> Datumaska transformacija	81
<i>Slika 3.6:</i> Sedmoparametarska datumaska transformacija	82
<i>Slika 3.7:</i> Transformacija u trodimenzionalnom prostoru	92
<i>Slika 4.1:</i> Helmertova 7-parametarska transformacija i model distorzije	112
<i>Slika 4.2:</i> Princip grid interpolacije vrednosti distorzija	114
<i>Slika 4.3:</i> Odnos Delaunay-eve trinagulacije (crno) i Voronojevih poligona (crveno)	115
<i>Slika 4.4:</i> Trougao sa opisanom kružnicom	115
<i>Slika 4.5:</i> Tačka se dodaje u mrežu	116
<i>Slika 4.6:</i> Trouglovi koji se brišu	116
<i>Slika 4.7:</i> Trouglovi su izbrisani	116
<i>Slika 4.8:</i> Tačka je dodata	116
<i>Slika 4.9:</i> Princip računanja komponenti distorzije u čvorištu GRID-a	118
<i>Slika 4.10:</i> Funkcija kovarijanse u zavisnosti od udaljenosti	119
<i>Slika 4.11:</i> MCS distorzija površi (Javier González-Matesanz i dr. 2003)	124
<i>Slika 4.12:</i> Računanje čvora kad je opažanje *E u blizini	125
<i>Slika 4.13:</i> Posmatrani čvor i indeksiranje susednih čvorova	128
<i>Slika 4.14:</i> Proširenje GRID-a dodatnim redovima i kolonama	129
<i>Slika 4.15:</i> Primer podele područja transformacije na konačne elemente	130
<i>Slika 4.16:</i> Relativni odnosi konačnih elemenata posle primene zasebnih parametara transformacije $\mathbf{x}^{(i)}$ po elementima	132
<i>Slika 4.17:</i> Relativni odnosi konačnih elemenata posle primene uslova kontinuiteta	133
<i>Slika 5.1:</i> Dispozicija skupa zajedničkih tačaka na području Republike Srbije	146

<i>Slika 5.2:</i>	Dijagram toka određivanja globalnih parametara Helmertove transformacije u pravouglim koordinatama za područje Republike Srbije	150
<i>Slika 5.3:</i>	Princip formiranja grida tačaka na području Republike Srbije nakon globalne Helmertove transformacije	153
<i>Slika 5.4:</i>	Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon T7D transformacije	155
<i>Slika 5.5:</i>	Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu Briggs-og MCS modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije	156
<i>Slika 5.6:</i>	Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon T7D transformacije	157
<i>Slika 5.7:</i>	Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom Briggs-og MCS modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja	157
<i>Slika 5.8:</i>	Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon T7D transformacije	159
<i>Slika 5.9:</i>	Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu LSC30 modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije	160
<i>Slika 5.10:</i>	Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon T7D transformacije	161
<i>Slika 5.11:</i>	Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom LSC30 modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja	161
<i>Slika 5.12:</i>	Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon T7D transformacije	163

<i>Slika 5.13:</i> Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN100 modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije	164
<i>Slika 5.14:</i> Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon T7D transformacije	165
<i>Slika 5.15:</i> Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN100 modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja	165
<i>Slika 5.16:</i> Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon T7D transformacije	167
<i>Slika 5.17:</i> Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN200 modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije	168
<i>Slika 5.18:</i> Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon T7D transformacije	169
<i>Slika 5.19:</i> Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN200 modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja	169
<i>Slika 5.20:</i> Dispozicija skupa od 26 zajedničkih tačaka i vektori horizontalnog položaja određeni na osnovu FIT transformacije na području Republike Srbije	171
<i>Slika 5.21:</i> Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije	176
<i>Slika 5.22:</i> Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije	176

<i>Slika 5.23:</i> Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu Briggs-og MCS modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije	177
<i>Slika 5.24:</i> Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom Briggs-og MCS modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja	178
<i>Slika 5.25:</i> Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon FIT transformacije	180
<i>Slika 5.26:</i> Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon FIT transformacije	180
<i>Slika 5.27:</i> Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu LSC30 modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije	181
<i>Slika 5.28:</i> Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom LSC30 modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja	182
<i>Slika 5.29:</i> Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon FIT transformacije	184
<i>Slika 5.30:</i> Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon FIT transformacije	184
<i>Slika 5.31:</i> Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN100 modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije	185
<i>Slika 5.32:</i> Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN100 modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja	186
<i>Slika 5.33:</i> Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon FIT transformacije	188

<i>Slika 5.34:</i> Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon FIT transformacije	188
<i>Slika 5.35:</i> Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN200 modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije	189
<i>Slika 5.36:</i> Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN200 modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja	190
<i>Slika 6.1:</i> Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po modelu GRIDER	200
<i>Slika 6.2:</i> Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po modelu GRIDER	200
<i>Slika 6.3:</i> Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu modela GRIDER na području Republike Srbije	201

1. Uvod

1.1. Predmet i cilj naučnog istraživanja

U avgustu 2009. godine Skupština Republike Srbije je usvojila Zakon o državnom premeru i katastru nepokretnosti ("Službeni glasnik RS", broj 72/09), (u daljem tekstu: Zakon), kojim je predviđeno uvođenje referentnog sistema ETRS89 u Republici Srbiji i to od 1. januara 2011. godine. Odredbama ovog Zakona je definisan novi referentni sistem (čl. 32, 33 i 34) i prelazak na novi referentni sistem (čl. 193).

Tako je članom 32 Zakona definisan prostorni referentni sistem, i to na sledeći način: „Prostorni referentni sistem za Republiku Srbiju je terestrički trodimenzionalni koordinatni sistem koji se po definiciji koordinatnog početka, orijentaciji koordinatnih osa, razmere, jedinice dužine i vremenske evolucije, podudara sa Evropskim terestričkim referentnim sistemom - European Terrestrial Reference System 1989, (u daljem tekstu: ETRS 89).“

Horizontalni referentni sistem je definisan članom 33 Zakona, kao: „Horizontalni referentni sistem predstavlja dvodimenzionalni koordinatni podskup prostornog referentnog sistema u kome se položaj tačaka izražava dvodimenzionalnim, krivolinijskim koordinatama, odnosno geodetskom dužinom i širinom u odnosu na referentni dvoosni obrtni elipsoid geodetskog referentnog sistema GRS 80 (Geodetic Reference System 1980) koji se određuje za matematički model Zemlje u Republici Srbiji.“

Članom 34 Zakona definisana je državna projekcija na sledeći način: „Položaj tačaka u horizontalnom referentnom sistemu izražava se dvodimenzionalnim, pravolinijskim koordinatama u ravni konformne Univerzalne transverzalne merkatorove projekcije - Universal Transverse Mercator, (u daljem tekstu: UTM), na elipsoid GRS 80.“

Predmetnim Zakonom je u članu 193 predviđen vremenski okvir za prelazak na novi prostorni referentni sistem, i to:

„ (1) Prelazak na ETRS 89 u Republici Srbiji počće najkasnije 1. januara 2011. godine.

(2) Do prelaska na ETRS 89 i UTM projekciju, položaj tačaka se izražava dvodimenzionalnim koordinatama u postojećim projekcijama (Gaus-Kriggerova, stereografska i Zoldnerova projekcija).“

Postojeći državni referentni sistem Republike Srbije, koji je u upotrebi već više od sedamdeset godina, zasniva se na negeocentričnom Beselovom elipsoidu i Gaus-Kriggerovoj projekciji meridijanskih zona. Za fundamentalnu (početnu) tačku sistema usvojena je tačka *Hermannskogel* (nedaleko od Beča), sa astronomski određenim vrednostima latitude i longitude. Orijehtaciju sistema definiše astronomski određen azimut strane *Hermannskogel-Hundsheimer Berg*. Usvojeno je da je u fundamentalnoj tački elipsoidna visina h jednaka ortometrijskoj visini H , odnosno da je undulacija geoida $N=0$.

Prema tome, položaj Beselovog elipsoida kao računске površi lociran je u telu Zemlje tako da njegova površ koincidira sa površi geoida u fundamentalnoj tački, pri čemu je njegova mala poluosa paralelna sa obrtnom osom Zemlje u granicama tačnosti merenja azimuta.

Uvođenje novog državnog referentnog sistema, koji se od postojećeg razlikuje i po položaju i po orijentaciji i po razmeri, podrazumeva formulisanje odgovarajućeg transformacionog modela kojim se ostvaruje veza između postojećeg i novog državnog referentnog sistema u oba pravca, i obuhvataju u najvećoj meri distorzije i deformacije u realizaciji jednog ili oba sistema.

Uspostavljanje metodologije prelaza iz starog geodetskog datuma, koji se u praksi još uvek koristi i koji će još neko vreme biti u široj upotrebi, u jedinstven novi Zakonom propisani geodetski datum, jeste jedan od glavnih ciljeva ovog istraživanja. Iz praktičkih razloga trenutno je mnogo interesantniji obrnuti prelaz iz savremenog opažaćkog u arhivski okvir, odnosno, stari geodetski datum. Ovakva situacija je direktna posledica potrebe održavanja postojećih podataka katastra nepokretnosti, zatim još uvek do kraja neuređene normativno-pravne regulative u inženjersko-tehničkim i drugim oblastima koje predstavljaju najvažnije korisnike geodetskih podataka i usluga, kao i činjenice da je na velikom delu područja Vojvodine još uvek u upotrebi Austro-Ugarski premer u stereografskoj projekciji, a na jednom manjem delu Srbije i u Zoldnerovoj projekciji.

Celokupna transformacija koordinatnih podataka i opažanja sasvim sigurno ne može biti jednoobrazna zbog neposredne ili posredne heterogenosti starih datuma (Hofmann-Wellenhof i dr., 2001). Jedan od ciljeva disertacije jest upravo uspostavljanje modela topološko-geometrijske homogenizacije podataka stare mreže tj. odgovora na pitanje primenom kog transformacionog modela se parametri starog datuma mogu iskoristiti i kako se isti mogu prilagoditi novom datumu uz unošenje najmanje moguće greške koja je u granicama dozvoljenih odstupanja određenih na osnovu definisane tačnosti premera i praktičnih primena u geodetskoj praksi.

Obavljena istraživanja su u jednoj varijanti bazirana na primeni algoritama prostornih 7-parametarskih trodimenzionalnih transformacija, odnosno računanja transformacionih parametara po klasično razvijenim jednačinama u kartezijskom obliku (Hofmann-Wellenhof i dr., 1994) tj. razdvojenih položajno/visinskih transformacija prostornih koordinata. U drugoj varijanti istraživanja različitih transformacionih modela su bazirana na transformaciji po modelu uklapanja projekcije, tj. na FIT modelu koji je razvijen i primenjen na području Švedske (Reit, 2009).

Predmet naučnog istraživanja doktorske disertacije predstavlja definisanje novog prostornog geodetskog referentnog sistema na području Republike Srbije i analiza mogućnosti njegovog povezivanja sa postojećim prostornim geodetskim referentnim sistemom. Međusobno povezivanje ovih referentnih sistema je moguće realizovati primenom različitih transformacionih modela, pri čemu zbog praktičnih potreba proisteklih iz činjenice da je u Republici Srbiji još uvek u upotrebi stari geodetski referentni sistem, kroz naučno istraživanje treba definisati prelaz iz novog u stari prostorni geodetski referentni sistem. Kako je predmetom istraživanja neophodno obuhvatiti više različitih transformacionih modela potrebno je definisati kriterijume za ocenu kvaliteta svakog od primenjenih modela kao i kriterijume za njihovo međusobno upoređenje.

Cilj naučnog istraživanja, saglasno predmetu, je da se na osnovu savremenih inostranih dostignuća u ovoj oblasti analizira postojeći prostorni geodetski referentni sistem u Srbiji i definiše novi sistem, utvrdi metodologija povezivanja referentnih sistema i kroz eksperimentalnu proveru različitih modela predloži metodologija koja shodno definisanim kriterijumima daje najbolje rezultate, tj. predstavlja najkvalitetniji transformacioni model, čime ujedno treba dokazati opravdanost uvođenja novog prostornog geodetskog referentnog sistema na području Republike Srbije.

1.2. Polazne hipoteze istraživanja

Naučno istraživanje u okviru ove disertacije bazira se na sledećim najvažnijim polaznim hipotezama:

- pretpostavlja se da postoje koordinate identičnih trigonometrijskih tačaka određene u oba referentna sistema, novom i postojećem državnom referentnom sistemu,
- pretpostavlja se da postoje podaci o parametrima koji definišu referentne sisteme,
- pretpostavlja se da je moguće definisati obostranu matematičku vezu između ovih referentnih sistema u cilju transfera podataka.

Pored navedenih polaznih hipoteza činjenično stanje geodetskih podataka u Republici Srbiji je generalno gledano još uvek neuređeno i heterogeno, pri čemu se prvenstveno misli na geometrijski aspekt podataka, što svakako predstavlja dodatnu motivaciju za izradu ovakve disertacije. U postupku analize postojećih podataka koji se odnose na koordinate identičnih trigonometrijskih tačaka u oba sistema neminovno se nameće potreba korišćenja metodologije i postupaka primenjenih u dosadašnjim inostranim i domaćim istraživanjima i tako stečenih iskustava. Tako će se ocena tačnosti pojedinih modela vršiti ustaljenim statističkim testiranjima nakon posrednog izravnjanja po teoriji najmanjih kvadrata uz samo kraća, savremenom dobu primerenija (Torge, 2003), objašnjenja šta je to zapravo geodetski datum, referentni koordinatni sistem, kao i ostali pojmovi neophodni u praktičnom delu rada.

U postupku definisanja matematičke veze između predmetnih referentnih sistema detaljnije će biti prikazane i objašnjene različite metode računanja parametara prostornih transformacija koordinata, kao što su familija affine transformacije, familija Helmertove transformacije sličnosti, prvenstveno 7-parametarska transformacija po algoritmu Burša-Wolf, elipsoidna modifikacija po Molodensky-om, kao i ostali postupci računanja primenom polinomske transformacije, opšte aritmetičke sredine i kolokacije po metodi najmanjih kvadrata.

Sami algoritmi transformacija koordinata se mogu podeliti u nekoliko grupa: prema načinu računanja parametara - na prostorno homogene ili položajno-visinski razdvojene tipove transformacija (Hofmann-Wellenhof i dr., 1994), na vremenski zavisne ili nezavisne (Boucher i dr., 1991), ali i na neki treći tip koji predstavlja kombinaciju navedenih formi, čime se dobija logičan i opravdan tip transformacije koji za određene potrebe i postupke može imati smisla (Kanani, 2000).

Poseban model transformacije koji je do sada primenjen jedino na području Švedske jeste model uklapanja projekcije – FIT model (Reit, 2009) zasnovan na ustanovljavanju transformacionih parametara bez korišćenja 2D Helmertove transformacije. Tako se koordinate transformišu između dva geodetska referentna okvira pomoću proračuna projekcije, pri čemu se parametri projekcije određuju u iterativnom postupku analogno onom koji se koristi za 3D Helmertovu transformaciju. Metod je implementiran za transverzalnu merkatorovu projekciju, tako što su transformisane (φ, λ) koordinate sa površi elipsoida u pravougle (x, y) koordinate u ravni Gauss-Krüger-ove projekcije.

Dosadašnja istraživanja i računanja transformacionih parametara na području Republike Srbije (Blagojević, 2009), ukazuju na potrebu razdvajanja visinskih i horizontalnih podataka za tačke trigonometrijske mreže. Ovim istraživanjem definisan je transformacioni model 7P+GRID čija realizacija podrazumeva globalnu Helmertovu transformaciju i interpolaciju u okviru grida reziduala postupkom bipolarne interpolacije, pri čemu težište transformacionog postupka jeste transformacija horizontalnog položaja tačaka.

Zajedničko za sve transformacione modele koji će biti predmet istraživanja u okviru ove disertacije jeste pitanje kriterijuma za otkrivanje i odbacivanje grubih grešaka u postupku obrade podataka i primene metode posrednog izravnjanja. U tom postupku potrebno je preliminarno oceniti parametre Helmertove transformacije sličnosti na osnovu koordinata svih zajedničkih tačaka. S obzirom na to da se primenom postupka ocenjivanja po metodi najmanjih kvadrata dobijaju i rezultujuće popravke po koordinatnim osama postojećeg referentnog sistema v_y, v_x , kao mera saglasnosti novog i postojećeg referentnog sistema, na osnovu njih je moguće realizovati testiranje na prisustvo grubih grešaka, odnosno, nesaglasnih koordinata zajedničkih tačaka.

Na osnovu definisanog predmeta i cilja naučnog istraživanja, te utvrđenih polaznih hipoteza, očekivani doprinos sprovedenog istraživanja u okviru ove disertacije bi se ogledao u definisanju najkvalitetnijeg transformacionog modela čijom je primenom moguće povezati stari i novi prostorni geodetski referentni sistem. Kako je u ovom istraživanju po prvi put na području Republike Srbije primenjen model uklapanja projekcije – FIT model, kojim se isključuje standardna upotreba 7-parametarske Helmertove transformacije, značajan doprinos predstavlja odgovor na pitanje da li je ovaj model uopšte primenjiv za skup zajedničkih tačaka na području Srbije, s obzirom na heterogenost podataka kojima su definisane pozicije tačaka u postojećem koordinatnom sistemu. Upoređenjem rezultata dobijenih primenom transformacionih modela zasnovanih na 7-parametarskoj Helmertovoj T7D transformaciji i rezultata istog modeliranja zasnovanog na FIT modelu transformacije, moguće je oceniti i međusobno uporediti kvalitet svakog od primenjenih modela transformacije. Pored toga predmet analize i istraživanja je i postojeći transformacioni model koji se kao službeni koristi za područje Republike Srbije - model GRIDER, te bi primenom istih kriterijuma dobijeni rezultati mogli da pokažu njegov kvalitet.

1.3. Struktura doktorske disertacije

Doktorska disertacija se sastoji iz sedam poglavlja.

U **prvom** poglavlju je ukratko dato obrazloženje teme, definisan je predmet i cilj istraživanja, polazne hipoteze i način rešavanja postavljenog problema istraživanja. Pored toga navedeni su očekivani rezultati istraživanja, njihov značaj i mogućnost primene u praksi. Ukratko je obrazložen naučni doprinos istraživanja i predstavljen sadržaj doktorske disertacije. U nastavku ovog poglavlja prikazano je stanje u oblasti istraživanja na primeru primenjenih transformacionih modela u više evropskih zemalja, kao i u zemljama u okruženju, u kojima su karakteristike starih i novih prostornih referentnih sistema bile slične stanju ovih sistema u Republici Srbiji.

Teorijske osnove različitih koordinatnih sistema u geodeziji su prikazane u **drugom** poglavlju disertacije. Pre prelaska na prikaz koordinatnih sistema prema International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS) data je definicija referentnog sistema i referentnog okvira, s obzirom da se ovi koncepti primenjuju kroz sve diskusije o koordinatnim sistemima u geodeziji. U nastavku je dat detaljan prikaz terestričkih, nebeskih i orbitalnih koordinatnih sistema. Posebna pažnja posvećena je prikazu terestričkih koordinatnih sistema, koji služe za definisanje koordinata tačaka na fizičkoj površi Zemlje, i kao takvi mogu biti geocentrični i topocentrični sistemi. Kako bi pozicije tačaka u bilo kom od ovih sistema mogle biti jednoznačno određene brojnim vrednostima, uveden je pojam geodetskog datuma uz osnovno definisanje parametara položajnog i visinskog datuma.

Uspostavljanje veze između prostornih podataka definisanih u različitim koordinatnim sistemima se realizuje kroz postupak datumske transformacije. Upravo je iz tog razloga u **trećem** poglavlju definisan geodetski datum i prikazana njegova realizacija za slučaj kada se definiše kao klasičan terestrički geodetski datum i kao savremen satelitski geodetski datum. Na osnovu obrazložene potrebe za izvođenjem datumskih transformacija prikazani su važniji transformacioni modeli, i to: familija affine transformacije, familija Helmertove transformacije sličnosti, polinomske transformacije i kolokacija po metodi najmanjih kvadrata.

Kako se u praksi najčešće koriste modeli Helmertove transformacije sličnosti oni su u ovom poglavlju detaljno obrađeni uz analizu različitih uticaja kao što je uticaj tačnosti visina tačaka, uticaj aproksimacije trigonometrijskih funkcija i uticaj tačnosti transformacionih parametara. Svaka datumska transformacija se zasniva na oceni transformacionih parametara, te je kao standardna metoda u ovom postupku, prikazano ocenjivanje po metodi najmanjih kvadrata.

U **četvrtom** poglavlju su date teorijske osnove različitih modela koji se mogu koristiti nakon izvođenja datumske transformacije u cilju modelovanja distorzija geodetske mreže. Naime, nakon svake datumske transformacije, na osnovu transformisanih i datih koordinata zajedničkih tačaka, mogu se utvrditi vrednosti reziduala po koordinatnim osama. U cilju poboljšanja kvaliteta transformacije potrebno je modelovati distorzije i na osnovu primenjenog modela odrediti popravke po koordinatnim osama za svaku zajedničku tačku geodetske mreže. Zbog svega navedenog detaljno su obrađeni sledeći modeli: model grid transformacije, TIN model – mreža trouglova, kolokacija po metodi najmanjih kvadrata (LSC), površ minimalne zakrivljenosti (MCS), transformacija podelom područja na konačne elemente (FEM) i transformacija po modelu uklapanja projekcije – FIT model.

Peto poglavlje predstavlja eksperimentalni deo doktorske diosertacije. U skladu sa definisanim polaznim hipotezama naučnog istraživanja utvrđen je polazni skup od 4509 zajedničkih trigonometrijskih tačaka čije su koordinate određene u oba referentna sistema, novom i postojećem državnom referentnom sistemu. Provera kvaliteta preuzetih podataka je realizovana primenom statističkog testiranja grubih grešaka na osnovu vrednosti standardne devijacije horizontalnog položaja svake zajedničke tačke, dobijene nakon primene Helmertove transformacije sličnosti. Eksperimentalna provera različitih transformacionih modela je realizovana na dva različita načina. Prvi način se odnosio na modelovanje distorzija u zajedničkim tačakama geodetske mreže nakon primene Helmertove T7D transformacije sličnosti, dok je po drugom načinu distorzije modelovane nakon primene FIT modela transformacije. U oba slučaja modelovanje distorzija je realizovano primenom Briggs-og MCS modela, LSC modela i TIN modela.

Eksperimentalni deo doktorske disertacije je dalje prikazan u **šestom** poglavlju u kome je izvršeno upoređenje različitih modela transformacije. Kako modelovanje distorzija primenom Briggs-og MCS modela, LSC modela i TIN modela predstavlja nove transformacione modele, oni su međusobno upoređeni u cilju definisanja novog modela koji obezbeđuje najbolji kvalitet transformacije. Kako je u Republici Srbiji u službenoj upotrebi transformacioni model GRIDER, na bazi istog skupa zajedničkih tačaka, izvršena je provera kvaliteta ovog modela transformacije. Dobijeni rezultati su omogućili međusobno upoređenje novih transformacionih modela sa službenim transformacionim modelom GRIDER.

Sedmo poglavlje se odnosi na zaključna razmatranja koja su proistekla iz primene različitih transformacionih modela i dobijenih rezultata. U skladu sa dobijenim rezultatima za praktične primene u praksi predložen je transformacioni model koji daje najbolji kvalitet transformacije podataka, odnosno, kojim se uspostavlja najbolja veza između novog i postojećeg geodetskog prostornog referentnog sistema. Takođe, date su preporuke koje bi bile korisne za naredne studije, otvorena pitanja i predloženi pravci daljih istraživanja u ovoj oblasti.

1.4. Stanje u oblasti istraživanja

1.4.1. Transformacija u Nemačkoj

U Nemačkoj je za potrebe transformacije iz klasično definisanih lokalnih koordinatnih sistema u ITRS/ETRS89 datum (Jager i Kalber, 2006) razvijeno tzv. COPAG (engl. *Continously Patched Georeferencing*) rešenje, bazirano na metodi konačnih elemenata. Baze podataka COPAG se koriste za obostranu 3D transformaciju između klasičnog datuma i ITRS/ETRS89 okvira. Korišćenjem COPAG transformacione baze podataka tačnost transformacije je povećana sa 2.5 m, dobijenih u slučaju primene jedinstvenog skupa transformacionih parametara za područje cele Nemačke, na svega 5 mm. COPAG baza podataka se koristi za GIS potrebe i SAPOS pozicione servise. Osnovu SAPOS pozicionog servisa predstavlja 250 permanentnih stanica (Ihde i dr., 2008), koje imaju određene koordinate u državnom ETRS89 koordinatnom sistemu (Slika 1.1).

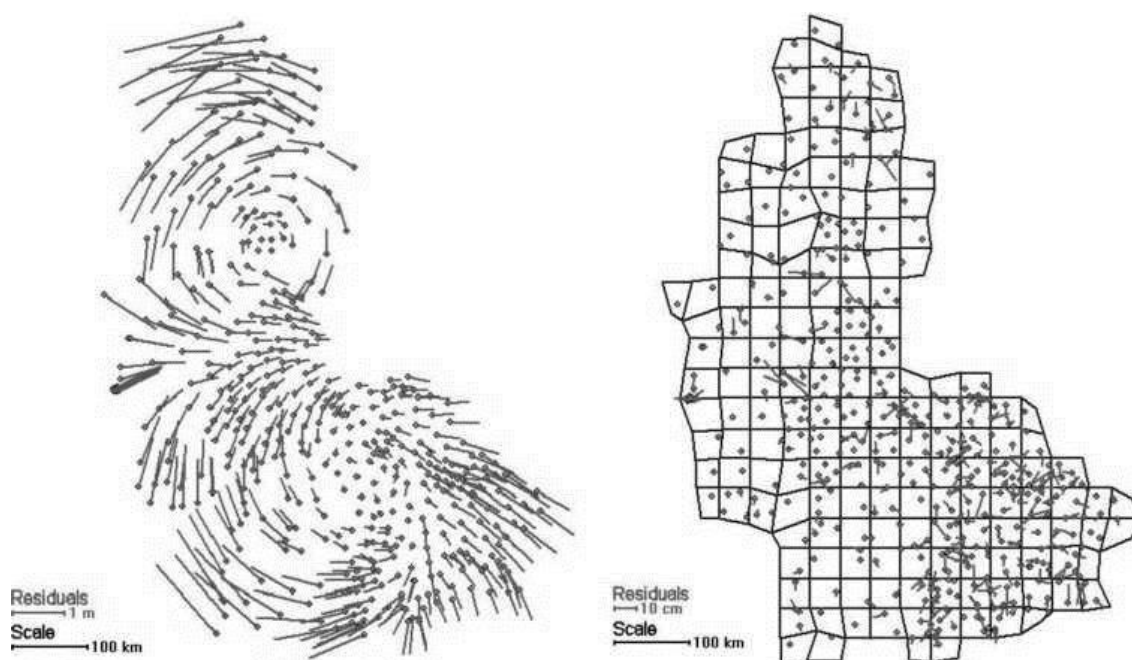


Slika 1.1: Položaj permanentnih stanica pozicionog servisa SAPOS

Za potrebe određivanja ortometrijskih visina razvijeno je rešenje DFHRS (*Digital-Finite-Element-Height-Reference-Surface*), takođe zasnovano na metodi konačnih elemenata. DFHRS baze podataka omogućavaju GNSS određivanje visine putem konverzije elipsoidnih visina h u ortometrijske visine H u odnosu na fizički definisanu visinsku referentnu ploču. DFHRS je određen i modeliran kao neprekidna ploča sa parametrom p na proizvoljnom području. Na osnovu dobijenih DFHRS parametara p , pohranjenih u DFHRS bazu podataka, moguće je odrediti 3D korekcije DFHRS ($p|\varphi,\lambda,h$) za transformaciju $H = h - \text{DFHRS}(p|\varphi,\lambda,h)$ elipsoidnih GNSS visina u sistem ortometrijskih visina H .

Osnovna triangulaciona mreža Zapadne Nemačke DHDN (nem. *Deutsches Haupt Dreiecks Netz*) opažana je od 1870. do 1950. godine kombinacijom više pojedinačnih mreža. Tačka ishodišta sistema je *Rauenberg* u blizini Berlina, a mreža je orijentisana astronomskim azimutom prema crkvi Sv.Marije u Berlinu (Cai, 2000). Nemačka Referentna Mreža (DREF91) određena je 1991. godine GPS merenjima i sadrži 109 geodetskih tačaka. Standardna devijacija konačnog seta koordinata je 1 - 2 cm položajno u horizontalnoj ravni i 2 cm po visini.

COPAG koncept transformacije omogućava homogenizaciju, centimetarsku tačnost i konzistentnost transformacije koordinata između klasičnog državnog referentnog sistema $(\varphi, \lambda)_{class}$ i ITRF/ETRS89 datuma $(\varphi, \lambda)_{ITRS}$. Ova transformacija je zasnovana na 3D Helmertovoj transformaciji između dva referentna sistema realizovanoj na osnovu elipsoidnih koordinata, pod pretpostavkom postojanja malih uglova rotacije koordinatnih osa. S obzirom da se radi samo o položajnoj transformaciji koordinata (φ, λ) , i da u opštem slučaju identične tačke kao i tačke koje treba transformisati nemaju određenu visinu, visinsku komponentu je potrebno odrediti samo za mali broj identičnih tačaka (npr. tačke 1. reda).



Slika 1.2: Levo-reziduali transformacije na osnovu jednog seta parametara, a desno - reziduali transformacije na osnovu 177 polja (vrednost reziduala je 0.02 m)

Obzirom da ETRS89 ima tačnost od 1 cm, prikazani reziduali predstavljaju odstupanje transformisanih koordinata tačaka od svojih datih vrednosti, te tako reziduali DHDN mreže u Nemačkoj dostižu iznos od ± 2.5 m (Slika 1.2 - levo).

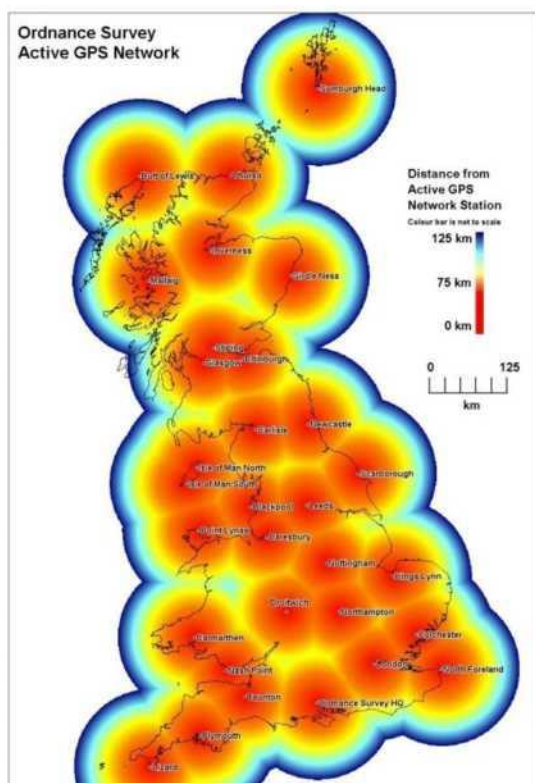
U slučaju primene COPAG koncepta na DHDN mrežu, prosečna vrednost reziduala je smanjena sa 0.33 m (bez podele na polja i uz jedinstven datumski set parametara za celo područje) na manje od 0.02 m, uz podelu na 177 transformacionih polja sa individualnim parametrima (Slika 1.2 - desno).

Da bi se postigla neprekidna i homogena transformacija, moraju biti ispunjeni uslovi neprekidnosti na granicama sa susednim poljima, kako bi bilo moguće realizovati koncept COPAG izravnjanja.

Rešenja COPAG_DB i DFLBF_DB (Digital Finite Element Plan Reference System Transformation) omogućavaju strogu obostranu transformaciju između klasičnih Nemačkih referentnih sistema (DHDN na području bivše Zapadne Nemačke i RD83 na području bivše Istočne Nemačke) i ETRS89 sa tačnošću od 3-5 cm (Cai, 2000).

1.4.2. Transformacija u Velikoj Britaniji

Geodetski datum Velike Britanije (Ordnance Survey, 2002) praktično se sastoji od tri koordinatna podsistema. Prvi podsistem je državna GPS mreža tj. moderna 3D realizacija ETRS89 geodetskog datuma (Terrestrial Reference Frame - TRF) koja je osnova moderne osnovne mreže Ordnance Survey. Mreža aktivnih GPS stanica (Active Layer) osnovne GPS mreže (Slika 1.3) je uspostavljena kao službeno pogošćenje ETRS89 na području Velike Britanije (Davies, 2000).



Slika 1.3: Aktivne GPS tačke u V. Britaniji

Drugi podsistem tzv. državni GRID je tradicionalno definisan položajni sistem na Airy elipsoidu, realizovan u datumu OSGB36 (Ordnance Survey Great Britain 1936) u Transverzalnoj Merkatorovoj projekciji.

Ordnance Datum Newlyn (ODN) predstavlja tradicionalni visinski sistem vezan na mareograf Newlyn (Cornwall) koji je realizovan nivelmanskim merenjima između 200 fundamentalnih repera (Fundamental Bench Mark-FBM) širom Velike Britanije. TRF je pogošćen sa više od 500000 repera nižeg reda pri čemu svaki reper ima definisanu ortometrijsku visinu

Državna GPS mreža predstavlja trodimenzionalnu realizaciju datuma koja objedinjuje ODN i OSGB36 kroz postupak transformacije (Ordnance Survey, 2002). Ovim postupkom, korišćenjem GPS tehnologije, precizno može biti određen položaj tačaka u ETRF89 sistemu i potom transformisan u Državni GRID sistem i visinski ODN sistem. Prikazani princip je u službenoj upotrebi britanske geodetske uprave - Ordnance Survey.

Active layer predstavlja najvažnije tačke u državnoj GPS mreži sa neprekidno operativnim GPS uređajima (Continuously Operating GPS Receivers-COGR's), odnosno aktivnu mrežu. Tačke aktivne mreže pružaju mogućnost da se precizni radovi obavljaju korišćenjem samo jednog GPS uređaja. Podaci prikupljeni opažanjima na aktivnim tačkama su dostupni na internetu. Ordnance Survey je od 1998. godine uspostavila mrežu od preko 30 aktivnih GPS tačaka (Greaves i Cruddace, 2002), a danas je taj broj 50 (Ordnance Survey, 2008). Aktivne tačke su postavljene tako da su svi položaji na britanskom kopnu i priobalju u okruženju od 100 km od najbliže aktivne tačke. Na aktivnim tačkama prikupljaju se dvo-frekventni podaci GPS opažanja, 24 sata na dan, u jedno-sekundnim intervalima. Prikupljeni podaci se svakog sata šalju u centralnu upravu Ordnance survey u Southampton koja ih uključuje u javno dostupnu bazu podataka.

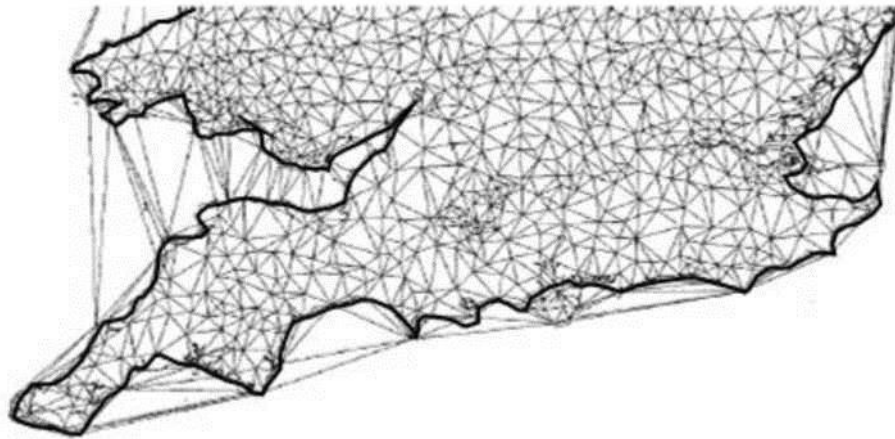
Passive layer su sekundarne GPS tačke koje su trajno stabilizovane i javno dostupne. Na području Velike Britanije trenutno postoji oko 900 takvih tačaka koje čine mrežu tačaka sa gustom od 20 - 35 km na celom području Velike Britanije. Tačke ove mreže se mogu koristiti kao referentne tačke za geodetski premer pri čemu je obezbeđena položajna tačnost od nekoliko centimetara.

OSGB36 je lokalni geodetski datum uspostavljen za područje Velike Britanije. Korišćeni elipsoid Airy 1830, odabran da najbolje aproksimira traženo područje, bolje aproksimira područje Velike Britanije od globalnog elipsoida GRS80, ali je u ostalim delovima sveta neupotrebljiv. Datum OSGB36 se može smatrati nehomogenim zbog varijabilne razmere i tačnosti. Nehomogenost OSGB36 datuma čini 7-parametarsku Helmertovu transformaciju između ETRS89 i OSGB36 nedovoljno tačnom za praktičnu upotrebu. Tačnost državnih parametara 7-parametarske Helmertove transformacije je oko ± 5 metara (Greaves i Cruddace, 2002).

Državni transformacioni parametri za područje Velike Britanije bi morali dati tačnost od ± 0.2 m, kolika je tačnost Ordnance Survey kartografskih prikaza u najkrupnijoj razmeri. Zbog toga se pristupilo modelovanju varijabilnih datumskih razlika, prvo metodom višestruke regresije ili polinomske transformacije. Ovaj model transformacije modeluje varijabilne međudatumske razlike između dva datuma kao ravan opisanu polinomom. Transformacija se obavlja posebno za širinu, dužinu i visinu, s posebnom jednačinom i pripadajućim koeficijentima za svaku komponentu. Testovi te metode na području Velike Britanije su pokazali da se može postići tačnost od oko ± 2 dm. Međutim, usled varijacije razmere u OSGB36 datumu dolazi do nestabilnosti polinomske transformacije na granicama područja transformacije. Iznos reziduala na graničnim područjima transformacije iznosi nekoliko metara, što znači da se model polinomske transformacije ne može koristiti kao državni službeni model.

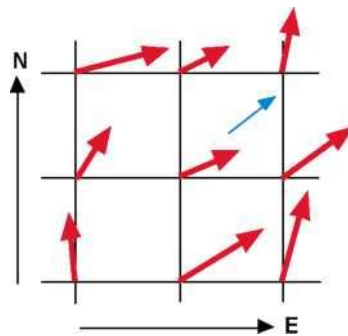
Drugi mogući transformacioni model se naziva GRID transformacija koji je Ordnance Survey odabrao za potrebe državne ETRS89-OSGB36 transformacije. Definitivna transformacija za područje Velike Britanije se naziva Ordnance Survey Transformation Network 2002-OSTN02 (Ordnance Survey, 2002). Transformacija je modelovana kao GRID promenljivih parametara koji pokriva područje cele Velike Britanije i koristi GRID datoteku transformacionih pomaka. Ordnance Survey transformacijom računaju se pomaci između položajnih koordinata državnog GRID-a u OSGB36 datumu i položajnih koordinata dobijenih sa ETRS89 elipsoida korišćenjem projekcionih parametara državnog GRID-a.

U svrhu računanja transformacionih parametara vrši se topološka triangulacija zajedničkih tačaka po Delaunay-ovoj metodi (engl. *TIN-Triangulated Irregular Network*), odnosno, formira se mreža trouglova sa temenima u svakoj tački mreže. Takvom triangulacijom se stvara najmanji mogući skup trouglova za zadanu konfiguraciju geodetske mreže (Slika 1.4)



Slika 1.4: TIN na području južne Engleske (Ordnance Survey, 2002)

Međutim, primena transformacije pomoću TIN mreže trouglova, za korisnike bi bila vrlo komplikovana, s obzirom da određivanje trougla u kome se nalazi proizvoljna tačka zahteva složen algoritam. Proces se pojednostavljuje projekcijom pravilnog GRID-a rezolucije 1 km i korišćenjem parametara TIN mreže za izračunavanje koordinatnih pomaka u svakoj tački GRID-a. Interpolacija vrednosti pomaka u proizvoljnoj tački se obavlja korišćenjem bilinearnog polinoma na osnovu 4 okolna čvora GRID-a određenog kvadrata i tako dobijenih polinomskih koeficijenta za svaku lokaciju u određenom kvadratu (Slika 1.5).



Slika 1.5: Interpolacija transformacionog pomaka

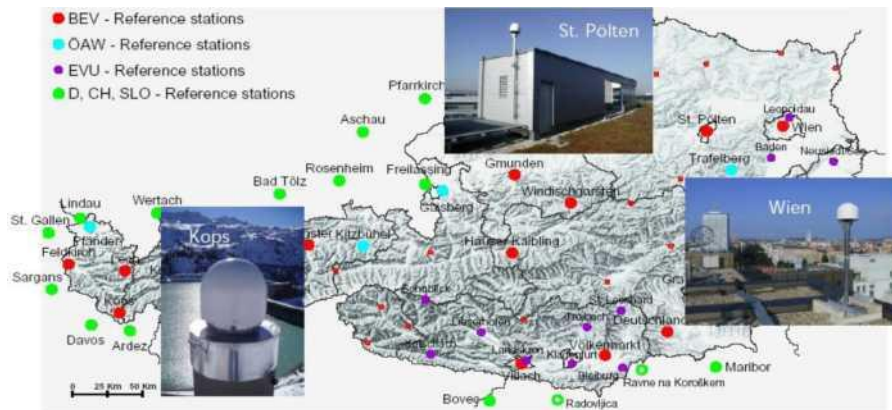
Savremeni transformacioni model OSTN02 koristi više od 6000 geodetskih tačaka sa koordinatama određenim u oba sistema, u ETRS89 i OSGB36. Celo područje Velike Britanije je pokriveno međudatumskim tačkama i izrađen je GRID jedinstvene rezolucije od 1 km. Model OSTN02 sadrži dve datoteke transformacionog GRID-a, jednu za easting (y) i drugu za northing (x) koordinatnu osu, i svaka od njih pokriva područje 1250 km x 700 km te sadrži više od 2 miliona parametara.

Državne GRID koordinate postojećih tačaka mreže OSGB36 datuma koje su određene GPS tehnologijom a potom transformisane OSTN02 modelom, smatraju se tačnim vrednostima koordinata. Originalni arhivski podaci državnih GRID položajnih koordinata OSGB36 datuma sadrže greške, ali ova dva skupa koordinata (novi i arhivski) se razlikuju unutar ± 0.2 m, što je u granicama tačnosti kartografskih prikaza. Zbog toga je za Veliku Britaniju prihvaćena metoda održanja postojećeg kartografskog datuma, a ne i njegovo redefinisanje u ETRS89, već samo transformacija preko OSTN02 modela. Ovakvo rešenje je prihvaćeno zbog brojnih korisnika koji su investirali milione funti u kartogafske podatke vezane za OSGB36 datum, pa bi uvođenje potpuno nove projekcije bilo preskupo.

1.4.3. Transformacija u Austriji

Austrijski Federalni biro za mere i geodeziju - BEV (nem. *Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen*) odgovoran je za realizaciju horizontalnih i vertikalnih referentnih okvira, kao i za ustrojavanje i održavanje gravimetrijskih mreža i određivanje lokalnog polja sile teže. BEV na realizaciji navedenih zadataka usko saraduje sa opservatorijom Lustbuhel-Graz (OLG), koja je pod kontrolom Austrijske akademije nauka/Odsek satelitske geodezije (ÖAW).

Austrijska fundamentalna GPS mreža sastoji se od tradicionalno stabilizovanih geodetskih tačaka i permanentnih stanica APOS (Austrian Positioning Service). Austrijsku EUREF mrežu čini mreža permanentnih stanica čiji se broj povećava svake godine. Krajem 2008. godine bilo je operabilno 30 permanentnih stanica APOS mreže, od kojih pet (GRAZ, HFLJ, LINZ, PFAN, SBGZ) ima internacionalni status u mrežama IGN i EPN - EUREF Permanent Network (Slika 1.6) i 85 stanica nadzorne tzv. AMON (Austrian Monitoring Network) mreže (Hoeggerl i dr., 2008). Sve tačke određene su po EPN standardima i imaju višestruke funkcije, kao što su održavanje referentnog okvira, istraživanje tektonskih pomaka, pružanje podataka za geodetski premer i za DGPS i RTK servise pozicioniranja.

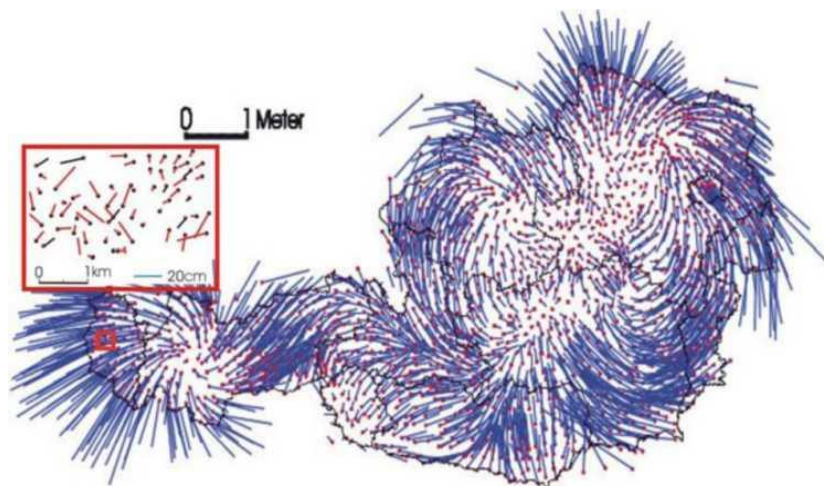


Slika 1.6: Permanentne stanice GPS mreže u Austriji

BEV je predvodio projekat u kome je cilj bio uvođenje internacionalnog referentnog sistema ITRS/ETRS kao državnog referentnog sistema za geodetske radove i kartografiju u Austriji koji je realizovan u epohi 2002.5. Realizacijom ovog projekta UTM kartografska projekcija je postala osnova za transformaciju u 2D položajne koordinate. Realizacija ETRS89 sistema u Austriji je ostvarena opažanjima u sledećim GPS kampanjama:

- AREF (Austrian Reference Frame) kampanja je realizovana 1996. godine saradnjom BEV-a sa privatnim geodetskim preduzećima pri čemu je u 24 časovnim sesijama određeno ukupno 330 tačaka na srednjim udaljenostima od 25 km,
- AGREF (Austrian Geodynamic Reference Frame) je završena 1997. godine a potom obnovljena 2001./2002. godine,
- ETRF-Austria2002 kampanja iz 2002. godine,
- Ponovni premer odabranih geodetskih tačaka 5. reda.

Ponovljenim GNSS premerom su obuhvaćene sve tačke 5. reda, kao i većina stalnih tačaka geodetske osnove 6. reda. Cela teritorija Austrije obuhvaćena je APOS servisom čija je tačnost prostornih koordinata ± 2 cm položajno i ± 3.7 cm visinski. Do 2011. godine je realizovan novi premer preko 60000 tačaka od 1. do 5. reda a dve godine kasnije i dodatnih 160000 tačaka 6. reda geodetske osnove. Sve katastarske koordinate trebale bi biti transformisane do kraja 2017. godine. Posle ove transformacije i homogenizacije katastarskih podataka planirano je gašenje 85-90% kontrolnih stanica AMON sistema (Hoggerl i Imrek, 2007).



Slika 1.7: Nehomogenost međudatumskih tačaka u Austriji

Za potrebe transformacije između lokalnog datuma MGI (Militar-Geographisches Institut) i globalnog ETRS89 datuma koriste se dva seta transformacionih parametara. Prvi set predstavlja jedinstvene transformacione parametre za celo područje Austrije, sa kojim se zbog nehomogenosti lokalnog geodetskog datuma MGI (Slika 1.7) dobija tačnost transformacije od oko ± 2.00 m. Pored ovog postoje i tačniji transformacioni parametri određeni posebno za svaki region čijom se upotrebom dobija tačnost transformacije od oko ± 0.10 m. Drugi set transformacionih parametara, odnosno distorzioni GRID sa dve položajne i jednom visinskom komponentom, je određen na osnovu skupa od 1988 zajedničkih tačaka (Imrek, 2005).

1.4.4. Transformacija u Australiji

Rešenje međudatumskih transformacija u Australiji predstavlja uzorni model prema kome su razvijeni mnogi transformacioni modeli širom sveta, a izveden je po modelu koga su usvojile Sjedinjene američke države i Kanada za transformaciju iz sistema NAD27 u NAD83 (engl. *North American Datum*). Australija je 1995. godine usvojila novi geocentrični geodetski datum GDA94 (engl. *Geocentric Datum of Australia* - geocentrični datum Australije) kojim su zamenjena dva stara datuma AGD66 i AGD84 (engl. *Australian Geodetic Datum* - Australijski geodetski datum). GDA94 datum predstavlja deo globalnog koordinatnog referentnog okvira i direktno je kompatibilan GPS datumu, odnosno ITRF rešenjima.

U Australiji se trenutno (ICSM, 2000) koriste 4 metode međudatumskih transformacija (Tabela 1.1), od kojih je najtačnija metoda GRID (engl. *Grid* - rešetka) transformacije. Tako postoje dve GRID datoteke, i to prva za AGD66 (područje Novog južnog Velsa, Viktorije, Tasmanije i Severne teritorije) i druga za noviji i tačniji AGD84 datum (područje Zapadne Australije, Južne Australije i Queensland-a).

Tabela 1.1: *Metode datumskih transformacija koordinata u Australiji*

Metoda transformacije		Približna tačnost
1	GRID metoda	0.1 – 0.3 m
2	3D 7-parametarska transformacija	1 m
3	Transformacija Molodenskog	5 m
4	“ Simple Block Shift ” metoda	10 m

Australijska geodetska uprava ICSM (engl. Intergovernmental Committee on Surveying and Mapping) preporučuje prve dve metode za upotrebu u geodetskoj praksi, dok se preostale dve metode mogu koristiti u navigaciji. Ista služba takođe postavlja uslove (ICSM, 2002) koje mora zadovoljiti prihvatljiv model transformacije koordinata, i to su:

- Jednostavnost – garantuje razumevanje i usvajanje metode,
- Efikasnost – minimalizuje potrebno vreme i računске zahteve,
- Jedinственost - postojanje jedinственog rešenja,
- Tačnost - određivanje najboljeg mogućeg rešenja transformacije.

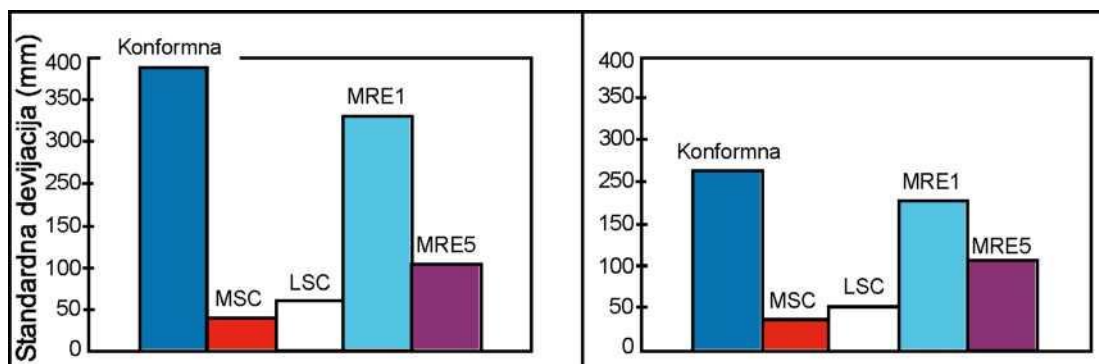
Datum GDA94 je realizovan na osnovu 8 geološki stabilnih tačaka koje čine australijsku osnovnu/fiducijarnu mrežu koja je opažana tokom 1992. godine, te je tokom sledeće dve godine dopunjena sa još 70 tačaka tzv. australijske nacionalne mreže, koje se nalaze na međusobnoj udaljenosti od oko 500 km.

Tačke osnovne mreže određene su sa tačnošću od ± 2 cm, dok su tačke nacionalne mreže određene sa tačnošću od ± 5 cm. Dobijene distorzije, odnosno smer i veličina diskretne lokalne promene oblika mreže usled transformacije između datuma AGD i GDA, testirane su na 3 lokalne mreže pri čemu je pronađen najveći iznos distorzije u vrednosti od 1 m.

Efikasnost distorzionog modela zavisi od uzoraka ponašanja distorzije, te ako je distorzija varijabilnog uzorka, vrlo teško će se modelovati (Collier, 2002). U postupku modelovanja distorzija predložene su 3 metode:

- Ravan minimalne zakrivljenosti (Minimum Curvature Surface - MCS),
- Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata (Least Squares Collocation - LSC),
- Višestruka regresija (Multiple Regression - MRE).

U odnosu na rezultate modelovanja distorzije između dva skupa koordinata, preostali reziduali nakon primene distorzionog modela daju ocenu performansi modela. Tako male vrednosti reziduala upućuju na zaključak da je model kvalitetan, dok slučajna distribucija reziduala upućuje na zaključak da model obezbeđuje efikasnu eliminaciju distorzije. Tačke koje se ne uklapaju u podelu distorzije treba ukloniti iz skupa podataka, jer mogu imati kritičan uticaj na tačnost distorzionog modela. Sve tri napred navedene metode nude poboljšanje konformne sedamparametarske Helmertove transformacije (Slika 1.8).



Slika 1.8: Upoređenje modela distorzije na test mreži Victorian Network, istočna i zapadna komponenta (ibid.)

U slučaju izbora najprikladnije metode po matematičko-statističkim pokazateljima, metoda “Ravan minimalne zakrivljenosti” (Minimum Curvature Surfaces-MCS) bi bila odabrana kao najprikladnija, pri čemu metoda “Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata” ima samo malo lošije statističke pokazatelje od MCS metode. Međutim, za razliku od MCS i MRE metode, kod LSC metode dodavanje novih podataka u transformacioni GRID ne zahteva ponovo računanje celog GRID-a. To znači da korisnici mogu prilagođavati transformacioni GRID uz potpunu sigurnost da se vrednosti transformacije neće promeniti u procesu dodavanja novih podataka.

Zbog povoljnih statističkih pokazatelja i mogućnosti naknadnog dodavanja podataka u GRID, kolokacija po metodi najmanjih kvadrata odabrana je kao metoda modeliranja distorzije na području Australije. Konačni transformacioni parametri za prelaz u datum GDA94 iz datuma AGD66 su određeni na osnovu skupa od 9897 međudatumskih tačaka, te na osnovu skupa od 327 tačaka za prijelaz iz datuma AGD84. Za određivanje distorzionog modela GRID-a korišćen je skup od oko 100000 tačaka.

1.4.5. Transformacija u Švedskoj

Transformacija između globalnih i lokalnih referentnih okvira često vodi do dugih proračuna uključujući nekoliko uzastopnih koraka transformacije. Tipičan niz transformacija mogao bi da izgleda ovako:

$$(\varphi, \lambda)_{glob.} \leftrightarrow (X, Y, Z)_{glob.} \leftrightarrow (X, Y, Z)_{nat.} \leftrightarrow (\varphi, \lambda)_{nat.} \leftrightarrow (x, y)_{nat.} \leftrightarrow (x, y)_{loc.} \quad (1.1)$$

Bo-Gunnar Reit je 1997. god. predložio metod (Reit, 1997) kojim je u većini slučajeva moguće skratiti niz (1.1). Ovaj pristup se bazira na pretpostavci da "ako je poznat geodetski datum A i pravougli sistem u ravni drugog datuma B, onda je moguće odrediti set parametara projekcije (pomoću iste projekcije koja je korišćena za date 2D koordinate datuma B) za definisanje 2D sistema datuma A, koji aproksimira datum B." U strogo matematičkom smislu dva sistema neće biti podudarna, ali razlike mogu da budu prihvatljive za neke primene.

Ako su razlike između 2D sistema prihvatljive, transformacioni niz (1.1) može da se redukuje na jednostavan izraz:

$$(\varphi, \lambda)_{global} \leftrightarrow (x, y)_{local} \quad (1.2)$$

U državnom katastru Švedske (*Geodetic Department of Lantmäteriet*), Bo-Gunnar Reit je razvio algoritam i implementirao ga u softver koji je moguće koristiti za računanje parametara projekcije.

Lantmäteriet je doneo odluku da će SWEREF 99 biti švedski zvanični referentni okvir i da će za potrebe premera i katastra zameniti stari okvir RT 90.

Formalna odluka koja se odnosi na kartografske projekcije za državne potrebe kartiranja, kao i za lokalni premer je usvojena 2003. god. (Lantmäteriet, 2003),

tako da su sve projekcije Transverzalne Merkatorove (TM). Proces uvođenja okvira SWEREF 99 u druge državne organe u Švedskoj, kao što su lokalni državni organi, je u toku.

Za popravku (rektifikaciju) narušene geometrije lokalnih referentnih okvira mogu da se primene korekcionni modeli (Kempe i dr., 2006) zajedno sa transformacionim parametrima iz RIX 95-projekta (državni projekat koji ima za cilj kreiranje visoko kvalitetnih veza između lokalnih, državnih i globalnih referentnih okvira). Modeli se zasnivaju na rezidualima koji ostaju nakon transformacije, a rektifikacija se vrši pomoću tzv. "rubber sheeting" algoritma. Kao rezultat se dobija homogena mreža u SWEREF 99 i geografski podaci sa manje deformacija.

Stari Švedski sistem je uveden za potrebe triangulacionih radova u južnom delu zemlje u prvoj deceniji 20-og veka. Geografska širina i dužina na Beselovom elipsoidu su projektovane u Gaus-Kriggerovoj (transverzalnoj Merkatorovoj) projekciji. Sistem od 6 zona sa 2.5 gona ($2^{\circ} 15'$) između centralnih meridijana je uvedena za potrebe katastarskih radova u ruralnim područjima, dok su gradovi uglavnom imali svoje sopstvene lokalne sisteme. Nakon treće državne triangulacije postoji 12 regionalnih sistema koji se uglavnom koriste za potrebe katastra, što situaciju čini vrlo komplikovanom, zbog nekoliko stotina lokalnih sistema u opštinama i desetinama "državnih" sistema.

Tradicionalno, transformacija između dva referentna sistema (različiti geodetski datumi) se izvodi pomoću 7-parametarske transformacije sličnosti, pri čemu se, iako se transformišu samo 2D koordinate, mora obezbedi podatak o visini. U transformacionom nizu (1.1), korak između (φ, λ) i (X, Y, Z) zahteva poznavanje elipsoidnih visina tačaka, pa su transformisane 2D koordinate zavisne od visina.

Naravno, uvek postoji mogućnost da se za vrednost visine odabere nula i upotrebi 7-parametarska transformacija. Pored ovog problema mnogi lokalni sistemi nemaju rigoroznu geodetsku definiciju, što znači da ne postoji način da se izračunaju geografska širina i dužina iz 2D koordinata. U ovim slučajevima direktna primena 7-parametarske transformacije sličnosti nije moguća.

Koncept ***direktne projekcije*** se zasniva na projektovanju geodetskog (globalnog) sistema direktno u lokalni sistem. Pristup je sledeći (Reit, 2003):

- Dato je n tačaka sa poznatim koordinatama i u geodetskom i u lokalnom sistemu, $(\varphi, \lambda)_G$ i $(x, y)_L$, respektivno.
- Ocene vrednosti parametara λ_0 , k_0 , F_N i F_E transverzalne merkatorove projekcije dobijaju se na osnovu izravnjanja po metodi najmanjih kvadrata čime se minimizira suma kvadrata veličina v_{xi} i v_{yi} u jednačinama

$$y_i = TM_y(\varphi_i, \lambda_i, \lambda_0, k_0, F_N, F_E, a, f) + v_{yi}, \quad (1.3)$$

$$x_i = TM_x(\varphi_i, \lambda_i, \lambda_0, k_0, F_N, F_E, a, f) + v_{xi}, \quad (1.4)$$

gde su TM_y i TM_x transverzalne merkatorove funkcije koje kartiraju površinu elipsoida na ravan.

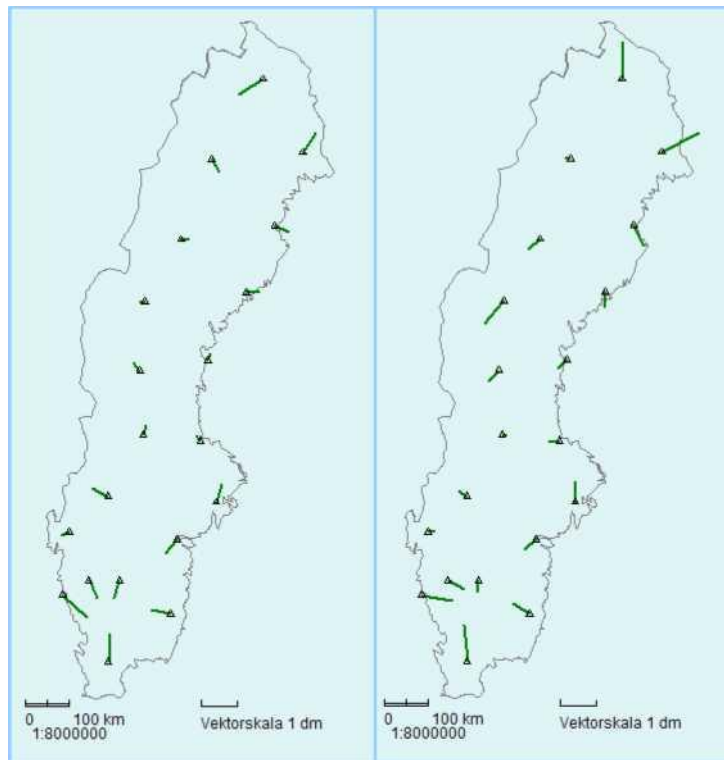
- Jednačine su linearizovane razvijanjem u Tejlorov red u okolini približnih vrednosti parametara λ_0 , k_0 , F_N i F_E , pri čemu se rešenje dobija u iterativnom postupku sve dok popravke parametara ne postanu zanemarljive.
- Sistem pokriva razumno široku površinu, pri čemu će pogodna globalna projekcija (širine, dužine) dati koordinate u skladu sa lokalnim sistemom.

Za prelaz iz lokalnog u sistem SWEREF 99 potrebna je transformacija koja uključuje i promenu datuma. S obzirom da, sa jedne strane većina kontrolnih tačaka u lokalnim triangulacionim mrežama nemaju visine, a sa druge strane mnogi lokalni sistemi nemaju rigoroznu geodetsku definiciju, bilo je očigledno da je potrebno koristiti pristup direktne projekcije. Dobijeni rezultati transformacije su vrlo dobri, RMS vrednosti su obično u intervalu od 0.01 m do 0.08 m, maksimalni rezidual je obično dvostruko veći od ovih vrednosti. Uzimajući u obzir da je interni kvalitet geometrije u ovim lokalnim mrežama istog reda ne mogu se očekivati bolji rezultati.

Testovi rezultatata dobijenih direktnom projekcijom su pokazali da se ovom metodom obezbeđuje sličan kvalitet transformacije kao i primenom 7-parametarske transformacije sličnosti. Ova dva metoda će dati skoro istu tačnost u transformaciji, srednju grešku manju od 0.07 m dok im je maksimalna greška nešto veća od 0.2 m. Razlika između 2D koordinata dobijenih direktnom projekcijom i

koordinata transformisanih sa 7-parametarskom transformacijom je generalno manja od 0.1 m ali u određenim oblastima dostiže i 0.3 m.

Slike 1.9 i 1.10 prikazuju rezidualne u fundamentalnim tačkama mreže permanentnih GPS stanica (SWEPOS) na području Švedske.



Slika 1.9: Reziduali –
7-parametarska transformacija

Slika 1.10: Reziduali –
Direktna projekcija

Direktna projekcija nudi jednostavan i efikasan metod za transformaciju koordinata između postojećeg i novog referentnog okvira (datuma) i kartografske projekcije. Tačnost je proporcionalna sa 7-parametarskom transformacijom i mnogo je jednostavnija za primenu. U početku, od kako je metod direktne projekcije uveden i primenjuje se u Švedskoj, na njega se gledalo kao na nešto čime će se upotpuniti 7-parametarska transformacija ali je vremenom postao glavni službeni metod na celoj teritoriji Švedske.

1.4.6. Transformacija u Srbiji

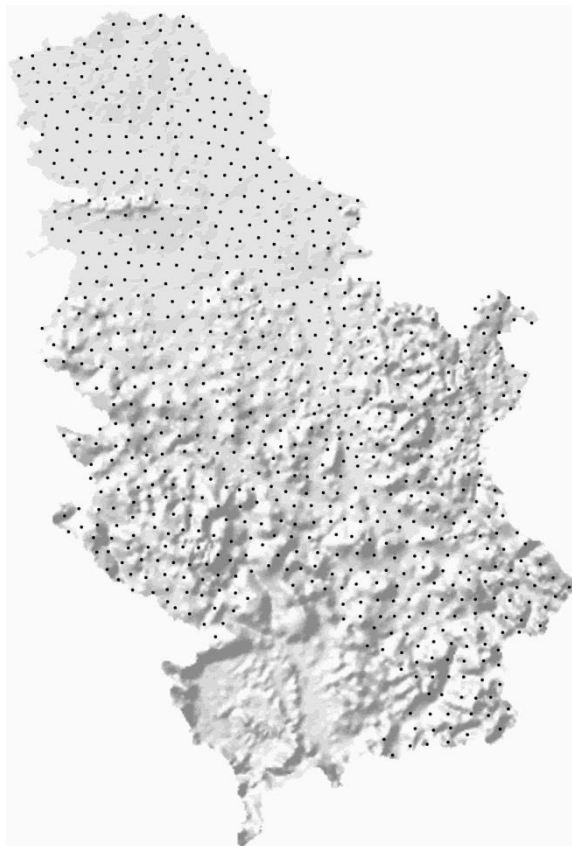
Trigonometrijska mreža 1. reda, kao osnova državnog premera ostvarena je prvi put 1948. godine. U tu svrhu razvijena su prvo dva lanca trouglova, od Slovenije do Vojvodine i od Slovenije, duž Dalmacije, do Crne Gore, koji su kasnije spojeni trećim koji ide preko teritorije Bosne i Hercegovine. Datum ove triangulacije bio je definisan astronomskom latitudom i longitudom polazne tačke 1. reda *Hermannskogel-Hundsheimberg* i parametrima Beselovog elipsoida (Bratuljević, 1995).

Trigonometrijska mreža 1. reda nikada nije izvedena kao celina i sastoji se iz više delova koji su razvijani i računati u različitim vremenskim epohama. Sa svim nedostacima, ova triangulacija 1. reda predstavlja osnovu državnog premera Jugoslavije, koji se od 1924. godine, na predlog N. S. Svečnikova, izvodi u Gaus Krigerovoj projekciji. Ovako nehomogena mreža, odmah po njenom završetku, nije mogla zadovoljiti potrebe geodetskih radova i nije mogla biti uključena u evropsku triangulaciju jer nije zadovoljavala tadašnje kriterijume tačnosti definisane od strane *International Association of Geodesy* - IAG (Bratuljević, 1995).

Unapređenje i modernizacija postojećeg državnog koordinatnog sistema se u Srbiji realizuje implementacijom nacionalne mreže stalnih GPS stanica i usvajanjem prostornog referentnog sistema ETRS. Nova referentna mreža na području Republike Srbije je realizovana u periodu od 1997. do 2003. godine i oslanja se na jugoslovenski referentni okvir-YUREF koji predstavlja realizaciju evropskog referentnog okvira-EUREF za područje Jugoslavije. Koordinate tačaka državne referentne mreže definisane su u prostornom geocentričnom svetskom sistemu koji je definisan 1984. godine (World Geodetic System 1984-WGS84).

Septembra meseca 1998. godine izvedena je u Republici Srbiji EUREF GPS merna kampanja u sklopu međunarodne GPS kampanje BALKAN98. U kampanju je bilo uključeno 7 trigonometrijskih tačaka 1. reda na teritoriji Republike Srbije i 2 trigonometrijske tačke 1. reda na teritoriji Republike Crne Gore. Merenja su izvedena u pet mernih sesija trajanja po 24 časa. Obrada GPS merenja izvršena je u Frankfurtu programskim paketom BERNESE. Tačnost horizontalnih položaja tačaka ocenjena je na 3 mm, a tačnost elipsoidnih visina na oko 7 mm. Koordinate tačaka odnosile su se na referentni okvir ITRF96 za epohu 1998.7.

U periodu od 1997. godine do 2003. godine uspostavljena je na celoj teritoriji Republike Srbije takozvana pasivna geodetska osnova, odnosno referentna GPS mreža (SREF). Ona je projektovana tako da se sastoji od ukupno 838 tačaka na prosečnom međusobnom rastojanju od oko 10 km (Slika 1.11). Posebna pažnja bila je posvećena stabilizaciji tačaka, tako da one mogu istovremeno služiti i kao vertikalni reperi. GPS merenja u SREF mreži izvodili su stručnjaci Republičkog geodetskog zavoda Republike Srbije, a 2002. i 2003. godine merenja su prepuštena pripadnicima Vojske Srbije (Blagojević i dr., 2006).



Slika 1.11: Lokacije tačaka referentne GPS mreže Republike Srbije (SREF)

Mernu kampanju karakterisali su sledeći parametri:

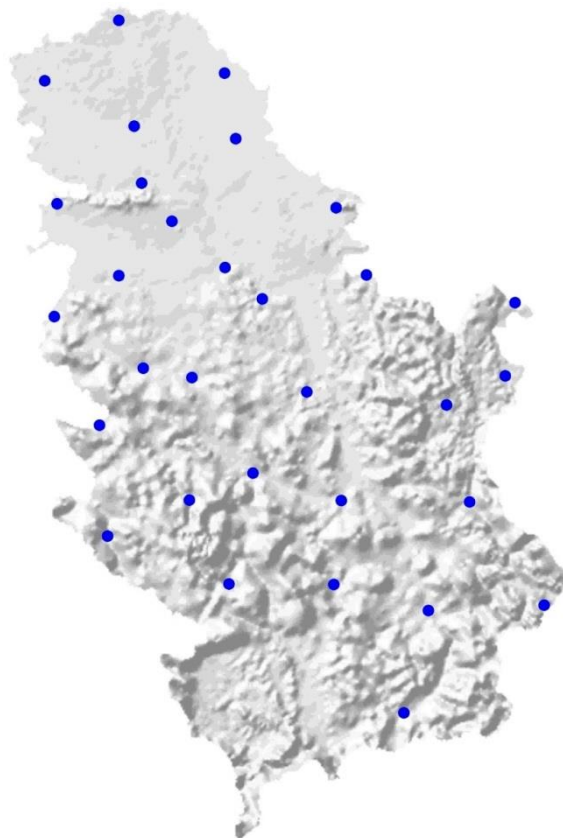
- Trajanje merne sesije: najmanje 60 minuta,
- Granični vertikalni ugao: 15° ,
- Interval registracije podataka: 15 s.

Položajne koordinate SREF mreže određene su obradom izvršenih GPS merenja sa tačnošću od oko 10 mm, a elipsoidne visine sa tačnošću od oko 15 mm. U obradu su uključivani samo linearno nezavisni GPS vektori. Matematičku obradu izvršenih merenja karakterisali su sledeći parametri:

- Satelitske efemeride: precizne (IGS),
- Jonosferska refrakcija: L3 kombinacije,
- Troposferska refrakcija: Model HOPFIELD.

S obzirom na to da je SREF mreža posebnim GPS merenjima povezana sa YUREF tačkama, koordinate SREF tačaka odnosile su se takođe na referentni okvir ITRF96 za epohu 1998.7.

U periodu od 2003. godine do 2006. godine na celoj teritoriji Republike Srbije uspostavljena je takozvana aktivna geodetska referentna osnova (AGROS). Ona je projektovana tako da se sastoji od ukupno 32 permanentno operativne referentne GPS stanice (Slika 1.12). Koordinate permanentnih stanica određene su GPS merenjima u tri merne sesije trajanja po 24 časa. Hardver, softver i komunikaciona infrastruktura AGROS mreže omogućuju korisnicima da se bilo gde na teritoriji Republike Srbije pozicioniraju sa tačnošću od oko 2 cm po položaju i 3 cm po elipsoidnoj visini u realnom vremenu.



Slika 1.12: Lokacije tačaka aktivne geodetske referentne osnove Republike Srbije (AGROS)

Koordinate AGROS stanica određene su GPS povezivanjem sa YUREF i SREF tačkama, tako da se i one odnose na referentni okvir ITRF96 za epohu 1998.7 (Blagojević i dr., 2006).

Za potrebe računanja transformacionog modela na teritoriji Republike Srbije od strane Republičkog geodetskog zavoda određene su prostorne koordinate za 4924 trigonometrijske tačke i 809 poligonskih tačaka u datumu ETRF2000. Na taj način, kao osnova za računanje transformacionog modela korišćen je skup od ukupno 5733 tačaka za koje su sa jedne strane poznate koordinate u Gaus-Krigerovoj projekciji (y, x) i visine H u državnom sistemu visina, a sa druge strane

pravougla trodimenzionalne koordinate (X,Y,Z) koje se odnose na referentni okvir ETRF2000.

U prvom koraku kontrole kvaliteta preliminarno su ocenjeni parametri Helmertove transformacije sličnosti na osnovu koordinata svih zajedničkih tačaka (5733 tačaka). S obzirom na to da je primenjen postupak ocenjivanja po metodi najmanjih kvadrata, na ovaj način dobijene su i rezultujuće popravke (reziduali). Reziduali predstavljaju meru saglasnosti novog i postojećeg referentnog sistema, tako da su poslužili za testiranje na prisustvo grubih odnosno nesaglasnih koordinata zajedničkih tačaka. U tu svrhu koristile su se reziduali po koordinatnim osama postojećeg referentnog sistema (v_y, v_x) .

Reziduali po horizontalnim osama su grafički naneti u vidu vektora odstupanja.

Na osnovu vizuelne inspekcije izvršeno je odbacivanje tačaka na kojima su reziduali po svom intenzitetu ili svojoj orijentaciji odstupali od tipičnog ponašanja reziduala na tačkama u neposrednoj okolini. Na taj način odbačeno je ukupno 158 zajedničkih tačaka.

U drugom koraku, na osnovu preostalih 5575 zajedničkih tačaka, sračunati su parametri Helmertove transformacije sličnosti, gridovi reziduala i prognozirane popravke. Usvojen je kriterijum za odbacivanje nesaglasnih tačaka na osnovu razlike prognoziranih i poznatih reziduala koja ne sme biti veća od 20 cm. Odbacivanje je vršeno u nekoliko iteracija, pri čemu je na ovaj način odbačeno još 69 zajedničkih tačaka, te je za dalja računanja ostao definitivni skup od 5506 tačaka. Na osnovu prekontrolisanog skupa od 5506 zajedničkih tačaka sračunati su parametri Helmertove transformacije sličnosti korišćenjem softvera GeoTrans.

Primena transformacionog modela 7P+GRID podrazumeva globalnu Helmertovu 3D transformaciju i interpolaciju u okviru grida reziduala postupkom bilinearne interpolacije. Težište transformacionog postupka je transformacija horizontalnih položaja. Pitanje visina predstavlja zaseban problem koji se mora rešavati izradom projekta određivanja geoida, odnosno odgovarajućeg modeliranja površi koja služi kao referenca za definisanje visina.

Grid reziduala formiran je tako da pokriva celokupnu teritoriju Republike Srbije, i ima rezoluciju od 1 km. Vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida računane su po principu opšte aritmetičke sredine, i to na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama koje su u relativnoj blizini čvora. Za težine u okviru opšte aritmetičke sredine usvajan je stepen recipročnih rastojanja od čvora do zajedničkih tačaka koje učestvuju u računanju. Na osnovu reziduala preostalih nakon Helmertove transformacije sličnosti sračunati su gridovi reziduala po koordinatnim osama korišćenjem komercijalnog softvera Surfer 8.0.

Na osnovu sračunatih parametara Helmertove transformacije sličnosti i gridova reziduala po koordinatnim osama od strane Republičkog geodetskog zavoda razvijen je softver Grider 2.0. Osnovni statistički parametri razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama koje su dobijene primenom softvera Grider 2.0 prikazani su u tabeli 1.2.

Tabela 1.2: *Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama*

Parametar	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala	
	dY [m]	dX [m]
Minimum	-0.185	-0.198
Maksimum	+0.224	+0.184
Srednja vrednost	0.000	0.000
Standardna devijacija	0.035	0.032

Prilikom korišćenja transformacionog modela Grider 2.0, potrebno je odrediti kontrolne tačke kako bi se utvrdila tačnost transformacionog modela na predmetnom području. Ukoliko je dobijena razlika između određenih i prognoziranih koordinata na kontrolnim tačkama veća od 30cm, potrebno je izvršiti ažuriranje transformacionog modela dodavanjem novih zajedničkih tačaka sa predmetnog područja.

2. Koordinatni sistemi u geodeziji

Geodezija je nauka koja se između ostalog bavi i određivanjem veličine i oblika Zemlje i određivanjem koordinata tačaka na ili iznad površine Zemlje. Koordinate u geodeziji su tradicionalno prilagođene obliku Zemlje, kao što su sferne ili elipsoidne koordinate za regionalnu i globalnu primenu, ili pravougle za lokalne primene gde je za prikaz dovoljna geometrija ravni.

Koordinate tačaka sa kojih se vrše merenja se određuju u odnosu na koordinate drugih tačaka merenjem jedne ili više različitih mernih veličina u koje spadaju: pravci, dužine, razlike dužina i visinske razlike. Sva uglovna merenja u horizontalnoj i vertikalnoj ravni između dve tačke na Zemlji su **terestrički pravci**. Uglovna merenja između tačke na Zemlji i satelita predstavljaju **satelitske pravce**, a između tačke na Zemlji i zvezde su **astronomski pravci**. Dužine izmerene između dve tačke na Zemlji su **terestričke dužine** a između tačke na Zemlji i satelita predstavljaju **satelitske dužine**. Izmerena razlika u dužini između jedne tačke na Zemlji i druge dve, koje se takođe nalaze na fizičkoj površini Zemlje, (merenja hiperboličkim sistemom) je **terestrička razlika dužina**. Razlike dužina između tačke na Zemlji i dva satelita (Dopplerova metoda merenja) su **satelitske razlike dužina**. Sva ova merenja određuju geometrijske odnose između tačaka, i kao takva predmet su **geometrijske geodezije**.

Visinske razlike koje su određene nivelanjem između tačaka na Zemlji i merene vrednosti ubrzanja sile teže na putu nivelanja su povezane sa razlikama potencijala u Zemljinom polju sile teže, i predmet su **fizičke geodezije** (Heiskainen i Moritz, 1967).

Funkcionalni odnosi između svih merenih veličina i koordinata tačaka sa kojih su merenja izvršena (poznate i nepoznate tačke) se uspostavljaju formiranjem matematičkog modela. Jedinstveno rešenje za nepoznate koordinate tačaka se u geodeziji najčešće dobija posrednim izravnanjem uz primenu metode najmanjih kvadrata (Krakiwsky i Wells, 1971).

Danas, kada se pomoću satelita i astronomskim merenjima definišu i realizuju osnovni referentni koordinatni sistemi, pravougle koordinate su jednako važne i

korisne za globalno geoprostorno referenciranje. Određivanje koordinata tačaka na osnovu koncepta Longituda (Dužina) / Latituda (Širina) ima najdirektniju primenu kod geodetskih merenja, navigacije, pozicioniranja i kartiranja.

Lokalne koordinate se zasnivaju na lokalnoj vertikali i zaslužuju posebnu pažnju ne samo u odnosu na definiciju vertikale već i u odnosu na njihovu povezanost sa globalnim koordinatama. U svim slučajevima koordinatni sistemi su pravougli, što znači da se površine koordinatnih ravni seku uvek pod pravim uglom. Neki pravougli koordinatni sistemi su levo orijentisani, za razliku od uobičajenih desno orijentisanih koordinatnih sistema.

2.1. Referentni sistemi i okviri

Važno je razumeti razliku između koordinatnog referentnog sistema i referentnog okvira s obzirom da se ovi koncepti primenjuju kroz diskusiju o koordinatnim sistemima u geodeziji.

Prema International Earth Rotation and Reference Systems Service (IERS):

- **Referentni sistem** je skup pravila i konvencija zajedno sa modeliranjem potrebnim da se u bilo koje vreme definiše trojstvo koordinatnih osa, dok
- **Referentni okvir** realizuje referentni sistem u pogledu koordinata referentnih tačaka koje su dostupne za posedanje i sa kojih je moguće izvršiti opažanja.

Jednostavan primer referentnog sistema je set od tri ose koje se poklapaju sa obrtnom osom Zemlje, početnim meridijanom (Greenwich) i pravcem upravnim na ova dva. To jest, sistem definiše kako ose trebaju da budu postavljene, koje teorije ili modeli trebaju da se upotrebe (na primer, šta se podrazumeva pod obrtnom osom) i koje konvencije treba primeniti (na primer, kako izabrati x-osu tj. gde je početni meridijan). Jednostavan primer referentnog okvira je skup tačaka globalno raspoređenih čije su koordinate dati brojevi (međusobno konzistentni) u referentnom sistemu. To jest, referentni okvir je fizička realizacija referentnog sistema definisanog stvarnim koordinatnim vrednostima stvarnih tačaka u prostoru koje su dostupne svima. Referentni okvir ne može da postoji bez referentnog sistema, a referentni sistem nema praktičnu vrednost bez referentnog

okvira. Eksplicitna razlika između referentnog okvira i referentnog sistema je jasno naznačena u geodeziji tek od nedavno (Moritz i Mueller, 1987), ali su koncepti uključeni u terminologiju *geodetskog datuma* još u 18. veku i ranije (Torge, 1991), (Rapp, 1992).

2.2. Terestrički koordinatni sistemi

Terestrički koordinatni sistemi su vezani (fiksirani) za Zemlju kao nebesko telo i rotiraju zajedno sa njom. Ovi koordinatni sistemi služe za definisanje koordinata tačaka na fizičkoj površi Zemlje i mogu biti: *terestrički geocentrični* i *terestrički topocentrični* koordinatni sistemi.

2.2.1. Terestrički geocentrični sistemi

Osnovne karakteristike terestričkih geocentričnih koordinatnih sistema su predstavljene kroz sledeće konstatacije:

- ishodište koordinatnog sistema je blizu centra Zemlje;
- primarni pol koincidira sa osom rotacije Zemlje;
- primarna osa predstavlja presek primarne ravni i ravni koja sadrži početni meridijan-Grinički meridijan;
- koordinatni sistem je desno orjentisan.

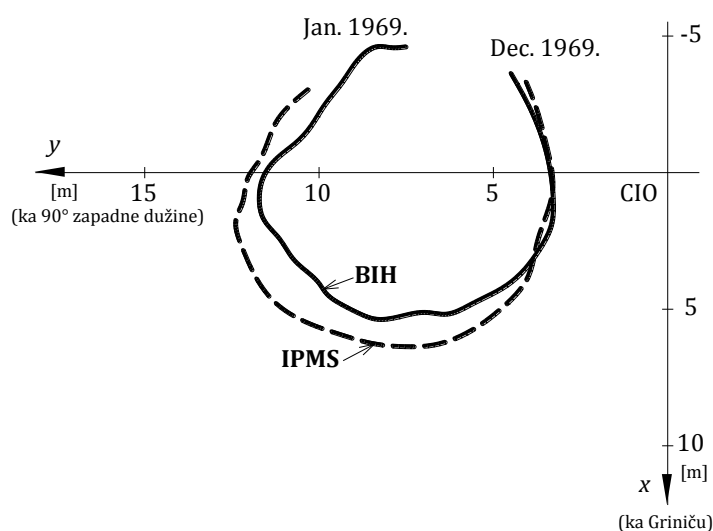
Konstatacija da je ovaj koordinatni sistem desno orjentisan je jednoznačna dok sve tri ostale konstatacije to nisu. Nemogućnost jednoznačnog definisanja ostalih karakteristika ovog koordinatnog sistema je posledica problema definisanja Zemljine ose rotacije, položaja početnog Griničkog meridijana i translacije ishodišta iz centra Zemlje.

2.2.1.1. Kretanje polova i nepravilna rotacija Zemlje

Zemlja kao nebesko telo rotira oko svoje ose koja nije fiksna prava u prostoru i to brzinom koja nije konstantna, odnosno, nije jednolika. Oko 1900. godine je otkriveno da se smer ose rotacije Zemlje menja u odnosu na površinu Zemlje. Kretanje pola je između ostalog posledica činjenice da osa rotacije Zemlje i maksimalna inercija ne koincidiraju, tj. ne poklapaju se. Rezultujuće kretanje je

nepravilno ali manje-više kružno i u smeru kretanja kazaljke na satu (gledano sa severa), sa amplitudom od oko 5 metara i glavnim periodom od 430 dana (tzv. Chandler-ov period).

Internacionalne organizacije, International Polar Motion Service (IPMS) i Bureau International de l'Heure (BIH) se bave merenjem kretanja pola astronomskim opažanjima. IPMS to radi sa pet stanica koje se nalaze na istoj širini, a BIH to radi sa oko 40 stanica rasprostranjenih širom sveta. Rezultati se publikuju kao koordinate pravog položaja ose rotacije u odnosu na referentnu tačku koja se zove Conventional International Origin (CIO), a koja predstavlja prosečan položaj ose rotacije Zemlje za period od 1900. do 1905. godine. (IUGG (1967.) Bull Geod 86, 379 (1967.) Resolution 19). Slika 2-1 prikazuje kretanje pola tokom 1969. godine određeno od strane IPMS-a i BIH-a.



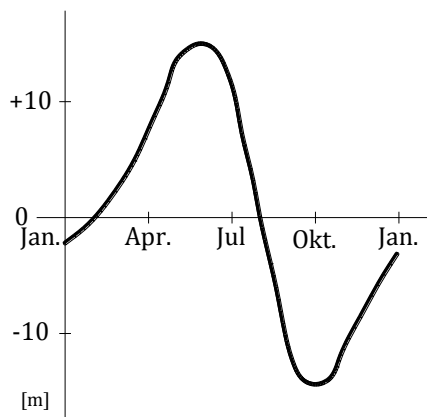
Slika 2.1: Kretanje pola

Pored kretanja pola postoje i druge različite nepravilnosti u rotaciji Zemlje koje se svrstavaju u tri tipa nepravilnosti, i to:

- sezonske varijacije kao verovatne posledice meteoroloških promena ili Zemljine plime i oseke;
- stogodišnje (sekularno) smanjenje kao posledica plimnog trenja i
- nepravilne fluktuacije (Mueller, 1969).

Danas se sezonske varijacije jedino uzimaju u obzir, i manje-više se ponavljaju iz godine u godinu, tako što izazivaju pomeranja uz ekvator do 15m u odnosu na tačku koja uniformno rotira tokom godine.

Zbog sezonskih varijacija Grinički meridijan (ravan koja sadrži osu rotacije Zemlje i centar prolska alhidadne ose instrumenta na Griničkoj opservatoriji) ne rotira uniformno. Fiktivni nulti meridijan koji rotira jednoliko (efekti kretanja polova i sezonskih varijacija su uključeni) se zove srednji Grinički astronomski meridijan (Mean Observatory) i njegov položaj je određen od strane BIH.

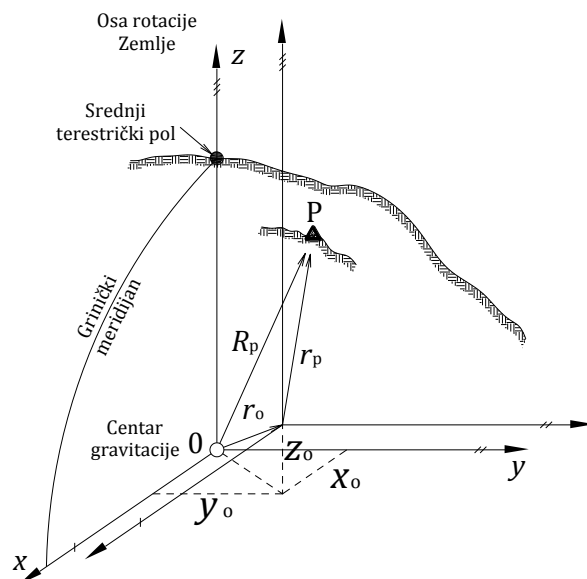


Slika 2.2: Položaj tačke koja se uniformno kreće duž ekvatora

2.2.1.2. Srednji i trenutni terestrički sistem

Srednji terestrički sistem (AT) predstavlja idealni svetski geodetski koordinatni sistem, koji se naziva Conventional Terrestrial System (CTS), koji je definisan na sledeći način:

- ishodište sistema se nalazi u tački koja predstavlja težište Zemlje;
- primarni pol je prema CIO srednja vrednost položaja pola za period 1900.-1905. godine, a primarna ravan je ravan upravna na primarni pol i sadrži težište Zemlje (srednja ekvatorijalna ravan);
- sekundarna ravan je ravan koja sadrži primarni pol i Grinički srednji meridijan, pri čemu je presek ove dve ravni sekundarni pol, ili primarna osa;
- ovaj sistem je desno orjentisan.



Slika 2.3: Terestrički i geodetski koordinatni sistem

Položaj tačke P koja se nalazi na fizičkoj površi Zemlje se može definisati vektorom \mathbf{R}_p preko pravougljih koordinata x, y, z , kao

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} . \quad (2.1)$$

Trenutni terestrički sistem (IT) je definisan na sledeći način:

- ishodište sistema se nalazi u tački koja predstavlja težište Zemlje;
- primarni pol je usmeren prema pravoj (trenutnoj) osi rotacije Zemlje;
- primarna osa je presek primarne ravni i ravni koja sadrži stvarnu osu rotacije i srednji astronomski Grinički meridijan;
- sistem je desno orjentisan.

Oba ova sistema kao glavnu karakteristiku imaju to što su geocentrični sistemi i da im je ishodište u centru gravitacije (težištu) Zemlje, dok je osa rotacije Zemlje primarni pol (poklapa se sa primarnom osom). Na osnovu matrica rotacije koordinate tačke koje su u trenutnom terestričkom sistemu se mogu transformisati u srednji terestrički sistem korišćenjem jednačine:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \mathbf{R}_2(-x_p) \mathbf{R}_1(-y_p) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT} , \quad (2.2)$$

gde su (x_p, y_p) vrednosti izražene u lučnim sekundama, dok je matrica rotacije

$$\mathbf{R}_1(-y_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-y_p) & \sin(-y_p) \\ 0 & -\sin(-y_p) & \cos(-y_p) \end{bmatrix},$$

te predstavlja rotaciju u smeru kazaljke na satu (negativnu) oko x -ose, i

$$\mathbf{R}_2(-x_p) = \begin{bmatrix} \cos(-x_p) & 0 & -\sin(-x_p) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-x_p) & 0 & \cos(-x_p) \end{bmatrix},$$

te predstavlja rotaciju u smeru kazaljke na satu (negativnu) oko y -ose.

Inverzijom izraza (2.2) se dobija:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT} = \left[\mathbf{R}_2(-x_p) \mathbf{R}_1(-y_p) \right]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT},$$

gde zbog ortogonalnosti matrica rotacije izražene preko

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}^T(\theta) = \mathbf{R}(-\theta),$$

sledi konačna jednačina

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{IT} = \mathbf{R}_1(y_p) \mathbf{R}_2(x_p) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT}. \quad (2.3)$$

2.2.1.3. Geodetski koordinatni sistemi

Geodetski koordinatni sistem (G) je sistem koji je definisan tako da su mu sve tri ose paralelne sa odgovarajućim osama srednjeg terestričkog sistema (Slika 2.3). U prvoj situaciji je prikazan geocentrični geodetski sistem dok je u drugoj prikazan negeocentrični sistem koji se obično naziva relativni geodetski sistem. Veza između relativnog geodetskog sistema i srednjeg terestričkog sistema se uspostavlja preko komponenti translacije datuma

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix},$$

pa jednačina u vektorskom obliku glasi:

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_p,$$

gde je \mathbf{r}_p vektor položaja u geodetskom sistemu i dat je sa

$$\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G,$$

pa sledi da je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G. \quad (2.4)$$

2.2.2. Pravouglo i krivolinijske koordinate tačke na referentnom elipsoidu

Elipsoid koji se u geodeziji koristi kao referentna površ je obrtni elipsoid koji nastaje rotacijom elipse oko svoje male poluose \mathbf{b} (Slika 2.4). Druga poluosa je velika poluosa \mathbf{a} , pa se preko spljoštenosti \mathbf{f} , kao jednog od parametara definiše referentni elipsoid:

$$f = \frac{a-b}{a}. \quad (2.5)$$

Druga dva parametra su prvi brojni ekscentricitet \mathbf{e}

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad (2.6)$$

i drugi brojni ekscentricitet \mathbf{e}'

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}. \quad (2.7)$$

Elipsoid se generalno predstavlja parom parametara (a, f) , kako su u prošlosti i definisani mnogi različiti elipsoidi. Međunarodni srednji Zemljin elipsoid koji je u upotrebi je deo Geodetskog Referentnog Sistema iz 1980. god. (Geodetic Reference System of 1980- GRS80) i ima sledeće parametre:

$$a = 6378137 \text{ m}$$

$$f = 1/298.257222101$$

Pored elipsoida GRS80, u dosadašnjoj geodetskoj praksi definisani su sledeći elipsoidi (Rapp, 1991), prikazani u Tabeli 2.1.

Tabela 2.1: *Terestrički elipsoidi*

Ime elipsoida (godina definisanja)	Velika polu-osa a [m]	Inverzna spljoštenost $1/f$ [m]
Airy (1830)	6377563.396	299.324964
Everest (1830)	6377276.345	300.8017
Bessel (1841)	6377397.155	299.152813
Clarke (1866)	6378206.4	294.978698
Clarke (1880)	6378249.145	293.465
Modified Clarke (1880)	6378249.145	293.4663
International (1924)	6378388.	297.
Krassovski (1940)	6378245.	298.3
Mercury (1960)	6378166.	298.3
Geodetic Reference System (1967), GRS67	6378160.	298.2471674273
Modified Mercury (1968)	6378150.	298.3
Australian National	6378160.	298.25
South American (1969)	6378160.	298.25
World Geodetic System (1966), WGS66	6378145.	298.25
World Geodetic System (1972), WGS72	6378135.	298.26
Geodetic Reference System (1980), GRS80	6378137.	298.257222101
World Geodetic System (1984), WGS84	6378137.	298.257223563
TOPEX/Poseidon (1992)	6378136.3	298.257

Globalni elipsoid koji trenutno najbolje aproksimira Zemljin geoid je definisan parametrima (Torge, 2001):

$$a = 6378136.5 \pm 0.1m$$

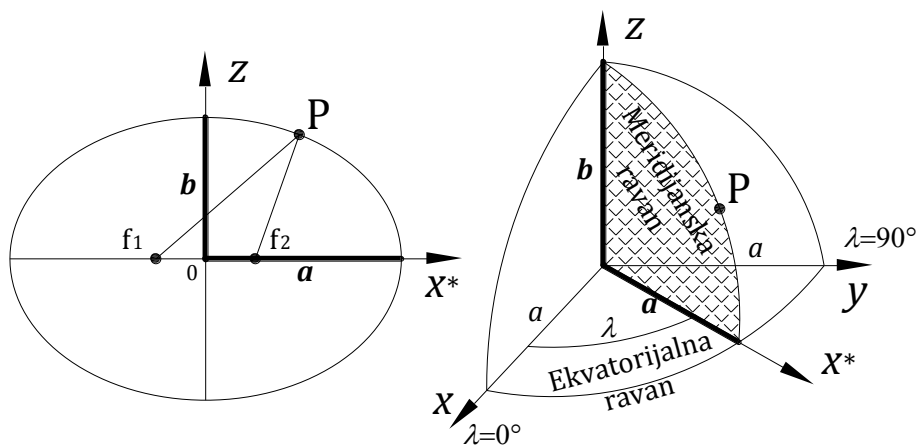
$$1/f = 298.25642 \pm 0.00001$$

Ove vrednosti ne definišu usvojeni elipsoid, već uključuju standardne devijacije i daju jedino najbolje odredive vrednosti zasnovane na trenutnoj tehnologiji. Sa druge strane, određeni specijalizovani sistemi za osmatranje, kao

što je TOPEX satelitski altimetrijski sistem, su usvojili elipsoide koji se razlikuju od standardnih kao što je GRS80 ili WGS84. Stoga je jako važno da pri koršćenju bilo kog sistema bude pravilno izabran odgovarajući elipsoid.

Pravougli koordinatni sistem je superponiran na referentnom elipsoidu (Slika 2.4) te je definisan na sledeći način:

- ishodište pravouglog koordinatnog sistema je centar obrtnog elipsoida;
- primarni pol (z-osa) pravouglog sistema je mala poluosa elipsoida, dok je primarna ravan upravna na primarnu osu i zove se ekvatorijalna ravan;
- meridijanska ravan je bilo koja ravan koja sadrži malu poluosu i seče površ elipsoida;
- specifična meridijanska ravan koja je izabrana kao sekundarna ravan je Grinička meridijanska ravan;
- sekundarni pol (x-osa) je presek ekvatorijalne i Griničke meridijanske ravni;
- y-osa je izabrana tako da leži u ekvatorijalnoj ravni i da gradi desni koordinatni sistem, tj. zarotirana je za ugao od 90° u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku u odnosu na x-osu.



Slika 2.4: Referentni elipsoid

Jednačina ovog elipsoida izražena preko pravougljih koordinata je

$$\mathbf{X}^T \mathbf{S}_E \mathbf{X} = 1, \tag{2.8}$$

gde su:

$$\mathbf{X}^T = [x \quad y \quad z],$$

$$S_E = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/b^2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

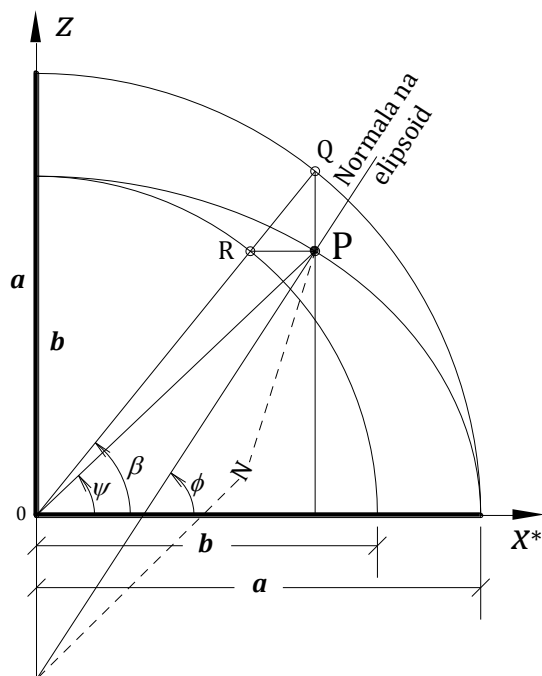
ili u parametarskom obliku

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (2.10)$$

Ugao između ekvatorijalne ravni i normale na elipsoid u datoj tački meren u ravni meridijana date tačke je širina tačke. Linija koja je u datoj tački upravna na elipsoid se zove normala na elipsoid. Normale na elipsoid prolaze kroz geometrijski centar elipsoida samo u ekvatorijalnoj ravni ili ako se poklapaju sa malom poluosom. Zbog toga postoje dve vrste širine. Ugao između normale na elipsoid u tački i ekvatorijalne ravni je geodetska širina ϕ . Ugao između linije koja spaja tačku sa centrom elipse, i ekvatorijalne ravni je geocentrička širina ψ . Treća širina je redukovana širina β , koja se uglavnom koristi za matematičke dokaze (Slika 2.5).

Ugao između ravni Griničkog meridijana i ravni meridijana posmatrane tačke, meren u ekvatorijalnoj ravni u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku je dužina meridijanske ravni λ (Slika 2.4).

Linearno odstojanje tačke od elipsoida, mereno duž normale na elipsoid koja prolazi kroz posmatranu tačku je elipsoidna visina tačke h (Slika 2.7).



Slika 2.5: Različite širine

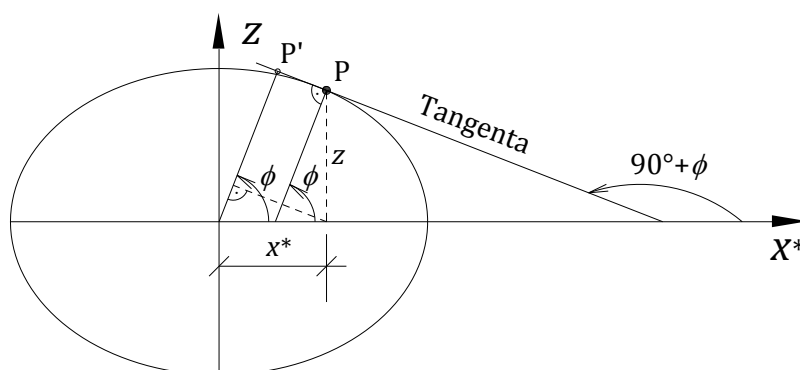
2.2.2.1. Vektor položaja tačke izražen preko geodetske širine

Koordinate proizvoljne tačke P koja se nalazi na površi elipsoida, u sistemu čija je primarna osa označena sa x^* , u meridijanskoj ravni će biti

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Ravan koja je upravna na normalu u tački P i istovremeno sadrži tačku P jeste tangentna ravan tačke P (Slika 2.6), čiji se nagib može izraziti kao

$$\frac{dz}{dx^*} = \tan(90^\circ + \phi) = -\frac{\cos \phi}{\sin \phi}. \quad (2.12)$$



Slika 2.6: Tangenta na meridijansku elipsu

Nagib tangentne ravni tačke P se može izraziti i preko jednačine meridijanske elipse

$$\frac{(x^*)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (2.13)$$

ili

$$b^2(x^*)^2 + a^2z^2 = a^2b^2, \quad (2.14)$$

$$2b^2x^*dx^* + 2a^2zdz = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{dz}{dx^*} = -\frac{b^2x^*}{a^2z}. \quad (2.16)$$

Iz (2.15) i (2.16) sledi da je nagib

$$\frac{b^2x^*}{a^2z} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \quad (2.17)$$

ili

$$b^2(x^*)\sin\phi = a^2z\cos\phi, \quad (2.18)$$

što nakon kvadriranja daje

$$b^4(x^*)^2\sin^2\phi = a^4z^2\cos^2\phi. \quad (2.19)$$

Kada se jednačine (2.14) i (2.19) izraze u matricnom obliku, dobija se

$$\begin{bmatrix} b^4\sin^2\phi & -a^4\cos^2\phi \\ b^2 & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x^*)^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a^2b^2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Inverzna matrica matrice koeficijenata je

$$\frac{1}{a^2b^2(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)} \begin{bmatrix} a^2 & a^4\cos^2\phi \\ -b^2 & b^4\sin^2\phi \end{bmatrix},$$

odakle sledi

$$\begin{bmatrix} (x^*)^2 \\ z^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi} \begin{bmatrix} a^4\cos^2\phi \\ b^4\sin^2\phi \end{bmatrix},$$

pa će nakon korenovanja biti

$$\begin{bmatrix} x^* \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)^{1/2}} \begin{bmatrix} a^2\cos\phi \\ b^2\sin\phi \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Sa slike 2.5 sledi

$$\cos\phi = \frac{x^*}{N}$$

dok je iz jednačine (2.21)

$$x^* = \frac{a^2\cos\phi}{(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)^{1/2}},$$

pa se mogu formirati izrazi

$$N = \frac{a^2}{(a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)^{1/2}}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N\cos\phi \\ 0 \\ Nb^2/a^2\sin\phi \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

u kojima je N radijus zakrivljenosti elipsoida u ravni koja je upravna na meridijansku ravan, tj. u ravni prvog vertikala.

Vektor položaja tačke P, koji se odnosi na koordinatni sistem čija je primarna osa u ravni Griničkog meridijana, se dobija rotacijom koordinatnog sistema oko z-ose u smeru kretanja kazaljke na časovniku (negativna rotacija) za vrednost dužine λ , pa je

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_3(-\lambda) \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\lambda) & \sin(-\lambda) & 0 \\ -\sin(-\lambda) & \cos(-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \cos \phi \\ 0 \\ Nb^2/a^2 \sin \phi \end{bmatrix}, \\ \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= N \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ b^2/a^2 \sin \phi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.2.2.2. Vektor položaja tačke izražen preko geocentrične i redukovane širine

Vektor položaja tačke P se preko geocentrične širine ψ (Slika 2.5) može izraziti kao

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = |\mathbf{r}| \begin{bmatrix} \cos \psi \\ 0 \\ \sin \psi \end{bmatrix},$$

gde je $|\mathbf{r}|$ modul vektora položaja \mathbf{r} .

Rotiranjem koordinatnog sistema radi uvođenja dužine λ (na isti način kao kod geodetske širine) dobija se izraz za računanje vektora položaja tačke preko geocentrične širine

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-\lambda) \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = |\mathbf{r}| \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \lambda \\ \cos \psi \sin \lambda \\ \sin \psi \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Redukovana širina β tačke P je jednaka geocentričnoj širini tačaka Q i R, od kojih je tačka Q projekcija tačke P, paralelna sa malom polusom, do preseka sa kružnicom čiji je radijus jednak velikoj poluosi, a tačka R je projekcija tačke P, paralelna velikoj poluosi, do preseka sa kružnicom čiji je radijus jednak veličini

male poluose (Slika 2.5). Vektor položaja tačke P izražen preko redukovane širine β je

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \beta \\ 0 \\ b \sin \beta \end{bmatrix}.$$

Rotiranjem koordinatnog sistema radi uvođenja dužine λ se dobija

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_3(-\lambda) \begin{bmatrix} x^* \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \beta \cos \lambda \\ a \cos \beta \sin \lambda \\ b \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

2.2.2.3. Veza između geodetske, geocentrične i redukovane širine

Iz jednačina (2.24), (2.25) i (2.26) mogu se uspostaviti sledeći odnosi

$$\frac{z}{x} = \frac{b^2}{a^2} \tan \phi \cos \lambda = \tan \psi \cos \lambda = \frac{b}{a} \tan \beta \cos \lambda,$$

na osnovu kojih sledi:

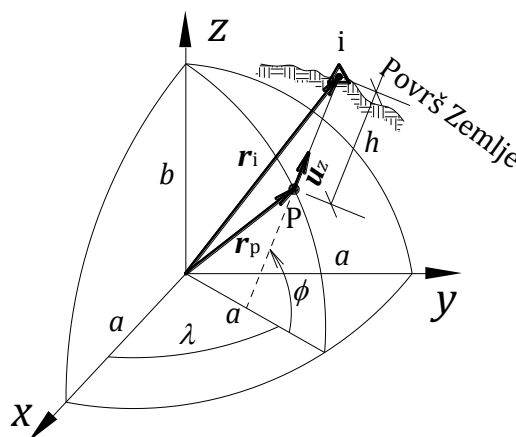
$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan \phi, \quad (2.27)$$

$$\tan \beta = \frac{a}{b} \tan \psi, \quad (2.28)$$

$$\tan \psi = \frac{b^2}{a^2} \tan \phi. \quad (2.29)$$

2.2.2.4. Vektor položaja tačke koja se nalazi iznad referentnog elipsoida

Proizvoljno izabrana tačka i na fizičkoj površini Zemlje (Slika 2.7) će biti određena koordinatama, geodetskom širinom ϕ , dužinom λ i elipsoidnom visinom h . Projekcija tačke i na površ elipsoida duž normale je definisana jediničnim vektorom \mathbf{u}_z .



Slika 2.7: Tačka iznad referentnog elipsoida

Vektor položaja tačke i predstavlja sumu dva vektora

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_p + h\mathbf{u}_z, \quad (2.30)$$

gde je vektor \mathbf{r}_p definisan jednačinom (2.24) dok je vektor \mathbf{u}_z jedinični vektor definisan jednačinom (2.68c), odnosno

$$\mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ b^2/a^2 \sin \phi \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix},$$

ili

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \phi \sin \lambda \\ (N b^2/a^2 + h) \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

Vektor položaja tačke i (2.31) se odnosi na koordinatni sistem čije je ishodište u geometrijskom centru elipsoida. Ako je ovim elipsoidom definisan relativni geodetski sistem, onda se njegov centar ne poklapa sa centrom gravitacije Zemlje. Vektor položaja u srednjem terestričkom sistemu se na osnovu jednačine 2.4 definiše kao

$$(\mathbf{r}_i)_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + (\mathbf{r}_i)_G,$$

odnosno

$$(\mathbf{r}_i)_{AT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N+h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \phi \sin \lambda \\ (N b^2/a^2 + h) \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Izraz (2.32) predstavlja opštu formulu za transformaciju relativnih geodetskih koordinata (ϕ, λ, h) u srednje terestričke koordinate (x, y, z) na elipsoidu koji je definisan parametrima (a, b) i sa parametrima translacije (x_0, y_0, z_0) .

2.2.2.5. Transformacija koordinata iz srednjih terestričkih pravougljih u geodetske koordinate

Ovom transformacijom se date srednje terestričke koordinate (x, y, z) , na osnovu parametara translacije (x_0, y_0, z_0) , i usvojenog elipsoida (a, b) , transformišu u relativne geodetske koordinate (ϕ, λ, h) .

U prvom koraku se ishodište sistema iz centra gravitacije premešta u centar elipsoida. Na osnovu jednačine (2.32) biće

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Geodetska dužina λ se računa direktno po formuli

$$\lambda = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.34)$$

Geodetska širina ϕ i elipsoidna visina h se ne mogu izračunati direktno s obzirom da je radijus zakrivljenosti elipsoida N u funkciji širine ϕ , i izražava se kao (2.22)

$$N = \frac{a}{(\cos^2 \phi + b^2/a^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}, \quad (2.35)$$

dok je elipsoidna visina h nepoznata. Na osnovu

$$e^2 = 1 - b^2/a^2, \quad (2.36)$$

$$p = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (2.37)$$

i izraza dobijenog iz jednačine (2.31)

$$\begin{aligned} p^2 &= (N+h)^2 \cos^2 \phi \cos^2 \lambda + (N+h)^2 \cos^2 \phi \sin^2 \lambda \\ p &= (N+h) \cos \phi \end{aligned}$$

sledi da je elipsoidna visina

$$h = \frac{p}{\cos \phi} - N. \quad (2.38)$$

Iz jednačine (2.31) će takođe biti

$$z = \left(N b^2 / a^2 + h \right) \sin \phi = \left(N - \frac{a^2 - b^2}{a^2} N + h \right) \sin \phi = \left(N + h - e^2 N \right) \sin \phi ,$$

odakle je

$$\frac{z}{p} = \frac{\left(N + h - e^2 N \right) \sin \phi}{\left(N + h \right) \cos \phi} = \tan \phi \left(1 - \frac{e^2 N}{N + h} \right). \quad (2.39)$$

Postoje dva načina za rešavanje jednačine (2.39), i to prvi način kojim se dobija direktno rešenje za širinu ϕ , dok drugi način predstavlja iterativni postupak koji je u odnosu na direktno rešenje jednostavniji. U iterativnom postupku se polazi od jednačine (2.39), iz koje sledi da je

$$\phi = \tan^{-1} \left[\left(\frac{z}{p} \right) \left(1 - \frac{e^2 N}{N + h} \right)^{-1} \right]$$

Usvojene početne, odnosno, nulte vrednosti su

$$N_0 = a ,$$

$$h_0 = \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{1/2} - (ab)^{1/2} ,$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left[\left(\frac{z}{p} \right) \left(1 - \frac{e^2 N_0}{N_0 + h_0} \right)^{-1} \right] ,$$

na osnovu kojih se u iterativnom postupku dobija

$$N_i = \frac{a}{\left(\cos^2 \phi_{i-1} + b^2 / a^2 \sin^2 \phi_{i-1} \right)^{1/2}} ,$$

$$h_i = \frac{p}{\cos \phi_{i-1}} - N_i ,$$

$$\phi_i = \tan^{-1} \left[\left(\frac{z}{p} \right) \left(1 - \frac{e^2 N_i}{N_i + h_i} \right)^{-1} \right] .$$

Iterativni postupak se ponavlja do ispunjenja uslova

$$\left(h_i - h_{i-1} \right) < a\varepsilon \text{ i } \left(\phi_i - \phi_{i-1} \right) < \varepsilon ,$$

za neku odgovarajuću vrednost ε (na primer $\varepsilon = 10^{-10}$).

Iz jednačine (2.39) moguće je eliminisati elipsoidnu visinu h korišćenjem jednačine (2.38), pa će biti

$$\frac{z}{p} = \tan \phi \left(1 - \frac{e^2 N \cos \phi}{p} \right),$$

ili

$$p \tan \phi - z = e^2 N \sin \phi,$$

odakle sledi da je jedina nepoznata veličina širina ϕ .

Kada se izraz za N iz jednačine (2.35) uvrsti u prethodnu jednačinu, biće

$$p \tan \phi - z = \frac{ae^2 \sin \phi}{(\cos^2 \phi + b^2/a^2 \sin^2 \phi)^{1/2}},$$

te se nakon deljenja desne strane jednačine sa $\cos \phi$, dobija

$$p \tan \phi - z = \frac{ae^2 \sin \phi}{(1 + b^2/a^2 \tan^2 \phi)^{1/2}},$$

ili

$$(p \tan \phi - z)(1 + (1 - e^2) \tan^2 \phi)^{1/2} = ae^2 \tan \phi,$$

Nakon kvadriranja će biti

$$(p^2 \tan^2 \phi - 2pz \tan \phi + z^2)(1 + (1 - e^2) \tan^2 \phi)^{1/2} = a^2 e^4 \tan^2 \phi,$$

ili

$$p^2 \tan^4 \phi - 2pz \tan^3 \phi + (\beta + z^2) \tan^2 \phi - \frac{2pz \tan \phi}{(1 - e^2)} + \frac{z^2}{(1 - e^2)} = 0,$$

gde je

$$\beta = \frac{p^2 - a^2 e^4}{(1 - e^2)}.$$

Dobijena jednačina je bikvadratna jednačina po $\tan \phi$, u kojoj su vrednosti svih koeficijenata poznate, pa se nakon određivanja širine ϕ vrednosti za N i h računaju na osnovu jednačina (2.35) i (2.38).

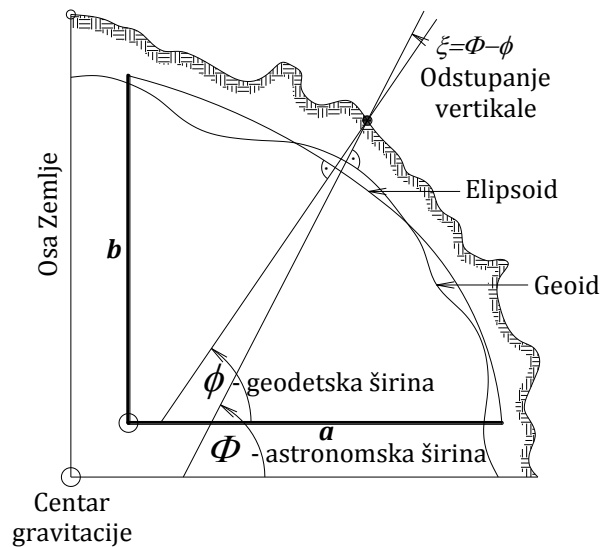
2.2.3. Geodetski datumi

Postoje dva prirodna oblika Zemlje (Slika 2.8) i to topografska ili fizička površ Zemlje uključujući i površ okeana (teren), i ekvipotencijalna površ gravitacionog polja Zemlje koja se podudara sa idealizovanom površi okeana (geoid).

Kod klasičnih geodetskih visinskih mreža sva merenja i visine tačaka u njima se odnose na vertikalni datum koji predstavlja geoid. Kao površ na kojoj se definiše datum horizontalnih mreža, umesto geoida, uvedena je površ rotacionog elipsoida, kao matematički definisana ali u isto vreme neprirodna površ. Rotacioni elipsoid je kao matematička figura iskorišćen za definisanje datuma horizontalnih mreža upravo zbog mogućnosti matematičkog određivanja položaja tačaka u geodetskim mrežama.

Kako datum horizontalnih mreža nije geoid, u postupku računanja i određivanja položaja tačaka, uvode se određene korekcije. Za određene svrhe u geodeziji izbor elipsoida se može izvršiti tako da je geoid aproksimiran uz primenu korekcionih članova koji se mogu uzeti kao linearne veličine, a za neke druge svrhe se mogu i zanemariti. Aproksimacija geoida elipsoidom (Slika 2.8) je dobra u slučaju kada je rastojanje između geoida i elipsoida (geoidna visina) manja od 100m, i kada je razlika između normale i vertikale u bilo kojoj tački (otklon vertikale) manja od 5 sekundi.

U nekim slučajevima kada se traži manja tačnost geodetskih radova ili je radilište dovoljno malo i jednostavnije površi od elipsoida, kao što su sfera i ravan, predstavljaju dobru aproksimaciju geoida. U cilju određivanja koordinata tačaka horizontalne geodetske mreže koje se odnose na površ elipsoida neophodno je izvršiti i redukciju svih merenih veličina u mreži tako da se i one odnose na elipsoid.



Slika 2.8: Meridijanski presek Zemlje

2.2.3.1. Parametri položajnog datuma

Izbor elipsoida kao referentne površi za definisanje koordinatnog sistema pretpostavlja određivanje veličine i oblika elipsoida, preko veličine velike poluose i spljoštenosti, kao i definisanje položaja elipsoida u odnosu na Zemlju. Ako je izabrani elipsoid i dobro pozicioniran biće obezbeđena dobra aproksimacija geoida na području na kome se određuje geodetska mreža u tom datumu. Parametri kojima se definišu vrednosti potrebne za određivanje položaja elipsoida predstavljaju parametre položajnog datuma.

Elipsoid, kao i bilo koje drugo telo u 3D prostoru, ima šest stepeni slobode, odnosno, postoji šest načina promene njegovog položaja u odnosu na neko fiksno telo, koje u ovom slučaju predstavlja Zemlja kao nebesko telo. Dakle, postoji šest parametara položajnog datuma.

Parametri položajnog datuma se mogu analizirati preko dva trodimenzionalna pravouglav koordinatna sistema, od kojih je jedan fiksiran za elipsoid a drugi za Zemlju. U ovom slučaju ishodišta koordinatnih sistema se neće poklapati, niti će im ose biti paralelne. Poklapanje ovih sistema se može realizovati transformacijom iz jednog u drugi sistem, odnosno definisanjem položaj ishodišta jednog sistema u odnosu na drugi, što se postiže preko tri koordinate i tri ugla rotacije. Ovih šest parametara upravo predstavljaju šest stepeni slobode, odnosno, šest parametara položajnog datuma, i definisanjem njihovih vrednosti definiše se i položaj elipsoida u odnosu na Zemlju. Datum je tako u potpunosti određen preko vrednosti za ukupno osam parametara, kojima su definisani veličina i oblika elipsoida, i šest parametara položajnog datuma.

Postoje dve vrste parametara položajnog datuma. Jedna vrsta su oni kod kojih su fiksni elipsoid i koordinatni sistem fiksiran za Zemlju definisani tako da im je ishodište u blizini geocentra. Druga vrsta su oni kod kojih su fiksni elipsoid i koordinatni sistem fiksiran za Zemlju definisani tako da im se ishodište nalazi blizu površine Zemlje, u tački koja se naziva početna (inicijalna) tačka datuma.

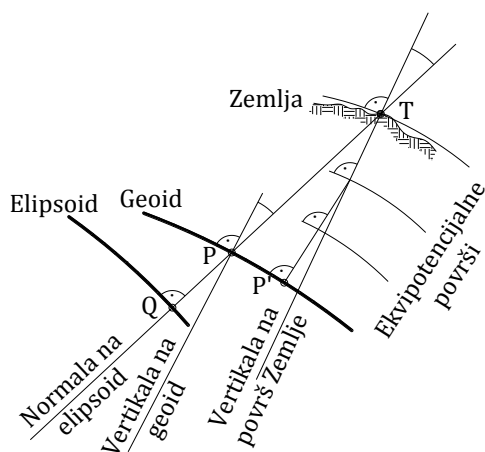
U prvom slučaju (geocentar) sistem fiksiran za Zemlju je srednji terestrički sistem (poglavlje 2.2.1.2.), a fiksni elipsoid je geodetski sistem predstavljen jednačinom (2.31). U ovom slučaju parametri položajnog datuma su koordinate

ishodišta srednjeg terestričkog sistema (x_0, y_0, z_0) iz jednačine (2.32), i tri ugla rotacije $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ koji su potrebni da bi se definisalo odstupanje osa.

U drugom slučaju (topocentar) sistem fiksiran za Zemlju je lokalni astronomski sistem (LA) u početnoj tački. Koordinatni sistem vezan za elipsoid je lokalni geodetski sistem (LG) u istoj tački (poglavlje 2.2.4.).

Od značaja za definisanje parametara datuma je analiza geometrije, odnosno, položaja karakterističnih linija i ravni u blizini tačke koja se nalazi na fizičkoj površi Zemlje (Slika 2.9). Normala na elipsoid seče elipsoid, geoid, i teren u tačkama Q, P i T respektivno. Kroz ove tačke prolaze tri "prirodne" normale koje odgovaraju ovoj normali na elipsoid, a to su:

- vertikalna na površini (upravna na ekvipotencijalnu ravan u tački T);
- vertikalna na geoidu (upravna na geoid u tački P) i
- vertikalna (upravna na sve ekvipotencijalne ravni između terena i geoida).



Slika 2.9: Orijentacija elipsoida prema geoidu

Od ove tri linije samo je vertikalna kriva linija dok su ostale dve linije pravci, i ni jedna od njih se ne nalazi u ravni geodetskog meridijana (na slici 2.9 prikazane su kao projekcije na ravan meridijana). Ako se zanemari zakrivljenost vertikalne onda je ona paralelna sa vertikalom na geoidu.

Ravan astronomskog meridijana sadrži jednu od vertikalna i paralelna je srednjoj terestričkoj z-osi. Ugao između vertikalne i paralele srednjoj terestričkoj z-osi je astronomska ko-latituda $(\pi/2 - \phi)$. Ugao između ravni astronomskog meridijana i referentne meridijanske ravni (Grinič) je astronomska dužina Λ . Ugao između normale na elipsoid i vertikalne je otklon vertikalne, koji se može razložiti na dve komponente, i to:

- komponentu u ravni geodetskog meridijana ξ i
- komponentu u ravni prvog vertikalna η .

Kako postoje dve vertikale, postojaće i dva skupa vrednosti za astronomsku širinu i dužinu, i komponente otklona vertikale. Ako se zakrivljenost vertikale zanemari onda su ove vrednosti jednake.

Ako je pozicija elipsoida takva da su geocentrične ose elipsoida paralelne sa osama srednjeg terestričkog sistema ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$) onda je

$$\xi = \Phi - \phi, \quad (2.40)$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi, \quad (2.41)$$

gde su (ϕ, λ) geodetske koordinate tačkaka Q, P i T.

Rastojanje između površi elipsoida i geoida po pravcu normale (QP) je geoidna visina N^* . Rastojanje između površi elipsoida i terena po pravcu normale (QT) predstavlja elipsoidnu visinu h , dok je rastojanje između geoida i terena određeno po pravcu vertikale (P'T) ortometrijska visina H . Ako se zanemari zakrivljenost vertikale elipsoidna visina će biti

$$h = N^* + H. \quad (2.42)$$

Za bilo koju tačku koja se nalazi na nekoj udaljenost od tačke T, ugao između ravni geodetskog meridijana i ravni koja sadrži tu tačku i normalu na elipsoid QPT je geodetski azimut α te tačku u odnosu na tačke Q, P ili T, ili tačnije to je azimut normalnog preseka, i vrlo malo se razlikuje od geodetskog azimuta (Bomford, 1971). Ugao između ravni astronomskog meridijana i ravni koja sadrži posmatranu tačku i njenu vertikalu je astronomski azimut A te tačke u odnosu na tačke P ili T, što zavisi od toga koja se vertikala koristi. Kako je otklon vertikale mala veličina, za sve tačke će iznos

$$\delta a = A - \alpha, \quad (2.43)$$

biti skoro konstantan, i kao takav predstavlja ugao između ravni geodetskog i astronomskog meridijana.

Lokalni geodetski sistem u slučaju definisanja parametara topocentričnog datuma ima ishodište na datumskoj površi, odnosno, na elipsoidu. Kada se potom koordinate tačkaka horizontalne mreže određuju na klasičan način (dvodimenzionalne koordinate), ortometrijske visine H se koriste samo za redukciju merenih veličina na geoid. Analogno tome ishodište lokalnog

astronomskog sistema će biti u nekoj tački na geoidu. Kako bi se definisala transformacija između lokalnog geodetskog i lokalnog astronomskog sistema potrebno je poznavati šest parametara položajnog datuma, i to geodetske koordinate ishodišta lokalnog astronomskog sistema $(\phi_0, \lambda_0, N_0^*)$ i uglove rotacije $(\xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$.

2.2.3.2. Uspostavljanje datuma

Definisanjem skupa parametara geodetskog datuma, bilo da su to $(a, b, x_0, y_0, z_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ili $(a, b, \phi_0, \lambda_0, N_0^*, \xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$, moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

- geoid mora biti dobro aproksimiran na području na kome se nalazi geodetska mreža čiji se datum definiše;
- geocentrične ose geodetskog koordinatnog sistema trebaju da budu približno paralelne osama srednjeg terestričkog sistema, i
- ose simetrije trebaju da budu paralelne.

Upravo postupak određivanja vrednosti za osam parametara geodetskog datuma, na način da budu zadovoljeni napred navedeni uslovi, predstavlja uspostavljanje datuma geodetske mreže.

Postupak uspostavljanja datuma uvek pretpostavlja određivanje vrednosti za osam topocentričnih parametara $(a, b, \phi_0, \lambda_0, N_0^*, \xi_0, \eta_0, \delta\alpha_0)$, zato što se njima obezbeđuje veza između geodetskih i astronomskih merenja koja se moraju koristiti prilikom uspostavljanja datuma. Kada se uspostavlja datum globalnih geodetskih mreža potrebno je ispuniti i dodatni uslov da je $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, čime se praktično realizuje geocentrični datum, dok se bez ovog uslova realizuje lokalni datum.

U slučaju kada je

$$N_0^* = \xi_0 = \eta_0 = 0,$$

problem aproksimacije geoida je rešen na način da elipsoid tangira geoid u početnoj tački.

Aproksimacija geoida zavisi od izbora vrednosti za parametre datuma $(a, b, N_0^*, \xi_0, \eta_0)$, pri čemu postoje dva načina, i to prvi da vrednosti (ξ, η) budu minimalne i drugi da vrednost N^* u geodetskoj mreži bude minimalna (Vanicek, 1972).

Činjenica je da su vrednosti (N^*, ξ, η) u jednoj mreži poznate samo ako postoji već neka izravnata mreža, pa se postupak uspostavljanja datuma tako svodi na prilagođavanje, odnosno, poboljšavanje već postojećeg datuma kroz iterativni postupak.

Ispunjenje uslova da ose simetrije budu paralelne se postiže primenom Laplasovog uslova u početnoj tački, odnosno, određivanjem vrednosti (α_0) tako da je

$$\delta\alpha_0 = A_0 - \alpha_0 = \eta_0 \tan \phi_0, \quad (2.44)$$

gde je (A_0) opažani astronomski azimut.

Ovim uslovom je obezbeđeno da geodetski i astronomski meridijan budu paralelni u početnoj tački, pa tako i da obe ose simetrije leže u zajedničkoj ravni. Kako bi se ose simetrije nalazile upravo u meridijanskoj ravni, Laplasov uslov se primenjuje na nekoliko geodetskih meridijana koji su paralelni sa odgovarajućim astronomskim meridijanima. I u ovom slučaju primena Laplasovog uslova u mreži je moguća samo ako već postoji izravnata mreža, što znači da je uspostavljanje datuma rezultat primene iterativnog postupka.

2.2.3.3. Transformacije datuma

Postupkom transformacije se date krivolinijske koordinate tačke koje se odnose na određeni datum, preračunavaju u krivolinijske koordinate iste tačke koje se odnose na neki drugi datum, pri čemu se u obzir mora uzeti:

- a) položaj geometrijskog centra svakog od referentnih elipsoida u odnosu na centar gravitacije, ili položaj jednog u odnosu na drugi, i
- b) razlike u veličini i obliku između elipsoida.

Pod pretpostavkom da su ose oba datuma paralelne osama srednjeg terestričkog sistema, veličina i oblik elipsoida su definisani sa (a_1, b_1) i (a_2, b_2) , odnosno, (a_1, f_1) i (a_2, f_2) , pri čemu su im položaji geometrijskih centara u odnosu na centar mase Zemlje definisanih sa

$$(\mathbf{r}_0)_1 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_1 \quad \text{i} \quad (\mathbf{r}_0)_2 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_2 .$$

Koordinate posmatrane tačke koje se odnose na prvi elipsoid su vrednosti (ϕ_1, λ_1, h_1) , dok su koordinate iste tačke koje se odnose na drugi elipsoid (ϕ_2, λ_2, h_2) .

Kako na koordinate tačaka u srednjem terestričkom sistemu transformacija nema uticaj, koordinate tačke će u ovom sistemu na osnovu jednačine (2.32) biti:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} (N_1 + h_1) \cos \phi \cos \lambda_1 \\ (N_1 + h_1) \cos \phi \sin \lambda_1 \\ (N_1 b_1^2 / a_1^2 + h_1) \sin \phi \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}_2 + \begin{bmatrix} (N_2 + h_2) \cos \phi \cos \lambda_2 \\ (N_2 + h_2) \cos \phi \sin \lambda_2 \\ (N_2 b_2^2 / a_2^2 + h_2) \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Tražene koordinate (ϕ_2, λ_2, h_2) se mogu odrediti primenom dve različite metode.

Primena prve metode podrazumeva postupak po kome se direktnom primenom formule (2.45) odrede koordinate tačke u srednjem terestričkom sistemu, nakon čega se na osnovu inverzne jednačine (2.46), iterativnom metodom (poglavlje 2.2.2.5), određuju koordinate (ϕ_2, λ_2, h_2) .

Druga metoda je diferencijalna metoda i upotrebljava se kada su razlike između parametara $(\delta a, \delta f, \delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ za dva datuma diferencijalno male veličine, što omogućava korišćenje razvoja u Tejlorov red. Totalni diferencijal jednačine (2.32), uz zadržanu invarijantnost koordinata u srednjem terestričkom

sistemu, i prikaz razlika koordinata između dva datuma kao diferencijalnih veličina, daje

$$\begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{bmatrix} + J \begin{bmatrix} \delta \phi \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta f \end{bmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

gde je:

$$J = \begin{bmatrix} -(M+h)\sin\phi\cos\lambda & -(N+h)\cos\phi\sin\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ -(M+h)\sin\phi\sin\lambda & (N+h)\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda \\ (M+h)\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{N\cos\phi\cos\lambda}{a} & \frac{M\sin^2\phi\cos\phi\cos\lambda}{1-f} \\ \frac{N\cos\phi\sin\lambda}{a} & \frac{M\sin^2\phi\cos\phi\sin\lambda}{1-f} \\ \frac{N(1-f)^2\sin\phi}{a} & \frac{(M\sin^2\phi-2N)\sin\phi}{1-f} \end{bmatrix}, \text{ i} \quad (2.49)$$

$$M = \frac{a(1-f)^2}{(\cos^2\phi + (1-f)^2\sin^2\phi)^{3/2}}. \quad (2.50)$$

Koordinatne razlike se dobijaju rešavanjem jednačine (2.47), pa je

$$\begin{bmatrix} \delta \phi \\ \delta \lambda \\ \delta h \end{bmatrix} = -J^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta f \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.51)$$

gde je

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin\phi\cos\lambda}{(M+h)} & -\frac{\sin\phi\sin\lambda}{(M+h)} & \frac{\cos\phi}{(M+h)} \\ \frac{\sin\lambda}{(N+h)\cos\phi} & \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\phi} & 0 \\ \cos\phi\cos\lambda & \cos\phi\sin\lambda & \sin\phi \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Usvojena pretpostavka da su razlike u veličinama diferencijalno male, obezbeđuje da se matrice mogu izračunati u oba koordinatna sistema.

2.2.4. Terestrički topocentrični sistemi

Osnovne karakteristike terestričkih topocentričnih koordinatnih sistema su predstavljene kroz sledeće konstatacije:

- ishodište koordinatnog sistema je u tački koja se nalazi u blizini površine Zemlje;
- primarna ravan je tangenta ravan na površ Zemlje u posmatranoj tački;
- primarna osa predstavlja severnu tačku;
- koordinatni sistem je levo orjentisan.

Kada se definišu ovi koordinatni sistemi mora se precizno odrediti šta predstavlja "površ Zemlje" s obzirom da to može biti fizička površina Zemlje, potom ekvipotencijalna površ Zemlje ili površ referentnog elipsoida. Definisane koordinatnog sistema preko tangente ravni na fizičku površ Zemlje ne predstavlja praktično rešenje. Tako se mogu definisati dve vrste terestričkih topocentričnih sistema:

- sistem kod koga je primarni pol normala na ekvipotencijalnu površ koja prolazi kroz stajnu tačku se zove lokalni astronomski sistem,
- sistem kod koga je primarni pol normala na elipsoid koja prolazi kroz stajnu tačku se zove lokalni geodetski sistem (Krakiwsky i Wells, 1971).

2.2.4.1. Lokalni astronomski sistem

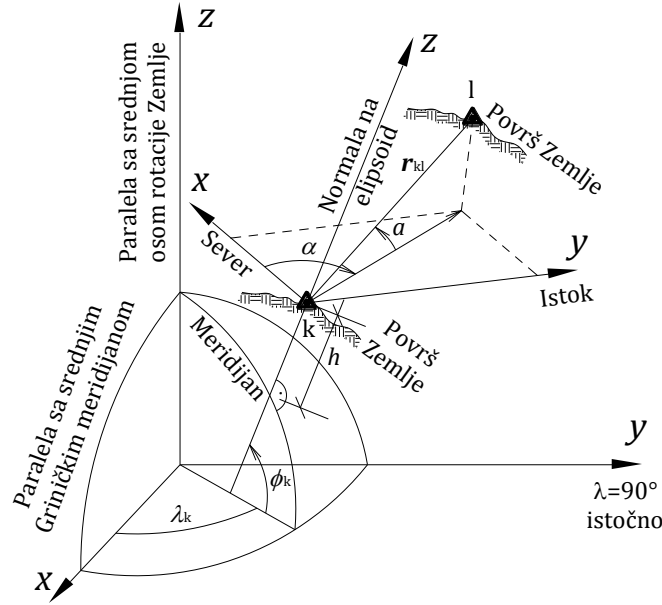
Lokalni astronomski sistem (LA) je definisan na sledeći način:

- ishodište koordinatnog sistema je u stajnoj tački sa koje se vrše opažanja;
- primarni pol (z-osa) je normala na ekvipotencijalnu površ (vertikala) u stajnoj tački;
- primarna ravan je ravan koja sadrži ishodište i upravna je na vertikalu;
- primarna osa (x-osa) predstavlja presek primarne ravni i ravni koja sadrži srednji terestrički pol i stajnu tačku, i zove se astronomski sever;
- y-osa je usmerena prema istoku pa je koordinatni sistem levo orjentisan.

Ako se sa stajne tačke k opaža tačka l , onda se njen vektor položaja u lokalnom astronomskom sistemu može zapisati kao

$$(\mathbf{r}_{kl})_{LA} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{LA} = r_{kl} \begin{bmatrix} \cos v_{kl} \cos A_{kl} \\ \cos v_{kl} \sin A_{kl} \\ \sin v_{kl} \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

gde je r_{kl} prostorna udaljenost, v_{kl} je vertikalni ugao, i A_{kl} je astronomski azimut.



Slika 2.10: Geodetski i lokalni geodetski koordinatni sistem

Vektor položaja iz jednačine (2.53) izražen u srednjem terestričkom sistemu glasi

$$(\mathbf{r}_{kl})_{AT} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \mathbf{R}_3(180^\circ - \Lambda_k) \mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi_k) \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{LA}, \quad (2.54)$$

gde je \mathbf{P}_2 matrica refleksije

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

kojom se levo orjentisani koordinatni sistem transformiše u desno orjentisani sistem, dok su \mathbf{R}_2 i \mathbf{R}_3 odgovarajuće matrice rotacije, i to

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \Phi_k) & 0 & -\sin(90^\circ - \Phi_k) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90^\circ - \Phi_k) & 0 & \cos(90^\circ - \Phi_k) \end{bmatrix} \text{ i} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} \cos(180^\circ - \Lambda_k) & \sin(180^\circ - \Lambda_k) & 0 \\ -\sin(180^\circ - \Lambda_k) & \cos(180^\circ - \Lambda_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

kojima se tri ose astronomskog sistema dovode u paralelan položaj sa odgovarajućim osama srednjeg terestričkog sistema.

Inverzna transformacija je

$$(\mathbf{r}_{kl})_{LA} = [\mathbf{R}_3(180^\circ - \Lambda_k) \mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi_k) \mathbf{P}_2]^{-1} (\mathbf{r}_{kl})_{AT}, \quad (2.58)$$

$$(\mathbf{r}_{kl})_{LA} = \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_2(\Phi_k - 90^\circ) \mathbf{R}_3(\Lambda_k - 180^\circ) (\mathbf{r}_{kl})_{AT}. \quad (2.59)$$

Vektor položaja stanice k u odnosu na centar gravitacije u srednjem terestričkom sistemu je vektor $(\mathbf{R}_k)_{AT}$, pa će tada ukupan vektor položaja \mathbf{R}_l opažane tačke l biti

$$(\mathbf{R}_l)_{AT} = (\mathbf{R}_k)_{AT} + (\mathbf{r}_{kl})_{AT}. \quad (2.60)$$

U srednjem terestričkom sistemu jedinični vektori \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y i \mathbf{u}_z su usmereni duž osa lokalnog astronomskog sistema i imaju sledeće komponente:

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{R}_3(180^\circ - \Lambda_k) \mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi_k) \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} -\sin \Phi \cos \Lambda \\ -\sin \Phi \sin \Lambda \\ \cos \Phi \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{u}_y = \mathbf{R}_3(180^\circ - \Lambda_k) \mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi_k) \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_y = \begin{bmatrix} -\sin \Lambda \\ \cos \Lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{u}_z = \mathbf{R}_3(180^\circ - \Lambda_k) \mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi_k) \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Osobina lokalnog astronomskog sistema je da je jedinstven za svaku stajnu tačku, pa zbog toga predstavlja osnovu za obradu terestričkih 3D merenja koja su realizovana sa više stanica.

2.2.4.2. Lokalni geodetski sistem

Lokalni geodetski sistem (LG) je definisan sledećim postavkama (Slika 2.10):

- ishodište koordinatnog sistema je bilo koja tačka koja pripada normali na elipsoid i koja prolazi kroz stajnu tačku, pri čemu se u praksi za ishodište sistema obično bira stajna tačka na elipsoidu ili na preseku normale sa geoidom;
- primarni pol (z-osa) je normala na elipsoid;
- primarna ravan je ravan koja sadrži ishodište i upravna je na primarni pol;
- primarna osa (x-osa) predstavlja presek primarne ravni i ravni koja sadrži malu poluosu elipsoida i ishodište, i zove se geodetski sever;
- y-osa je usmerena prema istoku pa je koordinatni sistem levo orjentisan.

Ako lokalni geodetski i lokalni astronomski sistem imaju zajedničko ishodište onda se transformacija između ova dva sistema može izraziti preko ugla koji zaklapaju normala i vertikala u ishodištu sistema (otklon vertikale) i ugla između geodetskog i astronomskog severa. To znači da se vektor koordinata neke tačke iz lokalnog astronomskog sistema, na osnovu komponenti otklona vertikale (ξ, η) i geodetskog i astronomskog azimuta (a, A) , može transformisati u vektor koordinata iste tačke u lokalnom geodetskom sistemu, na osnovu izraza

$$(\mathbf{r}_{kl})_{LG} = \mathbf{R}_3(A-a) \mathbf{R}_2(-\xi) \mathbf{R}_1(\eta) (\mathbf{r}_{kl})_{LA}, \quad (2.64)$$

pri čemu se zbog diferencijalno malih vrednosti uglova $\xi, \eta, A-a$ ne mora voditi računa o redosledu izvođenja rotacija, odnosno, može se smatrati da su matrice rotacije komutativne.

Ako se sa stajne tačke k opaža tačka l , onda se njen vektor položaja u lokalnom geodetskom sistemu može zapisati kao

$$\begin{pmatrix} r_{kl} \end{pmatrix}_{LG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{LG} = r_{kl} \begin{bmatrix} \cos a_{kl} \cos \alpha_{kl} \\ \cos a_{kl} \sin \alpha_{kl} \\ \sin a_{kl} \end{bmatrix}, \quad \text{i} \quad (2.65)$$

$$\begin{pmatrix} r_{kl} \end{pmatrix}_G = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G = \mathbf{R}_3(180^\circ - \lambda_k) \mathbf{R}_2(90^\circ - \phi_k) \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{LG}, \quad (2.66)$$

gde su (a, α, r) geodetska (nadmorska) visina, azimut i udaljenost, dok su (ϕ, λ) geodetska širina i dužina.

Na osnovu izraza (2.4) uspostavljena je veza između geodetskog sistema (G) i srednjeg terestričkog sistema (AT), kao

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_G, \quad (2.67)$$

gde su (x_0, y_0, z_0) komponente translacije ishodišta geodetskog sistema u srednji terestrički sistem.

Jedinični vektori koji odgovaraju pravouglim osama u lokalnom geodetskom sistemu imaju sledeću strukturu:

$$\mathbf{u}_x = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{u}_y = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{u}_z = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

2.3. Nebeski koordinatni sistemi

Nebeski koordinatni sistemi se koriste za definisanje koordinata nebeskih tela. U ovim sistemima se zbog izuzetno velike udaljenosti između Zemlje i najbližih zvezda, dimezije Zemlje pa i ceo Sunčev sistem mogu smatrati zanemarljivo malom veličinom. Pored toga kao druga mala veličina pojavljuje se brzina kretanja zvezda, koja iz tačke posmatranja na Zemlji ne prelazi vrednost od jedne lučne sekunde godišnje.

Pod pretpostavkom da se sve zvezde nalaze na podjednakim udaljenostima od Zemlje, njihov položaj u ovom sistemu bi predstavljao skup tačaka koje se nalaze na površi koja se naziva nebeska sfera. Nebeska sfera je toliko velikih dimezija da se Zemlja kao i ceo Sunčev sistem mogu smatrati beskonačno malom tačkom koja se nalazi u centru te sfere. Iako ova tačka može biti bezdimenzionalna, veze između pravaca na Zemlji i u Sunčevom sistemu se mogu predstaviti na nebeskoj sferi.

Produžetak ose rotacije Zemlje do preseka sa nebeskom sferom, u pravcu severa daje severni nebeski pol (NCP), a u pravcu juga definiše južni nebeski pol (SCP). Kada se ekvatorijalna ravan Zemlje produži do preseka sa nebeskom sferom dobija se nebeski ekvator. Produžetak vertikale u stajnoj tački na Zemlji do preseka sa nebeskom sferom, prema gore definiše položaj zenita (Z), a prema dole daje nadir (N). U preseku ravni koja sadrži Zemljinu orbitu po kojoj se kreće oko Sunca (ekliptička ravan) i nebeske sfere dobija se ekliptika. U preseku linije, koja predstavlja presek između ekvatorijalne i ekliptičke ravni Zemlje, sa nebeskom sferom dobije se tačka prolećne ravnodnevnice, odnosno, jesenje ravnodnevnice. Tačka prolećne ravnodnevnice se označava simbolom γ , i predstavlja tačku kroz koju Sunce prolazi preko nebeskog ekvatora iz pravca juga prema severu.

Definisanje položaja nebeskih tela u nebeskim koordinatnim sistemima se vrši na osnovu pravila sferne trigonometrije, na nebeskoj sferi koja se može smatrati jediničnom sferom, i to samo na osnovu pravaca jer su sve dužine u ovom slučaju jedinični vektori.

Kako je nebeska sfera aproksimacija prave veze između zvezda i posmatrača na Zemlji u postupku određivanja pravih veza i položaja je neophodno uzeti u obzir korekcije, od kojih su najznačajnije one koje nastaju zbog toga što:

- zvezde nisu stacionarne tačke na nebeskoj sferi već se zaista kreću (pravilno kretanje);
- osa rotacije Zemlje nije stacionarna u odnosu na zvezde (precesija i nutacija);
- centar nebeske sfere je Sunce pa je tako Zemlja pomeren u odnosu na taj centar (paralaksa);
- Zemlja se kreće oko centra nebeske sfere (abracija);
- opažani pravci kroz atmosferu Zemlje su krive linije (refrakcija).

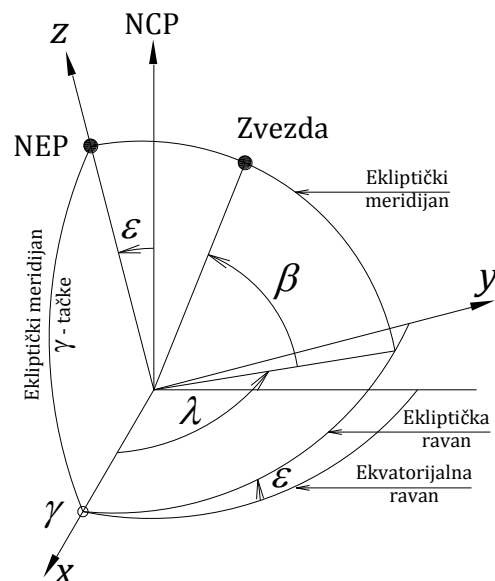
Postoje četiri glavna nebeska koordinatna sistema, i to: ekliptički sistem rektascenzije, sistem časovnog ugla i horizontski sistem. Sistem rektascenzije i satnog ugla pripadaju grupi sistema koji se nazivaju ekvatorijalni sistemi.

2.3.1. Ekliptički sistem

Ekliptički sistem (E) je definisan sledećim postavkama (Slika 2.11):

- ishodište koordinatnog sistema je heliocentar (centar Sunca);
- primarni pol (z-osa) je severni ekliptički pol (NEP);
- primarna ravan je ekliptička ravan (ravan Zemljine orbite);
- primarna osa (x-osa) prolazi kroz γ tačku poletnje ravnodnevnice;
- y-osa sa x i z osom gradi desno orjentisan koordinatni sistem.

Ekliptički sistem je po načinu definisanja stacionaran u odnosu na zvezde i kao takav najbliži je sa inercijalnim sistemom, uz činjenicu da ravan ekliptike ipak veoma sporo rotira (oko 0,5" na godišnjm nivou) oko ose rotacije, koja se takođe sporo kreće.



Slika 2.11: Ekliptički koordinatni sistem

U ovom sistemu ekliptički meridijan predstavlja veliki krug koji sadrži ekliptičke polove i nebesko telo koje se posmatra, pa se tako položaj posmatranog tela definiše preko sledećih veličina:

- ekliptička širina β je ugao u ravni ekliptičkog meridijana i to između ekliptike i linije koja povezuje ishodište sistema sa posmatranim telom;
- ekliptička dužina λ je ugao u ravni ekliptike i to između ekliptičkog meridijana posmatranog tela i meridijana γ tačke, koji se meri od nje prema istoku.

Jedinični vektor položaja nebeskog tela izražen u nebeskom sistemu glasi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

pri čemu uglovi izraženi preko pravougljih koordinata imaju vrednosti

$$\beta = \sin^{-1} z, \quad (2.72)$$

$$\lambda = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (2.73)$$

2.3.2. Sistem rektascenzije (Nebeski ekvatorski sistem)

Sistem rektascenzije (RA) je definisan sledećim postavkama (Slika 2.12):

- ishodište koordinatnog sistema je heliocentar (centar Sunca);
- primarni pol (z-osa) je severni nebeski pol (NCP);
- primarna ravan je ekvatorijalna ravan;
- primarna osa (x-osa) prolazi kroz γ tačku proletnje ravnodnevnicе;
- y-osa sa x i z osom gradi desno orjentisan koordinatni sistem.

Sistem rektascenzije je najvažniji nebeski koordinatni sistem, između ostalog i zbog toga što su u ovom sistemu publikovane koordinate zvezda i satelita, pa kao takav služi za uspostavljanje veze između terestričkih, nebeskih i orbitalnih sistema.

U ovom sistemu časovni (deklinacijski) krug predstavlja veliki krug koji sadrži nebeske polove i telo koje se posmatra, pa se položaj posmatranog tela definiše preko sledećih veličina:

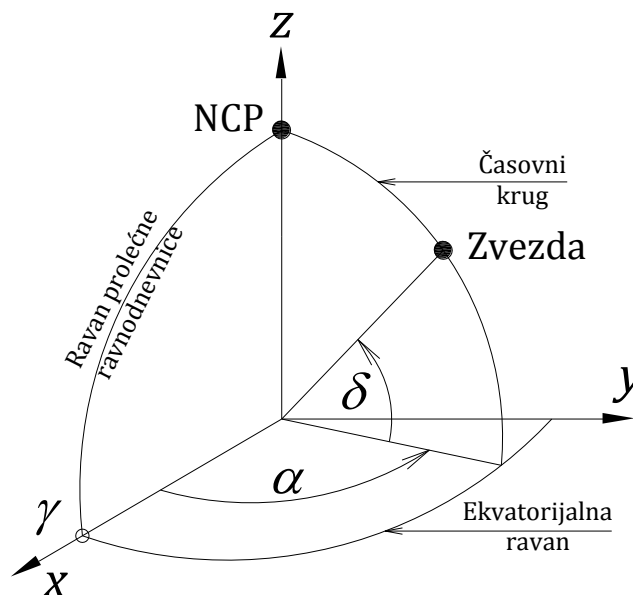
- deklinacija δ je ugao u ravni časovnog kruga i to između nebeskog ekvatora i linije koja povezuje ishodište sistema sa posmatranim telom, koji se meri od ekvatora na sever i jug, te može imati vrednosti u intervalu od -90° do $+90^\circ$;
- rektascenzija α je ugao koji se meri u ekvatorijalnoj ravni u pravcu istoka i to od pravca ka γ tački do časovnog kruga koji prolazi kroz posmatrano telo.

Jedinični vektor položaja nebeskog tela izražen u sistemu rektascenzije glasi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{RA} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

pri čemu je ovaj sistem povezan sa ekliptičkim sistemom preko oštrog ugla koga zaklapaju ekliptika i nebeski ekvator, koji se zove nagib ekliptike ε , pa se matematička veza može zapisati kao

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{RA} = \mathbf{R}_1(-\varepsilon) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_E. \quad (2.75)$$

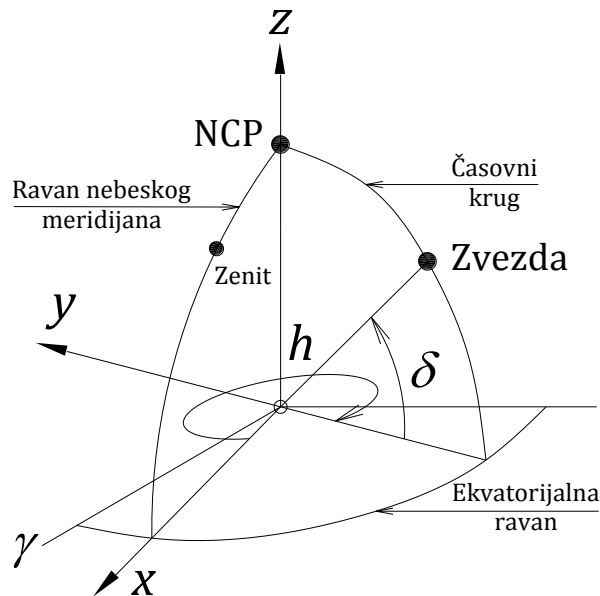


Slika 2.12: Sistem rektascenzije (Nebeski ekvatorski sistem)

2.3.3. Sistem časovnog ugla (Mesni ekvatorski sistem)

Sistem časovnog ugla (HA) je definisan sledećim postavkama (Slika 2.13):

- ishodište koordinatnog sistema je heliocentar (centar Sunca);
- primarna ravan je ekvatorijalna ravan;
- sekundarna ravan je ravan koja sadrži nebeski meridijan opažača;
- primarna osa (x-osa) predstavlja presek ekvatorijalne i ravni nebeskog meridijana opažača;
- y-osa sa x i z osom gradi levo orjentisan koordinatni sistem.



Slika 2.13: Sistem satnog ugla (Mesni ekvatorski sistem)

Osobina ovog koordinatnog sistema je da rotira zajedno sa opažačem, pa se tako položaj posmatranog tela definiše preko sledećih veličina:

- časovni ugao h je ugao u ekvatorijalnoj ravni koji se meri u pravcu zapada i to od nebeskog meridijana opažača do deklinacijskog kruga tela koje se posmatra;
- deklinacija δ je ugao koji se meri od ekvatorijalne ravni do linije koja povezuje ishodište sistema sa posmatranim telom.

Jedinični vektor položaja nebeskog tela izražen u sistemu časovnog ugla glasi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{HA} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos h \\ \cos \delta \sin h \\ \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

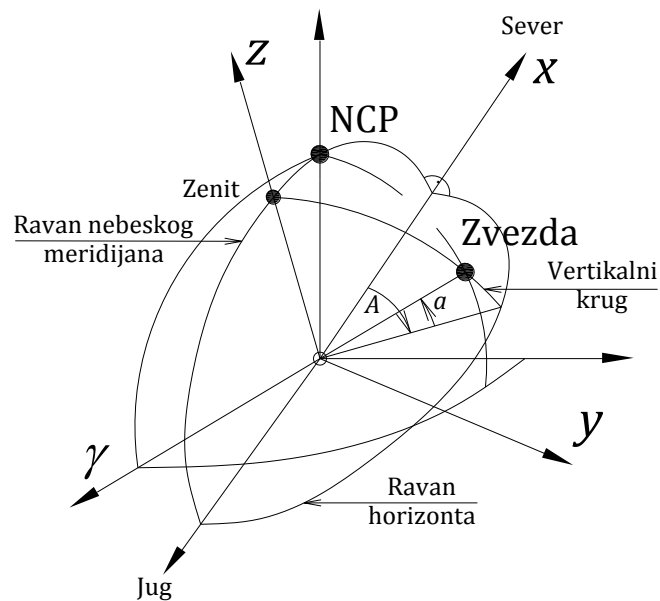
Veza između sistema časovnog ugla i sistema rekstascenzije se uspostavlja preko lokalnog zvezdanog vremena (LST), koje predstavlja ugao meren u suprotnom smeru kretanju kazaljke na časovniku između pravca ka γ tački i nebeskog meridijana, pa je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{HA} = \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_3(LST) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{RA}. \quad (2.77)$$

2.3.4. Horizontski sistem

Horizontski sistem (H) je definisan sledećim postavkama (Slika 2.14):

- ishodište koordinatnog sistema je heliocentar (centar Sunca);
- primarni pol (z-osa) je pravac ka zenitu opažača (vertikalna);
- primarna ravan je ravan opažačevog horizonta;
- primarna osa (x-osa) je pravac ka severnoj tački;
- y-osa sa x i z osom gradi levo orjentisan koordinatni sistem.



Slika 2.14: *Horizontski sistem*

Po načinu definisanja horizontski sistem je vrlo sličan lokalnom astronomskom sistemu, od koga se razlikuje po tome što je ishodište horizontskog sistema u heliocentru dok je kod lokalnog astronomskog sistema u topocentru.

U ovom sistemu vertikalni krug predstavlja veliki krug koji sadrži primarni pol i telo koje se posmatra, pa se tako položaj posmatranog tela definiše preko sledećih veličina:

- astronomski azimut A je ugao u ravni horizonta, koji se meri u smeru kazaljke na časovniku od severa do vertikalnog kruga;
- visina tela a je ugao između ravni horizonta i linije koja povezuje ishodište sistema sa posmatranim telom.

Jedinični vektor položaja nebeskog tela izražen u horizontskom sistemu glasi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_H = \begin{bmatrix} \cos a \cos A \\ \cos a \sin A \\ \sin a \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Veza između horizontskog sistema i mesnog ekvatorskog sistema se uspostavlja preko astronomske širine Φ , pa je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_H = \mathbf{R}_3(180^\circ) \mathbf{R}_2(90^\circ - \Phi) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{HA}. \quad (2.79)$$

2.4. Orbitalni sistem

Za potrebe definisanja položaja svih satelita koji kruže oko Zemlje koristi se orbitalni koordinatni sistem. Kretanje satelita oko Zemlje se događa pod uticajem centralnog polja sile teže, pri čemu dobijena putanja ima oblik elipse, sa silom privlačenja koja je uvek usmerena prema jednoj od žižnih tačaka te elipse.

Tako dobijena elipsa se naziva orbitalna elipsa, na kojoj satelit zauzima dva karakteristična položaja, i to prolazak kroz tačku u kojoj je najbliži Zemlji koja se zove perigej i kroz tačku kada je najdalji od Zemlje koja se zove apogej. Obe ove tačke leže na velikoj poluosi orbitalne elipse i to na apsidnoj liniji. Veličina i oblik orbitalne elipse se najčešće definišu preko velike poluose i prvog brojnog ekscentriciteta.

2.4.1. Orbitalni koordinatni sistem

Orbitalni koordinatni sistem (ORB) je definisan sledećim postavkama (Slika 2.15):

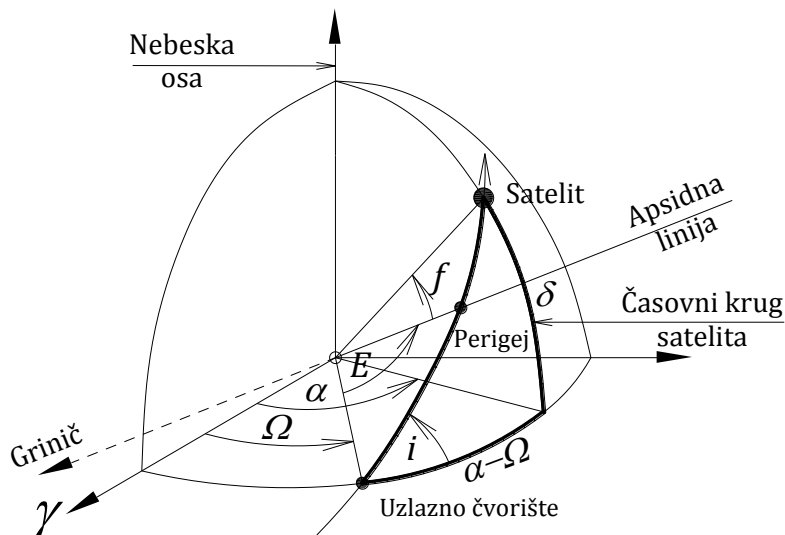
- ishodište koordinatnog sistema je u težištu Zemlje;
- primarna ravan je ravan orbitalne elipse;
- primarni pol (z-osa) je upravna na primarnu ravan;
- primarna osa (x-osa) je pravac apsidne linije;
- y-osa sa x i z osom gradi desno orjentisan koordinatni sistem.

Vektor položaja satelita izražen u orbitalnom koordinatnom sistemu je

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB} = r \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\cos E - e) \\ a(1 - e^2)^{1/2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

gde je:

- $z = 0$ zbog pretpostavke da se satelit nalazi u ravni orbite;
- f stvarna (prava) anomalija, odnosno, ugao između apsidne linije i linije koja spaja žižnu tačku i satelit;
- E ekscentrična anomalija, odnosno, ugao između apsidne linije i linije koja spaja geometrijski centar orbitalne elipse i tačku projekcije položaja satelita na kružnici čiji je poluprečnik jednak velikoj poluosi elipse.



Slika 2.15: Keplerovi elementi orbite

2.4.2. Transformacija iz orbitalnog u srednji terestrički sistem

U nebeskom sistemu ravan orbite je fiksna, odnosno, ne rotira zajedno sa Zemljom, pri čemu je ishodište kod orbitalnog i prividnog nebeskog sistema u težištu Zemlje. Na nebeskoj sferi se u preseku ravni orbite i nebeskog ekvatora dobijaju dva čvorišta, i to uzlazno čvorište, kao presek putanje satelita i ekvatora u njegovom prolasku iz pravca juga prema severu, i silazno čvorište, pri istom prolasku iz suprotnog pravca (Slika 2.15), pri čemu se definišu sledeće veličine:

- inklinacija i je ugao između nebeskog ekvatora i ravni orbite;
- argument perigeja ω je ugao u ravni orbite koji se meri između uzlaznog čvorišta i apsidne linije;
- rektascenzija uzlaznog čvorišta Ω je ugao u ravni nebeskog ekvatora koji se meri između tačke prolećne ravnodnevnice i uzlaznog čvorišta.

Transformacija koordinata iz orbitalnog sistema u prividni nebeski sistem je definisana jednačinom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AP} = \mathbf{R}_3(-\Omega) \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB}, \quad (2.81)$$

nakon čega sledi transformacija iz prividnog nebeskog u srednji terestrički sistem na osnovu

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \mathbf{R}_3(GAST) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AP}, \quad (2.82)$$

gde je (GAST) Griničko prividno zvezdano vreme, pa je konačno

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \mathbf{R}_3(GAST) \mathbf{R}_3(-\Omega) \mathbf{R}_1(-i) \mathbf{R}_3(-\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ORB}. \quad (2.83)$$

U cilju određivanja položaja satelita definiše se podnožna tačka satelita koja predstavlja trag putanje satelita na elipsoidu. Koordinate ova tačke su geodetska širina ϕ i dužina λ normale na elipsoid koja u isto vreme prolazi kroz satelit. Na osnovu koordinata satelita u srednjem terestričkom sistemu datih jednačinom

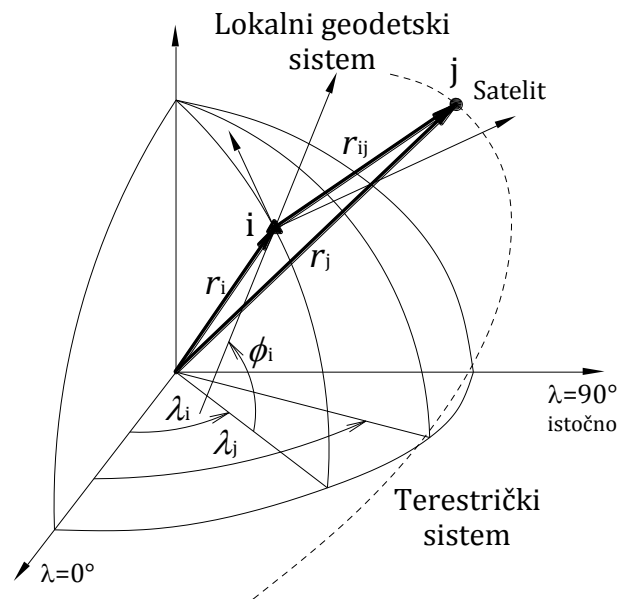
(2.83) i poznatih parametara referentnog elipsoida (a, b, x_0, y_0, z_0) , jednačinu (2.32)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{AT} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (N+h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \phi \sin \lambda \\ (N b^2 / a^2 + h) \sin \phi \end{bmatrix}$$

je iterativnim postupkom (poglavlje 2.2.2.5) moguće rešiti po (ϕ, λ, h) , čime su određene geodetske koordinate položaja satelita.

2.4.3. Topocentrične koordinate satelita

Topocentrične koordinate satelita j se određuju u lokalnom geodetskom sistemu, čije je ishodište stajna tačka i na Zemlji, sa koje je satelit opažan (Slika 2.16).



Slika 2.16: Topocentrične koordinate satelita

U odnosu na referentni elipsoid (a, b, x_0, y_0, z_0) stajna tačka i ima poznate geodetske koordinate (ϕ_i, λ_i, h_i) , pa se pravougle koordinate tačke i

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_G, \quad (2.84)$$

mogu izračunati na osnovu jednačine (2.31). Na osnovu određenih koordinata satelita j u srednjem terestričkom sistemu (2.83) mogu se odrediti geodetske koordinate satelita j kao

$$\mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}_{AT} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Udaljenost između satelita j i stajne tačke i na Zemlji je vektor koordinatnih razlika

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_G, \quad (2.86)$$

koje se na osnovu jednačine (2.66) mogu izraziti u lokalnom geodetskom sistemu kao

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{LG} = \mathbf{P}_2 \mathbf{R}_2(\phi - 90^\circ) \mathbf{R}_3(\lambda - 180^\circ) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_G. \quad (2.87)$$

3. Geodetski datum i datumska transformacija

Osnovno svojstvo geopodataka predstavlja njihova prostorna određenost, odnosno prostorni položaj definisan u odnosu na fizičku površ Zemlje. Problem koji se pri tome javlja jeste aproksimacija Zemlje koja se kao nebesko telo može posmatrati sa dva aspekta: fizičkog i matematičkog. Fizički model Zemlje predstavlja *geoid-nulta* ekvipotencionalna površ, koja je pogodna za definisanje visinskog datuma. Matematički modeli koji mogu biti korišćeni za aproksimaciju geoida su sfera (lopta) i sferoid (rotacioni elipsoid) i ovakva interpretacija omogućuje definisanje prostornog položaja tačaka. Danas je u svetu definisano nekoliko stotina elipsoida u zavisnosti od raspoložive tehnologije merenja, područja na planeti (npr. Severna i Južna Amerika, Evropa, Afrika), opsega kartiranja (država, kontinent ili ceo svet) i političkih pitanja (npr. Varšavski pakt NATO).

3.1. Definicija i realizacija geodetskog datuma

Geoprostorni podaci dobijeni iz različitih izvora moraju biti referencirani na isti geodetski datum i koordinatni sistem. Geodetski datum predstavlja skup parametara koji definišu koordinatni sistem, uključujući elipsoid i položaj centra elipsoida u odnosu na centar Zemlje i orijentaciju u odnosu na Zemljinu osu rotacije. Geodetski datum je bilo koja numerička ili geometrijska vrednost, ili skup takvih vrednosti, koje se koriste kao osnova za određivanje horizontalnih i vertikalnih pozicija tačaka koje su tako relativne u odnosu na određeni geodetski datum.

Horizontalni datum čini obrtni elipsoid koji aproksimira Zemljin oblik i skup konstanti i uslova koje određuju njegovu veličinu, položaj i orijentaciju. Ukoliko se geodetskim datumom aproksimira deo Zemljine površi on se naziva **lokalni datum** ili **regionalni datum**, a ukoliko se predstavlja čitava Zemlja onda se on naziva **globalni datum** ili **geocentrični datum**. *Lokalni geodetski datum* bira se tako da najbolje aproksimira neku konkretnu lokalnu fizičku površ Zemlje i obično se definiše sa sedam parametara:

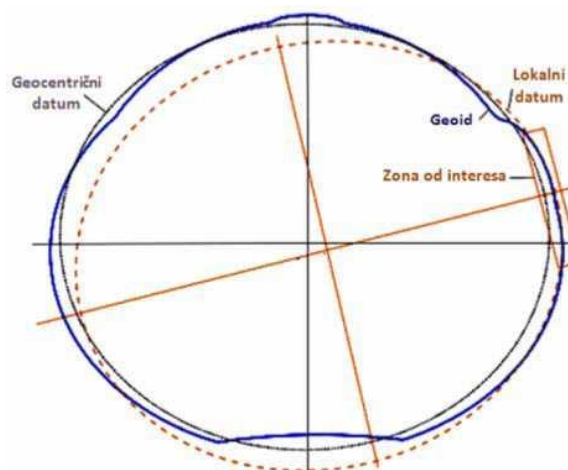
- dva elementa definišu geometriju elipsoida;
- geografskom širinom i dužinom ishodišne tačke;
- referentnim azimutom orijentacije;
- geoidnom visinom ishodišne tačke (obično se uzima srednja vrednost nivoa mora);
- pretpostavkom o paralelnosti male poluose elipsoida i ose Zemljine rotacije.

Tokom istorije mnoge države usvajale su i koristile lokalne elipsoide koji su najbolje odgovarali obliku Zemlje u tim oblastima. Na taj način je obezbeđena visoka lokalna tačnost, ali su praktični problemi nastajali kada je trebalo integrisati ili razmenjivati geoprostorne informacije između različitih oblasti. Sve do 1950. god. u Evropi je gotovo svaka država imala uspostavljen svoj geodetski sistem, odnosno vlastitu fundamentalnu tačku i orijentaciju sistema uz korišćenje različitih elipsoida.

Prvi zvaničan pokušaj objedinjavanja nacionalnih geodetskih datuma na tlu Evrope vezan je za uspostavljanje European Datum 1950-ED50, na Hejfordovom elipsoidu.

Nakon ED50 usledili su Evropski datumi iz 1979. god. (ED79) i 1987. godine (ED87) i European Terrestrial Reference System 1989-ETRS89. Usvajanje zajedničkog referentnog sistema olakšava ažuriranje i geometrijsko usklađivanje, pristup, razmenu i korišćenje geoprostornih podataka. GPS tehnologija (eng. *Global Positioning System*) obezbeđuje geodetske položaje tačaka u prostornom geocentričnom sistemu WGS84. Veštački sateliti u svom radu „prepoznaju“ Zemlju kao monolitno telo. S obzirom da se sateliti kreću po putanjama oko centra mase Zemlje, položaj zasnovan na takvim tehnologijama počiva na vektorima sa ishodištem u geocentru.

Iz tih razloga definisan je elipsoid Geodetic Reference System-GRS80, koji bi najpribližnije opisao Zemlju kao celinu, i kao takav bio osnova za formiranje geocentričnog datuma. Iako generalno, niti GRS80, niti WGS84 (eng. *World Geodetic System 1984*), nisu najpogodniji ni za jednu konkretnu oblast, globalna merenja u kombinaciji sa računarima, bazama podataka i softverima lako obezbeđuju pozicioniranje u odnosu na lokalne uslove.



Slika 3.1: Lokalni i geocentrični datum

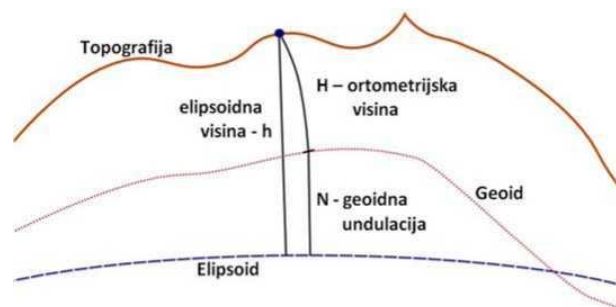
Vertikalni datum se definiše kao referentna površ u odnosu na koju se odnosi usvojeni sistem visina. Klasične geodetske metode koriste nivelman za određivanje visina u odnosu na srednji nivo mora (različit je u zavisnosti od države ili lokacije). Referentna površ (datum) visina dobijenih geometrijskim nivelmanom jeste površ geoida. Visina definisana u odnosu na nultu nivosku površ odnosno geoid naziva se **nadmorska** ili **ortometrijska visina** (H). Za računanje ortometrijskih visina, pored visinskih razlika duž putanje nivelanja, meri se i ubrzanje sile Zemljine teže.

Korišćenjem veštačkih Zemljinih satelita dobijen je veliki broj informacija o obliku Zemlje i njenom gravitacionom polju, što je značajno uticalo na definisanje površi geoida. Kada se želi uprostiti opis geoida često se kaže da se poklapa sa idealnom površi mora i okeana (idealna površ u smislu zanemarivanja uticaja, osim uticaja gravitacije, kao što su: morske struje, plimatski poremećaji, promene temperature i sl.). Takvu definiciju geoida prvi je dao J. B. Listing još 1872. godine. Međutim, navedene pojave realno utiču na srednji nivo mora u odnosu na koju površ geoida varira od 1 do 2 m (Sickle, 2001), tako da jedna takva definicija više nije realno održiva.

Visine koje se dobijaju GPS merenjima odnose se na površ elipsoida Geodetic Reference System, GRS80 nazivaju se **elipsoidnim visinama** (h).

Razlog za teškoće u prelazu iz geometrijskih-elipsoidnih u ortometrijske visine

leži u neregularnom obliku geoida. Razlike ortometrijskih i elipsoidnih visina koje se odnose na geocentrični elipsoid GRS80 iznose od +85 m do -106 m. U Republici Srbiji, ova razlika iznosi oko +40 m (razlike su pozitivne ukoliko je geoid iznad elipsoida). Razlika površi elipsoida i geoida naziva se *geoidna undulacija* (N) ili *geoidalna visina* (eng. geoidal height).



Slika 3.2: Određivanje ortometrijskih visina

3.1.1. Klasični terestrički geodetski datum

Klasični terestrički datumi predstavljaju lokalne geodetske datume uvedene sa ciljem da se matematičkim modelom (referentnim elipsoidom) što je moguće bolje aproksimira oblik Zemlje – geoid na jednom njenom delu. U direktnoj vezi sa ovako definisanim geodetskim datumom je dosadašnje klasično definisanje geodetskog referentnog sistema na osnovu astronomije i geodezije (astrogeodetska metoda).

Osnovne karakteristike klasičnih terestričkih datuma su:

- osa rotacije elipsoida je paralelna sa osom rotacije Zemlje;
- postoji fundamentalna tačka P_0 u kojoj su poznati odklon vertikalne ϑ i geoidna undulacija N , pomoću kojih je definisan položaj elipsoida u odnosu na Zemlju;
- oblik i veličinu obrtnog elipsoida definišu velika i mala poluosa (a , b) ili velika poluosa i spljoštenost (a , μ).

Stari položajni datum za područje današnje Srbije je određen na osnovu radova Vojno-geografskog instituta nekadašnje Austro-Ugarske monarhije koji datiraju iz druge polovine 18. veka. Kao matematički model za Zemlju odabran je tada Besselov elipsoid iz 1841. god. Od 1924. godine, u Srbiji je u upotrebi Besselov elipsoid kao referentni elipsoid, odnosno dimenzije dvoosnog obrtnog elipsoida koji je merenjima od 1831. godine do 1838. godine odredio nemački naučnik

Vilhelm Fridrih Besel. Iste, 1924. godine, Gaus-Kriggerova konformna poprečna cilindrična projekcija je usvojena kao državna projekcija u Srbiji. U proteklom periodu se pokazalo da realizacija ovog datuma nema dovoljnu tačnost i da se na državnom nivou pojavljuje nehomogenost geodetske mreže u intervalu od 1 do 2 metra.

Klasični vertikalni datumi definisani su na sledeći način:

- za vertikalni datum usvojen je srednji nivo mora (MSL);
- visina tačke definisana je geopotencijalnom kotom ili geopotencijalnom jedinicom, a na osnovu geopotencijalnih kota izvodile su se dinamičke, ortometrijske, normalne i sferoidne visine.

Nivelmanske mreže kreirane su na osnovu sledećih osnovnih postavki: srednji nivo mora (MSL) određen je korišćenjem mareografa, tačke mreže (reperi) stabilizovani su u geološki stabilnom terenu na međusobnom rastojanju od 0,5 do 2 km, razlika potencijala određena je korišćenjem rezultata merenja visinskih razlika i rezultata merenja ubrzanja Zemljine teže, reperi su povezani u nivelmanske linije, a povezivanjem više nivelmanskih linija formirani su poligoni. Navedene postavke su primenjene u svim državama Evrope a načini uspostavljanja i dizajn mreža zavisili su od geografskog položaja država, kao i od tehnološkog nivoa u trenutku kreiranja samih mreža.

3.1.2. Savremeni satelitski geodetski datum

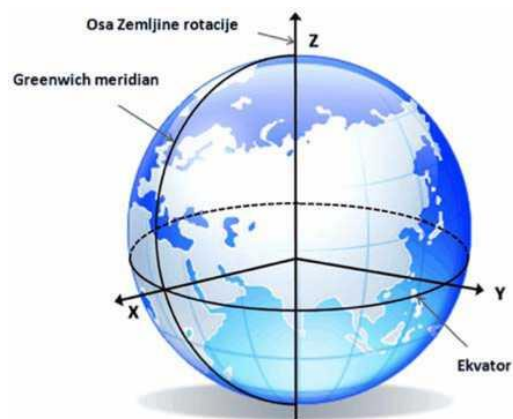
Kako se GPS merenjima određuju koordinate tačaka na Zemlji, to znači da se za njihov prikaz mora koristiti koordinatni sistem vezan za Zemlju koji je definisan u odnosu na neki geodetski datum. Takave sisteme definisane i odnosu na savremene satelitske geodetske datume predstavljaju:

- a) Internacionalni terestički referentni sistem (ITRS);
- b) Svetski geodetski sistem 1984 (WGS84);
- c) Evropski referentni terestički sistem 1989 (ETRS89);
- d) Evropski vertikalni referentni sistem (EVRS).

a) *Internacionalni terestčki referentni sistem (ITRS)*

ITRS obrazuje set pravila i konvencija koja su, zajedno sa modelovanjem, potrebna za definisanje početne tačke, razmere, orijentacije i vremenske evolucije CTRS (Conventional Terrestrial Reference System). Prema Rezoluciji broj 2. International Union of Geodesy and Geophysics- IUGG, usvojenoj u Beču 1991. godine, ITRS predstavlja skup tačaka sa njihovim 3D koordinatama koje realizuju idealan referentni sistem. ITRS je realizovan korišćenjem International Terrestrial Reference Frame ITRF97, baziranog na prognoznim koordinatama i brzinama grupe stanica koje su opažane korišćenjem različitih metoda: GPS (Global Positioning System), VLBI (Very Long Baseline Radio Interferometry), LLR (Lunar Laser Ranging), SLR (Satellite Laser Ranging) i DORIS (Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite). ITRS se može povezati na International Celestial Reference System-ICRS, korišćenjem IERS Zemaljskih orijentacionih parametara EOP (eng. *Earth Orientation Parameters*). Osnovne karakteristike ITRS su:

- Koordinatni početak ITRS poklapa se sa centrom masa Zemlje (geocentar);
- X-osa, polazi od geocentra i prolazi kroz tačku preseka početnog Griničkog meridijana i ekvatora;
- Y-osa, polazi od geocentra i leži u ravni srednjeg položaja ekvatora i upravna je na X-osu;
- Z-osa, je usmerena u pravcu srednjeg položaja ose rotacije Zemlje defini- sane u periodu od 1900. do 1905. godine.



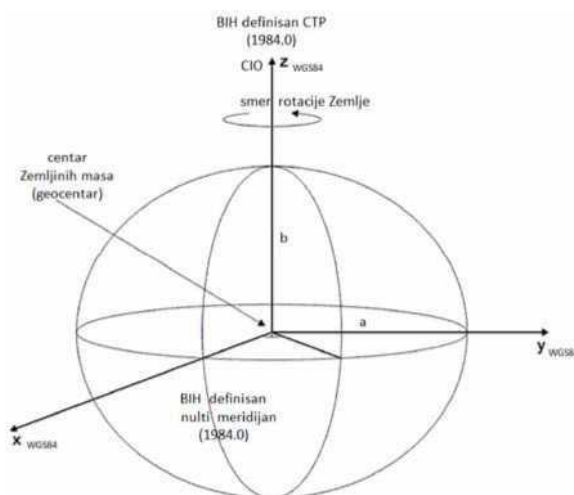
Slika 3.3: *Internacionalni terestčki referentni sistem (ITRS)*

b) Svetski geodetski sistem 1984 (WGS84)

Globalni geocentrični sistem zasnovan je na elipsoidu koji je 1979. prihvaćen od strane IUGG i nazvan Geodetski referentni sistem GRS80 (eng. *Geodetic Reference System 1980*). Uz neznatne korekcije GRS80 je 1984. godine preinačen u Svetski geodetski sistem WGS84 (eng. *World Geodetic System 1984*). WGS84 je naziv elipsoida koji se koristi kao referentni koordinatni sistem. Nastao je modifikovanjem Pomorskog navigacionog satelitskog sistema (NNSS) ili TRANSIT i Doplerovog referentnog okvira (NSWC 9Z-2) u koordinatnom početku i razmeri, i rotiranjem do poklapanja referentnog meridijana sa BIH nultim meridijanom.

WGS84 je geocentrični koordinatni sistem čiji je centar u središtu mase Zemlje, dok su koordinatne ose definisane tako da je:

- Z osa usmerena prema srednjem položaju Severnog pola CTP (eng. Conventional Terrestrial Pole) od 1900. do 1905. za polarno kretanje;
- X osa u preseku ravni nultog referentnog meridijana koordinatnog sistema WGS84 i ravni ekvatora;
- Y osa 90° istočno od X ose, formira desno orijentisan, geocentričan i geofiksiran ortogonalni koordinatni sistem, meren u ravni ekvatora.



Slika 3.4: Svetski geodetski sistem 1984 (WGS84)

c) Evropski referentni terestički sistem 1989 (ETRS89)

Godine 1987. International Association of Geodesy-IAG i CERCO (fran. *Comite Europeen des Responsables de la Cartographie Officielle*) odlučili su da razviju novi European REference Frame- EUREF, baziran na GPS tehnologiji. To je trebao da bude precizan i moderan sistem, kao WGS84 sistem, koji će omogućiti da se za

međunarodne digitalne kartografske podatke kao izvor ne koriste brojni nacionalni datumi širom Evrope. Pošto je krajem 80-tih godina prošlog veka ITRS (eng. *International Terrestrial Reference System*) bio najprecizniji globalni referentni sistem koji je bio dostupan, EUREF je odlučio da bazira svoj referentni sistem na ITRS-u, kojeg održava Međunarodni servis za Zemljinu rotaciju i referentne sisteme IERS (eng. *International Earth Rotation and Reference Systems Service*). Međutim, u globalnom ITRS-u, tektonski pokreti kontinentalnih ploča uzrokuju pomeranja evropskih stanica, reda veličine oko 2,5 cm godišnje. Zbog toga je, na simpozijumu u Firenci 1989. godine EUREF oformila Evropski referentni terestrički sistem ETRS89 (eng. *European Terrestrial Reference System 1989*).

ETRS89 je geocentrični terestrički referentni sistem sa početkom u centru mase Zemlje sa orijentacijom odnosno razmerom koordinatnih osa koji se podudaraju sa ITRS za epohu 1989. godine. ETRS89 je regionalni sistem koji pokriva područje Evrope i po definiciji je čvrsto vezan za Evropsku kontinentalnu masu sa kojom učestvuje u litosfernoj tektonici. Iz tog razloga su koordinate tačaka u odnosu na ETRS89 principijelno vremenski nepromenljive. Strukturu ETRF89 mreže čine: permanentne GPS stanice, operativni centri, lokalni i regionalni centri za obradu podataka, lokalni i regionalni centri za analizu i koordinator mreže.

U Evropi postoje dve vrste permanentnih stanica, i to:

- IGS stanice uključene u IGS (International GPS Geodynamics Service) mrežu;
- EUREF stanice (EUREF Permanent Tracking Network) su GPS tačke koje su deo Evropskog IGS, obuhvataju oko 200 GPS stalnih stanica, oko 16 centara za analizu kao i Centralni Biro EPN (eng. *EUREF Permanent Network*).

d) Evropski vertikalni referentni sistem (EVRS)

Evropski vertikalni referentni sistem EVRS (eng. *European Vertical Reference System*) nastao je na osnovu zahteva Evropskog kartografskog komiteta CERCO (fran. *Comite Europeen des Responsables de la Cartographie Officielle*) da se definiše i realizuje jedan vertikalni sistem na decimetarskom nivou (0,1 m) za celu

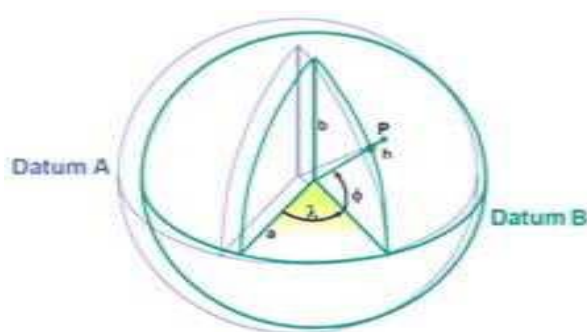
teritoriju Evrope. Za realizaciju datuma usvojen je nulti nivo kroz Normalni Amsterdamski Reper (eng. *Normal Amsterdams Peil, NAP*) tako da je geopotencijalna kota za NAP jednaka nuli. Ovakva realizacija datuma ima oznaku EVRF2000 (eng. *European Vertical Reference Frame 2000*). Često se koristi i oznaka EVRS2000, a za sve ostale relevantne parametre koristi se Svetski referentni geodetski sistem GRS80 (eng. *Geodetic Reference System 1980*).

Usvajanjem ovog sistema formiran je moderan integrisani referentni sistem Evrope koji povezuje GPS koordinate, fizički definisane visine i visine iznad mora. Unutar sistema visine se definišu iz geopotencijalnih kota u sistemu normalnih visina (Rezolucija 2. Ankara, 1996). Navedena realizacija datuma promenjena je 2007. godine uvođenjem dodatnih datumskih tačaka pri čemu se menja i definicija i realizacija sistema (sada EVRS2007 i EVRF2007).

3.1.3. Potreba za datumskom transformacijom

Jedna od osnovnih karakteristika prostornih podataka jeste prostorna veza (eng. *Spatial reference*). Ukoliko su za prostorne entitete vezani ovi podaci, moguće je kombinovati ih čak iako su u različitim koordinatnim sistemima ili projekcijama. Najčešće korišćene koordinate tačaka su one koje se odnose na neki lokalni (referenc) elipsoid, koji definiše datum lokalnog (negeocentričnog) sistema npr. državni koordinatni sistem ili dvodimenzionalne koordinate u ravni kartografske projekcije.

Ukoliko je potrebno tačku iz jednog koordinatnog sistema prikazati u drugom koordinatnom sistemu potrebno je izvršiti datumsku transformaciju. Datumaska transformacija konvertuje koordinate tačke date u koordinatnom sistemu Datuma A u koordinate u koordinatnom sistemu Datuma B (Slika 3.5).

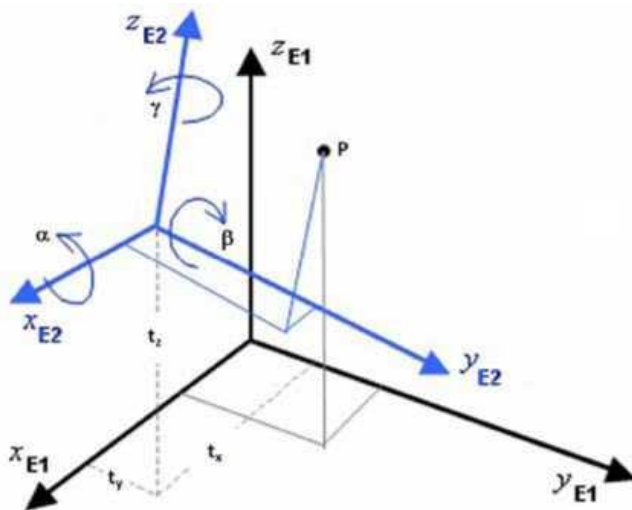


Slika 3.5: Datumaska transformacija

Da bi se ova dva prostorna koordinatna sistema (E1 i E2) poklopila potrebno je jedan od njih (E2) rotirati oko sve tri ose, promeniti mu razmeru i pomeriti ga u prostoru (Slika 3.6). Skup parametara koji definišu datumsku transformaciju nazivaju se transformacioni parametri. Za transformaciju je potrebno poznavati sedam parametara (3 translacije, 3 rotacije i parametar razmere), pa se naziva sedmoparametarska datumska transformacija ili Helmertova transformacija.

Ako dve tačke iz dva različita koordinatna sistema imaju pridruženu prostornu referencu, odnosno ako su poznati projekcija sa svojim parametrima, elipsoid na koji se projektuje, kao i odnos prema referentnom koordinatnom sistemu, moguće je zajedničko korišćenje podataka.

U Gauss-Krigerovoj projekciji koordinate tačke se dobijaju projekcijom sekućeg poprečnog cilindra na Bessel 1841 elipsoid, dok se koordinate merene GPS-om odnose na WGS84 elipsoid. Pored toga što Bessel 1841 elipsoid i WGS84 imaju različite parametre elipsoida (velika i mala poluosa i spljoštenost), razlikuju se i koordinatni sistemi u kojima se oni nalaze.



Slika 3.6: Sedmoparametarska datumska transformacija

Parametri datumske transformacije omogućuju direktan prelaz sa WGS84 na Besselov elipsoid, odnosno konvertovanje koordinate tačke date u WGS84 u koordinate na Bessel 1841 elipsoidu (Gaus-Kruger-ov koordinatni sistem).

Za potrebe prikazivanja tačaka na kartama koje su u nekoj projekciji ili upoređivanja podataka sa podacima koji su dati u drugom koordinatnom sistemu, potrebno je definisati: parametre datumske transformacije (ukoliko datum koordinatnog sistema karte nije WGS84), parametre projekcije i model geoida.

3.2. Važniji transformacioni modeli

U postupku transformacije koordinata tačaka iz jednog u neki drugi koordinatni sistem moguće je primeniti različite transformacione modele. U odnosu na veličinu područja na kome se primenjuju transformacioni modeli se mogu svrstati u jednu od sledećih grupa:

- **Globalni modeli.** Ova grupa odnosi se na modele koji imaju jedinstvenu strukturu i broj parametara na celoj državnoj teritoriji.
- **Lokalni modeli.** Ovi modeli podrazumevaju jedinstvenu strukturu i broj parametara na ograničenim delovima državne teritorije i u ovom radu se nazivaju konačnim elementima. Lokalni modeli po konačnim elementima mogu se posmatrati izolovano, ili se između njih mogu postavljati matematički uslovi kontinuiteta.

U okviru globalne i lokalne grupe modela moguće je primeniti neke od sledećih transformacionih postupaka:

- Familija opšte afine transformacije,
- Familija Helmertove transformacije sličnosti,
- Polinomske transformacije,
- Opšta aritmetička sredina,
- Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata.

3.2.1. Familija afine transformacije

Familiji affine transformacije pripadaju sledeći transformacioni modeli:

- a) Afina transformacija – 12 parametara,
- b) Afina transformacija – 9 parametara,
- c) Afina transformacija – 8 parametara.

a) Afina transformacija – 12 parametara

Afina transformacija sa 12 parametara predstavlja najopštiji odnos dva pravolinijska trodimenzionalna sistema. Njena glavna karakteristika je što se razmera ne menja sa lokacijom i konstantna je u jednom istom pravcu, ali se zato menja sa promenom pravca. Posledica ovih osobina je da se prave linije preslikavaju u prave linije, a da paralelne linije ostaju paralelne.

Isto tako ostaju očuvani odnosi odsečaka na istoj pravoj.

Matematička formulacija opšte afine transformacije glasi:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{t} + \mathbf{R}\mathbf{x}_1 \quad (3.1)$$

pri čemu su \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 vektori koordinata u jednom i drugom sistemu, \mathbf{t} je vektor translacija, a \mathbf{R} je transformaciona matrica. Članovi vektora translacija definišu međusobni položaj koordinatnih početaka dva referentna sistema, dok ukupno 9 članova transformacione matrice \mathbf{R} opisuju razlike u razmeri duž koordinatnih osa, orijentaciji koordinatnih osa i uglova koje koordinatne ose međusobno zaklapaju. Prema tome, opštom afinom transformacijom se opisuju odnosi između dva sistema koji su pravolinijski, ali ne moraju biti pravougli.

S obzirom na ukupno 12 parametara opšte afine transformacije, 4 zajedničke tačke su dovoljne za njihovo jedinstveno određivanje. Više zajedničkih tačaka zahteva da se parametri ocenjuju po metodi najmanjih kvadrata.

b) Afina transformacija – 9 parametara

Kod ove verzije afine transformacije, članovi transformacione matrice \mathbf{R} više nisu međusobno nezavisni jer je matrica simetrična. To znači da se radi o pravouglim pravolinijskim sistemima. Od ukupno 9 parametara transformacije:

- 3 se odnose na translacije,
- 3 se odnose na rotacije oko odgovarajućih koordinatnih osa,
- 3 se odnose na razmere duž odgovarajućih koordinatnih osa.

Osnovna karakteristika ove transformacije su različite razmere duž pojedinih koordinatnih osa. S obzirom na 9 parametara ove verzije afine transformacije, 3 zajedničke tačke su dovoljne za njihovo jedinstveno određivanje. Više zajedničkih tačaka zahteva da se parametri ocenjuju po metodi najmanjih kvadrata.

c) Afina transformacija – 8 parametara

Kod osmoparametarske afine transformacije parametre predstavljaju:

- 3 parametra translacije,
- 3 parametra rotacije oko odgovarajućih koordinatnih osa,
- 2 parametra razmere.

Jedan parametar razmere odnosi se na razliku razmere duž jedne koordinatne ose. Drugi parametar razmere zajednički je za preostale dve koordinatne ose.

S obzirom na ukupno 8 parametara, i kod ove transformacije su neophodne najmanje 3 zajedničke tačke za njihovo određivanje. Veći broj zajedničkih tačaka zahteva ocenjivanje parametara transformacije po metodi najmanjih kvadrata.

Pre određivanja parametara osmoparametarske afine transformacije koordinate tačaka moraju se transformisati u topocentrični koordinatni sistem čije su ose orijentisane u pravcu sever-jug (N), pravcu istok-zapad (E) i vertikalnom pravcu (U), jer se jedino u ovakvom koordinatnom sistemu mogu primeniti uslovi jednakosti razmere po horizontalnim koordinatnim osama N i E.

3.2.2. Familija Helmertove transformacije sličnosti

Familiji Helmertove transformacije sličnosti pripadaju sledeći transformacioni modeli:

- a) Helmertova transformacija – 7 parametara,
- b) Helmertova transformacija – 6 parametara,
- c) Helmertova transformacija – 5 ili 4 parametara,
- d) Helmertova transformacija – 3 parametara.

a) Helmertova transformacija – 7 parametara

Familija Helmertove transformacije je najpoznatija vrsta postupaka kojima se masovno modeliraju datumske razlike dva referentna sistema. Naziva se još i transformacijom sličnosti zbog toga što preslikavanjem ostaju u potpunosti očuvani oblici figura, iako same figure mogu tom prilikom u prostoru promeniti svoju lokaciju, orijentaciju ili razmeru.

Sedmoparametarska Helmertova transformacija sličnosti sastoji se od sledećih parametara:

- 3 parametra translacije,
- 3 parametra rotacije oko odgovarajućih koordinatnih osa,
- 1 parametra razmere koji je zajednički za sve tri koordinatne ose.

Odatle sledi da je za određivanje parametara transformacije ponovo neophodan minimum od tri zajedničke tačke koje ne leže na istoj pravoj. Veći broj zajedničkih tačaka zahteva ocenjivanje parametara po metodi najmanjih kvadrata.

Kada su orijentacije koordinatnih osa dva referentna sistema definisane tako da se približno poklapaju i kada je veličina odgovarajućih uglova rotacije mnogo manja od jednog lučnog minuta, moguća je aproksimacija trigonometrijskih funkcija. Uz pretpostavku da je i razlika u razmerama referentnih sistema mala mogu se zanemariti kvadratni članovi trigonometrijskih funkcija. Tada se funkcionalni model Helmertove sedmoparametarske transformacije sličnosti može napisati u razvijenom obliku:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + (1 + dm) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1. \quad (3.2)$$

Ukoliko se za ocenjivanje parametara koriste koordinate tačaka u punom iznosu radi se o modelu Burša-Wolf dok se svođenjem koordinata tačaka na težište dobija model Molodenski-Badekaš. Pri tome su parametri rotacija i razmere identični kod oba modela, ali se mora voditi računa o interpretaciji parametara translacije.

b) Helmertova transformacija - 6 parametara

Tradicionalna sedmoparametarska Helmertova transformacija može se pojavljivati u različitim modifikacijama. Varijanta šestoparametarske Helmertove transformacije sličnosti obuhvata sledeće parametre:

- 3 parametra translacije,
- 3 parametra rotacije oko odgovarajućih koordinatnih osa.

Ova varijanta Helmertovog transformacionog modela očigledno ne podrazumeva razliku u razmeri, i u tom smislu je identična sa strogim matematičkim opisom odnosa dva trodimenzionalna pravougla pravolinijska koordinatna sistema. Funkcionalni model identičan je sa sedmoparametarskim slučajem, osim što nema multiplikacionog člana matrice ukupne rotacije.

S obzirom na ukupno 6 nepoznatih parametara, kod ove transformacije su neophodne najmanje 2 zajedničke tačke za njihovo određivanje. Veći broj zajedničkih tačaka zahteva ocenjivanje parametara transformacije po metodi najmanjih kvadrata.

Šestoparameterska Helmertova transformacija sličnosti ne mora biti ograničena na navedene parametre, već može biti rezultat statističkih testova koji pokazuju da jedan od parametara sedmoparameterskog Helmertovog modela nije statistički signifikantan.

c) Helmertova transformacija – 5 ili 4 parametara

Četvoroparameterska varijanta Helmertove transformacije obuhvata u svakom slučaju 3 parametra translacije, dok četvrti parametar može biti jedan od sledećih:

- parametar razmere,
- parametar rotacije oko jedne od koordinatnih osa.

Ukoliko se modeliraju oba parametra, ili se usvoje parametri rotacija oko bilo koje dve koordinatne ose, dobija se model petoparameterske Helmertove transformacije sličnosti. Model transformacije sa 5 parametara mogu predstavljati:

- 3 parametra translacije,
- 1 parametar rotacije oko Z koordinatne ose,
- 1 parametar razmere.

Za oba modela neophodne su najmanje dve zajedničke tačke za određivanje parametara. Više zajedničkih tačaka zahteva ocenjivanje parametara po metodi najmanjih kvadrata.

Takođe petoparameterska i četvoroparameterska Helmertova transformacija sličnosti ne moraju biti ograničene na navedene parametre, već mogu biti rezultat statističkih testova koji pokazuju da dva ili tri parametra sedmoparameterskog Helmertovog modela nisu statistički signifikantni.

d) Helmertova transformacija – 3 parametara

Poslednji predstavnik familije Helmertovih transformacija sličnosti je troparameterski model koji obuhvata samo tri parametra translacija. Ovaj model ima sledeće prednosti:

- veoma je jednostavan jer ne zahteva nikakvu linearizaciju,
- može biti statistički adekvatan, ali samo u slučajevima kada se radi o izuzetno malom delu Zemljine površi.

Iako je to malo verovatno, treba napomenuti da troparameterska Helmertova transformacija sličnosti može biti rezultat statističkih testova koji pokazuju da

četiri parametra sedmoparametarskog Helmertovog modela nisu statistički signifikantni.

3.2.3. Polinomska transformacija

Klasa polinomske transformacije veoma je pogodna za modeliranje datumskih razlika dva referentna sistema jer su polinomi praktično najjednostavnije matematičke strukture. S obzirom na činjenicu da je osnovni cilj transformacionog postupka dobijanje transformisanih horizontalnih položaja tačaka, primarne veličine koje se modeliraju predstavljaju razlike horizontalnih koordinata zajedničkih tačaka u dva referentna sistema. Za horizontalne koordinate mogu se usvojiti geografske koordinate (geografska širina φ i geografska dužina λ), tako da su u njihovim razlikama $\Delta\varphi$ i $\Delta\lambda$ sadržane:

- datumske razlike važećeg i novog referentnog sistema (translacije, rotacije i razmera),
- razlike u velikim poluosama i spljoštenostima elipsoida koji su pridruženi važećem i novom referentnom sistemu (kao što su Beselov elipsoid odnosno elipsoid GRS80).

Alternativno se umesto geografskih koordinata tačaka mogu koristiti njihove koordinate u projekciji. U svakom slučaju, polinomskom transformacijom se razlike horizontalnih koordinata modeliraju u vidu polinoma po horizontalnom položaju:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} a_{ij} \varphi^i \lambda^j = a_{00} + a_{01}\lambda + \dots + a_{0N}\lambda^N + a_{10}\varphi + a_{11}\varphi\lambda + \dots + a_{1N-1}\varphi\lambda^{N-1} + \dots + a_{N0}\varphi^N \quad (3.3)$$

$$\Delta\lambda = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^{N-i} b_{ij} \varphi^i \lambda^j = b_{00} + b_{01}\lambda + \dots + b_{0N}\lambda^N + b_{10}\varphi + b_{11}\varphi\lambda + \dots + b_{1N-1}\varphi\lambda^{N-1} + \dots + b_{N0}\varphi^N \quad (3.4)$$

pri čemu a_{ij} i b_{ij} predstavljaju nepoznate polinomske koeficijente, dok je N stepen polinoma. Ukupan broj nepoznatih polinomske koeficijenata po jednoj koordinatnoj osi iznosi $(N+1)(N+2)/2$, što znači da je za njihovo određivanje neophodno najmanje isto toliko zajedničkih tačaka.

Veći broj zajedničkih tačaka zahteva ocenjivanje nepoznatih polinomskih koeficijenata po metodi najmanjih kvadrata.

Upotreba polinomske transformacije podrazumeva izbor adekvatnog stepena polinoma. Ovaj izbor povezan je sa dve principijelne teškoće:

- Ako je stepen polinoma suviše nizak, polinom neće biti u stanju da u dovoljnoj meri modelira razlike horizontalnih koordinata tačaka.
- Ako je stepen polinoma suviše visok, do izražaja će doći oscilatorna svojstva polinoma, što interpolaciju razlika horizontalnih koordinata tačaka može učiniti sasvim besmislenom.

Zbog toga se upotreba polinomske interpolacije uglavnom svodi na modeliranje trenda u podacima pomoću polinoma nižeg stepena (obično stepena 1, 2 ili 3). Na primer, modeliranje razlika horizontalnih koordinata zajedničkih tačaka u dva sistema polinomom drugog stepena ima sledeći izgled:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= a_{00} + a_{01}\lambda + a_{02}\lambda^2 + a_{10}\varphi + a_{11}\varphi\lambda + a_{20}\varphi^2 \\ \Delta\lambda &= b_{00} + b_{01}\lambda + b_{02}\lambda^2 + b_{10}\varphi + b_{11}\varphi\lambda + b_{20}\varphi^2\end{aligned}\tag{3.5}$$

Polinomska interpolacija polinomom nižeg stepena ne može da osigura adekvatan kvalitet na radilištima koja predstavljaju velike teritorije, ali polinomi mogu predstavljati bazne funkcije pri modeliranju razlika koordinata po dovoljno malim konačnim elementima.

3.2.4. Opšta aritmetička sredina

Principijelno govoreći, razlike horizontalnih koordinata zajedničkih tačaka u dva sistema ne moraju se aproksimirati nekim modelom da bi mogle da se prognoziraju na proizvoljnoj lokaciji. Njihova interpolacija može se direktno izvesti ako se prepostavi da prognozirane vrednosti predstavljaju opštu aritmetičku sredinu okolnih razlika horizontalnih koordinata, pri čemu se težine određuju kao recipročne vrednosti stepena rastojanja. Na primer:

$$\Delta\varphi_p = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} \sum_{i=1}^n p_i \Delta\varphi_i$$

$$\Delta\lambda_p = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i} \sum_{i=1}^n p_i \Delta\lambda_i$$
(3.6)

gde veličine P predstavljaju težine koje se računaju kao:

$$p_i = \frac{1}{d_{Pi}^q} = \frac{1}{\left(\sqrt{\Delta\varphi_{Pi}^2 + \Delta\lambda_{Pi}^2}\right)^q}$$
(3.7)

Na taj način na vrednost prognozirane razlike horizontalnih koordinata najveći uticaj imaju podaci koji su najbliži prognoziranoj lokaciji. Iskustvo pokazuje da se vrednost stepena q nalazi između 1 i 2. Poslednji izbor kod ove metode predstavlja poluprečnik prostora oko prognozirane lokacije na kojem će se koristiti postojeći podaci. U tom slučaju nema jasnog i oštrog opredeljenja, osim zahteva da u okolini prognozirane lokacije bude dovoljno postojećih podataka približno ravnomerno raspoređenih u svim pravcima.

3.2.5. Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata

S obzirom na činjenicu da su razlike horizontalnih koordinata zajedničkih tačaka u suštini rezultat obrade izvršenih terestričkih i GPS merenja, najpravičniji pristup njihovom modeliranju sastoji se u tome da se uzmu u obzir njihova stohastička svojstva. Prognoze razlika horizontalnih koordinata sa osobinom minimalne disperzije dobijaju se primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata.

Kolokativni metod podrazumeva da se razlike horizontalnih koordinata (na primer po geografskoj širini φ) mogu modelirati u obliku:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{TREND} + \Delta\varphi_s + \Delta\varphi_\varepsilon$$
(3.8)

Prvi član ovog izraza predstavlja trend površ koja se, na primer, može izraziti polinomom drugog stepena po položaju:

$$\Delta\varphi_{TREND} = a_{00} + a_{01}\lambda + a_{02}\lambda^2 + a_{10}\varphi + a_{11}\varphi\lambda + a_{20}\varphi^2$$
(3.9)

i on opisuje opšti oblik ponašanja podataka.

Drugi član je takozvani signal, odnosno korelativna stohastička veličina koja se kolokacijom može prognozirati u proizvoljnoj lokaciji, dok treći član modelira slučajne uticaje sadržane u podacima, koji su po prirodi stvari nepredvidivi i po znaku i po veličini.

Pošto se koeficijenti trend polinoma mogu nezavisno odrediti po metodi najmanjih kvadrata, glavni objekat kolokacije predstavljaju signali. Oni su međusobno statistički zavisne veličine, pri čemu kovarijacija između bilo koja dva člana jednog para, u slučaju da važi pretpostavka o homogenosti i izotropnosti, zavisi jedino od njihovog međurastojanja. To znači da se kao glavni zadatak u primeni kolokacije pojavljuje određivanje teorijske kovarijacione funkcije:

$$c = c(d). \quad (3.10)$$

Teorijska kovarijaciona funkcija dobija se modeliranjem empirijski sračunatih diskretnih vrednosti kovarijacione funkcije za različita međusobna rastojanja postojećih parova podataka. Na taj način je moguće sračunati kovarijaciju za bilo koje dve lokacije na ispitivanom području.

Oblik teorijske kovarijacione funkcije potrebno je unapred usvojiti. Jedan od jednostavnijih eksponencijalnih modela je:

$$c_{ij} = \sigma^2 e^{-d_{ij}/D} \quad (3.11)$$

u kojem D označava takozvanu korelacionu dužinu, odnosno rastojanje na kojem se vrednost disperzije σ^2 smanjuje za faktor $1/e$. Kada se pomoću modelirane kovarijacione funkcije odrede članovi matrice \mathbf{C}_{ss} i vektora \mathbf{c}_{sp} i formira vektor razlika horizontalnih koordinata zajedničkih tačaka \mathbf{s} , formalizam metode najmanjih kvadrata rezultira prognozom signala s_p na proizvoljnoj lokaciji po izrazu:

$$s_p = \mathbf{c}_{sp} \mathbf{C}_{ss}^{-1} \mathbf{s}. \quad (3.12)$$

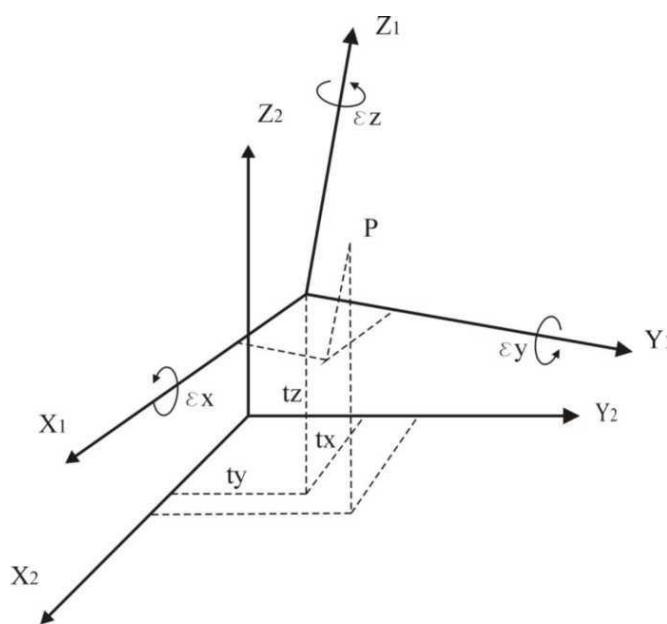
Ova prognoza je u statističkom smislu optimalna jer ima najmanju moguću varijansu. Kada se na nju doda sračunata vrednost trend polinoma za istu lokaciju, dobija se prognozirana razlika horizontalnih koordinata zajedničkih tačaka u punom iznosu.

Jedini ozbiljniji nedostatak kolokativne metode je numeričke prirode jer se za računanje mora sračunati inverzija matrice C_{ss} koja sa svoje strane ima dimenzije onolike koliki je broj podataka koji stoje na raspolaganju. U literaturi se međutim nalazi čitav niz praktičnih postupaka kojima se ovaj nedostatak može prevazići.

3.3. Koncept Helmertove transformacije sličnosti

3.3.1. Transformacija sličnosti u pravouglim koordinatama

Transformacija koordinata proizvoljno odabrane tačke P (X, Y, Z) iz jednog sistema (1) u drugi (2) vrši se po pravilu primenom takozvane sedmoparametarske transformacije sličnosti (Slika 3.7). Ovakvo preslikavanje naziva se transformacijom sličnosti ili Helmertovom transformacijom zbog osobine da figura definisana skupom tačaka nakon transformacije zadržava svoj oblik.



Slika 3.7: Transformacija u trodimenzionalnom prostoru

Sedmoparametarska transformacija sličnosti sprovodi se u trodimenzionalnom prostoru po sledećem izrazu:

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + (1 + dm) \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

ili u matričnom obliku:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t} + (1 + dm) \mathbf{R} \mathbf{X}_1, \quad (3.14)$$

pri čemu upotrebljene oznake imaju sledeća značenja:

- \mathbf{X}_2 - vektor koordinata u drugom sistemu,
 \mathbf{t} - vektor translacija kojim se obuhvata nepoklapanje koordinatnih početaka dva sistema,
 $(1+dm)$ - faktor razmere kojim se obuhvata razlika u razmeri linearnih jedinica u dva sistema,
 \mathbf{R} - matrica ukupne rotacije kojom se obuhvata razlika u orijentacijama koordinatnih osa dva sistema,
 \mathbf{X}_1 - vektor koordinata u prvom sistemu.

Karakterističnost matrice ukupne rotacije je u tome što je ona u opštem slučaju proizvod elementarnih matrica rotacija oko svake ose:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\varepsilon_x} \mathbf{R}_{\varepsilon_y} \mathbf{R}_{\varepsilon_z}, \quad (3.15)$$

gde elementarne matrice rotacija imaju sledeću strukturu:

- rotacija oko X ose:

$$\mathbf{R}_{\varepsilon_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & \sin \varepsilon_x \\ 0 & -\sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

- rotacija oko Y ose:

$$\mathbf{R}_{\varepsilon_y} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & -\sin \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

- rotacija oko Z ose:

$$\mathbf{R}_{\varepsilon_z} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_z & \sin \varepsilon_z & 0 \\ -\sin \varepsilon_z & \cos \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Množenjem elementarnih matrica rotacija dobijaju se sledeći članovi ukupne matrice rotacija:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \cos \varepsilon_y \cos \varepsilon_z \\
r_{12} &= \cos \varepsilon_y \sin \varepsilon_z \\
r_{13} &= -\sin \varepsilon_y \\
r_{21} &= \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z - \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_z \\
r_{22} &= \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z + \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_z \\
r_{23} &= \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_y \\
r_{31} &= \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \cos \varepsilon_z + \sin \varepsilon_x \sin \varepsilon_z \\
r_{32} &= \cos \varepsilon_x \sin \varepsilon_y \sin \varepsilon_z - \sin \varepsilon_x \cos \varepsilon_z \\
r_{33} &= \cos \varepsilon_x \cos \varepsilon_y
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Elementarne matrice rotacija imaju više osobina od kojih su dve naročito značajne:

- Proizvod elementarnih matrica rotacija nije komutativna operacija

$$\mathbf{R}(\varepsilon_x)\mathbf{R}(\varepsilon_y) \neq \mathbf{R}(\varepsilon_y)\mathbf{R}(\varepsilon_x), \tag{3.20}$$

- Inverzija elementarnih matrica rotacija jednaka je njihovoj transpoziciji

$$\mathbf{R}^{-1}(\varepsilon_x) = \mathbf{R}^T(\varepsilon_x) = \mathbf{R}(-\varepsilon_x). \tag{3.21}$$

U slučaju da su uglovi rotacija između osa dva pravouglata koordinatna sistema mali po vrednosti (na primer manji od 1'), moguće je sa dovoljnom tačnošću koristiti aproksimaciju trigonometrijskih funkcija:

$$\begin{aligned}
\sin \varepsilon &\approx \varepsilon, \\
\cos \varepsilon &\approx 1,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

čime matrica ukupne rotacije dobija znatno pojednostavljeni oblik:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Linearizacijom oko približnih vrednosti $t_x = t_y = t_z = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = dm = 0$ dobija se konačno veza između koordinata u dva sistema u funkciji parametara Helmertove transformacije:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y & X & 1 & 0 & 0 \\ Z & 0 & X & Y & 0 & 1 & 0 \\ -Y & X & 0 & Z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ dm \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

3.3.2. Transformacija sličnosti u geografskim koordinatama

Polaznu osnovu za izvođenje transformacije sličnosti u geografskim koordinatama (geografska širina φ , geografska dužina λ i elipsoidna visina h) čini njihova veza sa pravouglim koordinatama X, Y i Z :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ \left(\frac{b^2}{a^2}N+h\right)\sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

sa poluprečnikom krivine po prvom vertikalnu N i velikom (a) odnosno malom (b) poluosom elipsoida na kojeg se odnose geografske koordinate. Poluprečnik krivine po prvom vertikalnu određuje se po izrazu:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \quad (3.26)$$

gde e označava prvi numerički ekscentricitet obrtnog elipsoida, koji se računa kao:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (3.27)$$

Diferenciranjem izraza (3.25) dobija se:

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varphi} & \frac{\partial X}{\partial \lambda} & \frac{\partial X}{\partial h} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varphi} & \frac{\partial Y}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y}{\partial h} \\ \frac{\partial Z}{\partial \varphi} & \frac{\partial Z}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z}{\partial h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Matrica parcijalnih izvoda \mathbf{F} ima sledeće članove:

$$\begin{aligned} f_{11} &= -(M+h)\sin\varphi\cos\lambda \\ f_{12} &= -(N+h)\cos\varphi\sin\lambda, \\ f_{13} &= \cos\varphi\cos\lambda \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} f_{21} &= -(M+h)\sin\varphi\sin\lambda \\ f_{22} &= (N+h)\cos\varphi\cos\lambda, \\ f_{23} &= \cos\varphi\sin\lambda \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} f_{31} &= (M+h)\cos\varphi \\ f_{32} &= 0, \\ f_{33} &= \sin\varphi \end{aligned} \quad (3.31)$$

pri čemu M označava poluprečnik krivine elipsoida po meridijanu, koji se računa po izrazu:

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}. \quad (3.32)$$

Sada se za dve tačke sa koordinatama $(X, Y, Z)_1$ i $(X, Y, Z)_2$ koje su u diferencijalnom susedstvu može napisati:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_1, \quad (3.33)$$

odakle se inverzijom dobija:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_1 = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1. \quad (3.34)$$

Inverzna matrica ima sledeće članove:

$$\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-\sin\varphi\cos\lambda}{M+h} & \frac{-\sin\varphi\sin\lambda}{M+h} & \frac{\cos\varphi}{M+h} \\ \frac{-\sin\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\varphi} & 0 \\ \cos\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda & \sin\varphi \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Ako se pretpostavi da su pomenute dve diferencijalno razdvojene pozicije

$(X, Y, Z)_1$ i $(X, Y, Z)_2$ rezultat diferencijalnih datumskih razlika, tada te razlike opisuje vektor parametara Helmertove transformacije \mathbf{d} :

$$\mathbf{d}^T = [t_x \quad t_y \quad t_z \quad \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad dm]. \quad (3.36)$$

Imajući u vidu klasične veze nelinearne sedmoparametarske transformacije sličnosti, iz datumske razlike sledi da je:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_1 + \mathbf{F}^{-1} \left((1+dm) \mathbf{R} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 + \mathbf{t} - \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_1 \right). \quad (3.37)$$

odnosno nakon linearizacije oko približnih vrednosti $t_x = t_y = t_z = \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = dm = 0$ dobija se veza između geografskih koordinata u oba sistema i parametara Helmertove transformacije:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_1 + \mathbf{G} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ dm \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

pri čemu je sa \mathbf{G} označena matrica čiji se članovi dobijaju po izrazu:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y & X & 1 & 0 & 0 \\ Z & 0 & X & Y & 0 & 1 & 0 \\ -Y & X & 0 & Z & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

3.3.3. Funkcionalni model transformacije sličnosti

Izraz (3.38) opisuje relacije između geografskih koordinata u dva sistema sa jedne strane, i sedam parametara Helmertove transformacije sa druge strane. Međutim, diferencijalne razlike između geografskih koordinata nisu samo rezultat datumskog neslaganja, već u opštem slučaju mogu biti i posledica toga što se geografske koordinate odnose na dva različita elipsoida $E_1(a_1, b_1)$ i $E_2(a_2, b_2)$. Za

potrebe formulacije funkcionalnog modela ta se razlika mora uzeti u obzir preko sledećih korektivnih članova:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{E1,E2} &= \varphi_2(a_2, b_2) - \varphi_1(a_1, b_1) \\ \Delta\lambda_{E1,E2} &= \lambda_2(a_2, b_2) - \lambda_1(a_1, b_1) . \\ \Delta h_{E1,E2} &= h_2(a_2, b_2) - h_1(a_1, b_1)\end{aligned}\tag{3.40}$$

Sada se funkcionalni model za razliku geografskih koordinata u dva sistema može napisati u opštem obliku:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_2 - \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\lambda \\ \Delta h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix}_1 + \begin{bmatrix} v_\varphi \\ v_\lambda \\ v_h \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ dm \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix},\tag{3.41}$$

pri čemu v označava odgovarajuću popravku.

Prema tome, razvijena jednačina popravaka za razliku geografskih širina u dva sistema glasi:

$$\varphi_2 - \Delta\varphi - \varphi_1 + v_\varphi = c_1 t_x + c_2 t_y + c_3 t_z + c_4 dm + c_5 \varepsilon_x + c_6 \varepsilon_y + c_7 \varepsilon_z,\tag{3.42}$$

gde koeficijenti c_i imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}c_1 &= -\sin \lambda \frac{aW + h}{M + h} & c_4 &= -\frac{\sin \varphi \cos \varphi N e^2}{M + h} & c_7 &= \frac{\cos \varphi}{M + h} \\ c_2 &= \cos \lambda \frac{aW + h}{M + h} & c_5 &= -\frac{\sin \varphi \cos \lambda}{M + h} & & \\ c_3 &= 0 & c_6 &= -\frac{\sin \varphi \sin \lambda}{M + h} & & \end{aligned}\tag{3.43}$$

Razvijena jednačina popravaka za razliku geografskih dužina u dva sistema je:

$$\lambda_2 - \Delta\lambda - \lambda_1 + v_\lambda = c_1 t_x + c_2 t_y + c_3 t_z + c_4 dm + c_5 \varepsilon_x + c_6 \varepsilon_y + c_7 \varepsilon_z,\tag{3.44}$$

sa koeficijentima c_i koji imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\sin \varphi \cos \lambda [N(1-e^2)+h]}{(N+h)\cos \varphi} & c_4 &= 0 & c_7 &= 0 \\
c_2 &= \frac{\sin \varphi \sin \lambda [N(1-e^2)+h]}{(N+h)\cos \varphi} & c_5 &= -\frac{\sin \lambda}{(N+h)\cos \varphi} \\
c_3 &= -1 & c_6 &= \frac{\cos \lambda}{(N+h)\cos \varphi}
\end{aligned} \quad (3.45)$$

Konačno razvijena jednačina popravaka za razliku elipsoidnih visina u dva sistema glasi:

$$h_2 - \Delta h - h_1 + v_h = c_1 t_x + c_2 t_y + c_3 t_z + c_4 dm + c_5 \varepsilon_x + c_6 \varepsilon_y + c_7 \varepsilon_z, \quad (3.46)$$

sa koeficijentima c_i koji imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -Ne^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda & c_4 &= h + aW & c_7 &= \sin \varphi \\
c_2 &= Ne^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \lambda & c_5 &= \cos \varphi \cos \lambda \\
c_3 &= 0 & c_6 &= \cos \varphi \sin \lambda
\end{aligned} \quad (3.47)$$

Pomoćna veličina W koja je korišćena u gornjim izrazima računa se kao:

$$W = \frac{a}{N} = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (3.48)$$

3.3.4. Stohastički model transformacije sličnosti

S obzirom na činjenicu da se merenim vrednostima u funkcionalnim modelima (3.42), (3.44) i (3.46) smatraju diferencijalne razlike geografskih koordinata, stohastički model formuliše se tako što se odrede njihove standardne devijacije σ_φ , σ_λ i σ_h . Kada se ima u vidu diferencijalna veza između geografskih i pravouglih koordinata:

$$\begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \\ \Delta h \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

i načini pretpostavaka da su pravougle koordinate međusobno nezavisne, disperzije geografskih koordinata dobijaju se jednostavnom primenom zakona o prenosu grešaka:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\varphi^2 \\ \sigma_\lambda^2 \\ \sigma_h^2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix} (\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (3.50)$$

Ako se pri tome još i pretpostavi jednaka tačnost pravougljih koordinata po koordinatnim osama, množenje u gornjem izrazu ima za rezultat:

$$p_\varphi \sim \frac{1}{\sigma_\varphi^2} = R^2 \quad p_\lambda \sim \frac{1}{\sigma_\lambda^2} = R^2 \cos^2 \varphi \quad p_h \sim \frac{1}{\sigma_h^2} = 1. \quad (3.51)$$

gde P označava težinu odgovarajuće geografske koordinate, a R je prosečna vrednost poluprečnika Zemlje.

3.4. Neki aspekti transformacije sličnosti

Bez obzira na to da li se sedmoparametarska transformacija sličnosti izvodi u pravougljim ili geografskim koordinatama, odnosno odjednom za celo ispitivano područje ili po konačnim elementima, postoje izvesni praktični aspekti koji su od tog izbora nezavisni. Takvo je na primer analiziranje uticaja tačnosti visina tačaka na tačnost transformisanih horizontalnih položaja, uticaja aproksimacije trigonometrijskih funkcija i uticaja tačnosti ocenjenih parametara transformacije na konačni rezultat.

3.4.1. Uticaj tačnosti visina tačaka

Određivanje parametara sedmoparametarske transformacije sličnosti podrazumeva da identične tačke budu definisane koordinatama u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu. Čest je, međutim, slučaj da tačke državne trigonometrijske mreže, koje su predmet transformacije, nemaju visine ili su im visine određene inferiornom tačnošću. U toj situaciji od interesa je istražiti kako kvalitet visina tačaka utiče na tačnost transformisanih položaja.

U procesu transformacije geografskih koordinata u pravouglo, učestvuju i visine:

$$X = (R+h) \cos \varphi \cos \lambda, \quad Y = (R+h) \cos \varphi \sin \lambda, \quad Z = (R+h) \sin \varphi. \quad (3.52)$$

Da bi se odredio uticaj visine na tačnost koordinata potrebno je odrediti parcijalne izvode ovih funkcija po svim parametrima. Totalni diferencijal izraza za računanje pravougljih koordinata glasi:

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{\partial x}{\partial h}\right)_0 dh + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)_0 d\lambda \\ dy &= \left(\frac{\partial y}{\partial h}\right)_0 dh + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)_0 d\lambda. \\ dz &= \left(\frac{\partial z}{\partial h}\right)_0 dh + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)_0 d\lambda \end{aligned} \quad (3.53)$$

Veza diferencijalnih priraštaja pravougljih i geografskih koordinata ima oblik:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R+h)d\varphi \\ (R+h)\cos \varphi d\lambda \\ dh \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

ili, u matričnom obliku:

$$\mathbf{dx} = \mathbf{N}d\boldsymbol{\varphi}, \quad \text{odnosno,} \quad \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{dx}. \quad (3.55)$$

Pošto je matrica \mathbf{N} ortogonalna, onda važi $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^T$ pa je:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{N}^T \mathbf{dx}. \quad (3.56)$$

Veza između priraštaja pravougljih kordinata i priraštaja visine je:

$$\mathbf{dx} = \mathbf{e} \mathbf{dh}, \quad (3.57)$$

pri čemu \mathbf{e} označava jedinični vektor sa komponentama:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Sedmparametarska transformacija dva ortogonalna koordinatna sistema može se izraziti u matričnom obliku:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{t} + (1 + dm)\mathbf{R}\mathbf{X}_1, \quad (3.59)$$

gde je:

- \mathbf{R} - matrica ukupne rotacije za male vrednosti uglova,
- \mathbf{X}_1 - vektor koordinata u državnom sistemu,
- \mathbf{X}_2 - vektor koordinata u GPS sistemu.

Umesto vrednosti koordinata uvodi se vrednost priraštaja koordinata:

$$\mathbf{dx}_2 = (1 + dm) \mathbf{R} \mathbf{dx}_1. \quad (3.60)$$

Zamenom u ovaj izraz dobija se:

$$\mathbf{N} \mathbf{d}\varphi_2 = (1 + dm) \mathbf{R} \mathbf{e} \mathbf{d}h, \text{ odnosno, } \mathbf{d}\varphi_2 = (1 + dm) \mathbf{N}^T \mathbf{R} \mathbf{e} \mathbf{d}h. \quad (3.61)$$

Kada se izvrši matricno množenje rezultat je:

$$\mathbf{d}\varphi_2 = \begin{bmatrix} -\varepsilon_x \sin \lambda + \varepsilon_y \cos \lambda \\ (\varepsilon_x \cos \lambda + \varepsilon_y \sin \lambda) \sin \varphi - \varepsilon_z \cos \varphi \\ (1 + dm) \end{bmatrix} \mathbf{d}h, \quad (3.62)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} (R + h) d\varphi &= (-\varepsilon_x \sin \lambda + \varepsilon_y \cos \lambda) dh \\ (R + h) \cos \varphi d\lambda &= ((\varepsilon_x \cos \lambda + \varepsilon_y \sin \lambda) \sin \varphi - \varepsilon_z \cos \varphi) dh. \\ dh &= (1 + dm) dh \end{aligned} \quad (3.63)$$

Ovo su izrazi koji omogućavaju računanje uticaja kvaliteta visina na tačnost položajnih koordinata pri sedmoparametarskoj transformaciji sličnosti.

3.4.2. Uticaj aproksimacije trigonometrijskih funkcija

Uticaj aproksimacije trigonometrijskih funkcija u matrici ukupne rotacije može se ispitati na primeru matrice ukupne rotacije koja se sastoji samo od rotacije oko jedne ose, na primer, rotacije oko X ose. U tom slučaju veza između originalnih i transformisanih koordinata glasi:

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{R} \mathbf{X}_1, \quad (3.64)$$

pri čemu su:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

S obzirom na to da se trigonometrijske funkcije mogu praktično tačno aproksimirati razvojem u Tejlorov red zaključno sa kvadratnim članom kada je ugao mali:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2, \quad (3.66)$$

$$\sin \alpha = \alpha, \quad (3.67)$$

sledi da se matrica ukupne rotacije može predstaviti u obliku:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

S druge strane, uobičajeno je da se koristi linearna aproksimacija trigonometrijskih funkcija, u kojem slučaju matrica rotacije ima oblik:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Prema tome, transformisana Z koordinata imaće u jednom i drugom slučaju oblik:

$$Z_2^t = -\alpha Y_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\right) Z_1, \quad (3.70)$$

$$Z_2^p = -\alpha Y_1 + Z_1, \quad (3.71)$$

pri čemu indeks t označava transformisanu koordinatu sračunatu po tačnom izrazu, a indeks p transformisanu koordinatu sračunatu po približnom izrazu.

Greška koja se aproksimacijom pravi iznosi:

$$dZ = Z_2^p - Z_2^t = \frac{1}{2}\alpha^2 Z_1. \quad (3.72)$$

Shodno napred iznetom, veličina ugla rotacije α , za koju će greška aproksimacije biti dZ glasi:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2dZ}{Z_1}}. \quad (3.73)$$

Ako greška aproksimacije treba da bude manja od 1 mm, a imajući u vidu da koordinata Z_1 može imati maksimalnu vrednost poluprečnika Zemlje R , za ugao rotacije se dobija:

$$\alpha = 3.6'', \quad (3.74)$$

a za grešku aproksimacije manju od 1 cm:

$$\alpha = 11.6'' . \quad (3.75)$$

3.4.3. Uticaj tačnosti transformacionih parametara

Parametri Helmertove transformacije sličnosti ocenjuju se u svakom slučaju metodom najmanjih kvadrata. MNK formalizam podrazumeva između ostalog i standardne devijacije parametara, koje karakterišu njihovu preciznost, a posledica su toga što se parametri određuju na osnovu koordinata zajedničkih tačaka koje su posredno ili neposredno rezultat obrade geodetskih terestričkih i satelitskih merenja.

Formalna preciznost ocenjenih parametara transformacije zavisi od geometrije skupa zajedničkih tačaka, i to na sledeći način:

- Preciznost parametara translacije direktno je proporcionalna broju zajedničkih tačaka n , tako da se za njihov standard σ_t može napisati:

$$\sigma_t \sim 1/n, \quad (3.76)$$

- Preciznost parametara rotacije zavisi ne samo od broja zajedničkih tačaka, već i od njihovog rasporeda. Što su zajedničke tačke ravnomernije raspoređene po svim azimutima, to je preciznost parametara rotacije veća. Ako se sa dA obeleži prosečna vrednost razlika azimuta od težišta područja do zajedničkih tačaka, za standard parametara rotacije σ_ε može se napisati:

$$\sigma_\varepsilon \sim dA/n, \quad (3.77)$$

- Konačno, preciznost parametra razmere, pored broja i rasporeda, zavisi pre svega od veličine područja kojeg definiše skup zajedničkih tačaka. Ako se sa D obeleži maksimalno rastojanje između zajedničkih tačaka, za standard parametra razmere σ_{dm} može se napisati:

$$\sigma_{dm} \sim 1/D. \quad (3.78)$$

Međutim, formalna preciznost transformacionih parametara nema velikog značaja jer se oni u svakom slučaju određuju kao definicione vrednosti. Daleko

važnija je činjenica da se transformacioni parametri moraju izračunati sa određenim brojem značajnih cifara, što je veoma važno kada se ima u vidu da su, na primer, uglovi rotacija male veličine koje se uz to još moraju izražavati u radijanima pri transformaciji. U opštem slučaju, tačnost transformisanih horizontalnih položaja tačaka od 1 cm biće održana ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

- parametri translacije moraju biti izraženi do na 0.01m ,
- parametri rotacija moraju biti izraženi do na $0.0001''$,
- parametar razmere mora biti izražen do na 10^{-5}ppm .

3.5. Ocenjivanje po metodi najmanjih kvadrata

3.5.1. Najvažniji rezultati ocenjivanja

U izvedenom matematičkom modelu Helmertove transformacije sličnosti merene veličine predstavljaju diferencijalne razlike geografskih koordinata koje se odnose na dva različita datumska sistema, dok su nepoznate veličine parametri transformacije (tri parametra translacija, jedan parametar razmere i tri parametra rotacija).

Ocenjivanje funkcionalnih parametara u linearnim ili linearizovanim matematičkim modelima vrši se po pravilu metodom najmanjih kvadrata (MNK). Matematički model koji je u najčešćoj upotrebi je Gaus-Markovljev model potpunog ranga:

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}, \quad (3.79)$$

$$\mathbf{C}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_1 = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.80)$$

gde je:

- $\hat{\mathbf{l}}$ - vektor ocena merenja,
- \mathbf{l} - vektor izvršenih merenja,
- \mathbf{v} - vektor popravaka,
- \mathbf{A} - konfiguraciona matrica,
- $\hat{\mathbf{x}}$ - vektor ocena parametara,

- \mathbf{C}_1 - kovarijaciona matrica merenja,
 σ_0 - standard jedinice težine,
 \mathbf{Q}_1 - matrica kofaktora merenja,
 \mathbf{P} - matrica težina merenja.

Prisustvo vektora popravaka u funkcionalnom delu modela obezbeđuje konzistentnost sistema jer je prostor ranga merenja R^n , a ranga parametara R^u . Ukoliko je konfiguraciona matrica nepotpunog ranga kolona, model se proširuje uslovima kojima se otklanja defekt ranga, ili se vektor parametara projektuje u podprostor u kojem je ocenljiv. Metod najmanjih kvadrata podrazumeva ona rešenja konzistentnog, ali neodređenog sistema, koja minimalizuju kvadratnu formu:

$$\Omega(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sigma_0^2} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.81)$$

Iz uslova minimuma sledi sistem normalnih jednačina:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l}. \quad (3.82)$$

Definicijom ortogonalnih projektora:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1}, \quad (3.83)$$

$$\mathbf{R}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{R}, \quad (3.84)$$

i rešavanjem normalnih jednačina, dobijaju se sledeći rezultati ocenjivanja:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l}, \quad (3.85)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1}, \quad (3.86)$$

$$\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}\mathbf{l}, \quad (3.87)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{l}}} = \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T = \mathbf{R} \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{R}^T, \quad (3.88)$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l} = -\mathbf{R}^\perp \mathbf{l}, \quad (3.89)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{v}} = \mathbf{C}_1 - \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T = \mathbf{R}^\perp \mathbf{C}_1 (\mathbf{R}^\perp)^T = \mathbf{R}^\perp \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 (\mathbf{R}^\perp)^T, \quad (3.90)$$

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{l}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{l} - \mathbf{l}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}, \quad (3.91)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T, \quad (3.92)$$

$$f = n - u = n - r(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{F}), \quad (3.93)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\Omega}{f}. \quad (3.94)$$

Ocena vektora parametara je najbolja linearna nepomerena ocena u teoriji aproksimacija. Za slučaj normalno raspoređenih merenja, isti rezultat bi se dobio primenom metode maksimalne verodostojnosti. Međutim, nepomenost ocene standarda jedinice težine obezbeđuje jedino metod najmanjih kvadrata.

Postupak MNK ocenjivanja ima i geometrijsku interpretaciju. U podprostoru R^u kojeg definišu vektori kolone konfiguracione matrice \mathbf{A} , vektor ocena $\hat{\mathbf{x}}$ određuje se tako da $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ bude ortogonalna projekcija vektora merenja \mathbf{l} na taj podprostor:

$$\mathbf{Rl} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}. \quad (3.95)$$

Ova projekcija deli vektor merenja na dva dela:

$$\mathbf{l} = \mathbf{Rl} + (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{l} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{v}, \quad (3.96)$$

odakle slede svojstva:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{v} = 0, \quad (3.97)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (3.98)$$

$$\mathbf{R}^\perp \mathbf{A} = 0. \quad (3.99)$$

Ocenjivanje po metodi najmanjih kvadrata ima inače više praktičnih aspekata koji se koriste u numeričkoj primeni, kao što su eliminacija parametara i superpozicija normalnih jednačina. Suština ovih postupaka je redukcija dimenzija normalnih jednačina i mogućnost sekvencijalnog odnosno rekurzivnog ocenjivanja parametara.

3.5.2. Eliminacija parametara

Prethodna eliminacija parametara je postupak redukcije dimenzija originalnog sistema normalnih jednačina bez gubitka informacija. Ako se vektor parametara razdvoji na dva vektora $\hat{\mathbf{x}}_1$ i $\hat{\mathbf{x}}_2$, normalne jednačine mogu da se prikažu u obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.100)$$

Kao rezultat eliminacije vektora parametara $\hat{\mathbf{x}}_2$ dobija se redukovani sistem normalnih jednačina:

$$\left(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}\right)\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{n}_2, \quad (3.101)$$

ili, označeno skraćeno:

$$\tilde{\mathbf{N}}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1 = \tilde{\mathbf{n}}_1. \quad (3.102)$$

Kvadratna forma koja odgovara originalnom sistemu normalnih jednačina računa se po izrazu:

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1^T & \mathbf{n}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{n}_1^T \hat{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} (\mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_{21} \hat{\mathbf{x}}_1) \\ &= \mathbf{I}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{I} - \hat{\mathbf{x}}_1^T (\mathbf{n}_1 - \mathbf{N}_{12} \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2) - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2 \\ &= \tilde{\Omega} - \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

odakle sledi da je kvadratnu formu koja se odnosi na redukovani sistem normalnih jednačina potrebno korigovati članom $-\mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_{22}^{-1} \mathbf{n}_2$ da bi udeo koji potiče od eliminisanih parametara bio uzet u obzir. Kovarijaciona matrica vektora ocena $\hat{\mathbf{x}}_1$ računa se na uobičajeni način:

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}_1} = \left(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{21}\right)^{-1}. \quad (3.104)$$

Za razliku od eliminacije u normalnim jednačinama, eliminacija parametara iz kovarijacione matrice originalnog vektora ocena $\hat{\mathbf{x}}$ predstavlja trivijalni postupak, i sastoji se u odbacivanju vrsta i kolona koje se odnose na eliminisane parametre. Kvadratna forma tom prilikom ostaje nepromenjena jer je njenim računanjem uticaj eliminisanih parametara već obuhvaćen.

3.5.3. Sekvencijalno MNK ocenjivanje

MNK ocenjivanje uz upotrebu svih izvršenih merenja identično je razdvajanju postupka ocenjivanja na više delova i kombinovanju pojedinačnih rešenja u konačan rezultat. Ovakvo sekvencijalno ocenjivanje poznato je u geodeziji od vremena Helmerta, a danas se koristi pre svega u situacijama sa velikim brojem

podataka.

Matematički model, normalne jednačine i ocene parametara u pojedinim od ukupno m koraka sekvencijalnog ocenjivanja imaju respektivno opšti oblik:

$$\mathbf{l}_i + \mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (3.105)$$

$$\mathbf{C}_i = \sigma_{0i}^2 \mathbf{P}_i^{-1}, \quad (3.106)$$

$$\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i, \quad (3.107)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{l}_i, \quad (3.108)$$

$$\mathbf{C}_{x,i} = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1}. \quad (3.109)$$

Ako se pojedinačni vektori ocena shvate kao pseudomerenja, koja su uz to još i međusobno nezavisna, kombinovani matematički model može da se formuliše na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \dots \\ \hat{\mathbf{x}}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_{x,1} \\ \dots \\ \hat{\mathbf{v}}_{x,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \dots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{x,1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \mathbf{C}_{x,m} \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

3.5.4. Rekurzivno MNK ocenjivanje

Rekurzivni postupak se primenjuje u slučaju kada postoje kombinovana rešenja sekvencijalnog postupka, a na raspolaganju je nova grupa merenja. Za razliku od sekvencijalnog ocenjivanja koje se zasniva na normalnim jednačinama, u rekurzivnom postupku koriste se kovarijacione matrice.

Ako se kombinovani rezultati sekvencijalnog ocenjivanja sa ukupno $m-1$ grupa merenja označe respektivno sa $\hat{\mathbf{x}}_{m-1}$, $\mathbf{C}_{x,m-1}$ i Ω_{m-1} , pri čemu je:

$$\mathbf{C}_{x,m-1} = (\mathbf{A}_{m-1}^T \mathbf{C}_{m-1}^{-1} \mathbf{A}_{m-1})^{-1}, \quad (3.111)$$

tada je uključanjem nove grupe merenja moguće sve ove rezultate rekurzivno odrediti po sledećim izrazima:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \Delta \mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}_{m-1} + \mathbf{F}_m \bar{\mathbf{v}}_m, \quad (3.112)$$

$$\mathbf{C}_{x,m} = \mathbf{C}_{x,m-1} - \Delta \mathbf{C}_{x,m} = \mathbf{C}_{x,m-1} - \mathbf{F}_m^T \mathbf{A}_m \mathbf{C}_{x,m-1}, \quad (3.113)$$

$$\Omega_m = \Omega_{m-1} + \Delta \Omega_m = \Omega_{m-1} + \bar{\mathbf{v}}_m^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{v}}_m, \quad (3.114)$$

gde je:

$$\bar{\mathbf{v}}_m = \mathbf{I}_m - \mathbf{A}_m \hat{\mathbf{x}}_{m-1}, \quad (3.115)$$

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{C}_{x,m-1} \mathbf{A}_m^T \bar{\mathbf{P}}, \quad (3.116)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = (\mathbf{C}_m + \mathbf{A}_m \mathbf{C}_{x,m-1} \mathbf{A}_m^T)^{-1}. \quad (3.117)$$

Rekurzivni postupak naročito je pogodan za slučaj inoviranja sa malim brojem novih merenja. U slučaju jednog novog merenja algoritam je gotovo trivijalan, jer operaciju invertovanja zamenjuje jednostavno deljenje.

Kada je u iteracionom koraku prisutan veliki broj novih merenja, sekvencijalni postupak je jednostavniji za upotrebu.

Rekurzivne formule su ekvivalentne fazi ocenjivanja kod Kalmanovih filtera, pri čemu se matrica \mathbf{F} može poistovetiti sa Kalmanovom matricom. Razlika se sastoji u tome što Kalmanov filter koristi dodatne informacije o dinamici sistema i sistemskom šumu pomoću kojih vrši prognozu stanja sistema. Zbog toga su rekurzivne formule identične Kalmanovom filteru samo u specijalnom slučaju kada parametri nisu vremenski promenljivi i kada je sistemski šum zanemarljivo mali.

4. Modeliranje distorzije

Kod izbora modela transformacije prostornih podataka između globalnog i lokalnog geodetskog referentnog sistema osnovni kriterijum predstavlja zahtev da se očuva tačnost i pouzdanost izvornih podataka. Ovaj kriterijum može se ostvariti korišćenjem konformne transformacije. Tako se za transformaciju prostornih podataka prikupljenih primenom GNSS (Aktivne geodetske referentne osnove) najčešće koristi sedmoparametarska transformacija sličnosti (podpoglavlje 3.2.). Korišćenjem ove transformacije prostorni podaci se transliraju, rotiraju i menja im se razmera pri čemu oblik ostaje očuvan, tj. ne dolazi do promene u prostornoj tačnosti.

Problem transformacije prostornih podataka iz globalnog geodetskog referentnog sistema u lokalni (ili obrnuto) postaje mnogo složeniji ako postoji prisustvo distorzija (izobličenja) prostornih podataka izraženih u lokalnom geodetskom referentnom sistemu. Razlog za pojavu ovih distorzija, u prvom redu, je slaba uslovljenost geodetskog referentnog okvira realizovanog terestričkim tehnikama merenja (Jäger i dr., 2003). Kao rezultat javlja se velika zavisnost relativne tačnosti prostornog položaja tačaka izraženih u lokalnom geodetskom referentnom sistemu od rastojanja između tačaka. Zbog toga je neophodno da se u procesu transformacije postojeće distorzije značajno umanje ili ako je moguće i potpuno otklone. Sa aspekta korisnika rešenje ovog problem predstavlja model transformacije koga karakterišu jednostavnost, efikasnost, jedinstvenost i tačnost.

Za distorziju se može reći da predstavlja model promene oblika transformisane mreže tačaka koji nastaje zbog različitog iznosa i orijentacije reziduala - koordinatnih popravaka između početnog i ciljnog koordinatnog sistema na različitim lokacijama. Lokalno se može očekivati da će iznosi distorzije biti usklađeni, odnosno da će se reziduali međusobno podudarati po smeru i veličini vektora. Najpopularniji i intuitivno najjasniji način modeliranja distorzije, kao i svake potencijalne fizičke površi, jeste rešetkasti model - engl. *GRID*, dok se topografske karakteristike terena u praksi najčešće modeliraju mrežom trouglova - engl. *TIN (Triangulated Irregular Network)*.

U prvom slučaju zahtevani matematički proces je interpolacija diskretnih vrednosti čvorova rešetke, a u drugom povezivanje mreže trouglova prema principu Delaunay-eve triangulacije – što znači da ni jedna trouglu susedna tačka ne sme biti unutar njegove opisane kružnice (Voronoi, 1908);(Delaunay, 1934).

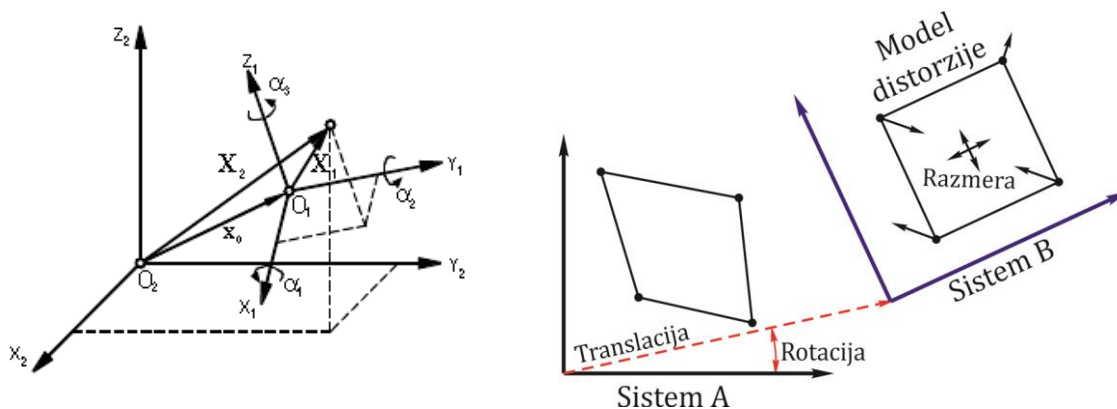
U praksi se za modeliranje distorzije obično koriste sledeće metode:

- a) Površ minimalne zakrivljenosti (Minimum Curvature Surfaces-MCS);
- b) Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata (Least Squares Collocation-LSC);
- c) Višestruka regresija (Multiple Regression-MR), poznata i kao polinomska transformacija (Polynomial Transformation).

4.1. Model grid transformacije

Jedno od rešenja kojim se značajno umanjuje uticaj postojećih distorzija jeste model transformacije sa ocenjivanjem (predikcijom) vrednosti distorzija prostornih podataka u tačkama pravilnog grida za odgovarajuće izabrani interval (korak), na osnovu poznatih vrednosti distorzija u identičnim tačkama ocenjenim u postupku transformacije sličnosti.

Model grid transformacije zasniva se na konformnom pomaku datuma (Helmertova 7-parametarska transformacija) korišćenjem jedinstvenih transformacionih parametara i dodatnoj translaciji definisanoj na osnovu grid distorzionog modela (Slika 4.1). Jedinstveni transformacioni parametri određeni su prema Bursa-Wolf algoritmu čije se jednačine baziraju na pravouglom geocentričnom koordinatnom sistemu.



Slika 4.1: Helmertova 7-parametarska transformacija i model distorzije

Prikaz postupka transformacije između izvornog i ciljnog koordinatnog sistema u poznatom matičnom obliku glasi (Hofman-Wellenhof i dr., 1994):

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{t} + m\mathbf{R}\mathbf{X}_I \quad (4.1)$$

gde je:

\mathbf{X}_C - trodimenzionalni vektor koordinata u ciljnom sistemu,

\mathbf{X}_I - trodimenzionalni vektor koordinata u izvornom sistemu,

\mathbf{t} - vektor translacije,

m - faktor razmere,

\mathbf{R} - matrica rotacije.

Nakon primene Helmertove prostorne 7-parametarske transformacije dobijene transformisane koordinate se dodatno popravljaju distorzionim korekcijama određenim iz jedinstvenog grida koga predstavlja četvorougono polje.

U ovom postupku svako područje na početku mora biti definisano svojim granicama u ravni $(Y_{\min} - X_{\min}) - (Y_{\max} - X_{\max})$ ili na elipsoidu $(\varphi_{\min} - \lambda_{\min}) - (\varphi_{\max} - \lambda_{\max})$. Druga važna karakteristika GRID-a je njegova gustoća, odnosno broj kolona i redova rešetke ili razmak između njenih kolona i redova. Ukoliko je GRID deklarisan na napred navedeni način tada će razmak između kolona i redova iznositi:

$$d_\varphi = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{n_\varphi - 1} \quad i \quad d_\lambda = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{n_\lambda - 1} \quad (4.2)$$

a ukoliko deklaracija podrazumeva zadate razmake u oba smera, tada će broj kolona i redova iznositi:

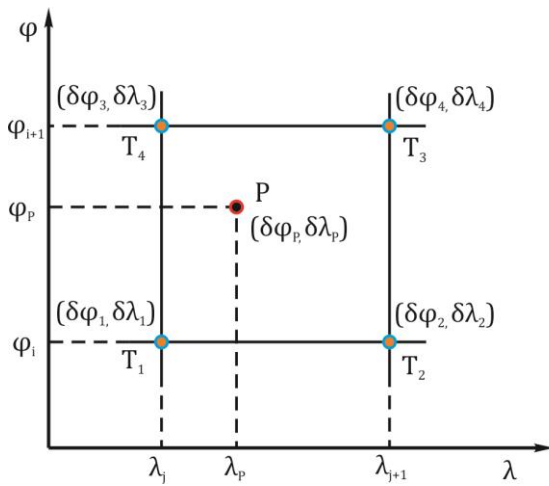
$$n_\varphi = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{d_\varphi} + 1 \quad i \quad n_\lambda = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{d_\lambda} + 1. \quad (4.3)$$

Uvećanje za "1" u jednačinama (4.3), odnosno oduzimanje u imeniocima jednačina (4.2) predstavlja posledicu činjenice da je broj "žica" u rešetki uvek za jedan veći od broja pravougaonika između dve susedne "žice" po dužini neke od obeju osa.

Analogno tome bilo koja proizvoljno izabrana tačka koja se nalazi unutar granica područja GRID-a $T(\varphi, \lambda)$ položajno se indeksira (referencira) na sledeći način:

$$i = \frac{\varphi - \varphi_{\min}}{d_\varphi} + 1 \quad i \quad j = \frac{\lambda - \lambda_{\min}}{d_\lambda} + 1; \quad i, j \in N \quad (4.4)$$

gde je i broj prve "žice", odnosno broj najjužnijeg reda. Za broj j po analogiji važi isto pravilo za kolone, pa će proizvoljno izabrana tačka biti okružena pravougaonim GRID-om koji na jugozapadnoj strani ima vrednost čvorišta (i, j) , severozapadno $(i+1, j)$, severoistočno $(i+1, j+1)$ i konačno jugozapadno $(i, j+1)$.



Slika 4.2: Princip grid interpolacije vrednosti distorzija

Nepoznata vrednost distorzija u proizvoljnoj tački P se računa iz poznatih vrednosti u 4 okolne najbliže tačke GRID-a (Slika 4.2). Za računanje ovih vrednosti u tački P koriste se jednačine bi-linearne interpolacije (Moritz i Sünkel, 1978).

Sledeći izrazi prikazuju računanje vrednosti δ u tački P:

$$\delta\varphi_p = a_0 + a_1X + a_2Y + a_3XY \quad (4.5)$$

$$\delta\lambda_p = b_0 + b_1X + b_2Y + b_3XY \quad (4.6)$$

pri čemu se koeficijenti u jednačinama (4.5) i (4.6) računaju kao:

$$\begin{aligned} a_0 &= \delta\varphi_1 \\ a_1 &= \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1 \\ a_2 &= \delta\varphi_4 - \delta\varphi_1 \\ a_3 &= \delta\varphi_1 + \delta\varphi_3 - \delta\varphi_2 - \delta\varphi_4 \\ b_0 &= \delta\lambda_1 \\ b_1 &= \delta\lambda_2 - \delta\lambda_1 \\ b_2 &= \delta\lambda_4 - \delta\lambda_1 \\ b_3 &= \delta\lambda_1 + \delta\lambda_3 - \delta\lambda_2 - \delta\lambda_4 \end{aligned} \quad (4.7)$$

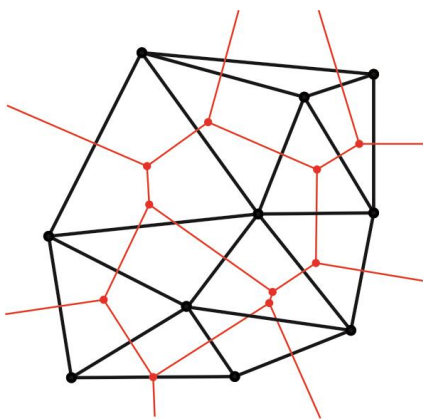
dok se vrednosti argumenata X i Y u istim jednačinama određuju kao:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\lambda_P - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ Y &= \frac{\varphi_P - \varphi_1}{\varphi_4 - \varphi_1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

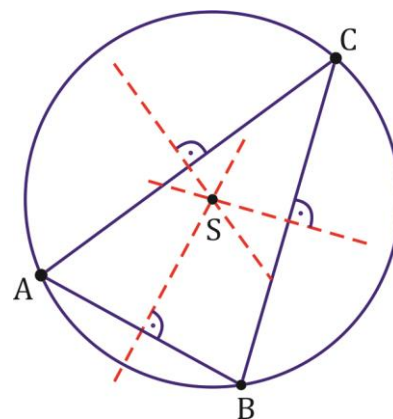
Za računanje visinske distorzije u tački P , koeficijenti $\delta\varphi$ i $\delta\lambda$ se zamenjuju koeficijentima δh pa se za visinsku distorziju dobija novi set parametara c_i . Princip primene bilinearne interpolacije unutar grida je jednak za svih 5 komponenti distorzionog modela, odnosno za undulaciju geoida, za pomak u smeru istoka (u starom DKS-u adekvatno osi y), za pomak u smeru severa (u starom DKS-u po osi x), za pomak visine uzduž normale dH i za transformaciju između starog i novog sistema visina.

4.2. TIN model - mreža trouglova

Prvi algoritmi za modelovanje mreže trouglova (*TIN* - engl. *Triangular Irregular Network*) su razvijeni kao tzv. Delaunay-ova triangulacija (Delaunay, 1934) ili dijagram Voronojevih poligona (Voronoi, 1908). Odnos ova dva modela može se videti na slici 4.3. Polazi se od pretpostavke da na terenu ne postoji više tačaka sa istim x i y koordinatama i različitim visinama. Ova pretpostavka je nužna da bi se problem triangulacije mogao svesti u ravan. Problem triangulacije je matematički analogan problemu konveksne ovojnice (engl. *Convex hull*) u prostoru, odnosno razvlačenju elastične membrane kroz zadate tačke.



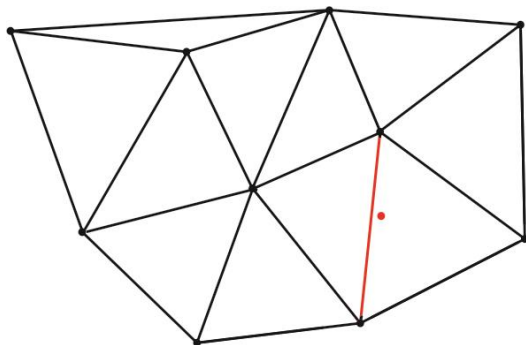
Slika 4.3: Odnos Delaunay-eve trinagulacije (crno) i Voronojevih poligona (crveno)



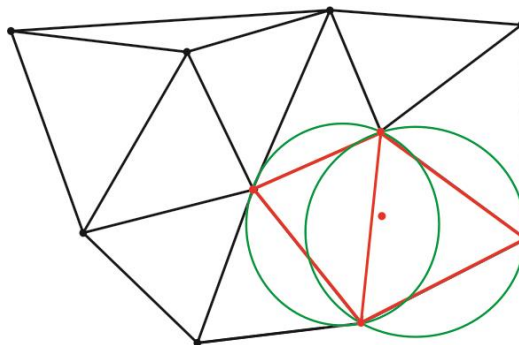
Slika 4.4: Trougao sa opisanom kružnicom

Postavlja se uslov triangulacije: Za svaki trougao ABC važi da se sve zadate tačke, osim tačaka A, B, i C, nalaze izvan opisane kružnice trougla ABC (Slika 4.4). Ovim uslovom obezbeđeno je dobijanje jedinstvenog rešenja triangulacije.

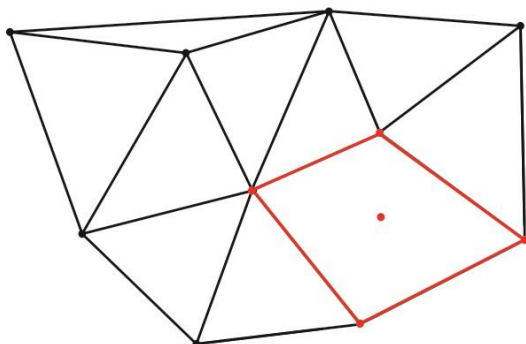
Postoji nekoliko efikasnih algoritama za Delaunay-evu triangulaciju, a jedan od najjednostavnijih i najbržih je tzv. rastući algoritam (Edelsbrunner i dr., 1996). Ovaj algoritam se zasniva na dodavanju tačaka u postojeću mrežu, pri čemu je početna mreža definisana kao trougao, unutar koga se nalaze sve zadate tačke. Algoritam takođe zahteva da se svaka dodata tačka mreže nalazi unutar konveksnog poligona koji okružuje postojeću mrežu. Ovako dobijena triangulacija ima 3 tačke više od zadanih, pa je na kraju potrebno izbrisati sve trouglove koji sadrže bilo koju od 3 početne tačke.



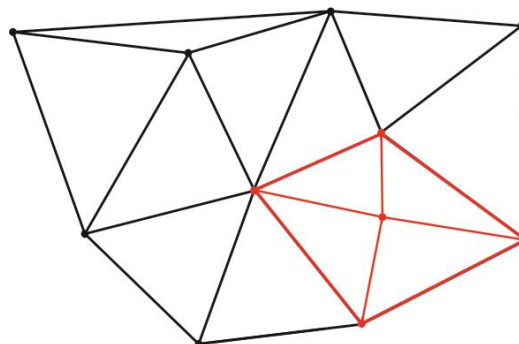
Slika 4.5: Tačka se dodaje u mrežu



Slika 4.6: Trouglovi koji se brišu



Slika 4.7: Trouglovi su izbrisani



Slika 4.8: Tačka je dodata

Dodavanje tačke (crveno na Slici 4.5) u postojeću mrežu se realizuje na sledeći način:

- prvo se proveriti koje je trouglove potrebno ukloniti, a to su svi oni unutar čijih se opisanih kružnica nalazi tačka koju treba dodati u mrežu (Slika 4.6);

- nakon uklanjanja trouglova iz mreže, tačka se nalazi unutar poligona čiji broj stranica zavisi od broja i međusobnog položaja uklonjenih trouglova (Slika 4.7);
- novi trouglovi koji se dodaju u mrežu sadrže po jednu stranicu navedenog poligona, i tačku koju treba dodati (Slika 4.7);
- postupak se ponavlja za sve tačke koje se dodaju dok se ne dobije konačna mreža trouglova.

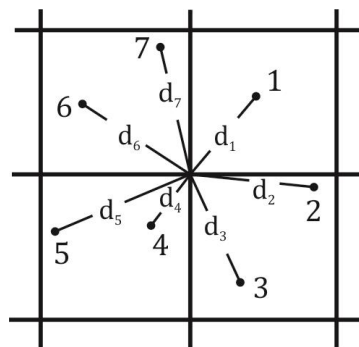
Korišćenje TIN modela u postupku modeliranja distorzija geodetske mreže je moguće i uz određenu modifikaciju pri čemu se uzimaju u obzir ne samo distorzije u vrhovima pripadajućeg trougla već i susednih trouglova. Naime, ako na polovini svake stranice trougla izračunamo distorziju kao težinsku sredinu iz distorzije 4 vrha koji definišu dva susedna trougla, tada će u pripadajućem trouglu postojati 6 distorzionih vrednosti, i to po 3 na svakom vrhu i po 3 na sredinama stranica, pa je konačna distorzija tačke unutar trougla:

$$\delta = \frac{p_A \delta_A + p_B \delta_B + p_C \delta_C + p_{AB} \delta_{AB} + p_{BC} \delta_{BC} + p_{CA} \delta_{CA}}{\sum p}, \quad (4.9)$$

gde su težine određene kao inverzne vrednosti udaljenosti između tačke i vrhova odnosno sredina stranica, tj. kao $p_i = 1/d_i$. Ovom modifikacijom umanjuje se efekat "oštrog" prelaza na granicama susednih trouglova, odnosno nagle promene vrednosti distorzije.

4.3. Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata (LSC)

Kolokacija po metodi najmanjih kvadrata (Moritz i Hofmann-Wellenhof, 2005) je metoda kojom se posmatranoj tački uzima u obzir uticaj distorzije susednih tačaka u zavisnosti od udaljenosti od posmatrane tačke. U slučaju računanja distorzijskog GRID-a, cilj je koristiti slučajno raspoređene podatke da bi se procenile komponente distorzije ($\delta\varphi$, $\delta\lambda$) u svakom čvorištu GRID-a. Na slici 4.9 je prikazan primer procne komponenti distorzije u centralnom čvorištu GRID-a na osnovu poznatih vrednosti distorzija 7 okolnih tačaka, pri čemu je udaljenost između svake tačke i čvorišta GRID-a poznata veličina.



Slika 4.9: Princip računanja komponenti distorzije u čvorištu GRID-a

4.3.1. Pokretna sredina

Kako bi konačni model distorzije određen kolokacijom po metodi najmanjih kvadrata bio što uglađeniji, ulazne vrednosti distorzije (položajnih i/ili visinskih reziduala preostalih nakon računanja transformacionih parametara) se umanjuju za vrednosti pokretne sredine (engl. *Moving Average*). Pokretna sredina (Kenney i Keeping, 1962) je metoda kojom se na određenoj lokaciji (φ, λ) računa generalni trend modela u određenom radijusu s_{max} , odnosno:

$$\delta_{MOVA}(\varphi, \lambda) = \frac{\sum \bar{\delta}_i p_i}{\sum p_i}, \quad (4.10)$$

gdje je težina $p_i = \frac{1}{1 + \frac{d_i}{s_{max}}}$, udaljenost između posmatrane lokacije i svake i-te

tačke unutar radijusa s_{max} , a $\bar{\delta}_i$ stvarna distorzija pojedine tačke. Ostatak distorzije tačke se tada računa kao:

$$\delta'_i = \bar{\delta}_i - \delta_{MOVA}(\varphi, \lambda). \quad (4.11)$$

Na kraju se svaka pojedina veličina još dodatno oslobađa internog trenda odnosno razlike:

$$\varepsilon = \frac{\sum \delta'_i}{n}, \quad (4.12)$$

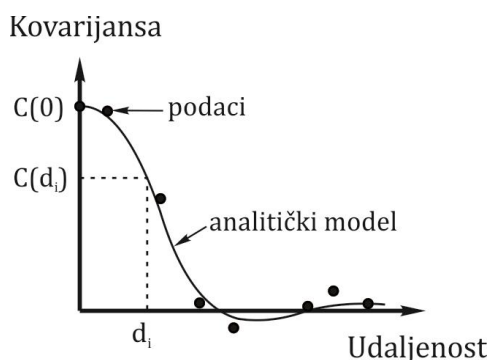
jer konačna veličina distorzije na svakoj tački kojom se nastavlja računanje mora biti centrirana, odnosno:

$$\delta'_i = \bar{\delta}_i - \varepsilon, \quad (4.13)$$

Oslobađanje internog trenda i centriranje vrednosti distorzija metodom pokretne sredine se izvodi kako bi se izbegao singularitet prilikom rešavanja jednačina, tj. prilikom inverzije kroskorelacione matrice, odnosno da je $\sum_1^n \delta_i = 0$ kako bi modelirana veličina (distorzija) bila oslobođena bilo kakvog sistematskog uticaja.

4.3.2. Empirijska funkcija kovarijanse

Funkcija kovarijanse se koristi za opisivanje prostornog uticaja distorzije kao funkcije udaljenosti (Slika 4.10). Funkcija kovarijanse pokazuje da će distorzija bliskih tačaka biti znatno korelisana kao i da će distorzija udaljenih tačaka biti nekorelisana. Funkcija kovarijanse računa se iz podataka koji su oslobođeni uticaja internog trenda. Analitički model se potom uklapa u empirijski model. Analitički model je alat za utvrđivanje relevantnih karakteristika kovarijanse između ulaznih podataka i posmatrane tačke.



Slika 4.10: Funkcija kovarijanse u zavisnosti od udaljenosti

Za razliku od modeliranja variograma koje predstavlja poterbnu predradnju za primenu Kriging metode (Isaaks i Srivastava, 1989), zadatak modeliranja kovariograma predstavlja iznalaženje optimalne vrednosti tzv. korelacione udaljenosti "KU", odnosno veličine kojom će se definisati atributi eksponenta Gauss-ove funkcije prilikom same kolokacije. Tako je "KU" najmanja vrednost apscise koju funkcija koja je interpolovana na osnovu empirijskih vrednosti dostiže pri vrednosti ordinate u veličini od polovine ukupne kovarijanse. Znači apscisa predstavlja udaljenost izraženu u [m], [km] ili nekim drugim jedinicama za dužinu, dok je ordinata brojni pravac vrednosti kovarijanse, odnosno kvadratnih vrednosti dužina izražen u [km²], [m²] ili [cm²].

Varijansa je mera rasprostranjenosti raspodele verovatnoće neke veličine i uvek je pozitivna veličina, te praktično predstavlja kvadrat standardnog odstupanja iste. Statističkim rečnikom, to je očekivanje slučajne varijable – npr. aritmetičke sredine vrednosti merene veličine. Kovarijansom se, s druge strane u istom statističkom modelu, posmatraju dve veličine tj. dve slučajne varijable i ona ne mora biti pozitivna već može biti pozitivno i negativno korelisana, odnosno zavisna ili uopšte nekorelisana. To je u slučaju kad dve slučajne varijable nisu uopšte zavisne, što se konkretno na kovariogramu vidi kada grafik asimptotski teži nuli. Ulazne veličine za modeliranje kovariograma su maksimalni domet (engl. *Range Limit*) i apscisni korak (engl. *Lat*) po kome se formiraju razredi (engl. *Class*). Maksimalni domet se bira prvenstveno intuitivno, ali i logički. To je udaljenost na kojoj mereni podaci jedne tačke ne bi smeli imati nikakvog stvarnog fizičkog uticaja na rezultat bilo koje druge proizvoljno odabrane tačke. Različitim matematičkim pristupom može se negirati stvarni fizički uticaj ili se isti može pojačati i izvan granica njegovog stvarnog dometa.

Varijansa celog skupa se računa kao:

$$C_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n}. \quad (4.14)$$

Vrednost C_0 predstavlja potpuno nezavisnu i egzaktnu veličinu bez obzira na vrednosti maksimalnog dometa i koraka kao ulaznih parametara u samom modeliranju. Sledeći korak je podela područja maksimalnog dometa na optimalan broj razreda ili na optimalnu dužinu svakog koraka. U geostatistici, znači za variogrametriju, određuje se veličina koraka razreda variograma pa slično važi i za kovariogramme. Odluka se donosi na bazi sledećih parametara: veličine uzorka (broja reziduala, odnosno broja tačaka) i površine zahvata modela. U (Bian i dr., 2006) se daje konkretna jednostavna formula:

$$\kappa = \sqrt{\frac{S}{BT}}, \quad (4.15)$$

gdje je S površina područja, BT broj tačaka, a κ korak razreda izražen u [m].

Zatim se računaju pojednostavljene (jer se radi o popravkama/rezidualima, a ne o srednjim greškama izravnatih merenja) kovarijanse za sve parove tačaka

(m,n) , koje se prema dobijenom rezultatu kovarijanske vrednosti registruju u okviru svakog razreda.

U nastavku se računa sferna udaljenost $d_{m,n}$ između prvog para tačaka (m,n) na osnovu njihovih koordinata $M(\varphi_M, \lambda_M)$ i $N(\varphi_N, \lambda_N)$. Prema dobijenom rezultatu se odlučuje kom razredu par pripada tj. u koji razred će se pribrojiti kovarijansa para koja još nije izračunata. Indeks razreda se određuje kao celobrojna vrednost za svaki par $(m=1, BT-1; n=m, BT)$ gde je $(m < n)$:

$$i = INT\left(\frac{d_{m,n}}{\kappa} + \frac{1}{2}\right) \quad (4.16)$$

gde je:

$d_{m,n}$ - sferna udaljenost između tačaka M i N,

κ - apscisni korak tj. dužina svakog razreda.

Broj razreda je pritom:

$$n_R = \frac{D_{MAX}}{\kappa} \quad (4.17)$$

te se svakom razredu indeksa "i" pribroji izračunata kovarijansa koja prema veličini međusobne udaljenosti između tačaka, $d_{m,n}$ njemu pripada:

$$\sum R_i = \sum R_i + v_m v_n \quad (4.18)$$

ali pamti se i tzv. statistička frekvencija, odnosno broj parova koji klasifikacijom prema međusobnoj udaljenosti pripada pojedinom razredu:

$$f_i = f_i + 1 \quad (4.19)$$

jer se naknadno računa konačna kovarijansa pojedinog razreda indeksa "i" kao:

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum R_i}{f_i} \quad (4.20)$$

nakon čega se na apscisi $x = (i-1) \times \kappa - \kappa/2$ kartira ordinata $y = \sigma_i^2$.

U (Collier, 2002) je data analitička funkcija za modeliranje empirijske funkcije kovarijanse:

$$C(d) = C_0 \left(1 - \frac{1}{2}(d/KU)^2\right) e^{\frac{1}{2}(d/KU)^2} \quad (4.21)$$

gde je:

- d - udaljenost između tačaka,
- KU - korelacijska udaljenost,
- C_0 - varijansa, vrednost od $C(d)$ ako je $d=0$.

Pojednostavljena i modifikovana empirijska funkcija kovarijanse (Rapp, 1987) je:

$$C(d) = C_0 e^{-\log(2) \frac{d}{KU}}. \quad (4.22)$$

Korelaciona udaljenost KU se određuje numerički:

$$KU = \frac{\sum_2^n p_k b_k}{\log(2) \times \sum_2^{n_R} p_k} \quad (4.23)$$

gdje se b_k i p_k računaju kao:

$$b_k = -d_k \log \frac{C_k}{C_0} \quad (4.24)$$

$$p_k = \frac{1}{1 + (C_k - \frac{1}{2})^2} \quad (4.25)$$

dok veličine u jednačinama predstavljaju:

- d_k - udaljenost pojedinog razreda u [km],
- C_k - kovarijanse pojedinog razreda,
- C_0 - varijansa celog skupa.

Sumiranje brojioca i imenioca u jednačini (4.23) se izvodi samo za one razrede za koje se vrednost kovarijanse nalazi u intervalu između 30% i 70% varijanse celog skupa, kao i za one razrede u kojima je broj parova tačaka (frekvencija razreda) veća od polovine frekvencije prvog razreda.

4.3.3. Predikcija po metodi najmanjih kvadrata

Jednačina predikcije po metodi najmanjih kvadrata glasi (Moritz i Hofmann-Wellenhof, 2005)

$$\hat{\delta} = C_1 C_D^{-1} l. \quad (4.26)$$

Elementi vektora C_I računaju se iz analitičke funkcije kovarijanse u zavisnosti od udaljenosti između poznatih tačaka i posmatrane tačke čvorišta GRID-a ($d_1, d_2, d_3, \dots, d_7$ na slici 4.9), na osnovu jednačine

$$C_I = [C(d_1) \ C(d_2) \ C(d_3) \ C(d_4) \ C(d_5) \ C(d_6) \ C(d_7)]. \quad (4.27)$$

Elementi matrice C_D se računaju iz analitičke funkcije kovarijanse u zavisnosti od udaljenosti između svih kombinacija tačaka (d_{ij} je udaljenost između tačaka i, j), na osnovu jednačine

$$C_I = \begin{bmatrix} C(0) & C(d_{12}) & C(d_{13}) & C(d_{14}) & C(d_{15}) & C(d_{16}) & C(d_{17}) \\ C(d_{21}) & C(0) & C(d_{23}) & C(d_{24}) & C(d_{25}) & C(d_{26}) & C(d_{27}) \\ C(d_{31}) & C(d_{32}) & C(0) & C(d_{34}) & C(d_{35}) & C(d_{36}) & C(d_{37}) \\ C(d_{41}) & C(d_{42}) & C(d_{43}) & C(0) & C(d_{45}) & C(d_{46}) & C(d_{47}) \\ C(d_{51}) & C(d_{52}) & C(d_{53}) & C(d_{54}) & C(0) & C(d_{56}) & C(d_{57}) \\ C(d_{61}) & C(d_{62}) & C(d_{63}) & C(d_{64}) & C(d_{65}) & C(0) & C(d_{67}) \\ C(d_{71}) & C(d_{72}) & C(d_{73}) & C(d_{74}) & C(d_{75}) & C(d_{76}) & C(0) \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

dok je I vektor koji sadrži centrirane distorzije oslobođene trenda u svih sedam tačaka mreže

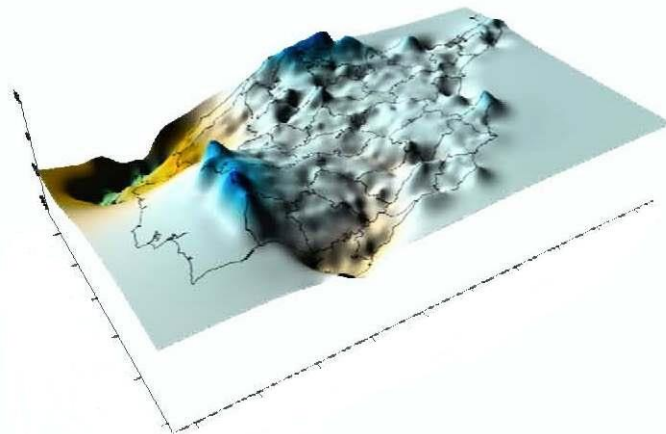
$$I = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6 \ \delta_7]. \quad (4.29)$$

Procena izraza predikcije po metodi najmanjih kvadrata je relativno jednostavan proces. Prostorna distribucija podataka može biti uzrok singulariteta matrice kovarijanse, što potom može dovesti do nestabilnosti matematičkog procesa. Singularitet matrice kovarijanse za posledicu ima nemogućnost predikcije distorzije u tačkama GRID-a ili predikciju netačne vrednosti zbog grešaka zaokruživanja u inverznoj matrici. Pri ovome je predikcija netačne vrednosti daleko opasnija zbog složene detekcije netačno odedenih vrednosti. Kako je matrica C_D uvek simetrična, za njenu inverziju je pogodno koristiti algoritam Cholesky-og. Na kraju, za konačnu vrednost distorzije u bilo kom čvorištu GRID-a treba predikovanju vrednosti dodati trend pokretne sredine, pa će biti

$$\hat{\delta}_{konačno} = \hat{\delta} + \delta'_{MOVA}. \quad (4.30)$$

4.4. Površ minimalne zakrivljenosti (MCS)

Površ minimalne zakrivljenosti ili MCS (engl. *Minimum Curvature Surface*) koristila se za položajnu transformaciju koordinata između severno-američkih datuma NAD27 i NAD83 (Dewhurst, 1990). Proces izrade ovog modela površi može se smatrati analognim procesu mehaničkog savijanja tanke metalne elastične ploče položene preko područja posmatranja. Pod uticajem isključivo vertikalnih sila i bez deformacija na lokacijama svih diskretnih tačaka dolazi do njenog prilagođavanja tačkama koje reprezentuju vrednosti distorzionih komponenti, i to bez ikakvih uticaja torzionih, kompresivnih ili ekstenzionih mehaničkih sila uz najmanje moguće savijanje ploče (minimalna zakrivljenost ploče). Praktičnu implementaciju ove metode kompjuterskim programom prvi je izveo (Briggs, 1974).



Slika 4.11: MCS distorzija površi (Javier González-Matesanz i dr., 2003)

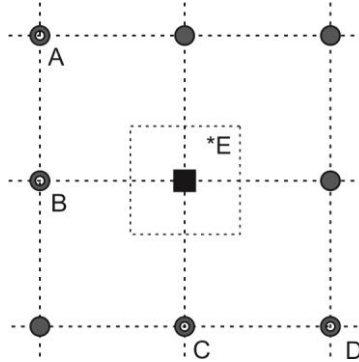
Na slici 4.11 je grafički prikazana MCS distorzija površi kao i deo površi izvan oblasti podataka na kome distorzije teže nuli, pri čemu se za transformaciju između lokalnog i globalnog geodetskog referentnog sistema koristi samo 7-parametarska transformacija sličnosti.

4.4.1. Briggs-ov algoritam

Na području celog GRID-a postoje dve vrste čvorova, i to oni za koje postoje opažane distorzije u neposrednoj okolini i oni bez bliskih opažanja.

Za čvorove GRID-a koji imaju opažanja distorzija u neposrednoj blizini (Slika 4.12) formira se sistem jednačina na osnovu koga se određuje vrednost

zakrivljenosti površi $C_{i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ koja se minimalizuje.



Slika 4.12: Računanje čvora kad je opažanje *E u blizini

U tom postupku prvo se određuju vrednosti 5 koeficijenata b_k tako da važi sledeće:

$$\sum b_k \xi_k = 0, \quad \sum b_k \eta_k = 0, \quad \sum b_k \xi_k^2 = 2, \quad \sum b_k \xi_k \eta_k = 0, \quad \sum b_k \eta_k^2 = 2, \quad (4.31)$$

gde su b_k koeficijenti koji se računaju na osnovu 4 okolna čvora GRID-a (tačke A, B, C i D) i jednog opažanja *E koje ne leži na čvoru GRID-a. U slučaju da opažanje *E ne leži u 1. kvadrantu gledajući od čvora koji se računa tačke A, B, C i D se biraju rotiranjem preko 8 okolnih čvorova. Problem se tako svodi na rešavanje sistema od 5 jednačina sa 5 nepoznatih veličina kao

$$\mathbf{A} \times \mathbf{b} = \mathbf{x} \quad (4.32)$$

gde je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_4^2 & \xi_5^2 \\ \xi_1 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \xi_3 \eta_3 & \xi_4 \eta_4 & \xi_5 \eta_5 \\ \eta_1^2 & \eta_2^2 & \eta_3^2 & \eta_4^2 & \eta_5^2 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

- vektor \mathbf{b} sadrži nepoznate koeficijente b_1, b_2, b_3, b_4 i b_5 ,
- vektor $\mathbf{x}^T = [0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0]$ je konstantan,
- koordinate su redom po stupcima za $A(-d_\lambda, d_\varphi), B(-d_\lambda, 0), C(0, -d_\varphi), D(d_\lambda, -d_\varphi)$ i za $*E(\xi_5, \eta_5)$.

Vrednost čvora se konačno računa kao

$$u_{i,j} = \sum_{k=1}^4 b_k u_k - \sum_{k=1}^5 b_k + b_5 w_n \quad (4.34)$$

gde je $u_{i,j}$ distorzija u čvoru (i, j) , u_k su distorzije u tačkama A, B, C i D, dok je w_n opažanje ili zadata distorzija u čvoru bliskom tački *E.

Ako se u blizini nekog čvora nalazi više opažanja tj. zadatih distorzija, predlaže se osrednjavanje njihovih vrednosti, tako da se pri tom osim same distorzije moraju osrednjiti i diferencijalne koordinatne razlike (ξ_5, η_5) .

Čvorovi koji nemaju opažanja (zadate distorzije) u neposrednoj blizini moraju se prvo klasifikovati prema svom položaju u GRID-u. Prema položaju u GRID-u diferencijalne jednačine glase (Briggs, 1974):

- za normalan slučaj kada je čvor dalje od ivice

$$\begin{aligned} & u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-2,j} + u_{i,j-2} \\ & + 2(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) \quad , \\ & - 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + 20u_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

- za slučaj kada je čvor na ivici

$$u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} - 4(u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j}) + 7u_{i,j} = 0, \quad (4.36)$$

- za slučaj kada je čvor za jedan red ili kolonu dalje od ivice

$$\begin{aligned} & u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i,j+2} \\ & + 2(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}) + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} \quad , \\ & - 8(u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j}) - 4u_{i,j-1} + 19u_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

- za slučaj kada je čvor u svakom od 4 ugla GRID-a

$$2u_{i,j} + u_{i,j+2} + u_{i+2,j} - 2(u_{i,j+1} + u_{i+1,j}) = 0, \quad (4.38)$$

- za slučaj kada je čvor u unutrašnjosti do ugla

$$\begin{aligned} & u_{i,j+2} + u_{i+2,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + 2u_{i+1,j+1} \\ & + 8(u_{i,j+1} + u_{i+1,j}) - 4(u_{i,j-1} + u_{i-1,j}) + 18u_{i,j} = 0' \end{aligned} \quad (4.39)$$

- za slučaj kada je čvor na ivici odmah do ugla

$$2u_{i,j+2} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+2,j} - 2u_{i-1,j} - 4(u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) + 6u_{i,j} = 0. \quad (4.40)$$

Iz navedenih 6 jednačina (4.35–4.40) se u iterativnom postupku određuje vrednost $u_{i,j}$ u svakoj novoj iteraciji, pa se tako na primer iz jednačine (4.36) vrednost u novoj iteraciji određuje kao

$$u_{i,j} = \left[4(u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j}) - (u_{i-2,j} + u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}) \right] / 7 \quad (4.41)$$

Za početne vrednosti distorzija u čvorovima GRID-a preporučljivo je da se postave neke približne veličine, kao što su recimo vrednosti pokretne sredine. Iterativni postupak se ponavlja sve dok apsolutna vrednost maksimalne razlike na bilo kom čvoru između dve poslednje iteracije više ne prelazi unapred zadatu vrednost.

U gornjim jednačinama (4.35–4.40) indeksiranje $u_{i+1,j+1}$ predstavlja vrednost GRID čvorišta koje je za jedan red i jednu kolonu odmaknuto od čvorišta koje se trenutno računa, odnosno ako se računa čvorište u 7. redu i 3. koloni, $u_{i+1,j+1}$ označava vrednost iz 8. reda i 4. kolone.

4.4.2. Splajnovi s napetošću

Nedostatke Briggs-ove metode koja je prvenstveno predviđena za vrlo uglačane tzv. potencijalne modele su uvideli (Smith i Wessel, 1990). Nedostaci o kojima je reč prvenstveno su se reflektovali u vidu velikih harmonijskih oscilacija u područjima GRID-a sa slabo ili potpuno nezastupljenim opažanjima, i to prvenstveno na tačkama infleksije. Iz tog razloga se uvodi pojam napetosti (engl. *Tension*) pa se originalne Briggs-ove jednačine u tom smislu i modifikuju. U ovom postupku ponovno se razlikuju čvorovi GRID-a sa opažanjem u nepostednoj blizini i oni bez takvog opažanja.

Za čvorove GRID-a koji imaju opažanje u neposrednoj blizini koeficijenti b_k se određuju analogno originalnoj Briggs-ovoj metodi, ali se sama vrednost čvorišta GRID-a određuje drugačije i to kao

$$z_{00} = \left\{ T_l \sum b_k - 2(1-T_l) \left[(1+\alpha^4) - (1+\alpha^2) \sum b_k \right] \right\}^{-1} \times \left\{ (1-T_l) \begin{pmatrix} z_{20} + z_{-20} + \alpha^4 (z_{02} + z_{0-2}) \\ + 2\alpha^2 (z_{11} + z_{-11} + z_{-1-1} + z_{-1-1}) \\ - 2(1+\alpha^2) [z_{10} + z_{-10} + \alpha^2 (z_{01} + z_{0-1}) + \sum b_k z_k] \\ - T_l \sum b_k z_k \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.42)$$

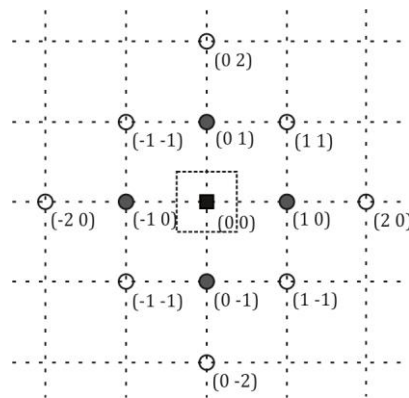
Indeksiranje z_{11} analogno je $u_{i+1,j+1}$ iz originalne Briggs-ove metode, dok bi se z_{0-2} po Briggs-u pisalo $u_{i,j-2}$. Veličina T_l predstavlja koeficijent unutrašnje napetosti (interne tenzije), dok je α anizotropnost samog GRID-a, odnosno predstavlja odnos:

$$\alpha = \frac{d_\lambda}{d_\phi} \quad (4.43)$$

Čvorovi GRID-a koji nemaju opažanje u blizini se u ovom slučaju određuju kao

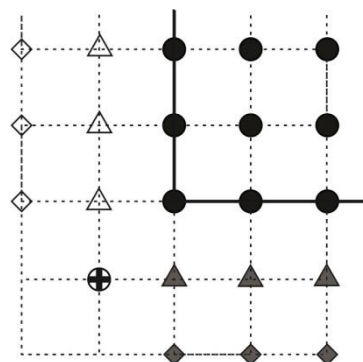
$$z_{00} = - \left[(6 + 8\alpha^2 + 6\alpha^4)(1-T_l) + 2(1+\alpha^2)T_l \right]^{-1} \times \left\{ (1-T_l) \left[z_{20} + z_{-20} + \alpha^4 (z_{02} + z_{0-2}) + 2\alpha^2 (z_{11} + z_{-11} + z_{-1-1} + z_{-1-1}) \right] - \left[4(1+\alpha^2)(1-T_l) + T_l \right] \left[z_{10} + z_{-10} + \alpha^2 (z_{01} + z_{0-1}) \right] \right\}. \quad (4.44)$$

Ova jednačina se grafički može interpretirati prikazom težina u okolini posmatranog čvora, što je na slici 4.13 predstavljeno crnim kvadratom.



Slika 4.13: Posmatrani čvor i indeksiranje susednih čvorova

Umesto posebnih uslova za ivice i uglove, celi GRID se proširuje sa dodatna dva reda, odnosno dve kolone levo i desno, odnosno gore i dole (Slika 4.14).



Slika 4.14: Proširenje GRID-a dodatnim redovima i kolonama

Nakon proširenja čvorovi proširenja se računaju na sledeći način:

- unutrašnji bliži dodati red ili kolona – konkretno za kolonu čvorova koja je dodata sa leve strane (beli trouglovi na slici 4.14)

$$z_{-10} = \frac{2(1-T_B)z_{00} - (1 - \frac{1}{2}T_B)z_{10}}{(1 - \frac{3}{2}T_B)} \quad (4.45)$$

- čvor na donjem levom uglu (precrtani krug na slici 4.14)

$$z_{-1-1} = z_{1-1} + z_{-11} - z_{11} \quad (4.46)$$

- kolona čvorova dodata krajnje levo (beli četvorouglovi na slici 4.14)

$$z_{-20} = z_{20} + \alpha^2(z_{11} + z_{1-1} - z_{-11} - z_{-1-1}) - 2(1 + \alpha^2)(z_{10} - z_{-10}) \quad (4.47)$$

Analogno ovom načinu računaju se ivične vrednosti za kolone koje su dodate desno i za rdove dodate iznad i ispod originalnog GRID-a. U jednačinama (4.45) do (4.47) T_B je koeficijent spoljašnje napetosti (*engl. Boundary tension*). Za relativno uglačane prirodne fenomene, npr. za potencijal sile teže (Smith i Wessel, 1990) predlažu maksimalne iznose za unutrašnju i spoljašnju napetost: $T_I < 0.25$ i $T_B < 0.10$, dok recimo za interpolaciju topografskih karakteristika predlažu $T_I > 0.35$ i $T_B < 0.20$. Ako se za obe vrednosti napetosti odabere $T_I = 0$ i $T_B = 0$, interpolovana površ će biti identična onoj koja se dobija po Briggs-ovoj metodi.

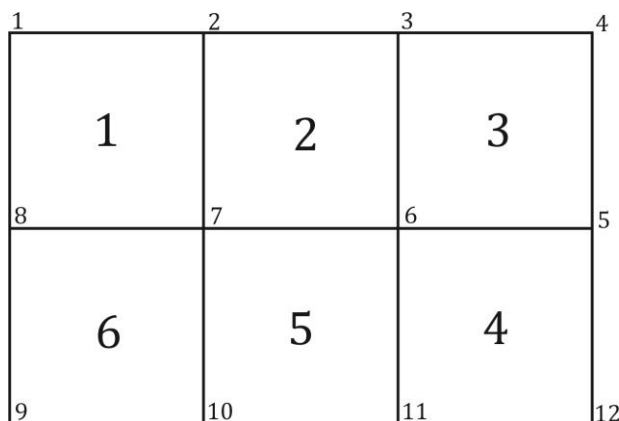
4.5. Transformacija podelom područja na konačne elemente (FEM)

Ovaj pristup baziran je na metodu konačnih elemenata (Finite Elements Method-FEM). Metod konačnih elemenata predstavlja numeričku tehniku za rešavanje parcijalnih diferencijalnih i integralnih jednačina. Iako se pristupi primene metoda konačnih elemenata u različitim oblastima međusobno razlikuju, mogu se prepoznati osnovne faze (Felippa, 2004):

1. Podela domena (područja) rešavanja na diskretne pod-domene koji se obično nazivaju elementi (diskretizacija);
2. Rešavanje problema po pojedinačnim elementima (analiza) i
3. Uslovi kontinuiteta između susednih elemenata (ujedinjenje, sinteza).

Ukoliko se usvoji pretpostavka da su distorzije prostornih podataka dugoperiodičnog karaktera, može se smatrati da one imaju minimalan uticaj na relativne odnose između bliskih tačaka uzorka prostornih podataka. Prema tome, ukoliko se celokupno područje transformacije podeli na proizvoljan broj dovoljno malih pod-područja (konačnih elemenata), uticaj distorzija prostornih podataka u okviru jednog elementa može se zanemariti. Forma pojedinačnih elemenata može biti različita u zavisnosti od prirode problema koji se razmatra od čega zavisi i metodologija za postizanje uslova kontinuiteta između susednih elemenata.

Neka je, na primer, područje transformacije podeljeno (diskretizovano) na n_e elemenata oblika četvorougla (Slika 4.15). Granične tačke koje formiraju pojedinačne elemente nazivaju se tačke čvorovi. Prema tome, svaka od n_c tačaka čvorova može učestvovati u formiranju najmanje jednog a najviše četiri konačna elementa.



Slika 4.15: Primer podele područja transformacije na konačne elemente

Na osnovu skupova geodetskih koordinata u globalnom geodetskom referentnom sistemu (B_{GRS} , L_{GRS} , h_{GRS}) i Državnom koordinatnom sistemu (B_{DKS} , L_{DKS} , h_{DKS}), za $n_t^{(i)}$ ($n_t^{(i)} \geq 3$) identičnih tačaka u okviru i – tog elementa ($i = 1, 2, \dots, n_e$), moguće je dobiti ocenu parametara trodimenzionalne transformacije sličnosti $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$, kao

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = -\left\{ \left[\mathbf{A}^{(i)} \right]^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \right\}^{-1} \left[\mathbf{A}^{(i)} \right]^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{l}^{(i)} \quad (4.48)$$

sa korespondentnom kovarijacionom matricom

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(i)} = \left(s_0^{(i)} \right)^2 \left[\left(\mathbf{A}^{(i)} \right)^T \mathbf{P}^{(i)} \mathbf{A}^{(i)} \right]^{-1}, \quad (4.49)$$

gde je $s_0^{(i)}$ eksperimentalna referentna varijansa za i – ti element

$$\left(s_0^{(i)} \right)^2 = \frac{\left(\mathbf{l}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}^{(i)} \right)^T \mathbf{P}^{(i)} \left(\mathbf{l}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)} \hat{\mathbf{x}}^{(i)} \right)}{3n_t^{(i)} - 7}, \quad (4.50)$$

pri čemu se podrazumeva da su, za svih $n_t^{(i)}$ identičnih tačaka, pored položajnih geodetskih koordinata u Državnom koordinatnom sistemu ($B_j^{(i)}\rangle_{DKS}$, ($L_j^{(i)}\rangle_{DKS}$, poznate i elipsoidne visine ($h_j^{(i)}\rangle_{DKS}$, ($j = 1, 2, \dots, n_t^{(i)}$). Ovo je moguće, obzirom da je, pri razmatranju samo položajnog problema, dovoljno poznavati aproksimativne vrednosti elipsoidnih visina ($h_j^{(i)}\rangle_{DKS}$. Takođe, parametri globalnog elipsoida GRS80 kao i lokalnog Bessel–ovog elipsoida su poznati, tako da razlike parametara elipsoida u procesu trodimenzionalne transformacije sličnosti nije potrebno ocenjivati.

Primenom parametara trodimenzionalne transformacije sličnosti $\mathbf{x}^{(i)}$ dobijaju se vrednosti ocenjenih (transformisanih) koordinata svih tačaka u okviru i – tog elementa ($\hat{B}_j^{(i)}\rangle_{DKS}$, ($\hat{L}_j^{(i)}\rangle_{DKS}$. Ocena tačnosti (kovarijaciona matrica) ovih koordinata može se dobiti iz izraza

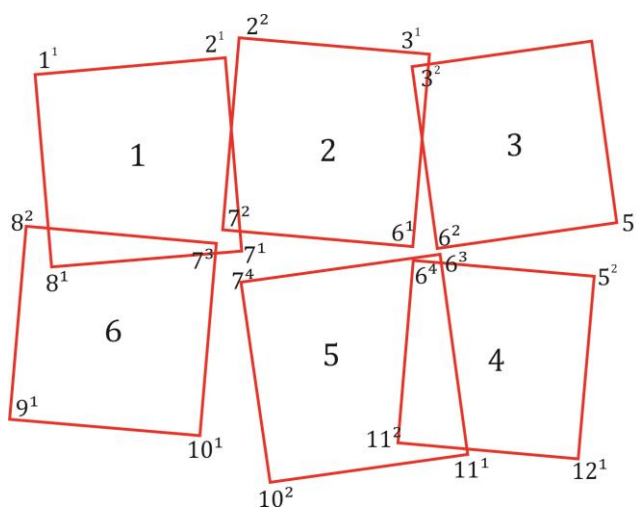
$$\mathbf{K}_{\hat{B}, \hat{L}}^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)} \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{(i)} \left(\mathbf{A}^{(i)} \right)^T. \quad (4.51)$$

Ukoliko su područja konačnih elemenata dovoljno mala onda se odstupanja

$$\begin{aligned} v_{B_j}^{(i)} &= \left(B_j^{(i)} \right)_{DKS} - \left(\hat{B}_j^{(i)} \right)_{DKS} \\ v_{L_j}^{(i)} &= \left(L_j^{(i)} \right)_{DKS} - \left(\hat{L}_j^{(i)} \right)_{DKS}, \quad i = 1, 2, \dots, n_e, \quad j = 1, 2, \dots, n_t^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

na $n_i^{(i)}$ identičnih tačaka i – tog elementa mogu smatrati čisto slučajnim veličinama, odnosno podrazumeva se da su ona rezultat isključivo prisustva slučajnih grešaka u koordinatama tačaka uzorka prostornih podataka.

Primena zasebnih parametara trodimenzionalne transformacije sličnosti za svaki elemenat $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n_e$) dovodi do višeznačnih rešenja za pozicije tačaka čvorova, odnosno za svaku od n_c tačaka čvorova, dobija se onoliko rešenja koliko i elemenata u čijem formiranju pojedinačna tačka čvor učestvuje (Slika 4.16).



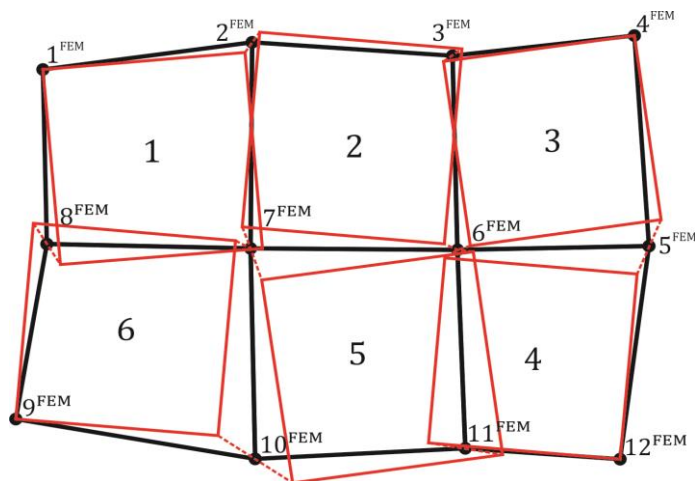
Slika 4.16: Relativni odnosi konačnih elemenata posle primene zasebnih parametara transformacije $\mathbf{x}^{(i)}$ po elementima

U cilju postizanja kontinuiteta između susednih elemenata, za definitivne (jedinstvene) vrednosti koordinata k – te tačke čvora može se tada usvojiti

$$\tilde{\mathbf{B}}_{DKS_k} = \frac{\sum_{l=1}^{n_{e_k}} \hat{\mathbf{B}}_{DKS_k}^{(l)}}{n_{e_k}} \quad \text{i} \quad \tilde{\mathbf{L}}_{DKS_k} = \frac{\sum_{l=1}^{n_{e_k}} \hat{\mathbf{L}}_{DKS_k}^{(l)}}{n_{e_k}}, \quad k = 1, \dots, n_c. \quad (4.53)$$

gde n_{e_k} može biti minimalno jedan a maksimalno četiri, u zavisnosti od broja konačnih elemenata u čijem formiranju svaka pojedinačna tačka čvor učestvuje.

Uslovi kontinuiteta podrazumevaju da se na svaki elemenat i primeni dodatna dvodimenzionalna transformacija tako da sve tačke čvorovi koje formiraju i – ti elemenat dobiju vrednosti (4.53) kao i da sve tačke na graničnim linijama susednih elemenata, posle transformacije, imaju jedinstvene vrednosti (Slika 4.17).



Slika 4.17: Relativni odnosi konačnih elemenata posle primene uslova kontinuiteta

Zbog jednostavnijeg matematičkog modela ova transformacija se obično vrši u nekom od sistema koordinata u ravni, kao što je recimo ravan Gauss-Krüger-ove projekcije.

Za svaku tačku čvor k na osnovu matematičkog modela projekcije mogu se odrediti vrednosti

$$\hat{y}_{DKS_k}^{(l)} = f_y(\hat{B}_{DKS_k}^{(l)}, \hat{L}_{DKS_k}^{(l)}) \quad \text{i} \quad \hat{x}_{DKS_k}^{(l)} = f_x(\hat{B}_{DKS_k}^{(l)}, \hat{L}_{DKS_k}^{(l)}), \quad l = 1, \dots, n_e \quad (4.54)$$

odnosno

$$\tilde{y}_{DKS_k} = f_y(\tilde{B}_{DKS_k}, \tilde{L}_{DKS_k}) \quad \text{i} \quad \tilde{x}_{DKS_k} = f_x(\tilde{B}_{DKS_k}, \tilde{L}_{DKS_k}), \quad k = 1, \dots, n_c \quad (4.55)$$

Za svaki element i ($i = 1, 2, \dots, n_e$) na raspolaganju će biti koordinate četiri tačke čvora dobijene primenom parametara trodimenzionalne transformacije sličnosti po elementima $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ (4.48), kao i izrazima (4.54) i (4.55), i to

$$\hat{y}_{DKS_1}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_1}^{(i)}, \hat{y}_{DKS_2}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_2}^{(i)}, \hat{y}_{DKS_3}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_3}^{(i)}, \hat{y}_{DKS_4}^{(i)}, \hat{x}_{DKS_4}^{(i)},$$

kao i korespondentne vrednosti dobijene osrednjavanjem (4.53) i izrazima (4.54) i (4.55), i to

$$\tilde{y}_{DKS_1}^i, \tilde{x}_{DKS_1}^i, \tilde{y}_{DKS_2}^i, \tilde{x}_{DKS_2}^i, \tilde{y}_{DKS_3}^i, \tilde{x}_{DKS_3}^i, \tilde{y}_{DKS_4}^i, \tilde{x}_{DKS_4}^i.$$

Na ove skupove koordinata može se primeniti dvodimenzionalna projektivna transformacija između koordinata tačaka čvorova karakterističnih za i -ti element i njihovih vrednosti dobijenih osrednjavanjem između susednih elemenata. Za svaku od četiri tačke čvora, koje formiraju i -ti element, mogu se napisati po dve jednačine projektivne transformacije

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{DKS_m}^i &= \frac{a_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + a_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + a_3}{c_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + c_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + 1}, \\ \tilde{x}_{DKS_m}^i &= \frac{b_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + b_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + b_3}{c_1 \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} + c_2 \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} + 1},\end{aligned}\quad m=1, 2, 3 \text{ i } 4 \quad (4.56)$$

odnosno

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{DKS_m}^i &= \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} a_1^i + \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} a_2^i + a_3^i - \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_m}^i c_1^i - \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_m}^i c_2^i, \\ \tilde{x}_{DKS_m}^i &= \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} b_1^i + \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} b_2^i + b_3^i - \hat{y}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_m}^i c_1^i - \hat{x}_{DKS_m}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_m}^i c_2^i,\end{aligned}\quad m=1, 2, 3, 4. \quad (4.57)$$

U matricnoj formi sistem jednačina (4.57) može se napisati kao

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{p}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n_e, \quad (4.58)$$

gde su

$$\mathbf{y}^i = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{DKS_1}^i \\ \tilde{x}_{DKS_1}^i \\ \tilde{y}_{DKS_2}^i \\ \tilde{x}_{DKS_2}^i \\ \tilde{y}_{DKS_3}^i \\ \tilde{x}_{DKS_3}^i \\ \tilde{y}_{DKS_4}^i \\ \tilde{x}_{DKS_4}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}^i = \begin{bmatrix} a_1^i \\ a_2^i \\ a_3^i \\ b_1^i \\ b_2^i \\ b_3^i \\ c_1^i \\ c_2^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n_e, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} \hat{y}_{DKS_1}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_1}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_1}^i & -\hat{x}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_1}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_1}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_1}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_1}^i & -\hat{x}_{DKS_1}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_1}^i \\ \hat{y}_{DKS_2}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_2}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_2}^i & -\hat{x}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_2}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_2}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_2}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_2}^i & -\hat{x}_{DKS_2}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_2}^i \\ \hat{y}_{DKS_3}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_3}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_3}^i & -\hat{x}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_3}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_3}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_3}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_3}^i & -\hat{x}_{DKS_3}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_3}^i \\ \hat{y}_{DKS_4}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_4}^{(i)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -\hat{y}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_4}^i & -\hat{x}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{y}_{DKS_4}^i \\ 0 & 0 & 0 & \hat{y}_{DKS_4}^{(i)} & \hat{x}_{DKS_4}^{(i)} & 1 & -\hat{y}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_4}^i & -\hat{x}_{DKS_4}^{(i)} \tilde{x}_{DKS_4}^i \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

Prema tome, na osnovu izraza (4.58) moguće je izračunati osam parametara projektivne transformacije za svaki element i . Transformisane vrednosti koordinata identičnih tačaka uzorka mogu se onda izračunati po sledećem algoritmu:

1. Primena parametara trodimenzionalne transformacije sličnosti na geodetske koordinate identičnih tačaka u globalnom geodetskom referentnom sistemu (B_{GRS}, L_{GRS}) za element u kojem je tačka sadržana. Kao rezultat, dobijaju se vrednosti koordinata identičnih tačaka na osnovu transformacije sličnosti $(\hat{B}_{DKS}, \hat{L}_{DKS})$;
2. Računanje vrednosti koordinata identičnih tačaka u ravni Gauss-Krüger-ove projekcije $(\hat{y}_{DKS}, \hat{x}_{DKS})$, na osnovu vrednosti $(\hat{B}_{DKS}, \hat{L}_{DKS})$;
3. Primena parametara projektivne transformacije na koordinate identičnih tačaka u ravni Gauss-Krüger-ove projekcije $(\hat{y}_{DKS}, \hat{x}_{DKS})$, za element u kojem je tačka sadržana, izrazima (4.56). Kao rezultat, dobijaju se transformisane vrednosti koordinata identičnih tačaka u ravni Gauss-Krüger-ove projekcije $(\tilde{y}_{DKS}, \tilde{x}_{DKS})$;
4. Računanje transformisanih vrednosti položajnih geodetskih koordinata identičnih tačaka $(\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS})$ na osnovu vrednosti $(\tilde{y}_{DKS}, \tilde{x}_{DKS})$.

Vrednosti transformisanih koordinata identičnih tačaka $(\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS})$, dobijene na ovaj način, oslobođene su uticaja distorzija prostornih podataka u meri u kojoj je validna polazna pretpostavka da je uticaj distorzija prostornih podataka u okviru jednog elementa zanemarljiv.

Ocena tačnosti transformisanih vrednosti geodetskih koordinata tačaka (identičnih tačaka) može se izvršiti na osnovu izraza (4.51). Naime, obzirom da su promene položajnih geodetskih koordinata $(\tilde{B}_{DKS}, \tilde{L}_{DKS})$ u odnosu na vrednosti dobijene transformacijom sličnosti $(\hat{B}_{DKS}, \hat{L}_{DKS})$ relativno male (obično reda nekoliko centimetara), primenom zakona o rasprostiranju varijansi na izraze (4.56) može se zaključiti da su njihove varijanse (standardne devijacije) približno jednake, odnosno

$$\sigma_{\tilde{B}, \tilde{L}}^i \approx \sigma_{\hat{B}, \hat{L}}^i. \quad (4.61)$$

Ipak, objektivnija slika o tačnosti ovih koordinata (Jäger i dr., 2003) može se dobiti na osnovu upoređenja sa poznatim vrednostima (B_{DKS}, L_{DKS}) , odnosno na osnovu "reproduktivnih vrednosti"

$$\tilde{v}_B = B_{DKS} - \tilde{B}_{DKS} \quad \text{i} \quad \tilde{v}_L = L_{DKS} - \tilde{L}_{DKS}. \quad (4.62)$$

Prosečne vrednosti eksperimentalnih standardnih devijacija položajnih koordinata \tilde{B}_{DKS} , \tilde{L}_{DKS} za celokupno područje transformacije mogu se tada dobiti iz izraza

$$s_{\tilde{B}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [(B_{DKS})_i - (\tilde{B}_{DKS})_i]^2}{n}} \quad \text{i} \quad s_{\tilde{L}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [(L_{DKS})_i - (\tilde{L}_{DKS})_i]^2}{n}}. \quad (4.63)$$

obzirom da su jedino na celom području transformacije vrednosti (4.62) centrirane veličine.

4.6. Transformacija po modelu uklapanja projekcije – FIT model

Na području Švedske, u okviru teritorijalnih jedinica koje predstavljaju opštine, u postupku transformacije koordinata koristi se GRID model. U svakoj od opština razlikuje se kako su ovi modeli uspostavljeni, pri čemu vrlo mali broj njih ima gedoetsku definiciju kojom je moguće direktno pretvoriti (x, y) koordinate grida u vrednosti geografske širine i dužine, što izaziva značajne probleme tokom kreiranja transformacije u Švedski referentni sistem SWEREF 99.

Način da se ustanove transformacioni parametri bez korišćenja 2D Helmertove transformacije je bio da se primeni metod zasnovan na transverzalnoj merkatorovoj projekciji (TM projekciji) koji je nazvan "uklapanje projekcije". Ideja ovakvog pristupa protekla je od Ilmar Ussiso 1977 godine. On je projektovao koordinate tačaka (φ, λ) iz sistema ED50 u vrednosti (x, y) na Hajfordov elipsoid sa centralnim meridijanom geografske dužine $15^\circ 48' 23.0''$, nakon čega je uklopio rezultate u državni sistem RT 38 2.5 gon V korišćenjem 2D Helmertove transformacije.

S obzirom da TM projekcija sadrži mogućnost ponovnog podešavanja razmere i modulisanja koordinata, što u principu odgovara parametrima razmere i translaciji u 2D Helemertovoj transformaciji, to je dalo ideju da se nađu parametri projekcije, koji direktno daju koordinate grida, takve da se što bolje podudaraju sa vrednostima u državnom sistemu RT 38 2.5 gon V, bez primene Helmertove transformacije (Reit, 2009).

U ovom postupku usvojena je prigodna približna vrednost za centralni meridijan, izvršena je transformacija i primenjeno Helemertovo uklapanje. Zatim su parametri razmere i translacije iz postupka uklapanja upotrebljeni kao parametri projekcije u novom proračunu u kom je izravnata vrednost centralnog meridijana. Ova procedura je ponavljana sve dok dobijeni rezultai nisu bili dovoljno dobri. U poređenju sa Ilmar Ussiso-vim metodom dobijeni rezultati su ipak bili lošiji. To je dovelo do napuštanja metoda delimičnog ručnog računanja pa je u programskom jeziku Fortran napisan program za potrebe istovremenog određivanja vrednosti svih parametara projekcije primenom metode najmanjih kvadrata (maj 2004. godine) čime je u potpunosti definisana metoda uklapanja projekcije.

4.6.1. Prelaz iz (φ, λ) u (x, y) zasnovan na TM projekciji sa formulama Gauss-Krüger-a

Ideja je dakle da se transformišu koordinate između dva geodetska referentna okvira pomoću proračuna projekcije, pri čemu se parametri projekcije određuju u iterativnom postupku analogno onom koji se koristi za 3D Helemertovu transformaciju (fit). Metod je implementiran za transverzalnu merkatorovu projekciju, tako što su transformisane (φ, λ) koordinate sa površi elipsoida u pravougle (x, y) koordinate u projekcionoj ravni po Gauss-Krüger-ovoj metodi. U okviru ove metode osnovni simboli i definicije su:

- a - velika poluosa elipsoida,
- f - spljoštenost elipsoida,
- e^2 - prvi brojni ekscentricitet,
- φ - geodetska širina, pozitivni pravac Severa,
- λ - geodetska dužina, pozitivni pravac Istoka,
- x - koordinata grida, pozitivni pravac Severa,
- y - koordinata grida, pozitivni pravac Istoka,
- λ_0 - geodetska dužina centralnog meridijana,

- k_0 - faktor razmere duž centralnog meridijana,
 x_0 - modul po pravcu Severa,
 y_0 - modul po pravcu Istoka,

pri čemu su svi uglovi (geodetska širina i dužina i dr.) izraženi u radijanima.

Na osnovu parametara elispoida a i f računaju se sledeći veličine:

$$\begin{aligned}
 e^2 &= f(2-f) \\
 n &= \frac{f}{(2-f)} \\
 \hat{a} &= \frac{a}{(1+n)} \left(1 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{64}n^4 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Konformna širina φ^* se računa kao

$$\varphi^* = \varphi - \sin \varphi \cos \varphi (A + B \sin^2 \varphi + C \sin^4 \varphi + D \sin^6 \varphi + \dots), \quad (4.64)$$

gde se koeficijenti A, B, C i D dobijaju iz formula:

$$\begin{aligned}
 A &= e^2 \\
 B &= \frac{1}{6}(5e^4 - e^6) \\
 C &= \frac{1}{120}(104e^6 - 45e^8 + \dots) \\
 D &= \frac{1}{1260}(1237e^8 + \dots)
 \end{aligned}$$

Definišu se ξ' i η' kao

$$\xi' = \arctan(\tan \varphi^* / \cos(\lambda - \lambda_0)), \quad (4.65)$$

$$\eta' = \operatorname{arctanh}(\cos \varphi^* \sin(\lambda - \lambda_0)). \quad (4.66)$$

Zatim se dobija

$$\begin{aligned}
 x &= k_0 \hat{a} (\xi' + \beta_1 \sin 2\xi' \cosh 2\eta' + \beta_2 \sin 4\xi' \cosh 4\eta' + \\
 &\quad + \beta_3 \sin 6\xi' \cosh 6\eta' + \beta_4 \sin 8\xi' \cosh 8\eta' + \dots) + x_0,
 \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned}
 y &= k_0 \hat{a} (\eta' + \beta_1 \cos 2\xi' \sinh 2\eta' + \beta_2 \cos 4\xi' \sinh 4\eta' + \\
 &\quad + \beta_3 \cos 6\xi' \sinh 6\eta' + \beta_4 \cos 8\xi' \sinh 8\eta' + \dots) + y_0,
 \end{aligned} \quad (4.68)$$

gde se koeficijenti $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ i β_4 računaju kao

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 + \dots \\
\beta_2 &= \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 + \dots \\
\beta_3 &= \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 + \dots \\
\beta_4 &= \frac{49561}{161280}n^4 + \dots
\end{aligned} \tag{4.69}$$

4.6.2. Uklapanje projekcije zasnovano na TM projekciji sa formulama Gauss-Krüger-a

U postupku uklapanja projekcije date veličine predstavlja određen broj tačaka sa poznatim geodetskim koordinatama (φ, λ) , pri čemu su takođe poznate koordinate (x, y) u grid sistemu. Traži se TM projekcija kojom se konvertuju date geodetske koordinate (φ, λ) u grid koordinate (x, y) tako da se one poklapaju sa datim (x, y) vrednostima koordinata.

Da bi se izvela TM projekcija potrebno je odrediti geodetska dužina centralnog meridijana (λ_0) , faktor razmere duž centralnog meridijana (k_0) i vrednosti modula (x_0) i (y_0) , uz pretpostavku da su parametri elipsoida koji se koristi, velika poluosa (a) i spljoštenost (f) , poznati.

Vrednosti x i y se posmatraju kao funkcije parametara projekcije u skladu sa sledećim relacijama

$$\begin{aligned}
x &= x(\lambda_0, k_0, x_0, y_0) \\
y &= y(\lambda_0, k_0, x_0, y_0)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Razvijanjem funkcija u Tejlorov red u okolini približnih vrednosti (λ_0) , (k_0) , (x_0) i (y_0) jednačine merenja (4.70) tada postaju

$$x + v_x = x((\lambda_0), (k_0), (x_0), (y_0)) + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda_0}\right)_0 \Delta \lambda_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial k_0}\right)_0 \Delta k_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)_0 \Delta x_0 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)_0 \Delta y_0 \tag{4.71}$$

$$y + v_y = y((\lambda_0), (k_0), (x_0), (y_0)) + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_0}\right)_0 \Delta \lambda_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial k_0}\right)_0 \Delta k_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)_0 \Delta x_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)_0 \Delta y_0 \tag{4.72}$$

gde su $\Delta\lambda_0$, Δk_0 , Δx_0 i Δy_0 nepoznate popravke približnih vrednosti a v_x i v_y reziduali merenih (poznatih) vrednosti x i y .

Izrazi za parcijalne izvode proizilaze iz formula Gauss-Krüger-a (4.67) i (4.68) pa se dobija

$$x = k_0 \hat{a} f(\xi'(\lambda_0), \eta'(\lambda_0)) + x_0 \quad (4.73)$$

$$y = k_0 \hat{a} g(\xi'(\lambda_0), \eta'(\lambda_0)) + y_0 \quad (4.74)$$

pri čemu su parcijalni izvodi

$$\frac{\partial x}{\partial k_0} = a f \quad \frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 \quad \frac{\partial x}{\partial y_0} = 0 \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial y}{\partial k_0} = a g \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial y_0} = 1 \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_0} = k_0 \hat{a} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial \lambda_0} \right\} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_0} = k_0 \hat{a} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \xi'} \frac{\partial \xi'}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial g}{\partial \eta'} \frac{\partial \eta'}{\partial \lambda_0} \right\} \quad (4.78)$$

U skladu sa jednačinama (4.67), (4.68), (4.73) i (4.74) sledi da je

$$f(\xi', \eta') = \xi' + \sum_{i=1}^4 \beta_i \sin 2i\xi' \cosh 2i\eta' + \dots \quad (4.79)$$

$$g(\xi', \eta') = \eta' + \sum_{i=1}^4 \beta_i \cos 2i\xi' \sinh 2i\eta' + \dots \quad (4.80)$$

Četiri člana u razvijanju funkcije u Tejlorov red je više nego dovoljno za milimetarsku tačnost.

Iz jednačina (4.79) i (4.80) proizilazi da je

$$\frac{\partial f}{\partial \xi'} = 1 + \sum_{i=1}^4 2i\beta_i \cos 2i\xi' \cosh 2i\eta' + \dots \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta'} = \sum_{i=1}^4 2i\beta_i \sin 2i\xi' \sinh 2i\eta' + \dots \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi'} = -\sum_{i=1}^4 2i\beta_i \sin 2i\xi' \sinh 2i\eta' + \dots \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \eta'} = 1 + \sum_{i=1}^4 2i\beta_i \cos 2i\xi' \cosh 2i\eta' + \dots \quad (4.84)$$

Poređenjem jednačine (4.81) i (4.82) sa jednačinama (4.83) i (4.84), dolazi se do zaključka da su jednačine (4.81) i (4.84) međusobno identične, dok osim predznaka isto važi i za jednačine (4.82) i (4.83), odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial \xi'} = \frac{\partial g}{\partial \eta'} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta'} = -\frac{\partial g}{\partial \xi'}.$$

Ovo su upoštene relacije koje važe za sve konformne prikaze i obično se zovu diferencijalne jednačine Cauchy-Riemann-a.

Konačno, iz jednačina (4.65) i (4.66) slede izrazi

$$\frac{\partial \xi'}{\partial \lambda_0} = -\frac{\sin \varphi^* \cos \varphi^* \sin(\lambda - \lambda_0)}{\sin^2 \varphi^* + \cos^2 \varphi^* \cos^2(\lambda - \lambda_0)}, \quad (4.85)$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \lambda_0} = -\frac{\cos \varphi^* \cos(\lambda - \lambda_0)}{\sin^2 \varphi^* + \cos^2 \varphi^* \cos^2(\lambda - \lambda_0)}. \quad (4.86)$$

Na ovaj način su definisane sve potrebne veličine za formiranje jednačina merenja, izuzev približnih vrednosti nepoznatih parametara pre prve iteracije. S obzirom da su moduli x_0 i y_0 linearni delovi jednačina (4.73) i (4.74), za njihove približne vrednosti mogu da se usvoje nule, pri čemu izvršena testiranja pokazuju da se nula može usvojiti i kao približna vrednost geodetske dužine centralnog meridijana λ_0 . U cilju poboljšanja konvergencije u postupku računanja, za vrednost λ_0 može da se usvoji srednja vrednost najmanje i najveće geodetske dužine poznatih tačaka. Za približnu vrednost faktora razmere duž centralnog meridijana k_0 , pogodno je usvojiti vrednost 1.

Vrednosti popravaka nepoznatih parametara predstavljaju ocenjene vrednosti i dobijaju se kao rešenja linearnog sistema jednačina, koga karakteriše suvišan broj merenja, tj. veći broj jednačina u odnosu na broj nepoznatih veličina, primenom metode najmanjih kvadrata. Ocenjene vrednosti popravaka se nakon toga dodaju približnim vrednostima nepoznatih parametara, čime se dobijaju nove približne vrednosti za sledeću iteraciju. U ovom postupku određivanja definitivnih vrednosti nepoznatih parametara rezultati iteracija vrlo brzo konvergiraju.

4.6.3. Uklapanje projekcije kombinovano sa Helmertovom transformacijom u ravni

S obzirom da i TM i 2D Helmertova transformacija uključuju faktor razmere i modulisanje x i y koordinata, određena zabuna nastaje prilikom imenovanja ulaznih promenljivih. U TM projekciji zadržavaju se sva imena promenljivih iz prethodne sekcije, sa izuzetkom preimenovanja koordinata dobijenih iz leve strane jednačina (4.79) i (4.80) x' i y' . To su koordinate koje trebaju dalje da se transformišu pomoću 2D Helmertove transformacije. 2D Helmertova transformacija je transformacija sličnosti u ravni, tj. u dve dimenzije, pa je potrebno odrediti samo 4 parametra, i to: faktor razmere (s_H), ugao rotacije (α) i dva parametra translacije (x_{0H}) i (y_{0H}).

Helmertova transformacija u ravni se izvodi na osnovu sledećeg izraza

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{0H} \\ y_{0H} \end{pmatrix} + s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (4.87)$$

gde je \mathbf{R} matrica rotacije definisana kao

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Definitivne koordinate x i y sada su funkcije osam parametara, i to

$$\begin{aligned} x &= x(\lambda_0, k_0, x_0, y_0, s_H, \alpha, x_{0H}, y_{0H}) \\ y &= y(\lambda_0, k_0, x_0, y_0, s_H, \alpha, x_{0H}, y_{0H}) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Jednačine merenja se formiraju analogno jednačinama (4.71) i (4.72), sa razlikom što se još dodaju članovi za Δs_H , $\Delta \alpha$, Δx_{0H} i Δy_{0H} . Parcijalni izvodi su takođe donekle modifikovani, odnosno

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial k_0} \\ \frac{\partial y}{\partial k_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial k_0} \\ \frac{\partial y'}{\partial k_0} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial y'}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{pmatrix} = s_H \mathbf{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Parcijalni izvodi za x' i y' u odnosu na k_0 i λ_0 u jednačini (4.90) su dobijeni iz jednačina (4.75), (4.76) i (4.77), (4.78).

Novi parametri se određuju na osnovu

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_H} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s_H} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \alpha} \end{pmatrix} = s_H \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (4.92)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_{0H}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_{0H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_{0H}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y_{0H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.93)$$

Vrednosti popravaka nepoznatih parametara predstavljaju ocenjene vrednosti dobijene kao rešenja linearnog sistema jednačina po modelu posrednog izravnjanja, primenom metode najmanjih kvadrata. Procedura se sastoji iz iteracija tokom kojih se približnim vrednostima dodaju ocenjene popravke iz prethodne iteracije. Za početnu vrednost faktora razmere (s_H), u iterativnom postupku, može da se usvoji vrednost 1, dok je za preostala tri parametra (α), (x_{0H}) i (y_{0H}) vrednost 0 pogodna početna vrednost.

S obzirom da i TM projekcija i 2D Helmertova transformacija sadrže nepoznat faktor razmere kao i translacije vrednosti koordinata x i y , pri pokušaju ocene svih parametara u okviru samo jednog uklapanja, linearni sistem jednačina postaje singularan. Iz tog razloga potrebno je popraviti jedan od faktora razmere i jednu od translacija x i y , respektivno, do vrednosti koje su prethodno ocenjene. Na primer, za vrednost razmere TM projekcije može da se usvoji vrednost 1, a za module x_0 i y_0 vrednosti 0 i 1500000 (Reit, 2009), respektivno.

4.6.4. Iskustva u upotrebi modela uklapanja projekcije

Kako različite projekcije na različit način deformišu prikaz u projekcionoj ravni kod metode uklapanja projekcije je potrebno zadovoljiti uslov da grid koordinate potiču iz TM projekcije.

U TM projekciji deformacije rastu sa povećanjem rastojanja od centralnog meridijana, dok, na primer, kod Lambertove projekcije deformacije rastu sa povećanjem rastojanja od standardnih paralela (Reit, 2009).

Za jako male oblasti (najviše nekoliko kilometara) grid sistem sa Lambertovom geometrijom može da se aproksimira TM projekcijom, ali je činjenica takođe da greške rapidno rastu sa povećanjem veličine oblasti.

Sledeći uslov za primenu metode uklapanja projekcije je da x-osa lokalnog sistema mora da bude paralelna sa projekcijom centralnog meridijana. Sprovedena istraživanja na području različitih opština u Švedskoj pokazuju da loša orijentacija lokalnog sistema onemogućava dobro uklapanje između projektovanih i lokalnih koordinata tačaka. U takvim situacijama dobijeni reziduali su proporcionalni rotaciji i povećavaju se linearno sa povećanjem veličine oblasti koju obuhvata lokalni sistem.

Nezavisno od grešaka izazvanih time što lokalni sistem nema TM geometriju ili time što je zarotiran, postoje neslaganja (nepodudarnosti) koje se javljaju usled razlika u razmeri u okviru definicije referentnih okvira (zakrivljenost elipsoida itd.). Ova neslaganja se takođe povećavaju sa povećanjem veličine oblasti. Trenutna istraživanja u Švedskoj (Reit, 2009) pokazuju da je uticaj veličine oblasti takav da neslaganja na celoj teritoriji Švedske, kao jednoj oblasti, ne prelaze 1-2 dm. Za manje oblasti, recimo 50kmx50km, greška je manja od 1mm.

5. Mogućnosti primene različitih modela transformacije na području Srbije

Istraživanje mogućnosti primene različitih modela transformacije prostornih podataka između globalnog i lokalnog geodetskog referentnog sistema na području Republike Srbije je realizovano na osnovu raspoloživih i preuzetih podataka o koordinatama trigonometrijskih tačaka svih redova u oba sistema. Područje koje je obuhvaćeno ovim istraživanjem jeste celo područje Republike Srbije izuzev teritorije Autonomne pokrajine Kosovo i Metohija.

5.1. Raspoloživi podaci

5.1.1. Preuzimanje i priprema podataka

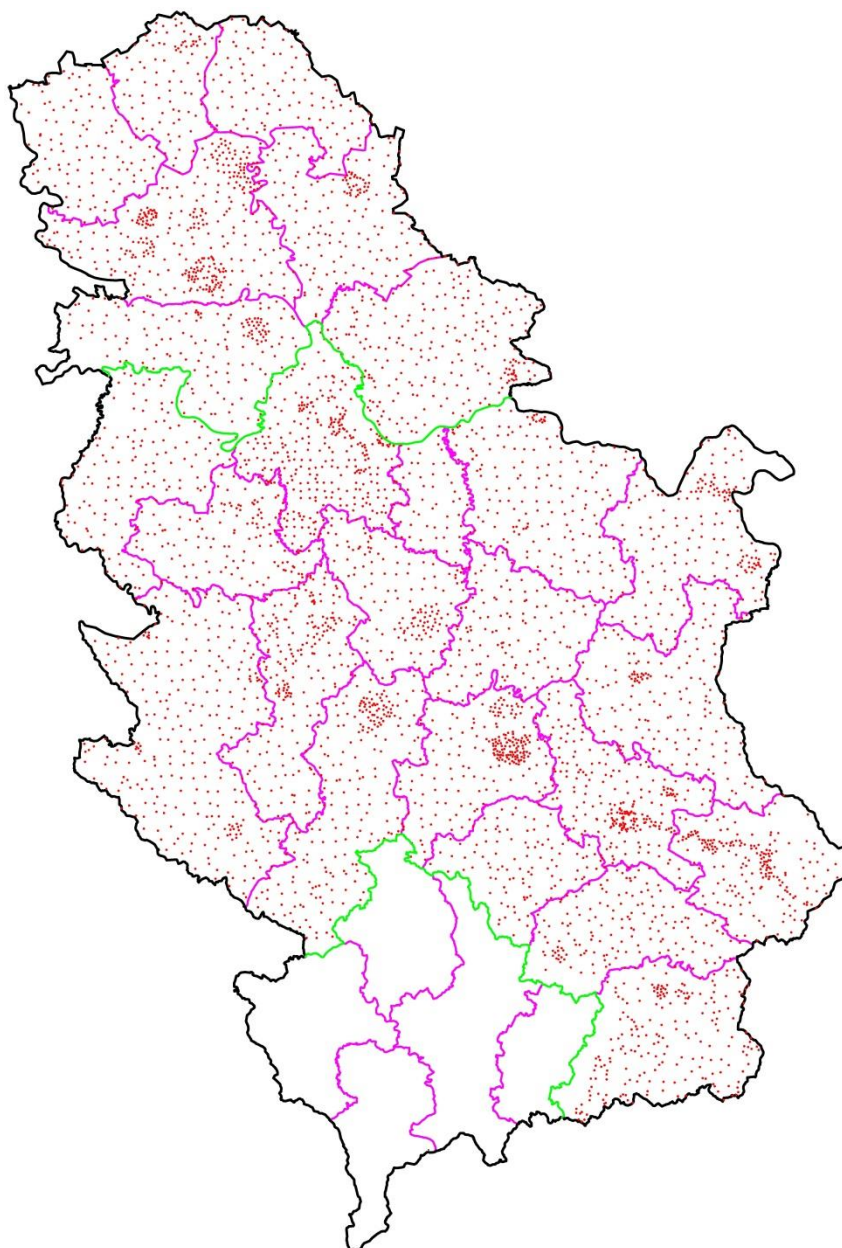
Preuzimanje podataka potrebnih za istraživanje u okviru ove disertacije je izvršeno na osnovu zahteva upućenog Republičkom geodetskom zavodu koji je na Građevinskom fakultetu univerziteta u Beogradu zaveden pod brojem 02-319/2016 dana 14.06.2016. godine. Po ovom zahtevu Republički geodetski zavod – Odeljenje arhiva je dostavilo podatke o koordinatama tačaka na području R. Srbije i to u oba sistema, tj. koordinate tačaka (y, x, H) starog državnog koordinatnog sistema u Gaus-Krigerovoj projekciji i pravouglo trodimenzionalne koordinate (X, Y, Z) istih tačaka koje se odnose na referentni okvir ITRF96. Preuzeti podaci su se odnosili na skup od ukupno 4509 trigonometrijskih tačaka svih redova (Slika 5.1).

Sa slike 5.1 vidi se da preuzeti skup tačaka predstavlja polje zajedničkih tačaka koje relativno homogeno pokriva celokupnu teritoriju Republike Srbije. Ovaj skup tačaka korišćen je za ocenjivanje parametara transformacionog modela.

Da bi koordinate zajedničkih tačaka u postojećem i novom referentnom sistemu Republike Srbije mogle da posluže za formulisanje transformacionog modela i ocenjivanje parametara transformacije, formirana je datoteka u tekstualnom ASCII formatu. Iz praktičnih razloga sve koordinate izražene su u linearnim jedinicama. Svaka zajednička tačka zauzima jedan red u datoteci, i to sa podacima u sledećem redosledu i formatu:

- Naziv (ime ili broj) zajedničke tačke,
- Pravougle trodimenzionalne koordinate zajedničke tačke u novom referentnom sistemu, X, Y, Z u [m],
- Pravougle koordinate zajedničke tačke u postojećem referentnom sistemu y, x (u Gaus-Kriggerovoj projekciji), i njena visina H u [m].

Format datoteke je slobodan, tako da separatore pojedinih numeričkih vrednosti u svakom redu predstavlja jedno ili više praznih mesta. U nazivu zajedničke tačke nema praznih mesta niti specijalnih karaktera.



Slika 5.1: Dispozicija skupa zajedničkih tačaka na području Republike Srbije

5.1.2. Kontrola kvaliteta preuzetih podataka

Pre početka korišćenja, datoteka sa preuzetim skupom tačaka, odnosno podacima o nazivima i koordinatama zajedničkih tačaka prvo je iskontrolisana. Osnovne kontrole koje su u tom pogledu sprovedene su sledeće:

- Nanošenje (plotovanje) zajedničkih tačaka na kartu sa granicama Republike Srbije i vizuelna inspekcija dobijenog rezultata. Na osnovu ove kontrole utvrđivalo se da li neka od njih pada izvan državne teritorije, odnosno da li su koordinate ispravno unete u datoteku.
- Utvrđivanje da li dve ili više zajedničkih tačaka ima isti naziv, što može biti pokazatelj dupliranja imena tačaka ili neispravno unetih koordinata.
- Računanje horizontalnog rastojanja parova zajedničkih tačaka u svim mogućim kombinacijama i utvrđivanje minimalne vrednosti tog rastojanja. Ova kontrola pokazivala je da li su koordinate zajedničkih tačaka ispravno unete u datoteku.

Rezultat sprovedenih osnovnih kontrola je pokazao da u skupu preuzetih podataka, tj. u formiranoj datoteci u ASCII formatu, nije bilo pogršno unetih podataka.

U daljem postupku kontrole kvaliteta preliminarno su ocenjeni parametri Helmertove transformacije sličnosti (T7D) na osnovu koordinata svih zajedničkih tačaka. S obzirom na to da je primenjen postupak ocenjivanja po metodi najmanjih kvadrata, na ovaj način dobijene su i rezultujuće popravke. Popravke predstavljaju meru saglasnosti novog i postojećeg referentnog sistema, tako da su poslužile za testiranje na prisustvo grubih odnosno nesaglasnih koordinata zajedničkih tačaka. U tu svrhu koršćene su popravke po koordinatnim osama postojećeg referentnog sistema v_y, v_x .

Postupak testiranja grubih grešaka pomoću popravaka v_y, v_x realizovan je na sledeći način:

- Na osnovu n popravaka v_y, v_x računata su standardne devijacije duž koordinatnih osa y, x i ukupna odstupanja v_p :

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_y^2}{n}}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_x^2}{n}}, \quad v_p = \sqrt{v_y^2 + v_x^2}. \quad (5.1)$$

- Određena je standardna devijacija horizontalnog položaja svake zajedničke tačke:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}. \quad (5.2)$$

- Standardne devijacije horizontalnih položaja zajedničkih tačaka sortirane su po veličini da bi se identifikovala ona sa maksimalnom vrednošću $\sigma_{p,\max}$.

- Ukupno odstupanje svake zajedničke tačke upoređeno je sa maksimalnom vrednošću standardne devijacije horizontalnog položaja. Da bi se zajednička tačka zadržala u skupu morao je biti ispunjen kriterijum koji glasi:

$$v_p \leq 3\sigma_p. \quad (5.3)$$

Svaka zajednička tačka koja nije ispunjavala gornji kriterijum je izbačena iz datoteke zajedničkih tačaka, i ceo postupak ocenjivanja parametara transformacije i popravaka je ponavljan. Ceo postupak je realizovan tako što je u svakom koraku vršeno izbacivanje samo po jedne zajedničke tačke.

U prvom koraku ocenjeni su parametri Helmertove transformacije sličnosti na osnovu koordinata svih 4509 zajedničkih tačaka na području Republike Srbije. Za sve tačke određene su popravke po koordinatnim osama v_y, v_x i ukupna odstupanja v_p , nakon čega prema (5.2) i standardna devijacija horizontalnog položaja σ_p , te su sortirane po veličini u cilju identifikacije tačke sa maksimalnom vrednošću popravke $v_{p,\max}$ (Prilog 1). Za skup od 4509 zajedničkih tačaka prema (5.1) i (5.2) dobijeni su sledeći rezultati standardnih devijacija:

Tabela 5.1: Standardne devijacije za skup od 4509 zajedničkih tačaka

σ_y [m]	σ_x [m]	σ_p [m]	$3\sigma_p$ [m]	$v_{p,\max}$ [m]
0.506	0.500	0.712	2.136	2.837

Tačka sa maksimalnom vrednošću popravke $v_{p,\max} = 2,837\text{m}$ koja je veća od granične vrednosti $3\sigma_p = 2,136\text{m}$ u skupu od 4509 zajedničkih tačaka je tačka sa

nazivom 69/K5 i ona je u prvom krugu testiranja nesaglasnih koordinata zajedničkih tačaka izbačena iz ovog skupa.

Po napred opisanom postupku po kome se u svakom narednom koraku izbacuje samo po jedna nesaglasna zajednička tačka sukcesivno je iz skupa zajedničkih tačaka izbačeno još 18 tačaka, i to tačke: 42/K5, 62/K5, 11/K5, 1265/S25, 72/K5, 54/K5, 253/P24, 58/K5, 36/K5, 22/K5, 170C/SH7, 146/K5, 32/K5, 4/A/S25, 163/K5, 166/S25, 278/S25 i 643/G8. Testiranjem skupa zajedničkih tačaka na prisustvo grubih grešaka, odnosno nesaglasnih koordinata zajedničkih tačaka, od polaznih 4509 tačaka izbačeno je ukupno 19 tačaka, čime je za dalji postupak istraživanja različitih transformacionih modela ostao skup od 4490 zajedničkih tačaka koje zadovoljavaju postavljeni kriterijum prema izrazu (5.3) (Prilog 2).

5.2. Određivanje transformacionih parametara na osnovu Helmertove T7D transformacije sličnosti

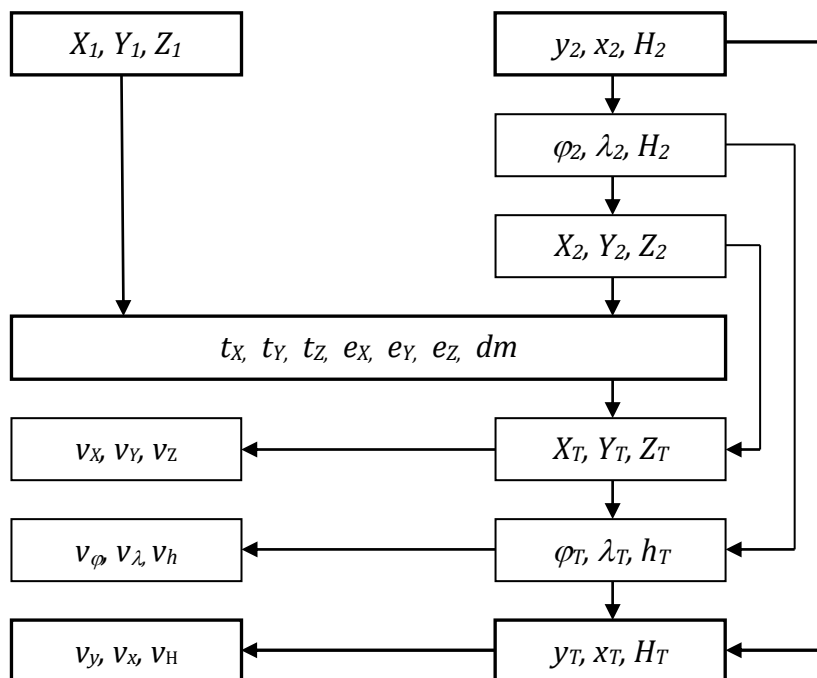
5.2.1. Globalno određivanje parametara

Primenom Helmertove T7D transformacije sličnosti na osnovu skupa od 4490 zajedničkih tačaka određeni su globalni transformacioni parametri koji se odnose na celokupnu teritoriju Republike Srbije. Rezultat ovog određivanja predstavlja jedinstveni skup od 7 parametara (3 parametra translacije, 3 parametra rotacije i 1 parametar razmere). Postupak određivanja parametara T7D transformacije je realizovan na osnovu pravougljih koordinata tačaka u oba sistema, i to u sledećim koracima:

- Iz datoteke zajedničkih tačaka preuzete su unete pravougke koordinate X_1, Y_1, Z_1 koje se odnose na novi referentni sistem;
- Koordinate zajedničkih tačaka koje se odnose na postojeći referentni sistem y_2, x_2 unete su u Gaus-Krigerovoj projekciji, zbog čega su prvo transformisane u geografske koordinate φ_2, λ_2 , a uz pomoć pridružene visine H_2 potom i u pravougke trodimenzionalne koordinate X_2, Y_2, Z_2 , pri čemu su u svim transformacijama korišćeni parametri Beselovog elipsoida;

- Na osnovu dva skupa pravouglanih koordinata zajedničkih tačkaka X_1, Y_1, Z_1 i X_2, Y_2, Z_2 , ocenjeno je 7 parametara transformacije po metodi najmanjih kvadrata;
- Pomoću ocenjenih parametara izvršena je transformacija pravouglanih koordinata novog referentnog sistema X_1, Y_1, Z_1 u transformisane pravouglo koordinata postojećeg referentnog sistema X_T, Y_T, Z_T , a one su zatim transformisane u odgovarajuće geografske i projekcione koordinate $\varphi_T, \lambda_T, h_T$ i y_T, x_T, H_T .
- Upoređenjem sva tri tipa transformisanih koordinata sa odgovarajućim originalnim koordinatama postojećeg referentnog sistema dobijene su respektivno popravke na zajedničkim tačkama po svim koordinatnim osama.

Dijagram toka određivanja parametara transformacije na osnovu pravouglanih koordinata prikazan je na slici 5.2.



Slika 5.2: Dijagram toka određivanja globalnih parametara Helmertove transformacije u pravouglanim koordinatama za područje Republike Srbije

Po napred prikazanom postupku ocenjeni su parametri globalne Helmertove T7D transformacije prikazani u tabeli 5.2.

Tabela 5.2: *Ocene parametara globalne Helmertove transformacije*

Parametar	Vrednost
t_x	-576.80808m
t_y	-166.05167m
t_z	-392.96790m
e_x	4.91211"
e_y	-0.89334"
e_z	-13.07635"
dm	-7.68497ppm

Dobijene popravke (reziduali) na zajedničkim tačkama predstavljaju meru saglasnosti novog i postojećeg referentnog sistema. Imajući u vidu veličinu i površinu državne teritorije Republike Srbije, za veličine popravaka po koordinatnim osama v_y , v_x (Prilog 3), a potom na osnovu njih određene standardne devijacije horizontalnih položaja zajedničkih tačaka, dobijene su očekivano visoke vrednost prikazane u tabeli 5.3.

Tabela 5.3: *Statistika vrednosti popravaka dobijenih na osnovu parametara globalne Helmertove T7D transformacije*

Statistika	Model globalne Helmertove T7D transformacije		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-2.186	-1.569	0.013
Maksimum	1.934	1.723	2.238
Srednja vrednost	-0.005	-0.005	0.562
Standardna devijacija	0.532	0.419	0.377

Pojedinačna odstupanja na zajedničkim tačkama koja dostižu metarsku saglasnost, u nekim aplikacijama kao što su GIS i opšta navigacija, predstavljaju dovoljan nivo saglasnosti, međutim, za potrebe državnog premera i katastra nepokretnosti Republike Srbije, neophodna je tačnost na nivou od 0,1 m.

S obzirom na to da su odstupanja po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama poznata, svođenje položajnih koordinata y_T , x_T , koje su dobijene

globalnom Helmertovom transformacijom na njihove originalne vrednosti y_2, x_2 , predstavlja trivijalan postupak oduzimanja:

$$y_2 = y_T - v_y \quad \text{i} \quad x_2 = x_T - v_x. \quad (5.4)$$

Kako bi se identični postupak ponovio u proizvoljnim tačkama koje nisu zajedničke, neophodno je da se u tim lokacijama prognoziraju vrednosti popravaka po koordinatnim osama. Ovaj postupak se može izvesti na osnovu poznatih reziduala na zajedničkim tačkama primenom nekog od inerpolacionih postupaka, međutim, najpraktičniji način prognoze podrazumeva postojanje pravilnog grida popravaka.

5.2.2. Formiranje grida tačaka

Grid popravaka odnosno reziduala po koordinatnim osama može se formirati na više načina, pri čemu se u svakom slučaju moraju definisati njegove sledeće najvažnije karakteristike:

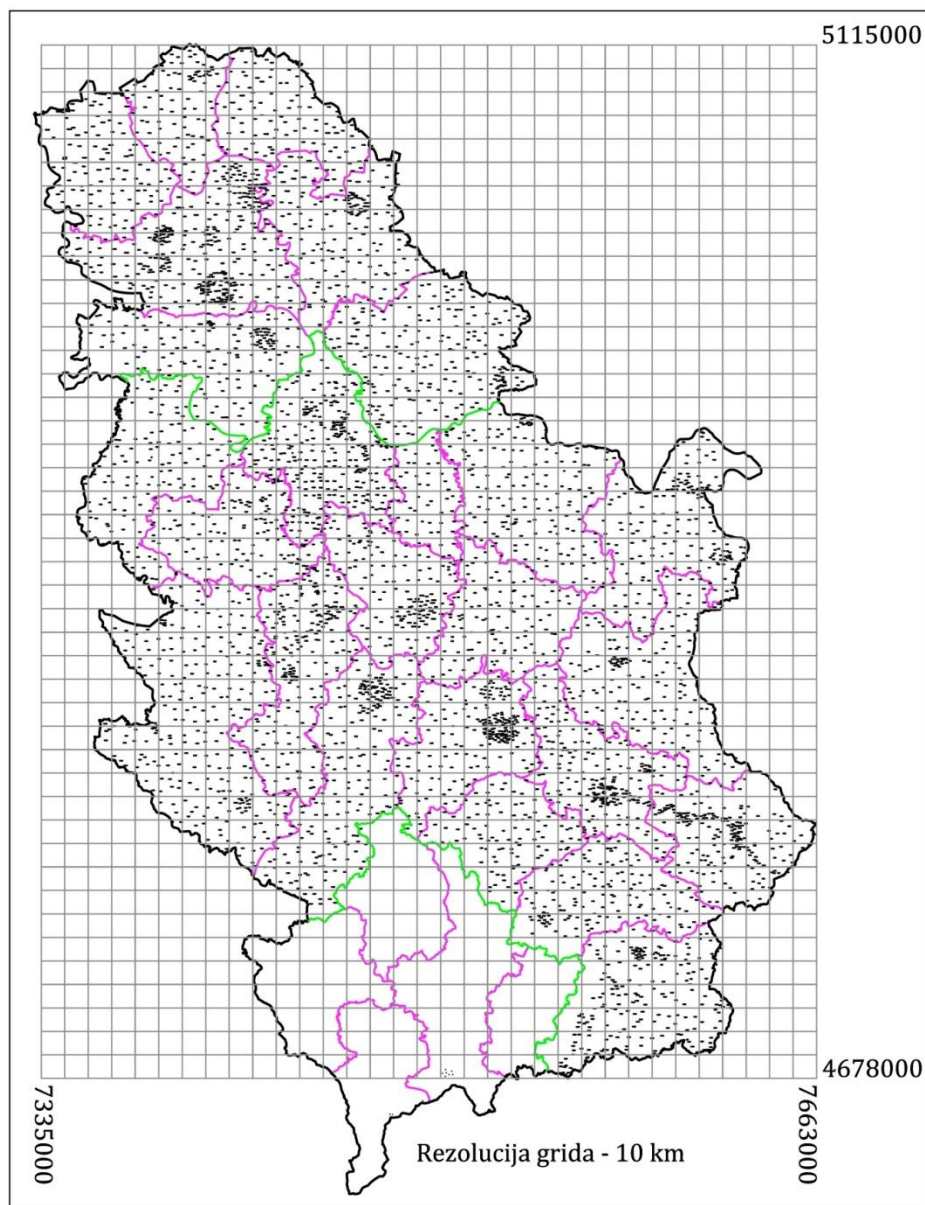
- Područje pokrivenosti grida,
- Rezolucija grida,
- Rezolucija vrednosti reziduala,
- Nedostajuće vrednosti,
- Metoda formiranja grida.

U okviru ovog istraživanja grid tačaka za predikciju reziduala formiran je tako da pokriva celokupnu teritoriju Republike Srbije, ima rezoluciju od 1 km i ostale usvojene parametre prikazane u tabeli 5.4.

Tabela 5.4: Osnovni parametri grida tačaka na teritoriji Republike Srbije

Parametar	Vrednost
Granice grida po širini	4678000.00 m – 5115000,00 m
Granice grida po dužini	7335000.00 m - 7663000.00 m
Rezolucija grida	1000 m
Rezolucija vrednosti reziduala	1 cm

S obzirom na to da su horizontalna odstupanja vektorske veličine, formirani su posebni gridovi za rezidualne po osama y (pravac istok - zapad) i x (pravac sever - jug). Oba grida sastoje se od po 328 kolona i 437 vrsta i na slici 5.3 su iz praktičnih razloga prikazani sa rezolucijom od 10 km.



Slika 5.3: Princip formiranja grida tačaka na području Republike Srbije nakon globalne Helmertove transformacije

U cilju istraživanja različitih načina modeliranja distorzija, i to na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne Helmertove transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su na sledeće načine:

1. Primenom Briggs-og MCS modela
2. Primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km
3. Primenom TIN modela sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za eksponent $e = 1.00$
4. Primenom TIN modela sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za eksponent $e = 2.00$

5.2.3. Predikcija reziduala primenom Briggs-og MCS modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne Helmertove transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom modela površi minimalne zakrivljenosti - MCS modela po Briggs-om algoritmu. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 4).

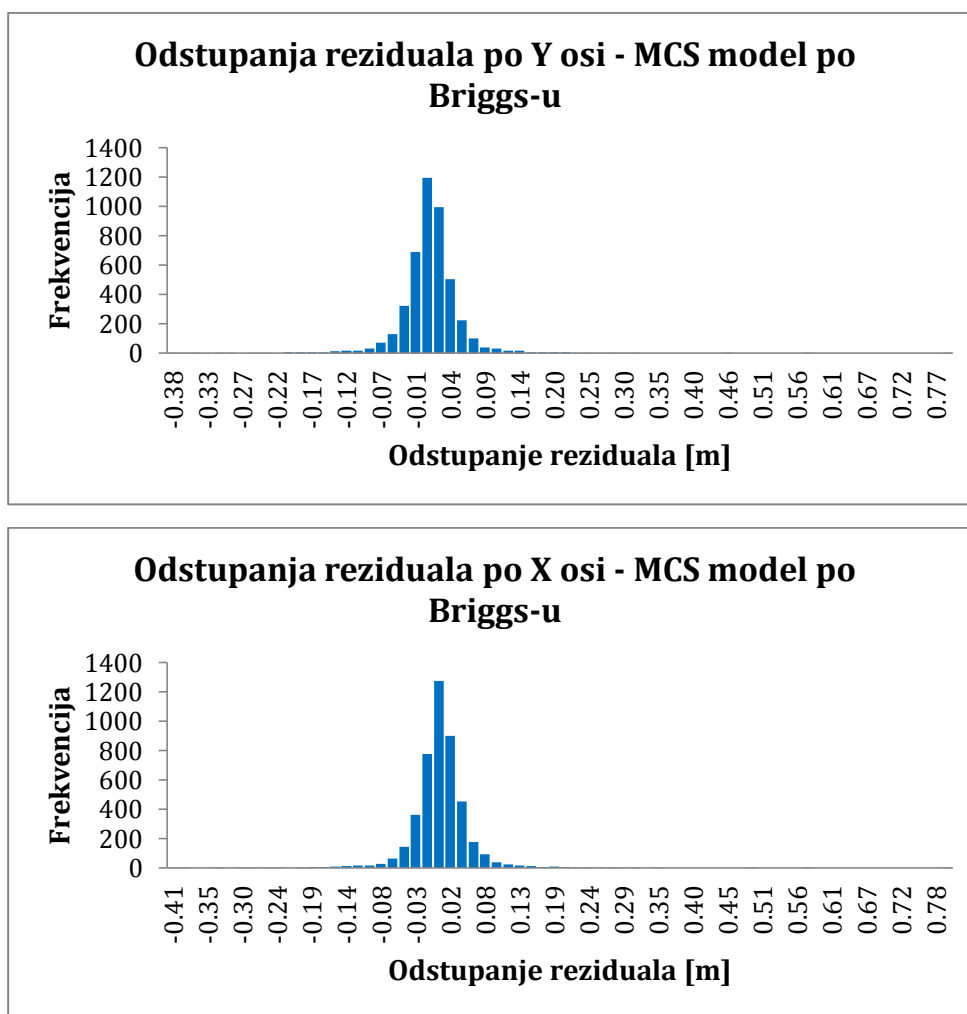
Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom Briggs-og MCS modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.5.

Tabela 5.5: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po Briggs-om MCS modelu nakon T7D transformacije

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po Briggs-ov MCS modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.379	-0.405	0.000
Maksimum	0.787	0.793	1.117
Srednja vrednost	0.000	0.000	0.040
Standardna devijacija	0.047	0.047	0.053

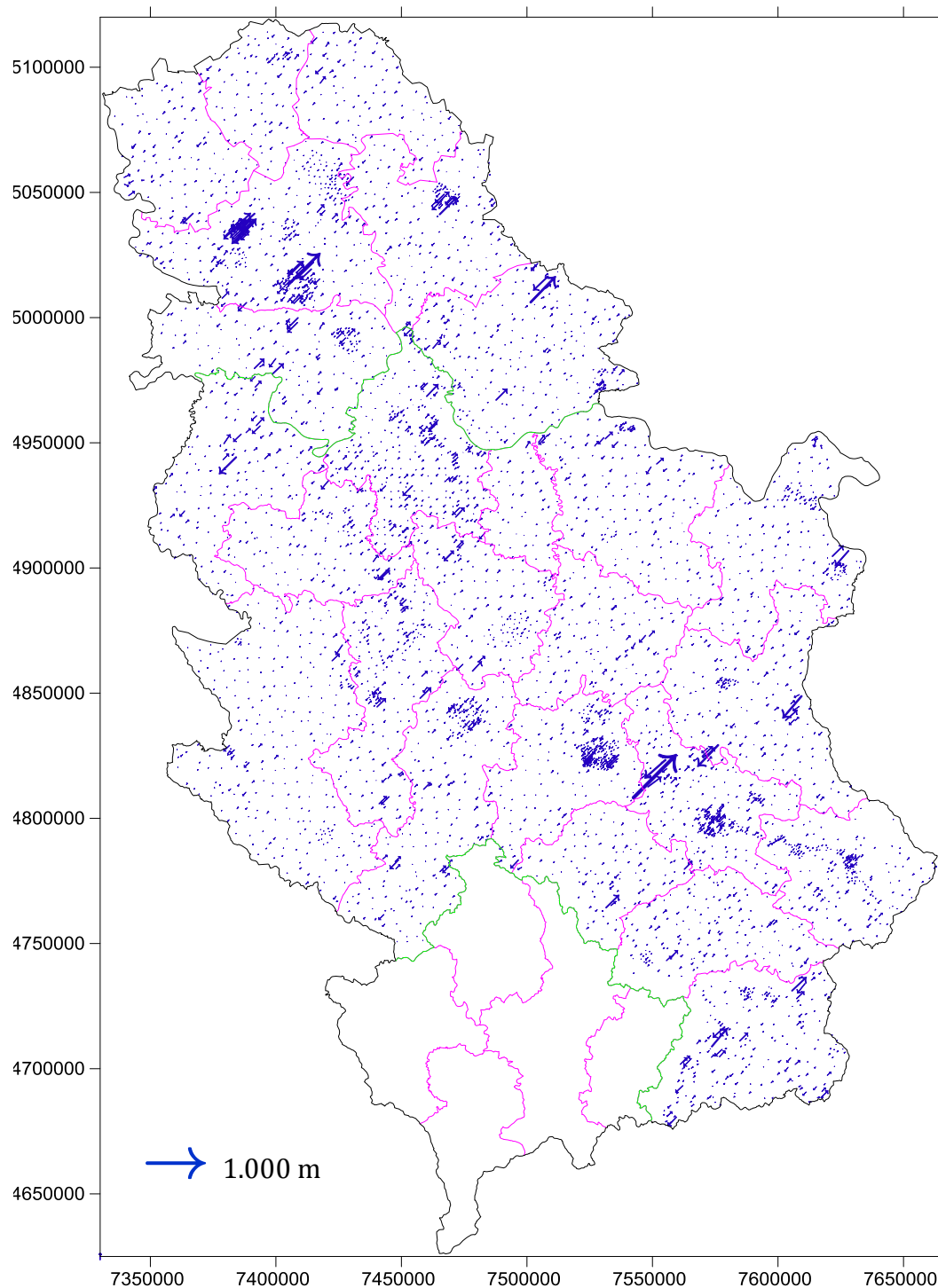
Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.5 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je 0.000 m), i da imaju malu standardnu devijaciju od svega 0.047 m.

Na slici 5.4 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.



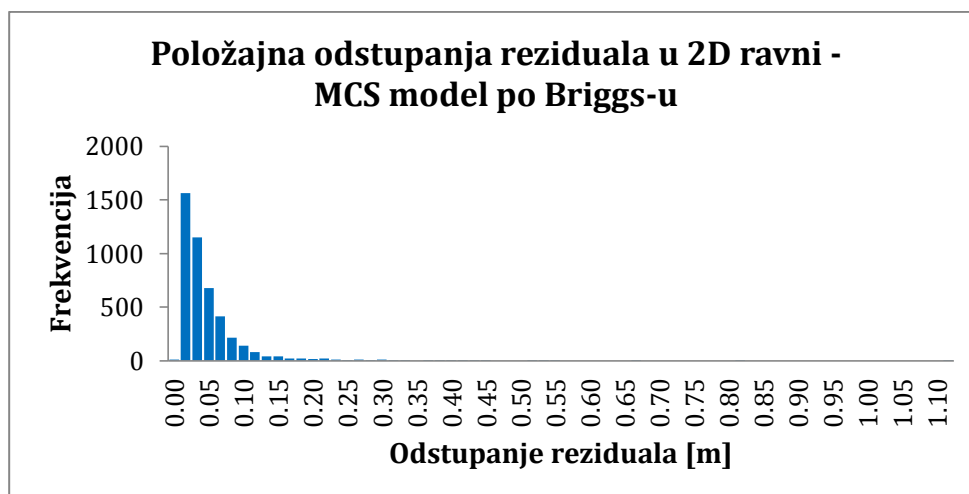
Slika 5.4: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon T7D transformacije

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.5.



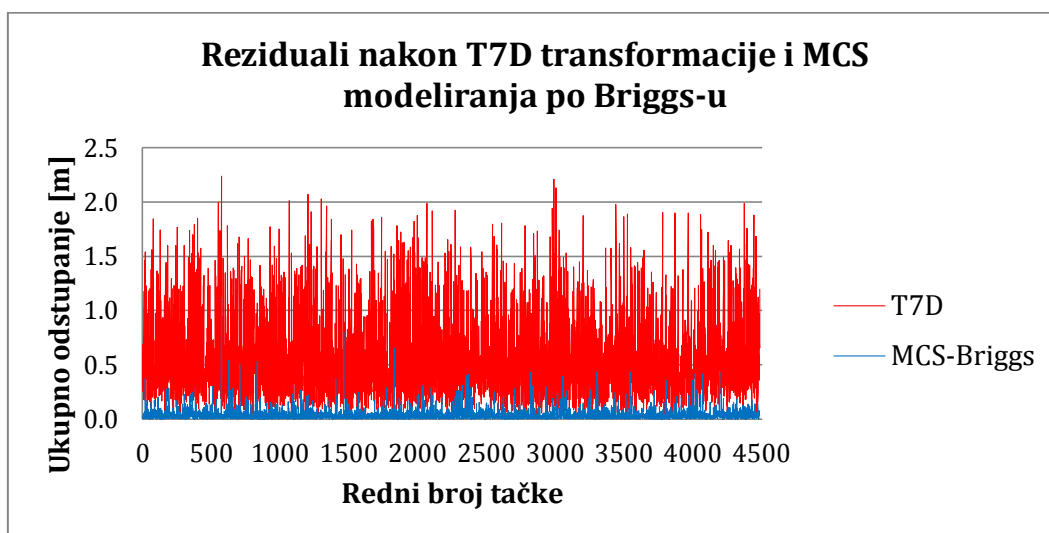
Slika 5.5: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu Briggs-og MCS modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.6. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.053 m.



Slika 5.6: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon T7D transformacije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže primenom modela površi minimalne zakrivljenosti - MCS modela po Briggs-om algoritmu, a nakon globalne Helmertove T7D transformacije, po podacima iz tabela 5.3 i 5.5 došlo je do značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.7 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon globalne Helmertove transformacije i nakon predikcije reziduala primenom MCS modela po Briggs-om algoritmu.



Slika 5.7: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom Briggs-og MCS modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja

5.2.4. Predikcija reziduala primenom LSC modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne Helmertove T7D transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata – LSC modela. Za potrebe ovog istraživanja LSC model je primenjen sa usvojenom vrednošću za korelacionu dužinu od 30 km (MOVA parametar), te je nazvan LSC30 model. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 5).

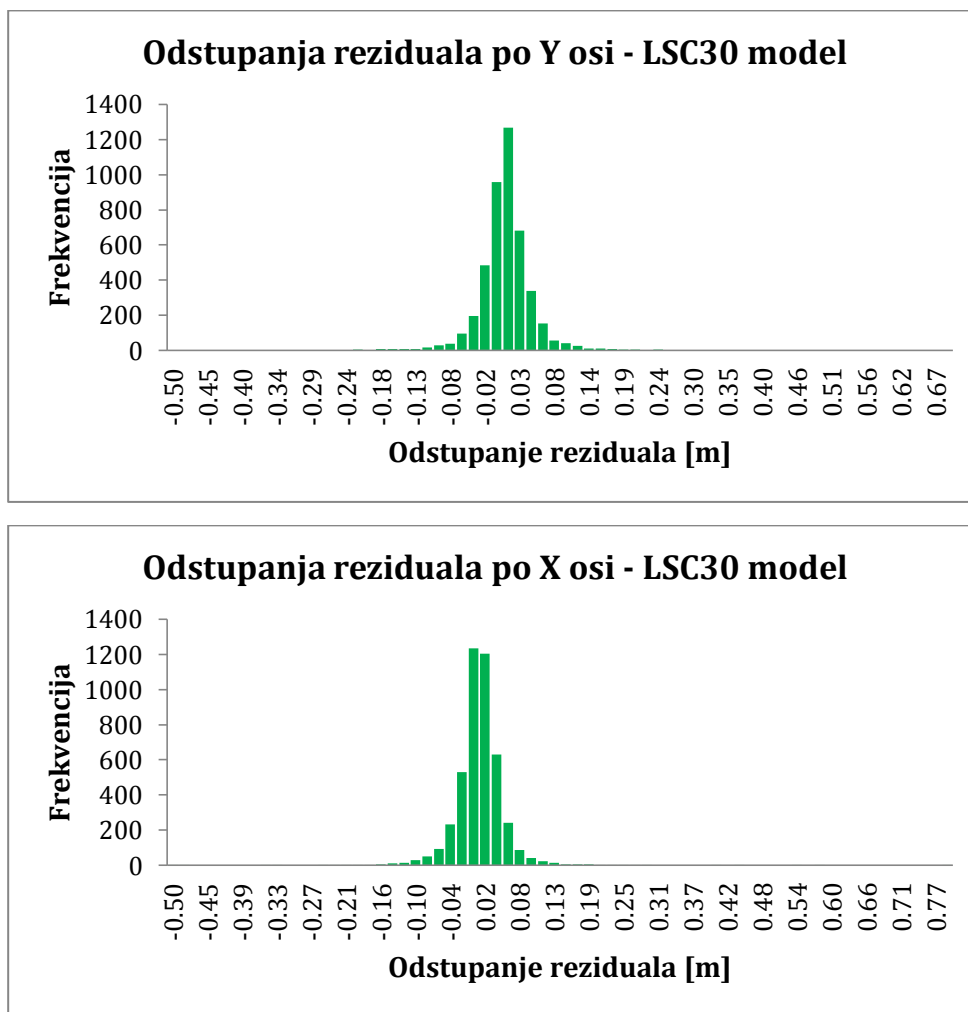
Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom LSC30 modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.6.

Tabela 5.6: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po LSC30 modelu nakon T7D transformacije

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po LSC30 modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.504	-0.503	0.000
Maksimum	0.689	0.791	0.868
Srednja vrednost	0.000	0.000	0.043
Standardna devijacija	0.046	0.044	0.047

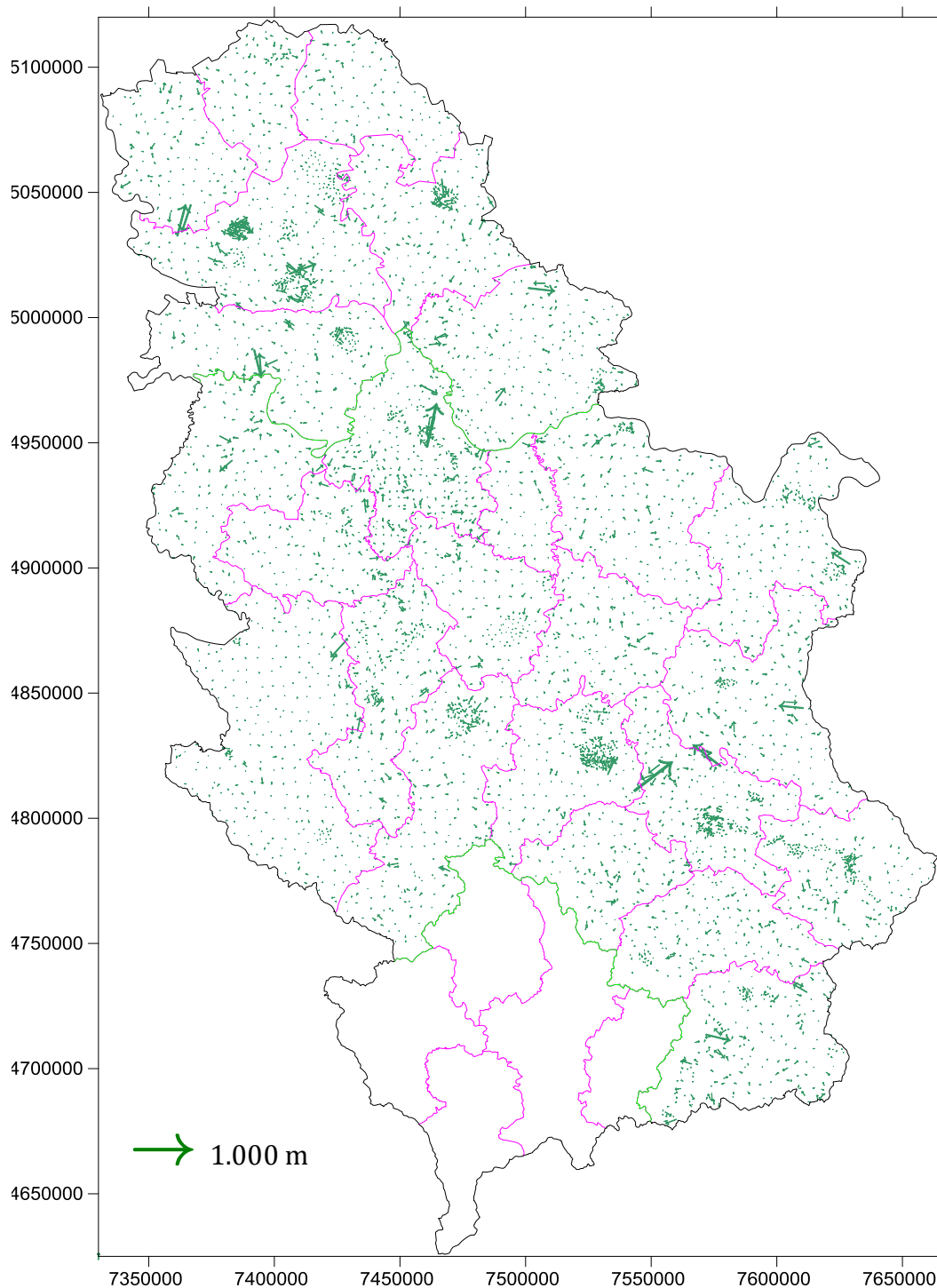
Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.6 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je 0.000 m), i da imaju malu standardnu devijaciju od svega 0.046 m i 0.044 m.

Na slici 5.8 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.



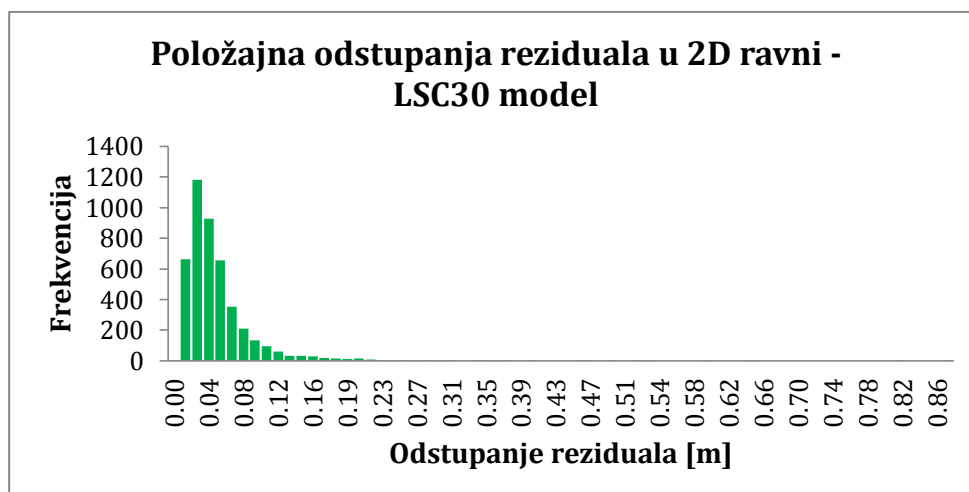
Slika 5.8: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon T7D transformacije

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.9.



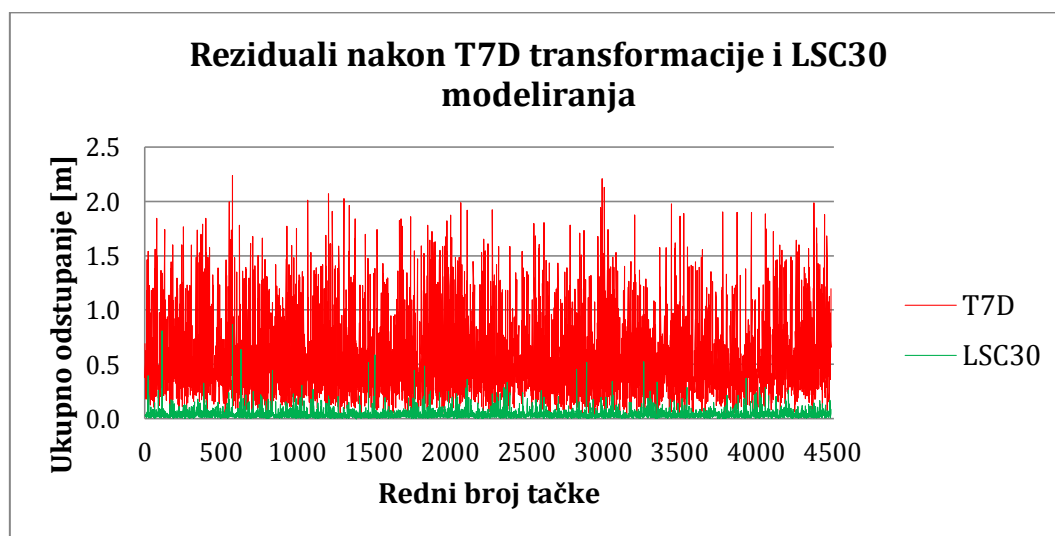
Slika 5.9: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu LSC30 modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.10. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.047 m.



Slika 5.10: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon T7D transformacije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata - LSC30 modela, a nakon globalne Helmertove T7D transformacije, po podacima iz tabela 5.3 i 5.6 došlo je do značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.11 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon T7D transformacije i nakon predikcije reziduala primenom LSC30 modela.



Slika 5.11: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom LSC30 modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja

5.2.5. Predikcija reziduala primenom TIN modela

Modelovanje distorzija je u okviru ovog istraživanja realizovano modelovanjem mreže trouglova - TIN modelom, i to sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za usvojenu vrednost eksponenta $e = 1.00$ te je nazvan TIN100 model i za usvojenu vrednost eksponenta $e = 2.00$ te je nazvan TIN200 model.

5.2.5.1 Predikcija reziduala primenom TIN100 modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne Helmertove T7D transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su modelovanjem mreže trouglova i to sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za usvojenu vrednost eksponenta $e = 1.00$ - TIN100 model. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 6).

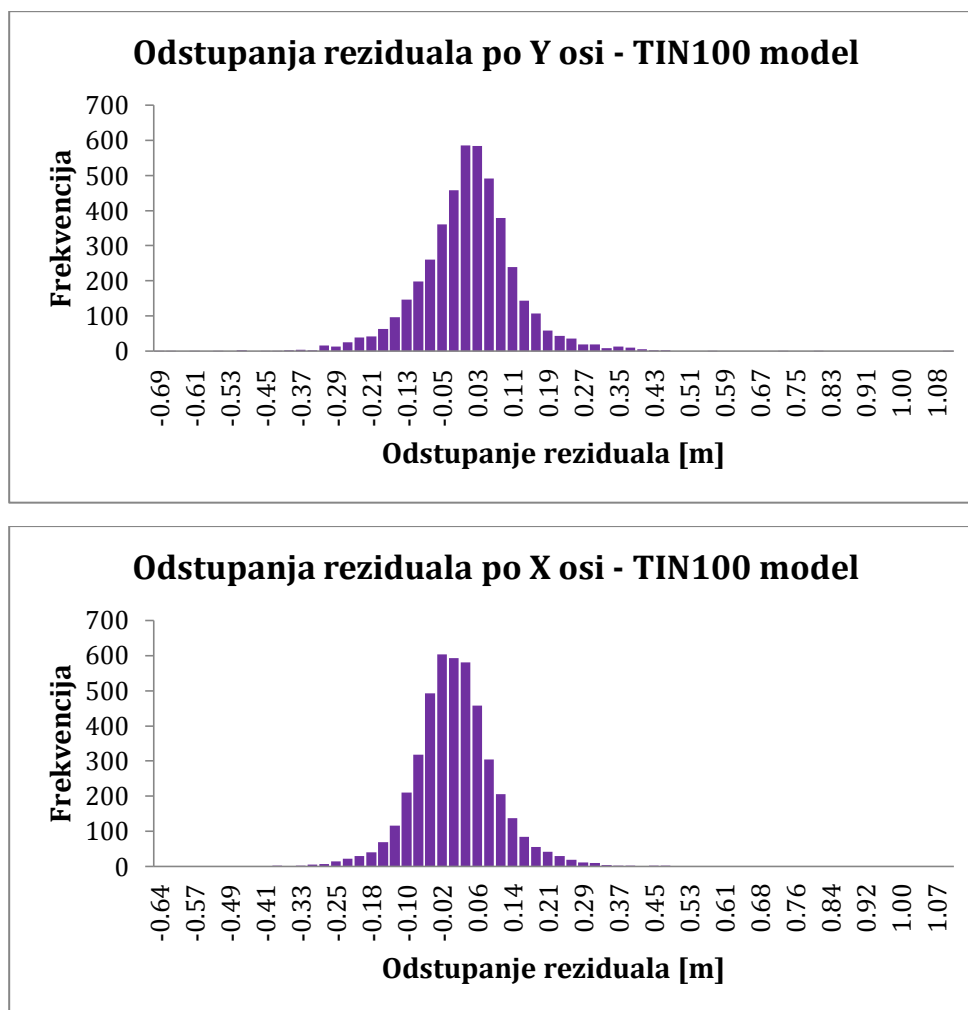
Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom TIN100 modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.7.

Tabela 5.7: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN100 modelu nakon T7D transformacije

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po TIN100 modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.689	-0.644	0.003
Maksimum	1.102	1.100	1.352
Srednja vrednost	-0.001	-0.002	0.116
Standardna devijacija	0.111	0.096	0.089

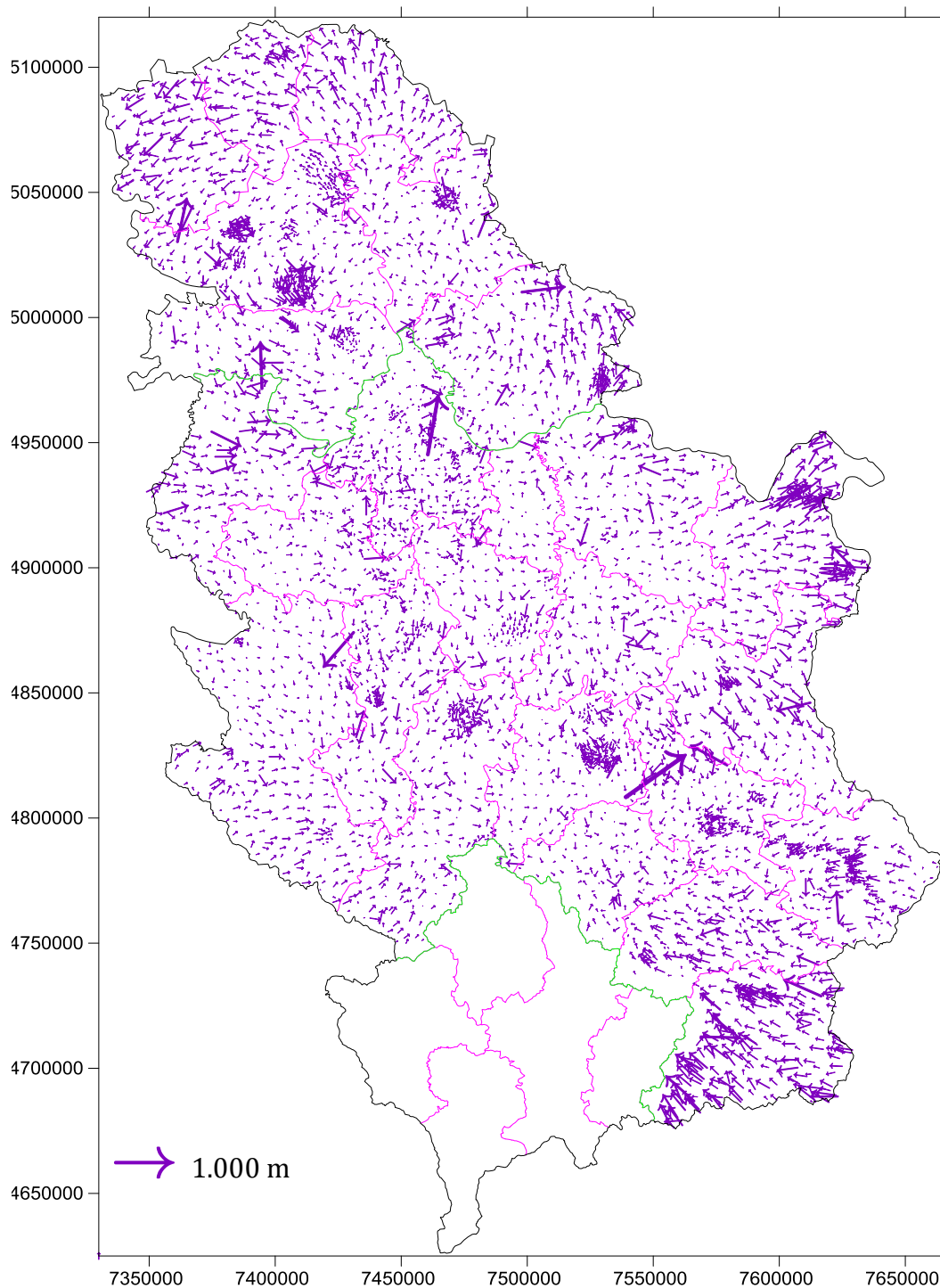
Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.7 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je -0.001 m i -0.002 m), i da imaju relativno malu standardnu devijaciju od 0.111 m i 0.096 m.

Na slici 5.12 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.



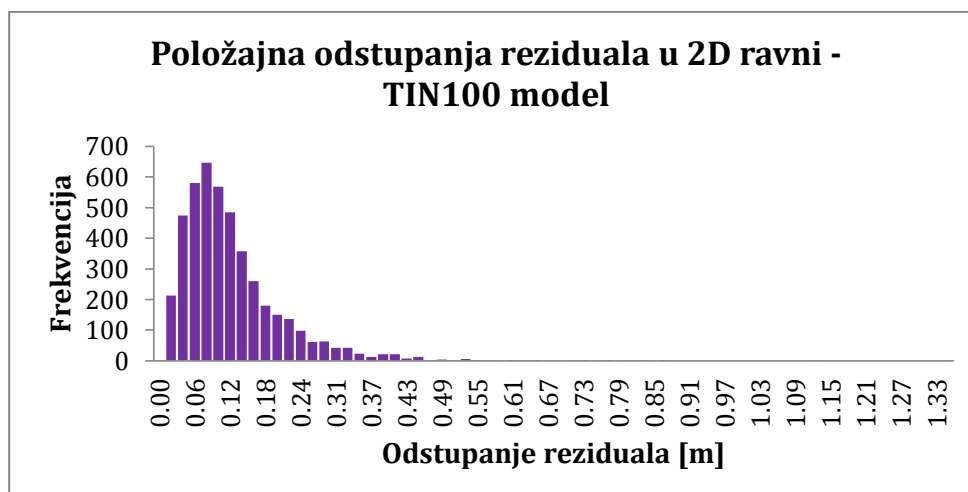
Slika 5.12: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon T7D transformacije

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.13.



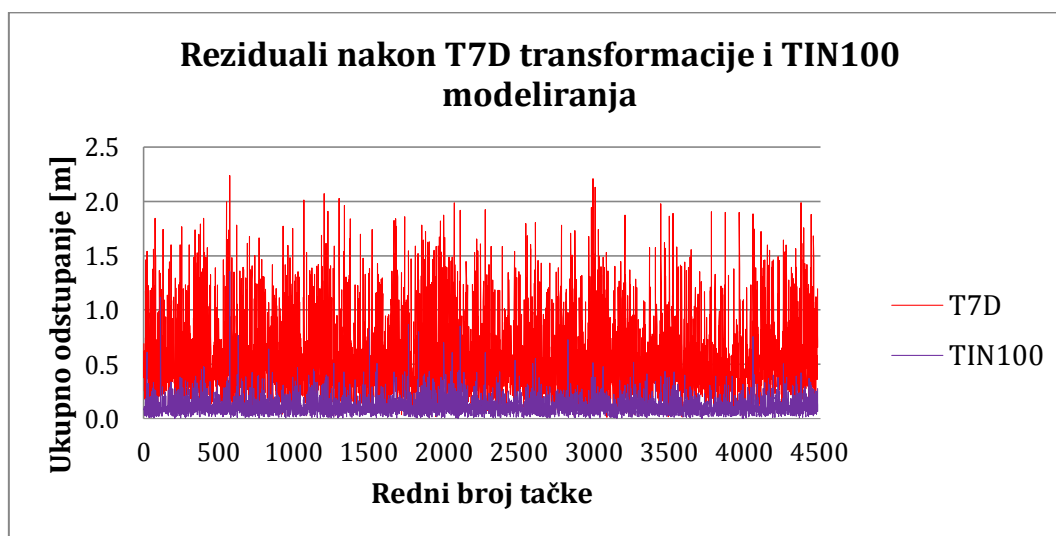
Slika 5.13: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN100 modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.14. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.089 m.



Slika 5.14: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon T7D transformacije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže modelovanjem mreže trouglova - TIN100 modelom, a nakon globalne Helmertove T7D transformacije, po podacima iz tabela 5.3 i 5.7 došlo je do značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.15 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon T7D transformacije i nakon predikcije reziduala primenom TIN100 modela.



Slika 5.15: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN100 modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja

5.2.5.2 Predikcija reziduala primenom TIN200 modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne Helmertove T7D transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su modelovanjem mreže trouglova i to sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za usvojenu vrednost eksponenta $e = 2.00$ - TIN200 model. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 7).

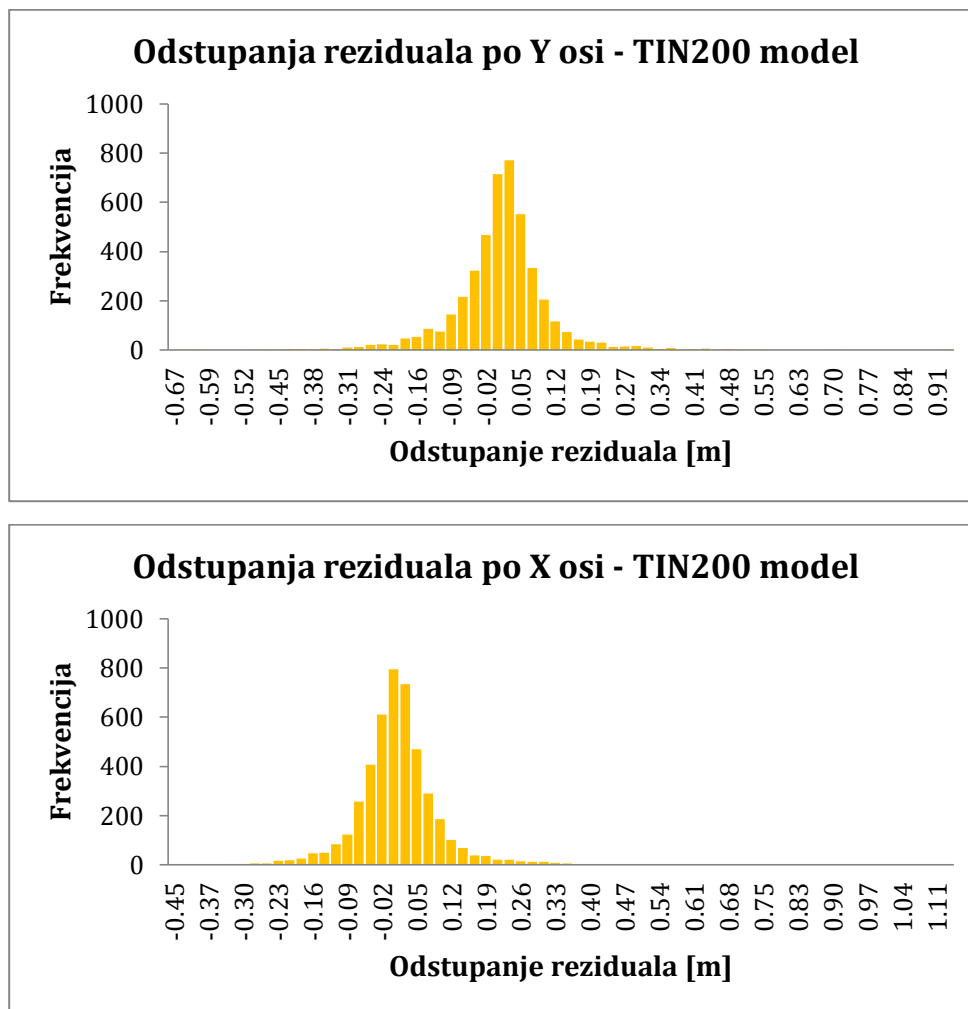
Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom TIN200 modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.8.

Tabela 5.8: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN200 modelu nakon T7D transformacije

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po TIN200 modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.666	-0.445	0.001
Maksimum	0.936	1.131	1.149
Srednja vrednost	-0.001	-0.002	0.095
Standardna devijacija	0.098	0.085	0.088

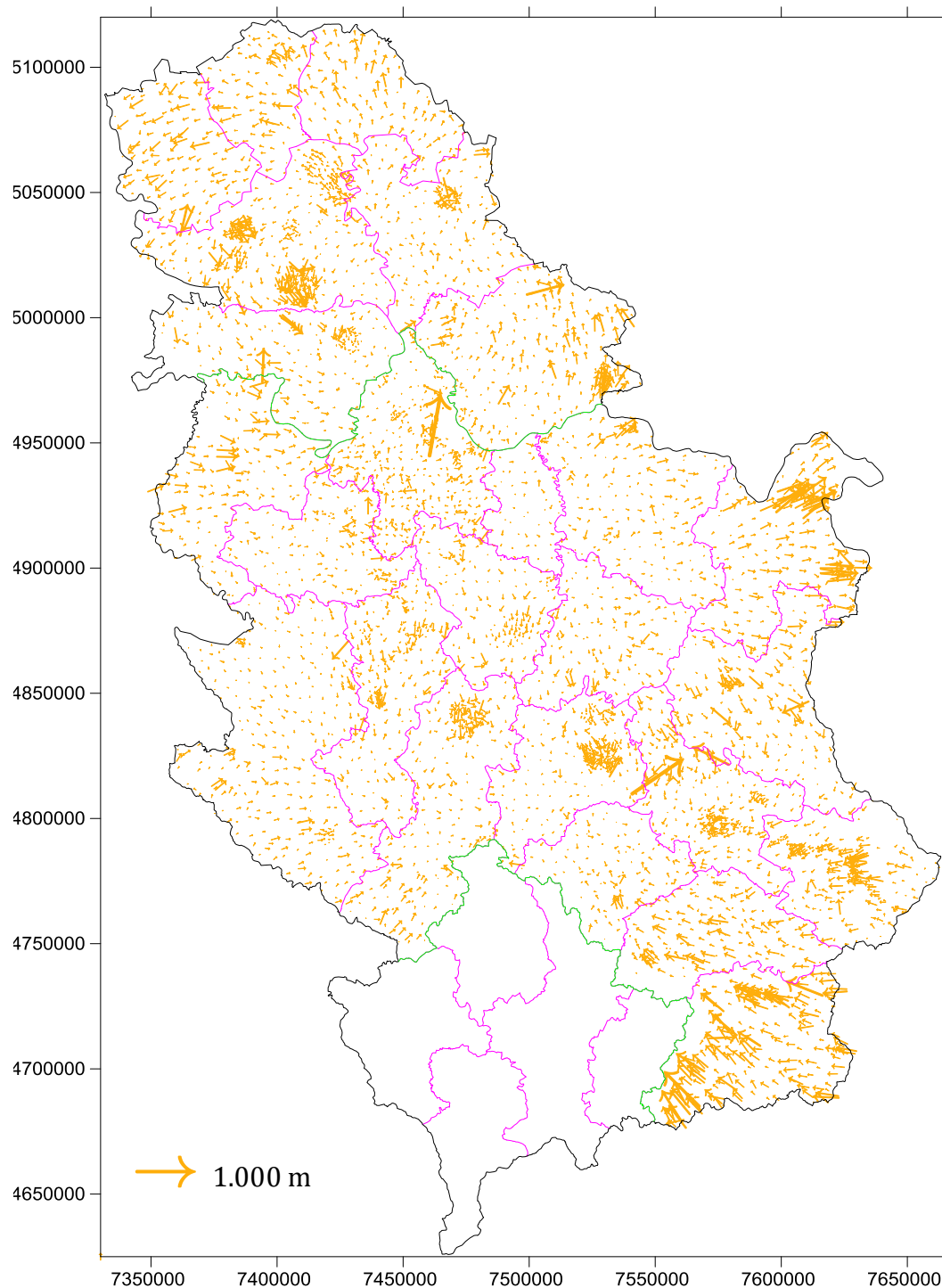
Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.8 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je -0.001 m i -0.002 m), i da imaju relativno malu standardnu devijaciju od 0.098 m i 0.085 m.

Na slici 5.16 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.



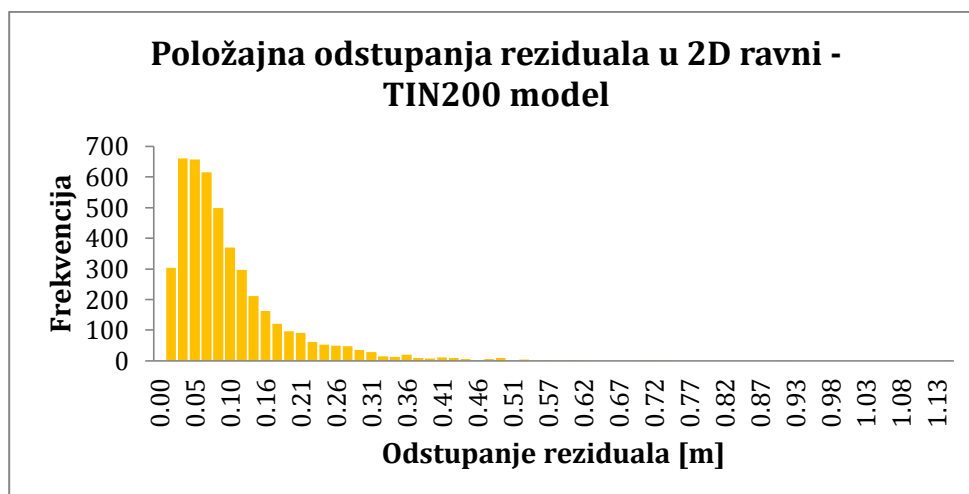
Slika 5.16: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon T7D transformacije

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.17.



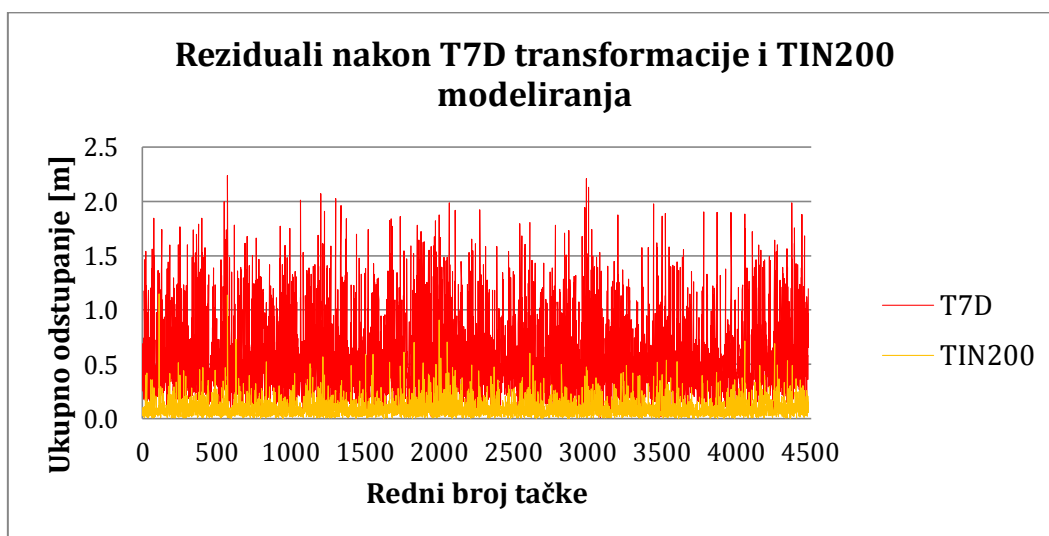
Slika 5.17: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN200 modela nakon T7D transformacije na području Republike Srbije

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.18. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.088 m.



Slika 5.18: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon T7D transformacije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže modelovanjem mreže trouglova - TIN200 modelom, a nakon globalne Helmertove T7D transformacije, po podacima iz tabela 5.3 i 5.8 došlo je do značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.19 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon T7D transformacije i nakon predikcije reziduala primenom TIN200 modela.



Slika 5.19: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN200 modela nakon T7D transformacije za vektore horizontalnog položaja

5.3. Određivanje transformacionih parametara na osnovu FIT modela transformacije

5.3.1. Određivanje parametara direktne projekcije

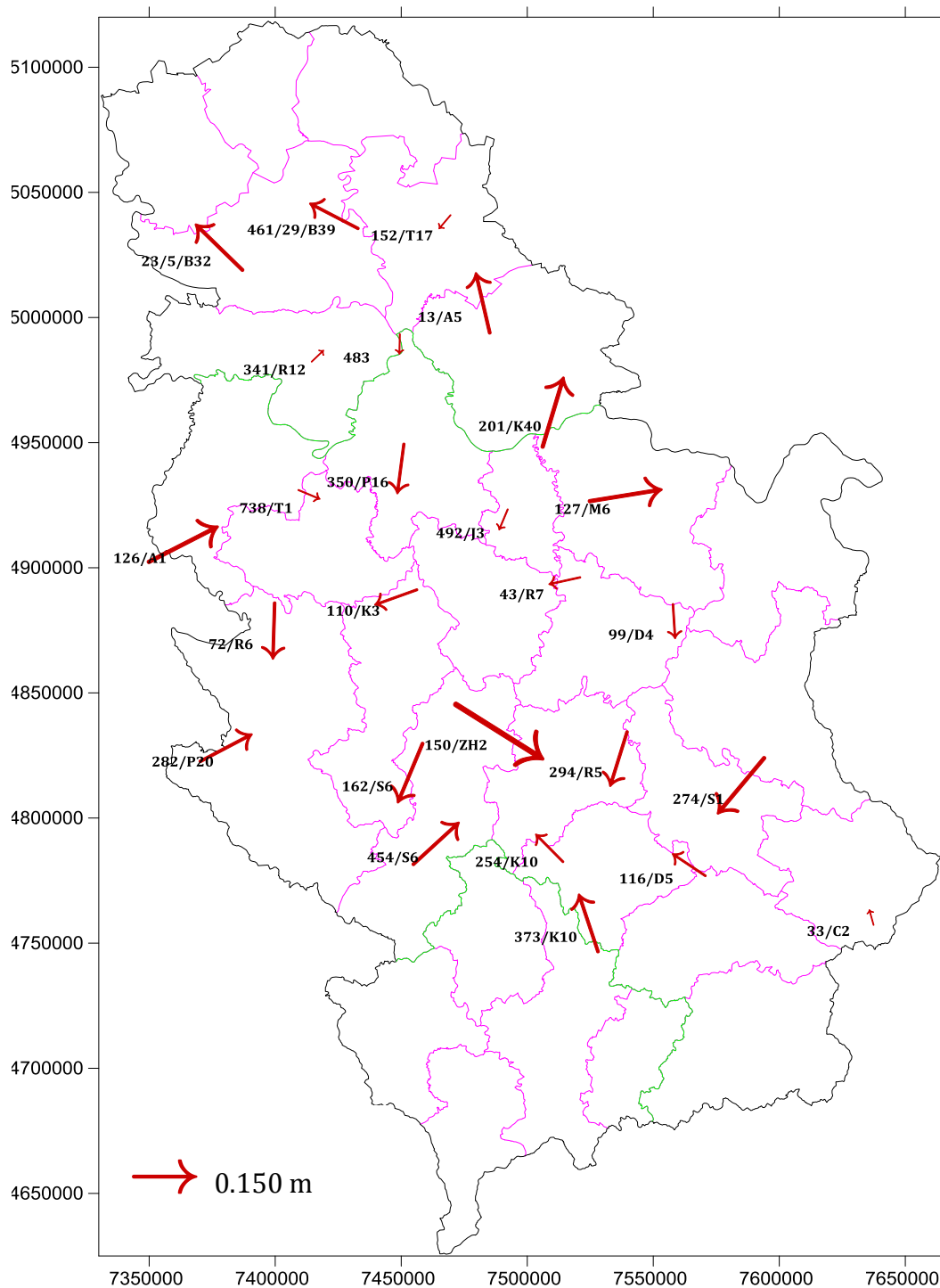
Primenom FIT modela transformacije, prema postupku prikazanom u tački 4.6.2 ovog rada, na osnovu skupa zajedničkih tačaka određeni su parametri direktne projekcije, i to TM projekcije kojima se pravouglove koordinate X_1, Y_1, Z_1 koje se odnose na novi referentni sistem, preslikavaju u transformisane y_T, x_T koordinate u postojećem referentnom sistemu u Gaus-Krigerovoj projekciji. U postupku određivanja parametara direktne projekcije određene su vrednosti za geodetsku dužinu centralnog meridijana (λ_0), faktor razmere duž centralnog meridijana (k_0) i vrednosti modula (x_0) i (y_0), uz poznate parametre elipsoida GRS 1980, veliku poluosu (a) i spljoštenost (f).

Kako je FIT model transformacije koordinata primenjen jedino na području Švedske za potrebe istraživanja mogućnosti njegove primene na području Srbije korišćena je procedura i postupak autora ovog modela (Reit, 2009).

Određivanje parametara direktne projekcije za celo područje Republike Srbije je realizovano na osnovu skupa sa različitim brojem zajedničkih tačaka, odnosno, u tri varijante, korišćenjem originalnog softvera PROJFIT (Reit, 2014), i to:

- Na osnovu skupa od 4490 zajedničkih tačaka koje se odnose na celokupnu teritoriju Republike Srbije;
- Na osnovu skupa od 840 zajedničkih tačaka koje su ravnomerno raspoređene na teritoriji Republike Srbije na međusobnim udaljenostima od oko 10 km;
- Na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka koje su ravnomerno raspoređene na teritoriji Republike Srbije na prosečnoj međusobnoj udaljenosti od 51 km.

Za svaku od ovih varijanti, na osnovu određenih parametara direktne projekcije, izvršena je transformacija pravouglavih koordinata novog referentnog sistema X_1, Y_1, Z_1 u transformisane geografske i projekcione koordinate $\varphi_T, \lambda_T, h_T$ i y_T, x_T, H_T , korišćenjem originalnog softvera TRANS (Reit, 2014).



Slika 5.20: Dispozicija skupa od 26 zajedničkih tačaka i vektori horizontalnog položaja određeni na osnovu FIT transformacije na području Republike Srbije

Dobijene popravke (reziduali) na zajedničkim tačkama predstavljaju meru saglasnosti novog i postojećeg referentnog sistema. Imajući u vidu veličinu i površinu državne teritorije Republike Srbije kao i broj zajedničkih tačaka po

primenjenim varijantama, za veličine popravaka po koordinatnim osama v_y , v_x , a potom na osnovu njih određene standardne devijacije horizontalnih položaja zajedničkih tačaka, očekivano najbolji rezultati su dobijeni u varijanti sa skupom od 26 zajedničkih tačaka ravnomerno raspoređenih na teritoriji Republike Srbije (Tabela 5.9), što je saglasno rezultatima i postupku transformacije koji je primenjen u Švedskoj (Reit, 2009). Dispozicija skupa od 26 zajedničkih tačaka na području Srbije i vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu parametara direktne projekcije, odnosno FIT transformacije, prikazana je na slici 5.20.

Dakle, za definitivne vrednosti parametara direktne projekcije usvojeni su parametri dobijeni na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka (Prilog 8), koje su ravnomerno raspoređene na teritoriji Republike Srbije na prosečnoj međusobnoj udaljenosti od 51 km, prikazani u tabeli 5.10.

Tabela 5.9: Statistika vrednosti popravaka zajedničkih tačaka dobijenih na osnovu parametara direktne projekcije određenih na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka

Statistika	Model FIT transformacije za skup od 26 tačaka		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.111	-0.137	0.037
Maksimum	0.201	0.161	0.238
Srednja vrednost	0.000	0.000	0.115
Standardna devijacija	0.088	0.093	0.052

Tabela 5.10: Određene vrednosti parametara direktne projekcije na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka

Parametar	Vrednost
Centralni meridijan (λ_0)	20° 59' 51.3297228674"
Razmera duž centralnog meridijana (k_0)	0.999899181325
Modul (x_0)	-502.4644 m
Modul (y_0)	7500240.9356 m

Na osnovu određenih parametara direktne projekcije (Tabela 5.10), izvršena je transformacija pravougljih koordinata novog referentnog sistema X_1, Y_1, Z_1 u transformisane geografske i projekcione koordinate $\varphi_T, \lambda_T, h_T$ i y_T, x_T, H_T , za skup od 4490 tačaka na području Republike Srbije, korišćenjem originalnog softvera TRANS (Reit, 2014). Za veličine popravaka po koordinatnim osama v_y, v_x (Prilog 9), a potom na osnovu njih određene standardne devijacije horizontalnih položaja skupa od 4490 tačaka, dobijene su očekivano visoke vrednost prikazane u tabeli 5.11.

Tabela 5.11: Statistika vrednosti popravaka dobijenih na osnovu FIT transformacije za skup od 4490 tačaka na području Republike Srbije

Statistika	Model FIT transformacije za skup od 4490 tačaka		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-2.200	-1.613	0.003
Maksimum	1.886	1.768	2.234
Srednja vrednost	-0.051	-0.014	0.561
Standardna devijacija	0.525	0.425	0.380

Pojedinačna odstupanja na tačkama koja dostižu metarsku saglasnost, u nekim aplikacijama kao što su GIS i opšta navigacija, predstavljaju dovoljan nivo saglasnosti, međutim, za potrebe državnog premera i katastra nepokretnosti Republike Srbije, neophodna je tačnost na nivou od 0,1 m.

S obzirom na to da su odstupanja po koordinatnim osama na svih 4490 tačaka poznata, svođenje položajnih koordinata y_T, x_T , koje su dobijene FIT transformacijom na njihove originalne vrednosti y_2, x_2 , predstavlja trivijalan postupak oduzimanja:

$$y_2 = y_T - v_y \quad \text{i} \quad x_2 = x_T - v_x. \quad (5.5)$$

Za potrebe svođenja koordinata u proizvoljnim tačkama koje nisu zajedničke, potrebno je odgovarajućim postupkom u tim lokacijama prognozirati vrednosti popravaka po koordinatnim osama. Najpraktičniji način prognoze podrazumeva postojanje pravilnog grida popravaka dobijenog na osnovu poznatih reziduala na zajedničkim tačkama.

Grid popravaka odnosno reziduala po koordinatnim osama formiran je nakon FIT transformacije tako da pokriva celokupnu teritoriju Republike Srbije, ima rezoluciju od 1 km i ostale usvojene parametre kako je to prikazano nakon globalne Helmertove T7D transformacije u poglavlju 5.2.2.

U cilju istraživanja različitih načina modeliranja distorzija, i to na osnovu reziduala za 4490 tačkaka na području Republike Srbije dobijenim nakon FIT transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su na sledeće načine:

1. Primenom Briggs-og MCS modela
2. Primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km
3. Primenom TIN modela sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za eksponent $e = 1.00$
4. Primenom TIN modela sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za eksponent $e = 2.00$

5.3.2. Predikcija reziduala primenom Briggs-og MCS modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon FIT transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom modela površi minimalne zakrivljenosti - MCS modela po Briggs-om algoritmu. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 10).

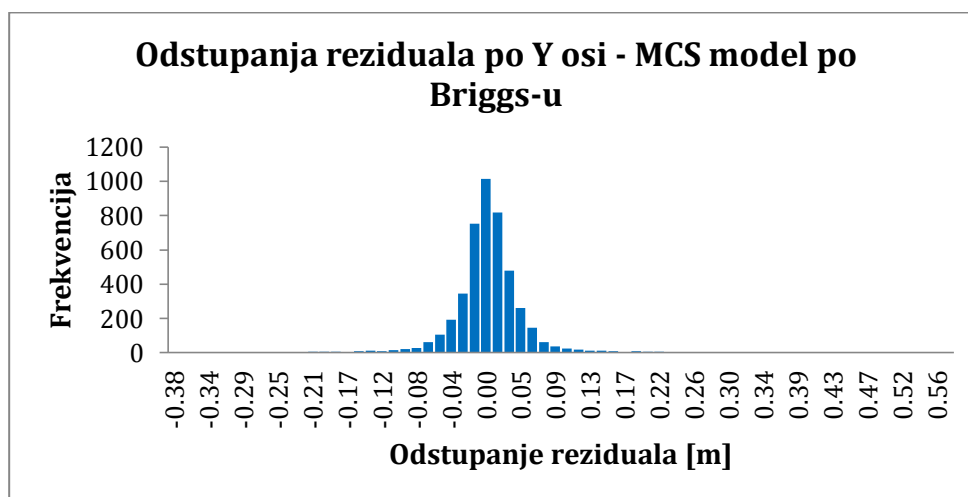
Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom Briggs-og MCS modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.12.

Tabela 5.12: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije

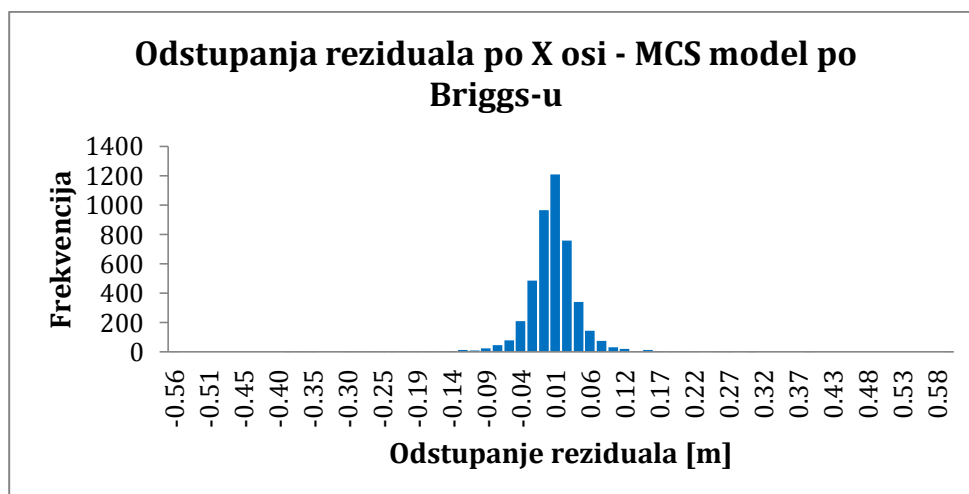
Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po Briggs-ov MCS modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.379	-0.557	0.000
Maksimum	0.572	0.598	0.606
Srednja vrednost	0.000	0.000	0.042
Standardna devijacija	0.045	0.043	0.046

Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.12 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je 0.000 m), i da imaju malu standardnu devijaciju od svega 0.045 m i 0.043 m.

Na slici 5.21 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.

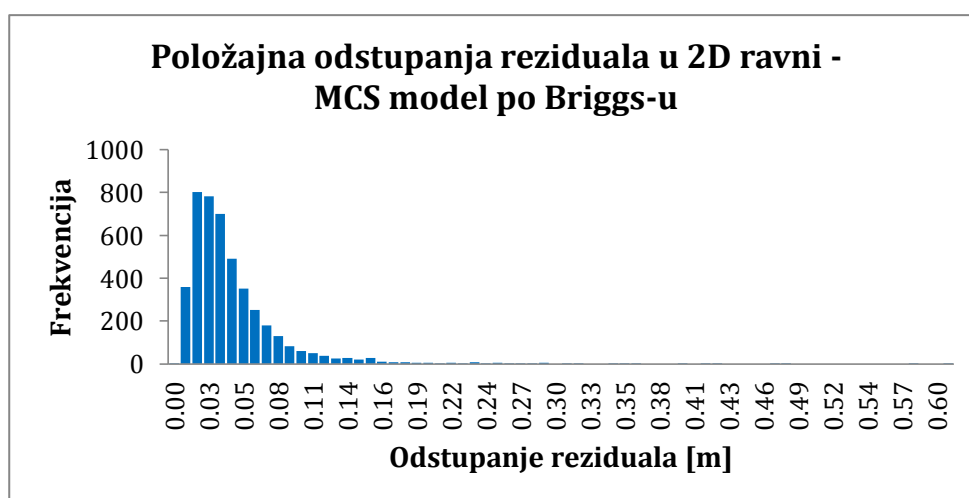


Slika 5.21: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije



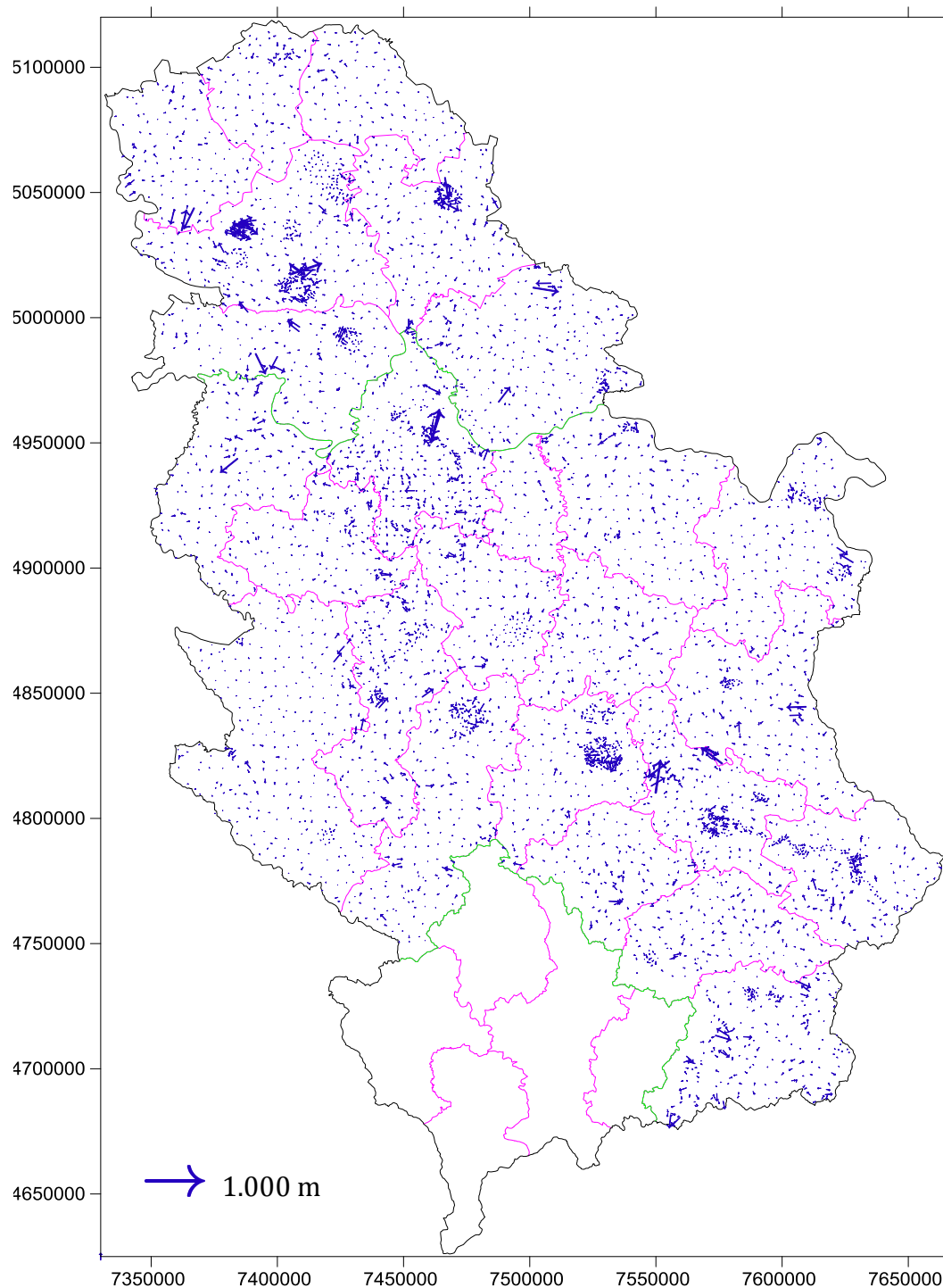
Slika 5.21: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.22. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.046 m.



Slika 5.22: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije

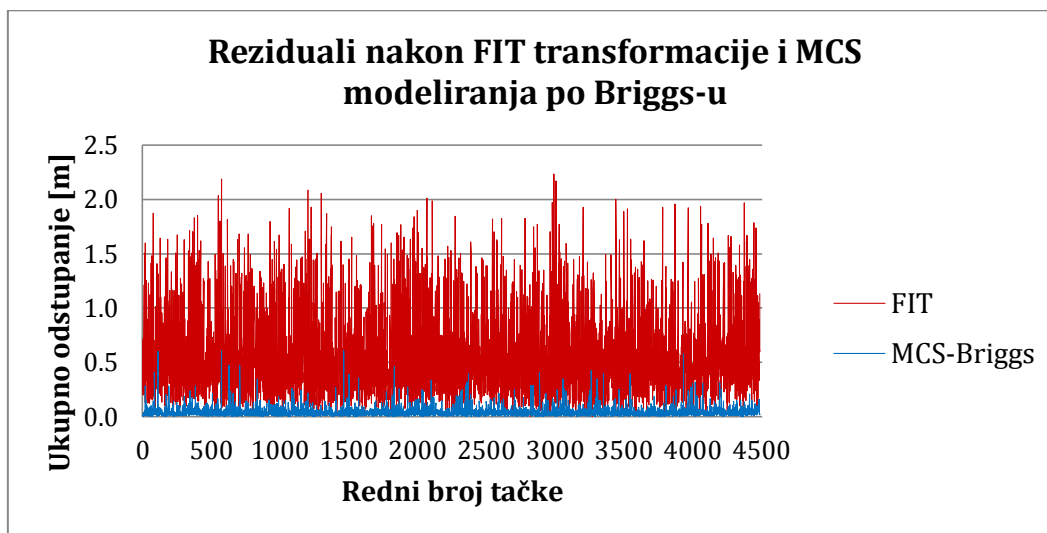
Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.23.



Slika 5.23: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu Briggs-og MCS modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže primenom modela površi minimalne zakrivljenosti - MCS modela po Briggs-om algoritmu, a nakon FIT transformacije, po podacima iz tabela 5.11 i 5.12 došlo je do

značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.24 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon FIT transformacije i nakon predikcije reziduala primenom MCS modela po Briggs-om algoritmu.



Slika 5.24: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom Briggs-og MCS modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja

5.3.3. Predikcija reziduala primenom LSC modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon FIT transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata – LSC modela. Za potrebe ovog istraživanja LSC model je primenjen sa usvojenom vrednošću za korelacionu dužinu od 30 km (MOVA parametar), te je nazvan LSC30 model. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 11).

Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom LSC30 modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena ja standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala.

Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.13.

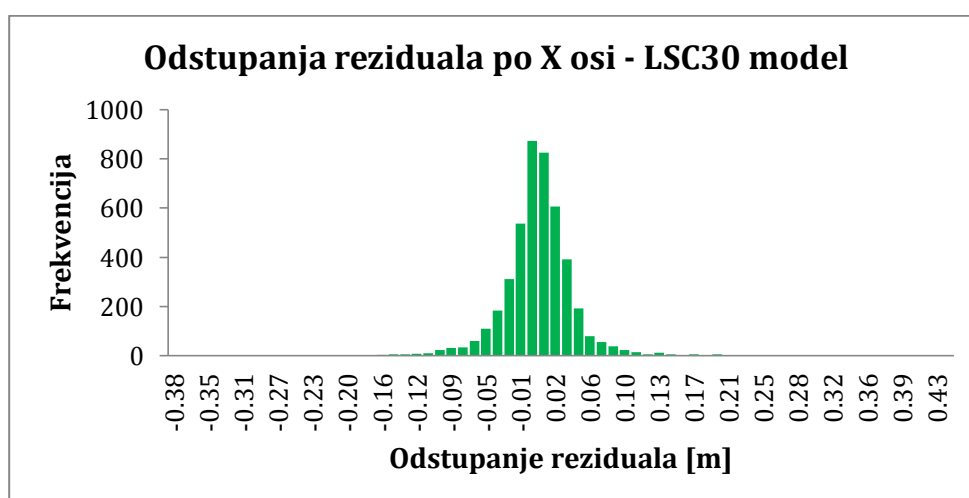
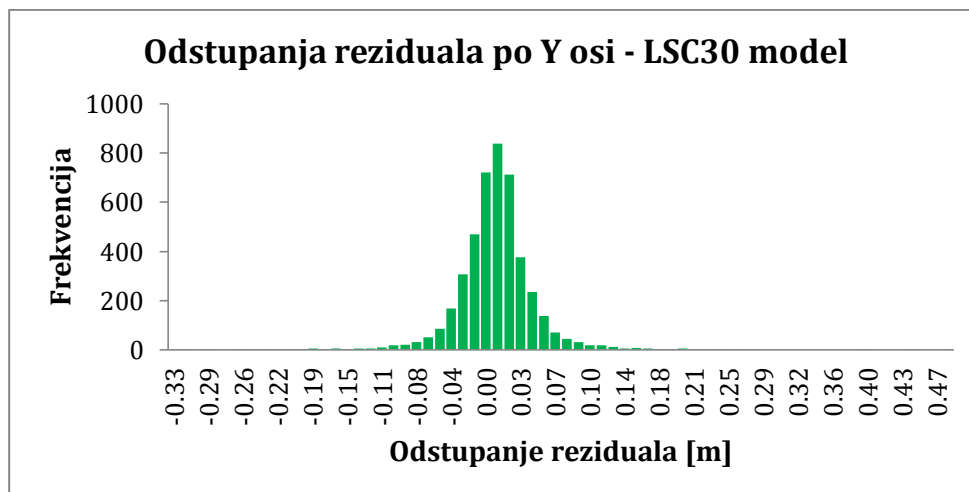
Tabela 5.13: *Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po LSC30 modelu nakon FIT transformacije*

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po LSC30 modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.331	-0.382	0.000
Maksimum	0.480	0.442	0.542
Srednja vrednost	0.000	0.000	0.042
Standardna devijacija	0.044	0.041	0.043

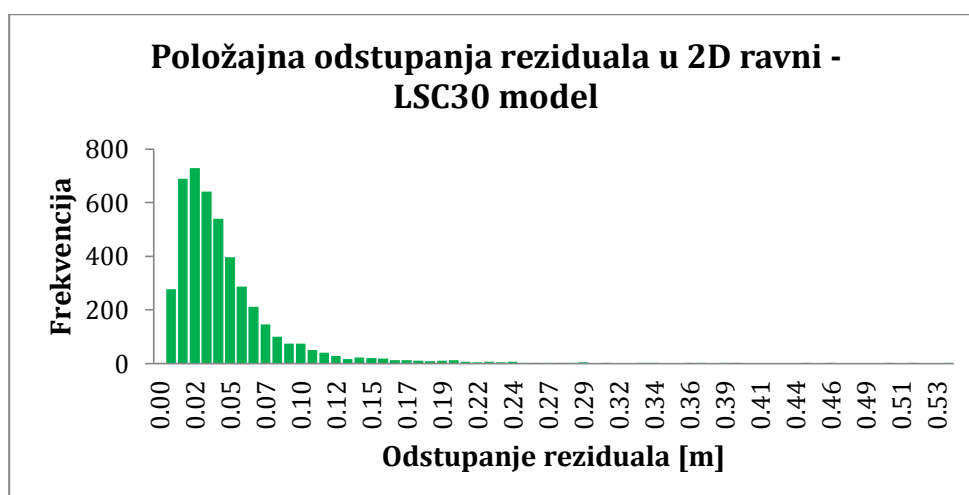
Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.13 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je 0.000 m), i da imaju malu standardnu devijaciju od svega 0.044 m i 0.041 m.

Na slici 5.25 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.26. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.043 m.

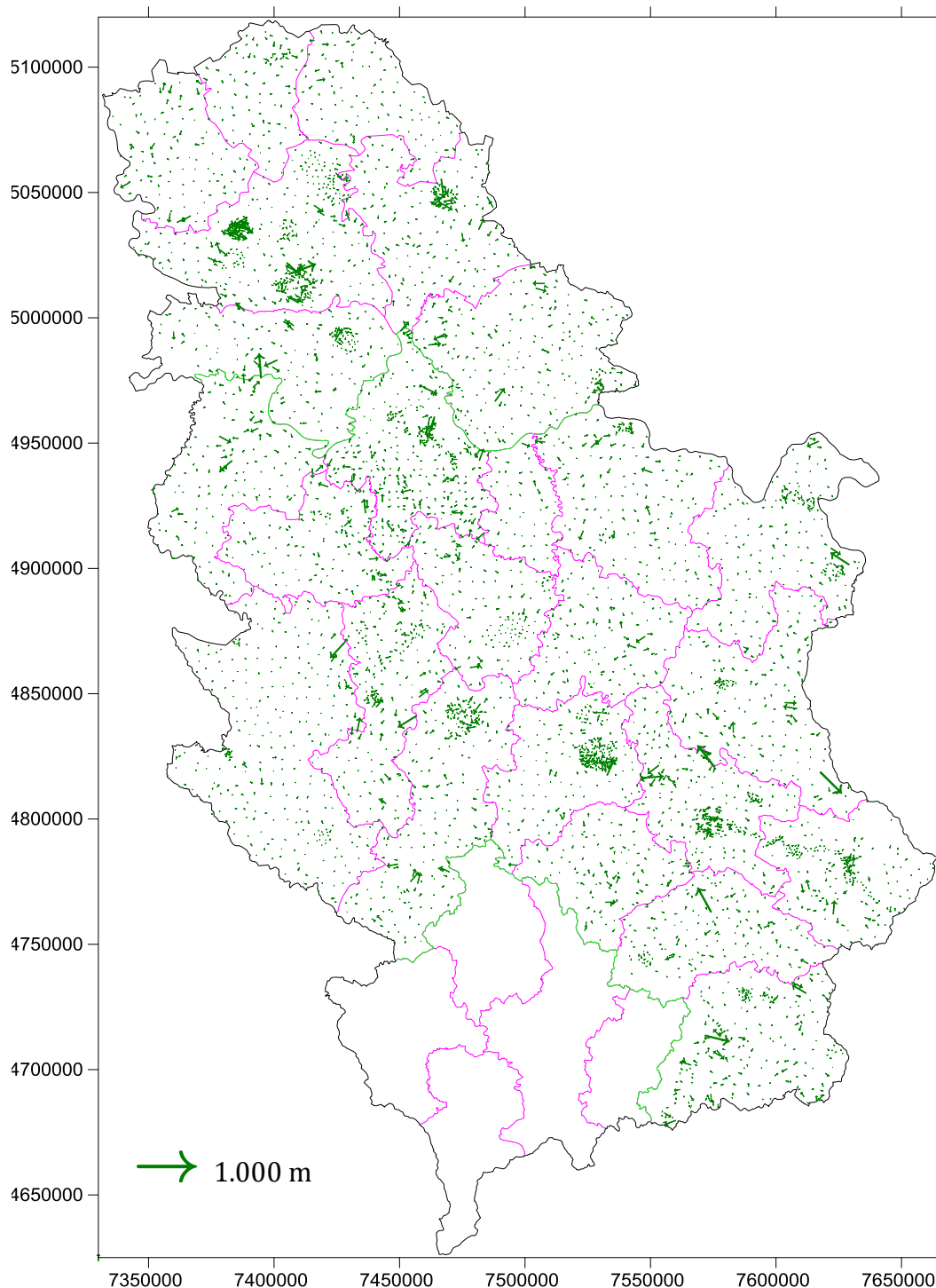


Slika 5.25: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon FIT transformacije



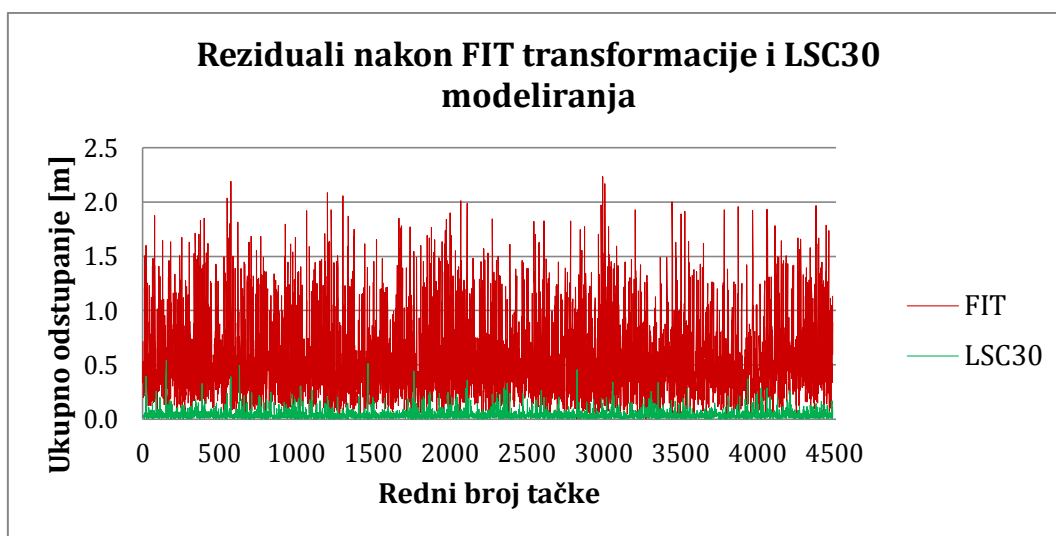
Slika 5.26: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon FIT transformacije

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.27.



Slika 5.27: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu LSC30 modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata - LSC30 modela, a nakon FIT transformacije, po podacima iz tabela 5.11 i 5.13 došlo je do značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.28 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon FIT transformacije i nakon predikcije reziduala primenom LSC30 modela.



Slika 5.28: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom LSC30 modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja

5.3.4. Predikcija reziduala primenom TIN modela

Modelovanje distorzija je u okviru ovog istraživanja realizovano modelovanjem mreže trouglova - TIN modelom, i to sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za usvojenu vrednost eksponenta $e = 1.00$ te je nazvan TIN100 model i za usvojenu vrednost eksponenta $e = 2.00$ te je nazvan TIN200 model.

5.3.4.1 Predikcija reziduala primenom TIN100 modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon FIT transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su modelovanjem mreže trouglova i to sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za usvojenu vrednost eksponenta $e = 1.00$ - TIN100 model. Popravke (reziduali) po

koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 12).

Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom TIN100 modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.14.

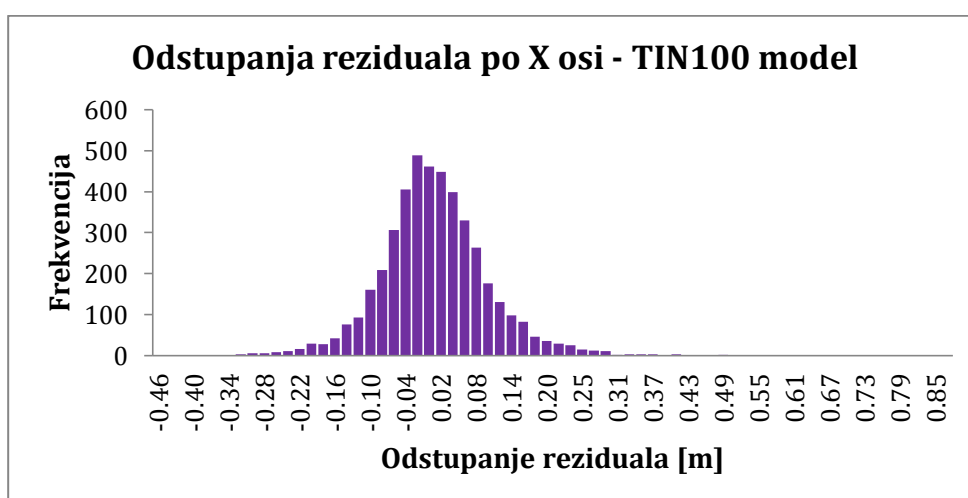
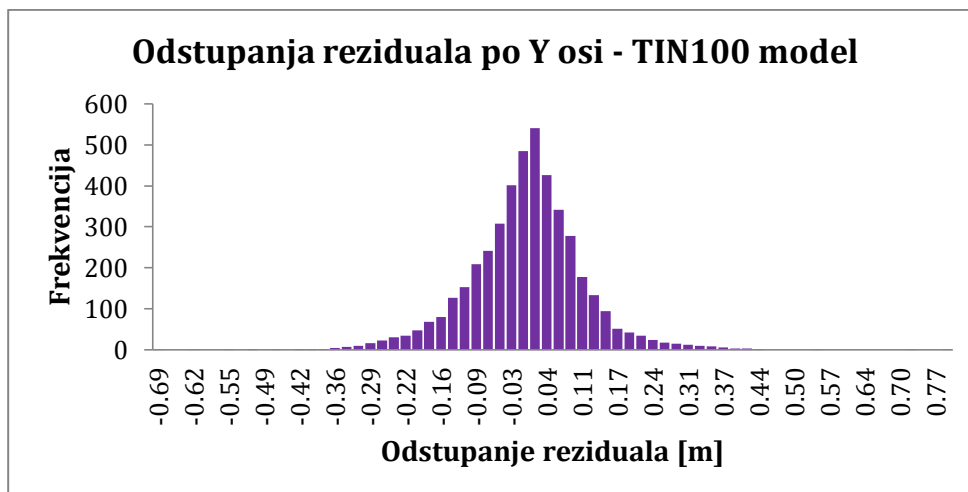
Tabela 5.14: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN100 modelu nakon FIT transformacije

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po TIN100 modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.685	-0.461	0.001
Maksimum	0.789	0.871	0.872
Srednja vrednost	-0.008	-0.004	0.116
Standardna devijacija	0.108	0.095	0.086

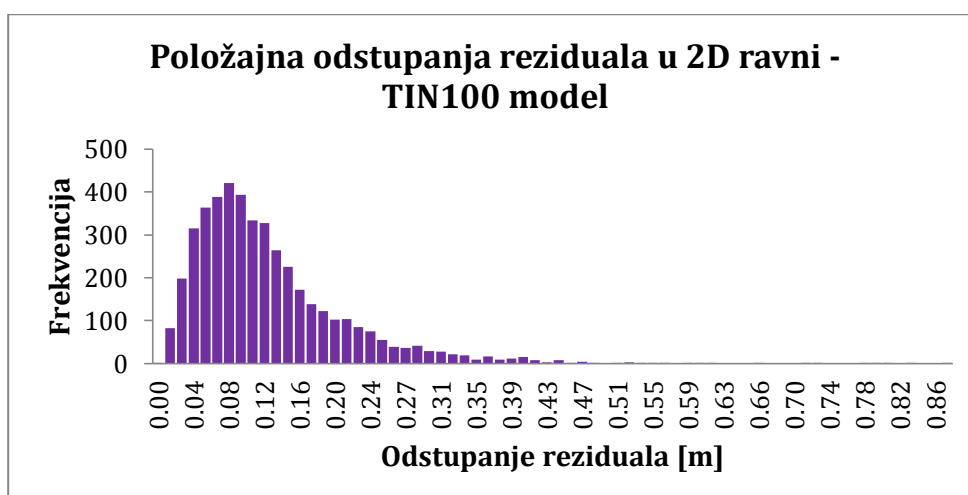
Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.14 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je -0.008 m i -0.004 m), i da imaju relativno malu standardnu devijaciju od 0.108 m i 0.095 m.

Na slici 5.29 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.30. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.086 m.

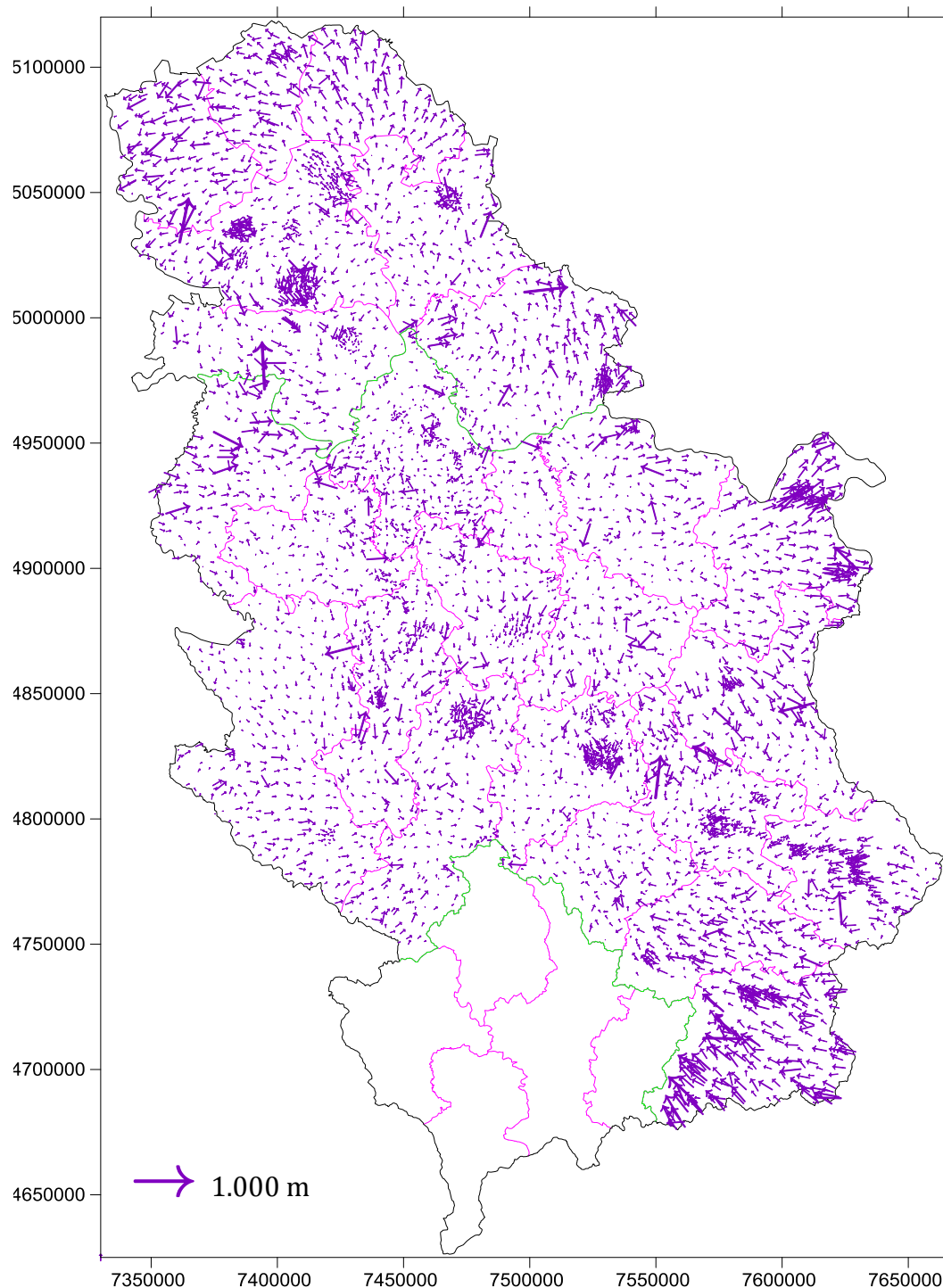


Slika 5.29: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon FIT transformacije



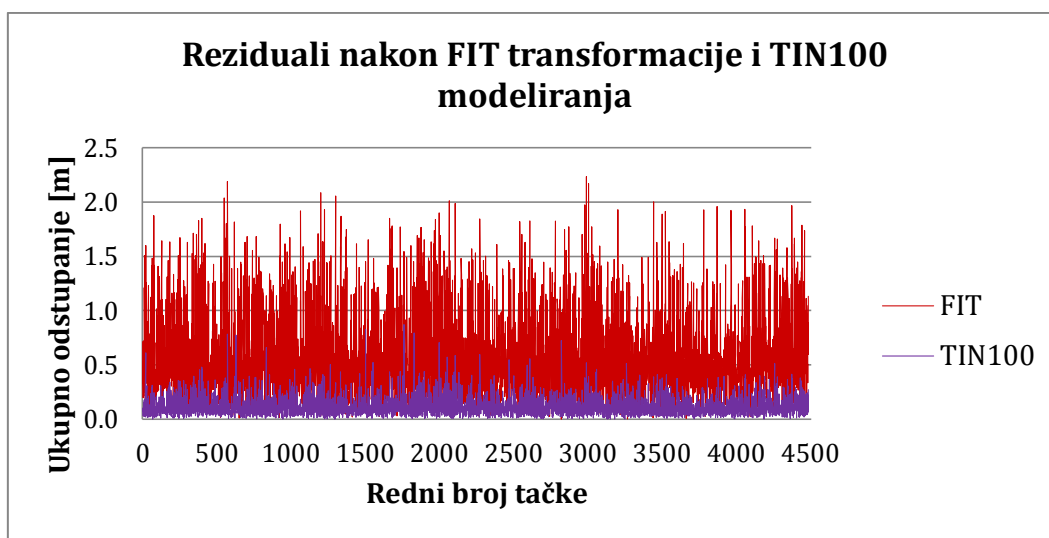
Slika 5.30: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon FIT transformacije

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.31.



Slika 5.31: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN100 modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže modelovanjem mreže trouglova - TIN100 modelom, a nakon FIT transformacije, po podacima iz tabela 5.11 i 5.14 došlo je do značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.32 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon FIT transformacije i nakon predikcije reziduala primenom TIN100 modela.



Slika 5.32: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN100 modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja

5.3.4.2 Predikcija reziduala primenom TIN200 modela

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon FIT transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su modelovanjem mreže trouglova i to sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za usvojenu vrednost eksponenta $e = 2.00$ - TIN200 model. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije. Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 13).

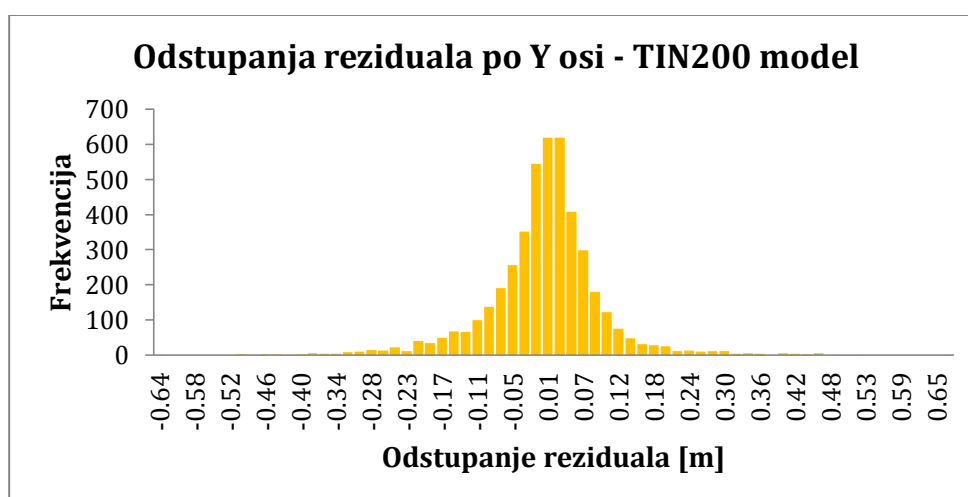
Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom TIN200 modela predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na

zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 5.15.

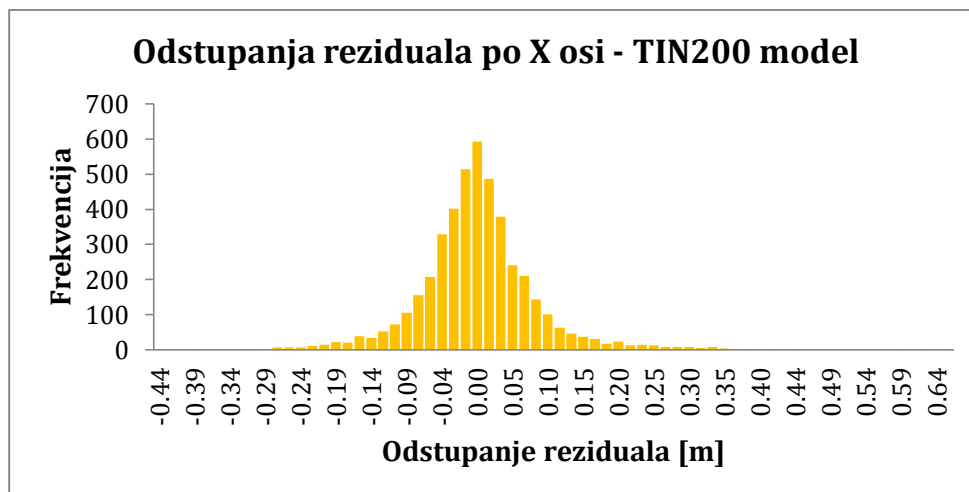
Tabela 5.15: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po TIN200 modelu nakon FIT transformacije

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po TIN200 modelu		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-0.636	-0.436	0.001
Maksimum	0.671	0.656	0.914
Srednja vrednost	-0.008	-0.003	0.095
Standardna devijacija	0.096	0.083	0.085

Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 5.15 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je -0.008 m i -0.003 m), i da imaju relativno malu standardnu devijaciju od 0.096 m i 0.083 m. Na slici 5.33 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.

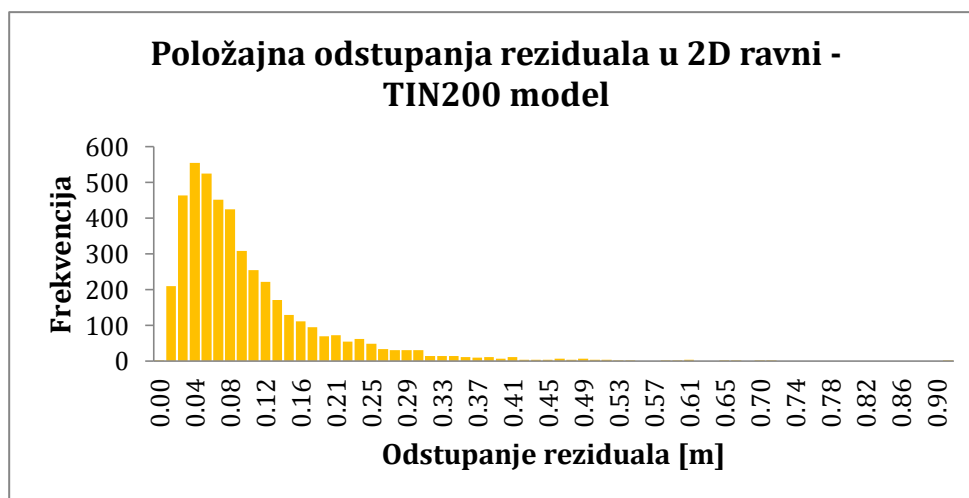


Slika 5.33: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon FIT transformacije



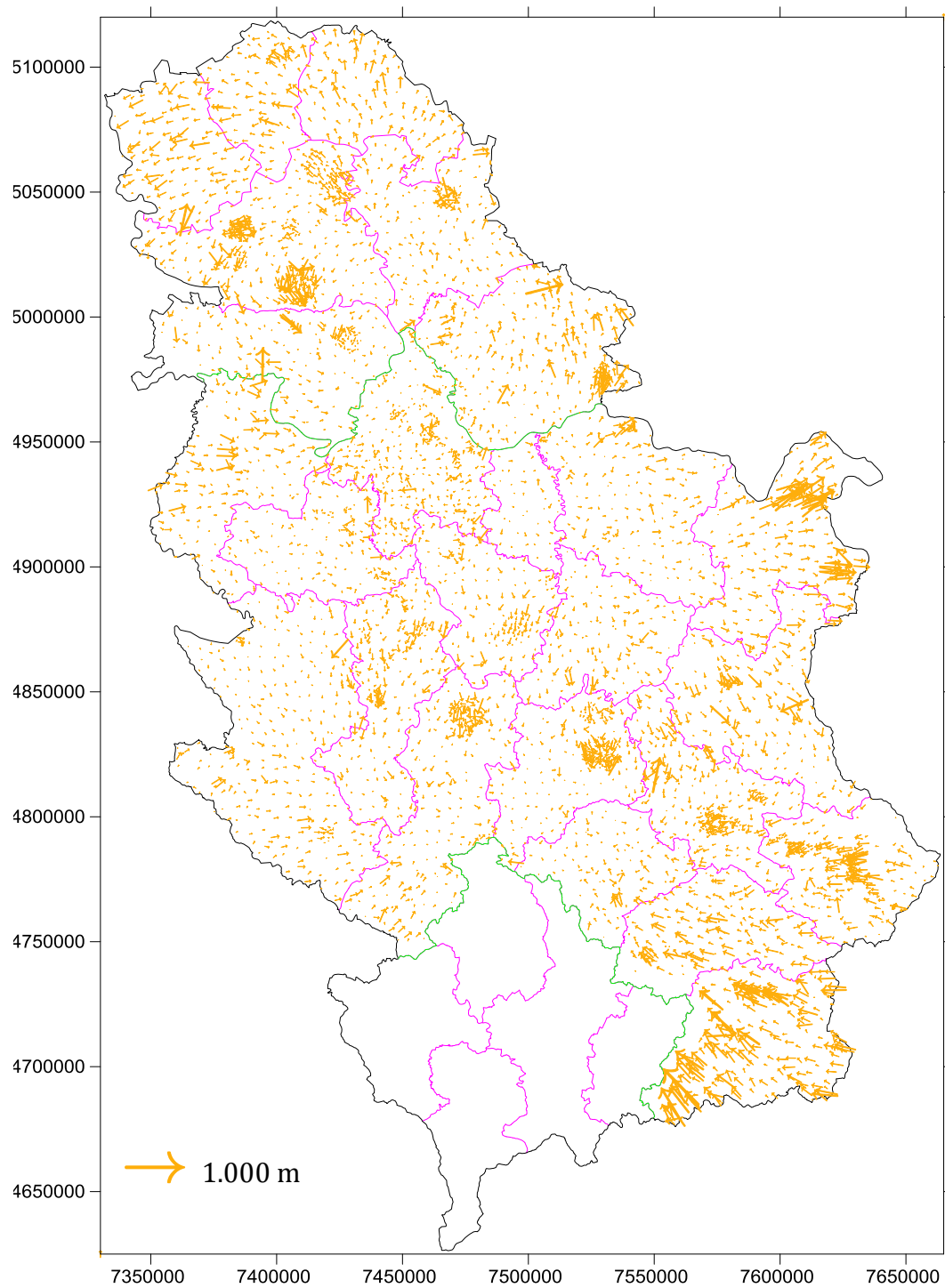
Slika 5.33: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon FIT transformacije

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 5.34. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.085 m.



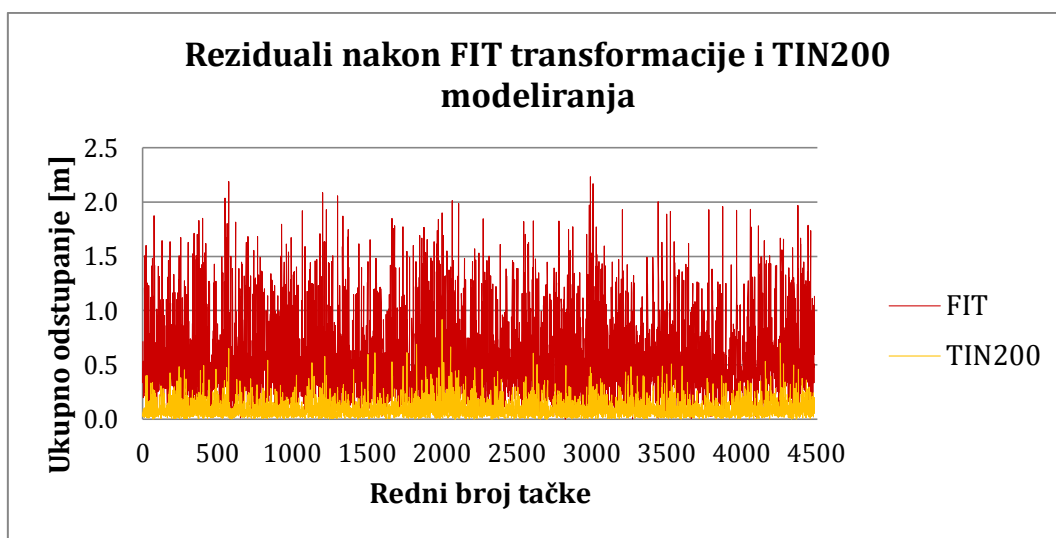
Slika 5.34: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon FIT transformacije

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 5.35.



Slika 5.35: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu TIN200 modela nakon FIT transformacije na području Republike Srbije

Predikcijom reziduala po koordinatnim osama za sve zajedničke tačke mreže modelovanjem mreže trouglova - TIN200 modelom, a nakon FIT transformacije, po podacima iz tabela 5.11 i 5.15 došlo je do značajnog poboljšanja kvaliteta transformacije. Ilustracija ovog poboljšanja je prikazana na slici 5.36 na kojoj su uporedno prikazane vrednosti vektora horizontalnog položaja, sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama, nakon FIT transformacije i nakon predikcije reziduala primenom TIN200 modela.



Slika 5.36: Ilustracija poboljšanja kvaliteta transformacije primenom TIN200 modela nakon FIT transformacije za vektore horizontalnog položaja

6. Upoređenje različitih modela transformacije

U postupku transformacije koordinata tačaka između globalnog i lokalnog geodetskog referentnog sistema na području Republike Srbije za potrebe modelovanja distorzija primenjeni su različiti modeli. Reziduali po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama su određeni primenom Briggs-ovog MCS modela, LSC30 modela, TIN100 i TIN200 modela i to u dve različite varijante. Prva varijanta se odnosila na primenu ovih modela nakon T7D transformacije a druga nakon primene FIT modela transformacije. Pored novih modela transformacije koordinata obuhvaćenih ovim istraživanjem u službenoj upotrebi na području Srbije koristi se model GRIDER razvijen i realizovan od strane Republičkog geodetskog zavoda (RGZ). U cilju analize karakteristika i mogućnosti primene novih modela izvršeno je njihovo međusobno upoređivanje kao i upoređivanje u odnosu na rezultate koji se dobijaju primenom službenog transformacionog modela GRIDER.

6.1. Upoređenje novih transformacionih modela

6.1.1. Upoređenje modela zasnovanih na T7D modelu transformacije

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne T7D Helmertove transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom Briggs-ovog MCS modela, LSC30 modela, TIN100 i TIN200 modela. Na osnovu vrednosti reziduala u čvorovima grida, primenom bipolarne interpolacije, prognozirane su popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže.

Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike. Osnovni statistički parametri skupa dobijenih razlika reziduala kojima je predstavljena mera kvaliteta svakog pojedinačnog modela su minimum, maksimum, srednja vrednost i standardna devijacija. Za osnovnu meru kvaliteta modela transformacije usvojena je standardna devijacija razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja.

Uporedni prikaz statističkih parametara razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja dat je u tabeli 6.1.

Tabela 6.1: *Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja nakon T7D transformacije*

Model	Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala		
		dE [m]	dN [m]	dp [m]
Briggs-ov MCS	Minimum	-0.379	-0.405	0.000
	Maksimum	0.787	0.793	1.117
	Srednja vrednost	0.000	0.000	0.040
	Standardna devijacija	0.047	0.047	0.053
LSC30	Minimum	-0.504	-0.503	0.000
	Maksimum	0.689	0.791	0.868
	Srednja vrednost	0.000	0.000	0.043
	Standardna devijacija	0.046	0.044	0.047
TIN100	Minimum	-0.689	-0.644	0.003
	Maksimum	1.102	1.100	1.352
	Srednja vrednost	-0.001	-0.002	0.116
	Standardna devijacija	0.111	0.096	0.089
TIN200	Minimum	-0.666	-0.445	0.001
	Maksimum	0.936	1.131	1.149
	Srednja vrednost	-0.001	-0.002	0.095
	Standardna devijacija	0.098	0.085	0.088

Vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala za analizirane modele pokazuju da se najbolji rezultati pri transformaciji koordinata dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, tj. primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km. Naime, primenom modela LSC30 nakon T7D transformacije, za vrednosti standardne devijacije razlike reziduala po koordinatnim osama dobijaja se

$$\sigma_{dE} = 0.046 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.044 \text{ m}, \quad (6.1)$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.047 \text{ m}. \quad (6.2)$$

Rezultati dobijeni u slučaju primene ostalih modela pokazuju da se primenom Briggs-og MCS modela za vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po koordinatnim osama dobijaju

$$\sigma_{dE} = 0.047 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.047 \text{ m}, \quad (6.3)$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.053 \text{ m}. \quad (6.4)$$

Ovi rezultati su vrlo slični rezultatima dobijenim primenom LSC30 modela, ali ipak pokazuju niži nivo kvaliteta transformacije.

Primenom preostala dva modela TIN100 i TIN200 dobijeni parametri standardnih devijacija pokazuju daleko niži nivo kvaliteta transformacije, tj. vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po koordinatnim osama i njihovih vektora horizontalnog položaja približno iznose 0.100 m.

Upoređenjem modela po preostala dva kriterijuma, tj. po minimumu i maksimumu vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama i njihovih vektora horizontalnog položaja, sveukupno najbolji rezultati transformacije postižu se primenom LSC30 modela. Potrebno je naglasiti da maksimalna vrednost vektora horizontalnog položaja iznosi

$$dp_{MAX} = 0.868 \text{ m}, \quad (6.5)$$

što predstavlja izuzetne retke slučajeve obrazložene u poglavlju 5.2.

6.1.2. Upoređenje modela zasnovanih na FIT modelu transformacije

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon FIT transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom Briggs-ovog MCS modela, LSC30 modela, TIN100 i TIN200 modela. Na osnovu vrednosti reziduala u čvorovima grida, primenom bipolarne interpolacije, prognozirane su popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže.

Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike. Osnovni statistički parametri skupa dobijenih razlika reziduala kojima je predstavljena mera kvaliteta svakog pojedinačnog modela su minimum, maksimum, srednja vrednost i standardna devijacija. Za osnovnu meru kvaliteta modela transformacije usvojena je standardna devijacija razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja.

Uporedni prikaz statističkih parametara razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja dat je u tabeli 6.2.

Tabela 6.2: *Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja nakon FIT transformacije*

Model	Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala		
		dE [m]	dN [m]	dp [m]
Briggs-ov MCS	Minimum	-0.379	-0.557	0.000
	Maksimum	0.572	0.598	0.606
	Srednja vrednost	0.000	0.000	0.042
	Standardna devijacija	0.045	0.043	0.046
LSC30	Minimum	-0.331	-0.382	0.000
	Maksimum	0.480	0.442	0.542
	Srednja vrednost	0.000	0.000	0.042
	Standardna devijacija	0.044	0.041	0.043
TIN100	Minimum	-0.685	-0.461	0.001
	Maksimum	0.789	0.871	0.872
	Srednja vrednost	-0.008	-0.004	0.116
	Standardna devijacija	0.108	0.095	0.086
TIN200	Minimum	-0.636	-0.436	0.001
	Maksimum	0.671	0.656	0.914
	Srednja vrednost	-0.008	-0.003	0.095
	Standardna devijacija	0.096	0.083	0.085

Vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala za analizirane modele pokazuju da se po ovom kriterijumu najbolji rezultati pri transformaciji koordinata dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, tj. primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km. Naime, primenom modela LSC30 nakon FIT transformacije, za vrednosti standardne devijacije razlike reziduala po koordinatnim osama dobijaja se

$$\sigma_{dE} = 0.044 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.041 \text{ m}, \quad (6.6)$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.043 \text{ m}. \quad (6.7)$$

Sagledavanjem rezultatata u slučaju primene ostalih modela evidentno je da se primenom Briggs-og MCS modela za vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po koordinatnim osama dobijaja

$$\sigma_{dE} = 0.045 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.043 \text{ m}, \quad (6.8)$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.046 \text{ m}. \quad (6.9)$$

Ovi rezultati su vrlo slični rezultatima dobijenim primenom LSC30 modela, ali ipak pokazuju niži nivo kvaliteta transformacije.

Primenom preostala dva modela TIN100 i TIN200 dobijeni parametri standardnih devijacija pokazuju daleko najniži nivo kvaliteta transformacije, tj. vrednosti standardnih deformacija razlika reziduala po koordinatnim osama i njihovih vektora horizontalnog položaja približno iznose 0.090 m.

Upoređenjem modela po preostala dva kriterijumu, tj. po minimumu i maksimumu vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama i njihovih vektora horizontalnog položaja, sveukupno najbolji rezultati transformacije postižu se primenom LSC30 modela. Potrebno je naglasiti da maksimalna vrednost vektora horizontalnog položaja iznosi

$$dp_{MAX} = 0.542 \text{ m}, \quad (6.10)$$

što predstavlja izuzetne retke slučajeve obrazložene u poglavlju 5.3.

6.1.3. Upoređenje LSC30 modela nakon T7D i FIT transformacije

Po rezultatima prikazanim u potpoglavlju 6.1.1. najbolji rezultati modelovanja distorzija u tačkama geodetske mreže nakon T7D transformacije, dobijaju se primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, tj. primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km.

Rezultati prikazani u potpoglavlju 6.1.2. pokazuju da se najbolji rezultati modelovanja distorzija u tačkama geodetske mreže nakon FIT transformacije, takođe dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, tj. primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km.

Kako se statistički pokazatelji oba ova modelovanja odnose na razlike reziduala dobijene za skup od 4490 zajedničkih tačaka na području Srbije moguće je njihovo upoređenje u cilju definisanja predloga najboljeg modela transformacije koordinata. Uporedni prikaz statističkih parametara razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja dobijenih primenom LSC30 modela nakon T7D transformacije i nakon FIT transformacije dat je u tabeli 6.3.

Tabela 6.3: *Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja za model LSC30*

Model	Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala		
		dE [m]	dN [m]	dp [m]
LSC30 nakon T7D transformacije	Minimum	-0.504	-0.503	0.000
	Maksimum	0.689	0.791	0.868
	Srednja vrednost	0.000	0.000	0.043
	Standardna devijacija	0.046	0.044	0.047
LSC30 nakon FIT transformacije	Minimum	-0.331	-0.382	0.000
	Maksimum	0.480	0.442	0.542
	Srednja vrednost	0.000	0.000	0.042
	Standardna devijacija	0.044	0.041	0.043

Vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po kordinatnim osama od

$$\sigma_{dE} = 0.044 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.041 \text{ m}, \quad (6.11)$$

i standardna devijacija vektora horizontalnog položaja od

$$\sigma_{dp} = 0.043 \text{ m}, \quad (6.12)$$

pokazuju da se po ovom kriterijumu najbolji rezultati pri transformaciji koordinata dobijaju primenom LSC30 modela nakon FIT transformacije.

Primenom LSC30 modela nakon T7D transformacije za vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po kordinatnim osama dobija se

$$\sigma_{dE} = 0.046 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.044 \text{ m}, \quad (6.13)$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.047 \text{ m}, \quad (6.14)$$

što predstavlja vrlo slične rezultate dobijenim rezultatima primenom LSC30 modela nakon FIT transformacije, ali ipak predstavlja niži nivo kvaliteta transformacije.

6.2. Službeni transformacioni model u Srbiji

Postojeći državni referentni sistem Republike Srbije, koji je u upotrebi već više od sedamdeset godina, zasniva se na negeocentričnom Beselovom elipsoidu i Gauss-Krigerovoj projekciji meridijanskih zona.

Zakon o državnom premeru i katastru nepokretnosti, usvojen 31. avgusta 2009. godine, predviđa uvođenje referentnog sistema ETRS89 u Republici Srbiji od 1. januara 2011. godine. ETRS89 je geocentrični terestrički referentni sistem sa početkom u centru mase Zemlje i sa orijentacijom odnosno razmerom koordinatnih osa koji se podudaraju sa sistemom ITRS (eng. *International Terrestrial Reference System*) za epohu 1989. godine.

6.2.1. Postupak i realizacija transformacionog modela GRIDER

Za potrebe računanja transformacionog modela na teritoriji Republike Srbije od strane Republičkog geodetskog zavoda određene su prostorne koordinate 4924 trigonometrijskih tačaka i 809 poligonskih tačaka u datumu ETRF2000.

Na taj način, kao osnova za računanje transformacionog modela korišćen je skup od ukupno 5733 tačaka za koje su sa jedne strane poznate koordinate u Gauss-Krigerovoj projekciji y , x , i visine H u državnom sistemu visina, a sa druge strane pravouglo trodimenzionalne koordinate X , Y , Z koje se odnose na referentni okvir ETRF2000. Transformacioni model 7P+GRID podrazumeva globalnu Helmertovu 3D transformaciju i interpolaciju u okviru grida reziduala postupkom bilinearne interpolacije. Težište transformacionog postupka je bila transformacija horizontalnih položaja tačaka, dok se pitanje visina tačaka rešava izradom projekta određivanja geoida. Grid reziduala formiran je tako da pokriva celokupnu teritoriju Republike Srbije i ima rezoluciju od 1 km. Vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida računane su po principu opšte aritmetičke sredine, i to na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama koje su u relativnoj blizini čvora. Za težine u okviru opšte aritmetičke sredine usvajan je stepen recipročnih rastojanja od čvora do zajedničkih tačaka koje učestvuju u računanju.

Na osnovu prekontrolisanog skupa od 5506 zajedničkih tačaka, primenom softvera GeoTrans, sračunati su parametri Helmertove transformacije sličnosti. Na osnovu reziduala preostalih nakon Helmertove transformacije sličnosti komercijalnim softverom Surfer 8.0 sračunati su gridovi reziduala po koordinatnim osama. Na osnovu sračunatih parametara Helmertove transformacije sličnosti i gridova reziduala po koordinatnim osama razvijen je softver za primenu transformacionog modela nazvan Grider 2.0.

6.2.2. Predikcija reziduala primenom modela GRIDER

Kako bi svi dobijeni rezultati primenom različitih transformacionih modela bili međusobno uporedivi, po napred opisanom postupku primene modela GRIDER transformisan je skup od 4490 zajedničkih tačaka kao i u svim modelima prikazanim u podpoglavljima 5.2. i 5.3. Dakle, na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne Helmertove transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom modela GRIDER. Popravke (reziduali) po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, prognozirane su u okviru gridova primenom bipolarne interpolacije.

Na osnovu prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže određene su njihove razlike (Prilog 14).

Meru preciznosti grida reziduala dobijenog primenom modela GRIDER predstavlja kvalitet kojim se pomoću njega mogu prognozirati reziduali na zajedničkim tačkama. Kao mera kvaliteta usvojena je standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala. Osnovni statistički pokazatelji razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja prikazani su u tabeli 6.4.

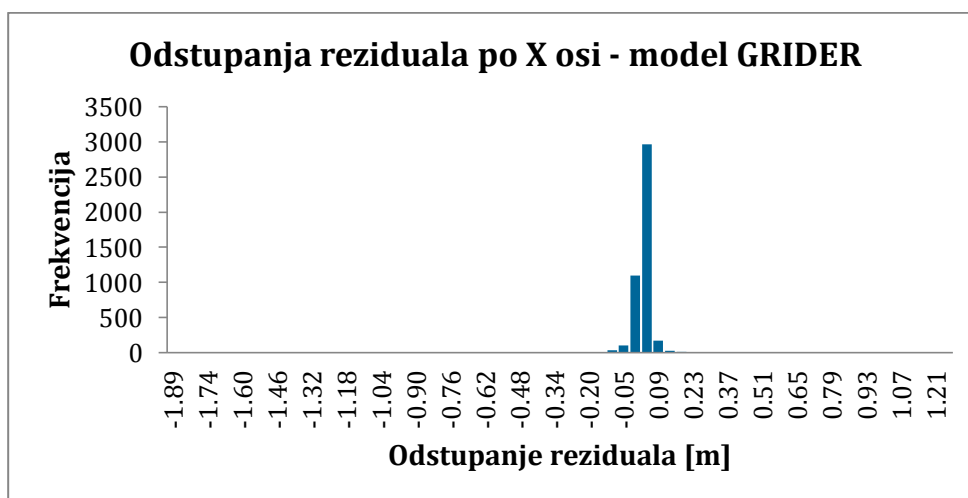
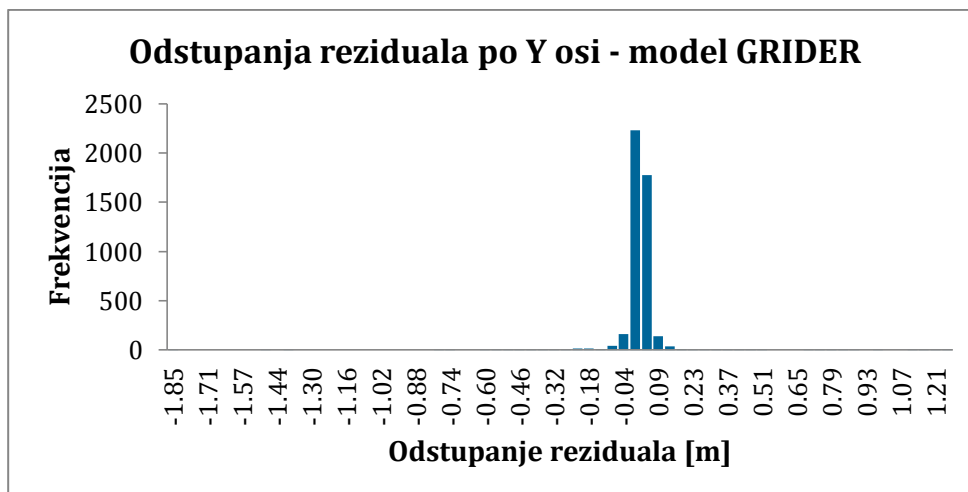
Tabela 6.4: Osnovni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja po modelu GRIDER

Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala po modelu GRIDER		
	dE [m]	dN [m]	dp [m]
Minimum	-1.853	-1.885	0.000
Maksimum	1.254	1.259	2.365
Srednja vrednost	-0.002	-0.002	0.039
Standardna devijacija	0.084	0.080	0.109

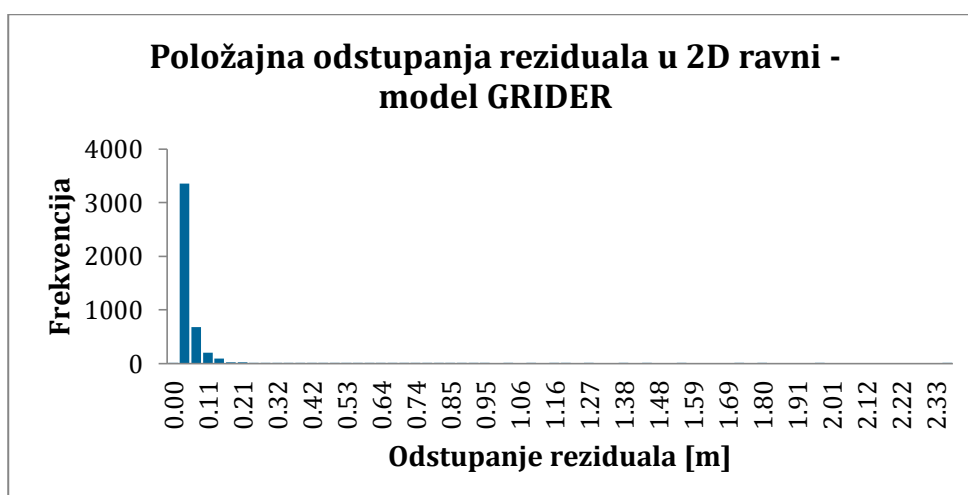
Ekstremne vrednosti razlika reziduala prikazane u tabeli 6.4 predstavljaju izuzetne slučajeve zbog toga što dalje nije vršeno isključivanje po kriterijumu grubih grešaka. Iz istih statističkih podataka se međutim vidi da su razlike reziduala centrirane (srednja vrednost im je -0.002 m), i da imaju relativno malu standardnu devijaciju od 0.084 m i 0.080 m.

Na slici 6.1 prikazani su histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala, iz kojih se vidi da razlike u odličnoj aproksimaciji slede normalni raspored.

Histogram ukupnih horizontalnih razlika, tj. vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama prikazan je na slici 6.2. Sa slike se vidi da ove razlike odlično aproksimiraju χ^2 raspored. Standardna devijacija vektora razlika po horizontalnom položaju ima vrednost 0.109 m.

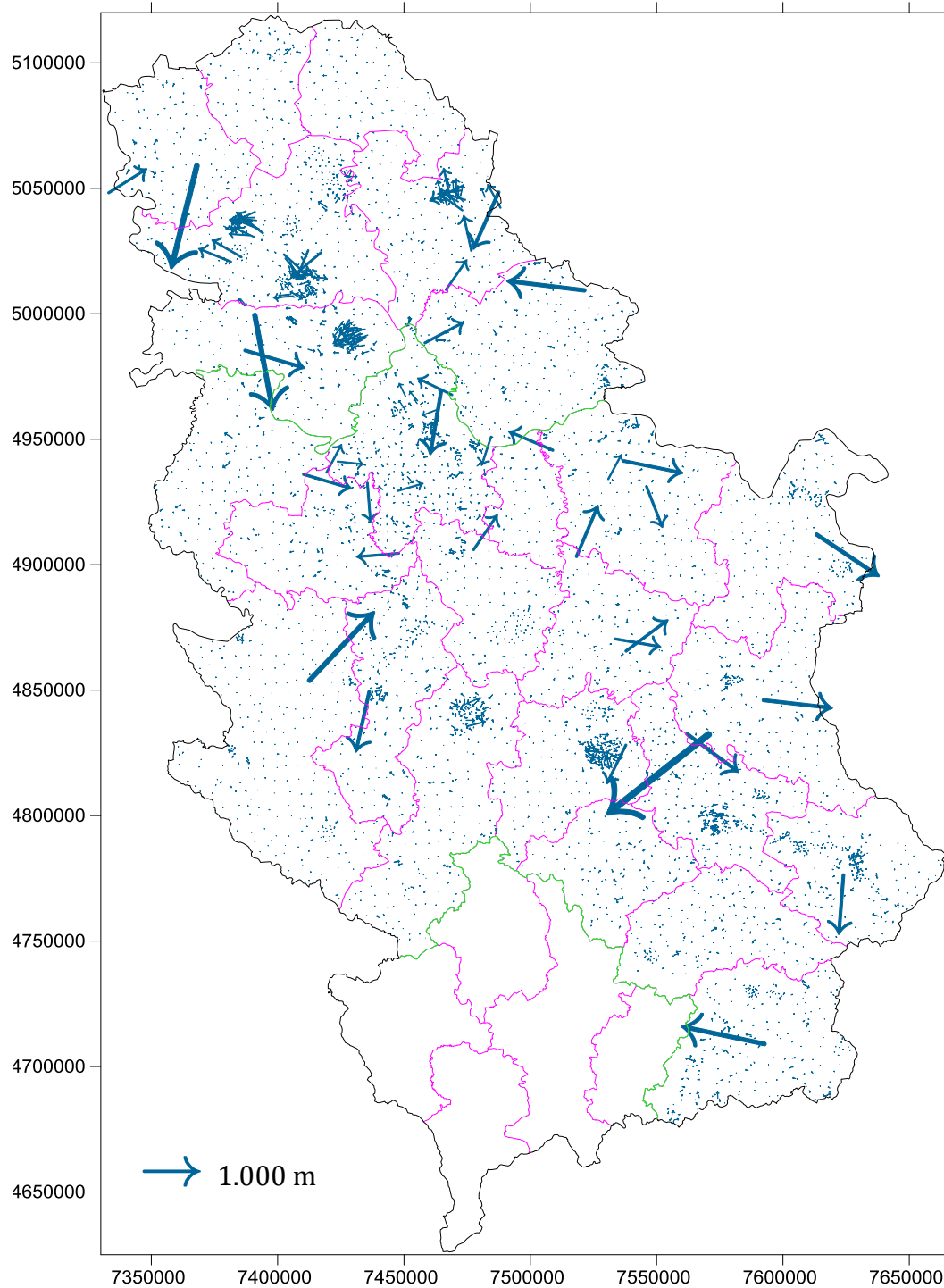


Slika 6.1: Histogrami razlika prognoziranih i poznatih reziduala po koordinatnim osama po modelu GRIDER



Slika 6.2: Histogram vektora horizontalnog položaja sračunatih iz razlika reziduala po koordinatnim osama po modelu GRIDER

Ukupne horizontalne razlike na zajedničkim tačkama mreže, tj. vektori horizontalnog položaja sračunati iz razlika reziduala po koordinatnim osama ilustrovani su na slici 6.3.



Slika 6.3: Dispozicija vektora horizontalnog položaja određenih na osnovu modela GRIDER na području Republike Srbije

6.3. Upoređenje modela LSC30 zasnovanog na FIT transformaciji i modela GRIDER

Upoređenjem rezultata istraživanja novih transformacionih modela prikazanih u potpoglavlju 6.1.3. utvrđeno je da se najbolji rezultati modelovanja distorzija u tačkama geodetske mreže dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata sa korelacionom dužinom od 30 km, tj. primenom LSC30 modela nakon FIT transformacije.

U cilju potpunog sagledavanja mogućnosti primene različitih transformacionih modela u potpoglavlju 6.2.2. su prikazani i analizirani rezultati modelovanja distorzija u tačkama geodetske mreže dobijeni primenom službenog transformacionog modela za područje Srbije - modela GRIDER, zasnovanog na rezidualima određenim nakon primene globalne Helmertove transformacije.

Kako se statistički pokazatelji oba ova modelovanja odnose na razlike reziduala dobijene za skup od 4490 zajedničkih tačaka na području Srbije moguće je njihovo upoređenje u cilju definisanja predloga najboljeg modela transformacije koordinata.

Uporedni prikaz statističkih parametara razlika poznatih i prognoziranih reziduala po koordinatnim osama kao i njihovih vektora horizontalnog položaja dobijenih primenom LSC30 modela nakon FIT transformacije i primenom službenog modela GRIDER dat je u tabeli 6.5.

Vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po koordinatnim osama od

$$\sigma_{dE} = 0.044 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.041 \text{ m}, \quad (6.15)$$

i standardna devijacija vektora horizontalnog položaja od

$$\sigma_{dp} = 0.043 \text{ m}, \quad (6.16)$$

pokazuju da se po ovom kriterijumu najbolji rezultati pri transformaciji koordinata dobijaju primenom LSC30 modela nakon FIT transformacije.

Primenom službenog modela GRIDER nakon T7D transformacije za vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po koordinatnim osama dobija se

$$\sigma_{dE} = 0.084 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.080 \text{ m}, \quad (6.17)$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.109 \text{ m}. \quad (6.18)$$

Tabela 6.5: *Uporedni statistički parametri razlika reziduala po koordinatnim osama i vektora horizontalnog položaja za modele LSC30 i GRIDER*

Model	Statistika	Razlike poznatih i prognoziranih reziduala		
		dE [m]	dN [m]	dp [m]
LSC30 nakon FIT transformacije	Minimum	-0.331	-0.382	0.000
	Maksimum	0.480	0.442	0.542
	Srednja vrednost	0.000	0.000	0.042
	Standardna devijacija	0.044	0.041	0.043
GRIDER nakon T7D transformacije	Minimum	-1.853	-1.885	0.000
	Maksimum	1.254	1.259	2.365
	Srednja vrednost	-0.002	-0.002	0.039
	Standardna devijacija	0.084	0.080	0.109

Kako su dobijeni rezultati znatno lošiji u odnosu na rezultate dobijene primenom modela LSC30 nakon FIT transformacije, sledi da GRIDER predstavlja transformacioni model čijom se primenom dobija niži nivo kvaliteta transformacije u odnosu na model LSC30 nakon FIT transformacije.

7. Zaključak i preporuke

Moglo bi se reći da su savremeni svetski procesi u ovom trenutku definisani opštom tehnološkom i tržišnom globalizacijom koja prevazilazi sve granice pa i nacionalne. Tako je i u oblasti geodezije brz razvoj tehnologije uslovio velike promene u radu i nametnuo neophodnim povezivanje sa drugim delatnostima. Pod pritiskom ovih zahteva razvijaju se nove metode, postupci i radne procedure u geodeziji koje moraju biti saglasne zadatim ciljevima, tj. adekvatne, s krajnjim ciljem obezbeđivanja nesmetanog protoka i korišćenja informacija. U ovakvoj situaciji kada se pred geodetske stručnjake postavljaju, s jedne strane sofisticirani zahtevi brojnih korisnika, a s druge strane su na raspolaganju podaci državnog premera u Gaus-Krigerovoj projekciji koji u smislu savremenosti predstavljaju arhivsku građu, neminovno nastaju veliki problemi.

Postojeći državni referentni sistem Republike Srbije, koji je u upotrebi već više od sedamdeset godina, zasniva se na negeocentričnom Beselovom elipsoidu i Gaus-Krigerovoj projekciji meridijanskih zona. Za fundamentalnu (početnu) tačku sistema usvojena je tačka *Hermannskogel* (nedaleko od Beča), sa astronomski određenim vrednostima latituda i longitude. Orijehtaciju sistema definiše astronomski određen azimut strane *Hermannskogel-Hundsheimer Berg*. Usvojeno je da je u fundamentalnoj tački elipsoidna visina h jednaka ortometrijskoj visini H , odnosno da je undulacija geoida $N=0$. Na osnovu ovako definisanih parametara geodetskog datuma određene su tačke trigonometrijske mreže 1. reda, koje su činile osnovu državnog premera. Trigonometrijska mreža 1. reda nikada nije izvedena kao celina i sastoji se iz više delova koji su razvijani i računati u različitim vremenskim epohama. Ovako nehomogena mreža nije mogla zadovoljiti potrebe geodetskih radova i nije mogla biti uključena u evropsku triangulaciju jer nije zadovoljavala kriterijume tačnosti definisane od strane *International Association of Geodesy* – IAG.

Postojeći državni koordinatni sistem za područje Republike Srbije je unapređen i modernizovan implementacijom nacionalne mreže stalnih GPS stanica i usvajanjem prostornog referentnog sistema ETRS.

Nova referentna mreža na području Republike Srbije je realizovana u periodu od 1997. do 2003. godine i oslanja se na jugoslovenski referentni okvir-YUREF koji predstavlja realizaciju evropskog referentnog okvira-EUREF za područje bivše Jugoslavije. Koordinate tačaka državne referentne mreže definisane su u prostornom geocentričnom svetskom sistemu koji je definisan 1984. godine (World Geodetic System 1984-WGS84). Na celoj teritoriji Republike Srbije u periodu od 1997. godine do 2003. godine uspostavljena je takozvana pasivna geodetska osnova, odnosno referentna GPS mreža (SREF), koju čini 838 tačaka na prosečnom međusobnom rastojanju od oko 10 km. Položajne koordinate SREF mreže određene su obradom izvršenih GPS merenja sa tačnošću od oko 10 mm, a elipsoidne visine sa tačnošću od oko 15 mm. Aktivna geodetska referentna osnova (AGROS) je uspostavljena u periodu od 2003. godine do 2006. godine tako da ravnomerno pokriva celu teritoriju Republike Srbije i čine je 32 permanentno operativne referentne GPS stanice. Koordinate AGROS stanica određene su GPS povezivanjem sa YUREF i SREF tačkama, tako da se i one odnose na referentni okvir ITRF96 za epohu 1998.7. Položajne koordinate AGROS mreže određene su obradom izvršenih GPS merenja sa tačnošću od 4 mm, a elipsoidne visine sa tačnošću od 8 mm.

Pravni okvir za uvođenje i prelazak na novi geodetski prostorni referentni sistem u Republici Srbiji predstavlja Zakon o državnom premeru i katastru nepokretnosti, koji je donet u avgustu 2009. godine. Ovim Zakonom je predviđeno uvođenje referentnog sistema ETRS89 u Republici Srbiji i to od 1. januara 2011. godine. Tako je horizontalni referentni sistem definisan kao dvodimenzionalni koordinatni podskup prostornog referentnog sistema u kome se položaj tačaka izražava dvodimenzionalnim, krivolinijskim koordinatama, odnosno geodetskom dužinom i širinom u odnosu na referentni dvoosni obrtni elipsoid geodetskog referentnog sistema GRS 80 koji se određuje za matematički model Zemlje u Republici Srbiji. Za državnu projekciju usvojena je ravan UTM projekcije na elipsoidu GRS 80 u kojoj se položaj tačaka u horizontalnom referentnom sistemu izražava dvodimenzionalnim pravolinijskim koordinatama.

Istim Zakonom je predviđeno da se do prelaska na ETRS 89 i UTM projekciju, položaj tačaka izražava dvodimenzionalnim koordinatama u postojećim projekcijama (Gaus-Krigerova, stereografska i Zoldnerova projekcija).

Uvođenje novog državnog referentnog sistema, koji se od postojećeg razlikuje i po položaju i po orijentaciji i po razmeri, podrazumeva formulisanje odgovarajućeg transformacionog modela kojim se ostvaruje veza između postojećeg i novog državnog referentnog sistema u oba pravca, pri čemu se u najvećoj meri obuhvataju distorzije i deformacije u realizaciji jednog ili oba sistema.

Zbog činjenice da je na području Republike Srbije još uvek u upotrebi stari geodetski referentni sistem, koji će sigurno još izvesno vreme biti u široj upotrebi, kao mnogo interesantnije i za praktičnu upotrebu značajnije rešenje pojavljuje se pitanje uspostavljanja metodologije prelaza iz jedinstvenog novog Zakonom propisanog geodetskog datuma u postojeći stari geodetski datum. Ovakva situacija je direktna posledica potrebe održavanja postojećih podataka katastra nepokretnosti, zatim još uvek do kraja neuređene normativno-pravne regulative u inženjersko-tehničkim i drugim oblastima koje predstavljaju najvažnije korisnike geodetskih podataka i usluga, kao i višedecenijske navike kakao geodeta tako i drugih u korišćenju pravougljih koordinata tačaka u Gaus-Krigerovoj projekciji.

Za potrebe definisanja transformacionog modela na teritoriji Republike Srbije od strane Republičkog geodetskog zavoda određene su prostorne koordinate za 4924 trigonometrijske tačke i 809 poligonskih tačaka u datumu ETRF2000. Tako je, kao osnova za izračunavanje parametara transformacionog modela korišćen skup od ukupno 5733 zajedničke tačke, koje imaju poznate koordinate u Gaus-Krigerovoj projekciji y , x , i visine H u državnom sistemu visina, a istovremeno i pravougla trodimenzionalne koordinate X , Y , Z koje se odnose na referentni okvir ETRF2000. Za transformacioni model usvojen je model 7P+GRID koga čine globalna Helmertova 3D transformacija i interpolacija u okviru grida reziduala postupkom bilinearne interpolacije. Težište transformacionog postupka je bila transformacija horizontalnih položaja tačaka, dok se pitanje visina tačaka rešava izradom projekta određivanja geoida. Grid reziduala formiran je tako da pokriva celokupnu teritoriju Republike Srbije i ima rezoluciju od 1 km.

Vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida računane su po principu opšte aritmetičke sredine, i to na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama koje su u relativnoj blizini čvora. Za težine u okviru opšte aritmetičke sredine usvajan je stepen recipročnih rastojanja od čvora do zajedničkih tačaka koje učestvuju u računanju.

Na osnovu ovako usvojenog transformacionog modela od strane Republičkog geodetskog zavoda i prekontrolisanog skupa od 5506 zajedničkih tačaka, primenom softvera GeoTrans, određeni su parametri Helmertove transformacije sličnosti. Na osnovu reziduala preostalih nakon Helmertove transformacije sličnosti komercijalnim softverom Surfer 8.0 sračunati su gridovi reziduala po koordinatnim osama. Na osnovu sračunatih parametara Helmertove transformacije sličnosti i gridova reziduala po koordinatnim osama od strane Republičkog geodetskog zavoda razvijen je softver za primenu transformacionog modela nazvan Grider 2.0. Po službenim podacima primenom modela GRIDER na području Republike Srbije dobija se standardna devijacija razlika reziduala po koordinatnim osama od

$$\sigma_{dy} = 0.035 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dx} = 0.032 \text{ m} .$$

U proceduri primene službenog transformacionog modela GRIDER je predviđeno da se u cilju utvrđivanja tačnosti transformacionog modela, na svakom predmetnom području primenom ovog modela prognoziraju koordinate kontrolnih tačaka. Ukoliko je dobijena razlika između datih i prognoziranih koordinata na kontrolnim tačkama veća od 30cm, potrebno je izvršiti ažuriranje transformacionog modela dodavanjem novih zajedničkih tačaka sa predmetnog područja.

U skladu sa postavljenim ciljevima i predmetom istraživanja u okviru ove disertacije su po prvi put istražene i eksperimentalnim putem proverene mogućnosti primene različitih modela transformacije prostornih podataka između globalnog i lokalnog geodetskog referentnog sistema na području Republike Srbije. Tako je modelovanja distorzija preko prognoziranih vrednosti reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama geodetske mreže realizovano primenom Briggs-og MCS modela, LSC30 modela, TIN100 i TIN200 modela i to u

dve različite varijante, u čemu se ogleda naučni doprinos ove disertacije. Prva varijanta se odnosila na primenu ovih modela nakon globalne Helmertove T7D transformacije a druga nakon primene modela direktne projekcije, tj. FIT modela transformacije.

Za potrebe ovog istraživanja od Republičkog geodetskog zavoda su preuzeti podaci o koordinatama tačaka na području Republike Srbije i to u oba sistema, tj. koordinate tačaka (y, x, H) starog državnog koordinatnog sistema u Gauss-Krigerovoj projekciji i pravouglo trodimenzionalne koordinate (X, Y, Z) istih tačaka koje se odnose na referentni okvir ITRF96. Preuzeti podaci su se odnosili na skup od ukupno 4509 trigonometrijskih tačaka svih redova.

Kontrola kvaliteta preuzetog skupa zajedničkih tačaka je realizovana na osnovu popravaka po koordinatnim osama postojećeg referentnog sistema v_y, v_x , koje su određene na osnovu preliminarno ocenjenih parametara Helmertove transformacije sličnosti (T7D) po metodi najmanjih kvadrata. Kako popravke predstavljaju meru saglasnosti novog i postojećeg referentnog sistema, poslužile su za testiranje na prisustvo grubih grešaka, odnosno, nesaglasnih koordinata zajedničkih tačaka. Utvrđen je kriterijum po kome je upoređeno položajno odstupanje svake zajedničke tačke sa trostrukom vrednošću standardne devijacije horizontalnog položaja, odnosno, zajednička tačka je zadržana u skupu ako je bio ispunjen kriterijum

$$v_p \leq 3\sigma_p.$$

Ovim testiranjem iz polaznog skupa od 4509 zajedničkih tačaka izbačeno je ukupno 19 tačaka, čime je za dalji postupak istraživanja različitih transformacionih modela ostao skup od 4490 zajedničkih tačaka.

Kako bi dobijeni rezultati predikcije reziduala primenom različitih transformacionih modela bili međusobno uporedivi, za celo područje Republike Srbije formiran je jedinstveni grid tačaka. Rezolucija formiranog grida iznosi 1 km i čini ga 328 kolona i 437 vrsta.

U cilju istraživanja novih načina modelovanja distorzija geodetske mreže primenom međudatumske Helmertove T7D transformacije sličnosti, na osnovu skupa od 4490 zajedničkih tačaka, određeni su globalni transformacioni parametri

koji se odnose na celokupnu teritoriju Republike Srbije. Imajući u vidu veličinu i površinu državne teritorije Republike Srbije, za veličine popravaka-reziduala po koordinatnim osama v_y , v_x dobijene su očekivano visoke vrednosti koje pripadaju intervalu [-2.186 m, +1.934 m], a potom na osnovu njih određene su standardne devijacije horizontalnih položaja zajedničkih tačaka, pri čemu su dobijene sledeće vrednosti

$$\sigma_{dE} = 0.532 \text{ m}, \quad \sigma_{dN} = 0.419 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dp} = 0.377 \text{ m} .$$

Na osnovu reziduala u zajedničkim tačkama dobijenim nakon globalne Helmertove transformacije, vrednosti reziduala po koordinatnim osama u čvorovima grida određene su primenom sledećih modela:

1. Primenom Briggs-og MCS modela
2. Primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km
3. Primenom TIN modela sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za eksponent $e = 1.00$
4. Primenom TIN modela sa težinom $p_i = 1/d_i^e$ za eksponent $e = 2.00$

Zajedničko za sve primenjene modele je postupak po kome su u okviru gridova prognozirane vrednosti reziduala po koordinatnim osama na zajedničkim tačkama mreže, koje su inače poznate, primenom bipolarne interpolacije. Za meru kvaliteta transformacionog modela usvojena ja standardna devijacija razlika između poznatih i prognoziranih reziduala.

Dobijene vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala za analizirane modele primenjene nakon T7D transformacije pokazuju da se najbolji rezultati dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, tj. primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km. Naime, primenom modela T7D+LSC30 za vrednosti standardne devijacije razlike reziduala po koordinatnim osama dobija se

$$\sigma_{dE} = 0.046 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.044 \text{ m},$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.047 \text{ m} .$$

Model direktne projekcije - FIT model transformacije koordinata čiji je autor Bo-Gunnar Reit primenjen je jedino na području Švedske, te je po prvi put istražena mogućnost njegove primene na području Srbije, što predstavlja naučni

doprinos ove disertacije. Tako su parametri direktne projekcije određeni na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka, koje su ravnomerno raspoređene na teritoriji Republike Srbije na prosečnoj udaljenosti od 51 km i imaju vrednosti prikazane u sledećoj tabeli.

Parametar	Vrednost
Centralni meridijan (λ_0)	20° 59' 51.3297228674"
Razmera duž centralnog meridijana (k_0)	0.999899181325
Modul (x_0)	-502.4644 m
Modul (y_0)	7500240.9356 m

Primenom parametara direktne projekcije izvršena je transformacija pravougljih koordinata novog referentnog sistema X_L, Y_L, Z_L u transformisane geografske i projekcione koordinate $\varphi_T, \lambda_T, h_T$ i y_T, x_T, H_T , za skup od 4490 zajedničkih tačaka na području Republike Srbije, korišćenjem originalnog softvera TRANS. Kako model direktne projekcije po svojim karakteristikama predstavlja globalni model transformacije za veličine popravaka-reziduala po koordinatnim osama v_y, v_x dobijene su očekivano visoke vrednosti koje pripadaju intervalu [-2.200 m, +1.886 m], a potom na osnovu njih određene su standardne devijacije horizontalnih položaja zajedničkih tačaka, pri čemu su dobijene sledeće vrednosti

$$\sigma_{dE} = 0.525 \text{ m}, \quad \sigma_{dN} = 0.425 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dp} = 0.380 \text{ m} .$$

Na potpuno isti način kao nakon primene globalne Helmertove T7D transformacije, istražene su i eksperimentalno proverene mogućnosti primene ista 4 nova transformaciona modela nakon FIT transformacije. Dobijene vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala za analizirane modele primenjene nakon FIT transformacije pokazuju da se najbolji rezultati dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, tj. primenom LSC modela sa korelacionom dužinom od 30 km. Naime, primenom modela FIT+LSC30 za vrednosti standardne devijacije razlike reziduala po koordinatnim osama dobija se

$$\sigma_{dE} = 0.044 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.041 \text{ m},$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.043 \text{ m}.$$

Međusobnim poređenjem statističkih pokazatelja dobijenih primenom novih transformacionih modela nakon globalne T7D i FIT transformacije utvrđeno je da se najbolji rezultati modelovanja distorzija u tačkama geodetske mreže dobijaju primenom kolokacije po metodi najmanjih kvadrata, sa korelacionom dužinom od 30 km i to nakon FIT transformacije, tj. primenom FIT+LSC30 modela.

U cilju potpunog sagledavanja mogućnosti primene različitih transformacionih modela, za isti skup od 4490 zajedničkih tačaka, distorzije su modelovane primenom službenog transformacionog modela za područje Republike Srbije - modela GRIDER. Primenom službenog modela GRIDER nakon T7D transformacije za vrednosti standardnih devijacija razlika reziduala po koordinatnim osama dobija se

$$\sigma_{dE} = 0.084 \text{ m} \quad \text{i} \quad \sigma_{dN} = 0.080 \text{ m},$$

dok je standardna devijacija vektora horizontalnog položaja

$$\sigma_{dp} = 0.109 \text{ m}.$$

Kako su dobijeni rezultati znatno lošiji u odnosu na rezultate dobijene primenom modela FIT+LSC30, sledi da GRIDER predstavlja transformacioni model čijom se primenom dobija niži nivo kvaliteta transformacije u odnosu na model FIT+LSC30.

Definisanje visina trigonometrijskih tačaka koje su kao zajedničke tačke korišćene za određivanje transformacionih parametara međudatumske Helmertove transformacije može biti jedan od budućih pravaca istraživanja u cilju poboljšanja kvaliteta transformacije. Za ove potrebe treba koristiti model geoida i kvazigeoida za područje Srbije, što bi svakako poboljšalo celokupnu prostornu transformaciju, jer se upotrebom novog visokopouzdanog modela geoida za najveći broj geodetskih poslova mogu odrediti visine tačaka sa tačnošću boljom od 10 cm.

Nakon kontrole kvaliteta preuzetog skupa zajedničkih tačaka i odbacivanja tačaka čije su koordinate sadržale grube greške, zbog potrebe da se istraživanje različitih transformacionih modela realizuje sa istim skupom zajedničkih tačaka, kako bi rezultati bili međusobno uporedivi, nije vršeno dalje filtriranje tačaka na osnovu dobijenih vrednosti reziduala. Tako bi u nekom od budućih istraživanja

mogle biti analizirane metode filtriranja reziduala dobijenih nakon primene globalnog modela transformacije. Za te potrebe može biti istraženo filtriranje na bazi odnosa rezultatnog reziduala i funkcije površine okoline tačke, odnosa razlike i međusobne udaljenosti susednih rezultanti u prostoru ili odnosa razlike i međusobne udaljenosti susednih rezultanti u tangentnoj ravni.

Ukoliko bi se za modelovanje distorzija na području Republike Srbije upotrebljavala kolokacija po metodi najmanjih kvadrata budućim istraživanjima bi svakako trebalo obuhvatiti izbor optimalne maksimalne udaljenosti za korekciju pokretne sredine, optimalne maksimalne korelacione udaljenosti, te istražiti druge analitičke modele aproksimacije empirijske funkcije kovarijanse, jer se osim različitih invarijanti Gauss-ove funkcije danas u geostatistici vrlo često upotrebljavaju logaritamske, eksponencijalne i sferne funkcije, kao i polinomi različitog stepena.

U ovoj disertaciji u skladu sa postavljenim ciljem i predmetom istraživanja utvrđene su mogućnosti primene novih transformacionih modela koji geodetskim i drugim stručnjacima obezbeđuju jednostavan i jednoznačan prelaz, odnosno transformaciju prostornih podataka između starog i novog horizontalnog referentnog sistema Republike Srbije. Kako se na području Republike Srbije još uvek koristi stari referentni sistem, kao i zbog praktičnih razloga proizašlih iz njegove primene, u disertaciji su istražene i predložene metode transformacije podataka iz novog u stari geodetski datum. I pored toga, sve nove premere, bez obzira da li se realizuju GNSS i/ili klasičnom terestričkom mernom opremom, ubuduće treba izvoditi u novom referentnom sistemu Republike Srbije, u skladu sa važećim zakonskim odredbama. GNSS tehnologija kojom je relativno jednostavno omogućena visoka tačnost premera u rasponu od milimetarskih do centimetrskih vrednosti se zaista više ne sme svesno "kvariti", odnosno uklapati u nasleđeni državni koordinatni sistem, kako bi bila zadovoljena određena imovinsko-pravna načela kod provođenja promena u bazi podataka katastra nepokretnosti Republičkog geodetskog zavoda.

Kao geodetska struka, odnosno kao njeni pripadnici, imamo pravo, ali i dužnost, da svim korisnicima geodetskih podataka rastumačimo i objasnimo zašto se današnja površina neke parcele razlikuje od površine iste parcele koja je pre više od sto godina bila upisana u zemljišnjim knjigama ili u evidenciji katastra zemljišta nakon novog premera izvršenog sredinom prošlog veka.

S toga se za razliku od novih premera, koje treba realizovati, arhivirati i održavati u novom geodetskom datumu, kao mnogo veći strukovni problem nameće se potreba transformacije postojećih geodetskih podloga u novi datum. Za rešavanje ovog problema, pored definisanja i uspostavljanja modela transformacije, od strane nadležnih organa i institucija prethodno mora biti definisan saglasan pravni i organizacioni okvir.

Literatura

Bian, L., Li, L., Yan, G., (2006): Combining global and local estimates for spatial distribution of mosquito larval habitats, *GIScience and Remote Sensing*, Vol. 43, No. 2, pp. 128-141, Bellwether Publishing Ltd.

Blagojević, D., (2009): Istraživanje optimalnog modela horizontalne transformacije na teritoriji Republike Srbije, Završni izveštaj, Republički geodetski zavod, Beograd.

Bomford, G., (1971): *Geodesy*, Clarendon Press, Oxford, Third Edition.

Boucher, C., Altamini, Z., (1991): Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign, Memorandum verzija br. 5/2001, *IERS Technical Note 9*, Paris.

Bratuljević, N., (1995): Geodetske referentne mreže SRJ, Građevinski fakultet, Institut za Geodeziju, Beograd, 1995.

Briggs, I. C., (1974): Machine contouring using minimum curvature, *Geophysics*, Vol. 39, No. 1, pp. 39-48.

Cai, J., (2000): The systematic analysis of the transformation between the German geodetic reference system (DHDN, DHHN) and the ETRF system (DREF91), *Earth, Planets, Space*, Vol. 52, No. 11, pp. 947-952.

Collier, P. A., (2002): Development of Australia's national GDA94 transformation grids - Consultant's report to the ICSM, The University of Melbourne, Melbourne.

Davies, P., (2000): Great Britain's Ordnance Survey National GPS Network, *Journal of Navigation*, Vol. 53, No. 3, pp. 397-402, Cambridge University Press.

Delaunay, B. N., (1934): Sur la sphere vide, *Bulletin of Academy of Sciences of the USSR*, No. 6/1934, pp. 793-800.

Delčev, S., Blagojević, D., (2006): Novi državni referentni sistem Republike Srbije, Sava Centar, Beograd, 2006.

Dewhurst, W. T., (1990): The Application of Minimum-Curvature-Derived Surfaces in the Transformation of Positional Data from the North American Datum of 1927 to the North American Datum of 1983, Memorandum za NOAA, NOS NGS-50, NADCON, Rockville, 1990.

Edelsbrunner, H., Nimish, S., (1996): Incremental Topological Flipping Works for Regular Triangulations, *Algorithmica*, Vol. 15, No. 3, pp. 223-241, Springer New York.

Felippa, C. A., (2004): Introduction to Finite Element Methods. Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures, University of Colorado, USA.

Gonzalez-Matesanz, J., Dalda, A., Quirós, R., Celada, J., (2003): ED50-ETRS89 Transition models for the spanish geodetic network, Report on the Symposium of the IAG Subcommittee for Europe (EUREF), Toledo, Spain, 4 – 7, June. Vol. 13, IAG publications.

Greaves, M., Cruddace, P., (2002): The Adoption of ETRS89 as the National Mapping system for GB, via a Permanent GPS network and Definitive Transformation, Ordnance Survey, Southampton.

Heiskanen, W. A., Moritz, H. (1967): Physical Geodesy, ISBN:9780608309231, W. H. Freeman, San Francisco.

Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., Collins, J., (2001): Global Positioning System - Theory and Practice, Knjiga, 5. mekano izdanje, Springer-Verlag, Berlin.

Hofmann-Wellenhof, B., Kienast, G., Lichtenegger, H., (1994): GPS in der Praxis, Knjiga, Springer-Verlag, Wien-New York.

Hoggerl, N., Imrek, E., (2007): Recent steps towards the Introduction of ETRS89 in Austria. Uvajanje ETRS v Avstriji, *Geodetski vestnik*, Vol. 51, No. 4, Ljubljana.

Hoggerl, N., Ruess, D., Stangl, G., Titz, H., Ullrich, Ch., Zahn, E., (2008): National Report of Austria, Tehnički izveštaj na EUREF simpozijumu u Briselu od 18. do 21. juna 2008., str. 1-10.

ICSM (2000): Transformation Options-Info Sheet, Inter-governmental Committee on Surveying and Mapping, Canberra.

ICSM (2002): Geocentric Datum of Australia, Inter-governmental Committee on Surveying and Mapping, Canberra.

Ihde, J., Jahn, C.H., Habrich, H., Liebsch, G., Richter, B., Sacher, M., Schluter, W., Weber, G., Wilmes, H., (2008): National Report for Germany, Tehnički izveštaj na EUREF simpozijumu u Briselu od 18. do 21. juna 2008., str. 1-5.

Imrek, E., (2005): Homogenisation of the Austrian Field of Control Points, Tehnički izveštaj na EUREF simpozijumu u Beču od 1. do 4. juna 2005., str. 1-5.

Isaaks, E. H., Srivastava, R. M., (1989): An Introduction to Applied Geostatistics, Oxford University Press, New York.

Jäger, R., Kälber, S., Schneid, S., Villamajor, L. G-A., Talens, P. G., Llorens, L. P., (2003): Precise Plan Transformation of Classical National Networks to ITRF/ETRS89 and Precise Vertical Reference Surface Representation by Digital FEM Height Reference Surfaces (DFHRS), Concepts, Databases, Present Developments and Realisation of a 5 cm DFHRS-Database for the District of Valencia, Spain, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie (BKG), Band 33, EUREF-Mitteilungen Heft 13, Frankfurt.

Jager, R., Kalber, S., (2006): Precise Transformation of Classical Networks to ITRF by CoPaG and Precise Vertical Reference Surface Representation by DFHRS - General Concepts and Realisation of Databases for GIS, GNSS and Navigation Applications, Zbornik radova s međunarodnog skupa *GeoSiberia* od 26. do 28. aprila 2006. god. u Novosibirsku, sveska br. 1, str. 3-31.

Kanani, E., (2000): Robust Estimators for Geodetic Transformations and GIS, Doktorska disertacija, ETHZ, Zurich.

Kempe Ch., Alfredsson A., Engberg L. E., Lilje, M., (2006): Correction Model To Rectify Distorted Co-Ordinate Systems, XXIII FIG Congress Munich, Germany, October 8-13, 2006.

Kenney, J. F., Keeping, E. S., (1662): Moving Averages, Mathematics of Statistics, Knjiga, 1. deo, 3. izdanje, str. 221-223, Princeton University, Van Nostrand.

Krakiwsky, E. J., Wells, D. E., (1971): Coordinate Systems in Geodesy, Department of Surveying Engineering, University of New Brunswick, 1971.

Lantmäteriet, (2003): RT 90–SWEREF 99: <http://www.lantmateriet.se/en/Maps-and-geographic-information/GPS-and-geodetic-surveys/Geodesy/Transformations/RT-90---SWEREF-99/>

Moritz, H., Hofmann-Wellenhof, B., (2005): Physical Geodesy, Knjiga, 1. izdanje, str. 1-403, Springer, Wien-NewYork.

Moritz, H., Mueller, I. I., (1987): Earth Rotation: theory and observation, Frederic Ungar, New York, 1987.

Moritz, H., Sünel, H., (1978): Approximation Methods in Geodesy, Wichmann, Karlsruhe.

Mueller, I. I., (1969): Spherical and Practical Astronomy as Applied to Geodesy, Frederick Ungar Publishing Co., New York.

Ordnance Survey (2002): Guide to Coordinate Systems in Great Britain, Tehnička specifikacija, Ordnance Survey, Southampton.

Ordnance Survey (2008): A guide to coordinate systems in Great Britain, An introduction to mapping coordinate systems and the use of GPS datasets with Ordnance Survey mapping, Tehnička specifikacija verzija 1.9, Southampton, mart 2008.

- Rapp, R. H., (1987): GEOLSP-routine for least square prediction of gravity anomalies from surrounding sample points, The Ohio State University-Department of Geodetic Science and Surveying, Columbus.
- Rapp, R. H., (1991): Geometric geodesy, Part I. Lecture Notes, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University.
- Rapp, R. H., (1992): Geometric Geodesy, Part II. Lecture Notes, Department of Geodetic Science and Surveying, Ohio State University.
- Reit, B.-G., (1997): A simple way of introducing a global reference frame in surveying and mapping, *Survey Review*, Vol. 34(264), pp. 87-90, 1997.
- Reit, B.-G., (2003): Connecting a local system to a geocentric reference frame, Internal paper, Lantmäteriet, 2003-04-04.
- Reit, B.-G., (2009): On geodetic transformations, Rapportserie: Geodesi och Geografiska informationssystem, Gävle 2009.
- Reit, B.-G., (2014): Program PROJFIT, Program TRANS, Compiled 26 October 2014.
- Smith, W. H. F., Wessel, P., (1990): Gridding with a Continuous Curvature Surface in Tension, *Geophysics*, Vol. 55, No. 3, pp. 293-305.
- Torge, W., (1991): Geodesy, 2nd edition, W. deGruyter, Berlin.
- Torge, W., (2001): Geodesy, 3rd edition. W. deGruyter, Berlin.
- Torge, W., (2003): Geodesy, Knjiga, 2. izdanje, Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- Vanicek, P., (1972): The Least Squares Approximation and Related Topics, University of New Brunswick, Dept. of Surveying Engineering, David Ernest Wells.
- Voronoi, G., (1908): Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques, deuxieme memoire, recherche sur les paralleloedres primitifs, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 134, pp. 198-287.

Prilozi

Prilog 1:	Ilustracija spiska od 4509 zajedničkih tačaka sa maksimalnim vrednostima popravaka $v_{p,max}$ po horizontalnom položaju	220
Prilog 2:	Ilustracija spiska od 4490 zajedničkih tačaka koje zadovoljavaju kriterijum maksimalne vrednosti popravaka $v_{p,max}$ po horizontalnom položaju	221
Prilog 3:	Ilustracija vrednosti popravaka dobijenih na osnovu parametara globalne Helmertove T7D transformacije	222
Prilog 4:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon T7D transformacije	223
Prilog 5:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon T7D transformacije	224
Prilog 6:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon T7D transformacije	225
Prilog 7:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon T7D transformacije	226
Prilog 8:	Određivanje parametara direktne projekcije na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka softverom PROJFIT	227
Prilog 9:	Ilustracija vrednosti popravaka dobijenih na osnovu parametara direktne projekcije – FIT transformacije	229
Prilog 10:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om MCS modelu nakon FIT transformacije	230
Prilog 11:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30 modelu nakon FIT transformacije	231
Prilog 12:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon FIT transformacije	232
Prilog 13:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon FIT transformacije	233
Prilog 13:	Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po službenom modelu transformacije GRIDER	234

**Ilustracija spiska od 4509 zajedničkih tačaka sa maksimalnim vrednostima
popravaka $v_{p,max}$ po horizontalnom položaju**

Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]	Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]	Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]	Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]
69/K5	2.837	1255/18/S25	1.515	55/B10	1.274	117/N1	1.118
42/K5	2.810	485/7	1.510	403S/K41	1.273	52/B9	1.116
62/K5	2.769	891/7	1.504	117/D8	1.267	213/N1	1.113
11/K5	2.747	963/S25	1.500	222/K5	1.260	150/N1	1.111
1265/S25	2.714	52/K41	1.479	281/7/ZH6	1.252	25/N1	1.111
72/K5	2.700	270/K5	1.470	107/N1	1.252	19/B10	1.108
54/K5	2.686	80/397/S25	1.469	60/B10	1.251	87/P19	1.104
253/P24	2.686	117/K5	1.463	103/B10	1.249	268/N1	1.103
58/K5	2.619	266/240/S25	1.456	P389/M3	1.248	260/N1	1.102
36/K5	2.476	925/S25	1.453	12/B9	1.248	653/428/K43	1.099
22/K5	2.468	201/K41	1.449	1584/S25	1.244	530/P24	1.098
170C/SH7	2.340	37/S24	1.449	46/N1	1.242	1508/S25	1.098
146/K5	2.220	46/B10	1.442	479/N5	1.238	8Z/N1	1.096
32/K5	2.205	283/K5	1.441	55/R4	1.236	212/B10	1.096
4/A/S25	2.146	14/A/S25	1.438	61/B10	1.224	2/Z3	1.094
166/S25	2.130	937/7	1.437	64/B10	1.221	1506/S25	1.094
163/K5	2.122	1529/S25	1.430	104/B10	1.219	180/R5	1.091
278/S25	2.079	P637/M3	1.421	93/B10	1.215	466/P19	1.091
216/P24	2.049	201/120/S25	1.414	377/P19	1.214	334Z/Z6	1.090
13/141/S25	2.021	427/N5	1.398	50/N1	1.210	603/N5	1.089
951/S25	1.943	57/5/S25	1.398	57/B10	1.202	321Z/P12	1.088
1262/S25	1.942	74/P19	1.398	465/P19	1.200	423/P23	1.082
125/300/S25	1.928	338/B32	1.390	57	1.198	78/N1	1.082
260/S26	1.927	54/B10	1.378	106/V4	1.193	25/P19	1.081
17C/S25	1.889	91/B10	1.377	92/K41	1.190	2/P19	1.081
185/K5	1.858	1248/4/S25	1.373	873/39/S25	1.189	24/N1	1.074
151/64/B32	1.840	1517/S25	1.372	56/S25	1.188	14/N1	1.073
171/129/S25	1.836	113/ZH2	1.364	302/K40	1.183	119/N1	1.070
108/K5	1.834	P642/M3	1.351	99/B10	1.181	68/P15	1.063
1100/S25	1.822	82/B10	1.350	275/N1	1.179	455/N5	1.060
211/K5	1.807	63/ZH6	1.349	486/P24	1.174	78/M2	1.058
309z/M9	1.769	903/S25	1.349	173/128/S25	1.165	44/B10	1.057
98/K5	1.753	270/M8	1.336	22/N1	1.163	792/N5	1.052
214/K5	1.724	57/ZH2	1.332	102/N1	1.162	261/K18	1.050
94/K5	1.717	1745/S25	1.322	658/431/K43	1.157	39/B10	1.050
277/K5	1.684	251/K5	1.321	67/B9	1.156	103/M4	1.049
118/K5	1.667	44/N1	1.319	120/N1	1.156	335/68/S25	1.046
78/P19	1.653	85/K41	1.312	810/S25	1.154	238/N1	1.045
141/M10	1.642	285/N16	1.312	51/N1	1.150	310/B33	1.041
304/P10	1.624	9/B10	1.312	621/7	1.149	215/Z6	1.040
95/B10	1.610	88/B10	1.309	251/S25	1.145	98/B10	1.036
662/S25	1.593	66/B10	1.292	218/N1	1.141	346/T1	1.032
154/K5	1.584	122/4/S25	1.292	211/N1	1.133	79/N1	1.027
988/S25	1.583	3/P19	1.292	64/B9	1.125	5/N1	1.026
178/K5	1.581	143/30/S25	1.288	665/N17	1.124	374/V3	1.024
27/S8	1.544	259/K5	1.286	96/P19	1.124	36/B10	1.024
101	1.540	62/B10	1.282	1087/227/S25	1.121	71/N1	1.022
231/K5	1.525	5/66/S25	1.279	1516/S25	1.120	876/S25	1.022
153/K5	1.524	36/K41	1.277	259/P19	1.119	14/B33	1.019
975/S25	1.522	4/S25	1.276	273/N1	1.118	277/K14	1.019

PRILOG 2.

**Ilustracija spiska od 4490 zajedničkih tačaka koje zadovoljavaju kriterijum
maksimalne vrednosti popravaka $v_{p,max}$ po horizontalnom položaju**

Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]	Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]	Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]	Broj tačke	$v_{p,max}$ [m]
216/P24	2.040	P637/M3	1.412	12/B9	1.232	52/B9	1.101
13/141/S25	2.026	54/B10	1.408	377/P19	1.218	119/N1	1.100
951/S25	1.950	91/B10	1.407	479/N5	1.214	180/R5	1.099
1262/S25	1.945	57/5/S25	1.405	99/B10	1.212	1506/S25	1.098
125/300/S25	1.934	74/P19	1.398	275/N1	1.209	466/P19	1.091
260/S26	1.922	338/B32	1.394	106/V4	1.200	334Z/Z6	1.088
17C/S25	1.892	82/B10	1.381	465/P19	1.200	423/P23	1.088
185/K5	1.891	1248/4/S25	1.376	56/S25	1.196	44/B10	1.087
108/K5	1.867	1517/S25	1.376	302/K40	1.195	25/P19	1.082
171/129/S25	1.841	427/N5	1.373	102/N1	1.193	2/P19	1.081
211/K5	1.840	113/ZH2	1.367	22/N1	1.193	39/B10	1.079
151/64/B32	1.836	251/K5	1.352	92/K41	1.192	238/N1	1.075
1100/S25	1.826	44/N1	1.351	873/39/S25	1.191	98/B10	1.066
98/K5	1.786	903/S25	1.351	120/N1	1.186	603/N5	1.065
309z/M9	1.756	270/M8	1.345	486/P24	1.184	68/P15	1.064
214/K5	1.756	P642/M3	1.343	621/7	1.180	261/K18	1.060
94/K5	1.749	63/ZH6	1.343	51/N1	1.180	79/N1	1.057
277/K5	1.716	9/B10	1.343	658/431/K43	1.173	5/N1	1.055
118/K5	1.699	88/B10	1.340	57	1.173	335/68/S25	1.054
141/M10	1.653	57/ZH2	1.336	218/N1	1.171	36/B10	1.053
78/P19	1.652	1745/S25	1.326	173/128/S25	1.170	71/N1	1.052
95/B10	1.641	66/B10	1.323	211/N1	1.163	277/K14	1.047
304/P10	1.631	259/K5	1.317	810/S25	1.156	78/M2	1.044
154/K5	1.617	85/K41	1.315	251/S25	1.150	215/Z6	1.042
178/K5	1.614	62/B10	1.313	273/N1	1.149	310/B33	1.040
662/S25	1.599	55/B10	1.304	117/N1	1.148	455/N5	1.037
988/S25	1.590	285/N16	1.299	213/N1	1.143	346/T1	1.031
231/K5	1.558	122/4/S25	1.298	150/N1	1.141	103/M4	1.028
153/K5	1.557	143/30/S25	1.295	25/N1	1.141	792/N5	1.027
27/S8	1.542	222/K5	1.292	67/B9	1.140	202/N1	1.026
975/S25	1.528	3/P19	1.292	19/B10	1.138	876/S25	1.022
101	1.528	107/N1	1.283	268/N1	1.134	1609/S25	1.019
1255/18/S25	1.515	4/S25	1.283	260/N1	1.132	14/B33	1.017
485/7	1.513	5/66/S25	1.282	8Z/N1	1.127	176/K5	1.016
891/7	1.505	60/B10	1.281	212/B10	1.127	1608/S25	1.012
963/S25	1.505	103/B10	1.279	665/N17	1.125	192/N1	1.011
270/K5	1.501	36/K41	1.278	1087/227/S25	1.124	258/S28	1.010
117/K5	1.494	117/D8	1.275	96/P19	1.124	374/V3	1.010
52/K41	1.480	46/N1	1.274	1516/S25	1.123	273/K14	1.009
80/397/S25	1.472	403S/K41	1.272	259/P19	1.120	266/Z6	1.008
283/K5	1.472	55/R4	1.257	321Z/P12	1.117	77/N1	1.008
46/B10	1.472	61/B10	1.255	653/428/K43	1.113	72/N1	1.002
266/240/S25	1.461	64/B10	1.252	2/Z3	1.113	3/R4	1.001
925/S25	1.454	104/B10	1.249	78/N1	1.112	49/148/S25	0.999
201/K41	1.451	1584/S25	1.248	64/B9	1.109	85/Z6	0.998
14/A/S25	1.446	93/B10	1.245	530/P24	1.106	48/B9	0.995
37/S24	1.441	281/7/ZH6	1.244	14/N1	1.105	910/S25	0.995
937/7	1.438	P389/M3	1.240	24/N1	1.104	680/N5	0.994
1529/S25	1.435	50/N1	1.240	87/P19	1.104	650/N5	0.992
201/120/S25	1.417	57/B10	1.233	1508/S25	1.103	672/N5	0.992

PRILOG 3.

**Ilustracija vrednosti popravaka dobijenih na osnovu parametara globalne
Helmertove T7D transformacije**

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.659	-0.208	1014/N17	-0.152	-0.108	105/V19	-0.561	0.811
1/D3	0.353	0.123	102/7	0.149	-0.072	105/ZH2	-0.037	-0.202
1/D4	0.514	0.009	102/B8	0.513	-0.290	106/B4	-0.301	-0.257
1/G7	0.214	0.130	102/D5	-0.123	0.299	106/J6	-0.218	0.179
1/J2	0.620	-0.043	102/N1	1.202	0.006	106/K16	-1.086	0.823
1/J6	-0.175	0.407	102/P1	0.195	-0.458	106/LJ5	-0.093	-0.538
1/K18	-0.162	0.081	102/P15	0.194	0.183	106/M10	-0.020	-0.337
1/K40	0.205	0.446	102/P24	0.269	0.000	106/M6	0.282	-0.082
1/L3	-0.139	-0.143	102/T17	-0.164	0.343	106/N16	-0.218	1.039
1/M3	0.299	-0.446	1020/N17	-0.229	0.074	106/N6	-0.388	-0.184
1/P1	0.570	-0.477	1021/N17	-0.100	0.027	106/R5	0.233	-0.372
1/P10	0.029	-0.214	1022/N17	-0.133	0.090	106/V4	0.199	1.324
1/P11	-1.127	0.331	103	-1.303	0.449	106/Z2	0.843	-0.135
1/P17	0.696	-0.054	103/100/S24	-0.156	0.879	106/Z3	0.614	0.309
1/S24	-1.291	0.683	103/7	0.225	-0.079	106/ZH2	-0.061	-0.299
1/SJ	0.365	0.015	103/B10	1.329	0.820	107/B11	0.147	0.692
1/SK/N17	0.138	-0.593	103/K9	-0.154	0.370	107/B38	0.088	0.287
1/T3	0.021	-0.266	103/M4	0.546	0.477	107/N1	1.178	0.136
10/BG	0.101	0.136	103/M6	0.246	0.040	107/N6	-0.321	0.000
10/J6	0.081	-0.455	103/N1	1.214	0.115	107/P14	0.682	0.186
10/N1	0.130	0.788	103/P16	0.149	0.142	107/R5	0.066	-0.383
10/N16	-0.585	1.425	103/R3	0.444	-0.520	107/SH7	0.045	-0.497
10/NV	0.654	-0.051	103/SH7	0.062	-0.600	107/T6	0.164	-0.140
10/P20	0.451	0.199	103/Z1	0.262	-0.773	107/V3	-0.755	-0.063
10/SJ	0.363	0.058	103/Z4	0.250	-0.158	107/ZH2	-0.027	-0.405
10/SK/N17	0.175	-0.645	103/Z6	0.136	0.160	108/C2	-0.396	0.101
10/ZH2	-0.152	-0.489	104	-1.477	1.108	108/C4	0.317	-0.186
100	-1.122	0.489	104/7	0.265	0.024	108/J2	1.147	-0.242
100/B11	0.337	0.971	104/B10	1.317	0.719	108/K5	1.492	0.897
100/B4	-0.428	-0.098	104/D8	0.051	-0.328	108/P23	-0.651	0.947
100/N17	0.071	-0.783	104/K40	0.161	0.276	108/R8	0.299	-0.299
100/P17	0.960	-0.160	104/N17	-0.049	-0.725	108/V3	-0.596	-0.129
100/R6	0.154	-0.282	104/N5	-0.543	0.131	108/Z6	0.117	0.197
100/R8	0.202	-0.016	104/R5	0.105	-0.343	108/ZH2	0.254	-0.217
100/S8	0.019	-0.123	104/R6	0.258	-0.283	1087/227/S25	-0.921	-0.589
100/T17	-0.001	0.472	104/T17	-0.137	0.425	109/A1	0.464	0.172
100/T3	0.139	-0.562	104/U1	0.210	-0.203	109/B11	0.148	0.903
100/T6	0.034	-0.344	104/V4	-0.035	0.185	109/B3	-0.024	-0.267
100/V3	-0.508	0.144	104/ZH2	0.268	-0.254	109/B4	-0.457	-0.345
1002/N17	-0.138	-0.228	105/A5	0.109	0.412	109/B8	0.361	-0.369
1005/N17	-0.427	0.070	105/B32	0.141	-0.470	109/BG	0.069	0.153
101	-1.023	0.586	105/B39	-0.320	0.025	109/L4	-0.862	0.300
101/7	0.163	-0.070	105/K40	-0.048	0.271	109/N11	0.582	0.207
101/J6	-0.323	0.291	105/K8	0.063	0.100	109/P14	0.635	0.139
101/M10	-0.021	-0.199	105/L4	-0.963	0.153	109/S8	0.145	-0.285
101/N6	-0.242	-0.178	105/N6	-0.235	-0.055	109/ZH2	0.293	-0.243
101/P15	0.335	0.057	105/P15	0.406	0.147	10C/R12	0.925	-0.139
101/P23	-0.419	0.616	105/R3	0.318	-0.716	10Z/B39	-0.306	0.106
101/R8	0.218	-0.236	105/R7	-0.010	-0.418	11/485/K41	-0.566	-0.187
101/ZH2	0.107	-0.255	105/T2	-0.029	-0.204	11/B38	0.028	0.256

**Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om
MCS modelu nakon T7D transformacije**

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.003	-0.005	1014/N17	0.014	0.013	105/V19	-0.031	-0.039
1/D3	0.006	0.014	102/7	-0.001	-0.003	105/ZH2	-0.056	-0.058
1/D4	-0.016	-0.009	102/B8	0.031	0.034	106/B4	0.031	0.036
1/G7	-0.002	-0.001	102/D5	0.038	0.038	106/J6	0.002	0.001
1/J2	-0.020	-0.024	102/N1	0.007	0.006	106/K16	0.003	0.006
1/J6	-0.010	-0.012	102/P1	0.003	0.001	106/LJ5	0.017	0.013
1/K18	-0.040	-0.040	102/P15	0.007	0.001	106/M10	0.020	0.017
1/K40	0.002	0.008	102/P24	0.041	0.046	106/M6	-0.042	-0.037
1/L3	0.018	0.017	102/T17	-0.021	-0.025	106/N16	0.031	0.029
1/M3	-0.011	-0.025	1020/N17	-0.062	-0.060	106/N6	-0.106	-0.105
1/P1	0.014	0.026	1021/N17	0.003	0.011	106/R5	0.021	0.026
1/P10	-0.009	-0.009	1022/N17	-0.001	0.009	106/V4	0.142	0.143
1/P11	0.010	0.002	103	-0.036	-0.026	106/Z2	0.019	0.018
1/P17	-0.020	-0.029	103/100/S24	0.096	0.123	106/Z3	0.009	0.010
1/S24	0.003	-0.022	103/7	0.001	0.003	106/ZH2	-0.024	-0.025
1/SJ	-0.004	-0.005	103/B10	-0.023	-0.020	107/B11	-0.037	-0.036
1/SK/N17	-0.008	-0.002	103/K9	-0.067	-0.054	107/B38	-0.020	-0.019
1/T3	-0.048	-0.051	103/M4	-0.013	-0.017	107/N1	-0.039	-0.038
10/BG	-0.003	-0.004	103/M6	-0.008	-0.010	107/N6	0.029	0.028
10/J6	0.029	0.031	103/N1	0.001	0.002	107/P14	-0.057	-0.055
10/N1	-0.246	-0.279	103/P16	0.006	0.007	107/R5	-0.056	-0.055
10/N16	-0.047	-0.045	103/R3	0.044	0.038	107/SH7	0.006	0.013
10/NV	0.023	0.021	103/SH7	-0.001	-0.003	107/T6	-0.004	-0.004
10/P20	0.012	0.015	103/Z1	0.063	0.065	107/V3	-0.071	-0.072
10/SJ	-0.006	-0.006	103/Z4	0.003	0.005	107/ZH2	0.002	0.002
10/SK/N17	-0.123	-0.126	103/Z6	-0.034	-0.034	108/C2	0.015	0.016
10/ZH2	0.003	-0.005	104	0.024	0.014	108/C4	0.027	0.031
100	0.009	0.001	104/7	0.035	0.033	108/J2	-0.040	-0.013
100/B11	0.019	0.019	104/B10	-0.030	-0.029	108/K5	0.003	0.013
100/B4	-0.019	-0.017	104/D8	0.012	0.008	108/P23	0.006	0.008
100/N17	-0.033	-0.033	104/K40	-0.010	-0.005	108/R8	0.044	0.043
100/P17	0.098	0.095	104/N17	0.071	0.056	108/V3	0.069	0.070
100/R6	0.014	0.004	104/N5	-0.013	-0.011	108/Z6	0.000	0.000
100/R8	-0.003	-0.004	104/R5	-0.023	-0.020	108/ZH2	-0.024	-0.022
100/S8	-0.010	-0.008	104/R6	0.034	0.027	1087/227/S25	0.045	0.046
100/T17	0.042	0.039	104/T17	-0.020	-0.019	109/A1	-0.015	-0.013
100/T3	0.022	0.026	104/U1	-0.013	-0.012	109/B11	0.014	0.013
100/T6	-0.030	-0.026	104/V4	-0.127	-0.123	109/B3	-0.042	-0.039
100/V3	0.063	0.065	104/ZH2	0.053	0.055	109/B4	-0.011	-0.012
1002/N17	-0.008	-0.001	105/A5	0.029	0.034	109/B8	0.019	0.008
1005/N17	-0.029	-0.031	105/B32	-0.071	-0.055	109/BG	0.059	0.058
101	0.007	0.011	105/B39	0.032	0.034	109/L4	-0.057	-0.047
101/7	-0.019	-0.017	105/K40	-0.009	-0.007	109/N11	-0.001	0.004
101/J6	-0.023	-0.026	105/K8	0.056	0.054	109/P14	0.000	-0.005
101/M10	-0.017	-0.021	105/L4	-0.021	-0.023	109/S8	-0.002	0.000
101/N6	-0.036	-0.036	105/N6	-0.005	-0.005	109/ZH2	0.009	0.010
101/P15	0.045	0.049	105/P15	0.021	0.027	10C/R12	0.037	0.036
101/P23	0.046	0.049	105/R3	-0.009	-0.018	10Z/B39	0.009	0.009
101/R8	-0.048	-0.037	105/R7	-0.004	-0.008	11/485/K41	-0.008	-0.009
101/ZH2	-0.003	-0.003	105/T2	0.014	0.012	11/B38	-0.014	-0.019

**Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30
modelu nakon T7D transformacije**

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.008	0.026	1014/N17	0.010	-0.021	105/V19	-0.013	-0.016
1/D3	0.021	-0.020	102/7	-0.011	-0.016	105/ZH2	-0.054	0.066
1/D4	-0.008	-0.030	102/B8	0.043	0.019	106/B4	0.039	0.004
1/G7	0.006	-0.027	102/D5	0.038	0.075	106/J6	0.002	-0.019
1/J2	-0.024	0.010	102/N1	-0.001	-0.067	106/K16	0.014	-0.004
1/J6	-0.014	0.016	102/P1	0.005	-0.010	106/LJ5	0.007	-0.004
1/K18	-0.041	-0.009	102/P15	-0.015	-0.002	106/M10	0.008	-0.002
1/K40	0.013	0.009	102/P24	0.039	-0.013	106/M6	-0.025	-0.032
1/L3	0.018	-0.020	102/T17	-0.033	-0.027	106/N16	0.024	-0.001
1/M3	-0.033	-0.013	1020/N17	-0.039	0.022	106/N6	-0.087	-0.019
1/P1	0.036	-0.017	1021/N17	0.034	0.021	106/R5	0.029	0.009
1/P10	-0.009	0.003	1022/N17	0.032	0.040	106/V4	0.176	0.791
1/P11	-0.004	-0.016	103	-0.015	-0.042	106/Z2	0.018	-0.011
1/P17	-0.058	0.021	103/100/S24	0.146	0.020	106/Z3	0.014	-0.005
1/S24	-0.043	-0.026	103/7	-0.001	-0.001	106/ZH2	-0.015	0.023
1/SJ	-0.005	-0.023	103/B10	-0.011	-0.014	107/B11	-0.028	-0.044
1/SK/N17	0.012	-0.019	103/K9	-0.036	0.020	107/B38	-0.019	-0.024
1/T3	-0.037	0.033	103/M4	-0.023	0.031	107/N1	-0.037	0.062
10/BG	-0.012	-0.022	103/M6	-0.014	-0.005	107/N6	0.027	0.089
10/J6	0.030	-0.152	103/N1	0.003	0.029	107/P14	-0.040	0.005
10/N1	-0.331	0.213	103/P16	0.007	0.006	107/R5	-0.060	-0.008
10/N16	-0.038	-0.016	103/R3	0.016	0.034	107/SH7	0.024	-0.014
10/NV	0.018	0.001	103/SH7	-0.002	-0.032	107/T6	-0.006	0.008
10/P20	0.022	0.014	103/Z1	0.064	-0.049	107/V3	-0.074	-0.029
10/SJ	-0.006	-0.005	103/Z4	0.013	0.008	107/ZH2	0.033	-0.063
10/SK/N17	-0.183	0.107	103/Z6	-0.037	0.013	108/C2	-0.012	-0.001
10/ZH2	-0.018	-0.016	104	0.007	-0.064	108/C4	0.028	-0.002
100	0.000	0.030	104/7	0.028	0.005	108/J2	-0.007	-0.055
100/B11	0.018	0.034	104/B10	-0.017	-0.034	108/K5	-0.004	0.025
100/B4	0.009	0.038	104/D8	-0.008	-0.024	108/P23	0.030	-0.007
100/N17	-0.030	-0.050	104/K40	-0.001	-0.029	108/R8	0.063	0.024
100/P17	0.044	0.003	104/N17	0.002	-0.032	108/V3	0.057	-0.030
100/R6	-0.007	-0.016	104/N5	0.002	0.055	108/Z6	-0.024	0.039
100/R8	-0.017	-0.017	104/R5	-0.010	0.019	108/ZH2	-0.008	0.027
100/S8	-0.007	0.000	104/R6	0.012	-0.011	1087/227/S25	0.049	0.020
100/T17	0.042	0.033	104/T17	-0.018	0.018	109/A1	-0.001	0.021
100/T3	0.029	-0.050	104/U1	-0.017	0.012	109/B11	0.007	0.008
100/T6	-0.008	0.000	104/V4	-0.059	-0.250	109/B3	-0.024	0.010
100/V3	0.096	0.041	104/ZH2	0.051	0.023	109/B4	-0.014	-0.011
1002/N17	0.008	0.027	105/A5	0.040	-0.046	109/B8	0.008	0.017
1005/N17	-0.040	0.031	105/B32	-0.043	0.058	109/BG	0.048	0.009
101	0.016	0.029	105/B39	0.024	-0.013	109/L4	-0.032	0.001
101/7	-0.018	0.000	105/K40	-0.009	0.023	109/N11	0.011	0.037
101/J6	-0.031	0.016	105/K8	0.036	-0.005	109/P14	-0.013	-0.009
101/M10	-0.025	-0.011	105/L4	-0.012	0.007	109/S8	0.008	-0.049
101/N6	-0.037	-0.014	105/N6	0.002	0.091	109/ZH2	0.030	0.005
101/P15	0.057	-0.011	105/P15	0.031	0.016	10C/R12	0.049	0.001
101/P23	0.063	-0.047	105/R3	-0.032	-0.028	10Z/B39	0.011	-0.003
101/R8	0.011	0.020	105/R7	-0.015	-0.057	11/485/K41	-0.007	0.017
101/ZH2	-0.012	0.053	105/T2	0.003	0.020	11/B38	-0.035	0.001

Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon T7D transformacije

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.087	0.003	1014/N17	-0.048	-0.031	105/V19	-0.106	0.109
1/D3	0.074	-0.029	102/7	0.006	-0.030	105/ZH2	-0.082	0.028
1/D4	0.102	-0.042	102/B8	0.105	0.011	106/B4	0.002	-0.031
1/G7	0.033	-0.012	102/D5	0.028	0.101	106/J6	-0.035	-0.008
1/J2	0.057	-0.005	102/N1	0.245	-0.039	106/K16	-0.056	0.054
1/J6	-0.039	0.080	102/P1	0.040	-0.090	106/LJ5	0.002	-0.082
1/K18	-0.086	0.003	102/P15	0.008	0.039	106/M10	-0.019	-0.071
1/K40	0.054	0.051	102/P24	0.121	-0.029	106/M6	0.022	-0.055
1/L3	0.000	-0.027	102/T17	-0.072	0.058	106/N16	0.007	0.151
1/M3	-0.016	-0.061	1020/N17	-0.060	0.038	106/N6	-0.126	-0.039
1/P1	0.151	-0.100	1021/N17	0.008	0.017	106/R5	0.081	-0.067
1/P10	-0.021	-0.013	1022/N17	0.035	0.057	106/V4	0.194	1.100
1/P11	-0.150	0.012	103	-0.278	0.054	106/Z2	0.110	-0.026
1/P17	0.032	0.040	103/100/S24	0.189	0.143	106/Z3	0.107	0.049
1/S24	-0.177	0.022	103/7	0.032	-0.011	106/ZH2	-0.033	-0.040
1/SJ	0.034	-0.037	103/B10	0.285	0.169	107/B11	0.003	0.092
1/SK/N17	0.047	-0.131	103/K9	-0.070	0.088	107/B38	0.004	0.026
1/T3	-0.031	-0.010	103/M4	0.047	0.121	107/N1	0.029	0.090
10/BG	-0.012	-0.010	103/M6	0.007	0.004	107/N6	-0.036	0.076
10/J6	0.053	-0.260	103/N1	0.262	0.053	107/P14	0.073	0.055
10/N1	-0.424	0.438	103/P16	0.036	0.026	107/R5	-0.039	-0.076
10/N16	-0.042	0.138	103/R3	0.080	-0.028	107/SH7	0.027	-0.078
10/NV	0.115	-0.013	103/SH7	0.007	-0.118	107/T6	0.017	0.010
10/P20	0.096	0.042	103/Z1	0.119	-0.195	107/V3	-0.286	-0.050
10/SJ	0.031	-0.006	103/Z4	0.056	-0.006	107/ZH2	0.019	-0.093
10/SK/N17	-0.148	-0.011	103/Z6	-0.017	0.023	108/C2	-0.097	0.012
10/ZH2	-0.055	-0.101	104	-0.105	0.038	108/C4	0.103	-0.029
100	-0.176	0.111	104/7	0.077	0.011	108/J2	0.117	-0.108
100/B11	0.113	0.303	104/B10	0.233	0.108	108/K5	0.139	0.115
100/B4	-0.022	0.040	104/D8	0.005	-0.037	108/P23	-0.113	0.172
100/N17	-0.037	-0.161	104/K40	0.018	-0.010	108/R8	0.133	-0.019
100/P17	0.197	-0.025	104/N17	-0.041	-0.204	108/V3	-0.084	-0.066
100/R6	0.010	-0.064	104/N5	-0.146	0.081	108/Z6	-0.009	0.061
100/R8	0.002	-0.013	104/R5	0.003	-0.065	108/ZH2	0.058	-0.015
100/S8	0.003	-0.028	104/R6	0.043	-0.040	1087/227/S25	-0.164	-0.123
100/T17	0.037	0.151	104/T17	-0.037	0.106	109/A1	0.058	0.059
100/T3	0.061	-0.153	104/U1	0.017	-0.013	109/B11	0.016	0.129
100/T6	-0.005	-0.049	104/V4	-0.039	0.024	109/B3	-0.016	-0.057
100/V3	-0.087	0.068	104/ZH2	0.100	0.008	109/B4	-0.088	-0.072
1002/N17	-0.013	0.004	105/A5	0.065	0.067	109/B8	0.050	-0.054
1005/N17	-0.084	0.038	105/B32	0.008	-0.036	109/BG	0.058	0.031
101	-0.140	0.146	105/B39	-0.061	-0.012	109/L4	-0.230	0.086
101/7	0.008	-0.015	105/K40	-0.052	0.049	109/N11	0.101	0.090
101/J6	-0.106	0.074	105/K8	0.032	0.012	109/P14	0.076	0.015
101/M10	-0.032	-0.048	105/L4	-0.199	0.052	109/S8	0.051	-0.105
101/N6	-0.052	-0.037	105/N6	-0.043	0.062	109/ZH2	0.110	-0.016
101/P15	0.145	-0.001	105/P15	0.114	0.062	10C/R12	0.205	-0.024
101/P23	-0.029	0.093	105/R3	0.001	-0.132	10Z/B39	-0.038	0.023
101/R8	0.099	-0.035	105/R7	-0.025	-0.137	11/485/K41	-0.087	0.003
101/ZH2	0.008	-0.012	105/T2	0.000	-0.024	11/B38	-0.047	0.031

PRILOG 7.

Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon T7D transformacije

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.041	0.000	1014/N17	-0.052	-0.042	105/V19	-0.059	0.074
1/D3	0.026	-0.011	102/7	0.019	-0.020	105/ZH2	-0.087	0.011
1/D4	0.103	-0.016	102/B8	0.058	0.006	106/B4	-0.014	-0.025
1/G7	0.012	-0.024	102/D5	0.028	0.093	106/J6	-0.022	0.000
1/J2	0.078	-0.005	102/N1	0.354	-0.032	106/K16	-0.047	0.037
1/J6	-0.019	0.038	102/P1	0.025	-0.062	106/LJ5	0.005	-0.036
1/K18	-0.054	0.008	102/P15	0.019	0.029	106/M10	-0.006	-0.060
1/K40	0.020	0.014	102/P24	0.109	-0.010	106/M6	0.025	-0.034
1/L3	0.007	-0.024	102/T17	-0.058	0.079	106/N16	-0.001	0.085
1/M3	-0.001	-0.019	1020/N17	-0.081	0.030	106/N6	-0.109	-0.030
1/P1	0.082	-0.059	1021/N17	-0.009	0.007	106/R5	0.090	-0.080
1/P10	-0.013	-0.005	1022/N17	0.049	0.054	106/V4	0.201	1.131
1/P11	-0.070	0.010	103	-0.216	0.042	106/Z2	0.056	-0.016
1/P17	0.034	0.010	103/100/S24	0.081	0.091	106/Z3	0.082	0.034
1/S24	-0.073	0.015	103/7	0.021	-0.005	106/ZH2	-0.031	-0.067
1/SJ	0.021	-0.022	103/B10	0.303	0.187	107/B11	0.022	0.137
1/SK/N17	0.033	-0.105	103/K9	-0.040	0.055	107/B38	0.005	0.030
1/T3	-0.027	-0.031	103/M4	0.033	0.056	107/N1	-0.025	0.089
10/BG	-0.021	-0.017	103/M6	0.008	0.002	107/N6	-0.037	0.071
10/J6	0.035	-0.178	103/N1	0.289	0.044	107/P14	0.077	0.033
10/N1	-0.269	0.298	103/P16	0.028	0.027	107/R5	-0.028	-0.077
10/N16	-0.020	0.090	103/R3	0.048	-0.027	107/SH7	0.020	-0.064
10/NV	0.077	-0.005	103/SH7	0.002	-0.086	107/T6	0.010	0.003
10/P20	0.089	0.044	103/Z1	0.058	-0.090	107/V3	-0.288	-0.038
10/SJ	0.017	0.001	103/Z4	0.034	-0.009	107/ZH2	0.027	-0.077
10/SK/N17	-0.112	-0.029	103/Z6	-0.019	0.016	108/C2	-0.089	0.014
10/ZH2	-0.026	-0.047	104	-0.012	-0.015	108/C4	0.048	-0.018
100	-0.126	0.074	104/7	0.059	0.009	108/J2	0.053	-0.052
100/B11	0.150	0.391	104/B10	0.252	0.123	108/K5	0.039	0.030
100/B4	-0.011	0.026	104/D8	0.005	-0.020	108/P23	-0.083	0.107
100/N17	-0.043	-0.152	104/K40	0.007	-0.001	108/R8	0.083	-0.017
100/P17	0.090	-0.005	104/N17	-0.026	-0.170	108/V3	-0.065	-0.059
100/R6	0.011	-0.036	104/N5	-0.190	0.084	108/Z6	-0.013	0.056
100/R8	0.001	-0.011	104/R5	0.022	-0.090	108/ZH2	0.054	-0.031
100/S8	0.006	-0.027	104/R6	0.024	-0.017	1087/227/S25	-0.230	-0.158
100/T17	0.015	0.144	104/T17	-0.023	0.063	109/A1	0.034	0.027
100/T3	0.033	-0.088	104/U1	0.015	-0.014	109/B11	0.012	0.097
100/T6	-0.008	-0.020	104/V4	-0.028	0.010	109/B3	-0.015	-0.070
100/V3	-0.118	0.081	104/ZH2	0.090	0.019	109/B4	-0.061	-0.049
1002/N17	-0.008	-0.009	105/A5	0.043	0.087	109/B8	0.024	-0.024
1005/N17	-0.041	0.027	105/B32	0.013	-0.065	109/BG	0.058	0.030
101	-0.117	0.097	105/B39	-0.074	-0.011	109/L4	-0.214	0.078
101/7	0.020	-0.011	105/K40	-0.034	0.080	109/N11	0.050	0.035
101/J6	-0.073	0.059	105/K8	0.032	0.017	109/P14	0.054	0.009
101/M10	-0.012	-0.024	105/L4	-0.193	0.038	109/S8	0.023	-0.057
101/N6	-0.043	-0.023	105/N6	-0.047	0.049	109/ZH2	0.096	-0.013
101/P15	0.133	0.011	105/P15	0.088	0.043	10C/R12	0.153	-0.019
101/P23	-0.077	0.139	105/R3	0.008	-0.063	10Z/B39	-0.039	0.015
101/R8	0.082	-0.069	105/R7	-0.013	-0.077	11/485/K41	-0.053	0.000
101/ZH2	0.011	-0.042	105/T2	-0.008	-0.043	11/B38	-0.025	0.011

Određivanje parametara direktne projekcije na osnovu skupa od 26 zajedničkih tačaka softverom PROJFIT

```

Program Projfit Compiled October 26 2014
Programmer: B-G Reit (e-mail: bo-gunnar.reit@telia.com)
The parameters are based on a least squares fit using a Transverse Mercator
projection.
The result is based on coordinates from the files Srbija-WGS.k and Srbija31.k
Geodetic coordinates: Unknown geodetic
Grid      coordinates: Unknown grid
The matching of points is based on common identities of the two input files.
In total 4464 points of file Srbija-WGS.k was not matched with a point in file
Srbija31.k
Number of common points:   26

```

```
-----
Minimum and maximum coordinate values in degrees and minutes:
```

```

Latitude           42 57           45 31
Longitude          19 16           22 41

```

```
-----
/
```

```

PROJECTION PARAMETERS
PROJECTION Transverse Mercator
REFERENCE FRAME Unknown geodetic/
GRID SYSTEM Unknown grid/
ELLIPSOID GRS 1980
      6378137.000  298.2572221010 /
CENTRAL MERIDIAN
      20 59 51.3297228674 /
SCALE
      .999899181325 /
FALSE NORTHING
      -502.4644 /
FALSE EASTING
      7500240.9356 /
LATITUDE OF ORIGIN
      .0000 /
END OF PROJECTION PARAMETERS

```

```
/*-----
```

RESIDUALS

```
/* Sign of residuals: transformed minus original grid coordinates
```

	North	East	Radial
110/K3	-.035	-.097	.103
116/D5	.051	-.076	.092
126/A1	.082	.159	.179
127/M6	.027	.166	.168
13/A5	.139	-.032	.142
150/ZH2	-.127	.201	.238
152/T17	-.032	-.027	.042
162/S6	-.137	-.057	.148
201/K40	.161	.048	.168
23/5/B32	.106	-.108	.151
254/K10	.064	-.063	.090
274/S1	-.129	-.107	.168
282/P20	.063	.119	.135
294/R5	-.126	-.039	.132
33/C2	.036	-.010	.037
341/R12	.027	.028	.039
350/P16	-.115	-.015	.116
373/K10	.133	-.044	.141

43/R7	-.016	-.072	.074
454/S6	.097	.105	.143
461/29/B39	.058	-.111	.125
483	-.047	-.001	.047
492/J3	-.048	-.020	.052
72/R6	-.130	-.004	.130
738/T1	-.021	.050	.054
99/D4	-.080	.005	.080
R.m.s.	.092	.086	.126
Max deviation	.161	.201	.238 at 150/ZH2
Number of common points	26		

/*-----

**Ilustracija vrednosti popravaka dobijenih na osnovu parametara direktne
projekcije – FIT transformacije**

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.703	-0.138	1014/N17	-0.206	-0.066	105/V19	-0.570	0.768
1/D3	0.328	0.082	102/7	0.071	-0.104	105/ZH2	-0.085	-0.244
1/D4	0.466	-0.026	102/B8	0.459	-0.318	106/B4	-0.369	-0.247
1/G7	0.169	0.104	102/D5	-0.159	0.298	106/J6	-0.228	0.171
1/J2	0.532	-0.059	102/N1	1.121	-0.055	106/K16	-1.085	0.897
1/J6	-0.188	0.407	102/P1	0.143	-0.493	106/LJ5	-0.146	-0.578
1/K18	-0.196	0.082	102/P15	0.131	0.166	106/M10	-0.065	-0.354
1/K40	0.173	0.422	102/P24	0.228	-0.015	106/M6	0.237	-0.124
1/L3	-0.189	-0.181	102/T17	-0.183	0.350	106/N16	-0.210	1.098
1/M3	0.203	-0.444	1020/N17	-0.280	0.115	106/N6	-0.439	-0.189
1/P1	0.517	-0.510	1021/N17	-0.152	0.068	106/R5	0.189	-0.401
1/P10	-0.031	-0.247	1022/N17	-0.183	0.132	106/V4	0.153	1.305
1/P11	-1.153	0.367	103	-1.306	0.537	106/Z2	0.780	-0.176
1/P17	0.616	-0.058	103/100/S24	-0.155	0.959	106/Z3	0.568	0.261
1/S24	-1.290	0.773	103/7	0.153	-0.112	106/ZH2	-0.109	-0.341
1/SJ	0.333	-0.046	103/B10	1.272	0.754	107/B11	0.117	0.651
1/SK/N17	0.085	-0.572	103/K9	-0.173	0.344	107/B38	0.072	0.316
1/T3	-0.028	-0.298	103/M4	0.505	0.397	107/N1	1.097	0.075
10/BG	0.049	0.121	103/M6	0.201	-0.002	107/N6	-0.371	-0.005
10/J6	0.072	-0.454	103/N1	1.133	0.054	107/P14	0.609	0.172
10/N1	0.052	0.724	103/P16	0.095	0.123	107/R5	0.020	-0.414
10/N16	-0.559	1.496	103/R3	0.392	-0.549	107/SH7	-0.042	-0.465
10/NV	0.609	-0.114	103/SH7	-0.029	-0.572	107/T6	0.122	-0.173
10/P20	0.386	0.125	103/Z1	0.195	-0.788	107/V3	-0.804	-0.037
10/SJ	0.332	-0.005	103/Z4	0.174	-0.217	107/ZH2	-0.075	-0.447
10/SK/N17	0.117	-0.621	103/Z6	0.083	0.144	108/C2	-0.472	0.142
10/ZH2	-0.201	-0.532	104	-1.459	1.172	108/C4	0.247	-0.228
100	-1.140	0.524	104/7	0.192	-0.007	108/J2	1.051	-0.257
100/B11	0.309	0.928	104/B10	1.259	0.653	108/K5	1.424	0.821
100/B4	-0.493	-0.093	104/D8	0.002	-0.376	108/P23	-0.652	0.987
100/N17	0.011	-0.756	104/K40	0.126	0.245	108/R8	0.247	-0.333
100/P17	0.879	-0.174	104/N17	-0.099	-0.699	108/V3	-0.644	-0.102
100/R6	0.070	-0.329	104/N5	-0.621	0.157	108/Z6	0.065	0.183
100/R8	0.151	-0.052	104/R5	0.060	-0.373	108/ZH2	0.209	-0.255
100/S8	-0.032	-0.120	104/R6	0.172	-0.329	1087/227/S25	-0.989	-0.490
100/T17	-0.019	0.476	104/T17	-0.158	0.433	109/A1	0.369	0.145
100/T3	0.092	-0.593	104/U1	0.143	-0.249	109/B11	0.120	0.861
100/T6	-0.010	-0.379	104/V4	-0.082	0.165	109/B3	-0.071	-0.301
100/V3	-0.553	0.171	104/ZH2	0.220	-0.295	109/B4	-0.527	-0.335
1002/N17	-0.183	-0.198	105/A5	0.084	0.393	109/B8	0.305	-0.397
1005/N17	-0.472	0.114	105/B32	0.061	-0.436	109/BG	0.021	0.134
101	-1.042	0.651	105/B39	-0.346	0.063	109/L4	-0.899	0.316
101/7	0.082	-0.101	105/K40	-0.085	0.243	109/N11	0.540	0.146
101/J6	-0.330	0.281	105/K8	0.007	0.072	109/P14	0.561	0.124
101/M10	-0.055	-0.209	105/L4	-1.000	0.165	109/S8	0.096	-0.286
101/N6	-0.293	-0.186	105/N6	-0.286	-0.063	109/ZH2	0.246	-0.283
101/P15	0.272	0.037	105/P15	0.340	0.130	10C/R12	0.848	-0.143
101/P23	-0.423	0.659	105/R3	0.267	-0.742	10Z/B39	-0.339	0.165
101/R8	0.166	-0.270	105/R7	-0.061	-0.456	11/485/K41	-0.616	-0.124
101/ZH2	0.060	-0.295	105/T2	-0.084	-0.240	11/B38	0.020	0.280

Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po Briggs-om

MCS modelu nakon FIT transformacije

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.003	0.009	1014/N17	0.014	-0.012	105/V19	-0.031	0.020
1/D3	0.007	-0.013	102/7	-0.001	-0.006	105/ZH2	-0.056	0.042
1/D4	-0.015	-0.001	102/B8	0.031	-0.031	106/B4	0.030	-0.006
1/G7	-0.002	-0.001	102/D5	0.038	0.081	106/J6	0.002	-0.002
1/J2	-0.020	0.017	102/N1	0.007	-0.081	106/K16	0.001	0.006
1/J6	-0.009	-0.001	102/P1	0.003	0.009	106/LJ5	0.016	-0.009
1/K18	-0.040	-0.012	102/P15	0.007	-0.015	106/M10	0.020	0.002
1/K40	0.006	0.027	102/P24	0.041	-0.016	106/M6	-0.042	-0.028
1/L3	0.018	-0.021	102/T17	-0.022	-0.019	106/N16	0.032	-0.004
1/M3	-0.010	-0.022	1020/N17	-0.062	0.019	106/N6	-0.106	-0.032
1/P1	0.017	-0.003	1021/N17	0.004	0.022	106/R5	0.022	0.008
1/P10	-0.009	-0.006	1022/N17	-0.002	0.032	106/V4	0.142	0.585
1/P11	0.010	-0.005	103	-0.031	-0.038	106/Z2	0.019	-0.014
1/P17	-0.020	0.008	103/100/S24	0.097	0.030	106/Z3	0.010	-0.008
1/S24	0.003	-0.015	103/7	0.001	0.002	106/ZH2	-0.024	0.024
1/SJ	-0.004	-0.014	103/B10	-0.024	-0.009	107/B11	-0.037	-0.037
1/SK/N17	-0.008	-0.022	103/K9	-0.062	0.024	107/B38	-0.020	-0.015
1/T3	-0.048	0.032	103/M4	-0.013	0.000	107/N1	-0.040	0.058
10/BG	-0.003	-0.011	103/M6	-0.008	-0.006	107/N6	0.029	0.083
10/J6	0.029	-0.103	103/N1	0.000	0.058	107/P14	-0.058	0.002
10/N1	-0.241	0.146	103/P16	0.005	-0.004	107/R5	-0.056	-0.001
10/N16	-0.047	-0.017	103/R3	0.044	0.016	107/SH7	0.007	-0.008
10/NV	0.022	0.024	103/SH7	-0.001	-0.031	107/T6	-0.004	0.017
10/P20	0.011	-0.027	103/Z1	0.064	-0.024	107/V3	-0.073	-0.048
10/SJ	-0.006	-0.006	103/Z4	0.003	0.001	107/ZH2	0.001	-0.063
10/SK/N17	-0.123	0.090	103/Z6	-0.034	0.022	108/C2	0.016	0.007
10/ZH2	0.004	-0.029	104	0.029	-0.142	108/C4	0.026	0.004
100	0.008	0.022	104/7	0.036	0.012	108/J2	-0.040	-0.051
100/B11	0.019	0.042	104/B10	-0.031	-0.069	108/K5	0.002	0.022
100/B4	-0.018	0.005	104/D8	0.013	-0.014	108/P23	0.003	-0.020
100/N17	-0.033	-0.028	104/K40	-0.009	-0.028	108/R8	0.044	0.001
100/P17	0.099	0.006	104/N17	0.071	-0.005	108/V3	0.070	-0.032
100/R6	0.012	-0.018	104/N5	-0.014	0.050	108/Z6	0.000	0.034
100/R8	-0.002	-0.007	104/R5	-0.023	0.020	108/ZH2	-0.024	0.010
100/S8	-0.011	0.006	104/R6	0.034	0.006	1087/227/S25	0.044	0.023
100/T17	0.041	0.031	104/T17	-0.021	0.007	109/A1	-0.015	0.020
100/T3	0.022	-0.036	104/U1	-0.014	0.015	109/B11	0.013	0.011
100/T6	-0.030	0.008	104/V4	-0.127	-0.390	109/B3	-0.041	0.021
100/V3	0.063	0.051	104/ZH2	0.053	0.025	109/B4	-0.011	-0.004
1002/N17	-0.008	-0.005	105/A5	0.029	-0.039	109/B8	0.018	0.014
1005/N17	-0.029	0.026	105/B32	-0.072	0.055	109/BG	0.060	0.017
101	0.009	0.026	105/B39	0.033	0.034	109/L4	-0.055	-0.006
101/7	-0.019	0.009	105/K40	-0.009	0.015	109/N11	-0.002	0.006
101/J6	-0.023	0.031	105/K8	0.057	-0.007	109/P14	0.000	-0.018
101/M10	-0.019	0.004	105/L4	-0.021	-0.012	109/S8	-0.002	-0.011
101/N6	-0.036	-0.011	105/N6	-0.005	0.086	109/ZH2	0.009	-0.003
101/P15	0.044	-0.007	105/P15	0.021	0.035	10C/R12	0.037	0.002
101/P23	0.046	-0.035	105/R3	-0.009	-0.019	10Z/B39	0.008	-0.006
101/R8	-0.047	0.025	105/R7	-0.004	-0.056	11/485/K41	-0.008	0.013
101/ZH2	-0.003	0.047	105/T2	0.014	0.017	11/B38	-0.013	0.005

**Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po LSC30
modelu nakon FIT transformacije**

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.008	0.027	1014/N17	0.010	-0.021	105/V19	-0.013	-0.016
1/D3	0.022	-0.020	102/7	-0.011	-0.016	105/ZH2	-0.054	0.065
1/D4	-0.007	-0.030	102/B8	0.042	0.019	106/B4	0.039	0.004
1/G7	0.005	-0.026	102/D5	0.038	0.075	106/J6	0.003	-0.019
1/J2	-0.024	0.011	102/N1	-0.001	-0.067	106/K16	0.014	-0.005
1/J6	-0.014	0.016	102/P1	0.005	-0.010	106/LJ5	0.006	-0.005
1/K18	-0.041	-0.009	102/P15	-0.015	-0.002	106/M10	0.009	-0.002
1/K40	0.013	0.009	102/P24	0.040	-0.013	106/M6	-0.025	-0.032
1/L3	0.018	-0.019	102/T17	-0.033	-0.027	106/N16	0.025	-0.001
1/M3	-0.033	-0.013	1020/N17	-0.038	0.022	106/N6	-0.088	-0.019
1/P1	0.035	-0.017	1021/N17	0.035	0.021	106/R5	0.029	0.010
1/P10	-0.008	0.004	1022/N17	0.032	0.039	106/V4	0.176	0.091
1/P11	-0.004	-0.016	103	-0.015	-0.042	106/Z2	0.018	-0.011
1/P17	-0.058	0.021	103/100/S24	0.147	0.020	106/Z3	0.014	-0.005
1/S24	-0.043	-0.027	103/7	-0.001	0.000	106/ZH2	-0.015	0.023
1/SJ	-0.005	-0.023	103/B10	-0.011	-0.013	107/B11	-0.027	-0.044
1/SK/N17	0.012	-0.019	103/K9	-0.037	0.020	107/B38	-0.019	-0.023
1/T3	-0.036	0.033	103/M4	-0.023	0.031	107/N1	-0.037	0.062
10/BG	-0.012	-0.022	103/M6	-0.014	-0.004	107/N6	0.027	0.089
10/J6	0.029	-0.151	103/N1	0.003	0.029	107/P14	-0.040	0.005
10/N1	-0.331	0.213	103/P16	0.007	0.006	107/R5	-0.060	-0.008
10/N16	-0.038	-0.016	103/R3	0.016	0.034	107/SH7	0.025	-0.014
10/NV	0.018	0.001	103/SH7	-0.002	-0.031	107/T6	-0.005	0.007
10/P20	0.022	0.014	103/Z1	0.064	-0.049	107/V3	-0.075	-0.030
10/SJ	-0.006	-0.005	103/Z4	0.012	0.007	107/ZH2	0.033	-0.063
10/SK/N17	-0.183	0.108	103/Z6	-0.037	0.012	108/C2	-0.012	-0.001
10/ZH2	-0.018	-0.015	104	0.009	-0.063	108/C4	0.028	-0.002
100	0.001	0.031	104/7	0.028	0.006	108/J2	-0.006	-0.055
100/B11	0.019	0.034	104/B10	-0.017	-0.034	108/K5	-0.004	0.025
100/B4	0.009	0.038	104/D8	-0.009	-0.025	108/P23	0.030	-0.007
100/N17	-0.030	-0.050	104/K40	-0.002	-0.029	108/R8	0.064	0.024
100/P17	0.044	0.003	104/N17	0.002	-0.032	108/V3	0.057	-0.030
100/R6	-0.007	-0.017	104/N5	0.001	0.054	108/Z6	-0.024	0.040
100/R8	-0.017	-0.017	104/R5	-0.010	0.019	108/ZH2	-0.008	0.027
100/S8	-0.007	0.001	104/R6	0.012	-0.010	1087/227/S25	0.049	0.020
100/T17	0.042	0.033	104/T17	-0.018	0.018	109/A1	-0.001	0.021
100/T3	0.029	-0.049	104/U1	-0.017	0.012	109/B11	0.006	0.008
100/T6	-0.008	0.000	104/V4	-0.059	-0.250	109/B3	-0.024	0.011
100/V3	0.097	0.041	104/ZH2	0.050	0.023	109/B4	-0.014	-0.010
1002/N17	0.008	0.027	105/A5	0.040	-0.046	109/B8	0.008	0.017
1005/N17	-0.041	0.030	105/B32	-0.044	0.058	109/BG	0.049	0.009
101	0.017	0.030	105/B39	0.024	-0.013	109/L4	-0.032	0.001
101/7	-0.017	-0.001	105/K40	-0.010	0.022	109/N11	0.011	0.037
101/J6	-0.031	0.016	105/K8	0.036	-0.005	109/P14	-0.013	-0.010
101/M10	-0.025	-0.010	105/L4	-0.011	0.005	109/S8	0.009	-0.048
101/N6	-0.037	-0.014	105/N6	0.002	0.091	109/ZH2	0.030	0.005
101/P15	0.057	-0.011	105/P15	0.031	0.017	10C/R12	0.049	0.001
101/P23	0.064	-0.046	105/R3	-0.032	-0.028	10Z/B39	0.010	-0.003
101/R8	0.011	0.020	105/R7	-0.014	-0.057	11/485/K41	-0.007	0.017
101/ZH2	-0.012	0.053	105/T2	0.003	0.020	11/B38	-0.034	0.001

PRILOG 12.

Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN100 modelu nakon FIT transformacije

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.091	0.011	1014/N17	-0.066	-0.017	105/V19	-0.108	0.102
1/D3	0.071	-0.033	102/7	-0.007	-0.035	105/ZH2	-0.090	0.020
1/D4	0.094	-0.048	102/B8	0.099	0.008	106/B4	-0.009	-0.030
1/G7	0.029	-0.014	102/D5	0.025	0.101	106/J6	-0.037	-0.010
1/J2	0.042	-0.007	102/N1	0.228	-0.052	106/K16	-0.057	0.061
1/J6	-0.040	0.080	102/P1	0.032	-0.096	106/LJ5	-0.005	-0.087
1/K18	-0.092	0.003	102/P15	-0.002	0.036	106/M10	-0.026	-0.073
1/K40	0.052	0.049	102/P24	0.110	-0.033	106/M6	0.015	-0.062
1/L3	-0.006	-0.031	102/T17	-0.077	0.061	106/N16	0.009	0.159
1/M3	-0.025	-0.061	1020/N17	-0.070	0.046	106/N6	-0.132	-0.039
1/P1	0.141	-0.106	1021/N17	-0.010	0.031	106/R5	0.074	-0.072
1/P10	-0.025	-0.015	1022/N17	0.028	0.062	106/V4	0.183	0.095
1/P11	-0.153	0.017	103	-0.278	0.072	106/Z2	0.104	-0.030
1/P17	0.020	0.040	103/100/S24	0.190	0.155	106/Z3	0.101	0.043
1/S24	-0.176	0.027	103/7	0.022	-0.015	106/ZH2	-0.043	-0.050
1/SJ	0.029	-0.045	103/B10	0.273	0.154	107/B11	-0.003	0.084
1/SK/N17	0.038	-0.127	103/K9	-0.073	0.085	107/B38	0.001	0.031
1/T3	-0.040	-0.017	103/M4	0.041	0.109	107/N1	0.024	0.087
10/BG	-0.017	-0.012	103/M6	0.000	-0.002	107/N6	-0.044	0.075
10/J6	0.050	-0.260	103/N1	0.245	0.040	107/P14	0.061	0.052
10/N1	-0.437	0.427	103/P16	0.027	0.023	107/R5	-0.048	-0.082
10/N16	-0.038	0.141	103/R3	0.072	-0.032	107/SH7	0.014	-0.073
10/NV	0.109	-0.022	103/SH7	-0.004	-0.114	107/T6	0.012	0.005
10/P20	0.086	0.030	103/Z1	0.110	-0.198	107/V3	-0.303	-0.042
10/SJ	0.028	-0.014	103/Z4	0.044	-0.017	107/ZH2	0.013	-0.097
10/SK/N17	-0.156	-0.008	103/Z6	-0.022	0.022	108/C2	-0.111	0.019
10/ZH2	-0.061	-0.106	104	-0.102	0.044	108/C4	0.092	-0.035
100	-0.178	0.117	104/7	0.064	0.006	108/J2	0.108	-0.109
100/B11	0.106	0.290	104/B10	0.222	0.096	108/K5	0.132	0.107
100/B4	-0.029	0.040	104/D8	-0.001	-0.043	108/P23	-0.113	0.178
100/N17	-0.047	-0.157	104/K40	0.013	-0.014	108/R8	0.125	-0.024
100/P17	0.188	-0.026	104/N17	-0.052	-0.199	108/V3	-0.094	-0.061
100/R6	-0.002	-0.072	104/N5	-0.169	0.088	108/Z6	-0.015	0.059
100/R8	-0.003	-0.017	104/R5	-0.007	-0.072	108/ZH2	0.048	-0.023
100/S8	-0.009	-0.027	104/R6	0.034	-0.044	1087/227/S25	-0.180	-0.101
100/T17	0.033	0.152	104/T17	-0.040	0.108	109/A1	0.046	0.056
100/T3	0.054	-0.157	104/U1	0.006	-0.020	109/B11	0.012	0.123
100/T6	-0.010	-0.052	104/V4	-0.045	0.022	109/B3	-0.026	-0.064
100/V3	-0.101	0.077	104/ZH2	0.094	0.003	109/B4	-0.098	-0.071
1002/N17	-0.020	0.008	105/A5	0.059	0.063	109/B8	0.042	-0.057
1005/N17	-0.087	0.041	105/B32	-0.008	-0.030	109/BG	0.049	0.028
101	-0.141	0.158	105/B39	-0.068	-0.003	109/L4	-0.238	0.090
101/7	-0.007	-0.021	105/K40	-0.062	0.042	109/N11	0.094	0.081
101/J6	-0.107	0.072	105/K8	0.022	0.007	109/P14	0.065	0.012
101/M10	-0.036	-0.047	105/L4	-0.205	0.054	109/S8	0.045	-0.105
101/N6	-0.059	-0.038	105/N6	-0.054	0.061	109/ZH2	0.103	-0.022
101/P15	0.131	-0.005	105/P15	0.103	0.059	10C/R12	0.193	-0.024
101/P23	-0.030	0.104	105/R3	-0.006	-0.136	10Z/B39	-0.044	0.033
101/R8	0.085	-0.044	105/R7	-0.031	-0.142	11/485/K41	-0.093	0.012
101/ZH2	-0.003	-0.021	105/T2	-0.011	-0.032	11/B38	-0.047	0.034

Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po TIN200 modelu nakon FIT transformacije

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	-0.043	0.004	1014/N17	-0.070	-0.027	105/V19	-0.060	0.070
1/D3	0.025	-0.012	102/7	0.006	-0.025	105/ZH2	-0.096	0.003
1/D4	0.094	-0.022	102/B8	0.056	0.005	106/B4	-0.022	-0.024
1/G7	0.010	-0.024	102/D5	0.026	0.093	106/J6	-0.023	-0.001
1/J2	0.064	-0.007	102/N1	0.330	-0.050	106/K16	-0.047	0.042
1/J6	-0.020	0.039	102/P1	0.019	-0.066	106/LJ5	0.001	-0.038
1/K18	-0.060	0.008	102/P15	0.010	0.026	106/M10	-0.013	-0.063
1/K40	0.019	0.013	102/P24	0.095	-0.015	106/M6	0.018	-0.040
1/L3	0.002	-0.027	102/T17	-0.063	0.081	106/N16	0.000	0.090
1/M3	-0.004	-0.019	1020/N17	-0.093	0.040	106/N6	-0.112	-0.029
1/P1	0.076	-0.063	1021/N17	-0.027	0.022	106/R5	0.082	-0.086
1/P10	-0.014	-0.005	1022/N17	0.044	0.057	106/V4	0.186	0.124
1/P11	-0.072	0.012	103	-0.216	0.056	106/Z2	0.053	-0.018
1/P17	0.027	0.010	103/100/S24	0.082	0.099	106/Z3	0.077	0.029
1/S24	-0.072	0.017	103/7	0.015	-0.007	106/ZH2	-0.044	-0.079
1/SJ	0.018	-0.026	103/B10	0.289	0.171	107/B11	0.015	0.128
1/SK/N17	0.025	-0.101	103/K9	-0.042	0.052	107/B38	0.003	0.034
1/T3	-0.038	-0.039	103/M4	0.030	0.049	107/N1	-0.027	0.089
10/BG	-0.025	-0.018	103/M6	0.004	-0.001	107/N6	-0.046	0.070
10/J6	0.033	-0.178	103/N1	0.269	0.029	107/P14	0.067	0.031
10/N1	-0.279	0.289	103/P16	0.018	0.024	107/R5	-0.037	-0.084
10/N16	-0.018	0.091	103/R3	0.043	-0.030	107/SH7	0.010	-0.059
10/NV	0.073	-0.011	103/SH7	-0.007	-0.082	107/T6	0.007	0.000
10/P20	0.079	0.033	103/Z1	0.053	-0.091	107/V3	-0.306	-0.029
10/SJ	0.015	-0.004	103/Z4	0.026	-0.016	107/ZH2	0.024	-0.079
10/SK/N17	-0.121	-0.025	103/Z6	-0.022	0.015	108/C2	-0.102	0.021
10/ZH2	-0.028	-0.049	104	-0.011	-0.013	108/C4	0.041	-0.022
100	-0.128	0.079	104/7	0.047	0.004	108/J2	0.048	-0.053
100/B11	0.140	0.374	104/B10	0.239	0.110	108/K5	0.037	0.028
100/B4	-0.014	0.027	104/D8	0.001	-0.024	108/P23	-0.084	0.112
100/N17	-0.052	-0.148	104/K40	0.004	-0.003	108/R8	0.076	-0.021
100/P17	0.087	-0.005	104/N17	-0.037	-0.164	108/V3	-0.074	-0.054
100/R6	0.003	-0.041	104/N5	-0.219	0.093	108/Z6	-0.018	0.055
100/R8	-0.001	-0.013	104/R5	0.010	-0.099	108/ZH2	0.044	-0.039
100/S8	-0.007	-0.026	104/R6	0.020	-0.019	1087/227/S25	-0.249	-0.131
100/T17	0.010	0.144	104/T17	-0.026	0.064	109/A1	0.027	0.025
100/T3	0.029	-0.091	104/U1	0.008	-0.019	109/B11	0.009	0.093
100/T6	-0.010	-0.022	104/V4	-0.031	0.009	109/B3	-0.026	-0.079
100/V3	-0.133	0.090	104/ZH2	0.086	0.017	109/B4	-0.069	-0.048
1002/N17	-0.013	-0.006	105/A5	0.037	0.082	109/B8	0.020	-0.026
1005/N17	-0.041	0.028	105/B32	-0.002	-0.059	109/BG	0.050	0.026
101	-0.118	0.106	105/B39	-0.082	0.000	109/L4	-0.223	0.082
101/7	0.006	-0.016	105/K40	-0.045	0.071	109/N11	0.047	0.030
101/J6	-0.075	0.057	105/K8	0.022	0.012	109/P14	0.047	0.007
101/M10	-0.015	-0.025	105/L4	-0.199	0.040	109/S8	0.019	-0.057
101/N6	-0.047	-0.024	105/N6	-0.058	0.047	109/ZH2	0.090	-0.018
101/P15	0.116	0.005	105/P15	0.079	0.040	10C/R12	0.143	-0.019
101/P23	-0.078	0.152	105/R3	0.005	-0.065	10Z/B39	-0.044	0.024
101/R8	0.064	-0.080	105/R7	-0.016	-0.079	11/485/K41	-0.056	0.005
101/ZH2	-0.003	-0.053	105/T2	-0.022	-0.051	11/B38	-0.025	0.012

PRILOG 14.

Ilustracija vrednosti razlika reziduala po koordinatnim osama po službenom modelu transformacije GRIDER

Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]	Broj tačke	dE [m]	dN [m]
1/B33	0.000	0.000	1014/N17	-0.020	0.035	105/V19	0.026	0.020
1/D3	0.003	0.003	102/7	0.003	0.004	105/ZH2	-0.003	-0.101
1/D4	-0.003	0.005	102/B8	-0.004	-0.007	106/B4	-0.043	-0.001
1/G7	-0.010	0.072	102/D5	-0.024	-0.039	106/J6	0.000	0.007
1/J2	0.005	-0.001	102/N1	0.007	0.059	106/K16	-0.003	0.001
1/J6	0.005	-0.008	102/P1	0.001	0.008	106/LJ5	-0.001	0.022
1/K18	0.017	0.004	102/P15	0.009	-0.014	106/M10	0.000	0.009
1/K40	-0.012	0.006	102/P24	-0.040	0.018	106/M6	0.004	0.011
1/L3	0.000	0.002	102/T17	0.013	0.004	106/N16	0.005	-0.007
1/M3	0.004	0.003	1020/N17	0.004	-0.016	106/N6	0.047	0.021
1/P1	-0.017	0.007	1021/N17	-0.065	-0.018	106/R5	-0.029	-0.012
1/P10	0.008	0.002	1022/N17	-0.018	-0.008	106/V4	-0.201	-1.183
1/P11	0.007	0.009	103	-0.001	0.010	106/Z2	-0.004	0.002
1/P17	0.025	0.017	103/100/S24	-0.063	-0.001	106/Z3	0.000	-0.002
1/S24	0.044	0.026	103/7	0.018	0.023	106/ZH2	0.004	-0.038
1/SJ	0.008	0.018	103/B10	-0.001	-0.003	107/B11	0.021	0.045
1/SK/N17	-0.005	-0.040	103/K9	0.006	-0.012	107/B38	-0.003	0.005
1/T3	0.025	-0.019	103/M4	0.007	-0.013	107/N1	0.026	-0.054
10/BG	0.010	0.038	103/M6	0.007	0.002	107/N6	-0.004	-0.141
10/J6	-0.141	0.647	103/N1	-0.001	-0.045	107/P14	0.013	-0.009
10/N1	1.139	-0.768	103/P16	-0.009	-0.004	107/R5	0.083	0.003
10/N16	0.002	0.002	103/R3	-0.004	-0.014	107/SH7	-0.007	0.007
10/NV	-0.002	0.004	103/SH7	0.003	0.014	107/T6	0.001	-0.009
10/P20	-0.022	-0.032	103/Z1	-0.031	0.036	107/V3	0.045	0.014
10/SJ	0.013	0.005	103/Z4	-0.007	-0.004	107/ZH2	-0.018	0.055
10/SK/N17	0.199	-0.128	103/Z6	0.017	0.005	108/C2	-0.014	-0.008
10/ZH2	0.019	0.020	104	0.001	0.009	108/C4	-0.016	0.000
100	0.004	-0.004	104/7	-0.026	-0.016	108/J2	-0.014	0.016
100/B11	-0.008	-0.059	104/B10	-0.004	0.033	108/K5	-0.003	-0.005
100/B4	-0.013	-0.045	104/D8	0.001	-0.013	108/P23	-0.023	-0.007
100/N17	0.018	0.083	104/K40	-0.002	0.009	108/R8	-0.022	-0.008
100/P17	-0.027	0.003	104/N17	0.085	-0.036	108/V3	-0.036	0.031
100/R6	0.005	0.008	104/N5	-0.004	-0.019	108/Z6	0.010	-0.027
100/R8	0.008	0.001	104/R5	0.034	-0.022	108/ZH2	-0.076	-0.065
100/S8	-0.244	-0.116	104/R6	-0.002	0.007	1087/227/S25	-0.015	0.003
100/T17	-0.016	-0.015	104/T17	0.014	-0.023	109/A1	0.000	-0.009
100/T3	-0.013	0.035	104/U1	0.005	-0.007	109/B11	0.024	-0.005
100/T6	0.002	0.002	104/V4	0.032	-0.030	109/B3	0.010	-0.007
100/V3	-0.043	-0.018	104/ZH2	-0.085	-0.080	109/B4	0.010	0.019
1002/N17	-0.008	-0.017	105/A5	-0.042	0.013	109/B8	0.002	-0.014
1005/N17	0.020	-0.007	105/B32	-0.001	-0.005	109/BG	-0.045	-0.024
101	-0.010	-0.019	105/B39	-0.008	0.066	109/L4	0.002	-0.002
101/7	0.015	0.001	105/K40	0.007	-0.004	109/N11	-0.006	-0.024
101/J6	0.008	-0.004	105/K8	-0.012	0.006	109/P14	0.009	-0.004
101/M10	0.006	0.000	105/L4	0.013	0.000	109/S8	-0.071	0.042
101/N6	0.004	0.005	105/N6	-0.027	-0.104	109/ZH2	-0.232	-0.106
101/P15	-0.038	0.015	105/P15	-0.018	-0.002	10C/R12	-0.005	0.000
101/P23	-0.007	0.007	105/R3	0.018	0.017	10Z/B39	-0.007	0.009
101/R8	0.005	-0.013	105/R7	0.003	0.020	11/485/K41	0.004	-0.005
101/ZH2	0.011	-0.064	105/T2	0.001	-0.003	11/B38	0.017	0.001

Biografija autora

Rajko, Mladen, Savanović rođen je u Omoljici, opština Pančevo. Završio je osnovnu školu 1980. godine u Omoljici i dobitnik je Vukove diplome. Zvanje geodetskog tehničara stekao je završivši Srednju školu "25. maj" u Pančevu 1984. godine, kao najbolji učenik u generaciji i nosilac Vukove diplome.

Zaposlio se kao geometar-pripravnik 1984. godine u Geodetskom zavodu "Georad" Pančevo u kome je radio sve do 2001. godine. Vojni rok je odslužio u periodu od 1985 do 1986. godine u Školi rezervnih oficira u Zadru.

Diplomirao je 2000. godine na Odseku za geodeziju, Građevinskog fakulteta u Beogradu, sa prosečnom ocenom 8,98. Diplomski rad pod naslovom "Izrada digitalnog katastarskog plana na osnovu podataka grafičkog premera" odbranio je sa ocenom 10, čime je stekao zvanje diplomiranog geodetskog inženjera.

Poslediplomske studije na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, profil Geoinformacioni sistemi u katastru i uređenje zemljišne teritorije, upisao je 2000. godine i sve ispite položio sa prosečnom ocenom 9,78. Magistarski rad pod nazivom "Istraživanje modela transformacije koordinata tačaka premera iz stereografske u Gaus-Krigerovu projekciju na području Vojvodine" odbranio je 2005. godine, čime je stekao zvanje magistra tehničkih nauka-oblast geodezija.

Od oktobra 2001. godine zaposlen je na Visokoj građevinsko-geodetskoj školi u Beogradu. U periodu od 2001. godine do danas angažovan je kao nastavnik praktične nastave, predavač i viši predavač za uže naučne oblasti Geodetske mreže i Praktična i inženjerska geodezija. Autor je udžbenika Praktična geodezija 2 u izdanju Visoke građevinsko-geodetske škole u Beogradu.

Objavljeni radovi, naučna aktivnost kao i oblast interesovanja, usmereni su pre svega na problematiku vezanu za geodetske mreže. U svakodnevnom radu koristi komercijalne programe namenjene rešavanju zadataka iz oblasti geodezije.

Objavio je 2 naučna rada u periodičnim publikacijama i 5 radova u zbornicima sa domaćih i međunarodnih naučnih skupova.

Koristi engleski i ruski jezik.

Oženjen je suprugom Marijom i ima dva sina, Luku i Stefana.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а _____ мр Рајко М. Савановић, дипл.инж.геод. _____

Број индекса _____

Изјављујем

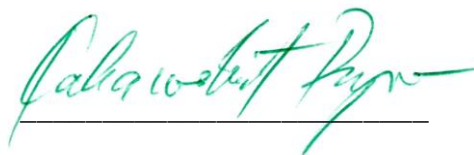
да је докторска дисертација под насловом

АНАЛИЗА МОГУЋНОСТИ ДЕФИНИСАЊА И РЕАЛИЗАЦИЈЕ ДРЖАВНОГ
ПРОСТОРНОГ ГЕОДЕТСКОГ РЕФЕРЕНТНОГ СИСТЕМА НА БАЗИ ГЛОБАЛНОГ
ТЕРЕСТРИЧКОГ РЕФЕРЕНТНОГ СИСТЕМА

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 14.06.2017.год



Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора мр Рајко М. Савановић, дипл.инж.геод.

Број индекса

Студијски програм Геодезија

Наслов рада АНАЛИЗА МОГУЋНОСТИ ДЕФИНИСАЊА И РЕАЛИЗАЦИЈЕ
 ДРЖАВНОГ ПРОСТОРНОГ ГЕОДЕТСКОГ РЕФЕРЕНТНОГ СИСТЕМА НА БАЗИ
 ГЛОБАЛНОГ ТЕРЕСТРИЧКОГ РЕФЕРЕНТНОГ СИСТЕМА

Ментор Проф. др Драган Благојевић, дипл.инж.геод.

Потписани/а: Рајко М. Савановић

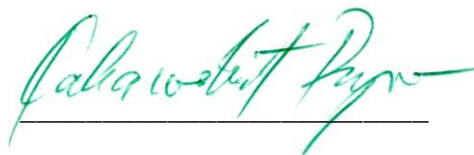
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 14.06.2017.год



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

АНАЛИЗА МОГУЋНОСТИ ДЕФИНИСАЊА И РЕАЛИЗАЦИЈЕ ДРЖАВНОГ
ПРОСТОРНОГ ГЕОДЕТСКОГ РЕФЕРЕНТНОГ СИСТЕМА НА БАЗИ ГЛОБАЛНОГ
ТЕРЕСТРИЧКОГ РЕФЕРЕНТНОГ СИСТЕМА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство – некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

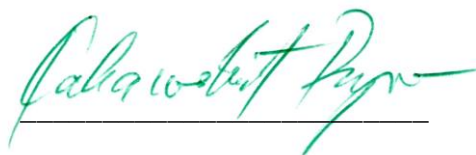
5. Ауторство – без прерада

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис докторанда

У Београду, 14.06.2017.год



1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.