



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA  
INŽENJERSTVO ZAŠTITE ŽIVOTNE SREDINE



**DRAGANA CVETKOVIĆ**

# **NOVI INDIKATORI STABILNOSTI ZA EMPIRIJSKE TROFIČKE MREŽE**

**DOKTORSKA DISERTACIJA**

Novi Sad, 2017. godine



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, <b>РБР:</b>												
Идентификациони број, <b>ИБР:</b>												
Тип документације, <b>ТД:</b>	Монографска документација											
Тип записа, <b>ТЗ:</b>	Текстуални штампани материјал											
Врста рада, <b>ВР:</b>	Докторска теза											
Аутор, <b>АУ:</b>	Драгана Цветковић											
Ментор, <b>МН:</b>	Проф. др Милан Мартинов, Проф. др Владимир Костић											
Наслов рада, <b>НР:</b>	Нови индикатори стабилности за емпиријске трофичке мреже											
Језик публикације, <b>ЈП:</b>	српски											
Језик извода, <b>ЈИ:</b>	српски / енглески											
Земља публикавања, <b>ЗП:</b>	Србија											
Уже географско подручје, <b>УГП:</b>	Војводина											
Година, <b>ГО:</b>	2017.											
Издавач, <b>ИЗ:</b>	Ауторски репринт											
Место и адреса, <b>МА:</b>	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6											
Физички опис рада, <b>ФО:</b> (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	6/173/85/37/211/0/0											
Научна област, <b>НО:</b>	Инжењерство заштите животне средине и заштите на раду											
Научна дисциплина, <b>НД:</b>	Моделирање биосистема											
Предметна одредница/Кључне речи, <b>ПО:</b>	Примена линеарне алгебре, псеудоспектар, локализација псеудоспектра, динамички системи, стабилност, робусна стабилност											
<b>УДК</b>												
Чува се, <b>ЧУ:</b>	У библиотеци Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад											
Важна напомена, <b>ВН:</b>												
Извод, <b>ИЗ:</b>	Ова докторска дисертација уводи нов приступ испитивању стабилности динамичких система, коришћењем теорије псеудоспектра. На тај начин се постојећи појам стабилности профињује појмом робусне стабилности, који много адекватније описује реалну еколошку стабилност. Развијен је нов математички алат за израчунавање индикатора стабилности, који је затим илустрован на примеру два екосистема тла, са по четири узорка, у четири различита стадијума развоја.											
Датум прихватања теме, <b>ДП:</b>	23.06.2016.											
Датум одбране, <b>ДО:</b>												
Чланови комисије, <b>КО:</b>	<table border="1"><tr><td>Председник:</td><td>Проф. др Теодор Атанацковић, академик САНУ, емеритус</td><td rowspan="5">Потпис ментора</td></tr><tr><td>Члан:</td><td>Проф. др Божо Далмација, редовни професор</td></tr><tr><td>Члан:</td><td>др Марија Додиг, виши научни сарадник</td></tr><tr><td>Члан, ментор:</td><td>Проф. др Милан Мартинов, редовни професор</td></tr><tr><td>Члан, ментор:</td><td>Проф. др Владимир Костић, ванредни професор</td></tr></table>	Председник:	Проф. др Теодор Атанацковић, академик САНУ, емеритус	Потпис ментора	Члан:	Проф. др Божо Далмација, редовни професор	Члан:	др Марија Додиг, виши научни сарадник	Члан, ментор:	Проф. др Милан Мартинов, редовни професор	Члан, ментор:	Проф. др Владимир Костић, ванредни професор
Председник:	Проф. др Теодор Атанацковић, академик САНУ, емеритус	Потпис ментора										
Члан:	Проф. др Божо Далмација, редовни професор											
Члан:	др Марија Додиг, виши научни сарадник											
Члан, ментор:	Проф. др Милан Мартинов, редовни професор											
Члан, ментор:	Проф. др Владимир Костић, ванредни професор											



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, <b>ANO</b> :	
Identification number, <b>INO</b> :	
Document type, <b>DT</b> :	Monograph type
Type of record, <b>TR</b> :	Printed text
Contents code, <b>CC</b> :	PhD thesis
Author, <b>AU</b> :	Dragana Cvetković
Mentor, <b>MN</b> :	Professor Milan Martinov, PhD, Professor Vladimir Kostić, PhD
Title, <b>TI</b> :	New stability indicators for the empirical food webs
Language of text, <b>LT</b> :	Serbian
Language of abstract, <b>LA</b> :	Serbian / English
Country of publication, <b>CP</b> :	Serbia
Locality of publication, <b>LP</b> :	Vojvodina
Publication year, <b>PY</b> :	2017.
Publisher, <b>PB</b> :	Authors reprint
Publication place, <b>PP</b> :	Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, <b>PD</b> : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	6/173/85/37/211/0/0
Scientific field, <b>SF</b> :	Environmental Engineering and Safety at Work
Scientific discipline, <b>SD</b> :	Biosystem Modeling
Subject/Key words, <b>S/KW</b> :	Applied linear algebra, Pseudospectrum, Pseudospectra localizations, Dynamical systems, Stability, Robust stability
<b>UC</b>	
Holding data, <b>HD</b> :	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, <b>N</b> :	
Abstract, <b>AB</b> :	This doctoral dissertation establishes a novel approach to the stability analysis of dynamical systems, in terms of matrix pseudospectrum. In that manner, the existing concept of stability has undergone essential refinement so as to give birth to the concept of robust stability, which has the ability to capture the ecological stability at a more adequate level. Additionally, within the framework of the dissertation, a new mathematical tool for the stability indicators computation has been developed, which has then been used to illustrate theoretical results in form of two soil ecosystems, each of them sampled four times, all of them observed in four distinct stages of evolution.
Accepted by the Scientific Board on, <b>ASB</b> :	23.06.2016
Defended on, <b>DE</b> :	
Defended Board, <b>DB</b> :	
President:	Teodor Atanacković, PhD, Academician, Emeritus
Member:	Božo Dalmacija, PhD, Full Professor
Member:	Marija Dodig, PhD, Research Associate Professor
Member, Mentor:	Milan Martinov, PhD, Full Professor
Member, Mentor:	Vladimir Kostić, PhD, Associate Professor

Mentor's sign

# APSTRAKT

Razumevanje odnosa između kompleksnosti biosistema i njihove stabilnosti leži u osnovi, kako modeliranja sistema životne sredine, tako i razvoja održivih strategija za njihovo očuvanje i obnovu. Stoga je poznati fenomen međusobne povezanosti kompleksnosti biosistema, u smislu povezanosti funkcionalnih grupa i složenosti povratnih sprega trofičkih interakcija između njih, sa jedne strane i dinamičke nestabilnosti, kao nesposobnosti sistema da se povrati u ravnotežno stanje nakon malih ili umerenih promena u razmeni organske materije, sa druge strane, intenzivno istraživano.

Kao jedan od izuzetno uspešnih alata za tu vrstu istraživanja, kao i za mnoge druge, kao što su problem interakcije između biosistema u tlu i iznad njega, problemi vezani za mineralizaciju organske materije i odnos N : C (azot : ugljenik) u tlu, predviđanje izumiranja vrsta, osetljivost biosistema na funkcionalne promene u trofičkim odnosima, kao i mnoge druge, pokazao se mehanistički model energetske mreže ishrane, baziran na generalizovanim Lotka-Volterra jednačinama populacione dinamike, prilagođenih fenomenu kruženja organske materije u vidu azota i ugljenika kroz trofičke nivoe, počevši od detritusa, pa do predatora na vrhu lanca ishrane. Za pregled stanja u oblasti, videti Neutel et al. (2007, 2014), kao i Moore, de Ruiter (2012).

S obzirom na aktuelnost i važnost pomenute tematike, kao i korisnost navedenog modela energetske razmene unutar biosistema, tema ove doktorske disertacije direktno je u službi daljeg razvoja teorije energetske mreže ishrane, kao i razvoja praktično upotrebljivih merila koja omogućavaju opis osetljivosti biosistema, kako na kvantitativne promene nastale u kruženju organske materije, tako i funkcionalne promene u trofičkim interakcijama, usled izmene ponašanja funkcionalnih grupa, radi adaptacije na izmenjene uslove životne sredine.

Disertacija je koncipirana na sledeći način. Prvo poglavlje predstavlja uvod u modeliranje empirijskih trofičkih mreža. Drugo poglavlje govori o opštem konceptu dinamičkih sistema, sa posebnim osvrtom na Lotka-Volterra model. Treće poglavlje je pregled relevantnog matematičkog alata, pre svega u manje poznatoj oblasti

pseudospektra. U ovom poglavlju predstavljani su i originalni rezultati vezani za lokalizaciju pseudospektra i mogućnosti njene primene. Četvrto poglavlje donosi potpuno nove pouzdane indikatore stabilnosti empirijskih trofičkih mreža, koji na adekvatan način prevazilaze uočena ograničenja u postojećim pristupima. Za njihovo izračunavanje su formirani računarski algoritmi, čiji su ulazni podaci prikupljeni empirijski podaci. Konačno, u petom poglavlju su analizirane različite trofičke mreže tla na osnovu merenja na lokalitetima Schiermonnikoog, Waddensea, Netherlands i Hulshorsterzand, Veluwe, Netherlands. Disertacija se završava zaključnim razmatranjima i spiskom korišćene relevantne literature.

Shodno predmetu istraživanja, osnovne metode koje su korišćene su matematička analiza, inženjersko modeliranje, numerička algoritamska rešenja, računarske simulacije, obrada dostupnih empirijskih podataka, kao i prezentacija kvantitativnih i kvalitativnih rezultata u vidu grafikona i tabela.

Mogućnost višestrukih primena rezultata ove teze u oblasti životne sredine je i njen glavni motiv. Na prvom mestu, očekuje se značajna upotreba razvijenog metoda od strane aktivnih i istaknutih istraživača u oblasti empirijskih trofičkih mreža tla, a potom i u budućim ispitivanjima biosistema tla, sa ciljem njihovog očuvanja i razvoja.

# ABSTRACT

Understanding the relationship between the complexity of biosystems and their stability is the basis of modeling environmental systems, as well as the development of sustainable strategies for their conservation and restoration. Therefore, the well-known phenomenon of the interconnection of the complexity of biosystems in terms of correlation between functional groups and the complexity of feedback loops of trophic interactions between them, on one hand, and the dynamic instability, as well as the inability of the system to regain its balance after a small or moderate changes in the exchange of organic matter, on the other, has been intensely investigated.

As one of the most successful tools for this type of research, as well as for many others, such as the problem of interaction between the biosystems within the soil and ones above it, the problems related to the mineralization of organic matter and the ratio of N : C (nitrogen: carbon) in the soil, prediction of species extinction, the sensitivity of biosystems to functional changes in the trophic relationships, and many others, proved to be a mechanistic model of energy food webs, based on generalized Lotka-Volterra equations of population dynamics adapted to the phenomena of cycling of organic matter in the form of nitrogen and carbon through trophic levels, starting from detritus to the predators at the top of the food chains. For the review of the state of the art approaches in this field, see Neutel et al. (2007, 2014), and Moore and de Ruiter (2012).

Given the novelties and importance of the aforementioned topics, as well as the usefulness of this model of energy exchange within biosystems, the topic of this doctoral dissertation will be directly in the service of further development of the theory of energy food webs, as well as the development of practical useful criteria that allow the description of the sensitivity of biosystems upon, both, the quantitative changes that result from the cycling of organic matter, and functional changes in the trophic interactions due to changes in behavior of functional groups in order to adapt to changes environmental conditions.

The outline of the thesis is the following. An introduction to the modeling of empirical food webs has been made in the first chap-

ter. Subsequent chapter discusses the general concept of dynamical systems, with a special focus on the Lotka-Volterra model. An overview of the relevant mathematical tools has been presented in chapter three, with particular emphasis on the less-used concept of matrix pseudospectrum. This part of the thesis contains authentic and genuine results as far as the pseudospectrum localization is concerned as well as the possibilities of its implementation in practice. Chapter four provides an in-depth insight into contemporary food web stability indicators, which succeed in overcoming the limitations that the existing approaches have been struggling with. For the purpose of their computation, sophisticated algorithms have been developed with the use of collected empirical data as input arguments. Finally, the last chapter deals with the analysis of different soil food webs using the measurements on the region of Schiermonnikoog, Waddensea and Hulshorsterzand, Veluwe, both located in the Netherlands. Lastly, the dissertation is brought to a closure after some final remarks and the list of relevant bibliography.

Appropriately to the research topic, the main methods that have been applied are the mathematical analysis, engineering, modeling, numerical algorithmic solutions, computer simulation, processing the available empirical data, as well as the presentation of quantitative and qualitative results in the form of graphs and tables.

The prime motif of this thesis is the possibility of diverse applications of results presented herein. In the first place, it is well expected that the active and prominent researchers in the field of empirical soil food webs apply the methods that have been developed, and, later on, in the future studies of ground biosystems, with their preservation and development being set as the prime goals.

# Sadržaj

<b>1 Modeliranje empirijskih trofičkih mreža</b>	<b>11</b>
1.1 Pristupi proučavanju trofičkih mreža . . . . .	13
1.2 Osnovne pretpostavke . . . . .	15
1.3 Primer trofičkih mreža . . . . .	16
<b>2 Trofičke mreže kao dinamički sistemi</b>	<b>19</b>
2.1 Dinamika populacije . . . . .	19
2.1.1 Malthus-ov model rasta populacije . . . . .	20
2.2 Predator-plen modeli . . . . .	22
2.2.1 Opšti predator-plen model . . . . .	22
2.2.2 Lotka-Volterra model . . . . .	23
2.2.3 Kompeticioni Lotka-Volterra model . . . . .	27
2.3 Opšti koncept dinamičkog sistema . . . . .	29
2.3.1 Linearni TIDS . . . . .	31
2.3.2 Nelinearni TIDS . . . . .	32
2.3.3 Osobine ravnotežnih stanja . . . . .	34
2.3.3.1 Asimptotska stabilnost . . . . .	37
2.3.3.2 Vreme povratka i rezilijentnost . . . . .	38
2.3.3.3 Tranziciono ponašanje i reaktivnost . . . . .	40
<b>3 Indikatori ponašanja LTIDS</b>	<b>45</b>
3.1 Spektar . . . . .	46
3.2 Pseudospektar . . . . .	50
3.3 Matrična mera . . . . .	57
3.3.1 Geršgorinova apscisa . . . . .	57
3.3.2 Numerička apscisa . . . . .	62
3.4 LTIDS i dijagonalna dominacija . . . . .	64



3.4.1	Lokalizacije pseudospektra . . . . .	64
3.4.1.1	Slučaj maksimum norme . . . . .	66
3.4.1.2	Slučaj euklidske norme . . . . .	79
3.4.2	Robusne matrice mere . . . . .	83
3.4.2.1	Slučaj maksimum norme . . . . .	83
3.4.2.2	Slučaj euklidske norme . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Indikatori stabilnosti EFW</b>	<b>89</b>
4.1	Model empirijskih trofičkih mreža . . . . .	89
4.1.1	Jednačine protoka energije . . . . .	89
4.1.2	Community matrica . . . . .	94
4.1.3	Empirijske trofičke mreže . . . . .	95
4.2	Aktuelni indikatori stabilnosti EFW . . . . .	99
4.3	Novi indikatori stabilnosti . . . . .	108
4.3.1	Robusna asimptotska stabilnost . . . . .	110
4.3.2	Tranziciono ponašanje i robusna nereaktivnost . . . . .	115
4.3.3	Algoritmi za izračunavanje indikatora . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Testiranje stabilnosti trofičkih mreža</b>	<b>125</b>
<b>6</b>	<b>Zaključna razmatranja</b>	<b>161</b>
	<b>Literatura</b>	<b>164</b>

# Uvod

U ekološkoj literaturi, videti Neutel et al. (2007, 2014), uočeno je da postoji osetljivost matematičkog opisa stabilnosti u terminima spektra matrica, koji leži u osnovi indikatora stabilnosti razvijenih do sada i upotrebljavanih da se razume fenomen nestabilnost-kompleksnost. Stoga su autori u navedenim referencama koristili Monte-Karlo metodu randomizacije, kako bi postigli adekvatnije indikatore dinamičke stabilnosti. Sa druge strane, u Neutel et al. (2002), kao i Moore, de Ruiter (2012), u istu svrhu je korišćena stabilnost zasnovana na osobinama generalizovano dijagonalno dominantnih (GDD) matrica, koja se pokazala kao značajno robusniji metod opisa stabilnosti.

Iako klasa GDD matrica i njene potklase čine izuzetno koristan matematički alat u raznim primenama, videti Berman and Plemmons (1994), Brualdi (1982, 1992), Brualdi and Melendorf (1994), Cvetković (2006), Cvetković et al. (2004, 2009, 2012, 2011a, 2011b, ), Cvetković and Kostić (2005, 2006), Dashnic and Zusmanovich (1970a, 1970b), Kostić (2010, 2015), Ostrowski (1937, 1951a, 1951b, 1960), Taussky (1947, 1948), Varga (2000, 2004), Varga et al. (2008), nažalost, uočeno je da je ovakva mera daleko konzervativnija, te da se za neke realne biosisteme koji pokazuju znake stabilnosti taj zaključak ne može izvesti analizom zasnovanom na GDD matricama.

Takođe, oba pristupa razvoju indikatora stabilnosti, zasnovanih na spektralnim osobinama, odnosno na osobinama GDD matrica, prvenstveno opisuju osetljivost biosistema na kvantitativne promene nastale u kruženju organske materije, dok se osetljivost na funkcionalne promene usled adaptacija izmenama životne sredine javlja tek implicitno i bez jasnog opisa.

Sa druge strane, u literaturi iz oblasti matematičkih teorija, teorije

matrica i teorije dinamičkih sistema, poznato je da postoje matrice strukture koje su podložne velikoj osetljivosti spektralnih osobina, kao što je stabilnost, usled izuzetno malih promena u vrednostima elemenata, videti Trefethen, Embree (2005). Takođe, poznato je da ta osetljivost matrice na male perturbacije odgovara efektima tranzicione nestabilnosti asimptotski stabilnih dinamičkih sistema. Matematički alat koji je posebno razvijen da se objasne pomenuti fenomeni poznat je pod terminom pseudospektar.

Kako navedena ograničenja razvijenih indikatora stabilnosti, zasnovanih na spektralnim osobinama matrica, odnosno na konceptu GDD matrica, predstavljaju važan izazov u daljem razvoju i primeni modela energetske mreže ishrane u biosistemima tla, neophodno je razviti napredniju metodologiju opisa dinamičke stabilnosti u terminima intraspecifične kompeticije funkcionalnih grupa, prvenstveno imajući u vidu kratkoročno ponašanje usled funkcionalnih promena, što matematički odgovara idejama vezanim za pseudospektar matrica.

Kako bi se omogućila realističnija analiza problema dinamičke stabilnosti, a posebno efekata funkcionalnih promena u interspecifičnim interakcijama unutar biosistema tla na dinamičku stabilnost kruženja organske materije, kako kratkoročnu tako i dugoročnu, cilj disertacije je da uvede matematičku teoriju pseudospektra u teoriju energetske mreže ishrane i na taj način razvije prikladnije indikatore od onih koji su trenutno dostupni u oblasti inženjerstva životne sredine.

# 1

## Modeliranje empirijskih trofičkih mreža

Jedan od načina kako da shvatimo funkcionisanje ekosistema jeste da sledimo lance ishrane u njemu. Lanac ishrane sastoji se od niza organizama koji se hrane jedan drugim. Svako stanište je puno ovakvih lanaca, a kako se oni uglavnom spajaju i granaju jedan iz drugog, nazivamo ih *mreža ishrane* ili *trofička mreža*.

Specijalno, trofičke mreže *tla* su zajednice organizama koji ceo život ili deo svog života provode u tlu. One opisuju kompleksan živi sistem u tlu i načine kako on komunicira sa okolinom, biljkama i životinjama. Kao i sve druge, i ove trofičke mreže opisuju prenos energije između vrsta u ekosistemu. Za razliku od lanca ishrane, koji ispituje jedan, linearni, energetski put kroz ekosistem, mreža ishrane (trofička mreža) je složenija i prikazuje sve moguće takve puteve. Veliki deo te prenosive energije dolazi od sunca. Biljke koriste sunčevu energiju za pretvaranje neorganske materije u energetski bogata organska jedinjenja, pretvarajući ugljen-dioksid i minerale u biljni materijal putem fotosinteze. Biljke nazivamo autotrofima, jer proizvode svoju sopstvenu energiju, međutim, nazivamo ih i proizvođačima, jer proizvode energiju koja je na raspolaganju drugim organizmima kroz hranu. Heterotrofi su potrošači koji nemaju mogućnost da stvore sopstvenu hranu, već, da bi dobili energiju, jedu biljke ili druge heterotrofe.

U nadzemnim trofičkim mrežama energija se kreće od proizvođača (biljaka), preko primarnih potrošača (biljojeda), do sekundarnih potro-

šača (predatora). Izraz *trofički nivo* odnosi se na različite slojeve ili korake na tom energetskom putu. Drugim rečima, proizvođači, potrošači i razgrađivači su glavni trofički nivoi. Ovaj niz prenosa energije iz jedne vrste u drugu može se nastavljati nekoliko puta, ali se na kraju završava i, na tom kraju, razgrađivači, kao što su bakterije i gljivice, razgrađuju mrtav biljni i životinjski materijal na proste sastojke (nutricijente).

U literaturi se može naći veliki broj dijagrama, slika, kao i anegdota, kojima se predstavljaju neke teorije, odnosno modeli, bazirani na našim opažanjima. Na primer, tokom svog obrazovanja, često smo se susretali sa takozvanom trofičkom piramidom, koja, u stvari, u ekologiji grafički prikazuje odnos brojnosti i mase biljaka, biljojeda i mesojeda u ekosistemu. U njenoj osnovi su zelene biljke, odnosno proizvođači, čija je brojnost i ukupna masa najveća u ekosistemu. Piramidu dalje čine potrošači prvog reda (biljojedi), pa potrošači drugog i trećeg reda.

Takođe, često smo se susretali sa nekom slikom jednostavnog lanca ishrane, na primer, *trava - antilopa - lav*. Međutim, stvarnost većine ekosistema je mnogo složenija, sa mnogo više slojeva, uključujući neke životinje koje jedu i biljke i životinje. Svaki lanac ishrane završava se vrhunskim predatorom, u ovom primeru lavom. Ništa ne vrebava lava, barem ne dok je živ, ali kada ugine, nastavlja se lanac ishrane, jer se insekti, gljivice i drugi razlagači hrane njegovim lešom. Na kraju ništa ne ostane od lavljeg tela. Svu energiju pohranjenu u njemu odneli su razlagači, a hemijske materije koje su sačinjavale njegovo telo vratile su se u okruženje u obliku ugljen-dioksida, vode i minerala u tlo. To su one iste materije koje su potrebne biljci da bi rasla. Ciklus je zatvoren.

Ono što je, takođe, jasno je činjenica da se u svakoj fazi lanca ishrane gubi energija, uglavnom kao toplota koju oslobađaju životinjska tela. Zbog toga se na svakom sledećem nivou lanca ishrane na raspolaganju nalazi manje energije.

Međutim, kada se upustimo u detaljniju analizu jedne mreže ishrane, odnosno funkcionisanje nekog ekosistema, susrećemo se sa kompleksnim i raznolikim sistemom, koji po svemu sudeći opstaje, tj. stabilan je, ali se mi i dalje mučimo *kako* da objasnimo odnose između raznolikosti, kompleksnosti i stabilnosti. Elementi i hranljive materije su, razume se, fundamentalni za svaku trofičku interakciju i naša intu-

icija i opažanje nam govore da *postoji* veza između dinamike hranljivih sastojaka, interakcija između vrsta i stabilnosti, međutim, naše teorije ne uspevaju da to adekvatno potvrde.

U knjizi [63], publikovanoj 2012. godine, aktuelno stanje u oblasti izučavanja trofičkih mreža, početkom trećeg milenijuma, zanimljivo je ilustrovano karikaturom Sydney Harris-a, na kojoj dva matematičara stoje ispred školske table i jedan od njih proučava rad drugog. Na tabli su ispisane dve grupe jednačina, između kojih stoji rečenica: "... then a miracle occurs". Onaj koji proučava rad svog kolege kaže: "*I think you should be more explicit here in step two.*"

## 1.1 Pristupi proučavanju trofičkih mreža

Pomenuta knjiga daje iscrpan pregled stanja u oblasti, kao i brojne različite pristupe proučavanju trofičkih mreža. Jedan od njih prati dva tradicionalna pravca unutar ekologije:

- community-based i
- ecosystem-based.

Ova dva pravca, međutim, povezana su u jednu perspektivu i to tako što je centar interesovanja u proučavanju trofičkih mreža stavljen na prenos *energije*. Dakle, fokus je stavljen na *energetske* trofičke mreže.

Drugi pristup proučavanju trofičkih mreža, koji ovde navodimo, jeste onaj za koji su se opredelili autori knjige:

- theoretically-based i
- empirically-based.

Time su trofičke mreže podeljene na *teorijske* i *empirijske*. Teorijske trofičke mreže su generalno razvijene kao jezgro za analizu i proučavanje opštih osobina modela sistema, a empirijske trofičke mreže obuhvataju opažene trofičke interakcije i parametrizovane su na osnovu podataka sa terena.

Teorijski modeli trofičkih mreža obično obuhvataju skup vrsta, među kojima se na slučajajan način uspostavlja mreže interakcija

sa različitim stepenom kompleksnosti. Analiza se, zatim, zasniva na karakterističnim korenima matrice interakcija, koji se koriste da bi se opisala dinamička svojstva sistema. Osnovna kritika ovih modela jeste da su suviše pojednostavljeni, suviše apstraktni i da im nedostaje biološki realizam.

Ove nedostatke nemaju empirijske trofičke mreže, preciznije, modeli trofičkih mreža bazirani na empirijskom pristupu. Međutim, oni se mogu kritikovati sa drugih aspekata. Jedan od njih se fokusira na kompletnost, u smislu koje vrste su uključene u model, a koje ne. *Sve* vrste ne mogu biti uključene u model, ako želimo da on bude *upotrebljiv* za dalju analizu i predviđanje. Stoga se, na primer, retke vrste (kojih nema u izobilju) izostavljaju iz razmatranja. Drugi aspekt kritike odnosi se na činjenicu da se model ne bazira na opisu interakcija među jedinkama, već među vrstama ili, čak, grupama nekoliko vrsta. Idealno bi bilo da se model konstruiše na bazi *jedinki*, ali to bi bilo sasvim neracionalno.

Sve gore navedeno opredeljuje nas da u ovoj disertaciji proučavamo *empirijske trofičke mreže* i to sa stanovišta protoka *energije* u njima. Pri tome, kao važan element trofičke mreže, uključujemo *detritus*, odnosno *neživu organsku materiju*, koja je, sa teorijskog stanovišta, na pravi način uključena u razmatranje radovima autora pomenute knjige [63].

Korišćenje matematičkih jednačina za modeliranje trofičkih mreža prisutno je odavno, ali je opšteprihvaćena Lotka-Volterra matematička reprezentacija interakcija između vrsta, kako bi se proučavala njihova dinamika. Ta reprezentacija je u svom originalnom izdanju bila veoma kritikovana i to zbog nedostatka biološkog realizma. Originalne formulacije nisu uključivale izraze za intraspecifičnu kompeticiju, odnosno samoregulaciju. Takođe, izrazi koji se odnose na predatora i rezultujući funkcionalni odgovori predatora u odnosu na populaciju plena bili su previše pojednostavljeni. Dinamičke osobine tih ranih modela nisu obuhvatale raspon dinamičkih stanja koja se opažaju u prirodi. Da bi se ovi nedostaci otklonili, razvijene su sofisticiranije i realističnije jednačine.

S obzirom da su adekvatni modeli, bazirani na generalizovanim Lotka-Volterra jednačinama, već razvijeni, ovde ćemo ih prezentovati u obliku u kom su dati u [63]. Originalni deo ove disertacije odnosiće

se na diskusiju *dinamičkih svojstava* empirijskih trofičkih mreža, pre svega na definisanje novih *indikatora stabilnosti* za ovakve trofičke mreže.

## 1.2 Osnovne pretpostavke

Ekosistem predstavlja zajednicu organizama i fizičku okolinu u okviru nekog regiona, ograničenu biotičkim interakcijama i biogehemijskim ciklusima. Trofičke mreže (skraćeno FW, od *food webs*) i modeli kojima se ovde bavimo dizajnirani su tako da obuhvataju biotičke interakcije, funkcionalne karakteristike i biohemijske cikluse ekosistema. Modeli su bazirani na grupisanim vrstama, koje nazivamo *funkcionalne grupe*. Vrste unutar jedne funkcionalne grupe, prema [63], dele slične:

- izvore hrane,
- režime ishrane,
- karakteristike životnog veka i
- staništa.

Češće se široke taksonomske grupe raščlanjuju na finije, a ređe se više nepovezanih taksona spajaju u jednu funkcionalnu grupu.

Gustine funkcionalnih grupa i veličine biohemijskih fondova, kao i svi drugi funkcionalni atributi ekosistema izražavaju se u terminima materije (tj. ugljenika ili azota) na bazi suve materije po jedinici prostora (na primer,  $gCm^{-2}$  ili  $kgCha^{-2}$ ). Procene gustine populacije organizama dobijaju se iz studija na terenu i predstavljaju ili tačkaste ocene veličine populacije u određenom momentu ili prosečne vrednosti u nekom vremenskom intervalu. Gustine se zatim konvertuju u biomasu, a zatim, korišćenjem poznatog elementalnog količnika biomase (tj. odnosa  $C : N$ ), u željene jedinice mere.

Procene fizioloških faktora, karakteristika životnog veka i ponašanja (tj. plen preferencije, stope hranjenja i funkcionalni odgovori) vrsta unutar funkcionalnih grupa su suštinske za sve modele FW. One se



dobijaju u laboratoriji ili na terenu ili iz procena prikupljenih u literaturi.

Modeli koje razmatramo opisuju plen-predator interakcije i uzajamne interakcije koje podrazumevaju direktan prenos materije između funkcionalnih grupa i između funkcionalnih grupa i detritusa. Takođe, važno je napomenuti da će u sve modele koje razmatramo biti inkorporirana *intraspecifična kompeticija*.

Zadržaćemo se na modelima koji su *deterministički*, sa napomenom da se oni mogu iskoristiti, tj. adaptirati za proučavanje neizvesnosti i slučajnosti u okruženju i u parametrima koji se koriste da opišu populaciju. Kao što ćemo kasnije videti, ovaj stohastički momenat biće diskutovan na nešto drugačiji način.

Modeli počinju sa jednom ili više formi nežive organske materije, zvane *detritus* koja potiče van sistema (alohtoni izvori) ili unutar sistema (autohtoni izvori). Koriste se varijacije jednačina tipa Lotka-Volterra, koje inkorporiraju intraspecifičnu kompeticiju, kao i detritus. U modelima se koristi zajednička jedinica biomase (žive ili nežive), regulisana zakonom održanja materije i prvim i drugim zakonom termodinamike.

### 1.3 Primer trofičkih mreža

U ovoj sekciji predstavljamo tipične primere pomenutih trofičkih mreža tla, koji će nam poslužiti kroz celu disertaciju da na njima testiramo efikasnost novouvedenih pristupa pručavanju stabilnosti.

Posmatraćemo uzorkovani niz podzemnih trofičkih mreža na dva lokaliteta, tokom njihove četiri sukcesivne razvojne faze. Oba lokaliteta su tla u peščanim dinama, i to jedan na ostrvu Schiermonnikoog u Waddensea u severnoj Holandiji, a drugi je Hulshorsterzand u oblasti Veluwe u centralnoj Holandiji, koji su obrađeni u [65].

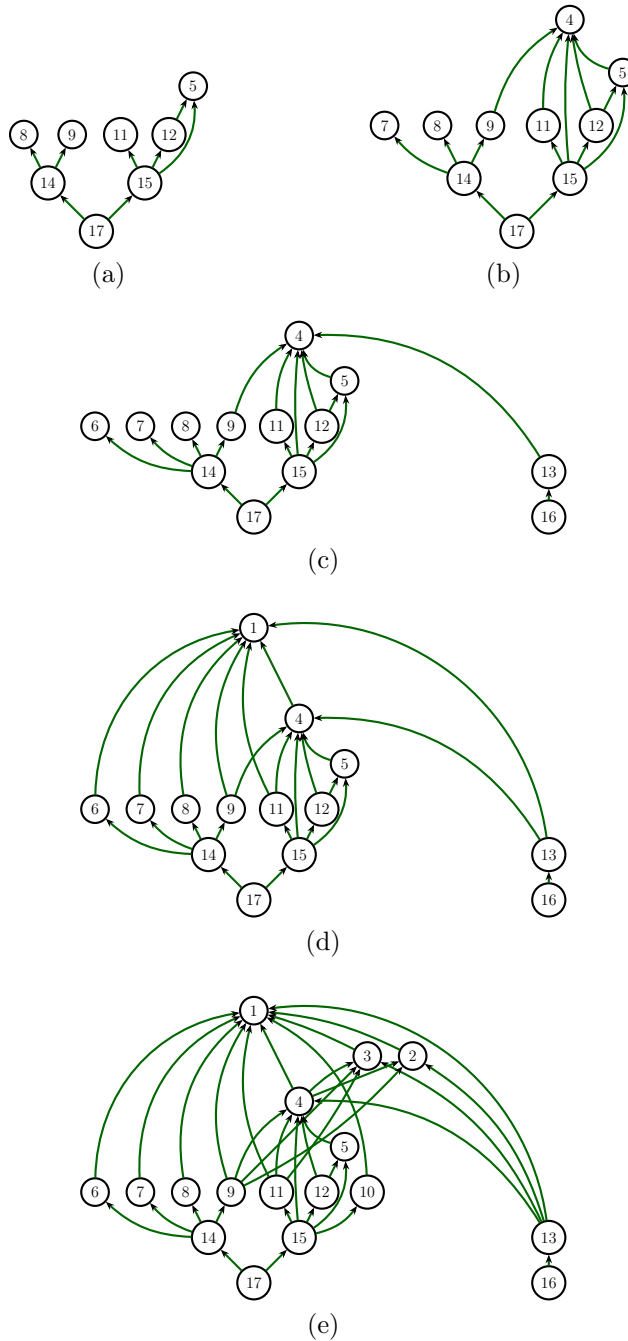
Oba ova lokaliteta su predstavljena u četiri uzastopna stadijuma razvoja, koja odgovaraju razvoju rane vegetacije iznad zemljišta, tokom kojih se povećava podzemna produktivnost. Posmatrani organizimi u tlu su kategorisani kao funkcionalne grupe na bazi taksonomije, fizioloških svojstava i načina ishrane.

Na Slici 1.1 prikazane su trofičke interakcije funkcionalnih grupa

organizama u sve četiri razvojne faze na oba lokaliteta, i to:

1. predatorske grinje (prmi),
2. predatorske kolebole (prco)
3. nematofagne grinje (nemi),
4. predatorske nematode (prne),
5. amebe (amoe),
6. kolebole (coll),
7. kriptostigmatične grinje (cryp),
8. nekriptostigmatične grinje (ncry),
9. fungifagne nematode (fune),
10. bakteriofagne grinje (bami),
11. bakteriofagne nematode (bane),
12. bičari (flag),
13. fitofagne nematode (phne),
14. gljivice (fung),
15. bakterije (bact),
16. korenje (root),
17. detritus (detr).

S obzirom da se složenost ekosistema povećava sa starošću zemljišta, biće posebno interesantno uočiti na koji način se ponaša ekološka stabilnost procenjena na osnovu *novih* indikatora razvijenih u ovoj disertaciji.



Slika 1.1: Trofičke interakcije u podzemnim trofičkim mrežama tla u četiri sukcesivna stadijuma razvoja na lokalitetima Schiermonnikoog (grafovi (a), (c), (d) i (e), redom) i Hulshorsterzand (grafovi (b), (c), (d) i (e), redom)

## 2

# Trofičke mreže kao dinamički sistemi

## 2.1 Dinamika populacije

Problem modeliranja rasta populacije prisutan je od davnina. Ono što je sasvim sigurno jeste činjenica da se za predviđanje ili procenu rasta neke populacije moraju koristiti *dinamički modeli*. Takvi modeli, takođe, mogu se uspešno iskoristiti i u slučaju kada želimo da kontrolišemo razvoj posmatrane populacije.

Postoje neprekidni i diskretni matematički modeli rasta populacije. Oba pristupa su relevantna, ali ćemo se u ovoj disertaciji zadržati na jednom od njih - na neprekidnim modelima.

Kako bismo se bolje upoznali sa temom disertacije, pođimo od jednodimenzionalnih populacionih modela. Naime, za početak, posmatrajmo jednu populaciju organizama. Označimo sa  $x(t)$  njenu veličinu (broj jedinki), tj. tretirajmo je kao funkciju vremena  $t$ . Primitimo da promena veličine populacije od momenta  $t$  do momenta  $t + dt$  iznosi

$$dx = dR - dU + dM, \quad (2.1)$$

gde je

- $dR$  broj rođenih članova te populacije u vremenskom intervalu  $[t, t + dt]$ ,

- $dU$  broj umrlih članova te populacije u vremenskom intervalu  $[t, t + dt]$ ,
- $dM$  broj članova migriranih jedinki u vremenskom intervalu  $[t, t + dt]$ , pri čemu razlikujemo dva slučaja:
  - ako je  $dM > 0$ , radi se o *imigraciji*, a
  - ako je  $dM < 0$ , radi se o *emigraciji*,

čiji su glavni uzroci hrana, razmnožavanje i nepovoljni uslovi okoline.

U biomatematici veličinu  $\frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt}$  zovemo *stopa rasta* populacije. Dakle, stopa rasta populacije je priraštaj te populacije (u jedinici vremena) po "glavi". Analogno,  $\frac{1}{x(t)} \frac{dR}{dt}$  je stopa rađanja,  $\frac{1}{x(t)} \frac{dU}{dt}$  je stopa umiranja ili smrtnosti, a  $\frac{1}{x(t)} \frac{dM}{dt}$  je stopa migracije.

### 2.1.1 Malthus-ov model rasta populacije

Engleski demograf Thomas Malthus je 1798. godine modelirao rast populacije bez migracija ( $dM = 0$ ). On je pretpostavio da su  $dR$  i  $dU$  proporcionalni trenutnoj veličini populacije  $x = x(t)$  i dužini vremenskog intervala  $dt$ :

$$dR = rxd t, \quad dU = uxd t.$$

Konstante proporcionalnosti  $r$  i  $u$  su stopa rađanja i stopa smrtnosti, a njihova razlika  $g := r - u$  je stopa rasta populacije.

Uz navedene pretpostavke, jednačina (2.1) postaje

$$\frac{dx}{dt} = gx. \tag{2.2}$$

To je diferencijalna jednačina prvog reda koja razdvaja promenljive:

$$\frac{dx}{x} = gdt,$$

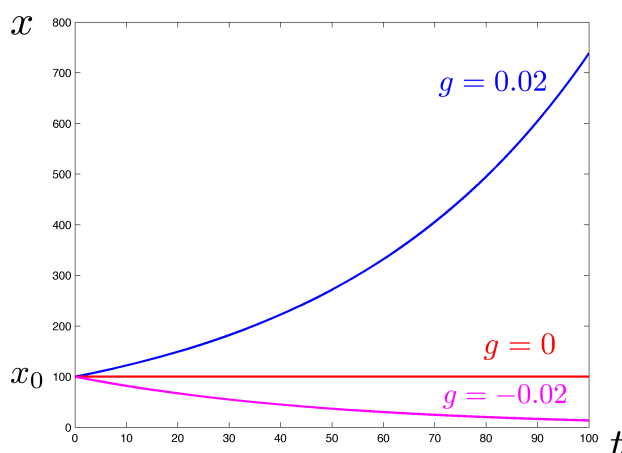
čije je rešenje

$$x(t) = x_0 e^{gt}, \quad x_0 = x(0).$$

Prema tome, u ovom najjednostavnijem matematičkom modelu, rast populacije je opisan eksponencijalnom funkcijom. Pri tome:

- ako je  $g > 0$  radi se o rastu populacije,
- ako je  $g < 0$  radi se o padu populacije,
- ako je  $g = 0$  populacija se nalazi u ravnotežnom stanju.

Sva tri slučaja ilustrovana su na Slici 2.1.



Slika 2.1: Grafik eksponencijalne funkcije  $x(t) = x_0 e^{gt}$  za  $x_0 = 100$  i različite vrednosti  $g$

Najvažniji nedostatak Malthus-ovog modela je pretpostavka da su stopa rađanja ( $r$ ) i stopa smrtnosti ( $u$ ) konstantne, odakle sledi da je i stopa rasta ( $g$ ) konstantna, što znači da populacija može neograničeno da raste. To je, naravno, nemoguće, jer ni prostor, kao ni izvori hrane ni vode nisu neograničeni. Stoga, kada populacija postane dovoljno velika, dolazi do takmičenja (kompeticije) za resurse (hrana, prostor, polni partner, itd.). Zbog toga stopa rasta mora početi da opada, a stopa umiranja mora početi da raste.

Jedan od prvih modela (bez migracija,  $dM = 0$ ) koji uzima u obzir te činjenice, predložio je danski matematičar Pierre Verhulst 1838. godine. Taj model danas je poznat pod imenom *logistički model*. S obzirom da se u ovoj disertaciji primarno bavimo bio- i ekosistemima koji sadrže više različitih populacija, pomenuti nedostatak Malthusovog modela je prevaziđen modelovanjem interakcija između vrsta.

Drugi nedostatak jeste pretpostavka o neprekidnom rastu populacije. Naime, mnoge populacije nemaju neprekidni, već diskretni rast, na primer, razmnožavaju se samo u određeno doba godine i slično, pa je stoga vremenska skala na kojoj je neprekidni model validan ograničena dužinom reproduktivnog ciklusa. Drugim rečima, ukoliko se jedinice posmatrane populacije razmnožavaju jednom godišnje, tada je vremenska jedinica u kojoj posmatramo model godina, te se ne mogu dobiti predviđanja na kraćim vremenskim intervalima.

## 2.2 Predator-plen modeli

Predator-plen modeli objašnjavaju izgradnju delova bio- i ekosistema, na osnovu rasta biomase iz mase njenih resursa. Vrste se bore za opstanak, razvijaju i šire traženjem odgovarajućih resursa.

Oblici takve interakcije mogu imati razne forme: resurs - potrošač, biljka - biljojed, parazit - domaćin, virus - imuni sistem, osetljivost - infekcija, itd. Generalno, kad god pažljivije analiziramo naizgled konkurentne interakcije, često su one, u stvari, maskirane forme predator-plen interakcija.

### 2.2.1 Opšti predator-plen model

Posmatrajmo dve populacije i njihove veličine u momentu  $t$  označimo redom sa  $x(t), y(t)$ . Funkcije  $x$  i  $y$  mogu predstavljati ili broj jedinici ili njihove gustine (broj po jedinici površine) ili, pak, neke druge mere veličine populacije, samo da su neprekidne funkcije. Promene veličine populacije u vremenu opisuju se izvodima

$$\dot{x} := \frac{dx}{dt} \quad \text{i} \quad \dot{y} := \frac{dy}{dt},$$

redom, pa se opšti model interakcije ovih populacija može zapisati u terminima dve diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xf(x, y) \\ \dot{y} &= yg(x, y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pri tome se vreme  $t$  ne pojavljuje eksplicitno u desnim stranama ovih diferencijalnih jednačina, već samo unutar funkcija  $x$  i  $y$ . Funkcije  $f$  i  $g$  predstavljaju odgovarajuće stope rasta po jedinki populacije za ove dve vrste. Pretpostavlja se da je

$$\frac{df(x, y)}{dy} < 0 \quad \text{i} \quad \frac{dg(x, y)}{dx} > 0.$$

Ovaj opšti model često se naziva *predator-plen model Kolmogorova*.

### 2.2.2 Lotka-Volterra model

Tokom Prvog svetskog rata, zaraćene strane Italija i Austro-Ugarska monarhija postavljale su mine oko mnogih morskih luka, što je sprečilo uobičajeni ribolov. Kada se rat završio i kada su uklonjene mine, očekivalo se da će ribari imati mnogo bolji ulov nego pre rata, pošto je prošlo dovoljno vremena da se riblji fond uveća. Na veliko iznenađenje, na skoro čitavom Jadranu, situacija je bila upravo suprotna.

Italijanski biolog Umberto D’Ancona je sredinom dvadesetih godina prošlog veka izučavao veličinu populacija raznih vrsta riba u okolini mnogih jadranskih luka i uočio da se, na primer, u okolini Rijeke povećao broj grabljivica tokom ratnih godina. To je tumačio činjenicom da je, zbog smanjenog ribolova, za grabljivice ostajalo više hrane, pa se njihov broj povećavao. Međutim, nije znao da objasni zašto se u isto vreme smanjivao broj konzumne ribe, kada nije bilo ribolova. Stoga se obratio poznatom italijanskom matematičaru Viti Volterra<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Vito Volterra (1860-1940, Italija, matematičar i fizičar, najpoznatiji po svom doprinosu matematičkoj biologiji) rođen je u Anconi, u veoma siromašnoj porodici. Rano je pokazao talenat za matematiku, pre odlaska na Univerzitet u Pisi. Njegov rad sistematizovan je u knjizi *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations* (1930). Posle Prvog svetskog rata, pažnju je usmerio na



Da bi objasnio ovaj fenomen, Volterra je 1926. godine podelio ribe na grabljivice (predator) i plen (prey) i formulisao takozvani *predator-plen* matematički model.

Nezavisno od njega, američki matematičar, fizičar i hemičar Alfred James Lotka<sup>2</sup> je do istog modela došao još 1920. godine u primenjenim istraživanjima iz hemije.

Da bismo lakše razumeli model, pretpostavimo, za početak, da u određenom staništu živi samo jedna vrsta plena i samo jedna vrsta predatora. Neka je  $x(t)$  veličina populacije plena, a  $y(t)$  veličina populacije predatora u momentu  $t$ .

Svi modeli bazirani na predatorstvu baziraju se na ideji da su stope rasta populacija i predatora i plena funkcije veličine *obe* populacije. Volterra je smatrao da je rast ovih rivalskih populacija opisan sistemom diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= g x - c x y \\ \frac{dy}{dt} &= -b y + k c x y\end{aligned}\tag{2.4}$$

gde su  $g, c, b, k$  nenegativne konstante, i to:

- $g$  je stopa rasta populacije plena u odsustvu predatora. Naime, Volterra je pretpostavio da za plen ima hrane u izobilju i da je njihovo stanište dovoljno veliko, tako da u odsustvu preda-

---

primene svojih matematičkih ideja u biologiji, uglavnom ponavljajući i razvijajući rad Pierre François Verhulst-a. Najpoznatiji rezultat tog perioda je Lotka-Volterra model. 1922. godine pridružio se opozicionom pokretu protiv fašističkog režima Benita Mussolini-ja, a 1931. je odbio da se obaveže na lojalnost. Bio je primoran da podnese ostavku na svoju univerzitetsku poziciju i članstvo u naučnim akademijama i, tokom narednih godina, živeo je uglavnom u inostranstvu, da bi se vratio u Rim neposredno pre svoje smrti.

<sup>2</sup>Alfred James Lotka (1880-1949, USA, hemičar, demograf, ekolog i matematičar) rođen je u Ljvovu (Lemberg), u to vreme u Austriji, danas u Ukrajini. U Ameriku je došao 1902. godine. U prvim decenijama dvadesetog veka napisao je veći broj teorijskih radova o hemijskim oscilacijama i bio autor knjige o teorijskoj biologiji (1925). Tada je napustio akademsku karijeru i većinu svog radnog veka proveo u osiguravajućoj kompaniji (Metropolitan Life). U tom svojstvu postao je predsednik PAA (the Population Association of America).

tora njihova populacija može neograničeno da raste (po Malthusovom zakonu  $\frac{dx}{dt} = gx$ ).

- $cy$  je stopa mortaliteta populacije plena prouzrokovana predatorstvom. Volterra je smatrao da je broj kontakata između predatora i plena, u jedinici vremena, proporcionalan proizvodu  $xy$ . Samo jedan deo tih kontakata će se završiti predatorstvom. Taj deo predstavljen je koeficijentom  $c$  koji predstavlja *efikasnost* predatorstva.
- $b$  je stopa smrtnosti populacije predatora čiji je uzrok izvan sistema (ne zavisi od broja jedinki plena).
- Stopa rasta populacije predatora proporcionalna je broju uhvaćenog plena  $x$ . Međutim, predator ne može da svu energiju sadržanu u plenu upotrebi za svoj rast. Zbog toga je efikasnost kojom predator konzumiranu hranu pretvara u populacioni rast prikazana koeficijentom  $k$ .

Rešenje ovog sistema diferencijalnih jednačina je par funkcija  $x(t)$  i  $y(t)$ , pa promenom promenljive  $t$  (koja predstavlja vreme), tačka  $(x(t), y(t))$  opisuje krivu u  $\mathbb{R}^2$ . Tu krivu nazivamo *trajektorija*. Dakle, trajektorija je kriva

$$\left\{ (x(t), y(t)) : t \in [0, +\infty) \right\},$$

koja polazi iz početne tačke  $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Sa stanovišta populacionih modela, trajektorije koje nas interesuju su one koje cele ostaju u prvom kvadrantu, tj. one koje su dopustive, s obzirom da broj jedinki (kao i gustina populacije) ne može biti negativan. Takođe, od svih njih, posebno su interesantne one koje se svode na jednu tačku, pa ih često, stoga, nazivamo i *stanjem sistema* u kojem postoji određena *ravnoteža*. Drugim rečima, to su stanja koja ako sistem postigne, on u njima ostaje. Matematičkim jezikom, ako postoji tačka  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$  za koju važi

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0,$$

takvu tačku zovemo *tačka ravnoteže* ili *tačka ekvilibrijuma* sistema (2.3). Očigledno, ako je  $(x^*, y^*)$  tačka ravnoteže, onda je

$$x(t) := x^* , \quad y(t) := y^*$$

rešenje sistema (2.3), odnosno, trajektorija koja počinje u tački  $(x^*, y^*)$  ne napušta je nikada.

Što se tiče Lotka-Volterra modela (2.4), dopustive trajektorije su rešenja diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-b + kc x)}{x(g - cy)} ,$$

tj. funkcije za koje važi

$$\frac{y^g}{e^{cy}} \frac{x^b}{e^{kcx}} = C$$

gde je  $C$  konstanta integracije koja zavisi od početne tačke trajektorije

$$C := \frac{y_0^g}{e^{cy_0}} \frac{x_0^b}{e^{kcx_0}} .$$

Među njima, postoje dve tačke ravnoteže:

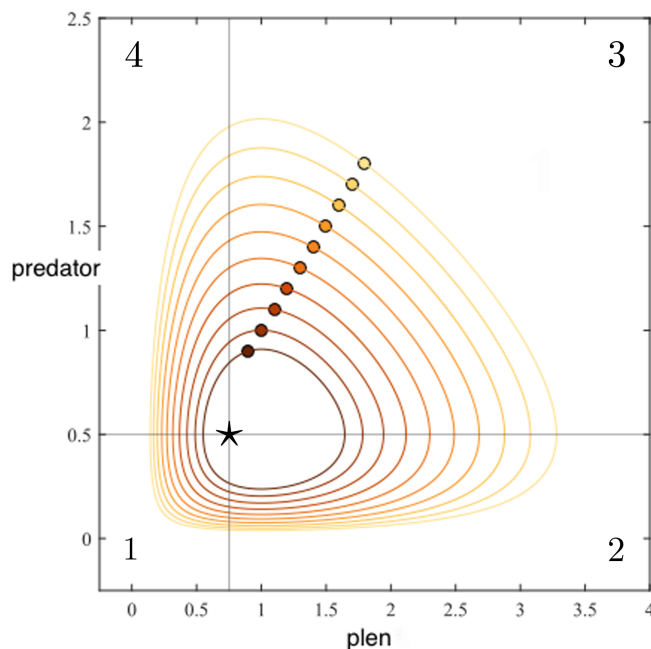
$$(0, 0) \quad \text{i} \quad \left( \frac{b}{kc}, \frac{g}{c} \right) .$$

Prvu od njih nazivamo trivijalna tačka jer, prirodno, ako nema ni predatora ni plena, nema ni promene u populacijama. Dakle, ovaj model ima jednu netrivialnu tačku ravnoteže i to je tačka

$$(x^*, y^*) = \left( \frac{b}{kc}, \frac{g}{c} \right) .$$

Detaljnijom analizom može se zaključiti da se svaka dopustiva trajektorija ovog modela može podeliti na četiri dela (vidi Sliku 2.2):

1. U prvom delu broj predatora opada zbog pomanjkanja plena, a populacija plena raste zbog manjeg broja predatora.
2. U drugom delu populacija plena je dovoljno narasla i nastavlja i dalje da raste, tako da ima dovoljno hrane za predatore, pa i njihov broj počinje da raste.



Slika 2.2: Trajektorije Lotka-Volterra Modela za  $g = 0.66$ ,  $c = 1.33$ ,  $b = 1$ ,  $k = 1$ , gde kružići predstavljaju početne uslove od  $x_0 = y_0 = 0.9$  do  $x_0 = y_0 = 1.8$  sa korakom 0.1, a  $\star$  tačku ravnoteže

3. U trećem delu broj predatora se toliko povećava da počinje da se smanjuje populacija plena.
4. U četvrtom delu, zbog velikog broja predatora, nastavlja se smanjenje populacije plena. Osim toga, zbog nedostatka hrane (plena), istovremeno opada i broj predatora.

### 2.2.3 Kompeticioni Lotka-Volterra model

Kompeticija je takmičenje za resurse (hrana, prostor, polni partner, itd.). Taj odnos je negativan za obe populacije - i za plen i za predatora.

Ako uvedemo novi faktor  $c_x x^2$  koji opisuje unutrašnju (intraspecifičnu) kompeticiju plena za ograničenim životnim prostorom i njegovim

resursima  $i$ , analogno,  $c_y y^2$  koji opisuje unutrašnju (intraspecifičnu) kompeticiju predatora prilikom lova svog plena, modifikovani Lotka-Volterra model izgledaće ovako:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= g x - c x y - c_x x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -b y + k c x y - c_y y^2\end{aligned}\tag{2.5}$$

Kako će ovaj model, u daleko složenijem obliku, biti analiziran detaljno u poglavljima koja slede, napomenimo ovde još samo da je on izveden nezavisno u sledećim oblastima:

- epidemiologija (Kermak and McKendrick 1927, 1932, 1933)
  - $x$  : osetljive jedinke
  - $y$  : zaražene jedinke
- ekologija (Lotka 1925, Volterra 1926)
  - $x$  : plen
  - $y$  : predator
- teorija sagorevanja (Semenov 1935)
  - $x$  i  $y$  su hemijski radikali koji se formiraju tokom  $H_2O_2$  sagorevanja
- ekonomija (Galbraith 2006)
  - $x$  : stanovništvo
  - $y$  : predatorska institucija

kao i u brojnim studijama iz drugih disciplina.

## 2.3 Opšti koncept dinamičkog sistema

Naglasimo odmah da, za nas, pojam *dinamički sistem* predstavlja *matematički model*, a ne sam fizički proces koji predstavlja, kao i da se za isti fizički proces može koristiti više različitih dinamičkih sistema, koji se dobijaju postupkom modeliranja.

U matematičkoj teoriji dinamičkih sistema, postoje brojni modeli koji:

- opisuju ne samo unutrašnju dinamiku nekog fizičkog procesa, već i njegove interakcije sa spoljnim svetom,
- podrazumevaju upravljajuće zakonitosti samih procesa koji su invarijantni u vremenu, kao i one koji variraju u vremenu,
- diskretni su u vremenu, ili su neprekidni, ili podrazumevaju obe faze evolucije jednog procesa.

Kako cilj ove disertacije nije doprinos izuzetno bogatoj matematičkoj teoriji dinamičkih sistema, već upotreba određenih koncepata ove teorije, kako bi se razvili indikatori o specifičnim stanjima protoka energije u ekosistemima tla, ova sekcija sadrži samo kratak osvrt na one sadržaje koji će biti od značaja za poglavlja koja slede.

Pre nego što damo formalnu definiciju neprekidnog dinamičkog sistema invarijantnog u vremenu (skraćeno TIDS od *time invariant dynamical system*), uvodimo neke osnovne pojmove i njihove relacije.

**Vremenski domen.** Dinamički sistem menja se sa protokom vremena, pa su i promenljive koje opisuju ponašanje sistema funkcije od vremena. Zato svaki dinamički sistem ima vremenski domen  $T$ , koji sadrži sve moguće momente vremena  $t$  u kojem se posmatraju promenljive. Ovaj domen može biti ograničen ili neograničen.

**Interno (unutrašnje) stanje.** Pojam *stanje* igra centralnu ulogu u definiciji dinamičkog sistema. Za razliku od eksternih promenljivih, interne (unutrašnje) promenljive ili promenljive *stanja* opisuju procese unutar sistema. Međutim, ne može se svaki skup internih promenljivih posmatrati kao *vektor stanja*. Naime, mora biti ispunjen zahtev da stanje u određenom momentu zavisi samo od stanja u prethodnom

periodu. Time je princip uzročnosti ugrađen u koncept *stanja*. Pri tome, promenljive koje opisuju stanja, u opštem slučaju, ne moraju da predstavljaju realne fizičke parametre sistema. Stoga je izbor vektora stanja veoma kompleksan i u modeliranju ne postoji generalni recept za to.

**Domen dinamičkog sistema.** Skup svih stanja u kojima sistem može da se nađe naziva se domen dinamičkog sistema. Za stanja iz domena se upotrebljava još i izraz *dopustiva stanja*.

**Upravljajuće zakonitosti.** Pravila koja vladaju na skupu internih stanja sistema izražavaju se jednačinama, pa se te zakonitosti, po kojima sistem precizno menja stanja iz jednog u drugo, često nazivaju i upravljajuće jednačine dinamičkog sistema. Prisutan je i termin upravljajuća funkcija koji se odnosi na funkcionalnu zavisnost promene u naredno stanje od stanja u datom vremenskom periodu.

**Evolucija sistema.** To je ponašanje sistema u njegovom vremenskom domenu ili, drugim rečima, razvoj sistema kroz uređeni skup svih njegovih stanja, prema upravljajućim zakonitostima.

**Autonomni sistemi.** Dinamički sistemi kod kojih se upravljajuće zakonitosti ne menjaju tokom vremena, nazivaju se autonomni ili *dinamički sistemi invarijantni u vremenu*.

**Ravnotežna stanja.** To su interna stanja sistema za koja, jednom kada su postignuta, upravljajuće jednačine uzrokuju da sistem u njima i ostaje. Takva stanja se nazivaju i *ekvilibrjumima*.

Vratimo se sada definiciji dinamičkog sistema. Pretpostavimo da neki fizički proces možemo zamisliti kao tačke  $[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$   $n$ -dimenzionalnog vektorskog prostora  $\mathbb{R}^n$ , koje prate neku krivu kroz vreme, tj. kao

$$x = x(t) = \left[ x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t) \right]^T, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pri tome, najčešće, ne znamo šta je tačno  $x(t)$ , ali znamo neke činjenice o njenoj brzini i pravcu promene u nekom regionu prostora  $\mathbb{R}^n$ , što je izraženo kao informacija tipa

$$\dot{x}(t) = \Phi(x(t)), \quad (2.6)$$

odnosno

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \Phi_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = \Phi_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases} \quad (2.7)$$

Ovo je, u stvari, sistem od  $n$  običnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa  $n$  nepoznatih. Posmatrani fizički proces predstavljen je, na ovaj način, jednim *dinamičkim sistemom*.

Preciznije, kažemo da je  $x(t)$  *dinamički sistem invarijantan u vremenu* (TIDS) ako zadovoljava (2.7), u smislu da je  $\dot{x}(t) = \Phi(x(t))$  za  $t$  iz nekog (moguće i beskonačnog) intervala. Pri tome je taj interval njegov vremenski domen,  $\Phi$  upravljajuća funkcija, a (2.7) su njegove upravljajuće jednačine.

Tačke  $x^* \in \mathbb{R}^n$ , koje su u domenu dinamičkog sistema, a za koje važi da je  $\Phi(x^*) = 0$ , nazivaju se ekvilibrijumi dinamičkog sistema.

### 2.3.1 Linearni TIDS

Najjednostavnija vrsta dinamičkih sistema su linearni dinamički sistemi invarijantni u vremenu (LTIDS). To su sistemi kod kojih je upravljajuća funkcija linearna, tj. može se reprezentovati matricom. Drugim rečima, LTIDS se može predstaviti kao

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \quad (2.8)$$

gde je  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  kvadratna realna matrica.

Kako se, zapravo, radi o sistemu linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, dobro je poznato da su rešenja, odnosno trajektorije dinamičkog sistema (2.8), date sa

$$x(t) = e^{tA}x(0), \quad (2.9)$$

gde je  $x(0)$  početno stanje, a  $e^{(\cdot)}$  eksponencijalna matrična funkcija definisana matričnim redom

$$e^M := E + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}M^k, \quad M \in \mathbb{R}^{n,n}.$$



Dakle, ponašanje trajektorija  $x(t)$  LTIDS je u potpunosti određeno ponašanjem funkcije  $e^{tA}$  u vremenu  $t \geq 0$ . Međutim, kako se, u opštem slučaju, radi o vektorima i matricama, ispitivanje ponašanja se uglavnom vrši posmatrajući odgovarajuće vektorske i matrične norme. Stoga, ako sa  $\|\cdot\|$  označimo neku vektorsku normu i, bez opasnosti od zabune, istim simbolom označimo njome indukovanu matričnu normu, tada iz (2.9) sledi da je

$$\|x(t)\| \leq \|e^{tA}\| \|x(0)\|,$$

odnosno

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} \leq \|e^{tA}\|,$$

pri čemu je jednakost dostignuta za bar jedno (početno) stanje  $x(0)$ . Dakle,

$$\sup_{x(0) \neq 0} \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} = \max_{x(0) \neq 0} \frac{\|x(t)\|}{\|x(0)\|} = \|e^{tA}\|,$$

pa, iz tih razloga, definišemo funkciju

$$\phi_A(t) := \|e^{tA}\|, \quad t \geq 0$$

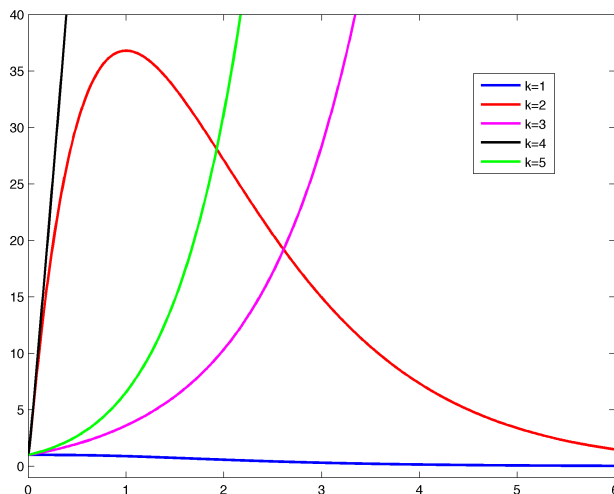
koja zavisi od zadate norme  $\|\cdot\|$ , a koju nazivamo *funkcija evolucije dinamičkog sistema* određenog matricom  $A$ . Slika 2.3 prikazuje grafik ove funkcije u euklidskoj normi za neke od kvadratinih matrica reda 2:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 100 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 100 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 2.3.2 Nelinearni TIDS

Za razliku od prethodnog (linearnog) slučaja, ukoliko je upravljajuća funkcija  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nelinearna, njom određen TIDS (2.6), u opštem slučaju, nije moguće rešiti. Stoga se, radi ispitivanja evolucije takvih



Slika 2.3: Grafici funkcije evolucije  $\phi_{A_k}(t) = \|e^{A_k t}\|_2$ , za  $k = 1, 2, 3, 4, 5$

dinamičkih sistema, pribegava postupku *linearizacije*, tj. aproksimacije nelinearne funkcije  $\Phi$  linearnom funkcijom  $A$ . Kako je ovaj postupak moguće adekvatno sprovesti jedino u dovoljno maloj okolini određene tačke, ponašanje dinamičkog sistema o kome možemo dobiti informaciju je *lokalnog karaktera*, tj. odnosi se samo na stanja koja su dovoljno blizu tačke u kojoj se vrši aproksimacija.

Matematički alat koji se tom prilikom korisiti je Taylor-ova teorema o razvoju vektorske funkcije. Na osnovu ovog, dobro poznatog rezultata, imamo da se svaka diferencijabilna funkcija  $\Phi$  može prikazati kao

$$\Phi(x) = \Phi(x^*) + A(x - x^*) + \mathcal{O}(\|x - x^*\|^2), \quad (2.10)$$

gde  $\mathcal{O}$  označava asimptotski simbol malo-o, a matrica  $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$  se naziva *Jakobijan* i definisana je sa

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x^*),$$

kao matrica parcijalnih izvoda funkcije  $\Phi$  izračunatih u tački  $x^*$ .

Dakle, za nelinearni TIDS ponašanje u okolini ravnotežnog stanja je determinisano, takođe, funkcijom evolucije, ali ovog puta za Jakobijan datog nelinearnog preslikavanja. Može se pokazati da, na osnovu (2.10), sledi da je

$$\sup_{x(0) \neq x^*} \frac{\|x(t) - x^*\|}{\|x(0) - x^*\|} = \|e^{tA}\| + \mathcal{O}(\|x(t) - x^*\|),$$

što znači da se ponašanje trajektorija nelinearnog TIDS, *unutar dovoljno male okoline ekvilibrijuma*, mogu aproksimirati funkcijom evolucije Jakobijana izračunatog u ekvilibrijumu.

Imajući to u vidu, naredno poglavlje će se detaljnije baviti osobinama funkcije evolucije, čime ćemo dobiti globalne rezultate za LTIDS, kao i lokalne rezultate za nelinearni TIDS.

### 2.3.3 Osobine ravnotežnih stanja

S obzirom da je matematička teorija dinamičkih sistema u potpunosti motivisana modeliranjem fizičkih i energetske procesa, jedan od osnovnih fokusa je postojanje ravnotežnih stanja, kao i njihove specifične osobine, na osnovu kojih se može steći uvid u osobine realnih procesa koji se ispituju.

Kao što smo već pomenuli, za TIDS (2.7), stanje  $x^* = x(t^*)$  u nekom trenutku  $t^*$  se naziva *ekvilibrijum* ili *ravnotežno stanje*, ukoliko sistem u tom stanju miruje, tj. promena stanja ne postoji:

$$\dot{x}(t^*) = 0.$$

To znači da je svaka nula upravljajuće funkcije  $\Phi$  jedan ekvilibrijum. Međutim, ta (moguće brojna) stanja dinamičkog sistema mogu imati različita dinamička svojstva. Naime, ako se sistem *malo* pomeri iz ravnotežnog stanja, može se desiti da:

- teži da se vrati u to stanje ili
- teži da napusti to stanje ili
- je u tom pogledu neutralan.



Slika 2.4: Ilustracija vrsta ravnoteže

Slika 2.4 na jednostavan način ilustruje ove mogućnosti ravnotežnih stanja dinamičkih sistema.

Prvi slučaj, koji, u suštini, predstavlja svojstvo *neosetljivosti* ekvilibrijuma dinamičkog sistema na male promene stanja, naziva se *stabilnost*, a čitava oblast teorije dinamičkih sistema koja se tim svojstvom bavi naziva se *teorija stabilnosti*.

U terminima populacione dinamike, pitanje stabilnosti, zapravo, znači sledeće: da li, kada je ravnoteža jednom uspostavljena, mala promena u populacijama čini da se sistem vrati (brže ili sporije, sa ili bez oscilacija, itd.) u narušenu ravnotežu, ili je, pak, ravnoteža takva da jednom kada se i malo naruši, ne može da se povрати. Očigledno, ovo pitanje je jedno od ključnih pitanja u oblasti očuvanja životne sredine. Kako što bolje ispitati osetljivost ravnoteže jednog ekosistema, a potom i kako uticati da se ta ravnoteža povрати, jeste jedan od modernih izazova nauke. Upravo iz tih razloga, ova teza se bavi primenom teorije dinamičkih sistema u cilju dobijanja pouzdanih indikatora o dinamičkim svojstvima ravnoteže energetskog toka u ekosistemima tla.

Jedan od prvih naučnika koji je u modernom smislu istraživao stabilnost mehaničkih sistema bio je J. L. Lagrange. On je 1788. godine dokazao teoremu kojom se utvrđuju dovoljni uslovi stabilnosti ravnoteže proizvoljnih sistema. Razvoj teorije stabilnosti u XIX veku nastavlja Maxwell, koji je u radu objavljenom 1868. godine, pomoću diferencijalnih jednačina, opisao ponašanje centrifugalnog regulatora, linearizovao ovaj model u okolini stanja ravnoteže i pokazao da stabilnost sistema zavisi od toga da li koreni karakteristične jednačine imaju negativne realne delove. Ovaj algebarski problem Maxwell je

rešio delimično za kvadratnu i kubnu jednačinu, a Routh je u svom nagrađenom radu dao uopštenje za linearne sisteme bilo kog reda.

Ruski matematičar A. M. Lyapunov je dao najveći doprinos razvoju teorije stabilnosti, objavljivanjem svoje doktorske disertacije, 1892. godine, pod nazivom *Opšti problem stabilnosti kretanja*. On je definisao opšte koncepte stabilnosti i za linearne i za nelinearne sisteme. U njegovoj disertaciji se prvi put pojavljuje precizna definicija stabilnosti. Disertacija A. M. Lyapunova nudi dve metode za analizu stabilnosti. Prva metoda je metoda linearizacije, u kojoj se stabilnost nelinearnog sistema ispituje analizom stabilnosti linearnog modela, koji se dobija linearizacijom nelinearnog sistema u okolini stanja ravnoteže. Ovom metodom može se analizirati lokalna stabilnost nelinearnog sistema. U drugoj metodi, poznatoj kao direktna metoda, vrši se indirektna analiza stabilnosti tako što se formira skalarna funkcija koja je definisana za zadati sistem i koja mora imati određene osobine kako bi na određeni način reprezentovala potencijalnu energiju sistema. Zatim se vrši analiza ponašanja formirane funkcije tokom vremena radi ustanovljenja stabilnosti.

Koncepti stabilnosti ekoloških sistema razvijani su na više različitih načina (McCann, 2000). Uglavnom je njihovo značenje fokusirano na sposobnost sistema da se, u prisustvu perturbacija, održi ili da se vrati u ravnotežno stanje, u smislu sastava vrsta i veličine populacije. Kao što je rečeno u knjizi [63], načini na koje posmatramo i izučavamo postojeće ekosisteme dobro se slažu sa našim matematičkim reprezentacijama u modelima, ali "the fit is not perfect". Matematičke definicije stabilnosti su često zahtevnije od onih koje bismo mogli bazirati na posmatranjima, pod datim pretpostavkama i u datom kontekstu. Sa druge strane, sam pojam stabilnosti, onako kako ga je uveo Lyapunov, često nije dovoljan pokazatelj, jer podrazumeva prolazak kroz stanja koja mogu biti nedopustiva za dati realni ekosistem.

Zbog toga je, svakako, izazov kako da izaberemo okvir, koji će obuhvatiti dovoljno biološkog realizma i kompleksnosti, a istovremeno biti pogodan, kako za empirijsku, tako i za matematičku analizu.

### 2.3.3.1 Asimptotska stabilnost

Da bismo matematički opisali stabilnost u smislu Lyapunova (što je standardna definicija stabilnosti u oblasti dinamičkih sistema), podsetimo se izgleda našeg modela (2.6):

$$\dot{x}(t) = \Phi(x(t)),$$

čije ponašanje ispitujemo u ravnotežnom stanju  $x^* \in \mathbb{R}^n$ .

Takođe, podsetimo se da je

$$\Phi(x) = A(x - x^*) + o(\|x - x^*\|^2), \quad (2.11)$$

gde je matrica  $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$  Jakobijan funkcije  $\Phi$  izračunat u tački  $x^*$

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x^*).$$

Kažemo da je dinamički sistem (2.6) u ekvilibrijumu  $x^*$ , u smislu Lyapunova, lokalno

- **stabilan** ako za svako  $\varepsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takvo da svaka trajektorija koja počinje u  $\delta$ -okolini tačke  $x^*$  ostaje u  $\varepsilon$ -okolini te tačke, tj. za svako  $x(0)$  takvo da je  $\|x(0) - x^*\| < \delta$ ,  $\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$  važi za svako  $t > 0$ ;
- **asimptotski stabilan** ako je stabilan i postoji  $\delta > 0$  takvo da svaka trajektorija koja počinje u  $\delta$ -okolini tačke  $x^*$  teži da se vrati u tačku  $x^*$ , tj.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$ ;
- **eksponencijalno stabilan** ako je asimptotski stabilan i postoji  $\delta > 0$  takvo da svaka trajektorija koja počinje u  $\delta$ -okolini tačke  $x^*$  teži da se vrati u tačku  $x^*$  eksponencijalnom brzinom, tj. postoje  $M > 0$  i  $K > 0$  takvi da za svako  $x(0)$  za koje je  $\|x(0) - x^*\| < \delta$ ,  $\|x(t) - x^*\| < Me^{-Kt}\|x(0) - x^*\|$  važi za svako  $t > 0$ .

U specijalnom slučaju LTIDS, kada je  $\Phi$  linearna funkcija, navedeni koncepti stabilnosti važe *globalno*. Šta više, LTIDS može biti ili (globalno) eksponencijalno stabilan ili (globalno) nestabilan, tj. Lyapunov stabilnost, asimptotska stabilnost i eksponencijalna stabilnost su u ovom slučaju ekvivalentni pojmovi.

Sa druge strane, za nelinearne TIDS, na osnovu (2.11), zaključak o stabilnosti odgovarajućeg LTIDS određenog Jakobijanom (linearizacijom), možemo preneti na zaključak o lokalnoj asimptotskoj stabilnosti datog nelinearnog TIDS.

Primetimo da, zbog ekvivalencije vektorskih normi, pomenute osobine stabilnosti ne zavise od korišćene norme  $\|\cdot\|$ . Drugim rečima, ovi koncepti su invarijantni na način na koji merimo stanja dinamičkog sistema. Sa jedne strane, to predstavlja koristan aspekt, jer prirodno očekujemo da ravnoteža nekog fizičkog procesa ne zavisi od načina merenja njegovih stanja. Međutim, ukoliko se radi o stabilnom ekvilibrijumu, određene mere mogu biti adekvatnije od drugih, omogućiti finije zaključke, biti konzervativnije i bolje prikazivati realno ponašanje sistema. Imajući u vidu da ćemo se mi baviti gustinama biomase, mnogo smo više zainteresovani za njihovu evoluciju u specifičnoj normi (obično Euklidskoj vektorskoj normi  $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$  ili maksimum normi  $\|x\|_\infty := \max_i |x_i|$ ), nego za apstraktno tumačenje asimptotike (koje odgovara postojanju apstraktne norme u kojoj će sistem imati "lepo" ponašanje).

Zbog toga, da bismo ocenili *ekološku stabilnost*, umesto da koristimo samo asimptotsku stabilnost, kao što je to uobičajeno, mi ćemo je adaptirati u drugačiji koncept stabilnosti, koji uključuje oba, i kratkoročno i dugoročno kvadratno (euklidska norma) ili maksimalno (max norma) odstupanje od ekvilibrijuma, koje se bazira na funkciji evolucije linearizacije datog TIDS:

$$\phi_A(t) := \|e^{tA}\|, \quad t \geq 0,$$

koja zavisi od izabrane norme  $\|\cdot\|$ . Grafik ove krive se u literaturi naziva još i *amplifikacioni omotač* dinamičkog sistema (2.6).

### 2.3.3.2 Vreme povratka i rezilijentnost

Kao što smo napomenuli, iako je matematička stabilnost, u smislu Lyapunova, veoma informativna o dinamičkim svojstvima ravnotežnih stanja realnih procesa, često je neophodno doći do finijih zaključaka koji su izvan dometa ovog, u svojoj suštini, asimptotskog koncepta. Jedan od faktora koji je relevantan u ovom smislu je takozvano *vreme povratka* u ravnotežno stanje.

Najkraće vreme, koje je neophodno da se početni poremećaj ravnoteže  $x^*$  (perturbacija ekvilibrijuma  $x^*$ ) smanji ispod  $e^{-1} \approx 37\%$ , u nekoj meri (vektorskoj normi) naziva se *vreme povratka*. S obzirom da o lokalnoj asimptotskoj stabilnosti nelinearnog TIDS zaključujemo na osnovu (globalne) stabilnosti LTIDS određenog Jakobijanom  $A$ , vreme povratka (*return time*) u zadatoj vektorskoj normi  $\|\cdot\|_v$  ovde definišemo kao

$$t_A^{v,RT} = \min \left\{ t > 0 : \max_{x(0) \neq x^*} \frac{\|x(t) - x^*\|_v}{\|x(0) - x^*\|_v} \leq e^{-1} \right\}. \quad (2.12)$$

Pored ove definicije vremena povratka, koja je vezana za određenu normu u kojoj merimo poremećaj, postoji još i vreme povratka invarijantno u odnosu na normu (*norm invariant return time*):

$$t_A^{NIRT} = \min \left\{ t_A^{v,RT} > 0 : \|\cdot\|_v \text{ je vektorska norma} \right\}. \quad (2.13)$$

Naglasimo da je, za realne procese, vreme povratka od ključnog značaja, jer, za razliku od matematičkih apstrakcija, u realnim okolnostima vremenska skala igra osnovnu ulogu. U terminima ekosistema, vrlo je diskutabilno da li jedno ravnotežno (Lyapunov asimptotski) stabilno stanje, čije je vreme povratka par stotina ili hiljada godina, možemo uopšte smatrati stabilnim u ekološkim terminima. Na primer, ako nekom sistemu tla treba par vekova da povrati mali poremećaj ravnotežne raspodele biomase po funkcionalnim grupama organizama, čiji je period razmnožavanja mnogo kraći od godine dana, teško da možemo zaključiti da je takva ravnoteža tog ekosistema stabilna u realnim terminima.

Na osnovu ovog koncepta vremena povratka, u literaturi je razvijen poznati pokazatelj lokalne/globalne stabilnosti nelinearnog/linearnog TIDS koji se naziva *rezilijentnost*, odnosno *otpornost*. Rezilijentnost TIDS (2.6) se definiše kao recipročna vrednost vremena povratka. Ovde ćemo je označiti sa  $\rho_A$ :

$$\rho_A = \frac{1}{t_A^{NIRT}}.$$

U slučaju kada (L)TIDS nije asimptotski stabilan, smatraćemo  $t_A^{NIRT}$  beskonačnim, pa tada smatramo da je rezilijentnost jednaka nuli. Drugim rečima, sistem nije otporan.



Ovako definisan pokazatelj kvantifikuje koliko je ravnoteža nekog (L)TIDS asimptotski stabilna. Što je rezilijentnost ravnoteže sistema veća, to je ona stabilnija, čime se omogućava adekvatnija procena stabilnosti ravnoteže realnog procesa koji je tim sistemom modelovan.

### 2.3.3.3 Tranziciono ponašanje i reaktivnost

Kao što smo videli, jedan od načina da profinimo razumevanje stabilnosti dinamičkih sistema jeste korišćenje pojma rezilijentnosti, koji je povezan sa vremenom povratka u stanje ravnoteže nakon poremećaja ravnotežnog stanja. Međutim, postoji i drugi faktor koji isto tako može biti limitiran, kao što je limitirana vremenska skala u kojoj se odvijaju fizički procesi. Naime, asimptotska stabilnost, a time i rezilijentnost, govore *samo* o povratku u ravnotežno stanje, pri tome ne pružajući nikakvu informaciju o ponašanju sistema u međuvremenu.

Ponašanje TIDS, od trenutka  $t = 0$ , kada je sistem nekim uticajem izveden iz stanja ravnoteže  $x^*$  u stanje  $x(0)$ , sve do vremena njegovog povratka  $t_A^{NIRT}$  u tačku ravnoteže, naziva se *tranziciono ponašanje*.

Ako uporedimo Slike 2.1 i 2.3, možemo zaključiti da se, za razliku od jednodimenzionalnog linearnog dinamičkog sistema, koji može imati samo eksponencijalni rast, ravnotežu ili eksponencijalni pad, već LTIDS sa samo dve komponente može ponašati na vrlo različite načine. Dakle, pre nego što se ispolji asimptotska stabilnost, funkcija evolucije datog sistema može proći kroz faze, moguće i kritičnog, rasta, tj. *amplifikacije*.

Posledice ovakvog ponašanja su vrlo konkretne u slučaju realnih procesa. U kontekstu populacionih modela, jasno je da svaki ekosistem ima određeni maksimalan broj jedinki određene populacije, koje može podneti bez gubitka svog integriteta. Drugim rečima, dinamički sistem kojim modelujemo realan ekosistem implicitno pretpostavlja da se broj jedinki, odnosno biomasa ili njena gustina, kreću unutar maksimalnih mogućih vrednosti karakterističnih za svaku od populacija. Ove veličine se u literaturi često nazivaju i *realni nosivi kapaciteti* sistema.

Ukoliko je asimptotski stabilan dinamički sistem takav da njegova funkcija evolucije, u datoj ravnotežnoj tački, mora da prođe kroz amplifikaciju takvu da se mali početni poremećaj ravnoteže toliko

pojača, da prevazilazi realni nosivi kapacitet sistema, tada, iako će se dinamički sistem u kasnijoj fazi vratiti u blizinu ravnotežne tačke, integritet realnog ekosistema je već narušen, te stoga nije smisleno smatrati takvu ravnotežu ekološki stabilnom.

Drugim rečima, rezilijentnost nije sama po sebi dovoljno dobar pokazatelj stabilnosti u njenom realističnom smislu. Iz tog razloga se obično posmatra i jedno drugo dinamičko svojstvo ravnotežne tačke, koje je konzervativnije od rezilijentnosti. Ono se naziva *reaktivnost* i predstavlja maksimalnu početnu stopu odstupanja od ravnotežne tačke dinamičkog sistema. Za TIDS to, konkretnije, znači početnu stopu rasta (ili opadanja) funkcije evolucije u određenoj normi. Prema tome, reaktivnost, koju ćemo označavati sa  $\nu_A$ , predstavlja nagib tangente na amplifikacioni omotač u tački  $t = 0$ . Zato za ekvilibrijum TIDS za koji je reaktivnost nenegativna kažemo da je *reaktivan*, jer se početna perturbacija ravnoteže najpre pojačava (ili eventualno ostaje ista). Nasuprot tome, ukoliko ekvilibrijum ima negativnu reaktivnost, tada se početna perturbacija ravnoteže odmah smanjuje, pa kažemo da je takav ekvilibrijum *nereaktivan*.

S obzirom da se, prema [37], reaktivnost u slučaju TIDS svodi na minimalni eksponent inicijalnog rasta, tj.

$$\nu_A = \min \{ K > 0 : \|x(t) - x^*\| \leq e^{Kt} \},$$

lako zaključujemo da je svaki nereaktivan ekvilibrijum TIDS ujedno i (lokalno) asimptotski stabilan. Dakle, nereaktivnost ravnoteže TIDS je zahtevnija osobina od stabilnosti, jer podrazumeva da se smanjenje poremećaja odmah ispoljava i to bez mogućeg tranzicionog ponašanja.

Primetimo da, dok je rezilijentnost invarijantna u odnosu na korišćenu normu u kojoj merimo poremećaje, reaktivnost zavisi od posmatrane norme, tj. zavisi od načina merenja perturbacije. Tako jedan sistem, na primer, u maksimum normi može biti reaktivan, dok je u euklidskoj normi nereaktivan.

Konačno, iako asimptotski stabilno ravnotežno stanje može biti reaktivno, to ne mora automatski da znači da će funkcija evolucije proći kroz kritičnu fazu pojačanja početne perturbacije. Drugim rečima, kako bismo na adekvatan način opisali ekološku stabilnost, potrebno je često pronaći zlatnu sredinu između nereaktivnosti, koja je prekonzervativna, i rezilijentnosti, koja je, pak, previše slab zahtev.

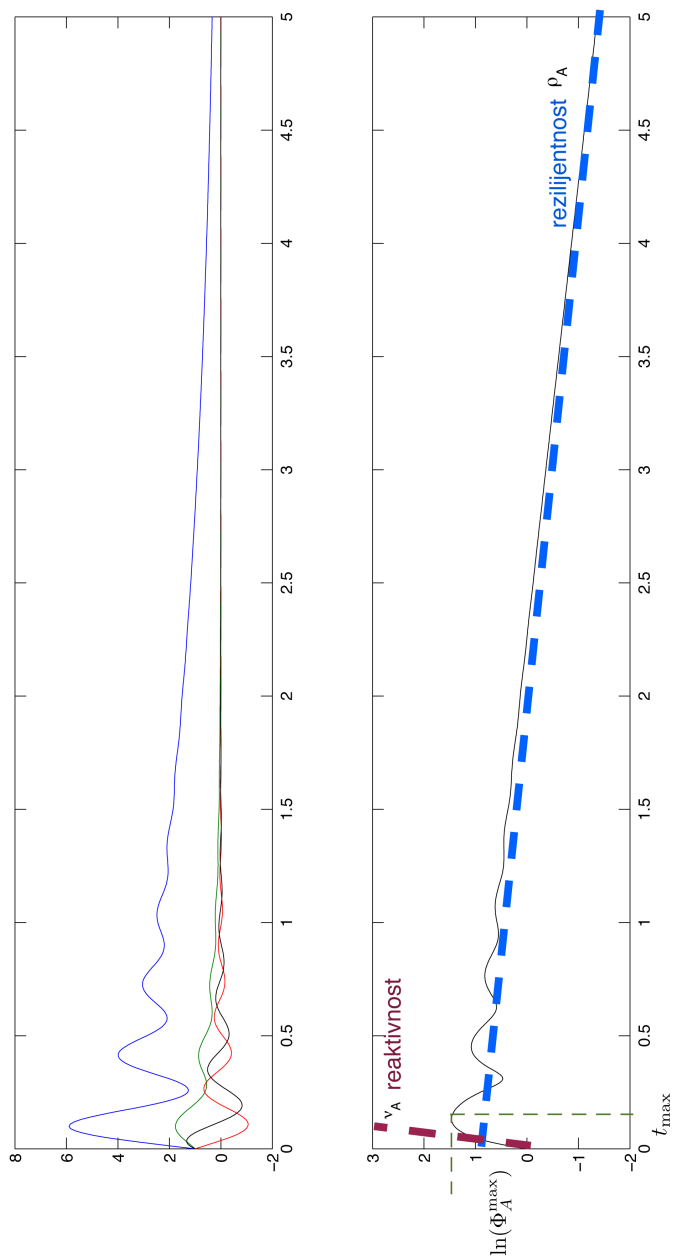
U tu svrhu, kao značajan pokazatelj tranzicionog ponašanja, može se posmatrati *maksimalna amplifikacija*, kao i vreme u kome je dostignuta. Kao što joj ime kaže, maksimalna amplifikacija je najveći mogući faktor kojim se neka početna perturbacija može pojačati. Označavamo je sa  $\phi_A^{\max}$  i definišemo sa

$$\phi_A^{\max} = \max_{t \geq 0} \max_{x(0) \neq x^*} \frac{\|x(t) - x^*\|}{\|x(0) - x^*\|},$$

što se za LTIDS svodi na

$$\phi_A^{\max} = \max_{t \geq 0} \phi_A(t).$$

Svi pomenuti pokazatelji dinamičkih osobina ravnotežnih stanja (L)TIDS su ilustrovani na Slici 2.5 i predstavljaju osnovni alat u ovoj disertaciji. Stoga će njihove matematičke osobine biti detaljnije izložene u narednom poglavlju.



Slika 2.5: Ilustracija trajektorije LTIDS od  $n = 4$  komponente. Gore je prikaz sve četiri komponente, a dole je prikazana funkcija evolucije u euklidskoj normi na logaritamskoj vertikalnoj skali, na kojoj su označeni i reaktivnost  $\nu_A$ , maksimalna amplifikacija  $\phi_A^{\max}$ , vreme njenog dostizanja  $t_{\max}$  i rezilijentnost  $\rho_A$



# 3

## Indikatori ponašanja LTIDS

U ovom poglavlju posvetićemo se linearnom dinamičkom sistemu invarijantnom u vremenu (LTIDS), koji, kao što smo imali prilike da vidimo u prethodnom poglavlju, predstavlja adekvatnu osnovu za ispitivanje dinamičkih svojstava ravnotežnih stanja nelinearnih TIDS. Dakle, u ovom poglavlju, upravljajuća funkcija je linearna, tj.  $\Phi$  se može reprezentovati nekom kvadratnom matricom  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , pa se bavimo sistemima čija se stanja  $x$  ponašaju prateći zakonitost

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0,$$

odnosno koja su oblika

$$x(t) = e^{tA}x(0).$$

Takođe, pretpostavićemo da je matrica  $A$  regularna, tj. da je ravnotežna tačka jedinstveno određena. Tada je jedini ekvilibrijum  $x^* = 0$  i njegova dinamička svojstva su u potpunosti određena ponašanjem funkcije evolucije

$$\phi_A(t) = \|e^{tA}\|, \quad t \geq 0.$$

Stoga ćemo, u sledeće tri sekcije, pružiti detaljnije uvide u ponašanje funkcije evolucije, koristeći odgovarajuće matricne osobine već poznate u literaturi, dok će četvrta sekcija biti posvećena alternativnim pristupima koji su nastali tokom rada na ovoj distertaciji.

### 3.1 Spektar

Jedna od najviše istraživanih karakteristika matrica, još od samih početaka ove matematičke teorije, jesu *karakteristični koreni*. Ove skalarne veličine su, zapravo, i nastale sa ciljem da se objasni matrica kao linearno preslikavanje, preko karakterističnih pravaca jednog vektorskog prostora koje ta matrica ostavlja invarijantnim (koji se nazivaju *karakteristični vektori*), kao i tih skalarnih veličina koje govore o smeru i intenzitetu delovanja duž takvih pravaca.

Matematički precizno, za datu kvadratnu matricu  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , (moguće kompleksni) skalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  se naziva karakteristični koren, a nenula vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  se naziva njegov karakteristični vektor, ako važi

$$Ax = \lambda x. \quad (3.1)$$

Dobro je poznato da se, za datu realnu kvadratnu matricu  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , skup svih njenih karakterističnih korena, u literaturi nazvan *spektar* matrice, sastoji iz tačno  $n$  vrednosti (koje mogu biti realni ili konjugovano kompleksni brojevi), računajući da se neke od njih mogu ponavljati.

Oznaka koju ćemo koristiti za spektar matrice  $A$  je  $\Lambda(A)$ . Poznato je da je ekvivalentna definicija spektra

$$\Lambda(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda E - A) = 0\}, \quad (3.2)$$

gde je  $\det(\cdot)$  oznaka za determinantu, a  $E$  za jediničnu matricu. Drugim rečima, spektar  $\Lambda(A)$  je skup svih vrednosti  $\lambda$  takvih da matrica  $\lambda E - A$  (koja se naziva *karakteristična matrica*) postaje singularna.

Sa druge strane, dobro je poznato da skup svih karakterističnih vektora koji odgovaraju jednom karakterističnom korenu generišu potprostor (drugim rečima linearnim kombinovanjem karakterističnih vektora istog karakterističnog korena dobijamo uvek karakteristični vektor tog istog korena), međutim, odnos takvih različitih *karakterističnih potprostora* može biti složen.

Naime, u idealnom slučaju, svi takvi karakteristični prostori zajedno čine ceo prostor  $\mathbb{R}^n$  i to tako da, kada se uzmu za svaki karakteristični koren njegovi linearno nezavisni karakteristični vektori, dobijamo, zapisujući matrično sve relacije oblika (3.1), da važi

$$AX = XD,$$

gde je  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  dijagonalna matrica, čiji su elementi upravo karakteristični koreni matrice  $A$ , a

$$X = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} x^1 & x^2 & \cdots & x^n \end{array} \right]$$

kvadratna matrica čije su kolone odgovarajući (linearno nezavisni) karakteristični vektori. Usled pomenute linearne nezavisnosti, matrica  $X$  je regularna, pa zaključujemo da se matrica  $A$  može zapisati kao

$$A = XDX^{-1},$$

što se naziva *dekompozicija preko karakterističnih korena*.

Ako je, pri tome, matrica  $A$  takva da se skup svih karaktersitičnih vektora može ortogonalizovati, drugim rečima ako postoji  $n$  ortogonalnih karakterističnih vektora matrice  $A$ , tada matrica  $V$  sačinjena od takvih ortogonalnih i normiranih karakterističnih vektora  $v^1, v^2, \dots, v^n$  ima sledeću važnu osobinu

$$V^{-1} = V^H,$$

odnosno

$$V^H V = V V^H = E,$$

gde  $(\cdot)^H$  označava hermitovanje (tj. transponovanje matrice i kompleksnu konjugaciju njenih elemenata). Za takvu matricu  $V$  kažemo da je *unitarna*. U ovakvom slučaju, matrica  $A$  se može zapisati kao

$$A = V D V^H,$$

što nazivamo *unitarnom dijagonalizacijom*.

Matrice sa ovom osobinom nazivaju se *normalne* matrice. Poznato je da su to upravo one matrice koje komutiraju sa svojim hermitovanim matricama, tj. za koje je

$$A A^H = A^H A.$$

Pre nego što damo potpunu karakterizaciju ponašanja funkcije evolucije za proizvoljnu matricu  $A$ , ograničimo se, najpre, na normalne matrice. Naime, ako je  $A$  normalna matrica, tada dobijamo da



za svako početno stanje  $x(0)$  trajektorija LTIDS ima oblik

$$x(t) = V \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} V^H x(0).$$

Dakle, u slučaju normalnih matrica, svaka komponenta trajektorije dobija se kao linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija  $e^{\lambda_k t}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Kako je, pri tome, svaki karakteristični koren  $\lambda_k$  (potencijalno) kompleksan broj, možemo pisati  $\lambda_k = \alpha_k + \mathbf{i} \beta_k$ , gde je  $\alpha_k = Re(\lambda_k)$  realni deo karakterističnog korena  $\lambda_k$ , a  $\beta_k = Im(\lambda_k)$  njegov imaginarni deo. Dakle, svaka komponenta trajektorije  $x(t)$  je oblika

$$x_k(t) = \xi_{k1} e^{\alpha_1 t} e^{\mathbf{i} \beta_1 t} + \xi_{k2} e^{\alpha_2 t} e^{\mathbf{i} \beta_2 t} + \dots + \xi_{kn} e^{\alpha_n t} e^{\mathbf{i} \beta_n t}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

za neke  $\xi_{kj}$ , te su  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  stope eksponencijalne promene *amplitude* osnovnih talasa, dok su  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  *frekvencije* osnovnih talasa čijom superpozicijom se dobija svaka komponenta trajektorije LTIDS.

Da bismo prokomentarisali asimptotsko ponašanje, zapišimo komponente trajektorije kao

$$x_k(t) = e^{\alpha_A t} \left( \xi_{k1} e^{(\alpha_1 - \alpha_A) t} e^{\mathbf{i} \beta_1 t} + \dots + \xi_{kn} e^{(\alpha_n - \alpha_A) t} e^{\mathbf{i} \beta_n t} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gde je  $\alpha_A = \max_i \alpha_i$ . Tada je, očigledno,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_k(t)| = C_k \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha_A t}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gde su  $C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  konstante. Veličina

$$\alpha_A := \max\{Re(\lambda) : \lambda \in \Lambda(A)\},$$

tj. maksimalan realni deo karakterističnih korena matrice  $A$ , poznata je pod nazivom *spektralna apscisa*. Ona je blisko povezana sa asimptotskom stabilnošću LTIDS, jer se za euklidsku vektorsku normu  $\|\cdot\|_2$ , koja je invarijantna na množenje unitarnim matricama, dobija

$$\phi_A(t) = \|e^{tA}\|_2 = \|e^{tD}\|_2 = \max_{k=1, \dots, n} |e^{\lambda_k t}| = \max_{k=1, \dots, n} e^{\alpha_k t} = e^{\alpha_A t}, \quad t > 0.$$

Očigledno, ako je  $\alpha_A$  negativna veličina, posmatrana ravnotežna tačka (nula) LTIDS je eksponencijalno stabilna.

Što se tiče kvantifikovanja takve stabilnosti u terminima rezilijentnosti i vremena povratka, na osnovu (2.12) imamo da je

$$t_A^{2,RT} = \min \{t > 0 : e^{\alpha_A t} \leq e^{-1}\},$$

pa je euklidsko vreme povratka jednako recipročnoj vrednosti spektralne apscise, sa promenjenim znakom, tj.

$$t_A^{2,RT} = -\frac{1}{\alpha_A}.$$

Drugim rečima, postoji jasna veza između rezilijentnosti i spektralne apscise.

Na osnovu prethodno izloženog, zaključujemo da se asimptotsko ponašanje trajektorija *normalnih* LTIDS svodi na znak realnih delova karakterističnih korena i da je vreme povratka određeno spektralnom apscisom. Međutim, slično tvrđenje važi i za opšti LTIDS.

**Teorema 3.1.** *Neka su  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  i  $x(0) \in \mathbb{R}^n$ , redom, proizvoljna matrica i proizvoljan vektor. Tada za svaku komponentu  $x_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , trajektorije  $x(t)$  LTIDS*

$$\dot{x} = Ax$$

*važi da  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$  ako i samo ako se svaki karakteristični koren  $\lambda$  matrice  $A$  nalazi levo od imaginarne ose u kompleksnoj ravni, tj. ako je  $\text{Re}(\lambda) < 0$ . Dakle,  $x^* = 0$  je (globalno) eksponencijalno stabilan ekvilibrijum LTIDS ako i samo ako je spektralna apscisa  $\alpha_A$  negativna. U tom slučaju rezilijentnost LTIDS je određena sa  $\rho_A = -\alpha_A$ , a vreme povratka u ravnotežu invarijantno u odnosu na normu sa  $t_A^{NIRT} = -\alpha_A^{-1}$ .*

Prema tome, stabilnost (asimptotska = eksponencijalna) ravnotežnog stanja (nule) LTIDS, kao i njeni kvantitativni pokazatelji rezilijentnost i vreme povratka, u potpunosti su određeni spektrom matrice, preciznije, spektralnom apscisom.

## 3.2 Pseudospektar

Generalno govoreći, karakteristični koreni matrica u mnogim slučajevima daju odličan uvid u *dinamičke* osobine posmatranih sistema. Međutim, to nije uvek slučaj, vidi [78].

Da bismo jasno razumeli razlog tome, posmatrajmo LTIDS. Kao što smo već uočili, u slučaju kada je matrica normalna, evoluciona funkcija u euklidskoj normi je, zapravo, eksponencijalna funkcija sa stopom određenom spektralnom apscisom:

$$\phi_A(t) = \|e^{At}\|_2 = e^{\alpha_A t}.$$

Dakle karakteristični koreni u postpunosti objašnjavaju dinamička svojstva - ne samo asimptotska. Međutim, ukoliko matrica  $A$  nije normalna, evoluciona funkcija, kao što to ilustruje Slika 2.3, može imati vrlo različito ponašanje, pre nego što se ispolji asimptotika.

Dakle, postavlja se pitanje koja osobina matrice je ta koja može objasniti to tranziciono ponašanje. Takve preciznije informacije mogu se dobiti korišćenjem *pseudospektra*. Iz tog razloga, u ovoj sekciji dajemo kratak pregled osnovnih informacija o ovom zanimljivom uopštenju pojma spektra. Preciznije, navešćemo osnovne pojmove vezane za pseudospektar, ekvivalentne definicije pseudospektra, odnos prema običnom spektru matrica, kao i neke njegove osobine. Na kraju, pokazaćemo na koji to način pseudospektar govori o tranzicionom ponašanju.

Podimo od činjenice da, posmatrano sa stanovišta primenjene matematike, pitanje: *Da li je  $A$  singularna matrica?* često nema puno smisla. Naime, proizvoljno mala perturbacija matrice može promeniti odgovor na to pitanje iz pozitivnog u negativan.

S obzirom da se pitanje: *Da li je  $\lambda$  karakteristični koren matrice  $A$ ?* može ekvivalentno postaviti u obliku: *Da li je  $\lambda E - A$  singularna matrica?* i tu nailazimo na isti problem. Stoga je potrebno preformulisati ovo pitanje tako da uzmemo u obzir osetljivost na perturbacije matrice  $A$ .

U terminima LTIDS, ovog puta ne posmatramo perturbacije ravnotežnog stanja dinamičkog sistema, već perturbacije upravljajućih zakonitosti! Na primeru populacionih modela o kojima smo govorili, to

znači da pored poremećaja u brojnosti pojedinih populacija želimo da tretiramo i poremećaje *odnosa* između populacija. Svakako, u realnim procesima koji nas interesuju takvi poremećaji ne samo da su mogući, već su, zapravo, od ključnog interesa.

Za matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i broj  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$ -*pseudospektor* matrice  $A$  u normi  $\|\cdot\|$  predstavlja skup svih vrednosti  $z \in \mathbb{C}$ , takvih da je

$$z \in \Lambda(A + \Delta)$$

za neku matricu  $\Delta \in \mathbb{C}^{n,n}$ , za koju je  $\|\Delta\| < \varepsilon$ . Drugim rečima,  $\varepsilon$ -pseudospektor je skup kompleksnih brojeva koji su karakteristični koreni neke perturbovane matrice  $A + \Delta$ , sa osobinom da je  $\|\Delta\| \leq \varepsilon$ . Ako pseudospektor matrice  $A$  označimo sa  $\Lambda_\varepsilon(A)$ , to znači da je

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \bigcup_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \Lambda(A + \Delta). \quad (3.3)$$

Iz ove definicije jasno se vidi da za pseudospektre matrice  $A$  koji odgovaraju različitim  $\varepsilon$  važi

$$\Lambda(A) = \Lambda_0(A) \subseteq \Lambda_{\varepsilon_1}(A) \subseteq \Lambda_{\varepsilon_2}(A), \quad \text{ako je } 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2,$$

Drugim rečima, povećanjem parametra  $\varepsilon$ , počevši od  $\varepsilon = 0$ , oblast  $\Lambda_\varepsilon$  u kompleksnoj ravni narasta iz spektra u sve širi i širi skup.

Ova definicija, očigledno, zavisi od izbora norme (usled čega se u literaturi susreću i termini 1-pseudospektor, 2-pseudospektor i  $\infty$ -pseudospektor, što se, redom, odnosi na slučaj norme 1, norme 2 i norme  $\infty$ ), što praktično znači da će se skup  $\Lambda_\varepsilon(A)$  na različite načine širiti, u zavisnosti od načina na koji merimo perturbacije matrice  $A$ . Ako bismo želeli da budemo precizniji, morali bismo uključiti još jedan simbol u notaciju za pseudospektor, jer vrednost koju predstavlja zavisi od matične norme ( $\|\cdot\|$ ). Međutim, bez opasnosti od zabune, zadržaćemo se na skraćenoj notaciji  $\Lambda_\varepsilon(A)$ , jer ćemo u nastavku tretirati slučajeve  $p = \infty$  i  $p = 2$  uvek jasno razdvojene.

Kako bismo praktično upotreбили ovaj koncept, neophodno je da pronađemo tehnički upotrebljiviju formulaciju. Do takve pogodne formulacije karakterističnih vrednosti, koje uzimaju u obzir strukturalne

promene u matrici, dolazimo na osnovu sledeće činjenice: *što je matrica  $A$  bliža singularnoj matrici, to je matrica  $A^{-1}$  veća, u smislu da je norma te matrice veći broj*. Dakle, možemo postaviti pitanje: *Da li je u nekoj normi vrednost  $\|A^{-1}\|$  velika?* Grubo govoreći, ako je odgovor da, onda je matrica jako blizu nekoj singularnoj matrici, pa je, za praktične svrhe, možemo smatrati singularnom. Obrnuto, ako je odgovor ne, matrica će i uz male perturbacije ostati regularna.

Ako ovo rezonovanje primenimo na problem karakterističnih korena, dolazimo do zaključka da bi od interesa mogli biti oni brojevi  $z$ , za koje  $\|(zE - A)^{-1}\|$  ima veliku vrednost. Ovim načinom razmišljanja dolazimo do ekvivalentne definicije pseudospektra, vidi [78]. Naime, za matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i broj  $\varepsilon > 0$   $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$  u normi  $\|\cdot\|$  se može zapisati i kao

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \|(zE - A)^{-1}\| \geq \varepsilon^{-1}\}. \quad (3.4)$$

Pri tome, matrica  $(zE - A)^{-1}$  naziva se *rezolventa* matrice  $A$  u tački  $z$  i važi konvencija da je

$$\|(zE - A)^{-1}\| = \infty \text{ ako je } z \in \Lambda(A),$$

tj. ako je  $z$  karakteristični koren matrice  $A$ . I iz ove ekvivalentne definicije se jasno vidi da je  $\varepsilon$ -pseudospektar podskup kompleksne ravni koji uvek sadrži spektar matrice, i to za svako  $\varepsilon > 0$ .

Intuitivno možemo pretpostaviti da je veličina  $\|(zE - A)^{-1}\|$  velika upravo onda kada je tačka  $z$  veoma blizu nekom karakterističnom korenu matrice  $A$ . Međutim, nešto kasnije ćemo videti da tačnost naše intuicije zavisi od izbora matrične norme i normalnosti same matrice.

Pored ove dve karakterizacije  $\varepsilon$ -pseudospektra (3.3) i (3.4) koje se odnose na proizvoljnu normu  $\|\cdot\|$ , u nastavku ćemo koristiti još jednu karakterizaciju, posebno korisnu u praksi numeričkog izračunavanja, koja je specifična za euklidsku normu  $\|\cdot\|_2$ .

Naime, ako se podsetimo da je maksimalna singularna vrednost neke matrice jednaka njenoj normi 2, vidimo da, u slučaju norme 2, važi

$$\|(zE - A)^{-1}\|_2^{-1} = \sigma_{\min}(zE - A),$$

gde smo sa  $\sigma_{\min}(zE - A)$  označili najmanju singularnu vrednost matrice  $zE - A$ . To nam daje za pravo da  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$

u euklidskoj normi okarakterišemo na još jedan način:

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min}(zE - A) \leq \varepsilon\}. \quad (3.5)$$

Pre nego što nastavimo dalje, navedimo neke od važnih osobina pseudospektra koje će igrati ulogu u nastavku disertacije:

- $\Lambda_\varepsilon(A)$  je neprazan, zatvoren i ograničen skup, koji ima najviše  $n$  nepovezanih oblasti, od kojih svaka sadrži bar jedan karakteristični koren.
- Ako je  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ , tada je  $\Lambda_\varepsilon(A^H) = \overline{\Lambda_\varepsilon(A)}$ .
- Za proizvoljnu konstantu  $c$  važi  $\Lambda_\varepsilon(cE + A) = c + \Lambda_\varepsilon(A)$ .
- Za proizvoljnu konstantu  $c \neq 0$  važi  $\Lambda_{|c|\varepsilon}(cA) = c\Lambda_\varepsilon(A)$ .

Vratimo se sada na osnovno pitanje koje je i motivisalo ovu sekciju *Zašto postoji tranziciono ponašanje evolutivne funkcije kod matrica koje nisu normalne?*

Odgovor na ovo pitanje krije se u čuvenom tvrđenju, poznatom pod nazivom Kreiss-ova matična teorema. Mi je ovde navodimo u obliku koji je, daleko kasnije, upotpunjen zahvaljujući radu Spijker-a.

**Teorema 3.2** (Kreiss-Spijker). *Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  proizvoljna matrica i neka je  $\|\cdot\|$  proizvoljna konzistentna matična norma. Ako je*

$$\mathcal{K}(A) := \sup_{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(z) > 0} \operatorname{Re}(z) \|(zE - A)^{-1}\| < \infty,$$

*tada je  $x^* = 0$  (globalno) eksponencijalno stabilan ekvilibrijum LTIDS  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  i pri tome je*

$$\mathcal{K}(A) \leq \phi_A^{\max} = \max_{t \geq 0} \|e^{tA}\| \leq en\mathcal{K}(A).$$

Veličina  $\mathcal{K}(A)$  se naziva *Kreiss-ova konstanta* i, kao što vidimo, ona predstavlja procenu maksimalne amplifikacije funkcije evolucije. Uzimajući u obzir karakterizaciju pseudospektra (3.4), možemo primetiti da se ova konstanta može zapisati i kao

$$\mathcal{K}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\alpha_A^\varepsilon}{\varepsilon},$$

gde je  $\alpha_A^\varepsilon$   $\varepsilon$ -pseudospektralna apscisa matrice  $A$ , tj. realni deo tačke pseudospektra koja se nalazi najviše desno

$$\alpha_A^\varepsilon := \max\{\operatorname{Re}(z) : z \in \Lambda_\varepsilon(A)\}.$$

Stoga, možemo zaključiti da amplifikacija početne perturbacije ravnotežnog stanja zavisi od brzine kojom se  $\varepsilon$ -pseudospektar propagira u desnu poluravan kompleksne ravni. Pri tome, što su karakteristični koreni matrice *osetljiviji* na perturbacije u samoj matrici  $A$ , to će se više početna perturbacija ekvilibrijuma takvog LTIDS pojačati.

Da bismo uočili razliku između normalnih i nenormalnih matrica, fokusiraćemo se sada na slučaj euklidske norme. Pri tome, u nastavku, matrice koje nisu normalne zovemo *nenormalne* i to su one, podsetimo se, koje se ne mogu unitarno dijagonalizovati.

Primetimo, najpre, da ako je  $V$  unitarna matrica, odnosno ako je  $V^H = V^{-1}$ , tada je

$$(zE - V^H AV)^{-1} = \left(V^H(zE - A)V\right)^{-1} = V^H(zE - A)^{-1}V.$$

Kako je norma 2 invarijantna na unitarne transformacije, to je

$$\|(zE - V^H AV)^{-1}\|_2 = \|(zE - A)^{-1}\|_2 \text{ za svako } z \in \mathbb{C},$$

tj. euklidska norma rezolvente je, takođe, invarijantna na unitarne transformacije sličnosti, pa isto važi i za pseudospektar:

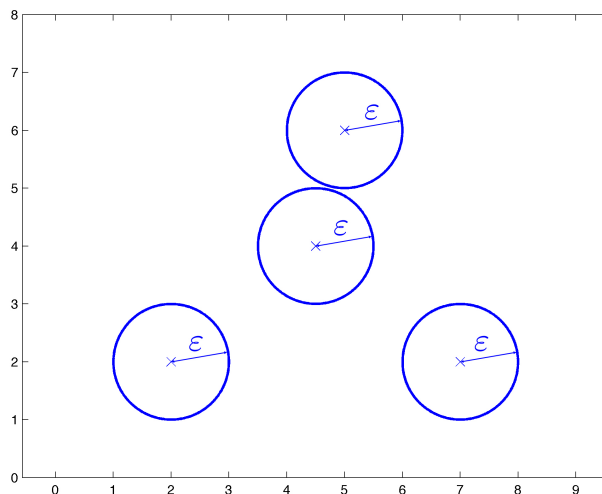
$$\Lambda_\varepsilon(A) = \Lambda_\varepsilon(V^H AV) = \Lambda_\varepsilon(D) \text{ za svako } \varepsilon > 0, \quad (3.6)$$

gde je  $D$  dijagonalna matrica sa karakterističnim korenima matrice  $A$  na dijagonali.

Dakle, za normalnu matricu  $A$ ,  $\varepsilon$ -pseudospektar je zapravo unija otvorenih  $\varepsilon$ -lopti oko tačkica spektra matrice, vidi Sliku 3.1, pri čemu za normu rezolvente važi:

$$\|(zE - A)^{-1}\|_2^{-1} = \|(zE - D)^{-1}\|_2^{-1} = \operatorname{dist}(z, \Lambda(A)),$$

pri čemu  $\operatorname{dist}(z, \Lambda(A))$  predstavlja uobičajenu udaljenost tačke  $z$  od skupa  $\Lambda(A)$  u kompleksnoj ravni.

Slika 3.1:  $\varepsilon$ -pseudospektar za normalnu matricu

U tom slučaju, Kreiss-ova konstanta, ukoliko je ograničena, tj. broj, jednaka je

$$\mathcal{K}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\alpha_A^\varepsilon}{\varepsilon} = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\alpha_A + \varepsilon}{\varepsilon} = 1,$$

što će reći da LTIDS, čija je matrica normalna, nema tranziciono ponašanje, maksimalna amplifikacija je jednaka 1 i postiže se u nultom vremenu  $t = 0$ .

Razmotrimo, sada, šta se dešava u slučaju nenormalnih matrica. Radi preglednosti, uvedimo oznaku

$$\zeta_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\} \quad (3.7)$$

za otvorenu loptu poluprečnika  $\varepsilon$ . Uz uobičajenu definiciju sume dva skupa, to znači da je

$$\Lambda(A) + \zeta_\varepsilon = \{z_1 + z_2 : z_1 \in \Lambda(A), z_2 \in \zeta_\varepsilon\} = \{z : \text{dist}(z, \Lambda(A)) < \varepsilon\}.$$

Pretpostavimo da matrica  $A$  ima dekompoziciju preko karakterističnih korena (ali ne i obavezno unitarnu dijagonalizaciju):

$$A = XDX^{-1},$$



tada za  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$  i za svako  $\varepsilon > 0$  važi (vidi [78]):

$$\Lambda(A) + \zeta_\varepsilon \subseteq \Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Lambda(A) + \zeta_{\varepsilon\kappa_2(X)},$$

gde je  $\kappa_2(X) := \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2$  uslovni broj matrice  $X$ . Napomenimo još i da je u normi 2 uslovni broj matrice  $X$

$$\kappa_2(X) := \|X\|_2 \|X^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{max}(X)}{\sigma_{min}(X)},$$

gde je  $\sigma_{max}(X)$  maksimalna, a  $\sigma_{min}(X)$  minimalna singularna vrednost matrice  $X$ . Napomenimo, takođe, da za datu matricu  $A$ , matrica  $X$  nije jedinstveno određena, tako da ni  $\kappa_2(X)$  nije jedinstveno određen za datu matricu  $A$ . Međutim, ako su svi karakteristični koreni matrice  $A$  različiti, a kolone matrice  $X$  (karakteristični vektori) normalizovani, tada je  $\kappa_2(X)$  jedinstveno određen.

Generalno važi  $\kappa_2(X) \geq 1$ , a jednakost  $\kappa_2(X) = 1$  važi ako i samo ako je  $A$  normalna matrica i tada i samo tada je

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \Lambda(A) + \zeta_\varepsilon, \quad \text{za svako } \varepsilon > 0.$$

Dakle, ako dijagonalizabilna matrica  $A$  nije normalna, tada imamo da je  $\Lambda(A) + \zeta_\varepsilon \subsetneq \Lambda_\varepsilon$  pa je Kreiss-ova konstanta

$$\mathcal{K}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\alpha_A^\varepsilon}{\varepsilon} > \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\alpha_A + \varepsilon}{\varepsilon} = 1,$$

tj., na osnovu Kreiss-Spijker teoreme, mora postojati tranziciono ponašanje, tj. tranzicioni rast.

Takođe, primetimo da maksimalna amplifikacija može dostizati i vrednosti koje su prilično velike.

Ono što je posebno interesantno, sa stanovišta teme ove disertacije, jeste da su upravo populacioni modeli ti koji produkuju matrice koje su daleko od normalnih. Drugim rečima, kod populacione dinamike se očekuje tranziciono ponašanje, te je primena pseudospektra pri ispitivanju njene stabilnosti neophodna i to

- za utvrđivanje stabilnosti koja je *robustna* u odnosu na matrice perturbacije, ograničene u datoj normi parametrom  $\varepsilon > 0$ , kao i
- za ispitavanje maksimalne amplifikacije evolucione funkcije.

### 3.3 Matrična mera

Do sada smo uočili da je asimptotsko ponašanje funkcije evolucije određeno spektralnom apscisom, dok je maksimalna amplifikacija tokom tranzicionog ponašanja određena propagacijom pseudospektralne apscise. Ostaje da uočimo matričnu osobinu koja će moći da objasni reaktivnost. Podsetimo se, reaktivnost LTIDS u datoj matričnoj normi  $\|\cdot\|$  je definisana kao nagib tangente na amplifikacioni omotač u početnom stanju, što je, prema definiciji izvoda, ekvivalentno sa

$$\nu_A = \lim_{t \searrow 0^+} \frac{\|E + tA\| - 1}{t}.$$

Ovaj izraz je u literaturi poznat kao *matrična mera* ili *logaritamska matrična norma*. Ono što je interesatno jeste da ova matrična mera, u specifičnim slučajevima maksimum norme i euklidske norme, takođe predstavlja apscisu određenih skupova u kompleksnoj ravni koji sadrže spektr matrice (slično kao što je to bio slučaj i sa pseudospektrom). Upravo zbog činjenice da ti skupovi sadrže spektr matrice, poznati su pod imenom *lokalizacije oblasti* spektra, a nazivaju se još i *lokalizacije karakterističnih korena*.

#### 3.3.1 Geršgorinova apscisa

Prva lokalizaciona oblast koju navodimo poznata je pod nazivom *Geršgorinov skup* koji je predstavljen u knjizi [82] o lokalizaciji karakterističnih korena date matrice. Za datu kvadratnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , Geršgorinov skup  $\Gamma(A)$  matrice  $A$  je skup u kompleksnoj ravni dobijen unijom  $n$  krugova, sa centrima u dijagonalnim elementima matrice  $A$ , dok su poluprečnici određeni sumom modula odgovarajućih vandijagonalnih elemenata, tj.

$$\Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A), \quad (3.8)$$

gde je, za  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A)\} \quad (3.9)$$

$i$ -ti Geršgorinov krug, a

$$r_i(A) := \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

njegov poluprečnik, određen sumom modula vandijagonalnih elemenata  $i$ -te vrste matrice  $A$ .

U ovim oznakama, poznata Geršgorinova teorema iz rada [31], glasi (vidi [82, Teorema 1.1]):

**Teorema 3.3. (Geršgorin)** *Za svaku kvadratnu matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$  i svaki karakterističan koren  $\lambda \in \Lambda(A)$  postoji indeks  $k \in N$  takav da je*

$$|\lambda - a_{kk}| \leq r_k(A). \quad (3.10)$$

*Stoga je  $\lambda \in \Gamma_k(A)$ , odakle sledi da je  $\lambda \in \Gamma(A)$ . Kako ovo važi za svaki karakterističan koren  $\lambda$ , važi:*

$$\Lambda(A) \subseteq \Gamma(A). \quad (3.11)$$

Lepota Geršgorinove teoreme leži u njenoj jednostavnosti. Naime, za proizvoljnu matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ , lako se izračunavaju vrednosti  $\{r_i(A)\}_{i \in N}$ , koje predstavljaju poluprečnike (radijuse)  $n$  krugova, čija unija sadrži čitav spektar ( $n$  karakterističnih korena) matrice  $A$ . Pri tome, raspored karakterističnih korena u pojedinačnim krugovima nije ravnomeran, već to varira od slučaja do slučaja. Međutim, Geršgorin je u svom originalnom radu [31] iz 1931. godine takođe naveo i tvrđenje koje, pod određenim uslovima, opisuje raspored karakterističnih korena matrice u Geršgorinovom skupu. Preduslov koji je, pri tome, potreban je da se Geršgorinov skup sastoji iz više disjunktih delova. Na taj način, ova druga Geršgorinova teorema nam daje mogućnost da izolujemo karakteristične korene, ako je jedan od Geršgorinovih krugova disjunktan sa ostalima. U specijalnom slučaju, kada su svi krugovi međusobno disjunktne, svaki od njih sadrži tačno jedan karakteristični koren, a to implicira, između ostalog, dijagonalizabilnost matrice.

Neka je  $n \geq 2$  i  $S \subseteq N$ . Sa  $|S|$  označimo *kardinalni broj* skupa  $S$ , tj. broj elemenata skupa  $S$ , a komplement skupa  $S$  označimo sa

$\bar{S} := N \setminus S$ . Za datu matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ , skup

$$\Gamma_S(A) := \bigcup_{i \in S} \Gamma_i(A)$$

predstavlja uniju krugova koja „odgovara” indeksima iz skupa  $S$ .

**Teorema 3.4. (druga Geršgorinova teorema)** *Ako za matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$  i skup indeksa  $0 \neq S \subsetneq N$ , važi*

$$\Gamma_S(A) \cap \Gamma_{\bar{S}}(A) = \emptyset, \quad (3.12)$$

tada  $\Gamma_S(A)$  sadrži tačno  $|S|$  karakterističnih korena matrice  $A$  i, shodno tome,  $\Gamma_{\bar{S}}(A)$  sadrži preostali broj karakterističnih korena matrice  $A$ .

Originalna Geršgorinova teorema inspirisala je mnoga dalja istraživanja u oblasti lokalizacije karakterističnih korena, kako u prošlosti, tako i u savremenoj literaturi. Međutim, prva generalizacija Geršgorinove teoreme može se naći već u njegovom radu [31] iz 1931. godine. Ona je bazirana na invarijantnosti spektra matrice pri transformacijama sličnosti. Preciznije, Geršgorinova teorema se može primeniti i na matricu oblika  $X^{-1}AX$ , za proizvoljnu regularnu matricu  $X$ . Pri tome je posebno interesantan slučaj kada je  $X$  dijagonalna matrica.

Naime, za proizvoljan vektor  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T > 0$ , definišimo odgovarajuću (regularnu) dijagonalnu matricu

$$X := \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

a skup svih takvih pozitivnih dijagonalnih matrica označimo sa  $\mathbb{D}$ . Kako je matrica

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} a_{ij}x_j \\ x_i \end{bmatrix}$$

slična sa  $A$ , sledi da je  $\Lambda(A) = \Lambda(X^{-1}AX)$ , tako da, ako želimo da lokalizujemo karakteristične korene matrice  $A$ , možemo primeniti Geršgorinovu teoremu na matricu  $X^{-1}AX$ . Međutim, ta matrica zavisi od  $n$  pozitivnih parametara, koji mogu biti odabrani proizvoljno i, samim tim, mogu uticati na oblik i veličinu lokalizacionog skupa. Tako

dobijamo sledeće tvrđenje, koje je direktna posledica Geršgorinove teoreme.

Naime, za svaku kvadratnu matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \neq 2$ , i pozitivnu dijagonalnu matricu  $X \in \mathbb{D}$ , važi

$$\Lambda(A) \subseteq \Gamma(X^{-1}AX), \quad (3.13)$$

pa sledi da je

$$\Lambda(A) \subseteq \text{MGS}(A) := \bigcap_{X \in \mathbb{D}} \Gamma(X^{-1}AX). \quad (3.14)$$

Presekom uopštenih Geršgorinovih skupova po svim mogućim izborima vektora  $x$  dobijamo takozvani *minimalni Geršgorinov skup* (MGS). Više informacija o minimalnom Geršgorinovom skupu može se naći u [82].

Još od prvih rezultata na temu odnosa dijagonalnih i vandijagonalnih elemenata matrice, u smislu njene regularnosti, nastalih početkom dvadesetog veka, pa sve do aktuelnih istraživanja u poslednjih nekoliko godina, uočeno je da, između ostalog, postoji tesna veza između rezultata o regularnosti matrica i rezultata o lokalizaciji karakterističnih korena. Iako je sama ideja bila prisutna, implicitno, u mnogim ranijim radovima, tek u knjizi [82] ona je jasno formulisana kao ekvivalencija između tvrđenja o lokalizaciji karakterističnih korena i tvrđenja o regularnosti matrica. Naime, poznato je da je Geršgorinova teorema, kao matematičko tvrđenje, ekvivalentna sa tvrđenjem da su sve matrice  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  koji ispunjavaju uslov

$$|a_{ii}| > r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|, \quad \text{za sve } i \in N := \{1, 2, \dots, n\}, \quad (3.15)$$

regularne.

Klasa matrica sa osobinom (3.15) naziva se *SDD klasa*, što potiče od naziva *strogo dijagonalno dominantne (SDD) matrice*.

Po istom principu, tvrđenje da Minimalni Geršgorinov skup uvek sadrži spektar matrice je ekvivalentno tvrđenju da su sve matrice  $A$  za koje

$$\text{postoji matrica } X \in \mathbb{D} \text{ takva da je } AX \text{ SDD matrica,} \quad (3.16)$$

regularne.

U literaturi, matrice sa osobinom (3.16) nazivaju se *generalizovano dijagonalno dominantne (GDD) matrice*, a poznate su i pod nazivom *H*-matrice.

Teorija dijagonalne dominacije je izuzetno bogata mnogim teorijskim rezultatima, kao i njihovim praktičnim primenama u raznim oblastima nauke i industrije. U izučavanju populacione dinamike, ova teorija je, takođe, odigrala važnu ulogu, vidi [63]. Stoga je poseban deo ove disertacije posvećen dijagonalnoj dominaciji i njenoj ulozi u stabilnosti dinamičkih sistema, gde su dobijeni interesantni rezultati, koji povezuju ove klase i njihove lokalizacione oblasti sa proizvoljnim perturbacijama matrice u terminima pseudospektra.

Vraćajući se na reaktivnost LTIDS

$$\nu_A = \lim_{t \searrow 0^+} \frac{\|E + tA\| - 1}{t},$$

odredimo njenu karakterizaciju u specijalnom slučaju kada je posmatrana norma maksimum norma, tj.  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ . Tada je

$$\nu_A = \lim_{t \searrow 0^+} \frac{\|E + tA\|_\infty - 1}{t} = \lim_{t \searrow 0^+} \frac{\max_k \left\{ |1 + ta_{kk}| - 1 + t \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right\}}{t},$$

pa dobijamo

$$\nu_A = \max_k \left\{ \operatorname{Re}(a_{kk}) + \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \right\}. \quad (3.17)$$

Međutim, to je, na osnovu (3.8), ekvivalentno sa

$$\nu_A = \max\{\operatorname{Re}(z) : z \in \Gamma(A)\}, \quad (3.18)$$

pa se reaktivnost u ovom slučaju poklapa sa apscisom Geršgorinovog skupa matrice  $A$ , koju, shodno tome, nazivamo Geršgorinova apscisa. Označimo je sa  $\gamma_A$ . Ako bismo želeli da *naglasimo* zavisnost od matrice norme u samoj oznaci za reaktivnost, to bi izgledalo ovako:

$$\nu_A^\infty = \gamma_A.$$

Međutim, zbog jednostavnosti, ipak izostavljamo ovaj detalj, bez opasnosti od zabune.

Primetimo da se, za razliku od spektralne apscise i pseudospektralne apscise, Geršgorinova apscisa izračunava daleko jednostavnije, odnosno numerički je izrazito "jeftina" karakteristika ponašanja evolucione funkcije.

Primetimo, takođe, da, isto kao što je položaj spektra u otvorenoj levoj poluravni kompleksne ravni bio karakterizacija eksponencijalne stabilnosti LTIDS (odnosno pozitivne rezilijentnosti), tako je takav položaj Geršgorinovog skupa karakterizacija nereaktivnosti LTIDS u maksimum normi.

### 3.3.2 Numerička apscisa

Jedna drugačija lokalizacija karakterističnih korena date matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  zasniva se na jednostavnoj ideji da, ako je  $\lambda$  karakteristični koren matrice  $A$  i  $x \neq 0$  njegov karakteristični vektor, tada je  $Ax = \lambda x$ , što, množeći čitav izraz sa  $x^H$  sa leve strane, za posledicu ima  $x^H Ax = \lambda x^H x$ , tj.

$$\lambda = \frac{x^H Ax}{x^H x}. \quad (3.19)$$

Drugim rečima, karakteristični koreni matrice se nalaze u skupu svih mogućih količnika oblika (3.19). Količnike ovog oblika, gde je  $x$  proizvoljan nenula vektor, nazivamo *Rayleigh-evi količnici*, a skup vrednosti u kompleksnoj ravni koji oni čine nazivamo *numerički raspon (numerical range)* i obeležavamo sa

$$W(A) = \left\{ \frac{x^H Ax}{x^H x} : x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \right\}.$$

Ovaj lokalizacioni skup karakterističnih korena matrice poznat je još i pod nazivom *polje vrednosti (field of values)* i izučavan je dosta, upravo zbog svoje veze sa dinamičkim svojstvima karakterističnih korena matrica. Ovde ćemo navesti samo neke od njegovih osobina:

- $W(A)$  je neprazan, zatvoren, ograničen, povezan i konveksan skup, koji sadrži spektar matrice  $A$ .

- Za proizvoljnu konstantu  $c$  važi  $W(cE + A) = c + W(A)$ .
- Za proizvoljnu konstantu  $c \neq 0$  važi  $W(cA) = cW(A)$ .
- Za svaku unitarnu matricu  $V$  važi  $W(VAV^H) = W(A)$ .
- Ako je  $A$  hermitska matrica, tj.  $A = A^H$ , tada je  $W(A)$  realan interval između najmanjeg i najvećeg karakterističnog korena matrice  $A$ , tj.  $W(A) = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ .
- Ako je  $A$  normalna matrica, tada je  $W(A)$  konveksna obvojnica spektra matrice  $A$ , tj.

$$W(A) = co(\Lambda(A)) := \{t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(A), t \in [0, 1]\}.$$

- Ako sa  $H_A$  označimo hermitski deo matrice  $A$ , tj.

$$H_A = \frac{A + A^H}{2},$$

tada je

$$W(H_A) = Re(W(A)) = \{Re(z) : z \in W(A)\}. \quad (3.20)$$

- Za svako  $\varepsilon > 0$  važi

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq W(A) + \zeta_\varepsilon, \quad (3.21)$$

gde je  $\zeta_\varepsilon$  dato sa (3.7).

Vraćajući se na reaktivnost LTIDS, ali sada za  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ , može se pokazati, vidi [37](Posledica 5.5.26), da je reaktivnost matrice  $A$  spektralna apscisa hermitskog dela matrice  $A$ , tj.

$$\nu_A = \alpha_{H_A} = \max \left\{ \lambda : \lambda \in \Lambda \left( \frac{A + A^H}{2} \right) \right\}. \quad (3.22)$$

Međutim, to je, prema (3.20), ekvivalentno sa

$$\nu_A = \max\{Re(z) : z \in W(A)\},$$



pa se reaktivnost u ovom slučaju poklapa sa apscisom numeričkog raspona matrice  $A$ , koju, shodno tome, nazivamo *numerička apscisa* i označavamo sa  $\omega_A$ . Ako bismo želeli da *naglasimo* zavisnost od matrice norme u samoj oznaci za reaktivnost, to bi izgledalo ovako:

$$\nu_A^2 = \omega_A.$$

ali, već smo objasnili da nema opasnosti od zabune ako ovaj detalj izostavimo.

Ova karakteristika je nešto lakša za izračunavanje nego što je to rezilijentnost, iz prostog razloga što je sam problem izračunavanja karakterističnih korena matrica lakši i numerički "jeftiniji" u slučajevima kada je matrica Hermitska. Međutim, sa druge strane, to je i dalje daleko složeniji postupak nego određivanje Geršgorinove apscise.

Slično prethodnom slučaju, položaj numeričkog raspona u otvorenoj levoj poluravni kompleksne ravni karakterizacija je nereaktivnosti LTIDS u euklidskoj normi.

## 3.4 LTIDS i dijagonalna dominacija

### 3.4.1 Lokalizacije pseudospektra

Široka upotreba lokalizacija spektra u analizi raznih matrice svojstva, kao što je stabilnost dinamičkih sistema, motivisala nas je da izvedemo tehnike lokalizacije pseudospektra, korišćenjem ideja koje potiču od dijagonalno dominantnih matrica, odnosno od lokalizacija spektra teorema Geršgorinovog tipa. U tom smislu, mnoge teorijske i praktične primene pseudospektra (robustna stabilnost, tranziciono ponašanje, ne-normalna dinamika, itd.) mogu se povezati sa specifičnim relacijama između elemenata matrice. To nam omogućava da bolje razumemo određene fenomene koji se pojavljuju u praksi, kao što ćemo pokazati na primeru empirijske trofičke mreže tla. Stoga se novina prezentovanih rezultata ne ogleda samo u matematičkim formulacijama, nego i u konceptualnom smislu, pošto povezuje stabilnost sa empirijskim podacima, ali i sa ograničenjima njihove neizvesnosti.

Geršgorinova lokalizacija pseudospektra prvi put je izvedena u radu [27] ([Teorema 12ε]), gde su navedene sledeće interesantne činjenice:

... ako  $\Lambda_\varepsilon(A)$  sadrži tačke koje su za malo  $\varepsilon$  dosta udaljene od  $\Lambda(A)$ , tada granice dobijene Geršgorinovom teoremom mnogo bolje opisuju pseudospektar nego spektar... tako da Geršgorinove ocene karakterističnih korena mogu ponekad dovesti do tačnijih predviđanja u tranzicionom ponašanju iterativnih matricnih procesa nego što su predviđanja dobijena na osnovu tačnih karakterističnih korena!

Motivisani ovom opservacijom, u radu [54] detaljno smo istraživali odnos između pseudospektralnih i spektralnih lokalizacionih skupova, koji su izvedeni korišćenjem dijagonalne dominacije (odnosno lokalizacija Geršgorinovog tipa).

Sa jedne strane, uslovi tipa dijagonalne dominacije često obezbeđuju računarski jeftine alate za utvrđivanje matricnih osobina, kao što je, na primer, pozicija karakterističnih korena u kompleksnoj ravni. Sa druge strane, računanje pseudospektra za velike matrice je još uvek veoma zahtevan posao, vidi [78]. Stoga je potreba da se bolje ustanovi njihov odnos više nego očigledna.

S obzirom na Definiciju 3.3, za proizvoljno  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$ , u oznaci  $\Lambda_\varepsilon(A)$ , sastoji se od svih karakterističnih korena matrica koje su " $\varepsilon$ -blizu"  $A$ :

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \bigcup_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \Lambda(A + \Delta).$$

Zbog toga se  $\varepsilon$ -pseudospektar, kao što smo već videli, u terminima LTIDS koristi

- za utvrđivanje stabilnosti koja je *robustna* u odnosu na matricne perturbacije, ograničene u datoj normi parametrom  $\varepsilon > 0$ , kao i
- za ispitavanje maksimalne amplifikacije evolucione funkcije.

Da se podsetimo, kontinualni (neprekidni) linearni vremenski invarijantni dinamički sistem  $\dot{x} = Ax$  je stabilan ako i samo ako

$$\Lambda(A) \subset \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}, \quad (3.23)$$

i pitanje je za koje  $\Delta \in \mathbb{C}^{n,n}$  ova inkluzija ostaje tačna i za  $A + \Delta$ . Preciznije, mera robustnosti stabilnosti matrice  $A$ , koja zadovoljava uslov (3.23), definiše se kao najveće  $\varepsilon > 0$  takvo da je

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subset \mathbb{C}^-$$

i poznata je pod imenom *rastojanje do nestabilnosti*, vidi [35]. Pošto računanje takvog  $\varepsilon > 0$  podrazumeva rešavanje nekonveksnog optimizacionog problema, moraju se primeniti numerički algoritmi, vidi [10, 29, 33, 34, 78], koji svi zahtevaju značajnu računarsku snagu, posebno u slučaju velikih retkih matrica. To je još jedan razlog zašto je važno naći fine (i računarski jeftine) lokalizacije pseudospektra. Naime, na takav način dobijene donje ocene za rastojanje do nestabilnosti ili će same biti vrlo precizne ili će se koristiti za ubrzanje numeričkih algoritama, zahvaljujući dobrim startnim vrednostima. Osnovu za izvođenje takvih ocena predstavljaće sledeća lema koja direktno sledi iz karakterizacije (3.4).

**Lema 3.5** (Princip lokalizacije). *Neka je  $\mu : \mathbb{C}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da za proizvoljnu matricu  $A$  važi*

$$\|A^{-1}\|^{-1} \geq \mu(A). \quad (3.24)$$

Tada je

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Theta_\varepsilon^\mu(A) := \{z \in \mathbb{C} : \mu(A - zE) \leq \varepsilon\}. \quad (3.25)$$

Očigledno, različite ocene ( $\mu$ ) dovode do različitih lokalizacionih skupova  $\varepsilon$ -pseudospektra. U nastavku ćemo izvesti nekoliko, u opštem slučaju različitih, donjih ocena za  $\|A^{-1}\|^{-1}$  i konstruisati odgovarajuće lokalizacije  $\varepsilon$ -pseudospektra. Koristimo konvenciju da je u slučaju singularne matrice  $A$ ,  $\|A^{-1}\|^{-1} = 0$ .

### 3.4.1.1 Slučaj maksimum norme

Prva ocena koju navodimo, u stvari, dobro je poznata, ali u nešto drugačijem obliku. Ipak, mi ćemo je ovde preformulisati u oblik koji više odgovara izlaganju koje sledi. Štaviše, navešćemo i dokaz, koji, iako je jednostavan, daje dobar uvid u metod korišćen u nastavku. Ova ocena primenljiva je na sve matrice, ali je blisko povezana sa klasom strogo dijagonalno dominantnih (SDD) matrica, koje su definisane uslovom (3.15).

**Lema 3.6.** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica. Tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \mu_1(A) := \min_{i \in N} (|a_{ii}| - r_i(A)). \quad (3.26)$$

*Dokaz:* Ako pretpostavimo da je  $A$  singularna matrica, tada je  $\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} = 0$ . Sa druge strane, vrednost  $\mu_1(A)$  je nepozitivna, jer  $A$ , pošto je singularna, ne može biti iz SDD klase. Dakle, uslov (3.26) je ispunjen.

Prema tome, ostaje da razmotrimo slučaj kada je  $A$  regularna. Tada je, vidi [82],

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} = \inf_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} = \min_{\|x\|_{\infty}=1} \|Ax\|_{\infty} = \|Ax^*\|_{\infty} = \max_{i \in N} |(Ax^*)_i|, \quad (3.27)$$

za neko  $\|x^*\|_{\infty} = 1$  i, očigledno, za svako  $i \in N$ ,

$$|(Ax^*)_i| = \left| \sum_{j \in N} a_{ij}x_j^* \right| \geq |a_{ii}| |x_i^*| - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| |x_j^*|. \quad (3.28)$$

Ako odaberemo indeks  $k$  tako da je  $\|x^*\|_{\infty} = |x_k^*| = 1 \geq |x_j^*|$ , za sve  $j \in N$ , dobijamo

$$|(Ax^*)_k| \geq |a_{kk}| - \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| = |a_{kk}| - r_k(A),$$

što implicira da je

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq |(Ax^*)_k| \geq |a_{kk}| - r_k(A) \geq \min_{i \in N} (|a_{ii}| - r_i(A)). \quad \square$$

Kao što smo već napomenuli, Lema 3.6 je veoma dobro poznata u obliku Varahovog rezultata, vidi [79], za strogo dijagonalno dominantne (SDD) matrice:

$$\text{Ako je } A \text{ SDD matrica, tada je } \|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\min_{i \in N} (|a_{ii}| - r_i(A))}.$$

Preciznije rečeno, ovo se može posmatrati kao posledica Leme 3.6, pošto SDD osobina matrice  $A$  garantuje da je  $\mu_1(A) > 0$ .

Dobro je poznato da SDD matrice imaju blisku vezu sa Geršgorinovim skupovima za lokalizaciju spektra, vidi [11, 52, 82], tako da nije iznenađenje da se  $\mu_1$  može iskoristiti za nalaženje veze između Geršgorinovih skupova i pseudospektra.

**Teorema 3.7** ( $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinovi skupovi). *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi*

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq r_i(A) + \varepsilon\}. \quad (3.29)$$

*Dokaz:* Dovoljno je uočiti da

$$\mu_1(A - zE) = \min_{i \in N} (|a_{ii} - z| - r_i(A)) \leq \varepsilon$$

znači da postoji indeks  $i \in N$  takav da je  $|a_{ii} - z| - r_i(A) \leq \varepsilon$ , tj.

$$\begin{aligned} \Theta_\varepsilon^{\mu_1}(A) &= \{z \in \mathbb{C} : \mu_1(A - zE) \leq \varepsilon\} = \\ &= \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq r_i(A) + \varepsilon\}. \quad \square \end{aligned}$$

Očigledno, za  $\varepsilon = 0$ , pseudospektar  $\Lambda_\varepsilon(A)$  postaje spektar  $\Lambda(A)$ , a skup  $\Gamma_\varepsilon(A)$  postaje Geršgorinov skup  $\Gamma(A)$ , što je u saglasnosti sa imenom prethodne teoreme.

Druga ocena koju ćemo ovde prezentovati je blisko povezana sa poznatom familijom regularnih matrica, koja generalizuje SDD klasu, a poznata je pod imenom *dvostruko strogo dijagonalno dominantne (dSDD)* matrice. Ova klasa je definisana sledećim uslovom:

$$|a_{ii}||a_{jj}| > r_i(A)r_j(A) \text{ za sve } i \neq j, i, j \in N.$$

Odgovarajući lokalizacioni skup za karakteristične korene je poznat pod imenom *Brauerovi ovali Cassini-ja*, vidi [15, 52, 67, 68, 82]. Pre nego što formulišemo i dokažemo teoremu koja utvrđuje odnos između pseudospektra i Brauerovih ovala Cassini-ja, dokažaćemo sledeću lemu.

**Lema 3.8.** *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi:*

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \mu_2(A) := \min_{i \neq j: |a_{ii}| + r_j(A) \neq 0} \frac{|a_{ii}||a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii}| + r_j(A)}, \quad (3.30)$$

*pri čemu je u trivijalnom slučaju  $A = 0$ ,  $\mu_2(A)$  po definiciji jednako nuli.*

*Dokaz:* Primetimo da, osim u trivijalnom slučaju  $A = 0$ , postoji bar jedan par indeksa  $i \neq j$ , takvih da je  $|a_{ii}| + r_j(A) \neq 0$ , pa je  $\mu_2(A)$  dobro definisano.

Pretpostavimo da je  $A \neq 0$  singularna matrica. Tada je  $\|A^{-1}\|_\infty^{-1} = 0$ , a vrednost  $\mu_2(A)$  je nepozitivna, pošto  $A$ , kao singularna matrica, ne može pripadati dSDD klasi. Stoga je uslov (3.30) zadovoljen.

Dakle, pretpostavimo da je  $A$  regularna. Opet, polazimo od činjenice da su za svaku regularnu matricu, jednačine (3.27) i (3.28) zadovoljene. Izaberimo dva različita indeksa  $k$  i  $t$ , takve da je

$$\|x^*\|_\infty = |x_k^*| = 1 \geq |x_t^*| \geq |x_j^*| \text{ za sve } j \in N \setminus \{k\}.$$

Tada za  $i = k$  i  $i = t$ , nejednakost (3.28) implicira, redom,

$$\begin{aligned} |(Ax^*)_k| &\geq |a_{kk}| - \sum_{j \in N \setminus \{k\}} |a_{kj}| |x_t^*| = |a_{kk}| - r_k(A) |x_t^*|, \text{ i} \\ |(Ax^*)_t| &\geq |a_{tt}| |x_t^*| - \sum_{j \in N \setminus \{t\}} |a_{tj}| = |a_{tt}| |x_t^*| - r_t(A). \end{aligned}$$

Očigledno, iz (3.27) sledi da je

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \max\{|a_{kk}| - r_k(A) |x_t^*|, |a_{tt}| |x_t^*| - r_t(A)\}. \quad (3.31)$$

Pretpostavimo, najpre, da je  $|a_{tt}| + r_k(A) > 0$ . Tada razlikujemo dve mogućnosti:

- $|a_{tt}| |x_t^*| - r_t(A) \geq |a_{kk}| - r_k(A) |x_t^*|$ , u kom slučaju je

$$|x_t^*| \geq \frac{|a_{kk}| + r_t(A)}{|a_{tt}| + r_k(A)} \quad \text{i}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq |a_{tt}| |x_t^*| - r_t(A) \geq \frac{|a_{kk}| |a_{tt}| - r_k(A) r_t(A)}{|a_{tt}| + r_k(A)},$$

- $|a_{kk}| - r_k(A) |x_t^*| \geq |a_{tt}| |x_t^*| - r_t(A)$ , u kom slučaju je

$$|x_t^*| \leq \frac{|a_{kk}| + r_t(A)}{|a_{tt}| + r_k(A)} \quad \text{i}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq |a_{kk}| - r_k(A) |x_t^*| \geq \frac{|a_{kk}| |a_{tt}| - r_k(A) r_t(A)}{|a_{tt}| + r_k(A)}.$$

Dakle, u oba slučaja imamo

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq \frac{|a_{kk}||a_{tt}| - r_k(A)r_t(A)}{|a_{tt}| + r_k(A)} \geq \\ &\geq \min_{i \neq j: |a_{ii}| + r_j(A) \neq 0} \frac{|a_{ii}||a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii}| + r_j(A)} = \mu_2(A), \end{aligned}$$

što kompletira dokaz, ako je  $|a_{tt}| + r_k(A) > 0$ .

Ostaje da analiziramo slučaj  $|a_{tt}| + r_k(A) = 0$ , tj.  $|a_{tt}| = r_k(A) = 0$ . Tada (3.31) postaje

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq \max\{|a_{kk}|, -r_t(A)\} = |a_{kk}|.$$

Ako pretpostavimo da postoji indeks  $\ell \neq k$  takav da je  $|a_{\ell\ell}| \neq 0$ , tada (imajući u vidu da je  $r_k(A) = 0$ ) sledi da je

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq |a_{kk}| = \frac{|a_{\ell\ell}||a_{kk}|}{|a_{\ell\ell}|} = \frac{|a_{\ell\ell}||a_{kk}| - r_{\ell}(A)r_k(A)}{|a_{\ell\ell}| + r_k(A)} \geq \\ &\geq \min_{i \neq j: |a_{ii}| + r_j(A) \neq 0} \frac{|a_{ii}||a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii}| + r_j(A)} = \mu_2(A). \end{aligned}$$

Ako takav indeks ne postoji, to znači da je  $a_{ii} = 0$  za sve  $i \in N \setminus \{k\}$ . Ali, tada je

$$\begin{aligned} \mu_2(A) &= \min_{i \neq j: |a_{ii}| + r_j(A) \neq 0} \frac{|a_{ii}||a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii}| + r_j(A)} = \\ &= \min_{i \neq j: |a_{ii}| + r_j(A) \neq 0} \frac{-r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii}| + r_j(A)} \leq 0, \end{aligned}$$

pa nejednakost  $\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq |a_{kk}| \geq 0 \geq \mu_2(A)$  trivijalno sledi.  $\square$

Kao i ranije, posledica Leme 3.8 je sledeća ocena za dSDD matrice, tj. ako je  $A$  dSDD matrica (što implicira da su joj svi dijagonalni elementi različiti od nule), norma beskonačno njene inverzne može se ograničiti sa:

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{i \neq j} \frac{|a_{ii}| + r_j(A)}{|a_{ii}||a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)}.$$

Na osnovu Leme 3.5, sada dobijamo odgovarajuću lokalizaciju pseudospektra, formulisanu sledećom teoremom.

**Teorema 3.9** ( $\varepsilon$ -pseudo Brauerov skup). *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica. Tada skup*

$$\mathcal{B}_\varepsilon(A) := \bigcup_{i \neq j} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z|(|a_{jj} - z| - \varepsilon) \leq r_j(A)(r_i(A) + \varepsilon)\} \quad (3.32)$$

lokalizuje  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$ , tj.  $\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(A)$ .

*Dokaz:* Dovoljno je da se uverimo da je  $\mathcal{B}_\varepsilon(A) = \Theta_\varepsilon^{\mu_2}(A)$ . Zaista,

$$\mu_2(A - zE) = \min_{i \neq j: |a_{ii} - z| + r_j(A) \neq 0} \frac{|a_{ii} - z||a_{jj} - z| - r_i(A)r_j(A)}{|a_{ii} - z| + r_j(A)} \leq \varepsilon$$

ako i samo ako postoje dva različita indeksa  $i, j \in N$ , takva da je

$$|a_{ii} - z| + r_j(A) \neq 0 \quad i$$

$$|a_{ii} - z||a_{jj} - z| - r_i(A)r_j(A) \leq \varepsilon|a_{ii} - z| + \varepsilon r_j(A).$$

Pošto je poslednja jednačina zadovoljena za  $|a_{ii} - z| = r_j(A) = 0$ , imamo da je

$$\Theta_\varepsilon^{\mu_2}(A) = \bigcup_{i \neq j} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z|(|a_{jj} - z| - \varepsilon) \leq r_j(A)(r_i(A) + \varepsilon)\}.$$

Dakle,

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Theta_\varepsilon^{\mu_2}(A) = \mathcal{B}_\varepsilon(A). \quad \square$$

I ovde, za  $\varepsilon = 0$ , pseudospektar  $\Lambda_\varepsilon(A)$  postaje spektar  $\Lambda(A)$ , a  $\mathcal{B}_\varepsilon(A)$  postaju originalni Brauerovi ovali Cassini-ja.

Sledeći interesantan rezultat ovog tipa može se dobiti u vezi sa  $S$ -SDD matricama, definisanim u [15] i korišćenim u raznim interesantnim primenama [18, 19, 20, 24]. Ocena norme beskonačno inverzne za takvu matricu izvedena je u [51]. Ovde je navodimo ponovo, ali u izmenjenoj formi, koja prati dosadašnje izlaganje, u smislu da dokaz prati elegantnu ideju prezentovanu u slučaju prethodne dve teoreme.

Pre nego što navedemo lemu, uvodimo relevantne notacije. Za proizvoljan podskup indeksa  $S \subseteq N$ , označimo njegov komplement sa  $\bar{S} := N \setminus S$ , a sa

$$r_i^S(A) := \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{ij}|$$



deo sume modula vandijagonalnih elemenata  $i$ -te vrste matrice  $A$  koji korespondiraju skupu  $S$ . Matrica  $A$  naziva se  $S$ -SDD matrica ako i samo ako je za sve  $i \in S, j \in \bar{S}$ ,

$$|a_{ii}| > r_i^S(A), |a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A) \quad (3.33)$$

i

$$\left(|a_{ii}| - r_i^S(A)\right) \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right) > r_i^{\bar{S}}(A)r_j^S(A). \quad (3.34)$$

Da bismo pojednostavili notaciju, označimo sa

$$T := \{(i, j) \in S \times \bar{S} : |a_{ii}| > r_i^S(A) \text{ i } |a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A)\}$$

i za  $(i, j) \in T$  definišimo

$$q_{ij}^S(A) := \frac{\left(|a_{ii}| - r_i^S(A)\right) \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right) - r_i^{\bar{S}}(A)r_j^S(A)}{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A), |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)\}}.$$

**Lema 3.10.** *Neka je*

$$\mu_3(A) := \min\left\{\min_{i \in S} \left(|a_{ii}| - r_i^S(A)\right), \min_{j \in \bar{S}} \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right), \min_{(i,j) \in T} q_{ij}^S(A)\right\}.$$

*Tada za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljan podskup indeksa  $S \subseteq N$  važi*

$$\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1} \geq \mu_3(A). \quad (3.35)$$

*Dokaz:* Pretpostavimo da je  $A$  singularna matrica. Tada je, po konvenciji,  $\|A^{-1}\|^{-1} = 0$ , a vrednost  $\mu_3(A)$  je nepozitivna, jer  $A$ , kao singularna matrica, ne može pripadati  $S$ -SDD klasi. Stoga je uslov (3.35) zadovoljen.

Ako je  $A$  regularna matrica, kao i ranije, koristićemo jednačine (3.27) i (3.28). Ali, ovog puta, indekse  $k$  i  $t$  biramo tako da je

$$|x_k^*| := \max_{i \in S} |x_i^*| \text{ i } |x_t^*| := \max_{j \in \bar{S}} |x_j^*|,$$

pa je  $\|x^*\|_\infty = \max\{|x_k^*|, |x_t^*|\} = 1$ . Pretpostavimo da je  $1 = |x_k^*| \geq |x_t^*|$ . Tada, za  $i = k$  i  $i = t$  nejednakost (3.28) postaje, redom,

$$|(Ax^*)_k| \geq |a_{kk}| |x_k^*| - r_k^S(A) |x_k^*| - r_k^{\bar{S}}(A) |x_t^*| = (|a_{kk}| - r_k^S(A)) |x_k^*| - r_k^{\bar{S}}(A) |x_t^*|, \quad (3.36)$$

i

$$|(Ax^*)_t| \geq |a_{tt}| |x_t^*| - r_t^S(A) |x_k^*| - r_t^{\bar{S}}(A) |x_t^*| = (|a_{tt}| - r_t^{\bar{S}}(A)) |x_t^*| - r_t^S(A). \quad (3.37)$$

Sledi da je

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_\infty^{-1} &\geq \\ &\geq \max \left\{ (|a_{kk}| - r_k^S(A)) |x_k^*| - r_k^{\bar{S}}(A) |x_t^*|, (|a_{tt}| - r_t^{\bar{S}}(A)) |x_t^*| - r_t^S(A) \right\}. \end{aligned}$$

Pošto  $(k, t) \notin T$ , tj.  $|a_{kk}| \leq r_k^S(A)$  ili  $|a_{tt}| \leq r_t^{\bar{S}}(A)$ , implicira da je

$$\mu_3(A) \leq \min \left\{ \min_{i \in S} (|a_{ii}| - r_i^S(A)), \min_{j \in \bar{S}} (|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \right\} \leq 0,$$

pretpostavimo da je  $(k, t) \in T$ . Kao u dokazu prethodne leme (uzimajući  $|a_{tt}| - r_t^{\bar{S}}(A)$ ,  $|a_{kk}| - r_k^S(A)$ ,  $r_t^S(A)$  i  $r_k^{\bar{S}}(A)$  umesto  $|a_{tt}|$ ,  $|a_{kk}|$ ,  $r_t(A)$  i  $r_k(A)$ , redom), zbog (3.36) i (3.37), zaključujemo da je

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \frac{(|a_{kk}| - r_k^S(A)) (|a_{tt}| - r_t^{\bar{S}}(A)) - r_k^{\bar{S}}(A) r_t^S(A)}{|a_{tt}| - r_t^{\bar{S}}(A) + r_k^{\bar{S}}(A)}. \quad (3.38)$$

Da bismo kompletirali dokaz, dovoljno je konstatovati da slučaj kada je norma beskonačno vektora  $x$  dostignuta na  $\bar{S}$ , tj. kada je  $1 = |x_t^*| \geq |x_k^*|$ , analogno dovodi do zaključka da je

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \frac{(|a_{kk}| - r_k^S(A)) (|a_{tt}| - r_t^{\bar{S}}(A)) - r_k^{\bar{S}}(A) r_t^S(A)}{|a_{kk}| - r_k^S(A) + r_t^S(A)}. \quad (3.39)$$

Konačno, nejednakosti (3.38) i (3.39) impliciraju

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq q_{kt}^S(A) \geq \min_{(i,j) \in T} q_{ij}^S(A) \geq \mu_3(A),$$

čime je dokaz završen.  $\square$

Kao i ranije, novi lokalizacioni rezultat sledi direktno iz (3.35), korišćenjem Principa lokalizacije iz Leme 3.5.

**Teorema 3.11** ( $\varepsilon$ -pseudo CKV skupovi). *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljan podskup indeksa  $S \subseteq N$ ,  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$  lokalizovan je skupom  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$ , tj.*

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon^S(A) := \Gamma_\varepsilon^S(A) \cup \Gamma_\varepsilon^{\bar{S}}(A) \cup V_\varepsilon^S(A) \cup V_\varepsilon^{\bar{S}}(A), \quad (3.40)$$

gde je

$$\Gamma_\varepsilon^S(A) := \bigcup_{i \in S} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^S(A) + \varepsilon\},$$

$$\Gamma_\varepsilon^{\bar{S}}(A) := \bigcup_{j \in \bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq r_j^{\bar{S}}(A) + \varepsilon\},$$

$$V_\varepsilon^S(A) := \bigcup_{i \in S, j \in \bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^S(A) - \varepsilon)(|z - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \leq r_i^{\bar{S}}(A)(r_j^S(A) + \varepsilon)\},$$

$$V_\varepsilon^{\bar{S}}(A) := \bigcup_{i \in S, j \in \bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^S(A))( |z - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) - \varepsilon) \leq (r_i^{\bar{S}}(A) + \varepsilon)r_j^S(A)\}.$$

*Dokaz:* Važno je primetiti da za  $z \notin \Gamma_\varepsilon^S(A) \cup \Gamma_\varepsilon^{\bar{S}}(A)$  važi sledeća ekvivalencija

$$\mu_3(A - zE) \leq \varepsilon \quad \text{ako i samo ako} \quad \min_{(i,j) \in S \times \bar{S}} q_{ij}^S(A - zE) \leq \varepsilon.$$

Ostatak dokaza isti je kao i ranije.  $\square$

Ime ovog lokalizacionog skupa za pseudospektar potiče od lokalizacionog skupa za karakteristične korene dobijenog u [15] za  $\varepsilon = 0$ .

Ilustrujmo, sada, ove lokalizacione skupove za  $\varepsilon$ -pseudospektar, korišćenjem pet jednostavnih test matrica. Kao što je poznato, vidi [78], transformacije sličnosti očuvavaju spektar, ali mogu drastično da promene pseudospektar. Ovu osobinu pseudospektari dele sa spomenutim lokalizacijama karakterističnih korena. Na slikama 3.2-3.4, nacrtana su tri navedena lokalizaciona skupa za  $\varepsilon$ -pseudospektar, za matrice

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -0.01 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 10^5 \\ & -2 + \mathbf{i} & 1 & 1 & 1 \\ & & -2 - \mathbf{i} & 1 & 1 \\ & & & -2 + 2\mathbf{i} & 1 \\ & & & & -2 - 2\mathbf{i} \end{bmatrix},$$

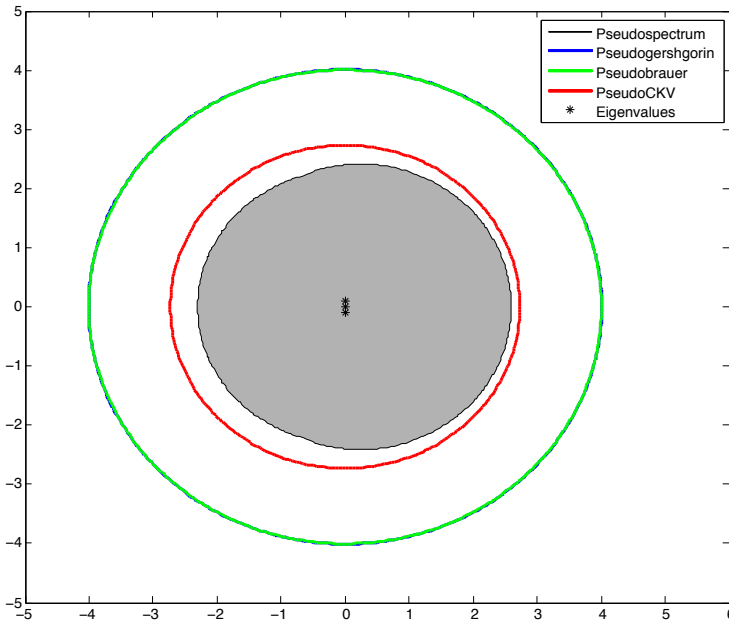
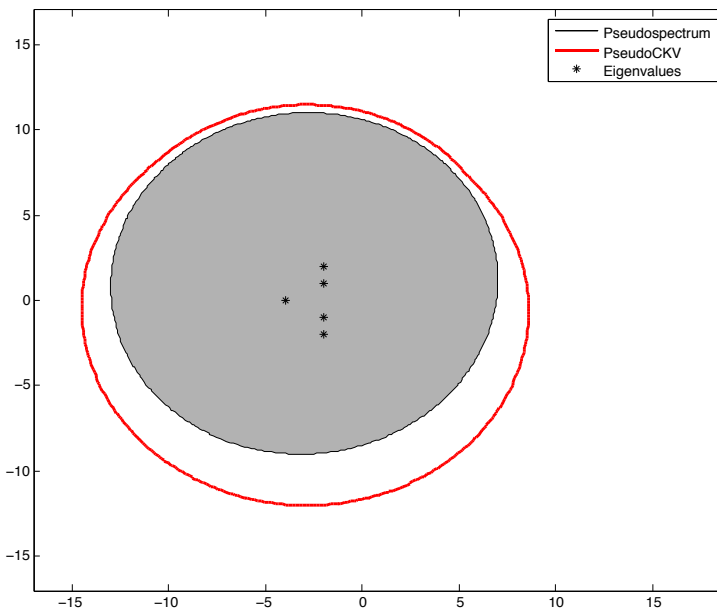
$$M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -5 & & & \\ & 15 & -5 & 1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & & & -1 \\ -1 & s_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & s_{n-1} & 1 \\ 1 & & & -1 & s_n \end{bmatrix}, s_j := 2 \sin \frac{2\pi}{n},$$

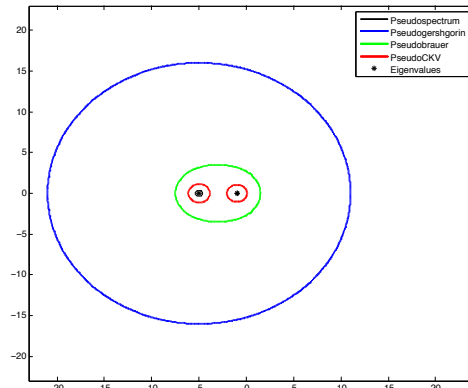
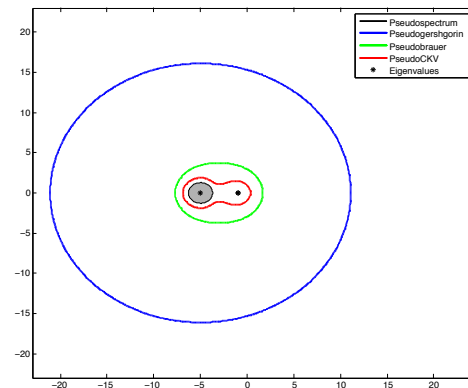
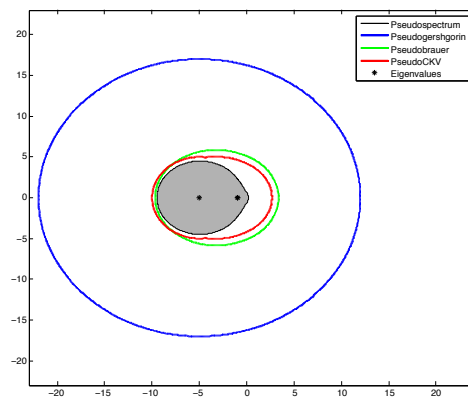
i  $M_5$  koja predstavlja gornju Hesenbergovu formu za  $30 \times 30$  slučajnu matricu sa uniformnom raspodelom na jediničnom intervalu (u softverskom paketu MATLAB `hess(rand(30))`).

Na Slici 3.2a, skupovi  $\Gamma_\varepsilon(M_1)$  i  $\mathcal{B}_\varepsilon(M_1)$  se poklapaju, dok precizniju granicu daje skup  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,2\}}(M_1)$ . Razlog se krije u činjenici da  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,2\}}$  koristi informacije bazirane na particiji, pa je zato sposoban da "isfiltrira" velike vandijagonalne elemente u trećoj koloni. Slično ponašanje se primećuje i kod matrice  $M_2$ , kod koje su skupovi  $\Gamma_\varepsilon(M_2)$  i  $\mathcal{B}_\varepsilon(M_2)$  približno krugovi poluprečnika  $10^5$  i 560, redom (pa nisu nacrtani), dok  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,2\}}(M_2)$  daje mnogo precizniju granicu za  $\varepsilon = 10^{-3}$  pseudospektar. Primetimo da je, u ovom slučaju, relativna perturbacija reda  $10^{-8}$ . Upravo taj kvalitet čini skupove  $\mathcal{C}_\varepsilon^S$  veoma korisnim alatom u ocenama pseudospektra velikih matrica koje imaju određenu blok strukturu!

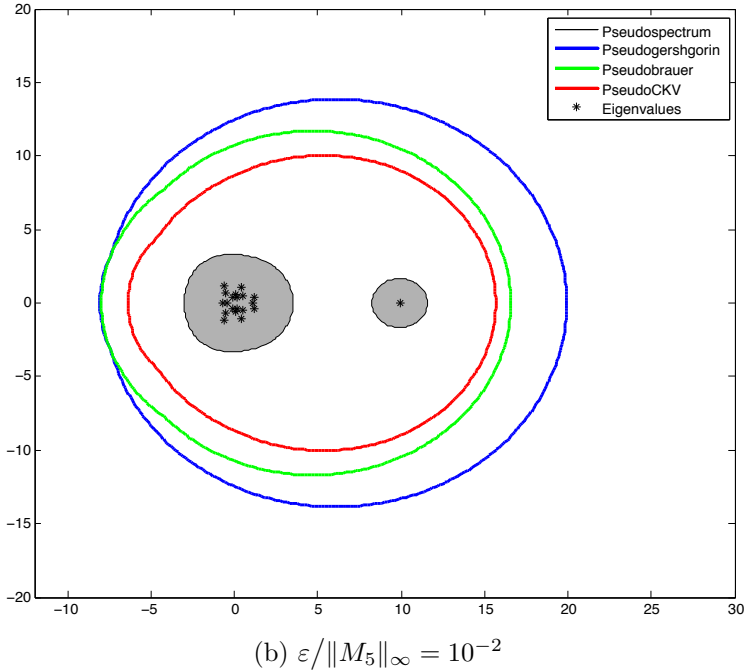
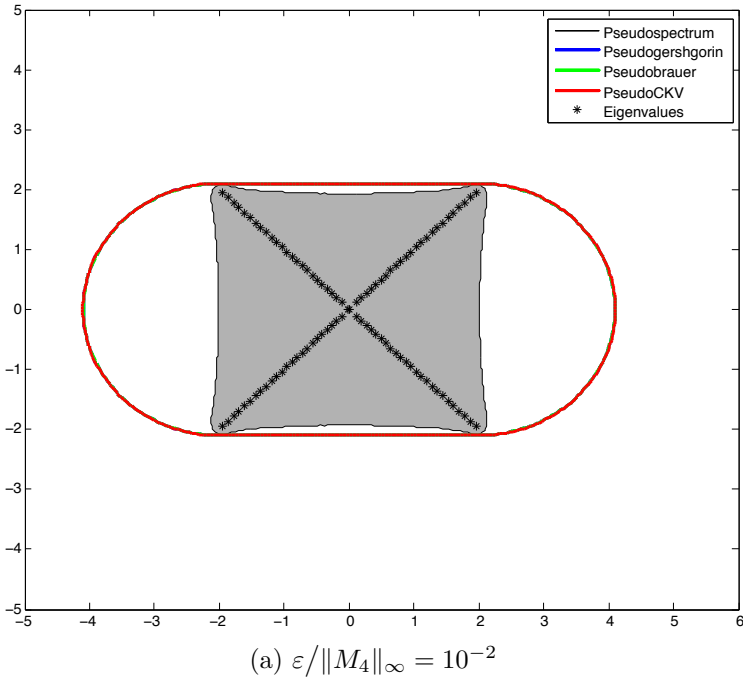
Da lokalizacioni skup  $\varepsilon$ -pseudospektra monotonno raste, kako raste veličina perturbacije  $\varepsilon$ , može se videti na Slici 3.3. Očekivano, lokalizacioni skupovi koji daju preciznije ocene pseudospektra su osetljiviji na varijacije u veličini perturbacije. Kao što možemo videti iz formula (3.29), (3.32) i (3.40), sva tri skupa pokazuju linearni rast po  $\varepsilon$ , ali sa veoma različitim brzinama! Dok  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinov skup raste

(a)  $\varepsilon/\|M_1\|_\infty = 0.33$ (b)  $\varepsilon/\|M_2\|_\infty = 10^{-8}$ 

Slika 3.2: Lokalizacijski skupovi za  $\varepsilon$ -pseudospektar:  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,2\}}$  za  $M_1$  (gore) i  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,2\}}$  za  $M_2$  (dole)

(a)  $\varepsilon/\|M_3\|_\infty = 10^{-4}$ (b)  $\varepsilon/\|M_3\|_\infty = 10^{-3}$ (c)  $\varepsilon/\|M_3\|_\infty = 10^{-2}$ 

Slika 3.3: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,2\}}$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $M_3$  za tri različite vrednosti  $\varepsilon \in \{0.01, 0.1, 1\}$



Slika 3.4: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,\dots,15\}}$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $M_4$  ( $n = 100$ ) (gore) i skupovi  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^{\{1,2,3,4\}}$  za matricu  $M_5$  (dole)

jednako kao veličina perturbacije, druga dva skupa uzimaju u obzir veličinu matrice elemenata i stoga su mnogo osetljiviji.

Tipičan primer veoma ne-normalne matrice je twisted Toeplitz matrica  $M_4$  reda  $n = 100$  prikazana na Slici 3.4a. Poznato je, vidi [78], da se karakteristični koreni ove matrice koji su blizu nuli menjaju eksponencijalno u odnosu na veličinu malih perturbacija. Stoga izvedeni lokalizacioni skupovi za pseudospektar, u suštini, ograničavaju oblast u kompleksnoj ravni, u kojoj karakteristični koreni mogu nelinearno da zavise od veličine perturbacije. U ovom primeru možemo primetiti da se sva tri lokalizaciona skupa poklapaju i da vertikalno daju veoma preciznu granicu rasta pseudospektra.

Najzad, na Slici 3.4b možemo uočiti ograničenja vezana za konstruisane lokalizacione skupove za pseudospektar. Stoga, da bismo bolje opisali ponašanje pseudospektra, sa što je moguće manje računarskog posla, treba da tražimo nove ideje za konstrukcije korisnih lokalizacija pseudospektra. Prirodno, bolje ocene norme inverzne matrice dovode do užih lokalizacionih skupova za pseudospektar. Naravno, uvek je u pitanju kompromis između preciznosti i potrebnog računarskog posla.

### 3.4.1.2 Slučaj euklidske norme

Iako se pseudospektar može ocenjivati u bilo kojoj izabranoj normi, većina rezultata u literaturi odnosi se na slučaj standardne euklidske norme. Stoga u ovoj sekciji kratko diskutujemo lokalizacione skupove za  $\varepsilon$ -pseudospektar u euklidskoj normi

$$\Lambda_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C} : \|(A - zE)^{-1}\|_2^{-1} \leq \varepsilon\}.$$

Jedna ideja je bazirana na dobro poznatoj činjenici da je za svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1} = \sqrt{\|A\|_\infty \|A^T\|_\infty} \leq \max\{\|A\|_\infty, \|A^T\|_\infty\}.$$

Koristeći ovu činjenicu i ocene (3.26), (3.30) i (3.35), direktno dobijamo sledeću lemu.

**Lema 3.12.** *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i  $k \in \{1, 2, 3\}$  važi*

$$\|A^{-1}\|_2^{-1} \geq \sqrt{\mu_k(A) \mu_k(A^T)} \geq \min\{\mu_k(A), \mu_k(A^T)\}. \quad (3.41)$$



Za  $k = 1$ , koristeći Princip lokalizacije iz Leme 3.5, ova lema proizvodi Geršgorinov lokalizacioni skup za euklidski  $\varepsilon$ -pseudospektar.

**Teorema 3.13** (Euklidski  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinovi skupovi). *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi*

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq \widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A),$$

gde je

$$\Gamma_\varepsilon^{(2)}(A) := \bigcup_{i,j \in N} \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq (|a_{ii} - z| - r_i(A)) (|a_{jj} - z| - r_j(A^T)) \leq \varepsilon^2\},$$

$$\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq \max\{r_i(A), r_i(A^T)\} + \varepsilon\}.$$

Iako je lokalizacioni skup  $\Gamma_\varepsilon^{(2)}(A)$  precizniji, skup  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A)$  je praktičniji, jer je lakši za vizuelizaciju i računanje.

Važno je naglasiti da je spomenuta Teorema 12 $\varepsilon$  o lokalizaciji pseudospektra iz rada [27] navedena u terminima euklidskog  $\varepsilon$ -pseudospektra. Tamo je pseudospektar lokalizovan unijom krugova sa centrima u  $a_{ii}$  i poluprečnicima  $r_i(A) + \sqrt{n}\varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dakle, stopa rasta skupova  $\Gamma_\varepsilon(A)$  po  $\varepsilon$  je  $\sqrt{n}$ , što dovodi do veoma grubih ocena za velike matrice. Za razliku od toga, naši novi lokalizacioni skupovi nemaju taj nedostatak!

Štaviše, skup  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A)$  ima jednu interesantnu osobinu, koja mu je zajednička sa numeričkim rasponom  $W(A)$ . Naime, poznato je, vidi (3.21), da je

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq W(A) + \zeta_\varepsilon,$$

gde je  $\zeta_\varepsilon$  dato sa (3.7). Isto se može zaključiti i za skup  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A)$ , pošto je

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \widehat{\Gamma}_0^{(2)}(A) + \zeta_\varepsilon.$$

Dakle, oba skupa,  $W(A)$  i  $\widehat{\Gamma}_0^{(2)}(A)$ , daju gornju granicu oblasti u kompleksnoj ravni u kojoj karakteristični koreni mogu nelinearno da zavise od veličine perturbacije.

Kao i u prethodnoj sekciji, možemo suziti euklidski  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinov skup korišćenjem preciznijih ocena  $k = 2, 3$  u Lemi 3.12.

**Teorema 3.14** (Euklidski  $\varepsilon$ -pseudo Brauerov skup). *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , euklidski  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$  je lokalizovan sa  $\mathcal{B}_\varepsilon(A) \cup \mathcal{B}_\varepsilon(A^T)$ .*

**Teorema 3.15** (Euklidski  $\varepsilon$ -pseudo CKV skup). *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i skup indeksa  $S \subseteq N$ , euklidski  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$  je lokalizovan sa  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A) \cup \mathcal{C}_\varepsilon^S(A^T)$ .*

Druga ideja se bazira na činjenici da se u euklidskoj normi  $\varepsilon$ -pseudospektar može izraziti pomoću minimalne singularne vrednosti

$$\Lambda_\varepsilon(A) := \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min}(A - zI) \leq \varepsilon\},$$

za koju postoje poznate donje ocene u terminima dijagonalne dominacije, i to iz radova [45] i [46].

Kao i u prethodnom slučaju, detaljno ćemo navesti odgovarajuću Geršgorinovu lokalizaciju, koja se zasniva na oceni

$$\sigma_{\min}(A) \geq \xi_1(A) := \min_{i \in N} \{|a_{ii}| - g_i(A)\},$$

gde je

$$g_i(A) := \frac{r_i(A) + r_i(A^T)}{2}, \quad i \in N.$$

Na osnovu Leme 3.5, u slučaju  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ , dobijamo

**Teorema 3.16** (Euklidski  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinovi skupovi). *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi*

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon^e(A)$$

gde je

$$\Gamma_\varepsilon^e(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z| \leq g_i(A) + \varepsilon\}.$$

Primetimo da smo imenom *Euklidski  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinovi skupovi* označili tri različite vrste skupova, no razlog tome je što su svi vezani za slučaj norme 2.

Kako je  $g_i(A)$  aritmetička sredina vandijagonalnih suma u  $i$ -toj vrsti i  $i$ -toj koloni, očigledno je za sve  $i \in N$ ,

$$g_i(A) \leq \max\{r_i(A), r_i(A^T)\}.$$

Stoga zaključujemo da je

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon^e(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq \widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A).$$

Pri tome, lokalizaciona oblast  $\Gamma_\varepsilon^e(A)$  se jednako lako računa kao i  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A)$ , a pruža preciznije rezultate od oblasti  $\Gamma_\varepsilon^{(2)}(A)$ . Takodje, na osnovu [82](Teorema 3.9), važi i sledeći odnos između ove euklidske Geršgorinove lokalizacije i lokalizacije na osnovu numeričkog raspona.

**Teorema 3.17.** *Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i svako  $\varepsilon \geq 0$  važi*

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq W(A) + \zeta_\varepsilon \subseteq co(\Gamma_\varepsilon^e(A)).$$

Ostali lokalizacioni skupovi, koji su nastali na osnovu ocena

$$\sigma_{min}(A) \geq \xi_i(A), \quad i = 2, 3, 4,$$

gde je

$$\xi_2(A) := \min_{i \in N} \left\{ \sqrt{|a_{ii}|^2 + \frac{1}{4}(r_i(A) - r_i(A^T))^2} - g_i(A) \right\},$$

$$\xi_3(A) := \min_{i, j \in N, i \neq j} \left\{ \frac{1}{2}(|a_{ii}| + |a_{jj}|) - \sqrt{\frac{1}{4}(|a_{ii}| - |a_{jj}|)^2 + g_i(A)g_j(A)} \right\},$$

$$\xi_4(A) := \min \{ \xi_J(A), \xi_G(A) \},$$

a  $\xi_J(A)$  i  $\xi_G(A)$  su definisani kao

$$\xi_J(A) := \min_{i \in N \setminus N_0(A)} \{ |a_{ii}| - g_i(A) \},$$

$$\xi_G = \min_{i \in N_0(A)} \left\{ |a_{ii}| - \frac{1}{2} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} (|a_{ij}| + |a_{ji}|) \frac{g_j(A)}{||a_{ii}| - |a_{jj}|| - g_i(A)} \right\},$$

uz oznaku

$$N_0(A) = \left\{ i \in N : ||a_{ii}| - |a_{jj}|| > g_i(A) + g_j(A) \text{ za sve } j \in N \setminus \{i\} \right\},$$

mogou se na analogan način izvesti.

### 3.4.2 Robusne matricne mere

U ovoj sekciji ćemo demonstrirati interesantne benefite koji mogu da nastanu na osnovu klasa dijagonalno dominantnih matrica u terminima ponašanja funkcije evolucije LTIDS. U tu svrhu, kao i ranije, sa  $\mathbb{C}^-$  označavamo otvorenu levu poluravan kompleksne ravni  $\mathbb{C}$ , vidi (3.23), dok ćemo sa  $Red(A) \in \mathbb{R}^{n,n}$  označiti realnu matricu pridruženu datoj (kompleksnoj) matrici  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$  na sledeći način:

$$\left( Red(A) \right)_{ij} = \begin{cases} Re(a_{ii}), & j = i, \\ |a_{ij}|, & j \neq i. \end{cases} \quad (3.42)$$

Primetimo da, u slučaju kada je u pitanju LTIDS čija matrica je realna matrica (što je, upravo, najčešći slučaj u stvarnim primenama, kao što su ekosistemi tla), matrica  $Red(A)$  je SDD matrica ako i samo ako je  $A$  SDD matrica.

#### 3.4.2.1 Slučaj maksimum norme

Sledeći rezultat o robusnoj stabilnosti dijagonalno dominantnih LTIDS u slučaju maksimum norme,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ , direktno sledi na osnovu Teoreme 3.7. No, najpre, primetimo da za matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , čiji su svi dijagonalni elementi u  $\mathbb{C}^-$  važi:

$$\begin{aligned} \mu_1(Red(A)) &= \min_{i \in N} (|(Red(A))_{ii}| - r_i(Red(A))) = \\ &= -\max_{i \in N} (Re(a_{ii}) + r_i(A)) = -\gamma_A = -\nu_A. \end{aligned}$$

**Teorema 3.18.** *LTIDS određen matricom  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , čiji su svi dijagonalni elementi u  $\mathbb{C}^-$  je nereaktivan ako i samo ako je  $Red(A)$  SDD matrica, odnosno kada je*

$$\mu_1(Red(A)) = -\nu_A > 0.$$

Tada je

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subset \Gamma_\varepsilon(A) \subset \mathbb{C}^- \text{ za sve } 0 \leq \varepsilon < -\nu_A,$$

gde  $\Lambda_\varepsilon(A)$  i  $\nu_A$  označavaju, redom,  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$  i reaktivnost u maksimum normi.

*Dokaz:* Prvi deo tvrđenja je očigledan, pošto uslov  $-\nu_A > 0$  znači nereaktivnost, a uslov  $\mu_1(\text{Red}(A)) > 0$  da je  $\text{Red}(A)$  SDD matrica.

Da bismo dokazali drugi deo tvrđenja, dovoljno je da pokažemo da za svako  $z \in \Gamma_\varepsilon(A)$ , pri čemu je  $0 < \varepsilon < \mu_1(\text{Red}(A))$ , važi da je  $\text{Re}(z) < 0$ . Zato, odaberimo proizvoljno  $\varepsilon$ , takvo da je  $0 < \varepsilon < \mu_1(\text{Red}(A))$  i  $z \in \Gamma_\varepsilon(A)$ . Tada postoji  $i \in N$  takvo da je

$$|a_{ii} - z| \leq r_i(A) + \varepsilon,$$

odakle zaključujemo

$$\begin{aligned} \text{Re}(z) - \text{Re}(a_{ii}) &\leq \\ &\leq |\text{Re}(z) - \text{Re}(a_{ii})| = |\text{Re}(z - a_{ii})| \leq |a_{ii} - z| \leq r_i(A) + \varepsilon < \\ &< r_i(A) + \mu_1(\text{Red}(A)) \leq r_i(A) + |(\text{Red}(A))_{ii}| - r_i(\text{Red}(A)) = \\ &= r_i(A) + |\text{Re}(a_{ii})| - r_i(A) = |\text{Re}(a_{ii})| = -\text{Re}(a_{ii}), \end{aligned}$$

tj.

$$\text{Re}(z) < 0. \quad \square$$

Navedena teorema, osim što govori o tome da je LTIDS, čija matrica ima sve dijagonalne elemente u otvorenoj levoj poluravni kompleksne ravni, nereaktivan ako i samo ako je  $\text{Red}(A)$  SDD matrica, uzevši u obzir da je  $-\nu_A = \mu_1(\text{Red}(A))$ , govori i o sledećem:

- perturbovani LTIDS  $A + \Delta$  je stabilan za sve  $\Delta \in \mathbb{C}^{n,n}$ , takve da je  $\|\Delta\|_\infty < -\nu_A$ ,
- drugim rečima,  $-\nu_A$  je donja granica za rastojanje do nestabilnosti matrice  $A$  i ona je netrivialna upravo u slučaju kada je  $\text{Red}(A)$  SDD matrica.

Dakle, reaktivnost LTIDS sa suprotnim znakom je, istovremeno, i gornja granica robusnosti asimptotske stabilnosti tog LTIDS. Međutim, važi i više od toga.

**Teorema 3.19.** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Tada je, za svako  $\varepsilon > 0$ , maksimalna moguća reaktivnost LTIDS perturbovanog matricom  $\Delta \in \mathbb{C}^{n,n}$ , takvom da je  $\|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon$ , koju nazivamo  $\varepsilon$ -robusna reaktivnost i*

označavamo sa  $\nu_A^\varepsilon$ , jednaka reaktivnosti datog LTIDS povećanoj za vrednost  $\varepsilon$ , tj.

$$\nu_A^\varepsilon := \max_{\Delta: \|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon} \nu_{A+\Delta} = \nu_A + \varepsilon.$$

*Dokaz:* Prvo, primetimo da je, na osnovu (3.18),

$$\max_{\Delta: \|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon} \nu_{A+\Delta} = \max_{\Delta: \|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon} \max\{Re(z) : z \in \Gamma(A + \Delta)\},$$

odakle sledi da je

$$\nu_A^\varepsilon = \max\{Re(z) : z \in \bigcup_{\Delta: \|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon} \Gamma(A + \Delta)\}.$$

Stoga, da bismo pokazali tvrđenje ove teoreme, dovoljno je da pokažemo da je

$$\bigcup_{\Delta: \|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon} \Gamma(A + \Delta) = \Gamma(A) + \zeta_\varepsilon.$$

Najpre, neka je  $z \in \Gamma(A + \Delta)$ , za neko  $\Delta \in \mathbb{C}^{n,n}$ , za koje je  $\|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon$ . Tada postoji  $k \in N$ , takvo da je  $|z - (A + \Delta)_{kk}| \leq r_k(A + \Delta)$ , pa je

$$|z - a_{kk}| - |(\Delta)_{kk}| \leq |z - a_{kk} - (\Delta)_{kk}| \leq r_k(A + \Delta) \leq r_k(A) + r_k(\Delta),$$

odakle sledi da je

$$|z - a_{kk}| \leq r_k(A) + \sum_{j=1}^n |(\Delta)_{kj}| \leq r_k(A) + \|\Delta\|_\infty \leq r_k(A) + \varepsilon,$$

što, upravo, znači da je  $z \in \Gamma(A) + \zeta_\varepsilon$ .

Neka je, sada,  $z \in \Gamma(A) + \zeta_\varepsilon$ . Tada postoji  $k \in N$ , takvo da je

$$|z - a_{kk}| \leq r_k(A) + \varepsilon.$$

Označimo sa  $\theta$  argument kompleksnog broja  $z - a_{kk}$ , tj. neka je  $z - a_{kk} = |z - a_{kk}|e^{i\theta}$ , i definišimo  $\Delta := \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n)$ , gde je  $\Delta_k = \varepsilon e^{i\theta}$ , a  $\Delta_j = 0$ , za sve  $j \neq k$ . Tada dobijamo

$$|z - (A + \Delta)_{kk}| = |z - a_{kk} - \varepsilon e^{i\theta}| = |z - a_{kk}| - \varepsilon \leq r_k(A) = r_k(A + \Delta),$$

a time i  $z \in \Gamma(A + \Delta)$ . Pošto je, očigledno,  $\|\Delta\|_\infty = \varepsilon$ , sledi  $z \in \bigcup_{\Delta: \|\Delta\|_\infty \leq \varepsilon} \Gamma(A + \Delta)$ .  $\square$

Prethodna teorema nam omogućava da inkorporiramo strukturalne poremećaje LTIDS u analizu početnog odgovora na poremećaje ravnotežnog stanja, što je, sa stanovišta teme ove disertacije, izuzetno važno!

Izvođenje analitičkih izraza za rastojanje do nestabilnosti, baziranih na izborima  $\mu_k$ ,  $k \in \{2, 3\}$  je, iako moguće, manje trivijalno.

### 3.4.2.2 Slučaj euklidske norme

Kao i ranije, razmotrićemo isto pitanje i u euklidskoj normi  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ .

**Teorema 3.20.** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  takva da je  $H_{Red(A)}$  (hermitski deo matrice  $Red(A)$ ) SDD matrica, čiji su svi dijagonalni elementi negativni, odnosno neka je  $\xi_1(Red(A)) > 0$ . Tada je*

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq W(A) + \zeta_\varepsilon \subseteq co(\Gamma_\varepsilon^e(A)) \subset \mathbb{C}^- \text{ za sve } 0 \leq \varepsilon < \xi_1(Red(A)),$$

gde  $\Lambda_\varepsilon(A)$  označava  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$  u euklidskoj normi.

*Dokaz:* Primitimo da je

$$H_{Red(A)} = \frac{Red(A) + Red(A)^T}{2},$$

pa važi  $\mu_1(H_{Red(A)}) = \xi_1(Red(A))$ . S obzirom na Teoremu 3.17, potrebno je samo pokazati da za  $\varepsilon < \xi_1(Red(A))$  važi

$$co(\Gamma_\varepsilon^e(A)) \subset \mathbb{C}^-.$$

Zbog osobina konveksne obvojnice zaključujemo da je

$$\max\{Re(z) : z \in co(\Gamma_\varepsilon^e(A))\} = \max\{Re(z) : z \in \Gamma_\varepsilon^e(A)\}.$$

Na osnovu Teoreme 3.16 i činjenice da je  $Re(a_{ii}) < 0$  za sve  $i \in N$ , sledi

$$\max\{Re(z) : z \in co(\Gamma_\varepsilon^e(A))\} = \max_{i \in N} \{Re(a_{ii}) + g_i(A) + \varepsilon\} =$$

$$= -\min_{i \in N} \{|Re(a_{ii})| - g_i(A)\} + \varepsilon = -\xi_1(Red(A)) + \varepsilon.$$

Dakle, očigledno, za  $\varepsilon < \xi_1(Red(A))$  važi  $co(\Gamma_\varepsilon^e(A)) \subset \mathbb{C}^-$ .  $\square$

Prema tome, za svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  koja ima dijagonalne elemente u  $\mathbb{C}^-$  i čija je pridružena realna matrica  $Red(A)$  takva da je njen hermitski deo strogo dijagonalno dominantna matrica,  $A + \Delta$  je stabilna matrica za sve  $\Delta \in \mathbb{C}^{n,n}$  takve da je

$$\|\Delta\|_2 \leq \xi_1(Red(A)).$$

Slično prethodnom slučaju, i za euklidsku normu se mogu izvesti bolje ocene, koristeći  $\xi_k$ ,  $k = 2, 3, 4$ .

Kao i za slučaj maksimum norme, tako i ovde, za reaktivnost važi i jače tvrđenje.

**Teorema 3.21.** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Tada je, za svako  $\varepsilon > 0$ , maksimalna moguća reaktivnost LTIDS perturbovanog matricom  $\Delta \in \mathbb{C}^{n,n}$ , takvom da je  $\|\Delta\|_2 \leq \varepsilon$ , koju nazivamo  $\varepsilon$ -robustna reaktivnost i označavamo sa  $\nu_A^\varepsilon$ , jednaka reaktivnosti datog LTIDS povećanoj za vrednost  $\varepsilon$ , tj.*

$$\nu_A^\varepsilon := \max_{\Delta: \|\Delta\|_2 \leq \varepsilon} \nu_{A+\Delta} = \nu_A + \varepsilon.$$

*Dokaz:* U slučaju euklidske norme, u odnosu na maksimum normu, ulogu Geršgorinovog skupa preuzima numerički raspon. Slično dokazu Teoreme 3.19, imamo da je

$$\nu_A^\varepsilon = \max \{Re(z) : z \in \bigcup_{\Delta: \|\Delta\|_2 \leq \varepsilon} W(A + \Delta)\},$$

pa tvrđenje sledi na osnovu činjenice da je

$$\bigcup_{\Delta: \|\Delta\|_2 \leq \varepsilon} W(A + \Delta) = W(A) + \zeta_\varepsilon. \quad \square$$

S obzirom da za matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , čiji su svi dijagonalni elementi u  $\mathbb{C}^-$  važi:

$$\nu_A = \omega_A = \alpha_{H_A} \leq \gamma_{H_A} = \max_{i \in N} (Re(a_{ii}) + r_i(H_A)) =$$



$$= -\min_{i \in N} (|\operatorname{Re}(a_{ii})| - g_i(A)) = -\xi_1(\operatorname{Red}(A)),$$

kao direktnu posledicu prethodne dve teoreme dobijamo sledeće tvrđenje.

**Teorema 3.22.** *Neka je matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  takva da su joj svi dijagonalni elementi u  $\mathbb{C}^-$ . Tada je, za svako  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\nu_A^\varepsilon \leq -\xi_1(\operatorname{Red}(A)) + \varepsilon.$$

Dakle, u slučaju euklidske norme,  $-\xi_1(\operatorname{Red}(A)) + \varepsilon$ , je gornja ocena za najveću moguću reaktivnost perturbovanog LTIDS, dok smo u slučaju maksimum norme imali, umesto ocene, karakterizaciju reaktivnosti.

Za kraj, primetimo da ekosistemi tla, koji su predmet proučavanja u ovoj disertaciji, kao, uostalom, i mnogi drugi matematički modeli raznih pojava u prirodi i društvu, često imaju osobinu da su interakcije među nekim vrstama značajno masovnije nego sa ostalim vrstama. To se u matematičkom modelu reflektuje u vidu blokovske strukture Jakobijana (tj. community matrice). Stoga se čini razumnim pokušaj da se iskoristi ta činjenica, te da se lokalizacije pseudospektra izvedu za matrice sa blokovskom strukturom. Do sada, podela na dva bloka je učinjena u okviru ocene  $\mu_3$ , međutim, u drugačijem pristupu, koji dozvoljava podelu na više blokova, taj problem smo razmatrali u radu [22]. U ovoj disertaciji, ipak, usled fokusa na njenu užu temu, nećemo navoditi kompletan pregled svih tih rezultata.

# 4

## Indikatori stabilnosti EFW

### 4.1 Model empirijskih trofičkih mreža

Matematički model koji ćemo koristiti odnosi se na trofičku mrežu od  $n \in \mathbb{N}$  funkcionalnih grupa živih vrsta sa fondom nežive organske materije, čija je energija protoka približno opisana generalizovanim Lotka-Volterra jednačinama. Ovaj model preuzet je iz knjige [63].

#### 4.1.1 Jednačine protoka energije

Da bismo opisali model, uvedimo, najpre, neke oznake.

Za  $i \in N := \{1, 2, \dots, n\}$ , sa  $x_i(t)$  označimo gustinu biomase  $i$ -te funkcionalne grupe u vremenu  $t \geq 0$ . Za trofičke mreže tla jedinica je obično gram ugljenika (ili azota) po hektaru po centimetru dubine. Gustinu biomase detritusa označimo sa  $x_{n+1}(t)$ .

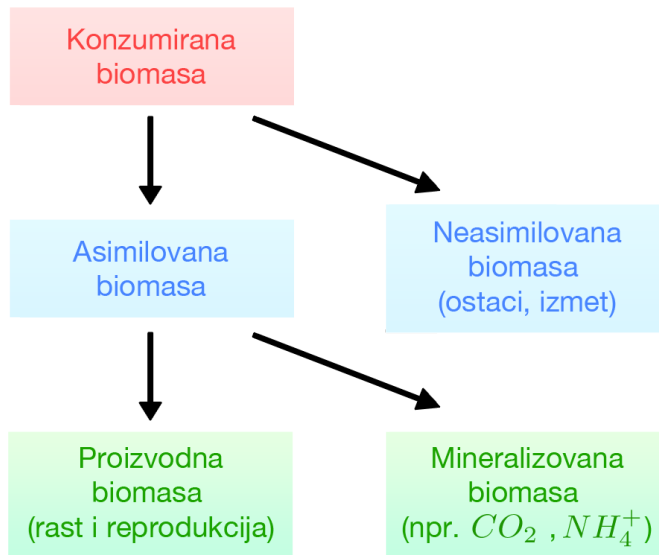
Skupove indeksa koji odgovaraju sličnim funkcionalnim grupama označimo sa:

- $\mathcal{P}$  - primarni proizvođači (biljke, itd.)
- $\mathcal{C}$  - primarni potrošači (biljojedi, gljivojedi, bakteriojedi i mesožderi)
- $\mathcal{D}$  - detritusožderi (detritus potrošači poput nekih gljivica, bakterija, itd).

Očigledno je  $N = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ .

Za  $i \in \mathcal{P}$ , sa  $g_i > 0$  označavamo stopu rasta tog primarnog proizvođača.

Za  $i \in N$ , sa  $b_i > 0$  označavamo stopu smrtnosti te vrste zbog ne-trofičkih razloga, sa  $a_i \in (0, 1)$  njegovu energetska efikasnost asimilacije, a sa  $p_i \in (0, 1)$  njegovu efikasnost produktivnosti. Dakle,  $a_i p_i$  predstavlja energetska efikasnost u trofičkoj interakciji.



Slika 4.1: Konzumacija biomase u trofičkoj interakciji

Napomenimo da su unutrašnja stopa rasta  $g_i$  i stopa smrtnosti  $b_i$ , po jedinici vremena, osobine funkcionalnih grupa organizama baziranih na njihovom prethodnom ponašanju i/ili njihovoj fiziologiji, dok energetska efikasnost u trofičkoj interakciji  $a_i p_i$  predstavlja odnos imobilisane materije ili energije koja formira novu biomasu u obliku rasta i razmnožavanja i količine potrošene materije ili energije. U tom smislu, efikasnost asimilacije se definiše kao količnik asimilovane konzumacije (unosom molekula kroz ćelijske membrane, tako da se mogu koristiti za rast, reprodukciju i održavanje) i ukupne količine potrošene biomase, a efikasnost produktivnosti definisana je kao količnik asim-

ilovane biomase koja se koristi za produkciju (rast i razmnožavanje) i ukupne količine asimilovane biomase (vidi Sliku 4.1).

Konačno, budući da model koji istražujemo uključuje i biomasu nežive organske materije koja ulazi u sistem spolja, definisaćemo  $g_D \geq 0$  kao stopu rasta biomase iz takvog alohtonog izvora, po jedinici vremena.

Razmena energije između živih vrsta modelira se pomoću funkcionalnih odgovora. Naime, za svakog predatora  $j \in \mathcal{C}$ , karakteristika koja opisuje kako se on prilagođava promenama u gustini biomase njegovog plena  $i \in \mathcal{P}$  u momentu  $t$  je data sa  $f_j(x_i(t))$ .

Koristeći uvedene oznake, naš deterministički sistem jednačina protoka energije u funkcionalnim mrežama ishrane izgleda ovako:

- upravljajući zakon funkcionalnih grupa proizvođača  $i \in \mathcal{P}$ :

$$\dot{x}_i = g_i x_i - \sum_{j \in \mathcal{C}} f_j(x_i) x_j - f_i(x_i) x_i, \quad (4.1)$$

- upravljajući zakon funkcionalnih grupa potrošača  $i \in \mathcal{C}$ :

$$\dot{x}_i = a_i p_i \sum_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ j \neq i}} f_i(x_j) x_j - b_i x_i - \sum_{\substack{j \in \mathcal{C} \\ j \neq i}} f_j(x_i) x_j - f_i(x_i) x_i, \quad (4.2)$$

- upravljajući zakon funkcionalnih grupa detritusoždera  $i \in \mathcal{D}$ :

$$\dot{x}_i = a_i p_i f_i(x_{n+1}) x_i - b_i x_i - \sum_{j \in \mathcal{C}} f_j(x_i) x_j - f_i(x_i) x_i, \quad (4.3)$$

- upravljajući zakon detritusa:

$$\dot{x}_{n+1} = g_D + \sum_{j \in \mathcal{N}} b_j x_j + \sum_{\substack{j \in \mathcal{C} \\ k \in \mathcal{N} \\ k \neq j}} (1 - a_j) f_j(x_k) x_j - \sum_{j \in \mathcal{D}} f_j(x_{n+1}) x_j. \quad (4.4)$$

Prateći konvenciju u literaturi, za detritus koristimo indeks  $D$  da bismo ga razlikovali od ostalih. Detritus ulazi u sistem spolja (alohtoni izvori) ili iznutra (autohtoni izvori). Alohtoni izvori predstavljeni su izrazom  $g_D$ . U ovom modelu, mi ih, bez ograničenja opštosti, posmatramo kao jedan izvor. Što se tiče autohtonih izvora, ovaj model identifikuje dva takva izvora:

- $\sum_{j \in \mathcal{C}, k \in N \setminus \{j\}} (1 - a_j) f_j(x_k) x_j$ , koji predstavlja neasimilovane de-love plena koje je predator pojeo, i uključuje izmet, otpatke, i nepojedene ostatke
- $\sum_{j \in N} b_j x_j$ , koji predstavlja leševe koji umiru iz ne-trofičkih razloga.

Konačno, izraz  $\sum_{j \in \mathcal{D}} f_j(x_{n+1}) x_j$  predstavlja direktnu konzumaciju detritusa.

Naravno, u zavisnosti od tipa funkcionalnog odgovora, zavisiće i složenost samog modela. Najjednostavniji oblik tog funkcionalnog odgovora jeste *linearni*, koji pretpostavlja da je brzina napada konstantna u odnosu na gustinu plena (ne zavisi od gustine plena), odnosno da je u pitanju linearna zavisnost

$$f_j(x_i(t)) = c_{ij} x_i(t),$$

gde  $c_{ij} \geq 0$  predstavlja koeficijent konzumacije po jedinici biomase po jedinici vremena. U slučaju kada nema trofičke interakcije, taj koeficijent je jednak nuli, tj.  $c_{ij} = 0$ . Slično važi i za detritus-ždere  $j \in \mathcal{D}$ , pri čemu je

$$f_j(x_{n+1}(t)) = c_{n+1,j} x_{n+1}(t),$$

a  $x_{n+1}(t)$  je gustina biomase u detritusu u momentu  $t$ .

Veoma je važno ponovo napomenuti da za sve funkcionalne grupe organizama  $i \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ , uzimamo u obzir i samoograničavajući faktor kao kompeticiju unutar vrste, u smislu negativnog uticaja jedinki na rast i reprodukciju ostalih jedinki u njihovoj funkcionalnoj grupi.

Ovaj proces se modelira kao model zavisnosti od gustine istog tipa funkcionalnog odgovora, u našem slučaju, linearnog tipa:

$$f_i(x_i(t)) = c_{ii} x_i(t),$$

gde  $c_{ii} > 0$  predstavlja stepen kompeticije unutar vrste (*intraspecifična kompeticija*) i uključuje pribavljanje i korišćenje zajedničkih resursa (plen, prostor, partner, svetlost, bitne hranljive materije, itd.).

U slučaju ovakvih - linearnih funkcionalnih odgovora, dinamika prati sledeći zakon:

$$\dot{x}(t) = \Phi(x(t)), \quad (4.5)$$

gde je  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  nelinearna funkcija definisana pomoću parametara  $g_D$ ,  $b_i$ ,  $a_i$  i  $p_i$  ( $i \in N$ ), kao i parametara trofičkih interakcija  $c_{ij}$ , obično izraženih matricom  $C$  trofičkih interakcija  $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n+1, n+1}$ . Matrica  $C$  ima sledeću blok formu, zbog podele funkcionalnih grupa vrsta na četiri skupa indeksa  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{D}$  i  $\{n+1\}$ , počev od top predatora pa na dole:

$$C = \begin{bmatrix} C[\mathcal{C}, \mathcal{C}] & 0 & 0 & 0 \\ C[\mathcal{P}, \mathcal{C}] & C[\mathcal{P}, \mathcal{P}] & 0 & 0 \\ C[\mathcal{D}, \mathcal{C}] & 0 & C[\mathcal{D}, \mathcal{D}] & 0 \\ 0 & 0 & C[\{n+1\}, \mathcal{D}] & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

pri čemu je  $C[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$  oznaka za podmatricu čije su vrste indeksirane skupom  $\mathcal{U}$ , a kolone skupom  $\mathcal{V}$ . Stoga, na osnovu (4.1)-(4.4), upravljajuću funkciju TIDS (4.5) možemo zapisati i kao:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x) &= (g_i - b_i)x_i - c_{ii}x_i^2 + x_i \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} (a_i p_i c_{ji} - c_{ij})x_j, \quad (i \in N), \\ \Phi_{n+1}(x) &= g_D + \sum_{j=1}^{n+1} b_j x_j + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} (1 - a_j) c_{jk} x_j x_k - \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1, j} x_{n+1} x_j, \end{aligned} \quad (4.7)$$

uz konvenciju  $b_i = 0$  za  $i \in \mathcal{P}$ ,  $g_i = 0$  za  $i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  i  $a_i = 1$  za  $i \in \mathcal{D}$ .

Dakle, dobijamo da je TIDS koji modeluje protok energije u trofičkoj mreži određen parametrima  $g_D$ ,  $a_i$ ,  $p_i$ ,  $g_i$ ,  $b_i$  i matricom trofičkih

interakcija  $C$  dat sa:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= (g_i - b_i)x_i - c_{ii}x_i^2 + x_i \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} (e_i c_{ji} - c_{ij})x_j, \quad (i \in N), \\ \dot{x}_{n+1} &= g_D + \sum_{j=1}^{n+1} b_j x_j + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} (1 - a_j) c_{jk} x_j x_k - \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1, j} x_{n+1} x_j. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Primetimo još i da su matrice  $C[\mathcal{P}, \mathcal{P}]$  i  $C[\mathcal{D}, \mathcal{D}]$  dijagonalne, dok su predator-plen interakcije između primarnih potrošača sadržane u donjoj trougaonoj matrici  $C[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ .

### 4.1.2 Community matrix

Na osnovu (4.7), nalazeći parcijalne izvode, dobijamo:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x) = (g_i - b_i) - 2c_{ii}x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} (a_i p_i c_{ji} - c_{ij})x_j, \quad (i \in N), \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial x_{n+1}}(x) = - \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1, j} x_j, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x) = x_i (a_i p_i c_{ji} - c_{ij}), \quad (i \in N, j = 1, 2, \dots, n+1), \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial x_j}(x) = b_j - c_{n+1, j} x_{n+1} + \sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} (1 - a_j) c_{jk} x_k, \quad j \in N. \quad (4.12)$$

Podsetimo se da je community matrica, u stvari, vrednost Jakobi-jana u posmatranoj ravnotežnoj tački, koju označavamo, kao i ranije, sa  $x^*$ . Stoga imamo i uslov da ekvilibrijum  $x^*$  zadovoljava uslov  $\Phi(x^*) = 0$ , tj., na osnovu (4.7),

$$\begin{aligned} &\left( (g_i - b_i) - c_{ii}x_i^* + \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} (a_i p_i c_{ji} - c_{ij})x_j^* \right) x_i^* = 0, \quad (i \in N), \\ &g_D + \sum_{j=1}^{n+1} b_j x_j^* + \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1, k \neq j}^{n+1} (1 - a_j) c_{jk} x_j^* x_k^* - \sum_{j=1}^{n+1} c_{n+1, j} x_{n+1}^* x_j^* = 0. \end{aligned}$$

Kako je tačka ekvilibrijuma *dopustiva* (*feasible*), tj.  $x^* > 0$ , zaključujemo da je community matrica

$$A = \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x^*) \right] \in \mathbb{R}^{n+1, n+1}$$

data sa  $A = [\alpha_{ij}]$ , gde je:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -c_{ii}x_i^*, & i = j, \\ -(c_{ij} - e_i c_{ji})x_i^*, & i \neq j, \end{cases} \quad \text{za } i, j \in N$$

$$\alpha_{i, n+1} = \begin{cases} 0 & i \in \mathcal{C} \cup \mathcal{P}, \\ e_i c_{n+1, i} x_i^*, & i \in \mathcal{D}, \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\alpha_{n+1, j} = b_j - c_{n+1, j} x_{n+1}^* + \sum_{k \in N \setminus \{j\}} (1 - a_k) c_{jk} x_k^*,$$

$$\alpha_{n+1, n+1} = - \sum_{k \in N} c_{n+1, k} x_k^*.$$

Funkcija evolucije  $\phi_A(t)$  community matrice  $A$ , dakle, u potpunosti je određena parametrima efikasnosti asimilacije  $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ , efikasnosti produktivnosti  $\{p_i\}_{i=1}^{n+1}$ , matricom parametara trofičkih interakcija  $C = [c_{ij}]_{i, j=1}^{n+1}$ , kao i ravnotežnim gustinama biomase  $\{x_i^*\}_{i=1}^{n+1}$ .

Prema tome, da bismo formirali model primenjljiv na realne ekosisteme, neophodno je kalibrisati ove parametre, i to na osnovu empirijskih podataka. Međutim, dok se parametri obe efikasnosti mogu utvrditi na osnovu fizioloških osobina funkcionalnih grupa organizama, a gustine ravnotežne biomase merenjima, veliki izazov za primenu ovog modela predstavljaju vrednosti matrice trofičkih interakcija. Naime, kako su to stope interspecifičnih interakcija, konzumacije po jedinici biomase po jedinici vremena, (vandijagonalni elementi matrice) i stope intraspecifične kompeticije (dijagonalni elementi matrice), utvrđivanje ovih vrednosti, na osnovu realnih podataka, nije direktan postupak. Ovoj ekstenziji determinističkog modela trofičkih mreža koja se zasniva na empirijskim posmatranjima posvećena je naredna sekcija.

### 4.1.3 Empirijske trofičke mreže

U ovoj sekciji objasnićemo kako se kalibrišu parametri modela (4.8) sa empirijskim podacima prikupljenim na terenu. Pratićemo isti metod



kao u [65] i [63], gde je community matrica izvedena iz

- $B_i$  [ $g C ha^{-1} cm depth^{-1}$ ] - izmerene godišnje prosečne biomase za svaku funkcionalnu grupu  $i \in N$ ,
- $d_i$  - stope ne-predatorske smrtnosti u ekvilibrijumu, uključujući smrtnost (koja zavisi od gustine) prouzrokovanu intraspecifičnom kompeticijom za svaku funkcionalnu grupu  $i \in N$ ,
- $a_i$  i  $p_i$  - procenjenih fizioloških parametara asimilacione efikasnosti i produkcione efikasnosti, redom, za svaku funkcionalnu grupu  $i \in N$ , kao i
- $\gamma_{ij}$  - faktora trofičkih preferencija funkcionalne grupe  $j \in N$  prema funkcionalnim grupama  $i \in N$ .

Sve ove vrednosti se mogu dobiti proučavanjem fiziologije i trofičkog ponašanja organizama, kao i merenjima biomase na terenu, te, stoga, model (4.1)-(4.4), u kome je community matrica  $A$  izvedena iz navedenih vrednosti, nazivamo model *empirijske trofičke mreže*. Sam postupak takvog dobijanja community matrice navodimo u nastavku.

Prvo, za svaku funkcionalnu grupu  $i \in N$ , sa  $M_i$  označimo *godišnju stopu smrtnosti izazvanu predatorstvom*, a sa  $F_i$  njenu *ukupnu godišnju stopu hranjenja* (obe u  $g C ha^{-1} cm depth^{-1} y^{-1}$ ).

Pretpostavljajući da *se sva merenja biomase vrše u toku ekvilibrijumskog stanja ekosistema*, možemo zaključiti da važi zakon o bilansu mase u ravnotežnom stanju, koji se da izraziti kao

$$F_j = \frac{d_j B_j + M_j}{a_j p_j}, \quad (j \in N). \quad (4.14)$$

Sa druge strane, ukupna godišnja stopa  $F_j$  hranjenja grupe  $j \in N$  distribuirana je na tipove plena  $i \in N$  na sledeći način:

$$F_{ij} = \frac{\gamma_{ij} B_j}{\sum_{k \in N} \gamma_{kj} B_j} F_j, \quad (i \in N), \quad (4.15)$$

gde je  $F_{ij}$  godišnja stopa hranjenja grupe  $j$  plenom  $i$ .

Konačno, godišnja stopa smrtnosti izazvane predatorstvom je

$$M_i = \sum_{j \in N} F_{ij}, \quad (i \in N). \quad (4.16)$$

Dakle, da bismo odredili vrednosti  $F_{ij}$  godišnjih stopa hranjenja potrošača  $j \in \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$  plenom  $i \in N \cup \{n + 1\}$ , na osnovu kojih možemo kalibrisati community matricu  $A$ , neophodno je da rešimo sistem jednačina dat sa (4.14)-(4.16) po  $F_{ij}$ . S obzirom da su jednačine rekurentno povezane, neophodno je znati odakle početi rešavanje. Odgovor leži u činjenici da trofičke mreže imaju hijerarhijsku strukturu po trofičkim nivoima. Naime, najviši trofički nivo čine top predatori, kojima se niko ne hrani. Označavajući sa  $N_k$  indekse funkcionalnih grupa koje se nalaze u  $k$ -tom trofičkom nivou  $k = 1, 2, \dots, \ell$ , prateći top-to-bottom poredak, imamo da je

$$M_j = 0, \quad (j \in N_1).$$

Ali tada, prema (4.14), dobijamo  $F_j$  za sve  $j \in N_1$ , koje potom distribuiramo na niže trofičke nivoe pomoću (4.15) i dobijamo  $F_{ij}$  za sve  $j \in N_1$  i sve  $i \in N_2 \cup \dots \cup N_\ell$ . Međutim, tada, kako su za sve  $j \in N_2$ , potrošači koji se hrane  $j$ -om funkcionalnom grupom u  $N_1$ , možemo primeniti (4.16) i dobijamo

$$M_j = \sum_{k \in N} F_{jk} = \sum_{k \in N_1} F_{jk}, \quad (j \in N_2).$$

Sada čitav postupak možemo nastaviti za trofički nivo  $N_2$ , i potom redom za  $N_3$ , sve do poslednjeg  $N_\ell$ , u kome se nalaze proizvođači i detritus.

Na ovaj način smo dobili stope hranjenja  $F_{ij}$  za svaki trofički odnos funkcionalne grupe  $j$  koja se hrani grupom  $i$ , što kao stopa po izmerenoj biomasi  $B_j$  upravo odgovara vrednosti  $c_{ij}x_i^*$ , tj. važi

$$c_{ij}x_i^* = \frac{F_{ij}}{B_j}, \quad (1 \leq i, j \leq n + 1, i \neq j).$$

Prema tome, uz fiziološke parametre, na osnovu empirijskih podataka su određeni svi elementi community matrice  $A$ , osim dijagonalnih  $\alpha_{ii}$ ,  $i \in N$ .

Ostaje još da odredimo dijagonalne elemente community matrice

$$\alpha_{ii} = c_{ii}x_i^*, \quad (i \in N).$$

Međutim, intraspecifična kompeticija se može posmatrati kao deo godišnje ne-predatorske stope smrtnosti, u oznaci  $d_i$ ,  $i \in N$ , tj.

$$c_{ii}x_i^* = s_i d_i, \quad (i \in N),$$

gde za funkcionalnu grupu  $i \in N$ , izraz  $s_i$  predstavlja deo godišnje ne-predatorske stope smrtnosti  $d_i$ , koja je rezultat intraspecifične kompeticije (prirodna smrt) i koja je nepoznati parametar.

Pod pretpostavkom da je  $s = s_i$  za sve  $i \in N$ , community matrica  $A$  sada zavisi od parametra  $s$ , tj.

$$A = A(s) := sD + G, \quad (4.17)$$

gde je  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n, 0)$ ,  $G = [g_{ij}]$ , a

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{za } i = j, i \in N, \\ \alpha_{ij} & \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle, community matrica  $A(s)$  zavisi od intraspecifično kompeticionog faktora  $s$  samo na dijagonalnim ne-detritus mestima, dok je ostatak fiksiran empirijskim podacima, pa se taj parametar  $s$  koristi za određivanje indikatora stabilnosti za trofičku mrežu predstavljenu sa (4.8).

Preciznije, ukoliko postoji  $s \in (0, 1]$  takvo da community matrica  $A(s)$  čini da je TIDS 4.5 u određenom smislu "lokalno stabilan" (rezilijentan, nereaktivan, robusno nereaktivan, robusno eksponencijalno stabilan, itd.), tada najmanje takvo  $s$  predstavlja dovoljan stepen intraspecifične kompeticije (procenat stopa netrofičkih smrtnosti svake od grupa) koji "stabilizuje" trofičku mrežu u posmatranom smislu. Zato se takvo  $s$  može smatrati indikatorom, pri čemu manje vrednosti označavaju "stabilnije" trofičke mreže, dok vrednosti  $s \geq 1$  govore o tome da se posmatrana trofička mreža ne može smatrati "stabilnom", tj. da se sistem ne može stabilizovati putem intraspecifične kompeticije ( $s$  je, u suštini, procentualna kategorija, pa ima smisla samo za vrednosti između 0 i 1).

Kao što je već rečeno u [65], prednost izražavanja stabilnosti u terminima dijagonalnih elemenata leži u činjenici da, dok sami karakteristični koreni nemaju direktno biološko tumačenje, nivo jačine intraspecifične interakcije (koji se ogleda u  $s$ ) ima biološko, materijalno tumačenje. U tom smislu, dijagonalni elementi predstavljaju samoregulišući faktor organizama i odnose se na stopu gubitka organizama u stabilnom stanju. Zato indikator stabilnosti  $s_\epsilon^*$  predstavlja dinamičko ograničenje sistema, kao potreban nivo samoregulacije u uslovima neizvesnosti. On je dinamičko i energetska ograničenje, pošto se može protumačiti kao gubitak, kroz samoregulaciju, u odnosu na ukupan prirodni gubitak koji sistem može imati (za date ravnotežne stope i stabilnost).

O tome na koje sve načine možemo iskoristiti parametar  $s$  kao indikator ekološke stabilnosti trofičkih mreža bavićemo se u naredne dve sekcije. Najpre ćemo prezentovati u literaturi poznate rezultate, zajedno sa diskusijom o njihovim nedostacima, a zatim ćemo konstruisati nove indikatore, zasnovane na matematičkim razmatranjima u okviru Glave 3 ove teze.

## 4.2 Aktuelni indikatori stabilnosti EFW

U literaturi se model empirijskih trofičkih mreža primarno koristi za utvrđivanje karakteristika ravnotežnih stanja u kruženju energije u ekosistemima, i to dinamičkih osobina u okviru koncepta ekološke stabilnosti. Imajući to u vidu, u ovoj sekciji pravimo kratak pregled postojećih indikatora ekološke stabilnosti koji su na ovaj način formirani.

Prvo, primetimo da model empirijske trofičke mreže kao unos prima podatke

$$(B_j, d_j, a_j, p_j, \gamma_{ij}), \quad (1 \leq i, j \leq n + 1), \quad (4.18)$$

koji opisuju gustinu biomase, fiziološke karakteristike i trofičke preference organizama u  $n$  funkcionalnih grupa, kao i gustinu biomase u detritusu. Kao rezultat dobijamo community matricu  $A(s)$ , koja zavisi od parametra  $s$  koji aproksimira intraspecifičnu kompeticiju, pa se čitav postupak formiranja indikatora ekološke stabilnosti trofičke

Osobina LTIDS datog matricom $A$	skup	apscisa
eksponencijalna stabilnost	spektar $\Lambda(A)$	$\alpha_A$
nereaktivnost u maksimum normi	Geršgorinov skup	$\gamma_A$
nereaktivnost u euklidskoj normi	numerički raspon $W(A)$	$w_A$
$\varepsilon$ - robusna eksponencijalna stabilnost	$\varepsilon$ -pseudospektar $\Lambda_\varepsilon(A)$	$\alpha_A^\varepsilon$
$\varepsilon$ - robusna nereaktivnost u maksimum normi	$\varepsilon$ -Geršgorinov skup $\Gamma_\varepsilon(A)$	$\gamma_A + \varepsilon$
$\varepsilon$ - robusna nereaktivnost u euklidskoj normi	$\varepsilon$ -numerički raspon $W(A) + \zeta_\varepsilon$	$w_A + \varepsilon$

Tabela 4.1: Karakterizacija osobina LTIDS datog matricom  $A$  na osnovu pozicije odgovarajućeg skupa u levoj poluravni kompleksne ravni  $\mathbb{C}^-$ , što je kvantifikovano njegovom apscisom.

mreže sastoji u određivanju *granične* vrednosti parametra  $s$  za koju community matrica  $A(s)$  ima svojstva koja govore o *stabilnosti TIDS*. Na osnovu Glave 2, podsetimo se da su različiti pokazatelji stabilnosti TIDS iskazani položajem karakterističnih korena i njihovih lokalizacija u kompleksnoj ravni. Preciznije, važe odnosi dati Tabelom 4.1.

Da bi se razvili indikatori ekološke stabilnosti empirijskih trofičkih mreža, do sada su, koliko je autoru poznato, od navedenih osobina iskorišćene:

- eksponencijalna stabilnost LTIDS (položaj spektra)
- nereaktivnost u maksimum normi (položaj Geršgorinovog skupa)
- nereaktivnost u euklidskoj normi (numerički raspon)

i to na sledeći način.

U [73] je za indikator stabilnosti trofičke mreže, predstavljene empirijskim podacima (4.18), uzeta vrednost  $s_\infty^*$ , koja predstavlja najmanju vrednost  $s$ , takvu da je community matrica  $A(s)$  SDD, što je, s obzirom na negativnost njenih dijagonalnih elemenata, ekvivalentno sa činjenicom da njen Geršgorinov skup leži u otvorenoj levoj kompleksnoj poluravni

$$s_\infty^* := \inf \{ s \geq 0 : \Gamma(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^- \}.$$

Uzevši u obzir Sekciju 3.3.1, a posebno (3.18), to je ekvivalentno sa

$$s_\infty^* = \inf \{ s \geq 0 : \nu_{A(s)} < 0 \}, \quad (4.19)$$

gde je  $\nu_A$  reaktivnost matrice  $A$  u maksimum normi. Iz tog razloga, u ovoj tezi, ovaj indikator nazivamo *indikator nereaktivnosti u maksimum normi*.

S obzirom da se parametar  $s$  nalazi na svim dijagonalnim mestima matrice, osim na poslednjem, koji odgovara detritusu, jasno je da  $s_\infty^*$  ne mora postojati u opštem slučaju. Preciznije, ukoliko je

$$|\alpha_{n+1,n+1}| \leq \sum_{j \in N} |\alpha_{n+1,j}|,$$

matrica  $A(s)$  ne može biti SDD niti za jedno  $s$ , što ćemo konvencijom zapisati kao  $s_\infty^* := +\infty$ . U suprotnom, s obzirom da je  $\alpha_{ii} = -sd_i$  za  $i \in N$ , možemo eksplicitno odrediti sve  $s$  za koje je svaka vrsta matrice  $A(s)$  strogo dijagonalno dominantna. Drugim rečima, indikator  $s_\infty^*$  ima lepu osobinu da se eksplicitno može zapisati u terminima elemenata matrice  $A(1)$ :

$$s_\infty^* = \begin{cases} \max_{i \in N} \left\{ \frac{1}{d_i} \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} |\alpha_{ij}| \right\} \\ +\infty \end{cases}, \quad |\alpha_{n+1,n+1}| > \sum_{j \in N} |\alpha_{n+1,j}|, \quad (4.20)$$

, inače.

Pored toga, u istom radu, s obzirom da je nereaktivnost community matrice, izražena uslovom (4.19), često previše zahtevan uslov za empirijske trofičke mreže, razvijen je i indikator zasnovan na GDD matricama koji je manje zahtevan, a može se zapisati kao

$$\widehat{s}_\infty^* := \inf \{ s \geq 0 : MGS(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^- \}, \quad (4.21)$$

gde je  $MGS(\cdot)$  oznaka za Minimalni Geršgorinov skup dat sa (3.14). Za razliku od  $s_\infty^*$ , ovaj indikator  $\widehat{s}_\infty^*$  se ne može eksplicitno izraziti preko elemenata matrice i stoga ga je neophodno numerički odrediti, što je netrivialan i računski daleko složeniji i skuplji postupak. Radi najavljene detaljne obrade podataka, u ovoj tezi smo unapredili algoritam za izračunavanje ovog indikatora u odnosu na originalni postupak predložen u [73]. Razvijeni algoritam se nalazi u Sekciji 4.3.3.

Sa druge strane, na sličan način, razvijen je indikator zasnovan na numeričkom rasponu, tj, *nereaktivnosti u euklidskoj normi*, koji ćemo

ovde označiti sa  $s_2^*$ . Naime,  $s_2^*$  je najmanja vrednost  $s$  takva da je  $A(s)$  nerekativna matrica u euklidskoj normi, tj.

$$s_2^* := \inf \{s \geq 0 : \nu_{A(s)} < 0\} = \inf \{s \geq 0 : W(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^-\}, \quad (4.22)$$

gde je  $\nu_A$  reaktivnost matrice  $A$  u euklidskoj normi.

Kao što je to bio slučaj sa indikatorom zasnovanom na minimalnom Geršgorinovom skupu, tako i ovde, postupak izračunavanja  $s_2^*$  mora biti numerički i zapravo je to problem optimizacije najvećeg karakterističnog korena hermitske matrice  $H_{A(s)}$  jer je

$$s_2^* = \inf \{s \geq 0 : \Lambda(H_{A(s)}) \subseteq \mathbb{C}^-\}.$$

Kao takav, ovaj postupak je netrivialan i numerički zahtevan, a algoritam za njegovo izračunavanje navodimo u Sekciji 4.3.3.

Konačno, u [65, 63] za indikator stabilnosti trofičke mreže, predstavljene empirijskim podacima (4.18), uzeta je vrednost  $s^*$ , koja predstavlja najmanju vrednost za  $s$  takvu da je community matrica  $A(s)$  stabilna, tj. da ima sve karakteristične korene u otvorenoj levoj kompleksnoj poluravni. Preciznije,

$$s^* := \inf \{s \geq 0 : \Lambda(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^-\}. \quad (4.23)$$

Slično prethodnom, izračunavanje indikatora  $s^*$  je problem optimizacije najdesnijeg karakterističnog korena matrice  $A(s)$ , što je, s obzirom na njenu (ne-hermitsku) strukturu, dodatno složeniji numerički postupak od prethodnog slučaja.

Iz Tabele 4.1 vidimo da imamo još prirodnih mogućnosti da formiramo indikatore ekološke stabilnosti trofičkih mreža, zasnovane na razmatranjima u ovoj tezi.

Pre nego što pređemo na ove originalne rezultate, ilustrovaćemo upotrebu već postojećih indikatora (4.19), (4.21), (4.22) i (4.23) i ukazati na određene poteškoće koje nastupaju.

Kao prvi primer uzmimo Schiermonnikoog trofičku mrežu u prvom stadijumu razvoja prikazanu na Slici 1.1, koja je određena fiziološkim parametrima datim u Tabeli 5.1, dok su gustine biomase date sa:

$$B_1 = 5, \quad B_2 = B_3 = B_4 = 10, \quad B_5 = 50,$$

$$B_6 = 3000, B_7 = 6000 \text{ i } B_8 = 500.$$

Njena community matrica dobijena na osnovu modela empirijskih trofičkih mreža  $A(s) = sD + G$  je data sa

$$\begin{bmatrix} -6s & 0 & 0 & 0 & 0.00495868 & 0 & 0.00495868 & 0 \\ 0 & -1.84s & 0 & 0 & 0 & 0.00613333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.92s & 0 & 0 & 0.0064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.68s & 0 & 0.00893333 & 0 & 0 \\ -0.130492 & 0 & 0 & 0 & -6s & 0 & 0.0501087 & 0 \\ 0 & -10.5143 & -13.6558 & -12.0721 & 0 & -1.2s & 0 & 7.92484 \\ -15.659 & 0 & 0 & 0 & -15.659 & 0 & -1.2s & 16.1225 \\ 6.78947 & 7.09714 & 10.3866 & 7.50883 & 6.62701 & -3.14085 & -3.2726 & -80.1578 \end{bmatrix},$$

i za nju dobijamo da je

$$s_\infty^* = 39.533710 \quad \widehat{s}_\infty^* = 0.945856 \quad s_2^* = 6.694139 \quad \text{i} \quad s^* = 0.0011048,$$

pri čemu smo za izračunavanja primenili algoritme razvijene u ovoj tezi.

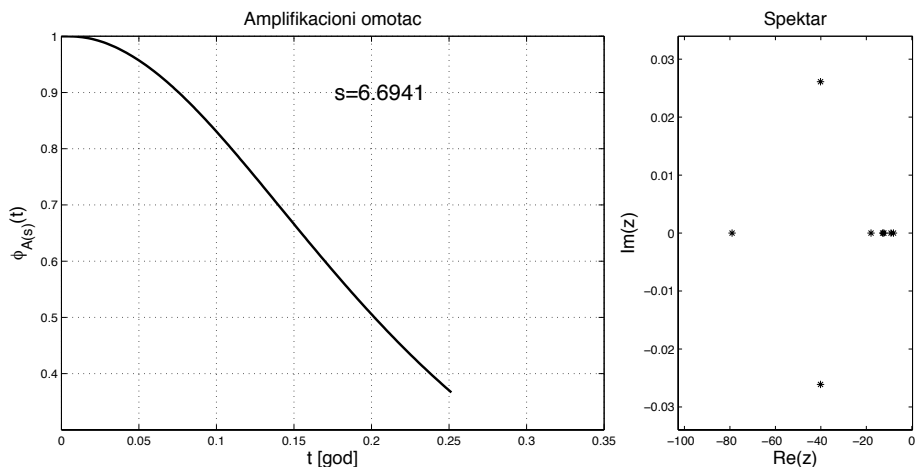
Jasno,  $s_\infty^* > 1$  i  $s_2^* > 1$  govore o tome da i u maksimum i u euklidskoj normi ovakva empirijska trofička mreža mora biti reaktivna. Pri tome je potrebno više hrane iz spoljašnjih izvora da bi se putem intraspecifične kompeticije odmah počeo apsorbovati maksimalni poremećaj ekvilibrijumskih gustina biomase funkcionalnih grupa (slučaj maksimum norme), nego što je to slučaj sa kvadratnim odstupanjem od ekvilibrijumskih gustina (slučaj euklidske norme).

Sa druge strane,  $\widehat{s}_\infty^* < 1$  govori o tome da postoje ponderi takvi da ponderisani maksimalni poremećaj ekvilibrijumskih gustina biomase funkcionalnih grupa počinje odmah da opada.

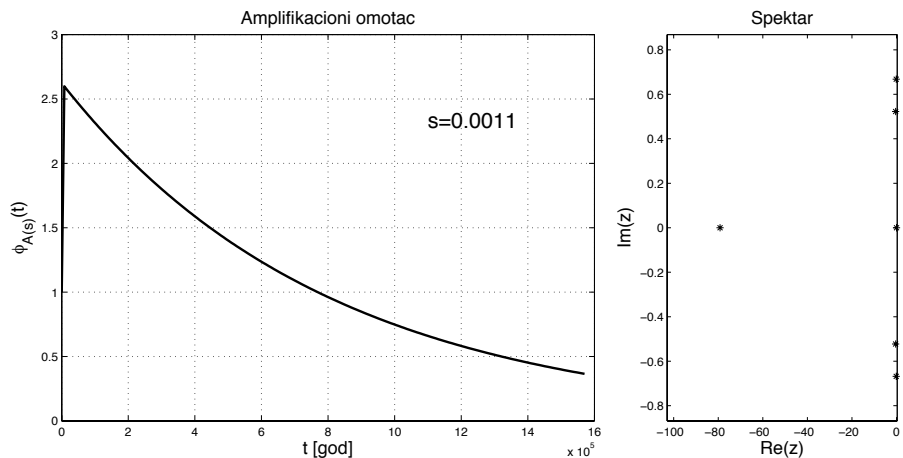
Posmatrajući slučaj euklidske norme, na Slici 4.2 vidimo da zaista za community matricu  $A(s_2^*)$  evolucionarna funkcija odmah opada. Konačno,  $s^* < 1$  predviđa da ovu mrežu možemo smatrati asimptotski stabilnom. S obzirom na vrednost 0.0011, zaključili bismo da je ovakva EFW izuzetno stabilna. Međutim, na Slici 4.3 na kojoj uočavamo tu asimptotsku stabilnost LTIDS sa community matricom  $A(s^*)$ , takođe uočavamo da je za njeno ispoljavanje potrebno *praktično* beskonačno vreme povratka.

Da bismo bolje razumeli ovaj indikator asimptotske stabilnosti, posmatrajmo primer koji je obrađen i u radu [65], gde je on razvijen. Posmatramo, dakle, Schiermonnikoog trofičku mrežu u trećem stadijumu razvoja, prikazanu na Slici 1.1, koja je određena empirijskim





Slika 4.2: Nereaktivnost (levo) i spektralni portret u kompleksnoj ravni (desno) za community matricu  $A(s_2^*)$ , za  $s_2^* = 6.694139$



Slika 4.3: Tranzicioni rast (levo) i spektralni portret u kompleksnoj ravni (desno) za community matricu  $A(s^*)$ , za  $s^* = 0.0011048$

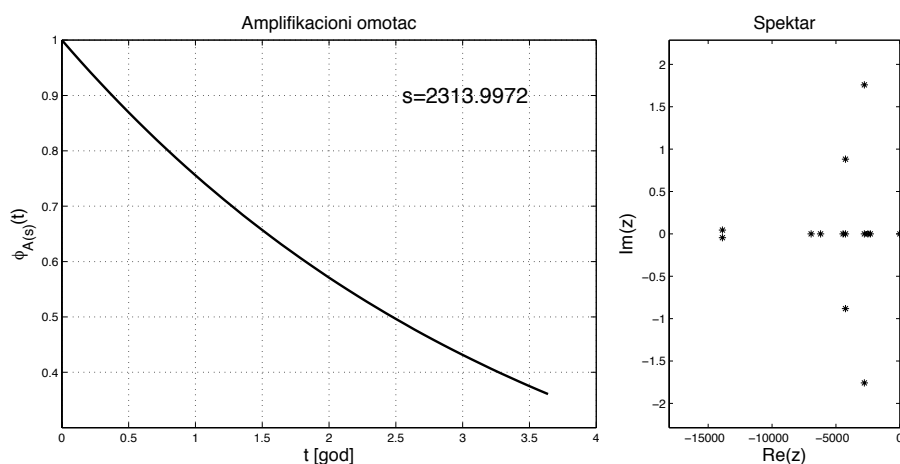
podacima datim u Tabeli 5.1 i gustinama biomase dobijenim merenjima na terenu u drugom uzorku, vidi Tabelu 5.2. Za njenu community matricu  $A(s) = sD + G$ , primenom razvijenih algoritama, dobijamo

da je

$$s_{\infty}^* = +\infty \quad \widehat{s}_{\infty}^* = 5.3055 \quad s_2^* = 2313.997 \quad \text{i} \quad s^* = 0.012766.$$

Očigledno,  $s_{\infty}^* > 1$ ,  $\widehat{s}_{\infty}^* > 1$  i  $s_2^* > 1$  govore o tome da i u maksimum, u svakoj ponderisanoj maksimum i u euklidskoj normi ova empirijska trofička mreža mora biti reaktivna, dok  $s^* < 1$  predviđa da je možemo smatrati asimptotski stabilnom. Takođe, činjenica  $s_{\infty}^* = +\infty$  znači da poslednja vrsta community matrice nije SDD, tj. da je detritus odgovoran za reaktivnost u maksimum normi, koja se ne može otkloniti intraspecifičnom kompeticijom. Dakle, maksimalno odstupanje od ekvilibrijuma čak i u prisustvu neograničenog spoljnog izvora ishrane, obavezno mora proći kroz amplifikacioni rast, usled dinamike upravljene detritusom.

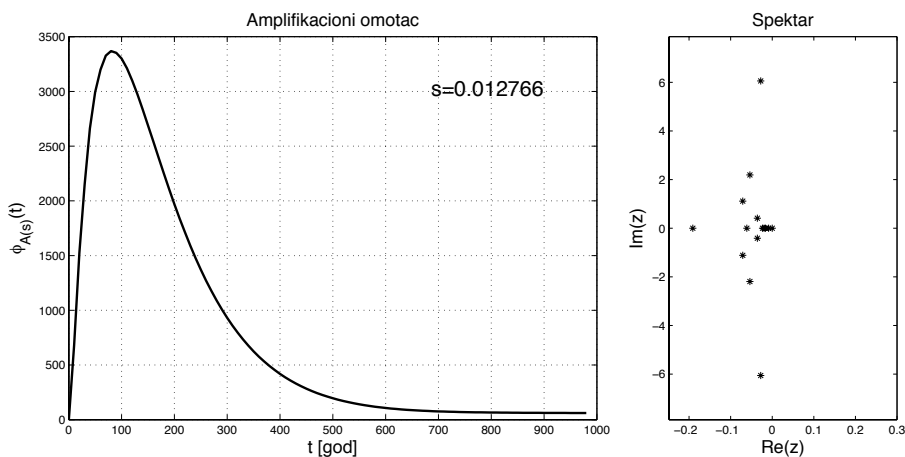
Kao i ranije, posmatrajmo evolucionu funkciju u euklidskoj normi i spektar community matrice. Na Slici 4.4 vidimo da za community matricu  $A(s_2^*)$  evoluciono funkcija odmah opada, tj. takav LTIDS je nereaktivan. Kako je  $s_2^* > 1$ , to znači da je nophodan visok priliv biomase iz eksternih izvora ishrane da bi ova EFW mogla na poremećaj ekvilibrijuma reagovati tako da ga odmah absorbuje i u roku od oko 4 godine se vrati nazad u ravnotežu.



Slika 4.4: Tranzicioni rast (levo) i spektralni portret u kompleksnoj ravni (desno) za community matricu  $A(s_2^*)$ , za  $s_2^* = 2313.997$

Sa druge strane, na Slici 4.5 je na desnoj strani prikazan spektar community matrice  $A(s^*)$  za  $s^* = 0.012766$ , a sa leve strane odgovarajući amplifikacioni omotač  $\Phi_{A(s^*)}(t)$ . Kao što možemo videti, vreme neophodno da se sistem oporavi nakon perturbacije je više od jednog milenijuma!

Štaviše, pre nego što sistem apsorbuje početnu perturbaciju i vrati se u stanje ekvilibrijuma, u prvih 100 godina, on prolazi kroz fazu svoje tranzicione amplifikacije, koja je veća od 3000. Očigledno, to može biti kritično visoko i može prevazići nosive kapacitete ekosistema. Drugim rečima, ova amplifikacija može da dovede do gubitka funkcionalnog integriteta ekosistema, pre nego što se ispolji efekat asimptotske stabilnosti. Zbog toga je tranziciono ponašanje za izabrano  $s$  neophodna informacija za bolje razumevanje dinamičkih ograničenja u strukturi sistema.



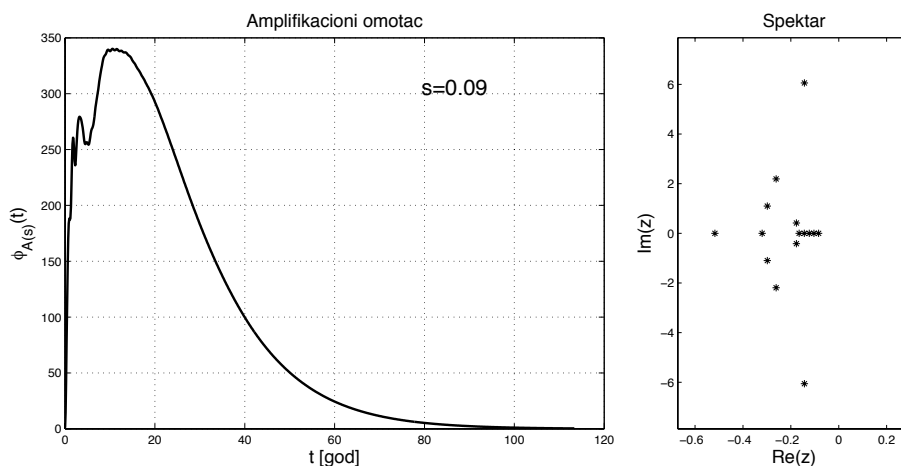
Slika 4.5: Tranzicioni rast (levo) i spektralni portret u kompleksnoj ravni (desno) za community matricu  $A(s^*)$ , za  $s^* = 0.012766$

U [65] autori su delimično ublažili ovaj problem pomoću randomizacije originalne community matrice konstruisane iz podataka (4.18). Naime, oni su računali indikator stabilnosti  $s^*$  kao prosek indikatora  $s_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , definisanih pomoću (4.23), za slučajne izbore  $G^{(k)} = \begin{bmatrix} g_{ij}^{(k)} \end{bmatrix}$ , uzorkovane preko uniformne raspodele  $g_{ij}^{(k)} \in [0, 2g_{ij}]$ ,

tj.

$$s_{rand}^* := \frac{\sum_{k=1}^m \min \{s \geq 0 : \Lambda(sD + G^{(k)}) \subset \mathbb{C}^-\}}{m}. \quad (4.24)$$

Tako su dobili približno  $s_{rand}^* = 0.09$ , što je adekvatniji indikator nego što je  $s^* = 0.012766$ . Da bismo to ilustrirali, nacrtali smo amplifikacioni omotač za community matricu  $A(0.09)$  na Slici 4.6. Iako je očigledno kraći od milenijuma, novi vremenski rok potreban za povratak u prvobitno stanje je oko jednog veka, nakon prolaska kroz amplifikacionu fazu od skoro 350, što se i dalje može smatrati nerealno velikim za realne ekološke sisteme.



Slika 4.6: Tranzicioni rast (levo) i spektralni portret u kompleksnoj ravni (desno) za community matricu  $A(s_{rand}^*)$ , za  $s_{rand}^* = 0.09$

U čemu je, zapravo, nastala poteškoća pri formiranju indikatora  $s^*$ ?

Da bismo dali odgovor na ovo pitanje, koristićemo informaciju o rasporedu nula u matrici  $C$  trofičkih interakcija, koja se u matrici  $A$  reflektuje na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} A[\mathcal{C}, \mathcal{C}] & A[\mathcal{C}, \mathcal{P}] & A[\mathcal{C}, \mathcal{D}] & 0 \\ A[\mathcal{P}, \mathcal{C}] & A[\mathcal{P}, \mathcal{P}] & 0 & 0 \\ A[\mathcal{D}, \mathcal{C}] & 0 & A[\mathcal{D}, \mathcal{D}] & A[\mathcal{D}, \{n+1\}] \\ A[\{n+1\}, \mathcal{C}] & A[\{n+1\}, \mathcal{P}] & A[\{n+1\}, \mathcal{D}] & \alpha_{n+1, n+1} \end{bmatrix},$$

gde su:

- $A[\mathcal{P}, \mathcal{P}]$  i  $A[\mathcal{D}, \mathcal{D}]$  negativne dijagonalne matrice,
- matrice  $A[\mathcal{C}, \mathcal{P}]$ ,  $A[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$  i  $A[\mathcal{D}, \{n + 1\}]$  su nenegativne, a
- matrice  $A[\mathcal{P}, \mathcal{C}]$ ,  $A[\mathcal{D}, \mathcal{C}]$  i  $A[\{n + 1\}, \mathcal{D}]$  nepozitivne.

Predator-plen interakcije među predatorima sadržane su u retkoj matrici  $A[\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ , čiji su dijagonalni elementi strogo negativni, a u slučaju kada nema obostranih trofičkih interakcija između predatora, njen donji trougaoni deo je nepozitivan, dok je gornji trougaoni deo nenegativan i numerički značajno manjeg reda.

Upravo ovakva struktura community matrice empirijskih trofičkih mreža čini je dalekom od normalne (vidi [78] za detaljni tretman ne-normalnih matrica i ne-normalne dinamike) i zbog toga je odgovorna za to da indikatori stabilnosti izvedeni preko asimptotske stabilnosti najčešće odgovaraju ekstremno dugim vremenskim periodima potrebnim da se sistem vrati u stanje ravnoteže (koje je perturbovano), prolazeći kroz, moguće kritičnu, tranzicionu amplifikaciju.

Motivisani ovim razmatranjem, a imajući u vidu sadržaj Glave 3 ove teze, u narednoj podsekciji uvodimo drugačiji pristup, koji će imati bolje teorijske osobine u odnosu na randomizaciju i koji će obezbediti realističniju interpretaciju.

### 4.3 Novi indikatori stabilnosti

Podsetimo se, ekološku stabilnost ravnoteže protoka energije u ekosistemu tla ispitujemo tako što identifikujemo trofičku mrežu tog ekosistema, odredimo fiziološke parametre i gustine biomasa uočenih funkcionalnih grupa organizama (4.18) i, potom, modelom empirijske trofičke mreže, odredimo community matricu  $A(s)$  i njenu evolucionu funkciju  $\phi_{A(s)}(t)$ , koja zavisi od parametra  $s$ . Zatim nam je cilj da odredimo optimalnu vrednost parametra  $s$ , tako da *evoluciona funkcija* ima poželjna svojstva.

U prethodnoj sekciji smo videli da su standardne osobine eksponencijalne asimptotske stabilnosti i nereaktivnosti bili osnova do sada razvijenih indikatora. Međutim, kao što smo videli, koristeći samo

početno ponašanje evolucione funkcije (nereaktivnost) i njeno asimptotsko ponašanje, nismo u stanju da formiramo u potpunosti adekvatne indikatore ekološke stabilnosti. Razlog tome je višestruk:

- Prvo, perturbacije ravnotežnog stanja protoka energije kroz ekosistem u principu *nisu samo* poremećaji gustine biomase unutar funkcionalnih grupa. Poremećaji mogu biti, a često upravo i jesu, u fiziološkim svojstima organizama, kao i u trofičkom ponašanju.
- Drugo, empirijski podaci, kao takvi, nisu dovoljni da se formira model samo na osnovu njih, usled osetljivosti merenja i stohastičkih fluktuacija.
- Treće, čak i umereno reaktivni asimptotski stabilni LTIDS mogu imati izrazito veliku tranzicionu amplifikaciju, koja može narušiti nosivi kapacitet ekosistema.

Međutim, zahvaljujući Sekciji 3.2, imamo alate koji otklanjaju upravo ova tri nedostatka. To su alati vezani za pseudospektar i njegove lokalizacije. Preciznije rečeno, postojeće indikatore možemo unaprediti inkorporirajući perturbacije community matrice u analizu dinamičkih svojstava ekvilibrijuma EFW.

U realnom životu, trofičke mreže su podložne značajnim stohastičkim varijacijama, kako demografskim, tako i varijacijama okoline, vidi [84]. Uključivanje tog stohastičkog ponašanja može dovesti do toga da se sistem ponaša značajno drugačije od svog determinističkog duplikata, vidi [59].

Poznato je, vidi [78], da je moguća situacija u kojoj karakteristični koreni leže u levoj poluravni, obezbeđujući asimptotsku stabilnost ekvilibrijuma, a da se istovremeno  $\varepsilon$ -pseudospektar propagira daleko u desnu poluravan, čak i za veoma malo  $\varepsilon$ , dovodeći do tranzicionog ponašanja. Kada se radi o empirijskim trofičkim mrežama, to znači da, iako je dotični ekosistem ocenjen kao stabilan, na osnovu spektra community matrice, pre nego što asimptotsko ponašanje počne da se manifestuje, može proći više od veka - daleko izvan vremenskog okvira u kome se se linearizacija može smatrati validnom. Još, pri tome, tranziciona amplifikacija može prevazilaziti nosivi kapacitet ekosistema.

Posmatrajući isti problem iz drugog ugla, možemo tvrditi da je ispitivanje stabilnosti samo pomoću spektra nenormalnih community matrica (što je u praksi najčešći slučaj) u najmanju ruku nedovoljno. Zbog grešaka u merenju i empirijskih nesigurnosti u određivanju fizioloških parametara i gustine biomase, izračunata community matrica biće adekvatna reprezentacija ekološkog sistema samo ako se posmatra zajedno sa granicama nesigurnosti.

Dakle, važno je analizirati kako će se navedeni indikatori stabilnosti ponašati u prisustvu *neizvesnosti* u modelu EFW.

Zato, počnimo sledećim pitanjem:

*Do koje mere mogu ići nesigurnosti (neizvesnosti) u parametrima koji definišu model EFW, a da se sačuva indikator stabilnosti izveden u prethodnom poglavlju?*

Da bismo analizirali ovo pitanje, označimo sa  $\Delta_{ij}$  nesigurnost empirijskih podataka koji formiraju vrednosti  $\alpha_{ij}$  za  $1 \leq i, j \leq n + 1$ . Drugim rečima:

- *empirijska* community matrica je  $A(s)$ , a
- *tačna* community matrica je  $A(s) + \Delta$ , pri čemu je  $\Delta = [\Delta_{ij}]$  nepoznato.

Ako pretpostavimo da su merenja na terenu i fiziološke studije *razumno* dobre, matrica nesigurnosti  $\Delta$  ima *razumno* male elemente.

Definišimo  $\varepsilon > 0$  kao nivo nesigurnosti na sledeći način

$$\|\Delta\| \leq \varepsilon.$$

Dakle, u nastavku pokazujemo da umesto procene asimptotske stabilnosti i nereaktivnosti pomoću spektra i njegovih lokalizacija, zbog ne-normalnosti, treba uvek koristiti  $\varepsilon$ -pseudospektar i njegove lokalizacije za odgovarajuće  $\varepsilon > 0$ .

### 4.3.1 Robusna asimptotska stabilnost

Pođimo od osobine asimptotske stabilnosti. Umesto randomizacije elemenata matrice  $G$  i računanja  $s_{rand}^*$  pomoću (4.24), kako je to učinjeno

u [65], definisacemo sledeci indikator, koji uzima u obzir normu nivoa nesigurnosti  $\varepsilon$ :

$$s_\varepsilon^* := \min \left\{ s \geq 0 : \bigcup_{\|\Delta\| \leq \varepsilon} \Lambda(A(s) + \Delta) \subset \mathbb{C}^- \right\}. \quad (4.25)$$

Nasuprot (4.23) i (4.24), ovaj novi  $\varepsilon$ -robusni indikator  $s_\varepsilon^*$  ima interpretaciju u terminima *tačne* community matrice. Naime,  $s_\varepsilon^*$  je najmanji deo godišnje stope smrtnosti koja je rezultat intraspecifične kompeticije, a koji garantuje da je *tačna* community matrica lokalno asimptotski stabilna, ako se baziramo na empirijskim podacima  $A(1)$  i nivou nesigurnosti  $\varepsilon \geq 0$ . Drugim rečima,  $s_\varepsilon^*$  je najmanja vrednost koja garantuje da su sve matrice  $A(s_\varepsilon^*) + \Delta$  lokalno asimptotski stabilne za  $\|\Delta\| \leq \varepsilon$ . To, naravno, uključuje i tačnu (ali nepoznatu) community matricu.

Prema tome, novi indikator stabilnosti  $s_\varepsilon^*$  uzima u obzir prirodne stohastičke fluktuacije, netačnosti u merenjima na terenu, kao i moguće strukturalne i fiziološke poremećaje i to u obliku parametra nesigurnosti  $\varepsilon$ . Ova vrednost, u suštini, odražava *najgori* scenario, u kome nesigurnosti mogu pomeriti stabilan sistem u nestabilan. Prema tome,  $s_\varepsilon^*$  treba razumeti kao indikator koji je robusan u odnosu na stohastičke fluktuacije i netačnosti kontrolisane parametrom  $\varepsilon$ .

Naravno, postavlja se pitanje kako ovakav indikator izračunati. Imajući u vidu (3.4),  $\varepsilon$ -pseudospektar je dobar izbor alata za utvrđivanje spektralnih osobina koje su *robustne* u odnosu na matrice perturbacije ograničene u datoj normi parametrom  $\varepsilon > 0$ , pa se indikator (4.25) može zapisati i kao

$$s_\varepsilon^* = \min\{s \geq 0 : \Lambda_\varepsilon(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^-\}. \quad (4.26)$$

S obzirom da se radi o nekonveksnom optimizacionom problemu, samo određivanje ovakvog parametra predstavlja veći izazov nego što je to bio slučaj sa nerobusnim indikatorom i moraju se koristiti napredni numerički algoritmi.

Međutim, ukoliko se ograničimo na slučaj euklidske norme, možemo formulirati postupak za računanje  $\varepsilon$ -robusnog indikatora stabilnosti  $s_\varepsilon^*$ , koristeći neke od ideja datih u [10, 29, 33, 34, 78], prilagođenih našem



optimizacionom problemu. Najpre, podsetimo se, vidi (3.5), da se pseudospektar u euklidskoj matričnoj normi ( $\|\cdot\|_2$ ), može evivalentno izraziti kao

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min}(A - zE) \leq \varepsilon\},$$

gde  $\sigma_{\min}(\cdot)$  označava najmanju singularnu vrednost, a  $E$  jediničnu matricu. Dakle, koristeći (4.26), dobijamo sledeću karakterizaciju traženog indikatora

$$s_\varepsilon^* = \min\{s \geq 0 : \exists t \in \mathbb{R}, \sigma_{\min}(A(s) - \mathbf{i}tE) = \varepsilon\}.$$

Dalje, na osnovu [29], imamo da je  $\sigma_{\min}(A(s) - \mathbf{i}tE) = \varepsilon$  ekvivalentno sa činjenicom da Hamiltonska matrica

$$H_\varepsilon(s) := \begin{bmatrix} sD + G & -\varepsilon E \\ \varepsilon E & -sD - G^* \end{bmatrix}$$

ima čisto imaginarne karakteristične korene  $\mathbf{i}t$ , odakle dobijamo da je

$$s_\varepsilon^* = \max\{s \geq 0 : \Lambda(A(s)) \subset \mathbb{C}^- \text{ i } \Lambda(H_\varepsilon(s)) \cap \mathbf{i}\mathbb{R} = \emptyset\}, \quad (4.27)$$

što predstavlja dobru osnovu za metod polovljenja, da bismo izračunali  $s_\varepsilon^*$  sa željenom tačnošću  $tol$ , koji konstruišemo u Sekciji 4.3.3.

Koristeći konstruisani numerički algoritam možemo odrediti novi pouzdani indikator stabilnosti  $s_\varepsilon^*$  i uporedili ga sa rezultatima dobijenim primenom metoda iz [65] i [63]. U ovoj sekciji ćemo se samo zadržati na trofičkoj mreži Schiermonnikoog u trećem stadijumu razvoja, koja je bila analizirana u prethodnoj sekciji i za koju smo dobili da su indikatori iz [65]  $s^* = 0.012766$  i  $s_{rand}^* \approx 0.09$ .

Sada, primenom našeg algoritma, dobijamo da  $s^* = 0.012766$  odgovara veličini  $s_\varepsilon^* = 0.01276599$  za  $\varepsilon = 10^{-8}$ , što znači da ova izračunata vrednost garantuje stabilnost samo ako su merenja vrlo precizna! Dakle, kao što se pretpostavlja u [65] i [63], ova vrednost teško može poslužiti kao pokazatelj stabilnosti.

Sa druge strane, vrednost  $s_{rand}^* \approx 0.09$  dobijena u [65] odgovara vrednosti  $s_\varepsilon^* = 0.09211586$  za  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Prema tome, sada smo u mogućnosti da zaključimo da ova vrednost može garantovati stabilnost community matrice u uslovima veće nesigurnosti. To potvrđuje zaključak da se situacija popravila korišćenjem randomizacije. Međutim,

ova informacija se ne može dobiti Monte Karlo metodom korišćenom u (4.24). Osim toga, Slika 4.6 sugerije da ta vrednost proizvodi dugi vremenski rok za povratak u stabilno stanje. Važno je takođe naglasiti i to da *vreme povratka invarijantno u odnosu na normu* (definisano i u [63] kao recipročna vrednost rastojanja između spektra i imaginarne ose, a u našoj oznaci (2.13)) može biti, u slučaju nenormalnih matrica, značajno manje od vremena povratka u posmatranoj normi (2.12). U slučaju  $s_{rand}^*$ ,

$$t_{A(s_{rand}^*)}^{NIRT} = 11.61 \text{ godina},$$

dok u stvarnosti za takav sistem može biti potrebno

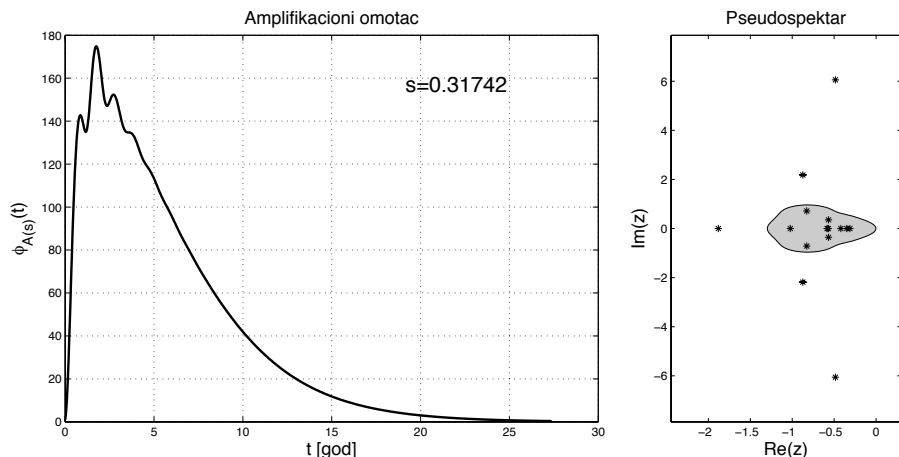
$$t_{A(s_{rand}^*)}^{2,RT} = 113.5 \text{ godina}$$

da se oporavi od perturbacija (u terminima euklidske norme). Ta razlika je ovde, očigledno, veoma značajna, pošto će trofička mreža Schiermonnikoog za 25 godina promeniti svoj stadijum razvoja, pa, dakle, i svoju strukturu.

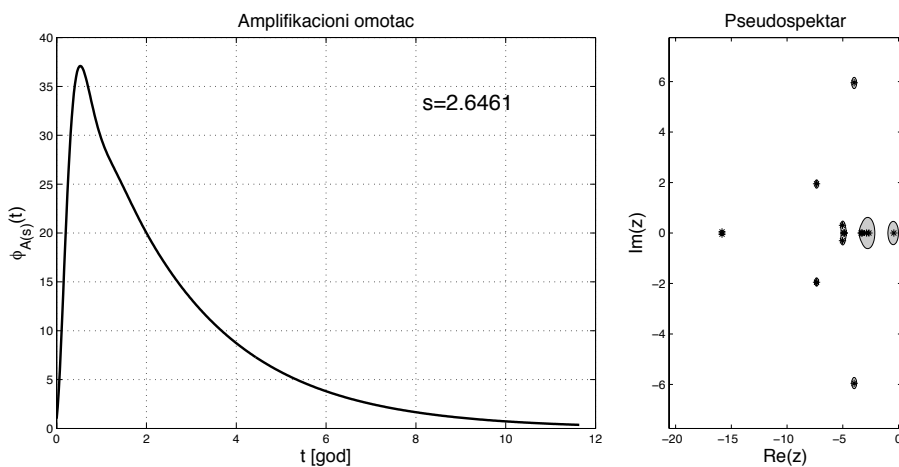
Prema tome, ostaje veoma interesantno pitanje koji nivo nesigurnosti treba da izaberemo da bismo dobili pouzdan indikator stabilnosti. Da bismo to ilustrovali, Slika 4.7 pokazuje amplifikacioni omotač  $\Phi_{A(s_\varepsilon^*)}$  za  $\varepsilon = 10^{-3}$ , gde je izračunati indikator  $s_\varepsilon^* = 0.31742348$ .

Vidimo da je vremenski rok za takvo  $s_\varepsilon^*$  mnogo kraći nego u prethodnim situacijama, samo oko 25 godina je potrebno da se ekosistem tla oporavi i vrati u stanje ravnoteže nakon male perturbacije. Takođe, tranzicioni faktor rasta sugerije da se najveća devijacija u odnosu na stabilno stanje dešava za otprilike 2 godine i da je manja od 200, dok je situacija za randomizovani indikator i originalni spektralni indikator mnogo gora (vidi Slike 4.5 i 4.6).

Dalje, uzimajući  $\varepsilon = 10^{-2}$ , algoritam daje vrednost  $s_\varepsilon^* = 2.64613763$ . Prateći rezonovanje u [65], zaključujemo da, ako su merenja nesigurna do na  $\|\Delta\|_2 \leq 10^{-2}$ , dokumentovani trofički odnosi ne garantuju da će se kompenzovati stope gubitka zbog smrtnosti. Sledstveno tome, matematički stabilan ekvilibrijum sa vremenom oporavka manjim od 10 godina, u obliku Lotka-Volterra sistema, će zahtevati postojanje unutrašnje stope rasta određene vrste, što podrazumeva hranjenje iz izvora van sistema, vidi Sliku 4.8.



Slika 4.7: Tranzicioni rast (levo) i  $\varepsilon$ -pseudospektralni portret u kompleksnoj ravni (desno) za community matricu  $A(s^*)$ , za  $s^* = 0.3174$  i  $\varepsilon = 10^{-3}$



Slika 4.8: Tranzicioni rast (levo) i  $\varepsilon$ -pseudospektralni portret (desno) za community matricu  $A(s^*)$ , za  $s^* = 2.6461$  i  $\varepsilon = 10^{-2}$

Kao što se vidi na Slikama 4.5–4.8, veće vrednosti za  $\varepsilon$  odgovaraju većim vrednostima indikatora  $s_\varepsilon^*$ , manjim maksimalnim amplifikacijama  $\phi_{A(s_\varepsilon^*)}^{\max}$  i kraćim vremenima povratka  $t_{A(s_\varepsilon^*)}^{2,RT}$ , vidi Tabelu 4.2.

Druga interesantna opservacija jeste da, gledajući u sliku  $\varepsilon$ -pseudospektra sa desne strane na Slikama 4.7 i 4.8, možemo zaključiti

$\varepsilon$	$s_\varepsilon^*$	$\phi_{A(s_\varepsilon^*)}^{\max}$	$t_{A(s_\varepsilon^*)}^{2,RT}$ [god]	odgovara
$10^{-8}$	0.012766	3 000	2 000 000	$s^*$ iz (4.23)
$10^{-4}$	0.092116	333	110	$s_{rand}^*$ iz (4.24)
$10^{-3}$	0.317424	174	27	–
$10^{-2}$	2.646138	37	11	–

Tabela 4.2: Indikatori stabilnosti  $s_\varepsilon^*$  i odgovarajuće maksimalne amplifikacije  $\phi_{A(s_\varepsilon^*)}^{\max}$  i vremena povratka  $t_{A(s_\varepsilon^*)}^{2,RT}$  za različite vrednosti  $\varepsilon$ .

da su karakteristični koreni najbliži imaginarnoj osi veoma osetljivi na perturbacije, pa su oni razlog tranzicionog rasta notiranog sa leve strane, vidi [78]. To, takođe, objašnjava zašto je originalno  $s^*$  bilo neodgovarajuća mera stabilnosti.

Kao zaključak, konstatujemo da, prema novom pouzdanom indikatoru stabilnosti, uzevši u obzir maksimalnu amplifikaciju, vreme povratka, kao i meru neizvesnosti, ispravan zaključak iz Tabele 4.2 bi bio da je potrebno najmanje 32% intraspecifične kompeticije da bi se trofička mreža Schiermonnikoog, u svom trećem stadijumu razvoja, smatrala *stabilnom*.

### 4.3.2 Tranziciono ponašanje i robusna nereaktivnost

Već smo u Glavi 3 primetili da, zapravo, osobine evolucione funkcije LTIDS igraju značajnu ulogu u adekvatnom modelovanju ekološke stabilnosti putem empirijskih trofičkih mreža. Kao što je prethodna sekcija pokazala, uvođenjem perturbacija community matrice i pomoću pseudospektra, uspeali smo razviti indikator koji pouzdanije govori o asimptotskoj stabilnosti i pri tome, na određeni način, kontroliše maksimalnu amplifikaciju i vreme povratka koji su od ključnog značaja za ekosisteme. Sa druge strane, kao što je to već napomenuto u Sekciji 3.4, upotreba SDD matrica i određenih potklasa GDD matrica pruža korisne informacije o ekosistemu u terminima odnosa elemenata u community matrici. Iz tog razloga su u Sekciji 3.4 uvedene lokalizacije pseudospektra koje kombinuju benefite ova dva pristupa "stabilnosti".

Po analogiji sa već postojećim indikatorima nereaktivnosti, prvo uvedimo nove *robustne* indikatore nereaktivnosti. Kako se naš pristup zasniva na posmatranju evolucione funkcije community matrice, on nije invarijantan u odnosu na normu u kojoj posmatramo. Ovde ćemo razmatrati slučaj kada ispitujemo maksimalno odstupanje od ekvilibrijuma (maksimum norma). Analogno se razmatra i slučaj kada ispitujemo kvadratno odstupanje od ekvilibrijuma (euklidska norma).

Neka je  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ . Imajući u vidu Teoremu 3.19, definišimo vrednost

$$s_{\infty,\varepsilon}^* := \inf \{s \geq 0 : \nu_{A(s)}^\varepsilon < 0\}. \quad (4.28)$$

koja predstavlja  $\varepsilon$ -robustan indikator nereaktivnosti, a koja se može zapisati i kao

$$s_{\infty,\varepsilon}^* = \inf \{s \geq 0 : \nu_{A(s)} < -\varepsilon\},$$

pa se, analogno izvođenju relacije (4.20), dobija

$$s_{\infty,\varepsilon}^* = \begin{cases} \max_{i \in N} \left\{ \frac{1}{d_i} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^{n+1} |\alpha_{ij}| + \varepsilon \right) \right\} & , \quad |\alpha_{n+1,n+1}| > \sum_{j \in N} |\alpha_{n+1,j}| + \varepsilon, \\ +\infty & , \quad \text{inače.} \end{cases} \quad (4.29)$$

Drugim rečima, indikator nereaktivnosti se malo menja za male promene u community matrici i indikator  $\varepsilon$ -robustne nereaktivnosti se može eksplicitno zapisati pomoću elemenata matrice i parametra robusnosti.

Kako je robustna nereaktivnost zahtevniji uslov za ekvilibrijum EFW od nereaktivnosti, indikator koji smo izveli je često značajno veći od 1, te govori o tome da su EFW u principu reaktivni TIDS, tj. da uglavnom uvek postoji tranzicioni rast. Stoga se postavlja pitanje da li možemo još nešto dodatno reći o takvom ponašanju EFW u terminima odnosa između dijagonalnih i vandijagonalnih elemenata community matrice  $A(1)$  izraženih kroz osobine sličnim strogoj dijagonalnoj dominaciji (SDD), koje imaju "realno" tumačenje. Odgovor leži u lokalizacionim oblastim pseudospektra koje smo razvili u Sekciji 3.4.

Da bismo ilustrovali njihovu upotrebu, posmatrajmo šta se može zaključiti za maksimalnu moguću vrednost  $s$  za koju EFW nema potrebu za ishranom iz spoljašnjih izvora, tj. posmatrajmo  $A := A(1)$ . Na taj način zaključujemo da, ukoliko se može dobiti određeni zaključak

o "stabilnosti", postoji određena intraspecifična kompeticija u zatvorenom sistemu koja ga može realizovati.

Za prvi primer, kao u Sekciji 4.2, uzmimo Schiermonnikoog trofičku mrežu u prvom stadijumu razvoja prikazanu na Slici 1.1, koja je određena fiziološkim parametrima datim u Tabeli 5.1, ali za gustine biomase pretpostavimo

$$B_1 = 1, B_2 = B_3 = 0.25, B_4 = B_5 = 0.5, B_6 = B_7 = 300 \text{ i } B_8 = 400.$$

Na osnovu modela EFW, dobijamo community matricu  $A(s) = sD+G$  koja je data sa

$$A(s) = \begin{bmatrix} -6s & 0 & 0 & 0 & 0.01997 & 0 & 0.01997 & 0 \\ 0 & -1.84s & 0 & 0 & 0 & 0.001533 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.92s & 0 & 0 & 0.0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.68s & 0 & 0.004467 & 0 & 0 \\ -0.02627 & 0 & 0 & 0 & -6s & 0 & 0.01009 & 0 \\ 0 & -10.51 & -13.66 & -12.07 & 0 & -1.2s & 0 & 0.9302 \\ -15.76 & 0 & 0 & 0 & -15.76 & 0 & -1.2s & 0.9591 \\ 6.789 & 7.097 & 10.39 & 7.509 & 6.633 & -2.915 & -3.059 & -6.298 \end{bmatrix}$$

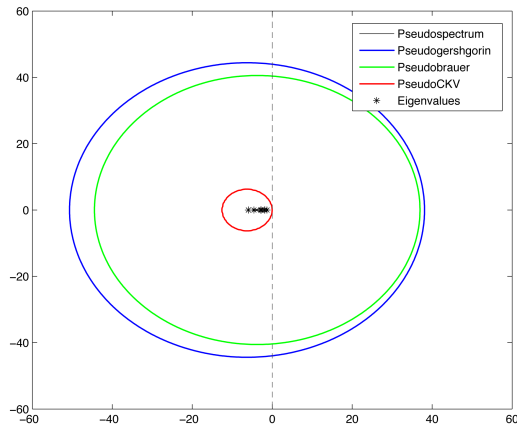
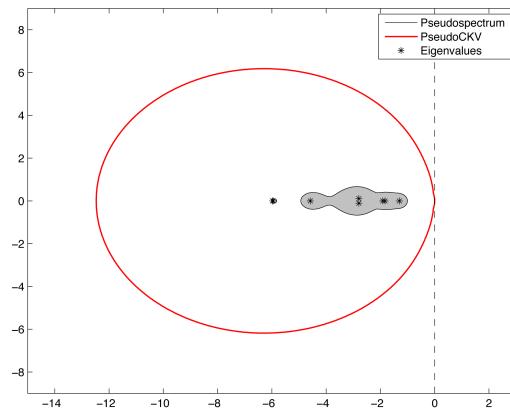
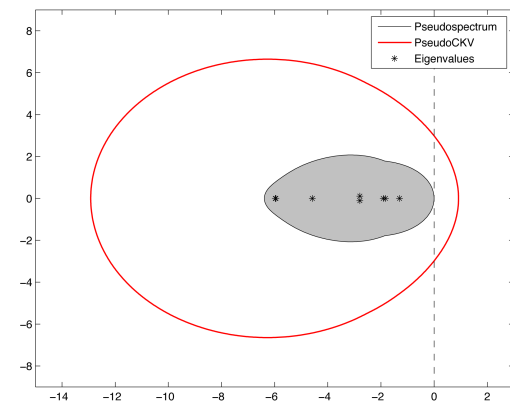
Kao i u prethodnom slučaju, posmatrajmo  $A = A(1)$ . Kako ona nije SDD matrica, njen Geršgorinov skup, a time i svaki  $\varepsilon$ -Geršgorinov skup, proteže se u desnu poluravan od  $\mathbb{C}$ .

Sa druge strane, primetimo da se ova trofička mreža sastoji iz 4 trofička nivoa, i grupišimo donja dva u  $S = \{6, 7, 8\}$  i gornja dva trofička nivoa u  $\bar{S} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , tj. grupišimo detritusoždere i detritus, sa jedne strane, i ostatak trofičke mreža sa druge strane. Tada, ispitujući osobine matrice  $A$ , možemo proveriti da ona jeste  $S$ -SDD matrica (tj. uslovi (3.33) i (3.34) jesu zadovoljeni). To je u saglasnosti, vidi [52](Teorema 11), sa činjenicom (vidi Sliku 4.9) da CKV skup (tj.  $\varepsilon$ -pseudo CKV skup za  $\varepsilon = 0$ ) leži u  $\mathbb{C}^-$ . U terminima ekosistema, ovo znači da dijagonalna dominacija u odnosu na particiju ekosistema u ove dve grupe osigurava ukupnu asimptotsku stabilnost.

Štaviše, crtajući  $\varepsilon$ -pseudo CKV skup za  $\varepsilon = 1.1576 \cdot 10^{-2}$ , možemo videti da  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$  pripada otvorenoj levoj poluravni, dok se  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinov skup  $\Gamma_\varepsilon(A)$  proteže daleko u desnu poluravan, vidi Sliku 4.9. Dakle,

$$\mathcal{C}_\varepsilon^S(A) \subset \mathbb{C}^-$$

za sve  $0 \leq \varepsilon \leq 1.1576 \cdot 10^{-2}$ , pokazujući da je  $\varepsilon = 1.1576 \cdot 10^{-2}$  donja granica za rastojanje od nestabilnosti. Pozivajući algoritam iz [29]

(a)  $\Gamma_\varepsilon(A)$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon(A)$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$ (b)  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$ (c)  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$ 

Slika 4.9: Lokalizirani skupovi za  $\varepsilon$ -pseudospektar community matrice  $A(1)$  ekosistema tla za  $\varepsilon = 1.1576 \cdot 10^{-2}$  u 4.9a i 4.9b, i za  $\varepsilon = 8.1874 \cdot 10^{-2}$  u 4.9c

može se izračunati da je tačno rastojanje  $\varepsilon = 8.1874 \cdot 10^{-2}$ , vidi Sliku 4.9c.

Zaključci koji slede mogu poslužiti kao prikladan rezime:

- **(A(1) nije SDD)** Za neke funkcionalne grupe njihova intraspecifična kompeticija *ne* dominira u odnosu na ukupni trofički uticaj od nje i ka njoj (kumulativni efekat totalne specifične masene stope predatorstva i totalne specifične masene stope opskrbljivanja).
- **(A(1) zadovoljava (3.33))** Intraspecifična kompeticija sekundarnih potrošača *dominira* nad ukupnim trofičkim uticajima unutar grupe (tj. kumulativni efekat bez interakcija sa detritusožderima i detritusom).
- **(A(1) zadovoljava (3.34))** Zajednički efekat intraspecifične kompeticije unutar donjih nivoa (6. 7. i 8.) i unutar gornjih nivoa (1. do 5.) *dominira* u odnosu na zajednički efekat trofičkih uticaja između nivoa (tj. kumulativni efekat od donjih-ka-gornjim nivoima i od gornjih-ka-donjim nivoima).
- **(Teorema 3.18 važi)** Gornji zaključci su *robustni* u odnosu na ukupne nesigurnosti u community matrici do na  $\varepsilon = 1.1576 \cdot 10^{-2}$ . Drugim rečima, naši zaključci ostaju *validni* ako je norma beskonačno perturbacione matrice manja ili jednaka  $1.1576 \cdot 10^{-2}$ .

Kao drugi primer, uzmimo istu trofičku mrežu, dok za gustine biomase pretpostavimo

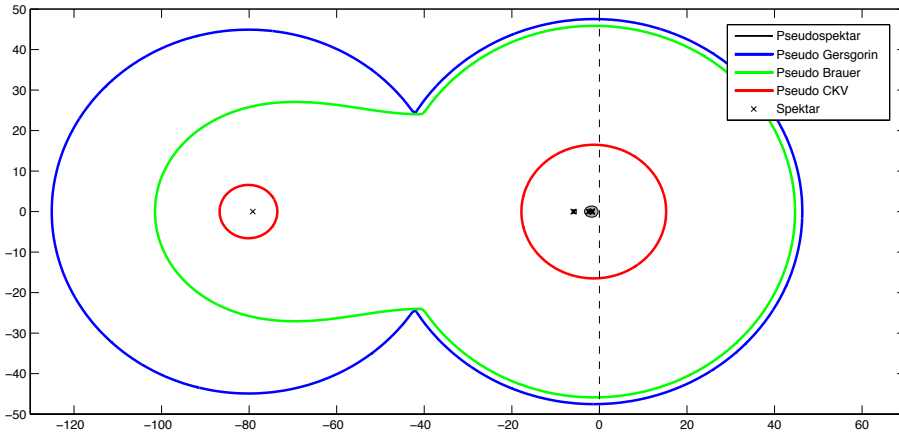
$$B_1 = 5, B_2 = B_3 = B_4 = 10, B_5 = 50, B_6 = 3000, B_7 = 6000 \text{ i } B_8 = 500,$$

kao što je to učinjeno u Sekciji 4.2. Njena community matrica dobijena na osnovu modela empirijskih trofičkih mreža je ponovo oblika  $A(s) = sD + G$ .

Odaberimo  $\varepsilon = 0.1$  i odredimo lokalizacione oblasti  $\varepsilon$ -pseudospektra koje su prikazane na Slici 4.10. Primetimo da se svaka lokalizaciona oblast proteže daleko u desnu poluravan, dok se  $\varepsilon$ -pseudospektar nalazi u levoj poluravni. Pri tome je skup  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$  značajno uži, iako



i on prelazi u desnu poluravan. Zaključak na osnovu ove slike je da, iako je EFW takva da je  $s_\varepsilon^* < 1$ , tj. postoji intraspecifična kompeticija koja obezbeđuje  $\varepsilon$ -robusnu asimptotsku stabilnost, nijedna od potklasa GDD matrica nije u stanju da na to ukaže. Imajući u vidu da je za ovu EFW dobijeno  $\hat{s}_\infty^* = 0.945856 < 1$ , što je indikator koji odgovara klasi GDD matrica, dolazimo do zaključka da je interesantno razviti i druge lokalizacije psuedospektra, koje su preciznije od ovih koje smo do sada razvili.



Slika 4.10: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A)$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon(A)$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar community matrice  $A(1)$  ekosistema tla za  $\varepsilon = 0.1$

Kao što prethodna dva primera ilustruju, EFW mogu zadovoljavati generalizovane uslove dijagonalne dominacije, što obezbeđuje mogućnost upotrebe pseudospektralnih lokalizacija koje smo razvili. Ali, da li možemo nešto reći o tranzicionom ponašanju takvih EFW?

Odgovorom na to pitanje završićemo ovu sekciju.

Podsetimo se, najpre, Kreiss-Spijkerove teoreme o tranzicionom ponašanju evolucione funkcije, Teorema 3.2. Ona kaže da je maksimalna amplifikacija ograničena intervalom

$$\phi_A^{\max} \in [\mathcal{K}_A, ne\mathcal{K}_A],$$

gde je

$$\mathcal{K}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\alpha_A^\varepsilon}{\varepsilon},$$

Kreissova konstanta, a

$$\alpha_A^\varepsilon = \max\{Re(z) : z \in \Lambda_\varepsilon(A)\}.$$

$\varepsilon$ -pseudospektralna apscisa matrice  $A$ .

Dakle, ako imamo lokalizacije  $\varepsilon$ -pseudospektra, možemo dobiti gornje ocene za  $\varepsilon$ -pseudospektralnu apscisu, a time i gornje ocene Kreissove konstante. Drugim rečima, maksimalna amplifikacija evolucione funkcije se može ograničiti sa gornje strane upotrebom lokalizacija pseudospektra. Pri tome,  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinov lokalizacioni skup odgovara slučaju robusne nereaktivnosti, što znači da, kada je takav slučaj na snazi, tu već znamo da je maksimalna amplifikacija manja od 1 (nema tranzicionog rasta), dok za druge lokalizacione skupove ovo ne mora da važi. Međutim, da bismo adekvatno ocenili maksimalnu amplifikaciju treba konstruisati, takođe, i donje granice za Krajsovu konstantu. Stoga ostaje kao interesantno otvoreno pitanje kako se lokalizacije pseudospektra mogu iskoristiti za procenu tranzicionog ponašanja dinamičkih sistema.

Na kraju, primetimo još i da se analogni zaključci dobijaju i u euklidskoj normi, shodno već izloženom materijalu u Glavi 3.

### 4.3.3 Algoritmi za izračunavanje indikatora

Veoma važno pitanje je, naravno, kompleksnost izračunavanja indikatora koje koristimo. Kao što smo već napomenuli, iako netrivialno, izračunavanje u literaturi postojećih indikatora moglo se učiniti procesom optimizacije karakterističnih korena. Sa druge strane, poznato je da je efikasno izračunavanje pseudospektra numerički zahtevnije od izračunavanja spektra, te smo ga iz tih razloga izbegli reformulacijom problema pomoću Hamiltonske matrice. Na taj način dolazimo do zajedničkog pristupa, koji unapređuje postojeće metode računanja indikatora i omogućava efikasno izračunavanje pouzdanog indikatora koji smo razvili u ovoj tezi.

Algoritamski pristup koji predlažemo zasniva se na modifikovanom postupku bisekcije. Naime, za svaki indikator (osim za  $s_\infty^*$  i  $s_{\infty,\varepsilon}^*$  za koje imamo eksplicitne formule) neophodno je izračunati najmanju vrednost  $s$  tako da community matrica  $A(s)$  zadovoljava određenu

Indikator	Osobina	$\mathcal{F}(s)$
$s^*$	$\Lambda(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^-$	$-\alpha_{A(s)}$
$\widehat{s}_\infty^*$	$MGS(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^-$	$-\alpha_{[-\langle A(s) \rangle]}$
$s_2^*$	$\Lambda(H_{A(s)}) \subseteq \mathbb{C}^-$	$-w_{A(s)}$
$s_{2,\varepsilon}^*$	$\Lambda(H_{A(s)}) \subseteq \mathbb{C}^-$	$-(w_{A(s)} + \varepsilon)$
$s_\varepsilon^*$	$\Lambda_\varepsilon(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^-$	$\min \left\{ -\alpha_{A(s)}, \min_{\lambda \in \Lambda(H_\varepsilon(s))}  Re(\lambda)  \right\}$

Tabela 4.3: Karakterizacija indikatora putem test funkcije  $\mathcal{F}(s)$ .

(spektralnu) osobinu, koju možemo okarakterisati pozitivnošću odgovarajuće test funkcije  $\mathcal{F}(s)$ .

U Tabeli 4.3 dajemo prikaz osobina i njihovih test funkcija  $\mathcal{F}(s)$ , u zavisnosti od toga koji indikator računamo. Dok su funkcije za indikator asimptotske stabilnosti  $s^*$  i nereaktivnosti u euklidskoj normi  $s_2^*$ , kao i robusne nereaktivnosti u euklidskoj normi  $s_{2,\varepsilon}^*$  predstavljene, redom, spektralnom apscisom promenjenog znaka, numeričkom apscisom promenjenog znaka i korigovanom numeričkom apscisom promenjenog znaka, test funkcije za ostala dva indikatora je potrebno objasniti.

Krenimo od nereaktivnosti u ponderisanoj maksimum normi  $\widehat{s}_\infty^*$ . Logičan izbor bi bio računanje apscise Minimalnog Geršgorinovog skupa  $MGS(\cdot)$ . Međutim, to je u opštem slučaju, usled složenosti, otvoren matematički problem. U slučaju community matrica koje imaju realne dijagonalne elemente, poznato je da je tačka u kojoj je prepoznata apscisa skupa  $MGS(\cdot)$  na realnoj osi. Osim toga, s obzirom da su dijagonalni elementi negativni, lako se zaključuje da  $MGS(A(s)) \subseteq \mathbb{C}^-$  ako i samo ako je  $A(s)$  GDD matrica. Međutim, vidi [52], to je ekvivalentno sa osobinom da matrica  $-\langle A(s) \rangle$  ima negativnu spektralnu

apscisu.

Što se tiče indikatora  $\varepsilon$ -robustne asimptotske stabilnosti  $s_\varepsilon^*$ , na osnovu (4.27), osobina koja obezbeđuje da se  $\varepsilon$ -pseudospektar nalazi u otvorenoj levoj poluravni je

$$\Lambda(A(s)) \subset \mathbb{C}^- \text{ i } \Lambda(H_\varepsilon(s)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset.$$

Dakle, pored toga što spektralna apscisa treba da je negativna, neophodno je i da matrica

$$H_\varepsilon(s) = \begin{bmatrix} sD + G & -\varepsilon E \\ \varepsilon E & -sD - G^* \end{bmatrix}$$

nema čisto imaginarne korene. Drugim rečima, realni delovi svih karakterističnih korena matrice  $H_\varepsilon(s)$  moraju biti različiti od nule. Stoga, uzimajući minimalnu apsolutnu vrednost tih realnih delova dobijamo traženu funkciju.

Da rezimiramo: za svaki indikator obezbedili smo neprekidne test funkcije, čija nula (promena znaka iz negativnog u pozitivan) predstavlja upravo traženu optimalnu vrednost parametra  $s$ . Na osnovu toga lako možemo formirati numerički algoritam baziran na principu bisekcije. Prvo određujemo desni kraj početnog intervala na kome vršimo bisekciju (line-tracing postupkom sa parametrom  $\tau$ , a potom na dobijenom intervalu dužine  $\tau$  vršimo postupak bisekcije.

Primetimo da predloženi algoritam za izračunavanje novog indikatora stabilnosti  $s_\varepsilon^*$  ima manju kompleksnost od njegovog randomizovanog duplikata  $s_{rand}^*$ . Štaviše, ostvarena numerička stabilnost izračunavanja  $s_\varepsilon^*$  je bolja od one za izračunavanje  $s_{rand}^*$ . Naime, da bi izračunali  $s_{rand}^*$ , definisano sa (4.24), autori u [65] najpre primenjuju pristup sličan bisekciji, pri čemu u svakoj iteraciji rešavaju eigenvalue problem dimenzije  $n + 1$ . Zatim to ponavljaju (zbog randomizacije)  $m$  puta. Usput, pošto su community matrice obično daleko od normalnih, računanje njihovih karakterističnih korena može numerički biti vrlo osetljiv postupak. Sa druge strane, da bi izračunao  $s_\varepsilon^*$ , naš algoritam sprovodi postupak bisekcije (samo jednom), pri čemu se u svakoj iteraciji rešava problem karakterističnih korena dimenzije  $2(n + 1)$ . Međutim, zbog Hamiltonske strukture, iako je dimenzija problema

---

**Algorithm 1**

---

**Input:**  $D, G, \varepsilon > 0, \tau > 0, tol$ 

```

1: if  $\mathcal{F}(0) > 0$  then
2:   Set  $s = 0$ 
3: else
4:   Set  $s_2 = \tau$  and  $s_1 = 0$ 
5:   while  $\mathcal{F}(s_2) \leq 0$  do
6:     Update  $s_1 \leftarrow s_2$ 
7:     Update  $s_2 \leftarrow s_2 + \tau$ 
8:   end while
9:   while  $s_2 - s_1 > tol$  do
10:    Set  $s = \frac{s_2 + s_1}{2}$ 
11:    if  $\mathcal{F}(s) > 0$  then
12:      Update  $s_2 \leftarrow s$ 
13:    else
14:      Update  $s_1 \leftarrow s$ 
15:    end if
16:  end while
17: end if

```

**Output:**  $s$ 

---

karakterističnih korena udvostručena, broj operacija se ne povećava značajno, a postiže se numerička stabilnost.

Prema tome, pored teorijskih benefita, novi indikator, takođe, zahteva manje računanja, obezbeđuje numerički relevantnije rezultate i primenljiv je na empirijske trofičke mreže velikih dimenzija.

## 5

# Testiranje stabilnosti trofičkih mreža

U ovoj glavi dajemo pregled indikatora stabilnosti trofičkih mreža ishrane određenih na osnovu istraživanja o fiziološkim svojstvima 16 funkcionalnih grupa organizama ekosistema tla, na osnovu kojih su formirani parametri modela EFW dati u Tabeli 5.1, kao i na osnovu gustina biomase unutar tih grupa, i to na dva lokaliteta u Holandiji - Schiermonnikoog i Hulshorsterzand, gde su sprovedena merenja u četiri stadijuma razvoja na po četiri merena uzorka, vidi Tabelu 5.2. Na osnovu navedenih empirijskih podataka, koristeći model (4.5), dobijamo 32 community matrice (na dva lokaliteta u četiri stadijuma razvoja po četiri merena uzorka), tj. 32 EFW, za koje određujemo indikatore predstavljene u prethodnom poglavlju.

Pri tome, kako se za indikator nereaktivnosti u maksimum normi  $s_{\infty}^*$  zna da je previše konzervativan pristup ekološkoj stabilnosti, te kao takav daje ekstremne vrednosti za empirijske trofičke mreže, računamo i indikator nereaktivnosti  $\hat{s}_{\infty}^*$ . Pored ova dva indikatora, računamo i treći -  $s_2^*$  indikator nereaktivnosti u euklidskoj normi. Indikator asimptotske stabilnosti  $s^*$  (bez randomizacije) nismo posebno izračunavali, s obzirom na njegove jasne nedostatke, kao ni njegovu randomizovanu verziju  $s_{rand}^*$ , s obzirom da je i ona neprecizan pokazatelj u odnosu na novi metod koji smo razvili.

Kako je svaka posmatrana EFW reaktivna u maksimum normi, šta više, indikator nereaktivnosti je  $+\infty$ , amplifikacioni omotač (grafik

$i$	fun. grupa	$b_i$	$a_i$	$p_i$
1	prmi	1.84	0.6	0.35
2	prco	1.84	0.5	0.35
3	nemi	1.84	0.9	0.35
4	prne	3	0.5	0.37
5	amoe	6	0.95	0.4
6	coll	1.84	0.5	0.35
7	cryp	1.2	0.5	0.35
8	ncry	1.84	0.5	0.35
9	fune	1.92	0.38	0.37
10	bami	1.84	0.5	0.35
11	bane	2.68	0.6	0.37
12	flag	6	0.95	0.4
13	phne	1.08	0.25	0.37
14	fung	1.2	1	0.3
15	bact	1.2	1	0.3
16	root	1	1	1

Tabela 5.1: Istraživanjima utvrđeni fiziološki parametri funkcionalnih grupa sa Slike 1.1.

evolucione funkcije u euklidskoj normi) koji odgovara matrici  $A(s)$  grafički prikazujemo samo za izbore  $s = s_2^*$  i  $s = \widehat{s}_\infty^*$ .

Novi indikatori, nastali kao rezultat ove teze, izračunati su za razne vrednosti parametra  $\varepsilon$ , koji modelira neizvesnosti u elementima community matrice, te kao takav pruža mogućnost kontrole tranzicionog ponašanja u vidu maksimalne amplifikacije  $\phi_{A(s)}^{\max}$  i vremena povratka (u euklidskoj normi)  $t_{A(s)}^{2,RT}$ . S obzirom da manja vrednost parametra  $\varepsilon$  odgovara (potencijalno) manjim vrednostima indikatora ( $s = s_\varepsilon^*$ ,  $s = s_{\infty,\varepsilon}^*$  i  $s = s_{2,\varepsilon}^*$ ), a većim maksimalnim amplifikacijama i vremenima povratka, za svaku od EFW formirali smo tabelu, na osnovu koje se može analiziranjem pomenutih vrednosti proceniti dinamičko svojstvo ekvilibrijuma trofičke mreže, a time i izabrati adekvatna vrednost parametra  $s$  koja je pouzdan indikator ekološke stabilnosti EFW. Radi potpunijeg uvida, za svaku EFW prikazan je

		Stadijumi u Schiermonnikoog				Stadijumi u Hulshorsterzand			
		1	2	3	4	1	2	3	4
prmi	1	–	0.59	8.9	65	–	–	23	21
	2	–	–	17	73	–	0.3	14	25
	3	–	2.7	18	92	–	–	40	25
	4	–	0.3	18	74	–	3	18	28
prco	1	–	–	–	0.38	–	–	0.75	3.4
	2	–	–	–	–	–	–	–	6.4
	3	–	–	–	4.5	–	–	–	15
	4	–	–	–	0.38	–	–	–	2.6
nemi	1	–	–	–	17	–	–	–	8.9
	2	–	–	0.32	9.3	–	–	–	4.8
	3	–	–	–	5.1	–	–	–	7
	4	–	–	–	14	–	–	–	16
prne	1	–	21	3	3.5	5.7	52	55	34
	2	0.12	44	6.9	1.9	6	47	41	16
	3	–	23	8.8	12	12	22	28	6.3
	4	–	12	15	3.3	8.4	25	88	31
amoe	1	16	16	170	480	2.5	22	35	210
	2	6.5	21	100	200	9.9	74	31	66
	3	7.1	41	330	450	4.3	21	30	45
	4	13	59	200	270	0.65	33	27	140
coll	1	–	2.5	14	48	–	7.2	68	62
	2	–	0.62	63	47	–	73	95	75
	3	–	2.8	120	66	–	47	190	130
	4	–	0.31	29	110	–	24	400	120
cryp	1	–	19	11	130	0.57	35	0.95	75
	2	0.19	13	40	160	0.67	23	0.38	120
	3	–	12	23	130	0.38	20	0.76	80
	4	–	7.2	17	110	–	30	1.1	170
ncry	1	0.27	49	52	62	3	79	35	20
	2	0.34	61	110	110	2	57	46	31
	3	0.1	49	70	60	9.1	54	19	16
	4	0.14	69	68	67	4.3	60	20	30
fune	1	0.39	4	12	3.9	0.81	0.98	23	27
	2	0.1	3.1	16	4.6	0.31	2.4	23	7.6
	3	0.087	3.2	39	9.5	0.18	0.7	20	16
	4	0.093	7.5	11	4.3	0.17	3.4	16	9.4
bami	1	–	–	–	0.53	–	–	–	–
	2	–	–	–	–	–	–	–	–
	3	–	–	–	0.021	–	–	–	–
	4	–	–	–	1.5	–	–	–	0.021
bane	1	0.019	14	35	48	0.047	7.4	25	62
	2	0.18	5.7	45	56	0.46	23	20	11
	3	0.02	5.1	43	120	0.082	2.5	12	25
	4	0.019	13	34	63	0.032	7	14	38
flag	1	0.2	3.7	36	97	0.087	1.2	6.8	47
	2	0.37	3.8	30	100	0.13	15	7.5	23
	3	0.28	4	94	140	0.18	1	4.3	40
	4	0.28	5.1	15	110	0.11	2.1	3.8	44
phne	1	–	3.5	0.72	–	–	0.6	2.3	–
	2	0.018	2.4	0.06	0.56	–	2	1.8	0.13
	3	–	4.4	0.97	0.44	–	0.32	0.56	–
	4	–	2.6	1.7	–	–	1.4	0.89	–
fung	1	48	87	290	300	10	52	280	1200
	2	36	130	240	230	12	15	170	570
	3	30	160	150	340	10	10	130	690
	4	21	140	170	290	15	10	140	500
bact	1	1500	3100	17000	12000	1400	3800	7300	19000
	2	950	4600	12000	13000	1800	5500	8500	5000
	3	790	7400	26000	21000	8300	2800	7100	10000
	4	1300	4300	21000	25000	760	3300	6600	3700

Tabela 5.2: Gustine biomase [ $g C ha^{-1} cm depth^{-1}$ ] unutar funkcionalnih grupa na dva lokaliteta u Holandiji - Schiermonnikoog i Hulshorsterzand, gde su sprovedena merenja u četiri stadijuma razvoja na po četiri merena uzorka, vidi Sliku 1.1. Pri tome je za funkcionalnu grupu proizvođača (root) korišćena vrednost gustine biomase  $900 g C ha^{-1} cm depth^{-1}$  u svakom stadijumu razvoja i svakom uzorku, dok je za gustinu biomase detritusa, u svakom uzorku na oba lokaliteta, uzeto 4000, 25000, 250000 i 2500000  $g C ha^{-1} cm depth^{-1}$  za stadijume razvoja 1,2,3 i 4, redom.



i amplifikacioni omotač koji odgovara matrici  $A(s)$  za  $s = s_\varepsilon^*$  i četiri izbora  $\varepsilon = 10^{-1}$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  i  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Dakle, na sledeće 32 strane nalaze se rezultati obrade podataka za svaku od 32 EFW. Pored naziva lokaliteta, stadijuma razvoja i uzorka, pri vrhu strane navedene su i vrednosti tri, u literaturi već poznata, indikatora: za nereaktivnost u maksimum normi  $s_\infty^*$ , scale-free nereaktivnost  $\widehat{s}_\infty^*$  i nereaktivnost u euklidskoj normi  $s_2^*$ . Nakon toga sledi tabela i niz od šet slika za koje navodimo legendu:

Tabela: *Pouzdati indikatori ekološke stabilnosti*

koja u kolonama prikazuje, redom, parametar neizvesnosti  $\varepsilon$ , indikator robusne asimptotske stabilnosti  $s_\varepsilon^*$ , njemu odgovarajuću maksimalnu amplifikaciju  $\phi_{A(s_\varepsilon^*)}^{\max}$  i vreme povratka  $t_{A(s_\varepsilon^*)}^{2,RT}$  u godinama, potom robusne indikatore nereaktivnosti u maksimum normi  $s_{\infty,\varepsilon}^*$  i euklidskoj normi  $s_{2,\varepsilon}^*$ .

Slike: *Dinamička svojstva ekvilibrijuma EFW*

gde prve dve slike u gornjem redu prikazuju amplifikacioni omotač (sa leve strane) i spektar matrice  $A(s)$  (sa desne strane), i to za izbore  $s = s_2^*$  (slika a) i  $s = \widehat{s}_\infty^*$  (slika b). Ispod toga, u naredna dva reda, nalaze se amplifikacioni omotač (sa leve strane) i  $\varepsilon$ -pseudospektar (sa desne strane) matrice  $A(s_\varepsilon^*)$  za izbore  $\varepsilon = 10^{-1}$  (slika c),  $\varepsilon = 10^{-2}$  (slika d),  $\varepsilon = 10^{-3}$  (slika e) i  $\varepsilon = 10^{-4}$  (slika f).

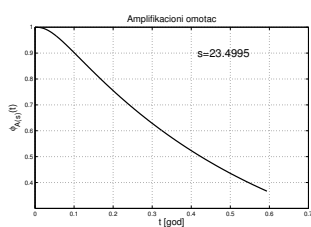
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 1  
 Uzorak 1

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

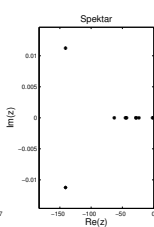
$$s_2^* = 23.499$$

$$s_{\infty}^* = 1.0004$$

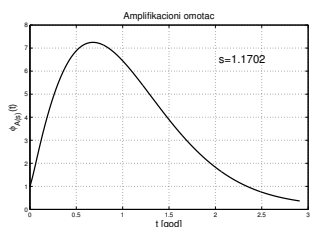
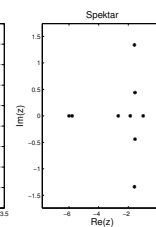
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e-01$	1.1702	7.2478	2.9097	$+\infty$	$2.4683e+01$
$1e-02$	$1.4741e-01$	$2.8594e+01$	$1.6180e+01$	$+\infty$	$2.3612e+01$
$1e-03$	$1.1678e-02$	$4.4532e+01$	$1.6487e+02$	$+\infty$	$2.3511e+01$
$1e-04$	$2.9985e-04$	$2.5988e+01$	$5.4860e+03$	$+\infty$	$2.3501e+01$



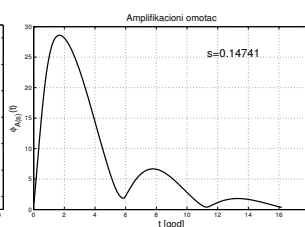
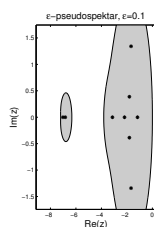
(a)



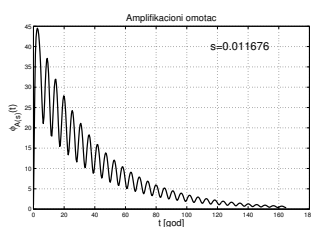
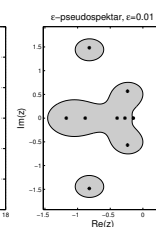
(b)



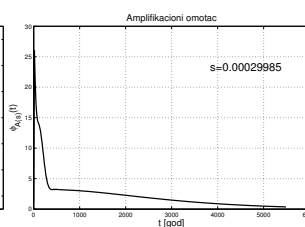
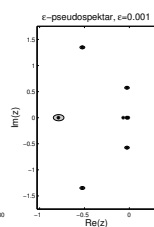
(c)



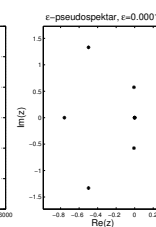
(d)



(e)



(f)



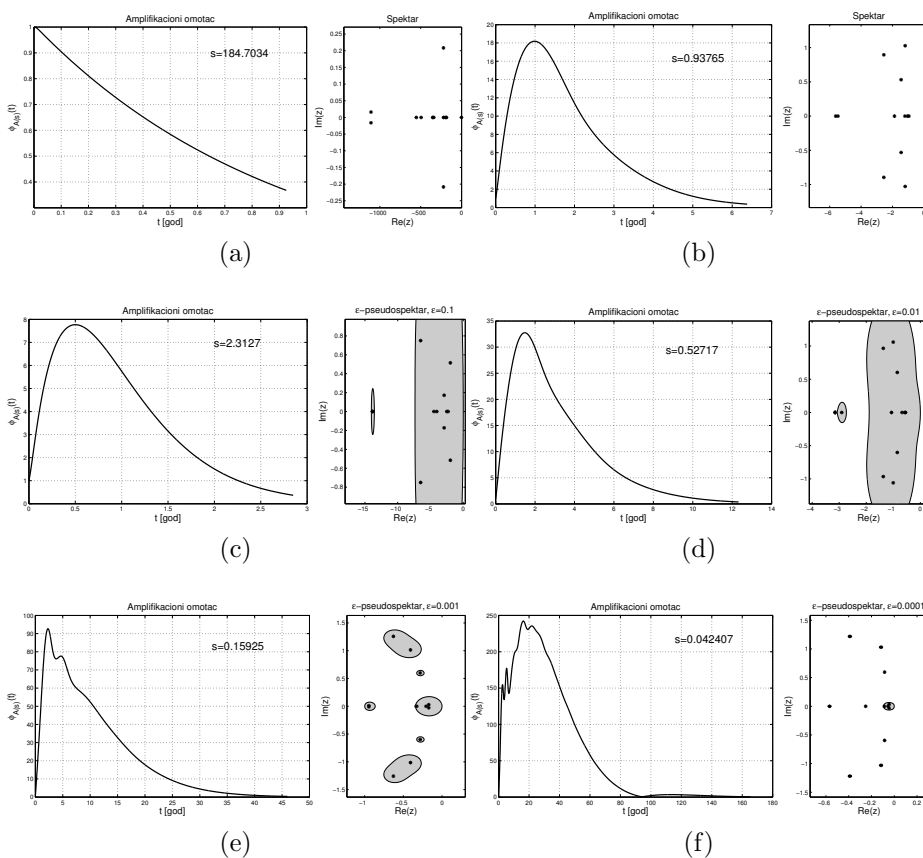
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 1  
 Uzorak 2

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

$$s_2^* = 1.8470e + 02$$

$$\hat{s}_{\infty}^* = 9.3765e - 01$$

$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	2.3127	7.7686	2.8499	$+\infty$	$2.0329e + 02$
$1e - 02$	$5.2717e - 01$	$3.2758e + 01$	$1.2323e + 01$	$+\infty$	$1.8641e + 02$
$1e - 03$	$1.5925e - 01$	$9.2690e + 01$	$4.5993e + 01$	$+\infty$	$1.8487e + 02$
$1e - 04$	$4.2407e - 02$	$2.4228e + 02$	$1.6538e + 02$	$+\infty$	$1.8472e + 02$



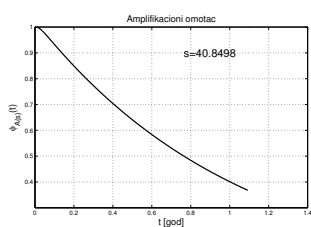
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 1  
 Uzorak 3

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

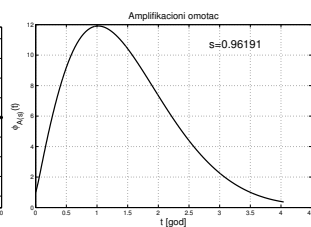
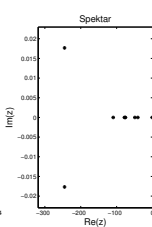
$$s_2^* = 4.0850e + 01$$

$$\hat{s}_{\infty}^* = 9.6191e - 01$$

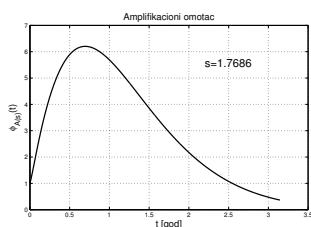
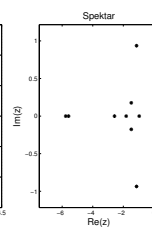
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	1.7686	6.2031	3.1453	$+\infty$	$4.5380e + 01$
$1e - 02$	$3.1765e - 01$	$3.1271e + 01$	8.0592	$+\infty$	$4.1258e + 01$
$1e - 03$	$3.1930e - 02$	$8.9994e + 01$	$7.5634e + 01$	$+\infty$	$4.0890e + 01$
$1e - 04$	$6.8133e - 04$	$1.1051e + 02$	$3.3244e + 03$	$+\infty$	$4.0854e + 01$



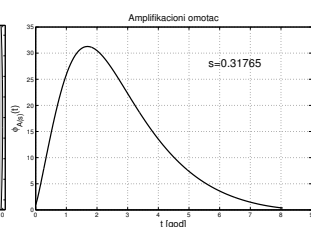
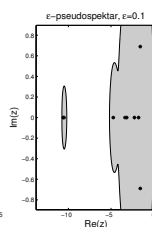
(a)



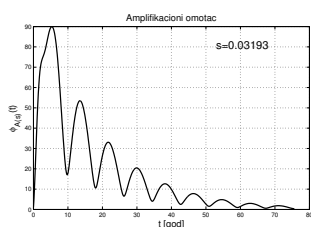
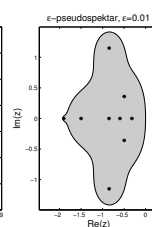
(b)



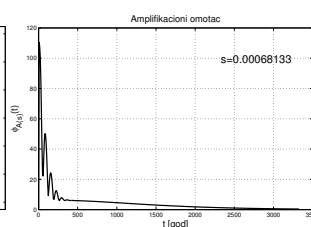
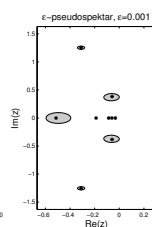
(c)



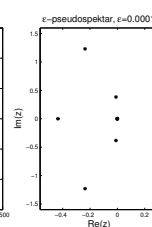
(d)



(e)



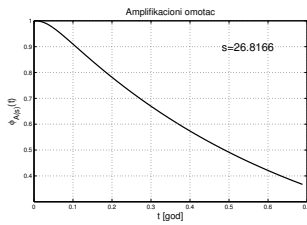
(f)



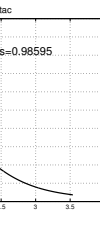
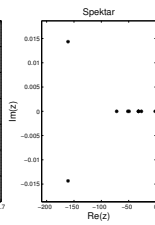
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 1  
 Uzorak 4

$$\begin{aligned} s_{\infty}^* &= +\infty \\ s_2^* &= 2.6817e + 01 \\ \widehat{s}_{\infty}^* &= 9.8595e - 01 \end{aligned}$$

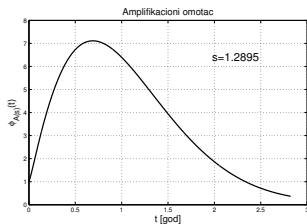
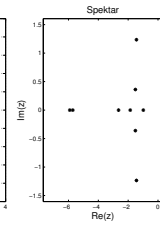
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	1.2895	7.1125	2.8229	$+\infty$	$2.8464e + 01$
$1e - 02$	$1.8730e - 01$	$2.9624e + 01$	$1.2440e + 01$	$+\infty$	$2.6972e + 01$
$1e - 03$	$1.8226e - 02$	$5.3364e + 01$	$1.3332e + 02$	$+\infty$	$2.6832e + 01$
$1e - 04$	$4.3208e - 04$	$5.6191e + 01$	$4.6404e + 03$	$+\infty$	$2.6818e + 01$



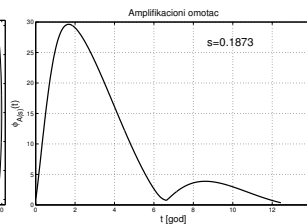
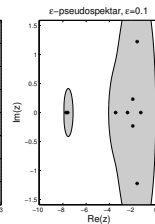
(a)



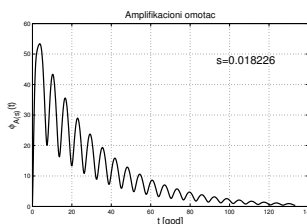
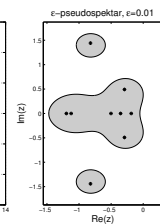
(b)



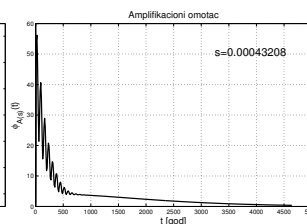
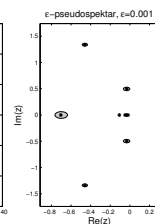
(c)



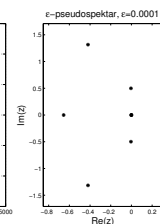
(d)



(e)



(f)



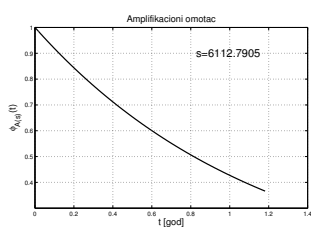
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 2  
 Uzorak 1

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

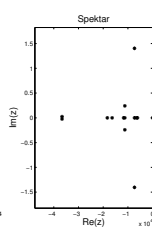
$$s_2^* = 6.1128e + 03$$

$$\hat{s}_{\infty}^* = 7.9172$$

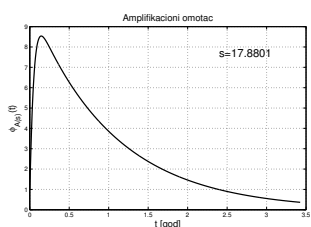
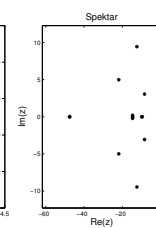
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$1.7880e + 01$	8.5387	3.4251	$+\infty$	$6.9268e + 03$
$1e - 02$	$4.6165e - 01$	$7.8718e + 01$	9.0574	$+\infty$	$6.1855e + 03$
$1e - 03$	$6.6977e - 02$	$1.7775e + 02$	$5.9417e + 01$	$+\infty$	$6.1200e + 03$
$1e - 04$	$4.5966e - 03$	$2.6404e + 02$	$1.2909e + 03$	$+\infty$	$6.1135e + 03$



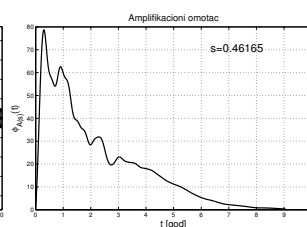
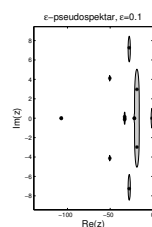
(a)



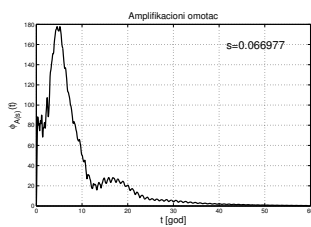
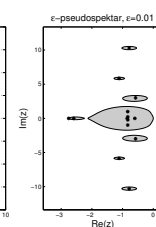
(b)



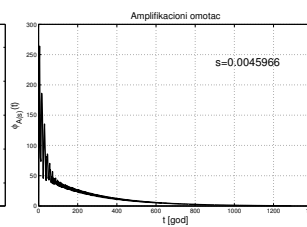
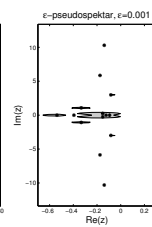
(c)



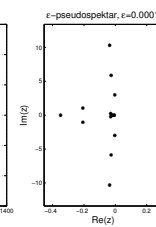
(d)



(e)

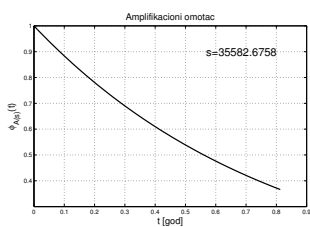


(f)

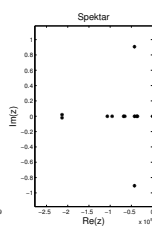


EFW	Schiermonnikoog	$s_{\infty}^* = +\infty$
Stadijum	2	$s_2^* = 3.5583e + 04$
Uzorak	2	$\hat{s}_{\infty}^* = 1.4399e + 01$

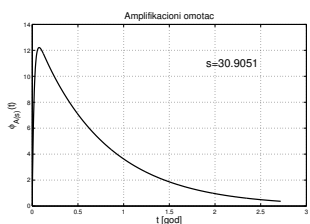
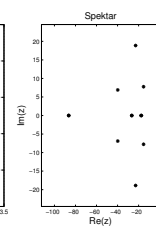
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$3.0905e + 01$	$1.2217e + 01$	2.7187	$+\infty$	$3.8714e + 04$
$1e - 02$	$1.5983e - 01$	$8.5122e + 01$	$1.6207e + 01$	$+\infty$	$3.5873e + 04$
$1e - 03$	$7.9480e - 03$	$8.5620e + 01$	$1.4329e + 02$	$+\infty$	$3.5611e + 04$
$1e - 04$	$6.0208e - 04$	$3.5599e + 01$	$7.9362e + 03$	$+\infty$	$3.5586e + 04$



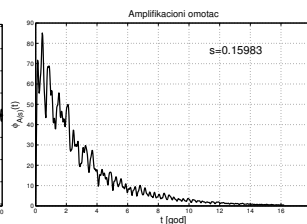
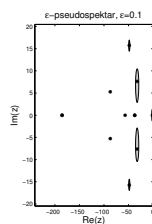
(a)



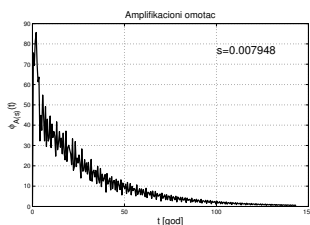
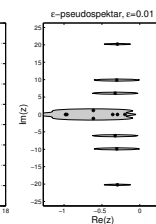
(b)



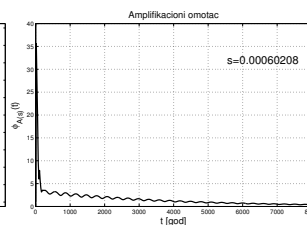
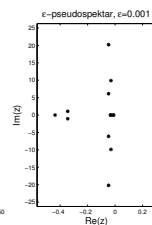
(c)



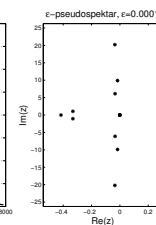
(d)



(e)



(f)



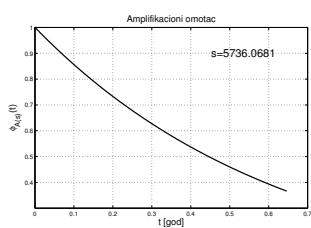
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 2  
 Uzorak 3

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

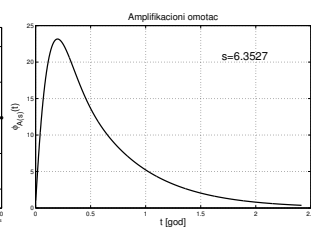
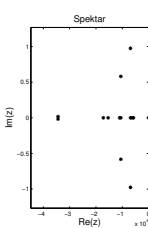
$$s_2^* = 5.7361e + 03$$

$$\hat{s}_{\infty}^* = 6.3527$$

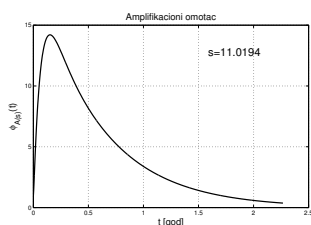
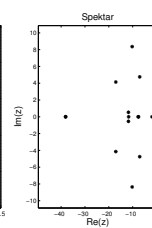
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$1.1019e + 01$	$1.4205e + 01$	2.2671	$+\infty$	$6.1300e + 03$
$1e - 02$	$2.5095e - 01$	$7.3365e + 01$	$1.1508e + 01$	$+\infty$	$5.7732e + 03$
$1e - 03$	$2.1300e - 02$	$1.2472e + 02$	$1.5000e + 02$	$+\infty$	$5.7398e + 03$
$1e - 04$	$5.3318e - 03$	$1.3521e + 02$	$1.5119e + 03$	$+\infty$	$5.7364e + 03$



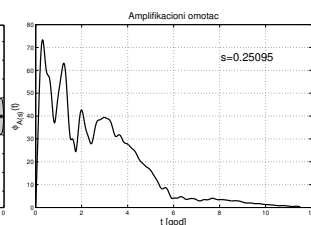
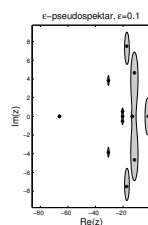
(a)



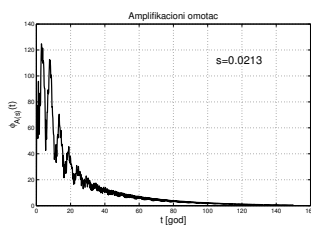
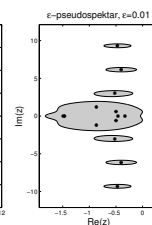
(b)



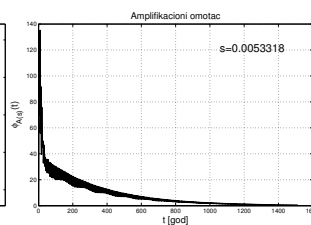
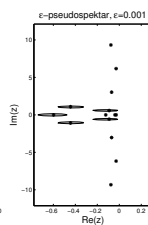
(c)



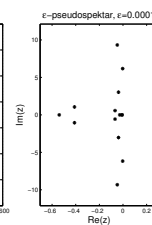
(d)



(e)



(f)





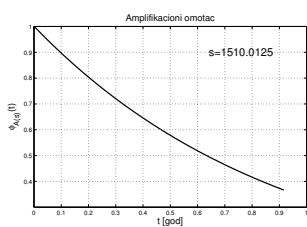
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 2  
 Uzorak 4

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

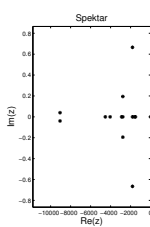
$$s_2^* = 1.5100e + 03$$

$$\hat{s}_{\infty}^* = 5.1940$$

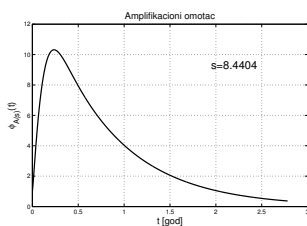
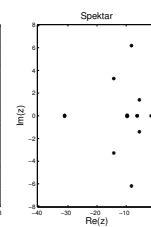
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	8.4404	$1.0313e + 01$	2.7823	$+\infty$	$1.6612e + 03$
$1e - 02$	$4.5070e - 01$	$8.1655e + 01$	9.0943	$+\infty$	$1.5239e + 03$
$1e - 03$	$5.2127e - 02$	$1.3992e + 02$	$5.1859e + 01$	$+\infty$	$1.5114e + 03$
$1e - 04$	$1.8368e - 03$	$1.9160e + 02$	$1.4984e + 03$	$+\infty$	$1.5101e + 03$



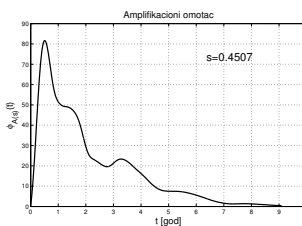
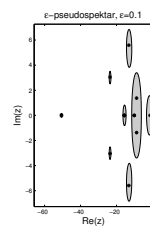
(a)



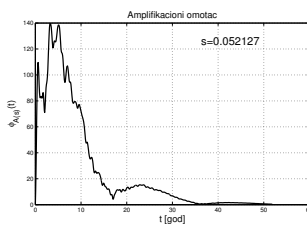
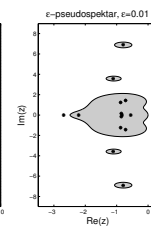
(b)



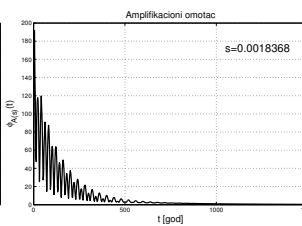
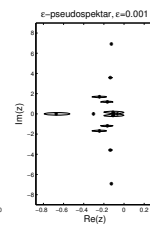
(c)



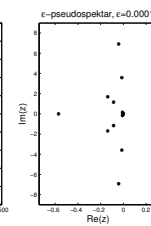
(d)



(e)



(f)



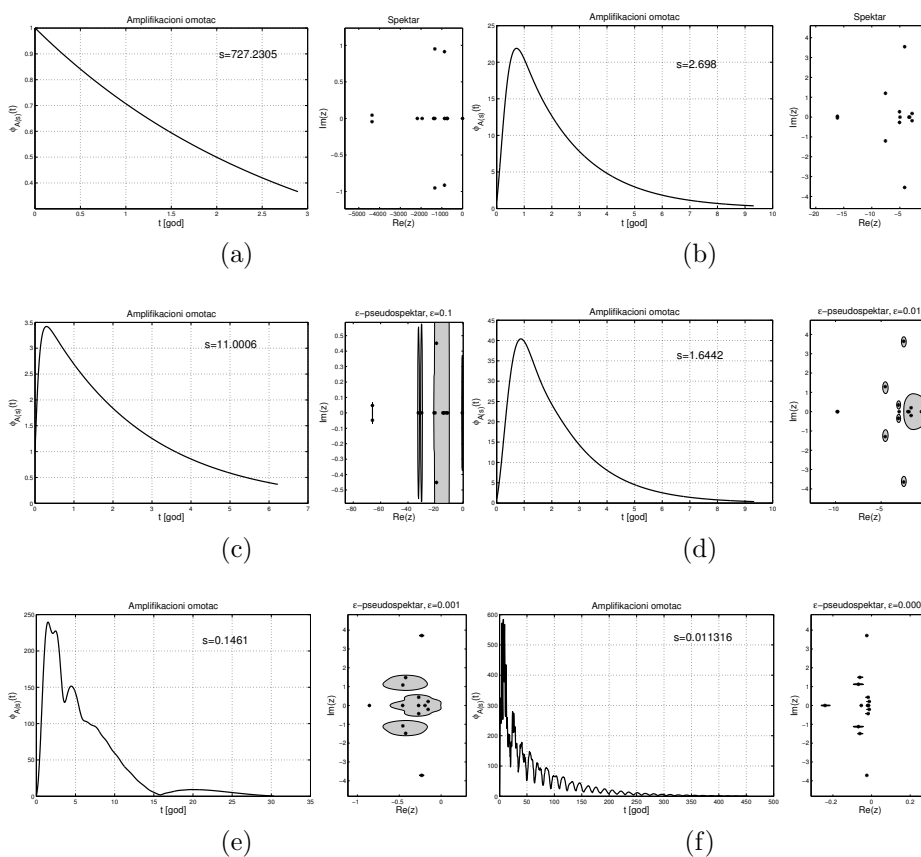
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 3  
 Uzorak 1

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

$$s_2^* = 7.2723e + 02$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 2.6980$$

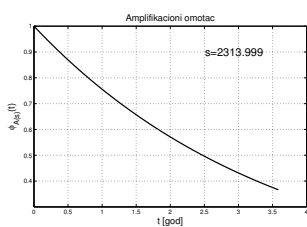
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$1.1001e + 01$	3.4206	6.2252	$+\infty$	$1.0199e + 03$
$1e - 02$	1.6442	$4.0401e + 01$	9.3323	$+\infty$	$7.4868e + 02$
$1e - 03$	$1.4610e - 01$	$2.3967e + 02$	$3.0332e + 01$	$+\infty$	$7.2932e + 02$
$1e - 04$	$1.1316e - 02$	$5.8413e + 02$	$4.5383e + 02$	$+\infty$	$7.2744e + 02$



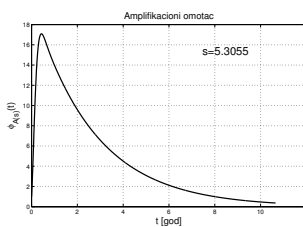
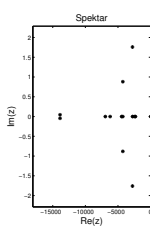
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 3  
 Uzorak 2

$s_{\infty}^* = +\infty$   
 $s_2^* = 2.3140e + 03$   
 $\hat{s}_{\infty}^* = 5.3055$

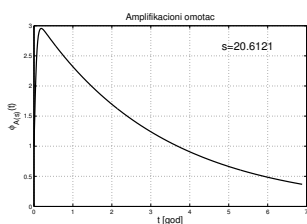
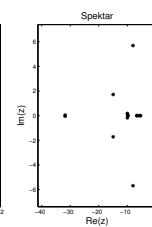
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$2.0612e + 01$	2.9552	6.8849	$+\infty$	$3.5965e + 03$
$1e - 02$	2.6461	$3.7108e + 01$	$1.1638e + 01$	$+\infty$	$2.3995e + 03$
$1e - 03$	$3.0807e - 01$	$1.7761e + 02$	$2.5222e + 01$	$+\infty$	$2.3223e + 03$
$1e - 04$	$5.6279e - 02$	$4.4504e + 02$	$1.1542e + 02$	$+\infty$	$2.3148e + 03$



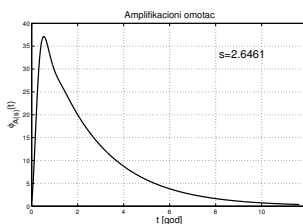
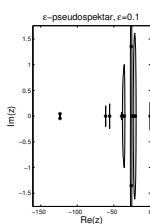
(a)



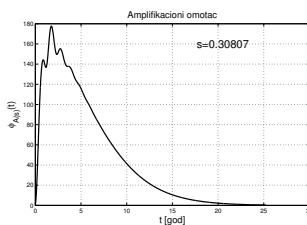
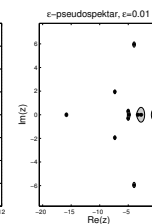
(b)



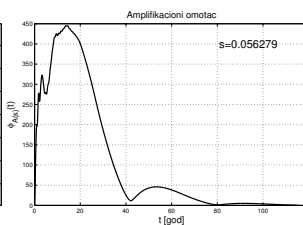
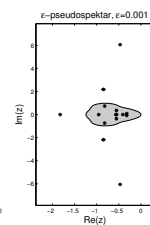
(c)



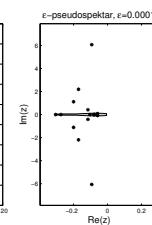
(d)



(e)



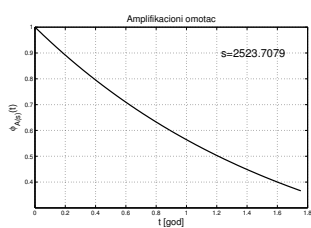
(f)



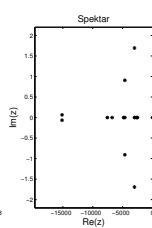
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 3  
 Uzorak 3

$$\begin{aligned} s_{\infty}^* &= +\infty \\ s_2^* &= 2.5237e + 03 \\ \hat{s}_{\infty}^* &= 6.8709 \end{aligned}$$

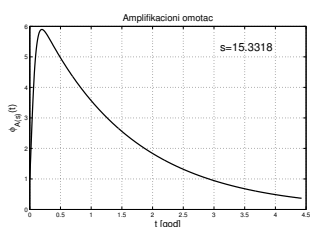
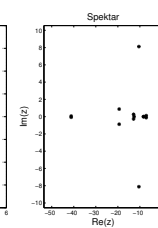
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$1.5332e + 01$	5.8974	4.4267	$+\infty$	$3.0575e + 03$
$1e - 02$	1.1132	$6.5720e + 01$	6.2663	$+\infty$	$2.5685e + 03$
$1e - 03$	$7.7237e - 02$	$1.8777e + 02$	$5.2776e + 01$	$+\infty$	$2.5281e + 03$
$1e - 04$	$5.2008e - 03$	$3.6593e + 02$	$8.3421e + 02$	$+\infty$	$2.5241e + 03$



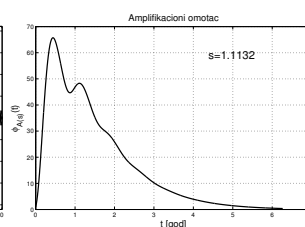
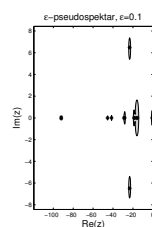
(a)



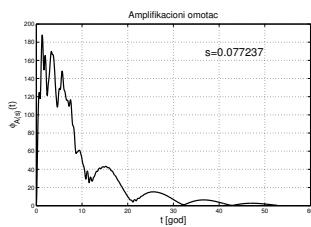
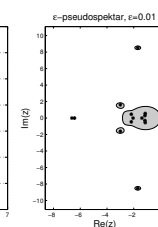
(b)



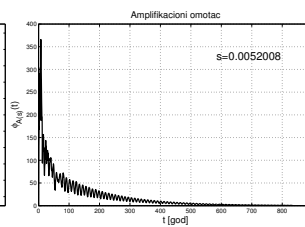
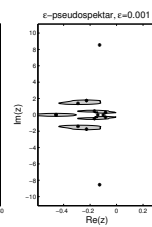
(c)



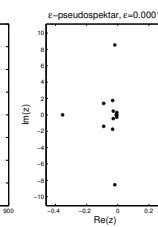
(d)



(e)



(f)



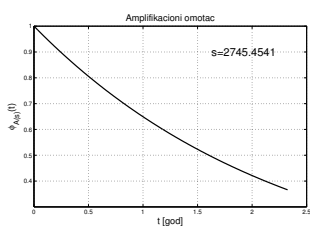
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 3  
 Uzorak 4

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

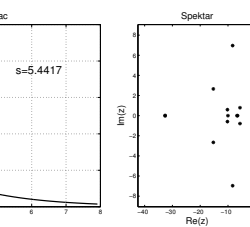
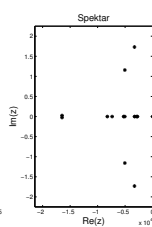
$$s_2^* = 2.7455e + 03$$

$$\hat{s}_{\infty}^* = 5.4417$$

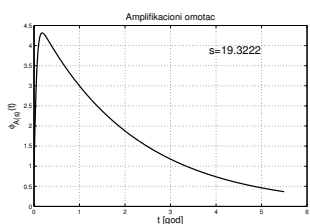
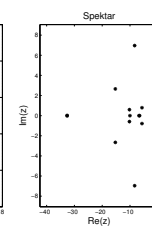
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$1.9322e + 01$	4.3154	5.4961	$+\infty$	$3.5703e + 03$
$1e - 02$	1.5022	$5.8296e + 01$	7.5301	$+\infty$	$2.8103e + 03$
$1e - 03$	$4.9374e - 02$	$1.6871e + 02$	$9.2999e + 01$	$+\infty$	$2.7518e + 03$
$1e - 04$	$1.0472e - 02$	$2.1634e + 02$	$1.0563e + 03$	$+\infty$	$2.7461e + 03$



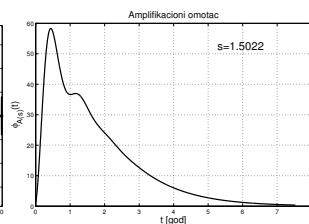
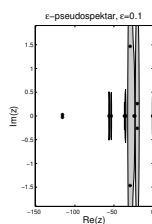
(a)



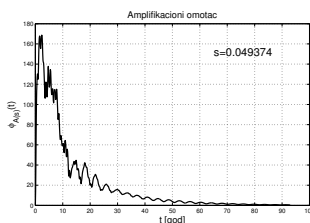
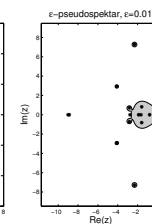
(b)



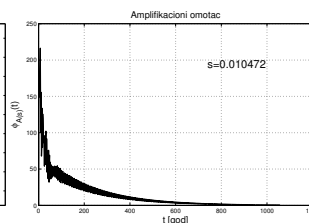
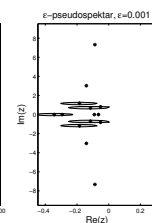
(c)



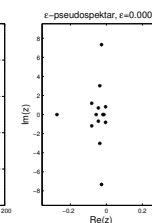
(d)



(e)



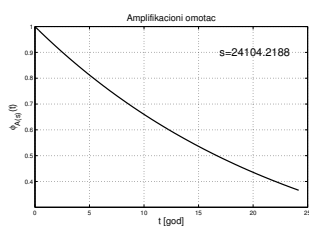
(f)



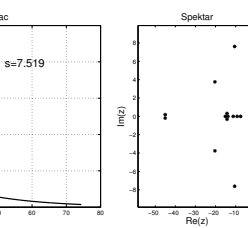
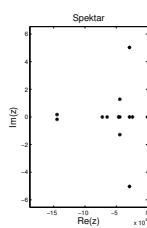
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 4  
 Uzorak 1

$$\begin{aligned} s_{\infty}^* &= +\infty \\ s_2^* &= 2.4104e + 04 \\ \hat{s}_{\infty}^* &= 7.5190 \end{aligned}$$

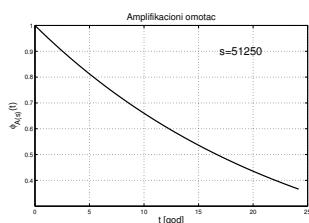
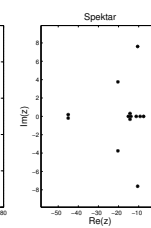
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty,\varepsilon}^*$	$s_{2,\varepsilon}^*$
$1e - 01$	$5.1250e + 04$	1	$2.4181e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 02$	$2.2346e + 01$	4.6988	$5.4008e + 01$	$+\infty$	$3.1736e + 04$
$1e - 03$	2.7935	$6.3581e + 01$	$8.2013e + 01$	$+\infty$	$2.4698e + 04$
$1e - 04$	$3.9589e - 01$	$3.9366e + 02$	$1.1150e + 02$	$+\infty$	$2.4162e + 04$



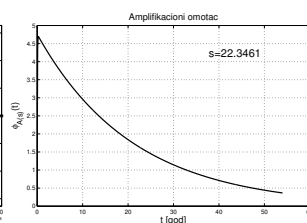
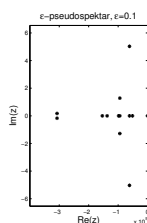
(a)



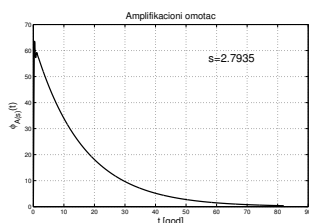
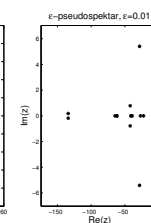
(b)



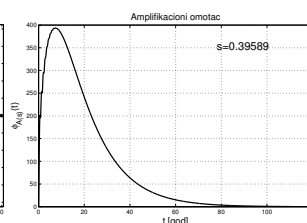
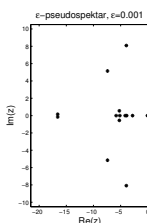
(c)



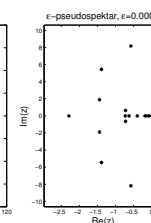
(d)



(e)



(f)



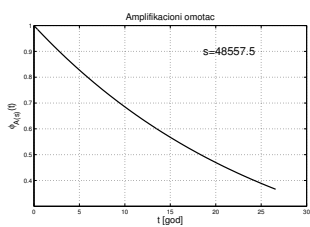
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 4  
 Uzorak 2

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

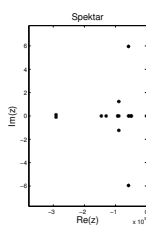
$$s_2^* = 4.8558e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 1.0077e + 01$$

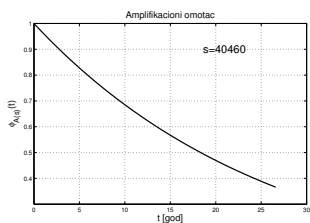
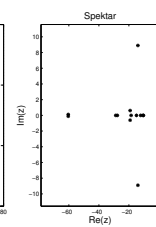
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$4.0460e + 04$	1	$2.6590e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 02$	$2.5235e + 01$	4.4734	$5.5610e + 01$	$+\infty$	$6.6027e + 04$
$1e - 03$	2.1423	$5.8432e + 01$	$8.7911e + 01$	$+\infty$	$4.9877e + 04$
$1e - 04$	$1.4480e - 01$	$4.6655e + 02$	$2.6033e + 02$	$+\infty$	$4.8686e + 04$



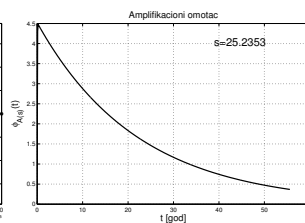
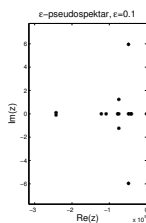
(a)



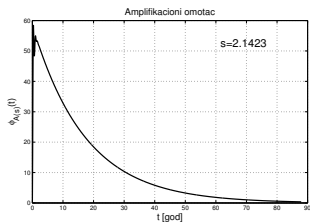
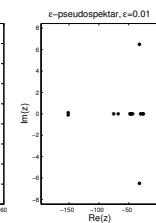
(b)



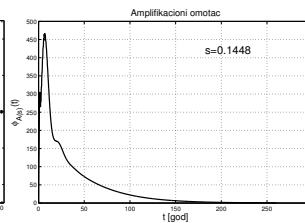
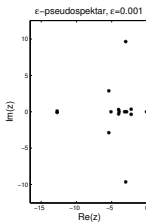
(c)



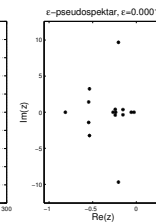
(d)



(e)



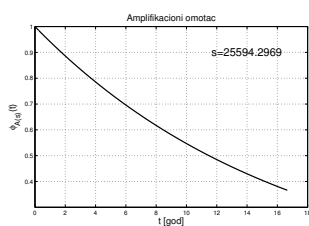
(f)



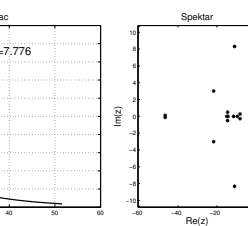
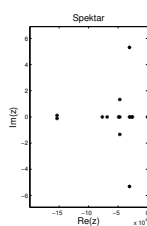
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 4  
 Uzorak 3

$$\begin{aligned} s_{\infty}^* &= +\infty \\ s_{2}^* &= 2.5594e + 04 \\ \hat{s}_{\infty}^* &= 7.7760 \end{aligned}$$

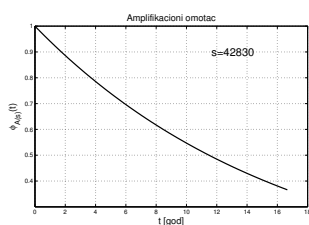
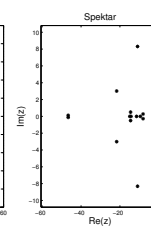
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$4.2830e + 04$	1	$1.6660e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 02$	$1.7058e + 01$	6.8721	$4.2222e + 01$	$+\infty$	$3.0679e + 04$
$1e - 03$	1.5697	$8.5525e + 01$	$5.7942e + 01$	$+\infty$	$2.6026e + 04$
$1e - 04$	$2.8826e - 01$	$4.7474e + 02$	$8.1908e + 01$	$+\infty$	$2.5637e + 04$



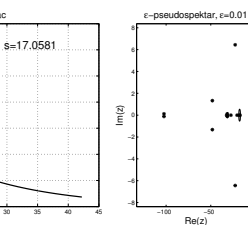
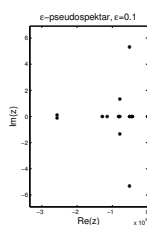
(a)



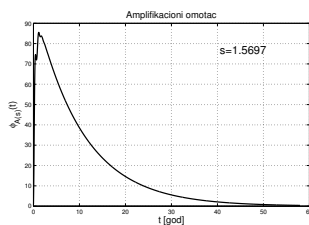
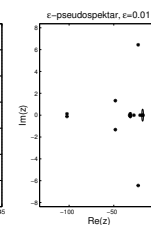
(b)



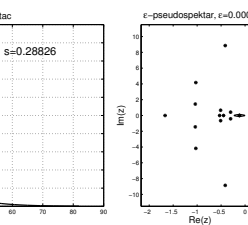
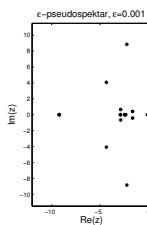
(c)



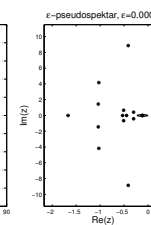
(d)



(e)



(f)





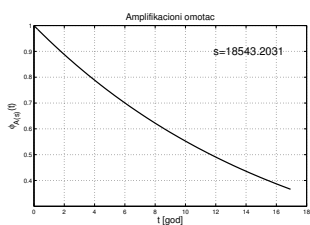
EFW Schiermonnikoog  
 Stadijum 4  
 Uzorak 4

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

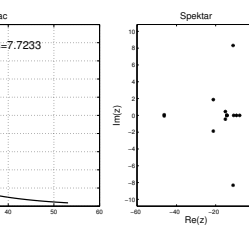
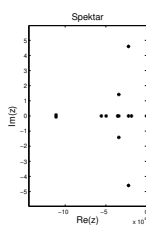
$$s_2^* = 1.8543e + 04$$

$$\hat{s}_{\infty}^* = 7.7233$$

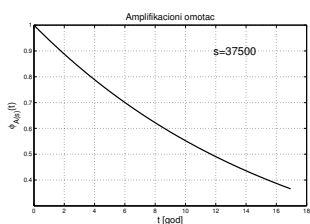
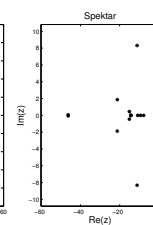
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$3.7500e + 04$	1	$1.6941e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 02$	$1.6982e + 01$	6.7569	$4.2728e + 01$	$+\infty$	$2.2300e + 04$
$1e - 03$	1.6174	$8.2120e + 01$	$6.0317e + 01$	$+\infty$	$1.8861e + 04$
$1e - 04$	$2.2856e - 01$	$3.3305e + 02$	$1.2417e + 02$	$+\infty$	$1.8574e + 04$



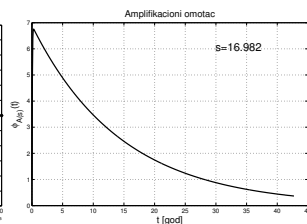
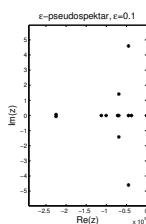
(a)



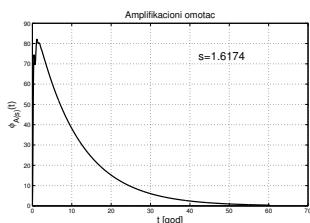
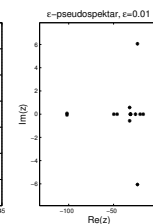
(b)



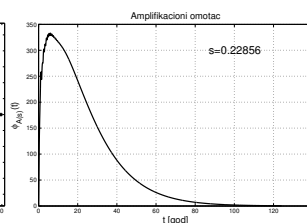
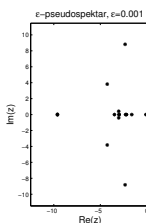
(c)



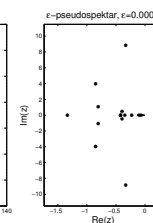
(d)



(e)



(f)



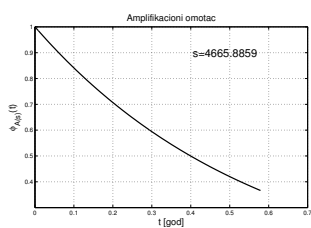
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      1  
 Uzorak      1

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

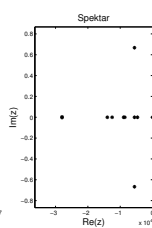
$$s_2^* = 4.6659e + 03$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 2.3221e + 01$$

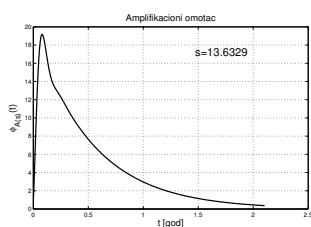
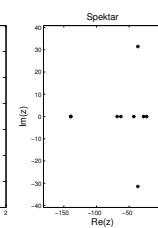
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$1.3633e + 01$	$1.9168e + 01$	2.1033	$+\infty$	$4.9472e + 03$
$1e - 02$	$5.2362e - 01$	$6.0860e + 01$	5.5479	$+\infty$	$4.6925e + 03$
$1e - 03$	$6.4921e - 03$	$1.2510e + 02$	$2.1873e + 02$	$+\infty$	$4.6685e + 03$
$1e - 04$	$1.2545e - 04$	$1.3013e + 01$	$9.8051e + 03$	$+\infty$	$4.6662e + 03$



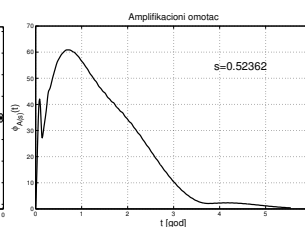
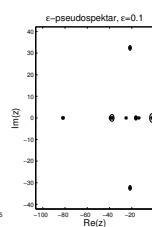
(a)



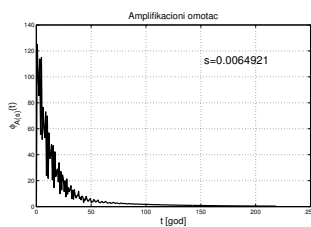
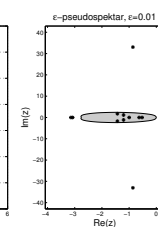
(b)



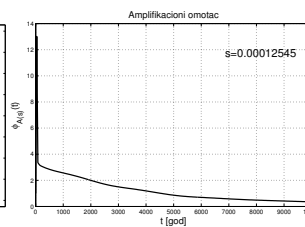
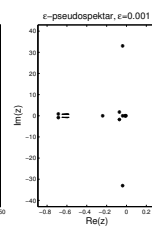
(c)



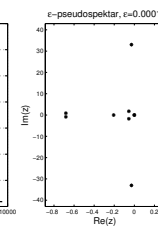
(d)



(e)



(f)



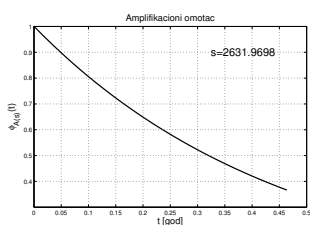
EFW            Hulshorsterzand  
 Stadijum        1  
 Uzorak            2

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

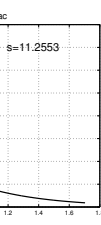
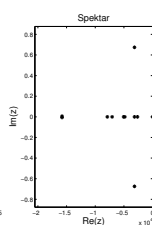
$$s_2^* = 2.6230e + 03$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 1.1255e + 01$$

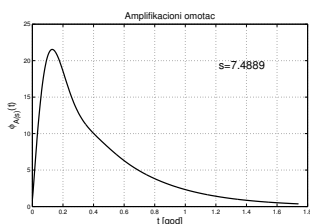
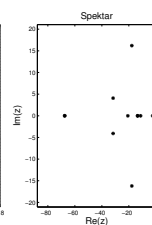
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	7.4889	$2.1536e + 01$	1.7407	$+\infty$	$2.7578e + 03$
$1e - 02$	$9.6346e - 02$	$5.8432e + 01$	$2.1900e + 01$	$+\infty$	$2.6440e + 03$
$1e - 03$	$1.5666e - 03$	$3.7937e + 01$	$7.2449e + 02$	$+\infty$	$2.6332e + 03$
$1e - 04$	$1.3023e - 04$	$1.1834e + 01$	$1.0865e + 04$	$+\infty$	$2.6321e + 03$



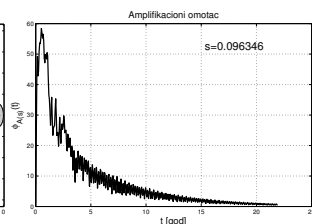
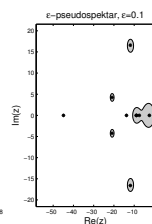
(a)



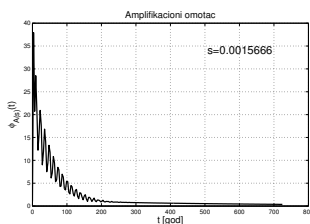
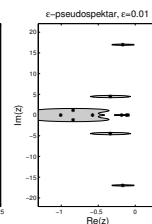
(b)



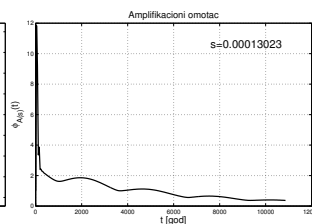
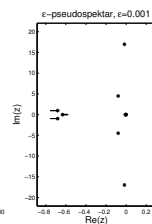
(c)



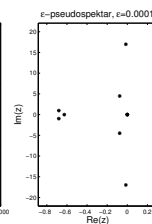
(d)



(e)



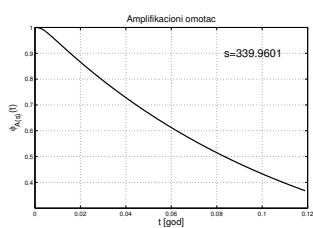
(f)



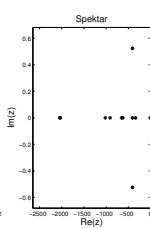
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      1  
 Uzorak      3

$$\begin{aligned} s_{\infty}^* &= +\infty \\ s_2^* &= 3.3996e + 02 \\ \widehat{s}_{\infty}^* &= 6.5535 \end{aligned}$$

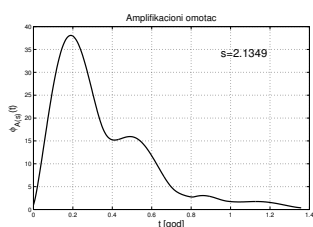
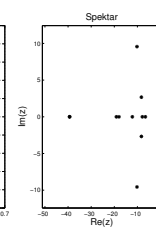
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	2.1349	$3.8075e + 01$	1.3584	$+\infty$	$3.4349e + 02$
$1e - 02$	$3.0768e - 01$	$5.8930e + 01$	7.7191	$+\infty$	$3.4031e + 02$
$1e - 03$	$7.6071e - 03$	$1.0847e + 02$	$1.9521e + 02$	$+\infty$	$3.3999e + 02$
$1e - 04$	$1.2950e - 04$	9.0500	$7.8377e + 03$	$+\infty$	$3.3996e + 02$



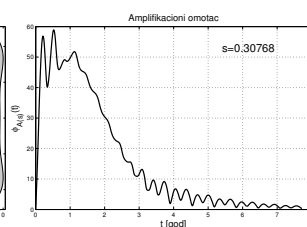
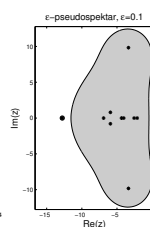
(a)



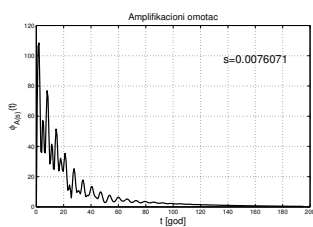
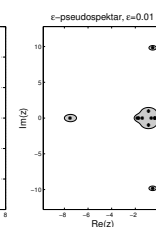
(b)



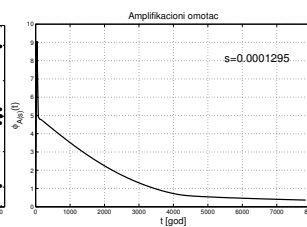
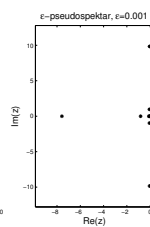
(c)



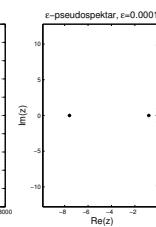
(d)



(e)



(f)



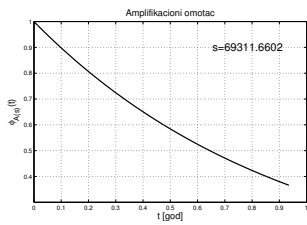
EFW            Hulshorsterzand  
 Stadijum        1  
 Uzorak            4

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

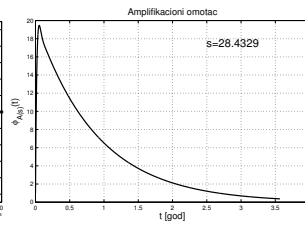
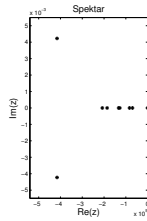
$$s_2^* = 6.9312e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 2.8433e + 01$$

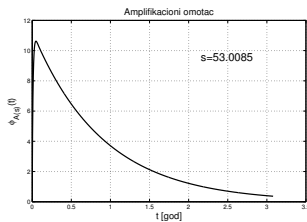
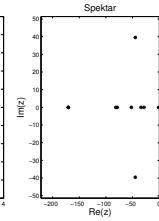
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$5.3009e + 01$	$1.0622e + 01$	3.0798	$+\infty$	$7.6418e + 04$
$1e - 02$	1.8576	$8.1020e + 01$	3.8576	$+\infty$	$6.9962e + 04$
$1e - 03$	$1.7798e - 03$	$9.8347e + 01$	$7.7817e + 02$	$+\infty$	$6.9376e + 04$
$1e - 04$	$1.4904e - 04$	$1.4634e + 01$	$9.6956e + 03$	$+\infty$	$6.9318e + 04$



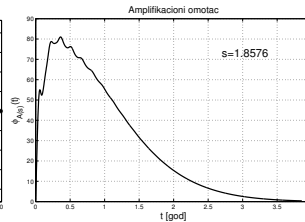
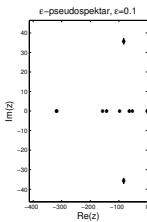
(a)



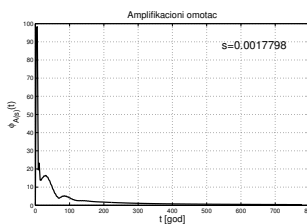
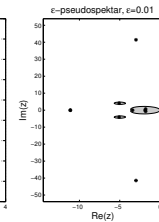
(b)



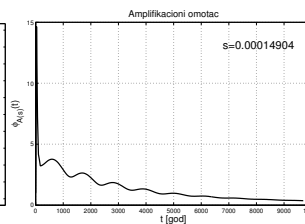
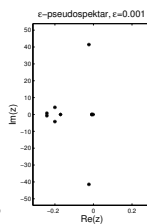
(c)



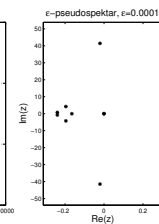
(d)



(e)



(f)



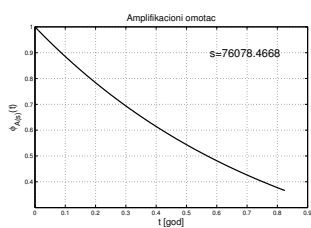
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      2  
 Uzorak      1

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

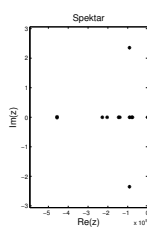
$$s_2^* = 7.6078e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 1.9388e + 01$$

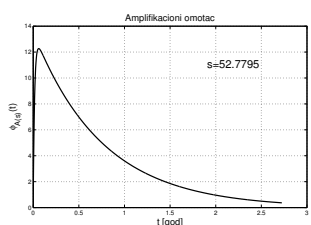
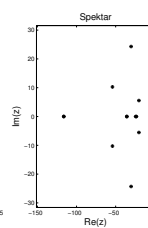
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e-01$	$5.2779e+01$	$1.2269e+01$	2.7245	$+\infty$	$8.2881e+04$
$1e-02$	$7.5051e-01$	$1.2319e+02$	6.5590	$+\infty$	$7.6708e+04$
$1e-03$	$8.9907e-02$	$1.6208e+02$	$6.5781e+01$	$+\infty$	$7.6141e+04$
$1e-04$	$2.3021e-02$	$1.7058e+02$	$6.5850e+02$	$+\infty$	$7.6085e+04$



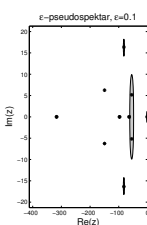
(a)



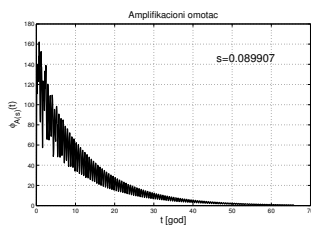
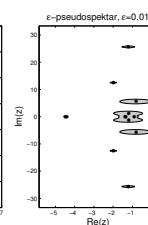
(b)



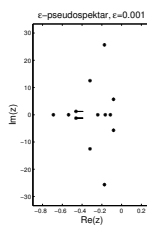
(c)



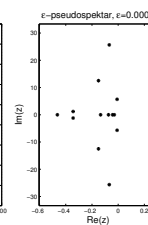
(d)



(e)



(f)



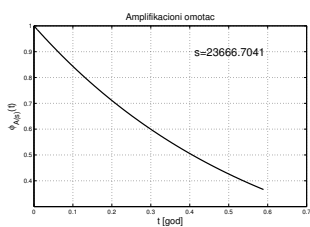
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      2  
 Uzorak      2

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

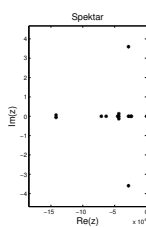
$$s_2^* = 2.3667e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 2.8651e + 01$$

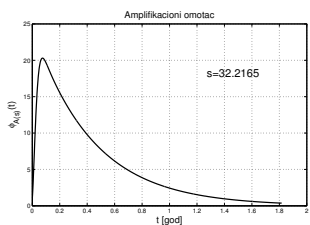
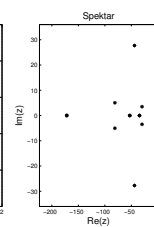
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$3.2216e + 01$	$2.0298e + 01$	1.8168	$+\infty$	$2.5141e + 04$
$1e - 02$	$4.5996e - 01$	$1.2784e + 02$	$1.0437e + 01$	$+\infty$	$2.3806e + 04$
$1e - 03$	$4.7044e - 02$	$1.3144e + 02$	$9.9929e + 01$	$+\infty$	$2.3681e + 04$
$1e - 04$	$4.8145e - 03$	$1.3236e + 02$	$9.9334e + 02$	$+\infty$	$2.3668e + 04$



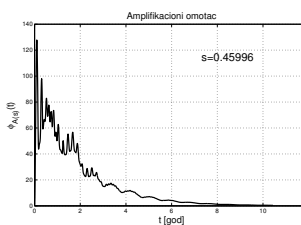
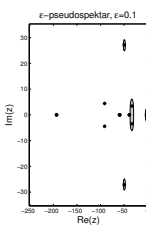
(a)



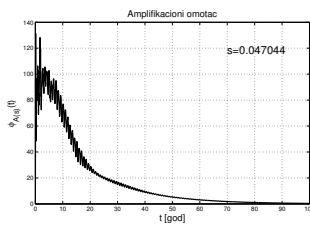
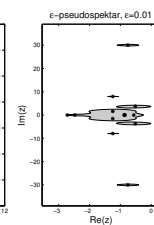
(b)



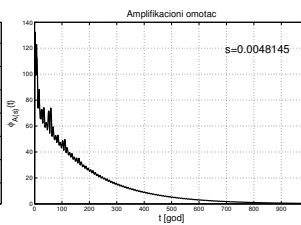
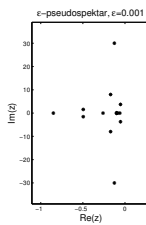
(c)



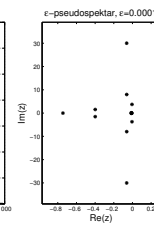
(d)



(e)



(f)



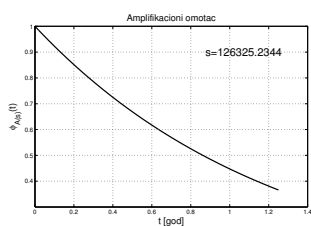
EFW            Hulshorsterzand  
 Stadijum        2  
 Uzorak         3

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

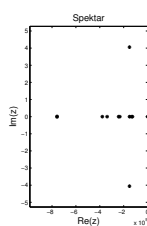
$$s_2^* = 1.2633e + 05$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 4.4898e + 01$$

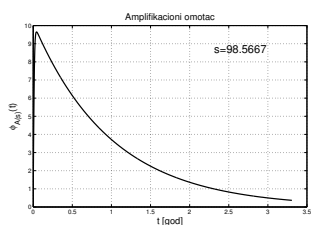
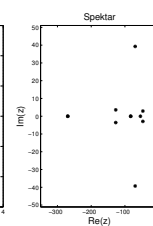
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e-01$	$9.8567e + 01$	9.6481	3.3071	$+\infty$	$1.4427e + 05$
$1e-02$	1.0036	$1.7082e + 02$	5.1782	$+\infty$	$1.2792e + 05$
$1e-03$	$1.1253e - 01$	$2.2678e + 02$	$5.0712e + 01$	$+\infty$	$1.2648e + 05$
$1e-04$	$2.1140e - 02$	$2.5052e + 02$	$4.9956e + 02$	$+\infty$	$1.2634e + 05$



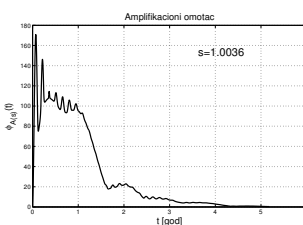
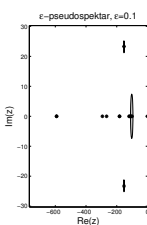
(a)



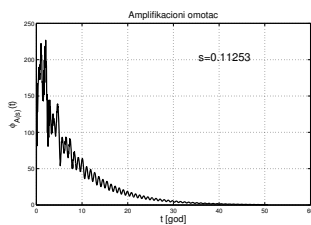
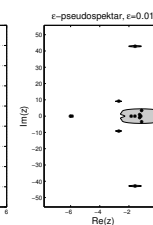
(b)



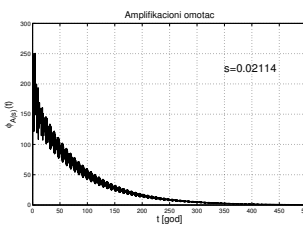
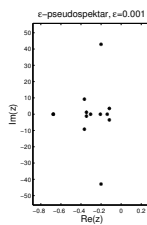
(c)



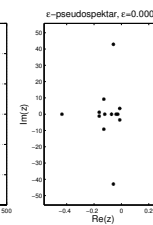
(d)



(e)



(f)





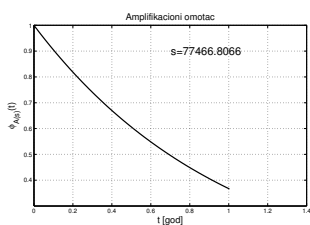
EFW Hulshorsterzand  
 Stadijum 2  
 Uzorak 4

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

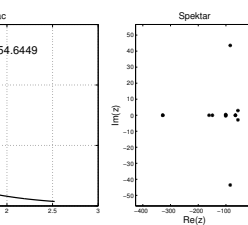
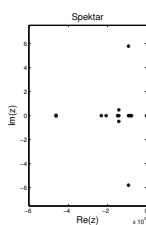
$$s_2^* = 7.7467e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 5.4645e + 01$$

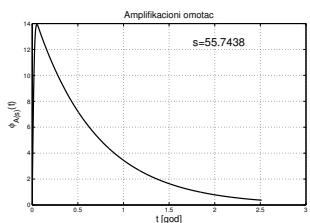
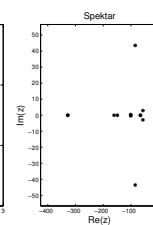
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$5.5744e + 01$	$1.3931e + 01$	2.5141	$+\infty$	$8.6064e + 04$
$1e - 02$	$4.4982e - 01$	$9.2355e + 01$	$1.0016e + 01$	$+\infty$	$7.8248e + 04$
$1e - 03$	$4.8429e - 02$	$1.5576e + 02$	$9.4896e + 01$	$+\infty$	$7.7544e + 04$
$1e - 04$	$8.2307e - 03$	$1.6896e + 02$	$9.4379e + 02$	$+\infty$	$7.7475e + 04$



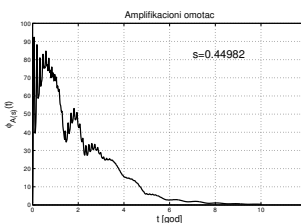
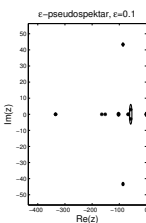
(a)



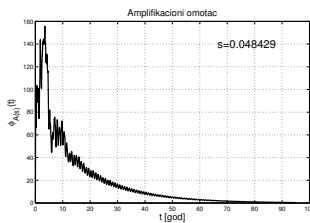
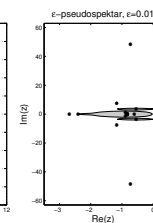
(b)



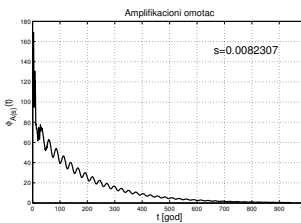
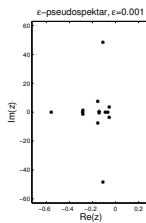
(c)



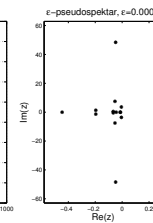
(d)



(e)



(f)



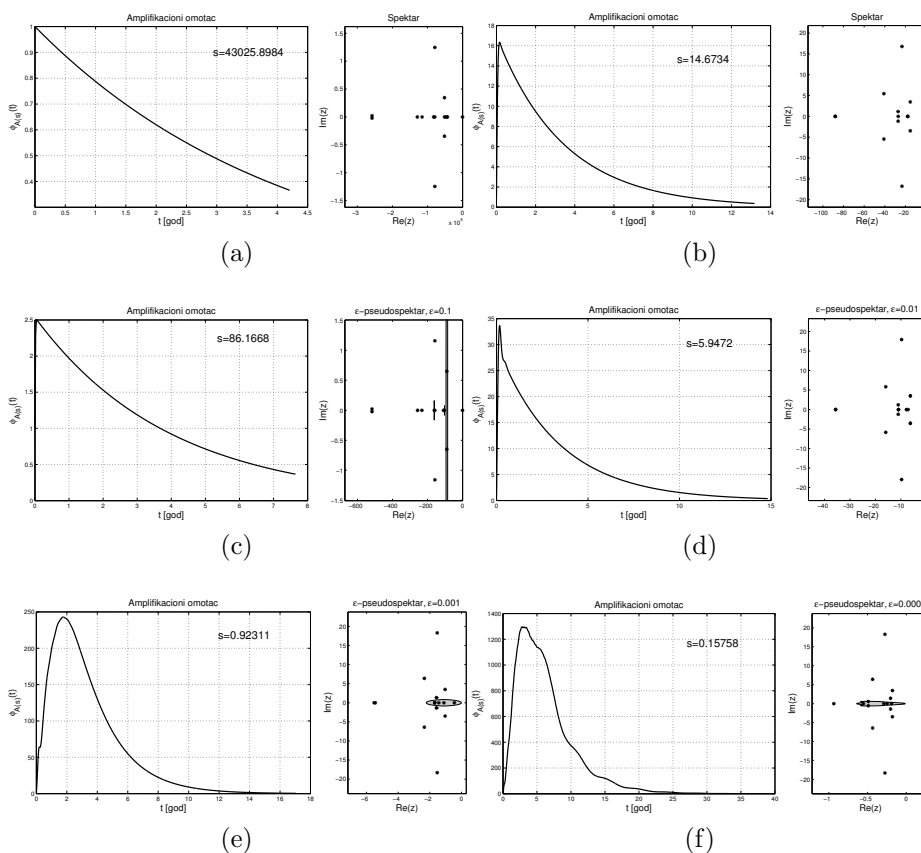
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      3  
 Uzorak      1

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

$$s_2^* = 4.3026e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 1.4673e + 01$$

$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$8.6167e + 01$	2.4938	7.6433	$+\infty$	$7.3961e + 04$
$1e - 02$	5.9472	$3.3673e + 01$	$1.4825e + 01$	$+\infty$	$4.4904e + 04$
$1e - 03$	$9.2311e - 01$	$2.4295e + 02$	$1.7047e + 01$	$+\infty$	$4.3207e + 04$
$1e - 04$	$1.5758e - 01$	$1.2972e + 03$	$3.8601e + 01$	$+\infty$	$4.3044e + 04$



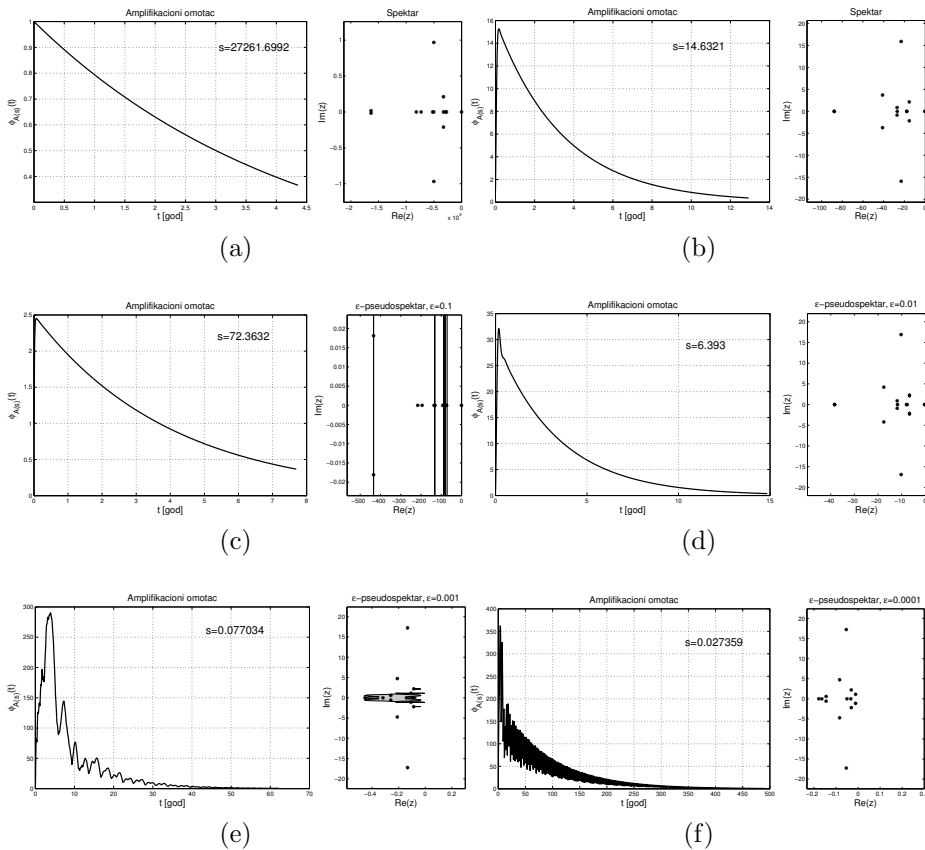
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      3  
 Uzorak      2

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

$$s_2^* = 2.7262e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 1.4632e + 01$$

$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$7.2363e + 01$	2.4512	7.6948	$+\infty$	$4.8124e + 04$
$1e - 02$	6.3930	$3.2112e + 01$	$1.4848e + 01$	$+\infty$	$2.8497e + 04$
$1e - 03$	$7.7034e - 02$	$2.9041e + 02$	$6.2159e + 01$	$+\infty$	$2.7380e + 04$
$1e - 04$	$2.7359e - 02$	$3.6213e + 02$	$4.9137e + 02$	$+\infty$	$2.7274e + 04$



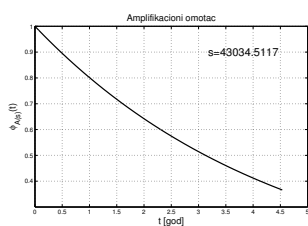
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      3  
 Uzorak      3

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

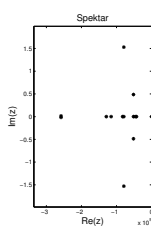
$$s_2^* = 4.3035e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 2.2539e + 01$$

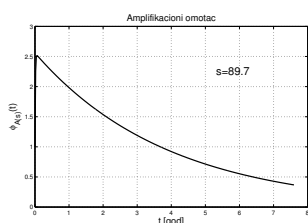
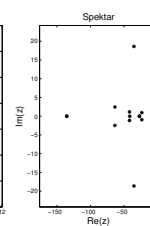
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$8.9700e + 01$	2.5155	7.5994	$+\infty$	$7.8430e + 04$
$1e - 02$	9.1187	$3.4682e + 01$	$1.3686e + 01$	$+\infty$	$4.5068e + 04$
$1e - 03$	$1.1100e - 01$	$3.1775e + 02$	$4.8602e + 01$	$+\infty$	$4.3230e + 04$
$1e - 04$	$1.5874e - 02$	$3.7683e + 02$	$6.8582e + 02$	$+\infty$	$4.3054e + 04$



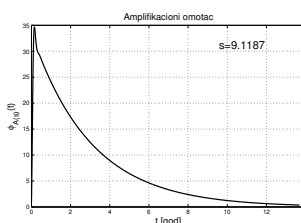
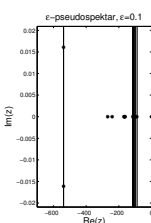
(a)



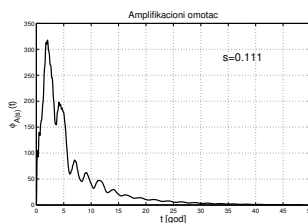
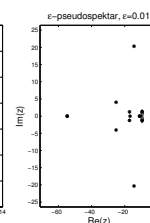
(b)



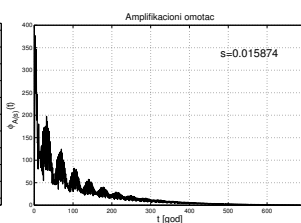
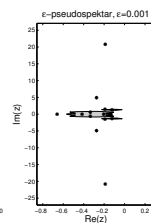
(c)



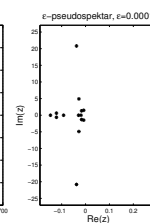
(d)



(e)



(f)



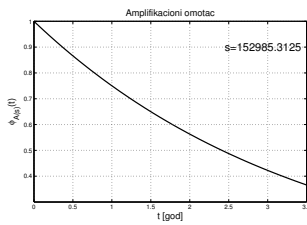
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      3  
 Uzorak      4

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

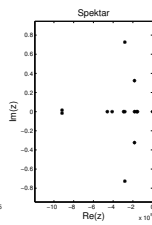
$$s_2^* = 1.5299e + 05$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 4.1473e + 01$$

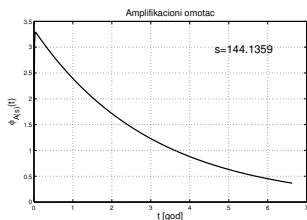
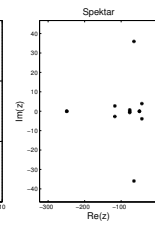
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$1.4414e + 02$	3.2878	6.6313	$+\infty$	$2.3468e + 05$
$1e - 02$	$1.2216e + 01$	$4.3300e + 01$	$1.2103e + 01$	$+\infty$	$1.5850e + 05$
$1e - 03$	$1.1538e - 01$	$3.1790e + 02$	$4.2024e + 01$	$+\infty$	$1.5352e + 05$
$1e - 04$	$2.8890e - 02$	$4.6884e + 02$	$5.1055e + 02$	$+\infty$	$1.5304e + 05$



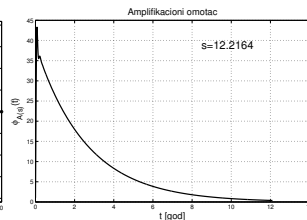
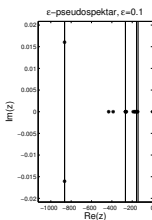
(a)



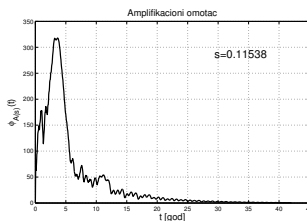
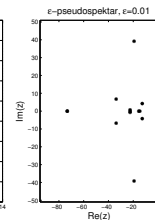
(b)



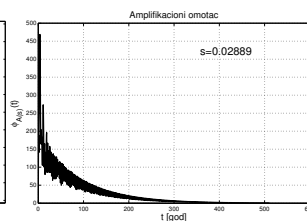
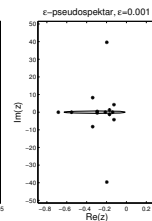
(c)



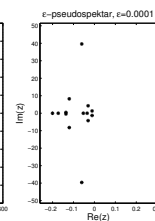
(d)



(e)



(f)



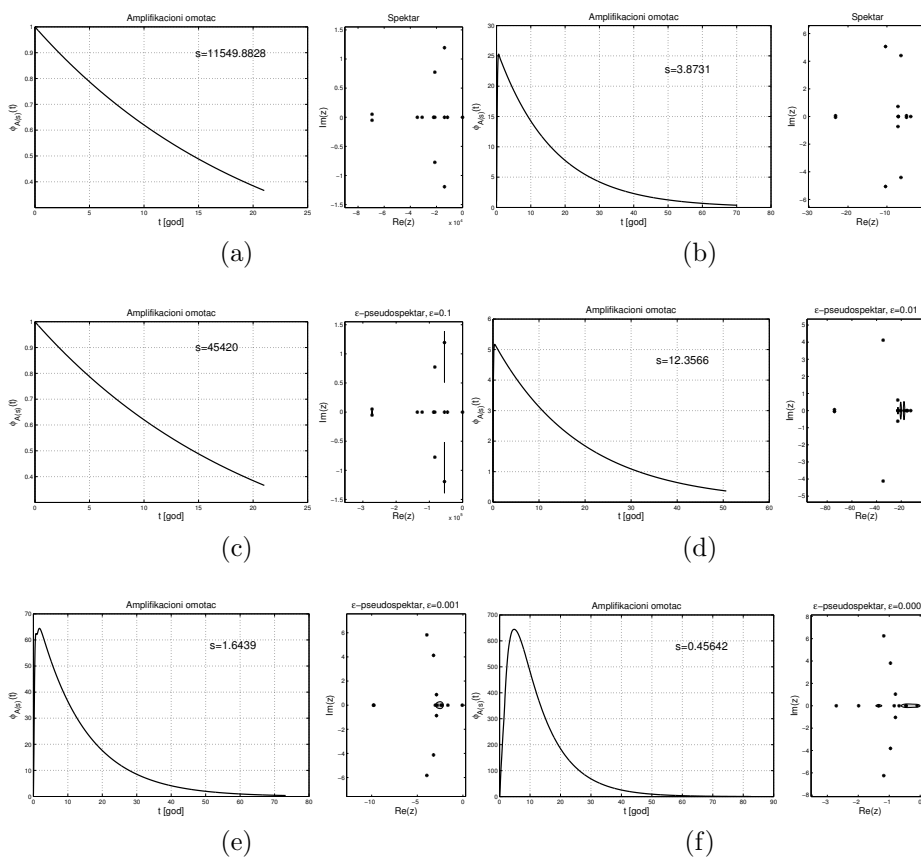
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      4  
 Uzorak      1

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

$$s_2^* = 1.1550e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 3.8731$$

$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT} [\text{god}]$	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$4.5420e + 04$	1	$2.1029e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 02$	$1.2357e + 01$	5.1722	$5.0662e + 01$	$+\infty$	$1.4603e + 04$
$1e - 03$	1.6439	$6.4426e + 01$	$7.3219e + 01$	$+\infty$	$1.1797e + 04$
$1e - 04$	$4.5642e - 01$	$6.4446e + 02$	$8.2587e + 01$	$+\infty$	$1.1574e + 04$



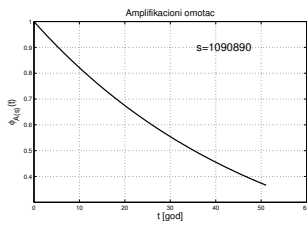
EFW Hulshorsterzand  
 Stadijum 4  
 Uzorak 2

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

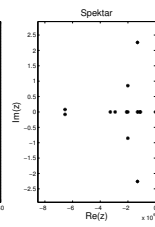
$$s_2^* = 1.0909e + 06$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 9.5491$$

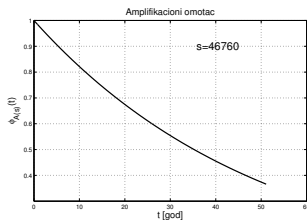
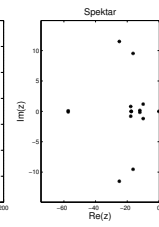
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$4.6760e + 04$	1	$5.1093e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 02$	$1.5707e + 02$	1.9968	$8.4719e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 03$	$1.2984e + 01$	$2.3276e + 01$	$1.7807e + 02$	$+\infty$	$1.1493e + 06$
$1e - 04$	1.4388	$2.9363e + 02$	$2.1786e + 02$	$+\infty$	$1.0965e + 06$



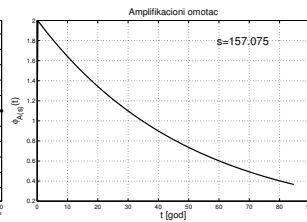
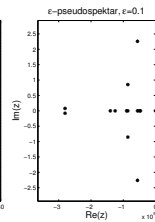
(a)



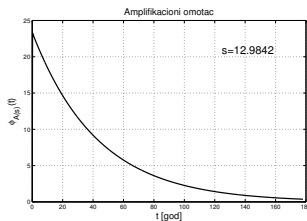
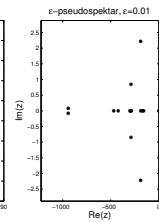
(b)



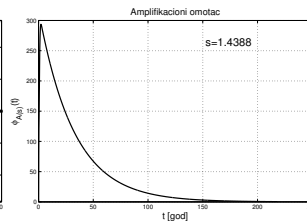
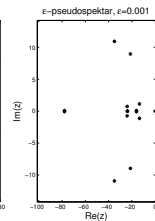
(c)



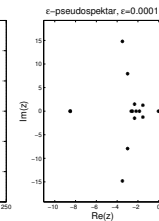
(d)



(e)



(f)



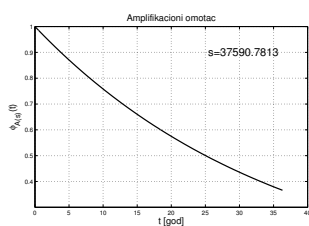
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      4  
 Uzorak      3

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

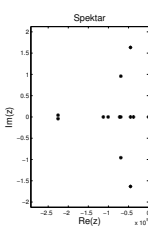
$$s_2^* = 3.7591e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 6.0621$$

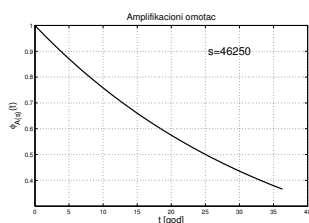
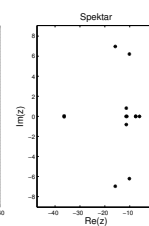
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty, \varepsilon}^*$	$s_{2, \varepsilon}^*$
$1e - 01$	$4.6250e + 04$	1	$3.6309e + 01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e - 02$	$2.7826e + 01$	2.9554	$7.0374e + 01$	$+\infty$	$5.8846e + 04$
$1e - 03$	5.2711	$3.5207e + 01$	$1.2944e + 02$	$+\infty$	$3.8999e + 04$
$1e - 04$	$7.9462e - 01$	$3.9784e + 02$	$1.4640e + 02$	$+\infty$	$3.7727e + 04$



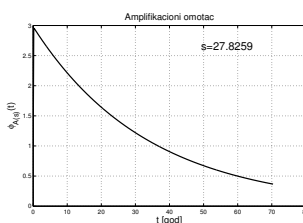
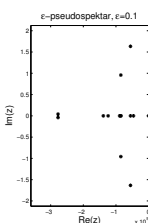
(a)



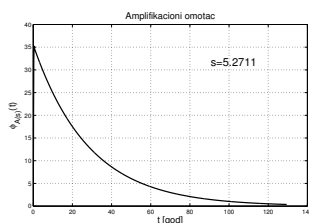
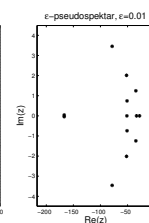
(b)



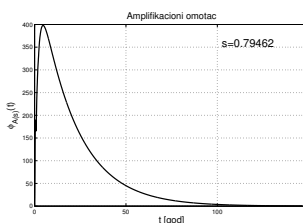
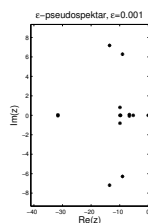
(c)



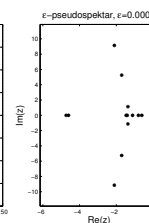
(d)



(e)



(f)





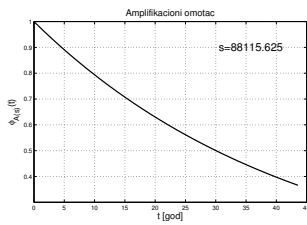
EFW      Hulshorsterzand  
 Stadijum      4  
 Uzorak      4

$$s_{\infty}^* = +\infty$$

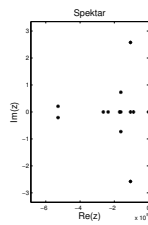
$$s_2^* = 8.8116e + 04$$

$$\widehat{s}_{\infty}^* = 8.5187$$

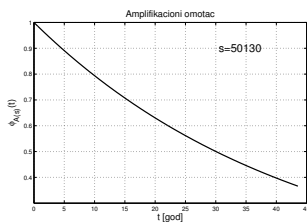
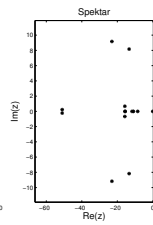
$\varepsilon$	$s_{\varepsilon}^*$	$\phi_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{\max}$	$t_{A(s_{\varepsilon}^*)}^{2,RT}$ [god]	$s_{\infty,\varepsilon}^*$	$s_{2,\varepsilon}^*$
$1e-01$	$5.0130e+04$	1	$4.3562e+01$	$+\infty$	$+\infty$
$1e-02$	$4.6886e+01$	2.4977	$7.6715e+01$	$+\infty$	$1.5552e+05$
$1e-03$	6.9541	$3.2223e+01$	$1.4009e+02$	$+\infty$	$9.2107e+04$
$1e-04$	$9.4058e-01$	$3.5497e+02$	$1.7766e+02$	$+\infty$	$8.8499e+04$



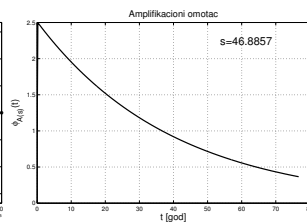
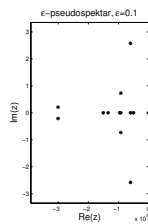
(a)



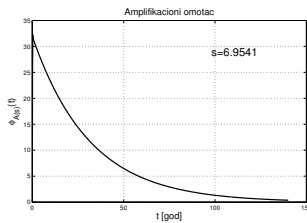
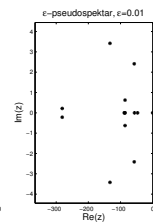
(b)



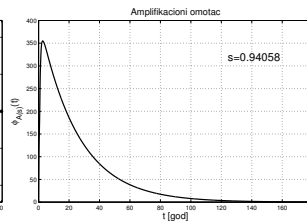
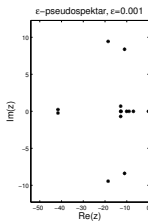
(c)



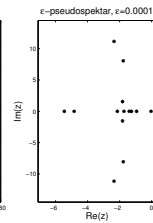
(d)



(e)



(f)



## 6

# Zaključna razmatranja

Korišćenje diferencijalnih jednačina za modeliranje trofičkih mreža prisutno je odavno, ali je opšte prihvaćena generalizovana Lotka - Volterra matematička reprezentacija interakcija između vrsta, kako bi se proučavala njihova dinamika. Pri tome je problem *stabilnosti* jedan od najvažnijih, s obzirom da u terminima populacione dinamike, pitanje stabilnosti, zapravo, znači sledeće: da li, kada je ravnoteža jednom uspostavljenja, mala promena u populacijama čini da se sistem vrati (brže ili sporije, sa ili bez oscilacija, itd.) u narušenu ravnotežu, ili je, pak, ravnoteža takva da jednom kada se i malo naruši, ne može da se povрати. Očigledno, ovo pitanje je jedno od ključnih pitanja u oblasti očuvanja životne sredine.

Do sada je koncept stabilnosti nelinearnog dinamičkog sistema TIDS (kakvi su gotovo svi realni modeli) uglavnom podrazumevao *lokalnu asimptotsku stabilnost*, koja, u stvari, znači stabilnost odgovarajućeg linearnog sistema LTIDS, određenog Jakobijanom u tački ravnoteže. Međutim, ispostavlja se da to *nije dovoljno*. Naime, lokalna asimptotska stabilnost nikako ne znači i *ekološku stabilnost*, jer asimptotska stabilnost govori *samo* o povratku u ravnotežno stanje, pri tome ne pružajući nikakvu informaciju o ponašanju sistema u međuvremenu. Ukoliko je asimptotski stabilan dinamički sistem takav da mora da prođe kroz fazu u kojoj se mali početni poremećaj ravnoteže toliko pojača, da prevazilazi realni nosivi kapacitet sistema, tada, iako će se dinamički sistem u kasnijoj fazi vratiti u blizinu ravnotežne tačke, integritet realnog ekosistema je već narušen, te stoga nije smisleno

smatrati takvu ravnotežu ekološki stabilnom. Zbog toga je, osim rezilijentnosti (koja je pokazatelj asimptotske stabilnosti i recipročna je vremenu povratka u ravnotežu), neophodno posmatrati još jedno dinamičko svojstvo ravnotežne tačke - *reaktivnost*, koja predstavlja početnu stopu rasta (ili opadanja) funkcije evolucije u određenoj normi.

Matematički alat za utvrđivanje ovih dinamičkih svojstava vezan je za *spektar* matrice (skup karakterističnih korena) i njegove lokalizacije. Preciznije:

- rezilijentnost  $\longleftrightarrow$  spektar u levoj kompleksnoj poluravni,
- nereaktivnost u maksimum normi  $\longleftrightarrow$  Geršgorinov skup u levoj kompleksnoj poluravni,
- nereaktivnost u ponderisanoj maksimum normi  $\longleftrightarrow$  minimalni Geršgorinov skup u levoj kompleksnoj poluravni,
- nereaktivnost u euklidskoj normi  $\longleftrightarrow$  numerički raspon u levoj kompleksnoj poluravni.

Pomoću ovog alata razvijeni su indikatori stabilnosti i to tako što su, najpre, dijagonalni elementi community matrice, koji predstavlja samoregulišući faktor organizama i odnose se na stopu gubitka organizama u stabilnom stanju, parametrizovani parametrom  $s$ , a zatim je taj parametar računat tako da community matrica  $A(s)$  zadovolji neki od gore navedenih uslova sa desne strane. Preciznije, ukoliko postoji  $s \in (0, 1]$  takvo da community matrica  $A(s)$  čini da je posmatrani TIDS u određenom smislu "lokalno stabilan" (rezilijentan, nereaktivan u nekoj od normi), tada najmanje takvo  $s$  predstavlja dovoljan stepen intraspecifične kompeticije (procenat stopa netrofičkih smrtnosti svake od grupa) koji "stabilizuje" trofičku mrežu u posmatranom smislu. Zato se takvo  $s$  može smatrati indikatorom, pri čemu manje vrednosti označavaju "stabilnije" trofičke mreže.

Naš pristup proučavanju stabilnosti potpuno je *nov*, jer smo koristili teoriju pseudospektra umesto klasičnog spektra. Generalno govoreći, karakteristični koreni matrica u mnogim slučajevima daju odličan uvid u dinamičke osobine samih matrica, ali ponekad ne daju dovoljno informacija za rešavanje problema na koje možemo naići. Takvi se slučajevi pojavljuju u raznim granama matematike, ali i

u drugim naukama, počev od populacione ekologije, preko laserske tehnologije, do kvantne mehanike i hidrodinamike. U slučaju kada je matrica posmatranog LTIDS normalna, karakteristični koreni u potpunosti objašnjavaju dinamička svojstva - ne samo asimptotska. Međutim, ukoliko matrica nije normalna, evoluciona funkcija može imati vrlo različito ponašanje, pre nego što se ispolji asimptotika. Na pitanje koja osobina matrice je ta koja može objasniti to tranziciono ponašanje, odgovor je *pseudospektar*. U terminima LTIDS, ovog puta ne posmatramo perturbacije ravnotežnog stanja dinamičkog sistema, već perturbacije upravljajućih zakonitosti! Na primeru populacionih modela o kojima smo govorili, to znači da pored poremećaja u brojnosti pojedinih populacija želimo da tretiramo i poremećaje *odnosa* između populacija. Svakako, u realnim procesima koji nas interesuju takvi poremećaji ne samo da su mogući, već su, zapravo, od ključnog interesa.

Dakle, alat za utvrđivanje *robustnih* dinamičkih svojstava je pseudospektar i njegove lokalizacije:

- robustna rezilijentnost  $\longleftrightarrow$   $\varepsilon$ -pseudospektar u levoj kompleksnoj poluravni,
- robustna nereaktivnost u maksimum normi  $\longleftrightarrow$   $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinov skup u levoj kompleksnoj poluravni,
- robustna nereaktivnost u ponderisanoj maksimum normi  $\longleftrightarrow$  odgovarajući  $\varepsilon$ -pseudo lokalizacioni skup u levoj kompleksnoj poluravni,
- robustna nereaktivnost u euklidskoj normi  $\longleftrightarrow$  euklidski  $\varepsilon$ -pseudo Geršgorinov skup u levoj kompleksnoj poluravni.

Ovakvim pristupom, na osnovu nove veličine  $s_\varepsilon^*$ , pojačali smo zaključke o dinamičkim svojstvima, ne samo u smislu robustnosti, već i u smislu procene stabilnosti koja se uklapa u okvir dopustivog tranzicionog ponašanja organizama, kao takvih, izborom adekvatnog  $\varepsilon$  parametra.

Zbog svega navedenog, možemo ustvrditi da koncept pseudospektara, za koji smo videli da je od suštinskog značaja za razumevanje

tranzicionog ponašanja matricnih (i operatorskih) eksponencijala u mnogim praktičnim primenama zaslužuje da bude mnogo više inkorporiran u savremena ekološka istraživanja. Stoga metod za pouzdanu procenu stabilnosti koji smo sugerisali i koji ima potencijal da kontroliše vremenski rok povratka u stanje ravnoteže, kao i nivo nesigurnosti u podacima, predstavlja, nadamo se, korak napred - jedan od mnogih koji će uslediti.

Svakako, drugi, detaljniji pristup bio bi spektralna analiza stohastičkog modela empirijskih trofičkih mreža, gde bi podaci ( $B_i, d_i, a_i, p_i, \gamma_{ij}$ , za  $i, j \in \mathcal{N}$ ) imali neku raspodelu verovatnoća. Međutim, takav pristup zahteva suštinski drugačiji matematički alat, koji se delom još uvek razvija. Značajan korak u tom pravcu bio bi limitirati nesigurnost u podacima (umesto u community matrici, kako je urađeno ovde) i izvesti odgovarajući indikator stabilnosti. Ali to bi uključilo u razmatranje *realni strukturirani pseudospektar* i to ostaje za dalja istraživanja. Poznato je da realni strukturirani pseudospektar ne objašnjava uvek tranziciono ponašanje dinamičkog sistema, što je jedan od glavnih razloga što smo ovde koristili (kompleksni nestruktuirani) pseudospektar za definisanje poboljšanog indikatora stabilnosti  $s_\varepsilon^*$ .

# Literatura

- [1] Bai, Z.-Z.: A class of asynchronous parallel multisplitting block-wise relaxation methods. *Parallel Computing* 25 (1999), 681–701.
- [2] Banašek-Richter, C., Bersier, L.-F., Cattin, M.-F., Baltensperger, R., Gabriel, J.-P., Merz, Y., Ulanowicz, R. E., Tavares, A. F., Williams, D. D., Ruiter, P. C., Winemiller, K. O., Naisbit, R. E.: Complexity in quantitative food webs. *Ecology* 90(6) (2009), 1470–1477.
- [3] Beckenbach, E.F., Bellman, R.: *Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [4] Berman, A., Plemmons, R.J.: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Classics in Applied Mathematics 9, SIAM, Philadelphia, 1994.
- [5] Brauer, A.: Limits for the characteristic roots of a matrix II. *Duke Mathematical Journal* 14 (1947), 21–26.
- [6] Bru, R., Cvetković, Lj., Kostić, V., Pedroche, F.: Sums of  $\Sigma$ -strictly diagonally dominant matrices. *Linear and Multilinear Algebra* 58(1) (2010), 75–78.
- [7] Brualdi, R.: Matrices, eigenvalues and directed graphs. *Linear and Multilinear Algebra* 11 (1982), 143–165.
- [8] Brualdi, R.: The symbiotic relationship of combinatorics and matrix theory. *Linear Algebra and its Applications* 162/164 (1992), 65–105.

- [9] Brualdi, R., Mellendorf, S.: Regions in the complex plane containing the eigenvalues of a matrix. *American Mathematical Monthly* 101 (1994), 975–985.
- [10] Byers, R.: A bisection method for measuring the distance of a stable matrix to the unstable matrices. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 9(5) (1988), 875–881.
- [11] Cvetković, Lj.: H-matrix theory vs. eigenvalue localization. *Numerical Algorithms* 42 (2006), 229–245.
- [12] Cvetković, Lj., Bru, R., Kostić, V., Pedroche, F.: A simple generalization of Gersgorin’s theorem. *Advances in Computational Mathematics* 35 (2011), 271–280.
- [13] Cvetković, Lj., Doroslovački, K.: Max norm estimation for the inverse of block matrices. *Applied Mathematics and Computation* 242 (2014), 694–706.
- [14] Cvetković, Lj., Kostić, V., Pena, J.M.: Eigenvalue localization refinements related to positivity. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 32(3) (2011), 771–784
- [15] Cvetković, Lj., Kostić, V., Varga, R.: A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area. *ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis)* 18 (2004), 73–80.
- [16] Cvetković, Lj., Kostić, V.: New Criteria for identifying H-matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 180 (2005), 265–278.
- [17] Cvetković, Lj., Kostić, V.: Between Geršgorin and minimal Geršgorin set. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 196 (2006), 452–458.
- [18] Cvetković, Lj., Kostić, V.: New subclasses of block H-matrices with applications to parallel decomposition-type relaxation methods. *Numerical Algorithms* 42(3-4) (2006), 325–334.

- [19] Cvetković, L., Kostić, V.: A note on the convergence of the AOR method. *Applied Mathematics and Computation* 194(2) (2007), 394–399.
- [20] Cvetković, L., Kostić, V.: Application of Generalized Diagonal Dominance in Wireless Sensor Network Optimization Problems. *Applied Mathematics and Computation* 218(9) (2012), 4798–4805.
- [21] Cvetković, Lj., Kostić, V., Doroslovački, K.: Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices. *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012), 9498–9503.
- [22] Cvetković, Lj., Kostić, V., Doroslovački, K., Cvetković, D.: Euclidean norm estimates of the inverse of some special block matrices. *Applied Mathematics and Computation* 284 (2016), 12–23.
- [23] Cvetković, Lj., Kostić, V., Rauški, S.: A new subclass of H-matrices. *Applied Mathematics and Computation* 208 (2009), 206–210.
- [24] Cvetković, L., Nedović, M.: Eigenvalue localization refinements for the Schur complement. *Applied Mathematics and Computation* 218(17) (2012), 8341–8346.
- [25] Dashnic, L. S., Zusmanovich, M. S.: O nektoryh kriteriyah regularnosti matric i lokalizaciji ih spektra. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* 5 (1970), 1092–1097.
- [26] Dashnic, L. S., Zusmanovich, M. S.: K voprosu o lokalizaciji karakteristikicheskikh chisel matricy. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* 10(5) (1970), 1321–1327.
- [27] Embree, M., Trefethen, L.: Generalizing Eigenvalue Theorems to Pseudospectra Theorems. *SIAM Journal on Scientific Computing* 23 (2001), 583–590.
- [28] Fan, K.: Note on circular disks containing the eigenvalues of a matrix. *Duke Mathematical Journal* 25 (1958), 441–445.



- [29] Freitag, M. A., Spence, A.: A Newton-based method for the calculation of the distance to instability. *Linear Algebra and its Applications* 435(12) (2011), 3189–3205.
- [30] Gao, Y. M., Xiao, H. W.: Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices. *Linear Algebra and its Applications* 169 (1992), 257–268.
- [31] Geršgorin, S.: Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya* 1 (1931), 749–754
- [32] Grammont L, Largillier A. On  $\varepsilon$ -spectra and stability radii. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 147 (2002), 453–469.
- [33] Guglielmi, N., Kressner, D., Lubich, C.: Low Rank Differential Equations for Hamiltonian Matrix Nearness Problems. *Numerische Mathematik* 129(2) (2015), 279–319.
- [34] He, C., Watson, G. A.: An algorithm for computing the distance to instability. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 20(1) (1999), 101–116.
- [35] Higham, N. J.: *Matrix nearness problems and applications*. pp. 1-27 in Applications of Matrix Theory, Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser. 22, Oxford Univ. Press, New York, 1989.
- [36] Hinrichsen, D., Kelb, B.: Spectral value sets: a graphical tool for robustness analysis. *Systems & Control Letters* 21 (1993), 127–136.
- [37] Hinrichsen, D., Pritchard, A. J. : *Mathematical Systems Theory I - Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [38] Hooper, D. U., Bignell, D. E., Brown, V. K., Brussard, L., Mark Dangerfield, J., Wall, D. H., Wardle, D. A., Coleman, D. C., Giller, K. E., Lavelle, P., Van Der Putten, W. H., De Ruiter, P.

- C., Rusek, J., Silver, W. L., Tiedje, J. M., Wolters, V.: Interactions between aboveground and belowground biodiversity in terrestrial ecosystems: Patterns, mechanisms, and feedbacks. *BioScience* 50(12) (2000), 1049–1061.
- [39] Horn, R. A., Johnson, C. R.: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [40] Horn, R. A., Johnson, C. R. 1991. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [41] Householder, A. S.: *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Blaisdell Publ. Co., New York, 1964.
- [42] Householder, A. S., Varga, R. S., Wilkinson, J. H.: A note on Gerschgorin's inclusion theorem for eigenvalues of matrices. *Numerische Mathematik* 16 (1972), 141–144.
- [43] Huang, T. Z.: A note on generalized diagonally dominant matrices. *Linear Algebra and its Applications* 225 (1995), 237–242.
- [44] Huang, T.-Z.: Stability criteria for matrices. *Automatica* 34(5) (1998), 637–639.
- [45] Johnson, C.R.: A Gersgorin-type lower bound for the smallest singular value. *Linear Algebra and its Applications* 112 (1989), 1–7.
- [46] Johnson, C.R., Szulc, T.: Further lower bounds for the smallest singular value. *Linear Algebra and its Applications* 272 (1998), 169–179.
- [47] Jeschke, J. M.: Energetic food webs: An analysis of real and model ecosystems. *BioScience* 63(9) (2013), 769–770.
- [48] Kefi, S., Rietkerk, M., Roy, M., Franc, A., de Ruiter, P. C., Pascual, M.: Robust scaling in ecosystems and the meltdown of patch size distributions before extinction. *Ecology Letters* 14(1) (2011), 29–35.

- [49] Karow, M.: Geometry of Spectral Value Sets. Ph.D. Thesis, University of Bremen, Germany, 2003.
- [50] Kolotilina, L. Yu.: Generalizations of the Ostrowski-Brauer Theorem. *Linear Algebra and its Applications* 364 (2003), 65–80.
- [51] Kolotilina, L. Yu.: Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices. *Linear Algebra and its Applications* 430(2-3) (2009), 692–702.
- [52] Kostić V. R.: On general principles of eigenvalue localizations via diagonal dominance. *Adv. Comput. Math.* 41(1) (2015), 55–75.
- [53] Kostić, V. R., Cvetković, Lj. Cvetković, D. Lj.: Pseudospectra localizations and their applications. *Numerical Linear Algebra and its Applications* 23(2) (2016), 356–372.
- [54] Kostić, V. R., Cvetković, Lj. Cvetković, D. Lj.: Robust indicators of the stable energetic food webs. *Ecological Modeling* 320 (2016), 1–8.
- [55] Kostić, V., Cvetković, Lj., Varga, R.S.: Geršgorin-type localizations of generalized eigenvalues. *Numerical Linear Algebra with Applications* 16(11-12) (2009), 883–898.
- [56] Kot, M.: *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press, 2001.
- [57] Li, B., Tsatsomeros, M. J.: Doubly diagonally dominant matrices. *Linear Algebra and its Applications* 261 (1997), 221–235.
- [58] Loewy, R.: On a theorem about the location of eigenvalues of matrices. *Linear Algebra and its Applications* 4 (1971), 233–242.
- [59] Mao, X., Marion, G., Renshaw, E.: Environmental brownian noise suppresses explosions in population dynamics. *Stochastic Processes and Their Applications* 97 (2002), 95–110.
- [60] Marcus, M., Minc, H.: *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*. Allyn and Bacon, Boston, 1964.

- [61] Marsli, R., Hall, F. J.: Further results on Geršgorin discs. *Linear Algebra and its Applications* 439(1) (2013), 189–195.
- [62] Meyer, C.D.: *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [63] Moore, J. C., de Ruiter, P. C.: *Energetic food webs: An analysis of real and model ecosystems*. Oxford University Press, Oxford, 2012.
- [64] Neutel, A.-M., Heesterbeek, J. A. P., de Ruiter, P. C.: Stability in real food webs: Weak links in long loops. *Science* 296(5570) (2002), 1120–1123.
- [65] Neutel, A.-M., Heesterbeek, J. A. P., van de Koppel, J., Hoenderboom, G., Vos, A., Kaldewey, C., Berendse, F., de Ruiter, P. C.: Reconciling complexity with stability in naturally assembling food webs. *Nature* 449(7162) (2007), 599–602.
- [66] Neutel, A.-M., Thorne, M. A.: Interaction strengths in balanced carbon cycles and the absence of a relation between ecosystem complexity and stability. *Ecology Letters* 17(6) (2014), 651–661.
- [67] Ostrowski, A. M.: Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. *Commentarii Mathematici Helvetici* 10 (1937), 69–96.
- [68] Ostrowski, A. M.: Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen. *Compositio Mathematica* 9 (1951), 209–226.
- [69] Ostrowski, A.M.: Sur les conditions generales pour la regularite des matrices. *Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e. Appl.* 5,10 (1951), 156–168.
- [70] Ostrowski, A. M.: *Solution of Equations and Systems of Equations*. Academic Press, New York, 1960.

- [71] Ostrowski, A. M.: On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 2 (1961), 161–209.
- [72] Rooney, N., McCann, K., Gellner, G., Moore, J. C.: Structural asymmetry and the stability of diverse food webs. *Nature* 442 (7100) (2006), 265–269.
- [73] de Ruiter, P. C., Neutel, A.-M., Moore, J. C.: Energetics, patterns of interaction strengths, and stability in real ecosystems. *Science* 269 (1995), 1257–1260.
- [74] Schmitz, O. J.: Press perturbations and the predictability of ecological interaction in a food web. *Ecology* 78(1) (1997), 55–69.
- [75] Taussky, O.: A method for obtaining bounds for characteristic roots of matrices with applications to flutter calculations. *Aero. Res. Council (Great Britain)*, Report 10. 508 (1947), 1–19.
- [76] Taussky, O.: Bounds for characteristic roots of matrices. *Duke Mathematical Journal* 15 (1948), 1043–1044.
- [77] Townley, S., Carslake, D., Kellie/Smith, O., McCarthy, D.: Predicting transient amplification in perturbed ecological systems. *Journal of Applied Ecology* 44 (2007), 1243–1251.
- [78] Trefethen, L. N., Embree, M.: *Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*. Princeton University Press, 2005.
- [79] Varah, J. M.: A lower bound for the smallest singular value of a matrix. *Linear Algebra and its Applications* 11(1) (1975), 3–5.
- [80] Varga, R. S.: On diagonal dominance arguments for bounding  $\|A^{-1}\|_{\infty}$ . *Linear Algebra and its Applications* 14(3) (1976), 211–217.
- [81] Varga, R. S.: *Matrix Iterative Analysis*. Second revised and expanded edition, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

- [82] Varga, R. S.: *Geršgorin and His Circles*. Springer Series in Computational Mathematics 36, 2004.
- [83] Varga, R.S., Cvetković, Lj., Kostić, V.: Approximation of the minimal Geršgorin set of a square complex matrix. *ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis)* 30 (2008), 398–405.
- [84] Varughese, M., Fatti, L.: Incorporating environmental stochasticity within a biological population model. *Theoretical Population Biology* 74 (2008), 115–129.
- [85] Zheng, D. W., Agren, G. I., Bengtsson, J.: How do soil organisms affect total organic nitrogen storage and substrate nitrogen to carbon ratio in soils? A theoretical analysis. *Oikos* 86 (3) (1999), 430–442.