

Наставно-научном већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 23.01.2015. године одређени смо у Комисију за преглед и оцену рукописа

**Локално коначни варијетети са полу-дистрибутивном мрежом конгруенција**  
који је предат као докторска дисертација Јелене Јовановић. Комисија је прегледала текст и подноси Већу следећи

## ИЗВЕШТАЈ

### 1. Предмет дисертације

Предмет дисертације су Маљцевљеви услови који карактеришу својство конгруенцијске полудистрибутивности локално коначних варијетета. Први резултат којим се нека алгебарска особина мрежа конгруенција варијетета алгебри еквивалентно описује егзистенцијом специфичних терма и низом алгебарских закона које они у варијетету задовољавају добио је Маљцев 1954. године. Доказао је да је варијетет конгруенцијски пермутабилан ако и само ако постоји терм  $t(x,y,z)$  који задовољава законе  $t(x,y,y)=t(y,y,x)=x$ . Од тада се свако својство варијетета које је еквивалентно постојању терма који у свакој алгебри задовољавају неки фиксиран коначан скуп линеарних алгебарских закона назива јаким својством Маљцева и тај скуп закона јаким Маљцевљевим условом. Конгруенцијска пермутабилност је пример јаког својства Маљцева. Услови Маљцева су пребројиве монотоне дисјункције јаких Маљцевљевих услова, а слаби услови Маљцева су пребројиве конјункције пребројивих монотоних дисјункција јаких Маљцевљевих услова. Својства варијетета које описујемо њима су својства Маљцева, односно слаба својства Маљцева, редом. Већина до данас познатих Маљцевљевих својстава није јака, а ситуација је иста чак и када се ограничимо на локално коначне варијетете: ни конгруенцијска модуларност ни дистрибутивност локално коначних варијетета не може се описати јаким условима Маљцева.

Једно од ретких својстава локално коначних варијетета које је јако Маљцевљево је конгруенцијска полудистрибутивност (у односу на  $\wedge$ ). Ови локално коначни варијетети у последњих неколико година су једна од главних тема истраживања у Универзалној алгебри, а разлог за то је јака повезаност са CSP-проблемом рачунске сложености (Constraint Satisfaction Problem). Кожик, Крокин, Валериот и Вилард су 2009. пронашли опис са једним 4-арним и једним тернарним термом, а затим су Мароти и Јанко дали опис са три тернарна терма. Тема ове дисертације је одређивање оптималног, у смислу броја терма, њихове вишеструкости и броја идентитета, јаког Маљцевљевог услова који карактерише конгруенцијску полудистрибутивност.

## 2. Приказ дисертације

Дисертација има 198 страна текста и списак од 50 библиографских јединица. Главни део дисертације је подељен у пет поглавља. Прва глава је уводног карактера и садржи преглед основних појмова и тврђења универзалне алгебре који се користе у дисертацији. Представљена је теорија питомих конгруенција, односно класификација минималних (прекривајућих парова) конгруенција коначних алгебри, као и резултати који повезују различита алгебарска својства алгебри и варијетета са типовима минималних конгруенција присутним у њиховој мрежи. Посебно, дат је преглед еквивалентна конгруенцијске  $\wedge$ -полудистрибутивности, као и Маљцевљеви услови који карактеришу то својство у случају локално коначних варијетета. Издвајамо јак Маљцевљев услов (у даљем тексту систем) са једном операцијом од четири и једном од три променљиве (Кожик, Крокин, Валериот и Вилард) и систем са три операције од по три променљиве (Мароти и Јанко).

Друга глава је далеко најдужа, има 99 страна и посвећена је испитивању система који имају највише два тернарна терма и који потенцијално карактеришу посматрано својство. Прво је доказано да не постоји такав систем који има један тернарни и произвољан број бинарних терма. Затим су испитивани системи са два тернарна терма. После исцрпне анализе закључено је да постоји суштински само један потенцијални кандидат за жељену карактеризацију:

$$(SM1) \quad p(x,x,y)=p(x,y,y) \quad p(x,y,x)=q(x,y,x)=q(x,x,y)=q(y,x,x) .$$

Овај резултат је објављен у раду [1].

Трећа глава је посвећена рачунарској претрази којом је покушано да се докаже да систем (SM1) не карактерише конгруенцијску  $\wedge$ -полудистрибутивност у случају алгебри полиморфизама усмерених графова са највише 5 чворова и ови резултати су објављени у раду [2]. Прецизније, испитивано је да ли постоји таква алгебра која има  $\wedge$ -полудистрибутивну мрежу конгруенција, а која не реализује систем (SM1). Ту је урађен један поприлично захтеван програмерски задатак претраге великог система програмирањем паралелних процесора и који се налази на граници могућности данашњих рачунара. Резултат је негативан: таква алгебра не постоји. То је дало основа претпоставци да систем (SM1) заиста карактерише посматрано својство, што је и доказано у петој глави. Претходно је у четвртој глави изложен резултат Либора Барта који се користи у петој глави као кључни метод доказивања

Пета глава садржи најважније резултате дисертације који ће бити објављени у раду [3]. Поред завршетка доказа да систем (SM1) оптимално карактерише конгруенцијску полудистрибутивност локално коначних варијетета, добијене су још две карактеризације тог својства. Прва је дата следећим јаким Маљцевљевим условом:

$$p(y,x,x,x)=p(x,y,x,x)=p(x,x,y,x)=p(x,x,x,y)=p(y,y,x,x)=p(y,x,y,x)=p(x,y,y,x),$$

док је друга дата слабир Маљцевљевим условом. Ове карактеризације су занимљиве за себе, јер се показују погоднијим за теоријске примене. Тако је у овој глави прво

доказана карактеризација претходним системом са 4-арним термом, а затим је прилично једноставним аргументима добијена и карактеризација системом (SM1). Пета глава такође садржи неколико мањих повезаних резултата и отворених проблема.

### 3. Списак научних радова

Радови повезани са дисертацијом:

[1] Jovanović J. *On terms describing omitting unary and affine types*. Filomat vol. 27/1 (2013). pp.183-199. ISSN 0354-5180 IF 0.753 (Mathematics 81/302 (2013)) M21

[2] Jovanović J. *On optimal strong Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity in a locally finite variety*. Novi Sad Journal of Mathematics, vol. 44/2 (2014). pp. 207-224. M51

[3] Jovanović J., Marković P., McKenzie R. и Moore M. *Optimal strong Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity in locally finite varieties*. Прихваћен за штампу у часопису Algebra Universalis ISSN 0002-5240 M23

Саопштења на међународним конференцијама:

1. Jovanović J. The structure of minimal algebras, Spring school on general algebra. Prague, Czech Republic, 2011.
2. Jovanović J. Strong Maltsev conditions implying congruence meet-semidistributivity Conference on Universal Algebra and Lattice Theory. Szeged, Hungary, 2012.
3. Jovanović J. On optimal Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity. AAA 88. Workshop on General Algebra. Warsaw, Poland, 2014.
4. Jovanović J. Optimal Mal'cev conditions for congruence meet-semidistributivity. Algebras & Clones Fest. Prague, Czech Republic, 2014.

Учешћа на међународним конференцијама:

1. The 3rd Novi Sad algebraic conference (NSAC 2009) . Novi Sad, 2009;
2. International Conference on Algebras and Lattices. Prague, Czech Republic, 2010.
3. Workshop on Universal Algebra, Complexity and CSP . Lisbon, Portugal, 2010.
4. Second International Conference on Order, Algebra, and Logics: honoring Ralph McKenzie, Hiroakira Ono, and Andrzej Wroński. Krakow, Poland, 2011.
5. 84.Arbeitstagung Allgemeine Algebra. Dresden, Germany, 2012.
6. 2nd Workshop on Homogeneous Structures. Prague, Czech Republic, 2012.

#### 4. Закључак

Предмет докторске дисертације Јелене Јовановић је део савремене проблематике универзалне алгебре. Пронађени су оптимални услови који карактеришу конгруенцијску  $\wedge$ -полудистрибутивност локално коначних варијетета, чиме су испуњени циљеви истраживања наведени приликом предлагања теме. Приказани резултати су оригинални и нетривијални, а њихово извођење је захтевало употребу различитих метода и техника које обједињују комбинаторику, универзалну алгебру и теоријско рачунарство. На основу резултата дисертације објављена су два самостална научна рада у часописима, један у часопису *Filomat* (M22) и један у домаћем часопису *Novi Sad Journal of Mathematics*. Један коауторски рад је прихваћен за штампу у часопису *Algebra Universalis* (M23). Резултати добијени у дисертацији су представљени и на неколико међународних конференција.

**Предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да усвоји овај извештај о рукопису Јелене Јовановић, да га прихвати као докторску дисертацију и да одреди комисију за јавну одбрану.**

У Београду, 23. маја 2016.



др Небојша Икотиновић, доцент  
Математичког факултета, Београд



др Петар Марковић, редовни професор  
ПМФ, Универзитет у Новом Саду



др Жарко Мијајловић, редовни професор  
Математичког факултета у пензији



др Предраг Тановић (ментор), ванредни  
професор Математичког факултета, Београд