UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Biljana Carić

NEPOKRETNA TAČKA U METRIČKIM I GENERALIZOVANIM METRIČKIM PROSTORIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2018.

	УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА** 21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6
	КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Биљана Царић
Ментор, **МН**:	Проф. др Мила Стојаковић, проф. Др Татјана Дошеновић
Наслов рада, **НР**:	Непокретна тачка у метричким и генерализованим метричким просторима
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Српски, Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2018.
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	6/108/84/0/0/0/0
Научна област, **НО**:	Примењења математика
Научна дисциплина, **НД**:	Теоријска и примењена математика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Непокретна тачка, метрички простор, контракција, фази
УДК	
	Библиотека Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Предмет истраживања у докторској дисертацији су методе за егзистенцију и конструкцију непокретне тачке за једнозначна и вишезначна пресликавања контрактивног типа у метричком и генерализованим метричким просторима (конвексан метрички, фази метрички и фази Г метрички простор)
Датум прихватања теме, **ДП**:	16.11.2017.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	др Љиљана Гајић, редовни професор	
	Члан:	др Зорица Узелац, редовни професор	
	Члан:	др Јовиша Жунић, научни саветник	
	Члан, ментор:	др Татјана Дошеновић, редовни професор	Потпис ментора
	Члан, ментор:	Др Мила Стојаковић, редовни професор	

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic publication
Type of record, **TR**:	Textual printed material
Contents code, **CC**:	PhD thesis
Author, **AU**:	Biljana Carić
Mentor, **MN**:	Professor Mila Stojaković , PhD; Professor Tatjana Došenović , PhD
Title, **TI**:	Fixed point in metric and generalized metric spaces
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian, English
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Province of Vojvodina
Publication year, **PY**:	2018.
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	6/108/84/0/0/0/0
Scientific field, **SF**:	Applied Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Theoretic and Applied Mathematics
Subject/Key words, **S/KW**:	Fix point, metric spaces, contraction, fuzzy
UC	
Holding data, **HD**:	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	The subject of research in the doctoral dissertation is the methods for the existence and construction of a fixed point for the single and multivalued mappings of a contraction type in metric and in generalized spaces(convex metric spaces, fuzzy metric spaces and fuzzy G-metric spaces)
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	November 16, 2017.
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:			
	President:	Ljiljana Gajić, PhD, full professor	
	Member:	Zorica Uzelac, PhD, full professor	
	Member:	Joviša Žunić, PhD, research professor	
	Member, Mentor:	Tatjana Došenović, PhD, associate professor	Menthor's sign
	Member, Mentor:	Mila Stojaković, PhD, full professor	

Obrazac **Q2.HA.06-05**- Izdanje 1

Velika mi je čast što sam pri izradi doktorske disertacije sarađivala sa tri izuzetna naučnika.

Najveću zahvalnost dugujem prof. dr Mili Stojaković, mojoj mentorki, koja me je uvela u ovu oblast matematike, motivisala svojim naučnim dostignućima, bez čije bezrezervne stručne pomoći, inicijative i podrške ova disertacija ne bi bila realizovana.

Neizmernu zahvalnost dugujem mojoj mentorki, prof. dr Tatjani Došenović, na izdvojenom vremenu, nesebičnoj stručnoj pomoći i posvećenosti u svakom trenutku.

Najsrdačnije se zahvaljujem prof. dr Ljiljani Gajić na dragocenim savetima i sugestijama od samog početka izrade disertacije.

Zahvaljujem se članovima komisije, prof. dr Zorici Uzelac i prof. dr Joviši Žuniću, koji su svojim sugestijama dali doprinos konačnoj formi doktorske disertacije.

Disertaciju sa ljubavlju posvećujem mom sinu Milošu, koji je moja pokretačka snaga.

Sadržaj

Rezime

Predmet istraživanja u doktorskoj disertaciji je teorija nepokretne tačke u metričkom prostoru i generalizovanim metričkim prostorima.

U prvoj glavi je dat istorijski pregled i navedene su neke od primena teorije nepokretne tačke.

U drugoj glavi doktorske disertacije predstavljeni su metrički prostori, kao i neka od uopštenja metričkih prostora.

U trećoj glavi razmatra se problem nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja koja zadovoljavaju integralni tip kontrakcije. Dokazane su teoreme koje su uopštenja Nadlerovog principa kontrakcije, Kanove teoreme, Zamfireskuovog preslikavanja i teorema o fiksnoj tački u kompletnom metričkom prostoru sa konveksnom strukturom.

Četvrta glava posvećena je nepokretnoj tački za preslikavanja koja nisu neprekidna u Takahašijevom metričkom prostoru korišćenjem rezultata Angrisanija i Klavelija koji su uveli regularno-globalnu infimum funkciju.

U petoj glavi dokazane su teoreme o fiksnoj tački i tački koincidencije u fazi metričkom prostoru za višeznačna preslikavanja. Funkcija promenljivog rastojanja i višeznačna jaka $\{b_n\}-$fazi kontrakcija korišćene su pri formulisanju uopštenih uslova kontraktivnog tipa. Dobijene teoreme predstavljaju uopštenja nekih poznatih rezultata za jednoznačna preslikavanja.

U šestoj glavi su dokazane teoreme o nepokretnoj i subfiksnoj tački za preslikavanja u fazi $G-$metričkim prostorima. Analizira se postojanje i jedinstvenost zajedničke nepokretne tačke za familiju fazi preslikavanja $\{f_i\}$ izvedenom generalizovanom metrikom G.

Abstract

The subject of the thesis is fixed point theory for selfmappings in metric spaces and generalized metric spaces.

The first chapter gives a historical overview and some applications of fixed point theory.

In the second chapter metric spaces are presented, as well as some of the generalized metric spaces.

In the third chapter fixed point theorems for multivalued mappings satisfying an integral type of contraction are considered. Theorems which are generalizations of Nadler contraction principle, Khan contraction theorem, Zamfirescu mapping and the fixed point theorem in complete metric space with a convex structure are proved. All mappings which are used satisfy some integral type contraction.

In the fourth chapter some fixed point theorems for mapping without continuity condition on Takahashi convex metric space (as an application of results of Angrisani and Clavelli who introduced regular global infimum function) are proved.

In the fifth chapter fixed and coincidence point for multivalued mappings in fuzzy metric space are investigated. Altering distance function and multivalued strong $\{b_n\}-$fuzzy contraction are used in order to formulate a generalization of the contractive type condition. The presented theorems are a generalization of some well known single valued results.

In the sixth chapter some fixed and subfixed point theorems for the mapping in the fuzzy $G-$metric spaces are proved. The existence and uniqueness of the common fixed point for the family of fuzzy mappings $\{f_i\}$ by the derived generalized metric G is analyzed.

Predgovor

Teorija nepokretne tačke, relativno mlada matematička disciplina, je među najatraktivnijim matematičkim oblastima, pre svega zbog veoma široke mogućnosti primene, kako na druge matematičke discipline, tako i na probleme tehničkih nauka (tretiranje nelinearnih sistema), ekonomskih nauka (teorija ekvilibrijuma), dinamičkih sistema (rešavanje širokih klasa diferencijalnih jednačina), informacionih tehnologija (problemi optimizacije) itd.

U ovoj tezi izloženi su pre svega originalni rezultati u čijem je stvaranju autor učestvovao. Većina rezultata proistekla je iz rada Seminara iz nepokretne tačke koji se održava pod rukovodstvom prof. dr Mile Stojaković u okviru Doktorskih studija Fakulteta tehničkih nauka. Stalni učesnici seminara, prof. dr Ljiljana Gajić, mr Biljana Carić i od 2014. godine prof. dr Tatjana Došenović dobili su niz rezultata publikovanih u naučnim časopisima i izlaganih na konferencijama. Za neke delove još nije završen proces referisanja, ali većina je objavljena u okviru sledećih publikovanih radova:

1. M. Stojaković , Lj. Gajić, B. Carić: Fixed Point and Subfixed Point for Fuzzy Mappings in Generalized Metric Fuzzy Spaces, Journal of Applied Mathematics, (M22), Kategorisan u oblasti: Mathematics Applied

2. Lj. Gajić, M. Stojaković, B. Carić: On Angrisani and Clavelli Synthetic Approaches to Problems of Fixed Points in Convex Metric Space, Abstract and Applied Analysis, (M21a), Kategorisan u oblastima: Mathematics Applied, Mathematics

3. M. Stojaković, Lj. Gajić, T. Došenović, B. Carić: Fixed point of multivalued integral type of contraction mappings, Fixed Point Theory and

Applications (M21a), Kategorisan u oblastima: Mathematics Applied, Mathematics

4. T. Došenović, D. Rakić, B. Carić, S. Radenović: Multivalued generalizations of fixed point results in fuzzy metric spaces, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, (M22), Kategorisan u oblastima: Mathematics Applied, Mathemaics Interdisciplinary Applications, Mechanics

Kao što se iz navedenog vidi, svi radovi su kategorisani u oblasti Mathematics Applied, što i odgovara interdisciplinarnoj naučnoj oblasti (Primenjena matematika) kojoj studijski program Doktorskih studija pripada.

Tri rada koja proizilaze iz disertacije su izložena na konferenciji META-Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications i objavljena su u zborniku

1. T. Došenović, B. Carić, Fiksna tačka za kontrakciju integralnog tipa primenom altering distance funkcije, META, The First Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, Novi Sad, March 4-6th 2016.

2. M. Stojaković, Lj. Gajić, T. Došenović, B. Carić, Comment on Feng-Liu Fixed Point Theorem for Multi-Valued Caristi Type Mappings, META, The First Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, Novi Sad, March 4-6th 2016.

3. B. Carić, Fixed point theorem in G-metric spaces, The Second Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications Novi Sad, June 23-24th 2017.

Neka je X proizvoljan neprazan skup i $f : X \to X$. Tačka $x \in X$ je nepokretna (fiksna) tačka funkcije f ako je zadovoljeno da je $f(x) = x$. Teorija nepokretne tačke je jedna od najznačajnijih oblasti moderne matematike i predstavlja mešavinu analize, topologije i geometrije. Snažan razvoj ove teorije, kako u metričkim, tako i u prostorima koji predstavljaju uopštenja metričkih prostora vezuje se za početak XX veka. Teorija nepokretne tačke je interdisciplinarna tema i njen razvoj iniciran je i kasnije razgranat širokom lepezom primena u raznim granama matematike: u numeričkoj analizi, klasičnoj analizi, funkcionalnoj analizi, topologiji, ekonomskoj matematici, u rešavanju jednačina i sistema jednačina. Treba pomenuti i značajnu primenu ove teorije u tehnici, ekonomiji, teoriji igara, u fizici, posebno u oblasti kvantne fizike čestica. To je i razlog što se i danas naučnici širom sveta sve više bave proučavanjem teorije nepokretne tačke.

U disertaciji se razmatra egzistencija nepokretne tačke za jednoznačna i višeznačna preslikavanja u metričkim, konveksnim metričkim, fazi metričkim i fazi $G-$metričkim prostorima.

Rad sadrži sledeće glave:

1. Uvod
2. Metrički i generalizovani metrički prostori
3. Teoreme o nepokretnoj tački u metričkim prostorima
4. Teoreme o nepokretnoj tački u konveksnim metričkim prostorima bez uslova neprekidnosti funkcije
5. Teoreme o nepokretnoj tački u fazi metričkim prostorima
6. Teoreme o nepokretnoj tački u fazi $G-$metričkim prostorima

Neki delovi druge glave i cela treća, četvrta, peta i šesta glava predstavljaju originalni deo doktorske disertacije.

Prva glava disertacije je uvodna, u njoj je dat istorijski pregled i neke od primena teorije nepokretne tačke.

U drugoj glavi doktorske disertacije predstavljeni su metrički prostori, kao i neka uopštenja metričkih prostora.

U trećoj glavi dokazane su teoreme o nepokretnoj tački za višeznačna preslikavanja primenom integralnog tipa kontrakcije. Prvo uopštenje Banahovog principa kontrakcije za višeznačna preslikavanja predstavljeno je u radu S. B. Nadlera [61]. Za rastojanje između skupova Nadler u svom radu koristi Hausdorfovo rastojanje i dokazuje da ukoliko je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to CB(X)$ (gde je sa $CB(X)$ označena familija nepraznih, zatvorenih i ograničenih podskupova od X) i ako je zadovoljen kontraktivni uslov $H(f(x), f(y)) \leq qd(x, y)$ za neko $q \in [0, 1)$, tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f.

Veoma važno uopštenje Banahove teoreme je prezentovano u radu Branciarija [9], gde je umesto Banahovog kontraktivnog uslova korišćena kontrakcija integralnog tipa. Branciari u svom radu takođe prikazuje primer koji potvrđuje da je klasa integralnih kontrakcija šira od klase Banahovih kontrakcija.

Ova dva rezultata su proširena i primenjena od strane velikog broja autora, a ovo su neki od njihovih radova: [2], [3], [4], [5], [12], [47], [68], [79], [80].

Takođe značajan rezultat je prezentovan u radu Kana [48] u kojem je poboljšana teorija nepokretne tačke u metričkim prostorima uvođenjem funkcije promenljivog rastojanja.

Veoma važno uopštenje Banahovog principa prikazano je u radu Zamfireskua [82], gde su ujedinjene teoreme Banaha, Kannana i Šaterjea.

Na osnovu tog rezultata, došlo se na ideju uopštavanja Banahovog principa kontrakcije za višeznačna preslikavanja primenom integralnog tipa kontrakcije. Dokazane teoreme proizilaze iz Nadlerove, Kanove i Zamfireskuove kontrakcije. Takođe, dokazana je teorema za neekspanzivna višeznačna preslikavanja sa konveksnom strukturom primenom integralnog tipa kontrakcije. Rezultati iz ovog poglavlja su publikovani u [75].

Četvrta glava je primena rada autora Angrisani i Clavelli [6], koji su uveli regularno-globalnu infimum funkciju. Jedna od metoda za pronalaženje nepokretnih tačaka funkcije $f : X \to X$ je istraživanje nula funkcije $F : X \to [0, \infty)$ koja je data sa $F(x) = d(x, f(x))$. U vezi sa tim, Angrisani i Clavelli su dokazali nepraznost i kompaktnost skupa globanih minimuma za regularno-globalnu infimum funkciju. Kirk i Saliga [51] su pokazali da je u mnogim slučajevima dovoljno zameniti pretpostavku o neprekidnosti funkcije slabijim regularno-globalnim infimum uslovom. Primenom regularno-globalne infimum funkcije dokazane su teoreme o nepokretnoj tački u konveksnim prostorima koje su uvedene u radu Takahašija [77]. Rezultati iz ovog poglavlja su publikovani u [27].

U petoj glavi predmet proučavanja je postojanje nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja u fazi metričkim prostorima. Pojam fazi logike je uveden u radu Zadeha [81]. Za razliku od teorije tradicionalne logike, gde neki elemenat može da pripada ili ne pripada skupu, u fazi logici pripadnost elementa skupu se izražava brojem iz intervala $[0, 1]$. Neizvesnost kao suštinski deo realnih problema je podstakao Zadeha na proučavanje teorije fazi skupova kako bi se suočio sa problemom neodređenosti. Teorija nepokretne tačke u fazi metričkim prostorima može se posmatrati na različite načine, a jedan od njih je upotreba fazi logike. Nakon Zadehovog rezultata, Heilpern [38] predstavlja koncept fazi preslikavanja i dokazuje teoremu o nepokretnoj tački za fazi kontraktivna preslikavanja u linearnim metričkim prostorima, što predstavlja fazi uopštenje Banahovog principa kontrakcije. Sledi zainteresovanost velikog broja naučnika na proučavanje raznih kontraktivnih uslova u okviru fazi preslikavanja. Ako rastojanje između elemenata nije tačno određen broj, tada je nepreciznost uključena u metriku, kao što je to uvedeno u definiciji fazi metričkih prostora koje su uveli Kaleva i Seikkala [43]. U ovoj glavi ponovo je upotrebljena funkcija promenljivog rastojanja [48]. Ovaj tip funkcija je korišćen u radu [72] u okviru fazi metričkih prostora

Na osnovu uslova iz [72] preslikavanje f je jednoznačno. Postavilo se pitanje koji su to dodatni uslovi koji će obezbeđivati postojanje nepokretne tačke ako taj uslov primenimo na višeznačna preslikavanja. To je realizovano kroz dve teoreme primenom $t-$norme $H-$tipa u jakom fazi metričkom prostoru.

U drugom delu ove glave pokazana je teorema o nepokretnoj tački za jaku $\{b_n\}-$kontrakciju za višeznačna preslikavanja u fazi metričkim prostorima. Pojam jake $\{b_n\}-$fazi kontrakcije je uveden u radu [16] gde je pokazana i teorema o nepokretnoj tački za jednoznačna preslikavanja za taj tip preslikavanja. Da bi se pomenuti rezultat proširio na slučaj višeznačnih preslikavanja, funkcija f mora zadovoljavati uslov de je strogo demikompaktno preslikavanje. Rezultati ove glave su publikovani u radu [15].

U poslednjem poglavlju disertacije dokazane su teoreme o nepokretnoj i subfiksnoj tački za fazi preslikavanja u fazi $G-$metričkim prostorima. U ovom delu rada, osnovni prostor je metrički, te primenom ideje iz [83] uveden je pojam Hausdorfove fazi $G-$metrike. Analizira se postojanje i jedinstvenost zajedničke nepokretne tačke za familiju fazi preslikavanja f_i izvedenom generalizovanom metrikom G. Posmatraju se različite generalizacije kontraktivnih uslova, primenom neopadajućih funkcija neprekidnih sa desne strane $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Postavljanjem različitih dodatnih uslova za Φ, menjaju se i ostali uslovi u teoremama, koje za cilj imaju dokazivanje postojanja nepokretne tačke. Rezultati iz ovog poglavlja su publikovani u radu [74].

Glava 1

Uvod

1.1 Istorijat i primena teorije nepokretne tačke

Teorija nepokretne tačke je počela da se razvija nakon ubrzanog razvoja klasične analize, i uglavnom nastaje kao potreba da se dokažu teoreme koje se odnose na diferencijalne i integralne jednačine. Za fundamentalne teoreme u teoriji nepokretne tačke smatraju se Brauerova i Banahova teorema.

Proučavanje nepokretne tačke je započelo 1912. godine kada je čuveni holandski matematičar L. E. Y. Brouwer dokazao da ako je $f : B \to B$ neprekidna funkcija, a B je lopta u R^n, onda f ima nepokretnu tačku. Ova teorema garantuje egzistenciju, ali ne i jedinstvenost nepokretne tačke, niti daje njenu konstrukciju. Postoji nekoliko dokaza ove teoreme, uglavnom topoloških. Klasični dokaz su dali Birkoff i Kellog 1922. godine, a dokaz sličan ovome su dali i Dunford i Schwartz 1958. godine. Brauerova teorema ima mnogo primena u analizi, diferencijalnim jednačinama i uopšte u teoremama o egzistenciji za razne tipove jednačina. Teorema je imala veliki značaj za razvoj nekoliko grana matematike, naročito algebarske topologije. Brauerova teorema ne važi u beskonačno dimenzionim prostorima. Prvu teoremu o nepokretnoj tački u beskonačno dimenzionom Banahovom prostoru dokazao je Schauder 1930. godine. Šauderova teorema tvrdi da ako je B kompaktan i konveksan podskup Banahovog prostora X i $f : B \to B$ je neprekidna funkcija, onda f ima nepokretnu tačku. Šauderova teorema ima primenu u teoriji aproksimacija, teoriji igara i drugim naučnim disciplinama kao što su inženjerstvo, ekonomija i teorija optimizacije. Uslov kompaktosti nad skupom B je veoma jak i u većini problema u analizi uslov kompaktnosti nije zadovoljen. Schauder je dokazao teoremu u kojoj je taj uslov oslabljen i ona glasi: Ako je B zatvoren, ograničen i konveksan podskup Banahovog prostora X i ako je $f : B \to B$ neprekidno preslikavanje, onda f ima nepokretnu tačku. Tychonoff je 1935. godine uopštio prethodnu teoremu na lokalno konveksan vektorsko-topološki prostor.

Metod sukcesivnih aproksimacija koji je uveo Liouville 1837. godine, a zatim razvio Picard 1890. godine kulminirao je 1922. godine kada je poljski matematičar Stefan Banach dokazao teoremu da kontraktivno preslikavanje u kompletnom metričkom prostoru ima jedinstvenu nepokretnu tačku. Njegova teorema se smatra jednim od fundamentalnih principa funkcionalne analize. Banahov princip kontrakcije daje egzistenciju, jedinstvenost i niz sukcesivnih aproksimacija koji vodi ka rešenju problema, što je omogućilo raznovrsne primene, naročito u numeričkoj matematici i diferencijalnim jednačinama. Poznata su mnoga uopštenja Banahove teoreme.

Definicija 1.1.1 *Neka je $f : X \to X$, $X \neq \emptyset$. Tačka $x \in X$ je nepokretna (fiksna) tačka preslikavanja f ako je $f(x) = x$.*

Definicija 1.1.2 *[8] Preslikavanje f metričkog prostora (X, d) u samog sebe je kontrakcija ako postoji realan broj $q \in (0, 1)$ tako da za sve $x, y \in X$ važi:*

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y). \tag{1.1}$$

Broj q je koeficijent kontrakcije.

Teorema 1.1.1 *[8] (Banahov princip kontrakcije) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i preslikavanje $f : X \to X$ kontrakcija sa koeficijentom q. Tada postoji jedna i samo jedna nepokretna tačka $x \in X$ preslikavanja f i ona je granična vrednost niza $\{x_n\}$, pri čemu je niz $\{x_n\}$ definisan relacijom:*

$$x_0 \in X,\ x_1 = f(x_0),\ x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0),\ n \in \mathbb{N}$$

i važi

$$d(x, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0),\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Definicija 1.1.3 *Neka je (X, d) metrički prostor i $f : X \to X$. Preslikavanje f je n-lokalna kontrakcija ako za svako $x \in X$ postoji $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tako da za sve $y \in X$ i $q \in (0, 1)$ važi:*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq q d(x, y).$$

Teorema 1.1.2 *[32] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$ $n-$lokalna kontrakcija. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka x preslikavanja f i za sve $x_0 \in X$ važi*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x.$$

Definicija 1.1.4 *Neka je (X, d) metrički prostor i $f : X \to X$. Preslikavanje f je φ-kontrakcija ako je:*

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$$

za sve $x, y \in X$, pri čemu je φ od gore poluneprekidno preslikavanje nad $[0, \infty)$ tako da je $\varphi(t) < t$, $\forall t \neq 0$.

Teorema 1.1.3 *[32] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $f : X \to X$ φ-kontrakcija. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka x preslikavanja f i za sve $x_0 \in X$ važi*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = x.$$

Michael Edelstein je 1962. godine pokušao da dokaže teoremu o nepokretnoj tački zadržavajući kompletnost prostora i modifikujući Banahov kontraktivni uslov. Pokazao je da u tom slučaju kompletnost prostora nije dovoljan uslov za postojanje nepokretne tačke. U radovima [20], [63] su dokazane teoreme o nepokretnoj tački za predloženi kontraktivni uslov, uz restrikciju uslova za prostor.

Definicija 1.1.5 *Neka je (X, d) metrički prostor i $f : X \to X$. Preslikavanje f je neekspanzivno ako za svako $x, y \in X$ važi:*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Teorema 1.1.4 *[20] Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka je preslikavanje $f : X \to X$ neekspanzivno. Tada f ima jedinstvenu nepokretnu tačku.*

Neekspanzivno preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X, d) u samog sebe ne mora imati nepokretnu tačku, na primer preslikavanje $f(x) = x + a, a \neq 0$, pri čemu je $d(x, y) =\mid x - y \mid$. Takođe, nepokretna tačka, ukoliko postoji, ne mora biti jedinstvena (preslikavanje $f(x) = x, x \in X$). Teoremu o nepokretnoj tački za neekspanzivna preslikavanja dokazali su 1965. godine Browder, Kirk i Gohde, nezavisno jedan od drugog. Teorema tvrdi da ako je B zatvoren, ograničen i konveksan podskup Hilbertovog prostora H i $f : B \to B$ neekspanzivno preslikavanje, onda f ima nepokretnu tačku.

Banahov princip kontrakcije implicira da je preslikavanje f neprekidno. Postavilo se pitanje, kako bi se definisao kontraktivni uslov kod kojeg preslikavanje f ne mora da bude neprekidno. Odgovor na dato pitanje je dat u radu Kanana [44], gde je dokazana sledeća teorema.

Teorema 1.1.5 *[44] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $0 \leq q < \frac{1}{2}$ i $f : X \to X$ takvo da je*

$$d(f(x), f(y)) \leq q[d(x, f(x)) + d(y, f(y))], \tag{1.2}$$

za svako $x, y \in X$. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f.

Uslovi Banaha (1.1) i Kanana (1.2) su nezavisni. Uslov (1.1) povlači neprekidnost preslikavanja, a to nije slučaj sa uslovom (1.2). To pokazuju sledeća dva primera

Primer 1.1.1 *Neka je $X = [0, 1]$ i preslikavanje f definisano na sledeći način:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{x}{5}, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Preslikavanje f ima prekid u tački $x = \frac{1}{2}$, pa zbog toga uslov (1.1) nije zadovoljen, ali uslov (1.2) je zadovoljen za $q = \frac{4}{9}$.

Primer 1.1.2 *Neka je $X = [0, 1]$ i preslikavanje $f(x) = \frac{x}{3}$ za $x \in [0, 1]$. Uslov (1.1) je zadovoljen, ali uslov (1.2) nije zadovoljen (na primer $x = \frac{1}{4}, y = 0$).*

Sličan tip kontraktivnog uslova prezentovan je u radu Šaterjea [11], gde je dokazan sledeći rezultat.

Teorema 1.1.6 *[11] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $0 \leq q < \frac{1}{2}$ i $f : X \to X$ tako da je zadovoljen sledeći uslov:*

$$d(f(x), f(y)) \leq q[d(x, f(y)) + d(y, f(x))], \tag{1.3}$$

za svako $x, y \in X$. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f.

Lj. Ćirić [13] je 1974. godine uveo pojam kvazi-kontrakcije kao uopštenje pojma kontrakcije i izučavao nepokretne tačke za takvo preslikavanje.

Definicija 1.1.6 *[13] Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f : X \to X$ je kvazi-kontrakcija ako postoji realan broj λ, $0 < \lambda < 1$, tako da je*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda max\{d(x, y), d(x, f(x), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x))\}$$

za svako $x, y \in X$.

Proučavanje nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja započeo je Nadler i dokazao da višeznačna kontrakcija ima nepokretnu tačku u kompletnom metričkom prostoru. Iz Nadlerove kontrakcije za višeznačna preslikavanja proizašla je teorija o nepokretnoj tački za višeznačne operatore u nelinearnoj analizi.

Pronalaskom kompjutera i razvojem novog softvera za brzo računanje, teorija nepokretne tačke je dobila novu dimenziju. Generisane su nove oblasti: primenjena matematika, numerička analiza i algoritmi. Teorija nepokretne tačke je postala subjekat naučnih istraživanja, kako u determinističkim, tako i u fazi i stohastičkim uslovima.

Kao što smo već napomenuli, teorija nepokretne tačke je matematička disciplina najdublje povezana sa topologijom i funkcionalnom analizom. Kao nezaobilazna metoda pri konstituisanju i primenama, isprepletana je sa raznim granama matematike - numeričkom analizom, teorijom diferencijalnih jednačina, ekonomskom i finansijskom matematikom, teorijom sistema, verovatnosnom analizom, teorijom slučajnih procesa, statistikom itd.

Direktna primena teorije nepokretne tačke nalazi se, pre svega, u tehničkim naukama - pri rešavanju problema povezanih sa nelinearnim sistemima, u ekonomiji - pri razmatranji problema ekvilibrijuma, u teoriji veštačke inteligencije - pri razmatranju neodređenih sistema i nepotpunih podataka, u teoriji odlučivanja - pri određivanju stacionarnih (ergodičnih) stanja itd. Navodimo, nešto detaljnije, neke od primena teorija nepokretne tačke.

Dinamički sistem. Izučavanje dinamičkih sistema ima veoma široku primenu u tehnici, fizici, biologiji, hemiji, medicini, ekonomiji kroz primenu na oblasti u kojima predstavlja fundament, među kojima su teorija haosa, teorija fraktala, bifurkaciona teorija, samoodrživi i samoobnavljajući procesi i sl.

Dinamički sistem je sistem u kojem nezavisno promenljiva predstavlja vreme, a funkcija opisuje kretanje tačke kroz geometrijski prostor u zavisnosti od vremena. Evoluciono pravilo dinamičkog sistema je funkcija koja opisuje buduće stanje na osnovu saznanja o stanju u sadašnjosti. Ta funkcija može da bude deterministička (buduće stanje je jednoznačno određeno sadašnjim) ili stohastička (neodređeni sistemi - događaji su slučajni). Tako, recimo, u fizici dinamički sistem opisuje se kao čestica ili deo čestice čije stanje varira u vremenu, te se evolucija sistema opisuje diferencijalnim jednačinama u koje su uključene derivacije vremena. Da bi se predvidelo buduće ponašanje sistema, vrše se kompjuterske simulacije analitičkog rešenja po vremenu odgovarajuće diferencijalne jednačine.

Dinamički sistem koji očuvava meru može biti definisan formalno kao transformacija sigma-algebre koja očuvava meru, tj. kao četvorka (X, Σ, μ, τ), gde je X skup, Σ je sigma-algebra na X, takva da je par (X, Σ) merljiv prostor, μ je konačna mera na sigma-algebri, tako da trojka (X, Σ, μ) čini prostor verovatnoće. Preslikavanje $\tau : X \to X$ je Σ-merljivo ako za svako $\sigma \in \Sigma$, važi $\tau^{-1}\sigma \in \Sigma$. Preslikavanje τ očuvava meru ako za svako $\sigma \in \Sigma$, imamo da je $\mu(\tau^{-1}\sigma) = \mu(\sigma)$. Tada za preslikavanje $\tau : X \to X$ koje je Σ-merljivo i očuvava meru, kažemo da je transformacija koja očuvava meru od X. Četvorka (X, Σ, μ, τ), za takvo τ, tada definiše dinamički sistem. Preslikavanje τ predstavlja evoluciju dinamičkog sistema kroz vreme. Od posebnog interesa za diskretan dinamički sistem je iteracija $\tau^n = \tau \circ \tau \circ \cdots \circ \tau$, $n \in \mathbb{N}$. U slučaju neprekidnog dinamičkog sistema, konstrukcije i analiza su bitno komplikovaniji.

Razmotrimo osnovne ideje u analizi evolucije Markovljevog lanca. U slučaju prebrojive populacije, evolucija Markovljevog lanca (očekivane promene) mogu biti tretirane kao dinamički sistem sa odgovarajućim parametrima. Tada granična vrednost odgovarajućeg dinamičkog sistema određuje mešovito vreme (mixing time) Markovljevog lanca. Pod pojmom mešovitog vremena (mixing time) u teoriji slučajnih procesa podrazumeva se, grubo govoreći, vreme koje je potrebno da se Markovljev lanac (po raspodeli) dovoljno približi svojoj stacionarnoj - finalnoj (steady state) raspodeli. Naime, ako odgovarajući dinamički sistem ima jedinstvenu stabilnu fiksnu tačku, tada je to približvanje brzo, a ako ima višestruke stabilne fiksne tačke, približavanje je sporo. Opisana interpretacija povezuje evolutivne Markovljeve lance - prirodne algoritme, sa stohastičkim metodama široko primenjenim u metodama mašinskog učenja i optimizacije.

Teorija slučajnih operatorskih jednačina je jedna od modernih grana matematike s veoma velikom primenom pri rešavanju diferencijalnih i integralnih jednačina u prostorima u kojima se neodređenost može tretirati primenom verovatnosnih modela. Posebnu ulogu u razvoju te teorije odigrala je stohastička funkcionalna analiza u kojoj teorija nepokretne tačke predstavlja prirodnu vezu ove dve oblasti. Primena slučajnih operatorskih jednačina je od fundamentalnog interesa u formulaciji, analizi i rešavanju raznih klasa operatorskih jednačina nezaobilaznih u izučavanju raznih problema fizičkih, bioloških, socijalnih, tehnoloških i tehničkih nauka. Posebno ističemo klasu slučajnih integralnih i slučajnih diferencijalnih jednačina formulisanih u formi integralnih jednačina. Ova teorija nalazi se u bazi studija slučajnih integralnih jednačina povezanih sa slučajnim procesima i odgovarajućim slučajnim integralnim jednačinama. Takođe, i studije klasičnih integralnih linearnih i nelinearnih jednačina sa slučajnim jezgrom ili definisanim na slučajnom domenu (Fredholm i Voltera integralne jednačine) rešavaju se uz pomoć nepokretne tačke.

Teorija ekvilibrijuma Ekvilibrijum se kao pojam pojavljuje u raznim naučnim oblastima i uopšteno govoreći označava stanje sistema u kojem su uravnoteženi svi uticaji koji su međusobno suprostavljeni. Teorija nepokretne tačke veoma često koristi se kao nezaobilazna metoda pri dokazivanju niza teorema vezanih za pomenutu problematiku.

U teoriji igara ekvilibrijum opisujemo na sledeći način: neka je zadata igra sa više od 2 igrača. Pretpostavka je da ne postoji kooperacija među igračima. Svaki igrač formira strategiju u zavisnosti od ostalih igrača. Neka je skup svih mogućih strategija k-tog igrača skup S_k, i neka je $S = S_1 \times \cdots \times S_n$. Element $x \in S$ nazivamo strateškim profilom. Sa $f_k : S \to \mathbb{R}$ označavamo gubitak k-tog igrača. Ako je $\sum_k f_k(x) = 0, \quad x \in S$, kažemo da je igra sa nula-sumom (zero-sum). Cilj svakog igrača je da minimizira gubitak - tj. da maksimizuje dobitak. Nešov ekvilibrijum je strateški profil sa osobinom da nijedan igrač ne može imati korist od promene svoje strategije, pod uslovom da ostali igrači ostanu pri svojim strategijama. Naime, Nešov ekvilibrijum preporučuje prikladnu "opreznu"strategiju za sve igrače u igri. Nešov ekvilibrijum ne mora postojati, a, ako postoji, ne mora biti jedinstven. U teoremama koje se bave egzistencijom ekvilibrijuma, često se uvode dodatni uslovi koji se postavljaju na skup strategija ili funkcije gubitka, kao recimo, da male promene u strategiji jednog igrača (uz pretpostavku da ostali igrači ne menjaju strategiju) neće dovesti do velikih varijacija u gubitku ili da prosečni gubitak koji odgovara raznim strategijama jednog igrača nije manji nego gubitak pri "uobičajenoj"strategiji i sl. Ti dodatni uslovi obično predstavljaju dovoljne uslove za primenu teorije nepokretne tačke koja obezbeđuje egzistenciju rešenja odgovarajuće jednačine, što kao posledicu daje egzistenciju ekvilibrijuma.

Što se tiče ekonomskih sistema, teorija ekvilibrijuma je povezana sa načinom na koji je koncept ekonomskog sistema formalizovan. Koncept u kojem se slučajna promenljiva koristi za modelovanje i analizu ekonomskog sistema, ekonomija ili ekonomski model definiše se kao sistem skupova uz pogodno izabranu meru. Tako, recimo, kad se bavimo samo sistemom i procesom razmene dobara, bez razmatranja sektora produkcije, tada je probleme najbolje postaviti u kontekstu ekonomskog sistema bez produkcije - čistom ekonomijom razmene (pure exchange economy) $\mathcal{E} = ((A, \mathcal{A}, \mu), X, R^k)$.

Trojka $(A,\mathcal{A}, \mu)$ je prostor verovatnoće agenata (konzumenata) sa sledećom interpretacijom: A je skup agenata, $\mathcal{A}$ je σ-algebra, skup svih mogućih koalicija agenata, μ je verovatnoća da će se odgovarajuće koalicije realizovati. Sa X označavamo slučajnu promenljivu, merljivu funkciju nad $(A,\mathcal{A}, \mu)$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^k$ i nazivamo je funkcijom potrošnje i $X(a)$ je potrošnja agenta $a \in A$. U prostoru $\mathbb{R}^k$ su predstavljeni kvantitativni pokazatelji robnih potencijala i potraživanja, uz pretpostavku da tržište raspolaže ukupnim resursima koji se redistribuiraju kao rezultat aktivnosti razmene u datom ekonomskom sistemu. Slobodno govoreći, pod kompetitivnim ekvilibrijumom ekonomije $\mathcal{E}$ tada smatramo moguću redistribuciju dobara (uz određeni cenovni raspored) na agente, pri čemu će njihovi preferencijali biti zadovoljeni (a budžet kojim raspolažu neće biti probijen).

Glava 2

Metrički i generalizovani metrički prostori

Metrika ili funkcija razdaljine je funkcija kojom se definiše udaljenost između elemenata nekog skupa. Funkcija rastojanja zajedno sa skupom na kojem je to rastojanje definisano naziva se metričkim prostorom. Maurice Frechet je 1906. godine uopštio pojam 3D Euklidskiog prostora. Za razliku od 3D Euklidskog prostora gde se meri rastojanje između dve tačke, Maurice Frechet uvodi pojam rastojanja na proizvoljnom skupu čiji elementi ne moraju biti samo tačke u prostoru, već mogu biti razni objekti: skupovi, funkcije i drugi. On je opisao osobine funkcije rastojanja zasnivajući na taj način aksiomatiku metričkih prostora. Prema tome, metrički prostor je skup na kome je definisan pojam rastojanja (metrike).

Metrički prostori su prikazani u sekciji 2.1. Date su definicije kompletnog metričkog prostora, konvergentnog i Košijevog niza, rastojanja tačke od skupa, kao i Hausdorfovog rastojanja između skupova.

Postoji veliki broj uopštenja pojma metričkog prostora. Izostavljanjem osnovnih osobina metričkih prostora, i zamenjivanjem slabijim uslovima dobijamo razne generalizacije metričkih prostora. U ovoj doktorskoj disertaciji pažnja će se posvetiti samo nekim uopštenjima metričkih prostora, i u njima će biti dokazane teoreme o nepokretnoj tački kako za jednoznačna tako i za višeznačna preslikavanja.

Mnogi naučnici su pokušavali da uopšte koncept metričkih prostora gde bi se definisalo rastojanje između tri ili više tačaka. Jedno od uopštenja su $2-$metrički prostori koje je definisao Gehler ([21], [22]). Nakon toga Dhage [14] predstavlja novu definiciju prostora zajedno sa funkcijom tri promenljive.

Na žalost, većina tvrdnji koje se tiču fundamentalnih topoloških osobina $D-$metričkih prostora nisu tačne. Ovaj problem uspešno su rešili Mustafa, Sims [58] definisanjem G-metričkih prostora.

Japanski matematičar Takahashi [77] je uveo pojam metričkih prostora sa konveksnom strukturom i proučavao osobine takvih prostora. U istom radu je dokazao teoreme o nepokretnoj tački za neekspanzivna preslikavanja.

Jedno od uopštenja metričkih prostora je predstavljeno u radu Karl Mengera 1942. godine. On uvodi pojam verovatnosnih metričkih prostora, kao prirodnu generalizaciju metričkih prostora, gde se rastojanje između dve tačke zamenjuje funkcijom raspodele. Rastojanje se interpretira kao verovatnoća da je rastojanje između dve tačke manje od nekog zadatog parametra t. Za razliku od probabilističkih metričkih prostora u fazi metričkim prostorima, fazi rastojanje dve tačke se meri stepenom blizine tačaka u odnosu na parametar $t \in (0, \infty)$. Prva definicija fazi metričkih prostora je data u radu Kramosila i Michaleka [52], gde se u odnosu na probabilističke metričke prostore ne zahteva da je supremum rastojanja jednak jedinici. Koristeći pojam fazi broja Kaleva i Seikkala [43] su dali novu definiciju fazi metričkih prostora i ispitali vezu između fazi metričkih i verovatnosnih metričkih prostora. Kasnije, unapređenu definiciju uvode George i Veeramani ([28], [29]) gde u odnosu na Mengerove prostore infimum rastojanja ne mora da bude jednak nuli. Oni definišu Hausdorfovu topologiju u fazi metričkim prostorima.

Poznavajući $G-$metričke i fazi metričke prostore koji su uvedeni u radu [43], u radu [74] je uveden pojam fazi $G-$metričkih prostora. Definisana je Hausdorfova metrika u tim prostorima oslanjajući se na metriku d. Tako definisan fazi $G-$metrički prostor nije simetričan. Takođe, ukoliko je (X, d) kompletan metrički prostor tada je $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G})$ kompletan fazi $G-$metrički prostor.

U sekciji 2.2. data je definicija kvazi-metričkih prostora. Takođe su date definicije ultrametričkih i normiranih prostora, koji zadovoljavaju i jače uslove od metričkih prostora.

Definisanje $G-$metričkih prostora kao generalizacija metričkih prostora na tri tačke je predmet sekcije 2.3.

U delu 2.4. prikazuju se metrički prostori sa konveksnom strukturom. Banahov prostor i svaki njegov konveksan podskup pripada klasi metričkih prostora sa konveksnom strukturom.

Trougaone norme i fazi metrički prostori su analizirani u sekciji 2.5. Prikazuje se beskonačna ekstenzija $t-$normi, kao i definicija $t-$normi $H-$tipa koja je značajna za dalji rad. Prikazane su dve definicije fazi metričkih prostora i to: Kramosila i Michaleka i George i Veeramanija.

Fazi $G-$metrički prostori su predstavljeni u delu 2.6. Pojam Hausdorfove $G-$metrike $\mathcal{G}$ je uveden, gde je korišćena metrika d umesto metrike $d_G = G(x,x,y) + G(x,y,y)$ koja je ranije upotrebljavana [40], [55], [66]. Takođe je dokazano da ako je (X,d) kompletan metrički prostor, da je tada $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G})$ kompletan fazi $G-$metrički prostor, kao i da fazi $G-$metrički prostor nije simetričan.

2.1 Metrički prostori

Definicija 2.1.1 *Metrika ili rastojanje na nepraznom skupu X je svako preslikavanje $d : X^2 \to \mathbb{R}$ za koje važi*

(M_1) $d(x,y) \geq 0$,

(M_2) $d(x,y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$,

(M_3) $d(x,y) = d(y,x)$, *(simetrija)*

(M_4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$ *(nejednakost trougla).*

Metrički prostor je uređen par (X,d) skupa X i metrike d na X. Skup X je nosač metričkog prostora (X,d).

Realan broj $d(x,y)$ je rastojanje elemenata (tačaka) $x, y \in X$.

Na osnovu (M_4) zaključujemo da u metričkom prostoru (X,d) važi nejednakost mnogougla:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + ... + d(x_{n-1}, x_n), n \geq 2.$$

Primer 2.1.1 *Uređeni par $(\mathbb{R}^n, d)$ je metrički postor, gde je metrika $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definisana sa*

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2},$$

$x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. *Metrika d je Euklidska metrika, a prostor $(\mathbb{R}^n, d)$ n-dimenzionalni Euklidski prostor*

Primer 2.1.2 *Uređeni par* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *je metrički postor, gde je metrika* $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$d_\infty(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ...|x_n - y_n|\},$$

$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$.

Primer 2.1.3 *Uređeni par* $(\mathbb{R}^n, d_1)$ *je metrički prostor, gde je metrika* $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \;\; x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n).$$

Definicija 2.1.2 *Neka je* (X, d) *metrički prostor i neka je* $\emptyset \neq Y \subset X$. *Preslikavanje* d_Y *je restrikcija preslikavanja* d *nad skupom* Y

$$d_Y(x, y) = d(x, y)$$

$x, y \in Y$, *a* (Y, d_Y) *je metrički potprostor metričkog prostora* (X, d).

Definicija 2.1.3 *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $a \in X$ *i* $r \in \mathbb{R}^+$. *Skup*

$$L(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

je otvorena lopta u metričkom prostoru (X, d) *sa centrom u tački* a *poluprečnika* r.

Definicija 2.1.4 *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Niz* $\{a_n\} \subset X$ *ima graničnu vrednost* $a \in X$ *tj.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow d(a_n, a) < \varepsilon)$$

Definicija 2.1.5 *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Niz* $\{a_n\} \subset X$ *je Košijev niz u metričkom prostoru* (X, d) *ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon).$$

Teorema 2.1.1 *Ako je niz* $\{a_n\} \subset X$ *konvrgentan u metričkom prostoru* (X, d), *tada je* $\{a_n\}$ *Košijev niz u* (X, d).

Teorema 2.1.2 *Neka je niz* $\{a_n\}$ *Košijev niz u metričkom prostoru* (X, d). *Ako neki podniz* $\{a_{n_k}\}$ *niza* $\{a_n\}$ *konvregira prema* $a \in X$ *u* (X, d), *tada i niz* $\{a_n\}$ *konvergira ka* a *u* (X, d).

Teorema 2.1.3 *Svaki Košijev niz* $\{a_n\}$ *u metričkom prostoru* (X, d) *je ograničen u datom prostoru.*

Definicija 2.1.6 *Metrički prostor* (X, d) *je kompletan ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.*

Teorema 2.1.4 *Zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora* $\mathbb{R}$ *je kompletan.*

Definicija 2.1.7 *Neka je* (X, d) *metrički prostor i neka je* $\emptyset \neq A \subset X$ *proizvoljan podskup. Udaljenost* $d(a, A)$ *tačke* $a \in X$ *od podskupa* A *se definiše sa*

$$d(a, A) = inf\{d(a, x) : x \in A\},$$

($d(a, \emptyset) = 0$ *po definiciji).*

Definicija 2.1.8 *Neka je* (X, d) *metrički prostor i neka su* $A, B \subset X$ *proizvoljni neprazni podskupovi. Udaljenost* $d(A, B)$ *nepraznih podskupova* A *i* B *u metričkom prostoru* (X, d) *se definiše sa*

$$d(A, B) = inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

($d(\emptyset, \emptyset) = 0$, $d(A, \emptyset) = 1$, $d(\emptyset, B) = 1$ *po definiciji.)*

U metričkom prostoru (X, d) uvodimo sledeće oznake:
- $B(X)$ je skup svih nepraznih i ograničenih podskupova od X
- $CB(X)$ je skup svih nepraznh, zatvorenih i ograničenih podskupova od X
- $C(X)$ je skup svih nepraznih i zatvorenih podskupova od X
- $CC(X)$ je skup svih nepraznih i kompaktnih podskupova od X

Definicija 2.1.9 *Hausdorfovo rastojanje* $H : CB(X) \times CB(X) \to [0, \infty)$ *je definisano sa*

$$H(A, B) = \max\{\sup_{x \in B} d(x, A), \sup_{y \in A} d(y, B)\},$$

pri čemu je $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

$(CB(X), H)$ je metrički prostor.

Prostor $(B(X), H)$ nije metrički prostor, jer ne važi osobina (M_2) iz Definicije 2.2

Ako je polazni prostor kompletan, onda je i prostor sa Hausdorfovom metrikom kompletan.

2.2 Kvazi-metrički i ultrametrički prostori

Ako u definiciji metričkog prostora ne važi uslov simetričnosti dobijeni prostor je kvazi-metrički prostor.

Definicija 2.2.1 *Kvazi-metrika na nepraznom skupu X je svako preslikavanje $d : X^2 \to [0, \infty)$ za koje važi*

(Q_1) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$

(Q_2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Kvazi-metrički prostor je uređen par (X, d) skupa X i kvazi-metrike d na X.

Lako se uočava da je svaki metrički prostor ujedno i kvazi-metrički prostor. Međutim, u radu [19] je prikazan primer kvazi-metričkog prostora koji nije metrički.

Primer 2.2.1 *Neka je $X = \mathbb{R}$ i neka je metrika d definisana na sledeći način:*

$$d(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 1, & x < y \end{cases}.$$

Metrika d je kvazi-metrika nad X ali d nije metrika nad X.

Definicija 2.2.2 *Neka je (X, d) kvazi-metrički prostor. Niz $\{a_n\} \subset X$ konvergira ka $a \in X$ ako važi*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a) = \lim_{n\to\infty} d(a, a_n) = 0.$$

Definicija 2.2.3 *Neka je (X, d) kvazi-metrički prostor. Niz $\{a_n\} \subset X$ je Košijev niz u kvazi-metričkom prostoru (X, d) ako*

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Longrightarrow d(a_n, a_m) < \varepsilon).$$

Definicija 2.2.4 *Neka je (X,d) kvazi-metrički prostor, $a \in X$ i $r \in \mathbb{R}^+$. Skup*

$$L(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

je otvorena lopta u kvazi-metričkom prostoru (X,d) sa centrom u tački a poluprečnika r.

Definicija 2.2.5 *Kvazi-metrički prostor (X,d) je kompletan ako u njemu svaki Košijev niz konvergira.*

Definicija 2.2.6 *Ultrametrički prostor (X,d) je posebna vrsta metričkog prostora u kome je nejednakost trougla zamenjena jačim uslovom*

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\},$$

za sve $x,y,z \in X$.

Svaki ultrametrički prostor je i metrički prostor, dok obrnuto ne važi.

Definicija 2.2.7 *Neka je X vektorski prostor nad poljem F, ($F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$). Preslikavanje $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ za koje važe sledeći uslovi:*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, *za sve* $\lambda \in F, x \in X$,

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *za sve* $x,y \in X$,

je norma nad X, a uređeni par $(X,\|\cdot\|)$ normiran prostor.

Svaki normiran prostor $(X,\|\cdot\|)$ je metrički prostor sa metrikom d koja je definisana na sledeći način: $d(x,y) = \|x-y\|$, za sve $x,y \in X$.

Ako je normiran prostor $(X,\|\cdot\|)$ kompletan, onda je on Banahov prostor.

2.3 $G-$metrički prostori

U nekoliko prethodnih decenija mnogi matematičari su neuspešno pokušavali da uopšte pojam metričkog prostora definišući "odstojanje" tri tačke, sve do 2006. godine kada su Zead Mustafa i Brailey Sims [59] uveli novu strukturu generalizovanih metričkih prostora, koje nazivamo G-metričkim prostorima.

Definicija 2.3.1 *[59] Neka je X neprazan skup i neka je $G : X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ funkcija koja zadovoljava sledeće uslove:*

(G_1) $G(x, y, z) = 0$ *ako je* $x = y = z$,

(G_2) $0 < G(x, y, y)$ *za sve* $x, y \in X$, *pri čemu je* $x \neq y$,

(G_3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$ *za sve* $x, y, z \in X$, *pri čemu je* $z \neq y$,

(G_4) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = ...$ *(simetrija za sve tri promenljive),*

(G_5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$ *za sve* $x, y, z, a \in X$.

Funkcija G je generalizovana metrika ($G-$metrika), a uređeni par (X, G) je $G-$metrički prostor.

Ako je (X, d) metrički prostor, onda se G-metrika može definisati na sledeći način:
$G_s(d)(x, y, z) = \frac{1}{3}(d(x, y) + d(y, z) + d(x, z))$,
$G_m(d)(x, y, z) = \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$.

Definicija 2.3.2 *$G-$metrički prostor (X, G) je simetričan ako važi*

(G_6) $G(x, y, y) = G(x, x, y)$.

Primer 2.3.1 *Neka je* $X = \{a, b\}$,

$$G(a, a, a) = G(b, b, b) = 0$$

i

$$G(a, a, b) = 1, G(a, b, b) = 2$$

Proširimo G na $X \times X \times X$ pomoću simetrije promenljivih. G jeste G-metrika, ali nije simetrična jer je $G(a, b, b) \neq G(a, a, b)$.

Teorema 2.3.1 *Neka je (X, d) G-metrički prostor. Tada za sve $x, y, z, a \in X$ važi sledeće:*

(1) *ako je* $G(x, y, z) = 0$ *onda je* $x = y = z$,

(2) $G(x, y, z) \leq G(x, x, y) + G(x, x, z)$,

(3) $G(x, y, y) \leq 2G(y, x, x)$,

(4) $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$,

(5) $G(x,y,z) \leq \frac{2}{3}(G(x,y,a)+G(x,a,z)+G(a,y,z))$,

(6) $G(x,y,z) \leq G(x,a,a)+G(y,a,a)+G(z,a,a)$.

Definicija 2.3.3 *Neka je (X,G) G-metrički prostor, $a \in X$ i $r \in \mathbb{R}^+$. Skup*

$$L_G(a,r) = \{x \in X : G(a,x,x) < r\}$$

je G-lopta sa centrom u tački a poluprečnika r.

Definicija 2.3.4 *Neka je (X,G) G-metrički prostor, a $\{x_n\}$ niz u X. Tačka $x \in X$ je granična vrednost niza $\{x_n\}$ ako je*

$$\lim_{n,m\to\infty} G(x,x_n,x_m) = 0.$$

Niz $\{x_n\}$ G-konvergira ka X.

Ako $x_n \to 0$ u G-metričkom prostoru (X,G), tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in N$, tako da je $G(x,x_n,x_m) < \varepsilon$, za sve $n,m \geq n_0$.

Teorema 2.3.2 *Neka je (X,G) G-metrički prostor, a $\{x_n\}$ niz tačaka u X i tačka $x \in X$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1. *niz $\{x_n\}$ G-konvergira ka x,*

2. *$G(x_n,x_n,x) \to 0$, kad $n \to \infty$,*

3. *$G(x_n,x,x) \to 0$, kad $n \to \infty$,*

Definicija 2.3.5 *Neka je (X,G) G-metrički prostor, a $\{x_n\}$ niz u X. Niz $\{x_n\}$ je G-Košijev ako važi*

$$(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,m,l \geq n_0)(G(x_n,x_m,x_l) < \varepsilon)$$

2.4 Konveksni metrički prostori

U teoriji nepokretne tačke u vektorsko-topološkim prostorima konveksan skup je od velikog značaja. Matematičari su nastojali da dođu do nekog koncepta apstraktne konveksne strukture koji bi uopštavao pojam konveksnosti za vektorsko-topološke prostore, obuhvatajući širu klasu prostora sa jedne strane i omogućavajući dobijanje novih rezultata sa druge strane.

Neka je (X, d) metrički prostor, $B(X, r)$ otvorena lopta sa centrom u tački x poluprečnika $r \geq 0$. Zatim, neka je za proizvoljno $D \subset X$:

$$\begin{aligned}
&\delta(D) = \sup\{d(x, y), x, y \in D\};\\
&r_x(D) = \sup\{d(x, y), y \in D\}, x \in D;\\
&r(D) = \inf\{r_x(D), x \in D\}
\end{aligned}$$

Definicija 2.4.1 *Metrički prostor (X, d) ima konveksnu strukturu $L \subseteq 2^X$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $\emptyset, X \in L$
2. $\{x\} \in L$ *za sve* $x \in X$
3. *Presek proizvoljno mnogo elemenata skupa L je elemenat skupa L.*

Konveksna struktura je normalna ako za svako $D \in L$ i $\delta(D) > 0$ važi da je $r(D) < \delta(D)$.

L je kompaktna (prebrojivo kompaktna) struktura ako svaki opadajući lanac (niz) nepraznih podskupova iz L ima neprazan presek. Ukoliko je ovaj uslov zadovoljen za ograničene lance zatvorenih elemenata skupa L, onda kažemo da prostor ima osobinu (C).

Za ovako definisanu konveksnu strukturu A. Kirk je dokazao sledeću teoremu o egzistenciji nepokretne tačke za neekspanzivna preslikavanja.

Teorema 2.4.1 *[50] Neka je (X, d) neprazan i ograničen metrički prostor sa konveksnom strukturom L koja je prebrojivo kompaktna, normalna i sadrži zatvorene lopte iz X. Tada svako neekspanzivno preslikavanje $T : X \to X$ ima nepokretnu tačku.*

Ovaj rezultat uopštava niz dobro poznatih, klasičnih rezultata u normiranim prostorima, ali ovako definisana konveksna struktura ne omogućava dobijanje finijih rezultata i zato je bilo potrebno obogatiti je.

U tom smislu vrlo uspešnim se pokazao pojam konveksnog metričkog prostora koji je uveo japanski matematičar Watary Takahashi 1970. godine [77] i uopštio neke teoreme o fiksnoj tački koje su prethodno dokazane u Banahovom prostoru.

Definicija 2.4.2 *[77] Neka je (X,d) metrički prostor i $I=[0,1]$. Preslikavanje $W : X \times X \times I \to X$ je konveksna struktura na X ako za svako $(x,y,\lambda) \in X \times X \times I$ i $u \in X$ važi:*

$$d(u, W(x,y,\lambda)) \leq \lambda d(u,x) + (1-\lambda) d(u,y).$$

Metrički prostor (X,d) zajedno sa konveksnom strukturom W je Takahašijev konveksan metrički prostor (X,d,W).

Ako u konveksnom metričkom prostoru svaki Košijev niz konvergira, onda je on kompletan konveksan metrički prostor.

Ako je (X,d) Banahov prostor sa metrikom $d(x,y) = \|x-y\|$, tada je preslikavanje $W : X \times X \times I \to X$ definisano sa $W(x,y,\lambda)) = \lambda x + (1-\lambda)y$ konveksna struktura. Banahov prostor i svaki njegov konveksan

podskup je konveksan metrički prostor, što će biti ilustrovano u naredna dva primera.

Primer 2.4.1 *Neka je $I=[0,1]$, a X familija zatvorenih intervala $[a_i,b_i]$ tako da važi $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$. Za $I_i=[a_i,b_i]$, $I_j=[a_j,b_j]$ i $\lambda \in I$ definišimo preslikavanje W sa*

$$W(I_i, I_j, \lambda) = [\lambda a_i + (1-\lambda)a_j, \lambda b_i + (1-\lambda) b_j]$$

i metriku d u X Hausdorfovim rastojanjem

$$d(I_i, I_j) = \sup_{a \in I} \{ | \inf_{b \in I_i} \{|a-b|\} - \inf_{c \in I_j} \{|a-c|\} | \}.$$

Primer 2.4.2 *Posmatrajmo linearan prostor L koji je takođe metrički prostor sa sledećim osobinama:*

(1) Za $x, y \in L$, $d(x,y) = d(x-y, 0)$,

(2) Za $x, y \in L$ i $\lambda \in I$,

$$d(\lambda x + (1-\lambda)y, 0) \leq \lambda d(x,0) + (1-\lambda) d(y,0)$$

Definicija 2.4.3 *Podskup K konveksnog metričkog prostora X je konveksan ako $W(x,y,\lambda) \in K$ za sve $x,y \in K$ i $\lambda \in I$. Prazan skup je konveksan.*

Lema 2.4.1 *[77] Neka je $\{K_\alpha : \alpha \in A\}$ familija konveksnih podskupova od X, tada je i $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ konveksan podskup od X.*

Lema 2.4.2 *[77] Za $x, y \in X$ i $\lambda\,(0 \leq \lambda \leq 1)$ važi*

$$d(x,y) = d(x, W(x,y,\lambda)) + d(W(x,y,\lambda), y)$$

Lema 2.4.3 *[77] Neka je W konveksna stuktura na metričkom prostoru (X,d). Ako $x, y \in X$ i $\lambda \in I$, tada važi:*

(1) $W(x,y,1) = x$ *i* $W(x,y,0) = y$,

(2) $W(x,x,\lambda) = x$,

(3) $d(x, W(x,y,\lambda)) = (1-\lambda)d(x,y)$ *i* $d(y, W(x,y,\lambda)) = \lambda d(x,y)$,

(4) *Otvorene i zatvorene lopte u X su konveksne.*

Pored svih dobrih osobina, funkcija W ima veliki nedostatak-nije neprekidna. Funkcija W je neprekidna u svim tačkama oblika $W(x,x,\lambda)$, ali tek uz dodatne pretpostavke kao što je kompaktnost prostora ona postaje neprekidna i u svim preostalim tačkama. Ukoliko W nije neprekidna funkcija, onda zatvaranje konveksnog skupa nije konveksan skup. U cilju prevazilaženja ove i još nekih poteškoća L.Talman [78] je uveo pojmove striktno konveksnog i strogo konveksnog metričkog prostora.

2.5 Trougaone norme i fazi-metrički prostori

Pojam trougaone norme ($t-$norme) se prvi put pojavio u radu Karl Mengera [56] 1942. godine. Menger je pokušao da uopšti klasične metričke prostore zamenjujući pojam rastojanja između dve tačke funkcijom raspodele. Prostore koje predlaže, Menger naziva verovatnosnim metričkim prostorima. Da bi formulisao nejednakost trougla u verovatnosnim metričkim prostorima on uvodi specijalnu klasu funkcija nad jediničnim kvadratom koje naziva trougaonim normama. Međutim, osobina asocijativnosti nije uključena u Mengerovu definiciju trougaonih normi, a rubni uslovi koje on definiše su slabiji od onih koji se danas koriste. Schweizer i Sklar [70] su 1958. godine formulisali aksiome za $t-$norme (komutativnost, asocijativnost, monotonija i neutralni elemenat).

Definicija 2.5.1 *Trougaona norma (t-norma) T je binarna operacija na jediničnom intrvalu $[0,1]$ tako da za sve $a, b, c, d \in [0,1]$ važe sledeći uslovi:*

(1) $T(a,1) = a$,

(2) $T(a,b) = T(b,a)$,

(3) $T(a,b) \leq T(c,d)$ *ako je* $a \leq c$ *i* $b \leq d$,

(4) $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$.

Primer 2.5.1 *Osnovne četiri t-norme su:*
(i) Minimum t-norma, u oznaci (T_M), definiše se sa

$$T_M(x,\, y) = \min(x,\, y).$$

(ii) t-norma proizvoda, u oznaci (T_P), definiše se sa

$$T_P(x,\, y) = x \cdot y.$$

(iii) Lukasiewiczeva t-norma, u oznaci (T_L), definiše se sa

$$T_L(x,\, y) = \max(x + y - 1,\, 0).$$

(iv) Drastični proizvod u oznaci (T_D), definiše se sa

$$T_D(x,\, y) = \begin{cases} \min\{x,\, y\}, & \max\{x,\, y\} = 1 \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases}$$

Minimum t-norma T_M je najjača, a T_D najslabija t-norma, tj. za proizvoljnu t-normu T važi:

$$T_D \leq T \leq T_M.$$

Lako se pokazuje i da je $T_L < T_P$ za svako $x,\, y \in [0,\, 1]$, pa je poredak navedenih t-normi sledeći:

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

O. Hadžić [33] je definisala klasu t-normi koja je značajna za teoriju nepokretne tačke u verovatnosnim metričkim prostorima.

Definicija 2.5.2 *Neka je T t-norma i neka su preslikavanja $T_n : [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ ($n \in \mathbb{N}$) definisana na sledeći način:*

$$T_1(x) = T(x,\, x),\; T_{n+1}(x) = T(T_n(x),\, x) \;(n \in \mathbb{N},\, x \in [0,\, 1]).$$

T je t-norma H-tipa ako je familija $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ podjednako neprekidna u tački $x = 1$, odnosno ako za svako $\lambda \in (0,\, 1)$ postoji $\delta(\lambda) \in (0,\, 1)$ tako da važi implikacija:

$$x > 1 - \delta(\lambda) \Rightarrow T_n(x) > 1 - \lambda, \quad \textit{za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Asocijativnost t-norme omogućava da se svaka t-norma T proširi na jedinstven način kao n-arni operator definisan za svaku n-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$ na sledeći način:

$$\mathbf{T}_{i=1}^{1} x_i = x_1, \quad \mathbf{T}_{i=1}^{n} x_i = T(\mathbf{T}_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= T(T(\ldots T(T(x_1, x_2), x_3), \ldots, x_{n-1}), x_n).$$

Ako je $x_1 = \cdots = x_n = x$, tada je $x_T^{(n)} = T(x, x, \ldots, x)$. Takođe, pretpostavlja se da je za svako $x \in [0, 1]$, $x_T^{(0)} = 1$ i $x_T^{(1)} = x$.

Svaka t-norma T se može se proširiti na beskonačan operator tj., za svako $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ važi

$$\mathbf{T}_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n \to \infty} \mathbf{T}_{i=1}^{n} x_i.$$

Granica sa desne strane uvek postoji jer je niz

$$\{\mathbf{T}_{i=1}^{n} x_i\}_{n \in \mathbb{N}}$$

nerastući i ograničen sa donje strane.

Primer 2.5.2 *n-arna proširenja za t-norme T_M, T_L, T_P i T_D su*

$$T_M(x_1, \ldots, x_n) = \min(x_1, \ldots, x_n)$$

$$T_L(x_1, \ldots, x_n) = \max\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right)$$

$$T_P(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$$

$$T_D(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_i, & \textit{ako } x_j = 1 \ \textit{ za } \ \textit{svako } j \neq i \\ 0, & \textit{inače} . \end{cases}$$

Za teoriju nepokretne tačke su važne klase t-normi T i nizova $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ iz $[0, 1]$ za koje je

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 1 \text{ i } \lim_{n \to \infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} x_i = \lim_{n \to \infty} \mathbf{T}_{i=1}^{\infty} x_{n+i} = 1. \tag{2.1}$$

Sledeća propozicija je dokazana u [37].

Propozicija 2.5.1 *Neka je $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz brojeva iz $[0, 1]$ takav da je $\lim_{n \to \infty} x_n = 1$ i neka je t-norma T H-tipa. Tada je zadovoljen uslov (2.1).*

Ivan Kramosil i Jiri Mihalek [52] su 1975. godine uveli koncept fazi-metričih prostora pomoću neprekidne t-norme.

Otkako je pre više od 50 godina, L. Zadeh publikovao svoj, sada već klasični rad [81], teorija fazi skupova (teorija rasplinutih skupova) je u žiži interesovanja širokog polja teorijskih i primenjenih naučnih disciplina. Teorija fazi skupova, kao što i ime nagoveštava, je teorija zahvaljujući kojoj postoji mogućnost adekvatnog tretiranja graduiranih sistema u kojima neki elementi ili osobine imaju zastupljenost različitog stepena. Ova teorija omogućava razvijanje tehnika za modelovanje prirodnih fenomena koji ne mogu biti analizirani korišćenjem klasičnih metoda baziranih na teoriji verovatnoće ili dvovalentne logike. Primena teorije fazi skupova ima široku primenu, između ostalog, u kompjuterskim naukama i primenama, veštačkoj inteligenciji, ekspertskim sistemima, operacionim istraživanjima, prepoznavanju oblika, teoriji odlučivanja, robotici, ... U klasičnoj teoriji skupova ako $A \subseteq \mathcal{X}$, tada je ta relacija izražena indikator (karakterističnom) funkcijom $I_A : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$, gde je $I_A(x) = 1$ ako $x \in A$ i $I_A(x) = 0$ ako $x \in \mathcal{X} \backslash A$. Funkciju I_A interpretiramo kao stepen pripadnosti elementa x u $\mathcal{X}$. Postoje samo dve mogunosti: 0 ili 1. U fazi konceptu skup A identifikovan je svojom funkcijom pripadnosti $u_A : \mathcal{X} \to [0, 1]$, u kojoj, grubo govoreći, vrednost $u_A(x)$ interpretiramo kao stepen pripadnosti x u A, ili kompatibilnosti x sa A. Fazi skup A od $\mathcal{X}$ izjednačavamo sa odgovarajućom funkcijom pripadnosti u_A. Ako je skup svih funkcija $u : \mathcal{X} \to [0, 1]$ označen sa $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, kažemo da je $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ skup svih fazi skupova definisanih na $\mathcal{X}$.

Neodređenost koja se pojavljuje u nekom opitu (gde pod opitom smatramo najšire značenje - tj. bilo koje ispitivanje ili posmatranje), može biti prouzrokovana razlozima koji proističu iz slučajnosti kao posledice prirodne varijabilnosti, ili mogu biti uzrokovane nepreciznošću zbog nepotpunih informacija i podataka, ili zaključivanju na osnovu ekspertskih mišljenja, ili neizbežnih grešaka dobijenih pri merenju i sl.

Definicija 2.5.3 *Neka je (X, d) metrički prostor. Fazi skup u X je funkcija $A : X \to [0, 1]$. Ako je A fazi skup i $x \in X$, tada je $A(x)$ funkcija pripadnosti x u A.*

Definicija 2.5.4 *Fazi-broj je fazi-skup na realnoj osi, tj. preslikavanje $z : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Fazi-broj je konveksan ako je $z(t) \geq min\{z(s), z(r)\}$, pri čemu je $s \leq t \leq r$. Fazi-broj je normalan ako postoji $t_0 \in \mathbb{R}$ tako da je $z(t_0) = 1$, a nenegativan ako je $z(t) = 0$ za sve $t < 0$.*

Definicija 2.5.5 *α-nivo (α-sečenje) je* $[z]_\alpha = \{t | z(t) \geq \alpha\}$, $0 < \alpha \leq 1$.

Neka je E skup od gore poluneprekidnih, normalnih, konveksnih fazi-brojeva, a G skup skup svih nenegativnih fazi-brojeva iz E. Kako se svako $x \in \mathbb{R}$ može posmatrati kao fazi-broj $\bar{x}$ definisan sa

$$\bar{x} = \begin{cases} 1, & t = x, \\ 0, & t \neq x \end{cases}$$

realni brojevi mogu biti potopljeni u E.

Definicija 2.5.6 *Neka je X proizvoljan neprazan skup, T neprekidna t-norma i M fazi skup u $X^2 \times [0, \infty)$ koji zadovoljavaju sledeće uslove:*

(FM_1) $M(x, y, 0) = 0$,

(FM_2) $M(x, y, t) = 1$ *za sve* $t > 0 \Rightarrow x = y$,

(FM_3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

(FM_4) $T(M(x, y, t), M(y, z, t)) \geq M(x, z, t + s)$,

(FM_5) *preslikavanje* $M(x, y, .) : [0, \infty) \to [0, 1]$ *je neprekidno sa leve stane,*

Tada je (X, M, T) fazi-metrički prostor.

U radovima o nepokretnoj tački se veoma često pretpostavlja dodatni uslov za fazi metriku:

(FM_6) $\lim_{t \to \infty} M(x, y, t) = 1$.

Metrički prostori su specijalan slučaj fazi-metričkih prostora.

A. Georgea i P. Veeramani su 1997.godine modifikovali definiciju fazi-metričkih prostora Kramosila i Mihaleka i definisali Hausdorfovu topologiju. M je fazi-skup na $X^2 \times (0, \infty)$ i uslovi (FM_1), (FM_2) i (FM_5) su zamenjeni sa (GV_1), (GV_2), i (GV_5):

(GV_1) $M(x, y, 0) > 0$, za svako $t > 0$,

(GV_2) $M(x, x, t) = 1$, $\forall t > 0$ i $x \neq y \Longrightarrow M(x, y, t) < 1$, za svako $t > 0$,

(GV_5) preslikavanje $M(x, y, .) : (0, \infty) \to [0, 1]$ je neprekidno za sve $x, y \in X$.

Primer 2.5.3 *Neka je (X, d) metrički prostor. Definišimo $T(a, b) = ab$ (ili $T(a, b) = \min\{a, b\}$ i za sve $x, y \in X$ i $t > 0$, $M(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$. Tada je (X, M, T) fazi-metrički prostor. Fazi metrika M koja je indukovana metrikom d je standardna fazi-metrika.*

Definicija 2.5.7 *Niz $\{a_n\}$ u fazi-metričkom prostoru (X, M, T) konvergira ka $a \in X$ ako je*

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$$

za svako $t > 0$.

Definicija 2.5.8 *Niz $\{x_n\}$ u fazi-metričkom prostoru (X, M, T) je Košijev ako važi*

$$(\forall\varepsilon \in (0,\, 1))(\forall t > 0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon, t) \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0)(M(x_n,\, x_m,\, t) > 1-\varepsilon).$$

Lema 2.5.1 *[49] Ako za dve tačke $x, y \in X$ i pozitivan broj $k < 1$, važi*

$$M(x, y, kt) \geq M(x, y, t),$$

tada je $x = y$.

2.6 Fazi $G-$metrički prostori

Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\mathcal{K}(X)$ skup svih nepraznih kompaktnih podskupova od X.

Za sve $x \in X$ i sve $A, B \in \mathcal{K}(X)$, neka je

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} d(x, a) \text{ i } d(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a, b).$$

Hausdorfova metrika na $\mathcal{K}(X)$ je definisana sa

$$H(A, B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}.$$

Označimo sa sa $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}$ skup svih fazi skupova $\mu : X \to [0, 1]$ sa kompaktnim α-nivoima μ_α, $\alpha \in (0, 1]$, pri čemu je

$$\mu_\alpha = \{x \in X : \mu(x) \geq \alpha\}$$

i

$$\mu_0 = \overline{\cup_{\alpha \in (0,1]} \mu_\alpha}.$$

U skupu $\mathcal{F}$ uvedena je metrika sa

$$\delta(\mu, \nu) = \sup_{\alpha \in (0,1]} H(\mu_\alpha, \nu_\alpha).$$

Ako je $\mu, \nu \in \mathcal{F}$, tada

$$(\mu \subseteq \nu) \Rightarrow (\mu(x) \leq \nu(x))$$

za sve $x \in X$ i $(\mu = \nu) \Rightarrow (\mu \subseteq \nu \wedge \nu \subseteq \mu)$.

Funkcija $\mathcal{G} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ je definisana sa

$$\mathcal{G}(\mu, \nu, \eta) = \max\{\mathcal{L}(\mu, \nu, \eta), \mathcal{L}(\eta, \mu, \nu), \mathcal{L}(\nu, \eta, \mu)\}, \tag{2.2}$$

pri čemu je

$$\mathcal{L}(\mu, \nu, \eta) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \left\{ \sup_{x \in \mu_\alpha} \{d(x, \nu_\alpha) + d(\nu_\alpha, \eta_\alpha) + d(x, \eta_\alpha)\} \right\}. \tag{2.3}$$

Lema 2.6.1 *[74] Za sve $\mu, \nu \in \mathcal{F}$, važi*

$$\delta(\mu, \nu) < \mathcal{G}(\mu, \nu, \nu) \leq 2\delta(\mu, \nu).$$

Dokaz. Kako je

$$\mathcal{L}(\mu, \nu, \nu) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \{2 \sup_{x \in \mu_\alpha} d(x, \nu_\alpha)\},$$

$$\mathcal{L}(\nu, \mu, \nu) = \mathcal{L}(\nu, \nu, \mu) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \{\sup_{y \in \nu_\alpha} d(y, \mu_\alpha) + d(\mu_\alpha, \nu_\alpha)\},$$

iz (2.2) i (2.3), dobijamo

$$\mathcal{G}(\mu, \nu, \nu) =$$

$$= \max\{ \sup_{\alpha \in (0,1]} \{2 \sup_{x \in \mu_\alpha} d(x, \nu_\alpha)\}, \sup_{\alpha \in (0,1]} \{\sup_{y \in \nu_\alpha} d(y, \mu_\alpha) + d(\mu_\alpha, \nu_\alpha)\}\} =$$

$$= \sup_{\alpha \in (0,1]} \{\max\{2 \sup_{x \in \mu_\alpha} d(x, \nu_\alpha), \sup_{y \in \nu_\alpha} d(y, \mu_\alpha) + d(\mu_\alpha, \nu_\alpha)\}\}.$$

Naredne dve nejednakosti:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\mu,\nu,\nu) &= \sup_{\alpha\in(0,1]}\{\max\{2\sup_{x\in\mu_\alpha} d(x,\nu_\alpha), \sup_{y\in\nu_\alpha} d(y,\mu_\alpha)\} + d(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\}\} \leq \\
&\leq 2\sup_{\alpha\in(0,1]}\{\max\{\sup_{x\in\mu_\alpha} d(x,\nu_\alpha), \sup_{y\in\nu_\alpha} d(y,\mu_\alpha)\}\} = \\
&= 2\sup_{\alpha\in(0,1]}\{H(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\} = 2\delta(\mu,\nu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\mu,\nu,\nu) &= \sup_{\alpha\in(0,1]}\{\max\{2\sup_{x\in\mu_\alpha} d(x,\nu_\alpha), \sup_{y\in\nu_\alpha} d(y,\mu_\alpha)\} + d(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\}\} > \\
&> \sup_{\alpha\in(0,1]}\{\max\{\sup_{x\in\mu_\alpha} d(x,\nu_\alpha), \sup_{y\in\nu_\alpha} d(y,\mu_\alpha)\}\} = \\
&= \sup_{\alpha\in(0,1]}\{H(\mu_\alpha,\nu_\alpha)\} = \\
&= \delta(\mu,\nu),
\end{aligned}$$

impliciraju relaciju

$$\delta(\mu,\nu) < \mathcal{G}(\mu,\nu,\nu) \leq 2\delta(\mu,\nu),$$

a to je i trebalo dokazati.

Propozicija 2.6.1 *[74] Ako je (X,d) kompletan metrički prostor, tada je $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ kompletan G-metrički prostor.*

Dokaz. Osobine (G_1), (G_2) i (G_4) iz Definicije 2.3.1 su očigledne.

(G_3) Kako je $d(x,A) \leq d(x,B)+d(A,B)$ za sve $x \in X$ i sve $A,B \in \mathcal{K}(X)$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mu,\nu,\nu) &= \sup_{\alpha\in(0,1]}\left\{\sup_{x\in\mu_\alpha}\{d(x,\nu_\alpha)+d(x,\nu_\alpha)+d(\nu_\alpha,\nu_\alpha)\}\right\} \leq \\
&\leq \sup_{\alpha\in(0,1]}\left\{\sup_{x\in\mu_\alpha}\{d(x,\nu_\alpha)+d(x,\eta_\alpha)+d(\eta_\alpha,\nu_\alpha)\}\right\} = \\
&= \mathcal{L}(\mu,\nu,\eta).
\end{aligned}$$

Na isti način dokazujemo da važi

$$\mathcal{L}(\nu,\mu,\nu) \leq \mathcal{L}(\eta,\mu,\nu) \ \text{ i } \ \mathcal{L}(\nu,\nu,\mu) \leq \mathcal{L}(\nu,\eta,\mu),$$

što implicira $\mathcal{G}(\mu,\nu,\nu) \leq \mathcal{G}(\mu,\nu,\eta)$.

(G_5) Da bi dokazali da važi $\mathcal{G}(\mu,\nu,\eta) \leq \mathcal{G}(\mu,\theta,\theta) + G(\theta,\nu,\eta)$, posmatraćemo datu nejednakost za $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L}(\mu,\nu,\eta) = \sup_{\alpha\in(0,1]} (\sup_{x\in\mu_\alpha} (d(x,\nu_\alpha) + d(x,\eta_\alpha) + d(\eta_\alpha,\nu_\alpha))) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha\in(0,1]} (sup_{x\in\mu_\alpha}(d(x,\theta_\alpha) + d(\theta_\alpha,\nu_\alpha) + d(x,\theta_\alpha) + d(\theta_\alpha,\eta_\alpha) + d(\eta_\alpha,\nu_\alpha))) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha\in(0,1]} (\sup_{x\in\mu_\alpha} (d(x,\theta_\alpha) + \sup_{t\in\theta_\alpha} d(t,\nu_\alpha) + d(x,\theta_\alpha) + \sup_{t\in\theta_\alpha} d(t,\eta_\alpha) + d(\eta_\alpha,\nu_\alpha))) =$$

$$= \sup_{\alpha\in(0,1]} (\sup_{x\in\mu_\alpha} (d(x,\theta_\alpha)+d(x,\theta_\alpha)+d(\theta_\alpha,\theta_\alpha))+\sup_{t\in\theta_\alpha}(d(t,\nu_\alpha)+d(t,\eta_\alpha)+d(\eta_\alpha,\nu_\alpha))) =$$

$$= \mathcal{L}(\mu,\theta,\theta) + \mathcal{L}(\theta,\nu,\eta).$$

Analogno se pokazuje da je,

$$\mathcal{L}(\eta,\mu,\nu) \leq \mathcal{L}(\theta,\mu,\theta) + \mathcal{L}(\eta,\theta,\nu)$$

i

$$\mathcal{L}(\nu,\eta,\mu) \leq \mathcal{L}(\theta,\theta,\mu) + \mathcal{L}(\nu,\eta,\theta).$$

Sve tri nejednakosti zajedno impliciraju

$$\mathcal{G}(\mu,\nu,\eta) \leq \mathcal{G}(\mu,\theta,\theta) + \mathcal{G}(\theta,\nu,\eta).$$

Kompletnost prostora $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ sledi iz kompletnosti $(\mathcal{F},\delta)$ i nejednakosti iz prethodne leme.

Definicija 2.6.1 *Neka je (X,d) metrički prostor. Prostor $(\mathcal{F},\mathcal{G})$, gde je $\mathcal{G}$ definisano sa (2.2) je izvedeni fazi G-metrički prostor, a $\mathcal{G}$ izvedena G-metrika.*

Lema 2.6.2 *[74] Fazi G-metrički prostor $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ nije simetričan .*

Dokaz. Dokazujemo da $\mathcal{G}(\mu,\nu,\nu) \neq \mathcal{G}(\nu,\mu,\mu)$. Ako je

$$\sup_{\alpha\in(0,1]} \sup_{x\in\mu_\alpha} d(x,\nu_\alpha) = A, \quad \sup_{\alpha\in(0,1]} \sup_{y\in\nu_\alpha} d(y,\mu_\alpha) = b, \quad \sup_{\alpha\in(0,1]} d(\nu_\alpha,\mu_\alpha) = C,$$

onda sledi

$$\mathcal{G}(\mu,\nu,\nu) = \max\{2A, B+C\} \neq \mathcal{G}(\nu,\mu,\mu) = \max\{2B, A+C\}.$$

Glava 3

Teoreme o nepokretnoj tački u metričkim prostorima

Banahov princip kontrakcije u metričkim prostorima je jedan od najvažnijih rezultata u teoriji nepokretne tačke i nelinearnoj analizi uopšte. To je i razlog što se naučnici širom sveta već gotovo jedan vek bave uopštavanjem Banahovog rezultata u metričkim, kao i drugim prostorima koji predstavljaju generalizaciju metričkih prostora. S.B. Nadler [61] je prvi dokazao postojanje nepokretne tačke za višeznačna preslikavanja. Time se teorija nepokretne tačke proširila i na višeznačna preslikavanja.

Teorema koja je dokazana u delu 3.1. proizilazi iz rezultata koji je prezentovan u radu [9], gde je Banahov princip kontrakcije proširen na kontrakcije integralnog tipa. Da bi se pokazalo višeznačno uopštenje Branciarijevog rezultata, morali su se pretpostaviti dodatni uslovi za preslikavanje T, prostor X ili funkciju φ. Dodatni uslovi koji su se koristili u ovoj tezi su sledeći: za preslikavanje T se pretpostavlja da je slabo demikompaktno u prvoj, za prostor X da je ultrametrički u drugoj, a za preslikavanje φ da je subaditivno u trećoj teoremi.

U sekciji 3.2. dokazana je teorema koja predstavlja višeznačno uopštenje rezultata Khana [48] u okviru integralnih kontrakcja. Umesto Hausdorfovog rastojanja između skupova koristi se funkcija udaljenosti $\delta(A,B) = \sup_{a\in A}\sup_{b\in B} d(a,b)$ što je svakako stožiji uslov u odnosu na Hausdorfovo rastojanje, ali je bilo potrebno uvesti ga da bi dokazali egzistenciju nepokretne tačke.

U sekciji 3.3 dokazana je teorema koja predstavlja uopštenje poznate teoreme Zamfireskua za višeznačna preslikavanja u okviru integralnih kontrakcija. Da bi se osigurala egzistencija nepokretne tačke dodali smo uslov subaditivnosti za preslikavanje φ.

Sekcija 3.4. bavi se egzistencijom nepokretne tačke u metričkim prostorima sa konveksnom strukturom. Definicija ovih prostora uvedena je u radu Takahašija [77]. Za konveksnu strukturu pretpostavljamo da zadovoljava uslov $\int_0^{d(W(x,z,s),W(y,z,s))}\varphi(t)\,dt \le s\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)\,dt$. Uz ovaj dodatni uslov i primenom definicije rastojanja između skupova koje je definisano u sekciji 2.1., dokazana je teorema o nepokretnoj tački za neekspanzivna preslikavanja u metričkim prostorima sa konveksnom strukturom.

3.1 Kontrakcije Nadlerovog tipa

A. Branciari [9] je 2001. godine uopštio Banahov princip kontrakcije za jednoznačna preslikavanja primenom integralnog tipa kontrakcije.

Sa $\mathbf{\Phi}$ označavamo klasu funkcija $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

(i) φ je Lebeg-integrabilno preslikavanje, sumabilno na svakom kompaktnom podskupu od $[0,\infty)$,

(ii) $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt > 0$ za svako $\varepsilon > 0$.

Lema 3.1.1 *[54] Neka je $\{r_n\}$ nenegativan niz i $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Tada važi*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{r_n}\varphi(t)\,dt = 0$$

ako i samo ako je $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$

Teorema 3.1.1 *[9] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor, $c \in (0,1)$ i $f : X \to X$ preslikavanje tako da za sve $x,y \in X$ važi*

$$\int_0^{d(f(x),f(y))}\varphi(t)dt \le c\int_0^{d(x,y)}\varphi(t)dt$$

pri čemu $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Tada f ima jedinstvenu fiksnu tačku $a \in X$ tako da za svako $x \in X$ važi $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$.

Sam B. Nadler [61] je 1969. godine započeo izučavanje nepokretne tačke na višeznačnim preslikavanjima. Uopštio je Banahovu teoremu.

Definicija 3.1.1 *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Funkcija* $f : X \to C(X)$ *je višeznačno kontraktivno preslikavanje ako je:*

$$H(f(x), f(y)) \leq qd(x, y),$$

za sve $x, y \in X$*, pri čemu je* $0 \leq q < 1$.

Definicija 3.1.2 *Tačka* $x \in X$ *je nepokretna tačka višeznačnog preslikavanja* f *ako važi* $x \in f(x)$.

Teorema 3.1.2 *[61] Neka je* (X, d) *kompletan metrički prostor. Ako je* $f : X \to CB(X)$ *višeznačno kontraktivno preslikavanje, onda* f *ima nepokretnu tačku.*

Lema 3.1.2 *[75] Neka je* (X, d) *metrički prostor,* $T : X \to B(X)$ *i neka postoji* $q \in (0, 1)$ *tako da za sve* $x, y \in X$ *i svako* $\delta > 0$ *važi*

$$\int_0^{H(T(x),T(y))+\delta} \varphi(t)\,dt \leq q \int_0^{d(x,y)+\delta/q} \varphi(t)\,dt, \tag{3.1}$$

pri čemu $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. *Tada postoji niz* $\{x_n\}$, $x_{n+1} \in T(x_n)$ *tako da je* $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Dokaz. Za svako $x_0 \in X$, $x_1 \in Tx_0$, $\delta = q^2$, postoji $x_2 \in T(x_1)$ tako da

$$d(x_1, x_2) \leq H(T(x_0), T(x_1)) + q^2. \tag{3.2}$$

Iz (3.1) dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^{d(x_1,x_2)} \varphi(t)\,dt &\leq \int_0^{H(T(x_0),T(x_1))+q^2} \varphi(t)\,dt \leq \\ &\leq q \int_0^{d(x_0,x_1)+q} \varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Dalje, postoji $x_3 \in Tx_2$ tako da je $d(x_2, x_3) \leq H(T(x_1), T(x_2)) + q^4$, pa sledi

$$\int_0^{d(x_2,x_3)} \varphi(t)\,dt \leq \int_0^{H(T(x_1),T(x_2))+q^4} \varphi(t)\,dt \leq q\int_0^{d(x_1,x_2)+q^3} \varphi(t)\,dt. \tag{3.3}$$

Zbog (3.2) je

$$d(x_1,x_2)+q^3 \leq H(T(x_0),T(x_1))+q^2+q^3,$$

i zbog (3.3)

$$\begin{aligned}\int_0^{d(x_2,x_3)} \varphi(t)\,dt &\leq q\int_0^{H(T(x_0),T(x_1))+q^2+q^3} \varphi(t)\,dt \leq \\ &\leq q^2\int_0^{d(x_0,x_1)+q+q^2} \varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Nastavljajući postupak dobijamo niz $\{x_n\}$, $x_{n+1} \in T(x_n)$ tako da je

$$\begin{aligned}\int_0^{d(x_n,x_{n+1})} \varphi(t)\,dt &\leq q^n\int_0^{d(x_0,x_1)+q+q^2+\cdots+q^n} \varphi(t)\,dt \leq \\ &\cdots \\ &\leq q^n\int_0^{d(x_0,x_1)+q/(1-q)} \varphi(t)\,dt, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Kada $n \to \infty$ zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{d(x_n,x_{n+1})} \varphi(t)\,dt = 0,$$

i zbog Leme 3.1.1, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1}) = 0$.

Komentar 3.1.1 *Ako je $\varphi(t) \equiv 1$ i ako $T : X \to CB(X)$ dobijamo Nadlerovu q-kontrakciju.*

Definicija 3.1.3 *Neka je (X,d) metrički prostor, $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X i $T : X \to \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$. Preslikavanje T je proksimalno ako za svako $x \in X$ postoji $x' \in T(x)$ tako da je $d(x,T(x)) = d(x,x')$.*

Lema 3.1.3 *Pretpostavimo da je $T : X \to B(X)$ proksimalno preslikavanje. Tada uslov 3.1 iz Leme 3.1.2 može biti redukovan na*

$$\int_0^{H(T(x),T(y))} \varphi(t)\,dt \leq q \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\,dt.$$

Definicija 3.1.4 *Neka je (X, d) metrički prostor, $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X, i $T : X \to \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$. Preslikavanje T je slabo demikompaktno ako i samo ako za svaki niz $\{x_n\}$ iz X za koji važi $x_{n+1} \in T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, sledi da postoji konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}$.*

Lema 3.1.4 *[75] Neka su ispunjeni svi uslovi Leme 3.1.2 i neka je preslikavanje T slabo demikompaktno. Tada niz $\{x_n\}$ ima Košijev podniz $\{x_{n_k}\}$.*

Lema 3.1.5 *[75] Neka je (X, d) ultrametrički prostor i neka su ispunjeni svi uslovi Leme 3.1.2. Tada je niz $\{x_n\}$ Košijev.*

Dokaz. Iz Leme 3.1.2 sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0,$$

što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varepsilon$. Kako je

$$d(x_n, x_{n+2}) \leq \max\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2})\} < \varepsilon, \;\; n \geq n_0,$$

za svako $p \in \mathbb{N}$ važi

$$d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \; n \geq n_0.$$

Dakle, niz $\{x_n\}$ je Košijev.

Lema 3.1.6 *[75] Neka su ispunjeni svi uslovi Leme 3.1.2 i neka je funkcija $\varphi \in \mathbf{\Phi}$ takva da $\int_0^{\alpha+\beta} \varphi(t)dt \leq \int_0^{\alpha} \varphi(t)dt + \int_0^{\beta} \varphi(t)dt$ za sve $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Tada je niz $\{x_n\}$ Košijev.*

Dokaz. Kako je

$$\int_0^{d(x_n,x_{n+p})} \varphi(t)\,dt \leq \int_0^{d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\ldots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})} \varphi(t)\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^{d(x_n,x_{n+1})} \varphi(t)\,dt + \int_0^{d(x_{n+1},x_{n+2})} \varphi(t)\,dt + ... + \int_0^{d(x_{n+p-1},x_{n+p})} \varphi(t)\,dt$$

i iz Leme 3.1.2 sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0,$$

što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varepsilon$. Dakle, niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev.

Teorema 3.1.3 *[75] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor. Ako su za preslikavanje $T : X \to CB(X)$ ispunjeni uslovi Leme 3.1.4 ili Leme 3.1.5 ili Leme 3.1.6 tada T ima nepokretnu tačku.*

Dokaz. Posmatraćemo slučaj kada su ispunjeni uslovi Leme 3.1.4. Tada niz $\{x_n\}$ ima Košijev podniz $\{x_{n_k}\}$ i $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$. Ostaje da dokažemo da $x^* \in T(x^*)$. Pretpostavimo suprotno, tj. $d(x^*, T(x^*)) = \eta > 0$. Koristeći

$$d(x^*, T(x^*)) \leq d(x^*, x_{n_k+1}) + d(x_{n_k+1}, T(x^*)) \leq$$
$$\leq d(x^*, x_{n_k}) + d(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k+1}, T(x^*)),$$
$$d(x_{n_k+1}, T(x^*)) \leq H(T(x_{n_k}), T(x^*)) \leq H(T(x_{n_k}), T(x^*)) + \delta,\ \ \delta > 0$$

i uslov (3.1), stavljajući $\delta = q\eta$, dobijamo

$$\int_0^{d(x_{n_k+1},T(x^*))} \varphi(t)\,dt \leq \int_0^{H(T(x_{n_k}),T(x^*))+q\eta} \varphi(t)\,dt \leq q \int_0^{d(x_{n_k},x^*)+\eta} \varphi(t)\,dt, \tag{3.4}$$

$k \in \mathbb{N}$, gde je x_{n_k} bilo koji član konvergentnog podniza $\{x_{n_k}\}$.

Puštajući da $k \to \infty$ u (3.4) dobijamo

$$\int_0^{\eta} \varphi(t)\,dt \leq q \int_0^{\eta} \varphi(t)\,dt,$$

što je nemoguće, te je pretpostavka $d(x^*, T(x^*)) = \eta > 0$ pogrešna. Odatle sledi da je $d(x^*, T(x^*)) = 0$. Kako je $T(x^*)$ zatvoren skup, $x^* \in T(x^*)$.

Dokaz za dva preostala slučaja je sličan.

U narednom primeru navodimo višeznačno preslikavanje kompletnog metričkog prostora u samog sebe koje nije kontrakcija u Nadlerovom smislu, a jeste kontrakcija u smislu Definicije 3.1.

Primer. Neka je integrabilna funkcija φ definisana sa

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{t}-2}(1-\ln t), & t>0 \\ 0, & t=0. \end{cases}$$

Očigledno, $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Takođe, kako je prvi izvod funkcije $t^{\frac{1}{t}}$, $t>0$ jednak funkciji $\varphi(t)$, dobijamo da važi jednakost

$$\int_0^y \varphi(t)\,dt = y^{\frac{1}{y}}.$$

Jedinični interval $X=[0,1]$ snabdeven Euklidskom metrikom d je kompletan metrički prostor. Višeznačno preslikavanje $T : X \to 2^X$ zadato je sa

$$T(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2x+1}, \frac{x}{x+1}\right], & x \in (0,1] \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Višeznačno preslikavanje T nije kontrakcija Nadlerovog tipa (tj. T ne zadovoljava uslove Nadlerove teoreme). Zaista, kako je

$$d(x,y) = |x-y|, \quad H(T(x),T(y)) = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|,$$

dobijamo da je

$$\sup_{x,y\in[0,1]} \left| \frac{H(T(x),T(y))}{d(x,y)} \right| = \sup_{x,y\in[0,1]} \left| \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}}{x-y} \right| = \sup_{x,y\in[0,1]} \left| \frac{1}{(x+1)(y+1)} \right| = 1,$$

te ne postoji $q \in (0,1)$ takvo da je $H(T(x),T(y)) \le q\,d(x,y)$ za sve $x,y \in [0,1]$.

Dalje, pokazaćemo da višeznačno preslikavanje T jeste integralna kontrakcija. Kako je ovo preslikavanje proksimalno, jer za svako $x \in [0,1]$ postoji $x' = \frac{x}{x+1}$ tako da je $d(x,T(x)) = d(x,x')$, integralna kontraktivnost svodi se na uslov da za sve $x,y \in [0,1]$ i neko $q \in (0,1)$, važi

$$\int_0^{H(T(x),T(y))} \varphi(t)\,dt \le q \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\,dt.$$

Poslednja nejednakost ekvivalentna je sa

$$H(T(x),T(y))^{\frac{1}{H(T(x),T(y))}} \le q\,d(x,y)^{\frac{1}{d(x,y)}}.$$

Pokazaćemo da za $q = \frac{1}{2}$ i za sve $x, y \in [0,1]$ važi poslednja nejednakost. Ne gubi se na opštosti ako pretpostavimo da je $y < x$. Kako je za sve $x, y \in [0,1]$, $y < x$,

$$x \leq xy + 3y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leq xy + x + 3y + 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 2y \leq xy + x + y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-y) \leq (x+1)(y+1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{(x+1)(y+1)} \leq \frac{1}{2},$$

i važe naredne nejednakosti

$$\frac{xy + x + y}{x - y} \geq 1, \qquad \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)}\right)^{\frac{1}{x-y}} \leq 1,$$

dobijamo

$$\left(\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right)^{\frac{xy+x+y}{x-y}} \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)}\right)^{\frac{1}{x-y}} =$$

$$= \left(\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right)^{\frac{xy+x+y}{x-y}} \left(\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right)^{\frac{1}{x-y}} \left(\frac{1}{x-y}\right)^{\frac{1}{x-y}} \leq \frac{1}{2},$$

te je

$$\left(\frac{x-y}{(x+1)(y+1)}\right)^{\frac{(x+1)(y+1)}{x-y}} \leq \frac{1}{2} \left(x - y\right)^{\frac{1}{x-y}}.$$

To znači da je

$$\left(\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}\right)^{\frac{1}{\frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1}}} \leq \frac{1}{2} \left(x - y\right)^{\frac{1}{x-y}},$$

tj.

$$\int_0^{H(T(x),T(y))} \varphi(t)\, dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\, dt.$$

što je i trebalo dokazati. Preslikavanje T zadovoljava uslove Leme 3.1.3, te postoji niz $\{x_n\}$, $x_{n+1} \in Tx_n$ tako da $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Polazeći od definicije višeznačnog preslikavanja T, uočavamo da je pozicija originala $x \neq 0$ i slike $\left(\frac{x}{2x+1}, \frac{x}{x+1}\right]$ opisana relacijom

$$x > \frac{x}{x+1} > \frac{x}{2x+1}.$$

Takođe, ukoliko je $0 < y < x \leq 1$, tada je $T(y) < T(x)$, tj.

$$\frac{y}{2y+1} < \frac{x}{2x+1} \quad \text{i} \quad \frac{y}{y+1} < \frac{x}{x+1}.$$

Formiramo niz iteracija $\{x_n\}$. Neka je $x_0 \in (0, 1]$ i neka je niz $\{x_n\}$ iz X formiran tako da $x_{n+1} \in T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zaključujemo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_n, \frac{x_n}{1+2x_n}).$$

Na osnovu odnosa originala i slike, dobijamo

$$x_1 \in T(x_0) = \left(\frac{x_0}{2x_0+1}, \frac{x_0}{x_0+1}\right], \quad x_2 \in T^2(x_0) \subset \left(\frac{x_0}{4x_0+1}, \frac{x_0}{2x_0+1}\right], \cdots$$

$$x_n \in T^n(x_0) \subset \left(\frac{x_0}{2nx_0+1}, \frac{x_0}{nx_0+1}\right], \cdots$$

gde je $T^2(x) = \cup_{y \in T(x)} T(y)$. Očigledno, niz intervala $\left\{\left(\frac{x_0}{2nx_0+1}, \frac{x_0}{nx_0+1}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ teži u H-metrici ka 0, te i niz $\{x_n\}$ teži ka 0. To dalje implicira da za svaki niz $\{x_n\}$ iz X za koji važi $x_{n+1} \in T(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$, sledi da postoji konvergentan podniz $\{x_{n_k}\}$. Primenom Teoreme 3.1.3. zaključujemo da t ima nepokretnu tačku i očigledno je to tačka 0. Uočavamo da je, u ovom primeru, nepokretna tačka dobijena na opisan način, jedinstvena.

3.2 Kontrakcije primenom funkcije promenljivog rastojanja

M. S. Khan, M. Swalh i S. Sessa [48] su 1984. godine dokazali teoremu o nepokretnoj tački u metričkim prostorima primenom funkcije promenljivog rastojanja

Definicija 3.2.1 *Funkcija $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ je funkcija promenljivog rastojanja ako je*

(i) ψ rastuća i neprekidna,

(ii) $\psi(t) = 0$ ako i samo ako je $t = 0$.

Neka je

$$\mathbf{\Psi} = \{\psi : [0,\infty) \to [0,\infty),\ \psi \text{ je funkcija promenljivog rastojanja}\}$$

klasa funkcija koje ispunjavaju uslove (i) i (ii).

Teorema 3.2.1 *[48] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor, $T : X \to X$, ψ je funkcija promenljivog rastojanja funkcija i $a : (0,\infty) \to [0,1)$ tako da važi*

$$\psi(d(T(x),T(y))) \leq a(d(x,y))\psi(d(x,y))$$

za $x,y \in X$, $x \neq y$. Tada preslikavanje T ima nepokretnu tačku.

Funkcija $\delta : B(X) \times B(X) \to [0,\infty)$ je definisana sa

$$\delta(A,B) = \sup\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Ako je skup $A = \{a\}$ jednočlan, pišemo $\delta(A,B) = \delta(a,B)$, i ako je $B = \{b\}$, tada $\delta(A,B) = \delta(a,b) = d(a,b)$. Za sve $A,B,C \in B(X)$ važi sledeće

$$\delta(A,B) = \delta(B,A) \geq 0, \qquad \delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B),$$

$$\delta(A,A) = diam A, \qquad \delta(A,B) = 0 \ \Leftrightarrow\ A = B = \{a\}.$$

Sledeća teorema je uopštenje Khanove teoreme. Posmatra se višeznačno preslikavanje i integralna kontrakcija.

Teorema 3.2.2 *[75] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor, $T : X \to B(X)$ i $\psi \in \mathbf{\Psi}$. Neka je k opadajuća funkcja, $k : [0,\infty) \to [0,1)$ tako da za sve $x,y \in X$, $x \neq y$ važi*

$$\psi\left(\int_0^{\delta(Tx,Ty)} \varphi(t)dt\right) \leq k(d(x,y))\psi\left(\int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt\right), \tag{3.5}$$

pri čemu je $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Tada preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $x^* \in X$, $\{x^*\} = T(x^*)$.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$. Ako je $\{x_0\} = T(x_0)$, tada $x_0 = x^*$. Ako $\{x_0\} \neq T(x_0)$, tada postoji $x_1 \in T(x_0)$, $x_0 \neq x_1$. Uslov (3.5) implicira da

$$\psi\left(\int_0^{\delta(T(x_0),T(x_1))} \varphi(t)dt\right) \leq k(d(x_0,x_1))\psi\left(\int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)dt\right) < \tag{3.6}$$

$$< \psi\left(\int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)dt\right).$$

Na osnovu istih argumenata ako je $\{x_1\} = T(x_1)$, onda je $x_1 = x^*$, inače postoji $x_2 \in T(x_1)$, $x_2 \neq x_1$. Kako je $d(x_1, x_2) \leq \delta(T(x_0), T(x_1))$, a funkcija ψ je rastuća i zbog (3.6) dobijamo

$$\psi\left(\int_0^{(x_1,T(x_0))} \varphi(t)dt\right) \leq \psi\left(\int_0^{\delta(T(x_0),T(x_1))} \varphi(t)dt\right) \leq \tag{3.7}$$

$$\leq k(d(x_0,x_1))\psi\left(\int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)dt\right) < \psi\left(\int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)dt\right).$$

te je

$$d(x_1, x_2) < d(x_0, x_1).$$

Ponavljajući postupak, konstruišemo niz $\{x_n\}$ tako da je $x_{n+1} \in T(x_n)$ i

$$0 < d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n) < \cdots < d(x_0, x_1).$$

Kako je niz $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ opadajući i ograničen sa donje strane, on je konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = p,$$

pri čemu je $p \leq d(x_n, x_{n+1})$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako pretpostavimo da je $p > 0$, tada relacija (3.5) i to što je k opadajuća funkcija implicira

$$\psi\left(\int_0^{d(x_n,x_{n+1})} \varphi(t)dt\right) \leq \psi\left(\int_0^{\delta(T(x_{n-1}),T(x_n))} \varphi(t)dt\right) \leq$$

$$\leq k(d(x_{n-1},x_n))\psi\left(\int_0^{d(x_{n-1},x_n)} \varphi(t)dt\right) \leq k(p)\psi\left(\int_0^{d(x_{n-1},x_n)} \varphi(t)dt\right). \tag{3.8}$$

Puštajući da $n \to \infty$ u (3.8), dobijamo

$$\psi\left(\int_0^{p} \varphi(t)dt\right) \leq k(p)\psi\left(\int_0^{p} \varphi(t)dt\right) < \psi\left(\int_0^{p} \varphi(t)dt\right), \tag{3.9}$$

što je kontradikcija, pa je $p = 0$.

Treba da pokažemo da je niz $\{x_n\}$ Košijev. Pretpostavimo suprotno, da niz nije Košijev. Tada postoji $\varepsilon > 0$ i beskonačno mnogo parova (x_i, x_j), tako da je $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Podniz parova $\{(x_{i_m}, x_{j_m})\}$, pri čemu je $i_m < j_m$ za sve $m \in \mathbb{N}$, je izabran tako da zadovoljava sledeće nejednakosti:

$$d(x_{i_m}, x_{j_m}) \geq \varepsilon, \quad d(x_{i_m}, x_s) < \varepsilon, \text{ za sve } s \in \{i_m + 2, \cdots, j_m - 1\}. \tag{3.10}$$

Tada

$$\varepsilon \leq d(x_{i_m}, x_{j_m}) \leq d(x_{i_m}, x_{i_m-1}) + d(x_{i_m-1}, x_{j_m}) < \varepsilon + d(x_{i_m}, x_{i_m-1}), \tag{3.11}$$

i puštajući da $m \to \infty$ dobijamo

$$\varepsilon \leq \lim_{m\to\infty} d(x_{i_m}, x_{j_m}) \leq \varepsilon,$$

tj.,

$$\lim_{m\to\infty} d(x_{i_m}, x_{j_m}) = \varepsilon.$$

Kako je

$$d(x_{i_m}, x_{j_m}) \leq d(x_{i_m}, x_{i_m-1}) + d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1}) + d(x_{j_m-1}, x_{j_m}),$$

dobijamo

$$\varepsilon = \lim_{m\to\infty} d(x_{i_m}, x_{j_m}) = 0 + \lim_{m\to\infty} d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1}) + 0, \tag{3.12}$$

pa je, $\lim\limits_{m\to\infty} d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1}) = \varepsilon$. Stoga, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da za sve $m > m_0$, $d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Odatle je $k(d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1})) \leq k(\frac{\varepsilon}{2})$ za sve $m > m_0$. Pozivajući se na $x_{i_m} \in T(x_{i_m-1})$ i $x_{j_m} \in T(x_{j_m-1})$, imamo

$$\begin{aligned}
\psi\left(\int_0^{d(x_{i_m}, x_{j_m})} \varphi(t)dt\right) &\leq \psi\left(\int_0^{\delta(T(x_{i_m-1}), T(x_{j_m-1}))} \varphi(t)dt\right) \leq \\
&\leq k(d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1}))\psi\left(\int_0^{d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1})} \varphi(t)dt\right) \leq \\
&\leq k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\psi\left(\int_0^{d(x_{i_m-1}, x_{j_m-1})} \varphi(t)dt\right),
\end{aligned}$$

za sve $m > m_0$ i kada $m \to \infty$ dobijamo

$$\psi\left(\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt\right) \le k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\psi\left(\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt\right) < \psi\left(\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt\right).$$

Očigledno, poslednja nejednakost je netačna, što znači da je pretpostavka da je niz Košijev, pogrešna. Sledi da je niz $\{x_n\}$ Košijev, a pošto je prostor kompletan, postoji $x^* \in X$, tako da $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Ostaje da se dokaže da $\delta(x^*, T(x^*)) = 0$. Neka je $\rho_n = d(x_n, x^*)$. Kako za sve $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in T(x_n)$, zaključujemo da

$$\psi\left(\int_0^{\delta(x_{n+1},T(x^*))}\varphi(t)dt\right) \le \psi\left(\int_0^{\delta(T(x_n),Tx^*)}\varphi(t)dt\right) \le$$

$$\le k(\rho_n)\psi\left(\int_0^{\rho_n}\varphi(t)dt\right) < \psi\left(\int_0^{\rho_n}\varphi(t)dt\right). \tag{3.13}$$

Znajući da ρ_n konvergira ka 0 kada $n \to \infty$, zbog (3.13), $\lim_{n\to\infty}\delta(x_{n+1}, T(x^*)) = 0$. Relacija

$$\delta(x^*, T(x^*)) \le d(x^*, x_{n+1}) + \delta(x_{n+1}, T(x^*)) = \rho_n + \delta(x_{n+1}, T(x^*)) \tag{3.14}$$

zajedno sa prethodnim zaključkom daje $\{x^*\} = T(x^*)$.

Jedinstvenost fiksne tačke x^* sledi iz uslova (3.5).

Komentar 3.2.1 *Slično kao kod kontrakcija Nadlerovog tipa iz poglavlja 3.1., u uslovu (3.5) rastojanje δ se može zameniti metrikom H uz dodatni uslov kao u Teoremi (3.1.3)*

3.3 Teoreme o nepokretnoj tački Zamfiresku tipa

T. Zamfirescu [82] je 1972. godine je ujedinio teoreme Banahha, Kanana iˇaterjea.

Definicija 3.3.1 *[82] Neka je (X, d) metrički prostor, $T : X \to X$. Preslikavanje T je Zamfiresku preslikavanje ako postoje brojevi $a, b, c \in \mathbb{R}$, $0 \le$*

$a < 1$, $0 \leq b < \frac{1}{2}$ i $0 \leq c < \frac{1}{2}$ tako da je za svako $x, y \in X$ zadovoljen bar jedan od uslova:

(Z1) $d(T(x), T(y)) \leq ad(x, y)$,

(Z2) $d(T(x), T(y)) \leq b(d(x, T(x)) + d(y, T(y)))$,

(Z3) $d(T(x), T(y)) \leq c(d(x, T(y)) + d(y, T(x)))$.

Teorema 3.3.1 *[82] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $T : X \to X$. Ako je T Zamfiresku preslikavanje, onda T ima jedinstvenu nepokretnu tačku.*

Definicija 3.3.2 *Neka je (X, d) metrički prostor, $\phi \in \mathbf{\Phi}$ i $f : X \to CB(X)$. Preslikavanje f je višeznačno Zamfiresku preslikavanje integralnog tipa ako postoji $a, b, c \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $0 < b < \frac{1}{2}$ i $0 < c < \frac{1}{2}$ tako da je za svako $x, y \in X$ zadovoljen bar jedan od uslova:*

(Z_1) $\int_0^{H(f(x),f(y))} \varphi(t)\, dt \leq a \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\, dt$

(Z_2) $\int_0^{H(f(x),f(y))} \varphi(t)\, dt \leq b \int_0^{d(x,f(x))+d(y,f(y))} \varphi(t)\, dt$

(Z_3) $\int_0^{H(f(x),f(y))} \varphi(t)\, dt \leq c \int_0^{d(x,f(y))+d(y,f(x))} \varphi(t)\, dt$

Lema 3.3.1 *Neka je (X, d) metrički prostor, $A, B \subseteq X$, i $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Neka je $\phi \in \mathbf{\Phi}$ takvo da važi $\int_0^{\alpha+\beta} \varphi(t)dt \leq \int_0^{\alpha} \varphi(t)dt + \int_0^{\beta} \varphi(t)dt$ za sve $\alpha, \beta \in [0, \infty)$. Tada za svako $a \in A$, postoji $b \in B$ tako da važi*

$$\int_0^{d(a,b)} \varphi(t)\, dt \leq (\lfloor q \rfloor + 1) \int_0^{H(A,B)} \varphi(t)\, dt.$$

Dokaz. Koristeći definiciju Hausdorfovog rastojanja za svako $a \in A$ i za svako $\varepsilon > 0$, postoji $b \in B$ tako da

$$d(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon.$$

Neka je $\varepsilon \leq (q - 1)H(A, B)$. Tada postoji $b \in B$ tako da

$$d(a, b) \leq H(A, B) + (q - 1)H(A, B) = qH(A, B) < (\lfloor q \rfloor + 1)H(A, B).$$

Koristeći pretpostavku da je $\int_0^{\alpha+\beta}\varphi(t)dt \leq \int_0^{\alpha}\varphi(t)dt + \int_0^{\beta}\varphi(t)dt$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(a,b)}\varphi(t)\,dt &\leq \int_0^{(\lfloor q\rfloor+1)H(A,B)}\varphi(t)\,dt \leq \\
&\leq \underbrace{\int_0^{H(A,B)}\varphi(t)\,dt + \cdots + \int_0^{H(A,B)}\varphi(t)\,dt}_{(\lfloor q\rfloor+1)-puta} = \\
&= (\lfloor q\rfloor+1)\int_0^{H(A,B)}\varphi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.2 *Neka je (X,d) kompletan metrički prostor, $f : X \to CB(X)$ višeznačno Zamfiresku preslikavanje integralnog tipa i neka važi $\int_0^{\alpha+\beta}\varphi(t)dt \leq \int_0^{\alpha}\varphi(t)dt + \int_0^{\beta}\varphi(t)dt$ za sve $\alpha,\beta \in [0,\infty)$. Tada postoji $x \in X$, tako da $x \in fx$.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ i $x_1 \in fx_0$. Ako je $H(fx_0, fx_1) = 0$, iz $x_1 \in fx_0$ sledi da $x_1 \in fx_1$ i dokaz je završen. Pretpostavimo da je $H(f(x_0), f(x_1)) > 0$. Izaberimo $q > 1$ tako da $(\lfloor q\rfloor + 1) < \min\{\frac{1}{a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{2c}\}$. Na osnovu Leme 3.3.1 zaključujemo da postoji $x_2 \in f(x_1)$ tako da je

$$\begin{aligned}
d(x_1,x_2) &\leq H(f(x_0),f(x_1)) + (q-1)H(f(x_0),f(x_1)) = \\
&= (qH(f(x_0),f(x_1)) < \lfloor q\rfloor + 1)H(f(x_0),f(x_1)).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Koristeći (3.15) i (Z_1) dobijamo

$$\int_0^{d(x_1,x_2)}\varphi(t)\,dt \leq (\lfloor q\rfloor+1)\frac{a}{2}\int_0^{d(x_0,x_1)}\varphi(t)\,dt. \tag{3.16}$$

Na osnovu (3.15) i (Z_2) sledi

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(x_1,x_2)}\varphi(t)\,dt &\leq (\lfloor q\rfloor+1)b\int_0^{d(x_0,fx_0)+d(x_1,f(x_1))}\varphi(t)\,dt \leq \\
&\leq (\lfloor q\rfloor+1)b\int_0^{d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)}\varphi(t)\,dt \leq \\
&\leq (\lfloor q\rfloor+1)b\int_0^{d(x_0,x_1)}\varphi(t)\,dt + (\lfloor q\rfloor+1)b\int_0^{d(x_1,x_2)}\varphi(t)\,dt
\end{aligned}$$

pa je

$$\int_0^{d(x_1,x_2)} \varphi(t)\,dt \leq \frac{(\lfloor q \rfloor + 1)b}{1-(\lfloor q \rfloor + 1)b} \int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)\,dt. \tag{3.17}$$

Iz (3.15) i (Z_3) dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^{d(x_1,x_2)} \varphi(t)\,dt &\leq (\lfloor q \rfloor + 1)c \int_0^{d(x_0,fx_1)+d(x_1,fx_0)} \varphi(t)\,dt \leq \\ &\leq (\lfloor q \rfloor + 1)c \int_0^{d(x_0,x_2)+d(x_1,x_1)} \varphi(t)\,dt \leq \\ &\leq (\lfloor q \rfloor + 1)c \int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)\,dt + (\lfloor q \rfloor + 1)c \int_0^{d(x_1,x_2)} \varphi(t)\,dt\end{aligned}$$

odakle sledi

$$\int_0^{d(x_1,x_2)} \varphi(t)\,dt \leq \frac{(\lfloor q \rfloor + 1)\frac{c}{2}}{1-(\lfloor q \rfloor + 1)\frac{c}{2}} \int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)\,dt. \tag{3.18}$$

Neka je

$$\alpha = \max\{(\lfloor q \rfloor + 1)a, \frac{(\lfloor q \rfloor + 1)b}{1-(\lfloor q \rfloor + 1)b}, \frac{(\lfloor q \rfloor + 1)c}{1-(\lfloor q \rfloor + 1)\frac{c}{2}}\}, \quad \alpha < 1.$$

Postupimo analogno pri izboru $x_n \in f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$\int_0^{d(x_n,x_{n+1})} \varphi(t)\,dt \leq \alpha \int_0^{d(x_{n-1},x_n)} \varphi(t)\,dt \leq \cdots \leq \alpha^n \int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)\,dt, \tag{3.19}$$

i zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Treba da pokažemo da je niz $\{x_n\}$ Košijev. Pretpostavimo suprotno, da postoji $\varepsilon > 0$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $m_k, n_k \in \mathbb{N}$, $m_k > n_k > n$ tako da

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon, \ \ d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) < \varepsilon.$$

Analogno kao u prethodnoj teoremi dobijamo

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon.$$

i

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}) = \varepsilon.$$

Iz $x_{m_k+1} \in f(x_{m_k})$ i $x_{n_k+1} \in f(x_{n_k})$, i na osnovu Leme 3.3.1 dobijamo

$$\int_0^{d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})} \varphi(t)\,dt \leq (\lfloor q \rfloor + 1) \int_0^{H(f(x_{m_k}), f(x_{n_k}))} \varphi(t)\,dt, \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Primenom (Z_1) imamo

$$\int_0^{d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})} \varphi(t)\,dt \leq (\lfloor q \rfloor + 1)a \int_0^{d(x_{m_k}, x_{n_k})} \varphi(t)\,dt, \ k \geq k_1.$$

Puštajući da $k \to \infty$ dobijamo kontradikciju, tj.

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)\,dt \leq (\lfloor q \rfloor + 1)a \int_0^{\varepsilon} \varphi(t)\,dt.$$

Na osnovu (Z_2) imamo

$$\begin{aligned} \int_0^{d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1})} \varphi(t)\,dt &\leq (\lfloor q \rfloor + 1)b \int_0^{d(x_{m_k}, f(x_{m_k})) + d(x_{n_k}, f(x_{n_k}))} \varphi(t)\,dt \leq \\ &\leq (\lfloor q \rfloor + 1)b \int_0^{d(x_{m_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{n_k}, x_{n_k+1})} \varphi(t)\,dt, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Puštajući da $k \to \infty$ dobijamo kontradikciju, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{d(x_{m_k+1}, x_{m_k+1})} \varphi(t)\,dt = 0.$$

Iz (Z_3) dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(x_{m_k+1},x_{n_k+1})}\varphi(t)\,dt &\leq (\lfloor q\rfloor+1)c\int_0^{d(x_{m_k},f(x_{n_k}))+d(x_{n_k},f(x_{m_k}))}\varphi(t)\,dt\leq\\
&\leq (\lfloor q\rfloor+1)c\int_0^{d(x_{m_k},x_{n_k+1})+d(x_{n_k},x_{m_k+1})}\varphi(t)\,dt\leq\\
&\leq (\lfloor q\rfloor+1)c(\int_0^{d(x_{m_k},x_{m_k+1})}\varphi(t)\,dt+\\
&+\int_0^{d(x_{m_k+1},x_{n_k+1})}\varphi(t)\,dt+\\
&+\int_0^{d(x_{n_k},x_{n_k+1})}\varphi(t)\,dt+\int_0^{d(x_{n_k+1},x_{m_k+1})}\varphi(t)\,dt),
\end{aligned}$$

$k\in\mathbb{N}$. Puštajući da $k\to\infty$ dobijamo kontradikciju tj.,

$$\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)\,dt\leq(\lfloor q\rfloor+1)\,c\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)\,dt.$$

Sledi da je niz $\{x_n\}$ Košijev, a kako je prostor kompletan, sledi da postoji $x\in X$ tako da je

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Ostaje da dokažemo da $x\in f(x)$. Pretpostavimo suprotno, da je $d(x,f(x))=\eta>0$. Kako $d(x,f(x))\leq d(x,x_{n+1})+d(x_{n+1},f(x))$, $n\in\mathbb{N}$, i $x_{n+1}\in f(x_n)$ postoji $p\in fx$ tako da primenom (Z_1) dobijamo kontradikciju

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(x,f(x))}\varphi(t)\,dt &\leq \int_0^{d(x,x_{n+1})}\varphi(t)\,dt+\int_0^{d(x_{n+1},p)}\varphi(t)\,dt\leq\\
&\leq \int_0^{d(x,x_{n+1})}\varphi(t)\,dt+(\lfloor q\rfloor+1)a\int_0^{d(x_n,x)}\varphi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{d(x,f(x))}\varphi(t)\,dt=0\Rightarrow d(x,f(x))=0.$$

Primenom (Z_2) dobijamo kontradikciju:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{d(x,f(x))}\varphi(t)\,dt\leq\int_0^{d(x,x_{n+1})}\varphi(t)\,dt+\int_0^{d(x_{n+1},p)}\varphi(t)\,dt\leq\\
&\leq\int_0^{d(x,x_{n+1})}\varphi(t)\,dt+(\lfloor q\rfloor+1)b(\int_0^{d(x_n,f(x_n))}\varphi(t)\,dt+\int_0^{d(x,f(x))}\varphi(t)\,dt),
\end{aligned}$$

tj. za $n \to \infty$ dobija se

$$\int_0^{d(x,f(x))} \varphi(t)\,dt \le (\lfloor q \rfloor + 1)\frac{b}{2}\int_0^{d(x,f(x))} \varphi(t)\,dt \Rightarrow d(x,f(x)) = 0.$$

Analogno, koristeći (Z_3) takođe dobijamo kontradikciju.

3.4 Neekspanzivna preslikavanja u prostorima sa konveksnom strukturom

Definicija 3.4.1 *Metrički prostor sa konveksnom strukturom (X,d,W) zadovoljava uslov $(*)$ ako za svako $x,y,z,\in X$ i svako $s \in [0,1]$ važi*

$$(*) \quad \int_0^{d(W(x,z,s),W(y,z,s))} \varphi(t)\,dt \le s\int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\,dt, \tag{3.20}$$

pri čemu $\varphi \in \mathbf{\Phi}$.

Teorema 3.4.1 *[75] Neka kompletan metrički prostor sa konveksnom strukturom (X,d,W) zadovoljava uslov $(*)$, i neka je preslikavanje $T : X \to CB(X)$ takvo da za sve $x,y \in X$ važi*

$$\int_0^{\delta(T(x),T(y))} \varphi(t)\,dt \le \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\,dt, \tag{3.21}$$

gde je $\varphi \in \mathbf{\Phi}$. Ako je konveksna struktura W neprekidna u odnosu na prvu promenljivu i ako je skup $\overline{T(X)}$ kompaktan, tada postoji $z^* \in X$ tako da $\{z^*\} = T(z^*)$.

Dokaz. Fiksirajmo $x_0 \in X$. Neka je $\{k_n\}$ niz iz intervala $(0,1)$ takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = 1$, i neka je

$$T_n(x) = \cup_{z\in T(x)} W(z,x_0,k_n) = W(T(x),x_0,k_n) \subseteq X.$$

Dokaz izvodimo u četiri koraka.

Korak 1. Prvo ćemo pokazati da je $T_n(x)$ kompaktan podskup od X za sve $x \in X$. Skup $T_n(x)$ je unija od $W(z,x_0,k_n) \subset X$, $z \in T(x)$, što implicira da $T_n(x) \subseteq X$. Neka je $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset T_n(x)$. Iz definicija skupa $T_n(x)$ sledi egzistencija niza $\{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset T(x)$, pri čemu je $\alpha_i = W(\beta_i, x_0, k_n)$.

Kako je skup $\overline{T(X)}$ kompaktan, onda je i skup $T(x) \subset \overline{T(X)}$ takođe kompaktan, što implicira egzistenciju konvergentnog podniza $\{\beta_{i_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{\beta_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset T(x)$, $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_{i_m} = \beta \in T(x)$. Pozivajući se na (3.20) i na neprekidnost W u odnosu na prvu promenljivu, podniz $\{\alpha_{i_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset T_n(x)$ je takođe konvergentan i važi

$$\lim_{m\to\infty} \alpha_{i_m} = \lim_{m\to\infty} W(\beta_{i_m}, x_0, k_n) = \alpha = W(\beta, x_0, k_n) \in T_n x.$$

Korak 2. Dokazaćemo da je za sve $x, y \in X$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ sledeća nejednakost tačna,

$$\int_0^{\delta(T_n(x),T_n(y))} \varphi(t)\,dt \le k_n \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\,dt. \tag{3.22}$$

Neka $u \in T_n(x) = W(T(x), x_0, k_n)$ i $v \in T_n(y) = W(T(y), x_0, k_n)$. Tada postoji $p \in T(x)$ i $q \in T(y)$ tako da $u = W(p, x_0, k_n)$ i $v = W(q, x_0, k_n)$. Primenom (3.20) i (3.21) dobijamo da je

$$\int_0^{d(u,v)} \varphi(t)\,dt = \int_0^{d(W(p,x_0,k_n),W(q,x_0,k_n))} \varphi(t)\,dt \le k_n \int_0^{d(p,q)} \varphi(t)\,dt \le \tag{3.23}$$

$$\le k_n \int_0^{\delta(T(x),T(y))} \varphi(t)\,dt \le k_n \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)\,dt.$$

Kako je (3.23) zadovoljeno za svako $u \in T_n(x)$ i $v \in T_n(y)$, nejednakost (3.22) je takođe zadovoljena.

Korak 3. Da bi dokazali da preslikavanje T_n ima jedinstvenu nepokretnu tačku x_n tako da $\{x_n\} = T_n(x_n)$, formiraćemo iterativni niz $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ biranjem $y_0 \in X$, $y_1 \in T_n(y_0)$ i $y_2 \in T_n(y_1)$. Očigledno, $d(y_1, y_2) \le \delta(T_n(y_0), T_n(y_1))$. Nastavljajući taj proces, dobijamo niz $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sa osobinom da za svako $i \in \mathbb{N}$, $y_i \in T_n(y_{i-1})$ i $d(y_i, y_{i+1}) \le \delta(T_n(y_{i-1}), T_n(y_i))$. Koristeći poslednju nejednakost (3.22), dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^{d(y_i,y_{i+1})}\varphi(t)\,dt &\leq \int_0^{\delta(T_n(y_{i-1}),T_n(y_i))}\varphi(t)\,dt \leq \\ &\leq k_n\int_0^{d(y_{i-1},y_i)}\varphi(t)\,dt \leq \\ &\dots \\ &\leq k_n^i\int_0^{d(y_0,y_1)}\varphi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Ako $i \to \infty$, na osnovu Leme 3.1.1, vidimo da je $\lim\limits_{i\to\infty} d(y_i, y_{i+1}) = 0$ i $\lim\limits_{i\to\infty} \delta(T_n(y_{i-1}), T_n(y_i)) = 0$.

Tvrdimo da je niz $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Košijev. Pretpostavka da niz $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nije Košijev implicira da možemo formirati podniz parova $\{(y_{i_m}, y_{j_m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ koristeći isti postupak kao u Teoremi 3.2.2 i sa osobinama formulisanim u (3.10). Ponavljanjem argumenata iz (3.11), dobijamo

$$\varepsilon \leq \lim_{m\to\infty} d(y_{i_m}, y_{j_m}) \leq \lim_{m\to\infty}(d(y_{i_m}, y_{j_m-1}) + d(y_{j_m-1}, y_{j_m})) \leq \varepsilon$$

te je $\lim\limits_{m\to\infty} d(y_{i_m}, y_{j_m}) = \varepsilon$ i zbog (3.22) zaključujemo da je

$$\lim_{m\to\infty} \delta(T_n(y_{i_m}), T_n(y_{j_m})) < \varepsilon.$$

Konačno, iz relacije

$$\varepsilon = \lim_{m\to\infty} d(y_{i_m}, y_{j_m}) \leq$$

$$\leq \lim_{m\to\infty}(\delta(y_{i_m}, T_n y_{i_m}) + \delta(T_n(y_{i_m}), T_n(y_{j_m})) + \delta(T_n(y_{j_m}), y_{j_m})) <$$

$$< 0 + \varepsilon + 0 = \varepsilon.$$

sledi kontradikcija zbog pretpostavke da niz $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ nije Košijev. Sledi da $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = x_n \in T_n(x)$. Kako je

(3.24)
$$\delta(x_n, T_n(x_n)) \leq d(x_n, y_{i+1}) + \delta(y_{i+1}, T_n(x_n)) \leq d(x_n, y_{i+1}) + \delta(T_n(y_i), T_n(x_n))$$

i

(3.25)
$$\int_0^{\delta(T_n(y_i),T_n(x_n))}\varphi(t)\,dt \leq k_n\int_0^{d(y_i,x_n)}\varphi(t)\,dt \overset{i\to\infty}{\to} 0 \Longrightarrow \delta(T_n(y_i), T_n(x_n)) \overset{i\to\infty}{\to} 0,$$

puštajući da $i \to \infty$ u (3.24) i koristeći zaključak iz (3.25), dobijamo da je $\delta(x_n, T_n(x_n)) = 0$, tj. $\{x_n\} = T_n(x_n)$. Zbog (3.22), x_n je jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T_n.

Korak 4. Na kraju ostaje da dokažemo egzistenciju nepokretne tačke preslikavanja T. Iz prethodnog koraka sledi $\{x_n\} = T_n(x_n) = W(T(x_n), x_0, k_n)$, $n \in \mathbb{N}$, što implicira egzistenciju $z_n \in T(x_n)$ tako da $x_n = W(z_n, x_0, k_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zbog kompaktnosti skupa $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} T(x_n)} \subseteq \overline{T(X)}$, postoji konvergentan podniz $\{z_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}} \subset \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{p\to\infty} z_{n_p} = z^* \in X$. Iz relacije

$$d(x_{n_p}, z^*) \leq d(x_{n_p}, z_{n_p}) + d(z_{n_p}, z^*) = d(z_{n_p}, W(z_{n_p}, x_0, k_{n_p})) + d(z_{n_p}, z^*) \leq$$

$$\leq k_{n_p} d(z_{n_p}, z_{n_p}) + (1 - k_{n_p}) d(z_{n_p}, x_0) + d(z_{n_p}, z^*), \quad p \in \mathbb{N},$$

kada $p \to \infty$, sledi da

$$\lim_{p\to\infty} d(x_{n_p}, z^*) = 0,$$

tj.

$$\lim_{p\to\infty} x_{n_p} = z^*.$$

Tvrdimo da $\{z^*\} = T(z^*)$. Da bi to dokazali posmatramo nejednakost

$$\delta(z^*, T(z^*)) \leq d(z^*, z_{n_p}) + \delta(z_{n_p}, T(z^*)).$$

Iz $z_{n_p} \in T(x_{n_p})$, imamo $\delta(z_{n_p}, T(z^*)) \leq \delta(T(x_{n_p}), T(z^*))$ i odatle

$$\int_0^{\delta(z_{n_p}, T(z^*))} \varphi(t)\, dt \leq \int_0^{\delta(Tx_{n_p}, T(z^*))} \varphi(t)\, dt \leq \int_0^{d(x_{n_p}, z^*)} \varphi(t)\, dt \overset{p\to\infty}{\to} 0.$$

Na osnovu Leme 3.1.1 sledi $\delta(z^*, T(z^*)) = 0$, odnosno $\{z^*\} = T(z^*)$.

Glava 4

Teoreme o nepokretnoj tački u konveksnim metričkim prostorima bez uslova neprekidnosti funkcije

U ovom poglavlju dokazana su tvrđenja koja se tiču nepokretne tačke za preslikavanja koja ne moraju biti neprekidna u Takahašijevim konveksnim metričkim prostorima primenom sintetičkog prilaza Angrisanija i Klavelija [6]. Neprekidnost funkcije za koju se ispituje postojanje nepokretne tačke, često je nezaobilazna pretpostavka. Međutim, u mnogim primenama preslikavanje koje se pojavljuje prilikom rešavanja konkretnog problema nije neprekidno, ali nije baš "veoma prekidno". U [6] Angrisani i Clavelli uvode funkciju regularno- globalnog infimuma. Ta funkcija zadovoljava uslov koji je slabiji od neprekidnosti, ali ipak u mnogim aspektima daje upravo one osobine funkcije koje su dovoljne da obezbede kako postojanje, tako i jedinstvenost ili kompaktnost skupa rešenja problema nepokretne tačke.

U poglavlju 4.1. definišu se regularno-globalne infimum funkcije, kao i mere nekompaktnosti Kuratovskog i Hausdorfa. Definišu se prostori sa konveksnom strukturom koji su uvedeni u radu Takahašija [77].

U delu 4.2. dokazana je teorema o nepokretnoj tački za regularno-globalnu infimum funkciju u konveksnim prostorima Takahašija koristeći mere nekompaktnosti. Takođe su dokazane teoreme o nepokretnoj tački za lokalna direktna neekspanzivna preslikavanja, uniformno lokalna direktno neekspanzivna preslikavanja, direktno neekspanzivna i slabo kvazi-neekspanzivna preslikavanja u odnosu na niz.

4.1 Rezultati Angrisania i Clavelia

Definicija 4.1.1 *[6] Funkcija $F : M \to \mathbb{R}$, definisana na topološkom prostoru M, je regularno-globalna infimum (r.g.i.) u tački $x \in M$ ako $F(x) > \inf_M(F)$ implicira da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $\varepsilon < F(x) - \inf_M(F)$ i da postoji okolina N_x takva da $F(y) > F(x) - \varepsilon$ za sve $y \in N_x$. Ako ovaj uslov važi za sve $x \in M$, tada kažemo da je F r.g.i. na M.*

Ekvivalentan uslov uslovu da je funkcija r.g.i. na metričkom prostoru za $\inf_M F \neq -\infty$ dokazali su W.A. Kirk and L.M. Saliga [51].

Propozicija 4.1.1 *[51] Neka je M metrički prostor i $F : M \to \mathbb{R}$. Tada je F regularno-globalna infimum funkcija na M ako i samo ako za bilo koji niz $\{x_n\} \subset M$, uslov*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_M(F) \quad i \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

implicira da je $F(x) = \inf_M(F)$.

Navodimo jedan od bazičnih rezultata iz [6] (ovde μ označava uobičajenu meru nekompaktnosti Kuratovskog na metričkom prostoru (M, d) i $L_c = \{x \in M | F(x) \leq c\}$ za $F : M \to \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$).

Teorema 4.1.1 *[6] Neka je M kompletan metrički prostor i neka funkcija $F : M \to \mathbb{R}$ ima osobinu r.g.i. na M. Ako je $\lim\limits_{c\to(\inf_M(F))^+} \mu(L_c) = 0$, tada je skup tačaka koje su globalni minimum od F, neprazan i kompaktan.*

Komentar 4.1.1 *Poslednja teorema pokazuje da ako je T preslikavanje kompaktnog metričkog prostora u samog sebe takvo da $\inf_M(F) = 0$ i ako je $F(x) := d(x, Tx)$, $x \in M$, r.g.i. na M, tada je skup nepokretnih tačaka od T neprazan i kompaktan čak iako T nije neprekidno.*

Primer 4.1.1 *Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $T : X \to X$ je preslikavanje takvo da je za neko $q < 1$ i sve $x, y \in X$,*

$$d(T(x), T(y)) \leq q\ \max\{d(x, y), d(x, T(x)), d(y, T(y)), d(x, T(y)), d(y, T(x))\},$$

(Ćirićeva kvazi- kontrakcija). Tada je T prekidno preslikavanje i $F(x) = d(x, T(x))$, $x \in X$, je r.g.i. [6].

Neka je A ograničen podskup metričkog prostora M. Mera nekompaktnosti Kuratovskog $\mu(A)$, predstavlja infimum brojeva ε takvih da A može biti prepokriven konačnim brojem skupova sa dijametrom manjim ili jednakim ε. Sa $\beta(A)$ označićemo Hausdorfovu meru nekompaktnosti, gde je $\beta(A)$ infimum brojeva ε takvih da A može biti prepokriven konačnim brojem lopti sa poluprečnikom manjim ili jednakim ε.

Ako je $\alpha \in \{\mu, \beta\}$ i ako ograničeni podskupovi $A, B \subseteq M$, lako se dokazuje da:

(1) $\alpha(A) = 0 \ \Leftrightarrow\ A$ je totalno ograničen;

(2) $\alpha(\bar{A}) = \alpha(A)$;

(3) $A \subset B \Rightarrow\ \alpha(A) \leq \alpha(B)$;

(4) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$.

Štaviše, te dve mere nekompaktnosti su ekvivalentne u smislu da je $\beta(A) \leq \mu(A) \leq 2\beta(A)$ te $\lim\limits_n \mu(A_n) = 0$ ako i samo ako $\lim\limits_n \beta(A_n) = 0$ (za svaki niz $\{A_n\}$ ograničenih podskupova od M). Poslednja osobina ukazuje da su rezultati iz nepokretne tačke nezavisni od izbora mere nekompaktnosti.

U Banahovim prostorima ta funkcija ima dodatne osobine povezane sa linearnom strukturom Banahovog prostora. Jedna od njih je

$$\alpha(conv\ A) = \alpha(A)$$

(*conv* A je konveksna ovojnica od A - presek svih konveksnih skupova u X koji sadrže A).

Ova osobina je od velike važnosti u teoriji nepokretne tačke. U lokalno konveksnim prostorima ona uvek važi, ali ukoliko vektorsko-topološki prostor nije lokalno konveksan, tada ne mora da važi [35].

U nedostatku linearne strukture, koncept konveksnosti može biti uveden na apstraktan način. U metričkim prostorima prvi put je definiciju u tom smislu uveo K. Menger 1928. godine, a 1970. godine je Takahashi [77] uveo novi koncept konveksnosti u metričke prostore. Da se podsetimo:

Definicija 4.1.2 *[77] Neka je (X, d) metrički prostor i I je zatvoren jedinični interval. Preslikavanje $W : X \times X \times I \to X$ ima konveksnu strukturu na X ako za sve $x, y, u \in X,\ \lambda \in I$ važi*

$$d(u, W(x, y, \lambda)) \leq \lambda d(u, x) + (1 - \lambda) d(u, y).$$

X, zajedno sa konveksnom strukturom, je (Takahashi) konveksan metrički prostor (X, d, W), ili kraće TCS.

Svaki konveksan potprostor normiranog prostora je konveksan metrički prostor sa $W(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Definicija 4.1.3 *[77] Neka je (X, d, W) TCS. Neprazan podskup K od X je konveksan ako je $W(x, y, \lambda) \in K$ kada $x, y \in K$ i $\lambda \in I$.*

Propozicija 4.1.2 *[77] Neka je (X, d, W) TCS. Ako $x, y \in X$ i $\lambda \in I$, tada*

(a) $W(x, y, 1) = x$ *i* $W(x, y, 0) = y$;

(b) $W(x, x, \lambda) = x$;

(c) $d(x, W(x, y, \lambda)) = (1 - \lambda) d(x, y)$ *i* $d(y, W(x, y, \lambda)) = \lambda d(x, y)$;

(d) Lopte (otvorene ili zatvorene) u X su konveksni skupovi;

(e) Presek konveksnih podskupova iz X su konveksni skupovi.

Za fiksno $x, y \in X$ neka je $[x, y] = \{W(x, y, \lambda) | \lambda \in I\}$.

Definicija 4.1.4 *TCS (X, d, W) ima osobinu (P) ako za sve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X,\ \lambda \in I$*

$$d(W(x_1, x_2, \lambda), W(y_1, y_2, \lambda)) \leq \lambda d(x_1, y_1) + (1 - \lambda) d(x_2, y_2).$$

Očito da je u normiranim prostorima ova nejednakost uvek zadovoljena.

Primer 4.1.2 *[77] Neka je (X, d) linearni metrički prostor sa sledećim osobinama:*

(1) $d(x, y) = d(x - y, 0)$, *za sve* $x, y \in X$;

(2) $d(\lambda x + (1 - \lambda) y, 0) \leq \lambda d(x, 0) + (1 - \lambda) d(y, 0)$, *za sve* $x, y \in X$ *i* $\lambda \in I$.

Za $W(x,y,\lambda) = \lambda x + (1-\lambda)y,\ x,y \in X,\ \lambda \in I,\ (X,d,W)$ *je TCS sa osobinom* (P).

Komentar 4.1.2 *Osobina* (P) *implicira da je konveksna struktura* W *neprekidna bar po prve dve promenljive što znači da je zatvaranje konveksnog skupa konveksno.*

Definicija 4.1.5 *TCS* (X,d,W) *ima osobinu* (Q) *ako je za svaki konačan podskup* $A \subseteq X$, $convA$ *kompaktan skup.*

Primer 4.1.3 *[77] Neka je* K *kompaktan konveksan podskup Banahovog prostora i neka je* X *skup svih neekspanzivnih preslikavanja skupa* K *u samog sebe. Definišemo metriku na* X *sa* $d(A,B) = \sup_{x\in K} \|Ax - Bx\|,\ A,B \in X$ *i* $W : X \times X \times I \to X$ *sa* $W(A,B,\lambda)(x) = \lambda Ax + (1-\lambda)Bx$, *za* $x \in K$ *i* $\lambda \in I$. *Tada je* (X,d,W) *kompaktan TCS, te* X *ima osobinu* (Q). *Osobina* (P) *je takođe zadovoljena.*

L. Talman je [78] uveo novi pojam konveksne strukture za metrički prostor baziran na Takahashijevoj definiciji - takozvanu jaku konveksnu strukturu (skraćeno - SCS). U SCS osobina (Q) je uvek zadovoljena.

Svaki TCS koji zadovoljava (P) i (Q) ima sledeću važnu osobinu:

Propozicija 4.1.3 *[78] Neka je* (X,d,W) *TCS koji zadovoljava osobine* (P) *i* (Q). *Tada za svaki ograničen podskup* $A \subseteq X$ *važi*

$$\alpha(convA) = \alpha(A).$$

Neke od mnogih studija koje se bave problemom nepokretne tačke u konveksnim metričkim prostorima, mogu biti nađene u [7], [23], [24], [25], [26], [57], [62], [64].

4.2 Regularno-globalna infimum funkcija u konveksnim metričkim prostorima

Mera nekompaktnosti koja se pojavljuje u studijama teorije nepokretne tačke obično uključuje ispitivanje ili kondenzujućih preslikavanja ili k-skupovnih kontrakcija. Neprekidnost je uvek implicitna u definiciji tih klasa preslikavanja. Kirk i Saliga [51] pokazali su da je često dovoljno zameniti pretpostavku o neprekidnosti slabijim regularno-globalnim infimum uslovom. Sledeći tu ideju za TCS, dobijamo narednu teoremu:

Teorema 4.2.1 *[27] Neka je (X, d, W) kompletan TCS sa osobinama (P) i (Q), K je zatvoren, konveksan ograničen podskup od X i $T : K \to K$ je preslikavanje koje zadovoljava uslove:*

(i) $\inf\limits_{C}(F) = 0$ *za svaki neprazan, zatvoren konveksan T-invariantan podskup C od K, gde je $F(x) = d(x, Tx), x \in K$;*

(ii) $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$ *za sve $A \subseteq K$ za koje je $\alpha(A) > 0$;*

(iii) *F je regularno-globalna infimum funkcija na K.*

Tada je skup nepokretnih tačaka $fix(T)$ od T neprazan i kompaktan.

Dokaz: Biramo tačku $m \in K$. Neka σ označava familiju zatvorenih, konveksnih podskupova A od K za koje $m \in A$ i $T(A) \subseteq A$. Kako je $K \in \sigma$, važi $\sigma \neq \emptyset$. Neka je

$$B = \cap_{A \in \sigma} A \ \text{ i } \ C = \overline{conv\{T(B) \cup \{m\}\}}.$$

Konveksna struktura W ima osobinu (P), te je C konveksan skup kao zatvaranje konveksnog skupa. Dokazaćemo da je $B = C$.

Kako je B zatvoren, konveksan skup koji sadrži $T(B)$ i $\{m\}$, važi da je $C \subseteq B$. To implicira da $T(C) \subseteq T(B) \subseteq C$, te $C \in \sigma$. Prema tome, $B \subseteq C$. Iz poslednja dva zaključka dobijamo da je $B = C$.

Osobine (1), (4) mere α i Propozicija 4.1.3 impliciraju da je

$$\alpha(B) = \alpha(\overline{conv\{T(B) \cup \{m\}\}}) = \alpha(T(B)),$$

te, s obzirom na (ii), B mora biti kompaktno.

Dalje, iz Propozicije 4.1.1 sledi da T ima nepokretnu tačku na B, te je skup $fix(T)$ neprazan. Iz uslova (ii) sledi da je $fix(T)$ totalno ograničen. Kako je F r.g.i., $fix(T)$ mora biti zatvoren. Konačno, zaključujemo da je $fix(T)$ kompaktno.

Uslov $\inf_K(F) = 0$ je jak uslov, posebno ako nemamo uslove koji impliciraju neprekidnost. Dalje ćemo navesti neke dovoljne uslove koji se lakše proveravaju i jednostavniji su u primeni dobijenih rezultata.

Podsetimo se definicija nekih pojmova koje ćemo pomenuti u daljem razmatranju. Preslikavanje $T : K \to K$ je neekspanzivno ako $d(T(x), T(y)) \leq$

$d(x,y)$, za sve $x,y \in K$ i usmereno neekspanzivno ako $d(T(x),T(y)) \leq d(x,y)$ za sve $x \in K$ i $y \in [x,T(x)]$. Ako postoji $\alpha \in (0,1)$ takvo da poslednja nejednakost važi za $y = W(T(x),x,\alpha)$, tada je T uniformno lokalno usmereno neekspanzivno.

Propozicija 4.2.1 *Neka je (X,d,W) kompletan TCS sa osobinom (P), K je zatvoren, konveksan ograničen podskup od X, $T : K \to K$ je uniformno lokalno usmereno neekspanzivno preslikavanje i neka je $T_\alpha(x) = W(T(x),x,\alpha)$. Za fiksno $x_0 \in K$, nizovi $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ su definisani sa:*

$$x_{n+1} = T_\alpha(x_n),\ y_n = T(x_n),\quad n = 0,1,2,\ldots .$$

Tada za sve $i,n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(y_{i+n},x_i) &\geq (1-\alpha)^{-n}\left(d(y_{i+n},x_{i+n}) - d(y_i,x_i)\right) + \\ &+ (1+n\alpha)d(y_i,x_i), \end{aligned} \tag{4.1}$$

i

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,T(x_n)) = 0.$$

Dokaz. Dokazujemo (4.1) matematičom indukcijom po n. Za $n = 0$ nejednakost (4.1) je trivijalna. Pretpostavimo da je (4.1) zadovoljeno za zadato n i sve i.

Da bismo dokazali da (4.1) važi za $n+1$, postupićemo na sledeći način: zamenjujući i sa $i+1$ u (4.1) dobijamo:

$$\begin{aligned} d(y_{i+n+1},x_{i+1}) &\geq (1-\alpha)^{-n}\left(d(y_{i+n+1},x_{i+n+1}) - d(y_{i+1},x_{i+1})\right) + \\ &+ (1+n\alpha)d(y_{i+1},x_{i+1}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Takođe,

$$\begin{aligned} d(y_{i+n+1},x_{i+1}) &\leq d(y_{i+n+1},W(y_{i+n+1},x_i,\alpha)) + \\ &+ d(W(y_{i+n+1},x_i,\alpha),W(T(x_i),x_i,\alpha)) \leq \\ &\leq (1-\alpha)d(y_{i+n+1},x_i) + \alpha d(y_{i+n+1},T(x_i)) \leq \\ &\leq (1-\alpha)d(y_{i+n+1},x_i) + \alpha\sum_{k=0}^{n} d(T(x_{i+k+1}),T(x_{i+k})) \leq \\ &\leq (1-\alpha)d(y_{i+n+1},x_i) + \alpha\sum_{k=0}^{n} d(x_{i+k+1},x_{i+k}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

jer je $x_{i+k+1} = W(T(x_{i+k}), x_{i+k}, \alpha)$ i T je uniformno lokalno usmereno neekspanzivno preslikavanje. Kombinujući (4.2) i (4.3), imamo

$$d(y_{i+n+1}, x_i) \geq (1-\alpha)^{-(n+1)}(d(y_{i+n+1}, x_{i+n+1}) - d(y_{i+1}, x_{i+1})) +$$
$$+(1-\alpha)^{-1}(1+n\alpha)d(y_{i+1}, x_{i+1}) - \alpha(1-\alpha)^{-1}\sum_{k=0}^{n} d(x_{k+i+1}, x_{k+i}).$$

Iz Propozicije 4.1.2 (c) sledi

$$d(x_{k+i+1}, x_{k+i}) = d(W(T(x_{k+i}), x_{k+i}, \alpha), x_{k+i}) = \alpha d(y_{k+i}, x_{k+i}),$$

te je

$$d(y_{i+n+1}, x_i) \geq (1-\alpha)^{-(n+1)}(d(y_{i+n+1}, x_{i+n+1}) - d(y_{i+1}, x_{i+1})) +$$
$$+(1-\alpha)^{-1}(1+n\alpha)d(y_{i+1}, x_{i+1}) - \alpha^2(1-\alpha)^{-1}\sum_{k=0}^{n} d(y_{k+i}, x_{k+i}).$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} d(y_n, x_n) &= d(T(x_n), W(T(x_{n-1}), x_{n-1}, \alpha)) \leq \\ &\leq d(T(x_n), T(x_{n-1})) + d(T(x_{n-1}), W(T(x_{n-1}), x_{n-1}, \alpha)) \leq \\ &\leq d(x_n, x_{n-1}) + (1-\alpha)d(T(x_{n-1}), x_{n-1}) = \\ &= \alpha d(y_{n-1}, x_{n-1}) + (1-\alpha)d(y_{n-1}, x_{n-1}) = d(y_{n-1}, x_{n-1}) \end{aligned}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, što znači da je $\{d(y_n, x_n)\}$ opadajući niz. Sada, iz nejednakosti $(1+n\alpha) - (1-\alpha)^{-n} \leq 0$, sledi da

$$\begin{aligned} d(y_{i+n+1}, x_i) &\geq (1-\alpha)^{-(n+1)}(d(y_{i+n+1}, x_{i+n+1}) - d(y_{i+1}, x_{i+1})) + \\ &+ (1-\alpha)^{-1}(1+n\alpha)d(y_{i+1}, x_{i+1}) - \\ &- \alpha^2(1-\alpha)^{-1}(n+1)d(y_i, x_i) = \\ &= (1-\alpha)^{-(n+1)}(d(y_{i+n+1}, x_{i+n+1}) - d(y_i, x_i)) + \\ &+ ((1-\alpha)^{-1}(1+n\alpha) - (1-\alpha)^{-(n+1)})d(y_{i+1}, x_{i+1}) + \\ &+ ((1-\alpha)^{-(n+1)} - \alpha^2(1-\alpha)^{-1}(n+1))d(y_i, x_i) \geq \\ &\geq (1-\alpha)^{-(n+1)}(d(y_{i+n+1}, x_{i+n+1}) - d(y_i, x_i)) + \\ &+ ((1-\alpha)^{-1}(1+n\alpha) - (1-\alpha)^{-(n+1)})d(y_i, x_i) + \\ &+ ((1-\alpha)^{-(n+1)} - \alpha^2(1-\alpha)^{-1}(n+1))d(y_i, x_i) = \\ &= (1-\alpha)^{-(n+1)}(d(y_{i+n+1}, x_{i+n+1}) - d(y_i, x_i)) + \\ &+ (1+(n+1)\alpha)d(y_i, x_i). \end{aligned}$$

Prema tome, (4.1) važi za $n+1$, što nam je i bila namera da dokažemo.

Dalje, kako je niz $\{d(y_n, x_n)\}$ opadajući, postoji $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = r \geq 0$. Pretpostavimo da je $r > 0$. Izaberimo pozitivan ceo broj $n_0 \geq \frac{d}{r\cdot\alpha}$, $d = diam\,K$, i $\varepsilon > 0$, takav da je $\varepsilon(1-\alpha)^{-n_0} < r$. Sad biramo pozitivan ceo broj k takav da je

$$0 \leq d(y_k, x_k) - d(y_{k+n_0}, x_{k+n_0}) < \varepsilon.$$

Iz (4.1), imamo

$$\begin{aligned} d + r &\leq r(\alpha n_0 + 1) \leq (\alpha n_0 + 1) d(y_k, x_k) \leq \\ &\leq d(y_{k+n_0}, x_k) + \varepsilon(1-\alpha)^{-n_0} < d + r. \end{aligned}$$

Na osnovu poslednje kontradikcije zaključujemo da je pretpostavka da je $r > 0$ pogrešna, te je $r = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) \lim\limits_{n\to\infty} d(T(x_n), x_n) = 0$, što je i trebalo dokazati.

Komentar 4.2.1 *Poslednje tvrđenje generalizuje Lemu 9.4. iz [30].*

Kombinovanjem poslednjeg rezultata sa Teoremom 4.2.1, dobijamo narednu posledicu.

Posledica 4.2.1 *Neka je K zatvoren, konveksan ograničen podskup kompletnog TCS (X, d, W) sa osobinama (P) i (Q) i neka $T : K \to K$ zadovoljava naredne uslove:*

i) T je uniformno lokalno usmereno neekspanzivno na K;

ii) $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$, za sve $A \subseteq K$ za koje je $\alpha(A) > 0$;

iii) F je r.g.i. na K.

Tada je skup nepokretnih tačaka $fix(T)$ od T neprazan i kompaktan.

Dalje navodimo još dva rezultata, koji primenom Propozicije 4.2.1, daju generalizacije nekih drugih rezultata iz nepokretne tačke Kirka i Saliga [51].

Posledica 4.2.2 *Neka je K zatvoren, konveksan, ograničen podskup kompletnog TCS (X, d, W) sa osobinama (P) i (Q) i neka $T : K \to K$ zadovoljava naredne uslove:*

i) T je uniformno lokalno usmereno neekspanzivno na K;

ii) $d(T(x), T(y)) \leq \theta\,(\max\{d(x, T(x)), d(y, T(y))\})$, *gde je* $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *neka funkcija takva da je* $\lim\limits_{t \to 0^+} \theta(t) = 0$.

Tada T *ima jedinstvenu nepokretnu tačku* $x_0 \in K$ *ako i samo ako je* F *r.g.i. na* K.

Dokaz. Iz Propozicije 4.2.1 sledi da je $\inf\limits_K(F) = 0$ i kao u [51], može se dokazati da je $\lim\limits_{c \to 0^+} diam(L_c) = 0$. Iz Teoreme 1.2 u [6], sledi da T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $x_0 \in K$ ako i samo ako je F r.g.i. na K.

Teorema 4.2.2 *[27] Neka je* K *zatvoren, konveksan, ograničen podskup kompletnog TCS* (X, d, W) *sa osobinama* (P) *i* (Q) *i neka* $T : K \to K$ *zadovoljava naredne uslove:*

(i) T *je usmereno nekspanzivno na* K;

(ii) $\alpha(T(L_c)) \leq k \cdot \alpha(L_c)$, *za neko* $k < 1$ *i sve* $c > 0$;

(iii) F *je r.g.i. na* K.

Tada je skup nepokretnih tačaka $fix(T)$ *od* T *neprazan i kompaktan. Štaviše, ako niz* $\{x_n\} \subseteq K$ *zadovoljava uslova* $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, T(x_n)) = 0$, *tada je* $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, fix(T)) = 0$.

Dokaz. Propozicija 4.2.1, obezbeđuje $\inf\limits_K(F) = 0$. Kako (i) implicira da

$$d(T(x), T^2(x)) \leq d(x, T(x)), \quad \text{za svako} \quad x \in K,$$

zaključak sledi direktno na osnovu iskaza Teoreme 2.3 [51].

Utvrdili smo da je $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, T(x_n)) = 0$ za svaki niz $\{x_n\}$ definisan sa $x_n = T_\alpha(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$, gde je $x_0 \in K$ i $\alpha \in (0, 1)$. Tada je $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, fix(T)) = 0$, što znači da niz $\{x_n\}$ konvergira ka skupu $fix\,(T)$, ali konvergencija ka konkretnom elementu iz $fix\,(T)$ nije dokazana. Postavljajući neke dodatne uslove, može se dobiti da niz $\{x_n\}$ konvergira ka nepokretnoj tački preslikavanja T.

U daljem razmatranju bavićemo se konceptom slabo kvazi-neekspanzivnog preslikavanja u odnosu na niz, koje su uveli M.A. Ahmed i F.M.Zeyad u [1].

Definicija 4.2.1 *[1] Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $\{x_n\}$ niz u $D \subseteq X$. Pretpostavimo da je $T : D \to X$ preslikavanje sa $fix(T) \neq \emptyset$ koje zadovoljava uslov $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, fix(T)) = 0$. Prema tome, za zadato $\varepsilon > 0$ postoji $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takvo da je $d(x_n, fix(T)) < \varepsilon$ za sve $n \geq n_1(\varepsilon)$. Preslikavanje T je slabo kvazi-neekspanzivno u odnosu na $\{x_n\} \subseteq D$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $p(\varepsilon) \in fix(T)$ takvo da za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_1(\varepsilon)$, važi $d(x_n, p(\varepsilon)) < \varepsilon$.*

Naredna teorema predstavlja poboljšanje Teoreme 4.2.2, a takođe i generalizaciju Teoreme 2.24 iz [1].

Teorema 4.2.3 *[27] Neka je K zatvoren, konveksan, ograničen podskup kompletnog TCS (X, d, W) sa osobinama (P) i (Q) i neka $T : K \to K$ zadovoljava naredne uslove:*

(i) *T je usmereno neekspanzivno na K;*

(ii) *$\alpha(T(L_c)) \leq k\alpha(L_c)$ za neko $k < 1$ i sve $c > 0$;*

(iii) *F je regularno-globalna infimum funkcija na K;*

(iv) *Niz $\{x_n\} \subseteq K$ zadovoljava uslov $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ i T je slabo kvazi-nekspanzivno u odnosu na $\{x_n\}$.*

Tada $\{x_n\}$ konvergira ka tački u $fix(T)$.

Dokaz. Dokaz teoreme je posledica Teoreme 4.2.2 i Teoreme 2.5 (b) iz [1].

Kao posledica Propozicije 4.2.1, sledi naredna posledica.

Posledica 4.2.3 *[27] Neka je K zatvoren, konveksan, ograničen podskup kompletnog TCS (X, d, W) sa osobinama (P) i (Q) i neka $T : K \to K$ zadovoljava naredne uslove:*

(i) *T je usmereno neekspanzivno na K;*

(ii) *$\alpha(T(L_c)) \leq k\alpha(L_c)$ za neko $k < 1$ i sve $c > 0$;*

(iii) *F je regularno-globalna infimum funkcija na K;*

(iv) *Preslikavanje T je slabo kvazi-nekspanzivno u odnosu na niz $x_n = T_\alpha^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in K$, $\alpha \in (0, 1)$.*

Tada $\{x_n\}$ konvergira ka tački u $fix(T)$.

Glava 5

Teoreme o nepokretnoj tački u fazi metričkim prostorima

Teorija nepokretne tačke u neodređenim sistemima se može posmatrati na različite načine, a jedan od njih je primenom fazi logike. U zavisnosti od toga koji segment problema se posmatra sa nekom vrstom neodređenosti, mora se koristi odgovarajuća struktura prostora u kome se problem razmatra. Ako je rastojanje između elemenata neprecizno, onda se u metriku uključuje neodređenost, kao što je u definiciji fazi metričkog prostora O. Kaleva i Seikkala [43]. Ovaj model ima mnogo sličnosti sa probabilističkim (Mengerovim) metričkim prostorima. Tehnike, metode i rezultati iz nepokretne tačke u ove dve strukture su povezane. Neki od rezultata o nepokretnoj tački u fazi metričkim prostorima se mogu naći u sledećim radovima: [15], [18], [40], [55], [66], [73], [84].

Sehgal i Bharucha-Reid [71] su prvi definisali fazi uopštenje Banahovog kontraktivnog uslova, koristeći sledeći uslov:

$$M(f(x), f(y), kt) \geq M(x, y, t), \tag{5.1}$$

za svako $x, y \in X$, $t > 0$ i $k \in (0, 1)$, gde je $f : X \to X$.

Nakon toga usledilo je uopštavanje datog uslova za jednoznačna i višeznačna preslikavanja u fazi metričkim prostorima.

U radu Shena [73] je uveden pojam funkcije promenljivog rastojanja u fazi metričkim prostorima (X, M, T). Primenom kontraktivnog uslova

$$\varphi(M(f(x), f(y), t)) \leq k(t) \cdot \varphi(M(x, y, t)),\ x, y \in X,\ x \neq y,\ t > 0, \tag{5.2}$$

dokazano je postojanje jedinstvene nepokretne tačke preslikavanja $f : X \to X$. Iz te teoreme proizilazi istraživanje koje je prezentovano u poglavlju 5.1. Naime, uslov (5.3) je uopšten ukoliko je preslikavanje f višeznačno, a pri tome uslovi koje zadovoljava funkcija φ nisu menjani. Dokazane su dve teoreme za koincidentne tačke: prva u jakom fazi metričkome prostoru uz $t-$normu $H-$tipa, a druga u fazi metričkom prostoru pri čemu je $f-$strogo demikompaktno preslikavanje.

U radu [16] je uveden pojam jake $\{b_n\}-$fazi kontrakcije za jednoznačna preslikavanja. U odeljku 5.2. je dokazano uopštenje teoreme prezentovano u [16] u okviru višeznačnih preslikavanja. Prostor koji se posmatra je fazi metrički prostor koji su uveli Kramosil i Michalek [52].

5.1 Višeznačna generalizacija Khanove teoreme u fazi metričkim prostorima

Kao što je napomenuto u prvom poglavlju, Banahov princip kontrakcije u metričkim prostorima je uopšten u radu Khana [48] gde je prvi put primenjena kontrolna funkcija, koja se naziva funkcija promenljivog rastojanja. Ovaj tip funkcije je upotrebljen u radu [73] u okviru fazi metričkih prostora (X, M, T), gde je korišćen sledeći kontraktivni uslov:

(5.3)
$$\varphi(M(f(x), f(y), t)) \leq k(t) \cdot \varphi(M(x, y, t)),\ x, y \in X,\ t > 0,\ 0 < k(t) < 1.$$

Funkcija φ zadovoljava sledeće uslove:

$(AD1)$ φ je strogo opadajuća i neprekidna sa leve strane;
(AD_2) $\varphi(\lambda) = 0$ ako i samo ako je $\lambda = 1$.

Za dokaz prve teoreme koriste se jaki fazi metrički prostori (u nekim radovima se za ovakve prostore koristi još naziv nearhimedovski fazi metrički prostor).

Definicija 5.1.1 *([28], [29]) Uređena trojka (X, M, T) je jak fazi metrički prostor ako je X proizvoljan skup, T je neprekidna $t-$norma i M je fazi skup nad $X^2 \times (0, \infty)$ tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:*
(GV_1) $M(x, y, t) > 0,\ x, y \in X,\ t > 0,$
(GV_2) $M(x, y, t) = 1,\ t > 0 \Leftrightarrow x = y,$
(GV_3) $M(x, y, t) = M(y, x, t),\ x, y \in X,\ t > 0,$

(GV_4) $T(M(x,y,t),\, M(y,z,t)) \leq M(x,\, z,\, t),\ x,\, y,\, z \in X,\, t > 0,$
(GV_5) $M(x,\, y,\, \cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ *je neprekidno za svako* $x, y \in X$.

Definicija 5.1.2 *[54] Neka je* (X, M, T) *fazi metrički prostor,* A *neprazan podskup od* X, $f : A \to A$ *i* $F : A \to C(A)$. *Preslikavanje* F *je* $f-$*strogo demi-kompaktno ako za svaki niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* A *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} M(f(x_n), y_n, t) = 1,\ t > 0$, *za neki niz* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \in Fx_n$, $n \in \mathbb{N}$, *postoji konvergentan podniz* $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Definicija 5.1.3 *[36],[37] Preslikavanje* $F : X \to C(X)$ *slabo komutira sa* $f : X \to X$ *ako za svako* $x \in X$ *važi da je* $f(Fx) \subseteq F(fx)$.

Neka su A i B neprazni podskupovi od X. Hausdorfova metrika u fazi metričkim prostorima se definiše na sledeći način:

$$\tilde{M}(A, B, t) = \min\left\{\inf_{x\in A} E(x, B, t),\ \inf_{y\in B} E(y, A, t)\right\},\ t > 0,$$

gde je $E(x, B, t) = \sup\limits_{y\in B} M(x, y, t)$.

Teorema 5.1.1 *[15] Neka je* (X, M, T) *kompletan jak fazi metrički prostor i neka je* $t-$*norma* T H *- tipa. Neka je* $f : X \to X$ *neprekidno preslikavanje i* $F, G : X \to C(X)$ *su preslikavanja koja slabo komutiraju sa* f. *Ako postoji* $k : (0,\infty) \to (0,1)$ *i funkcija promenljivog rastojanja* φ *takva da je sledeći uslov zadovoljen:*
(5.4)

$$\varphi(\tilde{M}(F(x), G(y), t)) \leq k(t) \cdot \varphi(M(f(x), (y), t)),\ x, y \in X,\ x \neq y,\ t > 0,$$

tada postoji tačka $x \in X$ *takva da* $f(x) \in F(x) \cap G(x)$.

Dokaz. Neka tačka $x_0 \in X$. Kako je $F(x_0)$ neprazan podskup od X postoji tačka $x_1 \in X$ takva da $f(x_1) \in F(x_0)$. Neka je $t_0 > 0$ proizvoljno. Na osnovu neprekidnosti M i činjenice da je $k(t) < 1, t > 0$, zaključujemo da postoji $\varepsilon_1 > 0$ tako da je zadovoljena sledeća nejednakost:

$$k(t_0) \cdot \varphi(M(f(x_0), f(x_1), t_0)) < \varphi(M(f(x_0), f(x_1), t_0) + \varepsilon_1). \tag{5.5}$$

Na osnovu definicije Hausdorfove fazi metrike, za $\varepsilon_1 > 0$ date u (5.5), postoji tačka $x_2 \in X$, $f(x_2) \in G(x_1)$ i $l_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tako da je

$$\tilde{M}(F(x_0), G(x_1), t_0) \leq M(f(x_1), f(x_2), t_0) + \frac{\varepsilon_1}{2^{l_1}}. \tag{5.6}$$

Koristeći (5.4), (5.5) i (5.6), kao i činjenicu da je φ strogo opadajuća funkcija, zaključujemo da je

$$M(f(x_0), f(x_1), t_0) < M(f(x_1), f(x_2), t_0). \tag{5.7}$$

Zadržavajući $\varepsilon_1 > 0$ koje je definisano u (5.5) postoji tačka $x_3 \in X$, $f(x_3) \in F(x_2)$, i $l_2 \in \mathbb{N}$, $l_2 > l_1$ takvo da je

$$k(t) \cdot \varphi(M(f(x_1), f(x_2), t_0)) < \varphi(M(f(x_1), f(x_2), t_0) + \varepsilon_1), \tag{5.8}$$

i

$$\tilde{M}(G(x_1), F(x_2), t_0) \leq M(f(x_2), f(x_3), t_0) + \frac{\varepsilon_1}{2^{l_2}}. \tag{5.9}$$

Na osnovu (5.8) i (5.9) dobijamo

$$M(f(x_1), f(x_2), t_0) < M(f(x_2), f(x_3), t_0). \tag{5.10}$$

Ponavljajući gore opisan postupak definišemo niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X i strogo rastući niz $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathbb{N}$ tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) $f(x_{2n+1}) \in F(x_{2n}),\ f(x_{2n+2}) \in G(x_{2n+1}),\ n \in \mathbb{N}$,

(ii) $M(f(x_{n-1}), f(x_n), t) < M(f(x_n), f(x_{n+1}), t),\ t > 0,\ n \in \mathbb{N}$,

gde smo koristili nejednakost

$$\tilde{M}(F(x_{2n}), G(x_{2n+1}), t) \leq M(f(x_{2n+1}), f(x_{2n+2}), t) + \frac{\varepsilon_1}{2^{l_n}},\ t > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Prema tome, niz $\{M(f(x_n), f(x_{n+1}), t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $t > 0$, je neopadajući i ograničen, pa postoji $a \in (0, 1]$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} M(f(x_n), f(x_{n+1}), t) = a,\ t > 0. \tag{5.12}$$

Na osnovu (5.4), (5.11) i (5.12) dobijamo

$$\varphi(M(f(x_{2n+1}), f(x_{2n+2}), t) + \frac{\varepsilon_1}{2^{l_n}}) < \varphi(\tilde{M}(F(x_{2n}), G(x_{2n+1}), t)) < \tag{5.13}$$

$$< k(t) \cdot \varphi(M(f(x_{2n}), f(x_{2n+1}), t)), \ n \in \mathbb{N}, \ t > 0.$$

Puštajući da $n \to \infty$ u (5.13) dobijamo

$$\varphi(a) \leq k(t) \cdot \varphi(a), \ t > 0, \tag{5.14}$$

i zaključujemo da je $\varphi(a) = 0$, odnosno $a = 1$.

Potrebno je dokazati da je niz $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Košijev. Neka je $\varepsilon > 0$ i $s \in \mathbb{N}$. Kako je T $t-$norma $H-$tipa, primenom (5.12) i Propozicije 2.5.1 zaključujemo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\mathbf{T}_{i=n}^{\infty} M(f(x_i), f(x_{i+1}), t) > 1 - \varepsilon, \ \ t > 0, \, n \geq n_0. \tag{5.15}$$

Na osnovu pretpostavke da je (X, M, T) jak fazi metrički prostor i kako je $\{\mathbf{T}_{i=1}^{n} M(f(x_i), f(x_{i+1}), t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz, na osnovu (5.15), dobijamo da je

$$M(f(x_{n+s+1}), f(x_n), t) \geq \mathbf{T}_{i=n}^{n+s} M(f(x_i), f(x_{i+1}), t) > 1 - \varepsilon, \ t > 0, \, n \geq n_0. \tag{5.16}$$

Prema tome, niz $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev i kako je prostor (X, M, T) kompletan, postoji $x \in X$ da je

$$x = \lim_{n\to\infty} f(x_n). \tag{5.17}$$

Ostaje da se dokaže da $f(x) \in F(x) \cap G(x)$. Kako je $F(x) \cap G(x) = \overline{F(x)} \cap \overline{G(x)}$ potrebno je da pokažemo da za svako $t > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$ postoji $r_1 = r_1(t, \lambda) \in F(x)$ i $r_2 = r_2(t, \lambda) \in G(x)$ tako da je $r_1, r_2 \in U(f(x), t, \lambda)$, odnosno $M(f(x), r_1, t) > 1 - \lambda$ i $M(f(x), r_2, t) > 1 - \lambda$.

Neka je $t_0 > 0$ i $\lambda \in (0, 1)$. Kako je t-norma T neprekidna, sledi da postoji $\delta = \delta(\lambda) \in (0, 1)$ takvo da je

$$T(1 - \delta, T(1 - \delta, 1 - \delta)) > 1 - \lambda. \tag{5.18}$$

Iz neprekidnosti preslikavanja f i (5.17) postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$M(f(x), f(f(x_{2n})), \frac{t_0}{3}) > 1 - \delta, \ n \geq n_1. \tag{5.19}$$

Na osnovu (5.12) postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$M(f(f(x_{2n})), f(f(x_{2n+1})), \frac{t_0}{3}) > 1 - \delta, \ n \geq n_2.$$

Na osnovu pretpostavke preslikavanje f slabo komutira sa F te važi sledeće:

$$f(fx_{2n+1}) \in f(F(x_{2n})) \subseteq F(f(x_{2n})). \tag{5.20}$$

Takođe, postoji $\varepsilon^* \in (0,1)$ takvo da je

$$k(\frac{t_0}{3}) \cdot \varphi(M(f(x), f(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3})) < \varphi(M(f(x), f(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3}) + \varepsilon^*), \tag{5.21}$$

za proizvoljno $n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$. Iz (5.20) i definicije Hausdorfove fazi metrike, postoji $r_2 \in Gx$ takvo da je za $\varepsilon^* > 0$ (definisano u (5.21)) zadovoljeno sledeće:

$$\tilde{M}(G(x), F(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3}) \leq M(r_2, f(f(x_{2n_0+1})), \frac{t_0}{3}) + \varepsilon^*. \tag{5.22}$$

Iz (5.4), (5.20) i (5.21) zaključujemo da je:

$$\varphi(M(r_2, f(f(x_{2n_0+1})), \frac{t_0}{3}) + \varepsilon^*) \leq \varphi(\tilde{M}(G(x), F(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3})) \leq$$

$$\leq k(\frac{t_0}{3}) \cdot \varphi(M(f(x), f(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3})) < \varphi(M(f(x), f(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3}) + \varepsilon^*).$$

Iz (5.19) sledi da je

$$M(r_2, f(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3}) > M(f(x), f(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3}) > 1 - \delta.$$

Primenom (5.18) dobijamo

$$M(f(x), r_2, t_0) \geq$$

$$\geq T(M(f(x), f(f(x_{2n_0})), \frac{t_0}{3}), T(M(f(f(x_{2n_0})), f(f(x_{2n_0+1})), \frac{t_0}{3}),$$

$$M(f(f(x_{2n_0+1})), r_2, \frac{t_0}{3}))) \geq$$

$$\geq T(1-\delta, T(1-\delta, 1-\delta)) > 1 - \lambda.$$

Prema tome, $r_2 \in U(f(x), t_0, \lambda)$ za proizvoljno $t_0 > 0$ i $\lambda \in (0,1)$, tj. $f(x) \in G(x)$. Analogno se pokazuje da $r_1 \in U(f(x), t, \lambda)$, $t > 0, \lambda \in (0,1)$ što implicira da $f(x) \in F(x)$.

Teorema 5.1.2 *[15] Neka je (X, M, T) kompletan fazi metrički prostor i $f : X \to X$ neprekidno preslikavanje. Neka su preslikavanja $F, G : X \to C(X)$ slabo komutativna sa f, i neka su F ili G $f-$strogo demikompaktna preslikavanja. Ako je za neko $k : (0, \infty) \to (0, 1)$ i funkciju promenljivog rastojanja φ zadovoljen sledeći uslov*

$$(5.23) \qquad \varphi(\tilde{M}(F(x), G(y), t)) \leq k(t) \cdot \varphi(M(f(x), f(y), t)),\ x, y \in X,\ t > 0,$$

tada postoji $x \in X$ takav da $f(x) \in F(x) \cap G(x)$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 5.1.1, osim dela gde se pokazuje da je niz Košijev. Naime, kako je preslikavanje F ili G $f-$strogo demikompaktno, i iz $f(x_{2n+1}) \in F(x_{2n})$ ili $f(x_{2n+2}) \in G(x_{2n+1})$ i $\lim\limits_{n\to\infty} M(f(x_{2n}), f(x_{2n+1}), t) = 1$, $t > 0$, zaključujemo da postoji konvergentan podniz $\{f(x_{2n_p})\}_{p\in\mathbb{N}}$ ili $\{f(x_{2n_p+1})\}_{p\in\mathbb{N}}$, respektivno, takav da je

$$(5.24) \qquad \lim_{p\to\infty} f(x_{2n_p}) = x.$$

Poslednji deo dokaza je analogan dokazu u Teoremi 5.1.1, gde umesto niza $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ imamo podnizove $\{f(x_{2n_p})\}_{p\in\mathbb{N}}$ i $\{f(x_{2n_p+1})\}_{p\in\mathbb{N}}$.

Ako u Teoremi 5.1.1 i Teoremi 5.1.2 pretpostavimo da je $F = G$ i da je f identičko preslikavanje dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 5.1.1 *[15] Neka je (X, M, T) kompletan fazi metrički prostor, $F : X \to C(X)$, i neka je jedan od sledeća dva uslova zadovoljen:*

(a) F je slabo demikompaktno preslikavanje,

(b) (X, M, T) je jak fazi metrički prostor i T je t-norma H-tipa.

Ako postoji $k : (0, \infty) \to (0, 1)$ i funkcija promenljivog rastojanja φ tako da je:

$$(5.25) \qquad \varphi(\tilde{M}(F(x), F(y), t)) \leq k(t) \cdot \varphi(M(x, y, t)),\ x, y \in X,\ t > 0,$$

tada postoji $x \in X$ tako da je $x \in F(x)$.

Ako je preslikavanje F iz Posledice 5.1.1 jednoznačno, tada dobijamo rezultat iz [15].

Primer 5.1.1 *[15]*

(a) Neka je $X = [0, 2]$, $T = T_P$, $M(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, *gde je* d *Euklidska metrika. Tada je* (X, M, T) *fazi metrički prostor. Neka je* $F(x) = \{1, 2\}$, $x \in X$. *Kako je* F *slabo demikompaktno preslikavanje i zadovoljen je uslov (5.25), na osnovu Posledice 5.1.1(a) sledi da postoji* $x \in X$ *takav da* $x \in F(x)$.

(b) Neka je $X = [0, 2]$, $T = T_M$, $M^*(x, y, t) = \frac{t}{t+d^*(x,y)}$, *gde je* d^* *ultrametrika. Tada je* (X, M^*, T) *jak fazi metrički prostor [31]. Za* $F(x) = \{1, 2\}$, $x \in X$, *uslov (5.25) je zadovoljen, i na osnovu Posledice 5.1.1(b) sledi da postoji* $x \in X$ *da je* $x \in F(x)$.

5.2 Višeznačna jaka $\{b_n\}$−fazi kontrakcija

Definicija 5.2.1 *[15] Neka je* (X, M, T) *fazi metrički prostor i* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz iz* $(0, 1)$ *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. *Preslikavanje* $F : X \to C(X)$ *je višeznačna jaka* $\{b_n\}$*−fazi kontrakcija ako postoji* $q \in (0, 1)$ *tako da je*
(5.26)
$$M(x, y, t) > b_n \Rightarrow \tilde{M}(F(x), F(y), qt) > b_{n+1}, \quad x, y \in X,\ t > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5.2.1 *[15] Neka je* (X, M, T) *kompletan fazi metrički prostor u smislu Kramosila i Michaleka takav da je* $\lim\limits_{t\to\infty} M(x, y, t) = 1$. *Neka je niz* $\{b_n\} \subset (0, 1)$ *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ *i* $F : X \to C(X)$ *višeznačna jaka* $\{b_n\}$*−fazi kontrakcija. Ako* t*−norma* T *zadovoljava sledeći uslov:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{T}_{i=n}^{\infty} b_i = 1, \tag{5.27}$$

tada postoji $x \in X$ *tako da je* $x \in F(x)$.

Dokaz. Neka je $x_0, x_1 \in X$, tako da $x_1 \in F(x_0)$. Na osnovu (5.27) i $(F(M_1))$, za proizvoljno $\varepsilon >, 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $t_0 > 0$ tako važi

$$\mathbf{T}_{i=n_0}^{\infty} b_i > 1 - \varepsilon \ \text{ i } \ M(x_0, x_1, t_0) > b_{n_0}. \tag{5.28}$$

Tada, na osnovu uslova (5.26), za neko $q \in (0, 1)$ i $\varepsilon_0 > 0$ zadovoljeno je sledeće:

$$\tilde{M}(F(x_0), F(x_1), qt_0) > b_{n_0+1} + \varepsilon_0. \tag{5.29}$$

Za odabrano ε_0, primenom definicije Hausdorfove metrike postoji tačka $x_2 \in F(x_1)$ takva da je

$$\tilde{M}(F(x_0), F(x_1), qt_0) \leq M(x_1, x_2, qt_0) + \varepsilon_0. \tag{5.30}$$

Iz (5.26), (5.29) i (5.30) dobijamo

$$M(x_1, x_2, qt_0) > b_{n_0+1} \Rightarrow \tilde{M}(F(x_1), F(x_2), q^2 t_0) > b_{n_0+2}.$$

Ponavljajući isti postupak dobijamo da je

$$M(x_k, x_{k+1}, q^k t_0) > b_{n_0+k},\ k \in \mathbb{N}. \tag{5.31}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ i $t > 0$. Izaberimo $k_0 \in \mathbb{N}, k_0 > n_0$ da je $\sum_{k=k_0}^{\infty} q^k < \frac{t}{t_0}$, tada za svako $l, r \in \mathbb{N}, r > 1$ dobijamo

$$\begin{aligned}
& M(x_{k_0+l}, x_{k_0+l+r}, t) \geq M(x_{k_0+l}, x_{k_0+l+r}, t_0 \sum_{k=k_0}^{\infty} q^k) \geq \\
\geq\ & M(x_{k_0+l}, x_{k_0+l+r}, t_0 \sum_{k=k_0+l}^{k_0+l+r-1} q^k) \geq \\
\geq\ & \underbrace{T(T \ldots T}_{(r-1)-put}(M(x_{k_0+l}, x_{k_0+l+1}, t_0 q^{k_0+l}), \ldots), \\
& M(x_{k_0+l+r-1}, x_{k_0+l+r}, t_0 q^{k_0+l+r-1})) \geq \\
\geq\ & \mathbf{T}_{i=n_0}^{\infty} b_i > 1 - \varepsilon,
\end{aligned}$$

gde su primenjene nejednakosti (5.28) i (5.31). Prema tome, niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Košijev i kako je na osnovu uslova teoreme prostor (X, M, T) kompletan, postoji $x \in X$ da je

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x. \tag{5.32}$$

Ostaje da se pokaže da $x \in F(x)$. Kako je $F(x) = \overline{F(x)}$ dovoljno je da se pokaže da za svako $\lambda \in (0,1)$ i $t > 0$ postoji $r = r(t,\lambda) \in F(x)$ da je $M(x, r, t) > 1 - \lambda$.

Neka je $t_0 > 0$ i $\lambda \in (0,1)$. Zbog neprekidnosti $t-$norme zadovoljen je sledeći uslov $\sup\limits_{a<1} T(a,a) = 1$, pa postoji $\delta = \delta(\lambda) \in (0,1)$ da je

$$T(T(1-\delta, 1-\delta), 1-\delta) > 1 - \lambda. \tag{5.33}$$

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ za δ koje je definisano u (5.33) postoji $p_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$b_p > 1-\delta, \quad p \geq p_0. \tag{5.34}$$

Na osnovu (5.32) za p_0 moguće je odrediti $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$M(x_n, x, \frac{t_0}{3}) > b_{p_0} > 1-\delta,\ n \geq n_0, \tag{5.35}$$

i

$$M(x_n, x_{n+1}, \frac{t_0}{3}) > b_{p_0} > 1-\delta,\ n \geq n_0. \tag{5.36}$$

Zbog (5.26) postoji $\varepsilon^* > 0$ tako da je

$$\tilde{M}(F(x_n), F(x), q\frac{t_0}{3}) > b_{p_0+1} + \varepsilon^*,\ n \geq n_0.$$

Za neko ε^* postoji $r \in F(x)$ tako da je

$$M(x_{n+1}, r, q\frac{t_0}{3}) + \varepsilon^* \geq \tilde{M}(F(x_n), F(x), q\frac{t_0}{3}) > b_{p_0+1} + \varepsilon^*,$$

odnosno,

$$M(x_{n+1}, r, \frac{t_0}{3}) > M(x_{n+1}, r, q\frac{t_0}{3}) > b_{p_0+1} > 1-\delta,\ n \geq n_0. \tag{5.37}$$

Konačno, na osnovu (5.33), (5.35), (5.36) i (5.37) dobijamo

$$M(x, r, t_0) \geq T(T(M(x, x_n, \frac{t_0}{3}), M(x_n, x_{n+1}, \frac{t_0}{3})), M(x_{n+1}, r, \frac{t_0}{3})) > 1-\lambda.$$

Prema tome, $x \in F(x)$.

Glava 6

Teoreme o nepokretnoj tački u fazi $G-$metričkim prostorima

U slučaju da je pripadnost elemenata neprecizna, sistem se može posmatrati kao fazi sistem. U zavisnosti od problematike, uvodi se odgovarajući prostor u kome se rešava. Za rešavanje problema neophodno je da se nepokretna tačka posmatra u prostoru sa odgovarajućom topološkom strukturom.

Označimo sa $\mathcal{K}(X)$ skup svih kompaktnih podskupova od X, a sa $\mathcal{F}$ skup svih fazi skupova sa kompaktnim α-nivoima definisanim na X, pri čemu X ima metričku strukturu. Z. Mustafa and B. Sims [59] su uveli definiciju generalizovanog metričkog prostora, tj. G-metričkog prostora. U [42] G-metrika je uvedena u $\mathcal{K}(X)$, a u [83] slična konstrukcija je primenjena da se G-metrika uvede u skup $\mathcal{F}$. U oba slučaja struktura osnovnog G-metričkog prostora je primenjena za definisanje Hausdorfove G-metrike pomoću rastojanja d_G izvedenog iz G-metrike G. U ovom delu disertacije osnovni prostor je metrički (umesto G-metričkog) i uvedena je Hausdorfova G-metrika primenom iste ideje kao u [42], [83], ali upotrebljena je metrika d originalnog metričkog prostora (X, d) umesto generisane d_G metrike. Uprkos tome što je veza između osnovnog i generisanog prostora jednostavnija nego u [83], struktura generalizovanog metričkog prostora $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nije redukovana. Osim toga, analizirali smo egzistenciju i jedinstvenost zajedničke nepokretne tačke za familiju $\{f_i\}$ samopreslikavanja u skupu fazi skupova $\mathcal{F}$ sa generalizovanom metrikom $\mathcal{G}$. Razmatran je drugačiji tip generalizovanog kontraktivnog uslova, primenom neopadajuće, sa desne strane neprekidne funkcije $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Stavljajući drugačije dodatne uslove na Φ, možemo pratiti kako Φ utiče na druge uslove i na konačan rezultat za nepokretnu tačku.

Za više rezultata o nepokretnoj tački za preslikavanja u G-metričkim prostorima fazi skupova upućujemo na [45], [65], [83].

B. Samet, C. Vetro, F. Vetro [69] i Jleli,Samet [41] su ustanovili da se neke teoreme o nepokretnoj tački u G-metričkim prostorima mogu dokazati primenom postojećih rezultata u kvazi metričkim prostorima. Naime, ako bi se kontraktivni uslov u teoremi o nepokretnoj tački u G-metričkom prostoru mogao redukovati na dve promenljive, tada se može dokazati ekvivalentna teorema u običnom metričkom prostoru. Ideja nije u potpunosti nova, ali nije bilo uspeha pre [60]. Karapinar i Agarval u radu [49] su nastavili da razvijaju tehniku Jleli-Sameta u G-metričkim prostorima, ali, sa druge strane, dokazali su teoreme o nepokretnoj tački u G-metričkim prostorima gde ne može da se primeni tehnika Jleli-Sameta. Dakle u nekim slučajevima, kao što je primećeno u radu Jleli-Sameta [41], kada je kontraktivni uslov nelinearan, ovakva strategija nije uvek uspešna. To je i ovde slučaj, tehnika Jleli-Sameta ne daje adekvatne rezultate, ali ako se primeni G-metrika, teoreme mogu biti dokazane. Dakle, naši rezultati ne proizilaze iz uobičajenih u metričkim ili kvazi metričkim prostorima, niti proizilaze iz rezultata B. Samet, C. Vetro, F. Vetro i Jleli, Samet.

U poglavlju 6.1. se analizira egzistencija i jedinstvenost zajedničke nepokretne tačke za familiju fazi preslikavanja f_i u povezanom fazi $G-$metričkom prostoru $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Posmatraju se različite generalizacije kontraktivnih uslova, korišćenjem neopadajuće i neprekidne sa desne strane funkcije $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Postavljanjem različitih dodatnih uslova za Φ, menjaju se i ostali uslovi u teoremama, koje za cilj imaju dokazivanje postojanja nepokretne tačke.

Postojanje subfiksne tačke je predmet proučavanja u poglavlju 6.2. Kao i u prethodnom poglavlju, različiti dodatni uslovi za funkciju Φ, omogućavaju egzistenciju subfiksne tačke.

Osnovni pojmovi i definicije vezani za ovu tematiku su prikazani u delu 2.6.

6.1 Nepokretna tačka za kontraktivne iteracije u tački i orbitalna kontrakcija u tački za fazi preslikavanja

Uopštavanje principa kontrakcije se može postići primenom različitih vrsta neopadajućih funkcija neprekidnih sa desne strane $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Najčešće korišćena dodatna osobina za preslikavanje Φ se dobija kombinacijom sledećih sedam uslova:

(ϕ_1) $\Phi(0) = 0$,

(ϕ_2) $\Phi(x) < x$, za sve $x > 0$,

(ϕ_3) $\lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(x) = 0$, za sve $x > 0$,

(ϕ_4) $\{x_i\} \subset [0, \infty)$ je niz pri čemu je $x_{i+1} \leq \Phi(x_i)$, tada $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$.

(ϕ_5) za sve $x \geq 0$ postoji $y(x) \geq 0$, $y(x) = \sup\limits_{y\geq 0}\{y \leq x + \Phi(y)\}$,

(ϕ_6) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \Phi(x)) = \infty$,

(ϕ_7) $\sum_{i=1}^{\infty} \Phi^i(x) < \infty$, za sve $x > 0$.

Neke od navedenih osobina preslikavanja Φ su ekvivalentne, neka osobina implicira drugu, a neke su nekompatibilne. Sledeća lema daje veze između osobina (ϕ_1) - (ϕ_7), naročito onih koje se koriste za definisanje generalizovane kontrakcije.

Lema 6.1.1 *[75] Neka je $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ nerastuća funkcija, neprekidna sa desne strane. Tada*

(i) $(\phi_2) \Leftrightarrow (\phi_3) \Leftrightarrow (\phi_4)$,

(ii) $(\phi_7) \Rightarrow (\phi_k) \Rightarrow (\phi_1)$, *gde* $k \in \{2,3,4\}$,

(iii) $(\phi_5) + (\phi_2) \not\Rightarrow (\phi_7)$ *i* $(\phi_6) + (\phi_2) \not\Rightarrow (\phi_7)$,

(iv) $(\phi_7) \not\Rightarrow (\phi_5)$ *i* $(\phi_7) \not\Rightarrow (\phi_6)$.

Dokaz. (i) Dovoljno je pokazati da $(\phi_4) \Rightarrow (\phi_2) \Leftrightarrow (\phi_3) \Rightarrow (\phi_4)$.

$(\phi_2) \Rightarrow (\phi_3)$: Pretpostavimo supotno, da je za neko $x > 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(x) = a > 0$. Kako je $\{\Phi^i(x)\}$ nerastući niz, zbog neprekidnosti sa desne strane funkcije Φ, važi da je $\Phi(a) = \Phi(\lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(x)) = \lim\limits_{i\to\infty} \Phi^{i+1}(x) = a > 0$, pa sledi da je $0 < a = \Phi(a)$ što je kontrdikcija sa (ϕ_2).

$(\phi_3) \Rightarrow (\phi_2)$: Ako za neko $x > 0$, važi da je $\Phi(x) \geq x$, tada, na osnovu uslova da je funkcija Φ neopdajuća sledi da je $\Phi^i(x) \geq \Phi^{i-1}(x) \geq \cdots \geq \Phi(x) \geq x > 0$. Odatle je $\lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(x) \neq 0$, što je kontradikcija sa (ϕ_3).

$(\phi_3) \Rightarrow (\phi_4)$: Neka je niz $\{x_i\} \subset [0,\infty)$ takav da je $x_{i+1} \leq \Phi(x_i)$. Tada $x_i \leq \Phi(x_{i-1}) \leq \Phi^2(x_{i-2}) \leq \cdots \leq \Phi^i(x_0)$ i $\lim\limits_{i\to\infty} x_i \leq \lim\limits_{i\to\infty} \Phi^i(x_0) = 0$.

$(\phi_4) \Rightarrow (\phi_2)$: Ako pretpostavimo suprotno da (ϕ_2) ne važi, tada ako postoji $y > 0$, onda je $y \leq \Phi(y)$. Ako stavimo $x_i = y$, za sve $i = 0, 1, \ldots,$ tada dobijamo niz $y = x_{i+1} \leq \Phi(y) = \Phi(x_i)$, ali taj niz ne konvergira ka 0.

(ii) Očigledno, pa je dokaz izostavljen.

(iii) Funkcija

$$\Phi(x) = \begin{cases} (x+2)^{-1}, & (n+1)^{-1} \leq x < n^{-1}, n \in \mathbb{N}, \\ 3^{-1}, & 1 \leq x, \end{cases}$$

zadovoljava (ϕ_5), (ϕ_6) i (ϕ_2), ali ne i (ϕ_7).

(iv) Funkcija

$$\Phi(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2, & 0 \leq x < 2, \\ x-1, & 2 \leq x, \end{cases}$$

zadovoljava uslov (ϕ_7), ali ne zadovoljava uslov (ϕ_5), niti (ϕ_6).

Teorema 6.1.1 *[75] Neka je (X,d) kompletan metrički prostor, $(\mathcal{F},\mathcal{G})$ izvedeni fazi G-metrički prostor i $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Dalje, neka je $\{f_i\}$ niz samopreslikavanja nad $\mathcal{F}$ tako da za sve $i \in \mathbb{N}$, $f_i(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ i za svako $\mu \in \mathcal{F}$ postoji $n(\mu) \in \mathbb{N}$ tako da važi*

$$\mathcal{G}\left(f_i^{n(\mu)}(\nu), f_j^{n(\mu)}(\mu), f_j^{n(\mu)}(\mu)\right) \leq \Phi\Big(\max\Big\{\mathcal{G}\left(\nu,\mu,\mu\right),$$

$$2^{-1}\left[\mathcal{G}\left(\nu, f_j^{n(\mu)}(\mu), f_j^{n(\mu)}(\mu)\right) + \mathcal{G}\left(\mu, f_j^{n(\mu)}(\mu), f_j^{n(\mu)}(\mu)\right)\right],$$

$$2^{-1}\left[\mathcal{G}\left(\nu, f_j^{n(\mu)}(\mu), f_j^{n(\mu)}(\mu)\right) + \left(f_i^{n(\mu)}(\nu), \mu, \mu\right)\right)\Big\}\Big] \tag{6.1}$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}$ *sve* $\nu \in \mathcal{B}$*, pri čemu* Φ *zadovoljava uslov* (ϕ_2)*. Ako postoji* $\mu^* \in \mathcal{B}$ *tako da je* $f_i^{n(\mu^*)}(\mu^*) = \mu^*$ *za sve* $i \in \mathbb{N}$*, tada je* μ^* *jedinstvena nepokretna tačka za* $\{f_i\}$ *u* $\mathcal{B}$ *i za svako* $\mu_1 \in \mathcal{F}$*, niz* $\mu_{j+1} = f_i^{n(\mu^*)}(\mu_j)$*,* $i \in \mathbb{N}$*, konvergira ka* μ^**.*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da je μ^* jedinstvena tačka u $\mathcal{B}$ sa osobinom $f_i^{n(\mu^*)}(\mu^*) = \mu^*$, $i \in \mathbb{N}$. Ako je $\nu \in \mathcal{B}$, $\nu \neq \mu^*$, $f_i^{n(\mu^*)}(\nu) = \nu$, $i \in \mathbb{N}$, tada

$$\mathcal{G}(\nu, \mu^*, \mu^*) \leq \mathcal{G}\left(f_i^{n(\mu^*)}(\nu), f_j^{n(\mu^*)}(\mu^*), f_j^{n(\mu^*)}(\mu^*)\right) \leq \Phi\left(\mathcal{G}(\nu, \mu^*, \mu^*)\right).$$

Na osnovu osobine $\Phi(t) < t$, $t > 0$, kako je $\mathcal{G}(\nu, \mu^*, \mu^*) > 0$, dobijamo kontradikciju, pa pretpostavka $\mu^* \neq \nu$ nije tačna. Iz

$$f_i(\mu^*) = f_i(f_i^{n(\mu^*)}(\mu^*)) = f_i^{n(\mu^*)+1}(\mu^*) = f_i^{n(\mu^*)}(f_i(\mu^*)),$$

sledi da $f_i(\mu^*) = \mu^*$, za sve $i \in \mathbb{N}$. Dalje, za neko $\mu_1 \in \mathcal{B}$, formiramo niz $\mu_{i+1} = f_i^{n(\mu^*)}(\mu_i)$. Ako $\mu_1 = \mu^*$, onda je $\mu_i = f_{i-1}^{n(\mu^*)}(f_{i-2}^{n(\mu^*)} \cdots (f_1^{n(\mu^*)}(\mu^*)) \cdots)$ $= \mu^*$ i niz $\{\mu_i\}$ konvergira ka μ^*.

Ako je $\mu_1 \neq \mu^*$, da bismo dokazali da niz $\{\mu_i\}$ konvergira ka μ^*, posmatramo niz $\mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*)$, $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*) &= \mathcal{G}\left(f_i^{n(\mu^*)}(\mu_i), f_j^{n(\mu^*)}(\mu^*), f_j^{n(\mu^*)}(\mu^*)\right) \leq \\
&\leq \Phi\Big(\max\big\{\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*), 2^{-1}\left[\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) + (\mu^*, \mu^*, \mu^*)\right], \\
&\qquad 2^{-1}\left[\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) + \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*)\right]\big\}\Big) = \\
&= \Phi\Big(\max\big\{\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*), 2^{-1}\left[\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) + \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*)\right]\big\}\Big).
\end{aligned}$$

Ako izaberemo da

$$\begin{aligned}
&\max\big\{\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*), 2^{-1}\left[\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) + \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*)\right]\big\} = \\
&= 2^{-1}\left[\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) + \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*)\right],
\end{aligned}$$

to implicira da

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) \leq \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*). \tag{6.2}$$

Sa druge strane, u slučaju da je

$$\mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*) \leq \Phi\left(2^{-1}\left[\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) + \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*)\right]\right) <$$

$$2^{-1}\mathcal{G}\left(\mu_i, \mu^*, \mu^*\right) + 2^{-1}\mathcal{G}\left(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*\right),$$

sledi

$$\mathcal{G}\left(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*\right) < \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu^*, \mu^*\right). \tag{6.3}$$

Očigledno je da je uslov (6.2) u kontradikciji sa uslovom (6.3). Dakle,

$$\mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*) \leq \Phi\left(\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*)\right).$$

Primenom date procedure i puta i puštajući da $i \to \infty$, dobijamo

$$\mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*) \leq \Phi\left(\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*)\right) \leq \cdots \leq \Phi^i\left(\mathcal{G}(\mu_1, \mu^*, \mu^*)\right).$$

Kako je $\mu_1 \neq \mu^*$, $\mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) > 0$ i $\lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu^*, \mu^*) = 0$. Poslednja relacija pokazuje da niz $\{\mu_i\}$ konvergira ka μ^*.

Teorema 6.1.2 *[75] Neka je (X, d) kompletan metrički prostor, $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, pri čemu je $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ izveden fazi G-metrički prostor i neka je $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ subaditivno preslikavanje koje zadovoljava uslov (ϕ_7). Ako je za neko $\mu_0 \in \mathcal{F}$ orbita $\mathcal{O}(f; \mu_0)$ kompletna i za svako $\mu \in \mathcal{O}(f; \mu_0)$ postoji $n(\mu) \in \mathcal{F}$ tako da*

$$\mathcal{G}\left(f^{n(\mu)}(\nu), f^{n(\mu)}(\mu), f^{n(\mu)}(\mu)\right) \leq \phi\left(\mathcal{G}(\nu, \mu, \mu)\right), \tag{6.4}$$

za sve $\nu \in \mathcal{O}(f; \mu_0)$, tada niz $\mu_{i+1} = f^{n(\mu_i)}(\mu_i)$, $i \in \mathbb{N}_0$, konvergira ka nekom $\mu^* \in \mathcal{G}$.

Ako nejednakost (6.4) važi za sve $\mu \in \overline{\mathcal{O}(f; \mu_0)}$, tada $f^{n(\mu^*)}(\mu^*) = \mu^*$ i $f^i(\mu) \to \mu^*$ za sve $\mu \in \overline{\mathcal{O}(f; \mu_0)}$. Ako $f(\overline{\mathcal{O}(f; \mu_0)}) \subseteq \overline{\mathcal{O}(f; \mu_0)}$, tada je μ^* nepokretna tačka za f.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je niz $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{F}$ Košijev. Za dovoljno veliko $\mu \in \mathbb{N}$, postoje $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < n(\mu_0)$ tako da $\mu = k \cdot n(\mu_0) + r$. Primenom (6.4), dobijamo

$$\mathcal{G}\left(f^m(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right) \leq$$

$$\leq \mathcal{G}\left(f^{kn(\mu_0)+r}(\mu_0), f^{n(\mu_0)}(\mu_0), f^{n(\mu)_0}(\mu_0)\right) + \mathcal{G}\left(f^{n(\mu_0)}\mu_0, \mu_0, \mu_0\right)$$

$$\leq \Phi\left(\mathcal{G}\left(f^{(k-1)n(\mu_0)+r}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right)\right) + \mathcal{G}\left(f^{n(\mu_0)}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right)$$

$$\leq \Phi\left(\mathcal{G}\left(f^{(k-1)n(\mu_0)+r}(\mu_0), f^{n(\mu_0)}(\mu_0), f^{n}(\mu_0)\right) +\right.$$
$$\left.+\,\mathcal{G}\left(f^{n(\mu_0)}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right)\right) + \mathcal{G}\left(f^{n(\mu_0)}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right) \leq$$
$$\leq \Phi^2\left(\mathcal{G}\left(f^{(k-2)n(\mu_0)+r}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right)\right) +$$
$$+\Phi\left(\mathcal{G}\left(f^{n(\mu_0)}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right)\right) + \mathcal{G}\left(f^{n(\mu_0)}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right) \leq \cdots$$
$$\leq \Phi^k\left(\mathcal{G}\left(f^{r}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right)\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \Phi^i\left(\mathcal{G}\left(f^{n(\mu_0)}, \mu_0, \mu_0\right)\right).$$

Stavljajući da je $A = \max\{\mathcal{G}\left(f^p(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right) :\ 1 \leq p \leq n(\mu_0)\}$, za sve $m \in \mathbb{N}$, važi sledeća nejednakost

$$\mathcal{G}\left(f^m(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right) \leq \sum_{s=1}^{k} \Phi^s(A) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \Phi^s(A) = B < \infty, \tag{6.5}$$

i odatle,

$$\mathcal{G}\left(\mu_m, \mu_m, \mu_{m+1}\right) =$$
$$= \mathcal{G}\left(f^{n(\mu_{m-1})}(\mu_{m-1}), f^{n(\mu_{m-1})}(\mu_{m-1}), f^{n(\mu_m)} f^{n(\mu_{m-1})}(\mu_{m-1})\right) \leq$$
$$\leq \Phi\left(\mathcal{G}\left(\mu_{m-1}, \mu_{m-1}, f^{n(\mu_m)}(\mu_{m-1})\right)\right) \leq \cdots \leq \Phi^m\left(\mathcal{G}\left(\mu_0, \mu_0, f^{n(\mu_m)}(\mu_0)\right)\right) \leq$$
$$\leq \Phi^m(B),$$

za sve $m \in \mathbb{N}$. Iz poslednje nejednakosti za svako $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$, dobijamo

$$\mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_i, \mu_j\right) \leq \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_i, \mu_{i+1}\right) + \cdots + \mathcal{G}\left(\mu_{k-1}, \mu_{k-1}, \mu_k\right) \leq \sum_{s=i}^{j} \Phi^s(B)$$

što implicira da je niz $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ Košijev. Kako je $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ kompletan fazi G-metrički prostor onda postoji $\mu^* \in \mathcal{F}$ tako da je $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i = \mu^*$.

U drugom delu teoreme, nejednakost (6.4) važi za sve $\mu \in \overline{\mathcal{O}(f;\mu_0)}$. Tada članovi μ_i niza $\{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ iz prethodnog dela dokaza zadovoljavaju sledeće dve relacije:

$$\mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)}(\mu^*), f^{n(\mu^*)}(\mu^*), f^{n(\mu^*)}(\mu_i)\right) \leq \Phi\left(\mathcal{G}\left(\mu^*, \mu^*, \mu_i\right)\right), \tag{6.6}$$

i

$$\mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)}(\mu_i), \mu_i, \mu_i\right) = \mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)} f^{n(\mu_{i-1})}(\mu_{i-1}), f^{n(\mu_{i-1})}(\mu_{i-1}), f^{n(\mu_{i-1})}(\mu_{i-1})\right) \leq$$

$$\leq \Phi\left(\mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)}(\mu_{i-1}), \mu_{i-1}, \mu_{i-1}\right)\right) \leq \Phi^i\left(\mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)}(\mu_0), \mu_0, \mu_0\right)\right). \tag{6.7}$$

Na osnovu (6.6) važi

$$\lim_{i\to\infty} f^{n(\mu^*)}(\mu_i) = f^{n(\mu^*)}(\mu^*)$$

a iz (6.7)

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)}(\mu_i), \mu_i, \mu_i\right) = \mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)}(\mu^*), \mu^*, \mu^*\right) = 0.$$

Odatle je $f^{n(\mu^*)}(\mu^*) = \mu^*$.

Da bi pokazali da je μ^* jedinstvena nepokretna tačka za $f^{n(\mu^*)}$ u $\overline{\mathcal{O}(f;\mu_0)}$, pretpostavimo suprotno, da postoji još jedna tačka $x^{**} \in \overline{\mathcal{O}(f;\mu_0)}$ sa istom osobinom. Tada

$$\mathcal{G}\left(x^{**}, \mu^*, \mu^*\right) = \mathcal{G}\left(f^{n(\mu^*)}x^{**}, f^{n(\mu^*)}\mu^*, f^{n(\mu^*)}\mu^*\right) \leq \Phi(\mathcal{G}\left(x^{**}, \mu^*, \mu^*\right),$$

odnosno $x^{**} = \mu^*$. Dalje, ako je $f(\overline{\mathcal{O}(f;\mu_0)}) \subseteq \overline{\mathcal{O}(f;\mu_0)}$, tada $f\mu^* = f(f^{n(\mu^*)}\mu^*) = f^{n(\mu^*)}(f\mu^*)$ implicira $f\mu^* = \mu^*$.

6.2 Subfiksna tačka za generalizovanu kontraktivnu familiju fazi preslikavanja

Definicija 6.2.1 *$\mu^* \in \mathcal{F}$ je subfiksna tačka preslikavanja $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ akko $\mu^* \subseteq f(\mu^*)$.*

Propozicija 6.2.1 *[83] Ako $\mu_1, \mu_2, \nu_2 \in \mathcal{F}$ i $\mu_1 \leq \mu_2$, tada postoji $\nu_1 \in \mathcal{F}$ tako da je $\mathcal{G}(\mu_1, \nu_1, \nu_1) \leq \mathcal{G}(\mu_2, \nu_2, \nu_2)$.*

Propozicija 6.2.2 *[83] Ako $\mu, \nu, \eta \in \mathcal{F}$ i $\mu \subseteq \nu$, tada*

(i) $\mathcal{L}(\mu, \eta, \eta) \leq \mathcal{L}(\nu, \eta, \eta)$,

(ii) $\mathcal{L}(\eta, \nu, \nu) \leq \mathcal{L}(\eta, \mu, \mu)$,

(iii) $\mathcal{L}(\mu, \nu, \nu) = 0 \Leftrightarrow \mu \subseteq \nu$.

U naredne dve teoreme razmatramo egzistenciju fazi skupa μ^* koji predstavlja zajedničku subfiksnu tačku za familiju samopreslikavanja $\{f_i\}$, odnosno $\mu^* \subseteq f_i(\mu^*)$ za sve $i \in \mathbb{N}$.

Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka je $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ izveden fazi G-metrički prostor. Dalje, neka je za sve $\mu, \nu \in \mathcal{F}$ i sve $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$

$$\mathcal{G}\left(f_i(\nu), f_j(\mu), f_j(\mu)\right) \leq \Phi(\max\{(\mathcal{G}\left(\nu, \mu, \mu\right), \mathcal{L}\left(\nu, f_i(\nu), f_i(\nu)\right),$$

$$\mathcal{L}\left(\mu, f_j(\mu), f_j(\mu)\right)), \mathcal{L}\left(\nu, f_j(\mu), f_j(\mu)\right), \mathcal{L}\left(\mu, f_i(\nu), f_i(\nu)\}\right)), \tag{6.8}$$

gde je $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Ako je μ_0 proizvoljan elemenat iz $\mathcal{F}$ i neka je $\mu_1 \in \mathcal{F}$ izabrano tako da je $\mu_1 \subseteq f_1(\mu_0)$, tada na osnovu Propozicije 6.2.1, postoji $\mu_2 \subseteq f_2(\mu_1)$, takvo da

$$\mathcal{G}(\mu_1, \mu_2, \mu_2) \leq \mathcal{G}\left(f_1(\mu_0), f_2(\mu_1), f_2(\mu_1)\right),$$

Po istom principu formiramo niz $\{\mu_i\}$ tako da

$$\mu_{i+1} \subseteq f_{i+1}(\mu_i) \text{ za sve } i \in \mathbb{N}, \tag{6.9}$$

i

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \leq \mathcal{G}\left(f_i(\mu_{i-1}), f_{i+1}(\mu_i), f_{i+1}(\mu_i)\right). \tag{6.10}$$

Lema 6.2.1 *[75] Ako preslikavanje Φ u (6.8) zadovoljava uslov (ϕ_5) zajedno sa uslovima (ϕ_2) ili (ϕ_3) ili (ϕ_4), niz $\{\mu_i\}$ definisan u (6.9) je Košijev niz.*

Dokaz. Iz (6.8), za neko $i, j \in \mathbb{N}$, imamo

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j) \leq \mathcal{G}(f_i(\mu_{i-1}), f_j(\mu_{j-1}), f_j(\mu_{j-1})) \leq$$

$$\Phi(\max\{\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu_{j-1}, \mu_{j-1}), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})), \mathcal{L}(g(\mu_{j-1}), f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})),$$
$$\mathcal{L}(\mu_{j-1}, f_j(\mu_{j-1}), f_j(\mu_{j-1})), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_j(\mu_{j-1}), f_j(\mu_{j-1}))\}) \leq$$
$$\Phi(\max\{\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu_{j-1}, \mu_{j-1}), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})), \mathcal{L}(g(\mu_{j-1}), f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})),$$
$$\mathcal{L}(\mu_{j-1}, f_j(\mu_{j-1}), f_j(\mu_{j-1})), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_j(\mu_{j-1}), f_j(\mu_{j-1}))\}) \leq$$
$$\Phi(\max\{\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu_{j-1}, \mu_{j-1}), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i), \mathcal{L}(\mu_{j-1}, \mu_i, \mu_i),$$
$$\mathcal{L}(\mu_{j-1}, \mu_j, \mu_j), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, \mu_j, \mu_j)\}) \leq$$

$$\Phi(\max\{\mathcal{G}(\mu_{i-1},\mu_{j-1},\mu_{j-1}),\mathcal{G}(\mu_{i-1},\mu_i,\mu_i),\mathcal{G}(\mu_{j-1},\mu_i,\mu_i),$$

$$\mathcal{G}(\mu_{j-1},\mu_j,\mu_j),\mathcal{G}(\mu_{i-1},\mu_j,\mu_j)\}). \tag{6.11}$$

Ako posmatramo relaciju (6.11) za različite vrednosti $k \leq i, j \leq n$, dobijamo

$$\sup_{k\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,u\mu_j)\} \leq \Phi(\sup_{k-1\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\}). \tag{6.12}$$

za sve $k, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq k < n$. Znajući da je

$$\sup_{1\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\} \leq$$

$$\max\{\mathcal{G}(\mu_1,\mu_2,\mu_2),\mathcal{G}(\mu_2,\mu_1,\mu_1)\} + \sup_{2\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\}, \tag{6.13}$$

i primenom (6.12) za $k = 2$, dobijamo

$$\sup_{1\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\} \leq$$

$$\max\{\mathcal{G}(\mu_1,\mu_2,\mu_2),\mathcal{G}(\mu_2,\mu_1,\mu_1)\} + \Phi(\sup_{1\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\}). \tag{6.14}$$

Stavljajući da je $x = \max\{\mathcal{G}(\mu_1,\mu_2,\mu_2),\mathcal{G}(\mu_2,\mu_1,\mu_1)\}$, i primenjujući osobinu (ϕ_5) u (6.14), sledi da postoji $y(x) > 0$ tako da

$$\sup_{1\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\} \leq y(x).$$

Uzimajući da je $k = 2$ u (6.12), i ponovo koristeći poslednju relaciju, dobijamo

$$\sup_{2\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\} \leq \Phi(y(x)).$$

Nastavljajući ovaj proces, dobijamo

$$\sup_{k\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\} \leq \Phi^{k-1}(y(x))$$

gde je $k, n \in \mathbb{N}$, $2 \leq k < n$. Puštajući da $k \to \infty$ i koristeći osobine funkcije Φ, pokazali smo da je $\{\mu_i\}$ Košijev niz, pa je

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{k\leq i,j\leq n}\{\mathcal{G}(\mu_i,\mu_j,\mu_j)\} \leq \lim_{k\to\infty}\Phi^{k-1}(y(x)) = 0.$$

Primenom Leme 6.1.1 (ii), osobina (ϕ_3) može biti zamenjena sa (ϕ_2) ili (ϕ_4).

Lema 6.2.2 *[75] Ako Φ u (6.8) zadovoljava uslov (ϕ_6) zajedno sa uslovima (ϕ_2) ili (ϕ_3) ili (ϕ_4), niz $\{\mu_i\}$ definisan u (6.9) je Košijev niz.*

Dokaz. Koristeći osobinu funkcije Φ da zadovoljava uslov (ϕ_6) zajedno sa (ϕ_4), kontradikcijom smo dokazali da

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le i,j\le n} \{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)\} = \sup_{1\le i,j} \{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)\} < \infty. \tag{6.15}$$

Pretpostavka da (6.15) ne važi, implicira da

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le i,j\le n} \{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)\} = \infty.$$

Sa druge strane, iz (ϕ_6) i (6.14) dobijamo

$$\begin{aligned}\infty = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{1\le i,j\le n} \{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)\} - \phi(\sup_{1\le i,j\le n} \{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)\}) \right) \\ \le \max\{\mathcal{G}(\mu_1, \mu_2, \mu_2), \mathcal{G}(\mu_2, \mu_1, \mu_1)\},\end{aligned}$$

što je kontradikcija, pa sledi da je (6.15) tačno. Definišimo opadajući niz $\{x_k\} \subset (0, \infty)$ sa

$$x_k = \sup_{k\le i,j} \{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)\}$$

i primenom (6.11) sledi

$$x_k \le \Phi(x_{k-1}) \le \cdots \le \Phi^{k-1}(x_1).$$

Puštajući da $k \to \infty$, dokazujemo da je

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{k\le i,j} \{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)\} = 0.$$

Dakle, $\{\mu_i\}$ je Košijev niz. Primenom Leme 6.1.1 (ii), osobina (ϕ_4) može biti zamenjena osobinom (ϕ_2) ili (ϕ_3). □

Teorema 6.2.1 *[75] Ako su sve pretpostavke iz Leme 6.2.1 ili iz Leme 6.2.2 zadovoljene, tada postoji $\nu^* \in \mathcal{F}$ tako da $\nu^* \subseteq f_i(\nu^*)$ za svako $i \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. U Lemi 6.2.1 i Lemi 6.2.2 je dokazano da je $\{\mu_i\}$ Košijev niz i zbog kompletnosti od $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, važi da je $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i = \mu^* \in \mathcal{F}$. Da bi dokazali da $\mu^* \subseteq f_j(\mu^*)$, nastavljamo po sledećem postupku.

$$\mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}(\mu^*, \mu_i, \mu_i)) + \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}(\mu_i, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) =$$

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{G}(f_i(\mu_{i-1}), f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq$$

$$\lim_{i\to\infty} \Phi\left(\max\{\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu^*, \mu^*), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})), \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*))\right.,$$

$$\left.\mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*))\mathcal{L}(\mu^*, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1}))\}\right) \leq$$

$$\lim_{i\to\infty} \Phi\left(\max\{(\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu^*, \mu^*), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i), \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*))\right.,$$

$$\left.\mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)), \mathcal{L}(\mu^*, \mu_i, \mu_i))\}\right) \leq$$

$$\Phi\left(\max\{(\mathcal{G}(\mu^*, \mu^*, \mu^*), \mathcal{L}(\mu^*, \mu^*, \mu^*), \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)),\right.$$

$$\left.\mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)), \mathcal{L}(\mu^*, \mu^*, \mu^*))\}\right) =$$

$$\Phi(\max\{0, 0, \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)), 0 + \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)), 0\}) \leq$$

$$\leq \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)).$$

Odatle, $\mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) = 0 \;\Rightarrow\; \mu^* \subseteq f_j(\mu^*)$, za sve $j \in \mathbb{N}$, što smo i trebali dokazati.

Neka je $\varphi : [0, \infty)^5 \to [0, \infty)$ neopadajuća funkcija neprekidna sa desne strane u odnosu na svih pet promenljivih tako da

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \varphi^k(t, t, t, 2t, 0) < \infty,$$

za svako $t > 0$. Očigledno, tada za sve $t > 0$ važi

$$\lim_{k\to\infty} \varphi^k(t, t, t, 2t, 0) = 0, \quad \varphi(t, t, t, 2t, 0) < t, \quad \text{i} \quad \varphi(0, 0, 0, 0, 0) = 0.$$

Dalje, neka je (X, d) kompletan metrički prostor, a neka je $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ izveden fazi G-metrički prostor i $\{f_i\}$ familija samopreslikavanja koja zadovoljava sledeću nejednakost

$$\mathcal{G}\left(f_i(\nu), f_j(\mu), f_j(\mu)\right) \leq \varphi\left(\mathcal{G}\left(\nu, \mu, \mu\right), \mathcal{L}\left(\nu, f_i(\nu), f_i(\nu)\right),\right.$$

$$\mathcal{L}\left(\mu, f_j(\mu), f_j(\mu)\right), \mathcal{L}\left(\nu, f_j(\mu), f_j(\mu)\right), \mathcal{L}\left(\mu, f_i(\nu), f_i(\nu)\right)\right), \tag{6.16}$$

za sve $\mu, \nu \in \mathcal{F}$ i sve $i, j \in \mathbb{N}$.

Koristeći iste argumente kao u (6.9), formira se niz $\{\mu_i\}$,

$$\mu_{i+1} \subseteq f_{i+1}(\mu_i) \text{ za sve } i \in \mathbb{N}, \tag{6.17}$$

sa osobinom

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \leq \mathcal{G}\left(f_i(\mu_{i-1}), f_{i+1}(\mu_i), f_{i+1}(\mu_i)\right). \tag{6.18}$$

Lema 6.2.3 *[75] Niz $\{\mu_i\}$ definisan u (6.17) je Košijev niz.*

Dokaz. Da bi dokazali da je niz $\{\mu_i\}$ Košijev, posmatraćemo niz $\{\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1})\}$. Primenom relacija (6.16), (6.18) i implikacije

$$\mu_i \subseteq f_i(\mu_{i-1}) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\mu_i, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})\right) = 0,$$

dobijamo da je

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \leq \mathcal{G}\left(f_i(\mu_{i-1}), f_{i+1}(\mu_i), f_{i+1}(\mu_i)\right) \leq$$

$$\varphi\left(\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right), \mathcal{L}\left(\mu_{i-1}, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})\right), \mathcal{L}\left(\mu_i, f_{i+1}(\mu_i), f_{i+1}(\mu_i)\right)\right),$$
$$\mathcal{L}\left(\mu_{i-1}, f_{i+1}(\mu_i), f_{i+1}(\mu_i)\right), \mathcal{L}\left(\mu_i, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})\right) \leq$$
$$\varphi\left(\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right), \mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right)\right), \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right)\right),$$
$$\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right), 0) \leq$$
$$\varphi\left(\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i), \mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i), \mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right),$$
$$\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right), 0).$$

Kako je $\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right) \leq \mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right) + \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right)$, važi sledeća relacija

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \leq \varphi\left(\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right),\right.$$
$$\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right), \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right), \mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right)) + \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right), 0).$$

Pretpostavka da $\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \nleq \mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right)$, je ekvivalentna sa

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) > \mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right),$$

a to vodi do nejednakosti

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \leq \varphi(\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1})),$$

$$\mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right), \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right), 2\mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right), 0) < \mathcal{G}\left(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}\right)),$$

što je je kontradikcija. U poslednjoj transformaciji primenili smo osobinu da je funkcija φ neopadajuća i $\varphi(t,t,t,2t,0) < t$, $t \in \mathbb{R}^+$. Odatle sledi da je $\mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) \leq \mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right)$. Ako uvedemo oznaku $\mathcal{G}\left(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i\right) = t_i$, dobijamo

$$t_{i+1} \leq \varphi(t_i, t_i, t_i, 2t_i, 0) < t_i \leq \cdots \leq \varphi^i(t_1, t_1, t_1, 2t_1, 0). \tag{6.19}$$

Ako je $\mu_0 = \mu_1$, tada je $t_1 = \mathcal{G}\left(\mu_0, \mu_1, \mu_1\right) = 0$. Kako je $\varphi(0,0,0,0,0) = 0$, iz nejednakosti (6.19) dobijamo $(\mu_0 = \mu_1) \Rightarrow (\mu_1 = \mu_2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow (\mu_{i-1} = \mu_i) \Rightarrow \cdots$. Dalje, $\mu_0 = \mu_i \subseteq f_i(\mu_{i-1}) = f_i(\mu_0)$, što znači da je $\mu^* = \mu_0$ i dokaz je kompletan.

Ako je $\mu_0 \neq \mu_1$, dokazaćemo da je $\lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j) = 0$ kada je $i < j$.

$$\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j) \leq \mathcal{G}(\mu_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+1}) + \mathcal{G}(\mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \mu_{i+2}) + \cdots + \mathcal{G}(\mu_{j-1}, \mu_j, \mu_j) =$$

$$= \sum_{k=i}^{j-1} \mathcal{G}(\mu_k, \mu_{k+1}, \mu_{k+1}) = \sum_{k=i}^{j-1} t_{k+1} \leq \sum_{k=i}^{j-1} \varphi^k(t_1, t_1, t_1, 2t_1, 0),$$

i kako je $t_1 = \mathcal{G}(\mu_0, \mu_1, \mu_1) > 0$, $\lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j) = 0$. Takođe, $\mathcal{G}(\mu_j, \mu_i, \mu_i) \leq 2\mathcal{G}(\mu_i, \mu_j, \mu_j)) \to 0$. Dakle, dokazali smo da je niz $\{\mu_i\}$ Košijev i kao posledicu da postoji $\mu^* \in \mathcal{F}$ tako da $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i = \mu^*$, što je $\lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{G}(\mu_i, \mu^*, \mu^*) = \lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{G}(\mu^*, \mu_i, \mu_i) = 0$.

Teorema 6.2.2 *[75] Ako su sve pretpostavke iz prethodne leme zadovoljene, tada postoji $\nu^* \in \mathcal{F}$ takav da je $\nu^* \subseteq f_i(\nu^*)$ za sve $i \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je za neko $j \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) > 0$. Tada

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}(\mu^*, \mu_i, \mu_i)) + \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}(\mu_i, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq \\
\leq\ & \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}(f_i(\mu_{i-1}), f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq \\
\leq\ & \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}(f_i(\mu_{i-1}), f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq \\
\leq\ & \lim_{i\to\infty} \varphi\left(\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu^*, \mu^*), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1})), \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)\right),
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*))\mathcal{L}(\mu^*, f_i(\mu_{i-1}), f_i(\mu_{i-1}))) \leq$$
$$\leq \lim_{i\to\infty} \varphi\left((\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu^*, \mu^*), \mathcal{L}(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i), \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*))\right),$$

$$\mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_j(\mu), f_j(\mu^*)), \mathcal{L}(\mu^*, \mu_i, \mu_i))) \,. \tag{6.20}$$

Ako stavimo da je $a = \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) > 0$, kako je $\lim\limits_{i\to\infty} \mu_i = \mu^*$, za svako $\varepsilon \in (0, a)$ postoji $i_0 = \max\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, pri čemu je

- $\mathcal{G}(\mu_{i-1}, \mu^*, \mu^*) < \varepsilon < a$ za sve $i > i_1$,
- $\mathcal{L}(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i) < \varepsilon < a$ za sve $i > i_2$,
- $\mathcal{L}(\mu_{i-1}, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq \mathcal{L}(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_i) + \mathcal{L}(\mu_i, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) < \frac{\varepsilon}{2} + a + \frac{\varepsilon}{2} < 2a$, za sve $i > i_3$,
- $\mathcal{L}(\mu^*, \mu_i, \mu_i) < \varepsilon$ za sve $i > i_4$.

Sada, relacija (6.20) postaje

$$\mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) \leq \varphi(\varepsilon, \varepsilon, a, \varepsilon + a, \varepsilon) \leq \varphi(a, a, a, 2a, \varepsilon)$$

i puštajući da $\varepsilon \to 0$, dobijamo da je $a \leq \varphi(a, a, a, 2a, 0) < a$, gde je $a = \mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*))$. Odatle, $\mathcal{L}(\mu^*, f_j(\mu^*), f_j(\mu^*)) = 0 \;\Rightarrow\; \mu^* \subseteq f_j(\mu^*)$, za svako $j \in \mathbb{N}$, što je i trebalo dokazati .

Bibliografija

[1] Ahmed, M.A, Zeyada, F.M.: Some convergence theorems of a sequence in complete metric spaces and its applications, Fixed Point Theory and Applications, 2010, Article ID 647085 .

[2] Ali, M. U., Kamram, T, Karapinar, E.: An approach to existence of fixed points of generalized contractive multivalued mappings of integral type via admissible mapping, Abstract and Applied Analysis, 2014, Article ID 141489

[3] Ali, M. U., Kamran, T.: On (α^*, ψ)-contractive multi-valued mappings, Fixed Point Theory and Applications, 2013:137

[4] Alsulami, H. H., Karapinar, E, O'Regan, D, Shahi, P: Fixed points of generalized contractive mappings of integral type, Fixed Point Theory and Applications, 2014:213

[5] Altun, I, Turkoglu, D: Some fixed point theorems for mappings satisfying contractive condition of integral type on d-complete topological spaces, Fascisculi Mathematici, 2009:42, 5–15

[6] Angrisani, M, Clavelli, M: Synthetic approaches to problems of fixed points in metric space, Annali di Matematica Pura ed Applicata, (IV), 1996:170, 1-12,

[7] Babu G.V.R, Alemayehu, G.N.: Existence of common fixed points via modified Mann iteration in convex metric spaces and an invariant approximation result, Tamkang Journal of Mathematics, 2010:41(3), 335–347,

[8] Banach, S.: Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur application aux quations intgrales, Fundamenta Mathematicae, 1922:3, 133-181

[9] Branciari, A.: A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2002:(9), 531–536

[10] Carić B., Fixed point theorem in G-metric spaces, Conference Proceedings of The Second Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications Novi Sad, June 23-24th 2017, 46-50

[11] Chatterjee, S.K.: Fixed point theorems, Comptes rendus de l'Acadmie bulgare des Sciences, 1972:25, 727–730

[12] Chauhan S., Karapinar E., Some integral type common fixed point theorems satisfying contractive conditions. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin 2014:21(4), 593–612

[13] Ćirić Lj., A generalization of Banach's contraction principle, Proceedings of the American Mathematical Society, 1974:45(2)

[14] Dhage, B. C: Generalized metric spaces and mapping with fixed points, Bulletin of Calcuta Mathetatical Sciences, 1992:84, 329–336.

[15] Došenović, T, Rakić, D, Carić, B, Radenović, S, Multivalued generalizations of fixed point results in fuzzy metric spaces, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2016:21(2), 211-222

[16] Došenović, T, Takači, A, Rakić, D, Brdar, M.: A fixed point theorem for a special class of probabilistic contraction, Fixed Point Theory and Applications, 2011:74

[17] Došenović T., Carić B., Fiksna tačka za kontrakciju integralnog tipa primenom altering distance funkcije, Conference Proceedings of The First Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications Novi Sad, March 4-6th 2016.,104-108

[18] W.S. Du, The existence of cone critical point and common fixed point with applications, Journal of Applied Mathematics, 2011:2011, Article ID 985797,

[19] Dung, N. V: Remarks on quasi-metric spaces, Miskolc Mathematical Notes, 2014:15(2), 401–422.

[20] Edelstein, M.: On fixed and periodic points under contractive mappings, Journal of London Mathematical Society, 1962:1-37(1), 74–79

[21] Gahler, S: 2−metrische raume und ihre topologische struktur, Mathematische Nachrichten, 1963:26, 115–148.

[22] Gahler, S: Zur geometric 2−metrische raume, Revue Roumaine de Mathéematiques Pures et Appliquées", 1966):40, 664–669.

[23] Gajić, Lj.; On convexity in convex metric spaces with applications, Journal of Natural and Physical Sciences, 1989:3(1-2), 39–48.

[24] Gajić, Lj.: On measure of non-compactness on convex metric spaces, Filomat, 2005:19, 1–5,

[25] Gajić, Lj, Rakočević, V.: Quasicontraction nonself mapping on convex metric spaces and common fixed point therems, Fixed Point Theory and Applications, 2005:3, 365–375,

[26] Gajić, Lj, Rakocević, V.: Pair of non-self-mappings and common fixed points, Applied Mathematics and Computation, 2007:187(2) 999 –1006

[27] Gajić, Lj, Stojaković, M, Carić, B: On Angrisani and Clavelli synthetic approaches to problems of fixed points in convex metric space, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014:2014, Article ID 406759.

[28] George, A, Veeramani, P, On some results in fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 1994:64, 395–399.

[29] George, A, Veeramani, P: On some results of analysis for fuzzy metric spaces, Fuzzy sets and Systems 1997:90, 365–368.

[30] Goeble, K, Kirk, W.A.: Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[31] Gregori, V, Morillas, S, Sapena, A.: On a class of completable fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 2010:161(16), 2193-2205

[32] Hadžić, O.: Osnovi teorije nepokretne tačke, Institut za matematiku, Novi Sad, 1978.

[33] Hadžić, O.: A fixed point theorem in Menger spaces, Publications de l'Institut Mathmatique,1979:20, 107–112.

[34] Hadžić, O.: Fixed point theorems for multivalued mappings in probabilistic metric spaces, Matematički vesnik, 1979:3:(16)(31), 125–133

[35] Hadžić O., Some properties of measures of non-compactness in paranormed spaces, Proceedings of American Mathematical Society, 1988:102, 843-849.

[36] Hadžić, O., On coincidence point theorem for multivalued mappings in probabilistic metric spaces, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta,Univerzitet u Novom Sadu, 1995:25(1), 1–7

[37] Hadžić, O, Pap, E., Fixed point theory in probabilistic metric spaces, Kluwer Academic Publisher, 2001.

[38] Heilpern, S., Fuzzy mappings and fixed point theorem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981:83(2), 566–569

[39] Ilić D., Rakočević V., Kontraktivna preslikavanja na metričkim prostorima i uopštenja, Univerzitet u Nišu, Prirodno matematički fakultet, 2014.

[40] Ješić, S. N., Babačev, N.A., Nikolić, R. M.: A common fixed point theorem in fuzzy metric spaces with nonlinear contractive type condition defined using -function, Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 273872

[41] Jleli, M, Samet, B: Remarks on G-metric spaces and fixed point theorems, Fixed Point Theory and Applications, 2012:201.

[42] Kaewcharoen, A, Kaewkhao, A: Common fixed points for single-valued and multi-valued mappings in $G-$metric spaces, International Journal of Mathematical Analysis, 2011:5(36), 17751790

[43] Kaleva, O, Seikkala, S: On fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 1984:12, 215-229

[44] Kannan, R.: Some results on fixed points, Bulletin of Calcuta Mathetatical Sciences, 1968:60, 71–76, 1968.

[45] Kamran T., Common fixed point theorems for fuzzy mapings, Chaos,Solitions and Fractals, 2008:38(5), 1378–1382.

[46] Karapinar E., Agarval R., Further fixed point results on G-metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2013:154.

[47] Karapinar E., Shahi P., Tas K., Generalized $\alpha - \psi -$contractive type mappings of integral type and related fixed point theorems, Journal of Inequalities and Applications, 2014:160

[48] Khan, M.S, Swaleh, M, Sessa, S: Fixed point theorems by altering distances between the points, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1984:30, 1-9

[49] Khan, M. S, Pathak, H. K, George, R.: Compatible mappings of type (A-1) and type (A-2) and common fixed points in fuzzy metric spaces, International Mathematical Forum, 2007:2(11), 515–524,

[50] Kirk, W. A, Metric Fixed Point Theory: Nonexpansive Mappings, Proceedings of the Internetional Workshop in Analysis and its Applications, Kupari, Yugoslavia, 1990.

[51] Kirk, W. A, Saliga, L. M: Some results on existence and approximation in metric fixed point theory, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000:113(1-2), 141-152

[52] Kramosil, I, Michalek, J: Fuzzy metric and statistical metric spaces, Kybernetika, 1975:11(5), 336–344.

[53] Liu, Y, Li, Z.: Coincidence point theorems in probabilistic and fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 2007:158, 58–70

[54] Liu Z, Li, J, Kang, S. M.: Fixed point theorems of contractive mappings of integral type, Fixed Point Theory and Applications, 2013:300

[55] Manro S., Kumar S., Bhatia S.S., Tas K., Common fixed point theorems in modified intuitionistic fuzzy metric spaces, Journal of Applied Mathematics, 2013:2013, Article ID 189321

[56] Menger, K: Statistical metrics, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1942:28(12), 535–537

[57] Moosaei, M.: Common fixed points for some generalized contraction pairs in convex metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2014:98

[58] Mustafa Z., Sims B.: Some remarks concerning D-metric spaces, Proceedings of the International Conferences on Fixed Point Theory and Applications, Valencia (Spain), July 2003, 189–198.

[59] Mustafa Z., Sims B., A new approach to generalized metric spaces, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2006:7(2), 289–297

[60] Mustafa Z., Obiedat H., Awawdeh H., Some fixed point theorem for mappings on complete G-metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2008, article ID 189870

[61] Nadler S.B., Multivalued contraction mappings, Pacific Journal of Mathematics,1969:30, 475–478

[62] Nashine H.K., Application of fixed point theorem to best simultaneous approximation in convex metric spaces, Kragujevac Journal of Mathematics, 2010:33, 107–118

[63] Nemytzki V. V., The fixed point method in analysis, Uspekhi Mahematicheskikh. Nauk, 1936:1, 141–174

[64] Phuengrattana W., Suantai S., Common fixed point of an infinite family of nonexpansive mappings in uniformly convex metric spaces, Mathematical and Computer Modelling, 2013:57, 306–310

[65] D. Qiu L., Shu J., Guan J., Common fixed point theorems for fuzzy mappings under Φ-condition, Chaos,Solitons and Fractals, 2009:41(1), 360–367

[66] Rao K. P. R., Rao K. P. K., A triple fixed point theorem for multimap in a Hausdorff fuzzy metric space, Journal of Mathematics, 2013:2013, Article ID 812153

[67] Rhoades B. E., A comparison of various definitions of contractive mappings, Transaction of the American Mathematical Society, 1977:226, 257–290

[68] Rhoades B.E., Two fixed-point theorems for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003:2003(63), 4007-4013

[69] Samet B., Vetro C., Vetro F., Remarks on G-Metric spaces, International Journal of Analysis, 2013:2013), Article ID 917158

[70] Schweizer B., Sklar, A.: Espaces m*é*triques al*é*atoires, Comptes Rendus de l'Acadmie des Sciences Paris, 247 1958:247, 2092–2094.

[71] Sehgal, V.M, Bharucha-Reid, A.T.: Fixed point of contractive mappings on probabilistic metric spaces, Math. Systems Theory, 1972:6, 97–100

[72] Shen Y., Qiu D., Chen W., Fixed point theorems in fuzzy metric spaces, Applied Mathematics Letters, 2012:25(2), 138-141

[73] Shen Y., Qiu D., Chen W., On convergence of fixed points in fuzzy metric spaces, Abstract and Applied Analysis, 2013:2013, Article ID 135202

[74] Stojaković, M, Gajić, Carić, B: Fixed point and subfixed point for fuzzy mappings in generalized metric fuzzy spaces, Journal of Applied Mathematics, 2013:2013), Article ID 254259.

[75] Stojaković, M, Gajić, Lj, Došenović, T, Carić, B: Fixed point of multivalued integral type of contraction mappings, Fixed Point Theory and Applications, 2015:146.

[76] M. Stojaković, Lj. Gajić, T. Došenović, B. Carić, Comment on Feng-Liu Fixed Point Theorem for Multi-Valued Caristi Type Mappings, Conference Proceedings of The First Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications Novi Sad, March 4-6th 2016., 19-23

[77] Takahashi, W: A convexity in metric space and nonexpansive mappings, Kodai Mathematical Seminar Reports, 1970:22, 142-149

[78] Tallman L.A., Fixed points for condensing multifunctions in metric space with convex structure, Kodai Mathematical Seminar Reports, 1977:29, 62– 70

[79] Turkoglu D., Altun I., A fixed point theorem for multi-valued mappings and its applications to integral inclusions, Applied Mathematics Letters, 2007:20 563-570

[80] Vijayaraju P., Rhoades B.E., Mohanraj R., A fixed point theorem for a pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005:15, 2359–2364

[81] Zadeh L. A., Fuzzy sets, Information and Control, 1965:8(3), 338–353

[82] Zamfirescu T., Fixed point theorems in metric spaces, Archiv der Mathematik, 1972:23, 292–298

[83] Zhu L., Zhu C. X., Chen C. F., Common fixed point theorems for fuzzy mappings in $G-$metric spaces, Fixed Point Theory and Aplications, 2012:2012, Article ID 159

[84] Zhu J., Wang Y., Kang S. M., Common fixed point theorems of new contractive conditions in fuzzy metric spaces, Journal of Applied Mathematics Volume 2013:2013, Article ID 145190,