



UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET

LAZAR Z. VELIMIROVIĆ

**PROJEKTOVANJE SKALARNIH
KOMPANDORA ZA SREDNJE BRZINE
KORIŠĆENJEM SPLAJN
APROKSIMACIJA**

Doktorska disertacija

NIŠ, 2012.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF ELECTRONIC ENGINEERING

LAZAR Z. VELIMIROVIĆ

**DESIGN OF SCALAR COMPANDOR FOR
MEDIUM BIT RATE USING SPLINE
APPROXIMATIONS**

Doctoral Dissertation

Niš, 2012.

Mentor:

Prof. dr Zoran Perić, redovni profesor, Elektronski fakultet u Nišu

Članovi komisije:

1. Prof. dr Zoran Perić, redovni profesor, Elektronski fakultet u Nišu
2. Prof. dr Mihajlo Stefanović, redovni profesor, Elektronski fakultet u Nišu
3. Prof. dr Željko Đurović, redovni profesor, Elektrotehnički fakultet u Beogradu
4. Prof. dr Miomir Stanković, redovni profesor, Fakultet zaštite na radu u Nišu
5. Doc. dr Aleksandra Jovanović, docent, Elektronski fakultet u Nišu

Naslov doktorske disertacije: Projektovanje skalarnih komandora za srednje brzine korišćenjem splajn aproksimacija

Rezime: Cilj istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji jeste projektovanje skalarnih komandora primenom splajn aproksimacija. Poznato je da skalarni komandori imaju loše performanse na srednjim brzinama. Jedan od ciljeva ove disertacije jeste popravljavanje performansi skalarnih komandora na srednjim brzinama. Kao rezultat ovih istraživanja razvijen je niz novih modela komandora koji će biti predstavljeni u disertaciji, kojima se postižu bolje performanse od do sada korišćenih modela.

Ključne reči: skalarni komandor, kompresorska funkcija, linearizacija, skalarna kvantizacija, optimizacija amplitudskog opsega komandora, splajn aproksimacije, prošireno Hafmanovo kodovanje

Naučna oblast: Elektrotehnika i računarstvo

Uža naučna oblast: Telekomunikacije

UDK broj:

Doctoral thesis title: Design of scalar compandor for medium bit rate using spline approximations

Summary: The main objective of the research described in this PhD thesis is design of scalar compandors using spline approximations. It is well known that scalar compandors have bad performances on medium bit rate. One of the goals of this thesis is improvement of scalar compandor performances on medium bit rate. As a result, a number of new compandor models, which will be described in this thesis, are developed. Comparing to solutions used so far, with these new compandor models better performances are achieved.

Key words: scalar compandor, compressor functions, linearization, scalar quantization, support region threshold optimization, spline approximations, extended Huffman coding

Academic Expertise: Electronics and Computer Science

Field of Expertise: Telecommunications

UDK:

Sadržaj

1 Uvod	1
2 Signali i kvantizeri	6
2.1 Šta je signal?	6
2.1.1 Deterministički signal	7
2.1.2 Slučajni signal	8
2.2 Laplasova funkcija gustine verovatnoće	10
2.3 Gausova funkcija gustine verovatnoće	11
2.4 Diskretizacija signala	12
2.5 Odmeravanje signala	15
2.6 Kvantovanje signala	16
2.6.1 Struktura skalarnih kvantizera	16
2.6.2 Uniformna kvantizacija	18
2.6.3 Neuniformno kvantovanje	22
2.7 Trenutna kompresija	24
2.7.1 Kriterijum konstantnosti odnosa signal-šum kvantizacije bez obzira na statističke karakteristike pobudnog signala	25
2.7.1.1 Semilogaritamski zakon kompresije	27
2.7.1.2 Kvazilogaritamski zakon kompresije	28
2.8 Skalarni komparator	28
2.9 Performanse komparatora	32
2.10 Optimalni skalarni komparator	34
2.11 Skalarni kvantizeri promenljive dužine kodnih reči	36
2.11.1 Prošireno Hafmanovo kodovanje	37
2.11.2 Konstrukcija kvantizera za koder sa proširenim Hafmanovim kodom	40
2.11.3 Određivanje optimalne dužine kodnih reči proširenim Hafmanovim kodovanjem	42
3 Linearizacija kompresorske funkcije	49
3.1 Uvod	49

3.2	Konstrukcija deo po deo linearnog kvantizera sa jednakim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima.....	51
3.2.1	Opimizacija amplitude maksimalnog opterećenja deo po deo linearnog skalarnog kvantizera.....	54
3.2.2	Performanse deo po deo linearnog skalarnog kvantizera sa jednakim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima	57
3.3	Konstrukcija deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera sa različitim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima.....	61
3.3.1	Određivanje promenljivog broja reprezentacionih nivoa unutar segmenata deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera	63
3.3.2	Performanse deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera	66
3.4	Konstrukcija deo po deo linearnog skalarnog kvantizera sa različitim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima.....	70
3.4.1	Performanse deo po deo linearnog skalarnog kompadding kvantizera	73
4	Aproksimacija kompresorske funkcije pomoću splajn funkcija.....	77
4.1	Uvod.....	77
4.2	Opšti problem aproksimacije funkcija	77
4.2.1	Interpolacija.....	78
4.3	Splajn funkcije	81
4.4	Projektovanje skalarnih komandora sa jednakim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima pomoću splajn funkcija.....	83
4.5	Projektovanje skalarnih komandora Laplasovog izvora zasnovano na splajn funkcijama.....	88
4.6	Projektovanje skalarnih komandora Gausovog izvora zasnovano na splajn funkcijama.....	90
4.7	Određivanje aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda	91
4.8	Performanse skalarnih komandora projektovanih pomoću aproksimativnih splajn funkcija	95
4.9	Optimizacija granice segmenata komandora konstruisanog na osnovu aproksimativnih splajn funkcija	105

5 Zaključak.....	109
Prilog 1.....	111
Prilog 2.....	115
Literatura.....	117
Sažetak.....	126
Summary.....	127
Biografija.....	128

1 Uvod

Telekomunikacije (od grčke reči *tele*-dalek, udaljen i latinske reči *communicare*-zajedno raditi, saopštiti) predstavljaju naučnu oblast koja se bavi prenosom informacija. Poruke koje treba preneti sa jednog mesta (njihovog izvora) do udaljene tačke (mesta prijema) mogu da budu u različitim formama: pisani tekst, govor, muzika, nepokretna i pokretna slika, podaci...[5].

Potreba za komuniciranjem među ljudima stara je koliko i svet, tako da su ljudi koristili razne načine za prenos poruka i ostvarivanje komunikacije. Tehnološki razvoj komunikacija direktno utiče na razvoj brojnih sfera društvenog života: proizvodnje, trgovine, uslužnih delatnosti, politike, kulture, religije, obrazovanja, sporta, medicine i drugih oblasti ljudskog delovanja. Rani oblici telekomunikacija uključuju dimne signale i bubnjeve. Bubnjevi su se koristili u Africi, Novoj Gvineji i Južnoj Americi, dok su dimni signali korišćeni u Severnoj Americi i Kini [5].

U srednjem veku, tokom napada Španske armade na Englesku, nizom tornjeva na vrhovima brda preneti je poruka od Plimuta do Londona [5]. Prva vest fiksnim sistemom za vizuelnu telegrafiju, tj. semaforском linijom koju je konstruisao Šape (*Claude Chappe*) poslata je avgusta 1794. godine између Лила и Париза [5]. Dvadeset četvrtog maja 1844. godine Morze (*Samuel Finley Breese Morse*) je ostvario prvi telegrafski prenos između Vašingtona i Baltimora [5]. Ovaj događaj se može smatrati početkom elektronskih komunikacija.

Savršeniji vid prenosa poruka predstavlja telefonija čijim se začetnikom smatra Bel (*Alexander Graham Bell*). Prva automatska telefonska centrala postavljena je 1892. godine [5]. Ruski fizičar Popov (*Александр Степанович Попов*) je četiri godina kasnije izveo demonstraciju radio-veze [5], a godinu dana posle, Markoni (*Guglielmo Marconi*) je prijavio patent za bežičnu telegrafiju [5].

Sedmog januara 1927. godine ostvarena je prva radio-veza u javnom telefonskom saobraćaju između Njujorka i Londona [5], kao i prvi prenos televizijskog signala između Njujorka i Vašingtona [5]. Prvi telefonski podmorski kabl između Amerike i Engleske kojim se moglo preneti istovremeno 36 govornih signala postavljen je 1956. godine [5].

U avgustu 1960. lansiran je prvi telekomunikacioni pasivni satelit "Echo 1" [5], a oktobra iste godine, prvi aktivni satelit "Courier IB" [5]. Lansiranjem telekomunikacionih satelita otvara se nova era u oblasti telekomunikacija. Druga polovina XX veka donosi intenzivan razvoj mobilnih radio komunikacija i optičkih komunikacija [5]. Prvi pokušaji na tom polju bili su radiofoni (voki-toki), zatim dispečerski sistemi, radio-pejdžing sistemi, kao i mobilni radio-telefonski sistemi koji obezbeđuju sve što i fiksni telefonski sistemi. Razvoj računara i interneta omogućio je potpuno nove oblike komunikacije [5].

Na početku trećeg milenijuma, telekomunikacije predstavljaju jednu od osnovnih potreba ljudskog društva. Štaviše, razvijene telekomunikacije uslov su za razvoj savremenog, informacionog društva današnjice. Osnovni trend današnjih telekomunikacija je ostvarivanje komunikacije bilo gde, bilo kad sa bilo kim, nezavisno od terminala koji posedujemo [5].

Pod obradom signala podrazumeva se namenska modifikacija signala sa ciljem poboljšanja prenosa i upotrebe istog. Ovaj postupak obrade naziva se kodovanje signala [3], [14], [24], [32], [50], [51], [61], [71], [74], [85]. Ukoliko je zahtev u pogledu kvaliteta signala na prijemu ispunjen upotrebom odgovarajućeg kvantizera na predaji, prednost realizacije tog modela kvantizera je utoliko veća ukoliko se kvalitet ostvari kodovanjem odmeraka signala sa manjim brojem bita uz što nižu vrednost distorzije, tj. što veću vrednost odnosa signal-šum kvantizacije, koji se označava sa SQNR (*Signal to Quantization Noise Ratio*) [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77].

Skalarno kvantovanje je postupak kojim se trenutna vrednost kontinualnog ulaznog signala transformiše na najbližu dozvoljenu vrednost iz konačnog skupa od N diskretnih amplitudskih nivoa. Skalarni kvantizer je jednoznačno određen skupom dozvoljenih izlaznih amplitudskih nivoa koji se nazivaju reprezentacionim nivoima i podelom ulaznog opsega vrednosti na N ćelija ili kvantizacionih intervala. Kvantizeri mogu biti uniformni (svi kvantizacioni intervali su iste širine) i neuniformni (kvantizacioni intervali su različite širine) [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77]. Za signale koji imaju približno uniformnu raspodelu pogodni su uniformni kvantizeri.

Kako većina signala nema uniformnu raspodelu, javlja se potreba za korišćenjem neuniformnih kvantizera. Brojnim statističkim merenjima pokazano je da su kod

mnogih telekomunikacionih signala manje trenutne vrednosti verovatnije nego veće. Pošto uniformni kvantizeri za takve signale nisu optimalani u smislu odnosa signal-šum kvantovanja, prednost je na strani neuniformnih kvantizera koje karakteriše nejednaka veličina amplitudskih kvanata [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77].

Kompanding tehnika predstavlja jedan od najčešće korišćenih načina za realizaciju neuniformnih kvantizera. Realizacija se odvija tako što se nad ulaznim signalom primenjuje određena kompresorska funkcija. Najčešće korišćene kompresorske funkcije su optimalna (koja daje maksimalni odnos SQNR-a za referentnu varijansu ulaznog signala) i logaritamski A i μ zakoni kompresije (kojima se ne može postići maksimalni SQNR ali koji daju konstantan SQNR u širokom opsegu varijanse ulaznog signala) [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77].

Ove kompresorske funkcije je veoma komplikovano praktično realizovati. Zbog toga se, u cilju jednostavnije praktične realizacije, primenjuju postupci linearizacije i aproksimacije. Tako je linearizacija logaritamskih A i μ zakona kompresije izvršena definisanjem dobro poznatih segmentnih A i μ zakona kompresije, u kojima se ulazni opseg kvantizera deli na segmente i unutar svakog segmenta koristi se linearna kompresorska funkcija, tj. vrši se uniformna podela segmenata na ćelije. Na taj način dobija se deo po deo uniformni kvantizer [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77].

Prilikom aproksimacije neke funkcije cilj je dobiti aproksimacionu funkciju koja ne samo što će biti neprekidna već će i njeni izvodi biti neprekidne funkcije. Dakle, od aproksimativne funkcije se zahteva da bude glatka i da bez naglih promena prođe kroz sve čvorove. Aproksimacijom nelinearne optimalne kompresorske funkcije pomoću aproksimativnih splajn funkcija ostvaruje se SQNR blizak onom kod nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera [1], [3], [4], [6], [16], [28], [36], [37], [42], [51], [62], [67], [70], [75], [86].

Cilj istraživanja u ovoj disertaciji jeste projektovanje skalarnih kompodora primenom splajn aproksimacija. Poznato je da skalarni kompodori imaju loše performanse na srednjim brzinama. Zbog toga, jedan od ciljeva ove disertacije jeste popravljjanje performansi skalarnih kompodora na srednjim brzinama. Kao rezultat ovih istraživanja razvijen je niz novih modela koji će biti predstavljeni u doktorskoj disertaciji, kojima se postižu bolje performanse od do sada korišćenih rešenja.

U drugom poglavlju doktorske disertacije najpre su opisane opšte karakteristike signala i kvantizera. Opisana je struktura skalarnih kvantizera, postupak skalarne kvantizacije, kao i postupak neuniformnog kvantovanja. Zatim je dat pregled zakona trenutne kompresije, sa posebnim osvrtom na optimalni zakon kompresije. Teorijski model skalarnog komandora, komanding tehnika, uslovi optimalnosti i performanse komandora su takodje opisani u ovom poglavlju. Predmet razmatranja drugog poglavlja doktorske disertacije jeste i postupak kodovanja, sa posebnim osvrtom na postupak proširenog Hafmanovog kodovanja. Nakon detaljnog opisa postupka proširenog Hafmanovog kodovanja, određivanja srednje bitske brzine i entropije izvora, biće predložena nova klasa kvantizera sa dva nivoa kvantovanja, promenljivom granicom odlučivanja i proširenim Hafmanovim kodovanjem.

U trećem poglavlju detaljno je opisan postupak linearizacije optimalne kompresorske funkcije. Kako bi linearizovani model predstavljao dostojnu zamenu izvornog nelinearnog modela, važan je pravilan izbor amplitudskog opsega kvantizera. U tom cilju, u disertaciji predlažemo optimizaciju odnosa signal-šum kvantizacije koju je veoma teško ostvariti analitički jer mnogi parametri kvantizera posredno zavise od veličine amplitudskog opsega kvantizera. Zbog toga predlažemo numeričko određivanje amplitudskog opsega kvantizera poštujući kriterijum minimuma distorzije. Predložena su četiri metoda optimizacije amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera, čime se poboljšavaju performanse predloženih modela kvantizera i dobija se vrednost SQNR-a koja je veoma bliska vrednosti SQNR-a optimalnog komanding kvantizera.

Takođe, u ovom poglavlju biće razmatrana i konstrukcija deo po deo unifromnih skalarnih kvantizera čije su granice segmenata ekvidistantne, dok je broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata različit. Optimizaciju granularne distorzije ove klase kvantizera izvodimo optimizacijom broja reprezentacionih nivoa po segmentima, odnosno broja nivoa kvantovanja. Promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata određen je optimizacijom granularne distorzije uz ograničenje u pogledu ukupnog broja reprezentacionih nivoa. Predložena su dva načina za određivanje optimalanog broja reprezentacionih nivoa po segmentima. Radi poboljšanja performansi modela kvantizera, predložen je i postupak optimizacije granice segmenata.

Posebna pažnja u ovoj disertaciji posvećena je određivanju aproksimativnih splajn funkcija pomoću kojih se aproksimira nelinearna optimalna kompresorska funkcija i

projektovanju skalarnih komandora za srednje brzine korišćenjem splajn aproksimacija. U četvrtom poglavlju doktorske disertacije najpre su opisani predloženi modeli skalarnih komandora čija se konstrukcija zasniva na splajn funkcijama prvog i drugog reda. Zatim je izvršena aproksimacija nelinearne optimalne kompresorske funkcije pomoću aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda. Predložena su dva načina za određivanje koeficijenata na osnovu kojih se formiraju aproksimativne splajn funkcije. Na osnovu dobijenih aproksimativnih splajn funkcija vrši se projektovanje komandora Laplasovog i Gausovog izvora. Amplitudski opsezi za svaki od L uniformnih kvantizera koji se projektuju na osnovu aproksimativnih splajn funkcija su jednaki, dok se broj i veličina ćelija unutar opsega razlikuju. Radi dobijanja vrednosti SQNR-a koja je veoma bliska vrednosti SQNR-a optimalnog komanding kvantizera, u ovom poglavlju disertacije se predlaže konstrukcija kvantizera koji se sastoji od dva i od četiri segmenata (dva i četiri komandora). Konstrukcija komandora koji se sastoji od promenljive veličine segmenata unutar kojih se nalazi jednak broj nivoa kvantovanja je takođe predmet razmatranja četvrtog poglavlja doktorske disertacije. U ovom poglavlju opisana je i aproksimacija ekspanzorske funkcije pomoću splajn funkcija.

Doprinos ove disertacije, osnovni zaključci, zapažanja, kao i mogući dalji pravci istraživanja predstavljeni su u posebnom, petom poglavlju.

2 Signali i kvantizeri

2.1 Šta je signal?

Signal je vremensko promenljiva funkcija koja nosi informaciju koja predstavlja određeni fenomen [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]. Vrlo često se pod pojmom signala podrazumevaju i funkcije koje za nezavisnu promenljivu nemaju vreme. U nekim slučajevima, signali se mogu posmatrati i kao kompleksne funkcije koje nisu u tesnoj vezi sa fizičkim pojavama. Međutim, zajedničko za sve ono što se pod širokim pojmom signala podrazumeva jeste informacija.

Signali imaju veoma različite pojavne oblike. Najčešći pojavni oblici signala su:

1. govorni signal, kod koga je informacija sadržana u izgovorenim glasovima;
2. zvučni signal, koji informaciju predstavlja pomoću boje i visine tona;
3. toplotni signal, kod koga je informacija iskazana različitim temperaturama;
4. svetlosni signal, koji informaciju predstavlja vizuelno, pomoću različitog intenziteta svetlosti ili pomoću različitog trajanja svetlih i tamnih segmenata;
5. električni signal, kod koga je informacija sadržana u nekoj od karakteristika signala (amplituda ili učestanost)...

Tipičan primer signala je govorni signal, gde se prilikom telefonskog poziva, govor (audio signal) u obliku akustičnih talasa (mehanički pritisak), pretvara u električne varijacije kroz mikrofonski element. One se prenose kroz kabl do prijemnika, gde se vraćaju u svoj originalni (akustični) oblik, preko ugrađenog zvučnika u slušalici prijemnika.

Svi signali se prema svojoj suštinskoj prirodi dele na [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]:

1. determinističke signale i
2. slučajne signale.

2.1.1 Deterministički signal

Deterministički signali su signali čiji je vremenski oblik uvek poznat, tj. oni su jednoznačno određeni u vremenu od $-\infty$ do $+\infty$ [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]. To su proizvoljni signali u obliku definisane vremenske funkcije. Kada je ta funkcija jednom poznata, vrednosti koje ona definiše mogu u bilo kom trenutku vremena u budućnosti da se izračunaju.

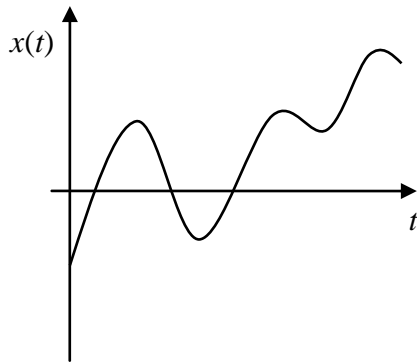
Deterministički signali se u zavisnosti od toga da li imaju ili ne, tačke prekida, dele na [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]:

1. diskretne signale i
2. kontinualne signale.

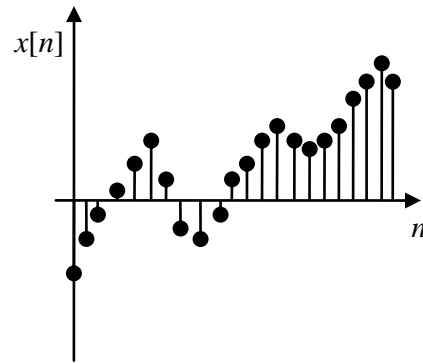
Kod diskretnih signala amplitude se menjaju skokovito u diskretnim vremenskim trenucima (postoje tačke prekida u vremenu), dok kod kontinualnih signala tih skokovitih promena nema (ne postoje tačke prekida u vremenu). Kontinualni vremenski signali se obeležavaju tako da se nezavisna promenljiva (vreme) nalazi u maloj zagradi, $x(t)$. Nezavisna promenljiva (indeks) se kod diskretnih vremenskih signala postavlja u uglaste zagrade, $x[n]$.

Na osnovu teoreme o odmeravanju, svaki kontinualni signal se može reprodukovati ako se poznaju njegovi odmerci uzeti u ravnomernim intervalima vremena čime se kontinualni signal predstavlja u vidu diskretnog signala koji ima oblik povorke impulsa, tj. ukoliko su poznate vrednosti signala u diskretnim vremenskim trenucima, pri čemu je učestanost vremenskih trenutaka veća ili jednaka dvostrukoj maksimalnoj frekvenciji signala, moguće je u potpunosti rekonstruisati polazni signal [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77].

U zavisnosti od vrednosti amplitude, signale delimo na analogne signale (slika 2.1) i digitalne signale (slika 2.2) [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]. Kontinualni signali koji mogu da imaju proizvoljnu vrednost amplitude unutar posmatranog opsega vrednosti, nazivaju se analogni signali. Diskretni signal čije vrednosti amplitude mogu da budu samo vrednosti iz određenog, konačnog skupa vrednosti, naziva se digitalni signal.



Slika 2.1. Primer analognog signala



Slika 2.2. Primer digitalnog signala

Po drugoj podeli, svi deterministički signali se dele na [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]:

1. periodične signale i
2. aperiodične signale.

Signal $x(t)$ je periodičan ukoliko zadovoljava sledeću relaciju [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]:

$$x(t+T) = x(t), \quad (2.1)$$

za neku nenultu konstantu T i za sve vrednosti vremenski promenljive t . Perioda signala je najmanja nenulta pozitivna vrednost T za koju je jednačina (2.1) zadovoljena. Periodične signale možemo razviti u Furijeov (*Jean Baptiste Joseph Fourier*) red [20], [71], [77]. Signal koji ne zadovoljava svojstvo opisano jednačinom (2.1) je aperiodičan signal i on se ne može razviti u Furijeov red.

2.1.2 Slučajni signal

Periodični signali nisu tipični nosioci informacije kao što su to slučajni signali [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]. Međutim, ako se informacija utisne postupkom modulacije u jedan ili više parametara čisto periodičnog (sinusnog) signala, kao što su to amplituda, frekvencija ili faza, periodičan signal postaje slučajan, pa time i nosioc informacije. Pod modulacijom podrazumevamo utiskivanje korisne informacije u

neki deterministički periodični signal [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77]. Kada signal ne nosi informaciju, kažemo da postoji samo nemodulisani nosilac.

Postoje tri mogućnosti da se u nosilac utisne informacija. Modulišućim signalom možemo delovati na amplitudu, fazu ili frekvenciju signala, tako da imamo amplitudsku, faznu i frekvencijsku modulaciju. Za razliku od determinističkih signala, vremenski oblik slučajnih signala nije poznat. Jedino što je poznato kod slučajnih signala, na bazi prikupljenih podataka iz prošlosti, jeste verovatnoća pojavljivanja trenutnih vrednosti. Slučajni signali su signali koji se ne mogu opisati matematičkim izrazom zbog toga što su trenutne vrednosti ovakvih signala slučajnog karaktera [10], [20], [25], [28], [52], [62], [70], [77].

U opštem slučaju, beskonačno mnogo identičnih mehanizama pod identičnim uslovima i tokom beskonačno dugog vremena stvaraju beskonačan skup slučajnih funkcija. Takav skup se naziva statistički ansambl a svaka konkretna slučajna funkcija članom ansambla. Tipični primer slučajnih signala je govorni signal. Slučajni signali su prisutni u realnom okruženju, ili kao neželjeni efekti (šum, ometanje) ili kao korisni signali (nosioci informacije, kriptazaštita). Analiza svojstava slučajnih signala se zasniva na teoriji verovatnoće i statistike. Slučajni signal može da se opiše funkcijom gustine verovatnoće (PDF - *probability density function*). Funkcija gustine verovatnoće je mera kojom se opisuje verovatnoća da slučajni signal x ima (poprimi) neku vrednost σ , $P(x, \sigma)$. Ona sadrži informaciju o verovatnoći pojave odgovarajuće vrednosti. Funkcija gustine verovatnoće može da se opiše preko tri veličine [28], [62], [70], [83]:

1. srednje vrednosti,
2. srednje kvadratne vrednosti i
3. varijanse.

Srednja vrednost slučajnog signala pokazuje koja je najverovatnija vrednost slučajnog signala i predstavlja sumu proizvoda svih mogućih vrednosti signala sa verovatnoćom pojave te vrednosti. Drugi naziv za srednju vrednost slučajnog signala jeste matematičko očekivanje slučajnog signala. Srednja kvadratna vrednost slučajnog signala predstavlja sumu proizvoda svih mogućih kvadratnih vrednosti signala sa verovatnoćom pojave te vrednosti. Srednja snaga slučajnog signala je drugi naziv za srednje kvadratnu vrednost slučajnog signala. Varijansa slučajnog signala određuje

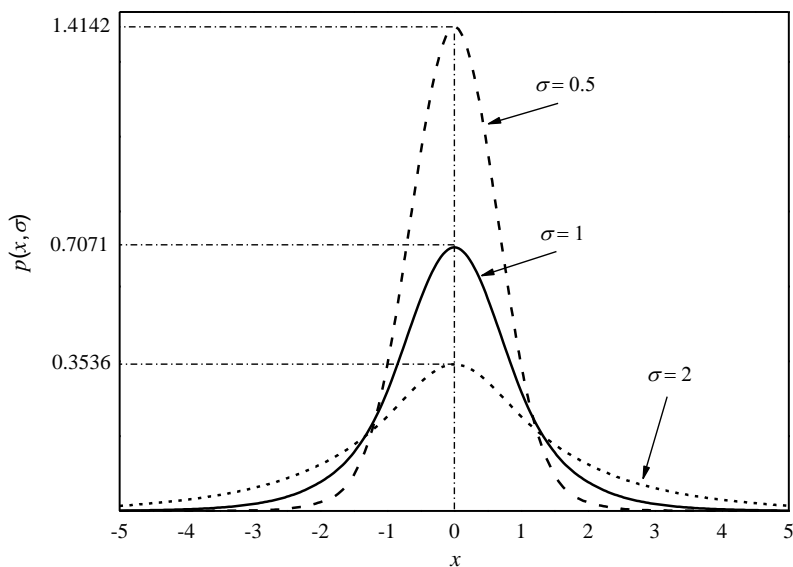
odstupanje od srednje vrednosti signala. Varijansa pokazuje očekivani opseg odstupanja vrednosti ishoda od srednje vrednosti.

Svi rezultati prikazani u ovoj disertaciji dobijeni su za slučajne signale opisane (modelovane) Laplasovom i Gausovom funkcijom gustine verovatnoće.

2.2 Laplasova funkcija gustine verovatnoće

Laplasova funkcija gustine verovatnoće odmeraka pretpostavljena je na ulazu različitih modela komandora koje realizujemo u ovoj disertaciji, zbog toga što se ovom funkcijom veoma dobro aproksimira dugoročna statistika govornog signala [51], [62], [83].

Na slici 2.3 je prikazana Laplasova funkcija gustine verovatnoće za različite vrednosti varijanse signala σ [3], [20], [28], [51], [62], [70].



Slika 2.3. Laplasova raspodela

Takođe, Laplasova funkcija gustine verovatnoće zadovoljava uslov simetrije (ona je parno simetrična u odnosu na nulu), što nam omogućava jednostavnije projektovanje

različitih modela komandora kao i bržu procenu njihovih performansi. Raspodelu je 1774. godine uveo francuski matematičar Laplas (*Pierre Simon Laplace*):

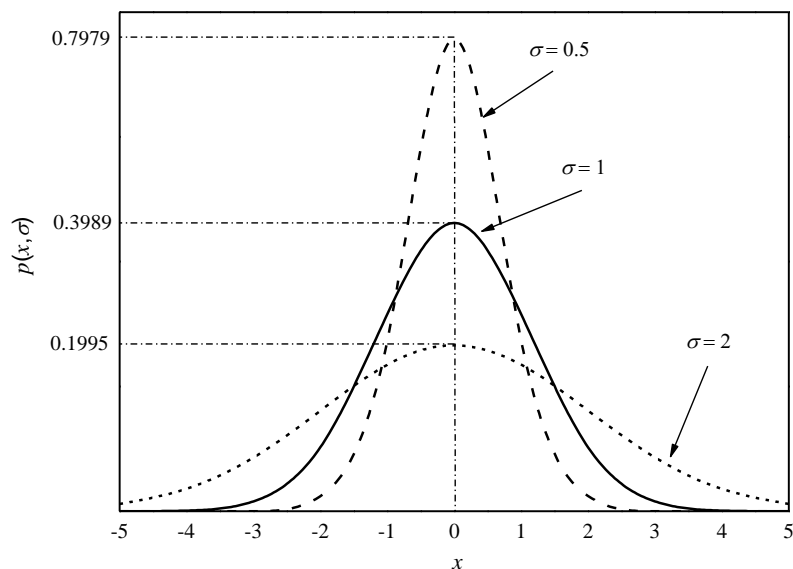
$$p(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{|x|\sqrt{2}}{\sigma}\right), \quad (2.2)$$

gde je sa σ označena varijansa ulaznog signala x .

2.3 Gausova funkcija gustine verovatnoće

Pri statističkoj analizi raznih pojava i procesa, u prirodi se najčešće susreće jedan određeni tip raspodele verovatnoće koji se naziva normalna ili Gausova raspodela [51], [62], [83]. Naziv normalna se koristi jer ovakva raspodela izražava normalno stanje mnogih prirodnih pojava. Na primer, šum u fizičkim sistemima se često karakteriše kao Gausov.

Na slici 2.4 je prikazana Gausova funkcija gustine verovatnoće za različite vrednosti varijanse signala σ [3], [20], [28], [51], [62], [70].



Slika 2.4. Gausova raspodela

Za razliku od Laplasove raspodele, Gausova funkcija gustine verovatnoće veoma dobro aproksimira kratkoročnu statistiku govornog signala [3], [20], [28], [51], [62], [70]. Ona je, poput Laplasove raspodele, parno simetrična u odnosu na nulu, što znači da zadovoljava uslov simetrije. Direktna primena integrala za izračunavanje površine ispod Gausove krive nije moguća, jer se ona ne može svesti na elementarne funkcije poznatih integrala. Ranije su se za njeno izračunavanje koristile tabele. Danas je funkcija za izračunavanje ovog integrala dostupna na kalkulatorima i računarima.

Gausova funkcija gustine verovatnoće (*Carl Friedrich Gauss*) ima sledeći oblik [3], [20], [28], [51], [62], [70]:

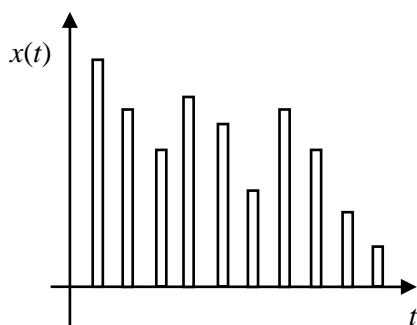
$$p(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.3)$$

pri čemu σ označava varijansu ulaznog signala x .

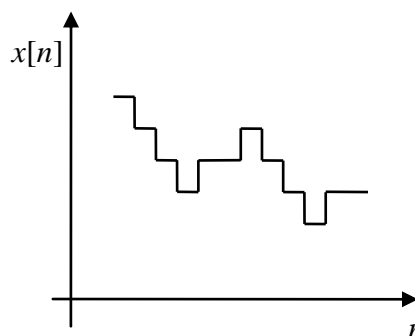
2.4 Diskretizacija signala

Impulsna kodna modulacija (*PCM - Pulse Code Modulation*) je postupak pretvaranja kontinualnog (analognog) oblika signala u diskretni (digitalni) oblik signala, radi dalje obrade, prenosa ili čuvanja [3], [6], [28], [32], [38], [46], [51], [59], [62], [64], [70], [71], [77]. Vršiti se u digitalnim uređajima sa impulsno kodnom modulacijom i predstavlja jedan od načina da se analogni signal izrazi preko niza impulsa, odnosno brojeva (digita). Postupkom odmeravanja i kvantovanja kontinualnog oblika signala, dobija se konačan niz odmerenih i zaokruženih vrednosti [3], [6], [20], [28], [32], [38], [46], [51], [59], [62], [64], [70], [71], [77].

Karakteristika kontinualnog signala je da u bilo kom trenutku u okviru nekog vremenskog intervala, signal može da ima bilo koju vrednost koja pripada konačnom amplitudskom opsegu. To znači da trenutna vrednost kontinualnog signala može da ima u određenom trenutku neku od vrednosti koja pripada beskonačnom skupu vrednosti iz datog opsega. Međutim, moguće je da signal ima neku vrednost različitu od nule samo u određenim, diskretnim trenucima vremena, ali da u ovim diskretnim momentima može da ima vrednost koja pripada kontinualnom skupu vrednosti. U ovakvom slučaju, kada



Slika 2.5. Signal kontinualan po trenutnim vrednostima a diskretan po vremenu



Slika 2.6. Signal kontinualan po vremenu a diskretan po trenutnim vrednostima

je signal u datom intervalu vremena definisan konačnim brojem “impulsa” kontinualno promenljivih amplituda, kaže se da je signal kontinualan po vrednosti, a diskretan po vremenu (slika 2.5).

Moguća je i situacija da signal postoji u svakoj tački nekog vremenskog intervala, ali da uzima vrednosti koje pripadaju diskretnom (što znači i prebrojivom) skupu amplitudskih vrednosti. Za ovakav signal kaže se da je kontinualan po vremenu, a diskretan po trenutnim vrednostima (slika 2.6).

Konačno, signal može da ima neku vrednost različitu od nule samo u diskretnim vremenskim trenucima, a da u tim diskretnim trenucima dobija vrednosti koje pripadaju diskretnom skupu amplitudskih vrednosti. Za ovakav signal, koji se može u datom vremenskom intervalu opisati izbrojivim skupom brojeva, kaže se da je diskretan. Pošto diskretan signal ima konačan broj mogućih amplitudskih vrednosti, razumljivo je da se svaka od konačnog broja trenutnih vrednosti može predstaviti (kodovati) konačnim nizom cifara (digita). Na taj način se diskretni signal može pretvoriti u digitalni signal, odnosno kako se to u telekomunikacijama kaže, može se digitalizovati [3], [6], [28], [32], [38], [46], [51], [59], [62], [64], [70], [71], [77].

Na osnovu dosad izloženog, može se zaključiti kakav mora da bude, u principu, postupak pri diskretizaciji kontinualnog signala. Očito je da se ceo postupak mora obaviti u dva koraka, odnosno pomoću dve operacije:

1. diskretizacije signala po vremenu – odmeravanje (odabiranje, uzimanje uzoraka, semplovanje) i
2. diskretizacije signala po trenutnim vrednostima – kvantovanje (kvantizacija, zaokruživanje).

Ako se želi izvršiti digitalizacija kontinualnog signala, mora se obaviti i treća operacija koja je poznata pod nazivom kodovanje, tj. predstavljanje diskretnih vrednosti signala grupom cifara odnosno impulsa [3], [6], [28], [32], [38], [43], [46], [51], [59], [62], [64], [70], [71], [77].

Procesom pretvaranja analognih signala u digitalne signale ostvaruju se značajne prednosti, ali, postoje i određeni nedostaci. Osnovne prednosti diskretizacije signala su [3], [6], [28], [32], [38], [46], [51], [59], [62], [64], [70], [71], [77]:

1. Digitalne komponente kao što su logička kola, memorije, procesori..., sa razvojem tehnologije postaju sve brže, jeftinije, efikasnije i pouzdanije, a zauzimaju sve manje mesta i troše sve manje enregije za rad.
2. Sistemi digitalne obrade signala su veoma fleksibilni i lako mogu biti reprogramirani kako bi izvodili različite funkcije koristeći isti hardver.
3. Funkcije i svojstva signala koje je bilo skoro nemoguće dostići sa analognim komponentama, sada su moguće.
4. Razne smetnje signala, ako ih i ima, nemaju nikakvog efekta na performanse.
5. Veća preciznost signala je dostižna povećavajući dužinu reči digitalizovanih signala

Sa druge strane, digitalna obrada signala ima i sledeće nedostatke [3], [6], [28], [32], [38], [46], [51], [59], [62], [64], [70], [71], [77]:

1. Obrada signala velikom brzinom je ograničena mogućnostima brzine trenutne tehnologije.
2. Predviđeno vreme za dizajniranje i implementiranje (spremno za tržište) nekih digitalnih sistema je i dalje prekomerno dugo.
3. Informacijama u binarnoj formi dodaju se “redundantni” bitovi da bi se detektovale greške koje nastaju pri prenosu, što povećava dužinu reči. Zbog usvojene konačne/određene dužine reči digitalnog signala, skraćivanje dužine reči može ozbiljno da ugrozi performanse signala. Ipak, ovakve greške se mogu minimalizovati povećavajući dužinu reči.

Reprezentativni primeri praktičnih digitalnih sistema su napredni komunikacioni sistemi, kao što su satelitska komunikacija, mobilni telefoni, kompjuterska komunikacija kroz *local-area* i *wide-area* mreže (LAN, WAN, Wi-Fi, WiMAX), brza internet komunikacija (kao ADSL), digitalna televizija (kao HDTV) i mnogi drugi. Broj internet korisnika se značajno povećava svake godine, pa tako i količina podataka koja se razmenjuje. Posebni protokoli i tehnike prenosa podataka kao što je *packet switching* i moderne tehnike moduliranja kao što su CDMA (*Code Division Multiple Accesses*) i OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*) su razvijene kako bi se pomoglo u smanjenju vremena komunikacije i kako bi se poboljšao kvalitet servisa (QoS).

2.5 Odmeravanje signala

Uzimanje uzoraka signala predstavlja proces diskretizacije kontinualnog signala po vremenu koji se vrši u definisanim trenucima, pri čemu se dobija povorka impulsa čija anvelopa čini originalan signal [6], [20], [28], [38], [59], [62], [70], [77]. Vremenski interval između uzetih uzoraka mora biti konačan, i pri tome ne sme dolaziti do gubitka informacija. Da bi se to obezbedilo potrebno je da spektar kontinualnog signala bude ograničen. Strogo posmatrano, svi informacioni signali imaju beskonačno širok spektar. Analiza svih informacionih signala, međutim, pokazuje da je, bez obzira što se matematički posmatrano spektar ovih signala u odnosu na učestanost proteže u beskonačnost, glavni deo spektra koncentrisan u nekom konačnom opsegu učestanosti. Izvan datog opsega amplitude spektralnih komponenata signala poruke postaju toliko male da se pri realnim radnim uslovima mogu uvek zanemariti [6], [20], [28], [38], [59], [62], [70], [77].

Ako je gornja granična vrednost kontinualnog signala jednaka f , tada, na osnovu teoreme o odmeravanju, frekvencija uzimanja uzoraka mora biti veća ili jednaka od $2f$, tako da je interval između dva uzastopna uzorka manji ili jednak od $1/2f$. Iako se spektar telefonskog govornog signala nalazi u opsegu od 0.3 kHz do 3.4 kHz, frekvencija uzimanja njegovih uzoraka je jednaka 8 kHz. To je iz razloga što filtri koji se koriste za ograničavanje spektra govornog signala nemaju dovoljno strmju karakteristiku. Vremenski interval između dva uzastopna uzorka govornog signala je 125 μ s.

2.6 Kvantovanje signala

Originalni ulazni talasni oblik moguće je dobiti prenoseći vrednosti kontinualanog signala iz samo određenih trenutaka [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [76], [77]. Za jednoznačno predstavljanje mogućih vrednosti odmeraka signala potreban je beskonačan broj digita jer trenutna vrednost ulaznog signala pripada neizbrojivom skupu tačaka iz kontinualnog amplitudskog opsega. To ustvari znači da je za proces digitalizacije signala, pored postupka diskretizacije signala po vremenu, potrebno izvršiti i postupak diskretizacije signala po amplitudi. Postupkom diskretizacije signala po amplitudi, odnosno kvantizacijom, neizbrojiv skup trenutnih vrednosti signala se svodi na izbrojiv skup. Kvantizacijom signala se nepovratno unosi greška. Naravno, u cilju dobijanja što boljeg kvaliteta signala, grešku kvantizacije treba svesti na što manju meru. Diskretizacija signala po vremenu precizno je definisana Teoremom o odmeravanju [6], [20], [28], [38], [59], [62], [70], [77], dok je diskretizacija signala po amplitudi veoma zanimljiva sa istraživačkog stanovišta. U zavisnosti od zahtevanih uslova koje signal treba da ispunjava na prijemu, vrši se izbor veličine skupa dozvoljenih izlaznih vrednosti, samih izlaznih vrednosti i pravila preslikavanja.

Danas, kvantizacija predstavlja osnovno sredstvo kompresije [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]. Novi modeli kvantizera se projektuju tako da se odmerci predstavljaju sto je moguće manjim brojem bita, uz uslov da se ne gubi na kvalitetu primljenog signala. U zavisnosti od toga da li su veličine amplitudskih kvanata (koraka kvantizacije) konstantne ili ne, skalarni kvantizeri se dele na uniformne i neuniformne skalarne kvantizere [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77].

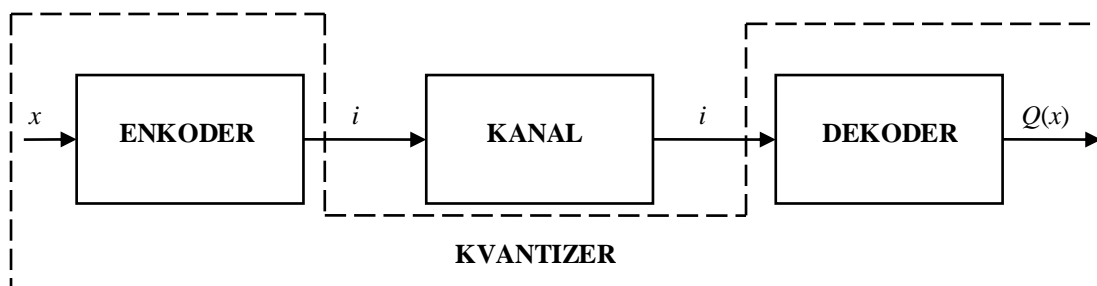
2.6.1 Struktura skalarnih kvantizera

U ovom odeljku se razmatra način implementacije kvantizera u telekomunikacionim sistemima. Funkcija skalarnog kvantizera je da amplitudu ulaznog odmerka preslika u amplitudu iz dozvoljenog skupa amplituda, pri čemu se operacija

preslikavanja obavlja tako da je greška koja se čini najmanja za izabranu izlaznu vrednost u odnosu na ostale. Ovo je u digitalnim sistemima neophodno iz razloga što se postiže da je broj bita potreban za prenos odmeraka konačan [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77].

Jedan od glavnih zadataka kod projektovanja kvantizera jeste definisanje skupa dozvoljenih izlaznih vrednosti. Naime, definisanje skupa dozvoljenih izlaznih nivoa je ograničeno time da se propuštajući izlaz kvantizera kroz NF filter mora dobiti signal koji veoma dobro aproksimira ulazni signal. Ovde je sada važno uočiti da je originalni signal na ulazu predajnika, dok su odmerci sa izlaza kvantizera neophodni tek u prijemniku. Ovo ukazuje da kroz telekomunikacioni kanal nije potrebno prenositi vrednosti izlaznih nivoa, tj. mogu se prenositi samo celobrojni brojevi (indeksi) koji na neki način određuju izlazne vrednosti kvantizera. Da bi u prijemniku bilo moguće na osnovu indeksa dobiti izlazne nivoe, vrlo je važno kako se vrši dodeljivanje indeksa ulaznim odmercima. U nekim slučajevima se izlazna vrednost dobija izvodeći određene matematičke operacije nad indeksom. Ukoliko to nije moguće, onda se memoriše look-up tabela, kod koje indeks predstavlja adresu memorijske lokacije u koju je smešten odgovarajući izlazni nivo. Na osnovu ovoga se može zaključiti da se kvantizer sastoji iz bloka u predajniku i bloka u prijemniku (slika 2.7) [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77].

Deo u predajniku generiše indeks koji se prenosi kroz telekomunikacioni kanal kao binarna reč. Pošto ovaj deo vrši kodovanje naziva se enkoder. Indeks koji se prenosi



Slika 2.7. Skalarni kvantizer kao kaskadna veza enkodera i dekodera

mora jednoznačno ukazivati na izlaznu vrednost, što znači da veličina skupa dozvoljenih vrednosti amplitude određuje broj bita potrebnih za prenos indeksa. Tako, ako je broj izlaznih nivoa kvantizera N , to znači da je broj potrebnih bita za prenos jednog indeksa $\log_2 N$.

Treba uočiti da enkoder čak i ne mora da zna skup izlaznih vrednosti. Međutim, enkoder mora da zna kako je beskonačan skup ulaznih amplituda podeljen na ćelije, odnosno kako je realna prava podeljena na intervale koji predstavljaju vrednosti ulaznih odmeraka koje se slikaju u isti izlazni nivo. Deo u prijemniku na osnovu primljenog indeksa, tj. kodne reči generiše odmerak, odnosno vrši dekodovanje, pa se taj deo naziva dekoder. Može se zaključiti da u cilju implementacije kvantizera, kvantizer treba posmatrati kao rednu vezu enkodera i dekodera [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77].

2.6.2 Uniformna kvantizacija

Da bi se analogni signal preneo kroz digitalni telekomunikacioni sistem, potrebno je da se signal digitalizuje, tj. da se diskretizuje po amplitudi i po vremenu. Diskretizaciju signala po amplitudi vrši kvantizer [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]. Funkcija kvantizera jeste da trenutnu vrednost pobudnog signala, koja u opštem slučaju pripada neizbrojivom skupu tačaka iz kontinualnog amplitudskog opsega, transformiše u najbližu dozvoljenu vrednost iz konačnog, diskretnog skupa amplituda. Ako je kvantizer pobuđen kontinualnim ulaznim signalom, na izlazu kvantizera nastaje kvantovan signal, koji je kontinualan po vremenu a diskretan po svojim trenutnim vrednostima. Za kvantizer se kaže da je simetričan ako su dozvoljeni nivoi simetrično raspoređeni u odnosu na srednju vrednost ulaznog signala. Kvantizeri sa linearnom karakteristikom kvantizacije su uniformni kvantizeri [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77].

Uniformni kvantizeri karakterišu se maksimalnom amplitudom kvantizacije x_{\max} i brojem kvantizacionih nivoa N . Korak kvantizacije Δ predstavlja razmak između dva susedna kvantizaciona nivoa, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$. Opseg kvantizera jednak je dvostrukoj maksimalnoj amplitudi kvantizacije $2x_{\max}$. Greška kvantizacije predstavlja

odstupanje izlaznog signala od ulaznog signala kvantizera (to je ustvari odmerak analognog signala, tj. diskretizovani signal). Greška kvantovanja je posledica predstavljanja bilo koje ulazne amplitude x iz ćelije R_i , $i = 1, \dots, N$, odgovarajućim reprezentacionim nivoom y_i , $i = 1, \dots, N$:

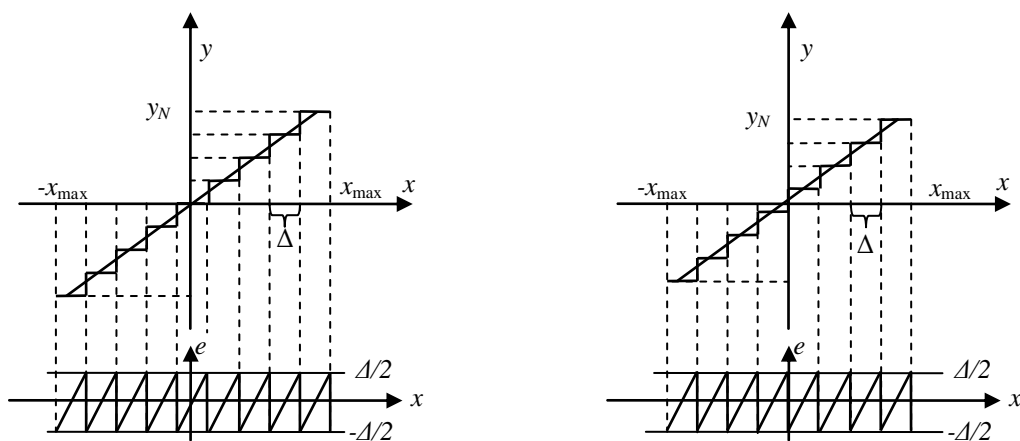
$$e_i = x - y_i. \quad (2.4)$$

Maksimalna amplituda kvantizacije predstavlja maksimalnu vrednost modula ulaznog odmerka u kvantizer, pri čemu greška kvantizacije nije veća po modulu od polovine koraka kvantizacije:

$$|x| \leq x_{\max} \Rightarrow |e_i| \leq \frac{\Delta}{2}. \quad (2.5)$$

Kada je poznata maksimalna amplituda kvantizacije x_{\max} i broj kvantizacionih nivooa N , jednoznačno je definisana karakteristika uniformnog kvantizera. Sam oblik karakteristike uniformnog kvantizera zavisi od toga da li je broj kvantizacionih nivooa paran ili neparan. Na slici 2.8 prikazan je oblik karakteristike kvantizacije za paran i neparan broj kvantizacionih nivooa, osam i devet, respektivno. Sa slike 2.8 se može uočiti da važi sledeća relacija:

$$2x_{\max} = N\Delta. \quad (2.6)$$



Slika 2.8. Karakteristika kvantizera i vrednost signala greške za: a) neparan broj kvantizacionih nivooa $N = 9$; b) paran broj kvantizacionih nivooa $N = 8$

Na istoj slici nacrtana je i zavisnost signala greške od ulaznog signala, pri čemu je pretpostavljeno da kvantizer nije preopterećen [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]. Kvantizer nije preopterećen kada se ulazni signal nalazi unutar opsega kvantizera. U praksi, uzima se da kvantizer nije preopterećen kada je maksimalna amplituda kvantizacije jednaka vršnoj vrednosti signala. Pod vršnom vrednošću podrazumevamo takvu pozitivnu vrednost koja je veća od 98% apsolutnih vrednosti odmeraka ulaznog signala. Kada je ulazni signal amplitudski ograničen, može se uzeti da je vršna vrednost jednaka maksimumu modula signala. U realnim situacijama, amplitudski opseg kvantizera određen je konačnom vrednošću amplitude maksimalnog opterećenja x_{\max} , tj. ograničen je, tako da se može desiti da trenutne vrednosti ulaznog signala premaše projektovani amplitudski opseg kvantizera. U takvim slučajevima, ukupna distorzija uneta kvantizacijom D jednaka je zbiru granularne distorzije i distorzije prekoračenja [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]:

$$D = D_g + D_p. \quad (2.7)$$

Granularna distorzija D_g određena je sledećom formulom:

$$D_g = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - y_i)^2 p(x) dx, \quad (2.8)$$

dok je distorzija prekoračenja D_p jednaka:

$$D_p = 2 \int_{x_{\max}}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx. \quad (2.9)$$

gde je $p(x)$ funkcija gustine raspodele amplitude ulaznog signala.

Matematičkom analizom modela skalarnih kvantizera sa velikim brojem nivoa kvantovanja, mogu se dobiti jednostavni izrazi za distorziju u zatvorenom obliku. Pretpostavkom da skalarni kvantizer ima veliki broj nivoa kvantovanja podrazumeva se da je širina svih ćelija koje čine granularnu oblast kvantizera proizvoljno mala, tj. može se uvesti aproksimacija da je funkcija gustine verovatnoće $p(x)$ konstantna u okviru svake ćelije [3], [6], [28], [31], [46], [51], [59], [62], [70], [77]:

$$p(x) \cong p(y_i), \quad x \in R_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.10)$$

Kombinovanjem ove aproksimacije i izraza (2.8) dobija se sledeći izraz za granularnu distorziju skalarnog kvantizera sa velikim brojem nivoa kvantovanja:

$$D_g \approx \sum_{i=1}^N p(y_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - y_i)^2 dx. \quad (2.11)$$

Takođe, kod kvantizera sa velikim brojem nivoa kvantovanja može se koristiti i sledeća aproksimacija:

$$P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x) dx \approx p(y_i) \Delta_i, \quad (2.12)$$

gde P_i definiše verovatnoću da odmerak x , čija je funkcija gustine verovatnoće $p(x)$, pripada ćeliji R_i .

Iz formule (2.11) se može uočiti da kada nema preopterećenja kvantizera, za dovoljno veliki broj kvantizacionih nivoa snaga šuma uniformne kvantizacije ne zavisi od statistike ulaznog signala. Međutim, snaga ulaznog signala zavisi od statistike ulaznog signala, tako da i odnos signal-šum kvantizacije zavisi od vršne vrednosti signala. Kada vršna vrednost signala raste, odnos signal-šum kvantizacije prvo raste, jer opseg vrednosti odmeraka postepeno pokriva sve moguće kvantizacione nivoe, te kvantizer biva sve bolje iskorišćen. Nakon što vršna vrednost dostigne maksimalnu amplitudu kvantizacije, pri čemu odnos signal-šum kvantizacije dostiže najveću vrednost, sa daljim povećanjem vršne vrednosti signala dolazi do sve veće preopterećenosti kvantizera, pa se odnos signal-šum kvantizacije sve više smanjuje. Slično objašnjenje važi i ako fiksiramo vršnu vrednost signala (tj. njegovu snagu), a variramo maksimalnu amplitudu kvantizacije [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77].

Uvođenjem aproksimacije (2.12) i kombinovanjem sa jednačinom (2.11) dobija se aproksimativni izraz za granularnu distorziju skalarnih kvantizera sa velikim brojem nivoa kvantovanja:

$$D_g \approx \sum_{i=1}^N \frac{\Delta_i^2}{12} P_i. \quad (2.13)$$

Za slučaj uniformnih kvantizera, izraz za granularnu distorziju opisan prethodnom jednačinom ima sledeći oblik:

$$D_g = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{i=1}^N P_i. \quad (2.14)$$

Korišćenjem relacije koja implicitno pretpostavlja zanemarljiv doprinos distorzije prekoračenja ukupnoj distorziji:

$$\sum_{i=1}^N P_i \approx \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad (2.15)$$

ukupna distorzija uniformnog kvantizera jednaka je [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]:

$$D \approx \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{\max}^2}{3N^2}. \quad (2.16)$$

Na osnovu poslednjeg izraza, može se primetiti da distorzija uniformnog kvantizera raste sa kvadratom veličine amplitudskog kvanta Δ . S obzirom da veličina amplitudskog kvanta za usvojeni broj nivoa kvantovanja N zavisi od veličine amplitude maksimalnog opterećenja, što je opisano jednačinom (2.6), takodje se može uočiti da distorzija uniformnog kvantizera raste sa kvadratom veličine amplitude maksimalnog opterećenja x_{\max} . Smanjenjem snage ulaznog signala, smanjuje se i odnos signal-šum kvantizacije, odnosno pogoršava se kvalitet kvantovanja, jer je distorzija uniformnog kvantizera sa N nivoa kvantovanja konstantna. Samo u situacijama kada je funkcija gustina verovatnoće trenutnih vrednosti signala približno uniformna u celokupnom amplitudskom opsegu kvantizera pogodno je primeniti postupak uniformnog kvantovanja.

2.6.3 Neuniformno kvantovanje

Uniformno kvantovanje ne predstavlja najefikasniji postupak kvantovanja i pored toga što je matematički model uniformnog kvantizera veoma jednostavan. Za rešenje problema varijacije nivoa pobudnog signala kvantizera koriste se dva nezavisna postupka [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]:

1. slogovna kompresija i
2. neuniformno kvantovanje.

Slogovna kompresija obezbeđuje automatsku regulaciju srednje snage govornog signala u slogovnom intervalu, što dozvoljava da se uniformni kvantizer projektuje za skoro konstantni nivo pobudnog signala. Pri digitalnom prenosu informacija na bazi vremenske raspodele kanala slogovna kompresija nije ekonomski opravdana jer zahteva da se u svaki pretplatnički kanal ugradi po jedan slogovni kompresor na predaji i slogovni ekspandor na prijemu.

Postupak neuniformnog kvantovanja proističe iz razmatranja o štetnim posledicama do kojih dovodi neprilagođenost slabog signala na relativno krupne kvante kod uniformnog kvantovanja. Ideja je da veličina amplitudskih kvanata treba da se menja unutar fiksnog amplitudskog opsega kvantizera tako da se signali manje srednje snage pretežno nađu u oblasti fine podele, a signali veće snage u oblasti grube podele [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77], [97].

Naime, primenom neuniformnog postupka kvantovanja slučajna promenljiva se može kvantovati sa manjom varijansom greške. Stoga, biranjem manjih amplitudskih kvanata gde je verovatnoća pojavljivanja slučajne promenljive veća, tj. biranjem većih amplitudskih kvanata gde je verovatnoća pojavljivanja slučajne promenljive manja, postiže se velika zavisnost greške kvantizacije od ulaznog signala. To znači da se optimalne performanse neuniformnog skalarnog kvantizera mogu ostvariti optimalnim izborom veličina amplitudskih kvanata [3], [4], [16], [28], [36], [37], [45], [46], [62], [70], [75], [86].

Za govorni signal je poznato da su male trenutne vrednosti verovatnije od većih, pa će prema tome, fina podela nivoa kvantizera u okolini nultog nivoa omogućiti da se male a česte trenutne vrednosti signala kvantuju sa manjom greškom. Da bi ukupni broj nivoa ostao jednak onome kod uniformnog kvantizera istog opsega, pri neuniformnoj podeli amplitudski kvanti pri kraju opsega treba da budu relativno veliki. To znači da će greška kvantovanja za najveće trenutne vrednosti jakih signala biti velika. Ipak, u statističkom smislu nije značajna greška, makar i velika, koja se retko dešava, jer je njen doprinos srednjoj snazi šuma kvantovanja beznačajan.

Nasuprot tome, smanjenje šuma kvantizacije kod vrednosti koje se često dešavaju je statistički značajno, jer u tim slučajevima greške daju glavni doprinos srednjoj snazi

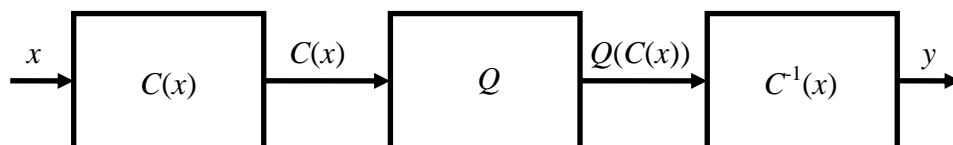
šuma kvantizacije. To znači da se bolji kvalitet primljenog signala može ostvariti neuniformnom kvantizacijom, čija je veličina kvanta funkcija recipročne vrednosti funkcije gustine verovatnoće trenutnih vrednosti pobudnog signala. Uniformni kvantizer bi predstavljao optimalno rešenje jedino u slučaju kada bi sve vrednosti pobudnog signala bile podjednako verovatne. Neuniformno kvantovanje može se ostvariti na tri tehnički prihvatljiva načina [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]:

1. trenutnom kompresijom,
2. digitalnom kompresijom i
3. nelinearnim kodovanjem.

2.7 Trenutna kompresija

Trenutna kompresija predstavlja jedan od načina kojim se ostvaruje neuniformna kvantizacija [3], [6], [22], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77]. Neuniformno kvantovanje logički je ekvivalentno uniformnom kvantovanju prethodno komprimovanih trenutnih vrednosti pobudnog signala. Trenutne vrednosti signala se prvo komprimuju, zatim se uniformno kvantuju i na kraju ekstraktuju. Ovaj model kvantizera koji predstavlja rednu vezu kompresora, uniformnog kvantizera i ekspandora poznat je kao model skalarnog komandora [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [67], [70], [71], [77]. Na slici 2.9 prikazana je blok šema komandora.

Model skalarnog komandora detaljno je opisan u poglavlju 2.8. Za dati broj izlaznih nivoa model komandora je potpuno određen prenosnom funkcijom kompresora, tj. kompresorskom funkcijom, jer prenosna funkcija ekspandora predstavlja inverznu prenosnu funkciju kompresora. Pri određivanju kompresorske



Slika 2.9. Blok šema komandora: kompresor - uniformni kvantizer - ekspandor

funkcije uglavnom se postavljaju dva kriterijuma [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [65], [70], [71], [77]:

1. kriterijum konstantnosti odnosa signal-šum kvantizacije bez obzira na statističke karakteristike pobudnog signala i
2. kriterijum maksimalnog odnosa signal-šum kvantizacije za zadatau statistiku pobudnog signala.

Važno je naglasiti da oba kriterijuma ne mogu biti ispunjena istovremeno. Kada se radi o prenosu signala velike dinamike prioritet je ostvariti konstantan odnos signal-šum kvantizacije. Govorni signali spadaju u grupu signala velike dinamike. U cilju određivanja oblika kompresorske funkcije koja daje konstantan odnos signal-šum kvantizacije bez obzira na statističke karakteristike pobudnog signala, potrebno je odrediti pored snage pobudnog signala i srednju snagu šuma kvantizacije u funkciji kompresorske funkcije.

2.7.1 Kriterijum konstantnosti odnosa signal-šum kvantizacije bez obzira na statističke karakteristike pobudnog signala

U cilju određivanja oblika kompresorske funkcije koja daje konstantan odnos signal-šum kvantizacije bez obzira na statističke karakteristike pobudnog signala, potrebno je pored snage pobudnog signala odrediti i srednju snagu šuma kvantizacije u funkciji kompresorske funkcije. Snaga ulaznog signala $x(t)$ jednaka je [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77]:

$$\overline{x^2} = \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} x^2 p(x) dx, \quad (2.17)$$

pri čemu pretpostavljamo, što je u praksi slučaj, da je amplitudski opseg kompresora i kvantizera $(-x_{\max}, x_{\max})$ relativno velik, tako da je verovatnoća da će doći do odsecanja vršnih trenutnih vrednosti ulaznog signala zanemarljivo mala.

Srednja snaga šuma kvantizacije σ_q^2 određena je pomoću Benetovog (*John Godolphin Bennett*) integrala [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [77], [81], [87]:

$$\sigma_q^2 = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{\left[\frac{dc(x)}{dx} \right]^2} dx, \quad (2.18)$$

gde je $p(x)$ funkcija gustine verovatnoće trenutnih vrednosti ulaznog signala x , N veličina dozvoljenog skupa izlaznih vrednosti, tj. broj izlaznih nivoa i $c(x)$ prenosna karakteristika kompresora. Kombinovanjem jednačina (2.17) i (2.18) možemo napisati izraz za odnos srednjih snaga signal-šum kvantovanja:

$$\frac{\overline{x^2}}{\sigma_q^2} = \frac{3N^2 \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} x^2 p(x) dx}{x_{\max}^2 \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{\left[\frac{dc(x)}{dx} \right]^2} dx}. \quad (2.19)$$

Da bi ovaj odnos bio nezavisan od statističkih karakteristika pobudnog signala, iz prethodne jednačine je očigledno da je potreban i dovoljan uslov:

$$\frac{dc(x)}{dx} = \frac{x_{\max}}{C} \frac{1}{x}, \quad C = \text{constant}. \quad (2.20)$$

Odgovarajući oblik karakteristike kompresije dobija se integraljenjem prethodne jednačine. Konstanta integraljenja se određuje iz graničnih uslova ($c(x) = \pm x_{\max}$ za $x = \pm x_{\max}$), pa je prenosna karakteristika kompresora oblika [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71]:

$$c(x) = \left[\frac{x_{\max}}{C} \ln \left(\frac{|x|}{x_{\max}} \right) + x_{\max} \right] \text{sgn}(x), \quad 0 < |x| \leq x_{\max}. \quad (2.21)$$

Na ovaj način se dolazi do važnog zaključka da idealizovana karakteristika kompresije treba da sledi logaritamski zakon da bi odnos signal-šum kvantovanja bio nezavisan od statističkih osobina signala. Međutim, logaritamaska karakteristika kompresije, definisana jednačinom (2.21), ne može se primeniti u praktičnom kompresoru jer logaritamaska kriva ne prolazi kroz koordinatni početak, pa je neupotrebljiva za najmanje trenutne vrednosti signala. Treba, dakle, modifikovati logaritamski zakon tako da kriva kompresije postane linearna, odnosno, skoro linearna

za najslabije pobudne signale. Standardizovana su dva rešenja, tj. postoje dve dobre modifikacije logaritamskog zakona kompresije:

1. semilogaritamski zakon i
2. kvazilogaritamski zakon.

2.7.1.1 Semilogaritamski zakon kompresije

Ako bi uniformni kvantizer radio bez prethodne kompresije signala, onda efekat asimetrije ne bi došao do izražaja, jer bi svi amplitudski kvanti bili međusobno jednaki. Jedino bi moglo doći do izvesnog povećanja šuma preopterećenja. Prema tome, logična je ideja da se usvoji takva karakteristika kompresije koja bi u okolini koordinatnog početka bila pravolinijska sa uniformnim kvantima, a tek za veće trenutne vrednosti ulaznog signala logaritamska sa neuniformnim kvantima [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71]. Suština semilogaritamske modifikacije logaritamskog zakona kompresije sastoji se u tome da se u svakom kvadrantu zadrži logaritamska kriva za trenutne vrednosti signala iznad pogodno odabranog praga:

$$|x| \geq \frac{x_{\max}}{A}. \quad (2.22)$$

gde je A bezdimenzionalni parametar.

Za trenutne vrednosti signala manje od praga, logaritamska kriva zamenjuje se tangentom u tački $x = x_{\max}/A$, tako da tangenta uvek prolazi kroz koordinatni početak. Tako nastaje semilogaritamski zakon kompresije [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71]:

$$c(x) = \begin{cases} \frac{A}{1 + \ln A} |x| \operatorname{sgn}(x) & \text{za } 0 \leq |x| \leq \frac{x_{\max}}{A} \\ \frac{x_{\max}}{1 + \ln A} \left[1 + \ln \left(A \frac{|x|}{x_{\max}} \right) \right] \operatorname{sgn}(x) & \text{za } \frac{x_{\max}}{A} \leq |x| \leq x_{\max} \end{cases}. \quad (2.23)$$

Semilogaritamski zakon kompresije opisan prethodnom jednačinom u praksi je poznat pod imenom A -zakon kompresije.

2.7.1.2 Kvazilogaritamski zakon kompresije

Druga standardizovana modifikacija logaritamske karakteristike kompresije sastoji se u smeni funkcije $\ln(x)$ funkcijom $\ln(x+1)$. To je ekvivalentno translaciji koordinatnog početka u tačku $x = x_{\max}e^{-k}$, gde logaritamska kriva preseca apcisnu osu. Tako nastaje kvazilogaritamski zakon kompresije [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71]:

$$c(x) = \begin{cases} \frac{x_{\max}}{\ln(1+\mu)} \ln\left(1 + \mu \frac{x}{x_{\max}}\right), & 0 \leq x \leq x_{\max} \\ -\frac{x_{\max}}{\ln(1+\mu)} \ln\left(1 - \mu \frac{x}{x_{\max}}\right), & -x_{\max} \leq x \leq 0 \end{cases}, \quad (2.24)$$

U prethodnom izrazu je sa μ označen bezdimenzioni parametar koji se zove faktor kompresije. Zbog parametra μ u prethodnoj jednačini, kvazilogaritamski zakon kompresije poznat je pod imenom μ -zakon kompresije. Konstantni faktor $x_{\max}/\ln(1+\mu)$ odabran je tako da bude zadovoljena jednakost maksimalnih vrednosti pobudnog i komprimovanog signala:

$$c(x)\Big|_{x=x_{\max}} = x_{\max}. \quad (2.25)$$

U jednačinama (2.24) i (2.25) implicitno se pretpostavlja da je amplitudski opseg kompresora jednak amplitudskom opsegu uniformnog kvantizera, $(-x_{\max}, x_{\max})$, koji kvantuje komprimovani signal. Za veće vrednosti parametra μ , velike promene ulaznog signala x proizvode male promene komprimovanog signala $c(x)$. Takođe važi, da je za velike vrednosti stepena kompresije odnos maksimalnog i minimalnog kvanta pobudnog signala u kompresoru približno jednak μ .

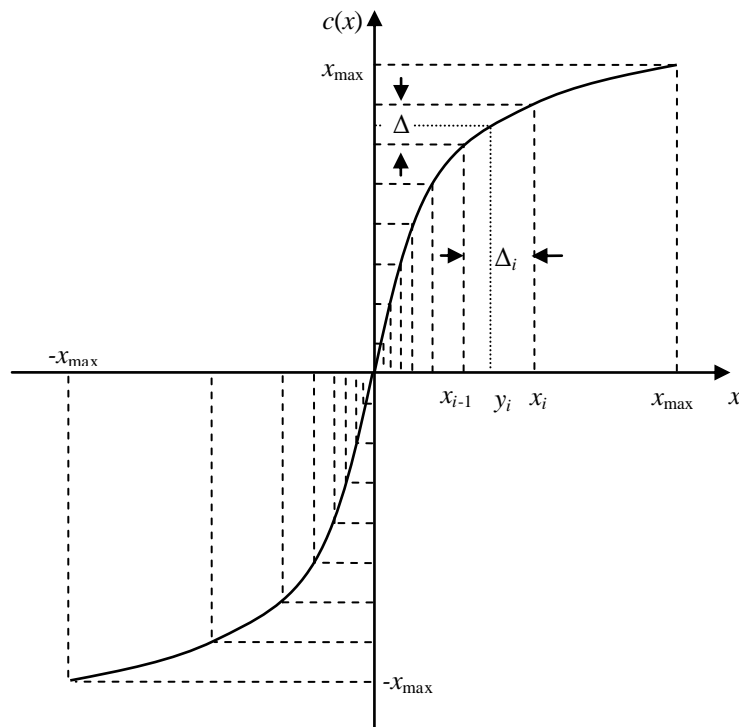
2.8 Skalarni komparator

Poznato je da se neuniformno kvantovanje može postići uniformnim kvantovanjem prethodno komprimovanih trenutnih vrednosti pobudnog signala, tj. korišćenjem tzv. modela komparatora [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [67], [70], [71], [77]. Kao što je već rečeno, trenutne vrednosti pobudnog signala se prvo

komprimuju, zatim se uniformno kvantuju i na kraju ekstraktuju. Ovaj model kvantizera koji predstavlja rednu vezu kompresora, uniformnog kvantizera i ekspandora poznat je kao model skalarnog komandora (slika 2.9).

U cilju jednostavnijeg i preglednijeg pisanja i crtanja, pri analizi trenutne kompresije privremeno ćemo ignorisati prethodno odmeravanje signala i smatraćemo da na trenutni kompresor, tj. na uređaj koji bez zadržke smanjuje (komprimuje) amplitudsku dinamiku deluje kontinualni ulazni signal, i da kontinualni komprimovani signal pobuđuje uniformni kvantizer. Nelinearni pojačavač koji više pojačava male nego velike trenutne vrednosti ulaznog signala predstavlja nelinearni kompresor, u fizičkom smislu.

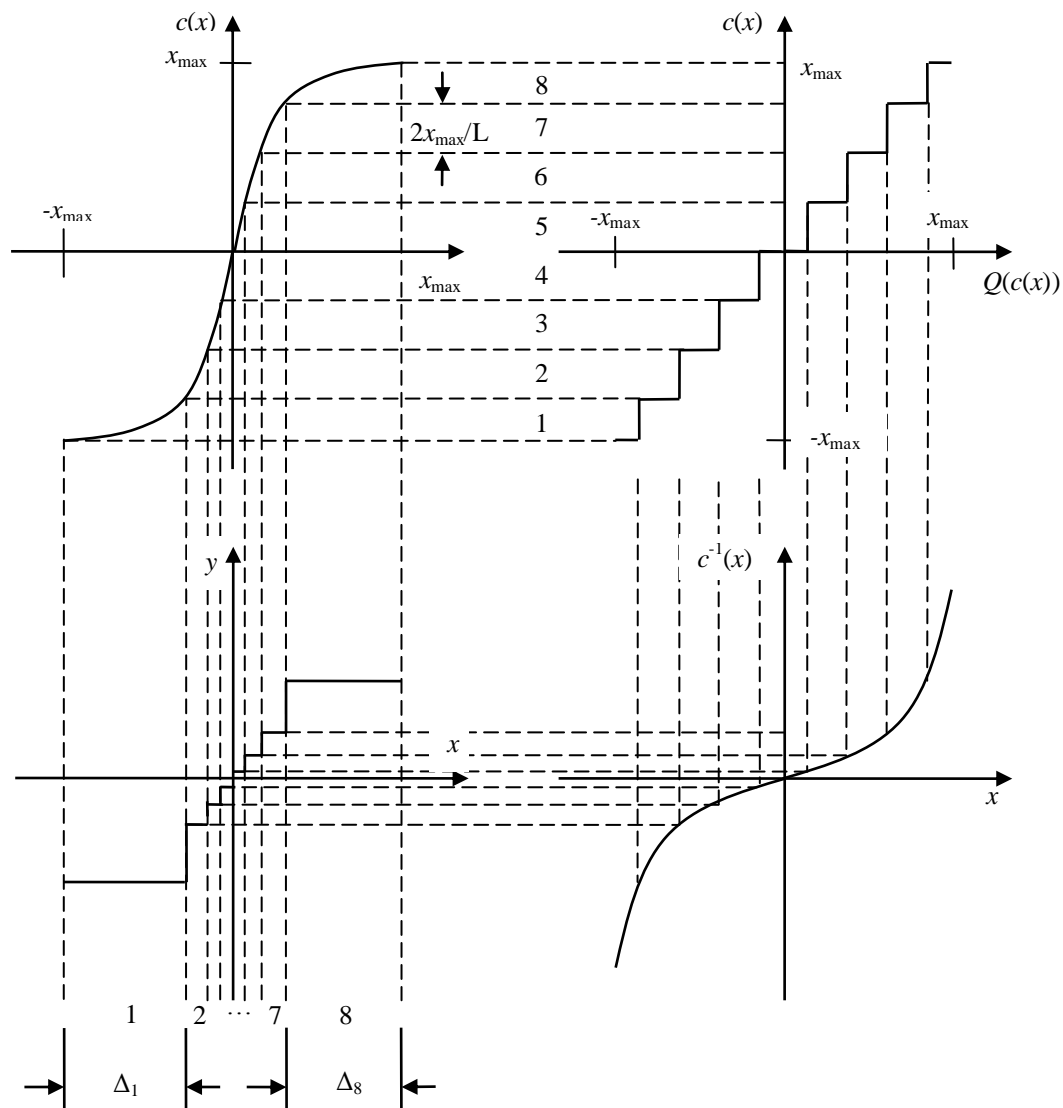
Generalno posmatrano, trenutni kompresor je nelinearni četvoropol čija transfer funkcija zavisi samo od trenutne vrednosti ulaznog signala, i to tako da se trenutna vrednost izlaznog signala nelinearno menja u saglasnosti sa karakteristikom kompresije (kompresorskom funkcijom) označenom sa $c(x)$, koja je šematski prikazana na slici 2.10 [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [67], [70], [71], [77].



Slika 2.10. Optimalna kompresorska funkcija

Kompresorska funkcija je kontinualna jednoznačna funkcija koja je simetrična u I i III kvadrantu i koja prolazi kroz tačke $(-x_{\max}, -x_{\max})$, $(0, 0)$, (x_{\max}, x_{\max}) pri čemu u koordinatnom početku ima nagib veći od 1. Amplituda maksimalnog opterećenja komparatora označena je sa x_{\max} . Faktor pojačanja takvog četvoropola je veći od 1 za male trenutne vrednosti ulaznog signala, a postaje 1 za slučaju $|x| = x_{\max}$.

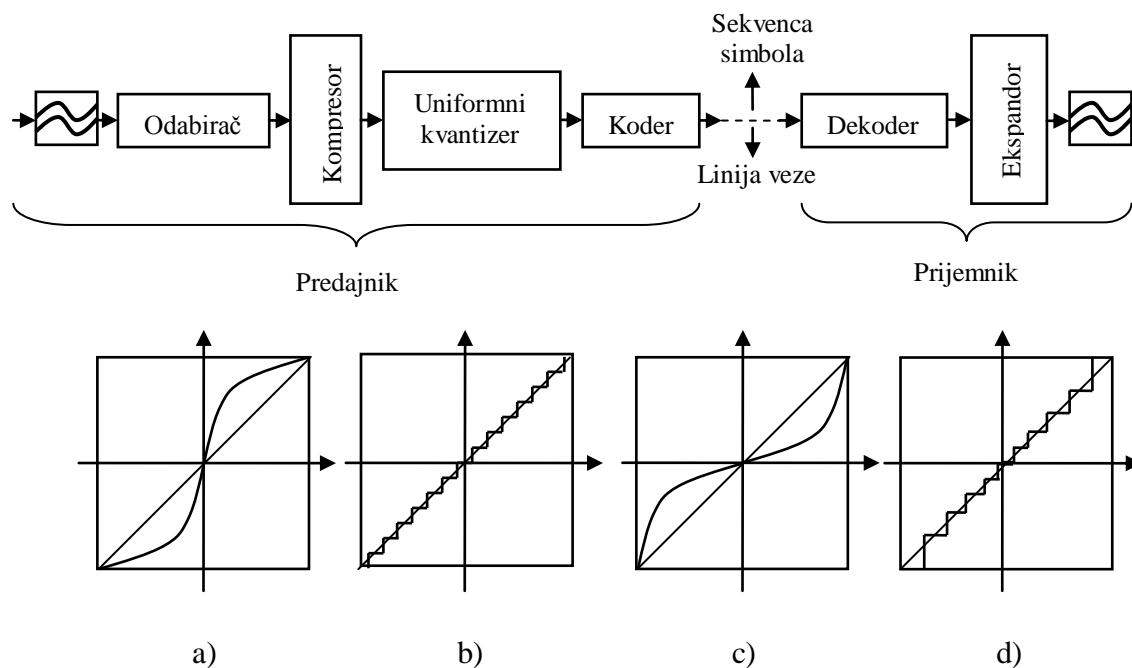
Sa slike 2.10 se takođe može uočiti da se podelom komprimovanog signala na jednake kvante, Δ , preko karakteristike kompresije može podeliti amplitudski opseg



Slika 2.11. Kompandor

ulaznog signala na nejednake kvante, Δ_i , tj. moguće je odrediti granice odluke x_i , $i = 0, 1, \dots, N$ i reprezentacione nivoe y_i , $i = 1, 2, \dots, N$ kojima je model komandora opisan. Između raspodele amplitudskih kvanata i karakteristike kompresije postoji korespondencija 1:1, pa se o pogodnom rasporedu i veličini neuniformnih kvanata odlučuje kroz pravilan izbor karakteristike kompresije. Očigledno, idealna karakteristika kompresije mora da bude tako prilagođena određenom ansamblu ulaznih signala da sve trenutne vrednosti komprimovanog signala postanu podjednako verovatne u celom amplitudskom opsegu uniformnog kvantizera, $(-x_{\max}, x_{\max})$, koji se priključuje na izlaz kompresora.

Na prijemnoj strani prenosnog sistema potrebno je da se obnovi prirodan odnos trenutnih vrednosti signala, pa se koristi drugi nelinearni četvoropol – tzv. trenutni ekspandor čija je karakteristika inverzna karakteristici kompresije. Ekspandorska funkcija (karakteristika ekspanzije), prikazana je na slici 2.11 i slici 2.12 c). Trenutni ekspandor ističe veće trenutne vrednosti signala za račun manjih i na taj način proširuje (ekspanduje) amplitudsku dinamiku signala. Idealni ekspandor obezbeđuje da ukupna prenosna karakteristika komandora bude prava kroz koordinatni početak sa nagibom 1,



Slika 2.12. Kompandorski sistem: a) karakteristika kompresije; b) karakteristika kvantizacije; c) karakteristika ekspanzije; d) rezultujuća karakteristika kompandovanja

kao što je prikazano na slici 2.12 d). Ukoliko karakteristika ekspandora nije strogo komplementarna sa karakteristikom kompresije kažemo da su karakteristike neusklađene, pa će rezultujuća karakteristika komandora odstupati od prave linije i komandor će stvarati nelinearna izobličenja prenesenog signala (slika 2.12 d)).

2.9 Performanse komandora

Performanse projektovanog komandora najčešće su određene odnosom signal-šum kvantizacije SQNR koji se izražava u decibelima (dB), a definiše se logaritamskim odnosom snage signala i snage greške kvantizacije [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]:

$$SQNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma^2}{D} \right), \quad (2.26)$$

pri čemu σ^2 predstavlja varijansu ulaznog signala x , a D je ukupna distorzija uneta kvantizacijom, tj. snaga greške kvantizacije. Obično se pretpostavlja da je srednja vrednost ulaznog signala jednaka nuli, pa je zbog toga, u izrazu (2.26), snaga ulaznog signala zamenjena njegovom varijansom. Veoma jednostavno, može se pokazati da uvođenjem ove pretpostavke nije izgubljena opštost, jer se teorijska analiza i projektovanje mogu modifikovati za slučaj kada ulazni signal nema nultu srednju vrednost. U opštem slučaju, ukupna distorzija komandora D predstavlja sumu granularne distorzije, D_g , i distorzije prekoračenja, označene sa D_p [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]:

$$D = D_g + D_p. \quad (2.27)$$

Granularna distorzija za komandring kvantizer određuje se na osnovu Benetovog integrala [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [81], [87]:

$$D_g = \frac{1}{12N^2} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{[\lambda(x)]^2} dx, \quad (2.28)$$

pri čemu je $p(x)$ funkcija gustine verovatnoće trenutnih vrednosti signala na ulazu skalarnog komandora, N predstavlja broj nivoa kvantovanja, dok je gustina reprezentacionih nivoa $\lambda(x)$ definisana kao:

$$\lambda(x) = \frac{1}{N\Delta_i}, \quad x \in (x_{i-1}, x_i]. \quad (2.29)$$

Sa $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ označena je veličina i -tog amplitudskog kvanta. Zamenom jednačine (2.29) u jednačinu (2.28), Benetov integral dobija oblik:

$$D_g = \frac{1}{12} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \Delta_i^2 p(x) dx. \quad (2.30)$$

Minimum Benetovog integrala ujedno je i minimum distorzije neuniformnog skalarnog kvantizera, što znači da se tehnikom komandovanja može realizovati optimalna skalarna kvantizacija. Karakteristika kompresije, za slučajeve visoke rezolucije, u i -tom intervalu kvantovanja se može aproksimirati pravolinijskim segmentom sa nagibom $c'(y_i)$:

$$c'(y_i) = \left. \frac{dc(x)}{dx} \right|_{x=y_i} \approx \frac{\Delta}{\Delta_i} = \frac{2x_{\max}}{N\Delta_i}, \quad (2.31)$$

pri čemu je sa y_i označen i -ti reprezentacioni nivo komandora. Određivanjem nagiba kompresorske funkcije, $c'(y_i)$, odnosno kombinacijom izraza (2.31) i (2.29), dobijamo izraz za gustinu reprezentacionih nivoa:

$$\lambda(x) = \frac{c'(x)}{2x_{\max}}. \quad (2.32)$$

Smenom izraza (2.32) u izraz (2.28) dobija se analitički oblik Bentovog integrala koji se koristi za određivanje granularne distorzije komandora [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [81], [87]:

$$D_g = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \frac{p(x)}{[c'(x)]^2} dx, \quad (2.33)$$

pri čemu $c'(x)$ predstavlja prvi izvod kompresorske funkcije $c(x)$. Isti oblik Benetovog integral se dobija i u slučaju kada se na osnovu izraza (2.31) odredi i -ti amplitudski kvant Δ_i , i smeni u izraz (2.30).

Konačno, distorzija prekoračenja za slučaj simetričnog komandora definiše se na sledeći način [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [72], [77]:

$$D_p = 2 \int_{x_{\max}}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx. \quad (2.34)$$

pri čemu y_N predstavlja reprezentacioni nivo.

2.10 Optimalni skalarni komandor

Pogodnim izborom parametara kvazilogaritamske μ -karakteristike kompresije može se postići zadovoljavajući kvalitet neuniformnog kvantovanja. Postavlja se pitanje da li postoji neka druga karakteristika kompresije koja bi obezbedila još bolji odnos signala prema šumu kvantovanja. Oblik karakteristike kompresije može biti definisan velikim brojem različitih matematičkih funkcija. Optimalnim određivanjem kompresorske funkcije $c(x)$ i amplitude maksimalnog opterećenja komandora x_{\max} , optimalno se određuje granularna distorzija komandora. Minimiziranjem Benetovog integrala, koji je opisan jednačinom (2.33) [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [81], [87]:

$$\frac{\partial J}{\partial c'(x)} = \frac{p(x)}{[c'(x)]} + \lambda c'(x), \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial J}{\partial c'(x)} = 0, \quad (2.36)$$

pri čemu važi:

$$\int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} c'(x) = k, \quad (2.37)$$

gde je k konstanta, sledi da je optimalan nagib kompresorske karakteristike jednak:

$$\frac{dc_{opt}(x)}{dx} = \frac{x_{\max}}{\int_0^{x_{\max}} (p(x))^{\frac{1}{3}} dx} (p(x))^{\frac{1}{3}}. \quad (2.38)$$

Optimalan nagib kompresorske karakteristike proporcionalan je kubnom korenu funkcije gustine verovatnoće $p(x)$. Integraljenjem jednačine (2.38), uz uslov da je $c_{opt}(x_{\max}) = x_{\max}$, određen je optimalni zakon kompresije [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [67], [70], [71], [77]:

$$c^{opt}(x) = \begin{cases} x_{\max} \frac{\int_0^x (p(x))^{\frac{1}{3}} dx}{\int_0^{x_{\max}} (p(x))^{\frac{1}{3}} dx}, & 0 \leq x \leq x_{\max} \\ -x_{\max} \frac{\int_0^x (p(x))^{\frac{1}{3}} dx}{\int_{-x_{\max}}^0 (p(x))^{\frac{1}{3}} dx}, & -x_{\max} \leq 0 \leq x \end{cases}. \quad (2.39)$$

Može se uočiti da $c^{opt}(x)$ zavisi samo od statistike ulaznog signala. Optimalnim određivanjem kompresorske funkcije i amplitude maksimalnog opterećenja komandora, optimalno se određuje granularna distorzija komandora.

Za ansambl ulaznih signala određene srednje snage, čije trenutne vrednosti slede Laplasovu raspodelu, kombinovanjem jednačina (2.2) i (2.39) i smenom u jednačinu (2.33), oblik Bentovog integrala za izračunavanje granularne distorzije optimalnog komandora je sledeći:

$$D_g = \frac{9}{2N^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}x_{\max}}{3}\right) \right)^3. \quad (2.40)$$

Za slučaj kada je ulazni signal modelovan Gausovom funkcijom gustine verovatnoće Benetov integral za izračunavanje granularne distorzije optimalnog komandora se dobija kombinovanjem izraza (2.3) i (2.39) i smenom u izraz (2.33):

$$D_g = \frac{\sqrt{3}\pi}{2N^2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x_{\max}}{\sqrt{6}}\right) \right)^3, \quad (2.41)$$

pri čemu x_{\max} u prethodne dve jednačine označava amplitudu maksimalnog opterećenja komandora.

2.11 Skalarni kvantizeri promenljive dužine kodnih reči

Postupkom skalarnog kvantovanja se niz odmeraka sekvencijalno digitalizuje, što znači jedan odmerak u jednom trenutku. Za predstavljanje svakog odmerka, odnosno njegove kvantovane vrednosti, koristi se određeni broj binarnih cifara koji definiše rezoluciju, odnosno brzinu kvantizacije. Ova brzina se u literaturi obično označava sa R (*rate*), a određuje se na osnovu broja nivoa kvantovanja N , R [bit/odmerak] = $\log_2 N$ [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71]. Veza između bitske brzine prenosa r_b i brzine kvantizacije R je r_b [bit/s] = Rf_0 , gde je f_0 frekvencija odmeravanja, odnosno frekvencija koja definiše broj odmeraka koji se koduje u sekundi.

Niz izlaznih vrednosti koje se dobijaju postupkom kvantovanja obezbeđuje aproksimaciju originalnog niza odmeraka. Dodatnim korišćenjem pogodnog filtra za interpolaciju izvodi se rekonstrukcija aproksimiranog talasnog oblika ulaznog signala. Obzirom da tehnike kodovanja talasnog oblika teže da minimiziraju grešku između originalnog i aproksimiranog signala, cilj koji se pri projektovanju skalarnog kvantizera postavlja je da se za dati ulazni signal i raspoloživi kanal pronađu enkoder i dekoder koji daju najbolju moguću reprodukciju [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71].

U svim slučajevima od praktičnog interesa, broj nivoa kvantovanja N uzima konačnu vrednost, tako da je za predstavljanje odmeraka signala dovoljan konačan broj binarnih cifara. U posebnom slučaju, kada brzina R uzima celobrojnu vrednost, svakom reprezentacionom nivou se dodeljuje jedinstvena kodna reč dužine R . U praksi se pored kvantizera sa konstantnom brzinom, tj. kvantizera sa konstantnom dužinom kodne reči, koriste i kvantizeri čija se brzina menja u vremenu. U skladu sa ovom karakteristikom pomenutu klasu kvantizera čine tzv. kvantizeri sa promenljivom dužinom kodne reči [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71]. U sledećim odeljcima biće razmatrani kvantizeri sa promenljivom dužinom kodne reči, tj. biće detaljno objašnjen postupak proširenog Hafmanovog kodovanja pomoću koga se određuje promenljiva dužina kodnih reči.

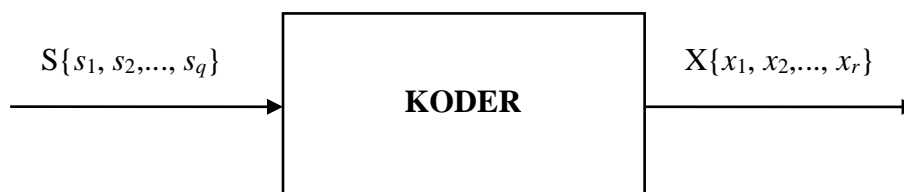
2.11.1 Prošireno Hafmanovo kodovanje

Kod (kodovanje) je preslikavanje sekvenci simbola liste izvora u sekvence simbola kodne liste [3], [14], [24], [32], [47], [50], [51], [58], [61], [64], [68], [71], [74], [84], [85]. Za ovakvu definiciju koda se može reći da je opšta i da obuhvata i šifrovanje. Na slici 2.13 je prikazana blok-šema kodera.

U konkretnom slučaju, posmatra se diskretni izvor s konačnim brojem simbola (q). Izvorna lista (S), koja se još naziva i azbuka (alfabet) izvora, predstavlja listu izvornih simbola, dok kodna lista (X) predstavlja listu kodnih simbola. Zajednička osobina izvorne i kodne liste simbola, jeste, da su i jedna i druga lista simbola konačne.

Blok kod (kodovanje) je preslikavanje simbola liste izvora u sekvence simbola kodne liste. Sekvence simbola kodne liste se nazivaju kodne reči. Dužina kodnih reči je određena brojem kodnih simbola u kodnim rečima. Blok kodove, u zavisnosti od dužine kodnih reči, možemo razvrstati u dve grupe. U prvu grupu se ubrajaju blok kodovi sa fiksnom dužinom kodnih reči, dok u drugu grupu spadaju blok kodovi sa promenljivom dužinom kodnih reči [3], [14], [24], [32], [47], [50], [51], [58], [61], [68], [71], [74], [84], [85].

Jedan od načina kojim se može odrediti promenljiva dužina kodnih reči jeste postupak proširenog Hafmanovog kodovanja. Hafmanova metoda kodovanja omogućava direktno nalaženje optimalnog koda [3], [14], [24], [32], [47], [50], [51], [58], [61], [68], [71], [74], [84], [85]. Algoritam je 1953. godine razvio Hafman (*David A. Huffman*) i objavio u radu [15]. Hafmanov postupak kodovanja je ustvari algoritam za koji se može jednostavno napisati program i koji ne zahteva nikakvo ispitivanje više mogućnosti, već direktno vodi nalaženju optimalnog koda. Danas, Hafmanov kod ima



Slika 2.13. Blok – šema kodera

veliku primenu. Hafmanov postupak kodovanja biće opisan na primeru binarnog koda.

Neka je dat izvor S sa simbolima $s_i, i = 1, 2, \dots, q$, čije su verovatnoće pojavljivanja $P_i, i = 1, 2, \dots, q$. Postupak Hafmanovog kodovanja se sastoji iz sledećih koraka:

Korak 1. Simbole treba urediti po nerastućim verovatnoćama, tako da je $P_1 \geq P_2 \geq \dots \geq P_q$. Ukoliko simboli imaju iste verovatnoće, njihov redosled pri uređivanju nije važan.

Korak 2. Dva najmanje verovatna simbola (s_{q-1} i s_q) treba zameniti jedinstvenim ekvivalentnim simbolom s'_{q-1} (tj. formirati njihovu uniju). Verovatnoća pojavljivanja ovog simbola je ravna zbiru verovatnoća simbola koje on zamenjuje. Na taj način je izvršena redukcija izvora S sa q simbola na izvor S_1 koji ima $q-1$ simbol.

Korak 3. Simboli redukovano izvora se ponovo uređuju po nerastućim verovatnoćama, jer novodobijeni simbol ne mora da bude najmanje verovatan. Zatim se opet vrši redukcija da bi se dobio izvor S_2 sa $q-2$ simbola. Ovaj process se nastavlja sve dok se ne izvrše $q-2$ redukcije i ne dobije izvor S_{q-2} sa samo dva simbola. Pri svakom uređivanju simbola po nerastućim verovatnoćama nije važan redosled u okviru grupe jednako verovatnih simbola.

Korak 4. Konstrukcija kodnih reči. Polazi se od redukovano izvora sa dva simbola i počinju da se pišu kodne reči na taj način što se jednom od simbola dodeljuje bit 0 kao kodna reč a drugom bit 1. Pošto su ovi simboli unije simbola iz prethodnih redukcija, ide se korak po korak unazad i unije se rastavljaju. Pri svakom rastavljanju dodaje se na odgovarajuće mesto u kodnu reč bit 0 ili 1, dok se ne dođe na prvobitni izvor. Kodna reč se formira od nula i jedinica koje se nalaze na putu od korena do čvora koji odgovara tom simbolu. Određivanje dužine kodnih reči primenom Hafmanovog kodovanja, postupkom opisanim u ova četiri koraka, prikazan je na slici 2.15 [69].

Za isti izvor i istu kodnu listu može postojati više optimalnih kodova [3], [11], [13], [14], [24], [50], [51], [71], [74], [84], [85]. Činjenica da može postojati više kompaktnih kodova različitih po konkretnim dužinama kodnih reči, a istih po srednjoj dužini kodnih reči, može se iskoristiti da se postave neki dodatni uslovi u pogledu izbora koda. Može se, na primer, zahtevati da se izabere kod čije dužine kodnih reči imaju manju varijansu, čime bi se mogli ublažiti zahtevi za memoriju kodera. Ovo se

postiže stavljanjem simbola dobijenog unijom iznad ostalih simbola sa istom verovatnoćom pojavljivanja [74].

U slučaju koda s višom kodnom osnovom ($r > 2$), očigledno je da se pri primeni Hafmanovog postupka vrši uvek redukcija r najmanje verovatnih simbola i tako ide do kraja, dok se pri vraćanju u kodne reči dodaju simboli, označeni sa $0, 1, \dots, r-1$. U opštem slučaju, posle poslednje redukcije ne mora da ostane tačno r simbola, već ih može biti i manje. Tada bi ostale neiskorišćene najkarće kodne reči. Da bi se ovo izbeglo, pri samom početku kodovanja (pre prve redukcije) treba dodati izvesan broj "lažnih simbola" s verovatnoćom pojavljivanja ravnom nuli. Ovaj broj se bira tako da posle poslednje redukcije ostane tačno r simbola. Pri vraćanju unazad ovim dodatim simbolima biće prema samom postupku pridružene najduže kodne reči, tako da neće biti nikakva šteta da se iz finalne tabele koda izostave.

Za Hafmanov kod se može reći da ima izvesne suštinske nedostatke [3], [14], [24], [50], [51], [71], [74], [84], [85]. Jedan od osnovnih nedostataka je što njegova primena zahteva poznavanje verovatnoća pojavljivanja simbola. Ako se radi o nekom govornom jeziku, onda su ove verovatnoće poznate, mada zavise i od prirode teksta. Međutim, danas se pored tekstova na nekom govornom jeziku prenose i druge vrste poruka (fajlovi, podaci, program napisani na različitim programskim jezicima, digitalizovane verzije govora i slike...). Prema tome, ako su verovatnoće simbola nepoznate na početku, mora se sačekati da pristigne celokupna poruka, da se statistički obradi i da se na osnovu toga odredi optimalni kod. Poruke mogu biti vrlo dugačke a može biti i nedopustivo veliko kašnjenje, tj. čekanje da cela poruka stigne koderu ili da bude generisana na samom mestu gde se nalazi koder.

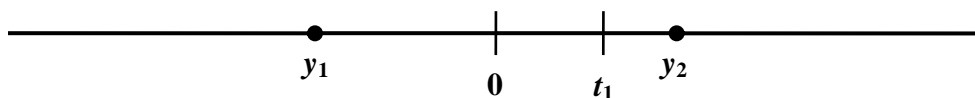
Verovatnoće se mogu procenjivati ili na početnom ili na dostupnom delu poruke. Međutim, greške u procenama verovatnoća mogu da dovedu do neoptimalnosti (nekompaktnosti) koda. Loš statistički model može dovesti do niske kompresione efikasnosti, ponekad i lošije nego da nije primenjeno statističko kodovanje. Ovo predstavlja vrlo realan problem, naročito uzimajući u obzir da se u velikom broju aplikacija statistike menjaju sa vremenom. Ovaj problem se može uspešno prevazići primenom adaptivnog (dinamičkog) Hafmanovog algoritma, kod koga se kodne reči koje odgovaraju pojedinom simbolima menjaju tokom vremena, a u skladu s trenutnim

verovatnoćama pojave pojedinih simbola [3], [14], [24], [50], [51], [71], [74], [84], [85].

Pored osetljivosti na gubljenje sinhronizacije i greške pri prenosu, znatno ozbiljniji nedostatak Hafmanovog postupka je što se izvor tretira kao izvor bez memorije. Tačnije rečeno, ako je u pitanju izvor s memorijom, ne koriste se statističke zavisnosti koje postoje u sekvenci izvornih simbola. Da bi se one uzele u obzir treba za svako stanje izvora doći do odgovarajućeg optimalnog koda. Još jedan problem koji se javlja prilikom upotrebe Hafmanovog kodovanja je efikasnost. Efikasnost se može povećati proširivanjem izvora, ali se može desiti da se tek pri proširenju višeg reda dobija kod koji ima željenu efikasnost. Pri takvom proširenju broj kodnih reči može da bude veoma veliki. Uzimanje u obzir statističke zavisnosti u sekvenci može se postići ako se verovatnoće simbola proširenog izvora ne računaju na osnovu prostih verovatnoća pojavljivanja (kao da je izvor bez memorije), već se dobijaju statističkom obradom poruke koju treba kodovati. Da bi ove verovatnoće bile pouzdane za proširenja višeg reda potrebna je poruka velike dužine. Svi ovi problemi dovode do ideje formiranja univerzalnog koda. Jedna vrsta univerzalnog kodovanja je Lempel-Zivov (LZ) postupak kodovanja [48], koji neće biti predmet razmatranja u ovoj disertaciji.

2.11.2 Konstrukcija kvantizera za koder sa proširenim Hafmanovim kodom

U cilju približavanja srednje bitske brzine entropiji izvora, došli smo na ideju da konstruišemo novu klasu asimetričnih skalarnih kvantizera sa dva nivoa kvantovanja, ne negativnom promenljivom granicom odlučivanja t_1 i proširenim Hafmanovim kodovanjem (slika 2.14) [103]. Ideja je da se za razliku od Lloyd-Max-ovog kvantizera ostvari asimetričnost reprezentacionih nivoa, koji bi za simetričnu funkciju gustine



Slika 2.14. Model asimetričnog kvantizera sa dva nivoa kvantovanja

verovatnoće nulte srednje vrednosti rezultirali nejednakom verovatnoćom reprezentacionih nivoa. Prikazani rezultati su dobijeni za ulazni signal opisan Laplasovom funkcijom gustine verovatnoće, koja je opisana jednačinom (2.2).

Ovakva konstrukcija kvantizera pruža osnov za primenu nekog postupka bešumne kompresije [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [60], [62], [70], [71], [77]. Među brojnim postupcima bešumne kompresije koji su spomenuti u prethodnom odeljku, najpogodnije je izabrati postupak proširenog Hafmanovog kodovanja. Postupkom proširenog Hafmanovog kodovanja postiže se najmanja srednja dužina kodnih reči za blokove od dva ili više simbola. Jedini uslov koji smo postavili prilikom projektovanja predloženog modela kvantizera je da vrednost kvaliteta signala, izražena SQNR-om ne opada više od 1dB od vrednosti SQNR-a optimalnog Lloyd-Max-ovog kvantizera [3], [6], [27], [28], [39], [41], [62], [63], [89]. Lloyd-Max-ov kvantizer sa dva nivoa kvantovanja i promenljivom granicom odlučivanja koja je jednaka nuli, predstavlja specijalan slučaj predloženog modela kvantizera. Kao i kod optimalnog Lloyd-Max-ovog kvantizera, reprezentacioni nivoi predloženog modela kvantizera su određeni iz uslova centroida [3], [6], [28], [46], [51], [62], [70], [77].

Performanse kvantizera najčešće su određene SQNR-om koji je definisan jednačinom (2.22). Za unapred određeni kvalitet signala definisan vrednošću SQNR-a, i jediničnu varijansu ulaznog signala $\sigma^2 = 1$, određujemo vrednosti ukupne distorzije:

$$D = \frac{\sigma^2}{10^{\frac{\text{SQNR}}{10}}} = \frac{1}{10^{\frac{\text{SQNR}}{10}}}. \quad (2.42)$$

Ukupna distorzija uneta kvantizacijom za predloženim model kvantizera sa dva nivoa kvantovanja definisana je sledećim izrazom:

$$D = \int_{-\infty}^{t_1} (x - y_1)^2 p(x) dx + \int_{t_1}^{\infty} (x - y_2)^2 p(x) dx, \quad (2.43)$$

pri čemu y_1 i y_2 predstavljaju reprezentacione nivoe određene iz uslova centroida.

Za pretpostavljenu Laplasovu funkciju gustine verovatnoće jedinične varijanse:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}|x|), \quad (2.44)$$

reprezentacioni nivoi y_1 i y_2 su jednaki:

$$y_1 = \frac{\int_{-\infty}^{t_1} xp(x)dx}{\int_{-\infty}^{t_1} p(x)dx} = \frac{\sqrt{2} + 2t_1}{2 - 4\exp(\sqrt{2}t_1)}, \quad (2.45)$$

$$y_2 = \frac{\int_{t_1}^{\infty} xp(x)dx}{\int_{t_1}^{\infty} p(x)dx} = t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.46)$$

Na osnovu poslednja dva izraza može se uočiti da reprezentacioni nivoi predloženog modela kvantizera nisu simetrični. Zamenom izraza (2.44), (2.45) i (2.46) u izraz (2.43), dobijamo izraz za ukupnu distorziju predloženog modela kvantizera u zavisnosti od promenljive granice odlučivanja t_1 , u zatvorenom obliku:

$$D = \frac{3 - 4\exp(\sqrt{2}t_1) + 2\sqrt{2}t_1 + 2t_1^2}{2 - 4\exp(\sqrt{2}t_1)}. \quad (2.47)$$

Na osnovu poslednjeg izraza, za vrednosti distorzije dobijene izračunavanjem formule (2.42) za zadati opseg vrednosti SQNR-a, mogu se odrediti odgovarajuće vrednosti promenljive granice odlucivanja t_1 , odnosno izvršiti konstrukcija predloženog modela kvantizera.

2.11.3 Određivanje optimalne dužine kodnih reči proširenim Hafmanovim kodovanjem

Kao što je već objašnjeno, postupak Hafmanovog kodovanja podrazumeva određivanje optimalne dužine kodnih reči za dobijene verovatnoće simbola. Ponekad je korisno da se dodatno smanji bitska brzina, kodovanjem blokova simbola, koji se sastoje od dva ili više simbola. U takvim slučajevima se koristi postupak proširenog Hafmanovog kodovanja. Naime, prošireno Hafmanovo kodovanje je postupak određivanja optimalne dužine kodnih reči za blokove od dva ili više simbola.

Označimo sa p_1 verovatnoću da je vrednost odmerka ulaznog signala manja od vrednosti promenljive granice odlučivanja t_1 . Za Laplasovu funkciju gustine verovatnoće, verovatnoća p_1 jednaka je:

$$p_1 = \int_{-\infty}^{t_1} p(x)dx = 1 - \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2}t_1), \quad (2.48)$$

dok je verovatnoća da je vrednost odmerka ulaznog signala veća od vrednosti promenljive granice odlučivanja t_1 , označena sa p_2 , jednaka:

$$p_2 = \int_{t_1}^{\infty} p(x)dx = \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2}t_1). \quad (2.49)$$

Ove verovatnoće se ustvari odnose na verovatnoće simbola, tj. na verovatnoće pojavljivanja reprezentacionih nivoa y_1 i y_2 . Pošto se kvantizer sastoji od dva nivoa kvantovanja, mi zapravo razmatramo dva izvora simbola. Verovatnoće blokova simbola, koji se sastoje od dva ili više simbola, definisane su na sledeći način:

$$P_{i,j} = p_i p_j, \quad i = 1, 2, j = 1, 2, \quad (2.50)$$

$$P_{i,j,\dots,k} = p_i p_j \dots p_k, \quad i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k = 1, 2. \quad (2.51)$$

Entropija izvora za blokove od dva ili više simbola, opisana je sledećim izrazima [3], [14], [24], [32], [50], [51], [61], [71], [74], [84], [85]:

$$H = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_{i,j} \log \frac{1}{P_{i,j}}, \quad (2.52)$$

$$H = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dots \sum_{k=1}^2 P_{i,j,\dots,k} \log \frac{1}{P_{i,j,\dots,k}}. \quad (2.53)$$

Srednja bitska brzina predloženog modela kvantizera za blokove od dva simbola jednaka je:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 P_{i,j} l_{i,j}, \quad (2.54)$$

pri čemu je sa $l_{i,j}$, $i = 1, 2, j = 1, 2$, označena dužina kodnih reči koje se određuju primenom postupka proširenog Hafmanovog kodovanja. Slično tome, srednja bitska brzina za blokove od više simbola određena je sledećim izrazom:

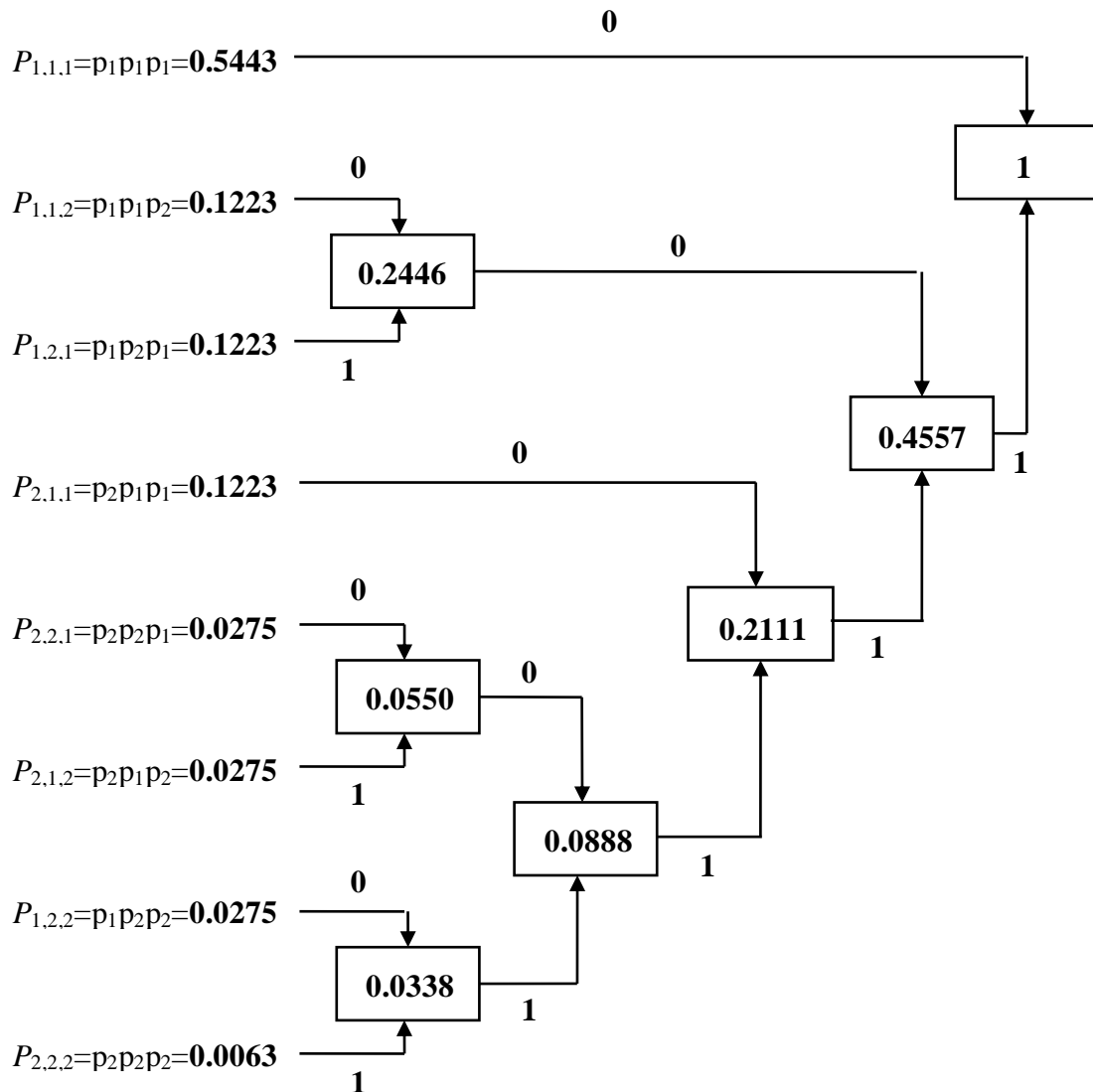
$$\bar{R} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \dots \sum_{k=1}^2 P_{i,j,\dots,k} l_{i,j,\dots,k} \quad (2.55)$$

Postupak određivanja dužine kodne reči proširenim Hafmanovim kodovanjem je isti kao postupak određivanja dužine kodne reči Hafmanovim kodovanjem koji je opisan u odeljku (2.11.1), samo što se umesto verovatnoća simbola koriste verovatnoće blokova simbola. Primer određivanja dužine kodnih reči za predloženi model kvantizera sa proširenim Hafmanovim kodovanjem prikazan je na slici 2.15, za slučaj kada su vrednosti verovatnoća odmeraka $p_1 = 0.8165$ i $p_2 = 0.1835$, a broj odmeraka $M = 3$. U tom slučaju imamo osam verovatnoća bloka odmeraka $P_{i,j,k}$, $i = 1, 2, j = 1, 2, k = 1, 2$, čije su vrednosti prikazane u tabeli 2.1. Rezultat postupka određivanja dužine kodnih reči proširenim Hafmanovim kodovanjem je formiranje Hafmanove kodna knjige. koja je za primer prikazan na slici 2.15 data u tabeli 2.1.

Vrednost SQNR-a optimalnog Lloyd-Max-ovog kvantizera koji se sastoji od dva niova kvantovanja, za slučaj Laplasove funkcije gustine verovatnoće jedinične varijanse jednaka je 3 dB [3], [6], [27], [28], [39], [41], [62], [63], [89]. Zbog toga, opseg vrednosti SQNR-a u kome razmatramo performanse predloženog modela kvantizera kreće u rasponu od 2 dB do 3 dB.

Tabela 2.1. Hafmanova kodna knjiga za primer za slike 2.15

Verovatnoće blokova simbola	Hafmanov kod	Dužina kodnih reči
$P_{1,1,1}=0.5443$	0	1
$P_{1,1,2}=0.1223$	100	3
$P_{1,2,1}=0.1223$	101	3
$P_{1,2,2}=0.0275$	11110	5
$P_{2,1,1}=0.1223$	110	3
$P_{2,1,2}=0.0275$	11101	5
$P_{2,2,1}=0.0275$	11100	5
$P_{2,2,2}=0.0063$	11111	5



Slika 2.15. Određivanje dužine kodnih reči postupkom proširenog Hafmanovog kodovanja

U tabeli 2.2 prikazane su vrednosti distorzije i promenljive granice odlučivanja, dobijene za zahtevani kvalitet signala meren SQNR-om. Za tako određene vrednosti promenljive granice odlučivanja u tabeli 2.3 prikazane su odgovarajuće vrednosti verovatnoća odmeraka, entropije i srednje bitske brzine za blokove od dva, tri, četiri i pet odmeraka.

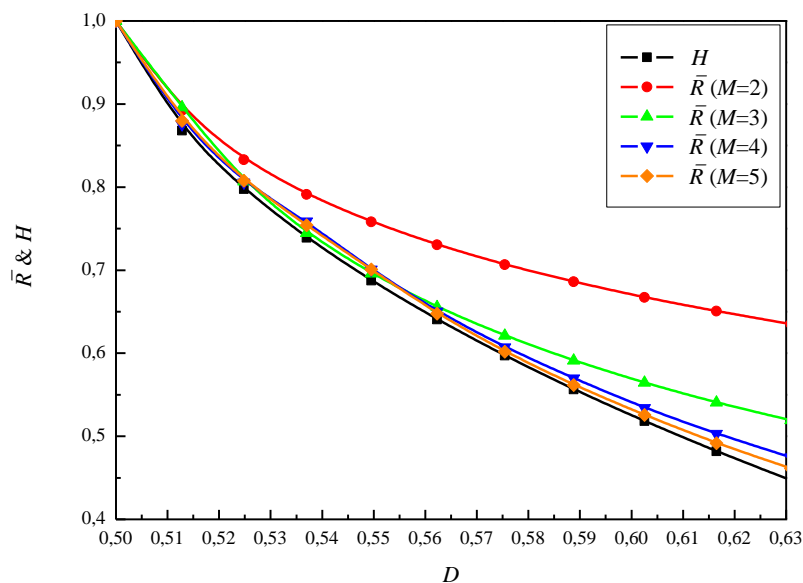
Tabela 2.2. Vrednosti distorzije i promenljive granice odlučivanja za zahtevani kvalitet signala meren SQNR-om

SQNR [dB]	D	t_1
2	0.6309	1.1876
2.1	0.6165	1.1096
2.2	0.6025	1.0324
2.3	0.5888	0.9546
2.4	0.5754	0.8756
2.5	0.5623	0.7943
2.6	0.5495	0.7091
2.7	0.5370	0.6176
2.8	0.5248	0.5147
2.9	0.5128	0.3866
3	0.5	0

Tabela 2.3. Vrednosti verovatnoća odmeraka, entropije i srednje bitske brzine za blokove od dva, tri, četiri i pet odmeraka

p_1	p_2	H	$\bar{R} (M=2)$	$\bar{R} (M=3)$	$\bar{R} (M=4)$	$\bar{R} (M=5)$
0.9067	0.0932	0.4471	0.6353	0.5191	0.4749	0.4612
0.8958	0.1041	0.4819	0.6506	0.5406	0.5030	0.4918
0.8838	0.1161	0.5181	0.6673	0.5643	0.5343	0.5256
0.8703	0.1296	0.5564	0.6859	0.5909	0.5697	0.5616
0.8550	0.1449	0.5970	0.7067	0.6209	0.6073	0.6017
0.8373	0.1626	0.6405	0.7306	0.6555	0.6504	0.6475
0.8165	0.1834	0.6878	0.7582	0.6958	0.7008	0.7009
0.7912	0.2087	0.7390	0.7911	0.7445	0.7588	0.7542
0.7585	0.2414	0.7974	0.8328	0.8066	0.8056	0.8075
0.7105	0.2894	0.8680	0.8921	0.8958	0.8758	0.8796
0.5	0.5	1	1	1	1	1

Zavisnost srednje bitske brzine i entropije izvora od distorzije, za predloženi model kvantizera Laplasovog izvora, za blokove od dva, tri, četiri i pet odmeraka prikazana je na slici 2.16. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 2.3 i slici 2.16, može se uočiti da se srednja bitska brzina predloženog modela kvantizera sa proširenim Hafmanovim kodovanjem više približava entropiji izvora za blokove simbola koji se sastoje od pet simbola nego u ostalim slučajevima. Na osnovu te činjenice moglo bi se pretpostaviti da bi formiranjem blokova koji se sastoje od velikog broja simbola na jednostavan način ostvarilo željeno približavanje srednje bitske brzine entropiji izvora.



Slika 2.16. Zavisnost srednje bitske brzine i entropije izvora od ukupne distorzije predloženog modela kvantizera za Laplasov izvor

Međutim, povećanjem broja odmeraka, postupak proširenog Hafmanovog kodovanja postaje nepraktičan jer se složenost koderu rapidno povećava, dok se vrednost srednje bitske brzine ne smanjuje značajno. Shodno tome, našu analizu usmerićemo na blokove koji se sastoje od tri odmerka, jer se za blokove od tri odmerka može napraviti kompromis između složenosti koderu i vrednosti srednje bitske brzine.

Na osnovu dobijenih rezultata, može se zaključiti da kada vrednost SQNR-a predloženog modela kvantizera odstupa do 0.5 dB od vrednosti SQNR-a optimalnog Lloyd-Max-ovog kvantizera [3], [6], [27], [28], [39], [41], [62], [63], [89], postoji vrlo malo odstupanje srednje bitske brzine od entropije izvora za slučaj kada na ulazu kvantizera imamo blokove od tri odmerka. U slučaju kada vrednost SQNR-a predloženog modela kvantizera odstupa od 0.5 dB do 1dB od vrednosti SQNR-a optimalnog Lloyd-Max-ovog kvantizera, uočava se malo veće odstupanje srednje bitske brzine od entropije izvora.

Takođe, može se uočiti da je približavanje srednje bitske brzine entropiji izvora, za oba opsega, veće za blokove od tri odmerka nego za blokove od dva odmerka. Važno je uočiti da smanjenjem SQNR-a za 0.5 dB ostvarujemo smanjenje srednje bitske brzine

za 0.35 bita (za blokove od tri odmerka), čime novi model kvantizera koji predlažemo predstavlja veoma efikasno rešenje, jer u posmatranoj okolini smanjenju srednje bitske brzine od 0.35 bita odgovaralo bi smanjenje SQNR-a za 1.08 dB. Ovaj rezultat nije moguće postići nekim drugim poznatim postupkom konstrukcije simetričnih kvantizera. Dakle, prednost našeg asimetričnog kvantizera u odnosu na simetrične kvantizere je da se za istu srednju bitsku brzinu ostvaruje veći kvalitet signala, meren SQNR-om.

Konačno, iz poslednjeg reda u tabeli 2.3 može se uočiti da je optimalni Lloyd-Max-ov kvantizer specijalan slučaj predloženog modela kvantizera. Kod optimalnog Lloyd-Max-ovog kvantizera promenljiva granica odlučivanja t_1 je jednaka nuli, pa su zbog toga reprezentacioni nivoi simetrični, i za slučaj Laplasove funkcije gustine verovatnoće su jednaki:

$$y_1 = \frac{\int_{-\infty}^0 xp(x)dx}{\int_{-\infty}^0 p(x)dx} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{\int_0^{\infty} xp(x)dx}{\int_0^{\infty} p(x)dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.42)$$

Zbog simetričnosti reprezentacionih nivoa, verovatnoće p_1 i p_2 su jednake. Za takav raspored verovatnoća p_1 i p_2 , vrednosti entropije i srednje bitske brzine kod optimalnog Lloyd-Max-ovog kvantizera sa dva reprezentaciona nivoa su jednake i iznose jedan.

3 Linearizacija kompresorske funkcije

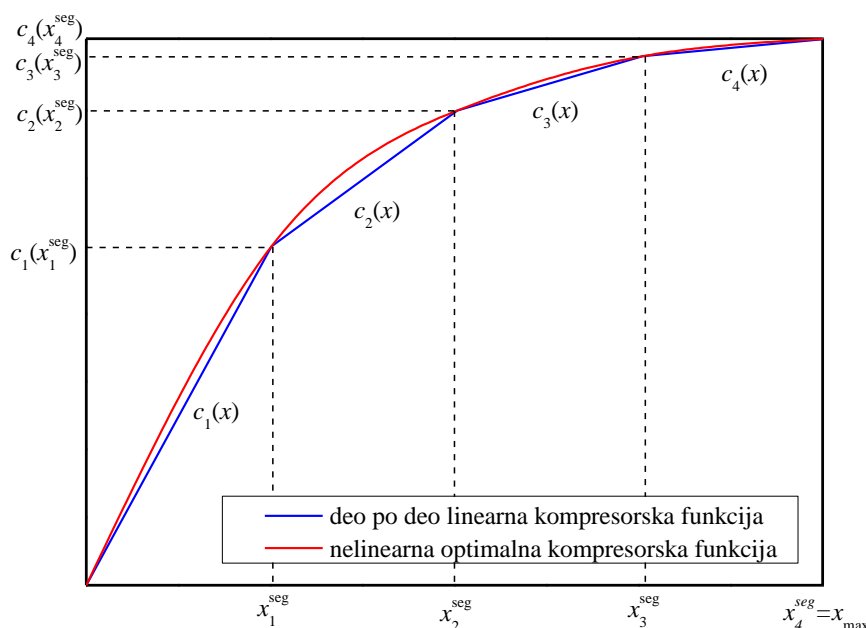
3.1 Uvod

Posmatrano iz analitičkog ugla, model trenutne kompresije opisan u prethodnom poglavlju je vrlo jednostavan. Poznavanjem kompresorske funkcije, model komandora je potpuno definisan [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [67], [70], [71], [77]. Potpunim definisanjem modela komandora, određeni su svi potrebni parametri za njegovo projektovanje. Međutim, projektovanje modela komandora definisanog na ovakav način je veoma složeno, kako sa hardverskog tako i sa softverskog stanovišta. Što se tiče hardverske realizacije, vrlo je teško upariti karakteristike kompresora i ekspanzora. Takođe, nije moguće dobiti više identičnih parova kompresor-ekspanzor.

Jedan od najvećih problema prilikom softverske realizacije jeste obezbeđivanje dovoljne količine memorije. Naime, zbog velikog broja izlaznih nivoa, kao i zbog velikog broja aritmetičkih operacija koje je potrebno izvršiti da bi se našao odgovarajući izlaz za svaki ulazni odmerak, odnosno zbog postupka potpunog pretraživanja (potrebno je ispitati grešku unetu kvantizacijom u odnosu na sve izlazne vrednosti i opredeliti se za onu izlaznu vrednost koja daje najmanju grešku unetu kvantizacijom), količina potrebnih memorijskih resursa se značajno povećava. Takođe, neophodnost potpunog pretraživanja ima za posledicu veće kašnjenje usled kvantizacije [1], [2], [3], [6], [28], [29], [46], [51], [59], [62], [66], [70], [71], [72], [76], [77].

Zbog svih navedenih ograničenja u procesu realizacije modela komandora, postoji realna potreba za uprošćavanjem istog, pri čemu treba voditi računa da performanse modela ostanu na zahtevanom nivou. Zapravo, cilj koji se želi postići linearizacijom jeste smanjenje kompleksnosti neuniformnog optimalnog komandora kvantizera, uz uslov da se zadrže performanse bliske performansama optimalnog komandora kvantizera [3], [4], [16], [28], [36], [37], [45], [46], [62], [70], [75], [86].

Linearizacija optimalne kompresorske funkcije, odnosno aproksimacija kompresorske funkcije pravolinijskim segmentima predstavlja jedan od postupaka kojim se vrši uprošćavanje modela komandora u cilju njegove jednostavnije realizacije (slika 3.1) [53], [94], [96], [102], [104], [106].



Slika. 3.1. Aproksimacija kompresorske funkcije pravolinijskim segmentima

Kao rezultat linearizacije optimalne kompresorske funkcije dobija se model čiji su izlazni nivoi podeljeni na segmente unutar kojih su izlazni nivoi ekvidistantni (nalaze se na jednakom rastojanju).

Segmenti su razgraničeni granicama segmenata. Nagib linearizovane karakteristike na određenom segmentu određuje veličinu amplitudskih kvanata u okviru tog segmenta. Veličina amplitudskih kvanata je konstantna u delovima amplitudskog opsega sa konstantnim nagibom linearizovane kompresorske funkcije. Kvantizer koji se dobija postupkom linearizacije kompresorske funkcije naziva se deo po deo linearni kvantizer. Deo po deo linearni skalarni kvantizeri se u literaturi sreću i pod nazivom deo po deo uniformni skalarni kvantizeri jer linearna kompresorska funkcija odgovara modelu uniformnog kvantizera [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71].

Definisanjem granica segmenata i broja reprezentacionih nivoa deo po deo linearnog kvantizera, omogućuje se njegova softverska realizacija. Kod deo po deo linearnih kvantizera proces kvantizacije se obavlja bez potpunog pretraživanja, tj. prvo se određuje segment kome pripada ulazni odmerak, a potom se vrši uniformna kvantizacija u tom segmentu. Na ovaj način se skup pretraživanja umnogome smanjuje

s obzirom da je broj segmenata mali, pa je i kašnjenje usled kvantizacije značajno manje. Za slučaj simetričnih kvantizera, koji su predmet razmatranja ove disertacije, pretraživanje se svodi samo na pozitivni ili samo na negativni deo amplitudske ose. Na taj način se skup pretraživanja smanjuje skoro dva puta [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71].

U naredna tri odeljka detaljno se opisuje konstrukcija deo po deo linearnih kvantizera i vrši se analiza njihovih performansi. Dobijeni rezultati pokazuju da modeli deo po deo linearnih kvantizera predloženi u ovoj disertaciji predstavljaju veoma efikasno rešenje, jer se modelima veoma male kompleksnosti ostvaruju vrednosti SQNR-a koje su veoma bliske vrednostima SQNR-a nelinearnog optimalnog kompadding kvantizera.

3.2 Konstrukcija deo po deo linearnog kvantizera sa jednakim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima

Linearizacija logaritamskih A i μ zakona kompresije izvršena je definisanjem dobro poznatih segmentnih A i μ zakona kompresije, u kojima se ulazni opseg kvantizera deli na segmente. Unutar svakog segmenta koristi se linearna kompresorska funkcija, tj. vrši se uniformna podela segmenta na ćelije. Na taj način se dobija deo po deo uniformni kvantizer. Broj ćelija u svakom segmentu je isti i moguće je primeniti hijerarhijsko kodovanje. Postupkom hijerarhijskog kodovanja prvo se koduje segment pa onda ćelije unutar segmenta.

Postupak linearizacije nelinearne optimalne kompresorske funkcije za ulazni signal Laplasove raspodele, koji smo predložili u radu [106], vrši se na sličan način kao za segmentni A i μ zakon kompresije – svi segmenti imaju isti broj ćelija i vrši se hijerarhijsko kodovanje. Poseban doprinos ovog rada predstavlja optimizacija amplitude maksimalnog opterećenja razmatranih kvantizera poštujući kriterijum minimuma distorzije, čime je ostvareno poboljšanje u odnosu na dosadašnje poznate tehnike linearizacije. U radu [106] predstavljena su četiri načina optimizacije amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera i dobijene su vrednosti SQNR-a koje su bliske vrednostima SQNR-a za nelinearni optimalni kompadding kvantizer.

Model deo po deo linearnog skalarnog kvantizera koji smo predložili u radu [106], dobijen je tako što se ulazni amplitudski opseg kvantizera podeli na L segmenata, nakon čega se svaki segment uniformno deli na N/L ćelija jednake širine. Pošto su granice odluka i reprezentacioni nivoi u negativnom delu realne ose simetrični onima u pozitivnom delu, tj. zbog simetrije kvantizera, razmatra se samo pozitivni deo karakteristike.

Nelinearna optimalna kompresorska funkcija $c(x)$ kojom se ostvaruje maksimalna vrednost SQNR-a za referentnu varijansu ulaznog signala x definisana je izrazom (2.39). Bez umanjenja opštosti, projektovanje kvantizera je urađeno za slučaj Laplasovog izvora, opisanog jednačinom (2.2), nulte srednje vrednosti i referentne snage $\sigma_{ref}^2 = 1$. Određivanjem optimalne kompresorske funkcije u granicama odluke $c(t_i)$ i reprezentacionim nivoima $c(y_i)$, uz poštovanje uslova:

$$c(t_i) = i \frac{2x_{\max}}{N\Delta_i}, \quad (3.1)$$

$$c(y_i) = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{2x_{\max}}{N\Delta_i}, \quad (3.2)$$

dolazimo do sledećih izraza za granice odluke t_i , i za reprezentacione nivoe y_i , $i = N/2 + 1, \dots, N$:

$$t_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{2N - 2i + (2i - N) \exp\left(-\frac{\sqrt{2} x_{\max}}{3}\right)} \right), \quad (3.3)$$

$$y_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{2N - 2i + 1 + (2i - N - 1) \exp\left(-\frac{\sqrt{2} x_{\max}}{3}\right)} \right). \quad (3.4)$$

Kako bi linearizovani model predstavljao dostojnu zamenu originalnog nelinearnog modela, veoma je važan pravilan odabir amplitudskog opsega kvantizera [28], [62], [78], [80], [82], [98], [99], [100]. U radu [106] su razmatrana dva slučaja. U

prvom slučaju je pretpostavljeno da maksimalna amplituda kvantizera x_{\max} ima konačnu vrednost. Optimalna vrednost maksimalne amplitude kvantizera jednaka je [107]:

$$x_{\max} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(N + 1). \quad (3.5)$$

U drugom slučaju koji razmatramo, važi pretpostavka da maksimalna amplituda kvantizera teži beskonačnosti, $x_{\max} \rightarrow \infty$. U tom slučaju izrazi za granice odluke t_i , jednačina (3.3), i reprezentacione nivoe y_i , jednačina (3.4), dobijaju sledeće oblike:

$$t_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{N}{2N - 2i}\right), \quad (3.6)$$

$$y_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{N}{2N - 2i + 1}\right). \quad (3.7)$$

Granice među segmentima, u pozitivnom delu karakteristike, označene sa t_i^* , $i = L/2 + 1, \dots, L$, određuju se pomoću sledećeg izraza:

$$t_i^* = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{L}{2L - 2i + (2i - L) \exp\left(-\frac{\sqrt{2} x_{\max}^*}{3}\right)}\right), \quad (3.8)$$

pri čemu x_{\max}^* označava maksimalnu amplitudu linearizovanog deo po deo uniformnog kvantizera. Veličina ćelija Δ_i^* , u i -tom segmentu jednaka je:

$$\Delta_i^* = \frac{t_i^* - t_{i-1}^*}{N/L}. \quad (3.9)$$

Sa $t_{i,j}$, $i = 1, \dots, L$; $j = 0, \dots, N/L$ označili smo granične tačke između ćelija u i -tom segmentu, pri čemu je $t_{i,0} = t_{i-1}^*$ i $t_{i,N/L} = t_i^*$. Sa $y_{i,j}$, $i = 1, \dots, L$; $j = 1, \dots, N/L$ označili smo reprezentacioni nivo j -te ćelije u i -tom segmentu. Zbog uniformne podele segmenata na ćelije važi:

$$t_{i,j} = t_{i-1}^* + j\Delta_i, \quad (3.10)$$

$$y_{i,j} = t_{i-1}^* + (j-1/2)\Delta_i. \quad (3.11)$$

Granularna distorzija za linearizovani model, određuje se sledećim izrazom:

$$D_g = 2 \sum_{i=1}^{L/2} \frac{\Delta_i^2}{12} P_i, \quad (3.12)$$

pri čemu je P_i verovatnoća da trenutna vrednost amplitude ulaznog signala pripada i -tom segmentu $[t_{i-1}, t_i]$:

$$P_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(x) dx = \frac{1}{2} \left(\exp(-t_{i-1}^*) - \exp(-t_i^*) \right). \quad (3.13)$$

3.2.1 Opimizacija amplitude maksimalnog opterećenja deo po deo linearnog skalarnog kvantizera

U cilju smanjenja distorzije i povećanja kvaliteta izlaznog signala, u radu [106] izvršili smo optimizaciju zadnjeg, L -tog segmenta kvantizera ($t_{L-1}^*, t_L^* = x_{\max}^*$) i dali izraze za maksimalnu amplitudu linearizovanog kvantizera x_{\max}^* i za granicu granularnog regiona $t'_{N-1} = t_{L,N/L-1}$. Predložili smo četiri metoda za optimizaciju amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera. Metod I se odnosi na slučaj kada maksimalna amplituda kvantizera teži beskonačnosti, $x_{\max} \rightarrow \infty$, dok se metod II, metod III i metod IV, odnose na slučaj kada maksimalna amplituda kvantizera, x_{\max} , ima konačnu vrednost predstavljenu jednačinom (3.5).

Metod I. Ovaj metod se odnosi na slučaj kada maksimalna amplituda nelinearizovanog kvantizera teži beskonačnosti, $x_{\max} \rightarrow \infty$. Postavlja se pitanje, kako odrediti maksimalnu amplitudu linearizovanog kvantizera x_{\max}^* , jer x_{\max}^* mora da ima konačnu vrednost. To je urađeno na sledeći način: na osnovu formula (3.6) i (3.7) određena je granica odluke i reprezentacioni nivo za nelinearizovanu karakteristiku:

$$t_{N-1} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(N/2), \quad (3.14)$$

$$y_N = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(N). \quad (3.15)$$

Na osnovu sledećih jednakosti, $t'_{N-1} \equiv t_{L,N/L-1} = t_{N-1}$ i $y_{L,N/L} = y_N$, određuje se veličina ćelije u poslednjem segmentu, Δ_L^* , kao $\Delta_L^* = 2(y_{L,N/L} - t'_{N-1})$, nakon čega se nalazi maksimalna amplituda linearizovanog kvantizera x_{\max}^* , kao $x_{\max}^* \equiv t_L^* = t'_{N-1} + \Delta_L^*$.

Metod II. Prema ovom metodu, maksimalnu amplitudu linearizovanog kvantizera x_{\max}^* , biramo tako da bude jednaka maksimalnoj amplitudi nelinearizovanog kvantizera x_{\max} , koja je opisana jednačinom (3.5). U ovom slučaju, veličina amplitudskog kvanta Δ_L jednaka je:

$$\Delta_L = \frac{x_{\max}^* - t_{L-1}^*}{N/L}. \quad (3.16)$$

Granica granularnog regiona iznosi:

$$t'_{N-1} = x_{\max}^* - \Delta_L. \quad (3.17)$$

Metod III. U ovom metodu, granice segmenata $t_{L/2+1}^*, \dots, t_{L-1}^*$ određujemo pomoću formule (3.8), pri čemu je maksimalna amplituda linearizovanog kvantizera x_{\max}^* jednaka maksimalnoj amplitudi nelinearizovanog kvantizera x_{\max} , opisana formulom (3.5). Optimizaciju odnosa signal-šum kvantizacije je veoma teško ostvariti analitički jer mnogi parametri kvantizera posredno zavise od veličine amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera [28], [40], [62], [78], [80], [82], [98], [99], [100]. Zbog toga smo se opredelili da u ovom metodu i metodu IV, poštujući kriterijum minimuma distorzije, numerički optimizujemo amplitude maksimalnog opterećenja razmatranih kvantizera. Poslednji segment optimizujemo na sledeći način: granicu granularnog regiona t'_{N-1} određujemo numerički, minimizujući ukupnu distorziju u poslednjem segmentu:

$$D_L = \frac{\Delta_L^2}{12} \int_{t_{L-1}^*}^{t_{N-1}'} p(x) dx + D_p, \quad (3.18)$$

pri čemu je distorzija prekoračenja u ovom slučaju iznosi:

$$D_p = 2 \int_{t_{N-1}}^{\infty} (x - y_N)^2 p(x) dx. \quad (3.19)$$

Reprezentacioni nivo y_N jednak je:

$$y_N = t_{N-1}' + \frac{\Delta_L}{2}. \quad (3.20)$$

Veličinu amplitudskog kvanta Δ_L određujemo pomoću jednačine (3.16).

Metod IV. Prema metodu IV, granicu granularnog regiona t_{N-1}' određujemo numerički, postajući pri tom kriterijum minimuma ukupne distorzije za poslednji segment, D_L . U ovom slučaju, poslednji reprezentacioni nivo y_N se određuje iz uslova centroida [3], [6], [28], [46], [51], [62], [70], [77]:

$$y_N = \frac{\int_{t_{N-1}'}^{\infty} xp(x) dx}{\int_{t_{N-1}'}^{\infty} p(x) dx}, \quad (3.21)$$

Vrednost ukupne distorzije za poslednji segment, D_L , u ovom slučaju iznosi:

$$D_L = \frac{\Delta_L^2}{12} \int_{t_{L-1}^*}^{t_{N-1}'} p(x) dx + \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2}t_{N-1}'), \quad (3.22)$$

pri čemu Δ_L :

$$\Delta_L = \frac{t_{N-1}' - t_{L-1}^*}{N/L - 1}, \quad (3.23)$$

predstavlja veličinu amplitudskog kvanta u poslednjem segmentu,

3.2.2 Performanse deo po deo linearnog skalarnog kvantizera sa jednakim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima

Analiza performansi prethodno opisanog linearizovanog modela deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera izvršena je upoređivanjem sa performansama nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera [3], [4], [16], [28], [36], [37], [45], [46], [62], [70], [75], [86], [101]. Kako bismo utvrdili na koji način linearizacija utiče na performanse kvantizera došli smo na ideju da uporedimo vrednosti granularne distorzije po segmentima, predloženog linearizovanog modela i nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera.

Granularna distorzija predloženog linearizovanog modela, na intervalu $[-t_i^*, t_i^*]$, označena sa $D_g^L(t_i^*)$, određena je izrazom:

$$D_g^L(t_i^*) = 2 \sum_{k=1}^i \frac{\Delta_k^{*2}}{12} P_k, \quad i = L/2 + 1, \dots, L, \quad (3.24)$$

gde P_k predstavlja verovatnoću da trenutna vrednost amplitude ulaznog signala pripada k -tom regionu $[t_{k-1}^*, t_k^*]$:

$$P_k = \int_{t_{k-1}^*}^{t_k^*} p(x) dx = \frac{1}{2} \left(\exp(-t_{k-1}^*) - \exp(-t_k^*) \right). \quad (3.25)$$

Granularna distorzija nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera se može izračunati na dva načina. Prvi način predstavlja analitičko rešenje Benetovog integrala opisanog jednačinom (2.33), pri čemu je optimalna kompresorska funkcija opisana jednačinom (2.39), dok je maksimalna amplituda nelinearizovanog kvantizera određena jednačinom (3.5). Na taj način, granularna distorzija je određena izrazom (2.33), koji prilagođen ovom slučaju, na intervalu $[-t_i^*, t_i^*]$, ima sledeći oblik:

$$D_g^B(t_i^*) = \frac{9}{2N^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}t_i^*}{3}\right) \right), \quad i = L/2 + 1, \dots, L. \quad (3.26)$$

Drugi način za određivanje granularne distorzije nelinearnog optimalnog kompadding kvantizera jeste korišćenje sledećeg izraza za tačno izračunavanje granularne distorzije:

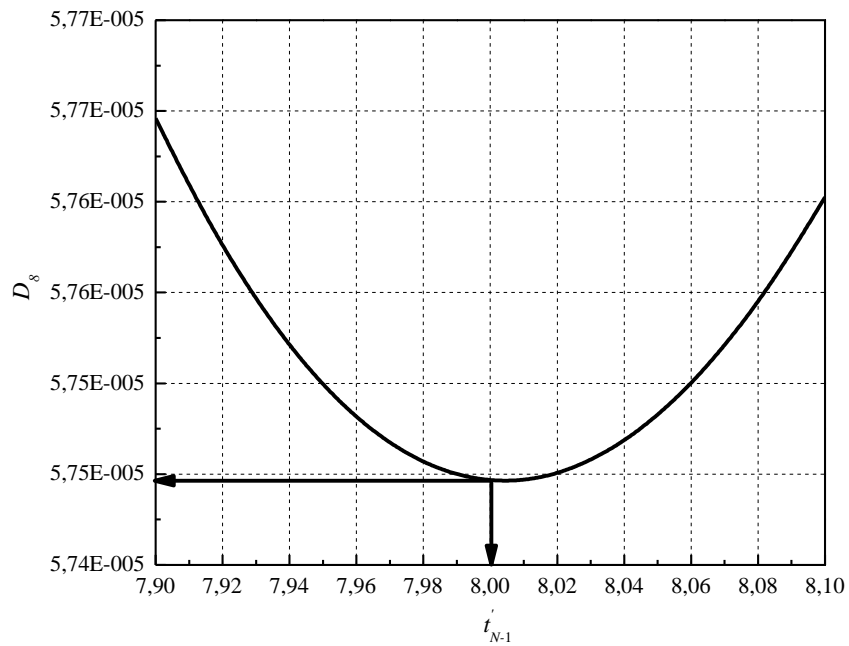
$$D_g^T(t_i^*) = 2 \sum_{k=L/2+1}^i \sum_{j=1}^{N/L} \int_{t_{k,j-1}}^{t_{k,j}} (x - y_{k,j})^2 p(x) dx, \quad i = L/2+1, \dots, L. \quad (3.27)$$

U tabeli 3.1 prikazane su vrednosti granularne distorzije po segmentima za nelinearni optimalni kompadding kvantizer i predloženi deo po deo linearni skalarni kvantizer. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 3.1 može se uočiti da je vrednost granularne distorzije deo po deo linearnog skalarnog kvantizera veoma bliska vrednosti granularne distorzije nelinearnog optimalnog kompadding kvantizera na intervalu $[-t_i^*, t_i^*]$, $i = 9, \dots, 15$. Na osnovu ovih rezultata može se zaključiti da linearizacija unutrašnjih segmenata vrlo malo utiče na povećanje granularne distorzije deo po deo linearnog skalarnog kvantizera. Međutim, posmatranjem poslednje kolone tabele 3.1, možemo primetiti da je vrednost granularne distorzije deo po deo linearnog skalarnog kvantizera na intervalu $[-t_{16}^*, t_{16}^*]$ znatno veća (za oko 30%) od vrednosti granularne distorzije nelinearnog optimalnog kompadding kvantizera. To znači da poslednji segment, $[t_{15}^*, t_{16}^*]$, ima najveći uticaj na povećanje vrednosti granularne distorzije deo po deo linearnog skalarnog kvantizera. Na osnovu analize vrednosti granularne distorzije po segmentima i uticaja zadnjeg regiona, u metodu III i metodu IV granicu granularnog regiona t'_{N-1} određujemo numerički, poštujući kriterijum minimuma ukupne distorzije.

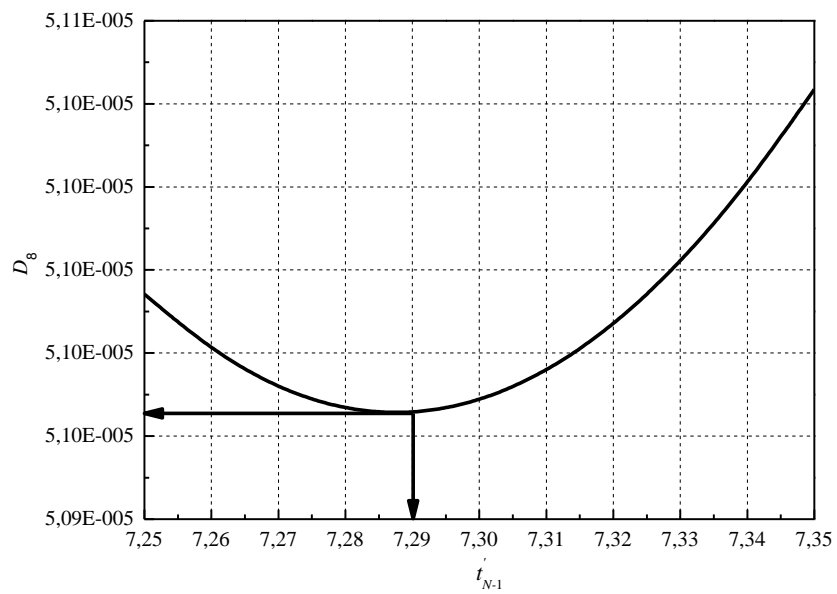
U tabeli 3.2 prikazani su numerički rezultati dobijeni na osnovu predloženih metoda optimizacije zadnjeg segmenta, za broj nivoa kvantovanja $N = 128$ i ukupan broj segmenata $2L = 16$.

Tabela 3.1. Vrednosti granularne distorzije po segmentima za optimalni kompadding kvantizer i predloženi linearizovani kvantizer

	$(-t_9^*, t_9^*)$	$(-t_{10}^*, t_{10}^*)$	$(-t_{11}^*, t_{11}^*)$	$(-t_{12}^*, t_{12}^*)$	$(-t_{13}^*, t_{13}^*)$	$(-t_{14}^*, t_{14}^*)$	$(-t_{15}^*, t_{15}^*)$	$(-t_{16}^*, t_{16}^*)$
D_g^B	$3.35 \cdot 10^{-5}$	$6.71 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$	$2.01 \cdot 10^{-4}$	$2.35 \cdot 10^{-4}$	$2.68 \cdot 10^{-4}$
D_g^T	$3.35 \cdot 10^{-5}$	$6.71 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-4}$	$2.01 \cdot 10^{-4}$	$2.35 \cdot 10^{-4}$	$2.68 \cdot 10^{-4}$
D_g^L	$3.37 \cdot 10^{-5}$	$6.74 \cdot 10^{-5}$	$1.01 \cdot 10^{-4}$	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$1.69 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-4}$	$2.42 \cdot 10^{-4}$	$3.49 \cdot 10^{-4}$



Slika 3.2. Numeričko određivanje granice granularnog regiona t'_{N-1} prema metodu III



Slika. 3.3 Numeričko određivanje granice granularnog regiona t'_{N-1} prema metodu IV

Na slikama 3.2 i 3.3 prikazano je numeričko određivanje granice granularnog regiona t'_{N-1} , za metod III i metod IV.

Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 3.2, za vrednosti SQNR-a, može se uočiti da svaki naredni predloženi metod predstavlja poboljšanje prethodnog, respektivno. Analizirajući rezultate prikazane u tabeli 3.2 može se zaključiti da se najveća vrednost SQNR-a ostvaruje projektovanjem predloženog modela kvantizera metodom IV. Uočava se, takođe, da se korišćenjem metoda kod kojih se granica granularnog regiona t'_{N-1} određuje numerički, minimizujući ukupnu distorziju u poslednjem segmentu (metod III i metod IV), ostvaruje veća vrednost SQNR-a nego metodima kod kojih se granica granularnog regiona t'_{N-1} ne određuje minimizacijom ukupne distorzije u poslednjem segmentu (metod I i metod II) [6], [20], [21], [28], [38], [59], [62], [70], [73], [76], [77].

Na osnovu rezultata dobijenih adekvatnom analizom predloženih metoda za optimizaciju poslednjeg segmenta, može se zaključiti da predloženi metodi predstavljaju vrlo efikasno rešenje jer su dobijene vrednosti SQNR-a veoma bliske vrednostima SQNR-a nelinearnog optimalnog komponding kvantizera. Kako se metodom IV ostavruju najveće vrednosti SQNR-a, metod IV predlažemo kao najbolje rešenje. Zbog toga smo izvršili detaljnu analizu predloženog modela kvantizera sa optimizovanim zadnjim segmentom metodom IV, za broj nivoa kvantovanja $N = 16$, $N = 32$, $N = 64$ i $N = 128$ i ukupan broj segmenata $2L = 8$, $2L = 16$ i $2L = 32$ (tabela 3.3).

Uzimajući u obzir jednostavnost i brzinu procesa kodovanja i dekodovanja i što manju složenost sistema, kao i kvalitet izlaznog signala, na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 3.3, može se zaključiti da se najbolji rezultat ostvaruje za vrednosti parametara $2L = 16$ i $N = 128$. Za ove vrednosti parametara, začajno je smanjena kompleksnost

Tabela 3.2. Performanse deo po deo linearnog kvantizera za predložene metode optimizacije zadnjeg segmenta

	x_{max}	t'_{N-1}	Δ_8	SQNR [dB]
I metod	∞	11.76	0.919	34.14
II metod	10.31	9.56	0.751	34.56
III metod	10.31	8.00	0.463	35.24
IV metod	10.31	7.29	0.427	35.34

Tabela 3.3. Performanse deo po deo linearnog kvantizera sa optimizovanim zadnjim segmentom metodom IV

	$N=16$	$N=32$	$N=64$	$N=128$
$2L=8$	17.91	23.49	29.10	34.68
$2L=16$		23.74	29.54	35.34
$2L=32$			29.67	35.58
$SQNR_{opt}$	18.24	23.93	29.78	35.71

modela deo po deo linearnog skalarnog kvantizera u odnosu na nelinearni optimalni kompadding kvantizer, pri čemu je vrednost SQNR-a manja za samo 0.37 dB. Takođe, kombinacija parametara $L = 32$ i $N = 128$ se može koristiti kao veoma dobro rešenje. Ova kombinacija parametara ima veću složenost od prethodne kombinacije, ali mnogo manju složenost od nelinearnog optimalnog kompadding kvantizera, dok je vrednost SQNR-a skoro identična vrednosti SQNR-a nelinearnog optimalnog kompadding kvantizera.

3.3 Konstrukcija deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera sa različitim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima

Pri projektovanju određenog modela skalarnog kvantizera, za ulazni signal specificiran određenom funkcijom gustine verovatnoće, teži se optimalnom određivanju vrednosti svih granica odluke i reprezentacionih nivoa, odnosno minimiziranju distorzije unete kvantizacijom. U skladu sa tim, u cilju minimiziranja greške kvantizacije potrebno je prilagoditi amplitudski opseg kvantizera statističkim karakteristikama ulaznog signala [28], [40], [62], [78], [80], [82], [98], [99], [100]. Jedno od efikasnih rešenja u ostvarivanju ovog cilja jeste konstrukcija deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera čiji je amplitudski opseg podeljen na segmente razgraničene granicama segmenata, kao što je opisano u prethodnom poglavlju.

Važno je naglasiti da se uniformni kvantizer ne mora realizovati kao komparator sa linearnom kompresorskom funkcijom. Linearizacija koja se izvodi na osnovu ekvidistantne podele izlaza kompresora daje jednak broj ćelija po segmentima različitih širina. Međutim, na taj način se ne ostvaruje optimalan broj ćelija po segmentima različitih širina. Zbog toga je moguće predložiti jedno novo rešenje konstrukcije

kvantizera, koje se zasniva na ekvidistantnosti granica segmenata na koji je amplitudski opseg kvantizera podeljen i na nejednakom broju reprezentacionih nivoa unutar ovih segmenata. Ideja je da se razvije nov metod konstrukcije deo po deo uniformnih kvantizera koji uvodi promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata, koji je određen optimizacijom granularne distorzije uz ograničenje u pogledu ukupnog broja reprezentacionih nivoa.

U skladu sa ovim razmatranjem, u radu [106] smo predložili jedno novo rešenje za konstrukciju deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera, koje uvodi promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata. Amplitudski opseg kvantizera koji se predlaže u radu [53], podeljen je na po L segmenata u oba kvadranta, pri čemu je svaki od segmenata uniformno podeljen na određeni broj ćelija čije se veličine od segmenta do segmenta razlikuju. Za realizaciju kvantizera čiji se amplitudski opseg formira na ovakav način, koristi se skup od $2L$ uniformnih kvantizera.

Granice segmenata ovako definisanog kvantizera se određuju na sledeći način:

$$x_k^{\text{seg}} = k \frac{x_N}{L}, \quad k = 0, 1, \dots, L, \quad (3.28)$$

pri čemu je amplitudski opseg kvantizera, x_N , jednak [79]:

$$x_N = \hat{\sigma} \sqrt{6 \ln N} \left[1 - \frac{\ln(\ln N)}{4 \ln N} - \frac{\ln(3\sqrt{\pi})}{2 \ln N} \right]. \quad (3.29)$$

Ukoliko sa N_k označimo broj ćelija unutar k -tog segmenta, onda je veličina konstantnog amplitudskog kvanta u tom segmenatu jednaka:

$$\Delta_k = \Delta_{k,j} = \frac{x_k^{\text{seg}} - x_{k-1}^{\text{seg}}}{N_k} = \frac{x_N}{LN_k}, \quad k = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, N_k, \quad (3.30)$$

dok se granice ćelija deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera i reprezentacioni nivoi određuju na sledeći način:

$$x_{k,j} = x_{k-1}^{\text{seg}} + j\Delta_k, \quad k = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, N_k, \quad (3.31)$$

$$y_{k,j} = x_{k-1}^{\text{seg}} + \frac{(2j-1)}{2} \Delta_k, \quad k = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, N_k. \quad (3.32)$$

Indeksi k i j ukazuju na j -ti amplitudski kvant u k -tom segmentu $(x_{k-1}^{\text{seg}}, x_k^{\text{seg}}]$.

3.3.1 Određivanje promenljivog broja reprezentacionih nivoa unutar segmenata deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera

Promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata određen je optimizacijom granularne distorzije uz ograničenje u pogledu ukupnog broja reprezentacionih nivoa. Problem optimizacije granularne distorzije uz ograničenje da je ukupan broj reprezentacionih nivoa u prvom kvadrantu jednak $(N-2)/2$, korišćenjem tehnike Lagranžovih (*Joseph-Louis Lagrange*) multiplikatora, rešava se formiranjem proširene funkcije J čija se optimizacija izvodi bez ograničenja [4], [30], [50], [51], [73]:

$$J = D_g + \lambda \sum_{j=1}^L N_j . \quad (3.33)$$

U poslednjem izrazu, λ predstavlja Lagranžov multiplikator, N_j broj reprezentacionih nivoa unutar j -tog segmenta, a D_g granularna distorzija definisana izrazom:

$$D_g = 2 \sum_{k=1}^L \frac{\Delta_k^2}{12} P_k , \quad (3.34)$$

gde P_k predstavlja verovatnoću da odmerak ulaznog signala x pripada k -tom segmentu. Za pretpostavljenu Gausovu funkciju gustine verovatnoće trenutnih vrednosti signala na ulazu skalarnog kvantizera, opisanu jednačinom (2.3), verovatnoća P_k da odmerak ulaznog signala pripada k -tom segmentu jednaka je:

$$P_k(\sigma) = \int_{x_{k-1}^{seg}}^{x_k^{seg}} p(x, \sigma) dx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x_k^{seg}}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_{k-1}^{seg}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] . \quad (3.35)$$

Diferenciranjem funkcije J (3.33), za slučaj jedinične varijanse signala, i izjednačavanjem sa nulom:

$$\frac{\partial J}{\partial N_k} = 0 , \quad k = 1, \dots, L, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial J}{\partial N_k} = \frac{\partial \left(\frac{x_N^2}{6L^2} \sum_{j=1}^L \frac{P_j}{N_j^2} \right)}{\partial N_k} + \frac{\partial \left(\lambda \sum_{j=1}^L N_j \right)}{\partial N_k} = 0 . \quad (3.37)$$

dobija se:

$$N_k = \sqrt[3]{\frac{P_k x_N^2}{3\lambda L^2}}, \quad k = 1, \dots, L. \quad (3.38)$$

Važno je primetiti da verovatnoća P_k nije funkcija od N_k . Kombinovanjem poslednjeg izraza i uslova da je ukupan broj reprezentacionih nivoa u prvom kvadrantu jednak $(N-2)/2$:

$$2 \sum_{j=1}^L N_j = N - 2, \quad (3.39)$$

za Lagranžov multiplikator dobijamo:

$$\lambda = \frac{8x_N^2 \left(\sum_{i=1}^L \sqrt[3]{P_k} \right)^3}{3L^2 (N-2)^3}. \quad (3.40)$$

Optimalan broj reprezentacionih nivoa po segmentima za razmatrani broj segmenata L i ukupan broj nivoa kvantovanja N , na osnovu jednačine (3.38), jednak je:

$$N_k = \frac{(N-2)P_k^{\frac{1}{3}}}{2 \sum_{k=1}^L P_k^{\frac{1}{3}}}, \quad k = 1, \dots, L. \quad (3.41)$$

Za ovako određen optimalan broj reprezentacionih nivoa po segmentima, koristeći formule (3.30) i (3.35), jednostavno se određuje granularna distorzija na osnovu formule (3.34). Distorzija prekoračenja je definisana formulom (2.34), pri čemu se reprezentacioni nivo y_N određuje iz uslova centroida:

$$y_N = \frac{\int_{x_N}^{\infty} xp(x)dx}{\int_{x_N}^{\infty} p(x)dx}, \quad (3.42)$$

Kombinovanjem izraza (2.3), (2.34) i (3.42), za slučaj jedinične varijanse ulaznog signala, distorzija prekoračenja za model koji se predlaže u radu [53] jednaka je [79]:

$$D_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x_N^3} e^{-\frac{x_N^2}{2}}. \quad (3.43)$$

Određivanjem ukupne distorzije D , koja je jednaka zbiru granularne distorzije D_g (3.34) i distorzije prekoračenja D_p (3.43), definisan je i odnos signal-šum kvantizacije predloženog deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera:

$$\text{SQNR}^D = 10 \log \left(\frac{\sigma^2}{D_g + D_p} \right) = 10 \log \left(\frac{\sigma^2}{D^D} \right). \quad (3.44)$$

Pored SQNR-a, performanse kvantizera se mogu opisati i kvantizacionom efikasnošću. Ukoliko ulazni signal u kvantizer označimo sa x , a izlazni signal sa y , kvantizaciona efikasnost je definisana na sledeći način:

$$\eta_Q^D = \frac{\langle xy \rangle^2}{\langle y^2 \rangle}. \quad (3.45)$$

Za predloženi model deo po deo uniformnog kvantizera određujemo vrednosti za $\langle xy \rangle$ i $\langle y^2 \rangle$. Vrednost $\langle xy \rangle$ određena je sledećim izrazom:

$$\langle xy \rangle = 2 \left[\sum_{m=0}^{\frac{N_1}{2}-1} \left(m + \frac{1}{2} \right) \Delta_1 \int_{m\Delta_1}^{(m+1)\Delta_1} xp(x) dx + \sum_{m=0}^{\frac{N_2}{2}-1} \left(\Delta + \left(m + \frac{1}{2} \right) \Delta_2 \right) \int_{\Delta+m\Delta_2}^{\Delta+(m+1)\Delta_2} xp(x) dx + y_N \int_{x_N}^{\infty} xp(x) dx \right], \quad (3.46)$$

dok je vrednost $\langle y^2 \rangle$ određena izrazom:

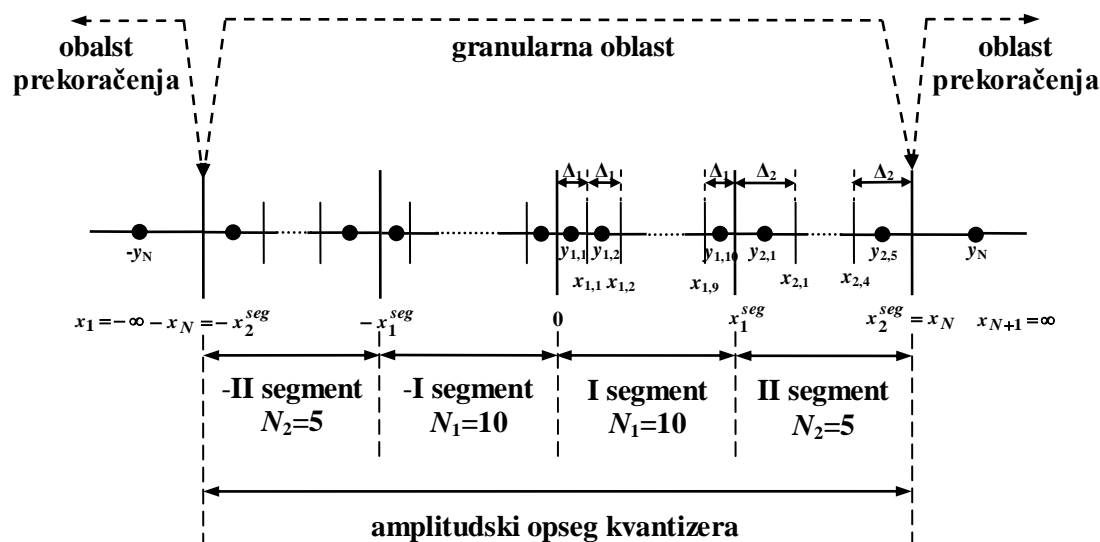
$$\langle y^2 \rangle = 2 \left[\sum_{m=0}^{\frac{N_1}{2}-1} \left(\left(m + \frac{1}{2} \right) \Delta_1 \right)^2 \int_{m\Delta_1}^{(m+1)\Delta_1} p(x) dx + \sum_{m=0}^{\frac{N_2}{2}-1} \left(\Delta + \left(m + \frac{1}{2} \right) \Delta_2 \right)^2 \int_{\Delta+m\Delta_2}^{\Delta+(m+1)\Delta_2} p(x) dx + y_N^2 \int_{x_N}^{\infty} p(x) dx \right]. \quad (3.47)$$

Uglaste zagrade $\langle \rangle$ ukazuju da se radi o srednjim vrednostima prethodno opisanih veličina.

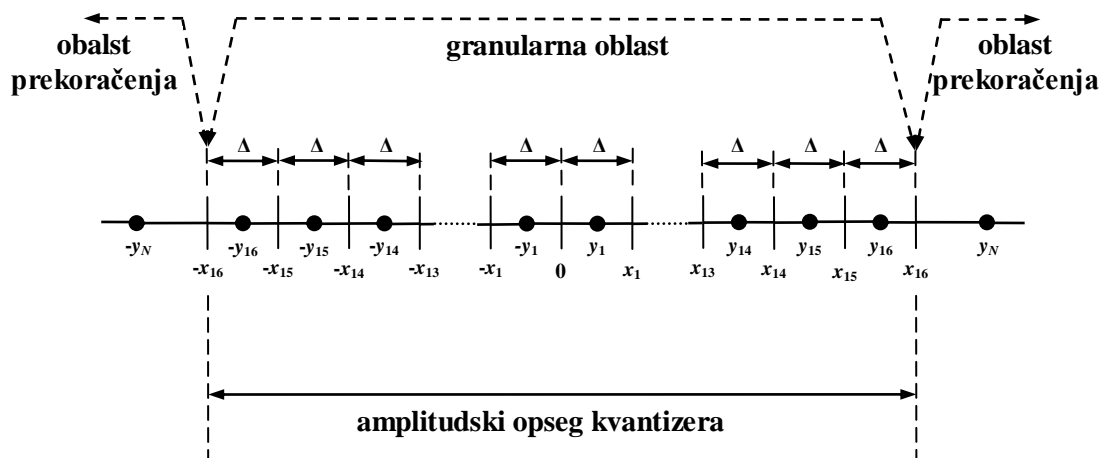
3.3.2 Performanse deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera

Analiza performansi predloženog deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera sa promenljivim brojem reprezentacionih nivoa unutar segmenata izvršena je upoređivanjem sa performansama modela kvantizera opisanog u radu [8]. Model kvantizera opisan u radu [8] je zapravo uniformni skalarni kvantizer. Na slikama 3.4 i 3.5 prikazani su predloženi deo po deo uniformni skalarni kvantizer sa različitim brojem reprezentacionih nivoa unutar segmenata i model uniformnog skalarnog kvantizera koji je opisan u radu [8].

U tabeli 3.4 prikazane su vrednosti SQNR-a i kvantizacione efikasnosti za predloženi model deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera i modela kvantizera opisanog u radu [8], za ukupan broj segmenata $2L = 4$ i različiti broj nivoa kvantovanja N (od $N = 32$ do $N = 256$). Upoređujući dobijene vrednosti za kvantizacionu efikasnost, može se uočiti da sa povećanjem broja nivoa kvantovanja, koeficijent efikasnosti predloženog modela kvantizera ima vrednost koja je bliža jedinici od koeficijenta efikasnosti uniformnog kvantizera opisanog u radu [8].



Slika 3.4. Deo po deo uniformni skalarni kvantizer sa različitim brojem reprezentacionih nivoa unutar segmenata za slučaj $N = 32$ i $2L = 4$



Slika 3.5. Uniformni skalarni kvantizer opisan u radu [8], za slučaj $N = 32$

Ovi rezultati pokazuju da se korišćenjem predloženog modela kvantizera, korelacija između ulaznog signala i greške kvantizacije može eliminisati više nego korišćenjem modela uniformnog kvantizera koji je opisan u radu [8].

Značaj predloženog modela deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera ogleda se u tome da se za veoma malo povećanje kompleksnosti ostvaruje veliki dobitak u pogledu kvaliteta signala izraženog SQNR-om. Na primer, u poređenju sa kvantizerom opisanim u radu [8], koji se sastoji od jednog uniformnog kvantizera, predloženim modelom kvantizera koji se sastoji od dva uniformna kvantizera ($L = 2$), uspeli smo da smanjimo vrednost ukupne distorzije za 37.35%, što znači da smo uspeli da povećamo kvalitet signala za oko 2dB, što je opisano sledećim izrazima:

$$\frac{D^U - D^D}{D^U} * 100\% = 37.35\%, \quad (3.48)$$

$$SQNR^D = 10 \log \left(\frac{1}{D^D} * \frac{D^U}{D^U} \right) = SQNR^U + 10 \log \left(\frac{D^U}{D^D} \right), \quad (3.49)$$

$$SQNR^D - SQNR^U = 10 \log \left(\frac{D^U}{D^D} \right) = 2.03 \text{ [dB]}. \quad (3.50)$$

U prethodnim formulama, kao i u tabeli 3.4, ukupna distorzija, SQNR i kvantizaciona efikasnost predloženog modela skalarnog kvantizera su obeleženi sa D^D , $SQNR^D$ i η_Q^D , respektivno. Analogno tome, ukupna distorzija, SQNR i kvantizaciona efikasnost uniformnog kvantizera koji je opisan u radu [8] označeni su sa D^U , $SQNR^U$ i η_Q^U .

Upoređujući vrednosti SQNR-a koje su prikazane u tabeli 3.4, može se zaključiti da se predloženim modelom kvantizera ostvaruje veći kvalitet signala nego modelom kvantizera koji je opisan u radu [8].

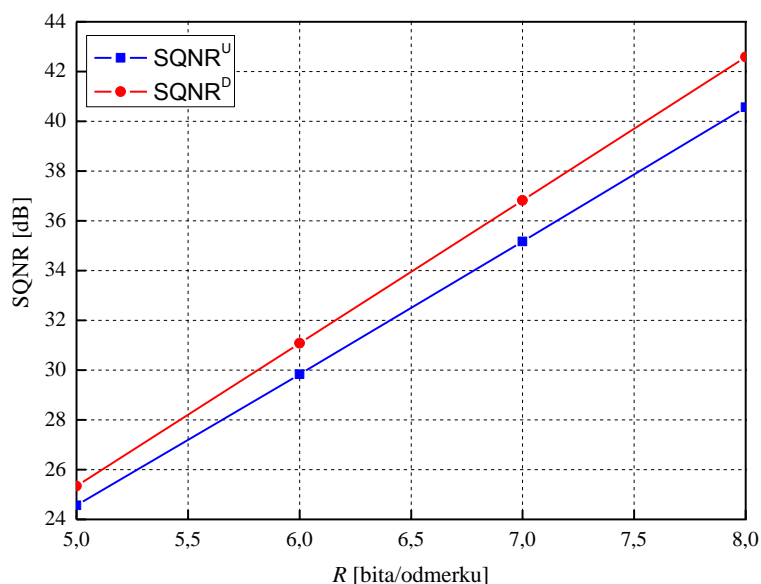
Takođe, uočava se da se povećavanjem broja nivoa kvantovanja povećava i razlika između vrednosti SQNR-a. Na primer, u slučaju kada je broj nivoa kvantovanja $N = 128$, predloženim modelom kvantizera se ostvaruje veći SQNR za oko 1.6 dB u odnosu na model opisan u radu [8]. Za slučaj kada je broj nivoa kvantovanja $N = 256$, razlika iznosi oko 2 dB.

Zavisnost vrednosti SQNR-a od broj nivoa kvantovanja ($N = 32$, $N = 64$, $N = 128$ i $N = 256$), tj. od broja bita po odmerku ($R = 5$, $R = 6$, $R = 7$ i $R = 8$), predloženog modela deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera i modela kvantizera koji je opisan u radu [8], prikazana je na slici 3.6.

Prednost predloženog modela deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera ogleda se i u poređenju složenosti realizacije i ostvarenih performansi sa modelom optimalnog Lojd-Maks-ovog (*Stuart Lloyd and Joel Max*) kvantizera [3], [6], [26], [27], [28], [39], [41], [62], [63], [89].

Tabela 3.4. Vrednosti SQNR-a i kvantizacione efikasnosti za predloženi model deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera i modela kvantizera koji je opisan u radu [7]

N	$SQNR^U$ [dB]	$SQNR^D$ [dB]	η_Q^U	η_Q^D	η_Q [%]
32	24.5651	25.3332	0.996505	0.997195	0.0692
64	29.8294	31.0811	0.998960	0.999232	0.0272
128	35.1631	36.8243	0.999696	0.999794	0.0098
256	40.5574	42.5880	0.999912	0.999944	0.0032



Slika 3.6. Zavisnost SQNR-a od broja bita po odmerku predloženog modela deo po deo uniformnog kvantizera i modela kvantizera opisanog u radu [8]

Korišćenje Lojd-Maks-ovog algoritma je veoma zahtevno posmatrano sa aspekta aritmatičke kompleksnosti i zahtevanih memorijskih resursa. Takođe, problem inicijalizacije Lojd-Maks-ovog algoritma dodatno povećava njegovu kompleksnost [3], [6], [26], [27], [28], [39], [41], [62], [63], [89], [93], [95]. S druge strane, složenost predloženog modela deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera je mnogo manja od složenosti optimalnog Lojd-Maks-ovog kvantizera, što je od velikog značaja za praktičnu primenu. Za broj nivoa kvantovanja $N = 256$, povećanjem kompleksnosti za samo jedan uniformni kvantizer u odnosu na rad opisan u [8], predloženim modelom kvantizera smo uspjeli da povećamo kvalitet signala za oko 2 dB. Za isti broj nivoa kvantovanja, $N = 256$, i istu funkciju gustine verovatnoće na ulazu kvantizera, optimalnim Lojd-Maks-ovim kvantizerom se ostvaruje kvalitet signala veći za oko 1.2 dB u odnosu na predloženi model kvantizera. Međutim, složenost optimalnog Lojd-Maks-ovog kvantizera je u tom slučaju veća za 126 uniformnih kvantizera u odnosu na predloženi model kvantizera.

Zapravo, kompleksnost Lojd-Maks-ovog skalarnog kvantizera sa N nivoa kvantovanja, može se približno posmatrati kao kompleksnost skupa $N/2$ uniformnih

kvantizera. Na osnovu toga se može zaključiti da je složenost predloženog modela kvantizera mnogo manja od složenosti optimalnog Lojd-Maks-ovog kvantizera. Kako cilj projektovanja nije samo postizanje što većeg kvaliteta signala izraženog SQNR-om, već i ostvarivanje što manje kompleksnosti kvantizera, može se zaključiti da predloženi model deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera predstvalja veoma dobro rešenje.

3.4 Konstrukcija deo po deo linearnog skalarnog kvantizera sa različitim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima

Imajući u vidu sve prednosti konstrukcije modela kvantizera koji je opisan u prethodnom odeljku, došli smo na ideju da predložimo još jedan novi model kvantizera čije je projektovanje zasnovano na istoj logici kao i projektovanje modela kvantizera opisanog u odeljku 3.3, ali sa tom razlikom što ćemo promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata odrediti na drugi način. Znači, konstrukcija kvantizera koji je predstavljen u radu [102] i koji je u ovom odeljku opisan, zasniva se na ekvidistantnosti granica segmenata na koji je amplitudski opseg kvantizera podeljen i na nejednakom broju reprezentacionih nivoa unutar tih segmenata.

Za razliku od modela deo po deo uniformnog kvantizera opisanog u odeljku 3.3, kod koga je promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata određen optimizacijom granularne distorzije uz ograničenje u pogledu ukupnog broja reprezentacionih nivoa, tehnikom Lagranžovih multiplikatora [4], [30], [50], [51], [73], kod modela deo po deo linearnog skalarnog kvantizera koji se ovde predlaže, promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata određen je aproksimacijom prvog izvoda kompresorske funkcije u tački na sredini segmenta. Zapravo, kvantizer opisan u odeljku 3.3 ne može se posmatrati kao deo po deo linearni skalarni komanding kvantizer, za razliku od kvantizera koji se ovde opisuje, ali se umesto toga može posmatrati kao skup uniformnih kvantizera, pri čemu je broj uniformnih kvantizera jednak broju segmenata.

Projektovanje deo po deo linearnog skalarnog komanding kvantizera izvedeno je za Gausovu funkciju gustine verovatnoće trenutnih vrednosti signala na ulazu kvantizera, koja je opisana jednačinom (2.3). Poznato je da je projektovanje nelinearnog optimalnog komanding kvantizera za Gausov izvor veoma složeno, zbog velikih

teškoća prilikom određivanja inverzne kompresorske funkcije. U cilju smanjenja složenosti projektovanja, predlaže se linearizacija optimalne kompresorske funkcije. Rezultat linearizacije optimalne kompresorske funkcije jesu kvantizeri poznati kao deo po deo linearni skalarni komanding kvantizeri [3], [6], [28], [46], [51], [59], [62], [70], [71], [105].

Granice segmenata deo po deo linearnog skalarnog komanding kvantizera određuju se na isti način kao i granice segmenata deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera, što je opisano jednačinom (3.28), pri čemu važi:

$$x_{-k}^{seg} = -x_k^{seg}, k = 0, 1, \dots, L, \quad (3.51)$$

Amplitudski opseg, veličina konstantnog amplitudskog kvanta, granice ćelija i reprezentacioni nivoi deo po deo linearnog skalarnog komanding kvantizera, definisani su na isti način kao i kod deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera, opisanog u odeljku 3.3, jednačinama (3.29), (3.30), (3.31) i (3.32), respektivno.

Kao što je rečeno, projektovanje ovog modela se zasniva na aproksimaciji prvog izvoda kompresorske funkcije u tački na sredini segmenta. Tačke na sredini segmenta određuju se na sledeći način:

$$s_k = \frac{(2k-1)x_N}{2L}, k = 1, \dots, L. \quad (3.52)$$

Prvi izvod optimalne kompresorske funkcije, opisane jednačinom (2.35), u tački s_i , $i = 1, \dots, L$, za slučaj $0 \leq x \leq x_{\max} = x_N$, jednak je:

$$c'(s_k) = \frac{x_N p^{1/3}(s_k)}{\int_0^{x_N} p^{1/3}(x) dx}, k = 1, \dots, L, \quad (3.53)$$

Očigledno, imamo L različitih nagiba deo po deo linearne kompresorske funkcije koji se određuju pomoću izraza (3.53). U cilju definisanja nove deo po deo linearne kompresorske funkcije, možemo pretpostaviti sledeće aproksimacije [3], [28], [62], [70]:

$$\int_0^{x_{k-1}^{seg}} p^{1/3}(x) dx \approx \sum_{j=1}^{k-1} p^{1/3}(s_j) \frac{x_N}{L}, k = 2, \dots, L, \quad (3.54)$$

$$\int_{x_{k-1}^{seg}}^x p^{1/3}(x)dx \approx (x - x_{k-1}^{seg})p^{1/3}(s_k), \quad x_{k-1}^{seg} < x \leq x_k^{seg}, \quad (3.55)$$

$$\int_0^{x_N} p^{1/3}(x)dx \approx \sum_{i=1}^L p^{1/3}(s_k) \frac{x_k}{L}, \quad (3.56)$$

Na osnovu ovih aproksimacija, sledi:

$$\int_0^x p^{1/3}(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k-1} p^{1/3}(s_j) \frac{x_N}{L} + (x - x_{k-1}^{seg})p^{1/3}(s_k), \quad (3.57)$$

$$c_1(x) = x_N \frac{(x - x_0^{seg})p^{1/3}(s_1)}{\sum_{k=1}^L p^{1/3}(s_k) \frac{x_N}{L}}, \quad (3.58)$$

$$c_k(x) = x_N \frac{\sum_{j=1}^{k-1} p^{1/3}(s_j) \frac{x_N}{L} + (x - x_{k-1}^{seg})p^{1/3}(s_k)}{\sum_{k=1}^L p^{1/3}(s_k) \frac{x_N}{L}}, \quad k = 2, \dots, L. \quad (3.59)$$

Funkcija $c_k(x)$, $k = 1, \dots, L$, definisana jednačinama (3.58) i (3.59), predstavlja novu deo po deo linearnu kompresorsku funkciju. Ova funkcija je neprekidna, jer važi:

$$c_k(x_k^{seg}) = c_{k+1}(x_k^{seg}), \quad k = 1, \dots, L-1. \quad (3.60)$$

Ukupan broj reprezentacionih nivoa u prvom kvadrantu, kao i za slučaj deo po deo uniformnog skalarnog kvantizera, definisan je jednačinom (3.39). Shodno tome, sledi:

$$\Delta = \frac{c_L(x_N)}{(N-2)/2}, \quad (3.61)$$

$$c_k(x_k^{seg}) - c_k(x_{k-1}^{seg}) = \frac{N_k}{2} \Delta, \quad k = 1, \dots, L. \quad (3.62)$$

Kombinacijom poslednje dve jednačine, određuje se optimalani broj reprezentacionih nivoa po segmentima za razmatrani broj segmenata L i ukupan broj nivoa kvantovanja N :

$$\frac{N_k}{2} = \frac{(N-2)(c_k(x_k^{seg}) - c_k(x_{k-1}^{seg}))}{2c_L(x_N)}, \quad k = 1, \dots, L. \quad (3.63)$$

Granularna distorzija i distorzija prekoračenja predloženog modela kompadding kvantizera određene su formulama (3.34) i (3.43), respektivno, pri čemu je verovatnoća P_k da odmerak ulaznog signala pripada k -tom segmentu definisana izrazom (3.35). Reprerentacioni nivo y_N se izračunava pomoću izraza (3.42). Performanse predloženog modela kvantizera definisane su odnosom signal-šum kvantizacije:

$$\text{SQNR} = 10 \log \left(\frac{\sigma^2}{D_g + D_p} \right) = 10 \log \left(\frac{\sigma^2}{D} \right), \quad (3.64)$$

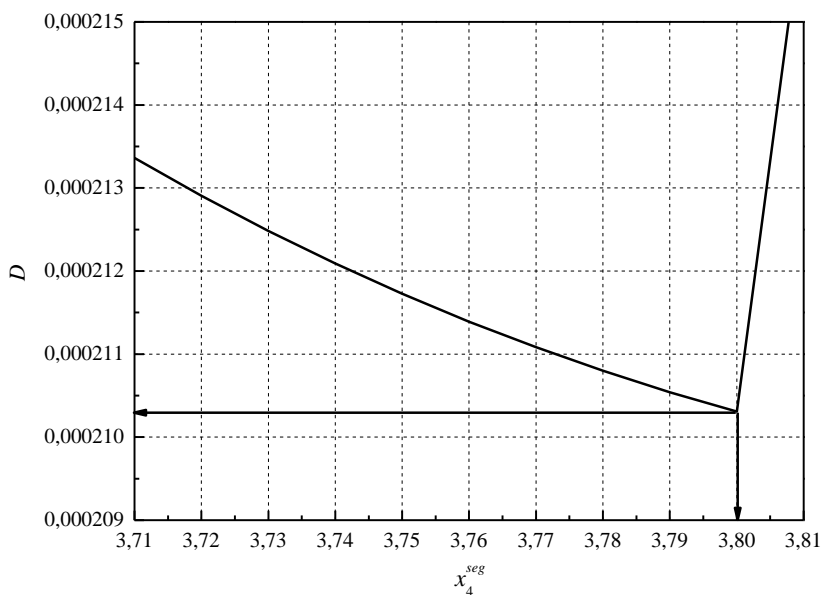
za jediničnu varijansu ulaznog signala x , $\sigma^2 = 1$.

3.4.1 Performanse deo po deo linearnog skalarnog kompadding kvantizera

Performanse predloženog modela deo po deo linearnog skalarnog kompadding kvantizera određene su za slučaj kada je ukupan broj nivoa kvantovanja $N = 128$ i različit broj segmenata $2L = 2$, $2L = 4$, $2L = 8$ i $2L = 16$. U cilju poboljšanja performansi predloženog modela kvantizera, izvršili smo optimizaciju odnosa signal-šum kvantizacije, odnosno distorzije deo po deo linearnog kompadding kvantizera.

Optimizaciju odnosa signal-šum kvantizacije je veoma teško ostvariti analitički jer, mnogi parametri kvantizera posredno zavise od veličine amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera [28], [40], [62], [78], [80], [82], [98], [99], [100]. Zbog toga smo se i u ovom slučaju opredelili da numerički optimizujemo amplitudu maksimalnog opterećenja razmatranog kvantizera poštujući kriterijum minimuma ukupne distorzije. Pravi izbor amplitude maksimalnog opterećenja je veoma važan kako bi linearizovani model predstavljao dostojnu zamenu izvornog nelinearnog modela. Na slici 3.7 prikazano je numeričko određivanje amplitude maksimalnog opterećenja razmatranog kvantizera, za ukupan broj nivoa kvantovanja $N = 128$ i broj segmenata $2L = 8$.

Optimalne vrednosti amplitude maksimalnog opterećenja, za ukupan broj nivoa kvantovanja $N = 128$ i broj segmenata $2L = 2$, $2L = 4$, $2L = 8$ i $2L = 16$ jednake su $x_1^{seg} = 3.50$, $x_2^{seg} = 3.80$, $x_4^{seg} = 3.98$ i $x_8^{seg} = 4.03$, respektivno.



Slika 3.7. Numeričko određivanje amplitude maksimalnog opterećenja poštujući kriterijum minimuma ukupne distorzije

U tabeli 3.4 prikazane su vrednosti SQNR-a za predloženi model deo po deo linearnog kompaning kvantizera čija je amplituda maksimalnog opterećenja, u prvom slučaju definisana izrazom (3.29), $SQNR^N$, dok je u drugom slučaju određena numerički, $SQNR^O$, kao i vrednost SQNR-a nelinearnog optimalnog komandora, $SQNR^K$.

Jedan od načina kojim se može utvrditi koliko je predloženi linearizovani model dostojna zamena izvornog nelinearnog modela jeste upoređivanje vrednosti SQNR-a za

Tabela 3.5. Vrednosti SQNR-a za predloženi model deo po deo linearnog kompaning kvantizera i za optimalni komandor

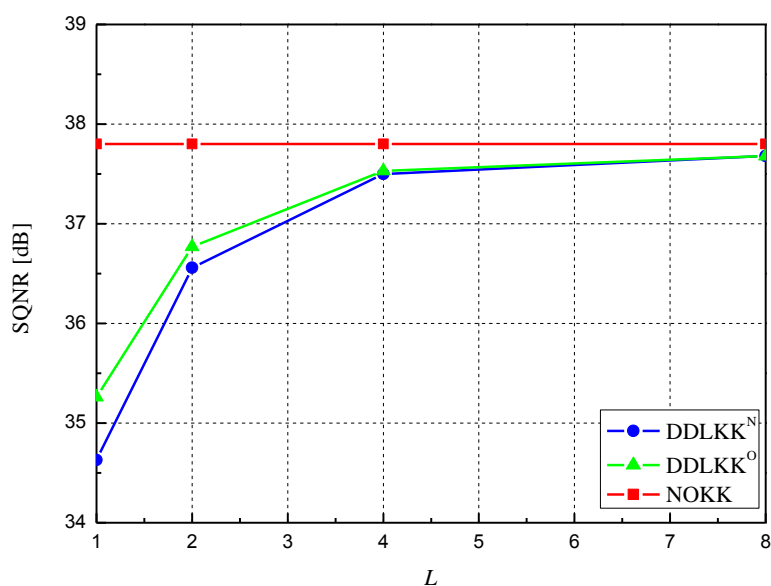
L	$SQNR^N$ [dB]	$SQNR^O$ [dB]	$SQNR^K$ [dB]
1	34.6318	35.2609	37.7974
2	36.5594	36.7714	37.7974
4	37.5033	37.5295	37.7974
8	37.6765	37.6765	37.7974

istu raspodelu signala na ulazu i isti broj nivoa kvantovanja, ali različit broj segmenata.

Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 3.5, kao i posmatranjem slike 3.8, može se uočiti da se povećanjem broja segmenata vrednost SQNR-a predloženog linearizovanog modela sve više približava vrednosti SQNR-a nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera. Takođe, može se uočiti da je približavanje vrednosti SQNR-a predloženog linearizovanog modela vrednosti SQNR-a nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera veće ukoliko je amplituda maksimalnog opterećenja linearizovanog modela optimizovana.

U slučaju kada je broj segmenata $2L = 2$, razmatrani model kvantizera ustvari predstavlja model kvantizera opisan u radu [8], i koji je razmatran u odeljku 3.3, a koji kompanding kvantizera i nelinearnog optimalnog kompandora od broja bita po odmerku se sastoji od jednog uniformnog kvantizera. Ova činjenica opravdava veliku razliku u vrednosti SQNR-a predloženog linearizovanog modela u odnosu na vrednost SQNR-a nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera. Za slučaj neoptimizovane amplitude maksimalnog opterećenja ta razlika iznosi 3.17 dB, dok je za slučaj optimizovane amplitude maksimalnog opterećenja razlika 2.54 dB.

Takođe, može se primetiti da povećanjem složenosti predloženog modela za samo jedan kvantizer, tj za slučaj $2L = 4$, pri istom broju nivo kvantovanja, ostvarujemo



Slika 3.8 Zavisnost vrednosti SQNR-a predloženog modela deo po deo linearnog

povećanje vrednosti SQNR-a za 1.93dB i 1.51 dB, respektivno. U najboljem slučaju, za broj segmenata $2L = 16$, vrednost SQNR-a predloženog linearizovanog modela manja je od vrednosti SQNR-a nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera za samo 0.12 dB.

U odnosu na model kvantizera koji je opisan u [44], za isti broj nivoa kvantovanja $N = 128$ i broj segmenata $2L = 16$, predloženim modelom ostvarujemo dobitak u vrednosti SQNR-a za 0.88 dB. Poređenjem predloženog modela, za parametre $N = 128$ i $2L = 16$, sa modelom kvantizera koji je predložen u radu [53] i koji je opisan u odeljku 3.3, može se zaključiti da se postižu skoro jednake vrednosti SQNR-a. Međutim, razmatrani model kvantizera je konstruisan u cilju ostvarivanja performansi bliskih performansama nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera, dok je cilj konstruisanja model opisanog u odeljku 3.3 ostvarivanje boljih performansi u odnosu na uniformni model kvantizera.

Na osnovu ovih rezultata može se zaključiti da predloženi deo po deo linearni skalarni kompanding kvantizer predstavlja veoma dobro rešenje, jer se veoma jednostavnim modelom ostvaruje vrednost SQNR-a bliska vrednosti SQNR-a nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera. Predloženi postupak konstrukcije je vrlo jednostavan jer za razliku od konstrukcije nelinearnog optimalnog kompanding kvantizera ne zahteva rešavanje kompleksnih sistema integralnih jednačina, čija je rešenja veoma komplikovano odrediti.

4 Aproksimacija kompresorske funkcije pomoću splajn funkcija

4.1. Uvod

Istorija splajn funkcija je ukorenjena u radovima crtača (tehničkih crtača), koji su često morali da crtaju krivu koja se nežno okreće između tačaka na crtežu. Ovaj proces se naziva *fairing* i može se izvršiti pomoću nekoliko uređaja, kao što je na primer Francuska kriva, napravljena od plastike, i koja predstavlja krivu sa različitim brojem zavoja koje bi crtači mogli da biraju [88]. Takođe, korišćene su duge drvene letvice (trake), savijene između eksera na tabli. Oblik ovih krivih se mogao modifikovati komadićima olova koji su postavljeni na letvice. Komadići olova su se nazivali tegovi, a letvice od drveta splajnovi. Reč splajn se u tom smislu pojavljuje prvi put 1891. godine [88]. Reč splajn potiče od engleske reči *spline* koja se označava spravu za crtanje glatkih krivih u tehnici.

Matematička teorija ovih krivih mnogo duguje ranim istraživačima, posebno Ajzaku Senbergu (*I. Schoenberg*). Druga bitna imena povezana sa ranim razvojem ove teme (pre 1964. godine) su Garet Birkof (*G. Birkhoff*), De Bur (*C. de Boor*), Alberg (*J. H. Ahlberg*), Nilson (*E. N. Nilson*), Garabedian (*H. Garabedian*), Landis (*F. Landis*), Vitni (*A. Whitney*), Vols (*J. L. Walsh*) i Holadej (*J. C. Holladay*).

4.2 Opšti problem aproksimacije funkcija

Teorija aproksimacija je oblast numeričke matematike koja se bavi problemima zamene jedne funkcije pomoću druge funkcije [9], [23], [33], [88]. Postoje tri klase problema vezanih za ovu oblast.

Pretpostavimo da je funkcija f zadata tabelarno (tabela 4.1) skupom svojih vrednosti, gde je funkcija $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Postavlja se pitanje da li je moguće naći jednostavan analitički izraz koji će za vrednosti x date u tabeli, imati iste ili dovoljno bliske vrednosti kao i funkcija f . Nalaženje ovakvog izraza omogućilo bi nam

Tabela 4.1. Vrednosti funkcije f

x	x_0	x_1	\dots	x_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n

da odredimo aproksimativnu vrednost funkcije f između čvorova, dakle za one argumente x koji se ne nalaze u tabeli 4.1.

Drugi problem je sličan prethodnom s tim što sad pretpostavljamo da numeričke vrednosti date u tabeli 4.1 nisu sve podjednake pouzdanosti i da sadrže izvesne greške. To se može desiti kada vrednosti funkcije dobijamo kao rezultate merenja pri nekom eksperimentu. U tom slučaju tražimo formulu koja će predstaviti približno podatke iz tabele 4.1 i istovremeno omogućiti da otklonimo one koji su pogrešni.

Treći slučaj nastaje kada je funkcija f zadata analitički ali je zbog njene složenosti potrebno uložiti previše napora za njeno izračunavanje ili operisanje u nekim teorijskim razmatranjima. Tada funkciju f želimo da zamenimo nekom jednostavnijom funkcijom ϕ koja dovoljno dobro aproksimira f .

U svim ovim slučajevima funkcija ϕ kojom vršimo aproksimaciju najčešće je algebarski, eksponencijalni ili trigonometrijski polinom, mada se mogu koristiti i druge jednostavne funkcije. Dobijena aproksimaciona funkcija može se upotrebiti umesto funkcije f u mnogim situacijama kao, na primer, kod integracije kada je podintegralna funkcija vrlo složena ili nije integrabilna.

S obzirom na vrstu problema koji se rešava, najčešći tipovi aproksimacija su [9], [23], [33], [88]:

1. interpolacija,
2. srednje kvadratna aproksimacija i
3. aproksimacija pomoću splajnova

4.2.1 Interpolacija

Interpolacija je oblik aproksimacije funkcija koji se bavi problemima prve vrste, navedenih u prethodnom odeljku. Dakle, imamo funkciju f koja je zadata tabelom 4.1,

gde su x_i međusobno različite tačke koje sve pripadaju segmentu $[a, b]$, a $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Neka je $\{\phi_k\}$ neki izabrani skup funkcija u kome ćemo tražiti aproksimaciju ϕ funkcije f . Pritom, funkcije ϕ_k treba da budu linearno nezavisne, odnosno, bilo koja linearna kombinacija:

$$\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \dots + \alpha_m\phi_m, \quad (4.1)$$

može da bude identički jednaka nuli ako i samo ako su sve konstante $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ jednake nula. Takav sistem linearno nezavisnih funkcija predstavlja bazu u prostoru funkcija, što znači da svaku drugu funkciju možemo predstaviti nekom njihovom linearnom kombinacijom [9], [23], [33], [88].

Prema tome, aproksimativnu funkciju ϕ tražićemo u obliku linearne kombinacije:

$$\phi(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x), \quad (4.2)$$

gde su a_1, a_2, \dots, a_n brojni koeficijenti. S obzirom da su funkcije ϕ_0, ϕ_1, \dots unapred poznate, funkcija ϕ biće određena kad nađemo koeficijente a_0, \dots, a_n . Kriterijum na osnovu koga će oni biti određeni je sledeći:

$$\phi(x) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Dakle, funkcija ϕ mora u tačkama x_i da ima iste vrednosti kao i funkcija f . Za funkciju ϕ koja ispunjava uslove opisane jednačinom (4.3), kaže se da interpolira zadati skup $\{(x_i, y_i)\}$ [9], [23], [33], [88]. Tačke x_i zovu se čvorovi interpolacije. Primetimo da je broj čvorova x_i jednak broju parametara a_i koje treba odrediti. Zato se jednačina (4.3) svodi na sledeći sistem od $n + 1$ linearnih jednačina sa $n + 1$ -om nepoznatom:

$$a_0\phi_0(x_i) + a_1\phi_1(x_i) + \dots + a_n\phi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

To se u matičnom obliku može zapisati kao:

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & & \phi_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Da bi postojalo jedinstveno rešenje ovog sistema potrebno je da matrica sistema bude regularna kao i da sistem funkcija $\{\phi_k\}$ bude takav da ne postoji linearna kombinacija $a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$ koja ima $n + 1$ različitih nula.

Interpolacija se najčešće vrši u skupu polinoma, tj. za funkcije ϕ_k uzimamo $\phi_k(x) = x^k, k = 0, 1, \dots, n$. U tom slučaju interpolaciona funkcija je polinom n -tog stepena:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad (4.6)$$

a koeficijenti a_k se određuju iz sistema jednačina (4.5) koji se svodi na odgovarajući oblik. Naime, determinanta matrice sistema jednačina (4.5) postaje:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0, \quad (4.7)$$

što ukazuje na jednoznačnost rešenja problema interpolacije u slučaju kada se koriste polinomi. Na osnovu ovog, ne upuštajući se u sve detalje dokaza, imamo sledeće tvrđenje: ako su tačke x_0, x_1, \dots, x_n , međusobno različite, tada za proizvoljne realne vrednosti y_0, y_1, \dots, y_n postoji jedinstven polinom P stepena $\leq n$ takav da je $P(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Dokaz jedinstvenosti polinoma P može se utvrditi na sledeći način. Pretpostavimo da postoji drugi polinom Q koji takođe ispunjava uslove prethodnog tvrđenja, tj. ima stepen $\leq n$ i $Q(x_i) = y_i, za i = 0, \dots, n$. Tada polinom, $P - Q$ ima stepen $\leq n$ i anulira se u $n + 1$ tačaka x_0, x_1, \dots, x_n . Kako nenula polinom stepena n može imati najviše n nula, zaključujemo da mora da bude $P = Q$.

Interpolacija omogućava procenu nedostajuće vrednosti funkcije na osnovu poznatih vrednosti funkcije u dvema okolnim tačkama. Linijska interpolacija znači da male delove krive aproksimiramo linijskim segmentom koji prolazi kroz dve tačke na krivoj, na primer: (x_0, y_0) i (x_1, y_1) . Jednačina prave kroz dve tačke glasi [9], [23], [33], [88]:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_1). \quad (4.8)$$

Francuski matematičar Lagranž je primetio da se ova linearna funkcija, tj. polinom prvog stepena, može napisati u obliku [9], [23], [88]:

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1. \quad (4.9)$$

Oдавде se lako proverava da je $P_1(x_0) = y_0$ i $P_1(x_1) = y_1$. Prema tome, polinom (4.9) predstavlja interpolacioni polinom prvog stepena koji je postavljen kroz dva interpolaciona čvora. Polinom (4.9) naziva se Lagranžov polinom prvog stepena.

Značajan nedostatak Lagranžove interpolacije sastoji se u tome da ako želimo da povećamo broj čvorova, moramo celokupno izračunavanje da izvršimo iz početka. Zato stepen polinoma treba fiksirati unapred [9], [23], [88].

Za polinomsku interpolaciju vezan je jedan od najvećih paradoksa u numeričkoj matematici. Naime, prirodno je očekivati da ukoliko se povećava broj čvorova iz intervala $[a, b]$, da će utoliko interpolacioni polinom bolje aproksimirati vrednosti funkcije f u svim tačkama između čvorova. Ovo, međutim, ne mora da bude tačno. Dobro poznati primer koji ilustruje ovaj fenomen je slučaj Rungeove (*Carl David Tolmé Runge*) funkcije [9], [23], [33], [88]:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad (4.10)$$

na intervalu $[-5, 5]$. Ako je P_n polinom koji interpolira funkciju f u $n + 1$ podjednako udaljenih tačaka na intervalu $[-5, 5]$, uključujući i krajnje tačke, tada je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - P_n(x)| = \infty. \quad (4.11)$$

Dakle, kao posledica zahteva da se f i P_n podudaraju u sve većem i većem broju tačaka, imamo da se greška u tačkama koje nisu čvorovi povećava i neograničeno raste. Zbog toga, interpolacija polinomom velikog stepena sa mnogo čvorova je riskantna i nepreporučljiva.

4.3 Splajn funkcije

Interpolacija pomoću polinoma često ne daje zadovoljavajuće rezultate. Kao što je analizirano u prethodnom odeljku, ima primera gde se povećanjem broja čvorova ne postiže veća tačnost već, čak suprotno, interpolacioni polinom gubi svoja

aproksimativna svojstva. Da bi greška interpolacije bila manja, tj. da bi aproksimacija bila tačnija, nije dovoljno povećati broj čvorova interpolacije. Sa povećavanjem broja čvorova interpolacije, tj. sa povećavanjem stepena interpolacionog polinoma povećava se broj računskih operacija, pa se očekivano povećanje tačnosti ne postiže zbog velike akumulacije grešaka zaokruživanja. Polinom stepena n može imati $n - 1$ lokalnih maksimuma i minimuma, tako da njegov grafik mora često da oscilira kako bi prošao kroz sve tačke (x_k, y_k) . U zadacima interpolacije treba naći pouzdan algoritam koji će garantovati da se sa povećanjem broja čvorova dobijaju sve bolje aproksimacije [9], [23], [33], [88].

Jedan od načina da se ovaj problem prevaziđe ili bar umanje negativni efekti, sastoji se u tome da se interval $[a, b]$ na kome se vrši aproksimacija, podeli na podintervale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n - 1$, a zatim, da se na svakom podintervalu funkcija aproksimira polinomom nižeg stepena [9], [23], [33], [88]. Kako greška kod polinomske interpolacije zavisi od dužine intervala, logično je očekivati da se na užim intervalima može postići zadovoljavajuća tačnost sa polinomima nižeg stepena. Pritom će izbor čvorova polinoma na svakom podintervalu zavistiti od toga koliko geometrijskih osobina funkcije (neprekidnost, konveksnost, tačke ekstremuma...) želimo da sačuvamo.

Kako bi aproksimacija nelinearne optimalne kompresorske funkcije bila što bolja, tj. kako bi performanse komandora koji se predlažu bile veoma bliske performansama optimalnog komandoring kvantizera, u ovom poglavlju doktorske disertacije smo odlučili da izvršimo aproksimaciju nelinearne optimalne kompresorske funkcije pomoću splajn funkcija prvog i drugog reda. Spline funkcija prvog reda može se upotrebiti za linearnu interpolaciju. Spline funkcija drugog reda se sastoji od polinoma drugog stepena i uključuje sve linearne kombinacije osnovnih funkcija $x \rightarrow 1, x, x^2$ [9], [23], [33], [88]. U prilogu 1 prikazan je detaljan opis spline funkcije prvog reda, dok je u prilogu 2 detaljno opisana spline funkcija drugog reda.

4.4 Projektovanje skalarnih komandora sa jednakim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima pomoću splajn funkcija

Pored postupka linearizacije optimalne kompresorske funkcije koji je opisan u poglavlju 3, u ovoj doktorskoj disertaciji predložimo još jedan postupak kojim se vrši uprošćavanje modela komandora u cilju njegove jednostavnije realizacije. To je postupak aproksimacije optimalne kompresorske funkcije pomoću splajn funkcija [54], [55], [56], [57].

Projektovanje modela skalarnih komandora koje će biti opisano u ovom odeljku zasniva se na splajn funkcijama prvog reda kojima se aproksimira nelinearna optimalna kompresorska funkcija. Amplitudski opseg komandora podeljen je na segmente različitih veličina unutar kojih se nalazi jednak broj reprezentacionih nivoa. Veličina amplitudskih kvantata se razlikuje od segmenta do segmenta. Projektovanje se izvodi za Laplasovu funkciju gustine verovatnoće koja je opisana jednačinom (2.2).

Optimalna vrednost maksimalne amplitude komandora jednaka je [107]:

$$x_{\max} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{N+1}{3}\right), \quad (4.12)$$

pri čemu N predstavlja broj nivoa kvantovanja. Veličina amplitudskog kvanta određena je sledećom jednačinom:

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N-2}. \quad (4.13)$$

Ukupan broj reprezentacionih nivoa u prvom kvadrantu iznosi:

$$\sum_{i=1}^L \frac{N_i}{2} = \frac{N-2}{2}, \quad (4.14)$$

gde L predstavlja broj segmenata. Broj reprezentacionih nivoa po segmentima, N_i , je jednak i određen je iz sledećeg uslova:

$$\frac{N_i}{2} = \frac{N}{2L}, \quad i = 1, \dots, L-1, \quad (4.15)$$

dok je broj reprezentacionih nivoa u poslednjem segmentu jednak:

$$\frac{N_L}{2} = \frac{N-2}{2} - (L-1)\frac{N}{2L}. \quad (4.16)$$

Granice segmenata se određuju na sledeći način:

$$x_i = c_i^{-1}\left(i\frac{N}{2L}\right), \quad i=1, \dots, L-1, \quad (4.17)$$

pri čemu važi $x_L = x_{\max}$, tj. vrednost granice zadnjeg segmenta jednaka je vrednosti maksimalne amplitude komandora. Aproksimativna splajn funkcija prvog reda, $g(x)$, opisana u prilogu 1, kojom aproksimiramo nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju $c(x)$, ima sledeći oblik [9], [23], [33], [88]:

$$g(x) = \begin{cases} c_1(x_1) + m_1(x - x_1), & x \in [0, x_1] \\ \vdots \\ c_i(x_i) + m_i(x - x_i), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \vdots \\ c_L(x_L) + m_L(x - x_L), & x \in [x_{L-1}, x_L] \end{cases}, \quad (4.18)$$

gde m_i predstavlja nagib (koeficijent pravca) linije izražen formulom [9], [23], [88]:

$$m_i = \frac{c_i(x_i) - c_{i-1}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \quad i=1, \dots, L. \quad (4.19)$$

Veličina ćelija po segmentima jednaka je:

$$\Delta_{i,j} = \frac{\Delta}{g'_i(x)}, \quad i=1, \dots, L, \quad j=1, \dots, \frac{N_i}{2}. \quad (4.20)$$

Sa $\Delta_{i,j}$ je označena j -ta ćelija u i -tom segmentu. Granice ćelija se određuju na sledeći način:

$$x_{i,j}^{cel} = \frac{j\Delta}{g'_i(x)}, \quad i=1, \quad j=1, \dots, \frac{N_i}{2}. \quad (4.21)$$

$$x_{i,j}^{cel} = \frac{c_i(x_i) + j\Delta}{g'_i(x)}, \quad i=2, \dots, L, \quad j=1, \dots, \frac{N_i}{2}. \quad (4.22)$$

Granularna distorzija za predloženi model komandora, određuje se formulom:

$$D_g = 2 \sum_{i=1}^L \frac{\Delta_{i,j}^2}{12} P_{i,j}, \quad i=1, \dots, L, \quad j=1, \dots, \frac{N_i}{2} \quad (4.23)$$

pri čemu je $P_{i,j}$ verovatnoća da trenutna vrednost amplitude ulaznog signala pripada j -toj ćeliji u i -tom segmentu:

$$P_{i,j} = \int_{x_{i,j-1}^{cel}}^{x_{i,j}^{cel}} p(x) dx = \frac{1}{2} \left(\exp(-\sqrt{2} x_{i,j-1}^{cel}) - \exp(-\sqrt{2} x_{i,j}^{cel}) \right). \quad (4.24)$$

Distorzija prekoračenja je definisana jednačinom (2.34), pri čemu se reprezentacioni nivo y_N određuje iz uslova centroida:

$$y_N = \frac{\int_{x_{\max}}^{\infty} xp(x) dx}{\int_{x_{\max}}^{\infty} p(x) dx}, \quad (4.25)$$

tako da distorzija prekoračenja za ovako opisan model komandora ima sledeći oblik:

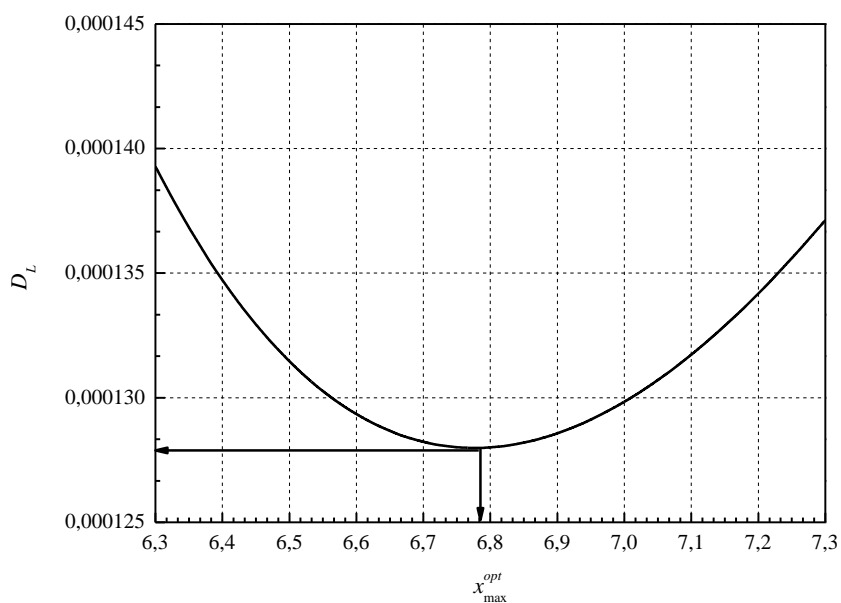
$$D_p = \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2} x_{\max}). \quad (4.26)$$

Performanse opisanih modela skalarnih komandora određene su odnosom signal-šum kvantizacije koji je definisan jednačinom (2.26).

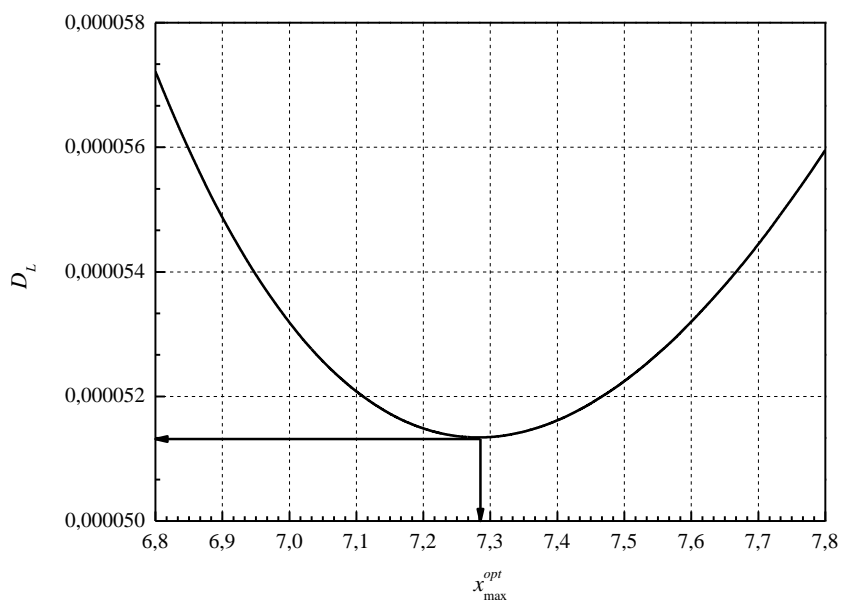
U cilju poboljšanja performansi opisanih modela komandora, došli smo na ideju da izvršimo optimizaciju splajn funkcije prvog reda koja aproksimira nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju u zadnjem segmentu. Optimizaciju splajn funkcije prvog reda vršimo tako što numerički određujemo vrednost maksimalne amplitude komandora poštujući kriterijum minimuma ukupne distorzije za poslednji segment:

$$D_L = 2 \frac{\left(\frac{x_{\max}^{opt} - x_{L-1}}{N/L - 1} \right)^2}{12} \int_{x_{L-1}}^{x_{\max}^{opt}} p(x) dx + \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{2} x_{\max}^{opt}), \quad x_{L-1} < x_{\max}^{opt} < x_{\max}. \quad (4.27)$$

Za maksimalnu amplitudu komandora x_{\max}^{opt} , dobijenu na ovaj način konstruićemo splajn funkciju prvog reda i određujemo ostale parametre potrebne za konstrukciju opisanih modela komandora.



Slika 4.1. Numeričko određivanje maksimalne amplitude opisanog modela komandora za broj segmenata $2L = 8$



Slika 4.2. Numeričko određivanje maksimalne amplitude opisanog modela komandora za broj segmenata $2L = 16$

Na slici 4.1 i slici 4.2 prikazano je numeričko određivanje maksimalne amplitude komandora za broj nivoa kvantovanja $N = 128$ i broj segmenata $2L = 8$ i $2L = 16$, respektivno.

Analiza performansi predloženih modela komandora projektovanih pomoću splajn funkcija prvog reda izvršena je za broj nivoa kvantovanja $N = 128$ i broj segmenata $2L = 8$ i $2L = 16$. Sa slike 4.1 i slike 4.2 se može uočiti da je vrednost maksimalne amplitude komandora kada je broj segmenata $2L = 8$ jednaka $x_{\max}^{opt} = 6.78$, dok je za broj segmenata $2L = 16$ jednaka $x_{\max}^{opt} = 7.28$.

U tabeli 4.2 prikazane su vrednosti SQNR-a opisanih modela komandora za slučaj kada je maksimalna amplituda komandora određena jednačinom (4.12), SQNR, zatim, za slučaj kada je maksimalna amplituda komandora određena numerički, $SQNR^N$ kao i vrednost SQNR-a optimalnog komandoring kvantizera, $SQNR^O$ [3], [4], [12], [16], [28], [36], [37], [45], [46], [62], [70], [75], [86].

Analizirajući vrednosti SQNR-a koje su prikazane u tabeli 4.2 možemo zaključiti da se predloženim postupkom optimizacije splajn funkcije prvog reda u zadnjem segmentu, ostvaruju vrednosti SQNR-a koje su veoma bliske vrednostima SQNR-a optimalnog komandoring kvantizera. Takođe, upoređujući vrednosti SQNR-a opisanih modela komandora sa vrednostima SQNR-a komandora koji su predloženi u radu [106], može se uočiti da pri istom broju segmenata i broju nivoa kvantovanja, opisanim modelima kvantizera ostvaruje se veća vrednost SQNR-a za oko 0.85 dB nego komandorima predloženim u radu [106], što znači da modeli komandora opisani u ovom odeljku predstavljaju bolje rešenje.

Tabela 4.2. Vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora Laplasovog izvora i optimalnog komandoring kvantizera

L	SQNR [dB]	$SQNR^N$ [dB]	$SQNR^O$ [dB]
4	34.19	34.76	35.71
8	35.21	35.41	35.71

4.5 Projektovanje skalarnih komandora Laplasovog izvora zasnovano na splajn funkcijama

U cilju smanjenja složenosti realizacije i postizanju zadovoljavajućih performansi komandora za veoma različite amplitude ulaznog signala, u radovima [54], [55] i [56] smo predložili, a u ovom odeljku opisali, nov metod konstrukcije komandora koji uvodi promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata. Promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata je određen na osnovu aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda [9], [23], [33], [88], kojima aproksimiramo optimalnu kompresorsku funkciju.

Aproksimacija optimalne kompresorske funkcije izvršena je pomoću splajn funkcija prvog i drugog reda, za ulazni signal Laplasove raspodele koja je opisana jednačinom (2.2). Amplitudski opsezi za svaki od $2L$ uniformnih komandora koji se projektuju na osnovu aproksimativnih splajn funkcija su jednaki, dok se broj i veličina ćelija unutar opsega razlikuju.

Maksimalna amplituda komandora x_{\max} , za slučaj kada je signal na ulazu kvantizera modelovan Laplasovom funkcijom gustine verovatnoće, je konačna i u radu [107] je pokazano da je njena optimalna vrednost:

$$x_{\max} = \frac{3}{\sqrt{2}} \ln(N + 1), \quad (4.28)$$

pri čemu N predstavlja broj nivoa kvantovanja. Granice segmenata kvantizera su ekvidistantne i određuju se na sledeći način:

$$x_i = i \frac{x_{\max}}{L}, \quad i = 0, 1, \dots, L. \quad (4.29)$$

Ukupan broj reprezentacionih nivoa u prvom kvadrantu iznosi:

$$\sum_{i=1}^L \frac{N_i}{2} = \frac{N}{2}, \quad (4.30)$$

pri čemu je broj reprezentacionih nivoa po segmentima, N_i , određen iz sledećeg uslova:

$$\frac{N_i}{2} = \frac{N}{2} \frac{c_i(x_i) - c_{i-1}(x_{i-1})}{c_L(x_L)}, \quad i = 1, \dots, L \quad (4.31)$$

Optimalna kompresorska funkcija $c_i(x_i)$ kojom se ostvaruje maksimalna vrednost SQNR-a za referentnu varijansu ulaznog signala, opisana je jednačinom (2.39). Reprezentacioni nivoi $y_{i,j}$ se određuju na osnovu aproksimativnih splajn funkcija g_i , na sledeći način:

$$y_{i,j} = g_i^{-1}\left(\left(\frac{2j-1}{2}\right)\Delta\right), \quad i=1, j=1, \dots, \frac{N_i}{2}, \quad (4.32)$$

$$y_{i,j} = g_i^{-1}\left(c_i(x_i) + \left(\frac{2j-1}{2}\right)\Delta\right), \quad i=2, \dots, L, j=1, \dots, \frac{N_i}{2}. \quad (4.33)$$

Postupak određivanja aproksimativnih splajn funkcija prvog reda $g^{s1}(x)$, i drugog reda $g^{s2}(x)$, kojima aproksimiramo nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju $c(x)$, opisan je u odeljku 4.6. Za reprezentacione nivoe $y_{i,j}$ se uzima ono rešenje koje pripada oblasti definisanosti aproksimativnih splajn funkcija za posmatrani segment. Veličina amplitudskog kvanta jednaka je:

$$\Delta = \frac{2x_{\max}}{N}, \quad (4.34)$$

dok je veličina ćelija po segmentima jednaka:

$$\Delta_{i,j} = \frac{\Delta}{c'_i(y_{i,j})}, \quad i=1, \dots, L, j=1, \dots, \frac{N_i}{2}. \quad (4.35)$$

Sa $\Delta_{i,j}$ je označena j -ta ćelija u i -tom segmentu.

Granularna distorzija za modele komandora koji se projektuju na prethodno opisan način određena je pomoću izraza (2.33) i jednaka je:

$$D_g = 2 \frac{x_{\max}^2}{3N^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{N_i/2} \frac{p(y_{i,j})}{[c'_i(y_{i,j})]^2} \Delta_{i,j}. \quad (4.36)$$

Distorzija prekoračenja određena je jednačinom (2.34). Reprezentacioni nivo $y_N = y_{\max}$ određen je na sledeći način:

$$y_{\max} = g_L^{-1}\left(x_{\max} - \frac{\Delta}{2}\right), \quad (4.37)$$

pri čemu g_L predstavlja aproksimativnu splajn funkciju u L -tom (zadnjem) segmentu. Performanse modela ovako projektovanih komandora određene su odnosom signal-šum kvantizacije koji je definisan izrazom (2.26).

4.6 Projektovanje skalarnih komandora Gausovog izvora zasnovano na splajn funkcijama

Postupak projektovanja skalarnih komandora za ulazni signal opisan Gausovom funkcijom gustine verovatnoće se, kao i postupak projektovanja komandora opisan u prethodnom odeljku, zasniva na promenljivom broju reprezentacionih nivoa unutar segmenata, pri čemu je promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata određen na osnovu aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda kojima aproksimiramo nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju. Postupak određivanja aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda, $g^{s1}(x)$ i $g^{s2}(x)$, kojima aproksimiramo nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju $c(x)$, opisan je u sledećem odeljku.

Optimalna vrednost amplitude maksimalnog opterećenja komandora x_{\max} za slučaj kada je signal na ulazu kvantizera opisan Gausovom funkcijom gustine verovatnoće jednaka je [79]:

$$x_{\max} = \hat{\sigma} \sqrt{6 \ln N} \left[1 - \frac{\ln \ln N}{4 \ln N} - \frac{\ln(3\sqrt{\pi})}{2 \ln N} \right], \quad (4.38)$$

gde N označava broj nivoa kvantovanja. Ukupan broj reprezentacionih nivoa određuje se iz uslova:

$$\sum_{i=1}^L \frac{N_i}{2} = \frac{N-2}{2}, \quad (4.39)$$

pri čemu je broj reprezentacionih nivoa po segmentima, N_i , određen jednačinom (4.70) kao što je opisano u prethodnom odeljku. Takođe, reprezentacioni nivoi $y_{i,j}$, veličina amplitudskog kvanta, veličina ćelija po segmentima, kao i granulna distorzija, određeni

su na isti način kao i kod modela komandora koji je opisan u prethodnom odeljku, jednačinama (4.32), (4.33), (4.34), (4.35) i (4.36), respektivno.

Za slučaj jedinične varijanse ulaznog signala, distorziju prekoračenja određujemo kao u [79]:

$$D_p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x_{\max}^3} e^{-\frac{x_{\max}^2}{2}}, \quad (4.40)$$

Određivanjem ukupne distorzije D_{uk} , koja je jednaka zbiru granularne distorzije D_g (4.36) i distorzije prekoračenja D_p (4.40), definisan je i odnos signal-šum kvantizacije ovog komandora (2.26).

4.7 Određivanje aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda

Projektovanje modela komandora koji su opisani u prethodna dva odeljka, zasnovano je na splajn funkcijama prvog i drugog reda kojima aproksimiramo nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju. U radovima [54], [55] i [56] smo predložili modele komandora čiji je amplitudski opseg podeljen na ukupno $2L = 4$ i $2L = 8$ segmenata. To znači da je za projektovanje opisanih modela komandora potrebno odrediti, u prvom slučaju, po dve aproksimativne splajn funkcije reda jedan i reda dva, a u drugom slučaju po četiri aproksimativne splajn funkcije reda jedan i reda dva.

Aproksimativna splajn funkcija prvog reda, $g^{s1}(x)$, opisana u prilogu 1, kojom aproksimiramo nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju $c(x)$, za broj segmenata $2L = 4$, ima sledeći oblik [9], [23], [33], [88]:

$$g^{s1}(x) = \begin{cases} c_1(x_1) + m_1(x - x_1), & x \in [0, x_1] \\ c_2(x_2) + m_2(x - x_2), & x \in [x_1, x_2] \end{cases}, \quad (4.41)$$

gde m_1 i m_2 predstavljaju nagib (koeficijent pravca) linije dat formulom [9], [23], [88]:

$$m_i = \frac{c_i(x_i) - c_{i-1}(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, L. \quad (4.42)$$

Aproksimativna splajn funkcija drugog reda opisana u prilogu 2, $g^{s2}(x)$, kojom aproksimiramo nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju $c(x)$, za broj segmenata $2L = 4$, jednaka je [9], [23], [33], [88]:

$$g^{s2}(x) = \begin{cases} a_1 + b_1x + d_1x^2, & x \in [0, x_1] \\ a_2 + b_2x + d_2x^2, & x \in [x_1, x_2] \end{cases}. \quad (4.43)$$

Da bismo odredili koeficijente aproksimativne splajn funkcije drugog reda, $g^{s2}(x)$, potrebno je ispuniti uslove, definisane u prilogu 2. Kao što je opisano u prilogu 2, broj postavljenih uslova mora da bude jednak broju koeficijenata koje treba odrediti. Naime, kako imamo tri čvora i dva podintervala, a svaki polinom drugog stepena ima tri koeficijenta, znači da treba odrediti ukupno šest koeficijenata [9], [23], [33], [88]. Rešavanjem sledećeg sistema jednačina, pri čemu je broj postavljenih uslova jednak broju koeficijenata koje treba odrediti:

$$g^{s2}(0) = 0, \quad (4.44)$$

$$c_1(x_1) = a_1 + b_1x_1 + d_1x_1^2, \quad (4.45)$$

$$c_1(x_1) = a_2 + b_2x_1 + d_2x_1^2, \quad (4.46)$$

$$c_2(x_2) = a_2 + b_2x_2 + d_2x_2^2, \quad (4.47)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} g^{s2'}(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} g^{s2'}(x) \Rightarrow b_1 + 2d_1x_1 = b_2 + 2d_2x_1, \quad (4.48)$$

$$g^{s2'}(x_2) = 0 \Rightarrow b_2 + 2d_2x_2 = 0, \quad (4.49)$$

dobijamo vrednosti koeficijenata $a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2$.

U drugom slučaju koji se razmatra u ovoj doktorskoj disertaciji, kada je broj segmenata kvantizera jednak $2L = 8$, aproksimativna splajn funkcija prvog reda, $g^{s1}(x)$, ima sledeći oblik [9], [23], [33], [88]:

$$g^{s1}(x) = \begin{cases} c_1(x_1) + m_1(x - x_1), & x \in [0, x_1] \\ c_2(x_2) + m_2(x - x_2), & x \in [x_1, x_2] \\ c_3(x_3) + m_3(x - x_3), & x \in [x_2, x_3] \\ c_4(x_4) + m_4(x - x_4), & x \in [x_3, x_4] \end{cases}, \quad (4.50)$$

pri čemu su koeficijenti pravca linije m_1 , m_2 , m_3 i m_4 definisani jednačinom (4.42). Aproksimativna splajn funkcija drugog reda, $g^{s2}(x)$, za slučaj kada je broj segmenata jednak $2L = 8$ jednaka je [9], [23], [33], [88]:

$$g^{s2}(x) = \begin{cases} a_1 + b_1x + d_1x^2, & x \in [0, x_1] \\ a_2 + b_2x + d_2x^2, & x \in [x_1, x_2] \\ a_3 + b_3x + d_3x^2, & x \in [x_2, x_3] \\ a_4 + b_4x + d_4x^2, & x \in [x_3, x_4] \end{cases}. \quad (4.51)$$

U ovom slučaju, pošto ima četiri čvora i tri podintervala, a svaki polinom drugog stepena ima tri koeficijenta, znači da treba odrediti ukupno dvanaest koeficijenata [9], [23], [33], [88]:

$$g^{s2}(0) = 0, \quad (4.52)$$

$$c_1(x_1) = a_1 + b_1x_1 + d_1x_1^2, \quad (4.53)$$

$$c_1(x_1) = a_2 + b_2x_1 + d_2x_1^2, \quad (4.54)$$

$$c_2(x_2) = a_2 + b_2x_2 + d_2x_2^2, \quad (4.55)$$

$$c_2(x_2) = a_3 + b_3x_2 + d_3x_2^2, \quad (4.56)$$

$$c_3(x_3) = a_3 + b_3x_3 + d_3x_3^2, \quad (4.57)$$

$$c_3(x_3) = a_4 + b_4x_3 + d_4x_3^2, \quad (4.58)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1^-} g^{s2'}(x) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} g^{s2'}(x) \Rightarrow b_1 + 2d_1x_1 = b_2 + 2d_2x_1, \quad (4.59)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} g^{s2'}(x) = \lim_{x \rightarrow x_2^+} g^{s2'}(x) \Rightarrow b_2 + 2d_2x_2 = b_3 + 2d_3x_2, \quad (4.60)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_3^-} g^{s2'}(x) = \lim_{x \rightarrow x_3^+} g^{s2'}(x) \Rightarrow b_3 + 2d_3x_3 = b_4 + 2d_4x_4, \quad (4.61)$$

$$g^{s2'}(x_4) = 0 \Rightarrow b_4 + 2d_4x_4 = 0, \quad (4.62)$$

$$c_4(x_4) = a_4 + b_4x_4 + d_4x_4^2, \quad (4.63)$$

Koeficijenti $a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2, a_3, b_3, d_3, a_4, b_4, d_4$ se određuju rešavanjem prethodnog sistema od dvanaest jednačina.

Projektovanje modela komandora koji se predlažu u ovoj disertaciji, zasnovano je na aproksimaciji nelinearne optimalne kompresorske funkcije pomoću splajn funkcija prvog i drugog reda. Međutim, još jedan način na koji je moguće konstruisati predložene modele jeste aproksimacija inverzne kompresorske funkcije, odnosno ekspandorske funkcije, pomoću splajn funkcija prvog i drugog reda.

Ekspandorska funkcija Laplasovog izvora se određuje kombinacijom jednačina (2.2) i (2.39) i ima sledeći oblik:

$$c^{-1}(x) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left[1 - \frac{x \left(1 - \exp \left(-\frac{\sqrt{2}x_{\max}}{3} \right) \right)}{x_{\max}} \right], \quad (4.64)$$

dok kombinacijom jednačina (2.3) i (2.39) dobijamo ekspandorsku funkciju Gausovog izvora:

$$c^{-1}(x) = \sqrt{6} \operatorname{erf} \operatorname{inv} \left(\frac{\operatorname{erf} \left(\frac{x_{\max}}{\sqrt{6}} \right)}{x_{\max}} \right), \quad (4.65)$$

pri čemu je inverzna *erf* funkcija obeležena sa *erf inv*.

Postupak određivanja potrebnih parametara za formiranje aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda je isti kao i u slučaju kompresorske funkcije, tj. koriste se isti sistemi jednačina koji su opisani o ovom odeljku, samo što se umesto kompresorske funkcije $c(x)$ koristi ekspanzorska funkcija $c^{-1}(x)$. Modeli komandora realizovani aproksimacijom ekspanzorske funkcije Laplasovog i Gausovog izvora pomoću splajn funkcija prvog i drugog reda biće predmet budućih istraživanja.

4.8 Performanse skalarnih komandora projektovanih pomoću aproksimativnih splajn funkcija

Analiza performansi predloženih modela skalarnih komandora zasnovana je na poređenju sa performansama nelinearnog optimalnog komandoring kvantizera [3], [4], [16], [28], [36], [37], [45], [46], [62], [70], [75], [86], [92]. Za broj segmenata $2L = 4$ i broj nivoa kvantovanja $N = 16$, $N = 32$, $N = 64$ i $N = 128$, na osnovu jednačina (2.39) i (4.42) određena je vrednost parametara potrebnih za formiranje aproksimativne splajn funkcije prvog reda, koja je opisana jednačinom (4.41).

Tabela 4.3. Vrednosti parametara potrebnih za formiranje splajn funkcije reda 1 za ulazni signal modelovan Laplasovom funkcijom gustine verovatnoće

N	x_1	$x_2=x_{\max}$	$c(x_1)$	$c(x_2)$	m_1	m_2
16	3.0051	6.0102	4.8371	6.0102	1.6096	0.3904
32	3.7086	7.4172	6.3175	7.4172	1.7035	0.2965
64	4.4276	8.8552	7.8781	8.8552	1.7793	0.2207
128	5.1546	10.3092	9.4749	10.3092	1.8382	0.1618

Tabela 4.4. Vrednosti parametara potrebnih za formiranje splajn funkcije reda 1 za ulazni signal modelovan Gausovom funkcijom gustine verovatnoće

N	x_1	$x_2=x_{\max}$	$c(x_1)$	$c(x_2)$	m_1	m_2
16	1.2373	2.4746	1.5339	2.4746	1.2397	0.7603
32	1.5259	3.0519	2.0579	3.0519	1.3487	0.6514
64	1.7819	3.5638	2.5843	3.5638	1.4503	0.5497
128	2.0137	4.0274	3.1029	4.0274	1.5409	0.4591

Vrednosti parametara za slučaj kada je ulazni signal modelovan Laplasovom funkcijom gustine verovatnoće prikazane su u tabeli 4.3, dok su vrednosti parametara za slučaj kada je ulazni signal modelovan Gausovom funkcijom gustine verovatnoće prikazane su u tabeli 4.4. Za vrednosti parametara dobijenih na ovaj način, formira se aproksimativna splajn funkcija prvog reda, na osnovu koje se projektuje predloženi model komandora.

Da bi se predloženi model komandora projektovao na osnovu splajn funkcije reda dva, koja je definisana izrazom (4.43), potrebno je odrediti koeficijente potrebne za formiranje kvadratne splajn funkcije. Potrebni koeficijenti se određuju na osnovu sistema jednačina (4.44)-(4.49). Vrednosti ovih koeficijenata za slučaj kada je ulazni signal modelovan Laplasovom funkcijom gustine verovatnoće prikazani su u tabeli 4.5, dok su za slučaj kada je ulazni signal modelovan Gausovom funkcijom gustine verovatnoće prikazani u tabeli 4.6

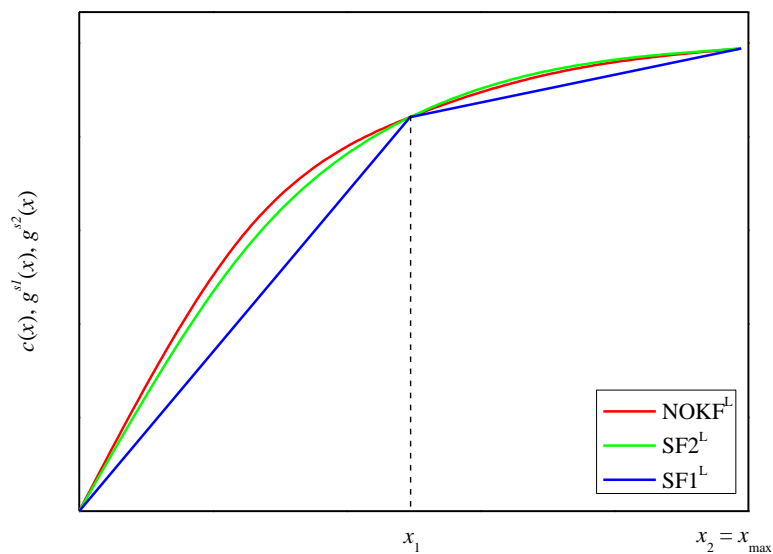
Na slici 4.3 i slici 4.5 prikazane su, za slučaj Laplasovog izvora, nelinearna optimalna kompresorska funkcija (NOKF^L), splajn funkcija prvog reda (SF1^L) i splajn funkcija drugog reda (SF2^L), za broj segmenata $2L = 4$ i broj nivoa kvantovanja $N = 32$ i $N = 128$, dok su za na slici 4.4 i slici 4.6 prikazane ove iste funkcije, ali za slučaj Gausovog izvora, označene sa NOKF^G, SF1^G i SF2^G, respektivno.

Tabela 4.5. Vrednosti koeficijenata na osnovu kojih se formira splajn funkcija reda 2 za ulazni signal modelovan Laplasovom funkcijom gustine verovatnoće

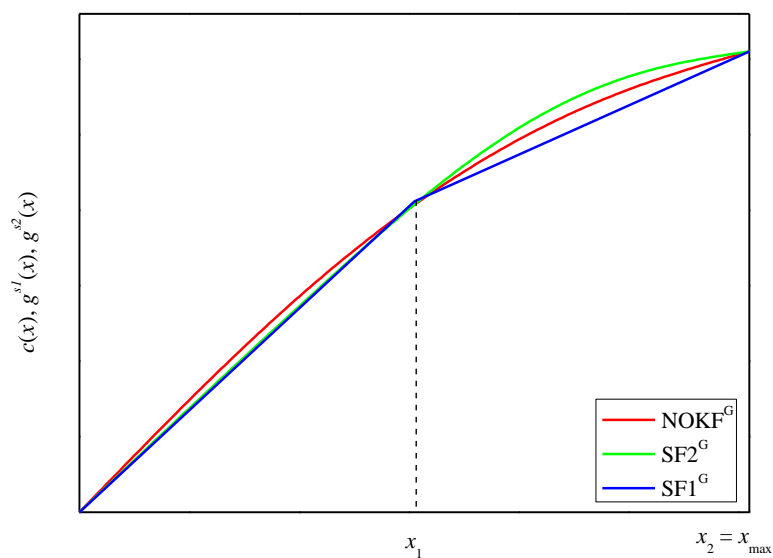
N	x_1	$x_2=x_{\max}$	a_1	b_1	d_1	a_2	b_2	d_2
16	3.0051	6.0102	0	2.4385	-0.2785	1.3178	1.5615	-0.1299
32	3.7086	7.4172	0	2.8139	-0.2994	3.0184	1.1861	-0.0799
64	4.4276	8.8552	0	3.1173	-0.3022	4.9468	0.8827	-0.0498
128	5.1546	10.3092	0	3.3526	-0.2938	6.9723	0.6474	-0.0314

Tabela 4.6. Vrednosti koeficijenata na osnovu kojih se formira splajn funkcija reda 2 za ulazni signal modelovan Gausovom funkcijom gustine verovatnoće

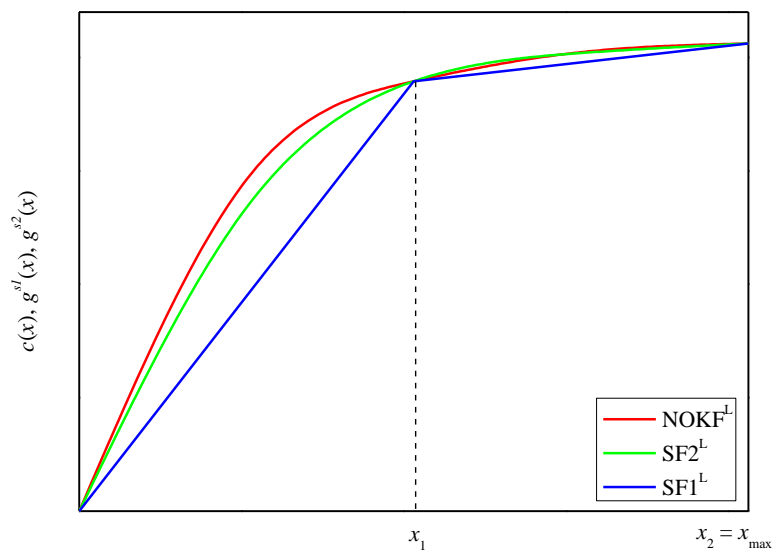
N	x_1	$x_2=x_{\max}$	a_1	b_1	d_1	a_2	b_2	d_2
16	1.2373	2.4746	0	0.9588	0.2269	-1.2882	3.0411	-0.6144
32	1.5259	3.0519	0	1.3945	-0.0301	-0.9238	2.6054	-0.4269
64	1.7819	3.5638	0	1.8012	-0.1969	-0.3542	2.1988	-0.3085
128	2.0137	4.0274	0	2.1636	-0.3092	0.3294	1.8364	-0.2279



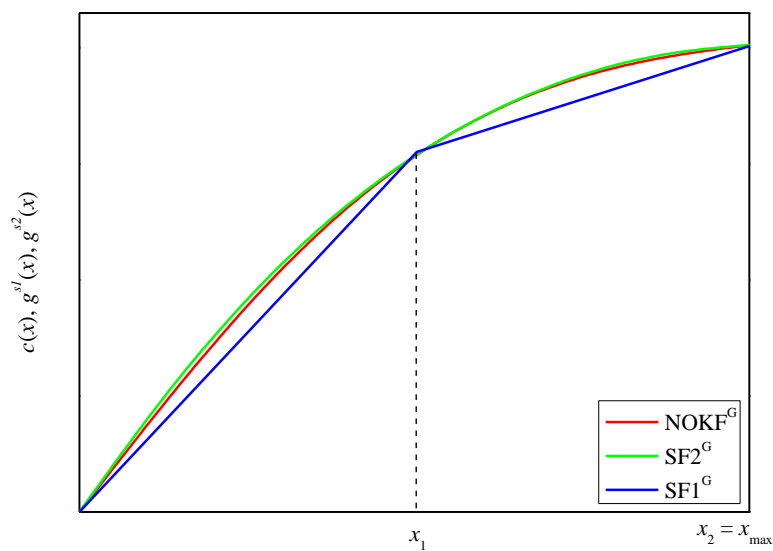
Slika 4.3. NOKF^L , SF1^L i SF2^L za broj nivoa kvantovanja $N = 32$



Slika 4.4. NOKF^G , SF1^G i SF2^G za broj nivoa kvantovanja $N = 32$



Slika 4.5. $NOKF^L$, $SF1^L$ i $SF2^L$ za broj nivoa kvantovanja $N = 128$



Slika 4.6. $NOKF^G$, $SF1^G$ i $SF2^G$ za broj nivoa kvantovanja $N = 128$

Tabela 4.7. Vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora Laplasovog izvora i optimalnog komandring kvantizera

N	$SQNR^{s1}$ [dB]	$SQNR^{s2}$ [dB]	$SQNR^I$ [dB]	$SQNR^O$ [dB]
16	16.4720	18.0205	17.5503	18.2404
32	21.9072	23.7028	23.5709	23.9303
64	26.3924	29.3821	29.5915	29.7752
128	31.6074	35.1126	35.6121	35.7050

Tabela 4.8. Vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora Gausovog izvora i optimalnog komandring kvantizera

N	$SQNR^{s1}$ [dB]	$SQNR^{s2}$ [dB]	$SQNR^O$ [dB]
16	19.51	19.69	20.22
32	25.35	25.80	26.01
64	31.07	31.88	31.89
128	36.74	37.80	37.81

Posmatranjem ovih slika može se uočiti da splajn funkcija stepena 2 bolje aproksimira nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju nego splajn funkcija stepena 1. Takođe, može se uočiti da je aproksimacija bolja ukoliko je broj nivoa kvantovanja veći. Na osnovu toga možemo zaključiti da će predloženi modeli komandora konstruisani na osnovu splajn funkcija reda dva, imati performanse veoma bliske performansama optimalnog komandring kvantizera, što je i prikazano u tabeli 4.7 i tabeli 4.8.

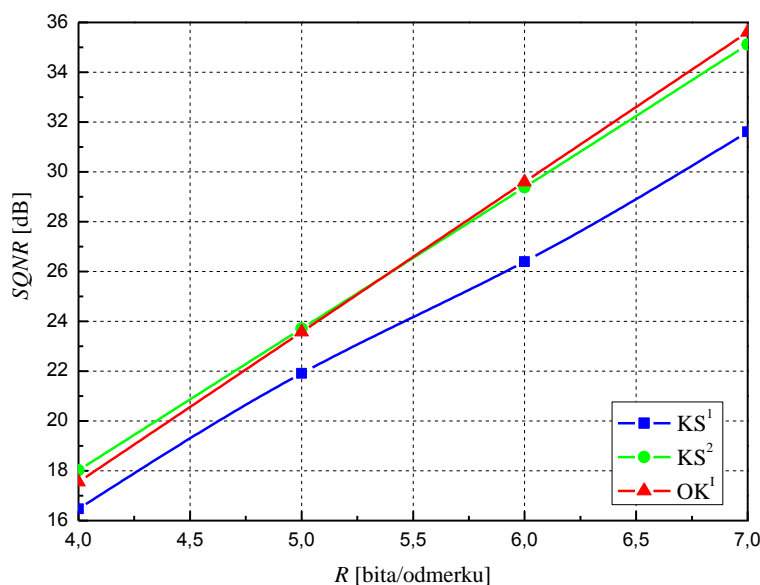
U tabeli 4.7. prikazane su vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora Laplasovog izvora, projektovanog na osnovu aproksimativne splajn funkcije prvog reda ($SQNR^{s1}$) i aproksimativne splajn funkcije drugog reda ($SQNR^{s2}$), kao i vrednosti SQNR-a optimalnog komandring kvantizera za slučaj $c(x): [-\infty, +\infty] \rightarrow [-1, 1]$, ($SQNR^I$), i slučaj $c(x): [-x_{max}, x_{max}] \rightarrow [-x_{max}, x_{max}]$, ($SQNR^O$). Vrednost SQNR-a optimalnog komandring kvantizera definisana je jednačinom (2.26). Ukupna distorzija optimalnog komandring kvantizera u slučaju kada važi sledeće preslikavnje $c(x): [-\infty, +\infty] \rightarrow [-1, 1]$ jednaka je:

$$D = \frac{9}{2N^2}. \quad (4.66)$$

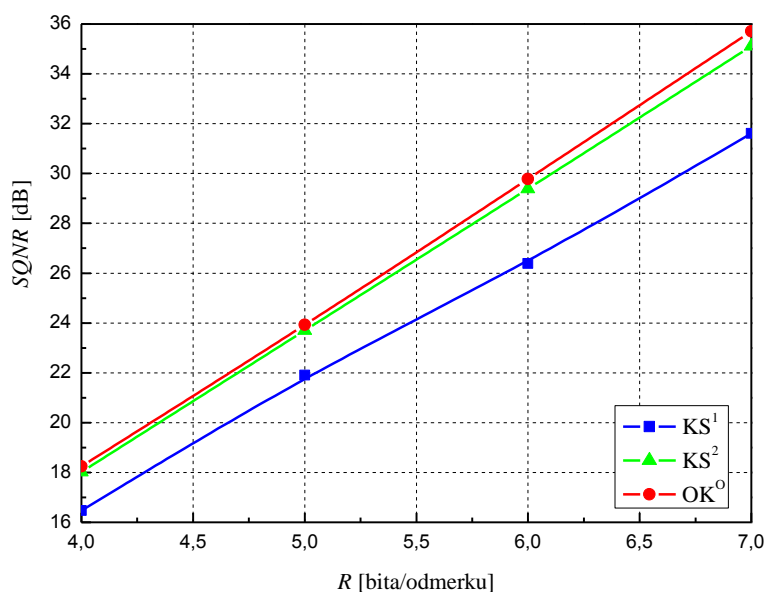
U drugom slučaju, kada važi preslikavanje $c(x): [-x_{\max}, x_{\max}] \rightarrow [-x_{\max}, x_{\max}]$, ukupna distorzija optimalnog kompanding kvantizera iznosi:

$$D = \frac{9}{2N^2} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x_{\max}}{3}} \right) + \frac{e^{-\sqrt{2}x_{\max}} (N^2 + \sqrt{2}Nx_{\max} + x_{\max}^2)}{N^2}. \quad (4.67)$$

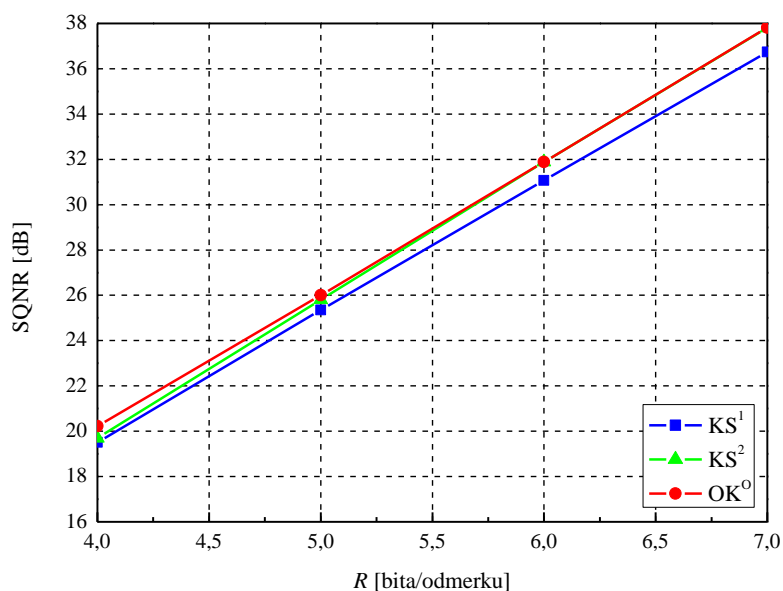
Analizirajući vrednosti SQNR-a prikazanih u tabeli 4.7, može se zaključiti da se konstrukcijom predloženog kompanding kvantizera na osnovu aproksimativnih splajn funkcija stepena 2 (KS^2) ostvaruje veća vrednost SQNR-a nego konstrukcijom predloženog kompanding kvantizera na osnovu aproksimativnih splajn funkcija stepena 1 (KS^1). Takođe, na osnovu tabele 4.7 i slike 4.7 može se uočiti da se predloženim modelom KS^2 ostvaruje veća vrednost SQNR-a nego optimalnim kompanding kvantizerom, (OK^1), koji je realizovan za slučaj $c(x): [-\infty, +\infty] \rightarrow [-1, 1]$, za broj nivoa kvantovanja $N = 16$ i $N = 32$. Na osnovu ovog rezultata se može uočiti da OK^1 nije optimalno projektovan za male bitske brzine.



Slika 4.7. Zavisnost vrednosti SQNR-a modela KS^1 , KS^2 i OK^0 od bitske brzine R za Laplasov izvor ($c(x): [-\infty, +\infty] \rightarrow [-1, 1]$)



Slika 4.8. Zavisnost vrednosti SQNR-a modela KS^1 , KS^2 i OK^0 od bitske brzine R za Laplasov izvor ($c(x): [-x_{\max}, x_{\max}] \rightarrow [-x_{\max}, x_{\max}]$)



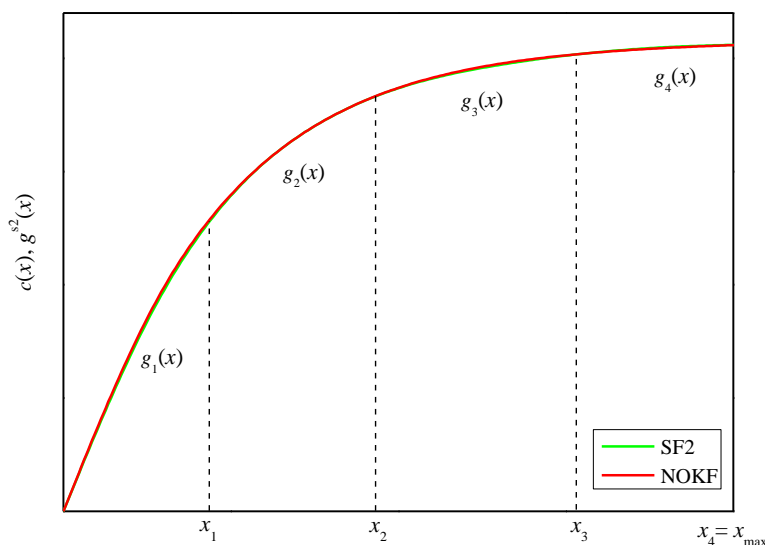
Slika 4.9. Zavisnost vrednosti SQNR-a modela KS^1 , KS^2 i OK^0 od bitske brzine R za Gausov izvor

S druge strane, optimalnim kompanding kvantizerom, OK^0 , koji je realizovan za slučaj $c(x): [-x_{\max}, x_{\max}] \rightarrow [-x_{\max}, x_{\max}]$, ostvaruju se veće vrednosti SQNR-a za ceo posmatrani opseg srednje bitske brzine, ali se na osnovu slike 4.8 kao i tabele 4.7, može uočiti da se modelom KS^2 ostvaruju vrednosti SQNR-a veoma bliske vrednostima SQNR-a OK^0 .

U tabeli 4.8. prikazane su vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora Gausovog izvora, projektovanog na osnovu aproksimativne splajn funkcije prvog reda ($SQNR^{s1}$) i aproksimativne splajn funkcije drugog reda ($SQNR^{s2}$), kao i vrednosti SQNR-a optimalnog kompanding kvantizera [3], [4], [16], [28], [36], [37], [45], [46], [62], [70], [75], [86]. Na osnovu rezultata prikazanih u tabeli 4.8 može se uočiti da se za slučaj predloženih komandora Gausovog izvora, kao i u slučaju komandora Laplasovog izvora, ostvaruju veće vrednosti SQNR-a kada je komandor projektovan pomoću aproksimativnih splajn funkcija drugog reda nego kada je projektovan pomoću aproksimativnih splajn funkcija prvog reda.

Međutim, upoređujući rezultate SQNR-a predloženih modela komandora Laplasovog i Gausovog izvora za isti broj nivoa kvantovanja, može se zaključiti da se predloženim modelima komandora Gausovog izvora ostvaruje veći kvalitet signala izražen SQNR-om nego predloženim modelima komandora Laplasovog izvora. Takođe, posmatrajući tabelu 4.8 može se uočiti da se predloženim modelima komandora Gausovog izvora ostvaruje vrednost SQNR-a koja je veoma bliska vrednosti SQNR-a optimalnog kompanding kvantizera [3], [4], [16], [28], [36], [37], [45], [46], [62], [70], [75], [86]. Stoga, možemo zaključiti da predloženi modeli kompanding kvantizera Gausovog izvora konstruisani na osnovu aproksimativnih splajn funkcija stepena 2 predstavljaju veoma dobro rešenje, jer se vrlo jednostavnim modelima za realizaciju, ostvaruje SQNR veoma blizak SQNR-u optimalnog kompanding kvantizera.

Na osnovu prethodnih analiza, a u cilju poboljšanja performansi komandora Laplasovog izvora, došli smo na ideju da predložimo novu klasu komandora čiji je broj segmenata $2L = 8$ i broj nivoa kvantovanja $N = 128$. Konstrukcija ovih komandora se vrši na isti način kao i prethodno opisana konstrukcija komandora koji se sastoje od $2L = 4$ segmenata, koristeći aproksimativne splajn funkcije stepena 2.



Slika 4.10. NOKF i SF2 za broj segmenata $2L = 8$ i broj nivoa kvantovanja $N = 128$

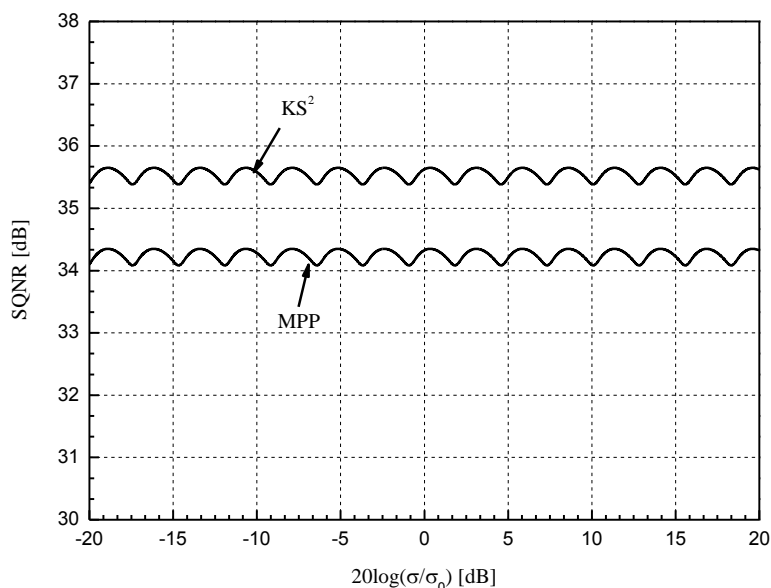
Na slici 4.10 prikazane su nelinearna optimalna kompresorska funkcija i aproksimativna splajn funkcija drugog reda, za broj segmenata $2L = 8$ i broj nivoa kvantovanja $N = 128$. Upoređujući sliku 4.10 sa slikom 4.5 može se uočiti da povećanjem broja segmenata, splajn funkcija drugog reda mnogo bolje aproksimira nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju.

Međutim, to ne znači da se broj segmenata može neograničeno povećavati, jer povećanjem broja segmenata raste i složenost realizacije predloženih modela komandora čija se konstrukcija zasniva na aproksimativnim splajn funkcijama drugog reda. Zbog toga je naša analiza ograničena na broj segmenata $2L = 8$. Projektovanjem predloženog modela komandora za broj segmenata $2L = 8$ i broj nivoa kvantovanja $N = 128$, na način opisan u odeljku 4.4, ostvaruje se vrednost SQNR-a koja je jednaka 35.6490 dB. Na taj način, povećanjem složenosti predloženog modela komandora za samo dva kvantizera u odnosu na model komandora koji je opisan u odeljku 4.4 koji ima $2L = 4$ segmenata i $N = 128$ nivoa kvantovanja, ostvarujemo povećanje SQNR-a za oko 0.53 dB (tabela 4.7). U poređenju sa modelom optimalnog komandring kvantizera, ostvaruje se vrednost SQNR-a manja za oko 0.06 dB. Na osnovu ovih rezultata, može se

zaključiti da se prednost predloženog modela komandora, za broj segmenata $2L = 8$ i broj nivoa kvantovanja $N = 128$, ogleda u kompromisu postignutom između složenosti projektovanja i ostvarenog kvaliteta signala merenog SQNR-om.

Na slici 4.11 prikazana je vrednost SQNR-a određena za širok opseg varijansi ulaznog signala predloženog modela komandora i modela komandora koji se predlaže u radu [7], a kojeg kraće označavamo sa MPP. Analiza robusnosti SQNR-a u širokom dinamičkom opsegu varijansi ulaznog signala prikazana je u radovima [4], [17], [18], [19], [49]. Model MPP predstavlja adaptivni prekidački kvantizer projektovan za širok opseg varijansi ulaznog signala. Predloženi model komandora projektovan je za jediničnu varijansu ulaznog signala. Kako adaptivni kvantizer u sebi sadrži fiksni kvantizer koji se projektuje za jediničnu varijansu ulaznog signala, to znači da predloženi model komandora može da se koristi i za projektovanje adaptivnih kvantizera. Na taj način se ne umanjuje opštost, jer se najčešće projektuju kvantizeri za jediničnu varijansu ulaznog signala.

Razmatranim modelom komandora, za isti broj segmenata $2L = 8$ i broj nivoa kvantovanja $N = 128$ kao i kod modela MPP, ostvaruje se vrednost SQNR-a koja je



Slika 4.11. SQNR predloženog modela komandora (KS^2) i modela MPP određen za širok opseg varijansi ulaznog signala

veća za oko 1.3 dB u odnosu na vrednost SQNR-a modela MPP (SQNR^{MPP} = 34.35 dB). Takođe, ostvarena vrednost SQNR-a je veća i od standardizovanih rešenja [34], [35], [90].

4.9 Optimizacija granice segmenata komandora konstruisanog na osnovu aproksimativnih splajn funkcija

Pored povećanja broja segmenata, poboljšanje performansi komandora Laplasovog izvora koji je opisan u odeljku 4.4 moguće je ostvariti i optimizacijom granice segmenata komandora. U radu [57] odlučili smo da optimizujemo vrednost granice segmenata x_1 , tj. granicu segmenta x_1 određujemo numerički u zavisnosti od maksimalne vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora. Na taj način, za razliku od načina koji je opisan u prethodnom odeljku, ne povećavamo broj segmenata, što znači da ne povećavamo ni složenost realizacije predloženih modela komandora. Takođe, u radu [57] predložili smo da se koeficijenti $a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2$ na osnovu kojih se formira kvadratna splajn funkcija opisana jednačinom (4.43) određuju minimizacijom srednje kvadratne greške:

$$F(x) = \sum_{i=1}^L \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (c_i(x) - g_i^{s2}(x))^2 dx, \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial a_i} = 0, \frac{\partial F(x)}{\partial b_i} = 0, \frac{\partial F(x)}{\partial d_i} = 0, i = 1, \dots, L. \quad (4.69)$$

Rešavanjem sistema jednačina (4.69), za broj segmenata $2L = 4$ i broj nivoa kvantovanja $N = 16$ i $N = 32$, dobijamo vrednosti koeficijenata $a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2$ u zavisnosti od granice segmenta x_1 . Granicu segmenta x_1 određujemo na sledeći način:

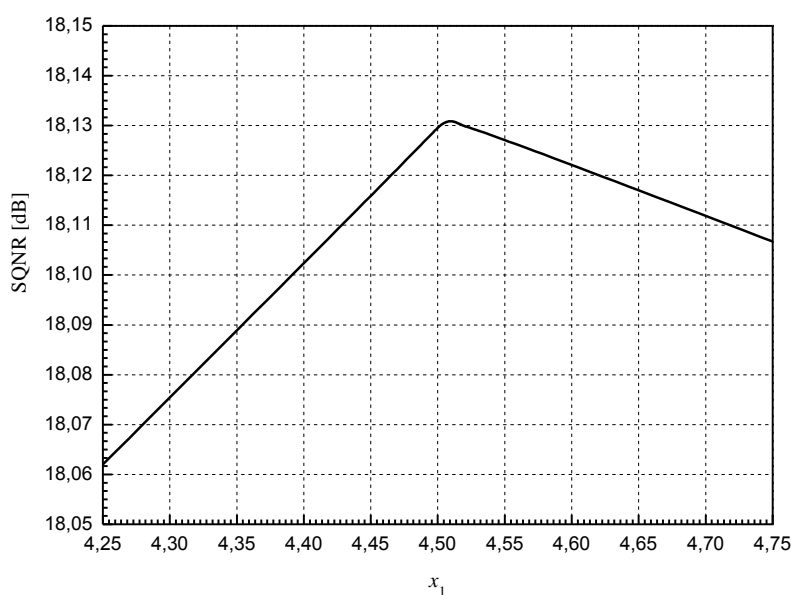
Korak 1. Na osnovu koeficijenata $a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2$ dobijenih minimizacijom srednje kvadratne greške formira se kvadratna splajn funkcija opisana jednačinom (4.43).

Korak 2. Na osnovu kvadratne splajn funkcije formirane kao što je opisano u koraku 1, projektuje se komandor kao što je opisano u odeljku 4.4. Na taj način dobijamo izraz za SQNR u funkciji granice segmenta x_1 , jer se vrednosti koeficijenata

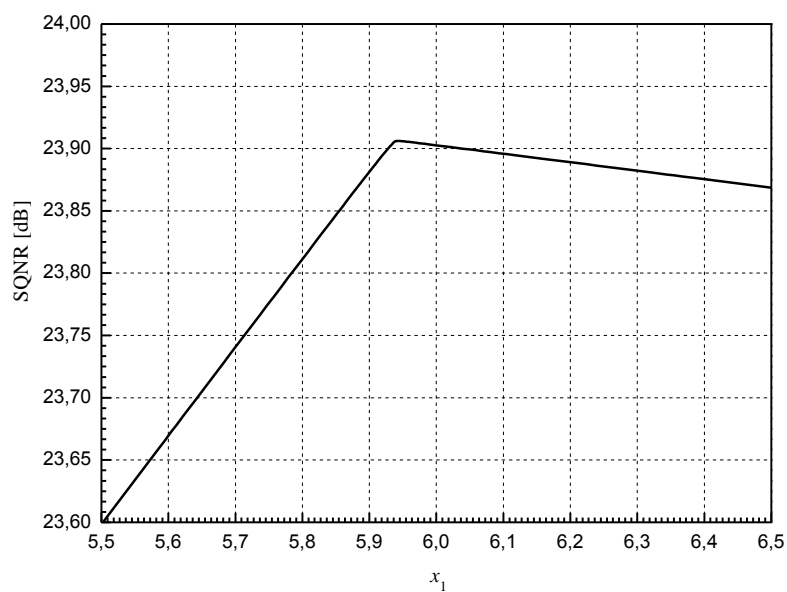
$a_1, b_1, d_1, a_2, b_2, d_2$ na osnovu kojih se formira kvadratna splajn funkcija na osnovu koje se projektuje komparator određuju u zavisnosti od granice segmenta x_1 .

Korak 3. Za ovako projektovan model komparatora, granicu segmenta x_1 određujemo numerički, tako da se ostvari maksimalna vrednost SQNR-a.

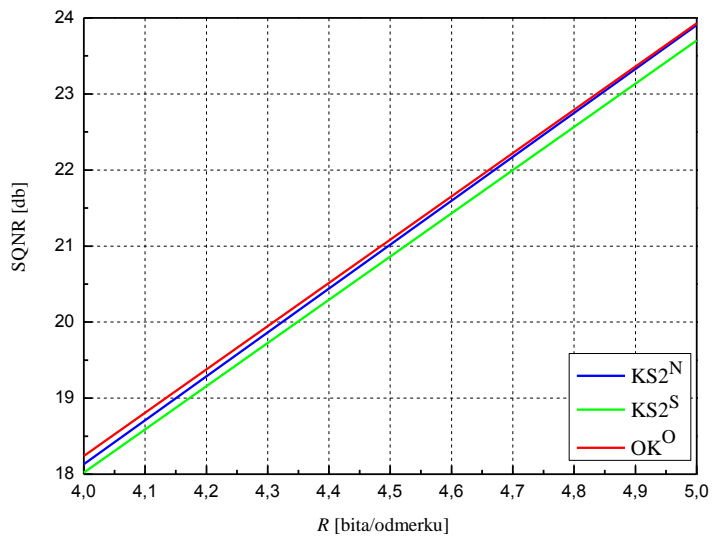
Na slici 4.12 i slici 4.13 prikazano je numeričko određivanje granice segmenta x_1 predloženog modela komparatora za broj nivoa kvantovanja $N = 16$ i $N = 32$, respektivno. Na osnovu slike 4.12 se može uočiti da se maksimalna vrednost SQNR-a ostvaruje za vrednost granice segmenta $x_1 = 4.51$. To znači da vrednost granice segmenta $x_1 = 4.51$ predstavlja optimalnu vrednost granice segmenta predloženog modela komparatora, za slučaj kada je broj nivoa kvantovanja $N = 16$. Za broj nivoa kvantovanja $N = 32$, sa slike 4.13 se uočava da se maksimalna vrednost SQNR-a ostvaruje za vrednost granice segmenta $x_1 = 5.94$.



Slika 4.12. Numeričko određivanje granice segmenta x_1 predloženog modela komparatora za broj nivoa kvantovanja $N = 16$



Slika 4.13. Numeričko određivanje granice segmenta x_1 predloženog modela komandora za broj nivoa kvantovanja $N = 32$



Slika 4.14. Zavisnost vrednosti SQNR-a $KS2^N$, $KS2^S$ i OK^O od bitske brzine R

Tabela 4.9. Vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora i optimalnog komanding kvantizera

N	$SQNR^N$ [dB]	$SQNR^S$ [dB]	$SQNR^O$ [dB]
16	18.1314	18.0205	18.2404
32	23.9065	23.7028	23.9303

U tabeli 4.9 prikazane su vrednosti SQNR-a predloženog modela komandora, za slučaj kada je granica segmenta x_1 određena numerički ($SQNR^N$), zatim, za slučaj kada se granica segmenta x_1 nalazi na sredini amplitudskog opsega ($SQNR^S$), kao i vrednosti SQNR-a optimalnog komanding kvantizera za slučaj $c(x): [-x_{\max}, x_{\max}] \rightarrow [-x_{\max}, x_{\max}]$, ($SQNR^O$), definisanog jednačinom (2.26). Zavisnost vrednosti SQNR-a od srednje bitske brzine optimalnog komanding kvantizera (OK^O), predloženog modela komandora čija je granica segmenta određena numerički ($KS2^N$) kao i modela komandora koji je opisan u odeljku 4.4 a čija se granica segmenta nalazi na sredini amplitudskog opsega ($KS2^S$), prikazana je na slici 4.14.

Posmatrajući rezultate prikazane u tabeli 4.9, kao i sa slike 4.14, može se uočiti da se predloženim modelom komandora čija se granica segmenta x_1 određuje numerički ostvaruje veća vrednost SQNR-a nego modelom komandora čija se granica segmenta x_1 nalazi na sredini amplitudskog opsega. Takođe, može se uočiti da se optimizujući vrednost granice segmenta ostvaruje SQNR veoma blizak vrednosti SQNR-a optimalnog komanding kvantizera. Stoga, može se zaključiti da projektovanje komandora na način opisan u ovom odeljku predstavlja bolje rešenje nego projektovanje komandora na način opisan u odeljku 4.4.

5 Zaključak

Kratak pregled rezultata izloženih u disertaciji i neke ideje za dalja istraživanja sadržani su u ovom zaključnom poglavlju.

Poznavanjem kompresorske funkcije, model komandora je potpuno definisan. Potpunim definisanjem modela komandora, određeni su svi potrebni parametri za njegovo projektovanje. Međutim, projektovanje modela komandora definisanog na ovakav način je veoma složeno, kako sa hardverskog tako i sa softverskog stanovišta. U cilju jednostavnije realizacije modela komandora, u doktorskoj disertaciji je predložen postupak linearizacije optimalne kompresorske funkcije. Primenom postupka linearizacije optimalne kompresorske funkcije izvedeno je projektovanje deo po deo linearnog skalarnog kvantizera sa jednakim brojem reprezentacionih nivoa po segmentima. Predložena su četiri postupka opimizacije amplitude maksimalnog opterećenja deo po deo linearnog skalarnog kvantizera, čime se predloženim modelima kvantizera ostvaruju vrednosti SQNR-a veoma bliske vrednostima SQNR-a nelinearnog optimalnog komanding kvantizera.

Predložili smo jedno novo rešenje za konstrukciju deo po deo unifromnih skalarnih kvantizera, koje uvodi promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata. Amplitudski opseg kvantizera koji se predlažu, podeljen je na po L segmenata u oba kvadranta, pri čemu je svaki od segmenata uniformno podeljen na određeni broj ćelija čije se veličine od segmenta do segmenta razlikuju. Predložena su dva načina za određivanje promenljivog broja reprezentacionih nivoa unutar segmenata. Prvi način jeste da se promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata određuje optimizacijom granularne distorzije uz ograničenje u pogledu ukupnog broja reprezentacionih nivoa tehnikom Lagranžovih multiplikatora. Drugi način za određivanje promenljivog broja reprezentacionih nivoa unutar segmenata koji smo predložili, zasnovan je na aproksimaciji prvog izvoda kompresorske funkcije u tački na sredini segmenta.

Pošto se splajn funkcijama veoma dobro mogu aproksimirati druge funkcije, u disertaciji je predložen postupak aproksimacije nelinearne optimalne kompresorske funkcije pomoću aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda. Izvedeno je projektovanje modela skalarnih komandora koje se zasniva na splajn funkcijama prvog

reda kojima se aproksimira nelinearna optimalna kompresorska funkcija. Amplitudski opseg kvantizera podeljen je na segmente različitih veličina unutar kojih se nalazi jednak broj reprezentacionih nivoa. U cilju poboljšanja performansi modela komandora čija se konstrukcija zasniva na splajn funkcijama prvog reda, predložili smo optimizaciju splajn funkcije prvog reda koja aproksimira nelinearnu optimalnu kompresorsku funkciju u zadnjem segmentu. Optimizaciju splajn funkcije prvog reda vršimo tako što numerički određujemo vrednost maksimalne amplitude kvantizera poštujući kriterijum minimuma ukupne distorzije za poslednji segment.

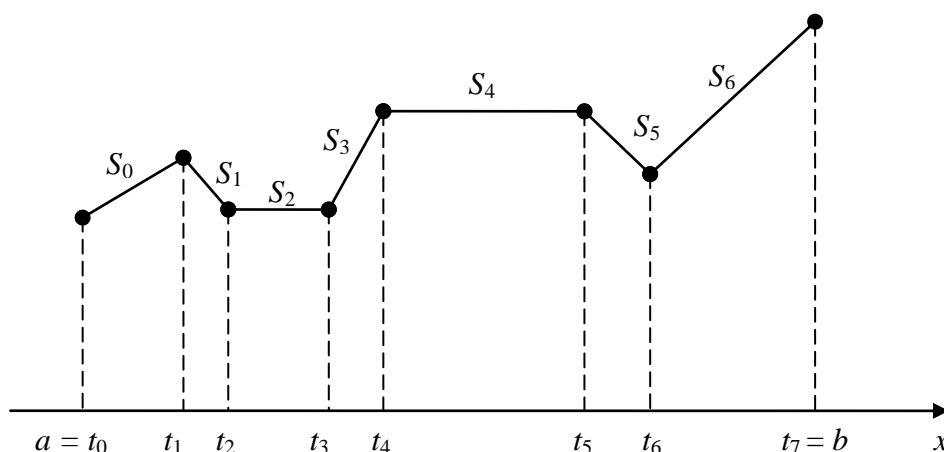
U cilju smanjenja složenosti realizacije i postizanju zadovoljavajućih performansi komandora koji se projektuju na osnovu aproksimativnih splajn funkcija, predložili smo nov metod konstrukcije komandora Laplasovog i Gausovog izvora koji uvodi promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata. Promenljiv broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata je određen na osnovu aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda, kojima aproksimiramo optimalnu kompresorsku funkciju. Predložen je nov način određivanja promenljivog broja reprezentacionih nivoa unutar segmenata na osnovu aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda.

Predložena je nova klasa komandora čije se projektovanje zasniva na splajn funkcijama drugog reda i koji imaju veći broj segmenata. Prednost projektovanja ove klase komandora ogleda se u kompromisu postignutom između složenosti projektovanja i ostvarenog kvaliteta signala merenog SQNR-om. Izvršena je optimizacija granice segmenata, tj. granica segmenata određena je numerički u zavisnosti od maksimalne vrednosti SQNR-a predloženih modela komandora. Optimizujući vrednost granice segmenata ostvaruje se vrednost SQNR-a koji je veoma blizak vrednosti SQNR-a optimalnog komandoring kvantizera.

Na osnovu predloženih načina konstrukcije modela komandora koji se zasnivaju na splajn funkcijama prvog i drugog reda, kojima aproksimiramo optimalnu kompresorsku funkciju, interesantno je ispitati performanse predloženih modela komandora koji bi bili projektovani na osnovu kubnog splajna.

PRILOG 1 - Splajn funkcija prvog reda

Splajn funkcija prvog reda se dobija u slučaju kada za aproksimacione polinome na svakom segmentu uzmemo polinome stepena 1 [9], [23], [33], [88]. Kod splajn funkcije prvog reda polinomi, tj. linijski segmenti, su spojeni tako da funkcija bude neprekidna.



Slika P.1. Splajn funkcija prvog reda

Splajn funkcija prvog reda se još naziva i poligonalna funkcija, odnosno splajn stepena 1. Na slici P.1 je prikazana splajn funkcija prvog reda. Tačke t_0, t_1, \dots, t_n u kojima funkcija menja svoj oblik zovu se čvorovi. Stoga, splajn funkcija prikazana na slici P.1. ima osam čvorova.

Splajn stepena 1 je funkcija S koja se definiše na sledeći način [9], [23], [33], [88]:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [t_0, t_1] \\ S_1(x), & x \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}, \quad (1)$$

pri čemu je

$$S_i(x) = a_i x + b_i, \quad (2)$$

jer svaki deo $S(x)$ predstavlja linearni polinom. Ovako definisana funkcija $S(x)$ je deo po deo linearna. Naravno, da bi funkcija S definisana jednačinom (1) bila splajn prvog reda, ona mora da bude neprekidna. Funkcija S , definisana jednačinom (1), karakteriše se sledećim svojstvima [9], [23], [33], [88]:

1. Oblast definisanosti funkcije S je interval $[a, b]$.
2. Funkcija S je neprekidna na intervalu $[a, b]$.
3. Postoji podela intervala $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ takva da je funkcija S linearni polinom na svakom podintervalu $[t_i, t_{i+1}]$.

Izvan intervala $[a, b]$, $S(x)$ je obično definisana tako, da levo od a bude ista funkcija kao što je na podintervalu koji se nalazi najdalje levo $[t_0, t_1]$, i u isto vreme sa desne strane b da bude ista funkcija kao što je na podintervalu koji se nalazi najdalje desno $[t_{n-1}, t_n]$. Naime, treba da važi $S(x) = S_0(x)$ u slučaju kada je $x < a$, i $S(x) = S_{n-1}(x)$ za slučaj kada je $x > b$.

Neprekidnost funkcije f u tački s može se definisati pomoću sledećeg uslova:

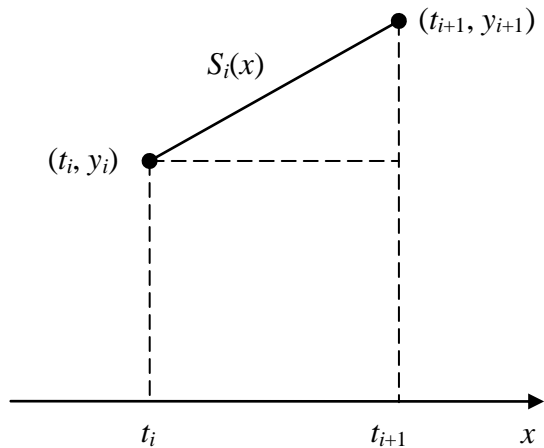
$$\lim_{x \rightarrow s^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow s^-} f(x) = f(s). \quad (3)$$

Ovde, $\lim_{x \rightarrow s^+}$ znači da vrednosti x konvergiraju ka s tako da važi da je razlika $(x-s)$ pozitivna za sve vrednosti x . Slično, $\lim_{x \rightarrow s^-}$ znači da vrednosti x konvergiraju ka s tako da važi da je razlika $(x-s)$ negativna za sve vrednosti x .

Splajn funkcija prvog stepena može se upotrebiti za linearnu interpolaciju. Neka je data tabela vrednosti funkcije f (tabela P.1), pri čemu su čvorovi t_0, \dots, t_n označeni tako da važi $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Tabela P.1 može biti predstavljena skupom $n + 1$ tačaka u ravni, $(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)$ čije su apcise različite.

Tabela P.1. Vrednosti funkcije f

x	t_0	t_1	\dots	t_n
y	y_0	y_1	\dots	y_n



Slika P.2. Splajn reda 1: linearni segment $S_i(x)$

Na osnovu ovih podataka možemo nacrtati poligonalnu liniju (grafik interpolacione funkcije, tj. splajna stepena 1). Pritom, nijedan segment nije vertikalalan. Na osnovu slike P.2 jednačina svakog segmenta može se zadati u obliku [9], [23], [33], [88]:

$$S_i(x) = y_i + m_i(x - t_i), \quad (4)$$

na intervalu $[t_i, t_{i+1}]$, gde je m_i nagib (koeficijent pravca) linije dat formulom [9], [23], [33], [88]:

$$m_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}. \quad (5)$$

Na osnovu jednačine (2) može se uočiti da se funkcija S sastoji od $2n$ parametara, i to n koeficijenata a_i i n konstanti b_i . Sa druge strane, za određivanje funkcije S potrebno je tačno $2n$ uslova, jer svaka segmentna funkcija S_i mora da interpolira podatke na krajevima podintervala kojima pripada. Znači, broj parametara mora da bude jednak broju uslova. Za splajn funkcije većeg reda, postoji neusklađenost između ova dva broja. Splajn k -tog stepena će imati $k - 1$ slobodan parametar koji možemo koristiti kako želimo kod problema interpolacije na čvorovima.

Kod praktičnog izračunavanja vrednosti $S(x)$, oblik jednačine (4) je pogodniji od oblika (2). Za datu vrednost argumenta x , najpre je potrebno odrediti interval $[t_i, t_{i+1}]$ u

kome se ovaj argument nalazi. Taj interval ćemo naći izračunavanjem razlika $x - t_0, x - t_1, \dots, x - t_i$, gde je i najmanji ceo broj takav da je $x - t_i > 0$. Na osnovu toga sledi da je $x \in [t_i, t_{i+1}]$ a vrednost funkcije $S(x)$ izračunavamo kao:

$$S(x) = y_i + m_i(x - t_i). \quad (6)$$

Ako je $x < t_0$, tada je:

$$S(x) = y_0 + m_0(x - t_0), \quad (7)$$

a ako je $x > t_n$, tada uzimamo da je

$$S(x) = y_{n-1} + m_{n-1}(x - t_{n-1}). \quad (8)$$

PRILOG 2 - Splajn funkcija drugog reda

Funkcija Q predstavlja splajn funkciju drugog reda ako zadovoljava sledeće uslove [9], [23], [33], [88]:

1. Oblast definisanosti funkcije Q je interval $[a, b]$.
2. Funkcije Q i Q' su neprekidne na intervalu $[a, b]$.
3. Postoje tačke t_i (koje se nazivaju čvorovi) tako da je $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ i Q je polinom stepena 2 na svakom podintervalu $[t_i, t_{i+1}]$.

Ukratko, splajn funkciju drugog reda je neprekidno diferencijabilna deo po deo kvadratna funkcija, pri čemu kvadratna funkcija uključuje sve linearne kombinacije osnovnih funkcija $x \rightarrow 1, x, x^2$. Splajn funkciju drugog reda se još naziva i kvadratni splajn.

Pretpostavimo da je funkcija Q zadata tabelarno, skupom svojih vrednosti, kao što je prikazano u tabeli P.1. Takođe, pretpostavimo i da su tačke t_0, t_1, \dots, t_n , čvorovi splajn funkcije koju treba konstruisati. Kvadratni splajn se sastoji od n odvojenih kvadratnih funkcija $x \rightarrow a_i x^2 + b_i x + c_i$, odnosno po jedna funkcija za svaki podinterval kreiran pomoću $n + 1$ -og čvora. Kako tražimo n polinoma drugog stepena, to znači da treba odrediti $3n$ nepoznatih koeficijenata. Na svakom podintervalu $[t_i, t_{i+1}]$, kvadratna funkcija Q_i mora da zadovolji sledeće uslove interpolacije, $Q_i(t_i) = y_i$ i $Q_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$. S obzirom na to da ima n takvih podintervala, to znači da postoji ukupno $2n$ uslova. Neprekidanost funkcije Q ne dodaje dodatne uslove. Međutim, neprekidanost prvog izvoda funkcije Q, Q' , daje još $n - 1$ uslova. Prema tome, imamo ukupno $2n + n - 1 = 3n - 1$ uslova, ili jedan uslov manje u odnosu na $3n$ neophodna uslova. Postoji više načina da se definiše jedan dodatni uslov, kao na primer $Q'(t_0) = 0$.

Funkcija Q koju želimo da konstruišemo sastoji se od n polinoma drugog stepena [9], [23], [33], [88]:

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0(x), & x \in [t_0, t_1] \\ Q_1(x), & x \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ Q_{n-1}(x), & x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}, \quad (1)$$

Ova funkcija je neprekidna na celom intervalu $[t_0, t_n]$ i interpolira tabelu P.1. To znači da je $Q(t_i) = y_i$ za $0 \leq i \leq n$. S obzirom na to da je Q' neprekidna funkcija, možemo staviti da je $z_i \equiv Q'(t_i)$. Vrednost $Q'(t_0)$ uzimamo kao neophodni dodatni uslov. Formula za Q_i je sledećeg oblika [9], [23], [33], [88]:

$$Q_i(x) = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(t_{i+1} - t_i)}(x - t_i)^2 + z_i(x - t_i) + y_i. \quad (2)$$

Kako bi se proverila tačnost prethodnog izraza, treba ispitati da li važe sledeće jednakosti: $Q_i(t_i) = y_i$, $Q_i'(t_i) = z_i$ i $Q_i'(t_{i+1}) = z_{i+1}$. Ova tri uslova jednoznačno definišu funkciju Q_i na intervalu $[t_i, t_{i+1}]$, kao što je opisano u jednačini (2). Da bi kvadratna splajn funkcija Q bila neprekidna i da bi interpolirala datu tabelu vrednosti, potreban i dovoljan uslov je [9], [23], [33], [88]:

$$Q_i(t_{i+1}) = y_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

Kombinovanjem poslednje jednačine sa jednačinom (2), sledi:

$$z_{i+1} = -z_i + 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \right), \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (4)$$

Ovom jednačinom može se dobiti vektor $[z_0, z_1, \dots, z_n]^T$, počevši od proizvoljne vrednosti za z_0 . Određivanjem ovog vektora može se konstruisati funkcija Q .

Literatura

- [1] A. Gersho, "Principles of Quantization", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 25, No. 7, pp. 427 - 436, 1978.
- [2] A. Gersho, "Quantization", *IEEE Communications Society Magazine*, pp. 20 - 29, September, 1977.
- [3] A. Gersho, R. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*, Springer, 1st edition, 1991.
- [4] A. György, T. Linder, "On the Structure of Optimal Entropy-Constrained Scalar Quantizers", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 48, No. 2, pp. 416 - 427, 2002.
- [5] A. Huurdeman, *The Worldwide History of Telecommunications*, Wiley-IEEE Press, 1nd edition, 2003.
- [6] A. Kondozi, *Digital Speech: Coding for Low Bit Rate Communication Systems*, John Wiley & Sons, 2nd edition, 2004.
- [7] A. Mosić, Z. Perić, S. Panić, "Switched Nonuniform and Piecewise Uniform Scalar Quantization of Laplacian Source", *International Journal of Computers Communication and Control*, Vol. 7, No. 1, pp. 115 - 122, 2012.
- [8] A. Thompson, D. Emerson, F. Schwab "Convenient formulas for quantization efficiency", *Radio Science*, Vol. 42, RS3022, 2007.
- [9] A. Zolić, *Numerička matematika I*, Matematički fakultet, Beograd, 2008.
- [10] B. Giroud, R. Rabenstein, A. Stenger, *Signals and Systems*, John Wiley & Sons, 2001.
- [11] B. McMillan, "Two Inequalities Implied by Unique Decipherability", *IRE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-2, pp. 115 - 156, 1956.
- [12] B. Smith, "Instantaneous Companding of Quantized Signals", *The Bell Systems Technical Journal*, Vol. 36, pp. 653 - 709, 1957.
- [13] C. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", *The Bell Systems Technical Journal*, Vol. 27, pp. 379 - 423, 623 - 656, 1948.
- [14] D. Drajić, P. Ivaniš, *Uvod u teoriju informacija i kodovanje*, Akademska misao, Beograd, 2009.

-
- [15] D. Huffman, "A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes", *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Vol. 40, pp. 1098 - 1101, 1952.
- [16] D. Hui, D. Neuhoff, "Asymptotic Analysis of Optimal Fixed-Rate Uniform Scalar Quantization", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 47, No. 3, pp. 957 - 977, 2001.
- [17] D. Kazakos, S. Makki, "Piecewise Linear Companders are Robust", *Proceedings of the 12th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation 2006*, pp. 462 - 462, Miami, April - May 30 - 3, 2006.
- [18] D. Kazakos, K. Makki, "Quantization Approach Utilizing Piecewise Linear Companders", *Proceedings of the IEEE Southeastcon 2008*, pp. 165 - 169, Huntsville, 3 - 6 April, 2008.
- [19] D. Kazakos, K. Makki, "Robust Companders", *Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Telecommunications and Informatics*, pp. 32 - 35, Dallas, Texas, 22 - 24 March, 2007.
- [20] D. Manolakis, V. Ingle, *Applied Digital Signal Processing: Theory and Practice*, Cambridge University Press, 1st edition, 2011.
- [21] D. Marco, D. Neuhoff, "Low-Resolution Scalar Quantization for Gaussian Sources and Absolute Error", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 53, No. 3, pp. 1177 - 1179, 2007.
- [22] D. Marco, D. Neuhoff, "Low-Resolution Scalar Quantization for Gaussian Sources and Squared Error", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 52, No. 4, pp. 1689 - 1697, 2006.
- [23] D. Radunović, *Numeričke metode*, Akademska misao, Beograd, 2004.
- [24] D. Salomon, *Data Compression*, Springer, 3rd edition, 2004.
- [25] E. Lee, P. Varaiya, *Structure and Interpretation of Signals and Systems*, Addison-Wesley, 2003.
- [26] F. Jenet, B. Anderson, "The Effects of Digitization on Nonstationary Stochastic Signals with Applications to Pulsar Signal Baseband Recording", *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol. 110, No 754, pp. 1467 - 1478, 1998.
- [27] F. Sheng Lu, G. Wise, "A Further Investigation of Max's Algorithm for Optimum Quantization", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 33, No 7, pp. 746 - 750, 1985.

-
- [28] G. Lukatela, D. Drajić, G. Petrović, R. Petrović, *Digitalne telekomunikacije*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1981.
- [29] G. Roe, "Quantizing for Minimum Distortion", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 10, pp. 384 - 385, 1964.
- [30] G. Sullivan, "Efficient Scalar Quantization of Exponential and Laplacian Random Variables", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 42, No. 5, pp. 1365 - 1374, 1996.
- [31] H. Gish, J. Pierce, "Asymptotically Efficient Quantizing", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 14, No. 5, pp. 676 - 683, 1968.
- [32] I. Mengyi Pu, *Fundamental Data Compression*, Elsevier, 2006.
- [33] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ, Наука, Москва, 1980.
- [34] ITU-T, Recommendation G.711, *Pulse Code Modulation (PCM) of Voice Frequencies*, International Telecommunication Union, 1972.
- [35] ITU-T, Recommendation G.711.1, *Wideband Embedded Extension for G.711 Pulse Code Modulation*, International Telecommunication Union, 2008.
- [36] J. Bucklew, N. Gallagher, "A Note on Optimal Quantization", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 25, No. 3, pp. 365 - 366, 1979.
- [37] J. Bucklew, N. Gallagher, "A Note on the Computation of Optimal Minimum Mean-Square Error Quantizers", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 30, No. 1, pp. 298 - 301, 1982.
- [38] J. Gibson, *The Communications Handbook*, CRC-Press, 1st edition, 1997.
- [39] J. Max, "Quantizing for Minimum Distortion", *IRE Transactions on Information Theory*, Vol. 6, No. 1, pp. 7 - 12, 1960.
- [40] J. Nikolić, D. Antić, Z. Perić, "Simply Construction Method for Exponential Source's Scalar Quantizers", *International Journal Electronics and Electrical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 18 - 21, 2005.
- [41] J. Nikolić, Z. Perić, "Lloyd-Max's Algorithm Implementation in Speech Coding Algorithm Based on Forward Adaptive Technique", *Informatica*, Vol. 19, No. 2, pp. 255 - 270, I O S Press, 2008.
- [42] J. Nikolić, Z. Perić, "Projektovanje optimalnog skalarnog komandora", *51th Conference for electronics, telecommunications, computers, automation, and nuclear*

engineering – ETRAN, Herceg Novi - Igalo, 6 - 8 June, 2006, Montenegro, *Proceedings of papers*.

[43] J. Nikolić, Z. Perić, A. Jocić, “Speech Coding Using a Novel Forward Adaptive Companding Technique”, *Zbornik radova VII konferencije Digitalna obrada govora i slike DOGS 2008*, str. 102 - 105, Kelebija, 2 - 3 Oktobar, 2008.

[44] J. Nikolić, Z. Perić, D. Antić, A. Jovanović, D. Denić, “Low Complex Forward Adaptive Loss Compression Algorithm and its Application in Speech Coding”, *Journal of Electrical Engineering*, Vol. 62, No. 1, pp. 19 - 24, 2011.

[45] J. Nikolić, Z. Perić, D. Pokrajac, “Average Complexity Analysis of Scalar Quantizer Design”, *Proceedings of the 6th WSEAS International Conference on Telecommunications and Informatics TELE-INFO '07*, pp. 22 - 27, Dallas, Texas, 22 – 24 March, 2007.

[46] J. Proakis, M. Salehi, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 5th edition, 2007.

[47] J. Vitter, “Dynamic Huffman Coding”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, Vol. 15, pp. 158 - 167, 1989.

[48] J. Ziv, A Lempel, “A Universal Algorithm for Sequential Data Compression”, *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-23, pp. 337 - 343, 1977.

[49] K. Papat, K. Zeger, “Robust Quantization of Memoryless Sources Using Dispersive FIR Filter”, *IEEE Transactions on Communications.*, Vol. 40, pp. 1670 - 1674, 1992.

[50] K. Sayood, *Introduction to Data Compression*, Morgan Kaufmann, 3rd edition, 1995.

[51] L. Hanzo, C. Somerville, J. Woodard, *Voice and Audio Compression for Wireless Communications*, John Wiley & Sons - IEEE Press, 2nd edition, 2007.

[52] L. Rabiner, R. Schafer, *Introduction to Digital Speech Processing*, 2007.

[53] L. Velimirović, Z. Perić, J. Nikolić, “Design of Novel Piecewise Uniform Scalar Quantizer for Gaussian Memoryless Source”, *Radio Science*, Vol. 47, RS2005, pp. 1 - 6, 2012.

[54] L. Velimirović, Z. Perić, J. Nikolić, M. Stanković, “Aproksimacija optimalne kompresorske funkcije pomoću splajn funkcija”, *18th Conference and exhibition YUINFO 2012*, Kopaonik, Serbia, February-March 29 - 03, 2012, *Proceedings of papers*, pp. 331 – 334.

-
- [55] L. Velimirović, Z. Perić, J. Nikolić, M. Stanković, "Design of Compandor Quantizer for Laplacian Source for Medium Bit Rate Using Spline Approximations", *Facta Universitatis*, Vol. 25, No. 1, pp. 81 - 92, 2012.
- [56] L. Velimirović, Z. Perić, M. Stanković, "Design of Novel Compandor Quantizer Using Spline Approximation", *Zbornik radova Devete konferencije "Digitalna obrada govora i slike DOGS 2012"*, Kovačica, Srbija, pp. 142 - 145, Oktobar 04 - 06, 2012.
- [57] L. Velimirović, Z. Perić, M. Stanković, J. Nikolić, "Optimization of Quantizer's Segment Treshold Using Spline Approximations for Optimal Compressor Function", *Applied Mathematics*, Vol. 3, No. 30, pp. 1430 - 1434, 2012.
- [58] M. Dinčić, Z. Perić, "Design of Quantizers with Huffman Coding for Laplacian Source", *Elektronika IR Elektrotehnika*, Vol. 30, No. 10, pp. 129 - 132, 2010.
- [59] M. Parker, *Digital Signal Processing: A Practical Guide*, Newnes, 2010.
- [60] M. Sherif, D. Sparrell, "Standards and Innovation in Telecommunications", *IEEE Communications Magazine*, Vol. 106, No. 7, pp. 22 - 29, 1992.
- [61] N. Abramson, *Information Theory and Coding*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
- [62] N. Jayant, P. Noll, *Digital Coding of Waveforms: Principles and Applications to Speech and Video*, Prentice Hall, 1st edition, 1984.
- [63] N. Judell, L. Scarf, "A Simple Derivation of Lloyd's Classical Result for the Optimum Scalar Quantizer", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 32, No. 2, pp. 326 - 328, 1986.
- [64] O. Bernard, J. Pierce, C. Shannon, "The Philosophy of PCM", *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, Vol. 36, No. 11, pp. 1324 - 1331, 1948.
- [65] O. Hersent, J. Pierre Petit, D. Gurle, *Beyond VoIP Protocols: Understanding Voice Technology and Networking Techniques for IP Telephony*, John Wiley & Sons, 1st edition, March 11, 2005.
- [66] P. Fleischer, "Sufficient Conditions for Achieving Minimum Distortion in a Quantizer", *IEEE International Convention Record*, pp. 104 - 111, 1964.
- [67] P. Moo, David Neuhoff, "Optimal Compressor Functions for Multidimensional Companding", *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, pp. 515, Ulm, Germany, June- July 29 - 03, 1997.

-
- [68] R. Capocelli, A. De Santis, "A Note on D-ary Huffman Codes", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 37, No. 1, pp. 174 - 179, 1991.
- [69] R. Fano, *Transmission of Information*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
- [70] R. Freeman, *Fundamentals of Telecommunications*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2005.
- [71] R. Gallager, *Principles of Digital Communication*, Cambridge University Press, 2008.
- [72] R. Gray, D. Neuhoff, "Quantization", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 44, No. 6, pp. 2325 - 2383, 1998.
- [73] R. Gray, T. Linder, Jia Li, "A Lagrangian Formulation of Zador's Entropy - Constrained Quantization Theorem", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 48, No. 3, pp. 695 - 707, 2002.
- [74] R. Hamming, *Coding and Information Theory*, Prentice Hall, 2st edition, 1986.
- [75] R. Wood, "On Optimum Quantization", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 15, No. 2, pp. 248 - 252, March, 1969.
- [76] S. Graf, H. Luschgy, *Foundations of Quantization for Probability Distributions*, Springer, 1st edition, 2000.
- [77] S. Kuo, B. Lee, *Real-Time Digital Signal Processing*, John Wiley & Sons, 2001.
- [78] S. Na, "Asymptotic Formulas for Mismatched Fixed-Rate Minimum MSE Laplacian Quantizers", *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 15, pp. 13 - 16, 2008.
- [79] S. Na, "Asymptotic Formulas for Variance-Mismatched Fixed-Rate Squalar Quantization of a Gaussian Source", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 59, No. 5, pp. 2437 - 2441, 2011.
- [80] S. Na, "On the Support of Fixed-Rate Minimum Mean-Squared Error Scalar Quantizers for a Laplacian Source", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 50, No. 5, pp. 937 - 944, 2004.
- [81] S. Na, D. Neuhoff, "Bennett's Integral for Vector Quantizers", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 41, No. 4, pp. 886-900, 1995.
- [82] S. Na, D. Neuhoff, "On the Support of MSE-Optimal, Fixed-Rate, Scalar Quantizers", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 47, No. 7, pp. 2972 -2982, November, 2001.

-
- [83] S. Vaseghi, *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*, John Wiley & Sons, 2st edition, 2000.
- [84] T. Cover, J. Thomas, *Elements of Information Theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2006.
- [85] T. Wysocki, B. Honary, B. Wysocki, *Signal Processing for Telecommunications and Multimedia*, Springer, 1st edition, 2004.
- [86] V. Algazi, "Useful Approximations to Optimum Quantization", *IEEE Transactions on Communication Technology*, Vol. 14, No. 3, pp. 297-301, 1966.
- [87] W. Bennett, "Spectra of Quantized Signals", *The Bell Systems Technical Journal*, Vol. 27, pp. 446 - 472, 1948.
- [88] W. Cheney, D. Kincaid, *Numerical Mathematics and Computing*, Thomson Brooks/Cole, 6nd edition, 2008.
- [89] X. Wu, "On Initialization of Max's Algorithm for Optimum Quantization", *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 38, No. 10, pp.1653-1656, October, 1990.
- [90] Y. Koren, I. Yavneh, A. Spira, "A Multigrid Approach to the Scalar Quantization Problem", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 51, No. 8, pp. 2993 - 2998, 2005.
- [91] Z. Perić, A. Jovanović, J. Nikolić, V. Ilić, A. Jocić, "Praktikum iz Digitalnih telekomunikacija I", Elektronski fakultet, Niš.
- [92] Z. Perić, J. Nikolić, "Analysis of Compressor Functions for Laplacian Source's Scalar Compandor Construction", *Data Recording, Storage and Processing*, Vol. 8, No. 2, pp. 15 - 24, June, 2006.
- [93] Z. Perić, J. Nikolić, "An Effective Method for Initialization of Lloyd-Max's Algorithm of Optimal Scalar Quantization for Laplacian Source", *Informatica*, Vol. 18, No. 2, pp. 279 - 288, I O S Press, 2007.
- [94] Z. Perić, J. Nikolić, "Design of Piecewise Uniform Scalar Quantizer with Geometric Progression of Segment Width", *Advances in Electrical and Computer Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 37 - 40, 2011.
- [95] Z. Perić, J. Nikolić, "Inicijalizacija Lloyd-Max-ovog algoritma optimalne skalarne kvantizacije za Laplasov izvor", *50th Conference for electronics, telecommunications, computers, automation, and nuclear engineering – ETRAN*, Belgrade, 6 - 8 June, 2006, Serbia, *Proceedings of papers*, pp. 23 - 26.
-

- [96] Z. Perić, J. Nikolić, “Linearizacija optimalne kompresorske funkcije”, *17th Telecommunications Forum TELFOR 2009*, Belgrade, November 24 - 26, 2009, Serbia, *Proceedings of papers*, pp. 572 - 575.
- [97] Z. Perić, J. Nikolić, D. Aleksić, “Analiza metoda skalarne kvantizacije za Laplasov izvor”, *12th Telecommunications Forum TELFOR 2004*, Belgrade, November 23 - 25, 2004, Serbia, *Proceedings of papers*.
- [98] Z. Perić, J. Nikolić, D. Aleksić, “Procena amplitudskog opsega skalarnog kvantizera za Laplasov izvor”, *11th Conference and exhibition YUINFO 2005*, Kopaonik, Serbia, 07 – 11 March, 2012, *Proceedings of papers*.
- [99] Z. Perić, J. Nikolić, D. Pokrajac, “Analysis of Support Region for Laplacian Source’s Scalar Quantizers”, *The 7th IEEE Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services – TELSIKS 2005*, Niš, Serbia and Montenegro, 28 - 30 September, 2005, *Proceedings of papers*, pp. 491 - 494,.
- [100] Z. Perić, J. Nikolić, D. Pokrajac, “Estimation of the Support Region for Laplacian Source Scalar Quantizers”, *Journal of Electrical Engineering*, Vol. 58, No. 1, pp. 47 - 51, 2007.
- [101] Z. Perić, J. Nikolić, D. Pokrajac, “New Method for Construction of Optimal Scalar Quantizers for Laplacian Source”, *International Scientific Journal of Computing*, Vol. 5, No. 2, pp. 50 - 54, August, 2006.
- [102] Z. Perić, J. Nikolić, L. Velimirović, “A Novel Method for the Design of Piecewise Linear Compressor Function Based on the First Derivate Approximation of Optimal Compressor Function in the Case of Gaussian Source”, *The First International Conference – TAKTONS*, Novi Sad, Serbia, November 9 - 12, 2011, *Proceedings of papers*, pp. 11.
- [103] Z. Perić, J. Nikolić, L. Velimirović, “Design of Novel Two-Level Quantizer with Extended Huffman Coding for Laplacian Source”, *XLVI International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies - ICEST 2011*, Niš, Serbia, July 29 - 1, 2011, *Proceedings of papers*, pp. 235 – 238.
- [104] Z. Perić, J. Nikolić, Z. Eskić, “Projektovanje linearizovanog hibridnog skalarnog kvantizera za Gausov izvor”, *Zbornik radova INFOTEH JAHORINA 2009*, Vol. 8, Ref. B-I-10, str. 122 - 125, Jahorina, 18 - 20 Mart, 2009.

[105] Z. Perić, J. Nikolić, Z. Eskić, S. Krstić, N. Marković, “Design of Novel Scalar Quantizer Model for Gaussian Source”, *Information Technology and Control*, Vol. 37, No. 4, pp. 321 - 325, 2008.

[106] Z. Perić, L. Velimirović, M. Dinčić, “Poboljšana realizacija optimalne kompresorske funkcije sa hijerarhijskim kodovanjem”, *18th Telecommunications Forum TELFOR 2010*, Belgrade, November 23 - 25, 2010, Serbia, *Proceedings of papers*, pp. 658 – 661.

[107] Z. Perić, M. Petković, M. Dinčić, “Simple Compression Algorithm for Memoryless Laplacian Source Based on the Optimal Companding Technique”, *Informatica*, Vol. 20, pp. 99 - 114, 2009.

Sažetak

Projektovanje skalarnih komandora za srednje brzine korišćenjem splajn aproksimacija

U doktorskoj disertaciji najpre su opisane opšte osobine signala i skalarnih kvantizera, kao i postupak diskretizacije signala, a zatim je predstavljen model skalarnog komandora. Linearizacijom i aproksimacijom nelinearne optimalne kompresorske funkcije vrši se uprošćavanje modela komandora u cilju njegove jednostavnije realizacije.

Opravdanost projektovanja komandora na osnovu linearizovane optimalne kompresorske funkcije kao i pomoću aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda potvrđena je u disertaciji. Spline funkcijama se može veoma dobro aproksimirati optimalna kompresorska funkcija. Zbog toga je konstrukciji skalarnih komandora pomoću aproksimativnih splajn funkcija prvog i drugog reda posvećena posebna pažnja u doktorskoj disertaciji.

Izvršena je detaljna analiza performansi predloženih modela komandora za ulazne signale modelovane Laplasovom i Gausovom funkcijom gustine verovatnoće. U disertaciji je potvrđeno da se predloženim modelima komandora ostvaruje kvalitet signala veoma blizak kvalitetu signala optimalnog komandoring kvantizera.

Analiza predloženih modela komandora projektantima omogućava da se stekne potpuni uvid o značaju komandoring tehnike, uticaju amplitude maksimalnog opterećenja, broja segmenata, broja nivoa kvantovanja i vrste ulaznog signala na performanse komandora i da za željene parametre konstruišu optimalan model komandora.

Summary

Design of scalar compandor for medium bit rate using spline approximations

In this doctoral thesis, firstly the general characteristics of the signal and scalar quantizers, as well as the procedure of signal discretization, are described, and then the model of scalar compandor is shown. By linearization and approximation of the optimal compressor function, the simplification of the compandor model is done toward its simpler realization.

The validity of compandor design based on linearized compressor function and approximative spline functions of the first and second order is confirmed in this thesis. Using spline functions, the optimal compressor function can be well approximated. Therefore, in this PhD thesis, special attention is paid to scalar compandor design by using first and second order spline functions.

A detailed analysis of the proposed compandor models for the input signals modelled by Laplacian and Gaussian probability density function is done. Also, it is shown that by the proposed quantizer model, signal quality that is very close to signal quality of the optimal companding quantizer, is achieved.

The analysis of the proposed compandor model allows designers to gain complete insight on the compandor technique significance, the support region, the number of segments, the number of quantization levels and the types of the input signals on the compandor performances, and also to design the optimal compandor model for the desired parameters.

Biografija

Lazar Velimirović rođen je 17.05.1983. godine u Prokuplju, gde je završio osnovnu školu “9. oktobar” kao nosilac Vukove diplome. Gimnaziju “Bora Stanković” na prirodno-matematičkom smeru završio je u Nišu.

Elektronski fakultet u Nišu, smer Telekomunikacije, upisao je školske 2002/2003. godine. Diplomirao je 26.05.2008. godine sa prosečnom ocenom 8.00 (osam) i ocenom 10 (deset) na diplomskom ispitu. Diplomski rad pod nazivom *Uticaj fedinga i ostalih smetnji na performanse sistema* odbranio je na Katedri za telekomunikacije.

Odmah po diplomiranju upisao je doktorske studije na Elektronskom fakultetu u Nišu, smer Telekomunikacije. Položio je sve ispite predviđene Nastavnim planom i programom doktorskih studija sa prosečnom ocenom 10.00 (deset i 00/100).

Dana 01.11.2011. zasnovao je radni odnos na Matematičkom institutu SANU u Beogradu kao istraživač-pripravnik.

U dosadašnjem radu objavio je preko 20 naučnih radova koji su štampani u međunarodnim časopisima sa SCI (*Science Citation Index*) liste, u časopisima od međunarodnog značaja i referisani na međunarodnim i domaćim simpozijumima i konferencijama i publikovani u odgovarajućim zbornicima.