

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На седници Научно-наставног већа одржаној 22.09.2014. године одређени смо у комисију за преглед рукописа

Анализа пребројивих модела потпуних теорија линеарно уређених структура

који је предат као докторска дисертација магистра Дејана Илића. Кандидат је предао текст, комисија је исти прегледала и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографски подаци

Дејан Илић је рођен 28.03.1970. године у Београду, где је завршио основну и средњу школу. Дипломирао је на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене 2000. године са просечном оценом 8,79. На постдипломским студијама Математичке логике на Математичком факултету остварио је просечну оцену 10. Магистарску тезу под називом *Димензија модела непробројиво категоричних теорија* одбранио је 25.02.2011. године. Од 2000. године ради као асистент на Катедри за општу и примењену математику Саобраћајног факултета Универзитета у Београду.

2. Списак научних радова

Радови повезани са докторском дисертацијом:

[1] D. Ilić. Simple types in discretely ordered structures. *Archive for Mathematical Logic*. Vol. 53/7 (2014) pp.929–947. ISSN: 0933-5846 IF 2014: 0.320. M23

[2] D. Ilić, P. Tanović. A definable condensation of linear orderings. *Novi Sad Journal of Mathematics*. vol.44/2 (2014) pp 225–234. ISSN: 1450-5444 M51

[3] D. Ilić D, S. Moconja, P. Tanović. Groups with finitely many countable models. *Publications de l'Institut Mathématique*. 97(2015) pp.33–41. ISSN: 0350-1302 IF 2014:0.270 M23

[4] D. Ilić, P. Tanović. O razlaganju linearno uredjenih struktura. Proceedings of the Fourth Mathematical Conference of Republic of Srpska, tome 1. pp.101–109. Trebinje 2014.

Саопштења на конференцијама:

1. D. Ilić. Small expansions of $(\omega, <)$ and $(\omega + \omega^*, <)$. Novi Sad Algebra Conference 2013.

2. D. Ilić. On small expansions of $(\omega, <)$ and $(\omega + \omega^*, <)$. SETTOP 2014. Novi Sad.

3. D. Ilić. Linearna uredjenja sa unarnim relacijama i konveksnim relacijama ekvivalencije. 5th Mathematical Conference of Republic of Srpska Trebinje 2015.

3. Предмет докторске дисертације

Предмет дисертације је анализа линеарно уређених структура, њихових потпуних теорија и дефинабилних скупова у њима, уз нека неопходна додатна ограничења. Под линеарно уређеном структуром подразумевамо структуру првог реда $(A, <, \dots)$ која, осим релације тоталног уређења $<$, може имати и додатне релације и операције на домену. Ограничавање на пребројиве моделе је оправдано Шелаховом теоремом из 1990. године о немогућности класификације класе непребројивих модела нестабилне теорије, а таква је свака теорија бесконачне линеарно уређене структуре. Друге додатне претпоставке ограничавају или додате релације (на пример унарност свих додатних релација), или комплексност дефинабилних скупова у структури (ординалност Кантор-Бендиксоновог ранга Стоновог простора типова теорије).

Основна техника која се користи у анализи типа изоморфизма датог линеарног уређења је техника кондензација заснована на идеји Хауздорфа; уређење се на погодан начин (релацијом еквиваленције са конвексним класама) распарча на конвексне делове, а затим се засебно студирају фактор уређење (хомоморфна слика) и уређења унутар класа. Релације еквиваленције се бирају тако да класе, посматране као засебна линеарна уређења, имају једноставнији тип изоморфизма од полазног уређења. У анализи својстава првог реда уређења потребно је пронаћи дефинабилне кондензације тако да класе имају једноставно описиве елементарне теорије и да се својства полазног уређења могу реконструисати из својстава фактор уређења. Пребројива

густа уређења су међусобно изоморфна и нису занимљива за дубље моделско теоријске анализе. За разлику од њих, дискретна уређења могу имати врло разнолику и компликовану структуру. Предмет дисертације је и анализа пребројивих дискретно уређених структура уз претпостављену ординалност Кантор-Бендиксоновог ранга. Један од предвиђених циљева дисертација је и опис дефинабилних скупова у оваквим структурама.

4. Приказ дисертације

Дисертација има 84 стране текста и списак референци који садржи 21 библиографску јединицу. Главни текст је подељен у четири поглавља. Прво поглавље има 18 страна и уводног је карактера. У њему је дат преглед основних појмова и тврђења теорије модела која се касније користе. Преостала три поглавља садрже оригиналне резултате.

У другом поглављу је описана конструкција којом се дато линеарно уређење \mathbf{A} трансформише у једноставније линеарно уређење са пребројиво много међусобно дисјунктних унарних предиката $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathbf{A})$ у језику $L^\# = \{<, D, W, W^*, Z, C_n\}_{n \in \omega}$. Ова структура садржи у потпуности информацију о елементарним својствима полазног уређења и добија се униформно дефинабилном кондензацијом \mathbf{c}_δ која је дефинисана формулом $\delta(x, y)$ а чије су класе у сваком уређењу максимални конвексни дискретно уређени и максимални конвексни густо уређени подскупови. Густо уређене пребројиве класе су изоморфне уређењу рационалних бројева, док дискретно уређене имају један од следећих уређајних типова:

$$\begin{array}{ll} (W) & \omega + \zeta \times \mathbf{L} \\ (C_n) & \mathbf{n} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (W^*) & \zeta \times \mathbf{L} + \omega^* \\ (C_\infty) & \omega + \zeta \times \mathbf{L} + \omega^* \end{array}$$

$$(Z) \quad \zeta \times \mathbf{L}$$

где је ζ уређајни тип целих бројева, ω^* ‘обрнуто’ уређени ω и \mathbf{L} произвољан уређајни тип. Променом уређајног типа \mathbf{L} не мења се елементарна теорија, па уређења која припадају истој од ових пет класа имају исте елементарне теорије. Свака од тих теорија изузимајући (C_∞) је коначно аксиоматизабилна (једном реченицом првог реда), а исто важи и за теорију густих класа. То омогућује да \mathbf{c}_δ -кондензацију датог уређења $\mathbf{A} = (A, <)$ на природан начин проширимо међусобно дисјунктним унарним релацијама D, W, W^*, Z, C_n (где D описује густе класе) које одговарају могућим потпуним елементарним теоријама класа; Добијена структура је $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathbf{A}) = (\mathbf{c}_\delta(A), <, D, W, W^*, C_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Доказано је да за уређења важи $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ ако и само ако је $\mathbf{c}_\delta^\#(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{c}_\delta^\#(\mathbf{B})$. Као примена ове конструкције доказано је да је свака линеарно уре-

ђена структура са пребројиво много међусобно дисјунктних унарних предиката интерпретабилна у (чистом) линеарном уређењу. Такође, доказано је да је свако линеарно уређење са коначно много унарних предиката и конвексних релација еквиваленције интерпретабилно у чистом линеарном уређењу. Овај резултат је мотивисао најважније резултате тезе доказане у четвртом поглављу. Део резултата из другог поглавља је објављен у коауторском раду [2].

У трећем поглављу су разматране дискретно уређене структуре ординалног Кантор-Бендиксоновог ранга. Изолован је појам простог типа и доказано је да је индукована структура на локусу таквог типа тривијална, односно индукована релацијом $<$. Применом тог резултата на структуре $(\omega, <, \dots)$, $(\omega^*, <, \dots)$ и $(\omega + \omega^*, <, \dots)$ Кантор-Бендиксоновог ранга 1, описане су све такве структуре до на дефинициону еквивалентност. На пример, доказано је да је свака структура $(\omega, <, \dots)$ за коју је $CB = 1$ и $deg = d$ дефиниционо еквивалентна структури $(\omega, <, P_d)$ где је $P_d(x)$ предикат ‘ d дели x ’. Тиме је уопштен резултат Пилеја и Штајнхорна из 1987. године. Резултати овог поглавља су објављени у раду [1].

Четврто поглавље садржи најважније резултате дисертације. Између осталог, дат је опис дефинабилних скупова у произвољном линеарном уређењу. Уведен је појам јаке линеарне бинарности структура и потпуних теорија заснована на следећој особини линеарних уређења: ако је конвексан подскуп D линеарног уређења $\mathbf{A} = (A, <)$ фиксиран (као скуп) аутоморфизмима $f, g \in \text{Aut}(\mathbf{A})$, тада је пресликавање $f \upharpoonright D \cup g \upharpoonright (A \setminus D)$ такође аутоморфизам. Теорија је јако линеарно бинарна ако сваки њен модел има то својство. Доказано је да је свака потпуна теорије линеарних уређења са унарним предикатима и конвексним релацијама еквиваленције јако линеарно бинарна, а највећи део четвртог поглавља је посвећен доказу обрнутог тврђења: то су суштински једине потпуне теорије линеарно уређених структура које имају то својство. Прецизније, доказано је да је свака засићена структура $\mathbf{A} = (A, <, \dots)$ која има својство јаке линеарне бинарности дефиниционо еквивалентна (има исте дефинабилне скупове) структури $\mathbf{A}' = (A, <, P_i, E_j)_{i \in I, j \in J}$ у којој су $(P_i \mid i \in I)$ сви унарни предикати и $(E_j \mid j \in J)$ све конвексне релације еквиваленције дефинабилне у структури \mathbf{A} . Дат је и прецизан опис дефинабилних скупова у оваквим структурама: Сваки дефинабилан са параметрима скуп $D \subseteq A$ је Булова комбинација интервала, унарних 0-дефинабилних скупова и класа конвексних 0-дефинабилних релација еквиваленције. Овај резултат значајно поправља резултате Рубина из 1974. године и Симона из 2011. године

5. Закључак

Резултати изложени у рукопису представљају оригиналан и значајан допринос теорији класификације линеарно уређених структура првог реда. Сам рукопис је написан јасно и математички коректно. Део добијених резултата је објављен у једном самосталном и два ко-ауторска рада у научним часописима од којих су два на SCI листи.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да **прихвати приложени рукопис као докторску дисертацију** Дејана Илића и да одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 1. 6. 2016.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

др Милош Курилић, редовни професор
Природно–математички факултет, Нови Сад

др Зоран Петровић, ванредни професор
Математички факултет, Београд

др Александар Перовић, ванредни професор
Саобраћајни факултет, Београд

др Небојша Икодиновић, доцент
Математички факултет, Београд

др Предраг Тановић (ментор), ванредни професор
Математички факултет, Београд
