

## ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ КАНДИДАТА  
Elijah Eghosa Edeghagba

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ		
1. Датум и орган који је именовао комисију Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду на електронској седници 8.2.2017		
2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:		
1. Петар Марковић	Редовни професор	Алгебра и математичка логика 1.7.2015
презиме и име	звање	ужа научна област
Природно-математички факултет Нови Сад		председник
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
2. Бранимир Шешеља	Редовни професор	Алгебра и математичка логика 27.3.1992
презиме и име	звање	ужа научна област
Природно-математички факултет Нови Сад		ментор, члан
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
3. Андреја Тепавчевић	Редовни професор	Алгебра и математичка логика 1.12.2003
презиме и име	звање	ужа научна област
Природно-математички факултет Нови Сад		члан
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
4. Мирослав Ћирић	Редовни професор	Математика 1.9.2000
презиме и име	звање	ужа научна област
Природно-математички факултет Ниш		члан
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ		
1. Име, име једног родитеља, презиме: Elijah Eghosa (Mike) Edeghagba		
2. Датум рођења, општина, држава: 29. June 1980, Benin City, Edo State, Nigeria		

3.

Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив: Lagos State University основне студије, студијски програм: математика и примењена математика; звање: математичар. University of Benin, студијски програм: мастер академске студије математике; звање: мастер математичар; наслов завршног рада: On inverse semigroup

4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија 2013, МАТЕМАТИКА

5. Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране:  
N/A

6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: N/A

**III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:  $\Omega$ -algebraic systems,  $\Omega$ -алгебарски системи**

**IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

Навести кратак садржај са знаком броја страна, поглавља, слика, шема, графикона и сл.

Теза је припремљена на енглеском језику у едитору текста Latex на 133 стране и поред обавезних података о кандидату садржи следеће делове:

Апстракт

Садржај

1. Увод
  2. Стручни уводни појмови
  3.  $L$ -вредносне структуре
  4.  $\Omega$ -алгебре у универзалној алгебри
  5.  $\Omega$ -релациони системи
  6. Слабе релације конгруенције и  $\Omega$ -алгебре
  7. Закључак и правци даљег истраживања
- Литература

У текст је унето и 9 слика – дијаграма, а Литература садржи 112 библиографских јединица. На почетку рада је апстракт и у табели на крају рада дат је извод тезе на српском језику.

Кратак садржај тезе:

Рад припада истовремено области уређених, мрежно-вредносних структура и универзалној алгебри. Односи се на такозване омега структуре, где је омега потпуна мрежа. То су алгебарске структуре снабдевене уопштеном једнакошћу, тј. симетричном, транзитивном и компатибилном функцијом из квадрата носача алгебре у потпуну мрежу омега. Изложене су основне универзално-алгебарске карактеристике ових структура: испуњеност идентитета, омега-подалгебре и њихова својства, конгруенције и хомоморфизми, директни производи. Основна карактеристика омега алгебри је да су количничке структуре по нивоима омега вредносне једнакости, класичне алгебре истог типа. Шта више, идентитети који су на уведени начин задовољени на омега алгебри, важе у класичном смислу на тим количничким структурама Главни резултати односе се на омега мреже. Оне су уведене на два начина: као омега уређене структуре и као омега алгебре. Поред бројних својстава која су аналогна класичним, доказана је еквивалентност ових структура, а наведена је и репрезентација преко система затварања. Уочено је да су нивои омега вредносне једнакости слабе конгруенције на базној алгебри. Тако су омега алгебре карактерисане преко посебних система затварања у мрежи слабих конгруенција те носеће алгебре.

## **V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

У уводном поглављу дат је историјски преглед математичких области на којима се теза заснива. То су прво омега-скупови које су осамдесетих година прошлог века увели Фурман и Скот, с намером да моделирају интуиционистичку логику. Изложен је такође развој друге релевантне области, теорије расплинутих (fuzzy) скупова, посебно мрежно вредносних структура. Наведена је логичка и алгебарска позадина ове области, као и поједине, за тезу битне, теме. Ради се о уопштењу алгебри, затим релација еквиваленције, посебно једнакости, као и релација конгруенције. Најзад, истакнуто је да се кроз тему тезе провлачи и област слабих конгруенција, које су трећа кључна карика овог рада. Овај уводни део тако прати више праваца уопштења важних скуповних и алгебарских појмова и тема. Наведени су бројни кључни аутори и цитирани њихови радови, па се из овог увода стиче јасна слика о историјском развоју и повезаности наведених области, што је искоришћено у овом истраживању.

Друга глава садржи концизно изложене појмове и тврђења из области класичне теорије скупова и алгебре, који се користе кроз рад. То су скупови, уређене структуре и мреже, системи и оператори затварања, као и основно из универзалне алгебре: уопште о алгебрама, подалгебрама, конгруенцијама и хомоморфизмима, директним производима, варијететима и једнакосним класама. У посебном делу изложени су основни појмови класичне теорије расплинутих скупова, са ко-доменом који је јединични реални интервал.

Трећа глава односи се на новије области уређених структура и алгебре. Ту се повезују расплинути скупови чији је ко-домен мрежа - мрежно-вредносне структуре с једне стране и омега скупови с друге. Посебно се наглашава веза између расплинутих и класичних структура која се остварује преко ниво-скупова. Овде се користе научни радови из обе области, одабране су теме које се касније користе и наведене су најважније особине уведених појмова.

У четвртој глави детаљно је изложен универзално-алгебарски приступ омега алгебрама. Омега је потпуна мрежа и она је ко-домен свих омега функција у раду. Користећи најновије научне резултате, дефинишу се омега-алгебре, полазећи од омега-скупова и мрежно-вредносних алгебарских структура. Објашњава се уопштена једнакост и дају њене особине, међу којима је посебно значајна слаба рефлексивност. Тако је омега алгебра класична алгебра датог типа, снабдевена уопштеном компатибином једнакошћу. Идентитети су по дефиницији задовољени на омега алгебри ако су испуњене посебне мрежне формуле. Основна особина ове задовољности формулисана је на следећи начин: Омега алгебра задовољава скуп идентитета ако и само ако су количничке структуре по нивоима омега једнакости класичне алгебре истог типа које у класичном смислу задовољавају исте идентитете. Даље се говори о хомоморфизмима омега структура и дефинишу омега конгруенције и омега количничка алгебра. Њене особине су другачије од особина класичних количничких алгебри, јер је дефинисана на скупу омега функција, добијених из дате омега конгруенције. Овај део је један од оригиналних резултата тезе. Доказано је да се омега хомоморфизам може еквивалентно карактерисати класичним хомоморфизмима на одговарајућим количничким ниво-алгебрама.

У овом делу испитани су и директни производи омега алгебри.

Пета глава садржи у потпуности оригиналне резултате тезе. Она се односи на омега скупове снабдевене мрежно-вредносним поретком. То су дакле скупови снабдевени уопштеном једнакошћу и мрежно-вредносним поретком. Тако је дефинисан омега-посет (уређени скуп) и испитане су основне особине. Даље су уведени псеудо-инфимум и псеудо-супремум и дефинисана омега мрежа као омега посет. Као и за омега алгебре, показано је да су количничке структуре по нивоима класични посети, мрежно уређени. У наставку је омега мрежа уведена као омега алгебра у језику са две бинарне операције, која задовољава мрежне идентитете на начин уведен у Глави 4. И ова структура има класичне мреже као количничке ниво-структуре. Доказана је еквивалентност ових омега структура, која се ослања на Aksiом избора при дефинисању операција. Посебно су уведене потпуне омега мреже и описана конструкција таквих структура.

У шестој глави успостављена је веза између омега структура и слабих конгруенција, уведених у универзалну алгебру крајем прошлог века. Свака омега алгебра једнозначно дефинише затворење у мрежи слабих конгруенција базичне алгебре те омега алгебре.

Седма глава садржи резиме свега што је у тези урађено и неке предлоге за даља истраживања.

## **VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРскоЈ ДИСЕРТАЦИЈИ**

Таксативно навести називе радова, где и када су објављени. Прво навести најмање један рад објављен или прихваћен за објављивање у часопису са ISI листе односно са листе министарства надлежног за науку када су у питању друштвено-хуманистичке науке или радове који могу заменити овај услов до 01. јануара 2012. године. У

случају радова прихваћених за објављивање, таксативно навести називе радова, где и када ће бити објављени и приложити потврду о томе.

E.E. Eghosa, B. Šešelja, A. Tepavčević,  $\Omega$ -lattices, Fuzzy Sets and Systems 311 (2017) 53--69.

### **VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА**

Теза уводи нове уређене и алгебарске структуре, омега алгебре, односно омега посете и мреже и изучава њихова својства. На ширем плану детаљно су истражени хомоморфизми и конгруенције омега алгебри. Конкретне, детаљно испитане структуре су омега мреже и то као уређене структуре и као алгебре. То су актуелне теме и повезују класичне дисциплине (теорију мрежа и универзалну алгебру) са новијим дисциплинама (расплинуте, односно мрежно вредносне структуре). О њиховом значају говори и више доказаних својстава, карактеризација и теорема репрезентације.

Први резултати односе се на хомоморфизам омега алгебри и на његове особине. Уведен је као функција са посебним својствима, паралелно са појмом омега вредносне конгруенције, као мрежно вредносне релације. Појам језгра и природног хомоморфизма, иако дефинисани у новом окружењу, повезани су слично као у класичној алгебри. Доказано је да омега хомоморфизам може бити карактерисан класичним хомоморфизмима на количничком структурама по уопштеној једакости.

Друга група резултата односи се на појам омега мреже у оба приступа: релацијском и алгебарском. Увођењем псеудо инфимума и псеудо супремума добијена је структура која има класичан поредак на количничким ниво-структурама. Шта више, да би омега посет био омега мрежа, потребно је и довољно да су количничке ниво-структуре класичне мреже у односу на тај поредак. У алгебарском приступу омега мреже као алгебре карактерисане су количничким класичним мрежама преко одговарајућих нивоа. Доказана је еквивалентност два појма омега мреже, при чему је за дефинисање операција у релацијској омега мрежи коришћен Аксиом избора. У вези са потпуним омега мрежама, наведен је низ специфичних особина и својстава специјалних елемената, (најмањи, највећи и сл.), а дата је и теорема егзистенције потпуне омега мреже у терминима система затварања на базној релацијској структури.

Најзад, резултати тезе постоје и у делу који повезује омега структуре и мреже слабих конгруенција на алгебри која је у основи омега алгебре. Уочено је да су нивои једнакости омега алгебре заправо слабе конгруенције на базичној алгебри. Доказано је да сваки систем затварања на мрежи слабих конгруенција полазне алгебре одређује једну омега алгебру, где је мрежа омега канонички одређена самим системом затварања.

### **VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА**

Експлицитно навести позитивну или негативну оцену начина приказа и тумачења резултата истраживања. Теза повезује различите математичке области из којих се изводе основни појмови и резултати. У том смислу систематски је и прегледно изложена свака од тих области: теорија мрежа и основе универзалне алгебра као једна целина и теорија мрежно вредносних скупова, релација и структура, заједно са специфичним техникама као друга целовита област. Затим су уведени нови појмови, пре свега омега алгебре, затим њихова својства и универзално алгебарске особине, како се оне манифестују у овом контексту. Код нових појмова стално се преплићу класични алгебарски појмови и мрежно вредносне технике.

Начин на који су одабрани и затим концизно уведени појмови основних дисциплина показује добро познавање фундаменталних као и новијих области алгебре и теорије уређених скупова.

Нови појмови уведени су на логичан начин, примерима је илустровано да су нетривијални, а у доказима тврђења показано је да се они заиста на природан начин изводе из класичних појмова. Тако се омега алгебра заснива на појму класичне алгебре, која је снабдевена уопштеном једнакошћу, дакле мрежно вредносном функцијом. Основни појам тако припада двома областима и оне се јасно, конзистентно преплићу кроз читаво излагање.

Најважнији резултати који повезују мрежно вредносне структуре и идентитете са класичним количничким структурама јасно су истакнути, чиме је уочен њихов значај.

Поред наведеног, резултати се коментаришу и у контексту других уопштења класичних појмова (алгебре, мреже), и јасно су истакнуте разлике, односно предности и специфичности приступа у тези.

Сматрамо да су теме у тези, како класичне, тако нове, приказане конзистентно и јасно.

### **IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

Експлицитно навести да ли дисертација јесте или није написана у складу са наведеним образложењем, као и да ли она садржи или не садржи све битне елементе. Дати јасне, прецизне и концизне одговоре на 3. и 4. питање:

1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме

2.	Да ли дисертација садржи све битне елементе
3.	По чему је дисертација оригиналан допринос науци
4.	Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања
<p>1. Како се из пријаве теме може закључити, теза је написана у складу са тим образложењем. Концизно су али са свим релевантним детаљима изложене потребне теме из универзалне алгебре и теорије мрежно-вредносних скупова, на којима се базира истраживање. Затим је уведен појам омега скупа, омега функције, са анализом омега једнакости, као уопштењем класичне једнакости. Дефинисана је омега алгебра, описана њена својства и начин на који су у њој задовољени идентитети. Даље се систематски теза бави битним темама универзалне алгебре, анализирајући их у овом мрежно вредносном контексту са уопштеном једнакошћу. То су подалгебре конгруенције и хомоморфизми, као и директни прооизводи. Кроз сваку од ових области провлачи се једна од основних особина омега структуре: најважнија уопштена својства остају очувана на количничким ниво-структурама, где су нивои они из уопштене једнакости. Као што се предвиђало у пријави, дефинисане су и детаљно испитане омега мреже, са оба аспекта, релацијског и алгебарског и доказана је еквивалентност та два појма. Дата је и карактеризација омега алгебри преко система затварања у мрежи слабих конгруенција базичне алгебре.</p> <p>Испуњени су дакле захтеви постављени у пријави, а део резултата објављен је као рад у часопису са SCI листе.</p> <p>2. Ова дисертација је теоријско истраживање и садржи све битне елементе: Приказ класичних дисциплина на којима се базира истраживање, нове појмове и особине и нове резултате са образложењима значаја и улоге тих резултата.</p> <p>3. Оригиналан допринос науци чини увођење нових релацијских и алгебарских структура као и описи њихових особина које повезују различите математичке дисциплине на нов начин. У теорији уређених скупова, мрежно вредносних структура и универзалној алгебри овакви резултати сматрају се значајним.</p> <p>4. Нису уочени недостаци.</p>	
<b>X</b>	<b>ПРЕДЛОГ:</b>
На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже:	
<b>да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана</b>	

НАВЕСТИ ИМЕ И ЗВАЊЕ ЧЛАНОВА, ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

др. Петар Марковић, редовни професор ПМФ Нови Сад, председник Комисије

др. Бранимир Шешелја, редовни професор ПМФ Нови Сад, ментор, члан

др. Андреја Тепавчевић, редовни професор ПМФ Нови Сад, члан

др. Мирослав Тирић, редовни професор ПМФ Ниш, члан