



УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ



Милан Д. Милошевић

**ИНФЛАТОРНИ КОСМОЛОШКИ
МОДЕЛИ СА ТАХИОНСКИМ
И РАДИОНСКИМ ПОЉИМА**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ниш, 2017.



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF PHYSICS



Milan D. Milošević

**INFLATIONARY COSMOLOGICAL
MODELS WITH
TACHYON AND RADION FIELDS**

DOCTORAL DISSERTATION


Niš, 2017.

Подаци о докторској дисертацији


Ментор:	др Горан Ђорђевић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу
Наслов:	Инфлаторни космолошки модели са тахсионским и радионским пољима
Резиме:	Једна од актуелних класа инфлаторних космолошких модела базира се на увођењу скаларног поља са нестандартним тахионским лагранжијанима Дирак-Борн-Инфелдовога (DBI) типа. А. Сен је показао потенцијално фундаменталну улогу тахионских поља у космологији света на брани. Истраживања у овој дисертацији мотивисана су тзв. Рандал-Сундрум (RSII) космолошким моделима. Основни циљ истраживања је формулација и решавање аналитичко-нумеричког инфлаторног модела са DBI-тахсионским пољем и RSII модела са додатним радионским пољем и израчунавање опсервабилних параметара. Упоредивање добијених резултата, који су у доброј сагласности, са измереним астрофизичким подацима омогућило је боље разумевање улоге и доприноса струна и брана модерној космологији, и указало је да је улога радиона у RSII моделу мања од очекиване.
Научна област:	Физика / Теоријска физика
Научна дисциплина:	Космологија
Кључне речи:	Космологија, инфлација, Рандал-Сундрум модел, DBI лагранжијан, тахиони
УДК:	524.82 : 524.834
CERIF класификација:	P210 физика елементарних честица и квантна теорија поља
Тип лиценце Креативне заједнице:	CC BY-NC-SA

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dr Goran Djordjević, Full Professor, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Inflationary cosmological models with tachyon and radion fields
Abstract:	A popular class of the inflationary cosmological models is based on an introduction of a scalar field with nonstandard tachyonic Lagrangian of the Dirac-Born-Infeld (DBI) type. A potentially fundamental role of the tachyon fields in the braneworld cosmology was proposed by A. Sen. Research in this PhD thesis is motivated by Randall-Sundrum (RSII) cosmological model. The main objective of the research is to formulate and solve an analytical-numerical inflationary model with DBI-tachyon field and RSII model with an additional radion field, as well computation of observational parameters. Obtained results are in a good agreement with the real astrophysical data and provide a better understanding of the role of strings and branes in modern cosmology. The results indicated that role of radion in an initial RSII setup is less important than expected.
Scientific Field:	Physics / Theoretical Physics
Scientific Discipline:	Cosmology
Key Words:	Cosmology, inflation, Randal-Sundrum model, DBI Lagrangian, tachyons
UDC:	524.82 : 524.834
CERIF Classification:	P210 Elementary particle physics, quantum field theory
Creative Commons License Type:	CC BY-NC-SA

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА	
Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	монографска
Тип записа, ТЗ:	текстуални / графички
Врста рада, ВР:	докторска дисертација
Аутор, АУ:	Милан Д. Милошевић
Ментор, МН:	Горан С. Ђорђевић
Наслов рада, НР:	ИНФЛАТОРНИ КОСМОЛОШКИ МОДЕЛИ СА ТАХИОНСКИМ И РАДИОНСКИМ ПОЉИМА
Језик публикације, ЈП:	српски
Језик извода, ЈИ:	енглески
Земља публиковања, ЗП:	Србија
Уже географско подручје, УГП:	Србија
Година, ГО:	2017.
Издавач, ИЗ:	ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, ФО: <small>(поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)</small>	6 поглавља, 99 стр., 96 цитата, 3 табеле, 3 слике, 13 графика, 1 прилог
Научна област, НО:	Физика
Научна дисциплина, НД:	Космологија
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Космологија, инфлација Ранда-Сундрум модел, DBI лагран- жијан, тахиони
УДК	524.82 : 524.834
Чува се, ЧУ:	библиотека
Важна напомена, ВН:	/

Извод, ИЗ:	<p>Једна од актуелних класа инфлаторних космолошких модела базира се на увођењу скаларног поља са нестандартним тахионским лагранжијанима Дирак-Борн-Инфелдовога (DBI) типа. А. Сен је показао потенцијално фундаменталну улогу тахионских поља у космологији света на брани. Истраживања у овој дисертацији мотивисана су тзв. Рандал-Сундрум (RSII) космолошким моделима. Основни циљ истраживања је формулација и решавање аналитичко-нумеричког инфлаторног модела са DBI-тахионским пољем и RSII модела са додатним радионским пољем и израчунавање опсервабилних параметара. Упоредивање добијених резултата, који су у доброј сагласности, са измереним астрофизичким подацима омогућило је боље разумевање улоге и доприноса струна и брана модерној космологији, и указало је да је улога радиона у RSII моделу мања од очекиване.</p>
Датум прихватања теме, ДП:	31. мај 2016.
Датум одбране, ДО:	}
Чланови комисије, КО:	Председник: _____ Члан: _____ Члан, ментор:

	ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ НИШ
	KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	monograph
Type of record, TR :	textual / graphic
Contents code, CC :	doctoral dissertation
Author, AU :	Milan D. Milošević
Mentor, MN :	Goran S. Djordjević
Title, TI :	INFLATIONARY COSMOLOGICAL MODELS WITH TACHYON AND RADION FIELDS
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	English
Country of publication, CP :	Serbia
Locality of publication, LP :	Serbia
Publication year, PY :	2017
Publisher, PB :	author's reprint
Publication place, PP :	Niš, Višegradska 33.
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	6 chapters, 99 pages, 96 ref., 3 tables, 3 pictures, 13 graphs, 1 appendix
Scientific field, SF :	Physics
Scientific discipline, SD :	Cosmology
Subject/Key words, S/KW :	Cosmology, inflation, Randall-Sundrum model, DBI Lagrangian, tachyons
UC	524.82 : 524.834
Holding data, HD :	library
Note, N :	

Abstract, AB :	<p>A popular class of the inflationary cosmological models is based on an introduction of a scalar field with nonstandard tachyonic Lagrangian of the Dirac-Born-Infeld (DBI) type. A potentially fundamental role of the tachyon fields in the braneworld cosmology was proposed by A. Sen. Research in this PhD thesis is motivated by Randall-Sundrum (RSII) cosmological model. The main objective of the research is to formulate and solve an analytical-numerical inflationary model with DBI-tachyon field and RSII model with an additional radion field, as well computation of observational parameters. Obtained results are in a good agreement with the real astrophysical data and provide a better understanding of the role of strings and branes in modern cosmology. The results indicated that role of radion in an initial RSII setup is less important than expected.</p>						
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	May 31, 2016.						
Defended on, DE :							
Defended Board, DB :	<table border="0"> <tr> <td data-bbox="446 1131 686 1176">President:</td> <td data-bbox="686 1131 1436 1176"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="446 1176 686 1220">Member:</td> <td data-bbox="686 1176 1436 1220"></td> </tr> <tr> <td data-bbox="446 1220 686 1265">Member, Mentor:</td> <td data-bbox="686 1220 1436 1265"></td> </tr> </table>	President:		Member:		Member, Mentor:	
President:							
Member:							
Member, Mentor:							

Најискреније се захваљујем проф. др Горану Ђорђевићу, ментору, на предлогу теме и великој помоћи током израде докторске дисертације и докторских студија.

Посебну захвалност дугујем проф. др Невенку Билићу, из Института Руђер Бошковић у Загребу, на великој помоћи у избору теме истраживања, многобројним саветима, као и великој и изузетно значајној помоћи током целокупног истраживања и израде докторске дисертације.

Захваљујем се др Драгољубу Димитријевићу на корисним саветима и помоћи у раду и подрици током заједничких истраживања.

„Scientific research involves going beyond the well-trodden and well-tested ideas and theories that form the core of scientific knowledge. During the time scientists are working things out, some results will be right, and others will be wrong. Over time, the right results will emerge.“

Lisa Randall

САДРЖАЈ

Садржај	11
1. Увод	13
2. Стандардни космолошки модел	17
2.1 Кратак преглед космологије	17
2.2 Стандардни космолошки модел	20
2.3 Инфлација	22
2.3.1 Режим спорог котрљања (slow-roll)	24
2.3.2 Трајање инфлације	25
2.4 Посматрачки параметри	26
3. Тахионска инфлација	31
3.1 Спорокотрљајући тахиони	34
3.1.1 Бездимензионалне једначине	35
3.1.2 Услови за тахионску инфлацију	37
4. Рандал-Сундум модели	39
4.1 Космологија у више димензија	39
4.1.1 Свет на брани	40
4.2 Рандал-Сундум II модел	42
4.3 Услови за тахионску инфлацију у RSII моделу	47
4.3.1 Апроксимација спорог котрљања и почетни услови	48
5. Нумерички метод	51
5.1 Нумеричко израчунавање параметара инфлације	53
5.1.1 Процена почетних услова	54

5.1.2	Динамика инфлације	58
5.1.3	Посматрачки параметри	60
5.2	Резултати	61
5.2.1	Тахионска инфлација	62
5.2.2	RSII модел са и без радиона	66
6.	Закључак	74
7.	Додатак	76
7.1	Природни системи јединица	76
7.2	Бездимензионалне једначине	77
7.2.1	Тахионска инфлација	78
7.2.2	Рандал-Сундрум модел	81
8.	Литература	84
9.	Индекси	92
9.1	Индекс табела	92
9.2	Индекс слика	92
10.	Биографија	94
11.	Изјаве аутора	96

1.

УВОД

Основе Стандардног космолошког модела (базиран на моделу великог праска) су постављене средином XX века. Иако веома успешан у објашњавању многих феномена и великог дела историје свемира, овај модел се убрзо сучио са бројним проблемима, посебно у процесима који су везани за период раног свемира. Почетком 80-тих година 20. века бројни научници, издвојимо овде А. Гута (*Alan Guth*) и А. Линдеа (*Andrei Linde*), предложили су проширење Стандардног модела теоријом инфлације [1,2]. Према овој теорији свемир је у раној фази прошао кроз краткотрајну фазу убрзаног, инфлаторног, експоненцијалног ширења, током које су се његове димензије („радијус“) вишеструко увећале (10^{26} пута). Инфлаторно ширење свемира успешно решава и објашњава већину проблема који су били познати до појаве теорије инфлације (проблем равног свемира, проблем хоризонта итд).

Иако је инфлаторна космологија успешно допунила Стандардни космолошки модел, сам процес инфлације, пре свега начин на који она почиње, су још увек у великој мери непознати. Током претходних 35 година предложени су многобројни, конкретни, модели инфлаторног ширења свемира [3].

Теоријски је широко прихваћено да је инфлација процес који се може описати класичном физиком, моделима са једним, понекад и два или више, скаларних поља, али на почетку овог процеса квантни ефекти играју кључну улогу. За описивање механизма настанка

инфлације, пре свега периода до тренутка у коме свемир прелази из квантног у класични режим, неопходна је примена квантне космологије [4].

Једна од популарних и врло актуелних класа инфлаторних модела базира се на увођењу скаларног поља са нестандартним обликом лагранжијана, посебно лагранжијанима Дирак-Борн-Инфелдовога (*Dirac-Born-Infeld*, DBI) типа (видети [5] и тамо наведене референце). У радовима А. Сена (*Ashoke Sen*) из 2002. године показана је потенцијално фундаментална улога тахионских поља у теорији струна и у космологији света на брани (*braneworld* космологија). Њихов допринос предкласичној фази космолошке инфлације [6–10] даје могућност изванредно важне и ретке везе између фундаменталне физике честица и интеракција (теорија струна и брана – М-теорија) и инфлаторне, квантне космологије [11–15], укључујући и разматрања на неархимедовим просторима и p -адичну математичку физику [16–18].

Међутим, Кофман (*Lev Kofman*) и Линде су показали да тахионска инфлација не даје одговарајуће резултате за космичко позадинско зрачење (*Cosmic Microwave Background*, СМВ) због тога што је за добијање изотропног зрачења, какво је регистровано у СМВ-у, неопходно да процес инфлације траје довољно дуго, а трајање инфлације у тахионским моделима је сувише кратко [19]. Ова критика заснована је на анализи параметара који се појављују у тахионским потенцијалима, а потичу из теорије струна. Показано је да до одговарајућих вредности посматрачких параметара инфлације доводе само вредности параметара из теорије струна које излазе из области вредности које ова теорија дозвољава.

Ипак, Стер (*Daniele Steer*) и Верници (*Filippo Vernizzi*), у раду из 2004. године, показали су да проширење опсега дозвољених вредности параметара у теорији струна омогућава да се тахионски модели инфлације довољно мало разликују у односу на стандардне инфлаторне моделе засноване на канонској теорији скаларних поља. Ови аутори су у истом раду такође показали да се разлике у вредностима посматрачких параметара између инфлаторних модела са стандардним канонским пољима и тахионским пољима разликују тек када се у теорију укључе чланови који су другог реда по параметрима [20]. Њихова анализа показала је да се тахионска инфлација не може у потпуности искључити на основу доступних резултата астрономских посматрања, већ да посматрачки подаци могу да „разликују“ лоше и потенцијално „добре“ инфлаторне моделе засноване на различитим тахионским потенцијалима, тј. да резултати мерења искључују неке, али свакако не све, тахионске потенцијале као кандидате за инфлаторне моделе [21–23].

Једноставни тахионски модели могу играти и значајну улогу у космологији света на брани [24,25]. Космологија света на брани базирана је на моделу према коме се материја на-

лази на једној брани која се креће кроз вишедимензионални простор (*bulk*). У вишедимензионалном простору делује само гравитациона сила, док су додатне димензије за остале фундаменталне интеракције „скривене“ - компактифициране (*compact*), тј. недоступне [26,27].

Истраживања у овој дисертацији мотивисана су пре свега тзв. Рандал-Сундрум (*Randall-Sundrum*) космолошким моделима [24,25,28]. Према првом Рандал-Сундрум моделу (RSI) [28] петодимензионални свемир садржи две четвородимензионе бране са супротним „тензијама“. Растојање између ове две бране налази се у петој димензији. У овом моделу посматрач се налази на брани са негативном тензијом, а растојање између брана је такво да гравитационо деловање друге бране одговара Њутновој гравитацији. Други Рандал-Сундрум модел (RSII) [24] полази од претпоставке да се брана са негативном тензијом налази на бесконачно великом растојању. Флукуацију растојања између брана дуж додатне димензије могуће је описати постојањем додатног безмасеног скаларног поља, тзв. *радиона*, које узрокује промене у геометрији вишедимензионалног простора [29,30]. Раније је показано да се динамика бране у RSII моделу може ефективно посматрати као динамика тахиона са потенцијалом облика $V(T) = 1 / T^4$, где је T скаларно тахионско поље [25].

Рандал-Сундрум модели, као и слични модели света на брани, предвиђају значајне космолошке ефекте. Због постојања додатне димензије неопходна је модификација Фридманових једначина. Космолошка предвиђања добијена на основу решења ових једначина разликују се од предвиђања стандардне космологије и неопходна је њихова провера и упоређивање добијених резултата са резултатима добијеним из астрономских посматрања [21,31].

У овој дисертацији разматра се тахионска инфлација, посебно у оквиру RSII модела, и утицај тахиона, са и без радиона, на процес инфлације [32–35]. Током израде дисертације постављене су и решене Хамилтонове једначине које следе из метрике за петодимензионално простор-време у RSII моделу. Из добијених решења израчунати су параметри инфлације, као и други важни посматрачки параметри. Вредности израчунатих параметара упоређене су са доступним подацима из бројних астрофизичких мисија у свемиру.

Математичка сложеност добијених система диференцијалних једначина упутила је на нумеричко решавање динамичких једначина поља и Фридманових једначина. Добијена решења једначина описују динамику тахионског и радионског поља, еволуцију фактора скале свемира и Хабловог параметра. Као најважнији резултати у дисертацији представљене су и анализирани теоријске вредности два најбитнија космолошка параметара: скаларни спектрални индекс (*scalar spectral index*, n_s), и однос тзв. тензорског и скаларног спектра снаге (*tensor-to-scalar ratio*, r). Анализирани модели инфлације су, на основу ових параметара,

тестирани у односу на резултате добијене на основу најновијих астрономских посматрања сателита Планк (*Planck*) [21,31,36].

У дисертацији је, након Увода, у дат кратак историјски преглед стандардног космолошког модела и модела инфлације.

Тема трећег дела дисертације је тахионска инфлација. На почетку овог дела дат је кратак осврт на тахионска скаларна поља у савременој физици и приказана су општа разматрања ових поља у закривљеном простор-времену. Након тога разматрана је улога тахионских поља у инфлаторној космологији. Улога тахионских поља у инфлацији анализирана је аналитички, у режиму спорог котрљања. Полазећи од нестандардног лагранжијана DBI типа изведене су егзактне Фридманове једначине, а на основу апроксимације спорог котрљања (*slow-roll*) одређени су почетни услови који су неопходни за нумеричко решавање ових једначина.

Наредни, четврти део дисертације, почиње уводом у космологију света на брани, након чега је представљен RSII модел. Аналогно приступу у претходном поглављу, укратко је приказан поступак добијања егзактних Хамилтонових једначина за овај модел, полазећи од одговарајуће метрике и дејства. На крају овог дела, применом апроксимације спорог котрљања, изведене су релације неопходне за одређивање почетних услова и нумеричко решавање система Хамилтонових једначина.

Пети део дисертације подељен је на две целине. У првој целини детаљно је презентован коришћени поступак (алгоритам) за процену почетних услова инфлације, израчунавање динамике инфлације и израчунавање посматрачких параметара инфлације за моделе са тахионским потенцијалима и RSII модел. Друга целина овог поглавља садржи резултате, и њихову анализу, добијене током израде ове дисертације.

Шести део садржи закључке и идеје за даље истраживање.

Седми део садржи додатак, који може бити користан, али није неопходан за разумевање осталог дела дисертације.

2.

СТАНДАРДНИ КОСМОЛОШКИ МОДЕЛ

2.1 КРАТАК ПРЕГЛЕД КОСМОЛОГИЈЕ

Почетак двадесетог века обележила су значајна открића у физици, која су донела и нов поглед на свет и отворила врата за потпуно нове идеје и истраживања. Савремена, често се назива и физичка, космологија настаје 1915. године, када је Алберт Ајнштајн (*Albert Einstein*) објавио Општу теорију релативности (ОТР). Ова теорија омогућила је да се структура простор-времена и еволуција свемира опишу физичким законима. У раду објављеном седам година касније (1922. год.) Александар Фридман (*Alexander Friedmann*) је решавањем Ајнштајнових једначина за гравитационо поље дошао до решења која су описивала свемир који се шири или сажима. Потврда ових модела стигла је 1929. године из Хаблових (*Edwin Hubble*) посматрања. У Хабловим резултатима појавио се систематски црвени помак у спектрима галаксија. Овај црвени помак одговарао је Фридмановим предвиђањима о свемиру који се шири.

Основу модела Великог праска, идеја иначе потиче од Жоржа Леметра (*Georges Lemaitre*), поставио је Џорџ Гамов (*George Gamow*) са сарадницима 1946. године. Према овом моделу настанак свемира почео је из стања огромне густине и температуре. Теорија је такође предвиђала и постојање заосталог зрачења у области микроталаса које потиче из периода најранијег свемира. Арно Пензиас (*Arno Penzias*) и Роберт Вилсон (*Robert Wilson*) су 1965. године детектовали ово зрачење, које је названо СМВ. Резултати посматрања били су управо онакви како их је предвидела теорија Гамова.

Осим црвеног помака галаксија, данас постоје и други необориви докази ширења свемира. Измерена концентрација лаких елемената (H, He, Li) у свемиру одговара предвиђањима теорије нуклеосинтезе, а једино убедљиво објашњење космичког позадинског зрачења је оно које даје теорија Великог праска.

Табела 1 Кратка историја свемира

Период	Време	Енергија	Црвени помак
Планкова епоха	$< 10^{-43} s$	$10^{19} GeV$	
Скала струне	$\gtrsim 10^{-43} s$	$\lesssim 10^{18} GeV$	
Велико уједињење	$\sim 10^{-36} s$	$10^{15} GeV$	
Инфлација	$\gtrsim 10^{-34} s$	$\lesssim 10^{15} GeV$	
Нарушавање SUSY	$< 10^{-10} s$	$> 1TeV$	
Бариогенеза	$< 10^{-10} s$	$> 1TeV$	
Нарушавање електро-слабе симетрије	$10^{-10} s$	$1TeV$	
Кварк-хадронски прелаз	$10^{-4} s$	$10^2 MeV$	
“Замрзавање“ нуклеона	0,01s	10MeV	
Декупловање неутрина	1s	1MeV	
Нуклеосинтеза	3min	0,1MeV	
Равнотежа материје и зрачења	$10^4 god.$	1eV	10^4
Рекомбинација	$10^5 god.$	0,1eV	1100
Тамно доба	$10^5 - 10^8 god.$		> 25
Рејонизација	$10^8 god.$		25 – 6
Формирање галаксија	$\sim 6 \cdot 10^8 god.$		~ 10
Тамна енергија доминира	$\geq 10^9 god.$		~ 2
Формирање Сунчевог система	$8 \cdot 10^9 god.$		0,5
Одбрана ове докторске дисертације	$14 \cdot 10^9 god.$	0,1meV	0

Током еволуције свемир је прошао кроз неколико важних фаза. Најважнији догађаји, време када су се одиграли и енергије на којима су се дешавали приказани су у Табели 1. Највећи део историје свемира заснован је на добро објашњеним и вишеструко тестираним законима физике честица, нуклеарне и атомске физике и гравитације, као и све прецизнијим

астрофизичким посматрањима и мерењима. Једини период који углавном није доступан експериментима или другим мерењима је период у коме је свемир био “млађи” од 10^{-10} секунде. Овај период се описује моделима који као крајњи резултат морају да дају одговарајуће почетне услове за настанак свемира у коме живимо.

Стандардни космолошки модел Великог праска није могао да објасни све проблеме са којима се суочавао. Најзначајнији проблеми били су проблем равне геометрије свемира и проблем хоризонта догађаја. Да би ови проблеми били превазиђени било је потребно допунити модел, а та допуна, испоставило се, била је увођење фазе убрзаног, инфлаторног, ширења свемира у најранијем периоду његовог постојања.

Јаков Зељдович (*Yakov Zel'dovich*) је 70-тих година XX века покушао да понуди решење за ове проблеме. Прве моделе инфлације објавили су независно један од другог, 1981. године, Алан Гут и Кацухико Сато (*Katsuhiko Sato*) [1,37]. Ови модели су данас у литератури познати као “стара инфлација”. Утицај и одјек ових модела је био велики, али њихов домет у изворном облику није и већ следеће године Андреј Линде, Андреас Албрехт (*Andreas Albrecht*) и Пол Штајнхард (*Paul Steinhardt*) су објавили допуњен модел који се данас назива “нова инфлација” [2,38]. Овај модел одговара спорокотрљајућој инфлацији (*slow-roll*), али и он има одређене недостатке. Следеће, 1983. године, Линде је објавио нову верзију “slow-roll” модела који је познат као хаотична инфлација. Према овом моделу почетни услови за инфлацију су потпуно хаотични, а наш свемир настаје у оном делу поља где фаза инфлације траје довољно дуго. Хаотични почетни услови су, вероватно, најважнија разлика модела хаотичне инфлације у односу на претходне моделе у којима је за настанак свемира било неопходно постојање термодинамичке равнотеже.

Још једна важна карактеристика инфлације, поред тога што решава проблем хоризонта и равне геометрије, је могућност да произведе флукуације у густини материје као последицу флукуације скаларног (у моделима најчешће једног, спорадично два и више) поља и саме метрике простор-времена, од којих ће касније настати велике структуре (галаксије, јата галаксија) у свемиру [39]. Предвиђања која се добијају на основу инфлаторних модела у доброј су сагласности са резултатима мерења сателита COBE¹, WMAP² и Планк³ (*Cosmic Background Explorer*, COBE; *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*, WMAP; Planck). До данас је постављен велики број инфлаторних модела, а најновији модели засновани су углавном на

¹ <https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe>

² <https://map.gsfc.nasa.gov>

³ <http://www.esa.int/planck>

идеји постојања (и нарушења) суперсиметрије, развоју физике елементарних честица, теорији суперструна и супергравитацији.

Назнаке о постојању „невидљиве“, данас „тамне“ материје које постоје још од 1933. године [40] а нарочито откриће убрзаног ширења свемира (1998. год.) током последњих неколико милијарди година [41,42] доносе нове изазове али и врло прецизне податке за успешно моделирање свемира и његове „историје“.

2.2 СТАНДАРДНИ КОСМОЛОШКИ МОДЕЛ

Као што је већ поменуто у претходном делу, двадесетих година прошлог века, математичар и космолог, Александар Фридман дошао је до једначине која је описивала динамику ширења просторно хомогеног и изотропног свемира. Истовремено, али независно од њега, на истом проблему су радили и Алберт Ајнштајн, Вилијам де Ситер (*Willem de Sitter*) и Жорж Леметр.

Хомоген и изотропан свемир, који је основа Космолошког принципа, може се описати Фридман-Робертсон-Вокеровом (*Friedmann-Robertson-Walker*, FRW) метриком

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

где је $a(t)$ фактор скале, док је k константа која дефинише геометрију простора и може имати вредности $k = 0$ за раван, $k = +1$ за позитивно закривљен или $k = -1$ за негативно закривљен простор.

Полазећи од Ајнштајновог тензора, са компонентама

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.2)$$

где је су $g_{\mu\nu}$ компоненте метричког тензора за метрику дату једначином (2.1), $R_{\mu\nu}$ и R су компоненте Ричијевог тензора и скалар кривине дефинисани респективно као

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

и $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ је Кристофелов симбол II врсте (зарез означава одговарајући парцијални извод), Ајнштајнове једначине за гравитационо поље добијају облик:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

У (2.4) $T_{\mu\nu}$ означава компоненте тензора енергије-импулса. Ако се са ρ и p означе густина енергије и притисак идеалног флуида који мирује, у систему референце који се креће са идеалним флуидом, тензор енергије-импулса \hat{T} добија облик

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Заменом Ајнштајновог тензора (2.2) и тензора енергије-импулса (2.5) у Ајнштајнову једначину за гравитационо поље (2.4), ова једначина се своди на две обичне (нелинеарне) диференцијалне једначине:

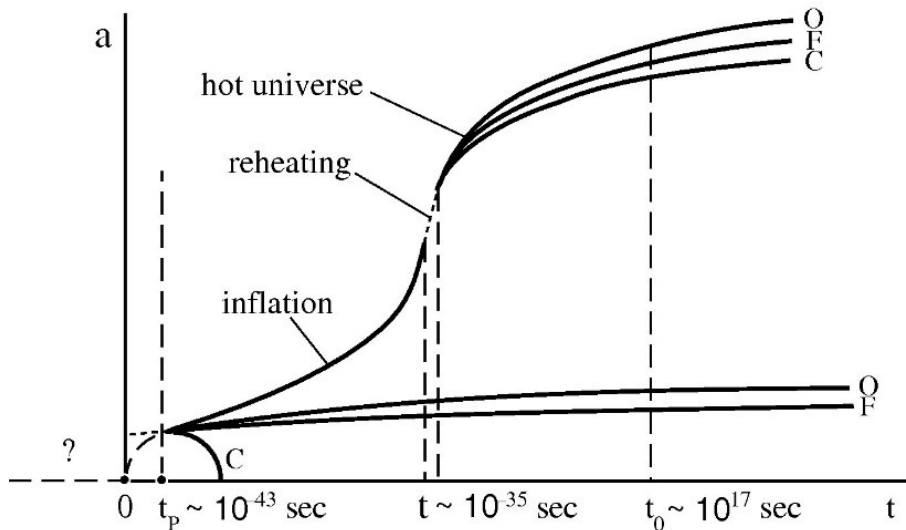
$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (2.6)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \quad (2.7)$$

где је H - Хаблов параметар који описује брзину ширења свемира, $H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \partial_t \ln a$. Ове две једначине називају се прва и друга Фридманова једначина, и њиховим решавањем добијају се различити, Фридманови, модели свемира (**Слика 1**).

Стандардни космолошки модел, какав је постојао до 1980. године добро је описивао еволуцију свемира и био у прихватљивој сагласности са мерењима. За свемир старији од 10^{-10} секунде (и на енергијама мањим од 1 TeV) овај модел заснован је на резултатима посматрања и поузданим и провереним теоријама, као што су Стандардни модел елементарних честица, Општа теорија релативности и динамика флуида. Међутим, енергије које су постојале у периоду најранијег свемира још увек су ван домашаја постојећих акцелератора и недоступне су експерименталној провери. Покушај примене Стандардног космолошког модела за описивање свемира у том најранијем периоду наилази на озбиљне проблеме. Најзначајнији проблеми стандардног модела су:

- *Проблем равне геометрије свемира* – према Стандардном моделу, ако би свемир настао са геометријом која се бар мало разликује од равне, током еволуције ово одступање би постајало све веће и веће. Астрофизичка мерења показују да је данас геометрија свемира приближно равна, што условљава да је свемир морао настати идеално раван(!) а то је мало вероватно. Решење овог проблема је налажење физичког процеса који би „изравнао“ геометрију свемира након његовог настанка.



Слика 1 Приказ Фридманових модела: отвореног $k = -1$ (O), равнотеланог $k = 0$ (F) и затвореног $k = +1$ (C) свемира у случају са инфлацијом и без ње [43].

- *Проблем хоризонта* – резултати мерења СМВ показују да су одступања од хомогене структуре у раном свемиру изузетно мала. За постизање равнотеже која би омогућила настајак снимљеног спектра СМВ неопходно је да најудаљенији делови свемира међусобно комуницирају, али измерене димензије видљивог свемира потврђују да, према Стандардном моделу та комуникација није била могућа. Да би овај проблем био решен неопходно је да је током раног развоја свемира постојао неки процес који би за кратко време вишеструко увећао димензије свемира.

„Универзално“ решење за оба наведена, као и за многе друге, познате а овде изостављене, проблеме Стандардног космолошког модела било је увођење периода убрзаног, инфлаторног, ширења свемира.

2.3 ИНФЛАЦИЈА

Под (космолошком) инфлацијом се подразумева процес у коме су се димензије свемира, у 10^{-34} секунде након Великог праска, експоненцијално повећале бар $e^{60} \approx 10^{26}$ пута. Најједноставнији модел инфлације базиран је на постојању једног скаларног поља ϕ , који носи назив инфлатон. Највећи број модела инфлације заснован је на скаларном пољу. Ипак, могуће је поставити и моделе са другим врстама поља, на пример векторским, али се они ређе користе [44].

Услов инфлације се, помоћу Фридманових једначина (2.6)-(2.7) може написати на три еквивалентна начина [45,46]:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{d^2a}{dt^2} > 0 \Leftrightarrow \rho + 3p < 0. \quad (2.8)$$

Први услов представља основну дефиницију инфлаторног ширења, због тога што је у директној вези са решавањем проблема геометрије и хоризонта. Други услов је директна математичка последица првог услова и дефиниције Хабловог параметра, због овог услова ($\ddot{a} > 0$) инфлација се најчешће назива убрзано ширење свемира. Као последица овог услова и једначине (2.7) добија се и последњи, трећи, услов инфлације. Овај услов указује на постојање негативног притиска који „покреће“ и води инфлацију.

Овако дефинисани (2.8) услови за фазу инфлаторног ширења свемира показују да инфлаторни модели не замењују стандардни космолошки модел, већ су само његова допуна.

Динамика (класичног) реалног скаларног поља минимално куплованог са гравитацијом одређена је дејством [45]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} - V(\phi) \right], \quad (2.9)$$

где је $V(\phi)$ потенцијал који описује интеракцију скаларног поља.

Тензор енергије-импулса за скаларно поље ϕ израчунава се варијацијом дејства (2.9) у односу на метрику и има облик

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right). \quad (2.10)$$

За случај хомогене и изотропне метрике овај тензор има исту форму као и тензор за идеалан флуид, а густина и притисак су:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (2.11)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (2.12)$$

На основу тзв. параметра стања w_ϕ

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (2.13)$$

може се показати да скаларно поље доводи до појаве негативног притиска ($w_\phi < 0$) и убрзаног ширења $\left(w_\phi < \frac{1}{3}\right)$, ако је потенцијална енергија V доминантна у односу на кинетички члан $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$.

Временска еволуција хомогеног поља ϕ , за метрику FRW дату једначином (2.1), може се одредити из Клајн-Гордонове (*Klein-Gordon*) једначине

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (2.14)$$

где је V' извод потенцијала по пољу $\left(V' \equiv \frac{\partial V}{\partial \phi}\right)$, и Фридманове једначине (2.6) која након замене израза за густину има облик

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.15)$$

У изразима (2.9) и (2.15) $k=0$, а $M_{pl} = \frac{m_{pl}}{\sqrt{8\pi}}$ је редукована Планкова маса. Планкова маса m_{pl} дефинисана је као

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1,22 \cdot 10^{-19} \frac{GeV}{c^2} = 2,18 \cdot 10^{-8} kg.$$

Ово је јединица масе која се користи у одговарајућем природном систему јединица.

Комбиновањем једначина (2.14) и (2.15) добија се једначина континуитета у облику

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_{pl}^2}. \quad (2.16)$$

Систем који чине три, од којих су две независне, једначине (2.14), (2.15) и (2.16) описује динамику скаларног поља и Хабловог параметра. На основу овог система једначина, уз једначину $\dot{a}/a = H$, добијају се решења за еволуцију фактора скале a , аналогна Фридмановим космолошким моделима (Слика 1).

2.3.1 Режим спорог котрљања (*slow-roll*)

Систем једначина (2.14)-(2.16) не даје увек као решење убрзано ширење, али под одређеним условима добија се управо такав „сценарио“. Један од услова за убрзано ширење,

режим спорог котрљања (*slow-roll*), испуњен је ако је потенцијална енергија скаларног поља знатно већа од његове кинетичке енергије.

Испуњавање овог услова дозвољава примену тзв. апроксимације спорог котрљања, тј. дозвољава да се у једначини (2.15) занемари члан који садржи кинетичку енергију скаларног поља $\dot{\phi}^2$, док је у Клајн-Гордоновој једначини (2.14) могуће занемарити „убрзање“ $\ddot{\phi}$. На тај начин поменути систем једначина добија једноставнији облик

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} V(\phi), \quad (2.17)$$

$$3H\dot{\phi} + V' \approx 0. \quad (2.18)$$

Да би видели при којим условима је могућа примена ове апроксимације потребно је израчунати $\dot{\phi}$ из једначине (2.18), а затим добијени израз заменити у услов за примену апроксимације $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V$.

Увођењем тзв. параметара спорог котрљања, о којима ће више речи бити у наредном одељку, могуће је показати да убрзано ширење свемира настаје онда кад је потенцијална енергија већа од кинетичке ($\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$), а да би инфлација трајала довољно дуго мора да важи

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|, \quad (2.19)$$

$$|\ddot{\phi}| \ll |V'|. \quad (2.20)$$

2.3.2 Трајање инфлације

Трајање инфлације мери се бројем е-фолдова (*e-folds*) који се израчунава као

$$N(\phi) \equiv \ln \frac{a_{\text{end}}}{a}, \quad (2.21)$$

где је a_{end} фактор скале на крају инфлације. У случају апроксимације спорог котрљања N се

може изразити као функција скаларног поља. Пошто је $H = \frac{d \ln a}{dt}$ може се написати

$$N(\phi) = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a} = \int_t^{t_{\text{end}}} d \ln a = \int_t^{t_{\text{end}}} H dt = \int_{\phi}^{\phi_{\text{end}}} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi. \quad (2.22)$$

Применом једначина (2.19) и (2.20) последњи интеграл може се написати преко функције потенцијала као

$$N(\phi) \approx \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (2.23)$$

Решавањем овог интеграла могуће је израчунати број е-фолдова за дати потенцијал $V(\phi)$.

Параметри спорог котрљања, односно тзв. Хаблови хијерархијски параметри (*Hubble hierarchy parameters*) дефинисани су као изводи Хабловог параметра (H) по броју е-фолдова (N). Рекурентна формула за Хаблове хијерархијске параметре има облик [47]

$$\epsilon_{i+1} \equiv \frac{d \ln |\epsilon_i|}{dN}, \quad i \geq 0, \quad \epsilon_0 \equiv \frac{H_*}{H}, \quad (2.24)$$

где је H_* - вредност Хабловог параметара у произвољно изабраном временском тренутку.

Инфлација траје док је испуљен услов спорог котрљања, тј. док важи

$$\epsilon_i \ll 1, \quad (2.25)$$

и завршава онда када је

$$\epsilon_i(\phi_{\text{end}}) \approx 1. \quad (2.26)$$

Да би инфлација решила проблем равне геометрије и хоризонта потребно је да број е-фолдова буде

$$N(\phi) = \ln \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{start}}} \geq 60, \quad (2.27)$$

а то значи да се током инфлације фактор скале повећао бар $e^{60} \approx 10^{26}$ пута. У литератури се разматрају модели са бројем е-фолдова $N(\phi) \geq 70$, мада има и приступа са $N(\phi) \leq 60$.

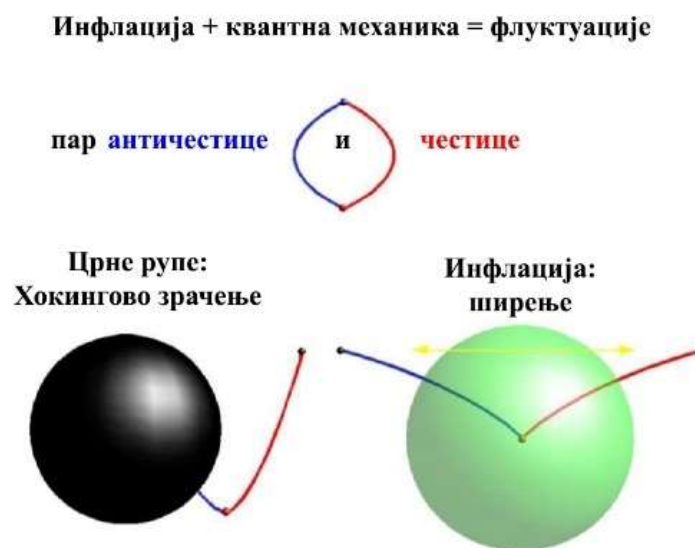
2.4 ПОСМАТРАЧКИ ПАРАМЕТРИ

Током последњих двадесет година, космологија и теорија инфлације прешле су из фазе претежно теоријског истраживања на поље науке које је подржано посматрачким резултатима! Многе истраживачке мисије извршиле су многобројна посматрања и прикупиле велике количине података. Фасцинантни напредак посматрачких техника омогућио је прецизно тестирање и упоређивање предвиђања космолошких теорија и инфлаторних модела са стварним, измереним, подацима. Истраживања у модерној космологији све су више повезана са напретком и технолошким развојем посматрачке астрономије и астрофизике.

Нажалост, параметре спорог котрљања није могуће директно измерити. Међутим резултати Планк колаборације, и претходних мисија, добијени снимањем и анализом спектра СМВ поставили су ограничења на низ других параметара који се могу измерити и израчуна-

ти из модела [22,48–51]. Најважнији од ових посматрачких параметра, за ову дисертацију, у теорију инфлације су скаларни спектрални индекс (*scalar spectral index* - n_s) и однос тензорског и скаларног спектра снаге, тј. количник тензора и скалара (*tensor-to-scalar ratio* - r).

Убрзо након успешног објављивања теорије инфлације примећено је да ова теорија, осим што решава познате проблеме стандардног модела, може да објасни и настанак флуктуација у раном свемиру. До овог открића, независно један од другог, дошли су Хокинг (*Stephen Hawking*), Старобински (*Alexei Starobinsky*) и Гут [52–54]. Механизам настака флуктуација најједноставније се може објаснити на основу аналогије (Слика 2) са Хокинговим зрачењем црних рупа [55].



Слика 2 Дијаграм настанка виртуелних парова честица и античестица и аналогни настанак флуктуација [55].

У простору Минковског, флуктуације вакуума, као последица Хајзенберговог принципа неодређености, омогућавају креирање виртуелних парова честице/античестице које се убрзо поново анихилирају. Хокингово зрачење настаје кад се процес креирања једног оваквог пара одигра близу границе црне рупе, а један члан виртуелног пара бива заробљен иза хоризонта црне рупе, док други остаје као нова честица (или античестица). Сличан процес одиграва се током инфлације – ширење свемира је толико брзо да настали виртуелни парови честица и античестица бивају међусобно раздвојени у каузално неповезане делове свемира. Као последица виртуелне честице не могу поново да се анихилирају, тј. квантне флуктуације прелазе у класичне особине поља.

За формално описивање овог ефекта полази се од једначине кретања за флукуацију слободног поља $\delta\phi$ [55]

$$(\ddot{\delta\phi}) + 3H(\dot{\delta\phi}) + \left(\frac{k}{a}\right)^2 (\delta\phi) = 0, \quad (2.28)$$

где је k покретни (*comoving*) таласни број који је константан током ширења свемира, док (физички) импулс честице p има облик

$$\vec{p} = \frac{\vec{k}}{a}. \quad (2.29)$$

Током инфлације, таласна дужина честице бива „растегнута“ брзим ширењем

$$\lambda \propto a \propto e^{Ht}, \quad (2.30)$$

док димензије хоризонта остају приближно константне

$$d_H \sim H^{-1} \simeq \text{const}. \quad (2.31)$$

Због овога кратке таласне дужине квантних флукуација бивају „растегнуте“ на димензије веће од хоризонта простор-времена чиме постају „замрзнуте“ као класичне флукуације. Амплитуда квантног режима најчешће се означава као пролазак кроз хоризонт (*horizon crossing*), што се дешава када је таласна дужина једнака хоризонту, тј. $k/a = H$. Корелациона функција за две тачке на хоризонту одређена је Хабловим параметром

$$\langle \delta\phi^2 \rangle_{(k/a)=H} = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2. \quad (2.32)$$

Произвољна пертурбација метричког тензора се може разложити на скаларне, векторске и тензорске флукуације [55]

$$\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{\text{scalar}} + h_{\mu\nu}^{\text{vector}} + h_{\mu\nu}^{\text{tensor}}. \quad (2.33)$$

Најједноставније флукуације су тензорске флукуације $h_{\mu\nu}^{\text{tensor}}$, и од њих настају гравитациони таласи. Векторске флукуације $h_{\mu\nu}^{\text{vector}}$ не могу имати извор у моделима са једним скаларним пољем и оне ишчезавају у најједноставнијим моделима инфлације.

Скаларне флукуације $h_{\mu\nu}^{\text{scalar}}$ су сложеније зато што настају као флукуације скаларног поља и самог закривљеног простор-времена [55]. Скаларне флукуације дефинисане су релацијом

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\delta N}{\delta\phi} \delta\phi = \frac{H^2}{4\pi^{3/2}\dot{\phi}}, \quad (2.34)$$

где су $\delta\rho$ скаларне пертурбације густине материје, док су ϕ - скаларно поље, N - број е-фолдова и H - Хаблов параметар.

Скаларни спектар снаге \mathcal{P}_s дефинисан је као варијација на логаритамском интервалу

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 = \int \mathcal{P}_s(k) d \log k, \quad (2.35)$$

при чему спектар снаге има облик степена

$$\mathcal{P}_s(k) \propto k^{n_s-1}, \quad (2.36)$$

а n_s је скаларни спектрални индекс [55]. За $n_s = 1$ спектар је инваријантан у односу на скалу свемира (амплитуда је једнака хоризонту свемира).

На сличан начин дефинисан је и спектар тензорских флукуација поља (\mathcal{P}_T) у инфлаторним моделима

$$\mathcal{P}_T(k) \propto k^{n_T}, \quad (2.37)$$

где је n_T тензорски спектрални индекс. На овај начин дефинисана су четири независна посматрачка параметра: амплитуде скаларног и тензорског спектра снаге

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s &\equiv \mathcal{P}_s(k_*), \\ \mathcal{P}_T &\equiv \mathcal{P}_T(k_*), \end{aligned} \quad (2.38)$$

за неки одабрани таласни број k_* , и спектрални индекси n_s и n_T . Због лакше анализе резултата погодно је дефинисати количник тензора и скалара (r) као [45,55]

$$r \simeq \frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_s}. \quad (2.39)$$

На овај начин добијена су три независна параметра који описују спектар снаге раног свемира: амплитуда скаларних пертурбација (A_s), количник тензора и скалара (r) и скаларни спектрални индекс (n_s). Важно је напоменути да су ово једини посматрачки параметри који повезују теорију инфлације са астрономским посматрањима и омогућавају тестирање модела инфлације.

Веза између ових посматрачких параметара и параметара спорог котрљања (2.24) дефинисана је као [45,55]

$$r = 16\varepsilon_1, \quad (2.40)$$

$$n_s = 1 - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (2.41)$$

где су ε_1 и ε_2 прва два параметра спорог котрљања.

Овако дефинисане релације (2.40)-(2.41), омогућавају израчунавање посматрачких параметара за жељени модел инфлације и директну проверу резултата које даје изабрани модел у односу на астрофизичке податке.

Према најновијим резултатима Планк колаборације, објављеним у 2016. години, измерене вредности и ограничења за овако дефинисане параметре према Planck TT+lowP подацима износе

$$\begin{aligned}n_s &= 0,9666 \pm 0,0062, \\r &< 0,103.\end{aligned}\tag{2.42}$$

3.

ТАХИОНСКА ИНФЛАЦИЈА

Традиционално, појам *тахион* (грчки *ταχύ* – брз) коришћен је за означавање хипотетичке честице која се увек креће брзином већом од брзине светлости у вакууму. Често се прва идеја о честицама које путују брже од светлости приписује Арнолду Зомерфелду (*Arnold Sommerfeld*) који се оваквим честицама бавио у раду из 1904. године [56]. Прва детаљна разматрања честица бржих од светлости појавила су се 1962. под називом „мета-честице“ [57]. У модерној физици значење појма тахион је другачије. Године 1967. године појмом тахиони означене су честице - кванти поља - имагинарне масе [58]. Две године касније показано је да кванти поља имагинарне масе не морају да се простиру брзином већом од брзине светлости већ представљају нестабилности поља, познате као тахионске кондензације [8,59].

Не постоји „класично“ тумачење „имагинарне масе“, међутим, нестабилност у систему може се тумачити на следећи начин: потенцијал тахионског поља је у почетку на локалном максимуму, а не у локалном минимуму (нпр. као лопта на врху брда). Врло мало нарушавање ове лабилне (нестабилне) равнотеже, које настаје услед, рецимо, квантних флукуација, приморава поље да се котрља ка локалном минимуму. Када тахионско поље стигне у минимум потенцијала, кванти поља више нису тахиони, већ „обичне“ честице са позитивном масом.

Лагранжијан скаларног поља ϕ у општем случају може се записати као произвољна функција $\mathcal{L}(X, \phi)$ скаларног поља ϕ и кинетичке енергије $X \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$. На основу облика лагранжијана може се разликовати неколико типова [5]:

- канонска поља са потенцијалом $V(\phi)$:

$$\mathcal{L}(X, \phi) = BX - V(\phi), \quad (3.1)$$

где коефицијент B означава константу везе кинетичке енергије а најчешће се узима да је $B = 1$.

- неканонски модел: овај тип лагранжијана садржи кинетички члан произвољног степена и има облик

$$\mathcal{L}(X, \phi) = BX^n - V(\phi), \quad (3.2)$$

где је n позитиван цео број.

- DBI лагранжијан: у најопштијем облику овај лагранжијан има облик

$$\mathcal{L}(X, \phi) = -\frac{1}{f(\phi)} \sqrt{1 - 2f(\phi)X} - V(\phi), \quad (3.3)$$

при чему је $f(\phi)$ произвољна функција поља. Специјални тип DBI лагранжијана је тахионски лагранжијан

$$\mathcal{L}(X, \phi) = -V(\phi) \sqrt{1 - 2\lambda X}, \quad (3.4)$$

где је λ константа.

Посматрајмо реално скаларно тахионско поље $T(t, \vec{x})$ минимално купловано са гравитацијом у четвородимензионом (4-dim) простор-времену. Дејство за ово поље има облик [10]

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + S_T \quad (3.5)$$

где је, као и раније, R Ричијев скалар, а g је детерминанта метричког тензора са компонентама $g_{\mu\nu}$. Тахионско дејство S_T дато је као [8,60]

$$S_T = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}(T, \partial_\mu T) d^4x, \quad (3.6)$$

где је

$$\mathcal{L} = -V(T) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T}, \quad (3.7)$$

лагранжијана DBI типа [7,9], а $V(T)$ потенцијал тахионског поља T . Одговарајући хамилтонијан је

$$\mathcal{H} = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - g^{\mu\nu} \partial_\mu T \partial_\nu T}}. \quad (3.8)$$

У наставку радићемо у природном систему јединица у коме је брзина светлости $c = 1$ и ограничићемо разматрање на хомоген и изотропан 4-dim простор тако да FRW метрика (2.1) добија облик

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) d\vec{x}^2, \quad (3.9)$$

где је, да поновимо, $a(t)$ фактор скале свемира. У овако дефинисаној метрици тахионско поље $T(t, \vec{x})$ може да се разложи на хомогени део $T(t)$, који зависи само од времена и малу пертурбацију која зависи од просторно-временских координата $\delta T(t, \vec{x})$ и описује квантне флукуације тахионског поља [20]. У даљој дискусији биће разматран само хомогени део који зависи од времена.

Познато је да се тахионско поље, у хомогеном и изотропном простору, може описати као флуид позитивне густине енергије

$$\rho = \frac{V(T)}{\sqrt{1 - \dot{T}^2}}, \quad (3.10)$$

и негативног притиска

$$P = -V(T) \sqrt{1 - \dot{T}^2}. \quad (3.11)$$

Као и у случају стандардног скаларног поља, са стандардним типом лагранжијана, тако је и овде притисак једнак лагранжијану ($P = \mathcal{L}$), а густина енергије једнака је хамилтонијану ($\rho = \mathcal{H}$).

Фридманова једначина за раван простор, без космолошке константе, може се у овом случају записати у стандардном облику

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \frac{V}{(1 - \dot{T}^2)^{1/2}}. \quad (3.12)$$

Једначина одржања енергије и импулса

$$\dot{\rho} = -3H(P + \rho), \quad (3.13)$$

може се, помоћу (3.10) и (3.11) трансформисати у

$$\frac{\ddot{T}}{1 - \dot{T}^2} + 3H\dot{T} + \frac{V'}{V} = 0, \quad (3.14)$$

где тачке означавају изводе по времену, док је $V' = dV / dT$.

Од раније је познато да је један од главних проблема везаних за тахионску инфлацију то што тахионско поље не може да обезбеди довољно дуг период инфлације [19]. Међутим, иако тахионско поље не може да буде одговорно за цео процес инфлације може се сматрати да оно игра значају улогу на самом почетку инфлације, на и око Планкове скале, где је његов допринос у решавању проблема хомогеног, равног и изотропног свемира значајан [19]. За описивање тахионске инфлације, а нарочито динамике тахионског поља, у овом периоду вреди нагласити приступ заснован на квантној механици, неархимедовој и архимедовој геометрији [14–16].

Упркос познатим проблемима, инфлација вођена тахионским пољем је изазован и значајан проблем. Постоји велики број различитих покушаја да се боље разуме и објасни еволуција раног свемира на основу класичних и квантних нелокалних космолошких модела на архимедовим и неархимедовим просторима који су довели до значајних резултата [61–64].

У контексту квантне космологије и таласне функције васионе [65] од потенцијално великог значаја је процедура квантовања помоћу интеграла по трајекторијама (*Feynman path integrals*) коју су предложили Ђорђевић и Драговић [66], а која представља генерализацију резултата deWitt-Morrette са архимедових на неархимедове просторе (видети такође [67]).

3.1 СПОРОКОТРЉАЈУЋИ ТАХИОНИ

Као што је већ поменуто, инфлација је период у еволуцији раног свемира, када је свемир прошао кроз фазу веома брзог (експоненцијалног) ширења. Као и у случају стандардног скаларног поља (одељак 2.3), тако и за инфлацију вођену тахионским пољем решење система једначина (3.12) и (3.14) не описује увек убрзано ширење свемира. На сличан начин као и у делу (одељак 2.3.1) могуће је дефинисати услове пре решавања Фридманове једначине како би се осигурало да фактор скале свемира има жељене особине.

Број e -фолдова (2.21) дефинисан је као

$$N(t) = \int_{t_i}^{t_e} H(t) dt, \quad (3.15)$$

где је t_i - време кад почиње рачунање броја e -фолдова, а t_e - време краја инфлације.

Прва два параметра спорог котрљања (2.24) могу се записати у облику

$$\epsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{H} \frac{\ddot{H}}{\dot{H}} + 2\epsilon_1. \quad (3.16)$$

Услови за инфлацију испуњени су док су сви параметри спорог котрљања мањи од 1, тј. док је испуњен услов $\varepsilon_i < 1$. Инфлација завршава у тренутку кад неки од ових параметара постане једнак јединици [45,46].

Помоћу Фридманове једначине (3.12) и једначине за убрзање

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{Pl}^2}(P + \rho), \quad (3.17)$$

параметри спорог котрљања могу се написати у функцији тахионског поља и Хабловог параметра

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{2}\dot{T}^2, \quad \varepsilon_2 = 2\frac{\ddot{T}}{HT}. \quad (3.18)$$

3.1.1 Бездимензионалне једначине

Примена услова спорог котрљања (одељак 2.3.1) омогућава релативно једноставно аналитичко решавање система диференцијалних једначина (3.12) и (3.14). Међутим, у многим сложенијим моделима (нпр. Рандал-Сундрум модел) овакав приступ није могућ већ је одговарајући систем диференцијалних једначина неопходно решити и анализирати решења без примене апроксимације спорог котрљања, а услови спорог котрљања служе само за грубо одређивање почетних услова [35]. Проналажење аналитичких решења оваквих модела базираних на системима нелинеарних једначина није увек могуће већ је неопходно коришћење нумеричких метода.

Основни смисао преласка са аналитичког на нумерички метод састоји се у преласку са континуалне на дискретну временску скалу. Да би овај прелаз, решавање система једначина и интерпретација решења, био што лакши, неопходно је применити стандардан метод преласка на природни систем јединица и бездимензионалне величине и једначине.

У математичком приступу решавању физичких проблема постоји одређени познати параметри који укључују различите физичке величине. Математичким трансформацијама долази се до аналитичког решења чија физичка величина одговара тачно одређеној комбинацији физичких величина почетних параметара. Међутим, некад је могуће изабрати одговарајуће константе које омогућавају „рескалирање“ свих постојећих параметара и физичких величина на такав начин да они остану бездимензионе.

Прелазак на бездимензионални приступ генерализује проблем и омогућава лакше препознавање потребних математичких метода. Такође, овакав приступ смањује неопходан

број узастопних нумеричких решавања проблема и омогућава лак увид у ефекте различитих параметара и лако препознавање параметара које је могуће занемарити или апроксимирати.

Након решавања бездименионалних једначина увек је могуће, множећи решење изабраним константама, поново „вратити“ одговарајуће димензије физичким величинама.

За превођење система једначина (3.12) и (3.14) на бездимензионалне величине и нумеричко решавање погодно је дефинисати бездимензионалну константу κ која описује понашање потенцијала $V(T)$ у околини максимума [68]

$$\kappa^2 = \frac{\sigma T_0^2}{M_{\text{pl}}^2}, \quad (3.19)$$

где је T_0 - произвољно одабрана вредност тахионског поља, која омогућава прелазак на бездимензионалне величине, σ је реална константа. Избор константе σ мотивисан је теоријом струна где је ова константа дефинисана као однос масе струне (M_s) и константе купловања струне (g_s) на следећи начин [69]

$$\sigma = \frac{M_s^4}{g_s (2\pi)^3}. \quad (3.20)$$

Уведена константа κ омогућава рескалирање свих физичких величина и диференцијалних једначина (3.12), (3.14) и (3.17). Космичко време (t) постаје бездимензионално време $\tau = t / T_0$, остале бездимензионалне величине су

$$x = \frac{T}{T_0}, \quad U(x) = \frac{V(x)}{\sigma}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{T_0}. \quad (3.21)$$

Сада се бездимениони облик Фридманове једначине (3.12) може записати

$$\tilde{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3} \frac{U(x)}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}. \quad (3.22)$$

Једначина континуитета (3.14) постаје

$$\ddot{x} + \kappa \sqrt{3U(x)(1 - \dot{x}^2)^{3/2}} \dot{x} + \frac{(1 - \dot{x}^2)}{U(x)} \frac{dU(x)}{dx} = 0, \quad (3.23)$$

а једначина за убрзање добија бездимензионални облик

$$\dot{\tilde{H}} = -\frac{\kappa^2}{2} (\tilde{P} + \tilde{\rho}), \quad (3.24)$$

при чему тачка сада означава извод по времену τ .

Густина енергије и притисак у бездимензионој форми постају

$$\tilde{\rho} = \frac{U(T)}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}, \quad \tilde{P} = -U(x)\sqrt{1-\dot{x}^2}. \quad (3.25)$$

Процедура преласка на бездимензионалне величине у моделу инфлације са тахионским пољем и Рандал-Сундрум моделу приказана детаљније је у Додатку 7.2.

3.1.2 Услови за тахионску инфлацију

Основни услов за убрзано ширење свемира (2.8) написан преко уведених бездимензионалних величина има облик

$$\frac{\ddot{a}}{a} \equiv \tilde{H}^2 + \dot{\tilde{H}} = \frac{\kappa^2}{3} \frac{U(x)}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} \left(1 - \frac{3}{2} \dot{x}^2 \right) > 0. \quad (3.26)$$

Из ове релације лако се види да ће се инфлација одвијати док важи $\dot{x}^2 < \frac{2}{3}$. На сличан начин као за стандардно скаларно поље, може се показати да су услови спорог котрљања за тахионско поље [20,70]

$$\ddot{x} \ll 3\tilde{H}\dot{x}, \quad \dot{x}^2 \ll 1. \quad (3.27)$$

Осим услова за одвијање инфлације, добијени услов за \dot{x} , заједно са (3.21) и једначинама (3.10)-(3.12), елиминише проблем бесконачности и комплексних решења који би се појавио у случају кад би за извод тахионског поља могло да важи $\dot{T} \geq 1$. Међутим, овај случај може бити значајан приликом разматрања динамике за „чисто“ тахионско поље [14,15,71].

Добијени услови спорог котрљања омогућавају да се једначине (3.22) и (3.23) током инфлације изразе у приближном облику

$$\tilde{H}^2 \simeq \frac{\kappa^2}{3} U(x), \quad \dot{x} \simeq -\frac{1}{3\tilde{H}} \frac{U'(x)}{U(x)}. \quad (3.28)$$

Комбиновањем израза (3.18) и (3.28) Хаблови хијерархијски параметри постају

$$\epsilon_1 \simeq \frac{1}{2\kappa^2} \frac{U'^2}{U^3}, \quad \epsilon_2 \simeq \frac{1}{\kappa^2} \left(-2 \frac{U''}{U^2} + 3 \frac{U'^2}{U^3} \right). \quad (3.29)$$

Приближно време трајања инфлације, тј. број e -фолдова, може се проценити заменом приближне вредности Хабловог параметра и извода скалираног тахионског поља (3.28) у израз (3.15).

Приближан број e -фолдова може се израчунати као

$$N(x) = \kappa \int_{x_i}^{x_e} \frac{U(x)^2}{|U'(x)|} dx, \quad (3.30)$$

при чему је $x_e = x(\tau_e)$ и $x_i = x(\tau_i)$, где τ_i , x_i и τ_e , x_e означавају време и вредност поља на почетку и крају инфлације.

4.

РАНДАЛ-СУНДРУМ МОДЕЛИ

4.1 КОСМОЛОГИЈА У ВИШЕ ДИМЕНЗИЈА

У досадашњем излагању пажња је била посвећена космолошким моделима базираним на стандардним Фридмановим и Ајнштајновим једначинама у 3+1 простор-времену. Међутим, већ почетком XX века појавиле су се бројне идеје о вишедимензионалном простор-времену.

Теорији струна, данас најшире прихваћеној теорији која укључује додатне димензије, претходила је тзв. Калуца-Клајн теорија. Ова теорија инспирисана је везом између простора Минковског и Максвеловог уједињења електрицитета и магнетизма. Ова теорија настала је као јединствена теорија поља са циљем да уједини гравитациону и електромагнетну интеракцију у петодимензионалном простор-времену. Основу теорије поставили су, независно један од другог Гунар Нордстерм (*Gunnar Nordström*) радом објављеним 1914. године [72], пре ОТР, и Теодор Калуца (*Theodor Kaluza*) у раду који је 1919. године послао Ајнштајну на рецензију и који је објављен тек 1921. године [73]. Калуцина теорија била је класично проширење ОТР на петодимензионално простор-време. Калуца је претпоставио специфичну форму метрике петодимензионалног простора. Метрика се може записати као

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x^\mu, x^4)d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu, \quad (4.1)$$

где су $\hat{\mu}, \hat{\nu} = 0, 1, 2, 3, 4$ а x^4 је додатна просторна координата. Метрички тензор који одговара овој теорији може се записати у облику

$$\hat{g} = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} & g_{\mu 4} \\ g_{4\mu} & g_{44} \end{bmatrix}_{5 \times 5}, \quad (4.2)$$

где су сад $g_{\mu\nu}$ компоненте стандардног метричког тензора из ОТР, а $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Ова метрика има 15 независних компоненти, од којих 10 одговарају простору-времену ОТР, четири компоненте одговарају електромагнетном векторском потенцијалу, а једна је скаларно поље које се често назива дилатон [74].

Да би избегли проблем изостанка детекције пете димензије, теорија коју су поставили Нордстерм и Калуца захтевала је да сви изводи по новој, петој, координати буду једнаки нули, тј. да важи тзв. Калуцин „цилиндрични“ услов [75]

$$\frac{\partial g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}}{\partial x^4} = 0. \quad (4.3)$$

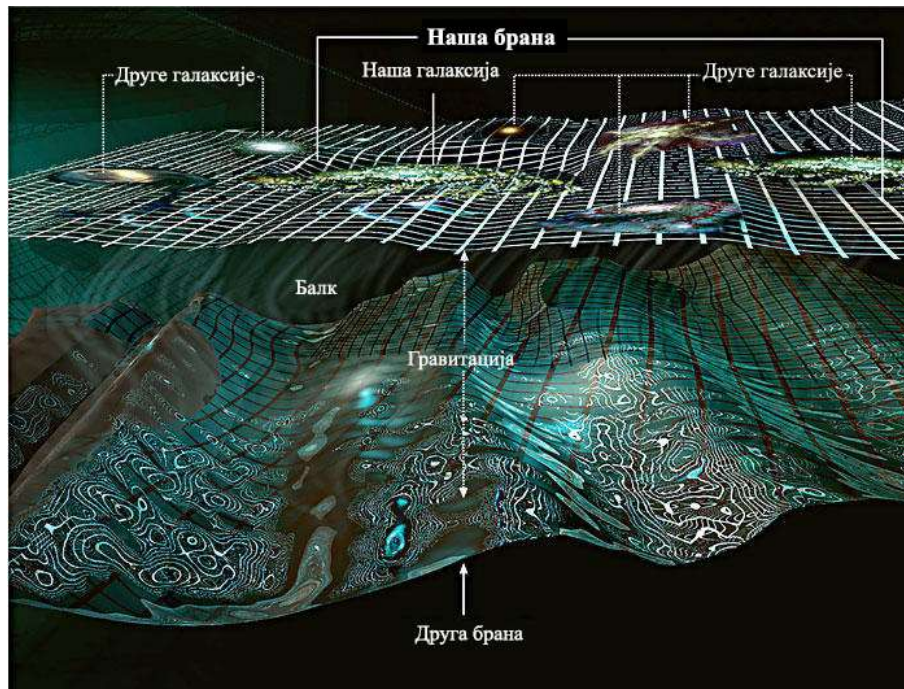
Убрзо након објављивања Калуциног рада, Оскар Клајн (*Oskar Klein*) објавио је квантну интерпретацију ове класичне теорије [76]. Клајнова теорија била је сагласна са постулатима, тада нове, квантне механике и резултатима до којих су дошли Хајзенберг и Шредингер. Да би објаснила Калуцин цилиндрични услов, проширена теорија полазила је од претпоставке да је пета димензија (јако) закривљена и има врло мале димензије.

Претпоставке које су Калуца и Клајн увели биле су револуционарне али даљи рад са уведеном метриком није био једноставан. Било је потребно више од две деценије док на основу метрике (4.1) нису постављене комплетне једначине поља. Четири истраживачке групе, независно једна од друге, су у Немачкој, Швајцарској, Француској и САД (Принстон) радиле на овом проблему у периоду 1940-50. Највећи допринос извођењу једначина поља приписује се Тирију (*M. Y. Thiry*) [77] али показано је да су једначине које је он добио тачне, али нису универзалне већ важе само под одређеним условима. Тек коришћењем софтвера за тензорску алгебру добијен је комплетан систем једначина [78].

4.1.1 Свет на брани

Калуца-Клајн теорија одиграла је значајну улогу у теорији додатних димензија. Међутим, насупрот овој теорији, у којој су додатне димензије врло мале, развијене су и теорије базиране на потпуно супротној идеји. У овим теоријама додатне димензије могу бити велике а „наш“ простор смештен је у један тродимензионални подпростор који се назива брана (*brane*) или прецизније 3-брана (*3-brane*). Ова 3-брана „урођена“ је у вишедимензионални простор, који се назива међупростор или балк (*bulk*). Сва позната материја и интеракције на-

лазе се и делују на једној брани, са изузетком гравитације која једина може да делује у балку [79,80]. У овим моделима најчешће се сматра да су све додатне димензије сакривене, а ако је њихова дужина у датом моделу довољно велика у односу на Планкову дужину тај модел може да објасни велику разлику између константи везе за гравитациону и слабу силу. Овај проблем познат је као проблем хијерархије (*hierarchy problem*) [81].



Слика 3 Свет на брани (уметничка визија). Аутор: Dexton Roberts⁴.

Један од најједноставнијих модела који је покушао да реши проблем хијерархије био је Рандал-Сундрум модел предложен 1999. године [28]. У овом моделу две четвородимензионалне бране, супротних напона, урођене су у петодимензионални простор и налазе се на одређеном растојању (које се мери у петој димензији). У првој верзији Рандал-Сундрум модела (RSI) посматрач се налази на брани са негативним напоном док је растојање до друге бране одређено тако да интензитет гравитације на овој брани одговара Њутновој гравитационој константи. Убрзо након објављивања модела закључено је да Рандал-Сундрум модел и други слични модели могу да доведу до појаве различитих космолошких ефеката. Постојање додатне димензије доводи до модификације Фридманових једначина и низа предвиђања која се разликују од резултата стандардне космологије [25,82–84].

⁴ http://www.imgset.co/image/science_nature/256730

Убрзо након објављивања првог, формулисан је и други Рандал-Сундрум модел (RSII) [24]. У RSII моделу посматрач се налази на брани са позитивним напоном, док се брана са негативним напоном помера на бесконачно велико растојање у дуж пете димензије.

У општем случају простор RSII модела може се описати Анти-де Ситер (*Anti-de Sitter*, $A dS_5$) метриком облика [25,85]

$$ds_{(5)}^2 = e^{-2ky} g^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (4.4)$$

где је k кривина петодимензионалног простор-времена, при чему се брана са посматрачем налази на $y = 0$, а друга брана са негативним напоном на $y = \infty$. Флуктуација растојања између брана у додатној димензији, дуж y -осе, доводи до појаве новог скаларног поља – радиона, које може утицати на метрику и довести до појаве различитих космолошких ефеката [25,29,30].

4.2 РАНДАЛ-СУНДУМ II МОДЕЛ

Балк простор-времена проширеног RSII модела који укључује и повратну реакцију радиона у Феферман-Грахам (*Fefferman-Graham*) координатама може се описати линијским елементом [25,35]

$$\begin{aligned} ds_{(5)}^2 &= G_{ab} dX^a dX^b \\ &= \frac{1}{k^2 z^2} \left[(1 + k^2 z^2 \eta(x)) g^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \frac{1}{(1 + k^2 z^2 \eta(x))^2} dz^2 \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где је $k = 1 / \ell$, ℓ је полупречник кривине, а $\eta(x)$ је поменуто радионско поље. Посматрач је на брани, са метриком $g_{\mu\nu}$, која се налази на $z = \ell$.

Укупно дејство које региструје посматрач једнако је суми дејства балка (S_{bulk}), бране (S_{brane}) и материје (S_{mat}), односно

$$S = S_{bulk} + S_{br} + S_{mat}. \quad (4.6)$$

У даљим разматрањима допринос материје биће занемарен, тј. $S_{mat} = 0$ [25].

Посматрајмо сада динамичку 3-брану која се креће у балку. Након интеграције метрике (4.5) по петој координати укупно ефективно дејство (4.6) у 4-dim може се написати као [29]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} \right) + S_{br}, \quad (4.7)$$

при чему је први члан S_{bulk} , док је Φ канонски нормирано радионско поље дефинисано преко радионског поља η као

$$\eta = \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \Phi \right). \quad (4.8)$$

Увођењем одговарајућих трансформација координата показано је да се дејство бране S_{br} може написати као [25,35]

$$\begin{aligned} S_{br} &= -\sigma \int d^4x \sqrt{-\det g_{\mu\nu}^{ind}} \\ &= -\int d^4x \sqrt{-g} \frac{\sigma}{k^4 \Theta^4} (1 + k^2 \Theta^2 \eta)^2 \sqrt{1 - \frac{g^{\mu\nu} \Theta_{,\mu} \Theta_{,\nu}}{(1 + k^2 \Theta^2 \eta)^3}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где је σ напон бране, Θ је тахионско поље, које је добијено након увођења смене $\Theta = e^{ky} / k$ [25]. Индукована метрика $g_{\mu\nu}^{(ind)}$, тј. „pull-back” балка просторно-временске метрике G_{ab} ка брани дефинисано је као

$$g_{\mu\nu}^{(ind)} = G_{ab} \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^b}{\partial x^\nu}. \quad (4.10)$$

У одсуству радиона ($\Phi = 0$) дејство бране постаје тахионски кондензат са инверзним потенцијалом четвртог степена облика [25,35]

$$S_{br}^{(0)} = -\int d^4x \sqrt{-g} \frac{\lambda}{\Theta^4} \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \Theta_{,\mu} \Theta_{,\nu}}, \quad (4.11)$$

где је

$$\lambda = \frac{\sigma}{k^4}. \quad (4.12)$$

Укупни лагранжијан за брану и радион је

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - \frac{\lambda \psi^2}{\Theta^4} \sqrt{1 - \frac{g^{\mu\nu} \Theta_{,\mu} \Theta_{,\nu}}{\psi^3}}, \quad (4.13)$$

где је

$$\psi = 1 + k^2 \Theta^2 \eta. \quad (4.14)$$

У наставку разматрање ће бити ограничено на просторно равно FRW простор-време на брани на којој је посматрач са метриком

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (4.15)$$

За описивање и анализирање овог модела биће коришћен Хамилтонов формализам. Коњуговани импулси поља дефинисани су као

$$\Pi_{\Phi}^{\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Phi_{,\mu}}, \quad \Pi_{\Theta}^{\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial \Theta_{,\mu}}. \quad (4.16)$$

У контексту космологије, односно хомогене и изотропне еволуције, импулси Π_{Φ}^{μ} и Π_{Θ}^{μ} су временског типа, па је њихов интензитет

$$\Pi_{\Phi} = \sqrt{g_{\mu\nu} \Pi_{\Phi}^{\mu} \Pi_{\Phi}^{\nu}}, \quad \Pi_{\Theta} = \sqrt{g_{\mu\nu} \Pi_{\Theta}^{\mu} \Pi_{\Theta}^{\nu}}. \quad (4.17)$$

Из тензора енергије-импулса који одговара лагранжијану (4.13) добија се да је хамилтонијана [35]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi_{\Phi}^2 + \frac{\lambda \psi^2}{\Theta^4} \sqrt{1 + \Pi_{\Theta}^2 \Theta^8 / (\lambda^2 \psi)}, \quad (4.18)$$

који се, такође, може написати као

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + \frac{\lambda \psi^2}{\Theta^4} \left(1 - \frac{g^{\mu\nu} \Theta_{,\mu} \Theta_{,\nu}}{\psi^3} \right)^{-1/2}. \quad (4.19)$$

Према томе, Хамилтонове једначине за RSII постају

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_{\Phi}}, \quad (4.20)$$

$$\dot{\Theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_{\Theta}}, \quad (4.21)$$

$$\dot{\Pi}_{\Phi} + 3H \Pi_{\Phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi}, \quad (4.22)$$

$$\dot{\Pi}_{\Theta} + 3H \Pi_{\Theta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Theta}. \quad (4.23)$$

У просторно равној Рандал-Сундрум космологији Хаблов параметар ширења H повезан је са хамилтонијаном преко модификоване Фридманове једначине [60,86]

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \mathcal{H} \left(1 + \frac{2\pi G}{3k^2} \mathcal{H} \right)}. \quad (4.24)$$

Једначина (4.24) у комбинацији са једначином континуитета

$$\dot{\mathcal{H}} + 3H(\mathcal{H} + \mathcal{L}) = 0, \quad (4.25)$$

при чему је $\mathcal{H} = \rho$, даје другу Фридманову једначину у облику

$$\dot{H} = -4\pi G(\mathcal{H} + \mathcal{L}) \left(1 + \frac{4\pi G}{3k^2} \mathcal{H} \right). \quad (4.26)$$

Да би систем једначина (4.20)-(4.24) био лакши за решавање најбоље је рескалирати време $t = \tau / k$ и превести систем на бездимензионе величине. На сличан начин као у секцији 3.1.1 одговарајућим рескалирањем поља Φ и Θ и коњугованих импулса Π_Φ и Π_Θ из једначина нестаје константа купловања λ а бездимензионалне функције постају

$$\begin{aligned} h &= H / k, \\ \phi &= \Phi / (k\sqrt{\lambda}), \quad \pi_\phi = \Pi_\Phi / (k^2\sqrt{\lambda}), \\ \theta &= k\Theta, \quad \pi_\theta = \Pi_\Theta / (k^4\lambda). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Рескалирањем лагранжијана и хамилтонијана добијају се бездимензионални изрази за притисак и густину енергије

$$\bar{p} \equiv \frac{\mathcal{L}}{k^4\lambda} = \frac{1}{2}\pi_\phi^2 - \frac{\psi^2}{\theta^4} \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^8\pi_\theta^2 / \psi}}, \quad (4.28)$$

$$\bar{\rho} \equiv \frac{\mathcal{H}}{k^4\lambda} = \frac{1}{2}\pi_\phi^2 + \frac{\psi^2}{\theta^4} \sqrt{1 + \theta^8\pi_\theta^2 / \psi}. \quad (4.29)$$

Исто као и константа κ уведеној у (3.19) и овде се може увести иста бездимензионална константа купловања дефинисана као

$$\kappa^2 = 8\pi\lambda Gk^2. \quad (4.30)$$

Заменом величина (4.27)-(4.30) у систем једначина (4.20)-(4.23) овај систем прелази у бездимензионални и постаје

$$\dot{\phi} = \pi_\phi, \quad (4.31)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\theta^4\psi\pi_\theta}{\sqrt{1 + \theta^8\pi_\theta^2 / \psi}}, \quad (4.32)$$

$$\dot{\pi}_\phi = -3h\pi_\phi - \frac{\psi}{2\theta^2} \frac{4 + 3\theta^8\pi_\theta^2 / \psi}{\sqrt{1 + \theta^8\pi_\theta^2 / \psi}} \eta', \quad (4.33)$$

$$\dot{\pi}_\theta = -3h\pi_\theta + \frac{\psi}{\theta^5} \frac{4 - 3\theta^{10}\eta\pi_\theta^2 / \psi}{\sqrt{1 + \theta^8\pi_\theta^2 / \psi}}, \quad (4.34)$$

где је

$$h \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\kappa^2}{3} \bar{\rho} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12} \bar{\rho} \right)}, \quad (4.35)$$

$$\psi = 1 + \theta^2\eta, \quad (4.36)$$

$$\eta = \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{\kappa^2}{6}} \phi \right), \quad (4.37)$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\phi} = \sqrt{\frac{\kappa^2}{6}} \sinh\left(\sqrt{\frac{2\kappa^2}{3}}\phi\right). \quad (4.38)$$

Истовремено са системом једначина (4.31)-(4.34) корисно је решавати и другу Фридманову једначину

$$\dot{h} = -\frac{\kappa^2}{2}(\bar{\rho} + \bar{p})\left(1 + \frac{\kappa^2}{6}\bar{\rho}\right), \quad (4.39)$$

као и једначину за број e -фолдова (3.15) записану као

$$\dot{N} = h, \quad (4.40)$$

где је N број e -фолдова у функцији од τ , а тачке означавају изводе по времену τ .

Заменом (4.31) и (4.32) у (4.28) и (4.29) изрази за притисак и густину енергије постају

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{\psi^2}{\theta^4}\sqrt{1 - \dot{\theta}^2 / \psi^3}, \quad (4.41)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\psi^2}{\theta^4}\frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\theta}^2 / \psi^3}}. \quad (4.42)$$

Хаблови хијерархијски параметри (2.24) у функцији бездимензионалног Хабловог параметра постају

$$\epsilon_1 = -\frac{\dot{h}}{h^2}, \quad (4.43)$$

$$\epsilon_2 = 2\epsilon_1 + \frac{\ddot{h}}{hh}. \quad (4.44)$$

Ефекти који потичу од тахиона и радиона могу се анализирати упоређивањем резултата добијених за параметре спорог котрљања за комплетан модел и модел који садржи само инверзни тахионски потенцијал четвртог степена.

Након преласка на бездимензионалне величине и време τ , и број e -фолдова (3.15) може се израчунати као

$$N = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau h, \quad (4.45)$$

где τ_i и τ_f означавају почетак, односно крај инфлације.

Израчунавање спектра снаге (одељак 2.4) полази од идентификовања одговарајућег канонског поља и квантовања квадратичног дејства за приближно слободно поље. Ова процедура је добро позната за случај κ -инфлације а показано је да се исти метод може користити и за тахионска поља [20,87,88]. Добијени резултати, у најнижем реду по параметарима ϵ_1 и

ϵ_2 , за спектре снага тахионског поља имају исту форму као спектри снаге за стандардна скаларна поља [20]

$$\mathcal{P}_T \simeq [1 - 2(1 + C)\epsilon_1] \frac{16GH^2}{\pi}, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{P}_S \simeq [1 - 2(1 + C - \alpha)\epsilon_1 - C\epsilon_2] \frac{GH^2}{\pi\epsilon_1}, \quad (4.47)$$

где је

$$C = -2 + \ln 2 + \gamma \simeq -0,72 \quad (4.48)$$

а α је параметар који је повезан са развојем брзине звука⁵ по параметру ϵ_1 на следећи начин

$$c_s = 1 - 2\alpha\epsilon_1 + O(\epsilon_1^2). \quad (4.49)$$

4.3 УСЛОВИ ЗА ТАХИОНСКУ ИНФЛАЦИЈУ У RSII МОДЕЛУ

Почетни услови за инфлацију у RSII моделу (4.31)-(4.34) могу се одредити из једноставнијег модела, из кога је искључен радион. Овај модел описује се чистим тахионским пољем са инверзним тахионским потенцијалом четвртог степена. За описивање динамике тахионског поља и израчунавање параметара спорог котрљања тахионског потенцијала у глави 3 коришћен је метод заснован на Лагранжевом формализму. Међутим, како је за описивање динамике у RSII моделу коришћен Хамилтонов формализам, као погоднији, неопходно је, због веће тачности и оправданости упоређивања добијених резултата, применити исти формализам за тахионски потенцијал а затим добијене резултате искористити као почетне услове за RSII модел.

У складу са ознакама из претходног одељка, лагранжијан DBI типа (3.7) сада се може записати као

$$\mathcal{L} = -V(\Theta) \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \Theta_{,\mu} \Theta_{,\nu}}, \quad (4.50)$$

за инверзни тахионски потенцијал четвртог степена

$$V(\Theta) = \frac{\lambda}{\Theta^4}, \quad (4.51)$$

где је Θ тахионско поље а λ константа, постаје

$$\mathcal{L} = -\frac{\lambda}{\Theta^4} \sqrt{1 - g^{\mu\nu} \Theta_{,\mu} \Theta_{,\nu}}, \quad (4.52)$$

⁵ У теорији инфлације „брзина звука“ означава брзину простирања пертурбација током трајања инфлације.

док је одговарајући хамилтонијан

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda}{\Theta^4} \sqrt{1 + \Pi_\Theta^2 \Theta^8 / \lambda^2}. \quad (4.53)$$

Слично као и за RSII модел, скалирањем времена $t = \tau / k$ и увођењем нових функција (4.27), из (4.53), помоћу (4.21) и (4.23), добијају се хамилтонове једначине

$$\dot{\theta} = \frac{\theta^4 \pi_\theta}{\sqrt{1 + \theta^8 \pi_\theta^2}}, \quad (4.54)$$

$$\dot{\pi}_\theta = -3h\pi_\theta + \frac{4}{\theta^5 \sqrt{1 + \theta^8 \pi_\theta^2}}. \quad (4.55)$$

Бездимензиони притисак и густина енергије постају

$$\bar{p} = -\frac{1}{\theta^4 \sqrt{1 + \theta^8 \pi_\theta^2}} = -\frac{1}{\theta^4} \sqrt{1 - \dot{\theta}^2}, \quad (4.56)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\theta^4} \sqrt{1 + \theta^8 \pi_\theta^2} = \frac{1}{\theta^4} \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\theta}^2}}, \quad (4.57)$$

а брзина звука је

$$c_s^2 \equiv \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_\theta = \frac{1}{1 + \theta^8 \pi_\theta^2} = 1 - \dot{\theta}^2. \quad (4.58)$$

Преласком на бездимензионални систем величина и заменом (4.56) и (4.57) у Фридманове једначине (4.35) и (4.39) константа λ нестаје, а у једначинама остаје само константа κ дефинисана у (4.30). Систем једначина (4.54)-(4.55) могуће је нумерички решити за изабран скуп почетних услова. Након израчунавања решења за Хаблов параметар H лако се израчунавају и параметри спорог котрљања.

4.3.1 Апроксимација спорог котрљања и почетни услови

За налажење одговарајућих почетних услова за тахионско поље θ размотримо прво чист тахионски модел у апроксимацији спорог котрљања. Тахионска инфлација је базирана на спорој еволуцији поља θ уз услове спорог котрљања [20]

$$\dot{\theta} \simeq \theta^4 \pi_\theta \ll 1, \quad \dot{\pi}_\theta \ll 3h\pi_\theta. \quad (4.59)$$

Према томе, у апроксимацији спорог котрљања могуће је занемарити члан $\sqrt{1 - \dot{\theta}^2}$ тако да важи

$$h \simeq \frac{\kappa}{\sqrt{3}\theta^2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4}\right)^{1/2}, \quad (4.60)$$

$$\dot{\theta} \simeq \frac{4}{3h\theta} \simeq \frac{4\theta}{\sqrt{3}\kappa} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4}\right)^{-1/2}, \quad (4.61)$$

$$\ddot{\theta} \simeq \frac{4\dot{\theta}}{\sqrt{3}\kappa} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4}\right)^{-3/2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{4\theta^4}\right), \quad (4.62)$$

а једначина (4.39) постаје

$$\dot{h} = -\frac{\kappa^2 \dot{\theta}^2}{2\theta^4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{6\theta^4}\right). \quad (4.63)$$

Као резултат ових апроксимација, параметри спорог котрљања (4.43) и (4.44) могу се приближно израчунати користећи изразе

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &\simeq \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \left(1 + \frac{\kappa^2}{6\theta^4}\right) \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4}\right)^{-1} \\ &\simeq \frac{8\theta^2}{\kappa^2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{6\theta^4}\right) \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4}\right)^{-2}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &\simeq 2 \frac{\ddot{\theta}}{h\dot{\theta}} - \dot{\theta}^2 \frac{\kappa^2}{4\theta^4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{6\theta^4}\right)^{-1} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4}\right)^{-1} \\ &\simeq \frac{8\theta^2}{\kappa^2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4}\right)^{-2} \left[1 + \frac{\kappa^2}{4\theta^4} - \frac{\kappa^2}{6\theta^4} \left(1 + \frac{\kappa^2}{6\theta^4}\right)^{-1}\right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

У режиму спорог котрљања важи $\kappa^2 / \theta^4 \gg 1$ што доводи до доминантног утицаја RSII модификације у једначинама (4.60)-(4.65). Због тога се ове једначине могу приближно написати у једноставном облику

$$h \simeq \frac{1}{6} \frac{\kappa^2}{\theta^4}, \quad \dot{\theta} \simeq 8 \frac{\theta^3}{\kappa^2}, \quad \ddot{\theta} \simeq 24 \frac{\theta^2}{\kappa^2} \dot{\theta}, \quad (4.66)$$

$$\epsilon_1 \simeq 3\dot{\theta}^2 \simeq 192 \frac{\theta^6}{\kappa^4}, \quad \epsilon_2 \simeq 288 \frac{\theta^6}{\kappa^4} \simeq \frac{3}{2} \epsilon_1. \quad (4.67)$$

Супротно, ако се занемари допринос RSII корекције добијају се стандардне једначине за тахионску инфлацију [5,20,89] у режиму спорог котрљања за потенцијал (4.51) које, у овом случају, постају

$$h \simeq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\kappa}{\theta^2}, \quad \dot{\theta} \simeq \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\theta}{\kappa}, \quad \ddot{\theta} \simeq \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\dot{\theta}}{\kappa}, \quad (4.68)$$

$$\epsilon_1 \simeq \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \simeq 8 \frac{\theta^2}{\kappa^2}, \quad \epsilon_2 \simeq \epsilon_1. \quad (4.69)$$

Дакле, у режиму спорог котрљања тахионска инфлација у модификованој RSII космологији одвија се на битно другачији начин у односу на стандардну FRW космологију. Међутим, пред крај инфлације ($\epsilon_1 \approx 1$) испуњен је услов $\kappa^2 / \theta_f^4 \ll 1$ тако да се модификација због RSII космологије може занемарити. Према томе, једначине (4.68) и (4.69) важе на крају инфлације, па је

$$\epsilon_1(\theta_f) \simeq \epsilon_2(\theta_f) \simeq \frac{8\theta_f^2}{\kappa^2} \simeq 1, \quad (4.70)$$

$$h(\theta_f) \simeq \frac{8}{\sqrt{3}\kappa}. \quad (4.71)$$

У апроксимацији спорог котрљања, на основу једначине (4.70) и услова $\kappa^2 / (36\theta_0^4) \gg 1$, на почетку, и $\kappa^2 / (36\theta_f^4) \ll 1$, на крају инфлације, број e -фолдова је

$$\begin{aligned} N &\simeq \frac{\kappa^2}{4} \int_{\theta_0}^{\theta_f} \frac{d\theta}{\theta^3} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\theta^4} \right) \simeq \frac{\kappa^2}{8\theta_0^2} \left(1 + \frac{\kappa^2}{36\theta_0^4} \right) - 1 \\ &\simeq \frac{2}{3} \frac{1}{\epsilon_1(\theta_0)} - 1. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Број e -фолдова у случају стандардне тахионске инфлације описане једначинама (4.68) и (4.69) је

$$N_{\text{st.tach}} \simeq \frac{\kappa^2}{8\theta_0^2} - 1 \simeq \frac{1}{\epsilon_1(\theta_0)} - 1. \quad (4.73)$$

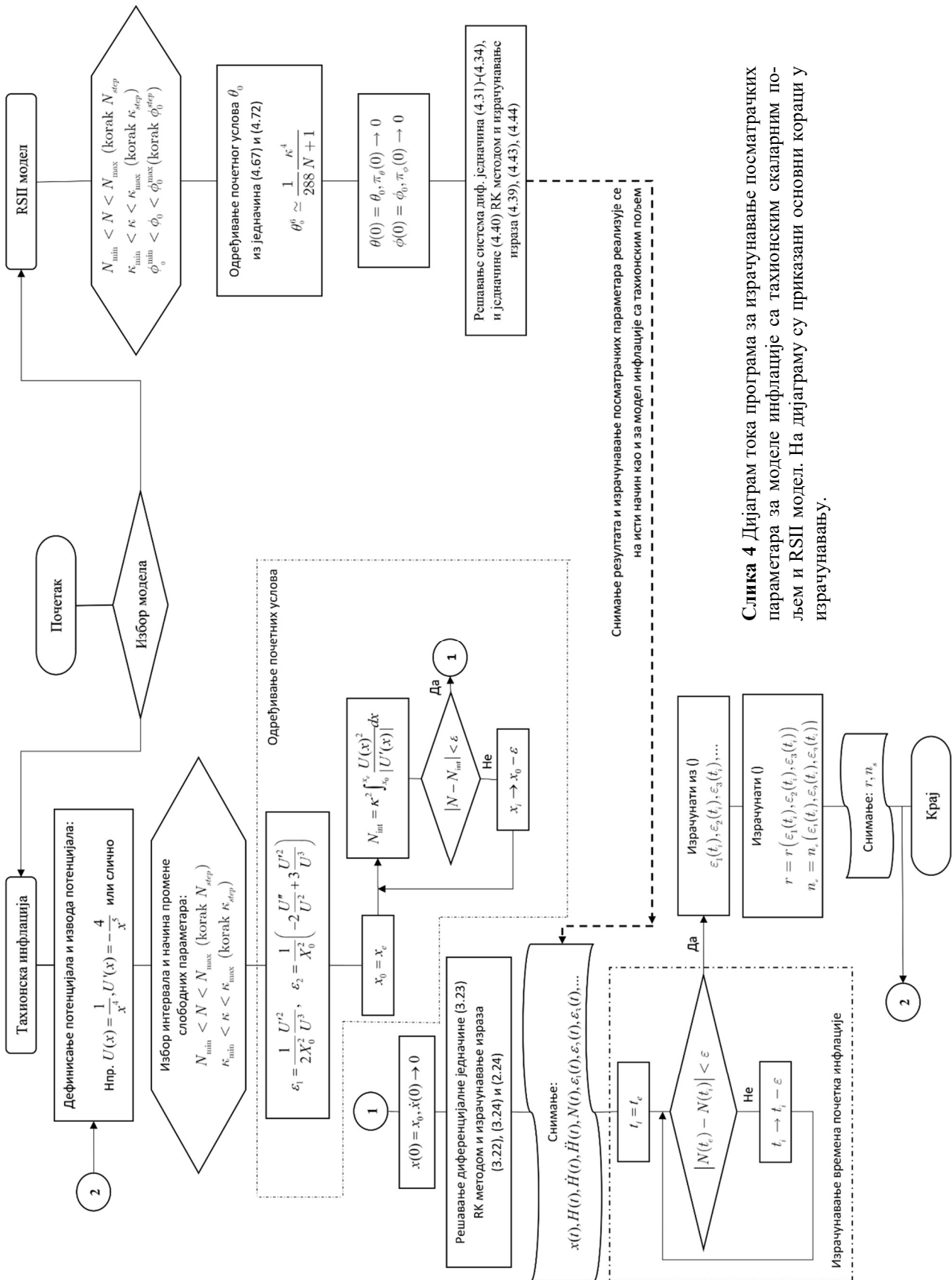
Из једначина (4.72) и (4.73) лако је уочити велику разлику у броју e -фолдова до којих доводи RSII космологија. На пример, за $\kappa^2 = 5$ и $\theta_0 = 0,25$ број e -фолдова у стандардној тахионској космологији је $N_{\text{st.tach}} \simeq 9$, док је у RSII космологији $N \simeq 365!$ На тај начин RSII космологија омогућава продужење периода инфлације и тиме постаје занимљив предмет истраживања [35].

5.

НУМЕРИЧКИ МЕТОД

Динамика модела тахионске инфлације (Глава 3) и Ранда-Сундрум модела (Глава 4) описана је решењем диференцијалне једначине (3.23), за тахионску инфлацију, односно решењем система диференцијалних једначина (4.20)-(4.23), за Ранда-Сундрум модел. У претходном делу већ је наведено да се егзактна решења за тахионску инфлацију могу наћи само у врло малом броју случајева. Приближна решења (апроксимација спорог котрљања) омогућава налажење аналитичких решења за различите типове тахионских потенцијала, али процес израчунавања је најчешће релативно спор. За разлику од тахионске инфлације, систем диференцијалних једначина за Ранда-Сундрум модел није могуће решити аналитички.

Једноставнији и ефикаснији метод за налажење решења је нумерички метод. Примена рачунара и нумеричког метода омогућава ефикасно налажење решења диференцијалних једначина, а затим и израчунавање посматрачких параметара инфлације. Осим тога, одговарајућом имплементацијом алгоритма могуће је на једноставан начин, применом истог програмског кода, или уз минималне измене у коду (уношење одговарајућег система диференцијалних једначина и дефинисање параметара), решавати различите моделе инфлације (стандардна инфлација са једним скаларним пољем, тахионска инфлација, инфлација у Ранда-Сундрум моделу итд). Истовремено, лака паралелизација програма омогућава брзо налажење решења и израчунавање посматрачких параметара инфлације за велики скуп различитих почетних услова и вредности параметара.



Слика 4 Дијаграм тока програма за израчунавање посматрачких параметара за моделе инфлације са тахонским скаларним пољем и RSII модел. На дијаграму су приказани основни кораци у израчунавању.

5.1 НУМЕРИЧКО ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПАРАМЕТАРА ИНФЛАЦИЈЕ

Динамика и параметри инфлације за разматране моделе израчунавају се коришћењем истог метода – алгоритма (Слика 4). Овај алгоритам базиран је на стандардним, и добро познатим, нумеричким методама за нумеричко диференцирање и интеграцију, налажење нула функција (метод сечице) и решавање диференцијалних једначина, Рунге-Кута (*Runge-Kutta*) метод. Алгоритам је могуће имплементирати у већини савремених програмских језика, а за потребе овог израчунавања коришћен је програмски језик C++. Нумеричка израчунавања имплементирана су помоћу библиотеке *GNU Scientific Library*⁶ (GSL) [90]. За графичко приказивање резултата написани су програми у скрипт језику *GNUplot*⁷ [91], док је веза са C++ програмом реализована посредством библиотеке *Gnuplot-iostream*⁸. Функционалност и повезивање компајлираног програма и *GNUplot* скрипти реализована је кроз *Linux shell* скрипт језик *Bash*⁹.

За успешну анализу параметара инфлације и њихово упоређивање са посматрачки измереним вредностима, због природе нумеричког решавања, неопходно је одредити динамику инфлације одабраних космолошких модела за велики број ($10^4 - 10^5$) различитих комбинација вредности слободних параметара. Избор слободних параметара реализује се на различите начине: случајним избором параметара у дефинисаном интервалу (први метод са хомогеном, а други са унапред дефинисаном расподелом вероватноће - Монте Карло метод, док је трећи метод заснован на сукцесивној промени вредности параметра са неким произвољно малим кораком у датом интервалу). Методи случајног избора параметара омогућавају брзо „скенирање“ датих интервала у потрази за одговарајућим вредностима док трећи метод, иако много спорији, омогућава бољу и детаљну анализу добијених резултата. У програму који је коришћен за добијање нумеричких резултата имплементирана су сва три метода; два метода заснована на случајном избору коришћена су у фази тестирања и тражења највероватнијих области вредности параметара инфлације, док је за добијање коначних резултата коришћен трећи метод.

⁶ <https://www.gnu.org/software/gsl/>

⁷ <http://www.gnuplot.info/>

⁸ <http://stahlke.org/dan/gnuplot-iostream/>

⁹ <https://www.gnu.org/software/bash/>

5.1.1 Процена почетних услова

За сваки скуп изабраних вредности слободних параметара потребно је израчунати одговарајуће почетне услове за сва скаларна поља, и њихове прве изводе, који постоје у моделу. Избор ових почетних услова може да буде потпуно произвољан, међутим све комбинације почетних услова нису физички оправдане, или, као резултат не доводе до инфлаторног ширења свемира. Раније је већ речено да услови спорог котрљања (одељци 2.3.1 и 3.1.2) гарантују убрзано – инфлаторно ширење свемира. Због тога најбоље је искористити овај услов и на основу њега проценити почетну вредност поља које води инфлацију (у свим моделима које разматрамо то је тахионско поље).

У општем случају, за било који одабрани тахионски потенцијал и за одабране вредности слободних параметара N и κ , почетна вредност тахионског поља може се одредити из једначина за параметре спорог котрљања и једначине за број е-фолдова [32–34]. Заменом тахионског потенцијала у израз (3.29) и његовим изједначавањем са јединицом (услов за крај инфлације) добија се једначина

$$\frac{1}{2\kappa^2} \frac{U'(x)^2}{U(x)^3} = 1, \quad (5.1)$$

у којој је једина непозната величина (скалирано) тахионско скаларно поље x , а затим се решавањем једначине добија вредност поља на крају инфлације (x_e). На пример, у случају инверзног \cosh тахионског потенцијала [14,15,34] облика

$$U(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \quad (5.2)$$

једначина (5.1) постаје

$$\frac{1}{2\kappa^2} \frac{\sinh^2 x}{\cosh x} = 1, \quad (5.3)$$

одакле се лако (нумерички) одређује вредност поља на крају инфлације.

У програму за израчунавање посматрачких параметара за моделе тахионске инфлације, као променљиве, дефинисани су различити тахионски потенцијали $U(x)$ и њихови изводи $U'(x)$. Дате вредности параметра κ и потенцијала, програм замењује у једначину (5.1) коју затим решава неким од стандардних нумеричких метода за налажење нула функције, нпр. методом сечице (*secant*), методом половљења интервала (*bisection*) итд.

Израчуната вредност тахионског поља на крају инфлације x_e замењује се у интеграл за број е-фолдова (3.30), након чега је потребно решити једначину у којој је непозната доња

граница интеграције x_i , тј. вредност тахионског поља у тренутку када почиње бројање е-фолдова. Тахионско поље x_0 , које одговара вредности поља x_i ($x_0 = x_i$) можемо да искористимо као почетни услов за вредност поља приликом решавања система диференцијалних једначина. Непознату вредност поља x_0 могуће је нумерички одредити „погађањем“. Иако делује парадоксално, можемо претпоставити да је $x_0 = x_e$ па израчунати интеграл и добијену вредност упоредити са жељеним бројем е-фолдова N . Ако израчуната вредност интеграла (N_{int}) није приближно једнака траженој вредности ($|N - N_{\text{int}}| < \varepsilon$, где је ε жељена тачност, тј. мала позитивна константа) претпостављена вредност x_i није добра и морамо је смањити за малу вредност корака и процедура се понавља. Вредност поља x_i за коју је $N_{\text{int}} \approx N$ може се користити као почетна вредност поља у једначинама за одређивање динамике инфлације. Овај поступак може се на сличан начин ефикасније реализовати методом половљења интервала [32,35].

Вредност x_0 може се израчунати и на други начин. Интегрална једначина (3.30) може се трансформисати у диференцијалну једначину

$$\frac{dN(x)}{dx} = \kappa^2 \frac{U(x)^2}{|U'(x)|}, \quad (5.4)$$

чијим се решавањем добија функција $N(x)$ из које се, заменом $x = x_e$ може, на сличан начин, одредити почетна вредност тахионског поља $x = x_0$ из услова $N(x_e) - N(x_0) = N$.

Табела 2 Почетни услови за тахионско поље одређени на два начина. Разлика у почетној вредности поља не игра значајну улогу у коначним резултатима.

N	κ	x_0 (метод 1)	x_0 (метод 2)
60	1	0.045255	0.196131
60	6	0.271555	0.647610
60	11	0.497866	0.970081
80	1	0.039255	0.187077
80	6	0.235655	0.617715
80	11	0.432066	0.925299
100	1	0.035155	0.180322
100	6	0.211055	0.595409
100	11	0.386966	0.891886

Описана процедура може се користити за одређивање почетних услова за произвољан тахионски потенцијал. Међутим, у случају неких потенцијала могуће је на једноставан начин, полазећи од услова спорог котрљања и применом додатних апроксимација, израчунати приближну зависност почетне вредности тахионског поља од вредности слободних параметара [35]. У одељку 4.3.1 овај поступак је приказан за случај инверзног квартичког потенцијал облика $U(x) = 1/x^4$, а зависност почетних услова од слободних параметара дата је једначином (4.73).

Почетне услове за друга поља (тј. радионско поље у Рандал-Сундрум моделу) могуће је проценити из физичких услова за посматрани модел [35]. За процену физички оправданог опсега вредности радионског поља неопходно је, прво, проценити вредности константи λ и слободног параметра κ (у изразима (4.27) и (4.30)). Константа λ може се проценити из посматрачких ограничења амплитуде скаларних пертурбација. Из једначине (4.47) може се добити приближна релација за скаларни спектар снаге

$$\mathcal{P}_s \simeq \frac{GH^2}{\varepsilon_1 \pi}. \quad (5.5)$$

Упоређивањем овог израза са интензитетом амплитуде спектра снаге A_s , добијеним на основу мерења сателита Планк [21,31,35] добија се

$$A_s \simeq 2,2 \cdot 10^{-9}. \quad (5.6)$$

Због овог ограничења неопходно је да на крају инфлације ($\varepsilon_1 \leq 1$) буде испуњен услов [26,35,92]

$$\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \leq \sqrt{\pi A_s} \simeq 8,31 \cdot 10^{-5}, \quad (5.7)$$

при чему је m_{Pl} Планкова маса, $m_{\text{Pl}} = G^{-1/2}$. Из једначине (4.71), уз релације (4.12), (4.27) и (4.30), у апроксимацији спорог котрљања, на крају инфлације важи

$$\frac{H}{m_{\text{Pl}}} \simeq \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{k}{\kappa m_{\text{Pl}}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \frac{k^2}{\sqrt{\sigma}}, \quad (5.8)$$

одакле се, сређивањем, добија

$$\frac{k}{\sigma^{1/4}} \lesssim 10^{-2}, \quad (5.9)$$

односно, за константу λ мора да важи

$$\lambda \gtrsim 10^8. \quad (5.10)$$

Вредност слободног параметара κ може се проценити полазећи од напона Dp -бране датог као [27,35]

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^p \alpha'^{(p+1)/2} g_s}, \quad (5.11)$$

где је, да поновимо, g_s константа везе (*coupling*) струне, а $1 / (2\pi\alpha')$ напон струне [26]. За $p = 3$ на основу релације (5.9) добија се услов

$$g_s \lesssim 4 \times 10^{-11} \frac{M_s^4}{k^4}, \quad (5.12)$$

где је $M_s = 1 / \sqrt{\alpha'}$, док је α' параметар. На основу ових услова могуће је изабрати вредности k и M_s тако да важи хијерархија величина

$$H < k < M_s < m_{\text{pl}}. \quad (5.13)$$

На основу ове релације и релације (5.8) могуће је проценити опсег вредности слободног параметра κ . Из услова да је $\kappa \gtrsim H$ добија се

$$\kappa \gtrsim \frac{8}{\sqrt{3}}, \quad (5.14)$$

па се са солидном поузданошћу κ може бирати у интервалу $1 < \kappa < 20$.

Нажалост, не постоје унапред дефинисани услови на основу којих је могуће ограничити вредност радионског поља Φ . Међутим, сада када су приближно познате вредности константе λ и слободног параметра κ може се проценити и почетна вредност овог поља. На основу природне скале која потиче из посматрања може се закључити да се почетна вредност поља Φ налази између H и m_{pl} . Према томе, природна почетна вредност поља Φ је истог реда величине као константа k или неколико редова величине већа, нпр. у интервалу од 10 до $1000k$ [25,35]. Како је, према (4.27) бездимензионо радионско поље скалирано у односу на Φ / k за фактор $1 / \sqrt{\lambda} \simeq 10^{-4}$, почетна вредност радионског поља $\phi_0 = \phi(0)$ налази се у интервалу од 0,001 до 0,5.

За разлику од почетних вредности скаларних поља, које играју значајну улогу у динамици модела, њихови први изводи не утичу значајно на добијене резултате и најбоље је изабрати да су почетне вредности извода свих скаларних поља приближно једнаки нули, или нула.

5.1.2 Динамика инфлације

Након одређивања почетних услова, нумеричко решавање система диференцијалних једначина којима су описани жељени модели може се реализовати помоћу неког од стандардних метода за нумеричко решавање обичних диференцијалних једначина. У овом раду коришћен је Кеш-Карпов (*Cash-Karp*) метод [93].

Кеш-Карпов метод спада у познату групу Рунге-Кута (РК) метода. РК нумерички методи служе за нумеричко решавање Кошијевог проблема за диференцијалну једначину првог или вишег реда (ове једначине прво се трансформишу у систем једначина првог реда). Овим методом врши се нумеричка интеграција обичних диференцијалних једначина помоћу корака у средини интервала, што значајно доприноси смањивању грешака израчунавања и побољшању стабилности решења [94]. Најпознатији РК методи су методи другог и четвртог реда (познат као RK4, или тзв. „класични“ Рунге-Кута метод, а често се овај метод назива само Рунге-Кута).

За диференцијалну једначину облика

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (5.15)$$

где је t независна променљива, а $y(t)$ непозната функција, RK4 метод може се записати као [90,94]

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ t_{n+1} &= t_n + h, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где је $n = 0, 1, 2, \dots$, а h произвољно мали интервал независне променљиве („корак“), док је

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (5.17)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (5.18)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (5.19)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3). \quad (5.20)$$

Укупна акумулирана грешка RK4 метода је реда величине $O(h^4)$, док је локална грешка заокруживања $O(h^5)$.

Насупрот RK4 и сличним методима, код којих је корак независне променљиве константан, Кеш-Карпов метод спада у групу Рунге-Кута метода са прилагодљивим (адаптив-

ним) кораком. Адаптивни методи израчунавају вредност функције користећи два узастопна реда Рунге-Кута метода, па затим, разлику између добијених решења користе као грешку на основу које прилагођавају вредност корака h . Кеш-Карпов метод користи Рунге-Кута метод четвртог и петог реда а на основу разлике између добијених резултата процењује корак за RK4 метод [93]. У програму Кеш-Карпов метод имплементиран је уз помоћ GSL библиотеке, а систем диференцијалних једначина и сви параметри издвојени су у посебну програмску функцију, што омогућава лако прилагођавање програма и примену за друге инфлаторне моделе.

За израчунавање динамике инфлације за сваки модел потребно је наћи нумеричка решења одговарајућег система диференцијалних једначина. За инфлаторне моделе са тахионским пољем осим трансформације једначине (3.23) на систем од две диференцијалне једначине првог реда током интеграције диференцијалне једначине паралелно се израчунава и Хаблов параметар $\tilde{H}(t)$. Из практичних разлога добро је проширити систем који се нумерички решава једначином за убрзање (3.24). Први извод Хабловог параметра $\dot{\tilde{H}}$ неопходан је за израчунавање параметара спорог котрљања (3.16), чиме се олакшава и убрзава његово израчунавање, док се истовремено повећава тачност добијеног резултата у односу на метод нумеричке интеграције добијеног решења за Хаблов параметар. У програму се паралелно израчунава и $\ddot{\tilde{H}}(t)$, на основу формуле која је добијена аналитичким диференцирањем израза (3.24) по времену. Систем диференцијалних једначина допуњен је са још две једначине

$$\dot{\tilde{a}} = \tilde{H} \cdot \tilde{a}, \quad \dot{\tilde{N}} = \tilde{H}. \quad (5.21)$$

На овај начин, као решење, добија се и еволуција фактора скале $\tilde{a}(t)$ и броја е-фолдова $N(t)$, што касније олакшава одређивање времена почетка инфлације (бројања е-фолдова) t_i у једначини (3.15) и израчунавање посматрачких параметара.

За RSII модел динамика инфлације израчунава се на исти начин. Слично, као код тахионског модела, у коме је коришћен Лагранжев формализам, Хамилтонове једначине (4.31)-(4.34) за RSII модел допуњују се једначинама (4.39) и (4.40), као и одговарајућом једначином за фактор скале $\dot{a} = h \cdot a$. Аналогно тахионском моделу и у RSII моделу други извод Хабловог параметра \ddot{h} израчунава се из једначине добијене аналитичким диференцирањем израза (4.39). Међутим, како је за постизање веће тачности израчунатих посматрачких параметара за RSII моделе неопходно израчунавање трећег параметра спорог котрљања ε_3 , неопходно је израчунати и трећи извод Хабловог параметра $\ddot{\tilde{h}}$. Нажалост, даље диференцирање израза

(4.39), тј. аналитичко израчунавање, а касније и коришћење добијеног израза, за \ddot{h} је доста сложено, па се у програму прво израчунава „сплајн“ (*spline*¹⁰) интерполациона функција за добијене нумеричке резултате за Хаблов параметар, а затим се нумеричким диференцирањем ове функције израчунава трећи извод Хабловог параметра \ddot{h} .

5.1.3 Посматрачки параметри

Након ових израчунавања, као резултат се осим временске зависности одговарајућих скаларних поља и њихових коњугованих импулса добија и решење за Хаблов параметар, фактор скале и број ϵ -фолдова у функцији од времена. Овако добијене функције могу се користити за анализу динамике модела или даља израчунавања посматрачких параметара инфлације.

Заменом израчунатих функција еволуције Хабловог параметра и његових извода у изразе (3.16), за тахионску инфлацију, односно (4.43)-(4.44), за RSII модел, добијају се изрази који описују еволуцију параметара спорог котрљања ϵ_1 и ϵ_2 у разматраном моделу.

Посматрачки параметри, скаларни спектрални индекс n_s (2.41) и количник тензора и скалара r (2.40) за тахионску инфлацију у првом реду у односу на параметре ϵ_1 и ϵ_2 имају исти облик као и у случају стандардне инфлације за једно скаларно поље [20]

$$r = 16\epsilon_1(t_i), \quad (5.22)$$

$$n_s = 1 - 2\epsilon_1(t_i) - \epsilon_2(t_i), \quad (5.23)$$

где су $\epsilon_1(t_i)$ и $\epsilon_2(t_i)$ вредности параметра спорог котрљања на почетку инфлације ($t = t_i$). Други ред апроксимације ових параметара се разликује. За тахионску инфлацију у стандардној космологији параметри r и n_s имају облик

$$r = 16\epsilon_1(1 + C\epsilon_2 - 2\alpha\epsilon_1), \quad (5.24)$$

$$n_s = 1 - 2\epsilon_1 - \epsilon_2 - [2\epsilon_1^2 + (2C + 3 - 2\alpha)\epsilon_1\epsilon_2 + C\epsilon_2\epsilon_3], \quad (5.25)$$

где су ϵ_i , ($i = 1, 2, 3$), Хаблови хијерархијски параметри на почетку инфлације, C је константа дефинисана у изразу (4.48), док је параметар $\alpha = 1/6$ за тахионску инфлацију у стандардној космологији [20].

¹⁰ Посебна врста интерполационих полинома.

Међутим, за Рандал-Сундрум космологију, тј. за модификовану Фридманову једначину (4.24), показано је да параметар α има другу вредност [35]. Заменом ε_1 из израза (4.67) у израз за брзину звука (4.58) добија се

$$c_s \simeq 1 - \frac{1}{6}\varepsilon_1. \quad (5.26)$$

Упоређивањем са једначином (4.49) добија се $\alpha = 1/12$, па изрази (5.24) и (5.25) постају

$$r = 16\varepsilon_1 \left(1 - 0.72\varepsilon_2 - \frac{1}{6}\varepsilon_1 \right), \quad (5.27)$$

$$n_s = 1 - 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \left[2\varepsilon_1^2 + 1.39\varepsilon_1\varepsilon_2 - 0.72\varepsilon_2\varepsilon_3 \right], \quad (5.28)$$

где су, наравно, ε_i , ($i = 1, 2, 3$), вредности ових параметара на почетку инфлације. За израчунавање параметара r и n_s према једначинама (5.24) и (5.25) потребно је израчунати вредности ових параметара.

Хаблови хијерархијски параметри ε_i , ($i = 1, 2, 3$), на почетку инфлације могу се израчунати на сличан који је примењен за одређивање почетних услова (одељак 5.1.1).

На основу услова за инфлацију $\varepsilon_1 < 1$, време краја инфлације (t_e) налази се нумерички решавањем једначине $\varepsilon_1(t_e) = 1$. Заменом израчаног времена t_e у једначину

$$N(t_e) - N(t_i) = N, \quad (5.29)$$

где је $N(t)$ нумеричко решење броја е-фолдова у функцији времена, а N жељени број е-фолдова (слободан параметар). Решавањем ове једначине по времену t_i добија се време почетка инфлације, а затим и тражене вредности Хаблових хијерархијских параметара ε_1 , ε_2 и ε_3 на почетку инфлације. Заменом ε_1 , ε_2 и ε_3 у изразе (5.24)-(5.25) израчунавају се посматрачки параметри за одговарајући модел инфлације и одабране вредности слободних параметара.

5.2 РЕЗУЛТАТИ

Компјутерски програм написан на основу поступка описаног у претходном одељку коришћен је за потребна израчунавања. Добијени нумерички резултати приказани су графички, а затим анализирани. На почетку истраживања инфлације у RSII моделу функционалност и тачност програма тестирана је и упоређивана са раније познатим аналитичким и нумеричким моделима стандардне и тахионске инфлације, односно њиховим резултатима.

Истовремено, резултати за неке тахионске моделе независно су израчунати на основу једначина добијених из лагранжијана (3.7) и апроксимативних Хамилтонових једначина (4.54)-(4.55).

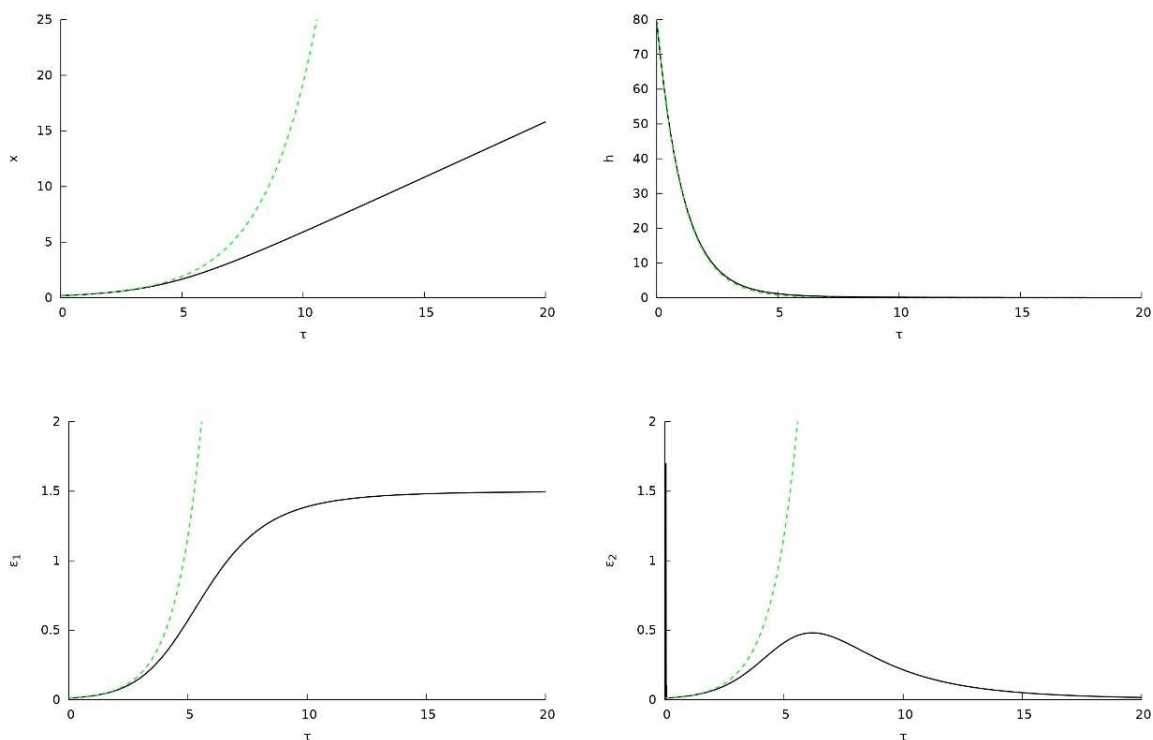
Добијени резултати за тахионске моделе за различитим потенцијалима и RSII модел са тахионским и радионским пољем приказани су у наставку.

5.2.1 Тахионска инфлација

У Глави 4 показано је да се у одсуству радиона RSII модел трансформише у одговарајући модел са тахионским потенцијалом облика

$$U(x) = \frac{1}{x^4}, \quad (5.30)$$

где је $x = x(\tau)$ бездимензионално тахионско поље.



Слика 5 Упоредивање аналитичког (тачкице) и нумеричког (пуна линија) метода за временску еволуција тахионског инфлаторног поља (горе лево), Хабловог параметара (горе десно) и хијерархијских параметара ε_1 (доле лево) и ε_2 (доле десно) за тахионски потенцијал облика $U(x) = 1/x^4$ и параметре $N = 85$ и $\kappa = 5$.

Такође је показано да су резултати добијени за овај потенцијал неопходни за добијање почетних услова коко би се одредила динамика RSII модела. Из ових разлога, као и због могућности да се упоређивањем добијених резултата за посматрачке параметре за тахионски и

RSII модел одреди утицај радиона на ток инфлације потребно је, прво, израчунати све неопходне величине за овај тахионски потенцијал.

Применом апроксимативних метода овај модел може се решити аналитички уз помоћ услова спорог котрљања (3.27) и приближних релација (3.29). За потенцијал (5.30) решење Фридманове једначине у режиму спорог котрљања (3.28) има облик

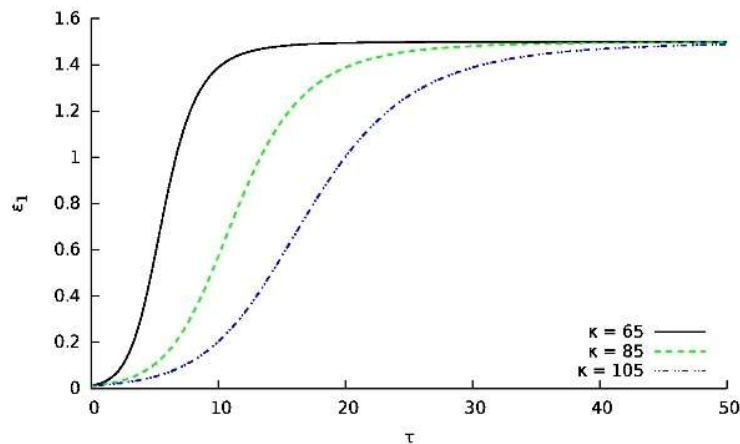
$$x(\tau) = C_1 e^{\frac{4\tau}{\kappa\sqrt{3}}}, \quad (5.31)$$

где је C_1 константа која се може одредити из почетних услова. Заменом добијеног решења у израз (3.18) добија се израз за временску еволуцију Хаблових хијерархијских параметара. Након једноставног сређивања за прва два параметра добија се

$$\epsilon_1(\tau) = \epsilon_2(\tau) = \frac{8C_1^2}{\kappa^2} e^{\frac{8\tau}{\kappa\sqrt{3}}}. \quad (5.32)$$

Добијена приближна аналитичка решења упоређују се са нумеричким за велики скуп случајно изабраних парова слободних параметара (N, κ) и израчунате почетне услове.

Слика 5 приказује резултате добијене за еволуцију бездимензионалног тахионског скаларног поља x , Хабловог параметра \tilde{H} и хијерархијских параметара ϵ_1 и ϵ_2 за произвољно изабране слободне параметре $N = 85$ и $\kappa = 5$. На слици су упоредо приказани резултати добијени на основу аналитичких и нумеричких израчунавања.

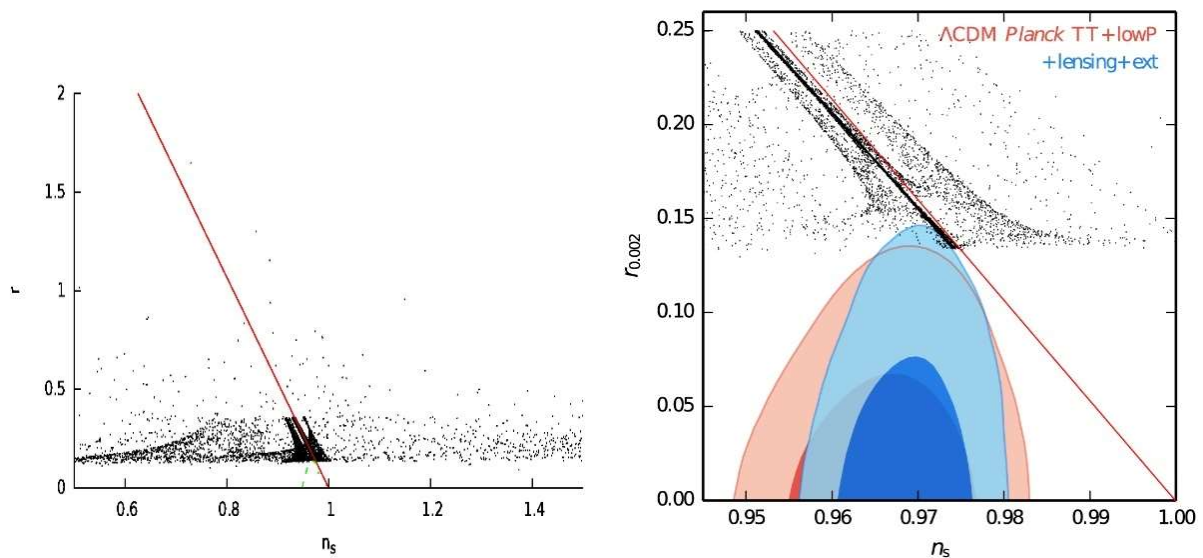


Слика 6 Утицај промене слободног параметра κ на трајање инфлације.

Такође, **Слика 5** показује како је лако уочљиво одступање између нумеричких и аналитичких резултата. Иако је, на први поглед, ово одступање изузетно велико оно не представља озбиљан проблем. За мале вредности τ , тј. у периоду кад се одиграва инфлација, поклапање аналитичког и нумеричког решења је изузетно добро. Са протоком времена и

приближавањем крају инфлације ($\epsilon_1 \approx 1$) разлика постаје све већа и већа. Међутим, овакво понашање резултата је очекивано и оправдано пошто је за добијање аналитичког решења коришћена апроксимација спорог котрљања, која важи само током инфлације, тј. када је $\epsilon_1 \ll 1$. За разлику од аналитичког, за добијање нумеричког решења ова апроксимација није коришћена па оно задржава тачност и важи и након завршетка инфлације.

Као и повећање броја е-фолдова N , тако и повећање вредности слободног параметара κ (док је број е-фолдова константан) доводи до продужавања инфлације. **Слика 6** приказује зависност параметра ϵ_1 од времена τ и ефекат раста параметра κ .



Слика 7 Нумерички израчунате вредности посматрачких параметара n_s и r у поређењу са резултатима Планк колаборације [21]. На слици лево приказано је 70% израчунатих резултата док се на слици десно налази 35% укупног броја резултата. Зелена испрекидана линија (лево) означава 2σ област Λ CDM Planck TT+lowP мерења. Црвена пуна линија, на обе слике, означава приближну релацију (5.34).

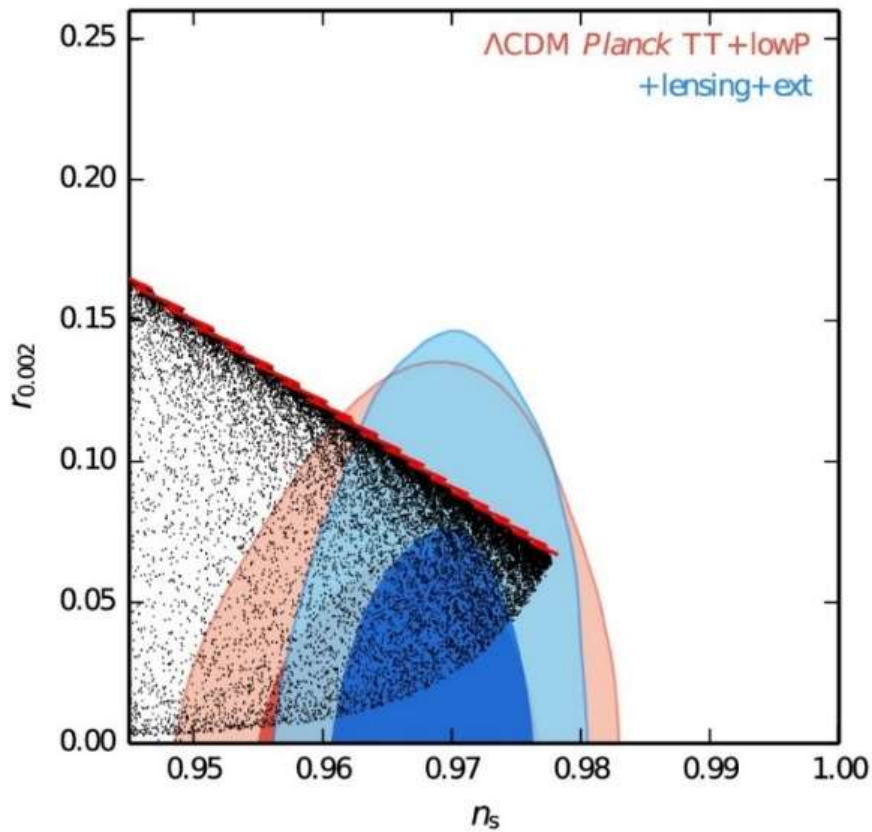
Упоређивањем аналитичких и нумеричких резултата за ϵ_1 (**Слика 5**) може се закључити да инфлација траје дуже него што предвиђа аналитичко решење. Овакав закључак потврђују и резултати за посматрачке параметре приказани у (n_s, r) равни (**Слика 7**). Вредности параметра n_s и r могу се аналитички проценити и на основу једначине (4.73), уз апроксимацију $\epsilon_1 \simeq \epsilon_2$, при чему се добијају стандардне релације за тахионску инфлацију [5,20]

$$r = \frac{16}{N+1}, \quad (5.33)$$

$$n_s = 1 - \frac{3}{N+1},$$

$$r = \frac{16}{3}(1 - n_s). \quad (5.34)$$

Слика 7 приказује посматрачке параметре у (n_s, r) равни израчунате нумерички за 10000 тачака, тј. парова слободних параметара у интервалу $45 \leq N \leq 120$ и $1 \leq \kappa \leq 25$. На графику су приказана и ограничења (1σ и 2σ) која су добијена мерењима сателита Планк [21]. Пуним (црвеном) линијом приказана је линеарна веза n_s и r дата једначином (5.34).



Слика 8 Нумерички резултати за тахионске потенцијале U_1 (црвено) и U_2 (црно) у поређењу са резултатима Планк колаборације [21].

На исти начин израчунати су параметри n_s и r и за друге, од раније познате и аналитички решене [20], тахионске потенцијале

$$U_1(x) = e^{-x}, \quad U_2(x) = \frac{1}{\cosh(x)}, \quad (5.35)$$

Посматрачки параметри израчунати су нумерички за по 25000 парова слободних параметара у истом интервалу $45 \leq N \leq 120$ и $1 \leq \kappa \leq 25$ (Слика 8). Као што је и очекивано, слагање добијених резултата са посматрачким параметрима је боље за потенцијале (5.35) него за потенцијал (5.30) [20].

У опсегу графика (Слика 8) налази се 64% резултата за $\exp(x)$ потенцијал и 72% резултата за $1 / \cosh(x)$ потенцијал. Најбољи резултати за инверзни \cosh потенцијал добијени су за $N \geq 85$ и $15 \leq \kappa \leq 25$.

5.2.2 RSII модел са и без радиона

RSII модел се може анализирати коришћењем истог поступка. Међутим, како је овај модел описан системом диференцијалних једначина које није могуће решити аналитички комплетна анализа модела мора да се спроведе нумеричким решавањем.

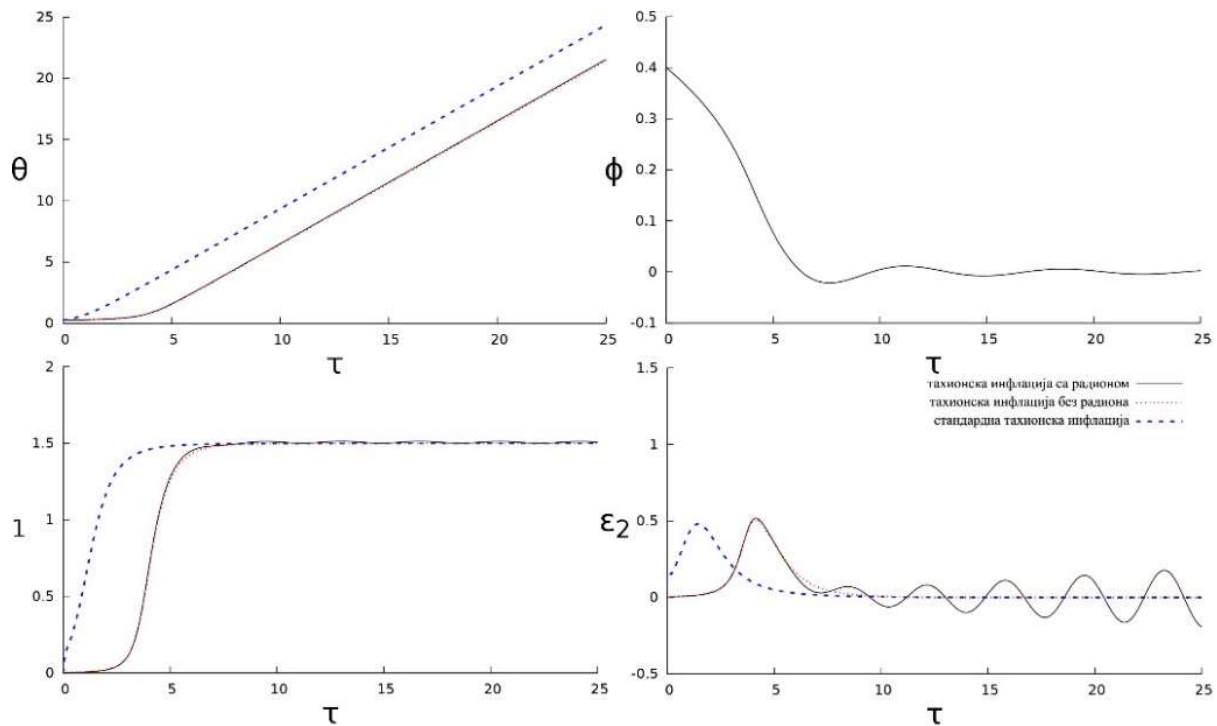
Решавањем система диференцијалних једначина (4.31)-(4.34), којима је описан RSII модел, за одабран скуп слободних параметара N и κ добијају се одговарајућа решења за еволуцију тахионског (θ) и радионског (ϕ) поља. Анализом ових решења и њиховим упоређивањем са резултатима добијеним за чисто тахионско поље на основу стандардне, немодификоване, Фирдманове једначине уочљиви су ефекти који настају због присуства радиона и додатног члана у Фридмановој једначини (4.24), тј. космологије у Рандал-Сундрум моделу. За произвољно изабране вредности параметара и почетних услова ($\kappa = 2$, $\theta_0 = 0,25$, $\phi_0 = 0,4$), Слика 9 приказује еволуцију тахионског и радионског поља, као и параметара ε_1 и ε_2 , за RSII модел и „чист“ тахионски потенцијал у стандардној и RSII космологији.

За RSII модел, исто као и за тахионску инфлацију, могуће је проценити вредности посматрачких параметара на основу услова спорог котрљања. Полазећи од једначина (5.27)-(5.28), уз апроксимацију $\varepsilon_2 \simeq 3\varepsilon_1 / 2$ (4.67) и једначину (4.72) добијају се приближне релације

$$\begin{aligned} r &= \frac{32}{3} \frac{1}{N+1}, \\ n_s &= 1 - \frac{7}{3} \frac{1}{N+1}, \end{aligned} \tag{5.36}$$

$$r = \frac{32}{7} (1 - n_s). \tag{5.37}$$

Пратећи исти алгоритам описан у поглављу 5.1 израчунати су посматрачки параметри n_s и r за 10000 скупова вредности слободних параметара N , κ и ϕ_0 sukcesивно изабраних у интервалима: $60 \leq N \leq 120$, $1 \leq \kappa \leq 12$ и $0 \leq \phi_0 \leq 0,5$ (Слика 10). Исто као и у случају тахионске инфлације (Слика 7), на графику су приказана и ограничења (1σ и 2σ) која су добијена мерењима сателита Планк [21].

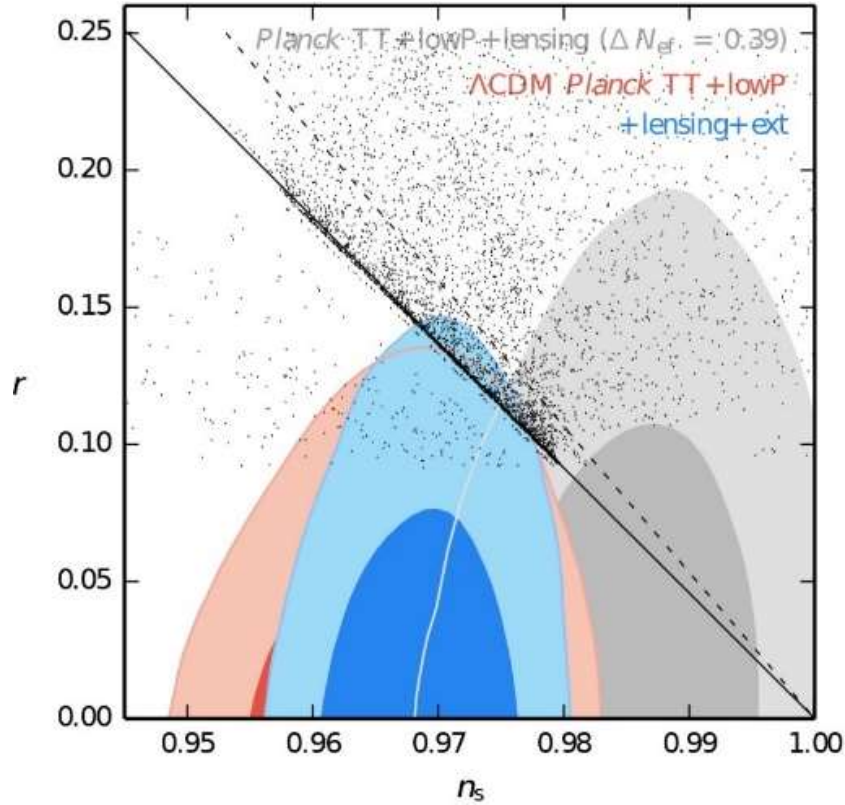


Слика 9 Временска еволуција тахионског θ (горе лево) и радионског ϕ (горе десно) поља, као и Хаблових хијерархијских параметара ϵ_1 (доле лево) и ϵ_2 (доле десно) за $\kappa = 2$, $\theta_0 = 0,25$, $\phi_0 = 0,4$, $\pi_{\phi 0} = \pi_{\theta 0} = 0$, за тахионски инфлаторни модел за потенцијал (5.30) у RSII космологији са радионом (црна пуна линија) и без радиона (тачкаста црвена линија). Плава испрекидана линија означава резултате за одговарајући тахионски модел у стандардној Фридмановој једначини.

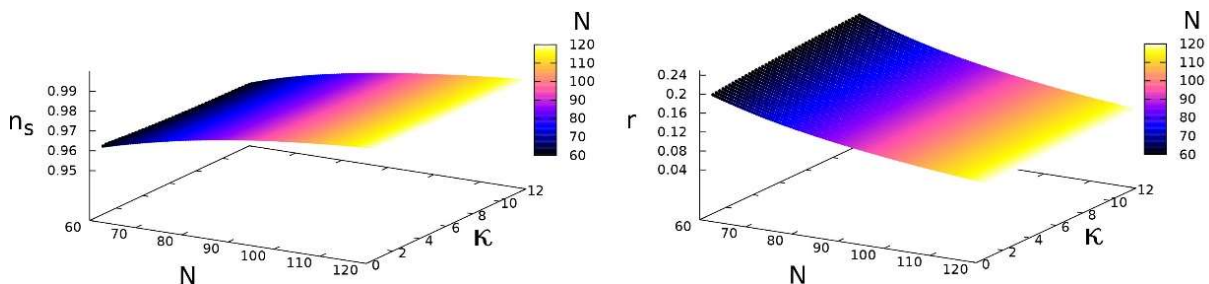
Иако је, на први поглед, расподела резултата на (n_s, r) дијаграму случајна могуће је уочити одређене правилности. Пре свега, као што је и очекивано, највећа густина добијених резултата налази се у око праве дате једначином (5.37), док у неким деловима (n_s, r) равни уопште нема тачака.

Даља анализа резултата вршена је за исти опсег параметара, при чему је случајни избор вредности слободних параметара (N и κ) и почетног услова (ϕ_0) замењен sukcesivним избором вредности са тачно дефинисаним кораком $\Delta N = 0,5$, $\Delta \kappa = 0,5$ и $\Delta \phi_0 = 0,05$ (у-

купно око 55000 вредности). Анализом овако добијених резултата може се учити правилна зависност између посматрачких параметара n_s и r и слободних параметара N и κ (Слика 11).



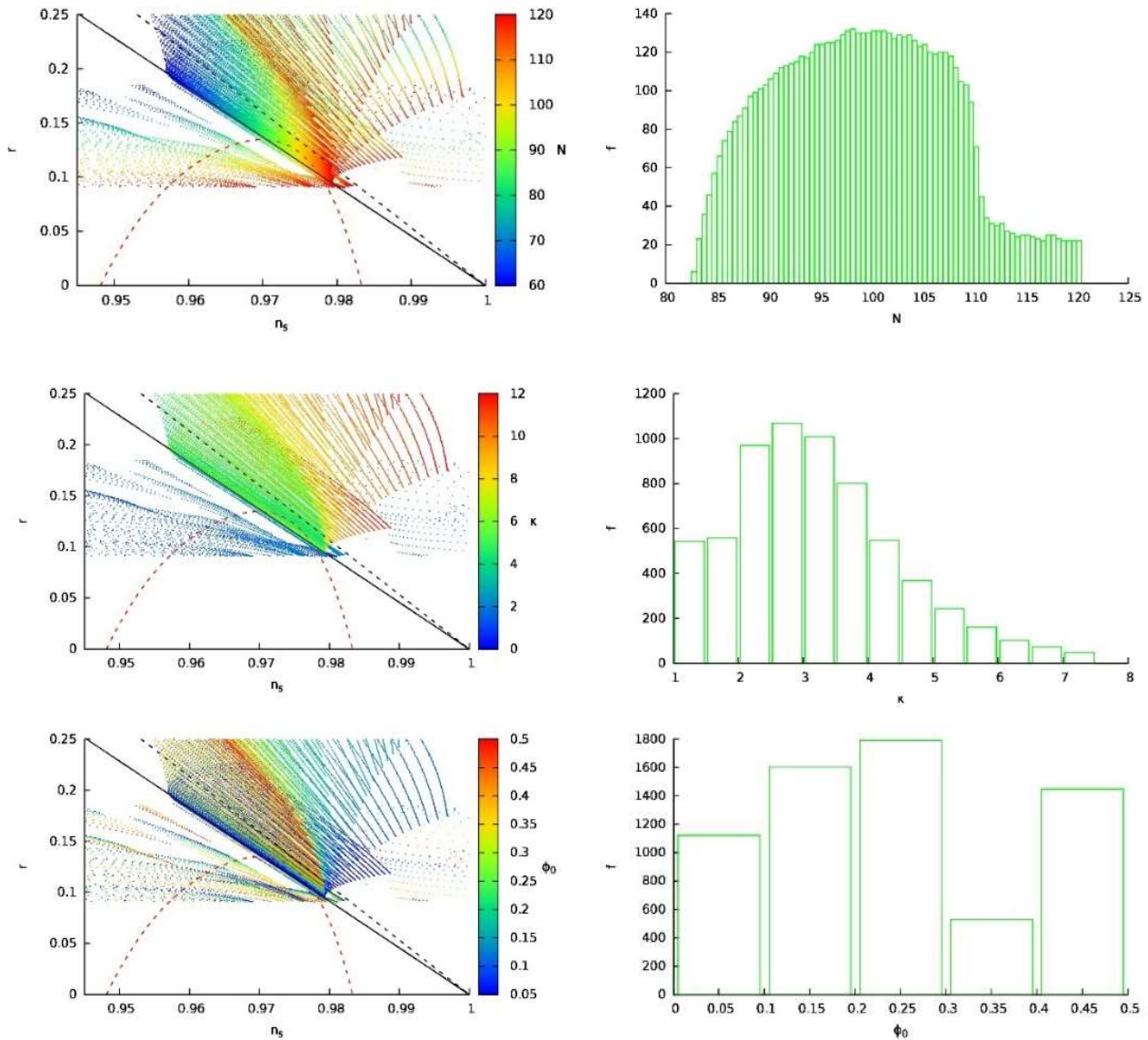
Слика 10 Нумеричке вредности посматрачких параметара n_s и r за RSII модел инфлације у односу на ограничења добијених на основу мерења [21]. Вредности слободних параметара изабране су 10000 тачака у интервалима $60 \leq N \leq 120$, $1 \leq \kappa \leq 12$ и $0 \leq \phi_0 \leq 0.5$. Пуна линија представља апроксимацију спорог котрљања за RSII модел без радиона (5.37), док испрекидана линија означава апроксимацију спорог котрљања за стандардну тахионску инфлацију (5.34).



Слика 11 Вредности n_s (лево) и r (десно) као функције параметара N и κ за $\phi_0 = 0.01$. Почетни услов за тахионско поље θ_0 одређен је на основу израза (4.72).

Са графика (Слика 10) види се да се највећи број добијених резултата не налази у области 2σ за измерене вредности према ограничењима добијених на основу мерења мисије Планк [21]. Повећањем броја е-фолдова N могуће је резултате довести у област 1σ , али ово

повећање нема јасно физичко оправдање. Међутим, велики број резултата који се налази у области 2σ омогућава „фино подешавање“ (*fine tuning*) вредности слободних параметара и почетних услова, у потрази за најбољим резултатима у жељеном опсегу вредности.



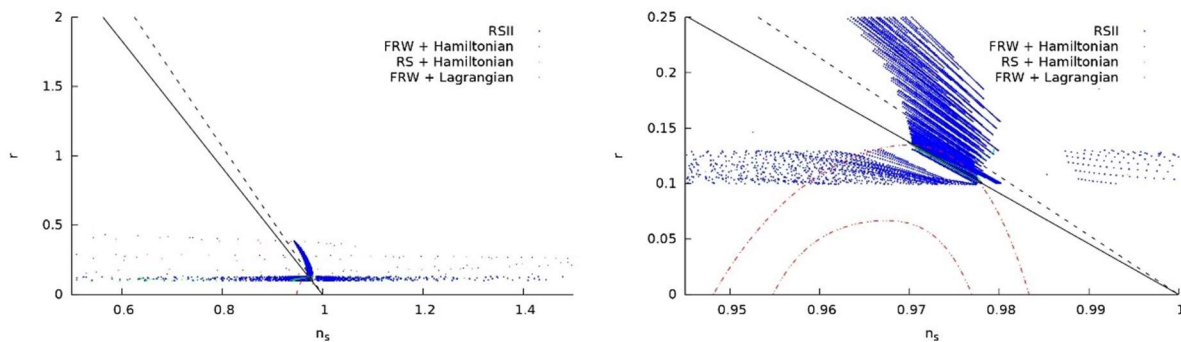
Слика 12 Добијени резултати за посматрачке параметре приказани у (n_s, r) равни (лево). Боја тачке на мапама вредности означава одговарајућу нумеричку вредност, према палети на сваком графику посматраног параметра. Хистограми расподеле (десно) вредности параметара у област 2σ измерених вредности посматрачких параметара (црвена испрекидана линија на дијаграмима лево). У првом реду приказана је мапа боја и хистограм за параметар N , у другом κ , и у трећем за ϕ_0 .

Праћење утицаја вредности слободних параметара и почетних услова најлакше се реализује анализом колор мапа и хистограма добијених резултата. На колор мапама различитим бојама означена је вредност параметра чији се допринос анализира, док је на хистограмима приказана учесталост појављивања одређене вредности посматраног параметра у обла-

сти 2σ према подацима Λ CDM Planck TT+lowP мерења. **Слика 12** приказује добијене дијаграме и хистограме.

Од 55.000 израчунатих параова (n_s, r) у области приказаној на графику налази се око 65% резултата, док се унутар 2σ ограничења, према Λ CDM Planck TT+lowP мерењу, лежи 12% укупног броја добијених резултата.

Са ових хистограма и колор мапа јасно је уочљива тенденција раста параметра N ка области „повољнијих“ резултата, односно смањивања параметра κ ка овој области. Дистрибуција N у области Планковог 2σ ограничења је приближно хомогена али могуће је уочити максимум близу $N \approx 100$, максимум параметра κ налази се око $\kappa \approx 3$, тј. близу доње границе дате изразом (5.14).



Слика 13 Израчунате вредности параметара у (n_s, r) равни за RSII модел са радионом (плаво), тахионским потенцијалом (5.30) у RSII космологији (зелено) и тахионским потенцијалом у космологији са стандардном Фридмановом једначином (црно).

Међутим, ефекат почетне вредности радионског поља није лако уочљив. За разлику од параметара N и κ , за почетни услов ϕ_0 не постоје јасни услови. Са хистограма се може видети да се највећи број вредности ϕ_0 у области ограничења налази близу нуле. Истовремено са мапе у боји очигледно се види да расподела вредности ϕ_0 у (n_s, r) није правилна. На основу овога може се закључити да почетна вредност радионског поља ϕ_0 не даје значајан допринос коначним резултатима. Овакав закључак се намеће јер се до сличног закључка може доћи на основу упоређивања временске еволуције параметра ε_1 за RSII модел са радионом и тахионски потенцијал у RSII космологији (**Слика 9**). На почетку ($\tau \approx 0$) вредности параметра ε_1 су приближно исте, али током инфлације разлику је све лакше приметити, пошто присуство радиона у RSII моделу доводи до појаве осцилација [25,35].

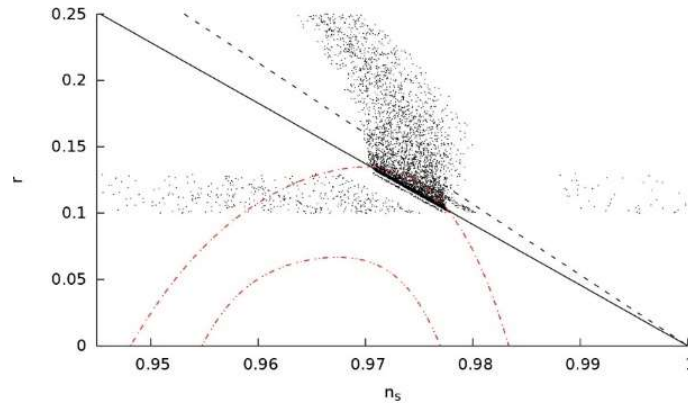
Упоређивањем израчунатих вредности посматрачких параметара n_s и r за RSII модел, тахионски потенцијал (5.30) у RSII космологији и тахионски потенцијал (5.30), без ра-

диона, у космологији са немодификованом Фридмановом једначином (Слика 13) може се видети да најзначајнији ефекат на израчунате вредности настаје као последица модификације Фридманове једначине (4.24), али и присуство радиона игра врло значајну улогу.

Табела 3 Посматрачки параметри (n_s и r) и време почетка инфлације (t_i) за три различита модела инфлације (RSII модел са радионом, тахионска инфлација у RSII космологији и тахионска инфлација у стандардној космологији).

N	κ	ϕ_0	RSII модел			Тахион (стандардна космологија)			Тахион (RSII космологија)		
			t_i	n_s	r	t_i	n_s	r	t_i	n_s	r
65	1	0.05	0.05398	0.93379	0.16881						
65	1	0.25	0.05455	0.93046	0.16881	0.05726	0.57770	0.25157	0.33558	0.96106	0.18060
65	1	0.50	0.05636	0.90297	0.16879						
85	1	0.10	0.04811	1.23564	0.12861	0.00910	1.82316	0.18287	0.04801	0.32411	0.12988
85	5	0.10	0.31670	0.97037	0.13764	0.04547	0.38315	0.19164	0.30075	0.97061	0.13594
85	10	0.10	0.72560	0.98170	0.20321	0.07275	0.48568	0.19170	0.53277	0.97003	0.13912
105	1	0.05	0.04383	0.97401	0.10376	0.00759	1.51473	0.13168	0.04381	1.05491	0.10458
105	5	0.25	0.37268	0.97605	0.12364	0.03788	3.75907	0.15498	0.27614	0.97642	0.10888
105	10	0.50	1.16923	0.93665	0.41288	0.06061	1.76936	0.15480	0.48968	0.97602	0.11109

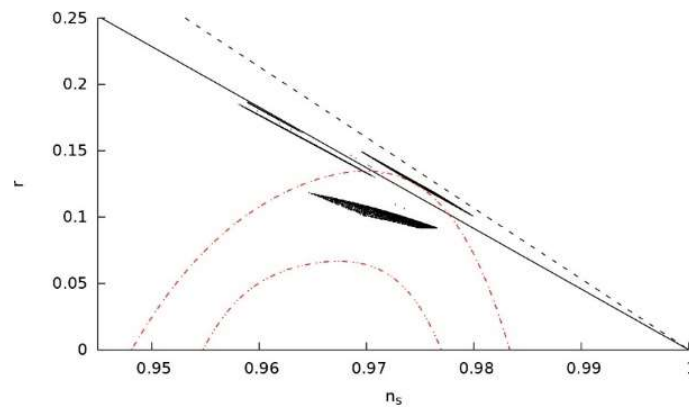
Ова два ефекта доводе до изразитог „сабијања“ тачака у (n_s, r) равни и њиховог груписања у околини праве дате приближном релацијом (5.37). За одабране вредности слободних параметара ово груписање резултата такође се налази унутар 2σ одступања од измерених вредности посматрачких параметара према Λ CDM Planck TT+lowP резултатима.



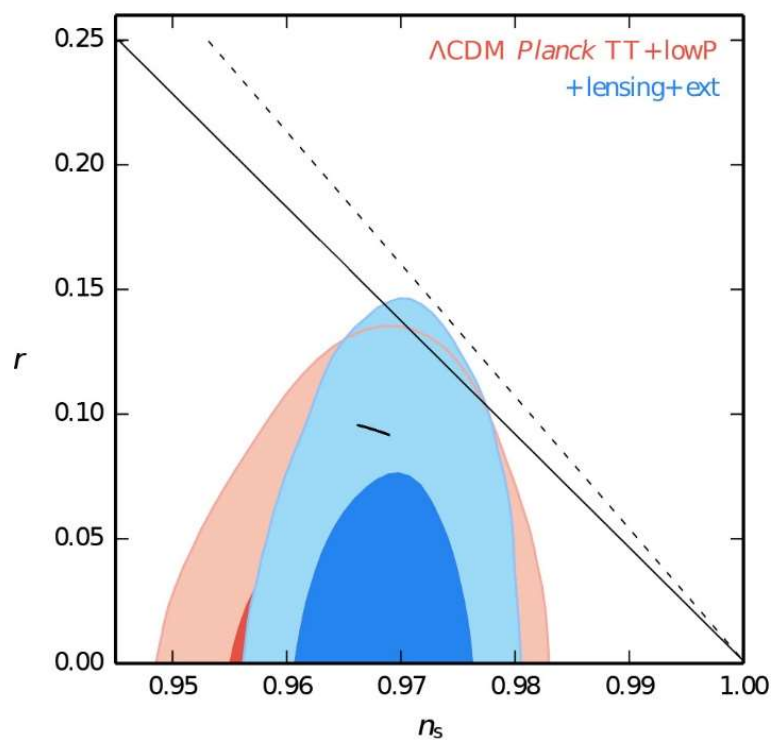
Слика 14 Резултати као на Слика 10, али за ужи интервал вредности параметара: $85 \leq N \leq 110$, $1 \leq \kappa \leq 8$ и $0 \leq \phi_0 \leq 0,5$. Црвена испрекидана линија означава 1σ и 2σ одступање од мерења Планк колаборације.

Сужавањем опсега броја е-фолдова на интервал $85 \leq N \leq 110$, параметра κ на $1 \leq \kappa \leq 8$, вредности ϕ_0 у интервалу $0 < \phi_0 \leq 0.5$ добија се интересантан график (Слика 14) на коме су јасно уочљиве две „траке“: доминантна која је скоро паралелна са r осом, са највећим бројем тачака концентрисаним у области између правих датих изразима (5.34) и

(5.37) (пуна и испрекидана линија на графику) и друга, трака мање густине која је паралелна n_s оси и лежи у интервалу $0.1 \lesssim r \lesssim 0.13$.



Слика 15 Резултати као на претходној слици, али за још ужи интервал вредности параметара: $\kappa = 2$, $60 \leq N \leq 120$ и $0 \leq \phi_0 \leq 0,25$. Црвена испрекидана линија означава 1σ и 2σ стандардне девијације мерења Планк колаборације.



Слика 16 Најбоље добијено слагање резултата RSII модела са радионом за посматрачке параметре n_s и r са вредностима које је измерила Планк колаборација [48]. Вредности слободних параметара су $\kappa = 1,25$, $115 \leq N \leq 120$ а почетна вредност радионског поља је $\phi_0 = 0,05$. Ознаке на графику исте су као на Слика 10.

На основу наведеног могуће је избором слободних параметара N и κ и почетне вредности радионског поља ϕ_0 добити вредности израчунатих посматрачких параметара n_s и r тако да су њихове вредности у доброј сагласности са измереним.

Даљим фиксирањем неких од три наведена параметра и смањивањем опсега вредности преосталих параметара могуће је постићи боље слагање са резултатима посматрања. На пример, фиксирањем $\kappa = 2$ и варирањем N , у интервалу $60 \leq N \leq 120$, и ϕ_0 ($0 \leq \phi_0 \leq 0.25$) добија се занимљив резултат (**Слика 15**) где се јасно уочавају тачке „цепанња“ резултата на три раздвојене области, што је јасна последица нелинеарности система диференцијалних једначина (4.31)-(4.34). Највећи број израчунатих вредности за ове параметаре налази се у 2σ области одступања од измерених вредности параметара n_s и r .

Даљим сужавањем области слободних параметара може се уочити још боље слагање са измереним вредностима. Након даље анализе налазимо да је најбоље слагање нумеричких резултата модела и мерења за $\kappa = 1,25$, $\phi_0 = 0,05$ и број е-фолдова у интервалу $115 \leq N \leq 120$ (**Слика 16**).

6.

ЗАКЉУЧАК

Истраживања у овој дисертацији мотивисана су пре свега Рандал-Сундрум моделом и разматрана је улога тахионског поља у космолошкој инфлацији у стандардној космологији и у оквиру овог RS модела. Као што је речено, према RS моделу света на брани петодимензионални свемир садржи две четвородимензионе бране са супротним напонима које се налазе на неком растојању дуж пете димензије. У разматраном RSII моделу бране посматрач се налази на брани са позитивним напоном док се друга брана налази у бесконачности. Флукуација растојања између брана доводи до појаве безмасеног скаларног поља, тзв. радиона, које узрокује промене у геометрији вишедимензионалног простора и доводи до појаве нових космолошких ефеката. Показали смо да ефекти тахиона на ток инфлације постоје, али да не могу у потпуности уклонити разлику која постоји између посматрачких параметара и израчунатих у RSII моделима.

Основни циљ истраживања био је израчунавање посматрачких параметара инфлације (скаларни спектрални индекс, n_s и количник тензора и скалара r) за RSII модел и њихово упоређивање са резултатима астрономских посматрања свемирског телескопа Планк. На основу упоређивања добијених резултата са вредностима посматрачких параметара израчунатим за инфлаторни модел са тахионским пољем (T) са потенцијалом облика $U(T) = 1 / T^4$ анализиран је утицај радиона и космологије RSII модела на вредности посматрачких параметара.

Анализом добијених резултата закључено је да је додатни члан (4.24) који се за RSII модел јавља у Фридмановој једначини има значајан позитиван ефекат на вредности посматрачких параметара и доприноси да су добијене вредности ових параметара знатно ближе измереним вредностима. Иако велики број нумеричких резултата лежи у ограничењу две стандардне девијације од измерених вредности, према Planck TT+lowP и Planck TT+lowP+lensing+ext подацима (Слика 10), мора се закључити да тренутно доступни астрофизички подаци не иду у прилог овом моделу, али модел се не може у потпуности искључити пошто је одговарајућим избором слободних параметара и почетних услова могуће добити и вредности параметара које су у бољој корелацији са мерењима (Слика 16).

Важно је напоменути да је разматрани модел инфлације, за разлику од већине других инфлаторних модела који се могу срести у литератури и којима су потенцијал и параметри произвољно изабрани на начин да резултати што боље одговарају посматрањима, заснован на фундаменталној динамици брана која је описана потенцијалом са само једним слободним параметром.

Иако је разматрани RSII модел, који је један од једноставнијих модела света на брани, суочен са бројним проблемима досадашњи рад на дисертацији отвара могућност за многобројна истраживања сложенијих модела. Проширивање модела другим ефектима, нпр. присуство материје у простору између брана, води ка другим облицима (тахсионског) потенцијала и потпуно другачијим ефектима и резултатима. Софтверска решења која су развијена током израде ове дисертације могу се на релативно лак начин изменити и допунити за примену на другим космолошким моделима, без обзира да ли су то модели за стандардну инфлацију са једним скаларним пољем, за инфлацију са тахионским пољем, космологију света на брани, или пак неки модели засновани на модификованој теорији гравитације и слично.

7.

ДОДАТАК

У дисертацији је више пута поменут значај и предност скалирања физичких величина и једначина. У овом Додатку приказан је преглед стандардних природних система јединица и стандардни метод [95,96] преласка на бездимензионалне величине и поступак превођења система једначина (3.12) и (3.14) за тахионску инфлацију, и Хамилтонових једначина (4.20)-(4.23) за RSII модел на бездимензионалне једначине.

7.1 ПРИРОДНИ СИСТЕМИ ЈЕДИНИЦА

У физици, природни систем јединица представља оне физичке јединице које су дефинисане на такав начин да, изражене у овим јединицама, одабране физичке константе имају нумеричку вредност 1. Ове константе најчешће се у потпуности изостављају из математичких израза којим се записују физички закони. Управо ова особина природних система јединица послужила је и као основа за име, пошто овако дефинисане јединице потичу из особина природе, а за јединицу се најчешће бирају неке фундаменталне физичке особине, нпр. растојање Земље до Сунца, маса Сунца, маса (m_e) или наелектрисање (q_e) електрона, гравитациона константа (G), брзина светлости (c), редукована Планкова константа (\hbar), Кулонова константа (k_e), Болцманова константа (k_B) итд.

Основна намена природних система јединица је да омогуће једноставнији запис одређеним алгебарских израза и физичких закона. Међутим, основни недостатак ових система јединица је то што физичке величине могу имати једну вредност у једном, а потпуно другу вредност у другом систему природних јединица.

Један од најпознатијих систем природних јединица су Планкове јединице (*Planck Units*). Планкове јединице дефинисане су тако да важи

$$c = \hbar = G = k_e = k_B = 1. \quad (7.1)$$

У основи дефиниције Планкових јединица леже својства простора и времена (преко константи c и G) и својства материје (кроз константу \hbar , која дефинише однос енергије и фреквенце у квантној механици). Због ових особина Планкове јединице најчешће се користе у квантној теорији, гравитацији, теорији струна итд.

Такође добро познат систем природних јединица су атомске јединице. Овај систем дефинисан је као

$$e = m_e = \hbar = k_e = k_B = 1. \quad (7.2)$$

У квантној хромодинамици најчешће се користе природне јединице такве да важи

$$c = m_p = \hbar = k_B = 1, \quad (7.3)$$

где је m_p маса протона, док се и физици честица и космологији користе јединице за које важи

$$\hbar = c = k_B = 1, \quad (7.4)$$

које се често називају и „природне јединице“.

7.2 БЕЗДИМЕНЗИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Посматрајмо линеарну диференцијалну једначину првог реда са константним коефицијентима

$$a \frac{dy}{dx} + by = cf(x), \quad (7.5)$$

у којој је x независна променљива, а y је нека функција $y = y(x)$. Увођењем смене

$$\begin{aligned} y &= \xi y_0, \\ x &= \tau x_0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где је τ нова независна променљива, функција $\xi = \xi(\tau)$, а x_0 и y_0 константе које треба одредити, диференцијална једначина (7.5) постаје

$$a \frac{y_0}{x_0} \frac{d\xi}{d\tau} + by_0 \xi = cf(\tau x_0) = cF(\tau). \quad (7.7)$$

У даљем поступку скалирања на бездимензионалне величине неопходно је одредити константе x_0 и y_0 тако да је што више коефицијената у једначини (7.7) једнако јединици. Дељењем диференцијалне једначине коефицијентом који се налази уз члан са (највећим) изводом једначина постаје

$$\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{bx_0}{a} \xi = \frac{cx_0}{ay_0} F(\tau). \quad (7.8)$$

Изједначавањем другог члана са јединицом добија се

$$\frac{bx_0}{a} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{a}{b}, \quad (7.9)$$

док се из последњег коефицијента добија

$$\frac{cx_0}{ay_0} = \frac{c}{by_0} = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{c}{b}. \quad (7.10)$$

Оваквим избором константи x_0 и y_0 једначина (7.5) постаје

$$\frac{d\xi}{d\tau} + \xi = F(\tau). \quad (7.11)$$

и добија бездимензионалну форму и постаје независна од параметара у којима се појављују јединице.

Приказана стандардна процедура може се применити и на диференцијалне једначине вишег реда, али два рескалирајућа параметра (7.6) дозвољавају да само два, произвољна, коефицијента буду једнака један.

У случају нелинеарних диференцијалних једначина (3.12) и (3.14), односно (4.20)-(4.23), које описују тахионски и RSII модел процедура трансформације диференцијалних једначина на бездимензионалне величине нешто је сложенија. Међутим, и код оваквих система диференцијалних једначина могуће је на основу димензионалне анализе одредити параметре x_0 и y_0 .

7.2.1 Тахионска инфлација

Потенцијал $V(T)$, где је T тахионско поље, у изразу за DBI лагранжијан (3.7) у општем случају може се написати у облику

$$V(T) = \sigma U(T), \quad (7.12)$$

где је σ константа, а $U(T)$ је бездимензионална функција за коју важи [20,32]

$$U'(T > 0) < 0, \quad U(T \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (7.13)$$

Функција $U(T)$ може бити експоненцијална, инверзна степена или нека друга сложена опадајућа функција. Аргумент функције $V(T)$ - тахионско поље T , као и свако скаларно поље, може имати димензију масе, растојања, времена или (ређе) неку комбинацију ових величина, у зависности од избора модела и система природних јединица.

Да би аргумент функције U био бездимензионална величина неопходно је скалирати тахионско поље T тако да се ново, бездимензионално, тахионско поље x дефинише на следећи начин [20]

$$x = \frac{T}{T_0}, \quad (7.14)$$

где је T_0 нека произвољна константна вредност тахионског поља T . Потенцијал тахионског поља $V(T)$ се тада може написати у бездимензионалном облику као

$$U(x) = \frac{1}{\lambda} V\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{V(x)}{\lambda}. \quad (7.15)$$

Диференцијална једначина кретања – еволуције тахионског поља (3.14) може се трансформисати у бездимензионалну форму применом метода описаног једначинама (7.5)-(7.11). Као у једначинама (7.6) и (7.14) време t може се рескалирати као

$$\tau = \frac{t}{t_0}, \quad (7.16)$$

где t_0 константа која има димензије времена.

Након дефинисања новог поља x и времена τ неопходно је, заменом израза (7.14) и (7.16) у одговарајуће једначине, дефинисати и одговарајуће изводе. Тако извод потенцијала $V(T)$ по пољу T постаје

$$V'(T) = \frac{dV(T)}{dT} = \frac{d}{T_0 \cdot dx} (\sigma \cdot U(x)) = \frac{\sigma}{T_0} U'(x), \quad (7.17)$$

док извод тахионског поља T по времену t постаје

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{T_0}{t_0} \frac{dx}{d\tau} = \frac{T_0}{t_0} \dot{x}, \quad (7.18)$$

а други извод \ddot{T} на исти начин постаје

$$\ddot{T} = \frac{T_0}{t_0^2} \ddot{x}. \quad (7.19)$$

Заменом (7.17)-(7.19) у једначину (3.14) добија се

$$\frac{T_0 \ddot{x}}{t_0^2 - T_0^2 \dot{x}^2} + 3H \frac{T_0}{t_0} \dot{x} + \frac{1}{T_0} \frac{U'(x)}{U(x)} = 0, \quad (7.20)$$

а након трансформисања ова једначина постаје

$$\ddot{x} - 3H \frac{T_0^2}{t_0} \dot{x}^3 - \frac{U'(x)}{U(x)} \dot{x}^2 + 3H t_0 \dot{x} + \frac{t_0^2}{T_0^2} \frac{U'(x)}{U(x)} = 0. \quad (7.21)$$

Пошто су $U'(x)$ и $U(x)$ бездимензионалне функције, изједначавањем коефицијента уз последњи члан са јединицом добија се да је $T_0 = t_0$, цела једначина постаје

$$\ddot{x} - 3HT_0 \dot{x}^3 - \frac{U'(x)}{U(x)} \dot{x}^2 + 3HT_0 \dot{x} + \frac{U'(x)}{U(x)} = 0. \quad (7.22)$$

Хаблов параметар H , дефинисан Фридмановом једначином (3.12), је једина величина у овој једначини која остаје димензиона. Да би цела једначина (7.22) била бездимензионална неопходно је дефинисати бездимензионални Хаблов параметар \tilde{H} тако да важи

$$\tilde{H} = T_0 \cdot H. \quad (7.23)$$

Сада се једначина кретања тахионског поља (3.14) може представити у бездимензионалној форми као

$$\frac{\ddot{x}}{1 - \dot{x}^2} - 3\tilde{H}\dot{x} + \frac{U'(x)}{U(x)} = 0. \quad (7.24)$$

Фридманова једначина (3.12) у бездимензионалној форми добија облик

$$\frac{\tilde{H}^2}{T_0^2} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \frac{\sigma U(x)}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}, \quad (7.25)$$

а након једноставних трансформација постаје

$$\tilde{H}^2 = \frac{\kappa^2}{3} \frac{U(x)}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}}, \quad (7.26)$$

при чему је $\kappa^2 = \frac{\sigma \cdot T_0^2}{M_{pl}^2}$ константа уведена изразом (3.19).

Добијене једначине (7.24) и (7.26) су бездимензионална Фридманаова једначина и бездимензионална једначина одржања енергије и импулса и заједно чине систем који описује

инфлацију вођену тахионским пољем. На исти начин може се у бездимензини облик трансформисати и друга Фридманова једначина (3.17).

7.2.2 Рандал-Сундрум модел

Поступак преласка на бездимензионални систем једначина у RSII је сличан али доста компликованији. Заменом хамилтонијана (4.18) у четири Хамилтонове једначине (4.20)-(4.23) систем диференцијалних једначина постаје нелинеаран. У овом случају могуће је применити процедуру наведену на почетку овог додатка. Међутим, до бездимензионалног система једначина могуће је, на лакши начин, доћи димензионалном анализом физичких величина у хамилтонијану. Трансформација хамилтонијана и скалирање хамилтонијана у бездимензионалну функцију омогућава једноставно добијање хамилтонових једначина заменом хамилтонијана у једначине (4.20)-(4.23).

Кренимо од константе κ дефинисане у (3.19) коју, због једноставнијег означавања можемо записати у облику

$$\kappa^2 = 8\pi G \lambda k^2, \quad (7.27)$$

при чему сада константа k одговара константи T_0 , док је $M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}}$. Затим, посматрајмо везу између радионског поља η и канонски нормираног радионског поља Φ дату релацијом (4.8). Познато је да аргумент функције \sinh мора да буде бездимензионална величина, а то је могуће постићи рескалирањем, на сличан начин као у случају тахионског поља (7.14) рескалирањем, тј. дељењем радионског поља Φ неком константом. Након замене израза (7.27) у (4.8) ова релација постаје

$$\eta = \sinh^2 \left(\sqrt{\frac{\kappa^2}{6}} \frac{\Phi}{k\sqrt{\lambda}} \right). \quad (7.28)$$

Пошто је κ бездимензионална величина, онда

$$\phi = \frac{\Phi}{k\sqrt{\lambda}} \quad (7.29)$$

мора да буде бездимензионална величина, при чему ϕ означава рескалирано радионско поље. Како је η бездимензионална величина, из израза (4.14) се лако види да је скалирано тахионско поље

$$\theta = k\Theta. \quad (7.30)$$

Заменом (7.29) и (7.30) у израз за хамилтонијан (4.18) добија се

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi_{\Phi}^2 + \frac{\lambda k^4 \psi^2}{\theta^4} \sqrt{1 + \frac{\Pi_{\Theta}^2 \theta^8}{\lambda^2 k^8 \psi}}. \quad (7.31)$$

Како је израз испод корена бездимензионална величина очигледно је да цео разломак мора да буде без димензија. Да би то било могуће бездимензионални коњуговани импулс π_{θ} је облика

$$\pi_{\theta} = \frac{\Pi_{\Theta}}{\lambda k^4}. \quad (7.32)$$

На сличан начин, након сређивања хамилтонијана (7.31) добија се да је

$$\pi_{\phi} = \frac{\Pi_{\Phi}}{k^2 \sqrt{\lambda}}, \quad (7.33)$$

где је π_{ϕ} бездимензионални коњуговани импулс. Заменом коњугованих импулса (7.32)-(7.33), хамилтонијан (7.31) постаје

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} k^4 \lambda \pi_{\phi}^2 + \frac{\lambda k^4 \psi^2}{\theta^4} \sqrt{1 + \frac{\pi_{\theta}^2 \theta^8}{\psi}}, \quad (7.34)$$

одакле је очигледно да хамилтонијан \mathcal{H} има димензије λk^4 па је бездимензионални хамилтонијан

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}}{\lambda k^4}. \quad (7.35)$$

За добијање бездимензионалних Хамилтонових једначина потребно је написати и Хаблов параметар (4.24) као функцију без димензија. Заменом константа $8\pi G$ и њеним записом на основу релације (7.27) Хаблов параметар добија облик

$$H = \sqrt{\frac{\kappa^2}{3\lambda k^2} \mathcal{H} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12\lambda k^4} \mathcal{H} \right)}. \quad (7.36)$$

Након замене Хамилтонијана \mathcal{H} из израза (7.35) и сређивања, Хаблов параметар постаје

$$H = k \sqrt{\frac{\kappa^2}{3} \tilde{\mathcal{H}} \left(1 + \frac{\kappa^2}{12} \tilde{\mathcal{H}} \right)}, \quad (7.37)$$

тј. бездимензионални Хаблов параметар је

$$h = \frac{H}{k}. \quad (7.38)$$

На овај начин све физичке величине ($\Phi, \Pi_{\Phi}, \Theta, \Pi_{\Theta}, H$) у Хамилтоновим једначинама скалиране су на бездимензионални облик ($\phi, \pi_{\phi}, \theta, \pi_{\theta}, h$), а веза између „стари“ и „нови“ величина дата је релацијама (4.27).

Систем бездимензионалних Хамилтонових једначина (4.31)-(4.34), заједно са бездимензионалним једначинама (4.39)-(4.40), омогућава сва нумеричка израчунавања и описивање еволуције тахионског и радионског поља, Хаблових параметра и фактора скале свемира (a). На основу овако одређених величина израчунавају се параметри спорог котрљања ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$) и опсервабилни параметри (n_s, r) које је могуће упоређивати са астрофизичким, измереним, вредностима.

Требало би нагласити да за тачно одређивање физичке (димензионе) скале свемира, вредности Хабловог параметра и поља неопходно је познавање тачних нумеричких вредности константе κ , односно T_0 и k , и константе λ . Нажалост, тачне вредности ових величина нису познате, али њихове вредности могуће је проценити, односно претпоставити, из теорија струна и брана.

8.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A.H. Guth, Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, *Physical Review D*. 23 (1981) 347–356. doi:10.1103/PhysRevD.23.347.
- [2] A.D. Linde, A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems, *Physics Letters B*. 108 (1982) 389–393. doi:10.1016/0370-2693(82)91219-9.
- [3] J. Martin, C. Ringeval, V. Vennin, *Encyclopaedia Inflationaris*, (2013). <http://arxiv.org/abs/1303.3787> (accessed February 8, 2015).
- [4] D.L. Wiltshire, An introduction to quantum cosmology, in: B. Robson, N. Visvanathan, W.S. Woolcock (Eds.), “Cosmology: The Physics of the Universe”, *Proceedings of the 8th Physics Summer School*, World Scientific, Singapore, 1996: pp. 473–531. <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0101003> (accessed January 13, 2015).
- [5] S. Li, A.R. Liddle, Observational constraints on Tachyon and DBI inflation, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2014 (2014) 044–044. doi:10.1088/1475-7516/2014/03/044.
- [6] A. Sen, String theory and tachyons, *Current Science*. 81 (2001) 1561–1567.
- [7] A. Sen, Rolling Tachyon, *Journal of High Energy Physics*. 2002 (2002) 048–048. doi:10.1088/1126-6708/2002/04/048.
- [8] A. Sen, Tachyons in String Theory, *Annales Henri Poincaré*. 4 (2003) 31–42. doi:10.1007/s00023-003-0904-3.

- [9] A. Sen, Tachyon Matter, *Journal of High Energy Physics*. 2002 (2002) 065–065. doi:10.1088/1126-6708/2002/07/065.
- [10] A. Sen, Time and Tachyon, *International Journal of Modern Physics A*. 18 (2003) 4869–4888. doi:10.1142/S0217751X03015313.
- [11] D.D. Dimitrijevic, M. Milosevic, About non standard Lagrangians in cosmology, in: *AIP Conference Proceedings: TIM-11 Physics Conference*, 2012: pp. 41–46. doi:10.1063/1.4748066.
- [12] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M. Milosevic, D. Vulcanov, On classical and quantum dynamics of tachyon-like fields and their cosmological implications, in: *AIP Conference Proceedings: TIM 2013 Physics Conference*, AIP Publishing, 2014: pp. 9–17. doi:10.1063/1.4903007.
- [13] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M. Milosevic, L. Nesic, DBI-type Tachyons for Inverse cosh Potential, *Facta Universitatis (Niš) Series: Physics, Chemistry and Technology*. 12 (2014) 41–61. doi:10.2298/FUPCT1401041D.
- [14] G.S. Djordjevic, D.D. Dimitrijevic, M. Milosevic, On Canonical Transformation and Tachyon-Like "Particles" in Inflationary Cosmology, *Romanian Journal of Physics*. 61 (2016) 99–109.
- [15] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M. Milosevic, Classicalization and quantization of tachyon-like matter on (non)archimedean spaces, *Romanian Reports in Physics*. 68 (2016) 5–18.
- [16] G.S. Djordjevic, *O p-adičnoj i adeličnoj kvantnoj mehanici (doktorska disertacija)*, Univerzitet u Beogradu, 1999.
- [17] L. Nesic, *Kosmološki modeli u p-adičnoj i adeličnoj kvantnoj mehanici (doktorska disertacija)*, Univerzitet u Beogradu, 2002.
- [18] D.D. Dimitrijevic, *Dinamika tahionskih polja u klasičnoj i kvantnoj kosmologiji (doktorska disertacija)*, Univerzitet u Nišu, 2015.
- [19] L. Kofman, A. Linde, Problems with Tachyon Inflation, *Journal of High Energy Physics*. 2002 (2002) 004–004. doi:10.1088/1126-6708/2002/07/004.
- [20] D. Steer, F. Vernizzi, Tachyon inflation: Tests and comparison with single scalar field inflation, *Physical Review D*. 70 (2004) 43527. doi:10.1103/PhysRevD.70.043527.
- [21] P.A.R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, F. Arroja, M. Ashdown, J. Aumont, et al., Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation, *Astronomy & Astrophysics*. 594 (2016) A20. doi:10.1051/0004-6361/201525898.

- [22] P.A.R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, et al., Planck 2015 results: XIII. Cosmological parameters, *Astronomy & Astrophysics*. 594 (2016) A13. doi:10.1051/0004-6361/201525830.
- [23] D. Pirtskhalava, L. Santoni, E. Trincherini, Constraints on single-field inflation, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2016 (2016) 051–051. doi:10.1088/1475-7516/2016/06/051.
- [24] L. Randall, R. Sundrum, An Alternative to Compactification, *Physical Review Letters*. 83 (1999) 4690–4693. doi:10.1103/PhysRevLett.83.4690.
- [25] N. Bilic, G.B. Tupper, AdS braneworld with backreaction, *Central European Journal of Physics*. 12 (2014) 147–159. doi:10.2478/s11534-013-0325-y.
- [26] M. Gasperini, *Elements of String Cosmology*, Cambridge University Press, 2011.
- [27] C. V. Johnson, *D-branes*, Cambridge University Press, 2003.
- [28] L. Randall, R. Sundrum, Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension, *Physical Review Letters*. 83 (1999) 3370–3373. doi:10.1103/PhysRevLett.83.3370.
- [29] J.E. Kim, G.B. Tupper, R.D. Viollier, Gauges in the bulk, *Physics Letters B*. 593 (2004) 209–217. doi:10.1016/j.physletb.2004.04.061.
- [30] J.E. Kim, G.B. Tupper, R.D. Viollier, Gauges in the bulk II: Models with bulk scalars, *Physics Letters B*. 612 (2005) 293–303. doi:10.1016/j.physletb.2005.03.027.
- [31] P.A.R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, et al., Planck 2015 results: XIII. Cosmological parameters, *Astronomy & Astrophysics*. 594 (2016) A13. doi:10.1051/0004-6361/201525830.
- [32] M. Milosevic, D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M.D. Stojanovic, Dynamics of tachyon fields and inflation - comparison of analytical and numerical results with observation, *Serbian Astronomical Journal*. 192 (2016) 1–8. doi:10.2298/SAJ160312003M.
- [33] N. Bilic, D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, M. Milosevic, M. Stojanovic, Dynamics of tachyon fields and inflation: Analytical vs numerical solutions, in: *AIP Conference Proceedings*, 2016: p. 50002. doi:10.1063/1.4944143.
- [34] M. Milosevic, G.S. Djordjevic, Tachyonic Inflation on (non-)Archimedean Spaces, *Facta Universitatis (Niš) Series: Physics, Chemistry and Technology*. 14 (2016) 257–274.
- [35] N. Bilic, D. Dimitrijevic, G. Djordjevic, M. Milosevic, Tachyon inflation in an AdS braneworld with back-reaction, *International Journal of Modern Physics A*. 32 (2017) 1750039. doi:10.1142/S0217751X17500397.
- [36] R. Adam, P.A.R. Ade, N. Aghanim, Y. Akrami, M.I.R. Alves, F. Argüeso, et al., Planck

- 2015 results: I. Overview of products and scientific results Planck, *Astronomy & Astrophysics*. 594 (2016) A1. doi:10.1051/0004-6361/201527101.
- [37] K. Sato, Cosmological baryon-number domain structure and the first order phase transition of a vacuum, *Physics Letters B*. 99 (1981) 66–70. doi:10.1016/0370-2693(81)90805-4.
- [38] A. Albrecht, P.J. Steinhardt, Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking, *Physical Review Letters*. 48 (1982) 1220–1223. doi:10.1103/PhysRevLett.48.1220.
- [39] V. Mukhanov, H.A. Feldman, R.H. Brandenberger, Theory of cosmological perturbations, *Physics Reports*. 215 (1992) 203–333. doi:10.1016/0370-1573(92)90044-Z.
- [40] W. Baade, F. Zwicky, On Super-Novae., *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 20 (1934) 254–9. doi:10.1073/PNAS.20.5.254.
- [41] S. Perlmutter, G. Aldering, S. Deustua, S. Fabbro, G. Goldhaber, D.E. Groom, et al., Cosmology from Type Ia Supernovae, (1998). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9812473> (accessed March 4, 2017).
- [42] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R.A. Knop, P. Nugent, P.G. Castro, et al., Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, *The Astrophysical Journal*. 517 (1999) 565–586. doi:10.1086/307221.
- [43] A. Linde, Particle Physics and Inflationary Cosmology, (2005) 270. <http://arxiv.org/abs/hep-th/0503203> (accessed January 3, 2017).
- [44] A. Golovnev, V. Mukhanov, V. Vanchurin, Vector inflation, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2008 (2008) 9. doi:10.1088/1475-7516/2008/06/009.
- [45] D. Baumann, TASI Lectures on Inflation, (2009). <http://arxiv.org/abs/0907.5424> (accessed February 13, 2016).
- [46] A. Linde, Particle Physics and Inflationary Cosmology, *Contemporary Concepts of Physics*. 5 (2005). <http://arxiv.org/abs/hep-th/0503203> (accessed March 4, 2017).
- [47] D.J. Schwarz, C.A. Terrero-Escalante, A.A. García, Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation, *Physics Letters B*. 517 (2001) 243–249. doi:10.1016/S0370-2693(01)01036-X.
- [48] P.A.R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela, et al., Planck 2013 results. XXII. Constraints on inflation, *Astronomy & Astrophysics*. 571 (2014) A22. doi:10.1051/0004-6361/201321569.
- [49] H. V. Peiris, E. Komatsu, L. Verde, D.N. Spergel, C.L. Bennett, M. Halpern, et al., First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications

- For Inflation, *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 148 (2003) 213–231. doi:10.1086/377228.
- [50] C.L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, et al., First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results, *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 148 (2003) 1–27. doi:10.1086/377253.
- [51] D.N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M.R. Nolta, C.L. Bennett, et al., First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters, *The Astrophysical Journal Supplement Series*. 148 (2003) 175–194. doi:10.1086/377226.
- [52] S.W. Hawking, The development of irregularities in a single bubble inflationary universe, *Physics Letters B*. 115 (1982) 295–297. doi:10.1016/0370-2693(82)90373-2.
- [53] A.A. Starobinsky, Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations, *Physics Letters B*. 117 (1982) 175–178. doi:10.1016/0370-2693(82)90541-X.
- [54] A.H. Guth, S.-Y. Pi, Fluctuations in the New Inflationary Universe, *Physical Review Letters*. 49 (1982) 1110–1113. doi:10.1103/PhysRevLett.49.1110.
- [55] W.H. Kinney, Cosmology, inflation, and the physics of nothing, (2003). <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0301448> (accessed March 1, 2017).
- [56] A. Sommerfeld, Simplified deduction of the field and the forces of an electron moving in any given way, *Knkl. Acad. Wetensc.* 7 (1904) 345–367.
- [57] O.M.P. Bilaniuk, “Meta” Relativity, *American Journal of Physics*. 30 (1962) 718. doi:10.1119/1.1941773.
- [58] G. Feinberg, Possibility of Faster-Than-Light Particles, *Physical Review*. 159 (1967) 1089–1105. doi:10.1103/PhysRev.159.1089.
- [59] Y. Aharonov, A. Komar, L. Susskind, Superluminal Behavior, Causality, and Instability, *Physical Review*. 182 (1969) 1400–1403. doi:10.1103/PhysRev.182.1400.
- [60] M.C. Bento, O. Bertolami, A.A. Sen, Tachyonic inflation in the braneworld scenario, *Physical Review D*. 67 (2003) 63511. doi:10.1103/PhysRevD.67.063511.
- [61] N. Barnaby, T. Biswas, J.M. Cline, p -adic inflation, *Journal of High Energy Physics*. 2007 (2007) 056–056. doi:10.1088/1126-6708/2007/04/056.
- [62] D.D. Dimitrijevic, G.S. Djordjevic, L. Nestic, Quantum cosmology and tachyons, *Fortschritte Der Physik*. 56 (2008) 412–417. doi:10.1002/prop.200710513.

- [63] N. Moeller, B. Zwiebach, Dynamics with Infinitely Many Time Derivatives and Rolling Tachyons, *Journal of High Energy Physics*. 2002 (2002) 034–034. doi:10.1088/1126-6708/2002/10/034.
- [64] L. Joukovskaya, Dynamics in nonlocal cosmological models derived from string field theory, *Physical Review D*. 76 (2007) 105007. doi:10.1103/PhysRevD.76.105007.
- [65] G.S. Djordjevic, B. Dragovich, L. Nestic, I. V. Volovich, p-Adic and Adelic Minisuperspace Quantum Cosmology, *International Journal of Modern Physics A*. 17 (2002) 1413–1433. doi:10.1142/S0217751X02009734.
- [66] G.S. Djordjevic, B. Dragovich, p-Adic Path Integrals for Quadratic Actions, *Modern Physics Letters A*. 12 (1997) 1455–1463. doi:10.1142/S0217732397001485.
- [67] G.S. Djordjevic, B. Dragovich, L. Nestic, Adelic Path Integrals for Quadratic Lagrangians, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*. 6 (2003) 179–195. doi:10.1142/S0219025703001134.
- [68] M. Fairbairn, M.H. Tytgat, Inflation from a tachyon fluid?, *Physics Letters B*. 546 (2002) 1–7. doi:10.1016/S0370-2693(02)02638-2.
- [69] A.A. Gerasimov, S.L. Shatashvili, On exact tachyon potential in open string field theory, *Journal of High Energy Physics*. 2000 (2000) 034–034. doi:10.1088/1126-6708/2000/10/034.
- [70] A.R. Liddle, D.H. Lyth, *Cosmological inflation and large-scale structure*, Cambridge University Press, UK, 2000.
- [71] J. Rizos, N. Tetradis, Dynamical classicalization, *Journal of High Energy Physics*. 2012 (2012) 110. doi:10.1007/JHEP04(2012)110.
- [72] G. Nordström, Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen, *Physikalische Zeitschrift*. 15 (1914) 504–506.
- [73] T. Kaluza, Zum Unitätsproblem in der Physik, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1921) 966–972.
- [74] V.H.S. Kumar, P.K. Suresh, Gravitons in Kaluza-Klein Theory, (2006). <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0605016> (accessed March 6, 2017).
- [75] J.M. Overduin, P.S. Wesson, Kaluza-Klein gravity, *Physics Reports*. 283 (1997) 303–378. doi:10.1016/S0370-1573(96)00046-4.
- [76] O. Klein, The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law, *Nature*. 118 (1926) 516.
- [77] M.Y. Thiry, Geometry - the equations of Kaluza's unified theory, *Comptes Rendus de l'Académie Des Sciences*. 226 (1948) 216.
- [78] L.L. Williams, Field Equations and Lagrangian for the Kaluza Metric Evaluated with Tensor

- Algebra Software, *Journal of Gravity*. 2015 (2015) 901870. doi:10.1155/2015/901870.
- [79] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV, *Physics Letters B*. 436 (1998) 257–263. doi:10.1016/S0370-2693(98)00860-0.
- [80] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter, *Physics Letters B*. 429 (1998) 263–272. doi:10.1016/S0370-2693(98)00466-3.
- [81] Y. Kim, C.O. Lee, I. Lee, J. Lee, Brane World of Warp Geometry: An Introductory Review, *Journal of The Korean Astronomical Society*. 37 (2003) 1–14. doi:10.5303/JKAS.2004.37.1.001.
- [82] W. Godłowski, M. Szydlowski, Brane Universes Tested by Supernovae Ia, *General Relativity and Gravitation*. 36 (2004) 767–779. doi:10.1023/B:GERG.0000016923.83136.05.
- [83] É.É. Flanagan, S.-H.H. Tye, I. Wasserman, Cosmological expansion in the Randall-Sundrum brane world scenario, *Physical Review D*. 62 (2000) 44039. doi:10.1103/PhysRevD.62.044039.
- [84] P. Binétruy, C. Deffayet, D. Langlois, Non-conventional cosmology from a brane universe, *Nuclear Physics B*. 565 (2000) 269–287. doi:10.1016/S0550-3213(99)00696-3.
- [85] G.W. Gibbons, Anti-de-Sitter spacetime and its uses, (2011). <http://arxiv.org/abs/1110.1206> (accessed March 4, 2017).
- [86] R. Maartens, K. Koyama, Brane-World Gravity, *Living Reviews in Relativity*. 13 (2010). doi:10.12942/lrr-2010-5.
- [87] J. Garriga, V.F. Mukhanov, Perturbations in k-inflation, *Physics Letters B*. 458 (1999) 219–225. doi:10.1016/S0370-2693(99)00602-4.
- [88] A. Frolov, L. Kofman, A. Starobinsky, Prospects and problems of tachyon matter cosmology, *Physics Letters B*. 545 (2002) 8–16. doi:10.1016/S0370-2693(02)02582-0.
- [89] S. del Campo, R. Herrera, A. Toloza, Tachyon field in intermediate inflation, *Physical Review D*. 79 (2009) 83507. doi:10.1103/PhysRevD.79.083507.
- [90] M. Galassi, et al, GNU Scientific Library Reference Manual, 3rd ed., Network Theory Ltd., 2016.
- [91] T. Williams, C. Kelley, gnuplot 5.0 - An Interactive Plotting Program, 2016. <http://www.gnuplot.info/documentation.html>.
- [92] S. Thomas, J. Ward, Inflation from geometrical tachyons, *Physical Review D*. 72 (2005) 83519. doi:10.1103/PhysRevD.72.083519.
- [93] J.R. Cash, A.H. Karp, A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with

- rapidly varying right-hand sides, *ACM Transactions on Mathematical Software*. 16 (1990) 201–222. doi:10.1145/79505.79507.
- [94] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press; 3 edition, 2007.
- [95] H.P. Langtangen, G.K. Pedersen, *Scaling of Differential Equations*, Springer International Publishing, Cham, 2016. doi:10.1007/978-3-319-32726-6.
- [96] A.A. Sonin, *The Physical Basis of Dimensional Analysis*, Department of Mechanical Engineering, MIT, Cambridge, 2001. http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/DA_unified.pdf.

9.

ИНДЕКСИ

9.1 ИНДЕКС ТАБЕЛА

<i>Табела 1</i> Кратка историја свемира	18
<i>Табела 2</i> Почетни услови за тахионско поље одређени на два начина. Разлика у почетној вредности поља не игра значајну улогу у коначним резултатима.....	55
<i>Табела 3</i> Посматрачки параметри (n_s и r) и време почетка инфлације (t_i) за три различита модела инфлације (RSII модел са радионом, тахионска инфлација у RSII космологији и тахионска инфлација у стандардној космологији).....	71

9.2 ИНДЕКС СЛИКА

<i>Слика 1</i> Приказ Фридманових модела: отвореног $k = -1$ (O), равног $k = 0$ (F) и затвореног $k = +1$ (C) свемира у случају са инфлацијом и без ње [43].....	22
<i>Слика 2</i> Дијаграм настанка виртуелних парова честица и античестица и аналогни настанак флуктуација [52]	27
<i>Слика 3</i> Свет на брани (уметничка визија). Аутор: Dexton Roberts.....	41
<i>Слика 4</i> Дијаграм тока програма за израчунавање посматрачких параметара за моделе инфлације са тахионским скаларним пољем и RSII модел. На дијаграму су приказани основни кораци у израчунавању.....	52
<i>Слика 5</i> Упоредивање аналитичког (тачкице) и нумеричког (пуна линија) метода за временску еволуција тахионског инфлаторног поља (горе лево), Хабловог параметара (горе десно) и хијерархијских параметара ϵ_1 (доле лево) и ϵ_2 (доле десно) за тахионски потенцијал облика $U(x) = 1/x^4$ и параметре $N = 85$ и $\kappa = 5$..	62
<i>Слика 6</i> Утицај промене слободног параметра κ на трајање инфлације.....	63
<i>Слика 7</i> Нумерички израчунате вредности посматрачких параметара n_s и r у поређењу са резултатима Планк колаборације [21]. На слици лево приказано је 70% израчунатих резултата док се на слици десно налази	

35% укупног броја резултата. Зелена испрекидана линија (лево) означава 2σ област Λ CDM Planck TT+lowP мерења. Црвена пуна линија, на обе слике, означава приближну релацију (5.34)..... 64

Слика 8 Нумерички резултати за тахионске потенцијале U_1 (црвено) и U_2 (црно) у поређењу са резултатима Планк колаборације [21]. 65

Слика 9 Временска еволуција тахионског θ (горе лево) и радионског ϕ (горе десно) поља, као и Хаблових хијерархијских параметара ε_1 (доле лево) и ε_2 (доле десно) за $\kappa = 2$, $\theta_0 = 0,25$, $\phi_0 = 0,4$, $\pi_{\phi_0} = \pi_{\theta_0} = 0$, за тахионски инфлаторни модел за потенцијал (5.30) у RSII космологији са радионом (црна пуна линија) и без радиона (тачкаста црвена линија). Плава испрекидана линија означава резултате за одговарајући тахионски модел у стандардној Фридмановој једначини..... 67

Слика 10 Нумеричке вредности посматрачких параметара n_s и r за RSII модел инфлације у односу на ограничења добијених на основу мерења [21]. Вредности слободних параметара изабране су 10000 тачака у интервалима $60 \leq N \leq 120$, $1 \leq \kappa \leq 12$ и $0 \leq \phi_0 \leq 0,5$. Пуна линија представља апроксимацију спорог котрљања за RSII модел без радиона (5.37), док испрекидана линија означава апроксимацију спорог котрљања за стандардну тахионску инфлацију (5.34). 68

Слика 11 Вредности n_s (лево) и r (десно) као функције параметара N и κ за $\phi_0 = 0,01$. Почетни услов за тахионско поље θ_0 одређен је на основу израза (4.72). 68

Слика 12 Добијени резултати за посматрачке параметре приказани у (n_s, r) равни (лево). Боја тачке на мапама вредности означава одговарајућу нумеричку вредност, према палети на сваком графику посматраног параметра. Хистограми расподеле (десно) вредности параметара у област 2σ измерених вредности посматрачких параметара (црвена испрекидана линија на дијаграмима лево). У првом реду приказана је мапа боја и хистограм за параметар N , у другом κ , и у трећем за ϕ_0 69

Слика 13 Израчунате вредности параметара у (n_s, r) равни за RSII модел са радионом (плаво), тахионским потенцијалом (5.30) у RSII космологији (зелено) и тахионским потенцијалом у космологији са стандардном Фридмановом једначином (црно). 70

Слика 14 Резултати као на Слика 10, али за ужи интервал вредности параметара: $85 \leq N \leq 110$, $1 \leq \kappa \leq 8$ и $0 \leq \phi_0 \leq 0,5$. Црвена испрекидана линија означава 1σ и 2σ одступање од мерења Планк колаборације..... 71

Слика 15 Резултати као на претходној слици, али за још ужи интервал вредности параметара: $\kappa = 2$, $60 \leq N \leq 120$ и $0 \leq \phi_0 \leq 0,25$. Црвена испрекидана линија означава 1σ и 2σ стандардне девијације мерења Планк колаборације. 72

Слика 16 Најбоље добијено слагање резултата RSII модела са радионом за посматрачке параметре n_s и r са вредностима које је измерила Планк колаборација [48]. Вредности слободних параметара су $\kappa = 1,25$, $115 \leq N \leq 120$ а почетна вредност радионског поља је $\phi_0 = 0,05$. Ознаке на графику исте су као на Слика 10. 72

10.

БИОГРАФИЈА

Милан Милошевић рођен је у Нишу 20. фебруара 1981. године. Завршио је Гимназију „Светозар Марковић“, а затим и студије физике на Природно-математичком факултету у Нишу. Дипломски рад одбранио под називом *Инфлаторни космолошки модели*.

Докторске студије физике уписао школске 2010. год. на ПМФ-у. Након избора у звање истраживач-приправник, од јануара 2011. године ангажован на пројекту Министарства просвете и науке (бр. 176021). Од 2011. год. ангажован за извођење вежби на Департману за физику. Септембра 2014. године изабран у звање истраживач сарадник. Од 2016. године предаје предмет *Моделирање у физици* у Гимназији „Светозар Марковић“ у Нишу.

Учествовао у реализацији неколико међународних пројеката који су реализовани у оквиру активности SEENET-МТР Мреже. Учесник више међународних школа и конференција. Од новембра 2010. до јануара 2011. боравио на усавршавању у Минхену у оквиру *Пројекта научне размене*, између Катедре за Теоријску физику ПМФ Ниш и Катедре за Теорију струна и Математичку физику Универзитета Ludwig-Maximilians-Universitat из Минхена. Члан локалног организационог комитета више међународних научних скупова. Од 2005. године систем-администратор сервера SEENET-МТР Мреже.

Активно ради у области промоције науке и (интернет) новинарства. Одржао око 50 научно-популарних предавања и аутор више од 150 научно-популарних текстова. Од 2007. године аутор и уредник сајта *Свет науке*.

Секретар Друштва физичара Ниш и потпредседник Астрономског друштва “Алфа”. Учествовао у реализацији пројекта *Астрономија из фотеље*, чијом је реализацијом изграђена и опремљена астрономска опсерваторија на крову ПМФ-а. Учествовао у оснивању и учествује у раду *Лабораторије за рачунарску физику* и *Лабораторије за астрономију, астрофизику и астробиологију* на ПМФ-у.

Бави се истраживањима везаним за динамику тахионских поља инфлаторних модела, квантном космологијом, као и применом рачунара у физици. До сада је објавио 13 научних радова, од чега су четири рада из категорије М20.

11.

ИЗЈАВЕ АУТОРА

Изјава 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Инфлаторни космолошки модели са
тахсионским и радионским пољима

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 6. март 2017.

Потпис аутора дисертације:



Милан Д. Милошевић

Изјава 2.

**ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ЕЛЕКТРОНСКОГ И ШТАМПАНОГ ОБЛИКА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

Наслов дисертације:

Инфлаторни космолошки модели са
тахсионским и радионским пољима

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу**, истоветан штампаном облику.

У Нишу, 6. март 2017.

Потпис аутора дисертације:



Милан Д. Милошевић

Изјава 3:

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Инфлаторни космолошки модели са
тахсионским и радионским пољима

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)
- 4. Ауторство – некомерцијално – делим под истим условима (CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде (CC BY-ND)
6. Ауторство – делим под истим условима (CC BY-SA)

У Нишу, 6. март 2017.

Потпис аутора дисертације:



Милан Д. Милошевић