UNIVERZITET U BEOGRADU

RUDARSKO-GEOLOŠKI FAKULTET

Svetlana M. Štrbac-Savić

PROGNOZA OPERATIVNE EFIKASNOSTI AKTIVNOG PODZEMNOG RUDNIKA ZASNOVANA NA TEORIJI SIVIH SISTEMA

doktorska disertacija

Beograd, Februar 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MINING AND GEOLOGY

Svetlana M. Štrbac-Savić

OPERATIONAL EFFICIENCY FORECASTING MODEL OF AN EXISTING UNDERGROUND MINE USING GREY SYSTEM THEORY

Doctoral Dissertation

Belgrade, February 2016

Mentor

Dr Zoran Gligorić, redovni profesor

Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

Članovi komisije:

Dr Zoran Gligorić, redovni profesor
Naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

Dr Čedomir Beljić, redovni profesor
Naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

Dr Branko Gluščević, docent
Naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

Dr Ines Grozdanović, vanredni profesor
Naučna oblast: Mehanika
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

Dr Nebojša Bojović, redovni profesor
Naučna oblast: Organizacija i menadžment u saobraćaju i transportu
Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet

Datum odbrane:

____

PROGNOZA OPERATIVNE EFIKASNOSTI AKTIVNOG PODZEMNOG RUDNIKA ZASNOVANE NA TEORIJI SIVIH SISTEMA

Rezime:

Efikasnost predstavlja preduslov za opstanak svake rudarske kompanije, posebno u uslovima izuzetno konkurentnog tržišnog okruženja kao što je to rudarska industrija. Efikasnost označava sposobnost kompanije da ispuni svoje kratkoročne ili dugoročne ciljeve. Operativna efikasnost se definiše kao odnos između ulaznih parametara potrebnih za odvijanje proizvodnje i pokazatelja dobijenih proizvodnjom. U kontekstu rudarskog poslovanja, operativna efikasnost se odnosi na vreme potrebno da se mineralno dobro transformiše u novčana sredstva. Visoka operativna efikasnost se postiže kada se ostvari prava kombinacija karakteristika mineralnog ležišta, ljudskih resursa, tehnologije eksploatacije i tehnologije pripreme mineralnih sirovina kako bi se optimizovale performanse eksploatacije.

Operativna efikasnost se odnosi na pronalaženje najboljeg načina eksploatacije u proizvodnji mineralnog dobra. Ona omogućava menadžmentu rudarske kompanije da poveća produktivnost, poveća profitabilnost, poboljša konkuretnost kompanije, iskoristi kapacitete i omogući kompaniji rast odnosno povećanje njene buduće vrednosti.

Rudarske kompanije primenjuju različite strategije kako bi realizovale svoje unapred definisane ciljeve. Jedan od najvažnijih elemenata u poslovanju menadžmenta jeste prognoza koji su to realni ciljevi i procena sposobnosti kompanije da ih ostvari. Planeri nastoje da naprave prognozu ponašanja ulaznih promenljivih unutar proizvodnog okruženja kao i da naprave prognozu kako dostići do željenih stanja. Oni kreiraju svoje strategije na osnovu realnih ciljeva proisteklih iz prognoza. Prognoza se zasniva na istorijskim i trenutnim pokazateljima proizvodnje, tj. na brojčanim pokazateljima poslovanja. Veoma je važno naglasiti da pravljenje prognoza služi kao osnova za dalje planiranje.

Proces prognoziranja se izvodi u specifičnom okruženju. Ako uzmemo u obzir činjenicu da se okruženje menja tokom vremena onda je očigledno da se i prognoze i ciljevi takođe menjaju. Menadžment mora biti sposoban da opiše okruženje kako bi strateški povezao postupak prognoziranja i funkcije planiranja, poboljšavajući performanse i prognoze i plana.

Projekti koji zahtevaju velike investicije, kao što su to projekti u rudarskoj industriji, često su skopčani sa različitim izvorima kako unutrašnjih tako i spoljašnjih neodređenosti. Ove neodređenosti mogu u velikoj meri da utiču na operativnu efikasnost. Posedovanje sposobnosti da se ove neodređenosti planiraju prepoznato je kao kritično za dugoročni uspeh rudarske kompanije. Posebno u rudarskoj industriji, zavisnosti između ulaznih promenljivih, koje se mogu biti kontrolisane ili ne, i fizičkih i ekonomskih pokazatelja su kompleksne i često imaju nelinearni karakter. Prognoza operativne efikasnosti rudnika u današnjem okruženju je mnogo složenija nego što je to bilo samo nekoliko godina unazad. Postoji mnogo promenljivih, koje su direktno ili indirektno povezane sa procesom prognoziranja.

Ovaj rad istražuje zavisnost između kapaciteta proizvodnje rude, fiksnih troškova, prihoda, troškova proizvodnje, broja radnih dana, stepena iskorišćenosti proizvodnih kapaciteta, kao ulaznih promenljivih i Stepena operativne sposobnosti (DOL) kao pokazatelja operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika. Za uspostavljanje dinamičke jednačine DOL-a primenjen je multiparametarski sivi model. Ova jednačina nam omogućava da predvidimo buduće vrednosti vremenske serije DOL-a koje su zasnovane samo na skupu nedavnih podataka. Da bi smanjili neodređenost budućih vrednosti operativne efikasnosti koristimo ekspertsko znanje i proces simulacija za pronalaženje budućih vrednosti ulaznih promenljivih koje utiču na njih. Procenjivanje budućih prihoda zasniva se na primeni procesa povratka na srednju vrednost, normalne i uniformne raspodele. Geometrijsko Braunovo kretanje se primenjuje za definisanje budućih vrednosti troškova proizvodnje. Kapacitet proizvodnje, fiksni troškovi, broj radnih dana i stepen iskorišćenosti proizvodnih kapaciteta procenjeni su na osnovu ekspertskog znanja.

Simuliranjem sistema prognoze, veštački kreiramo njegovu akciju kako bi izmerili odziv sistema (izlaz) prema različitim ulazima. Simuliranje omogućava analitičarima da opišu neodređenosti promenljivih koje utiču na vrednost DOL-a pomoću različitih dinamičkih scenarija. Prvi cilj primene simulacija u prognoziranju jeste određivanje distribucije DOL-a, u zavisnosti od promenljivih koje utiču na njegovu performansu, koja rezultuje srednjom ili očekivanom vrednošću DOL-a za svaku godinu tokom definisanog vremenskog horizonta.

Ključne reči: podzemni rudnik, operativna efikasnost, prognoza, teorija sivih sistema, stohastičke diferencijalne jednačine, simulacija

Naučna oblast: Rudarsko inženjerstvo

Uža naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina

UDK:

519.245:519.856
622.172:622.33(043.3)

OPERATIONAL EFFICIENCY FORECASTING MODEL OF AN EXISTING UNDERGROUND MINE USING GREY SYSTEM THEORY

Abstract:

Efficiency is a prerequisite for the survival of every mining company, especially in high competitive market environment such as mineral resource industry. Efficiency signifies company's ability to meet its short or long-term goals. Operational efficiency is defined as the ratio between the input required to run production process and the output gained from the production. In the context of mining business, operational efficiency refers to the length of time until mineral assets are transformed to money. Peak operational efficiency occurs when the right combination of mineral deposit characteristics, human resources, mining technology, and mineral processing come together to optimize mining performance.

Operational efficiency is related to finding the very best way of mining to produce a mineral asset. It enables management of the mining company to increase productivity, increase profitability, improve competitiveness, use freed-up capacity, and enable company to grow or increase its future

market value.

Mining company's management uses different strategies to reach their defined goals. One of the most important elements of a company's management operations is to forecast what goals are realistic and capability estimation of the company in order to achieve them. Planners try to forecast the behavior of the input variables of production environment and arrive at desirable states. They create their strategies on realistic targets drawn from these forecasts. A forecast is based on past and current production indicators, that is, business numbers. It is very important to emphasize the forecasting acts serve as a basis for further planning.

The forecasting process is performed in a specific environment. If we take into consideration the fact that the environment is changed over time then it is obvious that the forecasts and targets are changed as well. Management must be able to describe

environment changes in order to strategically link the forecasting and planning functions, improving the performance of both.

Large capital intensive projects, such as those in the mineral resource industry, are often associated with diverse sources of both endogenous and exogenous uncertainties. These uncertainties can greatly influence the operational efficiency. Having the ability to plan for these uncertainties is increasingly recognized as critical to long-term mining company success. In the mining industry in particular, the relationships between input variables that are controllable and those that are not and the physical and economic outcomes are complex and often nonlinear. Operational efficiency forecasting of mine in today's environment is much complex than it was just a few years ago. There are typically many variables, which are directly or indirectly associated with the forecasting process.

This paper investigates the relationship between ore production rate, fixed costs, revenues, production costs, working days, and degree of use of production capacity, as input variables, and Degree of Operating Leverage (*DOL*) as indicator of operational efficiency of an existing underground mine. Multivariable grey model is used to establish the time sequence response formula of *DOL*. This formula enables us to predict the future values of *DOL* time series based only

on a set of the most recent data. To decrease uncertainty of future values of the operational efficiency we use expert's knowledge and simulation processes to find future values of input variables affecting them. Estimation of future revenues is based on the applicationofmean reversion process, normal and uniform distribution. Geometric Brownian motion is used to define future values of production costs. Values of ore production rate, fixed costs, working days, and degree of use of production capacity are estimated by expert's knowledge.

By simulating a forecasting system, we imitate its action in order to measure its response (output) to different inputs. The simulation allows analysts to describe the uncertainty of variables that influence the value of *DOL* by different time depending scenarios. The first objective of the use of simulation in the forecasting is to determine the distribution of the *DOL* from the variables that affect his performance, which results in the average or expected value of *DOL* for every year of defined time horizon.

Key words: underground mine, operational efficiency, forecast, grey system theory, stochastic differential equations, simulation

Scientific area: Mining engineering
Narrow scientific area: Underground mining

UDC:
519.245:519.856
622.172:622.33(043.3)

Sadržaj

1. UVOD ... 1

1.1 PREDMET ISTRAŽIVANJA ... 1
1.2 NAUČNI CILJEVI ISTRAŽIVANJA ... 2
1.3 POLAZNE POSTAVKE U ISTRAŽIVANJU ... 3
1.4 METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA ... 4
1.5 OSTVARENI REZULTATI ... 5
1.6 ORGANIZACIJA-SADRŽAJ DOKTORSKE DISERTACIJE ... 6

2. RUDARSTVO KAO OPERATIVNO OKRUŽENJE ... 8

2.1 UVODNE NAPOMENE ... 8
2.2 KARAKTERISTIKE RUDARSTVA ... 10
2.3 PODZEMNI RUDNIK ... 15
2.4 PREGLED LITERATURE ... 17

3. TEORIJSKE OSNOVE MODELA ... 19

3.1 TEORIJA ODLUČIVANJA ... 19
3.1.1 Vrste odluka i priroda procesa odlučivanja ... 19
3.1.2 Komponente odlučivanja ... 20
3.1.3 Pristupi procesu donošenja odluka ... 23
3.1.4 Faze procesa odlučivanja ... 24
3.1.5 Planiranje donošenja odluke i nivoi odlučivanja ... 27
3.2 STRATEŠKO PROGNOZIRANJE ... 29
3.2.1 Poslovna strategija ... 29
3.2.2 Prognoza ... 30
3.3 STEPEN OPERATIVNE SPOSOBNOSTI ... 31
3.4 TEORIJA SIVIH SISTEMA ... 34
3.5 STOHASTIČKI DIFUZNI PROCESI ... 42
3.5.1 Stohastički procesi ... 42

3.5.2 Stohastički sistemi ... 43
3.5.3 Proces povratka na srednju vrednost ... 44
3.5.4 Geometrijsko Braunovo kretanje ... 46
3.6 MONTE CARLO SIMULACIJA ... 47

4. PROGNOZA OPERATIVNE EFIKASNOSTI ... 52

4.1 MODEL PROGNOZE OPERATIVNE EFIKASNOSTI ZASNOVAN NA TEORIJI SIVIH SISTEMA ... 52
4.1.1 Koncept modela ... 52
4.1.2 Definisanje ulaznog vektora ... 55
4.1.3 Algoritam prognoze operativne efikasnosti ... 62

5. TESTIRANJE MODELA ... 66

5.1 DEFINISANJE ULAZNIH PODATAKA ... 66
5.2 REŠENJE NUMERIČKOG PRIMERA ... 68
5.2 DISKUSIJA DOBIJENIH REZULTATA ... 79

6 ZAKLJUČAK I BUDUĆA ISTRAŽIVANJA ... 81

7 LITERATURA ... 83

1. Uvod

1.1 Predmet istraživanja

Rudarske kompanije koriste različite strategije kako bi ostvarile svoje ciljeve. Jedan od ključnih elemenata u okviru tih strategija jeste prognoza šta su realni ciljevi i do kojih granica se kompanija može napregnuti kako bi ih ostvarila. Strateško prognoziranje povezuje dve funkcije, kreiranje prognoza kako bi se obezbedila podrška strateškim ciljevima i primenjivanje operativnih strategija kako bi se obezbedila korektnost ovih prognoza. Objedinjavanje procesa prognoziranja u proces strateškog planiranja može povećati preciznost prognoza i pomoći menadžmentu kompanije da ostvari svoje planirane ciljeve.

Planeri nastoje da naprave prognozu ponašanja ulaznih promenljivih, koje su zastupljene u proizvodnom okruženju, kao i prognozu mogućih izlaznih pokazatelja. Oni baziraju svoje strategije na realnim ciljevima koji su proistekli iz ovih prognoza. Mnogi planeri koriste deterministički pristup u prognozama i kada se ne ostvare proklamovani ciljevi, oni krive neočekivane varijacije unutar proizvodnog okruženja za nepreciznosti nastale pri prognoziranju. Ovakav pristup je daleko lakši ali je zato mnogo skuplji u smislu ispravljanja nastale štete.

Prognoza se zasniva na istorijskim i trenutnim pokazateljima. Uzimajući u obzir da je prognoza skoro uvek opterećena nepreciznostima, tada bi bilo pogrešno uzimati njene rezultate kao presudne za donošenje konačnih strateških planova. Proces prognoziranja služi prvenstveno kao osnova za dalje planiranje.

Pretpostavimo da postoje podaci o pokazateljima operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika, kao i podaci o parametrima koji su uticali na nju u nekom prethodnom periodu rada. Ključno pitanje, koje se po prirodi stvari nameće, odnosi se na mogućnost spoznaje ponašanja uticajnih parametara i promene vrednosti pokazatelja operativne efikasnosti u budućnosti. Problem spoznaje budućih stanja ulaznih parametara i izlaznih pokazatelja prikazuje se kao dinamički model kojim se uspostavlja funkcionalna zavisnost između vektora stanja ulaznih parametara i vektora stanja izlaznih pokazatelja. Broj komponenti ulaznog vektora nije strogo definisan i zavisi od slučaja do slučaja, ali se teži da se izaberu parametri koji imaju najveći uticaj na stanje ishoda. U ovoj disertaciji ulazni vektor sadrži sledeće komponente: kapacitet proizvodnje, fiksne troškove proizvodnje, prihode, promenljive troškove proizvodnje, broj radnih dana na nivou godine i stepen iskorišćenja proizvodnog kapaciteta. Izlazni vektor je jednodimenzionalne prirode i predstavljen je Stepenom operativne sposobnosti.

U disertaciji je primenjen pristup analize multiparametarske vremenske serije, pri čemu je uspostavljena matrica korelacije između stanja ulaznih parametara i stanja izlaznih pokazatelja, kao i diferencijalna jednačina koja opisuje funkcionalnu zavisnost između njih. Prilikom prognoze budućih stanja pokazatelja operativne efikasnosti primenjen je hibridni pristup, koji podrazumeva da su vrednosti nekih ulaznih parametara određene na osnovu ekspertskog znanja a nekih metodama simulacije.

1.2 Naučni ciljevi istraživanja

U kontekstu prognoze skupa vrednosti budućih stanja ulaznih parametara kao i skupa vrednosti budućih stanja pokazatelja, ova doktorska disertacija identifikuje više ciljeva istraživanja integrisanih u temi zadatka: (1) sagledavanje problema, (2) uvođenje što realističnijih pretpostavki u razvoj modela prognoze operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika, (3) kreiranje dinamičkog modela prognoze, (4) kreiranje dobre podrške u procesu donošenja strateških odluka i (5) provera valjanosti postavljenog modela u rešavanju praktičnih problema.

1.3 Polazne postavke u istraživanju

Razvoj formalnog okvira prognoze operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika treba da teži ka modelu kojim se problem spoznaje budućih stanja bazira na analizi istorijskih stanja. Problem prognoze ekvivalentan je iznalaženju stepena korelacije između ulaznih i izlaznih vrednosti u prethodnoj vremenskoj seriji, uspostavljanju funkcionalne zavisnosti između istih i na osnovu dobijene zavisnosti definisanje budućih stanja pokazatelja. Simulacijom budućih vrednosti nekih od ulaznih parametara kreira se realnije okruženje, pa samim tim se povećava i stepen pouzdanosti izlaznog pokazatelja.

Model se prvo prezentuje u opštem opisnom načinu, a onda se formuliše za specijalan slučaj u preciznijoj matematičkoj formi.

Osnovne pretpostavke su:

- okruženje u kojem posluje mineralna industrija karakteriše se veoma čestim i intenzivnim promenama,
- podzemni rudnik predstavlja proizvodni sistem koji ne može promptno da odgovori na ovakve promene,
- tehnološki proces proizvodnje je definisan,
- menadžment rudnika poseduje bazu podataka relevantnih parametara proizvodnje,
- menadžment rudnika ima razvijenu metodu kojom iskazuje operativnu efikasnost rudnika,
- menadžment rudnika poseduje bazu podataka operativne efikasnosti rudnika.

U okviru modela dozvoljeno je da ulazni parametri koji se oslanjaju na ekspertsko znanje budu determinističke prirode, kao i parametri koji se menjaju u svrhu analize strateškog planiranja (na primer, povećanje ili smanjenje kapaciteta proizvodnje, povećanje ili smanjenje fiksnih troškova).

Prilikom unošenja ulaznih parametara u model prognoze, mogu se inkorporirati i neka od ograničenja koja su vezana za njihove minimalne i maksimalne vrednosti.

1.4 Metodologija istraživanja

U ovoj disertaciji razvijen je stohastički dinamički model prognoze operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika, koji predstavlja osnovu za analizu strateških planova i donošenje strateških odluka, koje su od vitalnog značaja za opstanak rudarske kompanije.

Za analizu vremenskih serija ulaznih parametara i pokazatelja operativne efikasnosti, kao i za uspostavljanje funkcionalne zavisnosti između njih primenjuje se Teorija sivih sistema.

Za smanjenje neizvesnosti cene mineralne sirovine, koja predstavlja deo ulaznog parametra prihodi, koristimo stohastičku diferencijalnu jednačinu stanja koja opisuje Proces povratka na srednju vrednost. Da bi se predvidele buduće vrednosti ovog parametra koristi se pristup Monte Carlo simulacija pomenutog procesa.

Razvijeni matematički model omogućava, kroz stohastičku diferencijalnu jednačinu stanja, adekvatno predstavljanje i dinamičke prirode promenljivih troškova proizvodnje. Ako uzmemo u obzir da ovi troškovi zavise od mnogih parametara (radna snaga, energija, itd.) i da se ovi parametri menjaju tokom vremena, onda može biti od velike koristi sposobnost da se predvide buduće vrednosti ovih troškova. Da bi se predvidele buduće vrednosti ovih troškova koristi se pristup Monte Carlo simulacija geometrijskog Braunovog kretanja.

U zavisnosti od prirode ostalih veličina koje su inkorporirane u ulazne parametre, koriste se različite funkcije raspodele verovatnoće i na taj način se takođe postiže smanjenje njihove neizvesnosti.

Razvijeni model pokazuje kako se u budućnosti menja pokazatelj operativne efikasnosti pri simultanoj promeni ulaznih parametara.

1.5 Ostvareni rezultati

U disertaciji je razmatran problem prognoze operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika. Ovaj problem predstavlja jedan od najznačajnijih problema kombinatorne prirode pri analizi strateških planova i strateškom odlučivanju. Na osnovu sprovedenih istraživanja, pored opšte analize problema, ostvareni su sledeći rezultati:

- razvijen je dinamički model prognoze operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika koji je zasnovan na Teoriji sivih sistema i stohastičkim difuznim procesima;
- izvršena je korelaciona analiza između kapaciteta proizvodnje, fiksnih troškova, prihoda, promenljivih troškova proizvodnje, broja radnih dana na nivou godine i stepena iskorišćenja proizvodnih kapaciteta (komponente ulaznog vektora) i Stepena operativne sposobnosti (izlazni vektor);
- uspostavljena je dinamička funkcionalna zavisnost između ulaznog i izlaznog vektora;
- prikazane su promene vrednosti izlaznog vektora pri simultanoj promeni komponenata ulaznog vektora;
- kvantifikovane su neizvesnosti okruženja i smanjen rizik u procesu donošenja strateških odluka u životu jednog rudnika;
- izvedeno je testiranje i validacija pristupa kao jednog računski vrlo efikasnog načina za prognozu operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika;
- kreirana podrška pri strateškom odlučivanju.

Ostvareni rezultati još više dobijaju na svojoj važnosti uzimajući u obzir da rudarstvo predstavlja dobar primer ireverzibilnog investiranja. Ovakve investicije zahtevaju pažljive analize, jer nakon njihove realizacije je veoma teško ispraviti slabosti donetih odluka, bez značajnog gubitka novčanih sredstava i vremena.

1.6 Organizacija-sadržaj doktorske disertacije

Sadržaj disertacije je organizovan u sedam poglavlja.

Prvo poglavlje sadrži uvodna razmatranja. U ovom poglavlju izložen je predmet istraživanja doktorske disertacije, prikazani su naučni ciljevi i doprinosi disertacije. Zatim, date su polazne postavke u istraživanju, izložena je metodologija koja se koristi u disertaciji i prikazani su ostvareni rezultati.

Drugo poglavlje opisuje rudarstvo kao operativno okruženje. Analiza i uočavanje specifičnosti tog okruženja su neophodni u izbora uticajnih parametara unutar razvijenog modela operativne efikasnosti. Jedan od uticajnih parametara su i troškovi proizvodnje koji su direktno zavisni od procesa proizvodnje, koji je takođe prezentovan u ovom poglavlju. Na kraju poglavlja izložen je i pregled literature koja se bavi sličnim problemima.

U Trećem poglavlju predstavljene su teorijske osnove modela. Ovo poglavlje sadrži tri logička dela. Prvi deo ovog poglavlja posvećen je osnovnim pojmovima Teorije odlučivanja. Navedene su osnovne definicije Teorije odlučivanja i opisan je proces donošenja odluke. Prikazana je podela odluka po značaju, a posebna pažnja je posvećena strateškim odlukama i metodama prognoze koja se koristi u procesu donošenja strateških odluka. Drugi deo ovog poglavlja sadrži pregled osnovnih definicija pojmova i operatora Teorije sivih sistema. U ovom delu detaljno su opisani sivi modeli prvog reda jedne promenljive $GM(1,1)$ i m promenljivih $GM(1,m)$, kao i metode procene greške modela. U cilju sagledavanja uticaja svake od ulaznih promenljivih sistema na izlaznu promenljivu opisani su metodi sive relacione analize, dela Teorije sivih sistema, koja u okviru ove teorije daje odgovor na pitanje povezanosti parametara sistema. Treći deo poglavlja čine stohastički difuzni procesi i opis Monte Carlo simulacija. Definisani su stohastički procesi povratka na srednju vrednost i geometrijsko Braunovo kretanje, date su osnovne osobine i navedene su neke primene ovih procesa. Na kraju poglavlja dat je opis Monte Carlo simulacije i opisani su načini konstruisanja sekvenci slučajnih i pseudoslučajnih brojeva.

Četvrto poglavlje sadrži detaljan opis razvijenog modela prognoze operativne efikasnosti rudnika. U okviru poglavlja dat je detaljan opis ulaznih parametara koji se koriste u modelu, kao i načina predviđanja njihovih vrednosti u budućnosti. Takođe, prikazan je detaljan opis konkretnog primenjenog sivog multiparametarskog modela *GM*(1,6), opisan je algoritam prognoze operativne efikasnosti i proračuna sivih relacionih koeficijenata, na osnovu kojih se određuje stepen uticaja svakog ulaznog parametra sistema na stepen operativne sposobnosti.

Peto poglavlje sadrži primenu modela prognoze operativne efikasnosti opisanog u četvrtom poglavlju na hipotetičkom primeru aktivnog rudnika cinka. Vrednosti ulaznih parametra realno opisuju rudarsko okruženje, a menadžment aktivnog rudnika cinka dobija prognozirane vrednosti Stepena operativne sposobnosti na godišnjem nivou, za narednih pet godina, kao i stepen značajnosti ulaznih parametara i njihov uticaj na izlaznu veličinu tj. Stepen operativne sposobnosti. Kako je model primenjen i na period od pet prethodnih godina, izračunate su vrednosti koje bi se prema ponuđenom modelu dobile za taj period, potom su određene greške između izračunatih i stvarnih vrednosti u tom periodu, i na osnovu toga su date procene greške modela za prognozirane vrednosti.

Šesto poglavlje sadrži zaključna razmatranja i ukazuje na moguće pravce poboljšanja predloženog rešenja kao i daljeg istraživanja.

U sedmom poglavlju je dat spisak literature koja je u ovom radu korišćena.

2. Rudarstvo kao operativno okruženje

2.1 Uvodne napomene

Strateško odlučivanje je proces kojim se definiše neki cilj ili grupa ciljeva koji treba da budu ostvareni (realizovani) u budućnosti, odnosno za neki budući vremenski interval.

Za razliku od strateškog odlučivanja u opštem smislu, prognoza operativne efikasnosti aktivnog rudnika je uvek u direktnoj vezi sa rudarstvom kao privrednom granom, odnosno strateškim odlučivanjem u rudarstvu. Da bi se donele adekvatne odluke, a njihova realizacija bila uspešna, neophodno je sagledati okruženje u kojem se one donose, odnosno definisati sve uticajne parametre. U tom kontekstu prognoza budućih stanja uticajnih parametara kao i izabranih pokazatelja predstavljaju veoma važnu komponentu u donošenju strateških odluka i njihovom sprovođenju.

Donosioci strateških odluka koristili su pristup nepredviđenih slučajeva (scenarija) da bi se zaštitili od neželjenih posledica, međutim ovakav pristup može biti neodgovarajući za zaštitu od neželjenih posledica povezanih sa savremenim izazovima ili može uzeti u obzir toliko velike vrednosti scenarija da realizacija odluka postaje nekonkurentna. Iz ovoga proizilazi da ako menadžment želi da kompanija bude konkurentna i opstane na tržištu, onda treba što bolje da kvantifikuje neodređenosti uticajnih parametara i pokazatelja kako bi razvio najbolji način za efikasno upravljanje takvim neodređenostima.

Neodređenost je prisutna u evaluaciji konačnih ishoda bilo koje odluke. Različiti izvori neodređenosti mogu biti teški za kvantifikaciju a procene i rezultati za opravdanje. Međutim, ako se neodređenost ignoriše rezultati će se bazirati na ovakvim ili onakvim pretpostavkama. Pretpostavke su često proizvoljne i neutemeljene i dovode do nerealnih rezultata i nesuglasica koje su teške za rešavanje. S druge strane, ako je neodređenost slabo procenjena, rezultati mogu dovesti u zabludu ili biti kontroverzni. I jedan i drugi slučaj imaće štetne uticaje na proces odlučivanja, uključujući i slabo uverenje da je doneta najbolja moguća odluka.

Strateško odlučivanje, analiza i prognoza neodređenosti mogu u sebi da sadrže širok spektar metoda analize i optimizacije kao što su statistika, verovatnoća i analiza osetljivosti, analiza pouzdanosti, analiza neuspeha i uspeha, analiza multiparametarskih vremenskih serija, metode scenarija, stohastika, heuristika, itd. Zajedno one obezbeđuju pogodan alat koji se može primeniti za svaki projekat kako bi se pomoglo ostvarenje njegovog uspeha.

Glavni postupak integrisane analize odluke i neodređenosti obuhvata:

- kvantifikovanje neodređenosti,
- simulaciju,
- evaluaciju rezultata

Postupak analize odluke razdvaja procene urađene od strane tehničkih eksperata od razvojne politike kreirane od strane akcionara. Fleksibilan je i lako se može prilagoditi potrebnom kapacitetu da bi se zadovoljili zahtevi projekta. Veći deo fleksibilnosti predstavlja predikciju ishoda, koji mogu biti predviđeni sa više ili manje detalja, pri tom uzimajući u obzir ili samo nekoliko krupnih aktivnosti ili njihovo rastavljanje u manje celine [JOVANOVIĆ08].

Integrisana analiza odluke i neodređenosti sastoji se od sledećih komponenti, koje se ne razlikuju za većinu inženjerskih primena:

- razvoj modela,
- definisanje parametara sistema,

- predikcija

Razvoj modela predstavlja opis kako se sistem ponaša, prvo kvalitativno izraženo uslovima, događajima, mehanizmima i postupcima koji su uključeni u model ("konceptualni model") a zatim kvantitativno izraženo algoritmima koji predstavljaju konceptualni model ("računski model"). Konceptualni model razvija se koristeći opšte znanje, koje je dopunjeno diskusijama sa drugim ekspertima jer je to neophodno.

Definisanje parametara sistema je opis mogućih vrednosti različitih parametara sistema i verovatnoća ovih vrednosti. Ove vrednosti se tipično izražavaju preko "raspodela verovatnoće". Opisivanje treba da uključi prikladno razmatranje svake realne promenljivosti (ili vremenske ili prostorne) kod parametara i svake korelacije sa drugim parametrima. Opis mora da se temelji na svim raspoloživim informacijama i da bude saglasan sa njima kako po mestu tako i poreklu. Često će biti subjektivno izveden koristeći različite tehnike da bi se umanjile predrasude i obezbedili argumenti za njegovu odbranu.

Predikcija je postupak u kojem analitičar "puni" model da bi determinisao krajnje posledice svake alternative. Neodređenosti u parametrima sistema rezultovaće i neodređenostima u posledicama. Simulacija sistema dozvoljava da se neodređenost prikaže (izrazi) raspodelama verovatnoće za moguće ishode.

2.2 Karakteristike rudarstva

Nakon poređenja sa investicionim okruženjem, sa kojim se susrećemo u tipičnim granama industrije, nesumnjivo je da investiciono okruženje povezano sa rudarstvom zaista predstavlja jedinstveni ambijent. Neke od karakteristika rudarstva koje su često proklamovane kao jedinstvene su:

1) **Intenzitet kapitala.** U suštini svaki dobro obavešteni posmatrač bi se složio da rudarski poduhvati predstavljaju poduhvate sa visokim intenzitetom korišćenja kapitala. Iako će magnituda kapitala (intenzitet kapitala u jedinici vremena) potrebnog za novi rudarski poduhvat varirati zajedno sa vrstom proizvoda, metodom otkopavanja, veličinom rudnika, lokacijom rudnika i drugim

parametrima, osnovni rudarski poduhvati mogu zahtevati finansijske obaveze u opsegu od 500 miliona dolara pa čak i do 8-10 milijardi dolara. Samo infrastruktura za rudnike na udaljenim lokacijama može koštati i po nekoliko stotina miliona dolara. Čak i izuzetno mali rudnici, sa visokim sadržajem plemenitih metala i koji zapošljavaju mali broj radnika (rudara), ne mogu biti ozbiljno pripremljeni za otkopavanje za manje od nekoliko miliona dolara.

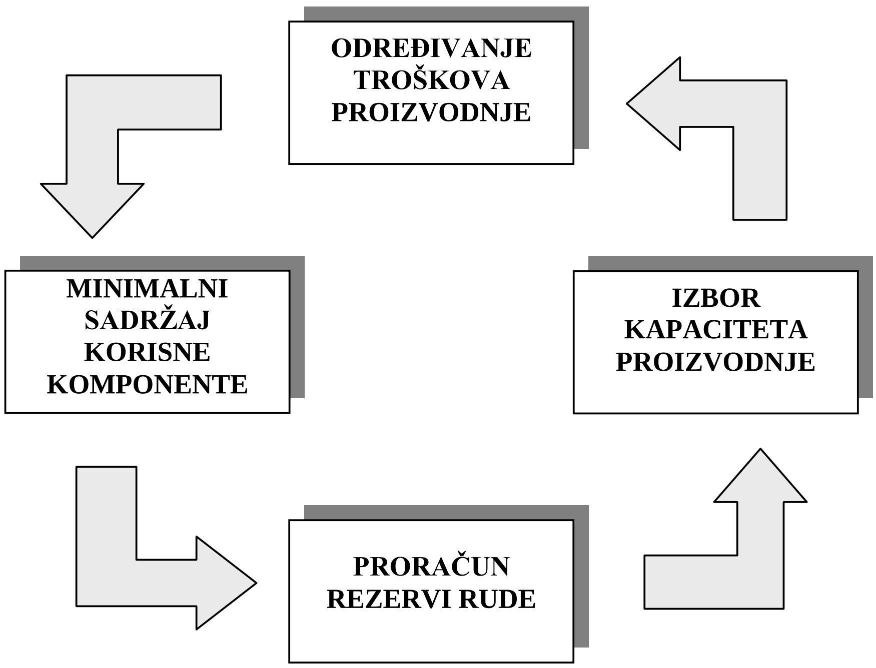
2) **Dug pretproizvodni period.** Nekada i ležišta, koja su u geološkom smislu dobro definisana, oduzimaju godine intenzivnog napora pre nego što se rudnik postavi na noge i proizvodnja rude dobije kontinuirani karakter. Vreme potrebno da se rudnik pripremi za proizvodnju može značajno da varira. Do nedavno se cenilo da je pretproizvodni period od 4-6 godina izuzetno povoljan. Međutim u poslednje vreme, zakon o zaštiti životne sredine i administrativna odobrenja uzrokovali su da neke rudarske kompanije iskuse šta znači produženje ovog perioda na 10-12 godina od trenutka kada je doneta investiciona odluka pa do momenta kada je rudnik zaista pušten u proizvodnju. Ne samo da kompanije potražuju velike količine kapitala za nove rudarske poduhvate, već su izložene i finansijskim poteškoćama zbog značajnog perioda koji prethodi početku projekta. Što je ovaj period duži, to je veća mogućnost neželjenih promena u glavnom inženjeringu i ekonomskim parametrima, koji su korišćeni u početnoj investicionoj odluci.

3) **Visok rizik.** Uz očigledne rizike koji su povezani sa intentzitetom kapitala i dugim pretproizvodnim periodom, postoje i mnogobrojni drugi rizici vezani za rudarske poduhvate. Neki od ovih rizika mogu biti pod kontrolom investitora, dok su ostali potpuno van domašaja kontrole. Generalno, ovi rizici se mogu svrstati u sledeće glavne grupacije: geološki rizici, inženjerski rizici, ekonomski rizici i politički rizici.

Geološki rizici

Ne postoji u rudarstvu tema koja je prouzrokovala veću konfuziju ili dovela do većeg nesporazuma nego što je termin rezerve rude [GENTRY84]. Ruda se definiše kao mineral koji se na profitabilan način može izvaditi iz zemlje. Ovo ekonomsko ograničenje je primarni izvor nesporazuma u pogledu rezervi rude. Profit je funkcija troškova proizvodnje i prodajne cene, a oba ova parametra se učestalo menjaju, u nekim slučajevima ove promene imaju kontinualni karakter. Posledica toga je da se i rudne rezerve takođe učestalo menjaju, čak iako fizički količina prirodnog bogatstva ostaje stalna veličina. Neodređenost, proizvedena ekonomskom definicijom rude, dalje se povećava uzimajući u obzir činjenicu da u periodu koji prethodi otkopavanju rezerve nisu nikad pouzdano određene, već se one samo procenjuju na osnovu oskudnih podataka dobijenih uzorkovanjem. Kako nam sve više informacija postaje dostupno i kako se menja geološka interpretacija ležišta, tako se menjaju i rudne rezerve. Ovakva dinamična priroda rezervi rude je jedan od najvećih izazova sa kojim se suočavaju analitičari rudarskih investicija.

Ruda, kao postojeći ekonomski koncept, je uzajamno povezana sa drugim promenljivim parametrima planiranja rudnika. Pri planiranju analitičar se "sukobljava" sa cikličnim problemom prikazanim na slici 2.1.



Slika 2.1 Cikličan problem rezervi rude (preuzeto iz [GENTRY84].)

Inženjerski rizici

Problemi vezani sa radnom sredinom, u kojoj se izvode rudarske aktivnosti, predstavljaju značajan izvor rizika i zato je opravdano posvetiti im posebnu pažnju pri aktivnom planiranju i projektovanju rudnika. Ovi problemi mogu rezultirati kašnjenjem radova i prekoračenjem troškova tokom pripremanja rudnika i tokom same njegove eksploatacije. Inženjerski rizici se mogu dovesti u vezu sa zarušavanjem radne sredine, razvojem nesigurnih uslova za osoblje i opremu, pogoršanjem lokalnih uslova u okruženju u kojem se izvodi otvaranje rudnika, itd.

Ekonomski rizici

Iako se mogu navesti brojni primeri, jedini element rizika koji je blizak svim rudarima je rizik vezan za tržište mineralnih sirovina. Cene mineralnih sirovina, sa kojima se trguje na međunarodnim tržištima, pomeraju se značajno i naglo, pošto se na globalnom nivou donekle ograniči njihova ekonomska distribucija. Organizacija zemalja izvoznica nafte (The Organization of Petroleum Exporting Countries) je 1973. godine snažno demonstrirala ovakav oblik ograničenja. Činjenica da tržište mineralnih sirovina zaista značajno varira i da su promene cikličnog karaktera, može se lako proveriti prikazivanjem prihoda kompanija koje se bave proizvodnjom plemenitih i osnovnih metala u poslednjih trideset godina.

Politički rizici

Još jedan primer rizika u rudarstvu, koji se često previđa, je politički rizik. Politički rizik je najdramatičnije ilustrovan nezakonitom eksproprijacijom koja se desila u Čileu ranih sedamdesetih godina XX veka. Međutim, širom sveta prisutan je ubrzan trend prema većem učešću vlada domaćina u rudarskim projektima. Ovo se dešava čak i u državama koje se inače zatvorene za slobodna (privatna) preduzeća. Zbog toga rudarske kompanije koje razmišljaju o bilo kojem novom poduhvatu moraju proceniti ove rastuće političke rizike da bi se osigurale od dodatnih finansijskih poteškoća.

4) **Neobnovljiv resurs**. Možda je najjedinstveniji aspekt rudarstva činjenica da ono posluje sa neobnovljivim resursom. Rezultat toga je da prihodi u rudarstvu potiču od parcijalnog ”odstranjivanja” glavnog dobra projekta, rudnog tela. Drugi uticaj ove karakteristike rudarstva ogleda se u tome da svi rudnici imaju konačan vek eksploatacije, koji je određen veličinom ležišta i kapacitetom proizvodnje. Za

vreme dok se rezerve rude iscrpljuju, investitori moraju ostvariti adekvatan povraćaj uloženih sredstava, a nova ležišta se kontinuirano moraju otkrivati i pripremati za eksploataciju.

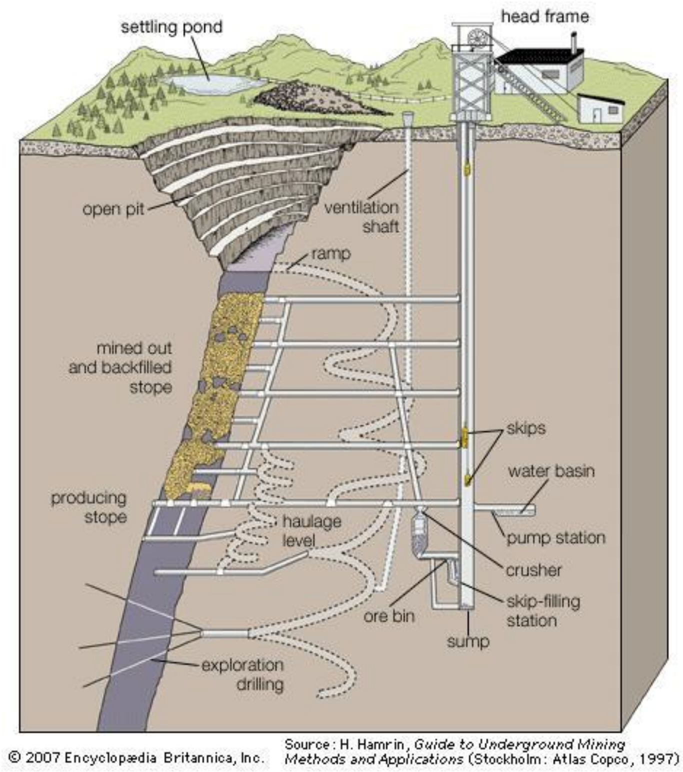
U stvarnosti su procene minimalnog sadržaja korisne komponente, troškova proizvodnje, cene metala itd. podložne promenljivom stepenu neodređenosti zbog nemogućnosti da se sa velikom preciznošću predvidi njihovo buduće stanje [GENTRY84].

Teorija odlučivanja razlikuje odluke koje se donose pod neizvesnošću, gde su verovatnoće različitih ishoda nepoznate i odluka pri riziku, gde se takve verovatnoće mogu proceniti. Prvi slučaj se retko sreće pri praktičnom odlučivanju u rudarstvu, tako da se u ovoj disertaciji primenjuje pristup problemu gde se raspodela verovatnoće budućih stanja ulaznih parametara može proceniti. Za rudarske poduhvate izvor ovih neizvesnosti može biti bilo koji broj parametara koji se dovode u vezu sa stavkama kao što su sadržaj korisne komponente, rezerve rude, troškovi proizvodnje, cene proizvoda, itd. Kod klasičnih determinističkih procena svakom parametru se dodeljuje samo jedna vrednost. Kasniji rezultati obično pokazuju da su ovakve procene pogrešne.

Evidentiranje prisustva neodređenosti kod ulaznih parametara predstavlja prvu fazu pri proceni mogućih ishoda, iza koje sledi mnogo važnija a to je kvantifikacija označenih neodređenosti. Donosioci odluka se konformnije osećaju pri upotrebi determinističkih procena, ali ubrzo shvataju da vrednosti ulaznih parametara nisu sasvim određene. Analizirajući neodređenost oni uviđaju zbunjujući zadatak procenjivanja beskonačnog broja mogućih ishoda koji koristi neke neosporno nesigurne pretpostavke o budućnosti. Ovo je skup i vremenski zahtevan postupak koji neminovno potražuje neke grubo pojednostavljene pretpostavke. I pored svega, neodređenost u odlučivanju treba eksplicitno tretirati, ne treba se zbog složenosti problema olako predavati i zadovoljavati se radom na brzinu primenjujući pristup zanemarivanja parametara kao zaštitu protiv neodređenosti. Sasvim je prirodno da se zahtevaju određena pojednostavljenja ali kvantifikujući raspodelu mogućih ishoda pomoću najbolje dostupnih informacija, celokupna slika postaje mnogo jasnija.

2.3 Podzemni rudnik

Podzemni rudnik predstavlja sistem koji je u funkciji otkopavanja rude ispod površine terena na način koji omogućava optimalan povratak investicija uz sprovođenje mera sigurnosti za zaštitu radnika i opreme. Na slici 2.2 prikazan je uobičajeni podzemni rudnik.



Slika 2.2 Podzemni rudnik; head frame-izvozni toranj, settling pond-taložnik, open pit-površinski kop, ventilation shaft-ventilaciono okno, ramp-niskop, mined out and backfield stope-otkopani i zapunjeni prostor, producing stope-aktivan otkop, haulage level-izvozni horizont, skips-izvozni sudovi, water basin-vodosabirnik, pump station-pumpna komora, crusher-drobilica, ore bin-bunker za rudu, skip filling station-utovarno mesto, sump-taložnik u rudniku, exploration drilling-istražno bušenje (pruzeto iz [HAMRIN97])

Tehnološki proces proizvodnje rude sastoji se iz sledećih tehnoloških faza:

- otkopavanje rude
- utovar, transport i izvoz rude,
- ventilacija,

- odvodnjavanje

Otkopavanje rude predstavlja način na koji se ruda dezintegriše iz primarnog masiva. Način na koji se to izvodi naziva se metodom otkopavanja. Metodom otkopavanja definišu se: oblik i dimenzije otkopne konstrukcije, način i redosled dezintegracije rude iz prirodnog okruženja, upravljanje masivom, tehnološki postupci otkopavanja i provetravanje otkopnih radilišta [TORBICA97]. U većini slučajeva metode otkopavanja zasnivaju se na bušačko-minerskim radovima.

Utovar predstavlja aktivnost u okviru koje se dezintegrisana ruda iz otkopa utovara adekvatnom opremom i u većini slučajeva transportuje duž kratkih deonica, najčešće do glavnih transportnih sistema koji imaju kontinualni ili diskontinualni karakter ili do rudnih sipki koje imaju funkciju kao deponija na površini terena. Nakon ove aktivnosti sledi transport rude do površine terena, primenom različitih sistema transporta i izvoza. Transport se prvenstveno odnosi na primenu jamskih kamiona ili trakastih transportera kojima se ruda bez pretovara duž niskopa transportuje do površine terena, dok se pod izvozom podrazumeva primena izvoznih sudova kojima se ruda izvozi duž okna na površinu terena.

Jedan od veoma važnih aspekata u procesu proizvodnje rude je ventilacija podzemnog rudnika. Ona je neophodna kako bi se dopremio svež vazduh do pozicija u kojima borave radnici i radi oprema koja koristi motore sa unutrašnjim sagorevanjem. Prilikom dezintegracije rude primenom eksplozivnih sredstava stvaraju se produkti eksplozije koji imaju veoma štetan uticaj na zdravlje ljudi, pa samim tim sistem ventilacije služi da se ti štetni produkti odstrane iz podzemnog rudnika. Istu ulogu ima sistem ventilacije i pri radu opreme koja koristi dizel motore za pogon, pri čijem radu se stvaraju takođe štetni produkti sagorevanja. Ventilacijom se postiže i smanjenje okolne temperature koja nastaje usled rada opreme kao i povećanja dubine eksploatacije. Generalno rečeno, sistem ventilacije služi za stvaranje povoljnih uslova rada koji će obezbediti odvijanje proizvodnje bez štetnih posledica za radnike. Jamske prostorije koje služe za ventilaciju imaju i ulogu rezervnih puteva povlačenja radne snage u slučaju nezgoda.

Odvodnjavanje predstavlja tehnološku fazu u okviru koje se voda iz podzemnog rudnika odgovarajućim sistemom pumpi i cevovoda ispumpava na površinu terena. Iznenadni kao i povećani prilivi vode predstavljaju veliku opasnost za zaposlene u podzemnom rudniku, opremu i funkcionisanje rudnika. Prekidi proizvodnje usled pojave vode mogu trajati duži vremenski period, što ima za posledicu povećanje troškova eksploatacije i neekonomičnost proizvodnje za dati vremenski period.

2.4 Pregled literature

Briciu i drugi primenili su koncept analize Trošak−prihod−profit pri praćenju i merenju performansi kompanija u rudarskoj industriji Rumunije [BRICIU14]. Zhao i drugi procenili su operativnu efikasnost rudarskih kompanije koje proizvode ugalj u Kini primenjujući Malmquist-ov indeks produktivnosti. Faktorska analiza iskorišćena je od strane Li-a i drugih ta procenu performansi ugljarskih kompanija [ZHAO11] [LI08]. Četiri vrste analiza (parametarski test razlika srednjih vrednosti, neparametarski Wilcoxon-ov test, procena statičke regresije podataka, procena dinamičke regresije podataka) su izvedene kako bi se procenila upravljačka i operativna efikasnost privatizovanih rudarskih kompanije u Jordanu [KHRISAT12]. Analiza stohastičke granice iskorišćena je za procenu profitabilnosti u sektoru rudarstva Južne Afrike [AKINBOADE10]. Metodologija analitičko hijerarhijskih procesa izabrana je za rangiranje efikasnosti odabranih metoda otkopavanja za ležišta platine [MUSINGWINI08]. Poboljšanje efikasnosti sistema kamion/utovarač može povećati ukupnu operativnu efikasnost rudnika. Kako bi se sistem kamion/utovarač doveo u približno optimalno stanje na osnovu poboljšanja produktivnosti i smanjenja troškova, glavno uporište je bilo u najboljem slaganju faktora koji utiču na produktivnost i broja kamiona i utovarača [NEL11]. Efikasnost u industriji uglja poprimila je veliku pažnju u Kini od strane kreatora politike, rudarskih kompanija i naučne javnosti. Primenom linearnom programiranja u analizi obavijanja podataka napravljena je komparativna analiza relativne tehničke efikasnosti između odabranih rudarskih kompanija u Kini i Americi [HONG09].

3. Teorijske osnove modela

3.1 Teorija odlučivanja

Odlučivanje je dugo bilo tretirano kao prevashodno socijalna, a ne tehnička aktivnost. Određene analize odlučivanja pri rešavanju različitih tehničkih problema nisu bile tretirane kao predmet primene nekog opšteg modela, već su rešavane isključivo u oblasti matičnih disciplina uz primenu znanja iz matematike i ekonomije.

Odlučivanje je izbor između određenog broja alternativa [ČUPIĆ08]. Teorija odlučivanja se bavi metodologijom rešavanja problema odlučivanja. Srž nauke o odlučivanju je sistemska analiza koja u svojoj metodologiji koristi sistemski pristup i naučnu metodu.

3.1.1 Vrste odluka i priroda procesa odlučivanja

Postoji nekoliko osnovnih vrsta odluka:

1. **Odluke tipa da li**. Ovo je da/ne, ili/ili odluka koja se mora napraviti pre nego što se nastavi sa izborom neke alternative. Odluke tipa da li, donose se razmatranjem razloga za i protiv. Važno je biti svestan ovakve odluke, pošto se suviše često

pretpostavlja da donošenje odluke započinje sa identifikacijom alternativa, pretpostavljajući da je već doneta odluka da se jedna alternativa izabere.

2. **Odluke tipa koja**. Ove odluke obuhvataju izbor jedne od više mogućih alternativa iz predloženog skupa, pri čemu se izbor zasniva na činjenici koliko dobro svaka alternativa ispunjava unapred definisan skup kriterijuma.

3. **Zavisne odluke**. Postoje odluke koje su donete ali se ne mogu sprovesti dok se ne ispuni neki uslov. Vreme, energija, cena, raspoloživost, mogućnost, podsticanje, svi ovi faktori mogu da figurišu u neophodnim uslovima koje treba ispuniti pre nego što se sprovede doneta odluka.

Kritični faktor koji teoretičari odlučivanja zanemaruju da naglase jeste da je donošenje odluke nelinearan i rekurzivan proces. To jest, većina odluka se donosi kretanjem unazad i unapred između izbora kriterijuma (karakteristika koje izbor treba da zadovolji) i identifikacije alternativa (mogućnosti koje se mogu izabrati). Alternative koje stoje na rapolaganju imaju uticaj na kriterijume koje im dodeljuje donosilac odluke, a na sličan način i kriterijumi koji se uspostavljaju imaju uticaj na alternative koje će biti razmatrane.

3.1.2 Komponente odlučivanja

Svaka odluka se donosi unutar svog okruženja, koje se definiše kao skup informacija, alternativa, vrednosti i prednosti koje u tom trenutku stoje na raspolaganju. Neko idealno okruženje obuhvatalo bi sve dostupne i precizne informacije i svaku moguću alternativu. Međutim i informacije i alternative su ograničene zato što su vreme i napori za prikupljanje informacija i identifikaciju alternativa ograničeni. Vremensko ograničenje u prostom smislu znači da se odluka mora doneti u izvesnom vremenskom periodu. Ograničenje po pitanju napora odražava granice radne sposobnosi, novca i prioriteta. Pošto se odluke moraju doneti unutar ovog ograničavajućeg okruženja može se reći da je glavni izazov donošenja odluke neizvesnost a da je glavni cilj analize smanjenje iste. Velika je verovatnoća da donosilac odluke nema na raspolaganju sve potrebne informacije kako bi sa sigurnošću doneo odluku, pa većina odluka obuhvata neospornu količinu rizika.

Sama činjenica da se odluke moraju doneti unutar ograničavajućeg okruženja sugeriše dve stvari. Prvo, ona objašnjava zašto je u procesu donošenja odluke kasno uviđanje mnogo preciznije i mnogo bolje nego predviđanje. Kako vreme prolazi, okruženje u kojem se odluka donosi nastavlja da se širi i menja. Pojavljuju se nove informacije i nove alternative, čak i nakon isteka roka donošenja odluke. Naime, jednom doneta odluka može biti promenjena pre ili u toku svog sprovođenja, jer se okolnosti menjaju, pa može da se desi da postoji potreba za promenom prvobitno donete odluke.

Druga stvar sugerisana idejom o odlukama unutar okruženja proističe iz prethodne. Pošto okruženje nastavlja da se širi kako vreme prolazi, pa se informacije i alternative povevćavaju, često se preporučuje da se donošenje odluke odloži sve do kraja zadatog vremenskog roka.

Pozitivne strane odlaganja odluke onoliko koliko je to zaista moguće su:

1. Okruženje u kojem se donosi odluka biće veće, pri tom obezbeđujući više informacija. Takođe ima vremena za mnogo pažljiviju i širu analizu.
2. Mogu se prepoznati ili kreirati nove alternative.
3. Mogu se promeniti prioriteti donosioca odluke.

Većina donosioca odluke ima tendenciju da raspolaže sa više informacija nego što je potrebno kako bi doneli valjanu odluku. Stoga je neophodno da se informacije selektuju po nekom kriterijumu.

Česta greška kod donošenja odluka jeste da se one donose izolovano jedna od druge. Činjenica je da se odluke donose u kontekstu drugih odluka, pa se u skladu stim, često koristi metafora tok, koja se odnosi na taj uticaj. Postoji tok odluka koji okružuje donetu odluku, mnoge odluke koje su ranije donete dovele su do sadašnje i učinile je mogućom i ograničenom. Mnoge druge odluke proisteći će iz nje.

Drugi način za opisivanje ovakve situacije jeste da se kaže da većina odluka uključuje izbor iz grupe ranije odabranih alternativa, koje su stavljene na raspolaganje iz skupa alternativa koji je formiran prethodno donetim odlukama. Prethodne odluke su aktivirale ili načinile operativnim određene alternative, a deaktivirale ili načinile neoperativnim ostale.

Svaka doneta odluka utiče na tok odluka i skup alternativa koje su na raspolaganju i trenutno i u budućnosti.

Postoje tri vrste odlučivanja:

1. Pri izvesnosti –slučaj kada su sve činjenice vezane, stanje prirode poznato.
2. Pri riziku – slučaj kada je stanje prirode nepoznato, ali postoji objektivna ili empirijska evidencija o njemu, koja donosiocu odluke omogućava da različitim stanjima prirode dodeli odgovarajuće verovatnoće nastupanja.
3. Pri neizvesnosti - slučaj kada je stanje prirode nepoznato i kada su nepoznate sve informacije na osnovu kojih bi se mogle dodeliti verovatnoće nastupanja pojedinih stanja.

Slede definicije pojmova koji su bitni za proces odlučivanja.

***1.* Informacije** su znanje u pogledu odluke, efekata njenih alternativa, verovatnoće svake alternative, itd. Informacije su od presudnog zanačaja za proces odlučivanja, ali treba istaći da i ako je znatna količina informacija poželjna, stanovište "da što ima više informacija to je bolje" nije tačno. Isuviše mnogo informacija može trenutno da umanji kvalitet odluke i poveća vreme donošenja odluke.

***2*. Alternative** su mogućnosti od kojih treba izabrati jednu. Alternative se mogu identifikovati (tj. tražiti i locirati) ili čak razviti (napraviti tamo gde one prethodno ne postoje). Samo traganje za već postojećim alternativama rezultovaće manje efektnim odlučivanjem.

***3.* Kriterijumi** su karakteristike ili zahtevi koje svaka alternativa mora da poseduje u većem ili manjem obimu. Često se alternative procenjuju na osnovu ispunjenosti svakog kriterijuma.

***4.* Ciljevi.** Bitno je da se pre procesa donošeja odluke a identifikuje cilj koji treba ostvariti. U praksi se često dešava da cilj nije jasno definisan, a da je donosilac odluke pristupio razmatranju alternativa.

***5.* Vrednost** se odnosi na poželjnost određenog rešenja, vrednost alternative koja je izražena u novčanim jedinicama, satisfakciji ili nekoj drugoj beneficiji.

***6.* Prednosti (preference)** odražavaju filosofiju i moralnu hijerarhiju donosioca odluke. Može se reći da one predstavljaju vrednosti prema kojima se upravlja donosioc odluke. Naime, može se reći da sistem ličnih vrednosti diktira prednosti i kriterijume koji utiču na donošenje odluka.

7. **Kvalitet odluke** predstavlja procenjivanje da li je odluka dobra ili loša. Dobra odluka predstavlja logičnu odluku koja je bazirana na raspoloživim informacijama i ona odražava sistem vrednosti (prednosti) donosioca odluke.

Kvalitet odluke nije u vezi sa njenim ishodom, dobra odluka može imati ili dobar ili loš ishod. Isto tako, loša odluka (koja nije bazirana na adekvatnim informacijama ili ne odražava sistem prednosti donosioca odluke) može imati dobar ishod.

Pri prosuđivanju kvaliteta odluke, pored bavljenja logikom, korišćenja informacija i alternativa, trebalo bi da budu zadovoljena sledeća tri kriterijuma:

- Odluka mora ispuniti postavljene ciljeve vrlo temeljno i kompletno. Koliko dobro izabrana alternativa ispunjava identifikovane ciljeve?
- Odluka mora ispuniti postavljene ciljeve najefikasnije, uz brigu o troškovima, energiji, sporednim dejstvima.
- Odluka mora uzeti u obzir korisne sporedne produkte ili indirektne prednosti.

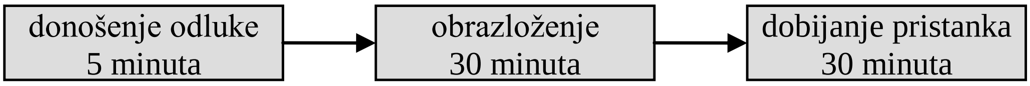
8. **Primanje** je proces prihvatanja donete odluke sa strane lica koja tu odluku treba da primene ili na koje će odluka uticati. Ova lica moraju odluku da prihvate i intelektualno i emocionalno, da bi efekti donete odluke bili u skladu sa očekivanjem i planiranjem donosioca odluke.

Jedno od najvažnijih razmatranja pri odlučivanju jeste ljudski faktor. Odluku treba uvek razmatrati u svetlu njene primene. Odluka može biti tehnološki brilijantna ali sociološki može biti manjkava i kao takva neće funkcionisati. Samo odluke koje se primenjuju, i to u potpunosti, će funkcionisati na način na koji je to planirano.

3.1.3 Pristupi procesu donošenja odluka

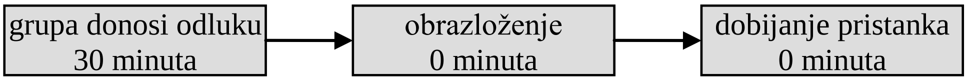
Postoje dva glavna pristupa donošenju odluke u nekoj organizaciji, autoritativan metod u kojem izvršna figura donosi odluku za celu grupu i grupna metoda u kojoj cela grupa odlučuje šta da se radi.

1. **Autoritativna metoda**: Menadžer donosi odluku zasnovanu na saznanju koje može da prikupi. Nakon toga on je obrazlaže grupi i dobija njen pristanak. U nekim istraživanjima, vremenska analiza za tipičnu operativnu odluku je nešto slična sledećem raposredu, slika 3.1.



Slika 3.1 Tok autoritativne metode odlučivanja

2. **Grupna metoda:** Grupa deli i analizira ideje, usaglašava se oko odluke i njene primene. Istraživanja pokazuju da grupa često poseduje vrednosti, osećaje i reakcije potpuno različite od onih koje menadžer pretpostavlja da grupa poseduje. Niko ne poznaje grupu i njene sklonosti i prednosti tako dobro kao što to ona sama zna. Vremenska analiza je slična sledećem rasporedu, slika 3.2.



Slika 3.2 Tok grupne metode odlučivanja

Sa stanovišta efikasnosti grupno donošenje odluke je mnogo bolje, u smislu da ljudi više vole implementaciju ideja o kojima sami razmišljaju. Samim tim će sprovodioci odluke raditi napornije i energičnije da bi sproveli odluku u delonego što bi to radili u slučaju nametnute.

Postoje dva tipa grupnog odlučivanja. Prvi tip je slobodna diskusija u kojoj se problem iznosi u celini na razmatranje.

Drugi tip odlučivanja jeste razvojna ili strukturna diskusija. Ovde se problem analizira u etapama, manjim delovima sa specifičnim ciljevima. Razvojna diskusija obezbeđuje sistematičan prikaz teme i obezbeđuje da svi učesnici grupe istovremeno razgovaraju o istom aspektu problema. [JOVANOVIĆ08]

3.1.4 Faze procesa odlučivanja

Faze procesa odlučivanja različiti teoretičari klasifikuju na brojne načine, jedan od njih [ČUPIĆ08] je dat na slici 3.3 a čine ga:

Evidentiranje problema podrazumeva da se uoče problemi za čije rešenje je potrebno doneti odluku.

Rangiranje problema se primenjuje u situacijama kada svi problemi ne mogu biti rešavani u istom vremenskom periodu.

Definisanje problema obuhvata: dekompoziciju problema, nivo detaljisanja u kojem će problem biti rešavan i kriterijum u odnosu na koji će se meriti efikasnost rešenja [PETRIĆ82].

Sakupljanje činjenica, odnosno formiranje baze relevantnih podataka za definisani problem. Pored prikupljanja podataka u ovoj fazi se radi i selekcija podataka.

Predviđanje budućnosti se koristi jer će odluke koje se donose biti realizovane u nekom budućem trenutku, pa se stoga određeni parametri koji utiču na odluku adekvatnim metodom predikcije prognoziraju.

Formiranje modela podrazumeva da se za konkretni problem definišu interakcije između kontralabilnih i nekontralabilnih promenljivih, kao i odgovarajući kriterijum efikasnosti rešenja.

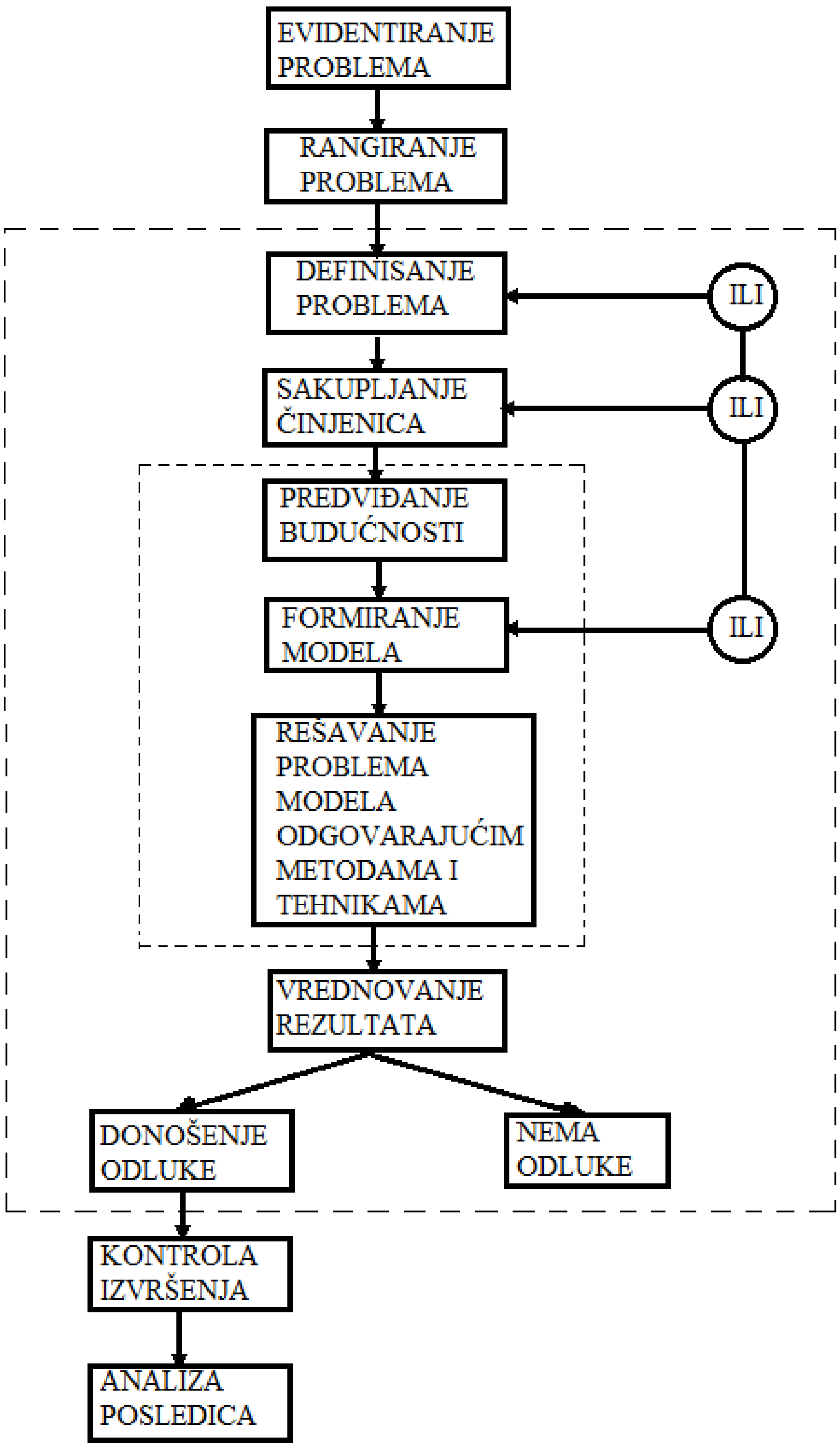
Rešavanje problema – se prevashodno odnosi na određivanje numeričkog ili analitičkog načina rešavanja problema. U ovoj fazi je bitno da se obezbedi odgovarajući broj alternativnih rešenja.

Vrednovanje rezultata se odnosi na proveru slaganja dobijenih rezultata sa očekivanim rezultatima realnih sistema.

Donošenje odluke podrazumeva da se na osnovu prethodnih koraka može izvršiti izbor ili ne. Ako izbor nije moguće napraviti postupak se vraća na neki od prethodnih koraka.

Kontrola izvršavanja sledi u slučaju da je odluka doneta, a za njom sledi *analiza posledica njenog izvršenja*. [ČUPIĆ08]

Scenario donošenja odluke može i biti promenjen ako se u toku izvršavanja odluke uvidi da je neka korekcija potrebna u skladu sa okolnostima stanja prirode, tj. okolnostima i događajima koji utiču na postizanje zadatog cilja.



Slika 3.3 Faze procesa odlučivanja [ČUPIĆ08]

3.1.5 Planiranje donošenja odluke i nivoi odlučivanja

Iako je donošenje odluke bez planiranja prilično uobičajeno, ono nije često dobro. Planiranje dozvoljava da se odluke donose mnogo komfornije i na pametniji način. Planiranje čak i čini odluke lakšim, obezbeđujući im direktive i ciljeve. Može se reći da je planiranje vrsta tehnike koja pojednostavljuje donošenje odluke.

Prednosti planiranja su:

1. Planiranje dozvoljava uspostavljanje nezavisnih ciljeva. Vizija koja će oblikovati odluke delimično je određena okolnostma i događajuma okruženja. Odluke se ne donose samo kao reakcija na spoljne podsticaje. Rukovodioci upravljaju organizacijama sa svojim vizijama. Ponekad se razlika između planiranja i ne planiranja opisuje kao proaktivno stanje (kontrolisanje situacije) nasuprot reaktivnog (reagovanje na spoljne uticaje).

2. Planiranje obezbeđuje merne standarde. Plan obezbeđuje osnovu za merenje uspeha nasuprot ciljeva, pa se tako može odrediti da li su ciljevi ostvareni ili ne.

3. Planiranje pretvara vrednosti u delo. Suočen sa odlukom, donosilac odluke može konsultovati plan i odrediti koja odluka će najbolje pomoći napredovanje plana. Odluke donete planskim upravljanjem mogu dosledno funkcionisati zajedno sa prethodnim ciljevima kompanije ili ličnim ciljevima. Takođe, planiranje je korisno u hitnim situacijama. Kada nastane kriza, razmišljanje o globalnom planu pomoći će da se odredi odluka za njeno rešavanje, što neće samo pomoći da se kriza otkloni, već će takođe pomoći napredovanje globalnog plana. Bez plana, krize se razmatraju nasumice, a odluke koje su donete mogu biti u suprotnosti sa drugim.

4. Planiranje dozvoljava ograničene resurse koji će se angažovati po redu. Budžet, vreme, napor, radna snaga, itd. Njihova najbolja upotreba se može ostvariti samo onda kada plan zahteva njihovu primenu.

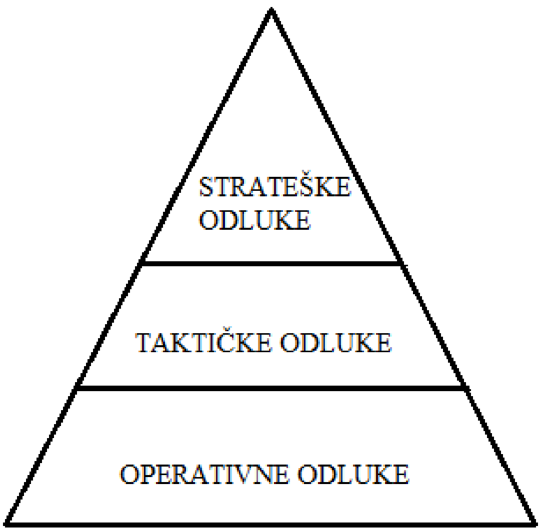
Odluke se razlikuju po značaju i nivou primene. Tako se za donošenje odluka, u skladu sa njihovim značajem određuje koliko vremena i resursa se troši na nju. Postoje tri nivoa odluke:

1. Strateški. Strateške odluke predstavljaju najviši nivo. Ove odluke tiču se generalnog pravca, dugoročnih ciljeva, filosofije i vrednosti. Ove odluke su u najmanjom meri struktuirane, a najviše imaginativne. One su veoma rizične i sa veoma neizvesnim ishodom, delimično zbog toga što dosežu u daleku budućnost, a delimično zbog svoje važnosti.

2. Taktički. Taktičke odluke podržavaju strateške. One teže da budu srednjeg nivoa i značaja sa umerenim posledicama.

3. Operativni. Ovo su svakodnevne odluke, koje se često koriste za podršku taktičkim odlukama. Često su donete uz malo razmišljnja i struktuirane su. Njihov uticaj je trenutan, kratkoročan i obično sa niskim troškovima. Posledice loših operativnih odluka biće minimalne, iako niz loših ili nehatnih odluka ovog tipa mogu prouzrokovati štetu. Operativne odluke se mogu preprogramirati, preinačiti ili jasno postaviti u politici odlučivanja.

Na slici 3.4 je prikazana hijerarhija odlučivanja u zavisnosti od vrste odluke.



Slika 3.4 Vrste odluka [ČUPIĆ08]

3.2 Strateško prognoziranje

Prognoziranje je uobičajeni statistički zadatak u poslovanju jer daje smernice za dugoročno strateško planiranje, kao i za donošenje operativnih odluka. U prethodnom razmatranju je ukazano na kompleksnost problema donošenja odluka, kao i na značaj planiranja, pogotovo kad se radi o strateškim odlukama. Kako se realizacija odluka najčešće odvija u budućnosti, predviđanje okolnosti i događaja je od ključnog značaja za ispravno donošenje odluka. Ko što je naznačeno u razmatranju faza donošenja odluke u pogavlju 3.1.4, prognoza predstavlja nezaobilazni deo donošenja strateških odluka i strateškog planiranja.

3.2.1 Poslovna strategija

Poslovna strategija se definiše kao dugoročna orijentacija preduzeća koja treba da osigura uspeh. Prema tradicionalnom pristupu strategija treba da omogući određivanje temeljnih dugoročnih ciljeva preduzeća, prilagođavanje smerova poslovnih aktivnosti, odnosno određivanje koncepcija i izbor resursa potrebnih za postizanje postavljenih ciljeva. Strategija u procesu upravljanja podrazumeva plan akcija. Javlja se na više organizacionih nivoa u preduzeću i to:

- **Korporativna strategija -** na nivou preduzeća.
- **Poslovna strategija -** na nivou organizacionih jedinica preduzeća
- **Funkcijska strategija -** na nivou poslovnih funkcija.

Svaka poslovana strategija mora da se zasniva na objektivnim, sveobuhvatnim i pouzdanim analizama postojećeg stanja, kao i kreativnim sagledavanjima ne samo poželjnih nego i budućih stanja. Buduća stanja donose značajne neizvesnosti i rizike, što karakteriše svako preduzetničko ponašanje, pri čemu zbog turbulentnih promena okruženja, sve je teže doći do pouzdanih vizija budućnosti.

Strateško planiranje je kontinualni proces koji obuhvata sistematsko odlučivanje, sistemski organizacioni napor potreban da se odluke realizuju i merenje rezultata sprovođenja odluka u odnosu na očekivanja kroz organizovanu sistemsku spregu. Veština strateškog planiranja podrazumeva donošenje strategijskih odluka koje rezultiraju rastom poslovanja, unošenjem različitosti i inovacijama i ona je u potpunosti u nadleštvu vrhovnog rukovodstva[DULANOVIĆ09]. Kvalitetno definisane strategije su jedan od najznačajnijih faktora uspešnosti savremenih preduzeća.

3.2.2 Prognoza

Prognoziranje je predviđanje budućnosti pomoću raspoloživih podataka, uključujući istorijske podatke i poznavanje budućih događaja koji mogu uticati na prognozu. Prognoza daje informaciju o potencijalnim budućim događajima i njihovim posledicama na poslovanje preduzeća. Korišćenje prognoze ne može u potpunosti da otkloni neizvesnost budućih događaja, ali daje rukovodstvu preduzeća izvesnu dozu sigurnosti pri donošenju odluka.

Prognoze mogu biti:

- Kratkoročne prognoze – koriste se za planiranje kadrova, kapaciteta proizvodnje, potražnje itd.
- Srednjoročne prognoze određuju potrebu za resursima u budućnosti.
- Dugoročne prognoze se koriste kod strateških planiranja.

Metoda prognoziranja mora dati odgovore na sledeće ključne tačke:

1. Definisanje ključnih varijabli za objašnjavanje
2. Definisanje budućih vrednosti tih varijabli
3. Relativizacija problema sigurnosti procenjenih vrednosti
4. Selekcija odgovarajućih metoda prognoziranja.

Metode prognoziranja se mogu podeliti u tri grupe:

1. Metode prognoziranja zasnovane na matematičko - statističkim postupcima. U ovu grupu metoda spadaju ispitivanje vremenskih serija (Metod trenda, Metod pokretnih preseka, Metod eksponencijalnih izjednačavanja) i analize stohastičke veze (korelaciona i regresiona analaiza, kao i faktorska analiza).
2. Intuitivne metode: Breinstorming[LEVI09], obrnuti Breinstorming, Delfi metod[LEVI09], ekspertska analiza i dr.

3. Istraživačke metode: modeli scenarija, simulacije i morfološka analiza.

Rezultat prognoze je skup podataka koji se odnosi na vrednosti nekih parametara u budućnosti, a koji je generisan na osnovu primene modela prognoze i raspoloživih informacija. Ovaj skup podataka predstavlja po kriterijumu prognoze najverovatnije vrednosti koje će ti parametri u budućnosti imati. Kao što je rečeno, cilj strategije je ispunjavanje dugoročnih ciljeva. Pri donošenju strateških odluka i strateškog planiranja, neophodno je u proces odlučivanja uključiti i rezultate prognoza relevantnih parametara i događaja.

3.3 Stepen operativne sposobnosti

Operativna sposobnost je odnos bruto profita (EBIT) projekta i visine fiksnih operativnih troškova. Operativna sposobnost je značajna za rukovodstvo preduzeća zato što povećanje operativnih fiksnih troškova utiče na vrednost preduzeća povećavanjem rizika, gde se rizik meri varijabilnošću prinosa [LEV74] i [BERNER02].

Operativna sposobnost je stepen u kom su troškovi fiksni [BREALY04]. Postoji više oblika analitičkog izražavanja stepena operativne sposobnosti (*DOL*):

$$DOL = \frac{\text{\% promena EBIT}}{\text{\% promena prodaje}} = \frac{\frac{\Delta EBIT}{EBIT}}{\frac{\Delta Q}{Q}} \text{ tj. } DOL = \frac{Q(P-V)}{Q(P-V)-F} \tag{3.1}$$

Gde je: Q- kapacitet proizvodnje

P- cena po jedinici proizvoda

V- promenljivi (varijabilni) troškovi po jedinici proizvoda

F- zbir fiksnih troškova

Jednačina (3.1) se može predstaviti u obliku (3.2) u cilju lakše analize *DOL-a:*

$$DOL = 1 + \frac{F}{Q(P-V)-F} \tag{3.2}$$

Jedan od značajnih pokazatelja poslovanja je i prelomna tačka rentabiliteta, u daljem tekstu prelomna tačka. Prelomna tačka je kapacitet proizvodnje (i prodaje) na kome se prihodi izjednačavaju sa fiksnim i do tada nastalim varijabilnim troškovima. Od te tačke projekat, odnosno poslovanje preduzeća prelazi iz zone gubitka u zonu dobitka [MARJANOVIC13]. Prelomna tačka se može predstaviti sledećom formulom:

$$PR = Q\left(P - V\right) - F \tag{3.3}$$

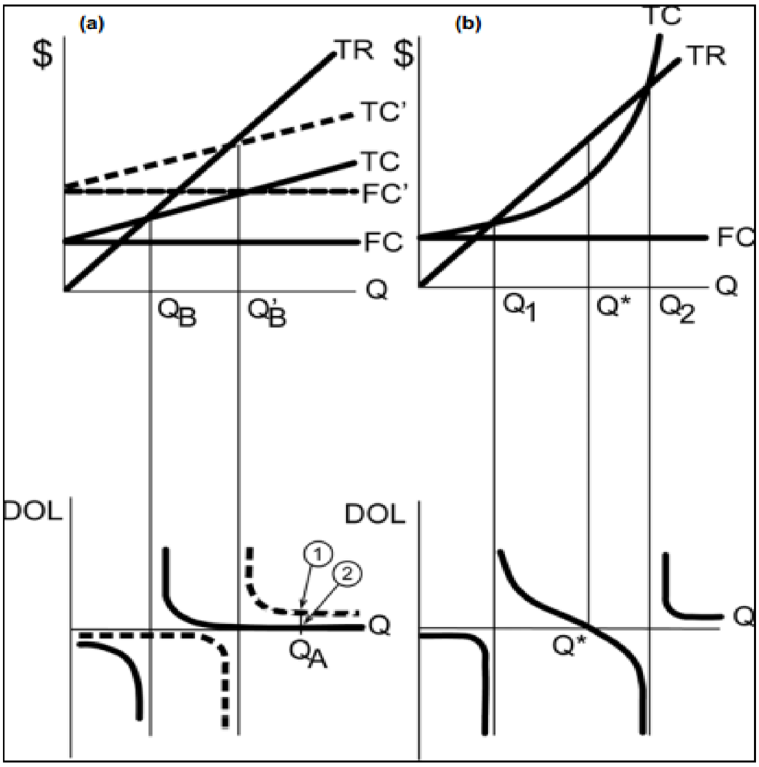
Gde promenljive Q, P, V i F imaju istu interpretaciju kao i u jednačini (3.1). Brojni autori smatraju da je stepen operativne sposobnosti, prirodni nastavak linearnog metoda prelomne tačke rentabilnosti.

Na osnovu jednačine (3.2) ako su fiksni troškovi F=0, onda DOL=1, što znači da nema operativne sposobnosti. Kako fiksni troškovi moraju da imaju pozitivnu vrednost, ako je profit pozitivan i ako nema promene u jediničnoj ceni proizvoda, onda *DOL* mora da bude veći od 1. Povećavanjem fiksnih troškova, ako su cena i varijabilni troškovi nepromenjeni, vrednost imenioca jednačine (3.1) je manja od brojioca. Logično, rukovodstvo preduzeća u želji da uveća profit neće dobrovoljno dozvoliti povećanje operativnih fiksnih troškova bez povećanja cene proizvoda. Međutim, u uslovima velike konkurentnosti na tržištu, povećanje cena često nije opcija. Parametri *DOL*-a su ekonomski nezavisni.

Imajući u vidu linearnost funkcija prihoda i troškova i bez obzira na nivo operativnih fiksnih troškova, što je operativni profit bliži nuli, *DOL* teži plus-minus beskonačnosti u blizini prelomne tačke, u zavisnosti od toga da li se prelomnoj tački prilazi sa gornje ili sa donje strane. Na nivou prelomne tačke, *DOL* ne daje korisne vrednosti. Za kapacitet proizvodnje, odnosno izlaz, iznad prelomne vrednosti, *DOL* teži asimptotski nuli kako se izlaz povećava zato što profit u imeniocu (3.2) nastavlja da raste dok su fiksni operativni troškovi konstantni u brojiocu. Znači, *DOL* varira iz dva razloga: menja se vrednost operativnih fiksnih trškova i menja se kapacitet proizvodnje, oba određuje rukovodstvo menadžment kompanije.

Rezultati *DOL*-a su svrsishodni samo kad se porede sa istim kapacitetom proizvodnje. Sa slike 3.5(a) za kapacitet proizvonje Q_A jasno se vidi uticaj povećanih fiksnih troškova na *DOL* na tom nivou prizvodnje. Mereni *DOL*, (1), posle povećanja fiksnih troškova *FC* je veći od prethodno izračunate vrednosti za *DOL*, (2). U zavisnosti od prethodnog nivoa proizvodnje, čak i malo povećanje fiksnih troškova *FC,* u zavisnosti od fukcije ukupnih prihoda *TR*, bez promene u varijabilnim jediničnim troškovima, bi zahtevao od rukovodstva donošenje odluke o povećanju proizvodnje da bi se izbegli gubitci i ostvario željeni profit. Na slici br. 3.5 (a) je prikazano poređenje prelomnih tačaka Q_B i Q_B' koje se razlikuju samo po visini fiksnih troškova.

Čak i u uslovima savršenog konkurentskog tržišta, cena igra značajnu ulogu u određivanju vrednosti *DOL*-a. Pretpostavimo da kompanija posluje sa pozitivnim profitom. Kad tržišna cena proizvoda raste, imenilac u jednačini (3.2) raste što smanjuje *DOL* ako se pri tom ne menjaju kapacitet proizvodnje, operativni fiksni troškovi i varijabilni jedninični troškovi. *DOL* može menjati vrednost u zavisnosti od promena vrednosti bilo koje promenljive koja se pojavlje u jednačini (3.2). Ove promenljive uključuju parametre koji zavise od odluke rukovodstva – operativni fiksni troškovi i kapacitet proizvodnje; tržišno određene parametre — cene na konkurentnom tržištu, koje su vremenski zavisne; i ekonomske i tehničke realnosti - varijabilni troškovi po jedinici proizvoda. [KIYMAZ03]



*Slika 3.5 Prelomna tačka i Opertivna sposobnost linearni slučaj (a) nelinearni slučaj(b) [*KIYMAZ*03]*

Analizom slike 3.5. može se primetiti da kad se fiksni troškovi povećaju sa *FC* na *FC'*, bez kompenzacije u smanjenu varijabilnih troškova po jedinici proizvoda, prelomna tačka kapaciteta proizvodnje se povećava i vrednosti *DOL*-a, za kapacitet proizvodnje veći od prelomne tačke, su veće nego pre povećanja fiksnih troškova. Na slici 3.5 (a) je ovo povećanje *DOL*-a vidljivo za $Q=Q_a$, i odgovarajuće vrednosti *DOL*-a obeležene su sa 1 i 2. Upravo opisana situacija je suština onoga što *DOL* treba da pokaže kao indikator rizika preduzeća. Dakle, povećenjem fiksnih troškova, bez obzira na povećenje kapaciteta proizvodnje, vrednost *DOL*-a raste.

Na slici 3.5 pored razmatranog linearnog slučaja (a) dat je i opštji slučaj kad su funkcije troškova nelinearne. Kao i u linearnom slučaju, *DOL* se približava beskonačnosti u blizini prelomne tačke, a teži nuli kada se profit maksimizira.

Na osnovu analize *DOL*-a menadžer unapred zna kakav je uticaj potencijalne promene prihoda od prodaje na profit. Ponekad, zahvaljujući tom saznanju, kompanija može da učini neke promene u svojoj politici cena i/ili strukturi troškova. Kopmanije ne vole da deluju pod uslovima visokog nivoa operativne sposobnosti. U takvoj situaciji, mali pad u prihodu od prodaje može da izazove poslovni gubitak.

3.4 Teorija sivih sistema

Teoriju sivih sistema predložio je Julong Deng 1982. godine [DENG82]. Teorija sivih sistema je multidisciplinarna teorija koja modeluje nedeterminističke sisteme, u kojima su informacije nepotpune ili nepouzdane. Naziv „sivi“ ukazuje na nesigurne, nekompletne i skromne informacije sistema. Ova teorija se primenjuje uspešno u različitim oblastima kao što su: industrija [CHENG86], geologija [LONG87, ZHAO87], hidrologija [XIA87, ZHAN82], ekonomija [HUANG87, XU88, YAN86, YAN86], ekologija [HU87], saobraćaj [LEE86], menadžment [DENG86, WEI86, YI87], poljoprivreda [DENG85, JUO87, LUO85, LUO86, LUO85a, LUO87a, WANG85], meteorologija [HU87a, LI87], medicina [GUO86a, WANG88], istorija [HUO86, HUO86a], geografija [CAO87], sport [ZHANG86] itd.

Sivi modeli predviđaju buduće vrednosti vremenskih serija zasnovanih samo na skupu najskorijih podataka u zavisnosti od intervala prognoze. Podrazumeva se da su sve vrednosti koje se koriste u sivom modelu pozitivne, kao i da je interval dobijanja podataka unutar vremenskih serija ekvivalentan. Najjednostavnije rečeno, sivi modeli mogu biti shvaćeni kao fitovanje krive [KAYACAN10].

Pre razmatranja sivih modela, biće dat niz definicija sivih operatora generisanja koji se koriste u sivom modelovanju.

Definicija 3.4.1: Neka je $X^{(0)}(k)=\left[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\ldots,x^{(0)}(k)\right],\ k=1,2,...,n$ originalni, nenegativan niz uzastopnih podataka uzet u jednakim vremenskim intervalima, tada se operator AGO (Accumulating Generation Operator - AGO) definiše kao zbir svih elemenata originalnog niza tj.

$$x^{(1)}(k)=\sum_{k=1}^{n}x^{(0)}(k)\,. \tag{3.4}$$

Ovaj operator se koristi u cilju smanjivanja slučajnosti podataka i smanjivanja tendencije varijacije.

Inverzni operator IAGO (Inverse Accumulating Generation Operator) operatora AGO, za serije $X^{(0)}$ i $X^{(1)}$ se definiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}&x_1^{(0)}=x_1^{(1)}\\&x_k^{(0)}=x_k^{(1)}-x_{k-1}^{(1)},\ k=2,3,...,n.\\&X^{(0)}=IAGO\left(X^{(1)}\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

[KARATZAS91]

Definicija 3.4.2: Neka su $X^{(1)}(k)=\left[x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\ldots,x^{(1)}(k)\right],\ k=1,2,...,n$ akumulirani podaci sekvence koja se koristi za zadavanje diferencijalne jednačine, tada je $Z^{(1)}(k)=\left[z^{(1)}(1),z^{(1)}(2),\ldots,z^{(1)}(k)\right]$, sekvenca generisanih srednjih vrednosti susednih vrednosti sekvence $X^{(1)}$ tj.

$$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}\left(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)\right),\text{za}\ \ k=1,2,...,n. \tag{3.6}$$

U Teoriji sivih sistema, sivi multiparametarski model (Multi-variable grey model MGM(φ, m)) označava sivi model u kom je φ red diferencijalne jednačine, a m je broj promenljivih u modelu. MGM(φ, m) se definiše na sledeći način [CHANG09]:

$$\sum_{i=0}^{\varphi} a_i \frac{d^{(i)} x_1^{(1)}(k)}{dt^{(i)}} = \sum_{j=2}^{m} b_j x_j^{(1)}(k),\ k = 1, 2, ..., n \tag{3.7}$$

Gde su

- a_i i b_j – određeni koeficijenti,
- $x_1^{(1)}(k)$ – sekvenca glavnog faktora,
- $x_j^{(1)}(k)$ – sekvence uticajnih faktora,
- k – promenljiva vremenske sekvence.

Prvo će biti opisan model GM(1,1), sivi model prvog reda sa jednom promenljivom, a zatim će detaljnije biti predstavljen GM(1,m) [HUI13, TANG13, LIN09, LEE09, WANG98], koji je primenjen u ovom radu.

Neka je $x^{(0)} = \left[x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \ldots, x^{(0)}(k)\right],\ k = 1, 2, ..., n$ originalna serija i neka je $x^{(1)}$=AGO$x^{(0)}$, tada je sledeća jednačina:

$$x^{(0)}(k) + a \cdot z^{(1)}(k) = b,\ k = 1, 2, ..., n \tag{3.8}$$

siva diferencijalna jednačina, koja se još naziva i GM(1,1). Kako GM(1,1) model zavisi samo od jedne promenljive $x^{(0)}$, tada je

$$z^{(1)}(k) = 0.5x^{(1)}(k) + 0.5x^{(1)}(k-1),\ k = 1, 2, ..., n \tag{3.9}$$

Neka su matrica B i vektor y_n dati sa (3.10)

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ \ldots & \ldots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, y_n = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Matrica B se još naziva i matricom podataka. Primenom metode najmanjih kvadrata

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \left(B^T B\right)^{-1} B^T y_n \tag{3.11}$$

na kraju, GM(1, 1) može biti definisan sledećom diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \tag{3.12}$$

Rešenje jednačine (3.12) je funkcija zavisna od vremena:

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-a(t-1)} + \frac{b}{a}, \quad t \geq 1 \tag{3.13}$$

dok je rešenje sive diferencijalne jednačine

$$x^{(1)}(k+1) = \left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad \text{k=1,...,n} \tag{3.14}$$

Odgovarajuća prognozirana vrednost za k+1 je:

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)}(k+1) &= \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) &= \left(1-e^{a}\right)\left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-ak}, \quad \text{k=1,...n} \end{aligned} \tag{3.15}$$

dok je odgovarajuća prognozirana vrednost za *k*+*h* [KAYACAN10]

$$\hat{x}^{(0)}(k+h) = \left(1-e^{a}\right)\left[x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] e^{-a(k+h-1)k} \tag{3.16}$$

Jednačina (3.12), kao i funkcija u zavisnosti od vremena koja se dobija kao njeno rešenje (3.13), ne mogu da budu direktno izvedene iz GM(1,1) modela već predstavljaju njene aproksimacije[YANG14].

U ovom radu biće korišćen multiparametarski sivi model GM(1,*m*) [HUI13, TANG13, LIN09, LEE09, WANG98]. Prvo se podaci razvrstavaju u dve kategorije sekvenci: sekvenca glavnog faktora (određuje ponašanje sistema) i sekvence uticajnih faktora sistema (utiču na ponašanje sistema).

Sekvenca glavnog faktora je:

$$X_1^{(0)} = \left[x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \ldots, x_1^{(0)}(k) \right], \; k = 1, 2, ..., n \tag{3.17}$$

Sekvence uticajnih faktora su:

$$\begin{aligned} X_2^{(0)} &= \left[x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \ldots, x_2^{(0)}(k) \right] \\ X_3^{(0)} &= \left[x_3^{(0)}(1), x_3^{(0)}(2), \ldots, x_3^{(0)}(k) \right] \\ X_m^{(0)} &= \left[x_m^{(0)}(1), x_m^{(0)}(2), \ldots, x_m^{(0)}(k) \right] \end{aligned} \tag{3.18}$$

Siva diferencijalna jednačina MGM(1, *m*) prvog reda je:

$$\frac{dx_1^{(1)}(k)}{dk}+ax_1^{(1)}(k)=\sum_{j=2}^{m}b_j x_j^{(1)}(k) \tag{3.19}$$

Saglasno sa MGM(1, *m*), konstruisana AGO sekvenca je:

$$x_1^{(0)}(k)+az_1^{(1)}(k)=\sum_{j=2}^{m}b_j z_j^{(1)}(k) \tag{3.20}$$

Konstruisana AGO sekvenca može biti predstavljena u matričnoj formi na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \dots & x_m^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \dots & x_m^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \dots & x_m^{(1)}(n) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Elementi vektora $\hat{a}=[a,b_2,...,b_m]^T$ su dobijeni primenom metode najmanjih kvadrata na sledeći način:

$$\hat{a}=\left(B^T B\right)^{-1}B^T Y \tag{3.22}$$

gde su

$$Y=\begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \dots & x_m^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \dots & x_m^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \dots & x_m^{(1)}(n) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Na kraju, MGM(1, *m*) može biti definisan na sledeći način:

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dk}+ax_1^{(1)}=b_2x_2^{(1)}+b_3x_3^{(1)}+\ldots+b_mx_m^{(1)} \tag{3.24}$$

Odgovarajuća formula vremenske sekvence tj. rešenje jednačine (3.24) je:

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=\left\{x_1^{(0)}(1)-\sum_{j=2}^{m}\frac{b_{j-1}}{a}\cdot x_j^{(1)}(k+1)\right\}e^{-ak}+\sum_{j=2}^{m}\frac{b_{j-1}}{a}\cdot x_j^{(1)}(k+1)$$

$$k=0,1,2,...,n-1 \tag{3.25}$$

Na osnovu jednačine (3.25), dobija se $\hat{X}^{(1)}(k+1)=\left[\hat{x}_1^{(1)}(k+1)\right]$. Odgovarajuća prognozirana vrednost $x_k^{(0)}$ može se dobiti primenom inverznog operatora AGO:

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1), \; k=2,3,\ldots,n \\ \hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1), \; k=0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Izračunate vrednosti $\hat{x}^{(0)}(k)$ kada je $k \le n$ mogu da se upotrebe u cilju utvrđivanja adekvatnosti modela, dok se vrednosti u slučaju kad je $k > n$ mogu koriste kao prognozirane vrednosti za niz podataka.

Relativna greška izražena u procentima (RPE(*j*,*k*)) i srednja relativna greška izražena u procentima (ARPE(*j*,*k*)) su:

$$Error=\begin{cases} RPE=\dfrac{\left|\hat{x}_j^{(0)}(k)-x_j^{(0)}(k)\right|}{x_j^{(0)}(k)}\times 100\% \\ ARPE=\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\dfrac{\left|\hat{x}_j^{(0)}(k)-x_j^{(0)}(k)\right|}{x_j^{(0)}(k)}\times 100\% \end{cases} \tag{3.27}$$

Uticajne promenljive sistema ne utiču u istoj meri u promenu glavne vrednosti sistema. Siva relaciona analiza je deo Teorije sivih sistema. Cilj sive relacione analize je utvrđivanje stepena relevantnosti svake promenljive sistema. Ona se koristi za utvrđivanje primarnih faktora neophodnih da bi se izvršilo najbolje poređenje u sistemu [HUI13]. Glavni princip je prepoznavanje stepena relevantnosti među faktorima, prema nivou sličnosti geometrijskih šablona krivih sekvenci. Što su krive sličnije, viši je stepen korelacije odgovarajućih serija [HUI13].

Pretpostavimo da je sekvenca glavne promenljive $X_1^0(k), k=1,2,...,n$ zavisna promenljiva, a da su promenljive koje utiču na sistem nezavisne promenljive $X_j^0(k), k=1,2,...,n; j=1,2,...m$. Kako različite promenljive imaju različitu fizičku interpretaciju tj. dimenziju, potrebno je eliminisati dimenziju iz analize relevantnosti, u tom cilju koristi se metod izjednačavanja po sledećoj formuli:

$$x_j^{*}(k)=\frac{x_j(k)}{\sum_{i=1}^{m} x_i(k)},\ j=1,2,\ldots,m \qquad (3.28)$$

Sivi relacioni prostor (grey relational space)[DENG85], opisuje odnos između jednog glavnog faktora i svih ostalih faktora datog sistema. Pretpostavlja se da su veličine koje učestvuju u sivom modelu pozitivne i da su vremenski intervali u kojima se promenljive veličine mere ekvidistantni.

Definicija 3.4.3: Neka je je **X** skup sekvenci faktora x_i koje se porede i referentne sekvence x_1, i neka je relaciono preslikavanje γ preslikavanje uređenog para čiji su elementi iz **X** tj. γ:$\mathbf{X}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Neka je dalje **Γ** skup svih relacionih preslikavanja γ, tada je sivi relacioni prostor uređeni par (**X**, **Γ**).

Γ se naziva skup sivih relacionih preslikavanja.

Pretpostavimo da je $\gamma(x_1(k), x_i(k))$ slika preslikavanja γ u tački k iz serije u realni broj, a $\gamma(x_1, x_i)$= $\rho_j(k)$ je slika funkcije γ u svim tačkama k=1,2,3,…,n gde je:

$$x_1=\left[x_1(1), x_1(2),\ldots, x_1(n)\right]$$
$$x_i=\left[x_i(1), x_i(2),\ldots, x_i(n)\right] \qquad (3.29)$$

Neka $\gamma(x_1(k), x_i(k))$ zadovoljava sledeću jednačinu:

$$\rho_j(k)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma\left(x_1(k), x_i(k)\right) \qquad (3.30)$$

Tada se vrednost funkcije $\gamma(x_1(k), x_i(k))$ naziva **sivi relacioni koeficijent** u tački k, a zbirna vrednost relacionih koeficijenata $\gamma(x_1, x_i)$ se naziva **sivi relacioni stepen** ako i samo ako zadovoljavaju sledeće aksiome [DENG89]:

Aksioma 1: (Interval mere)

$$\gamma\left(x_1(k), x_i(k)\right)\in(0,1], \forall k$$
$$\gamma\left(x_1(k), x_i(k)\right)=1,\ \text{ako i samo ako } x_1(k)=x_i(k), \forall k$$
$$\gamma\left(x_1(k), x_i(k)\right)=0,\ \text{ako i samo ako } x_1 \in \varphi, x_i \in \varphi$$

Gde je φ prazan skup.

Aksioma 2: (Dualna simetrija)

$\gamma\left(x_1(k), x_i(k)\right) = \gamma\left(x_i(k), x_1(k)\right)$, ako i samo ako $X = \{x_1, x_i\}$

Aksioma 3: (Sveobuhvatnost ili celovitost)

$\gamma\left(x_1(k), x_i(k)\right) \neq \gamma\left(x_1(k), x_0(k)\right)$,
skoro uvek ako i samo ako $X = \left\{x_j \mid j = 1, ..., n, n > 2\right\}$

Aksioma 4: (Pristupačnost)

$\gamma(x_1(k), x_i(k))$ opada kad se $\Delta(k)$ raste, gde je $\Delta(k) = \left[\left(x_1(k) - x_i(k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

U nastavku izlaganja se koristi skraćeni zapis $\xi_j(k)$ umesto $\gamma\left(x_1(k), x_i(k)\right)$ tj. $\gamma\left(x_1(k), x_j(k)\right) = \xi_j(k)$.

Sivi relacioni koeficijenti se računaju na sledeći način [WANG12]:

$$\xi_j(k) = \frac{\min\limits_{j(k)} \left|x_1'(k) - x_j'(k)\right| + \theta \cdot \max\limits_{j(k)} \left|x_1'(k) - x_j'(k)\right|}{\Delta_j(k) + \theta \cdot \max\limits_{j(k)} \left|x_1'(k) - x_j'(k)\right|}, \; j = 2, 3, \ldots, m \tag{3.31}$$

Gde $\xi_j(k)$ zadovoljava navedene aksiome, a θ je koeficijent diskriminacije [GUO85], i $\theta \in [0,1]$; dok je $\Delta_j(k) = |x_1'(k) - x_j'(k)|$. Interval mere ne mora biti (0,1]. Guo u radu [GUO85] uvodi interval [*a*,*b*] kao interval mere, gde su *a* i *b* realni brojevi, pa u tom slučaju važi $\xi_j(k) \in [a, b]$.

Zbirne vrednosti sivih relacionih koeficijenata se računaju primenom formule (3.30).

Što je veća zbirna vrednost sivog koeficijenta $\rho_j(k)$, to je veći uticaj *j*-te promenljive na analiziranu promenljivu, i suprotno, što je manja vrednost $\rho_j(k)$, slabiji je uticaj *j-te* promenljive na analiziranu promenljivu. Na ovaj način, može se pratiti kako se u zavisnosti od vremena menja uticaj ulaznih promenljivih na izlaznu promenljivu, kao sveukupni uticaj svake od ulaznih promenljivih na izlaznu promenljivu.

3.5 Stohastički difuzni procesi

3.5.1 Stohastički procesi

Definicija 3.5.1: Neka je Ω neprazan skup svih elementarnih događaja. Neprazna kolekcija Σ podskupova od Ω je σ-algebra ako važi:

1. $\Omega \epsilon \Sigma$
2. Ako $A \epsilon \Sigma$ onda i $A^C \epsilon \Sigma$
3. Ako $A_1, A_2, \ldots \epsilon \Sigma$, tada i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.

Definicija 3.5.2: Stohastički proces $\{X(t), t \epsilon I\}$ je familija slučajnih promenljivih definisana na istom prostoru verovatnoća (Ω, Σ, P).

Skup I se naziva parametarski skup, obično se za parametarski skup uzima interval $[0, \infty]$, a realni prostor R^d ($X: \Omega \rightarrow R^d$) je skup stanja procesa.

Konačan niz $X_1, \ldots, X_N$ slučajnih promenljivih definisanih na Ω naziva se konačan stohastički proces na Ω .

Kako je stohastički proces za fiksirano $t \in T$ slučajna promenljiva, a svaka slučajna promenljiva je funkcija od $\omega \in \Omega$, sledi da je stohastički proces funkcija dva argumenta, tj. $\{x(t, \omega) | t \in T, \omega \in \Omega\}$. Ukoliko je fiksirano $t \in T$, dobija se slučajna promenljiva $x(t): \Omega \rightarrow R^d$ koja se naziva zasek stohastičkog procesa u trenutku *t*. Za fiksirano $\omega \in \Omega$, dobija se realna funkcija vremena $t \rightarrow x_t(\omega) \in R^d, t \in T$ koja se naziva trajektorija ili realizacija stohastičkog procesa.

Ako je T diskretan skup, $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$, familija $\{x(t) | t \in T\}$ se naziva slučajnim nizom ili stohastičkim procesom sa diskretnim vremenom [STANKOVIĆ14].

Slučajni proces se definiše familijom konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela:

$$\begin{cases} F_{t_1,..t_n}(u_1,...,u_n) = P\{x(t_1) < u_1,..., x(t_n) < u_n\}, \\ t_1 < t_2 < ... < t_n, t_i \in [0,T], i = 1,..,n, n \in N \end{cases} \tag{3.32}$$

Jedan od najvažnijih stohastičkih procesa je Vinerov proces.

Definicija 3.5.3: Neka je (Ω, *F*, *P*) prostor verovatnoća. Standardno jednodimenzionalno Braunovo kretanje ili Vinerov proces je realan slučajni proces W(t), $t \geq 0$, $t \epsilon R$, koji ima sledeće osobine:

1. $W(0) = 0$ skoro sigurno.
2. Proces $W(t)$, $t \geq 0$ ima nezavisne priraštaje tj. slučajne promenljive $W(t_1)$, $W(t_2)$-$W(t_1)$, …, $W(t_m)$-$W(t_{m-1})$ su nezavisne, za $0=t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m$.
3. Za $0 \leq s < t$ priraštaj $W(t) - W(s)$ ima $N(0, t-s)$ raspodelu. [ĐANKOVIĆ13]

3.5.2 Stohastički sistemi

Sistemi koji se javljaju u našem okruženju, a koji su vremenski promenljivi, mogu se matematički izraziti običnim diferencijalnim jednačinama. Ako je trenutno stanje sistema označeno sa *x(t),* tada odgovarajući deterministički model koji opisuje ponašanje sistema ima sledeći oblik:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

Međutim, u većini slučajeva, sistemi se karakterišu velikim stepenom neodređenosti (neizvesnosti). Ova karakteristika predstavlja ograničenje koje se mora uzeti u obzir pri matematičkom opisivanju posmatranog sistema, odnosno sistem se ne može matematički opisati determinističkim modelima. U ovakvim uslovima, matematičko modeliranje sistema zasniva se na proširivanju determinističkog modela uvođenjem slučajnosti. Ove slučajnosti se opisuju terminima verovatnoće i krajnji ishod je stohastički model sistema. Uopšteni oblik stohastičkog modela predstavljen je sledećom funkcijom:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), t) + g(X(t), t)\xi(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{3.34}$$

gde je $X(t), t \geq 0$, nepoznati stohastički proces, a $\xi(t), t \geq 0$, dati stohastički proces uveden kao faktor slučajnosti u determinističkoj diferencijalnoj jednačini. Za početni uslov X_0 se takođe pretpostavlja da je slučajna promenljiva. Stohastički procesi transformišu stohastičke ulazne vrednosti u vrednosti dobijene primenom stohastičke jednačine (3.34) [ĐANKOVIĆ13].

3.5.3 Proces povratka na srednju vrednost

Definicija 3.5.4: Neka je dat merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada se niz σ-algebri $\{\mathcal{F}_t\}t\geq 0$ za koje važi da je:

1. $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$
2. *Ako je* $t_1 \leq t_2$ onda je $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$

naziva filtracija.

Jednodimenzionali proces povratka na srednju vrednost sa jednim faktorom sa konstantnim parametrima je dat opštom jednačinom [SANCHEZ13]:

$$dx_t = \alpha(\mu - x_t)dt + \sigma x_t^{\gamma} dW_t, t \in [0, T] \tag{3.35}$$

i definisan je na potpunom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ sa filtracijom $\{\mathcal{F}_t\}$, početnim uslovom $x_0=x$, gde su $\alpha>0$, $\sigma>0$, $\mu \in \mathbf{R}$ i $\gamma \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ konstante, a $\{W_t\}_{t\geq 0}$ je proces standardnog jednodimenzionalnog Braunovog kretanja definisan na istom prostoru verovatnoća.

Parametar α se naziva brzinom povratka na srednju vrednost, σ je parametar povezan sa volatilnošću, γ je elastičnost varijanse, a μ je nivo prosečne vrednosti ili dugoročne srednje vrednosti kojoj proces teži da se vrati. Jednačina (3.35) je poznata kao CKLS model koji je dobio naziv po autorima koji su ga predložili K. Chan, F. Karolyi, F. Longstaff and A. Sanders (1992.) u [CHAN92], i predstavlja generalizaciju modela kratkoročne kamatne stope sa konstantnim parametrima $\gamma \in \{0, 0.5, 1\}$ ili $\gamma=32$ sa $\alpha=0$.

Posebno će biti razmatran specijalan slučaj jednačine (3.35) za $\gamma=1$:

$$dx_t = \alpha(\mu - x_t)dt + \sigma x_t dW_t, t \in [0, T] \tag{3.36}$$

Ovaj stohastički proces koristi [SCHWARTZ97] u cilju kreiranja modela kretanja cena proizvoda:

$$dP = \alpha\left(ln\overline{P} - lnP\right)Pdt + \sigma PdW \tag{3.37}$$

Neka je $x = \ln P$, primena Ito-ove leme omogućava karakterizaciju log cene Ornstein-Uhlenbeck-ovim stohastičkim povratkom na srednju vrednost:

$$dx = \alpha\left(\overline{x} - x\right)dt + \sigma dW \tag{3.38}$$

gde je

$$\overline{x} = ln\left(\overline{P}\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \tag{3.39}$$

Tačan vremenski diskretan format za vremenski neprekidni proces povratka na srednju vrednost je stacionarni autoregresivni proces prvog reda [JANCZURA11], pa se za realizaciju stohastičkog procesa x_t koristi sledeći vremenski diskretan izraz:

$$x_t = x_{t-1}e^{-\alpha\Delta t} + \overline{x}\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right) + N\left(0,1\right)\sigma\sqrt{\left(1 - e^{-2\alpha\Delta t}\right)/\,2\alpha} \tag{3.40}$$

Gde je Δt fiksiran vremenski interval od trenutka t do t+1 i N(0,1) je slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom.

Zamenom u jednačini (3.40) $P = e^x$, dobija se vremenski diskretna jednačina po P_t:

$$P_t = e^{\left\{ln\left(P_{t-1}\right)e^{-\alpha\Delta t} + \left[ln\left(\overline{P}\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right]\left(1 - e^{-\alpha\Delta t}\right) + N\left(0,1\right)\sigma\sqrt{\left(1 - e^{-2\alpha\Delta t}\right)/2\alpha}\right\}} \tag{3.41}$$

U cilju procene parametara procesa povratka na srednju vrednosti, koristi se sledeća regresija:

$$dx_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon \tag{3.42}$$

gde su $\beta_0 = \alpha\overline{x}dt$ i $\beta_1 = -\alpha dt$. σ je standardna devijacija dobijena iz regresije.

3.5.4 Geometrijsko Braunovo kretanje

Definicija 3.5.5: Neka je $\{W_t,\ t \geq 0,\ W_0 = 0\}$ Vinerov slučajni proces, odnosno slučajni proces standardnog Braunovog kretanja. Stohastički proces *S(t)* koji zadovoljava jednačinu

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma W_t},\ S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma W_t} \tag{3.43}$$

Naziva se **geometrijskim Braunovim kretanjem**.

Jednačina (3.43) je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{3.44}$$

ili njene integralne forme

$$dS_t = S_0 + \mu \int_0^t S_t dt + \sigma \int_0^t S_t dW_t \tag{3.45}$$

gde je: μ – trend (mera srednjeg rasta), σ – volatilnost, a W_t – standardno Braunovo kretanje.

Da bi se odredila raspodela slučajne promenljive S_t, $t\epsilon[0,T]$, potrebno je prvo odrediti raspodelu za $\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$. Kako W_t ima $N(0,t)$ raspodelu, može se zaključiti da slučajna promenljiva $\ln S_t$ ima $N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$ raspodelu za fiksirano $t\epsilon[0,T]$. Primenom ove činjenice dobija se

$$\begin{aligned} P\left\{S_t < e^x\right\} = P\left\{\ln S_t < X\right\} &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[y - \ln S_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{e^x} \frac{1}{z\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[\ln z - \ln S_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]^2} dz. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Gustina slučajne promenljive S_t je

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}\left[\ln x - \ln S_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right]^2},\ x > 0, \tag{3.47}$$

pa slučajna promenljiva S_t ima lognormalnu raspodelu [MILOVANOVIĆ13].

Matematičko očekivanje i varijansa geometrijskog Braunovog kretanja su:

$$\begin{aligned} E\left(S_t\right) &= S_0 e^{\mu t} \\ \operatorname{var}\left(S_t\right) &= S_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t}-1\right) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Kompletni dokazi tvrđenja datih jednačinama (3.48) mogu se naći u [CAKIĆ10].

Tvrđenje: Geometrijsko Braunovo kretanje je proces Markova [SIGMAN06].

Dokaz: Neka je $S(t+\Delta t)$ nezavisan od $\{S(u): 0 \leq u < t\}$, tj. od prošlog vremena pre t, tada je

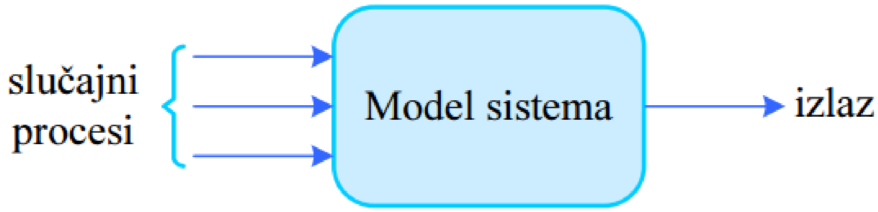
$$\begin{aligned} S\left(t+\Delta t\right) &= S_0 e^{W\left(t+\Delta t\right)} = S_0 e^{W\left(t\right)+W\left(t+\Delta t\right)-W\left(t\right)} = \\ &= S_0 e^{W\left(t\right)} e^{W\left(t+\Delta t\right)-W\left(t\right)} = S\left(t\right) e^{W\left(t+\Delta t\right)-W\left(t\right)}. \end{aligned}$$

Kako $S(t+\Delta t)$ zavisi samo od budućeg priraštaja standardnog Braunovog kretanja $W(t+\Delta t)$-$W(t)$ kako je standardno Braunovo kretanje proces Markova [CAKIC10], sledi da je i Geometrijsko Braunovo kretanje takođe proces Markova.

Neprekidni stohastički proces $\{X(t): t \geq 0\}$ je martingal ako $E\left(X\left(t+\Delta t\right) \middle| X(s): 0 \leq s \leq t\right) = X\left(t\right), \Delta t \geq 0, t \geq 0.$ Geometijskom Braunvo kretanje je martingal za μ=0.

3.6 Monte Carlo simulacija

Monte Carlo tehnika podrazumeva korišćenje slučajno generisanih brojeva ili događaja i koristi se u cilju simulacije slučajnih procesa ili determinističkih procesa čiji je proračun komplikovan. Na slici 3.6 je prikazan princip Monte Carlo simulacije. Ako su ulazi sistema slučajni procesi, tada će to biti i njegov izlaz. Rezultat simulacije se ocenjuje iz izlaznog slučajnog procesa nekom od statističkih metoda. Monte Carlo simulacija se može primeniti za analizu kako determinističkih, tako i stohastičkih modela sistema.



Slika 3.6 Princip Monte Carlo simulacije (*preuzeto iz* [BJELICA13])

Monte Carlo simulacije imaju široku primenu u različitim oblastima. Koriste za simulacije finansijskih sistema, za izračunavanje vrednosti višestrukih određenih integrala [RUBINSTEIN07, PAPOULIS91], u telekomunikacijama [BJELICA13], za aproksimiranje vrednosti konstanti idr.

Metoda Monte Carlo je samo jedna od mnogih metoda za analiziranje neodređenosti, koja ima za cilj da odredi kako slučajna varijacija, nedostatak znanja ili greška utiču na osetljivost, rad ili pouzdanost sistema koji se modelira. Ova metoda je kategorisana kao metoda uzorkovanja zato što se ulazne vrednosti slučajno kategorišu iz raspodela verovatnoće da bi se simulirao proces uzorkovanja iz stvarne populacije. Prema tome, treba izabrati raspodelu za ulazne parametre koja najpribližnije objedinjuje podatke koji su već poznati ili najbolje reprezentuje trenutni nivo znanja o nekoj pojavi. Podaci generisani simulacijom mogu se predstaviti kao raspodela verovatnoće (može histogrami) ili pretvoreni u procene pouzdanosti, intervale pouzdanosti u oblasti tolerancije [BJELICA13].

Pod metodom Monte Carlo podrazumevaju se numeričke metode za rešavanje matematičkih problema uz pomoć modeliranja slučajnih promenljivih i statističkih ocena njihovih karakteristika. U cilju izračunavanja neke skalarne veličine a potrebno je naći takvu slučajnu promenljivu X za koju je $M(X)=a$. Tada se određuje N međusobno nezavisnih vrednosti $X_1,X_2,\dots,X_N$ promenljive X pa se uzima približno,

$$a \approx \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_N)}{N} \tag{3.49}$$

a na osnovu centralne granične teoreme iz verovatnoće ovakva aproksimacija daje dobre rezultate za veliko N.

Osnovni koraci u realizaciji metode Monte Carlo korišćenjem nekog programa su:

1. Definisanje domena mogućih ulaznih podataka.
2. Generisanje ulaznih podataka iz domena u skladu sa raspodelom verovatnoća.
3. Određivanje izlaznih veličina korišćenjem izračunavanja vrednosti funkcije generisanih ulaznih promenljivih.
4. Višestruko ponavljanje izračunavanja.
5. Analiza dobijenih izlaznih veličina.

Osnova za formiranje slučajnih realizacija pri diskretnom računanju je generator slučajnih brojeva. Generatori slučajnih brojeva mogu koristiti neke fizičke metode (bacanje novčića, kocke, rulet, itd) za određivanje slučajnih vrednosti. Češće se koriste brojevi iz intervala (0,1) koji se računaju po nekim formulama i koji se zovu pseudoslučajni brojevi. Algoritam na osnovu kojega se dobija niz pseudoslučajnih brojeva zove se generator pseudoslučajnih brojeva. Niz X_1, $X_2, \dots, X_n$ pseudoslučajnih brojeva najčešće se dobija primenom neke rekurentne formule. Početna vrednost rekurentne formule se naziva još i seme (seed). Najpoznatije formule su:

- Metod sredine kvadrata [VELJKOVIĆ].
- Linearni kongruentni generatori [BJELICA13, KNUTH97]
- Nelinearni kongruentni generatori [EICHENAUER86]

Jedan od često primenjivanih metoda za generisanje uniformno raspodeljenih vrednosti je linearni kongruentni generator koji određuje cele slučajne brojeve iz intevala [0, m-1] primenom formule:

$$X_{n+1} = \left(aX_n + b\right) \bmod m \qquad (3.50)$$

U formuli (3.50), $m > 0$ je veliki broj koji se naziva modulom i koji predstavlja maksimalan mogući period generisane sekvence. Vrednost parametra a je u opsegu (0, m), b je tzv. inkrement (0 ili 1), dok se početna vrednost $X_0 \in (0, m)$ naziva seed [VELJKOVIĆ]. Dobijena celobrojna vrednost X_k može se transformisati na interval [0,1) na sledeći način:

U(k)= $$U\left(k\right) = \frac{X_k}{m} \qquad (3.51)$$

Postupak dobijanja slučajne veličine iz njene funkcije raspodele ili funkcije gustine verovatnoće naziva se uzorkovanje vrednosti slučajne promenljive.

Formiranje bilo kog niza slučajnih brojeva sa zadatim zakonom raspodele na osnovu slučajne veličine X uniformno raspoređene na intervalu [0,1] vrši se preslikavanjem slučajnog broja X_i koji je dobijen iz uniformne raspodele [0,1] u slučajan broj Y_i iz skupa sa zadatim zakonom raspodele. Ovo preslikavanje se može izvršiti na osnovu poznate osobine iz teorije verovatnoće, na osnovu koje ako slučajna veličina ima gustinu raspodele *f(x),* tada raspodela slučajne veličine η

$$\eta = \int_{-\infty}^{\xi} f(x)dx \tag{3.52}$$

je uniformna od 0 do 1.

Polazeći od ove osobine dobija se pravilo za formiranje brojeva raspoređenih po zakonu raspodele određenom funkcijom $f(Y)$. Na osnovu realizacije η ako je poznata vrednost X_i slučajne promenljive X uniformno raspoređene na intervalu [0,1] dobija se odgovarajuća vrednost Y_i rešavanjem jednačine:

$$\int_{-\infty}^{Y_i} f(Y)dY = X_i \tag{3.53}$$

po Yi.

Na taj način se preslikava skup vrednosti X_i u skup vrednosti Y_i.

Događaj A je događaj takav da slučajna veličina X zadovoljava nejednakost $X < p$. Kako je slučajna veličina uniformno raspoređena na [0,1] njena gustina raspodele $f(Y)$ jednaka je 1, pa je verovatnoća događaja da X bude manje od p jednaka:

$$P(0 \le X \le p) = \int_{0}^{p} dY = p \tag{3.54}$$

Događaj A koji je definisan kao pojavljivanje nejednakosti $X < p$, ima verovatnoću p. Postupak modeliranja je: uzimaju se u uzastopnom izboru vrednosti X_i , (i=1,2,...,n), slučajne promenljive X, uniformno raspoređene na intervalu [0,1] i ispituje se da li je relacija $X < p$ zadovoljena. Ako je zadovoljena relacija $X < p$ događaj A, čija je verovatnoća p, je proizašao, u suprotnom nije proizašao. Ponavljanjem realizacija n puta, modelira se proces pojavljivanja događaja A.

Pojavom računara stekli su se uslovi za efektivnu primenu Monte Carlo metode jer su za dobijanje dovoljno tačne ocene tražene veličine, potrebna izračunavanja za veoma veliki broj posebnih slučajeva i odgovarajuća statistička obrada ogromnog numeričkog materijala.

4. Prognoza operativne efikasnosti

4.1 Model prognoze operativne efikasnosti zasnovan na teoriji sivih sistema

4.1.1 Koncept modela

Predikcija operativne efikasnosti je u fokusu interesovanja kad se radi o planiranju poslovanja podzemnog rudnika. Proizvodnja rude u vremenskom periodu *k* može se reprezentovati skupom tehnologija eksploatacije (MTS):

$$MTS(k)=\left\{\left(I(k),O(k):I(k)\in R_{+}^{g},O(k)\in R_{+}^{l},I(k)\ \text{može ostvariti}\ O(k)\right)\right\}. \qquad (4.1)$$

gde je $I\left(k\right)=\left(i_{1}^{k},i_{2}^{k},...,i_{g}^{k}\right)$ ulazni vektor tehnologije eksploatacije, a $O\left(k\right)=\left(o_{1}^{k},o_{2}^{k},...,o_{l}^{k}\right)$ je izlazni vektor koji predstavlja indikatore dobijene proizvodnjom. *MTS* je prostor ostvarljivih kombinacija ulazno-izlaznih vektora u vremenskom periodu *k*.

Ulazni vektor *MTS* čine brojne promenljive koje se mogu podeliti u tri grupe: karakteristike (osobine) mineralnih ležišta, metode podzemnog otkopavanja i metode pripreme mineralnih sirovina. Izlazni vektor je obično sastavljen iz sledećih promenljivih: ostvarenog kapaciteta proizvodnje i kvaliteta proizvedenih mineralnih sirovina.

Operativna efikasnost se obično izražava nekim ekonomskim indikatorom. Saglasno zahtevanom tipu operativne efikasnosti, *MTS* može biti transformisan i pridružen ekonomskom skupu (*ES*). Ova transformacija znači da se neke promenljive *I*(*k*) i *O*(*k*) koriste za izračunavanje nekih promenljivih u *ES*.

U cilju određivanja operativne efikasnosti postojećeg podzemnog rudnika koristi se koncept stepena operativne sposobnosti (*DOL*). *DOL* je kao što je u poglavlju 3.3 rečeno, odnos bruto profita (EBIT) projekta i visine fiksnih operativnih troškova.

DOL u periodu *k* može biti izračunat formulom (4.2) koja predstavalja jedan od zapisa formule (3.1) [WEYGANDT10]:

$$DOL(k) = \frac{REV(k) - PC(k)}{REV(k) - PC(k) - FC(k)} \tag{4.2}$$

Gde je:

- *REV − prihod (novčanih jedinica)*
- *PC – troškovi proizvodnje (novčanih jedinica)*
- *FC – fiksni troškovi (novčanih jedinica)*

Operativna sposobnost se odnosi na iznos fiksnih troškova u strukturi troškova. Detaljna razmatranja *DOL*-a su data u poglavlju 3.3. Kao i u opštem slučaju, veća vrednost *DOL-a* ukazuje da je poslovanje rudarske kompanije izloženo većem riziku.

Ulazni vektor $X(k) = A(k) \cup B(k) \cup C(k)$ koji se koristi u cilju evaluacije operativne efikasnosti je unija sledeća tri skupa:

- *A*(*k*) – podskup ulaznih promenljivih tehnologija eksploatacije,
- *B*(*k*) – podskup izlaznih promenljivih tehnologija eksploatacije,
- *C*(*k*) – skup spoljnih promenljivih.

Matrica vektora ulaznih promenljivih za posmatrani problem je:

$$X(k) = [X_j(k)] = [x_{6,k}] = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & x_{2,k} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \dots & x_{3,k} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & \dots & x_{4,k} \\ x_{5,1} & x_{5,2} & \dots & x_{5,k} \\ x_{6,1} & x_{6,2} & \dots & x_{6,k} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Gde su:

- $x_{1,k}$ – kapacitet proizvodnje rude (t/godina),
- $x_{2,k}$ – fiksni troškovi (novčanih jedinica),
- $x_{3,k}$ – prihodi (novčanih jedinica),
- $x_{4,k}$ – troškovi proizvodnje (novčanih jedinica),
- $x_{5,k}$ – radni dani (broj dana/godina),
- $x_{6,k}$ – stepen iskorišćenja proizvodnih kapaciteta (%)

Neka je $y(1), y(2), ..., y(k)$ niz posmatranih vrednosti *DOL-a* na godišnjem nivou, tj. sekvenca glavnog faktora. Model prognoze *DOL-a* postojećeg podzemnog rudnika, prikazan u ovom radu, je formiran primenom jednačine (3.24):

$$\frac{dy^{(1)}}{dk} + ay^{(1)} = b_1 x_1^{(1)} + b_2 x_2^{(1)} + \ldots + b_6 x_6^{(1)} \tag{4.4}$$

Formula za određivanje *DOL*-a u funkciji vremena je:

$$\hat{y}^{(1)}(k+1) = \left\{ y^{(0)}(1) - \sum_{j=1}^{6} \frac{b_j}{a} \cdot x_j^{(1)}(k+1) \right\} e^{-ak} + \sum_{j=1}^{6} \frac{b_j}{a} \cdot x_j^{(1)}(k+1)$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{4.5}$$

Odgovarajuća prognozirana vrednost za $y_k^{(0)}$ se dobija primenom operatora IAGO, tj. primenom (3.5):

$$\begin{cases} \hat{y}^{(0)}(k) = \hat{y}^{(1)}(k) - \hat{y}^{(1)}(k-1), \ k = 2, 3, \ldots, n \\ \hat{y}^{(0)}(1) = y^{(0)}(1), \ k = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Za *k*>*n* može se prognozirati *DOL*:

$$\begin{cases} \hat{y}^{(1)}(n+h+1) = \left\{ y^{(0)}(1) - \sum_{j=1}^{6} \frac{b_j}{a} \cdot x_j^{(1)}(n+h+1) \right\} e^{-a(n+h)} + \sum_{j=1}^{6} \frac{b_j}{a} \cdot x_j^{(1)}(n+h+1) \\ \qquad h = 0,1,2,\dots,T-1 \\ \hat{y}^{(0)}(n+h) = \hat{y}^{(1)}(n+h) - \hat{y}^{(1)}(n+h-1), \;\; h = 1,2,\dots,T \end{cases} \tag{4.7}$$

Gde je T buduće vreme.

Model prognoze bi trebao da obuhvati opšti vremenski interval, uzimajući karakteristike ulaznih promenljivih koje direktno utiču na vrednost *DOL-a*. U ovom poglavlju, je naveden predloženi model prognoze *DOL-a* pod višestrukim neodređenostima i neuniformnosti ulaznih podataka. Model je, uglavnom, zasnovan na simulacijama višestrukih realizacija slučajnih promenljivih i pravljenju prognoze na osnovu očekivanih vrednosti.

U skladu sa procenom dobijenom primenom funkcije definisane jednačinom (4.7), očekivana vrednost *DOL*-a u budućnosti je definisana kao:

$$E\left(\hat{y}^{(0)} \middle| x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, n+h\right) \tag{4.8}$$

4.1.2 Definisanje ulaznog vektora

Skup ulaznih promenljivih se može podeliti na dva podskupa; $X(n+h) = EXP(n+h) \cup SIM(n+h)$, gde $EXP(n+h)$ označava skup koji sadrži promenljive čije vrednosti su dobijene procenom stručnjaka, a $SIM(n+h)$ označava skup čiji su elementi promenljive definisane nekim stohastičkim pravilom tj:

$$\begin{cases} EXP(n+h) = [x_1, x_2, x_5, x_6] \\ SIM(n+h) = [x_3, x_4] \end{cases} \tag{4.9}$$

Vrednosti promenljivih x_1, x_2, x_5, i x_6 su determinističke prirode, dok su ostale promenljive stohastičke.

Promenljivost prihoda

Rudarske kompanije koja nemaju topioničarska postrojenja realizuju svoj prihod prodajom koncentrata metala kao finalnog proizvoda. Procena prihoda je komplikovana i rizična aktivnost. Godišnji prihod rudnika se računa kao proizvod broja godišnje proizvedenih i prodatih jedinica proizvoda, sa tržišnom cenom po jedinici proizvoda. Godišnji prihod rudnika (x_3) se računa primenom sledeće jednačine:

$$REV_{god} = Q_{god} \cdot \sum_{j=1}^{n} V_j^{con} \cdot \frac{G_j \cdot M_j}{m_j^{con}} \tag{4.10}$$

Gde je:

- Q_{god} - godišnja proizvodnja rude (x_1),
- V_j^{con} - je vrednost koncetrata metala,
- G_j – sadržaj korisne komponente u rudi (kvalitet rude) (%),
- M_j - flotacijsko iskorišćenje (%),
- m_j^{con} - sadržaj metala u koncentratu (%), i
- n - broj koncentrata metala dobijenih iz rude (n>1 za polimetalična ležišta depozite).

Prva značajna komponenta proračuna prihoda rudnika je godišnja proizvodnja koncentrata. Jedna od ključnih promenljivih povezana sa godišnjom proizvodnjom koncentrata je tonaža dezintegrisane rude. Godišnja tonaža je izvedena iz plana proizvodnje i obeležena je sa Q.

Druga ključna promenljiva povezana sa određivanjem godišnje proizvodnje prodajnih jedinica je kvalitet iskopane rude. Kvalitet rude (G) je definisan kao odnos (količnik) korisne mase metala i ukupne mase rude. Kritična vrednost G varira u prostoru i može se proceniti funkcijom normalne raspodele verovatnoća. Primena normalne raspodele pri proceni G je zasnovana na geo-statističkim metodama razvijenim u cilju evaluacije sadržaja korisne komponente u ležištu. Istražnim bušenjem se uzimaju uzorci koji se koriste za procenu kvaliteta ležišta. Na osnovu svakog uzorka dobijaju se informacije o sadržaju metala, pa se može napraviti histogram sadržaja. Na osnovu dobijenog histograma se bira odgovarajuća funkcija raspodele verovatnoća. U većini slučajeva, koristi se normalna raspodela, koja je primenjena i u modelu prezentovanom u ovom radu:

$$G \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{4.11}$$

Na prvi pogled, čini se da se vrednost kvaliteta rude (*G*) tokom vremena ne menja, ali ako se uzme u obzir da front tokom vremena napreduje preko različitih delova nalazišta, onda je jasno da je *G* vremenski zavisna promenljiva. Zbog jednostavnosti, usvojeno je da vrednosti *G* u budućem vremenskom periodu pripradaju intervalu čije su granice $\mu \pm 2\sigma$.

Većina ruda zahteva preradu pre nego što se plasira u prodaju. Gubitci prilikom prerade se moraju proceniti i ustanoviti odgovarajući procenti iskorišćenja metala. Ova iskorišćenja se obično procenjuju na osnovu programa metalurških testova. Flotacijsko iskorišćenje je treća bitna promenljiva koja se mora proceniti kako bi se mogla proceni godišnja proizvodnja prodajnih jedinica dobijenih iz rude. Specifično stohastičko ponašenje koje je korišćeno da bi se kvanifikovala slučajnost povezana sa flotacijskim iskorišćenjem (*M*) je funkcija uniformne raspodela verovatnoća. Praktično je izvesno da će flotacijsko iskorišćenje metala biti u intervalu [*a*, *b*], jer je to moguće postići kontrolom procesa pripreme. Na primer, flotacija je najšire korišćeni metod za dobijanje minerala. Ona posebno koristi prednost različitih fizičko-hemijskih svojstava površine minerala, njihovu vlažnost, koja može biti prirodno svojstvo ili veštački promenjena hemijskim reagensima. Promenom hidrofobnosti ili hidrofilnosti stanja njihove površine, čestice minerala suspenzovane u vodi mogu da se lakše vežu za mehuriće vazduha koji prolaze kroz flotacionu ćeliju ili da ostanu u pulpi. Mehurići vazduha prolaze kroz pulpu sve do njenog površinskog dela i formiraju skramu, koja se zajedno sa prilepljenim hidrofobnim mineralima uklanja. Talog koji sadrži hidrofilne minerale se ulanja sa dna floatacijske ćelije. U skladu sa tim, sve vrednosti intervala [*a*, *b*] su jednako verovatne, pa se koristi uniformna raspodela:

$$M \sim unif\left(a,b\right) \tag{4.12}$$

Na prvi pogled deluje kao da se vrednost *M* ne menja tokom vremena, ali ako se uzme u obzir da na flotaciju utiče veliki broj parametara i da je teško postići da svi parametri budu konstantni u nekom intervalu vremena, onda je jasno da je i *M* vremenski zavisna promenljiva. Može se usvojiti da vrednost *M* pripada nekom intervalu [*a*, *b*], ali *M* može uzeti stohastičke vrednosti za svaku godinu posmatranog vremenskog horizonta.

Druga bitna komponenta pri određivanju prihoda rudnika je jedinična prodajna cena ili jedinična prodajna cena koncentrata metala (V_j^{con}). Ona direktno zavisi od cene mineralne sirovine, sadržaja metala u koncentratu i iskorišćenja metala. Procena cene metala u nekom budućem trenutku je problematična jer je moguća velika greška procene. Predproizvodni period rudarskih projekata je dugotrajan, tako da je uspeh ovih projekata određen cenom minerala u narednih pet do deset godina od trenutka usvajanja projekta.

Tržišni rizik povezan sa cenom minerala (*P*) se modeluje specijalnim stohastičkim procesom, procesom povratka na srednju vrednost . Proces povratka na srednju vrednost je pogodan za primene u ekonomiji, jer iako cena robe ima kratkoročne oscilacije, na dugoročnom nivou ona teži povratku na „normalani" tj. nivo dugoročne ravnoteže. Da bi se odredila cena u nekom budućem trenutku, neophodne su vrednosti promena cena iz prošlosti. Za model cene metala je korišćen stohastički proces povratka na srednju vrednost opisan u poglavlju 3.5.3 [SCHWARTZ97]:

$$dP = \alpha\left(ln\overline{P} - lnP\right)Pdt + \sigma PdW \tag{4.13}$$

Neka je $x=lnP$, Ito-ova lema koja omogućava karatkerizaciju logaritma (log) cene primenom Ornstein-Uhlenbeck–ovog stohastičkog procesa povratkla na srednju vrednost:

$$dx = \alpha\left(\overline{x} - x\right)dt + \sigma dW \tag{4.14}$$

gde je

$$\overline{x} = ln\left(\overline{P}\right) - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \tag{4.15}$$

$\overline{P}$ je dugoročna ravnotežna cena metala, α je parametar koji meri brzinu povratka na dugoročnu log cenu $\overline{P}$, dW je priraštaj standardnog Braunovog kretanja, a σ se odnosti na stopu (promenljivosti) volatilnosti cene. Uslovi tržišta određuju mehanizam usaglašavanja cene metala. Vremenski diskretan format vremenski neprekidnog procesa povratka na srednju vrednost je stacionarni autoregresivni proces prvog reda [DIXIT94], pa se uzorak jednog scenarija simulacije x_t dobija korišćejem vremenski diskrentog izraza:

$$x_t = x_{t-1}e^{-\alpha\Delta t} + \bar{x}\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right) + N\left(0,1\right)\sigma\sqrt{\left(1-e^{-2\alpha\Delta t}\right)/2\alpha} \tag{4.16}$$

gde je Δt fiksni vremenski interval od t do t+1, a N(0,1) slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom.

Zamenom $P = e^x$ u jednačinu (4.16), dobija se vremenski diskretna jednačina za P_t, definisana na sledeći način:

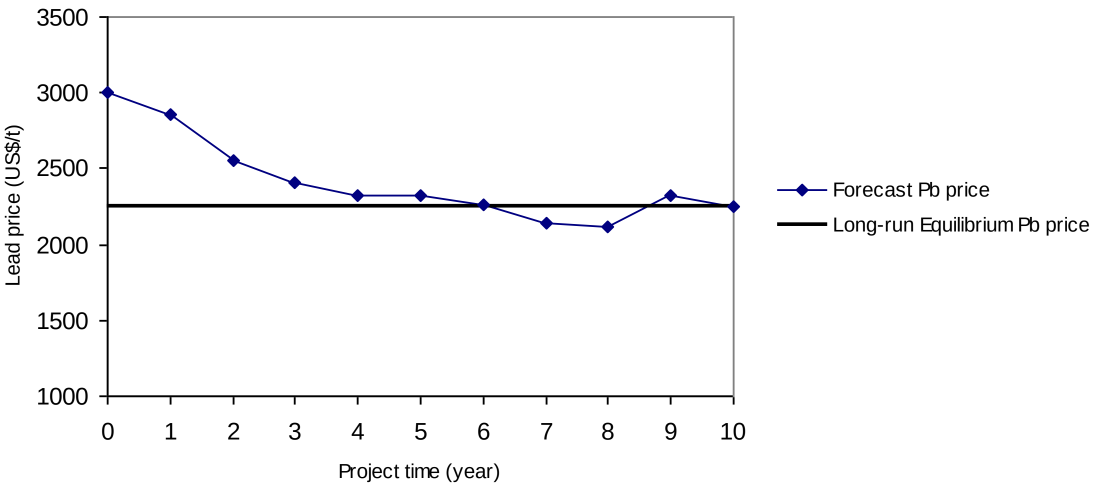
$$P_t = e^{\left\{ln(P_{t-1})e^{-\alpha\Delta t} + \left[ln(\bar{P}) - \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right]\left(1-e^{-\alpha\Delta t}\right) + N(0,1)\sigma\sqrt{\left(1-e^{-2\alpha\Delta t}\right)/2\alpha}\right\}} \tag{4.17}$$

U cilju procene parametara procesa povratka na srednju vrednost, primenjena je sledeća regresija:

$$dx_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon \tag{4.18}$$

gde je $\beta_0 = \alpha\bar{x}dt$, a $\beta_1 = -\alpha dt$. Dakle, regresijom dx u odnosu na x, dobijaju se procene β_0 i β_1. σ je standardna devijacija dobijena iz regresije. Brzina povratka srednjoj vrednosti (α) je negativna vrednost trenda, dok je dugoročna ravnotežna vrednost cene ($\bar{P}$) prethodna procena ove regresije podeljena sa brzinom povratka srednjoj vrednosti.

Neka P={P_t, t=0,1,…,T} označava scenario promene cena u kom je P_t trenutna cena koja je određena jednačinom (4.17). Slika 4.1 predstavlja jedan scenario promene cene metala (na primer, olova) simulirane jednačinom (4.17).



Slika 4.1- Primer jedne simulacije cene olova na godišnjem nivou u intervalu od 10 godina

U cilju simulacije P, korišćen je scenario cene metala za vremenski interval, $[n,n+T]$, sa priraštajem $\Delta t=1$.

Prodajna cena jedinične vrednosti koncentrata metala je izražena:

$$V^{con}(t)=f\left(P(t),m^{con},m^{mr}\right) \tag{4.19}$$

gde je m^{mr} iskorišćenje metala (%). U zavisnosti od tipa metala, vrednost V^{con} se računa na različite načine.

Promenljivost troškova proizvodnje

Troškovi proizvodnje (PC) nastaju direktno u procesu proizvodnje. Ovi troškovi uključuju: izradu pripremnih prostorija, otkopavanje, logističke službe koje pružaju podršku rudarima i troškove pripreme mineralnih sirovina. Neodređenost troškova jedninične proizvodnje u budućnosti modelovana je primenom posebnog stohastičkog procesa, tj. geometrijskog Braunovog kretanja.

U modelu opisanom u ovom radu, za procenu troškova proizvodnje, korišćen je vremenski neprekidni proces modelovan Ito-Dob-ovom stohastičkom diferencijalnom jednačinom koja opisuje kretanje troškova proizvodnje po jedinici proizvoda.

Opšti oblik linearne stohastičke diferencijalne jednačina koji se koristi za određivanje troškova proizvodnje je:

$$dCO_t=\rho\cdot\left(CO_t,t\right)dt+\sigma\cdot\left(CO_t,t\right)\cdot dW_t,\ \ CO_{t_0}=CO_0 \tag{4.20}$$

gde je, $t\geq t_0$, W_t je Braunovo kretanje , dok je $CO_0>0$ početna vrednost troškova.

CO_t je geometrijsko Braunovo kretanje, koje je rešenje sledeće Ito-Dob-ove linearne stohastičke jednačine:

$$dCO_t=\rho\cdot CO_t dt+\sigma\cdot CO_t\cdot dW_t \tag{4.21}$$

gde je:

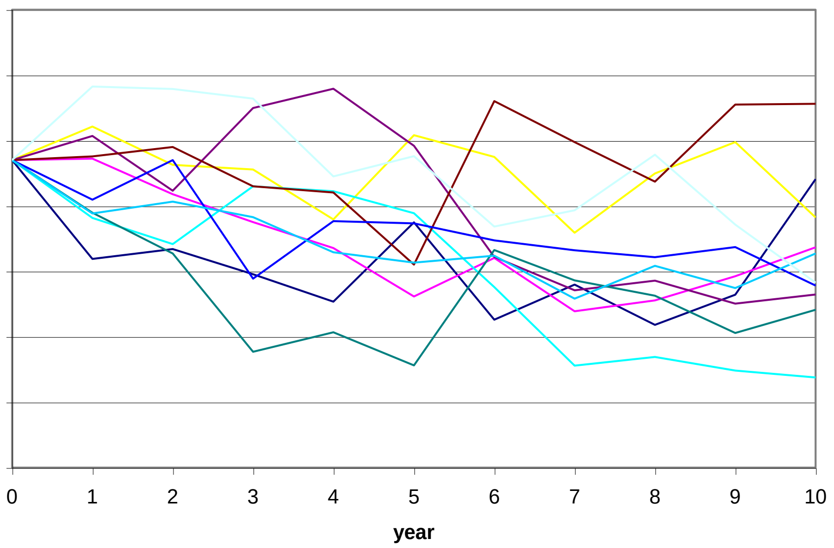
- ρ – trend
- σ – volatilnost
- W_t – standardno Braunovo kretanje

Primenom Ito-Dob-ove formule na $(CO_t)=ln(CO_t)$, rešenje ove jednačine je:

$$CO_t = CO_{t-1} \cdot e^{\left\{\left(\rho - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + N(0,1)\sigma\sqrt{\Delta t}\right\}} \tag{4.22}$$

Jednačina (4.22) opisuje jedan operativni scenario troškova CO_t.

Neka $CO=\{CO_t,\ t=0,1,...,T\}$ označava scenario troškova CO_t, gde je CO_t određen jednačinom (4.22). Slika 4.2 prikazuje primer simulacija (s = 1,2,..,S) scenarija za jedinične proizvodne troškove korišćenjem jednačine (4.22) S puta.



Slika 4.2 – Simulacije troškova proizvodnje na godišnjem nivou

U cilju simulacije CO, primenjuje se scenario troškova za vremenski interval, $[n, n+T]$, sa priraštajem $\Delta t = 1$.

Godišnji troškovi proizvodnje se određuju iz jednačine:

$$PC_{god} = Q_{god} \cdot CO(t) \tag{4.23}$$

Promenljive čije su vrednosti određene na osnovu znanja stručnjaka

Da bi procenili odgovarajuće vrednosti ovih promenljivih, neophodno je konsultovati stručnjake iz odgovarajućih oblasti. Često se procene sručnjaka za isti parameter razlikuju, pa je neohodno primeniti neki metod koji bi dao što tačniju procenu. Neka p stručnjaka da svoju procenu vrednosti promenljivih. Vrednost koja će biti korišćena za procenu vrednosti konkretnog parametra koji se razmatra, se dobija kao srednja vrednost mišljenja stručnjaka. U Tabeli 4.1 je simbolički prikazan proces primenjen u cilju određivanja vrednosti parmerara koji se u ovom modelu procenjuju primenom znanja stručnjaka.

Tabela 4.1: Procena vrednosti promenljivih na osnovu znanja stručnjaka

Expert				Vrednost
E_1	E_2	…	E_p	
$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	…	$x_{1,p}$	$E(x_1)=\dfrac{x_{1,1}+x_{1,2}+\ldots+x_{1,p}}{p}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	…	$x_{2,p}$	$E(x_1)=\dfrac{x_{2,1}+x_{2,2}+\ldots+x_{2,p}}{p}$
$x_{5,1}$	$x_{5,2}$	…	$x_{5,p}$	$E(x_1)=\dfrac{x_{5,1}+x_{5,2}+\ldots+x_{5,p}}{p}$
$x_{6,1}$	$x_{6,2}$	…	$x_{6,p}$	$E(x_6)=\dfrac{x_{6,1}+x_{6,2}+\ldots+x_{6,p}}{p}$

4.1.3 Algoritam prognoze operativne efikasnosti

Model prognoze je razvijen na osnovu procene stručnjaka i simulacijama promena *DOL*–a u okviru vremenskog intervala prognoze i uzima u obzir promenljivost ulaznih parametara. Simulacijom sistema prognoze, imitirane su akcije sistema u cilju merenja izlaza u odnosu na različite ulaze. Prednost simulacije sistema ogleda se u mogućnosti da se ponovi njegov razvoj onoliko puta koliko je potrebno u nezavisnim uslovima. Simulacije omogućavaju analitičarima da opišu slučajnost promenljivih koje utiču na vrednost *DOL-a* u zavisnosti od različitih vremenskih scenarija. Vrednost *DOL-a* se obično prognozira na godišnjem nivou.

Primarni cilj korišćenja simulacije u prognoziranju je da se odredi raspodela *DOL-a* na osnovu promenljivih koje utiču na njegov učinak, što daje rezultat srednje ili očekivane vrednosti *DOL*-a za svaku godinu definisanog vremenskog intervala. Odnos promenljivih koje utiču na *DOL* je dat jednačinom (4.7).

Za svaku simulaciju, ulazne vrednosti i izlazna vrednost *DOL* predstavljaju jedno moguće stanje prirode. Simulirane vrednosti *DOL-a* su dobijene iz sledećih proračuna:

$$
\begin{cases}
\hat{y}^{(1)s}\left(n+h+1\right)=\hat{y}^{(1)}\left(x_{1,n+h},x_{2,n+h}^{s},x_{3,n+h}^{s},x_{4,n+h}^{s},x_{5,n+h},x_{6,n+h}^{s}\right) \\
\qquad h=0,1,2,\ldots,T-1 \\
\hat{y}^{(0)s}\left(n+h\right)=\hat{y}^{(1)s}\left(n+h\right)-\hat{y}^{(1)s}\left(n+h-1\right) \\
\qquad h=1,2,\ldots,T \\
\qquad s=1,2,\ldots,S
\end{cases}
\tag{4.24}
$$

gde S označava broj simulacija.

Prostor simulacija za s=1 i k>n, gde se prvih šest kolona odnose na razvojni put ulaznih promenljivih dok se poslednja kolona odnosi na razvojni put *DOL-a*, može prikazati na sledeći način:

$$
DOL_T^{s=1}=\begin{bmatrix}
s=1 & s=1 & \ldots & s=1 \\
x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots & x_{1,T} \\
x_{2,1} & x_{2,2} & \ldots & x_{2,T} \\
x_{3,1} & x_{3,2} & \ldots & x_{3,T} \\
x_{4,1} & x_{4,2} & \ldots & x_{4,T} \\
x_{5,1} & x_{5,2} & \ldots & x_{5,T} \\
x_{6,1} & x_{6,2} & \ldots & x_{6,T} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
jedna\check{c}ina(4.7) & jedna\check{c}ina(4.7) & jedna\check{c}ina(4.7) & jedna\check{c}ina(4.7) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\hat{y}_1^{(1)s=1} & \hat{y}_2^{(1)s=1} & \ldots & \hat{y}_T^{(1)s=1} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\hat{y}_1^{(0)s=1} & \hat{y}_2^{(0)s=1} & \ldots & \hat{y}_T^{(0)s=1}
\end{bmatrix}
\tag{4.25}
$$

Dobijeni rezultati simulacija DOL_T^s, s=1,2,…,S , se koriste u cilju procene raspodele *DOL*-a za svaku godinu vremenskog intervala prognoze. Očekivane vrednosti *DOL*-a mogu se predstaviti na sledeći način:

$$E\left(DOL_T^S\right)=\begin{bmatrix} \hat{y}_1^{(0)s=1} & \hat{y}_2^{(0)s=1} & \cdots & \hat{y}_T^{(0)s=1} \\ \hat{y}_1^{(0)s=2} & \hat{y}_2^{(0)s=2} & \cdots & \hat{y}_T^{(0)s=2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{y}_1^{(0)s=S} & \hat{y}_2^{(0)s=S} & \cdots & \hat{y}_T^{(0)s=S} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ E\left(\hat{y}_1^{(0)}\right) & E\left(\hat{y}_2^{(0)}\right) & \cdots & E\left(\hat{y}_T^{(0)}\right) \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Na osnovu jednačine (4.26), rukovodstvo kompanije dobija vector prognoze za *DOL*:

$$FIV\left(j,T\right)=E\left(DOL\right)=\left[E\left(DOL_1\right) \quad E\left(DOL_2\right) \quad \ldots \quad E\left(DOL_T\right)\right] \tag{4.27}$$

Ovaj vektor se odnosi na informacije mogućih budućih stanja Stepena operativne sposobnosti u vremenskom intervalu prognoze.

Prostor simulacija za s=1 i k>n dat je matricom (4.28), u kojoj se prvih sedam vrsta odnose na razvojnu putanju *DOL-a* i ulaznih promenljivih, dok se ostale vrste odnose na razvojne putanje sivih relacionih koeficijenata.

$$\xi_{j,T}^{s=1}=\begin{bmatrix} s=1 & s=1 & \ldots & s=1 \\ \hat{y}_1^{(0)} & \hat{y}_2^{(0)} & \ldots & \hat{y}_T^{(0)} \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots & x_{1,T} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \ldots & x_{2,T} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \ldots & x_{3,T} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & \ldots & x_{4,T} \\ x_{5,1} & x_{5,2} & \ldots & x_{5,T} \\ x_{6,1} & x_{6,2} & \ldots & x_{6,T} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ jedna\check{c}ina\left(3.31\right) & jedna\check{c}ina\left(3.31\right) & jedna\check{c}ina\left(3.31\right) & jedna\check{c}ina\left(3.31\right) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \xi_{1,1}^{s=1} & \xi_{1,2}^{s=1} & \ldots & \xi_{1,T}^{s=1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{6,1}^{s=1} & \xi_{6,2}^{s=1} & \ldots & \xi_{6,T}^{s=1} \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Dobijeni rezultati simulacija $\xi^{s}_{j,T}$, s=1,2,…,S , se koriste da bi se procenila raspodela ξ_j za svaku godinu definisanog vremenskog intervala. Očekivane vrednosti relacionih koeficijenata ξ_j mogu biti izražene sledećom matricom vektora

$$E\left(\xi^{s}_{j,T}\right)=\begin{bmatrix} E\left(\xi^{s}_{1,1}\right) & E\left(\xi^{s}_{1,2}\right) & \ldots & E\left(\xi^{s}_{1,T}\right) \\ E\left(\xi^{s}_{2,1}\right) & E\left(\xi^{s}_{2,2}\right) & \ldots & E\left(\xi^{s}_{2,T}\right) \\ E\left(\xi^{s}_{3,1}\right) & E\left(\xi^{s}_{3,2}\right) & \ldots & E\left(\xi^{s}_{3,T}\right) \\ E\left(\xi^{s}_{4,1}\right) & E\left(\xi^{s}_{4,2}\right) & \ldots & E\left(\xi^{s}_{4,T}\right) \\ E\left(\xi^{s}_{5,1}\right) & E\left(\xi^{s}_{5,2}\right) & \ldots & E\left(\xi^{s}_{5,T}\right) \\ E\left(\xi^{s}_{6,1}\right) & E\left(\xi^{s}_{6,2}\right) & \ldots & E\left(\xi^{s}_{6,T}\right) \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Očekivane zbirne vrednosti sivih relacionih koeficijenata se računaju po formuli:

$$\rho_j = \frac{1}{T}\sum_{h=1}^{T}\left\{E\left(\xi^{S}_{j,h}\right)\right\},\ j=1,2,\ldots,6 \tag{4.30}$$

Na osnovu jednačine (4.30), menadžment kompanije dobija vektor prognoziranih zbirnih vrednosti sivih relacionih koeficijenata:

$$\rho(j)=\begin{bmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \ldots \\ \rho(6) \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

5. Testiranje modela

5.1 Definisanje ulaznih podataka

Pretpostavimo da rukovodstvo aktivnog rudnika cinka pokušava da prognozira operativnu efikasnosti za narednih pet godina. Ulazni parametri potrebni za prognozu Stepena operativne sposobnosti aktivnog rudnika cinka su prikazani u tabeli 5.1 i tabeli 5.2. Tabela 5.1 sadrži podatke koji se odnose na period od prethodnih 5 godina i ovi podaci su stvarni podaci sistema. Tabela 5.2 sadrži podatke koji se odnose na vrednosti ulznih parametara za narednih 5 godina. Vrednosti ulaznih parametara koje se odnose na kapacitet proizvodnje, fiksne troškove, broj radnih dana u godini, stepen iskorišćenja proizvodnih kapaciteta, iskorišćenje metala i sardržaj metala u koncentratu su determinističke u modelu i procenjene su na osnovu ekspetrskog znanja tri stručnjaka, a kao relevantna vrednost parametra u tabeli 5.2 uzeta je srednja vrednost parametra. Za ulazne parametre čije se vrednosti određuju simulacijom: kvalitet rude, flotacijsko iskorišćenje, cene metala (cinka) i troškovi proizvodnje naznačeni su načini tj. metodi njihovog određivaja dok su u tabeli dati parametri raspodele tj. korišćene metode.

Iako je okruženje na koje je model prognoze primenjen hipotetičko, vrednosti ulaznih parametara realno opisuju svarno rudarsko okruženje.

Tabela 5.1: Ulazni parametri posmatranog perioda

	Posmatrani period				
	Godina				
Parametar	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
DOL	1,219	1,421	1,333	1,676	1,437
Kapacitet proizvodnje (t/godina)	100000	95000	100000	100000	100000
Fiksni troškovi (USD)	1200000	1500000	1100000	1400000	1600000
Prihodi (USD)					
Kvalitet rude (%)	4,11	3,96	4,04	3,82	3,87
Flotacijsko iskorišćenje (%)	78,52	78,01	81,05	79,02	81,56
Sadržaj metala u koncetratu (%)	53,8	53,8	53,8	53,8	53,8
Iskorišćenje metala (%) $m^{mr} = \begin{cases} m^{con}\% - 8; & \frac{(m^{con}\% - 8)\cdot 100}{m^{con}\%} \le 85\% \\ 85\%; & \frac{(m^{con}\% - 8)\cdot 100}{m^{con}\%} > 85\% \end{cases}$ $m^{mr} = \frac{(53,8-8)\cdot 100}{53,8} = 85,13;\ \ 85\%$	85	85	85	85	85
Cena metala Cinka (USD/t)	2160	2195	1950	1910	2160
Jedninična vrednost prodajne cene koncetrata metala (USD/t) $V^{con} = P\left(m^{con} - m^{mr}\right) = P\cdot 0,85$	1836	1866	1658	1624	1836
Prihodi(USD)	11065884	10773877	10137834	9145279	10823137
Troškovi proizvodnje (USD)					
Jedinični troškovi proizvodnje (USD/t)	43,87	60,11	57,40	56,76	55,64
Troškovi proizvodnje (USD)	4387000	5714000	5740000	5676000	5564000
Radni dani (dan/godina)	330	310	340	300	320
Stepen iskorišćenja proizvodnih kapaciteta (%)	90	85	93	82	88

Tabela 5.2: Ulazni parametri koji se koriste za simulaciju *DOL* -a

Parametri	**Vrednosti**				
Kapacitet proizvodnje (t/godina)	Godina				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
	100000	105000	97000	100000	110000
Fiksni troškovi (USD)	1600000	1800000	1500000	1700000	2000000
Prihodi (USD)					
Kvalitet rude (%)-Normalna raspodela	min 3,45; sredina 4,06; max 4,68; volatilnost 0,205				
Flotacijsko iskorišćenje (%)-Uniformna raspodela	min 77; sredina 78,5; max 80; volatilnost 0,866				
Sadržaj metala u koncentratu (%)	53.8				
Iskorišćenje metala (%)	85				
Cena metala Cinka (USD/t)- Proces povratka na srednju vrednost	Trenutna vrednost 2113; ravnotežna cena metala 2277;brzina procesa povratka na srednju vrednost 0,9221; stopa volatilnosti cene 0,2734				
Troškovi proizvonje(USD) Jedinični troškovi proizvodnje (USD/t) - Geometrijsko Braunovo kretanje	Trenutna vrednost 65; trend 0,02382; volatilnost cene 0,09351				
Radni dani (broj dana/godina)	Godina				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
	330	330	340	340	340
Stepen iskorišćenja proizvodnih kapaciteta (%)	86	90	92	85	93
Broj simulacija	500				

5.2 Rešenje numeričkog primera

Korak 1: Model prognoze

Transformacije originalnih vremenskih sekvenci primenom operatora AGO su:

$$Y^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,219 & 1,421 & 1,333 & 1,676 & 1,437 \end{bmatrix}$$
$$Y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,219 & 2,640 & 3,973 & 5,649 & 7,086 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 100000 & 95000 & 100000 & 100000 & 100000 \end{bmatrix}$$
$$X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 100000 & 195000 & 295000 & 395000 & 495000 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1200000 & 1500000 & 1100000 & 1400000 & 1600000 \end{bmatrix}$$

$$X_2^{(1)} = [1200000 \quad 2700000 \quad 3800000 \quad 5200000 \quad 6800000]$$

$$X_3^{(0)} = [11065884 \quad 10773877 \quad 10137834 \quad 9145279 \quad 10823137]$$
$$X_3^{(1)} = [11065884 \quad 21839761 \quad 31977595 \quad 41122874 \quad 51946011]$$

$$X_4^{(0)} = [4387000 \quad 5714000 \quad 5740000 \quad 5676000 \quad 5564000]$$
$$X_4^{(1)} = [4387000 \quad 10101000 \quad 15841000 \quad 21517000 \quad 27081000]$$

$$X_5^{(0)} = [330 \quad 310 \quad 340 \quad 300 \quad 320]$$
$$X_5^{(1)} = [330 \quad 640 \quad 980 \quad 1280 \quad 1600]$$

$$X_6^{(0)} = [90 \quad 85 \quad 93 \quad 82 \quad 88]$$
$$X_6^{(1)} = [90 \quad 175 \quad 268 \quad 350 \quad 438]$$

Primenom definicije 3.4.3 računa se sekvenca generisanih srednjih vrednosti susednih vremenskih sekvenci uzorka $Y^{(1)}(k)$:

$$Y^{(1)} = [1,219 \quad 2,640 \quad 3,973 \quad 5,649 \quad 7,086]$$
$$Z^{(1)}\left(Y^{(1)}\right) = [1,929 \quad 3,307 \quad 4,812 \quad 6,369]$$

Slede proračuni za kreiranje matrice *B* i matrice *Y:*

$$B = \begin{bmatrix} -1,219 & 195000 & 2700000 & 21839761 & 10101000 & 640 & 175 \\ -3,307 & 295000 & 3800000 & 31977595 & 15841000 & 980 & 268 \\ -4,812 & 395000 & 5200000 & 41122874 & 21517000 & 1280 & 350 \\ -6,369 & 495000 & 6800000 & 51946011 & 27081000 & 1600 & 438 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1,421 \\ 1,333 \\ 1,676 \\ 1,437 \end{bmatrix}$$

Formirana AGO sekvenca za zadati primer je predtasvljena sledećom matričnom formom:

$$\begin{bmatrix} 1,421 \\ 1,333 \\ 1,676 \\ 1,437 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,219 & 195000 & 2700000 & 21839761 & 10101000 & 640 & 175 \\ -3,307 & 295000 & 3800000 & 31977595 & 15841000 & 980 & 268 \\ -4,812 & 395000 & 5200000 & 41122874 & 21517000 & 1280 & 350 \\ -6,369 & 495000 & 6800000 & 51946011 & 27081000 & 1600 & 438 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ \vdots \\ b_6 \end{bmatrix}$$

Iz formule $\hat{a} = \left(B^T B\right)^{-1} B^T Y$ se dobija sledeći rezultat:

$$\hat{a} = \left[1,5379; 0,0001129; -1,03377 \cdot 10^{-6}; 1,304 \cdot 10^{-7}; -1,4598 \cdot 10^{-7}; -0,0042024; -0,0796303\right]^T$$

Vrednosti izračunatih koeficijenata su: a=1,5379;

b_1=0,0001129;

b_2=–1,03377·10^{-6};

b_3=1,304·10^{-7};

b_4=–1,4598·10^{-7};

b_5=–0,0042024;

b_6=–0,0796303.

AGO formula zavisna od vremenske sekvece *DOL* je:

$$\begin{aligned}
&\hat{y}^{(1)}(k+1) = \{1,219 - 7,3462 \cdot 10^{-5} x_1^{(1)}(k+1) + 6,748 \cdot 10^{-7} x_2^{(1)}(k+1) - \\
&8,749 \cdot 10^{-8} x_3^{(1)}(k+1) + 9,492 \cdot 10^{-8} x_4^{(1)}(k+1) + 0,0027325 x_5^{(1)}(k+1) + \\
&0,0517784 x_6^{(1)}(k+1)\} e^{-1,5379k} + 7,3462 \cdot 10^{-5} x_1^{(1)}(k+1) - 6,748 \cdot 10^{-7} x_2^{(1)}(k+1) + \\
&8,749 \cdot 10^{-8} x_3^{(1)}(k+1) - 9,492 \cdot 10^{-8} x_4^{(1)}(k+1) - 0,0027325 x_5^{(1)}(k+1) - \\
&0,0517784 x_6^{(1)}(k+1); \qquad k = 0,1,2,3,4
\end{aligned} \tag{5.1}$$

AGO i IAGO vrednosti formule u zavisnosti od vremenskih sekvenici *DOL-a* su prikazani u tabeli 5.3.

Tabela 5.3: Fitovane *DOL* vrednosti

	Godina				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
DOL-AGO vrednosti		2,292	3,642	5,291	6,546
DOL-IAGO vrednosti	1,219	1,073	1,350	1,649	1,255

Vrednosti *DOL*-a iz tabele 5.1 i izračunate vrednosti primenom predloženog modela sadržane u tabeli 5.3 prikazane su u tabeli 5.4, koja sadrži i ocenu adekvatnosti dobijene formule u zavisnosti od vremenske sekvence koja je dobijena primenom formule (3.27).

Tabela 5.4: Procena greške modela

Greška	**Godina**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
DOL-ulazni parmetri	1,219	1,421	1,333	1,676	1,437
DOL-izračunate vrednosti	1,219	1,073	1,350	1,649	1,255
RPE (%)	0	24,47	1,28	1,63	12,70
ARPE (%)	10,02				

Korak 2: Siva analiza značajnosti

Primenom jednačine (3.28) u cilju neutralisanja dimenzije sistema iz razmatranja, dobijaju se rezultati prikazani u tabelama 5.5 i 5.6:

Tabela 5.5: Zbir sekvenci glavne i uticajnih promenljivih

DOL(*k*)	1.219	1.421	1.334	1.677	1.437
$X_1(k)$	100000	95000	100000	100000	100000
$X_2(k)$	1200000	1500000	1100000	1400000	1600000
$X_3(k)$	11065884	10773876	10137834	9145278	10823136
$X_4(k)$	4387000	5714000	5740000	5676000	5564000
$X_5(k)$	330	310	340	300	320
$X_6(k)$	90	85	93	82	88
Zbir	16753305	18083273	17078268	16321662	18087545

Tabela 5.6: Ujednačene vredosti sekvenci glavne i uticajnih promenljivih

DOL'(*k*)	7,28E-08	7,86E-08	7,81E-08	1,03E-07	7,95E-08
$X_1^{'}(k)$	0,005969	0,005253	0,005855	0,006127	0,005529
$X_2^{'}(k)$	0,071628	0,08295	0,064409	0,085776	0,088459
$X_3^{'}(k)$	0,660519	0,595792	0,59361	0,560315	0,598375
$X_4^{'}(k)$	0,261859	0,315983	0,3361	0,347759	0,307615
$X_5^{'}(k)$	1,97E-05	1,71E-05	1,99E-05	1,84E-05	1,77E-05
$X_6^{'}(k)$	5,37E-06	4,7E-06	5,45E-06	5,02E-06	4,87E-06

Apsolutne vrednosti $\Delta_j^{(k)} = \left| DOL(k) - x_j^{'}(k) \right|$ su prikazane u tabeli 5.7.

Tabela 5.7: Apsolutne vrednosti $\Delta_j(k)$

$\Delta_1(k)$	0,005969	0,005253	0,005855	0,006127	0,005529
$\Delta_2(k)$	0,071628	0,08295	0,064409	0,085775	0,088459
$\Delta_3(k)$	0,660519	0,595792	0,59361	0,560315	0,598375
$\Delta_4(k)$	0,261859	0,315983	0,3361	0,347759	0,307615
$\Delta_5(k)$	1,96E-05	1,71E-05	1,98E-05	1,83E-05	1,76E-05
$\Delta_6(k)$	5,30E-06	4,62E-06	5,37E-06	4,92E-06	4,79E-06

Na osnovu podataka iz tabele 5.7, određene su ekstremne vrednosti $\Delta_j(k)$ za *j*=1, 2, 3, 4, 5, 6, i te vrednosti su prikazane u tabeli 5.8.

Tabela 5.8: Minimalne i maksimalne vrednosti $\Delta_j(k)$

	min	*max*
$\Delta_1(k)$	0,005253	0,006127
$\Delta_2(k)$	0,064409	0,088459
$\Delta_3(k)$	0,560315	0,660519
$\Delta_4(k)$	0,261859	0,347759
$\Delta_5(k)$	1,71E-05	1,98E-05
$\Delta_6(k)$	4,62E-06	5,37E-06

Siva relaciona analiza značajnosti GM(1,6) je reprezentovana Tabelom 5.9. Vrednosti pojedinačnih elemenata korelacione matrice, dobijeni su primenom formule (3.31), pri čemu je parametar jednačine (3.31) $\theta = 0,5$.

Tabela 5.9: Korelaciona matrica

$DOL(k)/X_j$	*DOL*(1)	*DOL*(2)	*DOL*(3)	*DOL*(4)	*DOL*(5)	Zbirna vrednost
X_1	0,92078	1	0,93251	0,90497	0,96797	0,94524
X_2	0,93769	0,85421	1	0,83565	0,81875	0,88926
X_3	0,89886	0,96169	0,96396	1	0,95901	0,95670
X_4	1	0,88951	0,85442	0,83532	0,90497	0,89684
X_5	0,91331	1	0,90701	0,95695	0,98009	0,95147
X_6	0,91514	1	0,90739	0,96063	0,97805	0,95224

Na osnovu Table 5.9, dobija se redosled značajnosti uticaja promenljivih po godinama prognoze:

Godina 1: $X_4 > X_2 > X_1 > X_6 > X_5 > X_3$

Godina 2: $(X_1 = X_5 = X_6) > X_3 > X_4 > X_2$

Godina 3: $X_2 > X_3 > X_1 > X_6 > X_5 > X_4$

Godina 4: $X_3 > X_6 > X_5 > X_1 > X_2 > X_4$

Godina 5: $X_5 > X_6 > X_1 > X_3 > X_4 > X_2$

Na osnovu zbirnih vrednosti, dobija se sledeći krajnji poredak značajnosti promenljivih:

$X_3 > X_6 > X_5 > X_1 > \mathrm{X}_4 > X_2$.

Korak 3: Simulacije sekvenci uticajnih promenljivih i *DOL-a*

Prognoza cene cinka primenom procesa povratka na srednju vrednost je prikazana detaljno u tabeli 5.10, pri čemu su trenutna cene cinka (2113USD), i ostali parametri pomenutog procesa su preuzeti iz tabele 5.2.

Tabela 5.10: Proces povratka na srednju vrednost cene cinka

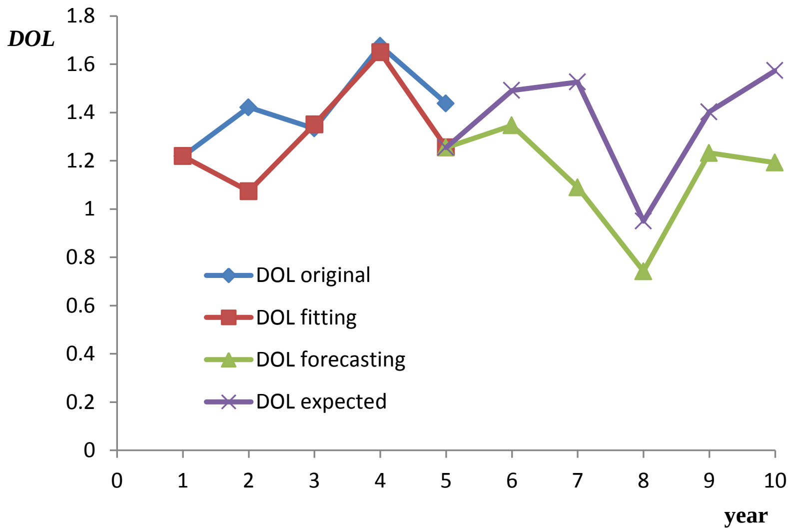
Godina 6	$P_6 = e^{\left\{\ln(2113)\cdot e^{-0,9221}+\left[\ln(2277)-\frac{0,2734^2}{2\cdot 0,9221}\right]\left(1-e^{-0,9221}\right)+N(0,1)\cdot 0,2734\cdot\sqrt{\left(1-e^{2\cdot 0,9221}\right)/2\cdot 0,9221}\right\}}$
Godina 7	$P_7 = e^{\left\{\ln(P_6)\cdot e^{-0,9221}+\left[\ln(2277)-\frac{0,2734^2}{2\cdot 0,9221}\right]\left(1-e^{-0,9221}\right)+N(0,1)\cdot 0,2734\cdot\sqrt{\left(1-e^{2\cdot 0,9221}\right)/2\cdot 0,9221}\right\}}$
Godina 8	$P_8 = e^{\left\{\ln(P_7)\cdot e^{-0,9221}+\left[\ln(2277)-\frac{0,2734^2}{2\cdot 0,9221}\right]\left(1-e^{-0,9221}\right)+N(0,1)\cdot 0,2734\cdot\sqrt{\left(1-e^{2\cdot 0,9221}\right)/2\cdot 0,9221}\right\}}$
Godina 9	$P_9 = e^{\left\{\ln(P_8)\cdot e^{-0,9221}+\left[\ln(2277)-\frac{0,2734^2}{2\cdot 0,9221}\right]\left(1-e^{-0,9221}\right)+N(0,1)\cdot 0,2734\cdot\sqrt{\left(1-e^{2\cdot 0,9221}\right)/2\cdot 0,9221}\right\}}$
Godina 10	$P_{10} = e^{\left\{\ln(P_9)\cdot e^{-0,9221}+\left[\ln(2277)-\frac{0,2734^2}{2\cdot 0,9221}\right]\left(1-e^{-0,9221}\right)+N(0,1)\cdot 0,2734\cdot\sqrt{\left(1-e^{2\cdot 0,9221}\right)/2\cdot 0,9221}\right\}}$

Za simulaciju jediničnih troškova proizvodnje korišćeno je geometrijsko Braunovo kretanje. Primene jednačine (4.22) sa parametrima procesa datim u tabeli 5.2 date su u Tabeli 5.11:

Tabela 5.11: Geometrijsko Braunovo kretanje jediničnih troškova proizvodnje

Godina 6	$CO_6 = 65 \cdot e^{\left\{\left(0,2382 - \frac{0,09351^2}{2}\right) + N(0,1) \cdot 0,09351\right\}}$
Godina 7	$CO_7 = CO_6 \cdot e^{\left\{\left(0,2382 - \frac{0,09351^2}{2}\right) + N(0,1) \cdot 0,09351\right\}}$
Godina 8	$CO_8 = CO_7 \cdot e^{\left\{\left(0,2382 - \frac{0,09351^2}{2}\right) + N(0,1) \cdot 0,09351\right\}}$
Godina 9	$CO_9 = CO_8 \cdot e^{\left\{\left(0,2382 - \frac{0,09351^2}{2}\right) + N(0,1) \cdot 0,09351\right\}}$
Godina 10	$CO_{10} = CO_9 \cdot e^{\left\{\left(0,2382 - \frac{0,09351^2}{2}\right) + N(0,1) \cdot 0,09351\right\}}$

Rezultati prognoze *DOL-a* dobijenih primenom *GM*(1,6), jednačine (5.1), za jednu simulaciju su predstavljeni u tabeli 5.12.



Slika5.1 – Originalne, aproksimirane, jedan scenario prognoze i očekivane vrednosti DOL-a posle 500 simulacija

Ovaj postupak je ponavljan petsto puta i skup od petsto mogućih stanja prirode je dobijen za svaku godinu iz vremenskog interval prognoze. Izračunate su očekivane vrednosti *DOL-a* na osnovu rezultata simulacija tj. na osnovu mogućih stanja prirode,

$E(DOL(6)), E(DOL(7)), \ldots, E(DOL(10))$. Prognozirane vrednosti *DOL-a* su prikazane na slici 5.1 ,a u Tabli 5.13 je data zbirna statistika.

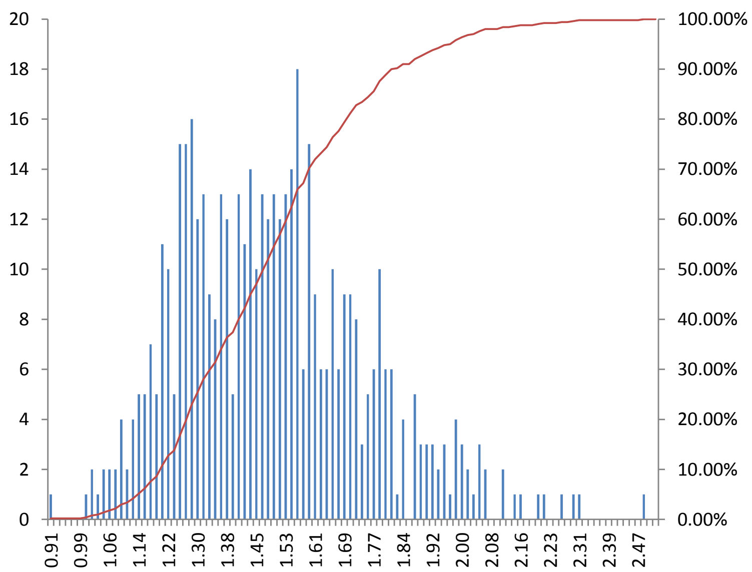
Tabela 5.12: Rezultati jedne simulacuje *DOL*-a

Parameter	**Vrednost**				
Nivo proizvodnje (t/year)	Godina				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
	100000	105000	97000	100000	110000
Fiksni troškovi (USD)	1600000	1800000	1500000	1700000	2000000
Prihodi (USD)					
Stepen rude (%) - Normalna raspodela	4,07	3,78	4,31	4,01	3,86
Flotacijsko iskorišćenje (%) - Uniformna raspodela	79,27	78,54	78,62	77,71	78,32
Sadržaj metala u koncentratu (%)	53,8	53,8	53,8	53,8	53,8
Iskorišćenje metala (%)	85	85	85	85	85
Cena metala cinka (USD/t)- Proces povratka na srednju vrednost	2025	1936	2064	2409	2120
Prihodi (USD)	13040642	12152559	13638024	15254913	14228955
Troškovi proizvodnje (USD)					
Jedinični troškovi proizvodnje (USD/t)- Geometrijsko Braunovo kretanje	71,56	88,33	90,77	98,01	95,87
Troškovi proizvodnje (USD)	7156388	9274793	8805646	9801869	10546252
Radni dani (dani/godina)	330	330	340	340	340
Stepen iskorišćenja proizvodnih kapaciteta (%)	86	90	92	85	93
$\hat{y}^{(1)}(k+1) = \{1,219 - 7,3462 \cdot 10^{-5} x_1^{(1)}(k+1) + 6,748 \cdot 10^{-7} x_2^{(1)}(k+1) - 8,749 \cdot 10^{-8} x_3^{(1)}(k+1) + 9,492 \cdot 10^{-8} x_4^{(1)}(k+1) + 0,0027325 x_5^{(1)}(k+1) + 0,0517784 x_6^{(1)}(k+1)\} e^{-1,5379k} + 7,3462 \cdot 10^{-5} x_1^{(1)}(k+1) - 6,748 \cdot 10^{-7} x_2^{(1)}(k+1) + 8,749 \cdot 10^{-8} x_3^{(1)}(k+1) - 9,492 \cdot 10^{-8} x_4^{(1)}(k+1) - 0,0027325 x_5^{(1)}(k+1) - 0,0517784 x_6^{(1)}(k+1);$ $k=5+h;\ h=0,1,2,3,4$					
***DOL*-AGO**	7,892	8,981	9,723	10,955	12,147
***DOL*-inverzni AGO- IAGO**	1,346	1,089	0,742	1,232	1,192

Tabela 5.13: Zbirna statistika

Statistički parameter	**Vrednost**				
	Godina				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
Uzorak	500	500	500	500	500
Srednja (očekivana) vrednost *DOL*	1,491	1,525	0,951	1,403	1,574
Mediana	1,469	1,494	0,945	1,397	1,571
Standardna devijacija	0,2512	0,2745	0,2631	0,2740	0,3163
Max	2,470	2,543	1,766	2,471	2,940
Min	0,9073	0,8394	0,2065	0,5978	0,5828
Opseg	1,562	1,703	1,559	1,872	2,357
Q(75%)	1,646	1,698	1,105	1,573	1,752
Q(25%)	1,293	1,340	0,761	1,227	1,379
Q(75%)–Q(25%)	0,352	0,358	0,344	0,346	0,373
Asimetrija (Skewness)	0,6235	0,5085	0,4129	0,3726	0,2453
Kurtosis	0,3917	0,3205	0,2378	0,7502	1,1323
Standardna greška	0,01123	0,01227	0,01176	0,01225	0,01414
Koeficijent poudanosti $(1-\alpha)$	0,95	0,95	0,95	0,95	0,95
Faktor pouzdanosti	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96
Interval poverenja–gornja granica	1,513	1,549	0,973	1,427	1,601
Interval poverenja–donja granica	1,469	1,501	0,927	1,378	1,545
Srednja (očekivana) vrednost (%)	52,90	53,80	51,40	50,20	50,70

Verovatnoća i kumulativna funkcija gustine prognoziranog *DOL-a* za šestu godinu prikazane su na slici 5.2.



Slika 5.2 – Raspodela DOL-a za šestu godinu

Korak 4: Siva analiza relevantnosti rezultata dobijenih metodom simulacije

Zbirne vrednosti parametara za svaku godinu pojedninačno dati su u tabeli 5.14.

Tabela 5.14: Zbir sekvenci glavne i uticajnih promenljivih za *s*=1

DOL(*k*)	1,346	1,089	0,742	1,232	1,192
$X_1(k)$	100000	105000	97000	100000	110000
$X_2(k)$	1600000	1800000	1500000	1700000	2000000
$X_3(k)$	13040642	12152559	13638024	15254913	14228955
$X_4(k)$	7156388	9274793	8805646	9801869	10546252
$X_5(k)$	330	330	340	340	340
$X_6(k)$	86	90	92	85	93
Zbir	21897447	23332773	24041102	26857208	26885641

Svaka od zbirnih vrednosti tabele 5.14 je imenilac jednačine (3.28) za odgovarajuću godinu, dok su brojioci odgovarajuće vrednosti X_i. Rezultati izračunavanja ujednačenih vrednosti sekvenci su prikazani u tabeli 5.15.

Tabela 5.15: Ujednačene vrednosti sekvenci glavne i uticajnih promenljivih za *s*=1

DOL'(*k*)	6,15E-08	4,67E-08	3,09E-08	4,59E-08	4,43E-08
$X_1^{'}(k)$	0,004567	0,0045	0,004035	0,003723	0,004091
$X_2^{'}(k)$	0,073068	0,077145	0,062393	0,063298	0,074389
$X_3^{'}(k)$	0,595533	0,520836	0,567279	0,568001	0,52924
$X_4^{'}(k)$	0,326814	0,397501	0,366275	0,364962	0,392263
$X_5^{'}(k)$	1,51E-05	1,41E-05	1,41E-05	1,27E-05	1,26E-05
$X_6^{'}(k)$	3,93E-06	3,86E-06	3,83E-06	3,16E-06	3,46E-06

Siva relaciona analiza GM(1,6) za jedanu simulaciju je prikazana u Tabli 5.16, kao i u tabeli 5.9, vrednost parametra $\theta = 0,5$.

Tabela 5.16 Matrica korelacije za s=1

$DOL(k)/X_j$ θ=0,5	$DOL(1)$	$DOL(2)$	$DOL(3)$	$DOL(4)$	$DOL(5)$	Zbirna vrednost
X_1	0,876886	0,885498	0,950716	1	0,94227	0,931074
X_2	0,904383	0,87252	1	0,99112	0,893805	0,932366
X_3	0,916382	1	0,946311	0,945523	0,989839	0,959611
X_4	1	0,881448	0,930161	0,932326	0,889259	0,926639
X_5	0,893087	0,930804	0,930155	0,999411	1	0,950691
X_6	0,871197	0,879595	0,881844	1	0,944697	0,915467

Na osnovu rezultata prikazanih u Tabli 5.16, dobija se poredak značajnosti simuliranih uticajnih promenljivih u zavisnosti od vremena:

Godina 1: X4 > X3 > X2 > X5 > X1 > X6

Godina 2: X3 > X5 > X1 > X4 > X6 > X2

Godina 3: X2 > X1 > X3 > X4 > X5 > X6

Godina 4: (X1 = X6) > X5 > X2 > X3 > X4

Godina 5: X5 > X3 > X6 > X1 > X2 > X4

Na osnovu zbirnih vrednosti iz tabele 5.16, dobija se sledeći konačan simulirani poredak značajnosti uticajnih promenljivih: $X_3 > X_5 > X_2 > X_1 > \mathrm{X}_4 > X_6$.

Za izvedenih 500 simulacija, dobija se sledeća korelaciona matrica:

Tabela 5.17: Korelaciona matrica dobijena posle 500 simulacija

$DOL(k)/X_j$ θ=0,5	$DOL(1)$	$DOL(2)$	$DOL(3)$	$DOL(4)$	$DOL(5)$	Zbirne vrednosti
X_1	0,912041	0,921771	0,925088	0,925480	0,939693	0,924814
X_2	0,928070	0,896937	0,957765	0,913864	0,876159	0,914559
X_3	0,934076	0,940820	0,935899	0,950123	0,953475	0,942879
X_4	0,922037	0,922130	0,911800	0,901827	0,905551	0,912669
X_5	0,890792	0,938745	0,870543	0,895710	0,958414	0,910841
X_6	0,909324	0,925922	0,851819	0,933881	0,937900	0,911769

5.2 Diskusija dobijenih rezultata

Na osnovu tabele 5.17, dobija se očekivani poredak značajnosti uticajnih promenljivih na godišnjem nivou u periodu od pet godina, i krajnji očekivani poredak:

Godina 1: $X_3 > X_2 > X_4 > X_1 > X_6 > X_5$

Godina 2: $X_3 > X_5 > X_6 > X_4 > X_1 > X_2$

Godina 3: $X_2 > X_3 > X_1 > X_4 > X_5 > X_6$

Godina 4: $X_3 > X_6 > X_1 > X_2 > X_4 > X_5$

Godina 5: $X_5 > X_3 > X_1 > X_6 > X_4 > X_2$

Krajnji: $X_3 > X_1 > X_2 > X_4 > \mathrm{X}_6 > X_5$

Na osnovu krajnjeg poretka značajnosti uticajih promenljivih dobijenog posle 500 simulacija može se videti da najveći značaj imaju prihodi. Nivo značaja broja radnih dana se značajno menja od drugog nivoa u prošlosti do šestog u krajnjem poredku u budućnosti. Kapacitet proizvodnje rude povećava svoj značaj, tako da sa četvrtog mesta dolazi u krajnjem poretku na drugo mesto, dok ostale promenljive ne menjaju značajno svoj nivo značaja u odnosu na početna razmatranja.

Ključne informacije dobijene na osnovu vrednosti DOL-a su sumirne u tabeli 5.18.

Tabela 5.18: Indikatori *DOL*-a

Parametar	**Vrednost *DOL***	
	Visoka	**Niska**
Varijabilni troškovi (prihodi i fiksni troškovi su fiksni)	Visoki	Niski
Fiksni troškovi (prihodi i fiksni troškovi su fiksni)	Niski	Visoki
Povećanje prihoda (varijabilni i fiksni troškovi su fiksni)	Veći profit	Manji profit
Smanjenje prihoda (varijabilni i fiksni troškovi su fiksni)	Veći gubici	Manji gubici

Na osnovu tabele 5.18 može se uvideti kako stepen operativne sposobnosti utiče na parametre poslovanja rudnika. Kada je *DOL* visok, promena u prihodima rezultira velikim promenama u profitu ili gubitcima. Sa druge strane kada je *DOL* nizak, promena u prihodima utiče manje na promenu u profitu ili gubitcima, pa je rizik poslovanja rudnika svakako veći pri višim vrednostima DOL-a.

6 Zaključak i buduća istraživanja

Primenom sivog multiparametarskog modela prvog reda određena je vremenski zavisna funkcija koja definiše odnos između kapaciteta proizvodnje, fiksnih troškova, prihoda, troškova proizvodnje, broja radnih dana u godini i stepena iskorišćenja proizvodnih kapaciteta, kao ulaznih varijabli i Stepena operativne sposobnosti kao indikatora operativne efikasnosti postojećeg podzemnog rudnika. Rukovodstvo podzemnog rudnika dobija zbirni vektor informacija koji sublimira sledeće značajne indikatore: model prognoze, relativnu grešku modela prognoze izraženu u procentima, srednju relativnu grešku modela prognoze izraženu u procentima, sive relacione koeficijente ulaznih promenljivih i izlazne promenljive za definisan vremenski period i zbirne sive relacione koeficijente između ulaznih promenljivih i izlaza.

Veliki kapitalni projekti, kao što su to projekti industrije mineralnih resursa, često su povezani sa različitim spoljašnjim i unutrašnjim neodređnostima. Ove neodređenosti mogu u velikoj meri uticati na operativnu efikasnost. Dugoročni uspeh rudarske kompanije u velikoj meri zavisi od mogućnosti planiranja ovih neodređenosti. Mogućnost da se ove neodređenosti prevaziđu dobrim planiranjem je od kritičnog značaja za dugoročni uspeh kompanije. U cilju smanjena nesigurnosti vrednosti operativne efikasnosti u budućnosti korišćeno je znanje stručnjaka i proces simulacije da bi se odredile buduće vrednosti ulaznih promenljivih koje na nju utiču. Za predikciju prihoda korišćen je stohastički proces povratka na srednju vrednost, normalna i uniformna raspodela. Primenjen je pristup Monte Carlo simulacija geometrijskog Braunovog kretanja u cilju određivanja budućih troškova proizvodnje. Procene stručnjaka su korišćene za predikciju vrednosti kapaciteta proizvodnje, fiksnih troškova, broja radnih dana u godini i stepena iskorišćenja proizvodnih kapaciteta. Rezultati simulacija predstavljaju srednju ili očekivanu vrednost Stepena operativne sposobnosti za svaku godinu definisanog vremenskog horizonta. Rukovodstvu rudarske kompanjije stepen operativne sposobnosti je važan indikator, jer se može koristiti kao osnova trošak-prihod-dobit (Cost-Volume-Profit tj. CVP) analize.

Ograničenost predloženog modela ogleda se u činjenici da su za procenu nekih parametara uzete determinističke vrednosti na osnovu procene stručnjaka. Ovaj problem se može prevazići korišćenjem intervala ili fuzzy brojeva u cilju smanjenja nesigurnosti ovih promenljivih. Drugo rešenje ovog problema bi bilo sa se za svaku navedenu promenljivu formira podmodel koji bi vršio predikciju budućih vrednosti ovih parametara, koje bi bile uključene u glavni model prognoze.

7 Literatura

[AKINBOADE10] Oludele Akinloye Akinboade, Emilie Chanceline Kinfack, Mandisa Putuma Mokwena, Wolassa L. Kumo, *Estimating profit efficiency in the South African mining sector using stochastic frontier approach*, Problems and Perspectives in Management, Volume 8, Issue 1, 2010, pp.136-142., 2010.

[BERNER02] R. Berner, "*Corporate Profits: Critical for Business Analysis*." Business Economics, pp. 7-14., 2002.

[BJELICA13] Milan Bjelica, Modeliranje i simulacija u telekomunikacijama, Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2013.

[BREALEY04] Richard Brealey, Stewart Myers, and Alan Marcus. *Fundamentals of Corporate Finance*, 4th Ed. Boston: Irwin McGraw-Hill, 2004.

[BRICIU14] Sorin Briciu, Sorinel Capusneanu, Ileana Sorina (Rakos) Boca, Dan Ioan topor, Cost Analysis and Reporting the Performances of Companies in the Mining Industry, Proceedings of the 6th International Conference on Applied Economics, Business and Development (AEBD '14), Lisbon, Portugal October 30- November 1, 2014. pp. 51-56, 2014. http://www.wseas.us/e-library/conferences/2014/Lisbon/AEBD/AEBD-07.pdf

[CAKIĆ10]Dijana Petrović-Đorđević, Nenad Cakić, „Stohastički modeli finansijskih tržišta", *Akademska misao* 2010.

[CHAN92] K. Chan, F. Karolyi, F. Longstaff , A. Sanders, *An empirical comparison of alternative models of short term interest rates*, Journal of Finance. 47, 1209–27, (1992).

[CHANG09] Y.M. Chang, M.L. You, J.M. Tseng, C.P. Lin, C.M. Shu, *Applying grey system theory to rank the influence factors in the benyene and methanol mixtures of fire and explosion hazard evaluation*, Paper No.: 25-3873565, Presented at NATAS 2009, Lubbock, TX, USA (September 21-23, 2009).

[CHENG86] Cheng Biao, *The grey control on industrial process*, Journal of Huangshi College, 1, pp. 11-23, 1986.

[ČUPIĆ08] Milutin Čupić, Milija Suknović, Odlučivanje, Fakultet organizacionih nauka, 2008.

[DENG82] J. Deng, *Control problems of Grey Systems*, Systems and Control Letters, 5, pp. 288-294, 1982.

[DENG83] J. Deng, *Grey fuzzy forecoast and control for grain*, Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2, pp. 1-8, 1983.

[DENG85] J. Deng, *Relatonal space of Grey Systems*, Fuzzy Mathematic, (Special Issue of Grey Systems), 2, pp. 1-10, 1985.

[DENG86] J. Deng, *The application of Grey System to quantitative investment strategy*, Investment and reform, 3, pp. 21-5, 1986.

[DENG89] J. Deng, *Introduction to Grey system theory*, The journal of Grey system 1, pp.1-24. 1989. (proveriti strane)

[DULANOVIĆ09] Živko Dulanović, Ondrej Jaško, *Osnovi organizacije poslovnih sistema*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd 2009.

[ĐANKOVIĆ13] V. G. Đanković, *Egzistencija i jedinstvenost rešenja i metode za rešavanje nekih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina*, Master rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd, 2013.

[EICHENAUER86] Jurgen Eichenauer and Jurgen Lehn, *A nonlinear congruential pseudorandom number generator*, Statist. Hefte **27** no. 4, pp. 315–326, 1986.

[GENTRY84] D. W. Gentry and T. J. O'Neil, *Mine Investment Analysis*, American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers Inc. New York, 1984.

[GUO85] Hong Guo, *Identification coefficient of relational grade of Grey systems*, Fuzzy Mathematics, 2, pp. 55-58,1985.

[HAMRIN97] H. Hamrin, *Guide to Underground Mining Methods and Applications* (Stockholm: Atlas Copco, 1997)

[HONG09] Fang Hong, Wu, Junjie, Zeng, Catherine, *Comparative study on efficiency performance of listed coal mining companies in China and the US,* Energy Policy, Elsevier, vol. 37(12), pages 5140-5148, December 2009.

[HU85] Hu Tao and Huang Xiaoqing, *Analysis of factors harming the Korean Pine-applying Grey Sistem theory to the reasearch on ecosystem*, Fuzzy Mathematics, 2, pp.51-54, 1985.

[HUANG87] Huang Jianer, *Applicatins of Grey statistics to investment decision making of foresty,* Economic Problems of Forestry, 2, pp. 44-51, 1987.

[HUI13] Hongqi Hui, Fachao Li and Yan Shi2: AN OPTIMAL MULTI-VARIABLE GREY MODEL FOR LOGISTICS DEMAND FORECAST, International Journal of Innovative Computing, Information and Control Volume 9, Number 7, July 2013 pp. 2907-2918, 2013.

[HUO86] Huo Junjiang, *On the applications of Grey System Theory and methods* to *history studies,* Social Science 10, pp. 64-68, 1986.

[HUO86a] Huo Junjiang, *Grey System methods and investigation,* Seeker, 4, pp. 94-98, 1986.

[JANCZURA11] J. Janczura, S. Orzel, A. Wylomanska, "*Subordinated α -stable Ornstein–Uhlenbeck process as a tool for financial data description*", Physica A 390, pp. 4379-4387, 2011.

[JOVANOVIĆ08] Saša Jovanović, *Model strateškog odlučivanja o nivou proizvodnje u podzemnom rudniku olova i cinka,* Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu-Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, 2008.

[KARATZAS91] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve Springer-Verlag, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, New York Second Edition, 1991.

[KAYACAN10] Erdal Kayacan, Baris Ulutas, Okyay Kaynak, *Grey system theory-based models in time series prediction*, Expert Systems with Applications, 37 (2010), pp. 1784-1789, doi:10.1016/j.eswa.2009.07.064

[KHRISAT12] Feda A. Khrisat, Ahmad Y. Khasawneh, Ahmad A. Al-Waked, *Managerial and Operational Efficiency Valuation of Privatized Firms: Case of Jordan Mining Sector*, European Journal of Economics, Finance and Administrative Sciences ISSN 1450-2275 Issue 49 (2012), pp. 56-70. 2012.

[KIYMAZ03] H. Kiymaz and R. Hodgin, *Enhancing Clarity and Completeness of BasicFinancial Text Treatments on Operating Leverage*, Journal of economics and finance education, Vol. 2, No.1, 2003.

[KNUTH97] Donald E. Knuth (1997) The Art of Computer Programming Volume 2: Seminumerical Algorithms (3 rd Edition) Addison-Wesley Professional, Chapter 3 – Random Numbers, 1997.

[LEE09] Ya-Ting Lee, and Chian-Song Chiu, *Skin Physiology Analysis via Grey GM(1, N) and GM(0, N) Model*, International Journal of Bio-Science and Bio-Technology, Vol. 1, No. 1, December, 2009, pp. 25-36, 2009.

[LEV74] Baruch Lev, "*On the Association Between Operating Leverage and Risk*." Journal of Financial and Quantitative Analysis 9, pp. 627-642, 1974.

[LEVI09] Maja Levi-Jakšić, Sanja Marinković, Jasna Obradović, *Menadžment inovacija i tehnološkog razvoja*, Fakultet organizacionih nauka, Beograd 2009.

[LI08] Zhong-Wei LI, Li-Jie WANG, Da-Peng WANG. *Performance evaluation of coal mine listed company based on factor analysis*, [J]. China Mining, 2008, 17(2):pp. 10-13. 2008.

[LIN09] Y. H. Lin, P. C. Lee and T. P. Chang, *Adaptive and high-precision grey forecasting model*, Expert Systems with Applications, vol.36, no.6, pp.9658-9662, 2009.

[LONG87] Long Yu, *Identifying sistem's factors width grey relationship method*, Journal of Xiangfan University,Vol. 1, pp. 51-55, 1987.

[MARJANOVIC13] Predrag Marjanovic, Dejan T. Riznic, Branko Z. Ljutic,*Validity of information based on (cpv) analysis for the needs of short-term business decision making,* Annals of the Oradea University Fascicle of Management and Technological Engineering ISSUE #2, pp. 131-139, 2013.

[MILOVANOVIĆ13] Marija Milovanović, *Trinomni model cena opcija*, Master rad, Univerzitet u Nišu, Prirodno matematički fakultet, Departman za matematiku, Niš, 2013.

[MUSINGWINI08] C. Musingwini, C. and R.C.A. Minnitt, *Ranking the efficiency of selected platinum mining methods using the analytic hierarchy process* (AHP). Third International Platinum Conference 'Platinum in Transformation', The Southern African Institute of Mining and Metallurgy, 2008, pp.319-326, 2008.

[NEL11] S. Nel, M. S. Kizil and P. Knights, *Improving Truck-Shovel Matching*, in Proceedings of the 35th APCOM Symposium, pp.381-391, Wollongong, Australia, 24-30 September 2011.

[PAPOULIS91] A. Papoulis, Probability, *Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[PETRIĆ82] J. Petrić, *Metode planiranja u složenim organizacijama udruženog rada*, Naučna knjiga, Beograd 1982.

[RUBINSTEIN07] R.Y. Rubinstein, D.P. Kroese, *Simulation and the Monte Carlo Method*, 2nd Ed, New York: John Wiley & Sons, 2007.

[SANCHEZ13] F. H. M. Sánchez, Y. C. Vargas & M. P.Cardozo, "*Numerical Comparison of Pricing of European Call Options for Mean Reverting Processes*", International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences, Vol. 14, No. 2, pp.358-395, 2013.

[SCHWARTZ97]E. Schwartz, "*The stochastic Behaviour of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging*", The Journal of Finance, Vol. 52, No. 3, pp.923-973, 1997.

[SIGMAN06] Karl Sigman, *Geometric Brownian motion*, 2006. http://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-GBM.pdf

[STANKOVIĆ14] M. Stanković, *Stohastičke diferencijalne jednačine*, Master rad, Univerzitet u Nišu, Prirodno matematički fakultet, Departman za matematiku, Niš, 2014.

[TANG13] Keyong Tang, Fang Wang, Jie Liu, Pengxiang Jia and Jinglong Liu, *Water vapor permeability of leathers by grey system theory*, Rev. Adv. Mater. Sci. 33 (2013), pp. 373-382, 2013.

[TORBICA97] S. Torbica, N. Petrović, Metode i tehnologija podzemne eksploatacije neslojevitih ležišta, Priručnik u nastavi, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, 1997, ISBN 86-7352-010-X.

[VELJKOVIĆ] Kristina Veljković, Monte Karlo metode, http://poincare.matf.bg.ac.rs/~ssegan/MonteKarlo.pdf

[WANG98] Yiding Wang, Guoxiong Zhang, Kee S. Moon, John W. Sutherland, *Compesation for the thermal error of a multi-axis machining center,* Journal of Materials Processing Technology 75, pp. 45-53, 1998.

[WANG12]X.Wang, *"Grey Relational Analysis of Teaching Skills and Learning Results of Aerobics",* Advances in information Sciences and Service Sciences, Vol. 4, pp. 321-328, 2012.

[WEI86] Wei Zhongzhe and Yang Zheba, *The macro control model for the teachers of university,* Applications of System Engineering, 1, pp. 32-39, 1986.

[WEYGANDT10] Weygandt J.J., Kimmel P.D., Kieso D.E., "*Managerial Accounting: Tools for Business Decision Marketing*", 5th edition, Publishing House Wiley&Sons, 2010.

[XIA87] Xia Jun, *Estimating influences by the environment for exploiting the water sources,* Social Science Review of Journal of Wuhan Hydrology and Power Institute, 1, pp. 97-104, 1987.

[XU88] Xu Shaoyan, *Analysis of GM(1,N) forecasting model and its applications, In: Grey System*, China Ocean Press, Beijing, pp.180-194, 1988.

[YAN86] Yan Wenbing and Chang Lianfang, *Forecasting and analysis for the average population incoms of farmers of Shanxi Provance in 1986*., Prediction of Expenditure Tendency, 6, pp. 42-44, 1986.

[YAN86a] Yan Wenbing and Luo Jianjun, *An analysis of dominent economy and a selection of the most economic model on region*, System Sciences and ComprehensiveStudies in Agriculture, 1, pp. 60-66, 1986.

[YI87] Yi Desheng, *Grey model (GM) and technician forecast*,Exploration of Nature, 4, pp.75-81, 1987.

[YANG14] Yunchol Jang, *Grey Power Models Based on Optimization of Initial Condition and Model Parameters*, Grey Systems: Theory and Application, Vol. 4 Iss: 2, pp.370 – 382, 2014.

[ZHAN82] Zhan Yihui, *The synthetic controllability of Grey System*, Joutnal of Huayhong University of Science and Technology, 9, pp.11-16, 1982.

[ZHANG86] Zhang Dianqing, *Grey relational analysis of the shape function and the level of body quality for youngsters and children*, Sport Science in Guizhou Province, 2, pp.1-5, 1986.

[ZHAO87] Zhao Songnian, *On decision of macrosystems*, Exploration of Nature,4, pp. 119-128, 1987.

[ZHAO11] Xi Zhao, Liang Li, Xi-shuan Zhang, *Analysis of operating efficiency of Chinese Coal Mining industry*, Industrial Engineering and Engineering Management (IE&EM), 2011 IEEE 18Th International Conference on, (Volume: Part 2), Date 3-5 Sept. 2011, Conference Location: Changchun, pp. 889-893, Print ISBN: 978-1-61284-446-6, DOI: 10.1109/ICIEEM.2011.6035300

Biografski podaci o autoru disertacije

Svetlana Štrbac-Savić je rođena 7.4.1972. godine u Skoplju. Osnovnu školu "Vladislav Ribnikar" i IV Beogradsku gimnaziju (prirodno-matematički smer) završila u Beogradu sa odličnim uspehom.

2001. godine diplomirala je na Matematičkom fakultetu u Beogradu na smeru Računarstvo i informatika.

2002. godine upisala postdiplomske studije na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu na smeru Softverski sistemi.

2010. odbranila magistarski rad pod naslovom „Uporedna analiza performansi skoro balansiranih stabala binarnog pretraživanja" na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Mentor pri izradi magistarskog rada bio je prof. dr Milo Tomašević.

Od 2002. godine radi u Višoj elektrotehničkoj školi u Beogradu kao stručni saradnik na predmetima: Programiranje I, Programiranje II, Uvod u operativne sisteme, Objektno programiranje i Programiranje u jeziku Java, Matematika 1 i Matematika 2 i Inženjerska matematika.

Od 2012. je predavač Visoke škole elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu. Drži predavanja iz predmeta: Algoritmi i strukture podataka, Inženjerska matematika, Verovatnoća i statistika, Elektronska trgovina i Uvod u objektno programiranje. U istoj instituciji je od 2014. Godine angažovana kao rukovodilac studijskog programa Elektronsko poslovanje.

2015. i 2016. godine, na Naučno-stručnom Simpozijumu-INFOTEH učestvovala je u svojstvu recenzenta radova iz oblasti Elektronskog poslovanja.

Autor/koautor je 33 naučna i stručna rada. Prvi autor je jednog rada publikovanog u naučnom časopisu međunarodnog značaja sa SCI liste. Koautor je devetnaest radova publikovanih u zbornicima međunarodnih i regionalnih naučnih skupova, tri rada publikovana u stručnim časopisima i deset radova publikovanih u zbornicima skupova nacionalnog značaja.

Izjava o autorstvu

Potpisana: **Svetlana M. Štrbac-Savić**

Izjavljujem da je doktorska disertacija pod naslovom:

Prognoza operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika zasnovana na teoriji sivih sistema

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

U Beogradu

7.3.2016.

Potpis doktoranda

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: Svetlana M. Štrbac-Savić

Studijski program: Rudarsko inženjerstvo

Naslov rada: **Prognoza operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika zasnovana na teoriji sivih sistema**

Mentor: Dr Zoran Gligorić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko - geološki fakultet

Potpisana: **Svetlana M. Štrbac-Savić**

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predala za objavljivanje na portalu Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada. Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

U Beogradu

7.3.2016.

Potpis doktoranda

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

Prognoza operativne efikasnosti aktivnog podzemnog rudnika zasnovana na teoriji sivih sistema

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilozima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

U Beogradu

7.3.2016.

Potpis doktoranda

1. Autorstvo – Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.

2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje,distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.

4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.

5. Autorstvo – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.