UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Darko V. Radovančević

DVOOSCILATORNI I MODELI TIPA SLOBODNE ČESTICE U KOSMOLOGIJI

Doktorska disertacija

Niš, 2016.

UNIVERSITY OF NIS
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
DEPARTMAN OF PHYSICS

Darko V. Radovancevic

THE TWO-OSCILLATOR MODELS AND THE FREE PARTICLE TYPE MODELS IN COSMOLOGY

PhD Thesis

Nis, 2016.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U NIŠU
KLJUČNE DOKUMENTACIJSKE INFORMACIJE

Redni broj, RBR:

Identifikacioni broj, IBR:

Tip dokumentacije, TD: Monografska

Tip zapisa, TZ: Tekstualni

Vrsta rada, VR: Doktorska disertacija

Autor, AU: Darko V. Radovančević

Mentor, MN: Prof. dr Ljubiša Nešić, redovni profesor na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Naziv rada, NR: Dvooscilatorni i modeli tipa slobodne čestice u kosmologiji

Jezik publikacije, JP: Srpski

Jezik izvoda, JI: Engleski

Zemlja publikovanja, ZP: Republika Srbija

Uže geografsko područije, UGP: Republika Srbija

Godina, GO: 2016.

Izdavač, IZ: Autorski reprint

Mesto i adresa, MA: Niš, Višegradska 33

Fizički opis rada (poglavlja/strana/citata/tabela/slika/grafika/priloga), FO: 9/99/157/0/1/0/4

Naučna oblast, NO: Fizika

Naučna disciplina, ND: Teorijska fizika

Predmetna odrednica/Ključne reči, PO: Kvantna kosmologija, Nearhimedovi prostori, Minisuperprostorni kosmološki modeli, Signaturna izmena, Nekomutativnost, Termodinamika crnih rupa

Klasifikaciona oznaka, KO: P 000, P 002, P190

Tip odabrane licence, TOL: Autorstvo-nekomercijalno-bez prerade (CC BY-NC--ND)

UDK: 539.12-1 : 524.8 + 524.882

Čuva se, ČU: Biblioteka

Važna napomena, VN:

Izvod/Apstrakt/Rezime, IZ: Tema disertacije odnosi se na proučavanje minisuperprostornih kosmoloških modela čiji se lagranžijani mogu svesti na lagranžijan slobodne relativističke čestice ili na lagranžijan dva oscilatora istih ili različitih frekvenci.

Nakon upoznavanja sa elementima p-adične i adelične matematičke analize i kvantne mehanike, klasične i kvantne kosmologije, u disertaciji se razmatraju pomenuti kosmološki modeli u okviru klasičnog, p-adičnog i nekomutativnog pristupa. Proučavanje kosmoloških modela u okviru p-adičnog i nekomutativnog formalizma je od posebnog značaja jer oba ova pristupa ukazuju na diskretnost strukture prostor-vremena na Plankovoj skali, a što se dovodi u vezu sa mehanizmom signaturne izmene u okviru Hartl-Hokingovog graničnog uslova.

Posle razmatranja Milneovog modela, u klasičnom delu, izvršena je najpre klasifikacija dvooscilatornih modela prema obliku lagranžijana, prikazani su konkretni primeri, a zatim su određeni njihovi hamiltonijani i klasična dejstva. Pitanja Hamiltonovog uslova i klasične signaturne tranzicije posebno su razmotrena.

U p-adičnom delu predstavljene su kvantne p-adične i adelične forme ovih modela i određeni uslovi egzistencije njihovih vakuumskih p-adičnih stanja.

Nakon toga razmotrene su nekomutativne forme modela i određena su njihova klasična nekomutativna dejstva i propagatori.

Pored boljeg razumevanja rane faze evolucije univerzuma, proučavanje ovih modela pružiće bolji uvid i u dinamiku i termodinamiku unutrašnjosti nenaelektrisane i nerotirajuće (Švarcšildove) crne rupe čije se Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo može upravo svesti na dejstvo jednog dvooscilatornog kosmološkog modela (o čemu će biti reči u osmoj glavi disertacije).

Originalni rezultati predstavljeni u ovoj disertaciji od interesa su za dalja pručavanja crnih rupa, rane evolucije univerzuma i uopšte buduća istraživanja na polju kvantne gravitacije.

Datum prihvatanja teme, DP: 24. novembar 2014. godine

Datum odbrane, DO:

Članovi komisije, KO:

Predsednik: Prof. dr Goran S. Đorđević, redovni profesor na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Član, mentor: Prof. dr Ljubiša Nešić, redovni profesor na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Član: Prof. dr Milan Pantić, redovni profesor na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS IN NIS

KEY WORDS DOCUMENTACION

Accession number, ANO:

Identification number, INO:

Document type, DT: Monograph

Type of record, TR: Textual

Contents code, CC: PhD Thesis

Author, AU: Darko V. Radovancevic

Mentor, MN: Prof. dr Ljubisa Nesic, Full Professor at the Department of Physics of the Faculty of Sciences and Mathematics of the University of Nis

Title, TI: The Two-oscillator Models and the Free Particle Type Models in Cosmology

Language of text, LT: Serbian

Language of abstract, LA: English

Country of publication, CP: Rebublic of Serbia

Locality of publication, LP: Rebublic of Serbia

Publication year, PY: 2016.

Publisher, PB: Author's reprint

Publication place, PP: Nis, Visegradska 33

Physical description (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes), PD: 9/99/157/0/1/0/4

Scientific field, SF: Physics

Scientific discipline, SD: Theoretical Physics

Subject/Key words, S/KW: Quantum cosmology, non-Archimedean spaces, Minisuperspace cosmological models, Signature change, Noncommutativity, Black hole thermodynamics

CERIF Classification, CC: P 000, P 002, P190

UC: 539.12-1 : 524.8 + 524.882

Holding data, HD: Library

Note, N:

Abstract/Resume, AB: The theme of this PhD thesis is related to the study of minisuperspace cosmological models whose Lagrangians can be reduced to Lagrangian of the free relativistic particle or to Lagrangian of the two oscillators of the same or different frequencies.

After getting acquainted with the elements of p-adic and adelic mathematical analysis and quantum mechanics, classical and quantum cosmology, the thesis discusses the aforementioned cosmological models in classic, p-adic noncommutative approach. The study of cosmological models within the p-adic noncommutative formalism is of particular importance because both of these approaches suggest discreteness of the structure of space-time at the Planck scale which is associated with the mechanism of signature transition within Hartl-Hawking boundary condition.

After considering Milne model, in the classic section, firstly the classification of the two-oscillator models according to the form of Lagrangian is performed, concrete examples are given and then their Hamiltonians and classical actions are determined. The questions of the Hamiltonian condition and classical signature transition are especially considered.

In the p-adic part, quantum p-adic and adelic forms of these models are presented and the conditions of the existence of their vacuum p-adic states are determined.

After that noncommutative forms of the models are considered and their classical noncommutative actions and propagators are determined.

In addition to a better understanding of the early stages of the universe evolution, the study of these models will provide a better insight into the dynamics and thermodynamics of the interior of non-charged and non-rotating (Schwarzschild) black hole whose Einstein--Hilbert action can be reduced to action one of the two-oscillator cosmological model (which will be discussed in the eighth chapter of the thesis).

The original results presented in this thesis are of interest for further study of the black holes, the early evolution of the universe and further research in the field of quantum gravitation in general.

Accepted by the Scientific Board on, ASB: November 25th, 2014.

Defended on, DE:

Defended Board, DB:

President: Prof. dr Goran S. Djordjevic, Full Professor at the Department of Physics of the Faculty of Sciences and Mathematics of the University of Nis

Member, Mentor: Prof. dr Ljubisa Nesic, Full Professor at the Department of Physics of the Faculty of Sciences and Mathematics of the University of Nis

Member: Prof. dr Milan Pantic, Full Professor at the Department of Physics of the Faculty of Sciences and Mathematics of the University of Novi Sad

Ova doktorska disertacija i moj dosadašnji naučnoistraživački rad su se odvijali pod brižnim rukovodstvom prof. dr Ljubiše Nešića, redovnog profesora Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu. Naša saradnja za sve vreme mojih doktorskih studija bila je prožeta njegovom izuzetnom odgovornošću, iskrenim, beskrajno strpljivim i ljubaznim zalaganjem i podsticajima u svakom zajedničkom radu, za šta se teško mogu naći potrebne i dovoljne reči zahvalnosti i poštovanja. Na ovom mestu, ne mogu a da se ne setim i moje nastavnice fizike, Veronike Bundže, koja je, odlikujući se istim karakternim osobinama, u mene „usadila" pelcer ove naše „ljubljene nauke", kako je to jednom prilikom rekao profesor Ivan Aničin. A dalje, sve je bilo istorija...Takođe bih se zahvalio i profesoru Kamenku Miloševu na prenesenom znanju i svakom podstreku tokom mog gimnazijskog školovanja. Sa velikim poštovanjem i odgovornošću za stečeno znanje iz različitih fizičkih disciplina sećam se svih svojih profesora sa Fizičkog fakulteta u Beogradu na kome sam diplomirao teorijsku fiziku, nakon čega su kao kruna usledile doktorske studije teorijske fizike na Departmanu za fiziku u Nišu. Koristim priliku da se zahvalim svim profesorima i kolegama sa ovog Departmana na saradnji i retko viđenoj ljubaznosti. U tom smislu posebno se osećam dužnim zahvaliti se prof. dr Goranu Đorđeviću čija je pomoć, i uopšte svaka saradnja sa njim, bila od neizmernog značaja za moj naučnoistraživački rad. Dugujem mnogo i kolegama Jugoslavu Bogdanoviću, Jeleni Kukić i dr Dragoljubu Dimitrijeviću zbog njihove spremnosti na svaku vrstu podrške, pomoći i velike predusretljivosti. Zahvalio bih se, takođe, i svim svojim prijateljima, i na kraju, a pre svih, porodici bez koje sve ovo ne bi bilo moguće.

Na stogodišnjicu objavljivanja Opšte teorije relativnosti

„Razumećemo koliko je svemir jednostavan, tek onda kad dovoljno razumemo koliko je čudan.”

Džon Arčibald Viler (1911-2008)

Mojim roditeljima, Vojislavu i Milici, i bratu Ranku

Sadržaj

1 Uvod **3**

2 Elementi p-adične i adelične matematičke analize **7**

2.1 **Polje p-adičnih brojeva i ultrametrički prostor** 7

2.2 **Funkcije na polju p-adičnih brojeva** 9

2.3 **p-Adična integracija** 11

2.4 **Adeli i adelični prostor** 13

3 p-Adična i adelična kvantna mehanika **15**

3.1 **p-Adična kvantna mehanika** 15

3.2 **Adelična kvantna mehanika** 21

4 Standardna klasična i kvantna kosmologija **23**

4.1 **Ajnštajnove jednačine gravitacionog polja** 24

4.2 **Hamiltonova formulacija Opšte teorije relativnosti** 25

4.3 **Kanonska kvantizacija** 28

4.4 **Funkcionalna kvantizacija** 29

5 Minisuperprostorni kosmološki modeli **30**

5.1 **Milneov model** 31

5.2 **Dvooscilatorni modeli u kosmologiji** 35

5.2.1 **Klasifikacija modela** 36

5.2.2 **Primeri** 38

a) Multidimenzionalni Fridmanov model sa $\tilde{\phi}$ i $U(\tilde{\phi})$ 38

b) Fridmanov model sa ϕ i Λ 39

c) Fridmanov model sa ϕ i $U(\phi)$ 39

d) Modeli sa lagranžijanom oblika $L_{(1)}$ 41

5.2.3 **Klasična dejstva dvooscilatornih modela** 44

5.2.4 **Kanonski formalizam i Hamiltonov uslov** 46

5.2.5 **Signaturna izmena** 47

5.3 **Standardna kvantizacija modelâ** 50

6 p-Adična i adelična kosmologija **54**

6.1 **p-Adični i adelični Milneov model** 55

6.2 **p-Adični i adelični dvooscilatorni kosmološki modeli** . . . 58

6.3 **Signaturna izmena u p-adičnom prostor-vremenu** 61

7 **Nekomutativna kosmologija** **63**
7.1 **Klasična nekomutativnost** 64
7.2 **Dvooscilatorni modeli na nekomutativnom prostoru** . . . 65
a) Nekomutativni Fridmanov model sa ϕ i $U(\phi)$ 67
b) Nekomutativni vakuumski Kantovski-Saks model 70

8 **Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model** **74**
8.1 **Klasična dinamika** 75
8.2 **Standardna kvantna i adelična forma modela** 77
8.3 **Entropija sa kvantnom popravkom** 78

9 **Zaključak** **81**

Dodaci **83**

A **Dodatak** **83**

B **Dodatak** **84**

C **Dodatak** **85**

D **Dodatak** **86**

Literatura **87**

Biografija autora **99**

1 Uvod

Radoznalost duha i želja da se upozna i opiše priroda, već hiljadama godina su glavni motivi gotovo svih istraživača. Kroz dugi period ljudske istorije taj opis je bio isključivo mitološki. Prve filozofske teorije o kosmosu (od starogrčke reči $\kappa o \sigma \mu o \varsigma$, koja u svom izvornom značenju imao smisao reda, lepote, harmonije), potekle su od Anaksimandera i Ksenofana, grčkih filozofa iz šestog veka pre nove ere. Njihove teorije (u najopštijem smislu te reči), mada netačne, su prve napravile jasan otklon od do tada opšteprihvaćenih mitoloških predstava o svetu. Nakon ovog, sledeći važan korak, orijentisan u pravcu pokušaja razumevanja položaja čoveka u univerzumu, bila je hipoteza starih Grka o sfernom obliku Zemlje. Na ovoj ideji bazirane dalje pretpostavke, posmatranja i merenja (obima Zemlje i Meseca i uzajamnih rastojanja Zemlje, Meseca i Sunca) od strane Eratostena, Aristarha i Anaksagore bili su počeci naučnog razumevanja prirode zasnovani na logici, posmatranju i merenju.

U sledećoj etapi, opet kod starih Grka, rađaju se ideje o rasporedu i kretanju nebeskih tela u prostoru. Vremenom su se izdvojila dva modela, heliocentrični (Aristarhov) i geocentrični (Ptolomejev) model. U bici za dominantno prihvatanje, iako neistinit, pobedu je odneo Ptolomejev sistem sveta. Prevagnuli su razlozi njegove (prividne) očiglednosti i nemogućnosti daljih provera heliocentričnog modela koje su u to vreme bile povezane ne samo sa nedovoljno razvijenom tehnološkom komponentom, već i sa pogrešnim predstavama o gravitaciji i položajima zvezda u svemiru. Tek skoro dva milenijuma kasnije, Aristarhov pogled na svet je oživeo Nikola Kopernik u svom delu *De revolutionibus orbium coelestium* („O kruženju nebeskih tela”) iz 1543. godine. Nakon toga, zahvaljujući posmatračkim podacima Tiho Brahea o kretanjima nebeskih tela i na osnovu tih podataka izvedenih proračuna i zakona od strane Johana Keplera, daljim posmatranjima i merenjima Galileo Galileja, i na kraju, Njutnovom matematičkom opisu gravitacije, heliocentrični model je dobio svoju definitivnu naučnu potvrdu. Pri tome je gravitacija, kao sila koja izaziva padanje i kretanje nebeskih tela, matematički opisana u čuvenom Njutnovom delu *Philosophiae naturalis principia mathematica* („Matematički principi prirodne filozofije”) iz 1687. godine.

Ispravnost heliocentričnog modela bazirana na posmatranjima, merenjima i matematički formulisanim zakonima kretanja postavila je u narednim vekovima temelje tzv. Njutnovom modelu svemira. Ovaj model se, međutim, vremenom suočavao sa nizom nedostataka i paradoksa (Olbersov, gravitacioni,...), koji su ukazivali na manjkavosti klasičnih (Njutnovih) predstava o prostoru, vremenu, kretanju, gravitaciji,... Nedostaci su se umnožavali pojavom novih fizičkih teorija (Meksvelove elektrodinamike,...) i sa sve većim brojem otkrića u fizici (konačnost i nezavisnost od kretanja brzine prostiranja elektromagnetne interakcije, otkrića vezana za strukturu atoma, kvantne pojave,...) koja su ukazivala da se u njihovom objašnjenju ne mogu, na do tada uobičajen način, primeniti klasični koncepti. To, naravno, nije značilo neispravnost Njutnove mehanike, već je ukazivalo da ona ima granice svoga važenja iza kojih leže nove teorije koje, obuhvatajući i klasičnu mehaniku, na precizniji način opisuju prirodne pojave u svom domenu. Tako su u prvoj polovini XX veka rođene dve velike fizičke teorije, dva stuba savremene fizike, relativistička i kvantna mehanika. Dok su razvoju i oblikovanju ove druge doprineli mnogi naučnici, relativistička fizika je gotovo isključivo proizvod uma jednog čoveka – Alberta Ajnštajna. On je najpre 1905. godine formulisao relativističku mehaniku inercijalnih posmatrača koju danas zovemo Specijalna teorija relativnosti, a deset godina kasnije, 1915. godine, i njenu ekstenziju na ubrzane posmatrače i, zahvaljujući principu ekvivalencije, na posmatrače u gravitacionom polju – Opštu teoriju relativnosti. Tako se 228 godina posle Njutnovih *Principa* pojavila nova teorija gravitacije u okviru koje su, između ostalog, otklonjeni svi paradoksi sa kojima se prethodna Njutnova teorija suočavala. Od 1915. godine, kada je 25. novembra pred Pruskom akademijom nauka Albert Ajnštajn izložio svoje jednačine gravitacionog polja, pa do danas izveden je veliki broj posmatranja i eksperimenata koji su potvrdili izuzetno slaganje dobijenih rezultata sa predikcijama ove teorije. U Opštoj teoriji relativnosti gravitacija nije sila u klasičnom smislu već je u pitanju složen prostorno-vremensko-materijalni fenomen koji podrazumeva da materija svojim prisustvom zakrivljuje prostor-vreme, dok prostor-vreme svojom geometrijom određuje kretanje materije. Ono što je ostalo i dalje na snazi od Njutna jeste da je gravitacija ta koja upravlja kretanjem nebeskih tela. U tom smislu, primena Opšte teorije relativnosti kao teorije gravitacije na kosmos kao celinu otvorila je put ka razvoju nauke o njegovom nastanku i evoluciji – kosmologije, i u okviru nje, proučavanju različitih kosmoloških modela (u zavisnosti od opserviranih ili pretpostavljenih parametara vezanih za geometriju prostor-vremena i prisustvo i oblik materije u njemu).

Paralelno sa ovim teorijskim tekla su posmatračka i astronomska istraživanja. Najpre su izmerena rastojanja do vidljivih zvezda podržala shvatanje da su sve one deo jednog zvezdanog sistema koji zovemo Mlečni put. Potom su merenja rastojanja do vidljivih maglina i proučavanje njihove strukture ukazala da su one, zapravo, drugi zvezdani sistemi (galaksije). Slika univerzuma u kome živimo polako se uobličavala. Predikcija i potvrda Hablovog širenja svemira (za koje danas znamo da je ubrzano), zatim otkriće kosmičkog mikrotalasnog pozadinskog zračenja, a potom i uspešno objašnjenje geneze hemijskih elemenata u kosmosu definitivno je utvrdilo današnju važeću naučnu paradigmu o njegovom nastanku i evoluciji. Reč je, naime, o teoriji Velikog praska prema kojoj je kosmos svoju istoriju započeo naglom ekspanzijom („eksplozijom”) iz inicijalnog/kosmološkog singulariteta (čije postojanje predviđa Opšta teorija relativnosti) nakon čega se širio i hladio. Ovo je išlo u prilog pretpostavljenoj činjenici da su sve interakcije u prirodi u ranoj fazi evolucije univerzuma bile ujedinjene. Na bazi ove prepostavke fizičari danas formulišu različite teorije ujedinjenja fundamentalnih sila pre svega kroz kvantnu teoriju s obzirom na to da pretpostavljeni uslovi unifikacije podrazumevaju veoma male (kvantne) prostorne i vremenske intervale reda veličine Plankove dužine $l_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35}$ m i Plankovog vremena $t_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-44}$ s, respektivno (gde je $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 gravitaciona konstanta, $c = 299792458$ m/s brzina svetlosti u vakuumu, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Js redukovana Plankova konstanta). U tom smislu, od posebnog značaja je zasnivanje teorije kvantne gravitacije. Međutim, gravitacija se, pre svega zbog svoje geometrijske interpretacije u Opštoj teoriji relativnosti, za sada uspešno „opire” konzistentnoj kvantnoj formulaciji.

Pored kosmološkog singulariteta, Opšta teorija relativnosti predviđa postojanje i tzv. lokalnih singulariteta unutar crnih rupa. Pri tome se pokazuje da bolje razumevanje osobina ovih objekata (posebno iza horizonta događaja), kao i njihove termodinamike nužno, opet, podrazumeva kvantni pristup. U odsustvu kompletne teorije kvantne gravitacije ispostavlja se važnim razmotriti klasične kosmološke modele i njihove kvantne verzije u pristupu preko kanonske ili funkcionalne kvantizacije. Sem toga, kao što će biti pokazano, razmatranje osobina unutrašnjosti nerotirajuće i nenaelektrisane (Švarcšildove) crne rupe može se svesti na razmatranje osobina jednog minisuperprostornog, homogenog i anizotropnog vakuumskog (Kantovski-Saks) kosmološkog modela, za koji će se pokazati da se može opisati upravo kao jedan dvooscilatorni sistem.

U ovoj disretaciji će se upravo razmatrati ova posebna grupa minisuperprostornih kosmoloških modela, čiji se lagranžijani mogu svesti na lagranžijan sistema dva oscilatora i samo u jednom slučaju na lagranžijan slobodne relativističke čestice. Dinamika ovih modela biće posebno razmotrena u okviru klasičnog, p-adičnog i nekomutativnog pristupa. Dodatni motiv za razmatranje p-adične dinamike je moguća nearhimedova i/ili nekomutativna struktura prostor-vremena na Plankovoj skali [1], kao i njegova diskretizacija koju predviđaju i p-adični i nekomutativni pristup. Ispostavlja se da je u p-adičnom slučaju ova diskretnost prisutna implicitno [2], a u nekomutativnom eksplicitno preko komutacionih relacija nekomutirajućih koordinata i/ili njima konjugovanih impulsa. Pri tome, poslednji rezultati istraživanja u okviru teorije *loop* kvantne gravitacije [3] impliciraju da se upravo ova diskretnost prostor-vremena plankijanskih dimenzija može dovesti u vezu sa mehanizmom signaturne tranzicije u okviru Hartl-Hokingovog pristupa [4, 5]. Isto tako, pitanje signaturne izmene pokazuje se posebno važnim i u proučavanju ubrzane ekspanzije univerzuma [6], shvatanju pojma vremena [7] i uopšte predstavlja izazov za teoriju kvantne gravitacije [8].

Nakon uvoda, u drugoj glavi disertacije, biće predstavljeni osnovi p-adične i adelične matematičke analize, a u trećoj p-adične i adelične kvantne mehanike. U narednom delu, polazeći od jednačina gravitacionog polja Opšte teorije relativnosti, preko njene Hamiltonove formulacije, pa do kanonske i funkcionalne kvantizacije, biće prezentovani elementi standardne klasične i kvantne kosmologije. U petoj glavi, posle uvođenja pojma minisuperprostornog kosmološkog modela, biće najpre predstavljen klasičan Milneov model koji se svodi na model slobodne relativističke čestice. Nakon toga, biće izvršena jedinstvena klasifikacija svih minisuperprostornih dvooscilatornih kosmoloških modela prema obliku njihovih lagranžijana uz prezentovanje konkretnih primera. Dalje će biti određena klasična rešenja Ojler-Lagranževih jednačina, dejstva i hamiltonijani ovih modela, zatim napravljen osvrt na Hamiltonov uslov i pitanje signaturne izmene u klasičnom regionu, a potom razmotrene i standardne kvantne forme modela. U sledećoj glavi disertacije, nakon opšteg uvoda u zasnivanje p-adične i adelične kosmologije, biće proučene p-adične forme Milneovog i dvooscilatornih kosmoloških modela kroz prezentovanje njihovih p-adičnih propagatora i određivanje uslova za egzistenciju vakuumskih p-adičnih stanja. Ispostaviće se, pri tome, da su ovi uslovi isti za sve dvooscilatorne modele. Na kraju ove glave biće razmotreno i pitanje signaturne tranzicije u p-adičnom prostor-vremenu. U sedmoj glavi modeli su diskutovani u okviru nekomutativnog pristupa i pri tome su u tri primera određena nekomutativna klasična dejstva i propagatori. Tema osme glave disertacije je konkretna primena dobijenih rezultata na opis dinamike unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe kao jednog dvooscilatornog kosmološkog modela. Posebno u ovom slučaju nerotirajuće i nenaelektrisane crne rupe napisana je eksplicitna forma njene adelične talasne funkcije. Potom su, polazeći od mogućnosti interpretacije oscilatora u dvooscilatornom modelu unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe kao dva gravitaciona stepena slobode od kojih se jedan odnosi na unutrašnjost crne rupe a drugi na unutrašnjost njoj odgovarajuće „bele rupe”, primenom Fajnmen-Hibsove procedure na Viler-de Vitovu jednačinu jednog oscilatora, određeni Hokingova temperatura i entropija sa logaritamskom kvantnom korekcijom. U zaključku su istaknuti novi, originalni rezultati prezentovani u ovoj disertaciji i ukazano je na dalje moguće pravce istraživanja na ovom polju.

Na osnovu rečenog jasno je da će proučavanje ovih modela, pored boljeg razumevanja rane evolucije univerzuma i dinamike crnih rupa, pružiti i mogućnost izvođenja važnih zaključaka u oblasti kvantne gravitacije. Dodatni podstrek za istraživanja na ovom polju pružila je nedavna detekcija gravitacionih talasa emitovanih u procesu spajanja dve crne rupe [9], što je bila ne samo dugoočekivana potvrda predviđanja Ajnštajnove teorije gravitacije o postojanju gravitacionih talasa, već ujedno do sada i najneposrednija potvrda postojanja crnih rupa.

2 Elementi p-adične i adelične matematičke analize

U ovom delu biće uveden pojam p-adičnog broja i biće prezentovani elementi p-adične i adelične matematičke analize od interesa za razmatranje u narednim poglavljima disertacije.

2.1 Polje p-adičnih brojeva i ultrametrički prostor

p-Adične brojeve u matematiku je uveo nemački matematičar Kurt Hensel još krajem XIX veka. Kakvi su to brojevi? Najpre, kao što je poznato, aposolutna vrednost svaka dva racionalna broja $x, y \in \mathbb{Q}$, zadovoljava sledeće tri osobine:

$$|x| \geq 0, \text{ pri čemu je } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \tag{2.1}$$

$$|xy| = |x||y|, \tag{2.2}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \tag{2.3}$$

koje se redom nazivaju nenegativnost, homogenost i nejednakost trougla. Uopšte, svaka funkcija $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}_0^+$, sa osobinama (2.1), (2.2) i (2.3) naziva se norma nad poljem $\mathbb{Q}$. Pored apsolutne vrednosti, nad ovim poljem može se definisati još jedno netrivijalno i neekvivalentno preslikavanje $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ koje zadovoljava osobine (2.1), (2.2) i (2.3). Neka je p prost broj. Funkcija $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_0^+$ definisana na sledeći način

$$|0|_p = 0, \quad |x|_p = p^{-\gamma(x)}, \tag{2.4}$$

pri čemu je $\gamma(x)$ ceo broj takav da je

$$x = \pm p^{\gamma} \frac{m}{n}, \tag{2.5}$$

gde su m i n prirodni brojevi koji nisu deljivi sa p i koji nemaju zajednički delitelj, takođe zadovoljava (2.1), (2.2) i (2.3) i naziva se p-adična norma $|x|_p$ racionalnog broja $x \in \mathbb{Q}$ [1]. Štaviše, p-adična norma zadovoljava stroži oblik osobine (2.3) tzv. osobinu jake nejednakosti trougla

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p). \tag{2.6}$$

Inače, za normu $|\cdot|$ definisanu nad poljem racionalnih brojeva se kaže da je trivijalna ako je $|x| = 1$ za $x \neq 0$ i $|x| = 0$ za $x = 0$, dok se za norme $|\cdot|_\alpha$ i $|\cdot|_\beta$ kaže da su ekvivalentne ako i samo ako postoji pozitivan broj c takav da je $|x|_\alpha = |x|_\beta^c$, za svako $x \in \mathbb{Q}$.

Na ovom mestu važno je navesti teoremu Ostrovskog [1, 10]:

U polju racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ standardna norma $|\cdot|$ i p-adična norma $|\cdot|_p$ su jedine dve netrivijalne i neekvivalentne norme.

Ova teorema je od ključnog značaja jer ukazuje da se polje racionalnih brojeva može kompletirati, zapravo, samo na dva načina. Naime, dopunjavanjem polja $\mathbb{Q}$ graničnim vrednostima svih Košijevih nizova iz $\mathbb{Q}$ definisanih u odnosu na standardnu normu $|\cdot|$ (tj. apsolutnu vrednost broja koja se u p-adičnoj analizi označava i sa $|\cdot|_\infty$) dobija se polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, dok se kompletiranjem polja $\mathbb{Q}$ graničnim vrednostima Košijevih nizova u odnosu na p-adičnu normu $|\cdot|_p$ dobija polje tzv. p-adičnih brojeva $\mathbb{Q}_p$. Pri tome se svaki p-adični broj $x \neq 0$ može jednoznačno predstaviti u tzv. kanonskom obliku [1]

$$x = p^\gamma(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ...), \tag{2.7}$$

gde su $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ i x_i su celi brojevi takvi da je $0 \leq x_i \leq p-1$ i $x_0 > 0$ $(i = 0, 1, 2, ...)$.

Važna osobina p-adične norme je njena nearhimedičnost, koja sledi iz jake nejednakosti trougla (2.6) koju ova norma zadovoljava. Reč je o tome da u polju realnih brojeva $\mathbb{R}$ važi Arhimedov stav prema kome za svaka dva broja x i y iz $\mathbb{R}$, takva da je $x < y$, postoji prirodan broj $n \in N$ takav da je $|nx| > y$. Drugim rečima, u polju $\mathbb{R}$ uzimajući dovoljan broj puta ma koji broj, može se dobiti broj koji je veći od bilo kog drugog realnog broja. Ova činjenica je, zapravo, osnova svakog fizičkog merenja. Zato se za standardnu normu $|\cdot|_\infty$ i za polje $\mathbb{R}$ kaže da su arhimedovski. Arhimedov stav ne zadovoljava p-adična norma. Konkretno za nju važi da je $|nx|_p \leq |x|_p$ za svaki prirodan broj n. Zbog toga se za p-adičnu normu i za polje $\mathbb{Q}_p$ kaže da su nearhimedovski. Metrički prostor definisan nad poljem $\mathbb{Q}_p$ u odnosu na metriku $d_p(x, y) = |x - y|_p$ stoga spada u ultrametričke prostore.

Ovde je pravo mesto da se postavi pitanje fizičke relevantnosti razmatranja polja $\mathbb{Q}_p$. Naime, jedan od rezultata kvantne gravitacije je činjenica da je na plankijanskim rastojanjima greška merenja reda veličine Plankove dužine [11, 12]. Ovo ukazuje da u kvantnoj gravitaciji ne postoji dovoljno dobar etalon za merenje dužine, te da sam prostor nema više uobičajenu klasičnu arhimedovsku strukturu. U vezi sa tim, značajne su dve hipoteze Volovića koje je izneo u svojim radovima [13] i [14] iz 1987. godine. Prva je da se nearhimedovska geometrija prostor-vremena na Plankovoj skali, upravo iz pomenutih razloga, ne može zasnivati na polju realnih brojeva $\mathbb{R}$ već upravo na (nearhimedovskom) polju p-adičnih brojeva $\mathbb{Q}_p$. Sa druge strane, imajući u vidu moguće prisutne kvantne fluktuacije na Plankovoj skali, te da se u tom smislu geometrija nad poljem $\mathbb{R}$ realizuje sa određenom verovatnoćom i na ovim rastojanjima (a svakako na nekvantnim tj. klasičnim), Volović u drugoj hipotezi iznosi zahtev nepromenljivosti forme fizičkih zakona u odnosu na promenu polja brojeva $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$.

Što se tiče drugih matematičkih osobina, prostor $\mathbb{Q}_p$ je kompaktan, kompletan, separabilan i totalno nepovezan [1, 15]. Geometrijski oblici u njemu imaju neobične osobine.

Krug $B_\gamma(a)$ i kružnica $S_\gamma(a)$, polupre čnika p^γ sa centrom u tački $a \in \mathbb{Q}_p$, u ovom prostoru se definišu respektivno sa

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \quad |x-a|_p \leq p^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}\}, \tag{2.8}$$

$$S_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \quad |x-a|_p = p^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.9}$$

U prostoru $\mathbb{Q}_p$ za krug se može pokazati da nema granicu (rub), zatim da je svaka njegova tačka istovremeno i njegov centar, dok ako dva kruga imaju bar jednu zajedničku tačku, tada je jedan krug podskup drugog itd. Primetimo da krug B_0 predstavlja zapravo skup svih p-adičnih brojeva čija je p-adična norma manja ili jednaka od 1. B_0 se zove skup celih p-adičnih brojeva $\mathbb{Z}_p$ (analogon jediničnog intervala u realnom slučaju) i u $\mathbb{Q}_p$ ima algebarsku strukturu (pod)prstena.

2.2 Funkcije na polju p-adičnih brojeva

Analitičke funkcije na $\mathbb{Q}_p$ definišu se na sledeći način. Neka je $\mathcal{O}$ otvoren podskup od $\mathbb{Q}_p$. Za preslikavanje $f : \mathcal{O} \to \mathbb{Q}_p$ se kaže da je analitička funkcija na skupu $\mathcal{O}$ ako za svaku tačku $a \in \mathcal{O}$ postoji $\gamma \in \mathbb{Z}$ tako da je na krugu $B_\gamma(a)$ ova funkcija predstavljena konvergentnim redom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n. \tag{2.10}$$

Radijus konvergencije $r = r(f)$ je tada

$$r = p^\sigma, \quad \text{gde je} \quad \sigma = -\frac{1}{\ln p} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n} \ln |f_n|_p \right). \tag{2.11}$$

Red (2.10) će konvergirati ako i samo ako konvergira i red

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|_p^{\gamma n}. \tag{2.12}$$

U tom slučaju red (2.10) će biti moguće diferencirati ili integraliti član po član beskonačan broj puta na skupu $B_\gamma(a)$. Tako će npr. k-ti izvod od f biti

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!} (x-a)^{n-k} f^{(n)}(a). \tag{2.13}$$

Osnovne p-adične funkcije predstavljene su preko brojnih stepenih redova analognih onim u realnom slučaju. Npr. tako su:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{2.14}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \tag{2.15}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \tag{2.16}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \tag{2.17}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}. \tag{2.18}$$

Ove funkcije će biti analitičke u oblasti $G_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \quad |x|_p \leq |2p|_p\}$.

U p-adičnoj analizi od posebnog interesa su kompleksnoznačne funkcije tj. kompleksne funkcije p-adičnog argumenta. One su od posebne važnosti u zasnivanju p-adične kvantne mehanike, jer se očekuje da talasna funkcija kvantne p-adične čestice bude upravo kompleksna funkcija. Sa druge strane, s obzirom na to da se opis reprezentacija komutativnih grupa svodi na opis njihovih karaktera, u slučaju $\mathbb{Q}_p$ se pokazuje važnim razmotriti dve vrste karaktera – aditivni i multiplikativni karakter. Aditivni karakter grupe $\mathbb{Q}_p^+$ je neprekidna kompleksnoznačna funkcija $\chi_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$\chi_p(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p), \tag{2.19}$$

gde je $\{x_p\}$ razlomljeni deo p-adičnog broja x [1]

$$\{x_p\} = \begin{cases} 0, & \text{za } \gamma \geq 0 \text{ ili } x = 0, \\ p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ... x_{|\gamma|-1} p^{|\gamma|-1}), & \text{za } \gamma < 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Na polju realnih brojeva aditivni karakter je

$$\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi i x), \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Osnovne osobine aditivnog karaktera su:

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y) \quad \text{i} \quad |\chi(x)|_\infty = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}_p. \tag{2.22}$$

Multiplikativni karakter je neprekidna kompleksnoznačna funkcija na $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Q}_p \setminus \{0\}$, $\pi : \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}$ sa osobinom

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y), \quad x, y \in \mathbb{Q}_p^*. \tag{2.23}$$

Najčešće se koristi u obliku

$$\pi(x) = |x|_p^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.24}$$

Još jedna važna kompleksnoznačna funkcija je aritmetička funkcija $\lambda_p(a) : \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{C}$. Definiše se na sledeći način. Neka je $a \in \mathbb{Q}_p^*$ p-adični broj različit od nule i neka je dat u kanonskom obliku (2.7), tada je za prost broj $p \neq 2$

$$\lambda_p(a) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \gamma(a) \text{ parno,} \\ \left(\frac{a_0}{p}\right), & \text{ako je } \gamma(a) \text{ neparno i ako je } p \equiv 1(\text{mod } 4), \\ i\left(\frac{a_0}{p}\right), & \text{ako je } \gamma(a) \text{ neparno i ako je } p \equiv 3(\text{mod } 4), \end{cases} \tag{2.25}$$

a u slučaju $p = 2$

$$\lambda_2(a) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + (-1)^{a_1} i], & \text{ako je } \gamma(a) \text{ parno,} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + i]i^{a_1}(-1)^{a_2}, & \text{ako je } \gamma(a) \text{ neparno,} \end{cases} \tag{2.26}$$

gde je $\left(\frac{a_0}{p}\right)$ Ležandrov simbol. Neke od važnih osobina ove funkcije su:

$$|\lambda_p(a)|_\infty = 1, \tag{2.27}$$

$$\lambda_p(a)\lambda_p(b) = \lambda_p(a+b)\lambda_p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \tag{2.28}$$

$$\lambda_p(a)\lambda_p(-a) = 1, \tag{2.29}$$

$$\lambda_p(ac^2) = \lambda_p(a), \tag{2.30}$$

za $a, b, c, a+b \in \mathbb{Q}_p^*$. U realnom slučaju ova funkcija je definisana kao

$$\lambda_\infty(x) = \exp(-i\pi/4 \operatorname{sgn} x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.31}$$

Karakteristična Ω funkcija na polju $\mathbb{Q}_p$, koja je analogon step funkcije u realnom slučaju, se za svako $x \in \mathbb{Q}_p$ definiše na sledeći način

$$\Omega(x) = \begin{cases} 1, & |x|_p \leq 1 \quad (\text{tj. ako } x \in \mathbb{Z}_p), \\ 0, & |x|_p > 1 \quad (\text{tj. ako } x \in \mathbb{Q}_p \setminus \mathbb{Z}_p). \end{cases} \tag{2.32}$$

2.3 p-Adična integracija

Kako je polje $\mathbb{Q}_p$ lokalno kompaktna, komutativna i aditivna grupa, na njemu se može definisati pozitivna mera Hara dx koja je translaciono invarijantna tj. $d(x+a) = dx$ $(a \in \mathbb{Q}_p)$ i jedinstvena do na normirajući faktor odnosno $d(ax) = |a|_p dx$ $(a \in \mathbb{Q}_p^*)$. Ova mera se normira na prstenu celih p-adičnih brojeva zahtevom da je $\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$.

Za funkciju $f(x) \in L^1(\mathbb{Q}_p)$ se kaže da je integrabilna na $\mathbb{Q}_p$ ako postoji granična vrednost

$$\lim_{N\to\infty} \int_{B_N} f(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{N} \int_{S_\gamma} f(x)\, dx, \tag{2.33}$$

koja se u tom slučaju zove i integral funkcije f na $\mathbb{Q}_p$ i označava sa

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\,dx = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \int_{S_\gamma} f(x)\,dx. \tag{2.34}$$

Formula za smenu promenljivih pri p-adičnoj integraciji funkcije $f \in L^1(D)$ glasi

$$\int_D f(x)\,dx = \int_{D'} f(x(y))|x'(y)|_p\,dy, \tag{2.35}$$

uz uslov da je $x(y)$ analitički difeomorfizam na otvoreno-zatvorenom skupu $D' \subset \mathbb{Q}_p$ i $x(y) \neq 0$ za svako $y \in D'$.

Veliki broj rešenih p-adičnih integrala, za različite oblike podintegralnih funkcija sa postupkom rešavanja može se naći u [1] i [16].

Neki rešeni, često korišćeni, p-adični integrali su:

$$\int_{B_\gamma} dx = p^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}, \tag{2.36}$$

$$\int_{S_\gamma} dx = p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad \gamma \in \mathbb{Z}, \tag{2.37}$$

integrali od karaktera $\chi_p(\xi x)$:

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\xi x)\,dx = \begin{cases} p^\gamma, & |\xi|_p \leq p^{-\gamma}, \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+1}, \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\xi x)\,dx = \begin{cases} p^\gamma \left(1 - \frac{1}{p}\right), & |\xi|_p \leq p^{-\gamma}, \\ -p^{\gamma-1}, & |\xi|_p = p^{-\gamma+1}, \\ 0, & |\xi|_p \geq p^{-\gamma+2}, \end{cases} \tag{2.39}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\,dx = 0, \quad \xi \neq 0. \tag{2.40}$$

Posebna vrsta p-adičnih integrala, koji za integrand imaju karakter oblika $\chi_p(\alpha x^2 + \beta x)$, gde je $\alpha \neq 0$, su Gausovi integrali:

za $|4\alpha|_p \geq p^{2-2\gamma}$ i $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x)\,dx = \begin{cases} \frac{\lambda_p(\alpha)}{|2\alpha|_p^{1/2}} \chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), & \left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p = p^\gamma, \\ 0, & \left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p \neq p^\gamma, \end{cases} \tag{2.41}$$

za $p \neq 2$, $|\alpha|_p = p^{1-2\gamma}$ i $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{S_\gamma} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x)\,dx = \begin{cases} \frac{\lambda_p(\alpha)\chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) - \frac{1}{\sqrt{p}}}{|\alpha|_p^{1/2}}, & |\beta|_p \leq \frac{1}{p^{\gamma-1}}, \\ 0, & |\beta|_p \geq \frac{1}{p^{\gamma-2}}, \end{cases} \tag{2.42}$$

za $p \neq 2$ i $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x)\, dx = \begin{cases} p^\gamma \Omega(p^\gamma |\beta|_p), & |\alpha|_p p^{2\gamma} \leq 1, \\ \frac{\lambda_p(\alpha)}{|2\alpha|_p^{1/2}} \chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \Omega\left(p^{-\gamma}\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p\right), & |\alpha|_p p^{2\gamma} > 1, \end{cases} \tag{2.43}$$

za $p = 2$ i $\gamma \in \mathbb{Z}$

$$\int_{B_\gamma} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x)\, dx = \begin{cases} 2^\gamma \Omega(2^\gamma |\beta|_2), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} \leq 1, \\ \frac{\lambda_2(\alpha)}{|2\alpha|_2^{1/2}} \chi_2\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \delta(|\beta|_2 - 2^{1-\gamma}), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} = 2, \\ \frac{\lambda_2(\alpha)}{|2\alpha|_2^{1/2}} \chi_2\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \Omega(2^\gamma |\beta|_2), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} = 4, \\ \frac{\lambda_2(\alpha)}{|2\alpha|_2^{1/2}} \chi_2\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \Omega\left(2^{-\gamma}\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_2\right), & |\alpha|_2 2^{2\gamma} \geq 8, \end{cases} \tag{2.44}$$

po celom $\mathbb{Q}_p$ za $\alpha \neq 0$

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\alpha x^2 + \beta x)\, dx = \frac{\lambda_p(\alpha)}{|2\alpha|_p^{1/2}} \chi_p\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right). \tag{2.45}$$

Delta funkcija δ, koja se javlja u prethodnim izrazima, je data sa

$$\delta(|\beta|_p - p^\gamma) = \begin{cases} 1, & |\beta|_p = p^\gamma, \\ 0, & |\beta|_p \neq p^\gamma. \end{cases} \tag{2.46}$$

2.4 Adeli i adelični prostor

Kako što je već rečeno, polje racionalnih brojeva nije kompletno jer u njemu nije konvergentan svaki Košijev niz bilo u odnosu na standardnu bilo u odnosu na p-adičnu normu. Kompletiranjem ovog polja tako da sadrži granične vrednosti svih svojih Košijevih nizova u odnosu na stadndardnu ili p-adičnu normu dobija se, respektivno, polje realnih odnosno polje p-adičnih brojeva. Ova polja su, dakle, kompletna jer je u njima svaki konvergentan niz Košijev, i obrnuto – svaki Košijev niz je konvergentan. S obzirom na to da se kosmološki modeli generalno mogu razmatrati nad oba polja može se postaviti pitanje kako da rezultate koji se dobijaju u p-adičnom slučaju interpretiramo u okviru p-adične teorije i uopšte kako da ih povežemo sa rezultatima dobijenim u standardnom, realnom, pristupu. Važnu ulogu u tom smislu ima tzv. adelična analiza [17], odnosno analiza zasnovana na adelima koje je u matematiku prvi uveo francuski matematičar Ševalije. Naime, pod adelom a se podrazumeva beskonačni niz brojeva oblika

$$a = (a_\infty, a_2, a_3, ..., a_p, ...), \tag{2.47}$$

gde je $a_\infty \in \mathbb{R}$ realan broj, dok je $a_p \in \mathbb{Q}_p$ i pri čemu važi da je $a_p \in \mathbb{Z}_p$ za sve osim za konačno mnogo prostih brojeva p. Skup svih adela $\mathcal{A}$ ima strukturu prstena u odnosu na operacije sabiranja i množenja adela respektivno definisane sa

$$\begin{aligned} a + b &= (a_\infty, a_2, a_3, ..., a_p, ...) + (b_\infty, b_2, b_3, ..., b_p, ...) \\ &= (a_\infty + b_\infty, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ..., a_p + b_p, ...), \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$ab = (a_\infty, a_2, a_3, ..., a_p, ...)(b_\infty, b_2, b_3, ..., b_p, ...) = (a_\infty b_\infty, a_2 b_2, a_3 b_3, ..., a_p b_p, ...). \quad (2.49)$$

Norma na $\mathcal{A}$ se može uvesti na sledeći način

$$|a| = |(a_\infty, a_2, a_3, ..., a_p, ...)| = \prod_{v=\infty,2,3,...} |a_v|_v. \quad (2.50)$$

Slično, aditivni karakter na $\mathcal{A}$ je

$$\chi(x) = \prod_{v=\infty,2,3,...} \chi_v(x_v). \quad (2.51)$$

Skup adela $\mathcal{A}$ može se predstaviti i kao

$$\mathcal{A} = \bigcup_M \left(\mathbb{R} \times \prod_{p\in M} \mathbb{Q}_p \times \prod_{p\notin M} \mathbb{Z}_p \right), \quad (2.52)$$

gde je M konačan skup prostih brojeva. Može se pokazati da je $\mathcal{A}$ lokalno kompaktan topološki prostor ako se u njemu uvede tzv. adelična topologija čiju bazu čine otvoreni skupovi tipa

$$\mathcal{O}_\infty \times \prod_{p\in M} \mathcal{O}_p \times \prod_{p\notin M} \mathbb{Z}_p, \quad (2.53)$$

pri čemu su $\mathcal{O}_\infty$ i $\mathcal{O}_p$ otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$ respektivno.

Pri tome se pokazuje da važe i sledeći izrazi:

$$|x|_\infty \prod_p |x|_p = 1, \quad x \in \mathbb{Q}^*, \quad (2.54)$$

$$\chi_\infty(x) \prod_p \chi_p(x) = 1, \quad x \in \mathbb{Q}, \quad (2.55)$$

$$\lambda_\infty(x) \prod_p \lambda_p(x) = 1, \quad x \in \mathbb{Q}^*, \quad (2.56)$$

koji se nazivaju adeličnim formulama.

3 p-Adična i adelična kvantna mehanika

Prvi koraci u pokušaju formulacije p-adične kvantne mehanike su učinjeni od strane Beltrametija i Kasinelija još 1972. godine [18]. Zaključili su da se na standardan način ova teorija ne može konstruisati. Nakon toga nisu vršena dalja istraživanja sve do 1984. godine kada su Vladimirov i Volović pokušali da primene p-adičnu matematiku u teoriji superpolja. Nakon toga, a posebno nakon rada Volovića [13] iz 1987. godine, pojavio se niz radova o p-adičnoj teoriji struna, i radi pokušaja izgradnje kvantne teorije na p-adičnim strunama razmatrana je izgradnja p-adične kvantne mehanike [19, 20, 21, 22, 23].

3.1 p-Adična kvantna mehanika

U kanonskoj, Dirakovoj, (standardnoj) interpretaciji kvantne mehanike svako stanje nekog kvantno-mehaničkog sistema je opisano vektorom $|\psi\rangle$ jedinične norme u Hilberovom prostoru stanja $\mathcal{H}$ i obrnuto (sa neodređenošću do na fazni faktor). U koordinatnoj (talasnoj) reprezentaciji u jednodimenzionalnom slučaju (koji se posle lako generališe) ovi apstraktni vektori stanja postaju kompleksne funkcije realnog argumenta $\psi : \mathbb{Q}_\infty \to \mathbb{C}$ (polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ se u p-adično/adeličnom pristupu uobičajeno označava i sa $\mathbb{Q}_\infty$) date sa $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$. Na ovaj način se sa Hilbertovog prostora stanja $\mathcal{H}$ prelazi na prostor svih po modulu kvadratno integrabilnih funkcija (konačne norme) $\psi(x)$ koji se označava sa $L_2^{(x)}(\mathbb{R})$. Na putu ka formulaciji talasne reprezentacije p-adične kvantne mehanike moguća su dva pristupa. U jednom je talasna funkcija preslikavanje tipa $\psi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$, a u drugom $\psi : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$. Većina istraživača smatra da prvi pristup vodi konzistentnijoj p-adičnoj generalizaciji standardne kvantne mehanike. Na ovom mestu se može postaviti pitanje da li ova generalizacija može biti direktna, u smislu prostog „preslikavanja" formula iz standardne kvantne mehanike u p-adičnu. Pokazuje se da to nije moguće.

Razlika između standardne i p-adične kvantne mehanike može se uočiti na primeru delovanja operatora kanonično konjugovanih opservabli. Naime, u standardnoj kvantnoj mehanici za dve opservable $\hat{A}$ i $\hat{B}$ kaže se da su kanonično konjugovane ako zadovoljavaju komutacionu relaciju

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar. \tag{3.1}$$

Npr. u slučaju jednodimenzionalne čestice kanonično konjugovane opservable su operatori koordinate $\hat{x}$ i impulsa $\hat{p}$ koji, prema prethodnom, zadovoljavaju komutacionu relaciju

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \tag{3.2}$$

Operator koordinate i operator impulsa (koji deluju u Hilbertovom prostoru stanja $\mathcal{H}_x$), se u koordinatnoj reprezentaciji, u prostoru kvadratno integrabilnih funkcija $L_2^{(x)}(\mathbb{R})$, realizuju kao operator množenja odnosno diferenciranja respektivno, tj.

$$\hat{x}\left|\psi\right\rangle \to x\psi(x), \tag{3.3}$$

pri čemu domen čine sve po modulu kvadratno integrabilne funkcije $\psi(x) \in L_2^{(x)}(\mathbb{R})$ za koje su i funkcije $x\psi(x)$ kvadratno integrabilne, i slično

$$\hat{p}\left|\psi\right\rangle \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x), \tag{3.4}$$

pri čemu u ovom slučaju domen čine sve diferencijabilne i po modulu kvadratno integrabilne funkcije $\psi(x) \in L_2^{(x)}(\mathbb{R})$ čiji su izvodi takođe po modulu kvadratno integrabilni.

Kada je u pitanju dinamika standardne kvantne mehanike, u Dirakovom formalizmu, ona se realizuje preko unitarnog operatora evolucije sistema $\hat{U}(t-t_0,t_0)$, odnosno korespondentnog hermitskog operatora $\hat{H}(t)$ koji se zove hamiltonijan sistema. U slučaju konzervativnih sistema (kakvi u suštini i jesu svi mikro sistemi) hamiltonijan nije funkcija vremena i sa operatorom evolucije je povezan na sledeći način

$$\hat{U}(t-t_0) = \exp[-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}]. \tag{3.5}$$

Preko evolucionog operatora u kvantnoj mehanici se zadaje zakon kretanja. Njegov integralni oblik u Šredingerovoj slici ima sledeću formu

$$\hat{U}(t-t_0,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle = \left|\psi(t)\right\rangle. \tag{3.6}$$

U jednodimenzionalnom slučaju množeći skalarno ovaj izraz sa leve strane sa $\langle x|$ dobija se njegova koordinatna reprezentacija tj. integralni oblik zakona kretanja, ali ovaj put u prostoru po modulu kvadratno integrabilnih funkcija $L_2^{(x)}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x,t;y,t_0)\psi(y,t_0)\,dy = \psi(x,t), \tag{3.7}$$

gde je $\mathcal{K}(x,t;y,t_0) = \langle x|\hat{U}(t-t_0,t_0)|y\rangle = \langle x,t|y,t_0\rangle$ kernel (jezgro) evolucionog operatora $\hat{U}$, tzv. propagator. Zakon kretanja u diferencijalnoj formi je poznat kao Šredingerova jednačina

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{H}(t)\left|\psi(t)\right\rangle. \tag{3.8}$$

Nakon ovog kratkog osvrta na neke pojmove iz standardne kvantne mehanike, treba reći da direktno uopštavanje prethodnih izraza na p-adičnu kvantnu mehaniku nije moguće iz više razloga. Najpre, što se tiče desne strane od (3.3) uopštavanje na p-adični slučaj bi podrazumevalo realizaciju množenja

$$x \cdot \psi(x), \tag{3.9}$$

pri čemu je $x \in \mathbb{Q}_p$ i $\psi(x) \in \mathbb{C}$, što nema smisla (i slično u drugim izrazima). Drugo, diferenciranje u polju $\mathbb{Q}_p$ na način kao sa desne strane od (3.4) nije moguće. Treće, u standardnoj kvantnoj mehanici skup $\{U(t) : -\infty < t < +\infty\}$ čini, zapravo, jednu jednoparametarsku Lijevu grupu sa hamiltonijanom $\hat{H}$ kao generatorom koja je homeomorfna slika aditivne, Abelove, grupe $\{t : -\infty < t < +\infty\}$ vremenskih translacija. Drugim rečima, s obzirom na način delovanja evolucionog operatora na talasnu funkciju, hamiltonijan možemo smatrati generatorom vremenskih translacija u standardnoj kvantnoj mehanici. Na isti način može se pokazati da je operator impulsa čestice generator prostornih translacija. U p-adičnoj kvantnoj mehanici ovo nije slučaj jer je polje $\mathbb{Q}_p$ totalno nepovezano te uzastopna primena infinitezimalnih transformacija nikada neće dati konačnu transformaciju. Jedna od posledica svega pomenutog jeste da u p-adičnoj kvantnoj mehanici ne postoji adekvatan analogon Šredingerove jednačine. Pomenuti problemi su generalno posledica zasnivanja p-adične kvantne mehanike na kompleksnim talasnim funkcijama p-adičnog argumenta i, stoga, nemogućnosti njihovog diferenciranja na standardan način. U cilju prevazilaženja ovog problema i zasnivanja diferencijalne formulacije p-adične kvantne mehanike učinjena su dva pokušaja bazirana na uvođenju pseudodiferencijalnih operatora od strane Vladimirova i Dragovića [24, 25]. Ovaj pristup je još uvek fazi razvoja te su za sada rezultati koji se dobijaju u okviru njega interesantniji više sa matematičke strane.

Sumirajući prethodno može se reći da u zasnivanju p-adične kvantne mehanike jednostavno prepisivanje formula iz kanonske standardne kvantne mehanike nije moguće. U tom smislu i pitanje: da li postoji formulacija standardne kvantne mehanike koja bi mogla poslužiti kao osnov za formulisanje p-adične kvantne mehanike? Odgovor je pozitivan. Reč je Fajnmenovoj formulaciji zasnovanoj na funkcionalnim integralima tj. integralima po trajektorijama. Prvi koraci ka ovoj formulaciji kvantne mehanike, pored Šredingerove i Hajzenbergove formulacije koje su tada već postojale (i bile objedinjene u apstraktnom kanonskom Dirakovom formalizmu), učinjeni su 1933. godine. Te godine Dirak je izveo izraz za amplitudu prelaza preko dejstva sistema S duž klasične trajektorije (na kojoj S ima ekstremalnu vrednost) [26].

Razrađujući ovu Dirakovu ideju Ričard Fajnmen je 1933. godine zasnovao kvantni funkcionalni formalizam koji danas zovemo Fajnmenovom ili funkcionalnom formulacijom kvantne mehanike ili formulacijom kvantne mehanike preko integrala po trajektorijama. Centralni objekat u Fajnmenovom pristupu jeste amplituda prelaza $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ iz inicijalnog $|x_i, t_i\rangle$ u finalno stanje $|x_f, t_f\rangle$ kvantnog sistema, koja se naziva još i Fajnmenov kernel (propagator) i zapravo predstavlja jezgro evolucionog operatora koji sistem prevodi iz početnog u finalno stanje. Fajnmen je pokazao da se ovaj propagator dobija sumacijom doprinosa amplituda prelaza između svih međustanja tj. sumacijom po svim trajektorijama u faznom prostoru (tzv. *path* integral) između inicijalnog i finalnog stanja kvantnog sistema (a ne samo, kao kod Diraka, duž klasične putanje) [27, 28]. Fajnmenov propagator za specijalan ali relevantan jednodimenzionalni slučaj ima sledeći oblik

$$\langle x'', t''|x', t'\rangle = \mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \int_{(x',t')}^{(x'',t'')} \chi_\infty \left(-\frac{1}{2\pi\hbar} S(q)\right) \mathcal{D}q, \tag{3.10}$$

gde je $S(q) = \int_{t'}^{t''} L(q, \dot{q}, t)$ dejstvo, a $L(q, \dot{q}, t) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q)$ lagranžijan jednodimenzionalne čestice mase m i potencijalne energije $V(q)$ koja prelazi iz stanja $|x', t'\rangle$ u stanje $|x'', t''\rangle$. Kao što se vidi u ovom slučaju, integracija se svodi samo na integraciju po trajektorijama u konfiguracionom prostoru (konfiguracioni *path* integral). U slučaju da klasično dejstvo $S^{cl} = S^{cl}(x'', t''; x', t')$ ima kvadratičnu formu, izraz (3.10) se svodi na [29]

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial x'' \partial x'}\right)^{1/2} \chi_\infty \left(-\frac{1}{2\pi\hbar} S^{cl}\right), \tag{3.11}$$

dok se u dvodimenzionalnom slučaju dobija

$$\mathcal{K}(x'', y'', t''; x', y', t') = \frac{1}{2\pi i\hbar} \left[\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial x'' \partial x'} & \frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial x'' \partial y'} \\ \frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial y'' \partial x'} & \frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial y'' \partial y'} \end{pmatrix}\right]^{1/2} \chi_\infty \left(-\frac{1}{2\pi\hbar} S^{cl}\right). \tag{3.12}$$

Više detalja koji se odnose na algebarske osobine propagatora, koje su korišćene u dobijanju prethodnih izraza, može se naći u [28], [30] i [31].

Ono što treba napomenuti jeste da je Fajnmenova formulacija standardne kvantne mehanike u potpunosti ekvivalentna kanonskoj (Dirakovoj). U tom smislu, rezultati koji se dobijaju u oba pristupa za isti kvantni sistem su identični. Međutim, treba istaći da se u operatorskom pristupu rezultati dobijaju mnogo brže i jednostavnije. Pristup preko integrala po trajektorijama (u faznom ili konfiguracionom prostoru) doprinosi mnogo boljem razumevanju i interpretaciji kvantnih pojava. Naime, ovaj pristup nam ukazuje da, opisno rečeno, prelazu sistema iz jednog kvantnog stanja u drugo, i uopšte nekoj kvantnoj pojavi, doprinose sve mogućnosti načina realizacije jednog takvog prelaza tj. pojave. U klasičnoj mehanici sistem evoluira isključivo duž klasične trajektorije na kojoj dejstvo ima ekstremalnu vrednost. U kvantnoj mehanici, prema Fajnmenovoj interpretaciji, dozvoljene su sve mogućnosti da se neka pojava desi ali sa različitim verovatnoćama. Drugim rečima, za neki kvantni sistem ne može se reći tačno duž koje trajektorije u faznom prostoru evoluira. Sve o čemu se može govoriti su samo verovatnoće, i, naravno, njihov ukupan zbir tj. amplituda prelaza kojoj upravo najveći doprinos dolazi od mogućnosti tranzicije duž klasične trajektorije. Ova trajektorija je, dakle, u kvantnoj mehanici trajektorija sa najvećom verovatnoćom i samim tim najvećim doprinosom konačnom ishodu neke pojave, ali ne i jedina.

U zasnivanju p-adične kvantne mehanike bilo je više pokušaja formulisanja p-adičnog funkcionalnog formalizma [32, 33, 34, 35, 36]. Pristup Zelenova [37], u kome se kao ravnopravne p-adične promenljive tretiraju prostorna i vremenska koordinata, pokazao se najdoslednijim. U okviru ovog pristupa izraz (3.7) omogućava da se na analogan i konzistentan način u p-adičnoj kvantnoj mehanici zada operator evolucije $U(t)$, tj. njegovo delovanje na p-adične talasne funkcije $\psi_p(x)$, u integralnoj formi preko korespondentnog p-adičnog propagatora $\mathcal{K}_t(x,y)$

$$U(t)\psi_p(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}_t(x,y)\psi_p(y)\,dy, \tag{3.13}$$

što zapravo predstavlja integralni oblik zakona kretanja u jednodimenzionalnom slučaju u p-adičnoj kvantnoj mehanici. Pri tome su $\psi_p(x)$ sada iz prostora $L_2^{(x)}(\mathbb{Q}_p)$ kompleksnih, kvadratno integrabilnih u odnosu na meru Hara, funkcija p-adičnog argumenta. Inače, umesto rešavanja svojstvenog problema hamiltonijana, kako je to ubičajeno u standardnoj kvantnoj mehanici, u p-adičnom slučaju se rešava svojstveni problem operatora evolucije

$$U(t)\psi_p^{\alpha\beta}(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}_t(x,y)\psi_p^{\alpha\beta}(y)\,dy = \chi_p(E_\alpha(t))\psi_p^{\alpha\beta}(x). \tag{3.14}$$

U ovom izrazu su $\chi_p(E_\alpha(t))$ p-adične svojstvene vrednosti koje odgovaraju p-adičnim svojstvenim stanjima $\psi_p^{\alpha\beta}(x)$ evolucionog operatora. E_α su p-adične svojstvene energije, dok indeksi α i β označavaju svojstvene energetske nivoe i njihovu degeneraciju, respektivno.

U svakom slučaju, može se reći da su sve informacije o dinamičkoj evoluciji nekog p-adičnog sistema sadržane u p-adičnom propagatoru $\mathcal{K}_p$ koji predstavlja jezgro p-adičnog evolucionog operatora $U(t)$. Odatle i potreba njegovog određivanja za dati sistem. Na ovom mestu na scenu stupa primena metode integrala po trajektorijama. Prvi p-adični funkcionalni integral za slučaj linearnog harmonijskog oscilatora odredio je Zelenov u citiranom radu [37]. Ono što se dalje pokazalo jeste da je njegov pristup bio validan ne samo u ovom slučaju već i za sve sisteme sa kvadratičnim oblikom klasičnog p-adičnog dejstva. Štaviše, Dragović i Đorđević pokazuju [38, 39, 40] da je za sve jednodimenzionalne sisteme sa kvadratičnim klasičnim p-adičnim dejstvom $S_p^{cl} = S_p^{cl}(x'',t'';x',t')$ p-adični propagator

$$\mathcal{K}_p(x'',t'';x',t') = \lambda_p\left(-\frac{1}{4\pi\hbar}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial x''\partial x'}\right)\left|\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial x''\partial x'}\right|_p^{1/2}\chi_p\left(-\frac{1}{2\pi\hbar}S_p^{cl}\right). \tag{3.15}$$

Sa druge strane, kao što je već rečeno, u realnom slučaju za sve jednodimenzionalne sisteme sa kvadratičnim klasičnim dejstvom Fajnmenov propagator ima isti oblik (3.11). Pri tome je važno uočiti da se izraz (3.11) može napisati u obliku analognom sa (3.15)

$$\mathcal{K}_\infty(x'',t'';x',t') = \lambda_\infty\left(-\frac{1}{4\pi\hbar}\frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial x''\partial x'}\right)\left|\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial x''\partial x'}\right|_\infty^{1/2}\chi_\infty\left(-\frac{1}{2\pi\hbar}S^{cl}\right). \tag{3.16}$$

Za dekuplovani kvadratični sistem sa dva stepena slobode Nešić dobija [41]

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_p(x'',y'',t'';x',y',t') &= \lambda_p\left(-\frac{1}{4\pi\hbar}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial x''\partial x'}\right)\lambda_p\left(-\frac{1}{4\pi\hbar}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial y''\partial y'}\right)\\ &\times \left|\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial x''\partial x'}\right|_p^{1/2}\left|\frac{1}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial y''\partial y'}\right|_p^{1/2}\chi_p(-\frac{1}{2\pi\hbar}S_p^{cl}). \qquad (3.17)\end{aligned}$$

Dalje se, u jednodimenzionalnom slučaju, zamenom p-adične talasne funkcije $\psi_p(x)$ u (3.13) funkcijama $\Omega(|x|_p)$, $\Omega(p^\nu|x|_p)$ i $\delta(p^\nu - |x|_p)$ dobija respektivno da je

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K}_p(x,t;y,t_0)\Omega(|y|_p)\,dy = \int_{|y|_p\le 1}\mathcal{K}_p(x,t;y,t_0)\,dy = \Omega(|x|_p), \qquad (3.18)$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K}_p(x,t;y,t_0)\Omega(p^\nu|y|_p)\,dy = \int_{|y|_p\le p^{-\nu}}\mathcal{K}_p(x,t;y,t_0)\,dy = \Omega(p^\nu|x|_p), \qquad (3.19)$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{K}_p(x,t;y,t_0)\delta(p^\nu-|y|_p)\,dy = \int_{|y|_p= p^{\nu}}\mathcal{K}_p(x,t;y,t_0)\,dy = \delta(p^\nu-|x|_p), \qquad (3.20)$$

gde je $\nu\in\mathbb{Z}$. Upoređujući (3.18)-(3.20) sa (3.14) može se zaključiti da su $\Omega(|x|_p)$, $\Omega(p^\nu|x|_p)$ i $\delta(p^\nu - |x|_p)$ svojstvena stanja evolucionog operatora za svojstvenu vrednost energije $E_\alpha = 0$, tj. u pitanju su tzv. vakuumska p-adična stanja. Pri tome je $\Omega(|x|_p)$ najjednostavnije, osnovno, vakuumsko stanje. Dalje rešavajući (3.18)-(3.20) za konkretan oblik p-adičnog propagatora $\mathcal{K}_p(x,t;y,t_0)$ razmatranog p-adičnog modela mogu se odrediti i uslovi egzistencije njegovih vakuumskih p-adičnih stanja. Pitanje egzistencije stanja $\Omega(|x|_p)$ je od presudne važnosti za konstruisanje adeličnih talasnih funkcija modela.

Ono što treba pomenuti na kraju ovog odeljka jeste da se u ovom pristupu p-adičnoj kvantnoj mehanici polazi od lagranžijana i odgovarajućih Ojler-Lagranževih jednačina koje u p-adičnom slučaju imaju istu formu kao i u klasičnom ali sa promenljivima iz polja $\mathbb{Q}_p$. U cilju dobijanja p-adičnih propagatora za neki sistem potrebno je rešiti p-adične Ojler-Lagranževe jednačine i za date početne uslove odrediti njihova p-adična partikularna rešenja. Njihovom zamenom u p-adični lagranžijan i potom njegovom p-adičnom integracijom po p-adičnom vremenu dobija se klasično p-adično dejstvo koje ima isti oblik kao i u klasičnom slučaju (uz uslov da vrednosti p-adičnih promenljivih pripadaju domenu definicije i konvergencije p-adičnih funkcija koje se javljaju u izrazu za dejstvo). Činjenica da lagranžijan, Ojler-Lagranževe jednačine i dejstvo za neki kvantni sistem imaju iste klasične i p-adične forme zapravo je odraz pomenute Volovićeve hipoteze o invarijantnosti dinamike fizičkih sistema u odnosu na promenu polja $\mathbb{R}\leftrightarrow\mathbb{Q}_p$ [13, 14]. Sa druge strane, gotovo identični oblici formula za propagatore kvadratičnih sistema (sistema sa kvadratičnim oblikom dejstva) nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$ ukazuju na mogućnost adelizacije odnosno uopštavanja rezultata dobijenih u p-adičnoj kvantnoj mehanici.

3.2 Adelična kvantna mehanika

Već sama činjenica da važe adelične formule (2.54)-(2.56), koje povezuju vrednosti funkcija u dva polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$, ukazuje na mogućnost objedinjavanja rezultata standardne i p-adične kvantne mehanike. Signal u tom smeru su bili svakako i malopre pomenuti, po formi, identični izrazi za propagatore kvadratičnih sistema dobijeni u okviru standardnog i p-adičnog kvantnog pristupa. Sa druge strane, pitanje zavisnosti rezultata koje daje p-adična kvantna mehanika od prostog broja p (kao parametra), kao i pitanje njihove interpretacije i povezanosti sa rezultatima standardne kvantne mehanike definitivno je ukazalo na nužnost formulacije nove, opštije, tzv. adelične kvantne mehanike.

Centralni objekat adelične kvantne mehanike [42, 43] je adelična talasna funkcija koja je kompleksna funkcija adeličnog argumenta $\Psi^{(adel.)} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ definisana sa

$$\Psi^{(adel.)}(x) = \Psi_\infty(x) \prod_{p \in M} \Psi_p(x) \prod_{p \notin M} \Omega(|x|_p), \tag{3.21}$$

gde je $\Psi_\infty(x)$ talasna funkcija u standardnom slučaju, $\Psi_p(x)$ su p-adične talasne funkcije koje predstavljaju p-adična stanja modela različita od $\Omega(|x|_p)$. M je skup konačno mnogo prostih brojeva (ako ne bi bio konačan, adelična talasna funkcija $\Psi^{(adel.)}(x)$ ne bi više pripadala Hilbertovom prostoru nad adelima). Argumenti funkcija u prethodnom izrazu, mada pripadaju različitim poljima, radi jednostavnosti formalno su označeni istim slovom x. Tako je u adeličnoj talasnoj funkciji $\Psi^{(adel.)}(x)$ argument $x \in \mathcal{A}$, u standardnoj talasnoj funkciji $\Psi_\infty(x)$ je $x \in \mathbb{R}$, dok su u $\Psi_p(x)$ i $\Omega(|x|_p)$ argumenti iz polja p-adičnih brojeva tj. $x \in \mathbb{Q}_p$.

Adelična kvantna dinamika je opisana adeličnim analogonom p-adičnog zakona kretanja (3.13)

$$U(t'', t')\Psi^{(adel.)}(x) = \prod_{v=\infty,2,3,\dots} \int_{\mathbb{Q}_v} \mathcal{K}_v(x_v, t''_v; y_v, t'_v)\Psi_v(y_v)\, dy_v. \tag{3.22}$$

Svojstveni problem evolucionog operatora u adeličnom slučaju ima oblik

$$U(t)\Psi^{(adel.)}_{\alpha\beta} = \chi(E_\alpha t)\Psi^{(adel.)}_{\alpha\beta}(x), \tag{3.23}$$

gde je $E_\alpha = (E_\infty, E_2, ..., E_p, ...)$ svojstvena adelična energija, $\psi^{(adel.)}_{\alpha\beta}(x)$ su svojstvena adelična stanja i $\alpha = (\alpha_\infty, \alpha_2, ..., \alpha_p, ...)$ i $\beta = (\beta_\infty, \beta_2, ..., \beta_p, ...)$ adelični indeksi koji označavaju svojstvene energetske nivoe i njihovu degeneraciju, respektivno.

Pri tome je najjednostavnije adelično vakuumsko stanje oblika

$$\Psi^{(adel.)}_0(x) = \Psi_{\infty,0}(x) \prod_p \Omega(|x|_p), \tag{3.24}$$

gde je $\Psi_{\infty,0}(x)$ vakuumsko stanje u realnom slučaju.

Na ovom mestu treba ukazati na mogućnost interpretacije rezultata p-adične kvantne mehanike u okviru formalizma adelične koja kao opštija obuhvata i p-adičnu i standardnu kvantnu mehaniku. Naime, kao što je poznato, rezultati svih merenja pripadaju skupu racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. To znači da bi i teorijski rezultati trebali biti interpretirani u ovom skupu brojeva. Sa druge strane, skup racionalnih brojeva je zajednički za oba polja, i za $\mathbb{Q}_p$ i za $\mathbb{R}$. Zbog toga argumenti funkcija u realnom i p-adičnom slučaju (što će u razmatranju određenih kosmoloških modela u ovoj disertaciji biti tzv. minisuperprostorne koordinate izražene u jedinicama Plankove dužine l_{pl}) trebaju biti racionalni brojevi. Pri tome, s obzirom na činjenicu da je $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$, argumenti funkcija mogu uzimati vrednosti ili iz skupa $\mathbb{Z}$ ili iz skupa $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Niže u tekstu biće pokazano da ovaj zahtev za racionalnim vrednostima argumenata realnih i p-adičnih funkcija ima za posledicu diskretizaciju prostor-vremena na Plankovoj skali.

Usvajajući i u adeličnoj kvantnoj mehanici uobičajenu interpretaciju kvadrata modula talasne funkcije kao gustine verovatnoće, konkretno za adeličnu talasnu funkciju (3.21) je

$$\left|\Psi^{(adel.)}(x)\right|_\infty^2 = |\Psi_\infty(x)|_\infty^2 \prod_{p\in M} |\Psi_p(x)|_\infty^2 \prod_{p\notin M} \Omega(|x|_p), \tag{3.25}$$

jer je $\Omega^2(|x|_p) = \Omega(|x|_p)$. Specijalno u slučaju vakuumskog adeličnog stanja (3.24) je

$$\left|\Psi_0^{(adel.)}(x)\right|_\infty^2 = \begin{cases} |\Psi_{\infty,0}(x)|_\infty^2, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{3.26}$$

Prema tome, gustina verovatnoće za osnovno adelično vakuumsko stanje (za koje se pretpostavlja da opisuje rani univerzum plankijanskih dimenzija) je nenulta i jednaka onoj koju predviđa standardna kvantna mehanika samo za celobrojne vrednosti koordinate x (odnosno za celobrojne umnoške Plankove dužine [41]). Ova činjenica ukazuje na postojanje diskretizacije mogućih vrednosti koordinata koja je, između ostalog, u uvodu pomenuta kao zajednička osobina p-adičnog/adeličnog [2] i nekomutativnog pristupa u kvantnoj kosmologiji. Imajući u vidu da su Ω funkcije invarijantne u odnosu na Furijeove transformacije ovaj zaključak je takođe validan i u impulsnom prostoru. Pri tome treba uočiti da ova vrsta diskretnosti zavisi od adeličnog kvantnog stanja univerzuma. Naime, ako u adeličnoj talasnoj funkciji (3.21) postoje i p-adična stanja različita od $\Omega(|x|_p)$ (za $p \in M$), gore navedena adelična diskretizacija postaje manje uočljiva.

4 Standardna klasična i kvantna kosmologija

Kosmologija kao naučna disciplina počela se razvijati u prvoj polovini XX veka sa primenom Opšte teorije relativnosti na kosmos kao celinu i formulisanjem različitih kosmoloških modela. Preovlađujuća naučna paradigma o nastanku univerzuma velikim praskom/širenjem iz inicijalnog kosmološkog singulariteta, kao što je već rečeno, povukla je za sobom potrebu unifikacije fundamentalnih interakcija i uopšte potrebu za razumevanjem pojava na Plankovoj skali, a sa tim u vezi i prostorno-vremenskih singulariteta. Sve su ovo razlozi koji ukazuju na nužnost kvantovanja gravitacije. U zasnivanju kvantne teorije gravitacije, od pedesetih godina prošlog veka, skoro paralelno se razvijaju dva pristupa – kanonski i funkcionalni. Osnovu prvog čini poznata Viler-de Vitova jednačina koju je prvi zapravo izveo Brajs de Vit 1967. godine [44] i koja je po svojoj formi analogon Šredingerove jednačine. Funkcionalni formalizam u teoriji gravitacije je počeo sa Čarlsom Miznerom nakon objavljivanja rada [45] iz 1957. godine.

Kvantna teorija gravitacije na današnjem nivou susreće se sa problemom nerenormalizabilnosti odnosno pojave beskonačnih veličina koje se ne mogu na elegantan način ukloniti iz teorije (kao što se npr. mogu ukloniti u kvantnoj elektrodinamici). Zbog ove činjenice kvantna teorija gravitacije još uvek nije konzistentno zasnovana.

Kvantna gravitacija primenjena na rani svemir kao celinu zapravo predstavlja kvantnu kosmologiju. Pored pomenutog problema koji se odnosi na pojavu beskonačnih veličina pri pokušaju kvantovanja gravitacije, i jedna i druga teorija se susreću i sa nekim konceptualnim pitanjima bez jasnih odgovora. To su pitanja tipa ko čini kvantni ansambl a ko posmatrača koji meri, zatim šta bi uopšte bilo merenje u kvantnoj kosmologiji i kako ga „sprovesti" u uslovima u kojima klasičan koncept prostor-vremena gubi smisao (gde je greška merenja, kao što je rečeno, reda veličine samog etalona tj. Plankove dužine [11, 12], a Švarcšildov radijus čestice reda veličine njene Komptonove talasne dužine) itd.

I pored ovih otvorenih pitanja, iz gore pomenutih razloga, fomulisanje kvantne teorije gravitacije je neizbežno. Pristupa u pravcu pokušaja formulacije konzistentne teorije ima više: teorija superstruna, ekstra dimenzije, nekomutativna geometrija, *loop* kvantna gravitacija,...

U ovom poglavlju, nakon opšteg prikaza klasičnih Ajnštajnovih jednačina gravitacionog polja, biće prezentovani osnovni elementi kvantne teorije gravitacije u okviru kanonskog i funkcionalnog formalizma.

4.1 Ajnštajnove jednačine gravitacionog polja

Opšta teorija relativnosti, formulisana 1915/16. godine od strane Alberta Ajnštajna, je zapravo klasična teorija. U njenoj osnovi leže čuvene Ajnštajnove jednačine gravitacionog polja koje je zapravo prvi izveo (iz varijacionog principa) nemački matematičar Hilbert 20. novembra 1915. godine na seminaru u Getingenu (predstavljajući ih tako naučnoj javnosti samo 5 dana pre Ajnštajna). U analitičkom (Lagranževom) formalizmu ove jednačine se izvode polazeći od dejstava za gravitaciono polje i materiju koja su u savremenoj notaciji respektivno data sa [46]

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x = k\int_{\mathcal{M}} \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x \quad (\text{pri čemu je } k = -\tfrac{c^3}{16\pi G}), \tag{4.1}$$

$$S_m = \frac{1}{c}\int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m\sqrt{-g}\, d^4x, \tag{4.2}$$

gde je $\mathcal{R}$ skalarna krivina (Ričijev skalar), g determinanta metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$ i $\mathcal{L}_m$ je gustina lagranžijana materije. Integracija se vrši po četvorodimenzionalnoj prostorno--vremenskoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$.

Iz varijacionog principa

$$\delta S = \delta(S_g + S_m) = 0, \tag{4.3}$$

uz zahtev nulte vrednosti polja na granici 4-mnogostrukosti $\mathcal{M}$

$$w^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = \left(g^{\rho\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\rho\lambda} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\rho_{\lambda\rho}\right)|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad \rho,\lambda,\mu = 0,1,2,3, \tag{4.4}$$

gde su $\Gamma^\mu_{\rho\lambda}$ Kristofelovi simboli, dobijaju se Ajnštajnove jednačine gravitacionog polja

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{4.5}$$

gde je $R_{\mu\nu}$ Ričijev tenzor i $T_{\mu\nu}$ tenzor energije-impulsa materije. Leva strana ove jednačine često se zove i Ajnštajnov tenzor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R}$ (sa tragom $\mathcal{G} = G^\mu_\mu$).

U slučaju da je u (4.4) $w^\mu|_{\partial\mathcal{M}} \neq 0$, da bi se iz varijacionog principa dobile jednačine polja u obliku (4.5) mora se dejstvima gravitacionog polja i polja materije, u ukupnom (Ajnštajn-Hilbertovom) dejstvu S, dodati još jedan tzv. Jork-Gibons-Hokingov član [47, 48, 49]

$$S_{YGH} = 2k\int_{\partial\mathcal{M}} K\sqrt{h}\, d^3x, \tag{4.6}$$

pri čemu su h determinanta metričkog tenzora h_{ik} prostorne 3-geometrije (unutrašnje metrike, „prve fundamentalne forme") i K trag tenzora K_{ik} ekstrinzične (spoljašnje) krivine 3-prostora (i i k su prostorni indeksi koji uzimaju vrednosti $i,k = 1,2,3$). Jednačine (4.5) dobijaju se sada iz varijacionog principa variranjem Ajnštajn-Hilbertovog dejstva u obliku

$$S = S_g + S_m + S_{YGH}. \tag{4.7}$$

S obzirom na to da su u (4.5) svi tenzori simetrični, nezavisnih Ajnštajnovih jednačina ima 10. Isto toliko ima i nezavisnih promenljivih i to: 3 nezavisne komponente kvadrivektora brzine $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ (od 4, jer je $u^\mu u_\mu = 1$), gustina energije ε (ili pritisak p) i 6 nezavisnih komponenti metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$. Treba napomenuti da je broj nezavisnih komponenti metričkog tenzora zapravo 10, no s obzirom na to da su u Opštoj teoriji relativnosti dozvoljene proizvoljne transformacije 4 koordinate to pruža mogućnost da se fiksiraju 4 od 10 (nezavisnih) komponenti $g_{\mu\nu}$. Ovo će (kasnije u tekstu) imati za posledicu proizvoljnu mogućnost izbora (fiksiranja gejdža) jedne laps funkcije N i tri komponente N_i šift vektora što će zapravo značiti postojanje 4 primarne Dirakove veze.

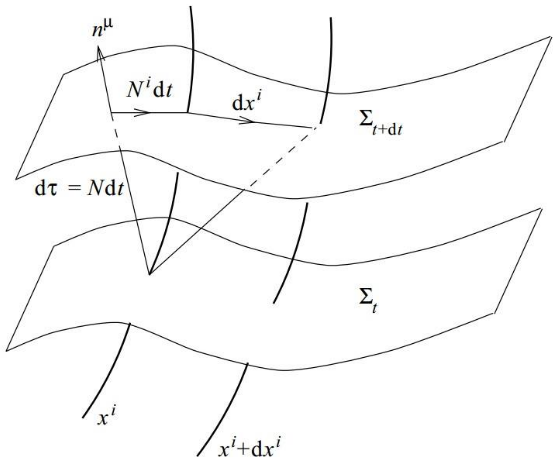
4.2 Hamiltonova formulacija Opšte teorije relativnosti

Na početku treba odmah reći da postoji nekoliko alternativnih formulacija Opšte teorije relativnosti pri čemu je Hamiltonova samo jedna od njih (čak i za pristup ovoj formulaciji ima više načina). Razvoj ovog formalizma počeo je Dirak kasnih pedesetih godina XX veka [50, 51]. Skoro istovremeno sa njim na istoj formulaciji rade Arnovit, Dezer i Mizner i 1959. godine objavljuju njihov prvi rad iz ove oblasti [52]. Od 1959. godine do 1961. godine usledio je niz radova pomenuta tri autora koji su se odnosili na Hamiltonovu formulaciju Opšte teorije relativnosti. Sveobuhvatni pregled formalizma, koji je po početnim slovima njihovih prezimena dobio naziv ADM formalizam, objavljen je 1962. godine [53] sa reprintom 2008. godine u časopisu *General relativity and gravitation* [54]. Rad na razvoju ove formulacije se nastavlja i sedamdesetih godina [55]. Inače, ADM formalizam se naziva još i kanonski jer podrazumeva prelazak sa analitičkog na kanonski (Hamiltonov) formalizam u kome su centralni objekti konjugovani impulsi i hamiltonijan sistema. Kao temelj Hamiltonovoj formulaciji Opšte teorije relativnosti poslužio je 3+1 formalizam koga, kao pristup Ajnštajnovoj teoriji gravitacije, u prvoj polovini i sredinom XX veka razvijaju Darmoa [56], Lihnerovič [57, 58, 59] i Šoke-Brua (u to vreme Fure-Brua) [60, 61]. Sedamdesetih godina prošlog veka 3+1 formalizam je postao osnovno sredstvo novonastale numeričke relativnosti čijem naglom razvoju je doprinela težnja za usavršavanjem detektora gravitacionih talasa (koji su na kraju i detektovani [9]).

U okviru 3+1 formalizma četvorodimenzionalna prostorno-vremenska mnogostrukost $\mathcal{M}$ se izlistava na trodimenzionalne hiperpovrši Σ_t po t [62]. U geometrijskom smislu ovo se realizuje tzv. 3+1 dekompozicijom kvadratne metričke forme u obliku (na dalje, sem ako nije posebno naglašeno, u prirodnom sistemu jedinica u kome je $c = \hbar = 1$)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ik}(dx^i + N^i dt)(dx^k + N^k dt), \tag{4.8}$$

gde se $N = N(x^k, t)$ zove laps funkcija i ona predstavlja meru razlike između koordinatnog vremena t i sopstvenog vremena τ, dok su $N^i = N^i(x^k, t)$ komponente tzv. šift vektora koji određuje pomeranje hiperpovrši Σ_{t+dt} u odnosu na Σ_t pri prelazu $t \to t + dt$ (Slika 1.).



Slika 1. *3+1 dekompozicija prostorno-vremenske mnogostrukosti* $\mathcal{M}$ (preuzeto iz [62])

Pri tome se metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ može napisati na sledeći način

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2 + N_k N^k & N_k \\ N_i & h_{ik} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

a inverzni metrički tenzor $g^{\mu\nu}$ kao

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^k}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ik} - \frac{N^i N^k}{N^2} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

gde je $N^k N_k = h^{ik} N_i N_k = h_{ik} N^i N^k$. Iz (4.9) se vidi da je $g_{\mu\nu}$ i u ovoj formi određen sa 10 nezavisnih komponenti (jedna N, tri N_i i šest nezavisnih komponenti iz metričkog tenzora h_{ik} 3-geometrije).

Uobičajeni oblik Ajnštajn-Hilbertovog dejstva, sa kosmološkom konstantom Λ, od koga se polazi je [62]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \left({}^{(4)}\mathcal{R} - 2\Lambda\right) \sqrt{-g}\, d^4x + \frac{2}{16\pi G} \int_{\partial\mathcal{M}} K\sqrt{h}\, d^3x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m \sqrt{-g}\, d^4x. \tag{4.11}$$

Kako je $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ i ${}^{(4)}\mathcal{R} \equiv \mathcal{R} = {}^{(3)}\mathcal{R} + K^{ik}K_{ik} - K^2 - 2(n^\alpha K + a^\alpha)_{;\alpha}$, (${}^{(3)}\mathcal{R}$ je Ričijev skalar unutrašnje 3-geometrije, $a^\alpha = n^\beta n^\alpha_{;\beta}$ i $n_\alpha = (-N, 0, 0, 0)$ je četvorovektor normale na hiperpovrš Σ_t), prethodni izraz se svodi na sledeći oblik [62]

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^{ik}K_{ik} - K^2 - 2\Lambda\right) N\sqrt{h}\, dt d^3x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m N\sqrt{h}\, dt d^3x, \tag{4.12}$$

pa je odgovarajući lagranžijan

$$L = \frac{1}{16\pi G}\int \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^{ik}K_{ik} - K^2 - 2\Lambda\right) N\sqrt{h}\, d^3x + \int \mathcal{L}_m N\sqrt{h}\, d^3x. \tag{4.13}$$

Pri tome se za gustinu lagranžijana materije $\mathcal{L}_m$ obično uzima da je sledeća funkcija skalarnog polja Φ i potencijala $V(\Phi)$

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - V(\Phi). \tag{4.14}$$

Impulsi konjugovani novim promenljivima h_{ik}, Φ, N i N_i dobijaju se variranjem lagranžijana L po izvodima traženih veličina tj. respektivno

$$\pi^{ik} = \frac{\delta L}{\delta \dot{h}_{ik}} = -\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\left(K^{ik} - h^{ik}K\right), \tag{4.15}$$

$$\pi_\Phi = \frac{\delta L}{\delta\dot{\Phi}} = \frac{\sqrt{h}}{N}\left(\dot{\Phi} - N^i\Phi_{,i}\right), \tag{4.16}$$

$$\pi^0 = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0, \tag{4.17}$$

$$\pi^i = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}_i} = 0. \tag{4.18}$$

Hamiltonijan sistema je tada

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\pi^{ik}\dot{h}_{ik} + \pi_\Phi\dot{\Phi} + \pi^0\dot{N} + \pi^i\dot{N}_i\right) d^3x - L \\ &= \int \left(\pi^0\dot{N} + \pi^i\dot{N}_i + N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i\right) d^3x, \end{aligned} \tag{4.19}$$

gde su

$$\mathcal{H} = \frac{\sqrt{h}}{8\pi G}(G^0_0 - 8\pi G T^0_0) \quad \text{i} \quad \mathcal{H}^i = \frac{\sqrt{h}}{8\pi G}(G^{0i} - 8\pi G T^{0i}), \quad i = 1,2,3. \tag{4.20}$$

Iz $\pi^0 = 0$ i $\pi^i = 0$ sledi da je odgovarajući hesijan sistema jednak nuli, tj. da je $\det\left(\frac{\delta^2 L}{\delta\dot{q}_\alpha\delta\dot{q}_\beta}\right) = 0$. Za ovakav sistem (ili njegov lagranžijan) se kaže da je singularan (degenerisan) Dirakov sistem sa vezama. Ovo ima za posledicu da hamiltonijan sistema nije jednoznačan i da konačne jednačine nemaju jednoznačno rešenje za date početne uslove. Naime, zbog nultog hesijana sistem dinamičkih jednačina ne može se jednoznačno rešiti po najstarijim (drugim) izvodima traženih funkcija, a što je potreban i dovoljan uslov za postojanje jedinstvenog partikularnog rešenja.

$\pi^0 = 0$ i $\pi^i = 0$ se zovu primarni uslovi veza. Iz jednačina kretanja u Poasonovim zagradama za N i N_i, uz primarne uslove, dobijaju se sekundarni (dinamički) uslovi veza:

$$\dot{\pi}^0 = \left\{\pi^0, H\right\} = -\frac{\partial H}{\partial N} = -\mathcal{H} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} = 0 \quad \text{(Hamiltonov uslov)}, \tag{4.21}$$

$$\dot{\pi}^i = \left\{\pi^i, H\right\} = -\frac{\partial H}{\partial N_i} = -\mathcal{H}^i = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^i = 0 \qquad \text{(impulsni uslov)}. \tag{4.22}$$

Pri tome su prema (4.20) ovi sekundarni uslovi ekvivalentni odgovarajućim Ajnštajnovim jednačinama, naime

$$\mathcal{H} = 0 \Leftrightarrow G^0_0 = 8\pi G T^0_0, \quad \mathcal{H}^i = 0 \Leftrightarrow G^{0i} = 8\pi G T^{0i}. \tag{4.23}$$

4.3 Kanonska kvantizacija

Kanonska kvantizacija podrazumeva prelazak sa klasičnih varijabli impulsa na operatore impulsa, odnosno u koordinatnoj reprezentaciji u odgovarajuće operatore diferenciranja:

$$\pi^{ik} \to \hat{\pi}^{ik} \to -i\frac{\delta}{\delta h_{ik}}, \tag{4.24}$$

$$\pi_\Phi \to \hat{\pi}_\Phi \to -i\frac{\delta}{\delta \Phi}, \tag{4.25}$$

$$\pi^0 \to \hat{\pi}^0 \to -i\frac{\delta}{\delta N}, \tag{4.26}$$

$$\pi^i \to \hat{\pi}^i \to -i\frac{\delta}{\delta N_i}. \tag{4.27}$$

Tada se iz primarnih Dirakovih veza (4.17) i (4.18) respektivno dobija da je

$$\hat{\pi}^0 \left|\Psi\right\rangle = 0 \to -i\frac{\delta\Psi}{\delta N} = 0, \tag{4.28}$$

$$\hat{\pi}^i \left|\Psi\right\rangle = 0 \to -i\frac{\delta\Psi}{\delta N_i} = 0. \tag{4.29}$$

Prema tome, talasna funkcija (vasione) Ψ ne zavisi od N i N_i, tj. oblika je $\Psi = \Psi(h_{ik}, \Phi)$. Ovo sa druge strane obezbeđuje pomenutu mogućnost izbora (fiksiranja gejdža) lasp funkcije i komponenti šift vektora.

Beskonačno dimenzionalni konfiguracioni (super)prostor $\{h_{ik}(x), \Phi(x) : \forall x \in \Sigma\}$ Rimanovih 3-metrika h_{ik} i polja materije Φ, bez konfiguracija iste unutrašnje geometrije, je prostor kvantne gravitacije. Talasna funkcija $\Psi = \Psi(h_{ik}, \Phi)$ je funkcional na ovom superprostoru.

Sekundarne veze (4.21) i (4.22) respektivno daju

$$\hat{\mathcal{H}} \left|\Psi\right\rangle = 0, \tag{4.30}$$

$$\hat{\mathcal{H}}^i \left|\Psi\right\rangle = 0. \tag{4.31}$$

Prva od ovih jednačina ima formu stacionarne Šredingerove jednačine za osnovno stanje nulte ukupne energije gravitacionog polja i polja materije. Brajs de Vit ju je prvobitno nazvao Ajnštajn-Šredingerova jednačina, da bi tek kasnije bila nazvana Viler--de Vitova jednačina. Ona je inače osnovna jednačina kanonskog formalizma u teoriji kvantne gravitacije.

4.4 Funkcionalna kvantizacija

Ovaj pristup kvantnoj gravitaciji razvijao se skoro paralelno sa kanonskom kvantizacijom počevši od pomenutog Miznerovog rada iz 1957. godine [45]. Centralni objekat funkcionalnog pristupa je amplituda prelaza između početnog stanja vasione sa konfiguracijom $|h'_{ik}, \Phi', \Sigma'\rangle$ i krajnjeg stanja sa konfiguracijom $|h''_{ik}, \Phi'', \Sigma''\rangle$. Data je sledećim funkcionalnim integralom [62]

$$\langle h''_{ik}, \Phi'', \Sigma''|h'_{ik}, \Phi', \Sigma'\rangle = \int \exp(iS(g_{\mu\nu}, \Phi))\mathcal{D}g_{\mu\nu}\, \mathcal{D}\Phi. \tag{4.32}$$

Ako je metrika $g_{\mu\nu}$ lorencovskog tipa i ako su polja materije Φ realna, dejstvo $S = S(g_{\mu\nu}, \Phi)$ je takođe realno. Tada je faktor $\exp(iS)$ oscilatoran, te je prethodni integral divergentan. Zbog toga se pribegava jednom matematičkom „triku" koji se zove Vikova rotacija vremenske ose. Naime vrši se zamena $t \to -i\tau$ i $S \to i\bar{S}$. Na ovaj način se zapravo prelazi iz Lorencovog u Euklidov prostorno-vremenski region, drugim rečima vrši se signaturna tranzicija. U tom smislu S se naziva lorencovskim dejstvom ili dejstvom u Lorencovom regionu, dok se $\bar{S}$ naziva euklidovskim dejstvom odnosno dejstvom u Euklidovom regionu. Nakon signaturne izmene (4.32) postaje

$$\langle h''_{ik}, \Phi'', \Sigma''|h'_{ik}, \Phi', \Sigma'\rangle = \int \exp(-\bar{S}(g_{\mu\nu}, \Phi))\mathcal{D}g_{\mu\nu}\, \mathcal{D}\Phi. \tag{4.33}$$

Na ovaj način uklonjen je oscilatorni karakter integranda u (4.32), no sam integral (4.33) još uvek ne mora da bude konvergentan s obzirom na to da Euklidovo dejstvo $\bar{S}$ u teoriji gravitacije u opštem slučaju nije pozitivno definitno. Stoga se, da bi ovaj funkcionalni integral konvergirao, pri integraciji moraju uzeti u obzir ne samo realne već i kompleksne metrike. Treba napomenuti da i u tom slučaju rezultat nije jednoznačan već zavisi od izbora konture integracije.

U svakom slučaju i jedan i drugi pristup (kanonski i funkcionalni) podrazumeva određivanje talasne funkcije za neki kvantni kosmološki model. U prvom slučaju (kanonska kvantizacija) talasna funkcija se dobija rešavanjem Viler-de Vitove jednačine (4.30), a u drugom slučaju (kvantizacije preko integrala po trajektorijama) iz Fajnmenovog minisuperprostornog propagatora uz odgovarajući granični uslov. Najpoznatiji su Vilenkinov [63, 64, 65] i Hartl-Hokingov [66, 67, 68]. Prvi uslov podrazumeva da se talasna funkcija konstruiše tako da univerzum biva kreiran ni iz čega u uobičajenom kvantno-mehaničkom procesu tunelovanja kroz potencijalnu barijeru. Primenom Hartl-Hokingovog graničnog uslova talasna funkcija je konstruisana korišćenjem integrala po trajektorijama po svim kompaktnim Euklidovim četvorodimenzionalnim mnogostrukostima sa granicama koje se nalaze na hiperpovrši signaturne izmene.

5 Minisuperprostorni kosmološki modeli

Kao što je već rečeno, prostor kvantne gravitacije (superprostor) je beskonačno dimenzionalan. Rad u prostoru sa beskonačno dimenzija je praktično nemoguć. Stoga se pribegava svođenju broja dimenzija na konačan broj. Na taj način se dobijaju tzv. minisuperprostor i odgovarajući minisuperprostorni kosmološki modeli. Ograničavanje broja dimenzija i dobijanje odgovarajućeg minisuperprostora vrši se korišćenjem specifičnih osobina prostor-vremena u kosmologiji. Naime, kao što je poznato, prostor je na kosmološkim skalama ($\geq$ 100 Mpc) homogen. Dodatna pretpostavka o izotropiji ili anizotropiji se koristi dalje u zavisnosti od modela.

U slučaju homogenog i izotropnog modela oblik metrike u 3+1 dekompoziciji, koja odgovara ovim osobinama, podrazumeva da je laps funkcija samo funkcija vremena $N = N(t)$, a da su komponente šift vektora nulte $N^i = 0$, tj.

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N(t)^2 dt^2 + h_{ik}dx^i dx^k, \tag{5.1}$$

pri čemu su komponente 3-metrike $h_{ik} = h_{ik}(q^\alpha(t))$ opisane konačnim brojem funkcija vremena $q^\alpha = q^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, ..., n$, koje se zovu minisuperprostorne koordinate. Takva je npr. Fridman-Lemetr-Robertson-Vokerova (FLRW) metrička forma

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)), \tag{5.2}$$

pri čemu se $R(t)$ uobičajeno zove faktorom skale. Tako će model sa skalarnim poljem Φ i FLRW metrikom biti opisan u minisuperprostoru od svega dva parametra $\{R, \Phi\}$.

Drugi primer koji će biti razmatran u ovoj disertaciji je model sa Kantovski-Saks metričkom formom sa dva faktora skale $c_1(t)$ i $c_2(t)$

$$ds^2 = -\frac{N^2(t)}{c_1(t)}dt^2 + c_1(t)dr^2 + c_2^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5.3}$$

Ova metrička forma opisuje prostor-vreme koje je homegeno i anizotropno. Ako se laps funkcija uobičajeno normira tako da je $N(t) = 1$, minisuperprostor modela sa Kantovski--Saks metrikom i skalarnim poljem Φ biće tada prostor tri parametra $\{c_1, c_2, \Phi\}$.

U slučaju homogene i izotropne metrike oblika (5.1) funkcionalna integracija u (4.33) po mnogostrukosti svodi se na funkcionalnu integraciju po 3-metrici i jednu običnu integraciju po laps funkciji [69]. Tada uz granične uslove $q^{\alpha\prime} = q^\alpha(t')$, $q^{\alpha\prime\prime} = q^\alpha(t'')$ i kalibraciju $\dot{N} = 0$ (4.33) postaje

$$\left\langle q^{\alpha\prime\prime} | q^{\alpha\prime} \right\rangle = \int \mathcal{K}\left(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0\right) dN, \tag{5.4}$$

i zove se minisuperprostorni propagator, u kome je

$$\mathcal{K}\left(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0\right) = \int \exp\left(-\bar{S}(q^{\alpha}, N)\right) \mathcal{D}q^{\alpha}, \tag{5.5}$$

kvantno-mehanički (euklidski) propagator između vrednosti $q^{\alpha\prime}$ i $q^{\alpha\prime\prime}$. U [70] je pokazano da je prethodni funkcionalni integral za minisuperprostorne modele čije dejstvo ima kvadratičnu formu egzaktno rešiv i dat izrazom

$$\mathcal{K}\left(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\det\left(\frac{\partial^2 \bar{S}^{cl}}{\partial q^{\alpha\prime\prime}\partial q^{\alpha\prime}}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\bar{S}^{cl}\left(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0\right)\right), \tag{5.6}$$

gde je $\bar{S}^{cl}\left(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0\right)$ klasično dejstvo u euklidskom regionu dobijeno za rešenja klasičnih jednačina kretanja po minisuperprostornim koordinatama q^{α} uz granične uslove $q^{\alpha}(0) = q^{\alpha\prime}$ i $q^{\alpha}(1) = q^{\alpha\prime\prime}$. Daljom zamenom (5.6) u (5.4) dobija se izraz za minisuperprostorni propagator za modele sa kvadratičnim dejstvom. Pri tome će rezultat integracije u (5.4) po laps funkciji zavisiti od izbora konture integracije.

5.1 Milneov model

Milneov model je kosmološki model koji je bio predložen od strane britanskog astrofizičara i matematičara Edvarda Artura Milnea 1935. godine. U pitanju je, zapravo, specijalan slučaj praznog otvorenog Fridmanovog modela tj. Fridmanovog modela hipreboličke geometrije bez prisustva materije (nultih vrednosti gustine energije, pritiska i kosmološke konstante).

Ako se u Fridmanovu jednačinu (u Međunarodnom sistemu jedinica) za otvoren model [46]

$$\frac{c^2}{R^2} = \mathsf{H}^2 - \frac{8\pi G}{3}\mu, \tag{5.7}$$

(gde je $\mathsf{H} = \frac{\dot{R}}{R}$ Hablov parametar i μ gustina materije u kosmosu), zameni da je $\mu = 0$ dobija se da je faktor skale a tada linearna funkcija vremena tj. $R = ct$. Ako se dalje u metričku formu

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{5.8}$$

otvorenog Fridmanovog modela u signaturi $(+,-,-,-)$ zameni da je $R = ct$, dobija se metrička forma Milneovog modela (vraćajući se u prirodni sistem jedinica)

$$ds^2 = dt^2 - t^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5.9}$$

Ova metrika se smenama $r = t\sinh\chi$, $\tau = t\cosh\chi$ svodi na oblik

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{5.10}$$

tj. na običnu galilejevsku prostorno-vremensku metriku (metriku Minkovskog). Dalja analiza pokazuje da Milneove koordinate t i χ pokrivaju samo jednu četvrtinu prostor--vremena Minkovskog [71]. Takođe, postoji relacija između Milneovog prostor-vremena i Rindlerovog prostor-vremena [72].

Dalje će biti proučena veza između Milneovog modela i jednog 2+1 dimenzionalnog minisuperprostornog kosmološkog modela toroidalne topologije $T^2 \times \mathbb{R}$ sa metričkom formom, u signaturi $(-, +, +)$, oblika [73]

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + h_{ij}(t) dx^i dx^j, \quad 0 \leq x^i < 1, \quad i, j = 1, 2. \tag{5.11}$$

Iz ovog oblika metrike se za razmatrani model dobija da su tenzor spoljašnje krivine i njegov trag respektivno $K_{ij} = -\frac{1}{2N}\dot{h}_{ij}$ i $K = h^{ij}K_{ij} = -\frac{1}{2N}\frac{d}{dt}\log h$ (gde je $h = \det(h_{ij})$).

Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo sa kosmološkom konstantom i bez polja materije, u ovom 2+1 dimenzionalnom slučaju, je [73]

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{M}_{2+1}} \left({}^{(3)}\mathcal{R} - 2\Lambda\right) \sqrt{-g}\, d^3x + 2\int_{\partial\mathcal{M}_{2+1}} K\sqrt{h}\, d^2x \\ &= \int_{\mathcal{M}_{2+1}} \left(K^{ik}K_{ik} - K^2 - 2\Lambda\right) N\sqrt{h}\, dt d^2x. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Nakon uvođenja koordinata U^i $(i = 1, 2)$ i invarijante metrike $\dot{U}^i G_{ik} \dot{U}^k = -\frac{1}{2}\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij}$, uz $\rho = RN$ i $R = \sqrt{h}$, prethodni izraz postaje

$$S = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{\rho}\left(-\dot{R}^2 + R^2 \dot{U}^i G_{ik} \dot{U}^k\right) - 4\Lambda\rho\right] dt. \tag{5.13}$$

Sa druge strane, kako se slobodna relativistička čestica može tretirati kao sistem sa vezom $\eta_{\mu\nu}k^\mu k^\nu + m^2 = k^2 + m^2 = 0$ [74] koja vodi do kanonskog hamiltonijana (sa Lagranževim množiteljem N) $H_c = N(k^2 + m^2)$ i lagranžijana $L = \dot{x}_\mu k^\mu - H_c = \frac{\partial H_c}{\partial k^\mu}k^\mu - H_c = \frac{\dot{x}^2}{4N} - m^2 N$, njeno dejstvo može se tada pisati na sledeći način

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\dot{x}^2}{4N} - m^2 N\right) d\tau. \tag{5.14}$$

Upoređujući (5.13) i (5.14) može se zaključiti da se dinamika ovog 2+1 kosmološkog modela može opisati kao dinamika fiktivne slobodne relativističke čestice mase $\sqrt{4\Lambda}$ koja se kreće u trodimenzionalnom lorencijanskom prostor-vremenu čija je metrika

$$ds^2 = -dR^2 + R^2 dU^i G_{ik} dU^k. \tag{5.15}$$

Ako se ova metrička forma napiše u nešto drugačijem obliku

$$ds^2 = -dR^2 + R^2 \frac{d\tau_1^2 + d\tau_2^2}{\tau_2^2}, \tag{5.16}$$

pri čemu je $-\infty < \tau_1 < \infty$, $0 < \tau_2$ i $0 < R$, odmah se vidi da je prostor u kome se kreće fiktivna čestica zapravo Milneov prostor.

Uz transformacije $R = \sqrt{Z^2 - X^2 - Y^2}$, $\tau_1 = \frac{Y}{Z-X}$ i $\tau_2 = \frac{R}{Z-X}$, (5.16) postaje metrika Minkovskog

$$ds^2 = -dZ^2 + dX^2 + dY^2. \tag{5.17}$$

Tada Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo (5.13) modela dobija oblik

$$S = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{\rho} \left(-\dot{Z}^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \right) - 4\Lambda\rho \right] dt, \tag{5.18}$$

odakle sledi da je lagranžijan

$$L = \frac{1}{2\rho} \left(-\dot{Z}^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \right) - 2\Lambda\rho. \tag{5.19}$$

Rešavajući Ojler-Lagranževe jednačine za ovaj oblik lagranžijana, uz početne uslove $Z' = Z(t')$, $Z'' = Z(t'')$, $X' = X(t')$, $X'' = X(t'')$ $Y' = Y(t')$ i $Y'' = Y(t'')$, dobijaju se klasične jednačine kretanja

$$Z = Z' + \frac{Z'' - Z'}{t'' - t'}(t - t'),\ X = X' + \frac{X'' - X'}{t'' - t'}(t - t'),\ Y = Y' + \frac{Y'' - Y'}{t'' - t'}(t - t'). \tag{5.20}$$

Njihovom zamenom u (5.19) dobija se klasični lagranžijan modela

$$L^{cl} = \frac{1}{2\rho} \left(-\left(\frac{Z'' - Z'}{t'' - t'} \right)^2 + \left(\frac{X'' - X'}{t'' - t'} \right)^2 + \left(\frac{Y'' - Y'}{t'' - t'} \right)^2 \right) - 2\Lambda\rho. \tag{5.21}$$

Dalje integracijom L^{cl} po vremenu u intervalu od t' do t'' dobija se klasično dejstvo [75]

$$S^{cl} = \frac{(t''-t')}{2} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(-\left(\frac{Z''-Z'}{t''-t'} \right)^2 + \left(\frac{X''-X'}{t''-t'} \right)^2 + \left(\frac{Y''-Y'}{t''-t'} \right)^2 \right) - 4\Lambda\rho \right\}, \tag{5.22}$$

ili u obliku

$$S^{cl} = -\frac{(Z'' - Z')^2}{2T} + \frac{(X'' - X')^2}{2T} + \frac{(Y'' - Y')^2}{2T} - 2\Lambda T, \tag{5.23}$$

gde je $T = \rho(t'' - t')$. Pri tome se prethodni izraz može napisati i na sledeći način

$$\begin{aligned} S^{cl} &= \left(-\frac{(Z''-Z')^2}{2T} + 2\Lambda T \right) + \left(\frac{(X''-X')^2}{2T} - 2\Lambda T \right) + \left(\frac{(Y''-Y')^2}{2T} - 2\Lambda T \right) \\ &= S^{cl}_Z + S^{cl}_X + S^{cl}_Y. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Sada će biti razmotreno kako izgledaju ove dinamičke veličine nakon transformacije $t \to -i\tau$. Naime, tada lagranžijan (5.19) postaje

$$\bar{L} = \frac{1}{2\rho}\left(-\dot{Z}^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + 2\Lambda\rho, \tag{5.25}$$

gde tačka iznad slova sada označava diferenciranje po τ.

Uz početne uslove $Z' = Z(\tau')$, $Z'' = Z(\tau'')$, $X' = X(\tau')$, $X'' = X(\tau'')$, $Y' = Y(\tau')$ i $Y'' = Y(\tau'')$, klasične jednačine kretanja su sada

$$Z = Z' + \frac{Z''-Z'}{\tau''-\tau'}(\tau-\tau'),\ X = X' + \frac{X''-X'}{\tau''-\tau'}(\tau-\tau'),\ Y = Y' + \frac{Y''-Y'}{\tau''-\tau'}(\tau-\tau'). \tag{5.26}$$

Njihovom zamenom u (5.25) dobija se klasični lagranžijan

$$\bar{L}^{cl} = \frac{1}{2\rho}\left(-\left(\frac{Z''-Z'}{\tau''-\tau'}\right)^2 + \left(\frac{X''-X'}{\tau''-\tau'}\right)^2 + \left(\frac{Y''-Y'}{\tau''-\tau'}\right)^2\right) + 2\Lambda\rho. \tag{5.27}$$

Uobičajenom procedurom integracije $\bar{L}^{cl}$ po τ u intervalu od τ' do τ'' dobija se i klasično dejstvo

$$\begin{aligned}
\bar{S}^{cl} &= \int_{\tau'}^{\tau''} \bar{L}^{cl}\, d\tau \\
&= \left(-\frac{(Z''-Z')^2}{2\tilde{T}} - 2\Lambda\tilde{T}\right) + \left(\frac{(X''+X')^2}{2\tilde{T}} + 2\Lambda\tilde{T}\right) + \left(\frac{(Y''-Y')^2}{2\tilde{T}} + 2\Lambda\tilde{T}\right) \\
&= \bar{S}^{cl}_Z + \bar{S}^{cl}_X + \bar{S}^{cl}_Y,
\end{aligned} \tag{5.28}$$

pri čemu je ovde $\tilde{T} = \rho(\tau'' - \tau')$.

Iz prethodnog se vidi da transformacija $t \to -i\tau$ direktno prevodi klasična rešenja (5.20) u (5.26) i da je $\bar{S}^{cl} = -iS^{cl}$. Sem toga jasno je da je i nakon ove transformacije, s obzirom na oblik lagranžijana (5.27) i dejstva (5.28), reč o modelu tipa slobodne čestice. Inače sama tansformacija $t \to -i\tau$ ovde nije sa namerom nazvana signaturnom imajući u vidu specifičnosti Milneovog modela. Naime, model je 2+1 dimenzionalan tj. trodimenzionalan sa polaznom metrikom (5.17) od koje su na dalje izvođene relevantne dinamičke veličine. Pri tome je rečeno da je (5.17) metrika tipa Minkovskog u trodimenzionalnom slučaju u kojoj bi ekvivalent vremenske koordinate bila Z koordinata. No u daljem tretmanu ipak su određivane veličine koje zavise od uobičajene vremenske koordinate t. U tom smislu nije sasvim jasno da li bi prava signaturna izmena za ovaj model podrazumevala transformaciju t na uobičajen način ($t \to -i\tau$) ili transformaciju koordinate Z koja u metrici (5.17) igra ulogu vremenske. Sa druge strane, kao što će biti prezentovano u poglavlju 5.2.5, standardna signaturna tranzicija u klasičnom prostor-vremenu podrazumeva i ispunjavanje nekih specifičnih uslova (npr. *junction condition* tj. uslova zašivanja rešenja), koje treba uzeti u obzir pri određivanju rešenja jednačina kretanja po minisuperprostornim koordinatama za dati model u jednom odnosno u drugom regionu signaturne izmene. No opet, sve se to odnosi na gravitaciju u 3+1 dimenzionalnom slučaju, a ovde je reč o modelu u 2+1 dimenzionalnom prostoru gde vladaju drugačije okolnosti. Na primer u 2+1 dimenziji svako rešenje vakuumskih Ajnštajnovih jednačina polja je ravno, a prostor-vreme nema lokalnih stepeni slobode tj. nema gravitacionih talasa u klasičnoj teoriji i nema gravitona u kvantnoj teoriji [76]. U tom smislu pitanje signaturne tranzicije u standardnom i p-adičnom slučaju za Milneov model će biti predmet budućeg istraživanja.

Inače, kao što je poznato, za sistem čiji je lagranžijan $L = L(q_\sigma, \dot{q}_\sigma, t)$ impulsi konjugovani generalisanim koordinatama q_σ se dobijaju iz

$$p_\sigma = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}, \quad q_\sigma = 1, 2, 3, ... \tag{5.29}$$

Tako su za lagranžijan (5.19) impulsi konjugovani Z, X i Y respektivno

$$p_Z = -\frac{\dot{Z}}{\rho}, \quad p_X = \frac{\dot{X}}{\rho}, \quad p_Y = \frac{\dot{Y}}{\rho}. \tag{5.30}$$

Klasični hamiltonijan sistema u opštem slučaju se dobija iz

$$H = \sum_\sigma p_\sigma \dot{q}_\sigma - L. \tag{5.31}$$

Tako će za Milneov model biti

$$H = \frac{\rho}{2}(-p_Z^2 + p_X^2 + p_Y^2) + 2\Lambda\rho. \tag{5.32}$$

Na početku ovog poglavlja je, dakle, rečeno da je Milneov četvorodimenzionalni kosmološki model zapravo specijalan slučaj vakuumskog otvorenog Fridmanovog modela. Potom je u nastavku pokazano da se 2+1 dimenzionalni kosmološki model toroidalne topologije sa kosmološkom konstantom svodi na trodimezionalni Milneov model koji je u dinamičkom smislu ekvivalentan slobodnoj relativističkoj čestici u trodimenzionalnom prostoru tipa Minkovskog. Treba istaći da je ovo za sada jedini poznat kosmološki model čije je dejstvo ekvivalentno dejstvu slobodne čestice koja se kreće u trodimenzionalnom prostor-vremenu.

5.2 Dvooscilatorni modeli u kosmologiji

Tema ovog poglavlja biće dvooscilatorni minisuperprostorni kosmološki modeli. Generalno, pod dvooscilatornim kosmološkim modelom u opštem smislu (na dalje samo: dvooscilatorni kosmološki model ili dvooscilatorni model) podrazumevaćemo model čiji se lagranžijan može, pogodnim smenama (ako je potrebno), predstaviti kao algebarska suma (zbir ili razlika) lagranžijana dva dekuplovana linearna harmonijska ili dva dekuplovana linearna invertovana harmonijska oscilatora. Pri tome, kao što je poznato, linearni *harmonijski oscilator* je sistem čiji je lagranžijan oblika $L = \dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2$ i iz koga se za konačnu jednačinu kretanja po x dobija trigonometrijska (harmonijska tj. sinusna ili kosinusna) funkcija vremena. Linearni *invertovani harmonijski oscilator* (poznat i pod nazivima:

upside-down oscilator, repulzivni oscilator, inverzni oscilator) je sistem sa lagranžijanom $L = \dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2$ čija je konačna jednačina kretanja po x hiperbolička (sinh ili cosh) funkcija vremena [77, 78, 79, 80, 81].

Ovom tipu kosmoloških modela pripadaju zapravo svi dvoparametarski modeli (čiji je minisuperprostor samim tim dvodimenzionalan) sa klasičnom dinamikom opisanom konačnim jednačinama kretanja (koje su ekvivalentne konačnim jednačinama kretanja za harmonijski ili invertovani harmonijski oscilator) za dva parametra koji potiču iz metrike i/ili Ajnštajn-Hilbertovog dejstva modela direktno, ili su sa njima posredno povezani naknadno uvedenim smenama promenljivih. Treba pri tome ukazati da navedena definicija dvooscilatornih modela isključuje modele kod kojih bi jedan oscilator bio harmonijski, a drugi invertovani harmonijski. Naime, u dosadašnjem radu se nismo sreli sa takvim tipom modela što može biti predmet budućeg istraživanja.

5.2.1 Klasifikacija modela

Opšti oblik lagranžijana za dvooscilatorne kosmološke modele u skladu gore navedenom definicijom je

$$L = [\dot{x}^2 \pm \omega_x^2 x^2] + \operatorname{sgn}\xi [\dot{y}^2 \pm \omega_y^2 y^2], \tag{5.33}$$

pri čemu frekvence ω_x i ω_y mogu biti jednake ili različite i $\operatorname{sgn}\xi = +$ ili $\operatorname{sgn}\xi = -$ nezavisno od znaka ispred $\omega_{x,y}$.

Modeli čiji je lagranžijan oblika $L = [\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2] \pm [\dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2]$ imaju trigonometrijska opšta rešenja Ojler-Lagranževih jednačina po x i y tipa $x = A_1 \cos(\omega_x t + A_2)$ i $y = B_1 \cos(\omega_y t + B_2)$ respektivno (pri čemu su A_1, A_2, B_1 i B_2 integracione konstante koje zavise od početnih uslova). U zavisnosti od znaka $\operatorname{sgn}\xi = \pm$ i od toga da li su frekvence ω_x i ω_y iste ili različite ovakvih modela ima četiri tipa. I potpuno isto i za modele sa lagranžijanom $L = [\dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2] \pm [\dot{y}^2 + \omega_y^2 y^2]$ sa hiperboličkim rešenjima Ojler-Lagranževih jednačina za x i y respektivno $x = A_1 \cosh(\omega_x t + A_2)$ i $y = B_1 \cosh(\omega_y t + B_2)$. Ukupno dakle 8 različitih tipova dvooscilatornih modela čiji je lagranžijan oblika (5.33) podeljenih u dve grupe po 4 (sa rešenjima Ojler-Lagranževih jednačina ekvivalentnim jednačinama kretanja linearnih harmonijskih ili invertovanih harmonijskih oscilatora). Radi jasnijeg prikaza navodimo i eksplicitno lagranžijane obe grupe.

Za grupu „harmonijskih" dvooscilatornih kosmoloških modela:

$$L_{(1)} = [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 - \omega^2 y^2], \tag{5.34}$$

$$L_{(2)} = [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] + [\dot{y}^2 - \omega^2 y^2], \tag{5.35}$$

$$L_{(3)} = [\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2] - [\dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2], \tag{5.36}$$

$$L_{(4)} = [\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2] + [\dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2]. \tag{5.37}$$

Za grupu „invertovanih harmonijskih" dvooscilatornih kosmoloških modela:

$$L_{(5)} = [\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 + \omega^2 y^2], \tag{5.38}$$

$$L_{(6)} = [\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] + [\dot{y}^2 + \omega^2 y^2], \tag{5.39}$$

$$L_{(7)} = [\dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2] - [\dot{y}^2 + \omega_y^2 y^2], \tag{5.40}$$

$$L_{(8)} = [\dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2] + [\dot{y}^2 + \omega_y^2 y^2]. \tag{5.41}$$

Lagranžijani ove dve grupe su povezani sa (bar) dva tipa relevantnih transformacija. Jedna je signaturna izmena $t \to -i\tau$ (koja podrazumeva prelazak sa Lorencovog na Euklidov region četvorodimenzionalne prostorno-vremenske mnogostrukosti), a druga je promena znaka ispred kvadrata frekvence oscilatora tj. transformacija $\omega_{x,y}^2 \to -\omega_{x,y}^2$ (što može biti posledica promene znaka parametra preko koga u konkretnom modelu može biti definisan kvadrat frekvence oscilatora). Pri tome i jedna i druga transformacija proizvode isto „dejstvo" u smislu prelaska na novi tip lagražijana iz druge grupe. Npr. pri signaturnoj izmeni $t \to -i\tau$ lagranžijan (5.34) postaje

$$L_{(1)} = [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 - \omega^2 y^2] \xrightarrow{t \to -i\tau} \bar{L}_{(1)} = [-\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] - [-\dot{y}^2 - \omega^2 y^2], \tag{5.42}$$

i dalje

$$\bar{L}_{(1)} = [-\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] - [-\dot{y}^2 - \omega^2 y^2] = -([\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 + \omega^2 y^2]). \tag{5.43}$$

Sa druge strane, s obzirom na invarijantnost dinamike u odnosu na množenje lagranžijana proizvoljnim multiplikativnim faktorom (pa samim tim i u odnosu na promenu znaka ispred njega) umesto poslednjeg može se razmatrati lagranžijan $\bar{L}'_{(1)} = [\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 + \omega^2 y^2]$. Stoga se može pisati da

$$L_{(1)} = [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 - \omega^2 y^2] \xrightarrow{t \to -i\tau} \bar{L}'_{(1)} = [\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 + \omega^2 y^2], \tag{5.44}$$

uz napomenu da su, nakon signaturne izmene $t \to -i\tau$, izvodi u $\bar{L}_{(1)}$ i $\bar{L}'_{(1)}$ izvodi po novoj promenljivoj τ. Dalje, uz trivijalnu smenu $\tau = t$, $\bar{L}'_{(1)}$ postaje zapravno $L_{(5)}$ tj. lagranžijan oblika (5.38), te se u konačnom ishodu može reći da pri signaturnoj tranziciji lagranžijan $L_{(1)}$ prelazi u lagranžijan $L_{(5)}$. Lako se proverava da važi i obrnuto. Naime, ako je npr. $L_{(5)}$ lagranžijan modela u Lorencovom regionu, tada se signaturnim prelazom u euklidski region (tj. transformacijom $t \to -i\tau$) on zapravo svodi na $L_{(1)}$. Takođe, lako je uveriti se da će do iste transformacije $L_{(1)} \to L_{(5)}$, ili njoj korespondentne inverzne, doći i pri $\omega^2 \to -\omega^2$. Ove transformacije, na isti način, prevode i lagranžijane (5.35), (5.36) i (5.37) u lagranžijane (5.39), (5.40) i (5.41), respektivno (i obrnuto).

U daljem tekstu biće razmotreni primeri nekih od modela iz obe grupe („harmonijske" i „invertovane harmonijske"), i posebno primeri do sada najbolje proučenih dvooscilatornih modela čiji su lagranžijani oblika (5.34).

5.2.2 Primeri

a) Multidimenzionalni Fridmanov model sa $\tilde{\phi}$ i $U(\tilde{\phi})$

Dinamika ovog modela razmotrena je u radu [82] u kome se polazi od kosmološkog modela koji ima FLRW metriku

$$\mathfrak{g} = -\beta d\beta \otimes d\beta + \frac{\bar{R}^2(\beta)}{\left(1+\frac{\mathsf{k}r^2}{4}\right)^2} dx^i \otimes dx^i + \bar{a}^2(\beta)\mathfrak{g}^{(d)}, \tag{5.45}$$

sa d-dimenzionalnim unutrašnjim prostorom, koja je definisana na mnogostrukosti

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{3+1} \times \mathcal{M}_d, \tag{5.46}$$

sa $D = 4 + d$ ukupnim brojem dimenzija. Pri tome je $\mathsf{k} = 1, 0, -1$ u zavisnosti od tipa geometrije (za zatvoren model je $\mathsf{k} = 1$, za otvoren $\mathsf{k} = -1$ i za ravan je $\mathsf{k} = 0$), $\bar{R}(\beta)$ i $\bar{a}(\beta)$ predstavljaju faktor skale i radijus d-dimenzionalnog unutrašnjeg prostora respektivno, dok je $\mathfrak{g}^{(d)}$ metrika unutrašnjeg prostora (pretpostavlja se da je ravan). U radu se polazi od Ajnštajn-Hilbertovog dejstva oblika

$$S = \frac{1}{2k_D^2}\int_{\mathcal{M}} \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^D x - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \left[-\left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\beta}\right)^2 + 2U(\tilde{\phi})\right]\sqrt{-g} d^D x + S_{YGH}, \tag{5.47}$$

gde je k_D D-dimenzionalna gravitaciona konstanta, $\tilde{\phi}$ minimalno kuplovano homogeno skalarno polje sa potencijalom $U(\tilde{\phi})$. Pri tome je za $\beta > 0$ signatura u metrici (5.45) Lorencova, a za $\beta < 0$ Euklidova. Model se razmatra u Lorencovom regionu, vrši se dimenzionalna redukcija modela, a potom i redefinicija skalarnog polja $\tilde{\phi} \to \phi$ i odgovarajućeg potencijala $U(\tilde{\phi}) \to V(\phi)$, pri čemu novouvedeni potencijal $V(\phi)$ ima takvu formu da jednim svojim delom opisuje sajn-Gordonovu skalarnu interakciju, a drugim delom sponatano narušenje simetrije koje je odgovorno za signaturnu tranziciju. Posle niza transformacija promenljivih, prikazanih u [82], dobija se laganžijan modela

$$L = -\frac{k_0^2}{\gamma'^2}(\dot{\alpha}_1^2 - \dot{\alpha}_2^2 - \omega_+^2\alpha_1^2 + \omega_-^2\alpha_2^2), \tag{5.48}$$

gde je k_0 4-dimenzionalna gravitaciona konstanta, γ' konstantna veličina, $\alpha_{1,2}$ nove promenljive i $\omega_\pm$ frekvence oscilatora (definicije i način uvođenja ovih veličina mogu se pronaći u pomenutom radu [82]). Očigledno je da je model koji se razmatra „harmonijski" dvooscilatorni kosmološki model sa oscilatorima različitih frekvenci sa lagranžijanom (5.48) koji je zapravo oblika (5.36). Pri signaturnoj tranziciji iz Lorencovog u Euklidov deo prostor-vremena tj. pri $t \to -i\tau$ lagranžijan (5.48) prelazi u lagranžijan oblika (5.40), što bi inače takođe bilo ekvivalentno promeni znaka ispred kvadrata frekvenci u (5.48) tj. pri $\omega_\pm^2 \to -\omega_\pm^2$.

b) Fridmanov model sa ϕ i Λ

Ovaj model je predstavljen u radu [83]. U pitanju je ravan Fridmanov model sa metrikom

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \tag{5.49}$$

i Ajnštajn-Hilbertovim dejstvom

$$S = \frac{1}{2k^2}\int_{\mathcal{M}} \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x + \int_{\mathcal{M}} \left(-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \Lambda\right)\sqrt{-g}\, d^4x + S_{YGH}, \tag{5.50}$$

sa minimalno kuplovanim skalarnim poljem ϕ i kosmološkom konstantom Λ (pri tome je ovde $k = 8\pi G$). Korišćenjem (5.49) dejstvo (5.50) postaje

$$S = \int \left[-3R\dot{R}^2 + 3kR + (\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \Lambda)R^3\right] dt. \tag{5.51}$$

Ako se iskoriste smene

$$x_1 = R^{3/2}\cosh(\sqrt{\frac{3}{8}}\phi), \tag{5.52}$$

$$x_2 = R^{3/2}\sinh(\sqrt{\frac{3}{8}}\phi), \tag{5.53}$$

gde je $-\infty < \phi < \infty$ i $0 \le R < \infty$, iz izraza (5.51) dobija se lagranžijan

$$L = \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + \frac{3}{4}\Lambda(x_1^2 - x_2^2). \tag{5.54}$$

Očevidno je reč o lagranžijanu minisuperprostornog dvooscilatornog modela istih frekvenci oscilatora datih sa $\omega^2 = \frac{3}{4}\Lambda > 0$ čije konačne jednačine kretanja po x_1 i x_2 imaju hiperbolička rešenja. Drugim rečima u pitanju je model čiji se lagranžijan svodi na oblik (5.38). U slučaju da je $\frac{3}{4}\Lambda < 0$, konačne jednačine kretanja će biti harmonijske funkcije vremena, a model dvooscilatorni sa lagranžijanom (5.34) (i potpuno isto pri $t \to -i\tau$).

c) Fridmanov model sa ϕ i $U(\phi)$

Treći primer je kosmološki model razmatran u radu *Signature change in p-adic and noncommutative FRW cosmology* autora Đorđevića, Nešića i Radovančevića [84]. Reč je o minisuperprostornom kosmološkom modelu sa ravnom FLRW metrikom

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2), \tag{5.55}$$

i Ajnštajn-Hilbertovim dejstvom sa skalarnim poljem ϕ i interakcionim potencijalom $U(\phi)$

$$S = \frac{1}{2k^2}\int_{\mathcal{M}} \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x + \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi - U(\phi)\right]\sqrt{-g}\, d^4x + S_{YGH}. \tag{5.56}$$

Polazeći od metrike (5.55) i dejstva (5.56), dobija se lagranžijan modela u Lorencovom regionu [84]

$$L = -3R\dot{R}^2 + R^3\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - U(\phi)\right]. \tag{5.57}$$

Uz transformacije $x_1 = R^{3/2}\cosh(\alpha\phi)$ i $x_2 = R^{3/2}\sinh(\alpha\phi)$, sa potencijalom $U(\phi)$ koji zadovoljava uslov [85]

$$2\alpha^2(x_1^2 - x_2^2)U(\phi) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2b x_1 x_2, \tag{5.58}$$

gde su a_1, a_2 i b konstantni parametri (parametri a_1 i a_2 su povezani sa kosmološkom konstantom Λ i masom skalarnog polja m na sledeći način $\Lambda = \frac{a_1}{2\alpha^2}$ i $m^2 = a_1 + a_2$ [85]) i stavljajući da je $\alpha^2 = \frac{3}{8}$, lagranžijan (5.57) postaje

$$L = \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + 2b x_1 x_2. \tag{5.59}$$

Ako se uvedu smene promenljivih [84]

$$x_1 = \frac{\frac{b}{s_+}}{\left(\frac{b^2}{s_+^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}Q_1 + \frac{\frac{b}{s_-}}{\left(\frac{b^2}{s_-^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}Q_2, \quad x_2 = \frac{1}{\left(\frac{b^2}{s_+^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}Q_1 + \frac{1}{\left(\frac{b^2}{s_-^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}Q_2, \tag{5.60}$$

gde je $s_\pm = -\frac{1}{2}(a_1+a_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_1+a_2)^2 - 4b^2}$, uz uslove $(a_1+a_2)^2 > 4b^2 > 0$ i $b^2 > s_\pm^2 > 0$, nakon zamene (5.60) u (5.59), lagranžijan postaje dekuplovan

$$L = \left[\dot{Q}_1^2 - \omega_+^2 Q_1^2\right] + \left[\dot{Q}_2^2 - \omega_-^2 Q_2^2\right], \tag{5.61}$$

gde su frekvence

$$\omega_\pm^2 = \frac{a_2 + a_1\frac{b^2}{s_\pm^2} + 2\frac{b^2}{s_\pm}}{1 - \frac{b^2}{s_\pm^2}} = \frac{1}{2}(a_2 - a_1) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a_1+a_2)^2 - 4b^2}. \tag{5.62}$$

Dekuplovani lagranžijan (5.61) je oblika (5.37) za „harmonijski" dvoocilatorni kosmološki model opisan u Lorencovom regionu sa dva oscilatora različitih frekvenci čije se energije sabiraju u hamiltonijanu sistema. Vikova rotacija, tj. signaturni prelaz u Euklidov region zamenom $t \to -i\tau$, daje Euklidovu formu dvooscilatornog dekuplovanog lagranžijana modela

$$\overline{L} = \left[\dot{Q}_1^2 + \omega_+^2 Q_1^2\right] + \left[\dot{Q}_2^2 + \omega_-^2 Q_2^2\right], \tag{5.63}$$

u kome su tačke iznad slova izvodi po τ. Ovaj lagranžijan je ekvivalentan lagranžijanu (5.41).

d) Modeli sa lagranžijanom oblika $L_{(1)}$

U pitanju su kosmološki minisuperprostorni modeli čiji se lagranžijan može svesti na lagranžijan (5.34) dva dekuplovana harmonijska oscilatora jednakih frekvenci čije se energije oduzimaju u hamiltonijanu sistema. Oni čine do sada najbolje proučenu klasu dvooscilatornih modela u koju spada 6 tipova do sada otkrivenih kosmoloških modela [86]. Mogu se podeliti u dve grupe. Jednu grupu čine modeli sa kosmološkom konstantom u dejstvu, a drugu modeli bez kosmološke konstante.

Modeli sa kosmološkom konstantom:

i) Fridmanov model sa minimalno kuplovanim skalarnim poljem ϕ i kosmološkom konstantom Λ

Metrika modela: $ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$.

Dejstvo modela: $S = \frac{1}{2k^2} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{R}\sqrt{-g}\, d^4x + \int_{\mathcal{M}} \left(-\frac{1}{2}\left(\nabla\phi\right)^2 - \Lambda\right)\sqrt{-g}\, d^4x + S_{YGH}$.

Ovo je, zapravo, malopre razmatrani model u primerima pod b) iz rada [83], ali ovaj put za $\frac{3}{4}\Lambda < 0$. Lagranžijan modela, koji se dobija iz metrike i dejstva, se uz smene (5.52) i (5.53) i sa $\frac{3}{4}\Lambda < 0$ svodi na

$$L = \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \frac{3}{4}\left|\Lambda\right|(x_1^2 - x_2^2), \tag{5.64}$$

što je lagranžijan oblika $L_{(1)}$.

ii) Fridmanov $D = 4 + d$ dimenzionalni model sa kosmološkom konstantom Λ i untrašnjim d-dimenzionalnim prostorom

Metrika modela: $ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)}{\left(1+\frac{kr^2}{4}\right)^2}(dr^2 + r^2 d\Omega^2) + a^2(t) g_{ij}^{(d)} dx^i dx^j$.

Dejstvo modela: $S = \frac{1}{2k_D^2} \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{R} - 2\Lambda)\sqrt{-g}\, d^D x + S_{YGH}$.

Lagranžijan koji se dobija iz metrike i dejstva modela smenama navedenim u radovima [87], [88] i [89] postaje

$$L = -4\left(\frac{d+2}{d+3}\right)\left\{\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \frac{\Lambda}{2}\left(\frac{d+3}{d+2}\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right\}. \tag{5.65}$$

S obzirom na to da su jednačine kretanja invarijante u odnosu na množenje L proizvoljnim multiplikativnim faktorom, lagranžijan sistema je i

$$L = \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \frac{\Lambda}{2}\left(\frac{d+3}{d+2}\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \omega^2 x_1^2 + \omega^2 x_2^2, \tag{5.66}$$

gde je $\omega^2 = \frac{\Lambda}{2}\left(\frac{d+3}{d+2}\right)$ frekvenca oscilatorâ. L je dakle i ovde oblika (5.34).

iii) Vakuumski Kaluca-Klajn 4+1 dimenzionalni model sa kosmološkom konstantom Λ

Metrika modela: $ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)dr^i dr^i}{(1+\frac{\mathrm{k}r^2}{4})^2} + a^2(t)d\rho^2$.

Dejstvo modela: $S = \int_{\mathcal{M}}(\mathcal{R} - \Lambda)\sqrt{-g}dtd^3rd\rho$.

Model se, između ostalog, razmatra u radovima [90], [91], [92] i [93]. Primetimo da metrika sada ima dva faktora skale $R(t)$ i $a(t)$. Lagranžijan modela je [92]

$$L = \frac{1}{2}Ra\dot{R}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{R}\dot{a} - \frac{1}{2}\mathsf{kR}a + \frac{1}{6}\Lambda R^3 a. \tag{5.67}$$

Stavljajući da je $\omega^2 = -\frac{2\Lambda}{3}$ $(\Lambda < 0)$ i uvodeći smene promenljivih [92]

$$u = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[R^2 + Ra - \frac{3\mathsf{k}}{\Lambda}\right], \quad v = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[R^2 - Ra - \frac{3\mathsf{k}}{\Lambda}\right], \tag{5.68}$$

lagranžijan (5.67) se svodi na oblik (5.34)

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{u}^2 - \omega^2 u^2\right) - \left(\dot{v}^2 - \omega^2 v^2\right)\right]. \tag{5.69}$$

Modeli bez kosmološke konstante (razmatrani u radovima [94] i [95]):

iv) Fridmanov model sa bezmasenim skalarnim poljem ϕ koje je konformno kuplovano sa gravitacijom

Metrika modela: $ds^2 = \frac{2G}{3\pi}\left(-\tilde{N}^2 d^2 t + a^2(t)d\Omega_3^2(t)\right)$.

Gustina lagranžijana materije: $\mathcal{L}_m = -\frac{3}{8\pi G}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + \frac{1}{6}\mathcal{R}\phi^2\right)$.

Uz $\tilde{N} = aN$ i smenu $\phi = \frac{b}{a}$, dejstvo materije je:

$$S_m = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m\sqrt{-g}d^4x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\dot{b}^2}{N^2} - b^2\right)N\,dt, \tag{5.70}$$

dok je Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo bez kosmološke konstante

$$S = \frac{1}{2}\int\left(-\frac{\dot{a}^2}{N} + \frac{\dot{b}^2}{N} - Nb^2 + Na^2\right)dt. \tag{5.71}$$

Odavde je lagranžijan modela

$$L = \frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{a}^2}{N} + \frac{\dot{b}^2}{N} - Nb^2 + Na^2\right), \tag{5.72}$$

dakle oblika (5.34).

v) Fridmanov model sa bezmasenim skalarnim poljem ϕ koje je minimalno kuplovano sa gravitacijom

Metrika modela: $ds^2 = \frac{2G}{3\pi}\left(-\tilde{N}^2 d^2 t + a^2(t) d\Omega_3^2(t)\right)$.
Gustina lagranžijana materije: $\mathcal{L}_m = -\frac{3}{8\pi G} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$.
Ajnštajn-Hilbertovo dejstvo, uz $\Lambda = 0$, je

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^{ik}K_{ik} - K^2\right)\sqrt{-g}d^4x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_m \sqrt{-g}d^4x, \tag{5.73}$$

i nakon zamene $\mathcal{L}_m$, $\tilde{N} = aN$, integracije i uvođenja smena $x = a\cosh(\phi)$, $y = a\sinh(\phi)$, $a^2 = x^2 - y^2$, svodi se na isti oblik kao i u prethodnom primeru

$$S = \frac{1}{2}\int \left(-\frac{\dot{x}^2}{N} + \frac{\dot{y}^2}{N} - Ny^2 + Nx^2\right) dt, \tag{5.74}$$

i daje lagranžijan tipa (5.34)

$$L = \frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{x}^2}{N} + \frac{\dot{y}^2}{N} - Ny^2 + Nx^2\right). \tag{5.75}$$

vi) Vakuumski Kantovski-Saks model

Lagranžijan i ovog minisuperprostornog kosmološkog modela može se pogodnim koordinatnim transformacijama svesti na lagranžijan tipa $L_{(1)}$. Ovaj model je pri tome od posebnog interesa razmotriti jer je njegova dinamika difeomorfna dinamici unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe. Analiza ove korespondencije, bazirana na radu *Two-oscillator Kantowski-Sachs model of the Schwarzschild black hole interior* autora Đorđevića, Nešića i Radovančevića [96], detaljno će biti predstavljena u osmoj glavi disertacije.

Opšta forma metrike modela je već data jednačinom (5.3), no može se predstaviti i u formi [41]

$$ds^2 = \frac{G}{2\pi}\left(-\tilde{N}^2(t)dt^2 + b_1^2(t)d\chi^2 + b_2^2(t)d\Omega_2^2(t)\right), \quad \chi \in (0, 2\pi). \tag{5.76}$$

Uzimaći u obzir da je u ovom slučaju $\mathcal{L}_m = 0$ i $\Lambda = 0$, dejstvo (4.12) za ovaj model je

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^{ik}K_{ik} - K^2\right)\sqrt{-g}d^4x \tag{5.77}$$

Nakon integracije u prethodnom izrazu, i smena $b_1 = \frac{x-y}{x+y}$, $b_2 = \frac{(x+y)^2}{2}$ i $\tilde{N} = (x+y)^2 N'$, dobija se isti oblik dejstva, a zatim i lagranžijana kao i u prethodna dva slučaja

$$L = \frac{1}{2}\left(-\frac{\dot{x}^2}{N'} + \frac{\dot{y}^2}{N'} - N'y^2 + N'x^2\right). \tag{5.78}$$

5.2.3 Klasična dejstva dvooscilatornih modela

Rešavajući Ojler-Lagranževe jednačine za lagranžijane svih tipova dvooscilatornih kosmoloških modela (5.34)-(5.41), dobijaju se opšti oblici konačnih jednačina kretanja po minisuperprostornim koordinatama x i y. Za „harmonijske" modele sa lagranžijanima (5.34) i (5.35) opšta rešenja Ojler-Lagranževih jednačina su harmonijska

$$x = A_1 \cos(\omega t + B_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + B_2), \tag{5.79}$$

kao i za lagranžijane (5.36) i (5.37)

$$x = A_1 \cos(\omega_x t + B_1), \quad y = A_2 \cos(\omega_y t + B_2). \tag{5.80}$$

Za lagranžijane (5.38) i (5.39) iz grupe „invertovanih harmonijskih" modela opšta rešenja Ojler-Lagranževih jednačina su hiprebolička

$$x = A_1 \cosh(\omega t + B_1), \quad y = A_2 \cosh(\omega t + B_2), \tag{5.81}$$

kao i za (5.40) i (5.41)

$$x = A_1 \cosh(\omega_x t + B_1), \quad y = A_2 \cosh(\omega_y t + B_2). \tag{5.82}$$

Partikularna klasična rešenja dobijaju se određivanjem integracionih konstanti A_1, A_2, B_1 i B_2 za date početne uslove. Npr. za $x(t') = x'$, $x(t'') = x''$, $y(t') = y'$ i $y(t'') = y''$ iz opštih rešenja (5.79)-(5.82) dobijaju se sledeća partikularna, redom:

$$\begin{aligned} x(t) &= x' \frac{\sin(\omega(t''-t))}{\sin(\omega(t''-t'))} + x'' \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\sin(\omega(t''-t'))}, \\ y(t) &= y' \frac{\sin(\omega(t''-t))}{\sin(\omega(t''-t'))} + y'' \frac{\sin(\omega(t-t'))}{\sin(\omega(t''-t'))}, \end{aligned} \tag{5.83}$$

za modele sa lagranžijanima $L_{(1)}$ i $L_{(2)}$,

$$\begin{aligned} x(t) &= x' \frac{\sin(\omega_x(t''-t))}{\sin(\omega_x(t''-t'))} + x'' \frac{\sin(\omega_x(t-t'))}{\sin(\omega_x(t''-t'))}, \\ y(t) &= y' \frac{\sin(\omega_y(t''-t))}{\sin(\omega_y(t''-t'))} + y'' \frac{\sin(\omega_y(t-t'))}{\sin(\omega_y(t''-t'))}, \end{aligned} \tag{5.84}$$

za modele sa lagranžijanima $L_{(3)}$ i $L_{(4)}$,

$$\begin{aligned} x(t) &= x' \frac{\sinh(\omega(t''-t))}{\sinh(\omega(t''-t'))} + x'' \frac{\sinh(\omega(t-t'))}{\sinh(\omega(t''-t'))}, \\ y(t) &= y' \frac{\sinh(\omega(t''-t))}{\sinh(\omega(t''-t'))} + y'' \frac{\sinh(\omega(t-t'))}{\sinh(\omega(t''-t'))}, \end{aligned} \tag{5.85}$$

za modele sa $L_{(5)}$ i $L_{(6)}$,

$$\begin{aligned} x(t) &= x' \frac{\sinh(\omega_x(t''-t))}{\sinh(\omega_x(t''-t'))} + x'' \frac{\sinh(\omega_x(t-t'))}{\sin(\omega_x(t''-t'))}, \\ y(t) &= y' \frac{\sinh(\omega_y(t''-t))}{\sinh(\omega_y(t''-t'))} + y'' \frac{\sinh(\omega_y(t-t'))}{\sinh(\omega_y(t''-t'))}, \end{aligned} \tag{5.86}$$

za modele sa kojima odgovaraju $L_{(7)}$ i $L_{(8)}$.

Zamenom (5.83) u $L_{(1)}$ i $L_{(2)}$, (5.84) u $L_{(3)}$ i $L_{(4)}$, (5.85) u $L_{(5)}$ i $L_{(6)}$, (5.86) u $L_{(7)}$ i $L_{(8)}$ dobijaju se odgovarajući klasični lagranžijani $L^{cl}_{(1)}$,...,$L^{cl}_{(8)}$. Njihova integracija po vremenu u intervalu od t' do t'' daje klasična dejstva za dvooscilatorne modele u Lorencovom regionu.

Tako se za „harmonijske" modele dobija da su klasična dejstva u Lorencovom regionu:

$$\begin{aligned} S^{cl}_{(1)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(1)}\, dt \\ &= \omega\left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2x''x'}{\sin(\omega T)}\right] - \omega\left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2y''y'}{\sin(\omega T)}\right], \end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned} S^{cl}_{(2)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(2)}\, dt \\ &= \omega\left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2x''x'}{\sin(\omega T)}\right] + \omega\left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tan(\omega T)} - \frac{2y''y'}{\sin(\omega T)}\right], \end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned} S^{cl}_{(3)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(3)}\, dt \\ &= \omega_x\left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tan(\omega_x T)} - \frac{2x''x'}{\sin(\omega_x T)}\right] - \omega_y\left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tan(\omega_y T)} - \frac{2y''y'}{\sin(\omega_y T)}\right], \end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned} S^{cl}_{(4)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(4)}\, dt \\ &= \omega_x\left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tan(\omega_x T)} - \frac{2x''x'}{\sin(\omega_x T)}\right] + \omega_y\left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tan(\omega_y T)} - \frac{2y''y'}{\sin(\omega_y T)}\right], \end{aligned} \tag{5.90}$$

a za „invertovane harmonijske" modele:

$$\begin{aligned} S^{cl}_{(5)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(5)}\, dt \\ &= \omega\left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tanh(\omega T)} - \frac{2x''x'}{\sinh(\omega T)}\right] - \omega\left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tanh(\omega T)} - \frac{2y''y'}{\sinh(\omega T)}\right], \end{aligned} \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned} S^{cl}_{(6)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(6)}\, dt \\ &= \omega\left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tanh(\omega T)} - \frac{2x''x'}{\sinh(\omega T)}\right] + \omega\left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tanh(\omega T)} - \frac{2y''y'}{\sinh(\omega T)}\right], \end{aligned} \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned} S^{cl}_{(7)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(7)}\, dt \\ &= \omega_x\left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tanh(\omega_x T)} - \frac{2x''x'}{\sinh(\omega_x T)}\right] - \omega_y\left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tanh(\omega_y T)} - \frac{2y''y'}{\sinh(\omega_y T)}\right], \end{aligned} \tag{5.93}$$

$$
\begin{aligned}
S^{cl}_{(8)} \quad (x'', y'', t''; x', y', t') &= \int_{t'}^{t''} L^{cl}_{(8)}\, dt \\
&= \omega_x \left[\frac{x''^2 + x'^2}{\tanh(\omega_x T)} - \frac{2x''x'}{\sinh(\omega_x T)} \right] + \omega_y \left[\frac{y''^2 + y'^2}{\tanh(\omega_y T)} - \frac{2y''y'}{\sinh(\omega_y T)} \right], \qquad (5.94)
\end{aligned}
$$

gde je $T = t'' - t'$.

5.2.4 Kanonski formalizam i Hamiltonov uslov

Impulsi konjugovani minisuperprostornim koordinatama x i y mogu se dobiti iz opšteg izraza (5.29). Tako se za sve lagranžijane $L_{(1)}$,...,$L_{(8)}$, date sa (5.34)-(5.41), dobija da je impuls konjugovan koordinati x istog oblika $p_x = 2\dot{x}$. Što se tiče impulsa konjugovanog koordinati y, za lagranžijane $L_{(1)}$, $L_{(3)}$, $L_{(5)}$ i $L_{(7)}$ on je $p_y = -2\dot{y}$, a za lagranžijane $L_{(2)}$, $L_{(4)}$, $L_{(6)}$ i $L_{(8)}$ je $p_y = 2\dot{y}$.

Hamiltonijani se dobijaju iz (5.31), tako da su za dvooscilatorne modele sa lagranžijanima $L_{(1)}$,...,$L_{(8)}$ dati redom:

$$H_{(1)} = \left[\frac{p_x^2}{4} + \omega^2 x^2 \right] - \left[\frac{p_y^2}{4} + \omega^2 y^2 \right], \qquad (5.95)$$

$$H_{(2)} = \left[\frac{p_x^2}{4} + \omega^2 x^2 \right] + \left[\frac{p_y^2}{4} + \omega^2 y^2 \right], \qquad (5.96)$$

$$H_{(3)} = \left[\frac{p_x^2}{4} + \omega_x^2 x^2 \right] - \left[\frac{p_y^2}{4} + \omega_y^2 y^2 \right], \qquad (5.97)$$

$$H_{(4)} = \left[\frac{p_x^2}{4} + \omega_x^2 x^2 \right] + \left[\frac{p_y^2}{4} + \omega_y^2 y^2 \right], \qquad (5.98)$$

$$H_{(5)} = \left[\frac{p_x^2}{4} - \omega^2 x^2 \right] - \left[\frac{p_y^2}{4} - \omega^2 y^2 \right], \qquad (5.99)$$

$$H_{(6)} = \left[\frac{p_x^2}{4} - \omega^2 x^2 \right] + \left[\frac{p_y^2}{4} - \omega^2 y^2 \right], \qquad (5.100)$$

$$H_{(7)} = \left[\frac{p_x^2}{4} - \omega_x^2 x^2 \right] - \left[\frac{p_y^2}{4} - \omega_y^2 y^2 \right], \qquad (5.101)$$

$$H_{(8)} = \left[\frac{p_x^2}{4} - \omega_x^2 x^2 \right] + \left[\frac{p_y^2}{4} - \omega_y^2 y^2 \right]. \qquad (5.102)$$

Sa druge strane, iz Hamiltonove formulacije Opšte teorije relativnosti (poglavlje 4.2) sledi da za dati kosmološki model mora biti zadovoljen Hamiltonov uslov (4.21). Ovaj uslov, uz impulsni (4.22) i primarne uslove veza (4.17) i (4.18), prema (4.19), vodi zahtevu da je $H = 0$ (što se u literaturi takođe zove Hamiltonovim uslovom). Nulta vrednost hamiltonijana, jasno, interpretira se kao zahtev da ukupna energija sistema bude jednaka nuli (tzv. uslov nulte energije). Sasvim generalno, Ajnštajnova teorija gravitacije se može tretirati kao Dirakova teorija sistema sa vezama u kojoj je $H = 0$ upravo jedan od uslova veza [53, 97].

U ovom slučaju, dakle, ovaj uslov moraju da zadovoljavaju hamiltonijani svih osam dvooscilatornih modela odnosno $H_{(i)} = 0$ za $i = 1, 2, ..., 8$. Odmah se vidi da ovo ograničenje zapravo ukazuje da između integracionih konstanti A_1, A_2, B_1 i B_2 iz opštih rešenja (5.79)-(5.82) za posmatrani dvooscilatorni model mora postojati određena veza. Tako npr. za model iz rada [96] sa lagranžijanom tipa $L_{(1)}$ se vidi da iz $H_{(1)} = 0$ sledi da su integracione konstante A_1 i A_2 iz opšteg rešenja (5.79) za ovaj model povezane na sledeći način: $A_1 = \pm A_2$. Dakle, uslov nulte energije ograničava moguće vrednosti integracionih konstanti u konačnim jednačinama kretanja za minisuperprostorne koordinate posmatranog modela.

Sem toga, uslov nulte energije od svih dvooscilatornih modela izdvaja dve klase koje čine jednu grupu modela sa posebnim nazivom. Naime, s obzirom na to da je hamiltonijanom oscilatora zapravo data njegova energija, to se onda može reći da uslovi nulte energije $H_{(1)} = 0$ i $H_{(3)} = 0$ za „harmonijske" modele sa lagranžijanima $L_{(1)}$ i $L_{(3)}$ respektivno, zapravo ukazuju na činjenicu da su svaki od ova dva tipa modela predstavljeni sistemom od dva linearna harmonijska oscilatora istih energija koje se oduzimaju u hamiltonijanu sistema. Za dvooscilatorni sistem ovakvog tipa se kaže da čini jedan *oscillator-ghost-oscillator* sistem [98] ili *indefinite oscillator* sistem [99].

S obzirom na to da se unutrašnjost Švarcšildove crne rupe može opisati jednim ovakvim modelom (o čemu će više biti reči u osmoj glavi disertacije) ispostavlja se važnim proučavanje dinamike *oscillator-ghost-oscillator* sistema. Za ove sisteme je, takođe, karakteristično veoma jednostavno rešavanje Viler-de Vitove jednačine prostom smenom koja razdvaja promenljive (što će biti prezentovano u poglavlju 5.3).

5.2.5 Signaturna izmena

Ograničenja koja na integracione konstante u konačnim jednačinama kretanja za minisuperprostorne koordinate nameće uslov nulte energije nisu i jedina moguća. Razmatranje mogućnosti signaturne tranzicije iz, uobičajeno, Lorencovog u Euklidov region (ili obrnuto) prostor-vremena može da nametne dodatne zahteve u zavisnosti od modela.

Inače, sama signaturna tranzicija podrazumeva, zapravo, promenu metrike tako da ona, ako je bila lorencovskog tipa sa signaturom $(-, +, +, +)$, nakon ove transformacije postaje euklidska sa signaturom $(+, +, +, +)$, što se očigledno za kvadratne metričke forme realizuje Vikovom rotacijom vremenske ose tj. sa $t \to -i\tau$. Kada su u pitanju razmatrani dvooscilatorni kosmološki modeli, kao što je već rečeno, sasvim formalno, pri ovoj transformaciji lagranžijani „harmonijskih" modela prelaze u lagranžijane „invertovanih harmonijskih" i obrnuto tj. $L_{(1)} \xleftrightarrow{t\to -i\tau} L_{(5)}$, $L_{(2)} \xleftrightarrow{t\to -i\tau} L_{(6)}$, $L_{(3)} \xleftrightarrow{t\to -i\tau} L_{(7)}$

i $L_{(4)} \xleftrightarrow{t\to -i\tau} L_{(8)}$. Odmah je jasno da signaturna tranzicija, indirektno (nakon izračunavanja konkretnih izraza za dejstva za svaki lagranžijan u oba regiona), dovodi i do prelaza između odgovarajućih klasičnih dejstava tj. $S^{cl}_{(1)} \leftrightarrow S^{cl}_{(5)}$, $S^{cl}_{(2)} \leftrightarrow S^{cl}_{(6)}$, $S^{cl}_{(3)} \leftrightarrow S^{cl}_{(7)}$ i $S^{cl}_{(4)} \leftrightarrow S^{cl}_{(8)}$ (ovaj poslednji slučaj je prezentovan u radu [84]).

U poglavlju 4.4 je ukazano da je ova transformacija nužna kako bi se mogli rešiti određeni funkcionalni integrali, pa čak i tada tek uz određene granične uslove kao što je bio npr. Hartl-Hokingov. Ovaj uslov je, inače, formulisan upravo tako da prirodno odgovara određivanju talasne funkcije univerzuma u okviru formalizma integrala po trajektorijama (što naravno ne znači da se on ne može nametnuti i na rešenja iz kanonskog pristupa tj. Viler-de Vitove jednačine).

Pored ovih matematičkih implikacija koje ukazuju na važnost proučavanja signaturne tranzicije postoje i fizički razlozi. Naime, kao što rečeno u poglavlju 2.1 i na početku glave 4, kvantna teorija gravitacije ukazuje da na Plankovoj skali klasičan koncept merenja i strukture prostor-vremena gubi simisao. Nasuprot tome, adelična kvantna mehanika (poglavlje 3.2), pored toga što daje uspešnu interpretaciju rezultata p-adične kvantne mehanike, u fizičkom smislu bazira se upravo na ideji nearhimedovske strukture prostor--vremena Plankove skale, dok opet sa druge strane predviđa i njegovu diskretnu strukturu. Pored toga u uvodu je pomenuto da istraživanja u okviru *loop* kvantne gravitacije [3] ukazuju da se ova diskretizacija (implicirana i u okviru nekomutativnog pristupa) može dovesti u vezu sa mehanizmom signaturne tranzicije u Hartl-Hokingovom pristupu [4, 5], koja se takođe pokazuje važnom i za proučavanje ubrzane Hablove ekspanzije [6] i pojma vremena [7].

Nakon prezentacije matematičke i fizičke relevantnosti razmatranja signaturne izmene i njenog mehanizma, vraćajući se na početak, treba ponoviti da, kao što je već rečeno, ova transformacija nameće uslove koje moraju zadovoljavati rešenja Ojler-Lagranževih jednačina po minisuperprostornim koordinatama i uopšte određuje moguće vrednosti i drugih parametara pri kojima se ovaj prelaz može desiti. Sami uslovi su određeni konkretnim tipom modela koji se razmatra.

U daljem tekstu biće naveden primer u okviru koga će biti prezentovano kako uslov nulte energije, signaturna izmena i još neki drugi zahtevi nameću ograničenja na vrednosti ili predznake parametara modela.

U pomenutom radu [84] Đorđevića, Nešića i Radovančevića razmotreni su uslovi signaturne izmene posebno u standardnom, a posebno u p-adičnom slučaju za model razmatran u delu 5.2.2 (pod c). Na ovom mestu biće razmotren slučaj signaturne tranzicije za klasičnu formu ovog modela. Uslovi koji određuju mogućnost signaturne izmene u p--adičnom prostor-vremenu biće predstavljeni u narednoj glavi disertacije. Koliko radi podsećanja, model u 5.2.2 (pod c) je ravan Fridmanov model sa skalarnim poljem ϕ i interakcionim potecijalom $U(\phi)$. U [100] se pokazuje da se ovaj potencijal može predstaviti i u obliku

$$U(\phi) = \Lambda + \frac{1}{2\alpha^2} m^2 \sinh^2(\alpha\phi) + \frac{1}{2\alpha^2} b \sinh(2\alpha\phi), \tag{5.103}$$

odakle su kosmološka konstanta Λ i masa m skalarnog polja, respektivno

$$\Lambda = U|_{\phi=0} = a_1/2\alpha^2, \tag{5.104}$$

$$m^2 = \partial^2 U/\partial\phi^2|_{\phi=0} = a_1 + a_2, \tag{5.105}$$

pri čemu su α, a_1, a_2 i b parametri uvedeni sa (5.58).

Ono što ovde treba reći jeste da se u radu [100] na početku navodi da je mogućnost „$-\alpha^2$" isključena uslovom nulte energije, čime se već nameće ograničenje na jedan od parametara teorije. Dodatna ograničenja pri tome mogu biti postavljena i na paramatre a_1 i a_2 u zavisnosti od očekivanog znaka i/ili moguće vrednosti za Λ i m^2.

Sa druge strane, lagranžijan modela (5.57) se odgovarajućim smenama promenljivih (koje su date u delu 5.2.2 (pod c)) svodi na oblik (5.59), da bi se konačno smenama (5.60) sveo na lagranžijan dva dekuplovana harmonijska oscilatora različitih frekvenci: $L = \left[\dot{Q}_1^2 - \omega_+^2 Q_1^2\right] + \left[\dot{Q}_2^2 - \omega_-^2 Q_2^2\right]$. Pri tome, same transformacije promenljivih nameću na a_1, a_2 i b dva uslova da bi ovo dekuplovanje bilo moguće, naime da je: $(a_1+a_2)^2 > 4b^2 > 0$ i $b^2 > s_\pm^2 > 0$ (gde je $s_\pm = -\frac{1}{2}(a_1+a_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_1+a_2)^2 - 4b^2}$) [84]. Za ovaj oblik lagranžijana Ojler-Lagranževe jednačine su

$$\ddot{Q}_1 + \omega_+^2 Q_1 = 0, \tag{5.106}$$

$$\ddot{Q}_2 + \omega_+^2 Q_2 = 0, \tag{5.107}$$

pri čemu su frekvence date sa (5.62).

Sada dolazi na red i uslov nametnut mogućnošću realizacije signaturne tranzicije. U radovima [100] i [84] se eksplicitno ukazuje da će za ovaj model signaturni prelaz iz Lorencovog regiona u Euklidov biti moguć samo za trigonometrijsko rešenje od (5.106) i (5.107) tj. za $\omega_\pm^2 > 0$, a što prema prethodnom izrazu vodi novom zahtevu koga parametri teorije moraju zadovoljavati: $(a_2 - a_1) > \sqrt{(a_1+a_2)^2 - 4b^2}$.

U tom smislu, opšte rešenje od (5.106) i (5.107), za koje će biti moguća signaturna tranzicija, je sledećeg oblika

$$Q_1 = C_1 \cos(\omega_+ t + D_1), \quad Q_2 = C_2 \cos(\omega_- t + D_2). \tag{5.108}$$

Pri signaturnoj izmeni L prelazi u oblik (5.63), $\bar{L} = \left[\dot{Q}_1^2 + \omega_+^2 Q_1^2\right] + \left[\dot{Q}_2^2 + \omega_-^2 Q_2^2\right]$, za koga će opšte rešenje Ojler-Lagranževih jednačina biti

$$Q_1 = \bar{C}_1 \cosh(\omega_+ \tau + \bar{D}_1), \quad Q_2 = \bar{C}_2 \cosh(\omega_- \tau + \bar{D}_2). \tag{5.109}$$

Sa druge strane, u kontekstu kvantne kosmologije, pokazuje se da mehanizam signaturne tranzicije zahteva zadovoljavanje i uslova zašivanja rešenja prema kome su: impulsna polja realna u Lorencovom, a imaginarna u Rimanovom (Euklidovom) regionu i moraju iščeznuti/nestati na mestu spajanja tj. čvorištu ovih oblasti [101, 102]. U konkretnom slučaju to znači da moraju biti zadovoljeni početni uslovi tipa $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = 0$ u Lorencovom i Euklidovom regionu, odnosno i za rešenja (5.108) i za rešenja (5.109) [100]. Ovo povlači da su integracione konstante $D_1 = D_2 = \bar{D}_1 = \bar{D}_2 = 0$. Dalje, s obzirom na to da početni uslovi u Lorencovom regionu determinišu rešenja u oba regiona imamo da je $C_{1,2} = \bar{C}_{1,2}$ [84].

Tako se na kraju dobija da se opšte rešenje u Lorencovom regionu može predstaviti u obliku

$$Q_{1,2} = C_{1,2} \cosh(i\omega_\pm t), \tag{5.110}$$

i prilikom $t \to -i\tau$ prelazi u odgovarajuće rešenje u Euklidovom regionu. To je, dakle, sa matematičkog aspekta posledica adekvatnih i sa druge strane fizički opravdanih zahteva koji su morali biti ispunjeni u ovom mehanizmu, a opet izraženi kroz uslove koje su morali zadovoljiti parametri u teoriji ovog kosmološkog modela.

Na sličan način u standardnom (ne)komutativnom slučaju se vrši i analiza signaturne tranzicije i opštih uslova koje zadovoljavaju parametri drugih kosmoloških modela [90, 103, 104].

5.3 Standardna kvantizacija modelâ

U ovom delu biće razmotrene standardne kvantne forme Milneovog i dvooscilatornih kosmoloških modela. Kao što je već rečeno, u okviru kvantnog, talasnog, pristupa osnovni objekat je talasna funkcija koja sadrži sve informacije kojima je opisano stanje posmatranog kvantnog sistema odnosno, u okviru kvantne kosmologije, kosmološkog modela. U kvantnoj teoriji do nje se može doći na (najmanje) dva načina – naime, ili u okviru kanonskog ili funkcionalnog kvantnog pristupa. S obzirom na ekvivalentnost formalizama očekuje se da i dobijeni rezultati budu ekvivalentni. Stoga će dalje razmatranje u ovom delu biti ograničeno samo na jedan pristup – kanonski.

U cilju određivanja talasne funkcije nekog modela kanonski pristup podrazumeva rešavanje osnovne jednačine kanonske kvantne kosmologije, Viler-de Vitove jednačine (4.30), koja se dobija kvantizacijom Hamiltonovog uslova (4.21) i po svojoj formi predstavlja analogon Šredingerove jednačine u standardnoj kvantnoj mehanici (poglavlje 4.3).

Tako se u postupku kvantizacije, polazeći od hamiltonijana (5.32), za Milneov model dobija sledeća Viler-de Vitova jednačina

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 4\Lambda\right] \Psi(X,Y,Z) = 0. \tag{5.111}$$

Inicijalno proučavanje ove jednačine Klajn-Gordonovog tipa sprovedeno je u radu [105]. Odsustvo egzaktne forme standardne talasne funkcije za Milneov model sa svojim specifičnim topološkim karakteristikama jedna je od poslednjih prepreka njegovoj adelizaciji.

Polazeći od hamiltonijana (5.95)-(5.102), kvantizacijom Hamiltonovog uslova, dobijaju se Viler-de Vitove jednačine dvooscilatornih modela sa lagranžijanima $L_{(1)}$,...,$L_{(8)}$ redom:

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\omega^2x^2-\omega^2y^2\right]\Psi(x,y)=0, \tag{5.112}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\omega^2x^2+\omega^2y^2\right]\Psi(x,y)=0, \tag{5.113}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\omega_x^2x^2-\omega_y^2y^2\right]\Psi(x,y)=0, \tag{5.114}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2\right]\Psi(x,y)=0 \tag{5.115}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\omega^2x^2+\omega^2y^2\right]\Psi(x,y)=0, \tag{5.116}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\omega^2x^2-\omega^2y^2\right]\Psi(x,y)=0, \tag{5.117}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2\right]\Psi(x,y)=0, \tag{5.118}$$

$$\left[-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\omega_x^2x^2-\omega_y^2y^2\right]\Psi(x,y)=0. \tag{5.119}$$

Njihovim rešavanjem određuju se talasne funkcije $\Psi_{\infty,1}$,...,$\Psi_{\infty,8}$ za svaki od modela u realnom, standardnom, slučaju.

Za potrebe kvantizacije unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe [96] od interesa su rešenja Viler-de Vitove jednačine *oscillator-ghost-oscillator* sistemâ (inače, opšta rešenja ove jednačine mogu se naći u [106]). U pitanju su jednačine (5.112) i (5.114) koje se mogu shvatiti kao Šredingerove jednačine dva dekuplovana kvantna linearna harmonijska oscilatora istih energija koje se oduzimaju u hamiltonijanu sistema.

Jednačina (5.112) se može, uz manje transformacije, napisati i na sledeći način

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\tilde{\omega}^2(x^2-y^2)\right]\Psi(x,y)=0, \tag{5.120}$$

gde je $\tilde{\omega}=2\omega$. Metodom razdvajanja promenljivih, stavljajući da je $\Psi_{n_1,n_2}(x,y)=\mu_{n_1}(x)\tau_{n_2}(y)$, dobijaju se svojstvena stanja [107, 108]

$$\begin{aligned}\Psi_{n_1,n_2}(x,y) &= \mu_{n_1}(x)\tau_{n_2}(y)\\ &= \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{H_{n_1}(\sqrt{\tilde{\omega}}x)}{\sqrt{2^{n_1}n_1!}}\right]e^{-\frac{\tilde{\omega}x^2}{2}}\left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{H_{n_2}(\sqrt{\tilde{\omega}}y)}{\sqrt{2^{n_2}n_2!}}\right]e^{-\frac{\tilde{\omega}y^2}{2}},\end{aligned} \tag{5.121}$$

gde su $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ kvantni brojevi svojstvenih stanja dva dekuplovana oscilatora. Stanja (5.121) zadovoljavaju normalizacioni uslov

$$\iint \Psi_{n_1,n_2}(x,y)\Psi_{m_1,m_2}(x,y)\,dx\,dy = \delta_{n_1,m_1}\delta_{n_2,m_2}, \tag{5.122}$$

koji, zapravo, sledi iz normalizacionog uslova Hermitovih polinoma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)\,dx = 2^n\sqrt{\pi}n!\delta_{nm}. \tag{5.123}$$

Sa druge strane, sa $\Psi_{n_1,n_2} = |n_1,n_2\rangle$ iz (4.30) je

$$\hat{\mathcal{H}}\,|n_1,n_2\rangle = (n_1-n_2)\,|n_1,n_2\rangle = 0, \tag{5.124}$$

odakle sledi da je: $n_1 = n_2 = n$.

Opšte rešenje Viler-de Vitove jednačine (5.120) će biti superpozicija svojstvenih stanja (5.121) za sve vrednosti kvantnog broja $n_1 = n_2 = n \in \mathbb{N}_0$ [107, 108]

$$\Psi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\Psi_{n,n}(x,y) = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{2^n n!}e^{-\frac{\tilde{\omega}}{2}(x^2+y^2)}H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}x)H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}y), \tag{5.125}$$

što se, kao što će biti pokazano u osmoj glavi disertacije, može interpretirati, u okviru standardnog kvantnog pristupa, kao talasna funkcija Švarcšildove crne rupe prezentovane preko Kantovski-Saks minisuperprostornog kosmološkog modela [96].

Viler-de Vitova jednačina (5.114) odgovara *oscillator-ghost-oscillator* sistemu sa različitim frekvencama. Ovaj model je prezentovan u 5.2.2 (pod a), a njegova dinamika i rešenje Viler-de Vitove jednačine u radu [82]. Postupak je sličan kao i u prethodnom slučaju. Najpre, jednačina (5.114) se može napisati u sledećoj formi

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{\omega}_x^2 x^2 - \tilde{\omega}_y^2 y^2\right]\Psi(x,y) = 0, \tag{5.126}$$

gde je $\tilde{\omega}_{x,y} = 2\omega_{x,y}$. I opet, uvođenjem smene $\Psi_{n_1,n_2}(x,y) = \mu_{n_1}(x)\tau_{n_2}(y)$ koja razdvaja promenljive svojstvena stanja su [82]

$$\begin{aligned}\Psi_{n_1,n_2}(x,y) &= \mu_{n_1}(x)\tau_{n_2}(y)\\ &= \left(\frac{\tilde{\omega}_x}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{H_{n_1}(\sqrt{\tilde{\omega}_x}x)}{\sqrt{2^{n_1}n_1!}}\right]e^{-\frac{\tilde{\omega}_x x^2}{2}}\left(\frac{\tilde{\omega}_y}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{H_{n_2}(\sqrt{\tilde{\omega}_y}y)}{\sqrt{2^{n_2}n_2!}}\right]e^{-\frac{\tilde{\omega}_y y^2}{2}},\end{aligned} \tag{5.127}$$

gde su $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$. Ova stanja, takođe, zadovoljavaju normalizacioni uslov (5.122). Iz (4.30) ovde se dobija da važi

$$(n_1+1/2)\tilde{\omega}_x = (n_2+1/2)\tilde{\omega}_y, \quad n_1,n_2 \in \mathbb{N}_0. \tag{5.128}$$

Opšte rešenje će sada biti [82]

$$\Psi(x,y) = {\sum_{n_1,n_2}}' A_{n_1,n_2}\Psi_{n_1,n_2}(x,y), \tag{5.129}$$

pri čemu znak prim na sumi ukazuje da se sabiranje vrši samo po onim vrednostima n_1 i n_2 koje zadovoljavaju uslov (5.128). Koeficijenti A_{n_1,n_2} su dati sa [109]

$$\frac{A_{n_1,n_2}}{\sqrt{2^{n_2}n_2!}} = \left(\frac{\pi}{\tilde{\omega}_y}\right)^{1/4} \frac{(n_2/2)!c_{n_1}}{(-1)^{n_2/2}n_2!}, \tag{5.130}$$

gde je

$$c_n = e^{-1/4|\chi_0|^2} \frac{\chi_0^n}{\sqrt{2^n n!}}. \tag{5.131}$$

χ_0 se zove parametar klasično-kvantne korespondencije i računa se na sledeći način [82]

$$\chi_0 = \sqrt{\frac{\tilde{\omega}_x}{\tilde{\omega}_y}} x(0) e^{i\theta_0}, \tag{5.132}$$

pri čemu je $x(0)$ vrednost za $t = 0$ klasičnog rešenja po x Ojler-Lagranževih jednačina ovog sistema opisanog sa $L_{(3)}$. Rešenja u opštem obliku za ovaj model su data sa (5.80). U radu [82] ova rešenja su data kao

$$x(t) = x(0)\cos(\tilde{\omega}_x t - \theta_0), \quad y(t) = y(0)\sin(\tilde{\omega}_y t). \tag{5.133}$$

6 p-Adična i adelična kosmologija

Kao što je već rečeno, razmatranje kosmosa kao celine u okviru Opšte teorije relativnosti dovelo je do zasnivanja kosmologije kao posebne naučne discipline. Sa druge strane, njena predviđanja i opservabilni dokazi ukazali su na potrebu formulisanja kvantne teorije gravitacije čije su, pored ostalih, dve predikcije bile nearhimedova i diskretna struktura prostor-vremena na Plankovoj skali. Ove činjenice pružile su dobar fizički osnov kako za zasnivanje p-adične i adelične kvantne mehanike tako i za njihovu primenu na različite kosmološke modele. To je vodilo razvoju p-adične i adelične kvantne kosmologije [110] kao generalizacije standardne kvantne kosmologije nastale iz primene kvantne teorije gravitacije na opis ranih faza razvoja univerzuma.

p-Adična i adelična kosmologija, po analogiji i iz istih razloga kao i p-adična i adelična kvantna mehanika, su se razvijale na bazi formalizma integrala po trajektorijama. U ovom formalizmu je, prema rečenom u poglavlju 4.4, od interesa razmatrati amplitudu prelaza vasione (4.32) jednog u drugo stanje. Njena p-adična generalizacija ima oblik

$$\langle h''_{ik}, \Phi'', \Sigma'' | h'_{ik}, \Phi', \Sigma' \rangle_p = \int \chi_p(-S_p(g_{\mu\nu}, \Phi)) \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_p \ \mathcal{D}(\Phi)_p. \tag{6.1}$$

I slično, odgovarajući p-adični analogoni standardnog minisuperprostornog propagatora (5.4) i njegovog jezgra (5.5) biće respektivno

$$\left\langle q^{\alpha\prime\prime} | q^{\alpha\prime} \right\rangle_p = \int \mathcal{K}_p \left(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0 \right) dN, \tag{6.2}$$

$$\mathcal{K}_p \left(q^{\alpha\prime\prime}, N; q^{\alpha\prime}, 0 \right) = \int \chi_p \left(-S_p(q^\alpha, N) \right) \mathcal{D} q^\alpha. \tag{6.3}$$

Kvantno-p-adični i adelični opis kosmoloških modela, zasnovan na funkcionalnom pristupu, razvijao se u dva pravca. Prvi podrazumeva određivanje p-adične talasne funkcije vasione koja zadovoljava p-adično uopštenje Hartl-Hokingovog graničnog uslova [111, 112, 113, 114]. U okviru ovog pristupa za različite kosmološke modele dobijaju se tzv. p-adične Hartl-Hokingove talasne funkcije kao rešenja p-adičnih integrala oblika

$$\Psi_p^{HH}(q^\alpha) = \int_{|N|_p \leq 1} \mathcal{K}_p(q^\alpha, N; 0, 0) \, dN. \tag{6.4}$$

U sledećem koraku za dati kosmološki model potrebno je odrediti adeličnu talasnu funkciju univerzuma [112]

$$\begin{aligned} \Psi^{(adel.)}(h_{ij}) &= \Psi_\infty(h_{ij}) \times \prod_p \int \chi_p(-S_p(g_{\mu\nu}, \Phi)) \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_p \ \mathcal{D}(\Phi)_p \\ &= \prod_v \int \chi_v(-S_v(g_{\mu\nu}, \Phi)) \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_v \ \mathcal{D}(\Phi)_v, \end{aligned} \tag{6.5}$$

gde je

$$\Psi_\infty(h_{ij}) = \int \chi_\infty(-S_\infty(g_{\mu\nu},\Phi))\mathcal{D}(g_{\mu\nu})_\infty\ \mathcal{D}(\Phi)_\infty, \tag{6.6}$$

talasna funkcija vasione u standardnoj kosmologiji, uz potreban uslov postojanja vakuumskih p-adičnih stanja $\Omega(|q^\alpha|_p)$ koja zadovoljavaju zahtev

$$\int_{|q^{\alpha\prime}|\leq 1} \mathcal{K}_p\left(q^{\alpha\prime\prime},N;q^{\alpha\prime},0\right)\, dq^{\alpha\prime} = \Omega(|q^{\alpha\prime\prime}|_p), \tag{6.7}$$

za sve osim možda za konačno mnogo prostih brojeva p. Tretman kosmoloških modela u okviru ovog pristupa [41, 111, 112, 113, 114, 115, 116] dao je odgovarajuće rezultate samo za neke modele, dok je za druge pokazano da se njihova p-adična Hartl-Hokingova talasna funkcija ne može svesti na Ω funkciju. Prema prethodnom, to znači da se za te modele ne može konstruisati adelična talasna funkcija te se, stoga, na standardan način ne može izvršiti njihovo uopštavanje odnosno adelizacija. Ovo navodi na pretpostavku da Hartl-Hokingov granični uslov nije dovoljno „dobar" za adeličnu generalizaciju. Ovde treba pomenuti i činjenicu da Hartl-Hokingov granični uslov nije jedini koji se koristi u kvantnoj kosmologiji za određivanje talasne funkcije vasione (kao što smo već rekli postoji npr. i Vilenkinov), pa, prema tome, ne mora da znači da pokušaj adelizacije nema smisla ako se svi modeli ne mogu adelizirati na ovaj način.

Drugi pravac razvoja p-adičnog i adeličnog opisa kosmoloških modela, koji je takođe zasnovan na funkcionalnom formalizmu, podrazumeva da se u okviru p-adične kvantne mehanike, za posmatrane kosmološke modele, odrede i ispitaju uslovi za egzistenciju vakuumskih p-adičnih stanja $\Omega(|x|_p)$, $\Omega(p^\nu|x|_p)$ i $\delta(p^\nu - |x|_p)$, a pre svih osnovnog vakuumskog stanja $\Omega(|x|_p)$ čije je postojanje nužno u smislu adelizacije.

U disertaciji će biti predstavljen ovaj drugi pristup p-adičnoj kosmologiji Milneovog modela kao i dvooscilatornih kosmoloških modela.

6.1 p-Adični i adelični Milneov model

U ovom poglavlju biće određeni uslovi egzistencije vakuumskih p-adičnih stanja $\Omega(|X|_p)$, $\Omega(p^\nu|X|_p)$ i $\delta(p^\nu - |X|_p)$ za Milneov kosmološki model. p-Adično dejstvo ovog modela, prema rečenom na kraju poglavlja 3.1, imaće formalno isti oblik kao i u klasičnom slučaju (5.24), ali sa promenljivima iz polja $\mathbb{Q}_p$. Sa druge strane, s obzirom na očiglednu kvadratičnu formu dejstva (5.24), a samim tim i p-adičnog, odgovarajući oblik p-adičnog propagatora će biti dat izrazom (3.15). Konkretno za ovaj model (uz $h=1$) [75]

$$\mathcal{K}_p^{(\mu)}(X''^\mu,T;X'^\mu,0) = \frac{\lambda_p((-1)^{\delta_0^\mu}2T)}{|T|_p^{1/2}}\chi_p\!\left(-(-1)^{\delta_0^\mu}\frac{(X''^\mu-X'^\mu)^2}{2T}+(-1)^{\delta_0^\mu}2\Lambda T\right), \tag{6.8}$$

pri čemu μ uzima vrednosti 0, 1 i 2, što daje vrednosti p-adičnog propagatora $\mathcal{K}_p^{(\mu)}$ za Z, X i Y komponentu p-adičnog dejstva respektivno. Tada će kompletan p-adični propagator biti

$$\mathcal{K}_p(X'', T; X', 0) = \prod_{\mu=0}^{2} \mathcal{K}_p^{(\mu)}(X''^{\mu}, T; X'^{\mu}, 0), \tag{6.9}$$

gde su sa leve strane u zagradi sa X označeni 3-vektori Minkovskog čiji je kvadrat $X^2 = -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2$.

Uslovi egzistencije osnovnog vakuumskog stanja $\Omega(|X|_p)$, prema (3.18), biće određeni iz

$$\int_{\mathbb{Q}_p^3} \mathcal{K}_p(X'', T; X', 0)\Omega(|X'|_p)\, dX' = \Omega(|X''|_p), \tag{6.10}$$

gde je za 3-vektor $X \in \mathbb{Q}_p^3$ p-adična norma $|X|_p = \max_{0\le\mu\le2}\{|X|_p\}$. Zamenom (6.8) u (6.9), a potom (6.9) u (6.10) se dobija

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda_p(2T)}{|T|_p^{3/2}}\chi_p\left(-\frac{X''^2}{2T} + 2\Lambda T\right)\int_{|X'^0|_p\le1}\chi_p\left(\frac{(X'^0)^2}{2T} - \frac{X''^0}{T}X'^0\right)dX'^0 \\ &\qquad\times\prod_{i=1}^{2}\int_{|X'^i|_p\le1}\chi_p\left(\frac{(X'^i)^2}{2T} - \frac{X''^i}{T}X'^i\right)dX'^i = \Omega(|X''|_p). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Integrali u prethodnom izrazu su Gausovi p-adični integrali oblika (2.43) za $p \ne 2$ i $\gamma = 0$. Koristeći donju granu rešenja integrala (2.43) dobija se da je

$$\chi_p(2\Lambda T)\prod_{\mu=0}^{2}\Omega(|X''^{\mu}|_p) = \Omega(|X''|_p), \quad |T|_p < 1. \tag{6.12}$$

Zahtev $\prod_{\mu=0}^{2}\Omega(|X''^{\mu}|_p) = \Omega(|X''|_p)$, implicira

$$|2\Lambda T|_p \le 1, \quad |T|_p < 1, \tag{6.13}$$

što za $p \ne 2$ povlači uslov $|\Lambda|_p \le 1$.

Koristeći gornju granu rešenja u (2.43) dobija se

$$\frac{\lambda_p(2T)}{|T|_p^{3/2}}\chi_p\left(-\frac{X''^2}{2T} + 2\Lambda T\right)\prod_{\mu=0}^{2}\Omega\left(\left|\frac{X''^{\mu}}{T}\right|_p\right) = \Omega(|X''|_p), \quad |2T|_p \ge 1. \tag{6.14}$$

Tako, model ima osnovno vakuumsko p-adično stanje za $p \ne 2$

$$\Psi_p(X, T) = \Omega(|X|_p), \quad |\Lambda|_p \le 1, \quad |T|_p = 1. \tag{6.15}$$

Na sličan način može se pokazati egzistencija i vakuumskih stanja oblika $\Omega(p^{\nu}|X|_p)$ i $\delta(p^{\nu} - |X|_p)$ za $\nu \in \mathbb{Z}$. Naime, prema (3.19) i (3.20) stanja ovog oblika u prostoru $\mathbb{Q}_p^3$ zadovoljavaju respektivno

$$\int_{\mathbb{Q}_p^3} \mathcal{K}_p(X'', T; X', 0)\Omega(p^{\nu}|X'|_p)\, dX' = \Omega(p^{\nu}|X''|_p), \tag{6.16}$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p^3} \mathcal{K}_p(X'', T; X', 0)\delta(p^\nu - |X'|_p)\, dX' = \delta(p^\nu - |X''|_p). \tag{6.17}$$

Zamenom (6.8) u (6.9), a potom (6.9) u (6.16) i (6.17) dobija se, nakon slične procedure integracije, da je

$$\Psi_p(X,T) = \Omega(p^\nu |X|_p), \quad |\Lambda|_p \leq p^{2\nu}, \quad |T|_p = p^{-2\nu}, \tag{6.18}$$

$$\Psi_p(X,T) = \delta(p^\nu - |X|_p), \quad |\Lambda|_p \leq p^{2-2\nu}, \quad |T|_p = p^{2\nu-2}. \tag{6.19}$$

U nastavku će biti određeni uslovi egzistencije istih vakuumskih stanja za $p = 2$. Zamenom (6.8) u (6.9) a potom i (6.9) u (6.10) dobija se da, za $p = 2$, osnovno vakuumsko stanje $\Omega(|X|_2)$ zadovoljava

$$\frac{\lambda_2(2T)}{|T|_2^{3/2}} \chi_2\left(-\frac{X''^2}{2T} + 2\Lambda T\right) \int_{|X'^0|_2 \leq 1} \chi_2\left(\frac{(X'^0)^2}{2T} - \frac{X''^0}{T} X'^0\right) dX'^0$$
$$\times \prod_{i=1}^{2} \int_{|X'^i|_2 \leq 1} \chi_2\left(-\frac{(X'^i)^2}{2T} + \frac{X''^i}{T} X'^i\right) dX'^i = \Omega(|X''|_2). \tag{6.20}$$

Integrali su i ovde Gausovog tipa, no za slučaj $p = 2$ (i $\gamma = 0$) njihova rešenja su data sa (2.44) odakle se vidi da će integrali ovog tipa imati četiri grane rešenja. Drugim rečima, za stanje $\Omega(|X|_2)$ će postojati četiri moguća rešenja prethodnog izraza. Poslednja grana u (2.44) daje isti konačni oblik kao i u (6.12) ali uz uslov (koji sledi iz uslova egzistencije rešenja donje grane iz (2.44)) da je $|T|_2 \leq \frac{1}{4}$. Sa druge strane, isti zahtev (kao i u slučaju $p \neq 2$) da je $\prod_{\mu=0}^{2} \Omega(|X''^\mu|_2) = \Omega(|X''|_2)$ implicira $|\Lambda|_2 |T|_2 \leq 2$. Dalje pretpostavljajući rešenja integrala u (6.20) kao u pretposlednjoj grani (2.44) dobija se da je

$$\chi_2(2\Lambda T) \prod_{\mu=0}^{2} \Omega\left(\left|\frac{X''^\mu}{T}\right|_2\right) = \Omega(|X''|_2), \quad |T|_2 = \frac{1}{2}. \tag{6.21}$$

Zahtev da integrali u (6.20) imaju oblik kao integrali u drugoj grani rešenja (2.44) vodi uslovu $|T|_2 = 1$. Prva grana u (2.44) na egzistenciju osnovnog vakuumskog stanja $\Omega(|X|_2)$ nameće uslov $|T|_2 \geq 2$.

Na sličan način zamenom (6.8) u (6.9), a potom (6.9) u (6.16) odnosno u (6.17), za $p = 2$ se mogu odrediti uslovi egzistencije vakuumskih stanja $\Omega(2^\nu |X|_2)$ i $\delta(2^\nu - |X|_2)$ respektivno (pri čemu je i ovde $\nu \in \mathbb{Z}$). Tako se pokazuje da stanje $\Omega(2^\nu |X|_2)$ može postojati za sledeće vrednosti parametra T: $|T|_2 \leq 2^{-2\nu-2}$, $|T|_2 = 2^{-2\nu-1}$, $|T|_2 = 2^{-2\nu}$ i za $|T|_2 \geq 2^{-2\nu+1}$, a vakuumsko stanje tipa delta funkcije za $|T|_2 \leq 2^{2\nu-3}$ [75].

Detalji prethodnog računa i određivanja uslova za egzistenciju p-adičnih vakuumskih stanja Milneovog modela predstavljeni su u radu [75]. Što se tiče adelizacije modela, opšti oblik adelične talasne funkcije dat je formulom (3.21). U prethodnom razmatranju je pokazano da vakuumska p-adična stanja oblika $\Omega(|X|_p)$ za ovaj model postoje, međutim, kao što je rečeno u poglavlju 5.3, talasna funkcija Milneovog modela u standardnoj kvantnoj kosmologiji još uvek nije egzaktno određena što za sada predstavlja prepreku njegovoj adelizaciji.

6.2 p-Adični i adelični dvooscilatorni kosmološki modeli

U ovom delu biće razmotrene p-adične forme dvooscilatornih kosmoloških modela i mogućnost njihove adelizacije. U tom cilju takođe će biti ispitani uslovi postojanja vakuumskih p-adičnih stanja za ove modele. I ovde, a prema izloženom na kraju poglavlja 3.1, može se konstatovati da će za ove kosmološke modele lagranžijani (5.34)-(5.41), opšte jednačine kretanja (5.79)-(5.82) i klasična dejstva (5.87)-(5.94) imati formalno isti oblik i u p-adičnom slučaju ali sa promenljivima iz polja $\mathbb{Q}_p$, pri čemu su p-adične trigonometrijske i hiperboličke funkcije ($\sin x$, $\tan x$, $\sinh x$ i $\tanh x$), koje se javljaju u p-adičnim dejstvima, definisane redovima istog oblika kao i u realnom slučaju i čiji je domen analitičnosti $G_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \quad |x|_p \leq |2p|_p\}$ [1]. S obzirom na kvadratičnost izraza za klasična dejstva (5.87)-(5.94), jasno je da će izrazi iste forme biti kvadratični i nad poljem $\mathbb{Q}_p$. To dalje znači da se p-adični propagator može odrediti korišćenjem opšteg izraza (3.17) za p-adično jezgro dvodimenzionalnih sistema sa kvadratičnim p-adičnim dejstvom. Konkretno i pojedinačno, po tipovima dvooscilatornih modela čiji su klasični lagranžijani $L_{(1)}$,...,$L_{(8)}$, p-adični propagatori imaju oblik, respektivno (uz $h = 1$):

za „harmonijske" dvooscilatorne modele:

$$\mathcal{K}_{p(1)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(1)}), \tag{6.22}$$

$$\mathcal{K}_{p(2)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \lambda_p\left(\frac{\omega}{\sin(\omega T)}\right)\lambda_p\left(\frac{\omega}{\sin(\omega T)}\right)\left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(2)}), \tag{6.23}$$

$$\mathcal{K}_{p(3)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \lambda_p\left(\frac{\omega_x}{\sin(\omega_x T)}\right)\lambda_p\left(-\frac{\omega_y}{\sin(\omega_y T)}\right)\left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(3)}), \tag{6.24}$$

$$\mathcal{K}_{p(4)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \lambda_p\left(\frac{\omega_x}{\sin(\omega_x T)}\right)\lambda_p\left(\frac{\omega_y}{\sin(\omega_y T)}\right)\left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(4)}). \tag{6.25}$$

za „invertovane harmonijske" dvooscilatorne modele:

$$\mathcal{K}_{p(5)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(5)}), \tag{6.26}$$

$$\mathcal{K}_{p(6)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \lambda_p\left(\frac{\omega}{\sinh(\omega T)}\right)\lambda_p\left(\frac{\omega}{\sinh(\omega T)}\right)\left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(6)}), \tag{6.27}$$

$$\mathcal{K}_{p(7)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \lambda_p\left(\frac{\omega_x}{\sinh(\omega_x T)}\right)\lambda_p\left(-\frac{\omega_y}{\sinh(\omega_y T)}\right)\left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(7)}), \tag{6.28}$$

$$\mathcal{K}_{p(8)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \lambda_p\left(\frac{\omega_x}{\sinh(\omega_x T)}\right)\lambda_p\left(\frac{\omega_y}{\sinh(\omega_y T)}\right)\left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S^{cl}_{p(8)}), \tag{6.29}$$

gde su $S^{cl}_{p(1)}$,...,$S^{cl}_{p(8)}$ klasična p-adična dejstva koja su po formi identična sa realnim klasičnim dejstvima $S^{cl}_{(1)}$,...,$S^{cl}_{(8)}$ datim sa (5.87)-(5.94) respektivno.

Najpre, kada su u pitanju vakuumska p-adična stanja oblika $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)$, ona ovde zadovoljavaju

$$\int_{|x'|_p\leq 1}\int_{|y'|_p\leq 1}\mathcal{K}_p(x'',y'',t'';x',y',t')\,dx'\,dy' = \Omega(|x''|_p)\Omega(|y''|_p), \tag{6.30}$$

što je uopštenje izraza (3.18) na dvodimenzionalni slučaj. U ovom izrazu potrebno je zameniti $\mathcal{K}_p(x'',y'',t'';x',y',t')$ sa p-adičnim propagatorima (6.22)-(6.29). Prema obliku (6.22)-(6.29) jasno je da će integrali u (6.30) biti Gausovog tipa i da će se rešavati slično kao i u slučaju kod Milneovog modela tj. prema formulama (2.43) ili (2.44) u zavisnosti od toga da li je $p\neq 2$ ili je $p=2$ respektivno.

Generalno, i za $p\neq 2$ i za $p=2$, egzistencija osnovnog vakuumskog stanja biće određena sa, najmanje, dva uslova. Najpre, uslovom analitičnosti p-adičnih funkcija koje se pojavljuju u propagatorima (6.22)-(6.29). Ovaj uslov podrazumeva da njihov argument, u opštem obliku, ωT (što će i konkretno biti argument za sve p-adične funkcije u propagatorima za modele sa oscilatorima istih frekvenci, dok će za modele sa oscilatorima različitih frekvenci on biti oblika $\omega_\pm T$) pripada oblasti konvergencije p-adičnih trigonometrijskih ili hiperboličkih funkcija, odnosno skupu $G_p=\{x\in\mathbb{Q}_p:\quad |x|_p\leq|2p|_p\}$. U ovom slučaju to znači da je $|\omega T|_p\leq|2p|_p$, što se za $p\neq 2$ svodi na $|\omega T|_p\leq\frac{1}{p}$ dok za $p=2$ postaje $|\omega T|_2\leq\frac{1}{4}$. Ovaj uslov je zajednički za sve dvooscilatorne modele i različit samo po konačnoj formi za slučajeve $p\neq 2$ i $p=2$.

Drugi uslov je uslov egzistencije date grane rešenja u integralima (2.43) ili (2.44). Tako za $p\neq 2$ iz (2.43) vidimo da imamo dve mogućnosti $|\alpha|_p p^{2\gamma}\leq 1$ i $|\alpha|_p p^{2\gamma}>1$, dok za $p=2$ iz (2.44) slede četiri mogućnosti $|\alpha|_2 2^{2\gamma}\leq 1$, $|\alpha|_2 2^{2\gamma}=2$, $|\alpha|_2 2^{2\gamma}=4$ i $|\alpha|_2 2^{2\gamma}\geq 8$. Ovaj uslov, dakle, nameće ograničenja na vrednosti parametra α koji se javlja u karakteru $\chi_p(\alpha x^2+\beta x)$, tj. integrandu Gausovih integrala, i zapravo je koeficijent uz kvadrat promenljive po kojoj se vrši p-adična integracija. Kako će, prema (6.22)-(6.29), karakter u integrandu imati formu $\chi_p(-S^{cl}_p)$, lako se vidi da je za sve „harmonijske" dvooscilatorne modele parametar α u opštem slučaju oblika $\alpha=\pm\frac{\omega}{\tan(\omega T)}$, odnosno oblika $\alpha=\pm\frac{\omega}{\tanh(\omega T)}$ za „invertovane harmonijske" modele. Imajući u vidu osobine p-adične norme [1], za $p\neq 2$, za oba tipa modela dobija se da je $|\alpha|_p=\frac{1}{|T|_p}$.

Pri tome se lako proverava da se za $p\neq 2$, uz $|\alpha|_p=\frac{1}{|T|_p}$ i $\gamma=0$, uslovi $|\alpha|_p p^{2\gamma}\leq 1$ i $|\alpha|_p p^{2\gamma}>1$ respektivno svode na $|T|_p\geq 1$ i $|T|_p<1$. Ovi uslovi, zajedno sa uslovom analitičnosti (za $p\neq 2$) $|\omega T|_p\leq\frac{1}{p}$, ograničavaju moguće vrednosti frekvence oscilatora ω.

Za $p=2$ uslov analitičnosti glasi $|\omega T|_2\leq\frac{1}{4}$, dok uslovi egzistencije grana rešenja u (2.44) integralâ u (6.30) tj. $|\alpha|_2 2^{2\gamma}\leq 1$, $|\alpha|_2 2^{2\gamma}=2$, $|\alpha|_2 2^{2\gamma}=4$ i $|\alpha|_2 2^{2\gamma}\geq 8$, za $|\alpha|_p=\frac{1}{|T|_p}$ i $\gamma=0$, daju redom $|T|_2\geq 1$, $|T|_2=\frac{1}{2}$, $|T|_2=\frac{1}{4}$ i $|T|_2\leq\frac{1}{8}$. Ovo će opet, kao i u prethodnom slučaju, za svaku pojedinačnu granu integracije nametnuti specifičan uslov tj. ograničenje na ω.

Dakle, i za $p \neq 2$ i za $p = 2$, opšti uslov egzistenicije osnovnog vakuumskog stanja $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)$ za sve dvooscilatorne modele će biti uslov analitičnosti p-adičnih funkcija, u opštem obliku $|\omega T|_p \leq |2p|_p$. Pri tome, u prethodnoj analizi razmatrani su samo slučajevi u kojima se svi Gausovi integrali u (6.30) u svakom konkretnom slučaju rešavaju duž iste grane rešenja u (2.43) ili (2.44). Ovo je opravdano jer bi integracija u (6.30) pri kojoj bi se vrednost jednog integrala (koji odgovara jednoj promenljivoj tj. oscilatoru) određivala po jednoj grani, a vrednost drugog integrala (koji odgovara drugom oscilatoru) po (nekoj) drugoj grani u (2.43) ili (2.44) nametala kontradiktorna ograničenja na T.

Kada su u pitanju vakuumska stanja tipa $\Omega(p^\nu|x|_p)\Omega(p^\mu|y|_p)$, ona zadovoljavaju sledeće dvodimenzionalno uopštenje uslova (3.19)

$$\int_{|x'|_p\leq p^{-\nu}} \int_{|y'|_p\leq p^{-\mu}} \mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t')\, dx'\, dy' = \Omega(p^\nu|x''|_p)\Omega(p^\mu|y''|_p). \tag{6.31}$$

Integrali u (6.31) nakon zamene $\mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t')$ sa (6.22)-(6.29) postaju Gausovi integrali tipa (2.43) ili (2.44) već u zavisnosti od toga da li je $p \neq 2$ ili $p = 2$ respektivno, sa tom razlikom u odnosu na prethodni slučaj što je ovde $\gamma \neq 0$.

Jasno je da i sada uslov analitičnosti $|\omega T|_p \leq |2p|_p$ funkcija u p-adičnim propagatorima mora biti zadovoljen za sve modele. Sa druge strane, ostali uslovi se dobijaju već u zavisnosti od toga da li je $p \neq 2$ ili nije i koja se grana integracije u (2.43) odnosno (2.44) koristi. Imajući u vidu da je i ovde $\alpha = \pm\frac{\omega}{\tan(\omega T)}$ za „harmonijske" modele, odnosno $\alpha = \pm\frac{\omega}{\tanh(\omega T)}$ za „invertovane harmonijske" modele, za $p \neq 2$, uslov integracije po drugoj grani u (2.43) $|\alpha|_p p^{2\gamma} > 1$ se svodi na $|T|_p < p^{-2\nu,\mu}$, dok se uslov integracije po prvoj grani $|\alpha|_p p^{2\gamma} \leq 1$ svodi na $|T|_p \geq p^{-2\nu,\mu}$. Za slučaj da je $p = 2$ integracija u (6.31) se vrši prema (2.44). Tada opet, s obzirom na postojanje četiri moguće grane integracije, postoje i četiri uslova: $|\alpha|_2 2^{2\gamma} \leq 1$, $|\alpha|_2 2^{2\gamma} = 2$, $|\alpha|_2 2^{2\gamma} = 4$ i $|\alpha|_2 2^{2\gamma} \geq 8$, koji se u ovom slučaju respektivno svode na: $|T|_2 \geq 2^{-2\nu,\mu}$, $|T|_2 = 2^{-2\nu,\mu-1}$, $|T|_2 = 2^{-2\nu,\mu-2}$ i $|T|_2 \leq 2^{-2\nu,\mu-3}$. Kako je $|\omega T|_p \leq |2p|_p$, jasno je da ovi specifični uslovi za T (za $p \neq 2$ i za $p = 2$), kao i u prethodnom slučaju, nameću odgovarajuća ograničenja na ω. Uslov analitičnosti $|\omega T|_p \leq |2p|_p$ je, dakle, i ovde opšti uslov egzistencije.

Prema tome, može se konstatovati da svi dvooscilatorni kosmološki modeli, uz opšti uslov $|\omega T|_p \leq |2p|_p$ (tj. da su p-adične funkcije u propagatorima (6.22)-(6.29) analitičke), imaju vakuumska p-adična stanja oblika

$$\Psi_p^{(\nu,\mu)}(x, y) = \Omega(p^\nu|x|_p)\Omega(p^\mu|y|_p), \quad \text{za } \nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{6.32}$$

Vakuumsko stanje tipa delta funkcije $\delta(p^\nu - |x|_p)\delta(p^\mu - |y|_p)$, prema (3.20), zadovoljava

$$\int_{|x'|_p=p^\nu} \int_{|y'|_p=p^\mu} \mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t')\, dx'\, dy' = \delta(p^\nu - |x''|_p)\delta(p^\mu - |y''|_p). \tag{6.33}$$

Zamenom p-adičnih propagatora (6.22)-(6.29) u prethodnom izrazu dobijaju se integrali tipa (2.41) koji će imati nenulto rešenje ako budu ispunjena dva uslova $|4\alpha|_p \geq p^{2-2\nu,\mu}$ i $\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p = p^{\nu,\mu}$.

Parametar α uzima i ovde iste vrednosti kao i u prethodna dva slučaja. Dalje se, iz oblika karaktera $\chi_p(\alpha x^2 + \beta x)$, vidi da je β koeficijent u linearnom delu argumenta ove funkcije. Kako je $\chi_p(\alpha x^2 + \beta x) = \chi_p(-S_p^{cl})$ lako se vidi da je u opštem obliku $\beta = \frac{2x''\omega}{\sin(\omega T)}$ (ili $\beta = \frac{2y''\omega}{\sin(\omega T)}$) za „harmonijske" modele i $\beta = \frac{2x''\omega}{\sinh(\omega T)}$ (ili $\beta = \frac{2y''\omega}{\sinh(\omega T)}$) za „invertovane" harmonijske modele. Nije teško proveriti da je tada $\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p = |x''|_p$ (ili $\left|\frac{\beta}{2\alpha}\right|_p = |y''|_p$).

Iz prvog uslova, za $p \neq 2$, dobija se da je $|T|_p \leq p^{2\nu,\mu-2}$ dok je za $p = 2$, $|T|_2 \leq 2^{2\nu,\mu-4}$. Iz drugog uslova (bez obzira da li je $p \neq 2$ ili $p = 2$) je $|x''|_p = p^\nu$ (ili $|y''|_p = p^\mu$), što je identično zahtevu nenulte vrednosti delta funkcije $\delta(p^\nu - |x''|_p)$ (odnosno $\delta(p^\mu - |y''|_p)$). Prema tome, svi dvooscilatorni kosmološki modeli imaju i stanja tipa delta funkcije za iste uslove egzistencije

$$\Psi_p^{(\nu,\mu)}(x,y) = \begin{cases} \delta(p^\nu - |x|_p)\delta(p^\mu - |y|_p), & |T|_p \leq p^{2\nu,\mu-2}, \\ \delta(2^\nu - |x|_2)\delta(2^\mu - |y|_2), & |T|_2 \leq 2^{2\nu,\mu-4}, \end{cases} \tag{6.34}$$

za $\nu, \mu \ = 0, -1, -2, ...$, pri čemu će ujedno biti zadovoljen i opšti uslov analitičnosti $|\omega T|_p \leq |2p|_p$ [41].

Adelizacija dvooscilatornih modela podrazumeva konstrukciju adelične talasne funkcije oblika (3.21). Prvi uslov je da za modele postoje egzaktna rešenja $\Psi_\infty(x,y)$ Viler-de Vitovih jednačina (5.112)-(5.119). Za dva tipa modela, sa lagranžijanima $L_{(1)}$ i $L_{(3)}$ tj. za slučajeve *oscillator-ghost-oscillator* sistemâ, u poglavlju 5.3 su takva rešenja i eksplicitno određena. U ovom poglavlju takođe je pokazano da je drugi uslov za adelizaciju, a to je postojanje osnovnih vakuumskih p-adičnih $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)$ stanja, ispunjen za sve dvooscilatorne kosmološke modele i to sa istim uslovima za egzistenciju. Štaviše, pokazano je da ne samo ova već i ostala vakuumska p-adična stanja postoje za iste uslove i u istom obliku za sve tipove minisuperprostornih dvooscilatornih kosmoloških modela.

6.3 Signaturna izmena u p-adičnom prostor-vremenu

Pitanje signaturne izmene u p-adičnom prostor-vremenu detaljno je razmatrano u radu Dragovića [117]. U radu je pokazano da se u odnosu na promenu signature mogu razlikovati dve klase p-adičnog prostor-vremena $\mathbb{Q}_p^n$. Prvu klasu čine svi $\mathbb{Q}_p^n$ za koje je $p \equiv 1(\bmod 4)$, a za drugu $\mathbb{Q}_p^n$ za koje je $p \not\equiv 1(\bmod 4)$. U drugoj klasi mogu se dalje razlikovati $\mathbb{Q}_p^n$ sa $n \geq 2$ i $p \equiv 3(\bmod 4)$, i $\mathbb{Q}_p^n$ za koje je $p = 2$ i $n \geq 4$. Pri tome znak signature može biti proizvoljno promenjen samo u $\mathbb{Q}_p^n$ gde je $p \equiv 1(\bmod 4)$, dok za $p \not\equiv 1(\bmod 4)$ samo paran broj znakova može biti promenjen neizometrijskim transformacijama. Sam uslov $p \equiv 1(\bmod 4)$ za proizvoljnom promenom znaka je očigledan, s obzirom na to da je tada i samo tada $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_p$ [118, 15] ili, drugačije rečeno, ako su data dva skupa $A = \{x^2 : x \in \mathbb{Q}_p\}$ i $B = \{-x^2 : x \in \mathbb{Q}_p\}$ tada je $A = B$ samo za $p \equiv 1 (\bmod 4)$.

Za slučaj dvooscilatornog kosmološkog modela sa lagranžijanom $L_{(4)}$ datim sa (5.37), klasično dejstvo $S_{(4)}$ u Lorencovom regionu dato je sa (5.90). Nakon signaturne tranzicije u standardnom slučaju, tj. transformacije $t \to -i\tau$, u skladu sa rečenim u 5.2.1 i 5.2.5, lagranžijan i dejstvo modela postaju oblika $L_{(8)}$ i $S_{(8)}$ tj. dati izrazima (5.41) i (5.94) respektivno (uslovi pri kojima se ovaj prelaz može odigrati u klasičnom slučaju razmotreni su detaljnije u 5.2.5, a prema radu [84]). Sa druge strane, u [110] pokazano je da nakon signaturne izmene u $\mathbb{Q}_p^4$ p-adično dejstvo modela ima istu formu kao i klasično dejstvo u Euklidovom regionu. U ovom slučaju to znači formu $S_{(8)}$ jednog „harmonijski invertovanog" dvooscilatornog modela. Stoga, imajući u vidu rečeno u prethodnom delu, očigledno je da se nakon signaturne tranzicije u $\mathbb{Q}_p^4$ vakuumska stanja modela i uslovi za njihovu egzistenciju neće promeniti. Imajući u vidu da signaturna izmena u standardnom slučaju zapravo samo menja tip dvooscilatornog modela, jasno je da se prethodni zaključak odnosi ne samo na ovaj slučaj već važi generalno za sve dvooscilatorne kosmološke modele.

7 Nekomutativna kosmologija

Tražeći način za rešenje problema ultraljubičastih divergencija, još tridesetih godina prošlog veka, Hajzenberg je izneo pretpostavku o nekomutirajućim koordinatama. Ideju o njihovoj upotrebi u termodinamičkom faznom prostoru prvi je predložio Vigner [119], a nezavisno od njega i Snajder razmatrajući jedan primer Lorenc-invarijantnog diskretnog prostor-vremena u radu [120]. Ova ideja primenjena od strane Kona [121] i Voronovica [122] u nekomutativnoj geometriji, omogućila je razvoj nove formulacije kvantne gravitacije preko nekomutativnog diferencijalnog računa [123, 124, 125]. Sa druge strane, veza između nekomutativne geometrije i teorije struna postala je jasna zahvaljujući radu Sajberga i Vitena [126], što je vodilo formulaciji nekomutativne kvantne teorije polja preko nekomutativne algebre bazirane na Mojalovom proizvodu [127, 128, 129]. Zapravo, najkonkretniji dokazi postojanja prostorno-vremenske nekomutativnosti dolazi od teorije struna, trenutno najboljeg kandidata za konzistentnu teoriju kvantne gravitacije. Naime, na osnovu analize visokoenergetskih amplituda rasejanja u okviru teorije struna modifikovana Hajzenbergova relacija neodređenosti ima oblik [130, 131, 132]

$$\Delta x \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{\Delta p} + l_s^2 \Delta p), \tag{7.1}$$

gde su Δx i Δp neodređenosti koordinate i impulsa respektivno, a l_s predstavlja unutrašnju karakteristiku strune – njenu dužinu (koja je reda veličine upravo Plankove dužine l_p). Pri tome se za $l_s = 0$ (7.1) svodi na uobičajenu standardnu Hajzenbergovu relaciju neodređenosti koordinata-impuls. Takođe, iz prethodnog izraza lako se može odrediti da je $(\Delta x)_{\min} = l_s$, odnosno da je dimenzija strune najmanje moguće rastojanje koje se još može meriti. U opštijoj formi prostorno-vremenska relacija neodređenosti u okviru teorije struna data je sa [133, 134, 135]

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq l_p^2. \tag{7.2}$$

Validnost ovih modifikovanih relacija neodređenosti u teoriji struna ukazuje na postojanje nekomutativne prostorno-vremenske strukture na Plankovim dimenzijama. Pri tome je jasno da će se svaka izmena strukture prostor-vremena načelno odraziti i na fiziku procesa u njemu. Kosmologija koja polazi od pretpostavke postojanja nekomutirajućih relacija između koordinata i/ili njima konjugovanih impulsa naziva se nekomutativnom kosmologijom.

U ovom delu disertacije, nakon kratkog matematičkog uvoda u pojam klasične nekomutatvnosti, biće napravljen opšti osvrt na osobine dvooscilatornih modela na nekomutativnom konfiguracionom prostoru, a potom i posebno za neke od njih biće određene relevantne dinamičke veličine (nekomutativna dejstva i propagatori).

7.1 Klasična nekomutativnost

Proučavanje nekomutativnosti funkcija na klasičnom faznom prostoru zasniva se na zameni njihovog uobičajenog proizvoda takozvanim zvezda-proizvodom („$\star$"). Uopšteno govoreći zvezda-proizvod je svaki asocijativni, kompleksno-bilinearni proizvod kompleksnoznačnih glatkih funkcija definisanih na nekoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$ predstavljen u formalnom obliku kao red bilinearnih operatora koji počinje komutativnim proizvodom funkcija [136]. Na ravnoj euklidskoj mnogostrukosti $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ jedan takav proizvod je bio odavno poznat. Reč je o Mojalovom zvezda-proizvodu. Zapravo, kao što se pokazuje, na $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ svi prihvatljivi zvezda-proizvodi su c-ekvivalentni Mojalovom proizvodu [137]. Ovaj proizvod se definiše na sledeći način. Neka su $f_1(x_1, ..., x_n; p_1, ..., p_n)$ i $f_2(x_1, ..., x_n; p_1, ..., p_n)$ dve proizvoljne funkcije na faznom prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. Mojalov proizvod ovih funkcija je

$$f_1 \star_M f_2 = f_1 e^{\frac{1}{2}\overleftarrow{\partial}_a \alpha^{ab} \overrightarrow{\partial}_b} f_2, \tag{7.3}$$

sa

$$\alpha^{ab} = \begin{pmatrix} \theta_{ij} & \delta_{ij} + \sigma_{ij} \\ -\delta_{ij} - \sigma_{ij} & \bar{\theta}_{ij} \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

gde su θ_{ij} i $\bar{\theta}_{ij}$ antisimetrične matrice i σ_{ij} simetrična matrica tipa $n \times n$. Deformisana Poasonova zagrada funkcija f_1 i f_2 definisana preko Mojalovog proizvoda (zove se i Mojalova zagrada) je tada

$$\{f_1, f_2\}_M = f_1 \star_M f_2 - f_2 \star_M f_1, \tag{7.5}$$

odakle sledi da fazne promenljive tada zadovoljavaju

$$\{x_i, y_j\}_M = \theta_{ij}, \quad \{x_i, p_j\}_M = \delta_{ij} + \sigma_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_M = \bar{\theta}_{ij}, \tag{7.6}$$

čime je definisana tzv. deformisana Poasonova algebra. Iz (7.6) se vidi da je njen komutativni limes određen zahtevom da su vrednosti nekomutativnih parametara nulte tj. da je $\theta_{ij} = \bar{\theta}_{ij} = \sigma_{ij} = 0$.

Sa druge strane, ako se uvedu transformacije koordinata u faznom prostoru [138, 139, 140]

$$x'_i = x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij} p^j, \quad p'_i = p_i + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{ij} x^j, \tag{7.7}$$

i ako se pretpostavi da promeljive x_i i p_i zadovoljavaju klasične Poasonove zagrade u obliku

$$\{x_i, y_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \tag{7.8}$$

lako se proverava da će za nove promenljive x'_i i p'_i tada važiti

$$\{x'_i, x'_j\} = \theta_{ij}, \quad \{x'_i, p'_j\} = \delta_{ij} + \sigma_{ij}, \quad \{p'_i, p'_j\} = \bar{\theta}_{ij}. \tag{7.9}$$

Dobijeni izrazi imaju istu formu kao i u (7.6), ali ovaj put su dati preko uobičajenih Poasonovih zagrada.

Simetrična matrica σ_{ij} je npr. u trodimenzionalnom slučaju ($n = 3$) data sa [141]

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{8}(\theta_{ik}\bar{\theta}_{kj} + \bar{\theta}_{ik}\theta_{kj}). \tag{7.10}$$

Ovaj pristup nekomutativnosti naziva se nekomutativnost preko deformacije. Drugim rečima, uvođenje Mojalovog proizvoda između funkcija na faznom prostoru ekvivalentno je primeni transformacija (7.7) koordinata faznog prostora.

Standardni kvantni pristup bi podrazumevao kvantizaciju u kojoj u prethodnim jednačinama klasične varijable postaju hermitski operatori u Hilbertovom prostoru, a Poasonove zagrade komutatori. U toj proceduri deformisana Poasonova algebra postaje deformisana Hajzenbergova algebra na kojoj se zasniva nekomutativna kvantna mehanika. Sa druge strane, činjenica da je nekomutativni pristup moguće izraziti preko deformacije govori nam da je nekomutativna kvantna mehanika ekvivalentna komutativnoj ali na transformisanom kvantnom faznom prostoru stanja.

7.2 Dvooscilatorni modeli na nekomutativnom prostoru

U zavisnosti od izbora vrednosti parametara nekomutativnosti, moguće je proučavati osobine kosmoloških modela na različitim nekomutativnim prostorima. Minisuperprostor svakog dvooscilatornog kosmološkog modela je dvodimenzionalan. U tom, dvodimenzionalnom, slučaju parametri nekomutativnosti θ, $\bar{\theta}$ i σ imaju sledeći opšti oblik [141]

$$\theta_{ij} = \theta\epsilon_{ij}, \quad \bar{\theta}_{ij} = \bar{\theta}\epsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma\epsilon_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{4}\theta\bar{\theta}, \tag{7.11}$$

pri čemu je ϵ_{ij} totalno antisimetrični tenzor drugog reda.

Nadalje će biti razmatrani dvooscilatorni modeli na nekomutativnom prostoru uz pretpostavku postojanja nekomutativnosti čisto prostornog tipa tj. uz pretpostavku da je $\theta_{12} = \theta = const. \neq 0$ (tada je $\theta_{21} = -\theta$ i $\theta_{11} = \theta_{22} = 0$) i $\bar{\theta}_{ij} = \sigma_{ij} = 0$. U ovom slučaju transformacije (7.7) daju

$$x' = x - \frac{1}{2}\theta p_y, \quad y' = y + \frac{1}{2}\theta p_x, \quad p'_x = p_x, \quad p'_y = p_y. \tag{7.12}$$

Odgovarajuće Poasonove zagrade između novih, primovanih koordinata u faznom prostoru su tada: $\{x', y'\} = \theta \neq 0$, $\{x', p'_x\} = \{y', p'_y\} = 1$, $\{x', p'_y\} = \{y', p'_x\} = 0$ i $\{p'_x, p'_y\} = 0$.

Zamenjujući (7.12) u lagranžijane $L_{(1)}$,...,$L_{(8)}$ iz (5.34)-(5.41), vodeći računa o tome kako su dati odgovarajući konjugovani impulsi u svakom slučaju ponaosob (na početku poglavlja 5.2.4), uz uklanjanje oznake prim sa novih koordinata radi jednostavnosti, dobijaju se tzv. nekomutativni lagranžijani dvooscilatornih modela pri transformacijama (7.12) u konfiguracionom prostoru:

$$L^{\theta}_{(1)} = [(1+\omega^2\theta^2)\dot{x}^2-\omega^2x^2]-[(1+\omega^2\theta^2)\dot{y}^2-\omega^2y^2]+2\omega^2\theta[\dot{x}y-\dot{y}x], \quad (7.13)$$
$$L^{\theta}_{(2)} = [(1-\omega^2\theta^2)\dot{x}^2-\omega^2x^2]+[(1-\omega^2\theta^2)\dot{y}^2-\omega^2y^2]-2\omega^2\theta[\dot{x}y-\dot{y}x], \quad (7.14)$$
$$L^{\theta}_{(3)} = [(1+\omega_y^2\theta^2)\dot{x}^2-\omega_x^2x^2]-[(1+\omega_x^2\theta^2)\dot{y}^2-\omega_y^2y^2]+2\theta[\dot{x}y\omega_y^2-\dot{y}x\omega_x^2], \quad (7.15)$$
$$L^{\theta}_{(4)} = [(1-\omega_y^2\theta^2)\dot{x}^2-\omega_x^2x^2]+[(1-\omega_x^2\theta^2)\dot{y}^2-\omega_y^2y^2]-2\theta[\dot{x}y\omega_y^2-\dot{y}x\omega_x^2], \quad (7.16)$$
$$L^{\theta}_{(5)} = [(1-\omega^2\theta^2)\dot{x}^2+\omega^2x^2]-[(1-\omega^2\theta^2)\dot{y}^2+\omega^2y^2]-2\omega^2\theta[\dot{x}y-\dot{y}x], \quad (7.17)$$
$$L^{\theta}_{(6)} = [(1+\omega^2\theta^2)\dot{x}^2+\omega^2x^2]+[(1+\omega^2\theta^2)\dot{y}^2+\omega^2y^2]+2\omega^2\theta[\dot{x}y-\dot{y}x], \quad (7.18)$$
$$L^{\theta}_{(7)} = [(1-\omega_y^2\theta^2)\dot{x}^2+\omega_x^2x^2]-[(1-\omega_x^2\theta^2)\dot{y}^2+\omega_y^2y^2]-2\theta[\dot{x}y\omega_y^2-\dot{y}x\omega_x^2], \quad (7.19)$$
$$L^{\theta}_{(8)} = [(1+\omega_y^2\theta^2)\dot{x}^2+\omega_x^2x^2]+[(1+\omega_x^2\theta^2)\dot{y}^2+\omega_y^2y^2]+2\theta[\dot{x}y\omega_y^2-\dot{y}x\omega_x^2]. \quad (7.20)$$

Očigledno je pri tome da se ovi nekomutativni lagranžijani za $\theta \to 0$ svode na odgovarajuće lagranžijane (5.34)-(5.41) u komutativnom slučaju. Isti zaključak će važiti i za njima korespondentne Ojler-Lagranževe jednačine.

Drugo, jasno je da prelaskom na nekomutativni konfiguracioni prostor prvobitna simetrija između određenih tipova lagranžijana, koja se odražavala u tome da lagranžijan jednog dvooscilatornog modela signaturnom tranzicijom ili promenom znaka ispred kvadrata frekvenci dobije oblik lagranžijana drugog modela, biva narušena kada je u pitanju signaturna tranzicija. Formalan razlog su članovi u nekomutativnim lagranžijanima koji su linearni po generalisanim brzinama. Zbog tih članova uobičajena signaturna izmena $t \to -i\tau$ realne lagranžijane (7.13)-(7.20) prevodi u kompleksne. Transformacije između različitih tipova nekomutativnih lagranžijana $L^{\theta}_{(1)}$,...,$L^{\theta}_{(8)}$ su moguće još samo promenom znaka ispred kvadrata frekvenci, tj. $L^{\theta}_{(1)} \xleftrightarrow{\omega^2\to-\omega^2} L^{\theta}_{(5)}$, $L^{\theta}_{(2)} \xleftrightarrow{\omega^2\to-\omega^2} L^{\theta}_{(6)}$, $L^{\theta}_{(3)} \xleftrightarrow{\omega^2_{x,y}\to-\omega^2_{x,y}} L^{\theta}_{(7)}$ i $L^{\theta}_{(4)} \xleftrightarrow{\omega^2_{x,y}\to-\omega^2_{x,y}} L^{\theta}_{(8)}$.

Lako se vidi da će i Ojler-Lagranževe jednačine po minisuperprostornim koordinatama x i y, za parove nekomutativnih lagranžijana ($L^{\theta}_{(1)}$,$L^{\theta}_{(5)}$), ($L^{\theta}_{(2)}$,$L^{\theta}_{(6)}$), ($L^{\theta}_{(3)}$,$L^{\theta}_{(7)}$) i ($L^{\theta}_{(4)}$,$L^{\theta}_{(8)}$), biti povezane na sličan način. Recimo, Ojler-Lagranževe jednačine za $L^{\theta}_{(1)}$ nakon $\omega^2 \to -\omega^2$ postaju Ojler-Lagranževe jednačine za $L^{\theta}_{(5)}$ (i obrnuto) i tako redom.

Međutim, što tiče samog rešavanja Ojler-Lagranževih jednačina i, uopšte, njihovih rešenja, gubi se pomenuta povezanost. Na primer, iz $L^{\theta}_{(1)}$ odgovarajuća jednačina po minisuperprostornoj koordinati x glasi: $(1 + \omega^2\theta^2)\ddot{x} + \omega^2 x + 2\omega^2\theta\dot{y} = 0$, dok se za istu promenljivu iz $L^{\theta}_{(5)}$ dobija: $(1-\omega^2\theta^2)\ddot{x}-\omega^2x-2\omega^2\theta\dot{y} = 0$. Odmah se vidi da ove jednačine prelaze jedna u drugu zamenom $\omega^2 \to -\omega^2$. Međutim, njihova rešenja neće biti ista do na $\omega^2 \to -\omega^2$. To se vidi već iz činjenice da koeficijent uz $\ddot{x}$ u drugoj jednačini može biti jednak nuli (a što će za tu jednačinu dati i određeni tip rešenja), dok je u prvoj jednačini ova mogućnost očigledno fizički isključena. Naime, pri proučavanju datog kosmološkog modela uslovi mogućnosti njegovog svođenja na dvooscilatorni, zatim mogućnosti realizacije signaturne izmene i drugi uslovi mogu nametati ograničenja na parametre teorije, što će potom odrediti i sam tip rešenja Ojler-Lagranževih jednačina u nekomutativnom slučaju. U tom smislu, bar kada je nekomutativnost u pitanju, razmatranju kosmoloških, a samim tim i dvooscilatornih, modela se pristupa partikularno.

U narednom delu biće prezentovana dva dvooscilatorna kosmološka modela na nekomutativnom konfiguracionom prostoru i odgovarajuća klasična nekomutativna dejstva i propagatori za ove modele.

a) Nekomutativni Fridmanov model sa ϕ i $U(\phi)$

Kao prvi primer biće razmotren ravan FLRW model sa skalarnim poljem ϕ i interakcionim potencijalom $U(\phi)$, čija je klasična komutativna forma predstavljena u delu disertacije 5.2.2 (pod c), dok su u poglavlju 5.2.5 razmotreni uslovi pri kojima se kod ovog modela signaturna izmena može realizovati. Sada će biti prezentovana nekomutativna forma modela, posebno nad Lorencovim, a posebno nad Euklidovim regionom.

U Lorencovom regionu dekuplovani lagranžijan (5.61) modela, koji po obliku odgovara lagranžijanu $L_{(4)}$ iz (5.37), transformacijama koordinata (7.12) prevodi se u nekomutativni lagranžijan oblika $L^{\theta}_{(4)}$ dat sa (7.16) čije su korespondentne Ojler-Lagranževe jednačine

$$\begin{aligned}
(1-\omega_y^2\theta^2)\ddot{x} - \theta(\omega_y^2+\omega_x^2)\dot{y} + \omega_x^2 x = 0,\\
(1-\omega_x^2\theta^2)\ddot{y} + \theta(\omega_y^2+\omega_x^2)\dot{x} + \omega_y^2 y = 0.
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Ove jednačine za $\theta = 0$ prelaze u klasične jednačine koje se dobijaju za $L_{(4)}$ u komutativnom regionu.

Postoje dva tipa trigonometrijskih rešenja sistema jednačina (7.21) u zavisnosti od toga da li je $\omega^2_{x,y}$ jednako $\frac{1}{\theta^2}$ ili ne. U prvom slučaju je opšte rešenje

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1\cos(\omega_\theta t) + C_2\sin(\omega_\theta t),\\
y(t) &= D_1\cos(\omega_\theta t) + D_2\sin(\omega_\theta t),
\end{aligned} \tag{7.22}$$

gde je

$$\omega_\theta = \begin{cases} \frac{\omega_x\omega_y}{\sqrt{\omega_y^2(1-\omega_y^2\theta^2)+\theta^2(\omega_x^2+\omega_y^2)^2}}, & \text{za } \frac{1}{\theta^2} = \omega_x^2,\\ \frac{\omega_x\omega_y}{\sqrt{\omega_x^2(1-\omega_x^2\theta^2)+\theta^2(\omega_x^2+\omega_y^2)^2}}, & \text{za } \frac{1}{\theta^2} = \omega_y^2, \end{cases} \tag{7.23}$$

pri čemu je $\omega_x \neq \omega_y$, što sledi iz uslova $(a_1+a_2)^2 > 4b^2$ koji je pomenut u poglavlju 5.2.5 vezano za ovaj model.

Za početne uslove $x(0) = x'$, $x(T) = x''$, $y(0) = y'$ i $y(T) = y''$ iz (7.22) dobija se odgovarajuće klasično partikularno rešenje sistema (7.21). Njegovom zamenom u $L^{\theta}_{(4)}$

dobija se klasični nekomutativni lagranžijan $L^{cl,\theta}_{(4)}$. Tada je klasično dejstvo za ovaj model

$$\begin{aligned} S^{cl,\theta}_{(4)} & (x'', y'', T; x', y', 0) = \int_0^T L^{cl,\theta}_{(4)} \, dt = \gamma_{i,x}(x'^2 + x''^2) + \gamma_{j,y}(y'^2 + y''^2) \\ + & \quad \gamma_{k,x} x' x'' + \gamma_{l,y} y' y'' + \gamma_5 (x'y' - x''y'') + \gamma_6 (x'y'' - y'x''), \end{aligned} \tag{7.24}$$

gde je $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ i $l = 4$ za $\frac{1}{\theta^2} = \omega_x^2$, i $i = 2$, $j = 1$, $k = 4$, $l = 3$ za $\frac{1}{\theta^2} = \omega_y^2$ (koeficijenti $\gamma_{i,x}$ i $\gamma_{i,y}$ su dati sa (A.1) u delu „A Dodatak”) [84]. Opšta forma Fajnmenovog propagatora za kvadratično dejstvo u nekomutativnom dvodimenzionalnom prostoru je [142]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\theta(x'', y'', T; x', y', 0) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\det \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 S^{cl,\theta}}{\partial x'' \partial x'} & -\frac{\partial^2 S^{cl,\theta}}{\partial x'' \partial y'} \\ -\frac{\partial^2 S^{cl,\theta}}{\partial y'' \partial x'} & -\frac{\partial^2 S^{cl,\theta}}{\partial y'' \partial y'} \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \chi_\infty \left(-\frac{1}{2\pi} S^{cl,\theta}(x'', y'', T; x', y', 0) \right). \end{aligned} \tag{7.25}$$

Zamena (7.24) u (7.25) daje

$$\mathcal{K}^\theta(x'', y'', T; x', y', 0) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\gamma_{k,x}\gamma_{l,y} + \gamma_6^2} \, \chi_\infty \left(-\frac{1}{2\pi} S^{cl,\theta}_{(4)}(x'', y'', T; x', y', 0) \right), \tag{7.26}$$

gde je $k = 3$, $l = 4$ za $\frac{1}{\theta^2} = \omega_x^2$, i $k = 4$, $l = 3$ za $\frac{1}{\theta^2} = \omega_y^2$.

Sa druge strane, za $\frac{1}{\theta^2} \neq \omega_{x,y}^2$ opšte rešenje od (7.21) je

$$x(t) = C_1 \cos(\Omega_1 t) + C_2 \sin(\Omega_1 t) + C_3 \cos(\Omega_2 t) + C_4 \sin(\Omega_2 t), \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned} y(t) = & - \frac{\alpha_x C_2 \Omega_1}{\beta_y - \Omega_1^2} \cos(\Omega_1 t) + \frac{\alpha_x C_1 \Omega_1}{\beta_y - \Omega_1^2} \sin(\Omega_1 t) \\ & - \frac{\alpha_x C_4 \Omega_2}{\beta_y - \Omega_2^2} \cos(\Omega_2 t) + \frac{\alpha_x C_3 \Omega_2}{\beta_y - \Omega_2^2} \sin(\Omega_2 t), \end{aligned} \tag{7.28}$$

gde je $\alpha_{x,y} = \frac{\theta(\omega_y^2 + \omega_x^2)}{1 - \omega_{x,y}^2 \theta^2}$, $\beta_{x,y} = \frac{\omega_{x,y}^2}{1 - \omega_{y,x}^2 \theta^2}$ i

$$\Omega_{1,2} = \left[\frac{(\beta_x + \beta_y + \alpha_x \alpha_y) \pm \sqrt{(\beta_x + \beta_y + \alpha_x \alpha_y)^2 - 4\beta_x \beta_y}}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{7.29}$$

uz uslov $\beta_y \neq \Omega_{1,2}^2 > 0$. U ovom slučaju, sa istim početnim uslovima $x(0) = x'$, $x(T) = x''$, $y(0) = y'$ i $y(T) = y''$, klasično dejstvo je

$$\begin{aligned} S^{cl,\theta}_{(4)} & (x'', y'', T; x', y', 0) = \frac{1}{2}\gamma_{11} x'^2 + \frac{1}{2}\gamma_{22} x''^2 + \frac{1}{2}\gamma_{33} y'^2 + \frac{1}{2}\gamma_{44} y''^2 \\ + & \quad \gamma_{12} x' x'' + \gamma_{13} x' y' + \gamma_{14} x' y'' + \gamma_{23} y' x'' + \gamma_{24} x'' y'' + \gamma_{34} y' y'', \end{aligned} \tag{7.30}$$

gde je

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij} &= \frac{1}{2\Omega_1}[(\alpha_{2i}\alpha_{2j}-\alpha_{1i}\alpha_{1j})\sin(2\Omega_1 T)+(\alpha_{2i}\alpha_{1j}+\alpha_{2j}\alpha_{1i})(\cos(2\Omega_1 T)-1)]K_1^-\\
&+ \frac{1}{2\Omega_2}[(\alpha_{4i}\alpha_{4j}-\alpha_{3i}\alpha_{3j})\sin(2\Omega_2 T)+(\alpha_{4i}\alpha_{3j}+\alpha_{4j}\alpha_{3i})(\cos(2\Omega_2 T)-1)]K_2^-\\
&+ \frac{1}{\Omega_1+\Omega_2}[(\alpha_{2i}\alpha_{4j}+\alpha_{2j}\alpha_{4i}-\alpha_{1i}\alpha_{3j}-\alpha_{1j}\alpha_{3i})\sin((\Omega_1+\Omega_2)T)\\
&+ (\alpha_{1i}\alpha_{4j}+\alpha_{1j}\alpha_{4i}+\alpha_{2i}\alpha_{3j}+\alpha_{2j}\alpha_{3i})(\cos((\Omega_1+\Omega_2)T)-1)]K_3^-\\
&+ \frac{1}{\Omega_1-\Omega_2}[(\alpha_{2i}\alpha_{4j}+\alpha_{2j}\alpha_{4i}+\alpha_{1i}\alpha_{3j}+\alpha_{1j}\alpha_{3i})\sin((\Omega_1-\Omega_2)T)\\
&+ (\alpha_{1i}\alpha_{4j}+\alpha_{1j}\alpha_{4i}-\alpha_{2i}\alpha_{3j}-\alpha_{2j}\alpha_{3i})(\cos((\Omega_1-\Omega_2)T)-1)]K_3^+\\
&+ T(\alpha_{2i}\alpha_{2j}+\alpha_{1i}\alpha_{1j})K_1^+ + T(\alpha_{4i}\alpha_{4j}+\alpha_{3i}\alpha_{3j})K_2^+,\quad i\le j=1,2,3,4, \qquad (7.31)
\end{aligned}$$

sa koeficijentima α_{ij} i $K_i^\pm$ koji su dati sa (B.1) i (B.2), respektivno, u delu „B Dodatak" [84]. Zamenom (7.30) u (7.25), u ovom slučaju se dobija da je propagator

$$\mathcal{K}^\theta(x'',y'',T;x',y',0)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{34}-\gamma_{14}\gamma_{23}}\,\chi_\infty\left(-\frac{1}{2\pi}S^{cl,\theta}_{(4)}(x'',y'',T;x',y',0)\right). \qquad (7.32)$$

Za isti model u Euklidovom regionu sa langranžijanom (5.63) smene (7.12) daju lagranžijan oblika $L^\theta_{(8)}$ (7.20) u nekomutativnom regionu. Iz oblika ovog lagranžijana jasno je da je u ovom slučaju $\omega^2_{x,y}\theta^2\neq-1$. Ojler-Lagranževe jednačine su sada

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}+\overline{\alpha}_y\dot{y}-\overline{\beta}_x x=0,\\
&\ddot{y}-\overline{\alpha}_x\dot{x}-\overline{\beta}_y y=0, \qquad (7.33)
\end{aligned}$$

gde je $\overline{\alpha}_{x,y}=\frac{\theta(\omega_y^2+\omega_x^2)}{1+\omega^2_{x,y}\theta^2}$ i $\overline{\beta}_{x,y}=\frac{\omega^2_{x,y}}{1+\omega^2_{y,x}\theta^2}$, i imaju samo rešenje tipa

$$x(\tau)=\overline{C}_1\cosh(\overline{\Omega}_1\tau)+\overline{C}_2\sinh(\overline{\Omega}_1\tau)+\overline{C}_3\cosh(\overline{\Omega}_2\tau)+\overline{C}_4\sinh(\overline{\Omega}_2\tau), \qquad (7.34)$$

$$\begin{aligned}
y(\tau) = &-\frac{\overline{\alpha}_x\overline{\Omega}_1}{\overline{\beta}_y-\overline{\Omega}_1^2}\overline{C}_2\cosh(\overline{\Omega}_1\tau)-\frac{\overline{\alpha}_x\overline{\Omega}_1}{\overline{\beta}_y-\overline{\Omega}_1^2}\overline{C}_1\sinh(\overline{\Omega}_1\tau)\\
&-\frac{\overline{\alpha}_x\overline{\Omega}_2}{\overline{\beta}_y-\overline{\Omega}_2^2}\overline{C}_4\cosh(\overline{\Omega}_2\tau)-\frac{\overline{\alpha}_x\overline{\Omega}_2}{\overline{\beta}_y-\overline{\Omega}_2^2}\overline{C}_3\sinh(\overline{\Omega}_2\tau), \qquad (7.35)
\end{aligned}$$

gde je

$$\overline{\Omega}_{1,2}=\left[\frac{(\overline{\alpha}_x\overline{\alpha}_y-\overline{\beta}_x-\overline{\beta}_y)\pm\sqrt{(\overline{\alpha}_x\overline{\alpha}_y-\overline{\beta}_x-\overline{\beta}_y)^2-4\overline{\beta}_x\overline{\beta}_y}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (7.36)$$

uz uslov $\overline{\beta}_y\neq\overline{\Omega}^2_{1,2}>0$. Iz početnih uslova $x(0)=x'$, $x(T)=x''$, $y(0)=y'$ i $y(T)=y''$, sledi da klasično dejstvo ima istu formu kao i dejstvo u (7.30)

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{cl,\theta}_{(8)}\ &(x'',y'',T;x',y',0)=\frac{1}{2}\overline{\gamma}_{11}x'^2+\frac{1}{2}\overline{\gamma}_{22}x''^2+\frac{1}{2}\overline{\gamma}_{33}y'^2+\frac{1}{2}\overline{\gamma}_{44}y''^2\\
+\ &\overline{\gamma}_{12}x'x''+\overline{\gamma}_{13}x'y'+\overline{\gamma}_{14}x'y''+\overline{\gamma}_{23}y'x''+\overline{\gamma}_{24}x''y''+\overline{\gamma}_{34}y'y'', \qquad (7.37)
\end{aligned}$$

ali sada sa novim koeficijentima [84]

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{2\overline{\Omega}_1}[(\overline{\alpha}_{2i}\overline{\alpha}_{2j}+\overline{\alpha}_{1i}\overline{\alpha}_{1j})\sinh(2\overline{\Omega}_1T)+(\overline{\alpha}_{2i}\overline{\alpha}_{1j}+\overline{\alpha}_{2j}\overline{\alpha}_{1i})(\cosh(2\overline{\Omega}_1T)-1)]\overline{K}_1^-\\
&+ \frac{1}{2\overline{\Omega}_2}[(\overline{\alpha}_{4i}\overline{\alpha}_{4j}+\overline{\alpha}_{3i}\overline{\alpha}_{3j})\sinh(2\overline{\Omega}_2T)+(\overline{\alpha}_{4i}\overline{\alpha}_{3j}+\overline{\alpha}_{4j}\overline{\alpha}_{3i})(\cosh(2\overline{\Omega}_2T)-1)]\overline{K}_2^-\\
&+ \frac{1}{\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}_2}[(\overline{\alpha}_{2i}\overline{\alpha}_{4j}+\overline{\alpha}_{2j}\overline{\alpha}_{4i}+\overline{\alpha}_{1i}\overline{\alpha}_{3j}+\overline{\alpha}_{1j}\overline{\alpha}_{3i})\sinh((\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}_2)T)\\
&+ (\overline{\alpha}_{1i}\overline{\alpha}_{4j}+\overline{\alpha}_{1j}\overline{\alpha}_{4i}+\overline{\alpha}_{2i}\overline{\alpha}_{3j}+\overline{\alpha}_{2j}\overline{\alpha}_{3i})(\cosh((\overline{\Omega}_1+\overline{\Omega}_2)T)-1)]\overline{K}_3^-\\
&+ \frac{1}{\overline{\Omega}_1-\overline{\Omega}_2}[(\overline{\alpha}_{2i}\overline{\alpha}_{4j}+\overline{\alpha}_{2j}\overline{\alpha}_{4i}-\overline{\alpha}_{1i}\overline{\alpha}_{3j}-\overline{\alpha}_{1j}\overline{\alpha}_{3i})\sinh((\overline{\Omega}_1-\overline{\Omega}_2)T)\\
&+ (\overline{\alpha}_{1i}\overline{\alpha}_{4j}+\overline{\alpha}_{1j}\overline{\alpha}_{4i}-\overline{\alpha}_{2i}\overline{\alpha}_{3j}-\overline{\alpha}_{2j}\overline{\alpha}_{3i})(\cosh((\overline{\Omega}_1-\overline{\Omega}_2)T)-1)]\overline{K}_3^+\\
&+ T(\overline{\alpha}_{2i}\overline{\alpha}_{2j}-\overline{\alpha}_{1i}\overline{\alpha}_{1j})\overline{K}_1^+ + T(\overline{\alpha}_{4i}\overline{\alpha}_{4j}-\overline{\alpha}_{3i}\overline{\alpha}_{3j})\overline{K}_2^+, \quad i\leq j=1,2,3,4, \qquad (7.38)
\end{aligned}$$

pri čemu su $\overline{\alpha}_{ij}$ i $\overline{K}_i^{\pm}$ dati sa (C.1) and (C.2), respektivno, u delu „C Dodatak”. Zamenom (7.37) u (7.25) dobija se nekomutativni propagator u euklidskom slučaju za ovaj model

$$\overline{\mathcal{K}}^{\theta}(x'',y'',T;x',y',0)=\frac{1}{2\pi i}\sqrt{\overline{\gamma}_{12}\overline{\gamma}_{34}-\overline{\gamma}_{14}\overline{\gamma}_{23}}\chi_\infty\left(-\frac{1}{2\pi}\overline{S}^{cl,\theta}_{(8)}(x'',y'',T;x',y',0)\right). \qquad (7.39)$$

b) Nekomutativni vakuumski Kantovski-Saks model

Klasičan vakuumski Kantovski-Saks model je razmotren u poglavlju 5.2.2 (pod d/vi), gde je pokazano da se lagranžijan modela može svesti na lagranžijan $L_{(1)}$ *oscillator-ghost--oscillator* sistema. Transformacije (7.12) će lagranžijan $L_{(1)}$ prevesti u oblik $L^{\theta}_{(1)}$ dat sa (7.13) u nekomutativnom konfiguracionom prostoru. Odgovarajuće Ojler-Lagranževe jednačine su tada

$$\begin{aligned}
\ddot{x}+2\theta\omega_\theta^2\dot{y}+\omega_\theta^2 x&=0,\\
\ddot{y}+2\theta\omega_\theta^2\dot{x}+\omega_\theta^2 y&=0, \qquad (7.40)
\end{aligned}$$

gde je $\omega_\theta=\frac{\omega}{\sqrt{1+\theta^2\omega^2}}$, sa prelaskom na komutativni slučaj za $\theta=0$. Ovaj sistem će imati trigonometrijsko rešenje oblika [96, 143]

$$\begin{aligned}
x(t) &= C_1\cos(\Omega_1 t)+C_2\sin(\Omega_1 t)+C_3\cos(\Omega_2 t)+C_4\sin(\Omega_2 t), \qquad (7.41)\\
y(t) &= -\frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_1}{\omega_\theta^2-\Omega_1^2}C_2\cos(\Omega_1 t)+\frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_1}{\omega_\theta^2-\Omega_1^2}C_1\sin(\Omega_1 t)\\
&\quad -\frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_2}{\omega_\theta^2-\Omega_2^2}C_4\cos(\Omega_2 t)+\frac{2\theta\omega_\theta^2\Omega_2}{\omega_\theta^2-\Omega_2^2}C_3\sin(\Omega_2 t), \qquad (7.42)
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\Omega_{1,2}=\left[\frac{(2\omega_\theta^2-4\theta^2\omega_\theta^4)\pm\sqrt{(2\omega_\theta^2-4\theta^2\omega_\theta^4)^2-4\omega_\theta^4}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (7.43)$$

uz uslov $\omega_\theta^2 \neq \Omega_{1,2}^2 > 0$. Za početne uslove $x(0) = x'$, $x(T) = x''$, $y(0) = y'$ i $y(T) = y''$ iz (7.41) i (7.42) dobija se klasično partikularno rešenje čija zamena u $L^\theta_{(1)}$ daje klasični nekomutativni lagranžijan. Na uobičajen način, integracijom $L^\theta_{(1)}$ po vremenu u intervalu $[0, T]$, dobija se odgovarajuće nekomutativno klasično dejstvo [96, 143]

$$\begin{aligned} S^{cl,\theta}_{(1)} & (x'', y'', T; x', y', 0) = \frac{1}{2}\gamma_{11}x'^2 + \frac{1}{2}\gamma_{22}x''^2 + \frac{1}{2}\gamma_{33}y'^2 + \frac{1}{2}\gamma_{44}y''^2 \\ + & \gamma_{12}x'x'' + \gamma_{13}x'y' + \gamma_{14}x'y'' + \gamma_{23}y'x'' + \gamma_{24}x''y'' + \gamma_{34}y'y'', \end{aligned} \tag{7.44}$$

gde je

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{1}{2\Omega_1}[(\alpha_{2i}\alpha_{2j} - \alpha_{1i}\alpha_{1j})\sin(2\Omega_1 T) + (\alpha_{2i}\alpha_{1j} + \alpha_{2j}\alpha_{1i})(\cos(2\Omega_1 T) - 1)]K_1^- \\ &+ \frac{1}{2\Omega_2}[(\alpha_{4i}\alpha_{4j} - \alpha_{3i}\alpha_{3j})\sin(2\Omega_2 T) + (\alpha_{4i}\alpha_{3j} + \alpha_{4j}\alpha_{3i})(\cos(2\Omega_2 T) - 1)]K_2^- \\ &+ \frac{1}{\Omega_1 + \Omega_2}[(\alpha_{2i}\alpha_{4j} + \alpha_{2j}\alpha_{4i} - \alpha_{1i}\alpha_{3j} - \alpha_{1j}\alpha_{3i})\sin((\Omega_1 + \Omega_2)T) \\ &+ (\alpha_{1i}\alpha_{4j} + \alpha_{1j}\alpha_{4i} + \alpha_{2i}\alpha_{3j} + \alpha_{2j}\alpha_{3i})(\cos((\Omega_1 + \Omega_2)T) - 1)]K_3^- \\ &+ \frac{1}{\Omega_1 - \Omega_2}[(\alpha_{2i}\alpha_{4j} + \alpha_{2j}\alpha_{4i} + \alpha_{1i}\alpha_{3j} + \alpha_{1j}\alpha_{3i})\sin((\Omega_1 - \Omega_2)T) \\ &+ (\alpha_{1i}\alpha_{4j} + \alpha_{1j}\alpha_{4i} - \alpha_{2i}\alpha_{3j} - \alpha_{2j}\alpha_{3i})(\cos((\Omega_1 - \Omega_2)T) - 1)]K_3^+ \\ &+ T(\alpha_{2i}\alpha_{2j} + \alpha_{1i}\alpha_{1j})K_1^+ + T(\alpha_{4i}\alpha_{4j} + \alpha_{3i}\alpha_{3j})K_2^+, \quad i \leq j = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \tag{7.45}$$

sa koeficijentima α_{ij} i $K_i^\pm$ datim sa (D.1) i (D.2), respektivno, u „D Dodatku". Izrazi (7.30) i (7.44) su pri tome formalno istog oblika. Zamenjujući (7.44) u (7.25) dobija se propagator u nekomutativnom slučaju za ovaj model

$$\mathcal{K}^\theta(x'', y'', T; x', y', 0) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\gamma_{12}\gamma_{34} - \gamma_{14}\gamma_{23}}\,\chi_\infty\left(-\frac{1}{2\pi}S^{cl,\theta}_{(1)}(x'', y'', T; x', y', 0)\right). \tag{7.46}$$

Sa druge strane, sistem jednačina (7.40) ima takođe i rešenje sledećeg tipa [144]

$$x(t) = A_+ e^{\theta\omega^2 t}\sin(\omega_\theta t + \delta_+) + A_- e^{-\theta\omega^2 t}\sin(\omega_\theta t + \delta_-), \tag{7.47}$$

$$y(t) = -A_+ e^{\theta\omega^2 t}\sin(\omega_\theta t + \delta_+) + A_- e^{-\theta\omega^2 t}\sin(\omega_\theta t + \delta_-), \tag{7.48}$$

gde je $\omega_\theta = \omega\sqrt{1 - \theta^2\omega^2}$. Zamenom početnih uslova $x(0) = x'$, $x(T) = x''$, $y(0) = y'$ i $y(T) = y''$ u (7.47) i (7.48) dobijaju se konstante integracije

$$A_\pm = \frac{[(x'' \mp y'')^2 + (x' \mp y')^2 e^{\pm 2\theta\omega^2 T} - 2(x'' \mp y'')(x' \mp y')e^{\pm\theta\omega^2 T}\cos(\omega_\theta T)]^{1/2}}{2e^{\pm\theta\omega^2 T}\sin(\omega_\theta T)}, \tag{7.49}$$

$$\delta_\pm = \arcsin\left(\frac{x' \mp y'}{A_\pm}\right), \tag{7.50}$$

koje određuju partikularno klasično rešenje, čijom se zamenom u $L^\theta_{(1)}$, dobija klasični nekomutativni lagranžijan modela za drugi oblik rešenja Ojler-Lagranževih jednačina (7.40).

Dalje se na standardan način dobija i klasično dejstvo [96, 143]

$$
\begin{aligned}
& S^{cl,\theta}_{(1)}(x'', y'', T; x', y', 0) = (1 - \frac{1}{2}\omega^2\theta^2 - \omega^4\theta^4)\omega_\theta \\
\times \quad & \{A_+^2[e^{2\theta\omega^2 T}\sin(2\omega_\theta T + 2\delta_+) - \sin(2\delta_+) + \frac{\theta\omega^2}{\omega_\theta}(e^{2\theta\omega^2 T}\cos(2\omega_\theta T + 2\delta_+) - \cos(2\delta_+))] \\
+ \quad & A_-^2[e^{-2\theta\omega^2 T}\sin(2\omega_\theta T + 2\delta_-) - \sin(2\delta_-) \\
- \quad & \frac{\theta\omega^2}{\omega_\theta}(e^{-2\theta\omega^2 T}\cos(2\omega_\theta T + 2\delta_-) - \cos(2\delta_-))]\} + \theta\omega^2(1 - \omega^4\theta^4) \\
\times \quad & \{A_+^2[-e^{2\theta\omega^2 T}\cos(2\omega_\theta T + 2\delta_+) + \cos(2\delta_+) + \frac{\theta\omega^2}{\omega_\theta}(e^{2\theta\omega^2 T}\sin(2\omega_\theta T + 2\delta_+) - \sin(2\delta_+))] \\
+ \quad & A_-^2[e^{-2\theta\omega^2 T}\cos(2\omega_\theta T + 2\delta_-) - \cos(2\delta_-) \\
+ \quad & \frac{\theta\omega^2}{\omega_\theta}(e^{-2\theta\omega^2 T}\sin(2\omega_\theta T + 2\delta_-) - \sin(2\delta_-))]\} \\
- \quad & \frac{2A_+A_-\theta^2\omega^4}{\omega_\theta}[\sin(\delta_+ + \delta_- + 2\omega_\theta T) - \sin(\delta_+ + \delta_-)] \\
+ \quad & \frac{\theta\omega^2}{2}[A_+^2(e^{2\theta\omega^2 T} - 1) - A_-^2(e^{-2\theta\omega^2 T} - 1)] \\
+ \quad & 4A_+A_-\theta\omega^2 T[\theta\omega^2\cos(\delta_+ - \delta_-) + \omega_\theta\sin(\delta_- - \delta_+)]. \qquad (7.51)
\end{aligned}
$$

Primetimo da su ovde za vakuumski Kantovski-Saks model u nekomutativnom slučaju za dva različita tipa rešenja Ojler-Lagranževih jednačina (7.40) dobijena dva klasična dejstva data sa (7.44) i (7.51). Pri tome, kao što je poznato, klasična dejstva predstavljaju centralne objekte za dalje proučavanje kvantnih formi modelâ sa stanovišta standardnog funkcionalnog formalizma i u okviru njega određivanja talasnih funkcija. Specijalno kada je u pitanju vakuumski Kantovski-Saks model, već je u uvodu i u delu 5.2.2 (pod d/vi) pomenuta važnost razmatranja ovog modela zbog njegovog difeomorfizma sa Švarcšildovim rešenjem Ajnštajnovih jednačina gravitacionog polja. Kvantna (termo)dinamika različitih modela nekomutativne Švarcšildove crne rupe, zasnovana na Miznerovoj reparametrizaciji Kantovski-Saks metrike, u okviru kanonskog kvantnog formalizma razmatrana je u radovima [145], [146] i [147]. U njima su prezentovana rešenja Viler-de Vitovih jednačina, odnosno talasne funkcije koje opisuju (ne)komutativne Švarcšildove crne rupe. U radu [145] ove funkcije su eksplicitno i određene u komutativnom i nekomutativnom slučaju. S obzirom na to da oba pristupa kvantizaciji (funkcionalni i kanonski) moraju da vode istim rezutatima, ispostavlja se da su rezultati dobijeni u radovima [145], [146] i [147] od interesa za buduće istraživanje koje treba da ukaže koje od dva dobijena dejstva (7.44) i (7.51) bolje opisuje kvantnu dinamiku ovog nekomutativnog modela (untrašnjosti Švarcšildove crne rupe). U daljem proučavanju na isti način se može pristupiti razmatranju kvantnih komutativnih i nekomutativnih formi i ostalih dvooscilatornih kosmoloških modela.

Na kraju ovog dela, vezano za Milneov model, treba reći da s obzirom da nekomutativnost prostornog tipa podrazumeva transformacije samo generalisanih koordinata ali ne i njima konjugovanih impulsa, jasno je da se klasični lagranžijan Milneovog modela (5.19), u kome se minisuperprostorne koordinate eksplicitno ne javljaju, a samim tim i dinamika modela, neće promeniti pri prelasku na nekomutativni konfiguracioni prostor.

8 Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

U decembru 1915. godine, svega nekoliko nedelja nakon što je Ajnštajn prezentovao jednačine Opšte teorije relativnosti, nemački astrofizičar Karl Švarcšild je odredio njihovo egzaktno rešenje za slučaj centralno-simetričnog gravitacionog polja nerotirajućih i nenaelektrisanih objekata. Nekoliko meseci posle Švarcšilda, Lorencov student Drost takođe je došao do istog rešenja za tačkastu masu.

Metrika prostor-vremena Švarcšildovog rešenja ima sledeći oblik [46]

$$ds^2 = -(1 - \frac{r_g}{r})dt^2 + (1 - \frac{r_g}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{8.1}$$

Odmah se vidi da ona divergira za $r = 0$ (Švarcšildov ili gravitacioni singularitet) i za $r = r_g$ (gde je $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ gravitacioni ili Švarcšildov radijus tela mase m) na takozvanoj Švarcšildovoj sferi (horizontu događaja). Singularitet $r = 0$ je pravi (fizički ili esencijalni), dok se singularnost na Švarcšildovoj sferi zove matematička, koordinatna ili „prividna" singularnost jer može biti ukonjena pogodnim transformacijama koordinata [46] (npr. Lemetreovim, Edington-Finkelštajnovim itd.).

Sa druge strane, iz (8.1) je jasno da za $r < r_g$, tj. unutar horizonta događaja, Švarcšildove metričke komponente $g_{00} = g_{tt}$ i $g_{11} = g_{rr}$ menjaju predznake. Ovo sugeriše da prostor i vreme menjaju uloge nakon prolaska kroz horizont događaja. Naime, vremenska koordinata, za posmatrača izvan horizonta događaja, postaje prostornog tipa za posmatrača unutar Švarcšildove sfere. U tom smislu, za oba pomatrača postoji samo jedan mogući smer kretanja, za spoljašnjeg posmatrača u vremenu, a za unutrašnjeg u prostoru (pravo ka singularnosti). Imajući u vidu prethodno rečeno, može se razmotriti mogućnost da unutrašnjost Švarcšildove crne rupe bude opisana kvadratnom metričkom formom koja se dobija zamenom $t \leftrightarrow r$ u njen standardni oblik (8.1) tj. formom

$$ds^2 = -(\frac{r_g}{t} - 1)^{-1}dt^2 + (\frac{r_g}{t} - 1)dr^2 + t^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{8.2}$$

u kojoj komponente metrike eksplicitno zavise od vremena.

Prethodni izraz ima oblik homogene i anizotropne Kantovski-Saks metrike $ds^2 = -\frac{N^2(t)}{c_1(t)}dt^2 + c_1(t)dr^2 + c_2^2(t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ iz (5.3), sa dva faktora skale c_1 i c_2 (pri čemu će očigledno u ovom slučaju biti $c_1(t) = \frac{r_g}{t} - 1$, $c_2(t) = t$ i $N(t) = 1$).

Drugim rečima, unutar Švarcšildove sfere koordinatna transformacija $t \leftrightarrow r$ prevodi Švarcšildovu metriku u homogenu i anizotropnu Kantovski-Saks metriku. Ovo je, zapravo, primer jedne interesantne osobine Opšte teorije relativnosti da generiše rešenja za kosmološke modele iz statičkih rešenja Ajnštajnovih jednačina gravitacionog polja. Metode kojima se dobijaju ovakva rešenja proučene su u radu [148], i u opštem slučaju zasnivaju se na difeormorfizmu između statičkih rešenja i odgovarajućih kosmoloških modela. Jedan takav difeomorfizam je upravo uspostavljen transformacijom $t \leftrightarrow r$ između Švarcšildovog rešenja i Kantovski-Saks modela.

Sa druge strane, kako se lagranžijan vakuumskog Kantovski-Saks modela može svesti na lagranžijan $L_{(1)}$ *oscillator-ghost-oscillator* sistema, dinamiku unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe možemo razmatrati kao dinamiku jednog dvooscilatornog kosmološkog modela pri čemu će se u ovom slučaju pružiti interesantna mogućnost fizičke interpretacije oscilatorâ (o čemu će biti reči u poglavlju o entropiji Švarcšildove crne rupe).

U delu koji neposredno sledi donekle će biti ponovljena (ovaj put uz više detalja) procedura svođenja vakuumskog Kantovski-Saks modela na dvooscilatorni model iz poglavlja 5.2.2 (pod d/vi), no sa oblikom Kantovski-Saks metrike (5.3) direktno korespondentnim metrici (8.2) koja sledi iz Švarcšildove (8.1) nakon zamene $t \leftrightarrow r$.

8.1 Klasična dinamika

Polazeći od Ajnštajn-Hilbertovog dejstva (4.12) bez polja materije ($\mathcal{L}_m = 0$) i kosmološke konstante ($\Lambda = 0$), i Kantovski-Saks metrike oblika (5.3), dobija se lagranžijan vakuumskog Kantovski-Saks modela unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe [107]

$$L = -\frac{V_0}{8\pi G}\left[\frac{1}{N}(c_2\dot{c}_2\dot{c}_1 + \dot{c}_2^2 c_1) - N\right], \tag{8.3}$$

gde je $V_0 = 4\pi \int dr$ zapremina (u jedinicama dužine) dela prostora u kome je dejstvo konačno. Reskaliranjem laps funkcije

$$N = 2\sqrt{c_2^2 c_1}\tilde{N}, \tag{8.4}$$

i uz transformacije [149]

$$c_2 = \frac{1}{2}(x-y)^2, \quad c_1 = \left[\frac{x+y}{x-y}\right]^2, \tag{8.5}$$

lagranžijan (8.3) postaje dekuplovan

$$\begin{aligned} L &= -M_{pl}^2 V_0 \tilde{N}^{-1}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + M_{pl}^2 V_0 \tilde{N}(x^2 - y^2) \\ &= -\frac{M_{pl}^2 V_0}{\tilde{N}}\left[(\dot{x}^2 - \tilde{N}^2 x^2) - (\dot{y}^2 - \tilde{N}^2 y^2)\right], \end{aligned} \tag{8.6}$$

gde je $M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} = 2,43 \cdot 10^{18}$ GeV/c^2 redukovana Plankova masa. Impulsi konjugovani koordinatama x, y, $\tilde{N}$ su, respektivno

$$\pi_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\frac{2V_0 M_{pl}^2}{\tilde{N}}\dot{x}, \tag{8.7}$$

$$\pi_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{2V_0 M_{pl}^2}{\tilde{N}}\dot{y}, \tag{8.8}$$

$$\pi_{\tilde{N}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{N}}} = 0. \tag{8.9}$$

Poslednja jednačina predstavlja primarnu Dirakovu vezu za ovaj sistem. Hamiltonijan je tada

$$\begin{aligned} H &= \dot{x}\pi_x + \dot{y}\pi_y + \dot{\tilde{N}}\pi_{\tilde{N}} - L \\ &= -\frac{\tilde{N}}{4M_{pl}^2 V_0}(\pi_x^2 - \pi_y^2) - V_0 M_{pl}^2 \tilde{N}(x^2 - y^2). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Kako je, prema rečenom u poglavlju 4.2, zbog postojanja primarne veze (8.9) ovaj sistem singularan, tj. nema jedinstveno partikularno rešenje jednačina kretanja za zadate početne uslove, uvodi se i tzv. totalni hamiltonijan

$$H_T = H + \lambda\pi_{\tilde{N}} = -\frac{\tilde{N}}{4M_{pl}^2 V_0}(\pi_x^2 - \pi_y^2) - V_0 M_{pl}^2 \tilde{N}(x^2 - y^2) + \lambda\pi_{\tilde{N}}, \tag{8.11}$$

pri čemu je $\lambda = \lambda(t)$ Lagranžev množitelj. Hamiltonov uslov je

$$\dot{\pi}_{\tilde{N}} = \{\pi_{\tilde{N}}, H_T\} = \{\pi_{\tilde{N}}, H\} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{N}} = \mathcal{H} = 0, \tag{8.12}$$

gde je

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4M_{pl}^2 V_0}(\pi_x^2 - \pi_y^2) - V_0 M_{pl}^2 (x^2 - y^2), \tag{8.13}$$

što će dati Viler-de Vitovu jednačinu u proceduri kvantizacije.

Birajući laps funkciju $\tilde{N}$ (fiksirajući gejdž) tako da je $\tilde{N} = \omega$, te imajući u vidu invarijantnost dinamike sistema u odnosu na množenje lagranžijana proizvoljnim multiplikativnim faktorom, iz (8.6) je jasno da je i

$$L = (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) - (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2), \tag{8.14}$$

lagranžijan ovog modela. Iz (8.14) se vidi da je u pitanju jedan *oscillator-ghost-oscillator* sistem čije će korespondentne Ojler-Lagranževe jednačine biti

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0. \tag{8.15}$$

Opšte rešenje ovih jednačina je dato sa (5.79). Pri tome, za početne uslove $x(t') = x'$, $x(t'') = x''$, $y(t') = y'$ i $y(t'') = y''$ klasično partikularno rešenje je (5.83), dok je odgovarajuće klasično dejstvo oblika $S_{(1)}^{cl}$ iz (5.87).

8.2 Standardna kvantna i adelična forma modela

Prema rečenom u poglavljima 4.3 i 5.3, Viler-de Vitovu jednačinu dobijamo kvantizacijom Hamiltonovog uslova tj. u ovom slučaju iz izraza (8.13)

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(x,y) = \left[-\frac{1}{4M_{pl}^2V_0}(\hat{\pi}_x^2 - \hat{\pi}_y^2) - V_0M_{pl}^2(\hat{x}^2 - \hat{y}^2)\right]\Psi(x,y) = 0. \tag{8.16}$$

U koordinatnoj reprezentaciji prethodna jednačina je identična sa Viler-de Vitovom jednačinom $\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{\omega}^2(x^2 - y^2)\right]\Psi(x,y) = 0$ iz (5.120), s tim da je ovde $\tilde{\omega} = 2V_0M_{pl}^2 = \frac{V_0}{4\pi G}$. Kao što je pokazano u poglavlju 5.3 njeno opšte rešenje se određuje metodom razdvajanja promenljivih i dato je talasnom funkcijom (5.125).

Postojanje standardne talasne funkcije (5.125) je jedan od uslova za adeličnu generalizaiju modela. Drugi uslov je postojanje osnovnih vakuumskih stanja tipa omega funkcija $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)$. U delu 6.2 pokazano je da ovakva stanja postoje za sve dvooscilatorne kosmološke modele pod istim uslovima i u opštoj formi su data sa (6.32). Prema tome, adeličnu talasnu funkciju (3.21) za ovaj model je moguće konstruisati, i ona u ovom slučaju ima oblik

$$\begin{aligned}\Psi^{(adel.)}(x,y) &= \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{2^n n!}e^{-\frac{\tilde{\omega}}{2}(x^2+y^2)}H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}x)H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}y)\\ &\times \prod_{p\in M}\Psi_p(x,y)\prod_{p\notin M}\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p),\end{aligned} \tag{8.17}$$

što će, dakle, biti adelična talasna funkcija unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe. Osnovno vakuumsko adelično stanje je tada

$$\Psi_0^{(adel.)}(x,y) = C_0'e^{-\frac{\tilde{\omega}}{2}(x^2+y^2)}\prod_p\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p), \tag{8.18}$$

gde je $C_0' = C_0\left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ normalizaciona konstanta. Prema (3.26) ova talasna funkcija će imati nenulti kvadrat modula (gustinu verovatnoće) samo za diskretne vrednosti koordinata x i y, tj. za $x, y \in \mathbb{Z}$.

Na kraju ovog dela treba ukazati na to da se u prethodnim razmatranjima uvek prelazilo sa opisivanja klasičnih kosmoloških modela na opisivanje njihovih kvantnih standardnih komutativnih, p-adičnih, adeličnih i nekomutativnih formi u okviru kojih su prezentovani načini na koje je moguće odrediti, a u nekim slučajevima su i određene, njihove talasne funkcije. Sa druge strane, generalna interpretacija talasnih funkcija kosmoloških modela je direktno povezana sa nekim konceptualnim pitanjima bez adekvatnih odgovora do danas, a koja su pomenuta u uvodu glave 4. No, imajući u vidu da je kvantna kosmologija zapravo teorija kvantne gravitacije ranog univerzuma, sasvim je izvesno da se pomenute talasne funkcije, kao i neke specifične osobine prostor-vremena (diskretizacija, nearhimedičnost, problemi merenja, nekomutativnost,...) svakako odnose na rane, plankijanske faze evolucije svemira kada pojam „kvantno” ima svoje pravo značenje u prostornom i vremenskom smislu.

Drugo pitanje koje se može postaviti na ovom mestu jeste pitanje interpretacije bilo standardne kvantne (5.125) bilo adelične (8.17) talasne funkcije unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe kao jednog, gledano dimenzionalno, ne nužno kvantnog objekta. Pravac u kome treba tražiti odgovor je u okviru termodinamike crnih rupa. Naime, Hoking je u radu [150] iz 1975. godine pokazao da crne rupe mogu da emituju čestice – što je nazvano isparavanjem crnih rupa ili Hokingovim efektom. Međutim, njegovo objašnjenje ovog efekta se zasnivalo na tretmanu čestica kao kvantnih objekata, dok je gravitaciono polje crne rupe posmatrao klasično tj. opisano Ajnštajnovim jednačinama. Drugim rečima, njegov pristup objašnjenju pojave isparavanja crnih rupa je bio semiklasičan. Pravo razumevanje ovog kvantnog fenomena, posebno u finalnim fazama isparavanja, očekuje se u okviru teorije kvantne gravitacije. Upravo razmatrajući termodinamiku Švarcšildove crne rupe u narednom poglavlju biće predložena moguća fizička interpretacija kvantnih oscilatora iz Viler-de Vitove jednačine (8.16). Kao što će biti pokazano, ova interpretacija će omogućiti da se za nerotirajuću i nenaelektrisanu crnu rupu odredi entropija sa kvantnom popravkom koja se inače dobija i u drugim pristupima. U svakom slučaju, na osnovu prethodnog, jasno je da proučavanje fizike crnih rupa, bile one po dimenzijama kvantni ili makroskopski objekti, podrazumeva i kvantni pristup. Kao što je poznato, ovo u fizici nije izolovan primer da neke makroskopske pojave ili pak suštinske osobine nekih makroskopskih objekata zahtevaju kvantno objašnjenje (npr. feromagnetizam, superprovodljivost, superfluidnost).

8.3 Entropija sa kvantnom popravkom

Množeći (8.16) sa $\tilde{N}$, Viler-de Vitova jednačina modela u Međunarodnom sistemu jedinica postaje

$$\left[-\frac{\tilde{N}}{4V_0M_{pl}^2}(\hat{\pi}_x^2-\hat{\pi}_y^2)\frac{\hbar}{c^2}-\tilde{N}V_0M_{pl}^2(\hat{x}^2-\hat{y}^2)\frac{c^2}{\hbar}\right]\Psi(x,y)=0, \tag{8.19}$$

odnosno u koordinatnoj reprezentaciji

$$\left[-\frac{\tilde{N}}{4V_0M_{pl}^2}(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2})\frac{\hbar}{c^2}-\tilde{N}V_0M_{pl}^2(x^2-y^2)\frac{c^2}{\hbar}\right]\Psi(x,y)=0. \tag{8.20}$$

Sa $\Psi_{n_1,n_2}(x,y)=\mu_{n_1}(x)\tau_{n_2}(y)$, izraz (8.20) postaje dekuplovan po x i y

$$\left[-\frac{\hbar^3\tilde{N}}{4V_0c^2M_{pl}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\tilde{N}V_0c^2M_{pl}^2}{\hbar}x^2\right]\mu_{n_1}(x)=E_{n_1}\mu(x), \tag{8.21}$$

$$\left[-\frac{\hbar^3\tilde{N}}{4V_0c^2M_{pl}^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\tilde{N}V_0c^2M_{pl}^2}{\hbar}y^2\right]\tau_{n_2}(y)=E_{n_2}\tau(y), \tag{8.22}$$

a što su jednačine dva dekuplovana kvantna linearna harmonijska oscilatora (gde je imajući u vidu (5.124) $n_1 = n_2 = n$ i $E_{n_1} = E_{n_2} = E_n$). Član $\frac{\tilde{N}V_0c^2M_{pl}^2}{\hbar}x^2$ u (8.21), odnosno $\frac{\tilde{N}V_0c^2M_{pl}^2}{\hbar}y^2$ u (8.22), predstavlja potencijalnu energiju $E_p(x)$ oscilatora po koordinati x, odnosno potencijalnu energiju $E_p(y)$ oscilatora po koordinati y, respektivno. Tada će odgovarajuća frekvenca ovih oscilatora biti

$$\omega^2=\frac{1}{\tilde{m}}\frac{\partial^2E_p(x)}{\partial x^2}=\frac{1}{\tilde{m}}\frac{\partial^2E_p(y)}{\partial y^2}=\frac{\tilde{N}}{\tilde{m}}\frac{2V_0c^2M_{pl}^2}{\hbar}, \tag{8.23}$$

gde je $\tilde{m}$ masa oscilatora.

Na ovom mestu treba ukazati na mogućnost interpretacije ovih oscilatora kao dva gravitaciona stepena slobode, pri čemu se jedan stepen slobode odnosi na unutrašnjost crne rupe energije E_n, a drugi na unutrašnjost korespondentne, ponekad nazvane, „bele rupe” sa energijom $-E_n$ [96]. U pitanju je, inače, jedan hipotetički region u prostor-vremenu, inverzan crnoj rupi u smislu da „belu rupu” materija može isključivo da napusti. Ideja o mogućnosti postojanja ovakve oblasti u svemiru potiče iz 60-ih godina prošlog veka. Naime, već 1960. godine Kruskal i Šekeres su, nezavisno jedan od drugog, predložili koordinatne transformacije koje su dale novi prostorno-vremenski dijagram Švarcšildove crne rupe. Ovaj novi dijagram (kasnije poboljšan od strane Penrouza) ukazao je na činjenicu da crna rupa deli prostor-vreme na dva svemira [151]. Pri tome svaki ima svoju singularnost i povezani su, bar neko vreme, onim što zovemo „crvotočina” ili Ajnštajn-Rozenov most (sa čije jedne strane je crna a sa druge „bela rupa”). Pomenuta interpretacija oscilatora ide u prilog ovakve globalne strukture prostor-vremena Švarcšildove crne rupe. Sem toga, kao što će biti pokazano, nudi i mogućnost da se primenom Fajnmen-Hibsove procedure [28] na deo Viler-de Vitove jednačine koji se odnosi na jedan od oscilatora, odredi temperatura i entropija crne rupe sa kvantnom korekcijom.

Sloboda izbora laps funkcije $\tilde{N}$ dopušta mogućnost da se fiksira gejdž $\frac{\tilde{N}}{\tilde{m}}=\frac{6c^2}{V_0\hbar}$ tako da se dobije korektan izraz za Hokingovu temperaturu crne rupe (tzv. Barbero-Imirzi parametar se fiksira na sličan način u teoriji *loop* kvantne gravitacije [152]). Tada se iz (8.23) dobija

$$\hbar\omega=\sqrt{\frac{3}{2\pi}}E_{pl}, \tag{8.24}$$

gde je $E_{pl}=\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}=1,22\cdot10^{19}$ GeV Plankova energija.

Klasična particiona funkcija za linearni harmonijski oscilator mase m i frekvence ω je

$$Z_{class.}=\frac{1}{\beta\hbar\omega}. \tag{8.25}$$

gde je $\beta = \frac{1}{k_B T}$, T je temperatura sistema i $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K Bolcmanova konstanta. Korekcioni potencijal za slučaj kvantnog linearnog harmonijskog oscilatora [28]

$$V = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + \frac{\beta\hbar^2}{12m}\right), \tag{8.26}$$

daje particionu funkciju

$$Z_{approx.} = \frac{e^{-\frac{(\beta\hbar\omega)^2}{24}}}{\beta\hbar\omega}. \tag{8.27}$$

Zamenom (8.24) u (8.27) dobija se da je u kvantnom slučaju za ovaj model

$$Z_{approx.} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\frac{e^{-\frac{\beta^2 E_{pl}^2}{16\pi}}}{\beta E_{pl}}. \tag{8.28}$$

Tada je unutrašnja energija crne rupe

$$E_{in.} = -\frac{\partial}{\partial\beta}(\ln Z_{approx}) = \frac{E_{pl}^2}{8\pi}\beta + \frac{1}{\beta} = mc^2, \tag{8.29}$$

gde je m masa crne rupe. Rešavajući (8.29) po β, uz $E_{pl} \ll mc^2$, dobija se da je [96]

$$\beta = \frac{8\pi mc^2}{E_{pl}^2}\left[1 - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{E_{pl}}{mc^2}\right)^2\right], \tag{8.30}$$

zapravo, u članovima Hokingove temperature $\beta_H = \frac{8\pi mc^2}{E_{pl}^2} = \frac{1}{k_B T_H}$, temperatura crne rupe sa kvantnom korekcijom

$$\beta = \beta_H\left[1 - \frac{1}{\beta_H mc^2}\right]. \tag{8.31}$$

Entropija modela je tada

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z_{approx.} + \beta E_{in.}. \tag{8.32}$$

Zamenom (8.27) i (8.29), a potom i (8.30), u (8.32) dobija se [96]

$$\frac{S}{k_B} = \frac{A_s}{4l_{pl}^2}\left[1-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{E_{pl}}{mc^2}\right)^2\right]-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{A_s}{4l_{pl}^2}\left[1-\frac{1}{8\pi}\left(\frac{E_{pl}}{mc^2}\right)^2\right]^2\right)-\frac{1}{2}\ln(24)+1, \tag{8.33}$$

gde je $A_s = 4\pi {r_g}^2$ površina horizonta događaja crne rupe čiji je Švarcšildov radijus $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$. U članovima Bekenštajn-Hokingove entropije $\frac{S_{BH}}{k_B} = \frac{A_s}{4l_{pl}^2}$, sa $E_{pl} \ll mc^2$, (8.33) postaje

$$\frac{S}{k_B} = \frac{S_{BH}}{k_B} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{S_{BH}}{k_B}\right) + \mathcal{O}(S_{BH}^{-1}), \tag{8.34}$$

što je izraz za entropiju crne rupe sa kvantnom korekcijom, koji je takođe dobijen drugačijim pristupima u radovima [153] i [154], što odgovara i rezultatima teorije struna [155] i *loop* kvantne gravitacije [156, 157]. Izraz (8.34) određen je i u radu [145] u kome su polazne tačke proučavanja nekomutativnih crnih rupa Miznerova reparametrizacija Kantovski-Saks metrike i ADM dejstvo. Ovo ukazuje na činjenicu opravdanosti najpre, sasvim uopšteno, dvooscilatornog tretmana unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe, a potom i na opravdanost fizičke interpretacije samih oscilatora u ovom slučaju.

9 Zaključak

Centralna tema ove disertacije bili su minisuperprostorni kosmološki modeli čija se klasična dinamika mogla razmatrati kao dinamika modela tipa slobodne čestice ili dvooscilatornih modela. Što se tiče jednočestičnih modela, za sada je poznat samo jedan takav slučaj – naime, Milneov 2+1 dimenzionalni kosmološki model čiji se klasični lagranžijan odgovarajućim transformacijama mogao svesti na lagranžijan slobodne čestice u 2+1 dimenzionalnom prostoru Minkovskog. Sa druge strane, postoji čitav niz kosmoloških modela čiji su minisuperprostori dvodimenzionalni i kod kojih, nakon smena, lagranžijan postaje lagranžijan sistema od dva linearna harmonijska ili dva linearna invertovana harmonijska oscilatora. Ovi modeli su nazvani, respektivno, „harmonijski" odnosno „invertovani harmonijski" dvooscilatorni modeli (kojih u svakoj grupi ima po četiri, odnosno ukupno osam različitih tipova minisuperprostornih dvooscilatornih kosmoloških modela). Nakon razmatranja njihove klasifikacije u poglavlju 5.2.1, pokazano je da se određenim transformacijama (signaturnom izmenom, promenom znaka ispred kvadrata frekvenci u lagranžijanima) može menjati oblik lagranžijana pri čemu se na taj način prelazi sa jednog tipa dvooscilatornog modela na drugi.

Generalno, klasična i standardna kvantna komutativna forma ovih modela razmotrena je u glavi 5. U klasičnom slučaju određeni su klasični lagranžijani, klasična dejstva i hamiltonijani modela, dok su u kvantnom delu prezentovane njihove Viler-de Vitove jednačine. Eksplicitno rešavanje Viler-de Vitovih jednačina predstavljeno je samo za *oscillator-ghost--oscillator* sisteme. U poglavlju 5.2.5 na jednom od ovih modela detaljno je razmotreno pitanje klasične signaturne tranzicije rešenja Ojler-Lagranževih jednačina po minisuperprostornim koordinatama iz Lorencovog u Euklidov region. Pri tome je posebno ukazano na niz mogućih uslova koje na parametre teorije mogu nametati kako sama signaturna izmena tako i neki drugi zahtevi (npr. uslov nulte energije).

U sledećoj glavi, u okviru p-adičnog pristupa, određeni su uslovi egzistencije vakuumskih p-adičnih stanja za Milneov model i dvooscilatorne kosmološke modele. Pokazano je da ova stanja postoje za sve modele, i posebno, da su uslovi njihove egzistencije identični (za svako pojedinačno stanje) za sve dvooscilatorne modele. Konstatovano je da je konstrukcija adelične talasne funkcije, stoga, moguća za sve modele sem za Milneov kod koga za sada prepreku adelizaciji predstavlja odsustvo standardne talasne funkcije modela. Na kraju ovog dela razmotrena je i signaturna tranzicija u p-adičnom prostor-vremenu $\mathbb{Q}_p^4$. Ukazano je na činjenicu da je ona moguća samo za $p \equiv 1 (\bmod 4)$ i da se pri ovoj transformaciji u $\mathbb{Q}_p^4$ kod dvooscilatornih modela (slično kao i u realnom slučaju) menja samo njihova forma odnosno oblik klasičnog dejstva dok uslovi egzistencije vakuumskih stanja ostaju nepromenjeni i isti za sve modele ovog tipa.

Uz pretpostavljenu nekomutativnost samo prostornog tipa, nekomutativne forme modela bile su razmotrene u glavi 7. Za sve dvooscilatorne modele prezentovani su odgovarajući nekomutativni lagranžijani, a potom određeni i originalni izrazi za dejstva i propagatore za tri tipa modela u nekomutativnom konfiguracionom prostoru.

U poslednjoj glavi disertacije prethodno dobijeni rezultati su primenjeni na slučaj unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe difeomorfne vakuumskom Kantovski-Saks minisuperprostornom kosmološkom modelu koji je dinamički ekvivalentan jednom *oscillator-ghost-oscillator* sistemu. Pri tome je dinamika unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe posebno razmotrena u klasičnom, standardnom kvantnom i adeličnom pristupu. U poslednjem delu ove glave, polazeći od originalne interpretacije oscilatora, primenom Fajnmen-Hibsove procedure, određeni su izrazi za Hokingovu temperaturu i entropiju sa kvantnim popravkama, za koje je ukazano da se poklapaju sa odgovarajućim izrazima koji su dobijeni i u drugim pristupima proučavanju termodinamike crnih rupa.

Sa druge strane, videli smo da se pri proučavanju dinamike Milneovog modela i dvooscilatornih kosmoloških modela otvaraju i nova pitanja koja zapravo ukazuju na dalje pravce istraživanja. To se pre svega odnosi na proučavanje klasične i p-adične signaturne izmene za 2+1 dimenzionalni Milneov model i njegove adelizacije, zatim na razmatranje signaturne izmene i nekomutativne dinamike kod dvooscilatornih modela kod kojih one nisu razmotrene, kao i na proučavanje dinamike unutrašnjosti nekomutativne Švarcšildove crne rupe za različite oblike dobijenih nekomutativnih klasičnih dejstava. U tom smislu jasna je relevantnost dobijenih rezultata u ovoj disertaciji za buduća istraživanja u oblastima kvantne gravitacije, kvantne kosmologije i (termo)dinamike crnih rupa.

Dodaci

A Dodatak

Ako je $\frac{1}{\theta^2} = \omega_{x,y}^2$, tada:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{1,x} &= \frac{1}{4\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[(\omega_x^2 + (1-\theta^2\omega_y^2)\omega_\theta^2)\sin(2\omega_\theta T) - 2\omega_\theta T(\omega_x^2 - (1-\theta^2\omega_y^2)\omega_\theta^2)],\\
\gamma_{1,y} &= \frac{1}{4\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[(\omega_y^2 + (1-\theta^2\omega_x^2)\omega_\theta^2)\sin(2\omega_\theta T) - 2\omega_\theta T(\omega_y^2 - (1-\theta^2\omega_x^2)\omega_\theta^2)],\\
\gamma_{2,x} &= \frac{\omega_x^2}{4\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[\sin(2\omega_\theta T) - 2\omega_\theta T],\\
\gamma_{2,y} &= \frac{\omega_y^2}{4\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[\sin(2\omega_\theta T) - 2\omega_\theta T],\\
\gamma_{3,x} &= -\frac{1}{\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[(\omega_x^2+(1-\theta^2\omega_y^2)\omega_\theta^2)\sin(\omega_\theta T) - \omega_\theta T(\omega_x^2-(1-\theta^2\omega_y^2)\omega_\theta^2)\cos(\omega_\theta T)],\\
\gamma_{3,y} &= -\frac{1}{\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[(\omega_y^2+(1-\theta^2\omega_x^2)\omega_\theta^2)\sin(\omega_\theta T) - \omega_\theta T(\omega_y^2-(1-\theta^2\omega_x^2)\omega_\theta^2)\cos(\omega_\theta T)],\\
\gamma_{4,x} &= -\frac{\omega_x^2}{\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[\sin(\omega_\theta T) - T\omega_\theta \cos(\omega_\theta T)],\\
\gamma_{4,y} &= -\frac{\omega_y^2}{\omega_\theta \sin^2(\omega_\theta T)}[\sin(\omega_\theta T) - T\omega_\theta \cos(\omega_\theta T)],\\
\gamma_5 &= -\theta(\omega_x^2 - \omega_y^2),\\
\gamma_6 &= \frac{T\theta\omega_\theta(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\sin(\omega_\theta T)}.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

B Dodatak

Ako je $\frac{1}{\theta^2} \neq \omega_{x,y}^2$, neka je $\Delta = -2AB[1-\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)]+(A^2+B^2)\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) \neq 0$, sa $A = \frac{\alpha_x \Omega_1}{\beta_y - \Omega_1^2}$ i $B = \frac{\alpha_x \Omega_2}{\beta_y - \Omega_2^2}$, tada su:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{\Delta}[-AB + B^2\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) + AB\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{12} &= \frac{1}{\Delta}[AB(\cos(\Omega_2 T) - \cos(\Omega_1 T))],\\
\alpha_{13} &= \frac{1}{\Delta}[B\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - A\sin(\Omega_2 T)\cos(\Omega_1 T)],\\
\alpha_{14} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T) - B\sin(\Omega_1 T)],\\
\alpha_{21} &= \frac{1}{\Delta}[AB\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - B^2\cos(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{22} &= \frac{1}{\Delta}[B^2\sin(\Omega_2 T) - AB\sin(\Omega_1 T))],\\
\alpha_{23} &= \frac{1}{\Delta}[B - B\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - A\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{24} &= \frac{1}{\Delta}[B(\cos(\Omega_1 T) - \cos(\Omega_2 T))],\\
\alpha_{31} &= \frac{1}{\Delta}[-AB + AB\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) + A^2\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{32} &= \frac{1}{\Delta}[AB(\cos(\Omega_1 T) - \cos(\Omega_2 T))],\\
\alpha_{33} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T)\cos(\Omega_1 T) - B\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{34} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T) - B\sin(\Omega_1 T)],\\
\alpha_{41} &= \frac{1}{\Delta}[AB\cos(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) - A^2\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{42} &= \frac{1}{\Delta}[A^2\sin(\Omega_1 T) - AB\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{43} &= \frac{1}{\Delta}[A - B\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) - A\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{44} &= \frac{1}{\Delta}[A(\cos(\Omega_2 T) - \cos(\Omega_1 T))]. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_1^{\pm} &= K_1^{\pm}(\Omega_1) = \frac{\theta(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\alpha_y \alpha_x}(\alpha_x \pm \alpha_y A^2)\Omega_1^2 \pm 2\theta\Omega_1(\omega_x^2 \pm \omega_y^2)A \mp \omega_x^2 - \omega_y^2 A^2,\\
K_2^{\pm} &= K_2^{\pm}(\Omega_2) = \frac{\theta(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\alpha_y \alpha_x}(\alpha_x \pm \alpha_y B^2)\Omega_2^2 \pm 2\theta\Omega_2(\omega_x^2 \pm \omega_y^2)B \mp \omega_x^2 - \omega_y^2 B^2,\\
K_3^{\pm} &= K_3^{\pm}(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{\theta(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\alpha_y \alpha_x}(\alpha_x \pm AB\alpha_y)\Omega_1\Omega_2 + \theta(B\omega_y^2 \pm A\omega_x^2)\Omega_1\\
&+ \theta(A\omega_y^2 \pm B\omega_x^2)\Omega_2 \mp \omega_x^2 - AB\omega_y^2. \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}$$

C Dodatak

Neka je $\overline{\Delta} = -2\overline{AB}[1 - \cosh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T)] - (\overline{A}^2 + \overline{B}^2)\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\sinh(\overline{\Omega}_2 T) \neq 0$, sa $\overline{A} = \frac{\overline{\alpha}_x \overline{\Omega}_1}{\beta_y - \overline{\Omega}_1^2}$ i $\overline{B} = \frac{\overline{\alpha}_x \overline{\Omega}_2}{\beta_y - \overline{\Omega}_2^2}$, tada su:

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{11} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[-\overline{AB} - \overline{B}^2 \sinh(\overline{\Omega}_1 T)\sinh(\overline{\Omega}_2 T) + \overline{AB}\cosh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{12} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{AB}(\cosh(\overline{\Omega}_2 T) - \cosh(\overline{\Omega}_1 T))],\\
\overline{\alpha}_{13} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{B}\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T) - \overline{A}\sinh(\overline{\Omega}_2 T)\cosh(\overline{\Omega}_1 T)],\\
\overline{\alpha}_{14} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{A}\sinh(\overline{\Omega}_2 T) - \overline{B}\sinh(\overline{\Omega}_1 T)],\\
\overline{\alpha}_{21} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[-\overline{AB}\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T) + \overline{B}^2\cosh(\overline{\Omega}_1 T)\sinh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{22} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[-\overline{B}^2\sinh(\overline{\Omega}_2 T) + \overline{AB}\sinh(\overline{\Omega}_1 T))],\\
\overline{\alpha}_{23} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{B} - \overline{B}\cosh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T) + \overline{A}\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\sinh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{24} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{B}(\cosh(\overline{\Omega}_1 T) - \cosh(\overline{\Omega}_2 T))],\\
\overline{\alpha}_{31} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[-\overline{AB} + \overline{AB}\cosh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T) - \overline{A}^2\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\sinh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{32} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{AB}(\cosh(\overline{\Omega}_1 T) - \cosh(\overline{\Omega}_2 T))],\\
\overline{\alpha}_{33} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{A}\sinh(\overline{\Omega}_2 T)\cosh(\overline{\Omega}_1 T) - \overline{B}\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{34} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[-\overline{A}\sinh(\overline{\Omega}_2 T) + \overline{B}\sinh(\overline{\Omega}_1 T)],\\
\overline{\alpha}_{41} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[-\overline{AB}\cosh(\overline{\Omega}_1 T)\sinh(\overline{\Omega}_2 T) + \overline{A}^2\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{42} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[-\overline{A}^2\sinh(\overline{\Omega}_1 T) + \overline{AB}\sinh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{43} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{A} + \overline{B}\sinh(\overline{\Omega}_1 T)\sinh(\overline{\Omega}_2 T) - \overline{A}\cosh(\overline{\Omega}_1 T)\cosh(\overline{\Omega}_2 T)],\\
\overline{\alpha}_{44} &= \frac{1}{\overline{\Delta}}[\overline{A}(\cosh(\overline{\Omega}_2 T) - \cosh(\overline{\Omega}_1 T))].
\end{aligned} \tag{C.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{K}_1^{\pm} &= \overline{K}_1^{\pm}(\overline{\Omega}_1) = \frac{\theta(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\overline{\alpha}_y \overline{\alpha}_x}(\overline{\alpha}_x \mp \overline{\alpha}_y \overline{A}^2)\overline{\Omega}_1^2 \pm 2\theta\overline{\Omega}_1(\omega_x^2 \pm \omega_y^2)\overline{A} \mp \omega_x^2 + \omega_y^2 \overline{A}^2,\\
\overline{K}_2^{\pm} &= \overline{K}_2^{\pm}(\overline{\Omega}_2) = \frac{\theta(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\overline{\alpha}_y \overline{\alpha}_x}(\overline{\alpha}_x \mp \overline{\alpha}_y \overline{B}^2)\overline{\Omega}_2^2 \pm 2\theta\overline{\Omega}_2(\omega_x^2 \pm \omega_y^2)\overline{B} \mp \omega_x^2 + \omega_y^2 \overline{B}^2,\\
\overline{K}_3^{\pm} &= \overline{K}_3^{\pm}(\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2) = \frac{\theta(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\overline{\alpha}_y \overline{\alpha}_x}(\overline{\alpha}_x \mp \overline{AB}\overline{\alpha}_y)\overline{\Omega}_1\overline{\Omega}_2 + \theta(\overline{B}\omega_y^2 \pm \overline{A}\omega_x^2)\overline{\Omega}_1\\
&+ \theta(\overline{A}\omega_y^2 \pm \overline{B}\omega_x^2)\overline{\Omega}_2 \mp \omega_x^2 + \overline{AB}\omega_y^2.
\end{aligned} \tag{C.2}
$$

D Dodatak

Neka je $\Delta = -2AB[1-\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)] + (A^2+B^2)\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) \neq 0$, sa $A = \frac{2\theta\omega^2\Omega_1}{\omega_\theta^2-\Omega_1^2}$ i $B = \frac{2\theta\omega^2\Omega_2}{\omega_\theta^2-\Omega_2^2}$, tada su:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \frac{1}{\Delta}[-AB + B^2\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) + AB\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{12} &= \frac{1}{\Delta}[AB(\cos(\Omega_2 T) - \cos(\Omega_1 T))],\\
\alpha_{13} &= \frac{1}{\Delta}[B\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - A\sin(\Omega_2 T)\cos(\Omega_1 T)],\\
\alpha_{14} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T) - B\sin(\Omega_1 T)],\\
\alpha_{21} &= \frac{1}{\Delta}[AB\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - B^2\cos(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{22} &= \frac{1}{\Delta}[B^2\sin(\Omega_2 T) - AB\sin(\Omega_1 T))],\\
\alpha_{23} &= \frac{1}{\Delta}[B - B\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) - A\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{24} &= \frac{1}{\Delta}[B(\cos(\Omega_1 T) - \cos(\Omega_2 T))],\\
\alpha_{31} &= \frac{1}{\Delta}[-AB + AB\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T) + A^2\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{32} &= \frac{1}{\Delta}[AB(\cos(\Omega_1 T) - \cos(\Omega_2 T))],\\
\alpha_{33} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T)\cos(\Omega_1 T) - B\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{34} &= \frac{1}{\Delta}[A\sin(\Omega_2 T) - B\sin(\Omega_1 T)],\\
\alpha_{41} &= \frac{1}{\Delta}[AB\cos(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) - A^2\sin(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{42} &= \frac{1}{\Delta}[A^2\sin(\Omega_1 T) - AB\sin(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{43} &= \frac{1}{\Delta}[A - B\sin(\Omega_1 T)\sin(\Omega_2 T) - A\cos(\Omega_1 T)\cos(\Omega_2 T)],\\
\alpha_{44} &= \frac{1}{\Delta}[A(\cos(\Omega_2 T) - \cos(\Omega_1 T))].
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1^{\pm} &= K_1^{\pm}(\Omega_1) = (1\mp A^2)[(1+\theta^2\omega^2)\Omega_1^2 \mp \omega^2] - 2\theta\Omega_1 A(\omega^2 \pm \omega^2),\\
K_2^{\pm} &= K_2^{\pm}(\Omega_2) = (1\mp B^2)[(1+\theta^2\omega^2)\Omega_2^2 \mp \omega^2] - 2\theta\Omega_2 B(\omega^2 \pm \omega^2),\\
K_3^{\pm} &= K_3^{\pm}(\Omega_1,\Omega_2) = [(1+\theta^2\omega^2)\Omega_1\Omega_2 \mp \omega^2](1\mp AB) \mp (A\pm B)\theta\omega^2(\Omega_1 \pm \Omega_2).
\end{aligned}
\tag{D.2}
$$

Literatura

[1] Vladimirov, V.S., Volovich I.V., Zelenov, E.I.: p-Adic Analysis and Mathematical Physics. World Scientific, Singapore (1994)

[2] Djordjevic, G.S., Dragovich, B., Nesic Lj., Volovich, I.V.: p-Adic and adelic minisuperspace quantum cosmology. Int. J. Mod. Phys. A **17**, 1413-1434 (2002)

[3] Ashtekar, A., Lewandowski, J.: Background independent quantum gravity: A status report. Class. Quant. Grav. **21**, R53 (2004). doi:10.1088/0264-9381/21/15/R01

[4] Cailleteau, T., Mielczarek, J., Barrau, A., Grain, J.: Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology. Class. Quant. Grav. **29** (2012) doi:10.1088/0264-9381/29/9/095010

[5] Bojowald, M., Paily, G.M.: Deformed general relativity and effective actions from loop quantum gravity. Phys. Rev. D **86** (2012). doi:10.1103/PhysRevD.86.104018

[6] Mars, M., Senovilla, J.M.M., Vera R.: Is the accelerated expansion evidence of a forthcoming change of signature on the brane? Phys. Rev. D **77** (2008). doi:10.1103/PhysRevD.77.027501

[7] Pedram, P., Jalalzadeh S.: Signature change from Schutz's canonical quantum cosmology and its classical analogue. Phys. Rev. D **77** (2008). doi:10.1103/PhysRevD.77.123529

[8] White, A., Weinfurtner, S., Visser M.: Signature change events: A challenge for quantum gravity? Class. Quant. Grav. **27** (2010). doi:10.1088/0264-9381/27/4/045007

[9] Abbott, B.P. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration): Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. Phys. Rev. Lett. **116** (2016). doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102

[10] Koblitz, N.: p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta Functions. Springer-Verlag, New York (1977)

[11] Garay, L.J.: Quantum gravity and minimum length. Int. J. Mod. Phys. A **10**, 145-166 (1995)

[12] Marić, Z.: Problemi merenja u teoriji gravitacije. U: SFIN II, broj 2, pp. 57-80. Institut za fiziku, Beograd (1989)

[13] Volovich, I.V.: Number theory as the ultimate physical theory. CERN preprint, CERN-TH.4781/87 (July 1987)

[14] Volovich, I.V.: p-Adic string. Class. Quantum Grav. **4**, L83-L87 (1987)

[15] Mahler, K.: p-adic Numbers and Their Functions. Cambridge University Press, Cambridge (1984)

[16] Vladimirov, V.S.: Tables of integrals of complex-valued functions of p-adic argument. In: Sovremennye Problemy Matematiki, vol. 2, pp. 3-88. Steklov Math. Institute of RAS, Moscow (2003)

[17] Gel'fand, I.M., Graev I.M., Piatetskii-Shapiro I.I.: Representation Theory and Automorphic Functions. Saunders, London (1966)

[18] Beltrametti, E.G., G. Cassinelli G.: Quantum mechanics and p-adic numbers. Found. Phys. **2**, 1-7 (1972)

[19] Vladimirov, V.S., Volovich I.V.: p-Adic quantum mechanics. Dokl. Akad. Nauk SSSR **302**, 320-322 (1988)

[20] Alacoque, C., Ruelle P., Thiran E., Verstegen D., Weyers J.: Quantum amplitudes on p-adic fields. Phys. Lett. B **211**, 59-62 (1988)

[21] Vladimirov, V.S., Volovich I.V.: p-Adic quantum mechanics. Commun. Math. Phys. **123**, 659-676 (1989)

[22] Zelenov, E.I.: p-Adic quantum mechanics for $p = 2$. Theor. Math. Phys. **80**, 253-264 (1989)

[23] Brekke, L., Freund, P.G.O.: p-Adic numbers in physics. Phys. Rep. **233**, 1-63 (1993)

[24] Vladimirov, V.S.: Generalized functions over p-adic number field. Usp. Mat. Nauk **43**, 17-53 (1988)

[25] Dimitrijevic, D., Djordjevic, G.S, Dragovich, B.: On Schrödinger-type equation on p-adic spaces, Bul. J. of Phys. **27**, vol. 3, 50 (2000)

[26] MacKenzie, R.: Path integral methods and applications. Lectures given at Rencontres du Vietnam: VIth Vietnam School of Physics, Vung Tau, Vietnam, 27 December 1999 - 8 January 2000. http://xxx.lanl.gov, quant-ph/0004090

[27] Feynman, R.P.: Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. Rev. Mod. Phys. **20**, 367-387 (1948)

[28] Feynman, R.P., Hibbs, A.R.: Quantum Mechanics and Path Integrals. McGraw Hill, New York (1965)

[29] Morette, C.: On the definition and approximation of Feynman's path integrals. Phys. Rev. **81**, 848-852 (1951)

[30] Grosjean, C.C., Goovaerts, M.J.: The analytic evaluation of one-dimensional gaussian path integrals. J. Comp. Appl. Math. **21**, 311-331 (1988)

[31] Grosjean, C.C.: A general formula for the calculation of Gaussian path-integrals in two and three euclidean dimensions. J. Comp. Appl. Math. **23**, 199-234 (1988)

[32] Blair, A.D.: Adelic path space integrals. Rev. Math. Phys. **7**, 21-49 (1995)

[33] Parisi, G.: On p-adic functional integrals. Mod. Phys. Lett. A **4**, 369-374 (1988)

[34] Varadarajan, V.S.: Path integrals for a class of p-adic Schrödinger equations. Lett. Math. Phys. **39**, 97-106 (1997)

[35] Meurice, Y.: A path integral formulation of p-adic quantum mechanics. Phys. Lett. B **245**(1), 99-104 (1990)

[36] Lerner, E.Yu.: Feynman integrals of p-adic argument in the momentum space. I. Convergence. Theor. Math. Phys. **102**(3), 267–274 (1995)

[37] Zelenov, E.I.: p-Adic path integrals. J. Math. Phys. **32**, 147–153 (1991)

[38] Djordjevic, G.S., Dragovich, B.: p-Adic path integral for quadratic actions. Mod. Phys. Lett. A **12**, 1455-1463 (1997)

[39] Djordjevic, G.S., Dragovich, B.: p-Adic generalization of the Feynman path integral. Proceedings Supplement of the Balkan Phys. Lett. **5**, 1622 (1997)

[40] Đorđević, G.S.: O p-adičnoj i adeličnoj kvantnoj mehanici (doktorska disertacija). Fizički fakultet, Beograd (1999)

[41] Nešić, Lj.: Kosmološki modeli u p-adičnoj i adeličnoj kvantnoj mehanici (doktorska disertacija). Fizički fakultet, Beograd (2002)

[42] Dragovich, B.: Adelic model of harmonic oscillator. Theor. Math. Phys. **101**, 349-359 (1994)

[43] Dragovich, B.: Adelic harmonic oscillator. Int. J. Mod. Phys. A **10**, 2349–2365 (1995)

[44] DeWitt, B.S.: Quantum theory of gravity. I. The canonical theory. Phys. Rev. **160**, 1113-1148 (1967)

[45] Misner, C.W.: Feynman quantization of general relativity. Rev. Mod. Phys. **29**, 497-509 (1957)

[46] Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: The Classical Theory of Fields (Volume 2 of A course of theoretical physics). Pergamon Press, Oxford (1971)

[47] York, J.W.: Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation. Phys. Rev. Lett. **28**, 1082–1085 (1972)

[48] Gibbons, G.W., Hawking, S.W.: Action integrals and partition functions in quantum gravity. Phys. Rev. D **15**, 2752–2756 (1977)

[49] York, J.W.: Boundary terms in the action principles of general relativity. Foundations of Physics **16**, 249-257 (1986)

[50] Dirac, P.A.M.: The theory of gravitation in Hamiltonian form. Proc. Roy. Soc. Lond. A **246**, 333-334 (1958)

[51] Dirac, P.A.M.: Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation. Phys. Rev. **114**, 924-930 (1959)

[52] Arnowitt, R., Deser, S., Misner, C.: Dynamical structure and definition of energy in general relativity. Phys. Rev. **116**(5), 1322–1330 (1959)

[53] Arnowitt, R., Deser, S., Misner, C.W.: The dynamics of general relativity. In: Witten, L. (ed.) Gravitation: An introduction to current research, Chapter 7, pp. 227-265. Wiley, New York (1962)

[54] Arnowitt, R., Deser, S., Misner, C.: Republication of: The dynamics of general relativity. General Relativity and Gravitation **40**(9), 1997–2027 (2008)

[55] Regge, T, Teitelboim, C.: Role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity. Ann. Phys. (N.Y.) **88**, 286-318 (1974)

[56] Darmois, G.: Les equations de la gravitation einsteinienne. Memorial des Sciences Mathematiques **25**, Chap. 5. Gauthier-Villars, Paris (1927)

[57] Lichnerowicz, A.: Sur certains problemes globaux relatifs au systeme des equations d'Einstein. Actual. Sci. Ind. **833**. Hermann, Paris (1939)

[58] Lichnerowicz, A.: L'integration des equations de la gravitation relativiste et le probleme des n corps. J. Math. Pures Appl. **23**, 37-63 (1944)

[59] Lichnerowicz, A.: Sur les equations relativistes de la gravitation. Bulletin de la S.M.F. **80**, 237-251 (1952)

[60] Foures-Bruhat, Y.: Theoreme d'existence pour certains systems d'equations aux derivees partielles non lineaires. Acta Mathematica **88**, 141-225 (1952)

[61] Foures-Bruhat, Y.: Sur l'integration des equations de la relativite generale. J. Rational Mech. Anal. **5**, 951-966 (1956)

[62] Wiltshire, D.: An introduction to quantum cosmology. In: Robson, B., Visvanathan, N., Woolcock, W.S. (eds.) Cosmology: The physics of the universe, Proceedings of the 8th Physics Summer School, Australian National University, Canberra, Australia, 16 January-3 February, 1995, pp. 473-531. World Scientific, Singapore (1996)

[63] Vilenkin, A.: Creation of universes from nothing. Phys. Lett. B **117**, 25-28 (1982)

[64] Vilenkin, A.: Quantum creation of universes. Phys. Rev. D **30**, 509–511 (1984)

[65] Vilenkin, A.: Boundary conditions in quantum cosmology. Phys. Rev. D **33**, 3560–3569 (1986)

[66] Hawking, S.W.: The boundary conditions of the universe. In: Brück, H.A., Coyne, G.V., Longair, M.S. (eds.) Astrophysical Cosmology, pp. 563-572. Pontifical Academy of Sciences, Vatican City (1982)

[67] Hartle, J.B., Hawking, S.W.: Wave function of the universe. Phys. Rev. D **28**, 2960-2975 (1983)

[68] Hawking, S.W.: Quantum cosmology. In: De Witt, B.S., Stora, R. (eds.) Relativity, groups and topology II, Proceedings of the Les Houches Summer School, Les Houches, France, 1983, vol. 40. Les Houches Summer School Proceedings, North--Holland, Amsterdam (1984)

[69] Halliwell, J.J.: Introductory lectures on quantum cosmology. In: Coleman, S., Hartle, J.B., Piran, T., Weinberg, S. (eds.) Proceedings of the 1989 Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes. World Scientific, Singapore (1991)

[70] Halliwell, J.J., Hartle, J. B.: Integration contours for the no boundary wave function of the universe. Phys. Rev. D **41**, 1815-1834 (1990)

[71] Mukhanov, V.F.: Physical Foundations of Cosmology. Cambridge University Press, New York (2005)

[72] Culetu, H.: The Milne spacetime and the hadronic Rindler horizon. Int. J. Mod. Phys. D **19**, 1379–1384 (2010)

[73] Waldron, A.: Milne and torus universes meet. arXiv. https://arxiv.org/abs/hep-th-/0408088 (2004). Submitted on 11 Aug 2004

[74] Halliwell, J.J., Ortiz, M.E.: Sum over histories origin of the composition laws of relativistic quantum mechanics and quantum cosmology. Phys. Rev. D **48**, 748-768 (1993)

[75] Djordjevic G.S., Nesic, Lj., Radovancevic D.: A new look at the Milne Universe and its ground state wave functions. Romanian Journal of Physics **58**(5-6), 560-572 (2013)

[76] Carlip, S.: Lectures in (2+1)-dimensional gravity. J. Korean Phys. Soc. **28**, S447-S467 (1995)

[77] Abbott, L.F., Pi, S.-Y.: Inflationary Cosmology. World Scientific, Singapore (1986)

[78] Roepstorff, G.: Path Integral Approach to Quantum Physics-An Introduction. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1994)

[79] Ferrero, M., van der Merwe, A.: Fundamental Problems in Quantum Physics. Springer Netherlands (1995)

[80] Cafaro, C.: The Information Geometry of Chaos (Ph.D. Thesis). College of Arts and Sciences/Department of Physics, New York (2008)

[81] Bermudez, D., Fernandez C., D.J.: Factorization method and new potentials from the inverted oscillator. Annals of Physics **333**, 290–306 (2013)

[82] Jalalzadeh, S., Ahmadi, F., Sepangi, H.R.: Multi-dimensional classical and quantum cosmology: exact solutions, signature transition and stabilization. JHEP **0308**, 012 (2003)

[83] Bina, A., Atazadeh K., Jalalzadeh S.: Noncommutativity, generalized uncertainty principle and FRW cosmology. Int. J. Theor. Phys. **47**, 1354-1362 (2008)

[84] Djordjevic, G.S., Nesic, Lj, Radovancevic, D.: Signature change in p-adic and non-commutative FRW cosmology. Int. J. Mod. Phys. A **29**(27), 1450155 [16 pages] (2014). doi:http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X14501553

[85] Dereli, T., Tucker, R.W.: Signature dynamics in general relativity. Class. Quant. Grav. **10**, 365-373 (1993)

[86] Đorđević, G.S., Nešić, Lj., Radovančević, D.: Modeli dva nekuplovana oscilatora u kosmologiji. U: Zbornik radova sa XII Kongresa fizičara Srbije (28. april-2. maj 2013, Vrnjačka Banja), str. 204-207. Društvo fizičara Srbije, Beograd (2013)

[87] Khosravi, N., Jalalzadeh, S., Sepangi H.R.: Non-commutative multi-dimensional cosmology. JHEP **01**, 134 (2006)

[88] Khosravi, N., Jalalzadeh, S., Sepangi, H.R.: Quantum noncommutative multidimensional cosmology. Gen. Rel. Grav **39**, 899-911 (2007)

[89] Zeynali, K., Darabi, F., Motavalli H.: Multi-dimensional cosmology and GUP. JCAP **12**(033) (2012)

[90] Darabi, F., Sepangi H.R.: On signature transition and compactification in Kaluza--Klein cosmology. Class. Quant. Grav. **16**, 1565-1575 (1999)

[91] Darabi, F., Rezaei-Aghdam A., Rastkar A.R.: Noncommutativity in quantum cosmology and the Hierarchy problem. Phys. Lett. B **615**, 141-145 (2005)

[92] Djordjevic, G.S., Ljubisa, N.: Exactly solvable quantum models on nonarchimedean spaces. Physics AUC **16**, 66-80 (2006)

[93] Djordjevic, G.S.: Noncommutativity and humanity-Julius Wess and his legacy. International Journal of Modern Physics (Conference Series) **13**, 66–85 (2012)

[94] Page, D.N.: Minisuperspaces with conformally and minimally coupled scalar fields. J. Math. Phys. **32**, 3427-3438 (1991)

[95] Louko, J.: Holomorphic quantum mechanics with a quadratic Hamiltonian constraint. Phys. Rev. D **48**, 2708-2727 (1993)

[96] Djordjevic, G.S., Nesic, Lj., Radovancevic, D.: Two-oscillator Kantowski–Sachs model of the Schwarzschild black hole interior. General Relativity and Gravitation **48**(8), 1-20 (2016)

[97] Dirac, P.A.M.: Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva University-Academic-Press, New York (1997)

[98] Moniz, P.V.: Quantum cosmology-The Supersymmetric Perspective-Vol. 1. Springer--Verlag Berlin Heidelberg (2010)

[99] Kiefer, C.: Quantum Gravity: Third Edition. Oxford University Press, Oxford (2012)

[100] Ghaneh, T., Darabi, F., Motavalli, H.: Signature change in noncommutative FRW cosmology. Mod. Phys. Lett. A **27**(37), 1250214 [16 pages] (2012). doi:10.1142/S0217732312502148

[101] Gibbons, G.W., Hartle, J.B.: Real tunneling geometries and the large-scale topology of the universe. Phys. Rev. D **42**, 2458-2468 (1990)

[102] Hayward S.A.: Junction conditions for signature change. arXiv. http://arxiv.org/abs/gr-qc/9303034 (1994). Submitted on 29 Mar 1993

[103] Ghafoori-Tabrizi, K., Gousheh, S.S., Sepangi, H.R.: On signature transition in Robertson-Walker cosmologies. Int. J. Mod. Phys. A **15**, 1521-1531 (2000)

[104] Hellaby, C., Sumeruk, A., Ellis, G.F.R.: Classical signature change in the black hole topology. Int. J. Mod. Phys. D **6**, 211-238 (1997)

[105] Russo J.G.: Cosmological string models from Milne spaces and $SL(2,\mathbb{Z})$ orbifold. Mod. Phys. Lett. A **19**, 421-432 (2004)

[106] Conradi, H.D.: Quantum cosmology of Kantowski-Sachs like models. Class. Quant. Grav. **12**, 2423-2440 (1995)

[107] Jalalzadeh S., Vakili, B.: Quantization of the interior Schwarzschild black hole. Int. J. Theor. Phys. **51**, 263-275 (2012)

[108] Kiefer, C.: Wave packets in quantum cosmology and the cosmological constant. Nucl. Phys. B **341**, 273-293 (1990)

[109] Gousheh, S.S., Sepangi, H.R.: Wave packets and initial conditions in quantum cosmology. Phys. Lett. A **272**(5), 304-312 (2000)

[110] Aref'eva, I.Ya., Dragovich, B., Frampton, P.H., Volovich, I.V.: Wave function of the universe and p-adic gravity. Int. J. Mod. Phys. A **6**, 4341-4358 (1991)

[111] Dragovich, B., Nesic, Lj.: On p-adic models of the universe. Facta Universitatis **1**(3), 223-236 (1996)

[112] Dragovich, B.: Adelic generalization of wave function of the universe. Publ. Obs. Astron. Belgrade **49**, 143-144 (1995)

[113] Dragovich, B., Nesic, Lj.: Adelic models of the universe. Proc. of the Conference BPU-3, Cluj-Napoca, Romania, Bal. Phys. Lett. **5** Suppl., 104-107 (1997)

[114] Dragovich, B.: Adelic wave function of the universe. Proc. of the Third Alexander Friedmann international seminar on gravitation and cosmology, St. Petersburg (1995)

[115] Nešić, Lj.: O p-adičnoj i adeličnoj generalizaciji talasne funkcije vasione (magistarski rad). Fizički fakultet, Beograd (1996)

[116] Dragovich, B.: Adelic aspects of quantum cosmology. In: Studenikin, A.I. (ed.) Proceedings of 8th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow, 25-30. August 1997, pp. 116-122. Moscow (1999)

[117] Dragovic, B.G.: Signature change in p-adic space-time. Mod. Phys. Lett. A **6**, 2301-2308 (1991)

[118] Schikhof, W.H.: Ultrametric Calculus - An Introduction to p-Adic Analysis. Cambridge University Press, Cambridge (1984)

[119] Wigner, E.: On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. Phys. Rev. **40**, 749-759 (1932)

[120] Snyder, H.S.: Quantized space-time. Phys. Rev. **71**, 38-41 (1947)

[121] Connes, A.: Noncommutative differential geometry. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **62**, 257-360 (1985)

[122] Woronowicz, S.L.: Twisted SU(2) group: an example of a noncommutative differential calculus. Pub. Res. Inst. Math. Sci. **23**, 117-181 (1987)

[123] Wess, J., Zumino, B.: Covariant differential calculus on the quantum hyperplane. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **18**, 302-312 (1990)

[124] Várilly, J.C.: The interface of noncommutative geometry and physics. In: Clifford Algebras (Volume 34 of the series Progress in Mathematical Physics), pp. 227-242. Birkhäuser, Boston (2004)

[125] Maceda, M., Madore, J., Manousselis P., Zoupanos, G.: Can noncommutativity resolve the big-bang singularity? Eur. Phys. J. C **36**, 529-534 (2004)

[126] Seiberg, N., Witten, E.: String theory and noncommutative geometry. JHEP **9909**, 032 (1999)

[127] Moyal, J.E.: Quantum mechanics as a statistical theory. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **45**, 99–124 (1949)

[128] Szabo, R.J.: Quantum field theory on noncommutative spaces. Phys. Rept. **378**, 207-299 (2003)

[129] Douglas, M.R., Nekrasov, M.A.: Noncommutative field theory. Rev. Mod. Phys. **73**, 977-1029 (2001)

[130] Veneziano, G.: A stringy nature needs just two constants. Europhys. Lett. **2**, 199-204 (1986)

[131] Gross, D.J., Mende, P.F.: String theory beyond the Planck scale. Nucl. Phys. B **303**, 407-454 (1988)

[132] Amati, D., Ciafaloni, M., Veneziano, G.: Can spacetime be probed below the string size? Phys. Lett. B **216**, 41-47 (1989)

[133] Doplicher, S., Fredenhagen K., Roberts, J.E.: Spacetime quantization induced by classical gravity. Phys. Lett. B **331**, 39-44 (1994)

[134] Doplicher, S., Fredenhagen K., Roberts, J.E.: The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. Commun. Math. Phys. **172**, 187-220 (1995)

[135] Yoneya, T.: String theory and spacetime uncertainty principle. Progr. Theor. Phys. **103**, 1081-1125 (2000)

[136] Bigi, I.I., Faessler, M.: Time and Matter. In: Proc. of the International Colloquium on the Science of Time, Venice, Italy, 11-17. August 2002. World Scientific, Singapore (2006)

[137] Hirshfeld, A.C., Henselder, P.: Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics. Am. J. Phys. **70**, 537-547 (2002)

[138] Chaichian, M., Sheikh-Jabbari, M.M., Tureanu, A.: Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative QED. Phys. Rev. Lett. **86**, 2716-2720 (2001)

[139] Chaichian, M., Tureanu, A., Zet, G.: Corrections to Schwarzschild solution in noncommutative gauge theory of gravity. Phys. Lett. B **660**, 573-578 (2008)

[140] Chaichian, M., Tureanu, A., Zet, G.: Twist as a symmetry principle and the noncommutative gauge theory formulation. Phys. Lett. B **651**, 319-323 (2007)

[141] Djemai, A.E.F., Smail, H.: On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space. Commun. Theor. Phys. **41**, 837-844 (2004)

[142] Dragovich, B., Rakic, Z.: Path integrals in noncommutative quantum mechanics. Theor. Math. Phys. **140**, 1299–1308 (2004)

[143] Radovancevic, D., Nesic, Lj.: Kantowski-Sachs minisuperspace cosmological model on noncommutative space. Facta Universitatis (2016). U postupku recenzije

[144] Sepangi, H.R., Shakerin B., Vakili, B.: Deformed phase space in a two-dimensional minisuperspace model. Class. Quantum Grav. **26**, 065003 (2009). doi:10.1088/0264-9381/26/6/065003

[145] Lopez-Dominguez, J.C., Obregon, O., Ramirez, C., Sabido M.: Towards noncommutative quantum black holes. Phys. Rev. D **74** (2006). doi:10.1103/PhysRevD.74.084024

[146] Bastos, C., Bertolami, O., Dias, N.C., Prata, J.N.: Black holes and phase-space noncommutativity. Phys. Rev. D **80** (2009). doi:10.1103/PhysRevD.80.124038

[147] Bastos, C., Bertolami, O., Dias, N.C., Prata, J.N.: Noncanonical phase-space noncommutativity and the Kantowski-Sachs singularity for black holes. Phys. Rev. D **84** (2011). doi:10.1103/PhysRevD.84.024005

[148] Quevedo, H., Ryan, M.P.Jr.: Generating cosmological solutions from known solutions. In: Cotsakis, S., Gibbons, G.W. (eds.) Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology, pp. 191-213. Springer-Verlag Berlin (2000)

[149] Brehme, R.W.: Inside the black hole. Am. J. Phys. **45**, 423-428 (1977)

[150] Hawking, S.W.: Particle creation by black holes. Comm. Math. Phys. **43**, 199-220 (1975)

[151] Popović, D.: Crne rupe: gravitacioni singularitet. U: SFIN II (broj 2), pp. 41-56. Institut za fiziku, Beograd (1989)

[152] Ashtekar, A., Baez, J., Corichi A., Krasnov, K.: Quantum geometry and black hole entropy. Phys. Rev. Lett. **80**, 904-907 (1998)

[153] Vaz, C.: Canonical quantization and the statistical entropy of the Schwarzschild black hole. Phys. Rev. D **61** (2000). doi:10.1103/PhysRevD.61.064017

[154] Gour, G.: Schwarzschild black hole as a grand canonical ensemble. Phys. Rev. D **61** (1999). doi:10.1103/PhysRevD.61.021501

[155] Mukherji S., Pal, S.S.: Logarithmic corrections to black hole entropy and AdS/CFT correspondence JHEP **05** (2002). doi:10.1088/1126-6708/2002/05/026

[156] Meissner, K.A.: Black hole entropy in loop quantum gravity. Class. Quant. Grav. **21**, 5245-5252 (2004)

[157] Corichi, A., Diaz-Polo, J., Fernandez-Borja, E.: Quantum geometry and microscopic black hole entropy. Class. Quant. Grav. **24**, 243-251 (2007)

Biografija autora

Darko Radovančević je rođen 19. novembra 1974. godine u Zrenjaninu. Nakon završene Osnovne škole „Petar Kočić" u Česteregu i Osnovne muzičke škole „Slobodan Malbaški" u Kikindi sa odličnim uspehom, upisao je Srednju školu „Đura Jakšić" u Srpskoj Crnji gde je maturirao na prirodno-matematičkom smeru sa Vukovom diplomom. Potom upisuje Fizički fakultet u Beogradu gde je 2005. godine diplomirao na smeru Teorijska i eksperimentalna fizika (u grupi za teorijsku fiziku) sa prosečnom ocenom 9.75 stekavši visoku stučnu spremu i stručni naziv diplomirani fizičar. U toku studija na Fizičkom fakultetu bio je studentski aktivista, predsednik Saveza studenata fizike i student-prodekan. Na Fizičkom fakultetu u Beogradu 2008. godine završava i diplomske akademske studije drugog stepena na smeru Teorijska i eksperimentalna fizika sa prosečnom ocenom 10 u toku master studija, čime stiče visoko obrazovanje i akademski naziv master fizičar. Doktorske studije teorijske fizike je upisao 2010. godine na Departmanu za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu u toku kojih je prisustvovao na više domaćih, regionalnih i međunarodnih konferencija, programa i seminara. Član je Mreže matematičke i teorijske fizike jugoistočne Evrope (SEENET-MTP), Upravnog odbora Regionalnog centra za talente Zrenjanin, Upravnog odbora i Skupštine Društva fizičara Srbije i predsednik Podružnice Društva fizičara Srbije Srednjobanatskog okruga. U toku studija u Beogradu, a kasnije i u Zrenjaninu, bio je organizator ili neposredni učesnik mnogih manifestacija i predavanja vezanih za promociju fizike.

IZJAVA O AUTORSTVU

Izjavljujem da je doktorska disertacija pod naslovom

DVOOSCILATORNI I MODELI TIPA SLOBODNE ČESTICE U KOSMOLOGIJI

koja je odbranjena na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu:

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da ovu disertaciju, ni u celini, niti u delovima, nisam prijavljivao na drugim fakultetima, niti univerzitetima;
- da nisam povredio autorska prava, niti zloupotrebljavao intelektualnu svojinu drugih lica.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa autorstvom i dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, 5. septembra 2016. g.

Potpis autora disertacije:

Дарко Радованчевић

Darko Radovančević

IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANOG I

ELEKTRONSKOG OBLIKA DOKTORSKE DISERTACIJE

Naslov disertacije:

DVOOSCILATORNI I MODELI TIPA SLOBODNE ČESTICE U KOSMOLOGIJI

Izjavljujem da je elektronski oblik moje doktorske disertacije, koju sam predao za unošenje u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, istovetan štampanom obliku.

U Nišu, 5. septembra 2016. g.

Potpis autora disertacije:

Darko Radovančević

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Nikola Tesla” da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom:

DVOOSCILATORNI I MODELI TIPA SLOBODNE ČESTICE U KOSMOLOGIJI

Disertaciju sa svim prilozima predao sam u elektronskom obliku, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Common), za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo **(CC BY)**
2. Autorstvo – nekomercijalno **(CC BY-NC)**
3. **Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade (CC BY-NC-ND)**
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima **(CC BY-NC-SA)**
5. Autorstvo – bez prerade **(CC BY-ND)**
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima **(CC BY-SA)**

U Nišu, 5. septembra 2016. g.

Potpis autora disertacije:

Дарко Радованчевић

Darko Radovančević