

# УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

## ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

### ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

<b>I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ</b>
<p>1. Датум и орган који је именовao комисију <b>22.09.2016. године, Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду на 19. седници</b></p> <p>2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• академик др Стеван Пилиповић, редовни професор, Анализа и вероватноћа, изабран у звање <b>25. 02. 1988. године, Природно-математички факултет у Новом Саду, председник</b></li><li>• др Данијела Рајтер-Ћирић, редовни професор, Анализа и вероватноћа, изабрана у звање <b>05. 03. 2012. године, Природно-математички факултет у Новом Саду, ментор</b></li><li>• др Марко Недељков, редовни професор, Анализа и вероватноћа, изабран у звање <b>01.07.2005. године, Природно-математички факултет у Новом Саду, члан</b></li><li>• академик др Теодор Атанацковић, професор емеритус, Механика, изабран у звање <b>13.02.2014. године, Факултет техничких наука у Новом Саду, члан</b></li></ul>
<b>II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ</b>
<p>1. Име, име једног родитеља, презиме: <b>Милош, Радован, Јапунцић</b></p> <p>2. Датум рођења, општина, држава: <b>01.02.1979. године, Кула, Република Србија</b></p> <p>3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив <b>Природно-математички факултет у Новом Саду, Професор математике – теоријско усмерење, професор математике – теоријско усмерење</b></p> <p>4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија <b>2010. године, Математика</b></p> <p>5. Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране: <b>Природно-математички факултет у Новом Саду, Ефикасност модификација детерминистичких поступака у решавању проблема стохастичке оптимизације, Нумеричка математика, 01.10.2010. године</b></p>

6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука:

**Нумеричка математика**

**III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

**Уопштена решења неких класа фракционих парцијалних диференцијалних једначина**

**IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

Докторска дисертација је прегледно написана на 173 стране. Дисертација садржи све неопходне делове научног рада, уобличене у пет делова:

1. Увод
2. Уопштене полугрупе и уопштени оператори решења
3. Еволуционе једначине са просторно фракционим диференцијалним операторима
4. Фракционе еволуционе једначине реда  $0 < \alpha < 1$
5. Фракционе еволуционе једначине реда  $1 < \alpha < 2$

Дисертација такође садржи и друге предвиђене елементе: Предговор, Биографију кандидата и Кључну документацијску информацију (која садржи изводе и основне податке о докторској дисертацији на српском и енглеском језику). У докторској дисертацији има укупно 88 библиографских јединица и нема табела, слика и графика. Као прилог на крају дисертације наведен је Додатак који служи да читаоцу омогући лакше праћење изложених резултата.

Сви резултати презентовани у дисертацији су јасно и прецизно формулисани, обрађена је актуелна проблематика решавања Кошијевог проблема фракционих диференцијалних једначина са варијабилним коефицијентима. Дисертација у целини, као и њени појединачни делови имају добро систематизовану структуру и план излагања. Уводни део дисертације је добро организован, садржи све релевантне дефиниције и теореме потребне за разумевање даљих делова излагања. Друга глава (осим првог поглавља), као и трећа, четврта и пета глава дисертације садрже оригиналне резултате истраживања кандидата.

## **V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

### **Наслов**

Наслов докторске дисертације је јасно и прецизно формулисан, одражава садржај истраживања, и у директној је вези са разматраном проблематиком.

### **Увод**

У уводној глави наведене су дефиниције и основне особине фракционих простора Собољева, фракционих извода који се јављају у разматраним једначинама, односно Митаг-Лефлерове функције. Поред тога, дат је преглед познатих теорија као што су теорија равномерно непрекидних полугрупа оператора, косинусних оператора, односно, оператора решења. Већи део тврђења представља добро познате резултате, па је већина тврђења дата без доказа. Преостали, оригинални резултати, везани за помоћна тврђења, наведени су са комплетним доказима.

### **Уопштене полугрупе и уопштени оператори решења**

Друга глава садржи преглед резултата везаних за уопштене равномерно непрекидне полугрупе оператора, репрезентацију решења Кошијевог проблема за фракционе еволуционе једначине реда  $0 < \alpha < 1$  у операторском облику, као и одговарајуће интегралне репрезентације неопходне за рад у окружењу Коломбоових простора уопштених функција. Такође, конструисани су уопштени равномерно непрекидни оператори решења, испитане њихове основне особине, као и њихових инфинитезималних генератора, односно, одговарајуће релације међу њима. Сви резултати презентовани у овој глави, изузев првог поглавља, представљају оригиналне резултате.

### **Еволуционе једначине са просторно фракционим диференцијалним операторима**

У трећој глави, применом уопштених равномерно непрекидних полугрупа оператора, решаван је Кошијев проблем одабраних еволуционих једначина са просторно фракционим изводима реда  $0 < \alpha < 2$  и коефицијентима који зависе од  $x$  и  $t$ . Испитивани су услови који се тичу егзистенције и јединствености решења, најпре на одговарајућим Коломбоовим просторима дефинисаним на просторима Собољева целобројног реда. Након тога, претходни простори решења су проширени на Коломбоове просторе дефинисане на просторима Собољева произвољног реда. У оба случаја, показана је асоцираност нерегуларизованог и одговарајућег регуларизованог фракционог оператора, као и асоцираност решења полазног и апроксимативног Кошијевог проблема. Претходна тврђења доказана су у случају левог Љувиловог фракционог извода, при чему добијени резултати важе и у случају десног Љувиловог фракционог извода, односно, Рисовог фракционог извода. Сви резултати презентовани у овој глави представљају оригиналне резултате.

### **Фракционе еволуционе једначине реда $0 < \alpha < 1$**

Четврта глава посвећена је решавању фракционих еволуционих једначина са Капутовим фракционим изводом реда  $0 < \alpha < 1$ , линеарним, затвореним и густо дефинисаним оператором на простору Собољева целобројног реда и коефицијентима који зависе од  $x$ . Доказана је егзистенција и јединственост решења на одговарајућем Коломбоовом простору, применом уведене теорије уопштених равномерно непрекидних оператора решења. Поред тога, презентована је анализа асоцираности решења полазне и одговарајуће апроксимативне једначине. На крају, за истакнуте представнике ове класе једначина, илустрована је примена уведених уопштених оператора решења на решавање Кошијевог проблема. Сви резултати презентовани у овој глави представљају оригиналне резултате.

### **Фракционе еволуционе једначине реда $1 < \alpha < 2$**

У петој глави, на сличан начин као у претходној глави, апроксимативно је решаван Кошијев проблем фракционих еволуционих једначина са Капутовим фракционим изводом реда  $1 < \alpha < 2$ . Опет су одабране једначине решаване апроксимативно, дата је репрезентација решења у случају када је други почетни услов хомоген, као и одговарајуће интегралне репрезентације погодне за рад у Коломбоовом окружењу. Теорија уопштених равномерно непрекидних оператора решења уведена у

другој глави, допуњена је неопходним тврђењима за случај  $1 < \alpha < 2$ , која се односе на основне особине оператора решења, њихових инфинитезималних генератора, односно, одговарајуће релације међу њима. Резултати везани за егзистенцију и јединственост решења апроксимативне једначине доказани су применом теорије уопштених униформно непрекидних оператора решења, испитани су услови асоцираности решења полазне и одговарајуће апроксимативне једначине. Такође, за истакнуте представнике ове класе једначина, илустрована је примена уведених уопштених оператора решења на решавање Кошијевог проблема. Сви резултати презентовани у овој глави представљају оригиналне резултате.

На крају дисертације дат је Додатак, који садржи преглед ознака, основних појмова, дефиниција и корисних неједнакости које су коришћене за добијање многобројних резултата презентованих у дисертацији.

#### **Литература**

Литература обухвата 88 библиографских јединица релеватних за испитивану тематику, наведених у складу са важећим правилима за цитирање. Литературни наводи су актуелни и адекватно одабрани за компарацију са резултатима докторске дисертације.

#### **VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ**

**M. Japundžić, D. Rajter-Ćirić, *Reaction-advection-diffusion equations with space fractional derivatives and variable coefficients on infinite domain*, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 18(4) (2015), 911-950. DOI: 10.1515/fca-2015-0055 [M21]**

## **VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА**

Тематски, резултати дисертације се могу поделити на два дела. У првом делу разматране су нехомогене еволуционе једначине са просторно фракционим диференцијалним операторима реда  $0 < \alpha < 2$  и коефицијентима који зависе од  $x$  и  $t$ . У разматраним једначинама за просторно фракционе изводи бирани су леви и десни Љувилов фракциони извод, односно, Рисов фракциони извод. Добијени резултати се односе на асоцираност нерегуларизованог и одговарајућег регуларизованог фракционог оператора, егзистенцију и јединственост решења Кошијевог проблема за разматране једначине, као и асоцираност решења полазног и апроксимативног проблема. Сви резултати су добијени применом уопштених униформно непрекидних полугрупа оператора.

У другом делу дисертације проучаване су нехомогене фракционе еволуционе једначине са Капутовим фракционим изводом реда  $0 < \alpha < 2$ , линеарним, затвореним и густо дефинисаним оператором на просторима Собољева целобројног реда и коефицијентима који зависе од  $x$ . Просторно фракциони изводи у једначинама су леви и десни Љувилов фракциони извод, односно, Рисов фракциони извод. Доказана је егзистенција и јединственост решења Кошијевог проблема за разматране једначине, као и асоцираност решења полазног и апроксимативног проблема. За потребе решавања ове класе једначина уведени су уопштени униформно непрекидни оператори решења и илустрована је њихова примена на решавање истакнутих представника ове класе једначина.

## **VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА**

Добијени резултати у дисертацији су актуелни и на високом теоријском нивоу, оригинални су, квалитетни, и од изузетног значаја за савремене токове науке што обезбеђује релевантност тезе. Приказ свих резултата истраживања је добро организован по логичким целинама, формулације резултате су математички прецизне, докази теорема су тачно изведени. За сваку класу једначина које су разматране дата је и мотивација за истраживање кроз конкретне примере.

Комисија позитивно оцењује начин приказа и тумачења резултата истраживања.

## **IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме

**Дисертација је написана у складу са образложењем које је кандидат доставио приликом пријаве теме.**

2. Да ли дисертација садржи све битне елементе

**Дисертација садржи све битне елементе научно-истраживачког рада и представља комплетну и заокружену целину.**

3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци

**Најпре, оригинални допринос представља апроксимативно решавање одабраних класа фракционих једначина са варијабилним коефицијентима користећи операторски приступ, односно, полугрупе оператора или општије, операторе решења као генерализацију полугрупа оператора и косинусних оператора.**

**Оригинални резултати добијени у оквиру рада на дисертацији могу се поделити у две групе. Прву групу чине резултати добијени решавањем еволуционих једначина са просторно фракционим диференцијалним операторима (Глава 3). Доказана је егзистенција и јединственост апроксимативног решења разматраних класа фракционих једначина. Крајњи исход проучавања ове класе једначина је нова процедура за апроксимативно решавање**

Кошијевог проблема нехомогених еволуционих једначина са просторно фракционим изводима и варијабилним коефицијентима.

Друга група оригиналних резултата се односи на конструкцију уопштених униформно непрекидних оператора решења (Глава 2) и примену уведених уопштених оператора на решавање фракционих еволуционих једначина са варијабилним коефицијентима (Глава 4 и Глава 5). Доказана је егзистенција и јединственост апроксимативног решења разматраних класа фракционих једначина. Као резултат разматрања ове класе једначина добијена је нова процедура за апроксимативно решавање фракционих еволуционих једначина са варијабилним коефицијентима.

4. Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања

Дисертација нема недостатака који би утицали на резултате истраживања.

#### **X ПРЕДЛОГ:**

На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже: да се докторска дисертација „Уопштена решења неких класа фракционих парцијалних диференцијалних једначина“ прихвати, а кандидату Милошу Јапунџићу одобри одбрана.

Нови Сад, 07.10.2016.

#### ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

---

академик др Стеван Пилиповић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, председник

---

др Данијела Рајтер-Ћирић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, ментор

---

др Марко Недељков, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, члан

---

академик др Теодор Атанацковић, професор емеритус, Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду члан