UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Valentina Kostić

KOGNITIVNO-VIZUELNI PRISTUP ZASNOVAN NA GRAFIČKOM PRIKAZU FUNKCIJE U REŠAVANJU MATEMATIČKIH PROBLEMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2017.

PREDGOVOR

Doktorska disertacija *Kognitivno-vizuelni pristup zasnovan na grafičkom prikazu funkcije u rešavanju matematičkih problema* rezultat je višegodišnjih istraživanja i rada na unapređenju nastave matematike.

U izradi doktorske disertacije pomogli su mi mnogi i ovom prilikom svima se najiskrenije zahvaljujem.

Veliku zahvalnost i izuzetno poštovanje iskazujem prof. dr Đurđici Takači, mojoj mentorki, za ukazano poverenje, nesebičnu pomoć, podršku i razumevanje koje mi je pružila u procesu izrade rada. Njeno znanje, stručna pomoć, dragoceni saveti i primedbe dali su disertaciji suštinski oblik i konačnu formu.

Posebnu zahvalnost upućujem dr Vesni Stankov Jovanović, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, za saradnju i nesebičnu pomoć u realizaciji pedagoškog istraživanja i izradi naučnog članka.

Hvala svim mojim kolegama i prijateljima koji su bili uz mene tokom rada na disertaciji.

Neizmernu zahvalnost dugujem svojoj porodici koja je za moj rad imala veliko razumevanje i strpljenje, pružila mi priliku da se bavim onim što volim. Danice, Lana, Dušane i Saša, hvala za bezuslovnu podršku i ljubav koju mi darujete bez koje ne bih mogla da radim i stvaram.

Novi Sad, 2017. Valentina Kostić

SADRŽAJ

1. UVOD

„Mi, koji se nazivamo reformatorima, stavljamo koncept funkcije u sami centar nastave, jer od svih pojmova matematike protekla dva veka, ovaj igra vodeću ulogu gde god se koristi matematička misao. Mi bismo ga uveli u nastavu što je ranije moguće, uz stalnu upotrebu grafičkih metoda, predstavljanjem funkcionalnih zavisnosti u x–y sistemu, koje se danas, kako je i očekivano, koriste u svakoj praktičnoj primeni matematike."

***Felix Klein*, 1908.**

Pojam funkcije je jedan od osnovnih pojmova u matematici, prožima gotovo sve njene oblasti, ima izuzetno širok spektar primene u tehničkim i prirodnim naukama, kao i u opisivanju i objašnjavanju problema i fenomena iz realnog okruženja. Felix Klein (1932), jedan od prvih reformatora matematičkog obrazovanja ističe funkciju kao dominantni pojam savremene matematike i za nju vezani obrazovni cilj „razvijanje funkcijskog mišljenja". Izučavanje funkcija na svim obrazovnim nivoima je od suštinskog značaja za nastavu matematike, što ilustruje i Marjanovićev stav: „Najmarkantnija sadržajna obnova bila je uvođenje pojma funkcije, ne samo tamo gde se, kao u kalkulusu, javlja osnovnim objektom, već prožimanjem tim pojmom svih drugih sadržaja školskog kursa matematike" (Marjanović, 2000: 1). U savremenoj nastavi matematike, koncept funkcije ima ključnu ulogu u razvoju matematičkog mišljenja učenika/studenata, što je i istaknuto u mnogim matematičkim kurikulumima, širom sveta.

Međutim, razumevanje koncepta funkcije, razvijanje funkcijskog mišljenja, razvijanje sposobnosti rešavanja problema primenom usvojenih znanja o funkcijama, nije nimalo jednostavan ni lako ostvarljiv cilj. Formiranje i razvoj pojma funkcije je objektivno zahtevan i težak proces, prevashodno zbog same složenosti i kompleksnosti ovog matematičkog pojma koja se ogleda u postojanju različitih reprezentacija za njegovo predstavljanje i tumačenje (numerička, algebarska, grafička i verbalna reprezentacija), kao i u dinamičkoj suštini ovog pojma koja podrazumeva posmatranje, proučavanje i predstavljanje promena.

Različite reprezentacije funkcija pružaju mnoštvo mogućnosti za bolje razumevanje koncepata, ali u isto vreme proces razumevanja čine još komplikovanijim (Hitt, 1998). Otkrivanjem istih odnosa, struktura ili pojmova, predstavljenih u različitim reprezentacijama, učenici razvijaju konceptualno razumevanje i stiču dublji uvid u matematičke sadržaje. Višestruke reprezentacije su efikasno sredstvo za razumevanje problemskih situacija i imaju stratešku ulogu u rešavanju problema. Sticanje znanja na osnovu višestrukih reprezentacija je kompleksan i kognitivno zahtevan proces, propraćen brojnim teškoćama i problemima. Učenici i studenti imaju poteškoće u izgradnji veza između različitih reprezentacija funkcije i prelasku s jedne reprezentacije na ostale; tumačenju i konstrukciji grafičkih reprezentacija, kao i njihovom povezivanju sa algebarskim reprezentacijama, rešavanju problema koji zahtevaju artikulaciju različitih reprezentacija funkcije (Dubinsky & Wilson, 2013; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998; Knuth, 2000; Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990; Sierpinska, 1992).

Grafičko prikazivanje funkcija, interpretacija grafika i njihova primena u rešavanju problema predstavljaju specifične izazove u nastavi matematike. Opšte je prihvaćeno stanovište da je vizuelizacija matematičkih koncepata i procesa važan aspekt matematike, matematičkog mišljenja, razumevanja i rezonovanja (Hitt, 2002; Zimmermann & Cunningham, 1991). Vizuelna očiglednost grafičkih reprezentacija je izuzetno bogat i moćan medij koji generiše i prenosi značenje, ali je ujedno i izvor mnogih problema i netačnih odgovora učenika (Monk, 2003), koje su opisane u brojnim istraživačkim studijama (Monk, 2003; Potgieter, Harding & Engelbrecht, 2008; Roth & McGinn, 1997; Woolnough, 2000). Grafičko razumevanje matematičkih koncepata često zahteva heurističke pristupe i ne nudi uvek sigurne i rutinske procedure, što je za učenike/studente kognitivno zahtevnije od sprovođenja rutinskih algebarskih postupaka (Arcavi, 2003). Problemi u razumevanju grafičkih reprezentacija znatno otežavaju proces uspostavljanja odgovarajućih veza sa drugim vidovima predstavljanja koncepata, posebno sa algebraskim reprezentacijama (Gagatsis, Elia & Kyriakides, 2003). Ovakva situacija dovodi do nepotpunog konceptualnog razumevanja i relativno slabih postignuća učenika/studenata u rešavanju problema koji zahtevaju rad sa grafičkim reprezentacijama.

Navedene teškoće i problemi prisutni su i u srednjoškolskoj i u visokoškolskoj nastavi matematike, a posebno su izražene u realizaciji sadržaja matematičke analize. Razumevanje funkcija, njihovo predstavljanje i analiziranje primenom diferencijalnog računa, podrazumeva odlično poznavanje elementarne matematike, konceptualno razumevanje velikog broja novih, složenih, apstraktnih i dinamičkih pojmova (granična vrednost, neprekidnost, prvi i drugi izvod funkcije…) koji se bitno razlikuju od koncepata elementarne matematike. Izučavanje funkcija u matematičkoj analizi zahteva od učenika/studenata da formiraju i razvijaju tzv. napredno matematičko mišljenje koje je na višem nivou apstrakcije, formalnog simbolizma i matematičke strogosti u odnosu na način mišljenja u elementarnoj matematici (Tall, 1995). Prelazak sa elementarnog na napredno matematičko mišljenje je kognitivno zahtevan proces koji može da uzrokuje teškoće, nerazumevanje i slaba postignuća učenika/studenata (Orton, 1983a; Tall, 1996, 2002).

Znatan broj istrživača matematičkog obrazovanja je ukazao na još jedan izuzetno važan aspekt ove problematike. Naime, neke teškoće u ovladavanju sadržajima koji se odnose na funkcije, povezane su sa ograničenim iskustvom učenika/studenata u radu sa pojedinim reprezentacijama. Nastavnici matematike, tradicionalno fokusiraju svoje instrukcije na algebarskim reprezentacijama i analitičkoj elaboraciji sadržaja, dok su grafičke (geometrijske) i intuitivne reprezentacije na neki način zapostavljene (Hitt, 2002: 2-3). Marginalizacija vizuelnih reprezentacija i vizuelnih pristupa učenju, dovodi do disbalansa među reprezentacijama i nesinhronizovanog razvoja različitih oblika matematičkog mišljenja. Učenici/studenti ne stiču celovita već fragmentirana znanja, te nisu u stanju da interpretiraju različite reprezentacije, niti da fleksibilno i kompetentno vrše transformaciju jedne reprezentacije u drugu (Duval, 1999, 2006). Favorizovanje algebarskog pristupa dovodi do toga da se učenici/studenti prevashodno oslanjaju na metode rešavanja problema koje uključuju rad sa algebarskim reprezentacijama, pri čemu se smanjuje osećaj i potreba za korišćenjem grafičkih reprezentacija i vizuelnih pristupa rešavanju problema (Knuth, 2000).

Nastavni plan i program matematike za gimnazije u Srbiji, koncipiran je tako da se sadržaji koji se odnose na funkcije i njihove primene obrađuju u svim razredima. Sveobuhvatno sagledavanje koncepta funkcije i njegovo proučavanje pomoću diferencijalnog računa predviđeno je u četvrtom razredu, sa znatnim fondom časova. Analiza važeće udžbeničke literature za gimnazije kao i iskustva iz prakse ukazuju na to da se u nastavi favorizuje algebarski pristup pojmu funkcije i rešavanju zadataka, dok se zadaci sa grafičkim sadržajima koriste povremeno i jednostrano (najčešće da se nacrta grafik funkcije koja je zadata formulom). Veći deo nastavnog vremena je posvećen obradi simboličkog i proceduralnog aspekta funkcija, a vizuelne i konceptualne komponente nastavnih sadržaja su u drugom planu. Razvijanje kompetencija učenika da razumeju grafičke prikaze, prirodnih i društvenih fenomena, jasno je istaknuto u nastavnom planu i programu. Međutim, u nastavnoj praksi, grafičke reprezentacije funkcija retko se koriste kao matematički modeli u rešavanju problema iz neke druge naučne discipline ili realnog okruženja. Na osnovu prethodno izloženih činjenica o učeničkim/studentskim poteškoćama i njihovim uzrocima, može se zaključiti da učenici gimnazije kroz formalno i algebarsko razrađivanje nastavnih sadržaja, ne dostižu suštinsko razumevanje pojma funkcije i ne poseduju adekvatne sposobnosti za analizu algebarske i grafičke reprezentacije funkcije i njihovo povezivanje. Teškoće dobijaju znatno veću dimenziju i posebno su izražene u četvrtom razredu gimnazije u obradi sadržaja matematičke analize, kao i u izučavanju ove oblasti u okviru studijskih programa u tercijarnom obrazovanju.

Savremena tehnologija, matematičke reprezentacije i vizuelizacija su usko povezana istrživačka pitanja u matematičkom obrazovanju. Računarska tehnologija i matematički softveri povećavaju mogućnost korišćenja i analiziranja više povezanih reprezentacija (Yerushalmy & Shternberg, 2001) i mogu pomoći učenicima da steknu bolje razumevanje upotrebe reprezentacija i da izgrade temeljno razumevanje matematičkih pojmova i ideja (Kaput, 1992). Potencijal računarskih tehnologija, da se matematički koncepti povežu sa vizuelnim reprezentacijama na način koji podstiče matematičko rezonovanje i konceptualno razumevanje, veoma je značajan za nastavu/učenje matematike (Lopez Jr, 2001). Vizuelno-dinamička i interaktivna funkcionalnost računarskih tehnologija otvara brojne kreativne mogućnosti za realizaciju sadržaja iz oblasti funkcija.

Kognitivno-vizuelni pristup je savremena didaktičko-metodička koncepcija koja promoviše vizuelizaciju procesa učenja, značaj povezivanja vizuelnih i simboličkih reprezentacija i upotrebu računarskih tehnologuja u kreiranju vizuelnog okruženja za učenje. Svrsishodno, plansko i široko korišćenje kognitivne funkcije očiglednosti u cilju razvoja i optimalnog korišćenja resursa vizuelnog mišljenja učenika, osnovna je pretpostavka kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju matematike (Далингер, 2006a). Očiglednost vizuelnih reprezentacija je veoma značajna za proces učenja, pri čemu je odlučujući faktor njene efikasnosti način i stepen angažovanja učenika u aktivnostima koje su više od samog gledanja. U tom smislu, kognitivna funkcija očiglednosti dolazi do punog izražaja kada se vizuelizacija nastavnih sadržaja didaktičko-metodički osmisli tako da ulogu vizuelnih reprezentacija od pomoćnog, ilustrativnog sredstva transponuje u vodeće, produktivno kognitivno sredstvo (Далингер и Князева, 2004). Primena računara i odgovarajućih obrazovnih softvera pruža nastavnicima širok spektar mogućnosti za realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa u izučavanju funkcija, njihovih osobina i grafika u vizuelnom, dinamičkom i interaktivnom okruženju. Vizuelna priroda ljudske percepcije i kognitivnih procesa, potencijal vizuelnog mišljenja, i sve brži razvoj tehnologije predstavljaju osnovne razloge za široku, svrsishodnu i plansku primenu grafičkih reprezentacija kao kognitivno-vizuelnog sredstva u savremenom obrazovanju.

Na osnovu svega navedenog, proistekla je ideja za produbljivanjem didaktičke teorije vezane za proces učenja matematike savremenim metodičkim pristupima, uvođenjem kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom prikazivanju funkcije, kao i da se identifikuju mogućnosti i načini svrsishodne, kontinuirane i efikasne obrade matematičkih teorija i primene matematičkih problema sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima u nastavnoj praksi.

Predmet ovog istraživanja je teorijsko i eksperimentalno ispitivanje i proučavanje efekata i svrsishodnosti primene kognitivno-vizuelnog pristupa podržanog inovativnim nastavnim materijalima i računarskim tehnologijama, u izučavanju nastavnih sadržaja koji se odnose na funkcije i njihove primene.

Razmatranjem savremene didaktičke literature iz matematike i prirodnih nauka, mogu se identifikovati neki značajni istraživački trendovi i aktuelna pitanja koja zahtevaju dublju analizu i donošenje zaključaka:

- Kako koncipirati metodički pristup koji će omogućiti kontinuiranu i efikasnu primenu grafičkih reprezentacija funkcija u nastavi/učenju odabranih sadržaja matematičke analize, kao i prirodnih nauka (hemije, fizike), sa posebnim akcentom na ispitivanju funkcija i njihovim primenama u rešavanju problema?
- Kako osmisliti i odabrati matematičke probleme sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima koji će se obrađivati u okviru predloženog metodičkog pristupa?
- Kako osmisliti i izabrati probleme iz prirodnih nauka (hemije i fizike) na koje se može efikasno primeniti novi metodički pristup?
- Kako integrisati kognitivno-vizuelne u tradicionalne sadržaje nastave matematike i prirodnih nauka (hemije i fizike)?
- Kako efikasno iskoristiti potencijal računarskih tehnologija i obrazovnih softvera u realizaciji kognitivno-vizuelnog pristupa?

Ova doktorska disertacija bavi se traženjem odgovora na postavljena pitanja, sa jasnim ciljem da se da značajan doprinos savremenoj metodici nastave matematike.

Imajući u vidu prethodno navedeno, postavljen je *opšti cilj istraživanja* ove doktorske disertacije:

Utvrđivanje stepena uticaja primene kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju, zasnovanog na grafičkom i dinamičkom prikazu funkcije, u računarskom okruženju, na kvalitet znanja učenika/studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija i njihovih primena na rešavanje problema.

Da bi se ovako postavljen cilj istraživanja realizovao, postavljeni su sledeći konkretni zadaci:

- unapređivanje teorijskih osnova kognitivno-vizuelnog pristupa i mogućnosti za njegovu primenu u nastavnoj praksi;
- osmišljavanje kognitivno-vizuelnog pristupa čija će realizacija omogućiti kontinuiranu i efikasnu primenu grafičkih reprezentacija funkcija u nastavi/učenju odabranih sadržaja matematičke analize, kao i prirodnih nauka (hemije, fizike);

- osmišljavanje i izbor zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i problema iz prirodnih nauka koji će se obrađivati u toku realizacije predloženog metodičkog pristupa;
- osmišljavanje i izrada nastavnih materijala koji će omogućiti učenicima/studentima da izučavaju funkcije i njihove primene u multireprezentativnom okruženju sa posebnim naglaskom na vizuelizaciju;
- implementacija kognitivno-vizuelnog pristupa u srednjoškolsku i visokoškolsku nastavu;
- racionalna i efikasna upotreba računara i obrazovnog softvera u toku eksperimentalnog procesa;
- izrađivanje instrumenata (testova znanja) za potrebe pedagoških istraživanja;
- utvrđivanje stepena uticaja kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom prikazu funkcije na kvalitet znanja učenika/studenata.

Saglasno cilju i zadacima istraživanja, kao i na osnovu dosadašnjih istraživanja i teorijskih osnova, postavljena je i opšta *hipoteza istraživanja*:

Pretpostavlja se, da primena kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom i dinamičkom prikazu funkcije u prezentovanju matematičkih sadržaja i rešavanju problema, u računarskom okruženju, ima značajan uticaj na kvalitet znanja učenika/studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija i njihovih primena na rešavanje problema.

U doktorskoj disertaciji su osmišljeni i kreirani originalni didaktičko-metodički modeli za realizaciju nastavnih sadržaja iz oblasti: matematičke analize (funkcije i izvod funkcije), problema smeše (problemi mešanja rastvora), linearne funkcije i njene primene na rešavanje problema (problemi iz oblasti algebre, fizike i realnog okruženja). Kognitivno-vizuelni pristup je implementiran u srednjoškolsku i visokoškolsku nastavu matematike. Sprovedeno je empirijsko istraživanje u okviru kojeg je realizovano pet pedagoških eksperimenata. Rezultati dobijeni istraživanjem potvrdili su da primena kognitivno--vizuelnog pristupa ima značajan uticaj na kvalitet znanja učenika/studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija i njihovih primena na rešavanje problema.

Sadržaj doktorske disertacije je prikazan u šest glava. Nakon uvodne, sledi glava u kojoj je izložen teorijski okvir istraživanja. U drugoj glavi disertacije prikazan je kritički komparativni pregled savremene literature koja se odnosi na didaktičko-metodičke aspekte kognitivno-vizuelnog pristupa i njegove implementacije u proces nastave/učenja. Posebna pažnja je posvećena višestrukim reprezentacijama i matematičkoj vizuelizaciji, njihovoj ulozi i značaju u procesu učenja. Navedene su prednosti realizacije nastave u multireprezentativnom vizuelnom okruženju, kao i ograničenja i mogući problemi i poteškoće sa kojima se nastavnici i učenici mogu suočiti. Takođe je razmatrana primena računarske tehnologije i dinamičkih interaktivnih obrazovnih softvera, kao i osnovnih principa kognitivne teorije multimedijalnog učenja u dizajniranju nastavnih sadržaja i realizaciji kognitivno-vizuelnog pristupa u nastavnoj praksi.

Treća glava disertacije je posvećena primeni kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju matematičke analize i prikazana je u pet poglavlja.

U prvom poglavlju su razmatrani i poređeni tradicionalni i savremeni metodički pristupi u pogledu zastupljenosti: proceduralnih i konceptualnih znanja, formalno simboličkih i vizuelnih aspekata nastavnih sadržaja, kao i višestrukih reprezentacija. Takođe je dat osvrt na sadržaje matematičke analize koji se izučavaju u našem obrazovnom sistemu, posebno u gimnazijskom obrazovanju.

U drugom poglavlju su izložene osnovne postavke kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju matematičke analize, dat je uporedni pregled tradicionalne i kognitivno-vizuelne koncepcije u obradi izvoda funkcije. Prikazani su matematički zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i dati su primeri zadataka pomoću kojih se uspostavljaju veze između algebarskih i grafičkih reprezentacija funkcije i izvoda funkcije koje nisu zastupljene u tradicionalnim nastavnim sadržajima. S obzirom na to da postoji širok opseg zadataka koji se mogu koristiti u nastavi, izvršena je klasifikacija po različitim kriterijumima koji odražavaju njihove metodičke osobenosti i na osnovu toga je data njihova tipologija.

Treće poglavlje detaljno prikazuje kognitivno-vizuelni pristup obradi nastavne teme „Izvod funkcije" u četvrtom razredu gimnazije. Predloženi metodički pristup afirmiše grafičke reprezentacije kao polaznu saznaju tačku za formiranje veza između različitih reprezentacija funkcije i izvoda funkcije u procesu sticanja konceptualnih znanja i rešavanju problema. U ovom poglavlju najpre je dat pregled kognitivno-vizuelnih nastavnih materijala, navedene su njihove specifičnosti, razmatrana je realizacija nastavnih aktivnosti primenom različitih metoda i oblika rada. Zatim je primena kognitivno-vizuelnog pristupa razrađena u okviru manjih metodičkih celina koje su predviđene nastavnim programom: uvođenje pojma prvog izvoda funkcije, geometrijska interpretacija prvog izvoda, monotonost funkcije, ekstremne vrednosti, crtanje grafika funkcije i sistematizacija gradiva. U okviru svake celine detaljno je objašnjena realizacija metodički transformisanih sadržaja i primena kognitivno-vizuelnih nastavnih materijala, prikazani su osnovni tipovi zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i metodički aspekti njihove primene u nastavnoj praksi.

Poslednja dva poglavlja posvećena su eksperimentalnom delu istraživanja i empirijskoj evaluaciji kognitivno-vizuelnog pristupa podučavanju/učenju odabranih sadržaja matematičke analize. U četvrtom poglavlju je prikazan metodološki okvir eksperimentalnog istraživanja sprovedenog sa učenicima četvrtog razreda gimnazije i sa studentima prve godine osnovnih studija fizike. Statistička obrada dobijenih rezultata i interpretacija glavnih nalaza istraživanja izloženi su u petom poglavlju treće glave.

U četvrtoj glavi disertacije predstavljeno je pedagoško istraživanje sprovedeno u cilju ispitivanja i utvrđivanja efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa u izučavanju sadržaja koji se odnose na problem smeše. U fokusu predloženog pristupa je vizuelizacija problema mešanja rastvora grafičkom reprezentacijom linearne funkcije i uspostavljanje korelacije nastavnih sadržaja matematike i hemije u smislenu, usklađenu i funkcionalnu celinu. Detaljno su objašnjene geometrijska i grafička reprezentacija problema mešanja rastvora, kao i prednost primene obrazovnog softvera *GeoGebra* u cilju povezivanja vizuelnih i algebarskih reprezentacija. Prikazani su nastavni materijali kreirani za potrebe ovog istraživanja i razmatrane su njihove karakteristike s aspekta osnovnih načela multimedijalnog didaktičkog dizajna i kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju. Takođe su prezentovani metodološki okvir, analiza i interpretacija rezultata istraživanja sprovedenog sa studentima osnovnih studija hemije.

Peta glava disertacije prikazuje pedagoško istraživanje efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji sadržaja o linearnoj funkciji i njenoj primeni na rešavanje problema, posebno problema kretanja. U istraživačkom procesu posebna pažnja je posvećena korelaciji i integraciji odabranih nastavnih sadržaja matematike i fizike, u celovit i usklađen kontekst koji podstiče razvoj funkcionalnog znanja. Predloženi metodički pristup je baziran na vizuelizaciji nastavnih sadržaja geometrijskim i grafičkim reprezentacijama i razvoju vizuelnog mišljenja kao osnove za razumevanje i primenu višestrukih reprezentacija u uspostavljanju različitih strategija rešavanja problema. Prikazani su nastavni materijali izrađeni u softveru *GeoGebra*, razmatrani su didaktičko-metodički aspekti realizacije kognitivno-vizuelnog pristupa primenom simulacija u nastavi/učenju i detaljno su objašnjeni različiti načini rešavanja problema kretanja. Prezentovan je metodološki okvir pedagoškog istraživanja sprovedenog sa učenicima prvog razreda gimnazije, kao i statistička obrada podataka, analiza rezultata i interpretacija glavnih nalaza istraživanja.

Zaključna razmatranja proistekla iz istraživanja, navedena su u šestoj glavi disertacije. Istaknut je naučni doprinos disertacije, date su preporuke za realizaciju kognitivno-vizuelnog metodičkog pristupa u nastavnoj praksi i naznačene su smernice za dalja istraživanja.

2

TEORIJSKI OKVIR ISTRAŽIVANJA

2.1. VIŠESTRUKE MATEMATIČKE REPREZENTACIJE

2.1.1. Matematičke reprezentacije. Unutrašnje i spoljašnje reprezentacije

Matematičke reprezentacije su duži niz godina u žiži interesovanja istraživača matematičkog obrazovanja, akademske zajednice matematičara i realizatora nastave matematike. Značaj reprezentacija u matematici ogleda se u činjenici da *„Matematika zahteva reprezentacije. U stvari, zbog apstraktne prirode matematike, ljudi imaju pristup matematičkim idejama samo kroz predstavljanje tih ideja"* (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001: 94).

U cilju sveobuhvatnog sagledavanja i rešavanja problema vezanih za nastavu i učenje matematike, značajan broj autora se bavio analizama učeničkog i nastavničkog poznavanja i razumevanja reprezentacija (Ainsworth, 2006; Cuoco & Curcio, 2001). Narastajuće interesovanje za procese učenja, rezultiralo je teorijskim koncepcijama i empirijskim istraživanjima o matematičkim reprezentacijama, u kojima se problem reprezentacija razmatra ne samo sa matematičkog već i sa kognitivno-psihološkog, pedagoškog i sociološkog aspekta. Reprezentacije predstavljaju jedan od glavnih aspekata nastave i učenja matematike, koji naglašavaju kako teoretičari i istraživači matematičkog obrazovanja tako i savremeni nastavni planovi i programi.

U literaturi postoje različita određenja i tipologije reprezentacija. U najopštijem smislu, reprezentacija je, pre svega, nešto što stoji umesto nečega drugog (Goldin, 2002: 208; Hodnik Čadež, 2015). Ljudi razvijaju reprezentacije kako bi tumačili i pamtili svoja iskustva u nastojanju da razumeju svet. Uporedo sa razvojem matematike, razvijaju se i reprezentacije koje se široko koriste u matematičkoj komunikaciji i koje su neophodne za razumevanje matematičkih sadržaja.

Pod reprezentacijama se najčešće podrazumevaju dva tipa reprezentacija, spoljašnje i unutrašnje (mentalne). Spoljašnje reprezentacije se nalaze u učeničkom okruženju, a unutrašnje se formiraju u umu učenika (Goldin & Shteingold, 2001). Spoljašnje reprezentacije uključuju konvencionalne reprezentacije kao što su: algebarski izrazi, matematičke jednačine, tabele, brojevna prava, grafici, geometrijske figure itd. Ove reprezentacije su se vremenom razvile i u širokoj su upotrebi u matematičkoj komunikaciji. Spoljašnje reprezentacije takođe uključuju pisani i govorni jezik. Unutrašnje reprezentacije nastaju u umu jedne osobe i koriste se za dodeljivanje matematičkog smisla i uključuju lične sisteme obeležavanja, prirodni jezik, vizuelne slike, heuristiku i strategije rešavanje problema (*ibid.*, 2).

Jedna od bitnih psiholoških pretpostavki savremene teorije matematičkog obrazovanja je da unutrašnje i spoljašnje reprezentacije nisu izolovani sistemi (Goldin & Shteingold, 2001). Između ova dva sistema postoje brojne relacije i može se reći da matematičko znanje predstavlja strukturno uređene interne (unutrašnje) matematičke reprezentacije spoljašnjosti (Hiebert & Carpenter, 1992). Tradicionalno, podučavanje matematike podrazumeva da učenici uče da razumeju spoljašnje reprezentacije i da ih koriste za rešavanje matematičkih problema (Goldin, 2002).

Konstruktivističke teorije učenja određuju interne reprezentacije kao matematičke ideje koje je učenik razvio kroz sopstveno iskustvo u interakciji sa spoljašnjim reprezentacijama, koje dolaze u obliku simbola, jednačina, slika, tabela, grafika itd. (Pape & Tchoshanov, 2001).

Između unutrašnjih i spoljašnjih reprezentacija postoji obostrani uticaj, odnosno dvosmerna interakcija: proces internalizacije spoljašnje reprezentacije i proces eksternalizacije unutrašnje reprezentacije (*ibid.,* 122.). Obim i nivo znanja učenika određen je kvantitetom i kvalitetom veza između unutrašnjih i spoljašnjih reprezentacija (Hiebert & Carpenter, 1992).

Reprezentacije su korisni alati koji podržavaju matematičko rezonovanje, omogućavaju matematičku komunikaciju i prenose matematičku misao (Kilpatrick *et al.*, 2001). Učenici koriste reprezentacije kao alat za podršku svog matematičkog razumevanja kada rešavaju matematičke probleme ili uče nove koncepte. Reprezentacije koje nastavnici koriste u nastavi i način na koji ih koriste su važni faktori koji utiču na kvalitet učeničkih znanja o reprezentacijama i na razvijanje sposobnosti i veština korišćenja reprezentacija u rešavanju problema. Ovo je, zauzvrat, povezano sa dostignućima učenika u oblasti matematike. Zbog toga je važno da se prouči priroda matematičkih reprezentacija i njihova upotreba u nastavi matematike.

2.1.2. Teorijski modeli višestrukih reprezentacija

Kada se u metodici matematike govori o „višestrukim reprezentacijama" (eng. *„multiple representations"*) uobičajeno je da se misli na različite načine predstavljanja istog matematičkog koncepta ili problema. Višestruke reprezentacije su spoljašnji matematički aspekti ideja i koncepata za pružanje iste informacije u više različitih formi (Ozgun-Koca, 1998).

Teoretičari i istraživači matematičkog obrazovanja se zalažu za korišćenje višestrukih reprezentacija u nastavi/učenju matematike. Jedan od bitnih razloga za ovakav stav je pretpostavka da postoji uska povezanost između spoljašnjih i unutrašnjih reprezentacija. Izgradnjom i uočavanjem veza između višestrukih spoljašnjih reprezentacija može se očekivati da će biti stimulisano i uspostavljanje veza između korespondirajućih unutrašnjih reprezentacija. Smatra se da za „učenje matematike sa razumevanjem" značajnu ulogu imaju veze između i unutar višestrukih reprezentacija (Hiebert & Carpenter, 1992).

U nastavku teksta biće dat hronološki pregled teorijskih modela višestrukih reprezentacija, relevantnih za problem istraživanja doktorske disertacije.

Može se reći da je začetnik teorije višestrukih matematičkih reprezentacija bio Dienes. U svojim radovima je istakao da su reprezentacije veoma važna komponenta u procesu učenja matematike i da je upotreba različitih reprezentacija istog koncepta (što je nazvao višestruka utelovljenja, eng. *„multiple embodiment"*) preduslov za razumevanje koncepta (Dienes, 1960). Po mišljenju ovog autora, učenici prolaze kroz pet nivoa u formiranju temeljnog matematičkog razumevanja. Nivoi su: slobodna igra (učenici rade sa fizičkim materijalima i manipulativnim nastavnim sredstvima pri čemu otkrivaju osnove matematičkog koncepta), uopštavanje (učenici uočavaju obrasce i sličnosti), predstavljanje (učenici predstavljaju svoje shvatanje i razumevanje koncepta pomoću vizuelnih reprezentacija), simbolizacija (učenici opisuju njihova predstavljanja koristeći matematički jezik i simbole, odnosno simboličke reprezentacije) i formalizacija (učenici kreiraju niz pravila i algoritama koja se poklapaju sa njihovim razumevanjem koncepta). Prema Dienesu, ne postoji nijedna reprezentacija koja može dovesti do apstrakcije a perceptualna varijabilnost (prikazivanje istog koncepta na različite načine) je od suštinskog značaja za izgradnju apstraktnih matematičkih koncepata (*ibid.*, 3).

Jerome Bruner, jedan od najznačajnijih teoretičara u oblasti obrazovne psihologije, u svojoj teoriji kognitivnog razvoja posebnu pažnju posvećuje formiranju pojmova i razvoju matematičkog mišljenja učenika. Bruner ističe da se proces izgrađivanja potpunog razumevanja matematičkih koncepata, kao i sam kognitivni razvoj, odvijaju u interakciji učenika i sredine. Tok ovog procesa zavisi od prethodnog iskustva (znanja) učenika i njegovih sposobnosti, što određuje načine i mogućnosti učeničkog delovanja i reprezentovanja znanja. Bruner (1966: 10-11) je predložio teorijski model u kome su zastupljena tri oblika interakcije sa okruženjem, odnosno tri načina reprezentovanja znanja: enaktivni (akcioni, konkretni), ikonički (grafički, slikovni) i simbolički.

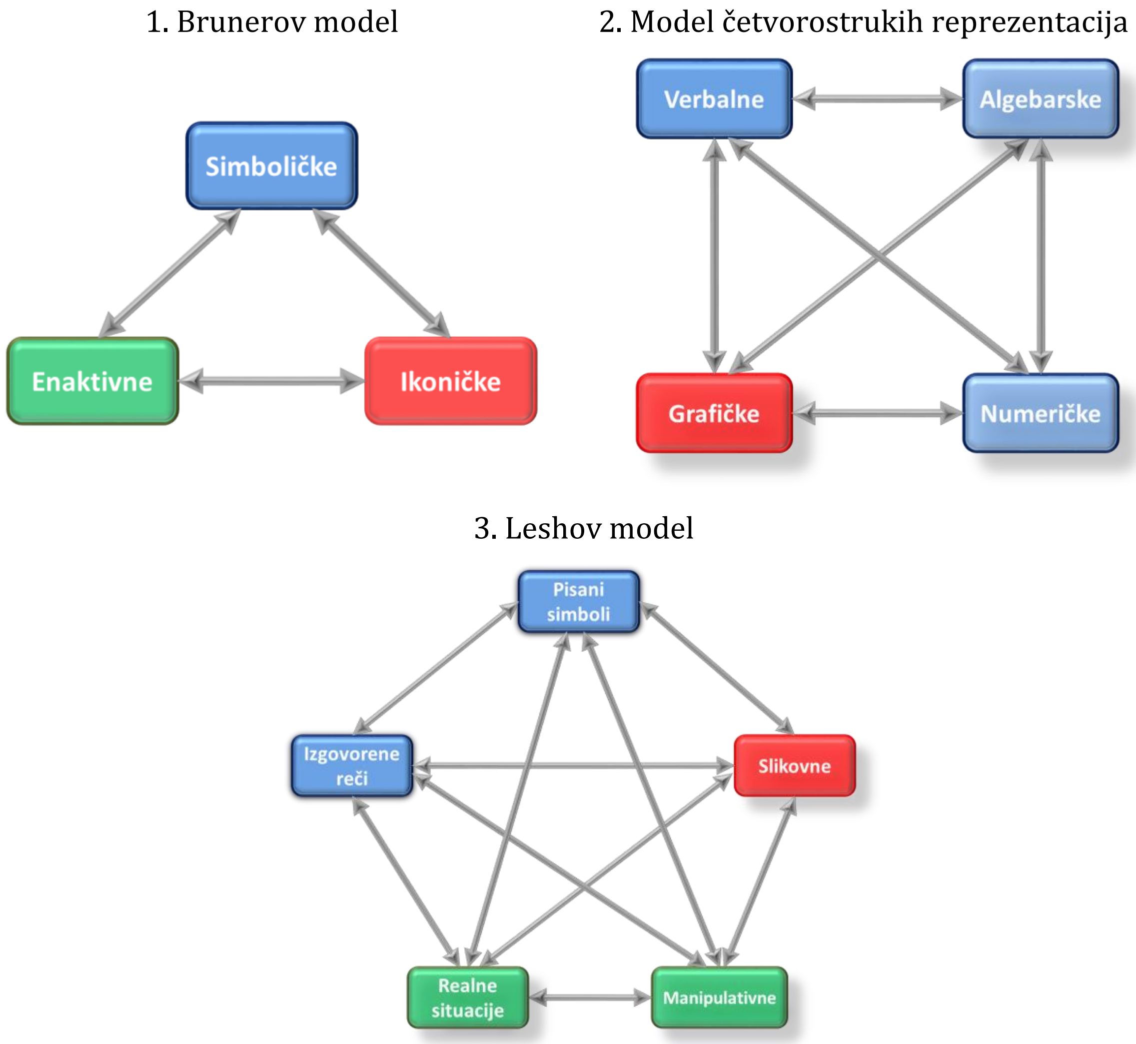
Enaktivni oblici reprezentovanja znanja se formiraju kada učenici izgrađuju svoje razumevanje pomoću određenih radnji (akcija) sa manipulativnim nastavnim sredstvima i drugim konkretnim materijalima. Otkrivajući neperceptiva svojstva koja čine suštinu matematičkog koncepta, učenik postaje sposoban da nezavisno od fizičkog postupanja sa predmetima, koncept predstavi putem slika (grafici, šeme, grafikoni, slike geometrijskih figura) tj. pomoću ikoničkih reprezentacija. Na kraju, učenik radnju i sliku prevodi na jezik matematičkih simbola odnosno, za predstavljanje znanja koristi simboličke reprezentacije. S aspekta razvojne psihologije, u toku kognitivnog razvoja deteta/učenika dolazi do promene u naglašavanju pojedinih ravni. Najpre je dominantna konkretna, potom ikonička, a zatim simbolička ravan predstavljanja znanja.

Bruner smatra da se razvoj procesa mišljenja ne odvija vremenski određenim etapama, već istovremeno, u okviru različitih ravni apstrakcije tj. misaonih reprezentacija (Bruner, 1972). Njegov model višestrukih reprezentacija (Šema 2.1.1) podrazumeva uzajamno postojanje i preplitanje sva tri načina interakcije i reprezentovanja, odnosno sve tri ravni apstrakcije. Uzajamni odnosi i dopunjavanje kao i fleksibilno koordiniranje između konkretnih, ikoničkih i simboličkih reprezentacija imaju odlučujući značaj za razvoj matematičkog mišljenja.

Leshov model višestrukih reprezentacija (Lesh, Post & Behr, 1987) identifikuje pet različitih tipova eksternih sistema reprezentacija koji se javljaju u učenju matematike i rešavanju problema: 1) realna životna iskustva, 2) manipulativni modeli, 3) slike ili dijagrami, 4) izgovorene reči i 5) pisani simboli (Šema 2.1.3). Ovaj model višestrukih reprezentacija može se posmatrati kao proširenje Brunerovog modela. Realna iskustva i manipulativni modeli odgovaraju Brunerovim enaktivnim reprezentacijama, slike i dijagrami su ikoničke, a izgovorene reči i pisani simboli su simboličke reprezentacije.

Lesh i saradnici ističu da učenik/student razume matematičku ideju ako je može prepoznati u različitim, kvalitativno drugačijim reprezentacijskim sistemima i precizno je prevesti iz jednog sistema u drugi (Lesh *et al.*, 1987: 36). Sposobnost prevođenja matematičkih ideja između i unutar različitih reprezentacija su značajan indikator učeničkog razumevanja koncepata. U tom smislu, Lesh ističe da reprezentacije matematičkih pojmova i procesa predstavljaju neku vrstu medijatora matematičkih ideja između nastavnika i učenika. Spoljašnje reprezentacije omogućavaju dvosmernu komunikaciju: od nastavnika prema učenika (u smislu prenošenja matematičkih ideja) i od učenika prema nastavniku (u smislu da pružaju povratnu informaciju nastavniku o učeničkom razumevanju matematičkih ideja).

Jedan nastavni pristup koji je stekao značajnu pažnju u poslednjih dvadeset godina, a naročito u kalkulusu, koristi pravilo trostrukih reprezentacija (eng. „*Rule of Three*"). Hughes-Hallett (1991) predlaže da tokom izučavanja kalkulusa sva tri aspekta: grafički (geometrijski), algebarski (analitički) i numerički trebaju biti uravnoteženi. Pravilo trostrukih reprezentacija je ubrzo prošireno verbalnom reprezentacijom i time je preraslo u pravilo četvorostrukih reprezentacija (eng. *„Rule of Four”*) (Šema 2.1.2). Verbalna reprezentacija sadrži više aspekata: 1) korišćenje reči da se opišu funkcije, na primer „funkcija je konkavna i raste” ili „linearna funkcija”, 2) upotreba reči u obrazlaganju postupka rešavanja problema i 3) tradicionalni „tekstualni zadaci”, koji se danas nazivaju i „kontekstualni problemi” ili „problemi aplikacije” (Hughes-Hallett *et al.*, 1998). Za razliku od Brunerovog modela, u modelu četvorostrukih reprezentacija nisu prisutne enaktivne reprezentacije. Grafičke reprezentacije odgovaraju Brunerovim ikoničkim reprezentacijama, a numeričke, algebarske i verbalne su različiti tipovi simboličkih reprezentacija (Tall, 2003).

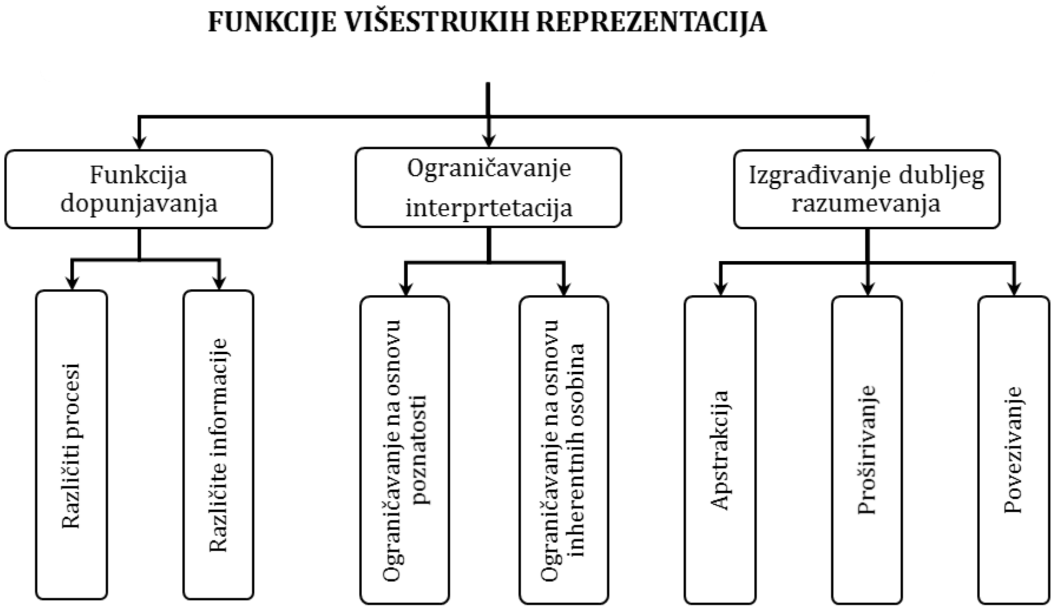


Šema 2.1. *Modeli višestrukih reprezentacija*

Pravilo četvorostrukih reprezentacija je veoma značajno za usvajanje temeljnih znanja o konceptu funkcije. Kada učenici/studenti shvate da su četiri reprezentacije funkcije ekvivalentne, njihovo razmišljanje nije više fokusirano samo na jednu reprezentaciju, već mogu fluentno da koriste informacije sadržane u različitim reprezentacijama. Fluentnost u radu sa različitim reprezentacijama zahteva interakciju između učenika i reprezentacije gde učenik iz svake reprezentacije izvodi zaključke o funkciji i može ih generalizovati na više reprezentacija. Ključ razumevanja višestrukih reprezentacija nije toliko u tome da postoje reprezentacije, već da učenik sudeluje na smislene načine sa tim reprezentacijam (Zbiek, Heid, Blume & Dick, 2007). *„Kognitivno povezivanje reprezentacija stvara celinu koja je više od zbira svojih delova.”* (Kaput, 1989).

2.1.3. Uloga i značaj višestrukih reprezentacija

Konceptualne analize multireprezentativnih nastavnih okruženja pokazuju da višestruke reprezentacije imaju mnogobrojne funkcije u procesu nastave/učenja. Ainsworth (1999, 2006, 2008) predlaže tri glavne kategorije u okviru kojih se mogu razvrstati funkcije višestrukih reprezentacija. To su dopunjavanje, ograničavanje interpretacija i izgradnja dubljeg razumevanja. Svaka od pomenute tri funkcije višestrukih reprezentacija može se podeliti u dodatne potkategorije (Šema 2.2).



Šema 2.2. *Funkcionalna taksonomija višestrukih reprezentacija (preuzeto iz Ainsworth, 2008)*

Funkcija dopunjavanja ogleda se u korišćenju reprezentacija koje mogu da optimiziraju različite kognitivne procesa ili sadrže komplementarne informacije.

- *Komplementarni procesi* – Ključni motiv za korišćenje višestrukih reprezentacija je utemeljen u činjenici da različite reprezentacije aktiviraju različite vrste misaonih procesa koji se međusobno mogu dopunjavati. Tako, na primer, tekstualne reprezentacije pogoduju linearnom, sekvencijalnom rezonovanju, baziranom na otkrivanju linearnih kauzalnih veza. Grafici i dijagrami predstavljaju informacije holistički i u većoj meri aktiviraju sistematske, nelinearne kognitivne procese. Osim toga, ove vizuelne reprezentacije u većoj meri podstiču perceptivne procese, a predstavljanje neophodnih informacija na relativno malom prostoru, poboljšava efikasnost i brzinu misaonih procesa. Primer podsticanja različitih misaonih procesa imamo i u slučaju algebarske i grafičke reprezentacije funkcije. Algebarska reprezentacija funkcije ne ističe u prvi plan razmišljanje o osobinama funkcije (npr. domen, monotonost, estremi…). To razmišljanje se puno lakše podstiče pomoću odgovarajućeg grafika.
- *Upotreba komplementarnih informacija* – Nijedan oblik spoljašnje reprezentacije ne obuhvata sva svojstva onoga što predstavljaju pa je neke stvari i ideje lakše i bolje predstaviti slikama, a druge rečima (Sternberg, 2005). Višestruke reprezentacije se koriste u funkciji dopunjavanja informacija. Razlike u informacijama upotrebom različitih reprezentacija pružaju mogućnost međusobnog dopunjavanja. Ovu činjenicu moguće je iskoristiti u slučaju kada je upotrebom jedne reprezentacije nemoguće

obraditi sve aspekte nastavnog sadržaja ili kada postoji opasnost da bi upotreba svih relevantnih informacija sadržanih u jednoj reprezentaciji dovela do kognitivnog opterećenja učenika.

Funkcija ograničavanja sastoji se u tome da upotrebom jedne reprezentacije ograničavamo spektar mogućih (pogrešnih) interprtacija druge. Ovu funkciju moguće je postići na dva načina:

- *Upotrebom poznatih reprezentacija radi tumačenja manje poznatih* - Reprezentacije koje su učenicima jednostavnije, pristupačnije ili poznate od ranije, nastavnik može upotrebiti radi podsticanja razumevanja reprezentacije koja je kompleksnija, apstraktnija ili manje poznata. Nastavnik ima mogućnost da identifikuje poteškoće u razumevanju reprezentacija koje učenici percipiraju kao zahtevnije, da pruži adekvatnu pomoć i time olakša proces usvajanja novih znanja.

- *Ograničavanjem interpretacije jedne reprezentacije inherentnim svojstvima druge reprezentacije* - Ovu funkciju višestrukih reprezentacija objasnićemo upoređivanjem inherentnih svojstava vizuelnih (grafičkih) i simboličkih (algebarskih i verbalnih) reprezentacija. Vizuelne reprezentacije su inherentno konkretnije (manje apstraktne) u odnosu na simboličke reprezentacije, tako da se u nastavi matematike mogu koristiti između ostalog i za konkretizaciju sadržaja. Na primer, ako je u zadatku rečeno da funkcija f ima lokalni ekstrem u tački $x = 1$, mi ne možemo znati da li funkcija u toj tački ima lokalni maksimum ili minimum. Ukoliko za pomenutu situaciju koristimo i inherentno konkretniju, grafičku reprezentaciju, ne ostavljamo prostor za dodatnu interpretaciju. Grafička reprezentacija pruža informaciju o prirodi lokalnog ekstrema (sa slike se može videti da li je u pitanju lokalni maksimum ili minimum) i time ograničava spektar mogućih (pogrešnih) interprtacija verbalno reprezentovanog sadržaja. Upotrebom većeg broja reprezentacija smanjuje se mogućnost proizvoljnog interpretiranja sadržaja učenja tj. sadržaj učenja postaje precizniji i konkretniji.

Izgrađivanje dubljeg razumevanja - Uvrežen je stav da korišćenje višestrukih reprezentacija potencijalno vodi do dubljeg razumevanja matematičkih sadržaja. Povezivanje različitih reprezentacija kreira jednu celovitu mrežu znanja koja ima potpunije značenje od prostog zbira njenih elemenata, čime se učeniku omogućava da kompleksne ideje vidi u jednom novom svetlu i da efikasnije rešava probleme. Upotreba višestrukih reprezentacija dovodi do dubljeg razumevanja nastavnih sadržaja, tako što može omogućiti: apstrakciju, proširivanje znanja (genaralizaciju) i uspostavljanje veza među reprezentacijama.

- *Apstraktno mišljenje* – U nastavi zasnovanoj na višestrukim reprezentacijama od učenika se očekuje da povezuju različite reprezentacije, prevode ih jedne u druge, te da na osnovu uspostavljanja veza i odnosa među reprezentacijama kreiraju mentalni model odgovarajućeg sadržaja učenja. Smatra se da pri tome učenici imaju priliku da identifikuju invarijantna svojstva u različitim reprezentacijama, ali i da se suoče sa određenim konceptualno irelevantnim različitostima između pojedinačnih reprezentacija. Izdvajanjem konceptualno bitnih svojstava različitih reprezentacija i zanemarivanjem nebitnih, učenici razvijaju apstraktno mišljenje.

- *Proširivanje znanja (generalizacija)* - Ainsworth poistovećuje pojmove proširivanja znanja i generalizacije. Proširivanje znanja se odnosi na ekstenziju primenjivosti postojećeg znanja, u nove situacije, bez da se pri tome značajnije menja priroda znanja.

Za razliku od apstrakcije, prošireno znanje ne zahteva aktivnosti reorganizacije strukture znanja na višem nivou. Proširivanje/generalizacija znanja koju omogućavaju reprezentacije, odvija se na dva načina:

- Primenom van oblasti u kojoj je reprezentacija prethodno uvedena, na primer kada grafike funkcija koje smo uveli u oblasti matematike koristimo u interpretaciji kinematičkih problema.
- Prikazivanjem jednog koncepta preko višestrukih reprezentacija može se postići da učenikovo razumevanje jedne reprezentacije olakšava njegovo razumevanje neke druge reprezentacije, čime se postiže tzv. *reprezentacijska ekstenzija.* Na primer, razumevanje znaka kvadratne funkcije koja je data svojim grafikom, može znatno olakšati razumevanje kvadratnih nejednačina.

- *Uspostavljanje veza među reprezentacijama* - Ova funkcija se neznatno razlikuje od prethodno razmatranih. Slično kao i kod funkcije proširivanja znanja, cilj je eksplicitno učiti učenike da prevode jedne reprezentacije u druge. Međutim, u ovom slučaju, podučavanje se ne odvija tako da se vrši ekstenzija znanja od jedne reprezentacije (koja je učenicima poznata/razumljiva) ka drugoj (koja je nepoznata ili manje razumljiva), nego se reprezentacije uvode simultano. Pri tom je proces prevođenja reprezentacija jednih u druge dvosmerne prirode (reverzibilan). Kada se reprezentacije uvode simultano, u situacijama u kojima se učenici suočavaju sa novim, nepoznatim iskustvima, preporučuje se da nastavnik kontroliše proces korišćenja i uspostavljanja veza između reprezentacija. Ipak, poželjno je da kontrolu nad korišćenjem reprezentacija vremenom (nakon što učenici razviju određeni nivo razumevanja reprezentacija), postepeno prepušta učenicima.

2.1.4. Nastava/učenje u multireprezentativnom okruženju

Reprezentacije prožimaju sve matematičke sadržaje, pa je način na koji su matematičke ideje prikazane od fundamentalnog značaja za to kako učenici mogu da razumeju i koriste te ideje (NCTM, 2000). Efikasnost većeg broja spoljašnjih reprezentacija leži u njihovom potencijalu da pomognu učenicima da formiraju preciznije mentalne modele i izgrade koherentne strukture znanja.

Multireprezentativno okruženje pruža mogućnost učenicima da istražuju različite reprezentacije i da nastavne sadržaje izučavaju iz različitih perspektiva i različitim strategijama. Otkrivanjem istih odnosa, struktura ili pojmova, predstavljenih u različitim modalitetima, učenici razvijaju konceptualno razumevanje i stiču dublji uvid u matematičke sadržaje. Višestruke reprezentacije su efikasno sredstvo za razumevanje problemskih situacija i imaju stratešku ulogu u rešavanju problema. Nastavne instrukcije koje podstiču učenike da kreiraju, primenjuju i povezuju različite reprezentacije u predstavljanju i tumačenju matematičkih ideja, rešavanju problema, modeliranju i interpretaciji prirodnih, društvenih i matematičkih fenomena, značajno doprinose razvoju funkcionalnog znanja i fleksibilnog matematičkog mišljenja.

Sticanje znanja putem višestrukih reprezentacija zahteva od učenika da izgrade referentne veze između odgovarajućih strukturnih elemenata sadržanih u različitim reprezentacijama. Međutim, ovaj proces je kognitivno zahtevan, pa neki učenici mogu imati poteškoće u razumevanju međusobne povezanosti višestrukih reprezentacija. U takvim situacijama učenici ne koriste sve reprezentacije, već se koncentrišu samo na jednu, najčešće onu koja je njima poznatija ili razumljivija. Što se tiče reprezentacija koje su učenicima nepoznate ili manje razumljive, učenici uglavnom uočavaju samo njihove površinske karakteristike i nisu u stanju da konceptualno identifikuju relevantne strukture i/ili da uključe složene delove informacija (Seufert, 2003). Usled nepotpunog razumevanja, prelazak iz jedne u drugu reprezentaciju ostaje na nivou algoritamskih postupaka (Knuth, 2000). Matematičke reprezentacije u velikom broju slučajeva uključuju dve ili više povezanih ideja. U reprezentacijama koje su bogate konceptima, neke ideje mogu biti „skrivene" i učenicima neprepoznatljive. Nedovoljno konceptualno razumevanje prouzrokuje značajne poteškoće koje učenici ne mogu da prevaziđu ili dovodi do toga da učenici u radu sa reprezentacijama sprovode uvežbane proceduralne postupke, bez potpunog razumevanja. Posebne poteškoće sa koordinacijom i integracijom informacija iz višestrukih reprezentacija mogu se očekivati u početnim fazama učenja, kao i kod učenika sa nedovoljnim predznanjem. Ovi nalazi ukazuju na to da nastavnik treba da pruži adekvatnu i blagovremenu pomoć učenicima, kako bi prevazišli poteškoće u procesu sticanja znanja i efikasno iskoristili potencijale višestrukih reprezentacija.

Kako bi učenicima olakšali učenje, nastavnici treba da kreiraju najkorisnije forme reprezentovanja matematičkih ideja, najmoćnije analogije, ilustracije, primere, objašnjenja i demonstracije - jednom rečju, načine predstavljanja i formulisanja sadržaja učenja tako da bude razumljiv učenicima (Shulman, 1986: 9). Nastavnikovo poznavanje matematičkog sadržaja (predmetno znanje) utiče na njegovu sposobnost da generiše i efikasno koristi različite reprezentacije. Osim toga, nastavnici treba da znaju koje sadržaje i reprezentacije učenici mogu lakše/teže razumeti, koje se ustaljene zablude, greške i poteškoće mogu očekivati, kako da komplikovane matematičke ideje i apstraktne koncepte prikažu reprezentacijama koje učenici mogu da razumeju (Fennema & Franke, 1992). Efektivni nastavnici, uz temeljno poznavanje sadržaja koje predaju, imaju repertoar reprezentacija koje su najkorisnije za učenje tog sadržaja.

Reprezentacije koje nastavnici odluče da koriste i način na koji ih koriste su značajni faktori koji utiču na proces učenja učenika. Reprezentacije, bilo da su složene ili jednostavne, važan su deo objašnjenja koja nastavnici pružaju kada uvode nove koncepte, ilustruju proces rešavanja problema i stvaraju veze između koncepata. Mnogi matematički koncepti i procesi mogu se predstaviti različitim reprezentacijama, pri čemu svaka od njih pruža neke, ali ne i sve informacije, naglašava određene aspekte i sakriva druge. Zbog toga je veoma bitno da nastavnici znaju koje prednosti i koja ograničenja imaju određene reprezentacije u prezentovanju konkretnih nastavnih sadržaja i realizaciji postavljenih ciljeva/ishoda nastave. Prilikom izbora reprezentacija nastavnik bi trebao da razmotri sledeće kriterijume (Kilpatrick *et al.*, 2001: 99-101): *transparentnost* (koliko lako se može videti ideja koju želimo prikazati datom reprezentacijom), *efikasnost* (da li reprezentacija podržava efikasnu komunikaciju i korišćenje) *opštost* (da li se reprezentacija može primeniti na široke klase objekata), *jasnoća* (koliko je reprezentacija jasna, nedvosmislena i jednostavna za korišćenje) i *preciznost* (koliko je reprezentacija blizu tačnim vrednostima).

Kreiranje multireprezentativnog okruženja za učenje zahteva kompetentnog i kreativnog nastavnika, koji će na odgovarajući način umeti da ga planira, oblikuje, organizuje i realizuje različite aktivnosti koje će unaprediti sposobnosti i veštine učenika za fluentno i fleksibilno korišćenje različitih reprezentacija. U tabeli koja sledi prikazane su neke od aktivnosti nastavnika i učenika koje doprinose razvoju kompetencija za rad sa višestrukim reprezentacijama. Navedene preporuke nastavnik može da tumači kao smernice u planiranju i realizaciji nastavnih sadržaja, ali i kako treba usmeravati učenike u specifičnim zahtevima nastave u kojoj se primenjuju višestruke reprezentacije.

Tabela 2.1. *Višestruke reprezentacije u nastavi/učenju matematike – preporučene aktivnosti nastavnika i učenika (preuzeto iz NCTM, 2014)*

Nastavnik	Učenik
Selektuje zadatke koji omogućavaju učenicima da prilikom rešavanja odluče koju će reprezentaciju koristiti u davanju smisla problemu.	Koristi različite forme reprezentacija u shvatanju i razumevanju matematike.
Značajan deo nastavnog vremena posvećuje aktivnostima učenika koje se odnose na korišćenje, diskusiju i izgradnju veza između reprezentacija.	Opisuje i obrazlaže svoje matematičko razumevanje i rezonovanje crtežima, dijagramima, graficima i drugim reprezentacijama.
Uvodi različite forme reprezentacija koje mogu biti od koristi učenicima.	Donosi odluku o tome koje oblike reprezentacija da koristi kao alate za rešavanje problema.
Podstiče učenike da koriste vizuelne reprezentacije kada objašnjavaju i obrazlažu svoje rasuđivanje.	Skicira vizuelne reprezentacije koje daju smisao problemskoj situaciji.
Fokusira pažnju učenika na strukturu ili bitne karakteristike matematičkih ideja koje se pojavljuju, bez obzira na vrstu reprezentacije.	Kontekstualizuje matematičke ideje povezujući ih sa realnim situacijama.
Dizajnira načine da podstakne i proceni učeničke sposobnosti da smisleno koriste reprezentacije u rešavanju problema.	Razmatra prednosti ili pogodnost korišćenja različitih reprezentacija u rešavanju problema.

2.2. VIZUELIZACIJA U NASTAVI MATEMATIKE

Među istraživačima matematičkog obrazovanja, vlada sve veće interesovanje za višestruke reprezentacije i matematičku vizuelizaciju. Značaj reprezentacija i vizuelizacije i njihova uska povezanost u procesu učenja je istaknuta u radovima brojnih autora, posebno u izveštaju radne grupe „*Representations and Mathematics Visualization*", sa 20. konferencije PME-NA (Hitt, 2002). Autori su saglasni u tome da je nastava matematike, na svim nivoima, tradicionalno fokusirana na korišćenju algebarskih reprezentacija i da su geometrijske (grafičke) i intuitivne reprezentacije zapostavljene. Marginalizacija vizuelnih reprezentacija i vizuelnih pristupa učenju, dovodi do disbalansa među reprezentacijama i nesinhronizovanog razvoja različitih oblika matematičkog mišljenja. Poteškoće nekih učenika upravo proističu iz ograničenog iskustva u radu sa vizuelnim reprezentacijama i njihovim povezivanjem sa simboličkim reprezentacijama. Ovo je jedan od glavnih problema sa kojim se suočava tradicionalna nastava matematike. Rezultati empirijskih istraživanja ukazuju da su nastavni pristupi bazirani na vizuelizaciji i višestrukim reprezentacijama efikasniji od tradicionalnih.

2.2.1. Pojam, uloga i značaj matematičke vizuelizacije

Vizuelizacija je važan aspekt matematike, matematičkog mišljenja, razumevanja i rezonovanja. Uloga vizuelizacije u procesu učenja i njen uticaj na obrazovne rezultate, predmet su mnogih, do sada sprovedenih istraživanja. Autori ističu da je vizuelno mišljenje veoma značajno za proces učenja, iznose ubedljive argumente o centralnoj ulozi vizuelizacije u reformskim promenama nastave matematike (Arcavi, 2003; Presmeg, 1992; Zimmermann & Cunningham, 1991), ali ukazuju i na moguće poteškoće i ograničenja vizuelizacije (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997; Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Monk, 2003; Presmeg, 2006).

Norma Presmeg (2006) je u svom radu dala pregled prethodno sprovedenih istraživanja u vezi sa vizuelizacijom u učenju i nastavi matematike. Ona ističe da je aktivnije bavljenje ovom temom počelo devedesetih godina prošlog veka, tačnije, nakon konferencije PME-13 (Psychology of Mathematics Education) na kojoj je izloženo nekoliko radova o vizuelnim reprezentacijama i vizuelnom mišljenju. Presmeg zapaža da u postojećoj literaturi, termin „vizuelizacija" ima različita značenja i daje svoje viđenje ovog fenomena. Vizuelizacija uključuje procese konstruisanja i transformisanja kako vizuelnih mentalnih slika, tako i svih skica prostorne prirode koje mogu biti u vezi sa bavljenjem matematikom (*ibid.*, 218). Razvojem računara i njihovih grafičkih mogućnosti, vizuelizacija je dobijala sve više na značaju i aktuelnosti. Do danas je objavljen veliki broj radova koji se bave vizuelizacijom, vizuelnim mišljenjem, vizuelnim reprezentacijama, vizuelnim metodama rešavanja problema, vizuelnim pristupima nastavi/učenju itd.

Pojam vizuelnog mišljenja, koji je danas u širokoj upotrebi, uveo je Rudolf Arnhajm (1991), definišući ga kao mišljenje posredstvom vizuelnih operacija. U vizuelizaciji, slike kombinuju aspekte prirodnog predstavljanja sa formalnijim oblicima i time se povećava kognitivno razumevanje. Arnhajm ističe da vizuelne slike nisu samo ilustracija misli, već daleko više, one su razvijanje samog mišljenja. Naslov njegovog dela je veoma koncizna definicija vizuelnog mišljenja: *„Vizuelno mišljenje – Jedinstvo slike i pojma"* koja ujedno daje značajnu implikaciju za nastavu matematike.

Veoma obuhvatnu definiciju vizuelizacije dao je Arcavi:

> *„Vizuelizacija je sposobnost, proces i produkt stvaranja, tumačenja i korišćenja slika, dijagrama, ilustracija u našem umu, na papiru ili tehnološkim sredstvima, čija je svrha prikazivanje i komunikacija informacija, razmišljanje i razvijanje prethodno nepoznatih ideja i unapređenje razumevanja." (Arcavi, 2003: 217).*

Ova definicija ističe značaj vizuelizacije za nastavu/učenje matematike u sledećim aspektima:

- Vizuelne reprezentacije (i spoljašnje i unutrašnje) su značajne za prezentovanje matematičkih ideja i razvijanje učeničkih/studentskih sposobnosti i veština u matematičkoj komunikaciji.
- Vizuelizacija može dati jasnije značenje i smisao matematičkim konceptima i vezama između njih i time doprineti razvoju konceptualnog razumevanja.
- Vizuelizacija može biti moćan alat za istraživanje i rešavanje matematičkih problema.

Vizuelne matematičke reprezentacije mogu biti definisane kao skup grafičkih simbola koji vizuelno kodiraju uzročno-posledične, funkcionalne, strukturne i semantičke osobine i odnose matematičkih koncepata koje predstavljaju (Sedig & Sumner, 2006). U nastavi matematike, geometrija je najprirodnija oblast u kojoj se koriste vizuelne reprezentacije. Međutim, vizuelne reprezentacije mogu se koristiti i u drugim oblastima matematike kako bi se podstaklo vizuelno mišljenje. Vizuelne reprezentacije su prisutne u sadržajima trigonometrije, analitičke geometrije, realnih funkcija, diferencijalnog i integralnog računa, ali su nedovoljno zastupljene u nastavi. Prilikom obrade nekih pojmova (npr. prvi izvod funkcije), grafičke reprezentacije se koriste kod uvođenja pojma, a nakon toga, one se često zanemaruju i u radu dominiraju algebarske reprezentacije. Vizuelizacija je centralna komponenta mnogih procesa u kojima se pravi prelazak sa konkretnog na apstraktni model mišljenja (Ben-Chaim, Lappan & Houang, 1989: 50). Nedovoljna zastupljenost vizuelnih reprezentacija, kao nosilaca značenja pojmova, može dovesti do preuranjene formalizacije. U takvim situacijama, učenici se oslanjaju na formule i gotove algoritme i sprovode algebarske procedure, bez jasnog razumevanja značenja.

Uloga vizuelizacije u rešavanju matematičkih problema je veoma značajna. Vizuelne reprezentacije prikazuju informacije očigledno i mogu služiti za otkrivanje strukture problema i postavljanje temelja za njegovo rešenje (Diezmann & English, 2001: 77). Ako se uporede algebarski i vizuelni pristupi rešavanju problema, može se zaključiti da vizuelni pristupi imaju određene prednosti: 1) Vizuelizacija omogućava smanjenje kompleksnosti kada se radi sa mnoštvom informacija (Rösken & Rolka, 2006), pa se zadatak može jednostavnije i brže rešiti; 2) Vizuelizacija može doprineti rešavanju kognitivnih konflikata između (ispravnih) simboličkih i (neispravanih) intuitivnih rešenja (Arcavi, 2003); 3) Vizuelni pristupi mogu da upute na konceptualne osnove problema koje učenici mogu lako zanemariti u algebarskim postupcima (Arcavi, 2003); 4) Konkretnost vizuelnih reprezentacija je bitan faktor za stvaranje efekta neposrednosti u dokazivanju (Fischbein, 1987). Neki formalni dokazi se mogu zameniti geometrijski analognim, jednostavnim i lepim tako da nas valjanost teorema gotovo zaslepi (Gardner, 1973).

Vizuelne reprezentacije predstavljaju kombinaciju konkretnih i apstraktnih elemenata matematičke strukture problema. Zbog toga one mogu premostiti jaz između konkretne i apstraktne strane problema i mogu olakšati kako matematizaciju tako i konkretizaciju problema. Zastupljenost konkretnih/apstraktnih elemenata, određuje stepen konkretnosti (ili apstraktnosti) vizuelne reprezentacije. Konkretne vizuelne reprezentacije su neposredno povezane sa realnom situacijom, jednostavne su za razumevanje, interesantne su i mogu pospešiti motivaciju učenika. Međutim, one ne pružaju dovoljno informacija koje jasno prikazuju matematičke odnose i strukturu problema, odnosno veza sa apstraktnom stranom problema je slaba. Apstraktne vizuelne reprezentacije odlikuje upotreba konvencionalnih grafičkih simbola za predstavljanje relevantnih strukturnih elemenata. One pomažu učenicima da se fokusiraju na bitne karakteristike problema, ali su teže za razumevanje i mogu zahtevati bolje predznanje. U odnosu na konkretne, apstraktne reprezentacije su „moćnije", zato što mogu da prevaziđu kontekst u rezonovanju i procesu rešavanja problema (Kaminski, Sloutsky & Heckler, 2008). Ukoliko se za vizuelizaciju problema simultano koriste konkretne i apstraktne vizuelne reprezentacije, mogu se koristiti prednosti obeju reprezentacija. Na taj način, učenicima se olakšava uspostavljanje odnosa i veza između konkretnog i apstraktnog aspekta problema, što u krajnjoj liniji dovodi do daljeg unapređenja procesa učenja i boljih postignuća učenika (Moreno, Ozogul & Reisslein, 2011).

Uvođenjem vizuelnih pristupa u nastavu matematike, učenicima se pruža mogućnost da stiču celovita i funkcionalna znanja. Upotreba vizuelnih reprezentacija treba da bude osmišljena i dobro odmerena, kako ne bi odvela u drugu krajnost. Vizuelizacija dobija svoj pravi, suštinski smisao samo ako se vizuelne reprezentacije povežu sa algebarskim, numeričkim i verbalnim reprezentacijama (Zimmerman & Cunningham, 1991).

2.2.2. Ograničenja i poteškoće u primeni matematičke vizuelizacije

Uprkos opštem zapažanju da vizuelni pristupi dovode do unapređenja obrazovnih postignuća, potrebno je razmotriti i moguće poteškoće i prepreke u njihovoj realizaciji. Matematička vizuelizacija je složena kognitivna aktivnost koja zahteva sposobnost generisanja različitih reprezentacija matematičkih koncepata kojim učenik može vešto da manipuliše (Hitt, 1997). Vizuelni pristupi, u određenim situacijama mogu prouzrokovati poteškoće u savladavanju gradiva (Aspinwall *et al.*, 1997; Bell & Janvier, 1981; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Presmeg, 1992; Stylianou & Silver, 2004).

Kada se vizuelizacija primenjuje na slike koje su bogate konceptima, kognitivni zahtevi su sigurno visoki. Osim toga, rezonovanje o konceptima u vizuelnom okruženju često zahteva heurističke pristupe i ne nudi uvek sigurne i rutinske procedure (kao u slučaju algebarskog pristupa). Kod učenika se može pojaviti nesigurnost jer ne postoji „šablon", postupci nisu unapred određeni i pravac u kome treba nastaviti je neizvestan. Svesno ili nesvesno, vizuelni pristupi mogu biti odbačeni od strane učenika (a možda i nastavnika) zato što ih smatraju za previše „rizične" i kognitivno zahtevnije od algebarskih pristupa (Arcavi, 2003).

Još jedna kognitivna teškoća proizilazi iz činjenice da vizuelni pristupi zahtevaju razumevanje i kompetento korišćenje višestrukih reprezentacija. Uspostavljanje fleksibilne dvosmerne veze između vizuelne i simboličke reprezentacije iste situacije (što stoji u osnovi suštinskog razumevanja matematike) zavisi i od samog konteksta, što dodatno otežava izgradnju potrebnih veza (Arcavi, 2003).

Upotreba vizuelnih reprezentacija možda neće uvek biti efikasna za rešavanje problema, a u nekim situacijama može dovesti učenike i do pogrešnih rešenja (Presmeg, 1992). Jedan od mogućih uzroka je neadekvatno odabrana vizuelna reprezentacija kojom je problem prikazan i koja samim tim umanjuje efikasnost i uspešnost učenika u rešavanju problema. Prilikom izbora vizuelne reprezentacije treba uzeti u obzir prirodu problema koji se vizuelizuje, prednosti i nedostatke konretnih/apstraktnih vizuelnih reprezentacija, kao i prethodna znanja, sposobnosti i veštine učenika.

Na svim nivoima obrazovanja, učenici i studenti se susreću sa zadacima koji zahtevaju rad sa grafičkim reprezentacijama funkcija (interpretacija, konstrukcija ili primena grafika funkcije). Posmatrajući sa aspekta nastavne prakse, može se reći da su grafičke reprezentacije funkcija ambivalentne. Vizuelna očiglednost grafičkih reprezentacija je izuzetno bogat i moćan medij koji generiše i prenosi značenje, ali je ujedno i izvor mnogih poteškoća i netačnih odgovora učenika (Monk, 2003; Shah & Hoeffner, 2002). Učeničke/studentske poteškoće u radu sa grafičkim reprezentacijama identifikovane su u istraživanjima sprovedenim u nastavi matematike, fizike, hemije… (Monk, 2003; Potgieter, Harding & Engelbrecht, 2008; Roth & McGinn, 1997; Vinner & Dreyfus, 1989; Woolnough, 2000). Neki od mogućih uzroka teškoća i problema u radu sa grafičkim reprezentacijama funkcija u nastavi matematike su: 1) Učenici se ne fokusiraju i ne uočavaju informacije koje su bitne za rešavanje problema a koje grafička reprezentacija pruža (Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi, 1993). Na primer, učenici ne uočavaju da pomoću grafika funkcije $y = f(x)$ mogu rešiti jednačinu $f(x) = 0$; 2) U nekim slučajevima grafička reprezentacija stvara saznajne poteškoće koje ograničavaju sposobnosti učenika da izgrade vezu između grafičke i algebarske reprezentacije funkcije (Gagatsis *et al.*, 2003); 3) Kod učenika se mogu pojaviti mentalne slike koje su neadekvatne, pogrešne ili koje sprečavaju matematičku generalizaciju, što dovodi do kognitivnih konflikata (Aspinwall *et al.*, 1997; Presmeg, 1992); 4) U nastavi koja je fokusirana na algebarske reprezentacije, učenici često imaju fragmentirana znanja, tj. grafičke i algebarske reprezentacije vide kao zasebne celine i teško ih povezuju (Duval, 2006).

Važno je napomenuti da su neke od poteškoća učenika/studenata prouzrokovane ograničenim iskustvom u radu sa grafičkim reprezentacijama i njihovim povezivanjem sa simboličkim reprezentacijama. U nastavi matematike koja favorizuje algebarske pristupe izučavanju funkcija, a vizuelne marginalizuje, poteškoće učenika/studenata u radu sa grafičkim reprezentacijama su veoma izražene.

2.2.3. Kognitivno-vizuelni pristup nastavi/učenju matematike

Kognitivno-vizuelni pristup je savremena didaktičko-metodička koncepcija koja promoviše vizuelizaciju procesa učenja u multireprezentativnom okruženju. U kognitivno-vizuelnom pristupu posebno dolaze do izražaja konstruktivna i kognitivna uloga vizuelizacije i time realizacija didaktičkog principa očiglednosti dobija fundamentalno novo rešenje.

Očiglednost vizuelnih reprezentacija je veoma značajna za proces učenja, zato što su neposredna perceptivna saznanja polazna osnova za razvoj apstraktnog matematičkog mišljenja. Posmatrano s konstruktivističkog aspekta, vizuelizacija pomaže učenicima u stvaranju vlastitog mentalnog modela, a odlučujući faktor njene efikasnosti je način i stepen angažovanja učenika u aktivnostima koje su više od samog gledanja. Da bi očiglednost u procesu saznavanja došla do punog izražaja potrebno je da se vizuelizacija didaktičko-metodički osmisli tako da ulogu vizuelnih reprezentacija od pomoćnog, ilustrativnog sredstva transponuje u vodeće produktivno kognitivno sredstvo (Далингер и Князева, 2004). Svrsishodno, plansko i široko korišćenje kognitivne funkcije očiglednosti u cilju razvoja i optimalnog korišćenja resursa vizuelnog mišljenja učenika, je osnovna pretpostavka kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju matematike (Далингер, 2006a, 2006b).

Za optimalno korišćenje potencijala vizuelnog mišljenja učenika, potrebno je podsticajno vizuelno okruženje za učenje. Резник Н. А. (1997) pod vizuelnim okruženjem podrazumeva sveukupnost uslova za učenje u kojima je naglasak na korišćenju potencijala vizuelnog mišljenja učenika. Ovi uslovi ukazuju na prisustvo nastavnih sredstava i metodički osmišljenih aktivnosti koje aktuelizuju vizuelnu percepciju učenika. U procesu podučavanja/učenja koriste se tradicionalna očigledna nastavna sredstava, kao i specijalno dizajnirana savremena informaciona sredstva. Osnovni parametri vizuelnog okruženja za učenje (Резник, 1997; Далингер, 2011) su:

- Jednostavno, jasno i koncizno predstavljanje nastavnih sadržaja.
- Verodostojno prikazivanje elemenata i strukture nastavnog sadržaja.
- Za prikazivanje informacija koriste se različite reprezentacije (slika - formula - tekst).
- Akcenat je na glavnim, značajnim delovima slika.
- Uzimaju se u obzir individualne mogućnosti i sposobnosti učenika u percepciji vizuelnih informacija.

Kreiranje vizuelnog okruženja zahteva didaktičko-metodičku transformaciju, tj. vizuelizaciju nastavnih sadržaja, specijalno dizajnirane nastavne materijale i široku upotrebu računara u nastavi. Vizuelizacija nastavnih sadržaja podrazumeva prezentovanje, strukturiranje i formiranje obrazovnih sadržaja/znanja, bazirano na predstavljanju informacija različitim reprezentacijama i stalnoj interakciji između njih (Манько, 2009). Osnova vizuelizacije je *„kognitivna grafika"* (vizuelne reprezentacije i uopšte vizuelni načini prezentovanja nastavnih sadržaja) koja aktuelizuje vizuelnu percepciju i mišljenje.

U realizaciji kognitivno-vizuelnog pristupa posebno važnu ulogu imaju *„vizuelizovani zadaci"*. Pod vizuelizovanim zadatkom se podrazumeva zadatak u kome je slika (vizuelne reprezentacije) eksplicitno ili implicitno uključena u uslove i odgovore/rešenja zadatka, određuje način rešavanja problema, pruža podršku u svakoj etapi izrade zadatka, neposredno ili posredno prati postupak rešavanja (Князева, 2003a). Vizuelizovani zadaci imaju višestruku funkciju:

- Korišćenje potencijala vizuelnog mišljenja učenika.
- Sticanje vizuelnih iskustava i unapređenje vizuelne pismenosti.
- Primena vizuelnih strategija za reševanje problema.
- Afirmacija konceptualnog znanja kroz povezivanje višestrukih reprezentacija matematičkih koncepata.
- Sticanje potpunijeg uvida u kvalitet znanja i individualne osobine učenika.

Navedene funkcije daju vizuelizovanim zadacima izuzetan didaktičko-metodički potencijal za razvoj i unapređenje učeničkih veština i sposobnosti vizuelnog mišljenja, rešavanje problema i matematičke komunikacije. Vizuelizovani zadaci se koriste u svim etapama nastavnog procesa i predstavljaju jedno od osnovnih sredstava za produktivnu i efikasnu realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa (Далингер, 2011).

Svakako da vizuelizacija ne može eliminisati sve probleme i poteškoće koji se javljaju prilikom usvajanja formalno-aksiomatskih sadržaja, ali ih može ublažiti. Kada se koriste posebno osmišljeni vizuelizovani materijali za formiranje deduktivnih veština učenika, aktivno vizuelno mišljenje razvija heurističke metode, daje osnovu za misaone procese na višem nivou apstrakcije i unapređuje logičko mišljenje i deduktivno zaključivanje.

Rezultati istraživanja (Князева, 2003b; Пермякова, 2015; Резник, 1997; Сатьянов, 1984; Tall, 1986) u kojima su autori dali originalno konstruisane i empirijski evaluirane modele kognitivno-vizuelne nastave/učenja, nedvosmisleno ukazuju da vizuelizacija daje pozitivne i produktivne rezultate u formiranju znanja, veština i navika učenika. U njihovim razmatranjima je istaknut i stav da vizuelni pristup učenju ne može (i ne treba) u potpunosti zameniti tradicionalne metode rada. U zavisnosti od sadržaja koji se izučavaju, vizuelizaciju treba prilagoditi mogućnostima, potrebama i interesovanjima učenika, uspostavljanjem optimalnog odnosa između vizuelnih i simboličkih reprezentacija, kao i vizuelno-kreativnog i logičko-analitičkog mišljenja.

2.3. SAVREMENE TEHNOLOGIJE U NASTAVI MATEMATIKE

Savremene računarske tehnologije imaju značajan uticaj na matematičko obrazovanje, njegov sadržaj, metode i tehnike, nastavne planove i programe, kao i na celokupnu organizaciju nastave i procesa učenja. U savremenom matematičkom obrazovanju više se ne postavlja pitanje da li treba primenjivati računarske tehnologije, već je glavni zadatak doći do optimalnih rešenja kako i na koji način primeniti nove tehnologije u nastavnoj praksi, kako bi se poboljšao kvalitet nastave, a učenje postalo efikasnije.

Primena tehnologije u nastavi i učenju mora biti promišljena, sa metodički dobro osmišljenim planom, odgovarajućom teorijskom pozadinom i uz poštovanje specifičnosti nastavnog predmeta. Tehnologija treba da se koristi široko i odgovorno, u cilju da se obogati proces učenja matematike (NCTM, 2000: 24). Uloga nastavnika u planiranju, osmišljavanju i realizaciji aktivnosti u kojima se koristi računar veoma je značajna. Nastavnici imaju odgovornost da odlučuju kada računarska tehnologija može efikasno da poboljša mogućnosti za učenje i koja vrsta tehnologije je potrebna da se postignu ciljeve časa. Savremene tehnologije omogućavaju nastavnicima da efikasnije prilagode svoje instrukcije i nastavne metode potrebama učenika, da obezbede kreativne mogućnosti koje podržavaju proces učenja, sticanje znanja i veština.

Upotreba računara u procesu učenja može biti od značajne pomoći učenicima pri računanju, crtanju grafika, radu s većim skupovima podataka, snalaženju u svetu simbola, povezivanju različitih reprezentacija matematičkih objekata, eksperimentisanju, stvaranju pretpostavki i proveri njihove ispravnosti. Računarske tehnologije omogućavaju učenicima da više vremena posvete promišljanju o matematičkim idejama, istraživanju i otkrivanju matematičkih znanja. Uz podršku računara učenici mogu da razviju i pokažu dublje razumijevanje matematičkih pojmova i mogu da se bave naprednijim matematičkim sadržajima nego u tradicionalnom nastavnom okruženju.

2.3.1. Matematičke reprezentacije i vizuelizacija u računarskom okruženju

Savremena tehnologija i korišćenje matematičkih reprezentacija su usko povezani. Računarska tehnologija i matematički softveri povećavaju mogućnost korišćenja i analiziranja više povezanih reprezentacija (Yerushalmy & Shternberg, 2001) i sve su sofisticiraniji u pogledu „multireprezentativnih sposobnosti" (Heid & Blume, 2008: 58). Tehnologija transformiše mogućnosti koje su prisutne u matematičkim reprezentacijama (Moreno-Armella, Hegedus & Kaput, 2008). Ona može pomoći učenicima da steknu bolje razumevanje upotrebe reprezentacija i ima potencijal da izgradi temeljno razumevanje matematičkih pojmova i ideja (Kaput, 1992).

Pronalazak dinamičkih interaktivnih tehnologija promenio je infrastrukturu matematičkih reprezentacija. Uvođenjem prepoznatljivih dinamičkih reprezentacija i automatizovanog povezivanja višestrukih reprezentacija, matematičke reprezentacije su dobile kvantitativno i kvalitativno novu dimenziju (Hegedus & Moreno-Armella, 2009; Kaput, 1992; Moreno-Armella *et al.*, 2008). Interakcija između dinamičkih reprezentacija i matematičkih ideja dodatno pojačava matematičku komunikaciju, i dovodi do otkrića pedagoški moćnih „sinergija između reprezentacija i koncepata" (diSessa, 2007).

Potencijal računarskih tehnologija, da se matematički koncepti povežu sa vizuelnim reprezentacijama na način koji podstiče matematičko rezonovanje i konceptualno razumevanje, veoma je značajan za nastavu/učenje matematike (Lopez Jr, 2001). Za savremenu obrazovnu tehnologiju skoro da ne postoje prepreke da vizuelno prikaže bilo koji matematički ili realni objekat i da ih adaptira prema čulnim i saznajnim mogućnostima učenika. „Dok objekti iz realnog života dolaskom na ekran postaju apstraktni, matematički objekti koji su apstraktni na ekranu postaju konkretni" (Lester, 2000). Vizuelizacija matematičkih koncepata u multimedijalnim okruženjima pruža mogućnost za aktivnosti koje promovišu nove ideje i načine razmišljanja (Yerushalmy, 2005), podstiče učenike da budu aktivniji, da samostalno rasuđuju, istražuju koncepte i njihove međusobne odnose, rešavaju probleme, generišu nove informacije i postavljaju nova pitanja (Van Voorst, 1999).

Tehnologija ima potencijal da vizuelizuje proces učenja tako da podstiče više kognitivne procese, podržava rezonovanje, vizuelnu artikulaciju ideja i dinamičke nelinearne (divergentne) misaone aktivnosti (McLoughlin & Krzysztof, 2001).

Postoji niz različitih obrazovnih softvera koji se mogu koristiti u nastavi matematike. Većina specijalizovanih matematičkih softvera, poput programa dinamičke geometrije i sistema računarske algebre omogućava obavljanje simboličkih, numeričkih i grafičkih operacija, i obezbeđuje okruženje za aktivno istraživanje matematičkih struktura putem višestrukih reprezentacija.

Sistemi računarske algebre (*Computer Algebra Systems*, CAS) su programi koji omogućavaju numeričke proračune i manipulaciju simboličkim matematičkim izrazima. Većina njih podržava i vizuelizaciju nekih algebarskih objekata, s tim što korisnik ne može direktno modifikovati grafičke reprezentacije. Neki od poznatijih su programski paketi *Mathematica, Maple, Derive, MatLab, Scientific WorkPlace.* Ovi programi se mogu koristiti za obradu sadržaja algebre, matematičke analize, analitičke geometrije, numeričke matematike i sl.

Upotreba CAS-a u nastavi matematike omogućava da se proces učenja rastereti od rutinskih algoritamskih i numeričkih operacija i da se time dobije više vremena za kvalitetnu interpretaciju problema koji se rešavaju, kao i promišljanje o dobijenim rezultatima. Odnosno, upotreba računara doprinosi sveobuhvatnom razumevanju materije, jer se uvežbavanje proceduralnih veština sprovodi efektnije i u kraćem vremenu, a više vremena se može posvetiti razvoju konceptualnih znanja (Kadijević, 1999).

Dinamički geometrijski sistemi (*Dynamic Geometry Systems*, DGS) su programi koji omogućavaju dinamičku konstrukciju geometrijskih objekata kojima se može manipulisati Uobičajeno je da se u ovim programima, geometrijski objekti mogu posmatrati analitički, preko svojih koordinata i jednačina, odnosno za konstruisane geometrijske objekte, dostupna je i njihova algebarska reprezentacija. Međutim, ovi programi imaju slabije mogućnosti za rad sa algebarskim reprezentacijama. Programi koji se mogu svrstati u DGS ili poseduju neka od svojstava DGS-a su: *GeoGebra*, *Geometer's Sketchpad*, *Cabri Geometry*, *Cinderella*, *Euclides*, *GEONExT* itd.

Poseban značaj dinamičkih geometrijskih softvera ogleda se u vizuelizaciji i dinamičkim konstrukcijama u kojima i nakon izmena objekti zadržavaju svoja matematička svojstva i odnose. Interaktivno okruženje ove vrste softvera stvara uslove za kvalitetan eksperimentalni istraživački rad u nastavi geometrije i obradi sadržaja o funkcijama. Dinamička vizuelizacija pruža mogućnost da se učenicima prikažu neki aspekti matematike koje je izuzetno teško, čak i nemoguće, pokazati upotrebom olovke i papira. Teško je zamisliti na koji način bi dinamičke procese prikazali bez računara i koliko bi nam vremena trebalo za postizanje istog cilja. Na taj način se povećava efikasnost nastave matematike. Osim toga, stvaraju se mogućnosti za uvođenje novih matematičkih sadržaja, isticanje vizuelnih aspekata postojećih programskih sadržaja i modifikovanje zadataka koji se koriste u njihovoj obradi. Laborde (2001) predlaže da se matematički zadaci klasifikuju u skladu sa ulogom koju imaju dinamički geometrijski softveri u nastavnom procesu. Ona ističe četiri značajne uloge ove vrste obrazovnih softvera:

- Softver može da olakša materijalne aspekte zadatka a da ga ne menja konceptualno.
- Softver može da se koristi kao „vizuelni pojačalo" u cilju da se olakša zapažanje (npr. pri identifikovanju svojstava geometrijskih figura ili grafika funkcija).
- Softver obezbeđuje specijalne alate koji omogućavaju studentima da rešavaju matematičke zadatke na nove načine.

- Dinamički geometrijski softver omogućava stvaranje nove vrste matematičkih problema koji se ne bi mogli rešavati bez upotrebe tehnologije (istraživanje dinamičkih matematičkih pojmova i procesa, kao što su geometrijske transformacije, funkcije, granične vrednosti, izvodi...).

Dinamički matematički softveri (DMS) su dizajnirani tako da u jednom paketu kombinuju određene funkcije softvera dinamičke geometrije, računarskih algebarskih sistema i tabličnih kalkulatora. Primeri softvera za dinamičku matematiku su *GeoGebra* i *GEONExT* (Preiner, 2008). Dinamički matematički softveri pružaju mnogobrojne prednosti DGS i CAS alata i ujedno prevazilaze njihove nedostatke, pa je rad sa matematičkim reprezentacijama dinamičan, interaktivan i izuzetno fleksibilan. Mogućnost vizuelizacije i dinamička povezanost višestrukih reprezentacija na jedinstven način povezuju geometriju, algebru i analizu, te se DMS mogu koristiti u gotovo svim segmentima nastave matematike i omogućavaju nastavniku da efikasno prilagodi određeni nastavni sadržaj i nastavne metode pojedinačnim potrebama studenata.

2.3.2. Obrazovni softver *GeoGebra*

U istraživanju koje je predstavljeno u disertaciji, implementacija kognitivno-vizuelnog pristupa je sprovedena uz korišćenje obrazovnog softvera *GeoGebra*. Ovaj softver je dizajniran specijalno za obrazovne svrhe, intuitivan je i jednostavan za upotrebu i pruža širok spektar mogućnosti za efikasnu realizaciju savremenih metodičkih pristupa. *GeoGebra* je dinamički matematički softver koji kombinuje lakoću korišćenja i konstruktivne karakteristike DGS-a sa snagom i funkcionalnošću CAS-a, i samim tim omogućava prevazilaženje jaza između matematičkih disciplina geometrije, algebre i matematičke analize (Hohenwarter & Preiner, 2007). Zbog svoje svestranosti, *GeoGebra* se može koristiti na svim nivoima obrazovanja za širok spektar različitih matematičkih tema (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008).

GeoGebra ima nekoliko međusobno povezanih prikaza: grafički, algebarski, tabelarni i CAS-prozor za simbolička izračunavanja. Matematički objekti se kreiraju pomoću odgovarajućih alata i prikazani su višestrukim reprezentacijama: grafičkim (npr. grafici funkcija, tačke, prave i drugi geometrijski objekti), algebarskim (npr. koordinate tačaka, jednačine) i numeričkim reprezentacijama (u ćelijama tabele). Pri tome korisnik može direktno da utiče na promenu bilo koje reprezentacije. Sve reprezentacije su dinamički povezane i automatski se menjaju pri promeni bilo koje od njih, bez obzira na to na koji način je objekat izvorno kreiran. Osim toga, statične grafičke reprezentacije ili geometrijske konstrukcije mogu se animirati u pokretnu sliku – dinamičnu vizuelnu reprezentaciju, koja otkriva nove odnose između matematičkih objekata koje je znatno teže (ili nemoguće) prikazati pomoću statičkih slika. Interaktivna manipulacija objektima i dinamička povezanost višestrukih reprezentacija, pružaju mogućnost prikazivanja matematičkih objekata, geometrijskih i algebarskih transformacija, kao i dinamičkih matematičkih procesa u vizuelnom okruženju.

GeoGebra predstavlja moćan alat za dinamičku vizuelizaciju i rad sa višestrukim reprezentacijama i omogućava nastavniku da efikasno prilagodi nastavne sadržaje i nastavne metode kako bi kod učenika aktuelizovao vizuelno mišljenje i time olakšao povezivanje vizuelnih saznanja sa formalno-simboličkim jezikom matematike (Verhoef, Coenders, Pieters, van Smaalen & Tall, 2015). *GeoGebra* je kognitivni alat koji može preuzeti izvršavanje proceduralnih aktivnosti u kraćem vremenu, i time ostavlja učenicima više vremena za izgradnju boljeg razumevanja matematičkih koncepata i ideja, kao i za diskusije, te kreativno i kritičko promišljanje. Budući da je softver prvobitno razvijen za upotrebu od strane studenata, on ima potencijal za podsticanje aktivnog učenja i realizaciju nastave koja je usmerena na učenika, omogućavajući matematičke eksperimente, interaktivna istraživanja i učenje putem otkrića. Vizuelno-dinamička i interaktivna funkcionalnost *GeoGebra* softvera otvara brojne kreativne mogućnosti za realizaciju savremenih metodičkih pristupa u nastavi (Takači, Stankov & Milanović).

U nastavi matematike *GeoGebra* može da se koristi na mnogo različitih načina. Hohenwarter i Fuchs (2004) izdvajaju četiri glavna pravca u upotrebi ovog softvera: za demonstraciju i vizuelizaciju, kao konstruktivni alat, za učenje putem otkrića, za kreiranje nastavnih materijala.

Karadag i McDougall (2009) predlažu upotrebu *GeoGebra* softvera kao kognitivnog alata za objašnjavanje, istraživanje i modeliranje matematičkih i drugih koncepata i njihovih međusobnih odnosa. Primenu softvera *GeoGebra* u nastavi, autori su razradili u okviru heurističkog modela rešavanja problema koje je ustanovio George Polya (1966). Principi heurističke nastave ugrađeni u dinamičko i interaktivno *GeoGebra* okruženje prikazani su u narednoj tabeli:

Tabela 2.2. *GeoGebra – kognitivni alat za objašnjavanje, istraživanje i modeliranje (preuzeto iz Karadag & McDougall, 2009)*

	Objašnjavanje	Istraživanje	Modeliranje
Razumevanje problema	• Opisati zadate podatke. • Šta je nepoznato?	• Osigurati radni materijal za učenike. • Navesti učenike da istraže problem. • Voditi učenike da utvrde šta je nepoznato.	• Ponuditi problem koji treba istražiti. • Utvrditi koji su ulazni podaci. • Opisati nepoznato.
Stvaranje plana	• Postoji li veza između zadatih podataka? • Izložiti strategiju.	• Pitati učenike za vezu između matematičkih objekata. • Voditi učenike u kreiranju strategije.	• Kreirati matematičke objekte. • Analizirati veze između objekata.
Realizacija plana	• Manipulišući matematičkim objektima doći do novih podataka koji vode do rešenja. • Postaviti pitanja koja usmeravaju učenike.	• Voditi učenike kroz interakciju matematičkih objekata da dobiju nove podatke. • Voditi učenike da uoče zakonitosti na osnovu dobijenih podataka.	• Manipulisati objektima kako bi proverili valjanost modela. • Postaviti pretpostavku. • Testirati pretpostavku.
Osvrt	• Ponoviti postupak. • Postaviti pitanja šta-ako.	• Podsticati učenike da menjaju početni problem. • Podsticati učenike da postavljaju šta-ako pitanja.	• Promeniti ulazne podatke. • Osmisliti problem koji opisuje trenutno stanje. • Postaviti novi problem.

2.3.3. Osnovni principi oblikovanja multimedijalnih nastavnih materijala

Multimedija je termin koji se odnosi na prezentovanje nekog sadržaja uz korišćenje i reči i slike. Pod pojmom *reči* podrazumeva se sadržaj prezentovan u verbalnoj formi, poput izgovorenog ili odštampanog teksta. Pojam *slika* odnosi se na predstavljanje sadržaja u vizuelnoj formi, bilo da je reč o statičkoj (npr. fotografije, ilustracije, mape, grafici...) ili dinamičkoj slici (npr. video, animacija, simulacija). Korišćenjem savremenih računarskih tehnologija i obrazovnih softvera u funkciji nastave, kreiraju se multimedijalna okruženja za učenje. Multimedijalnim se smatraju okruženja u kojima su nastavne instrukcije predstavljene pomoću različitih formi reprezentacija, uključujući i verbalne (reči) i vizuelne (slike) reprezentacije (Mayer, 1999). Bitno obeležje multimedijalnih okruženja za učenje je interaktivnost, koja omogućava korisniku da kontroliše način na koji se informacije prikazuju tj. da aktivno interaguje sa sadržajem prikazanim u računarskom okruženju.

Empirijski zasnovane teorije proistekle iz rezultata dugogodišnjih eksperimentalnih istraživanja, ukazuju da prezentovanje multimedijalnih sadržaja treba da bude prilagođeno procesu kognitivne obrade informacija (Mayer, 2005). Teorijski okvir koji daje celovitu sliku o tome kako funkcioniše učenje uz multimediju je *kognitivna teorija multimedijalnog učenja* koju je Mayer (2001) uspostavio na sledećim pretpostavkama: 1) *Pretpostavka dvojnog kanala* – ljudi poseduju odvojene kanale za obradu vizuelnih i verbalnih informacija (Paivio, 1986); 2) *Ograničenost kapaciteta* (*Teorija kognitivnog opterećenja*) – kapacitet istovremene obrade informacija u svakom pojedinom kanalu je limitiran i iznosi 5 do 9 informacija (Chandler & Sweller, 1991); 3) *Aktivan proces obrade podataka* – proces učenja se realizuje usmeravanjem pažnje i odabirom relevantnih vizuelnih i verbalnih informacija iz prezentovanog sadržaja, organizovanjem selektovanih informacija u vizuelne i verbalne mentalne modele i povezivanjem istih sa postojećim znanjem (Mayer, 2001).

Mayer u svojoj teoriji ističe dva važna aspekta multimedijalnog učenja: 1) multimedijalna okruženja pružaju bolje razumevanje i shvatanje jer se sadržaji prikazuju i vizuelnim i verbalnim reprezentacijama koje se međusobno dopunjuju i obogaćuju u delovanju; 2) efekti multimedijalnih sadržaja na proces učenja zavise od njihove usaglašenosti sa kognitivnim procesima i stepena iskorišćenja kognitivnih potencijala za obradu vizuelnih i verbalnih informacija. Navedene činjenice ukazuju na usku povezanost kognitivne teorije multimedijalnog učenja i kognitivno-vizuelnog pristupa koji afirmiše vizuelne reprezentacije, potencijal vizuelnog mišljenja i multireprezentativno okruženju za učenje.

Kompleksnost procesa multimedijalnog učenja, podrazumeva specifičan način kreiranja informacija, kako bi one olakšale učenje. Multimedijalni (kognitivno-vizuelni) nastavni sadržaji, dizajnirani u skladu sa principima multimedijalnog učenja, mogu kvalitativno poboljšati učenje i motivaciju učenika, dok neodgovarajući dizajn deluje kao ometajući faktor procesa učenja (Mayer, 2001, 2003, 2005; Mayer & Moreno, 2003). Prilikom osmišljavanja, kreiranja i primene multimedijalnih sadržaja u nastavi, posebno je značajno da nastavnik uvažava osnovne principe multimedijalnog učenja/dizajna.

Osnovni principi multimedijalnog učenja i pravila oblikovanja multimedijalnih nastavnih sadržaja (Mayer, 2001) su:

- *Opšti multimedijalni princip* – Učenici bolje uče putem reči i slika nego samo pomoću reči. Prezentovanjem nastavnih sadržaja pomoću reči i slika podstiče se razvoj sposobnosti istovremene obrade informacija, što daje značajno bolje rezultate u odnosu na isključivo verbalno prezentovanje materijala. Uz reči i sliku učenik formira verbalne i vizuelne mentalne modele i uspostavlja interakciju između njih, dok se prezentovanjem materijala isključivo pomoću reči otežano oblikuje vizuelni mentalni model.
- *Princip prostornog ograničenja* (*princip podeljene pažnje*) – Bolji efekat se postiže kada su reči i slike prostorno bliski, dok odvojeno prikazivanje ovih sadržaja dovodi do kognitivnog opterećenja. Kroz vizuelno-prostornu integraciju nastavnih sadržaja postižemo i mentalnu integraciju, tako da se nameće i praktična preporuka da, unutar

slika ili neposredno pored njih, budu smeštene relevantne informacije u vidu objašnjenja (Mayer & Moreno, 2002).

- *Princip vremenskog ograničenja* – Učenici bolje uče ako se reči i slike prikazuju simultano i sinhronizovano, nego kada se sukcesivno prikazuju (Mayer, 2005).
- *Princip kohrentnosti* – Efikasnije učenje se postiže kada su zanimljivi ali ne tako bitni sadržaji isključeni nego kada su uključeni u prezentovanje sadržaja. Irelevantni sadržaji (npr. puštanje muzike u pozadini, zvučni efekti, zanimljive slike) remete proces konstrukcije znanja (otežavaju obradu relevantnih informacija), a intenziviraju afektivne procese. Upotreba zanimljivih sadržaja se preporučuje u inicijalnoj fazi procesa učenja, radi podizanja motivacije za rad.
- *Princip modaliteta* – Bolje učenje se postiže prezentovanjem slika (naročito animacija) i naracijom (govornih tekstova), u odnosu na kombinaciju slika i pisanog teksta.
- *Princip suvišnosti (redundantnosti)* – Učenje je efikasnije kada se ista informacija ne prezentuje na više načina. Ovaj princip u prakičnoj primeni možemo ilustrovati situacijama gde npr. uz jasan dijagram nije potrebno dodatno tekstualno objašnjenje ili prilikom simultanog prikaza teksta i slike, treba izbegavati čitanje teksta.
- *Princip individualnih razlika* – Prilikom oblikovanja mutimedijalne instrukcije treba voditi računa o individualnim razlikama u predznanju i vizuelnim sposobnostima učenika. Za učenike sa slabijim predznanjem je veoma važno da mutimedijalna instrukcija bude dobro oblikovana kako bi putem reči i slika postigli razumevanje sadržaja, dok će učenicima sa boljim predznanjem biti dovoljan samo grafički prikaz (ili samo tekst). Učenici s boljim vizuelnim sposobnostima efikasnije koriste kvalitetno oblikovane multimedijalne sadržaje u odnosu na učenike kod kojih su te sposobnosti slabije razvijene. Dakle, efekat dobro oblikovane multimedijalne instrukcije biće veći kod učenika sa slabijim predznanjem i kod učenika sa boljim vizulenim sposobnostima.
- *Princip segmentacije* – Ovaj princip se odnosi na učenje kompleksnih multimedijalnih sadržaja. Bolji rezultati u procesu učenja se postižu kada je multimedijalni materijal podeljen na manje segmente u odnosu na kontinuirano prezentovanje sadržaja u celosti (Mayer & Chandler, 2001).

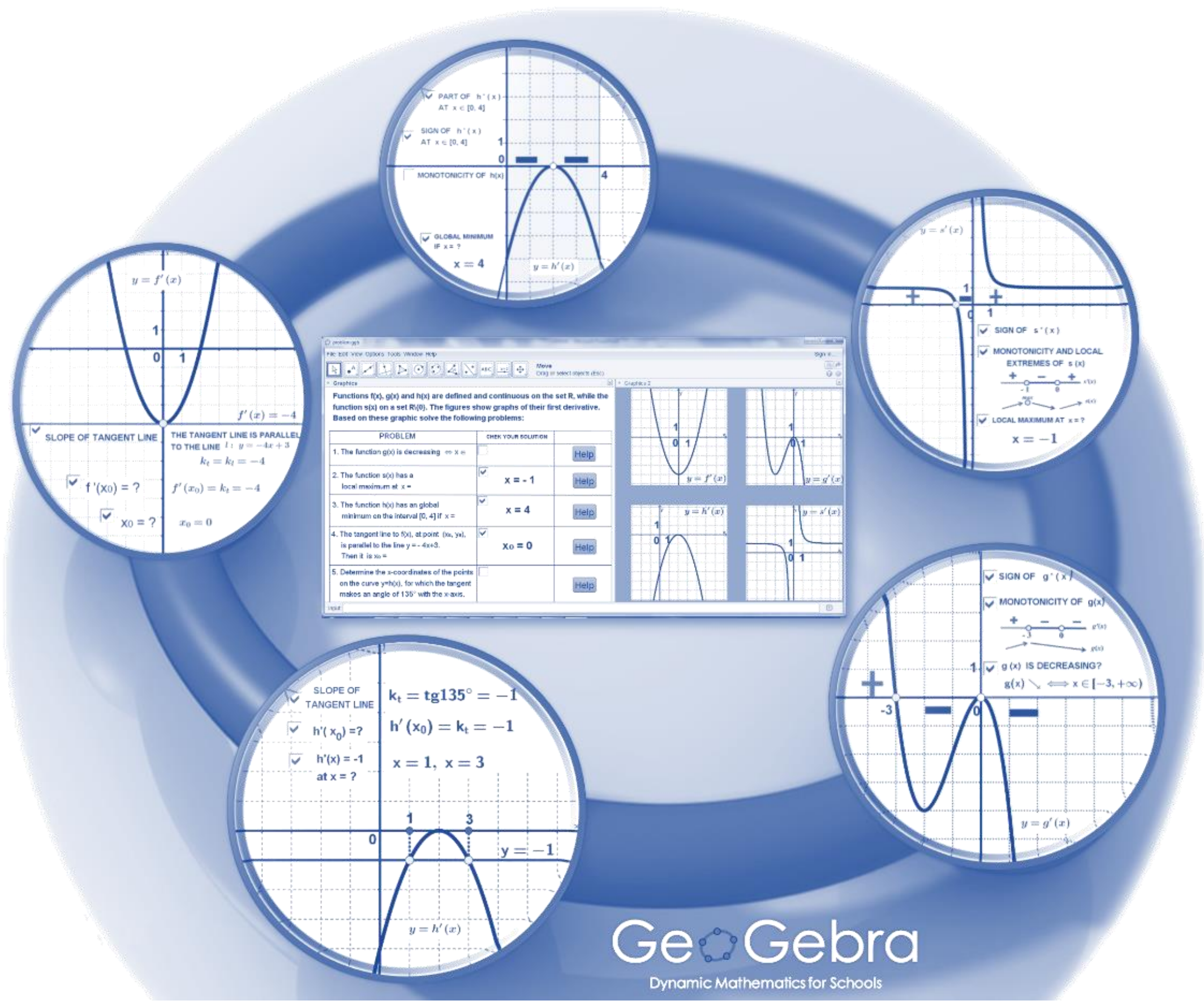
Jedno od važnih pitanja kognitivne vizuelizacije nastavnih sadržaja je upotreba boja u multimedijalnim nastavnim materijalima. Boja predstavlja sredstvo kojim se određene informacije prenose korisniku. Kodiranje odgovarajućih elemenata teksta i slike istom bojom proizvodi efekat brže vizuelne pretrage i smanjenja kognitivnog opterećenja u procesu integrisanja informacija različitih modaliteta (Folker, Ritter & Sichelschmidt, 2005; Kalyuga, Chandler & Sweller, 1999). Doslednim korišćenjem određene šeme boja, mogu se vizuelno integrisati elementi multimedijalnih sadržaja tako da se naglasi struktura prezentovanog znanja. Na taj način, boja postaje semantički element multimedijalnog sadržaja koji usmerava i olakšava proces izgradnje povezane strukture znanja.

U savremenom obrazovanju, potencijal multiumedijalnih tehnologija je vrlo značajan, ali nije garancija uspešnosti nastave – efekat u vidu didaktičkog promašaja moguće je postići čak i upotrebom najsavremenijih multimedija. Osim toga, nastavnici moraju biti spremni za sve složenosti multimedijalnog okruženja koje stvara više izazova i za nastavnike i za učenike, od tradicionalnog nastavnog okruženja. Zbog toga je potrebno obezbediti i odgovarajući profesionalni razvoj u cilju podrške nastavnicima, ne samo za korišćenje novih softverskih alata, već i za njihovo uvođenje u osnovne teorijske koncepte i principe dizajniranja multimedijalnih nastavnih sadržaja.

Imajući u vidu potrebe, mogućnosti i vaspitno-obrazovne ciljeve, nastavnik treba sistematski da planira primenu multimedijalnih sadržaja. U njihovoj primeni ne treba biti isključiv, već ih treba kombinovati sa različitim sredstvima, izvorima, pristupima… Upotreba multimedijalnih sadržaja u nastavi, uz adekvatno kreiranje, odabir i implementaciju, određuje njihove efekte na nastavni proces, uz velike mogućnosti kvalitativnog poboljšanja procesa učenja i motivacije učenika.

3

KOGNITIVNO-VIZUELNI PRISTUP SADRŽAJIMA MATEMATIČKE ANALIZE



U ovoj glavi disertacije razmatrana je primena kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju matematičke analize, sa posebnim akcentom na sadržaje koji se odnose na funkcije i izvod funkcije. Predloženi kognitivno-vizuelni metodički pristup je baziran na primeni grafičkog i dinamičkog prikaza funkcije u izučavanju sadržaja matematičke analize u računarskom okruženju. U fokusu ovog pristupa je afirmacija višestrukih reprezentacija, matematičke vizuelizacije i konceptualnih znanja u procesu učenja.

Sadržaj treće glave je prikazan u okviru pet poglavlja. U prvom poglavlju su prikazani određeni teorijski aspekti nastave/učenja matematičke analize u sekundarnom i tercijarnom obrazovanju. Razmatrani su i poređeni tradicionalni i savremeni metodički pristupi u pogledu zastupljenosti proceduralnih i konceptualnih znanja, formalno simboličkih i vizuelnih aspekata nastavnih sadržaja, kao i višestrukih reprezentacija. Takođe je dat osvrt na sadržaje matematičke analize koji se izučavaju u našem obrazovnom sistemu, posebno u gimnazijskom obrazovanju.

Drugo poglavlje je posvećeno kognitivno-vizuelnom metodičkom pristupu zasnovanom na grafičkom prikazu funkcije. Izloženi su ključni didaktičko-metodički aspekti ovog pristupa, a zatim je dat uporedni pregled tradicionalnog i kognitivno-vizuelnog pristupa obradi izvoda funkcije. Okosnicu kognitivno-vizuelnog pristupa i značajnu novinu u izučavanju izvoda funkcije predstavljaju zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Prikazane su metodičke mogućnosti ovih zadataka u kreiranju multireprezentativnog okruženja za učenje. Izložena je mogućnost klasifikacije zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima po različitim kriterijumima, na osnovu koje je data njihova tipologija.

U trećem poglavlju je detaljno opisan kognitivno-vizuelni pristup obradi nastavne teme „Izvod funkcije" u četvrtom razredu gimnazije. Najpre je dat pregled kognitivno-vizuelnih nastavnih materijala, navedene su njihove specifičnosti i mogućnosti u realizaciji nastave primenom različitih metoda i oblika rada. Zatim je razrađena primena kognitivno-vizuelnog pristupa u obradi sledećih sadržaja: uvođenje pojma prvog izvoda funkcije, geometrijska interpretacija prvog izvoda, monotonost funkcije, ekstremne vrednosti, crtanje grafika funkcije i sistematizacija gradiva. Za navedene sadržaje prikazani su osnovni tipovi zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, metodički aspekti njihove primene u nastavnoj praksi, kao i prateći kognitivno-vizuelni nastavni materijali.

Četvrto poglavlje prezentuje metodološki okvir pedagoškog istraživanja sprovedenog sa učenicima četvrtog razreda gimnazije i studentima prve godine osnovnih studija fizike. Navedeni su predmet, cilj, zadaci i hipoteze istraživanja. Opisan je uzorak učenika i uzorak studenata, kao i način na koji su formirane eksperimentalne i kontrolne grupe. Izložene su metode, tehnike i instrumenti istraživanja. Za testove znanja koji su bili korišćeni u istraživanju data su odgovarajuća metodička objašnjenja. Organizacija i tok pedagoškog eksperimenta su prikazani na kraju ovog poglavlja.

Rezultati sprovedenih istraživanja prikazani su u petom poglavlju. Predstavljeni su statistička obrada podataka, analiza rezultata i testiranje postavljenih hipoteza, kao i interpretacija glavnih nalaza istraživanja.

3.1. NASTAVA/UČENJE MATEMATIČKE ANALIZE

Matematička analiza je jedna od oblasti matematike koja ima izuzetno širok spektar primene u matematici i mnogim drugim naukama, kao i u različitim oblastima profesionalnog delovanja savremenog čoveka. Zbog toga je potrebno posvetiti posebnu pažnju nastavi/učenju ove matematičke oblasti. Sadržaji matematičke analize se, širom sveta, izučavaju na sekundarnom i tercijarnom nivou matematičkog obrazovanja. U zavisnosti od obrazovnog sistema, određeni sadržaji matematičke analize su sastavni deo nastavnih programa matematike, kalkulusa, matematičke analize, diferencijalnog i integralnog računa itd.

Temeljno ovladavanje sadržajima matematičke analize zahteva od učenika/studenata: odlično poznavanje elementarne matematike, konceptualno razumevanje materije, proceduralnu fluentnost u određivanju izvoda i integrala realnih funkcija, prelazak sa elementarnog na napredno matematičko mišljenje. Navedene činjenice ukazuju da je ovladavanje sadržajima matematičke analize kompleksan i objektivno težak proces, kako za učenike srednjoškolskog uzrasta tako i za studente.

Određeni problemi i poteškoće sa kojima se suočavaju učenici/studenti, odnose se na usvajanje i konceptualno razumevanje velikog broja novih, složenih, apstraktnih i dinamičkih koncepata, koji se bitno razlikuju od koncepata elementarne matematike (Lithner, 2011; Tall, 1991, 1996). Kako su osnovni pojmovi matematičke analize (funkcija, granična vrednost, izvod i određeni integral) konceptualno utemeljeni ne samo u algebarskim već i u grafičkim reprezentacijama, to ovladavanje sadržajima matematičke analize zahteva potpuno razumevanje odnosa između funkcija i njihovih grafika (Dunham & Osborne, 1991). Konceptualna fluentnost u oblasti matematičke analize uključuje: sposobnost interpretacije grafičkih prikaza i sposobnost grafičkog prikazivanja (Vinner, 1989; Zimmerman, 1991); poznavanje različitih reprezentacija pojmova (algebarske, grafičke, numeričke, verbalne) i fleksibilan prelazak iz jedne reprezentacije u drugu (Habre & Abboud, 2006); sposobnost rešavanja novih/nerutinskih problema (Selden, Selden & Mason, 1994); kinematičko tumačenje funkcija i njihovih grafika koji opisuju kretanje (Botzer & Yerushalmy, 2008); prevođenje realnih problema na jezik matematičke analize (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002). Iz svega napred navedenog, može se zaključiti da sticanje konceptualnih znanja i veština nije nimalo jednostavan zadatak za učenike/studente.

Matematička analiza je oblast matematike koja zahteva od učenika/studenata da formiraju i razvijaju mišljenje pojmovima više matematike, tzv. *napredno matematičko mišljenje* (eng. *Advanced mathematical thinking*). Način mišljenja koji je zasnovan na formalnim definicijama, aksiomama i teoremama, pri čemu se primenjuje logičko-deduktivno zaključivanje, zahteva viši nivo apstrakcije, formalnog simbolizma i matematičke strogosti u odnosu na način mišljenja u elementarnoj matematici (Tall, 1995). Prelazak sa elementarnog na napredno matematičko mišljenje je kognitivno zahtevan proces koji može da uzrokuje poteškoće, nerazumevanje i slaba postignuća učenika/studenata (Orton, 1983a, 1983b; Tall, 1996, 2002).

Orton je 1983. godine sproveo prva velika istraživanja o učeničkom/studentskom razumevanju izvoda (Orton, 1983a) i integrala (Orton, 1983b). Ove studije su jedne od najvažnijih za razumevanje studentskih teškoća i najčešćih grešaka u izučavanju kalkulusa/matematičke analize. Ujedno one pružaju uvid u ishode tradicionalne nastave koja je usmerena na proceduralni i algebarski aspekt kalkulusa. Po pitanju razumevanja diferencijalnog računa, Orton izveštava da su skoro svi učenici/studenti koje je intervjuisao bili dosta uspešni u rešavanju rutinskih zadataka u kojima su primenjivali pravila diferenciranja. Međutim, prilikom rešavanja nestandardnih zadataka koji su sadržali grafičke i numeričke reprezentacije funkcije/izvodne funkcije, učestalost grešaka se povećala, što ukazuje na jaku zavisnost od algoritamskih postupaka i nedovoljno konceptualno razumevanje. Orton upozorava:

> *„Poznato je da su neki studenti upoznati sa pravilima diferenciranja i da ih primenjuju bez mnogo pokušaja da otkriju razloge i opravdanost postupka. Mnogi gledaju ovo kao lošu obrazovnu praksu, i u stvari, to ne bi trebalo da bude tako" (Orton, 1983a: 242).*

Ortonove studije su na neki način bile poziv za dalja istraživanja i sprovođenje reformskih promena u nastavi kalkulusa/matematičke analize, kome su se odazvali mnogi istraživači matematičkog obrazovanja. U narednim decenijama, autori koji su se bavili navedenom problematikom, ukazuju da nastava koja razvija konceptualno razumevanje i vizuelno mišljenje učenika/studenata daje pozitivne efekte na ishode učenja. Osnovni elementi koji su zajednički svim reformisanim (savremenim) nastavnim planovima i programima i po kojima se razlikuju od tradicionalnih su: afirmacija konceptualnog pristupa sadržajima, naglasak na različitim reprezentacijama matematičkih objekata, vizuelizacija nastavnih sadržaja i široka upotreba obrazovne tehnologije.

3.1.1. Tradicionalna nastava – proceduralni i algebarski pristup sadržajima matematičke analize

Nastavana praksa zasnovana na tradicionalnim metodičkim pristupima, usredsređena je na prezentovanje sadržaja koji se baziraju na proceduralnim i algebarskim znanjima, dok se konceptualni i vizuelni aspekt matematičke analize razmatraju u znatno manjoj meri.

Autori koji se bave istraživanjem nastave/učenja matematičke analize u sekundarnom i tercijarnom obrazovanju izveštavaju da je proceduralno učenje (u literaturi se za slične fenomene koriste termini: instrumentalno učenje, imitativno učenje, algoritamsko rezonovanje...) dominantno u mnogim segmentima nastavnog procesa (Hiebert, 2003; Lithner, 2011). Svakako da je algoritamsko rezonovanje bitan deo matematičkih kompetencija, ali ako u potpunosti dominira onda je razvoj konceptualnih znanja u podređenom položaju.

Fokusiranje nastave/učenja na algoritamske procedure, koje se mogu sprovesti u cilju rešavanja zadataka koji ne zahtevaju konceptualno razumevanje ili konstruktivno razmišljanje, jedan je od načina da se umanji kompleksnost izučavanja matematičke analize (Koirala, 1997; Lithner, 2008; Tall, 1996). Time se smanjuju zahtevi koji se postavljaju učenicima/studentima i teškoće u učenju se mogu prividno i kratkoročno prevazići. Međutim, u dugoročnoj perspektivi teškoće u učenju dobijaju znatno veću dimenziju (Lithner, 2011).

Tall (1996), u studiji o funkcijama i kalkulusu, razmatra moguće uzroke i posledice dominantne zastupljenosti proceduralnog učenja. U odeljku pod naslovom „Proceduralne posledice konceptualnih teškoća" Tall navodi da su konceptualne teškoće sa kojima se suočavaju studenti, jedan od razloga zbog kojeg se učenje usmerava na primenu rutinskih procedura. Međutim,

> *„Problem je u tome da takve rutine postanu samo to – rutina, tako da studentima postaje teško da odgovore na pitanja koja su konceptualno izazovna. Nastavnik to kompenzuje postavljanjem*

pitanja na ispitu na koja studenti mogu odgovoriti i začarani krug proceduralne nastave i učenja je pokrenut." (Tall, 1996: 306).

Koirala razmatra učenje kalkulusa u Skempovom (1976) okviru instrumentalnog i relacionog razumevanja. Tradicionalan put koji vodi do instrumentalnog razumevanja, podrazumeva nastavnike koji daju pravila diferenciranja i integracije i studente koji ih primenjuju u rešavanju rutinskih problema, bez shvatanja šta zaista rade. Instrumentalni način podučavanja ne stvara kreativne mislioce i solidnu osnovu na kojoj će se graditi novi koncepti i veštine. Nastava koja razvija relaciona razumevanja, ne samo da pruža studentima znanja o tome šta da rade i kako se to radi, već isto tako i da objasne šta rade i zašto to rade, što doprinosi razvijanju konceptualnog razumevanja algoritamskih postupaka (Koirala, 1997).

Učeničko/studentsko razumevanje pojmova matematičke analize je povezano sa njihovim sposobnostima da interpretiraju različite reprezentacije pojmova i sposobnostima da pojmove predstave na različite načine (Presmeg 2006). Teškoće u shvatanju pojmova matematičke analize, mogu da proističu iz neadekvatnog postupka prilikom njihovog formiranja – naglasak se stavlja na jednu reprezentaciju, dok su ostale reprezentacije zapostavljene. U tradicionalnoj nastavi prilikom uvođenja novih pojmova, dominantne su algebarske reprezentacije. Učenici/studenti grade jaku vezu između pojma i načina na koji su pojam prvi put usvojili, odnosno pojam poistovećuju sa njegovom algebarskom reprezentacijom. Kada se susretnu sa drugim reprezentacijama istog pojma (numerička, grafička, verbalna), oni novu reprezentaciju vide kao potpuno odvojeni matematički objekat od već formirane algebarske reprezentacije, odnosno od samog pojma (Duval, 2006). U prilog tome govori i činjenica da grafičke reprezentacije, bez odgovarajućih algebarskih podataka, za većinu učenika/studenata nemaju značenje (Dreyfus & Eisenberg, 1983). Ako se postupak formiranja pojmova bazira na algebarskim reprezentacijama, tada učenici/studenti ne stiču celovita već fragmentirana znanja, te nisu u stanju da interpretiraju različite reprezentacije, niti da vrše transformaciju jedne reprezentacije u drugu (Duval, 1999). Time se gubi na fleksibilnosti kao značajnom aspektu matematičkog mišljenja.

Naglasak na korišćenju algebarskih reprezentacija u tradicionalnim nastavnim pristupima, omogućava učenicima/studentima da razviju mrežu povezanih algebarskih znanja. Međutim, grafičke i numeričke mentalne reprezentacije učenika/studenata se u znatno manjoj meri razvijaju i povezuju (Porzio, 1999). Čak i učenici/studenti koji su u stanju da kompetentno reše rutinske probleme, nisu u stanju da to urade ako se u problemima koriste različiti načini predstavljanja informacija, ili ako je formulacija pitanja promenjena tako da algebarske metode nisu adekvatne za njihovo rešavanje (Selden *et al.*, 1994). Favorizovanje algebarskog pristupa u izučavanju sadržaja matematičke analize dovodi do toga da se učenici/studenti prevashodno oslanjaju na algebarske reprezentacije i metode rešavanja problema, pri čemu se smanjuje osećaj i potreba za korišćenjem drugih reprezentacija i metoda rešavanja (Knuth, 2000). Na primer, u situacijama kada su učenicima/studentima dostupne i algebarske i grafičke reprezentacije, oni se najčešće opredeljuju za algebarske, čak i u zadacima koji se jednostavnije rešavaju na osnovu datog grafičkog prikaza (Knuth, 2000; Aspinwall & Shaw, 2002; Habre & Abboud, 2006).

U nastavi koja je orijentisana na proceduralni, algebarski i formalni aspekt matematičke analize, problemi sa grafičkim sadržajima koriste se povremeno i jednostrano (najčešće su to zadaci u kojima se zahteva crtanje grafika elementarnih matematičkih funkcija na osnovu njihovih algebarskih reprezentacija). Tradicionalni nastavni programi tretiraju grafičko prikazivanje funkcije na samom kraju izučavanja diferencijalnog računa (Aspinwall *et al.*, 1997). Crtanje grafika funkcije koja je zadata formulom je složen postupak koji zahteva od učenika/studenata: primenu širokog spektra znanja iz oblasti diferencijalnog računa; transformaciju algebarskih reprezentacija u grafičke, i obrnuto; koordinaciju analitičkog i grafičkog rezonovanja. Rešavanje takvih zadataka najčešće je propraćeno učeničkim/studentskim teškoćama, pri čemu se problemi češće javljaju u domenu grafičkog prikazivanja i tumačenja informacija, nego kod analitičkog ispitivanja osobina funkcija (Orton, 1983a; Ubuz, 2007). Prevođenje algebarskih zapisa koji se odnose na svojstva funkcije i izvoda u odgovarajući grafički prikaz, zahteva koordinaciju informacija koje su različite po svojoj prirodi. Prelazak iz algebarskih reprezentacija u grafičke nije ni jednostavan, ni intuitivan za učenike/studente, i svakako je teži ako su u procesu učenja vizuelno-intuitivni pristupi zanemareni, a algebarski dominantni (Baker *et al.*, 2000).

U tradicionalnoj visokoškolskoj nastavi, teorijske osnove matematičke analize najčešće se izučavaju po modelu definicija-teorema-dokaz (Weber, 2004). Takav pristup nastavi, ne pruža mogućnost studentima da koriste svoju intuiciju kada rasuđuju o konceptima (Dreyfus, 1991; Fischbein, 1982) i sakriva mnoge procese koji se koriste u matematičkom rezonovanju i argumentaciji (Dreyfus, 1991). Fokusiranje nastave na izučavanje formalno-aksiomatskog i simboličkog aspekta matematičke analize daje studentima pogrešnu sliku o prirodi matematike, često dovodi do „zastrašivanja” studenata (Tall, 1995) i što je najvažnije, studenti nauče mnogo manje nego što mogu naučiti (Leron & Dubinsky, 1995).

3.1.2. Savremeni trendovi – konceptualizacija i vizuelizacija sadržaja matematičke analize

Tokom proteklih nekoliko decenija, istraživači u oblasti nastave matematike ispitivali su efekte konceptualizacije i vizuelizacije sadržaja matematičke analize i njihov značaj za nastavu i proces učenja. Savremeni nastavni trendovi preporučuju smanjenje nastavnog vremena posvećenog proceduralnom i algebarskom aspektu matematičke analize, i stvaranje uslova za razvoj konceptualnog razumevanja materije i primenu vizuelnih pristupa u učenju, uz podršku obrazovne tehnologije.

Za razliku od tradicionalne nastave, savremeni nastavni pristupi posvećuju više pažnje konceptualnom učenju. U cilju dubljeg konceptualnog razumevanja u matematičkoj analizi, osim korišćenja algebarskih reprezentacija, treba uzeti u obzir i ostale reprezentacije (grafičke, numeričke, verbalne) matematičkih objekata, kao i interakcije između ovih različitih reprezentacija (Kaput, 1994). Rezultati istraživanja pokazuju da korišćenje različitih reprezentacija u nastavi daje pozitivne efekte na razvoj sposobnosti učenika/studenata da izgrade veze između njih (Dick & Edvards, 2008; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2009; Rider, 2004), što doprinosi sticanju celovitih i primenljivih znanja. Naglasak na različitim reprezentacijama matematematičkih koncepata je jedna od osnovnih razlika između tradicionalne i savremene nastave kalkulusa/matematičke analize.

Konceptualno razumevanje različitih reprezentacija pojmova matematičke analize treba da prethodi aktivnostima koje su usmerene na manipulaciju simbolima, odnosno, proceduralnom učenju. Kada se proceduralna znanja grade na jakim konceptualnim temeljima, može se očekivati uspešno učenje. U odnosu na tradicionalnu nastavu, ovakvim pristupom moguće je poboljšati učenička/studentska konceptualna znanja, bez negativnih efekata na proceduralnu fluentnost, što potvrđuju rezultati sprovedenih kvantitativnih studija (Chappell & Killpatrick, 2003; Palmiter, 1991; Roddick, 2001; Schwingendorf, McCabe & Kuhn, 2000).

Vizuelizacija je važan aspekt matematičkog mišljenja, razumevanja i rezonovanja. Vizuelno mišljenje je alternativa i snažan resurs u procesu učenja matematike, koji se razlikuje od jezičkog, logičko-propozicionalnog mišljenja i manipulacije simbolima. Zimmerman razmatra značaj i ulogu vizuelizacije i vizuelnog mišljenja za konceptualno razumevanje i iznosi ubedljive argumente da matematička vizuelizacija ima centralnu ulogu u reformskim promenama nastavnih planova i programa kalkulusa:

> *„Konceptualno, uloga vizuelnog mišljenja je od tako fundamentalnog značaja za razumevanje kalkulusa, da je teško zamisliti uspešan kurs kalkulusa koji ne naglašava njegove vizuelne elemente. Ovo se posebno odnosi ako kurs ima za cilj da naglasi konceptualno razumevanje, koje, kako je opšte poznato, nedostaje mnogim kursevima kalkulusa koji se i sada uče. Manipulacija simbolima je prenaglašena i ... u tom procesu duh kalkulusa je izgubljen." (Zimmerman, 1991: 136).*

Algebarske i grafičke reprezentacije istog pojma, stanja ili procesa, pružaju razumevanje različitih apekata istog problema, kao i razumevanje problema na različite načine – analitički i vizuelno. Kada se u procesu učenja matematičke analize koriste i algebarske i grafičke reprezentacije, učenici/studenti mogu izgraditi temeljnija konceptualna znanja, a prilikom rešavanja problema mogu se oslanjati na svoje, kako analitičke, tako i vizuelne sposobnosti (Aspinwall & Shaw, 2002; Aspinwall & Miller, 2001).

Obrazovna tehnologija može obezbediti okruženje koje promoviše korišćenje različitih reprezentacija, pa samim tim pruža širok spektar mogućnosti za efikasnu realizaciju nastavnih pristupa koji su više konceptualno orijentisani i bazirani na vizuelnim metodičkim pristupima. Dostupnost tehnologije za generisanje vizuelnih slika na relativno jednostavan način i metodički adekvatno oblikovani nastavni materijali pospešuju učeničko/studentsko vizuelno rezonovanje i razumevanje. Vizuelni pristupi u izučavanju matematičke analize dobijaju sve veći značaj zbog intenzivnog razvoja tehnologije i dinamičkih matematičkih softvera i dostupnosti tih resursa za interakciju između nastavnika i učenika/studenata (Habre & Abboud, 2006). Nesumnjivo je da obrazovne tehnologije predstavljaju značajan resurs koji može olakšati i unaprediti proces učenja, ali one same po sebi nisu garant dobre nastave i uspešnog učenja. Efikasnost primene obrazovne tehnologije u nastavi zavisi od: koncepcije nastavnih planova i programa, udžbenika, kompetencija nastavnika i niza drugih faktora (Tall, Smith & Piez, 2008; Hoyles & Lagrange, 2010).

Udžbenici i drugi nastavni materijali mogu imati značajan uticaj na implementiranje nastavnog plana i programa, kao i na pristupe u podučavanju i učenju (Johansson, 2005). Udžbenik je veoma značajan izvor informacija, kako za nastavnike, tako i za učenike/studente. Nastavnici navode udžbenike kao svoju glavnu referencu u izboru pedagoške strategije (Schmidt *et al.*, 2001). Pored uticaja na nastavu, sadržaji prezentovani u udžbenicima mogu imati direktan uticaj na način učenja (Rezat, 2009) i postignuća učenika/studenata (Zhu & Fan, 2006). Autori savremenih udžbenika koji se koriste u nastavi kalkulusa/matematičke analize (Hughes-Hallett, Gleason & McCallum, 2013; Ostebee & Zorn, 1999; Stewart, Redlin & Watson, 2002; Stewart, 2007; Мордкович, 2009), prepoznali su didaktičko-metodički značaj vizuelizacije i konceptualizacije nastavnih sadržaja prezentovanih u udžbenicima. Osim očiglednih razlika u izgledu savremenih i tradicionalnih udžbenika kalkulusa/matematičke analize (značajno više grafičkih prikaza funkcija, tabela, grafikona, verbalnih opisa problema) postoji razlika i u metodičkom oblikovanju nastavnih sadržaja. Bitne karakteristike po kojima se savremeni udžbenici razlikuju od tradicionalnih su: zastupljenost različitih reprezentacija u prezentovanju sadržaja (grafičke, numeričke, algebarske i verbalne); primeri u kojima se povezuju različite reprezentacije istog pojma ili problema; veći broj nestandardnih zadataka, posebno sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima; manji broj formalnih dokaza teorema, a znatno više konceptualnih i vizuelnih objašnjenja o suštinskom značenju teorema; naglašen konstruktivistički i istraživački pristup učenju (npr. formalne definicije i procedure evoluiraju iz istraživanja praktičnih problema); akcenat na primeni matematičke analize u realnim problemima ili u drugim naučnim disciplinama.

U cilju ispitivanja sličnosti i razlika između reformisanih i tradicionalnih nastavnih planova i programa kalkulusa, sprovedene su mnoga komparativna istraživanja. Rezultati značajnog broja studija (Armstrong & Handrik, 1999; Bookman & Friedman, 1994; Chappell, 2003; Dubinsky, Schoenfeld & Kaput, 2000; Judson & Nishimori, 2005; Meel, 1998; Palmiter, 1991; Park & Travers, 1996; Porzio, 1999; Roddick, 2001) pokazuju nesumnjivu prednost reformisanih kurikuluma. Generalno, rezultati dosadašnjih istraživanja ukazuju na pozitivne efekte metodičkih pristupa koji naglašavaju konceptualni i vizuelni aspekt kalkulusa/matematičke analize uz podršku obrazovne tehnologije, bez obzira da li je istraživanje realizovano u okviru reformisanog ili tradicionalnog programa kalkulusa (Ellington, 2006; Habre & Abboud, 2006; Presmeg, 2006). Međutim, postoje i studije koje ukazuju na određene teškoće i probleme sa kojima se susreću učenici/studenti u reformisanoj (savremenoj) nastavi kalkulusa. U skladu sa tim, neki autori su svoja istraživanja usredsredili na analizu, objašnjavanje i praćenje kognitivnih aktivnosti učenika/studenata u radu sa različitim reprezentacijama u vizuelnom okruženju.

Određen broj autora (Adu-Gyamfi, Stiff & Bossé, 2012; Ainsworth, 1999; Bossé, Adu-Gyamfi & Cheetham, 2011; Even, 1998; Ferrini-Mundi & Graham, 1994; Hitt, 1998; Seufert, 2003) upozorava na teškoće učenika/studenata u povezivanju reprezentacija i fleksibilnom kretanju između njih. Na primer, u sintezi istraživanja vezanih za učenje kalkulusa, Ferrini-Mundi i Graham (1994) komentarišu da se koncepti, načini razmišljanja i repertoar heuristike učenika/studenata, radikalno razlikuju u svakoj od reprezentacija. Tumačenje dobijenih rezultata iz različitih reprezentacija je jedna od teškoća sa kojom se susreću učenici/studenti kada rade sa više reprezentacija. U situacijama kada dobiju protivurečne informacije ili rezultate (zbog prethodno načinjene greške), učenici/studenti koji ne umeju da tumače rezultate u okvirima različitih reprezentacija, ne shvataju njihovu kontradiktornost i ne mogu uočiti greške koje su načinili u postupku rešavanja problema. Adu-Gyamfi i saradnici (2012) ukazuju na pojavu da neki učenici/studenti imaju samo površna znanja u povezivanju reprezentacija, bez potpunog razumevanja suštinskih ideja kodiranih u okviru svake reprezentacije. Neki od njih, mogu mehanički obavljati određene prevode između reprezentacija i čak uspešno rešiti jednostavnije zadatke. Međutim, prilikom rešavanja zadataka koji zahtevaju razumevanje dubljih konceptualnih veza, oni se susreću sa teškoćama i neuspehom. Sposobnost učenika/studenata u prevođenju između različitih reprezentacija dovodi do dubljeg razumevanja, ali ta veština zahteva i viši nivo kognitivnih aktivnosti, pa učenici/studenti s malo prethodnog znanja, posebno teško koordiniraju i integrišu različite oblike reprezentacija (Ainsworth, 1999; Seufert, 2003).

U određenim situacijama, vizuelizacija može uticati na pojavu kognitivnih konflikata kod učenika/studenata. Aspinwall, Shaw i Presmeg (1997) su ispitivali pojavu kada se kod učenika/studenata javljaju određene kognitivne slike koje su neprikladne, pogrešne ili koje sprečavaju matematičku generalizaciju. Autori studije su ovaj fenomen nazvali *„nekontrolisane mentalne slike"* i ukazali da za pojedine učenike/studente, neke slike mogu biti „više nejasne, nego što objašnjavaju". O fenomenu nekontrolisanih mentalnih slika i njemu sličnim, izveštavaju i drugi istraživači (Baker *et al.*, 2000; Presmeg, 2006) i upozoravaju da fokusiranje na vizulne pristupe u rešavanju problema i intenzivno vizuelno razmišljanje može povremeno ometati učenike/studente i uticati na njihove sposobnosti da sagledaju analitički aspekt problema. Isto tako, intenzivno analitičko mišljenje može da ometa vizuelne sposobnosti učenika, čak i u zadacima koji imaju relativno jednostavna vizuelna rešenja (Aspinwall & Shaw, 2002). Nalazi pomenutih studija sugerišu da učenici/studenti čije su kognitivne preference izrazito vizuelne ili izrazito analitičke i koji ne sintetišu vizuelno i analitičko mišljenje doživljavaju različite teškoće u vezi sa svojim inferiornim režimima za matematičke reprezentacije i mišljenje.

Sve veći broj autora podržava tvrdnju da je koordinacija vizuelnog (grafičkog) i analitičkog (algebarskog) rezonovanja od suštinskog značaja za učenike/studente u formiranju dubljeg i celovitog razumevanja matematičke analize. Zbog toga je veoma važno da u procesu učenja budu zastupljene i vizuelne i analitičke forme rezonovanja, ali ni jedna od njih ne treba biti privilegovana u odnosu na drugu. Odnosno, potrebna je ravnoteža između simboličkih i vizuelnih reprezentacija koje se koriste u nastavi (Hughes-Hallett, 1991).

3.1.3. Sadržaji matematičke analize u srednjoškolskom i visokom obrazovanju u Srbiji

Sadržaji matematičke analize izučavaju se i u našem srednjoškolskom i visokoškolskom obrazovanju i to sa značajnim fondom časova. U zavisnosti od područja rada i smera srednje škole odnosno naučne oblasti visokoškolske ustanove, broj časova varira. U srednjoškolskom obrazovanju, najveći fond časova kao i obim i kompleksnost sadržaja predviđen je nastavnim planom i programom prirodno-matematičkog smera gimnazije. Sadržaji matematičke analize se u većem ili manjem obimu izučavaju u visokom obrazovanju, na svim prirodno-matematičkim, tehničkim, tehnološkim, ekonomskim i njima srodnim fakultetima i visokim školama. Na prirodno-matematičkim fakultetima, sadržaji su svakako najzastupljeniji na matematičkim i informatičkim studijskim grupama. Studenti drugih studijskih grupa, osnovne koncepte matematičke analize izučavaju na prvoj godini studija u okviru nastavnog predmeta Matematika (ili Matematika 1 i Matematika 2).

Istraživanje izloženo u ovoj glavi disertacije realizovano je sa učenicima prirodno-matematičkog smera gimnazije i studentima fizike. Na prvoj godini studija fizike, deo nastavnog programa Matematike 1 odnosi se na sadržaje matematičke analize i on se strukturno i sadržajno nadovezuje na srednjoškolske programe (posebno na program prirodno-matematičkog smera gimnazije). U odnosu na gimnazijske programe, program Matematike 1 predviđa izvesno proširenje sadržaja, kao i veću zastupljenost formalno-aksiomatskog izlaganja gradiva. Uzimajući navedene činjenice u obzir, u daljem tekstu biće razmotreno stanje u nastavi matematike u gimnazijskom obrazovanju, po pitanju sadržaja matematičke analize.

Ciljevi i ishodi nastave matematike u gimnazijskom obrazovanju su propisani nastavnim planom i programom koji je dat u okviru zvaničnog dokumenta – Правилник о изменама и допунама Правилника о наставном плану и програму за гимназију (u daljem tekstu ПНППГ) iz 2011. godine. Realizacija propisanog programa zavisi pre svega od udžbenika, nastavnika koji neposredno realizuju program i opremljenosti škola. Nastavnici se u svom radu pridržavaju programa i svoju pedagošku strategiju formiraju uglavnom na osnovu udžbenika. Zbog toga se uvid u trenutno stanje nastave može u velikoj meri dobiti analizom nastavnih programa i udžbenika.

Osnovni koncepti matematičke analize: funkcija, granična vrednost, izvod i integral, obrađuju se u okviru različitih nastavnih tema tokom četvorogodišnjeg školovanja učenika prirodno-matematičkog smera gimnazije. U prvom razredu se obrađuje pojam funkcije, definicija i način zadavanja funkcije, kompozicija funkcija i inverzna funkcija, kao i linearna funkcija. U drugom razredu se izučavaju: stepena funkcija, kvadratna, eksponencijalna, logaritamska, trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije. Programski sadržaji koji se odnose na navedene funkcije, obuhvataju ispitivanje osobina funkcija algebarskim metodama i crtanje njihovih grafika. Pojam niza i granična vrednost niza obrađuju se u trećem razredu gimnazije. U četvrtom razredu, stečena učenička znanja o elementarnim funkcijama se utvrđuju, proširuju i sistematizuju u okviru nastavne teme „Funkcije". Pored toga, u ovoj nastavnoj temi uvode se i izučavaju osnovni pojmovi matematičke analize: granična vrednost funkcije, neprekidnost funkcije i asimptote funkcije. Programski sadržaji koji se odnose na diferencijalni račun obrađuju se u nastavnoj temi „Izvod funkcije". U okviru ove teme obrađuje se pojam prvog izvoda funkcije, njegova formalna definicija, geometrijska i fizička interpretacija, kao i osnovne teoreme o izvodu i primena pravila diferenciranja u određivanju izvoda nekih elementarnih funkcija. Posebna pažnja je posvećena primeni izvoda u ispitivanju osobina funkcija (monotonost, lokalni i globalni ekstremi, konveksnost/konkavnost i prevojne tačke). Na kraju ove nastavne teme, učenička znanja o funkcijama i izvodu se ponavljaju, povezuju i sistematizuju rešavanjem kompleksnih zadataka u kojima treba ispitati funkciju i nacrtati njen grafik. U okviru nastavne teme „Integral" predviđeno je da se prvo obradi neodređeni integral i neke metode integraljenja (metoda zamene i metoda parcijalne integracije). Polazeći od problema površine uvodi se pojam određenog integrala, zatim se ukazuje na njegova osnovna svojstva, i na kraju se izučava primena određenog integrala.

Na osnovu analize važeće udžbeničke literature za četvrti razred gimnazije (Bogoslavov, 2013; Ивановић и Огњановић, 2010; Каделбург и Мићић, 2008; Каделбург, Мићић и Огњановић, 2008; Кечкић, 2010) došlo se do zaključka da su algebarski i proceduralni pristupi dominantni u prezentovanju programskih sadržaja. Zbirke zadataka pružaju veliki izbor zadataka koji podržavaju manipulaciju simbolima i najčešće zahtevaju od učenika da, za datu funkciju odrede izvod, integral, intervale monotonosti, ekstremne vrednosti, itd. Grafičke reprezentacije osnovnih koncepata matematičke analize su obuhvaćene u malom broju zadataka. Tačnije rečeno, samo u zadacima gde je potrebno da se ispita tok i nacrta grafik funkcije i u zadacima primene određenog integrala. U zbirkama zadataka ima veoma malo slika i date su samo u okviru rešenja zadataka. Zadaci sa vizuelnim i konceptualnim komponentama su u podređenom položaju u odnosu na zadatke koji su usmereni na izučavanje simboličkog i proceduralnog aspekta matematičke analize.

Iz svega navedenog može se reći da je, u gimnazijskom obrazovanju, izučavanje sadržaja matematičke analize u velikoj meri bazirano na tradicionalnim nastavnim koncepcijama.

3.2. KOGNITIVNO-VIZUELNI PRISTUP SADRŽAJIMA MATEMATIČKE ANALIZE

U ovom poglavlju disertacije biće prezentovan kognitivno-vizuelni pristup nastavi/učenju matematičke analize, sa posebnim akcentom na dva fundamentalna koncepta: funkciju i izvod funkcije. Na osnovu teorijskih principa kognitivno-vizuelnog pristupa, osmišljen je i kreiran originalni didaktičko-metodički model za realizaciju odabranih sadržaja matematičke analize u nastavnoj praksi. Inovativni pristup koji je predložen u disertaciji, baziran je na primeni grafičkog i dinamičkog prikaza funkcije u izučavanju sadržaja matematičke analize u računarskom okruženju. Njegovi ključni aspekti ogledaju se u podsticanju vizuelizacije, primeni višestrukih reprezentacija, afirmaciji konceptualnih znanja i stvaranju uslova za postepeni prelazak ka višim nivoima apstrakcije u razvoju matematičkog mišljenja. Kognitivno-vizuelni pristup je implementiran u nastavu matematike u okviru eksperimentalnog istraživanja, sa učenicima četvrtih razreda prirodno-matematičkog smera gimnazije i sa studentima prve godine osnovnih studija fizike.

3.2.1. Osnovne postavke kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom prikazu funkcije

Osnov za kognitivno-vizuelno oblikovanje sadržaja matematičke analize i metodičkih postupaka je sadržan u teorijskom delu. Sve teorijske komponente na kojima se zasniva kognitivno-vizuelni pristup stavljene su u funkciju konkretizovanja didaktičko-metodičkog modela za realizaciju sadržaja matematičke analize u nastavnoj praksi. Kognitivno-vizuelni pristup zasnovan na grafičkom prikazu funkcije posvećuje posebnu pažnju metodičkoj transformaciji nastavnih sadržaja u cilju afirmacije grafičkih reprezentacija u procesu usvajanja konceptualnih znanja i rešavanju matematičkih problema.

Bitna karakteristika kognitivno-vizuelnog pristupa je akcenat na formiranju i razvoju konceptualnih znanja putem kognitivne grafike. Grafičke reprezentacije se koriste kako bi apstraktni koncepti matematičke analize dobili vizuelno tumačenje i kako bi se približili učenicima/studentima putem perceptivnih aktivnosti. Sticanje konceptualnih znanja počinje istraživanjem grafičkih reprezentacija koncepata ili problema. Zatim se konceptualna znanja proširuju tako što se grade referente veze između grafičkih i drugih reprezentacija, posebno algebarskih. Odnosno, grafičke reprezentacije su deo integralnog multireprezentativnog okruženja za učenje i predstavljaju polaznu saznaju tačku u procesu sticanja znanja. Kognitivno-vizuelna obrada osnovnih pojmova, definicija i teorema, podrazumeva i posebno osmišljene vizuelno-dinamičke nastavne materijale u kojima očiglednost predstavlja osnovu metodičkog pristupa i kognitivni alat za izgradnju potrebnih veza između višestrukih reprezentacija različitih koncepata.

Matematički zadaci imaju centralnu ulogu u učenju i nastavi matematike. Rešavanjem zadataka mogu se ostvariti skoro svi ciljevi nastave matematike, a posebno sticanje novih znanja, njihova primena u rešavanju problema, formiranje i razvijanje matematičkog mišljenja (Дејић и Егерић, 2007: 249). Savremeni metodički pristupi ističu da je vizuelizacija sadržaja matematičkih zadataka, od posebnog značaja za realizaciju ciljeva nastave/učenja matematičke analize. Problemi u kojima se razmatraju grafičke reprezentacije osnovnih koncepata matematičke analize, poznati su u matematičkoj literaturi (Hughes-Hallett *et al.*, 2013; Stewart, 2002, 2007; Мордкович, 2009; Ященко и Захаров, 2013), ali se ovakav tip zadataka ne pojavljuje u našim srednjoškolskim udžbenicima i zbirkama zadataka. U cilju efikasne i kvalitetne realizacije nastave kognitivno-vizuelnim pristupom, posebno je osmišljen, dizajniran i izabran set zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Zadaci uključuju grafičke reprezentacije funkcije/izvodne funkcije i one su date eksplicitno kao uslov zadatka ili su traženo rešenje zadatka. U literaturi (Orton, 1983a) se navodi da zadaci ovog tipa nisu rutinski i tradicionalni, već su okarakterisani kao nestandardni i problemski. Rešavanje problemskih zadataka sa grafičkom komponentom predstavlja kognitivni proces višeg reda koji zahteva modulaciju i kontrolu različitih sposobnosti i veština, kao i koordinaciju vizuelnog i analitičkog mišljenja. Ova činjenica ukazuje da se matematički problemi svojstveni predloženom metodičkom pristupu, bitno razlikuju od zadataka u srednjoškolskoj udžbeničkoj literaturi u kojima dominiraju algebarske reprezentacije i analitičke forme mišljenja. Zbog toga je posebna pažnja posvećena njihovom integrisanju u sadržaje koji su predviđeni važećim nastavnim programom matematike za gimnazije.

Osnovne postavke u kreiranju kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom prikazu funkcije i njegovoj realizaciji u nastavnoj praksi su:

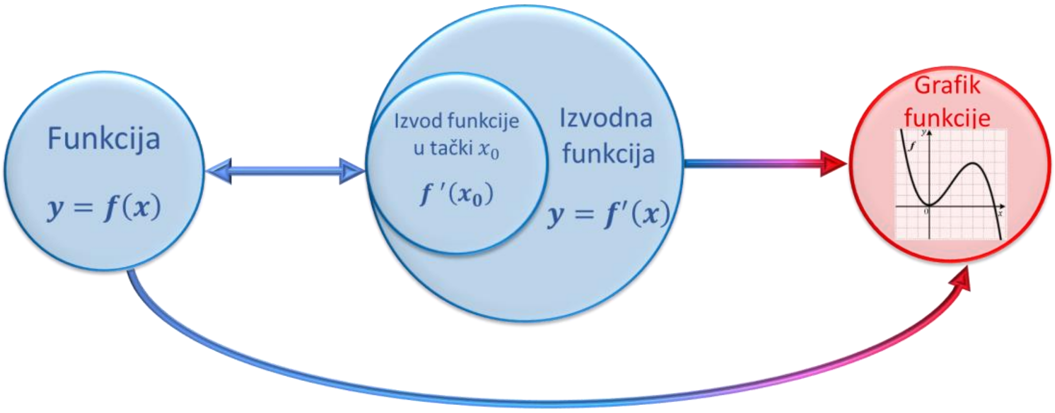
- Nastavne aktivnosti su usmerene tako da se u procesu učenja optimalno koriste potencijali vizuelnog mišljenja učenika/studenata.
- Široka i svrsishodna primena kognitivne funkcije očiglednosti u cilju formiranja i razvoja vizuelnog, kreativnog i naprednog matematičkog mišljenja.
- U nastavi se koristi posebno osmišljen nastavni materijal u čijem su fokusu matematički problemi sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima.
- Afirmacija i statičkih i dinamičkih grafičkih reprezentacija u izučavanju teorijskih osnova matematičke analize i u rešavanju matematičkih problema.
- Tokom izučavanja nastavnih sadržaja, korišćenje grafičkih reprezentacija je kontinuirano i simultano sa odgovarajućim algebarskim reprezentacijama.
- U procesu sticanja i razvoja konceptualnih znanja i veština, koriste se različite reprezentacije matematičkih objekata (algebarske, grafičke, numeričke, verbalne) i grade veze između njih, sa posebnim akcentom na izgradnji veza između grafičkih i algebarskih reprezentacija.
- Prilikom obrade osnovnih koncepata matematičke analize, pažnja je najpre usmerena na intuitivno i vizuelno razumevanje pojmova (razumevanje grafičkih reprezentacija), a kasnije se pažnja prenosi na simboličko i strogo formalno definisanje pojmova.
- Usvajanje konceptualnih znanja prethodi aktivnostima koje su usmerene na razvoj proceduralnih znanja i veština.
- Kreiranje vizuelnog okruženja za proces učenja (sveukupnost uslova za učenje u kojima je naglasak na korišćenju potencijala učeničkog/studentskog vizuelnog mišljenja), što podrazumeva široku upotrebu računara u procesu pripreme i dizajniranja nastavnih materijala i tokom realizacije nastavnih aktivnosti.
- U realizaciji nastave kombinuju se raznovrsni oblici i metode rada uz racionalnu i efikasnu podršku računara i obrazovnog softvera.

3.2.2. Uporedni pregled tradicionalnog i kognitivno-vizuelnog pristupa obradi izvoda funkcije

Tradicionalni pristup

Nastavnim programom matematike za prirodno–matematički smer gimnazije, predviđeno je da se u četvrtom razredu obradi nastavna tema Funkcije (28 časova) i Izvod funkcije (26 časova). Sadržaji obuhvaćeni ovim temama su opisani u delu 3.1.3. Za realizaciju sadržaja koji se odnose na izvod funkcije, date su sledeće preporuke: „Prvo učenike treba upoznati sa pojmovima priraštaja nezavisno promenljive i priraštaja funkcije i, polazeći od pojma srednje brzine i problema tangente na krivu, formirati pojam količnika priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive, a zatim definisati izvod funkcije kao graničnu vrednost tog količnika kada priraštaj nezavisno promenljive teži nuli. Ukazati na osnovne teoreme o izvodu i izvode nekih elementarnih funkcija. Uz pojam diferencijala i njegovo geometrijsko značenje treba ukazati i na njegovu primenu kod aproksimacije funkcija. Potrebnu pažnju valja posvetiti ispitivanju funkcija i crtanju njihovih grafika, koristeći izvod funkcije (ne uzimajući suviše komplikovane primere).” (ПНППГ, 2011: 114). Gimnazijski programi ne zahtevaju obradu svih sadržaja na strogo formalnom nivou i isključivo deduktivno izlaganje. Strogost u interpretaciji sadržaja treba da bude prisutna u prihvatljivoj meri, kako bi sadržaji programa bili dovoljno pristupačni svim učenicima. Izbor i zastupljenost sadržaja koji se u nastavi izlažu na formalno-aksiomatskom nivou određuju udžbenik i nastavnik matematike (u skladu sa predviđenim fondom časova, sastavom odeljenja i predznanjima učenika) (*ibid.*, 111).

U udžbeničkoj literaturi se reflektuje metodička koncepcija preporučena nastavnim programom, tako da je redosled u izlaganju sadržaja sledeći: definicija izvoda funkcije u tački, njeno uopštenje na pojam izvodne funkcije, pravila diferenciranja, geometrijska interpretacija prvog izvoda, primena izvoda na ispitivanje osobina funkcija (monotonost, ekstremne vrednosti, konveksnost i konkavnost, prevojne tačke) i crtanje grafika funkcije. U udžbenicima i zbirkama zadataka dominiraju sadržaji koji prezentuju simbolički i proceduralni aspekt diferencijalnog računa. Što se tiče grafičkog aspekta, on se posebno razmatra na samom kraju nastavne teme kada se rešavaju zadaci u kojima je potrebno najpre ispitati osobine funkcije koja je data svojom algebarskom reprezentacijom, a zatim da se nacrta njen grafik. Opisana koncepcija tradicionalne nastave može se prikazati sledećom šemom:



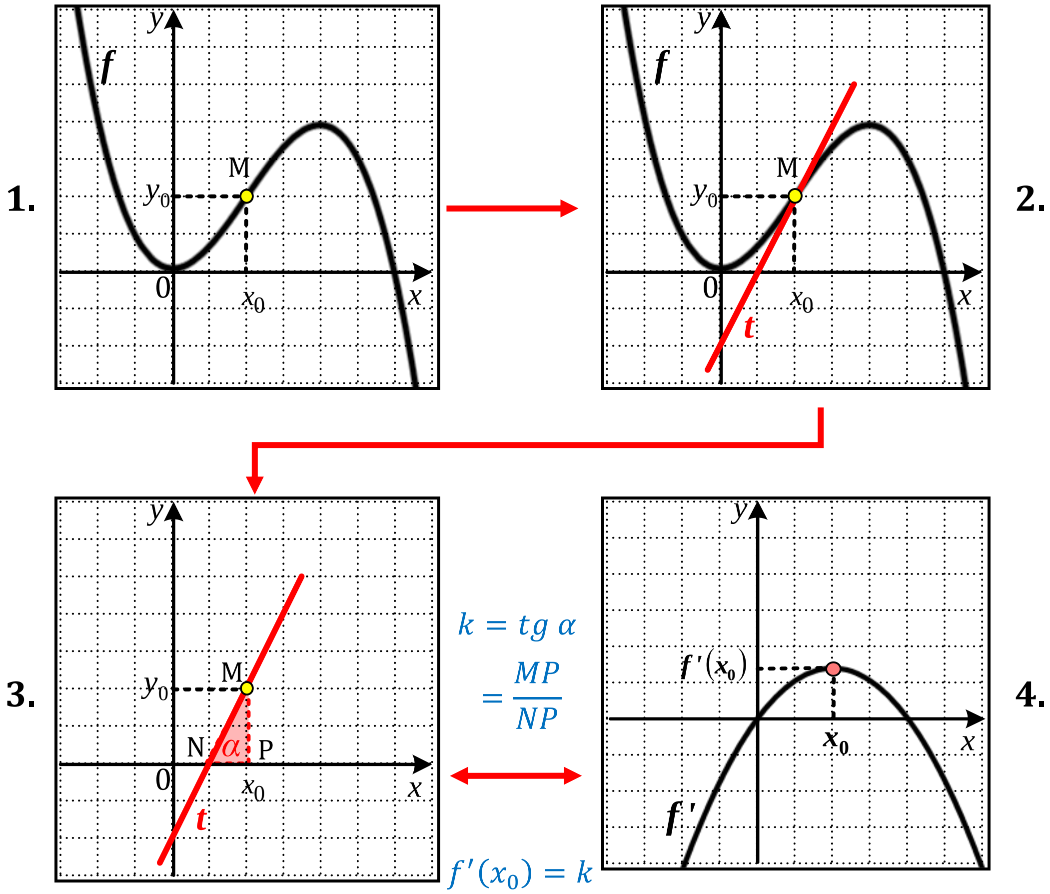
Šema 3.1. *Tradicionalni pristup sadržajima koji se odnose na funkcije i izvod funkcije*

Kognitivno-vizuelni pristup

Polazna tačka kognitivno-vizuelnog metodičkog pristupa je formiranje i razvoj grafičkog razumevanja koncepta izvoda. Asiala, Cottrill, Dubinsky i Schwingendorf (1997) su ponudili posebno koncizan opis razumevanja grafičkog aspekta koncepta izvoda. Po njihovom mišljenju, glavni problem u grafičkom razumevanju izvoda je odnos između nagiba (koeficijenta pravca) tangente na grafik funkcije i izvoda funkcije u tački. Ovo predstavlja temelj za razumevanje izvodne funkcije koja, između ostalog, za svaku tačku u domenu daje odgovarajuću vrednost nagiba tangente.

Proces formiranja grafičkog razumevanja koncepta izvoda bazira se na izgradnji potrebnih veza između grafičkih reprezentacija funkcije i izvodne funkcije, uz posredovanje koncepta tangente. Ovaj proces u slučaju diferencijabilne funkcije, prikazan je na Slici 3.1.

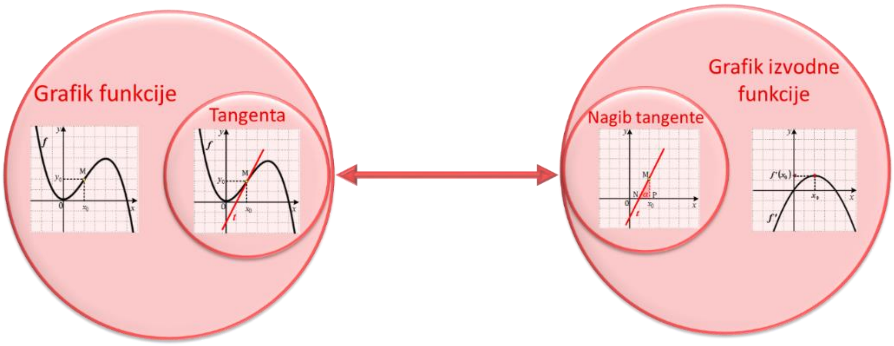
Za grafičko razumevanje izvoda funkcije potrebno je da učenici/studenti poseduju odgovarajuća znanja o sledećim grafičkim reprezentacijama: 1. grafik funkcije, 2. tangenta na grafik funkcije, 3. grafička reprezentacija nagiba tangente i 4. grafik izvodne funkcije. Osim toga, prelazak između dve grafičke reprezentacije zahteva i znanja kojima se uspostavljaju referentne veze između tih reprezentacija. Prva dva prelaska između grafičkih reprezentacija (iz prve u drugu, odnosno iz druge u treću) su vizuelne prirode. Međutim, uspostavljanje veza između grafičke reprezentacije nagiba tangente i grafika izvodne funkcije (3. i 4. grafička reprezentacija), uslovljeno je poznavanjem algebarskih reprezentacija za koeficijent pravca tangente ($k = tg\alpha = \frac{MP}{NP}$) i za izvod funkcije u tački ($f'(x_0) = k$). Samim tim, razumevanje nagiba tangente kao vrednosti izvodne funkcije u tački je kognitivno zahtevan proces jer zahteva koordinaciju aktivnosti u vizuelnoj i simboličkoj ravni apstrakcije.



Slika 3.1. *Grafičko razumevanje izvoda funkcije*

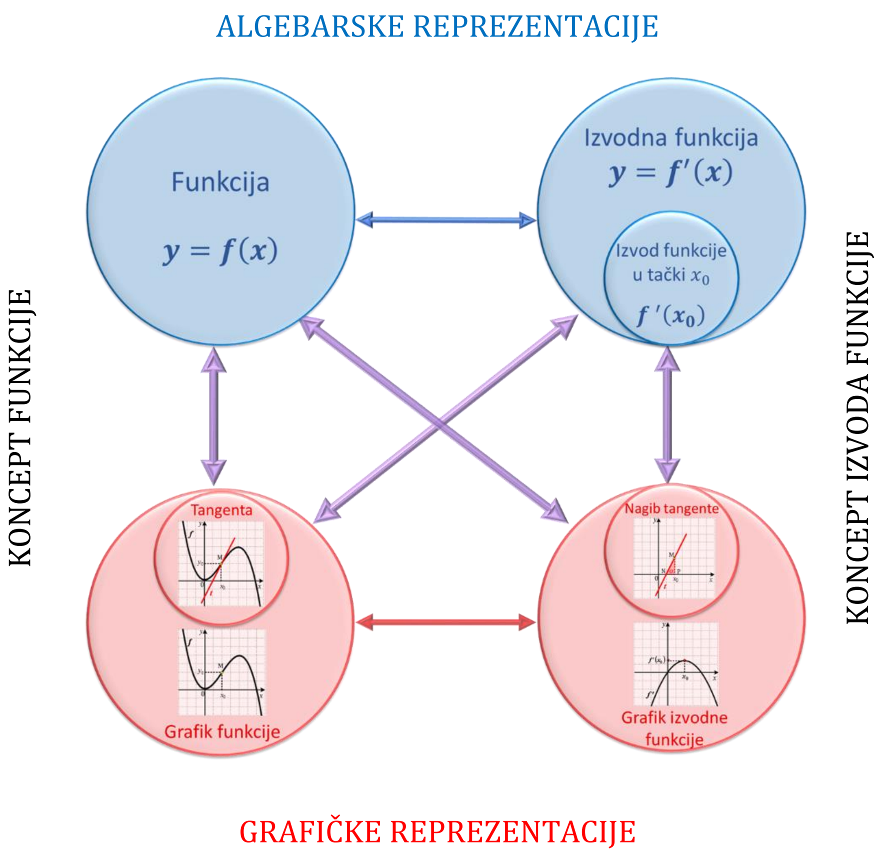
Kako bi se pomoglo učenicima/studentima da u procesu učenja razvijaju vizuelno mišljenje i grafičko razumevanje koncepta funkcije i izvoda funkcije, izvršena je odgovarajuća metodička transformacija sadržaja. Metodički transformisani sadržaji koncipirani su tako da uspostavljaju veze između grafičke reprezentacije funkcije i tangente na grafik (Slika 3.1 – 1. i 2. grafička reprezentacija) i isto tako, između grafičke reprezentacije nagiba tangente i grafika izvodne funkcije (Slika 3.1 – 3. i 4. grafička reprezentacija), pri čemu je poseban akcenat stavljen na izgradnju razumevanja nagiba tangente kao vrednosti izvodne funkcije u tački (Šema 3.2).

Značajna pretpostavka kognitivno-vizuelne koncepcije je stvaranje didaktičko-metodičkih preduslova za kontinurani razvoj učenika/studenata u domenu grafičkog razumevanja sadržaja matematičke analize. To se postiže primenom posebno osmišljenih kognitivno-vizuelnih materijala koji afirmišu grafičke reprezentacije funkcije i izvodne funkcije u sticanju konceptualnih znanja i u rešavanju matematičkih problema (zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima).



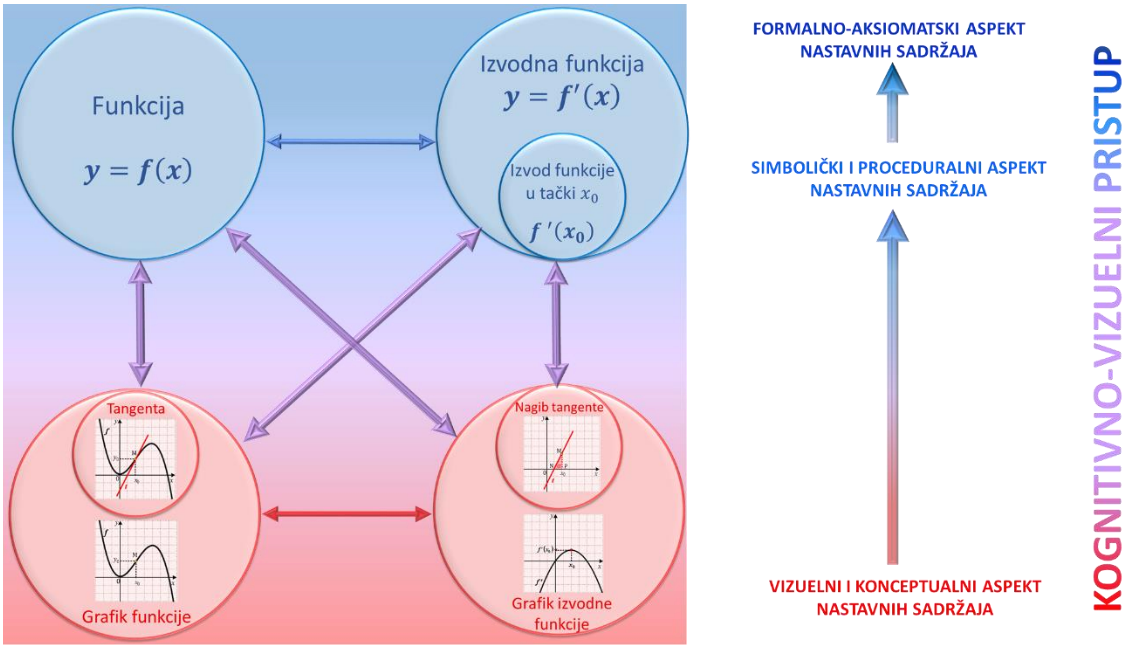
Šema 3.2. *Kognitivno-vizuelni pristup obradi grafičkog aspekta sadržaja koji se odnose na funkcije i izvode funkcija*

Sledeća važna odrednica u koncipiranju kognitivno-vizuelnog pristupa je povezivanje kognitivno-vizuelnih sadržaja sa sadržajima tradicionalne nastave u usklađenu i funkcionalnu celinu. Obrada sadržaja primenom grafičkih reprezentacija funkcije/izvodne funkcije je povezana i sinhronizovana sa izučavanjem odgovarajućih sadržaja u kojima dominiraju algebarske reprezentacije funkcije/izvodne funkcije. U procesu izgradnje celovitog sistema znanja, akcenat je na usvajanju znanja i razvoju sposobnosti i veština neophodnih za fluentno i fleksibilno kretanje između algebarskih i grafičkih reprezentacija koncepta funkcije i koncepta izvoda (Šema 3.3).



Šema 3.3. *Povezivanje koncepata i reprezentacija kognitivno-vizuelnim pristupom*

Predloženi metodički pristup je koncipiran u skladu sa savremenim teorijama koje naglašavaju značaj vizuelizacije, višestrukih reprezentacija, konceptualnih znanja i postepenog prelaska ka višim nivoima apstrakcije u razvoju matematičkog mišljenja (npr. Hähkiöniemi, 2006; Tall, 2008). Koncepcija kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom prikazu funkcije, može se predstaviti šematski, kao što je prikazano na Šemi 3.4. U procesu nastave/učenja pažnja je najpre usmerena na vizuelne i konceptualne pristupe sadržajima u cilju razvoja vizuelnog mišljenja i grafičkog razumevanja, kao i na sticanje konceptualnih znanja na osnovu višestrukih reprezentacija. Nakon toga, nastavne aktivnosti se postepeno usmeravaju na razvoj simboličkog mišljenja i sticanje proceduralnih znanja, tako da vizuelni uvid podržava razumevanje algebarskih reprezentacija koje se koriste za sofisticiranije proračune i manipulisanje konceptima matematičke analize. Izgrađeno razumevanje grafičkih i algebarskih reprezentacija predstavlja kognitivnu osnovu za usvajanje formalnih definicija, teorema i njihovih dokaza, tj. osnovu na kojoj se izgrađuje formalno-aksiomatsko mišljenje učenika/studenata.



Šema 3.4. *Kognitivno vizuelni pristup sadržajima koji se odnose na funkcije i izvod funkcije*

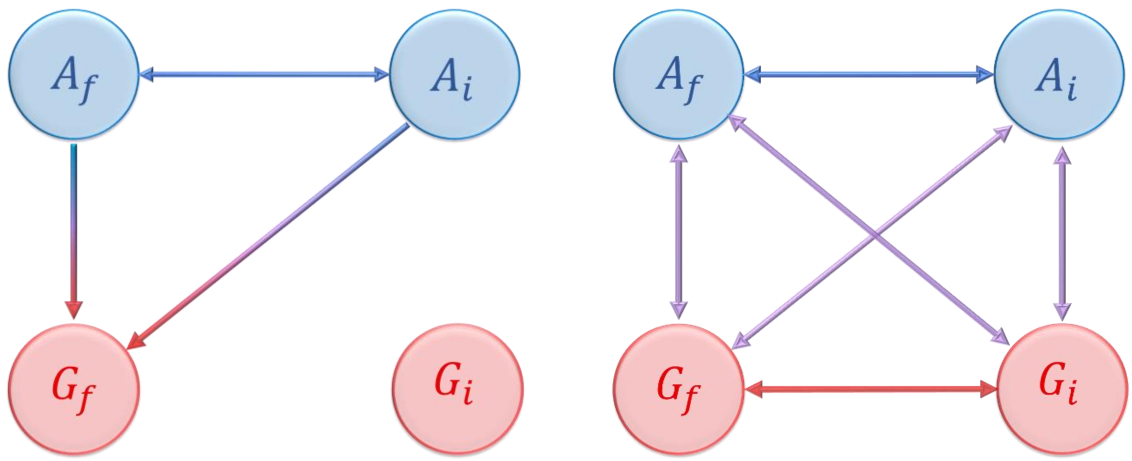
Generalno posmatrano, razvoj matematičkog mišljenja predstavlja kognitivni napredak od nižih ka višim, sofisticiranijim nivoima mišljenja. Šema 3.4 pokazuje da kognitivno-vizuelna metodička koncepcija podržava razvoj matematičkog mišljenja, od nižih ka višim nivoima apstrakcije (od vizuelnog ka simboličkom i dalje ka formalno-aksiomatskom mišljenju). Odnosno, učenicima se pruža mogućnost da na prirodan način (način koji je u skladu sa ljudskim čulima) dostignu formalni nivo matematičkog mišljenja (Tall, 2008).

Međutim, učenici dostižu više nivoe mišljenja postepenim sticanjem znanja i veština. Samim tim, razvoj matematičkog mišljenja ne prati nužno linearan put, već je po svojoj prirodi dinamičan proces, stalno u pokretu između različitih načina mišljenja (Tall, 2008). Kognitivno-vizuelni metodički pristup uvažava dinamičnu prirodu razvoja matematičkog mišljenja. Koncipiran je tako da se u nastavnom procesu kontinuirano razvija mreža dvosmernih veza između grafičlih i algebarskih reprezentacija funkcije i izvoda funkcije (ove veze su prikazane strelicama ljubičaste boje, Šema 3.4). Na taj način se kod učenika/studenata podstiču kognitivni procesi kojim se uspostavljaju prelasci između vizuelne i simboličke ravni apstrakcije – procesi simbolizacije vizuelnog mišljenja i vizuelizacije simboličkog mišljenja.

Uporedni pregled tradicionalnog i kognitivno-vizuelnog pristupa

Na osnovu prethodnih razmatranja tradicionalnog i kognitivno-vizuelnog pristupa, može se zaključiti da se ove dve metodičke koncepcije razlikuju u sledećem:

- *Sadržaji koji se obrađuju* – Kognitivno-vizuelna koncepcija uvodi zadatake sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i time proširuje i obogaćuje tradicionalne nastavne sadržaje. Integrisanje pomenutih zadataka u sadržaje predviđene važećim nastavnim programom, praćeno je racionalizacijom u obradi simboličkog i proceduralnog aspekta matematičke analize.
- *Vizuelizacija* – U prethodnim izlaganjima je već rečeno da su vizuelne reprezentacije i vizuelni pristupi nedovoljno zastupljeni u tradicionalnoj nastavi, a da se afirmišu u realizaciji kognitivno-vizuelnog metodičkog pristupa.
- *Zastupljenost višestrukih reprezentacija koncepata matematičke analize i veza koje se uspostavljaju između njih* – Zbog jednostavnosti i kratkoće daljeg izlaganja u kome se tradicionalna i kognitivno-vizuelna koncepcija razmatraju s aspekta reprezentacija, uvešćemo sledeće oznake Af, Ai, Gf i Gi. Oznakom Af su označene algebarske reprezentacije koje se odnose na koncept funkcije. Preciznije, oznakom Af su označene algebarske reprezentacije funkcija, kao i algebarske reprezentacije koje se koriste pri prikazivanju ili ispitivanju osobina funkcija (domen, nule, znak, monotonost, ekstremne vrednosti…). Oznakom Gf su označene grafičke reprezentacije koje se odnose na koncept funkcije (grafik funkcije i grafičke reprezentacije koje se koriste pri prikazivanju ili ispitivanju osobina grafika funkcija). Analogno, sa Ai su označene algebarske, a sa Gi grafičke reprezentacije koje se odnose na koncept izvoda funkcije. Koncepcija tradicionalne nastave i koncepcija kognitivno-vizuelnog pristupa (Šema 3.1 i Šema 3.4), nakon ovako uvedenih oznaka, mogu se predstaviti šematski, kao što je prikazano na sledećoj šemi:



1. Tradicionalna koncepcija **2. Kognitivno-vizuelna koncepcija**

Šema 3.5. *Prelasci između koncepata i/ili reprezentacija – uporedni prikaz tradicionalne i kognitivno-vizuelne koncepcije*

Na osnovu Šeme 3.5.1. može se zaključiti da u tradicionalnoj nastavi dominiraju algebarske reprezentacije i da grafička reprezentacija izvodne funkcije nije obuhvaćena obradom nastavnih sadržaja. Tradicionalna koncepcija povezuje višestruke reprezentacije koncepta funkcije i koncepta izvoda, tako što između njih uspostavlja četiri prelaska: $Af \rightarrow Ai$, $Ai \rightarrow Af$, $Af \rightarrow Gf$ i $Ai \rightarrow Gf$. Pritom, sadržaji koji uključuju grafičku reprezentaciju funkcije i prelaske $Af \rightarrow Gf$ i $Ai \rightarrow Gf$, obrađuju se na samom kraju nastavne teme (ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije). Napred navedene činjenice ukazuju da u tradicionalnoj nastavi postoji disbalans i nedovljna sinhronizovanost između grafičkih i algebarskih reprezentacija.

Šema 3.5.2 prikazuje da se u realizaciji kognitivno-vizuelnog pristupa, koriste i algebarske i grafičke reprezentacije koncepta funkcije i koncepta izvoda, kao i da se uspostavljaju svih dvanaest prelazaka između koncepata i/ili reprezentacija. Važno je napomenuti da se grafičke reprezentacije tretiraju simultano sa odgovarajućim algebarskim reprezentacijama.

Na osnovu uporednog prikaza tradicionalne i kognitivno-vizuelne koncepcije može se zaključiti da kognitivno-vizuelni pristup kreira okruženje za učenje koje je bogatije u predstavljanju koncepata različitim reprezentacijama i vezama koje se između njih uspostavljaju. Osim toga, korišćenje grafičkih i algebarskih reprezentacija je sinhronizovano i balansirano u kognitivno-vizuelnom okruženju, što nije slučaj sa tradicionalnim okruženjem za učenje.

- *Konceptualno i proceduralno znanje* – U tradicionalnoj nastavi akcenat je uglavnom na proceduralnom znanju, dok se konceptualno na neki način zapostavlja. Kognitivno-vizuelni metodički pristup posebnu važnost pridaje ravnoteži proceduralnog i konceptualnog znanja u procesu izgradnje celovitog i temeljnog matematičkog znanja.
- *Razvoj matematičkog mišljenja* – U tradicionalnoj nastavi, vizuelne forme mišljenja su vrlo malo zastupljene, favorizuje se razvoj simboličkog mišljenja, koje predstavlja osnovu na kojoj se gradi formalno-aksiomatsko mišljenje. Kognitivno-vizuelni pristup u početnim fazama procesa učenja afirmiše razvoj vizuelnog mišljenja. Takođe, stvara uslove da se matematičko mišljenje razvija prirodnim putem, od vizuelnog ka simboličkom i dalje ka formalno-aksiomatskom mišljenju.

Uvođenje kognitivno-vizuelnog pristupa u srednjoškolsku nastavu matematike predstavlja značajnu novinu. Zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, vizuelizacija procesa učenja, multireprezentativno okruženje za učenje, uravnotežen razvoj konceptualnog razumevanja i proceduralnih veština, stvaranje uslova za prirodan put razvoja matematičkog mišljenja, predstavljaju inovativne komponente koje kognitivno-vizuelnoj koncepciji daju didaktičko-metodički značaj.

3.2.3. Matematički zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima

U ovom delu rada razmatra se zastupljenost grafičkih reprezentacija u matematičkim zadacima, kao i vrste prelazaka između koncepata i/ili reprezentacija u tradicionalnim i u kognitivno-vizuelnim nastavnim sadržajima.

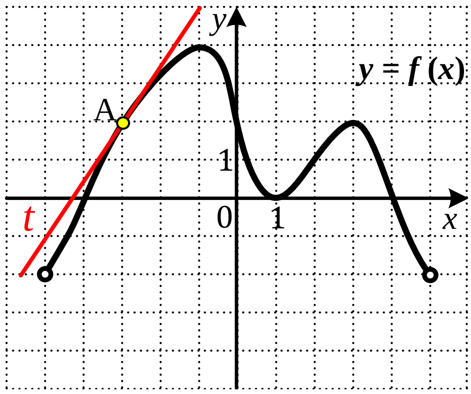
Analiza zbirki zadataka iz matematike za četvrti razred gimnazije pokazuje da su algebarski problemi većinski zastupljeni, a grafički se pojavljuju samo u formi „ispitaj tok i nacrtaj grafik funkcije...”. Ovakav izbor zadataka omogućava da se pri izučavanju diferencijalnog računa razmatraju samo četiri prelaska između koncepata i/ili reprezentacija ($Af \rightarrow Ai$, $Ai \rightarrow Af$, $Af \rightarrow Gf$ i $Ai \rightarrow Gf$).

Za potrebe istraživanja posebno je osmišljen i kreiran set problemskih zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Zadaci su prilagođeni sadržajima koji su predviđeni važećim nastavnim programom matematike za gimnazije. Integrisanje zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima u tradicionalne sadržaje, upravo omogućava da se koncepti povežu kroz grafičke i algebarske reprezentacije u smislenu i funkcionalnu celinu na način kako je prikazano Šemom 3.5.2. Pomoću ovih zadataka se uspostavljaju prelasci između koncepata i/ili reprezentacija koji nisu zastupljeni u tradicionalnoj nastavi, što će biti prikazano u daljem tekstu.

Ako je grafik funkcije sadržan u uslovu zadatka, tada zahtev zadatka može biti postavljen tako da se on odnosi na neko algebarsko svojstvo funkcije/izvodne funkcije ili na osobinu grafika izvodne funkcije, čime se kreiraju prelasci $Gf \to Af$, $Gf \to Ai$ i $Gf \to Gi$. U nastavku je dat primer zadatka koji sadrži sva tri prelaska.

Zadatak ($\boldsymbol{Gf \to Af, Ai, Gi}$): *Na slici je prikazan grafik funkcije* $y = f(x)$ *definisane na intervalu* $(-5,\ 5)$*. U tački A konstruisana je tangenta t grafika funkcije* f.

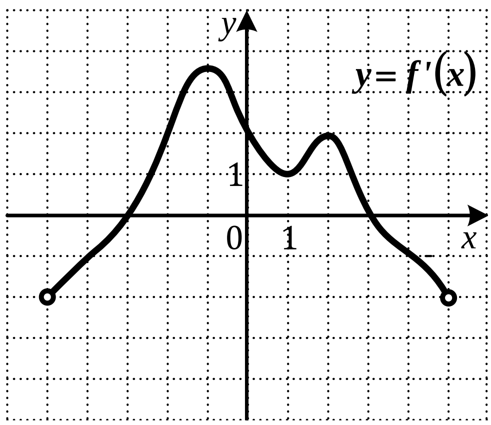
- Izračunaj vrednost izraza $f(-3) + f'(-3)$.
- Odredi intervale na kojima je izvodna funkcija $y = f'(x)$ negativna.
- U koliko tačaka grafik izvodne funkcije $y = f'(x)$ seče x–osu?



Isto tako, ako je grafik izvodne funkcije dat kao uslov zadatka, tada se postavljanjem odgovarajućih zahteva mogu uspostaviti prelasci $Gi \to Af$, $Gi \to Ai$ i $Gi \to Gf$. Navedeni prelasci su sadržani u sledećem zadatku:

Zadatak ($\boldsymbol{Gi \to Af, Ai, Gf}$): *Funkcija* $y = f(x)$ *je definisana na intervalu* $(-5, 5)$*. Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije* $y = f'(x)$.

- Funkcija $y = f(x)$ je monotono rastuća $\Leftrightarrow x \in$ ____________ .
- Ako je $g(x) = f(x) - 2x$, reši nejednačinu $g'(x) < 0$.
- Nacrtaj deo grafika funkcije $y = f(x)$ u okolini tačke $x = -3$.

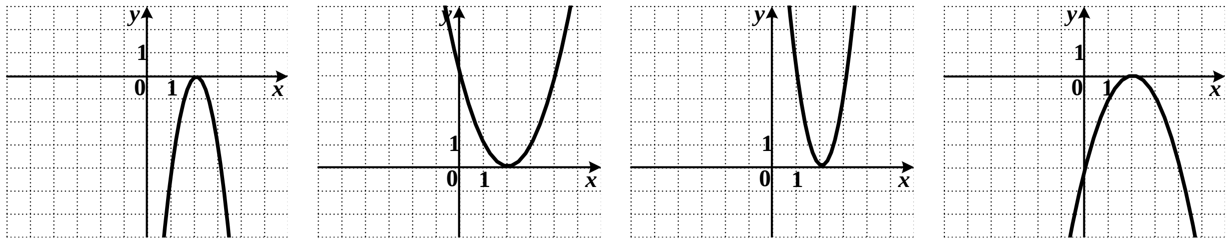


Naredna dva zadatka sadrže prelazak iz algebarske reprezentacije funkcije/izvodne funkcije u grafičku reprezentaciju izvodne funkcije.

Zadatak ($\boldsymbol{Af \to Gi}$): *Na kojoj slici je prikazan grafik funkcije* $y = f'(x)$*, ako je*

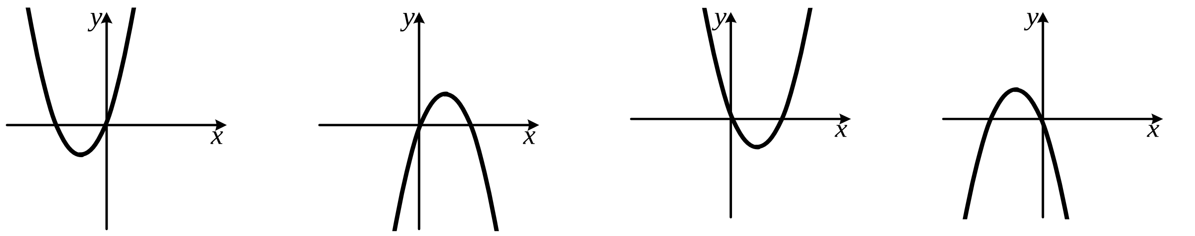
$$f(x) = \frac{(2-x)^3}{3}?$$

a) b) c) d)



Zadatak ($Ai \to Gi$): *Na kojoj slici je prikazan grafik funkcije g', ako je poznato da je $g(x) = f(-x)$ i $f'(x) = x^2 - x$?*

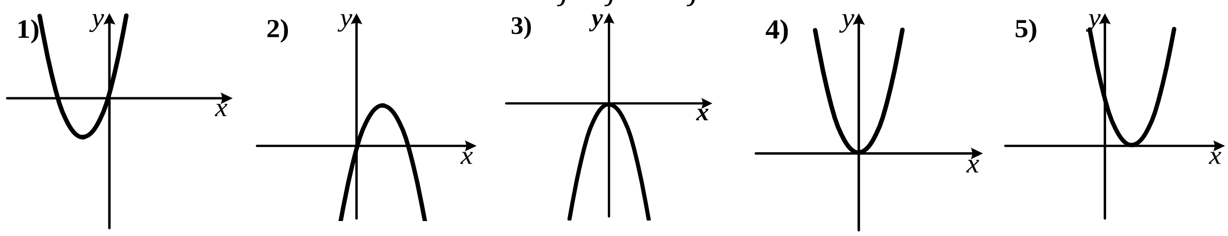
a) b) c) d)

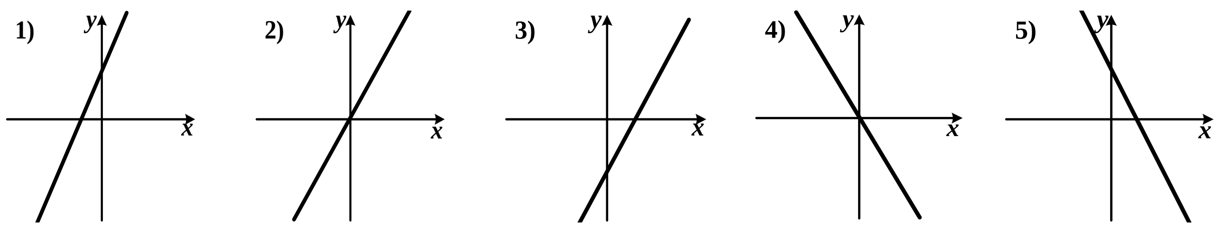


Zadatak koji sledi, obuhvata prelaske između grafičkih reprezentacija funkcija i izvodnih funkcija. Rešavanju zadatka se može pristupiti na različite načine i pritom se mogu razmatrati prelasci između grafičkih reprezentacija, u oba smera. Ukoliko se grafici funkcija posmatraju kao ulazni podaci (uslovi zadatka), a grafici izvodnih funkcija kao tražena rešenja (zahtevi zadatka), tada se u zadatku razmatraju prelasci $Gf \to Gi$. U suprotnom, u zadatku se razmatraju prelasci $Gi \to Gf$.

Zadatak ($Gf \leftrightarrow Gi$): *U prvom redu su prikazani grafici funkcija, a u drugom redu grafici njihovih izvodnih funkcija. Poveži svaki grafik funkcije sa grafikom njegove izvodne funkcije.*

Grafici funkcija





Grafici izvodnih funkcija

Važno je napomenuti da prilikom rešavanja zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, prelazak od uslova do krajnjeg rešenja zadatka često nije direktan. Odnosno, u postupku rešavanja se realizuju i drugi prelasci koji posredno povezuju uslov i traženo rešenje zadatka.

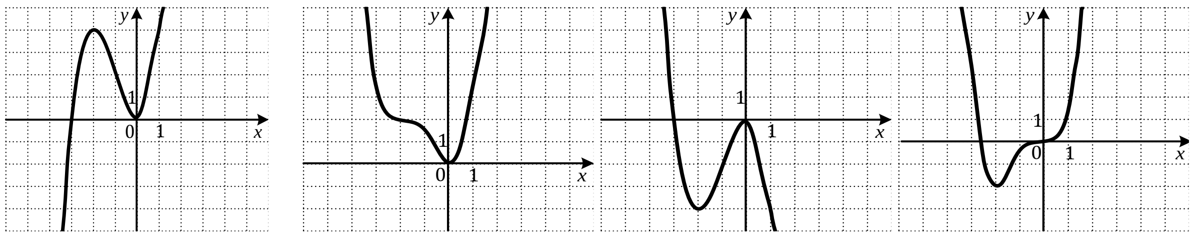
Na primer, u prethodnom zadatku, prelazak $Gf \to Gi$ se uspostavlja nizom prelazaka $Gf \to Af \to Ai \to Gi$. Naime, na osnovu grafika funkcije (Gf) najpre se izvodi zaključak o intervalima monotonosti i tački lokalnog ekstrema funkcije (Af). Dalje je potrebno da se navedene osobine funkcije povežu sa osobinama izvodne funkcije, odnosno da se odrede intervali na kojima je izvodna funkcija pozitivna/negativna i kada je jednaka nuli (Ai). Na kraju, osobine izvodne funkcije koje su date algebarskim reprezentacijama treba prevesti u odgovarajuća svojstva grafika izvodne funkcije (deo grafika iznad/ispod x −ose i presek grafika sa x–osom). Na osnovu toga se određuje na kojoj slici je prikazan grafik izvodne funkcije (Gi). Ako se u zadatku razmatraju prelasci $Gi \rightarrow Gf$, tada se u postpku rešavanja uspostavlja niz prelazaka $Gi \rightarrow Ai \rightarrow Af \rightarrow Gf$.

Napred navedenim zadacima, obuhvaćeni su svi prelasci između koncepata i/ili reprezentacija koji se razmatraju kognitivno-vizuelnim pristupom, a nisu prisutni u tradicionalnim nastavnim sadržajima. Osim toga, neki od prelazaka koji se javljuju u tradicionalnoj nastavi, mogu se realizovati i na kognitivno-vizuelni način. U nastavku je dat primer takvog zadatka.

Zadatak ($\boldsymbol{Ai \rightarrow Gf}$): *Na kojoj slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$, ako je poznato da je*

$$f'(x) = \frac{3x^3 + 6x^2}{2}?$$

a) b) c) d)



3.2.4. Tipologija zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima

Zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima predstavljaju osnovno metodičko sredstvo za efektivnu i efikasnu implementaciju kognitivno-vizuelnog pristupa u nastavnoj praksi. Za potrebe ovog istraživanja osmišljeni su, kreirani i izabrani zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, uz prethodno sprovedenu teorijsku didaktičko-metodičku analizu i transformaciju nastavnih sadržaja.

U cilju sagledavanja metodičkih specifičnosti zadataka, pregledani su i analizirani naučni i stručni radovi koji se odnose na problematiku višestrukih reprezentacija i matematičke vizuelizacije u nastavi matematičke analize. Kako bi se sagledale didaktičko-metodičke mogućnosti integrisanja zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima u postojeće programske sadržaje, izvršena je analiza važećeg nastavnog programa i sadržaja udžbeničke literature za četvrti razred gimnazije, kao i druge stručne literature. Sveukupnim sagledavanjem didaktičko-metodičkih pretpostavki kognitivno-vizuelnog pristupa, došlo se do zaključka da uvođenje zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima u tradicionalnu nastavu može doneti brojne prednosti, ali se mogu očekivati i neke specifične poteškoće učenika u radu sa grafičkim reprezentacijama.

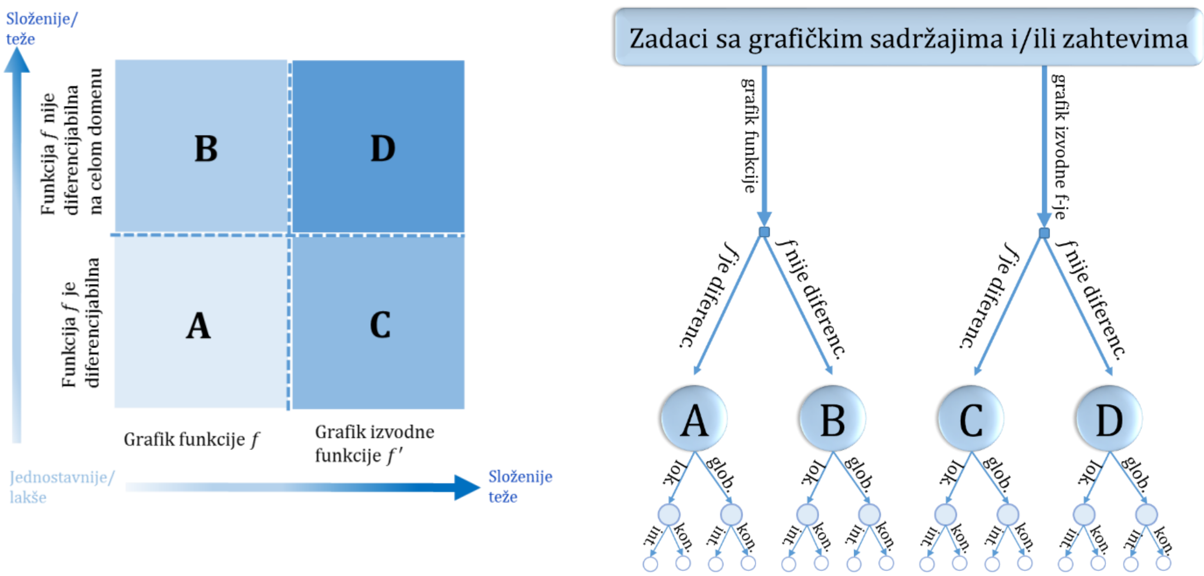
U skladu sa saznanjima do kojih se došlo teorijskom analizom, osmišljeni su, kreirani i izabrani zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, pri čemu je posebno je vođeno računa o ciljevima i ishodima koji se žele postići kognitivno-vizuelnim pristupom, predznanjima, sposobnostima i mogućnostima učenika/studenata. S obzirom na to da postoji veliki broj zadataka koji se mogu koristiti u nastavi i da je širok opseg njihovih metodičkih potencijala, izvršena je klasifikacija zadataka po različitim kriterijumima i na osnovu toga je data njihova tipologija.

Na osnovu sprovedene teorijske analize, određene su četiri bitne karakteristike zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima koje odražavaju njihove metodičke specifičnosti i u velikoj meri određuju kompleksnost zahteva i težinu zadataka: 1) zadaci podrazumevaju rad sa grafikom funkcije ili grafikom izvodne funkcije; 2) u zadacima se razmatraju kako diferencijabilne, tako i funkcije koje u nekim tačkama domena nisu diferencijabilne; 3) zadaci mogu zahtevati od učenika da interpretiraju ili da konstruišu grafičku reprezentaciju; 4) zahtevi zadataka mogu se odnositi na lokalna ili na globalna svojstva datih grafika. Uticaj napred navedenih karakteristika na složenost zahteva i stepen težine zadataka, a samim tim i na uspešnost učenika u savladavanju sadržaja, dat je u tabeli koja sledi.

Tabela 3.1. *Faktori koji utiču na složenost zahteva i stepen težine zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima*

Manja složenost/niži zahtevi	Veća složenost/viši zahtevi
• rad sa grafikom funkcije	• rad sa grafikom izvodne funkcije
• razmatra se diferencijabilna funkcija	• razmatra se funkcija koja nije diferencijabilna u svim tačkama domena
• razmatraju se lokalne osobine funkcije/izvodne funkcije	• razmatraju se globalne osobine funkcije/izvodne funkcije
• interpretacija grafičkih reprezentacija	• konstrukcija grafičkih reprezentacija

Tipologija zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima je izvršena na osnovu prva dva kriterijuma. Određena su četiri osnovna tipa zadataka i u daljem tekstu će biti označeni sa A, B, C i D (Slika 3.2). Zadaci A i B tipa zahtevaju rad sa grafičkom reprezentacijom funkcije, a zadaci C i D tipa sa grafikom izvodne funkcije. U zadacima A i C tipa razmatra se diferencijabilna funkcija, dok se u zadacima B i D tipa razmatra funkcija koja nije diferencijabilna u svim tačkama domena. Uzimajući u obzir programske sadržaje, kao i uticaj navedenih faktora na složenost i težinu zadataka, svrsishodno je da se u realzaciji manjih metodičkih celina koje se odnose na koncept izvoda, zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima obrađuju u redosledu A→ B →C→ D.



Slika 3.2. *Tipologija zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima*

Kako bi se u okviru istog tipa zadataka kreirali zadaci različitog nivoa složenosti i stepena težine, primenjuju se preostala dva kriterijuma – razmatranje lokalnih/globalnih osobina funkcija i izvodnih funkcija i interpretacija/konstrukcija grafičkih reprezentacija.

Prikazana tipologija zadataka omogućava da se za obradu koncepta izvoda funkcije osmisle, kreiraju i izaberu zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima tako da čine celovit i logički dosledan sistem međusobno povezanih znanja, strukturirani u okviru manjih metodičkih celina kao niz problema od kojih je svaki za nijansu složeniji/teži od prethodnog.

3.3. REALIZACIJA NASTAVNE TEME „IZVOD FUNKCIJE" KOGNITIVNO-VIZUELNIM PRISTUPOM

U ovom poglavlju će biti detaljno opisan kognitivno-vizuelni pristup obradi nastavne teme Izvod funkcije, u četvrtom razredu gimnazije. Poglavlje se sastoji iz više celina u kojima se razmatraju didaktičko-metodičke specifičnosti predloženog pristupa. Dati su metodički okviri za kognitivno-vizuelnu nastavu/učenje, sa posebnim uputstvima za određene nastavne sadržaje.

3.3.1. Kognitivno-vizuelni nastavni materijali

Za potrebe istraživanja sprovedenog u okviru disertacije, osmišljeni su i izrađeni posebni nastavni materijali koji aktuelizuju kognitivno-vizuelno okruženje za učenje. Didaktičko-metodičko oblikovanje nastavnih sadržaja je projektovano u cilju podsticanja i razvoja konceptulnih znanja, vizuelnog mišljenja, fluentnosti i fleksibilnosti u radu sa višestrukim reprezentacijama, sposobnosti rešavanja problema.

U okviru nastavne teme Izvod funkcije pripremljeni su kognitivno-vizuelni materijali za sledeće nastavne sadržaje:

- Uvođenje pojma prvog izvoda funkcije
- Geometrijska interpretacija izvoda funkcije
- Monotonost funkcije
- Ekstremne vrednosti funkcije
- Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke
- Crtanje grafika funkcije
- Sistematizacija gradiva.

U cilju realizacije različitih nastavnih aktivnosti (obrada novih sadržaja, vežbanje, ponavljanje, proveravanje i vrednovanje znanja), za svaki od napred navedenih sadržaja kreirani su odgovarajući kognitivno-vizuelni materijali (Tabela 3.2). Za izradu nastavnih materijala korišćen je matematički obrazovni softver *GeoGebra* i programski paket *Microsoft Office* (*PowerPoint, Word, Visio*). Nastavni sadržaji su vizuelizovani statičkim, diskretno dinamičkim i dinamičkim slikama.

U kognitivno-vizuelnim nastavnim materijalima, osim vizuelnih načina predstavljanja sadržaja, prisutne su i numeričke, algebarske i verbalne forme. Zbog toga je prilikom osmišljavanja i izrade ovih nastavnih materijala posebna pažnja bila posvećena implementaciji osnovnih principa Mayerove kognitivne teorije multimedijalnog učenja. Multimedijalnim dizajnom *GeoGebra* i *PowerPoint* nastavnih materijala nastojano je da se sadržajima i načinom njihovog prikazivanja struturira i tok misaonih aktivnosti sa ciljem da se kod učenika razviju kognitivne strukture koje će omogućiti efikasnije načine usvajanja znanja i dublje i temeljitije ovladavanje sadržajima. Ovi nastavni materijali sadrže i sistematično organizovane i sveobuhvatne povratne informacije čije je korišćenje interaktivno, personalizovano i prilagođeno potrebama svakog učenika, što značajno doprinosi individualizaciji procesa učenja. Visok stepen interaktivnosti i mogućnost samostalnog korišćenja nastavnog materijala od strane učenika, daje nastavniku širok spektar mogućnosti prilikom izbora oblika rada i nastavnih metoda.

Tabela 3.2. *Realizacija nastavnih aktivnosti pomoću kognitivno-vizuelnih materijala – preporučeni oblici i metode rada*

Aktivnost	Nastavni materijal	Vizuelizacija sadržaja	Oblici rada	Nastavne metode
Usvajanje novih pojmova, definicija, stavova i teorema	*GeoGebra* dinamički radni listovi za istraživanje osnovnih koncepata diferencijalnog računa	dinamička	F, I	DI, HR, IN
Razvijanje veštine rešavanja problema sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima	*PowerPoint* prezentacije u kojima su prikazane metode rešavanja zadataka	diskretno dinamička	F, I	DI, HR, PN
Uvežbavanje	*Word* dokumenti i štampani materijali sa zadacima za samostalno vežbanje	statička	F, G, P, I	PN
Sistematizacija	*GeoGebra* dinamički radni listovi	dinamička	F, G, P, I	HR, PN
	Word dokumenti i štampani materijali	statička		
Evaluacija i samoevaluacija znanja	*GeoGebra* dinamički radni listovi	dinamička	G, P, I	PN
	Testovi znanja	statička		

Legenda: Oblici rada u nastavi: F – frontalni; G – grupni; P – rad u paru; I – individualni. Nastavne metode: DI – demostrativno-ilustrativna; HR – heuristički razgovor; IN – istraživački usmerena nastava; PN – problemska nastava.

U zavisnosti od kompleksnosti sadržaja, specifičnosti samih nastavnih aktivnosti, tehničkih mogućnosti (dostupnost računara), predznanja i sposobnosti učenika za samostalno sticanje znanja, nastavnik bira najadekvatnije oblike i metode rada za postizanje postavlenih ciljeva i željenih ishoda učenja. U Tabeli 3.2. prikazane su mogućnosti izbora optimalnih oblika i metoda rada, uzimajući u obzir aktivnosti učenika u radu sa kognitivno-vizuelnim materijalima.

3.3.2. Uvođenje pojma prvog izvoda funkcije. Koncept tangente

Koncept izvoda funkcije je od ključnog značaja za razumevanje diferencijalnog i integralnog računa. Zbog toga je veoma važno da učenici/studenti pravilno razumeju i usvoje: definiciju prvog izvoda funkcije u tački, različite interpretacije prvog izvoda i izvodnu funkciju. Međutim, koncept izvoda funkcije je kompleksan, apstraktan i objektivno težak za razumevanje, zato što uključuje i druge koncepte, može se tumačiti na različite načine i može biti prikazan različitim reprezentacijama. Definicija prvog izvoda funkcije u tački (granična vrednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta) obuhvata tri koncepta: funkciju, količnik i graničnu vrednost. Prvi izvod funkcije u tački može se interpretirati na različite načine: kao nagib tangente na grafik funkcije, kao trenutna brzina promene funkcije ili kao količnik diferencijala funkcije i diferencijala argumenta (Lajbnicova notacija). Koncept izvoda može biti prikazan različitim reprezentacijama (algebarskim, grafičkim i numeričkim), pri čemu je posebno bitno razumevanje odnosa između algebarskih i grafičkih reprzentacija.

U procesu učenja kompleksnih i apstraktnih nastavnih sadržaja koji se odnose na koncept izvoda, izvesno je da se mogu očekivati i neke specifične poteškoće. Studije o učeničkom/studentskom razumevanju izvoda funkcije i idejama i pojmovima koji su povezani sa njim identifikovale su značajan broj miskoncepcija (učenička saznanja koja nisu u skladu sa naučnim saznanjima, a mogu nastati kao posledica životnog iskustva ili nastave u školi) i poteškoća u procesu učenja kao i moguće uzroke njihove pojave (Asiala *et al.*, 1997; Aspinwall *et al.*, 1997; Berry & Nyman, 2003; Orton, 1983a; Ubuz, 2001, 2007). Posebne poteškoće učenici/studenti imaju u razumevanju dinamičke prirode ovog pojma, odnosno u razumevanju graničnog procesa u definiciji izvoda funkcije (Tall, 2010).

Neke ustaljene miskoncepcije učenika/studenata koje se odnose na izvod, istakla je Ubuz (2001: 129) u svojoj studiji: a) izvod funkcije u tački isto je što i izvodna funkcija; b) jednačina tangente je izvodna funkcija; c) izvod funkcije u tački je jednačina tangente; d) izvod funkcije u tački je ordinata tačke u kojoj tangenta dodiruje grafik funkcije. Autor takođe navodi i moguće razloge zbog kojih učenici/studenti poistovećuju različite koncepte: a) nedostatak sposobnosti razlikovanja koncepata koji se javljaju u istom kontekstu ili konfuzija između koncepata koji opisuju različita svojstva iste situacije; b) neadekvatno proširenje konkretnog slučaja na opšti slučaj; c) nedostatak razumevanja grafičkog prikaza (*ibid*., 133).

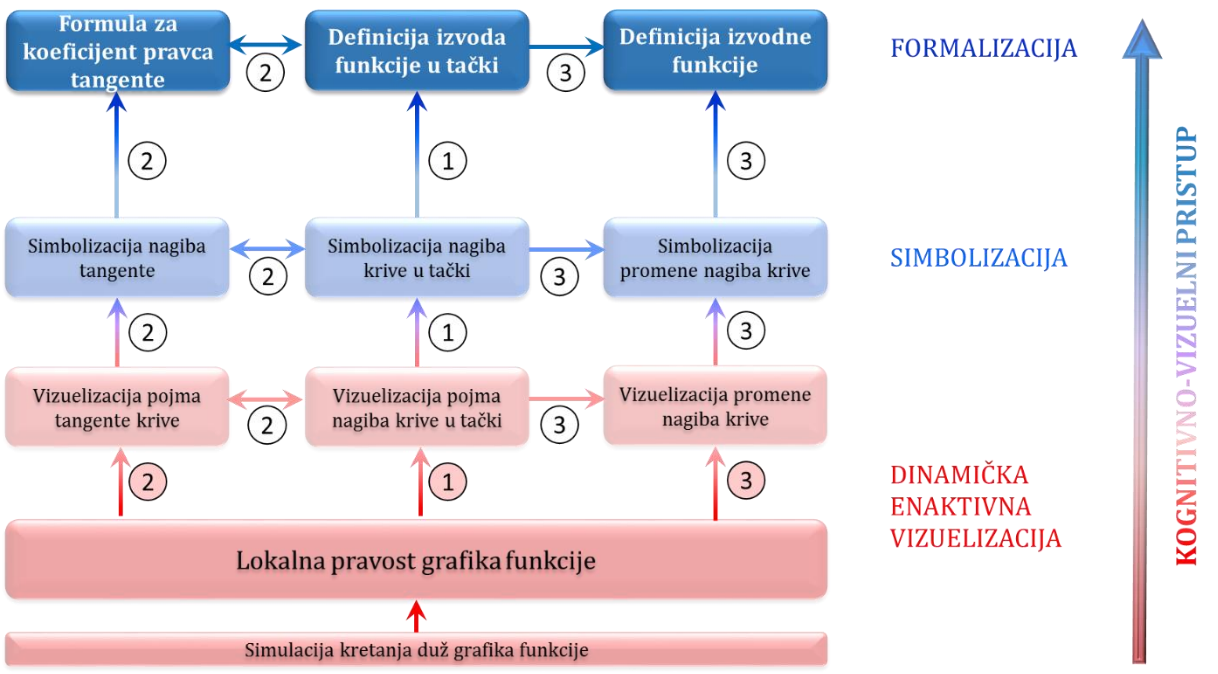
Miskoncepcije o tangenti grafika funkcije mogu prouzrokovati poteškoće u konceptualnom razumevanju izvoda. U istraživanju koje su sproveli Biza, Christou i Zachariades (2006), ustanovljeno je da neki učenici smatraju da grafik funkcije može imati više od jedne tangente u tački, kao i da tangenta postoji u tački u kojoj levi i desni izvod nisu jednaki. Takođe, neki učenici imaju pogrešno uverenje da je funkcija diferencijabilna u tački u kojoj grafik ima vertikalnu tangentu, tj. da je crtanje tangente grafika funkcije ekvivalent diferencijabilnosti funkcije.

Prethodna znanja učenika o konceptu tangente u geometriji i analitičkoj geometriji (npr. tangenta kružnice ima samo jednu zajedničku tačku sa kružnicom i sve tačke kružnice su sa iste strane tangente) mogu da prouzrokuju poteškoće u razumevanju koncepta tangente u diferencijalnom računu (Biza, Christou & Zachariades, 2008). Kod učenika se mogu pojaviti kognitivni konflikti u situacijama koje nisu u skladu sa njihovim prethodnim iskustvima, kao što je slučaj sa razumevanjem tangente koja ima više od jedne zajedničke tačke sa grafikom funkcije (npr. tangenta grafika funkcije $y = x^3$ u tački $x = 1$) ili tangente u prevojnoj tački zato što se u okolini dodirne tačke grafik funkcije nalazi sa obe strane tangente. U ovakvim situacijama učenici često imaju pogrešna uverenja i smatraju da prikazana prava nije tangenta grafika funkcije (Biza *et al*, 2006; Vincent, LaRue, Sealey & Engelke, 2015).

Iz svega navedenog može se zaključiti da pravilno usvajanje i razumevanje pojma izvoda funkcije predstavlja kompleksan kognitivni proces, propraćen kognitivnim konfliktima i suptilnim teškoćama učenika. U cilju prevazilaženja konceptualnih prepreka u obradi pojmova matematičke analize, u savremenoj literaturi se posvećuje velika pažnja vizuelnim pristupima podržanim računarskim tehnologijama (Такачи и Самарџијевић, 2006).

Jedan od novijih pristupa uvođenju pojmova kalkulusa/matematičke analize je dao David Tall (2010) i nazvao ga „senzibilan pristup" (eng. „*sensible approach*") kalkulusu. Glavna prednost senzibilnog pristupa je to što se konceptima za koje se zna da izazivaju teškoće kod učenika (npr. granični procesi) u početnim fazama učenja ne pristupa formalno, već se putem perceptivnih i intuitivnih saznanja prirodno razvijaju temeljne ideje kalkulusa na način da se izgradi kognitivna osnova za njihovu simbolizaciju, a zatim i formalizaciju u daljem toku procesa učenja. Za usvajanje formalne definicije izvoda funkcije, kognitivnu osnovu predstavlja dinamička vizuelna ideja „lokalne pravosti" (eng. „*local straightness*") koja je bazirana na prirodi čovekove vizuelne percepcije i ogleda se u sledećem: uvećavajući deo grafika funkcije koji se nalazi u okolini neke njegove tačke, može se videti kako grafik izgleda sve manje i manje „zakrivljeno" i pod velikim uvećanjem on izgleda kao prava linija (Slika 3.4). Ovo omogućava učeniku da „vidi" nagib te prave linije i samim tim da izgradi geometrijski smisao pojma nagiba krive, a zatim i pojma tangente na krivu. Pri tom, granični proces, koji je u osnovi ovih pojmova, uključen je implicitno (pomoću uvećavanja dela grafika funkcije) i dinamički je vizuelizovan, pa se na taj način prevazilaze konceptualne prepreke u razumevanju graničnih vrednosti.

Za obradu pojma prvog izvoda funkcije, ova disertacija predlaže kognitivno-vizuelnu koncepciju zasnovanu na vizuelizaciji procesa učenja u skladu sa osnovnim idejama senzibilnog pristupa kalkulusu. Kognitivno-vizuelni pristup je koncipiran tako da se u obradi izvoda funkcije, prvo uvodi pojam izvoda funkcije u tački, zatim pojam tangente grafika funkcije i na kraju pojam izvodne funkcije, na način kako je prikazano na narednoj šemi.

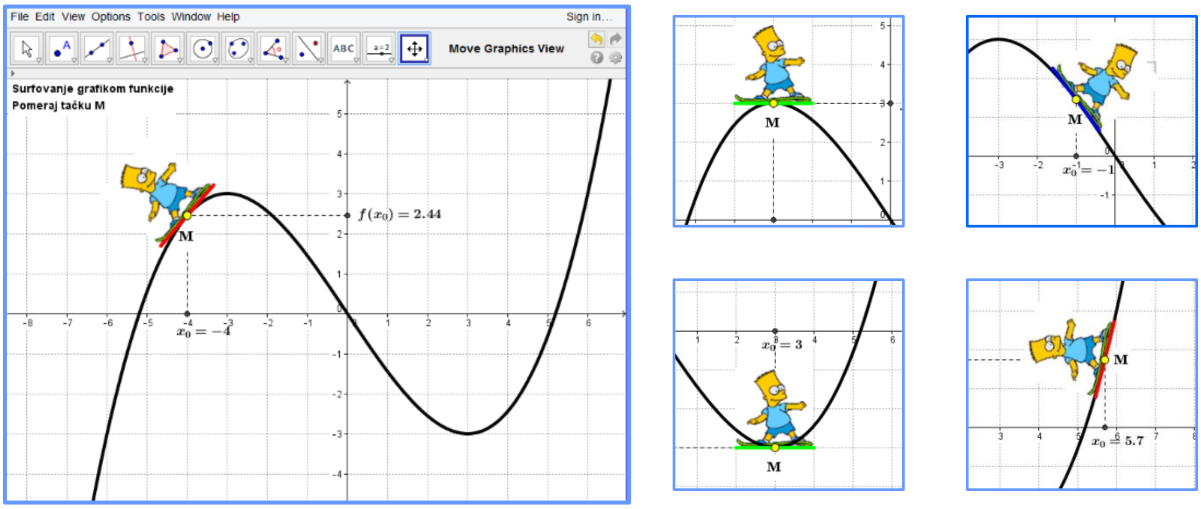


Šema 3.6. *Kognitivno-vizuelni pristup obradi pojma izvoda funkcije*

U osnovi ovog pristupa je dinamička enaktivna vizuelizacija matematičkih ideja, koje se u procesu učenja transformišu u simboličke forme, a zatim u mentalne slike formalnih koncepata (u formalne definicije). Drugim rečima, formalne definicije se učenicima ne pružaju kao gotova znanja, već predstavljaju krajnji ishod procesa učenja. Proces učenja je podržan kognitivno-vizuelnim nastavnim materijalima i upotrebom računara, a posebno grafičkim, dinamičkim i interaktivnim mogućnostima *GeoGebra* softvera.

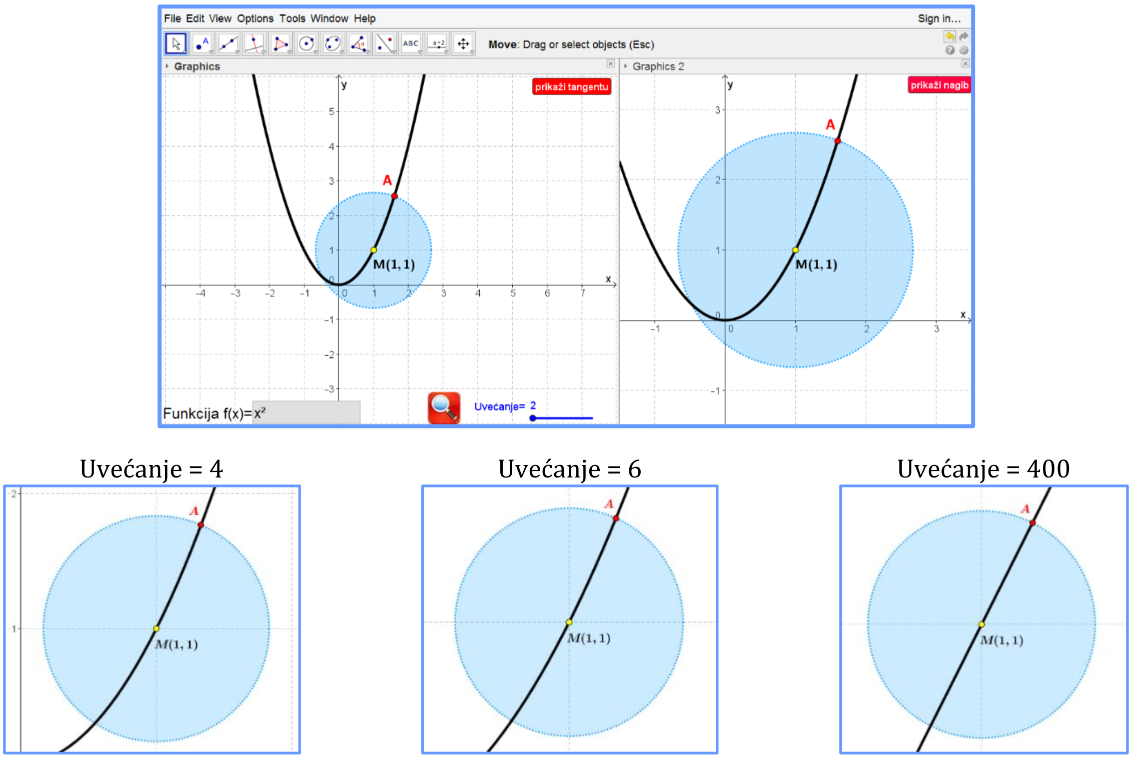
U daljem tekstu biće opisano uvođenje definicije prvog izvoda funkcije u tački, kognitivno-vizuelnim pristupom. Polazna tačka u obradi pojma izvoda funkcije je pojam nagiba krive koji se uvodi oslanjajući se na prethodna znanja i intuitivne predstave koje učenici imaju o tome. U ovoj početnoj fazi učenja, potrebno je da učenici steknu uvid u pojam nagiba krive na intuitivnom, enaktivnom i vizuelnom nivou apstrakcije. Za realizaciju nastavnih aktivnosti koriste se unapred pripremljeni *GeoGebra* nastavni materijali sa kojima učenici rade samostalno.

Materijal koji je prikazan na Slici 3.3. predstavlja *GeoGebra* simulaciju kretanja duž grafika funkcije. Učenici „surfuju" grafikom funkcije tako što manipulišu objektima na ekranu pomoću miša. Učenici vide grafik kao fizički objekat i kada pomeraju tačku duž grafika, putem senzomotornih aktivnosti mogu da osete promenu nagiba krive. Surfovanje u *GeoGebra* okruženju podržava sticanje uvida u promenu nagiba krive, sa krajnjim ishodom da učenici mogu da izvode zaključke o nekim kvalitativnim svojstvima nagiba (npr. nagib je pozitivan/negativan, nagib se povećava/smanjuje), jednostavno „gledajući duž krive", bez numeričkog izračunavanja ili simboličke manipulacije.



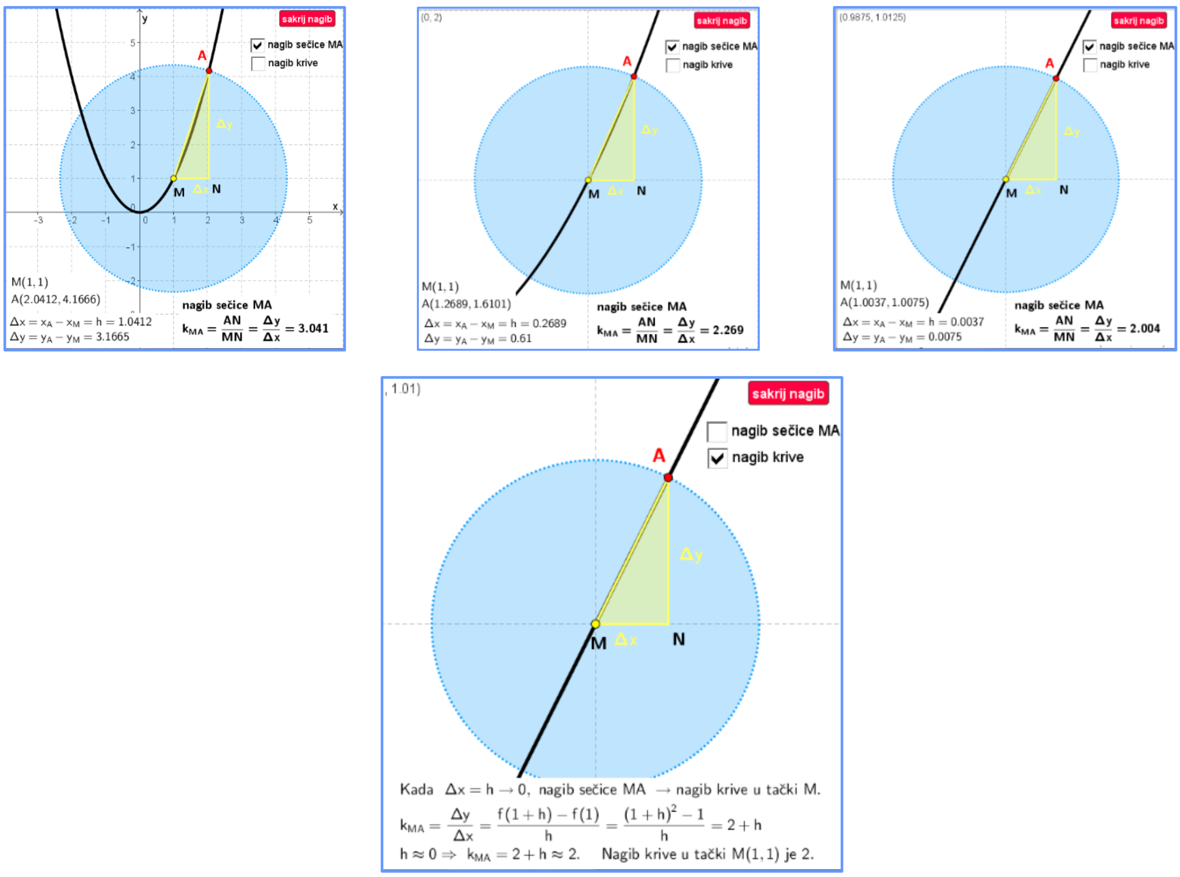
Slika 3.3. *Simulacija kretanja duž grafika funkcije*

Pojam nagiba krive se dalje obrađuje na suptilnijem nivou, uvođenjem pojma lokalne pravosti grafika funkcije. Za tu svrhu se koristi *GeoGebra* nastavni materijal u kome je dinamički vizuelizovan proces uvećavanja dela grafika funkcije u okolini proizvoljno izabrane tačke (Slika 3.4). Učenicima se postavlja zadatak da pomeraju klizač „Uvećanje" i da prate promene koje nastaju u desnom delu radnog lista. Učenici mogu da vide kako izgleda veoma mali deo grafika grafika funkcije $y = x^2$ u okolini tačke $M(1,1)$. Pod velikim uvećanjem, deo grafika izgleda kao prava linija i ta prava, MA ima određeni nagib prema x −osi, što se može videti u desnom delu radnog lista. Na taj način učenici mogu da izgrade geometrijski smisao pojma nagiba krive u tački.



Slika 3.4. *Dinamička vizuelizacija lokalne pravosti grafika funkcije* $\boldsymbol{y=x^2}$ *u okolini tačke* $\boldsymbol{M}$ $(\mathbf{1},\mathbf{1})$

U daljem procesu učenja dinamička vizuelizacija se povezuje sa simbolizacijom (Slika 3.5). Zadatak učenika je da izračunaju koliki je nagib grafika funkcije u tački $M(1,1)$.

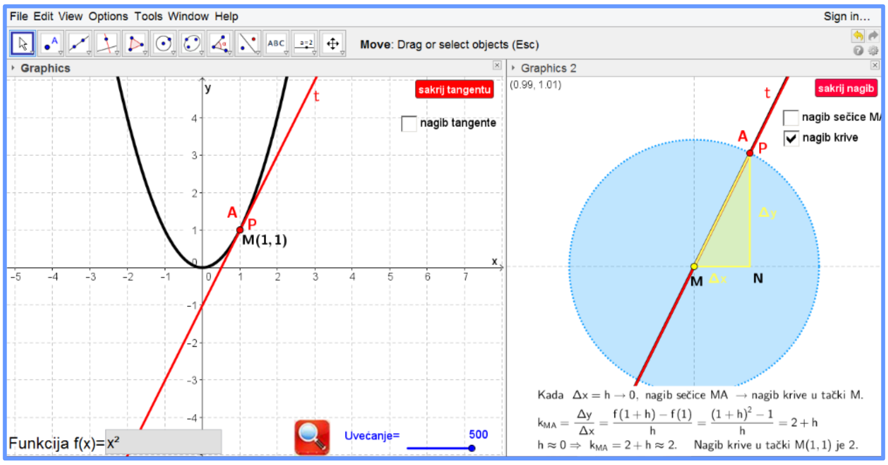


Slika 3.5. *Povezivanje dinamičke vizuelizacije i simbolizacije nagiba krive u tački*

Izbor opcije „nagib sečice MA” i pomeranje klizača „Uvećanje” omogućava učenicima da prate promenu numeričkih vrednosti za nagib sečice. Oni mogu da zaključe da se nagib (koeficijent pravca) sečice približava broju 2. Izborom opcije „nagib krive” prikazuje se algebarski postupak izračunavanja nagiba krive u tački M. U prikazanom postupku, granična vrednost se ne razmatra eksplicitno, već se koristi da je $\Delta x = h \approx 0$.

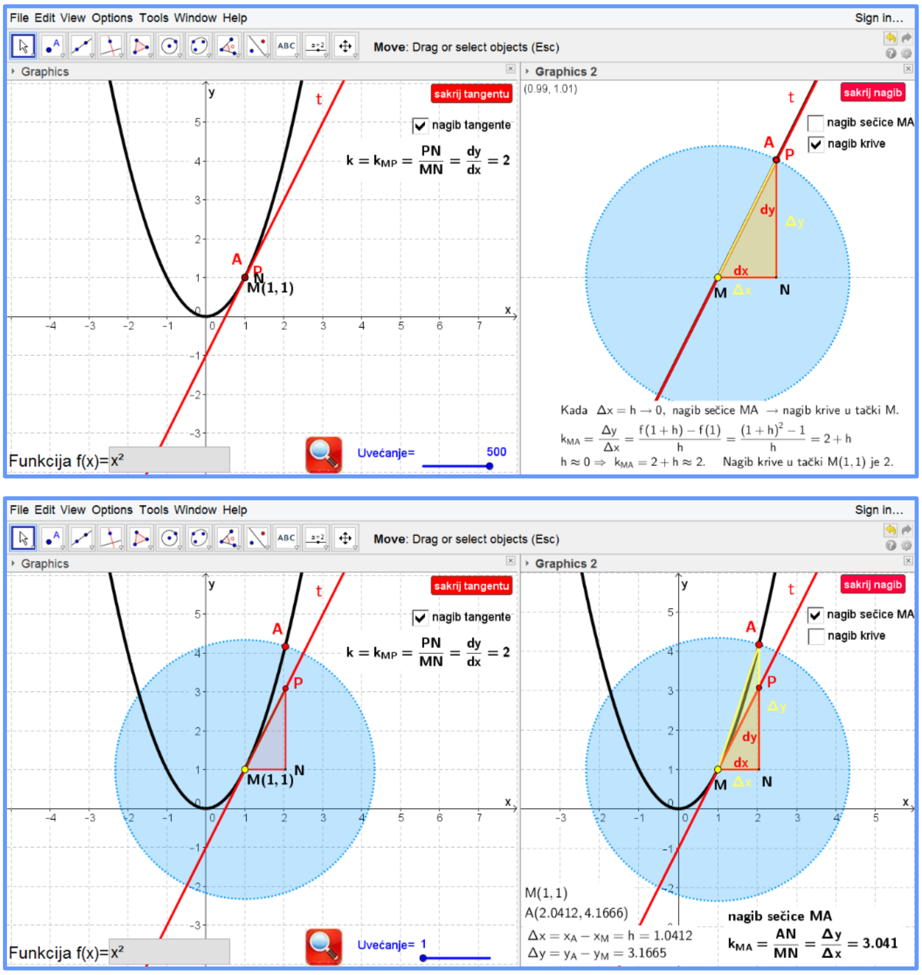
Kada učenici uspostave vezu između dinamičke vizuelizacije i simbolizacije, prelazi se na formalno izučavanje sadržaja, i pri tom se pojam granične vrednosti razmatra eksplicitno. Prvi izvod funkcije u tački se uvodi kao nagib grafika funkcije u tački. Na osnovu stečenih saznanja, učenici samostalno (ili uz pomoć nastavnika) izvode zaključak: prvi izvod funkcije $f(x) = x^2$ u tački $x = 1$ je $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2$. Nastavnik dalje usmerava učenike u izvođenju uopštenog zaključka, s tim što je potrebno da naglasi da u nekim slučajevima posmatrana granična vrednost ne postoji, i da će takve situacije biti razmatrane na nekom od narednih časova. Generalizacijom učenici dolaze do formalne definicije: granična vrednost $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ukoliko postoji, je prvi izvod funkcije f u tački x_0.

Prethodno opisani metodički pristup uvođenju definicije izvoda funkcije u tački (vizuelni, zatim simbolički i na kraju formalni pristup sadržajima), primenjuje se i kod obrade tangente grafika funkcije (Šema 3.6). Kognitivna osnova za obradu pojma tangente grafika funkcije je lokalna pravost grafika, pa se pojam tangente uvodi vizuelno, kao granični slučaj sečice MA (Slika 3.6).



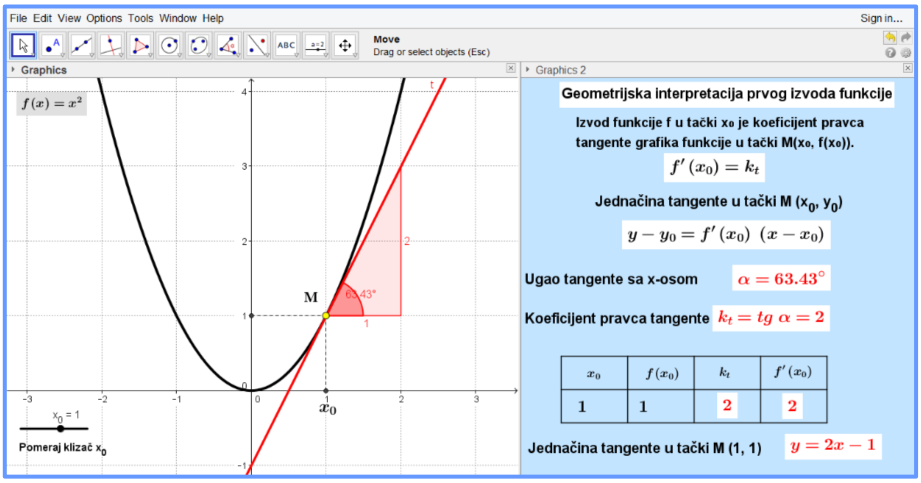
Slika 3.6. *Vizuelizacija pojma tangente krive*

Simbolizacija nagiba tangente (Slika 3.7) se ogleda u sledećem: nagib tangente MP je nagib krive u tački $M(1,1)$, pa je koeficijent pravca tangente $k = 2$. Koeficijent k može se odrediti i na osnovu geometrijske interpretacije nagiba prave MP, odnosno iz pravouglog trougla MNP. Ako horizontalnu komponentu nagiba prave MP obeležimo sa dx ($dx = MN = \Delta x$), a vertikalnu sa dy ($dy = PN \approx \Delta y$, kada $\Delta x \approx 0$) tada je $k = dy/dx$. Na ovaj način se učenici upoznaju i sa pojmom diferencijala nezavisno promenljive (dx), odnosno diferencijala funkcije (dy), kao i sa Lajbnicovim trouglom (ΔMNP).



Slika 3.7. *Simbolizacija nagiba tangente – koeficijent pravca tangente*

Formalni pristup obradi sadržaja koji se odnose na tangentu, obuhvata povezivanje znanja o koeficijentu pravca tangente sa formalnom definicijom izvoda funkcije u tački (Slika 3.8).

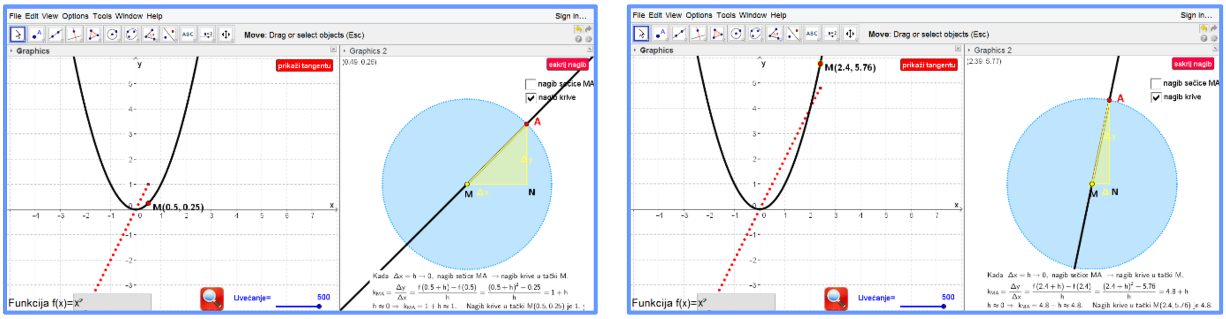


x_0	$f(x_0)$	k_t	$f'(x_0)$
1	1	2	2

Slika 3.8. *Geometrijska interpretacija prvog izvoda funkcije u tački*

Pojam tangente i pojam prvog izvoda funkcije uvedeni su pomoću istog pojma – nagiba krive u tački, pa učenici mogu jednostavno da izvedu sledeći zaključak: koeficijent pravca tangente = nagib krive u tački = prvi izvod funkcije u tački. Iz ovoga sledi da je $k = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. Dakle, $k = f'(x_0)$, odnosno koeficijent pravca k, tangente grafika u tački $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ je izvod funkcije f u tački x_0. U daljem radu potrebno je da učenici zapišu jednačinu tangente na grafik funkcije f u tački $M\big(x_0, f(x_0)\big)$, a zatim da geometrijsku interpretaciju prvog izvoda primene u određivanju jednačine tangente grafika funkcije $y = x^2$ u tački $M(1,1)$.

Izvodna funkcija f', broju x dodeljuje broj $f'(x)$. Na osnovu definicije prvog izvoda funkcije u tački, funkcija f' se definiše na sledeći način $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. U obradi pojma izvodne funkcije kognitivno-vizuelnim pristupom, polazi se od vizuelizacije promene nagiba krive (Slika 3.9). Kada se tačka M pomera duž grafika funkcije, u levom delu ekrana prikazuju se odgovarajući uvećani delovi grafika i numerička vrednost nagiba krive u tački M. Istovremeno, u desnom delu ekrana se prikazuju tačke crvene boje čije su ordinate jednake nagibu krive u tački M. Dinamička vizuelizacija pruža mogućnost učenicima da steknu globalni uvid u pojam nagiba grafika funkcije i da shvate da je to promenljiva veličina koja zavisi od položaja tačke M (od nezavisno promenljive x), odnosno da je to funkcija čiji je grafik nastao iscrtavanjem crvenih tačaka u levom delu ekrana.

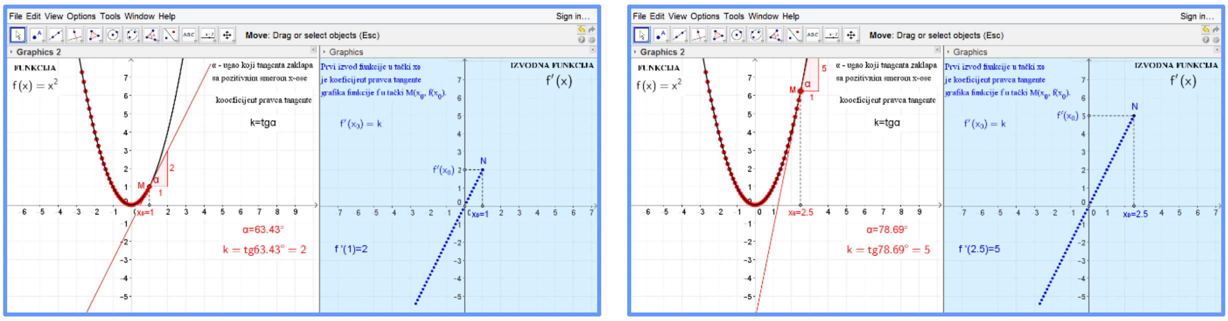


Slika 3.9. *Dinamička viizuelizacija promene nagiba krive*

Postupak simbolizacije promene nagiba grafika funkcije $y = x^2$, sprovodi se na sledeći način: Nagib u proizvoljnoj tački $M\big(x, f(x)\big)$ je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x + h$. Kako je $h \approx 0$, sledi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + h \approx 2x$. Dakle, grafik koji je prikazan crvenom bojom je grafik funkcije $y = 2x$.

Nakon uspostavljanja veze između dinamičke vizuelizacije i simbolizacije, prelazi se na formalizaciju pojma izvodne funkcije. Učenici izvode zaključak da je za funkciju $f(x) = x^2$, izvodna funkcija $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x$. Generalizacijom učenici dolaze do formalne definicije: za funkciju f, izvodna funkcija je $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

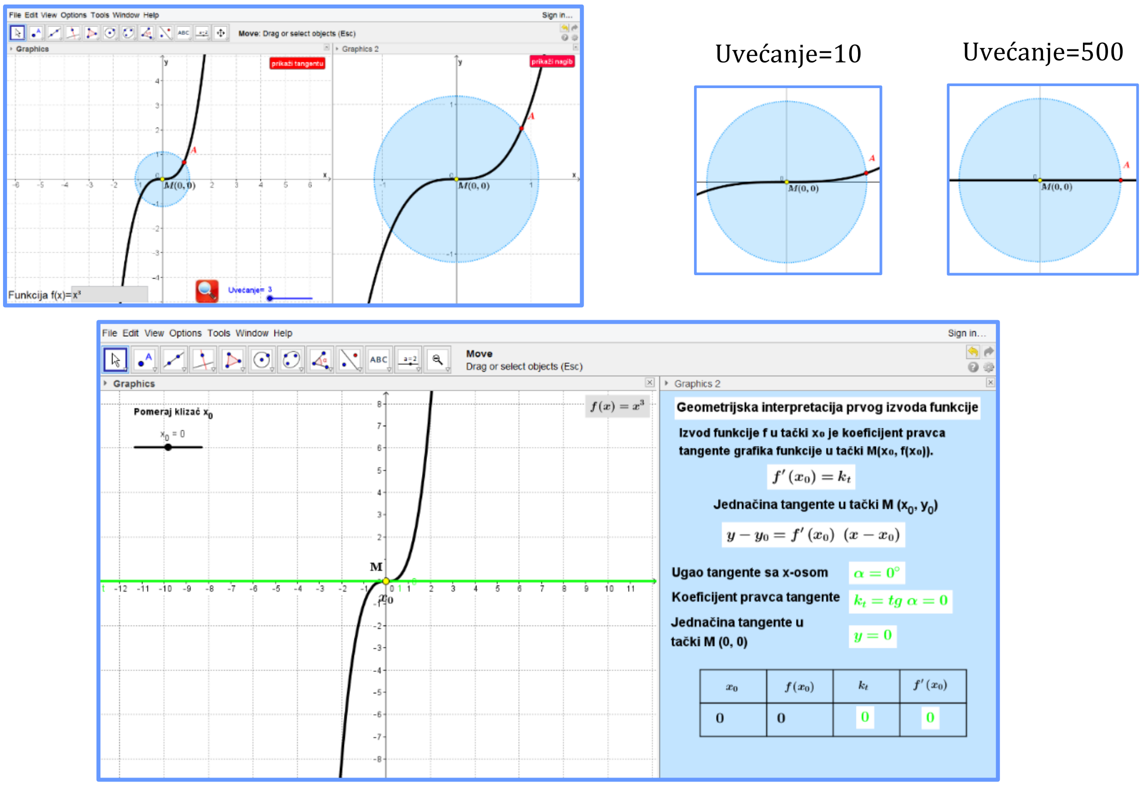
U daljoj obradi pojma izvoda funkcije kognitivno-vizuelnim pristupom, uspostavljaju se eksplicitne veze između grafika funkcije, tangente i grafika izvodne funkcije. Koristeći dinamičke osobine softvera *GeoGebra*, može se prikazati proces generisanja grafika izvodne funkcije f' pomoću grafičke reprezentacije nagiba tangente u datoj tački grafika funkcije f (Slika 3.10). U desnom delu *GeoGebra* radnog lista prikazan je grafik funkcije f, tačka $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ koja može da se pomera duž grafika funkcije f, kao i tangenta grafika u tački M i geometrijska reprezentacija nagiba tangente (ugao α koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x −ose i Lajbnicov trougao). Pomeranje tačke M duž grafika funkcije, dovodi do odgovarajućih promena položaja tangente i vrednosti koeficijenta pravca. U levom delu radnog lista je prikazana tačka $N\big(x_0, f'(x_0)\big)$, gde je $f'(x_0)$ jednako koeficijentu pravca (k) tangente u tački M. Ako se tački N uključi trag, tada se pomeranjem tačke M, odnosno promenom njene apscise x_0, a samim tim i koeficijenta pravca tangente, generišu tačke koje određuju grafik izvodne funkcije f', koji je prikazan plavim tačkicama. Prikazani postupak primene geometrijske reprezentacije nagiba tangente u dinamičkoj vizuelizaciji izvodne funkcije, metodički je veoma koristan za pravilno usvajanje i grafičko razumevanje koncepta izvoda (Такачи и Радовановић, 2009).



Slika 3.10. *Dinamička vizuelizacija izvodne funkcije*

Uzimajući u obzir navedene činjenice o mogućim poteškoćama učenika u razumevanju koncepta izvoda, došlo se do zaključka da posebnu pažnju treba posvetiti razumevanju pojma izvoda funkcije i tangente u tačkama u kojima je prvi izvod nula ili u kojima ne postoji. U realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa koriste se *GeoGebra* nastavni materijali, koji omogućavaju učenicima da „vide" kako izgleda grafik funkcije u veoma maloj okolini date tačke, a zatim da ta saznanja povežu sa pojmom tangente i prvim izvodom funkcije u tački. Za obradu ovih sadržaja odabrane su tri funkcije za koje se razmatraju izvod i tangenta u zadatoj tački:

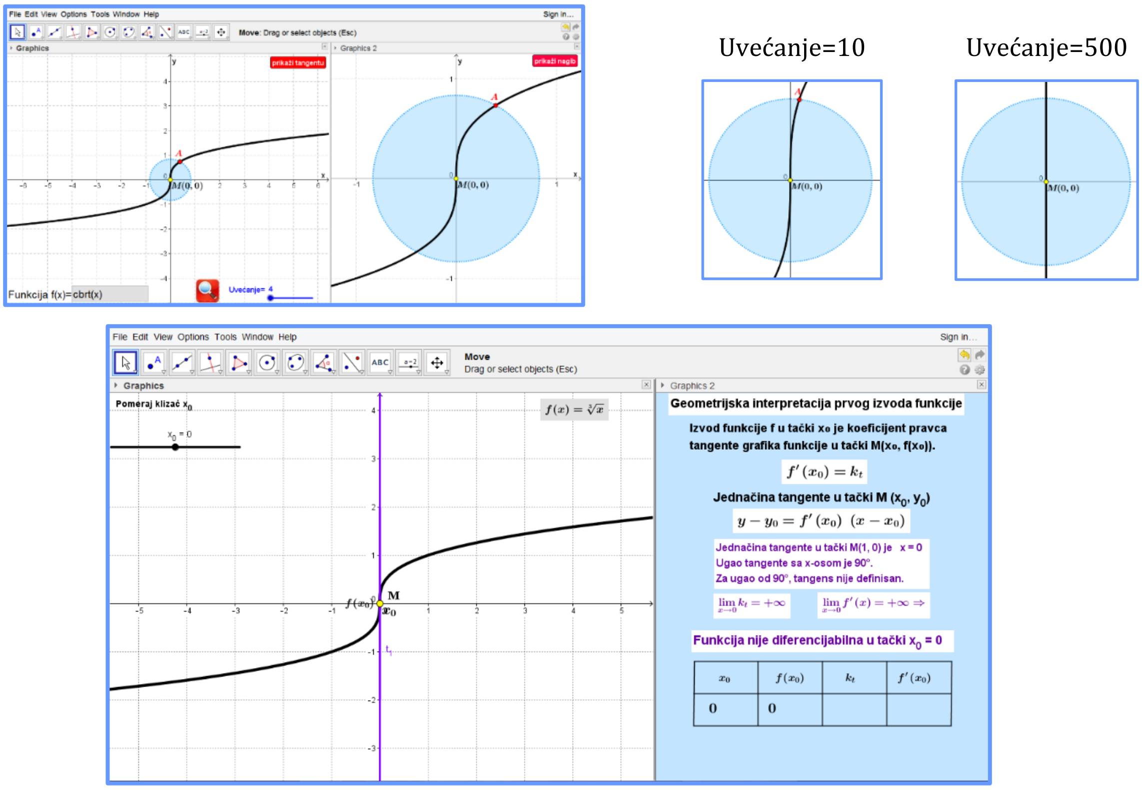
1) Funkcija $y = x^3$ u tački $x = 0$ ima tangentu paralelnu sa x–osom i prvi izvod je 0 (Slika 3.11).



x_0	$f(x_0)$	k_t	$f'(x_0)$
0	0	0	0

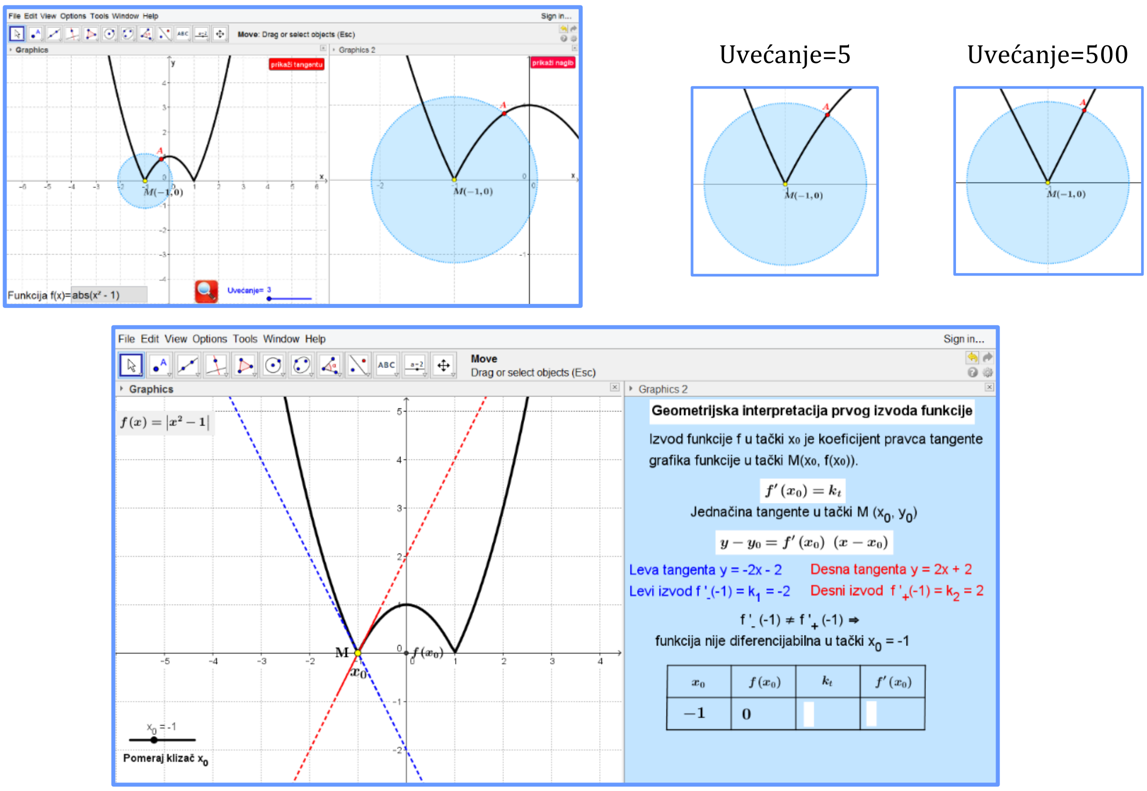
Slika 3.11. *Tangenta grafika funkcije* $\boldsymbol{y = x^3}$ *u tački* $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

2) Funkcija $y = \sqrt[3]{x}$ u tački $x = 0$ ima tangentu normalnu na x–osu i prvi izvod ne postoji, tj. funkcija nije diferencijabilna (Slika 3.12).



Slika 3.12. *Tangenta grafika funkcije* $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$ *u tački* $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$

3) Funkcija $y = |x^2 - 1|$ u tački $x = -1$ $(x = 1)$ nema tangentu i prvi izvod ne postoji (Slika 3.13). Kod obrade ove funkcije uvodi se pojam levog/desnog izvoda.



Slika 3.13. *Leva i desna tangenta grafika funkcije* $\boldsymbol{y = |x^2 - 1|}$ *u tački* $(\mathbf{-1}, \mathbf{0})$

Nakon obrade navedenih funkcija, uvodi se pojam kritičnog broja, odnosno kritične tačke funkcije, koji se definišu na sledeći način: Broj c je kritičan broj funkcije f ako je ili $f'(c) = 0$ ili $f'(c)$ ne postoji. Tačka sa koordinatama $\left(c, f(c)\right)$ je kritična tačka. Napomenimo da se u obradi nastavne teme Izvod funkcije kognitivno-vizuelnim pristupom, pojam kritičnog broja/tačke funkcije i ispitivanje osobina tangente i izvoda funkcije u njima, razmatraju u svim metodskim jedinicama, dok se u tradicionalnoj nastavi ovi pojmovi uvode znatno kasnije (kod ispitavanja ekstremnih vrednosti funkcija).

3.3.3. Geometrijska interpretacija prvog izvoda funkcije u matematičkim zadacima

Sadržaji u kojima se razmatra geometrijska interpretacija prvog izvoda funkcije, prisutni su u svim važećim udžbenicima i zbirkama zadataka za četvrti razred gimnazije. Analiza ovih sadržaja pokazuje da su zadaci uniformni po pitanju reprezentacija. Uslovi i zahtevi zadataka, kao i sam postupak rešavanja podrazumevaju rad sa algebarskim reprezentacijama funkcije, tangente i izvodne funkcije. Većina zadataka je formulisana tako da je funkcija zadata analitički, a do krajnjeg rešenja se dolazi sprovođenjem odgovarajućeg postupka koji obuhvata i određivanje jednačine tangente krive (u tački krive, iz tačke koja ne pripada krivoj, koja je paralelna/normalna sa datom pravom). Uvežbavanjem zadataka, učenici mogu da nauče formule za koeficijent pravca tangente $k = f'(x_0)$ i jednačinu tangente $y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$ i da ih primenjuju u zadacima koji se rešavaju poznatim, standardnim postupkom. U tradicionalnim nastavnim sadržajima, koncept izvoda nije podržan vizuelnim reprezentacijama koje su inherentne njegovoj geometrijskoj (grafičkoj) prirodi. Na taj način, geometrijska interpretacija prvog izvoda ostaje bez svog suštinskog određenja – bez geometrije i grafičkog prikazivanja.

Kognitivno-vizuelni pristup proširuje i obogaćuje tradicionalne nastavne sadržaje novom vrstom zadataka – zadacima sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Ovi zadaci sadrže vizuelnu komponentu geometrijske interpretacije prvog izvoda, koja upravo nedostaje tradicionalnim zadacima. Za obradu geometrijske interpretacije prvog izvoda osmišljena su i kreirana četiri tipa zadataka (A, B, C i D tip) sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. U tabeli koja sledi dat je predlog zadataka A, B, C i D tipa i navedene su njihove karakteristike.

Tabela 3.3. *Zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima za obradu geometrijske interpretacije prvog izvoda funkcije*

Tip zadatka	Grafički ulazni podaci	Karakteristike ulaznih podataka	Kognitivne aktivnosti sa grafičkim reprezentacijama	Zahtev zadatka	Prelasci između koncepata i/ ili reprezentacija
A	grafik funkcije	grafik diferencijabilne funkcije f	interpretacija lokalnih osobina grafika funkcije	lokalne osobine funkcije	Gf, Gt $\rightarrow Af, Ai$
	i tangenta	1) $\alpha = 0°$ $\alpha = 45°$ $\alpha = 135°$	interpretacija Gt	lokalne osobine izvodne funkcije – izvod funkcije u tački	
		2) α je oštar ugao 3) α je tup ugao	interpretacija Gt ; konstrukcija i interpretacija Gn		
B	grafik funkcije	grafik funkcije f koja nije diferencijabilna u svim tačkama domena	interpretacija lokalnih/globalnih osobina grafika funkcije; konstrukcija i interpretacija Gt; konstrukcija i interpretacija Gn	lokalne/globalne osobine izvodne funkcije; lokalne osobine grafika izvodne funkcije	Gf $\rightarrow Ai, Gi$
C	grafik izvodne funkcije	grafik izvodne funkcije f' ako je funkcija f diferencijabilna	interpretacija lokalnih/ globalnih osobina grafika izvodne funkcije	lokalne/globalne osobine funkcije lokalne/ globalne osobine grafika funkcije	Gi $\rightarrow Af, Gf$
	grafik izvodne funkcije	grafik izvodne funkcije f' ako je funkcija f diferencijabilna	interpretacija lokalnih/ globalnih osobina grafika izvodne funkcije	lokalne/globalne osobine funkcije; lokalne/globalne osobine izvodne funkcije	Gi, Gt $\rightarrow Af, Ai$
	i tangenta	$0° \leq \alpha < 180°$ $\alpha \neq 90°$	interpretacija Gt ; konstrukcija i interpretacija Gn		
D	grafik izvodne funkcije	grafik izvodne funkcije f' ako funkcija f nije diferencijabilna u svim tačkama domena	interpretacija lokalnih/ globalnih osobina grafika izvodne funkcije	lokalne/globalne osobine funkcije lokalne/ globalne osobine grafika funkcije	Gi $\rightarrow Af, Gf$

Legenda: α – ugao tangente sa pozitivnim smerom x–ose; Gt – grafička reprezentacija tangente; Gn – grafička reprezentacija nagiba tangente; A_f, A_i, G_f, G_i – oznake uvedene u odeljku 3.2.2.

Zadaci A tipa

Zadaci tipa A navode se u literaturi (Asiala *et al.*, 1997) kao zadaci koji mogu da predstavljaju dobru metodičku osnovu za razvijanje grafičkog razumevanja koncepta izvoda i koji su veoma pogodni za ispitivanje znanja učenika/studenata o izvodu funkcije u tački. Uzimajući u obzir da se mogu pojaviti neke specifične učeničke/studentske nejasnoće, miskoncepcije i teškoće (navedene u odeljku 3.3.2), zadaci su ciljano osmišljeni kako bi se one identifikovale i otklonile tokom realizacije nastavnih sadržaja.

U zadacima A tipa, ulazni podaci sadrže grafičku reprezentaciju diferencijabilne funkcije (Gf) i grafičku reprezentaciju tangente (Gt). Na osnovu grafičkih podataka potrebno je odrediti izvod funkcije u tački (Ai) i neko algebarsko lokalno svojstvo funkcije (Af), npr. vrednost funkcije u tački, nulu funkcije, lokalni maksimum/minimum funkcije.

Zadaci A tipa su osmišljeni u cilju razvoja učeničkog/studentskog razumevanja nagiba tangente grafika funkcije kao vrednosti izvodne funkcije u tački. Kako su prethodna učenička/studentska znanja o koeficijentu pravca prave algebarske prirode, to se mogu očekivati i izvesni problemi prilikom rešavanja ovako grafički postavljenih zadataka. Zbog toga je potrebno uputiti učenike/studente da su svi podaci, relevantni za rešavanje zadatka, sadržani u samom grafičkom prikazu i da se dobijaju pravilnim očitavanjem sa koordinatne mreže (interpretacijom grafičkih reprezentacija). Osim toga, važno je naglasiti da se do krajnjeg rešenja može doći na različite načine uz primenu znanja različitih matematičkih oblasti: matematičke analize, geometrije, trigonometrije i analitičke geometrije. Odnosno, učenike/studente treba usmeriti na razmatranje problema sa više različitih aspekata i time podržati razvoj divergentnog mišljenja i kreativnosti.

U nastavku će biti prikazana tri relativno slična zadatka A tipa koji su dizajnirani i struktuirani tako da se ide od jednostavnijih ka složenijim formama (od A1 preko A2 do A3), kako bi učenici/studenti postepeno sticali znanja o matematičkim konceptima i odnosima među njima.

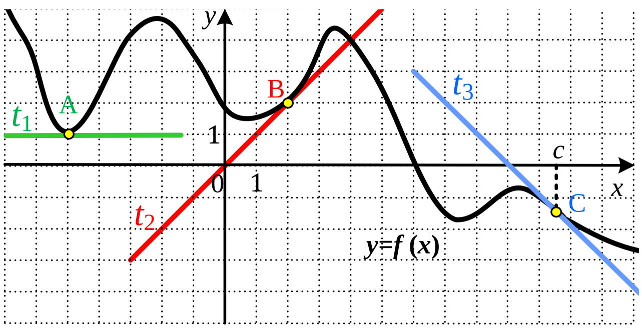
Zadaci $A1$ *tipa*

Zadaci tipa A1 su najjednostavniji zato što veličina ugla koji tangenta gradi sa pozitivnim smerom x −ose, pa samim tim i koeficijent pravca može neposredno da se odredi na osnovu grafičkog prikaza. U A1 zadacima date su tangente na grafik koje su paralelne sa x–osom ili grade ugao od 45°, odnosno 135° sa pozitivnim smerom x–ose.

Zadaci A1 tipa:

Na slici je dat grafik funkcije $y = f(x)$ i tangente t_1, t_2 i t_3 grafika u tačkama A, B i C, redom.

- $f'(-5) =$ ________.
- $f(2) + f'(2) =$ ______.
- Ako je x_0 nula funkcije $y = f(x)$, tada je $x_0 - f'(c) =$ __________ .



Algebarske osobine funkcije razmatraju se u drugom i trećem zadatku. Od učenika se zahteva da odrede vrednost funkcije f za $x = 2$ i nulu funkcije. Interpretacijom grafičke reprezentacije funkcije, prikazane u koordinatnoj mreži, dobija se da je $f(2) = 2$. Posmatrajući tačku preseka grafika funkcije f i x–ose, može se očitati njena prva koordinata, i time odrediti da funkcija ima nulu u tački $x_0 = 6$.

Zahtevi zadatka uključuju algebarske osobine funkcije iz sledećih razloga:

- Prelazak između grafičkih i algebarskih reprezentacija.
- Izgradnja potrebnih veza između koncepta: funkcije, tangente i izvoda funkcije u tački.
- Razlikovanje napred navedenih koncepata. U drugom zadatku učenici/studenti treba da razlikuju $f(2)$ i $f'(2)$. Isto tako potrebno je da razlikuju pojam nule funkcije koja se razmatra u 3. zadatku i pojam nule izvodne funkcije koja se razmatra u prvom zadatku ($f(6) = 0$ i $f'(-5) = 0$).

Ono što je zajedničko za sva tri zadatka jeste određivanje izvoda funkcije u tački, u skladu sa njegovim geometrijskim tumačenjem, tj. kao koeficijenta pravca odgovarajuće tangente. Ovoj problematici treba posvetiti značajnu pažnju i više nastavnog vremena, zato što predstavlja metodičku osnovu za rešavanje složenijih problema koji slede. Poseban akcenat je na rešavanju problema na različite načine, u cilju sticanja sveobuhvatnih znanja, unapređenja strateških kompetencija, podsticanja razvoja divergentnog, kreativnog i kritičkog mišljenja učenika.

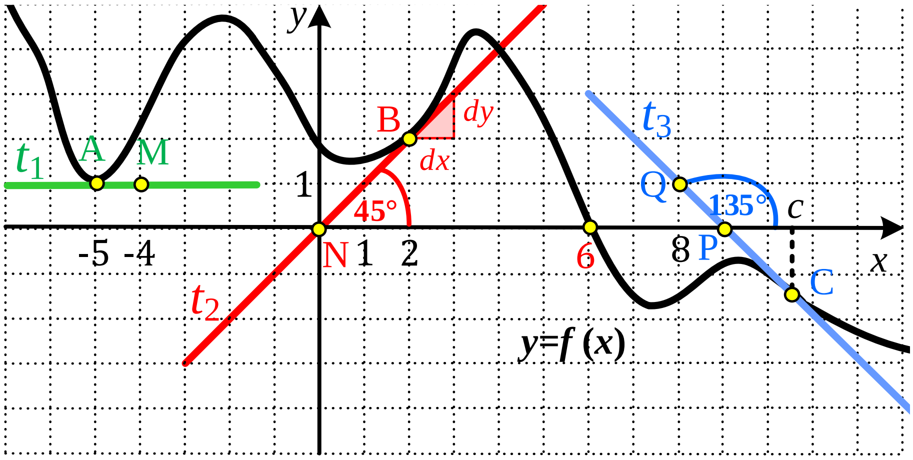
Uzimajući u obzir nastavne sadržaje koji su planirani za obradu kognitivno-vizuelnim pristupom, kao i relevantne sadržaje obrađene tokom prethodnog školovanja, svrsishodno je problem koeficijenta pravca tangente rešiti pomoću: 1) ugla koji tangenta gradi sa pozitivnim smerom x–ose, 2) Lajbnicovog trougla, 3) formule za koeficijent pravca prave kroz dve tačke i 4) jednačine tangente.

Prilikom razmatranja navedenih načina rešavanja problema, potrebno je uvažiti princip postupnosti i sistematičnosti i odgovarajuća obrazloženja prikazati pregledno, npr. u okviru tabele (Slika 3.14). Tabela je deo *PowerPoint* prezentacije koja je korišćena u nastavi za obradu zadatka A1. Elementi u prikazanoj tabeli se prezentuju određenim redosledom, a dinamiku pojavljivanja kontroliše korisnik prezentacije (nastavnik ili učenik).

Za prvi i drugi predloženi način, svojstveno je da se razmatraju karakteristike geometrijskih objekata (ugao i trougao) i da dominiraju vizuelne strategije rešavanja. Rešavanje problema koeficijenta pravca tangente na ova dva načina, doprinosi sticanju novih znanja neophodnih za grafičko razumevanje koncepta izvoda. Usvajanje ovih vizuelnih (grafičkih) metoda od strane učenika je od velikog značaja za efikasnu realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa.

Za treći i četvrti način, karakteristična je primena prethodno stečenih učeničkih znanja iz analitičke geometrije. Razmatraju se algebarske reprezentacije (formula i jednačina) i njihova svojstva, a analitičke strategije rešavanja su dominantne. Određivanje koeficijenta pravca, navedenim algebarskim metodama je složenije i manje adekvatno u odnosu na vizuelne metode.

U tabeli su vizuelne metode prikazane na crvenoj pozadini a algebarske na plavoj, što predstavlja jednu vrstu instrukcije za učenike. Boja pozadine usmerava pažnju učenika na odgovarajući aspekt problema – grafički, odnosno algebarski.



	t_1	t_2	t_3
	$f'(-5) = k_1$	$f'(2) = k_2$	$f'(c) = k_3$
1. Ugao koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x–ose	$\alpha_1 = 0°$ $\Downarrow$ $k_1 = tg\ 0° = 0$	$\alpha_2 = 45°$ $\Downarrow$ $k_2 = tg\ 45° = 1$	$\alpha_3 = 135°$ $\Downarrow$ $k_3 = tg\ 135° = -1$
2. Lajbnicov trougao	spec. slučaj, $dy = 0$ (degenerisan trougao - duž) $k_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{1} = 0$	Lajbnicov trougao $\Downarrow$ $k_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1} = 1$	koeficijent se ne može odrediti (tačka C nema celobrojne koordinate)
3. Formula za koeficijent pravca prave kroz dve tačke	$A(-5,1)\ i\ M(-4,1)$ $k_1 = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$ $\Downarrow$ $k_1 = \frac{1-1}{-5+4} = 0$	$B(2,2)\ i\ N(0,0)$ $k_2 = \frac{y_N - y_B}{x_N - x_B}$ $\Downarrow$ $k_2 = \frac{0-2}{0-2} = 1$	$P(9,0)\ i\ Q(8,1)$ $k_3 = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ $\Downarrow$ $k_3 = \frac{1-0}{8-9} = -1$
4. Jednačina tangente	na osnovu grafika $\Downarrow$ $y = 1$ $\Downarrow$ $k_1 = 0$	na osnovu grafika $\Downarrow$ $y = x$ $\Downarrow$ $k_2 = 1$	jednačina prave koja sadrži tačke P i Q $(y - y_P)(x_Q - x_P) = (y_Q - y_P)(x - x_P)$ $y(8-9) = (1-0)(x-9)$ $y = -x + 9$ $\Downarrow$ $k_3 = -1$

Slika 3.14. *Različite metode rešavanja zadatka A1*

Važno je napomenuti da su za realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa, vizuelne metode daleko značajnije od algebarskih. Međutim, algebarske metode su obuhvaćene iz sledećih razloga:

- Njihovim razmatranjem ujedno se i obnavljaju određeni sadržaji analitičke geometrije koji su potrebni za rešavanje tradicionalnih zadataka o geometrijskoj interpretaciji prvog izvoda.
- Povezivanje znanja različitih matematičkih oblasti u konzistentnu celinu.
- Istovremeno prisustvo algebarskih i grafičkih reprezentacija, kao i različitih strategija rešavanja problema, doprinosi kreiranju okruženja za učenje koje uvažava razlike

između učenika/studenata u pogledu njihovih preferenci i sposobnosti za analitičko i vizuelno mišljenje.

Nakon razmatranja mogućih načina rešavanja problema i formiranja tabele, sa učenicima se može diskutovati o mogućnostima i ograničenjima, prednostima i nedostacima prikazanih metoda. Na primer:

- Za sve tri tangente, koeficijent pravca se može odrediti na prvi, drugi i četvrti način (mogućnost metode).
- U slučaju tangente t_3, rešavanje pomoću Lajbnicovog trougla nije moguće (ograničenje metode).
- Efikasnost primene metode zavisi od konkretnog slučaja – jednačine tangenti t_1 i t_2 se neposredno i jednostavno određuju na osnovu grafičkog prikaza bez algebarske procedure (prednost metode u konkretnom slučaju) dok je za t_3 potreban algebarski postupak koji je relativno obiman i zahteva poznavanje formule (nedostatak iste metode za neki drugi slučaj).
- Vizuelne (grafičke) strategije, svojstvene prvoj i drugoj metodi rešavanja, su očiglednije i jednostavnije od algebarskih procedura i poznavanja formula u trećoj i četvrtoj metode (prednost vizuelnih metoda u odnosu na algebarske).

Diskusija o različitim metodama rešavanja zadatka A1 i njihovo poređenje je značajno zbog toga što učenici mogu da steknu uvid u prirodu zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Bitna karakteristika ovih zadataka jeste da ne postoji univerzalni način ili „standardna šema" rešavanja. Potrebna je fleksibilnost u izboru metode koja je za konkretni zadatak najefikasnija.

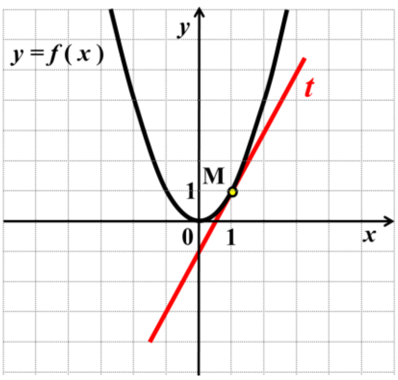
Zadaci A2 tipa

U zadacima tipa A2, ulazni podaci sadrže grafičku reprezentaciju funkcije i tangentu koja sa pozitivnim smerom x–ose gradi oštar ugao $\alpha \neq 45°$. Iz toga sledi da se na osnovu grafičkog prikaza veličina ugla α ne može neposredno odrediti. Da bi se odredio koeficijent pravca tangente (a samim tim i prvi izvod funkcije u tački) potrebno je konstruisati geometrijsku reprezentaciju nagiba tangente. U nastavku je dat primer A2 zadatka.

Zadatak A2 tipa:

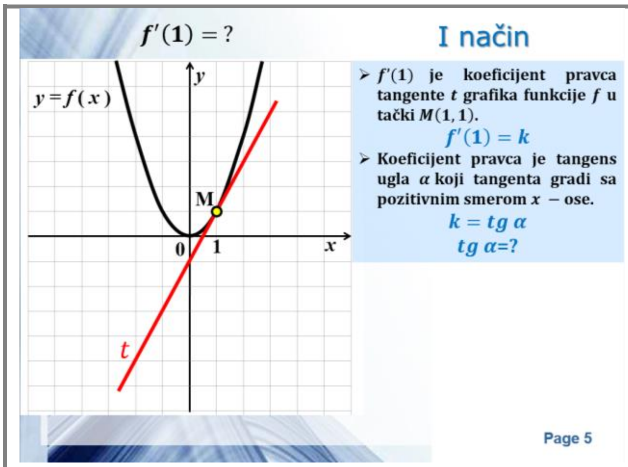
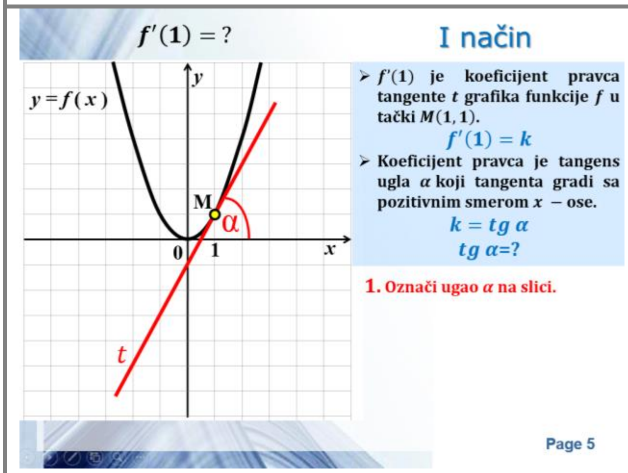
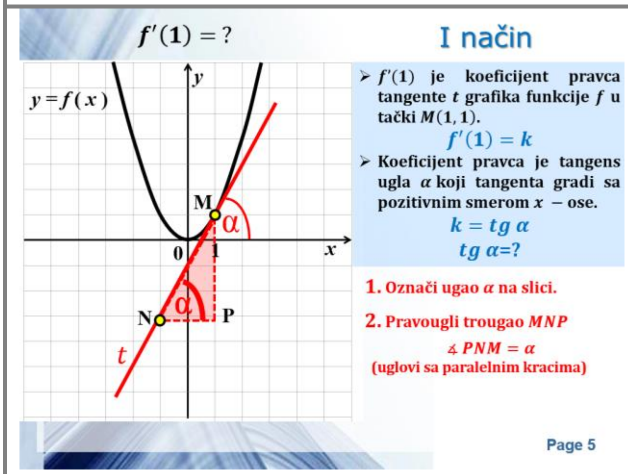
Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$ *i tangenta t grafika funkcije u tački* $M(1,\ 1)$.

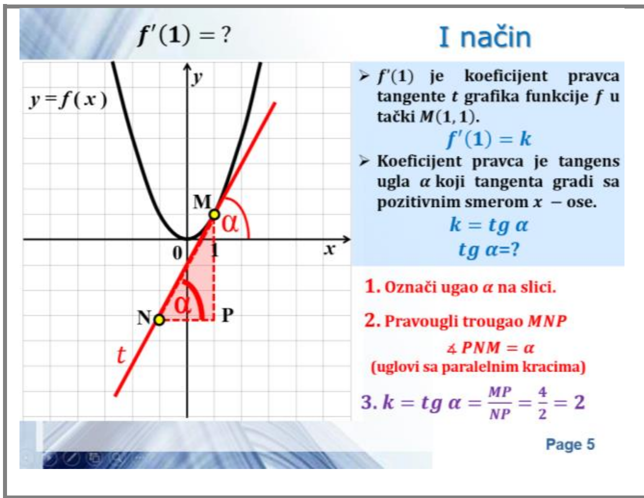
Odredi $f'(1)$.



U ovom zadatku, tačka M ima celobrojne koordinate, pa se koeficijent pravca tangente može dobiti iz Lajbnicovog trougla. Međutim, koeficijent se može odrediti i pomoću bilo kog trougla koji je sličan sa Lajbnicovim trouglom, a koji je pogodno odabran (pravougli trougao čija hipotenuza pripada tangenti, a temena imaju celobrojne koordinate). Ovakvi pravougli trouglovi prikazuju nagib tangente kao geometrijski (grafički) matematički objekat. U nastavku će biti prikazan postupak rešavanja A2 zadatka pomoću pogodno odabranog pravouglog trougla.

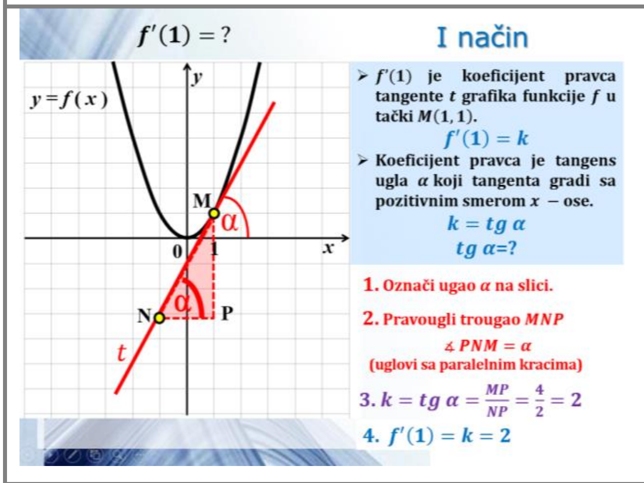
Slika 3.15 prikazuje slajdove iz *PowerPoint* prezentacije koja je korišćena u nastavi prilikom obrade A2 zadatka. Slajdovi su organizivani tako da se postupak rešavanja zadatka prikazuje kroz nekoliko etapa. Etape su određene u saglasnosti sa kognitivnim procesima koji su svojstveni ovom zadatku. Pored svakog slajda je data sažeta metodička napomena o samoj etapi koja je prikazana na slajdu, oblasti matematike kojom su obuhvaćena potrebna znanja, reprezentacijama koje se koriste i aspektu sadržaja koji se razmatra.

	Definisanje strateškog podcilja • matematička analiza i analitička geometrija • algebarska reprezentacija izvoda i nagiba tangente • formalno-aksiomatski i simbolički aspekt sadržaja
	Interpretacija tangente i konstrukcija nagibnog ugla • geometrija • geometrijska reprezentacija tangente i nagibnog ugla • vizuelni i konceptualni aspekt sadržaja
	Konstrukcija grafičke reprezentacije nagiba tangente tj. pravouglog trougla • geometrija • grafička reprezentacija tangente → grafička reprezentacija nagiba tangente • vizuelni i konceptualni aspekt sadržaja



Određivanje koeficijenta pravca tangente iz pravouglog trougla

- trigonometrija pravouglog trougla i analitička geometrija
- grafička reprezentacija nagiba tangente → algebarska reprezentacija nagiba (koeficijent pravca tangente)
- povezivanje vizuelno konceptualnog i simboličko proceduralnog aspekta



Određivanje prvog izvoda funkcije u tački

- matematička analiza
- algebarska reprezentacija nagiba tangente → algebarska reprezentacija izvoda funkcije
- simbolički i proceduralni aspekt sadržaja

Slika 3.15. *Postupak rešavanja zadatka A2*

Algebarske metode navedene kod zadatka A1, mogu se primeniti i za rešavanje prikazanog A2 zadatka. Međutim, rešavanju ovog zadatka može se pristupiti na još jedan algebarski način. Naime, može se poći od eksplicitnog oblika jednačine prave $y = kx + n$, gde je k traženi koeficijent, a n je odsečak na y −osi. Na osnovu grafičkog prikaza, odsečak na y–osi je -1, pa se jednačina tangente može napisati u obliku $y = kx - 1$. Kako tačka $M(1,\ 1)$ pripada tangenti, to je $1 = k \cdot 1 - 1$, odakle sledi da je $k = 2$.

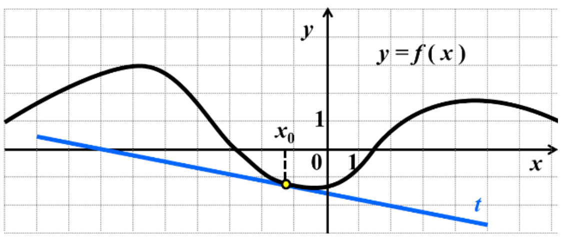
*Zadaci A*3 *tipa*

Zadaci tipa A3 sadrže grafik funkcije i tangentu koja gradi tup ugao $\alpha \neq 135°$ sa pozitivnim smerom $x -$ ose. Ovi zadaci su složeniji od A2 zadataka, upravo zbog činjenice da je α tup ugao čija se veličina ne može odrediti na osnovu grafičkog prikaza.

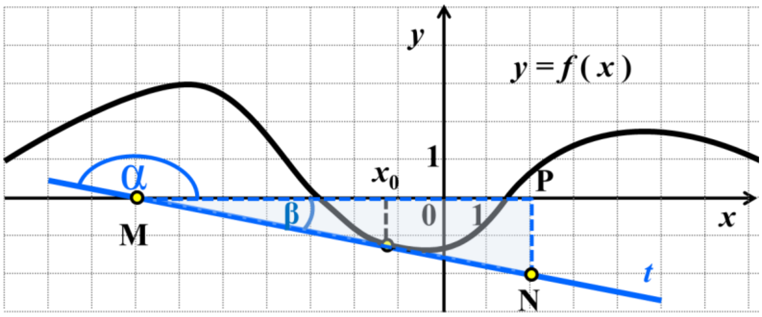
Zadatak A3 tipa:

Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$ i tangenta t grafika u tački s apscisom x_0.

Odredi vrednost izvoda funkcije f u tački x_0.



Prvi izvod funkcije f u tački x_0 može se dobiti iz pogodnog pravouglog trougla uz primenu određenih geometrijskih i trigonometrijskih znanja. Postupak je zahtevniji u odnosu na prethodni zadatak, ali je i dobra prilika da učenici obnove još neke činjenice iz trigonometrije. Slika 3.16 prikazuje grafički pristup rešavanju zadatka A3.



Slika 3.16. *Grafički postupak rešavanja zadatka A3*

Pošto tangenta gradi tup ugao α sa pozitivnim delom x–ose, posmatra se njegov uporedni ugao β, koji je oštar. Da bi odredili $tg\ \beta$ treba uočiti pogodan pravougli trougao čiji je jedan ugao jednak uglu β. Prema grafičkom prikazu, to je trougao MNP.

Za trougao MNP važi da je $tg\ \beta = \dfrac{NP}{MP} = \dfrac{2}{9}$.

Pošto je $\alpha = 180° - \beta$, svođenjem na prvi kvadrant dobija se:

$tg\ \alpha = tg\ (180° - \beta) = -tg\ \beta = -\dfrac{2}{9}$. Dakle, $f'(x_0) = k = tg\ \alpha = -\dfrac{2}{9}$.

Zadaci B tipa

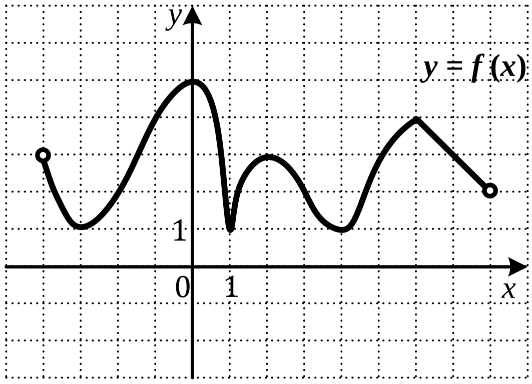
U zadacima B tipa je dat grafik funkcije koja nije diferencijabilna na celom domenu, a zahtevi zadataka se odnose na neko svojstvo izvodne funkcije. Svojstva izvodne funkcije se razmatraju kako u algebarskim, tako i u grafičkim reprezentacijama, a odnose se na: domen, nule i znak. Navedene osobine izvodne funkcije se mogu ispitati pomoću referentnih osobina tangenti grafika funkcije. U postupku rešavanja potrebno je da učenici nacrtaju tangente na samoj slici ili da zamisle kako bi one izgledale kada bi bile nacrtane. Drugim rečima, ovi zadaci zahtevaju da učenici imaju formiranu unutrašnju, mentalnu reprezentaciju tangente, koju mogu crtanjem da prikažu kao spoljašnju grafičku reprezentaciju ali i da, bez crtanja, misaono manipulišu njome. Prethodno iskustvo i znanje koje su učenici stekli u radu sa *GeoGebra* dinamičkim radnim listovima (detaljno opisani u odeljku 3.3.2) svakako je od velikog značaja za njihovu uspešnost u rešavanju zadataka B tipa.

Važno je napomenuti da se prilikom obrade zadataka B tipa, tretiraju i kritične tačke grafika funkcije. One se ovde razmatraju iz perspektive tangente, a ne kao tačke lokalnih ekstrema ili prevojne tačke funkcije. Posebnu pažnju treba posvetiti izgradnji potrebnih veza i relacija između: kritične tačke grafika funkcije, (ne)mogućnosti da se konstruiše tangenta u toj tački, nagiba tangente i odgovarajuće osobine izvodne funkcije. U nastavku teksta su dati primeri zadataka B tipa i metodičke napomene o njihovoj primeni u nastavnoj praksi.

Zadaci B tipa:

Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$.

1. *U koliko tačaka grafik izvodne funkcije f' seče x–osu?*
2. *Izračunaj zbir svih rešenja jednačine $f'(x) = 0$.*
3. *Koliko ima celobrojnih vrednosti argumenta x, takvih da je izvodna funkcija $y = f'(x)$ pozitivna?*
4. *Odredi zbir celobrojnih rešenja nejednačine $f'(x) < 0$.*
5. *Odredi domen funkcije $y = f'(x)$.*

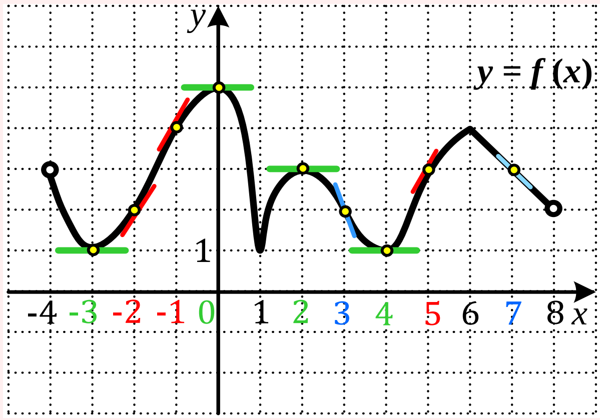
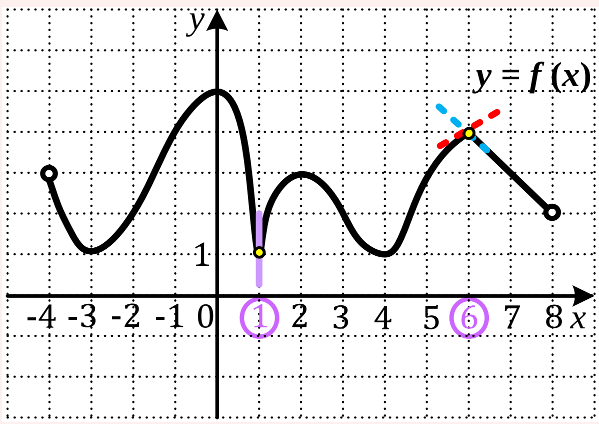


U postupku rešavanja navedenih zadataka B tipa, realizuju se sledeći prelasci između koncepata i/ili reprezentacija (Slika 3.17): algebarsko svojstvo izvodne funkcije $(Ai) \rightarrow$ algebarsko svojstvo tangente koje se odnosi na koeficijent pravca $(At) \rightarrow$ geometrijsko svojstvo tangente koje se odnosi na položaj (ugao) tangente prema x −osi $(Gt) \rightarrow$ konstrukcija odgovarajućih tangenti na grafik funkcije $(Gt, Gf) \rightarrow$ očitavanje sa grafičkog prikaza i zapisivanje rešenja zadatka (Ai).

Prvi i drugi zadatak su slični po pitanju rešavanja, s tim što se zahtev prvog zadatka odnosi na grafičku, a drugog na algebarsku reprezentaciju izvodne funkcije. U oba slučaja je potrebno, na osnovu grafika funkcije f, odrediti kada je izvod te funkcije jednak nuli. Učenici najpre, iz uslova $f'(x) = 0$ izvode zaključak o koeficijentu tangente $(k = 0)$, koji prevode u odgovarajuće geometrijsko svojstvo tangente: tangenta je paralelna sa x–osom. Dalje je potrebno da konstruišu sve horizontalne tangente grafika funkcije. Za dati grafik funkcije postoje četiri tačke u kojima su tangente horizontalne (Slika 3.17), što je ujedno i rešenje prvog primera. Rešenja jednačine $f'(x) = 0$ su prve koordinate ovih tačaka, tj. rešenja su $-3, 0, 2$ i 4. Zbir rešenja jednačine date u drugom primeru je 3.

Prva četiri zadatka zahtevaju ispitivanje nekog lokalnog svojstva izvodne funkcije, dok se u petom zadatku razmatra globalno svojstvo – domen izvodne funkcije. Napomenimo da određivanje domena izvodne funkcije na osnovu grafika funkcije, odnosno „čitanje diferencijabilnosti” sa grafika nije formalan dokaz, ali je i te kako važno za razumevanje ovog pojma.

Za rešavanje petog zadatka potrebno je znanje o grafičkom tumačenju egzistencije izvoda funkcije u tački. Ako se u tački $(a, f(a))$ grafika funkcije f može konstruisati tangenta koja sa x–osom gradi ugao $\alpha \neq 90°$, tada je izvodna funkcija f' definisana u tački a. Odnosno, postoje dva slučaja kada funkcija nema izvod u tački: 1) kada je tangenta u tački grafika funkcije vertikalna i 2) kada grafik funkcije nema tangentu u tački. Na osnovu datog grafika može se uočiti da je u tački $(1, 1)$ tangenta vertikalna. U tački $(6, 4)$ ne postoji tangenta na grafik, zato što su leva i desna tangenta dve različite prave. U svim ostalim tačkama grafika postoje tangente i one nisu vertikalne. Dakle, izvodna funkcija nije definisana za $x = 1$ i $x = 6$ i njen domen je $(-4, 1) \cup (1, 6) \cup (6, 8)$.

Zadatak	Svojstvo izvoda	Koefic. pravca tangente	Tangenta	Konstrukcija tangenti na grafik funkcije	Rešenje
1.	$f' = 0$	$k = 0$			4
2.	$f' = 0$	$k = 0$			3
3.	$f' > 0$	$k > 0$			3
4.	$f' < 0$	$k < 0$			10
5.	postoji izvod u tački	postoji koefic. pravca	izuzeti slučaj vertikalne tangente izuzeti slučaj kada ne postoji tangenta		$(-4, 1) \cup (1, 6) \cup (6, 8)$

Slika 3.17. *Grafički postupak rešavanja zadatka B tipa*

Za potpuno grafičko razumevanje diferencijalnog računa neophodno je da se između koncepata uspostave reverzibilne (dvosmerne) veze. Reverzibilnost je značajna komponenta matematičkog mišljenja koja utiče na razvoj relacionog razumevanja i fleksibilnog kretanja između koncepata. U prethodno obrađenim zadacima A i B tipa, uspostavljaju se veze između koncepta funkcije i koncepta izvoda u jednom smeru: od grafika funkcije ka grafičkim/algebarskim osobinama izvodne funkcije. Dalje sledi, obrada zadataka tipa C i tipa D u kojima se grafički problemi razmatraju u suprotnom smeru, tj. na osnovu grafika izvodne funkcije ispituju se osobine funkcije.

Zadaci C tipa

U okviru ovog tipa zadataka, posebno su izdvojene dve grupe zadataka, koje su označene kao C1 i C2 tip. Zadaci C2 tipa su složeniji i zahtevniji od zadataka C1 tipa.

Zadaci C1 tipa

U zadacima C1 tipa se razmatraju diferencijabilne funkcije. Na osnovu grafika izvodne funkcije, koji je dat u zadatku, ispituju se određena svojstva funkcije f, posebno ona koja su povezana sa tangentom.

Zadaci C1 tipa:

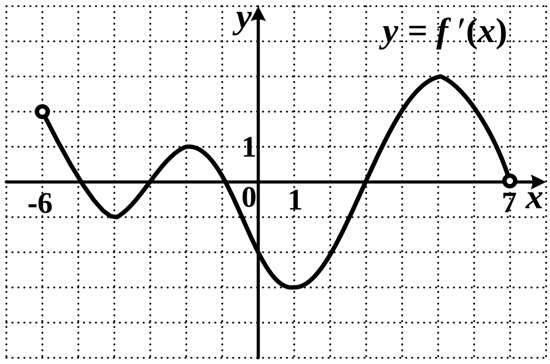
Funkcija $y=f(x)$ *je definisana na intervalu* $(-6,7)$*. Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije* $y=f'(x)$*.*

1. *U koliko tačaka su tangente grafika funkcije* $y=f(x)$ *paralelne sa* x*–osom?*

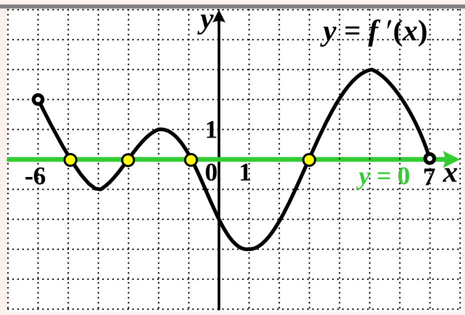
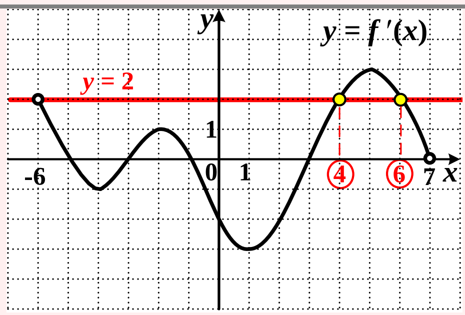
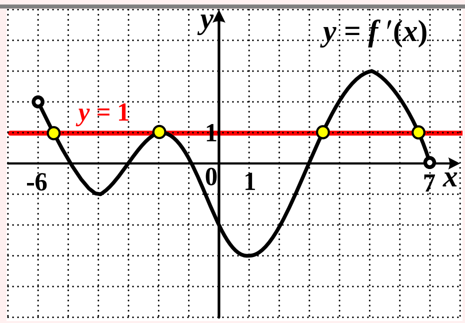
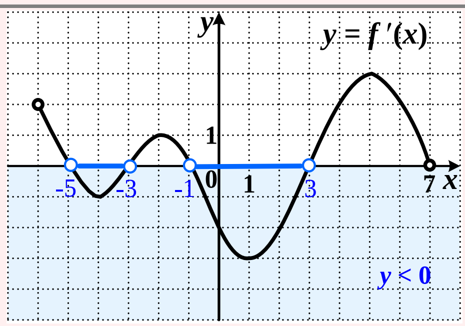
2. *Odredi zbir apscisa tačaka grafika funkcije* $y=f(x)$ *u kojima su tangente normalne na pravu* $x+2y-12=0$*.*

3. *U koliko tačaka tangente grafika funkcije* $y=f(x)$ *grade ugao od* $45°$ *sa pozitivnim smerom* x*–ose?*

4. *Odredi za koje vrednosti argumenta* x*, tangente grafika funkcije* $y=f(x)$ *grade tupe uglove sa pozitivnim smerom* x*–ose.*



Postupak rešavanja navedenih zadataka C1 tipa, prikazan je na Slici 3.18. U sva četiri zadatka dati su algebarski podaci o određenom svojstvu tangente (At). Primenom znanja analitičke geometrije (uslov paralelnosti/normalnosti pravih, relacija između koeficijenta pravca i nagibnog ugla), izvodi se odgovarajući zaključak o koeficijentu pravca tangente, a samim tim i o algebarskom svojstvu izvodne funkcije (Ai). Dalje je potrebno da se to svojstvo prikaže na grafiku izvodne funkcije (Gi). U poslednjem koraku, na osnovu grafičkog prikaza, očitava se traženi skup rešenja za svojstvo izvodne funkcije (Ai), odnosno za svojstvo tangente koje se razmatra u datom primeru (At). U rešavanju zadataka realizuju se prelasci između koncepata i/ili reprezentacija u redosledu $At \to Ai \to Gi \to Ai \to At$.

Zadatak	Svojstvo tangente	Koefic. pravca	Svojstvo izvodne funkcije	Grafička reprezentacija svojstva izvodne funkcije	Rešenje
1.	paralelna sa x –osom (uslov paralelnosti pravih)	$k = 0$	$f'(x) = 0$		4 tačke
2.	normalna na pravu $x + 2y - 12 = 0$ (uslov normalnosti pravih)	$k = 2$	$f'(x) = 2$		$4 + 6 = 10$
3.	gradi ugao $\alpha = 45°$ sa x–osom $(k = tg\ \alpha)$	$k = 1$	$f'(x) = 1$		4 tačke
4.	gradi tup ugao α sa x–osom $(k = tg\ \alpha)$	$k < 0$	$f'(x) < 0$		$x \in (-5, -3) \cup (-1, 3)$

Slika 3.18. *Grafički postupak rešavanja zadataka C1 tipa*

Zadaci C2 tipa

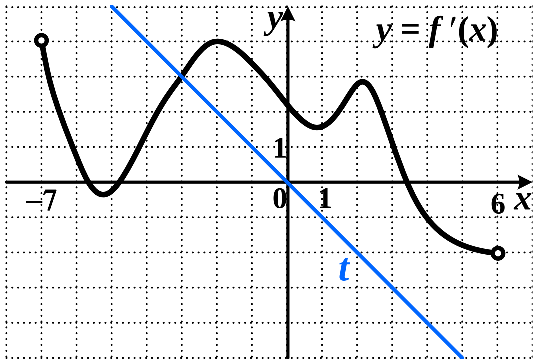
Ulazni grafički podaci kod C2 tipa zadataka su: tangenta t grafika funkcije f i grafik izvodne funkcije $f\,'$. Postavljeni zahtevi zadataka se odnose na algebarska svojstva funkcije ili izvodne funkcije. Zadaci C2 tipa su složeniji i teži za rešavanje u odnosu na zadatke C1 tipa, jer zahtevaju grafičko razumevanje i tangente i izvodne funkcije, kao i povezivanje sva tri koncepta: funkcije, tangente i izvodne funkcije. Činjenica da je tangenta kao geometrijski objekat povezana sa grafikom funkcije, a u zadatku su dati tangenta i grafik izvodne funkcije, posebno utiče na težinu i kognitivnu kompleksnost zadataka. Zbog ovakve prirode C2 tipa zadataka, kod učenika se mogu pojaviti kognitivni konflikti i konfuzija između koncepata, pa njihova obrada zahteva i adekvatno pripremljen kognitivno-vizuelni nastavni materijal.

Zadatak C2 tipa:

Funkcija $y = f(x)$ *je definisana na intervalu* $(-7,\ 6)$*. U tački* $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ *konstruisana je tangenta t grafika funkcije* f*.*

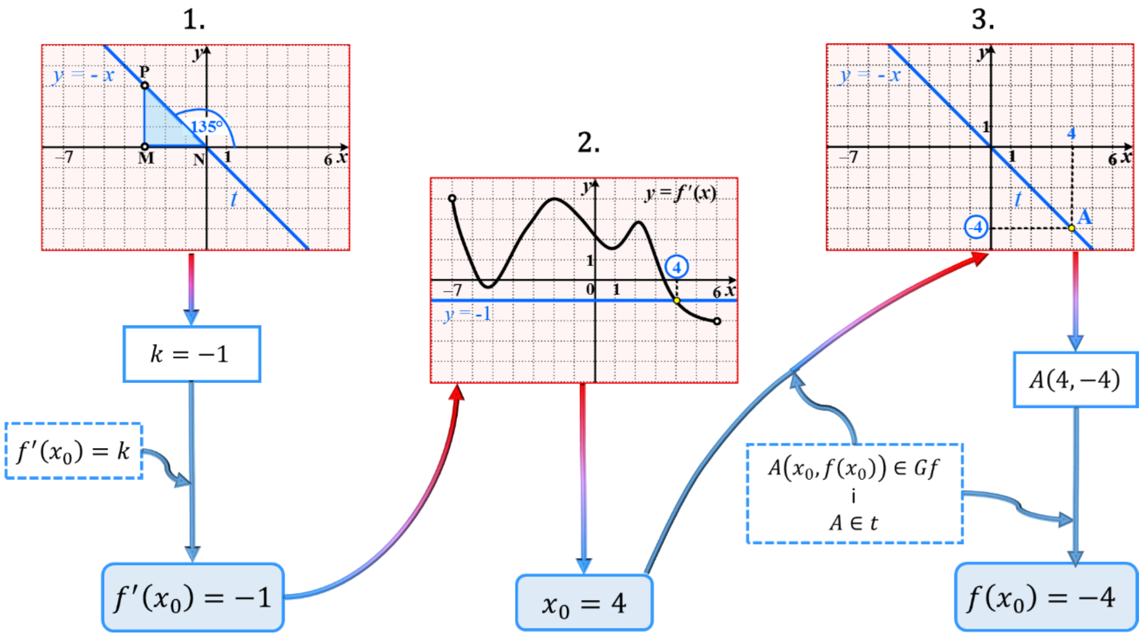
Na slici je prikazana tangenta t i grafik izvodne funkcije $y = f'(x)$*.*

Izračunaj vrednost izraza $x_0 + f'(x_0) - f(x_0)$*.*



Slika 3.19 prikazuje deo *PowerPoint* prezentacije u kojoj je na kognitivno-vizuelni način objašnjen postupak rešavanja navedenog zadatka C2. Postupak je prikazan u obliku šeme koja se u prezentaciji formira postepenim pojavljivanjem sastavnih elemenata, u redosledu koji prati kognitivne aktivnosti svojstvene datom zadatku.

U rešavanju ovog zadatka izdvajaju se tri etape. Najpre se posmatra tangenta i određuje se njen koeficijent pravca, tj. $f'(x_0)$. Nakon toga, posmatranjem grafika izvodne funkcije može se odrediti x_0. Kako dodirna tačka A pripada i grafiku funkcije f i tangenti t, to se njena druga koordinata može odrediti na osnovu grafičke reprezentacije tangente. Dakle, u trećoj etapi se razmatra grafički prikaz tangente i određuje se $f(x_0)$.



Slika 3.19. *Grafički postupak rešavanja zadatka C2 tipa*

Zadaci D tipa

U D-zadacima se razmatra funkcija f koja nije diferencijabilna u svim tačkama domena. Grafik izvodne funkcije f' je dat kao ulazni podatak, a zahtevi zadataka se odnose na ispitivanje osobina funkcije f, posebno onih koju su povezane sa tangentom. Zadaci D tipa zahtevaju znanja o osobinama grafika izvodne funkcije f' u okolini onih tačaka u kojima funkcija f nije diferencijabilna.

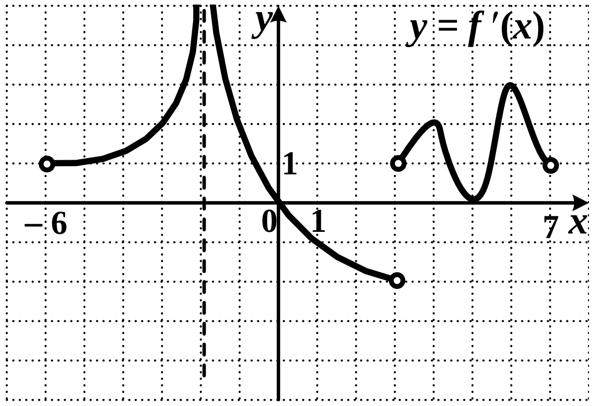
Zadaci D tipa:

Funkcija $y = f(x)$ *je definisana i neprekidna na intervalu* $(-6, 7)$. *Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije* $y = f'(x)$.

1. *Tangenta grafika funkcije* $y = f(x)$ *u tački* $A\big(a, f(a)\big)$ *je paralelna sa* y*–osom. Odredi jednačinu te tangente.*

2. *Grafik funkcije* $y = f(x)$ *nema tangentu u tački* $B\big(b, f(b)\big)$. *Odredi b.*

3. *Za koje vrednosti argumenta* x, *tangente grafika funkcije* $y = f(x)$ *ne grade oštre uglove sa pozitivnim smerom* x*–ose?*

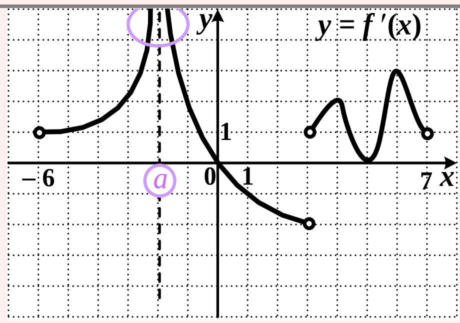
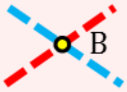
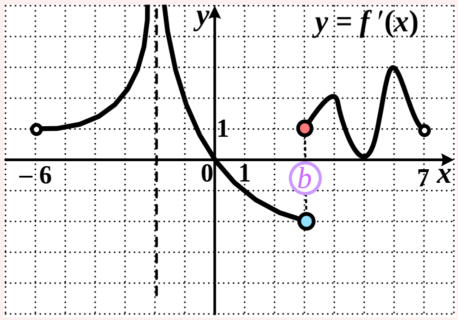
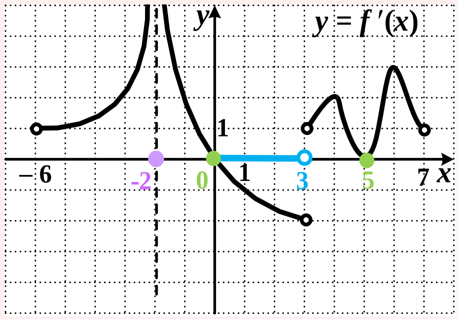
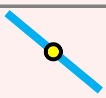


Slika 3.20 prikazuje postupke rešavanja navedenih zadataka D tipa. U prvom zadatku je potrebno odrediti jednačinu tangente na grafik funkcije f koja je paralelna sa y–osom. Ako je tangenta u tački $A\big(a, f(a)\big)$ vertikalna, tada levi i desni izvod u tački $x = a$ teže beskonačnosti. To znači da je $x = a$ i leva i desna vertikalna asimptota grafika izvodne funkcije f'. Kako je prava $x = -2$ i leva i desna vertikalna asimptota grafika izvodne funkcije $y = f'(x)$, to se dobija da je $a = -2$. Jednačina vertikalne tangente u tački $A\big(-2, f(-2)\big)$ na grafik funkcije f je $x = -2$.

U drugom zadatku se razmatra slučaj kada grafik funkcije nema tangentu u tački B. To znači da se u tački B mogu konstruisati leva i desna tangenta, ali su to dve različite prave. Odnosno, izvodna funkcija nije definisana u tački $x = b$ pri čemu je $\lim\limits_{x \to b-} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to b+} f'(x)$ i bar jedan od ovih limesa je konačan.

U trećem zadatku se razmatraju tangente grafika funkcije f, koje sa pozitivnim smerom x–ose grade uglove koji nisu oštri. To znači da se razmatraju horizontalne tangente, vertikalne tangente i tangente koje imaju tup nagibni ugao. Iz navedenih geometrijskih osobina tangenti dobijaju se odgovarajuća algebarska svojstva izvodne funkcije. U slučaju horizontalne tangente, važi da je $f'(x) = 0$. Ako je tangenta vertikalna, tada su limesi $\lim\limits_{x \to a-} f'(x)$ i $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$ beskonačni. Ako je nagibni ugao tangente tup, tada je $f'(x) < 0$. Navedena algebarska svojstva izvodne funkcije treba prevesti u odgovarajuća svojstva grafika izvodne funkcije (presek grafika sa x–osom, vertikalna asimptota, deo grafika ispod x–ose) i na osnovu grafičkog prikaza očitati traženi skup rešenja.

<table>
<tr><th>Zadatak</th><th>Tangenta</th><th>Svojstvo izvodne funkcije</th><th>Grafička reprezentacija svojstva izvodne funkcije</th><th>Rešenje</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>vertikalna tangenta u tački $A\big(a, f(a)\big)$

</td><td>$\lim\limits_{x\to a-} f'(x) = \pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = \pm\infty$
$\Downarrow$
$x = a$ je i leva i desna vertikalna asimptota grafika izvodne funkcije f'</td><td>
</td><td>$x = -2$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>u tački $B\big(b, f(b)\big)$ ne postoji tangenta

</td><td>izvodna funkcija nije definisana za $x = b$ pri čemu je
$\lim\limits_{x\to b-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to b+} f'(x)$
i bar jedan od limesa je konačan</td><td>
</td><td>$b = 3$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3.</td><td></td><td>$f'(x) = 0$</td><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">$x = -2 \;\lor\; x = 5$
$\lor$
$0 \le x < 3$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>slučaj pod 1)</td></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x) < 0$</td></tr>
</table>

Slika 3.20. *Grafički postupak rešavanja zadataka D tipa*

3.3.4. Monotonost funkcije

Prilikom obrade monotonosti funkcije, veoma je bitno da učenici usvoje potrebna znanja i steknu veštinu uspostavljanja odnosa između monotonosti i osobina prvog izvoda funkcije. Kako bi učenici uspostavili potrebne veze između ovih koncepata, potrebno je s jedne strane da shvate na koji način svojstva prvog izvoda funkcije (definisanost, nule i znak) utiču na monotonost funkcije, a sa druge strane, da znaju kako da podele domen funkcije na intervale koji odgovaraju različitim ponašanjima funkcije po pitanju monotonosti (Baker *et al.*, 2000; Cooley *et al.*, 2007).

Za suštinsko razumevanje koncepta monotonosti funkcije, veoma je bitno da učenici najpre usvoje teorijska znanja koja su iskazana sledećim teoremama:

Teorema 1. Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b).

Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je f rastuća funkcija na $[a, b]$.

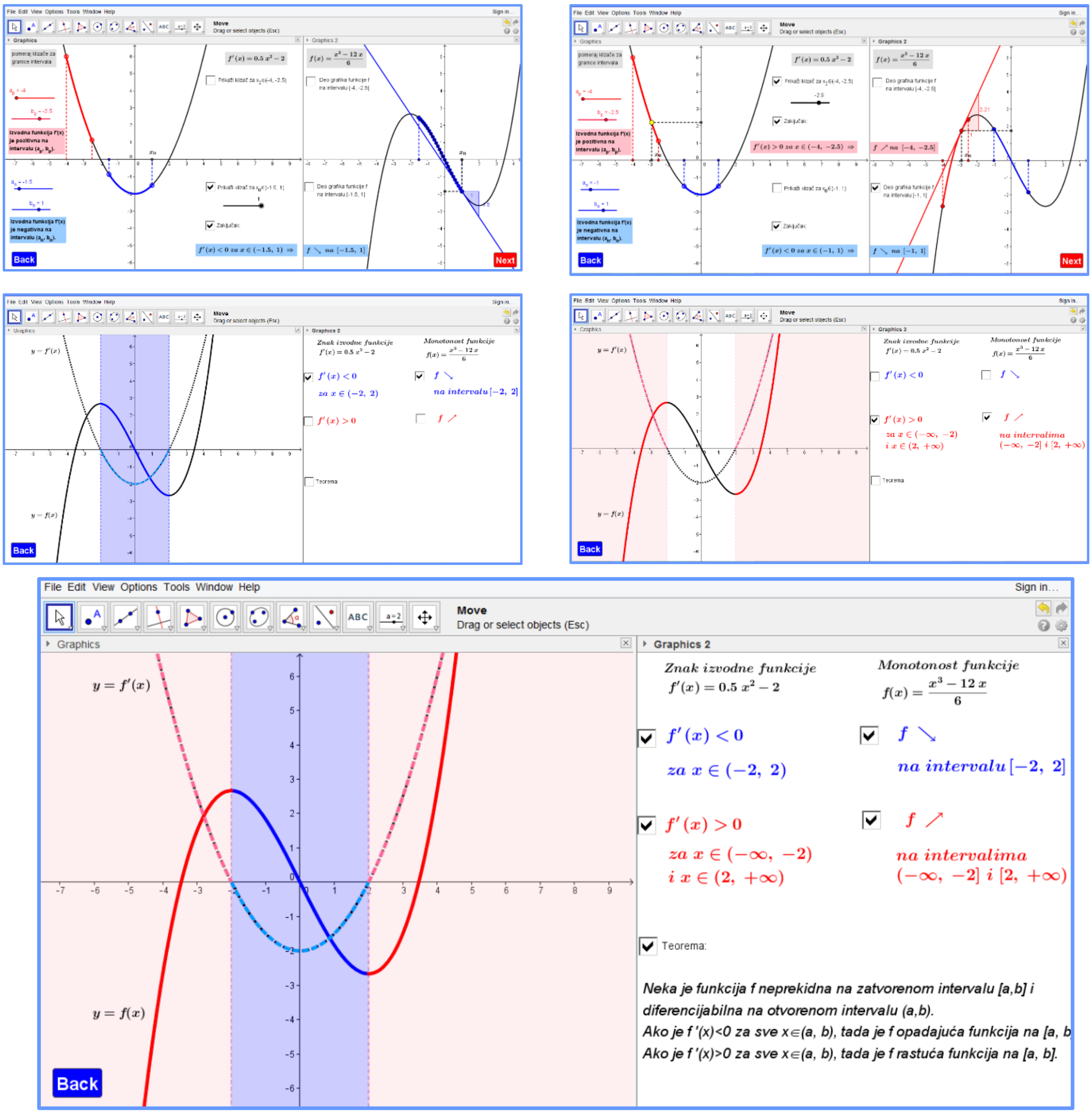
Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je f opadajuća funkcija na $[a, b]$.

Teorema 2. Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b).

Ako je funkcija f rastuća na $[a, b]$, tada je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$.

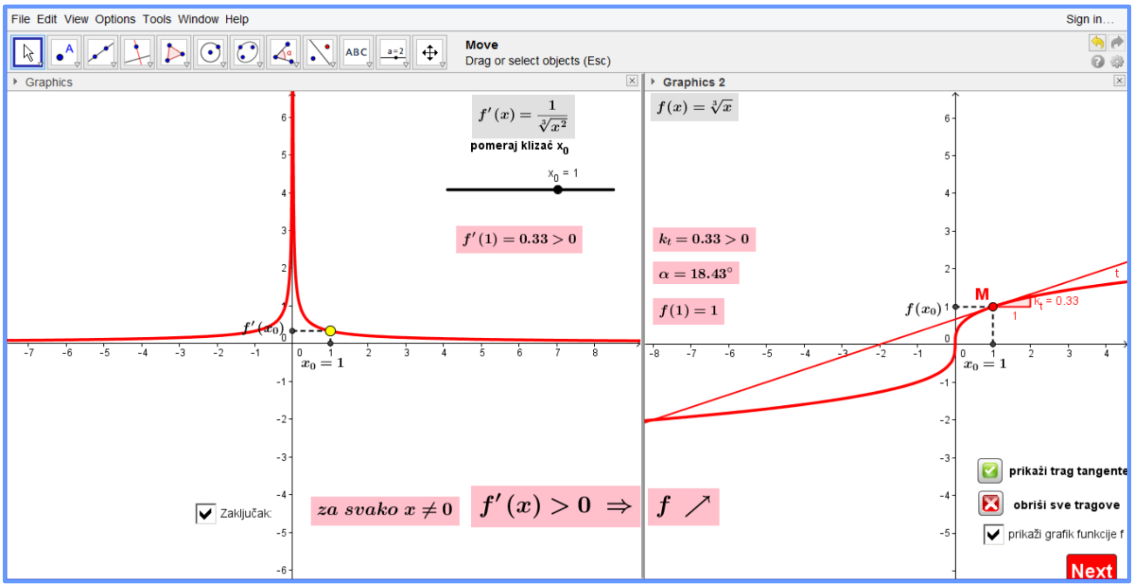
Ako je funkcija f opadajuća na $[a, b]$, tada je $f'(x) \leq 0$ za sve $x \in (a, b)$.

Obrada teorijskih sadržaja kognitivno-vizuelnim pristupom, realizuje se u računarskom okruženju i prevashodni cilj je da učenici dobiju objašnjenja (a ne dokaze) navedenih teorema, kako bi iste i razumeli. Za obradu navedenih teorema, izrađen je *GeoGebra* nastavni materijal i na času je korišćen kao demonstraciono sredstvo. Umesto pružanja gotovih znanja (teorema) učenicima je omogućeno da, kroz heuristički razgovor i prikazivanje *GeoGebra* sadržaja, sami izvode zaključke i dođu do formulacije navedenih teorema (Slika 3.21). Vizuelnim i eksperimentalnim istraživanjem koncepta monotonosti funkcije, učenici samostalno otkrivaju nove ideje i formalnu dimenziju matematičkog znanja.



Slika 3.21. *GeoGebra dinamički radni list za obradu Teoreme 1*

Teorema 1 i Teorema 2 govore o monotonosti funkcija koje su diferencijabilne na intervalu. Međutim, i tradicionalni i kognitivno-vizuelni nastavni sadržaji obuhvataju ispitivanje monotonosti funkcija koje nisu diferencijabilne u svim tačkama domena. Posebne poteškoće mogu se očekivati u slučajevima kada tačka u kojoj funkcija nije diferencijabilna pripada intervalu na kome je funkcija rastuća/opadajuća. U cilju prevazilaženja mogućih učeničkih poteškoća, osmišljeni su i izrađeni odgovarajući kognitivno-vizuelni nastavni materijali. Učenici su u *GeoGebra* okruženju ispitivali na koji način osobine prvog izvoda (definisanost, nule i znak) utiču na monotonost funkcije koja nije diferencijabilna na celom domenu (Slika 3.22). Interaktivni *GeoGebra* dinamički radni listovi i kognitivno-vizuelni pristup konceptu monotonosti funkcije, pružaju mogućnost učenicima da između osobina prvog izvoda funkcije, kritičnih brojeva funkcije i monotonosti funkcije uspostave sledeću vezu: Ako interval (a, b) sadrži kritične brojeve funkcije f, a u ostalim tačkama intervala prvi izvod uzima pozitivne (negativne) vrednosti, tada je funkcija f rastuća (opadajuća) na celom intervalu (a, b). Bez obzira na to što se ova tvrdnja ne potkrepljuje i formalnim dokazom, njeno vizuelno razumevanje je veoma značajno kako za rešavanje zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, tako i za rešavanje tradicionalnih algebarskih problema.



Slika 3.22. *GeoGebra nastavni materijal – ispitivanje mononotonosti funkcije koja nije diferencijabilna u svim tačkama domena*

Za obradu monotonosti funkcije osmišljena su i kreirana četiri tipa zadataka (A, B, C i D) sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. U daljem tekstu biće prikazana sva četiri tipa zadataka i kognitivno-vizuelni pristup njihovoj obradi u nastavnoj praksi.

Zadaci A tipa

U zadacima A tipa, diferencijabilna funkcija f je data svojim grafikom. Na osnovu datog grafika ispituju se one osobine izvodne funkcije f' koje su povezane sa monotonošću funkcije f (npr. intervali na kojima je izvodna funkcija pozitivna/negativna ili nenega-tivna/nepozitivna). Ovakvim zadacima se mogu uspostaviti prelasci $Gf \rightarrow Ai$ i $Gf \rightarrow Gi$, što zavisi od toga kako je formulisan zahtev zadatka.

Zadatak A tipa:

Funkcija $y = f(x)$ *je definisana i diferencijabilna za* $x \in (-7,\ 3)$. *Na slici je prikazan njen grafik. Koliko ima celobrojnih vrednosti argumenta x, takvih da je izvodna funkcija* $f'(x)$ *negativna?*

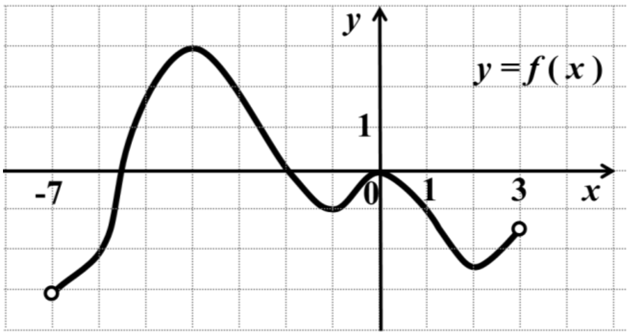
a) jedna

b) dve

c) tri

d) četiri

e) više od četiri



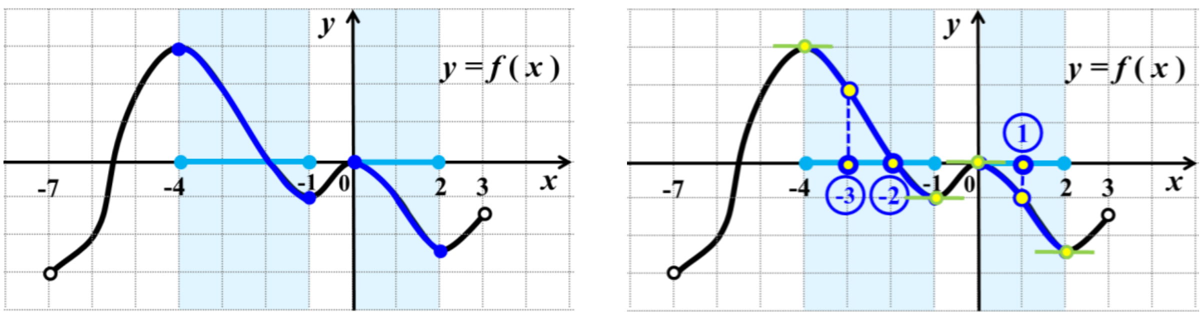
U zadatku se razmatra funkcija koja je neprekidna i diferencijabilna na celom domenu. Postupak rešavanja se zasniva na primeni navedenih teorema koje povezuju monotonost funkcije i prvi izvod, a sastoji se u sledećem:

– Da bi prvi izvod funkcije bio negativan na nekom intervalu, potrebno je (ali ne i dovoljno) da funkcija opada na tom intervalu. Zbog toga se za funkciju f najpre određuju intervali opadanja. Učenici treba da uoče delove grafika gde je funkcija opadajuća, a zatim da očitaju na x–osi odgovarajuće intervale, $[-4, -1]$ i $[0,\ 2]$ (Slika 3.23.1).

– Ako je funkcija diferencijabilna i opadajuća na nekom intervalu, tada je prvi izvod funkcije nepozitivan na tom intervalu. Pošto je u zadatku data diferencijabilna funkcija, iz intervala na kojima funkcija f opada treba isključiti celobrojne vrednosti u kojima je prvi izvod jednak nuli. Prvi izvod je jednak nuli ako je x jednako -4, -1, 0 i 2 jer su tangente paralelne sa x–osom (Slika 3.23.2).

– Dakle, prvi izvod je negativan za tri celobrojne vrednosti argumenta: $-3, -2$ i 1, pa je tačan odgovor pod 3.

1. **2.**



Slika 3.23. *Grafički postupak rešavanja zadatka A*

Napomena: Zadatak se može rešiti i na drugi način – razmatranjem nagiba odgovarajućih tangenti (ovakav pristup rešavanju zadatka učenici su primenjivali prilikom obrade geometrijske interpretacije prvog izvoda, u zadacima B tipa). Ako se konstruišu tangente grafika funkcije u tačkama koje imaju celobrojne prve koordinate, može se videti da za

$x = -3, x = -2$ i $x = 1$, tangente grade tup ugao sa pozitivnim smerom x–ose. Iz toga sledi da je prvi izvod negativan za tri celobrojne vrednosti argumenta x.

U celini posmatrano, svi zadaci A i B tipa zahtevaju da se na osnovu grafika funkcije ispitaju znak i nule prvog izvoda, pa se svi oni mogu rešavati na (najmanje) dva različita načina: razmatranjem monotonosti i razmatranjem nagiba tangenti grafika funkcije. S obzirom na to da su ove nastavne aktivnosti osmišljene u cilju uspostavljanja odgovarajućih veza između monotonosti funkcije i prvog izvoda, suvišno je da se svi zadaci rešavaju na oba načina. Nakon rešavanja prvog zadatka na dva različita načina, u narednim zadacima je potrebno usmeriti pažnju učenika upravo na monotonost funkcije.

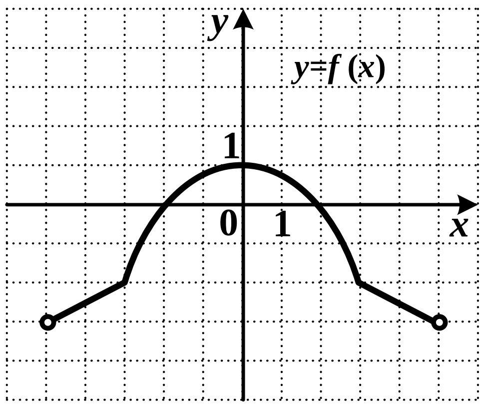
Zadaci B tipa

U zadacima B tipa se zahteva od učenika da ispitaju osobine izvodne funkcije f' na osnovu datog grafika funkcije f koja nije diferencijabilna na celom domenu. Jedan od problema koji se može očekivati jeste da učenici na osnovu grafika funkcije odrede intervale monotonosti, ali da pritom ne uoče tačke grafika u kojima su tangente paralelne sa y–osom ili se ne mogu konstruisati. Na taj način učenici mogu da izvedu pogrešne zaključke i da intervale na kojima je funkcija rastuća (opadajuća) poistovete sa intervalima na kojima je prvi izvod pozitivan (negativan). U slučaju da se pojave ovakvi problemi, učenike treba uputiti da pažljivo posmatraju grafik, da identifikuju kritične tačke i zatim da grafički ispitaju diferencijabilnost funkcije u tim tačkama. Ukoliko je potrebno, učenicima mogu još jednom biti prikazani *GeoGebra* dinamički radni listovi sa primerima u kojima se uspostavljaju grafičke veze između monotonosti funkcije koja nije diferencijabilna na celom domenu i znaka prvog izvoda.

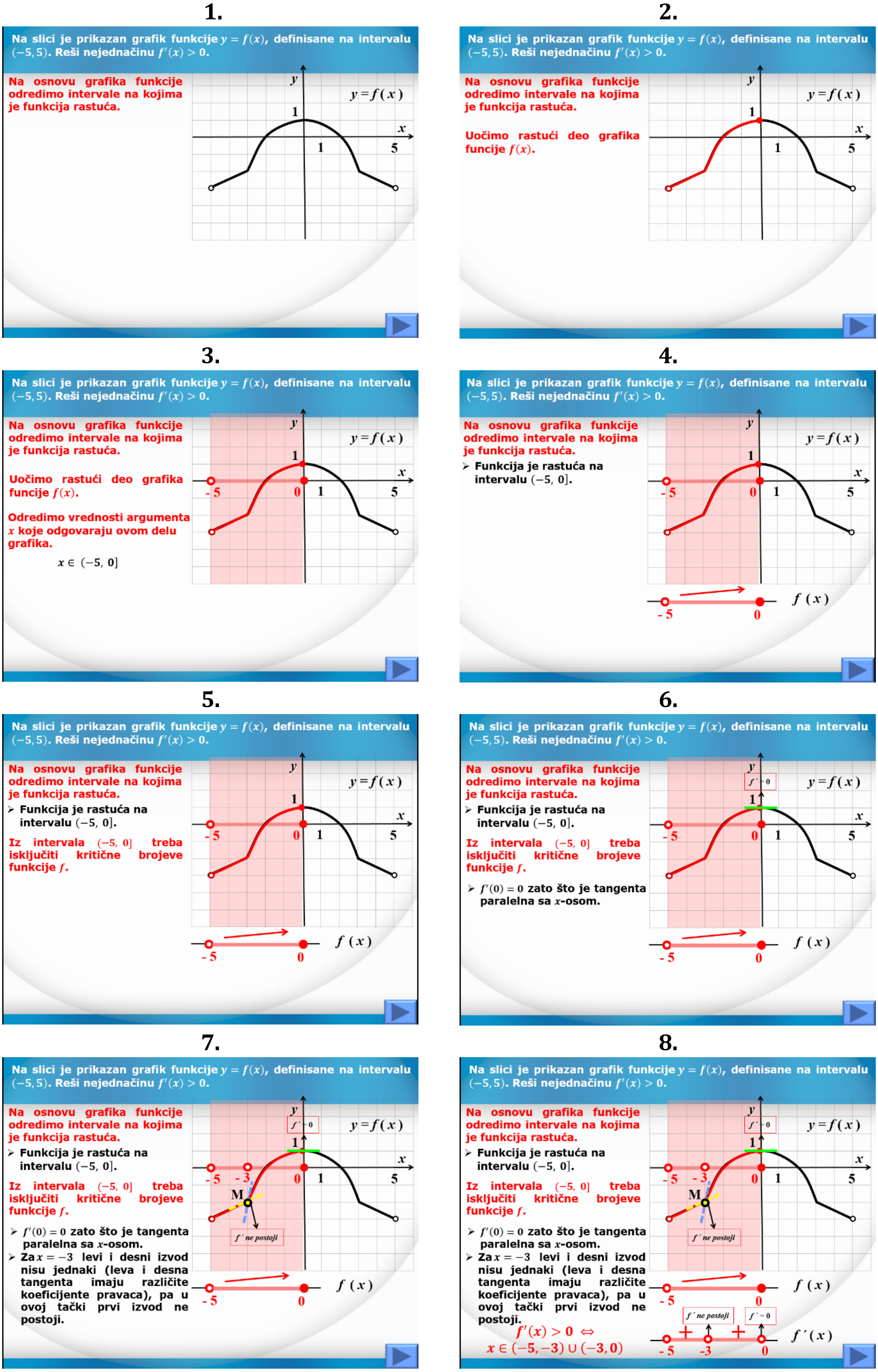
Zadatak B tipa:

Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$, *definisane na intervalu* $(-5, 5)$.

Reši nejednačinu $f'(x) > 0$.



Slika 3.24 prikazuje etape u postupku rešavanja navedenog B-zadatka. Slike su preuzete iz *PowerPoint* prezentacije koja je korišćena u nastavi prilikom obrade ovog zadatka. U samoj prezentaciji pojavljuje se veći broj slajdova nego što je prikazano na slici. Slajdovi su organizovani tako da je sadržaj diskretno dinamički vizuelizovan. Multimedijalni elementi prezentacije su dizajnirani sa ciljem da način i redosled prikazivanja sadržaja prati tok kognitivnih aktivnosti učenika, pri čemu je poseban akcenat na vizuelnim reprezentacijama.



Slika 3.24. *Grafički postupak rešavanja zadatka B*

Zadaci C tipa

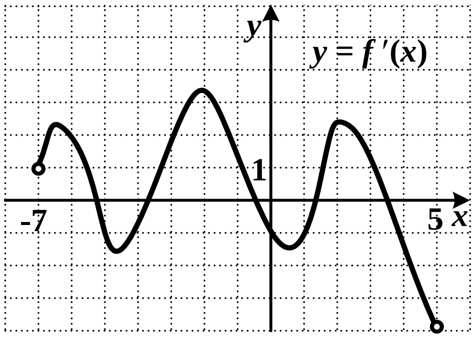
Zadaci tipa C obuhvataju ispitivanje monotonosti diferencijabilne funkcije na osnovu grafika njene izvodne funkcije. Rešavanje zadataka podrazumeva primenu Teoreme 1 i Teoreme 2 u uspostavljanju referentnih veza između osobina prvog izvoda funkcije f' (znak i nule) i monotonosti funkcije f.

Zadatak C tipa:

Funkcija $y = f(x)$ je definisana na intervalu $(-7, 5)$.

Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije $y = f'(x)$.

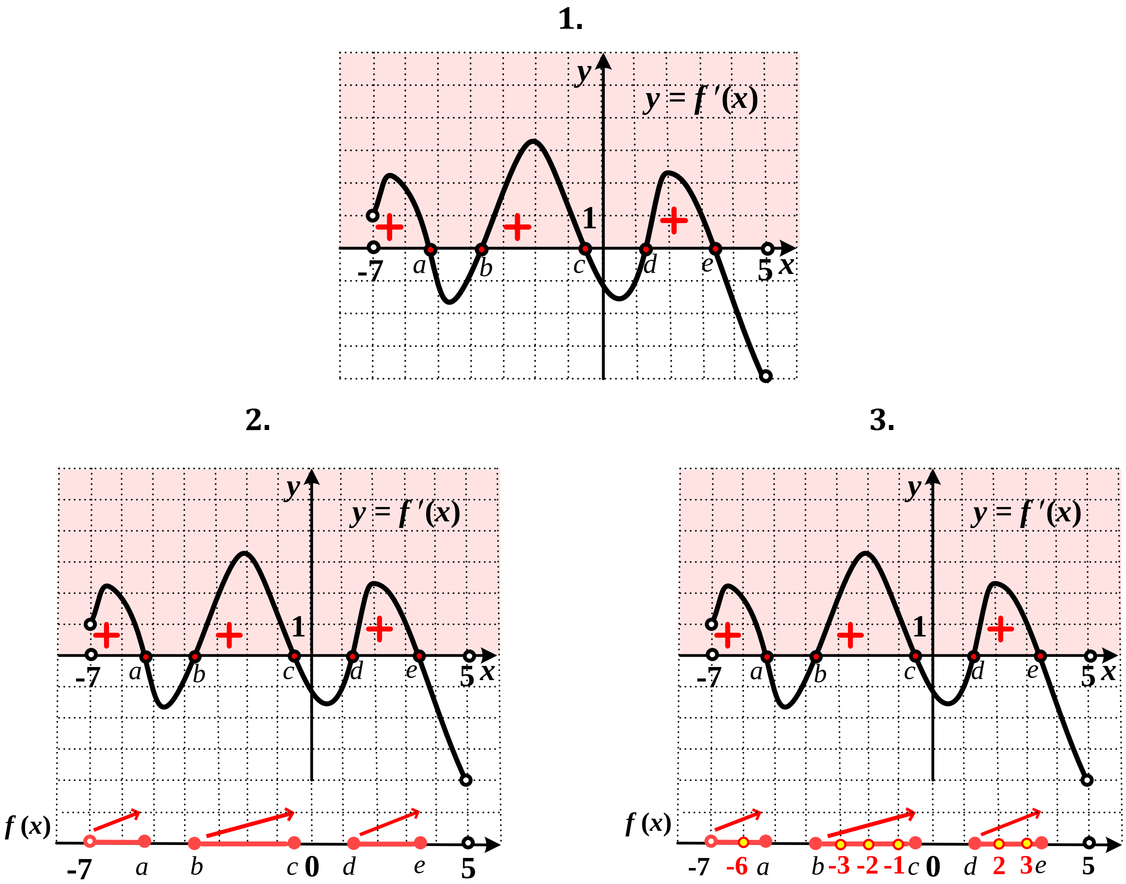
Odredi zbir svih celih brojeva koji pripadaju intervalima na kojima je funkcija f rastuća.



U rešavanju ovog zadatka mogu se izdvojiti tri etape:

1. Najpre se ispituju svojstva izvodne funkcije $f\,'$ koja utiču na monotonost funkcije f. Odnosno, na osnovu datog grafika ispituju se nule i znak izvodne funkcije (Slika 3.25.1).

   Grafik izvodne funkcije seče x–osu u pet tačaka, pri čemu prve koordinate tih tačaka nisu celi brojevi, pa ih označavamo kao realne brojeve a, b, c, d i e. Izvodna funkcija je pozitivna na intervalima $(-7,\ a)$, $(b,\ c)$ i $(d,\ e)$.



Slika 3.25. *Grafički postupak rešavanja zadatka C*

2. Zatim se u domenu funkcije f određuju intervali na kojima je ona rastuća (Slika 3.25.2).

   Na osnovu prethodno ispitanih osobina izvodne funkcije i primenom Teoreme 1 izvodi se zaključak da funkcija f raste na $(-7, a]$, $[b, c]$ i $[d, e]$.

3. Na kraju se određuje zbir celih brojeva koji pripadaju intervalima na kojima funkcija f raste (Slika 3.25.3).

   Intervali $(-7, a]$, $[b, c]$ i $[d, e]$ sadrže sledeće cele brojeve: $-6, -3, -2, -1, 2$ i 3. Njihov zbir je -7, što je ujedno i traženo rešenje zadatka.

Zadaci D tipa

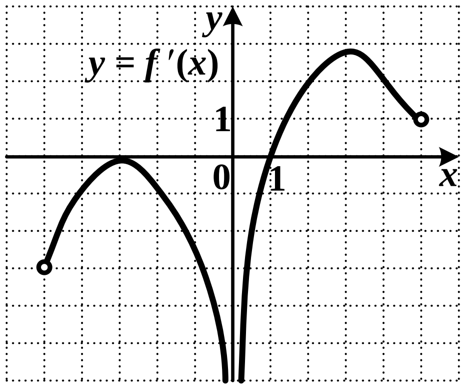
Zadaci D tipa su primeri zadataka u kojima se, na osnovu grafika izvodne funkcije f', razmatra monotonost polazne funkcije f koja nije diferencijabilna u svim tačkama domena. S obzirom na to, da Teorema 1 i Teorema 2 govore o monotonosti funkcije koja je diferencijabilna na intervalu, one nisu dovoljne za rešavanje ovakvih problema. Za uspešno rešavanje zadataka ovog tipa veoma su bitna znanja koja su učenici usvojili tokom rada sa *GeoGebra* dinamičkim radnim listovima.

Zadatak D tipa:

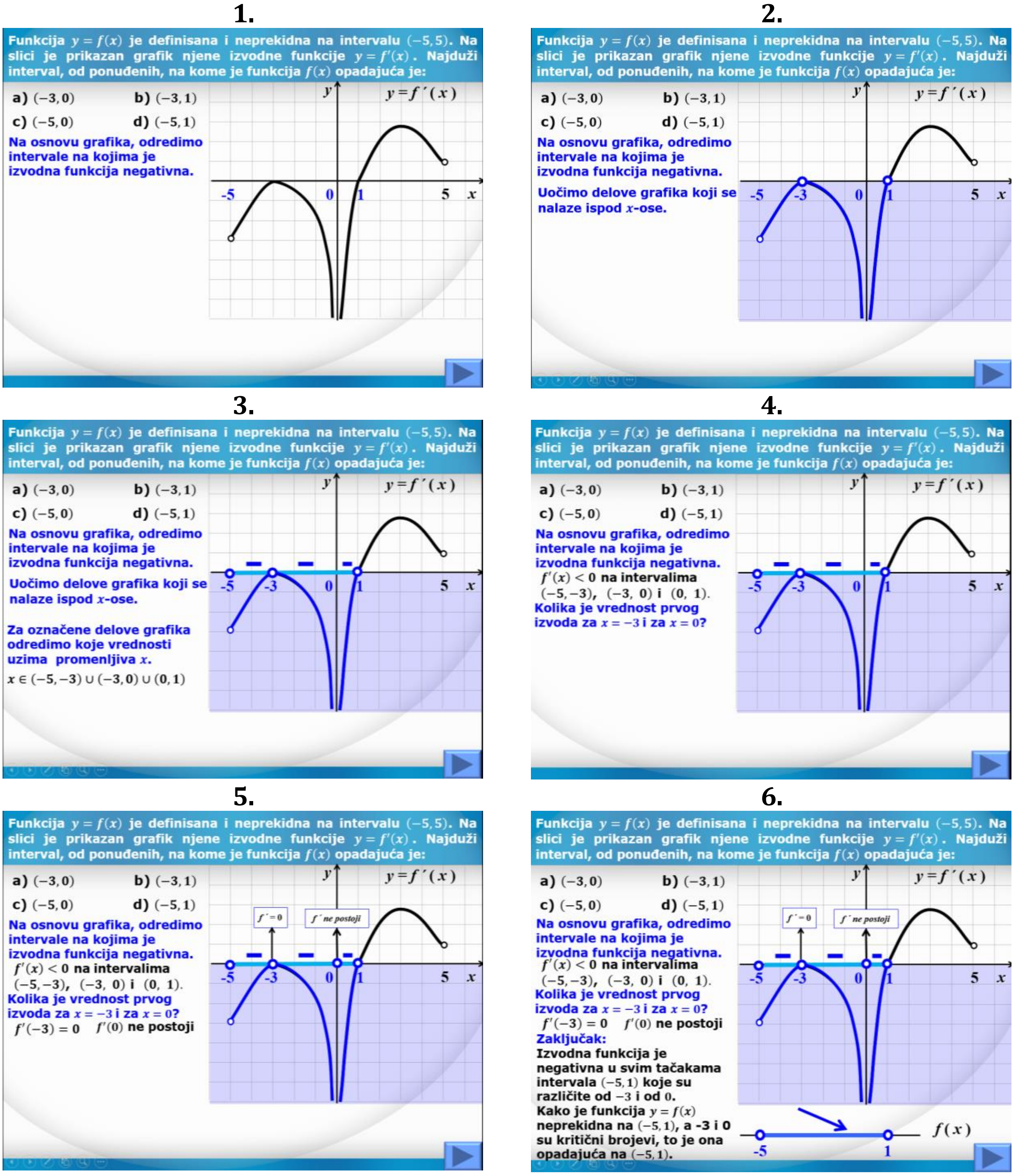
Funkcija $y = f(x)$ je definisana i neprekidna na intervalu $(-5, 5)$. Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije $y = f'(x)$.

Najduži interval, od ponuđenih, na kome je funkcija $f(x)$ opadajuća je:

a) $(-3,\ 0)$
b) $(-3,\ 1)$
c) $(-5,\ 0)$
d) $(-5,\ 1)$



Slika 3.26 prikazuje slajdove iz *PowerPoint* prezentacije koja je korišćena u nastavi prilikom obrade navedenog D-zadatka. Slajdovi su organizivani tako da se postupak rešavanja prikazuje postepeno i u saglasnosti sa kognitivnim procesima koji su svojstveni ovom zadatku.



Slika 3.26. *Grafički postupak rešavanja zadatka D*

3.3.5. Ekstremne vrednosti funkcije

Koncept ekstremnih vrednosti funkcije se u tradicionalnim udžbenicima i nastavi najčešće prezentuje tako što se navode: definicije lokalnih ekstrema i kritičnih tačaka funkcije, teoreme o neophodnom i o dovoljnom uslovu ekstremuma (sa dokazima ili bez njih) i nekoliko grafičkih primera koji ilustruju karakteristične slučajeve tačaka lokalnih ekstrema. Nakon toga se uvežbavaju zadaci u kojima se navedene teoreme primenjuju u ispitivanju lokalnih ili globalnih ekstrema analitički datih funkcija. Pristup konceptima lokalnih i globalnih ekstrema je usmeren na proceduralne aktivnosti sa algebarskim reprezentacijama funkcije i izvoda.

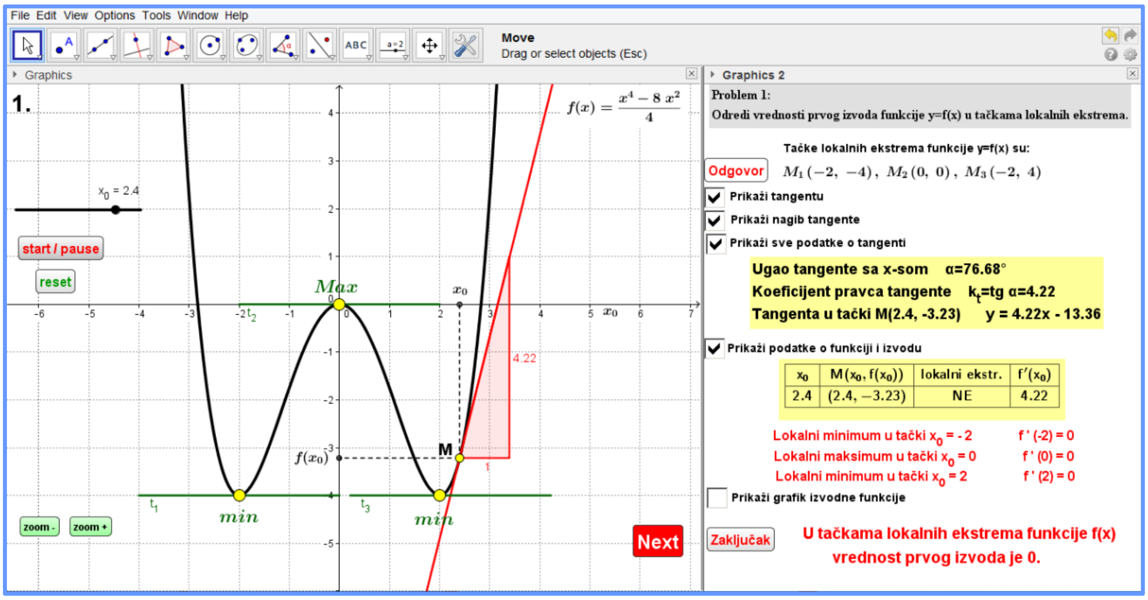
Kognitivno-vizuelni pristup u izučavanju lokalnih ekstremnih vrednosti funkcije ima drugačiju koncepciju u odnosu na opisani tradicionalni pristup i sprovodi se na sledeći način:

1) Priprema nastavnog materijala koji sadrži dva *GeoGebra* dinamička radna lista (za teoremu o neophodnom i za teoremu o dovoljnom uslovu lokalnih ekstrema) i prateće odštampane radne listove sa uputstvima za istraživanje u GeoGebri.
2) Istraživanje učenika u GeoGebri za teoremu o neophodnom uslovu lokalnih ekstrema.
3) Sprovođenje istog postupka za teoremu o dovoljnom uslovu lokalnih ekstrema.
4) Konceptualizacija znanja - učenici, uz pomoć nastavnika, sastavljaju šemu u kojoj su logički strukturirani svi pojmovi i stavovi relevantni za koncept lokalnih ekstrema, pri čemu je jasno prikazan i sam postupak određivanja lokalnih ekstrema funkcije.
5) Rešavanje zadataka.

U nastavku teksta biće prikazan *GeoGebra* dinamički radni list za obradu teoreme o potrebnom uslovu lokalnih ekstrema koji je dizajniran za samostalan rad učenika. Nastavni materijal je didaktički oblikovan za primenu Poljinog modela rešavanja problema u istraživački usmerenoj nastavi. Ovo istraživanje je vođeno uputstvima koja su data u radnom listu. Ukoliko postoji potreba, nastavnik može učenicima pružiti dodatna uputstva. Učenicima je postavljen problem da na osnovu grafika funkcije odrede vrednost prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema. Očekivani ishod je da učenici induktivnim razmišljanjem izvedu zaključak: „U tačkama lokalnih ekstrema funkcije, prvi izvod je ili 0 ili nije definisan." Dakle, učenici istraživanjem dolaze do formulacije teoreme o potrebnom uslovu lokalnih ekstrema.

Dizajn *GeoGebra* dinamičkog radnog lista (Slika 3.27):

U *GeoGebra* softveru su prikazana tri karakteristična slučaja za tačku lokalnog ekstrema: vrednost prvog izvoda u tački je 0, prvi izvod nije definisan zato što levi i desni izvod nisu jednaki i prvi izvod nije definisan jer teži beskonačnosti. U prvom problemu prikazan je grafik funkcije $f(x) = \frac{x^4-8x^2}{4}$, u drugom $f(x) = 2\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ i u trećem $f(x) = 2\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2$.



x_0	$M(x_0, f(x_0))$	lokalni ekstr.	$f'(x_0)$
2.4	(2.4, −3.23)	NE	4.22

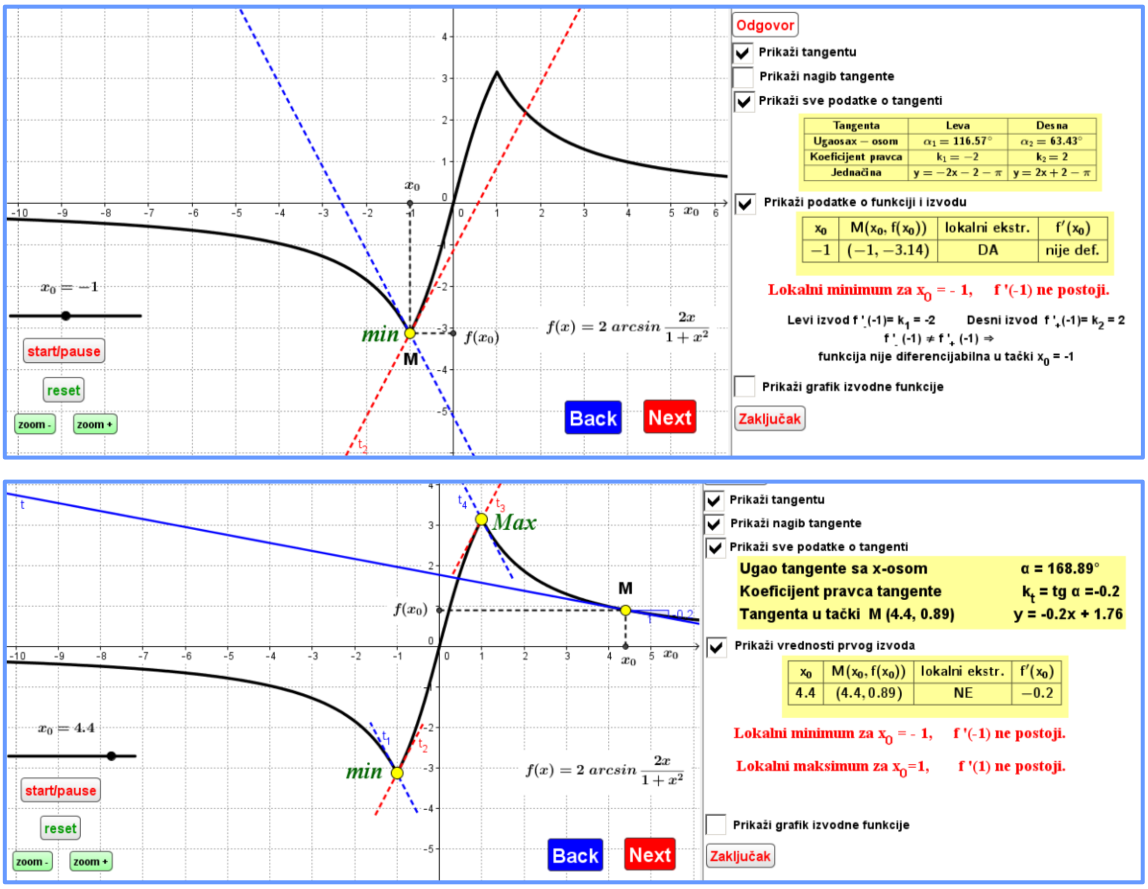
Slika 3.27. *Izgled dinamičkog radnog lista sa svim vrstama pomoći koje se mogu koristiti*

- Promena funkcije (problema) se vrši klikom na dugme „Next" ili „Back".
- Učenik može da proveri tačnost svojih odgovora ili zaključaka pomoću odgovarajućeg dugmeta „Odgovor" ili „Zaključak".
- Pomoć koju učenici mogu da dobiju, prikazuje se nakon izbora odgovarajućeg polja pored koga se nalazi i kratak opis: prikaži tangentu, prikaži nagib tangente, prikaži sve podatke o tangenti, prikaži vrednosti prvog izvoda.

– Izborom polja za prikazivanje tangente i nagiba tangente učenici dobijaju pomoć vizuelne prirode. Pomeranjem klizača x_0 mogu vizuelno da prate promene položaja tangente i njenog nagiba, koji je prikazan pravouglim trouglom.

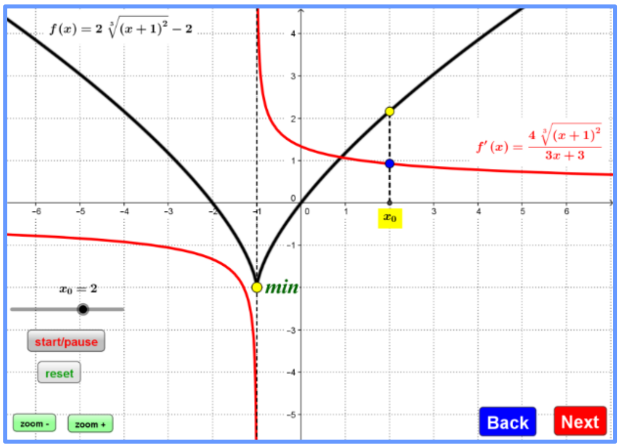
– Pomoć „Prikaži sve podatke o tangenti" je numeričke i algebarske prirode i pruža informacije o uglu tangente sa x–osom, koeficijentu pravca tangente i jednačini tangente. Svi podaci se dinamički menjaju kada se pomera klizač.

– Nakon izbora polja „Prikaži podatke o funkciji i izvodu" pojavljuje se tabela u kojoj su prikazani numerički podaci o funkciji i prvom izvodu funkcije. Kada tačka $M(x_0, f(x_0))$ „dođe" u položaj tačke lokalnog ekstrema funkcije, pojavljuje se tekstualno polje kojim se ističe zaključak o tački lokalnog ekstrema i vrednosti prvog izvoda u toj tački. On ostaje vidljiv za sve vrednosti x_0 koje su veće od apscise tačke lokalnog ekstrema (Slika 3.28).

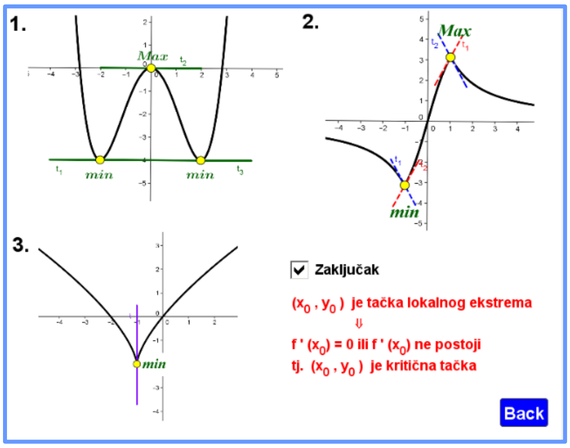


Slika 3.28. *Dinamička promena podataka u grafičkom i algebarskom delu radnog lista*

- Izborom polja „Prikaži grafik izvodne funkcije" u levom delu ekrana se pojavljuju grafik funkcije i grafik izvodne funkcije (Slika 3.29). Posmatranjem tačke koja pripada grafiku funkcije i odgovarajuće tačke (sa istom apscisom) koja pripada grafiku izvodne funkcije, uz pomeranje klizača x_0, učenici mogu da odrede vrednost izvodne funkcije u tački lokalnog ekstrema funkcije f ili da izvedu zaključak da izvodna funkcija u toj tački nije definisana.



Slika 3.29. *Pomoć „Prikaži grafik izvodne funkcije"*



Slika 3.30. *Deo radnog lista za izvođenje zaključka za sve tri funkcije*

- Nakon pojedinačnog istraživanja navedenih funkcija, pritiskom na dugme „Next", učenik prelazi na deo radnog lista sa slikama za sva tri problema na kojima su prikazani grafici funkcija i tangente u njihovim tačkama lokalnih ekstrema (Slika 3.30). Na osnovu izvedenih zaključaka o svakoj funkciji pojedinačno, učenici mogu uopštavanjem doći do zaključka da za funkcije koje su istraživali u *GeoGebra* radnom listu važi: u tačkama lokalnih ekstrema funkcije, vrednost prvog izvoda je 0 ili prvi izvod nije definisan.
- Korisniku *GeoGebra* radnog lista dostupne su i sledeće opcije: pokretanje ili zaustavljanje animacije klizača (start/pause), vraćanje klizača na početnu vrednost (reset), povećavanje ili smanjivanje grafičkog prikaza (zoom+, zoom-), kretanje po radnim listovima (Next, Back), provera tačnosti odgovora ili zaključaka (Odgovor, Zaključak), koje se aktiviraju izborom odgovarajućeg polja ili dugmeta.

Prikazani *GeoGebra* dinamički radni list omogućava učenicima da samostalno kreiraju put kojim dolaze do saznanja, koriste ponuđenu pomoć u skladu sa svojim individualnim sposobnostima i da uče vlastitim tempom.

Za istraživanje problema učenici su dobili prateći radni list:

Problem: Na osnovu grafika funkcije $y = f(x)$, odredi vrednosti prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema funkcije.

1) $f(x) = \frac{x^4-8x^2}{4}$

Plan:
Pomoć: Koja je geometrijska interpretacija prvog izvoda?
Prvi izvod funkcije u tački x_0 je ______________________________ .
Ukratko zapiši svoj plan.

Realizacija plana:
Na osnovu grafika funkcije $y = f(x)$ odredi tačke lokalnih ekstrema.
Funkcija $y = f(x)$ ima lokalne ekstreme u tačkama: ____________________ .

Da bi odredio vrednosti prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema funkcije možeš da izabereš neku od ponuđenih vrsta pomoći.
Najpre izaberi pomoć „prikaži tangentu''. Pomeraj klizač x_0 i posmatraj kako se tačka $M(x_0, f(x_0))$ „kreće'' po grafiku. Posmatraj promenu položaja tangente grafika u tački M. Zaustavi klizač kada je M tačka lokalnog ekstrema funkcije. Posmatraj tangentu i odredi njen koeficijent pravca. Odredi vrednost prvog izvoda funkcije u tački lokalnog ekstrema. Pokreni klizač x_0 i ponovi postupak za ostale tačke u kojima funkcija ima lokalne ekstreme.

Ako su ti potrebna detaljnija objašnjenja, na raspolaganju su ti i druge vrste pomoći: prikaz nagiba tangente, prikaz svih podataka o tangenti i prikaz vrednosti prvog izvoda. Nakon izbora pomoći pomeraj klizač x_0, prati promene u grafičkom delu prozora i u polju izabranih pomoći, kako bi došao do potrebnih podataka.
Popuni tabelu:

Tačka lokalnog ekstrema	$x_0 =$	$x_0 =$	$x_0 =$
Koeficijent pravca tangente	$k =$	$k =$	$k =$
Prvi izvod funkcije u tački lokalnog ekstrema	$f'(\quad) =$	$f'(\quad) =$	$f'(\quad) =$
Nacrtaj deo grafika funkcije $y = f(x)$ u okolini tačke lokalnog ekstrema i tangentu u toj tački.			

Zaključak:
Vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \frac{x^4-8x^2}{4}$ u tačkama lokalnih ekstrema je ________.

Izaberi polje „prikaži grafik izvodne funkcije''. Na osnovu grafika funkcije $f(x)$ i grafika njene izvodne funkcije, pomeranjem klizača, odredi vrednosti prvog izvoda u tačkama lokalnih ekstrema. Da li si došao do istog zaključka?
Proveri svoje rešenje korišćenjem analitičkog zapisa za izvodnu funkciju $f'(x)$.

Dugme „Next'' te vodi na sledeći problem. Sprovedi istraživanje, sastavi tabelu i zapiši zaključak.
Trudi se da manje koristiš pomoć!

2) $f(x) = 2\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

3) $f(x) = 2\sqrt[3]{(x+1)^2} - 2$

Zapiši zaključak koji se odnosi na sva tri primera.
U tačkama lokalnih ekstrema funkcije $f(x)$, prvi izvod ____________________
____ .

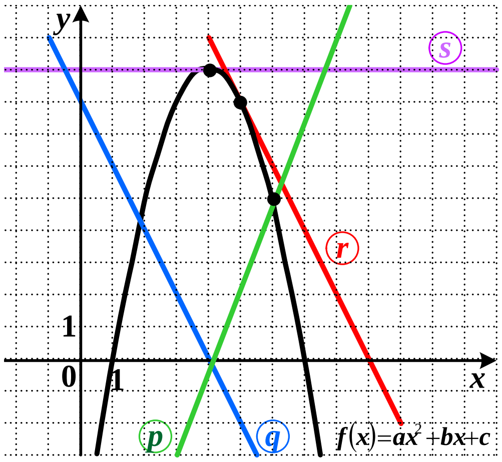
Nakon kognitivno-vizuelne obrade teorijskih osnova koncepta lokalnih ekstrema, pristupa se rešavanju zadataka koji zahtevaju primenu prethodno stečenih teorijska znanja. Za obradu lokalnih ekstrema funkcije osmišljena su i kreirana četiri tipa zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima - A, B, C i D. U nastavku ovog rada su prikazani primeri za sva četiri tipa zadataka i metodička objašnjenja za njihovu realizaciju u nastavnoj praksi.

Zadatak A tipa:

Na slici je prikazan grafik funkcije

$f(x) = ax^2 + bx + c$ *i četiri prave, p, q r i s.*

Koja od prikazanih pravih je grafik izvodne funkcije $y = f'(x)$*?*



U navedenom A zadatku data je grafička reprezentacija funkcije f ali i određeni podaci o algebarskoj reprezentaciji (funkcija je kvadratna). Zbog toga se rešavanju zadatka može pristupiti na više načina koji se razlikuju po pitanju zastupljenosti grafičkih i algebarskih reprezentacija.

Strategije rešavanja zadatka u kojima dominiraju grafičke reprezentacije:

Učenici koji preferiraju rad sa grafičkim reprezentacijama imaju mogućnost da reše zadatak samo na osnovu datih grafičkih podataka, bez razmatranja algebarske reprezentacije funkcije. U nastavku su data dva načina rešavanja zadatka u kojima dominiraju grafičke reprezentacije i vizuelne strategije rešavanja problema.

I način (grafičko ispitivanje lokalnih ekstrema i monotonosti funkcije)

Na slici je prikazan grafik funkcije koja dostiže lokalni maksimum za $x = 4$. Kako je $f'(4)$=0 (tangenta s je paralelna sa x–osom), to grafik izvodne funkcije seče x–osu u tački $A\ (4, 0)$. Sa slike se vidi da dve prave (p i q) seku x–osu u tački A. Da bi odredili koja od njih predstavlja grafik izvodne funkcije, potrebno je uzeti u obzir i promenu znaka izvodne funkcije u okolini kritične tačke. Funkcija f najpre raste, a zatim opada iz čega sledi da je izvodna funkcija negativna za $x < 4$, a pozitivna kada je $x > 4$. Ovaj uslov je ispunjen u slučaju prave q, pa ona predstavlja grafik izvodne funkcije.

II način (određivanje prvog izvoda funkcije u tački, kao nagiba tangente)

Na slici je prikazano da je prava r tangenta grafika funkcije u tački $(5, 8)$. Na osnovu grafičkih podataka može se zaključiti da je koeficijent pravca prave r jednak -2, iz čega sledi da je $f'(5) = -2$. Dakle, tačka $(5, -2)$ pripada grafiku izvodne funkcije, a ovaj uslov ispunjava samo prava q.

Pored opisanih vizuelnih pristupa, zadatak se može razmatrati i sa komplementarnog tj. algebarskog aspekta.

Strategije rešavanja zadatka u kojima dominiraju algebarske reprezentacije:

U zadatku je dato da je na slici prikazan grafik kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$. Za datu parabolu može se odrediti odgovarajući analitički izraz zato što slika sadrži sve potrebne podatke. Prelazak iz grafičke u algebarsku reprezentaciju kvadratne funkcije, može se realizovati na više načina, što je i prikazano u tabeli koja sledi.

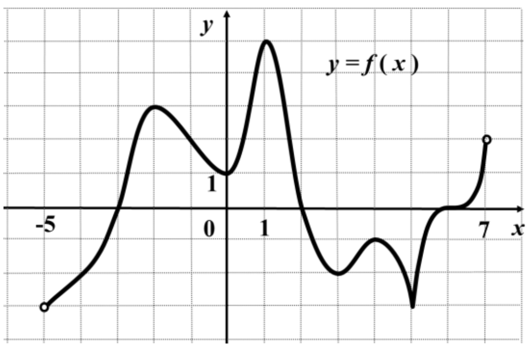
Opšti oblik kvadratne funkcije	**Kanonski oblik kvadratne funkcije**	**Faktorisani oblik kvadratne funkcije**
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$, gde je (α, β) teme parabole	$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$, gde su x_1 i x_2 nule funkcije
Tačke $(4,9), (5,8)$ i $(6,5)$ pripadaju grafiku funkcije. $\Downarrow$ $\begin{cases} 16a + 4b + c = 9 \\ 25a + 5b + c = 8 \\ 36a + 6b + c = 5 \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}$ $\Downarrow$	Teme parabole je tačka $(4,9) \Rightarrow \alpha = 4, \quad \beta = 9$. $\Downarrow$ $f(x) = a\,(x-4)^2 + 9$ Tačka $(5,8)$ pripada grafiku funkcije. $\Downarrow$ $8 = a\,(5-4)^2 + 9$ $\Downarrow$ $a = -1$ $\Downarrow$ $f(x) = -(x-4)^2 + 9$ $\Downarrow$	$x_1 = 1, \quad x_2 = 7$ $\Downarrow$ $f(x) = a\,(x-1)\,(x-7)$ Tačka $(4,9)$ pripada grafiku funkcije. $\Downarrow$ $9 = a\,(4-1)\,(4-7)$ $\Downarrow$ $a = -1$ $\Downarrow$ $f(x) = -\,(x-1)\,(x-7)$ $\Downarrow$
$f(x) = -x^2 + 8x - 7$	$f(x) = -x^2 + 8x - 7$	$f(x) = -x^2 + 8x - 7$

Za kvadratnu funkciju $f(x) = -x^2 + 8x - 7$, izvodna funkcija je $f'(x) = -2x + 8$. Dalje je potrebno odrediti koja od prikazanih pravih predstavlja grafik dobijene izvodne funkcije. Iz $f'(x) = -2x + 8$ sledi da je grafik izvodne funkcije prava čiji je odsečak na y–osi jednak 8. Sa slike se vidi da samo prava q seče y–osu u tački $(0,8)$, pa upravo ova prava predstavlja grafik izvodne funkcije.

Za napred opisane pristupe svojstven je sledeći niz prelazaka između koncepata i/ili reprezentacija $G_f \to A_f \to A_i \to G_i$, pri čemu razmatranje lokalnih ekstrema funkcije pomoću prvog izvoda nije obuhvaćeno postupkom rešavanja zadatka.

Zadatak B tipa:

Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$, definisane na intervalu $(-5,\ 7)$. Zbir svih vrednosti argumenta x za koje je funkcija diferencijabilna i ima lokalnu ekstremnu vrednost je:



a) 12

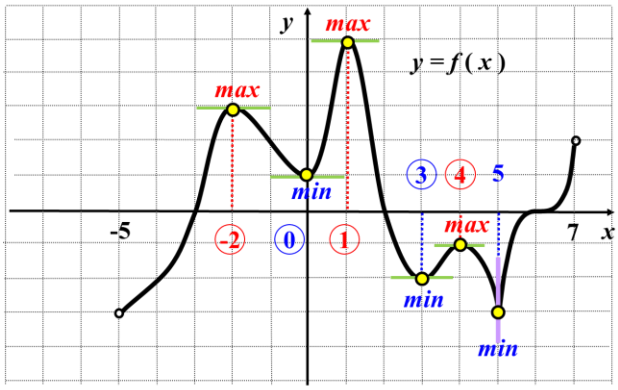
b) 11

c) 8

d) 6

e) 3

Navedeni B zadatak zahteva od učenika da primene teoremu o potrebnom uslovu lokalnih ekstrema, na funkciju koja je data svojim grafikom. Učenici najpre treba da ispitaju lokalne ekstreme funkcije. Pravilnim interpretiranjem grafičkih podataka mogu izvesti zaključak da funkcija dostiže lokalni maksimum za $x=-2$, $x=1$ i $x=4$, a lokalni minimum ako je $x=0$, $x=3$ i $x=5$ (Slika 3.31).



Slika 3.31. *Grafički postupak rešavanja B zadatka*

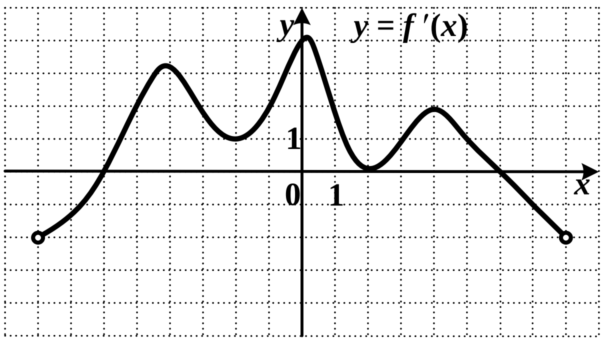
Zahtevi zadatka uključuju i ispitivanje diferencijabilnosti funkcije. Kako je funkcija zadata grafikom, od učenika se očekuje da u tačkama lokalnih ekstrema nacrtaju tangente, a zatim da razmatraju njihove koeficijente pravaca. U tački $(5,-3)$ tangenta grafika funkcije je paralelna sa y–osom, iz čega sledi da za $x=5$ prvi izvod ne postoji, tj. da funkcija nije diferencijabilna. U svim ostalim tačkama lokalnih ekstrema, tangente su paralelne sa x–osom, pa je prvi izvod jednak nuli i zbog toga je funkcija u tim tačkama diferencijabilna. Uslovi zadatka su ispunjeni ako argument x uzima vrednosti iz skupa $\{-2,0,1,3,4\}$. Zbir ovih vrednosti je 6, pa je tačan odgovor pod d.

Zadaci C tipa:

Funkcija $y=f(x)$ je definisana na intervalu $(-5,\ 6)$. Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije $y=f'(x)$.

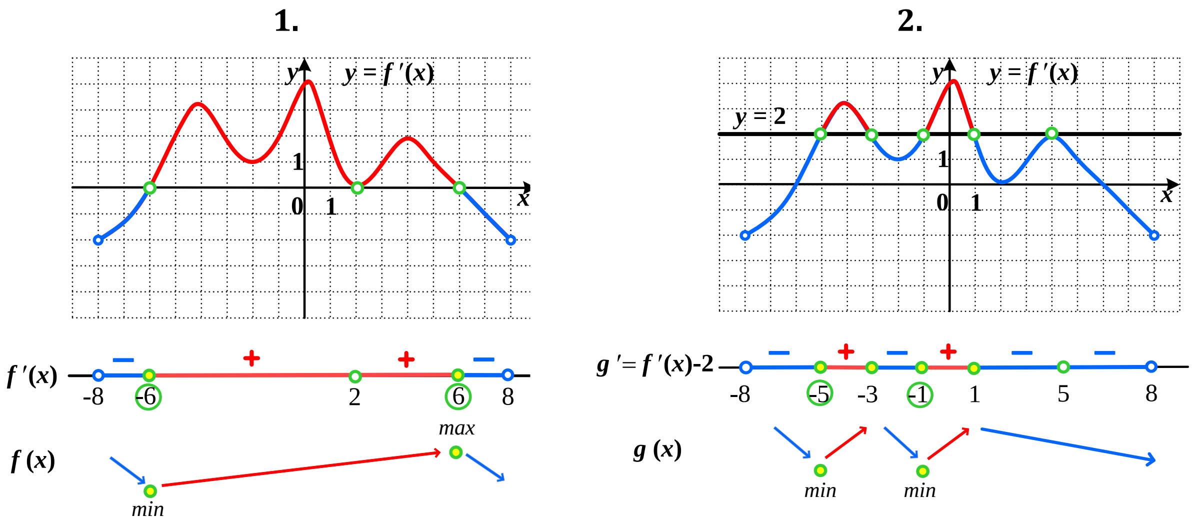
1. *Koliko lokalnih ekstrema ima funkcija f?*

2. *Koliko lokalnih minimuma ima funkcija g, ako je $g(x)=f(x)-2x$?*



Prvi zadatak zahteva od učenika da najpre, na osnovu datog grafika ispitaju nule i znak izvodne funkcije i da to prikažu odgovarajućim grafičkim simbolima (Slika 3.32.1). Zatim je potrebno da uoče one kritične tačke u čijoj okolini dolazi do promene znaka prvog izvoda. Kako je izvodna funkcija različitog znaka u okolini tačaka $x=-6$ i $x=6$, to na osnovu teoreme o dovoljnom uslovu, ova funkcija ima dva lokalna ekstrema, jedan minimum i jedan maksimum.

Drugi zadatak je osmišljen kako bi učenici ponovili gradivo koje se odnosi na transformacije grafika funkcije i grafičko rešavanje nejednačina. Prethodno stečena znanja učenici treba da primene u novoj situaciji, u radu sa graficima izvodnih funkcija. Na taj način se uspostavlja korelacija između određenih sadržaja nastavnih tema Funkcije i Izvod funkcije.



Slika 3.32. *Grafički postupak rešavanja zadataka C tipa*

Za ispitivanje lokalnih minimuma funkcije g, najpre je potrebno da se odredi analitički izraz njenog prvog izvoda, $g'(x) = f'(x) - 2$. Zatim sledi postupak grafičkog određivanja nula i znaka funkcije g', koji se može sprovesti na dva načina.

Prvi način je da učenici nacrtaju grafik funkcije g' tako što će izvršiti odgovarajuću transformaciju grafika f'. U ovom slučaju se radi o translaciji grafika f' za dve jedinične duži naniže. Na osnovu položaja tako dobijenog grafika g', u odnosu na x–osu, učenici mogu odrediti nule i znak funkcije g'.

Međutim, u ovom zadatku, translacija grafika funkcije f' za dve jedinične duži naniže, ekvivalentna je translaciji x–ose za dve duži naviše. Zbog toga se rešavanju problema može pristupiti i na drugi način – primenom transformacije koordinatnog sistema (celokupan postupak je prikazan na Slika 3.32.2). Učenici izvrše translaciju x–ose za dve duži naviše i nakon toga razmatraju položaj grafika funkcije f' u odnosu na pravu $y = 2$. Intervali na kojima je grafik funkcije $f'(x)$ iznad (ispod) prave $y = 2$ su ujedno i intervali na kojima je funkcija $f'(x) - 2$, odnosno $g'(x)$ pozitivna (negativna). Rešavanjem zadatka na drugi način, učenici u stvari grafički rešavaju nejednačine $f'(x) < 2$ i $f'(x) > 2$.

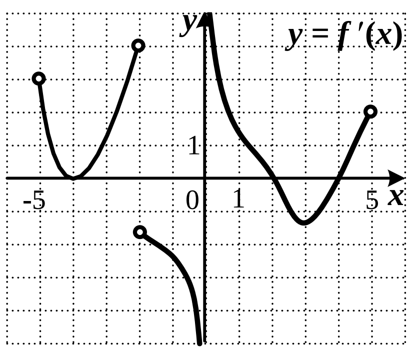
Nakon ispitivanja znaka funkcije g', učenici treba da primene teoremu o dovoljnom uslovu lokalnih ekstrema i izvedu zaključak da funkcija g ima dva lokalna minimuma, za $x = -5$ i $x = -1$.

Zadatak D tipa:

Funkcija $y = f(x)$ je definisana i neprekidna na intervalu $(-5, 5)$.

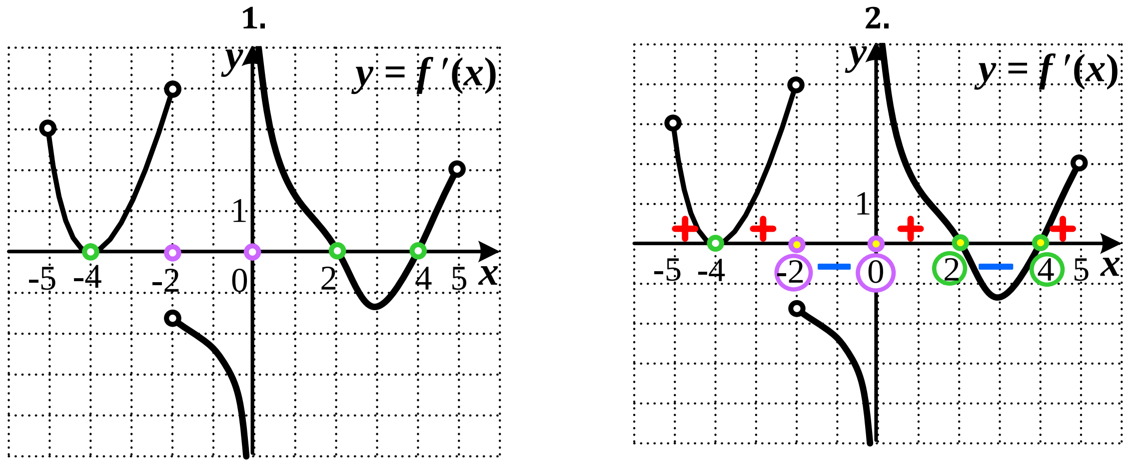
Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije $y = f'(x)$.

Odredi zbir apscisa tačaka u kojima funkcija $y = f(x)$ ima lokalne ekstremne vrednosti.



U ovom zadatku učenici treba da primene teoreme o lokalnim ekstremima na funkciju koja nije diferencijabilna na celom domenu.

Prema teoremi o potrebnom uslovu, funkcija f može imati lokalne ekstreme samo u kritičnim tačkama. Kritične brojeve funkcije f treba odrediti na osnovu datog grafika izvodne funkcije. Sa grafika se očitava da izvodna funkcija na intervalu $(-5, 5)$ ima tri nule: $x = -4, x = 2$ i $x = 4$, a nije definisana za $x = -2$ i za $x = 0$ (Slika 3.33.1). Dakle, kritični brojevi funkcije f su: ± 4, ± 2 i 0.



Slika 3.33. *Primena teorema o lokalnim ekstremima u rešavanju D-zadatka*
1. *Teorema o potrebnom uslovu – grafičko određivanje kritičnih brojeva*
2. *Teorema o dovoljnom uslovu – grafičko ispitivanje promene znaka izvodne funkcije*

Kako bi iz skupa kritičnih brojeva izdvojili one u kojima funkcija ima lokalni ekstrem, potrebno je ispitati znak prvog izvoda. Znak izvodne funkcije se određuje grafički (Slika 3.33.2) i može se zaključiti da se on menja u okolinama tačaka -2, 0, 2 i 4. Prema teoremi o dovoljnom uslovu sledi da funkcija f ima lokalne ekstreme u tačkama čije su apscise -2, 0, 2 i 4, i njihov zbir je 4.

Za uspešnu realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa veoma je značajno da se u procesu učenja aktuelizuju kognitivne aktivnosti kojim se uspostavljaju prelasci između vizuelnih i simboličkih ravni apstrakcije. Zbog toga je posebno važno osmisliti nastavne sadržaje koji neposredno povezuju zadatke sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i standardnu proceduru ispitivanja lokalnih ekstrema funkcije koja je data u analitičkom obliku. U nastavku teksta je dat primer zadatka koji ima napred navedena svojstva i *GeoGebra* nastavni materijal koji je didaktičko-metodički oblikovan za samostalno učenje u vizuelnom, dinamičkom i interaktivnom računarskom okruženju.

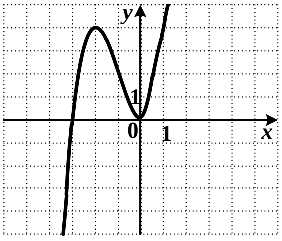
Zadatak C tipa $(A_i \leftrightarrow G_f)$:

Funkcije f, g, h i s definisna su na skupu R. Na slikama 1-4. prikazani su njihovi grafici.

Ispod svake slike napiši koji je grafik funkcije na njoj prikazan, ako je poznato da je:

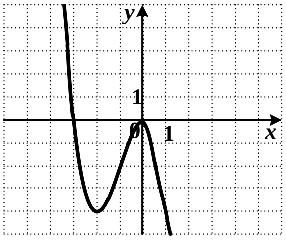
$$f'(x) = \frac{3x^3 + 6x^2}{2}, \quad g'(x) = 3x^2 + 6x\,, \quad h'(x) = \frac{3x^3 + 12x^2 + 12x}{8}, \quad s'(x) = -3x^2 - 6x.$$

1.



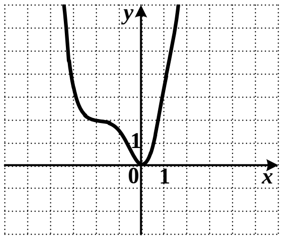
____

2.



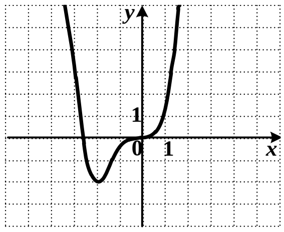
____

3.



____

4.

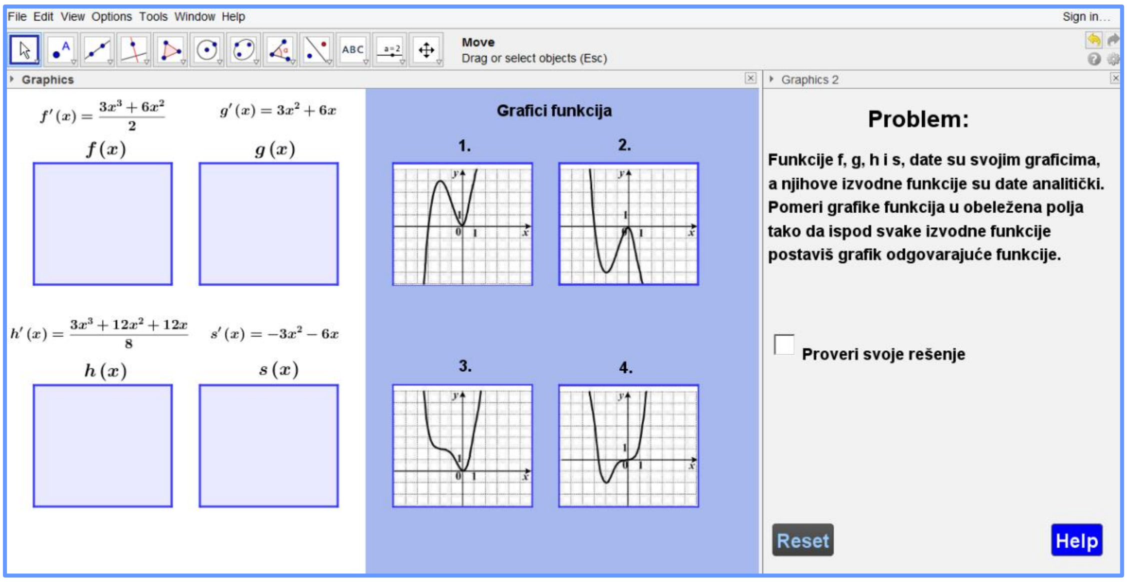


____

Ovaj zadatak je osmišljen u cilju podsticanja učenika da koriste različite reprezentacije, da selektuju i integrišu podatke koji su prezentovani na različite načine, kao i da prave fleksibilne prevode iz jedne forme u drugu. Naime, kritične tačke, intervali monotonosti i tačke lokalnih ekstrema funkcija f, g, h i s, kao i nule i znak njihovih izvodnih funkcija, učenici mogu odrediti sprovođenjem i grafičkog i standardnog algebarskog (analitičkog) postupka. Kako bi odredili koji je grafik prikazan na svakoj od datih slika, potrebno je da povežu i uporede odgovarajuće podatke i činjenice koje su dobili ispitivanjem grafičkih i algebarskih reprezentacija. Izbor reprezentacija koje učenici odluče da koriste, odnosno zastupljenost grafičkih/algebarskih reprezentacija u velikoj meri determiniše i sam način rešavanja zadatka.

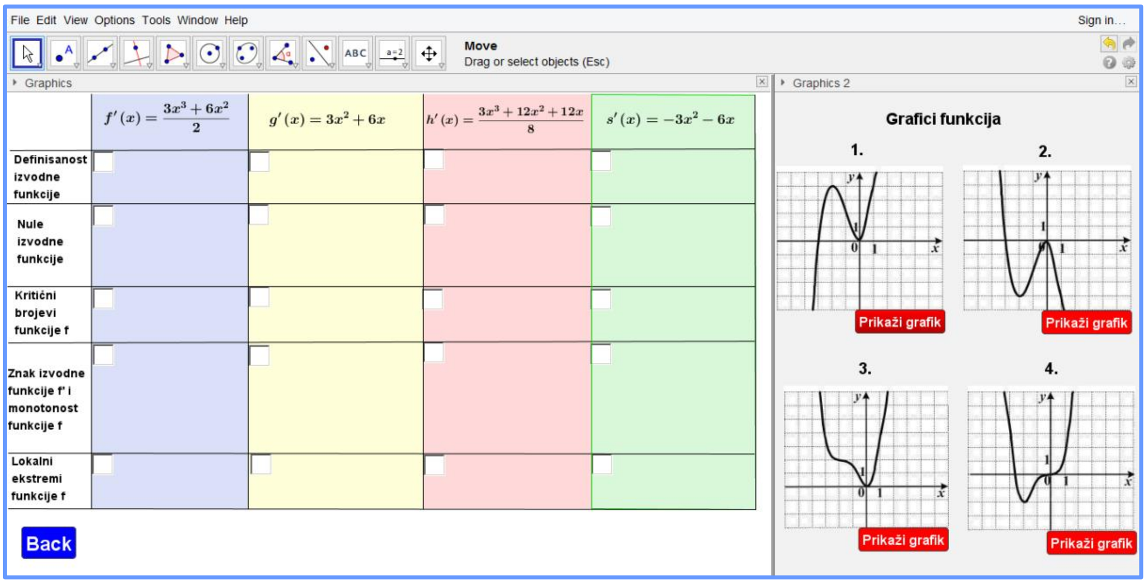
Budući da se zadatku može pristupi sa više polaznih tačaka i upotrebom raznih reprezentacija, učenici mogu rešiti zadatak koristeći se različitim ispravnim strategijama. Zbog toga je *GeoGebra* nastavni materijal osmišljen i strukturiran upravo tako da uvažava napred navedene različitosti i pruža adekvatne povratne informacije koje podržavaju različite načine rešavanja ovog zadatka. Obim i karakter povratnih informacija je usaglašen ne samo sa metodičkim osobenostima zadatka već i sa didaktičkim ciljevima koji se žele postići kognitivno-vizuelnim pristupom. Zbog toga je, pri izradi ovog nastavnog materijala, posebna pažnja bila posvećena vizuelnim elementima i individualizaciji okruženja za učenje. Korišćenje povratnih informacija je interaktivno, personalizovano i prilagođeno potrebama učenika, što značajno doprinosi individualizaciji procesa učenja. Učenici stupaju u svojevrsnu interakciju sa sadržajima prikazanim u softveru *GeoGebra* i imaju mogućnost da u skladu sa svojim znanjima, sposobnostima i preferencijama u radu sa reprezentacijama pronađu odgovarajući pristup i strategiju za razumevanje i rešavanje problema.

Početni meni *GeoGebra* radnog lista (Slika 3.34) sadrži zadatak koji učenici treba da reše, pruža povratnu informaciju o tačnosti rešenja (dostupna izborom polja „Proveri svoje rešenje”), kao i mogućnost da se pristupi ponovnom rešavanju (dostupna klikom na dugme „Reset”). U slučaju da učenici nisu tačno rešili zadatak ili ako prilikom rešavanja imaju nedoumice i nejasnoće, mogu da koriste dodatna objašnjenja klikom na dugme „Help”.



Slika 3.34. *Početni meni GeoGebra radnog lista*

Aktiviranjem opcije „Help”, prikazuje se novi meni koji nudi široku paletu mogućnosti izbora povratnih informacija relevantnih za postupak rešavanja zadatka. (Slika 3.35). Ovaj meni je dizajniran tako da je korišćenje pomoći (dobijanje željene povratne informacije) jednostavno i funkcionalno. U levom delu radnog lista nalazi se tabela u kojoj su sistematično organizovane i pregledno prikazane opcije koje su dostupne za izvodne funkcije. U desnom delu ekrana su prikazani grafici funkcija i ispod svake slike se nalazi dugme „Prikaži grafik”. Ova dugmad služe da se aktivira meni koji pruža pomoć u radu sa graficima funkcija.

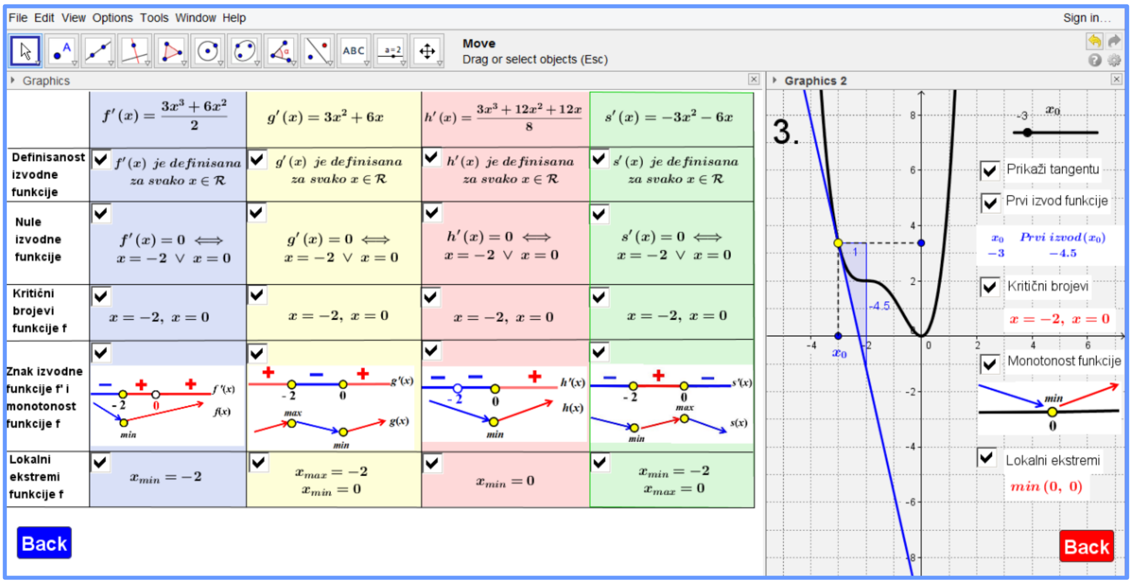


Slika 3.35. *Izgled GeoGebra dinamičkog radnog lista nakon aktiviranja opcije „Help”*

Povratne informacije o algebarskim reprezentacijama izvodnih funkcija, date su u formi teksta ili slike i prikazuju se u okviru tabele, nakon izbora odgovarajućeg polja. Učeniku su dostupne sledeće informacije o izvodnim funkcijama (Slika 3.36):

1) Definisanost izvodne funkcije
2) Nule izvodne funkcije
3) Kritični brojevi funkcije f
4) Znak izvodne funkcije f' i monotonost funkcije f

5) Lokalni ekstremi funkcije f.



Slika 3.36. *Povratne informacije u GeoGebra dinamičkom radnom listu*

Pritiskom na dugme „Prikaži grafik”, u desnom delu radnog lista otvara se vizuelno-dinamičko okruženje u kome učenik može da istražuje odabrani grafik i da izvodi zaključke o osobinama funkcije i njenog prvog izvoda. Osim toga, učenik može da dobije dodatna objašnjenja ili da proveri ispravnost svojih zaključaka tako što će kliknuti na polje za izbor pored koga se nalazi i kratak opis pomoći koja će biti prikazana. Povratne informacije o grafičkim reprezentacijama funkcija su (Slika 3.36):

1) Prikaži tangentu – nakon izbora ove opcije pojavljuje se tangenta grafika funkcije konstruisana u tački $M(x_0, f(x_0))$ i Lajbnicov trougao na osnovu koga učenici mogu grafički da interpretiraju prvi izvod u tački. Položaj tačke M se menja pomoću klizača x_0. Učenici mogu da pomeraju klizač x_0 i da posmatraju kako se menja položaj tačke M i tangente, pa samim tim i da očitavaju vrednosti prvog izvoda iz Lajbnicovog trougla.
2) Prvi izvod funkcije – izborom ove opcije prikazuje se tekstualno polje koje sadrži numeričke informacije o vrednostima nezavisno promenljive x_0 i prvog izvoda u tački x_0. Kada se klizač x_0 pomera, ovi numerički podaci se automatski ažuriraju.
3) Kritični brojevi funkcije – prikazani su u okviru tekstualnog polja.
4) Monotonost funkcije – učenik dobija povratnu informaciju u formi slike na kojoj je monotonost funkcije predstavljena pomoću odgovarajućih grafičkih simbola.
5) Lokalni ekstremi – tekstualno polje koje sadrži informacije o tačkama lokalnih ekstrema funkcije i njihovim koordinatama.

U *GeoGebra* radnom listu su ugrađena i dva komandna dugmeta „Back” koja omogućavaju funkcionalnu i jednostavnu navigaciju. Nakon korišćenja pomoći za izabrani grafik, ona se može zatvoriti pomoću crvenog dugmeta „Back” i učenik opet ima mogućnost da izabere prikazivanje povratnih informacija o bilo kom grafiku. Plavo dugme „Back” služi za povratak na početni meni, koji dopušta učeniku da pristupi ponovnom rešavanju problema, kao i da proveri da li je u tome bio uspešan.

Kao što je već rečeno, učenici mogu rešavati zadatak koristeći se različitim strategijama. Ove strategije se razlikuju po pitanju zastupljenosti algebarskih/grafičkih reprezentacija u radu učenika. Ukoliko je strategija rešavanja zadatka bazirana na prelascima $A_i \rightarrow G_f$ /$G_f \rightarrow A_i$, tada u radu učenika dominiraju algebarske/grafičke reprezentacije. U daljem tekstu biće opisana dva dijametralna načina rešavanja navedenog zadatka: algebarski pristup (svi prelasci su tipa $A_i \rightarrow G_f$) i grafički pristup (svi prelasci su tipa $G_f \rightarrow A_i$).

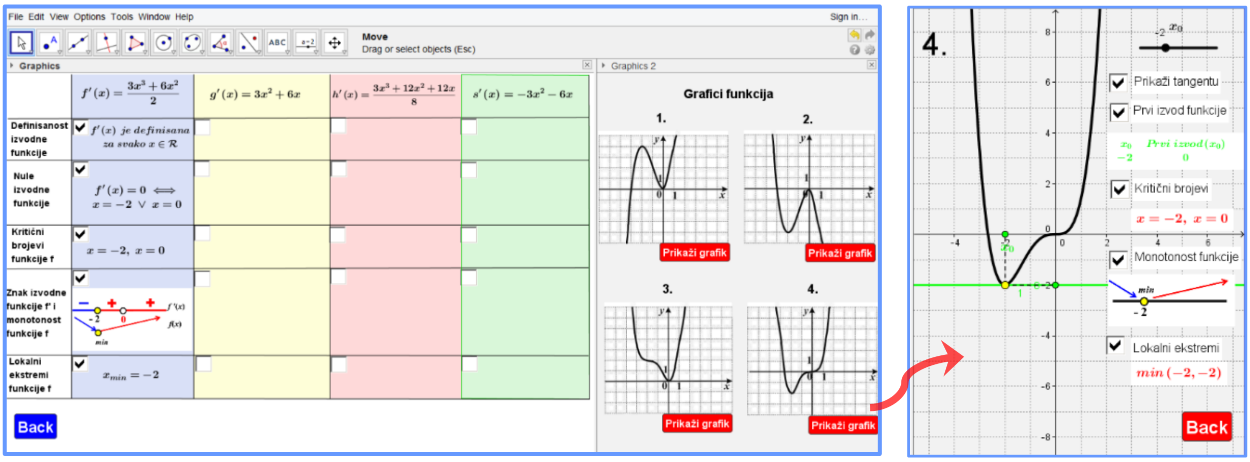
Algebarski pristup rešavanju zadatka:

Učenici koji odluče da u postupku rešavanja zadatka pođu od izvodnih funkcija, treba da primene standardni postupak kojim se ispituju lokalni ekstremi funkcije. U ovom postupku se koriste algebarske reprezentacije i algebarske procedure kojima se određuju: domen, nule i znak izvodne funkcije (rešavanjem odgovarajućih jednačina i nejednačina) Kako su date četiri izvodne funkcije, ovaj postupak treba da se sprovede najviše tri puta.

Na primer, ako učenik najpre razmatra izvodnu funkciju f', može zaključiti da funkcija f ima lokalni minimum u tački $x = -2$. *GeoGebra* dinamički radni list, putem ugrađenih povratnih informacija, pruža direktnu podršku učeniku u sprovođenju ovog postupka, što je i prikazano na Slici 3.37 (kolona označena plavom bojom).

Dalji postupak rešavanja zahteva grafičku interpretaciju lokalnih ekstrema funkcije f. Odnosno, učenik treba da odredi za koji od četiri ponuđena grafika (prikazani u desnom delu radnog lista) važi da ima samo jedan lokalni ekstrem, i da je u pitanju lokalni minimum koji funkcija dostiže za $x = -2$. Pravilnom interpretacijom grafičkih reprezentacija, učenik može izvesti zaključak da je grafik funkcije f prikazan na slici označenoj brojem 4. I ovu aktivnost učenika podržava *GeoGebra* okruženje putem pomoći koja se aktivira pritiskom na dugme „Prikaži grafik" (Slika 3.37).

Sprovođenjem napred opisanog postupka za još dve izvodne funkcije, učenik dolazi do krajnjeg rešenja zadatka: grafik funkcije f je prikazan na četvrtoj slici, g na prvoj, h na trećoj i s na drugoj.



Slika 3.37. *Povratne informacije o izvodnoj funkciji* $\boldsymbol{f'}$ *i grafiku funkcije f prikazanom na 4. slici*

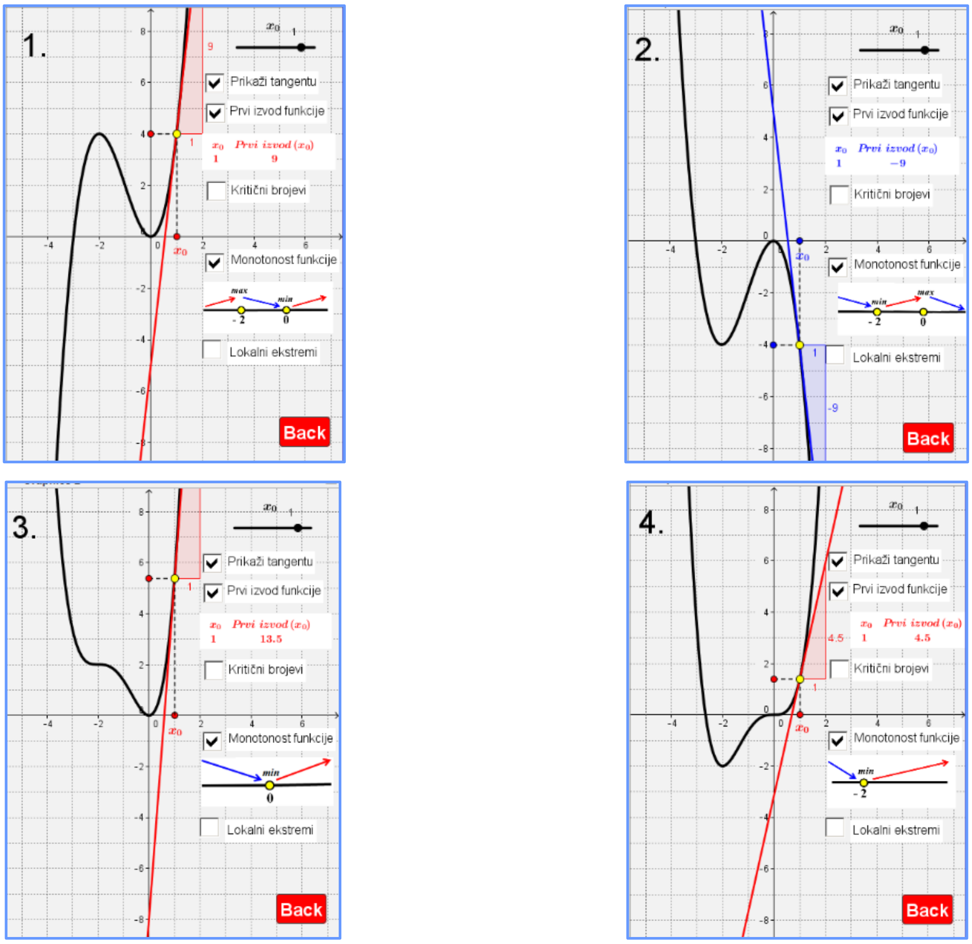
Zadatak se može rešiti u manjem broju koraka – sprovođenjem postupka za ispitivanja lokalnih ekstrema samo za dve funkcije. Najpre je potrebno uočiti da je $s'(x) = -g'(x)$. Iz ove činjenice sledi da u tačkama u kojima funkcija g ima lokalni minimum (maksimum), funkcija s ima lokalni maksimum (minimum). Na osnovu toga može se zaključiti da su grafici ovih funkcija prikazani na prvoj i drugoj slici. Dakle, da bi povezali grafike funkcija g i s sa njihovim izvodnim funkcijama, dovoljno je sprovesti postupak samo za jednu od njih. Nakon toga, preostaje da se za jednu od preostalih funkcija (ili za f ili za h) ispitaju lokalni ekstremi i da se odredi odgovarajući grafik.

Grafički pristup rešavanju zadatka:

U zadatku su data četiri grafika. Sa slike se može videti da su tangente ovih grafika, u tačkama čije su apscise $x = -2$ i $x = 0$, paralelne sa x–osom, pa su vrednosti prvih izvoda ovih funkcija jednake nuli. To znači da su potrebne dodatne činjenice, kako bi se uspostavile veze između grafika funkcija i analitičkih oblika izvodnih funkcija. One su sadržane u samim graficima funkcija i mogu se dobiti razmatranjem monotonosti, odnosno na osnovu geometrijske interpretacije prvog izvoda funkcije u tački.

Na drugoj slici je prikazan grafik funkcije koja je za $x > 0$ opadajuća, dok su funkcije prikazane na ostalim slikama rastuće. Iz toga sledi da je za $x > 0$, jedna od izvodnih funkcija negativna, a tri su pozitivne. Ako izaberemo broj koji je veći od nule, na primer 1, i uvrstimo u analitičke izraze izvodnih funkcija, dobijamo da je $f'(1) = 9/2$, $g'(1) = 9$, $h'(1) = 27/2$ i $s'(1) = -9$. Dakle, grafik funkcije s je prikazan na drugoj slici.

Do istog zaključka može se doći i geometrijskim interpretiranjem prvog izvoda funkcije u tački. Učenici treba najpre za svaku funkciju da nacrtaju tangentu u tački grafika čija je apscisa $x = 1$. Zatim, je potrebno da odrede znak prvog izvoda u tački $x = 1$. Tangenta nacrtana na drugom grafiku gradi tup ugao sa x –osom, pa je prvi izvod negativan za $x = 1$. Tangente nacrtane na ostalim graficima grade oštar ugao, pa su vrednosti prvog izvoda pozitivne. U *GeoGebra* dinamičkom radnom listu, učeniku su dostupne povratne informacije koje podržavaju istraživanje grafičkih reprezentacija (Slika 3.38.).



Slika 3.38. *Pomoć u radu sa grafičkim reprezentacijama funkcija*

U daljem postupku rešavanja zadatka, učenik treba da izabere još dve pogodne vrednosti za nezavisno promenljivu, npr. $x = -1$ i $x = -3$. Upoređivanjem podataka o znaku prvog izvoda iz grafičkih i algebarskih reprezentacija, učenik dolazi do krajnjeg rešenja zadatka (Slika 3.39).

Grafička reprezentacija funkcije					Algebarska reprezentacija izvoda				
1.	2.	3.	4.		f'	g'	h'	s'	
znak prvog izvoda u tački x_0				x_0	znak prvog izvoda u tački x_0				
$+$	$-$	$+$	$+$	1	$+$	$+$	$+$	$-$	$\Rightarrow G_s$ na sl.2
$-$		$-$	$+$	-1	$+$	$-$	$-$		$\Rightarrow G_f$ na sl.4
$+$		$-$		-3		$+$	$-$		$\Rightarrow G_g$ na sl.1, G_h na sl.3

Slika 3.39. *Postupak povezivanja grafičkih reprezentacija funkcija i algebarskih reperezentacija izvodnih funkcija na osnovu znaka prvog izvoda*

Globalni ekstremi funkcije

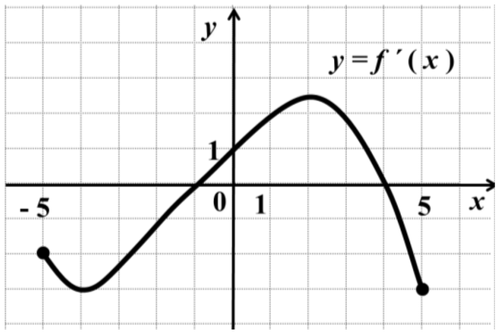
Nastavnim programom je predviđeno da se u četvrtom razredu gimnazije pored lokalnih obrade i globalni ekstremi funkcije. U nastavku je dat primer zadatka u kome se globalni ekstremi diferencijabilne funkcije razmatraju na osnovu grafičke reprezentacije izvodne funkcije.

Zadatak C tipa:

Funkcija $y = f(x)$ je definisana za $x \in [-5,\ 5]$.

Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije $y = f'(x)$.

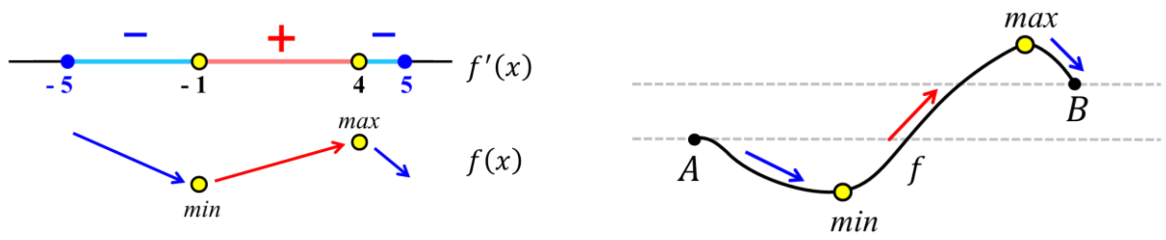
U kojoj tački funkcija $y = f(x)$ dostiže najveću vrednost na svom domenu, ako je poznato da je $f(-5) \leq f(5)$?



Postupak određivanja globalnih ekstrema funkcije obuhvata ispitivanje: monotonosti, lokalnih ekstrema i ponašanja funkcije na krajevima domena.

Nule i znak izvodne funkcije, učenici mogu očitati sa datog grafika. Dalje je potrebno da primene teoremu o dovoljnom uslovu lokalnih ekstrema. Na osnovu dobijenih podataka o znaku izvodne funkcije, sledi da funkcija f ima lokalni minimum za $x = -1$ i lokalni maksimim za $x = 4$ (Slika 3.40.1).

Da bi odredili globalni maksimum, učenici treba da nacrtaju grafik funkcije f koja ispunjava uslove zadatka (Slika 3.40.2). Najpre crtaju krajnje tačke grafika $A\big(-5, f(-5)\big)$ i $B\big(5, f(5)\big)$, tako da je $f(-5) \leq f(5)$. Zatim, na osnovu intervala monotnosti i tačaka lokalnih ekstrema koje su odredili, crtaju deo grafika između krajnjih tačaka. Sa nacrtanog grafika očitavaju da funkcija dostiže najveću vrednost na domenu u tački lokalnog maksimuma, tj. za $x = 4$.



1. *Ispitivanje monotonosti i lokalnih ekstrema funkcije*   2. *Postupak određivanja globalnog maksimuma*

Slika 3.40. *Grafički postupak rešavanja C zadatka*

Napomena:. Uslov $f(-5) \leq f(5)$ je bitan u postavci zadatka, zato što obezbeđuje jedinstveno rešenje. Učenicima možemo postaviti zadatak u kome je uslov $f(-5) \leq f(5)$ izostavljen ili zamenjen uslovom $f(-5) > f(5)$. U tom slučaju zadatak nema jedinstveno rešenje (funkcija može da ima najveću vrednost za $x = -5$ ili za $x = 4$).

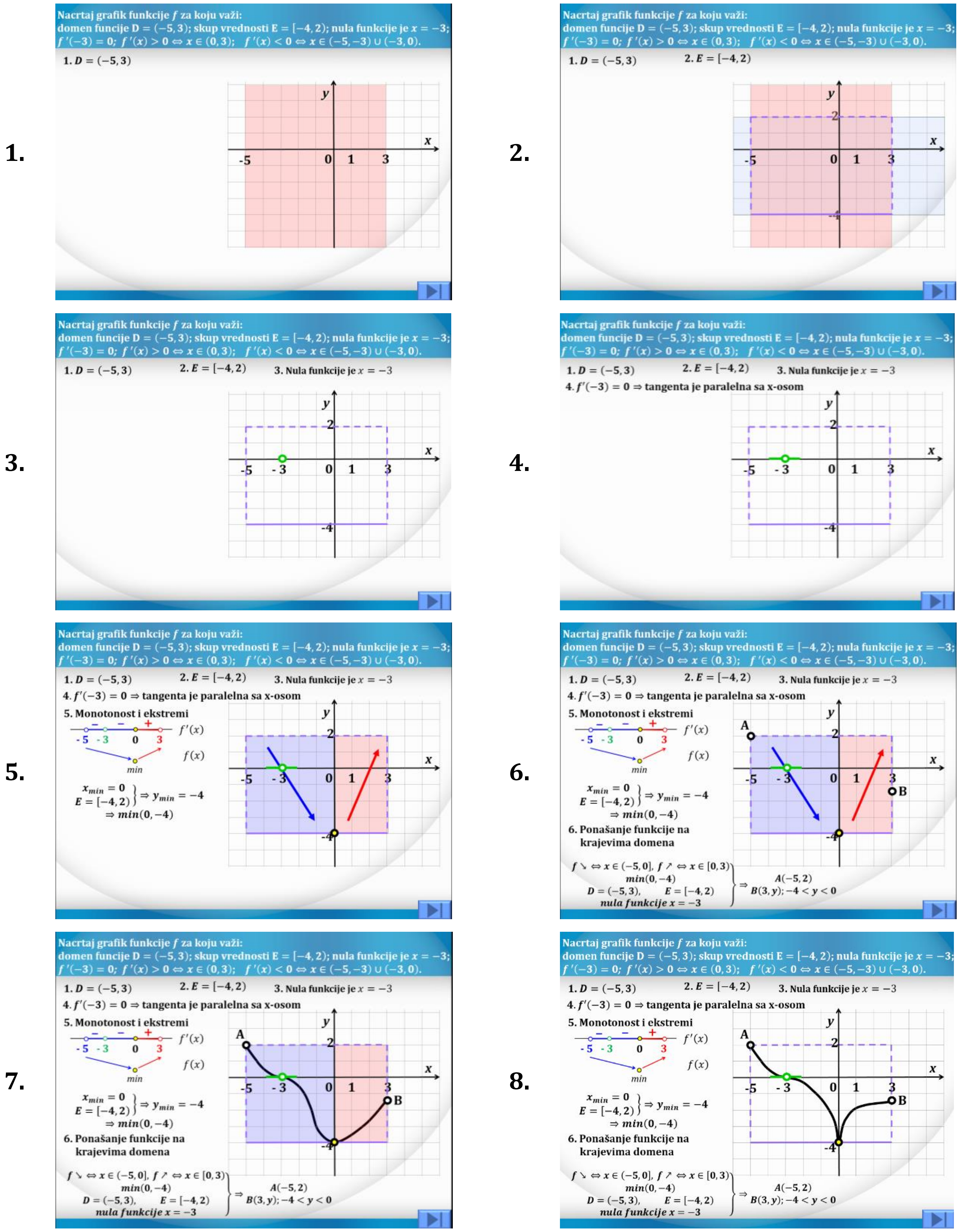
3.3.6. Crtanje grafika funkcije

Najkompleksniji zadaci koji podrazumevaju primenu znanja o osobinama funkcija i izvodnih funkcija su oni u kojima treba ispitati tok i nacrtati grafik funkcije. Česta je situacija u nastavnoj praksi da i nakon većeg broja obrađenih zadataka, učenici ne uspevaju da se izbore sa poteškoćama u njihovom rešavanju. Znatan broj učenika se suočava sa problemima i poteškoćama u postupku crtanja grafika funkcije, odnosno u izgradnji veza između osobina funkcija ispitanih analitičkim putem i osobina grafika funkcije.

Za realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa, posebno su osmišljeni i izrađeni nastavni sadržaji, kako bi se učenicima pomoglo da prevaziđu moguće poteškoće u crtanju grafika. Radi se o zadacima koji zahtevaju crtanje grafika funkcije, pri čemu su osobine funkcije (domen, nule, znak itd.) i prvog izvoda (egzistencija, nule, znak) date uslovima zadatka. Zadaci su rasterećeni od dugotrajnog postupka analitičkog ispitivanja osobina funkcija, i fokusirani su upravo na razvijanje učeničkih veština potrebnih za crtanje grafika. Primeri zadataka dati su u nastavku teksta.

	Nacrtaj grafik funkcije f koja ispunjava sledeće uslove:					
zad.	*domen*	*skup vrednosti*	*nule funkcije*	*prvi izvod pozitivan*	*prvi izvod negativan*	*ostali uslovi*
1.	$[-2,5]$	$[-5,3]$	0 i 3	$(2,5)$	$(-2,1)$ i $(1,2)$	$f(5) = -3$
2.	$(-\infty,6]$	$[-4,4]$	0 i 5	$(-\infty,3)$	$(3,6]$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$
3.	$[-4,3]$	$[-4,6]$	-2 i 2	$(-4,1)$	$(1,3)$	$f'(1) = 0$
4.	$(-5,3)$	$[-4,2)$	-3	$(0,3)$	$(-5,-3)$ i $(-3,0)$	$f'(-3) = 0$
5.	$(-\infty,+\infty)$	$[-2,4]$	-4 i 0	$(-\infty,-4)$ i $(-1,+\infty)$	$(-4,-1)$	*izvodna funkcija f' nije definisan za $x = -1$*

Prikazani zadaci imaju značajne didaktičko-metodičke mogućnosti u razvijanju sposobnosti i veština učenika za rad sa grafičkim reprezentacijama. Efikasno korišćenje potencijala ovih zadataka podrazumeva kognitivno-vizuelne načine prezentovanja znanja. Slika 3.41 prikazuje slajdove *Power Point* prezentacije u kojoj je postupak rešavanja 4. zadatka predstavljen na kognitivno-vizuelni način. Kognitivna vizuelizacija postupka crtanja grafika funkcije je sprovedena tako da svaki pojedinačni slajd prikazuje kako i na koji način se data osobina funkcije predstavlja pomoću grafičkih reprezentacija. Organizacija sadžaja, način i dinamika prikazivanja multimedijalnih elemenata, usmeravaju vizuelnu percepciju učenika i strukturiraju proces razvoja vizuelnog mišljenja i rezonovanja.

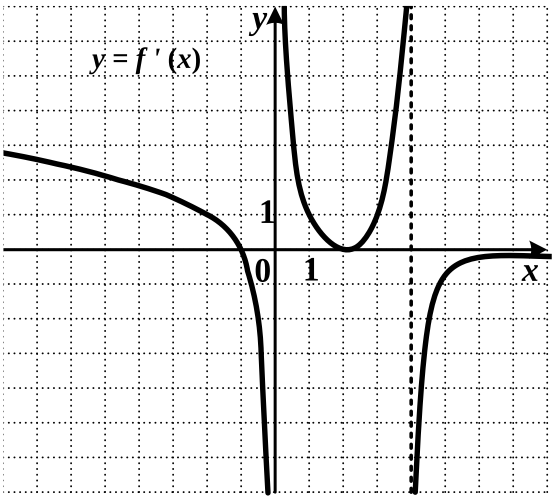


Slika 3.41. *Crtanje grafika funkcije – korak po korak*

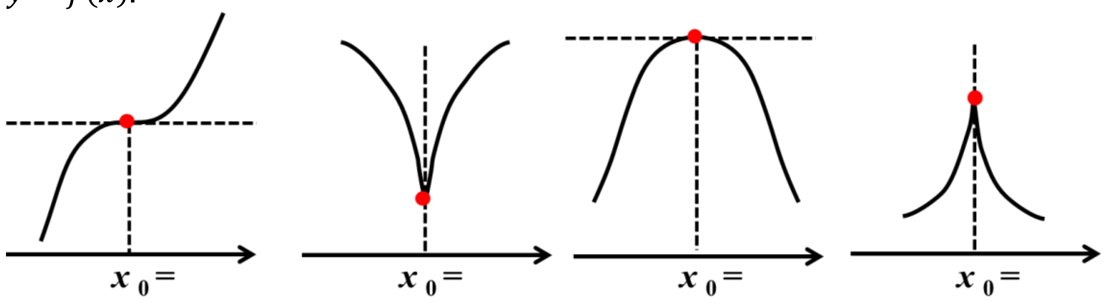
3.3.7. Sistematizacija gradiva

Zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima su bogati konceptima i reprezentacijma, njihovo rešavanje zahteva primenu konceptualnih znanja i relaciono razumevanje, pa su veoma pogodni za sistematizaciju gradiva. Osim toga, oni su i veoma ekonomični. Jednom slikom možemo da izvršimo sistematizaciju više pojmova i stavova koji se odnose na izvod funkcije, zadajući pitanja o geometrijskom tumačenju izvoda, monotonosti i ekstremima, konveksnosti i prevojnim tačkama. U nastavku je dat primer zadatka za ponavljanje i sistematizaciju sadržaja nastavne teme Izvod funkcije.

Funkcija $y = f(x)$ je definisana i neprekidna na skupu realnih brojeva. Na slici je prikazan grafik njene izvodne funkcije.



1) *Zbir apscisa tačaka u kojima su tangente na grafik funkcije $y = f(x)$ paralelna sa pravom $y = x - 3$ je ______ .*
2) *Funkcija $y = f(x)$ je :*
   opadajuća na intervalima ______________,
   rastuća na intervalima ________________ .
3) *Funkcija f ima:*
   lokalni minimum ako je x _________ ,
   lokalni maksimum ako je x _________ .
4) *Na intervalu $[-1,\ 1]$ funkcija f dostiže najmanju vrednost za $x =$______.*
5) *Na intervalu $[-7, -2]$ funkcija f dostiže najveću vrednost za $x =$_______.*
6) *Funkcija $y = f(x)$ je konveksna na intervalu __________, a konkavna na __________.*
7) *Prva koordinata prevojne tačke grafika funkcije $y = f(x)$ je _________.*
8) *Funkcija f je konveksna i opadajuća akko je $x \in$ ___________________.*
9) *Pored svake slike upiši koordinatu one tačke u čijoj je okolini prikazan grafik funkcije $y = f(x)$.*

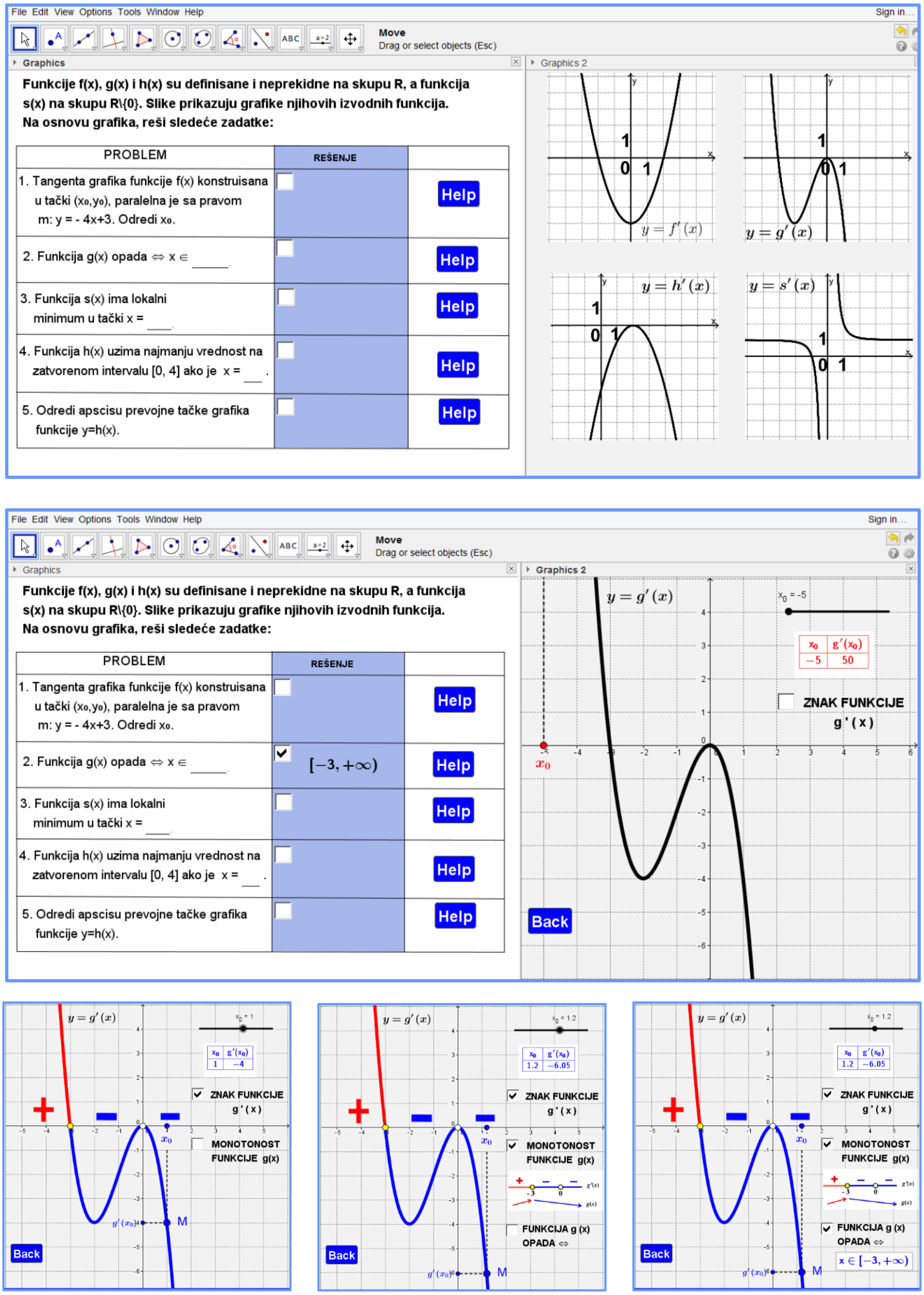


Sistematizacija gradiva, kao finalna faza realizacije nastavne teme, može se efikasno sprovesti kroz individualne ili grupne aktivnosti učenika u *GeoGebra* okruženju, samostalnim rešavanjem zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. U nastavku je prikazan nastavni materijal (Slika 3.42) koji sadrži pet zadataka u okviru kojih su sistematizovana fundamentalna znanja o izvodu funkcije i njegovoj primeni: geometrijska interpretacija prvog izvoda (1. zadatak), monotonost (2. zadatak), lokalni ekstremi (3. zadatak), globalni ekstremi (4. zadatak), konveksnost, konkavnost i prevojne tačke (5. zadatak). Ovaj nastavni materijal je didaktički i multimedijalno dizajniran kao i prethodno prikazani *GeoGebra* nastavni materijali i može se koristiti za samostalan rad učenika.

1.

2.

3.



Slika 3.42. *Sistematizacija gradiva u GeoGebra okruženju*
1. *Početni meni;* 2. *Izgled ekrana po aktiviranju opcije Help za drugi zadatak;* 3. *Izgled grafičkog dela radnog lista – sukcesivno prikazivanje povratnih informacija za rešavanje drugog zadatka*

3.4. METODOLOŠKI OKVIR ISTRAŽIVANJA

Ovaj deo rada odnosi se na metodološki okvir eksperimentalnog istraživanja sprovedenog u cilju ispitivanja mogućnosti metodičke transformacije odabranih sadržaja matematičke analize i sagledavanja efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa u nastavi/učenju. Odabrani nastavni sadržaji su didaktičko-metodički oblikovani i realizovani kognitivno-vizuelnim pristupom sa eksperimentalnim grupama učenika/studenata, dok se u kontrolnim grupama, nastava odvijala prema programu matematike, na uobičajeni način. Po završetku eksperimentalne nastave, izvršena je evaluacija ostvarenih efekata inovativnog pristupa izučavanju sadržaja matematičke analize, poređenjem postignuća učenika/studenata eksperimentalne i kontrolne grupe na testovima znanja.

3.4.1. Predmet, cilj, zadaci i hipoteze istraživanja

U savremenoj nastavi matematike sprovode se inovacije u domenu nastavnih metoda, oblika rada i sredstava, kao i u pogledu metodičkih transformacija sadržaja koji se izučavaju. Prioritetna oblast ovog istraživanja je metodička transformacija odabranih sadržaja matematičke analize u skladu sa savremenim dostignućima metodike nastave matematike, kao i empirijska evaluacija kreiranog didaktičko-metodičkog modela za realizaciju tih sadržaja kognitivno-vizuelnim pristupom.

Predmet istraživanja čini teorijsko određenje konkretnog, funkcionalno usklađenog metodičkog pristupa realizaciji sadržaja matematičke analize, koji bi bio baziran na kognitivno-vizuelnim principima i uvođenju novih sadržaja koji se odnose na funkcije i izvod funkcije. Posebna pažnja je usmerena ispitivanju mogućnosti integrisanja zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima u sadržaje koji su predviđeni važećim nastavnim programom matematike za četvrti razred gimnazije. Osim teorijskog aspekta, predmet ovog istraživanja je i empirijsko ispitivanje i proučavanje efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji metodički transformisanih sadržaja nastavi/učenju matematičke analize sa posebnim akcentom na izvod funkcije.

Cilj pedagoškog istraživanja je eksperimentalnim putem utvrditi efekte i stepen uticaja primene kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji metodički transformisanih sadržaja matematičke analize, na obrazovna postignuća učenika/studenata.

Navedeni cilj istraživanja operacionalizovan je na sledeće *istraživačke zadatke*:

- Na osnovu teorijskih saznanja konstruisati didaktičko-metodički model za realizaciju odabranih sadržaja matematičke analize kognitivno-vizuelnim pristupom.
- Osmisliti, kreirati i odabrati zadatake sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i prilagoditi ih sadržajima koji su predviđeni važećim nastavnim programom matematike za gimnazije.
- Izraditi tipologiju zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima.
- Kreirati nastavne materijale koji će podržati realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa upotrebom računara i obrazovnog softvera u toku eksperimentalnog procesa.
- Izraditi instrumente (testove znanja) kojima će biti izmeren uticaj primene kognitivno-vizuelnog pristupa na obrazovna postignuća učenika/studenata.
- Na osnovu rezultata inicijalnog testiranja formirati dve ujednačene grupe učenika/studenata, eksperimentalnu i kontrolnu.

- Realizovati nastavne aktivnosti primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u računarskom okruženju sa učenicima/studentima eksperimentalne grupe, a tradicionalnim nastavnim postupcima sa učenicima/studentima kontrolne grupe.
- Rezultate realizovane nastave izmeriti finalnim testom znanja jednakim za sve učenike/studente.
- Na osnovu rezultata testa utvrditi koji metodički pristup daje bolje efekte na obrazovna postignuća učenika/studenata.

Na osnovu predmeta i cilja istraživanja formulisana je *opšta hipoteza istraživanja.*

H: Primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji metodički transformisanih sadržaja matematičke analize postižu se statistički značajno bolja postignuća učenika/studenata u odnosu na postignuće kakvo se može ostvariti primenom tradicionalnih metodičkih pristupa u realizaciji programom predviđenih sadržaja.

Opšta hipoteza istraživanja proverena je putem *posebnih hipoteza*:

H1: Učenici eksperimentalne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate u odnosu na učenike kontrolne grupe, na prvom delu finalnog testa (konceptualna znanja o izvodu funkcije i njegovom grafičkom razumevanju).

H2: Učenici eksperimentalne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate u odnosu na učenike kontrolne grupe, na drugom delu finalnog testa (proceduralna i konceptualna znanja o izvodu funkcije i primena višestrukih reprezentacija u rešavanju problema).

H3: Učenici eksperimentalne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate na finalnom testu, u odnosu na učenike kontrolne grupe.

H4: Studenti eksperimentalne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate na finalnom testu, u odnosu na studente kontrolne grupe.

3.4.2. Uzorak

Istraživanje je sprovedeno u toku 2013/2014. i 2014/2015. godine, na namernom uzorku učenika četvrtih razreda prirodno-matematičkog smera gimnazije i studenata prve godine osnovnih studija fizike Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu.

Uzorak učenika – Uzorak je obuhvatao 222 ispitanika iz tri gimnazije: „Isidora Sekulić” u Novom Sadu, Zemunska gimnazija u Beogradu i Gimnazija Pirot. Formirane su eksperimentalna (E) grupa od 109 učenika i kontrolna (K) grupa koja je brojala 113 učenika (Tabela 3.4).

Tabela 3.4. *Struktura uzorka učenika*

	Eksperimentalna grupa			**Kontrolna grupa**			**Uzorak**
	škola	**br.odelj.**	**br. uč.**	**škola**	**br.odelj.**	**br. uč.**	**br. uč.**
školska 2013/14.	Gimnazija Pirot	2	58	„Isidora Sekulić”	2	58	116
školska 2014/15.	Gimnazija Pirot	2	51	Zemunska gimnazija	2	55	106
Ukupno uč.			109			113	222

Pre sprovođenja inicijalnog testiranja, iz pedagoške dokumentacije škola preuzeti su podaci o uspehu učenika iz matematike na kraju prvog, drugog i trećeg razreda. Podaci prikazani u Tabeli 3.5 ukazuju na ujednačenost E i K grupe u odnosu na uspeh iz matematike. Dalje ujednačavanje grupa je izvršeno prema rezultatima postignutim na inicijalnom testu.

Tabela 3.5. Uspeh učenika E i K grupe iz matematike u prva tri razreda gimnazije

	Srednja vrednost uspeha učenika iz matematike			
	1. razred	**2. razred**	**3. razred**	**sva tri razreda**
E grupa	**3,761**	**3,807**	**3,706**	**3,758**
K grupa	**3,779**	**3,708**	**3,681**	**3,723**

Uzorak studenata – U cilju realizacije pedagoškog istraživanja u visokom obrazovanju, angažovani su studenti prve godine osnovnih studija fizike Prirodno-matematičkog fakultetu u Novom Sadu. Kontrolna grupa je formirana 2013/2014. godine, a eksperimentalna 2014/2015. godine. Obe akademske godine sprovedeno je inicijalno testiranje studenata koji su pohađali nastavu predmeta Matematika 1. Na osnovu inicijalnog testiranja, formirano je 60 parova, takvih da su rezultati studenta iz kontrolne i studenta iz eksperimentalne grupe identični (eventualno sa razlikom ± 1 bod). Na taj način je postignuta ujednačena struktura E i K grupe u znanju iz oblasti funkcija i formiran namerni uzorak od 120 studenata.

3.4.3. Metode, tehnike i instrumenti istraživanja

Pedagoško istraživanje je obuhvatalo primenu: metode teorijske analize, deskriptivnu, eksperimentalnu i statističku metodu.

Metoda teorijske analize korišćena je za pregled, proučavanje i analizu teorijskih postavki: stručne matematičke literature, pedagoške, psihološke i didaktičko-metodičke literature, posebno metodike nastave matematike, kao i naučnih i stručnih radova i internet resursa koji se odnose na problematiku istraživanja.

Deskriptivna metoda je primenjena prilikom utvrđivanja teorijskih osnova i praktičnih rešenja predmeta istraživanja, analize sadržaja programa matematike, kao i obrade podataka, interpretacije rezultata istraživanja i izvođenja zaključaka.

U ovom istraživanju korišćena je eksperimentalna metoda jer se želi proučiti kauzalna (uzročno-posledična) veza između primene kognitivno-vizuelnog metodičkog pristupa i obrazovnih postignuća učenika/studenata (Mužić, 2004). Eksperimentalna metoda pedagoškog istraživanja je realizovana po modelu eksperimenta sa paralelnim grupama – eksperimentalnom i kontrolnom (Банђур и Поткоњак, 1999).

Za obradu i analizu podataka dobijenih eksperimentalnim istraživanjem, primenjene su odgovarajuće statističke metode. Statističkim metodama obuhvaćeno je: prikupljanje, grupisanje i statistička obrada podataka, analiza statističkih pokazatelja, testiranje hipoteza i statističko zaključivanje. Statistička obrada i interpretacija podataka bila je zasnovana na upotrebi standardnih statističkih metoda i postupaka u pedagoškim istraživanjima:

- Metode deskriptivne statistike su korišćene pri određivanju osnovnih deskriptivnih statističkih parametara: veličina uzorka (N), aritmetička sredina (M), standardna devijacija (SD), koeficijent varijacije (CV), standardna greška razlika aritmetičkih sredina (SE), razlika aritmetičkih sredina (M_E-M_K).

- Normalnost raspodela dobijenih podataka je proveravana Kolmogorov-Smirnov testom.
- U statističkoj analizi primenjeni su statistički postupci za testiranje hipoteza o značajnosti razlike posmatranih veličina. Kod promenljivih sa normalnom raspodelom podataka korišćen je parametrijski test – Studentov t-test, a uslučaju odstupanja od normalne raspodele primenjivan je neparametrijski, Mann-Whitney test.
- Veličina (magnituda) razlike u prosečnim rezultatima između grupa tj. veličina efekta (eng. *effect size*) uticaja eksperimentalnog faktora na postignuća učenika/studenata, ispitana je odgovarajućim statističkim postupcima. Veličina efekta je utvrđena je na osnovu izračunate vrednosti eta-kvadrat koeficijenta (η^2) i njegovog klasifikovanja po sledećoj gradaciji: mali (0.01), srednji (0.06) i veliki uticaj (0.14) (Cohen, 1988).

Statistička obrada podataka izvršena je korišćenjem programa Microsoft Excel 2013 i programskog dodatka XLSTAT 2014.

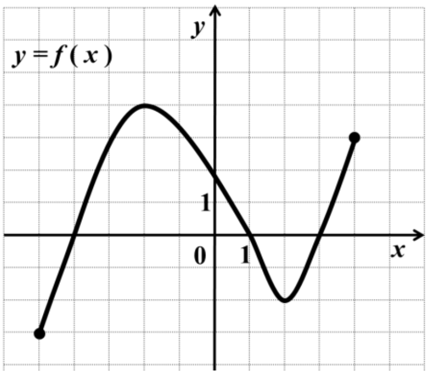
Za prikupljanje podataka u eksperimentalnom delu istraživanja korišćene su relevantne tehnike testiranja znanja učenika/studenata. Instrumenti primenjeni u istraživanju bili su testovi znanja koje je osmislio autor disertacije.

Inicijalni test znanja (IT) – U oba istraživanja, korišćen je isti inicijalni test koji je imao za cilj da se utvrdi kvantitet i kvalitet učeničkih/studentskih predznanja iz oblasti funkcija i da se na osnovu dobijenih rezultata izvrši ujednačavanje E i K grupe učenika/studenata. Osim toga, inicijalni test je poslužio i kao indikator postojećih slabosti i poteškoća učenika/studenta u ovoj oblasti. Test pripada grupi testova brzine (u istraživanju sa učenicima vreme predviđeno za izradu testa je 45 minuta) i inventarskih testova – inventarisana su znanja učenika/studenata potrebna za proširivanje starih i usvajanje novih sadržaja (Gojkov, 2003). Test sadrži 8 zadataka objektivnog tipa. Zadaci su vrednovani po ključu, a maksimalan broj bodova koji se mogao osvojiti na inicijalnom testu bio je 25.

Inicijalnim testom su bili obuhvaćeni odabrani sadržaji iz oblasti funkcija koji se izučavaju u nastavi matematike u prva tri razreda gimnazije. Zadaci proveravaju učenička/studentska znanja o funkcijama i njihovim osobinama, sa posebnim akcentom na grafičko razumevanje koncepta funkcije. Testom se proveravaju znanja učenika/studenata o sledećim osobinama realnih funkcija: domen i skup vrednosti (1. zadatak), parnost i neparnost (2. i 3. zadatak), periodičnost (4. zadatak) nule i znak (5. zadatak), monotonost i ekstremne vrednosti (6. zadatak), kao i crtanje grafika funkcije na osnovu njenih osobina (7. zadatak). U 1, 2, 3, 5 i 6. zadatku zahteva se interpretacija grafičkih reprezentacija, dok je u 3, 4 i 7. zadatku potrebno izvršiti konstrukciju grafika. Petim zadatkom je obuhvaćeno i grafičko rešavanje jednačina i nejednačina.

Inicijalni test je sadržao sledeće zadatke:

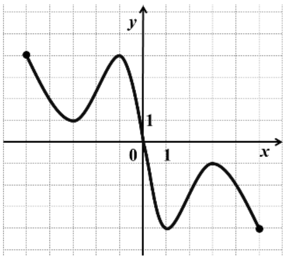
1. Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$. Na osnovu grafika odredi domen funkcije, D i skup vrednosti funkcije E, pa zaokruži tačan odgovor.



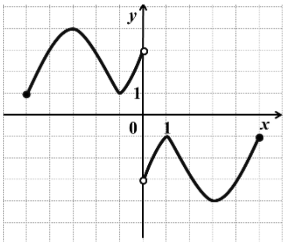
1) $D = [-4,\ 3],\ \ E = [-3,\ 4]$
2) $D = [-5,\ 4],\ \ E = [-2,\ 4]$
3) $D = [-5,\ 4],\ \ E = [-3,\ 4]$
4) $D = [-3,\ 4],\ \ E = [-5,\ 4]$

2. Data su četiri grafika:

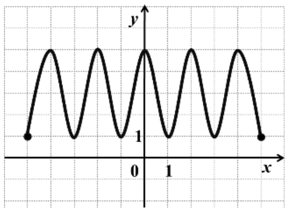
a)



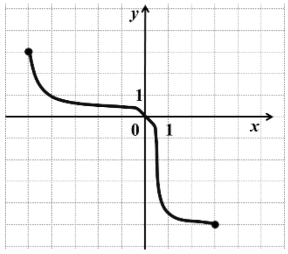
b)



c)



d)



Na kojoj slici je prikazan grafik

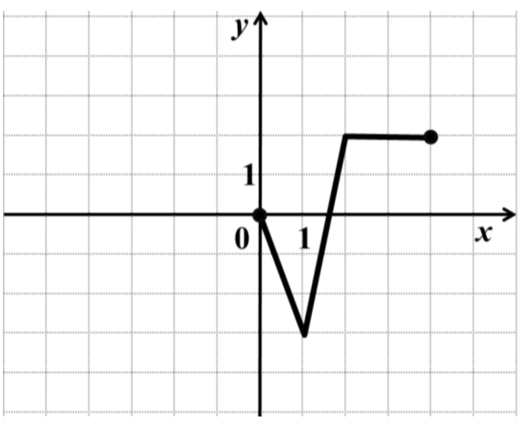
1) parne funkcije ? Odgovor: __________________

2) neparne funkcije ? Odgovor: __________________

3) funkcije koja nije ni parna, ni neparna? Odgovor: __________________

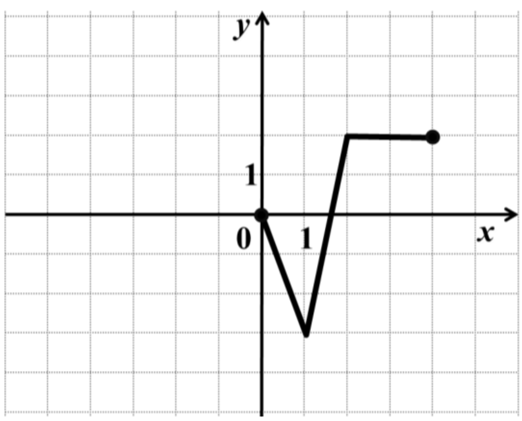
3. Na slici je prikazan deo grafika funkcije $y = f(x)$, za sve vrednosti x koje ispunjavaju uslov $x \geq 0$.
Nacrtaj ceo grafik funkcije i izračunaj vrednost izraza $f(-3) \cdot f(1) - f(-2)$, ako je funkcija:

1) parna



$f(-3) \cdot f(1) - f(-2) =$

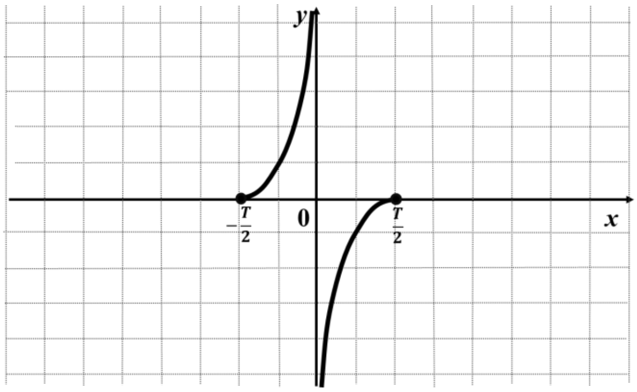
2) neparna



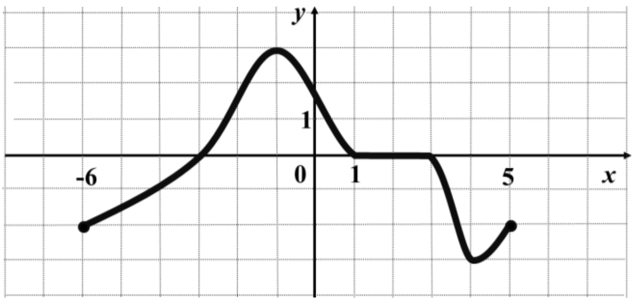
$f(-3) \cdot f(1) - f(-2) =$

4. Na slici je prikazan deo grafika periodične funkcije f, čiji je osnovni period T.

Nacrtaj deo grafika funkcije f na intervalu $\left[-2\,T;\quad 1{,}5\,T\right]$.

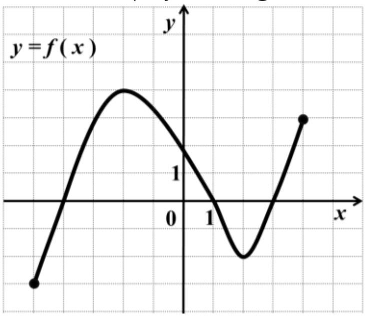


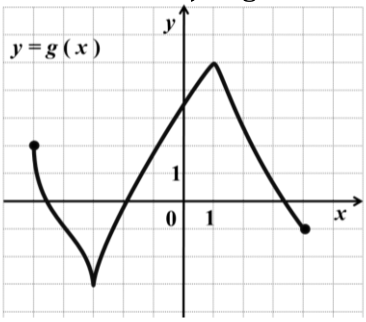
5. Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$, koja je definisana na intervalu $[-6,\ 5]$.

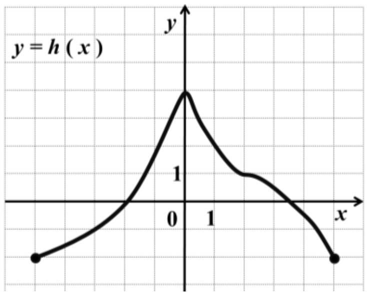


1) Koliko celobrojnih nula ima funkcija f? Odgovor: ________.
2) Funkcija f je pozitivna akko je $x \in$ ________________.
3) Funkcija f je nenegativna za _______ celobrojnih vrednosti argumenta x.
4) Koliko rešenja ima jednačina $f(x) = 2$? Odgovor: ________.
5) Rešenje nejednačine $f(x) \leq 0$ je: $x \in$ ___________.

6. Funkcije $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ su zadate svojim graficima.



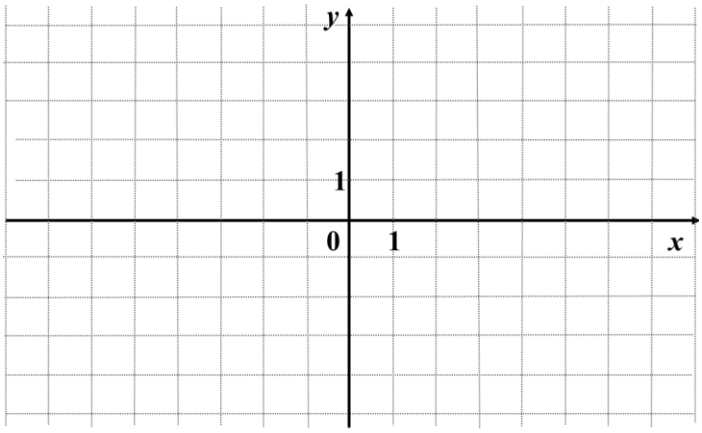




1) Funkcija $g(x)$ raste akko je $x \in$ _____________.
2) Funkcija $h(x)$ opada akko je $x \in$ _____________.
3) Funkcija $y =$ ______ je opadajuća na intervalu $(-1,\ 2)$.
4) Zbir maksimalne vrednosti funkcije $f(x)$ i minimalne vrednosti funkcije $g(x)$ je ______.
5) Najveća vrednost funkcije $h(x)$ na intervalu $[-2,\ 2]$ je ____.
6) Funkcija $f(x)$ dostiže najmanju vrednost na intervalu $[-3,\ 1]$ za $x =$ ______.

7. Nacrtaj grafik funkcije koja ispunjava sledeće uslove:

- domen funkcije je $[-6,\ 6]$,
- skup vrednosti funkcije je $[-3,\ 4]$,
- funkcija je pozitivna na intervalu $(-6, 2)$, a negativna na intervalu $(2,\ 6]$,
- $x = -6$ je nula funkcije,
- funkcija raste na intervalu $[-6, -2]$ i opada na intervalu $[-2, 6]$.



Finalni testovi znanja – Finalni testovi su dati nakon realizacije nastave kognitivno-vizuelnim pristupom u E grupi učenika/studenata i tradicionalnim pristupom u K grupi učenika/studenata . Finalno testiranje je imalo za cilj da se utvrdi nivo usvojenosti obrađenih sadržaja o izvodu funkcije, i da se analiziraju i uporede efekti primene različitih metodičkih pristupa nastavi/učenju. Testovi pripadaju grupi dijagnostičkih testova budući da se pomoću njih može dobiti predstava o tome kako su studenti savladali nastavne sadržaje, koliko su napredovali tokom eksperimentalne nastave, koje teškoće i nedostatke imaju pojedini studenti i nakon sprovedene edukacije (Gojkov, 2003).

Finalni test znanja u istraživanju sprovedenom sa učenicima (FTU) – Test sadrži 9 zadataka objektivnog tipa, za čije je rešavanje bilo predviđeno 60 minuta. Zadaci su vrednovani po ključu, a maksimalan broj bodova koji se mogao osvojiti na finalnom testu bio je 25. Finalnim testom su bili obuhvaćeni sadržaji nastavne teme Izvod funkcije koji su obrađivani tokom nastavnog procesa. Test je podeljen u dva dela. Prvih sedam zadataka čine prvi deo testa, dok su osmi i deveti obuhvaćeni drugim delom testa.

Prvi deo testa proverava konceptualna znanja o izvodu funkcije i njegovo grafičko razumevanje. Karakteristika ovog dela testa je odsustvo algebarskih reprezentacija funkcije i izvodne funkcije u uslovima zadataka. Prva četiri zadatka proveravaju učenička konceptualna znanja o izvodu funkcije, kao i njihove sposobnosti da ta znanja primene u ispitivanju monotonosti (1. i 2. zadatak) i ekstremnih vrednosti funkcije (3. i 4. zadatak). Peti zadatak proverava znanja koja se odnose na pojam tangente grafika funkcije i razumevanje odnosa između koeficijenta pravca tangente i prvog izvoda funkcije. Šesti i sedmi zadatak proveravaju grafičko razumevanje koncepta izvoda, kao i znanja i veštine u radu sa grafičkim reprezentacijama (interpretacija grafika funkcije u 6. zadatku, a konstrukcija grafika funkcije u 7. zadatku) U šestom zadatku se od učenika zahteva da na osnovu datog grafika funkcije ispitaju određene osobine izvodne funkcije.

Prvi deo FTU je sadržao sledeće zadatke:

1. Funkcija $y = f(x)$ je neprekidna i rastuća na intervalu $[a,\ b]$. Ako je x_0 proizvoljna tačka koja pripada intervalu $(a,\ b)$, tada vrednost $f'(x_0)$ može da bude:

1) pozitivna 2) jednaka nuli 3) negativna 4) nije definisana

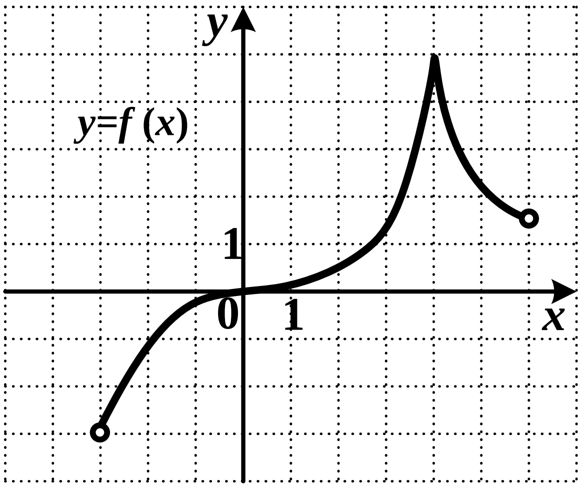
2. Funkcija $y = f(x)$ je neprekidna i opadajuća na intervalu $[a,\ b]$. Ako je x_0 proizvoljna tačka koja pripada intervalu $(a,\ b)$, tada vrednost $f'(x_0)$ može da bude:
1) pozitivna 2) jednaka nuli 3) negativna 4) nije definisana

3. Funkcija $y = f(x)$ je neprekidna na intervalu $[a,\ b]$. Ako u tački $x_0 \in (a,\ b)$ funkcija ima lokalni maksimum, tada vrednost $f'(x_0)$ može da bude:
1) pozitivna 2) jednaka nuli 3) negativna 4) nije definisana

4. Funkcija $y = f(x)$ je neprekidna na intervalu $[a,\ b]$. Ako u tački $x_0 \in (a,\ b)$ funkcija ima lokalni minimum, tada vrednost $f'(x_0)$ ne može da bude:
1) pozitivna 2) jednaka nuli 3) negativna 4) nije definisana

5. Tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ koja je konstruisana u tački $M(4, 3)$, prolazi kroz koordinatni početak. Vrednost $f'(4)$ jednaka je __________.

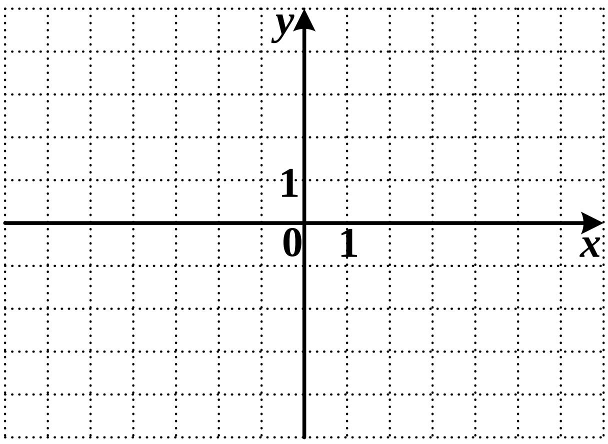
6. Na slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$, koja je definisana na intervalu $(-3,\ 6)$. Pored svakog iskaza napiši da li je on tačan (T) ili netačan (N).



	T / N
1) $f'(-2) > 0$	_______
2) $f'(4) = 0$	_______
3) $f'(5) > 0$	_______
4) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ (-3,\ 4)$	_______
5) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in\ (0,\ 6)$	_______
6) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in\ (4,\ 6)$	_______

7. Nacrtaj grafik funkcije koja ispunjava sledeće uslove:

– domen funkcije je $[-6,\ \ 6]$,
– skup vrednosti funkcije je $[-3,\ 4]$,
– izvodna funkcija je pozitivna na intervalu $(-2,\ 3)$,
– izvodna funkcija je negativna na intervalima $[-6, -2)$ i $(3,\ 6]$,
– grafik funkcije ima samo jednu tangentu koja je paralelna sa x–osom.



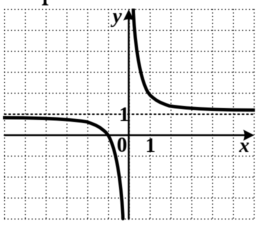
Drugi deo finalnog testa proverava proceduralna i konceptualna znanja o izvodu funkcije i njihovu primenu u radu sa višestrukim reprezentacijama u rešavanju problema. Za razliku od prvog dela testa, zadaci u drugom delu testa su formulisani tako da su algebarske reprezentacije funkcija/izvodnih funkcija date kao ulazni podaci zadatka. Osim algebarskih, u zadacima su date i grafičke reprezentacije. U osmom zadatku su date algebarske reprezentacije funkcija i grafičke reprezentacije izvodnih funkcija, dok je u devetom zadatku obrnuta situacija. Zadaci zahtevaju da se algebarske reprezentacije povežu sa odgovarajućim grafičkim reprezentacijama, kao i da se ispitaju osobine funkcija (monotonost, ekstremi, tangenta grafika funkcije) i izvodnih funkcija (znak). Primena grafičkih reprezentacija u ispitivanju osobina funkcija/izvodnih funkcija je neophodna u rešavanju zadatka 9.4 i 9.6, i delu zadatka 9.3 i 9.5. U svim ostalim slučajevima, učenici mogu rešavati zadatke tako da koriste samo algebarske ili samo grafičke reprezentacije ili i jedne i druge. Odnosno, izbor reprezentacija koje će koristiti u rešavanju problema je prepušten učenicima.

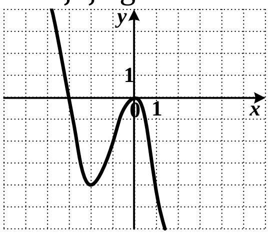
Drugi deo FTU je sadržao sledeća dva zadatka:

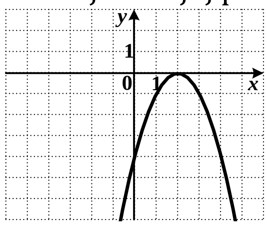
8. Date su funkcije:

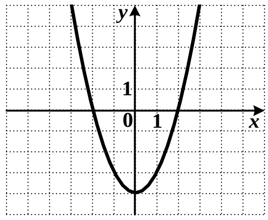
$$f(x) = \frac{x^3 - 12x + 9}{3}, \qquad g(x) = -\frac{x^4}{4} - x^3, \qquad h(x) = \frac{(2-x)^3}{3}, \qquad s(x) = \frac{2x^3 - 1}{2x^2}.$$

Na slikama su prikazani grafici njihovih izvodnih funkcija.
Ispod svake slike napiši koji je grafik izvodne funkcije na njoj prikazan.









__________ __________ __________ __________

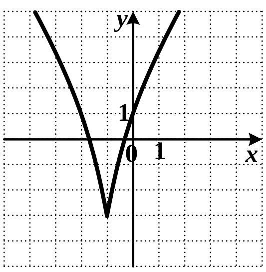
Na osnovu analitički zadatih funkcija i grafika njihovih izvodnih funkcija, popuni prazna mesta:

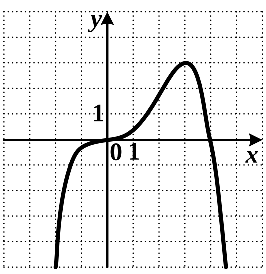
1) Izvodna funkcija $f'(x)$ je pozitivna akko je $x \in$ __________ .
2) Funkcija $g(x)$ je opadajuća akko je $x \in$ __________ .
3) Tačka lokalnog maksimuma funkcije $s(x)$ je $M(\quad,\quad)$
4) Najveća vrednost funkcije $h(x)$ na skupu $[0, 3]$ jednaka je __________ .
5) Funkcija $f(x)$, u tački $A(\quad,\quad)$, ima tangentu koja je paralelna sa pravom $y = -4x + 3$.
6) Broj tačaka u kojima tangente grafika funkcije $y = h(x)$ grade ugao od $135°$ sa pozitivnim smerom x–ose je __________ .

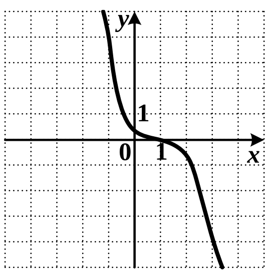
9. Date su funkcije f, g, h i s. Njihove izvodne funkcije su:

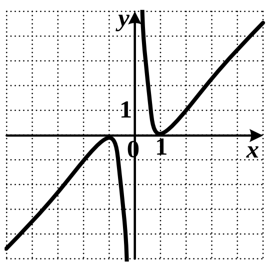
$$f'(x) = \frac{-4x^3 + 12x^2}{9}, \quad g'(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^4}, \quad h'(x) = \frac{8}{3\sqrt[3]{x+1}}, \quad s'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 3}{2}$$

Ispod svake slike napiši koji je grafik funkcije na njoj prikazan.









__________ __________ __________ __________

Na osnovu grafika funkcija i analitički zadatih izvodnih funkcija, popuni prazna mesta:

1) Funkcija $y = f(x)$ je rastuća akko je $x \in$ ________________.
2) Izvodna funkcija $y = g'(x)$ je pozitivna akko je $x \in$ ________________ .
3) Tačka lokalnog minimuma funkcije $y = h(x)$ je $M(\quad,\quad)$.
4) Najveća vrednost funkcije $y = s(x)$ na skupu $[1, 2]$ je ____________.
5) Funkcija $y =$ _____ ima tangentu koja je paralelna sa $y -$ osom u tački $T(\quad,\quad)$.
6) Jednačina tangente grafika funkcije $y = f(x)$ u tački čija je apscisa 3 je: ______________ .

Finalni test znanja u istraživanju sprovedenom sa studentima (FTS) – Za finalno merenje znanja studenata konstruisan je test koji je sadržao 6 zadataka – prvih pet zadataka i osmi zadatak finalnog testa koji je korišćen u istraživanju sa učenicima. Zadaci su bodovani po istom ključu koji je primenjen za FTU. Maksimalno mogući broj ostvarenih bodova iznosio je 18.

3.4.4. Organizacija i tok pedagoškog istaživanja

Rad sa učenicima

Istraživanje koje je realizovano sa učenicima odvijalo se tokom dve školske godine i obuhvatalo je dve različite generacije učenika. Na početku školskih godina učenici su radili inicijalni test. Na osnovu dobijenih rezultata inicijalnog testiranja ujednačene su dve grupe, eksperimentalna i kontrolna.

Tokom prvog polugodišta, nastavna tema Izvod funkcije je realizovana kognitivno-vizuelnim pristupom sa učenicima eksperimentalne grupe i pritom su obrađivani i metodički transformisani i tradicionalni sadržaji. Nastava u kontrolnoj grupi se odvijala prema programu matematike za četvrti razred, na uobičajen način.

Eksperimentalni program je sproveden u okviru 26 nastavnih časova. Realizacija skoro svih nastavnih časova je obuhvatala obradu i kognitivno-vizuelnih i tradicionalnih programskih sadržaja. Redosled obrade nastavnih jedinica i detaljna metodička uputstva o samoj realizaciji kognitivno-vizuelnog pristupa u obradi metodički transformisanih sadržaja, sa posebnim naglaskom na zadatke sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, opisani su u poglavlju 3.3. U zavisnosti od nastavnih aktivnosti i oblika rada, časovi su izvođeni u kabinetu za matematiku koji je opremljen računarom i projektorom, i u računarskom kabinetu gde su učenici imali mogućnost da samostalno rade na računaru.

Nakon završetka eksperimentalnog perioda, početkom drugog polugodišta, sprovedena je provera znanja učenika eksperimentalne i kontrolne grupe, istovetnim finalnim testom. Na osnovu dobijenih rezultata finalnog testiranja utvrđeno je dejstvo eksperimentalnog faktora na matematička znanja učenika.

Rad sa studentima

Istraživanje o primeni kognitivno-vizuelnog pristupa u izučavanju sadržaja matematičke analize, sprovedeno je tokom dve akademske godine sa studentima prve godine fizike u okviru nastavnog predmeta Matematika 1.

Inicijalno testiranje znanja studenata realizovano je u okviru prvog redovnog kolokvijuma, istim testom koji je korišćen u istraživanju sa učenicima. Formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe izvršeno je na osnovu rezultata studenata, na način kako je objašnjeno u odeljku 3.4.2. ove disertacije.

Sa eksperimentalnom grupom studenata realizovan je kognitivno-vizuelni pristup u obradi odabranih sadržaja matematičke analize. U eksperimentalnoj nastavi obrađivani su zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i tom prilikom su korišćeni unapred pripremljeni nastavni materijali za realizaciju nastave u računarskom okruženju. Studenti kontrolne grupe su izučavali simbolički i formalno-aksiomatski aspekt sadržaja matematičke analize, tradicionalnim metodičkim pristupima.

Finalno merenje znanja studenata koji su učestvovali u istraživanju sprovedeno je u okviru ispita u januarskom ispitnom roku. Finalno testiranje je imalo za cilj da se istim testom znanja za sve studente (FTS), izmere efekti primene različitih metodičkih pristupa.

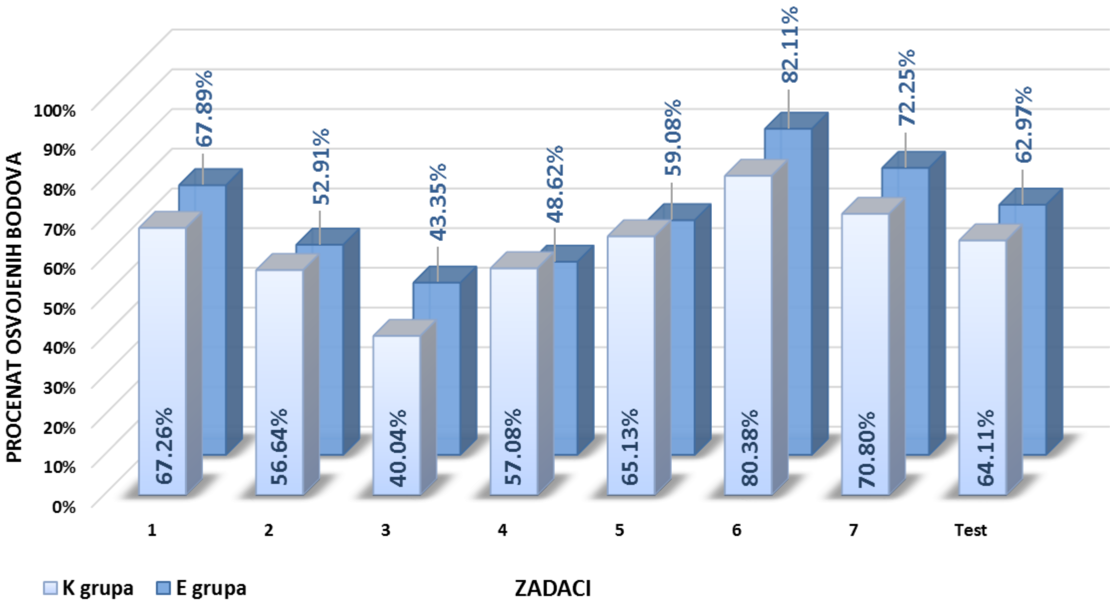
3.5. REZULTATI I DISKUSIJA

3.5.1. Prikaz i interpretacija rezultata istraživanja sprovedenog sa učenicima

Rezultati inicijalnog testiranja

Inicijalno testiranje je realizovano sa 222 učenika (109 učenika eksperimentalne i 113 učenika kontrolne grupe). Inicijalni test (IT) sadržao je 7 zadataka koji su vrednovani po ključu, a maksimalno mogući broj ostvarenih bodova iznosio je 25. Grafikon 3.1 prikazuje rezultate inicijalnog testiranja u procentima za zadatke i test u celini.

Učenici E grupe su u proseku uradili tačno 62,97% inicijalnog testa, a učenici K grupe 64,11%, tako da su svi učenici koji su testirani u proseku uradili 63,55% inicijalnog testa. Na IT maksimalan broj bodova ostvarilo je 7 učenika eksperimentalne i 5 učenika kontrolne grupe. Minimalni broj bodova u E grupi iznosi 4 (16%), a u K grupi 5 (20%) bodova.



Grafikon 3.1. *Uporedni histogram IT po zadacima i testu u celini*

Obe grupe su postigle najbolje rezultate u rešavanju šestog i sedmog zadatka. Šesti zadatak (ispitivanje monotonosti i ekstremnih vrednosti funkcije na osnovu grafičke reprezentacije), u proseku je rešen sa 82,11% u E grupi i sa 80,38% u K grupi. U proseku, sedmi zadatak (konstrukcija grafičke reprezentacije funkcije sa zadatim svojstvima) tačno je rešilo 72,25% učenika E grupe i 70,80% učenika K grupe. Najslabije rešen zadatak u obe grupe je treći (43,35% u E grupi i 40,04% u K grupi), što je i bilo pretpostavljeno, s obzirom na to da zadatak zahteva uspostavljanje veza između višestrukih reprezentacija parne/neparne funkcije, a takva vrsta zadataka u udžbeničkoj literaturi nije zastupljena.

Tabela 3.6 daje pregled rezultata IT dobijenih statističkom obradom podataka na osnovu bodovnog postignuća učenika, analizom srednjih vrednosti. Učenici E grupe su ostvarili u proseku 15,74 (62,97%) bodova, a učenici K grupe 16,03 (64,11%) bodova. Koeficijent varijacije za E grupu iznosi 34,28%, a za K grupu 32,66% što ukazuje na prisustvo određenog varijabiliteta u odnosu na prosek bodova. Kako su dobijene vrednosti malo iznad 30%, možemo da zaključimo da su obe grupe relativno homogene u znanju koje smo ispitali testom.

Tabela 3.6. *Statistički rezultati inicijalnog testiranja učenika*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	*t-test*	
								t	***p***
E	109	15,74	62,97%	5,40	34,28%	0,52	-1,14%	-0,40	0,692
K	113	16,03	64,11%	5,23	32,66%	0,49			

Legenda: N – broj učenika; M – aritmetička sredina broja osvojenih bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K(%) – razlika aritmetičkih sredina E i K-grupe, izražena u %; *t* – vrednost test statistike; *p* – nivo statističke značajnosti.

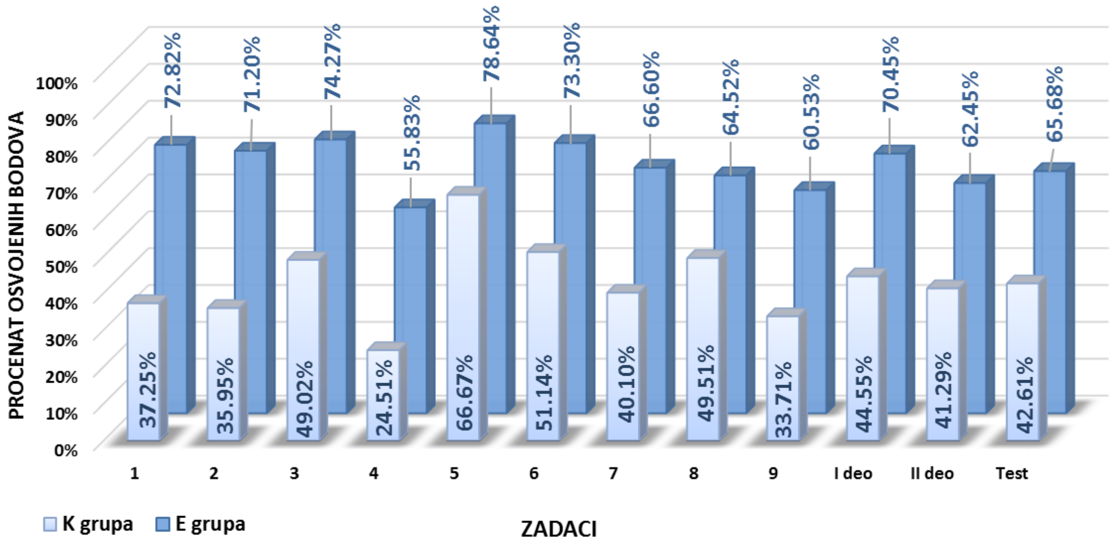
Normalnost raspodele rezultata eksperimentalne i kontrolne grupe proverena je Kolmogorov-Smirnov testom. Za E grupu vrednost test statistike je $D = 0{,}124$ i nivo statističke značajnosti $p = 0{,}066 > 0{,}05$, a za K grupu $D = 0{,}107$ i $p = 0{,}139 > 0{,}05$. Na osnovu dobijenih rezultata zaključujemo da raspodele rezultata E i K grupe odgovaraju normalnoj raspodeli.

Kako je kod obe grupe utvrđena normalna distribucija rezultata ostvarenih na inicijalnom testiranju, za testiranje značajnosti razlike između aritmetičkih sredina uspeha učenika E i K grupe korišćen je parametrijski Studentov t-test za dva nezavisna uzorka. Na osnovu podataka dobijenih u Tabeli 3.6 (vrednost test statistike $t = -0{,}40$ i nivo značajnosti $p = 0{,}692 > 0{,}05$) tvrdimo da razlika u rezultatima učenika E i K grupe ostvarenim na inicijalnom testu, nije statistički značajna.

Možemo zaključiti, da su eksperimentalna i kontrolna grupa ujednačene po uspehu iz matematike u prva tri razreda gimnazije, kao i prema rezultatima inicijalnog testa. Time su stvoreni uslovi za sprovođenje eksperimentalnog programa.

Rezultati finalnog testiranja

Finalno testiranje je sprovedeno sa 205 učenika (103 učenika E grupe i 102 učenika K grupe). Finalni test znanja (FTU) je sadržao 9 zadataka, koji su bodovani po ključu, a maksimalan mogući broj ostvarenih bodova iznosio je 42. Prvi deo testa (prvih sedam zadataka) nosio je 17 bodova, a drugi deo testa (osmi i deveti zadatak) 25 bodova. Grafikon 3.2 prikazuje rezultate finalnog testiranja učenika, po zadacima, delovima testa i testa u celini, u procentualnom iznosu osvojenih bodova.



Grafikon 3.2. *Uporedni histogram FTU po zadacima, delovima testa i testu u celini*

Učenici E grupe su u proseku tačno uradili 70,45% prvog dela i 62,45% drugog dela testa, odnosno 65,68% finalnog testa. U proseku, učenici K grupe tačno su uradili 44,45% prvog dela i 41,29% drugog dela testa, odnosno 42,61% finalnog testa. Četiri učenika E grupe je osvojilo maksimalna 42 boda, dok je u K grupi najveći broj osvojenih bodova iznosio 38. Minimalni broj bodova u E grupi iznosi 8, a u K grupi 4 boda. Eksperimentalna grupa je na svim zadacima postigla bolji uspeh od kontrolne.

U prvom delu testa, obe grupe su ostvarile najbolje rezultate u rešavanju 5. zadatka (78,64% u E grupi i 66,67% u K grupi) koji se odnosi na određivanje vrednosti prvog izvoda funkcije kao koeficijenta pravca tangente. Analizom učeničkih radova, utvrđeno je da su učenici K grupe zadatak rešavali isključivo algebarskim metodama (određivanje jednačine tangente i njenog koeficijenta pravca), dok su učenici E grupe u velikoj meri (približno 80% učenika) primenjivali grafički pristup (crtanje tangente u koordinatnom sistemu i grafičko određivanje koeficijenta pravca).

Učenici su najslabije rezultate pokazali u rešavanju četvrtog zadatka (55,83% u E grupi i 24,51% u K grupi). Ako uporedimo kako su formulisani treći i četvrti zadatak i rezultate koje su učenici ostvarili u njihovom rešavanju, možemo da zaključimo da je jedan od mogućih razloga slabih rezultata u četvrtom zadatku, to što postavljeno pitanje uključuje negaciju (... vrednost $f'(x_0)$ ne može da bude…).

U rešavanju šestog i sedmog zadatka učenici E grupe su pokazali znatno bolje grafičko razumevanje funkcija i izvoda, i veće sposobnosti za rad sa grafičkim reprezentacijama, od učenika K grupe. Razlika u postignućima učenika E i K grupe za šesti zadatak iznosi 22,16%, a za sedmi 26,50%. Učenici obe grupe su bili uspešniji u interpretaciji grafičkih reprezentacija (6. zadatak), nego li u konstrukciji (7. zadatak), s tim što su razike u postignućima manje izražene kod E grupe.

U drugom delu testa, učenici E grupe su pokazali znatno bolje rezultate od K grupe, i na osmom (za 15,01%) i na devetom zadatku (za 26,82%). Obe grupe su bile uspešnije u rešavanju 8. zadatka u odnosu na 9. zadatak. Eksperimentalna grupa je ostvarila približno iste rezultate u oba zadatka (razlika je 4,01%), dok kod kontrolne grupe postoji znatno veća razlika u postignutim rezultatima (razlika je 15,80%). Analiza učeničkih radova je pokazala da su učenici E grupe u rešavanju zadataka u kojima su imali mogućnost izbora reprezentacija, u velikoj meri koristili grafičke reprezentacije. Učenici kontrolne grupe su u radu koristili uglavnom algebarske reprezentacije, i nisu efikasno koristili grafičke reprezentacije.

Tabela 3.7 daje pregled rezultata FTU dobijenih statističkom obradom podataka na osnovu bodovnog postignuća studenata, analizom srednjih vrednosti. Dobijeni podaci pokazuju da je eksperimentalna grupa pokazala bolje rezultate od kontrolne. Razlika aritmetičkih sredina broja osvojenih bodova na prvom delu testa iznosi 25,90%, na drugom delu 21,15%, dok je na finalnom testu 23,07%, u korist eksperimentalne grupe. Za E grupu dobijeni koeficijenti varijacije za prvi deo testa i test u celini manji su od 30%, dok je za drugi deo testa koeficijent varijacije 44,30%. Generalno, E grupa je homogena u znanju koje je ispitano finalnim testom, s tim što je u drugom delu testa prisutan izvesni varijabilitet u odnosu na prosečan broj bodova. Dobijeni koeficijenti varijacije za K grupu, veći su od 30% na delovima testa i testu u celini, što ukazuje da ova grupa učenika nije homogena u znanju ispitanim finalnim testom. Obe grupe imaju najveće koeficijente varijacije u drugom delu testa.

Tabela 3.7. *Statistički rezultati FTU, po delovima testa i testu u celini*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	*t-test*		$\eta 2$
								t	*p*	
					I deo					
E	103	11,96	70,45%	3,52	29,41%	0,35	25,90%	9,85	0,000	0,32
K	102	7,57	44,55%	2,84	37,44%	0,28				
					II deo					
E	103	15,61	62,45%	6,92	44,30%	0,68	21,15%	5,91	0,000	0,15
K	102	10,32	41,29%	5,98	57,90%	0,59				
					Test					
E	103	27,58	65,68%	8,02	29,07%	0,79	23,07%	8,78	0,000	0,28
K	102	17,90	42,61%	7,78	43,49%	0,77				

Legenda: N – broj učenika; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K – razlika aritmetičkih sredina E i K grupe, izražena u %; *t* – vrednost test statistike; *p* – nivo statističke značajnosti, η^2 – veličina efekta.

Za E grupu, normalnost distribucija promenljivih potvrđena je testom Kolmogorov-Smirnov, na prvom ($D = 0{,}106$ i $p = 0{,}188 > 0{,}05$) i drugom delu testa ($D = 0{,}110$ i $p = 0{,}157 > 0{,}05$) i na testu u celini ($D = 0{,}053$ i $p = 0{,}927 > 0{,}05$). Kontrolna grupa takođe ima normalnu raspodelu na prvom ($D = 0{,}099$ i $p = 0{,}262 > 0{,}05$) i drugom delu testa ($D = 0{,}100$ i $p = 0{,}246 > 0{,}05$) kao i na testu u celini ($D = 0{,}068$ i $p = 0{,}716 > 0{,}05$).

Kako su sve raspodele normalne, to je statističko testiranje značajnosti razlike između aritmetičkih sredina uspeha učenika E i K sprovedeno Studentovim t-testom za dva nezavisna uzorka. Na osnovu podataka dobijenih u Tabeli 3.7, za prvi deo testa (vrednost test statistike $t = 9{,}850$ i nivo značajnosti $p = 0{,}000 < 0{,}01$), drugi deo testa ($t = 5{,}91$ i $p = 0{,}000 < 0{,}01$) i testa u celini ($t = 8{,}78$ i $p = 0{,}000 < 0{,}01$), sa sigurnošću od 99%

tvrdimo da postoji statistički značajna razlika između rezultata E i K grupe na prvom i drugom delu testa, kao i na finalnom testu u celini.

Veličina efekta eksperimentalnog faktora utvrđena je na osnovu izračunatih vrednosti eta-kvadrat koeficijenta za prvi deo testa ($\eta^2 = 0{,}32$), drugi deo testa ($\eta^2 = 0{,}15$) i test u celini ($\eta^2 = 0{,}28$). Dobijene vrednosti ukazuju na veliki efekat kognitivno-vizuelnog metodičkog pristupa, kao eksperimentalnog faktora, na postignuća učenika u prvom i drugom delu testa, kao i testu u celini.

Na osnovu analize dobijenih rezultata finalnog testiranja učenika, možemo da potvrdimo pomoćne hipoteze H1, H2 i H3 i konstatujemo da su učenici eksperimentalne grupe pokazali statistički značajno bolje rezultate na oba dela testa i testu u celini, od učenika kontrolne grupe.

Rezultati ovog istraživanja potvrđuju deo opšte hipoteze koji se odnosi na učenike i može se izvesti zaključak da se primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji metodički transformisanih sadržaja matematičke analize postižu statistički značajno bolja postignuća učenika u odnosu na postignuće koje se ostvaruje primenom tradicionalnih metodičkih pristupa u realizaciji programom predviđenih sadržaja.

3.5.2. Prikaz i interpretacija rezultata istraživanja sprovedenog sa studentima

Rezultati inicijalnog testiranja

Inicijalno testiranje znanja studenata fizike je sprovedeno istim inicijalnim testom (IT) koji je korišćen u istraživanju sa učenicima. Statistička obrada podataka je izvršena za 60 studenata eksperimentalne i 60 studenata kontrolne grupe. Na IT maksimalan broj bodova ostvarila su 3 studenta eksperimentalne i 4 studenta kontrolne grupe. Minimalni broj bodova u E grupi iznosi 4 (16%), a u K grupi 3 (12%) bodova.

Rezultati inicijalnog testiranja obrađeni su na osnovu bodovnog postignuća studenata, analizom srednjih vrednosti (Tabela 3.8). Studenti E grupe su na testu ostvarili u proseku 14,95 (59,80%) bodova, a u K grupi prosečan broj ostvarenih bodova je 14,58 (58,33%). Izračunati koeficijenti varijacije za E (39,11%) i K (34,42%) grupu veći su od 30%, što ukazuje na prisustvo određenog varijabiliteta u odnosu na prosek bodova, koji je izraženiji u E grupi. Možemo da zaključimo da je K grupa relativno homogena (dobijena vrednost je malo iznad 30%), a da E grupa nije homogena u znanju koje smo ispitali testom.

Tabela 3.8. *Statistički rezultati inicijalnog testa studenata*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	*t-test*	
								t	***p***
E	60	14,95	59,80%	5,85	39,11%	0,75	1,47%	0,37	0,713
K	60	14,58	58,33%	5,02	34,42%	0,65			

Legenda: N – broj studenata; M – aritmetička sredina broja osvojenih bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K(%) – razlika aritmetičkih sredina E i K-grupe, izražena u %; *t* – vrednost test statistike; *p* – nivo statističke značajnosti.

Za proveru normalnosti raspodele rezultata eksperimentalne i kontrolne grupe korišćen je Kolmogorov-Smirnov test. Za E grupu vrednost test statistike je $D = 0{,}107$ i nivo statističke značajnosti $p = 0{,}477 > 0{,}05$, a za K grupu $D = 0{,}112$ i $p = 0{,}413 > 0{,}05$, pa raspodela rezultata obe grupe odgovara normalnoj raspodeli.

Kako su obe raspodele normalne, statistička značajnost razlike između rezultata E i K grupe ispitana je Studentovim t-testom razlike aritmetičkih sredina dva nezavisna uzorka. Na osnovu dobijene vrednosti test statistike $t = 0{,}37$ i nivoa značajnosti $p = 0{,}713 > 0{,}05$ (Tabela 3.8), tvrdimo da razlika u rezultatima studenata E i K grupe ostvarenim na inicijalnom testu nije statistički značajna. Ovim je potvrđena ujednačenost grupa studenata u odnosu na predznanja iz oblasti funkcija.

Rezultati finalnog testiranja

Za finalno merenje znanja studenata koji su učestvovali u istraživanju korišćen je test FTS koji je sadržao 6 zadataka (prvih pet zadataka i osmi zadatak finalnog testa koji je korišćen u istraživanju sa učenicima) koji su vrednovani po ključu, a maksimalno mogući broj ostvarenih bodova iznosio je 18. Na finalnom testiranju maksimalan broj bodova ostvarila su 2 studenta E grupe, dok je u K grupi najveći broj ostvarenih bodova 16 (88,89%). Minimalni broj bodova u E grupi iznosi 2 boda (11,11%), a u K grupi je bilo studenata koji nisu osvojili ni jedan bod.

Rezultati finalnog testiranja znanja studenata obrađeni su na osnovu bodovnog postignuća, analizom srednjih vrednosti (Tabela 3.9). Studenti E grupe su na testu ostvarili u proseku 10,65 (59,17%) bodova, a u K grupi prosečan broj ostvarenih bodova je 7,48 (41,57%). Izračunati koeficijenti varijacije za E (38,06%) i K (56,64%) grupu veći su od 30%, što ukazuje na prisustvo određenog varijabiliteta u odnosu na prosek bodova. Možemo da zaključimo da grupe studenata nisu homogene u znanju koje smo ispitali finalnim testom, pri čemu je stepen nehomogenosti znatno izraženiji u kontrolnoj grupi.

Tabela 3.9. *Statistički rezultati finalnog testa studenata*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	***Mann-Whitney test***		$\eta 2$
								U	p	
E	60	10,65	59,17%	4,05	38,06%	0,52	17,59%	2593,00	0,000	0,13
K	60	7,48	41,57%	4,24	56,64%	0,55				

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K – razlika aritmetičkih sredina E i K grupe, izražena u %; U – vrednost test statistike; p – nivo statističke značajnosti, η^2 – veličina efekta.

Normalnost raspodele rezultata E i K grupe proverena je Kolmogorov-Smirnov testom. Za eksperimentalnu grupu vrednost test statistike je $D = 0{,}102$ i nivo statističke značajnosti $p = 0{,}534 > 0{,}05$, a za kontrolnu grupu $D = 0{,}230$ i $p = 0{,}003 < 0{,}05$. Na osnovu dobijenih rezultata zaključujemo da raspodela rezultata E grupe ne odgovara normalnoj raspodeli, dok K grupa ima normalnu distribuciju.

S obzirom na to da ne postoji normalna distribucija u obe grupe, statistička značajnost razlike između ostvarenih rezultata studenata E i K grupe, ispitana je pomoću neparametrijskog Mann-Whitney testa. Na osnovu dobijenih rezultata u Tabeli 3.9, za vrednost test statistike ($U = 2593{,}00$) i nivo statističke značajnosti ($p = 0{,}000 < 0{,}01$) možemo zaključiti da postoji statistički značajna razlika u ostvarenim rezultatima eksperimentalne i kontrolne grupe na finalnom testu, u korist eksperimentalne grupe.

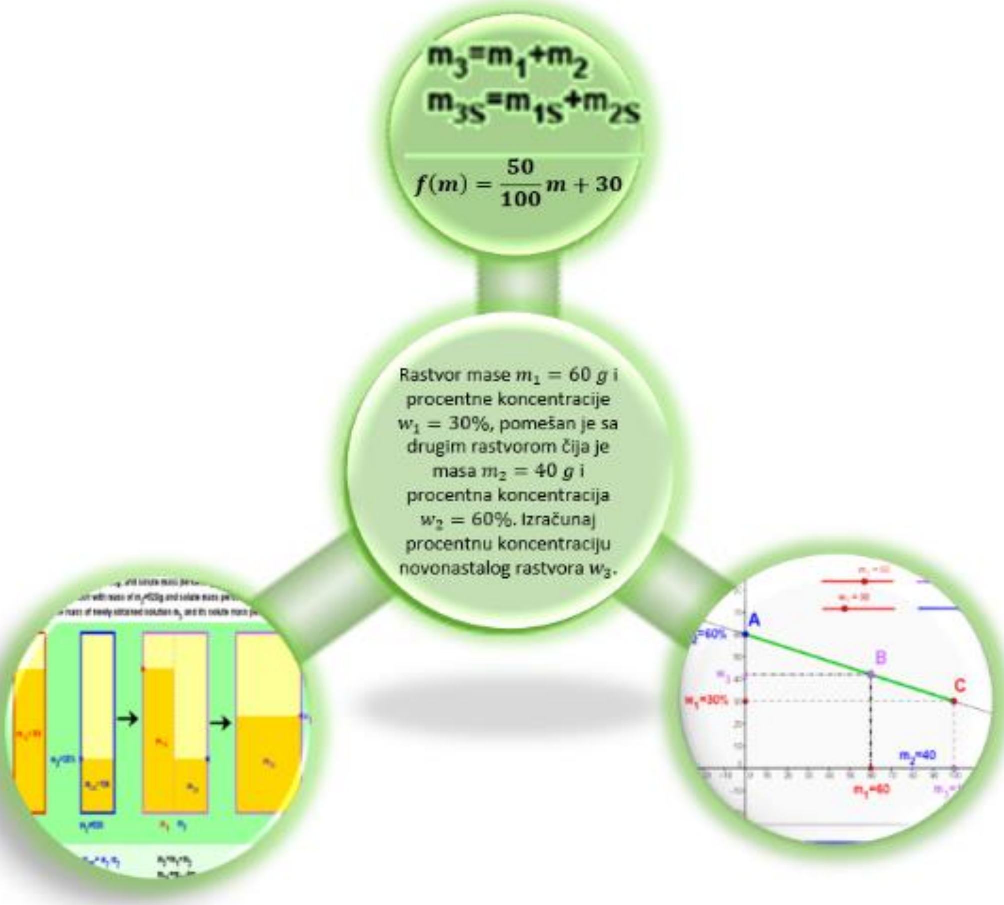
Kako bi se utvrdila veličina efekta eksperimentalnog faktora, izračunata je vrednost eta--kvadrat koeficijenata. Dobijena vrednost $\eta^2 = 0{,}13$ ukazuje na srednju vrednost efekta uticaja kognitivno-vizuelnog metodičkog pristupa, kao eksperimentalnog faktora.

Na osnovu analize dobijenih rezultata finalnog testiranja učenika, možemo da potvrdimo polaznu hipotezu i konstatujemo da su učenici studenti eksperimentalne grupe pokazali statistički značajno bolje rezultate na finalnom testu, od studenata kontrolne grupe.

Rezultati ovog istraživanja potvrđuju deo opšte hipoteze koji se odnosi na studente i može se izvesti zaključak da se primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji metodički transformisanih sadržaja matematičke analize postižu statistički značajno bolja postignuća studenata u odnosu na postignuće koje se ostvaruje primenom tradicionalnih metodičkih pristupa u realizaciji programom predviđenih sadržaja.

4

VIZUELIZACIJA PROBLEMA SMEŠE



U ovoj glavi disertacije razmatrana je primena kognitivno-vizuelnog pristupa u rešavanju problema smeše. U fokusu predloženog pristupa je vizuelizacija problema mešanja rastvora grafičkom reprezentacijom linearne funkcije. Zbog toga je u istraživačkom procesu posebna pažnja posvećena povezivanju nastavnih sadržaja koji se odnose na problem smeše i linearnu funkciju. Kako je novi pristup primenjen na pojmove i probleme koji se osim u nastavi matematike uče i u nastavi hemije, to je bitan aspekt ovog pristupa uspostavljanje korelacije nastavnih sadržaja ova dva predmeta u smislenu, usklađenu i funkcionalnu celinu.

Eksperimentalno istraživanje je sprovedeno u toku 2013/2014. i 2014/2015. godine sa studentima hemije. Rezultati dobijeni u prvom istraživanju pokazali su svrsishodnost primene novog pristupa i ujedno su pružili i važne informacije o mogućim didaktičko-metodičkim transformacijama koje bi doprinele postizanju što boljih ishoda učenja. Upravo iz tih razloga, naredne godine je sprovedeno istraživanje u kome je kognitivno-vizuelni pristup bio baziran na vizuelizaciji problema mešanja rastvora na dva načina, grafičkom reprezentacijom linearne funkcije i dvodimenzionalnim dijagramom (geometrijskom reprezentacijom).

Ova glava se sastoji od pet poglavlja. Prvo poglavlje je posvećeno problemu smeše. Diskutovano je o specifičnostima metodičkih pristupa obradi problema smeše u nastavi matematike i hemije, kao i o nedovoljnoj korelaciji među ovim predmetima. Takođe su predložene neke mogućnosti za prevazilaženje postojećih poteškoća i za povezivanje matematičkih i hemijskih sadržaja koji se odnose na problem mešanja rastvora.

Drugo poglavlje opisuje novi metodički pristup zasnovan na kognitivnoj vizuelizaciji nastavnih sadržaja koji se odnose na problem smeše, sa posebnim akcentom na vizuelizaciju problema mešanja rastvora grafikom linearne funkcije. Detaljno su objašnjene geometrijska i grafička reprezentacija problema mešanja rastvora, kao i prednost primene obrazovnog softvera *GeoGebra* u cilju povezivanja vizuelnih i algebarskih reprezentacija.

U trećem poglavlju su prikazani nastavni materijali koji su bili korišćeni tokom eksperimentalne nastave. Takođe, diskutovano je o njihovim karakteristikama s aspekta osnovnih načela multimedijalnog didaktičkog dizajna i kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi i učenju.

Metodološki okvir istraživanja prezentovan je u četvrtom poglavlju. Navedeni su predmet, cilj i zadaci istraživanja, definisane hipoteze, opisan je način formiranja uzorka studenata, kao i proces prikupljanja podataka odgovarajućim metodama, tehnikama i instrumentima. Takođe su prikazani korišćeni instrumenti (inicijalni i finalni testovi znanja) sa odgovarajućim metodičkim objašnjenjima. Na kraju ovog poglavlja predstavljena je organizacija i tok pedagoškog eksperimenta i detaljno je analizirana realizacija eksperimentalne nastave.

U petom poglavlju su prikazani i interpretirani rezultati istraživanja. Predstavljena je statistička obrada podataka, analiza rezultata i testiranje postavljenih hipoteza, kao i interpretacija glavnih nalaza istraživanja.

4.1. PROBLEM SMEŠE

Problem smeše se obrađuje u nastavi matematike u prvom razredu gimnazije u okviru nastavne teme „Proporcionalnost" koja obuhvata sledeće sadržaje: razmera i proporcija, direktna i obrnuta proporcionalnost veličina, srazmerni račun, račun podele, račun mešanja, procentni i kamatni račun (ПНППГ, 2011). Obrada sadržaja nastavne teme „Proporcionalnost" može doprineti da učenici: razvijaju sposobnost određivanja i procene kvantitativnih veličina i njihovog odnosa; razumeju funkcionalne zavisnosti, njihovo predstavljanje i primenu; stiču znanja i veštine korisne za transfer u druge nastavne predmete, kao i rešavanje problema i novih situacija u svakodnevnom životu.

Karakteristika ove teme je rešavanje raznih praktičnih problema i problema iz drugih naučnih disciplina, pa samim tim podrazumeva povezivanje i primenu raznih matematičkih znanja i shvatanje pojava i zakonitosti u realnom okruženju ili drugoj naučnoj disciplini. Sticanje celovitih, trajnih i suštinskih znanja, koja su praktično primenjiva u raznim oblastima, podrazumeva korelaciju nastave matematike sa drugim nastavnim oblastima. Međutim, nastavni programi prirodnih nauka, prevashodno fizike i hemije, nisu hronološki i sadržajno sinhronizovani sa programom nastave matematike, tako da je povezanost ovih nauka u obrazovnom procesu vrlo slaba, moze se reci praktično nepostojeća (Lipkovski, 2014).

Problem smeše, poznat i kao račun mešanja, u nastavu matematike se uvodi na sledeći način: mešanjem dve komponente čije su količine x i y, i koje imaju neko kvantitativno svojstvo različitog intenziteta a i b, redom (npr. mešamo dve vrste kafe različitih cena; dve vrste zlata različite finoće; dva alkohola različite koncentracije; vode različitih temperatura), nastaje smeša čija je količina z i kvantitativno svojstvo c (cena, finoća, koncentracija, temperatura). Problem smeše opisuje sistem jednačina: $\begin{cases} ax + by = cz \\ x + y = z \end{cases}$ i priroda veličina a, b, c, x, y i z u realnom problemu. Na primer, u slučaju mešanja alkohola različitih koncentracija, veličine a, b i c su koncentracije alkohola i zbog toga su njihove vrednosti od 0% do 100%. Najčešće su problemi smeše postavljeni tako da su četiri veličine poznate, tj. zadate su uslovima zadatka, a dve su nepoznate. Rešavanje problema smeše (račun mešanja) se bazira na primeni proporcija, procentnog računa, računa podele, linearnih jednačina i sistema linearnih jednačina.

Osim u nastavi matematike, sa problemima smeše učenici se susreću u nastavi fizike, hemije i u svakodnevnom životu. Tako na primer, problem mešanja rastvora različitih koncentracija kao i njegovi specifični slučajevi: dodavanje 100%-ne supstance rastvoru, dodavanje vode i isparavanje vode iz rastvora, kao vrsta problema smeše izučavaju se na časovima matematike i hemije. Rastvori, kvantitativni sastav rastvora i problem mešanja rastvora važni su hemijski koncepti sa kojima se učenici/studenti susreću na svim nivoima hemijskog obrazovanja. Nastavnim planom i programom hemije, deo ovih sadržaja je predviđen u prvom razredu gimnazije (ПНППГ, 2011).

Problem mešanja rastvora je interdisciplinarnog karaktera, pa pitanje celovitijeg pristupa u tretiranju istog dobija na značaju, i u nastavi matematike i u nastavi hemije. U daljem tekstu biće prikazani matematički i hemijski pristup ovom problemu, njihove specifičnosti, kao i postojeća neusaglašenost u određenim delovima nastavnih sadržaja. Takođe će biti predložene neke mogućnosti za prevazilaženje postojećih poteškoća u povezivanju matematičkih i hemijskih sadržaja koji se odnose na problem mešanja rastvora.

Današnja školska praksa je u velikoj meri orijentisana ka disciplinarnom pristupu, pa su česte situacije da nastavnici matematike razmatraju problem samo sa matematičkog aspekta, a nastavnici hemije pristupaju objašnjavnju i rešavanju problema samo sa stanovišta hemije. Matematička i hemijska interpretacija istog problema mogu da se razlikuju u prikazivanju informacija (zbog specifičnosti matematičkog, odnosno hemijskog jezika), a u nekim slučajevima se razlikuju i načini pronalaženja rešenja problema. Nedostatak interakcije matematika-hemija može prouzrokovati nepotpunu percepciju problema od strane učenika/studenata, i samim tim nedovoljno razumevanje i slabiji kvalitet znanja. U nastavku će biti razmotreno kako se problem mešanja dva rastvora obrađuje u nastavi matematike, a kako u nastavi hemije.

Analiza nastavnih sadržaja koji se odnose na problem mešanja rastvora pokazuje da ne postoji potpuna pojmovno-terminološka usaglašenost između ova dva predmeta. Pojmovno-terminološka neusaglašenost je prisutna u izražavanju kvantitativnog sastava rastvora, tj. u izražavanju zastupljenosti pojedinih komponenti u rastvoru.

Kvantitativni sastav rastvora u nastavi matematike – U nastavi matematike se obrađuju problemi mešanja rastvora u kojima su rastvori dvokomponentni tj. sastoje se od rastvorene supstance i rastvarača, što je najčešće voda. U udžbenicima i zbirkama zadataka iz matematike (Bogoslavov, 2013; Ивановић и Огњановић, 2000; Кечкић, 2010), kvantitativni sastav ovakvih rastvora se izražava pomoću procenta rastvorene supstance u rastvoru i pri tom se koriste termini koncentracija i jačina. Na primer, $60\,kg$ rastvora kuhinjske soli koncentracije 40% ili 30 l rastvora alkohola jačine 60% (kraći oblik: 30 l 60%-og alkohola). U prvom primeru rastvor sadrži $24\,kg$ soli i $36\,kg$ vode, a u drugom 18 l alkohola i 12 l vode.

Kvantitativni sastav rastvora u nastavi hemije – Za izražavanje kvantitativnog sastava rastvora u hemiji, koriste se različite veličine i odnosi. Izdvajamo one vidove kvantitativnog izražavanja sastava rastvora u hemiji koji su značajni za nastavu matematike ili koji su terminološki neusaglašeni, a to su: maseni udeo (procentna koncentracija), zapreminski udeo (zapreminski procenat) i molarna koncentracija.

Molarna koncentracija (c) predstavlja količinu rastvorene supstance u zapremini rastvora, tj. koliko se molova rastvorene supstance nalazi u jediničnoj zapremini rastvora i u praksi se najčešće izražava jedinicom mol/l. Ovaj način izražavanja koncentracije često se koristi u hemiji jer pruža bolji uvid u razmatranje kvantitativnih odnosa u toku hemijskih reakcija. Važno je napomenuti da se u hemiji pod terminom koncentracija, bez ikakvih dopunskih određenja podrazumeva molarna koncentracija.

Zastupljenost pojedinih komponenti u rastvoru može se izraziti i preko odnosa istih fizičkih veličina (masa, zapremina, količina supstance). Maseni udeo supstance u rastvoru (w) je odnos mase rastvorene supstance i ukupne mase rastvora. Maseni udeo je broj između 0 i 1, i ako je procentualno izražen, naziva se procentna koncentracija ili maseni procenat i označava se sa $mas\%, w(\%)$ ili samo %. Analogno, zapreminski udeo je odnos zapremine rastvorene supstance i ukupne zapremine rastvora i ako je procentualno izražen predstavlja zapreminski procenat i označava se sa vol %. Dakle, u hemiji se kvantitativni sastav rastvora može izraziti procentualno pomoću procentne koncentracije i zapreminskog procenta. Pri tom, ako je znak % napisan bez dodatnog određenja, smatra se da se radi o procentnoj koncentraciji.

Iz svega napred navedenog, može se zaključiti da se pojmovno-terminološka neusaglašenost javlja u sledećim slučajevima:

- Terminom koncentracija označavaju se različiti pojmovi. U hemiji se pod ovim terminom najčešće podrazumeva molarna koncentracija, a u matematici isključivo procenat rastvorene supstance u rastvoru. Takođe je važno napomenuti da se u matematičkim sadržajima koji se odnose na problem mešanja rastvora, molarna koncentracija ne koristi za izražavanje kvantitativnog sastava rastvora.
- Ako je znak % napisan bez dodatnog određenja, u hemiji se podrazumeva procentna koncentracija, pa je u tom slučaju u zadatku zadata masa rastvora. U matematici se znak % koristi za izražavanje procentnog sastava rastvora, bez obzira da li je zadata masa ili zapremina rastvora.
- U matematici se sastav rastvora procentualno izražava i u slučaju kada je zadata zapremina rastvora (npr. 30 l rastvora akohola čija je koncentracija 60%). Ovaj slučaj bi mogao da odgovara zapreminskom procentu u hemiji, ukoliko bi bilo naglašeno da se znak % odnosi na zapreminski procenat (30 l rastvora čiji je zapreminski procenat alkohola 60%, ili kraće 30 l rastvora vol 60 %-og alkohola). U protivnom ako nije naglašeno da je u pitanju zapreminski procenat supstance u rastvoru, tada se u hemiji podrazumeva da se znak % odnosi na procentnu koncentraciju (maseni udeo). U tom slučaju se u hemijskim problemima daje i podatak o gustini rastvora (zbog izračunavanja mase rastvora na koju se odnosi data procentna koncentracija).
- Termin jačina rastvora, koji se javlja u matematičkim zadacima, ne postoji u hemiji.

Navedena neusaglašenost svakako može da zbuni učenike i dovodi ih u situaciju da iste termine i oznake treba da tumače na različite načine, u zavisnosti od toga da li problem rešavaju na času matematike ili na času hemije. Navedeni problemi mogu da se prevaziđu ukoliko bi se u nastavi matematike umesto termina koncentracija koristili procentna koncentracija (maseni udeo) i zapreminski procenat (zapreminski udeo), koji su usaglašeni sa hemijskim terminima ($60kg$ rastvora kuhinjske soli procentne koncentracije 40%; 30 l rastvora alkohola čiji je zapreminski procenat alkohola 60%). U skladu sa navedenim, problem mešanja dva rastvora može da se uvede na sledeći način:

Mešanjem dva rastvora čije su mase m_1 i m_2 i procentne koncentracije w_1 i w_2, nastaje treći rastvor mase $m_3 = m_1 + m_2$, čija je procentna koncentracija w_3. Kada su četiri veličine poznate, a dve nepoznate, kaže se da rešavamo problem mešanja rastvora.

Rešavanje problema mešanja rastvora je zasnovano na sledećim činjenicama:

Veličine koje se javljaju u problemu su mase i procentne koncentracije, pa je:

$$0 \leq w_1 \leq 100\%, \qquad 0 \leq w_2 \leq 100\%, \quad 0 \leq w_3 \leq 100\%,$$

$$m_1 \geq 0, \qquad m_2 \geq 0, \qquad m_3 \geq 0$$

Kvantitativni sastav rastvora je određen procentnom koncentracijom (masenim udelom), odnosno količnikom mase rastvorene supstance i ukupne mase rastvora, $w = \frac{m_S}{m}$. Zbog toga, za mase rastvorene supstance u polaznim rastvorima m_{1S} i m_{2S} i masu rastvorene supstance u novonastalom rastvoru, m_{3S} važi:

$$m_{1S} = w_1\, m_1; \qquad m_{2S} = w_2\, m_2; \qquad m_{3S} = w_3\, m_3. \tag{1}$$

Aditivnost masa rastvora:

$$m_1 + m_2 = m_3. \tag{2}$$

Aditivnost masa rastvorene supstance:

$$m_{1S} + m_{2S} = m_{3S}. \tag{3}$$

Dakle, problem mešanja rastvora, u slučaju kada je kvantitativni sastav rastvora izražen procentnom koncentracijom, određen je sledećim sistemom uslova:

$$0 \leq w_1 \leq 100\%, \qquad 0 \leq w_2 \leq 100\%, \quad 0 \leq w_3 \leq 100\%,$$

$$m_1 \geq 0, \qquad m_2 \geq 0, \qquad m_3 \geq 0,$$

$$m_1 + m_2 = m_3,$$

$$w_1\, m_1 + w_2\, m_2 = w_3\, m_3. \tag{4}$$

Uslovi (1), (2) i (3) daju sistem jednačina:

$$\begin{cases} w_1\, m_1 + w_2\, m_2 = w_3\, m_3 \\ \qquad m_1 + m_2 = m_3 \end{cases}, \tag{5}$$

odnosno linearnu jednačinu:

$$w_1\, m_1 + w_2\, m_2 = w_3\,(m_1 + m_2). \tag{6}$$

Analiza sadržaja udžbenika i zbirki zadataka iz matematike za prvi razred gimnazije pokazuje da se problemi smeše tretiraju kao algebarski problemi. Rešavanje problema smeše se bazira na primeni jednačina, sistema jednačina ili pravila zvezde. Osnovne metode rešavanja problema smeše biće izložene na primeru mešanja rastvora.

Rešavanje problema mešanja rastvora u nastavi matematike. U nastavi matematike, problem mešanja rastvora se rešava primenom odgovarajućeg sistema linearnih jednačina (5), linearne jednačina (4) i primenom pravila zvezde. Pravilo zvezde (pravilo krsta), predstavlja sledeću šemu:

$$\begin{array}{ccccccc} m_1 & w_1 & \diagdown & & \diagup & w_2 - w_3 \\ & & & w_3 & & \\ m_2 & w_2 & \diagup & & \diagdown & w_3 - w_1 \end{array}$$

Pomoću ove šeme se jednostavno zapisuje odnos masa polaznih rastvora u zavisnosti od koncentracija

$$m_1 : m_2 = (w_2 - w_3) : \, (w_3 - w_1). \tag{7}$$

Proporcija (7) je ekvivalentna sa relacijom (6), što se može i dokazati pomoću elementarnih algebarskih transformacija. Po dobijanju proporcije (7), problem se može dalje rešavati primenom računa podele ili formiranjem sistema linearnih jednačina sa dve nepoznate. Problemi u kojima je potrebno odrediti samo odnos u kome treba pomešati polazne rastvore kako bi se dobio rastvor unapred zadate koncentracije, efikasno se rešavaju primenom pravila zvezde.

U prvom razredu gimnazije osim u nastavi matematike, učenici izučavaju probleme mešanja rastvora i u nastavi hemije. Algebarski pristup je takođe dominantan i u nastavi hemije, a rešavanja problema se bazira na istim ili sličnim postupcima. Jedna od osobenosti nastave hemije je obilje formula, pa se u rešavanju problema mešanja rastvora često koristi formula za izračunavanje koncentracije novonastalog rastvora

$$w_3 = \frac{w_1\, m_1 + w_2\, m_2}{m_1 + m_2}. \tag{8}$$

Rešavanje problema smeše (mešanja rastvora) se zasniva na primeni istih ili sličnih algebarskih metoda i u nastavi matematike i u nastavi hemije. Dakle, učenici prvog razreda gimnazije stiču znanja i razvijaju veštinu rešavanja problema smeše u algebarskom okruženju koje karakterišu: apstraktnost, uopštenost i simbolički zapisi.

Podučavanje i učenje sadržaja veznih za problem smeše je usmereno na proceduralni aspekt rešavanja problema. Primarni cilj je usvajanje algoritamskih postupaka koji su sadržani u algebarskim metodama, pa je najveći deo nastavnog vremena posvećen rešavanju sličnih zadataka po istom modelu. Samim tim, usvajanje i primena konceptualnih znanja je u podređenom položaju u odnosu na proceduralni pristup izučavanju problema smeše. Problemi koje učenici imaju u razumevanju i korišćenju algebarskih metoda delom se javljaju zbog slabosti konceptualnih struktura koje algebarskim simbolima daju značenje, a delom zbog nepotpunih proceduralnih znanja i veština. Razumevanje i uspešno rešavanje problema podrazumeva primenu i konceptualnih i proceduralnih znanja (Star, 2005; Rittle-Johnson & Star, 2009).

Formalno-simbolička priroda algebarskih metoda i nedostatak konceptualnog razumevanja mogu da uzrokuju nerazumevanje i teškoće kod učenika. U nekim slučajevima učenici ne mogu da reše zadatak jer ne shvataju odnose koji vladaju u strukturi zadatka i simboličkim zapisima. Tada se učenje odvija mehanički i učenici uvežbavaju algoritmsku tehniku bez razumevanja suštine i pri tome nisu sigurni kada i kako da koriste ono što znaju. Njihovo znanje je nepotpuno i primenjivo samo na ograničenom uzorku tipskih zadataka čije je rešavanje zasnovano na istim onim algoritamskim postupcima koji su bili demonstrirani tokom nastave. Nastavna praksa i pedagoška istraživanja pokazuju da učenici mogu „mehanički" (bez razumevanja koncepta) da zapamte određene formule i postupke u rešavanju problema i čak mogu biti uspešni prilikom provere znanja (Милановић-Наход, Шарановић-Божановић и Шишовић, 2003; Шишовић и Лазаревић-Бојовић, 2001). Izložena razmatranja ukazuju na postojanje teškoća kod učenika prilikom usvajanja sadržaja koji se odnose na problem smeše i da se one ne ispoljavaju uvek sasvim jasno tokom nastavnog procesa.

Na osnovu svega navedenog proistekla je ideja o uvođenju novog metodičkog pristupa zasnovanog na primeni grafičkih reprezentacija i vizuelnih modela u izučavanju problema smeše, kao i da se identifikuju mogućnosti i načini svrsishodne i efikasne primene obrazovne tehnologije, u cilju unapređenja znanja učenika/studenata.

4.2. VIZUELIZACIJA PROBLEMA SMEŠE

U središtu kognitivno-vizuelnog pristupa je vizuelizacija problema smeše (mešanja rastvora) grafičkom reprezentacijom linearne funkcije. U cilju utvrđivanja svrsishodnosti i efikasnosti primene predloženog pristupa sprovedena su eksperimentalna istraživanja sa studentima hemije, tokom dve akademske godine. Prve godine je metodički pristup bio zasnovan na vizuelizaciji grafičkom reprezentacijom problema mešanja rastvora. U drugom istraživanju, kognitivna vizuelizacija nastavnih sadržaja bila je proširena uvođenjem geometrijske reprezentacije problema mešanja dva rastvora. U ovom poglavlju biće detaljno opisani geometrijski i grafički pristup vizuelizaciji problema mešenja rastvora.

4.2.1. Geometrijska reprezentacija problema mešanja dva rastvora

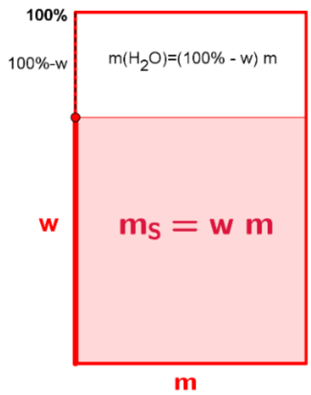
Problemi u kojima jedna veličina predstavlja proizvod druge dve veličine, mogu se vizuelizovati pomoću pravougaonika na sledeći način: vrednosti veličina koje su činioci proizvoda predstavljamo pomoću dve susedne stranice pravougaonika. Tada, površina pravougaonika odgovara njihovom proizvodu i rezultujući dvodimenzionalni dijagram (pravougaonik) predstavlja geometrijski model proizvoda dve veličine. U zavisnosti od prirode problema, odgovarajući dvodimenzionalni dijagram može sadržati jedan ili više pravougaonika.

Geometrijska reprezentacija kvantitativnog sastava rastvora

Kvantitativni sastav rastvora čija je masa m i procentna koncentracija rastvorene supstance w može se predstaviti pomoću pravougaonika na osnovu sledećih činjenica:

Masa rastvorene supstance je $m_S = w\,m$, pa se ona može predstaviti kao površina pravougaonika čije su stranice w i m.
Procentna zastupljenost vode u rastvoru je $100\% - w$, pa je masa vode u rastvoru: $m(H_2O) = (100\% - w)\,m$. Znači, masi vode odgovara površina pravougaonika čije su stranice $100\% - w$ i m.

Na Slici 4.1 je prikazan dvodimenzionalni dijagram koji predstavlja geometrijski model kvantitativnog sastava rastvora.

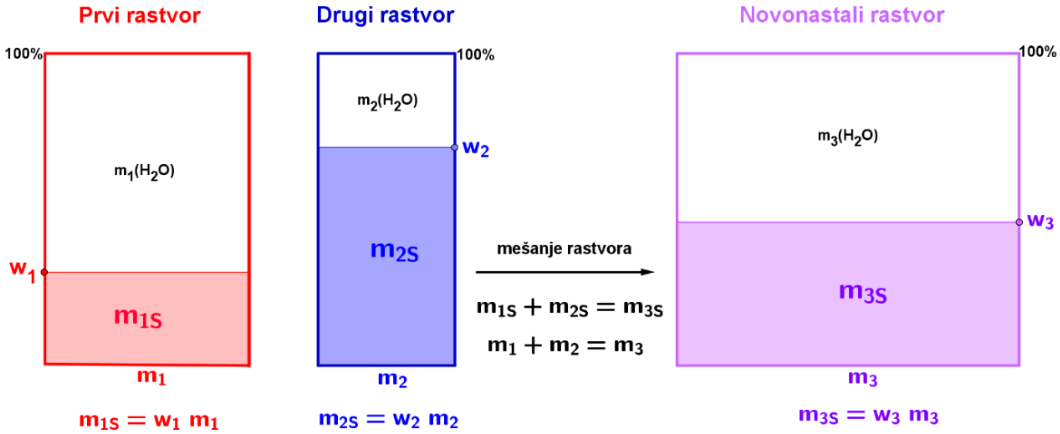


Slika 4.1. *Geometrijski model kvantitativnog sastava rastvora*

Geometrijska reprezentacija problema mešanja rastvora

U problemu mešanja rastvora pojavljuju se tri rastvora: dva polazna koja ćemo imenovati kao prvi i drugi rastvor, i treći rastvor koji nastaje njihovim mešanjem - novonastali rastvor. Veličine koje su poznate tj. zadate kao ulazni podaci su masa i procentna koncentracija prvog (m_1 i w_1) i drugog rastvora (m_2 i w_2). Nepoznate veličine su masa i procentna koncentracija novonastalog rastvora (m_3 i w_3). Kvantitativne sastave polaznih i novonastalog rastvora možemo da predstavimo pomoću odgovarajućih dvodimenzionalnih dijagrama kao što je prikazano na Slici 4.2.

Za dalje razmatranje, koje se odnosi na aditivnost masa, dovoljno je da se posmatraju samo obojeni pravougaonici (zato što su rastvori dvokomponentni). Njihove površine m_{1S}, m_{2S} i m_{3S} predstavljaju mase rastvorenih supstanci u polaznim i novonastalom rastvoru. Aditivnost masa rastvorene supstance ($m_{1S} + m_{2S} = m_{3S}$) implicira da je: površina trećeg pravougaonika koja predstavlja masu rastvorene supstance u novonastalom rastvoru jednaka zbiru površina prvog i drugog pravougaonika. Geometrijska implikacija aditivnosti masa rastvora ($m_1 + m_2 = m_3$) je: dužina stranice trećeg pravougaonika, m_3 jednaka je zbiru odgovarajućih stranica prvog i drugog pravougaonika.

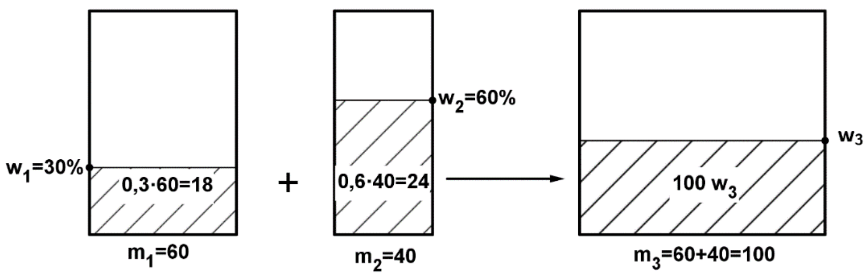


Slika 4.2. *Dvodimenzionalni dijagram –geometrijski model problema mešanja dva rastvora*

Kako učenici/studenti mogu da reše konkretan problem, koristeći dvodimenzionalni dijagram, biće prikazano na sledećem primeru:

Problem 1. *Rastvor mase* $m_1 = 60\ g$ *i procentne koncentracije* $w_1 = 30\%$, *pomešan je sa drugim rastvorom čija je masa* $m_2 = 40\ g$ *i procentna koncentracija* $w_2 = 60\%$. *Izračunaj procentnu koncentraciju novonastalog rastvora* w_3.

Na osnovu zadatih podataka, učenici/studenti mogu da nacrtaju dijagram koji odgovara datom problemu (Slika 4.3), a zatim da izračunaju mase rastvorenih supstanci u prvom i drugom rastvoru.



Slika 4.3. *Rešavanje Problema 1 pomoću dvodimenzionalnog dijagrama*

Dijagram sadrži vizuelne i numeričke podatke na osnovu kojih učenici/studenti mogu da uoče jednačinu $18 + 24 = 100\,w_3$. Rešavanjem ove jednačine dolaze do rešenja, $w_3 = 0{,}42 = 42\%$.

Predloženi geometrijski model problema mešanja rastvora ima naglašenu kognitivno-vizuelnu očiglednost koja doprinosi lakšem usvajanju i boljem razumevanju gradiva. Karakteristike geometrijske reprezentacije koje mogu pospešiti sposobnost učenika/studenata za rešavanje problema su:

- Geometrijska reprezentacija je na vizuelno očigledan i realističan način povezana sa konkretnim problemom.
- Pravougaonici u dijagramu su nosioci značenja koncepta kvantitavnog sastava rastvora i to značenje projektuju na veoma neposredan način. Ceo dijagram je oblikovan tako da

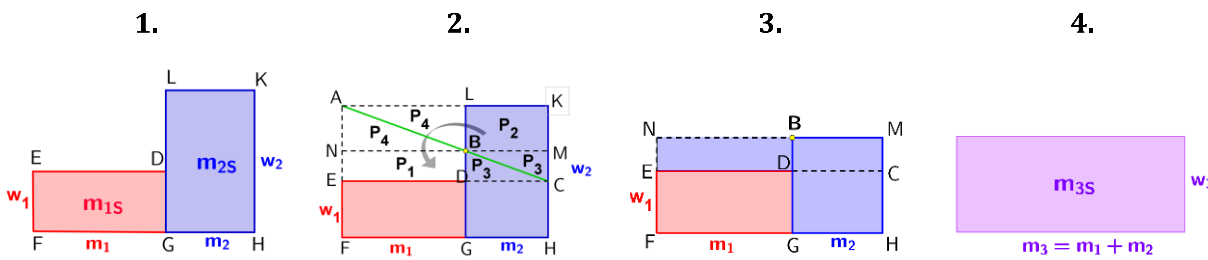
vizuelno reprezentuje bitne strukturalne karakteristike problema, pa je učeničko/studentsko relaciono razumevanje moguće u samoj oblasti opažanja. Dakle, geometrijski model može pospešiti usvajanje konceptualnih i proceduralnih znanja kod studenata, kao i njihovo povezivanje u procesu rešavanja problema.

- Geometrijska reprezentacija pruža kognitivnu podršku za prihvatanje algebarske simbolike i razumevanje algebarske jednačine (sistema jednačina) koja odgovara datom problemu.

- Povezanost geometrijskog modela sa realnim problemom i algebarskom reprezentacijom pruža mogućnost da učenici/studenti postanu fleksibilni u opisivanju i interpretaciji fenomena iz realnog okruženja jer se može modifikovati i primeniti na različite probleme u grupi srodnih problema.

Geometrijsko rešavanje problema mešanja dva rastvora

– Pravougaonike čije površine predstavljaju mase rastvorenih supstanci u prvom i drugom rastvoru postavimo u položaj kao što je prikazano na Slici 4.4.1. Masa rastvorene supstance u prvom (drugom) rastvoru je predstavljena kao površina pravougaonika $FGDE$ $(GHKL)$.
– Sada je potrebno konstruisati treći pravougaonik čija je jedna stranica $m_3 = m_1 + m_2$, i površina jednaka zbiru površina pravougaonika $FGDE$ i $GHKL$, odnosno površini figure $FHKLDE$.
– Dopunimo figuru $FHKLDE$ do pravougaonika $FHKA$ i konstruišemo duž AC. Tačku preseka duži AC i DL označimo sa B. Konstruišemo duž MN koja sadrži tačku B i paralelna je sa EC (Slika 4.4.2).

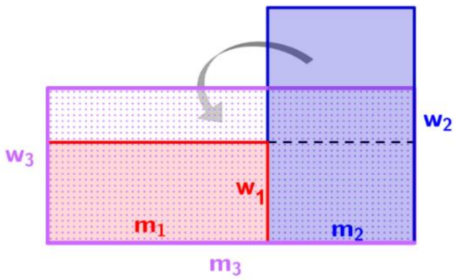


Slika 4.4. *Postupak geometrijskog rešavanja problema mešanja rastvora*

– Dokažimo da pravougaonik $FHMN$ i figura $FHKLDE$ imaju jednake površine.
  - Kako dijagonala pravougaonika deli pravougaonik na dva podudarna trougla, a podudarni trouglovi imaju jednake površine, to je $P_{DCB} = P_{MBC} = P_3$, $P_{ANB} = P_{ABL} = P_4$ i $P_{AEC} = P_{ACK}$.
  - Površine pravougaonika $EDBN$ i $BMKL$ obeležimo sa P_1 i P_2, redom. Iz jednakosti $P_{AEC} = P_{ACK}$, sledi $P_1 + P_3 + P_4 = P_2 + P_3 + P_4$, pa je $P_1 = P_2$ (Slika 4.4.2).
  - Iz jednakosti $P_{FHMN} = P_{FGDE} + P_1 + P_{GHMB} = P_{FGDE} + P_2 + P_{GHMB} = P_{FHKLDE} = P_{FGDE} + P_{GHKL}$ sledi da je površina pravougaonika $FHMN$ jednaka zbiru površina pravougaonika $FGDE$ i $GHKL$ (Slika 4.4.3).

– Iz jednakosti $P_{FHMN} = P_{FGDE} + P_{GHKL}$ se dobija $w_3\, m_3 = w_1\, m_1 + w_2\, m_2$, odnosno $m_{3S} = m_{1S} + m_{2S}$ (Slika 4.4.4).
– Kako je $w_3 = FN = BG$ možemo zaključiti da se konstrukcijom tačke B (presečna tačka duži AC i DL) može odrediti procentna koncentracija novonastalog rastvora, w_3.

Opisani postupak geometrijskog rešavanja problema mešanja rastvora može se sažeto predstaviti jednom slikom (Slika 4.5). Kada je problem prikazan samo pomoću obojenih pravougaonika (geometrijske reprezentacije masa rastvorenih supstanci) onda je na vizuelno očigledan način predstavljena aditivnost masa rastvora ($m_1 + m_2 = m_3$), kao i aditivnost masa rastvorene supstance. Isto tako, vizuelno je očigledan kvantitativni odnos između procentnih koncentracija: procentna koncentracija novonastalog rastvora w_3 je između procentnih koncentracija inicijalnih rastvora w_1 i w_2.



Slika 4.5. *Geometrijski model problema mešanja rastvora*

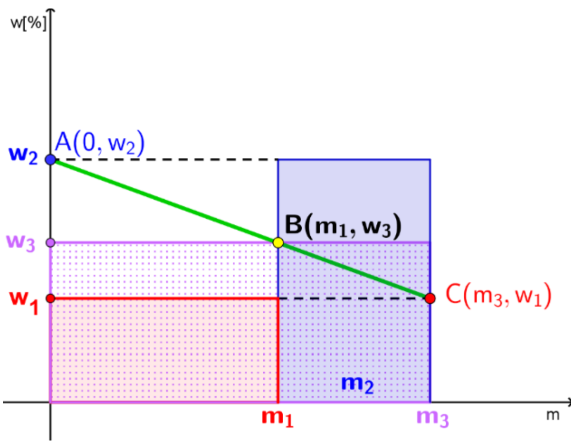
Geometrijski model problema mešanja rastvora ilustruje na očigledan način realnu situaciju u rastvorima, sadrži vizuelne informacije na osnovu kojih se mogu sagledati kvantitativni odnosi i može da posluži kao osnova za razumevanje algebarske reprezentacije problema, pa se može smatrati vrstom konkretne vizuelne reprezentacije.

4.2.2. Grafička reprezentacija problema mešanja rastvora

Grafička reprezentacija problema mešanja rastvora može se dobiti iz geometrijske ili algebarske reprezentacije.

Geometrijska reprezentacija → grafička reprezentacija

Geometrijski model problema mešanja rastvora može da se prenese u koordinatni sistem mOw, kao što je prikazano na Slici 4.6.



Slika 4.6. *Veza između geometrijske i grafičke reprezentacije problema mešanja rastvora*

Koordinate tačaka A, B i C su $(0, w_2)$, (m_1, w_3) i (m_3, w_1). Ako su veličine w_1, w_2 i m_3 konstantne, tada su tačke A i C fiksne, pa samim tim i duž AC. Kada m_1 ima vrednost iz intervala $[0, m_3]$, menja se položaj tačke B, ali je ona uvek na duži AC. To znači da procentna koncentracija w_3 (ordinata tačke B), zavisi od m_1 i da je grafik te zavisnosti duž AC. Dakle, grafički model problema mešanja rastvora je duž AC i njoj pripadajuća tačka B.

Algebarska reprezentacija → grafička reprezentacija

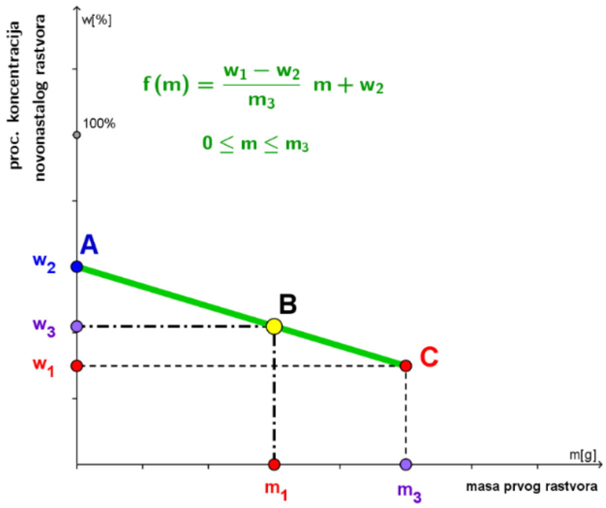
Grafička reprezentacija problema mešanja rastvora može se dobiti direktno iz algebarske reprezentacije. Algebarskim transformacijama jednakosti (6) dobija se zavisnost procentne koncentracije novonastalog rastvora, w_3 od mase prvog rastvora, m_1 na sledeći način:

$$w_3 = \frac{w_1 m_1 + w_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{w_1 m_1 + w_2(m_3 - m_1)}{m_3} = \frac{w_1 - w_2}{m_3}\ m_1 + w_2.$$

Kada su veličine w_1, w_2 i m_3 konstantne, tada je w_3 linearna funkcija od m_1, pri čemu masa polaznog rastvora, m_1 ne može biti veća od mase novonastalog rastvora, m_3. Dakle, procentna koncentracija rastvorene supstance u novonastalom rastvoru je funkcija koju definišemo na sledeći način:

$$w = f(m) = \frac{w_1 - w_2}{m_3}\ m + w_2, \quad 0 \leq m \leq m_3. \tag{9}$$

$f(m)$ je linearna funkcija definisana za $m \in [0, m_3]$, pa je njen grafik duž. Na Slici 4.7 je prikazana duž AC koja predstavlja grafik funkcije f.



Slika 4.7. *Grafički model problema mešanja dva rastvora*

– Ako je $m = 0$, tada je $f(0) = w_2$. Krajnjoj tački $A(0,\ w_2)$ odgovara sledeća realna situacija: kada je masa prvog rastvora 0 tada je procentna koncentracija novonastalog rastvora jednaka procentnoj koncentraciji drugog rastvora.

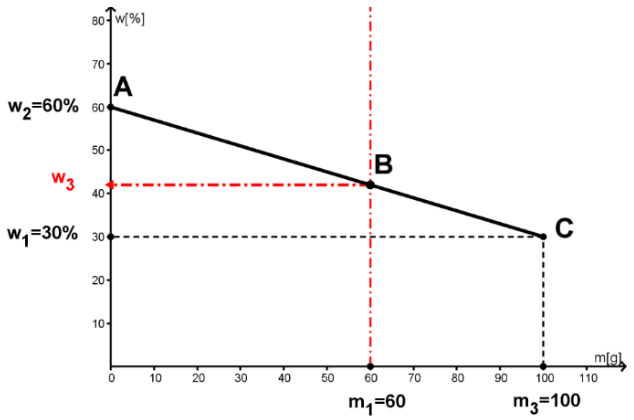
– Kada je $m = m_3$, onda je $f(m_3) = w_1$ i krajnjoj tački $C(m_3,\ w_1)$ odgovara sledeća realna situacija: kada je masa prvog rastvora jednaka masi novonastalog rastvora, onda je procentna koncentracija novog rastvora jednaka procentnoj koncentraciji prvog rastvora.

– Ako je $m = m_1$, tada je $f(m_1) = w_3$ i tački $B(m_1,\ w_3)$ odgovara sledeća realna situacija: kada je masa prvog rastvora m_1, tada je procentna koncentracija novonastalog rastvora jednaka w_3.

Na osnovu navedenog, može se zaključiti da duž AC, čije su krajnje tačke $A(0, m_2)$ i $C(m_3, w_1)$ i koja sadrži tačku $B(m_1, w_3)$, predstavlja grafički model problema mešanja rastvora.

Procentna koncentracija novonastalog rastvora, w_3 može se odrediti sa grafika kao ordinata tačke koja pripada duži AC i čija je apscisa m_1. Postupak grafičkog rešavanja korišćenjem papira, olovke i pribora za crtanje („papir-olovka") je tehnički zahtevno, potrebno je veoma precizno crtanje i najčešće daje rezultate koji su samo približni tačnim vrednostima. Korišćenje milimetarskog papira može da obezbedi preciznije rezultate. Navedena ograničenja grafičkog modela se odnose na slučaj kada se on primenjuje za dobijanje tačnih rezultata. Međutim, vizuelna komponenta grafičke metode otvara druge mogućnosti koje ovoj metodi daju prednost u odnosu na algebarsku. Ograničenja i prednosti grafičke metode biće razmotrene u slučaju rešavanja Problema 1.

Kako učenici/studenti mogu grafički rešavati Problem 1? Na osnovu ulaznih podataka, u koordinatni sistem unose tačke $A(0, 60)$ i $C(100, 30)$ i konstruišu duž AC. Zatim odrede tačku B u preseku vertikalne prave $m = 60$ i duži AC. Ordinata tačke B je procentna koncentracija w_3 i mogu je odrediti u preseku ordinatne ose i horizontalne prave koja sadrži tačku B (Slika 4.8). I u ovom primeru se može videti ograničenje grafičke „papir-olovka" metode, zato što je praktično nemoguće dobiti tačno rešenje za w_3. Na grafičkom prikazu učenici/studenti mogu da vide da je vrednost za w_3 blizu 40%, ali ne i tačno da je odrede.



Slika 4.8. *Grafičko rešavanje Problema 1*

Vizuelna očiglednost daje grafičkoj metodi neke prednosti u odnosu na algebarsku. Na primer:

- Posmatrajući grafik učenici/studenti mogu veoma lako da zaključe da je procentna koncentracija w_3 između 30% i 60%, što je veoma bitno za konceptualno razumevanje problema. Važno je napomenuti da izvođenje ovog zaključka iz algebarske reprezentacije problema podrazumeva primenu algebarskih transformacija i nejednakosti. Za većinu učenika/studenata to predstavlja veoma složen i težak postupak.
- Vizuelizacija problema grafikom funkcije pruža učenicima/studentima mogućnost da izvrše proveru rezultata koje su dobili rešavanjem problema nekom drugom metodom. Na primer, ako su dobili vrednost za w_3 veću od 60% ili manju od 30%, tada je rezultat netačan i treba ga korigovati.
- Grafička metoda se može primeniti na različite probleme u grupi srodnih problema, što olakšava transfer znanja na nove situacije.

Predstavljanje i rešavanje problema mešanja rastvora primenom grafičke metode omogućava sagledavanje suštinski bitnih osobina realnog problema, kao i kvantitativnih odnosa koji ga prate.

Istraživanje različitih aspekata grafičkog prikaza pruža nove uvide i razumevanje različitih odnosa između veličina, koji nisu tako očigledni u algebarskoj reprezentaciji.

Ako se uporede grafički i geometrijski model kao vizuelne reprezentacije problema mešanja rastvora može se zaključiti da s jedne strane, grafički model pruža znatno dublji uvid u karakteristike i prirodu problema u odnosu na geometrijski model, a sa druge strane povezanost grafičkog modela sa realnim problemom nije tako očigledna i realistična kao u geometrijskom modelu. Grafički model zahteva bolja predznanja i složeniji je za razumevanje od geometrijskog modela. Navedno ukazuje da se vizuelizacija problema mešanja rastvora grafikom linearne funkcije može smatrati apstaktnom vizuelnom reprezentacijom (Moreno *et al.*, 2011). Grafički model (apstraktna vizuelna reprezentacija) je „moćniji" i efikasniji od geometrijskog (konkretna vizuelna reprezentacija) prilikom rešavanja složenijih problema (Kaminski *et al.*, 2008; Moreno, Reisslein, & Ozogul, 2009).

Ako se uporede grafička metoda za rešavanje problema mešanja rastvora i algebarske metode izložene u odeljku 4.1. može se reći da one imaju različitu prirodu (vizuelnu, odnosno simboličku), svoje prednosti i nedostatke. Ne treba ih posmatrati kao suprotstavljene, već kao metode koje su povezane i koje se međusobno dopunjuju, odnosno koje su komplementarne i koje zajedno daju celovit pristup rešavanju problema.

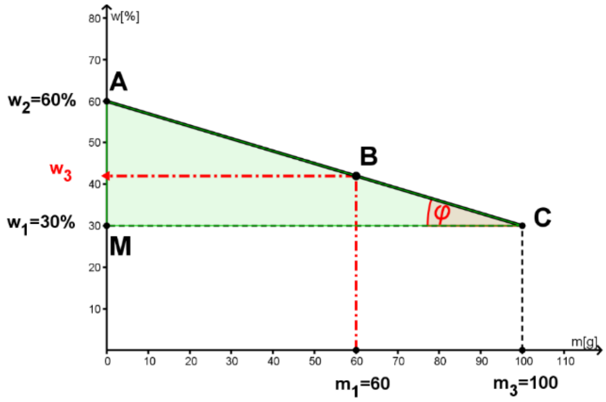
Kognitivno-vizuelna prednost grafičke metode može se u potpunosti iskoristiti ukoliko bi bila dopunjena nekim algebarskim postupkom koji obezbeđuje dobijanje tačnog rezultata. Pitanje koje se postavlja je: koji bi algebarski postupak mogao da se primeni u cilju određivanja tačne vrednosti procentne koncentracije w_3, a da se pri tom iskoriste podaci sadržani u grafičkom prikazu?

Grafik funkcije f definisane relacijom (9) je duž AC koja je nacrtana unošenjem tačaka $A(0, m_2)$ i $C(m_3, w_1)$ u koordinatni sistem i njihovim spajanjem. Da bi se izračunala procentna koncentracija w_3 za koju važi $w_3 = f(m_1)$, potrebno je odrediti algebarsku reprezentaciju funkcije f . Duž AC je grafik funkcije f, ali je i deo prave kojoj pripadaju tačke A i C (deo određen uslovom $0 \leq m \leq m_3$), pa je potrebno odrediti jednačinu prave AC. Kada se u dobijenu jednačinu uvrsti masa prvog rastvora m_1, može se izračunati tražena procentna koncentracija w_3.

Sadržaji koji se odnose na ovu problematiku se u nastavi matematike izučavaju u prvom razredu gimnazije u delu o linearnoj funkciji i u trećem razredu u oblasti analitičke geometrije. Kako bi se u potpunosti iskoristio grafički prikaz i samim tim uprostila algebarska procedura, jednačina prave može se zapisati u eksplicitnom obliku $w = km + n$. Koeficijent pravca (k) i odsečak na w–osi (n) mogu se odrediti na osnovu grafičkih podataka.

Za Problem 1 to bi izgledalo ovako: Posmatrajući grafik, učenici/studenti mogu videti da je linearna funkcija opadajuća, pa je koeficijent pravca negativan. Uočavaju pravougli trougao AMC i njegov unutrašnji ugao φ (Slika 4.9). Odnos naspramne i nalegle katete ugla φ određuju iz grafičkog prikaza i dobijaju da je taj odnos $\frac{60-30}{100}$, pa je $k = -\frac{3}{10}$. Grafički je veoma očigledno da je $n = 60$. Sada, jednačinu prave AC mogu zapisati kao $w = -\frac{3}{10}\,m + 60$. Kako je $w_3 = f(m_1)$ i $f(m_1) = f(60) = 42$, to je tražena procentna koncentracija novonastalog rastvora $w_3 = 42\%$.

Predloženi grafički pristup rešavanju problema može doprineti da učenici/studenti: bolje razumeju odnose između ulaznih i izlaznih veličina, lakše uočavaju bitne karakteristike posmatranog problema kao i kvantitativne odnose koji iz njih proističu, kritički razmatraju rezultate koji su dobijeni rešavanjem problema primenom neke od algebarskih metoda. Navedene prednosti grafičke metode su značajne za razvoj učeničkih/studentskih kompetencija u domenu rešavanja problema mešanja rastvora.



Slika 4.9. *Grafičko određivanje koeficijenta pravca prave iz pravouglog trougla*

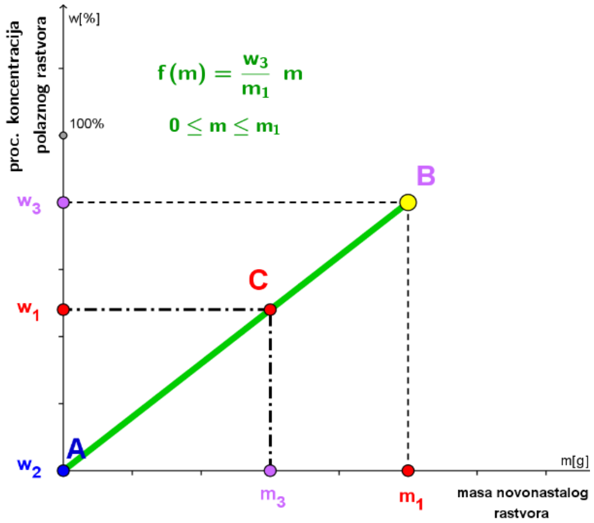
4.2.3. Vizuelizacija specijalnih slučajeva problema mešanja rastvora

Specijalni slučajevi problema mešanja rastvora su: dodavanje 100%-ne supstance i dodavanje vode polaznom rastvoru, kao i isparavanje vode iz rastvora.

Geometrijski i grafički model za slučaj dodavanja čiste supstance se dobijaju od osnovnog modela tako što se za procentnu koncentraciju drugog rastvora uzima vrednost 100%. Kada se polaznom rastvoru dodaje voda, tada je $w_2 = 0\%$.

Problem isparavanja vode iz polaznog rastvora se razmatra na sledeći način: mešanjem rastvora koji se dobija nakon isparavanja, i vode koja je isparila, dobio bi se polazni rastvor. Ako isparavanje vode uporedimo sa slučajem dodavanja vode, uočavamo da su veličine w_1, m_1 u slučaju isparavanja vode, isto što i veličine $w_3,$ m_3 u slučaju dodavanja vode, i obrnuto.

Prilikom grafičkog rešavanja problema isparavanja vode, na apscisi se prikazuje masa novodobijenog rastvora, a na ordinati procentna koncentraciju polaznog rastvora (Slika 4.10). Kako je $w_1 = \frac{w_3}{m_1}\, m_3,\ 0 \le m_3 \le m_1$ to je grafik ove funkcije, duž sa krajnjim tačkama $A(0,0)$ i $B(m_1, w_3)$ kojoj pripada tačka $C(m_3, w_1)$.



Slika 4.10. *Grafičko rešavanje problema isparavanja vode iz rastvora*

4.2.4. Vizuelizacija problema mešanja rastvora u slučaju molarne koncentracije

Molarna koncentracija (c) je količnik količine rastvorene supstance (n) i zapremine rastvora (V) i izražava se jedinicama mol/l. U Tabeli 4.1 je prikazana analogija veličina za kvantitativni sastav rastvora u slučaju procentne i molarne koncentracije. Napomenimo da molarna koncentracija koncentrovanog rastvora, c_{max} nije konstantna vrednost, već zavisi od vrste rastvora.

Tabela 4.1. *Veličine za kvantitativni sastav rastvora u slučaju procentne i molarne koncentracije*

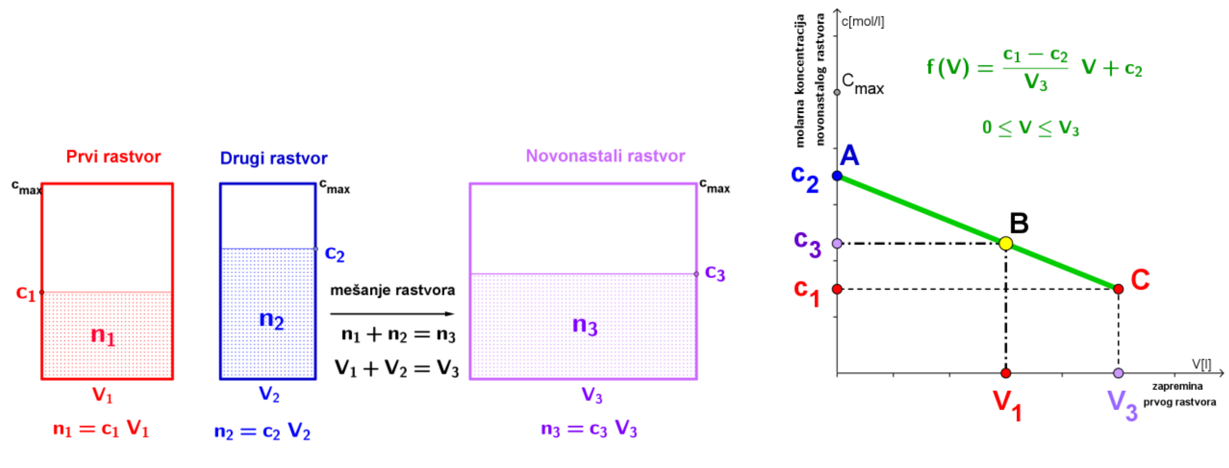
Procentna koncentracija	w [%]	m	m_S	$w = \frac{m_S}{m}$	0%	100%
Molarna koncentracija	c [mol/l]	V	n	$c = \frac{n}{V}$	$0\ mol/l$	c_{max}

Na osnovu Tabele 4.1 i formule (4) može se zaključiti da je problem mešanja rastvora u slučaju molarne koncentracije određen sledećim sistemom uslova:

$$0 \le c_1 \le c_{max}, \qquad 0 \le c_2 \le c_{max}, \qquad 0 \le c_3 \le c_{max},$$
$$V_1 \ge 0, \qquad V_2 \ge 0, \quad V_3 \ge 0$$
$$V_1 + V_2 = V_3,$$
$$c_1\, V_1 + c_2\, V_2 = c_3\, V_3.$$

Problem mešanja rastvora u slučaju molarne koncentracije može se vizuelizovati na isti način kao i kod procentne koncentracije, što je i prikazano na Slici 4.11.

Geometrijska reprezentacija **Grafička reprezentacija**

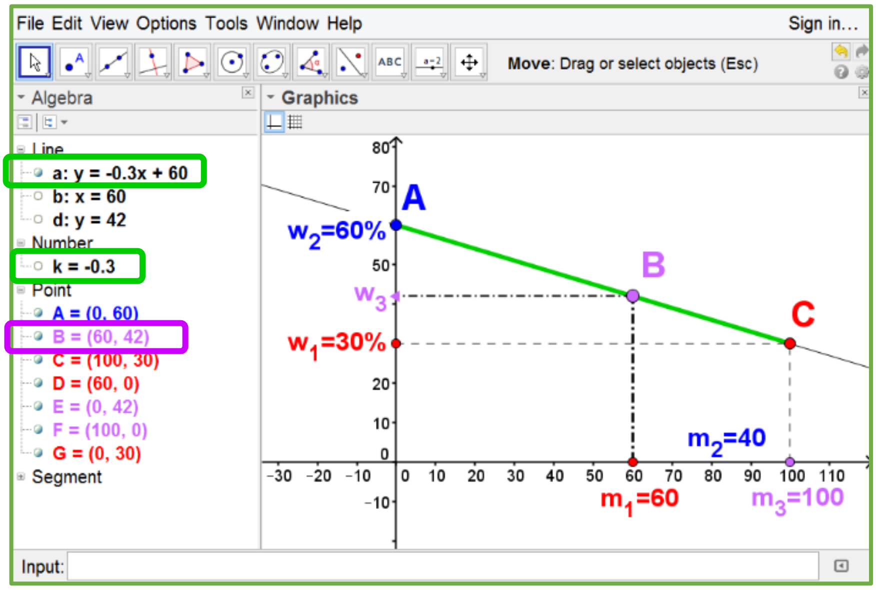


Slika 4.11. *Vizuelne reprezentacije problema mešanja rastvora – slučaj molarne kncentracije*

4.2.5. Vizuelizacija problema mešanja rastvora u softveru *GeoGebra*

U toku eksperimantalnog istraživanja korišćen je *GeoGebra* edukativni softver koji omogućava vizuelizaciju i dinamičku povezanost algebarskih, grafičkih (geometrijskih) reprezentacija matematičkih objekata.

Grafičko rešenje Problema 1 u *GeoGebra* radnom listu prikazano je na Slici 4.12. Matematički objekti koji su sadržani u grafičkom modelu ovog problema, mogu se kreirati pomoću geometrijskih alata ili trake za algebarski unos. Tačke $A(0, 60)$ i $C(100, 30)$ se unose kao algebarski objekti. Duži i prave se kreiraju pomoću geometrijskih alata. Tačka B se konstruiše kao presek duži i prave, pa je i ona geometrijski objekat. Svaki objekat ima i algebarsku i grafičku reprezentaciju koje se mogu videti u odvojenim delovima *GeoGebra* ekrana koji su označeni kao algebarski („Algebra") i grafički prozor („Graphics"). U algebarskom prozoru tačka B je prikazana kao algebarski objekat $B(60, 42)$. Procentna koncentracija w_3 je ordinata tačke B i može se očitati iz njene algebarske reprezentacije, dakle $w_3 = 42\%$. Dobijanje tačne vrednosti w_3 grafičkom metodom u softveru *GeoGebra* daje očiglednu prednost u odnosu na klasičnu „papir-olovka" metodu. Isto tako, u algebarskom prikazu se mogu videti jednačina prave AC i vrednost koeficijenta pravca k koji su bitni za postupak izračunavanja procentne koncentracije pomoću linearne funkcije.

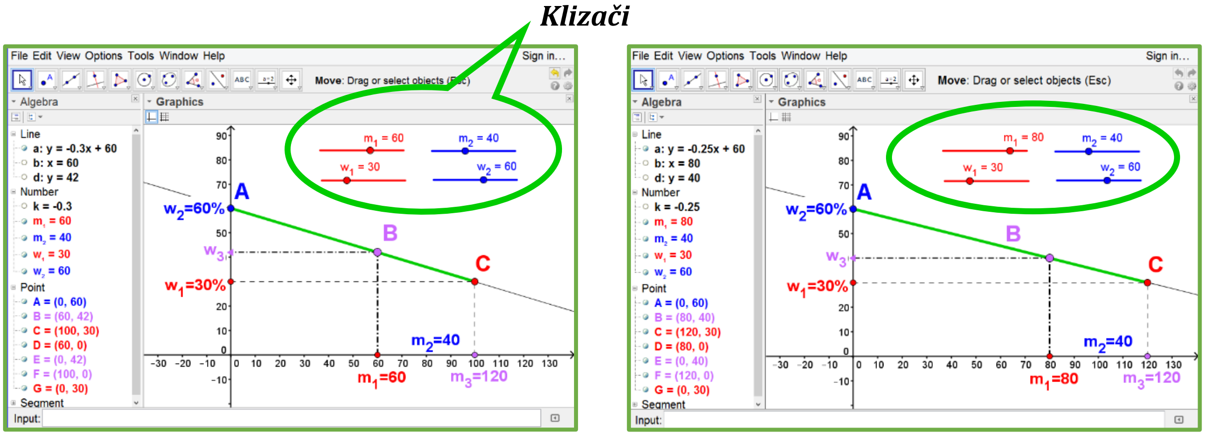


Slika 4.12. *Grafičko rešavanje Problema 1 u softveru GeoGebra*

Softver *GeoGebra* ima izuzetne dinamičke i interaktivne performanse. Algebarski i geometrijski prikaz istog objekta su dinamički povezani i automatski se menjaju pri promeni bilo kog prikaza, nezavisno od načina na koji je objekat kreiran. Interaktivnost softvera se ogleda u jednostavnosti kojom korisnik može manipulisati objektima i u dobijanju povratnih informacija o nastalim promenama. Promena objekta je moguća: jednostavnim pomeranjem objekta po ravni grafičkog prozora, izmenama u algebarskim definicajama objekata i upotrebom klizača. Klizač je grafički prikaz nezavisnog broja tj. parametra. Pomeranje klizača dovodi do odgovarajućih promena svih pripadajućih zavisnih objekata.

To znači da se razmatranje Problema 1 može proširiti na opšti problem mešanja rastvora, odnosno na problem u kome su ulazne veličine m_1, w_1, m_2, w_2 parametri koji su zadati u odgovarajućim intervalima. Klizač može biti kreiran za svaki od ovih parametara (Slika 4.13), pri čemu se oni definišu u skladu sa prirodom problema koji se rešava. Kako je $0 \leq w_1 \leq 100\%$, $0 \leq w_2 \leq 100\%$, to klizače za w_1 i w_2 treba definisati na intervalu $[0, 100]$. Klizači masa se definišu na intervalu čija je donja granica 0, a gornja pozitivan broj, npr. $[0, 1000]$. Po kreiranju klizača se sprovodi napred opisani postupak grafičkog rešavanja problema. Time se postiže da *GeoGebra* grafički rešava problem za bilo koje odabrane vrednosti ulaznih parametara i pri tom se dobija tačna vrednost procentne koncentracije w_3.

Pomeranje klizača, odnosno promena vrednosti ulaznih podataka dovodi do odgovarajućih promena u grafičkom prozoru. Učenici/studenti mogu videti i pratiti promene grafika i vrednosti procentne koncentracije w_3 koje nastaju zbog pomeranja određenog klizača.



Slika 4.13. *Promena mase polaznog rastvora*

Vizuelno-dinamički prikaz može biti značajna pomoć učenicima/studentima u izvođenju zaključaka koji su bitni za konceptulno razumevanje problema. Na primer:

- Promena procentne koncentracije w_1, pomeranjem odgovarajućeg klizača, dovodi do promene vrednosti procentne koncentracije w_3, ali je bez obzira na promenu, uvek $w_1 \leq w_3 \leq w_2$ ili $w_2 \leq w_3 \leq w_1$. Analogno važi i za w_2.
- Promena mase m_1 prouzrokuje promenu procentne koncentracije w_3, ali je uvek $w_1 \leq w_3 \leq w_2$ ili $w_2 \leq w_3 \leq w_1$ (Slika 4.13). Analogno važi i za m_2.

Zaključak: procentna koncentracija rastvora koji se dobija nakon mešanja, uvek je između procentnih koncentracija inicijalnih rastvora.

- Ako se procentna koncentracija w_1 povećava (smanjuje), tada se i w_3 povećava (smanjuje). Analogno važi i za w_2.

Zakjlučak: povećanje (smanjenje) procentne koncentracije polaznog rastvora prouzrokuje povećanje (smanjenje) procentne koncentracije novonastalog rastvora.

- Ako se masa m_1 povećava tada se vrednost w_3 približava vrednosti w_1, tj. razlika između w_1 i w_3 se smanjuje (Slika 4.13). Analogno važi i za m_2.

Zaključak: povećanje mase jednog od polaznih rastvora dovodi do smanjenja razlike između njegove procentne koncentracije i procentne koncentracije novonastalog rastvora.

Navedena razmatranja ukazuju na to da vizuelno, dinamičko i interaktivno *GeoGebra* okruženje podstiče vizuelnu percepciju problema, što može doprineti da učenici/studenti razviju vizuelno razumevanje i mišljenje i da ta shvatanja povežu sa formalno-simboličkim jezikom matematike. Mogućnost proveravanja različitih pretpostavki, menjanjem parametara modela, kao i posmatranje problema sa različitih aspekata daje učenicima/studentima dublji uvid u problem, što vodi ka suštinskom, konceptualnom razumevanju problema.

4.3. NASTAVNI MATERIJALI

U ovom delu rada biće predstavljeni nastavni materijali koji su izrađeni i osmišljeni za potrebe istraživanja sprovedenog u okviru disertacije. Implementacija kognitivno-vizuelnog pristupa u nastavnim materijalima je sprovedena pomoću softvera *GeoGebra.* Sadržaji prikazani u *GeoGebra* dinamičkim radnim listovima su didaktičko-metodički oblikovani tako da se mogu koristiti u nastavi matematike i hemije kako u srednjoj školi tako i na univerzitetskom nivou.

Nastavni materijali koji su korišćeni u istraživanju 2013/2014. godine (GeoGebra, 2015a) odnose se na problem mešanja rastvora, u slučaju kada je kvantitativni sastav izražen procentnom koncentracijom. Sadrže apstraktnu vizuelnu reprezentaciju primenjenu na rešavanje sledećih problema:

- mešanje dva rastvora različitih procentnih koncentracija,
- dodavanje 100%-ne supstance rastvoru,
- dodavanje vode,
- isparavanje vode.

Za svaki navedeni problem, sprovedeno je matematičko modelovanje i realizovano u softveru *GeoGebra*.

Eksperimentalno istraživanje 2014/2015. godine je bilo prošireno konceptom molarne koncentracije, a problem mešanja rastvora je vizuelizovan i na konkretan (dijagram) i na apstraktan način (grafik funkcije). Za potrebe ovog istraživanja bilo je pripremljeno osam *GeoGebra* modela, četiri za procentnu i četiri za molarnu koncentraciju (GeoGebra, 2015b).

4.3.1. Opis nastavnih materijala

Nastavni materijali koji su bili kreirani za potrebe prvog istraživanja biće kratko označeni sa AV-modeli (zato što je problem mešanja rastvora vizuelizovan na apstraktan način), a modeli koji su korišćeni u toku drugog istraživanja biće označeni kao KAV-modeli (zato što sadrže i apstraktnu i konkretnu vizuelnu reprezentaciju problema). Dodavanjem novih elemenata u KAV-modele: uputstva za korisnike, konkretne vizuelne reprezentacije i algebarske reprezentacije problema, postignuto je poboljšanje u domenu interaktivnosti i u predstavljanju istog problema različitim reprezentacijama.

GeoGebra modeli za problem mešanja rastvora u slučaju procentne koncentracije

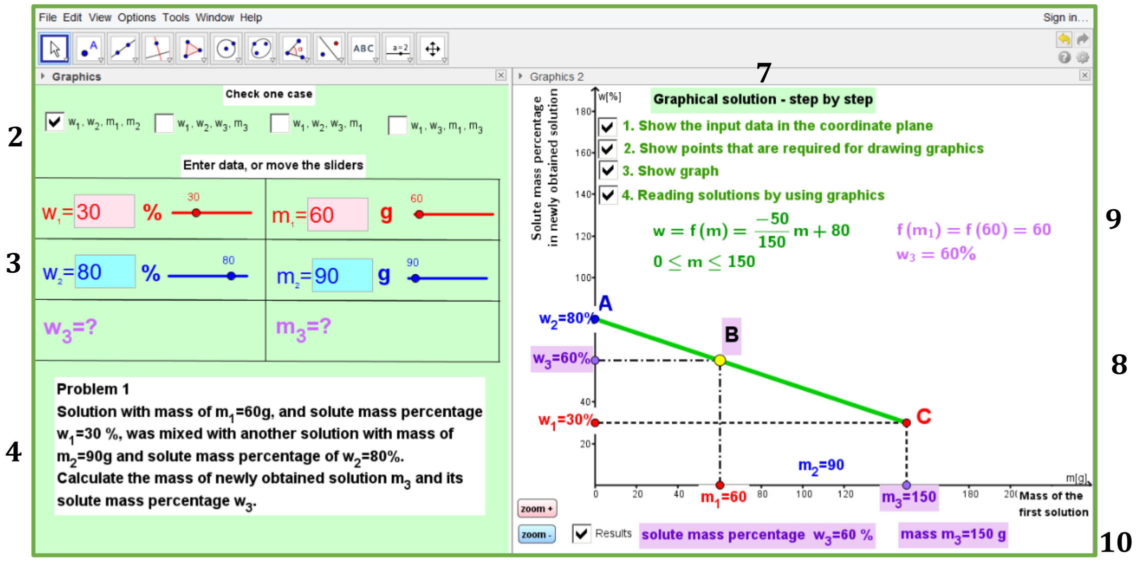
Uporedni pregled sadržaja i dizajna AV (Slika 4.14) i KAV-modela (Slika 4.15), za slučaj procentne koncentracije, biće izložen kroz razmatranje karakteristika određenih delova – sekcija ovih modela, koje su na datim slikama označene brojevima.

Sekcija 1 (*Korisničko uputstvo*) – Komandno dugme „Uputstvo" prikazuje/sakriva tekstualno polje sa informacijima o sadržaju modela i instrukcijama kako da se model koristi u nastavi/učenju. Korisničko uputstvo je dostupno u bilo kom trenutku tokom korišćenja KAV-modela.

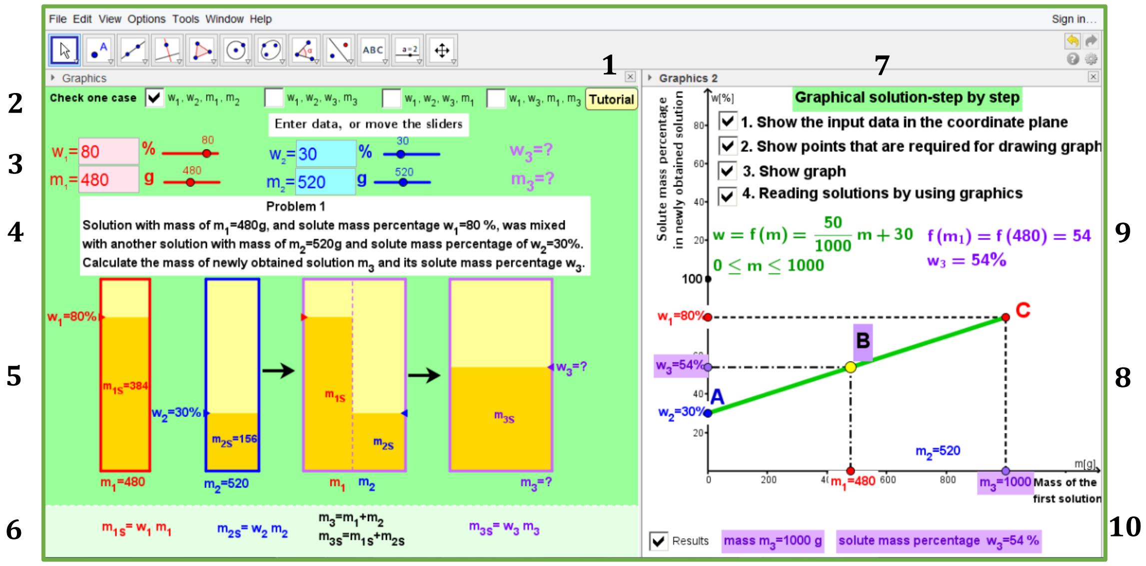
Sekcija 2 (*Izbor vrste problema*) – Korisnik bira koju vrstu problema želi da rešava, tako što izabere – čekira jedno od polja koja se nalaze u ovoj sekciji. Vrsta problema je opisana ulaznim podacima koji su sadržani u zadatku i data su četiri karakteristična slučaja:

1) $w_1,\ w_2,\ m_1,\ m_2$; 2) $w_1,\ w_2,\ w_3,\ m_3$; 3) $w_1,\ w_2,\ w_3,\ m_1$ i 4) $w_1,\ w_3,\ m_1,\ m_3$.

Sekcija 3 (*Ulazni podaci*) – U ovom delu modela su prikazane oznake, numeričke vrednosti i jedinice ulaznih veličina. Korisnik može promeniti vrednosti ulaznih podataka unošenjem novih vrednosti u odgovarajuća polja za podatke ili pomeranjem klizača.



Slika 4.14. *AV-model za slučaj procentne koncentracije*



Slika 4.15. *KAV-model za slučaj procentne koncentracije*

Prilikom kreiranja *GeoGebra* radnih listova u kojima je modelovan problem mešanja rastvora, parametri modela tj. klizači ulaznih podataka su definisani na osnovu prirode problema koji se rešava. Ovako definisani klizači ulaznih veličina ne dozvoljavaju pogrešan unos ulaznih podataka od strane korisnika (ulazni podaci za koje problem nema rešenje).

Još jedna veoma bitna karakteristika ove sekcije je dinamička povezanost ulaznih podataka sa drugim delovima modela. Naime, promenom vrednosti ulaznih podataka izabrane vrste problema ažuriraju se i odgovarajuće numeričke vrednosti u tekstu zadatka (Sekcija 4) kao i izgled dijagrama u konkretnoj vizuelnoj reprezentaciji (Sekcija 5). Svaka promena ulaznih podataka adekvatno je reflektovana i na delove modela koji se odnose na grafičko rešavanje problema (Sekcije 8 i 9), bez obzira da li se radi o grafičkim, algebarskim ili numeričkim podacima. Ovim je postignuta ne samo vizuelizacija već i simulacija realnog problema. Dakle, *GeoGebra* modeli predstavljaju i vizuelne simulacije problema mešanja rastvora.

Unošenjem ulaznih podataka u odgovarajuća polja ili pomeranjem odgovarajućih klizača, model generiše nove zadatke i njihova rešenja. Zbog ovog svojstva *GeoGebra* modela, može se reći da oni predstavljaju svojevrsne elektronske zbirke rešenih zadataka.

Sekcija 4 (*Tekst zadatka*) – Ovo je deo modela u kome je prikazan tekst zadatka. Vrednosti masa i procentnih koncentracija koje se pojavljuju u tekstu zadatka su jednake sa odgovarajućim podacima u Sekciji 3.

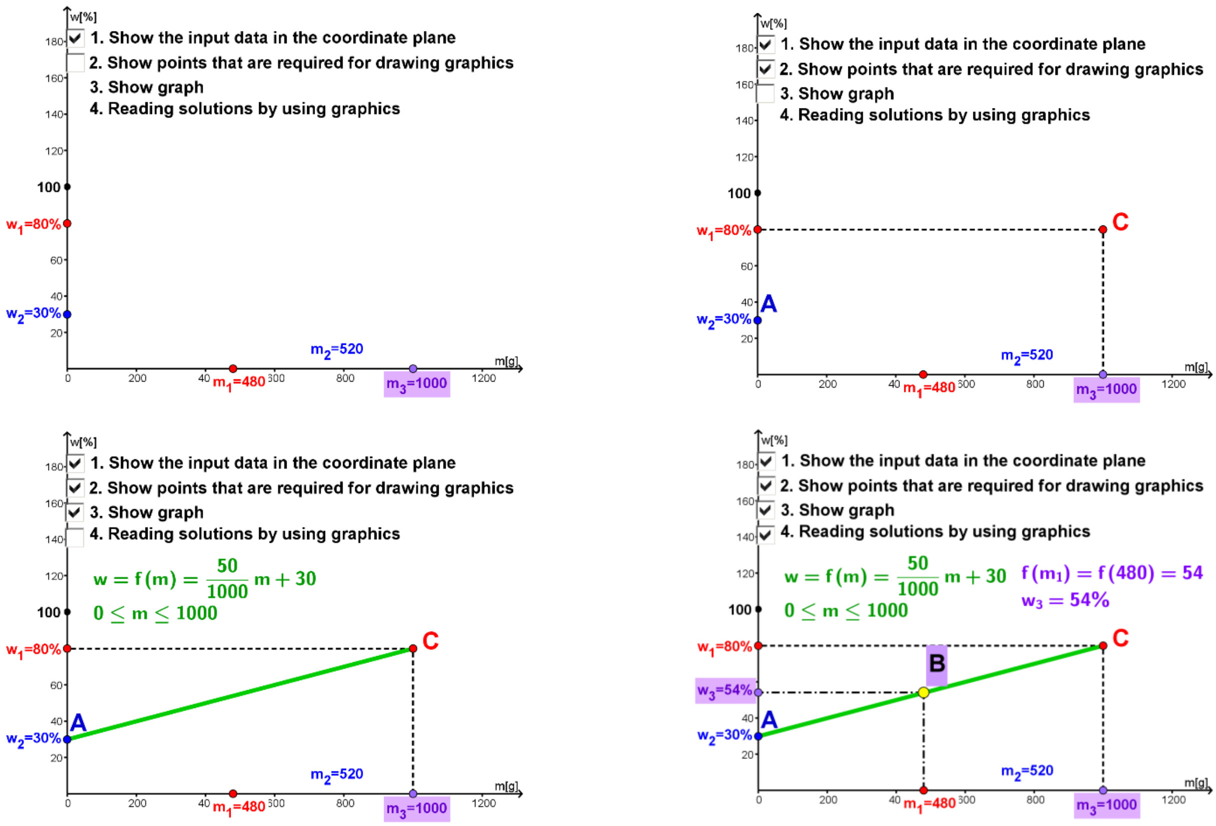
Sekcija 5 (*Konkretna vizuelna reprezentacija*) – U ovom delu KAV-modela, prikazan je dijagram sa pravougaonicima pomoću kojih je predstavljen kvantitativni sastav rastvora. Takođe su za svaki rastvor prikazani i podaci o masi rastvora, procentnoj koncentraciji i masi rastvorene supstance koji su numeričke ili algebarske prirode.

Sekcija 6 (*Algebarska reprezentacija*) – Ovo je deo u KAV-modelu koji sadrži algebarske relacije koje opisuju: kvantitativni sastav rastvora (Formula 1), aditivnost masa (Formula 2) i aditivnost masa rastvorene supstance (Formula 3).

Sekcija 7 (*Koraci u grafičkom rešavanju problema*) – Faze u grafičkom rešavanju problema su određene na osnovu kognitivnih aktivnosti koje se javljaju kod učenika/studenata prilikom rešavanja problema pomoću linearne funkcije i njenog grafika. Definisana su sledeća četiri koraka (Slika 4.16):

- Prikaži ulazne podatke u koordinatnoj ravni
- Prikaži tačke koje su potrebne za crtanje grafika
- Prikaži grafik
- Odredi rešenje na osnovu grafika

Sekcija 8 (*Rešavanje problema pomoću linearne funkcije*) – Ova sekcija sadrži algebarsku reprezentaciju tj. analitički oblik linearne funkcije i postupak za izračunavanje nepoznate veličine u zadatku.



Slika 4.16. *Koraci u grafičkom rešavanju problema*

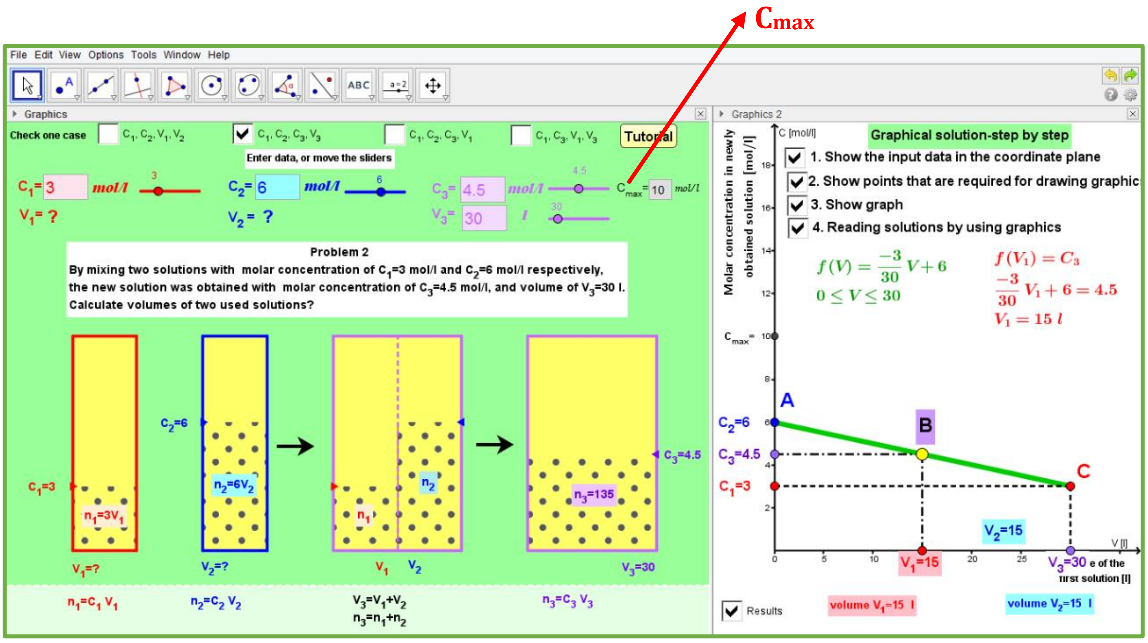
Sekcija 9 (*Apstraktna vizuelna reprezentacija*) – U ovom delu modela je sadržana grafička reprezentacija problema, kao i postupak grafičkog rešavanja.

Sekcije 7, 8 i 9 su dinamički povezane i predstavljaju jednu celinu koja prikazuje, korak po korak, postupak rešavanja problema pomoću linearne funkcije i njenog grafika. Na Slici 4.16 je prikazano kako se pojavljuju odgovarajući delovi Sekcija 8 i 9, kada se redom vrši izbor polja u Sekciji 7.

Sekcija 10 (*Rezultati*) – Izborom polja koje se nalazi u ovoj sekciji, prikazuju se rešenja problema tj. vrednosti za dve nepoznate veličine u problemu. Ukoliko korisnik ne iskoristi ni jednu od opcija 5, 6 ili 7, kada izabere polje „Rezultati“, tada se u modelu pojavljuju svi njegovi delovi.

KAV-model problema mešanja rastvora u slučaju molarne koncentracije

Dizajn KAV-modela (Slika 4.17) za slučaj molarne koncentracije, neznatno se razlikuje u odnosu na odgovarajući model za procentnu koncentraciju. Razlike se javljaju u trećoj i petoj sekciji. Sekcija 3 u KAV-modelima, osim polja za unos podataka o polaznim i novonastalom rastvoru, sarži i polje za maksimalnu molarnu koncentraciju, c_{max}. Podatak o vrednosti maksimalne molarne koncentracije rastvora ne koristi se u samom postupku rešavanja problema, ali je veoma bitan za njegovo konceptualno razumevanje. Upravo iz tog razloga je ovo polje prikazano u Sekciji 3. Razlika u okviru pete sekcije je samo vizuelne prirode. Naime, površina pravougaonika koja predstavlja zapreminu rastvorene supstance je označena tačkastom šrafurom. Ovakav način prikazivanja je odabran zbog toga što je molarna koncentracija povezana sa čestičnom prirodom rastvora. Klizači ulaznih veličina u slučaju molarne koncentracije su definisani na osnovu analogije veličina koja je data u Tabeli 4.1 i načina kako su definisani klizači u slučaju procentne koncentracije.

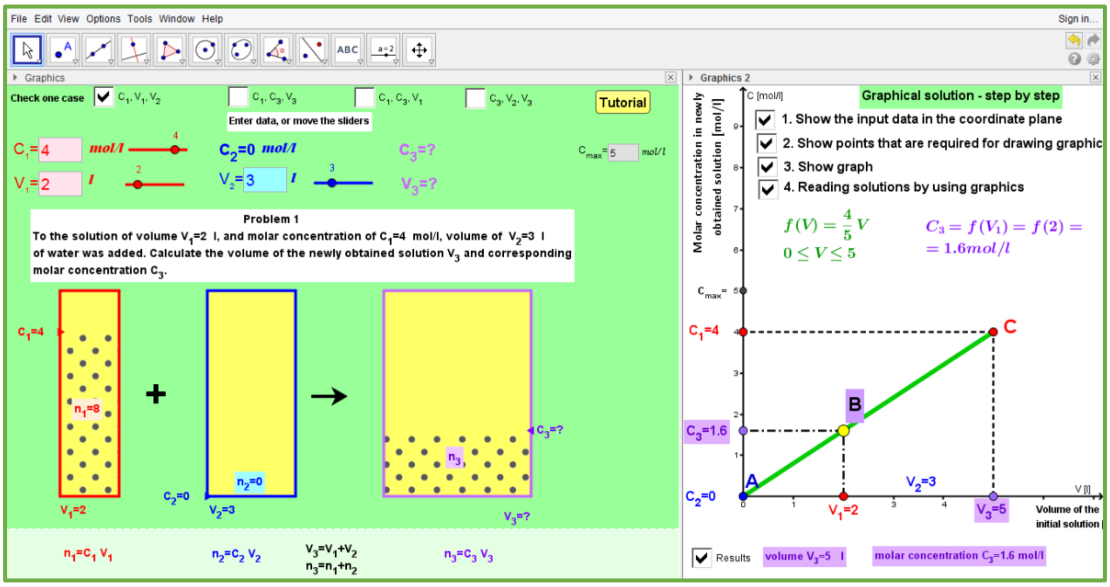


Slika 4.17. *KAV-model problema mešanja rastvora u slučaju molarne koncentracije*

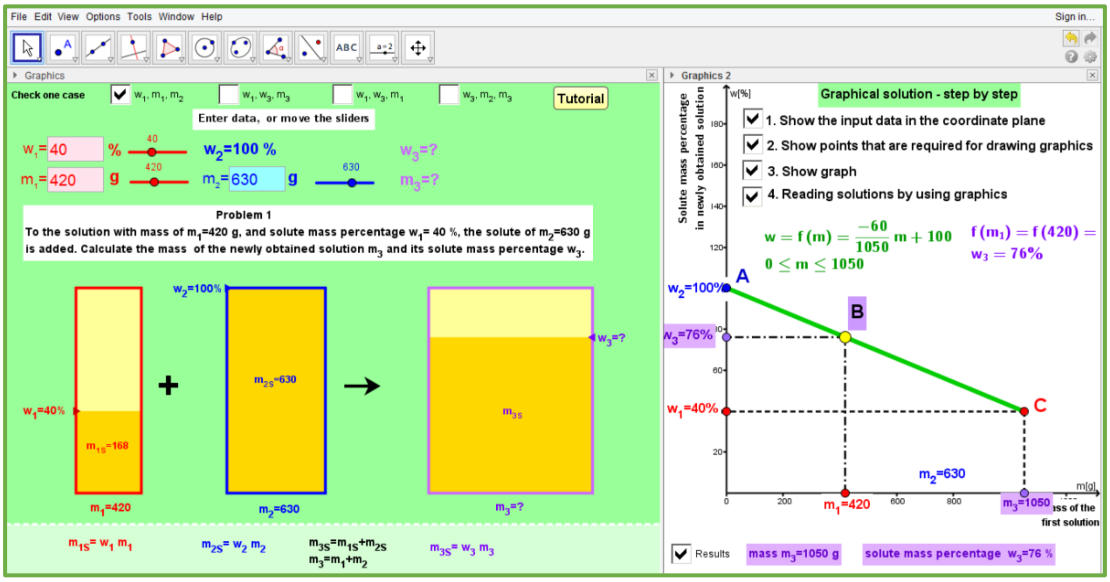
GeoGebra modeli za specijalne slučajeve problema mešanja rastvora

GeoGebra modeli za specijalne slučajeve mešanja rastvora imaju isti sadržaj i dizajn kao i prethodno opisani modeli problema mešanja rastvora, s tim što postoje izvesne razlike kod klizača ulaznih podataka. To se može videti na Slici 4.18 na kojoj su prikazana tri (od šest) KAV modela za specijalne slučajeve mešanja rastvora, jedan za slučaj molarne koncentracije i dva za slučaj procentne koncentracije.

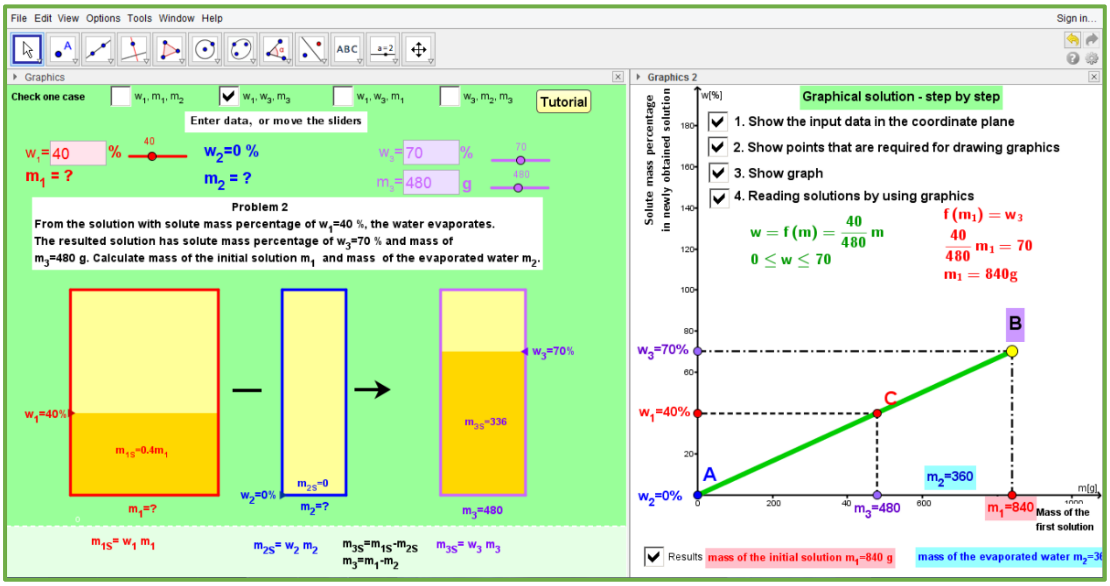
KAV-model za dodavanje vode polaznom rastvoru u slučaju molarne koncentracije



KAV-model za problem dodavanja vode u slučaju procentne koncentracije



KAV-model za problem isparavanja vode u slučaju procentne koncentracije



Slika 4.18. *KAV-modeli za specijalne slučajeve problema mešanja rastvora*

Dodavanje vode polaznom rastvoru – U ovom slučaju, procentna koncentracija drugog rastvora iznosi 0% ($0\ mol/l$), pa u Sekciji 3 ne postoji klizač za w_2 (c_2).

Dodavanje čiste supstance polaznom rastvoru – U ovom slučaju procentna koncentracija drugog rastvora je $w_2 = 100\%$ ($c_2 = c_{max}$), pa u Sekciji 3 ne postoji klizač za w_2 (c_2).

Isparavanje vode iz rastvora – U ovom slučaju, procentna koncentracija drugog rastvora iznosi 0% ($0\ mol/l$), pa u Sekciji 3 ne postoji klizač za w_2 (c_2). Važno je napomenuti da u ovom problemu postoji ograničenje za masu (zapreminu) vode koja je isparila iz rastvora. Iz rastvora može da ispari najviše onoliko vode, koliko je ima u samom rastvoru. U skladu sa ovom činjenicom, definisani su klizači ulaznih podataka.

4.3.2. Karakteristike nastavnih materijala

Nastavni materijali, koji su detaljno opisani u prethodnom delu disertacije, mogu se koristiti u različitim oblicima računarski podržane nastave/učenja, što predstavlja nesumnjivu prednost u odnosu na tradicionalne metodičke pristupe nastavnim sadržajima koji se odnose na problem smeše. Karakteristike *GeoGebra* modela koje mogu doprineti unapređenju metodičkih pristupa i dati pozitivne efekte na proces učenja, navedene su i diskutovane u daljem tekstu.

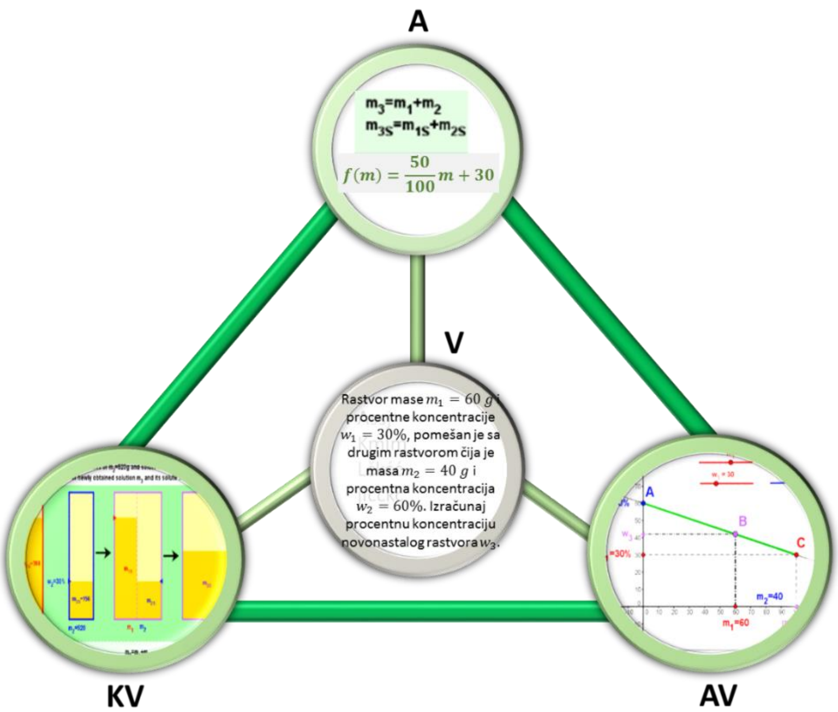
- *Multimedijalni princip* – *GeoGebra* modeli sadrže informacije različitih formata – u vidu teksta i slike, što predstavlja osnovno načelo oblikovanja multimedijalnih sadržaja. Učenici/studenti mogu postići bolje pamćenje i razumevanje sadržaja jer je on predstavljen tekstom i slikom, nego tradicionalnim pristupom gde su sadržaji prezentovani samo tekstom (Mayer, 2001).
- *Prostorna i vremenska povezanost sadržaja* – Ovaj princip multimedijalnog dizajna je primenjen prilikom kreiranja *GeoGebra* modela, u sekcijama 5, 6, 8 i 9. Relevantni tekst koji objašnjava pojedine delove ilustracije, nalazi se unutar ili pored slika. Isto tako, slike i tekst koji ih objašnjava prikazuju se simultano i dinamika njihove prezentacije je vremenski usklađena. Ovakva organizacija multimedijalnog sadržaja pruža mogućnost učeniku/studentu da istovremeno percipira informacije sadržane u slikama (dijagram i grafik funkcije) i tekstu (tekstualne, algebarske i numeričke informacije), čime se eliminišu nepotrebne pretrage izmedju slika i teksta, pa se samim tim smanjuje kognitivno opterećenje (Mayer & Moreno, 2002).
- *Kodiranje informacija bojom* – Prilikom kreiranja *GeoGebra* modela, dosledno je korišćena šema boja sa ciljem da se istom bojom vizuelno integrišu odgovarajući elementi modela. Sve informacije koje se odnose na prvi rastvor su prikazane crvenom bojom. Plavom bojom su prikazani podaci koji se odnose na drugi rastvor, a ljubičastom (boja koja nastaje mešanjem crvene i plave) podaci koji su povezani sa novonastalim rastvorom. Zelenom bojom je označen analitički oblik linearne funkcije i njen grafik. Značaj rešavanja problema pomoću linearne funkcije i njenog grafika vizuelno je naglašen time što su ovaj deo modela i rezultati prikazani kao posebna celina koja ima drugačiju boju pozadine od ostalog dela *GeoGebra* modela. Primenjena šema boja u *GeoGebra* modelu smanjuje vreme vizuelne pretrage u procesu integrisanja relevantnih informacija, pa samim tim smanjuje kognitivno opterećenje i olakšava proces učenja (Folker *et al.*, 2005).
- *Princip segmentacije* – Složeniji multimedijalni sadržaj bolje se uči ako je razdeljen na manje delove, nego kada je dat kao jedinstvena kontinuirana jedinica (Mayer & Chandler,

2001). U *GeoGebra* modelu, postupak rešavanja problema mešanja rastvora pomoću linearne funkcije i njenog grafika predstavlja složeniji multimedijalni sadržaj. On je podeljen na četiri manja dela, pri čemu korisnik ima mogućnost da samostalno aktivira svaki naredni segment.

- *Povratne informacije* koje *GeoGebra* model pruža korisnicima su: korisničko uputstvo, numeričke i algebarske informacije sadržane u sekcijama 5–9 i rešenje problema. Povratne informacije su pravovremene, stalne, jasne i precizne. One pomažu učeniku/studentu da u svakom trenutku zna šta je naučio, u čemu je pogrešio i na koji način da ispravi grešku. Adekvatne i pravovremene povratne informacije doprinose boljim postignućima u procesu učenja (Narciss, 2008), podstiču razvijanje svesti o ličnom napretku i znanju i predstavljaju važan segment u personalizovanju okruženja za učenje (Shute & Zapata-Rivera, 2008).
- *Interaktivnost* – Prikazani nastavni materijali su korisnički orijentisani i imaju veliki stepen interaktivnih mogućnosti koje predstavljaju jednu vrstu dijaloga između korisnika i modela. Interakcija je dvosmerna: korisnik-model (korisnik može da otvori/zatvori uputstvo, izabere vrstu problema, unosi ulazne podatke, pomera slajdere, izabere opciju grafičkog rešenja korak po korak, izabere opciju prikazivanja rešenja problema) i model-korisnik (model daje povratne informacije korisniku).
- *Individualizacija okruženja za učenje* – Prilikom oblikovanja *GeoGebra* modela, posebna pažnja je posvećena uvažavanju individualnih razlika između učenika/studenata u predznanju, intelektualnim sposobnostima, stilovima učenja i potrebama. Individualizacija okruženja za učenje postignuta je nelinearnom organizacijom sadržaja, implementacijom interaktivnih opcija, prikazivanjem različitih načina za rešavanje problema mešanja rastvora, i prikazivanjem potrebnih objašnjenja u toku rešavanja problema.
- *GeoGebra* modeli obezbeđuju podsticajno okruženje za *samostalno učenje* u kome učenici/studenti mogu da proučavaju gradivo na način koji im najviše odgovara i da prilagođavaju tempo učenja prema svojim sposobnostima i potrebama. Individualizacija okruženja za učenje i kognitivno-vizuelni pristup u metodičkom oblikovanju nastavnih sadržaja, prikazanih u *GeoGebra* modelima, pružaju mogućnost za realizaciju individualizovane nastave.
- *Od manipulacije do apstrakcije* – Učenici/studenti koji samostalno rade sa *GeoGebra* modelima u procesu učenja prolaze put od fizičke manipulacije modelom (akciona ravan interakcije), preko kognitivnih aktivnosti u čijoj su osnovi ikoničke reprezentacije (dijagram i grafik funkcije) do simboličke ravni apstrakcije (algebarska reprezentacija). Istovremeno postojanje i uzajamno preplitanje enaktivne, ikoničke i simboličke ravni apstrakcije je posebno značajno za *konstruktivistički pristup* procesu učenja. Posmatrano sa konstruktivističkog stanovišta, može se zaključiti da *GeoGebra* modeli pružaju učenicima/studenatima mogućnost da istražuju problem i da nova saznanja otkrivaju i stiču kroz sopstveno iskustvo, odnosno da postanu aktivni konstruktori svog znanja.
- *Simulacija* problema mešanja rastvora u *GeoGebra* modelima je jednostavna za primenu, kako u nastavnom procesu, tako i prilikom samostalnog učenja. Korisnici mogu da manipulišu simulacijom, odnosno da pokrenu/zaustave simulaciju i da menjaju parametre modela, a da potom istražuju koje su posledice tih promena, da proveravaju svoje ideje, shvatanje i znanje. Kada je reč o usvajanju matematičkih i hemijskih

konceptualnih znanja, simulacija problema mešanja rastvora može biti izuzetno korisna i svrsishodna za učenike/studente (Tversky, Morrison & Betrancourt, 2002; Barak & Dori, 2005; Stieff & Wilensky, 2003; Kozma & Russell, 2005).

- *Izbalansirano usvajanje proceduralnih i konceptualnih znanja* od strane učenika/studenata je značajna prednost primene *GeoGebra* modela, u podučavanju i učenju sadržaja koji se odnose na problem mešanja rastvora, u odnosu na tradicionalnu nastavu koja je usmerena na usvajanje proceduralnih znanja.
- *Dinamička povezanost različitih reprezentacija problema mešanja rastvora* – Bitna karakteristika predloženog kognitivno-vizuelnog pristupa je kreiranje vizuelnog i dinamičkog okruženja koje podržava učenje primenom različitih reprezentacija problema i podstiče uspostavljanje veza između njih. Funkcionalna povezanost različitih reprezentacija u *GeoGebra* modelima je šematski predstavljena na Slici 4.19 pomoću tetraedra koga grade: konkretna vizuelna reprezentacija (KV), apstraktna vizuelna (AV), verbalna (V) i algebarska reprezentacija (A) problema.



Slika 4.19. *Reprezentacijski tetraedar problema mešanja rastvora*

Različite reprezentacije problema mešanja rastvora mogu biti značajna podrška učenicima/studentima u procesu uspostavljanja relacija između različitih struktura unutar samih reprezentacija, kao i njihovo povezivanje sa realnim problemom. Na taj način se kod učenika/studenata razvija sposobnost da tumače i formulišu različite reprezentacije, što vodi ka sveobuhvatnom razumevanju problema na različite načine (Ainsworth, 2008).

Podučavanje koje se temelji na istraživanju različitih reprezentacija i podstiče učenike/studente da fleksibilno prelaze iz jedne reprezentacije u drugu je preduslov za razumevanje matematičkih koncepata (Duval, 2006). Dinamička povezanost ulaznih podataka sa drugim delovima *GeoGebra* modela, dovodi do koordiniranih promena u svim navedenim reprezentacijama. Uspostavljanjem referentnih veza između odgovarajućih karakteristika različitih reprezentacija, znanje o strukturi jedne reprezentacije učenici/studenti mogu da primene u razumevanju ostalih reprezentacija (Seufert, 2003; Kozma, 2003). Time se podstiče razvoj funkcionalnih znanja koja imaju veću transfernu vrednost (mogu se upotrebiti na različite načine i u različitim kontekstima) i predstavljaju bolju osnovu za dalje učenje (Stern, Aprea & Ebner, 2003).

- *Interaktivna elektronska zbirka rešenih zadataka* – *GeoGebra* modeli predstavljaju elektronske zbirke zadataka u kojima je za svaki zadatak detaljno prikazan i objašnjen celokupan postupak rešavanja problema. Modeli generišu nove zadatke tako što se unose brojne vrednosti za ulazne podatke ili se vrši pomeranje odgovarajućih klizača. Može se reći da je broj zadataka u ovim elektronskim zbirkama praktično neograničen.

  U postojećim štampanim zbirkama zadataka, koje se koriste u nastavi/učenju, za većinu zadataka iz oblasti problema smeše dato je samo krajnje rešenje ili veoma kratka objašnjenja. Takva koncepcija nije adekvatna za samostalan rad učenika/studenata, pa primena *GeoGebra* zbirke, kao dodatne elektronske literature, može unaprediti proces samostalnog učenja i metodičke pristupe u sadašnjoj nastavi matematike i hemije.

4.4. METODOLOŠKI OKVIR ISTRAŽIVANJA

U ovom delu rada biće predstavljen metodološki okvir pedagoškog eksperimenta kojim su istraživani efekti primene kognitivno-vizuelnog pristupa na sadržajima koji se odnose na problem smeše. Istraživanje je realizovano u radu sa studentima hemije Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu. Odabrani nastavni sadržaji su didaktičko-metodički oblikovani i realizovani kognitivno-vizuelnim pristupom u eksperimentalnoj grupi, dok je u kontrolnoj grupi, isti sadržaj realizovan tradicionalnom nastavom. Nakon toga, sagledan je efekat inovativnog pristupa nastavi/učenju, poređenjem postignuća studenata eksperimentalne i kontrolne grupe na testovima znanja.

4.4.1. Predmet, cilj, zadaci i hipoteze istraživanja

Predmet ovog istraživanja je teorijsko i eksperimentalno ispitivanje i proučavanje efekata i svrsishodnosti primene kognitivno-vizuelnog pristupa podržanog inovativnim nastavnim materijalima, u izučavanju nastavnih sadržaja koji se odnose na problem smeše, posebno problem mešanja rastvora.

Cilj pedagoškog istraživanja bio je da se utvrde efekti i stepen uticaja primene kognitivno-vizuelnog pristupa u izučavanju odabranih sadržaja iz oblasti problema smeše, u računarskom okruženju, na obrazovna postignuća studenata.

Da bi se ovako postavljen cilj realizovao postavljeni su sledeći konkretni *zadaci pedagoškog istraživanja*:

- Na osnovu teorijskih saznanja konstruisati didaktičko–metodički model za realizaciju nastavnih sadržaja, koji se odnose na problem smeše, kognitivno-vizuelnim pristupom.
- Kreirati nastavne materijale koji će podržati realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa upotrebom računara i obrazovnog softvera u toku eksperimentalnog procesa.
- Izraditi instrumente (testove znanja) kojima će biti izmeren uticaj primene kognitivno-vizuelnog pristupa na postignuća studenata u rešavanju tradicionalnih (prvi deo testa) i problemskih zadataka (drugi deo testa).

- Na osnovu inicijalnog testiranja predznanja studenata vezanih za problem mešanja rastvora formirati dve ujednačene grupe, eksperimentalnu i kontrolnu.
- Realizovati nastavne aktivnosti, kognitivno-vizuelnim metodičkim postupcima u računarskom okruženju sa studentima eksperimentalne grupe, a tradicionalnim nastavnim postupcima sa studentima kontrolne grupe.
- Rezultate realizovane nastave izmeriti finalnim testom znanja jednakim za sve studente.
- Na osnovu rezultata testa utvrditi koji metodički pristup daje bolje efekte na postignuća studenata.

Shodno predmetu i cilju istraživanja, formulisana je *opšta hipoteza istraživanja.*

H: Primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji odabranih sadržaja iz oblasti problema smeše postižu se statistički značajno bolja postignuća studenata u odnosu na postignuće kakvo se može ostvariti primenom tradicionalnih metodičkih pristupa.

Opšta hipoteza istraživanja proverena je putem *posebnih hipoteza*:

H1: Studenti će na inicijalnom testu pokazati statistički značajno bolje rezultate na prvom delu testa, u odnosu na drugi deo testa.

H2: Studenti eksperimentalne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate na prvom delu finalnog testa, u odnosu na studente kontrolne grupe.

H3: Studenti eksperimentalne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate na drugom delu finalnog testa, u odnosu na studente kontrolne grupe.

H4: Studenti eksperimentalne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate na finalnom testu, u odnosu na studente kontrolne grupe.

H5: Razlika u rezultatima studenata eksperimentalne grupe na prvom i drugom delu finalnog testa nije statistički značajna.

H6: Studenti kontrolne grupe će pokazati statistički značajno bolje rezultate na prvom delu finalnog testa, u odnosu na drugi deo finalnog testa.

4.4.2. Uzorak

U cilju realizacije pedagoškog istraživanja, angažovani su studenti hemije Prirodno-matematičkog fakultetu u Nišu. Uzorak su činili studenti prve, druge i treće godine osnovnih studija. Prvo istraživanje je sprovedeno u toku letnjeg semestra akademske 2013/2014. godine, a drugo u letnjem semestru 2014/2015. godine. Istraživanja su sprovedena na namernim uzorcima od po 90 studenata, odnosno u oba istraživanja je učestvovalo ukupno 180 studenata hemije. Postupak formiranja eksperimentalne i kontrolne grupe je bio isti u oba istraživanja. Najpre je sprovedeno inicijalno testiranje 90 studenata (po 30 studenata prve, druge i treće godine osnovnih akademskih studija). Na osnovu postignutih rezultata na inicijalnom testu znanja, studenti su podeljeni na eksperimentalnu i kontrolnu grupu. U okviru grupe studenata koji su na istoj godini studija, formirani su parovi studenata sa približno istim brojem bodova. Jedan od studenata je bio raspoređen u kontrolnu, a drugi u eksperimentalnu grupu. Navedeni postupak je sproveden za svaku godinu studija. Na taj način je postignuta ujednačena struktura eksperimentalne (E) i kontrolne (K) grupe, u odnosu na godinu studija i nivo znanja, odnosno formirane su dve uparene vertikalno stratifikovane grupe od po 45 studenata.

4.4.3. Metode, tehnike i instrumenti istraživanja

U ovom istraživanju primenjene su: metoda teorijske analize, deskriptivna, eksperimentalana i statistička metoda i njima pripadajuće tehnike, što je detaljno objašnjeno u odeljku 3.4.3 ove disertacije.

Za prikupljanje podataka u eksperimentalnom delu istraživanja korišćene su relevantne tehnike testiranja znanja studenata. Instrumenti primenjeni u istraživanju bili su testovi znanja koje je osmislio autor disertacije.

Inicijalni testovi znanja

Utvrđivanje predznanja studenata koji su učestvovali u istraživanju 2013/2014. odnosno 2014/2015. godine, sprovedeno je inicijalnim testiranjima. Inicijalni testovi znanja sadrže zadatke objektivnog tipa i pripadaju grupi testova brzine – vreme predviđeno za izradu testa je 60 minuta. Pored toga što je namena ovih testova bila formiranje E i K grupe, oni su poslužili i da se identifikuju najčešće greške, slabosti i poteškoće studenata u oblasti problema mešanja rastvora, kao i da se utvrdi koje algebarske metode studenti najčešće primenjuju u rešavanju ove vrste problema. Ovakva analiza inicijalnog stanja je bila od velike važnosti nastavniku koji će realizovati eksperimentalnu nastavu i značajno je pomogla kod pripremanja nastavnih materijala.

Inicijalni test prvog istraživanja (IT1) – Kao inicijalni test znanja u istraživanju sprovedenom 2013/2014. godine korišćen je nestandardizovan test koji obuhvata sadržaje o problemu mešanja rastvora u slučaju kada je kvantitativni sastav rastvora izražen procentnom koncentracijom, a koji se izučavaju u nastavi matematike i nastavi hemije u prvom razredu srednje škole i prve godine osnovnih studija hemije.

IT1 predstavlja niz od 8 zadataka objektivnog tipa koji su osmišljeni i odabrani tako da se provere kako proceduralna, tako i konceptualna znanja studenata. Test je strukturiran tako da, prvi deo testa (zadaci od 1-4) sadrži tradicionalne zadatke koji se rešavaju odgovarajućim algoritamskim postupcima i podrazumevaju primenu proceduralnih znanja, a drugi deo testa (zadaci od 5-8) obuhvata problemske zadatke koji zahtevaju primenu konceptualnih znanja i suštinsko razumevanje problema.

Prvi deo testa obuhvata reprezentativne zadatke za nastavne sadržaje koji se odnose na problem mešanja rastvora. Zadaci su po tematici i sadržaju prepoznatljivi studentima zbog toga što su u velikoj meri zastupljeni u srednjoškolskim i univerzitetskim udžbenicima. U pitanju su zadaci kod kojih se na osnovu datih podataka o rastvorima može izračunati tražena nepoznata masa ili procentna koncentracija, primenom neke od algebarskih metoda. Rešavanje ovakvih računskih zadataka podrazumeva primenu proceduralnih znanja. Sprovođenjem dobro uvežbanih algoritama, studenti mogu i bez konceptualnog znanja i razumevanja uspešno rešiti ovakvu vrstu zadataka.

Zadaci u prvom delu testa su slobodne forme – esejski zadaci, i svaki je bodovan sa 10 bodova. Za svaki tačno rešen zadatak (tačan postupak i krajnje rešenje zadatka) student dobija 10 bodova, inače dobija 0 bodova.

Prvi deo inicijalnog testa sadrži sledeće zadatke:

1. Izračunaj procentnu koncentraciju rastvora koji se dobija mešanjem 200 g rastvora $NaOH$ čija je procentna koncentracija 30%, sa 100 g rastvora $NaOH$ procentne koncentracija 60%.

2. Izračunaj procentnu koncentraciju rastvora H_2SO_4, koji treba pomešati sa 150 g rastvora H_2SO_4, procentne koncentracije 40%, da bi se dobio 75%-ni rastvor mase 500 g.

3. Kolika je procentna koncentracija rastvora nastalog dodavanjem 60 g vode u 120 g 45%-og rastvora KOH?

4. Isparavanjem vode iz rastvora saharoze čija je procentna koncentracija 35% i masa 400 g, dobijen je 60%-ni rastvor saharoze. Izračunaj masu vode koja je isparila.

Prva dva zadatka su data sa ciljem da se ispitaju znanja i sposobnosti studenata za rešavanje problema mešanja dva rastvora različitih procentnih koncentracija, dok se trećim i četvrtim zadatakom proveravaju znanja iz oblasti specijalnih slučajeva problema mešanja rastvora – dodavanje, odnosno isparavanje vode iz rastvora.

Prvi zadatak pripada vrsti problema koja je najzastupljenija u nastavnim sadržajima o problemu mešanja rastvora i sa kojom se učenici/studenti najčešće susreću u praktičnom radu. Ovaj zadatak proverava deklarativna i proceduralna znanja i sposobnosti studenata da na osnovu poznatih kvantitativnih sastava polaznih rastvora, izračunaju procentnu koncentraciju rastvora nastalog njihovim mešanjem, nekom od algebarskih metoda. Na primer, procentna koncentracija dobijenog rastvora, w_3 može se dobiti direktnom primenom formule (8). U ovom slučaju, proverava se deklarativno znanje studenata o formuli $w_3 = \frac{w_1\, m_1 + w_2\, m_2}{m_1 + m_2}$ i proceduralna znanja koja se odnose na postavku zadatka, uvrštavanje podataka datih uslovima zadatka (m_1, m_2, w_1 i w_2) u formulu, i izračunavanje vrednosti brojnog izraza u cilju konačnog rešenja zadatka.

Drugi zadatak zahteva od studenata da izračunaju procentnu koncentraciju jednog od polaznih rastvora, pri čemu je poznat kvantitativni sastav drugog inicijalnog rastvora i sastav dobijenog rastvora. U odnosu na prvi zadatak, algebarski postupak je nešto složeniji, jer osim sređivanja numeričkih izraza uključuje i rešavanje jednačine.

Treći zadatak se odnosi na problem razblaživanja rastvora. Sa ovakvim problemima, studenti se veoma često susreću prilikom praktičnog rada u laboratoriji, jer se većina rastvora potrebnih za izvođenje eksperimenata priprema razblaživanjem koncentrovanijih rastvora. Ovim zadatkom se upravo testiraju znanja i sposobnosti studenata potrebnih za određivanje procentne koncentracije rastvora koji se dobija dodavanjem vode polaznom rastvoru.

Četvrti zadatak obuhvata slučaj koji je takođe čest u praksi, a to je uparavanje rastvora. Naime, studenti treba da primene neku od algebarskih metoda kojom bi na osnovu datih podataka za procentne koncentracije rastvora i masu nastalog rastvora, izračunali masu vode koja je isparila.

Drugi deo testa je dat sa ciljem da se provere konceptualna znanja i razumevanje, sposobnost primene znanja u novim situacijama i kritičko mišljenje studenata. Ovaj deo testa obuhvata probleme koji imaju jedan ulazni podatak manje u odnosu na zadatke iz prvog dela testa. Izostavljanje ulaznog podatka dovodi do transformacije tradicionalnog zadatka u problemski zadatak. Problemski zadaci nemaju jedinstveno rešenje i ne mogu se rešiti samo primenom neke od algebarskih metoda, već zahtevaju suštinsko razumevanje problema i drugačiji način rešavanja u odnosu na tradicionalne zadatke.

U drugom delu testa, svaki zadatak se sastoji od dela sa višestrukim izborom i esejskog dela. U delu zadatka sa višestrukim izborom, student treba da odredi koje od ponuđenih vrednosti ispunjavaju postavljene zahteve u zadatku. Ponuđeno je 6 odgovora, od kojih su tri tačna.

Svaki tačan odgovor nosi 2 boda, što je ukupno 6 bodova za ovaj deo zadatka. Ako je u zadatku označen netačan odgovor, bez obzira na to da li su označeni i tačni, daje se 0 bodova. Drugi deo zadatka je esejskog tipa, a od studenata se tražilo da obrazlože zašto su vrednosti koje su oni odabrali, odnosno zaokružili, moguća rešenja zadatka. Studenti su dobili uputstvo da, ukoliko su odgovore zaokružili pogađanjem – slučajnim izborom, tako napišu i u obrazloženju. Za obrazloženje zadatka daje se 0, 2 ili 4 boda u zavisnosti od toga da li je obrazloženje netačno, delimično ili potpuno.

Drugi deo inicijalnog testa sadrži sledeće zadatke:

5. Mešanjem 200 g rastvora NaI procentne koncentracija 30%, sa drugim rastvorom NaI čija je procentna koncentracija 60%, dobija se novi rastvor. Procentna koncentracije NaI dobijenog rastvora može biti:
1) 55% 2) 25% 3) 45% 4) 35% 5) 90% 6) 65%
Obrazloženje:

6. U 200 g, 25%-og rastvora etanola dodat je drugi rastvor etanola, pri čemu je dobijen novi rastvor procentne koncentracije 40 %. Procentna koncentracija dodatog rastvora može biti:
1) 10% 2) 53% 3) 29% 4) 76% 5) 30% 6) 98%
Obrazloženje:

7. Kada se u rastvor $AgNO_3$ doda izvesna količina čistog $AgNO_3$, nastaje novi rastvor mase 200 g i procentne koncentracije 40%. Masa $AgNO_3$ koja je dodata može biti:
1) 25 g 2) 85 g 3) 70 g 4) 100 g 5) 90 g 6) 15 g
Obrazloženje:

8. Iz 300 g rastvora KBr procentne koncentracije 40%, isparila je izvesna količina vode. Masa vode koja je isparila može biti:
1) 90 g 2) 180 g 3) 200 g 4) 120 g 5) 240 g 6) 220 g
Obrazloženje:

Peti i šesti zadatak su dati sa ciljem da se ispitaju osnovna konceptualna znanja studenata o mešanju dva rastvora različitih procentnih koncentracija.

Peti i prvi zadatak se odnose na isti problem: određivanje procentne koncentracije rastvora koji nastaje mešanjem dva polazna rastvora. Međutim, ovi zadaci se razlikuju u broju ulaznih podataka. U odnosu na prvi zadatak, peti zadatak ima jedan ulazni podatak manje (masa drugog rastvora). Ova razlika u broju ulaznih podataka dovodi do toga da peti zadatak nema jedinstveno rešenje i da algebarske metode nisu adekvatne za njegovo rešavanje. Za rešavanje ovog zadatka neophodno je primeniti konceptualno znanje: procentna koncentracija rastvora dobijenog mešanjem dva rastvora uvek je između procentnih koncentracija polaznih rastvora. U zadatku su date procentne koncentracije polaznih rastvora, 30% i 60%, pa procentna koncentracija rastvora dobijenog njihovim mešanjem može biti 55%, 45% ili 35%.

Šesti i drugi zadatak obuhvataju istu problematiku: određivanje procentne koncentracije jednog od polaznih rastvora. Za rešavanje šestog zadatka studenti treba da primene isto konceptualno znanje kao i kod rešavanja petog zadatka. Budući da se mešanjem 25% rastvora sa drugim rastvorom, dobija 40% rastvor, to procentna koncentracija drugog rastvora mora biti veća od 40%, pa su tačni odgovori 53%, 76% i 98%.

Sedmi i osmi zadatak se odnose na specijalne slučajeve problema mešanja rastvora čije rešavanje podrazumeva primenu i konceptualnih i proceduralnih znanja. Sedmi zadatak proverava znanja i sposobnosti studenata da procene masu supstance koja je dodata polaznom rastvoru. Za rešavanje ovog zadatka potrebno je konceptualno razumevanje problema (masa supstance koja je dodata u polazni rastvor ne može biti veća od mase rastvorene supstance u novonastalom rastvoru) i primena proceduralnih znanja (određivanje mase rastvorene supstance u 200 g dobijenog 40%-og rastvora). Povezivanjem navedenih konceptualnih i proceduralnih znanja studenti treba da zaključe da masa rastvorene supstance ne može biti veća od 80 g, i da su tačni odgovori 25 g, 70 g i 15 g.

Osmi zadatak ispituje konceptualna i proceduralna znanja studenata o problemu isparavanja vode iz rastvora. U ovom zadatku potrebno je najpre da studenti izvedu konceptualni zaključak: iz rastvora može da ispari najviše onoliko vode koliko je ima u samom rastvoru. Dalji postupak obuhvata primenu proceduralnih znanja u izračunavanju mase vode u 300 g polaznog 40%-og rastvora. Na kraju, studenti treba da dođu do zaključka da masa vode koja je isparila ne može biti veća od 180 g, što dalje znači da su tačni odgovori 90 g, 180 g i 120 g.

Inicijalni test znanja drugog istraživanja (IT2) strukturiran je na isti način kao i IT1. Razlike između ova dva testa odnose se na obuhvaćene nastavne sadržaje i neznatne izmene u formi zadataka drugog dela testa.

IT2 sadrži četiri zadatka sa procentnom i četiri sa molarnom koncentracijom. Zadaci sa molarnom koncentracijom su analogni odgovarajućim zadacima sa procentnom koncentracijom u IT1.

Analiza inicijalnog testiranja u prvom istraživanju, pokazala je da nije zanemarljiv broj studenata koji su u drugom delu testa kao obrazloženje navodili da su izbor odgovora izvršili pogađanjem. U cilju sprečavanja efekta slučajnog pogađanja tačnih odgovora, u IT2 promenjena je forma odgovora u zadacima. Umesto zaokruživanja ponuđenih rešenja, trebalo je da studenti dopune dvostruku nejednakost kojom je određen skup svih mogućih rešenja problema. Preciznije, od studenata se zahtevalo da na odgovarajućim linijama upišu donju i gornju granicu skupa mogućih rešenja. Za svaku tačno određenu granicu daje se 3 boda, što je ukupno 6 bodova za ovaj deo zadatka. Deo zadatka koji se odnosi na obrazloženje, vrednovan je kao i u IT1, sa 4 boda.

Inicijalni test korišćen u drugom istraživanju sadrži sledeće zadatke:

---

1. Izračunaj molarnu koncentraciju rastvora koji nastaje mešanjem 150 ml rastvora $NaCl$ molarne koncentracije 0,2 mol/l i 500 ml rastvora $NaCl$ molarne koncentracije 0,8 mol/l.

2. Mešanjem 150 g 40%-og rastvora glukoze sa drugim rastvorom glukoze, dobija se 500 g, 75%-og rastvora. Izračunaj procentnu koncentraciju glukoze u drugom rastvoru.

3. Kolika je procentna koncentracija rastvora nastalog dodavanjem 60 g vode u 120 g 45%-og rastvora KCl ?

4. Izračunaj zapreminu vode koja je isparila iz 400 ml rastvora saharoze molarne koncentracije 0,2 mol/l, ako je nakon isparavanja dobijen rastvor saharoze molarne koncentracije 0,4 mol/l.

---

5. Mešanjem 200ml rastvora NaI molarne koncentracije 1 mol/l sa drugim rastvorom NaI molarne koncentracije 2 mol/l, nastaje novi rastvor. Molarna koncentracija NaI nastalog rastvora, c je ________________ $< c <$ ______________ .
Obrazloženje:

6. U 200 ml rastvora KI molarne koncentracije 1,4 mol/l dodat je drugi rastvor KI, i pri tom je dobijen novi rastvor molarne koncentracije 0,2 mol/l. Molarna koncentracija KI dodatog rastvora, c je ________________ $< c <$ ________________ .
Obrazloženje:

7. Rastvoru $AgNO_3$ dodajemo izvesnu količinu čistog $AgNO_3$. Na taj način se dobija novi rastvor mase 200 g i procentne koncentracije 40%. Masa čistog $AgNO_3$ koja je dodata, m je ________________ $< m <$ ________________.
Obrazloženje:

8. Iz 300 g rastvora KBr procentne koncentracije 40% isparila je izvesna količina vode. Masa vode koja je isparila, m je ________________ $< m <$ ________________.
Obrazloženje:

Finalni testovi znanja

Evaluacija realizovanog eksperimentalnog rada u 2013/2014. odnosno 2014/2015. godini sprovedena je analizom rezultata finalnog testiranja studenata. Finalna testiranja su imala za cilj da se izmere i uporede efekti primene različitih metodičkih pristupa u E i K grupi.

Finalni testovi znanja, korišćeni u prvom (FT1) i drugom istraživanju (FT2) obuhvataju sadržaje koji su obrađivani tokom eksperimentalnog rada sa studentima. Finalni testovi predstavljaju paralelnu formu odgovarajućih inicijalnih, pa stoga imaju sve bitne karakteristike inicijalnih testova, koje su navedene u prethodnom tekstu.

Zadaci na finalnom testu znanja u prvom istraživanju:

---

1. Mešanjem 50%-og i 10%-og rastvora $NaOH$ dobija se 240 g rastvora procentne koncentracija 20%. Po koliko grama polaznih rastvora je upotrebljeno?

2. Koliko grama 50%-og rastvora azotne kiseline treba pomešati sa 250 g rastvora azotne kiseline procentne koncentracije 30%, kako bi se dobio 45 % rastvor?

3. Rastvoru $NaCl$ dodato je 80 g vode, i pri tom je dobijen novi rastvor procentne koncentracije 40% i mase 240 g. Izračunaj procentnu koncentraciju $NaCl$ u polaznom rastvoru.

4. Kada se rastvoru KI doda 150 g čistog KI, dobija se 400 g rastvora procentne koncentracije 55% . Izračunaj procentnu koncentraciju polaznog rastvora.

---

5. Mešanjem 125 g 18%-og rastvora $NaNO_3$ sa drugim rastvorom $NaNO_3$ procentne koncentracije 43%, dobija se novi rastvor. Procentna koncentracija $NaNO_3$ dobijenog rastvora, w je ________________ $< w <$ ________________ .
Obrazloženje:

6. U 200 g rastvora KI čiji je procentna koncentracija 25% dodat je drugi rastvor KI, i pri tom je dobijen novi rastvor procentne koncentracije 40%. Procentna koncentracija KI dodatog rastvora, w je ________________ $< w <$ ________________ .
Obrazloženje:

7. Mešanjem 100 g rastvora glicerola procentne koncentracije 60% sa drugim rastvorom glicerola, dobija se novi rastvor mase 200 g. Procentna koncentracija glicerola u dobijenom rastvoru, w je ________________ $< w <$ ________________ .
Obrazloženje:

8. Izvesna količina vode, isparila je iz 300 g rastvora $NaBr$ procentne koncentracije 40%. Masa vode koja je isparila, m je ________________ $< m <$ ________________ .
Obrazloženje:

Sadržaj finalnog testa znanja koji je korišćen u drugom istraživanju:

---

1. Mešanjem 50%-og i 10%-og rastvora $NaOH$ dobija se 240 g rastvora procentne koncentracija 20%. Po koliko grama polaznih rastvora je upotrebljeno?

2. Mešanjem 250 ml rastvora azotne kiseline molarne koncentracije 0,3 mol/l sa drugim rastvorom azotne kiseline molarne koncentracije 1,5 mol/l, dobijen je rastvor molarne koncentracije 1 mol/l. Izračunaj zapreminu dobijenog rastvora.

3. Dodavanjem 80 ml vode u rastvor $NaCl$, dobija se 320 ml rastvora molarne koncentracije 0,6 mol/l. Izračunaj molarnu koncentraciju $NaCl$ polaznog rastvora.

4. U rastvor KI dodato je 150 g čistog KI, i pri tom je dobijeno 400 g rastvora procentne koncentracije 55%. Izračunaj procentnu koncentraciju polaznog rastvora.

---

5. Mešanjem 150 g, 25%-og rastvora glicerola sa drugim rastvorom glicerola procentne koncentracije 50%, dobija se novi rastvor. Procentna koncentracija glicerola u dobijenom rastvoru, w je __________________ $< w <$ ________________.
Obrazloženje:

6. U 200 ml rastvora HCl molarne koncentracije 0,1 mol/l dodat je drugi rastvor HCl, i pri tom je dobijen novi rastvor molarne koncentracije 0,5 mol/l. Molarna koncentracija HCl dodatog rastvora, c je ____________ $< c <$ ________________.
(Molarna koncentracija koncentrovane hlorovodonične kiseline je 12 mol/l)
Obrazloženje:

7. Mešanjem 100 ml rastvora H_2SO_4 molarne koncentracije 0,5 mol/l sa drugim rastvorom H_2SO_4, dobija se novi rastvor zapremine 200 ml. Molarna koncentracija H_2SO_4 dobijenog rastvora, c je ______________ $< c <$ _________________ .
(Molarna koncentracija koncentrovane sumporne kiseline je 18,4 mol/l)
Obrazloženje:

8. Iz 30%-og rastvora K_2SO_4 čija je masa 500 g, isparila je izvesna količina vode. Masa vode koja je isparila, m je ___________________ $< m <$ ____________________.
Obrazloženje:

4.4.4. Organizacija i tok pedagoškog eksperimenta

Pedagoška istraživanja prikazana u ovom delu rada, bila su sprovedena uz poštovanje svih formalnih pravila koja važe za istraživanja u nastavi. U skladu sa tim, studenti osnovnih studija hemije su bili obavešteni o glavnim okvirima i ciljevima istraživanja i tom prilikom su svi zainteresovani pozvani da se prijave kao učesnici istraživanja. Studenti su se dobrovoljno prijavljivali za učešće u istraživanju. Aktivnosti u kojima su studenti učestvovali (inicijalno testiranje, eksperimentalna nastava i finalno testiranje), sprovedene su u po posebnom rasporedu u terminima koji se nisu poklapali sa časovima redovne nastave. U oba istraživanja, eksperimentalnu nastavu i testiranje studenata je organizovao i realizovao isti predavač, nastavnik hemije.

Istraživanja su realizovana na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu u periodu maj-jul 2014. godine (prvo istraživanje), odnosno april-jul 2015. godine (drugo istraživanje). Fakultet u okviru svojih kapaciteta raspolaže računarskim učionicama. Studenti eksperimentalnih grupa su imali predavanja u računarskoj učionici i imali mogućnost da samostalno ili u paru rade na računaru. Za studente kontrolnih grupa predavanja su bila organizovana u klasičnim učionicama.

Inicijalno merenje znanja studenata testom zadataka objektivnog tipa na početku eksperimentalnog istraživanja sprovedeno je u prvoj dekadi maja akademske 2013/2014. godine (aprila akademske 2014/2015. godine).

Formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe izvršeno je na osnovu inicijalnih rezultata studenata, na način kako je objašnjeno u odeljku 4.4.2.

Realizacija nastave u toku eksperimenta odvijala se tokom maja 2014. godine, odnosno tokom aprila i maja 2015. godine. U prvom istraživanju, eksperimentalna i kontrolna grupa su imale četiri sata predavanja (dva sata nedeljno). Nastavne aktivnosti u drugom istraživanju su realizovane tokom četiri nedelje i održano je osam sati predavanja.

Finalno merenje znanja studenata E i K grupe sprovedeno je u prvoj dekadi jula akademske 2013/2014. godine (2014/2015. godine). Finalno testiranje je imalo za cilj da se, istim testom znanja za sve studente, izmere efekti primene različitih metodičkih pristupa u E i K grupi.

Rad sa eksperimentalnim grupama studenata

U radu sa studentima eksperimentalnih grupa primenjen je kognitivno-vizuelni pristup izučavanju problema mešanja rastvora. Nastavne aktivnosti su promovisale individualni oblik rada. Edukacija studenata je bila zasnovana na primeni metode heurističkog razgovora i problemske metode, u čijim je osnovama istraživački usmerena nastava u računarskom okruženju. Realizacija eksperimentalne nastave sprovedena je u cilju obrade grafičke metode i njene primene u predstavljanju i rešavanju problema mešanja rastvora.

Realizacija eksperimentalne nastave osmišljena je kroz nekoliko etapa. U daljem tekstu, biće opisane etape rada sa eksperimentalnom grupom studenata u drugom istraživanju. Što se tiče prvog istraživanja, redosled etapa je isti, s tim što nisu obuhvaćene etape koje se odnose na sadržaje sa geometrijskom reprezentacijom problema mešanja rastvora i molarnom koncentracijom (druga i sedma etapa).

1) *Ponavljanje relevantnih znanja o problemu mešanja rastvora u slučaju procentne koncentracije i algebarskim metodama rešavanja problema* – Studenti hemije su tokom prethodnog školovanja usvojili određena znanja iz oblasti mešanja rastvora. Zbog toga je ponavljanje relevantnih znanja realizovano kroz diskusiju nastavnika i studenata o mogućim algebarskim načinima rešavanja konkretnog zadatka, Problema 1 iz odeljka 4.2.1.

2) *Uvođenje geometrijske reprezentacije problema mešanja rastvora i njeno povezivanje sa algebarskom reprezentacijom* – Nastavnik je izložio i detaljno objasnio studentima kako se problem mešanja rastvora može vizuelizovati pomoću pravougaonika. Na Primeru 1, nastavnik je demonstrirao kako se konkretan zadatak vizuelizuje dvodimenzionalnim dijagramom i kako se dobija odgovarajuća algebarska jednačina. Nakon toga, studenti su samostalno rešavali zadatke koje je nastavnik zadao. U ovoj fazi rada, nije bila potrebna pomoć nastavnika u smislu dodatnih objašnjenja i smernica za dalji rad. Studentima je

metoda dvodimenzionalnih dijagrama bila očigledna i jasna i bez poteškoća su uspešno rešili sve zadatke.

3) *Uvođenje grafičke metode i primena linearne funkcije u rešavanju problema mešanja rastvora* – Nastavnik je uveo grafičku metodu postepeno, kako je to objašnjeno u delu 4.2.2. Posebna pažnja je bila posvećena klasičnoj „papir-olovka" grafičkoj metodi i algebarskoj reprezentaciji linearne funkcije. Studenti se nisu sretali u ranijem školovanju sa postupkom određivanja analitičkog oblika linearne funkcije na osnovu njenog grafika. Zbog toga je nastavnik dalje usmerio rad na to da studenti povežu grafički prikaz sa eksplicitnim oblikom jednačine prave. Tom prilikom je korišćen softver *GeoGebra* i unapred pripremljen nastavni materijal, sa ciljem da studenti, na osnovu vizuelnog prikaza, izgrade potrebne referentne veze između grafičke i algebarske reprezentacije linearne funkcije i da fleksibilno prelaze iz jedne reprezentacije u drugu. Postupak grafičkog određivanja koeficijenta pravca prave pomoću odgovarajućeg pravouglog trougla, nastavnik je detaljno objašnjavao i demonstrirao na više primera. U ovoj fazi rada, glavni nosilac aktivnosti bio je nastavnik, a studenti su aktivno učestvovali kroz diskusiju, iznošenje svojih zapažanja, argumentovanje ideja i mišljenja.

4) *Rad studenata sa GeoGebra modelom problema mešanja rastvora za slučaj procentne koncentracije* – Nastavnik je zadao studentima četiri zadatka (po jedan primer za svaki od slučajeva koji je sadržan u modelu). Studenti su samostalno ili u paru koristili *GeoGebra* model, a zadatke rešavali u svojim sveskama. Kada je rešavanje računskih zadataka u pitanju, pored toga što je neophodna primena znanja, bitna je i postupnost i sistematičnost u izradi, urednost u zapisivanju i preciznost u izračunavanju. U tom cilju, nastavnik je naglasio studentima da najpre zapišu postavku zadatka, a zatim i kompletan postupak kojim su došli do rešenja, uz obavezno skiciranje grafika i na kraju da izvrše proveru svog rešenja.

U istraživanju sprovedenom 2013/2014. godine, korišćeni su AV-modeli i nastavnik je pre početka rada studenata sa modelom, dao potrebna uputstva i demonstrirao kako se model koristi prilikom rešavanja zadataka. Za ovakvim objašnjenjima nije bilo potrebe u drugom istraživanju, zato što sami KAV-modeli sadrže korisničko uputstvo. Sprovedene aktivnosti u ovoj fazi rada su obuhvatale rad studenata na pripremljenom nastavnom materijalu, ali i aktivan rad nastavnika, u smislu praćenja rada studenata i pružanja odgovarajućih vidova pomoći u situacijama kada je to bilo potrebno.

Na koji način su studenti, u ovoj fazi edukacije, koristili nastavni materijal pri rešavanju zadataka biće prikazano na jednom primeru. Zadatak je glasio:

Koliko treba uzeti 44% *-nog rastvora sumporne kiseline, a koliko* 80% *-nog rastvora, da bi se dobilo* 180 g *sumporne kiseline čija je procentna koncentracija* 64%*?*

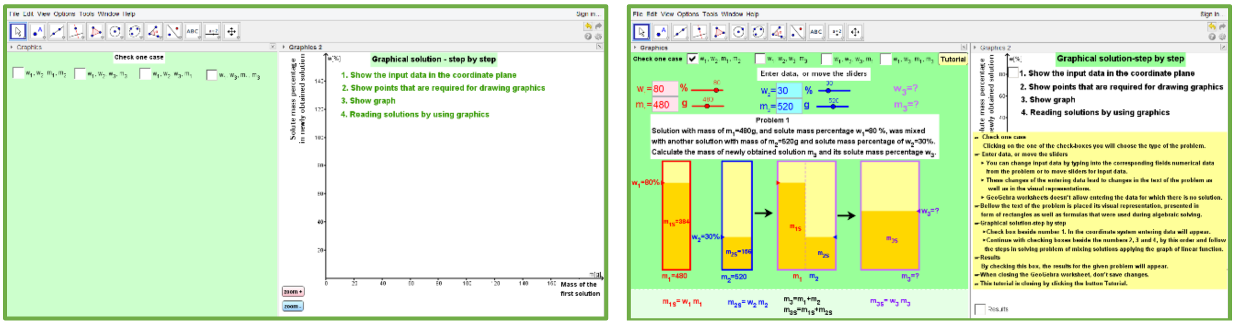
- *Početak rada*: Izgled ekrana, po otvaranju *GeoGebra* modela, prikazan je na Slici 4.20. Kod KAV-modela, u desnom delu ekrana, prikazano je korisničko uputstvo (žuto tekstualno polje). Nakon čitanja uputstva, studenti su isto zatvorili i njihov sledeći zadatak je bio izbor vrste problema.
- *Izbor vrste problema*: Studenti su najpre napisali u sveskama podatke o poznatim veličinama i odredili koje su nepoznate veličine u zadatku:

  $w_1 = 44\% \qquad w_2 = 80\% \qquad w_3 = 64\%$

  $m_1 = ? \qquad m_2 = ? \qquad m_3 = 180g$

  Na osnovu ulaznih podataka, studenti su izabrali drugo polje u Sekciji 2. Izbor ovog polja je povezan sa pojavljivanjem ulaznih podataka i teksta zadatka na ekranu pri čemu *GeoGebra* model postavlja unapred definisane vrednosti ulaznih podataka.

AV **KAV**

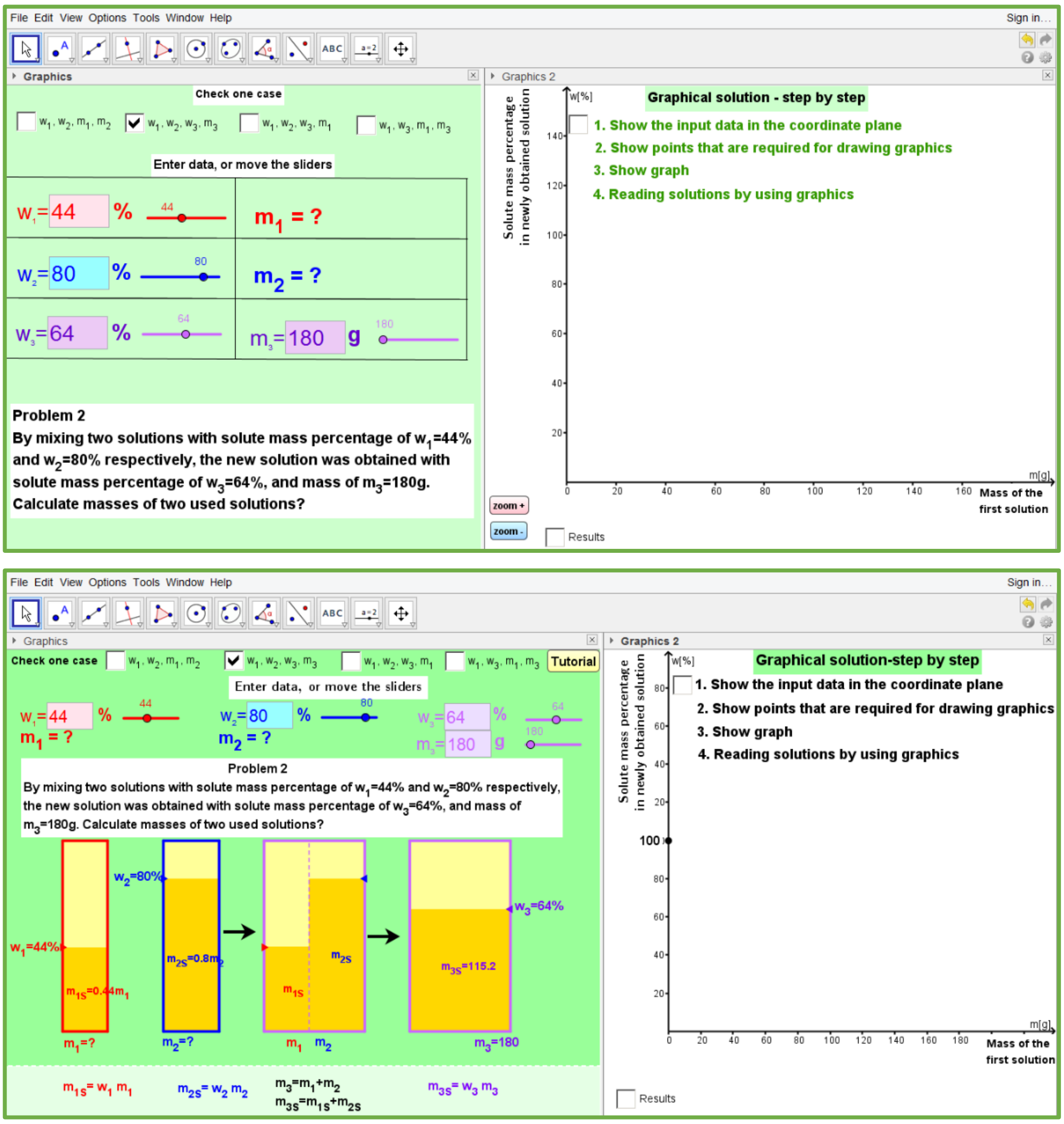


Slika 4.20. *Izgled ekrana po otvaranju GeoGebra modela*

- *Unos ulaznih podataka*: Studenti su uočili da numerički podaci u Sekciji 3 nisu isti sa podacima u zadatku, pa su podatke date u zadatku uneli u polja koja su za to predviđena (Slika 4.21).

AV

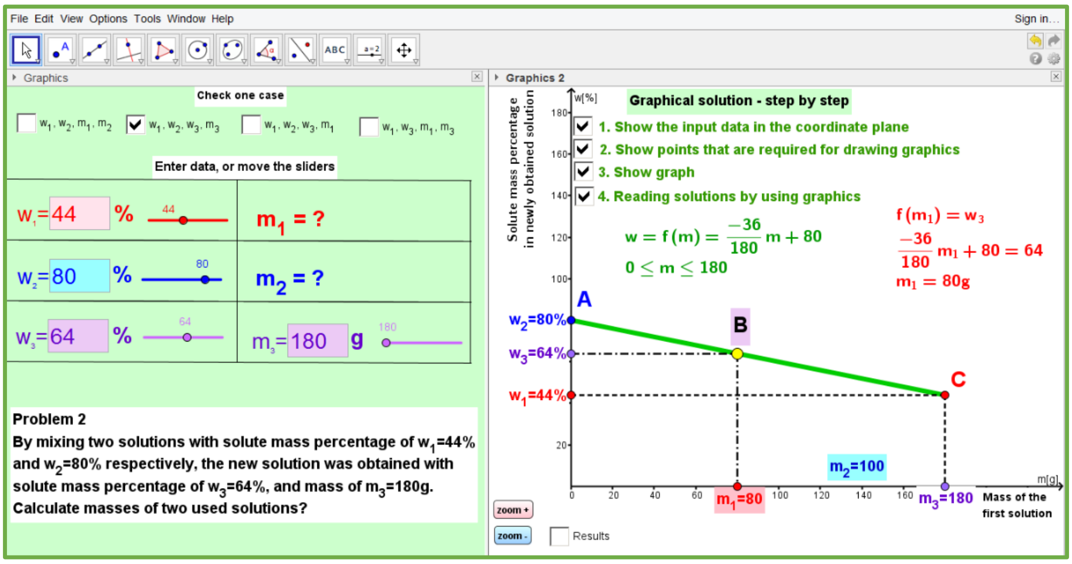
KAV



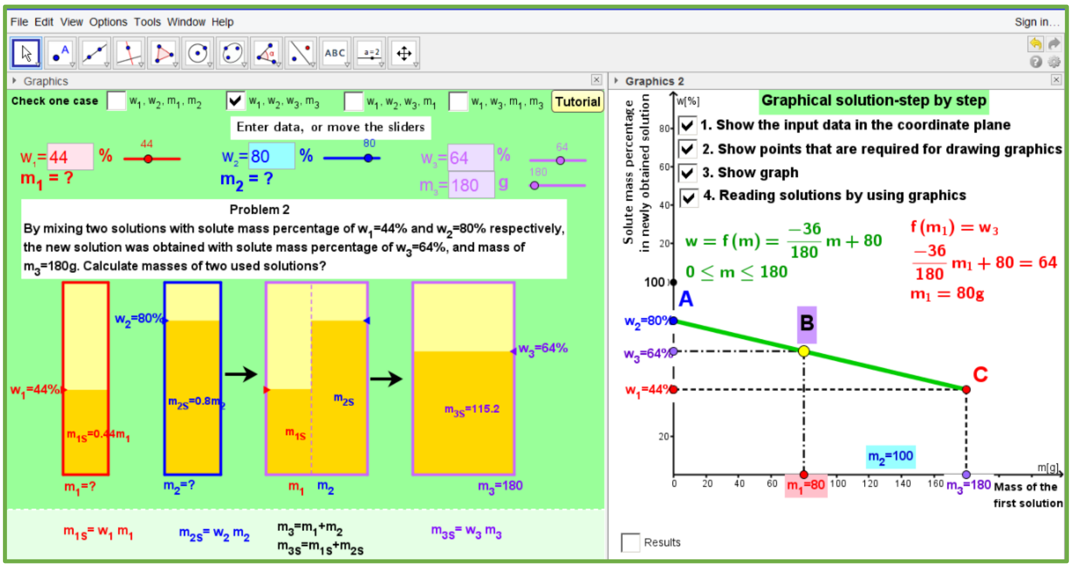
Slika 4.21. *Primer zadatka kada su* w_1, w_2, w_3 *i* m_3 *poznate veličine*

- *Rešavanje zadatka*: Dalje aktivnosti studenata su bile usmerene na grafičko rešavanje zadatka. Zadatak su rešavali u svojim sveskama, a *GeoGebra* model su koristili da dobiju povratne informacije o ispravnosti postupka koji su primenili u rešavanju problema, kao i objašnjenja kako da koriguju svoj rad, ukoliko su napravili neku grešku (Slika 4.22).

AV



KAV

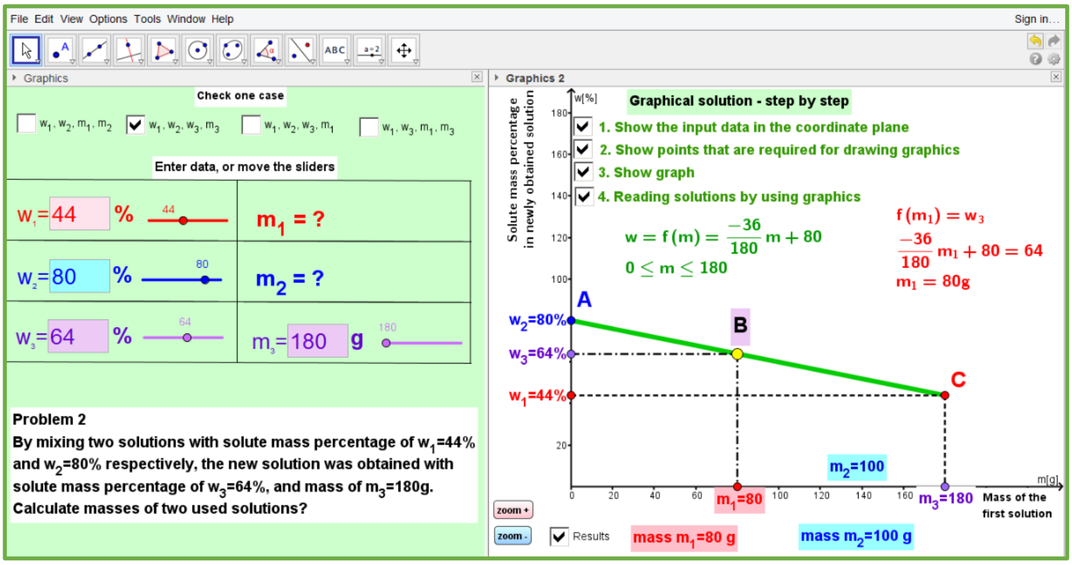


Slika 4.22. *Grafičko rešavanje zadatka – korak po korak*

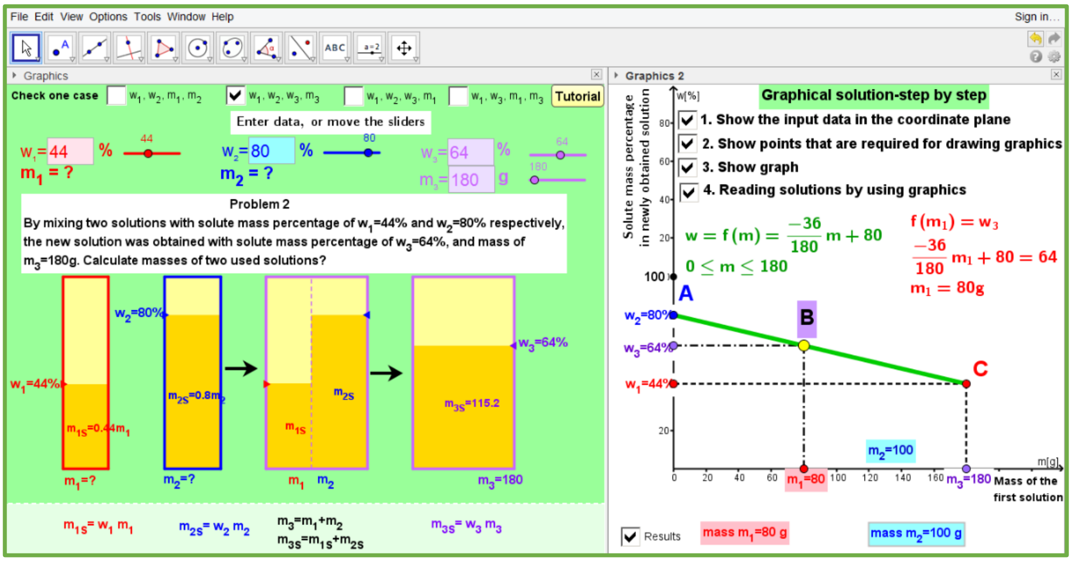
- *Provera rešenja*: Poslednji korak u rešavanju zadatka je provera dobijenih rezultata, aktiviranjem opcije „Rezultati“ (Slika 4.23).

5) *Rad studenata sa GeoGebra modelom u cilju povezivanja znanja o različitim reprezentacijama i usvajanja konceptualnih znanja* – u procesu rešavanja problema, od studenata se zahtevalo da ispitaju kako promena nekog od parametara modela, odnosno ulaznog podatka utiče na vrednost zavisne veličine – izlaznog podatka u modelu. Studenti su pomerali kizače za masu ili procentnu koncentraciju i uočavali promene koje nastaju u grafičkoj, geometrijskoj i algebarskoj reprezentaciji. Vizuelnim rezonovanjem su mogli da uspostave veze između karakteristika različitih reprezentacija i da izvedu zaključke koji predstavljaju osnovu konceptualnog razumevanja problema (detaljno opisano u odeljku 4.2.5).

AV



KAV



Slika 4.23. *Izgled ekrana nakon izbora opcije „Rezultati"*

6) *Diskusija o specijalnim slučajevima problema mešanja rastvora i rešavanje zadataka* – Razmatranje specijalnih slučajeva problema mešanja rastvora u slučaju procentne koncentracije, sprovedeno je frontalnim radom sa studentima, uz njihovo aktivno učešće u diskusiji. Dalje aktivnosti studenata su obuhvatale rad sa *GeoGebra* modelima i samostalno rešavanje zadataka koje je zadao nastavnik.

7) *Rešavanje zadataka sa molarnom koncentracijom* – Nakon ponavljanja bitnih pojmova koji se odnose na koncept molarne koncentracije, nastavni materijali su stavljeni studentima na raspolaganje. U ovoj fazi edukacije, nastavnik nije zadao konkretne zadatke studentima. Prepustio je studentima da prema ličnim potrebama i interesovanjima koriste *GeoGebra* modele i sami postavljaju i rešavaju zadatke.

8) *Diskusija o sprovedenoj edukaciji* – Na samom kraju eksperimenatalne nastave studentima je data prilika da diskutuju i iznesu svoje viđenje novog pristupa nastavi i učenju. Generalno, studenti su imali izuzetno pozitivne utiske o sprovedenoj edukaciji.

Kada je u pitanju novi metodički pristup baziran na vizuelizaciji, dominantna zapažanja i stavovi studenata su: *GeoGebra* modeli su im omogućili da „vide" problem mešanja rastvora; sagledavanje kvantitativnih odnosa je jednostavno i očigledno kada se posmatraju pravougaonici ili grafik; mogu da procene kakve promene nastaju u rastvorima ako se promeni procentna koncentracija ili masa nekog od rastvora. Tokom diskusije dominirali su i pozitivni stavovi studenata koji su se odnosili na samostalni rad sa nastavnim materijalima u računarskom okruženju, zadovoljstvo zbog aktivnog učešća u zajedničkim nastavnim aktivnostima, podsticajnu radnu atmosferu, zainteresovanost i motivaciju tokom nastave.

Rešavanje problema mešanja rastvora u računarskom okruženju primenom inovativnih nastavnih materijala sa vizuelnim reprezentacijama ima odgovarajući metodički značaj u radu sa studentima. Odabrani pristup koristi potencijal vizuelnog mišljenja studenata i omogućava razvoj njihovih sposobnosti da konstruišu i tumače različite reprezentacije, čime se izgrađuju neophodne strukture za celovito i suštinsko razumevanje problema na različite načine.

Rad sa kontrolnim grupama studenata

Rad nastavnika sa K grupama studenata bio je zasnovan na tradicionalnom – algebarskom pristupu obradi problema smeše, sa frontalnim i individualnim oblikom rada. Nastavne aktivnosti usmerene na rešavanje zadataka na različite načine, sprovedene su u cilju sagledavanja problema sa različitih algebarskih aspekata kao i da se uporedi efikasnost pojedinih metoda u rešavanju različitih vrsta zadataka. Osnovna aktivnost nastavnika bila je predavanje, dok su studenti slušali i vodili zabeleške. Nastavnik je u toku edukacije studenata koristio iste zadatke za obe grupe, ali bez primene računara u K grupama. U određenim etapama rada, studenti su zadatke rešavali samostalno, a rešenja zadataka su uz diskusiju ispisivana na tabli i zapisivana u sveske. Tom prilikom nastavnik je zahtevao od studenata da rade postupno i sistematično uz uredno zapisivanje celokupnog postupka i da izvrše proveru rezultata. Rad na postavljenim zadacima podrazumevao je izvođenje odgovarajućih algoritamskih postupaka, što je doprinelo sticanju i proširivanju, u najvećoj meri, isključivo proceduralnog znanja studenata.

Nastavnik je uočio da su algebarski pristup u izučavanju sadržaja i primena klasičnih nastavnih metoda i oblika rada sa K grupama studenata, u znatno manjoj meri podsticali studente da aktivno učestvuju u diskusiji i da samostalno rešavaju zadatke.

4.5. REZULTATI I DISKUSIJA

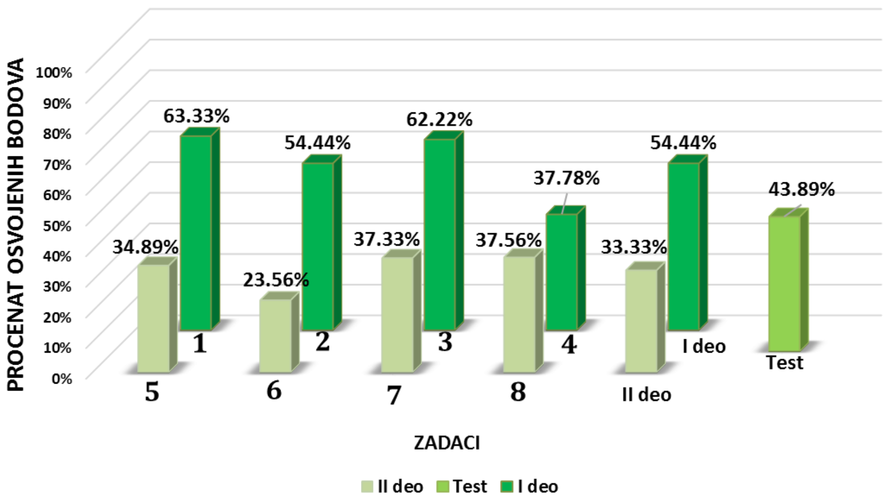
4.5.1. Prikaz i interpretacija rezultata prvog istraživanja

Rezultati inicijalnog testa

Inicijalno testiranje u školskoj 2014/2015. godini realizovano je sa 90 studenata hemije. Studenti su rešavali test IT1 koji je sadržao 8 zadataka, i to 4 zadatka koji su tradicionalnog tipa (prvi deo testa) i 4 problemska zadatka (drugi deo testa). Svaki zadatak je nosio po 10 bodova, pa je maksimalan broj bodova na prvom/drugom delu testa 40, a na celom testu 80 bodova. Grafikon 4.1 prikazuje rezultate inicijalnog testiranja u procentima, po zadacima, delovima testa i testa u celini.

Studenti su u proseku tačno uradili 54,44% prvog i 33,33% drugog dela testa, odnosno 43,89% inicijalnog testa. Postojali su studenti koji su osvojili maksimalan broj bodova, kao i oni koji nisu osvojili ni jedan bod na inicijalnom testiranju.

U prvom delu testa, studenti su bili najuspešniji u rešavanju 1. zadatka (određivanje procentne koncentracije rastvora dobijenog mešanjem dva rastvora) sa 63,33%, što se moglo i očekivati, jer su studenti u svom prethodnom obrazovanju često imali priliku da rešavaju ovakav tip zadataka. Najslabije rešen zadatak je 4. (isparavanje vode iz rastvora) sa 37,78%. Studenti su primenjivali različite algebarske metode za rešavanje zadataka u prvom delu testa, pri čemu je primena formule (8) bila dominantna metoda.



Grafikon 4.1. *Histogram IT1 po zadacima, delovima testa i testu u celini*

U drugom delu testa, najuspešnije je rešen 8. zadatak sa 37,56% (procena mase vode koja može da ispari iz rastvora), a najslabije je rešen 6. zadatak sa 23,56% (procena mogućih vrednosti procentne koncentracije jednog od polaznih rastvora). Studenti su postigli slabije rezultate u rešavanju konceptualnih zadataka (5. i 6. zadatak) u odnosu na zadatke u kojima se primenjuju i proceduralna i konceptualna znanja (7. i 8. zadatak), što može biti indikator disbalansa između konceptualnih i proceduralnih znanja studenata.

Znatan broj studenata pristupio je rešavanju zadataka u drugom delu testa nekom od algebarskih metoda (najčešće, primenom formule), što se može objasniti sledećim činjenicama: 1) zadaci u drugom delu testa imaju sličnu formu kao i zadaci u prvom delu testa (tradicionalni zadaci koji se mogu rešiti primenom algebarskih metoda); 2) sa ovakvom vrstom zadataka studenti se nisu sretali u ranijem školovanju, pa su svoja postojeća znanja, koja su u najvećoj meri samo proceduralna, trebali da primene u rešavanju problema koji zahtevaju primenu konceptualnih znanja; 3) nizak nivo konceptualnih znanja studenata. Analizom zadataka koje studenti nisu uspešno rešili, uočen je nedostatak primene konceptualnih znanja i oslanjanje na formule i algoritamske postupke.

Poređenjem prosečnog broja osvojenih bodova na prvom i petom zadatku (66,33% i 34,89%), i drugom i šestom (54,44% i 23,56%) može se zaključiti da su studenti postigli znatno bolje rezultate u rešavanju tradicionalnih zadataka gde se primenjuju standardni algoritamski postupci, u odnosu na rešavanje konceptualnih problema. Navedeni zaključak ukazuje da kod studenata postoji disbalans između proceduralnih i konceptualnih znanja.

Statistička obrada rezultata inicijalnog testa znanja realizovana je na osnovu bodovnog postignuća studenata, analizom srednjih vrednosti. Tabela 4.2 daje pregled statističkih rezultata inicijalnog testa. Prosečan broj bodova u prvom delu testa je 21,78 (54,44%) , u drugom 13,33 (33,33%), a na celom testu 35,11 (43,89%). Izračunati koeficijenti varijacije za delove testa i test ucelini, veći su od 30%, što ukazuje da rezultati nisu homogeni.

Kolmogorov-Smirnov test je primenjen za ispitivanje normalnosti raspodela rezultata prvog i drugog dela inicijalnog testa. Dobijene vrednosti za prvi ($D = 0{,}162$ i $p = 0{,}015 < 0{,}05$) i drugi ($D = 0{,}186$ i $p = 0{,}003 < 0{,}05$) deo testa ukazuju da distribucije promenljivih ne odgovaraju normalnoj raspodeli. Iz tih razloga, ispitivanje statističke značajnosti razlike između rezultata studenata na prvom i drugom delu testa sprovedeno je primenom neparametrijskog Wilcoxon-testa dva zavisna uzoraka. Vrednost test statistike $V = 2831{,}00$ i nivo značajnosti $p = 0{,}000 < 0.01$ (Tabela 4.2) upućuju na zaključak da postoji statistički značajna razlika u postignućima studenata na prvom i drugom delu.

Tabela 4.2. *Statistički rezultati IT1 po delovima testa i testu u celini*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_1-M_2(%)	*Wilcoxon test*	
								V	***p***
I deo	90	21,78	54,44%	14,27	65,51%	1,50	21,11%	2831,00	0,000
II deo	90	13,33	33,33%	12,65	94,89%	1,33			
Test	90	35,11	43,89%	24,11	68,67%	2,54			

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_1-M_2(%) – razlika aritmetičkih sredina I i II dela testa izražena u %; V – vrednost test statistike; *p* –nivo statističke značajnosti.

Na osnovu analize dobijenih rezultata inicijalnog testiranja studenata, možemo da potvrdimo hipotezu H1, i konstatujemo da su studenti pokazali statistički značajno bolje rezultate na prvom delu testa, u odnosu na drugi deo inicijalnog testa.

Takav ishod je očekivan jer su studenti zadatke u prvom delu testa mogli da rešavaju nekom od metoda koje se najčešće primenjuju u nastavi (primenom jednačine, sistema jednačina, formule, pravila mešanja ili pravila zvezde), dok je za rešavanja problemskih zadataka iz drugog dela testa potrebno konceptualno znanje i njegova primena u novim okolnostima.

Formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe studenata

Eksperimentalna i kontrolna grupa imaju približan nivo predznanja vezanih za nastavne sadržaje o mešanju rastvora i slične distribucije bodova, kako po delovima, tako i na inicijalnom testu u celini (Tabela 4.3).

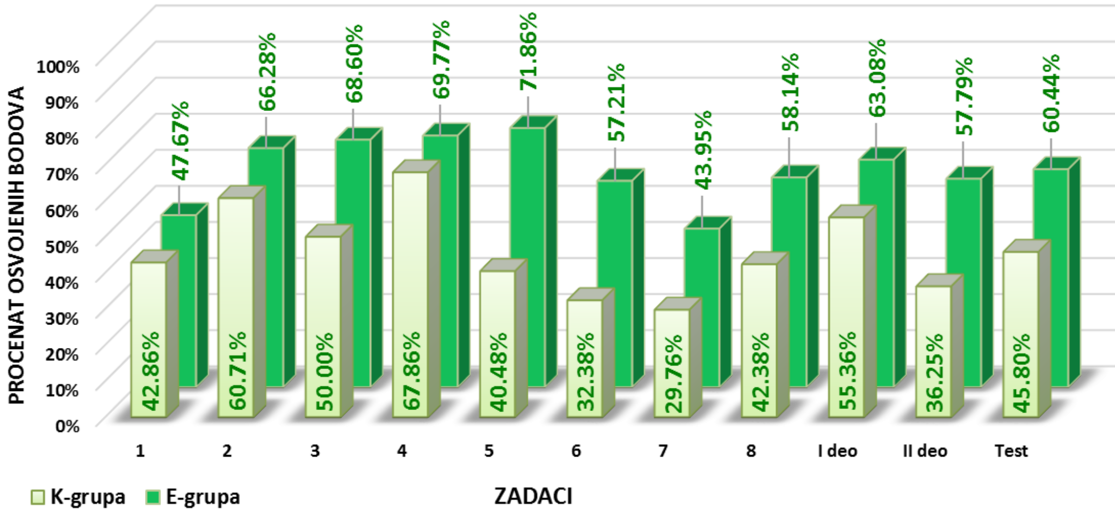
Tabela 4.3. *Formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe - statistički rezultati*

	E grupa					K grupa				
	N	**M**	**M(%)**	**SD**	**CV**	**N**	**M**	**M(%)**	**SD**	**CV**
I deo	45	21,78	54,44%	14,82	68,03%	45	21,78	54,44%	13,86	63,66%
II deo	45	12,89	32,22%	12,78	99,17%	45	13,78	34,44%	12,65	91,82%
Test	45	34,67	43,33%	24,65	71,12%	45	35,56	44,44%	23,82	67,01%

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije.

Rezultati finalnog testa

Finalno testiranje je realizovano sa 85 studenata, 2 studenta iz eksperimentalne i 3 iz kontrolne grupe nisu radili test. Finalni test znanja (FT1) je sadržao 8 zadataka, od kojih je svaki bodovan sa 10 bodova. Rezultati finalnog testiranja studenata po zadacima, delovima testa i testa u celini, u prosečnom iznosu bodova prikazani su grafički (Grafikon 4.2).



Grafikon 4.2. *Uporedni histogram FT1 po zadacima, delovima testa i testu u celini*

Studenti E grupe su u proseku tačno uradili 63,08% prvog dela i 57,79% drugog dela testa, odnosno 60,44% finalnog testa. U proseku, studenti K grupe tačno su uradili 55,36% prvog dela i 36,25% drugog dela testa, odnosno 45,80% finalnog testa. U obe grupe postojali su studenti koji su osvojili maksimalan broj bodova (pet studenata u E i jedan u K grupi). Minimalni broj bodova u E grupi iznosi 10 bodova, a u K grupi 0 bodova. Eksperimentalna grupa je na svim zadacima postigla bolji uspeh od kontrolne.

U prvom delu testa, obe grupe su postigle najbolje rezultate u rešavanju 4. zadatka koji se odnosio na problem dodavanja čiste supstance polaznom rastvoru. Najslabiji rezultati ostvareni su u 1. zadatku – problem određivanja masa polaznih rastvora, što je bilo i očekivano, s obzirom na složenost postupka rešavanja ovog zadatka.

Analizom studentskih radova utvrđeno je da su u prvom delu testa, studenti E grupe u nekim zadacima primenjivali grafičku metodu kako za rešavanje, tako i za proveru dobijenih rezultata. Međutim, u ovom delu testa grafička metoda je manje primenjivana u odnosu na algebarske metode, što se može objasniti time da četiri sata nastave nije bilo dovoljno da nova znanja o grafičkoj metodi prevagnu nad postojećim znanjima studenata o algebarskim metodama. Studenti K grupe su rešavali zadatke algebarskim metodama, pri čemu je primena formule bila dominantna metoda. U odnosu na inicijalno testiranje, studenti K grupe su na finalnom testiranju u većoj meri rešavali zadatke primenom jednačina, sistema jednačina i pravila zvezde.

U drugom delu testa, studenti E grupe su bili najuspešniji u rešavanju 5. zadatka (određivanje najmanje i najveće vrednosti procentne koncentracije novonastalog rastvora) sa 71,86%, a studenti K grupe su najbolje rezultate postigli u rešavanju 8. zadatka (određivanje najmanje i najveće vrednosti mase vode koja može da ispari iz rastvora) sa 42,38%. Najslabije rešen zadatak u obe grupe je 7. zadatak (43,95% u E grupi i 29,76% u K grupi). Uvidom u radove studenata, došlo se do zaključka da za znatan broj njih koji su primenjivali neku od algebarskih metoda, jednačina sa dve nepoznate je predstavljala konfliktnu situaciju i prepreku u izvođenju pravilnih zaključaka prilikom rešavanja zadatka.

Studenti E grupe su veoma uspešno rešili zadatake koji proveravaju konceptualna znanja o problemu mešanja rastvora (5. i 6. zadatak) i u ovim zadacima je ostvarena najveća razlika između grupa. Razlika u rezultatima studenata u reševanju 5. zadatka je 31,38% Peti zadatak je u proseku rešen sa 71,86% u E grupi, a sa 40,48% u K grupi. U proseku, šesti zadatak tačno je rešilo 57,21% studenata E, a 32,38% K grupe. Ovakvi rezultati se mogu objasniti pozitivnim uticajem nastave realizovane kognitivno-vizuelnim pristupom na usvajanje i primenu konceptualnih znanja kod studenata E grupe.

Studenti K grupe su zadatke u drugom delu finalnog testa rešavali slično kao na inicijalnom testu, dok su studenti E grupe uglavnom primenjivali grafičku metodu. Većina studenata E grupe koji su tačno rešili 5. ili 6. zadatak, primenili su grafičku metodu.

Tabela 4.4 daje pregled statističkih podataka rezultata finalnog testiranja. Dobijeni podaci govore da je E grupa pokazala bolje rezultate na oba dela testa i na testu u celini. Najveća razlika aritmetičkih sredina broja osvojenih bodova u korist E grupe je ostvarena u drugom delu testa sa 21,54%. U odnosi na inicijalni test, koeficijenti varijacije finalnog testiranja su manji, ali i dalje veći od 30%, što ukazuje da su rezultati studenata nehomogeni. Najveći koeficijenti varijacije, kod obe grupe su u drugom delu testa, a nehomogenost u rezultatima je izraženija kod K grupe.

Tabela 4.4. *Statistički rezultati FT1 po delovima testa i na testu u celini*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	*t-test*	
								t	***p***
				I deo					
E	43	25,23	63,08%	11,90	47,16%	1,81	7,72%	1,16	0,247
K	42	22,14	55,36%	12,40	56,01%	1,91			
				II deo					
E	43	23,12	57,79%	11,55	49,96%	1,76	21,54%	3,38	0,001
K	42	14,50	36,25%	11,93	82,30%	1,84			
				Test					
E	43	48,35	60,44%	19,15	39,61%	2,95	14,63%	2,54	0,013
K	42	36,64	45,80%	23,05	62,89%	3,56			

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K(%) – razlika aritmetičkih sredina E i K grupe, izražena u %; t – vrednost test statistike; p – nivo statističke značajnosti.

Normalnost distribucija promenljivih za E grupu potvrđena je testom Kolmogorov-Smirnov, na prvom ($D = 0{,}144$ i $p = 0{,}310 > 0{,}05$) i drugom delu testa ($D = 0{,}114$ i $p = 0{,}603 > 0{,}05$) i na testu u celini ($D = 0{,}104$ i $p = 0{,}718 > 0{,}05$). Kontrolna grupa takođe ima normalnu raspodelu na prvom delu testa ($D = 0{,}122$ i $p = 0{,}533 > 0{,}05$), drugom delu testa ($D = 0{,}144$ i $p = 0{,}323 > 0{,}05$) kao i na testu u celini ($D = 0{,}098$ i $p = 0{,}794 > 0{,}05$). Kako su sve raspodele normalne, to je statističko testiranje značajnosti razlike aritmetičkih sredina rezultata studenata E i K grupe realizovano primenom parametrijskog Studentovog t-testa za dva nezavisna uzorka.

Za prvi deo testa izračunate vrednosti za test statistiku ($t = 1{,}16$) i nivo značajnosti ($p = 0{,}247 > 0{,}05$) upućuju na zaključak da ne postoji statistički značajna razlika u postignućima studenata E i K grupe na prvom delu finalnog testa.

Na osnovu statističkih rezultata drugog dela testa ($t = 3{,}38$ i $p = 0{,}001 < 0{,}01$), sa sigurnošću od 99% tvrdimo da postoji statistički značajna razlika između rezultata E i K grupe na drugom delu finalnog testa, u korist E grupe.

Za finalni test u celini, dobijena je vrednost test statistike $t = 2{,}54$ i nivo značajnosti $p = 0{,}013 < 0{,}05$. Zaključujemo, sa sigurnošću od 95%, da u rezultatima studenata E i K grupe postignutim na finalnom testu znanja, postoji statistički značajna razlika, u korist E grupe.

Na osnovu analize dobijenih rezultata finalnog testiranja studenata, možemo da potvrdimo pomoćne hipoteze H3 i H4 i konstatujemo da su učenici eksperimentalne grupe pokazali statistički značajno bolje rezultate na drugom delu testa i testu u celini, od učenika kontrolne grupe. Pomoćnu hipotezu H2 delimično prihvatamo i možemo da konstatujemo da su studenti eksperimentalne grupe pokazali bolje rezultate u rešavanju prvog dela testa, od studenata kontrolne grupe, ali da ta razlika nije statistički značajna.

U cilju testiranja statističke značajnosti ostvarenih razlika na prvom i drugom delu testa, za eksperimentalnu, odnosno kontrolnu grupu studenata, realizovana je Studentovim t-testom razlike aritmetičkih sredina dva zavisna uzorka. Dobijeni statistički rezultati prikazani su u Tabeli 4.5.

Za E grupu dobijeni su sledeći rezultati: $t = 1{,}03$ i $p = 0{,}310 > 0{,}05$, a za K grupu $t = 6{,}32$ i $p = 0{,}000 < 0{,}01$. Ovakvi rezultati pokazuju da razlika u rezultatatima prvog i drugog dela testa, kod E grupe studenata nije statistčki značajna, dok je kod K grupe utvrđena razlika statistički značajna, u korist prvog dela testa.

Tabela 4.5. *Statistički rezultati I i II dela finalnog testa*

	E					K				
	N	M	SD	*t-test* t	*t-test* p	N	M	SD	*t-test* t	*t-test* p
I deo	43	25,23	11,90	1,03	0,310	42	22,14	12,40	6,32	0,000
II deo	43	23,12	11,55			42	14,50	11,93		

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; SD – standardna devijacija; t – vrednost test statistike; p – nivo statističke značajnosti.

Na osnovu ove analize, pomoćne hipoteze H5 i H6 prihvatamo. Konstatujemo da razlika u rezultatima studenata eksperimentalne grupe na prvom i drugom delu finalnog testa nije statistički značajna. Studenti kontrolne grupe su pokazali statistički značajno bolje rezultate na prvom delu testa, u odnosu na drugi deo finalnog testa.

Objašnjenje za ovakve rezultate moglo bi se naći u činjenici da je eksperimentalni rad sa studentima realizovan različitim metodičkim pristupima. Primena kognitivno-vizuelnog pristupa je rezultovala približnim rezultatima studenata E grupe na prvom i drugom delu testa. Značajno slabiji rezultati K grupe u drugom dela testa u odnosu na rezultate prvog dela mogu se pripisati tradicionalnim metodičkim pristupima.

Razmotrivši ukupne efekte primene kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji odabranih sadržaja iz oblasti problema smeše, generalni zaključak je da su efekti pozitivni. Na osnovu statističke analize, potvrđeno je pet pomoćnih hipoteza (prva, treća, četvrta, peta i šesta), dok je drugu pomoćnu hipotezu bilo moguće samo delimično potvrditi.

Nakon potvrđenih pet i delimično potvrđene jedne pomoćne hipoteze, možemo da potvrdimo opštu hipotezu istraživanja i konstatujemo da se primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji odabranih sadržaja iz oblasti problema smeše postižu statistički značajno bolja postignuća studenata, u odnosu na postignuće kakvo se može ostvariti primenom tradicionalnih metodičkih pristupa.

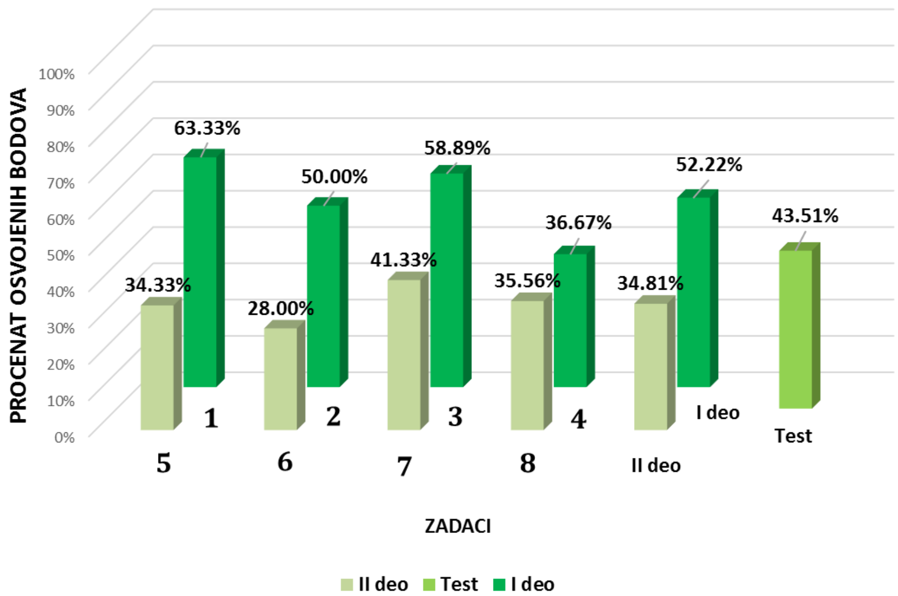
Budući da je primena kognitivno-vizuelnog pristupa u rešavanju tradicionalnih zadataka imala pozitivne efekte, koji nisu na nivou statističke značajnosti, to je drugo istraživanje bilo usmereno na primenu metoda koje će uticati na unapređenje sposobnosti i veština studenata u rešavanju tradicionalnih zadataka i na poboljšanje sveukupnih obrazovnih efekata.

4.5.2. Prikaz i interpretacija rezultata drugog istraživanja

Rezultati inicijalnog testa

Inicijalno testiranje u školskoj 2014/2015. godini realizovano je sa 90 studenata hemije. Grafikon 4.3 prikazuje rezultate inicijalnog testiranja po zadacima, delovima testa i testa u celini.

Studenti su na prvom delu testa ostvarili u proseku 52,22%, na drugom delu 34,81%, odnosno na inicijalnom testu 43,51%. Na inicijalnom testiranju, minimalan broj osvojenih bodova izražen procentualno je 0%, a maksimalan 100%.



Grafikon 4.3. *Histogram IT2 po zadacima, delovima testa i testu u celini*

U prvom delu testa, najuspešnije je rešen 1. zadatak (određivanje molarne koncentracije rastvora dobijenog mešanjem dva rastvora) sa 63,33%, a najslabije rešen zadatak je 4. (problem isparavanja vode iz rastvora u slučaju molarne koncentracije) sa 36,67%.

Studenti su, u drugom delu testa, bili najuspešniji u rešavanju 7. zadatka (određivanje najmanje i najveće moguće vrednosti mase čiste supstance koja je dodata polaznom rastvoru) sa 41,33%. Najslabiji rezultati postignuti su u 6. zadatku (određivanje najmanje i najveće moguće vrednosti molarne koncentracije jednog od polaznih rastvora), svega 28%.

Kao i u prvom istraživanju, disbalans između konceptualnih i proceduralnih znanja studenata evidentan je i u drugom inicijalnom testiranju. Pokazatelji disbalansa su: slabiji rezultati studenata u rešavanju 5. i 6. zadatka (u proseku 31,17%) u odnosu na 7. i 8. zadatak (u proseku 38,45%) i značajno slabiji rezultati u odnosu na 1. i 2. zadatak (u proseku 56,67%).

Analizom radova studenata u drugom inicijalnom testiranju došlo se do istih zaključaka kao i u prvom istraživanju, kada su u pitanju metode koje su studenti primenjivali u rešavanju zadataka, njihove poteškoće i slabosti u postojećem znanju.

Tabela 4.6 daje pregled rezultata IT2 dobijenih statističkom obradom podataka na osnovu bodovnog postignuća studenata, analizom srednjih vrednosti. Studenti su ostvarili u proseku 20,89% (52,22%) bodova na prvom delu testa, 13,92% (34,81%) na drugom delu i 34,81% (43,51%) na celom testu. Koeficijenti varijacije za delove testa i test ucelini veći su od 30%, pa se može zaključiti da rezultati nisu homogeni.

Tabela 4.6. *Statistički rezultati IT2 po delovima testa i na testu u celini*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_1-M_2(%)	***t-test***	
								t	***p***
I deo	90	20,89	52,22%	12,95	62,00%	1,37	17,42%	6,98	0,000
II deo	90	13,92	34,81%	11,83	84,99%	1,25			
Test	90	34,81	43,51%	22,93	65,87%	2,41			

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_1-M_2(%) – razlika aritmetičkih sredina I i II dela testa, izražena u %; *t* – vrednost test statistike; *p* – nivo statističke značajnosti.

Normalnost distribucija promenljivih potvrđena je testom Kolmogorov-Smirnov, za prvi ($D = 0{,}139$ i $p = 0{,}055 > 0{,}05$) i drugi ($D = 0{,}112$ i $p = 0{,}199 > 0{,}05$) deo testa. Iz tog razloga je statistička značajnost razlike između rezultata studenata na prvom i drugom delu inicijalnog testa ispitana primenom Studentovog t-testa.

Na osnovu podataka dobijenih u Tabeli 4.6 (vrednost test statistike $t = 6{,}98$ i nivo značajnosti $p = 0{,}000 < 0.01$), možemo da zaključimo da postoji statistički značajna razlika u postignućima studenata na prvom i drugom delu IT2, u korist prvog dela, što potvrđuje posebnu hipotezu H1. Možemo da konstatujemo da su studenti pokazali statistički značajno bolje rezultate na prvom delu testa, u odnosu na drugi deo inicijalnog testa.

Formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe studenata

Za potrebe drugog istraživanja, formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe je sprovedeno na isti način kao i u prvom istraživanju. Statistički rezultati dati u Tabeli 4.7 pokazuju da E i K grupa imaju približan nivo predznanja iz oblasti problema mešanja rastvora i slične distribucije bodova, kako po delovima testa, tako i na IT2 u celini.

Tabela 4.7. *Formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe - statistički rezultati*

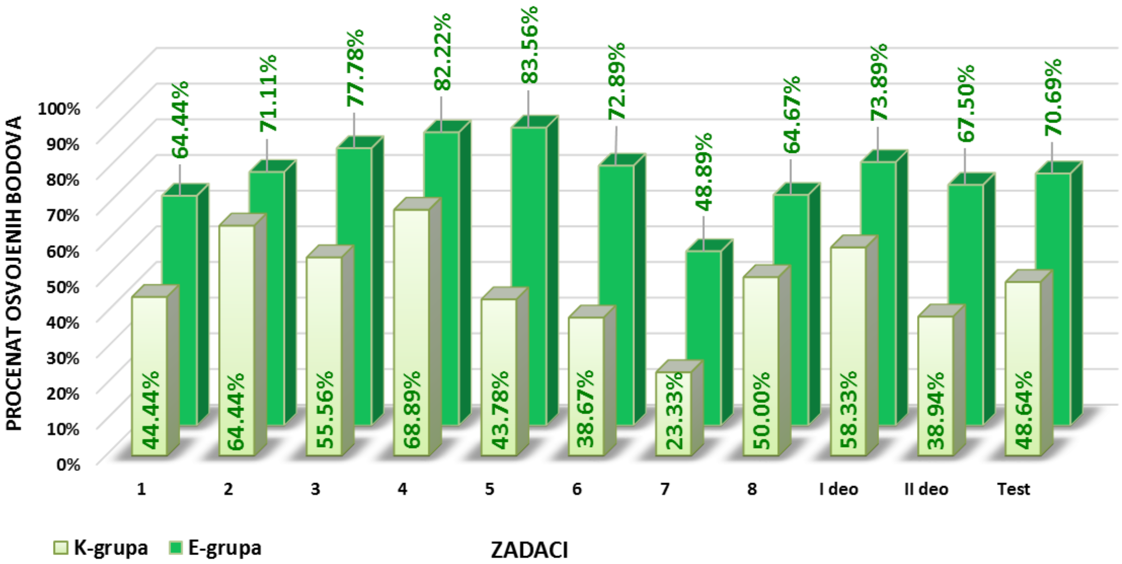
	E grupa					K grupa				
	N	**M**	**M(%)**	**SD**	**CV**	**N**	**M**	**M(%)**	**SD**	**CV**
I deo	45	20,89	52,22%	12,94	61,,93%	45	20,89	52,22%	13,11	62,77%
II deo	45	13,89	34,72%	11,56	83,24%	45	13,96	34,89%	12,23	87,63%
Test	45	34,78	43,47%	22,60	64,98%	45	34,84	43,56%	23,51	67,48%

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije.

Rezultati finalnog testa

Finalno testiranje u drugom istraživanju je realizovano sa 90 studenata. Na Grafikonu 4.4 prikazani su rezultati finalnog testa, u procentima, za svaki zadatak, oba dela testa i za finalni test u celini.

U proseku, studenti E grupe su tačno rešili 73,89% prvog dela i 67,50% drugog dela testa, odnosno 70,69% finalnog testa. Studenti K grupe su u proseku tačno rešili 55,36% prvog dela i 36,25% drugog dela testa, odnosno 45,80% finalnog testa. Sedam studenata E grupe i dva studenta K grupe su osvojili maksimalan broj bodova na FT2. Najmanji broj osvojenih bodova u E grupi je 20 bodova, a u K grupi je 10 bodova. Eksperimentalna grupa je na svim zadacima postigla bolji uspeh od kontrolne.



Grafikon 4.4. *Uporedni histogram FT2 po zadacima, delovima testa i testu u celini*

U prvom delu testa, obe grupe su postigle najbolje rezultate u rešavanju 4. zadatka ($E = 82{,}22\%$, $K = 68{,}89\%$), a najslabije u 1. zadatku (E=64,44%, K=44,44%). E grupa je u drugom delu testa najuspešnije rešila 5. zadatak (83,56%), a K grupa 8. zadatak (50,00%). Najslabije rešen zadatak drugog dela testa, u obe grupe je 7. zadatak ($E = 48{,}89\%$, $K = 23{,}33\%$).

Što se tiče uspešnosti u rešavanju konceptualnih zadataka (5. i 6. zadatak), može se uočiti da su studenti E grupe u izuzetno velikom procentu tačno rešili ove zadatke (u proseku 78,23%), pa možemo reći da u ovoj grupi postoji sasvim zadovoljavajuće razumevanje sadržaja. U K grupi, manje od polovine studenata (41,23%) je tačno rešilo peti i šesti zadatak, pa možemo zaključiti da u ovoj grupi pretežno preovladava konceptualno nerazumevanje sadržaja.

Kako bi se stekao uvid u načine razmatranja problema koje su studenti koristili u procesu rešavanja zadataka, koje je uslovljeno izabranom reprezentacijom, izvršena je analiza njihovih radova. Na osnovu sprovedene analize studentskih radova izvršeno je klasifikovanje primenjivanih reprezentacija i metoda rešavanja. Studenti su na finalnom testiranju za predstavljanje problema mešanja rastvora koristili konkretnu vizuelnu reprezentaciju (dvodimenzionalni dijagram), apstraktnu vizuelnu reprezentaciju (grafik linearne funkcije) i algebarsku reprezentaciju (jednačina, sistem jednačina, formula, pravilo zvezde, pravilo mešanja). Za svaki zadatak na FT2, evidentirano je u kojoj meri su primenjivane pojedine reprezentacije problema mešanja rastvora, odnosno metode rešavanja zadataka, bez obzira na broj osvojenih bodova na zadatku.

Svi studenti kontrolne grupe su koristili algebarsku reprezentaciju problema mešanja rastvora i primenjivali algebarske metode rešavanja zadataka. Kod zadataka u prvom delu testa dominira primena formule ali ima i studenata koji su primenjivali pravilo mešanja i pravilo zvezde. U drugom delu testa, studenti K grupe su u rešavanju zadataka, osim formulske metode primenjivali i konceptualna znanja.

Analiza primenjivanih reprezentacija problema mešanja rastvora i metoda njihovog rešavanja od strane studenata E grupe, za svaki pojedinačni zadatak, delove testa i finalni test u celini, prikazana je u Tabeli 4.8.

Tabela 4.8. *Rezultati analize primenjivanih reprezentacija i metoda rešavanju zadataka na FT2 za E grupu , izraženi u %*

Zadatak	KV	AV	V	A	R	N
1	17,77	35,56	53,33	28,89	82,22	17,78
2	35,56	20,00	55,56	31,11	86,67	13,33
3	33,33	24,45	57,78	31,11	88,89	11,11
4	22,22	40,00	62,22	28,89	91,11	8,89
I deo	**27,22**	**30,00**	**57,22**	**30,00**	**87,22**	**12,78**
5	8,89	77,78	86,67	6,67	93,33	6,67
6	6,67	68,89	75,56	8,89	84,44	15,56
7	11,11	53,33	64,44	8.,89	73,33	26,67
8	22,22	44,45	66,67	15,56	82,22	17,78
II deo	**12,22**	**61,11**	**73,33**	**10,00**	**83,33**	**16,67**
Test	**19,72**	**45,56**	**65,28**	**20,00**	**85,28**	**14,72**

Legenda: KV – konkretna vizuelna reprezentacija; AV – apstraktna vizuelna reprezentacija; V – vizuelna reprezentacija (zbir KV i AV) ; A – algebarska reprezentacija; R – zadatak je rađen (zbir V i A); N – zadatak nije rađen.

U rešavanju zadataka prvog dela testa, studenti su primenjivali vizuelne reprezentacije u proseku 57,22%, a algebarske reprezentacije 30%. Konkretna i apstraktna vizuelna reprezentacija su približno zastupljene u prvom delu testa (27,22% konkretna i 30,00% apstraktna), pri čemu je za probleme sa molarnom koncentracijom (2. i 3. zadatak) veći broj studenata koristio konkretnu vizuelnu reprezentaciju, a za probleme sa procentnom koncentracijom (1. i 4. zadatak), apstraktnu reprezentaciju. U drugom delu testa vizuelne reprezentacije su primenjivane u znatno većem broju (73,33%) u odnosu na algebarske (10,00%). Peti i šesti zadatak, kod kojih su konceptualna znanja najočiglednije povezana sa grafikom linearne funkcije, studenti su u najvećem broju rešavali upravo primenom apstraktne vizuelne reprezentacije (77,78% i 68,89%).

Što se tiče finalnog testa u celini, najzastupljenija je apstraktna vizuelna reprezentacija sa 45,56%, dok su konkretna vizuelna i algebarska reprezentacija zastupljene sa 19,72%, odnosno 20,00%. Na osnovu rezultata sprovedene analize može se zaključiti da je vizuelizacija problema mešanja rastvora sasvim dobro prihvaćena i u velikoj meri primenjivana od strane studenata E grupe, posebno u drugom delu testa.

Statističke podatke o rezultatima finalnog testiranja prikazuje Tabela 4.9. Eksperimentalna grupa pokazala je bolje rezultate od kontrolne. Razlika aritmetičkih sredina broja osvojenih bodova, na prvom delu testa je 15,56%, na drugom delu 21,54%, a na celom FT2 iznosi 22,06%. Koeficijenti varijacije finalnog testiranja su manji u odnosi na inicijalni test. E grupa samo u drugom delu testa ima koeficijent varijacije veći od 30%, pa se može reći da je homogena u znanju koje je ispitano finalnim testom. Dobijeni koeficijenti varijacije za K grupu pokazuju da ova grupa studenata nije homogena u znanju ispitanim finalnim testom. Najveći koeficijenti varijacije, kod obe grupe su u drugom delu testa.

Tabela 4.9. *Statistički rezultati FT2 po delovima testa i na testu u celini*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	*t-test*		$\eta 2$
								t	*p*	
					I deo					
E	45	29,56	73,89%	7,37	24,94%	1,10	15,56%	3,70	0,000	0,13
K	45	23,33	58,33%	8,53	36,55%	1,27				
					II deo					
E	45	27,00	67,50%	11,97	44,33%	1,78	28,56%	4,43	0,000	0,18
K	45	15,58	38,94%	12,46	80,01%	1,86				
					Test					
E	45	56,56	70,69%	16,11	28,48%	2,40	22,06%	4,82	0,000	0,21
K	45	38,91	48,64%	18,51	47,58%	2,76				

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K – razlika aritmetičkih sredina E i K grupe, izražena u %; *t* –vrednost test statistike; *p* – nivo statističke značajnosti, η^2 – veličina efekta.

Za E grupu, normalnost distribucija promenljivih potvrđena je testom Kolmogorov-Smirnov, na prvom ($D = 0{,}197$ i $p = 0{,}054 > 0{,}05$) i drugom delu testa ($D = 0{,}189$ i $p = 0{,}069 >$

0,05) i na testu u celini ($D = 0{,}140$ i $p = 0{,}316 > 0{,}05$). Kontrolna grupa takođe ima normalnu raspodelu na prvom delu testa ($D = 0{,}187$ i $p = 0{,}075 > 0{,}05$), drugom delu testa ($D = 0{,}141$ i $p = 0{,}312 > 0{,}05$) kao i na testu u celini ($D = 0{,}141$ i $p = 0{,}308 > 0{,}05$). S obzirom na to da sve distribucije rezultata odgovaraju normalnoj raspodeli, statistička značajnost ostvarenih razlika između dve grupe proverena je Studentovim t-testom za dva nezavisna uzorka.

Na osnovu rezultata prikazanih u Tabeli 4.9, za prvi deo testa ($t = 3{,}70$ i $p = 0{,}000 < 0{,}01$), drugi deo testa ($t = 4{,}43$, $p = 0{,}000 < 0{,}01$) i test u celini ($t = 4{,}82$ i $p = 0{,}000 < 0{,}01$), sa sigurnošću od 99% tvrdimo da je razlika između rezultata E i K grupe na prvom delu, drugom delu i finalnom testu u celini statistički značajna, u korist studenata E grupe.

Na osnovu analize dobijenih rezultata finalnog testiranja studenata, možemo da potvrdimo pomoćne hipoteze H2, H3 i H4 i konstatujemo da su studenti eksperimentalne grupe pokazali statistički značajno bolje rezultate na oba dela testa i testu u celini, od studenata kontrolne grupe.

Potvrdu jačine uticaja eksperimentalnog programa daju nam i dobijene vrednosti eta-kvadrat koeficijenata, koje pokazuju da je kognitivno-vizuelni metodički pristup, kao eksperimentalni faktor, imao srednji uticaj u prvom delu testa ($\eta^2 = 0{,}13$), a veliki uticaj u drugom delu ($\eta^2 = 0{,}18$) i testu u celini ($\eta^2 = 0{,}21$).

Statistička obrada prvog i drugog dela finalnog testa, Studentovim t-testom za dva zavisna uzorka, sprovedena je u cilju provere statističke značajnosti ostvarenih razlika na prvom i drugom delu testa, za eksperimentalnu, odnosno kontrolnu grupu studenata. Statistički rezultati su prikazani u Tabeli 4.10.

Tabela 4.10. *Statistički rezultati I i II dela finalnog testa*

	E					K				
	N	**M**	**SD**	***t-test***		**N**	**M**	**SD**	***t-test***	
				t	***p***				***t***	***p***
I deo	45	29,56	7,37	1,47	0,148	45	23,33	8,53	4,89	0,000
II deo	45	27,00	11,97			45	15,58	12,46		

Legenda: N – broj studenata; M – srednja vrednost broja bodova; SD – standardna devijacija; t – vrednost test statistike; p – nivo statističke značajnosti.

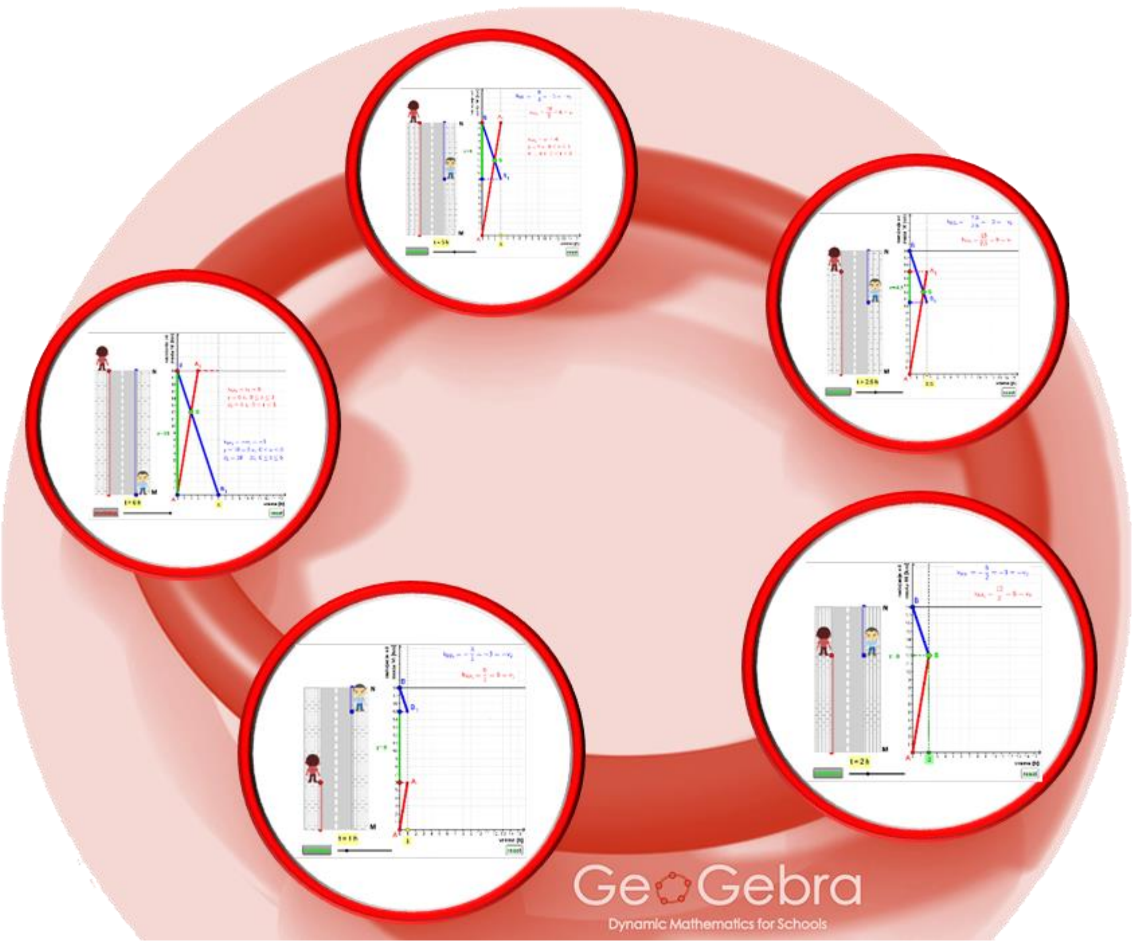
Dobijeni statistički rezultati za E grupu ($t = 1{,}47$ i $p = 0{,}148 > 0{,}05$) i K grupu ($t = 4{,}89$ i $p = 0{,}000 < 0{,}01$), ukazuju da razlika u rezultatatima prvog i drugog dela testa, kod E grupe studenata nije statistički značajna, dok je kod K grupe statistički značajna, u korist prvog dela testa. Na osnovu ove analize, možemo potvrditi pomoćne hipoteze H5 i H6.

Na osnovu statističke analize, sve pomoćne hipoteze su potvrđene, što implicira prihvatanje opšte hipoteze istraživanja i izvođenje zaključka da se primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji sadržaja iz oblasti problema smeše, postižu statistički značajno bolja postignuća studenata, u odnosu na postignuće kakvo se može ostvariti primenom tradicionalnih metodičkih pristupa.

Poređenjem rezultata prvog i drugog istraživanja dolazi se do zaključka da se bolji efekti u realizaciji kognitivno-vizuelnog pristupa postižu kada se za vizuelizaciju problema mešanja rastvora koriste i konkretna i apstraktna vizuelna reprezentacija, nego kada se koristi samo apstraktna vizuelna reprezentacija.

5

VIZUELIZACIJA GRAFIKOM LINEARNE FUNKCIJE



U ovoj glavi disertacije razmatran je kognitivno-vizuelni pristup rešavanju problema primenom linearne funkcije, sa posebnim naglaskom na vizuelizaciju grafičkim reprezentacijama funkcija. U fokusu predloženog pristupa je vizuelizacija problema kretanja i uspostavljanje različitih strategija njihovog rešavanja. S obzirom na to da je kognitivno-vizuelni pristup primenjen na sadržaje koji se izučavaju u nastavi matematike i fizike, u istraživačkom procesu posebna pažnja je posvećena korelaciji i integraciji nastavnih sadržaja ova dva predmeta u celovit i usklađen kontekst koji podstiče razvoj funkcionalnog znanja.

Sadržaj ove glave je prikazan u okviru tri poglavlja. Prvo poglavlje posvećeno je vizuelizaciji problema ravnomernog pravolinijskog kretanja. Predstavljen je novi metodički pristup zasnovan na kognitivnoj vizuelizaciji nastavnih sadržaja geometrijskim i grafičkim reprezentacijama. Opisani su nastavni materijali izrađeni u softveru *GeoGebra* koji su bili korišćeni tokom eksperimentalne nastave, a zatim je prikazana primena simulacija kretanja dva tela u nastavnoj praksi. Takođe su detaljno objašnjeni različiti načini rešavanja problema kretanja. Na kraju ovog poglavlja navedene su didaktičko-metodičke karakteristike kognitivno-vizuelnog pristupa u izučavanju navedenih sadržaja.

Metodološki okvir pedagoškog istraživanja sprovedenog sa učenicima prvog razreda gimnazije prezentovan je u drugom poglavlju. Navedeni su predmet, cilj, zadaci i hipoteza istraživanja. Opisan je način konstrukcije uzorka, predstavljen je instrument istraživanja (test znanja) sa odgovarajućim metodičkim objašnjenjima, kao i organizacija i tok pedagoškog eksperimenta.

U trećem poglavlju su predstavljeni rezultati realizovanog istraživanja. Prikazana je statistička obrada podataka, analiza rezultata i testiranje postavljene hipoteze, kao i interpretacija glavnih nalaza istraživanja.

5.1. VIZUELIZACIJA PROBLEMA KRETANJA

Fizičke veličine koje opisuju ravnomerno pravolinijsko kretanje su: pređeni put s, brzina v i vreme kretanja t, i povezane su matematičkom formulom $s = v \cdot t$. Ako se telo kreće pravolinijski, konstantnom brzinom v, tada je pređeni put s, linearna funkcija nezavisno promenljive $t \geq 0$. Matematički model ravnomernog kretanja je linearna funkcija, pa se problemi u kojima se razmatraju takva kretanja mogu vizuelizovati grafičkim reprezentacijama linearnih funkcija.

U srednjoškolskoj udžbeničkoj literaturi, u okviru sadržaja koji se odnose na primenu linearnih jednačina i sistema jednačina zastupljeni su zadaci u kojima se razmatra kretanje dva tela u istom, odnosno u suprotnim smerovima. Takva vrsta problema kretanja prisutna je i u nastavnim sadržajima fizike. U tradicionalnoj nastavi oba predmeta, vizuelni pristupi rešavanju problema kretanja su u podređenom položaju u odnosu na metode koje su dominantno algebarske prirode. U daljem tekstu biće prikazan kognitivno-vizuelni pristup rešavanju problema ravnomernog pravolinijskog kretanja koji se zasniva na primeni grafičke reprezentacije linearne funkcije.

Prilikom obrade primene linearne funkcije na rešavanje problema kretanja polazi se od jednostavnog primera, kao što je:

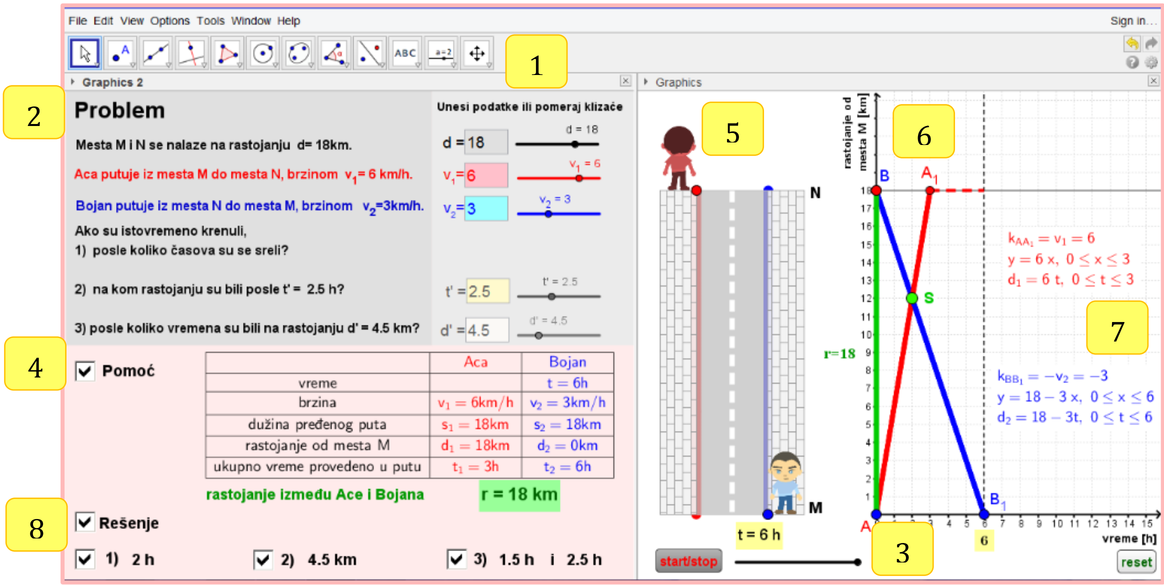
Problem 1. *Mesta M i N se nalaze na rastojanju* $d = 18\ km$. *Aca putuje iz mesta M do mesta N, brzinom* $v_1 = 6\ km/h$. *Bojan putuje iz mesta N do mesta M, brzinom* $v_2 = 3\ km/h$. *Ako su Aci i Bojan istovremeno krenuli,*

1) *posle koliko časova su se sreli?*
2) *na kom rastojanju su bili posle* $t' = 2{,}5\ h$?
3) *posle koliko vremena su bili na rastojanju* $d' = 4{,}5\ km$?

Ovakvu vrstu zadataka učenici su imali priliku da rešavaju tokom prethodnog školovanja i u nastavi fizike i u nastavi matematike. Može se očekivati da većina učenika poseduje potrebna znanja i veštine za rešavanje ove vrste problema, nekom prethodno usvojenom algebarskom metodom. Jednostavan i učenicima poznat primer je ciljano izabran kako bi se učenička postojeća znanja povezala sa metodama koje se baziraju na korišćenju vizuelnih reprezentacija.

5.1.1. Vizuelna simulacija kretanja dva tela u suprotnim smerovima

U cilju podsticanja učenika da: 1) koriste različite reprezentacije za predstavljanje i rešavanje problema; 2) koncept linearne funkcije primene na nove situacije i probleme u realnom kontekstu; 3) grafičku reprezentaciju linearne funkcije primenjuju u jednostavnim modelima kretanja, posebno je osmišljen kognitivno-vizuelni nastavni materijal i izrađen pomoću softvera *GeoGebra.* Izgled *GeoGebra* interaktivnog dinamičkog radnog lista koji predstavlja vizuelnu simulaciju kretanja dva tela u suprotnim smerovima prikazan je na Slici 5.1. Sadržaj ovog nastavnog materijala je organizovan u okviru osam sekcija (na slici su obležene brojevima 1-8), koje će biti objašnjene u daljem tekstu.



Slika 5.1. *GeoGebra dinamički radni list - simulacija kretanja dva tela u istom smeru*

Sekcija 1 (*Unesi podatke ili pomeraj klizače*) – Ova sekcija omogućava unošenje numeričkih vrednosti ulaznih podataka koji su dati u problemu (d, v_1, v_2, d', t'). Korisnik (učenik ili nastavnik) može promeniti vrednosti navedenih parametara unošenjem novih vrednosti u odgovarajuća polja za podatke ili pomeranjem klizača. Prilikom kreiranja *GeoGebra* nastavnog materijala u kome je modelovan problem kretanja, parametri modela tj. klizači ulaznih podataka su definisani na osnovu prirode problema i dinamički su povezani sa drugim sekcijama. Ovim je postignuto da *GeoGebra* model može generisati veliki broj zadataka sa različitim numeričkim podacima, kao i njihove odgovarajuće višestruke reprezentacije i krajnja rešenja.

Sekcija 2 (*Problem*) – U ovoj sekciji je data postavka problema, pri čemu su numerički podaci sadržani u tekstu zadatka dinamički povezani sa odgovarajućim podacima u Sekciji 1.

Sekcija 3 (*Upravljanje simulacijom*) – Aktiviranje i manipulisanje simulacijom vrši se pomoću kontrolnog dugmeta „start/stop" ili pomeranjem klizača za vreme t. Klizač je kreiran u cilju dinamičnog i sinhronizovanog prikazivanja višestrukih reprezentacija problema koje su povezane u jedinstvenu celinu. Pomeranje klizača za vreme t dovodi do automatskog ažuriranja numeričkih reprezentacija (Sekcija 4) i dinamičnog prikazivanja vizuelnih (Sekcija 6 i 7) i algebarskih reprezentacija (Sekcija 8) kojim je predstavljen dati realan problem. Takođe klizač t obezbeđuje sinhronizovano prikazivanje vizuelnih reprezentacija. Kontrolno dugme „reset", koje se takođe nalazi u ovoj sekciji, služi da se klizač t vrati na početnu vrednost ($t = 0$), a samim tim i svi elementi modela koji su sa njim povezani.

Sekcija 4 (*Pomoć*) – Izborom opcije „Pomoć" učenici dobijaju tabelarni prikaz sa verbalnim i numeričkim reprezentacijama koje opisuju kretanje Ace i Bojana. Za fizičke veličine koje su značajne za razumevanje i rešavanje problema (brzina, dužina pređenog puta, rastojanje od mesta M, vreme kretanja Ace/Bojana, kao i rastojanje između njih) dati su verbalni opisi i odgovarajuće numeričke vrednosti. Numeričke reprezentacije se automatski ažuriraju pri svakoj promeni položaja klizača za vreme t. Pomoć je osmišljena kako bi učenici mogli da prate promene vrednosti fizičkih veličina tokom vremena i da lakše uoče i izgrade neophodne veze između numeričkih i vizuelnih/simboličkih reprezentacija (Sekcije 5, 6 i 7).

Sekcija 5 (*Simulacija kretanja - konkretna vizuelna reprezentacija*) – Ovaj deo *GeoGebra* radnog lista daje prikaz situacije iz realnog sveta u vidu simulacije kretanja Ace i Bojana između dva mesta, M i N, unapred zadatim brzinama v_1 i v_2. Korisnik može da manipuliše simulacijom (pokretanje, zaustavljanje, prikazivanje situacije u različitim vremenskim intervalima...) pomoću alata koji se nalaze u Sekciji 3. Pomeranjem klizača za vreme *t*, figure Ace i Bojana se kreću odgovarajućim brzinama. Zbog uključenog traga, na slici se iscrtavaju i njihove pravolinijske trajektorije, koje predstavljaju geometrijske reprezentacije pređenih puteva s_1 i s_2, u zavisnosti od vremena.

Sekcija 6 (*Grafička reprezentacija problema - apstraktna vizuelna reprezentacija*) – Ova sekcija sadrži grafičku reprezentaciju zadatog problema kretanja. Crvenom (plavom) bojom je označen grafik zavisnosti rastojanja Ace (Bojana) od mesta M, tokom njegovog kretanja. Rastojanje Ace (Bojana) od mesta M, u zavisnosti od vremena, je grafički prikazano pomoću duži AA_1 (BB_1), koja u stvari predstavlja deo grafika odgovarajuće linearne funkcije na zatvorenom intervalu $[0, t_1]$ ($[0, t_2]$), gde je t_1 (t_2) vreme za koje Aca (Bojan) pređe rastojanje između mesta M i N. Pomeranjem klizača t, grafici se postepeno iscrtavaju u koordinatnom sistemu zato što je uključeno prikazivanje traga tačaka A_1 i B_1. Zajednička tačka ova dva grafika je tačka S, obeležena zelenom bojom, i njena apscisa predstavlja vreme susreta Ace i Bojana. Na $y -$ osi je zelenom bojom označena duž koja pokazuje rastojanje r između Ace i Bojana.

Sekcija 7 (*Algebarske reprezentacije*) U okviru ove sekcije date su algebarske reprezentacije funkcija rastojanja Ace, odnosno Bojana, od mesta M u zavisnosti od vremena, kao i formule koje povezuju koeficijent pravca prave AA_1 (BB_1) i brzinu kretanja v_1 (v_2). Algebarske reprezentacije su prikazane dvojako, standardnim oznakama koje se koriste u matematici (x, y, k) i oznakama koje se koriste u fizici (d, t, v).

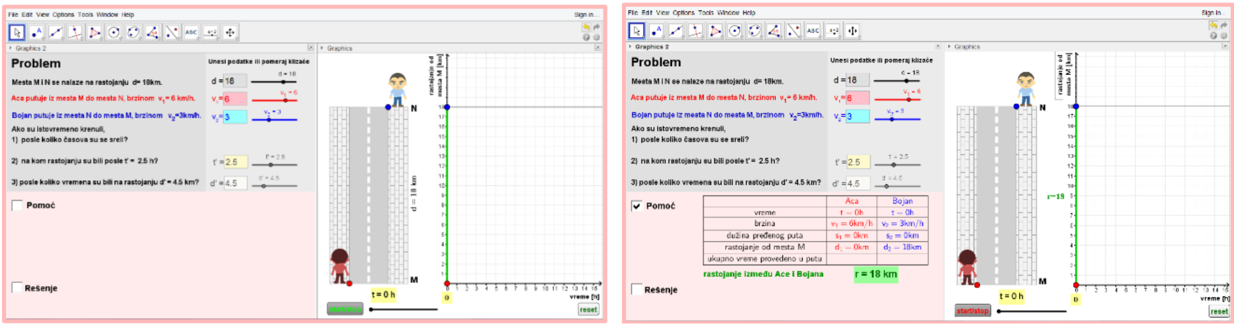
Sekcija 8 (*Rešenje*) – Izborom polja koje se nalazi u ovoj sekciji, prikazuju se odgovori na postavljena pitanja i time učenici dobijaju povratnu informaciju o uspešnosti rešavanja problema.

5.1.2. Primena *GeoGebra* simulacije u nastavnoj praksi

GeoGebra simulacija, opisana u prethodnom delu, može se koristiti kada se nastava izvodi u računarskoj učionici gde učenici rade samostalno ili u paru, u učionici sa jednim računarom i projektorom (nastavnik ili učenik demonstrira rad sa *GeoGebra* nastavnim materijalom) ili da učenici samostalno kod kuće proučavaju interaktivni materijal. U daljem tekstu su prikazane aktivnosti nastavnika i učenika koje se preporučuju prilikom realizacije nastave kognitivno-vizuelnim pristupom u računarskoj učionici.

- Nastavnik upoznaje učenike sa aktivnostima koje ih očekuju, daje potrebna uputstva i na jednom primeru praktično demonstrira rad sa dinamičkim radnim listom. Učenici samostalno ili u paru rade na pripremljenom *GeoGebra* nastavnom materijalu, a zadatke rešavaju u svojim sveskama. Nastavnik sve vreme nadgleda rad učenika i pruža dodatna objašnjenja i pomoć kada je to potrebno.
- Učenici otvaraju *GeoGebra* nastavni materijal, unose ulazne podatke u Sekciji 1 (Slika 5.2.1), a zatim aktiviraju opciju „Pomoć" (Slika 5.2.2). Sa učenicima bi trebalo kroz diskusiju o sadržaju prikazanom u tabeli, obnoviti prethodno stečena znanja iz fizike o osnovnim pojmovima i veličinama kojima se opisuje ravnomerno pravolinijsko kretanje.

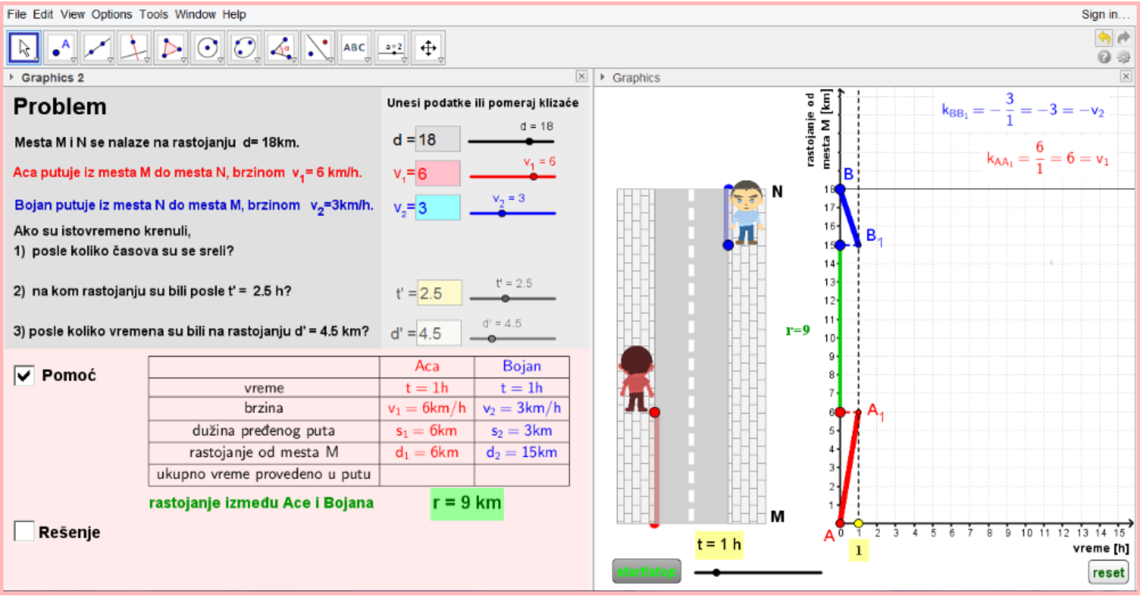
1. **2.**



Slika 5.2. *Izgled GeoGebra dinamičkog radnog lista*
1. *po unošenju ulaznih podataka;* 2. *nakon aktiviranja opcije „Pomoć"*

- Učenicima se sugeriše da samostalno istražuju problem, manipulišu simulacijom prema sopstvenom nahođenju i zapisuju svoja zapažanja ili rešenja.
- Dalje aktivnosti treba usmeriti na proučavanje situacija koje su važne za konceptualno razumevanje materije (razumevanje matematičkih i fizičkih koncepata prikazanih višestrukim reprezentacijama, kao i odnosa među njima) i za grafičko rešavanje problema. Učenicima se daje uputstvo da resetuju simulaciju a zatim da je ponovo pokrenu i da izvrše zaustavljanje simulacije u sledećim situacijama: kada klizač t ima vrednost 1, u trenutku susreta Ace i Bojana, kada je $t = 2{,}5$, kada Aca stigne u mesto N i kada Bojan stigne u mesto M. Sa učenicima se svaka od navedenih situacija posebno komentariše i razrađuje s matematičkog i fizičkog aspekta uz korišćenje različitih reprezentacija.
- Izgled *GeoGebra* radnog lista u trenutku $t = 1$ prikazan je na Slici 5.3. Nastavnik u ovoj situaciji vodi proces učenja kroz heuristički razgovor i podstiče učenike da uspostave

dvosmerene veze između fizičkih veličina koje su date u okviru tabele (Sekcija 4) i odgovarajućih elemenata konkretne (Sekcija 5), odnosno apstraktne vizuelne reprezentacije (Sekcija 6). Na primer, geometrijska interpretacija pređenog puta s_1 (s_2) nakon 1 h kretanja Ace (Bojana) je crvena (plava) linija prikazana u konkretnoj vizuelnoj reprezentaciji. Grafička interpretacija rastojanja d_1 (d_2), Ace (Bojana) od mesta M nakon 1h kretanja je ordinata tačke A_1 (B_1). Veoma je važno da učenici grafički interpretiraju brzinu kretanja v_1 (v_2) i koeficijent pravca prave kojoj pripada duž AA_1 (BB_1), a zatim da uspostave odgovarajuće algebarske veze između njih (prikazane su u gornjem desnom uglu *GeoGebra* radnog lista).



Slika 5.3. *Izgled GeoGebra simulacije u trenutku* $\boldsymbol{t} = \mathbf{1}$

- Trenutak susreta Ace i Bojana (Slika 5.4.1) učenici diskutuju najpre na osnovu numeričke i konkretne vizuelne reprezentacije, uočavaju i zapisuju algebarsku vezu $s_1 + s_2 = d$. Zatim posmatraju grafičku reprezentaciju i izvode zaključak da tačke A_1 i B_1 imaju isti položaj u koordinatnom sistemu (koji je na slici označen kao tačka S) pa je rastojanje između Ace i Bojana $r = 0$. Vreme susreta učenici očitavaju sa grafika kao apscisu tačke S, i daju odgovor na prvo postavljeno pitanje.
- Zaustavljanje simulacije u trenutku $t = 2{,}5$ (Slika 5.4.2) potrebno je zbog rešavanja drugog pitanja u zadatku.
- Izgled *GeoGebra* radnog lista u trenutku kada Aca stigne u mesto N, prikazan je na Slici 5.4.3. Učenicima se postavljaju sledeći zahtevi:

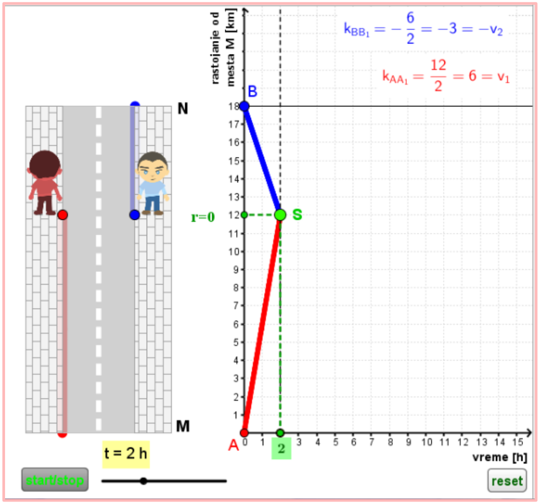
  1) da odrede vreme t_1 za koje je Aca prešao rastojanje između dva mesta, najpre grafički (apscisa tačke A_1) a zatim i algebarski (pomoću formule $t_1 = d/v_1$);

  2) da odrede koordinate tačke A_1;

  3) da nacrtaju grafik funkcije rastojanja Ace od mesta M u zavisnosti od vremena (duž AA_1);

  4) da odrede algebarsku reprezentaciju funkcije na osnovu nacrtanog grafika i da je zapišu pomoću simbola koji se uobičajeno koriste u matematici ($y = 6\,x, 0 \leq x \leq 3$), odnosno u fizici ($d_1 = 6\,t, 0 \leq t \leq 3$).

1.



Pomoć

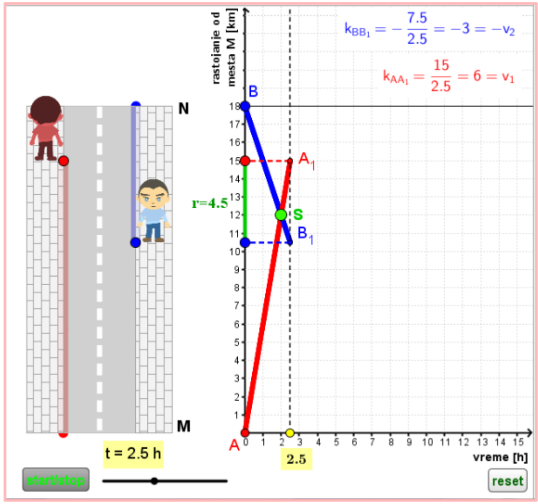
	Aca	Bojan
vreme	$t = 2h$	$t = 2h$
brzina	$v_1 = 6km/h$	$v_2 = 3km/h$
dužina pređenog puta	$s_1 = 12km$	$s_2 = 6km$
rastojanje od mesta M	$d_1 = 12km$	$d_2 = 12km$
ukupno vreme provedeno u putu		

rastojanje između Ace i Bojana r = 0 km

Rešenje

1) 2 h 2) 3)

2.



Pomoć

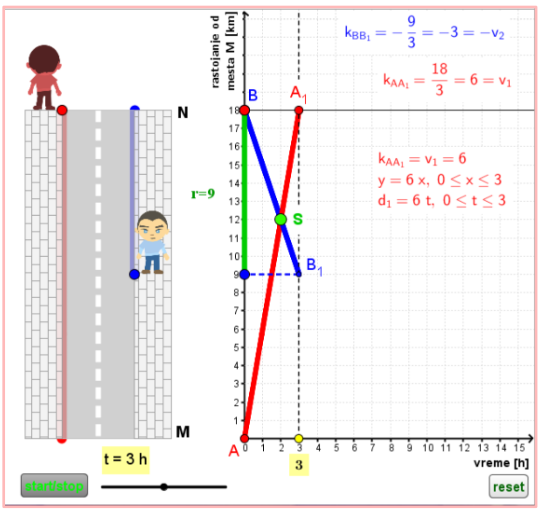
	Aca	Bojan
vreme	$t = 2.5$ h	$t = 2.5$ h
brzina	$v_1 = 6km/h$	$v_2 = 3km/h$
dužina pređenog puta	$s_1 = 15km$	$s_2 = 7.5km$
rastojanje od mesta M	$d_1 = 15km$	$d_2 = 10.5km$
ukupno vreme provedeno u putu		

rastojanje između Ace i Bojana r = 4.5 km

Rešenje

1) 2 h 2) 4.5 km 3)

3.



Pomoć

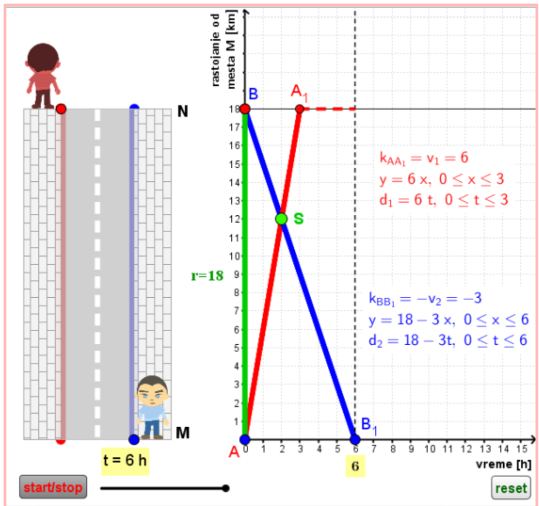
	Aca	Bojan
vreme	$t = 3$ h	$t = 3$ h
brzina	$v_1 = 6km/h$	$v_2 = 3km/h$
dužina pređenog puta	$s_1 = 18km$	$s_2 = 9km$
rastojanje od mesta M	$d_1 = 18km$	$d_2 = 9km$
ukupno vreme provedeno u putu	$t_1 = 3h$	

rastojanje između Ace i Bojana r = 9 km

Rešenje

1) 2 h 2) 4.5 km 3)

4.



Pomoć

	Aca	Bojan
vreme		$t = 6h$
brzina	$v_1 = 6km/h$	$v_2 = 3km/h$
dužina pređenog puta	$s_1 = 18km$	$s_2 = 18km$
rastojanje od mesta M	$d_1 = 18km$	$d_2 = 0km$
ukupno vreme provedeno u putu	$t_1 = 3h$	$t_2 = 6h$

rastojanje između Ace i Bojana r = 18 km

Rešenje

1) 2 h 2) 4.5 km 3) 1.5 h i 2.5 h

Slika 5.4. *Sekcije 3–8 GeoGebra dinamičkog radnog lista u različitim vremenskim trenucima*

- Po zaustavljanju simulacije u trenutku kada Bojan stigne u mesto M (Slika 5.4.4), učenici treba da sprovedu aktivnosti kao i u prethodno opisanoj situaciji, sa analogno postavljenim zahtevima.
- Učenicima se daje uputstvo da opet resetuju simulaciju i da samostalno dođu do odgovora na treće pitanje u problemu.

U daljem toku rada, razmatraju se različiti načini rešavanja Problema 1. Sa učenicima se najpre razgovara o tome kako su oni došli do odgovora na postavljena pitanja. Kroz diskusiju, nastavnik može da stekne dublji uvid u učenička predznanja, rezonovanja i načine na koje su rešavali probleme. U skladu sa tim saznanjem, nastavnik dalje usmerava i vodi proces učenja, fokusirajući se na unapređenje učeničkih kompetencija za rad sa višestrukim reprezentacijama u procesu rešavanja problema.

5.1.3. Različiti načini rešavanja problema kretanja

Napred opisani *GeoGebra* nastavni materijal je osmišljen u cilju vizuelizacije problema kretanja i metodički je oblikovan tako da vizuelne reprezentacije predstavljaju kognitivnu osnovu na kojoj se mogu izgraditi različite strategije rešavanja problema. U daljem tekstu biće prikazani različiti pristupi rešavanju prvog pitanja u problemu.

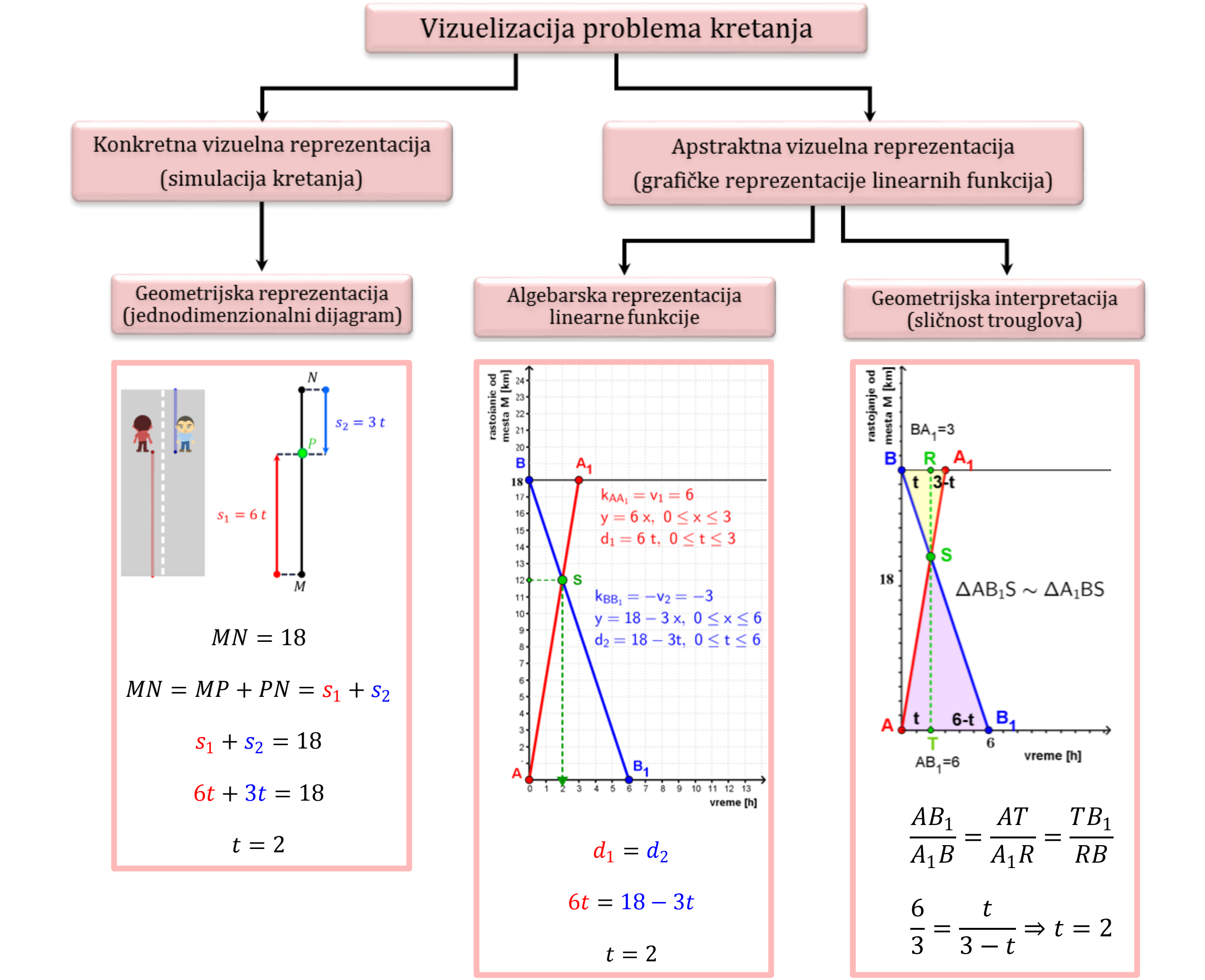
Konkretna vizuelna reprezentacija (simulacija kretanja Ace i Bojana) pruža vizuelne informacije na osnovu kojih se problem može sagledati sa geometrijskog aspekta. Rastojanje d između mesta M i N, put s_1 (s_2) koji je prešao Aca (Bojan) od početka kretanja do trenutka susreta mogu se prikazati pomoću odgovarajućih duži, kao što je prikazano na Slici 5.5. Na taj način se dobija geometrijska reprezentacija problema u vidu jednodimenzionalnog dijagrama. Geometrijska reprezentacija na očigledan način prikazuje da je $s_1 + s_2 = d$. U daljem postupku prelazi se na rad sa algebarskim reprezentacijama i na rešavanje jednostavne linearne jednačine.

Apstraktna vizuelna reprezentacija (grafičke reprezentacije funkcija d_1 i d_2) predstavlja osnovu za Na osnovu apstraktne vizuelne reprezentacije (grafičke reprezentacije funkcija d_1 i d_2) mogu se uspostaviti sledeće strategije rešavanja problema kretanja:

– Na osnovu prikazanih grafičkih reprezentacija funkcija d_1 i d_2, mogu se odrediti njihove algebarske reprezentacije (Slika 5.5). Vreme susreta t je apscisa presečne tačke S grafika funkcija d_1 i d_2, iz čega sledi da je t rešenje jednačine $d_1(t) = d_2(t)$.

– Grafičke reprezentacije funkcija d_1 i d_2 su duži AA_1 i BB_1 koje se seku u tački S, pa se problem može razmatrati sa geometrijskog aspekta. Navedene duži i njihova presečna tačka određuju dva trougla, AB_1S i A_1BS (Slika 5.5). Ovi trouglovi imaju jednake odgovarajuće unutrašnje uglove (uglovi sa paralelnim kracima), pa su to dva slična trougla. Ako je T (R) podnožje visine trougla AB_1S (A_1BS) konstruisane iz tačke S, tada je $AB_1 = 6, AT = t, TB_1 = 6 - t$ ($A_1B = 3,\ BR = t, A_1R = 3 - t$). Za slične trouglove važi da su dužine odgovarajućih duži proporcionalne, pa je $AB_1 : A_1B = AT : BR$, odnosno $6 : 3 = t : (3 - t)$. Rešavanjem ove jednačine dobija se traženo vreme susreta.

– Grafička metoda rešavanja zadataka primenjuje se u nastavi matematike (npr. grafičko rešavanje sistema linearnih jednačina) i u nastavi fizike (prilikom obrade eksperimentalnih rezultata). Zbog toga je poželjno da učenici sprovedu i grafički postupak rešavanja - pomoću pribora za crtanje da odrede apscisu presečne tačke S, grafika funkcija d_1 i d_2. Sa učenicima se dalje može diskutovati o prednostima grafičke metode (odsustvo algebarskih postupaka i računanja) i njenim nedostacima kada se primenjuje u rešavanju računskih zadataka (zahteva precizno crtanje; ne može se uvek odrediti tačno rešenje).



Slika 5.5. *Različiti načini rešavanja problema kretanja bazirani na vizuelnim reprezentacijama*

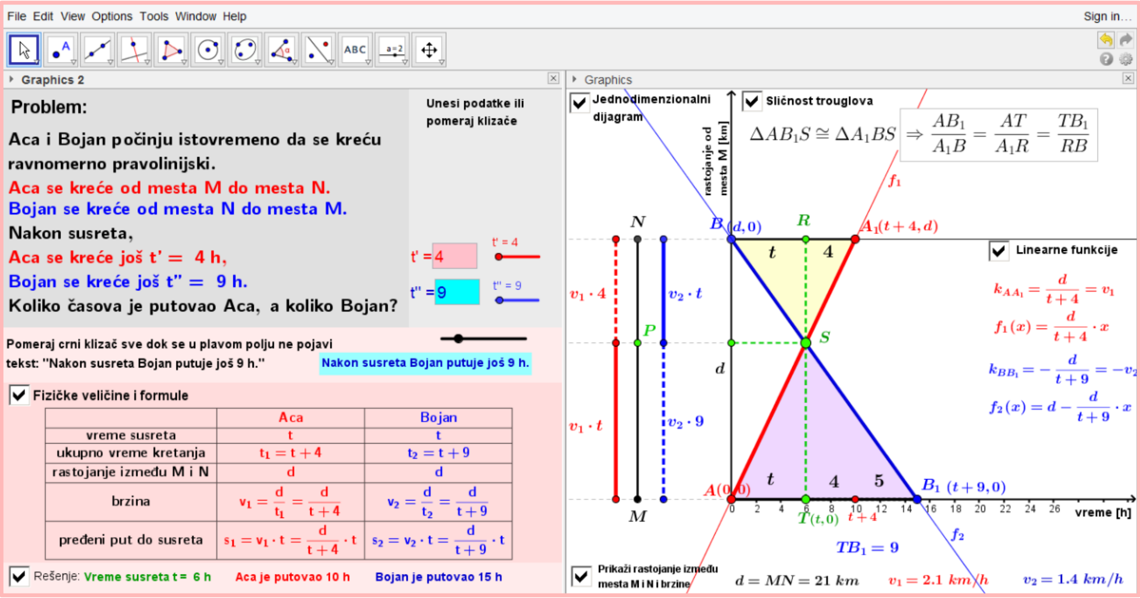
Drugo i treće pitanje učenici rešavaju na tri načina, primenom: 1) jednodimenzionalnog dijgrama, 2) grafičke i algebarske reprezentacije linearne funkcije i 3) grafičke reprezentacije linearne funkcije i sličnosti trouglova.

Iskustva koja su učenici stekli samostalnim istraživanjem u *GeoGebra* okruženju i detaljno razmatranje problema sa različitih aspekata, predstavljaju kognitivnu osnovu za uvođenje učenika u rešavanje složenijih i zahtevnijih zadataka. U nastavku teksta je dat primer takvog zadatka.

Problem 2. *Aca i Bojan počinju istovremeno da se kreću ravnomerno pravolinijski. Aca se kreće od mesta M do mesta N, a Bojan od mesta N do mesta M. Nakon susreta, Aca se kreće još* 4 *h, a Bojan još* 9 *h. Koliko časova je putovao Aca, a koliko Bojan?*

U realizaciji nastave kognitivno-vizuelnim pristupom, koristi se unapred pripremljen *GeoGebra* nastavni materijal (Slika 5.6). Nastavni materijal je didaktičko-metodički oblikovan u cilju pružanja mogućnosti učenicima da samostalno istražuju odnose i veze između fizičkih veličina kojima se opisuje ravnomerno kretanje i matematičkih koncepata predstavljenih višestrukim reprezentacijama. Sadržaj *GeoGebra* dinamičkog radnog lista je organizovan u više sekcija, kao što je prikazano na Slici 5.6. Učenici imaju mogućnost da izborom odgovarajućeg polja aktiviraju prikazivanje povratnih informacija u jednoj ili više sekcija istovremeno. Različite interpretacije problema kretanja prikazane pomoću matematičkih/fizičkih koncepata, date su u sekcijama: Jednodimenzionalni dijagram, Linearne funkcije, Sličnost trouglova i Fizičke veličine i formule.

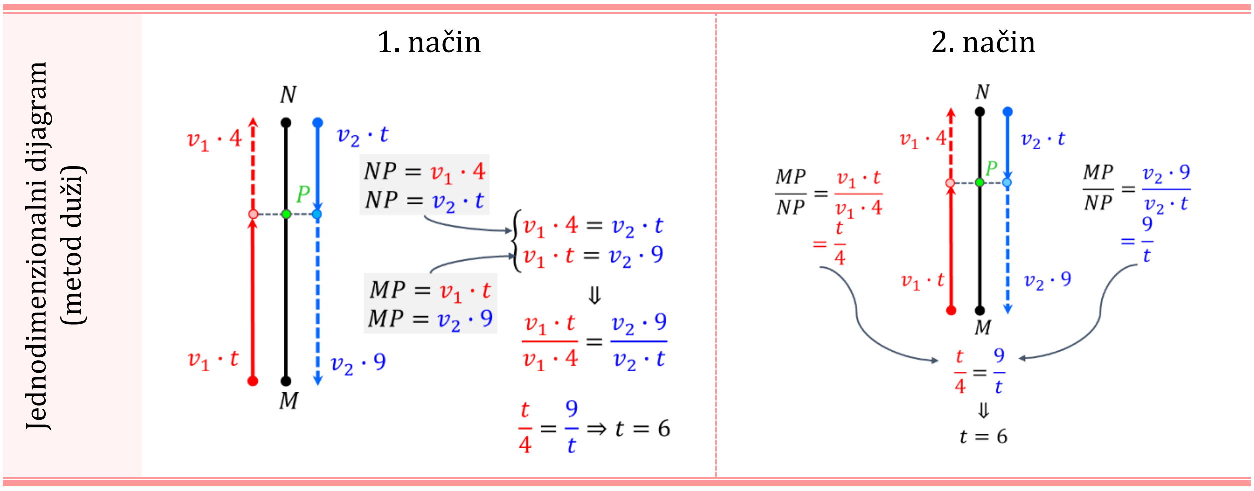
Prilikom obrade navedenog problema, nastavnik vodi proces učenja kroz dve faze. U prvoj fazi, učenici transformišu realnu situaciju u matematičke strukture, koristeći pogodno odabrane matematičke reprezentacije (matematizacija realne situacije). Nastavnik daje učenicima potrebna objašnjenja i uputstva, a nakon toga oni samostalno rade sa *GeoGebra* nastavnim materijalom, pišu i crtaju u svojim sveskama. Zadatak učenika je da identifikuju ključne fizičke veličine koje se odnose na kretanje Ace i Bojana, a zatim da problem prikažu pomoću jednodimenzionalnog dijagrama i pomoću grafika linearnih funkcija. Na kraju ove faze, nastavnik vodi diskusiju u kojoj učenici rezimiraju stečeno znanje o konkretnoj i apstraktnoj vizuelnoj reprezentaciji problema kretanja.



Slika 5.6. *Prikazivanje Problema 2 višestrukim reprezentacijama u GeoGebra okruženju*

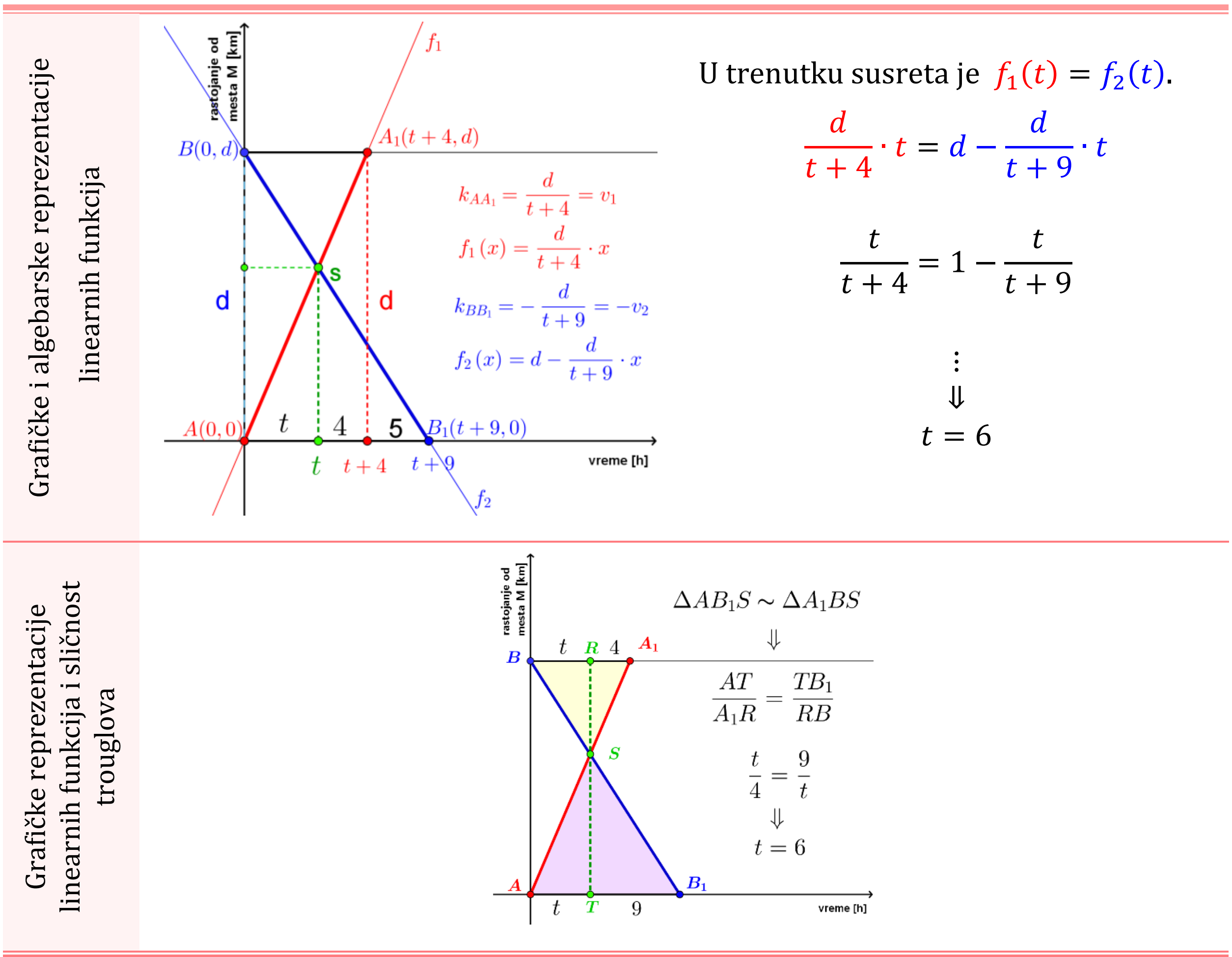
U drugoj fazi, nastavne aktivnosti se sprovode u cilju unapređenja učeničkih kompetencija za rešavanje problema, uspostavljanjem različitih strategija za pronalaženje matematičkog rešenja realnog problema. Cilj nastavnih aktivnosti je da se zadatak reši na različite načine, aktivnim učešćem učenika i uz samostalan rad sa *GeoGebra* nastavnim materijalom. Nastavnik odgovarajućim sugestijama i objašnjenjima pruža pomoć učenicima tokom rada. Učenici imaju zadatak da uspostave algebarske veze između elemenata konkretne/apstraktne vizuelne reprezentacije i da formiraju odgovarajuću jednačinu ili sistem jednačina čijim rešavanjem određuju vreme susreta t.

Poželjno je da učenici prvo savladaju načine rešavanja koji se baziraju na konkretnoj vizuelnoj reprezentaciji (Slika 5.7).



Slika 5.7. *Načini rešavanja Problema 2 koji se baziraju na konkretnoj vizuelnoj reprezentaciji*

Nakon toga uvode se načini rešavanja koji se zasnivaju na primeni apstraktne vizuelne reprezentacije (Slika 5.8).



Slika 5.8. *Načini rešavanja Problema 2 koji se baziraju na apstraktnoj vizuelnoj reprezentaciji*

Algebarski pristup rešavanju problema (Slika 5.9), svojstven tradicionalnoj nastavi matematike i fizike, uvodi se na kraju, nakon što su učenici savladali prethodno pomenute vizuelne pristupe.

Algebarski pristup (primena formula)

	vreme susreta	vreme kretanja	dužina puta	brzina kretanja	pređeni put do trenutka susreta
Aca	t	$t_1 = t + 4$	d	$v_1 = \frac{d}{t_1} = \frac{d}{t+4}$	$s_1 = v_1 \cdot t = \frac{d}{t+4} \cdot t$
Bojan	t	$t_2 = t + 9$	d	$v_2 = \frac{d}{t_2} = \frac{d}{t+9}$	$s_2 = v_2 \cdot t = \frac{d}{t+9} \cdot t$

U trenutku susreta je $s_1 + s_2 = d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\,t}{t+4} + \frac{d\,t}{t+9} = d \;\Leftrightarrow\; \frac{t}{t+4} + \frac{t}{t+9} = 1$

$\dots\dots\dots \Rightarrow t = 6$

Slika 5.9. *Algebarski pristup rešavanju Problema 2*

5.1.4. Vizuelizacija problema kretanja dva tela u istom smeru

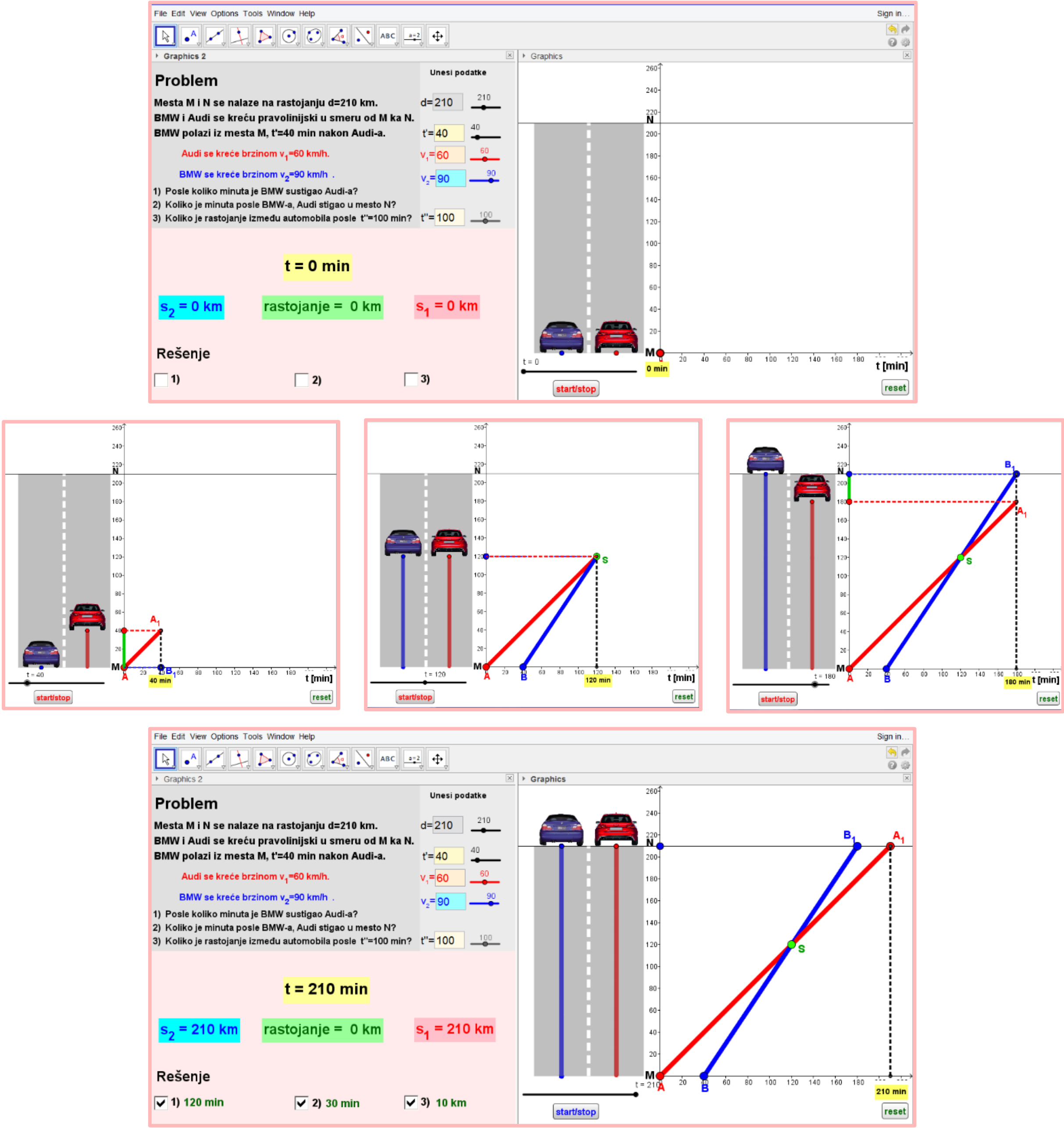
U daljem radu sa učenicima, obrađuju se problemi ravnomerno pravolinijskog kretanja dva tela u istom smeru. Kako bi učenicima u procesu učenja olakšali upostavljanje veza između onoga što znaju i onoga što saznaju, pri izučavanju problema kretanja dva tela u istom smeru treba obraditi primere koji su analogni prethodno obrađenim problemima kretanja tela u suprotnim smerovima. Adekvatno odabrani zadaci pružaju mogućnost učenicima da integrišu nova znanja sa prethodno stečenim znanjima i iskustvima u rešavanju problema kretanja, da ih efikasno koriste u novim zadacima i transferišu na nove situacije. U nastavku teksta su dati primeri takvih zadataka.

Problem 3. *Dva automobila, Audi i BMW, kreću se ravnomerno pravolinijski od mesta M do mesta N, koja se nalaze na rastojanju* $d = 210\ km$*. BMW polazi iz mesta M,* $t' = 40\ min$ *nakon Audi-a. Audi se kreće brzinom* $v_1 = 60\ km/h$*, a BMW brzinom* $v_2 = 90\ km/h$*.*

1) *Posle koliko minuta je BMW sustigao Audi-a?*
2) *Koliko je minuta posle BMW-a, Audi stigao u mesto N?*
3) *Koliko je rastojanje između ova dva automobila posle* $t'' = 100\ min$ *od polaska Audi-a iz mesta M?*

Kako bi se postigli što bolji efekti učenja, obrada problema kretanja tela u istom smeru sprovodi se u istim didaktičko-metodičkim okvirima kao prethodno realizovana obrada problema kretanja u suprotnim smerovima. Na taj način učenicima je olakšan proces asimilacije novih informacija, što u krajnjoj liniji doprinosi nastajanju novih i usavršavanju postojećih kognitivnih struktura u procesu konstrukcije znanja.

U realizaciji nastavnih aktivnosti koristi se unapred pripremljen *GeoGebra* nastavni materijal (Slika 5.10). S obzirom na to da je simulacija kretanja dva automobila dizajnirana na isti način kao i simulacija kretanja Ace i Bojana, učenicima se prepušta da u procesu rešavanja Problema 3, samostalno istražuju *GeoGebra* nastavni materijal, da problem prikažu konkretnom i apstraktnom vizuelnom reprezentacijom i da reše zadatak na različite načine (pomoću jednodimenzionalnog dijgrama; primenom grafičke i algebarske reprezentacije linearne funkcije; koristeći grafičku reprezentaciju linearne funkcije i sličnost trouglova). Tokom samostalnog rada učenika, nastavnik odgovarajućim sugestijama i objašnjenjima pruža pomoć učenicima koji teže savladavaju gradivo.



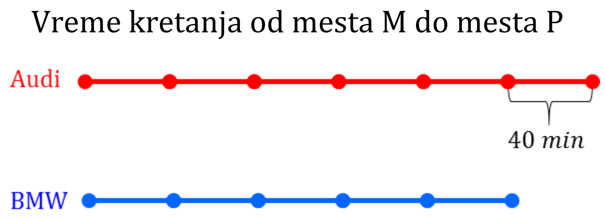
Slika 5.10. *GeoGebra simulacija kretanja dva automobila u istom smeru*

Problem 4. *Dva automobila, Audi i BMW, kreću se ravnomerno pravolinijski od mesta M do mesta N. BMW polazi iz mesta M,* 40 *min nakon Audi-a i sustiže ga u jednom trenutku. Od trenutka sustizanja, BMW je do mesta N putovao* 100 *min, a Audi* 120 *min. Koliko je minuta proteklo od polaska BMW-a iz mesta M do trenutka kada je sustigao Audi-a*.

Pošto je Problem 4 složeniji od prethodno obrađenog problema, preporučuje se da nastavnik kroz heuristički razgovor usmerava učenike i daje povratne informacije u optimalnom obimu ili da organizuje grupni oblik rada. U slučaju grupnog oblika rada, zadatak svih grupa je da Problem 4 reše na što više različitih načina. Očekivani ishod je da grupe učenika reše ovaj problem na pet načina, analogno prethodno opisanim postupcima koji se sprovode kod rešavanja Problema 2. Nastavnik nadgleda rad učenika i podstiče ih da predlože i neke druge mogućnosti i da pokušaju da reše problem na način koji se razlikuje od prethodno pomenutih. Ukoliko neki učenici dođu do novih, originalnih ideja, o njima se diskutuje sa celim razredom, vrši se njihova analiza i evaluacija. U slučaju da među ponuđenim učeničkim idejama i rešenjima nisu zastupljeni aritmetički pristupi, nastavnik može da uputi učenike u način rešavanja zadatka u kome se koriste samo aritmetičke operacije (bez korišćenja linearne funkcije, jednačine i sistemi jednačina), što je prikazano u nastavku teksta.

Aritmetički pristup:

Označimo sa P mesto sustizanja automobila. Na osnovu podataka datih u zadatku, da deo puta od mesta P do mesta N, Audi prelazi za 120 min, a BMW za 100 min, sledi da vremena za koja Audi i BMW pređu isto rastojanje (PN) stoje u srazmeri $120 : 100$, odnosno $6 : 5$. To dalje znači da vremena za koja Audi i BMW pređu rastojanje između mesta M i P takođe stoje u srazmeri $6:5$. Ova srazmera može se vizuelizovati pomoću podudarnih duži (Audi - šest duži, BMW – pet duži), kao što je i prikazano na Slici 5.11. Vizuelna reprezentacija olakšava rad sa podacima i dalje rezonovanje. Pošto je Audi putovao od mesta M do mesta P, 40 minuta duže u odnosu na BMW, sa slike je očigledno da jednoj duži odgovara vremenski interval od 40 min. Ukupno vreme koje je BMW proveo u putu je $5 \cdot 60 = 300$ minuta. Od trenutka kada je BMW krenuo iz mesta M do trenutka sustizanja drugog automobila, proteklo je $5 \cdot 40 = 200$ minuta.



Slika 5.11. *Vizuelna reprezentacija srazmere vremena kretanja dva automobila*

5.1.5. Didaktičko-metodičke karakteristike kognitivno-vizuelnog pristupa

Za razliku od tradicionalnog pristupa u kome se razmatra samo algebarski aspekt problema, kognitivno-vizuelna koncepcija uspostavlja integrativni pristup procesu učenja. U prilog tome govore sledeće činjenice:

- Uspostavlja se korelacija između nastavnih sadržaja matematike i fizike (linearna funkcija - zavisnost pređenog puta/rastojanja od vremena; koeficijent pravca prave – brzina kretanja).
- Isto tako, unutar matematike povezuju se različiti sadržaji, algebarski (linearna funkcija, linearne jednačine i sistemi) i geometrijski (sabiranje/oduzimanje duži, sličnost trouglova).
- Rešavanjem problema kretanja primenom grafika linearne funkcije, uspostavljaju se grafičke i algebarske veze između nagiba prave i brzine, i na taj način se postavljaju osnove za dalje učenje i razumevanje izvoda funkcije, odnosno diferencijalnog računa.
- Višestruke reprezentacije pružaju mogućnost razmatranja istog problema iz različitih perspektiva (vizuelnih i simboličkih), što vodi do originalnih, nestereotipnih rešenja, čime se direktno podstiče divergentno i kreativno mišljenje.
- Celovit kontekst za učenje kroz primenu znanja iz jedne oblasti/discipline u drugu, pruža veće mogućnosti transfera i podstiče razvoj funkcionalnih znanja.

5.2. METODOLOŠKI OKVIR ISTRAŽIVANJA

U ovom delu rada je dat metodološki okvir eksperimentalnog istraživanja sprovedenog u cilju ispitivanja efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji sadržaja o linearnoj funkciji i njenoj primeni na rešavanje problema.

5.2.1. Predmet, cilj, zadaci i hipoteza istraživanja

Predmet ovog istraživanja je teorijsko i eksperimentalno ispitivanje i proučavanje efekata kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji sadržaja o linearnoj funkciji i njenoj primeni na rešavanje problema, sa posebnim naglaskom na probleme kretanja, upotrebom inovativnih nastavnih materijala u računarskom okruženju.

Cilj istraživanja je bio da se eksperimentalnim putem utvrdi stepen uticaja primene kognitivno-vizuelnog pristupa nastavi/učenju u računarskom okruženju, na znanja učenika i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti linearne funkcije i njene primene na rešavanje problema.

Za realizaciju postavljenog cilja formulisani su sledeći konkretni *zadaci* pedagoškog istraživanja:

- Na osnovu teorijskih saznanja konstruisati didaktičko–metodičku osnovu za realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa učenju sadržaja iz oblasti linearne funkcije i njene primene, posebno u problemima kretanja.
- Kreirati nastavne materijale za realizaciju nastave upotrebom računara i *GeoGebra* obrazovnog softvera u toku eksperimentalnog procesa.
- Izraditi instrument (test znanja) kojim će biti izmereni efekti primene kognitivno-vizuelnog pristupa na obrazovna postignuća učenika.
- Formirati ekperimentalnu (E) i kontrolnu (K) grupu i ujednačiti ih na osnovu postignuća učenika na završnom ispitu iz matematike na kraju osnovnog obrazovanja.
- Realizovati nastavne aktivnosti primenom kognitivno-vizuelnog pristupa sa učenicima eksperimentalne grupe, a sa učenicima kontrolne grupe tradicionalnim nastavnim postupcima.
- Rezultate realizovane nastave izmeriti finalnim testom znanja jednakim za sve učenike.
- Utvrditi koji metodički prstup daje bolje efekte poredjenjem postignuća na testu učenika eksperimentalne i kontrolne grupe.

Shodno predmetu i cilju istraživanja, formulisana je *hipoteza istraživanja.*

H: Primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji nastavnih sadržaja iz oblasti linearne funkcije i njene primene na rešavanje problema postižu se statistički značajno bolja postignuća učenika u odnosu na postignuće kakvo se može ostvariti primenom tradicionalnih metodičkih pristupa.

5.2.2. Uzorak, instrument i tok istraživanja

Istraživanje je realizovano sa učenicima prvog razreda prirodno-matematičkog smera gimnazije. Prvi razred je izabran zbog toga što se sadržaji o linearnoj funkciji i problemima kretanja izučavaju u nastavi matematike, a nastavna tema „Kinematika", koja obuhvata probleme kretanja, je sastavni deo sadržaja programa fizike. U istraživanju je učestvovalo 120 učenika, po 60 učenika iz dve gimnazije, "Isidora Sekulić" u Novom Sadu i Gimnazije Pirot. Učenici gimnazije iz Novog Sada su sačinjavali kontrolnu grupu, dok su učenici iz Pirota predstavljali eksperimentalnu grupu. Kontrolna i eksperimentalna grupa su bile ujednačene na osnovu rezultata završnog ispita iz matematike na kraju osnovnog obrazovanja.

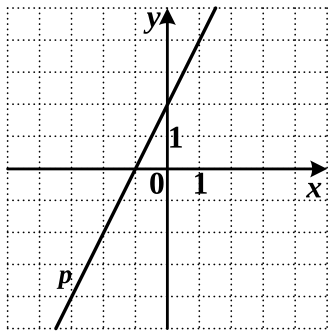
Za prikupljanje podataka u eksperimentalnom delu istraživanja korišćene su relevantne tehnike testiranja znanja učenika. Testiranje je sprovedeno testom znanja iz gradiva obrađenog u toku eksperimenta. Namena testa je bila da se ispita nivo stečenog znanja učenika iz oblasti linearne funkcije i njene primene na rešavanje problema. Test (osmišljen od strane autora disertacije) je dat u formi niza zadataka objektivnog tipa i sadržao je sledeće zadatke:

1. Prava p koja je prikazana na slici je grafik linearne funkcije $y = f(x)$.

1) Koeficijent pravca prave p je ________________.

2) Jednačina prave p je ______________________.

3) $f(x) = 4$, za $x =$ ________.

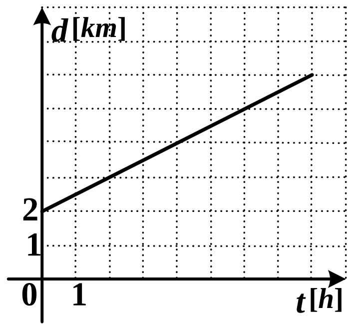


2. Pešak se kreće pravolinijskom putanjom na kojoj se nalazi mesto A. Na slici je grafički prikazana promena rastojanja (d) pešaka od mesta A, u zavisnosti od vremena (t).

1) Brzina kretanja pešaka je __________________.

2) Izrazi d u funkciji od t. ____________________

3) Pešak je udaljen 5 km od mesta A, nakon ____ h kretanja.

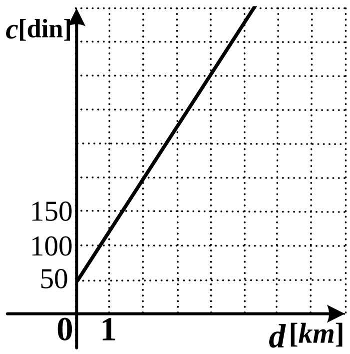


3. Na slici je grafički prikazana zavisnost cene taksi usluge (c) od pređene kilometraže (d).

1) Cena po jednom pređenom kilometru je _____ dinara.

2) Izrazi c u funkciji od d. ____________________

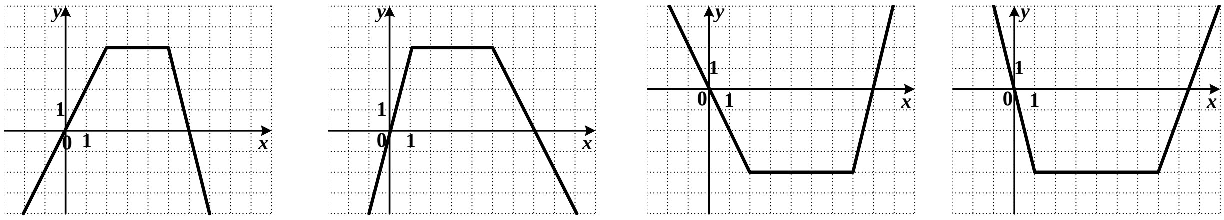
3) Putnik koji je platio taksi uslugu 350 dinara, vozio se ___________ km.



4. Data je funkcija $f(x) = x + 7 - |2x - 2| - |x - 5|$.

1) Na kojoj slici je prikazan grafik funkcije $y = f(x)$? Zaokruži tačan odgovor.

a) b) c) d)



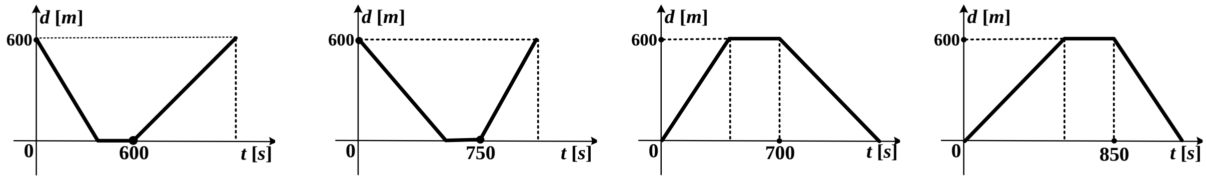
2) Funkcija $y = f(x)$ je konstantna na intervalu dužine ______________ jedinične duži.

3) Veće rešenje jednačine $x + 7 - |2x - 2| = |x - 5|$ je $x =$ _______.

5. Aca i Braca se nalaze na vrhu padine. Braca je sve vreme na vrhu padine. Aca se pravolinijski spušta niz padinu dužine $600\,m$, stalnom brzinom $1{,}5\,m/s$, zatim se odmara izvesno vreme u podnožju, a onda se penje uz padinu stalnom brzinom $1\,m/s$.

1) Koji od sledećih grafika predstavlja zavisnost rastojanja ***d*** (u metrima) između Ace i Brace, od vremena ***t*** (u sekundama)? Zaokruži tačan odgovor.

a) **b)** **c)** **d)**



2) Aca se odmarao __________ minuta u podnožju.

3) Aca se vratio na vrh padine nakon ______________ sekundi.

6. Pešak i biciklista putuju od mesta A do mesta B i kreću se stalnim brzinama. Pešak je krenuo iz mesta A u 8 h. Biciklista je krenuo iz mesta A u 10 h i sustigao pešaka u 11 h. Koliko vremena je putovao pešak, ako je poznato da je u mesto B stigao 4 časa nakon bicikliste?

Odgovor: ____ .

7. Bazen se napuni vodom za 3 časa kada su otvorene dve slavine. Ako je otvorena samo prva slavina, bazen se napuni za 5 časova. Za koje vreme se napuni bazen ako je otvorena samo druga slavina?

a) $\frac{2}{15}\,h$ b) $2\,h$ c) $7{,}5\,h$ d) $8\,h$ e) $10\,h$

Prva tri zadatka proveravaju učenička znanja o linearnoj funkciji, kao i razumevanje linearne zavisnosti dve veličine u različitim kontekstima (matematički, fizički, realni). Takođe se ovim zadacima proveravaju znanja i veštine učenika da izvrše analizu grafičkih reprezentacija i da ih transformišu u odgovarajuće algebarske reprezentacije. Četvrti zadatak je dat sa ciljem da se kod učenika ispita znanje o osnovnim svojstvima funkcije sa apsolutnom vrednošću, sposobnost primene znanja u rešavanju linearne jednačine sa apsolutnom vrednošću (algebarskim ili grafičkim postupkom), kao i fleksibilnost u radu sa višestrukim reprezentacijama. Peti zadatak proverava mogućnosti učenika za rešavanje problema kretanja u realnom kontekstu. Osim toga, ovim zadatkom se ispituju znanja i veštine učenika da u procesu rešavanja problema uspostave potrebne veze između verbalnih, numeričkih i grafičkih informacija, da interpretiraju grafičku reprezentaciju i izvode zaključke o opisanoj pojavi. Šesti i sedmi zadatak su slični zadacima koji su obrađivani na časovima, sa učenicima obeju grupa, i dati su u cilju provere sposobnosti primene znanja o linearnoj funkciji u rešavanju problema kretanja, odnosno problema iz realnog okruženja.

Istraživanje je realizovano u okviru redovne nastave matematike, u drugom polugodištu školske 2014/2015. godine. Eksperimentalni deo istraživanja je trajao u toku maja i juna meseca kada su se obrađivali nastavni sadržaji o linearnoj funkciji, jednačinama i sistemima jednačina. Odabrani nastavni sadržaji koji se odnose na linearnu funkciju i njenu primenu na rešavanje problema, realizovani su kognitivno-vizuelnim pristupom sa učenicima eksperimentalne grupe. Poseban akcenat je stavljen na rešavanje problema kretanja uz primenu nastavnih materijala, koje je osmislio i u softveru *GeoGebra* realizovao autor ove disertacije. Detaljan opis karakteristika interaktivnih dinamičkih radnih listova i način njihove implementacije u nastavnoj praksi, dat je u odeljku 5.1. Metodički pristup realizaciji sadržaja je bio baziran na primeni vizuelizacije i rešavanju problema korišćenjem različitih strategija. Isti sadržaji u kontrolnoj grupi obrađeni su na tradicionalan način, u kome dominiraju algebarski pristupi.

Nakon eksperimentalnog dela istraživanja, sprovedeno je testiranje učenika E i K grupe. Učenici su testirani pri kraju školske godine, u toku dva školska časa.

5.3. REZULTATI I DISKUSIJA

Pre realizacije pedagoškog eksperimenta, eksperimentalna i kontrolna grupa su ujednačene po broju učenika i po ostvarenim rezultatima na završnom ispitu iz matematike na kraju osnovnog obrazovanja. Statistička obrada rezultata ispitnog testa iz matematike sprovedena je na osnovu bodovnog postignuća učenika, analizom srednjih vrednosti. Statistički podaci o postignućima učenika na završnom ispitu iz matematike dati su u Tabeli 5.1.

Tabela 5.1. *Statistički rezultati testa iz matematike na kraju osnovnog obrazovanja*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	*Mann-Whitney test*	
								U	*p*
E	60	14,44	90,25%	1,221	8,45%	0,16	-0,25%	1893,00	0,625
K	60	14,48	90,50%	1,015	7,01%	0,13			

Legenda: N – broj učenika; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K(%) – razlika aritmetičkih sredina E i K-grupe, izražena u %; *U* – vrednost test statistike; *p* – nivo statističke značajnosti.

Na završnom ispitu iz matematike učenici su bili izuzetno uspešni. Od maksimalnih 16 bodova, učenici E grupe su na testu ostvarili u proseku 14,44 (90,25%) bodova, a učenici K grupe 14,48 (90,50%) bodova. Izračunati koeficijenti varijacije su znatno manji od 30%, što ukazuje da su obe grupe homogene u znanju iz matematike. Normalnost raspodele rezultata eksperimentalne i kontrolne grupe proverena je testom Kolmogorov-Smirnov. Za E grupu vrednost test statistike je $D = 0{,}187$ i nivo statističke značajnosti $p = 0{,}026 < 0{,}05$, a za K grupu $D = 0{,}152$ i $p = 0{,}114 > 0{,}05$. Na osnovu dobijenih rezultata zaključujemo da raspodela rezultata E grupe ne odgovara normalnoj raspodeli, dok K grupa ima normalnu distribuciju.

Kako raspodela u E grupi odstupa od normalne, statistička značajnost razlike između rezultata učenika E i K grupe je ispitana primenom neparametrijskog Mann-Whitney testa. Dobijeni rezultati za vrednost test statistike ($U = 1893,00$) i nivo statističke značajnosti ($p = 0,625 > 0,05$) ukazuju na to da među rezultatima učenika eksperimentalne i kontrolne grupe ostvarenim na IT ne postoji statistički značajna razlika, odnosno grupe učenika su ujednačene u znanju iz matematike.

Neposredno nakon završetka eksperimentalne nastave izvršena je provera znanja učenika, finalnim testom znanja. Test je obuhvatao sedam zadataka objektivnog tipa koji su vrednovani po ključu, a maksimalno mogući broj ostvarenih bodova iznosio je 20. Rezultati testiranja E i K grupe su obrađeni na osnovu bodovnog postignuća učenika, analizom srednjih vrednosti (Tabela 5.2).

Test je radilo 57 učenika eksperimentalne i 56 učenika kontrolne grupe. Učenici E grupe su na testu ostvarili u proseku 13,44 (67,21%) bodova, a u K grupi prosečan broj ostvarenih bodova je 9,73 (48,66%). Maksimalan broj bodova ostvarilo je 6 učenika E grupe i 3 učenika K grupe. Minimalni broj bodova u E grupi iznosi 5 bodova, a u K grupi 3 boda. Eksperimentalna grupa je na svim zadacima postigla bolji uspeh od kontrolne.

Za E grupu koeficijent varijacije je 36,66% što ukazuje na prisustvo određenog varijabiliteta u odnosu na prosek bodova. Kako je dobijena vrednost malo iznad 30%, možemo da zaključimo da je E grupa relativno homogena u znanju koje smo ispitali testom. Vrednost koeficijenta varijacije od 48,66% u K grupi ukazuje na izraženu razliku između najvišeg i najnižeg postignuća koje su učenici ostvarili na testu, pa sledi da ova grupa nije homogena u znanju koje je ispitano testom.

Tabela 5.2. *Statistički rezultati finalnog testa*

	N	M	M(%)	SD	CV	SE	M_E-M_K(%)	*t-test*		*η2*
								t	*p*	
E	57	13,44	67,21%	4,93	36,66%	0.65	18,55%	4,09	0.000	0,13
K	56	9,73	48,66%	4,70	48,33%	0,63				

Legenda: N – broj učenika; M – srednja vrednost broja bodova; M(%) – procenat osvojenih bodova; SD – standardna devijacija; CV – koeficijent varijacije; SE – standardna greška; M_E-M_K – razlika aritmetičkih sredina E i K-grupe, izražena u %; *t* – vrednost test statistike; *p* – nivo statističke značajnosti, η^2 – veličina efekta.

Normalnost distribucija promenljivih potvrđena je testom Kolmogorov-Smirnov za E grupu ($D = 0,150$ i $p = 0,139 > 0,05$) i K grupu ($D = 0,133$ i $p = 0,254 > 0,05$). Kako su obe raspodele normalne, to je statistička značajnost razlike između rezultata E i K grupe ispitana parametrijskim Studentovim t-testom razlike aritmetičkih sredina dva nezavisna uzorka. Na osnovu dobijene vrednosti test statistike $t = 4,82$ i nivoa značajnosti $p = 0,000 < 0,01$ (Tabela 5.2), sa sigurnošću od 99% tvrdimo da je razlika u rezultatima učenika E i K grupe, ostvarenim na testu, statistički značajna. Statistički značajno bolji rezultati E grupe u odnosu na rezultate K grupe, egzaktno potvrđuju pozitivno dejstvo kognitivno-vizuelnog pristupa kao eksperimentalnog faktora, na obrazovna postignuća učenika.

Na osnovu rezultata t-testa izračunata je vrednost eta-kvadrat koeficijenata ($\eta^2 = 0,13$), koja ukazuje na srednju veličinu (blizu velike veličine) efekta uticaja kognitivno-vizuelnog metodičkog pristupa, kao eksperimentalnog faktora.

Analiza rezultata testa pokazala je da u izučavanju nastavnih sadržaja o linearnoj funkciji, primena kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na vizuelizaciji problema kretanja konkretnom i apstraktnom vizuelnom reprezentacijom, u računarskom okruženju, ima pozitivan uticaj na obrazovna postignuća učenika. Rezultati ovog istraživanja potvrđuju postavljenu hipotezu i može se konstatovati da se primenom kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji nastavnih sadržaja iz oblasti linearne funkcije i njene primene na rešavanje problema postižu statistički značajno bolja postignuća učenika u odnosu na postignuće kakvo se može ostvariti primenom tradicionalnih metodičkih pristupa.

6. ZAKLJUČAK

Savremeno matematičko obrazovanje, njegovo usklađivanje sa zahtevima naučnog i tehnološkog razvoja i progresa, permanentno zahteva uvođenje inovacija koje doprinose modernizaciji, racionalizaciji i efikasnosti nastavnog procesa. U cilju sveobuhvatnog sagledavanja i rešavanja problema vezanih za nastavu i učenje matematike, istraživači matematičkog obrazovanja značajnu pažnju posvećuju matematičkim reprezentacijama, vizuelizaciji i savremenim obrazovnim tehnologijama, njihovoj ulozi i značaju za proces učenja. Višestruke reprezentacije, vizuelizacija i obrazovna tehnologija, prepoznate kao neophodne komponente matematičkog obrazovanja, potrebno je da se implementiraju u sve segmente nastave, zbog svog potencijala da promovišu matematički uvid i razumevanje i unaprede proces učenja. Navedeni aspekti su posebno značajni za izučavanje funkcija, fundamentalnog koncepta nastave matematike.

Jedan od istaknutih ciljeva nastave matematike je razvoj opštih i međupredmetnih kompetencija koje su potrebne za shvatanje pojava i zakonitosti u prirodi i društvu i koje će da osposobe učenike/studente za primenu usvojenih znanja u rešavanju raznovrsnih zadataka iz životne prakse i za uspešno nastavljanje matematičkog obrazovanja (ПНППГ, 2011). Osim u matematici, funkcije i njihove grafičke reprezentacije se koriste i u drugim naučnim disciplinama, kao sredstvo da se naučni pojmovi, pojave i procesi opišu, objasne, potvrde ili predvide. Primena funkcija, posebno njihovih grafičkih reprezentacija kao matematičkog modela za rešavanje problema iz drugih naučnih disciplina i raznih problema u realnom okruženju, pruža mogućnost da se u nastavi matematike uspostavi korelacija sa drugim nastavnim predmetima i da učenici/studenti kroz primenu znanja iz jedne naučne discipline u drugu steknu celovita, trajna i funkcionalna znanja.

U savremenom obrazovanju, jedan od značajnih ciljeva je osposobljavanje učenika da razumeju grafičke prikaze, prirodnih i društvenih fenomena, što se smatra neophodnom kompetencijom u stručnoj i svakodnevnoj komunikaciji. Međutim, bez obzira na to što su kompetencije u radu sa grafičkim reprezentacijama prepoznate kao važni ishodi nastavnog procesa, neka iskustva ali i rezultati istraživanja (npr. Leinhardt *et al*., 1990; Woolnough, 2000) pokazuju da brojni učenici/studenti imaju površna i nekompletna znanja o ovoj značajnoj oblasti. Poteškoće nekih učenika upravo proističu iz ograničenog iskustva u radu sa grafičkim reprezentacijama i njihovim povezivanjem sa simboličkim reprezentacijama. Takvo stanje najčešće nastaje kao posledica načina na koji se pojam funkcije obrađuje u školama, kada su u fokusu učenja algebarske reprezentacije, pri čemu su grafičke reprezentacije i vizuelni pristupi učenju marginalizovani.

U ovoj disertaciji prikazano je jedno od didaktičko-metodičkih rešenja primene savremenih teorija učenja i nastave koje omogućava da se u izučavanju sadržaja iz oblasti funkcija grafičke reprezentacije afirmišu kao produktivno kognitivno sredstvo razvoja apstraktnog matematičkog mišljenja. Na osnovu teorijskih principa kognitivno-vizuelnog pristupa, u doktorskoj disertaciji su osmišljeni i kreirani originalni didaktičko-metodički modeli za realizaciju nastavnih sadržaja iz oblasti:

- matematičke analize (funkcije i izvod funkcije),
- problema smeše (problemi mešanja rastvora),
- linearne funkcije i njene primene na rešavanje problema (problemi iz oblasti algebre, fizike i realnog okruženja),

u cilju kontinuirane i efikasne primene grafičkih reprezentacija funkcija u nastavi/učenju, sa posebnim akcentom na ispitivanje funkcija i njihovu primenu u rešavanju problema.

Ključni aspekti originalnog inovativnog pristupa su: vizuelizacija, višestruke reprezentacije, konceptualna znanja i postepeni prelazak ka višim nivoima apstrakcije u razvoju matematičkog mišljenja. U procesu nastave/učenja pažnja je najpre usmerena na formiranje i razvoj vizuelnog mišljenja i grafičkog razumevanja koncepata i sticanje konceptualnih znanja na osnovu višestrukih reprezentacija. Nakon toga, nastavne aktivnosti se postepeno usmeravaju na razvoj simboličkog mišljenja i sticanje proceduralnih znanja, tako da vizuelni uvid podržava razumevanje algebarskih reprezentacija koje se koriste za sofisticiranije proračune i manipulisanje matematičkim konceptima. Pri izučavanju sadržaja matematičke analize, izgrađeno razumevanje grafičkih i algebarskih reprezentacija predstavlja kognitivnu osnovu na kojoj se izgrađuje formalno-aksiomatsko mišljenje.

S obzirom na to da matematički zadaci imaju centralnu ulogu u učenju i nastavi matematike, za obradu odabranih sadržaja matematičke analize osmišljeni su zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Kako postoji veliki broj i različite vrste zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima koji se mogu koristiti u nastavi, izvršeno je njihovo razvrstavanje po različitim kriterijumima koji odražavaju njihove metodičke osobenosti. Postupku osmišljavanja, kreiranja i izbora zadataka, prethodila je detaljna teorijska didaktičko-metodička analiza i transformacija obrazovnih sadržaja. U cilju sagledavanja metodičkih mogućnosti za integrisanje zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima u postojeće programske sadržaje, izvršena je analiza važećeg nastavnog programa i sadržaja udžbeničke literature za četvrti razred gimnazije kao i druge stručne literature. Posebno je vođeno računa o ciljevima/ishodima koji se žele postići kognitivno-vizuelnim pristupom, predznanjima, sposobnostima i mogućnostima učenika. Na osnovu sprovedene analize urađena je tipologija zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Određena su četiri osnovna tipa zadataka (A, B, C i D tip), na osnovu dva kriterijuma: 1) da li se u zadatku zahteva rad sa grafikom funkcije ili sa grafikom izvodne funkcije, 2) da li se u zadatku razmatra diferencijabilna funkcija ili funkcija koja nije diferencijabilna na celom domenu. Istražene su metodičke karakteristike osnovnih tipova zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima, razrađena je metodika njihove primene u obradi nastavne teme Izvod funkcije i date su preporuke za njenu realizaciju.

U disertaciji su razmatrane didaktičko-metodičke mogućnosti primene kognitivno-vizuelnog pristupa u cilju korelacije nastave matematike sa nastavom prirodnih nauka. Za obradu sadržaja koji se odnose na linearnu funkciju i njenu primenu u rešavanju problema, izabrani su problemi iz hemije i fizike koje se mogu prikazati različitim reprezentacijama i koji se mogu vizuelizovati na razne načine. U fokusu kognitivno-vizuelnog pristupa je vizuelizacija problema smeše (mešanja rastvora) i problema kretanja (ravnomerno pravolinijskog) grafičkim reprezentacijama linearnih funkcija i uspostavljanje različitih strategija rešavanja problema. Kako bi se rešavanju problema pristupilo iz različitih perspektiva, osim vizuelizacije graficima linearnih funkcija, problemi smeše/kretanja su vizuelizovani i dinamičkim vizuelnim reprezentacijama (simulacija problema u softveru *GeoGebra*) i geometrijskim reprezentacijama (pomoću pravougaonika/duži i trouglova). Dinamička vizuelizacija i primena višestrukih reprezentacija obezbeđuju celovit kontekst za učenje u kome se vizuelni i simbolički aspekti problema razmatraju u njihovom jedinstvu, i pružaju mogućnost da se tradicionalni okviri rešavanja problema prošire i obogate originalnim i nestereotipnim rešenjima.

Za potrebe istraživanja osmišljeni su i izrađeni nastavni materijali koji su omogućili učenicima/studentima da izučavaju funkcije i njihove primene u multireprezentativnom i vizuelno-dinamičkom računarskom okruženju. Kreirani nastavni materijali aktuelizuju kognitivno-vizuelno okruženje za učenje, posebno u domenu podsticanja i unapređivanja vizuelnog mišljenja, grafičkog razumevanja, fluentnosti i fleksibilnosti u radu sa višestrukim reprezentacijama. Kognitivno-vizuelni nastavni materijali su izrađeni u obrazovnom softveru *GeoGebra* i u obliku *Power Point* prezentacija, u skladu sa osnovnim principima multimedijalnog učenja. Multimedijalnim dizajnom nastavnih materijala nastojano je da se sadržajima i načinom njihovog prikazivanja strukturira i tok misaonih aktivnosti sa ciljem da se kod učenika razviju kognitivne strukture koje će omogućiti efikasnije načine usvajanja znanja i dublje i temeljitije ovladavanje sadržajima. Pri izradi nastavnih materijala, posebna pažnja bila je posvećena individualizaciji okruženja za učenje putem sistematično organizovanih i sveobuhvatnih povratnih informacija čije je korišćenje interaktivno i personalizovano, kao i dizajnom koji uvažava individualne razlike između učenika/studenata u predznanju, intelektualnim sposobnostima, preferencijama u radu sa reprezentacijama i stilovima učenja.

Kognitivno-vizuelni pristup obradi navedenih sadržaja je implementiran u srednjoškolsku i visokoškolsku nastavu. Sprovedeno je empirijsko istraživanje u okviru koga je u periodu od 2013. do 2015. godine realizovano pet pedagoških eksperimenata u kojima je učestvovalo 642 ispitanika (342 učenika i 300 studenata). Evaluacija ostvarenih efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa u nastavi/učenju, izvršena je poređenjem postignuća učenika/studenata eksperimentalne i kontrolne grupe na testovima znanja.

Postavljeni zadaci istraživanja su uspešno realizovani, pa je i opšti cilj disertacije u potpunosti ostvaren. Na osnovu rezultata svih sprovedenih istraživanja, potvrđena je opšta hipoteza istraživanja – *primena kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom i dinamičkom prikazu funkcije u prezentovanju matematičkih sadržaja i rešavanju problema, u računarskom okruženju, ima značajan uticaj na kvalitet znanja učenika/studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija i njihovih primena na rešavanje problema.*

Eksperimentalno ispitivanje efikasnosti uvođenja i primene kognitivno-vizuelnog pristupa u izučavanju odabranih sadržaja matematičke analize, sprovedeno je tokom dve školske godine sa učenicima četvrtog razreda prirodno-matematičkog smera gimnazije i studentima prve godine osnovnih studija fizike.

Istraživanje sa učenicima je realizovano na namernom uzorku od 222 ispitanika koji su bili podeljeni u dve grupe (eksperimentalnu i kontrolnu). Grupe su imale približno jednak broj učenika i bile su ujednačene na osnovu ocena iz matematike u prethodna tri razreda. Na početku školske godine učenici su radili inicijalni test. Analizom rezultata inicijalnog testiranja utvrđena je ujednačenost grupa na osnovu predznanja iz oblasti funkcije. Eksperimentalni program je realizovan tokom prvog polugodišta, u obradi nastavne teme Izvod funkcije. Odabrani nastavni sadržaji su didaktičko-metodički transformisani, oblikovani i realizovani kognitivno-vizuelnim pristupom sa eksperimentalnom grupom učenika. U radu sa učenicima eksperimentalne grupe korišćeni su unapred pripremljeni *GeoGebra* radni listovi i *Power Point* prezentacije za obradu sledećih nastavnih sadržaja: uvođenje pojma prvog izvoda funkcije, geometrijska interpretacija izvoda funkcije, monotonost funkcije, ekstremne vrednosti funkcije, konveksnost, konkavnost i prevojne tačke, crtanje grafika funkcije i sistematizaciju gradiva. U kontrolnoj grupi, nastava se odvijala prema programu matematike, na uobičajeni način, primenom tradicionalnih metodskih pristupa. Nakon završetka eksperimentalnog programa, početkom drugog polugodišta, sprovedeno je finalno testiranje znanja učenika. Evaluacija ostvarenih efekata primene inovativnog metodskog pristupa izvršena je poređenjem postignuća učenika eksperimentalne i kontrolne grupe na finalnom testu. Statistički je potvrđeno, sa sigurnošću od 99%, da su učenici eksperimentalne grupe ostvarili značajno bolje rezultate u odnosu na učenike kontrolne grupe. Eksperimentalno istraživanje je pokazalo pozitivan uticaj primene kognitivno-vizuelnog pristupa u nastavi/učenju odabranih sadržaja matematičke analize u računarskom okruženju, na kvalitet znanja učenika i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i izučavanju nastavnih sadržaja iz oblasti funkcije i izvod funkcije.

Eksperimentalno ispitivanje efekata realizacije kognitivno-vizuelnog pristupa obradi odabranih sadržaja matematičke analize u visokoškolskoj nastavi matematike, sprovedeno je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, sa studentim prve godine studija fizike. Istraživanje je realizovano na namernom uzorku od 120 studenata koji su bili podeljeni u dve grupe. Grupe su bile ujednačene na osnovu predznanja iz oblasti funkcije, koje je ispitano inicijalnim testiranjem. Analiza rezultata ovog istraživanja pokazala je da je grupa studenata sa kojima su odabrani sadržaji matematičke analize obrađeni kognitivno-vizuelnim pristupom ostvarila statistički značajno bolje rezultate u znanju iz oblasti izvoda funkcije i njegove primene u ispitivanju funkcija, u odnosu na grupu studenata sa kojima su sadržaji obrađeni tradicionalnim načinom rada.

Eksperimentalno ispitivanje efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji odabranih sadržaja iz oblasti problema smeše (problemi mešanja rastvora) realizovano je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, tokom dve akademske godine. Prve godine, kognitivno-vizuelni pristup je bio zasnovan na vizuelizaciji problema mešanja rastvora apstraktnom vizuelnom reprezentacijom (grafikom linearne funkcije). Rezultati ovog istraživanja su pokazali svrsishodnost primene inovativnog metodskog pristupa, ali su dali i važne informacije, na osnovu kojih su razmotrene didaktičko-metodičke mogućnosti njegovog unapređenja u cilju postizanja što boljih ishoda učenja. Zbog toga je i naredne godine sprovedeno istraživanje u kome je kognitivna vizuelizacija nastavnih sadržaja bila proširena uvođenjem konkretne vizuelne (geometrijske) reprezentacije problema mešanja rastvora. U drugom istraživanju, kognitivno-vizuelni pristup je bio baziran na primeni konkretne i apstraktne vizuelne reprezentacije i njihovom povezivanju sa algebarskom reprezentacijom problema mešanja rastvora. Problem mešanja rastvora je modeliran i dinamički vizuelizovan u softveru *GeoGebra* za četiri specifična slučaja: mešanje dva rastvora, dodavanje čiste supstance u rastvor, dodavanje i isparavanje vode iz rastvora.

U istraživanju je učestvovalo ukupno 180 studenata osnovnih studija hemije. Oba istraživanja su sprovedena na stratifikovanim namernim uzorcima od 90 studenata (po 30 studenata prve, druge i treće godine). Formiranje eksperimentalne i kontrolne grupe je izvršeno na isti način. Na osnovu rezultata inicijalnog testiranja, studenti su bili podeljeni u dve grupe sa jednakim brojem studenata koji su na istoj godini studija i ujednačenog predznanja iz oblasti problema mešanja rastvora. U toku eksperimenta, studenti eksperimentalnih grupa su odabrane sadržaje izučavali kognitivno-vizuelnim pristupom uz primenu *GeoGebra* nastavnih materijala. Nastavne aktivnosti su promovisale primenu problemske i istraživačke metode u računarskom okruženju, kao i individualizaciju procesa učenja. Sa studentima kontrolnih grupa izvedena je nastava tako da su se odabrani sadržaji izučavali algebarskim pristupom, primenom tradicionalnih nastavnih metoda. Po završetku eksperimentalnog programa, sprovedeno je finalno testiranje studenata. Utvrđivanje efekata primene inovativnog metodskog pristupa izvršeno je poređenjem rezultata studenata eksperimentalnih i kontrolnih grupa ostvarenih na finalnom testu. U oba istraživanja statistički je potvrđeno da su studenti eksperimentalne grupe ostvarili značajno bolje rezultate u odnosu na studente kontrolne grupe. Eksperimentalno istraživanje je pokazalo pozitivan uticaj primene kognitivno-vizuelnog pristupa u obradi odabranih sadržaja iz oblasti problema smeše u računarskom okruženju, na kvalitet znanja studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i izučavanju problema mešanja rastvora.

Efikasnost primene kognitivno-vizuelnog pristupa u realizaciji sadržaja o linearnoj funkciji i njenoj primeni na rešavanje problema, posebno problema kretanja, ispitana je sprovođenjem pedagoškog eksperimenta sa učenicima prvog razreda prirodno-matematičkog smera gimnazije. U istraživanju je učestvovalo 120 učenika koji su bili podeljeni u dve grupe. Grupe su bile ujednačene na osnovu rezultata završnog ispita iz matematike na kraju osnovnog obrazovanja. Analiza rezultata ovog istraživanja pokazala je da je grupa učenika sa kojima su odabrani nastavni sadržaji o linearnoj funkciji obrađeni kognitivno-vizuelnim pristupom ostvarila statistički značajno bolje rezultate u znanju, razumevanju i analizi grafičke i algebarske reprezentacije linearne funkcije, kao i u primeni znanja u rešavanju problema (algebarskih, fizičkih, iz realnog okruženja), u odnosu na grupu učenika sa kojima su isti sadržaji obrađeni tradicionalnim načinom rada.

Disertacija predstavlja teorijsko-empirijski istraživački poduhvat i, u skladu sa tim, istaknuti su njeni naučni doprinosi savremenoj metodici nastave matematike.

Teorijski doprinos dat je kroz napravljen kritički komparativni pregled i sistematizovanje savremenih didaktičko-metodičkih, pedagoških i psiholoških saznanja, usredsređujući se na naučne i stručne radove koji se odnose na matematičke reprezentacije, vizuelizaciju, kognitivno-vizuelni pristup i primenu računarske tehnologije u nastavi. Posebno značajan doprinos sa teorijskog aspekta ogleda se u uvođenju zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima u izučavanju sadržaja matematičke analize, izrađenoj tipologiji zadataka, identifikovanju didaktičko-metodičkih mogućnosti za njihovo efikasno integrisanje u postojeći nastavni plan i program matematike za četvrti razred gimnazije, i razrađenoj metodici njihove primene u nastavnoj praksi.

Praktični značaj disertacije ogleda se u osmišljenim, kreiranim i praktično primenljivim didaktičko-metodičkim pristupima koji se baziraju na kognitivno-vizuelnim principima u izučavanju nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija i njihovih primena na rešavanje problema. Inovativni didaktčko-metodički modeli za realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa u nastavi matematike i prirodnih nauka (hemije, fizike) pokazuju izuzetan potencijal u domenu: formiranja i razvijanja vizuelnog mišljenja učenika/studenata, sticanja konceptualnih znanja, kompetentnog korišćenja reprezentacija i unapređivanja kompetencija za rešavanje problema.

Izrada i usvajanje obrazovnih standarda deo je kurikularnih reformi koje su veoma aktuelne poslednjih godina u našem obrazovnom sistemu. Standardi postignuća učenika za srednjoškolsko matematičko obrazovanje (Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, 2015), u velikoj meri su usklađeni sa aktuelnim nastavnim planovima i programima. Međutim, pojavljuje se i izvestan broj standarda koji su identifikovani kao izuzetno važni u savremenom matematičkom obrazovanju, ali koji do sada nisu testirani jer važeći nastavni programi ne obuhvataju sadržaje i teme na koje se ovi standardi postignuća odnose. Među ovim standardima su i sledeća dva standarda: 2.MA.1.3.4. (U funkcijama koje su predstavljene grafički ili tabelarno, analizira, primenjuje i približno izračunava brzinu promene pomoću priraštaja) i 2.MA.2.3.6. (Razume koncept izvoda funkcije i primenjuje ga u problemskim situacijama). Za njihovu implementaciju u nastavnom procesu potrebno je da se izvrši revizija nastavnih planova i programa, kao i da se osmisle načini realizacije za njihovo adekvatno usvajanje u praksi (*ibid.*, 21). U tom smislu, rezultati disertacije (uvođenje zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima i njihovo integrisanje u sadržaje nastavne teme Izvod funkcije, realizovana tipologija zadataka, razrađena metodika njihove primene u nastavnom procesu koja je prilagođena aktuelnom programu matematike, kao i statistički rezultati sprovedenog pedagoškog eksperimenta) mogu biti od pomoći: sastavljačima nastavnih planova i programa matematike za srednje škole, autorima udžbenika i zbirki zadataka, nastavnicima srednjih škola, kao i nastavnicima visokih škola i fakulteta na kojima se izučava matematička analiza.

Nastavni materijali korišćeni u eksperimentalnom delu istraživanja konstruisani su u skladu sa kognitivnim teorijama multimedijalnog učenja i pripremljeni su za direktnu aplikaciju u nastavi podržanoj računarskim tehnologijama. Oni mogu biti od pomoći nastavnicima matematike, hemije i fizike jer omogućavaju jednostavniju realizaciju kognitivno-vizuelnog pristupa izučavanju sadržaja koji se odnose na funkcije i njihove primene na rešavanje problema. Osim toga, nastavni materijali prikazani u disertaciji mogu poslužiti kao primeri za realizaciju drugih sadržaja i podsticaj nastavnicima za korišćenje *GeoGebra* obrazovnog softvera u nastavi, čime bi se doprinelo unapređenju obrazovno-vaspitne prakse.

Kroz eksperimentalni rad sa učenicima/studentima potvrđeno je da je, u realnim uslovima u kojima se održavaju nastavni časovi u našim školama, realizacija kognitivno-vizuelnog pristupa moguća i, štaviše, da je preporučljivo da se što češće koristi zbog višestrukih prednosti koje ima u odnosu na tradicionalne metode i postupke u nastavnoj praksi. Uvek kada je moguće da određeni matematički sadržaji dobiju vizuelno tumačenje, onda tu mogućnost treba adekvatno iskoristiti. U tom smislu, preporučuje se kontinuirana primena kognitivno-vizuelnog pristupa, uz dobro osmišljene sadržaje koji će omogućiti da ovaj metodički pristup dâ najbolje efekte, kao i uz kombinaciju sa drugim efikasnim nastavnim metodama i postupcima. Kontinuitet u primeni kognitivno-vizuelnog pristupa, obezbeđuje uslove za akumulaciju vizuelnih iskustava učenika/studenata i vremenom dovodi do toga da razvoj sposobnosti, veština i strategija vizuelnog mišljenja postaje sve brži i sofisticiraniji. Razvoj vizuelnog mišljenja, vizuelna pismenost i kultura vizuelne percepcije „zahtevaju isto tako dugo i ozbiljno vaspitanje, kao i kultura pisanja i govora" (Резник, 1997: 175).

Kada je u pitanju nastavna praksa, treba imati u vidu da sama implementacija kognitivno-vizuelnog pristupa podrazumeva upotrebu računarskih tehnologija u nastavi, što zahteva postojanje odgovarajućih tehničkih uslova, kao i kompetentnog i kreativnog nastavnika, koji će umeti da planira, organizuje i realizuje aktivnosti sa multimedijalnim nastavnim materijalima. Za efikasnu realizaciju ovog metodičkog pristupa svakako bi od velikog značaja bili prilagođeni programi i udžbenici matematike koji su u skladu sa principima kognitivno-vizuelnog učenja.

Da bi kognitivno-vizuelni metodički pristup bio u što većoj upotrebi u svakodnevnoj nastavnoj praksi, trebalo bi izvršiti dalja istraživanja na srodnim sadržajima iz oblasti funkcija (kao što su granične vrednosti funkcija, integralni račun i sl.), kao i u drugim matematičkim oblastima (algebra, geometrija, analitička geometrija...), na različitim nivoima obrazovanja. Na osnovu rezultata takvih istraživanja, sadržaje, za koje se ustanovi da kognitivno-vizuelni pristup njihovom izučavanju daje pozitivne efekte, trebalo bi adekvatno metodički obraditi i u udžbenicima, da bi postali putokaz nastavnicima, učenicima i studentima kako treba primenjivati kognitivno-vizuelne didaktičke instrukcije i strategije učenja.

Posebno bi bilo značajno da se u budućim istraživanjima ispitaju mogućnosti za kontinuiranu implementaciju kognitivno-vizuelnog pristupa u izučavanju sadržaja srednjoškolske matematike koji se odnose na funkcije. Longitudinalno praćenje efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa na postignuća učenika, znatno bi doprinelo optimizaciji metoda, strategija i pristupa realizaciji nastave matematike.

Neka od budućih istraživanja mogla bi da se kreću u pravcu proučavanja uticaja i efekata kognitivno-vizuelnog pristupa na afektivne aspekte nastave i procesa učenja, kao što su: razvoj pedagoških uverenja, stavova i ličnih aspiracija nastavnika po pitanju primene vizuelnih pristupa u nastavi matematike; motivisanost nastavnika da u svom radu koriste kognitivno-vizuelne modele nastave i na osnovu postojećih razvijaju nove, istraživanjem svoje prakse; preferencije nastavnika/učenika prilikom izbora reprezentacija; razvoj motivacije učenika; nivo matematičke anksioznosti učenika i sl.

Rezultati i koncepti izneti u ovom radu otvaraju put novim istraživanjima koja bi dalje ispitivala uticaj predloženog inovativnog pristupa na proces učenja i sticanja znanja iz različitih naučnih oblasti u kojima funkcije imaju primenu. Takva istraživanja bi omogućila uvođenje efikasnijih, kognitivno-vizuelnih strategija učenja i podučavanja ne samo u nastavi matematike, već i prirodnih nauka, što bi doprinelo unapređenju didaktičke teorije i obrazovne prakse.

LITERATURA

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School science and mathematics*, *112*(3), 159-170.

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, *33*(2), 131-152.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and instruction*, *16*(3), 183-198.

Ainsworth, S. (2008). The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In *Visualization: Theory and practice in science education* (pp. 191-208). Springer Netherlands.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *52*(3), 215-241.

Armstrong, G. M., & Hendrix, L. J. (1999). Does traditional or reformed calculus prepare students better for subsequent courses? A preliminary study. *Journal of Computers in Mathematics and Science teaching*, *18*(2), 95-103.

Arnhajm, R. (1985). *Vizuelno misljenje – jedinstvo slike i pojma*. Beograd: Univerzitet umetnosti u Beogradu.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399-431.

Aspinwall, L., & Miller, L. D. (2001). Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings: One teacher's reflections. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 89-107.

Aspinwall, L., & Shaw, K. L. (2002). Representations in calculus: Two contrasting cases. *The Mathematics Teacher*, *95*(6), 434.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics, 33*(3), 301-317.

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 557-578.

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the learning of mathematics*, 34-42.

Ben-Chaim, D., Lappan G., & Houang R. (1989). The Role of Visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11* (1), 49-60.

Berry, J. S., & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(4), 479-495.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2006). Students' thinking about the tangent line. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30th PME International Conference* (Vol. 2, pp. 177–184). Prague, Czech Republic.

Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education*, *10*(1), 53-70.

Bogoslavov, T .V. (2013). *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

Bogoslavov, V. (2008). *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 4.* Beograd: Zavod za udžbenike.

Bookman, J., & Friedman, C. P. (1994). A comparison of the problem solving performance of students in lab based and traditional calculus. *Research in collegiate mathematics education I*, *4*, 101-116.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: Synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *6*(3), 113-133.

Botzer, G., & Yerushalmy, M. (2008). Embodied semiotic activities and their role in the construction of mathematical meaning of motion graphs. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(2), 111-134.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction.* Cambridge, MA: Belknap Press.

Bruner, J.S. (1972), Tok kognitivnog razvoja. *Psihologija, 5*(1-2), 100-112. (adaptiran članak Bruner, J. S. (1964) The Course of Cognitive Crowth. *American Psyhologist 19*(1), 1-16)

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 352-378.

Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and instruction*, *8*(4), 293-332.

Chappell, K. K. (2003). Transition Issues That Reform Calculus Students Experience in Traditional Second Semester Calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *13*(2), 129-151.

Chappell, K. K., & Killpatrick, K. (2003). Effects of concept-based instruction on students'conceptual understanding and procedural knowledge of calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *13*(1), 17-37.

Cohen, J. (1988). Statistical power analysis for the behavioural sciences (2nd Ed.). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cuoco, A.A., & Curcio, F.R. (2001). *The Roles of Representation in School Mathematics: 2001 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dick, T. P., & Edwards, B. S. (2008). Multiple representations and local linearity. *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics*, *2*, 255-276.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up Mathematics*. Hutchinson Educational: London.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In *2001 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook: The Role of Representation in School Mathematics* (pp. 77-89). National Council of Teachers of Mathematics.

diSessa, A. A. (2007). Systemics of learning for a revised pedagogical agenda. In R. A. Lesh, E. Hamilton, & J. J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 245–261). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Springer Netherlands.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, *5*(3), 119-132.

Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H., & Kaput, J. (Eds.). (2000). *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (Vol. 8). Providence, RI: American Mathematical Society.

Dubinsky, E., & Wilson, R. T. (2013). High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 83-101.

Dunham, P. H., & Osborne, A. (1991). Learning How to See: Students Graphing Difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13*(4), 35-49.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1,* 3-26.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1), 103-131.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, MAA Notes No. 19, 25-37.

Ellington, A. J. (2006). The Effects of Non-CAS Graphing Calculators on Student Achievement and Attitude Levels in Mathematics: A Meta-Analysis. *School Science and Mathematics*, *106*(1), 16-26.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147–164). New York: Macmillan.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. G. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning Analysis of Results*. MAA Notes 33, (pp.31-46). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, *3*(2), 9-24.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Folker, S., Ritter, H., & Sichelschmidt, L. (2005). Processing and integrating multimodal material – The influence of color-coding. In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 690-695). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Gagatsis, A., Elia, E., & Kyriakides, L. (2003). The nature of multiple representations in developing mathematical relationships. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Ziliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA* (Vol. 1, pp. 287-287). Honolulu, Hawaii: USA.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Gardner, M. (1973). "Look-see" diagrams that offer visual proof of complex algebraic formulas. Mathematical Games column in *Scientific American*, October 1973, 114-118.

GeoGebra (2015a). Chemistry. Dostupno na https://www.geogebra.org/m/C4M42dr7 (pristupljeno 12. marta 2015.).

GeoGebra (2015b). Chemistry2. Dostupno na https://www.geogebra.org/m/Qz3hDWzD (pristupljeno 11. avgusta 2015.)

Gojkov, G. (2003). *Dokimologija*. Vršac: Viša škola za obrazovanje vaspitača.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57-72.

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2009). The role of reversibility in the learning of the calculus derivative and antiderivative graphs. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81-88). Atlanta, GA: Georgia State University.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative*. Doctoral dissertation, Department of Mathematics and Statistics, University of Jyväskylä, Finland. Retrieved from http://www.math.jyu.fi/research/reports/rep104.pdf

Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2009). Introduction: The transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM, 41,* 397–398.

Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Algebra and function development. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1. Research Syntheses* (Vol. 1, pp. 55-108). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5–23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hitt, F. (1997). Researching a Problem of Convergence with Mathematica: History and Visualisation of a Mathematical Idea. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *28*(5), 697 – 706.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123-134.

Hitt, F. (2002). *Representations and mathematics visualization*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Mexico City: Cinvestav-IPN.

Hodnik Čadež, T. (2015). Poučavanje matematike u osnovnoj školi u svjetlu suvremenih istraživanja. *Poučak*, *16*(62), 4-19.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004, July). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference*. Pecs, Hungary.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2008). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 28 (2), 135-146.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. ID 1448, vol. 7, March 2007.

Hoyles, C., & Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Berlin, Germany: Springer.

Hughes-Hallett, D. (1991). Visualization and calculus reform. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127 – 138).Washington, DC: MAA.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Flath, D. E., Lock, P. F., Gordon, S. P., Lomen, D. O., . . . Tucker, T. W. (1998). *Calculus: Single and multivariable* (2nd ed.). New York, NY: Wiley and Sons.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., & McCallum, W., & et al. (2013). *Calculus: Single and Multivariable, 6th*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Johansson, M. (2005). Mathematics textbooks–the link between the intended and the implemented curriculum. In *Eighth International Conference: Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education* (pp. 119-123). Johor Bharu, Malaysia.

Judson, T. W., & Nishimori, T. (2005). Concepts and Skills in High School Calculus: An Examination of a Special Case in Japan and the United States. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 24-43.

Kalyuga, S., Chandler, P., & Sweller, J. (1999). Managing split-attention and redundancy in multimedia instruction. *Applied cognitive psychology*, *13*(4), 351-371.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The Advantage of Abstract Examples in Learning Math. *Science*, *320*, 454–455.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol system of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). New York: Macmillan.

Kaput, J. J., & Thompson, P. W. (1994). Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME. *Journal for research in mathematics education*, *25*(6), 676-684.

Karadag, Z., & McDougall, D. (2009). Dynamic worksheets: visual learning with the guidance of Polya. *MSOR Connections*, *9*(2), 13-16.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping students learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis*. Translated from the third German edition by E. R. Hedrick and C. A. Noble. New York/London: Macmillan.

Knuth, E. J. (2000). Student understanding of the Cartesian connection: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 500-507.

Koirala, H. P. (1997). Teaching of calculus for students' conceptual understanding. *The Mathematics Educator*, *2*(1), 52-62.

Kozma, R. (2003). The material features of multiple representations and their cognitive and social affordances for science understanding. *Learning and Instruction*, *13*(2), 205-226.

Kozma, R., & Russell, J. (2005). Multimedia learning of chemistry. *The Cambridge handbook of multimedia learning*, 409-428.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Lester, J., (2000). Designing interactive mathematics. In *Asian Technology Conference in Mathematics.* Chiang Mai, Thailand.

Lipkovski, A., (2014). Nesklad matematike i prirodnih nauka u školi: može li bolje? U: Knjiga radova *Teorija i praksa nauke u društvu: izazovi i perspektive*. (str. 109-111). Beograd: Hemijski fakultet Univerziteta u Beogradu.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, *60*(1), 1-64.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *The American Mathematical Monthly*, *102*(3), 227-242.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33–40). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Lithner, J. (2011). University mathematics students' learning difficulties. *Education Inquiry*, *2*(2), 289-303.

Lopez Jr, A. M. (2001). A classroom note on: Making connections through geometric visualization. *Mathematics and Computer Education*, *35*(2), 116.

Mayer, R. E. (1999). Multimedia aids to problem-solving transfer. *Educational Research*, *31*(611), 623.

Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. New York: Cambridge University Press.

Mayer, R. E. (2003). The promise of multimedia learning: using the same instructional design methods across different media. *Learning and instruction*, *13*(2), 125-139.

Mayer, R. E. (Ed.). (2005). *The Cambridge handbook of multimedia learning*. Cambridge university press.

Mayer, R. E., & Chandler, P. (2001). When learning is just a click away: Does simple user interaction foster deeper understanding of multimedia messages?. *Journal of educational psychology*, *93*(2), 390-397.

Mayer, R. E., & Moreno, R. (2002). Aids to computer-based multimedia learning. *Learning and instruction*, *12*(1), 107-119.

Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational psychologist*, *38*(1), 43-52.

Meel, D. E. (1998). Honors students' calculus understandings: Comparing Calculus&Mathematica and traditional calculus students. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7*, 163-215.

McLoughlin, C., & Krakowski, K. (2001, September). Technological tools for visual thinking: What does the research tell us?. In N. Smythe (Ed.), *Proceedings of the Apple University Consortium Academic and Developers Conference* (pp. 13.1-13.12). James Cook University, Townsville, Australia.

Monk, S. (2003). Representation in school mathematics: Learning to graph and graphing to learn. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schiefter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 250-262). Reston, VA: NCTM.

Moreno, R., & Mayer, R. E. (1999). Cognitive principles of multimedia learning: The role of modality and contiguity. *Journal of educational psychology*, *91*(2), 358.

Moreno, R., Ozogul, G., & Reisslein, M. (2011). Teaching with concrete and abstract visual representations: Effects on students' problem solving, problem representations, and learning perceptions. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 32.

Moreno, R., Reisslein, M., & Ozogul, G. (2009). Pre-college electrical engineering instruction: Do abstract or contextualized representations promote better learning?. In R. A. Layton, M. Mina, M., & D. Cordes (Eds.), *Proceedings of IEEE/ASEE Frontiers in Education Conference* (pp. 1-6). Piscataway, NJ: IEEE.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. J., & Kaput, J. J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(2), 99-111.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A.

Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 69–100). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mužić, V. (2004). *Uvod u metodologiju istraživanja odgoja i obrazovanja.* Zagreb: EDUCA.

Narciss, S. (2008). Feedback strategies for interactive learning tasks. In A. J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Van Merrie¨nboer, & M. P. Driscoll (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology* (pp. 125-144). New York: Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: NCTM.

Orton, A. (1983a). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235-250.

Orton, A. (1983b). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Ostebee, A., & Zorn, P. (1999). *Calculus. From graphical, numerical, and symbolic points of view*. New York: Saunders College Publishing.

Ozgun-Koca, S. A. (1998). *Students' use of representations in mathematics education*. Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Raleigh, NC.

Paivio A. (1986). *Mental representations: a dual coding approach*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Palmiter, J. R. (1991). Effects of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 151-156.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40*(2), 118-127.

Park, K., & Travers, K. J. (1996). A comparative study of a computer-based and a standard college first-year calculus course. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *6*, 155-176.

Polya, G. (1966). *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Školska knjiga, Zagreb.

Porzio, D. (1999). Effects of Differing Emphases in the Use of Multiple Representations and Technology on Students' Understanding of Calculus Concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *21*(3), 1-29.

Potgieter M., Harding A., & Engelbrecht J., (2008), Transfer of Algebraic and Graphical Thinking between Mathematics and Chemistry. *Journal of Research in Science Teaching*, *45*(2), 197-218.

Preiner, J. (2008). Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: the case of GeoGebra. Doctoral dissertation, University of Salzburg, Austria.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational studies in mathematics*, *23*(6), 595-610.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205-235). Netherlands: Springer.

Rezat, S. (2009). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1260–1269). Lyon, France: INRP.

Rider, R. (2007). Shifting from Traditional to Nontraditional Teaching Practices Using Multiple Representations. *Mathematics Teacher*, *100*(7), 494-500.

Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 529-544.

Roddick, C. D. (2001). Differences in learning outcomes: Calculus & mathematica vs. traditional calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *11*(2), 161-184.

Rösken, B., & Rolka, K. (2006, July). A picture is worth a 1000 words–the role of visualization in mathematics learning. In *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 457-464).

Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1997). Graphing: Cognitive ability or practice?. *Science Education*, *81*(1), 91-106.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., & Wolfe, R. G. (2001). *Why Schools Matter: A Cross-National Comparison of Curriculum and Learning. The Jossey-Bass Education Series.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Schwingendorf, K. E., McCabe, G. P., & Kuhn, J. (2000). A longitudinal study of the C4L calculus reform program: Comparisons of C4L and traditional students. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 63-76.

Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(1), 1-55.

Selden, J., Selden, A., & Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. *MAA notes*, 19-28.

Seufert, T. (2003). Supporting coherence formation in learning from multiple representations. *Learning and instruction*, *13*(2), 227-237.

Shah, P., & Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: Implications for instruction. *Educational psychology review*, *14*(1), 47-69.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Shute, V. J., & Zapata-Rivera, D. (2008). Using an evidence-based approach to assess mental models. In *Understanding models for learning and instruction* (pp. 23-41). Springer US.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function*, *Aspects of Epistemology and Pedagogy*, (Vol. 25, pp. 25-58). USA: Mathematical Association of America.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20-26.

Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 404-411.

Stern, E., Aprea, C., & Ebner, H. G. (2003). Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation. *Learning and Instruction*, *13*(2), 191-203.

Sternberg, R. J. *Kognitivna psihologija*. Zagreb: Naklada Slap, 2005.

Stewart, J. (2007). *Calculus, 6th*. Toronto: Thomson Brooks/Cole.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2002). *Precalculus: Mathematics for calculus, 7th*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Thomson Learning.

Stieff, M., & Wilensky, U. (2003). Connected chemistry - incorporating interactive simulations into the chemistry classroom. *Journal of Science Education and Technology*, *12*(3), 285-302.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical thinking and learning*, *6*(4), 353-387.

Takači, D., Stankov, G., & Milanović, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education, 82*, 421-431.

Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics.* Doctoral dissertation, University of Warwick.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In D. Carraher and L. Miera (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, Recife: Brazil. Vol. 1, 61–75.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. In *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Springer Netherlands.

Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Springer Netherlands.

Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. *Historia e tecnologia no Ensino da Matemática*, *1*, 1-28.

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20* (2), 5-24.

Tall, D. (2010) A sensible approach to the calculus. Plenary address to the *Fourth National and International Meeting on the Teaching of Calculus*, 23–25 September, Puebla, Mexico. Retrived from http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010a-sensible-calculus.pdf

Tall, D., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and Calculus. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: *Vol. 1. Research synthesis* (pp. 207-258). USA: NCTM, In formation Age Publishing.

Tversky, B., Morrison, J. B., & Betrancourt, M. (2002). Animation: can it facilitate?. *International journal of human-computer studies*, *57*(4), 247-262.

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *20*(1), 113-113.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(5), 609-637.

Van Voorst, C. (1999). Technology in mathematics teacher education. *ICTE Educational Technology Resource Library*. Retrieved from http://www.icte.org/t99_library/t99_54.pdf

Verhoef, N. C., Coenders, F., Pieters, J. M., van Smaalen, D., & Tall, D. O. (2015). Professional development through lesson study: teaching the derivative using GeoGebra. *Professional development in education*, *41*(1), 109-126.

Vincent, B., LaRue, R., Sealey, V., & Engelke, N. (2015). Calculus students' early concept images of tangent lines. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(5), 641-657.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*(2), 149-156.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education*, 356-366.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(2), 115-133.

Woolnough, J. (2000). How do students learn to apply their mathematical knowledge to interpret graphs in physics?. *Research in Science Education*, *30*(3), 259-267.

Yerushalmy, M. (2005). Functions of interactive visual representations in interactive mathematical textbooks. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(3), 217-249.

Yerushalmy, M., & Shternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 251-268). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(4), 609-626.

Zimmerman, W. (1991). Visual Thinking in Calculus. In W. Zimemerman & S. Cunningham (Ed.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 127-137). Washington, DC: Mathematics Associations of America.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Банђур, В. и Поткоњак, Н. (1999) *Методологија педагогије*. Београд: Савез педагошких друштава Југославије.

Далингер, В. А. (2006а). Когнитивно-визуальный подход и его особенности в обучении математике. *Электрон. науч. журн. „Вестник ОГПУ", 2006*. Доступно на http://omsk.edu/article/vestnik-omgpu-151.pdf (приступљено 14. новембра 2013).

Далингер, В. А. (2006b). *Теоретические основы когнитивно-визуального подхода к обучению математике: Монография*. Омск: ОмГПУ.

Далингер, В. А. (2011). Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода. *Вестник Брянского государственного университета*, *1*, 299–305.

Далингер В. А. и Князева О.О. (2004). *Когнитивно-визуальный подход к обучению математике*. Омск: ОмГПУ.

Дејић, М. и Егерић, М. (2003). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет у Јагодини.

Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања. (2015). *Општи стандарди постигнућа за крај општег средњег образовања и васпитања и средњег стручног образовања и васпитања у делу општеобразовних предмета за предмет математика: приручник за наставнике.* Београд: Colorgrafx.

Ивановић, Ж. и Огњановић, С. (2010). *Математика 4 – збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа*. Београд: Круг.

Ивановић, Ж. и Огњановић, С. (2000). *Математика 1- збирка задатака и тестова за л разред гумназија и техничкух школа*, Београд: Круг.

Каделбург, З. и Мићић, В. (2008). *Анализа са алгебром 4 – уџбеник са збирком задатака за 4. разред математичке гимназије.* Београд: Круг.

Каделбург, З., Мићић, В. и Огњановић, С. (2008). *Анализа са алгебром 3 – уџбеник са збирком задатака за 3. разред математичке гимназије.* Београд: Круг.

Кечкић, Ј. (2010). *Математика са збирком задатака за 1. разред гимназије*. Београд: Српска школа.

Кечкић, Ј. (2010). *Математика са збирком задатака за 4. разред гимназије.* Београд: Српска школа.

Князева, О. О. (2003a). Визуализированные задачи и методика их использования в процессе обучения началам математического анализа. *Омск: Изд-во ОмГПУ*, *6*.

Князева, О.О. (2003b). *Реализация когнитивно-визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа*. Диссертация. Омск: Омский государственный педагогический университет.

Манько, Н. (2009). Когнитивная визуализация дидактических объектов в активизации учебной деятельности. *Педагогика и психология*, *2*, 22-28.

Марјановић, М. (2000). Обновитељске теме наставе математике. *Настава математике*, *XLV* (1-2), 1-8.

Милановић-Наход, С., Шарановић-Божановић, Н. и Шишовић, Д. (2003): Улога појмова у настави природних наука. *Зборник Института за педагошка истраживања, 35,* 111-130.

Мордкович, А.Г. (2009). *Алгебра и начала математического анализа, 10-11 класс, задачник*. Москва: Мнемозина.

Пермякова, М. Ю. (2015). *Формирование функционально-графической грамотности учащихся основной школы в процессе обучения математике.* Диссертация. Шадринск: Шадринский государственный педагогический институт.

Правилник о изменама и допунама Правилника о наставном плану и програму за гимназију, *Службени гласник РС – Просветни гласник*, бр. 7/2011.

Резник, Н. А. (1997). *Методические основы обучения математике в средней школе с использованием средств развития визуального мышления*. Диссертация. Санкт-Петербург: Институт продуктивного обучения Российской академии образования.

Сатьянов, П. Г. (1984). *Методика использования задач графического содержания в обучении началам математического анализа в школе*. Диссертация. Москва: Московский лесотехнический институт.

Такачи, Ђ. и Радовановић, Ј. (2009). О визуализацији изводне функције. *Педагошка стварност LV* (9–10), 1000-1006.

Такачи, Ђ. и Самарџијевић, М. (2006). Визуални приступ дефиницији извода функције. *Настава Математике*, *LI* (1-2), 19-28.

Ященко, И. В. и Захаров, П. И. (2013). *ЕГЭ 2013, Математика. Задача B8. Геометрический смысл производной. Рабочая тетрадь.* Москва, МЦХМО.

Шишовић, Д. Д. и Лазаревић-Бојовић, С. Д. (2001). Знање основних хемијских појмова у основној школи и гимназији. *Настава и васпитање*, *50*(2), 185-197.

BIOGRAFIJA

Valentina Kostić (rođ. Stefanović) rođena je 14. januara 1967. godine u Pirotu. Završila je osnovnu školu i gimnaziju u Pirotu. Diplomirala je 1991. godine na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Nišu, na studijskoj grupi za matematiku i stekla stručno zvanje diplomirani matematičar. Na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu, na Odseku za matematiku i informatiku, na osnovu usklađivanja stručnih naziva, stekla je 2011. godine zvanje diplomirani matematičar – master. Školske 2012/13. godine na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkor fakulteta u Novom Sadu, upisala je doktorske akademske studije Metodike nastave matematike.

U periodu od 1991. do 2001. godine radila je u Osnovnoj školi „Vuk Karadžić" u Pirotu, a od 1. septembra 2001. godine profesor je matematike u Gimnaziji Pirot.

U periodu od 1992. do 2008. godine, aktivno je učestvovala u Zimskoj školi mladih matematičara u Pirotu, koja je bila organizovana u cilju popularizacije matematike i rada sa matematički darovitim učenicima osnovnih škola. U radu Zimske škole je učestvovala kao predavač, a od 2005. do 2008. godine i kao član organizacionog tima.

Učesnik je brojnih programa stručnog usavršavanja nastavnika u oblasti metodike nastave matematike, pedagogije, psihologije i informacionih tehnologija, koji su akreditovani od strane Ministarstva prosvete Republike Srbije. U okviru Tempus projekta „Visuality & Mathematics", 2014. godine je pohađala letnju školu „2nd European Summer School for Visual Mathematics and Education".

Autor je i koautor više radova objavljenih u domaćim i inostranim naučnim časopisima, od kojih je jedan objavljen u vrhunskom međunarodnom časopisu. Sa saopštenjima je učestvovala na više međunarodnih i nacionalnih naučnih skupova.

Radovi i saopštenja:

Kostić, V. (2013). Izvod funkcije i njegove primene – zadatak u slici. U: *Zbornik radova četvrtog simpozijuma „Matematika i primene"* (str. 68-78). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet.

Takači, Đ., & **Kostić, V.** (2014). Cognitive-visual approach to the teaching topic "Derivative of a function". *Fifth Central and Eastern European Conference on Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education*, Poster section, September 26-29, 2014. Halle (Saale), Germany.

Kostić, V., & Sekulić, T. (2014). Extreme Values of Function in GeoGebra Style. *VisMath*, 16 (1). Retrieved from http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/vm/56/vm_1.pdf

Sekulić, T., & **Kostić, V.** (2014). Mathematical Workshops, Learning and Popularization of Mathematics. *VisMath*, 16 (1). Retrieved from http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/vm/56/vm_7.pdf

Костић, В. и Секулић, Т. (2014). Математичко моделовање у универзитетској настави математике. *ДИТ*, XX (21-22), 89-93.

Kostić, V. i Sekulić, T. (2014). Učenje po Poljinim principima u GeoGebra okruženju. U: *Zbornik radova petog simpozijuma „Matematika i primene"* (str. 104-112). Beograd: Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet.

Костић, В. (2014). Моделирање проблема равномерног кретања у GeoGebri. У: *Култура, комуникација, компјутер – зборник радова пете међународне конференције гимназија 3К* (стр. 63-73), Нови Сад: Педагошко друштаво Војводине: Гимназија „Исидора Секулић".

Костић, В., Секулић, Т. и Станковић-Ђорђевић, М. (2014). Формирање почетних математичких појмова – од визуелног до симболичког. У: *Холистички приступ у предшколској педагогији – теорија и пракса, Зборник радова другог стручно-научног скупа са међународним учешћем ХОЛИПРИ* 2014 (стр. 188-199). Пирот: Висока школа струковних студија за образовање васпитача Пирот.

Kostić, V., & Takači, Đ. (2014). Cognitive-visual approach to the teaching topic "Derivative of a function" by applying visualized problems. In *13th Serbian Mathematical Congres, May 22-25, 2014, Book of Abstracts* (p. 106). Vrnjačka Banja, Serbia.

Костић, В., Станков-Јовановић, В. и Такачи, Ђ. (2014). Примена интерактивних графичких модела креираних у Geogebri у решавању задатака из хемије. У: *Научни скуп „Методички аспекти унапређења наставе – предности и изазови" – Књига резимеа* (стр 16-17). Београд: Друштво предметних дидактичара Србије.

Куюмджиева, Б., **Костић, В.**, Кендеров, П. и Сендова, Е. (2014). Стартира проект KeyCoMath. *Научно-практическа конференция „Динамична математика в образованието"*, Постер сесия, 15. февруари 2014. ИМИ-БАН, София, България.

Kostić, V. (2014). Extreme values and derivatives of functions**.** *2nd European Summer School for Visual Arts and Education,* July 14-25, 2014. Metropolitan University, Belgrade, Serbia.

Kostić, V., & Sekulić, T. (2015). Mathematical Modeling and GeoGebra as Bridge between Natural Sciences and Mathematics**.** *VI International Conference of Teaching and Learning Mathematics*, January 23-25, 2015. Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia.

Kostić, V., & Sekulić, T. (2015). Mathematical modelling in physics. *Winter School on Non-Standard Forms of Teaching Mathematics and Physics: Experimental and Modeling Approach,* February 6–8, 2015. Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, University of Novi Sad, Novi Sad, Serbia.

Костић, В. (2015). Моделиране и симулация на двигателни проблеми с GeoGebra. *Научно-практическа конференция „Динамична математика в образованието"*, 14. февруари 2015. ИМИ-БАН, София, България.

Костић, В., Станков-Јовановић, В. и Секулић, Т. (2015). Моделирање проблема смеше у GeoGebra окружењу. У: *Култура, комуникација, компјутер – зборник радова шесте међународне конференције гимназија 3К* (стр. 204-214). Нови Сад: Педагошко друштаво Војводине: Гимназија „Исидора Секулић". (M33)

Такачи, Ђ., **Костић, В.** и Секулић, Т. (2015). Математичко моделовање проблема кретања у динамичком визуелном окружењу. *Шести симпозијум "Математика и* *примене"*, 16-17. oktobar 2015. Математички факултет, Универзитет у Београду, Београд, Србија.

Секулић, Т., Радосављев Кирћански, Ј., Видановић, Д. и **Костић, В.** (2015). Активно-креативно учење. *Трећи стручно-научни скуп са међународним учешћем: "Континуитет у процесу васпитања", ХОЛИПРИ 2015,* 16-17. oktobar 2015. Висока школа струковних студија за образовање васпитача Пирот, Пирот, Србија.

Kostic, V., Sekulic, T. (2015). Visualized problems in the teaching topic "Derivative of a function". Teaching material developed for project IPA HU-SRB/1203/221/024: *Non-Standard Forms of Teaching Mathematics and Physics, Mathematics and Computer-Aided Modeling in Sciences*. Bolyai Institute Department of Medical Physics and Medical Informatics University of Szeged Hungary, Department of Mathematics and Informatics Faculty of Natural Sciences and Mathematics University of Novi Sad Serbia, 2015. Retrieved from http://www.model.u-szeged.hu/index.php?action=edoc&cmd=show_edoc&edoc_id=42

Kostić, V., Stankov-Jovanović, V., Sekulić, T., & Takači, D. (2016). Visualization of problem solving related to the quantitative composition of solutions in the dynamic GeoGebra environment. *Chemistry Education Research and Practice*, *17*(1), 120-138.

Novi Sad, oktobar, 2017.

____

Valentina Kostić

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (dipl., mag., dokt.): VR	Doktorska disertacija
Ime i prezime autora: AU	Valentina Kostić
Mentor (titula, ime, prezime, zvanje): MN	dr Đurđica Takači, redovni profesor
Naslov rada: NR	Kognitivno-vizuelni pristup zasnovan na grafičkom prikazu funkcije u rešavanju matematičkih problema
Jezik publikacije: JP	Srpski (latinica)
Jezik izvoda: JI	srpski i engleski
Zemlja publikovanja: ZP	Republika Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2017.
Izdavač: IZ	autorski reprint
Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3
Fizički opis rada: FO	6/ 226/ 76/ 8/ 6/ 23/ 207/ 0 (broj poglavlja/ stranica/ slika/ šema/ grafikona/ tabela/ referenci/ priloga)
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Metodika nastave matematike
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	Kognitivno-vizuelni pristup, višestruke reprezentacije, vizuelizacija, obrazovni softver *GeoGebra*, funkcije, izvod funkcije, problem smeše, problemi kretanja.
UDK	

Čuva se: ČU	Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	

U doktorskoj disertaciji je prezentovano pedagoško istraživanje koje se odnosi na teorijsko i eksperimentalno ispitivanje i proučavanje efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na primeni grafičkih reprezentacija funkcija u obradi nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija i njihovih primena. Na osnovu teorijskih principa kognitivno-vizuelnog pristupa, osmišljeni su i kreirani originalni didaktičko-metodički modeli za realizaciju sadržaja iz oblasti: matematičke analize (funkcije i izvod funkcije); problema smeše (problemi mešanja rastvora); linearne funkcije i njene primene na rešavanje problema (problemi iz oblasti algebre, fizike i realnog okruženja). Ključni aspekti predloženog metodičkog pristupa su: vizuelizacija, višestruke reprezentacije, konceptualna znanja, postepeni prelazak ka višim nivoima apstrakcije u razvoju matematičkog mišljenja, kao i planska i sistematska upotrebu računara sa odgovarajućom softverskom podrškom. Okosnicu kognitivno-vizuelnog pristupa u obradi sadržaja matematičke analize i značajnu novinu u izučavanju izvoda funkcije predstavljaju zadaci sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima. Prikazane su metodičke mogućnosti ovih zadataka u kreiranju multireprezentativnog okruženja za učenje čija je polazna tačka formiranje i razvoj grafičkog razumevanja matematičkih koncepata. Takođe je izložena mogućnost klasifikacije zadataka sa grafičkim sadržajima i/ili zahtevima po različitim kriterijumima, na osnovu koje je data tipologija i razrađena metodika njihove primene u nastavnoj praksi.
Sprovedeno je empirijsko istraživanje u okviru koga je u periodu od 2013. do 2015. godine realizovano pet pedagoških eksperimenata sa paralelnim grupama u kojima su učestvovala 642 ispitanika (222 učenika četvrtog i 120 učenika prvog razreda gimnazije prirodno-matematičkog smera, 180 studenata osnovnih studija hemije i 120 studenata prve godine osnovnih studija fizike). Za potrebe istraživanja osmišljeni su i izrađeni nastavni materijali koji su omogućili učenicima/studentima eksperimentalnih grupa da izučavaju funkcije i njihove primene u multireprezentativnom i vizuelno-dinamičkom računarskom okruženju. Instrumenti primenjeni u istraživanjima bili su inicijalni i finalni testovi znanja. Evaluacija ostvarenih efekata primene kognitivno-vizuelnog pristupa, izvršena je poređenjem postignuća učenika/studenata eksperimentalnih (kognitivno-vizuelnih) i kontrolnih (tradicionalnih) grupa na testovima znanja. Na osnovu rezultata sprovedenih pedagoških eksperimenata, utvrđeno je da primena kognitivno-vizuelnog pristupa zasnovanog na grafičkom i dinamičkom prikazu funkcije u prezentovanju matematičkih sadržaja i rešavanju problema, u računarskom okruženju, ima značajan uticaj na kvalitet znanja učenika/studenata i ostvarenost optimalnih rezultata u učenju i razumevanju nastavnih sadržaja iz oblasti funkcija i njihovih primena na rešavanje problema.

Datum prihvatanja teme od strane Senata: DP	21. 1. 2016.
Datum odbrane: DO	

Članovi komisije:
KO

predsednik:	dr Ljiljana Gajić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
član:	dr Đurđica Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
član:	dr Petar Đapić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
član:	dr Svetlana Španović, redovni profesor, Pedagoški fakultet, Sombor
član:	dr Toni Kondeva Čehlarova, profesor, Institut za matematiku i informatiku Bugarske akademije nauka, Sofija

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCES

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	Doctoral dissertations
Author: AU	Valentina Kostić
Mentor: MN	Đurđica Takači, PhD
Title: TI	Cognitive-visual approach based on the graphical representation of function to solve mathematical problems
Language of text: LT	Serbian (Latin)
Language of abstract: LA	Serbian and English
Country of publication: CP	Republic of Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2017.
Publisher: PU	Author's reprint
Publication place: PP	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3
Physical description: PD	6/226/ 76/ 8/ 6/ 23/207/ 0 (chapters/ pages/ figures/ schemes/ graphics/ tables/ references/ appendix)
Scientific field SF	Mathematics
Scientific discipline SD	Teaching Methods of Mathematics
Subject, Key words SKW	Cognitive-visual approach, multiple representations, visualization, educational software *GeoGebra*, functions, derivative of function, problem of mixture, problems of motion.
UC	
Holding data: HD	Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note:
N

Abstract:
AB
In the doctoral dissertation a pedagogical research related to theoretical and experimental study of effects of applying a cognitive-visual approach based on the use of graphic representations of functions in interpretation of teaching contents from the field of functions and their applications is presented. On the basis of theoretical principles of cognitive-visual approach, original didactic-methodical models for the realization of contents were designed and created in the field: of mathematical analysis (functions and function derivative); problem of mixture (problems of mixing solutions); linear functions and its applications to solve problems (problems in the field of algebra, physics and the real environment). Key aspects of the proposed methodical approach are: visualization, multiple representations, conceptual knowledge, gradual transition to higher levels of abstraction in the development of mathematical thinking, as well as the planned and systematic use of computers with appropriate software support. The background of cognitive-visual approach in interpretation of mathematical analysis content and a significant novelty in the study of function derivative represent the problems with graphical contents and/or requirements. The methodological possibilities of these problems in creation of a multi-representative learning environment whose starting point is the formation and development of a graphical understanding of mathematical concepts are presented. The possibility of problems classification with graphical contents and/or requests according to different criteria is presented, on the basis of which, the typology is proposed and methodology for their application in teaching practice is elaborated.
During the period 2013-2015 an empirical research was conducted within which five pedagogical experiments were realized with parallel groups involving a total of 642 respondents (222 students of the fourth and 120 first-year high school students major in science, 180 students of bachelor chemistry studies and 120 students of the first year of bachelor physics studies). For the purpose of the research, teaching materials that enabled students of the experimental groups to study the functions and their applications in a multi-representative and visual-dynamic computing environment were created. The instruments used in the research were initial and final tests of knowledge. The realized effects of the application of cognitive-visual approach was evaluated by comparing the achievements of high school students/ students of experimental (cognitive-visual) and control (traditional) groups on knowledge tests. Based on the results of the conducted pedagogical experiments, it has been established that the application of the cognitive-visual approach based on the graphical and dynamic presentation of the function in teaching mathematical contents and in problem solving in a computer environment has a significant impact on the quality of high school students'/students' knowledge and on the achievement of optimal learning outcomes and understanding of teaching contents from the field of functions and their application to solving problems.

Accepted on Senate on: January 21, 2016
AS

Defended:
DE

Thesis Defend Board:
DB
president: Ljiljana Gajić, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
member: Đurđica Takači, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
member: Petar Đapić, PhD, assistant professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
member: Svetlana Španović, PhD, full professor, Faculty of Education, Sombor
member: Toni Kondeva Čehlarova, PhD, professor, Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia