



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Немања Ковинчић

**МЕХАНИЧКИ МОДЕЛ СРЕДЊЕГ УХА СА
ФРАКЦИОНИМ ТИПОМ ДИСИПАЦИЈЕ**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2016.



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:			
Идентификациони број, ИБР:			
Тип документације, ТД:	Монографска документација		
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал		
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација		
Аутор, АУ:	Немања Ковинчић		
Ментор, МН:	Др Драган Спасић, редован професор		
Наслов рада, НР:	Механички модел средњег уха са фракционим типом дисипације		
Језик публикације, ЈП:	Српски		
Језик извода, ЈИ:	Српски/Енглески		
Земља публиковања, ЗП:	Република Србија		
Уже географско подручје, УГП:	Аутономна покрајина Војводина		
Година, ГО:	2016.		
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринг		
Место и адреса, МА:	Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6		
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	6/93/123/7/31/0/9		
Научна област, НО:	Машинско инжењерство		
Научна дисциплина, НД:	Механика		
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Средње ухо, Гибс-Апелове једначине, фракциони рачун, дисипација енергије, експанзионија формула Атанацковића и Станковића		
УДК			
Чува се, ЧУ:	Библиотека Факултета техничких наука		
Важна напомена, ВН:			
Извод, ИЗ:	У докторској дисертације предложен је механички модел средњег уха заснован на динамици крутых тела која су са околином везана системом фракционих вискоеластичних елемената. Ови елементи моделирани су као стандардно фракционо линеарно вискоеластично тело познато као фракциони Зенеров модел вискоеластичног тела. Диференцијалне једначине кретања предложеног модела генериране су Гибс-Апеловим једначинама аналитичке механике. Као резултат добијен је математички модел у форми система диференцијалних једначина произвољног реалног реда. Овај систем решен је на два начина: применом експанзионе формуле Атанацковића и Станковића и методом Лапласове трансформације са нумеричком инверзијом.		
Датум прихватања теме, ДП:	25.02.2013.		
Датум одbrane, ДО:			
Чланови комисије, КО:	Председник:	Др Србољуб Симић, редовни професор	
	Члан:	Др Михаило Лазаревић, редовни професор	
	Члан:	Др Драган Данкуц, редовни професор	Потпис ментора
	Члан:	Др Милан Рапаић, доцент	
	Члан, ментор:	Др Драган Спасић, редовни професор	



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO:		
Identification number, INO:		
Document type, DT:	Monographic publication	
Type of record, TR:	Textual printed material	
Contents code, CC:	PhD thesis	
Author, AU:	Nemanja Kovinčić	
Mentor, MN:	Dragan Spasić PhD, full professor	
Title, TI:	Mechanical model of a middle ear with fractional type of dissipaton pattern	
Language of text, LT:	Serbian	
Language of abstract, LA:	Serbian/English	
Country of publication, CP:	Republic of Serbia	
Locality of publication, LP:	Autonomous Province of Vojvodina	
Publication year, PY:	2016.	
Publisher, PB:	Author's reprint	
Publication place, PP:	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6	
Physical description, PD: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendices)	6/93/123/7/31/0/9	
Scientific field, SF:	Mechanical engineering	
Scientific discipline, SD:	Mechanics	
Subject/Key words, S/KW:	Middle ear, Gibbs-Appel equations, fractional calculus, energy dissipation, Atanacković-Stanković expansion formula	
UC		
Holding data, HD:	Library of the Faculty of Technical Sciences	
Note, N:		
Abstract, AB:	In this theses, mechanical model of a middle ear based on the dynamics of system of rigid bodies that are connected with the environment through a system of fractional viscoelastic elements is proposed. These elements are modeled as a standard fractional linear viscoelastic body known as the fractional Zener model of viscoelastic body. Differential equations of motion of the proposed model are generated by use of the Gibbs-Appeal equations of analytical mechanics. As a result, mathematical model in form of a system of differential equations of arbitrary real order is obtained. This system is solved in two ways: by use of the Atanacković-Stankovic expansion formula and method of the Laplace transform with numerical inversion.	
Accepted by the Scientific Board on, ASB:	25.02.2013.	
Defended on, DE:		
Defended Board, DB:	President: Member: Member: Member: Member, Mentor:	Srboljub Simić PhD, full professor Mihailo Lazarević PhD, full professor Dragan Dankuc PhD, full professor Milan Rapaić PhD, assistant professor Dragan Spasić PhD, full professor
		Menthor's sign

Sadržaj

Prolog	iii
I Model srednjeg uha	1
1 Polazni stavovi	3
1.1 Iz anatomije i fiziologije uha	3
1.2 O postojećim modelima srednjeg uha	8
1.3 O konstitutivnim jednačinama koje uključuju frakcione izvode	10
1.4 O primeni frakcionog računa u modeliranju bio-sistema	10
1.5 O numeričkim metodama	11
2 Reološka analiza elemenata srednjeg uha	13
2.1 Frakcioni Zenerov model i eksperiment tipa relaksacije napona	13
2.2 Reološke konstante za prednji ligament maleusa	16
2.3 Reološke konstante za tetivu mišića stapesa	17
2.4 Reološke konstante za tetivu mišića zatezača bubne opne	17
2.5 Reološke konstante za bubnu opnu	18
2.6 Reološke konstante za anularni ligament stapesa	19
2.7 Komentari o dobijenim vrednostima za parametre	20
3 Dinamički model srednjeg uha	23
3.1 Opis modela	23
3.2 Sistem koji se razmatra	25
3.2.1 Koordinatni sistemi i inercijalna svojstva	25
3.2.2 Generalisane koordinate	27
3.2.3 Geometrija opterećenja	28
3.2.4 Lokalna i globalna svojstva kretanja	30
3.2.5 Viliotov plan pomeranja	31
3.3 Diferencijalne jednačine kretanja	32
3.3.1 Njutn-Ojlerove aksiome	32
3.3.2 Konstitutivne jednačine	33
3.3.3 Kejbove jednačine	34
3.3.4 Gibbs-Apelove jednačine	35
3.3.5 Bezdimenzijska forma jednačina kretanja	37
3.4 Srednje uho kao linearni sistem	37
3.5 Košijev problem kao model za kretanje osikularnog lanca	38
3.6 Rešavanje Košijevog problema primenom ekspanzionate formule Atanackovića i Stankovića	38
3.7 Rešavanje Košijevog problema primenom Laplasove transformacije	40
3.8 Ocena disipacije energije u sistemu srednje uho	41

4 Rezultati i diskusija	43
4.1 Generalisane koordinate, generalisane brzine i trajektorija tačke umbo	44
4.2 Sile u viskoelastičnim štapovima	45
4.3 Disipacija energije u predloženom modelu	48
4.4 Kretanje stapesa i umba pri različitim frekvencijama sile pobude	50
4.5 Disipacija energije pri različitim frekvencijama sile pobude	51
5 O mogućim primenama modela	53
6 Zaključak	55
II Dodaci	57
A Eksplicitna forma uvedenih matrica i njihovih izvoda	59
B Vektori položaja karakterističnih tačaka i jedinični vektori pravaca dejstva sila reakcija veze	63
C Geometrijski i reološki parametri lakih štapova u modelu srednjeg uha i para- metri ekvivalentnog dejstva perilimfe	65
D Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja stapesa i inkudo-malearnog bloka	67
E Određivanje deformacija struktura srednjeg uha	69
F Pseudobrzine i njihova veza sa generalisanim brzinama	71
G Generalisane sile struktura osikularnog lanca	73
H Linearizacija Gibbs-Apelovih diferencijalnih jednačina kretanja	77
I Ekspanziona formula Atanackovića i Stankovića	83
Bibliografija	87

Prolog

Srednje uho je sistem koji prenosi energiju zvuka od spoljašnjeg slušnog kanala do kohlee koja se nalazi u unutrašnjem uhu. U tom sistemu, prostorno kretanje maleusa, inkusa i posebno stapesa je glavni uzrok promene pritiska perilimfe u unutrašnjem uhu gde su locirane ćelije receptori. Ta kretanja treba istražiti jer je sistem o kome je reč suviše kompleksan da bi se njegova funkcija shvatila intuitivno. Protok energije kroz srednje uho i gubici energije u okviru tog sistema su glavni činioci njegovog modeliranja. Modeli uha su veoma važni u analizi efekata upotrebe različitih transplantata koji se koriste u restoracijama funkcije srednjeg uha, bilo da se radi o zameni bubne opne ili protezama koje menjaju elemente lanca slušnih koščica kao pasivni ili aktivni elementi koji alternativno sprovode slušnu funkciju. Naime, hirurški tretmani hroničnih inflamatornih bolesti srednjeg uha uključuju eliminisanje patoloških procesa kao i rekonstrukciju bubne opne i lanca slušnih koščica sa ciljem da se popravi slušna funkcija. Svaki taj model podleže skali različitog stepena idealizacije i bez obzira što je u osnovi aproksimativan, on značajno može da dopriene, individualizaciji tretmana prilagođenoj svakom pojedincu posebno, pre svega zbog niske cene numeričkih nasuprot skupim eksperimentalnim simulacijama koje treba da uključe specifičnosti u morfologiji i postojećem stanju sistema, posebno, za svakog pojedinca.

U okviru ove teze predložiće se model zasnovan na dinamici sistema krutih tela koja su sa okolinom vezana sistemom frakcionih viskoelastičnih elemenata. Ovi elementi će se modelirati kao standardno frakcionalno linearno viskoelastično telo poznato kao frakcioni Zenerov model viskoelastičnog tela, koje pored izvoda proizvoljnog realnog reda napona i deformacije uključuje i ograničenja na koeficijente u modelu izvedena iz Klauzius-Dijemove nejednakosti. Ova odrednica modela dozvoljava da se disipacija energije u sistemu analizira *od samog početka* analize kretanja sistema. Naime, ovde se kao model srednjeg uha razmatra sistem od dva kruta tela složene geometrije koja su međusobno povezana sfernim zglobom i koja se mogu kretati u ograničenom delu prostora. Ta dva tela - inkudo-malearni blok (jer se inkus i maleus posmatraju kao jedna kruta celina) i stapes - su za temporalnu kost povezana sistemom ligamenata, bubnom opnom i sa dva specifična mišića (prisluškivač i protektor). Inženjeri bi rekli da ti ligamenti, opna i mišići zajedno čine sistem koji nosi lanac slušnih koščica, istovremeno ga pobuđuje, upravlja njegovim kretanjem i zaustavlja ga. Pojedini elementi tog nosećeg sistema - sistema vešanja - su, sami za sebe, veoma složeni i po obliku i po strukturi, pa će se za njih, u okviru ove teze, predložiti prostije - približno ekvivalentne zamene modelirane takođe standardnim frakcionim linearnim viskoelastičnim elementima. Razumevanje kretanja ovog sistema i posebno disipacije energije u svakom od predloženih viskoelastičnih elemenata su od izuzetne važnosti za razumevanje funkcije srednjeg uha i u normalnim i u patološkim uslovima. Osnovna hipoteza teze je da će se sa izabranim reološkim modelom koji vrlo dobro opisuje ponašanje bioloških tkiva koja čine srednje uho dobiti korektno, bar u kvalitativnom smislu, predviđanje kretanja sistema kao celine, bez obzira na njegovu složenost, kakva je itekako prisutna u sistemu koji se u tezi razmatra.

Diferencijalne jednačine kretanja inkudo-malearnog bloka i stapesa će se, uz prepostavke koje broj stepeni slobode kretanja redukuju na šest, generisati Gibbs-Apelovim jednačinama. Ove jednačine će se dopuniti konstitutivnim relacijama za sile koje čine sistem vešanja slušnih koščica, a koje sadrže izvode proizvoljnog realnog reda (uobičajeno frakcione izvode) kao i ograničenja na relaksacione koeficijente koja slede iz drugog zakona termodinamike. Ovi izvodi su nelokalni operatori, što znači da se za određivanje izvoda veličine u jednom trenutku mora poznavati kompletna istorija te veličine do tog trenutka, što sa aspekta numeričke analize problema za predloženi broj stepeni slobode kretanja ima svoju težinu. U rezultatu će se kao model kretanja slušnih koščica dobiti sistem diferencijalnih jednačina proizvoljnog realnog reda. Ovaj sistem će se rešavati na dva

načina: primenom ekspanzione formule kojom se sistem frakcionalih diferencijalnih jednačina svodi na znatno prošireni sistem običnih diferencijalnih jednačina ali koji će se integraliti standardnim numeričkim procedurama i metodom Laplasove transformacije sa numeričkom inverzijom.

Deo I

Model srednjeg uha

Glava 1

Polazni stavovi

1.1 Iz anatomije i fiziologije uha

Kompleksnu radnju, kao što je slušanje, omogućava auditorni sistem i to u tri konceptualno različite faze - prenosa, pretvaranja i obrade signala. Naime, prvo se zvučni signal koji iz okruženja stiže u obliku promene pritiska vazduha, prenosi do receptora. Zatim se taj signal u receptoru pretvara u električni signal, da bi se na kraju taj električni signal obradio sa ciljem da se dobiju informacije o visini, intenzitetu, boji i lokaciji izvora zvučnog signala iz sredine u kojoj je nastao. Svakom od ova tri koraka odgovara posebna anatomska celina. Spoljašnje i srednje uho čine konduktivni podsistem koji služi za prenošenje zvučnog signala iz vazduha u unutrašnje uho. U unutrašnjem uhu nalazi se senzoro-neuralni podsistem, koji čine kohlea i osmi kranijalni nerv, čija je fiziološka funkcija aktivacija odgovarajućih nervnih ćelija, koje predstavljaju senzore gde se dobijeni signal pretvara u nervni, da bi se na kraju taj nervni signal procesirao u centralnom auditornom nervnom sistemu. Sluh je dakle posledica *tačno određenog redosleda* događaja koji se dešavaju u podsistemima auditornog sistema. Dakle, poznavanje auditornog sistema zahteva poznavanje i svakog od ova tri podsistema i veza između njih.

Kada se čuje zvuk, uglavnom to predstavlja neki fizički poremećaj koji se prenosi kroz vazduh, zatim kroz spoljašnji slušni kanal, pa kroz srednje uho i na kraju stiže u unutrašnje uho, gde može biti detektovan ako je odgovarajućeg intenziteta i odgovarajuće frekvencije. Ipak, nije to jedini način prenošenja zvuka. Ako se na primer vrhom prsta blago kuca u temporalnu kost, kao posledica toga, može se čuti zvuk koji se prenosi prostiranjem talasa kroz kost lobanje direktno u unutrašnje uho. To je jedan od najjednostavnijih testova za utvrđivanje uzroka gubitka slaha. Taj gubitak može biti posledica nemogućnosti prenošenja zvuka kroz spoljašnje i srednje uho do unutrašnjeg uha ili posledica nefunkcionalnosti unutrašnjeg uha. Osim toga, prostiranje zvučnog talasa kroz kost lobanje je razlog zašto glas osobe, toj istoj osobi, zvuči drugačije kada se snimi i pusti da se posluša. Naime, dok čovek govori, zvuk koji nastaje treperenjem njegovih glasnih žica u govornom aparatu, dolazi do unutrašnjeg uha putem vazduha i srednjeg uha, kao i putem kosti lobanje. Zvuk koji se tako čuje je, zbog mehaničkih svojstava kosti lobanje, obično dublji i prigušeniji. Kada se sluša snimak sopstvenog glasa, zvuk dolazi do unutrašnjeg uha samo putem vazduha i srednjeg uha.

Eksperimentalnim merenjima utvrđeno je da minimalna amplituda zvučnog talasa (signala) koju može detektovati pojedinac sa normalnim služom iznosi oko $20 \mu\text{Pa}$. Ova vrednost se još naziva i prag čujnosti, a odnosi se na frekvenciju od 1000 Hz. Poređenja radi, atmosferski pritisak¹ iznosi oko 100 kPa, što znači da uho može da detektuje promene vazdušnog pritiska koje su 2×10^{-10} deo atmosferskog pritiska. Uho je dakle veoma osjetljivo na promenu pritiska i uobičajeno je da se ta osjetljivost opisuje u odnosu na pomenuti prag čujnosti, koji u opštem slučaju zavisi od frekvencije, videti [Ashmore, 2002]. Zvučni stimulans se može odrediti fizičkim merenjem zvučnog talasa na ulazu u spoljašnji slušni kanal korišćenjem kalibrisanih mikrofona, a izražava se preko

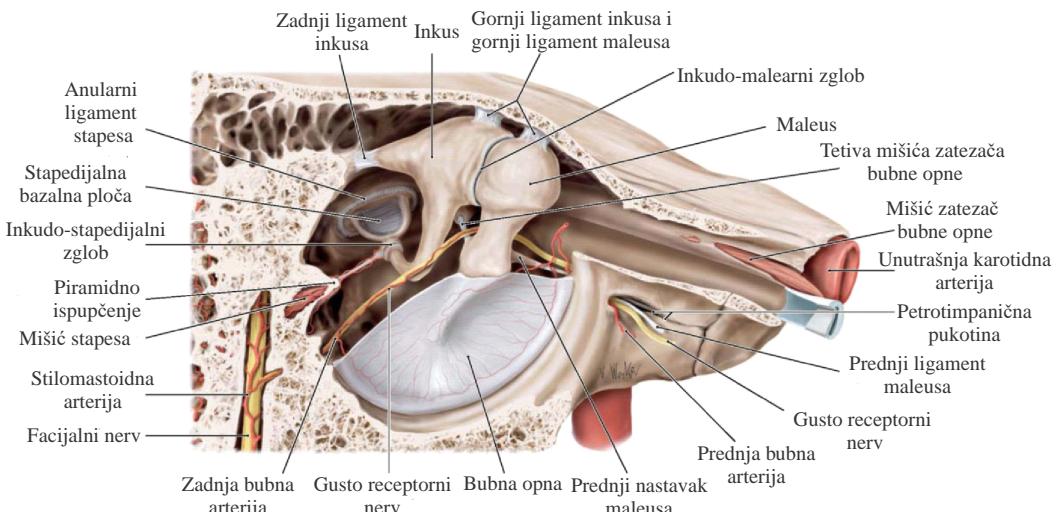
¹Atmosferski pritisak je posledica težine vazdušnog stuba mereno od površine mora do granice svemira, za šta se uglavnom uzima Karmanova linija na visini od 100 km.

nivoa zvučnog pritiska u decibelima, na sledeći način²

$$JZ = 20 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}},$$

gde JZ stoji za jačinu zvuka izraženu u dB SPL, i gde je $P_{ref} = 20 \mu\text{Pa}$. Uvođenje logaritamske jedinice decibel je pogodno zbog velikog opsega pritisaka zvuka koje čovek čuje. Naime, zvučni pritisci veličine 20 Pa (120 dB SPL) izazivaju bol u čovekovom slušnom sistemu pa se ta vrednost opisuje kao granica bola, iako se ona blago menja sa promenom frekvencije. Pored širokog opsega pritisaka, uho može da registruje i širok opseg frekvencija. Opseg frekvencija koje čovek može da čuje iznosi od 20 Hz do 20 kHz. Taj interval može da bude veoma različit od osobe do osobe. Ispod frekvencije od 20 Hz zvuk mora da bude toliko jak da može da se kaže da se te frekvencije ni ne čuju.

U ovoj tezi modeliraće se samo jedna komponenta konduktivnog podsistema, a to je srednje uho, slika 1.1. Pre nego što se krene sa opisom anatomije potrebno je napomenuti da postoje levo i desno srednje uho. Oba ta sistema sa svojim komponentama su simetrična u odnosu na sagitalnu ravan. Pošto će se, u ovoj tezi, modelirati desno srednje uho, na slici 1.1 prikazana je njegova anatomija. Srednje uho je veoma složen sistem šupljina i kanala, smeštenih u slepoočnoj kosti. Gledajući od nazad ka napred središnji deo srednjeg uha predstavlja bubna šupljina. Ispred bubne šupljine se nalazi Eustahijeva slušna tuba koja se pruža ka donjem delu ždrela, a iza bubne šupljine se nalaze šupljine mastoidnog nastavka slepoočne kosti. Bubna šupljina ima nepravilan oblika i zapreminu od oko 2 cm^3 . I pored nepravilnog oblika ona se može aproksimirati kao prizma sa šest strana: 1) spoljašnja ili opnasta strana 2) unutrašnja ili labirintna strana 3) prednja ili karotidna strana 4) zadnja ili mastoidna strana 5) gornja ili pokrovna strana i 6) donja ili jugularna strana. Za ove elemente vezuje se sistem vešanja osikularnog lanca.



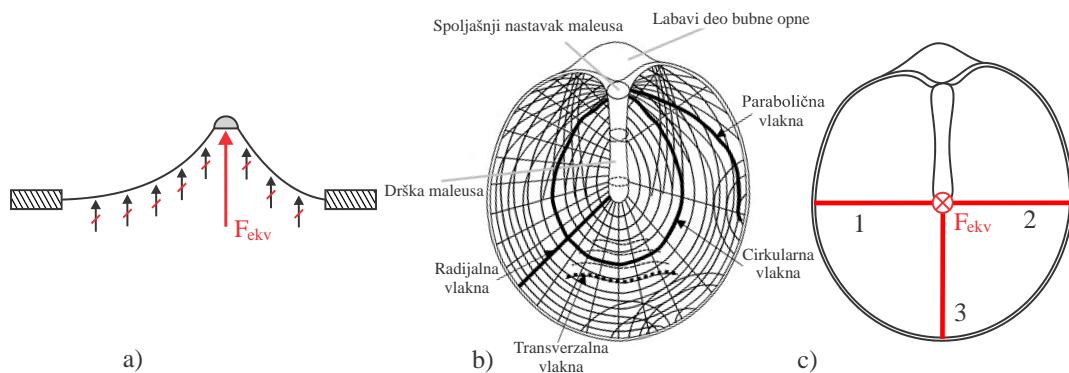
Slika 1.1: Anatomija srednjeg uha. Modifikovano na osnovu [Gilroy et al., 2012].

Bubna šupljina je od spoljašnjeg uha, koje se sastoји из ушне školjke i spoljašnjeg ušnog kanala, odvojena bubnom opnom koja je uložena u plitki koštani žljeb na dnu spoljašnjeg ušnog kanala. Bubna opna je postavljena koso (pod uglom od oko 45°) prema prednjem i donjem zidu spoljašnjeg ušnog kanala, zbog čega su ova dva zida kanala nešto duža od ostala dva, tj. od zadnjeg i gornjeg. Ovakva orientacija omogućava bubnoj opni da ima veću površinu od površine poprečnog preseka spoljašnjeg ušnog kanala. Bubna opna je skoro ovalnog oblika a u poprečnom preseku ima oblik konusa čiji je vrh okrenut medijalno, tj. ka unutrašnjosti bubne šupljine. Njen naj-dublji deo, tj. vrh, koji se nalazi malo ispred i ispod središta bubne opne, nazvan je pupak bubne opne (*umbo membranae tympani*), dalje umbo. Stranice konusa koji formira bubna opna su konveksne gledano sa latelarne strane, tj. sa spoljašnje strane, videti sliku 1.2 a). Idući od spoljašnjeg ušnog kanala ka bubnoj šupljini, bubna opna se sastoji iz kožnog sloja, sopstvenog

²(eng. dB SPL, gde SPL stoji za *sound pressure level*)

fibroznog sloja bubne opne i sluzokožnog sloja. Kožni sloj, koji oblaže spoljašnju stranu bubne opne, čini veoma tanka koža spoljašnjeg ušnog kanala. Bubna opna se odlikuje vrlo izraženom regenerativnom sposobnošću, zbog čega povrede bubne opne, ili namerna rasecanja (paracenteza) brzo zarastaju. Iako veoma tanak, moguće je da kožni sloj ima uticaja na mehanička svojstva bubne opne. Sopstveni fibrozni sloj bubne opne jeste srednji i jedini sloj koji isključivo pripada bubnoj opni. Sluzokožni sloj, koji oblaže unutrašnju stranu bubne opne, deo je sluzokože bubne šupljine. To je veoma tanak sloj ćelija, za koji se smatra da skoro i nema uticaj na mehanička svojstva bubne opne. Makroskopski posmatranjem mogu se razlikovati tri dela bubne opne. To su zategnuti deo (*pars tensa*), labavi deo (*pars flaccida*) i anularni ligament bubne opne. Razlika između zategnutog dela i labavog dela bubne opne je u strukturi njihovog sopstvenog fibroznog sloja, videti [Ferrazzini, 2003]. Zategnuti deo čini donji, veći i deblji deo bubne opne. Sopstveni fibrozni sloj zategnutog dela sastoje se od dva subepidermalna vezivna sloja sa, gledajući od spoljašnjeg ušnog kanala, radijalnim vlaknima i cirkularnim vlaknima, videti [Šercer, 1966], [Volandri et al., 2011] i [Ferrazzini, 2003], odakle je i preuzeta slika 1.2 b). Takođe, sopstveni sloj bubne opne sadrži i parabolična i transverzalna vlakna, videti sliku 1.2, b). Labavi deo bubne opne, nazvan još i Šapnelova opna, predstavlja gornji, manji i tanji deo bubne opne. Sopstveni sloj labavog dela bubne opne sastoje se iz vezivnog tkiva koje sadrži vlakna kolagena i obilje elastičnih vlakana, videti [Ferrazzini, 2003]. Anularni ligament je vlaknasto zadebljanje koje čvrsto vezuje skoro ceo obim zategnutog sloja bubne opne za plitki koštani žleb na dnu spoljašnjeg ušnog kanala, videti [Ferrazzini, 2003], [Decraemer & Funnell, 2008]. Takođe, radikalna, a i neka neredikalna, vlakna bubne opne nastavljaju se i u anularni ligament bubne opne. Zbog toga je pomeranje bubne opne na mestu anularnog ligamenta skoro nula. Uticaj tog ligamenta, koji gotovo da leži u jednoj ravni od koje malo odstupa - anularnoj ravni bubne opne - na mehanička svojstva bubne opne je vrlo mali, videti [Ferrazzini, 2003] i [Decraemer & Funnell, 2008]. Sama za sebe bubna opna je predmet izučavanja velikog broja radova, videti na primer [Decraemer & Funnell, 2008] i [Volandri et al., 2011] kao i reference u njima, jer se radi o izuzetno složenom sistemu koji se modelira parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Ove jednačine se sa obzirom na pomenata radikalna i cirkularna vlakna rešavaju na nehomogenom domenu složenog oblika tako da u rešavanju uglavnom dominiraju numeričke procedure bazirane na metodama konačnih ili graničnih elemenata.

Dakle, u okvirima ove teze, radi jednostavnosti modela, izdvojiće se samo dva svojstva bubne opne: prvo svojstvo da kolektuje signal iz spoljašnjeg slušnog kanala i drugo da je to prvi elemenat u kome zbog deformacije dolazi do disipacije energije. Ova dva svojstva će se u model uključiti u znatno pojednostavljenom, ali ipak približno ekvivalentnom obliku. Prvo svojstvo: sam kolektovan signal/pritisak koji je raspoređen po površini opne će se zameniti jednom primudrom silom koja deluje u tački umbo u pravcu normale na anularnu ravan bubne opne, kao na slici 1.2 a). Drugo svojstvo: sama bubna opna će se zameniti sa tri znatno prostija elementa, i to sa tri, za umbo vezana, vlakna istih reoloških svojstava kao sama opna, videti sliku 1.2 c).



Slika 1.2: Pritisak iz spoljašnjeg slušnog kanala a), nehomogenost bubne opne b) i prostiji približno ekvivalentni sistem c). Modifikovano na osnovu [Ferrazzini, 2003].

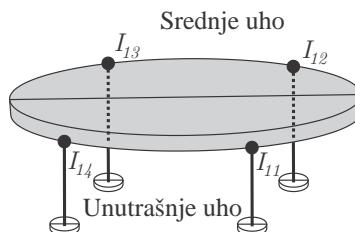
Opravdano je pretpostaviti da za modeliranje ova dva, ovde izdvojena svojstva bubne opne, eventualno postoje i druga rešenja, mnogo bliža realnim i posebno patološkim uslovima, ali je gotovo sigurno da bi taj segment u različitim aspektima vodio ka neuporedivo složenijim modelima srednjeg uha, što prevazilazi okvire ove teze.

Pored bubne opne, u bubnoj šupljini se nalazi i lanac slušnih koščica, dalje osikularni lanac, čije kretanje izazvano promenom pritiska vazduha na bubnu opnu, izaziva promenu pritiska perilimfe u unutrašnjem uhu. Osikularni lanac čine tri koščice, i to su, idući od spolja ka unutra: maleus, inkus i stapes. Tradicionalni nazivi za te koščice u našem jeziku su redom čekić, nakovanj i uzengija. Maleus je najveća od tri slušne koščice i utkan je u sopstveni fibrozni sloj bubne opne svojom drškom (manubrium) i spoljašnjim (latelarnim) nastavkom. Sluzokožni sloj bubne opne pokriva i dršku čekića. Inkus se nalazi unutra i iza maleusa, a za njega je, prema Šerceru, vezan pomoću nepokretnog zgloba. Naime, taj autor smatra da se posle izvesne dobi pokretljivost između maleusa i inkusa može zanemariti, videti [Šercer, 1966]. Ova pretpostavka znatno smanjuje broj stepeni slobode kretanja lanca slušnih koščica pa će se i ovde usvojiti. Dalje je inkus sa stapesom vezan pomoću pokretnog zgloba, za koji će se pretpostaviti da je sferni i idealan. Uvođenje svog trenja u zglob između inkusa i stapesa itekako ima smisla, jer pojašnjava slabljenje sluha u starijem dobu, ali taj fenomen prevazilazi okvire ove teze, i o njemu se može govoriti u okviru budućih modela srednjeg uha. Stapes, koji je najmanja koščica u nizu ali i u ljudskom telu, uglavljen je svojom bazom u ovalni prozor na labirintnom zidu bubne šupljine. Kretanje baze stapesa jeste glavni uzrok za promenu pritiska perilimfe i zato ga je potrebno dobro proučiti, jer je kretanje osikularnog lanca najvažniji segment u prenosu energije od spoljašnjeg slušnog kanala ka unutrašnjem uhu. To kretanje omogućava sistem vešanja u kome takođe dolazi do disipacije energije, o čemu će sada biti reči.

Sistem vešanja osikularnog lanca za temporalnu kost čini nekoliko ligamenata i dva mišića.

Maleus je vezan za temporalnu kost pomoću četiri ligamenta: gornjeg, prednjeg, latelarnog i zadnjeg ligamenta koji su dobili naziv spram relativne pozicije u odnosu na sam maleus. Gornji ligament povezuje gornji deo glave maleusa sa gornjim zidom bubne šupljine. Iako neki autori smatraju da je gornji ligament maleusa ustvari samo tanak sloj sluzokože, kod nekih uzoraka istog utvrđeno je prisustvo vlakana kolagena, videti [Sim & Puria, 2008]. Prednji ligament maleusa povezuje vrat maleusa sa petrotimpaničnom pukotinom, dok lateralni ligament maleusa povezuje vrat istog sa koštanim marginama bубног useka (Rivinusovog useka). Prednji i lateralni ligament maleusa se smatraju pravim ligamentima pošto se sastoje od kolagenih vlakana. Zadnji ligament maleusa se često ne navodi u knjigama iz anatomije, ali je ipak njegovo prisustvo potvrđeno disekcijom svežih uzoraka srednjeg uha, videti [Ferrazzini, 2003]. Sistem vešanja inkusa čine dva ligamenta, gornji i zadnji ligament inkusa. Gornji ligament se opisuje kao sluzokoža (*mucosal fold*), videti [Ferrazzini, 2003]. Zadnji ligament inkusa, spaja kratki krak inkusa, uglavnom sa lateralne i medijalne strane, i povezuje ga sa kostima bубне šupljine opet sa lateralne i medijalne strane. Zbog toga se ovaj ligament nekada posmatra kao dva odvojena ligamenta, videti [Sim & Puria, 2008]. Međutim, opažanjima je utvrđeno da su ta dva dela ligamenta spojeni sa donje ili zadnje strane kratkog kraka inkusa tako da je zadnji ligament inkusa jedan ligament.

Pored navedenih ligamenata, između baze stapesa i ovalnog prozora nalazi se anularni ligament stapesa koji je eliptičnog oblika i koji obezbeđuje hermetički zatvorenu ali pokretnu granicu između srednjeg uha i kohlearne tečnosti. Sirina anularnog ligamenta po obimu baze stapesa nije konstantna, tj. ligament je tanji na zadnjem delu baze stapesa. Iako se uglavnom opisuje kao ligament, neki autori vezu između baze stapesa i ovalnog prozora opisuju kao „pojednostavljen” zglob, videti [Ferrazzini, 2003], pa se zbog toga ova veza naziva i stapedio-vestibularni zglob. Kao i bubna opna i anularni ligament stapesa se može modelirati parcijalnim diferencijalnim jednačinama za prsten promenljive debljine oblika elipse koji predstavlja vezu baze stapesa sa temporalnom kosti. Međutim, prisustvo parcijalnih jednačina bi značajno usložilo model srednjeg uha, pa će se veza baze stapesa za ovalni prozor ovde dati pojednostavljenim sistemom od četiri sile reakcije veze između baze stapesa i temporalne kosti, videti sliku 1.3.



Slika 1.3: Pojednostavljenje dejstvo anularnog ligamenta stapesa.

Na neki način ove četiri sile menjaju raspoređeno opterećenje duž četiri dela elipse i tako obezbeđuju mogućnost da se analiziraju složena kretanja baze stapesa (translaciiju i obrtanje oko duge i kratke ose simetrije baze/elipse stapesa).

Mišići slušnih koščica i njihova složena funkcija nisu u potpunosti razjašnjeni. Čak i u savremenoj literaturi postoje različiti stavovi u pogledu njihove funkcije, što je posledica složenosti sistema srednjeg uha, njegovih dimenzija, a najviše nedostupnosti neposrednog uvida u njegovu funkciju tokom normalnog procesa slušanja pri fiziološkim uslovima. Iz tog razloga, će se za razvoj modela prihvati određena stanovišta prisutna u literaturi. Opravdanost tih stanovišta bila bi predmet rasprava među otolozima a to prevazilazi okvire ove teze. U principu, radi se o poprečnoprugastim mišićima od kojih je jedan regulator kretanja inkudo-stapedijalnog zgloba, tj. prisluškivač koji je stalno aktivan tokom procesa slušanja dok je drugi mišić protektor tj. mišić koji štiti unutrašnje uho od prejakih nadražaja tipa impulsnog dejstva kao što su pucanj ili eksplozija u neposrednoj blizini na primer. Termini prisluškivač i protektor su preuzeti iz knjige Šercera i stoje za mišić stapesa i mišić zatezač bubne opne. Mišić stapesa (*m. stapedius*) jeste najmanji poprečnoprugasti mišić kod čoveka. Mišić je smešten u šupljinu piramidnog ispuštenja, na mastoidnom zidu bubne šupljine. Veoma tanka tetiva izlazi iz piramidnog ispuštenja na njegovom vrhu i, pružena unapred, pričvršćuje se na glavi stapesa u kojoj se nalazi zglob, videti sliku 1.1. Mišić stapesa je inervisan istoimenim živcem (*n. stapedius*), bočnom granom facijalnog živca. Svojim dejstvom mišić, tokom procesa slušanja, povlači napolje i nazad, videti [Šercer, 1966] i [Møller, 2006], i time izvlači njegovu bazu iz ovalnog prozora čime se reguliše pritisak perilitfne u unutrašnjem uhu. Mišić zatezač bubne opne (*m. tensor tympani*) veoma je tanak, izdužen mišić, čija se vlakna pričvršćuju na zidovima istoimenog koštanog polukanala i na hrskavičnom delu slušne tube. Mišić se pruža unazad i prelazi u tanku tetivu, koja se pripaja na vratu maleusa. Zatezač bubne opne je inervisan istoimenim živcem (*n. tensoris tympani*), granom mandibularnog živca. U slučaju impulsnog opterećenja ovaj mišić povlači manubrium maleusa ka unutra, zatežući i pri tome pomerajući, takođe ka unutra, bubnu opnu, tako da se glava stapesa povuče unutra i prema gore i tako spreči naglo kretanje njegove baze koje bi dovelo do oštećenja unutrašnjeg uha, videti [Šercer, 1966] i [Møller, 2006]. U okviru teze proučavaće se samo regularno opterećenje, mada bi i model koji u razmatranje uzima i impulsno opterećenje bio od interesa.

Sinergičnim dejstvom mišića zatezača bubne opne i mišića stapesa dolazi do blokiranja osikularnog lanca odnosno prestanka kretanja lanca slušnih koščica. Aktivacija ova dva mišića zove se refleks srednjeg uha, i kod čoveka uključuje samo mišić stapesa dok kod životinja koje se često koriste u istraživanjima auditornog sistema (kao što su mačka, morsko prase, pacov) uključuje i mišić zatezač bubne opne, videti [Møller, 2006]. Ovaj refleks se aktivira u slučaju glasnog zvuka (kad nivo zvuka pređe oko 70 dB SPL ili po nekim autorima 90 dB SPL), videti [Šercer, 1966], [Ashmore, 2002], [Møller, 2006], čime se štiti kohlea od štete koja može nastati na primer prevelikim pomeranjem baze stapesa. Kontrakcijom mišića stapesa smanjuje se prenos zvuka do kohlee, više za niske nego za visoke frekvencije, videti [Møller, 2006]. Iako ovaj refleks ima zaštitnu ulogu, zbog vremena koje je potrebno za kontrakciju ovih mišića, a koje iznosi od 25 do 100 ms u zavisnosti od intenziteta zvuka, on ne može da zaštiti kohleu u slučaju impulsnog dejstva kao što je na primer pucanj. Kao što je već rečeno, dalja razmatranja impulsnog dejstva prevazilaze okvire ove teze. Dakle, u ovoj tezi se prihvata stanovište da samo mišić stapesa stalno radi u procesu slušanja, videti [Šercer, 1966] i [Møller, 2006], pa se uticaj mišića zatezača bubne opne neće se uzeti u razmatranje.

Model koji se ovde predlaže uključuje disipaciju energije *ab initio* neposredno za mišić stapesa i svaki ligament u sistemu vešanja posebno. Pri tome se težine slušnih koščica neće uzeti u razmatranje pošto pomeranjem glave ne dolazi do relativnog kretanja lanca slušnih koščica u odnosu na temporalnu kost i stvaranja zvučne senzacije. Ako se pretpostavi da je kretanje osikularnog lanca obrtanje oko nepomične ose onda je jedno moguće objašnjenje ovoga stava da je težiste osikularnog lanca blizu te ose obrtanja i ne pravi moment koji bi pomerao stapes. Najzad treba naglasiti da se neposredno iza baze stapesa u unutrašnjem uhu nalazi perilitfna tako da će se kretanje baze stapesa posmatrati uz otpor fluidne sredine sa kojom je u kontaktu.

Na samom kraju ove sekცije evo nekoliko stavova klasične teorije sluha.

Kada ne bi imali srednje uho i kada bi ovalni prozor unutrašnjeg uha bio direktno izložen zvučnim talasima koji se prostiru kroz vazduh, samo 0.1% energije zvuka bi se prenelo do kohlee dok bi 99.9% energije bilo reflektovano, odnosno odbijeno zajedno sa zvučnim talasom. Razlog za

takve gubitke je to što je kohlea ispunjena tečnošću - perilimfom - koja ima dosta veću akustičnu impedansu od vazduha. Akustična impedansa je mera otpora čestica sredine njihovom pomeranju usled prostiranja zvučnog talasa kroz tu sredinu, i mnogo je veća za tečnost nego za vazduh. Akustična impedansa jednaka je količniku pritiska i zapreminske brzine protoka čestica sredine kroz koji se prostire zvučni talas. Na granici između dve različite sredine količina odbijenog zvuka, a samim tim i količina prenesenog zvuka, zavisi od razlike između akustičnih impedansi te dve sredine. Što je veća razlika impedansi veća je i količina odbijenog zvuka. Akustična impedansa vode (prepostavimo i perilimfe) je oko 3750 puta veća od akustične impedanse vazduha, i to je razlog zašto bi se 99.9% energije zvuka odbilo a samo 0.1% prenelo u kohleu.

Da bi prenelo energiju zvuka, srednje uho ima funkciju transformatora koji prilagođava ovu veliku razliku u akustičnim impedansama vazduha i kohlee, i time omogućava prenos energije sa što manje gubitaka. Ono omogućava da se preko 60% energije zvuka koja dođe do bubne opne prenese u unutrašnje uho, videti [Ashmore, 2002]. Zbog toga su prenos energije kao i njeni gubici jako važni pri modeliranju dinamičkog ponašanja osikularnog lanca. Postoje dva osnovna mehanizma koja omogućavaju ovo prilagodavanje impedansi. Prvi mehanizam je razlika u površinama bubne opne i baze stapesa koja za posledicu ima povećanje pritiska na bazi stapesa u odnosu na pritisak na bubnoj opni, ali i smanjenje zapreminske brzine u kohlei. Drugi mehanizam je sistem poluge koji čini osikularan lanac i koji za posledicu ima povećanje sile na bazi stapesa u odnosu na silu koja deluje na bubnu opnu. Kao posledica dejstva ova dva mehanizma vibracije velike amplitudu iz vazduha transformišu se u vibracije male amplitude u kohlearnoj tečnosti. Napominje se da, kao posledica dejstva ova dva mehanizma, pritisak u kohlei bi trebalo, teorijski, da bude oko 20 puta veći od pritiska na bubnoj opni i taj odnos bi bio nezavistan od frekvencije. Ipak eksperimentalno je pokazano da ovo povećanje pritiska itekako zavisi od frekvencije. Iako su razlozi za tu zavisnost od frekvencije složeni, smatra se da veliku ulogu za to imaju fleksibilne veze između koščica osikularnog lanca kao i inercijalni efekti osikularnog lanca, koji postaju značajni na visokim frekvencijama, videti [Ashmore, 2002]. Iako je kretanje osikularnog lanca na višim frekvencijama mnogo složenije od sistema poluge, ova dva mehanizma predstavljaju bazični, jednostavan, teorijski okvir za razumevanje funkcije srednjeg uha.

1.2 O postojećim modelima srednjeg uha

Od 60-tih godina prošloga veka i prvih rezultata Molera i Zwislockog, videti [Møller, 1961] i [Zwislocki, 1962], identifikovano je nekoliko različitih pristupa modeliranju srednjeg uha. Tako su razvijani različiti modeli srednjeg uha koji se grubo mogu podeliti u dve veoma široke kategorije: modele sa diskretnim parametrima i modele sa raspoređenim parametrima, videti [Parent & Allen, 2010] i [Volandri *et al.*, 2012]. U modele sa diskretnim elementima, na primer, spadaju čisto mehanički modeli napravljeni od sintetičkih materijala, videti [Stieger *et al.*, 2007], zatim modeli zasnovani na elektro-akustičnim analogijama, videti [Møller, 1961], [Zwislocki, 1962], [Goode *et al.*, 1994], i matematički modeli zasnovani na dinamici sistema krutih tela koji za rezultat daju obične diferencijalne jednačine, videti [Eiber & Freitag, 2002] i [Volandri *et al.*, 2012]. Više detalja o modelima srednjeg uha može se naći u referencama navedenim u pomenutim radovima ali i u monografijama Jankea [Jahnke, 2003] i Molera [Møller, 2006] koje pored medicinskih sadrže i biomehanička razmatranja. Modeli sa raspoređenim parametrima, generisani metodama mehanike kontinuum, sadrže parcijalne diferencijalne jednačine koje se rešavaju numerički. Pri tome, još od 1975. dominira metod konačnih elemenata, videti [Funnell, 1975] i [Zhao *et al.*, 2009]. Uzimajući u obzir složenost geometrije, nehomogenost i anizotropnost, kakva se prepoznaće npr. kod bubne opne, i primena metoda zasnovanih na graničnim elementima se može razmatrati, videti [Katsikadelis, 2002].

Modeli srednjeg uha razvijani su sa ciljem simulacije i predviđanja dinamičkog ponašanja srednjeg uha i to u fiziološkim/normalnim, patološkim i post-operativnim stanjima. Posebno se koriste u analizi različitih protetičkih uređaja koje treba ugraditi radi restoracije slušne funkcije, videti [Eiber & Freitag, 2002] i [Zhao *et al.*, 2009]. Kako svaki model predstavlja aproksimaciju koja optimizira između dve krajnosti - jednostavnosti i sveobuhvatnosti - glavni problem u izboru pristupa koji će se koristiti za modeliranje je kompromis između složenosti i numeričkih zahteva vezanih za rešavanje dobijenih jednačina.

Tako su, na primer, modeli zasnovani na elektro-akustičnim analogijama dosta jednostavniji jer su bazirani na merenjima impedansi struktura srednjeg uha kojima se simuliraju samo određeni aspekti sprovođenja akustičnog signala kroz srednje uho. Međutim, kod ovih modela teže se menjaju geometrija i parametri struktura srednjeg uha, a modeliranje prostornog kretanja osikularnog lanca je veoma složeno, videti [Jahnke, 2003]. U jednostavnije modele ubrajaju se i modeli sa diskretnim (koncentrisanim) masama, pre svega zbog malog broja stepeni slobode i uobičajene pretpostavke da se svi elementi osikularnog lanca kreću samo translatorno, videti [Feng & Gan, 2004], [Guz & Warmiński, 2009], [Garland, 2011]. Savremeni elektronski atlasi sa video prezentacijama kretanja osikularnog lanca u kliničkim uslovima govore da je kretanje elemenata lanca slušnih koščica mnogo složenije od translatornog. Sa druge strane, modeli koji se rešavaju metodom konačnih elemenata zbog uključivanja složene geometrije i nehomogenih i anizotropnih svojstava struktura srednjeg uha mogu da budu veoma složeni i veoma zahtevni u pogledu angažovanja računarskih resursa. Tako na primer broj stepeni slobode jednog takvog modela može da bude 4491, kao u radu [Sun *et al.*, 2002], ili čak 161751, kao u disertaciji [Ferrazzini, 2003].

Mehanički modeli srednjeg uha zasnovani na dinamici sistema krutih tela uz određene pretpostavke predstavljaju alternativu prethodno pomenutim pristupima. Prvenstveno to su numerički manje zahtevni modeli koji mogu da uključe stvarna geometrijska i inercijalna svojstva slušnih koščica i tako poboljšaju tačnost predviđanja. Pretpostavka da se slušne koščice mogu modelirati kao kruto telo bazirana je na eksperimentalnim merenjima prirodne frekvencije izolovanih slušnih koščica, koja je izvan opsega frekvencije koje ljudsko uho može da čuje. Naime, iako je u radu [Beer *et al.*, 1999] navedeno da se slušne koščice mogu modelirati kao kruta tela samo u ograničenom području frekvencija od 0 do 3.5 kHz, merenja izvršena na izolovanim slušnim koščicama pokazuju da je njihova prva rezonantna frekvencija daleko iznad opsega frekvencija koje ljudsko uho može da čuje. To dovodi do zaključka navedenog u disertaciji [Ferrazzini, 2003], da se koščice mogu modelirati kao kruta tela na celom opsegu frekvencija koje ljudsko uho može da čuje. Takođe, eksperimentalnim opažanjima u radu [Huber *et al.*, 2001a] nije uočeno deformisanje tela stapesa na ispitivanom području frekvencija od 500 do 8000 Hz, što opravdava pretpostavku o krutosti.

Poseban problem u modeliranju srednjeg uha je utvrđivanje reoloških parametara struktura srednjeg uha, jer je eksperimente za utvrđivanje tih parametara potrebno izvoditi na strukturama veoma male dimenzije. Naime, problem određivanja nepoznatih reoloških parametara potrebnih za korektno modeliranje složenih svojstava srednjeg uha ne predstavlja lak zadatak jer dostupni eksperimentalni rezultati često nisu dovoljni ni za određivanje nepoznatih reoloških parametara niti za proveru predviđanja modela i njihovo slaganje sa realnim opažanjima, videti [Yao *et al.*, 2010].

Modeli srednjeg uha koji su fizički realizovani, kao što su čisto mehanički modeli i modeli zasnovani na elektro-akustičnim analogijama, uključuju disipaciju energije zbog načina realizacije, dok matematički modeli mogu, ali i ne moraju, da uključe disipaciju energije pre svega zbog složenosti tog fenomena, videti [Yao *et al.*, 2010]. U modelima srednjeg uha, zasnovanim na dinamici sistema krutih tela ili dinamici neprekidnih sredina, disipacija energije se obično analizira ili uvedenjem Kelvin-Vojtovog modela viskoelastičnog elementa koji se pridružuje nekoj strukturi ili dodavanjem disipativnog člana u diferencijalne jednačine koji bi uključio disipaciju sistema kao celine, videti [Volandri *et al.*, 2012]. Disipacija sistema kao celine se često uključuje u obliku Rejljejevih parametara koji nemaju jasno fizičko ili reološko značenje, videti [Semblat, 2009]. Kako je disipacija energije jedan od najvažnijih faktora u modelu srednjeg uha njen izostanak ili nedovoljno preciziran mehanizam veoma ograničava mogućnosti upotrebe takvih modela.

Model koji će se u ovoj tezi razviti uključuje disipaciju energije *ab initio*, i to u svakom linijskom ligamentu, tetivi mišića, ali i elementima koji na prostiji ili približno ekvivalentan način menjaju dejstva anularnog ligamenta stapesa i bubne opne. Svaki taj element će se u reološkoj analizi modelirati konstitutivnom jednačinom Zenerovog tipa sa frakcionim izvodima i ograničenjima koja slede iz drugog zakona termodynamike, tako da će se posle u strukturalnoj analizi, kroz njemu odgovarajuće vrednosti modula elastičnosti, reda izvoda, i vrednosti relaksacionih konstanti, moći proceniti njegov uticaj na kretanje sistema čiji je deo. Osnovna hipoteza teze je da će se tim reološkim modelom elemenata koji čine srednje uho dobiti korektno predviđanje kretanja sistema kao celine, bez obzira na njegovu složenost, a što se vidi iz prikazanih stavova iz domena anatomije i fiziologije.

1.3 O konstitutivnim jednačinama koje uključuju frakcione izvode

Poznato je da je kod idealno elastičnih tela napon linearna funkcija deformacije, što predstavlja Hukov zakon koji dominira u inženjerskoj literaturi kao najjednostavnija konstitutivna jednačina. Međutim, prema Belu (do 1973.), ali i kasnije može se reći da su eksperimentalna merenja u poslednjih 320 godina pokazala, da za svaki ispitivan materijal, deformacija koja nastaje kao rezultat primene malog opterećenja nije linearna funkcija tog opterećenja, videti [Bell, 1973]. Dakle, Hukov model predstavlja idealizaciju realnih materijala koja nije potvrđena eksperimentom. Realni materijali ispoljavaju i svojstva kao što su puzanje, relaksacija napona, memorijski efekti, histerezis u dijagramu napon-deformacija, i posebno važno svojstvo - disipaciju energije u procesu deformacije. Uobičajeno je da se disipacija energije uključi dodavanjem člana kod koga će napon biti proporcionalan prvom izvodu deformacije. Tako se dolazi do Kelvin-Vojtovog i Maksvelovog modela viskoelastičnog tela. Međutim ako se posmatra realni stimulans u kome se materijal iz virginallnog stanja konstantnom brzinom deforme do zadate mere da bi se posle toga pratila relaksacija napona kao prirodno svojstvo svih materijala, videti [Troyer *et al.*, 2012], onda se vidi da ni Kelvin-Vojtov ni Maksvelov model ne opisuju ono što pokazuju eksperimenti. Korektni opis daje tek Zenerov ili po Fungu - Kelvinov - model koji uključuje i prve izvode napona i deformacije, videti [Fung, 1993]. Najzad, viskoelastična svojstva novih materijala - elastomera i polimera - ne opisuju se dobro celobrojnim - lokalnim izvodima već nelokalnim - necelim izvodima (frakcionim ili tačnije izvodima proizvoljnog realnog reda). Neki frakcioni modeli nastali su jednostavno zamenjivanjem celobrojnog izvoda frakcionim kod standardnih konstitutivnih modela kao što su Kelvin-Vojtov, Maksvelov ili Zenerov, videti [Podlubny, 1999] i [Atanacković, 2002]. Neki modeli uključuju jedan, a neki više frakcionalih operatora istog ili različitog reda, videti [Pritz, 1996], [Pritz, 2003]. Postoje i modeli koji sadrže necele izvode raspoređenog reda, videti [Atanacković, 2003], kao i modeli koji sadrže necele izvode promenljivog reda, videti [Ramirez & Coimbra, 2007]. Pomenute konstitutivne jednačine našle su primenu u analizi dinamičkog ponašanja viskoelastičnog štapa i analizi prostiranja talasa u viskoelastičnim materijalima, videti [Rossikhin & Shtikova, 2001], [Atanacković & Stanković, 2002], [Atanacković *et al.*, 2011b], [Atanacković *et al.*, 2011a], kao i analizi sudara i oscilacija, videti [Spasić & Charalambakis, 2002], [Grahovac, 2011], [Žigić, 2012], [Grahovac *et al.*, 2012].

U ovoj tezi koristiće se frakcioni Zenerov model viskoelastičnog tela. Važno je napomenuti da, pored toga što dobro opisuje ponašanje realnih materijala, puzanje, relaksaciju napona, memorijske efekte, histerezis u dijagramu napon-deformacija, ovaj model je konzistentan sa drugim zakonom termodinamike i odlikuje se malim brojem parametara.

1.4 O primeni frakcionalog računa u modeliranju bio-sistema

Matematički modeli dobijeni primenom frakcionalog računa u mnogim slučajevima bolje predviđaju dinamičko ponašanje realnih sistema u odnosu na modele dobijene primenom konvencionalnog diferencijalnog računa i diferencijalnih jednačina celobrojnog reda, videti [Oldham & Spanier, 1974], [Miller & Ross, 1993], [Podlubny, 1999], [Hilfer, 2000], [Magin, 2006], [Baleanu *et al.*, 2009], [Mainardi, 2010], [Monje *et al.*, 2010], [Sabatier *et al.*, 2010], [Baleanu *et al.*, 2011], [Sheng *et al.*, 2011a]. Isto tvrđenje važi i kada su bio-sistemi u pitanju. Poznato je, na primer, da se električna svojstva membrana nervnih ćelija kao i propagacija električnog signala kroz njih, koja su istaživali Kol 1933. godine i Hodžkin 1946. godine, mogu opisati diferencijalnim jednačinama necelog reda, videti [Magin, 2006]. Pored toga frakcioni račun ima veliku primenu u opisivanju reoloških svojstava viskoelastičnih materijala. Jedan od razloga za to leži u činjenici da se polimerni i elastomerni materijali u velikoj meri koriste i u bio-inženjerstvu. Ovi materijali ispoljavaju neelastične osobine kao što su puzanje, relaksacija napona, prigušenje, kao i efekat memorije, a takvo ponašanje materijala se uspešno opisuje uvođenjem frakcionalih (nelokalnih) operatora u konstitutivne relacije, čime se broj potrebnih parametara značajno smanjuje. Begli i Torvik su na osnovu eksperimenata utvrdili korektnost reoloških modela sa frakcionim izvodima za više od 130 viskoelastičnih materijala, videti [Bagley & Torvik, 1986]. Pored toga, reološki modeli viskoelastičnog ponašanja sa frakcionim izvodima primenjivani su i za opisivanje viskoelastičnih svoj-

stava različitih bioloških materijala kao što su dentin, videti [Petrović *et al.*, 2005], meka tkiva kardiovaskularnog sistema kao što je bubreg ili karotidna arterija, videti [Spasić & Mitić, 2007], mišićna grupa harmstring, videti [Grafovac & Žigić, 2010], viskoelastične strukture srednjeg uha, videti [Dankuc *et al.*, 2010], oko u normalnoj i fazi ranog glaukoma, videti [Dolićanin *et al.*, 2012], da se pomenu samo neki. Superiornost frakcionih modela u odnosu na modele sa celobrojnim izvodima leži u činjenici da su nelokalnog karaktera - relativno jednostavno uključuju memorijске efekte - te da se ponašanje koje predviđaju eksperimenti sa dovoljnom tačnošću opisuje sa vrlo malim brojem parametara. Cena za to je rad sa specijalnim funkcijama i pažljiva primena pravila frakcionog računa.

1.5 O numeričkim metodama

Problemi koji uključuju frakcione izvode mogu se, na primer, rešiti korišćenjem Grunvald-Letnikovljeve definicije necelog izvoda kao i činjenice da su za široku klasu funkcija koje se sreću u fizici i inženjerstvu ta i Riman-Ljuvilova definicija ekvivalentne, videti [Podlubny, 1999]. Takođe, za rešavanje problema koji uključuju frakcione izvode, a kada je to moguće, koristi se i Laplasova transformacija, videti [Doetsch, 1974], [Podlubny, 1999], čime se problem transformiše iz vremenskog domena, tj. prostora originala, u kompleksni domen, tj. prostor slika, u kom se umesto diferencijalnih rešavaju algebarske jednačine. Rešenje koje se dobija na taj način je u prostoru slika i potrebno je primeniti inverznu Laplasovu transformaciju. Inverzija Laplasove transformacije može se, npr. uraditi korišćenjem Košijeve teoreme o reziduumu, videti [Spasić & Charalambakis, 2002], [Atanacković *et al.*, 2011b], [Atanacković *et al.*, 2011a], ili primenom neke od numeričkih metoda za inverznu Laplasovu transformaciju, videti [Wu *et al.*, 2001] i [Cohen, 2007]. Napominje se da nisu svi numerički postupci za pronalaženje inverzne Laplasove transformacije pođednako dobri za probleme koji uključuju necele izvode, videti [Sheng *et al.*, 2011b]. Pored pomenutog, može se koristiti i ekspanziona formula Atanackovića i Stankovića, videti [Atanacković & Stanković, 2004], kojom se frakcionala diferencijalna jednačina transformiše u sistem običnih diferencijalnih jednačina celobrojnog reda sa momentima funkcija, zatim matrični pristup, videti [Podlubny, 2000], kao i razni drugi postupci, videti na primer [Li *et al.*, 2011], koji se mogu sresti u literaturi. Od svih raspoloživih metoda, sistem koji se razmatra u ovoj tezi rešavaće se paralelno primenom Atanacković-Stanković ekspanzione formule i numeričkom inverzijom Laplasove transformacije.

Glava 2

Reološka analiza elemenata srednjeg uha

Svojstvo viskoelastičnosti deformacije bioloških tkiva, kao odgovor na spoljašnje opterećenje, je posledica interakcija unutrašnjih struktura (ćelija, molekula) tog tkiva. Te interakcije se matematički iskazuju konstitutivnim jednačinama koje uključuju sile, mere deformacija i parametre koji služe za opis opštih viskoelastičnih svojstava i to bez opisivanja složenih unutrašnjih interakcija koje se dešavaju na molekularnom nivou. Konstitutivne jednačine su dakle pojednostavljen model ponašanja bioloških tkiva. Iako se skoro svaki realan materijal ponaša složenije nego što opisuju konstitutivne jednačine, u određenom opsegu temperatura, napona i deformacija realno ponašanje bioloških tkiva se može vrlo dobro opisati pažljivo izabranim konstitutivnim jednačinama. U tom slučaju problem se svodi na određivanje vrednosti različitih reoloških parametara materijala koje sadrži izabrani konstitutivni model. Poznato je da je pomoću relativno jednostavnih reoloških eksperimenata, koji se često mogu sresti u literaturi, moguće odrediti vrednosti konstanti koje opisuju konstitutivni model za određeni materijal. Dobijeni reološki model se zatim može koristiti za predviđanje ponašanja datog materijala u strukturalnoj analizi pri različitim slučajevima opterećenja, npr. udarnog ili cikličnog. Tako će se i u okviru ove teze, na osnovu rezultata jednostavnih eksperimenata preuzetih iz literature, odrediti parametri konstitutivnog modela struktura srednjeg uha da bi se sa tim vrednostima analiziralo kretanje u okviru složenog dinamičkog modela srednjeg uha.

2.1 Frakcioni Zenerov model i eksperiment tipa relaksacije napona

U ovoj tezi, kao konstitutivna jednačina koristiće se model poznat kao frakcioni Zener, ili standardno frakciono linearno viskoelastično telo, i to zajedno sa ograničenjima na vrednosti konstanti koja slede iz drugog zakona termodinamike, videti [Bagley & Torvik, 1986] i [Atanacković, 2002]. Model će se primeniti u analizi uniaksijalne, izotermne deformacije viskoelastičnih elemenata srednjeg uha za koje će se pretpostaviti da su zanemarljive mase. Ova konstitutivna jednačina uključuje disipaciju energije *ab initio*, a u poređenju sa standardnim procedurama koje su bazirane na Pronjevoj aproksimaciji i desetinama konstanti, ovaj reološki model za predviđanje viskoelastičnog ponasanja sa istom tačnošću zahteva poznavanje samo četiri konstante: red izvoda, modul elastičnosti i relaksacione konstante materijala. Tako na primer pri uniaksijalnoj izotermnoj deformaciji tela, nižim vrednostima reda izvoda i nižim vrednostima razlike relaksacionih konstanti odgovara manja disipacija energije, videti [Spasić & Charalambakis, 2002], a važi i obrnuto, što nije bez značaja u primenama. Te četiri konstante se dobijaju obradom podataka dobijenih eksperimentom. Razmatranja koja slede preuzeta su iz rada [Dankuc *et al.*, 2010].

Frakcioni Zenerov model dat je sledećim izrazom

$$\sigma + \tau_{\sigma\alpha}\sigma^{(\alpha)} = E_\alpha\varepsilon + E_\alpha\tau_{\varepsilon\alpha}\varepsilon^{(\alpha)}, \quad (2.1)$$

gde σ i ε redom označavaju napon i deformaciju u proizvoljnem trenutku vremena t , $(\cdot)^{(\alpha)}$ je oznaka za nelokalni operator - frakcioni tj. izvod proizvoljnog realnog reda α , α je realan broj ($0 < \alpha < 1$), E_α je modul elastičnosti, a $\tau_{\sigma\alpha}$ i $\tau_{\varepsilon\alpha}$ su relaksacione konstante čije su dimenzije sekund na stepen α . U specijalnom slučaju $\alpha = 1$ ovaj model se svodi na Zenerov model a konstante $\tau_{\sigma 1}$ i $\tau_{\varepsilon 1}$ na vremena relaksacije. U gornjem izrazu koristi se Riman-Ljuvilova definicija frakcionog izvoda, videti [Podlubny, 1999],

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}u(t) = u^{(\alpha)} \equiv \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\xi)d\xi}{(t-\xi)^\alpha}, \quad (2.2)$$

gde je Γ Ojlerova gama funkcija. Važno je napomenuti da u Zenerovom modelu viskoelastičnog tela postoje ograničenja na parametre modela, koja slede iz Klauzijus-Dijemove nejednakosti, i koja su data u sledećem obliku

$$E_\alpha > 0, \tau_{\sigma\alpha} > 0, \tau_{\varepsilon\alpha} > \tau_{\sigma\alpha}. \quad (2.3)$$

Primenom Laplasove transformacije na konstitutivnu jednačinu (2.1) dobija se veza između napona i deformacije u prostoru slika

$$\tilde{\sigma}(s) = \frac{1 + \tau_{\varepsilon\alpha}s^\alpha}{1 + \tau_{\sigma\alpha}s^\alpha}\tilde{\varepsilon}(s), \quad (2.4)$$

gde se koristila definicija Laplasove transformacije, videti [Spiegel, 1965] i [Doetsch, 1974],

$$\tilde{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(t)dt, \quad (2.5)$$

kao i izraz za Laplasovu transformaciju frakcionog izvoda $u^{(\alpha)}$, u obliku

$$\mathcal{L}\{u^{(\alpha)}\} = s^\alpha\tilde{u}(s) - \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{u(\xi)d\xi}{(t-\xi)^{\alpha-1}} \right) \right]_{t=0}, \quad (2.6)$$

gde član u zagradama iščezava ako je $u(t)$ ograničeno kada $t \rightarrow 0$, videti [Oldham & Spanier, 1974]. Primenom inverzne Laplasove transformacije na jednačinu (2.4) dobija se

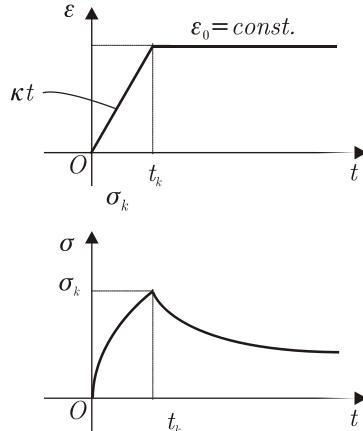
$$\sigma(t) = E_\alpha\varepsilon(t) + \mu\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^\alpha}{\lambda + s^\alpha}\tilde{\varepsilon}(s)\right\}, \quad (2.7)$$

gde λ i μ stoje za $1/\tau_{\sigma\alpha}$ i $E_\alpha(\tau_{\varepsilon\alpha}/\tau_{\sigma\alpha} - 1)$, respektivno, videti [Mainardi & Gorenflo, 2000] i [Dankuc et al., 2010].

Sada se na osnovu reoloških eksperimenata može, za poznatu deformaciju $\varepsilon(t)$, odrediti zavisnost napona od vremena, $\sigma(t)$. Klasična relaksacija napona i puzanje su analizirani u radu [Petrović et al., 2005], sa $\varepsilon = \varepsilon_0 = const.$ i $\sigma = \sigma_0 = const.$, respektivno. Napominje se da pri izvođenju eksperimenata, zbog sila inercije, fizički nije moguće realizovati trenutnu deformaciju uzorka materijala, dok se pri korišćenju velikih brzina deformacije kao aproksimacije trenutne deformacije, javljaju problemi kao što su netačnost u trenutnom ostvarivanju vrednosti ε_0 , vibracije, kao i nedovoljno dobra aproksimacija istorije deformacije, videti [Troyer et al., 2012]. Zbog toga se klasičan eksperiment relaksacije napona, pri kom se meri napon kao odgovor tkiva na trenutnu (Hevisajdovu ili step) pobudu, ne može smatrati dovoljno realnim, videti [Vas & Nagy, 2006], pa će se reološki parametri Zenerovog modela za elemente srednjeg uha odrediti iz specijalne modifikacije klasičnog eksperimenta relaksacije napona o kojoj će sada biti više reći.

Eksperiment relaksacije napona poznat kao rasteži-ravnomerne-pa-fiksiraj-deformaciju (na engleskom govornom području ovaj specijalni eksperiment tipa relaksacije napona poznat je pod nazivom *ramp-and-hold strain then stress relaxation*) sastoji se od dve faze. Tokom prve faze eksperimenta uzorak se unijskijalno deformeš konstantnom brzinom deformacije do trenutka t_k ,

kada se postiže unapred određena vrednost deformacije $\varepsilon = \varepsilon_0$, pri čemu i napon σ raste do vrednosti σ_k , videti sliku 2.1, pa se ova faza zove i faza opterećenja (*loading*). U drugoj fazi postignuta deformacija se održava konstantnom dok napon, a što je svojstvo gotovo svih realnih materijala, opada, videti sliku 2.1. U ovoj fazi dolazi do relaksacije napona. Isti obrazac deformacije može se primeniti i u slučaju prostog smicanja, videti [Enelund & Lesieutre, 1999] i [Spasić, 2014a], a što će se koristiti za određivanje parametara anularnog ligamenta stapesa. Dakle, zavisnost deformacije od vremena i odgovarajuća zavisnost napona od vremena za realne materijale prikazana je na slici 2.1.



Slika 2.1: Realni stimulus - tipično ponašanje: *ramp-and-hold strain then stress relaxation* eksperiment.

Funkcija deformacije sa slike 2.1 može se zapisati kao

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \kappa t, & \text{za } 0 \leq t \leq t_k, \\ \kappa t_k = \text{const.}, & \text{za } t \geq t_k. \end{cases} \quad (2.8)$$

gde je $\kappa = \text{const.}$, ili u ekvivalentnom obliku

$$\varepsilon(t) = \kappa [th(t) - (t - t_k) h(t - t_k)], \quad (2.9)$$

gde je $h(t)$ Hevisajdova prekidna (ili jedinična odskočna) funkcija. Primenom Laplasove transformacije na jednačinu (2.9) dobija se

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \frac{\kappa}{s^2} [1 - e^{-st_k}]. \quad (2.10)$$

Ako se zameni (2.10) u (2.7), inverzijom se dalje dobija, videti [Mainardi & Gorenflo, 2000] i [Dankuc et al., 2010],

$$\sigma(t) = \begin{cases} E_\alpha \kappa t + \mu \kappa \int_0^t e_\alpha(\xi, \lambda) d\xi, & \text{za } 0 < t \leq t_k, \\ E_\alpha \kappa t_k + \mu \kappa \left[\int_0^{t_k} e_\alpha(\xi, \lambda) d\xi - \int_0^{t-t_k} e_\alpha(\xi, \lambda) d\xi \right], & \text{za } t > t_k, \end{cases} \quad (2.11)$$

gde $e_\alpha(t; \lambda)$ označava generalisanu funkciju Mitag-Leflera definisaniu kao

$$e_\alpha(t; \lambda) = MLE_\alpha(-\lambda t^\alpha),$$

gde je $MLE_\alpha(t)$ funkcija Mitag-Leflera, $(\alpha > 0)$,

$$MLE_\alpha(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, & \text{za male vrednosti } t, \\ - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{-j}}{\Gamma(1 - \alpha j)}, & \text{za velike vrednosti } t. \end{cases}$$

Može se pokazati da se za vrednosti parametara modela koje zadovoljavaju (2.3) izraz za funkciju napona (2.11) ponaša kao na slici 2.1.

Nakon definisanja funkcije napona vrednosti nepoznatih parametara se određuju metodom najmanjih kvadrata, tj traženjem minimuma funkcije

$$\Lambda(\alpha, \tau_{\sigma\alpha}, \tau_{\varepsilon\alpha}, E_\alpha,) = \sum_{i=1}^{N_{Exp}} (\sigma(t_i, \alpha, \tau_{\sigma\alpha}, \tau_{\varepsilon\alpha}, E_\alpha,) - \sigma_{Exp_i})^2,$$

gde su σ_{Exp_i} vrednosti napona dobijene eksperimentalnim putem u trenucima t_i , $i = 1 \div N_{Exp}$, gde je N_{Exp} broj eksperimentalnih tačaka.

Minimizacija funkcije $\Lambda(\alpha, \tau_{\sigma\alpha}, \tau_{\varepsilon\alpha}, E_\alpha,)$ urađena je primenom PSO (*Particle Swarm Optimization*) algoritma, videti [Kennedy & Eberhart, 1995] i [Rapaić & Kanović, 2009].

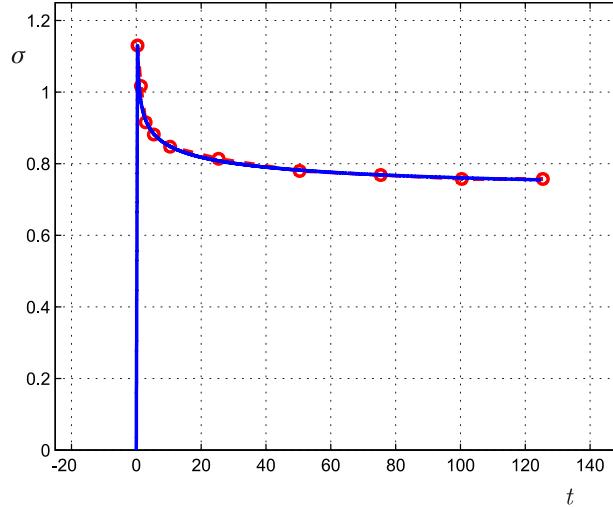
Napomenimo da se često, zbog velike brzine deformacije i kratkog trajanja prve faze opisanog eksperimenta, prikazuju samo rezultati iz druge faze, koja traje duže i u kojoj se odvija relaksacija napona. Ista procedura se može primeniti i ako su poznati eksperimentalni podaci iz obe faze eksperimenta i tada se za određivanje parametara modela koriste podaci iz faze opterećenja i faze relaksacije, videti primer iz [Dankuc et al., 2010]. Iz pomenuog rada će se u paragrafima koji slede prikazati vrednosti dobijene za pojedine elemente sistema srednje uho. Napomenimo još i da se osim ovde korišćenog postupka za određivanje reoloških konstanti frakcionog Zenerovog modela, koji kombinuje analitičko rešenje i algoritam PSO, može koristiti i metod prikazan u radu [Spasic et al., 2016], kojim se primenom Laplasove transformacije, Postove inverzione formule i Njutnovog postupka određuju reološke konstante.

2.2 Reološke konstante za prednji ligament maleusa

Rezultati eksperimentalnih merenja funkcije relaksacije napona prednjeg ligamenta maleusa prvi put su objavljeni u radu [Cheng & Gan, 2008b]. Brzina deformacije iznosila je 1.8 mm/s a izduženje 40 % početne dužine. Merena je i zabeležena funkcija relaksacije napona tokom perioda vremena, sve dok promena napona nije bila manja od 0.01 %/s. Na slici 7b, iz rada [Cheng & Gan, 2008b], prikazana je normalizovana funkcija relaksacije napona za devet uzoraka prednjeg ligamenta maleusa, uzetih sa kadavera, dužine od 1.45 do 2.38 mm, prosečne širine na sredini uzorka od 1.32 mm i prosečne debljine od 1.2 mm. Prethodno opisanom procedurom za određivanje parametara modela dobijene su sledeće vrednosti istih

$$\alpha = 0.303, \tau_{\sigma\alpha} = 0.598, \tau_{\varepsilon\alpha} = 1.515, E_\alpha = 1.64, \quad (2.12)$$

gde je modul elastičnosti E_α dat u MPa, a $\tau_{\sigma\alpha}$ i $\tau_{\varepsilon\alpha}$ su konstante relaksacije koje imaju dimenziju vremena na stepen α , tj. sekund na stepen α . Na slici 2.2 prikazano je slaganje eksperimentalnih rezultata sa slike 7b iz rada [Cheng & Gan, 2008b], i frakcionog modela (2.11) sa (2.12).



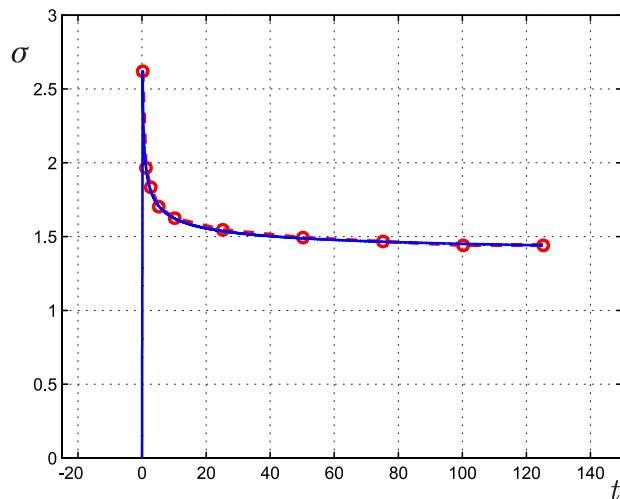
Slika 2.2: Slaganje izmedju eksperimentalnih rezultata relaksacije napona (isprekidana linija) dobijena interpolacijom) i frakcionog modela (puna linija) za prednji ligament maleusa.

2.3 Reološke konstante za tetivu mišića stapesa

Eksperimentalni rezultati mehaničkih osobina tetine mišića stapesa (mišić - prisluskivač) prvi put su objavljeni u radu [Cheng & Gan, 2007], gde je izvršen eksperiment relaksacije napona, počevši od $t = 0$ brzinom deformacije od 1.8 mm/s, i izduženjem od 40 % početne dužine uzorka. Merena je i zabeležena relaksacija napona tokom perioda vremena, sve dok promena napona nije bila manja od 0.01 %/s. Na slici 7b iz istog rada prikazana je normalizovana srednja vrednost funkcije relaksacije napona za devet uzoraka, uzetih sa kadavera, dužine od 0.86 do 1.12 mm, prosečne širine od 0.4 mm i prosečne debljine od 0.39 mm. Prethodno opisana procedura u tom slučaju daje sledeće rezultate za parametre frakcionog Zenerovog modela

$$\alpha = 0.411, \tau_{\sigma\alpha} = 0.491, \tau_{\varepsilon\alpha} = 1.397, E_\alpha = 3.334, \quad (2.13)$$

gde je modul elastičnosti E_α dat u MPa, a $\tau_{\sigma\alpha}$ i $\tau_{\varepsilon\alpha}$ su konstante relaksacije date u sec^α . Na slici 2.3 prikazano je slaganje eksperimentalnih rezultata sa slike 7b iz rada [Cheng & Gan, 2007], i frakcionog modela (2.11) sa (2.13).



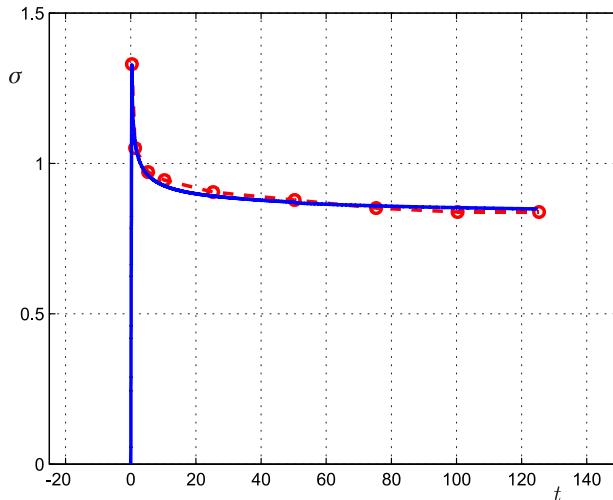
Slika 2.3: Slaganje izmedju eksperimentalnih rezultata relaksacije napona (isprikidana linija dobijena interpolacijom) i frakcionog modela (puna linija) za tetivu mišića stapesa.

2.4 Reološke konstante za tetivu mišića zatezača bubne opne

U radu [Cheng & Gan, 2008a] objavljeni su rezultati eksperimenta relaksacije napona mišića protektora. Na slici 9b iz istog rada prikazana je srednja vrednost funkcije relaksacije napona za deset uzoraka mišića dužine od 1.23 do 1.79 mm, prosečne širine od 1.12 mm i prosečne debljine od 0.84 mm. Brzina deformacije i izduženje su isti kao u slučaju tetine mišića stapedijusa i iznose 1.8 mm/s i 40 % od početne dužine uzorka, respektivno. Na osnovu tih merenja određeni su parametri frakcionog Zenerovog modela

$$\alpha = 0.40, \tau_{\sigma\alpha} = 0.399, \tau_{\varepsilon\alpha} = 1.017, E_\alpha = 2.003, \quad (2.14)$$

gde je modul elastičnosti E_α dat u MPa, a $\tau_{\sigma\alpha}$ i $\tau_{\varepsilon\alpha}$ su konstante relaksacije u sekundama na stepen α . Na slici 2.4 prikazano je slaganje eksperimentalnih rezultata sa slike 9b iz rada [Cheng & Gan, 2008a], i frakcionog modela (2.11) sa (2.14).



Slika 2.4: Slaganje izmedju eksperimentalnih rezultata relaksacije napona (isprekidana linija dobijena interpolacijom) i frakcionog modela (puna linija) za tetivu mišića protektora.

Kao što je u uvodnom delu nagovešteno ovaj mišić ima zaštitnu ulogu u slučaju impulsnog opterećenja, koje se u okviru ove teze neće razmatrati, tako da se njegov reološki opis ovde daje zbog kompletnosti i upoređivanja sa ostalim elementima ovog sistema.

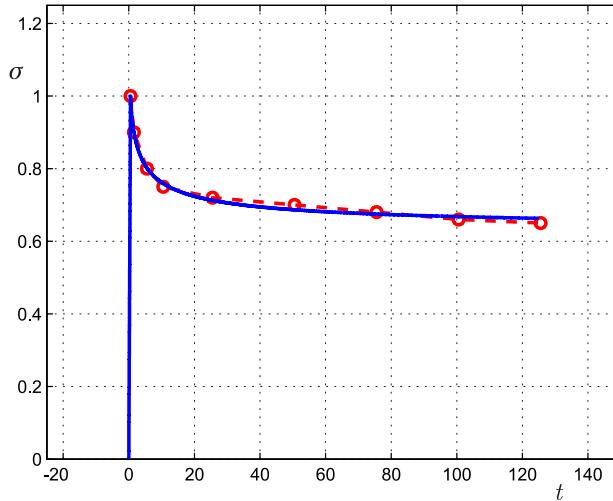
2.5 Reološke konstante za bubnu opnu

Mehaničke karakteristike bubne opne kod čoveka prvi put su merene od strane von Békésy-ja 1960. godine, i od tada je objavljeno više različitih eksperimentalnih rezultata. Nedavno su, u radu [Cheng *et al.*, 2007], objavljeni rezultati eksperimenta relaksacije napona devet uzoraka dužine od 5 do 8.5 mm, širine od 1.5 do 2.4 mm i debljine od 0.06 do 0.1 mm, koji su isečeni sa zadnje strane bubne opne blizu spoljne ivice. U početnom trenutku $t = 0$ uzorak je izdužen brzinom deformacije od 1.8 mm/s sve dok nije dostignuto izduženje uzorka od 15 % početne dužine. Nakon toga zabeležena je funkcija relaksacije napona sve do potpune relaksacije. Na slici 8 u pomenutom radu prikazane su funkcije relaksacije napona devet uzoraka kao i njihova srednja vrednost. Na osnovu tih eksperimentalnih rezultata određeni su parametri frakcionog Zenerovog modela:

$$\alpha = 0.536, \tau_{\sigma\alpha} = 2.023, \tau_{\varepsilon\alpha} = 3.563, E_\alpha = 4.096, \quad (2.15)$$

gde je modul elastičnosti E_α dat u MPa, a $\tau_{\sigma\alpha}$ i $\tau_{\varepsilon\alpha}$ su konstante relaksacije koje imaju dimenziju sec^α . Na slici 2.5 prikazano je slaganje eksperimentalnih rezultata sa slike 8 za srednje vrednosti iz rada [Cheng *et al.*, 2007], i frakcionog modela (2.11) sa (2.15).

Na ovom mestu mogu se dati dve napomene. Prvo, numeričke vrednosti iz ovog paragrafa će biti korišćene u numeričkim eksperimentima ali u okviru u uvodnom delu nagoveštenog pojednostavljenog modela sa slike 1.1. Drugo, u restoracijama slušne funkcije, bubna opna se najčešće mora zameniti nekim drugim tkivom. Obično su to *fascia temporalis* ili hrskavica ušne školjke varijabilne debljine, međutim u poslednje vreme koristi se i tkivo mokraćne bešike, videti [Parekh *et al.*, 2009]. Logično je postaviti pitanje koje od tih tkiva najbolje menja bubnu opnu? Jedan od mogućih odgovora bio bi tkivo sa približno istim parametrima frakcionog Zenerovog modela. Dakle, kada bi se uradili eksperimenti i dobile vrednosti četiri reološka parametra Zenerovog modela moglo bi se prepostaviti da će bliskost numeričkih vrednosti reoloških parametara tkiva koja se koriste u restoracijama vrednostima dobijenim za bubnu opnu odrediti tkivo koje najviše doprinosi restoraciji slušne funkcije.



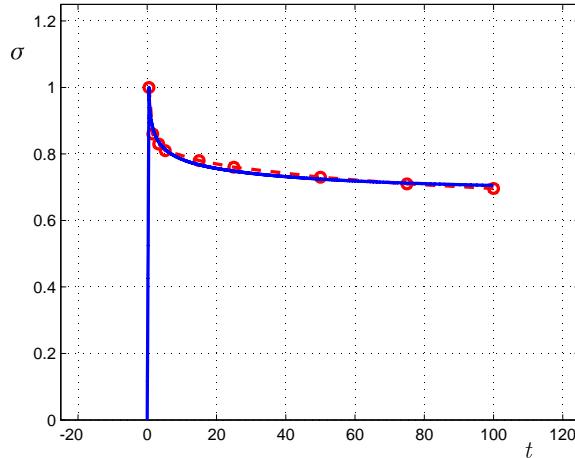
Slika 2.5: Slaganje izmedju eksperimentalnih rezultata relaksacije napona (isprekidana linija dobijena interpolacijom) i frakcionog modela (puna linija) za uzorke bubne opne čoveka.

2.6 Reološke konstante za anularni ligament stapesa

Vrednosti objavljene u prethodnim paragrafima preuzete su iz rada [Dankuc *et al.*, 2010] a dobijene su iz eksperimenata u kojima je korišćena uniaksijalna deformacija. Ti rezultati se mogu smatrati kao prvi doprinos ove doktorske disertacije. U ovom paragrafu, kao navedeni originalni doprinos teze, prikazće se reološki parametri anularnog ligamenta stapesa dobijeni na osnovu eksperimenta prostog smicanja kao što je preporučeno u [Enelund & Lesieutre, 1999] ili [Spasić, 2014a]. Naime, eksperimentalni rezultati ispitivanja mehaničkih osobina anularnog ligamenta stapesa, po saznanjima autora, prvi put su objavljeni u radu [Gan *et al.*, 2011]. Uzorci su bili opterećeni na prosto smicanje brzinom deformacije od 0.4 mm/s sve dok pomeranje nije iznosilo 0.2 mm. Na slici 9b u pomenutog rada prikazana je normalizovana srednja vrednost funkcije relaksacije napona za pet uzoraka. Na osnovu tih eksperimentalnih rezultata određeni su parametri frakcionog Zenerovog modela

$$\alpha = 0.2462, \tau_{\sigma\alpha} = 0.4479, \tau_{\varepsilon\alpha} = 1.3016, G_\alpha = 0.0845, \quad (2.16)$$

gde je modul smicanja G_α dat u MPa, a $\tau_{\sigma\alpha}$ i $\tau_{\varepsilon\alpha}$ su konstante relaksacije koje imaju dimenziju sec^α . Na slici 2.6 prikazano je slaganje eksperimentalnih rezultata sa slike 9b iz rada [Gan *et al.*, 2011], i frakcionog modela (2.11) sa (2.16).



Slika 2.6: Slaganje izmedju eksperimentalnih rezultata relaksacije napona (isprekidana linija dobijena interpolacijom) i frakcionog modela (puna linija) za uzorke anularnog ligamenta stapesa.

Napominje se da će se ovde navede numeričke vrednosti frakcionog Zenerovog modela anularnog ligamenta stapesa u tezi koristiti u okviru pojednostavljenog modela o kome je bilo reči u uvodnom poglavlju.

2.7 Komentari o dobijenim vrednostima za parametre

Na ovom mestu može se dati nekoliko komentara dobijenih vrednosti reoloških parametara ispitivanih struktura.

Prvo predviđanja relaksacije napona ispitivanih struktura po frakcionom Zenerovom modelu sa ovde utvrđenim vrednostima reoloških konstanti se u principu veoma dobro slažu sa izmerenim rezultatima eksperimentata istog tipa.

Drugo, upotreba frakcionog Zenera u modeliranju elemenata koji čine sistem srednje uho je relativno nova tako da, prema saznanjima autora, ne postoje radovi iz oblasti reoloških svojstava srednjeg uha sa rezultatima za poređenje ovde dobijenih vrednosti reda izvoda i relaksacionih konstanti. Međutim, te vrednosti se mogu porediti unutar ovde ispitivanog sistema. Tako se vidi da su red izvoda anularnog ligamenta stapesa i prednjeg ligamenta maleusa uporedivi i manji od reda izvoda kojim se modeliraju mišići protektor i prisluškivač čiji je red izvoda gotovo identičan. Napominje se da manji red izvoda odgovara čvršćem tkiva a veći mekšem - fluidnom. S tim u vezi logično je što je dobijeno da je red izvoda u modelu bubne opne najveći. Dakle, sa obzirom na red izvoda u bубnoj opni je najveća disipacija energije. Isto govori i razlika u relaksacionim konstantama koja je najveća za bubnu opnu. Dobijene vrednosti relaksacionih konstanti se mogu porediti i za sebe ali takva analiza izlazi iz okvira ove teze. Između ostalog razlog za to je i činjenica da za četvrti parametar Zenerovog modela - modul elastičnosti koji je dobro pokriven eksperimentalnim istraživanjima postoji varijitet od čak 5000%, videti [Decraemer & Funnell, 2008]. Naime u postojećoj literaturi se mogu naći veoma različite vrednosti za modul elastičnosti bubne opne, a pregled istih se može naći u [Gaihede *et al.*, 2007] i [Volandri *et al.*, 2011]. Logično je očekivati i veliki varijitet u vrednostima i ostala tri parametra. Eksperimenti relaksacije napona za strukture u srednjem uhu su se tek pojavili. Bilo bi zanimljivo proveriti vrednosti relaksacionih konstanti na ponovljenim eksperimentima istog tipa, ali to prevazilazi okvire ove teze, posebno jer to zahteva vrlo sofisticiranu opremu za merenje sile i deformacije u relativno malim uzorcima tkiva.

Najzad, evo komentara o vrednostima modula elastičnosti i modula klizanja koje su relativno dobro pokrivene u literaturi. Ovde dobijena vrednost za modul elastičnosti bubne opne $E_\alpha = 4.096$ je u skladu sa rezultatima prikazanim u radu [Cheng *et al.*, 2007]. Takođe, u radu [Luo *et al.*, 2009], prikazani su eksperimentalni rezultati ponašanja, pri mehaničkom opterećenju, uzoraka bubne opne sećenih u radijalnom i cirkularnom pravcu kako za zdrave tako i za bubne opne u različitim patološkim stanjima. Na osnovu tih rezultata mogli bi se odrediti parametri α , $\tau_{\sigma\alpha}$, $\tau_{\varepsilon\alpha}$ i E_α , i u radijalnom i u cirkularnom pravcu, za različita patološka stanja bubne opne. Napominje se još i rad [Daphalapurkar *et al.*, 2009] u kom je objavljeno da se vrednosti modula elastičnosti dobijene za četiri kvadranta bubne opne ne razlikuju značajno, a što po Dafalapurkaru nije slučaj sa rezultatima drugih autora. Vrednosti za modul elastičnosti prednjeg ligamenta maleusa prikazana u ovoj tezi je u skladu sa rezultatima prikazanim u [Cheng & Gan, 2008b]. Pregled vrednosti modula elastičnosti ligamenata osikularnog lanca, korišćenih u raznim modelima, može se naći u [Volandri *et al.*, 2012], gde se može videti da je u većini modela korišćena vrednost modula elastičnosti prednjeg ligamenta maleusa veća u odnosu na modul elastičnosti ostalih ligamenata osikularnog lanca. U ovoj tezi će se, za modeliranje ponašanja ligamenata osikularnog lanca za koje se u literaturi ne mogu naći eksperimentalni rezultati, a na osnovu pretpostavke da biološki materijali koji imaju sličnu histološku strukturu imaju slična mehanička svojstva, videti [Sun *et al.*, 2002], koristiti vrednosti parametara modela dobijenih za prednji ligament maleusa. Dobijene vrednosti za modul elastičnosti tetive mišića protektora i tetive mišića stapesa su u skladu sa vrednostima koje su koristili drugi autori, videti [Volandri *et al.*, 2012]. Takođe i dobijena vrednost za modul smicanja anularnog ligamenta stapesa je u skladu sa podacima objavljenim u literaturi 0.2 ili 0.49, videti [Zhao *et al.*, 2009], a ovde oko 0.1.

Dakle, vrednosti koje će se koristiti u dinamičkom modelu su orijentacione. One su motivisane vrednostima dobijenim obradom podataka iz nedavno urađenih eksperimentata preuzetih iz literature. Jasno je da su *in vivo* svojstva tkiva drugačija nego *in vitro*, takođe je jasno da postoje

veoma velike individualne razlike među jedinkama ljudske vrste, ali i u okviru jedne iste jedinke u različitom starosnom ili dobu dana ili pak patofiziološkom stanju. Međutim isto tako je jasno da mikro i nano elektro-mehanički sistemi pomeraju granice savremene medicine tako da je za očekivanje da će se parametri frakcionog Zenerovog modela pojedinih struktura moći odrediti *in vivo*, *in situ*, čime bi predviđanja modela za svakog ispitanika posebno bila mnogo realnija i upotrebljivija u kliničkoj praksi. Primer za to su radovi [Muller *et al.* , 2008] i [Prevost *et al.* , 2011], gde se *in vivo* ispituju reološka svojstva redom tetine i moždanog tkiva.

Glava 3

Dinamički model srednjeg uha

3.1 Opis modela

Prateći princip da svaki model treba da bude što je moguće jednostavniji a da pri tome uključi što je moguće više svojstava sistema koji se modelira, gde se kao izbor između dve krajnosti, prepoznaće uobičajeni zadatak optimizacije, ovde se predlaže jedno originalno rešenje bazirano na fundamentalnim fizičkim i geometrijskim principima koji se, u okvirima biomehanike, dopunjaju, relativno novim tipom konstitutivnih jednačina.

Centralni deo teze je analiza kretanja baze stapesa koje je osnovni izvor promene pritiska perilimfe i otud generator signala u unutrašnjem uhu, a koje nastaje usled dejstva prinudne sile na umbo. Za analizu tog kretanja posmatraće se sistem od dva kruta tela složene geometrije. Prvo kruto telo činiće stapes, a drugo zajedno kao jedna celina, maleus i inkus, dalje inkudo-malearni blok. Iako se u nekim radovima, na osnovu eksperimentalnih opažanja, veza između maleusa i inkusa, odnosno inkudo-malearni zglob, smatra aktivnim, veliki broj autora u modelima zanemaruje relativno kretanje inkusa u odnosu na maleus, videti [Willi *et al.*, 2002]. U ovoj tezi, prateći stav Šercera da veza inkusa i maleusa nakon određenog broja godina života više ne dozvoljava relativno kretanje između ta dva elementa, inkudo-malearni sistem modeliraće se kao kruti blok, videti [Šercer, 1966]. S druge strane, kao što je uobičajeno, inkudo-stapedijalni zglob, modeliraće se kao idealni sferni zglob. Dakle veza između inkudo-malearnog bloka i stapesa biće idealna i u obliku sfernog zgloba.

Eksperimentalno je utvrđeno da je kretanje pločice - baze stapesa, kao odgovor na zvučnu stimulaciju normalnog uha, veoma složeno. O tome govori čitav niz radova: [Voss *et al.*, 2000], [Huber *et al.*, 2001a], [Hato *et al.*, 2003], [Chien *et al.*, 2009], [Sim *et al.*, 2010], da se spomenu samo neki. Na niskim frekvencijama, uglavnom do 1kHz ili 2kHz zavisno od autora, kretanje baze stapesa je nalik kretanju klipa u cilindru, tj. dominantna je translacija. Na srednjim i visokim frekvencijama kretanje baze stapesa je opštije od translatornog, jer se pojavljuje i obrtanje baze stapesa. Dakle, eksperimenti pokazuju da se kompleksno kretanje baze stapesa može dekomponovati na translaciju duž ose upravne na bazu stapesa i obrtanje, pri čemu ugaona brzina stapesa ima projekcije na dve ose (dugu i kratku osu baze stapesa).

Napominje se da je baza stapesa vezana za ovalni prozor anularnim ligamentom koji joj ograničava kretanje, ali nije veza u smislu da sprečava kretanje, tako da su pomeranja tačaka stapesa u pravcu dve međusobno upravne ose koje leže u ravni baze stapesa mnogo manja od pomeranja u pravcu ose upravne na bazu stapesa. Slično obrtanje baze stapesa oko ose upravne na nju je mnogo manje od obrtanja oko duže i kraće ose baze stapesa. Na osnovu prethodnog, može se zaključiti da je redukcija broja stepeni slobode od 6 na 3 u skladu sa anatomskim ograničenjima pokretljivosti baze stapesa u Euklidovom prostoru. Naime, po klasičnoj teoriji sluha translatorno kretanja pločice stapesa ka unutrašnjosti skale vestibuli dovodi do promene pritiska u njoj. Ta promena dovodi do razlike pritiska između skale vestibuli i skale timpani koja sadrži okrugli prozor koji predstavlja fleksibilnu granicu između skale timpani i srednjeg uha. Izjednačavanjem ovog pritiska pomeranjem baziliarne membrane dolazi do pokretanja talasa koji putuje duž baziliarne membrane prema helikotremi. Po klasičnoj teoriji sluha obrtanje stapesa oko duže ili kraće ose ne dovodi do promene ukupne zapremine kohlearne tečnosti kod ovalnog prozora. Stoga ne dolazi ni

do promene pritiska pa se obrtno kretanje pločice stapesa smatra izgubljenom energijom koja se ne pretvara u zvučnu senzaciju. Iako je generalno prihvaćeno da je najefikasniji način za pomeranje kohlearne tečnosti translatorno kretanje pločice stapesa, nezavisno od toga da li je obrtanje pločice stapesa poželjno ili ne, ono je eksperimentalno potvrđeno kod čoveka i potrebno je ispitati njegov uticaj na sluh. Takođe, u radovima [Huber *et al.*, 2008] i [Eiber *et al.*, 2012] eksperimentalno je pokazano, na zamorčićima, da i obrtnim kretanjem pločice stapesa dolazi do stimulisanja kohlee. Naime, ista stimulacija kohlee može se ostvariti sa manje translatornog a više obrtnog kretanja baze stapesa. Iako nije dokazano da su druga kretanja, tj. obrtanje oko ose upravne na ravan baze kao i translatorno pomeranje u pravcu bilo koje dve ose u ravni baze, stapesa beznačajna, u ovoj tezi pretpostaviće se, kao i u radovima [Sim *et al.*, 2010] i [Hato *et al.*, 2003], da translatorno kretanje u pravcu upravnog na ravan ovalnog prozora i obrtanje oko dve ose, tj. duge i kratke ose simetrije baze stapesa, dovoljno dobro opisuju stvarno kretanje stapesa. Dakle, isključuju se zakretanje i translacija baze stapesa u ravni ovalnog prozora. Kako je veza inkudo-malearnog bloka, dalje bloka, i stapesa zglobna, relativno kretanje bloka u odnosu na stapes biće obrtanje krutog tela oko tačke tako da je broj stepeni slobode koji se razmatra u sistemu srednje uho 6.

U slučaju anularnog ligamenta stapesa smatraće se poznatim njegova debljina kao i površina smicanja. Kao što je u uvodu nagovešteno, uticaj anularnog ligamenta na bazu stapesa, za koji se pretpostavlja da je opterećen na prosto smicanje (*simple shear*), uzeće se kroz deformaciju 4 laka štapa promenljive dužine, kao rezultujuće dejstvo ekvivalentno dejstvu anularnog ligamenta duž četiri luka elipse. Sile u tim štapovima odrediće se na osnovu konstitutivne jednačine frakcionog Zenerovog modela, a deformacije korišćenjem Viliotovog plana pomeranja, videti [Varvak, 1977]. Takođe, pretpostaviće se da pravci tih štapova ostaju konstantni tokom vremena. Pored anularnog ligamenta u model kretanja sistema koji se razmatra biće uključeno još ligamenata iz sistema vešanja osikularnog lanca. U principu celovitost sistema, upravljanje kretanjem i ograničavanje oblasti kretanja ostvaruje se ligamentima, videti [Brinckmann *et al.*, 2002]. U model koji se u ovoj tezi predlaže, biće uključeni gornji, prednji i latelarni ligament maleusa, kao i zadnji ligament inkusa koji će se modelirati kao dva odvojena ligamenta, videti [Sim & Puria, 2008]. Ovi ligamenti modeliraće se kao uniaksijalno opterećeni viskoelastični laki štapovi. Pošto se analiziraju mala pomeranja osikularnog lanca pretpostaviće se da pravci tih štapova ostaju konstantni tokom vremena. I kod ovih štapova, deformacije će se odrediti pomoću Viliotovog plana pomeranja, a sile u štapovima na osnovu konstitutivne jednačine frakcionog Zenerovog modela. Gornji ligament inkusa neće biti uključen u sistem vešanja osikularnog lanca pošto se opisuje kao sluzokoža (*mucoosal fold*), videti [Ferrazzini, 2003] i [Berkovitz *et al.*, 2007]. Zadnji ligament maleusa, pošto se često ne navodi u literaturi, u ovoj tezi neće biti uključen u noseći sistem.

Veoma važan za model srednjeg uha je i mišić stapesa pošto, prema Šerceru, taj mišić stalno radi u procesu slušanja. U principu svaki mišić je biološka mašina koja hemijsku energiju iz reakcije hranljivih substanci i kiseonika pretvara u mehanički rad i toplotu. Pri tome mišić ima sposobnost da generiše silu koja može da inicira, uspori ili spreči kretanje. Ipak, u ovoj tezi, neće se modelirati umutrašnji mehanizmi aktivacije tog mišića, videti [Keener & Sneyd, 2001], već će se on tretirati kao pasivni element koji predstavlja deo sistema vešanja osikularnog lanca i vrši disipaciju energije u sistemu srednje uho. I mišić stapesa će se modelirati kao uniaksijalno opterećeni viskoelastični laki štap, a deformacija i sila u štalu odrediće se korišćenjem Viliotovog plana pomeranja i konstitutivne jednačine frakcionog Zenerovog modela, respektivno. Pretpostaviće se i da pravac tog štapa ostaje konstantan tokom vremena.

I bubna opna stalno radi u procesu slušanja i to kao generator primudne sile i prvi element u kome dolazi do disipacije energije. Od svih raspoloživilih metoda modeliranja i uključivanja njenog uticaja na rad srednjeg uha, videti [Volandri *et al.*, 2011] i [Decraemer & Funnell, 2008] kao i reference u njima, u ovoj tezi uticaj bubne opne uzeće se kroz dejstvo poznate periodične primudne sile koje deluje u tački umbo i ima pravac koji je upravan na anularnu ravan bubne opne, i tri uniaksijalno opterećena viskoelastična laka štapa čija deformacija će se odrediti koristeći Viliotov plan pomeranja. Pretpostaviće se da se pravci tih štapova ne menjaju tokom vremena, što odgovara činjenici da su deformacije tih štapova u ravni upravnoj na inicijalni pravac mnogo manje od njihove dužine. Takođe pretpostavlja se i stalno isti pravac primudne sile. Naime, pošto se ova sila generiše promenom pritiska vazduha u slušnom kanalu čija je konfiguracija u temporalnoj kosti stalna, smatra se da se ni njen pravac ne menja sa vremenom.

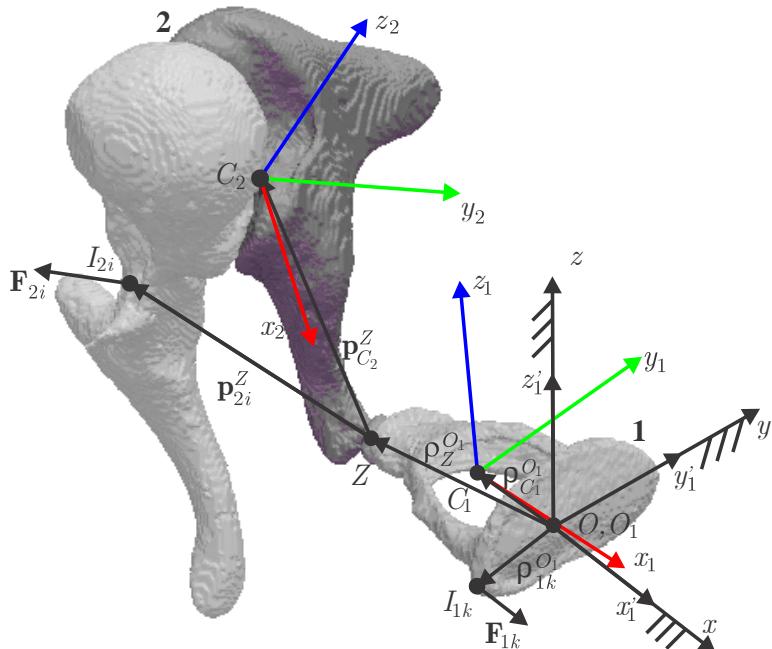
Dakle, elementi srednjeg uha koji pobuđuju i nose osikularni lanac modeliraće se lakin viskoelastičnim ligamentima.

lastičnim štapovima, čiji pravci, ostaju konstantni tokom vremena, a dejstvo svakog od njih na osikularan lanac zameniče se jednom silom konstantnog pravca čiji se intenzitet određuje na osnovu konstitutivne jednačine frakcionog Zenerovog modela. Takođe, prepostaviće se da su poznate početne dužine lakih štapova kao i površine poprečnih preseka. Pošto prethodni deo ove teze obuhvata određivanje reoloških parametara frakcionog Zenerovog modela koji se koristi kao konstitutivna jednačina, ti reološki parametri se smatraju poznatim.

Najzad, pored sila u viskoelastičnim štapovima kojima se menja dejstvo anularnog ligamenta i pored reakcije veze u inkudo-stapedijalnom zglobovu koja izražava uticaj preostalih struktura srednjeg uha, na bazu stapesa deluje i kohlearna tečnost. Dejstvo kohlearne tečnosti na bazu zameniče se, saglasno Poasonovoj teoremi, silom koja deluje u centru baze stapesa, koja je jednaka glavnom vektoru svih sila kojima kohlearna tečnost deluje na površinu baze stapesa, i spregom sila koji je jednak glavnom momentu svih sila kojima kohlearna tečnost deluje na površinu bazu stapesa za centar te baze, videti [Spasić, 2014b]. Kao konstitutivne jednačine, prepostaviće se da su sila i spreg sila kao otpor kohlearne tečnosti redom, linearna funkcija vektora brzine centra baze sa smerom koji je suprotan od smera vektora brzine i linearna funkcija vektora ugaone brzine takođe sa suprotnim smerom. Verovatno bi se mogla analizirati i druga rešenja za uticaj perilimfe na kretanje baze stapesa ali bi njihovo uključivanje u model bilo složenije od ovde prepostavljenog.

3.2 Sistem koji se razmatra

Na slici 3.1 prikazan je sistem koji se razmatra: stapes, mase m_1 i inkudo-malearni blok mase m_2 . U razmatranjima koja slede indeks 1 odnosi se na stapes a indeks 2 na inkudo-malearni blok. Prepostavlja se da je u početnom trenutku $t = 0$ sistem u stanju mirovanja i u položaju prikazanom na slici 3.1. Takođe prepostavlja se da taj položaj u početnom trenutku odgovara virginalmu stanju svih viskoelastičnih elemenata sistema.



Slika 3.1: Koordinatni sistemi i karakteristične tačke osikularnog lanca I_{1k} i I_{2i} , $k = 1 \div 5$, $i = 1 \div 9$.

3.2.1 Koordinatni sistemi i inercijalna svojstva

Kao bazni, apsolutno nepokretan, koordinatni sistem usvojiće se desni Dekartov koordinatni sistem $Oxyz$, vezan za temporalnu kost i postavljen u centar ovalnog prozora, sa x -osom upravnom na njegovu ravan i osama y i z koje imaju redom pravac duge i kratke ose simetrije tog prozora. Smerovi ovih osa prikazani su na slici 3.1. Dakle, u početnom trenutku ravan baze stapesa je

paralelna sa ovalnim prozorom. Orientacija baznog koordinatnog sistema preuzeta je iz rada [Weistenhöfer & Hudde, 1999]. Neka je u centru mase stapesa, tački C_1 , postavljen koordinatni sistem $C_1x_1y_1z_1$, kruto vezan za telo stapesa, čije su ose glavne ose inercije tog tela, a momenti inercije za te ose $J_{x_1}, J_{y_1}, J_{z_1}$. Isto tako, neka je u centru mase inkudo-malearnog bloka, tački C_2 , postavljen koordinatni sistem $C_2x_2y_2z_2$, kruto vezan za taj blok, sa osama koje su njegove glavne ose inercije. Momenti inercije za glavne ose bloka su J_{x_2}, J_{y_2} i J_{z_2} . Naime, iako je puno radova objavljeno na temu srednjeg uha, u mnogima od njih nisu istovremeno dati podaci i o geometriji i o inercijalnim karakteristikama osikularnog lanca, a što je posebno važno za analizu različitih intervencija na slušnom aparatu (dodavanje različitih uređaja). U ovoj tezi podaci o geometriji slušnih koščica, kao i njihova inercijalna svojstva preuzeće se iz rada [Weistenhöfer & Hudde, 1999]. U tabeli 1, date su vrednosti za mase i momente inercije za glavne ose inercije, kao i vrednosti Kardanovih uglova kojima je određena orientacija glavnih osa inercije stapesa i inkudo-malearnog bloka u odnosu na bazni koordinatni sistem. Naime, orientacije koordinatnih sistema $C_1x_1y_1z_1$ i $C_2x_2y_2z_2$ u odnosu na bazni koordinatni sistem $Oxyz$, u početnom trenutku, date su redom ugovorima θ_{io} , $i = 1, 2$ a $o = x, y, z$, videti tabelu 1. S tim u vezi ortogonalne transformacije koje bazni koordinatni sistem sa tri sferna ugla Ojlerovog tipa prevode redom u sisteme $C_1x_1y_1z_1$ i $C_2x_2y_2z_2$ u početnom trenutku su za stapes i blok \mathbf{K}_1 i \mathbf{K}_2 , respektivno. Prema tome tabela 1 izgleda kao što sledi

TABELA 1 Inercijalna svojstva		
Telo	Stapes $i = 1$	IMBlok $i = 2$
Masa [mg]	3.36	52.8
Momenti inercije [mg·mm ²]		
J_{x_i}	1.68	97.6
J_{y_i}	4.89	165
J_{z_i}	6.22	217.4
Kardanovi uglovi [°]		
θ_{ix}	-0.65	7.19
θ_{iy}	-0.65	-20.79
θ_{iz}	7.22	14.94

pri čemu su za vrednosti Kardanovih uglova iz tabele 1 matrice prelaza \mathbf{K}_1 i \mathbf{K}_2 definisane redom

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{Rot}(x, \theta_{1x}) \cdot \mathbf{Rot}(y, \theta_{1y}) \cdot \mathbf{Rot}(z, \theta_{1z}) = [k_{ij}^1]_{3 \times 3}$$

i

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{Rot}(x, \theta_{2x}) \cdot \mathbf{Rot}(y, \theta_{2y}) \cdot \mathbf{Rot}(z, \theta_{2z}) = [k_{ij}^2]_{3 \times 3},$$

gde oznaka $\mathbf{Rot}(o, \theta)$ stoji za matricu rotacije oko ose o za ugao θ , videti [Paul, 1981] i [Spasić, 2014b]. Eksplicitna forma matrica \mathbf{K}_1 i \mathbf{K}_2 je data u Dodatu A.

Kako je kretanje baze stapesa primarni interes teze od koristi će biti i koordinatni sistem $O_1x'_1y'_1z'_1$ koji je vezan za bazu stapesa i kreće se zajedno sa njom, pri čemu je tačka O_1 ,geometrijski centar elipse - baze stapesa. Koordinatni sistem $O_1x'_1y'_1z'_1$ se u početnom trenutku vremena poklapa sa baznim koordinatnim sistemom $Oxyz$. Pri kretanju inkudo-malearnog bloka i stapesa menja se položaj tačaka O_1 , C_1 , i C_2 kao i orientacije koordinatnih sistema $O_1x'_1y'_1z'_1$, $C_1x_1y_1z_1$ i $C_2x_2y_2z_2$ u odnosu na bazni koordinatni sistem. Napominje se da su sistemi $O_1x'_1y'_1z'_1$ i $C_1x_1y_1z_1$ različiti ali fiksirani za isto kruto telo tako da će im ugaona brzina biti istog intenziteta jer je orientacija jednog u odnosu na drugi fiksirana i data matricom \mathbf{K}_1 . S tim u vezi koordinate bilo koje tačke stapesa u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$ se jednostavnim transformacijama prevode u koordinate te iste tačke u koordinatnom sistemu $C_1x_1y_1z_1$. Napominje se da je koordinatni sistem $O_1x'_1y'_1z'_1$ uveden kao pomoći i to za opis položaja centra mase stapesa mada taj sistem potpuno određuje i položaj centra i orientaciju baze stapesa, čije kretanje je glavni interes modela, dok je koordinatni sistem $C_1x_1y_1z_1$ uveden jer su jer su to glavne ose inercije. Svi uvedeni koordinatni sistemi prikazani su na slici 3.1. Na ovoj slici prikazane su i karakteristične tačke potrebne za analizu geometrije opterećenja, o kojima će biti reči u posebnom delu, tek pošto se u razmatranje uvedu generalisane koordinate, a što je predmet naredne sekcije.

3.2.2 Generalisane koordinate

U delu koji se odnosi na anatomiju i fiziologiju srednjeg uha, opisano je da se baza stapesa nalazi u ovalnom prozoru i da njeno kretanje ograničava anularni ligament tako da su projekcije vektora brzine bilo koje tačke stapesa na dve međusobno upravne ose koje se nalaze u ravni baze stapesa mnogo manje od projekcije na osu koja je upravna na tu ravan, tako da će se analizirati samo translacija duž jedne ose. Isto tako zbog dejstva anularnog ligamenta, projekcija vektora ugaone brzine baze stapesa na osu koja je upravna na ravan baze stapesa mnogo je manja od projekcija na ose koje se nalaze u ravni te baze pa će se analizirati samo zakretanja baze stapesa u odnosu na ravan ovalnog prozora, bez obrtanja u ravni tog ovalnog prozora. Dakle, kretanje baze stapesa će se opisati sa tri generalisane koordinate: neka generalisana koordinata $q_1 = q_1(t)$, u metrima, opisuje kretanje tačke O_1 koja se može kretati samo duž pravca bazne ose x , i neka dva sferna ugla Ojlerovog tipa, $q_2 = q_2(t)$ i $q_3 = q_3(t)$, u radijanima, opisuju otklon baze stapesa u odnosu na ravan ovalnog prozora. Pri tome će se odabratи uglovi iz verzije Krilovljevih uglova jer tada pri malim otklonima u odnosu na bazni koordinatni sistem oba ugla ostaju mala, videti [Spasić, 1993]. Tako će se proizvoljna orijentacija baze stapesa opisati obrtanjem u pozitivnom matematičkom smeru prvo oko ose $O_1y'_1$ za ugao q_2 a zatim oko nove $O_1z'_1$ ose za ugao q_3 . Za opisani redosled rotacija ortogonalna matrica prelaza od koordinatnog sistema $O_1x'_1y'_1z'_1$ u bazni koordinatni sistem $Oxyz$ definisana je kao

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(q_2, q_3) = \mathbf{Rot}(y'_1, q_2) \cdot \mathbf{Rot}(z'_1, q_3).$$

Važno je napomenuti, a sa obzirom na to da se radi o biološkom sistemu da generalisane koordinate q_1 , q_2 i q_3 ne zavise jedna od druge i mogu biti potpuno proizvoljne ali samo u granicama prostora koji je određen svojstvima anularnog ligamenta. Na primer sa progresijom otoskleroze maksimalne granične vrednosti za ove koordinate se značajno smanjuju.

Za poznavanje konačnih jednačina kretanja stapesa potrebno je poznavati zakon kretanja tačke O_1 i kako se menjaju prethodno uvedena dva Krilovljeva ugla. Kada se to zna, onda je i kretanje tačke Z sa slike 3.1 - inkudo-stapedijalnog zgloba, koja pripada i inkudo-malealnom bloku - potpuno određeno, tako da je za potpuno poznavanje kretanja drugog tela u sistemu - inkudo-malealnog bloka - potrebno poznavati još samo njegovu orijentaciju.

Za određivanje proizvoljne orijentacije inkudo-malearnog bloka koristiće se tri Krilovljeva ugla. Neka se proizvoljna orijentacija inkudo-malealnog bloka može ostvariti obrtanjem u pozitivnom matematičkom smeru prvo oko ose C_2y_2 za ugao $q_4 = q_4(t)$, zatim oko nove x_2 ose za ugao $q_5 = q_5(t)$, i na kraju oko nove z_2 ose za ugao $q_6 = q_6(t)$, gde su generalisane koordinate q_4 , q_5 i q_6 u radijanima. Generalisane koordinate q_4 , q_5 i q_6 ne zavise jedna od druge i mogu biti potpuno proizvoljne ali u granicama koje diktira biomehanička konfiguracija. Za opisani redosled rotacija ortogonalna matrica prelaza od koordinatnog sistema $C_2x_2y_2z_2$ u proizvoljnem trenutku u isti taj koordinatni sistem u početnom vremenu definisana je na način uobičajen za Krilovljevu verziju sfernih uglova Ojlerovog tipa sa

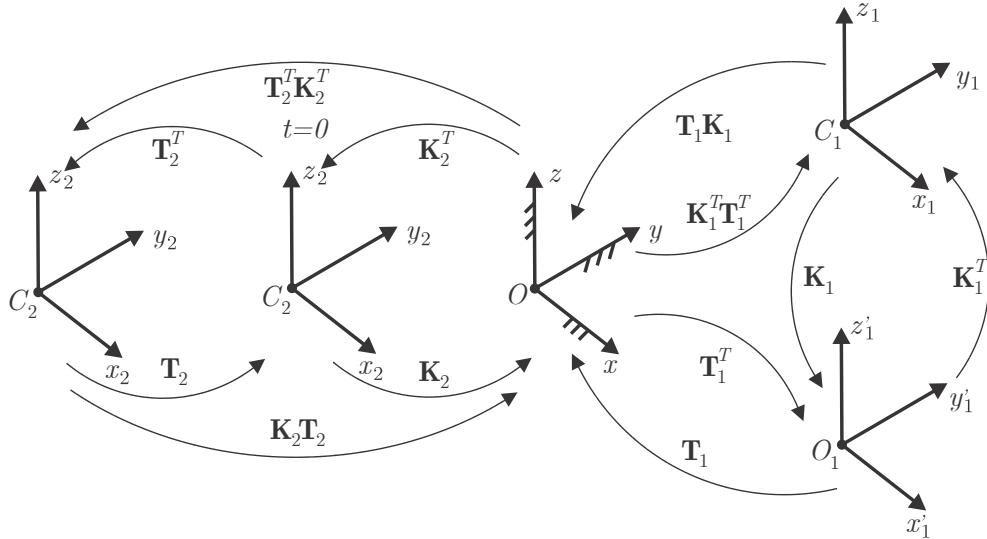
$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2(q_4, q_5, q_6) = \mathbf{Rot}(y_2, q_4) \cdot \mathbf{Rot}(x_2, q_5) \cdot \mathbf{Rot}(z_2, q_6).$$

Dakle, položaj sistema koji se razmatra određen je sa 6 uvedenih generalisanih koordinata. Jasno je da su matrice \mathbf{T}_1 i \mathbf{T}_2 ortogonalne. Da bi se lakše pratili atributi kretanja sistema koji se razmatra, na slici 3.2 prikazani su uvedeni koordinatni sistemi i veze između njih date ortogonalnim matricama transformacija, dok je eksplicitna forma ovih ortogonalnih matrica data u Dodatku A.

U skladu sa prethodno uvedenim generalisanim koordinatama i matricama transformacija, vektor položaja centra mase stapesa, u baznom koordinatnom sistemu ($\mathbf{r}_{(.)} \equiv \mathbf{r}_{(.)}^{O_1}$ i u baznom koordinatnom sistemu), u proizvolnjem trenutku vremena je

$$\mathbf{r}_{C_1} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{r}_{C_1}^{O_1} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_{C_1}^{O_1}, \quad (3.1)$$

gde je $\mathbf{r}_{O_1} = [q_1 \ 0 \ 0]^T$, a $\boldsymbol{\rho}_{C_1}^{O_1} = [\lambda_{C_1}^{O_1} \ \mu_{C_1}^{O_1} \ \nu_{C_1}^{O_1}]^T$ je vektor položaja tačke C_1 u odnosu na tačku O_1 , u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$.



Slika 3.2: Uvedeni koordinatni sistemi i ortogonalne matrice transformacija izmedju njih.

Slično, vektor položaja centra mase inkudo-malearnog bloka, u baznom koordinatnom sistemu, u proizvoljnom trenutku vremena je

$$\mathbf{r}_{C_2} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{r}_Z^{O_1} + \mathbf{r}_{C_2}^Z = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{p}_{C_2}^Z, \quad (3.2)$$

gde je vektor položaja inkudo-stapedijalnog zgloba, tačke Z , u odnosu na tačku O_1 , u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$, dat izrazom $\boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} = [\lambda_Z^{O_1} \quad \mu_Z^{O_1} \quad \nu_Z^{O_1}]^T$, dok je vektor položaja tačke C_2 u odnosu na tačku Z , u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$, dat sa $\mathbf{p}_{C_2}^Z = [\xi_{C_2}^Z \quad \eta_{C_2}^Z \quad \zeta_{C_2}^Z]^T$. U razmatranjima koja slede $\boldsymbol{\rho}$ i λ, μ, ν označavaju redom vektor položaja tačke i njegove koordinate u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$ a \mathbf{p} i ξ, η, ζ redom vektor položaja i njegove koordinate u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$.

Vektori položaja $\boldsymbol{\rho}_{C_1}^{O_1}$, $\boldsymbol{\rho}_Z^{O_1}$ su konstantni u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$, dok je $\mathbf{p}_{C_2}^Z$ konstantan u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$. Vrednosti projekcija ovih vektora - konstanti u koordinatnim sistemima o kojima je reč preuzete su iz rada [Weistenhöfer & Hudde, 1999], i date su u Dodatku B na kraju rada.

Sa uvedenim generalisanim koordinatama vektor položaja bilo koje tačke stapesa, recimo M_β je u baznom koordinatnom sistemu dat izrazom

$$\mathbf{r}_{1\beta} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{r}_{1\beta}^{O_1} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_{1\beta}^{O_1}. \quad (3.3)$$

Slično vektor položaja bilo koje tačke inkudo-malearnog bloka M_v je u baznom koordinatnom sistemu oblika

$$\mathbf{r}_{2v} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{r}_Z^{O_1} + \mathbf{r}_{2v}^Z = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{p}_{2v}^Z. \quad (3.4)$$

Vektor $\mathbf{r}_{1\beta}$ je funkcija generalisanih koordinata q_j , $j = 1, 3$, a vektor \mathbf{r}_{2v} funkcija generalisanih koordinata q_j , $j = 1, 6$. Najzad kao što je u uvodu rečeno u ovde predloženom dinamičkom modelu težine slušnih koščica će se zanemariti. Zato su u početnom trenutku, sve strukture koje nose osikularni lanac u virginalnom stanju, sve generalisane koordinate su nula i sistem je u stanju ravnoteže. U početnom trenutku matrice \mathbf{T}_1 i \mathbf{T}_2 se poklapaju sa jediničnim.

3.2.3 Geometrija opterećenja

Neka na telo stapesa u pet tačaka I_{1k} , deluju redom sile \mathbf{F}_{1k} , $k = 1 \div 5$, slika 3.1. Vektori položaja ovih tačaka u odnosu na tačku O_1 , $\boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1} = [\lambda_{1k}^{O_1} \quad \mu_{1k}^{O_1} \quad \nu_{1k}^{O_1}]^T$, i jedinični vektori pravaca dejstva svake od tih sila u baznom koordinatnom sistemu, $\boldsymbol{\kappa}_{1k} = [\kappa_{1kx} \quad \kappa_{1ky} \quad \kappa_{1kz}]^T$, se smatraju poznatim. Uz to smer svakog jediničnog vektora je ka temporalnoj kosti. Prve četiri sile, $k = 1 \div 4$ predstavljaju sile ekvivalentnog dejstva anularnog ligamenta stapesa na njegovu bazu, a peta sila

$k = 5$ menja dejstvo tetive mišića stapesa. U skladu sa ranije uvedenom pretpostavkom, pravci ovih sila se ne menjaju sa vremenom, tako da se svaka sila može zapisati u obliku

$$\mathbf{F}_{1k} = F_{1k} \boldsymbol{\kappa}_{1k}, \quad k = 1 \div 5, \quad (3.5)$$

gde su F_{1k} projekcije koje se menjaju sa vremenom. Slično, neka na telo inkudo-malearnog bloka u devet tačaka I_{2i} , deluje devet sila \mathbf{F}_{2i} , $i = 1 \div 9$, slika 3.1. Vektori položaja ovih tačaka u odnosu na tačku Z , recimo $\mathbf{p}_{2i}^Z = [\xi_{2i}^Z \quad \eta_{2i}^Z \quad \zeta_{2i}^Z]^T$, i jedinični vektori pravaca dejstva svake od tih sila u baznom koordinatnom sistemu, recimo $\boldsymbol{\kappa}_{2i} = [\kappa_{2ix} \quad \kappa_{2iy} \quad \kappa_{2iz}]^T$, se takođe smatraju poznatim. Sada indeks $i = 1$ stoji za prednji ligament maleusa, $i = 2$ za latelarni ligament maleusa, $i = 3$ za gornji ligament maleusa, $i = 4$ za latelarni deo zadnjeg ligamenta inkusa, a $i = 5$ za medijalni deo zadnjeg ligamenta inkusa. Indeksi $i = 6, 7, 8$ stoje za tri viskoelastična štapa koji predstavljaju ekvivalentno dejstvo bubne opne u segmentu koji se odnosi na disipaciju energije, a indeks $i = 9$ odnosi se na silu pobude kao ekvivalentno dejstvo bubne opne u segmentu kolektovanja signala iz spoljašnjeg slušnog kanala. Smer jediničnog vektora koji se odnosi na silu pobude je ka osikularnom lancu, dok su smerovi ostalih jediničnih vektora ka temporalnoj kosti. Pored toga, pravci ovih vektora ne menjaju se sa vremenom. Tada se svaka ta sila može izraziti na sledeći način

$$\mathbf{F}_{2i} = F_{2i} \boldsymbol{\kappa}_{2i}, \quad i = 1 \div 9, \quad (3.6)$$

gde se projekcije F_{2i} menjaju sa vremenom.

Vrednosti projekcija jediničnih vektora $\boldsymbol{\kappa}_{1k}$, $k = 1 \div 5$ i $\boldsymbol{\kappa}_{2i}$, $i = 1 \div 9$ i vektora $\boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1}$, $k = 1 \div 5$ i \mathbf{p}_{2i}^Z , $i = 1 \div 9$, preuzete su iz literature i date u Dodatku B.

Specijalno za $\beta = k = 1 \div 5$ iz jednačina (3.3) dobijaju se vektori položaja napadnih tačaka sila \mathbf{F}_{1k} u baznom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{r}_{1k} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{r}_{1k}^{O_1} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1}, \quad (3.7)$$

dok se za $\beta = i = 1 \div 9$ iz jednačina (3.4) dobijaju vektori položaja napadnih tačaka sila \mathbf{F}_{2i} u istom koordinatnom sistemu

$$\mathbf{r}_{2i} = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{r}_Z^{O_1} + \mathbf{r}_{2i}^Z = \mathbf{r}_{O_1} + \mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{p}_{2i}^Z. \quad (3.8)$$

Vektori \mathbf{r}_{1k} su funkcije generalisanih koordinata q_j , $j = 1 \div 3$, a vektori \mathbf{r}_{2i} funkcije q_j , $j = 1 \div 6$ i biće upotrebljeni kasnije.

Dejstvo kohlearne tečnosti na bazu stapesa zameniće se, saglasno Poasonovoj teoremi, glavnim vektorom

$$\mathbf{G}^K = -k_1 \mathbf{v}_{O_1}, \quad (3.9)$$

čija je napadna tačka O_1 i glavnim momentom za tačku O_1

$$\mathbf{M}_{O_1}^K = -k_2 \boldsymbol{\omega}_1^O, \quad (3.10)$$

gde su k_1 i k_2 poznate konstante, \mathbf{v}_{O_1} je vektor brzine tačke O_1 a $\boldsymbol{\omega}_1^O$ vektor ugaone brzine stapesa u baznom koordinatnom sistemu.

Najzad, sila pobude je data izrazom

$$\mathbf{F}_{29} = F_{29} \boldsymbol{\kappa}_{29}, \quad (3.11)$$

tako da je $\boldsymbol{\kappa}_{29}$ jedinični vektor pravca normale na anularnu ravan bubne opne, koji se ne menja sa vremenom i tako da se projekcija ove sile menja po zakonu

$$F_{29} = F_P \sin(\omega_P \cdot t). \quad (3.12)$$

Ovde je F_P amplituda, a ω_P je ugaona frekvencija zvučnog signala. Ugaona frekvencija se računa kao $\omega_P = 2\pi f_P$, gde je f_P frekvencija zvučnog signala u hercima, i promenljiva je veličina u modelu. Amplituda sile pobude odrediće se kao proizvod pritiska u spoljašnjem ušnom kanalu i fiziološki aktivne površine bubne opne. Iako fiziološki aktivna površina zavisi od frekvencije, u ovoj tezi, ta zavisnost neće se razmatrati. Takođe, ovde se uzima samo jedna frekvencija (čist ton) a u stvarnosti valja uzeti pobudu u obliku Furijeovog reda, čime se neće baviti ova teza.

3.2.4 Lokalna i globalna svojstva kretanja

Za generisanje diferencijalnih jednačina kretanja potrebno je poznavati vektore brzine i ubrzanja centra mase stapesa i centra mase inkudo-malearnog bloka. Diferenciranjem po vremenu jednačine (3.1) dobija se vektor brzine centra mase stapesa

$$\mathbf{v}_{C_1} = \mathbf{v}_{O_1} + \mathbf{v}_{C_1}^{O_1} = \mathbf{v}_{O_1} + \dot{\mathbf{T}}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_{C_1}^{O_1}, \quad (3.13)$$

gde je $\mathbf{v}_{O_1} = [\dot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$, a $\dot{\mathbf{T}}_1$ označava prvi izvod po vremenu matrice transformacija \mathbf{T}_1 i zbog preglednosti dat je u Dodatku A. Vektor brzine centra mase stapesa \mathbf{v}_{C_1} je funkcija generalisanih koordinata q_j , $j = 2, 3$, i generalisanih brzina \dot{q}_j , $j = 1 \div 3$.

Kako je vektor $\boldsymbol{\rho}_{C_1}^{O_1}$ konstantnog intenziteta, i kako je matrica $\dot{\mathbf{T}}_1 \mathbf{T}_1^{-1}$ kososimetrična, (\mathbf{T}_1 je ortogonalna pa je $\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1^T$, gde $(\cdot)^T$ kao što je uobičajeno označava operaciju transponovanja matrice), to se po teoremi Ojlera može uvesti ugaona brzina stapesa $\boldsymbol{\omega}_1$. Vektor ugaone brzine stapesa u baznom koordinatnom sistemu je

$$\boldsymbol{\omega}_1^O = \boldsymbol{\omega}_1^O(q_2, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \cos q_2 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

a u koordinatnom sistemu $C_1x_1y_1z_1$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1(q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \sin q_3 \\ \dot{q}_2 \cos q_3 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

videti Dodatak D. Napominje se da projekcije ω_{x_1} , ω_{y_1} i ω_{z_1} nisu međusobno nezavisne pošto je orijentacija stapesa opisana sa dve nezavisne koordinate, pa se projekcija ω_{x_1} može izraziti kao

$$\omega_{x_1} = (k_{11}^1 - k_{21}^1 \tan q_3)^{-1} (\omega_{y_1} (k_{22}^1 \tan q_3 - k_{12}^1) + \omega_{z_1} (k_{23}^1 \tan q_3 - k_{13}^1)).$$

Poznavanjem projekcija vektora ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}_1$ u koordinatnom sistemu $C_1x_1y_1z_1$ iz Ojlerovih kinematičkih jednačina (3.15) se mogu odrediti generalisane brzine \dot{q}_2 i \dot{q}_3 , na sledeći način

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= \sec q_3 (k_{21}^1 \omega_{x_1} + k_{22}^1 \omega_{y_1} + k_{23}^1 \omega_{z_1}), \\ \dot{q}_3 &= k_{31}^1 \omega_{x_1} + k_{32}^1 \omega_{y_1} + k_{33}^1 \omega_{z_1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Diferenciranjem po vremenu jednačine (3.2) dobija se vektor brzine centra mase inkudo-malernog bloka

$$\mathbf{v}_{C_2} = \mathbf{v}_{O_1} + \mathbf{v}_{Z_2}^{O_1} + \mathbf{v}_{C_2}^Z = \mathbf{v}_{O_1} + \dot{\mathbf{T}}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_{Z_2}^{O_1} + \mathbf{K}_2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{p}_{C_2}^Z, \quad (3.17)$$

gde je $\dot{\mathbf{T}}_2$ prvi izvod po vremenu matrice transformacija \mathbf{T}_2 i zbog preglednosti dat je u Dodatku A. Vektor brzine centra mase inkudo-malernog bloka \mathbf{v}_{C_2} je funkcija generalisanih koordinata q_j , $j = 2 \div 6$, i generalisanih brzina \dot{q}_j , $j = 1 \div 6$.

Slično vektor $\mathbf{p}_{C_2}^Z$ je vektor konstantnog intenziteta, a kako su elementi matrice \mathbf{K}_2 konstante to je $(\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{T}_2)^\cdot = \mathbf{K}_2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_2$, pa je matrica $\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{T}_2$ ortogonalna, a matrica $\mathbf{K}_2 \cdot \dot{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{T}_2^{-1} \cdot \mathbf{K}_2^{-1}$ kososimetrična, te se saglasno teoremi Ojlera uvodi ugaona brzina inkudo-malernog bloka $\boldsymbol{\omega}_2$ koja je u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$ u proizvoljnem trenutku vremena, data sa

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2(q_5, q_6, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6) = \begin{bmatrix} \omega_{x_2} \\ \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \cos q_5 \sin q_6 + \dot{q}_5 \cos q_6 \\ \dot{q}_4 \cos q_5 \cos q_6 - \dot{q}_5 \sin q_6 \\ -\dot{q}_4 \sin q_5 + \dot{q}_6 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

videti Dodatak D. Izrazi (3.15) i (3.18) su se mogli dobiti i direktno kao Ojlerove kinematičke jednačine za izabranu verziju sfernih uglova Ojlerovog tipa. Poznavanjem projekcija vektora ugaone

brzine ω_2 u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$ iz Ojlerovih kinematičkih jednačina (3.18) se mogu odrediti generalisane brzine \dot{q}_4 , \dot{q}_5 i \dot{q}_6 , na sledeći način

$$\begin{aligned}\dot{q}_4 &= \sec q_5 (\omega_{x_2} \sin q_6 + \omega_{y_2} \cos q_6), \\ \dot{q}_5 &= \omega_{x_2} \cos q_6 - \omega_{y_2} \sin q_6, \\ \dot{q}_6 &= (\omega_{x_2} \sin q_6 + \omega_{y_2} \cos q_6) \tan q_5 + \omega_{z_2}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Dalje se, diferenciranjem po vremenu izraza (3.13) i (3.17) dobijaju redom vektori apsolutnog ubrzanja centra mase stapesa

$$\mathbf{a}_{C_1} = \mathbf{a}_{O_1} + \mathbf{a}_{C_1}^{O_1} = \mathbf{a}_{O_1} + \ddot{\mathbf{T}}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_{C_1}^{O_1}, \quad (3.20)$$

i apsolutnog ubrzanja centra mase inkudo-malearnog bloka

$$\mathbf{a}_{C_2} = \mathbf{a}_{O_1} + \ddot{\mathbf{T}}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2 \cdot \ddot{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{p}_{C_2}^Z, \quad (3.21)$$

gde je $\mathbf{a}_{O_1} = [\ddot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$, i gde su $\ddot{\mathbf{T}}_1$ i $\ddot{\mathbf{T}}_2$ drugi izvodi po vremenu matrica transformacija \mathbf{T}_1 i \mathbf{T}_2 , respektivno, i dati su u Dodatku A. Vektor ubrzanja centra mase stapesa \mathbf{a}_{C_1} je funkcija generalisanih koordinata q_j , $j = 2, 3$, generalisanih brzina \dot{q}_j , $j = 2, 3$ i generalisanih ubrzanja \ddot{q}_j , $j = 1 \div 3$, a vektor ubrzanja centra mase inkudo-malearnog bloka \mathbf{a}_{C_2} je funkcija generalisanih koordinata q_j , $j = 2 \div 6$, generalisanih brzina \dot{q}_j , $j = 1 \div 6$ i generalisanih ubrzanja \ddot{q}_j , $j = 1 \div 6$.

Slično se diferenciranjem po vremenu izraza (3.15) i (3.18) dobijaju izrazi za vektor ugaonog ubrzanja stapesa u koordinatnom sistemu $C_1x_1y_1z_1$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos q_3 + \ddot{q}_2 \sin q_3 \\ -\dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_3 + \ddot{q}_2 \cos q_3 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

i izraz za vektor ugaonog ubrzanja u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_4 \dot{q}_5 \sin q_5 \sin q_6 + \dot{q}_4 \dot{q}_6 \cos q_5 \cos q_6 - \dot{q}_5 \dot{q}_6 \sin q_6 + \ddot{q}_4 \cos q_5 \sin q_6 + \ddot{q}_5 \cos q_6 \\ -\dot{q}_4 \dot{q}_5 \cos q_6 \sin q_5 - \dot{q}_4 \dot{q}_6 \cos q_5 \sin q_6 - \dot{q}_5 \dot{q}_6 \cos q_6 + \ddot{q}_4 \cos q_5 \cos q_6 - \ddot{q}_5 \sin q_6 \\ -\dot{q}_4 \dot{q}_5 \cos q_5 - \ddot{q}_4 \sin q_5 + \ddot{q}_6 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Argumenti ovih veličina su poznati, $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1(q_3, \dot{q}_2, \ddot{q}_3, \dot{q}_2, \ddot{q}_3)$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2(q_5, q_6, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6, \ddot{q}_4, \ddot{q}_5, \ddot{q}_6)$.

3.2.5 Viliotov plan pomeranja

U okviru pripreme za izvođenje diferencijalnih jednačina kretanja stapesa i inkudo-malearnog bloka, na ovom mestu, će se analizirati deformacije viskoelastičnih štapova. Naime, za određivanje deformacije viskoelastičnih štapova koji se pojavljuju u modelu srednjeg uha, saglasno opštoj teoriji, koristiće se Viliotov plan pomeranja, videti [Varvak, 1977]. To znači da će deformacije - promene dužina - viskoelastičnih lakošćih štapova biti određene kao projekcije pomeranja napadne tačke u kojoj deluje sila na pravac štapa - pravac dejstva sile. Viliotov plan će se koristiti i za sile \mathbf{F}_{1k} , $k = 1 \div 5$, koje deluju na stapes i za sile \mathbf{F}_{2i} , $i = 1 \div 8$, koje deluju na inkudo-malearni blok.

Za konačne vrednosti generalisanih koordinata pomeranja napadnih tačaka sila \mathbf{F}_{1k} , $k = 1 \div 5$, koje deluju na stapes su

$$\Delta \mathbf{r}_{1k} = \mathbf{r}_{1k}(q_1, q_2, q_3) - \mathbf{r}_{1k}(0, 0, 0) = \mathbf{r}_{O_1} + (\mathbf{T}_1 - \mathbf{I}) \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1}, \quad k = 1 \div 5, \quad (3.24)$$

a pomeranja napadnih tačaka sila \mathbf{F}_{2i} , $i = 1 \div 8$ koje deluju na inkudo-malearni blok su

$$\Delta \mathbf{r}_{2i} = \mathbf{r}_{2i}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) - \mathbf{r}_{2i}(0, 0, 0, 0, 0, 0) = \mathbf{r}_{O_1} + (\mathbf{T}_1 - \mathbf{I}) \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2(\mathbf{T}_2 - \mathbf{I}) \mathbf{p}_{2i}^Z, \quad i = 1 \div 8. \quad (3.25)$$

Projektovanjem veličina $\Delta \mathbf{r}_{1k}$ i $\Delta \mathbf{r}_{2i}$ na pravce određene jediničnim vektorima $\boldsymbol{\kappa}_{1k}$ i $\boldsymbol{\kappa}_{2i}$, respektivno, saglasno sa Viliotovim planom pomeranja, dobijaju se promene dužina struktura koje

deluju na stapes i inkudo-malearni blok. U skladu sa tim, promena dužine viskoelastičnog lakog štapa koji deluje na telo stapesa je

$$\Delta l_{1k} = -\boldsymbol{\kappa}_{1k}^T \Delta \mathbf{r}_{1k}, \quad k = 1 \div 5, \quad (3.26)$$

gde znak minus stoji zbog izabranog smera jediničnog vektora $\boldsymbol{\kappa}_{1k}$. Slično, promena dužine viskoelastičnog lakog štapa koji deluje na telo inkudo-malearnog bloka je

$$\Delta l_{2i} = -\boldsymbol{\kappa}_{2i}^T \Delta \mathbf{r}_{2i}, \quad i = 1 \div 8. \quad (3.27)$$

Dalje se za poznate promene dužine, uvode mere deformacije viskoelastičnih štapova ε_{1k} i ε_{2i} , sa

$$\varepsilon_{1k} = \frac{\Delta l_{1k}}{l_{1k}}, \quad k = 1 \div 5 \quad (3.28)$$

i

$$\varepsilon_{2i} = \frac{\Delta l_{2i}}{l_{2i}}, \quad i = 1 \div 8, \quad (3.29)$$

gde su l_{1k} i l_{2i} početne dužine, a u slučaju štapova koji menjaju dejstvo anularnog ligamenta stapesa debljine, struktura koje deluju na stapes i inkudo-malearni blok.

Jasno je da se veličine l_{1k} , $k = 1 \div 5$, i l_{2i} , $i = 1 \div 8$, mere u milimetrima, a veličine Δl_{1k} , $k = 1 \div 5$ i Δl_{2i} , $i = 1 \div 8$ u mnogo manjim jedinicama dužine, videti [Hudde & Weistehöfer, 2006]. Iz tog razloga se može pretpostaviti i da kretanjima stapesa i inkudo-malearnog bloka odgovaraju male vrednosti generalisanih koordinata. U tom slučaju se razvojem u Tejlorov red vektora položaja $\mathbf{r}_{1k}(q_1, q_2, q_3)$ i $\mathbf{r}_{2i}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$, $k = 1 \div 5$, $i = 1 \div 8$ u okolini nultih vrednosti generalisanih koordinata uz zadržavanje samo na linearnim članovima jednačine (3.24) i (3.25) svode na

$$\Delta \mathbf{r}_{1k} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}_{1k}}{\partial q_j} \Big|_{(0,0,0)} \cdot q_j, \quad k = 1 \div 5, \quad (3.30)$$

i

$$\Delta \mathbf{r}_{2i} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \mathbf{r}_{2i}}{\partial q_j} \Big|_{(0,0,0,0,0,0)} \cdot q_j, \quad i = 1 \div 8. \quad (3.31)$$

Eksplisitne vrednosti Δl_{1k} i Δl_{2i} u slučaju malih vrednosti generalisanih koordinata su date u Dodatku E.

3.3 Diferencijalne jednačine kretanja

Sada je neophodna priprema urađena i može se preći na izvođenje diferencijalnih jednačina kretanja. Ovaj posao se može uraditi na nekoliko načina.

3.3.1 Njutn-Ojlerove aksiome

Prvo će se uraditi dekompozicija posmatranog sistema. Naime stapes i inkudo-malearni blok će se razdvojiti i posmatrati kao dva slobodna tela. Pri tome će se uvesti sila reakcije veze u inkudo-stapedijalnom zglobu (tačka Z na slici 3.1). Vektor sile reakcije veze koja deluje na telo stapesa označiće se sa \mathbf{R}_1 , a vektor sile reakcije veze koja deluje na telo inkudo-malearnog bloka sa \mathbf{R}_2 . Vektori \mathbf{R}_1 i \mathbf{R}_2 su saglasno sa aksiomom o uzajmnom dejstvu dve materijalne tačke vezani jednačinom $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_1$. Dalje se uvode glavni vektor spoljašnjih sila koje deluju na stapes

$$\mathbf{G}_1^S = \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k} + \mathbf{G}^K + \mathbf{R}_1, \quad (3.32)$$

i glavni vektor spoljašnjih sila koje deluju na inkudo-malearni blok

$$\mathbf{G}_2^S = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i} + \mathbf{R}_2 = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i} - \mathbf{R}_1. \quad (3.33)$$

Vektori \mathbf{F}_{1k} , $k = 1 \div 5$, definisani su izrazima (3.5), vektor \mathbf{G}^K izrazom (3.9), a vektori \mathbf{F}_{2i} , $i = 1 \div 9$, izrazima (3.6). Vektori u izrazima (3.32) i (3.33) dati su u baznom koordinatnom sistemu. Glavni moment spoljašnjih za centar mase stapesa, u koordinatnom sistemu $C_1x_1y_1z_1$, je

$$\mathbf{M}_{C_1}^S = \sum_{k=1}^5 \boldsymbol{\rho}_{1k}^{C_1} \times (\mathbf{K}_1^T \cdot \mathbf{T}_1^T \cdot \mathbf{F}_{1k}) + \boldsymbol{\rho}_Z^{C_1} \times (\mathbf{K}_1^T \cdot \mathbf{T}_1^T \cdot \mathbf{R}_1) + 2 \cdot \boldsymbol{\rho}_{O_1}^{C_1} \times (\mathbf{K}_1^T \cdot \mathbf{T}_1^T \cdot \mathbf{G}^K) + \mathbf{K}_1^T \cdot \mathbf{T}_1^T \cdot \mathbf{M}_{O_1}^K, \quad (3.34)$$

a glavni moment spoljašnjih sila za centar mase inkudo-malearnog bloka, u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$,

$$\mathbf{M}_{C_2}^S = \sum_{i=1}^9 \mathbf{p}_{2i}^{C_2} \times (\mathbf{T}_2^T \cdot \mathbf{K}_2^T \cdot \mathbf{F}_{2i}) - \mathbf{p}_Z^{C_2} \times (\mathbf{T}_2^T \cdot \mathbf{K}_2^T \cdot \mathbf{R}_1), \quad (3.35)$$

Njutn-Ojlerove aksiome, videti [Spasić, 2014b] i [Glocke, 2001], za kretanje stapesa su

$$m_1 \mathbf{a}_{C_1} = \mathbf{G}_1^S, \quad (3.36)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{C_1} = \mathbf{M}_{C_1}^S, \quad (3.37)$$

a inkudo-malearnog bloka

$$m_2 \mathbf{a}_{C_2} = \mathbf{G}_2^S, \quad (3.38)$$

$$\dot{\mathbf{L}}_{C_2} = \mathbf{M}_{C_2}^S. \quad (3.39)$$

Vektor apsolutnog ubrzanja centra mase stapesa \mathbf{a}_{C_1} i vektor apsolutnog ubrzanja centra mase inkudo-malearnog bloka \mathbf{a}_{C_2} dati su izrazima (3.20) i (3.21), respektivno. Promena momenta količine kretanja za centar mase stapesa, u koordinatnom sistemu $C_1x_1y_1z_1$, je

$$\dot{\mathbf{L}}_{C_1} = \mathbf{J}_{C_1} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{J}_{C_1} \boldsymbol{\omega}_1, \quad (3.40)$$

a promena momenta količine kretanja za centar mase inkudo-malearnog bloka, u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$,

$$\dot{\mathbf{L}}_{C_2} = \mathbf{J}_{C_2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{J}_{C_2} \boldsymbol{\omega}_2. \quad (3.41)$$

Vektori $\boldsymbol{\omega}_1$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ dati su redom izrazima (3.15) i (3.22), a vektori $\boldsymbol{\omega}_2$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ izrazima (3.18) i (3.23) respektivno.

Da bi se našlo kretanje sistema za zadatu silu pobude, Njutn-Ojlerove aksiome treba integraliti uz zadate početne uslove, koji su u ovom slučaju trivijalni. Dakle, sve generalisane koordinate i generalisane brzine su u početnom trenutku jednake nuli:

$$q_j(0) = 0, \quad \dot{q}_j(0) = 0, \quad j = 1 \div 6. \quad (3.42)$$

Jasno je da Njutn-Ojlerove aksiome osim atributa kretanja sadrže i nepoznate spoljašnje sile u viskoelastičnim štapovima i silu reakcije veze. Da bi se odredilo kretanje sistema potrebne su određene pretpostavke o ovim dejstvima. Za sile u viskoelastičnim štapovima će se pretpostaviti analitičke zavisnosti od mera deformacije, dok će se reakcija veze u inkudo-stapedijalnom zglobu eliminisati projektovanjem Njutn-Ojlerovih aksioma na specijalno izabrane pravce, a što je predmet naredna dva paragrafa.

3.3.2 Konstitutivne jednačine

Sile koje vezuju osikularni lanac za temporalnu kost - reakcije veze - su sada spoljašnje i teško je pretpostaviti njihovu vezu sa atributima kretanja. Zato će se na ovom mestu, prateći Fremonov pristup da je sistem sačinjen od krutih elemenata deformabilan, u sistem uključiti i temporalna kost, odnosno temporalna šupljina, tako da sile u ligamentima, i one koje menjaju funkciju bubne opne vezanu za dissipaciju energije postaju unutrašnje. Kao i sve unutrašnje sile i ove treba odrediti eksperimentalno uz praćenje ograničenja koja diktira drugi zakon termodynamike. Baš to je i urađeno u prethodnoj glavi tako da će se tamo prikazani rezultati sada direktno primeniti. Na taj način će se projekcije F_{1k} , $k = 1 \div 5$ i F_{2i} , $i = 1 \div 8$ sila u viskoelastičnim štapovima koje

ograničavaju oblast kretanja stapesa i inkudo-malearnog bloka na deo prostora u okviru temporalne šupljine prikazati na sledeći način

$$F_{1k} + \tau_{\sigma 1k} F_{1k}^{(\alpha_{1k})} = E_{1k} A_{1k} \left(\varepsilon_{1k} + \tau_{\varepsilon 1k} \varepsilon_{1k}^{(\alpha_{1k})} \right), \quad k = 1 \div 5, \quad (3.43)$$

i

$$F_{2i} + \tau_{\sigma 2i} F_{2i}^{(\alpha_{2i})} = E_{2i} A_{2i} \left(\varepsilon_{2i} + \tau_{\varepsilon 2i} \varepsilon_{2i}^{(\alpha_{2i})} \right), \quad i = 1 \div 8, \quad (3.44)$$

gde su α_{1k} , $\tau_{\sigma 1k}$, $\tau_{\varepsilon 1k}$, E_{1k} , $k = 1 \div 5$, i α_{2i} , $\tau_{\sigma 2i}$, $\tau_{\varepsilon 2i}$, E_{2i} , $i = 1 \div 8$, poznati reološki parametri modela uvedeni u prethodnoj glavi, A_{1k} , $k = 1 \div 5$, i A_{2i} , $i = 1 \div 8$, su površine poprečnog preseka viskoelastičnih štapova kojima se modeliraju strukture srednjeg uha, a ε_{1k} , $k = 1 \div 5$, i ε_{2i} , $i = 1 \div 8$, su deformacije tih štapova date izrazima (3.28) i (3.29). Vrednosti dužina i površina poprečnih preseka viskoelastičnih štapova kojima se modeliraju strukture srednjeg uha, zajedno sa reološkim parametrima frakcionog Zenerovog dela dati su u Dodatku C. Iz pretpostavke da sistem započinje kretanje iz virginalnog stanje sledi da je

$$F_{1k}(0) = 0, \quad k = 1 \div 5, \quad \text{i} \quad F_{2i}(0) = 0, \quad i = 1 \div 8. \quad (3.45)$$

3.3.3 Kejmove jednačine

U odnosu na Njutn-Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja, Kejnov metod iz 1961. godine, se pokazao kao veoma efikasan za opis kretanja sistema sa velikim brojem stepeni slobode. U početku na ove jednačine se referisalo kao na Lagranževu formu Dalamberovog principa, jer predstavljaju projekciju zadatih i inercijalnih sila na pravce kretanja materijalnog sistema, a u slučaju kretanja krutog tela i na pravce oko kojih se telo može obrnati. Ima više radova u kojima se metod Kejna poistovećuje sa Madijevim jednačinama i Žurdenovim diferencijalnim varijacionim principom. Ima radova u kojima se pokazuje ekvivalentnost Kejnovih i Gibbs-Apelovih jednačina. Kritičari metoda mu u osnovi zameraju što se svodi na algebarske operacije nad Njutn-Ojlerovim aksiomama i da sa te strane nije jasna njegova veza sa opštom jednačinom dinamike, videti npr. [Kane, 1961], [Benati & Morro, 1990], [London, 1990], [Baruh, 2000]. Međutim i te se jednačine mogu izvesti iz opšte jednačine dinamike - Lagranž-Dalamberovog diferencijalnog varijacionog principa i to na vrlo jednostavan način primenom Poasonove teoreme, videti [Spasić, 2014c].

Saglasno opštoj teoriji Kejmove diferencijalne jednačine kretanja predloženog modela srednjeg uha glase

$$\sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_{C_i}}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{G}_i^S - m_i \mathbf{a}_{C_i}) + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j} (\mathbf{M}_{C_i}^S - \dot{\mathbf{L}}_{C_i}) \right] = 0, \quad j = 1 \div 6. \quad (3.46)$$

gde se u malim zagradama prepoznavaju Njutn-Ojlerove aksiome, dok vektori

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{C_i}}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1 \div 6.$$

redom predstavljaju pravce duž kojih se mogu kretati centri masa i pravce oko kojih se mogu obrnati stapes i inkudo-malearni blok. Broj ovih jednačina jednak je broju stepeni slobode kretanja sistema. Ove jednačine se mogu u razvijenom obliku napisati kao sistem diferencijalnih jednačina drugog reda po generalisanim koordinatama koje se rešavaju zajedno sa konstitutivnim jednačinama u kojima se pojavljuju neceli izvodi. To je jedna mogućnost i osnovna verzija Košijevog problema kao modela kretanja osikularnog lanca. Druga mogućnost bi bila da se na konstitutivne jednačine primeni Laplasova transformacija pa zatim i inverzija da bi se sile u viskoelastičnim štapovima izrazile preko integrala konvolucije sa jezgrom koje sadrži funkcije Mitag-Lefflerovog tipa koje množe mere deformacija kao konačne veze između generalisanih koordinata, videti [Spasic et al., 2004]. U pomenutom radu pokazana je i primena teorije fiksne tačke u dokazu egzistencije rešenja, sa čime se ovde neće baviti. Dakle druga mogućnost je da se Kejmove jednačine napišu u formi Košijevog problema za diferencijalno-integralne jednačine. Treća mogućnost bi bila da se Kejmove jednačine napišu kao diferencijalne jednačine prvog reda po projekcijama nezavisnih ugaonih brzina i brzine centra baze stapesa i da se te jednačine komplementiraju sa Ojlerovim kinematičkim jednačinama rešenim po generalisanim brzinama. I tada bi se na konstitutivne jednačine mogao

primeniti prethodno opisani postupak, međutim ovde se predlaže drugačije. Naime, 2004. Atanacković i Stanković su predložili ekspanzionu formulu za leve Riman-Ljuvilove frakcione izvode, koji se za red izvoda α , $0 < \alpha < 1$, izražavaju preko funkcije, njenog prvog izvoda i njenih momenata, videti [Atanacković & Stanković, 2004]. Nedavno je pokazano da ta ekspanziona formula uopštava na zadovoljavajući način Lajbnicovo i pravilo posrednog diferenciranja za necele izvode, videti [Spasić, 2012]. Kako se u konstitutivnim jednačinama viskoelastičnih štapova koji menjaju strukture srednjeg uha pojavljuju mere deformacije koje sadrže proizvode funkcija generalisanih koordinata ta ekspanziona formula se može koristiti da se konstitutivne jednačine koje komplementiraju Kejneve prikažu u formi konačnog broja diferencijalnih jednačina prvog reda tako da se dinamika kretanja osikularnog lanca u ovom slučaju svodi na klasičan Košijev problem, za koji postoje klasični rezultati dokaza egzistencije rešenja. Osim toga sada se i numerički postupak integracije svodi na klasične metode, videti [Spasić, 2012].

Pre nego što se pristupi numeričkom rešavanju dobijenih jednačina kako je gore predloženo, diferencijalne jednačine kretanja osikularnog lanca će se izvesti direktno u formi diferencijalnih jednačina prvog reda. Za to će se koristiti koncept pseudobrzina i Gibbs-Apelove jednačine, kao za ovaj problem najelegantnije/najsažetije jednačine analitičke mehanike.

3.3.4 Gibbs-Apelove jednačine

Treća mogućnost iz prethodnog paragrafa motivisala je sledeći korak, a to je da se diferencijalne jednačine kretanja osikularnog lanca napišu u formi Gibbs-Apelovih jednačina, videti [Markeev, 1999]. Za taj posao će se uvesti sledeće pseudobrzine

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_1 &= \dot{q}_1, \\ \dot{\pi}_2 &= \dot{q}_2 \cos q_3, \\ \dot{\pi}_3 &= \dot{q}_3, \\ \dot{\pi}_4 &= \dot{q}_4 \cos q_5 \sin q_6 + \dot{q}_5 \cos q_6, \\ \dot{\pi}_5 &= \dot{q}_4 \cos q_5 \cos q_6 - \dot{q}_5 \sin q_6, \\ \dot{\pi}_6 &= -\dot{q}_4 \sin q_5 + \dot{q}_6.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Pseudobrzine $\dot{\pi}_2$ i $\dot{\pi}_3$ su projekcije vektora ugaone brzine stapesa na ose $O_1y'_1$ i $O_1z'_1$ koordinatnog sistema $O_1x'_1y'_1z'_1$, respektivno. Slično, pseudobrzine $\dot{\pi}_4$, $\dot{\pi}_5$ i $\dot{\pi}_6$ su redom projekcije vektora ugaone brzine inkudo-malearnog bloka ω_2 , date jednačinom (3.18), na ose C_2x_2 , C_2y_2 i C_2z_2 koordinatnog sistema $C_2x_2y_2z_2$ u proizvoljnom trenutku vremena. Takođe, može se primetiti da su pseudokoordinate π_1 i π_3 jednake generalisanim koordinatama q_1 i q_3 , respektivno.

Rešavanjem jednačina (3.47) po generalisanim brzinama \dot{q}_j , $j = 1 \div 6$, a što je prikazano u Dodatu F, dobija se

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \dot{\pi}_1, \\ \dot{q}_2 &= \dot{\pi}_2 \sec q_3, \\ \dot{q}_3 &= \dot{\pi}_3, \\ \dot{q}_4 &= \sec q_5 (\dot{\pi}_4 \sin q_6 + \dot{\pi}_5 \cos q_6), \\ \dot{q}_5 &= \dot{\pi}_4 \cos q_6 - \dot{\pi}_5 \sin q_6, \\ \dot{q}_6 &= (\dot{\pi}_4 \sin q_6 + \dot{\pi}_5 \cos q_6) \tan q_5 + \dot{\pi}_6,\end{aligned}\tag{3.48}$$

gde je $\sec q_3 = \frac{1}{\cos q_3}$, i $\sec q_5 = \frac{1}{\cos q_5}$.

Prateći Markeeva, saglasno sa (3.47), po definiciji se uvode proizvoljne i nezavisne veličine - varijacije pseudokoordinata - kojih ima isto koliko i stepeni slobode kretanja sistema

$$\begin{aligned}\delta\pi_1 &= \delta q_1, \\ \delta\pi_2 &= \delta q_2 \cos q_3, \\ \delta\pi_3 &= \delta q_3, \\ \delta\pi_4 &= \delta q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \delta q_5 \cos q_6, \\ \delta\pi_5 &= \delta q_4 \cos q_5 \cos q_6 - \delta q_5 \sin q_6, \\ \delta\pi_6 &= -\delta q_4 \sin q_5 + \delta q_6,\end{aligned}\tag{3.49}$$

odakle se reše varijacije generalisanih koordinata

$$\begin{aligned}\delta q_1 &= \delta\pi_1, \\ \delta q_2 &= \delta\pi_2 \sec q_3, \\ \delta q_3 &= \delta\pi_3, \\ \delta q_4 &= \sec q_5 (\sin q_6 \delta\pi_4 + \delta\pi_5 \cos q_6), \\ \delta q_5 &= \delta\pi_4 \cos q_6 - \delta\pi_5 \sin q_6, \\ \delta q_6 &= (\delta\pi_4 \sin q_6 + \delta\pi_5 \cos q_6) \tan q_5 + \delta\pi_6.\end{aligned}\tag{3.50}$$

Diferenciranjem izraza (3.48) dobija se veza između generalisanih ubrzanja i pseudoubrzanja, koja je zbog preglednosti data u Dodatku F. Zatim se ubrzanja centara masa, ugaone brzine i ugaona ubrzanja izraze preko generalisanih koordinata, pseudobrzina i pseudoubrzanja i uvrste u energiju ubrzanja koju su uveli Gibbs i Apel. Energija ubrzanja za dva kruta tela kojima se bavi ovaj model je

$$S = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} m_i \mathbf{a}_{C_i} \cdot \mathbf{a}_{C_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \mathbf{J}_{C_i} \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{J}_{C_i} \boldsymbol{\omega}_i \right],\tag{3.51}$$

gde su svi vektori dati kao funkcije generalisanih koordinata q_j , $j = 1 \div 6$, pseudobrzina $\dot{\pi}_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$ i pseudoubrzanja $\ddot{\pi}_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$.

Sa energijom ubrzanja se virtualni rad sila inercije iz opšte jednačine dinamike može izraziti u obliku

$$\delta A^j = - \sum_{\gamma=1}^6 \frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \delta\pi_\gamma$$

dok se virtualni rad svih zadatih sila i spregova može napisati u formi

$$\delta A = \sum_{\gamma=1}^6 \Xi_\gamma \delta\pi_\gamma,$$

gde su Ξ_γ , $\gamma = 1 \div 6$ generalisane sile koje odgovaraju redom pseudokoordinatama π_γ , $\gamma = 1 \div 6$, a koje su funkcije generalisanih koordinata q_j , $j = 1 \div 6$ i pseudobrzina $\dot{\pi}_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$. Detalji u vezi sa izvođenjem pomenućih generalisanih sila dati su u Dodatku G. Sada se iz opšte jednačine dinamike i uslova linearne nezavisnosti veličina $\delta\pi_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$, videti [Spasić, 2014c], lako dobijaju Gibbs-Apelove diferencijalne jednačine kretanja stapesa i inkudo-malearnog bloka u obliku

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} = \Xi_\gamma, \quad \gamma = 1 \div 6.\tag{3.52}$$

Diferenciranjem izraza (3.51) po pseudoubrzanju $\ddot{\pi}_\gamma$, dobija se

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} = \sum_{i=1}^2 \left[m_i \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{C_i}}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \right)^T \cdot \mathbf{a}_{C_i} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \right)^T \cdot \mathbf{J}_{C_i} \boldsymbol{\varepsilon}_i + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \right)^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{J}_{C_i} \boldsymbol{\omega}_i \right], \quad \gamma = 1 \div 6.\tag{3.53}$$

odakle sledi, da se za dobijanje Gibbs-Apelovih diferencijalnih jednačina kretanja ne moraju računati skalarni proizvodi u energiji ubrzanja S , videti [Baruh, 1999].

Kako u Gibbs-Apelovu funkciju, pseudoubrzanja ulaze ili kroz linearne, ili kroz kvadratne članove, to su Gibbs-Apelove jednačine linearne po pseudoubrzanjima i mogu se po njima rešiti, a zatim i integraliti. Sa poznatim vrednostima pseudobrzina iz jednačina (3.48) dobijaju se generalisane brzine, a njihovom integracijom i generalisane koordinate.

3.3.5 Bezdimenzijska forma jednačina kretanja

Pre numeričke integracije, diferencijalne jednačine kretanja će se napisati u bezdimenzijskoj formi uvođenjem bezdimenzijskih veličina

$$\begin{aligned}\bar{t} &= f_P t, \quad \bar{L} = L \sqrt{\frac{m_2}{J_{z_2}}}, \quad B_i = \frac{m_i (f_P)^2}{F_P} \sqrt{\frac{J_{z_2}}{m_2}}, \quad i = 1, 2, \\ \bar{F} &= \frac{F}{F_P}, \quad \bar{\omega}_P = 2\pi, \quad \bar{k}_1 = \frac{k_1 f_P}{F_P} \sqrt{\frac{J_{z_2}}{m_2}}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2 f_P}{F_P} \sqrt{\frac{m_2}{J_{z_2}}}, \\ B_{1k} &= \frac{E_{1k} A_{1k}}{F_P l_{1k}} \sqrt{\frac{J_{z_2}}{m_2}}, \quad k = 1 \div 5, \quad B_{2i} = \frac{E_{2i} A_{2i}}{F_P l_{2i}} \sqrt{\frac{J_{z_2}}{m_2}}, \quad i = 1 \div 8,\end{aligned}$$

gde se sa L označavaju sve veličine koje imaju dimenziju dužine, a sa F sve veličine koje imaju dimenziju sile. Izostavljanjem posebnih oznaka za bezdimenzijske veličine, Gibbs-Apelove diferencijalne jednačine (3.52), konstitutivne jednačine (3.43), (3.44), (3.9) i (3.10), kao i sila pobude (3.12), u bezdimenzijskoj formi postaju

$$\sum_{i=1}^2 \left[B_i \left(\frac{\partial \mathbf{a}_{C_i}}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \right)^T \cdot \mathbf{a}_{C_i} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \right)^T \cdot \mathbf{J}_{C_i} \boldsymbol{\varepsilon}_i + \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial \ddot{\pi}_\gamma} \right)^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{J}_{C_i} \boldsymbol{\omega}_i \right] = \Xi_\gamma, \quad \gamma = 1 \div 6, \quad (3.54)$$

$$F_{1k} + \tau_{\sigma 1k} F_{1k}^{(\alpha_{1k})} = B_{1k} \left(\Delta l_{1k} + \tau_{\varepsilon 1k} \Delta l_{1k}^{(\alpha_{1k})} \right), \quad k = 1 \div 5, \quad (3.55)$$

$$F_{2i} + \tau_{\sigma 2i} F_{2i}^{(\alpha_{2i})} = B_{2i} \left(\Delta l_{2i} + \tau_{\varepsilon 2i} \Delta l_{2i}^{(\alpha_{2i})} \right), \quad i = 1 \div 8, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{G}^K = -k_1 \mathbf{v}_{O_1}, \quad \mathbf{M}_{O_1}^K = -k_2 \boldsymbol{\omega}_1^O, \quad F_{29} = \sin(\omega_P t). \quad (3.57)$$

Diferencijalne jednačine (3.48) koje kompletiraju prethodni sistem jednačina ostaju iste u bezdimenzijskoj formi.

3.4 Srednje uho kao linearni sistem

Da bi se sistem smatrao linearnim, potrebno je da ispunjava dva kriterijuma: izlaz iz sistema mora da se povećava proporcionalno povećanju njegovog ulaza i izlaz sistema, ako se dva različita signala zbirno primene na njegovom ulazu, mora biti jednak zbiru izlaza, kao da je svaki ulazni signal primenjen pojedinačno. Drugi kriterijum se naziva još i principom superpozicije. Srednje uho se često može posmatrati kao linearni sistem, što ima uporište u eksperimentalnim rezultatima, na mačkama, koji su pokazali da se baza stapesa kreće proporcionalno pritisku zvuka koji deluje na bubnu opnu sve do 130 dB SPL za frekvencije ispod 2 kHz i čak do 140-150 dB SPL za frekvencije iznad 2 kHz, videti [Møller, 2006]. Takođe, amplituda intrakohlearnog pritiska kod ovalnog prozora, amplituda translatorne komponente pomeranja i amplituda brzine centra baze stapesa su proporcionalne amplitudi zvučnog pritiska kod bubne opne, videti [Meddis *et al.*, 2010]. U istoj knjizi je navedeno da promene pritiska vazduha ispred bubne opne u obliku periodične funkcije dovode do promene pritiska perilimfe kod ovalnog prozora u vidu iste periodične funkcije. Dakle, sistem srednje uho ne unosi distorziju u zvučni signal, već samo oblikuje spektar zvuka, tj. ponaša se kao filter. Kako nije jasno o kom tipu filtera je reč, neki autori tvrde da se srednje uho ponaša kao filter sa relativno ravnom funkcijom prenosa na širokom opseg frekvencija, dok drugi autori smatraju da se ono ponaša kao sistem sa maksimalnim pojačanjem signala pri frekvencijama između 700 i 1200 Hz, videti [Meddis *et al.*, 2010], [Ruggero & Temchin, 2003].

Prepostavka o linearnosti srednjeg uha ne mora uvek biti zadovoljena. Na primer, nelinearnost u sistemu srednje uho može biti posledica kontrakcije dva mišića srednjeg uha, čime se znatno menja relativan položaj koščica osikularnog lanca, a samim time i struktura celog sistema. Ova nelinearnost se može smatrati geometrijskom. Pored geometrijske, sistem srednje uho može da ima i materijalnu nelinearnost. Na primer, kao posledicu nelinearnih fizičkih svojstava struktura srednjeg uha. Međutim, materijalna nelinearnost je ovde isključena jer se relacija sila deformacija ovde uzima u linearном obliku i dobro oponaša ono što pokazuju eksperimenti a cena koja se za to plati je upotreba frakcionih izvoda.

Model srednjeg uha, dat jednačinama (3.48), (3.54), (3.55), (3.56) i (3.57), je geometrijski nelinearan. Međutim, u skladu sa navedenim argumentima, rešavaće se linearizovani model. Može se primetiti da usvojena konstitutivna jednačina, frakcioni Zenerov model, spada u domen linearne viskoelastičnosti, pošto je operator necelog diferenciranja linearan. Dakle, model srednjeg uha, koji će se u nastavku rešavati, biće opisan sistemom linearnih diferencijalnih jednačina realnog reda.

3.5 Košijev problem kao model za kretanje osikularnog lanca

Rešavanjem Gibbs-Apelovih diferencijalnih jednačina kretanja (3.54) po pseudoubrzanjima, dobija se sistem jednačina u formi Košijevog problema. U skladu sa činjenicom da se srednje uho može posmatrati kao linearni sistem, uvodi se prepostavka da kretanjima stapesa i inkudo-malearnog bloka odgovaraju male vrednosti generalisanih koordinata. Prepostavka se može opravdati činjenicom da su pomeranja tačaka osikularnog lanca mnogo manja od njegovih fizičkih dimenzija, videti [Hudde & Weistenhöfer, 2006]. U tom slučaju se, razvojem svih članova u Tejlorov red u okolini mnoštva vrednosti generalisanih koordinata, uz zadržavanje samo na linearnim članovima, Gibbs-Apelove diferencijalne jednačine (3.54) mogu zapisati kao

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{M}_2 \mathbf{F} + F_{29} \mathbf{V}_1 + \mathbf{M}_3 \dot{\boldsymbol{\pi}}, \quad (3.58)$$

gde su matrice \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 , \mathbf{M}_3 i vektor \mathbf{V}_1 konstantne i date su u Dodatku H, F_{29} je sila pobude, a $\dot{\boldsymbol{\pi}} = [\dot{\pi}_1 \dots \dot{\pi}_6]^T$, $\ddot{\boldsymbol{\pi}} = [\ddot{\pi}_1 \dots \ddot{\pi}_6]^T$ i $\mathbf{F} = [F_{11} \dots F_{15} \ F_{21} \dots F_{28}]^T$. Ukoliko se sistem (3.58) pomnoži matricom \mathbf{M}_1^{-1} , sa leve strane, uz prepostavku da je simetrična matrica \mathbf{M}_1 regularna, sistem jednačina (3.58) se može zapisati u formi Košijevog problema

$$(\dot{\boldsymbol{\pi}})^\cdot = \mathbf{M}_1^{-1} (\mathbf{M}_2 \mathbf{F} + F_{29} \mathbf{V}_1 + \mathbf{M}_3 \dot{\boldsymbol{\pi}}), \quad (3.59)$$

koji se rešava uz homogene početne uslove i konstitutivne jednačine (3.55) i (3.56) kojima je određena sila \mathbf{F} .

Slično, razvojem u Tejlorov red svih članova u jednačinama (3.48), opet uz zadržavanje samo na linearnim članovima, jednačine (3.48) se mogu zapisati kao

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_4 \dot{\boldsymbol{\pi}}, \quad (3.60)$$

gde je konstantna matrica \mathbf{M}_4 data u Dodatku H i gde je $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_6]^T$. Sistem jednačina (3.60) se rešava uz homogene početne uslove.

Ovako postavljen Košijev problem može se rešiti na nekoliko načina. Na primer, može se iskoristiti činjenica da su za široku klasu funkcija, koje se sreću u fizici i inženjerstvu, Riman-Ljuvilov i Grunvald-Letnikovljev neceli izvod ekvivalentni, videti [Podlubny, 1999], te se problem rešiti korišćenjem Grunvald-Letnikovljevog necelog izvoda, kao u [Grahovac & Žigić, 2010] i [Žigić, 2012]. Drugi način rešavanja je da se primenom ekspanzione formule Atanackovića i Stankovića, konstitutivne jednačine (3.55) i (3.56) prikažu u formi diferencijalnih jednačina prvog reda. Tada se problem može integraliti standardnim metodama za numeričku integraciju običnih diferencijalnih jednačina. Košijev problem se takođe može rešiti i primenom Laplasove transformacije, kojom se sistem diferencijalnih jednačina prevodi u sistem algebarskih jednačina u kompleksnom domenu, a zatim se primenom numeričke inverzije Laplasove transformacije dobijaju rešenja kao funkcije vremena.

3.6 Rešavanje Košijevog problema primenom ekspanzione formule Atanackovića i Stankovića

Primenom ekspanzione formule Atanackovića i Stankovića, kao što je detaljno prikazano u Dodatku I, konstitutivne jednačine (3.55) i (3.56) se mogu zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \dot{F}_{1k} &= B_{1k} \frac{\tau_{\varepsilon 1k}}{\tau_{\sigma 1k}} (\Delta l_{1k})^\cdot + B_{1k} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 1k} t^{-\alpha_{1k}} K_{21k}}{\tau_{\sigma 1k} t^{1-\alpha_{1k}} K_{11k}} \Delta l_{1k} - \frac{1 + \tau_{\sigma 1k} t^{-\alpha_{1k}} K_{21k}}{\tau_{\sigma 1k} t^{1-\alpha_{1k}} K_{11k}} F_{1k} \\ &+ \frac{K_{31k}}{K_{11k}} \left[B_{1k} \frac{\tau_{\varepsilon 1k}}{\tau_{\sigma 1k}} \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{1k} - 1)}{t^p \Gamma(p - 1)} m_{p-2} (\Delta l_{1k}) - \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{1k} - 1)}{t^p \Gamma(p - 1)} m_{p-2} (F_{1k}) \right], \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}\dot{F}_{2i} = & B_{2i} \frac{\tau_{\varepsilon 2i}}{\tau_{\sigma 2i}} (\Delta l_{2i})' + B_{2i} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 2i} t^{-\alpha_{2i}} K_{22i}}{\tau_{\sigma 2i} t^{1-\alpha_{2i}} K_{12i}} \Delta l_{2i} - \frac{1 + \tau_{\sigma 2i} t^{-\alpha_{2i}} K_{22i}}{\tau_{\sigma 2i} t^{1-\alpha_{2i}} K_{12i}} F_{2i} \\ & + \frac{K_{32i}}{K_{12i}} \left[B_{2i} \frac{\tau_{\varepsilon 2i}}{\tau_{\sigma 2i}} \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{2i} - 1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(\Delta l_{2i}) - \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{2i} - 1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(F_{2i}) \right],\end{aligned}\quad (3.62)$$

gde je $k = 1 \div 5$ u (3.61) i $i = 1 \div 8$ u (3.62). Dakle, uvedeno je dodatnih $13 \cdot 2 \cdot (N-1)$ promenljivih $m_{p-2}(F_{1k})$, $m_{p-2}(\Delta l_{1k})$, $m_{p-2}(F_{2i})$ i $m_{p-2}(\Delta l_{2i})$, $p = 2 \div N$, koje predstavljaju momente funkcija F_{1k} , Δl_{1k} , F_{2i} i Δl_{2i} , $k = 1 \div 5$, $i = 1 \div 8$, respektivno, a konstante K_{11k} , K_{21k} , K_{31k} , $k = 1 \div 5$ i K_{12i} , K_{22i} , K_{32i} , $i = 1 \div 8$, su definisane redom izrazima

$$\begin{aligned}K_{11k} &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha_{1k})} \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{1k} - 1)}{\Gamma(\alpha_{1k} - 1)\Gamma(p+1)} \right], \quad k = 1 \div 5, \\ K_{21k} &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_{1k})} - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha_{1k})\Gamma(\alpha_{1k} - 1)} \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{1k} - 1)}{\Gamma(p)}, \quad k = 1 \div 5, \\ K_{31k} &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha_{1k})\Gamma(\alpha_{1k} - 1)}, \quad k = 1 \div 5, \\ K_{12i} &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha_{2i})} \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{2i} - 1)}{\Gamma(\alpha_{2i} - 1)\Gamma(p+1)} \right], \quad i = 1 \div 8, \\ K_{22i} &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_{2i})} - \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha_{2i})\Gamma(\alpha_{2i} - 1)} \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p + \alpha_{2i} - 1)}{\Gamma(p)}, \quad i = 1 \div 8, \\ K_{32i} &= \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha_{2i})\Gamma(\alpha_{2i} - 1)} \quad i = 1 \div 8.\end{aligned}$$

Momenti sila i deformacija uvode se sledećim diferencijalnim jednačinama, videte Dodatak I

$$\begin{aligned}\dot{m}_{p-2}(F_{1k}) &= t^{p-2} F_{1k}, \quad p = 2 \div N, \quad k = 1 \div 5, \\ \dot{m}_{p-2}(\Delta l_{1k}) &= t^{p-2} \Delta l_{1k}, \quad p = 2 \div N, \quad k = 1 \div 5, \\ \dot{m}_{p-2}(F_{2i}) &= t^{p-2} F_{2i}, \quad p = 2 \div N, \quad i = 1 \div 8, \\ \dot{m}_{p-2}(\Delta l_{2i}) &= t^{p-2} \Delta l_{2i}, \quad p = 2 \div N, \quad i = 1 \div 8,\end{aligned}\quad (3.63)$$

uz homogene početne uslove, videti [Atanacković & Stanković, 2004].

Dakle, primenom ekspanzione formule, konstitutivne jednačine, kojih u problemu ima 13, zamjenjene su sistemom od $13 \cdot (2(N-1) + 1)$ diferencijalnih jednačina prvog reda. Košijev problem sa homogenim početnim uslovima, koji pored jednačina (3.59) i (3.60), uključuje jednačine (3.61), (3.62) i (3.63), može se rešiti standardnim numeričkim metodama za integraciju običnih diferencijalnih jednačina. Ipak, pre rešavanja treba obratiti pažnju na dve stvari: primenom ekspanzione formule, u jednačinama (3.61) i (3.62), pojavljuje se singularitet u početnom trenutku $t = 0$ i uvodi se greška aproksimiranja necelog izvoda zbog uzimanja konačno mnogo ($N-1$) momenata funkcije.

Problem singulariteta u početnom trenutku, izbegava se tako što se za početni, uzima trenutak, blizak, ali različit od nule. Procena greške aproksimacije necelog izvoda reda $0 < \alpha \leq 1$ diferencijabilne funkcije je data u radu [Atanacković & Stanković, 2004]. Pokazano je da greška zavisi od maksimuma apsolutne vrednosti izvoda funkcije, reda necelog izvoda, vremena (sa čijim porastom se greška povećava) i od broja N kojim se beskonačni red zamenjuje konačnim (čijim povećavanjem se greška smanjuje). Mada je moguće oceniti tačnost približnog rešenje frakcione diferencijalne jednačine u kojoj su frakcioni izvodi zamenjeni ekspanzionom formulom, zbog složenosti problema koji je predmet ove teze, bilo bi vrlo teško analizirati uticaj greške pri aproksimaciji necelih izvoda na grešku konačnog numeričkog rešenja. Međutim, numeričko rešenje dobijeno primenom ekspanzione formule, sa standardnim procedurama za numeričku integraciju diferencijalnih jednačina razvijenim u programskom paketu Matlab, uporediće se sa rešenjem dobijenim primenom numeričke inverzije Laplasove transformacije, što je potpuno nezavisan postupak. Tako se može proceniti koliko je momenata funkcije dovoljno za aproksimaciju njenog necelog izvoda u prihvatljivom vremenu trajanja simulacije.

3.7 Rešavanje Košijevog problema primenom Laplasove transformacije

Primenom Laplasove transformacije, videti jednačinu (2.5), na sisteme jednačina (3.58), (3.60) i na jednačine (3.55), (3.56) i (3.57), uz definicije Laplasove transformacije celobrojnog i necelog izvoda funkcije, sa napomenom da su svi početni uslovi jednaki nuli, dobija se

$$s^2 \mathbf{M}_1 \tilde{\boldsymbol{\pi}}(s) = \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{F}}(s) + \tilde{F}_{29}(s) \mathbf{V}_1 + s \mathbf{M}_3 \tilde{\boldsymbol{\pi}}(s), \quad (3.64)$$

$$s \tilde{\mathbf{q}}(s) = s \mathbf{M}_4 \tilde{\boldsymbol{\pi}}(s), \quad (3.65)$$

$$\tilde{F}_{1k}(s) = B_{1k} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 1k} s^{\alpha_{1k}}}{1 + \tau_{\sigma 1k} s^{\alpha_{1k}}} \Delta \tilde{l}_{1k}(s), \quad k = 1 \div 5, \quad (3.66)$$

$$\tilde{F}_{2i}(s) = B_{2i} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 2i} s^{\alpha_{2i}}}{1 + \tau_{\sigma 2i} s^{\alpha_{2i}}} \Delta \tilde{l}_{2i}(s), \quad i = 1 \div 8, \quad (3.67)$$

gde je $\tilde{F}_{29}(s) = \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2}$ i predstavlja Laplasovu transformaciju intenziteta sile pobude F_{29} , a $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(s) = [\tilde{\pi}_1(s) \dots \tilde{\pi}_6(s)]^T$, $\tilde{\mathbf{F}}(s) = [\tilde{F}_{11}(s) \dots \tilde{F}_{15}(s) \tilde{F}_{21}(s) \dots \tilde{F}_{28}(s)]^T$ i $\tilde{\mathbf{q}}(s) = [\tilde{q}_1(s) \dots \tilde{q}_6(s)]^T$ stoje za slike, redom, pseudokoordinata, sila u viskoelastičnim štapovima i uvedenih generalisanih koordinata. Promene dužina viskoelastičnih štapova korišćenih u predloženom modelu srednjeg uha se, u matričnoj formi, mogu zapisati kao $\Delta \mathbf{l} = \mathbf{M}_l \mathbf{q}$, videti Dodatak E, što nakon primene Laplasove transformacije postaje $\Delta \tilde{\mathbf{l}}(s) = \mathbf{M}_l \tilde{\mathbf{q}}(s)$, gde je $\Delta \tilde{\mathbf{l}}(s) = [\Delta \tilde{l}_{11}(s) \dots \Delta \tilde{l}_{15}(s) \Delta \tilde{l}_{21}(s) \dots \Delta \tilde{l}_{28}(s)]^T$. Sada se jednačine (3.66) i (3.67) mogu zapisati u matričnoj formi:

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{M}_5(s) \Delta \tilde{\mathbf{l}}(s) = \mathbf{M}_5(s) \mathbf{M}_l \tilde{\mathbf{q}}(s), \quad (3.68)$$

gde je dijagonalna matrica $\mathbf{M}_5 = [m_{i,j}^5]_{13 \times 13}$, a $m_{i,i}^5(s) = B_{1i} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 1i} s^{\alpha_{1i}}}{1 + \tau_{\sigma 1i} s^{\alpha_{1i}}}, i = 1 \div 5, m_{5+i,5+i}^5(s) = B_{2i} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 2i} s^{\alpha_{2i}}}{1 + \tau_{\sigma 2i} s^{\alpha_{2i}}}, i = 1 \div 8$, i $m_{i,j}^5 = 0, i \neq j$.

Uvrštavanjem $\tilde{\mathbf{q}}$ iz jednačine (3.65) u (3.68), a zatim uvrštavanjem tako dobijenog izraza za silu $\tilde{\mathbf{F}}$ u jednačinu (3.64), dobija se

$$(s^2 \mathbf{M}_1 - s \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_5(s) \mathbf{M}_l \mathbf{M}_4) \tilde{\boldsymbol{\pi}}(s) = \tilde{F}_{29}(s) \mathbf{V}_1. \quad (3.69)$$

Množenjem prethodnog izraza sa leve strane matricom

$$\mathcal{M}(s) = (s^2 \mathbf{M}_1 - s \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_5(s) \mathbf{M}_l \mathbf{M}_4)^{-1}$$

može se izraziti $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ kao

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}}(s) = \tilde{F}_{29}(s) \mathcal{M}(s) \mathbf{V}_1.$$

Uvrštavanjem prethodnog izraza u jednačine (3.65) i (3.68), sistem jednačina u kompleksnom domenu, na koji će biti primenjen postupak numeričke inverzije, čine

$$\tilde{\mathbf{q}}(s) = \tilde{F}_{29}(s) \mathbf{M}_4 \mathcal{M}(s) \mathbf{V}_1, \quad (3.70)$$

$$s \tilde{\boldsymbol{\pi}}(s) = s \tilde{F}_{29}(s) \mathcal{M}(s) \mathbf{V}_1, \quad (3.71)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) = \tilde{F}_{29}(s) \mathbf{M}_5(s) \mathbf{M}_l \mathbf{M}_4 \mathcal{M}(s) \mathbf{V}_1, \quad (3.72)$$

gde $s \tilde{\boldsymbol{\pi}}(s)$ predstavlja sliku vektora pseudobrzina u kompleksnom domenu.

Ako se na jednačine (3.70), (3.71) i (3.72) primeni numerička inverzija Laplasove transformacije, na primer kao što je opisano u radu [Brančić, 1999], mogu se dobiti redom generalisane koordinate $q_j, j = 1 \div 6$, pseudobrzine $\dot{\pi}_\gamma, \gamma = 1 \div 6$, i projekcije sila $F_{1k}, k = 1 \div 5$ i $F_{2i}, i = 1 \div 8$, kao funkcije vremena u izabranim trenucima. Međutim, izračunavanje matrice \mathcal{M} u analitičkom obliku je, čak i primenom računara, veoma zahtevno. Kako je inverzna matrica, ako postoji, jedinstvena, ona će se numerički određivati za svaku zadatu vrednost kompleksne promenljive s . Na osnovu ovakvo dobijenog seta inverznih matrica, numerički se određuje inverzna Laplasova transformacija,

videti [Brančík, 1999] i [Brančík, 2011]. Numerički se lako može proveriti da je, za svako zadato s , matrica \mathcal{M} regularna, te se navedeni postupak može primeniti.

Iako postoje razni načini za analitičko i numeričko određivanje inverzne Laplasove transformacije, videti [Spiegel, 1965] i [Cohen, 2007], zbog složenosti problema, koristiće se numerički postupak opisan u [Brančík, 1999] i [Brančík, 2011]. Naime, u radovima [Sheng et al., 2010] i [Sheng et al., 2011b] je pokazano da nije svaki postupak za numeričku inverziju Laplasove transformacije funkcije koja uključuje necele stepene kompleksne promenljive podjednako efikasan. U navedenim radovima, postupak numeričke inverzije iz rada [Brančík, 1999] se pokazao kao vrlo efikasan.

3.8 Ocena disipacije energije u sistemu srednje uho

Disipacija energije u predloženom modelu srednjeg uha uključuje disipaciju u štapovima koji modeliraju: izabrane ligamente, tetivu mišića stapesa, ekvivalentna dejstva bubne opne i amularnog ligamenta stapesa, kao i disipaciju ekvivalentnog dejstva perilimfe u kohlei. Pored disipativnih sila, razmatraće se i ukupna energija saopštена sistemu od strane sile pobude.

Ukupna energija saopštена sistemu srednje uho, od početnog do proizvoljnog trenutka t^* , može se odrediti kao

$$E = \int_0^{t^*} \mathbf{F}_{29}^T \mathbf{v}_{29} dt = \int_0^{t^*} F_{29} (\Delta l_{29})^\cdot dt,$$

gde je \mathbf{F}_{29} dano izrazom (3.11), $(\Delta l_{29})^\cdot = (\Delta \mathbf{r}_{29})^\cdot \boldsymbol{\kappa}_{29}$, i

$$(\Delta \mathbf{r}_{29})^\cdot = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 & 0 & 0 \\ -\dot{q}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_6 & \dot{q}_4 \\ \dot{q}_6 & 0 & -\dot{q}_5 \\ -\dot{q}_4 & \dot{q}_5 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{29}^Z.$$

U prethodnom izrazu izvršen je razvoj svih članova u Tejlrov red u okolini nultih vrednosti generalisanih koordinata, pri čemu su zadržani samo linearni članovi. Disipirana energija u viskoelastičnim štapovima je negativan rad sila u strukturama srednjeg uha:

$$\begin{aligned} D_{1k} &= - \int_0^{t^*} \mathbf{F}_{1k}^T \mathbf{v}_{1k} dt = \int_0^{t^*} F_{1k} (\Delta l_{1k})^\cdot dt, \quad k = 1 \div 5, \\ D_{2i} &= - \int_0^{t^*} \mathbf{F}_{2i}^T \mathbf{v}_{2i} dt = \int_0^{t^*} F_{2i} (\Delta l_{2i})^\cdot dt, \quad i = 1 \div 8, \end{aligned}$$

gde su korišćene relacije (3.5), (3.26), (3.6) i (3.27). Disipirana energija ekvivalentnog dejstva kohlee, koja predstavlja negativan rad glavnog vektora i glavnog momenta za izabranu tačku, je

$$\begin{aligned} D_K &= - \int_0^{t^*} (\mathbf{G}^K)^T \mathbf{v}_{O_1} dt - \int_0^{t^*} (\mathbf{M}_{O_1}^K)^T \boldsymbol{\omega}_1^O dt \\ &= k_1 \int_0^{t^*} (\mathbf{v}_{O_1})^T \mathbf{v}_{O_1} dt + k_2 \int_0^{t^*} (\boldsymbol{\omega}_1^O)^T \boldsymbol{\omega}_1^O dt \\ &= k_1 \int_0^{t^*} \dot{q}_1^2 dt + k_2 \int_0^{t^*} (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) dt. \end{aligned}$$

Ukupna disipacija energije u viskoelastičnim štapovima je

$$D = \sum_{k=1}^5 D_{1k} + \sum_{i=1}^8 D_{2i},$$

a procenat te energije u odnosu na energiju saopštenu sistemu je

$$P_D = \frac{D}{E} \cdot 100\%.$$

Slično, procenat disipirane energije ekvivalentnog dejstva kohlee u odnosu na energiju saopštenu sistemu je

$$P_{D_K} = \frac{D_K}{E} \cdot 100\%.$$

Na ovom mestu se napominje da efekat oscilacija membrane drugog otvora koji spaja unutrašnje i srednje uho, okruglog prozora, na ukupnu disipaciju energije u sistemu srednjeg uha nije razmatran.

Glava 4

Rezultati i diskusija

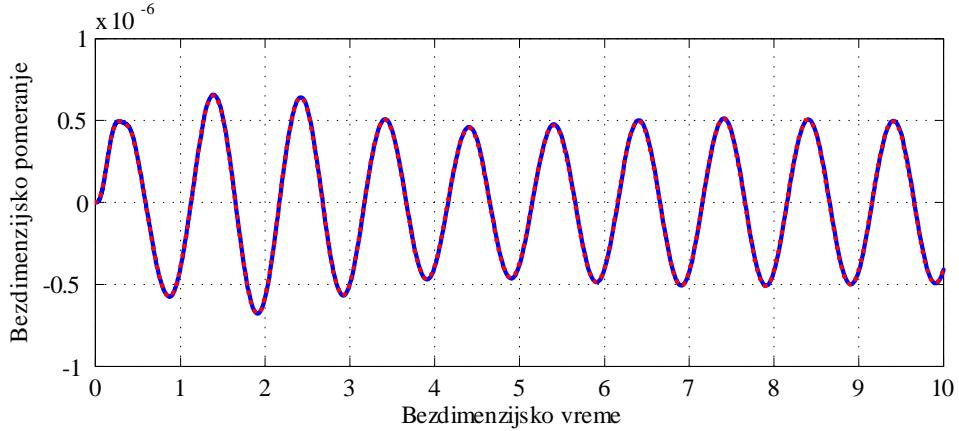
U ovom delu prikazaće se rezultati predviđanja modela, tj. rešenja jednačina (3.59) i (3.60) sa (3.61) do (3.63), kao i numerička inverzija Laplasove transformacije jednačina (3.70) do (3.72) što daje vrednosti generalisanih koordinata i sila u štapovima kao funkcije vremena. Na ovom mestu, naglašava se da su za potrebe ilustracije izabrane vrednosti ulaznih parametara: masa, momenata inercije, relaksacionih konstanti, modula elastičnosti, reda frakcionalih izvoda kao i geometrijskih parametara, motivisane iz velikog broja različitih referenci i da se sigurno ne odnose na jedno konkretno srednje uho. Međutim, i pored toga očekuju se slaganja i analogija sa nekoliko važnih referenci na kojima se bazira ovaj rad kako bi se potvrdila osnovna hipoteza izneta u Prologu. Na ovaj način prikazuje se opštost modela bez pretenzije da se dobijeni rezultati predviđanja u potpunosti i kvalitativno i kvantitativno slože sa već objavljenim rezultatima koji se odnose na merenja na jednom konkretnom srednjem uhu. Naime, kada bi se *in vivo* reološkim eksperimentima parametri uha odredili tačnije za isto srednje uho a odgovarajućim metodama geometrijski i inercijalni parametri tog istog uha onda bi model davao predviđanja za različita fiziološka opterećenja sa većom pouzdanošću. U slučaju potrebe to bi doprinelo kvalitetnijoj analizi objekata koji se koriste u restoraciji slušne funkcije kod povreda i bolesti, a koji menjaju pojedine segmente srednjeg uha. S tim u vezi, jedan od pravaca daljih istraživanja bi bio razvoj metoda za komparaciju predviđanja modela sa rezultatima eksperimenta. Posebno svojstvo modela je da se na jedan relativno jednostavan način predviđa disipacija energije pri kretanju osikularnog lanca, što se takođe može povezati sa izborom objekata za rekonstrukciju slušne funkcije.

U svim numeričkim eksperimentima izabrana je vrednost amplitude sile pobude od $F_P = 7.3754 \times 10^{-6}$ N, što odgovara jačini zvuka od 80 dB SPL i fiziološki aktivnoj površini bubne opne od 37 mm^2 . Naime, u disertaciji [Ferrazzini, 2003] je navedeno da fiziološki aktivna površina bubne opne iznosi 55 mm^2 , a što je približno jednak površini projekcije zategnutog dela bubne opne preuzete iz rada [Decraemer & Funnell, 2008] na njenu anularnu ravan. Pošto je Dodatku D izvršeno skaliranje dimenzija bubne opne, da bi se dobili geometrijski parametri njenog ekvivalentnog dejstva, izvršeno je i skaliranje fiziološki aktivne površine bubne opne.

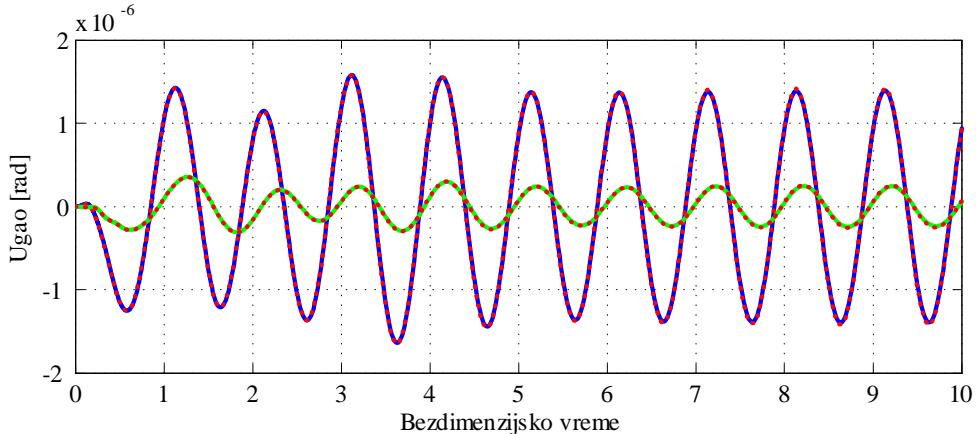
Prvo će biti prikazani rezultati, kako za prelazno, tako i za ustaljeno stanje, za frekvenciju sile pobude od $f_P = 1000$ Hz, a zatim i rezultati za ustaljeno stanje za interval frekvencija od 20 Hz do 20 kHz, sračunati za 50 logaritamski raspoređenih frekvencija. Kako je ugaona frekvencija sile pobude, nakon bezdimenzionisanja konstantna i iznosi $\omega_P = 2\pi$, period oscilovanja sile pobude za svaku frekvenciju je jednak jednoj bezdimenzijskoj jedinici vremena. Na svim slikama, rešenja dobijena korišćenjem ekspanzione formule Atanackovića i Stankovića prikazana su punim linijama, dok su sva rešenja dobijena korišćenjem numeričke inverzije Laplasove transformacije prikazana crvenom isprekidanim linijom. Pri korišćenju ekspanzione formule, korišćeno je po 24 momenata funkcije, te je $N = 25$, tako da ukupan rešavani sistem čini 649 diferencijalnih jednačina prvog reda. Slaganje rezultata ova dva metoda primetno je u izabranom intervalu vremena. Izvan tog intervala, prema očekivanju, primetno je povećanje greške kod primene ekspanzione formule.

4.1 Generalisane koordinate, generalisane brzine i trajektorija tačke umbo

Na slikama 4.1 i 4.2 su prikazane generalisane koordinate $q_j(t)$, $j = 1 \div 3$, koje opisuju pomeranje centra baze stapesa i obrtanja oko duge i kratke ose simetrije te baze. Primećuje se postojanje prelaznog i ustaljenog režima kretanja kao i veoma dobro slaganje rezultata dobijenih predloženim, nezavisnim, numeričkim metodama. Napominje se da u prikazima koji slede množenjem vrednosti na apcisi sa 10^{-3} dobija vreme u sekundama. Množenjem vrednosti ordinate na slici 4.1 sa 2.029×10^6 dobija se pomeranje u nanometrima (nm).



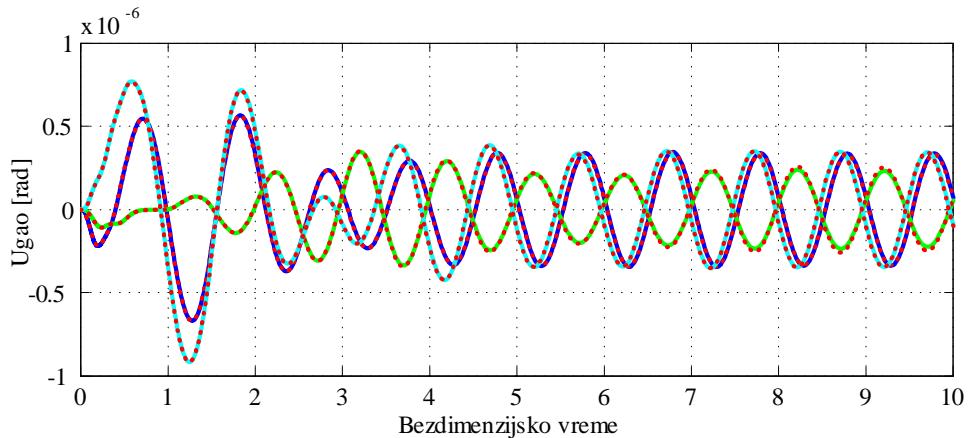
Slika 4.1: Pomeranje centra baze stapesa, generalisana koordinata $q_1(t)$.



Slika 4.2: Generalisane koordinate $q_2(t)$ (plava linija) i $q_3(t)$ (zeleni linija).

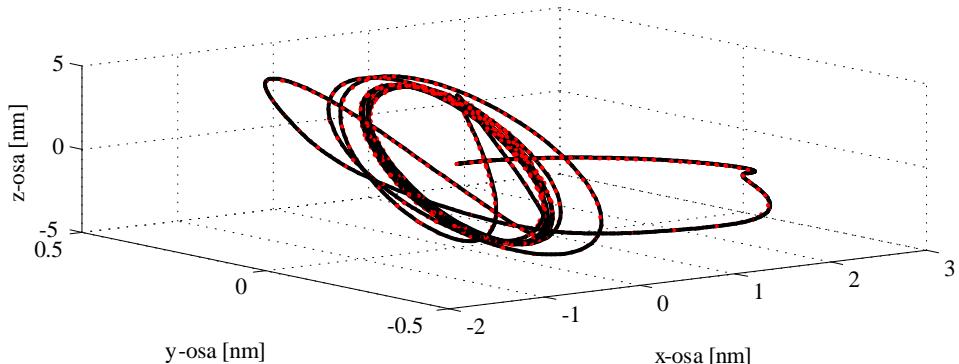
Na slici 4.2 se može primetiti da je maksimalna vrednost ugla obrtanja oko duge ose simetrije baze stapesa q_2 primetno veći od maksimalne vrednosti ugla obrtanja q_3 oko njene kraće ose simetrije, što se slaže sa eksperimentalnim opažanjima, vidi [Berkovitz *et al.*, 2007]. Takođe, vidi se da je kretanje stapesa složeno a ne samo translatoryno kako pretpostavlja klasična teorija sluha.

Generalisane koordinate $q_j(t)$, $j = 4, 5, 6$, koje opisuju orijentaciju inkudo-malearnog bloka, prikazane su na slici 4.3. I ovde se prepoznaje dobro slaganje rezultata oba predložena numerička postupka, kao i ustaljeni režim kretanja.



Slika 4.3: Generalisane koordinate $q_4(t)$ (plava linija), $q_5(t)$ (zelena linija) i $q_6(t)$ (svetlo plava linija).

Na ovom mestu, naglašava se da se ugao obrtanja oko duge ose simetrije baze stapesa, q_2 , najizraženije menja i da to kretanje zajedno sa pomeranjem centra baze stapesa q_1 najviše doprinosi promeni pritiska perilimfe u unutrašnjem uhu. Ovome verovatno doprinosi sistem vešanja osikularnog lanca. Ovaj rezultat predloženog modela je saglasan sa već publikovanim svojstvima kretanja osikularnog lanca, vidi npr. [Hudde & Weistenhöfer, 2006]. S druge strane, male oscilacije inkudo-malearnog bloka i stapesa dovode do znatno izraženijih kretanja umba, što je prikazano na slici 4.4. Koordinatni početak predstavlja položaj umba u početnom trenutku, a prikazana trajektorija je dobijena na osnovu generalisanih koordinata $q_j(t)$, $j = 1 \div 6$. I ovo predviđanje je saglasno sa postojećim saznanjima o kretanju osikularnog lanca, vidi npr. [Hudde & Weistenhöfer, 2006] i [Berkovitz *et al.*, 2007]. O upoređivanju kretanja stapesa i umba pri različitim frekvencijama prinudne sile biće reči kasnije.



Slika 4.4: Trajektorija umba.

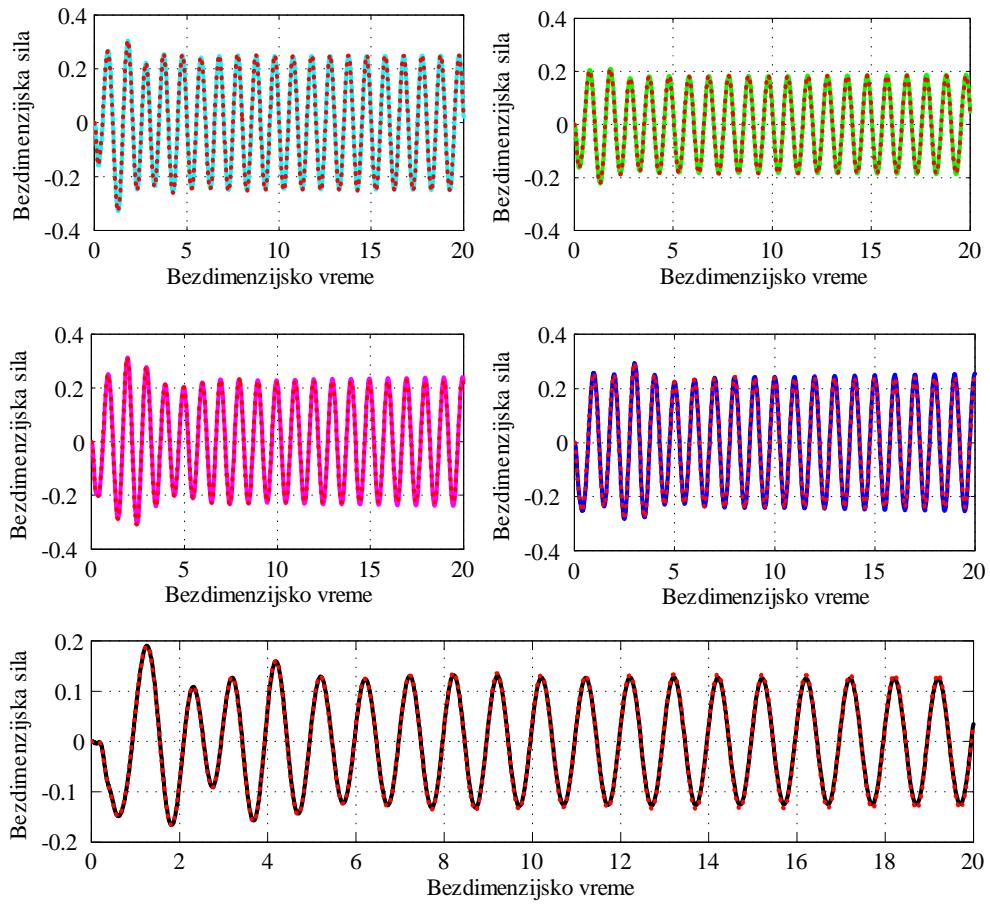
Napominje se da je na slici 4.4 pomeranje umba, i u tranzientnom i u ustaljenom stanju, dano u geometrijskom prostoru.

4.2 Sile u viskoelastičnim štapovima

Drugi rezultat ove teze je procena intenziteta sile u sistemu vešanja osikularnog lanca: ligamentima i tetivi mišića stapesa (prisluškivača). Poznavanje ovih sila može biti od koristi i u izboru biomaterijala i u proceni biokompatibilnosti kao mera sličnosti prirodnih ligamenata sa korišćenim zamenama. Prema saznanju autora, upotreba frakcionog Zenerovog modela za procenu ovih sila je potpuno nov rezultat i ne može se naći u postojećim modelima srednjeg uha baziranim na metodi konačnih elemenata, gde se uglavnom koriste reološki modeli koji ne ispunjavaju restrikcije koje diktira drugi zakon termodinamike, vidi jednačinu (2.3). S tim u vezi, rezultati prikazani u ovom

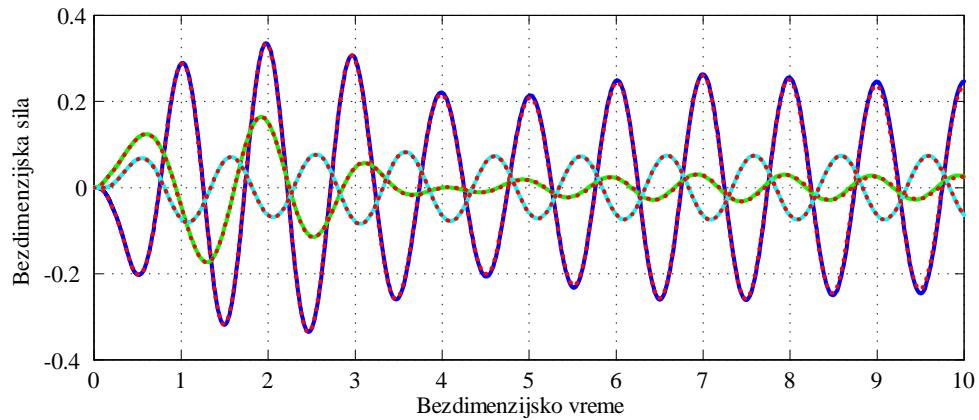
paragrafu su potpuno novi. U prikazima koji slede množenjem bezdimenzijskih sila sa 7.3754×10^{-6} dobija se vrednost sile u njutnima (N).

Na slici 4.5 su prikazane projekcije sila ekvivalentnog dejstva lukova amularnog ligamenta stapesa, redom: F_{11} , F_{12} , F_{13} i F_{14} , koje deluju kao što je prikazano na slici 1.3. Može se primetiti da projekcije F_{11} i F_{14} imaju skoro istu fazu što je posledica dominantnog obrtanja baze stapesa oko njegove duge ose simetrije. Iz istog razloga i projekcije F_{12} i F_{13} imaju približno istu fazu. Na istoj slici prikazana je i projekcija sile tetrici mišića stapesa F_{15} , koji je nešto manji od sila uvedenih da zamene dejstvo anularnog ligamenta stapesa.

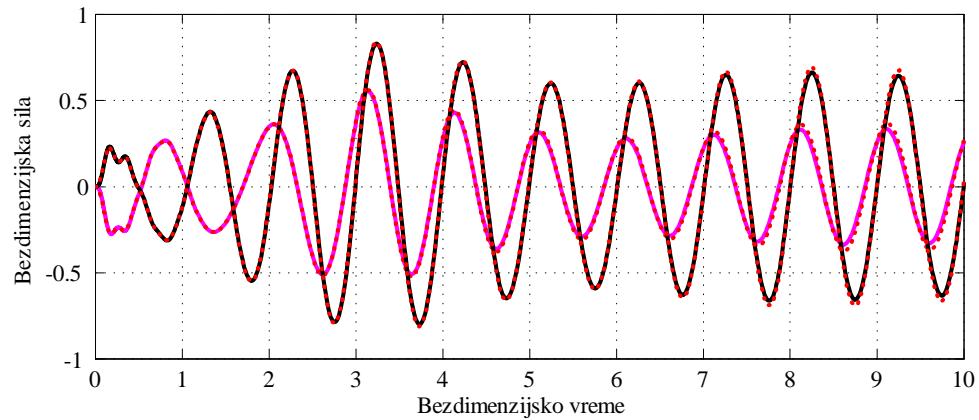


Slika 4.5: Projekcije sila koje deluju na stapes: F_{11} (plava linija), F_{12} (zelena linija), F_{13} (svetlo plava linija), F_{14} (crveno ljubičasta linija) i F_{15} (crna linija).

Projekcije sila u ligamentima maleusa, prikazane su na slici 4.6. Najveći intenzitet sile je u prednjem ligamentu maleusa (F_{21}), zatim u latelarnom (F_{22}) i na kraju u gornjem (F_{23}). Na slici 4.7 su prikazane projekcije sila koje deluju na inkus, tj. projekcije sila u zadnjem ligamentu inkusa: u njegovom latelarnom delu (F_{24}) i u njegovom medialnom delu (F_{25}).

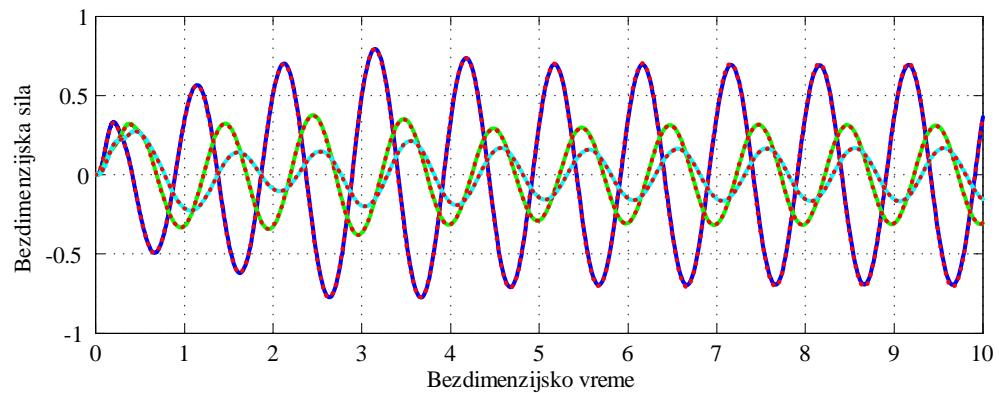


Slika 4.6: Projekcije sila koje deluju na inkudo-malearni blok: F_{21} (plava linija), F_{22} (zelena linija), F_{23} (svetlo plava linija).



Slika 4.7: Projekcije sila koje deluju na inkudo-malearni blok: F_{24} (crveno ljubičasta linija), F_{25} (crna linija).

Na slici 4.8, prikazane su projekcije sila pojednostavljenog ekvivalentnog dejstva bubne opne u smislu disipacije energije. Projekcije sila u viskoelastičnim štapovima koji se pružaju od umba ka dole, ka napred i ka nazad su: F_{26} , F_{27} i F_{28} , respektivno.



Slika 4.8: Projekcije sila ekvivalentnog dejstva bubne opne: F_{26} (plava linija), F_{27} (zelena linija), F_{28} (svetlo plava linija).

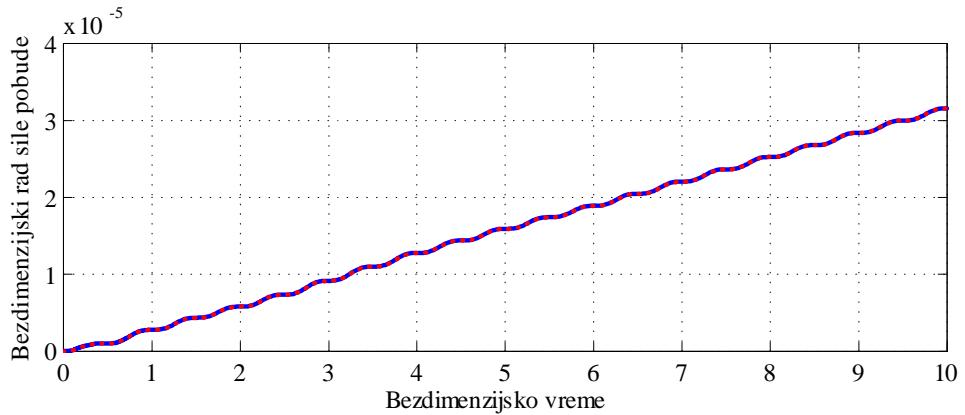
Sada, pošto je nađeno kretanje i sile koje to kretanje ograničavaju može da se pristupi proceni disipacije energije. Prednost izabranog reološkog modela je što se disipacija energije uzima *ab*

initio, a višestruka primena tog modela u analizi složenog kretanja osikularnog lanca predstavlja treći doprinos ove teze.

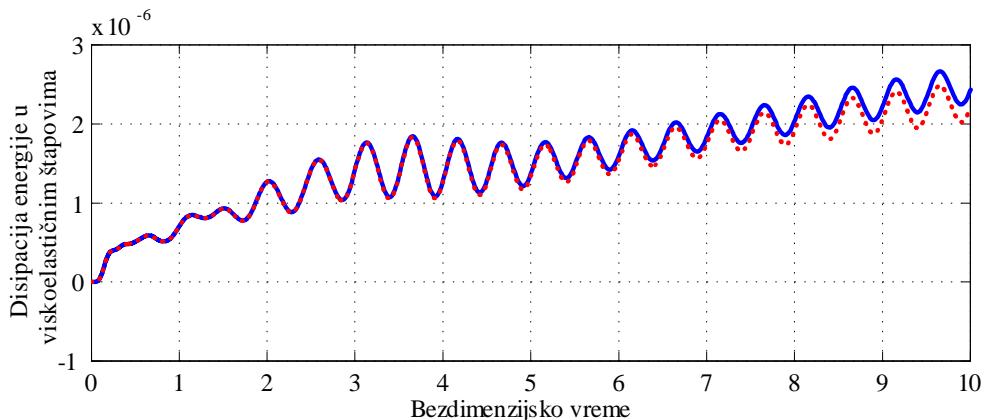
4.3 Disipacija energije u predloženom modelu

Rad sile pobude pretvara se u kinetičku energiju kretanja osikularnog lanca, deformaciju viskoelastičnih štapova i savlađivanje otpora perilimfe kretanju baze stapesa. Po aksiomi o uzajamnom dejstvu, otporne sile perilimfe predstavljaju pobudu za umutrašnje uho. Kako je na te sile primenjena Poasonova teorema to rad sile otpora perilimfe na bazu stapesa predstavlja energiju koja se od srednjeg uha prenosi u umutrašnje uho (kohleu).

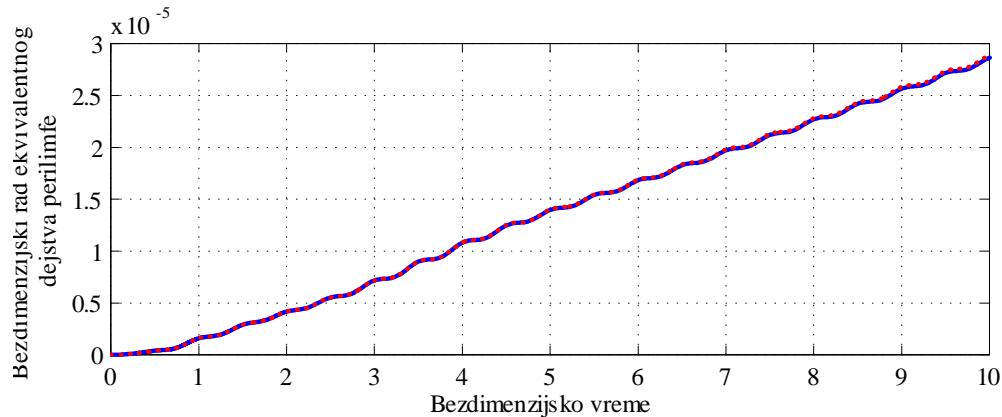
Ukupna energija saopštена sistemu srednje uho je prikazana na slici 4.9, dok su ukupna energija disipirana u viskoelastičnim štapovima i disipirana energija ekvivalentnog dejstva perilimfe, prikazane na slikama 4.10 i 4.11, respektivno. Može se primetiti da je disipirana energija ekvivalentnog dejstva perilimfe za red veličine veća od energije disipirane u svim viskoelastičnim štapovima. Pored toga, na slici 4.10, postoji razlika u rezultatima procene energije disipacije za dva primenjena numerička postupka (ekspanziona formula i numerička inverzija Laplasove transformacije), koja se povećava sa vremenom jer se za njeno određivanje koristi i numerička integracija kako je prikazano u sekciji 3.8. Napominje se da se množenje ordinate sa 1.4966×10^{-8} dobija disipirana energija u džulima.



Slika 4.9: Energija saopštena sistemu.

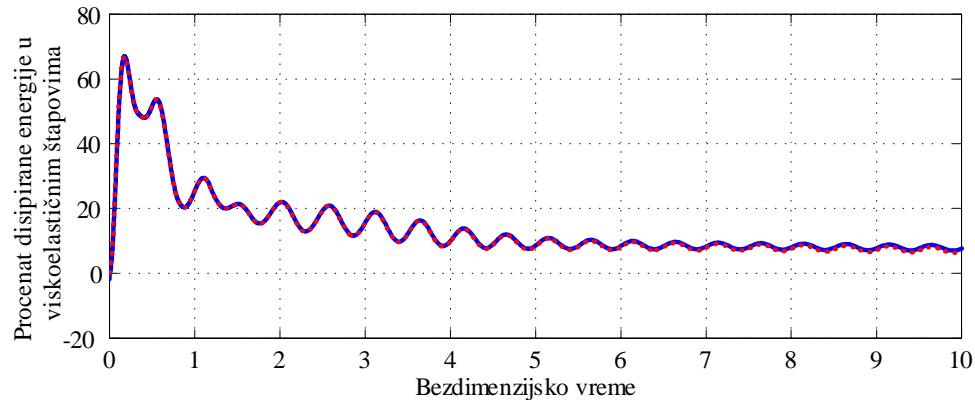


Slika 4.10: Disipacija energije u strukturama srednjeg uha

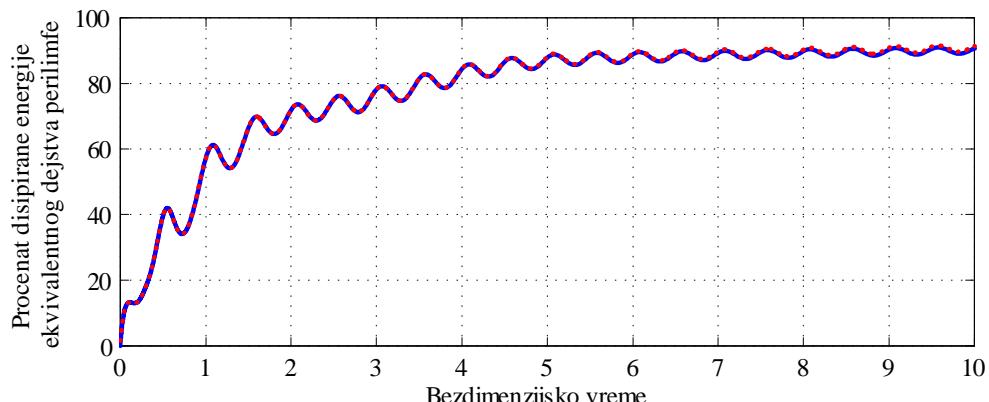


Slika 4.11: Disipacija energije ekvivalentnog dejstva perlimfe.

Na slikama 4.12 i 4.13, prikazan je procenat disipirane energije u viskoelastičnim štapovima, kao i procenat energije disipiran od strane ekvivalentnog dejstva perlimfe, oba računata u odnosu na energiju saopštenu sistemu. Može se primetiti da ekvivalentno dejstvo perlimfe disipira većinu energije, što je saglasno sa funkcijom srednjeg uha da se energija zvuka iz spoljašnjeg ušnog kanala prenese do kohlee u unutrašnjem uhu.



Slika 4.12: Procenat disipirane energije u viskoelastičnim štapovima modela srednjeg uha u odnosu na energiju saopštenu sistemu.



Slika 4.13: Procenat disipirane energije ekvivalentnog dejstva kohlee u odnosu na energiju saopštenu sistemu.

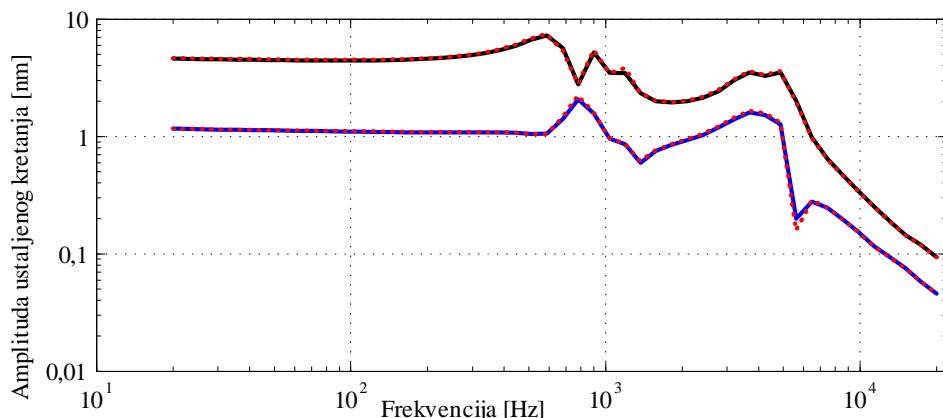
Poslednje dve slike mogu biti od koristi za utvrđivanje minimalnog procenta prenešene energije od spoljašnjeg slušnog kanala do unutrašnjeg uha koji sistem za restoraciju slušne funkcije treba

da ostvari. Ovde procenjenih preko 80% preneseene energije odgovara navodima Ašmora (videti [Ashmore, 2002]) koji govorci da je procenat prenesene energije veći od 60%. Jasno je da bi uvođenje većeg broja viskoelastičnih štapova u model povećalo energiju disipacije. Ovde bi to moglo da se uradi kroz uključivanje većeg broja radijalnih vlakana bubre opne u model (a ne samo tri), kao i uvođenje većeg broja koncentrisanih sila koje menjaju raspoređeno dejstvo anularnog ligamenta stapesa (a ne samo četiri). Drugi način je da se vrednosti reda necelog izvoda štapova koji modeliraju bubre opnu i anularni ligament stapesa povećaju zajedno sa razlikom relaksacionih konstanti jer bi se tako povećala disipacija. Ovde je samo napravljen pokušaj da se disipacija energije u nehomogenoj membrani i nehomogenom eliptičnom prstenu kvantificira uprošćenim elementima. Sam problem određivanja reoloških parametara frakcionog Zenerovog modela u okviru postupka homogenizacije je potpuno nov problem i izlazi iz okvira teze.

4.4 Kretanje stapesa i umba pri različitim frekvencijama sile pobude

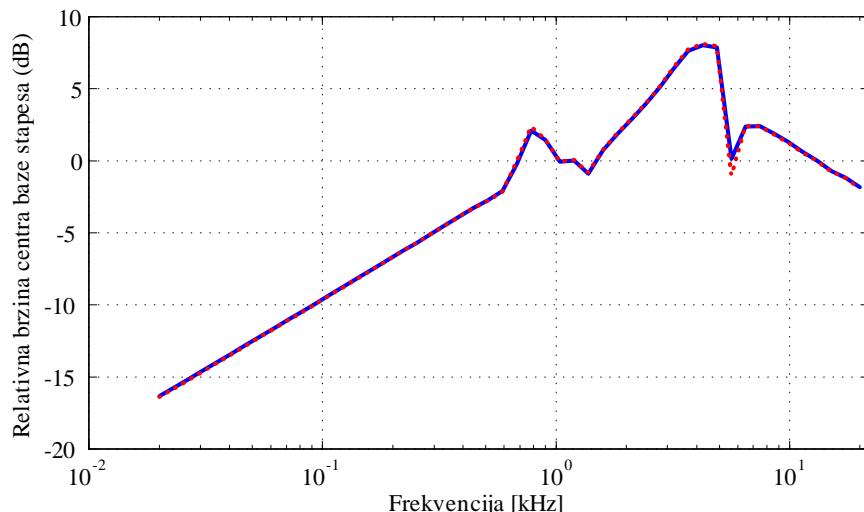
Na slici 4.14 prikazane su amplitude ustaljenog kretanja centra baze stapesa - plava linija i umba - crna linija za frekventni opseg od 20 Hz do 20 kHz. Prema predviđanjima modela, za centar baze stapesa ta amplituda iznosi 1.18 nm za frekvenciju od 20 Hz, i opada sve do 1.05 nm pri frekvenciji od 589.4 Hz. Iznad ove frekvencije amplituda pomeranja raste do maksimalne vrednosti od 2.25 nm za frekvenciju od 781.4 Hz, nakon koje naizmenično opada i raste, kao što je prikazano na slici 4.14, sve do frekvencije od 6475 Hz kada iznosi 0.29 nm, posle koje stalno opada i za frekvenciju od 20 kHz iznosi 0.046 nm. Ponašanje centra baze stapesa ovog tipa primetio je i Huber, videti sliku 4 u radu [Huber *et al.*, 2001a] koja je dobijena eksperimentalnim merenjima intraoperativno *in vivo*.

Amplituda ustaljenog kretanja umba iznosi 4.64 nm pri frekvenciji od 20 Hz, nakon koje je skoro konstantna, a zatim raste do maksimalne vrednosti od 7.57 nm pri frekvenciji od 589.4 Hz. Iznad ove frekvencije ta amplituda opada na vrednost od 2.82 nm za frekvenciju od 781.4 Hz, a zatim naizmenično raste i opada kao što je prikazano na slici 4.14, sve do frekvencije od 4884 Hz kada iznosi 3.62 nm, nakon koje stalno opada i za frekvenciju od 20 kHz iznosi 0.094 nm. Ponašanje ovog tipa prepoznaće se na slici 6 u radu [Huber *et al.*, 2001b] koja je dobijena eksperimentalnim merenjima pomoću laser Doppler vibrometra *in vivo*.



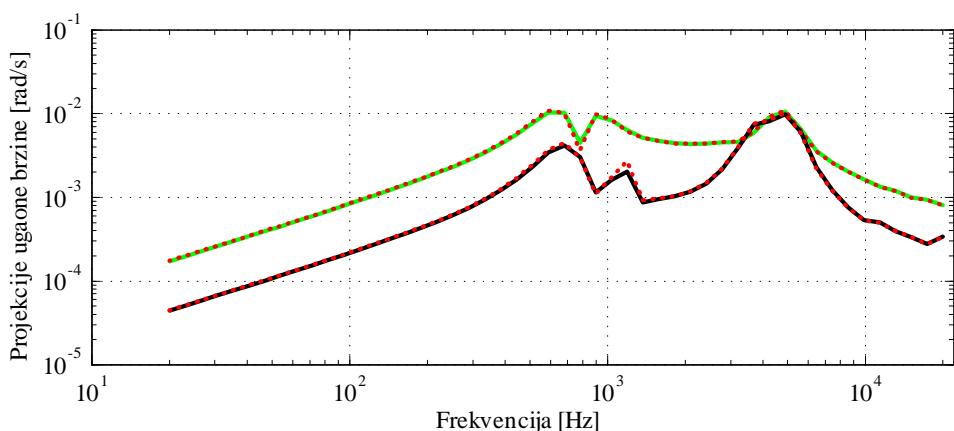
Slika 4.14: Amplituda ustaljenog kretanja centra baze stapesa (plava linija) i tačke umbo (crna linija) pri različitim frekvencijama sile pobude.

Naredna slika prikazuje brzinu centra baze stapesa normalizovanu prema vrednosti brzine koja odgovara frekvenciji od 1 kHz, i izražena je u decibelima. Ovaj rezultat se relativno dobro slaže sa rezultatima dobijenim *in vivo* i prikazanim na slici 1 u radu [Ruggero & Temchin, 2003]. Napominje se da je ta brzina za širok opseg frekvencija proporcionalna pritisku u skali vestibuli koji predstavlja ulazni signal za unutrašnje uho, videti [Ruggero & Temchin, 2003].



Slika 4.15: Brzina centra baze stapesa normalizovana prema vrednosti za 1 kHz i izražena u decibelima.

Na slici 4.16 prikazani su intenziteti projekcija ugaone brzine stapesa za različite frekvencije, i to na dužu osu simetrije baze (zeleni liniji), i na kraću osu simetrije (crne linije).

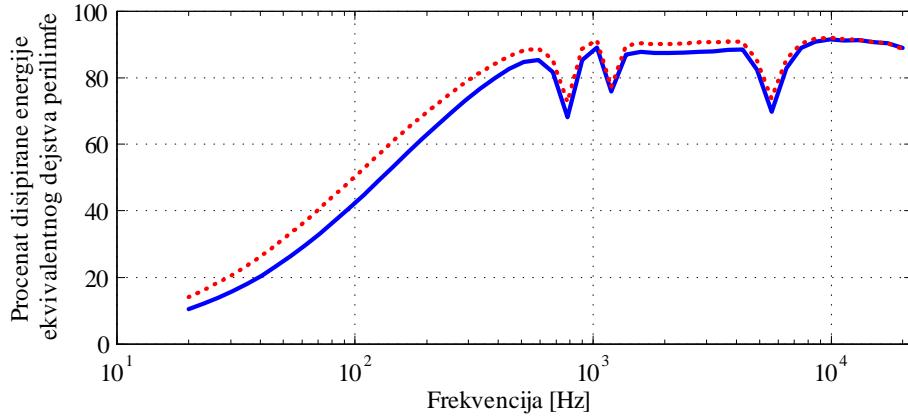


Slika 4.16: Projekcije ugaone brzine stapesa.

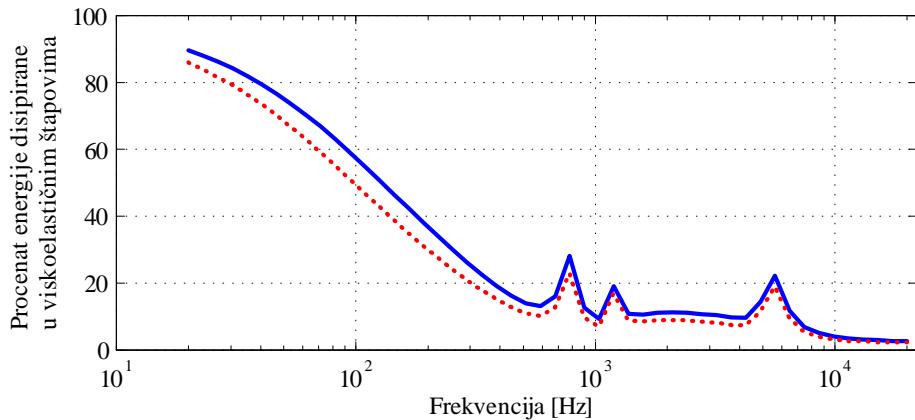
Kvalitativno ponašanje prikazano na ovoj slici odgovara zapažanjima koja prate sliku 9 iz rada [Sim *et al.*, 2010].

4.5 Disipacija energije pri različitim frekvencijama sile pobude

Na slikama 4.17 i 4.18, prikazani su redom, procenat energije disipacije na savladivanje otpora perlimfe, kao i procenat energije disipacije u viskoelastičnim štapovima za izabrani opseg frekvencije sile pobude. Disipacija energije na savladivanje otpora perlimfe zavisi od brzine centra baze stapesa i projekcija njegove ugaone brzine na dugu i kraću osu simetrije. Kako se te veličine povećavaju sa porastom frekvencije, kao što je prikazano na prethodne dve slike, povećava se i disipacija energije.



Slika 4.17: Procenat disispirane energije ekvivalentnog dejstva kohlee u zavisnosti od frekvencije sile pobude.



Slika 4.18: Procenat disispirane energije u strukturama srednjeg uha u zavisnosti od frekvencije sile pobude.

Može se primetiti da je zbir ove dve veličine koje izražavaju disipaciju energije približno konstantan te da se komplementira kinetičkom energijom osikularnog lanca koja je kako model predviđa znatno manja. To govori da ovaj model predviđa prenos energije sa bubne opne na perilimfu bez preveličke kinetičke energije oscilovanja osikularnog lanca.

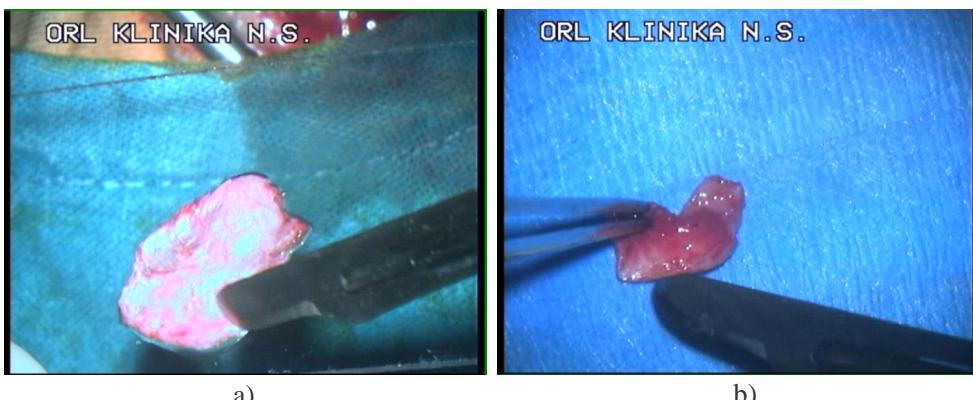
Sve do sada rečeno govori da u ovoj tezi predloženi model može bar kvalitativno da obuhvati različite već utvrđene činjenice o kretanju ovog kompleksnog dinamičkog sistema. Međutim, predviđanja modela se mogu kvantitativno porebiti sa eksperimentalnim merenjima samo po redu veličina. I pored toga konstatuje se da je red veličina prikazanih rezultata za pomeranja centra baze stapesa, pomeranja umba i ugaone brzine stapesa, u skladu sa eksperimentalnim merenjima, videti [Huber *et al.*, 2001a], [Huber *et al.*, 2001b], [Hato *et al.*, 2003], [Chien *et al.*, 2009] i [Sim *et al.*, 2010]. Još jednom se napominje da ovde korišćeni podaci o geometriji, inercijalnim karakteristikama i morfometriji srednjeg uha, preuzeti iz različitih radova, predstavljaju samo okvirne vrednosti. U krajnjoj liniji, parametri uha koji ulaze u model se i inače razlikuju od čoveka do čoveka tako da se rezultati dobijeni za jedno uho jedne jedinke ne moraju slagati sa rezultatima dobijenim za drugo uho druge jedinke zbog različitih geometrijskih, inercijalnih, morfometrijskih i reoloških parametara. Najzad, uprkos što su neki elementi srednjeg uha zamjenjeni prostijim objektima sa, bar kvalitativno, uključenom disipacijom energije (bubna opna i anularni ligament stapesa), da bi model bio jednostavniji, dobijeni rezultati se mogu smatrati osnovom za dalja poboljšanja modela sa ciljem boljeg slaganja predviđanja modela i eksperimenata.

Glava 5

O mogućim primenama modela

Mehanički model srednjeg uha koristan je ne samo za razumevanje prenosa energije i prostornog kretanja lanca slušnih koščica, već i za razumevanje i tretmane bolesti kao što su otoskleroza, upale srednjeg uha, prekid lanca slušnih koščica, perforacija bubne opne, itd. Različite bolesti se mogu opisati promenom parametara i ili strukture modela. Korektan mehanički model i numeričke simulacije za različite parametre sistema i procesa nisu skupi, ali mogu mnogo da pomognu u kliničkoj praksi pri obnavljanju slušne funkcije.

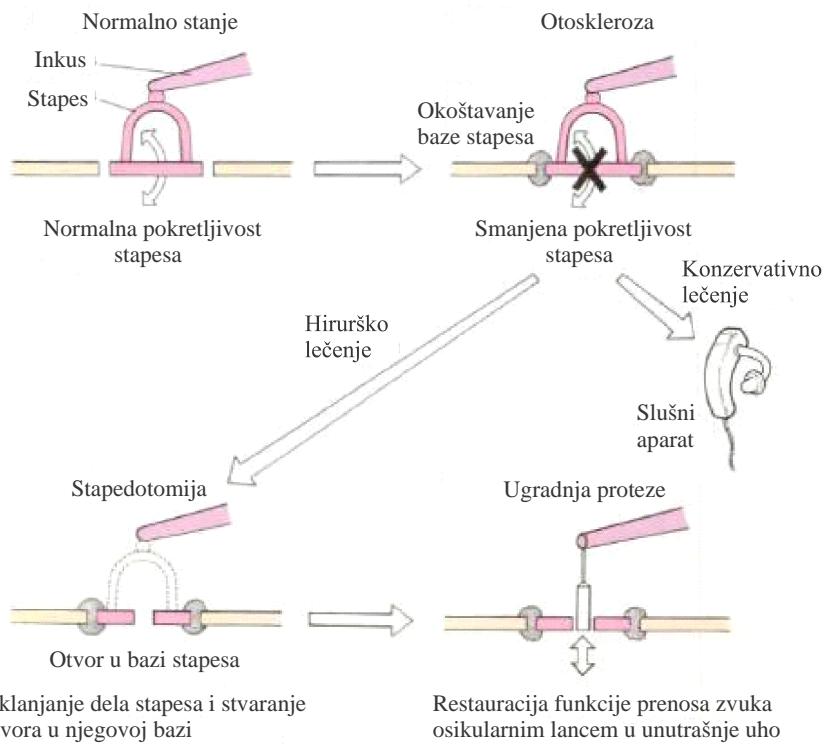
U saradnji sa Departmanom za otorinolaringologiju Medicinskog fakulteta Univeziteta u Novom Sadu, analizirane su moguće primene modela ovog tipa. Naime, na pomenutom Departmanu je tokom 2009. godine rekonstruisana bubna opna kod 88 pacijenata, a kao biološki materijali za rekonstrukciju korišćeni su ovojnica temporalnog mišića (*fascia temporalis*), slika 5.1 a), i hrskavica ušne školjke (*auricular cartilage*), slika 5.1 b). Nakon rekonstrukcije bubne opne, funkcionalna analiza sa tonalnom audiometrijom je pokazala da hrskavica, kao rekonstruktivni materijal, ima bolja svojstva nego ovojnica temporalnog mišića. Primenom modela, moglo bi se odgovoriti ne samo na pitanje zašto je hrskavica bolja za rekonstrukciju bubne opne, već bi se moglo ispitati i koji biološki materijali mogu da se koriste u istu svrhu, kao i koji od njih bolje zamenjuje bubnu opnu. Dakle, model daje mogućnost da se kvantitativno opišu i procene kvalitativna zapažanja kliničara, koji se bave rekonstrukcijom slušne funkcije. Ipak, napominje se da rezultat rekonstrukcije slušne funkcije ne zavisi samo od materijala koji se koristi za rekonstrukciju, već i od tehnike hirurga, uslova ugradnje, kao i od stanja ostalih struktura srednjeg uha.



Slika 5.1: Biološki materijali koji se koriste kao zamena za bubnu opnu: a) ovojnica temporalnog mišića (*fascia temporalis*), b) hrskavica ušne školjke (*auricular cartilage*).

Kvantifikacija atributa kretanja lanca slušnih koščica, na osnovu modela, može biti od izuzetne važnosti, kako u razvoju, tako i u dobijanju optimalnih rešenja proteza kojima se vraća, iz različitih uzroka izgubljena, funkcija sluha. Naime, na slici 5.2, prikazana je patologija kao i načini lečenja otoskleroze. Kako hirurško lečenje ove bolesti podrazumeva uklanjanje dela stapesa, zatim pravljenje otvora u njegovoј bazi i ugradnju proteze u otvor, prirodno je postaviti pitanje od kakvog materijala i kakvog oblika treba da bude ta proteza, da bi izvršena restoracija slušne funkcije bila

što uspešnija. Odgovor na to pitanje se takođe može dobiti pomoću modela. Naime, poznavanjem oblika i materijala proteze, mogu se odrediti njene inercijalne karakteristike, za koje se predloženim modelom mogu dobiti predviđanja ponašanja sistema kao celine.



Slika 5.2: Patologija i lečenje otoskleroze. Modifikovano na osnovu [ClinicalGate, 2016].

Iako brojne grupe istraživača razvijaju modele srednjeg uha različitog stepena idealizacije, pojavljuje se sve veći broj modela zasnovanih na teoriji neprekidnih sredina, koji se numerički rešavaju metodom konačnih elemenata. Ipak, ni jedan od postojećih modela nije prihvaćen kao alat za dijagnostiku, planiranje operacije, ili edukaciju, videti [Zhao *et al.*, 2009]. Jedan od razloga je što su ti modeli računarski veoma zahtevni. U ovoj tezi predložen model je relativno jednostavan i mnogo manje numerički zahtevan, te je pogodan za razvoj individualnih modela srednjeg uha. Korišćenjem savremenih tehnologija za 3D skeniranje ljudskog tela, kao što je na primer mikro-CT skener, mogu se dobiti svi neophodni geometrijski i morfološki podaci elemenata srednjeg uha, potrebni za generisanje individualnog modela, videti [Sim *et al.*, 2007], [Baek & Puria, 2008] i [Sim & Puria, 2008]. Individualni model mogao bi se koristiti za simuliranje različitih patoloških promena kod pacijenta, kao i razvoj individualnih aktivnih ili pasivnih proteza kojima se delimično, ili totalno zamenjuje osikularni lanac. Pored svega, model uha koji daje fundamentalna nauka ima i važnu edukativnu ulogu.

Glava 6

Zaključak

U ovoj tezi proučeno je kretanje osikularnog lanca kao sistema od dva zglobno vezana kruta tela: inkudo-malearnog bloka i stapesa, koji su sistemom lakih viskoelastičnih štapova povezani za temporalnu kost u okviru bubne duplike (*cavitas tympani*). U sistemu vešanja osikularnog lanca, viskoelastični štapovi su korišćeni na dva načina. Prvo, kao model za linijske elemente: prednji, latelarni i gornji ligament maleusa, zadnji ligament inkusa i tetivu mišića stapesa. S druge strane, sa ciljem da se iz modela isključe parcijalne diferencijalne jednačine, ovi štapovi su korišćeni i za modeliranje približno ekvivalentnih dejstava membrane i prstena: bubne opne i anularnog ligamenta stapesa. Bubna opna, koja je prvi element u sistemu u kome se disipira energija, modelirana je sa tri za umbo vezana viskoelastična štapa, dok je dejstvo anularnog ligamenta stapesa, koji predstavlja pokretnu ali hermetički zatvorenu granicu između srednjeg i unutrašnjeg uha, zamenjeno silama u četiri viskoelastična štapa vezana za četiri tačke na bazi stapesa.

Konstitutivna jednačina za sve štapove uzeta je u obliku koji odgovara standardnom frakcionom linearno viskoelastičnom telu. To znači da je analizirana uniaksijalna, izotermalna deformacija u okviru modela koji uključuje frakcione izvode Riman-Ljuvilovog tipa i ograničenja koja diktira drugi zakon termodinamike. Ta ograničenja omogućavaju analizu disipaciju energije, koja je centralni zadatak u modeliranju srednjeg uha, *ab initio* što je svakako jedna od prednosti izabranog modela. Za deformacije viskoelastičnih štapova pretpostavljeno je da su male što povlači male amplitudne zakretanja služnih koščica.

Pobuda na ulazu u sistem, kao model funkcije bubne opne da kolektuje zvučni signal u spoljašnjem uhu i prenosi ga u tačku umbo maleusa, uzeta je u standardnom harmonijskom obliku, dok je otpor perilimfe kretanju baze stapesa, na izlazu iz sistema, analiziran saglasno Poasonovoj teoremi. Analizirana je prvo jedna a zatim i čitav slušni opseg frekvencija.

Za ovako definisan sistem sa šest stepeni slobode izvedene su diferencijalne jednačine kretanja i u obliku Kejniovih i Gibs-Apelovih jednačina. Ove jednačine dopunjene su konstitutivnim jednačinama za sile u viskoelastičnim štapovima i konstitutivnim jednačinama za ekvivalentno dejstvo perilimfe. Prve su oblika frakcionog Zenerovog modela viskoelastičnog tela, koji pored izvoda napona i deformacije proizvoljnog realnog reda u intervalu od nula do jedan (za koji se uobičajeno koristi termin frakcioni), uključuje i ograničenja na koeficijente u modelu izvedena iz Klauzius-Dijemove nejednakosti. Druge su uzete u linearnej formi koja otpornu silu i moment povezuje sa brzinom centra baze stapesa i njegovom ugaonom brzinom. U rezultatu je kretanje osikularnog lanca u izabranom sistemu vešanja opisano Košijevim problemom za sistem linearnih diferencijalnih jednačina proizvoljnog realnog reda.

Dobijeni Košijev problem rešavan je na dva načina. Jedan je zasnovan na primeni Laplasove transformacije i numeričkoj inverziji te transformacije. Drugi način je baziran na standardnim procedurama numeričke integracije običnih diferencijalnih jednačina u programskom paketu Matlab. Za njegovu primenu originalni Košijev problem je primenom Atanacković-Stanković ekspanzione formule zapisan u ekvivalentnoj formi u kojoj su izvodi proizvoljnog realnog reda nepoznate funkcije zamenjeni samom funkcijom, njenim prvim izvodom i redom koji sadrži momente te funkcije. Na ovaj način ekvivalentni Košijev problem predstavljen je u vidu sistema diferencijalnih jednačina prvog reda. U radu je izvršeno poređenje dobijenih rezultata ova dva suštinski različita numerička postupka.

Osnovna hipoteza teze je da će se sa izabranim reološkim modelom koji vrlo dobro opisuje ponašanje bioloških tkiva koja čine srednje uho dobiti korektno, bar u kvalitativnom smislu, predviđanje kretanja sistema kao celine, bez obzira na njegovu složenost u pogledu broja stepeni slobode i broja viskoelastičnih elemenata koji realizuju sistem vešanja. Za potrebe numeričkih ilustracija i potvrdu da model može da dà rezultate upotrebljive za stvarno kretanje osikularnog lanca, na osnovu eksperimentalnih rezultata preuzetih iz literature, određeni su reološki parametri frakcionog Zenerovog modela za viskoelastične štapove, tj. modele ligamenata, tetine mišića stapesa i dejstava koja menjaju bubnu opnu i anularni ligament stapesa. Taj deo predstavlja prvi originalni doprinos ove doktorske teze.

Drugi originalni doprinos ove teze je sama metodologija modeliranja sistema srednje uho, i u domenu primene rezultata analitičke mehanike i u domenu primene frakcionih izvoda za modeliranje bioloških tkiva. Za predloženi model postoje dovoljno efikasni numerički postupci, a njegova opštost i predviđanja, pokazalo se, mogu se povezati sa značajnim brojem već objavljenih eksperimentalnih rezultata koji se bave analizom kretanja osikularnog lanca. Treći doprinos teze su sami rezultati. U tom smislu rezultati prikazani na slikama u četvrtoj glavi koji se odnose na kretanja osikularnog lanca i disipaciju energije su potpuno originalni. Spisku rezultata treba dodati i izbor referenci dat na kraju teze kojim se različite oblasti anatomije, fiziologije, patofiziologije povezuju sa različitim oblastima i matematičke analize i analitičke mehanike.

Na kraju, evo i mogućih pravaca daljih istraživanja.

U okviru teze proučavano je samo regularno opterećenje, mada bi i model koji u razmatranje uzima i impulsno opterećenje bio od interesa. Naime, pucanj ili eksplozija u blizini čoveka, koji se modeliraju kao impulsno opterećenje, često dovode do oštećenja sluha. U tom slučaju bi se u razmatranja uključio i mišić protektor (*tensor tympani tendon*).

Svi reološki eksperimenti preuzeti iz literature urađeni su *in vitro*. Kada bi se *in vivo* reološkim eksperimentima parametri uha odredili tačnije za isto srednje uho a odgovarajućim metodama geometrijski i inercijalni parametri tog istog uha onda bi model davao predviđanja za različita fiziološka opterećenja sa većom pouzdanošću, što nije bez značaja za probleme restoracije slušne funkcije. Jedan od pravaca daljih istraživanja bi bio razvoj metoda za komparaciju predviđanja sa eksperimentima. Poseban problem bio bi i uvođenje trenja kako u inkudo-stapedijalni zglob tako i u model kretanja baze stapesa u procesu okoštavanja baze stapesa, ali to prevazilazi okvire ove teze mada je danas mehanika razvila i aparat za potrebe takvih istraživanja. U model bi se moglo uključiti i parcijalne diferencijalne jednačine kao model za bubnu opnu i anularni ligament stapesa, ali to povlači dodatnu složenost. Osikularni lanac, modeliran sistemom dva kruta tela, mogao bi se preciznije modelirati sistemom tri kruta tela, gde se za vezu između inkusa i maleusa mogu prepostaviti tri stepena slobode: dva obrtanja i jedna translacija, videti [Willi *et al.*, 2002]. Predviđanja takvog modela mogla bi se porebiti sa eksperimentalnim merenjima iz pomenutog rada. Time bi se unapredio model, ali bi se znatno povećao broj jednačina u modelu. Međutim, metodologija njegovog rešavanja se ne bi promenila u odnosu na metodologiju razvijenu u ovoj tezi.

Deo II

Dodaci

Dodatak A

Eksplicitna forma uvedenih matrica i njihovih izvoda

Ortogonalne matrice transformacije \mathbf{K}_1 i \mathbf{K}_2 , za stapes i inkudo-malearni blok, respektivno koje bazni koordinatni sistem prevode redom u sisteme $C_1x_1y_1z_1$ i $C_2x_2y_2z_2$ u početnom trenutku, su nakon uvrštanja vrednosti Kardanovih uglova iz tabele 1,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \mathbf{Rot}(x, \theta_{1x}) \cdot \mathbf{Rot}(y, \theta_{1y}) \cdot \mathbf{Rot}(z, \theta_{1z}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0.9920 & -0.1257 & -0.0113 \\ 0.1258 & 0.9920 & 0.0113 \\ 0.0098 & -0.0127 & 0.9998 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2 &= \mathbf{Rot}(x, \theta_{2x}) \cdot \mathbf{Rot}(y, \theta_{2y}) \cdot \mathbf{Rot}(z, \theta_{2z}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0.9033 & -0.2410 & -0.3549 \\ 0.2129 & 0.9700 & -0.1170 \\ 0.3725 & 0.0301 & 0.9275 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.2}$$

Ortogonalna matrica prelaza od koordinatnog sistema $O_1x'_1y'_1z'_1$ u bazni koordinatni sistem $Oxyz$ definisana je kao

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1 &= \mathbf{T}_1(q_2, q_3) = \mathbf{Rot}(y'_1, q_2) \cdot \mathbf{Rot}(z'_1, q_3) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos q_2 & 0 & \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos q_2 \cos q_3 & -\cos q_2 \sin q_3 & \sin q_2 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 \\ -\cos q_3 \sin q_2 & \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.3}$$

Slično, ortogonalna matrica prelaza od koordinatnog sistema $C_2x_2y_2z_2$ u proizvoljnom trenutku vremena, u isti taj koordinatni sistem u početnom trenutku, za Krilovljevu verziju sfernih uglova Ojlerovog tipa je

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_2 &= \mathbf{T}_2(q_4, q_5, q_6) = \mathbf{Rot}(y_2, q_4) \cdot \mathbf{Rot}(x_2, q_5) \cdot \mathbf{Rot}(z_2, q_6) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos q_4 & 0 & \sin q_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin q_4 & 0 & \cos q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_5 & -\sin q_5 \\ 0 & \sin q_5 & \cos q_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ \sin q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6 & \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 - \cos q_4 \sin q_6 & \cos q_5 \sin q_4 \\ \cos q_5 \sin q_6 & \cos q_5 \cos q_6 & -\sin q_5 \\ -\cos q_6 \sin q_4 + \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 & \cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{A.4}$$

Diferenciranjem po vremenu jednačine (A.3), uz napomenu da je izvod matrice jednaka matrici izvoda njenih komponenata, dobija se prvi izvod matrice transformacije stapesa

$$\dot{\mathbf{T}}_1 = \dot{\mathbf{T}}_1(q_2, q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_1) = \begin{bmatrix} \dot{T}_{11}^1 & \dot{T}_{12}^1 & \dot{T}_{13}^1 \\ \dot{T}_{21}^1 & \dot{T}_{22}^1 & \dot{T}_{23}^1 \\ \dot{T}_{31}^1 & \dot{T}_{32}^1 & \dot{T}_{33}^1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

gde $(\cdot)^1$ označava pripadnost krutom telu jedan, tj. stapesu, i gde je

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11}^1 &= -\dot{q}_2 \cos q_3 \sin q_2 - \dot{q}_3 \cos q_2 \sin q_3, \\ \dot{T}_{12}^1 &= \dot{q}_2 \sin q_2 \sin q_3 - \dot{q}_3 \cos q_2 \cos q_3, \\ \dot{T}_{13}^1 &= \dot{q}_2 \cos q_2, \\ \dot{T}_{21}^1 &= \dot{q}_3 \cos q_3, \\ \dot{T}_{22}^1 &= -\dot{q}_3 \sin q_3, \\ \dot{T}_{23}^1 &= 0, \\ \dot{T}_{31}^1 &= -\dot{q}_2 \cos q_2 \cos q_3 + \dot{q}_3 \sin q_2 \sin q_3, \\ \dot{T}_{32}^1 &= \dot{q}_2 \cos q_2 \sin q_3 + \dot{q}_3 \cos q_3 \sin q_2, \\ \dot{T}_{33}^1 &= -\dot{q}_2 \sin q_2. \end{aligned}$$

Slično, diferenciranjem po vremenu jednačine (A.4) dobija se prvi izvod matrice transformacije inkudo-malearnog bloka

$$\dot{\mathbf{T}}_2 = \dot{\mathbf{T}}_2(q_4, q_5, q_6, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6) = \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_2) = \begin{bmatrix} \dot{T}_{11}^2 & \dot{T}_{12}^2 & \dot{T}_{13}^2 \\ \dot{T}_{21}^2 & \dot{T}_{22}^2 & \dot{T}_{23}^2 \\ \dot{T}_{31}^2 & \dot{T}_{32}^2 & \dot{T}_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

gde $(\cdot)^2$ označava pripadnost krutom telu dva, tj. inkudo-malearnom bloku, i gde su

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11}^2 &= \dot{q}_4(\cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4) + \dot{q}_5 \cos q_5 \sin q_4 \sin q_6 \\ &\quad + \dot{q}_6(\cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 - \cos q_4 \sin q_6), \\ \dot{T}_{12}^2 &= \dot{q}_4(\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6) + \dot{q}_5 \cos q_5 \cos q_6 \sin q_4 \\ &\quad - \dot{q}_6(\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6), \\ \dot{T}_{13}^2 &= \dot{q}_4 \cos q_4 \cos q_5 - \dot{q}_5 \sin q_4 \sin q_5, \\ \dot{T}_{21}^2 &= -\dot{q}_5 \sin q_5 \sin q_6 + \dot{q}_6 \cos q_5 \cos q_6, \\ \dot{T}_{22}^2 &= -\dot{q}_5 \cos q_6 \sin q_5 - \dot{q}_6 \cos q_5 \sin q_6, \\ \dot{T}_{23}^2 &= -\dot{q}_5 \cos q_5, \\ \dot{T}_{31}^2 &= \dot{q}_4(\sin q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \cos q_4 \cos q_6) + \dot{q}_5 \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 \\ &\quad + \dot{q}_6(\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6), \\ \dot{T}_{32}^2 &= \dot{q}_4(\cos q_4 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5) + \dot{q}_5 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 \\ &\quad + \dot{q}_6(\cos q_6 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6), \\ \dot{T}_{33}^2 &= -\dot{q}_4 \cos q_5 \sin q_4 - \dot{q}_5 \cos q_4 \sin q_5. \end{aligned}$$

Diferenciranjem po vremenu izraza (A.5) dobija se drugi izvod matrice transformacija stapesa

$$\ddot{\mathbf{T}}_1 = \ddot{\mathbf{T}}_1(q_2, q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{T}}_1) = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{11}^1 & \ddot{T}_{12}^1 & \ddot{T}_{13}^1 \\ \ddot{T}_{21}^1 & \ddot{T}_{22}^1 & \ddot{T}_{23}^1 \\ \ddot{T}_{31}^1 & \ddot{T}_{32}^1 & \ddot{T}_{33}^1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

gde su

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_{11}^1 &= 2\dot{q}_2\dot{q}_3 \sin q_2 \sin q_3 - (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cos q_2 \cos q_3 - \ddot{q}_2 \cos q_3 \sin q_2 - \ddot{q}_3 \cos q_2 \sin q_3, \\
\ddot{T}_{12}^1 &= 2\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos q_3 \sin q_2 + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cos q_2 \sin q_3 + \ddot{q}_2 \sin q_2 \sin q_3 - \ddot{q}_3 \cos q_2 \cos q_3, \\
\ddot{T}_{13}^1 &= -\dot{q}_2^2 \sin q_2 + \ddot{q}_2 \cos q_2, \\
\ddot{T}_{21}^1 &= -\dot{q}_3^2 \sin q_3 + \ddot{q}_3 \cos q_3, \\
\ddot{T}_{22}^1 &= -\dot{q}_3^2 \cos q_3 - \ddot{q}_3 \sin q_3, \\
\ddot{T}_{23}^1 &= 0, \\
\ddot{T}_{31}^1 &= 2\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos q_2 \sin q_3 + (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \cos q_3 \sin q_2 - \ddot{q}_2 \cos q_2 \cos q_3 + \ddot{q}_3 \sin q_2 \sin q_3, \\
\ddot{T}_{32}^1 &= 2\dot{q}_2\dot{q}_3 \cos q_2 \cos q_3 - (\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \sin q_2 \sin q_3 + \ddot{q}_2 \cos q_2 \sin q_3 + \ddot{q}_3 \cos q_3 \sin q_2, \\
\ddot{T}_{33}^1 &= -\dot{q}_2^2 \cos q_2 - \ddot{q}_2 \sin q_2.
\end{aligned}$$

Slično, diferenciranjem po vremenu jednačine (A.6) dobija se drugi izvod matrice transformacije inkudo-malearnog bloka

$$\ddot{\mathbf{T}}_2 = \ddot{\mathbf{T}}_2(q_4, q_5, q_6, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6, \ddot{q}_4, \ddot{q}_5, \ddot{q}_6) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{T}}_2) = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{11}^2 & \ddot{T}_{12}^2 & \ddot{T}_{13}^2 \\ \ddot{T}_{21}^2 & \ddot{T}_{22}^2 & \ddot{T}_{23}^2 \\ \ddot{T}_{31}^2 & \ddot{T}_{32}^2 & \ddot{T}_{33}^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

gde su

$$\begin{aligned}
\ddot{T}_{11}^2 &= 2\dot{q}_5\dot{q}_6 \cos q_5 \cos q_6 \sin q_4 + 2\dot{q}_4(\dot{q}_5 \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \dot{q}_6(\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6)) \\
&\quad - \dot{q}_4^2(\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6) - \dot{q}_5^2 \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6 \\
&\quad - \dot{q}_6^2(\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6) + \ddot{q}_4(\cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4) \\
&\quad + \ddot{q}_5 \cos q_5 \sin q_4 \sin q_6 + \ddot{q}_6(\cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 - \cos q_4 \sin q_6), \\
\ddot{T}_{12}^2 &= -2\dot{q}_5\dot{q}_6 \cos q_5 \sin q_4 \sin q_6 + 2\dot{q}_4(\dot{q}_5 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \dot{q}_6(\cos q_6 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6)) \\
&\quad + \dot{q}_4^2(\cos q_4 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5) - \dot{q}_5^2 \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 \\
&\quad + \dot{q}_6^2(\cos q_4 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5) + \ddot{q}_4(\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6) \\
&\quad + \ddot{q}_5 \cos q_5 \cos q_6 \sin q_4 - \ddot{q}_6(\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6), \\
\ddot{T}_{13}^2 &= -2\dot{q}_4\dot{q}_5 \cos q_4 \sin q_5 - (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) \cos q_5 \sin q_4 + \ddot{q}_4 \cos q_4 \cos q_5 - \ddot{q}_5 \sin q_4 \sin q_5, \\
\ddot{T}_{21}^2 &= -2\dot{q}_5\dot{q}_6 \cos q_6 \sin q_5 - (\dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) \cos q_5 \sin q_6 - \ddot{q}_5 \sin q_5 \sin q_6 + \ddot{q}_6 \cos q_5 \cos q_6, \\
\ddot{T}_{22}^2 &= 2\dot{q}_5\dot{q}_6 \sin q_5 \sin q_6 - (\dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2) \cos q_5 \cos q_6 - \ddot{q}_5 \cos q_6 \sin q_5 + \ddot{q}_6 \cos q_5 \sin q_6, \\
\ddot{T}_{23}^2 &= \dot{q}_5^2 \sin q_5 - \ddot{q}_5 \cos q_5, \\
\ddot{T}_{31}^2 &= -2\dot{q}_5\dot{q}_6 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 - 2\dot{q}_4(\dot{q}_5 \cos q_5 \cos q_4 \sin q_6 + \dot{q}_6(\cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 - \cos q_4 \sin q_6)) \\
&\quad + \dot{q}_4^2(\cos q_6 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6) - \dot{q}_5^2 \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 \\
&\quad + \dot{q}_6^2(\cos q_6 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6) + \ddot{q}_4(-\cos q_4 \cos q_6 - \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6) \\
&\quad + \ddot{q}_5 \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 + \ddot{q}_6(\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6), \\
\ddot{T}_{32}^2 &= -2\dot{q}_5\dot{q}_6 \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 + 2\dot{q}_4(-\dot{q}_5 \cos q_5 \cos q_6 \sin q_4 + \dot{q}_6(\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6)) \\
&\quad - \dot{q}_4^2(\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6) - \dot{q}_5^2 \cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 \\
&\quad - \dot{q}_6^2(\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6) + (\cos q_4 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5)\ddot{q}_4 \\
&\quad + \ddot{q}_5 \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 + \ddot{q}_6(\cos q_6 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6), \\
\ddot{T}_{33}^2 &= 2\dot{q}_4\dot{q}_5 \sin q_4 \sin q_5 - (\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) \cos q_4 \cos q_5 - \ddot{q}_4 \cos q_5 \sin q_4 - \ddot{q}_5 \cos q_4 \sin q_5.
\end{aligned}$$

Variranjem po Lagranžu matrice transformacija \mathbf{T}_1 , definisane jednačinom (A.3), uz napomenu da je varijacija matrice jednaka varijaciji njenih elemenata, dobija se

$$\delta\mathbf{T}_1 = \delta\mathbf{T}_1(q_2, q_3) = \frac{\partial\mathbf{T}_1}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial\mathbf{T}_1}{\partial q_3}\delta q_3 = \begin{bmatrix} \delta T_{11}^1 & \delta T_{12}^1 & \delta T_{13}^1 \\ \delta T_{21}^1 & \delta T_{22}^1 & \delta T_{23}^1 \\ \delta T_{31}^1 & \delta T_{32}^1 & \delta T_{33}^1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

gde su

$$\begin{aligned}
 \delta T_{11}^1 &= -\cos q_3 \sin q_2 \delta q_2 - \cos q_2 \sin q_3 \delta q_3, \\
 \delta T_{12}^1 &= \sin q_2 \sin q_3 \delta q_2 - \cos q_2 \cos q_3 \delta q_3, \\
 \delta T_{13}^1 &= \cos q_2 \delta q_2, \\
 \delta T_{21}^1 &= \cos q_3 \delta q_3, \\
 \delta T_{22}^1 &= -\sin q_3 \delta q_3, \\
 \delta T_{23}^1 &= 0, \\
 \delta T_{31}^1 &= -\cos q_2 \cos q_3 \delta q_2 + \sin q_2 \sin q_3 \delta q_3, \\
 \delta T_{32}^1 &= \cos q_2 \sin q_3 \delta q_2 + \cos q_3 \sin q_2 \delta q_3, \\
 \delta T_{33}^1 &= -\sin q_2 \delta q_2.
 \end{aligned}$$

Variranjem po Lagranžu matrice transformacija \mathbf{T}_2 , definisane jednačinom (A.4), dobija se

$$\delta \mathbf{T}_2 = \delta \mathbf{T}_2(q_4, q_5, q_6) = \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial q_4} \delta q_4 + \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial q_5} \delta q_5 + \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial q_6} \delta q_6 = \begin{bmatrix} \delta T_{11}^2 & \delta T_{12}^2 & \delta T_{13}^2 \\ \delta T_{21}^2 & \delta T_{22}^2 & \delta T_{23}^2 \\ \delta T_{31}^2 & \delta T_{32}^2 & \delta T_{33}^2 \end{bmatrix},$$

gde su

$$\begin{aligned}
 \delta T_{11}^2 &= (\cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4) \delta q_4 + \cos q_5 \sin q_4 \sin q_6 \delta q_5 \\
 &\quad + (\cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 - \cos q_4 \sin q_6) \delta q_6, \\
 \delta T_{12}^2 &= (\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6) \delta q_4 + \cos q_5 \cos q_6 \sin q_4 \delta q_5 \\
 &\quad - (\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6) \delta q_6, \\
 \delta T_{13}^2 &= \cos q_4 \cos q_5 \delta q_4 - \sin q_4 \sin q_5 \delta q_5, \\
 \delta T_{21}^2 &= -\sin q_5 \sin q_6 \delta q_5 + \cos q_5 \cos q_6 \delta q_6, \\
 \delta T_{22}^2 &= -\cos q_6 \sin q_5 \delta q_5 - \cos q_5 \sin q_6 \delta q_6, \\
 \delta T_{23}^2 &= -\cos q_5 \delta q_5, \\
 \delta T_{31}^2 &= (\sin q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \cos q_4 \cos q_6) \delta q_4 + \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 \delta q_5 \\
 &\quad + (\cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6) \delta q_6, \\
 \delta T_{32}^2 &= (\cos q_4 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5) \delta q_4 + \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 \delta q_5 \\
 &\quad + (\cos q_6 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6) \delta q_6, \\
 \delta T_{33}^2 &= -\cos q_5 \sin q_4 \delta q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \delta q_5.
 \end{aligned}$$

Dodatak B

Vektori položaja karakterističnih tačaka i jedinični vektori pravaca dejstva sila reakcija veze

Vektori položaja karakterističnih tačaka stapesa određeni su korišćenjem tri ortogonalne projekcije stapesa prikazane na slici 4 u radu [Weistenhöfer & Hudde, 1999]. Kako je na pomenu-toj slici dat bazni koordinatni sistem i razmera, mogu se odrediti koordinate svih tačka u tom koordinatnom sistemu. Pošto se orientacije baznog koordinatnog sistema u ovoj tezi i iz rada [Weistenhöfer & Hudde, 1999] poklapaju i kako se koordinatni sistem $O_1x'_1y'_1z'_1$ u početnom trenutku poklapa sa baznim, mogu se sračunati vrednosti projekcija karakterističnih tačaka u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$ i one su prikazane u tabeli 2.

TABELA 2

Tačka	Projekcije $[\lambda \mu \nu]^T$ [mm]
C_1	$[-1.2015 \quad 0 \quad 0]^T$
Z	$[-3.3649 \quad -0.305 \quad 0.1913]^T$
I_{11}	$[0 \quad 0.9273 \quad -0.454]^T$
I_{12}	$[0 \quad 0.9273 \quad 0.5725]^T$
I_{13}	$[0 \quad -0.7632 \quad 0.5725]^T$
I_{14}	$[0 \quad -0.7632 \quad -0.454]^T$
I_{15}	$[-2.7158 \quad 0.3606 \quad 0]^T$

Slično, vektori položaja tačke umbo i centra mase inkudo-malearnog bloka određeni su na osnovu tri ortogonalne projekcije inkudo-malearnog bloka prikazane na slici 5 u radu [Weistenhöfer & Hudde, 1999], a zatim su, korišćenjem ortogonalne matrice transformacije \mathbf{K}_2 kao što je prikazano na slici 3.2, određene projekcije tih vektora, u odnosu na inkudostapedijalni zglob, u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$. Tako dobijene vrednosti prikazane su u tabeli 3. Detaljna morfometrija, kao što su dimenzije i relativne pozicije u odnosu na osikularni lanac, ligamenata inkudo-malearnog bloka preuzeta su iz rada [Sim & Puria, 2008]. Za razliku od inercijalnih karakteristika osikularnog lanca koje se mogu naći u većem broju radova, pregledom literature nije utvrđeno postojanje sličnih rezultata kao u prethodno pomenutom radu, u kom su prikazane dimenzije, pozicije i orientacije ligamenata inkudomalearnog bloka posebno za četiri temporalne kosti, kao i njihove srednje vrednosti koje se u ovoj tezi koriste. Napominje se da postoje relativno velike varijacije u anatomiji srednjeg uha kod različitih preparata temporalne kosti što dovodi do zaključka da je individualna anatomija jako važna u modeliranju srednjeg uha, videti [Sim & Puria, 2008]. Tačke u kojima se ligamenti vezuju za inkudo-malearni blok date su relativnim položajem u odnosu na inkudo-stapedijalni zglob i to projekcijama na ose koordinatnog sistema $C_2x_2y_2z_2$, a prikazane su u tabeli 3.

TABELA 3

Tačka	Projekcije $[\xi \ \eta \ \zeta]^T$ [mm]
C_2	$[-1.2933 \ -1.9812 \ 3.7832]^T$
I_{21}	$[-1.4933 \ -3.1812 \ 2.2832]^T$
I_{22}	$[-2.2933 \ -2.7812 \ 3.2832]^T$
I_{23}	$[-0.5933 \ -3.4812 \ 5.3832]^T$
I_{24}	$[-1.9933 \ 1.4188 \ 5.3832]^T$
I_{25}	$[-1.4933 \ 1.4188 \ 4.9832]^T$
I_{26}	$[-1.8230 \ -2.3299 \ -1.7268]^T$
I_{27}	$[-1.8230 \ -2.3299 \ -1.7268]^T$
I_{28}	$[-1.8230 \ -2.3299 \ -1.7268]^T$
I_{29}	$[-1.8230 \ -2.3299 \ -1.7268]^T$

U tabeli 4 date su projekcije, na ose baznog koordinatnog sistema, jediničnih vektora pravaca dejstava uvedenih sila u prikazanom modelu srednjeg uha, i to onih koje deluju na stapes. Jedinični vektori koji odgovaraju silama ekvivalentnog dejstva anulanog ligamenta stapesa imaju pravac i smer bazne ose x , što odgovara smicanju tog ligamenta, dok je za jedinični vektor pravca sile koja odgovara tetivu mišića stapesa pretpostavljen pravac i smer bazne ose y , što odgovara njenom anatomskom položaju u odnosu na bazu stapesa. Indeksi $k = 1 \div 4$ označavaju ekvivalentna dejstva četvrtinu luka anularnog ligamenta stapesa na njegovu bazu, a indeks $k = 5$ označava tetivu mišića stapesa.

Jedinični vektori sila koje odgovaraju ligamentima inkudo-malearnog bloka preuzeti su iz rada [Sim & Puria, 2008], u kom su dati projekcijama na glavne ose inercije inkudo-malearnog bloka, a zatim su korišćenjem ortogonalne matrice transformacije \mathbf{K}_2 kao što je prikazano na slici 3.2, dobijene vrednosti projekcija na ose baznog koordinatnog sistema koje su date u tabeli 5. U istoj tabeli, prikazane su i projekcije jediničnih vektora sila ekvivalentnog dejstva bubne opne (u smislu disipacije energije), koje su određene skaliranjem dva preseka bubne opne prikazana na slici 5 u radu [Decraemer & Funnell, 2008], tako da rastojanje od tačke umbo do tačke koja se zove latelarni proces maleusa sa prethodno pomenute slike bude isto kao i rastojanje između istih tačaka ali na slici 5 iz rada [Weistenhöfer & Hudde, 1999]. Prethodno pomenuta tri jedinična vektori zajedno sa vektorom od umba ka latelarnom procesu maleusa obrazuju konus bubne opne čiji ugao pri vrhu iznosi 130.2° . Prema Šerceru, pri fiziološkim uslovima, ugao pri vrhu konusa koji obrazuje bubna opna iznosi oko 120 stepeni, dok prema drugim autorima taj ugao iznosi od 132 do 137 stepeni, videti [Gaihede *et al.*, 2007], [Daphalapurkar *et al.*, 2009], [Volandri *et al.*, 2011]. Jedinični vektor pravca sile pobude je takođe dat u tabeli 5, i predstavlja vektor normale na anularnu ravan bube opne koji ima smer ka osikularnom lancu. Indeks $i = 1$ stoji za prednji ligament maleusa, $i = 2$ za latelarni ligament maleusa, $i = 3$ za gornji ligament maleusa, $i = 4$ za latelarni deo zadnjeg ligamenta inkusa, a $i = 5$ za medijalni deo zadnjeg ligamenta inkusa. Indeksi $i = 6 \div 8$ stoje za tri viskoelastična štapa koji predstavljaju ekvivalentno dejstvo bubne opne, a indeks $i = 9$ odnosi se na silu pobude.

TABELA 4

k	κ_{1k}
$1, 2, 3, 4$	$[1 \ 0 \ 0]^T$
5	$[0 \ 1 \ 0]^T$

TABELA 5

i	κ_{2i}
1	$[0.1508 \ -0.8386 \ -0.5187]^T$
2	$[-0.9303 \ -0.1674 \ -0.3363]^T$
3	$[-0.3048 \ -0.1287 \ 0.9476]^T$
4	$[-0.9818 \ -0.01053 \ -0.1990]^T$
5	$[0.6835 \ 0.7308 \ 0.1027]^T$
6	$[-0.7241 \ 0 \ -0.6897]^T$
7	$[-0.4558 \ -0.8724 \ 0.1764]^T$
8	$[-0.3276 \ 0.9363 \ 0.1268]^T$
9	$[0.9326 \ 0 \ -0.3609]^T$

Dodatak C

Geometrijski i reološki parametri lakih štapova u modelu srednjeg uha i parametri ekvivalentnog dejstva perilimfe

Geometrijski parametri, tj. početne dužine i površine poprečnih preseka viskoelastičnih štapova u modelu koji deluju na stapes, zajedno sa u ovoj tezi određenim reološkim parametrima frakcionog Zenerovog modela tih štapova, prikazani su u tabeli 6. Početne dužine štapova koji čine ekvivalentno dejstvo anularnog ligamenta stapesa predstavljaju debljinu tog ligamenta, a površine smicanja predstavljaju svaka po četvrtinu ukupne površine smicanja, tj. površine anularnog ligamenta računate po obimu baze stapesa. Prethodne vrednosti sračunate se na osnovu rezultata iz rada [Gan *et al.*, 2011], na osnovu kojih su određeni i reološki parametri frakcionog Zenerovog modela za anularni ligament stapesa. Iako debljina anularnog ligamenta stapesa po obimu njegove baze nije konstantna, u ovoj tezi se to neće uzeti u obzir. Početna dužina teticne mišića stapesa i površina njenog poprečnog preseka preuzeti su iz rada [Cheng & Gan, 2007], iz kog su preuzeti i eksperimentalni podaci reoloških eksperimenata. Napominje se da parametar E_{1k} , $k = 1 \div 4$, predstavlja modul smicanja a parametar E_{15} modul elastičnosti. Indeksi $k = 1 \div 4$ predstavljaju ekvivalentno dejstvo anularnog ligamenta stapesa na njegovu bazu, a indeks $k = 5$ predstavlja tetivnu mišiću stapesa.

Tabela 6

k	α_{1k}	$\tau_{\sigma 1k}$ [s $^{\alpha_{1k}}$]	$\tau_{\varepsilon 1k}$ [s $^{\alpha_{1k}}$]	E_{1k} [MPa]	l_{1k} [mm]	A_{1k} [mm 2]
1, 2, 3, 4	0.2462	0.4479	1.3016	0.0845	0.07	0.4378
5	0.411	0.491	1.397	3.334	0.99	0.156

U tabeli 7 dati su reološki parametri frakcionog Zenerovog modela, kao i početne dužine i površine poprečnih preseka viskoelastičnih štapova kojima se modeliraju strukture inkudo-malearnog bloka. Parametri frakcionog Zenerovog modela određeni su ranije u okviru teze, a početne dužine i površine poprečnih preseka viskoelastičnih lakih štapova kojima se modeliraju ligamenti preuzete su iz rada [Sim & Puria, 2008]. Početne dužine tri laka štapa koji predstavljaju ekvivalentno dejstvo bubne opne dobijene su na isti način kao i jedinični vektori pravca dejstva sila u ovim štapovima, dok su vrednosti površina poprečnog preseka pretpostavljene. Indeks $i = 1$ стоји за prednji ligament maleusa, $i = 2$ за latelarni ligament maleusa, $i = 3$ за gornji ligament maleusa, $i = 4$ за latelarni deo zadnjeg ligamenta inkusa, a $i = 5$ za medijalni deo zadnjeg ligamenta inkusa. Indeksi $i = 6, 7, 8$ stoje za tri viskoelastična štapa koji predstavljaju ekvivalentno dejstvo bubne opne u segmentu koji se odnosi na disipaciju energije.

Tabela 7

i	α_{2i}	$\tau_{\sigma 2i}$ [s $^{\alpha_{2i}}$]	$\tau_{\varepsilon 2i}$ [s $^{\alpha_{2i}}$]	E_{2i} [MPa]	l_{2i} [mm]	A_{2i} [mm 2]
1	0.303	0.598	1.515	1.64	2.1	0.6362
2	0.303	0.598	1.515	1.64	2.0	0.2376
3	0.303	0.598	1.515	1.64	1.3	0.0491
4	0.303	0.598	1.515	1.64	0.59	0.57
5	0.303	0.598	1.515	1.64	0.38	0.51
6	0.536	2.023	3.563	4.096	3.668	1
7	0.536	2.023	3.563	4.096	3.2	1
8	0.536	2.023	3.563	4.096	4.452	1

Vrednosti parametara ekvivalentnog dejstva kohlearne tečnosti na bazu su: $k_1 = 0.2$ [Ns/m] i $k_2 = 1 \cdot 10^{-6}$ [Nms]. Vrednost parametra k_1 preuzeta je iz rada [Gan *et al.*, 2004], dok je vrednost parametara k_2 prepostavljena kao vrlo mala. Pretpostavka za parametar k_2 zasnovana je na stavu da obrtanjem baze stapesa ne dolazi do ukupne promene zapremine kohlearne tečnosti, pa samim tim ni do stvaranja velikog otpora obrtanju.

Dodatak D

Vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja stapesa i inkudo-malearnog bloka

Vektor ugaone brzine stapesa ω_1^O , u baznom koordinatnom sistemu, predstavlja dualni vektor kososimetrične matrice ugaone brzine $\Omega_1^O = \dot{\mathbf{T}}_1 \cdot \mathbf{T}_1^T$, gde $[.]^T$ označava operaciju transponovanja matrice, videti [Markeev, 1999]. Na osnovu prethodnog, pomenuta kososimetrična matrica je

$$\Omega_1^O = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_3 \cos q_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \cos q_2 & 0 & -\dot{q}_3 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_3 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

a njen dualni vektor, tj. vektor ugaone brzine

$$\omega_1^O = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \sin q_2 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \cos q_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Korišćenjem pravila za transformaciju elemenata matrice iz jednog koordinatnog sistema u drugi, videti [Lai *et al.*, 2009], elementi kososimetrične matrice ugaone brzine u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$ su

$$\begin{aligned} \Omega'_1 &= \mathbf{T}_1^T \cdot \Omega_1^O \cdot \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1^T \cdot \dot{\mathbf{T}}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 \cos q_3 \\ \dot{q}_3 & 0 & -\dot{q}_2 \sin q_3 \\ -\dot{q}_2 \cos q_3 & \dot{q}_2 \sin q_3 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

gde je iskorišćena ortogonalnost matrice \mathbf{T}_1 , tj. $\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_1^T = \mathbf{T}_1^T \cdot \mathbf{T}_1 = \mathbf{I}$, gde je \mathbf{I} jedinična matrica. Dualni vektor prethodne matrice, tj. vektor ugaone brzine stapesa u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$ je

$$\omega'_1 = \omega'_1(q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \sin q_3 \\ \dot{q}_2 \cos q_3 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Napominje se da se vektor ω'_1 mogao računati i kao $\omega'_1 = \mathbf{T}_1^T \cdot \omega_1^O$.

Sada se za poznat vektor ugaone brzine diferenciranjem po vremenu dobija vektor ugaonog ubrzanja stapesa. Pošto je vektor ugaone brzine ω'_1 dat u koordinatnom sistemu kruto vezanom za telo stapesa, vektor ugaonog ubrzanja u tom koordinatnom sistemu dobija se diferenciranjem po vremenu projekcija vektora ugaone brzine u istom koordinatnom sistemu, videti [Markeev, 1999]. Na osnovu prethodnog, vektor ugaonog ubrzanja stapesa u koordinatnom sistemu $O_1x'_1y'_1z'_1$, je

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_1(q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3) = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos q_3 + \ddot{q}_2 \sin q_3 \\ -\dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_3 + \ddot{q}_2 \cos q_3 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Korišćenjem ortogonalne matrice transformacije \mathbf{K}_1 , kao što je prikazano na slici 3.2, vektori ugaone brzine i ugaonog ubrzanja stapesa, u koordinatnom sistemu $C_1x_1y_1z_1$, su respektivno

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1(q_3, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = \mathbf{K}_1^T \cdot \boldsymbol{\omega}'_1 = \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \sin q_3 \\ \dot{q}_2 \cos q_3 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

i

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1(q_3, \dot{q}_2, \ddot{q}_3, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3) = \mathbf{K}_1^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_1 = \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos q_3 + \ddot{q}_2 \sin q_3 \\ -\dot{q}_2 \dot{q}_3 \sin q_3 + \ddot{q}_2 \cos q_3 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

Vektor ugaone brzine inkudo-malearnog bloka $\boldsymbol{\omega}_{20}$, u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$ u početnom trenutku, predstavlja dualni vektor kososimetrične matrice ugaone brzine $\boldsymbol{\Omega}_{20} = \dot{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{T}_2^T$. Korišćenjem pravila za transformaciju elemenata matrice iz jednog koordinatnog sistema u drugi, elementi matrice ugaone brzine u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$ u proizvoljnom trenutku su

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_2 &= \mathbf{T}_2^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_{20} \cdot \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2^T \cdot \dot{\mathbf{T}}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_4 \sin q_5 - \dot{q}_6 & \dot{q}_4 \cos q_5 \cos q_6 - \dot{q}_5 \sin q_6 \\ -\dot{q}_4 \sin q_5 + \dot{q}_6 & 0 & -\dot{q}_4 \cos q_5 \sin q_6 - \dot{q}_5 \cos q_6 \\ -\dot{q}_4 \cos q_5 \cos q_6 + \dot{q}_5 \sin q_6 & \dot{q}_4 \cos q_5 \sin q_6 + \dot{q}_5 \cos q_6 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

gde je iskorišćena ortogonalnost matrice \mathbf{T}_2 . Dualni vektor prethodne matrice, tj. vektor ugaone brzine inkudo-malearnog bloka u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$ u proizvoljnom trenutku vremena, je

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2(q_5, q_6, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6) = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \cos q_5 \sin q_6 + \dot{q}_5 \cos q_6 \\ \dot{q}_4 \cos q_5 \cos q_6 - \dot{q}_5 \sin q_6 \\ -\dot{q}_4 \sin q_5 + \dot{q}_6 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.9})$$

Vektor ugaonog ubrzanja se dobija diferenciranjem po vremenu vektora ugaone brzine inkudo-malearnog bloka. Pošto je vektor ugaone brzine $\boldsymbol{\omega}_2$ dat u koordinatnom sistemu kruto vezanom za telo inkudo-malearnog bloka, vektor ugaonog ubrzanja u tom koordinatnom sistemu dobija se diferenciranjem po vremenu projekcija vektora ugaone brzine u istom koordinatnom sistemu. Na osnovu prethodnog, vektor ugaonog ubrzanja inkudo-malearnog bloka u koordinatnom sistemu $C_2x_2y_2z_2$ u proizvoljnom trenutku vremena je

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_4 \dot{q}_5 \sin q_5 \sin q_6 + \dot{q}_4 \dot{q}_6 \cos q_5 \cos q_6 - \dot{q}_5 \dot{q}_6 \sin q_6 + \ddot{q}_4 \cos q_5 \sin q_6 + \ddot{q}_5 \cos q_6 \\ -\dot{q}_4 \dot{q}_5 \cos q_6 \sin q_5 - \dot{q}_4 \dot{q}_6 \cos q_5 \sin q_6 - \dot{q}_5 \dot{q}_6 \cos q_6 + \ddot{q}_4 \cos q_5 \cos q_6 - \ddot{q}_5 \sin q_6 \\ -\dot{q}_4 \dot{q}_5 \cos q_5 - \ddot{q}_4 \sin q_5 + \ddot{q}_6 \end{bmatrix}.$$

Argumenti prethodne veličine su $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2(q_5, q_6, \dot{q}_4, \dot{q}_5, \dot{q}_6, \ddot{q}_4, \ddot{q}_5, \ddot{q}_6)$.

Dodatak E

Određivanje deformacija struktura srednjeg uha

Razvojem u Tejlorov red izraza za vektore položaja $\mathbf{r}_{1k} (q_1, q_2, q_3), k = 1 \div 5$ i $\mathbf{r}_{2i} (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6), i = 1 \div 8$, u okolini multih vrednosti generalisanih koordinata uz zadržavanje samo na linearnim članovima, jednačine (3.24) i (3.25) svode se na

$$\Delta \mathbf{r}_{1k} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1}, \quad k = 1 \div 5,$$

$$\Delta \mathbf{r}_{2i} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} 0 & -q_6 & q_4 \\ q_6 & 0 & -q_5 \\ -q_4 & q_5 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{2i}^Z, \quad i = 1 \div 8.$$

Uvrštavanjem u prethodne dve jednačine: $\boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1} = [\lambda_{1k}^{O_1} \quad \mu_{1k}^{O_1} \quad \nu_{1k}^{O_1}]^T$, $\boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} = [\lambda_Z^{O_1} \quad \mu_Z^{O_1} \quad \nu_Z^{O_1}]^T$, $\mathbf{p}_{2i}^Z = [\xi_{2i}^Z \quad \eta_{2i}^Z \quad \zeta_{2i}^Z]^T$ i $\mathbf{K}_2 = [k_{i,j}^2]_{3 \times 3}$, isti se mogu zapisati kao

$$\Delta \mathbf{r}_{1k} = \begin{bmatrix} q_1 + \nu_{1k}^{O_1} q_2 - \mu_{1k}^{O_1} q_3 \\ \lambda_{1k}^{O_1} q_3 \\ -\lambda_{1k}^{O_1} q_2 \end{bmatrix}, \quad k = 1 \div 5,$$

$$\Delta \mathbf{r}_{2i} = \begin{bmatrix} q_1 + \nu_Z^{O_1} q_2 - \mu_Z^{O_1} q_3 + (k_{11}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{13}^2 \xi_{2i}^Z) q_4 + (k_{13}^2 \eta_{2i}^Z - k_{12}^2 \zeta_{2i}^Z) q_5 + (k_{12}^2 \xi_{2i}^Z - k_{11}^2 \eta_{2i}^Z) q_6 \\ \lambda_Z^{O_1} q_3 + (k_{21}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{23}^2 \xi_{2i}^Z) q_4 + (k_{23}^2 \eta_{2i}^Z - k_{22}^2 \zeta_{2i}^Z) q_5 + (k_{22}^2 \xi_{2i}^Z - k_{21}^2 \eta_{2i}^Z) q_6 \\ -\lambda_Z^{O_1} q_2 + (k_{31}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{33}^2 \xi_{2i}^Z) q_4 + (k_{33}^2 \eta_{2i}^Z - k_{32}^2 \zeta_{2i}^Z) q_5 + (k_{32}^2 \xi_{2i}^Z - k_{31}^2 \eta_{2i}^Z) q_6 \end{bmatrix},$$

gde je $i = 1 \div 8$.

Sada se projektovanjem veličina $\Delta \mathbf{r}_{1k}$ i $\Delta \mathbf{r}_{2i}$ na pravce određene jediničnim vektorima $\boldsymbol{\kappa}_{1k}$ i $\boldsymbol{\kappa}_{2i}$, respektivno, prema Viliotovom planu pomeranja, dobijaju promene dužina štapova u modelu srednjeg uha

$$\Delta l_{1k} = -\boldsymbol{\kappa}_{1k}^T \Delta \mathbf{r}_{1k} = -\kappa_{1kx} q_1 + (\kappa_{1kz} \lambda_{1k}^{O_1} - \kappa_{1kx} \nu_{1k}^{O_1}) q_2 + (\kappa_{1kx} \mu_{1k}^{O_1} - \kappa_{1ky} \lambda_{1k}^{O_1}) q_3, \quad k = 1 \div 5 \quad (\text{E.1})$$

i

$$\begin{aligned} \Delta l_{2i} = -\kappa_{2i}^T \Delta \mathbf{r}_{2i} &= -\kappa_{2ix} q_1 + \left(\kappa_{2iz} \lambda_Z^{O_1} - \kappa_{2ix} \nu_Z^{O_1} \right) q_2 + \left(\kappa_{2ix} \mu_Z^{O_1} - \kappa_{2iy} \lambda_Z^{O_1} \right) q_3 \\ &+ \left(\kappa_{2ix} \left(k_{13}^2 \xi_{2i}^Z - k_{11}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{23}^2 \xi_{2i}^Z - k_{21}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{33}^2 \xi_{2i}^Z - k_{31}^2 \zeta_{2i}^Z \right) \right) q_4 \\ &+ \left(\kappa_{2ix} \left(k_{12}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{13}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{22}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{23}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{32}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{33}^2 \eta_{2i}^Z \right) \right) q_5 \\ &+ \left(\kappa_{2ix} \left(k_{11}^2 \eta_{2i}^Z - k_{12}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{21}^2 \eta_{2i}^Z - k_{22}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{31}^2 \eta_{2i}^Z - k_{32}^2 \xi_{2i}^Z \right) \right) q_6, \quad i = 1 \div 8. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Zgodno je ovde uvesti vektore $\Delta \mathbf{l} = [\Delta l_{11} \dots \Delta l_{15} \quad \Delta l_{21} \dots \Delta l_{28}]^T$ i $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_6]^T$ kako bi se jednačine (E.1) i (E.2) mogle zapisati kao sistem jednačina

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{M}_l \cdot \mathbf{q}, \quad (\text{E.3})$$

gde je matrica $\mathbf{M}_l = [m_{i,j}^l]_{13 \times 6}$, a elementi su joj

$$\begin{aligned} m_{i,1}^l &= -\kappa_{1ix}, \quad i = 1 \div 5, \quad m_{5+i,1}^l = -\kappa_{2ix}, \quad i = 1 \div 8, \\ m_{i,2}^l &= \kappa_{1iz} \lambda_{1i}^{O_1} - \kappa_{1ix} \nu_{1i}^{O_1}, \quad i = 1 \div 5, \quad m_{5+i,2}^l = \kappa_{2iz} \lambda_Z^{O_1} - \kappa_{2ix} \nu_Z^{O_1}, \quad i = 1 \div 8, \\ m_{i,3}^l &= \kappa_{1ix} \mu_{1i}^{O_1} - \kappa_{1iy} \lambda_{1i}^{O_1}, \quad i = 1 \div 5, \quad m_{5+i,3}^l = \kappa_{2ix} \mu_Z^{O_1} - \kappa_{2iy} \lambda_Z^{O_1}, \quad i = 1 \div 8, \\ m_{i,4}^l &= 0, \quad i = 1 \div 5, \quad m_{i,5}^l = 0, \quad i = 1 \div 5, \quad m_{i,6}^l = 0, \quad i = 1 \div 5, \\ m_{5+i,4}^l &= \kappa_{2ix} \left(k_{13}^2 \xi_{2i}^Z - k_{11}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{23}^2 \xi_{2i}^Z - k_{21}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{33}^2 \xi_{2i}^Z - k_{31}^2 \zeta_{2i}^Z \right), \quad i = 1 \div 8, \\ m_{5+i,5}^l &= \kappa_{2ix} \left(k_{12}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{13}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{22}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{23}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{32}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{33}^2 \eta_{2i}^Z \right), \quad i = 1 \div 8, \\ m_{5+i,6}^l &= \kappa_{2ix} \left(k_{11}^2 \eta_{2i}^Z - k_{12}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{21}^2 \eta_{2i}^Z - k_{22}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{31}^2 \eta_{2i}^Z - k_{32}^2 \xi_{2i}^Z \right), \quad i = 1 \div 8. \end{aligned}$$

Dodatak F

Pseudobrzine i njihova veza sa generalisanim brzinama

Na izbor pseudobrzina $\dot{\pi}_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$, definisanih sistemom jednačinama (3.47) nameće se samo jedan uslov, a to je da taj sistem mora da bude rešiv po generalisanim brzinama \dot{q}_j , $j = 1 \div 6$. Drugim rečima, determinanta linearog po \dot{q}_j , $j = 1 \div 6$, sistema jednačina (3.47) mora da bude različita od nule. Sistem jednačina (3.47) se uvođenjem vektora $\dot{\pi} = [\dot{\pi}_1 \dots \dot{\pi}_6]^T$ i $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_6]^T$, zbog lakšeg zapisa, može zapisati kao

$$\dot{\pi} = \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q_5 \sin q_6 & \cos q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q_5 \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin q_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}. \quad (\text{F.1})$$

Determinanta matrice \mathbf{R} jednaka je

$$\det(\mathbf{R}) = -\cos q_3 \cos q_5,$$

što je uvek različitno od nule jer se radi o Krilovljevim uglovima. Kao posledica prethodnog $\cos q_3 \approx 1$ i $\cos q_5 \approx 1$, te je $\det(\mathbf{R}) \approx -1$. Sada se inverzijom matrice \mathbf{R} sistem (F.1) može rešiti po $\dot{\mathbf{q}}$, kao

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}^{-1} \dot{\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sec q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sec q_5 \sin q_6 & \cos q_6 \sec q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin q_6 \tan q_5 & \cos q_6 \tan q_5 & 1 \end{pmatrix} \dot{\pi}, \quad (\text{F.2})$$

gde je $\sec q_3 = \frac{1}{\cos q_3}$, i $\sec q_5 = \frac{1}{\cos q_5}$. Diferenciranjem po vremenu sistema (F.2) i uvođenjem oznaka $\ddot{\pi} = [\ddot{\pi}_1 \dots \ddot{\pi}_6]^T$ i $\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_6]^T$, dobija se

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sec q_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sec q_5 \sin q_6 & \cos q_6 \sec q_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q_6 & -\sin q_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin q_6 \tan q_5 & \cos q_6 \tan q_5 & 1 \end{pmatrix} \ddot{\pi} + \mathbf{h}^*, \quad (\text{F.3})$$

gde je

$$\mathbf{h}^* = (\mathbf{R}^{-1})\dot{\boldsymbol{\pi}} = [0 \ h_2^* \ 0 \ h_4^* \ h_5^* \ h_6^*]^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sec q_3 \tan q_3 \cdot \dot{q}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sec q_5(\sin q_6 \tan q_5 \cdot \dot{q}_5 + \cos q_6 \cdot \dot{q}_6) & \sec q_5(\cos q_6 \tan q_5 \cdot \dot{q}_5 - \sin q_6 \cdot \dot{q}_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin q_6 \cdot \dot{q}_6 & -\cos q_6 \cdot \dot{q}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sec q_5)^2 \sin q_6 \cdot \dot{q}_5 + \cos q_6 \tan q_5 \cdot \dot{q}_6 & (\sec q_5)^2 \cos q_6 \cdot \dot{q}_5 - \sin q_6 \tan q_5 \cdot \dot{q}_6 & 0 \end{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\pi}}.$$

Dodatak G

Generalisane sile struktura osikularnog lanca

Da bi se napisale generalisane sile, potrebno je prvo napisati virtualni rad svih sila i spregova koji deluju na osikularan lanac. Kao priprema za pisanje virtuelnog rada odrediće se varijacije vektora položaja napadnih tačaka sila koje deluju na osikularan lanac. Variranjem po Lagranžu, videti [Markeev, 1999], vektora položaja napadne tačke k -te sile stapesa, definisanog izrazom (3.7), dobija se

$$\delta\mathbf{r}_{1k} = \delta\mathbf{r}_{O_1} + \delta\mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1}, \quad (\text{G.1})$$

gde je $\delta\mathbf{r}_{O_1} = [\delta q_1 \ 0 \ 0]^T$, a $\delta\mathbf{T}_1$ je varijacija matrice prelaza \mathbf{T}_1 i data je u Dodatku A. Slično, variranjem po Lagranžu vektora položaja napadne tačke i -te sile inkudo-malearnog bloka definisanog jednačinom (3.8), dobija se

$$\delta\mathbf{r}_{2i} = \delta\mathbf{r}_{O_1} + \delta\mathbf{T}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} + \mathbf{K}_2 \cdot \delta\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{p}_{2i}^Z, \quad (\text{G.2})$$

gde je $\delta\mathbf{T}_2$ varijacija matrice prelaza \mathbf{T}_2 i data je u Dodatku A. Vektori $\delta\mathbf{r}_{1k}$ i $\delta\mathbf{r}_{2i}$ su funkcije generalisanih koordinata q_j , $j = 1 \div 3$, i generalisanih koordinata q_j , $j = 1 \div 6$, respektivno.

Virtuelni rad svih sila i spregova sila koji deluju na stapes računa se kao

$$\delta A_1 = \delta A^K + \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \delta\mathbf{r}_{1k}, \quad (\text{G.3})$$

gde δA^K predstavlja virtuelni rad ekvivalentnog dejstva kohlee i gde su sile \mathbf{F}_{1k} , $k = 1 \div 5$, date izrazima (3.5) a virtuelna pomeranja $\delta\mathbf{r}_{1k}$ izrazima (G.1). Virtuelni rad ekvivalentnog dejstva kohlee je

$$\delta A^K = (\mathbf{G}^K)^T \delta\mathbf{r}_{O_1} + (\mathbf{M}_{O_1}^K)^T \delta\boldsymbol{\omega}_1^O, \quad (\text{G.4})$$

gde je sila \mathbf{G}^K definisana izrazom (3.9), moment $\mathbf{M}_{O_1}^K$ izrazom (3.10), a vektor $\delta\boldsymbol{\omega}_1^O$ se dobija po Herc Helderovoј hipotezi iz jednačine (3.14) i jednak je

$$\delta\boldsymbol{\omega}_1^O = \begin{bmatrix} \sin q_2 \cdot \delta q_3 \\ \delta q_2 \\ \cos q_2 \cdot \delta q_3 \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanjem prethodnog i izraza (3.9), (3.10) i (3.14), kao i $\delta\mathbf{r}_{O_1} = [\delta q_1 \ 0 \ 0]^T$ i $\mathbf{v}_{O_1} = [\dot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$, u izraz (G.4) dobija se

$$\delta A^K = -k_1 \mathbf{v}_{O_1}^T \delta\mathbf{r}_{O_1} - k_2 (\boldsymbol{\omega}_1^O)^T \delta\boldsymbol{\omega}_1^O = -k_1 \dot{q}_1 \delta q_1 - k_2 \dot{q}_2 \delta q_2 - k_2 \dot{q}_3 \delta q_3.$$

Dalje se, uvrštavanjem prethodnog i izraza (3.5) i (G.1) u izraz (G.3), dobija

$$\delta A_1 = (Q_{11} - k_1 \dot{q}_1) \delta q_1 + (Q_{12} - k_2 \dot{q}_2) \delta q_2 + (Q_{13} - k_2 \dot{q}_3) \delta q_3, \quad (\text{G.5})$$

gde je

$$Q_{11} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{1k}}{\partial q_1} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial q_1} \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.6})$$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{1k}}{\partial q_2} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial q_2} \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1} \\ &= \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \begin{pmatrix} -\cos q_3 \sin q_2 & \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \sin q_3 & -\sin q_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1} \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

$$\begin{aligned} Q_{13} &= \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{1k}}{\partial q_3} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial q_3} \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1} \\ &= \sum_{k=1}^5 \mathbf{F}_{1k}^T \begin{pmatrix} -\cos q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \cos q_3 & 0 \\ \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_3 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{1k}^{O_1}. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Uvrštanjem jednačina (3.50) u izraz (G.5) dobija se

$$\delta A_1 = (Q_{11} - k_1 \dot{q}_1) \delta \pi_1 + (Q_{12} - k_2 \dot{q}_2) \sec q_3 \delta \pi_2 + (Q_{13} - k_2 \dot{q}_3) \delta \pi_3, \quad (\text{G.9})$$

gde je $\sec q_3 = \frac{1}{\cos q_3}$.

Virtuelni rad svih sila koje deluju na inkudo-malearni blok računa se kao

$$\delta A_2 = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \delta \mathbf{r}_{2i}, \quad (\text{G.10})$$

gde su sile \mathbf{F}_{2i} , $i = 1 \div 9$ date izrazima (3.6), a virtuelna pomeranja $\delta \mathbf{r}_{2i}$ izrazima (G.2). Uvrštanjem izraza (G.2) u izraz (G.10), isti se može zapisati kao

$$\delta A_2 = Q_{21} \delta q_1 + Q_{22} \delta q_2 + Q_{23} \delta q_3 + Q_{24} \delta q_4 + Q_{25} \delta q_5 + Q_{26} \delta q_6, \quad (\text{G.11})$$

gde je

$$Q_{21} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{2i}}{\partial q_1} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial q_1} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{G.12})$$

$$\begin{aligned} Q_{22} &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{2i}}{\partial q_2} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial q_2} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} \\ &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \begin{pmatrix} -\cos q_3 \sin q_2 & \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos q_2 \cos q_3 & \cos q_2 \sin q_3 & -\sin q_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1}, \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{2i}}{\partial q_3} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial q_3} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} \\ &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \begin{pmatrix} -\cos q_2 \sin q_3 & -\cos q_2 \cos q_3 & 0 \\ \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 \\ \sin q_2 \sin q_3 & \cos q_3 \sin q_2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1}, \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

$$\begin{aligned} Q_{24} &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{2i}}{\partial q_4} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \mathbf{K}_2 \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial q_4} \mathbf{p}_{2i}^Z = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \mathbf{K}_2 \\ &\times \begin{pmatrix} \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4 & \cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6 - \cos q_4 \cos q_6 & \cos q_4 \sin q_6 - \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 & -\cos q_5 \sin q_4 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{2i}^Z, \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

$$\begin{aligned} Q_{25} &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{2i}}{\partial q_5} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \mathbf{K}_2 \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial q_5} \mathbf{p}_{2i}^Z \\ &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} \cos q_5 \sin q_4 \sin q_6 & \cos q_5 \cos q_6 \sin q_4 & -\sin q_4 \sin q_5 \\ -\sin q_5 \sin q_6 & -\cos q_6 \sin q_5 & -\cos q_5 \\ \cos q_4 \cos q_5 \sin q_6 & \cos q_4 \cos q_5 \cos q_6 & -\cos q_4 \sin q_5 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{2i}^Z, \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

$$\begin{aligned} Q_{26} &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \frac{\partial \mathbf{r}_{2i}}{\partial q_6} = \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \mathbf{K}_2 \frac{\partial \mathbf{T}_2}{\partial q_6} \mathbf{p}_{2i}^Z \\ &= \sum_{i=1}^9 \mathbf{F}_{2i}^T \mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} \cos q_6 \sin q_4 \sin q_5 - \cos q_4 \sin q_6 & -(\cos q_4 \cos q_6 + \sin q_4 \sin q_5 \sin q_6) & 0 \\ \cos q_5 \cos q_6 & -\cos q_5 \sin q_6 & 0 \\ \cos q_4 \cos q_6 \sin q_5 + \sin q_4 \sin q_6 & \cos q_6 \sin q_4 - \cos q_4 \sin q_5 \sin q_6 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p}_{2i}^Z. \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

Uvrštavanjem jednačina (3.50) u izraz (G.11) dobija se

$$\begin{aligned} \delta A_2 &= Q_{21} \delta \pi_1 + Q_{22} \sec q_3 \delta \pi_2 + Q_{23} \delta \pi_3 \\ &\quad + (Q_{24} \sec q_5 \sin q_6 + Q_{25} \cos q_6 + Q_{26} \sin q_6 \tan q_5) \delta \pi_4 \\ &\quad + (Q_{24} \sec q_5 \cos q_6 - Q_{25} \sin q_6 + Q_{26} \cos q_6 \tan q_5) \delta \pi_5 + Q_{26} \delta \pi_6, \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

gde je $\sec q_3 = \frac{1}{\cos q_3}$, i $\sec q_5 = \frac{1}{\cos q_5}$.

Virtuelni rad svih sila koje deluju na osikularni lanac dobija se sabiranjem izraza (G.9) i (G.18) čime se dobija

$$\begin{aligned} \delta A &= \delta A_1 + \delta A_2 = (Q_{11} - k_1 \dot{q}_1 + Q_{21}) \delta \pi_1 + (Q_{12} - k_2 \dot{q}_2 + Q_{22}) \sec q_3 \delta \pi_2 \\ &\quad + (Q_{13} - k_2 \dot{q}_3 + Q_{23}) \delta \pi_3 + (Q_{24} \sec q_5 \sin q_6 + Q_{25} \cos q_6 + Q_{26} \sin q_6 \tan q_5) \delta \pi_4 \\ &\quad + (Q_{24} \sec q_5 \cos q_6 - Q_{25} \sin q_6 + Q_{26} \cos q_6 \tan q_5) \delta \pi_5 + Q_{26} \delta \pi_6. \end{aligned} \quad (\text{G.19})$$

Označavanjem generalisane sile koja stoji uz veličinu $\delta \pi_\gamma$, sa Ξ_γ , $\gamma = 1 \div 6$, prethodni izraz se može zapisati kao

$$\delta A = \Xi_1 \delta \pi_1 + \Xi_2 \delta \pi_2 + \Xi_3 \delta \pi_3 + \Xi_4 \delta \pi_4 + \Xi_5 \delta \pi_5 + \Xi_6 \delta \pi_6,$$

gde je

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= Q_{11} - k_1 \dot{q}_1 + Q_{21}, \\ \Xi_2 &= (Q_{12} - k_2 \dot{q}_2 + Q_{22}) \sec q_3, \\ \Xi_3 &= Q_{13} - k_2 \dot{q}_3 + Q_{23}, \\ \Xi_4 &= Q_{24} \sec q_5 \sin q_6 + Q_{25} \cos q_6 + Q_{26} \sin q_6 \tan q_5, \\ \Xi_5 &= Q_{24} \sec q_5 \cos q_6 - Q_{25} \sin q_6 + Q_{26} \cos q_6 \tan q_5, \\ \Xi_6 &= Q_{26}, \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

i gde su veličine Q_{1k} , $k = 1 \div 3$ date izrazima (G.6) - (G.8), a veličine Q_{2i} , $i = 1 \div 6$ izrazima (G.12) - (G.17). Izrazi (G.20) predstavljaju generalisane sile koje odgovaraju uvedenim pseudokordinatama π_γ , $\gamma = 1 \div 6$, videti [Spasić, 2014c].

Dodatak H

Linearizacija Gibbs-Apelovih diferencijalnih jednačina kretanja

Linearizacijom jednačinama (3.48) u okolini položaja stabilne ravnoteže kome odgovaraju nulte vrednosti generalisanih koordinata, te jednačine postaju

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \dot{\pi}_1, \\ \dot{q}_2 &= \dot{\pi}_2, \\ \dot{q}_3 &= \dot{\pi}_3, \\ \dot{q}_4 &= \dot{\pi}_5, \\ \dot{q}_5 &= \dot{\pi}_4, \\ \dot{q}_6 &= \dot{\pi}_6.\end{aligned}$$

Istim postupkom se iz sistem jednačina (F.3) dobija linearna veza između generalisanih ubrzanja i pseudoubrzanja

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= \ddot{\pi}_1, \\ \ddot{q}_2 &= \ddot{\pi}_2, \\ \ddot{q}_3 &= \ddot{\pi}_3, \\ \ddot{q}_4 &= \ddot{\pi}_5, \\ \ddot{q}_5 &= \ddot{\pi}_4, \\ \ddot{q}_6 &= \ddot{\pi}_6.\end{aligned}$$

Zgodno je vezu između generalisanih brzina i pseudobrzina zapisati u matričnoj formi kao

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_4 \dot{\boldsymbol{\pi}}, \quad (\text{H.1})$$

gde je $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_6]^T$, $\dot{\boldsymbol{\pi}} = [\dot{\pi}_1 \dots \dot{\pi}_6]^T$ i

$$\mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Razvojem u Tejlorov red u okolini nultih vrednosti generalisanih koordinata svih elemenata matrica (A.7) i (A.8), opet uz zadržavanje samo na linearnim članovima, dobija se respektivno

$$\ddot{\mathbf{T}}_1 = \ddot{\mathbf{T}}_1(\ddot{q}_2, \ddot{q}_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{q}_3 & \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 & 0 & 0 \\ -\ddot{q}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_2 = \ddot{\mathbf{T}}_2(\ddot{q}_4, \ddot{q}_5, \ddot{q}_6) = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{q}_6 & \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_6 & 0 & -\ddot{q}_5 \\ -\ddot{q}_4 & \ddot{q}_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uvrštanjem prethodne dve matrice i veze između generalisanih ubrzanja i psudoubrzanja, kao i $\mathbf{a}_{O_1} = [\ddot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$, $\rho_{C_1}^{O_1} = [\lambda_{C_1}^{O_1} \ \mu_{C_1}^{O_1} \ \nu_{C_1}^{O_1}]^T$, $\rho_Z^{O_1} = [\lambda_Z^{O_1} \ \mu_Z^{O_1} \ \nu_Z^{O_1}]^T$, $\mathbf{p}_{C_2}^Z = [\xi_{C_2}^Z \ \eta_{C_2}^Z \ \zeta_{C_2}^Z]^T$ i $\mathbf{K}_2 = [k_{ij}^2]_{3 \times 3}$ u izraze (3.20) i (3.21), dobija se, respektivno

$$\mathbf{a}_{C_1} = \begin{bmatrix} \ddot{\pi}_1 + \nu_{C_1}^{O_1} \ddot{\pi}_2 - \mu_{C_1}^{O_1} \ddot{\pi}_3 \\ \lambda_{C_1}^{O_1} \ddot{\pi}_3 \\ -\lambda_{C_1}^{O_1} \ddot{\pi}_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{H.2})$$

i

$$\mathbf{a}_{C_2} = \begin{bmatrix} \ddot{\pi}_1 + \nu_Z^{O_1} \ddot{\pi}_2 - \mu_Z^{O_1} \ddot{\pi}_3 + \left(k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_5 + \left(k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_4 + \left(k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_6 \\ \lambda_Z^{O_1} \ddot{\pi}_3 + \left(k_{21}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{23}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_5 + \left(k_{23}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{22}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_4 + \left(k_{22}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{21}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_6 \\ -\lambda_Z^{O_1} \ddot{\pi}_2 + \left(k_{31}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{33}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_5 + \left(k_{33}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{32}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_4 + \left(k_{32}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{31}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \ddot{\pi}_6 \end{bmatrix}. \quad (\text{H.3})$$

Kao priprema odrediće se parcijalni izvodi po pseudoubrzanjima matrica transformacija $\ddot{\mathbf{T}}_1$ i $\ddot{\mathbf{T}}_2$. Uvrštanjem veza između generalisanih ubrzanja i pseudoubrzanja u matrice (A.7) i (A.8), zatim parcijalnim diferenciranjem tako dobijenih matrica po pseudoubrzanjima $\ddot{\pi}_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$, pa razvojem svih elemenata u Tejlorov red u okolini nultih vrednosti generalisanih koordinata uz zadržavanje samo na linearnim članovima, dobija se

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_1}{\partial \ddot{\pi}_2} = \begin{pmatrix} -q_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & q_3 & -q_2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_1}{\partial \ddot{\pi}_3} = \begin{pmatrix} -q_3 & -1 & 0 \\ 1 & -q_3 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_2}{\partial \ddot{\pi}_4} = \begin{pmatrix} 0 & q_4 & q_6 \\ 0 & -q_5 & -1 \\ 0 & 1 & -q_5 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_2}{\partial \ddot{\pi}_5} = \begin{pmatrix} -q_4 & 0 & 1 \\ q_5 & 0 & q_6 \\ -1 & 0 & -q_4 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_2}{\partial \ddot{\pi}_6} = \begin{pmatrix} -q_6 & -1 & 0 \\ 1 & -q_6 & 0 \\ q_5 & q_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu prethodnih matrica, uz uvrštanje: $\mathbf{a}_{O_1} = [\ddot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$, $\rho_{C_1}^{O_1} = [\lambda_{C_1}^{O_1} \ \mu_{C_1}^{O_1} \ \nu_{C_1}^{O_1}]^T$, $\rho_Z^{O_1} = [\lambda_Z^{O_1} \ \mu_Z^{O_1} \ \nu_Z^{O_1}]^T$, $\mathbf{p}_{C_2}^Z = [\xi_{C_2}^Z \ \eta_{C_2}^Z \ \zeta_{C_2}^Z]^T$ i $\mathbf{K}_2 = [k_{ij}^2]_{3 \times 3}$, dobijaju se redom parcijalni izvodi ubrzanja centra mase stapesa i centra mase inkudo-malearnog bloka po pseudoubrzanjima $\ddot{\pi}_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$,

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{C_1}}{\partial \ddot{\pi}_1} = \frac{\partial \mathbf{a}_{C_2}}{\partial \ddot{\pi}_1} = \frac{\partial \mathbf{a}_{O_1}}{\partial \ddot{\pi}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{C_1}}{\partial \ddot{\pi}_2} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_1}{\partial \ddot{\pi}_2} \rho_{C_1}^{O_1} = \begin{bmatrix} -\lambda_{C_1}^{O_1} q_2 + \nu_{C_1}^{O_1} \\ 0 \\ -\lambda_{C_1}^{O_1} - \nu_{C_1}^{O_1} q_2 + \mu_{C_1}^{O_1} q_3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_{C_1}}{\partial \ddot{\pi}_3} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_1}{\partial \ddot{\pi}_3} \rho_{C_1}^{O_1} = \begin{bmatrix} -\mu_{C_1}^{O_1} - \lambda_{C_1}^{O_1} q_3 \\ \lambda_{C_1}^{O_1} - \mu_{C_1}^{O_1} q_3 \\ \mu_{C_1}^{O_1} q_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{a}_{C_1}}{\partial \ddot{\pi}_4} &= \frac{\partial \mathbf{a}_{C_1}}{\partial \ddot{\pi}_5} = \frac{\partial \mathbf{a}_{C_1}}{\partial \ddot{\pi}_6} = 0, \\
\frac{\partial \mathbf{a}_{C_2}}{\partial \ddot{\pi}_2} &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_1}{\partial \ddot{\pi}_2} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} = \begin{bmatrix} -\lambda_Z^{O_1} q_2 + \nu_Z^{O_1} \\ 0 \\ -\lambda_Z^{O_1} - \nu_Z^{O_1} q_2 + \mu_Z^{O_1} q_3 \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial \mathbf{a}_{C_2}}{\partial \ddot{\pi}_3} &= \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_1}{\partial \ddot{\pi}_3} \boldsymbol{\rho}_Z^{O_1} = \begin{bmatrix} -\mu_Z^{O_1} - \lambda_Z^{O_1} q_3 \\ \lambda_Z^{O_1} - \mu_Z^{O_1} q_3 \\ \mu_Z^{O_1} q_2 \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial \mathbf{a}_{C_2}}{\partial \ddot{\pi}_4} &= \mathbf{K}_2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_2}{\partial \ddot{\pi}_4} \mathbf{p}_{C_2}^Z = \begin{bmatrix} k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z + k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z q_4 - \left(k_{12}^2 \eta_{C_2}^Z + k_{13}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) q_5 + k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z q_6 \\ k_{23}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{22}^2 \zeta_{C_2}^Z + k_{21}^2 \eta_{C_2}^Z q_4 - \left(k_{22}^2 \eta_{C_2}^Z + k_{23}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) q_5 + k_{21}^2 \zeta_{C_2}^Z q_6 \\ k_{33}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{32}^2 \zeta_{C_2}^Z + k_{31}^2 \eta_{C_2}^Z q_4 - \left(k_{32}^2 \eta_{C_2}^Z + k_{33}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) q_5 + k_{31}^2 \zeta_{C_2}^Z q_6 \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial \mathbf{a}_{C_2}}{\partial \ddot{\pi}_5} &= \mathbf{K}_2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_2}{\partial \ddot{\pi}_5} \mathbf{p}_{C_2}^Z = \begin{bmatrix} k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z - \left(k_{11}^2 \xi_{C_2}^Z + k_{13}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) q_4 + k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z q_5 + k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z q_6 \\ k_{21}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{23}^2 \xi_{C_2}^Z - \left(k_{21}^2 \xi_{C_2}^Z + k_{23}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) q_4 + k_{22}^2 \xi_{C_2}^Z q_5 + k_{22}^2 \zeta_{C_2}^Z q_6 \\ k_{31}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{33}^2 \xi_{C_2}^Z - \left(k_{31}^2 \xi_{C_2}^Z + k_{33}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) q_4 + k_{32}^2 \xi_{C_2}^Z q_5 + k_{32}^2 \zeta_{C_2}^Z q_6 \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial \mathbf{a}_{C_2}}{\partial \ddot{\pi}_6} &= \mathbf{K}_2 \frac{\partial \ddot{\mathbf{T}}_2}{\partial \ddot{\pi}_6} \mathbf{p}_{C_2}^Z = \begin{bmatrix} k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z + k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z q_4 + k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z q_5 - \left(k_{11}^2 \xi_{C_2}^Z + k_{12}^2 \eta_{C_2}^Z \right) q_6 \\ k_{22}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{21}^2 \eta_{C_2}^Z + k_{23}^2 \eta_{C_2}^Z q_4 + k_{23}^2 \xi_{C_2}^Z q_5 - \left(k_{21}^2 \xi_{C_2}^Z + k_{22}^2 \eta_{C_2}^Z \right) q_6 \\ k_{32}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{31}^2 \eta_{C_2}^Z + k_{33}^2 \eta_{C_2}^Z q_4 + k_{33}^2 \xi_{C_2}^Z q_5 - \left(k_{31}^2 \xi_{C_2}^Z + k_{32}^2 \eta_{C_2}^Z \right) q_6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem veze između generalisanih brzina i pseudobrzina i veze između generalisanih ubrzanja i pseudoubrzanja u izraze za globalna svojstva kretanja predloženog modela, a zatim razvojem takо dobijenih vektora u Tejlorov red u okolini nultih vrednosti generalisanih koordinata uz zadržavanje samo na linearnim članovima, globalna svojstva kretanja predloženog modela postaju

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1(\dot{\pi}_2, \dot{\pi}_3) = \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\pi}_2 \\ \dot{\pi}_3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1(\ddot{\pi}_2, \ddot{\pi}_3) = \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\pi}_2 \\ \ddot{\pi}_3 \end{bmatrix},$$

i

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2(\dot{\pi}_4, \dot{\pi}_5, \dot{\pi}_6) = \begin{bmatrix} \dot{\pi}_4 \\ \dot{\pi}_5 \\ \dot{\pi}_6 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_2(\ddot{\pi}_4, \ddot{\pi}_5, \ddot{\pi}_6) = \begin{bmatrix} \ddot{\pi}_4 \\ \ddot{\pi}_5 \\ \ddot{\pi}_6 \end{bmatrix}.$$

Može se primetiti da projekcije vektora $\boldsymbol{\omega}_2$ i $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ nije potrebno razvijati u Tejlorov red zbog izbora pseudobrzina.

Slično se dobijaju i parcijalni izvodi ugaonih ubrzanja stapesa i inkudo-malearnog bloka po pseudoubrzanjima $\ddot{\pi}_\gamma$, $\gamma = 1 \div 6$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial \ddot{\pi}_1} &= \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial \ddot{\pi}_4} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial \ddot{\pi}_5} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial \ddot{\pi}_6} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\partial \ddot{\pi}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\partial \ddot{\pi}_2} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\partial \ddot{\pi}_3} = 0, \\
\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial \ddot{\pi}_2} &= \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} q_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 q_3 + k_{21}^1 \\ k_{12}^1 q_3 + k_{22}^1 \\ k_{13}^1 q_3 + k_{23}^1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_1}{\partial \ddot{\pi}_3} = \mathbf{K}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{31}^1 \\ k_{32}^1 \\ k_{33}^1 \end{bmatrix}, \\
\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\partial \ddot{\pi}_4} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\partial \ddot{\pi}_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\partial \ddot{\pi}_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

gde je korišćeno da je $\mathbf{K}_1 = [k_{ij}^1]_{3 \times 3}$.

Sada su svi potrebni članovi za generisanje Gibbs-Apelovih diferencijalnih jednačina kretanja (3.54) razvijeni u Tejlorov red. Na osnovu njih se te jednačine mogu zapisati u linearnoj formi u obliku

$$\mathbf{M}_1 \ddot{\pi} = \Xi, \quad (\text{H.4})$$

gde su uvedene oznake $\ddot{\pi} = [\ddot{\pi}_1 \dots \ddot{\pi}_6]^T$ i $\Xi = [\Xi_1 \dots \Xi_6]^T$, i gde je simetrična matrica $\mathbf{M}_1 = [m_{ij}^1]_{6 \times 6}$, konstantna, a elementi su joj

$$\begin{aligned} m_{11}^1 &= (B_1 + B_2), \\ m_{12}^1 &= m_{21}^1 = \left(B_1 \nu_{C_1}^{O_1} + B_2 \nu_Z^{O_1} \right), \\ m_{13}^1 &= m_{31}^1 = - \left(B_1 \mu_{C_1}^{O_1} + B_2 \mu_Z^{O_1} \right), \\ m_{14}^1 &= m_{41}^1 = B_2 \left(k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z \right), \\ m_{15}^1 &= m_{51}^1 = B_2 \left(k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z \right), \\ m_{16}^1 &= m_{61}^1 = B_2 \left(k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z \right), \\ m_{22}^1 &= B_1 \left(\left(\nu_{C_1}^{O_1} \right)^2 + \left(\lambda_{C_1}^{O_1} \right)^2 \right) + \left(k_{21}^1 \right)^2 J_{x_1} + \left(k_{22}^1 \right)^2 J_{y_1} + \left(k_{23}^1 \right)^2 J_{z_1} + B_2 \left(\left(\nu_Z^{O_1} \right)^2 + \left(\lambda_Z^{O_1} \right)^2 \right), \\ m_{23}^1 &= m_{32}^1 = k_{21}^1 k_{31}^1 J_{x_1} + k_{22}^1 k_{32}^1 J_{y_1} + k_{23}^1 k_{33}^1 J_{z_1} - B_1 \mu_{C_1}^{O_1} \nu_{C_1}^{O_1} - B_2 \mu_Z^{O_1} \nu_Z^{O_1}, \\ m_{24}^1 &= m_{42}^1 = B_2 \left(\left(k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \nu_Z^{O_1} + \left(k_{32}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{33}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \lambda_Z^{O_1} \right), \\ m_{25}^1 &= m_{52}^1 = B_2 \left(\left(k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \nu_Z^{O_1} + \left(k_{33}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{31}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \lambda_Z^{O_1} \right), \\ m_{26}^1 &= m_{62}^1 = B_2 \left(\left(k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \nu_Z^{O_1} + \left(k_{31}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{32}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \lambda_Z^{O_1} \right), \\ m_{33}^1 &= B_1 \left(\left(\mu_{C_1}^{O_1} \right)^2 + \left(\lambda_{C_1}^{O_1} \right)^2 \right) + \left(k_{31}^1 \right)^2 J_{x_1} + \left(k_{32}^1 \right)^2 J_{y_1} + \left(k_{33}^1 \right)^2 J_{z_1} + B_2 \left(\left(\mu_Z^{O_1} \right)^2 + \left(\lambda_Z^{O_1} \right)^2 \right), \\ m_{34}^1 &= m_{43}^1 = B_2 \left(\left(k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \mu_Z^{O_1} + \left(k_{23}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{22}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \lambda_Z^{O_1} \right), \\ m_{35}^1 &= m_{53}^1 = B_2 \left(\left(k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \mu_Z^{O_1} + \left(k_{21}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{23}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \lambda_Z^{O_1} \right), \\ m_{36}^1 &= m_{63}^1 = B_2 \left(\left(k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \mu_Z^{O_1} + \left(k_{22}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{21}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \lambda_Z^{O_1} \right), \\ m_{44}^1 &= B_2 \left(\left(k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z \right)^2 + \left(k_{23}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{22}^2 \zeta_{C_2}^Z \right)^2 + \left(k_{33}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{32}^2 \zeta_{C_2}^Z \right)^2 \right) + J_{x_2}, \\ m_{45}^1 &= m_{54}^1 = B_2 \left(k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \left(k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \\ &\quad + B_2 \left(k_{33}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{32}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \left(k_{31}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{33}^2 \xi_{C_2}^Z \right) + B_2 \left(k_{23}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{22}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \left(k_{21}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{23}^2 \xi_{C_2}^Z \right), \\ m_{46}^1 &= m_{64}^1 = B_2 \left(k_{13}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{12}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \left(k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \\ &\quad + B_2 \left(k_{33}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{32}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \left(k_{32}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{31}^2 \eta_{C_2}^Z \right) + B_2 \left(k_{23}^2 \eta_{C_2}^Z - k_{22}^2 \zeta_{C_2}^Z \right) \left(k_{22}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{21}^2 \eta_{C_2}^Z \right), \\ m_{55}^1 &= B_2 \left(\left(k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z \right)^2 + \left(k_{21}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{23}^2 \xi_{C_2}^Z \right)^2 + \left(k_{31}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{33}^2 \xi_{C_2}^Z \right)^2 \right) + J_{y_2}, \\ m_{56}^1 &= B_2 \left(k_{11}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{13}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \left(k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z \right) \\ &\quad + B_2 \left(k_{31}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{33}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \left(k_{32}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{31}^2 \eta_{C_2}^Z \right) + B_2 \left(k_{21}^2 \zeta_{C_2}^Z - k_{23}^2 \xi_{C_2}^Z \right) \left(k_{22}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{21}^2 \eta_{C_2}^Z \right), \\ m_{66}^1 &= B_2 \left(\left(k_{12}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{11}^2 \eta_{C_2}^Z \right)^2 + \left(k_{22}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{21}^2 \eta_{C_2}^Z \right)^2 + \left(k_{32}^2 \xi_{C_2}^Z - k_{31}^2 \eta_{C_2}^Z \right)^2 \right) + J_{z_2}. \end{aligned}$$

Razvojem svih elemenata u jednačinama (G.20) u Tejlorov red u okolini nultih vrednosti generalisanih koordinata, uz zadražavanje samo na linearnim članovima, zatim uvrštavanjem linearne veze između generalisanih brzina i pseudobrzina, generalisane sile postaju

$$\begin{aligned}\Xi_1 &= \sum_{k=1}^5 F_{1k} \kappa_{1kx} + \sum_{i=1}^9 F_{2i} \kappa_{2ix} - k_1 \dot{\pi}_1, \\ \Xi_2 &= \sum_{k=1}^5 F_{1k} \left(\kappa_{1kx} \nu_{1k}^{O_1} - \kappa_{1kz} \lambda_{1k}^{O_1} \right) + \sum_{i=1}^9 F_{2i} \left(\kappa_{2ix} \nu_Z^{O_1} - \kappa_{2iz} \lambda_Z^{O_1} \right) - k_2 \dot{\pi}_2, \\ \Xi_3 &= \sum_{k=1}^5 F_{1k} \left(\kappa_{1ky} \lambda_{1k}^{O_1} - \kappa_{1kx} \mu_{1k}^{O_1} \right) + \sum_{i=1}^9 F_{2i} \left(\kappa_{2iy} \lambda_Z^{O_1} - \kappa_{2ix} \mu_Z^{O_1} \right) - k_2 \dot{\pi}_3, \\ \Xi_4 &= \sum_{i=1}^9 F_{2i} \left(\kappa_{2ix} \left(k_{13}^2 \eta_{2i}^Z - k_{12}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{23}^2 \eta_{2i}^Z - k_{22}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{33}^2 \eta_{2i}^Z - k_{32}^2 \zeta_{2i}^Z \right) \right), \\ \Xi_5 &= \sum_{i=1}^9 F_{2i} \left(\kappa_{2ix} \left(k_{11}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{13}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{21}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{23}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{31}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{33}^2 \xi_{2i}^Z \right) \right), \\ \Xi_6 &= \sum_{i=1}^9 F_{2i} \left(\kappa_{2ix} \left(k_{12}^2 \xi_{2i}^Z - k_{11}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{22}^2 \xi_{2i}^Z - k_{21}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{32}^2 \xi_{2i}^Z - k_{31}^2 \eta_{2i}^Z \right) \right).\end{aligned}$$

Uvođenjem oznaka $\dot{\pi} = [\dot{\pi}_1 \dots \dot{\pi}_6]^T$, $\mathbf{F} = [F_{11} \dots F_{15} \ F_{21} \dots F_{28}]^T$ i $\boldsymbol{\Xi} = [\Xi_1 \dots \Xi_6]^T$ prethodni sistem jednačina se može zapisati kao

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{M}_2 \mathbf{F} + F_{29} \mathbf{V}_1 + \mathbf{M}_3 \dot{\pi}, \quad (\text{H.5})$$

gde su: matrica $\mathbf{M}_2 = [m_{i,j}^2]_{6 \times 13}$, čiji su elementi

$$\begin{aligned}m_{1,j}^2 &= \kappa_{1jx}, \quad j = 1 \div 5, \quad m_{1,j+5}^2 = \kappa_{2jx}, \quad j = 1 \div 8, \\ m_{2,j}^2 &= \kappa_{1jx} \nu_{1j}^{O_1} - \kappa_{1jz} \lambda_{1j}^{O_1}, \quad j = 1 \div 5, \quad m_{2,j+5}^2 = \kappa_{2jx} \nu_Z^{O_1} - \kappa_{2jz} \lambda_Z^{O_1}, \quad j = 1 \div 8, \\ m_{3,j}^2 &= \kappa_{1jy} \lambda_{1j}^{O_1} - \kappa_{1jx} \mu_{1j}^{O_1}, \quad j = 1 \div 5, \quad m_{3,j+5}^2 = \kappa_{2jy} \lambda_Z^{O_1} - \kappa_{2jx} \mu_Z^{O_1}, \quad j = 1 \div 8, \\ m_{4,j}^2 &= 0, \quad j = 1 \div 5, \quad m_{5,j}^2 = 0, \quad j = 1 \div 5, \quad m_{6,j}^2 = 0, \quad j = 1 \div 5, \\ m_{4,j+5}^2 &= \kappa_{2jx} \left(k_{13}^2 \eta_{2j}^Z - k_{12}^2 \zeta_{2j}^Z \right) + \kappa_{2jy} \left(k_{23}^2 \eta_{2j}^Z - k_{22}^2 \zeta_{2j}^Z \right) + \kappa_{2jz} \left(k_{33}^2 \eta_{2j}^Z - k_{32}^2 \zeta_{2j}^Z \right), \quad j = 1 \div 8, \\ m_{5,j+5}^2 &= \kappa_{2jx} \left(k_{11}^2 \zeta_{2j}^Z - k_{13}^2 \xi_{2j}^Z \right) + \kappa_{2jy} \left(k_{21}^2 \zeta_{2j}^Z - k_{23}^2 \xi_{2j}^Z \right) + \kappa_{2jz} \left(k_{31}^2 \zeta_{2j}^Z - k_{33}^2 \xi_{2j}^Z \right), \quad j = 1 \div 8, \\ m_{6,j+5}^2 &= \kappa_{2jx} \left(k_{12}^2 \xi_{2j}^Z - k_{11}^2 \eta_{2j}^Z \right) + \kappa_{2jy} \left(k_{22}^2 \xi_{2j}^Z - k_{21}^2 \eta_{2j}^Z \right) + \kappa_{2jz} \left(k_{32}^2 \xi_{2j}^Z - k_{31}^2 \eta_{2j}^Z \right), \quad j = 1 \div 8,\end{aligned}$$

vektor

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \kappa_{29x} \\ \kappa_{29x} \nu_Z^{O_1} - \kappa_{29z} \lambda_Z^{O_1} \\ \kappa_{29y} \lambda_Z^{O_1} - \kappa_{29x} \mu_Z^{O_1} \\ \kappa_{29x} \left(k_{13}^2 \eta_{29}^Z - k_{12}^2 \zeta_{29}^Z \right) + \kappa_{29y} \left(k_{23}^2 \eta_{29}^Z - k_{22}^2 \zeta_{29}^Z \right) + \kappa_{29z} \left(k_{33}^2 \eta_{29}^Z - k_{32}^2 \zeta_{29}^Z \right) \\ \kappa_{29x} \left(k_{11}^2 \zeta_{29}^Z - k_{13}^2 \xi_{29}^Z \right) + \kappa_{29y} \left(k_{21}^2 \zeta_{29}^Z - k_{23}^2 \xi_{29}^Z \right) + \kappa_{29z} \left(k_{31}^2 \zeta_{29}^Z - k_{33}^2 \xi_{29}^Z \right) \\ \kappa_{29x} \left(k_{12}^2 \xi_{29}^Z - k_{11}^2 \eta_{29}^Z \right) + \kappa_{29y} \left(k_{22}^2 \xi_{29}^Z - k_{21}^2 \eta_{29}^Z \right) + \kappa_{29z} \left(k_{32}^2 \xi_{29}^Z - k_{31}^2 \eta_{29}^Z \right) \end{bmatrix},$$

i matrica $\mathbf{M}_3 = [m_{ij}^3]_{6 \times 6}$ čiji su elementi $m_{11}^3 = -k_1$, $m_{22}^3 = m_{33}^3 = -k_2$, a ostali nula. Sila F_{29} je posebno izdvojena jer predstavlja silu pobude i prikazana je jednačinom (3.12).

Dodatak I

Ekspanziona formula Atanackovića i Stankovića

Ekspanziona formula Atanackovića i Stankovića, videti [Atanacković & Stanković, 2004], omogućava da se levi Riman-Ljuvilov frakcioni izvod funkcije izrazi preko funkcije, njenog prvog izvoda i reda koji sadrži momente te funkcije. Primenom ekspanzione formule α_h -ti izvod ($0 < \alpha_h < 1$) po vremenu funkcije u_h , se može zapisati kao

$$u_h^{(\alpha_h)} = \dot{u}_h t^{1-\alpha_h} K1_h + u_h t^{-\alpha_h} K2_h + K3_h t^{1-\alpha_h} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_h-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(u_h), \quad (\text{I.1})$$

gde Γ stoji za Ojlerovu gama funkciju, videti ([Podlubny, 1999]), konstante $K1_h$, $K2_h$ i $K3_h$, su

$$K1_h = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha_h)} \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_h-1)}{\Gamma(\alpha_h-1)\Gamma(p+1)} \right], \quad (\text{I.2})$$

$$K2_h = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_h)} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha_h)\Gamma(\alpha_h-1)} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_h-1)}{\Gamma(p)} \quad (\text{I.3})$$

$$K3_h = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha_h)\Gamma(\alpha_h-1)}, \quad (\text{I.4})$$

a $m_{p-2}(u_h)$, $p = 2 \div \infty$ su momenti funkcije u_h i predstavljaju dopunske promenljive koje se zadaju na sledeći način

$$m_{p-2}(u_h) = \int_0^t t^{p-2} u_h(\xi) d\xi, \quad p = 2 \div \infty,$$

a u problem uključuju kroz

$$\dot{m}_{p-2}(u_h) = t^{p-2} u_h, \quad p = 2 \div \infty, \quad (\text{I.5})$$

uz početne uslove $m_{p-2}(t=0) = 0$, $p = 2 \div \infty$. Napominje se da iako je konstanta $K1_h$ jednaka nuli kada $p \rightarrow \infty$, videti [Atanacković & Stanković, 2004], pri numeričkom rešavanju koristi se samo konačno mnogo momenata funkcije pa konstanta $K1_h$ nije jednaka nuli. Tako se i sa relativno malim brojem momenata obezbeđuje prihvatljiva tačnost aproksimacije.

Uvrštanjem veličina F_{1k} i Δl_{1k} , $k = 1 \div 5$ umesto u_h , i α_{1k} , $k = 1 \div 5$ umesto α_h u jednačine (I.1) i (I.5) dobija se

$$F_{1k}^{(\alpha_{1k})} = \dot{F}_{1k} t^{1-\alpha_{1k}} K1_{1k} + F_{2i} t^{-\alpha_{2i}} K2_{1k} + K3_{1k} t^{1-\alpha_{2i}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{1k}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(F_{1k}), \quad (\text{I.6})$$

$$\Delta l_{1k}^{(\alpha_{1k})} = (\Delta l_{1k}) \cdot t^{1-\alpha_{1k}} K_{1k} + \Delta l_{1k} t^{-\alpha_{1k}} K_{2k} + K_{3k} t^{1-\alpha_{1k}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{1k}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(\Delta l_{1k}), \quad (I.7)$$

i

$$\dot{m}_{p-2}(F_{1k}) = t^{p-2} F_{1k}, \quad p = 2 \div \infty, \quad (I.8)$$

$$\dot{m}_{p-2}(\Delta l_{1k}) = t^{p-2} \Delta l_{1k}, \quad p = 2 \div \infty, \quad (I.9)$$

gde se konstante K_{1k} , K_{2k} i K_{3k} dobijaju uvrštavanjem $1k$, $k = 1 \div 5$, umesto h u jednačine (I.2), (I.3) i (I.4), respektivno. Promena dužine Δl_{1k} , $k = 1 \div 5$, data je jednačinom (E.1), a (Δl_{1k}) predstavlja njen prvi izvod po vremenu. Slično, uvrštavanjem veličina F_{2i} i Δl_{2i} , $i = 1 \div 8$, umesto u_h , i α_{2i} , $i = 1 \div 8$ umesto α_h u jednačine (I.1) i (I.5), dobija se

$$F_{2i}^{(\alpha_{2i})} = \dot{F}_{2i} t^{1-\alpha_{2i}} K_{12i} + F_{2i} t^{-\alpha_{2i}} K_{22i} + K_{32i} t^{1-\alpha_{2i}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{2i}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(F_{2i}), \quad (I.10)$$

$$\Delta l_{2i}^{(\alpha_{2i})} = (\Delta l_{2i}) \cdot t^{1-\alpha_{2i}} K_{12i} + \Delta l_{2i} t^{-\alpha_{2i}} K_{22i} + K_{32i} t^{1-\alpha_{2i}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{2i}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(\Delta l_{2i}), \quad (I.11)$$

i

$$\dot{m}_{p-2}(F_{2i}) = t^{p-2} F_{2i}, \quad p = 2 \div \infty, \quad (I.12)$$

$$\dot{m}_{p-2}^1(\Delta l_{2i}) = t^{p-2} \Delta l_{2i}, \quad p = 2 \div \infty, \quad (I.13)$$

gde se konstante K_{12i} , K_{22i} i K_{32i} dobijaju uvrštavanjem $2i$, $i = 1 \div 8$, umesto h u jednačine (I.2), (I.3) i (I.4), respektivno. Promena dužine Δl_{2i} , $i = 1 \div 8$, data je jednačinom (E.2), a (Δl_{2i}) predstavlja njen prvi izvod po vremenu.

Sada se uvrštavanjem jednačina (I.6) i (I.7) u jednačinu (3.55) i jednačina (I.10) i (I.11) u jednačinu (3.56), prvi izvodi po vremenu intenziteta sila F_{1k} , $k = 1 \div 5$, i F_{2i} , $i = 1 \div 8$, mogu izraziti kao

$$\begin{aligned} \dot{F}_{1k} &= B_{1k} \frac{\tau_{\varepsilon 1k}}{\tau_{\sigma 1k}} (\Delta l_{1k}) \cdot + B_{1k} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 1k} t^{-\alpha_{1k}} K_{21k}}{\tau_{\sigma 1k} t^{1-\alpha_{1k}} K_{11k}} \Delta l_{1k} - \frac{1 + \tau_{\sigma 1k} t^{-\alpha_{1k}} K_{21k}}{\tau_{\sigma 1k} t^{1-\alpha_{1k}} K_{11k}} F_{1k} \\ &+ \frac{K_{31k}}{K_{11k}} \left\{ \left[B_{1k} \frac{\tau_{\varepsilon 1k}}{\tau_{\sigma 1k}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{1k}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(\Delta l_{1k}) - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{1k}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(F_{1k}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_{2i} &= B_{2i} \frac{\tau_{\varepsilon 2i}}{\tau_{\sigma 2i}} (\Delta l_{2i}) \cdot + B_{2i} \frac{1 + \tau_{\varepsilon 2i} t^{-\alpha_{2i}} K_{22i}}{\tau_{\sigma 2i} t^{1-\alpha_{2i}} K_{12i}} \Delta l_{2i} - \frac{1 + \tau_{\sigma 2i} t^{-\alpha_{2i}} K_{22i}}{\tau_{\sigma 2i} t^{1-\alpha_{2i}} K_{12i}} F_{2i} \\ &+ \frac{K_{32i}}{K_{12i}} \left\{ \left[B_{2i} \frac{\tau_{\varepsilon 2i}}{\tau_{\sigma 2i}} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{2i}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(\Delta l_{2i}) - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p+\alpha_{2i}-1)}{t^p \Gamma(p-1)} m_{p-2}(F_{2i}) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Izvodi po vremenu (Δl_{1k}) , $k = 1 \div 5$, i (Δl_{2i}) , $i = 1 \div 8$, dobijaju se diferenciranjem jednačina (E.1) i (E.2), a nakon uvrštavanja veze između generalisanih brzina i pseudobrzina, jednaki su

$$(\Delta l_{1k}) \cdot = -\kappa_{1kx} \dot{\pi}_1 + \left(\kappa_{1kz} \lambda_{1k}^{O_1} - \kappa_{1kx} \nu_{1k}^{O_1} \right) \dot{\pi}_2 + \left(\kappa_{1kx} \mu_{1k}^{O_1} - \kappa_{1ky} \lambda_{1k}^{O_1} \right) \dot{\pi}_3, \quad k = 1 \div 5$$

$$\begin{aligned} (\Delta l_{2i}) \cdot &= -\kappa_{2ix} \dot{\pi}_1 + \left(\kappa_{2iz} \lambda_Z^{O_1} - \kappa_{2ix} \nu_Z^{O_1} \right) \dot{\pi}_2 + \left(\kappa_{2ix} \mu_Z^{O_1} - \kappa_{2iy} \lambda_Z^{O_1} \right) \dot{\pi}_3 \\ &+ \left(\kappa_{2ix} \left(k_{13}^2 \xi_{2i}^Z - k_{11}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{23}^2 \xi_{2i}^Z - k_{21}^2 \zeta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{33}^2 \xi_{2i}^Z - k_{31}^2 \zeta_{2i}^Z \right) \right) \dot{\pi}_5 \\ &+ \left(\kappa_{2ix} \left(k_{12}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{13}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{22}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{23}^2 \eta_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{32}^2 \zeta_{2i}^Z - k_{33}^2 \eta_{2i}^Z \right) \right) \dot{\pi}_4 \\ &+ \left(\kappa_{2ix} \left(k_{11}^2 \eta_{2i}^Z - k_{12}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iy} \left(k_{21}^2 \eta_{2i}^Z - k_{22}^2 \xi_{2i}^Z \right) + \kappa_{2iz} \left(k_{31}^2 \eta_{2i}^Z - k_{32}^2 \xi_{2i}^Z \right) \right) \dot{\pi}_6, \quad i = 1 \div 8. \end{aligned}$$

Iste veličine se mogu dobiti i diferenciranjem sistema jednačina (E.3) i korišćenjem (H.1), posle čega se dobija

$$(\Delta l) \cdot = \mathbf{M}_l \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}_l \mathbf{M}_4 \dot{\boldsymbol{\pi}},$$

gde su $(\Delta l) \cdot = [(\Delta l_{11}) \cdot \dots (\Delta l_{15}) \cdot \quad (\Delta l_{21}) \cdot \dots (\Delta l_{28}) \cdot]^T$ i $\dot{\boldsymbol{\pi}} = [\dot{\pi}_1 \dots \dot{\pi}_6]^T$.

Pošto se pri numeričkom računanju može uzeti samo konačno mnogo momenata funkcija, $p = 2 \div N$, gde je N prirodan broj i $N \geq 2$.

Bibliografija

- [Ashmore, 2002] Ashmore, Jonathan. 2002. *Signals and Perception: The Fundamentals of Human Sensation*. Palgrave/Open University. Chap. The mechanics of hearing.
- [Atanacković, 2002] Atanacković, T. M. 2002. A modified Zener model of a viscoelastic body. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **14**(2), 137 – 148.
- [Atanacković, 2003] Atanacković, T. M. 2003. On a distributed derivative model of a viscoelastic body. *Comptes Rendus Mécanique*, **331**(10), 687 – 692.
- [Atanacković & Stanković, 2002] Atanacković, T. M., & Stanković, B. 2002. Dynamics of a viscoelastic rod of fractional derivative type. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **82**(6), 377 – 386.
- [Atanacković & Stanković, 2004] Atanacković, T. M., & Stanković, B. 2004. An expansion formula for fractional derivatives and its application. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **7**(3), 365 – 378.
- [Atanacković et al. , 2011a] Atanacković, T.M., Pilipović, S., & Zorica, D. 2011a. Distributed-order fractional wave equation on a finite domain: creep and forced oscillations of a rod. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **23**, 305 – 318.
- [Atanacković et al. , 2011b] Atanacković, T.M., Pilipović, S., & Zorica, D. 2011b. Distributed-order fractional wave equation on a finite domain. Stress relaxation in a rod. *International Journal of Engineering Science*, **49**(2), 175 – 190.
- [Baek & Puria, 2008] Baek, J. D., & Puria, S. 2008. Stapes Model using High-Resolution μ CT. Pages 68421C–1 of: *Proc. of SPIE*, vol. 6842.
- [Bagley & Torvik, 1986] Bagley, R. L., & Torvik, P. J. 1986. On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behavior. *Journal of Rheology*, **30**(1), 133 – 155.
- [Baleanu et al. , 2009] Baleanu, D., Guvenc, Z. B., & Machado, J. A. T. 2009. *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer.
- [Baleanu et al. , 2011] Baleanu, D., Machado, J. A. T., & Luo, A. C. J. 2011. *Fractional Dynamics and Control*. Springer.
- [Baruh, 1999] Baruh, H. 1999. *Analytical dynamics*. WCB/McGraw-Hill.
- [Baruh, 2000] Baruh, H. 2000. Another look at the describing equations of dynamics. *Journal of Chinese Society of Mechanical Engineers*, **21**(1), 15 – 23.
- [Beer et al. , 1999] Beer, H. J., Bornitz, M., Hardtke, H. J., Schmidt, R., Hofmann, G., Vogel, U., Zahnert, T., & Hüttenbrink, K. B. 1999. Modelling of Components of the Human Middle Ear and Simulation of Their Dynamic Behaviour. *Audiology & Neurotology*, **4**(3-4), 156–62.
- [Bell, 1973] Bell, J. F. 1973. *Encyclopedia of Physics Vol. VIa/1 Mechanics of Solids I*. Springer-Verlag, Berlin. Chap. The Experimental Foundations of Solid Mechanics.

- [Benati & Morro, 1990] Benati, M., & Morro, A. 1990. Equations for multibody dynamics. *Memorie di fisica matematica in omaggio a Giovanni Carini nel suo 70 compleanno*, **1**, 291 – 308. Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti, LXVIII.
- [Berkovitz et al. , 2007] Berkovitz, B., Kirsch, C. Moxham, B. J., Alusi, G., & Cheesman, T. 2007. *3D Head and Neck Anatomy with Special Senses and Basic Neuroanatomy*. DVD ROM.
- [Brančík, 1999] Brančík, L. 1999. Programs for fast numerical inversion of Laplace transforms in MATLAB language environment. *Pages 27–39 of: Proceedings of the 7th Conference MATLAB'99, Prague, Czech Republic*.
- [Brančík, 2011] Brančík, L. 2011. *MATLAB for Engineers - Applications in Control, Electrical Engineering, IT and Robotics*. InTech. Chap. Numerical Inverse Laplace Transforms for Electrical Engineering Simulation, pages 51 – 74.
- [Brinckmann et al. , 2002] Brinckmann, P., Frobin, W., & Leivseth, G. 2002. *Musculoskeletal biomechanics*. Thieme Medical Publishers, Incorporated.
- [Cheng & Gan, 2007] Cheng, T., & Gan, R. Z. 2007. Mechanical properties of stapedial tendon in human middle ear. *Journal of Biomechanical Engineering*, **129**, 913.
- [Cheng & Gan, 2008a] Cheng, T., & Gan, R. Z. 2008a. Experimental measurement and modeling analysis on mechanical properties of tensor tympani tendon. *Medical engineering & Physics*, **30**(3), 358 – 366.
- [Cheng & Gan, 2008b] Cheng, T., & Gan, R.Z. 2008b. Mechanical properties of anterior malleolar ligament from experimental measurement and material modeling analysis. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **7**(5), 387 – 394.
- [Cheng et al. , 2007] Cheng, T., Dai, C., & Gan, R. Z. 2007. Viscoelastic properties of human tympanic membrane. *Annals of Biomedical Engineering*, **35**(2), 305 – 314.
- [Chien et al. , 2009] Chien, W., Rosowski, J. J., Ravicz, M. E., Rauch, S. D., Smullen, J., & Merchant, S. N. 2009. Measurements of stapes velocity in live human ears. *Hearing Research*, **249**(1-2), 54 – 61.
- [ClinicalGate, 2016] ClinicalGate. 2016 (April 18.). *The Ear*. <http://clinicalgate.com/the-ear-2/>.
- [Cohen, 2007] Cohen, A. M. 2007. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Numerical Methods And Algorithms, vol. 5. Springer.
- [Dankuc et al. , 2010] Dankuc, D. V., Kovinčić, N. I., & Spasić, D. T. 2010. A New Model for Middle Ear Structures with Fractional Type Dissipation Pattern. *In: Proceedings of 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*.
- [Daphalapurkar et al. , 2009] Daphalapurkar, N. P., Dai, C., Gan, R. Z., & Lu, H. 2009. Characterization of the linearly viscoelastic behavior of human tympanic membrane by nanoindentation. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **2**(1), 82 – 92.
- [Decraemer & Funnell, 2008] Decraemer, W. F., & Funnell, W. R. J. 2008. Anatomical and mechanical properties of the tympanic membrane. *Pages 51 – 84 of: Ars, B. (ed), Chronic Otitis Media: Pathogenesis-Oriented Therapeutic Management*. Kugler Publications.
- [Doetsch, 1974] Doetsch, G. 1974. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer Berlin.
- [Dolićanin et al. , 2012] Dolićanin, Z. C., Kovinčić, N. I., & Spasić, D. T. 2012. Detection of the early glaucoma stage by use of fractional calculus. *In: The 5th Symposium on Fractional Differentiation and its Applications, Hohai University, Nanjing, China*.
- [Eiber & Freitag, 2002] Eiber, A., & Freitag, H. G. 2002. On Simulation Models in Otology. *Multibody System Dynamics*, **8**, 197 – 217.

- [Eiber *et al.*, 2012] Eiber, A., Huber, A. M., Lauxmann, M., Chatzimichalis, M., Sequeira, D., & Sim, J. H. 2012. Contribution of complex stapes motion to cochlea activation. *Hearing Research*, **284**(1–2), 82 – 92.
- [Enelund & Lesieutre, 1999] Enelund, Mikael, & Lesieutre, George A. 1999. Time domain modeling of damping using anelastic displacement fields and fractional calculus. *International Journal of Solids and Structures*, **36**(29), 4447 – 4472.
- [Feng & Gan, 2004] Feng, B., & Gan, R. Z. 2004. Lumped parametric model of the human ear for sound transmission. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **3**, 33 – 47.
- [Ferrazzini, 2003] Ferrazzini, Mattia. 2003. *Virtual middle ear: a dynamic mathematical model based on the finite element method*. Ph.D. thesis, Technische Wissenschaften ETH Zürich, Zürich.
- [Fung, 1993] Fung, Y. C. 1993. *Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues*. Springer.
- [Funnell, 1975] Funnell, W. R. J. 1975. *A Theoretical Study of Eardrum Vibrations Using the Finite-Element Method*. Ph.D. thesis, McGill University, Canada.
- [Gaihede *et al.*, 2007] Gaihede, M., Liao, D., & Gregersen, H. 2007. In vivo areal modulus of elasticity estimation of the human tympanic membrane system: modelling of middle ear mechanical function in normal young and aged ears. *Physics in Medicine and Biology*, **52**, 803.
- [Gan *et al.*, 2004] Gan, R. Z., Feng, B., & Sun, Q. 2004. Three-Dimensional Finite Element Modeling of Human Ear for Sound Transmission. *Annals of Biomedical Engineering*, **32**, 847 – 859.
- [Gan *et al.*, 2011] Gan, R. Z., Yang, F., Zhang, X., & Nakmali, D. 2011. Mechanical properties of stapedial annular ligament. *Medical engineering & Physics*, **33**(3), 330 – 339.
- [Garland, 2011] Garland, Philip. 2011. A lumped parameter mechanical model of tensor tympani muscle contraction of the middle ear. *Proceedings of Meetings on Acoustics*, **11**(1), 050001.
- [Gilroy *et al.*, 2012] Gilroy, A.M., MacPherson, B.R., & Ross, L.M. 2012. *Atlas of Anatomy*. Thieme Anatomy. Thieme.
- [Glocker, 2001] Glocker, C. 2001. *Set-Valued Force Laws: Dynamics of Non-Smooth Systems*. Lecture Notes in Applied Mechanics, V. 1. Springer.
- [Goode *et al.*, 1994] Goode, R. L., Killion, M., Nakamura, K., & Nishihara, S. 1994. New knowledge about the function of the human middle ear: development of an improved analog model. *Otology & Neurotology*, **15**, 145 – 145.
- [Grahovac, 2011] Grahovac, N. 2011. *Analiza disipacije energije u problemima sudara dva ili više tela*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija.
- [Grahovac *et al.*, 2012] Grahovac, N., Žigić, M., & Spasić, D. 2012. On impact scripts with both fractional and dry friction type of dissipation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **22**(04), 1250076.
- [Grahovac & Žigić, 2010] Grahovac, N. M., & Žigić, M. M. 2010. Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**(5), 1695 – 1700.
- [Guz & Warmiński, 2009] Guz, K., & Warmiński, J. 2009. Modelling of a Human Middle Ear System. In: *Modern Techniques in Mechanical Engineering*. Antoni Źwię, Jerzy Lipski.
- [Hato *et al.*, 2003] Hato, N., Stenfelt, S., & Goode, R. L. 2003. Three-dimensional stapes footplate motion in human temporal bones. *Audiology & Neurotology*, **8**(3), 140 – 152.
- [Hilfer, 2000] Hilfer, R. 2000. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific.

- [Huber *et al.*, 2001a] Huber, A., Linder, T., Ferrazzini, M., Schmid, S., Dillier, N., Stoeckli, S., Fisch, U., *et al.*. 2001a. Intraoperative assessment of stapes movement. *Annals of Otology, Rhinology & Laryngology*, **110**(1), 31 – 35.
- [Huber *et al.*, 2001b] Huber, A. M., Schwab, C., Linder, T., Stoeckli, S. J., Ferrazzini, M., Dillier, N., & Fisch, U. 2001b. Evaluation of eardrum laser Doppler interferometry as a diagnostic tool. *The Laryngoscope*, **111**(3), 501 – 507.
- [Huber *et al.*, 2008] Huber, A. M., Sequeira, D., Breuninger, C., & Eiber, A. 2008. The effects of complex stapes motion on the response of the cochlea. *Otology & Neurotology*, **29**(8), 1187.
- [Hudde & Weistenhöfer, 2006] Hudde, Herbert, & Weistenhöfer, Christian. 2006. Key features of the human middle ear. *ORL*, **68**(6), 324 – 328.
- [Jahnke, 2003] Jahnke, K. 2003. *Middle Ear Surgery*. Current Topics in Otolaryngology-Head and Neck Surgery. Thieme.
- [Kane, 1961] Kane, T. R. 1961. Dynamics of nonholonomic systems. *Journal of Applied Mechanics*, **28**, 574 – 578.
- [Katsikadelis, 2002] Katsikadelis, John. T. 2002. *Boundary elements, theory and applications*. Elsevier. English to Serbian translation done by D.T. Spasic, 2011. Gradjevinska Knjiga, Beograd.
- [Keener & Sneyd, 2001] Keener, J., & Sneyd, J. 2001. *Mathematical Physiology*. Interdisciplinary applied mathematics: Mathematical biology. Springer.
- [Kennedy & Eberhart, 1995] Kennedy, J., & Eberhart, R. 1995. Particle swarm optimization. *Pages 1942–1948 of: Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference on*, vol. 4. IEEE.
- [Lai *et al.*, 2009] Lai, W. M., Rubin, D., & Krempel, E. 2009. *Introduction to Continuum Mechanics*. Butterworth Heinemann. Butterworth-Heinemann/Elsevier.
- [Li *et al.*, 2011] Li, Changpin, Chen, An, & Ye, Junjie. 2011. Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation. *Journal of Computational Physics*, **230**(9), 3352 – 3368.
- [London, 1990] London, K. W. 1990. Derivation of dynamic equations and evaluation of the Kane methodology. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Luo *et al.*, 2009] Luo, H., Lu, H., Dai, C., & Gan, R. Z. 2009. A comparison of Young's modulus for normal and diseased human eardrums at high strain rates. *International Journal of Experimental and Computational Biomechanics*, **1**(1), 1 – 22.
- [Magin, 2006] Magin, R. L. 2006. *Fractional Calculus in Bioengineering*. Begell House Publishers.
- [Mainardi, 2010] Mainardi, F. 2010. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. Imperial College Press.
- [Mainardi & Gorenflo, 2000] Mainardi, F., & Gorenflo, R. 2000. On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **118**(1), 283 – 299.
- [Markeev, 1999] Markeev, A. P. 1999. *Theoretical Mechanics*. CheRo, Moscow. (in Russian).
- [Meddis *et al.*, 2010] Meddis, R., Lopez-Poveda, E. A., & Fay, R. R. 2010. Auditory Periphery: From Pinna to Auditory Nerve. *Pages 7–38 of: Meddis, Ray, Lopez-Poveda, Enrique A., Fay, Richard R., & Popper, Arthur N. (eds), Computational Models of the Auditory System*. Springer Handbook of Auditory Research, vol. 35. Springer US.
- [Miller & Ross, 1993] Miller, K. S., & Ross, B. 1993. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. A Wiley-Interscience publication. John Wiley & Sons.

- [Møller, 1961] Møller, A. R. 1961. Network model of the middle ear. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **33**, 168 – 176.
- [Møller, 2006] Møller, A. R. 2006. *Hearing: Anatomy, Physiology, and Disorders of the Auditory System*. Academic Press.
- [Monje et al. , 2010] Monje, C. A., Chen, Y. Q., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu, V. 2010. *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Advances in Industrial Control. Springer.
- [Muller et al. , 2008] Muller, J. H., Scheffer, C., & Elvin, A. 2008. In-vivo detection of patellar tendon creep using a fibre-optic sensor. *International Journal of Medical Engineering and Informatics*, **1**(2), 155 – 173.
- [Oldham & Spanier, 1974] Oldham, K. B., & Spanier, J. 1974. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press.
- [Parekh et al. , 2009] Parekh, Aron, Mantle, Belinda, Banks, Juliane, Swarts, J Douglas, Badylak, Stephen F, Dohar, Joseph E, & Hebda, Patricia A. 2009. Repair of the tympanic membrane with urinary bladder matrix. *The Laryngoscope*, **119**(6), 1206–1213.
- [Parent & Allen, 2010] Parent, Pierre, & Allen, Jont B. 2010. Time-domain "wave"model of the human tympanic membrane. *Hearing Research*, **263**(1 - 2), 152 – 167.
- [Paul, 1981] Paul, R. P. 1981. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control: The Computer Control of Robot Manipulators*. Artificial Intelligence Series. Mit Press.
- [Petrović et al. , 2005] Petrović, L. M., Spasić, D. T., & Atanacković, T. M. 2005. On a mathematical model of a human root dentin. *Dental Materials*, **21**(2), 125 – 128.
- [Podlubny, 2000] Podlubny, I. 2000. Matrix approach to discrete fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **3**(4), 359 – 386.
- [Podlubny, 1999] Podlubny, Igor. 1999. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press.
- [Prevost et al. , 2011] Prevost, Thibault P., Jin, Guang, de Moya, Marc A., Alam, Hasan B., Suresh, Subra, & Socrate, Simona. 2011. Dynamic mechanical response of brain tissue in indentation in vivo, in situ and in vitro. *Acta Biomaterialia*, **7**(12), 4090 – 4101.
- [Pritz, 1996] Pritz, T. 1996. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, **195**(1), 103 – 115.
- [Pritz, 2003] Pritz, T. 2003. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *Journal of Sound and Vibration*, **265**(5), 935 – 952.
- [Ramirez & Coimbra, 2007] Ramirez, L. E. S., & Coimbra, C. F. M. 2007. A variable order constitutive relation for viscoelasticity. *Annalen der Physik*, **16**(7-8), 543 – 552.
- [Rapaić & Kanović, 2009] Rapaić, M. R., & Kanović, Z. 2009. Time-varying PSO-convergence analysis, convergence-related parameterization and new parameter adjustment schemes. *Information processing letters*, **109**(11), 548 – 552.
- [Rossikhin & Shitikova, 2001] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. 2001. Analysis of dynamic behaviour of viscoelastic rods whose rheological models contain fractional derivatives of two different orders. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **81**(6), 363 – 376.
- [Ruggero & Temchin, 2003] Ruggero, M. A., & Temchin, A. N. 2003. Middle-ear transmission in humans: wide-band, not frequency-tuned? *Acoustics research letters online: ARLO*, **4**, 53 – 58.

- [Sabatier *et al.*, 2010] Sabatier, J., Agrawal, O. P., & Machado, J. A. T. 2010. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer.
- [Semblat, 2009] Semblat, J. F. 2009. Rheological interpretation of Rayleigh damping. *arXiv preprint arXiv:0901.3717*.
- [Šercer, 1966] Šercer, A. 1966. *Otorinolaringologija*. Jugoslovenski leksikografski zavod, Zagreb.
- [Sheng *et al.*, 2011a] Sheng, H., Chen, Y. Q., & Qiu, T. S. 2011a. *Fractional Processes and Fractional-Order Signal Processing: Techniques and Applications*. Signals and Communication Technology. Springer.
- [Sheng *et al.*, 2010] Sheng, Hu, Li, Yan, & Chen, YangQuan. 2010. Application of Numerical Inverse Laplace Transform Algorithms in Fractional Calculus. In: *Proceedings of 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications*.
- [Sheng *et al.*, 2011b] Sheng, Hu, Li, Yan, & Chen, YangQuan. 2011b. Application of numerical inverse Laplace transform algorithms in fractional calculus. *Journal of the Franklin Institute*, **348**(2), 315 – 330.
- [Sim & Puria, 2008] Sim, J. H., & Puria, S. 2008. Soft tissue morphometry of the malleus–incus complex from micro-CT imaging. *JARO - Journal of the Association for Research in Otolaryngology*, **9**(1), 5 – 21.
- [Sim *et al.*, 2007] Sim, J. H., Puria, S., & Steele, C. R. 2007. Calculation of inertial properties of the malleus incus complex from micro-CT imaging. *J. Mech. Mater. Struct.*, **2**, 1515 – 1524.
- [Sim *et al.*, 2010] Sim, J. H., Chatzimichalis, M., Lauxmann, M., Röösli, C., Eiber, A., & Huber, A. M. 2010. Complex stapes motions in human ears. *JARO - Journal of the Association for Research in Otolaryngology*, **11**(3), 329 – 341.
- [Spasić, 1993] Spasić, D. T. 1993. *On stability of a compressed and twisted linearly elastic rod*. Ph.D. thesis, University of Novi Sad, Serbia.
- [Spasić, 2012] Spasić, D. T. 2012. A note on the Atanackovic-Stankovic expansion formula for fractional derivatives and the Leibniz rule. In: *The 5th Symposium on Fractional Differentiation and its Applications*, Hohai University, Nanjing, China.
- [Spasić, 2014a] Spasić, D. T. 2014a. *Advanced topics on modeling, system stability and control applications of fractional calculus*. WSEAS Press. Chap. A Thermodynamically Consistent Rheological Model for Engineering Applications, pages 93 – 124.
- [Spasić, 2014b] Spasić, D. T. 2014b. *Mehanika 1 - osnove*. Rukopis u pripremi.
- [Spasić, 2014c] Spasić, D. T. 2014c. *Mehanika 2 - opšte*. Rukopis u pripremi.
- [Spasić & Charalambakis, 2002] Spasić, D. T., & Charalambakis, N. C. 2002. Forced vibrations with fractional type of dissipation. In: *Proceedings of the International Conference on Non-smooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering*, Thessaloniki, vol. 323.
- [Spasić & Mitić, 2007] Spasić, D. T., & Mitić, I. M. 2007. A New Model for Biomechanics of Soft Tissue in Cardiovascular Systems. In: *First Serbian Congress on Mechanics*, Kopaonik.
- [Spasic *et al.*, 2004] Spasic, D. T., Nedeljkov, M., & Milutinovic, M. 2004. A note on airplane landing problem. In: *Proceedings of the First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, (Bordeaux, France).
- [Spasic *et al.*, 2016] Spasic, D. T., Kovincic, N. I., & Dankuc, D. V. 2016. A new material identification pattern for the fractional Kelvin-Zener model describing biomaterials and human tissues. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **37**, 193 – 199.

- [Spiegel, 1965] Spiegel, M. R. 1965. *Schaum's Outline of Laplace Transforms*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill.
- [Stieger et al. , 2007] Stieger, C., Bernhard, H., Waeckerlin, D., Kompis, M., Burger, J., Haensler, R., et al. . 2007. Human temporal bones versus mechanical model to evaluate three middle ear transducers. *Journal of rehabilitation research and development*, **44**(3), 407 – 416.
- [Sun et al. , 2002] Sun, Q., Gan, R. Z., Chang, K. . H., & Dormer, K. J. 2002. Computer-integrated finite element modeling of human middle ear. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, **1**, 109 – 122.
- [Troyer et al. , 2012] Troyer, Kevin L., Estep, Donald J., & Puttlitz, Christian M. 2012. Viscoelastic effects during loading play an integral role in soft tissue mechanics. *Acta Biomaterialia*, **8**(1), 234 – 243.
- [Varvak, 1977] Varvak, P.M. 1977. *New Methods of Solving Problems of Strength of Materials (in Russian)*. Viša škola, Kiev.
- [Vas & Nagy, 2006] Vas, L.M., & Nagy, P. 2006. Relationship between the tensile and stress relaxation behaviour of polypropylene. *Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering*, **50**(2), 147 – 168.
- [Volandri et al. , 2011] Volandri, G., Di Puccio, F., Forte, P., & Carmignani, C. 2011. Biomechanics of the tympanic membrane. *Journal of Biomechanics*, **44**(7), 1219 – 1236.
- [Volandri et al. , 2012] Volandri, G., Puccio, F. Di, Forte, P., & Manetti, S. 2012. Model-oriented review and multi-body simulation of the ossicular chain of the human middle ear. *Medical Engineering & Physics*, **34**(9), 1339 – 1355.
- [Voss et al. , 2000] Voss, S.E., Rosowski, J.J., Merchant, S.N., & Peake, W.T. 2000. Acoustic responses of the human middle ear. *Hearing Research*, **150**(1-2), 43 – 69.
- [Weistenhöfer & Hudde, 1999] Weistenhöfer, C., & Hudde, H. 1999. Determination of the shape and inertia properties of the human auditory ossicles. *Audiology & Neurotology*, **4**(3-4), 192 – 196.
- [Willi et al. , 2002] Willi, U. B., Ferrazzini, M. A., & Huber, A. M. 2002. The incudo-malleolar joint and sound transmission losses. *Hearing Research*, **174**(1-2), 32 – 44.
- [Wu et al. , 2001] Wu, J. L., Chen, C. H., & Chen, C. F. 2001. Numerical inversion of Laplace transform using Haar wavelet operational matrices. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, **48**(1), 120 – 122.
- [Yao et al. , 2010] Yao, W., Zhou, H., Hu, B., Huang, X., & Li, X. 2010. Research on ossicular chain mechanics model. *Mathematical Problems in Engineering*, **2010**.
- [Zhao et al. , 2009] Zhao, Fei, Koike, Takuji, Wang, Jie, Sienz, Hans, & Meredith, Rhys. 2009. Finite element analysis of the middle ear transfer functions and related pathologies. *Medical Engineering & Physics*, **31**(8), 907 – 916.
- [Žigić, 2012] Žigić, M. 2012. *Oscilacije konstrukcije sa pasivnim prigušivačima frakcionog tipa i suvim trenjem pri seizmičkom dejstvu*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Srbija.
- [Zwislocki, 1962] Zwislocki, J. 1962. Analysis of the Middle-Ear Function. Part I: Input Impedance. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **34**, 1514 – 1523.