



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ**  
**ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА**

Марко Топаловић

**НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ГРАНУЛАРНИХ**  
**МАТЕРИЈАЛА**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2016. година

---

## I. Аутор

---

Име и презиме: Марко Топаловић

Датум и место рођења: 01.01.1981. године, Крагујевац, Република Србија

Садашње запослење: Истраживач сарадник, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

---

## II. Докторска дисертација

---

Наслов: Нумеричко моделирање грануларних материјала

Број страница: 157

Број слика: 132

Број библиографских података: 116

Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

Научна област (УДК): Примењена механика, Примењена информатика, Рачунарско инжењерство (519.87)

Ментор: др Мирослав Живковић, редовни професор, Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

---

## III. Оцена и одбрана

---

Датум пријаве теме: 14.08.2014.

Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 01-1/3826-6 од 20.11.2014.

Комисија за оцену подобности теме и кандидата:

1. Др Мирослав Живковић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
2. Др Радован Славковић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
3. Др Сениша Месаровић, редовни професор,  
School of Mechanical and Materials Engineering Washington State University;
4. Др Милош Ивановић, доцент,  
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу;
5. Др Ненад Филиповић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
6. Др Раде Вигњевић, редовни професор, National Research Centre for Structural Integrity (NSIRC), Brunel University London;
7. Др Мирјана Вукићевић, доцент,  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:

1. Др Радован Славковић, редовни професор, председник комисије,  
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
2. Др Раде Вигњевић, редовни професор, National Research Centre for Structural Integrity (NSIRC), Brunel University London,
3. Др Сениша Месаровић, редовни професор,  
School of Mechanical and Materials Engineering Washington State University;
4. Др Ненад Филиповић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу;
5. Др Мирјана Вукићевић, доцент,  
Грађевински факултет, Универзитет у Београду;
6. Др Милош Ивановић, доцент,  
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу;
7. Др Драган Ракић, доцент,  
Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

Датум одбране дисертације:

---

## Резиме

Грануларне материјале чини скуп вема великог броја ситних солида (зрна, гранула, честица) чије понашање зависи од енергије коју солиди поседују и представљају након воде другу најманипулисанију материју у инжењерству. За нумеричку анализу уређаја за транспорт, складиштење и обраду грануларних материјала, неопходно је тачно моделирање оптерећења којима грануларни материјал делује на поменуте уређаје.

У оквиру ове дисертације дата је теоријска анализа понашања грануларних материјала од микро нивоа где је анализиран контакт између два зрна, до макро нивоа у коме се анализира понашање целокупног материјала.

Метода дискретних елемената је коришћена за моделирање троосног теста, експеримента који се најчешће користи за одређивање материјалних карактеристика, као и трака смицања и вртолга који се при том јављају у грануларном материјалу. Оптерећења у грануларном материјалу нису равномерно распоређена, већ најоптерећенија зрна формирају ланце сила док остала зрна играју потпорну улогу. Деформације грануларног материјала изазивају кидање старих и формирање нових лалнаца сила, а промене оптерећења су анализирани за изабрана зрна.

Глатка честична хидродинамика је нумеричка метода заснована на механици континуума, а њен безмрежни карактер омогућава анализу великих деформација у реалним проблемима, па је генералисани материјални модел са капом уграђен у програм и коришћен за моделирање грануларних материјала.

Метода коначних елемената је најчешће коришћена нумеричка метода у инжењерству, а да би се користила за анализу уређаја за транспорт, складиштење и обраду грануларних материјала повезана је са глатком честичном хидродинамиком по принципима флуид-солид интеракције, а контактни алгоритам између ове две методе је проширен третманом трења на основу Кулоновог закона.

Методологија анализе подразумева коришћење два програма за пре-процесирање и једног за пост-процесирање који су повезани са солверима помоћу програма преводиоца.

Материјални модел, спрезање нумеричких метода и контактни алгоритам су верификовани на тест примерима, а у последњем примеру је дат развој материјалног модела који узима у обзир и утицај температуре на понашање материјала.

**Кључне речи:** метода коначних елемената, метода дискретних елемената, глатка честична хидродинамика, грануларни материјали

## **Abstract**

The granular materials consists of large number of small solids (grains, granules, particles) whose behavior depends on the energy they have and represent the second most manipulated matter in engineering (water is the first). For numerical analysis of devices for transport, storage and processing of granular materials, it is necessary to accurately model load which granular materials exert on the aforementioned devices.

As a part of this dissertation the theoretical analysis of granular materials behavior is presented, both at the micro levels where the contact between two grains is analyzed, and a macro level in which the behavior of the whole material is analyzed.

Discrete element method was used for modeling of triaxial tests, experiments that are commonly used to determine material characteristics, as well as shear bands and vortexes which occur in the granular material during these tests. Loads in the granular material are not evenly distributed, with most loaded grains forming force chains, while other grains play only a supporting role. Deformation of granular materials causes breaking of old and the formation of new force chains and load changes are analyzed in selected grains.

Smoothed particle hydrodynamics is a numerical method based on continuum mechanics, and its meshless character allows analysis of large deformation in real problems, so generalized material model with cap was coded into the program and used to model granular materials.

Finite element analysis is the most widely used numerical methods in engineering, but in order to be used for the evaluation of construction for transportation, storage and processing of granular materials it needed to be connected with smoothed particle hydrodynamics using the principles of fluid-solid interactions, and contact algorithm between these two methods is expanded by friction treatment on the basis of Coulomb's law.

The methodology of analysis involves the use of two programs for pre-processing and one for post-processing that are connected with the solver using interpreter software.

Material model, coupling numerical methods and contact algorithm are verified on tests, and in the last example, the development of material models that take into account the effect of temperature on the behavior of materials is given.

**Key words:** finite element method, discrete element method, smoothed particle hydrodynamics, granular materials



---

**САДРЖАЈ**

1	УВОД.....	1
1.1	Мотивација.....	1
1.2	Циљ рада.....	2
1.3	Садржај рада.....	2
1.4	Преглед литературе.....	4
2	КАРАКТЕРИСТИКЕ ГРАНУЛАРНИХ МАТЕРИЈАЛА.....	5
2.1	Састав грануларних материјала.....	5
2.2	Напони и деформације у скуповима грануларних честица.....	8
2.3	Понашање грануларних материјала.....	13
3	МЕТОДА ДИСКРЕТНИХ ЕЛЕМЕНАТА (ДЕМ).....	19
3.1	Значај и историја развоја.....	19
3.2	Основне карактеристике ДЕМ методе.....	20
3.3	Избор интеграционе шеме и одређивање временског корака.....	22
3.4	Моделирање троосног теста.....	30
3.5	Период релаксације.....	43
3.6	Моделирање вртлога у траци смицања.....	46
4	ГЛАТКА ЧЕСТИЧНА ХИДРОДИНАМИКА (СПХ).....	50
4.1	Значај и историја развоја.....	50
4.2	Основне карактеристике СПХ методе.....	51
4.3	СПХ формулација.....	52
4.3.1	Кернел апроксимација.....	53
4.3.2	Честична апроксимација.....	59
4.4	Недостаци СПХ методе.....	59
4.4.1	Конзистенција.....	60
4.4.2	Нестабилност при истезању.....	63
4.4.3	Нулти енергетски мод.....	64
4.5	Закони баланса.....	65
4.5.1	Изводи физичких величина.....	65

---

4.5.2	Коначна и инфинитезимална контролна запремина .....	66
4.5.3	Закон одржања масе.....	68
4.5.4	Закон баланса количине кретања .....	70
4.5.5	Закон баланса енергије .....	72
4.6	Примена СПХ методе у механици чврстих тела.....	73
4.6.1	Рачунање напона у чврстим телима.....	73
4.6.2	Еласто-пластични конститутивни модел са ојачањем .....	76
4.6.3	Генералисани модел са капом и Дракер-Прагер материјални модел .....	82
5	ПОВЕЗИВАЊЕ СПХ И МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА (МКЕ).....	98
5.1	Значај методе коначних елемената и њене теоријске основе .....	98
5.2	Инкрементално-итеративни приступ у МКЕ.....	102
5.3	Повезивање МКЕ чворова и СПХ псеудо-честица .....	106
5.4	Третман трења у контакту .....	112
6	МЕТОДОЛОГИЈА ПРЕ И ПОСТ-ПРОЦЕСИРАЊА .....	116
6.1	Генерисање улазне датотеке за МКЕ солвер .....	116
6.2	Генерисање улазне датотеке за СПХ солвер .....	117
6.3	Пост-процесирање резултата .....	119
7	ПРИМЕРИ .....	121
7.1	Судар два цилиндра .....	121
7.2	Колапс стуба грануларног материјала .....	123
7.3	Киповање грануларног материјала.....	127
7.4	Моделирање пражњења теретног вагона.....	131
8	МКЕ АНАЛИЗА ПОНАШАЊА АСФАЛТА СА УТИЦАЈЕМ ТОПЛОТЕ .....	136
8.1	Анализа материјалних модела за моделирање асфалта.....	136
8.2	МКЕ анализа асфалтне подлоге у контакту са точком коришћењем модификованог Пержининог модела. ....	142
9	ЗАКЉУЧЦИ .....	145
9.1	Постигнути циљеви.....	145
9.2	Правци даљег истраживања .....	147
10	ЛИТЕРАТУРА .....	148

---

## ЛИСТА СЛИКА

Слика 2.1.1 Састав грануларног материјала а) запремински удели воде, ваздуха и солида б) пример утицаја воде на понашање грануларног материјала .....	5
Слика 2.1.2 Гранулометријски дијаграм.....	6
Слика 2.2.1 Контакт између два зрна.....	8
Слика 2.2.2 Вороној дијаграм .....	9
Слика 2.2.3 Карактеристична дужина.....	9
Слика 2.2.4 Дирихлеова тесалација.....	10
Слика 2.2.5 Деланеј мрежа.....	10
Слика 2.2.6 Вектори у Деланеј мрежи а) нормални вектори б) допунски површински вектор .....	11
Слика 2.2.7 Дискретизација грануларног материјала а) укупна запремина б) запремина подељена на под-домене .....	12
Слика 2.2.8 Деформације у Деланеј мрежи, а) деформације услед притиска, б) смичуће деформације.....	12
Слика 2.3.1 Трење у грануларном материјалу а) блок на хоризонталној површини б) блок на косој површини в) контакт грануларних зрна.....	14
Слика 2.3.2 Таласаста површ клизања .....	14
Слика 2.3.3 Троосни тест а) задавање оптерећења б) настанак траке смицања в) дебелина траке смицања .....	15
Слика 2.3.4 Трака смицања а) поље померања б) настанак вртлога.....	16
Слика 2.3.5 Ланци сила .....	16
Слика 2.3.6 Промена топологије у грануларном материјалу .....	16
Слика 2.3.7 Дилатација при контакту две назубљене површи .....	17
Слика 2.3.8 Промена физичких величина услед релативних смичућих померања а) смичући напон б) запреминска деформација.....	18
Слика 3.2.1 Улегнуће при контакту међу зрнима.....	20
Слика 3.3.1 Афино поље брзина.....	26
Слика 3.3.2 Резултати једначине (3.3.32) за случај троосног теста, а) промена улегнућа у функцији бездимензионог времена б) промена брзине улегнућа у функцији бездимензионог времена .....	28
Слика 3.3.3 Зависност коефицијента реституције $k$ од нормираног коефицијента контактеног пригушења $T/t_0$ .....	29
Слика 3.3.4 Зависност бездимензионог времена релаксације од коефицијента реституције .....	30
Слика 3.4.1 Задавање притиска на моделу троосног теста а) помоћу мембране б) директно на честице .....	31
Слика 3.4.2 Одређивање наредне граничне честице помоћу методе најмањег угла.....	32
Слика 3.4.3 Одређивање наредне граничне честице помоћу методе најмањег одступања угла .....	33
Слика 3.4.4 Ток симулације троосног теста .....	34

Слика 3.4.5 Изглед модела током анализе а) почетна конфигурација б) конфигурација након постизања максималног притиска в) конфигурација на почетку задавања померања г) конфигурација на крају задавања померања д) конфигурација на крају релаксације .....	35
Слика 3.4.6 Позиције одабраних честица за посматрање сила и момента.....	36
Слика 3.4.7 Нормализована сила у честици 75 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	37
Слика 3.4.8 Нормализована сила у честици 75 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	37
Слика 3.4.9 Нормализовани момент у честици 75 а) 30000 корака б) 300 корака .....	37
Слика 3.4.10 Нормализована сила у честици 102 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	37
Слика 3.4.11 Нормализована сила у честици 102 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	38
Слика 3.4.12 Нормализовани момент у честици 102 а) 30000 корака б) 300 корака .....	38
Слика 3.4.13 Нормализована сила у честици 499 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	38
Слика 3.4.14 Нормализована сила у честици 499 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	38
Слика 3.4.15 Нормализовани момент у честици 499 а) 30000 корака б) 300 корака .....	39
Слика 3.4.16 Нормализована сила у честици 500 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	39
Слика 3.4.17 Нормализована сила у честици 500 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	39
Слика 3.4.18 Нормализовани момент у честици 500 а) 30000 корака б) 300 корака .....	39
Слика 3.4.19 Нормализована сила у честици 885 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	40
Слика 3.4.20 Нормализована сила у честици 885 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	40
Слика 3.4.21 Нормализовани момент у честици 885 а) 30000 корака б) 300 корака .....	40
Слика 3.4.22 Нормализована сила у честици 886 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	40
Слика 3.4.23 Нормализована сила у честици 886 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака .....	41
Слика 3.4.24 Нормализовани момент у честици 886 а) 30000 корака б) 300 корака .....	41
Слика 3.4.25 Нормални напон на плочама у току прорачуна.....	42
Слика 3.4.26 Промена запреминске деформације у трећој фази ДЕМ анализе.....	42
Слика 3.5.1 Утицај коефицијента трења $\mu$ на нормалне напоне у плочама при релаксацији.....	43
Слика 3.5.2 Нормални напони на плочама за различите вредности коефицијента утицаја брзине $m$ .....	44
Слика 3.5.3 Утицај коефицијента вискозног пригушења $\eta_{visc}$ на нормалне напоне у плочама при релаксацији .....	45

Слика 3.5.4 Утицај коефицијента контактнoг пригушења $T$ на нормалне напоне у плочама при релаксацији .....	45
Слика 3.5.5 Ублажавање наглог пада напона при релаксацији коришћењем половљења брзина, постепеног заустављања и комбинације контактних параметара .....	46
Слика 3.6.1 ДЕМ модел траке смицања.....	47
Слика 3.6.2 Неправилан облик границе при моделирању траке смицања.....	47
Слика 3.6.3 Одређивање слабих периодичних граничних услова на основу брзина честица .....	48
Слика 3.6.4 Вртложно кретање грануларних честица у траци смицања .....	49
Слика 3.6.5 Еквивалентни напони у грануларном материјалу.....	49
Слика 4.2.1 Деформације у МКЕ а) Лагранжова материјална формулација б) Ојлерова просторна формулација .....	51
Слика 4.3.1 СПХ формулација кернел и честична апроксимација .....	53
Слика 4.3.1.1 Диракова $\delta$ функција.....	53
Слика 4.3.1.2 Домен утицаја за честицу $i$ .....	56
Слика 4.3.1.3 Првобитне апроксимације Диракове $\delta$ функције а) функција облика полинома (једначина 4.3.1.16) и б) функција облика Гаусијана (једначина 4.3.1.17).....	57
Слика 4.3.1.4 Кернел функције: полином трећег реда (једначина 4.3.1.18), и полином петог реда (једначина 4.3.1.19) у поређењу са Гаусијаном (једначина 4.3.1.17).....	58
Слика 4.4.1.1 Утицај распореда честица на конзистенцију а) равномеран распоред честица унутар домена, б) честице на граници домена проблема, в) неравномеран распоред честица.....	61
Слика 4.4.1.2 Додавање виртуелних честица да би се употпунио домен утицаја граничне честице.....	61
Слика 4.4.2.1 Најчешћи облици кернел функција са другим изводима а) полином трећег реда б) полином петог реда.....	63
Слика 4.4.2.2 Нестабилност при истезању: модел фиксиран у средини, леви део је оптерећен на притисак а десни на истезање.....	64
Слика 4.4.3.1 Осцилација поља напона које проузрокују нулти енергетски мод .....	65
Слика 4.5.2.1 Контролна запремина и контролна површина у посматраном телу.....	67
Слика 4.5.2.2 Инфинитезимална контролна запремина и инфинитезимална контролна површина у посматраном телу .....	67
Слика 4.5.2.3 Диференцијална запремина и површина.....	67
Слика 4.5.4.1 Закон одржања количине кретања за контролну запремину .....	70
Слика 4.6.2.1 Дијаграм напон-деформација у случају једноосног оптерећења за материјал са кинематским ојачањем ( $\beta = 0$ ) и изотропним ојачањем ( $\beta = 1$ ).....	77
Слика 4.6.2.2 Предиктор-коректор шема рачунања напона за Фон Мизесов услов течења.....	79
Слика 4.6.3.1 Дракер Прагер површ течења.....	82
Слика 4.6.3.2 Дракер Прагер материјални модел у $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$ простору .....	83
Слика 4.6.3.3 Линија максималног затезања за Дракер Прагер материјални модел у $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$ простору.....	84

Слика 4.6.3.4 Равна капа за Дракер Прагер материјални модел у $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$ простору..	84
Слика 4.6.3.5 Елиптична капа за Дракер Прагер материјални модел у $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$ простору.....	86
Слика 4.6.3.6 Почетни положај капе за грануларне материјале.....	87
Слика 4.6.3.7 Генералисани модел са капом.....	87
Слика 4.6.3.8 Простор $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$ подељен на еластичну и пластичне области генералисаног модела са капом.....	88
Слика 4.6.3.9 Алгоритам за рачунање коригованих вредности када се напонска тачка нађе изнад површи течења.....	91
Слика 4.6.3.10 Алгоритам за рачунање коригованих вредности при течењу на капи....	93
Слика 4.6.3.11 Алгоритам за рачунање коригованих вредности при течењу када се напонска тачка нађе у области насталој у пресеку површи течења и капе.....	96
Слика 5.1.1 Типови коначних елемената а) основни елементи б) елементи са међучворовима.....	99
Слика 5.1.2 Коначни елемент са чворовима а) представљен у Декартовом координатном систему б) представљен у природном координатном систему.....	99
Слика 5.1.3 1Д коначни елемент у природном координатном систему са интерполационим функцијама.....	100
Слика 5.3.1 СПХ чворови причвршћени за МКЕ мрежу.....	107
Слика 5.3.2 Клизајући интерфејс између СПХ честица и МКЕ елемената.....	108
Слика 5.3.3 Границе СПХ честица: а) на слободној површини, б) у контакту са другим материјалом, в) есенцијални (геометријски) гранични услови, г) или природни гранични услови.....	109
Слика 5.3.4 Одређивање контакта.....	110
Слика 5.4.1 Нормала на контактну површину у тачки $i$ .....	113
Слика 5.4.2 Компоненте контактне силе у граничној честици.....	114
Слика 6.1.1 Изглед FEMAP окружења са РАК транслатором.....	117
Слика 6.2.1 Корисничко окружење програма LS-PrePost.....	118
Слика 6.2.2 Транслатор програм за генерисање СПХ улазних датотека.....	119
Слика 6.3.1 Пос-тпроцесирање резултата у програму ParaView.....	120
Слика 7.1.1 2Д модел судара.....	121
Слика 7.1.2 Фон Мизесови напони добијени помоћу МКЕ.....	122
Слика 7.1.3 Фон Мизесови напони добијени СПХ методом.....	122
Слика 7.1.4 Промена напона у току времена.....	123
Слика 7.2.1 Шематски приказ колапса стуба грануларног материјала и формирања купе.....	124
Слика 7.2.2 Почетно стање ( $t=0s$ ) при колапсу стуба песка (1. варијанта).....	124
Слика 7.2.3 Стање модела у тренутку $t=0.2s$ (1. варијанта).....	125
Слика 7.2.4 Крајње стање модела колапса стуба песка у тренутку $t=1s$ (1. варијанта).....	125
Слика 7.2.5 Почетно стање ( $t=0s$ ) при колапсу стуба песка (2. варијанта).....	126
Слика 7.2.6 Стање модела у тренутку $t=0.2s$ (2. варијанта).....	126

---

Слика 7.2.7 Крајње стање модела колапса стуба песка у тренутку $t=1s$ (2. варијанта)	127
Слика 7.3.1 Шематски приказ модела киповања	127
Слика 7.3.2 Почетно стање модела киповања у тренутку $t=0s$	128
Слика 7.3.3 Почетак осипања у тренутку $t=0.2s$	128
Слика 7.3.4 Почетак клизања у тренутку $t=0.45s$	129
Слика 7.3.5 Изглед модела у тренутку $t=0.46s$	129
Слика 7.3.6 Изглед модела на крају прорачуна у тренутку $t=1s$	130
Слика 7.4.1 Цео модел теретног вагона	131
Слика 7.4.2 Четвртина модела теретног вагона	132
Слика 7.4.3 Почетни положај честица	132
Слика 7.4.4 Положај честица након слегања	133
Слика 7.4.5 Пражњење вагона након 10 секунди	133
Слика 7.4.6 Таложeње материјала на ивици сандука	134
Слика 7.4.7 Таложeње материјала на површини левка	134
Слика 7.4.8 Потпуно пражњење вагона са смањеним коефицијентима трења	135
Слика 8.1.1 Хиерархијски приступ анализи састава асфалта	136
Слика 8.1.2 Алгоритам модификованог Пержининог модела	141
Слика 8.2.1 Модификовани Пержинин модел а) функција ојачања б) функција течења	142
Слика 8.2.2 Однос аксијалних напона у зависности од аксијалних деформација за један осмочворни 3Д коначни елемент	143
Слика 8.2.3 Верификација модификованог Пержининог модела у MATLAB-у резултати у хипер-еластичној $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_z)$ и виско-пластичној области $\sigma_z = \sigma_z(\varepsilon_{p_z})$	143
Слика 8.2.4 Део асфалта оптерећен точком	144
Слика 8.2.5 Поље ефективних напона у асфалту	144

---

**ЛИСТА ТАБЕЛА**

Табела 3.4.1 Материјалене карактеристике моделираног грануларног материјала.....	35
Табела 5.1.1 Природне координате чворова за елемент приказан на слици 5.1.2.....	100
Табела 5.2.1 Имплицитна интеграција напона методом водећег параметра .....	105
Табела 5.2.2 Алгоритам инкрементално-итеративног поступка у МКЕ .....	106



---

**ЛИСТА ОЗНАКА**

<b>Ознака</b>	<b>Назив</b>
$d_{10}$	Ефективна величина гранула
$d_{50}$	Средња величина гранула
$C_u$	Коефицијент униформности
$l_i^c$	Грана вектор који спаја центре гранула
$\bar{\sigma}_{ij}$	Укупан напон у грануларном материјалу
$F_j^c$	Контактна сила
$a_i^k$	Нормализовани вектор нормале на грана вектор
$d_i$	Допунски површински вектор
$\varepsilon_{ij}$	Тензор мале деформације
$n_j$	Вектор нормале на површину
$u_i^k$	Вектор померања чвора k
$\bar{\varepsilon}_{ij}^L$	Просечна деформација за L-ту Деланеј ћелију
$\theta$	Угао који заклапа трака смицања са хоризонталом
$u_\varepsilon$	Померање грануларне честице у правцу траке смицања
$\Delta\varepsilon^+$	Повећање запремине приликом флипа
$\Delta\varepsilon^-$	Смањење запремине приликом флипа
$\delta$	Релативно смичуће померање
<b>S</b>	Дивијаторски напон
$S_f$	Вршна смичућа чврстоћа
$S_r$	Резидуална смичућа чврстоћа
$S_{cr}$	Чврстоћа при константној запремини

---

---

$\mathbf{x}^i$	Вектор положаја ДЕМ честице
$\xi$	Улегнуће при контакту
$\mathbf{F}_H^{ij}$	Херцова сила између две ДЕМ честице
$\hat{\mathbf{n}}$	Вектор јединичне нормале
$K^{ij}$	Коефицијент крутости
$\mathbf{F}_D^{ij}$	Пригушна сила
$\mathbf{F}_F^{ij}$	Сила трења
$\mu$	Коефицијент трења
$\eta_0$	Номинална брзина
$\mathbf{v}_s^{ij}$	Брзина клизања
$\hat{\mathbf{v}}_s^{ij}$	Јединични вектор дуж правца клизања
$\mathbf{v}_s^{ij}$	Брзина translације
$\mathbf{v}_r^{ij}$	Брзина ротације
$\hat{\mathbf{t}}$	Вектор јединичне тангенте
$\omega^i$	Угаона брзина честице
$\mathbf{M}^{ij}$	Момент у честици $i$ од честице $j$
$m^i$	Маса честице
$\eta$	Коефицијент вискозног пригушења
$\theta^i$	Заокретање честице $i$
$R$	Просечан полупречник честице
$p$	Притисак
$\dot{\varepsilon}_0$	Предефинисана брзина промене деформације
$f_0$	Интензитет међучестичних сила

---

---

$\bar{E}$	Ефективни модул еластичности
$\nu$	Пواسонов коефицијент
$v_0$	Карактеристична брзина
$v_R$	Релативна брзина између суседних честица
$\bar{v}'$	Извод бездимензионе брзине
$\bar{\omega}'$	Извод бездимензионе угаоне брзине
$\mathbf{G}_0$	Градијент брзина
$\phi$	Квазистатички коефицијент
$T$	Коефицијент контактнoг пригушења
$\vec{r}_1$	Вектор између тренутне и претходне честице
$\vec{r}_2$	Вектор између тренутне и наредне честице
$\eta_{visc}$	Коефицијент вискозног пригушења
$W$	Укупан рад
$\delta_{ij}$	Кронекер делта
$\delta$	Диракова делта функција
$\mathbf{x}$	Вектор положаја посматране честице
$\mathbf{x}'$	Вектор променљивих
$\langle \rangle$	Кернел апроксимација
$W$	Кернел функција
$h$	Дужина глачања
$k$	Фактор скалирања
$\rho^j$	Густина честице
$B_1$	Корекциони фактор
$E$	Енергија
$c_0$	Брзина звука

---

---

$\rho_0$	Референтна густина
$U_S$	Брзина простирања таласа
$U_P$	Просечна брзина честица
$\Gamma_0$	Грунисенов параметар
$h$	Коефицијент нагиба Игоњу-ове криве
$\Omega_{\beta\gamma}$	Тензор ротације
$G$	Модул смицања
$\beta$	Тип ојачања
$E_T$	Тангентни модул
$E_P$	Пластични модул
$E$	Јунгов модул еластичности
$\varepsilon$	Укупна деформација
$\varepsilon^P$	Пластична деформација
$\varepsilon^e$	Еластична деформација
$f$	Функција течења
$J_{2D}$	Друга инваријанта смичућег напона
$\sigma^Y$	Напон течења
$\sigma^V$	Еквивалентни Фон Мизесов напон
$\dot{\lambda}$	Брзина промене пластичног множиоца
$g$	Функција пластичног потенцијала
$n_{\alpha\beta}$	Прандл-Реусов вектор течења
$\hat{\sigma}_{\alpha\beta}$	Пробни укупни напон
$\hat{S}_{\alpha\beta}$	Пробни смичући напон
$\hat{\eta}_{\alpha\beta}$	Разлика смичућег тоталног и смичућег резидуалног напона

---

---

$\xi_{\alpha\beta}$	Девијаторски део тензора резидуалног напона
$\hat{\sigma}^V$	Пробни еквивалентни Фон Мизесов напон
$H$	Модуло ојачања
$\dot{\varepsilon}^P$	Промене ефективне пластичне деформације
$\tilde{f}$	Освежена функција течења
$I_1$	Прва инваријанта напона
$\sigma_m$	Средњи напон
$T$	Затезна чврстоћа
$X$	Позиција капе
$\varepsilon_V^P$	Запреминска пластична деформација
$W$	Максимална вредност запреминске пластичне деформације
$B$	Полуоса елипсе капе
$L$	Положај средишта елипсе капе
$R$	Однос између полуоса елипсе капе
<b>H</b>	Итерполациона матрица
${}^t\mathbf{F}^s$	Спољашња генералисана сила
${}^t\mathbf{F}^u$	Унутрашња генералисана сила
$\Delta\mathbf{U}$	Вектор прираштаја чворних померања
${}^t\mathbf{K}$	Матрица крутости
$\varepsilon_U$	Толеранција за померања
$\varepsilon_F$	Толеранција за неуравнотежене силе
$\varepsilon_E$	Толеранција за неуравнотежену енергију
${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)}$	Матрица извода интерполационих функција
${}^t\mathbf{C}$	Конститутивна матрица
$K_p$	Фактор скалирања

---

---

$\phi$	Контактни потенцијал
$b_c$	Запреминска сила
$f_c$	Контактна сила
$\mathbf{N}$	Нормализована матрица тежинских функција
$\psi$	Функција боје
$\mu_s$	Статички коефицијент трења
$\mu_k$	Коефицијент кинетичког трења
$\psi$	Нееластичне ентропије
$s$	специфична ентропија
$\mathbf{q}$	Вектор специфичног топлотног флукса
$T$	Апсолутна температура
$\psi^T$	Ентропијски извор у термоеластичности
$\zeta(t)$	Термодинамичко време
$\Omega$	Површина оптерећења
$\sigma^Y$	Динамички еквивалентни напон течења
$\sigma_0^Y$	Статички почетни еквивалентни напони течења
$\sigma_{eq}$	Еквивалентни напон
$\eta$	Хевисајдова функција
$\langle \rangle$	Маколијев оператор
$H$	Параметар изотропног ојачања
$\kappa$	Променљива изотропног ојачања

---

# 1 УВОД

## 1.1 Мотивација

Грануларни материјали су веома важан чинилац у пројектовању конструкција у машинском и урбаном инжењерству и представљају после воде другу најманипулисанију материју у индустрији. Песак и шљунак су најочигледнији примери који се поред форме грануларног материјала често налазе и у саставу мешавина попут асфалта, бетона и земље. Руде метала и неметала се након вађења из рудника налазе у форми грануларног материјала а такође и житарице као и многи други пољопривредни производи и њихове прерађевине су такође грануларни материјали. Грануларни материјали се поред прехранбене, често срећу и у фармацеутској и козметичкој индустрији. Уређаји за транспорт, обраду и складиштење грануларних материјала морају бити пројектовани тако да ударна оптерећења приликом утовара и истовара не изазову лом уређаја као и да спрече проблеме који могу настати таложењем грануларних материјала на зидовима конструкција.

У данашње време, са порастом могућности рачунара, нумеричко моделирање грануларних материјала је све присутније и подразумева различите нивое апроксимације, са тим да повећање апроксимације доводи до смањења компјутерске захтевности прорачуна. Основни проблеми моделирања грануларног материјала представљају велике деформације које могу проузроковати велике дисторзије мреже код мрежних нумеричких метода као што је најчешће примењивана метода коначних елемената (МКЕ) тако да су за њихово моделирање погодније безмрежне методе.

Најтачнији начин моделирања грануларних материјала је примена методе дискретних елемената (*Discrete Element Method* - ДЕМ) код које се посматра свака честица грануларног материјала и њена интеракција са околним честицама. Имајући у виду да је реч о методи која захтева веома мали временски корак, а да у реалној симулацији грануларни материјал може имати огроман број честица, ова метода се не може користити у инжењерској пракси и најчешће се користи за нумеричку верификацију теоријских претпоставки.

Са инжењерског становишта, за моделирање грануларних материјала најпрактичнија је глатка честична Хидродинамика (*Smoothed Particle Hydrodynamic* - СПХ) која је првобитно развијена за моделирање астрофизичких проблема, али је током година њена функционалност проширена прво на компјутерску динамику флуида, а потом и на механику чврстих тела. Као и МКЕ, СПХ је заснована на механици континуума односно апроксимацији дискретног скупа честица у континуум, али за разлику од МКЕ, СПХ представља безмрежну методу, тако да је веома флексибилна при симулацији великих деформација, а њена умерена компјутерска захтевност омогућава примену у реалним проблемима.

Пошто је за моделирање конструкција у машинском и урбаном инжењерству МКЕ супериорнија у односу на СПХ методу у погледу могућности, тачности резултата и у погледу компјутерске захтевности, спрезање МКЕ и СПХ методе омогућава

---

---

коришћење предности обе методе тако што се грануларни материјал моделира СПХ методом, а уређаји за транспорт, складиштење или обраду грануларних материјала МКЕ методом.

## 1.2 Циљ рада

Циљ ове дисертације је развој методологије за нумеричко моделирање грануларних материјала и коришћење тако добијених резултата за анализу интеракције грануларних материјала са еластичним и еласто-пластичним материјалима од којих су сачињени уређаји и конструкције за њихов транспорт, складиштење и обраду. У циљу адекватног моделирања, извршено је проучавање карактеристика и понашања грануларних материјала коришћењем нумеричких симулација ДЕМ методом која се користи за анализу међусобне интеракције честица грануларног материјала, као и анализу интеракције са чврстим телима. За моделирање реалних проблема потребно је користити неку нумеричку методу засновану на механици континуума која уместо сваке грануларне честице понаособ, посматра материјал као непрекидну средину (континуум) као што су МКЕ или СПХ. МКЕ је најсвеобухватнија нумеричка метода широког спектра примене, али при моделирању грануларних материјала због великих деформација долази до дисторзије мреже тако да је за њихово моделирање погоднија СПХ метода која је услед свог безмрежног карактера флексибилнија али у исто време и компјутерски захтевнија. У оквиру рада на дисертацији, извршена је уградња општег (генералисаног) еластопластичног материјалног модела са капом у СПХ програм. Користећи релевантне експерименталне резултате из литературе одређени су материјални параметри за дати модел који најреалније симулирају понашање грануларног материјала.

Да би се избегли недостаци СПХ и МКЕ методе и искористиле њихове предности, ове две методе су спрегнуте тако да се оптерећења настала услед дејства грануларног материјала и прорачуната СПХ методом преносе на граничне чворове у мрежи коначних елемената који су у контакту са грануларним материјалом. На основу спрезања СПХ и МКЕ анализе развијена је методологија која обухвата брзо и једноставно пре-процесирање, анализу и пост-процесирање сложених проблема анализе конструкција које су у контакту са грануларним материјалима. Приликом пројектовања нових конструкција за транспорт, складиштење и обраду грануларних материјала, коришћењем развијене методологије, олакшано је моделирање интеракција грануларног материјала са еластичним и еласто-пластичним материјалима од којих су изграђене дате конструкције, чиме се унапређује тачност њихових нумеричких анализа.

## 1.3 Садржај рада

Ова дисертација се састоји од укупно 9 поглавља и подељена је у три целине: У првој целини су дате теоријске основе и описане су карактеристике грануларних материјала, у другој целини приказани поступци нумеричке анализе ДЕМ и СПХ методом, док



трећу целину чине спрезање МКЕ и СПХ методе и практична примена тако добијене методологије за анализу интеракције грануларног материјала са еласто-пластичним материјалима конструкција за транспорт, складиштење и обраду грануларних материјала.

У Поглављу 1 су дата уводна разматрања проблема анализе грануларних материјала нумеричким методама и кратак преглед литературе.

Поглавље 2 приказује преглед карактеристика грануларних материјала, почев од састава преко анализе понашања приликом различитих типова оптерећења, до особина интеракције између зрна грануларног материјала.

Поглавље 3 даје приказ теоријских основа ДЕМ методе. Процена квазистатичности проблема се користи приликом одређивања временског корака. У овом поглављу је дата ДЕМ симулација троосног теста и вртложног понашања грануларног материјала у тракама смицања. Такође, указано је и на одређене проблеме као што су високе фреквенције осциловања грануларних честица које проузрокују нереално понашање материјала приликом релаксације.

Поглавље 4 је посвећено СПХ методи и њеној примени за моделирање грануларних материјала. У овој глави дат је опис кернел и честичне апроксимације, које представљају основу ове методе. Недостаци оригиналне СПХ апроксимације су истакнути и начини њиховог отклањања су наведени. Закони баланса су дати, као и имплементација еластичног, еластопластичног и генералисаног материјалног модела са капом, који ће бити коришћен за моделирање грануларних материјала.

Поглавље 5 приказује кратак осврт на основе МКЕ, описује поступак повезивања МКЕ и СПХ методе, и третмана контакта грануларног материјала моделираног СПХ методом и еластопластичног материјала моделираног помоћу МКЕ. При моделирању контакта анализирана су два приступа: класичан кернел контакт и приступ заснован на контактном потенцијалу. У оба приступа третман трења није адекватан, па је у рачунање контакта укључен и Кулонов закон трења.

Поглавље 6 приказује методологију пре и пост процесирања моделираних проблема. Приликом одабира програма за пре и пост процесирање основни критеријуми су били функционалност и цена, тако да где је то било могуће, коришћени су бесплатни програми, али је за генерисање МКЕ мреже било неопходно користити комерцијални програм због низа предности које је имао у односу на бесплатне алтернативе. Генерисање улазних датотека за МКЕ и СПХ солвере је аутоматизовано помоћу развијених програма преводилаца који повезују програме за пре и пост процесирање са МКЕ и СПХ солверима.

Поглавље 7 даје примере прорачуна који су коришћени за верификацију развијене методологије. Примери демонстрирају понашање материјала при контакту, могућности генералисаног материјалног модела са капом за моделирање грануларних материјала, као и интеракцију грануларног и еласто-пластичног материјала помоћу спрезања МКЕ и СПХ методе.

У поглављу 8 представљена је примена материјалног модела чији параметри зависе од температуре а који је коришћен за МКЕ анализу понашања асфалта.

Поглавље 9 је посвећено закључним разматрањима, анализи развијене методологије и правцима будућег развоја и могућностима примене развијене методологије у другим областима које нису уско везане за грануларне материјале.

Поглавље 10 даје преглед коришћене литературе.

## 1.4 Преглед литературе

Почеци истраживања понашања грануларних материјала везују се за Кулона (*Charles-Augustin de Coulomb* 1736- 1806), чији се закон трења првобитно односио на грануларне материјале. Током година, развој теоретских претпоставки праћен је напретком технологије извођења експеримената, чиме се употпуњавало свеобухватно знање о карактеристикама грануларних материјала од микро до макро скале [1]-[7]. Такође, са порастом могућности рачунара, грануларни материјали се све више користе у нумеричким анализама применом различитих метода као што су ДЕМ, СПХ или МКЕ.

Метода дискретних елемената (ДЕМ) је развијена у циљу прорачуна кретања и интеракције огромног броја честица какве се срећу у грануларним материјалима. Услед огромног броја честица, ДЕМ метода је веома компјутерски захтевна што ограничава дужину прорачуна, или број честица у прорачуну. ДЕМ метода се најчешће користи за нумеричку симулацију процеса који се дешавају унутар грануларног материјала [8]-[26]. Да би се моделирало понашање грануларног материјала у реалним условима при експлоатацији уређаја за њихово складиштење, транспорт или обраду, потребно је занемарити интеракцију међу честицама и цео грануларни материјал посматрати као непрекидну средину што се постиже применом нумеричких метода заснованих на механици континуума.

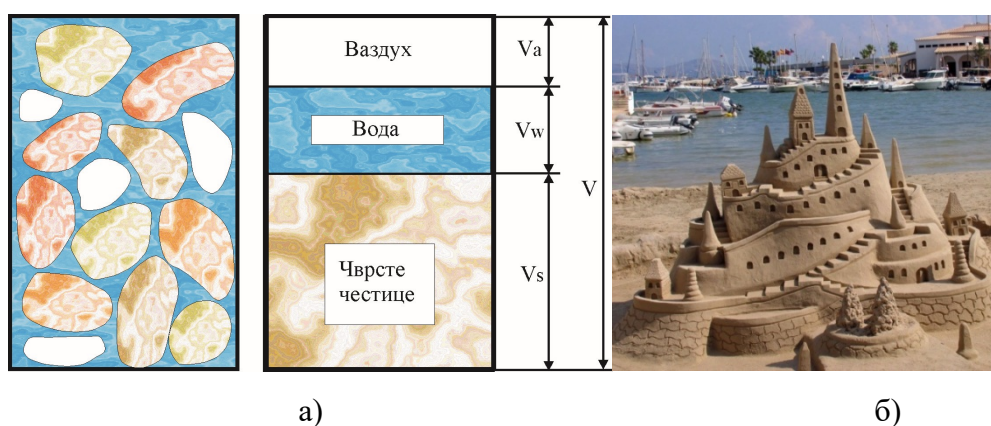
СПХ је безмрежна нумеричка метода првобитно развијена за моделирање астрофизичких проблема, а касније је њена примена проширена на компјутерску динамику флуида, а потом и на механику чврстих тела [27]-[73]. У СПХ програм су уграђени линеарно еластични, еласто-пластични и генералисани материјални модел са капом, који ће се користити за моделирање грануларних материјала.

СПХ метода је погоднија од МКЕ за моделирање великих деформација, јер као безмрежна метода није подложна утицају дисторзије мреже на тачност резултата, али је за већину инжењерских проблема МКЕ супериорнија у односу на СПХ методу у погледу могућности, тачности резултата и у погледу компјутерске захтевности, па спрезање МКЕ и СПХ методе омогућава коришћење предности обе методе [74]-[86].

## 2 КАРАКТЕРИСТИКЕ ГРАНУЛАРНИХ МАТЕРИЈАЛА

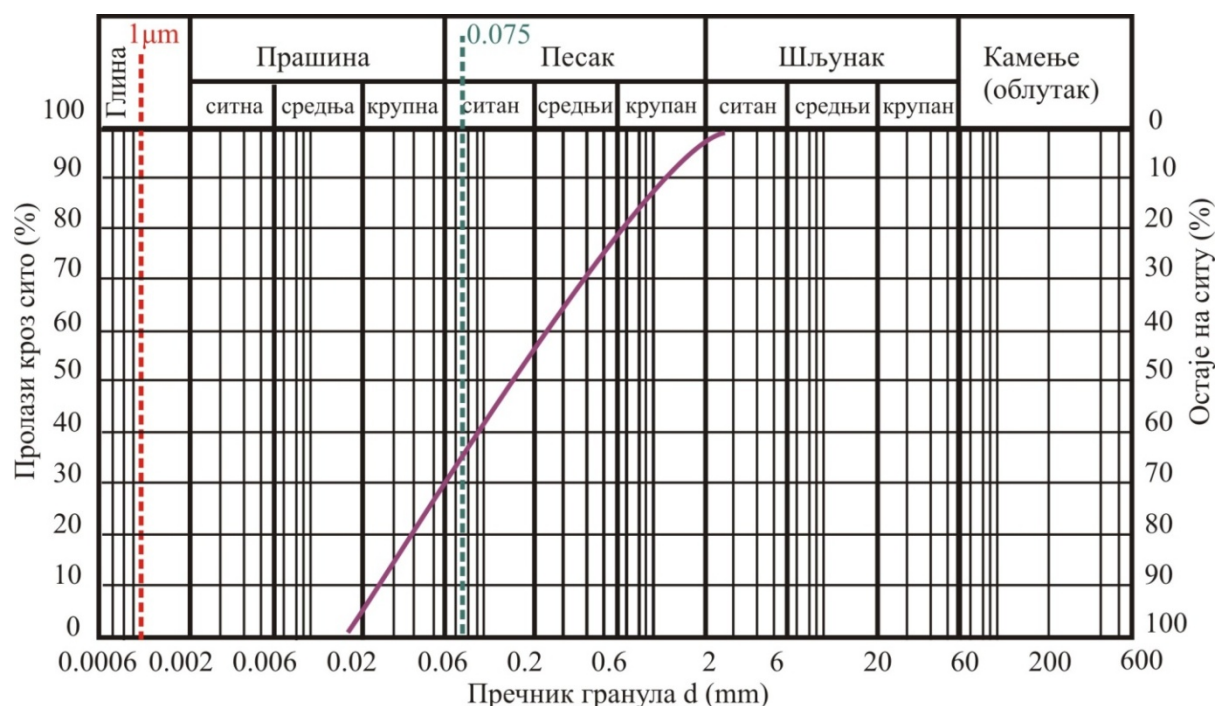
### 2.1 Састав грануларних материјала

Чврста тела, течности и гасови су основна агрегатна стања материје у физици. Поред материјала који имају јасну припадност једној од ове три основне категорије, постоји читав низ материјала који поседују такве карактеристике да их је немогуће сврстати у једно од три основна агрегатна стања, као што су на пример виско-еластични материјали који при деформисању испољавају карактеристике вискозне течности или еластичног материјала у зависности од брзине промене деформације, или грануларни материјали који представљају мешавину дискретних солида (честица) и чије понашање зависи од енергије које поседују те честице. Грануларне материјале карактерише губитак енергије приликом интеракција честица (пре свега услед трења), а честице морају бити довољно велике да не подлежу утицају термичког кретања, дакле морају бити веће од  $1 \mu\text{m}$ . Ово кретање је открио Роберт Браун 1827. године посматрајући кроз микроскоп кретање честица полена у води, које су се насумично кретале услед тога што су поједини делови посматране честице имали различит број судара са атомима воде. Са друге стране, физика грануларних материјала се може применити на појас астероида, при чему би сваки астероид био "грануларна честица". Песак и шљунак су прва асоцијација на грануларне материјале, али у грануларне материјале спадају и пшеница и друге житарице, угаљ и друге руде, бомбоне као и многе сировине и производи прехранбене индустрије, детерџент и остали производи и сировине хемијске индустрије итд. Грануларни материјали су значајан чинилац у геомеханици, науци која се бави проучавањем тла и стена [1], с тим што се у тлу поред зрна грануларног материјала која чине скелет материјала, у порама између зрна може налазити вода (слика 2.1.1.а) или нека друга течност. Течност између зрна може знатно да утиче на карактеристике грануларног материјала, тако да сув песак формира правилну ниску купу, док се влажан песак може обликовати у сложеније облике (слика 2.1.1.б).



Слика 2.1.1 Састав грануларног материјала а) запремински удели воде, ваздуха и солида б) пример утицаја воде на понашање грануларног материјала

На основу величине грануларних зрна могуће је извршити најгрубљу поделу тла на крупнозрна (која садрже преко 50% зрна већих од 0.075 mm) и ситнозрна тла (која садрже преко 50% зрна мањих од 0.075 mm) [1]. Као пример крупнозрних тла може се узети шљунак или песак у којима је преовлађујући материјал кварц, док се ситнозрна тла углавном састоје од зрна прашине и глине [1]. Као граница је узета величина од 0.075 mm, јер људско око без оптичких инструмената у грануларној маси препознаје честице веће од 0.075 mm, док се мање честице виде само као аморфна маса [1]. Обзиром да у одређеном тлу грануларне честице могу бити широког опсега величина (што није случај ког грануларних материјала у прехранбеној индустрији, где су на пример сва зрна пшенице или шећера приближно исте величине), детаљнију класификацију тла је могуће извршити на основу гранулометријског састава приказаног кривом на гранулометријском дијаграму. Експериментом који се састоји од сејања грануларног материјала кроз низ сита добијају се проценти тежине одређеног скупа грануларних честица приближно исте величине у укупној маси, на основу чега је у гранулометријском дијаграму могуће нацртати криву која описује састав целокупног посматраног материјала [1]. Гранулометријски дијаграм користи логаритамску расподелу величина зрна, а граничне величине за класификацију типа коме неки скуп честица припада користе само бројеве 2 и 6 помножене одговарајућим експонентом (слика 2.1.2).



Слика 2.1.2 Гранулометријски дијаграм

На гранулометријском дијаграму (слика 2.1.2) дата је подела геомеханичких грануларних материјала на глину, прашину, песак, шљунак и камење. На овом дијаграму дата је и линија која означава минималну величину гранула од 1  $\mu\text{m}$  коју грануле морају имати да не би биле подлежне утицају термичког кретања. Такође, дата је и линија која означава гранучну вредност од 0.075 mm приликом поделе на

крупнозрна и ситнозрна тла. Грануларни материјал приказан кривом на слици 2.1.2 се састоји првенствено од песка уз мало прашине и врло мало ситног шљунка. Поред гранулометријске криве, за опис састава тла [1] се користе и следеће нумеричке вредности:

- Ефективна величина гранула представља пречник грануле од кога је 10% гранула у материјалу мање и означава се са  $d_{10}$
- Средња величина гранула представља просечну вредност и означава се са  $d_{50}$
- Коефицијент униформности је дат изразом  $C_u = d_{60} / d_{10}$  где је  $d_{60}$  пречник грануле од кога је 60% гранула у материјалу мање. Уколико је коефицијент униформности већи, расподела величина гранула је шира и обрнуто. Шљунак је широко градуиран [1] ако је  $C_u > 4$ , док је песак широко градуиран ако је  $C_u > 6$ .

Поред садржаја воде (или неке друге течности) и расподеле величине честица, на понашање грануларног материјала знатан утицај има и облик честица који може бити компактан, плочаст или игличаст [1].

Када су све три димензије честице (дужина L, ширина В и дебљина Н) истог реда величина, честице су компактне а карактеристике које описују однос димензија су дате изразима:

- Сферичност  $X=D/L$
- Пљоснатост  $F=В/Н$
- Издуженост  $E=L/В$

где је D еквивалентни пречник кугле која има исту запремину као и посматрана грануларна честица.

Лоптасте грануларне честице имају вредност сферичности  $X=1$  док са повећањем пљоснатости и издужености опада сферичност, а расте могућност лома и уситњавања грануларних честица (чак и приликом хидростатичког оптерећења о чему ће касније бити речи).

На треће које се јавља међу грануларним честицама осим коефицијента трења за материјал од кога су сачињене, утиче и њихова ангуларност, величина која карактерише оштрину углова и ивица и која је дата следећим изразом:

$$R = r_{ug} / r_{up}, \quad (2.1.1)$$

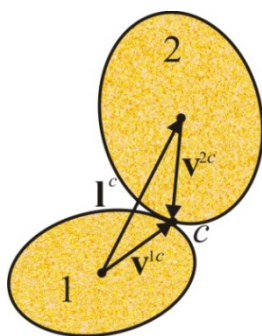
где је  $r_{ug}$  просечан полупречник углова и ивица, а  $r_{up}$  је полупречник максималне уписане сфере [1].

## 2.2 Напони и деформације у скуповима грануларних честица

Напони и деформације представљају основне величине у механици које описују стање материјала, а код грануларних материјала, услед њихове специфичности, постоје два приступа анализи напона и деформација. Први је приступ механике континуума а други микро-структурни приступ [2]. Идеја на којој се заснива приступ механике континуума је да се целокупни скуп грануларних честица посматра као континуални домен, а да се конститутивне релације између напона и деформација одређују на основу експерименталних резултата [2]. Проблем код овог приступа је што валидност резултата може бити доведена у питање ако се услови при симулацији реалног проблема разликују у односу на услове који су постојали током експерименталног одређивања карактеристика материјала [2]. Да би се повећала флексибилност и смањила осетљивост материјалног модела на промене услова, неопходно је увођење компликованијих математичких једначина са већим бројем параметара и променљивих стања [2], што ће касније бити демонстрирано на генерализаном кап моделу који је уграђен у СПХ програм.

Микро-структурни приступ се заснива на одређивању променљивих стања макро-нивоа (напона и деформација) на основу променљивих у микро-нивоу као што су контактне силе, померања зрна и локалне геометријске карактеристике [2]. Проблем код овог приступа је одређивање геометријских јединица у којима ће се рачунати променљиве стања да би се после те променљиве стања сумирале при рачунању напона и деформација [2]. Најједноставнија геометријска јединица је контакт између два зрна. Центар првог зрна је дефинисан вектором положаја  $\mathbf{x}^1 = x_i^1(x_1, x_2)$   $i=1,2$ ; где су  $x_i^1$  Декартове координате центра зрна у 2Д простору. Центар другог зрна је дат са  $\mathbf{x}^2 = x_i^2(x_1, x_2)$   $i=1,2$ . Вектор који спаја центре зрна назива се грана вектором  $l_i^c$  и дат је изразом 2.2.1. Грана вектор се може изразити помоћу вектора  $v_i^{1c}$  и  $v_i^{2c}$  који спајају центре зрна 1 и 2 са тачком контакта  $c$ , што је приказано на слици 2.2.1

$$l_i^c = v_i^{1c} - v_i^{2c}. \quad (2.2.1)$$



Слика 2.2.1 Контакт између два зрна

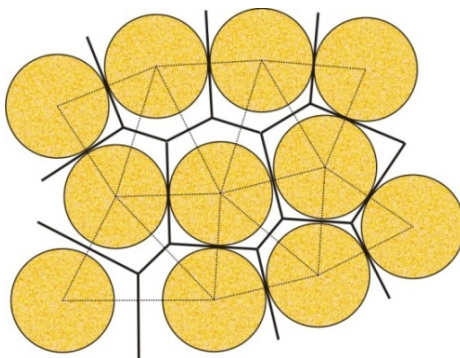
Укупан макроскопски напон у грануларном материјалу  $\bar{\sigma}_{ij}, i, j = 1, 2$ , који је последица унутрашњих сила [3] у тачкама контакта дат је са:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^M l_i^c F_j^c, \quad (2.2.2)$$

где је  $V$  запремина грануларног материјала,  $M$  је број контакта међу зрнима а  $F_j^c$  је вектор контактне силе [3].

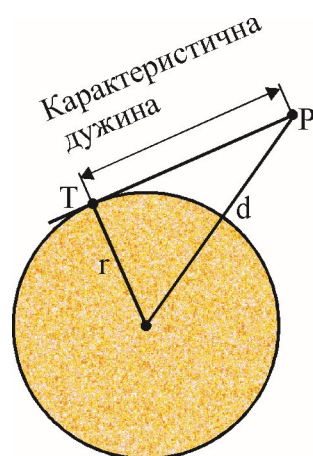
Да би се представиле геометријске и тополошке релације између зрна које су неопходне за изражавање деформација, потребно је увести сложеније геометријске јединице, тзв. микро-елементе који се састоје од посматраног зрна и њему најближих околних зрна.

Ако се грануларни материјал који се састоји од сферичних зрна истог пречника посматра у 2Д простору, могуће је извршити Вороној тесалацију, односно поделу равни у којој се налазе грануларне честице на ћелије. У свакој ћелији се налази по једна грануларна честица, а границе међу ћелијама су линије управне на грана векторе који спајају средишта честица. Те граничне линије се налазе на једнаком растојању између грануларних честица.



Слика 2.2.2 Вороној дијаграм

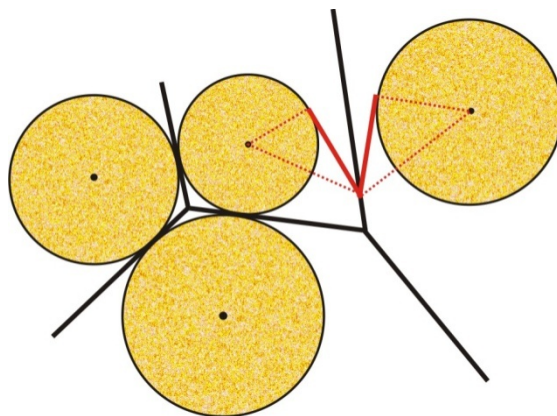
Уколико су грануларне честице неједнаке величине уместо Вороној, могуће је поделити простор помоћу Дирихлеове тесалације. Квадрат карактеристичне дужине за неку тачку представља разлику квадрата растојања тачке од центра грануларне честице и квадрата полупречника те честице (слика 2.2.3)



Слика 2.2.3 Карактеристична дужина



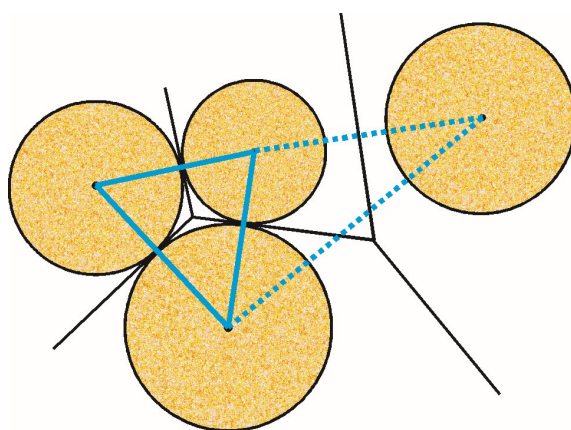
Ћелија добијена Дирихлеовом тесалацијом садржи грануларну честицу и све тачке чији је квадрат карактеристичне дужине мањи од квадрата карактеристичних дужина у односу на суседне честице. Уколико се грануларне честице додирују, гранична линија између њихових ћелија представља тангенту у тачки додира (слика 2.2.4).



Слика 2.2.4 Дирихлеова тесалација

Уколико су све честице истог пречника, Дирихлеова и Вороној тесалација су еквивалентне [2]. Претходно описани поступак одређивања ћелија Вороној или Дирихлетовом тесалацијом могуће је применити и у 3Д моделу грануларног материјала, при чему се уместо граничних линија добијају граничне површине.

На основу поделе грануларног материјала на ћелије коришћењем Вороној или Дирихлеове тесалације могуће је дефинисати Деланеј мрежу [2]. Уколико две ћелије добијене Вороној или Дирихлетовом тесалацијом имају заједничку страну (линију у 2Д моделу или површину у 3Д моделу), центри њихових зрна се спајају линијом. Уколико су зрна у контакту та линија је пуна, а уколико нису, линија је испрекидана. Ове линије формирају Деланеј мрежу која се састоји од симплекса: троуглова у 2Д и тетраедара у 3Д простору (слика 2.2.5).



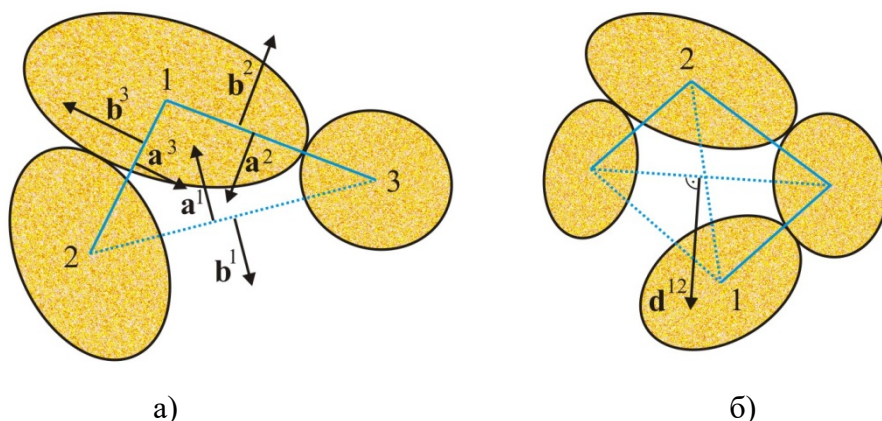
Слика 2.2.5 Деланеј мрежа

Поред поделе грануларног материјала на ћелије, за опис деформација потребно је дефинисати и одређене векторе [2]. Уколико се посматра Деланеј симплекс ћелија, њена темена се могу означити са  $k=1,2,\dots,(D+1)$  где је  $D$  ознака димензија (2 или 3), а такође тим бројевима се означавају и супротне странице симплекса (линије у 2Д или



површине у 3Д). Свакој страници се додељује вектор  $b_i^k$  који је нормалан на к-ту страницу, чија је величина једнака дужини (у 2Д) или површини (у 3Д) дате странице, правац је нормалан на страницу, а смер је ка спољашњости у односу на симплекс (слика 2.2.6.а). Помоћу вектора  $b_i^k$  могуће је дефинисати вектор  $a_i^k$  као:

$$a_i^k = -\frac{1}{D} b_i^k, \quad (2.2.3)$$



Слика 2.2.6 Вектори у Деланеј мрежи а) нормални вектори б) допунски површински вектор

На основу вектора  $a_i$  могуће је дефинисати допунски површински вектор  $d_i$  [2]. Ако се посматрају два грануларна зрна 1 и 2 која су повезана у Даланеј мрежи одређеном ивицом, прво се траже све ћелије које садрже ту ивицу, а потом се вектор  $d_i$  добија као

$$d_i^{12} = \frac{1}{D+1} \sum_{t=1}^T (a_i^{1(t)} - a_i^{2(t)}). \quad (2.2.4)$$

У 2Д простору постоје само две ћелије које садрже заједничку ивицу, док их у 3Д простору може бити више, што је означено бројем  $T$  у изразу (2.2.4). За 2Д случај допунски површински вектор за зрна 1 и 2 је приказан на слици 2.2.6.б

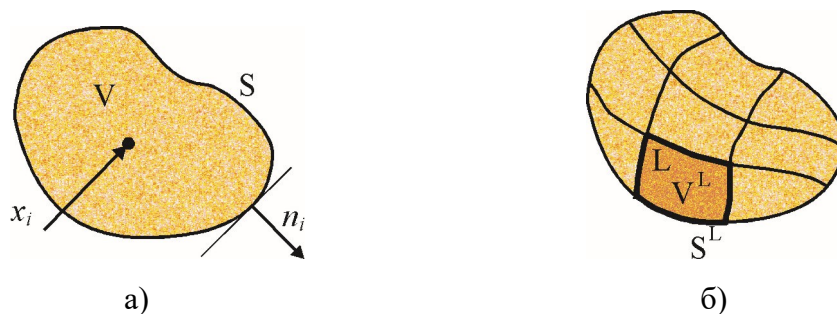
За континуално поље померања  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , при чему је вектор положаја у тренутку  $t$  дат са  $\mathbf{x}$ , тензор градијента померања [2] је дат са:

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (2.2.5)$$

Користећи Гаус-Грин-Остроградски теорему просечна вредност тензора градијента померања у запремини грануларног материјала може се изразити помоћу површинског интеграла

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V e_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial u_i}{\partial X_j} dV = \frac{1}{V} \int_S u_i n_j dS, \quad (2.2.6)$$

где су  $V$  укупна запремина грануларног материјала,  $S$  је површина границе те запремине, а  $n_j$  је вектор нормале на површину (слика 2.2.7.а). Укупну запремину грануларног материјала је могуће поделити на под-домене (слика 2.2.7.б).

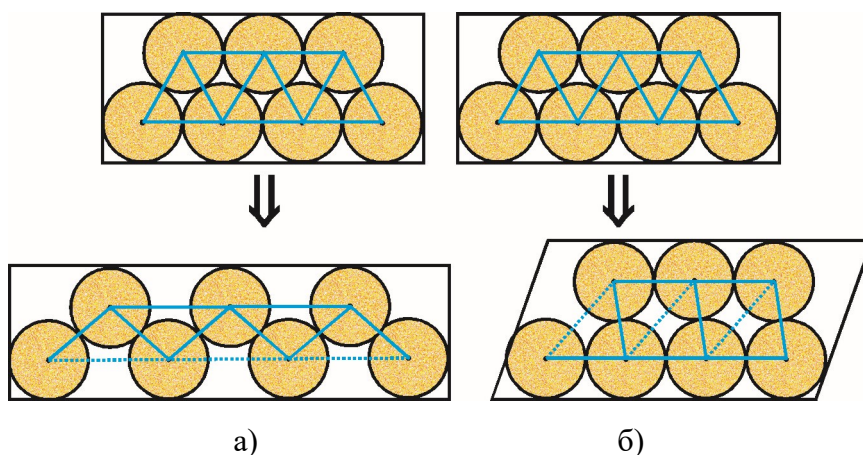


Слика 2.2.7 Дискретизација грануларног материјала а) укупна запремина б) запремина подељена на под-домене

За сваки под-домен  $L$  просечна вредност тензора градијента померања је дата са:

$$\bar{e}_{ij}^L = \frac{1}{V^L} \int_{S^L} u_i n_j dS. \tag{2.2.7}$$

За одређивање деформација у целокупном грануларном материјалу најпрактичније је поделити укупну запремину на Деланеј ћелије [2], пошто оне најбоље карактеришу дисторзије унутрашње структуре, као што је приказано на примерима чистог притиска и чистог смицања приказаним на слици 2.2.8.



Слика 2.2.8 Деформације у Деланеј мрежи, а) деформације услед притиска, б) смичуће деформације

За  $L$ -ту Деланеј ћелију (симплекс) израз (2.2.7) може се написати у дискретном облику

$$\bar{e}_{ij}^L = \frac{1}{V^L} \sum_{k=1}^{D+1} u_i^k a_j^k, \tag{2.2.8}$$

где индекс  $k$  означава чворове симплекса,  $u_i^k$  представља вектор померања чвора  $k$  а вектор  $a_j^k$  је дат са (2.2.3).

Пошто је сума свих вектора  $a_j^k$  који припадају датом симплексу једнака нули, у изразу (2.2.8) од померања чвора  $k$  може се одузети средње померање, чиме се добија

$$\bar{e}_{ij}^L = \frac{1}{V^L} \sum_{k=1}^{D+1} (u_i^k - u_i^0) a_j^k, \quad (2.2.9)$$

где је средње померање дато као:

$$u_i^0 = \frac{1}{D+1} \sum_{k=1}^{D+1} u_i^k. \quad (2.2.10)$$

Заменом израза (2.2.10) у израз (2.2.9) добија се израз за просечну вредност тензора градијента померања у  $L$ -тој ћелији:

$$\bar{e}_{ij}^L = \frac{1}{D+1} \frac{1}{V^L} \sum_{m<n} (u_i^m - u_i^n) (a_j^m - a_j^n), \quad (2.2.11)$$

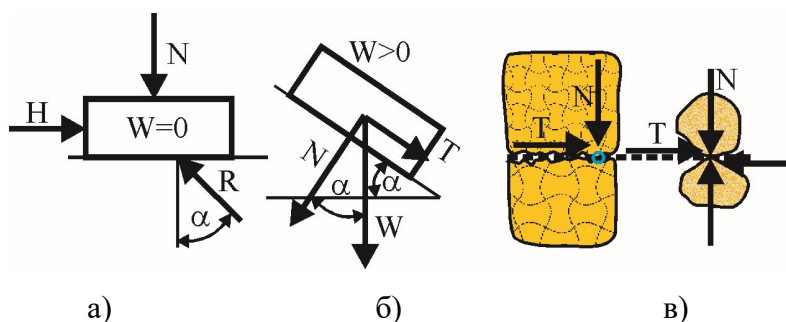
где  $m$  и  $n$  означавају чворове у ћелији, а да би се избегло поновљено сумирање постављен је додатни услов да је  $m$  мање од  $n$ . Увођењем нотације за вектор  $\Delta u_i^{mn} = u_i^m - u_i^n$  и коришћењем израза за вектор  $d_j^{mn}$ , чије је извођење дато једначином (2.2.4) на примеру грануларних честица 1 и 2, добија се коначни израз за средњу вредност тензора градијента померања у грануларном материјалу [2]:

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{m<n} \Delta u_i^{mn} d_j^{mn}. \quad (2.2.12)$$

Косо-симетрични део овог тензора одражава просечну ротацију ћелија као крутих тела, док симетрични део изражава деформације ћелија па се може узети за тензор мале деформације скупа грануларних честица [2].

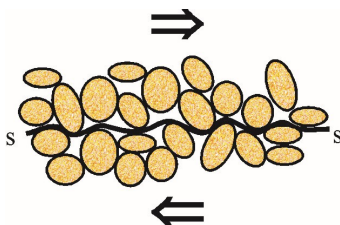
### 2.3 Понашање грануларних материјала

Смичућа чврстоћа представља максимални смичући напон који се може нанети структури грануларног материјала у одређеном правцу [1]. Пораст хидростатичког притиска узрокује повећање крутости грануларног материјала, јер се са порастом нормалних сила повећавају и силе трења које учвршћују материјал [1]. Пораст смићућег напона изазива пораст дисторзијских деформација (слика 2.2.8.б) до максималне величине, након чега долази до лома који карактерише померање великих делова масе грануларног материјала. Чврстоћа грануларног материјала зависи од низа фактора као што су ефективни нормални напон, трење међу честицама, кохезија услед воде или других материја у порама грануларног материјала (слика 2.1.1.а), сферичности зрна и тополошких карактеристика [1]. Уколико се сув песак сипа на равну површину, формира са купаста гомила чије изводнице са датом површином заклапају угао који се назива углом природног нагиба [1]. Упрошћени модел трења у грануларним материјалима је дат на слици 2.3.1. а, б и в.



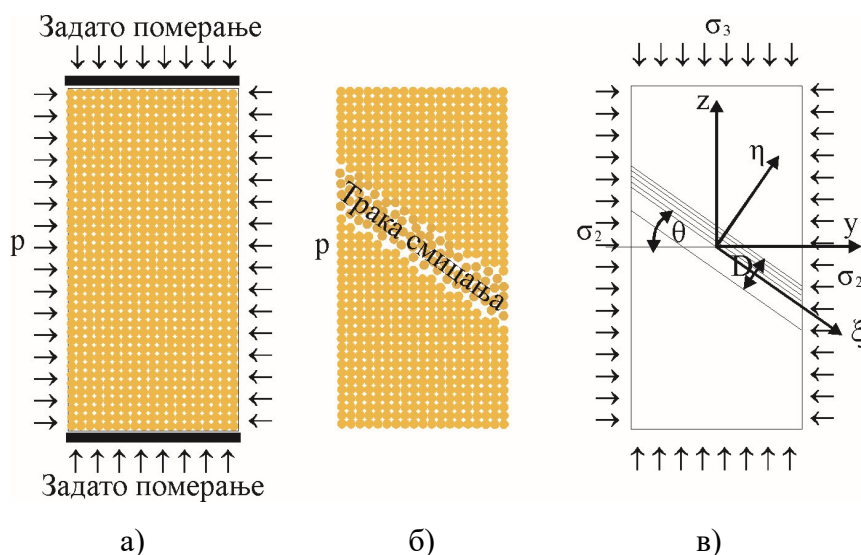
Слика 2.3.1 Трење у грануларном материјалу а) блок на хоризонталној површини б) блок на косој површини в) контакт грануларних зрна

Ако се блок без тежине оптерети вертикалном силом  $N$  и хоризонталном силом  $H$ , правац силе реакције  $R$  заклапа са хоризонталном равни угао  $\alpha$  (слика 2.3.1.а). Уколико се хоризонтална сила повећа до величине при којој долази до померања блока у односу на подлогу, резултанта заклапа угао  $\varphi$ , који представља угао трења [1]. Слично, ако се блок тежине  $W$  ротира за неки угао  $\alpha$ , када тај угао достигне величину угла трења  $\varphi$  доћи ће до клизања блока по нагнутој површи (слика 2.3.1.б). Угао трења  $\varphi$ , се још зове и угао смичуће чврстоће. У стварности трење у грануларном материјалу је доста сложеније [1], јер се напони преносе преко контактних сила међу суседним зрнима, која услед њих могу да се крећу транслаторно, али и да се ротирају око сопствене осе, да се котрљају по другим зрнима, прескачу једна преко других или да се дробе, уколико је напон довољно велик (слика 2.3.1.в). За разлику од упрошћеног модела (слика 2.3.1. а и б), где се клизање блока дешава по равни у реалности се клизање догађа у сложеној таласастој површини која се мења са временом [1] и која ја на слици 2.3.2 означена са s-s.



Слика 2.3.2 Таласаста површ клизања

За експериментално одређивање смичуће чврстоће користе се троосни тестови [4]. Назив троосни тест се често употребљава иако није одговарајући јер није испуњен услов да су напони у сва три правца различити  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ . При троосном тесту грануларни материјал се ставља у цилиндар од латекса, који је са горње и доње стране затворен металним плочама и који је постављен у посуду испуњену водом или неком другом течносту, која служи за задавање равномерног притиска дуж обода цилиндра [4] (слика 2.3.3.а).



Слика 2.3.3 Троосни тест а) задавање оптерећења б) настанак траке смицања в) дебелина траке смицања

Услед померања плоча долази до повећања напона у  $Z$  правцу док у правцима  $X$  и  $Y$  делује хидростатички притисак ( $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ ). Када смичући напон достигне величину смичуће чврстоће, долази до лома грануларног материјала који карактерише постојање уске зоне (дебљине 10 до 20 просечних пречника зрна) која се назива трака смицања и која је ограничена са две површи клизања [4] (слика 2.3.3.б). Угао који трака смицања заклапа са хоризонталом зависи од састава и карактеристика материјала, тако да за савршене сфере истог пречника тај угао износи  $60^\circ$ , док се за хетерогене материјале тај угао приближава вредности  $45^\circ$ , која би се добила аналитичким приступом механике континуума [4]. За одређивање ширине траке смицања потребно је посматрати поље померања. У центру траке смицања се поставља нови координатни систем  $(\xi, \eta)$ , код кога је оса  $\xi$  паралелна траци смицања, а оса  $\eta$  је управна на траку смицања (слика 2.3.3.в). Померање неке грануларне честице у правцу траке смицања се може изразити преко следећег израза:

$$u_\xi(\xi, \eta) = u_y \cos \theta - u_z \sin \theta, \quad (2.3.1)$$

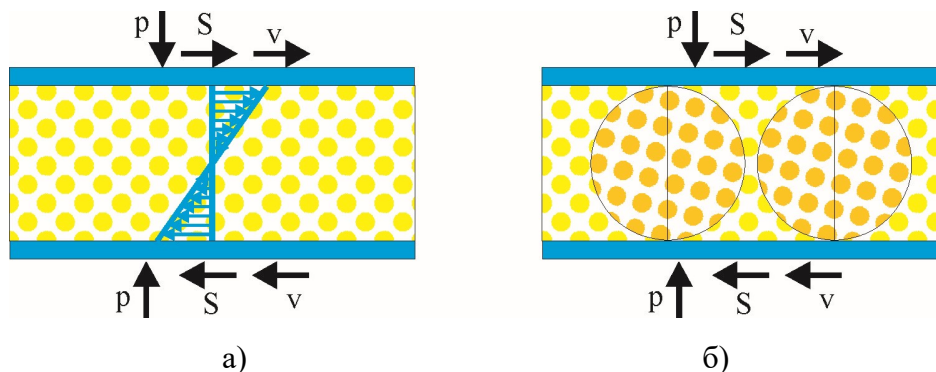
где је  $\theta$  угао који заклапа трака смицања са хоризонталом. Ако се област траке смицања подели на већи број подобласти, просечно померање у правцу траке смицања за подобласт  $i$  је дато изразом:

$$\bar{u}_\xi^i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} u_\xi^j, \quad (2.3.2)$$

где је  $N_i$  број честица у датој области. Изнад горње и испод доње површи клизања поље померања је константно [4], док се унутар траке смицања поље померања мења линеарно (слика 2.3.4.а). Дебелина траке смицања је одређена границом где почиње промена поља померања. Понашање грануларног материјала у траци смицања одговара понашању течности са великим Рејнолдсовим бројем, код које инерцијалне силе

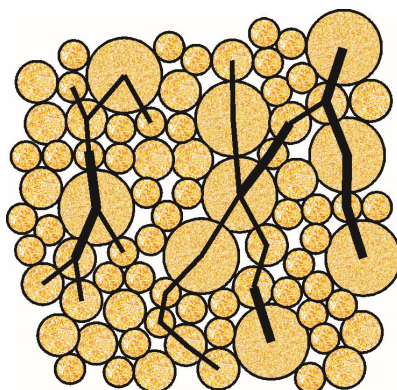


преовлађују над вискозним и код које се јављају вртлози и друге нестабилности (слика 2.3.4.б).



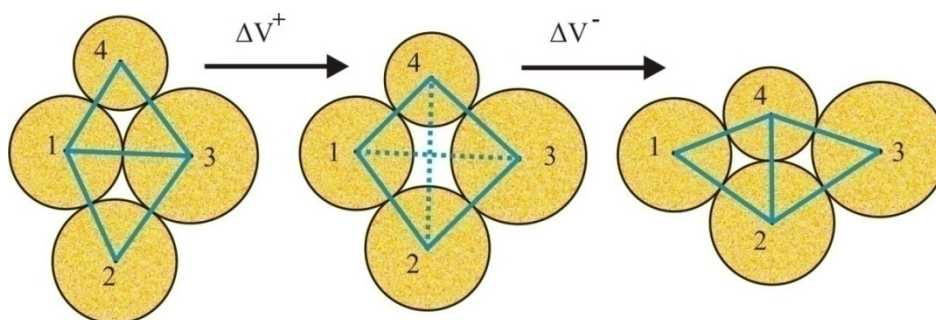
Слика 2.3.4 Трака смицања а) поље померања б) настанак вртлога

Вртлози у грануларном материјалу су краткотрајни, и током деформације материјала понављају се циклуси формирања вртлога, њиховог заглављивања на местима где се два вртлога додирују, формирања ланаца сила на местима контакта и потом колапса ланаца сила које индукује формирање нових вртлога [5]. Ланци сила представљају скупове грануларних честица који преносе највећи део оптерећења, док остале грануларне честице имају потпорну улогу (слика 2.3.5)



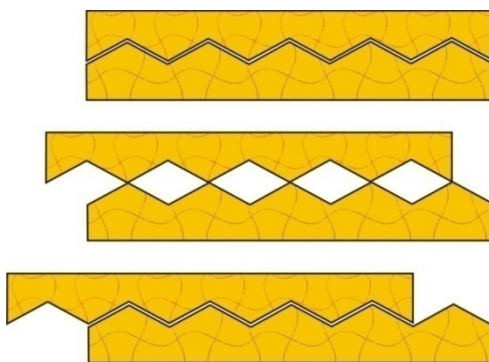
Слика 2.3.5 Ланци сила

Приликом колапса ланаца сила, као и приликом вртложног кретања грануларног материјала долази до промене топологије [6], што се види на примеру четири грануларне честице и Деланеј ћелијама међу њима (слика 2.3.6)



Слика 2.3.6 Промена топологије у грануларном материјалу

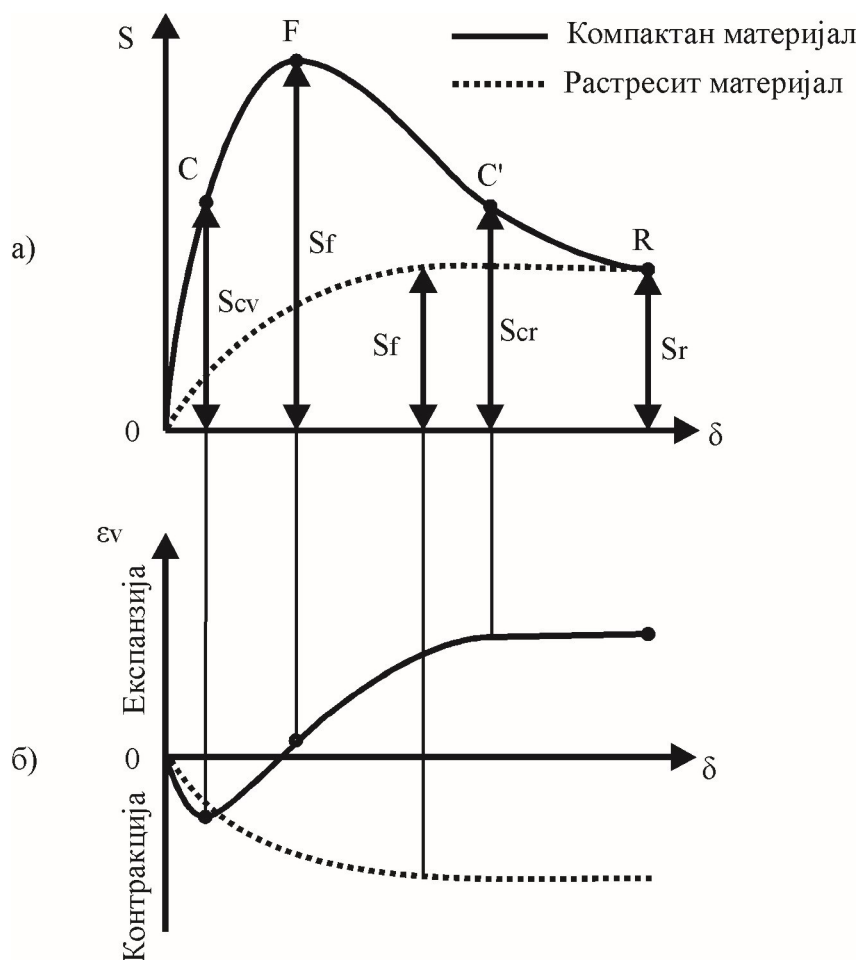
Ове промене се називају флипovima и повећање њихове учесталости доводи до повећања запремине услед смичућег оптерећења грануларног материјала (дилатације) [6]. Флипови представљају хетеротропне деформације, јер се код њих мењају најближе честице. На слици 2.3.6 у почетном положају честице 1 и 3 су у контакту а у крајњем положају су честице 2 и 4 у контакту, што такође условљава и промену Деланеј ћелија. При преласку из почетне у нестабилну конфигурацију долази до повећања запремине  $\Delta\varepsilon^+ \Delta V^+$ , а након преласка из нестабилне у крајњу стабилну конфигурацију долази до смањења запремине  $\Delta V^-$  а разлика  $|\Delta V^+| - |\Delta V^-|$  је последица еластичне релаксације честица које учествују у флипу [6]. Ако се таласаста површ клизања (слика 2.3.2) упрошћено посматра као контакт две назубљене површине [7], након повећања запремине до додира врхова зуба уследило би смањење запремине до постизања следеће равнотежне конфигурације, па би укупна запреминска деформација била једнака нули (слика 2.3.7).



Слика 2.3.7 Дилатација при контакту две назубљене површи

У стварности, величина дилатације при смицању зависи од карактеристика грануларног материјала, као што су састав и облик зрна, удео воде или неке друге течности која се налази у порама, а пре свега од збијености односно растреситости. Зависност смичућих напона  $S$  од релативних смичућих померања за компактан и растресит материјал дата је на слици 2.3.8.а. За компактан грануларни материјал повећање релативних смичућих померања  $\delta$  изазива повећање смичућег напона до максималне величине  $S_f$ , која се назива вршна смичућа чврстоћа [1]. Након достизања вршне смичуће чврстоће, услед наставка деформације смичући напон опада до константне вредности која се назива резидуална смичућа чврстоћа  $S_r$ , или чврстоћа при великим деформацијама. Уколико се посматра однос запреминске деформације у функцији од релативних смичућих померања за компактан грануларни материјал, може се уочити тачка у којој је градијент промене запремине једнак нули (слика 2.3.8.б). Пре ове тачке компактни грануларни материјал се сабија, а након те тачке почиње дилатација која прво враћа запремину до почетне вредности, а потом наставља да је повећава све до максималне вредности [1]. Тачки у којој је градијент промене запремине једнак нули одговара тачка  $C$  на дијаграму 2.3.8.а, односно напон  $S_{cv}$ . Иста величина напона се налази и на опадајућем делу криве  $C'$ . Тачки  $C'$  одговара напон  $S_{cr}$  који се назива чврстоћом при константној запремини јер при том напону престаје

дилатација (слика 2.3.8.б). Ова тачка означава стање напона које се назива критично стање. Са друге стране, растресити материјали, који су приказани испрекиданом линијом на слици 2.3.8, се контракују при порасту релативних смичућих померања до постизања вршне чврстоће, која истовремено представља и резидуалну чврстоћу, односно чврстоћу при константној запремини. Иако се и код њих дешавају исти механизми који изазивају дилатацију код компактних материјала, код растреситих материјала деформације доводе до ефикаснијег паковања грануларних зрна, па се запремина смањује све до успостављања равнотеже између процеса који изазивају збијање и процеса који изазивају дилатацију.



Слика 2.3.8 Промена физичких величина услед релативних смичућих померања а) смичући напон б) запреминска деформација

У наредним поглављима претходно описане карактеристике грануларних материјала биће коришћене за њихово адекватно моделирање нумеричким методама.



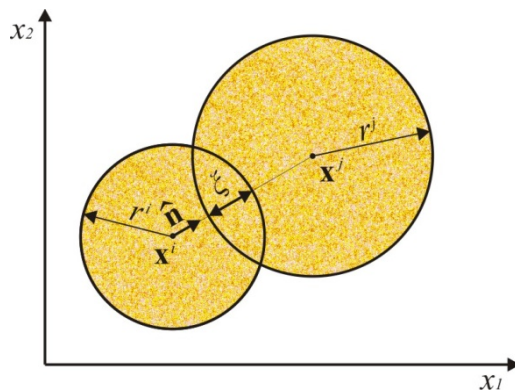
### 3 МЕТОДА ДИСКРЕТНИХ ЕЛЕМЕНАТА (ДЕМ)

#### 3.1 Значај и историја развоја

За разлику од већине других нумеричких метода које се могу користити за симулацију широког спектра физичких проблема или интеракције два или више физичка процеса у тренутно најмодернијем мултифизичком приступу, метода дискретних елемената (ДЕМ) је развијена од стране Кундала и Страка искључиво за моделирање понашања грануларних материјала [8]. Првобитно се ДЕМ метода користила искључиво у 2Д простору, али је са порастом могућности рачунара постало могуће моделирати и 3Д проблеме, тако да су Кавагучи и коаутори користили ДЕМ методу у 3Д простору за моделирање грануларног материјала који није сув, већ се налази у флуидизованим посудама које служе за сушење, мешање или индуковање хемијских реакција [9]. Поред утицаја течности која се налази у порама, да би се што реалније представиле интеракције међу грануларним зрнима Ивашита и Ода су модификовали ДЕМ методу тако што су уместо идеализованог контакта у једној тачки који се примењује у ДЕМ методи, контакт између два зрна моделирали контактном површином која може имати храпаву текстуру [10] или садржати танак филм течности. Храпавост знатно утиче на отпор котрљању међу честицама и тако добијену модификовану ДЕМ методу Ивашита и Ода су користили за проучавање настанка трака смицања приликом троосног теста. Бардет и Праубет су увели концепт задавања притиска директно на грануларне честице што омогућава реалније деформисање границе модела [11]. Фазекас и коаутори су проширили могућности ДЕМ методе на 3Д моделирање троосног теста [12]. Следећи корак у развоју ДЕМ методе је било увођење произвољних полигона уместо до тада коришћених сфера прво у 2Д а потом и у 3Д окружењу [13]. Коришћење полигона за представљање грануларних честица омогућава ДЕМ моделирање лома стенске масе приликом изградње тунела, одрона или удара пројектила и симулацију кретања и понашања тако добијених честица, али за моделирање остатка стенске масе неопходно је комбиновање ДЕМ методе са методама заснованим на механици континуума као што су МКЕ и СПХ метода [14]. Поред датих комбинација, Муњиза је развио хибридну методу која представља мешавину методе коначних и дискретних елемената (*Finite-Discrete Element Method* ФДЕМ) која представља врхунску методу у механици лома [15]. У оквиру ове дисертације проучаваће се грануларни материјали који су сачињени од зрна приближно лоптастог облика, тако да ће се користити изворно кружно представљање грануларних честица [8]- [12]. На основу поређења резултата 2Д [10]-[11] и 3Д [12] троосног теста може се закључити да 3Д приступ не доноси значајан допринос разумевању понашања грануларних материјала. Имајући у виду знатно већу компјутерску захтевност коју 3Д приступ доноси за моделирање грануларних материјала ДЕМ методом у овој дисертацији биће коришћен 2Д приступ.

### 3.2 Основне карактеристике ДЕМ методе

ДЕМ метода је заснована на моделирању међу-честичног контакта коришћењем нелинеарног еластичног Херцовог закона [8] који дефинише силе које се јављају на контакту зрна. Ако је растојање између центара два зрна  $i$  и  $j$  са векторима положаја  $\mathbf{x}^i$  и  $\mathbf{x}^j$  мање од збира њихових полупречника, јавља се улегнуће  $\xi$  које изазива Херцове силе (слика 3.2.1)



Слика 3.2.1 Улегнуће при контакту међу зрнима

Херцове силе између зрна  $i$  и  $j$  [16] су дефинисане једначином:

$$\mathbf{F}_H^{ij} = K^{ij} \xi^{3/2} \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.2.1)$$

где је вектор јединичне нормале дат са:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i}{|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i|}. \quad (3.2.2)$$

Дубина улегнића је дата изразом:

$$\xi = \begin{cases} r^j + r^i - |\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i| & \text{if } \xi > 0 \\ 0 & \xi \leq 0 \end{cases}, \quad (3.2.3)$$

а коефицијент крутости  $K^{ij}$  је дефинисан једначином:

$$K^{ij} = \frac{2}{3} \frac{E}{(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r^i r^j}{r^i + r^j}}, \quad (3.2.4)$$

при чему  $\sqrt{\frac{r^i r^j}{r^i + r^j}}$  представља ефективни радијус контакта.

Пошто је једна од најважнијих карактеристика грануларних материјала губитак енергије услед трења, сила трења такође мора бити узета у обзир приликом моделирања међу-честичних интеракција [16]. Ова сила се моделира коришћењем вискозне регуларизације Кулоновог закона [17] и дата је са:

$$\mathbf{F}_F^{ij} = -\mu \left| \mathbf{F}_H^{ij} \right| \left( \frac{|\mathbf{v}_s^{ij}|}{\eta_0} \right)^{1/m} \hat{\mathbf{v}}_s^{ij}, \quad (3.2.5)$$

где је  $\mu$  коефицијент трења,  $m$  је произвољни број (око 20) а номинална брзина је дата са  $\eta_0$ . Брзина клизања између честица  $i$  и  $j$  је дата са  $\mathbf{v}_s^{ij}$  а јединични вектор дуж правца клизања је дат са  $\hat{\mathbf{v}}_s^{ij}$ . Брзина клизања је сума брзина транслације и брзина ротације:

$$\mathbf{v}_s^{ij} = \mathbf{v}_t^{ij} + \mathbf{v}_r^{ij}, \quad (3.2.6)$$

Брзина транслације [17] је дата са:

$$\mathbf{v}_t^{ij} = \left( (\mathbf{v}^j - \mathbf{v}^i) \cdot \hat{\mathbf{t}} \right) \hat{\mathbf{t}}, \quad (3.2.7)$$

где је тангентни јединични вектор дат са  $\hat{\mathbf{t}}$  тако да важи  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0$ .

Брзина ротације [16] је дата са:

$$\mathbf{v}_r^{ij} = \boldsymbol{\omega}^j \times (\mathbf{x}^{ij} - \mathbf{x}^j) - \boldsymbol{\omega}^i \times (\mathbf{x}^{ij} - \mathbf{x}^i), \quad (3.2.8)$$

где су  $\boldsymbol{\omega}^i$  и  $\boldsymbol{\omega}^j$  угаоне брзине честица а  $\mathbf{x}^{ij}$  је вектор положаја контакта.

Поред трења између честица  $i$  и  $j$  чији се контакт посматра, потребно је узети у обзир и интеракцију датих честица са околином. Околину представљају друге честице и међучестични простор испуњен течношћу или ваздухом. Ова интеракција се испољава као вискозна пригушна сила која је последица трења и која се супротставља кретању честица. Ако су честице окружене са свих страна другим честицама, услед трења, највећи део њихове кинетичке енергије се расипа, а у случају судара честица које слободно лете њихове брзине после судара су истог реда величина као и пре судара. Однос брзина после и пре судара назива се коефицијент реституције  $k$  и у случају грануларног материјала може имати широк спектар вредности [16], што зависи пре свега од околине посматране честице. У случају великог броја суседних честица, коефицијент реституције је веома мали, док је у случајевима када се честица одвоји од остатка материјала, приликом њеног судара са зидом или неком другом честицом коефицијент реституције знатно већи. Ово понашање најбоље описује нелинеарни вискоеластични закон удара [18], у коме фигурише коефицијент контактеног пригушења  $T$  који зависи од коефицијента реституције  $k$ . Веза између  $T$  и  $k$  се добија решавањем диференцијалне једначине другог Њутновог закона у програму *MATLAB*. Детаљи извођења су дати у следећој глави, а веза је представљена на слици 3.3.3. Поред коефицијента контактеног пригушења, вискозна пригушна сила зависи и од коефицијента крутости  $K$ , и брзине судара  $\dot{\xi}$ , тако да се при великим брзинама судара највећи део кинетичке енергије расипа, док се при малим брзинама судара, међу густо збијеним честицама, највећи део кинетичке енергије претвара у потенцијалну енергију еластичности. Овако дефинисана пригушујућа сила [16] дата је следећим изразом:

$$\mathbf{F}_D^{ij} = TK^{ij} \xi^{1/2} \dot{\xi} \hat{\mathbf{n}}, \quad (3.2.9)$$

при чему је брзина промене улегнућа (брзина судара) дата са:

$$\dot{\xi} = \begin{cases} (\mathbf{v}^j - \mathbf{v}^i) \cdot \hat{\mathbf{n}} & \text{if } \xi > 0 \\ 0 & \xi \leq 0 \end{cases}, \quad (3.2.10)$$

где су  $\mathbf{v}^i$  и  $\mathbf{v}^j$  вектори брзина зрна  $i$  и  $j$ . Одређивање коефицијента контактнoг пригушења  $T$  на основу коефицијента реституције  $k$  је такође значајно за одређивање адекватног временског корака што ће бити обрађено у глави 3.3.

На основу израчунатих компоненти, укупна сила на контакту између честица  $i$  и  $j$  [17] се израчунава као њихова сума:

$$\mathbf{F}^{ij} = \mathbf{F}_H^{ij} + \mathbf{F}_D^{ij} + \mathbf{F}_F^{ij}. \quad (3.2.11)$$

Треће текође изазива и моменте око центра честице, тако да је момент у честици  $i$  од честице  $j$  дат изразом:

$$\mathbf{M}^{ij} = (\mathbf{x}^{ij} - \mathbf{x}^i) \times \mathbf{F}_F^{ij}, \quad (3.2.12)$$

Укупне силе и моменте у честицама представљају суму свих појединачних сила и момената који се јављају у контактима честица. Ако је број контакта означен са  $n$  силе и моменте за честицу  $i$  су дати изразима:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^i &= \sum_{j=1}^n \mathbf{F}^{ij}, \\ \mathbf{M}^i &= \sum_{j=1}^n \mathbf{M}^{ij}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

### 3.3 Избор интеграционе шеме и одређивање временског корака

Координате и брзине сваке честице у ДЕМ методи се ажурирају интеграцијом другог Њутновог закона [8] за коначне временске инкременте. У механици постоје два приступа добијања решења обичних и парцијалних диференцијалних једначина чије су непознате функција времена: експлицитни и имплицитни приступ. Код експлицитног приступа вредности физичких величина у наредном кораку се рачунају на основу вредности тих величина у текућем кораку

, док се код имплицитног приступа вредност неке физичке величине у наредном кораку добија решавањем једначина које су у функцији и од вредности те величине у претходном кораку и од вредности те величине у наредном кораку.

Имплицитне методе су теже за имплементацију јер морају да се решавају нумерички али омогућавају примену знатно већег временског корака. Експлицитне методе морају имати веома мали временски корак јер су једначине које се помоћу њих решавају

нумерички нестабилне али су доста једноставније за примену. ДЕМ метода као и СПХ (која ће бити објашњена у наредној глави) су засноване на експлицитном приступу, док се у МКЕ методи користе оба приступа у зависности од потребе и особина проблема који се моделира. Са обзиром да експлицитне методе захтевају веома мали временски корак, у случају анализе већег модела, укупно време анализе може постати сувише велико. Одређивање одговарајуће шеме временске интеграције игра веома битну улогу у креирању модела који ће у разумном року дати решења уз прихватљиву грешку [19].

Најједноставнији облици шема временске интеграције полазе од развијања у Тејлоров ред тако да Ојлерово пресликавање унапред [19] користи само прва два члана, па изрази за положаје и брзине гласе:

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + v(t) \Delta t \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + a(t) \Delta t \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

а грешка која се при том добија је  $O(\Delta t^2)$ . Уколико се убрзања  $a(t)$  користе у изразу за положаје грешка се смањује на  $O(\Delta t^3)$ , али грешка у изразу за брзине остаје  $O(\Delta t^2)$ . Ако се дода трећи члан Тејлоровог реда [19] грешка за позиције је  $O(\Delta t^4)$  а за брзине је  $O(\Delta t^3)$ . Повећање броја чланова Тејлоровог реда доводи до смањења грешке али и до повећања сложености израза тако да ако се узму прва четири члана Тејлоровог реда изрази за позиције и брзине постају:

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + v(t) \Delta t + \frac{1}{2} a(t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} b(t) \Delta t^3 + \frac{1}{24} c(t) \Delta t^4 \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + a(t) \Delta t + \frac{1}{2} b(t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} c(t) \Delta t^3 \end{aligned}, \quad (3.3.2)$$

где су са  $b(t)$  и  $c(t)$  означени изводи  $b(t) = da(t)/dt$  и  $c(t) = db(t)/dt$ .

Шема централних разлика позната и као Брзинска Верлет шема је једна од најчешће коришћених шема интеграције [19] код које се позиције и брзине рачунају за времена која се разликују за половину временског корака  $\Delta t/2$ :

$$\begin{aligned} r(t + \Delta t) &= r(t) + v\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \Delta t, \\ v\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= v\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + a\left(r(t), v\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\right) \Delta t. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Слична је и Позициона Верлет шема, у страниј стручној литератури позната и као *Leap Frog*, [20] код које је померање  $\Delta t/2$  временског корака извршено при рачунању позиција (отуда и назив позициона) па су изрази за позицију и брзину код ове шеме дати са

$$\begin{aligned}
r\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= r\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + v(t) \Delta t, \\
v(t + \Delta t) &= v(t) + a\left[r\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right), v(t)\right] \Delta t.
\end{aligned}
\tag{3.3.4}$$

Класична Верлет шема је слична позиционој и брзинској Верлет шеми али код ње нема померања временског корака за  $\Delta t / 2$  већ се брзине рачунају при сваком временском кораку, а позиције из два узастопна временска корака морају да се чувају у меморији ради рачунања брзина, при чему су изрази за позиције и брзине дати са:

$$\begin{aligned}
r(t + \Delta t) &= 2r(t) - r(t - \Delta t) + a(t) \Delta t^2, \\
v(t + \Delta t) &= \frac{r(t + \Delta t) - r(t - \Delta t)}{2\Delta t}.
\end{aligned}
\tag{3.3.5}$$

Код свих Верлет шема грешка при рачунању позиција је  $O\Delta t^4$  док је при рачунању брзина  $O\Delta t^2$ .

На основу анализе дате у [19] за интеграцију транслација најприкладнија је класична Верлет метода тако да су изрази са позиције и брзине дати са:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^i(t + \Delta t) &= 2\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x}^i(t - \Delta t) + \frac{\mathbf{F}^i}{m^i} (\Delta t)^2, \\
\mathbf{v}^i(t + \Delta t) &= \frac{\mathbf{x}^i(t + \Delta t) - \mathbf{x}^i(t - \Delta t)}{2(\Delta t)}.
\end{aligned}
\tag{3.3.6}$$

где је  $m^i$  маса честице  $i$ . Ако се у израз укључи и вискозно пригушење [21], израз за рачунање позиција постаје:

$$\mathbf{x}^i(t + \Delta t) = 2\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x}^i(t - \Delta t) + \left( \frac{\mathbf{F}^i}{m^i} - \eta_{visc} \mathbf{v}^i(t) \right) (\Delta t)^2,
\tag{3.3.7}$$

где је  $\eta_{visc}$  коефицијент вискозног пригушења.

При интеграљењу ротација односно угаоних брзина најприкладнија је Позициона Верлет шема (*Leap Frog*) јер је најмање осетљива на нагле промене угаоних брзина. Изрази за угаону брзину на половини корака, угао заокретања на крају корака и угаону брзину на крају корака су дати са:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}^i\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) &= \boldsymbol{\omega}^i\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right) + \frac{\mathbf{M}^i}{I^i} \Delta t, \\
\boldsymbol{\theta}^i(t + \Delta t) &= \boldsymbol{\theta}^i(t) + \boldsymbol{\omega}^i\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) \Delta t, \\
\boldsymbol{\omega}^i(t + \Delta t) &= \boldsymbol{\omega}^i\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{M}^i}{I^i} \Delta t,
\end{aligned}
\tag{3.3.8}$$

где је  $\boldsymbol{\theta}^i$  заокретање честице  $i$  које чине три угла за сваку од координатних оса, а  $I^i$  је момент инерције.

Без обзира на то која се интеграциона шема користи, у изразу за силе (3.2.11) не фигуришу силе инерције јер су брзине честица релативно мале у односу на димензије модела и време прорачуна. Процес у коме се инерцијалне силе могу занемарити се назива квазистатички процес [16]. Да би се проверило да ли је неки процес (симулација троосног теста или понашања материјала у траци смицања) квазистатички полази се од једначина кретања које за скуп честица ( $k = 1, \dots, N$ ) на основу једначина (3.2.13) гласе:

$$\begin{aligned} m^k \dot{\mathbf{v}}^k &= \sum_j \mathbf{F}^{kj} = \mathbf{F}^k, \\ \frac{1}{2} (R^k)^2 m^k \dot{\boldsymbol{\omega}}^k &= \sum_j \mathbf{r}^{kj} \times \mathbf{F}^{kj} = \mathbf{M}^k. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Просечан полупречник честице је дат са  $R$ , просечна маса са  $m$  а укупна запремина скупа честица је  $L^3$  где се дужина  $L$  добија на основу просечног полупречника и броја честица  $L = 2RN^{1/3}$ . На скуп честица  $N$  делује притисак  $p$  (који потиче од еластичне мембране) и предефинисана брзина промене деформације  $\dot{\epsilon}_0$  [16]. Интензитет међучестичних сила  $f_0$  у стању равнотеже је зависан од притиска  $p$ , а карактеристична дубина улегнућа зависи од датог интензитета међучестичних сила:

$$f_0 = pL^2 / N^{2/3}, \quad \xi_0 = (f_0 / K)^{2/3}. \quad (3.3.10)$$

где се Херцов коефицијент крутости дат изразом (3.2.4) може преформулисати у облик:

$$K = \frac{4\bar{E}R^{1/2}}{3\sqrt{2}}. \quad (3.3.11)$$

Израз (3.3.11) се добија заменом полупречника двеју честица у контакту просечним полупречником и коришћењем ефективног модула еластичности за равно стање деформације:

$$\bar{E} = E / 2(1 - \nu^2). \quad (3.3.12)$$

Ако је номинална брзина промене деформације  $\dot{\epsilon}_0$ , карактеристична брзина  $v_0$  је дефинисана као:

$$v_0 = \dot{\epsilon}_0 L / 2, \quad (3.3.13)$$

док је релативна брзина између суседних честица  $v_R$  дата са:

$$v_R = 2\dot{\epsilon}_0 R, \quad (3.3.14)$$

и користи се при одређивању интензитета угаоних брзина:

$$\omega_0 = v_R / 2R = \dot{\epsilon}_0. \quad (3.3.15)$$

Временски оквир такође зависи од брзина промене деформације:

$$t_0 = 1 / \dot{\epsilon}_0, \quad (3.3.16)$$

Ако се једначине кретања (3.3.9) нормирају са референтним величинама, добијају се одговарајући бездимензиони изрази код којих се бездимензионе величине означавају са  $\bar{\phantom{x}}$  док се изводи по бездимензионим величинама означавају са  $\bar{\phantom{x}}'$

$$\begin{aligned} \frac{mv_0}{f_0 t_0} \bar{\mathbf{v}}' &= \bar{\mathbf{F}}, \\ \frac{2R}{L} \frac{mv_0}{f_0 t_0} \bar{\boldsymbol{\omega}}' &= \bar{\mathbf{M}}. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

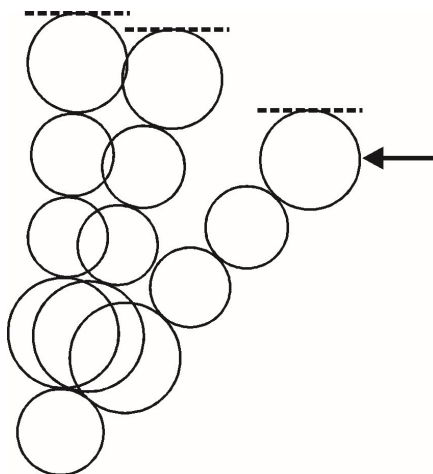
Да би систем био квазистатички на макроскопском нивоу једначине кретања морају се редуковати у равнотежне једначине када се интегралњем добију њихове осредњене вредности за целокупну запремину скупа честица. Ако је тензор напона дат са  $\boldsymbol{\sigma}$ , густина скупа грануларних честица са  $\rho$ , а поље брзина са  $\mathbf{v}$ , услов квазистатичности за запремину  $V = L^3$  је дат у интегралном облику:

$$\int_V |\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}| dV \gg \int_V \rho \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| dV, \quad (3.3.18)$$

Ако притисак  $p$  представља интензитет напона  $\boldsymbol{\sigma}$  и ако су градијенти напона реда  $p/L$  лева страна једначине је величине  $pL^2$ . Са десне стране претпоставља се да је густина равномерно распоређена и да се може изразити преко просечне масе честице  $m$ , броја честица  $N$  и запремине  $L^3$ :

$$\rho = Nm/L^3. \quad (3.3.19)$$

Афино поље брзина [5] карактерише особина да се брзина неке тачке може добити на основу брзине неке друге тачке и градијента брзине (слика 3.3.1).



Слика 3.3.1 Афино поље брзина

Ако се вектор положаја  $\mathbf{x}$  дефинише у односу на геометријски центар запремине и ако се претпостави да је поље брзина афино са градијентом брзина  $\mathbf{G}_0$  [16], важи следећи израз:



$$\mathbf{v} = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{G}_0 \cdot \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{G}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.3.20)$$

Пошто је  $[\mathbf{G}_0]_{ij} = \dot{\varepsilon}_0 \delta_{2i} \delta_{2j}$  десна страна једначине (3.3.18) може да се апроксимира као

$$\int_V \rho \left| \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right| dV \approx \frac{Nm}{L^3} \dot{\varepsilon}_0^2 \frac{L^4}{2} = Nm \dot{\varepsilon}_0^2 \frac{L}{2}, \quad (3.3.21)$$

тако да целокупни израз (3.3.22) може да се напише у облику

$$pL^2 \gg Nm \dot{\varepsilon}_0^2 \frac{L}{2} = N \frac{mv_0}{t_0}. \quad (3.3.22)$$

Из израза (3.3.22) може се извести израз за квазистатички коефицијент  $\phi$  [16]

$$\phi = \frac{Nm v_0}{pL^2 t_0} \ll 1. \quad (3.3.23)$$

Коришћењем израза (3.3.10)-(3.3.16) израз за квазистатички коефицијент [16] се може преформулисати у:

$$\phi = \frac{mv_0}{f_0 t_0} N^{1/3} = \frac{m \dot{\varepsilon}_0^2}{4pR} N^{2/3} \ll 1. \quad (3.3.24)$$

Да би се повећао временски корак при интеграцији, једно од најчешће коришћених решења је повећање масе [16], па се коришћењем израза за квазистатички коефицијент (3.3.28) за дату брзину деформације, притисак, полупречник и број честица, може варирати маса до те мере док је задовољен квазистатички коефицијент односно док инерцијалне силе немају утицај на понашање модела на макроскопском нивоу [16].

Одређивање временског корака је условљено затхевом да се контактне силе тачно рачунају [16]. За примењени нелинеарни вискоеластични закон удара [18], при великим брзинама судара највећи део кинетичке енергије се расипа, док се при малим брзинама судара највећи део кинетичке енергије претвара у потенцијалну енергију. Нормална сила се састоји од Херцове силе (3.2.1) и силе пригушења (3.2.5)

$$F_N^{ij} = K^{ij} \xi^{3/2} + TK^{ij} \xi^{1/2} \dot{\xi}, \quad (3.3.25)$$

при чему је  $T$  коефицијент контактнoг пригушења. Ако се нормална сила нормира са  $f_0$  и  $t_0$  добија се бездимензиони израз за нормалну силу:

$$\bar{F}_N = \bar{\xi}^{3/2} + \left( \frac{T}{t_0} \right) \bar{\xi}^{1/2} \bar{\xi}^{\dot{t}}. \quad (3.3.26)$$

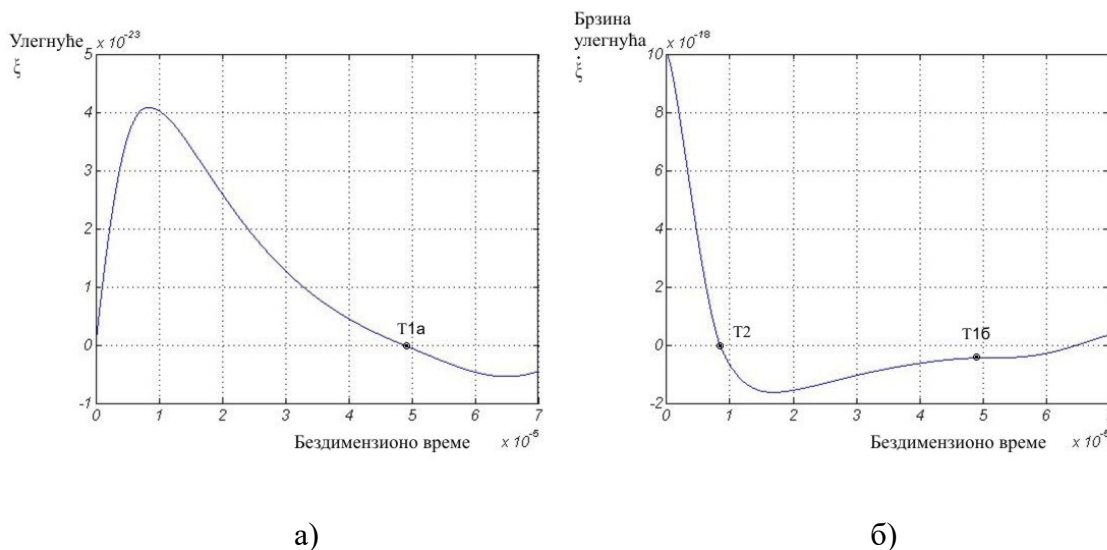
Ако се у изразу (3.3.26) бездимензиона сила замени производом бездимензионе масе и бездимензионог убрзања добија се израз:

$$\bar{m} \frac{\bar{\xi}''}{2} = \bar{\xi}^{3/2} + \left( \frac{T}{t_0} \right) \bar{\xi}^{1/2} \bar{\xi}' . \quad (3.3.27)$$

У изразу (3.3.27) фигурише  $1/2$  пошто у контакту има две честице па је релативно померање једне честице једнако половини улегнућа  $\bar{\xi}$ , а отуда су брзина и убрзање честице једнаке половини брзине промене улегнућа  $\bar{\xi}'$  и изводу брзине промене улегнућа  $\bar{\xi}''$ . Сређивањем израза (3.3.27) добија се диференцијална једначина помоћу које се рачуна убрзање честице која учествује у контакту:

$$\bar{\xi}'' = \frac{2}{\bar{m}} \left[ \bar{\xi}^{3/2} + \left( \frac{T}{t_0} \right) \bar{\xi}^{1/2} \bar{\xi}' \right] . \quad (3.3.28)$$

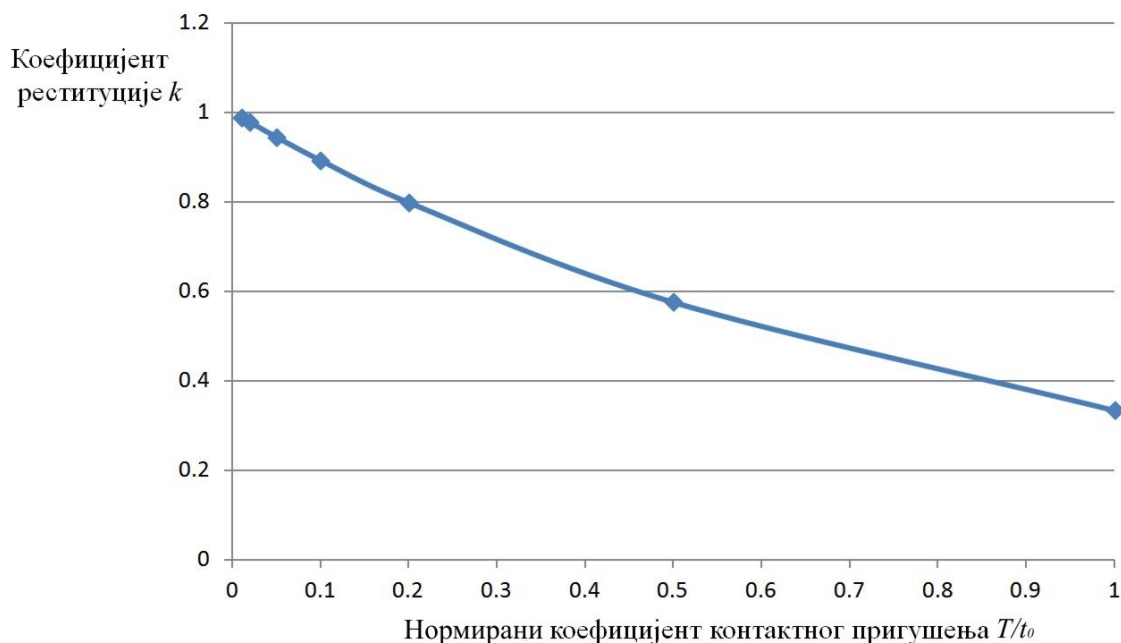
Диференцијалну једначину (3.3.28) је могуће решити у MATLAB-у чиме се добијају величине неопходне за одређивање временског корака: коефицијент реституције који представља однос брзине после и брзине пре удара и време релаксације које представља време које протекне од тренутка када је сила максимална до тренутка када сила постане једнака нули. На слици 3.3.2 дат је изглед дијаграма добијених у MATLAB-у на којима је представљена промена улегнућа односно брзине улегнућа у бездимензионом времену за модел троосног теста који ће бити детаљно објашњен у наредној глави.



Слика 3.3.2 Резултати једначине (3.3.32) за случај троосног теста, а) промена улегнућа у функцији бездимензионог времена б) промена брзине улегнућа у функцији бездимензионог времена

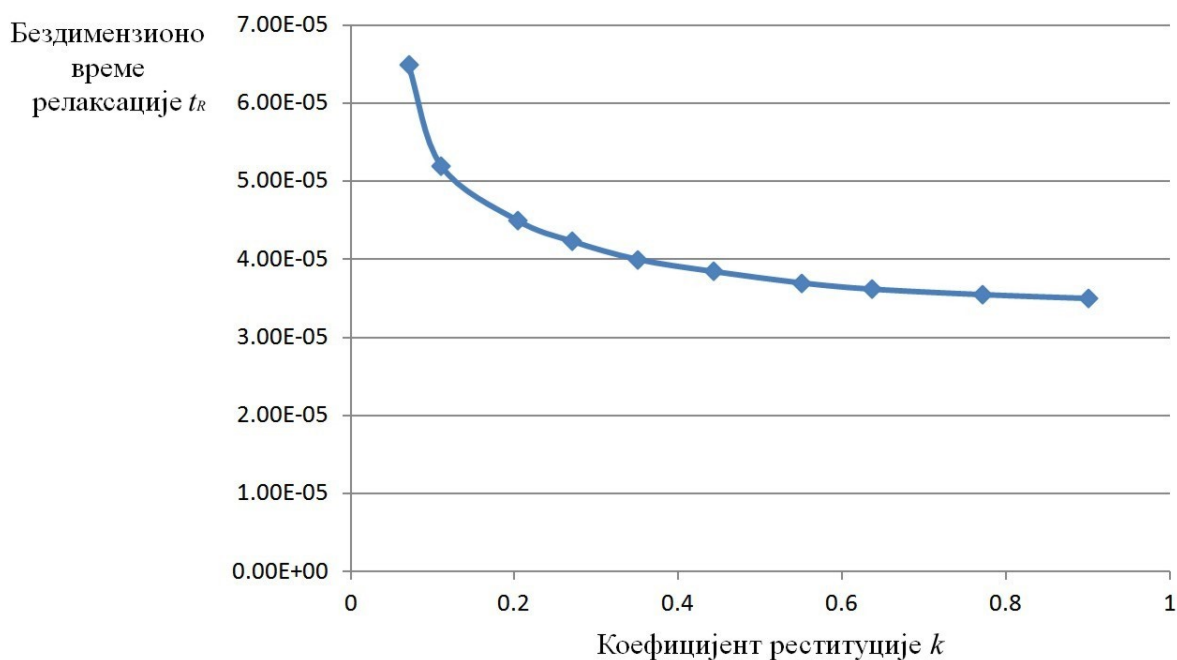
Када улегнуће поново достигне вредност 0 односно када престане контакт (слика 3.3.2.а, тачка T1a) одређује се брзина честице након удара (слика 3.3.2.б, тачка T1b). Уз претходно дефинисану брзину честице пре удара, добија се коефицијент реституције. Време релаксације представља разлику времена када улегнуће (а тиме и сила) поново достигне вредност 0 (слика 3.3.2.б тачка T1b) и времена када брзина промене улегнућа

постане негативна (максимално улегнуће односно сила) што је означено на слици 3.3.3.б тачком T2. Уколико се коефицијент контактеног пригушења мења, а све остале вредности остану исте, на основу вредности коефицијената реституције израчунатих у MATLAB-у може се добити дијаграм зависности коефицијента реституције од коефицијента контактеног пригушења (слика 3.3.3).



Слика 3.3.3 Зависност коефицијента реституције  $k$  од нормираног коефицијента контактеног пригушења  $T/t_0$

Одређивање зависности времена релаксације од коефицијента реституције није могуће извршити директно јер у изразу (3.3.32) не фигурише коефицијент реституције већ коефицијент контактеног пригушења, тако да се коришћењем релације са слике 3.3.4 може одредити који коефицијент контактеног пригушења треба узети да би се добио жељени коефицијент реституције. Зависност бездимензионог времена релаксације од коефицијента реституције је дата на следећој слици.



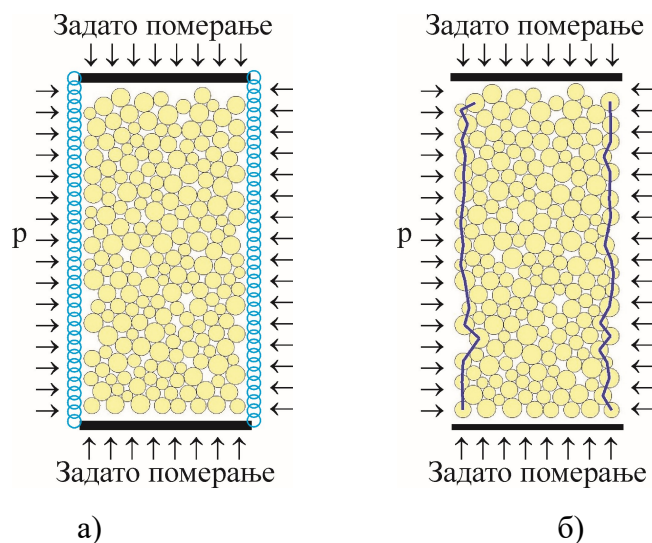
Слика 3.3.4 Зависност бездимензионог времена релаксације од коефицијента реституције

На основу израчунатих времена, може се одредити величина временског корака. Кундал и Страк су првобитно предложили да временски корак буде половина времена судара [8], али ако је временски корак превелик у једном тренутку нема улегнућа, а у наредном кораку је улегнуће нереално велико што изазива огромне међучестичне силе. Како се снага рачунара повећавала, аутори су предлагали дељење тако добијеног времена са све већим и већим фактором [19] тако да су Лангстон и коаутори временски корак добили дељењем времена судара са 100 [22], који ће се такође користити у оквиру ове дисертације. Било је покушаја да се временски корак мења у току симулације [23] али рачунање са варијабилним временским кораком није довело до смањења укупног времена прорачуна. Одређено убрзање прорачуна је могуће постићи коришћењем алгоритма са две временске скале код кога је временски корак потребан за рачунање ротација мањи од временског корака за рачунање трансација [19]. Па ипак, рачунарски захтеви ДЕМ методе и даље спречавају њену примену у анализи реалних проблема, али је уз коришћење малог временског корака на малим 2Д примерима: анализе троосног теста и појаве вртлога у тракама смицања, њена примена оправдана.

### 3.4 Моделирање троосног теста

При анализи понашања грануларног материјала коришћењем троосног теста (слика 3.4.1) материјал се поставља у еластични цилиндар од латекса (или неког другог сличног материјала) који служи да одвоји грануларни материјал од флуида који се налази око цилиндра. Флуид (вода или нека друга течност) служи за задавање равномерног притиска око узорка грануларног материјала чиме се симулира остатак

грануларног материјала од кога је посматрани узорак "издвојен". Постоје два начина за моделирање еластичног цилиндра и флуида који на њега делује. Еластична мембрана коју су користили Ивашита и Ода [10] представља низ делимично преклопљених повезаних честица идентичног пречника на које делује притисак у хоризонталном правцу. Ово је доста упрошћено решење које су користили и Фазекас и коаутори при 3Д моделирању троосног теста применом ДЕМ методе [12]. При дефинисању мембране, зрнима која чине мембрану се задаје хоризонтални притисак (слика 3.4.1.a), а зрнима која су у додиру са хоризонталним плочама се поред хоризонталног притиска задаје и ограничење померања у вертикалном правцу тако да је њихово померање у вертикалном правцу једнако померању хоризонталних плоча, док се у хоризонталном правцу могу кретати слободно. Еластичност мембране, то јест еластичност контакта међу честицама мембране може да се мења у циљу што реалнијег моделирања еластичног цилиндра а позиције честица које чине мембрану се одређују истим поступком интеграције која се примењује на анализиране честице грануларног материјала са изузетком ротационих степени слободe (у 2Д случају то је само један угао ротације) који се за честице мембране не рачунају. Ово решење на адекватан начин симулира мембрану, али еластичност граничних честица знатно утиче на макроскопско понашање модела, поготову при већим деформацијама. Реалистичније решење представља задавање притиска директно на честице које се налазе на спољашњости модела [11] што је приказано на слици 3.4.1.б.



Слика 3.4.1 Задавање притиска на моделу троосног теста а) помоћу мембране  
б) директно на честице

Задавање притиска директно на честице омогућава моделирање већих деформација при чему долази до знатне деформације граничног слоја, па се тиме долази до проблема одређивања честица које припадају граничном слоју. Током деформације грануларног материјала одређене честице могу постати део граничног слоја док друге могу постати унутрашње честице. Између две граничне честице током деформације може да упадне нека трећа. Посебан проблем може да представља појава висећих честица, односно честица граничног слоја које имају контакт само са једном другом честицом граничног слоја, и у том случају долази до прекида прорачуна. Такође, уколико се приликом

одређивања граничног слоја одређена честица поново нађе у низу граничних честица, у програму се формира бесконачна петља. Неправилности у граничном слоју су наручито изражене при моделирању трака смицања, па ће детаљније бити описане у наредној глави. За одређивање граничних честица коришћене су две методе, метода најмањег угла и метода најмањег одступања угла [24]. У обе методе полази се од честице која има најмању  $x$  координату, а затим се низ граничних честица формира у позитивном математичком смеру све док се не дође до почетне честице. Такође, у обе методе имамо претходну честицу означену са  $p1$ , тренутну честицу означену са  $p2$  и скуп суседних честица у контакту са честицом  $p2$  који претражујемо у циљу одређивања најбоље опције за наредну честицу  $p3$ . Обе методе користе поређење углова приликом претраге суседних честица.

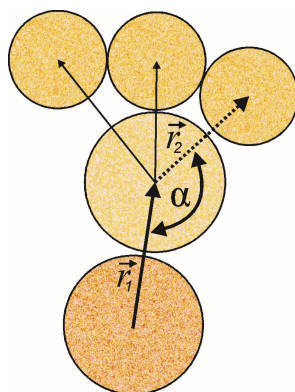
Метода најмањег угла је свеобухватнија и код ње се траже наредне честице поредећи углове између вектора у позитивном математичком смеру. Вектор између тренутне и претходне честице је дефинисан као:

$$\vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \quad (3.4.1)$$

док се вектор  $\vec{r}_2$  рачуна за сваку могућу наредну честицу

$$\vec{r}_2 = (x_3 - x_2, y_3 - y_2). \quad (3.4.2)$$

Угао између ових вектора је приказан на слици 3.4.2



Слика 3.4.2 Одређивање наредне граничне честице помоћу методе најмањег угла

Користећи дефиницију скаларног производа дату изразом:

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cos \alpha, \quad (3.4.3)$$

могуће је израчунати косинус угла између вектора  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  као:

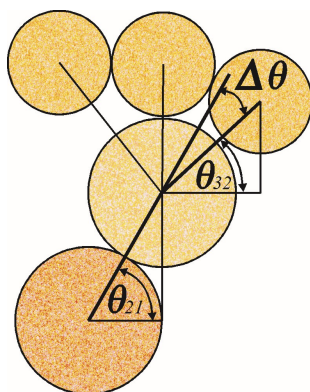
$$\cos \alpha = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}. \quad (3.4.4)$$

Из једначине (3.4.4) коришћењем математичке операције  $arccos$  може се добити угао  $\alpha$  између вектора  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  за сваку од потенцијалних наредних честица, па након претраге свих суседних честица, наредна честица постаје она са најмањим углом  $\alpha$ .

Пошто је  $\arccos$  веома скупа математичка операција, може се избећи њено коришћење тако што се уместо минималног угла тражи максимална вредност косинуса угла  $\alpha$  који доводи до минималног угла  $\alpha$ . Да би се узели сви могући случајеви позиције честица у ДЕМ програму је имплементиран следећи услов:

$$\begin{aligned} \text{Ако је } \left( (x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \right) > 0 \text{ онда је } \quad \cos \alpha = \cos \alpha \\ \text{у супротном } \quad \cos \alpha = -\cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Метода најмањег одступања угла има за циљ да граница буде што правилнија што може да доведе до тога да неке честице остану ван границе, али граница има правилнији облик. Шематски приказ ове методе дат је на слици 3.4.3.



Слика 3.4.3 Одређивање наредне граничне честице помоћу методе најмањег одступања угла

Углови између вектора који спајају центре честица и  $x$  осе су дати следећим изразима;

$$\theta_{21} = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.4.6)$$

$$\theta_{32} = \arctan \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad (3.4.7)$$

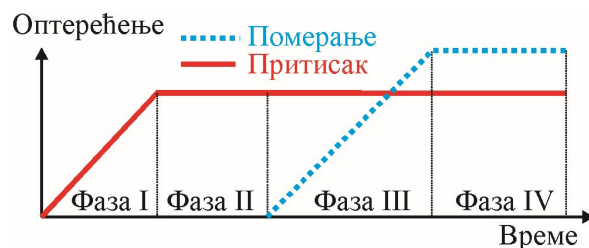
а вредност чији се минимум тражи је њихова разлика дата као:

$$\Delta \theta = \theta_{21} - \theta_{32}. \quad (3.4.8)$$

За правилно распоређене честице обе методе дају тачан (и идентичан) скуп граничних честица, док се са порастом деформација односно повећањем учесталости нерегуларности може догодити да једна или обе методе закажу то јест не затворе низ граничних честица почетном честицом. У том случају неопходна је примена додатне логике за кориговање положаја граничних честица. Слаби периодични гранични услови су примењени приликом анализе траке смицања.

Након одређивања граничног слоја честица могуће је задати оптерећења која ће симулирати услове при троосном тесту. Целокупна нумеричка симулација троосног теста се састоји из четири фазе (слика 3.4.4).





Слика 3.4.4 Ток симулације троосног теста

У првој фази се врши задавање притиска на граничне честице са леве и десне стране који линеарно расте од 0 до максималне вредности од 0.1 МПа. Овај притисак служи за симулирање дејства еластичног цилиндра од латекса у који се смешта грануларни материјал при троосном тесту. Након постизања максималне вредности, притисак је константан до краја анализе.

У другој фази нема промене оптерећења које делује на модел, већ долази до смиривања честица које су услед задавања притиска почеле да се крећу а које сада услед сила трења и пригушења заузимају равнотежни положај.

У трећој фази се врши деформисање модела задавањем померања плочама које се налазе на горњој и доњој граници модела, а уколико је померање довољно велико у грануларном материјалу може доћи до појаве траке смицања.

Четврта фаза је слична другој фази и у њој се врши релаксација модела при константом притиску и фиксном положају плоча. У овој фази долази до пада напона у плочама који потичу од интеракције грануларних честица са плочама. Добијени пад напона у ДЕМ методи је знатно већи и бржи од очекиваног пада напона тако да ће овом проблему бити посвећена посебна глава.

За анализу проблема коришћена је модификована верзија софтвера *Granular2D\_V1* чијим развојем руководи проф. Месаровић, *School of Mechanical and Materials Engineering, Washington State University, USA*. Такође, на истом универзитету, развијен је и програм за генерисање улазног фајла, који насумично генерише честице, које потом падају под утицајем гравитације, формирајући густо паковани скуп у оквиру предефинисаних граница модела [16]. За постпроцесирање коришћен је бесплатни програм *ParaView*.

Анализирани проблем троосног теста у овој дисертацији траје 65 секунди а временски корак је  $1.0e-6$  секунди. Прва и друга фаза трају по 2,5 секунди, трећа фаза траје 40 секунди а релаксација 20 секунди. Укупна уздужна деформација на крају треће фазе износи 20%.

Минимална величина зрна је 0.5 mm, максимална је 1 mm, просечна је 0.75 mm тако да је на основу гранулометријског дијаграма са слике 2.1.2 реч о мешавини средњег и крупног песка.

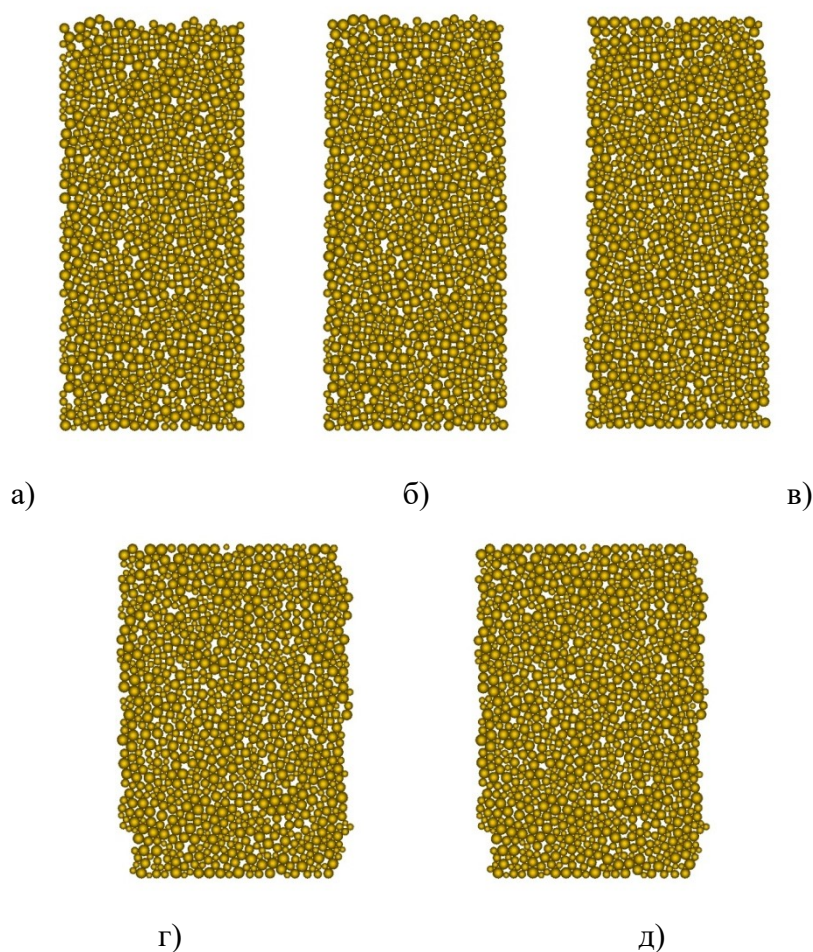
Материјалне карактеристике за грануларни материјал (кварц) коришћен у анализи су дате у табели 3.4.1.



Табела 3.4.1 Материјалне карактеристике моделираног грануларног материјала

Модул еластичности	$E = 30000\text{MPa}$
Поасонов коефицијент	$\nu = 0.3$
Густина честица	$\rho = 0.2765\text{Kg/mm}^3$
Коефицијент трења	$\mu = 0.45$
Коефицијент вискозног пригушења	$\eta_{\text{visc}} = 50$
Контактни коефицијент пригушења	$T = 0.002$
Номинална брзина	$\eta_0 = 0.01\text{ mm / s}$
Експонент коришћен у закону трења	$m = 20$

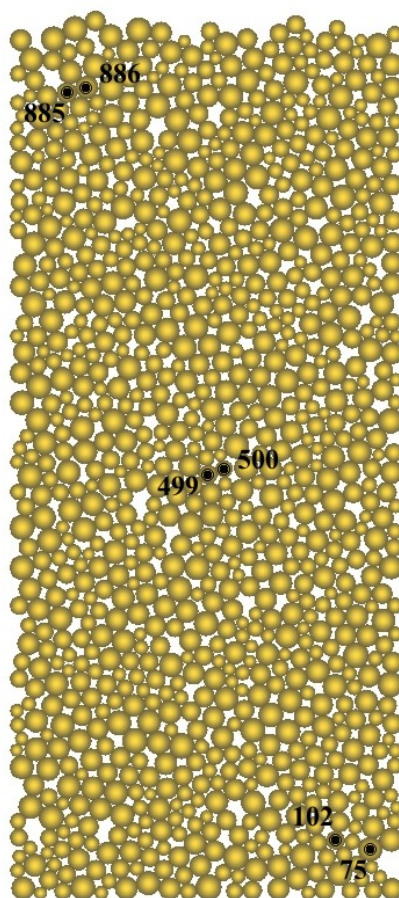
За модел који се састоји од 994 честице, конфигурације у току прорачуна су приказане на слици 3.4.5.



Слика 3.4.5 Изглед модела током анализе а) почетна конфигурација б) конфигурација након постизања максималног притиска в) конфигурација на почетку задавања померања г) конфигурација на крају задавања померања д) конфигурација на крају релаксације

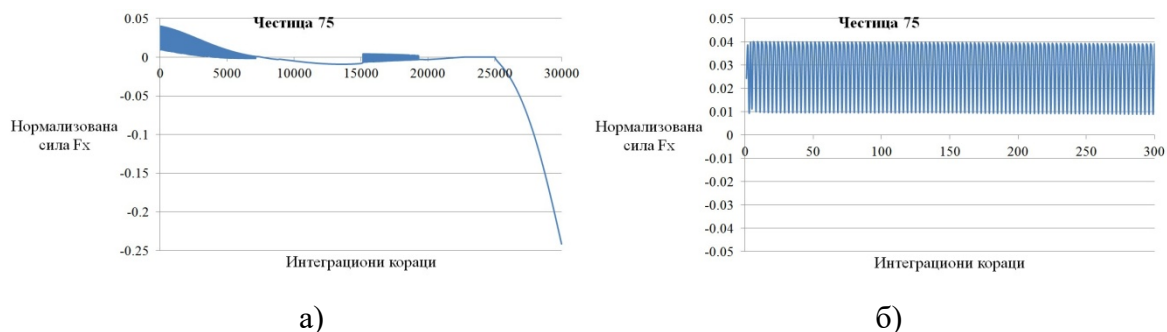
Са слике 3.4.5 се види да су честице густо паковане али повећање притиска доводи до тога да на местима где је мања густина паковања долази до збијања честица (најочигледније у левом горњем углу на слици 3.4.5.а и б. Током фазе 2 (слика 3.4.5.в) долази до равномерније расподеле честица што је најочигледније на горњој граничној површини која је у контакту са плочом. На крају задавања померања (фаза 3) изглед модела је приказан на слици 3.4.5.г. Током релаксације макроскопски изглед модела се не мења (слика 3.4.5.д) али је могуће уочити да су одређене честице промениле положај (најуочљивије у горњем десном углу на слици 3.4.5.д).

За анализу промене интензитета сила и момента током прорачуна изабрано је 6 честица, по две у доњем делу, средини и горњем делу модела (слика 3.4.6).

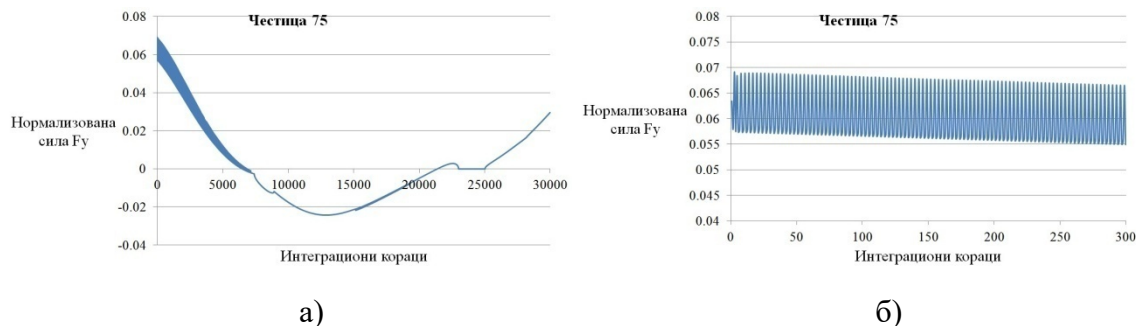


Слика 3.4.6 Позиције одабраних честица за посматрање сила и момента

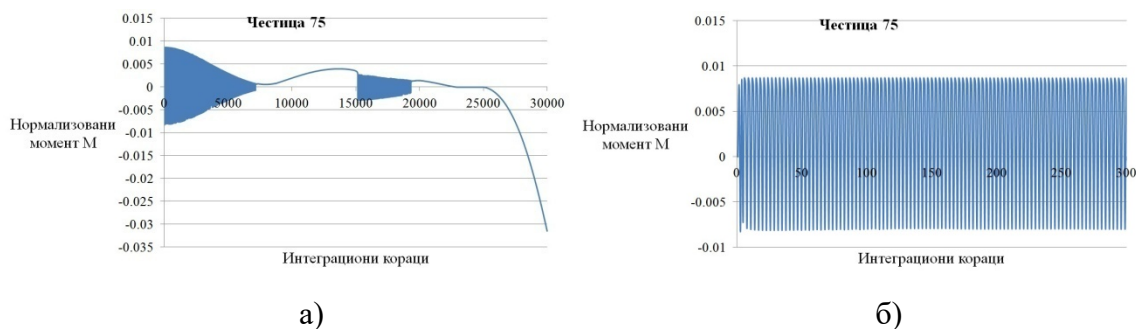
Силе и моменти у свакој честици током прорачуна пролазе кроз фазе интензивног осциловања и мирније фазе у којима је осциловање занемарљиво. Ове фазе се смењују на хаотичан начин, условљен доласком честица у контакт и раздвајањем, формирањем ланаца сила и њиховим колапсима, променама конфигурације у флипovima итд. За сваку честицу силе (и момент) се рачунају као сума свих сила од свих контаката, а на следећим сликама приказане су нормализоване силе (и моменти) за изабране честице током првих 30000 интеграционих корака односно са више детаља у првих 300 корака. Карактеристике промене сила (и момента) које су приказане на следећим сликама јављају се током целог прорачуна.



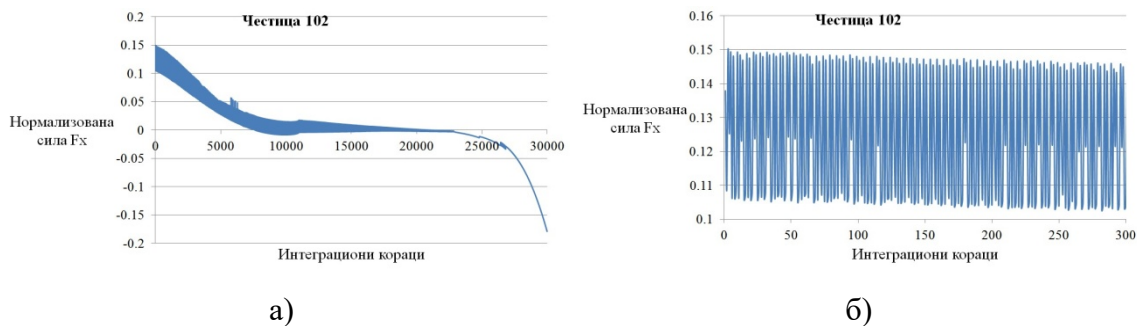
Слика 3.4.7 Нормализована сила у честици 75 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака



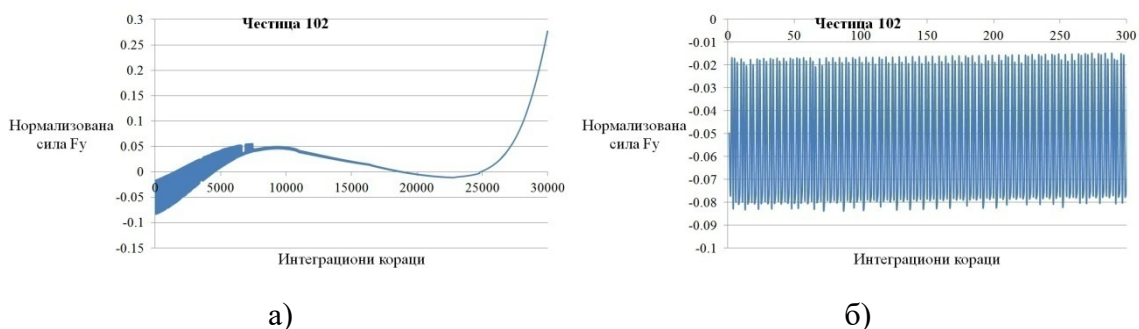
Слика 3.4.8 Нормализована сила у честици 75 у y правцу а) 30000 корака б) 300 корака



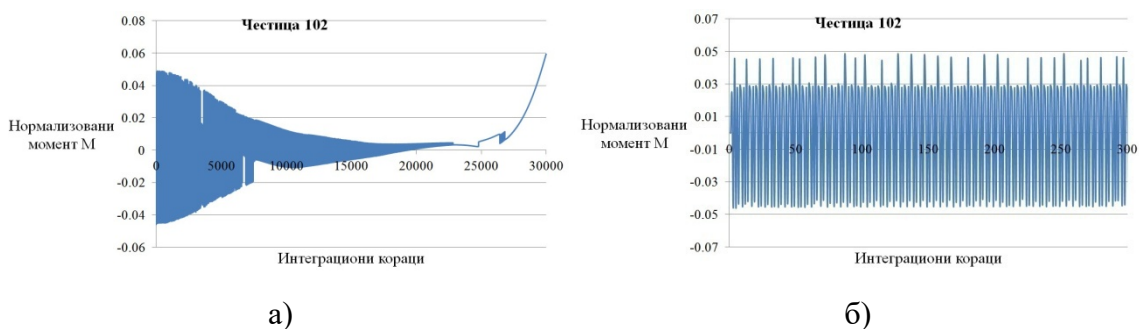
Слика 3.4.9 Нормализовани момент у честици 75 а) 30000 корака б) 300 корака



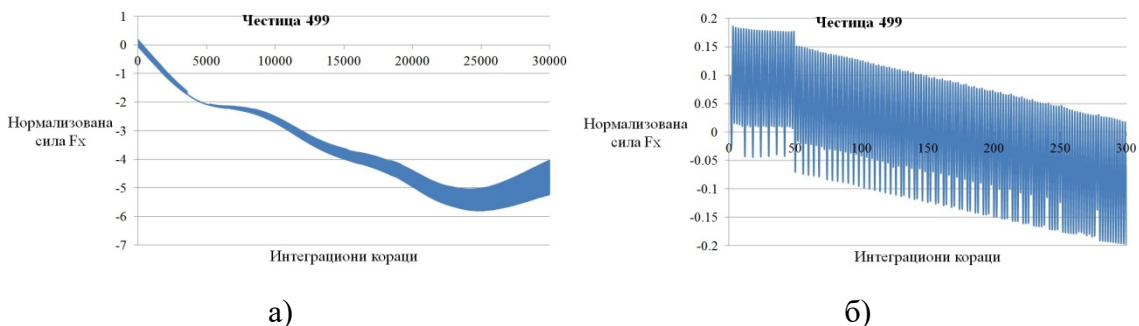
Слика 3.4.10 Нормализована сила у честици 102 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака



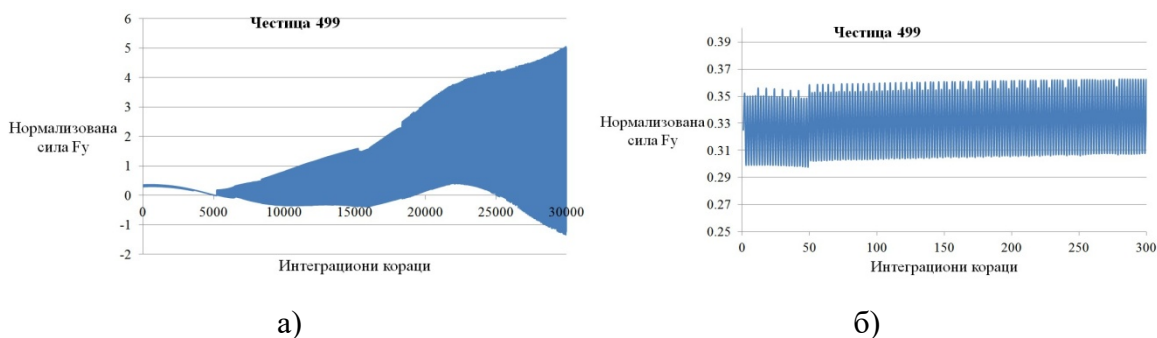
Слика 3.4.11 Нормализована сила у честици 102 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака



Слика 3.4.12 Нормализовани момент у честици 102 а) 30000 корака б) 300 корака

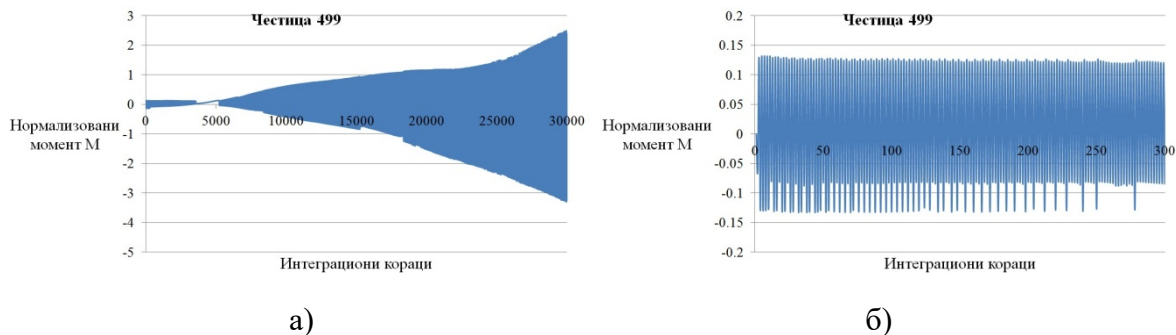


Слика 3.4.13 Нормализована сила у честици 499 у х правцу а) 30000 корака б) 300 корака

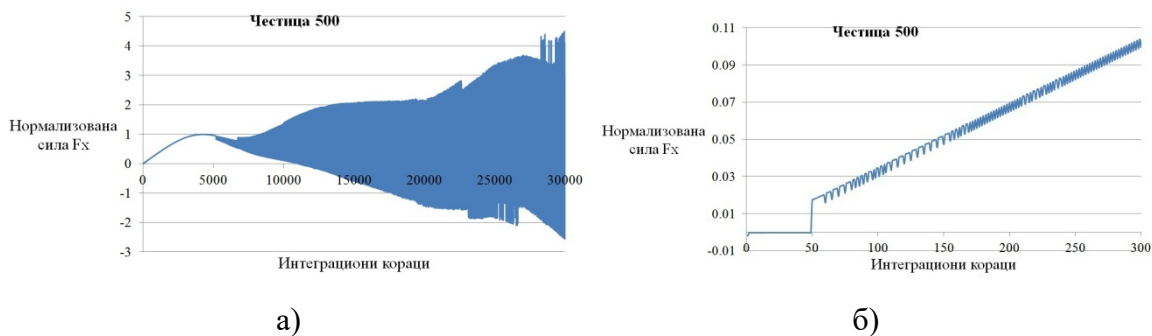


Слика 3.4.14 Нормализована сила у честици 499 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака

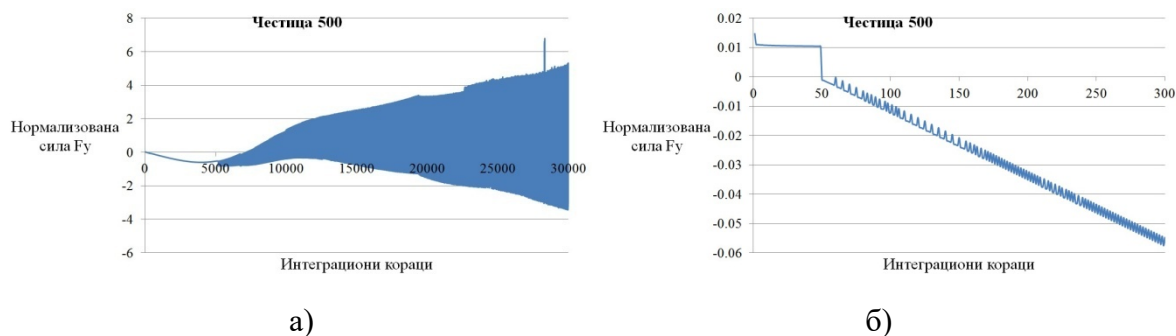




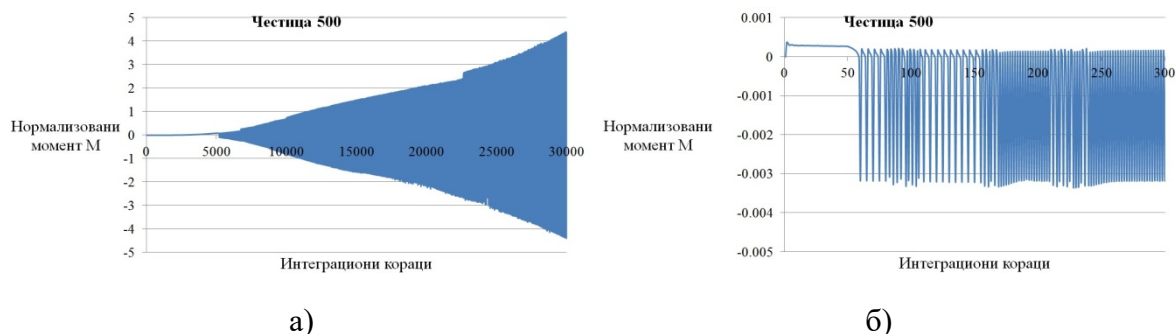
Слика 3.4.15 Нормализовани момент у честици 499 а) 30000 корака б) 300 корака



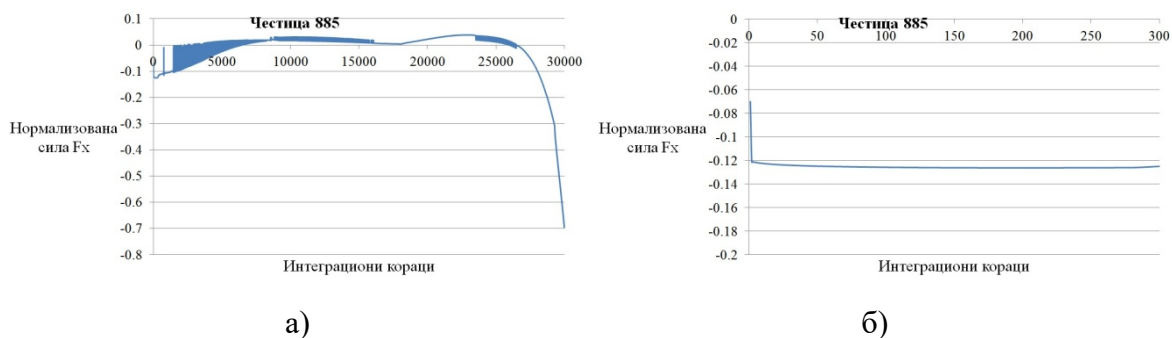
Слика 3.4.16 Нормализована сила у честици 500 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака



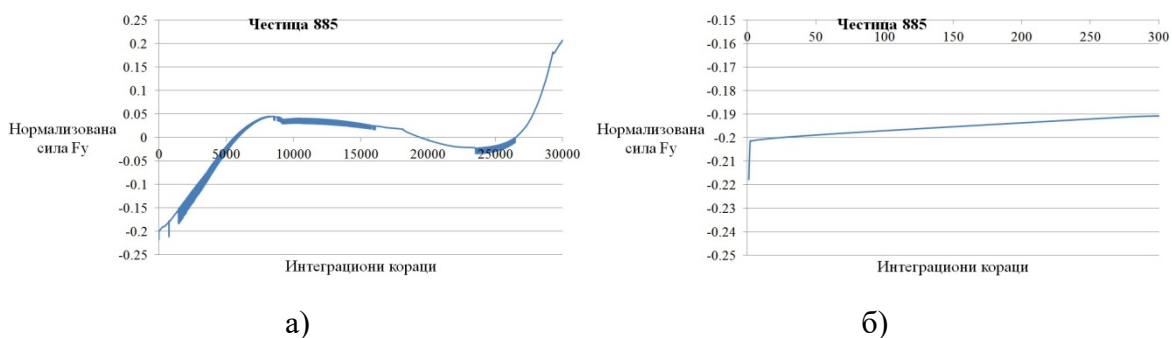
Слика 3.4.17 Нормализована сила у честици 500 у y правцу а) 30000 корака б) 300 корака



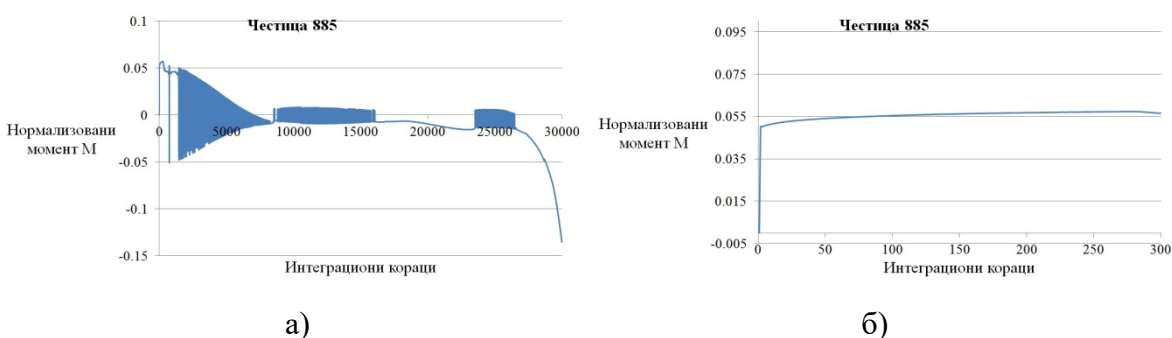
Слика 3.4.18 Нормализовани момент у честици 500 а) 30000 корака б) 300 корака



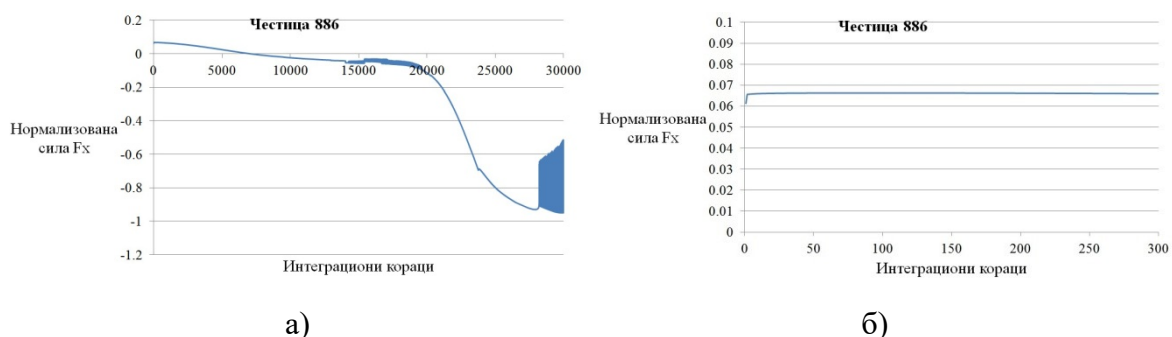
Слика 3.4.19 Нормализована сила у честици 885 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака



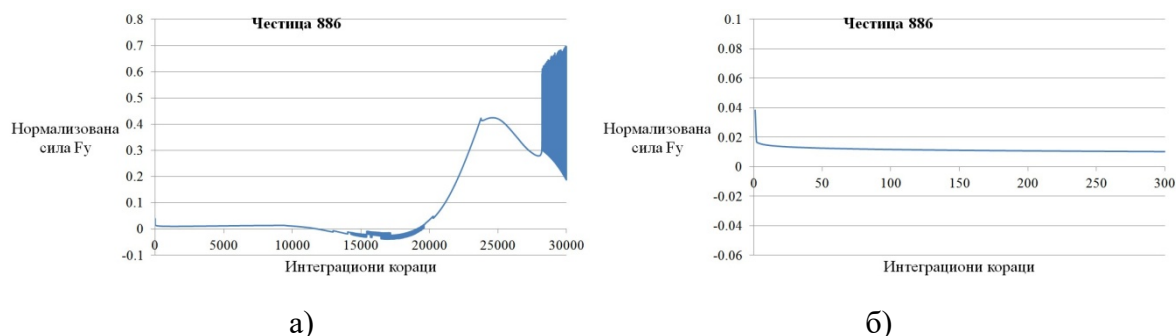
Слика 3.4.20 Нормализована сила у честици 885 у y правцу а) 30000 корака б) 300 корака



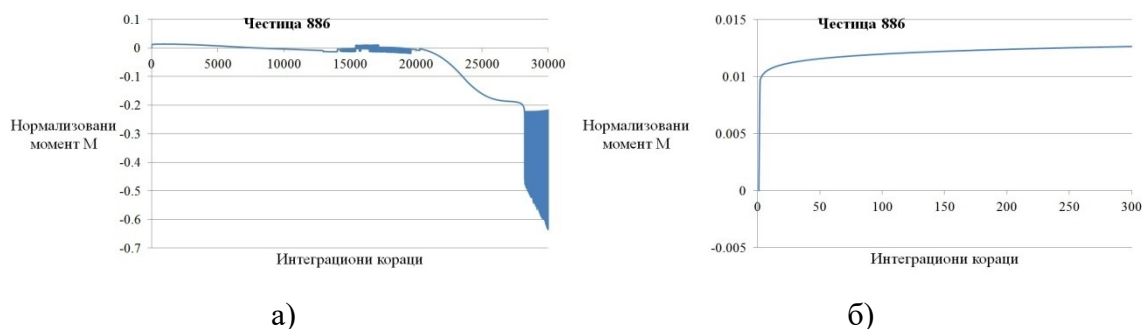
Слика 3.4.21 Нормализовани момент у честици 885 а) 30000 корака б) 300 корака



Слика 3.4.22 Нормализована сила у честици 886 у x правцу а) 30000 корака б) 300 корака



Слика 3.4.23 Нормализована сила у честици 886 у у правцу а) 30000 корака б) 300 корака

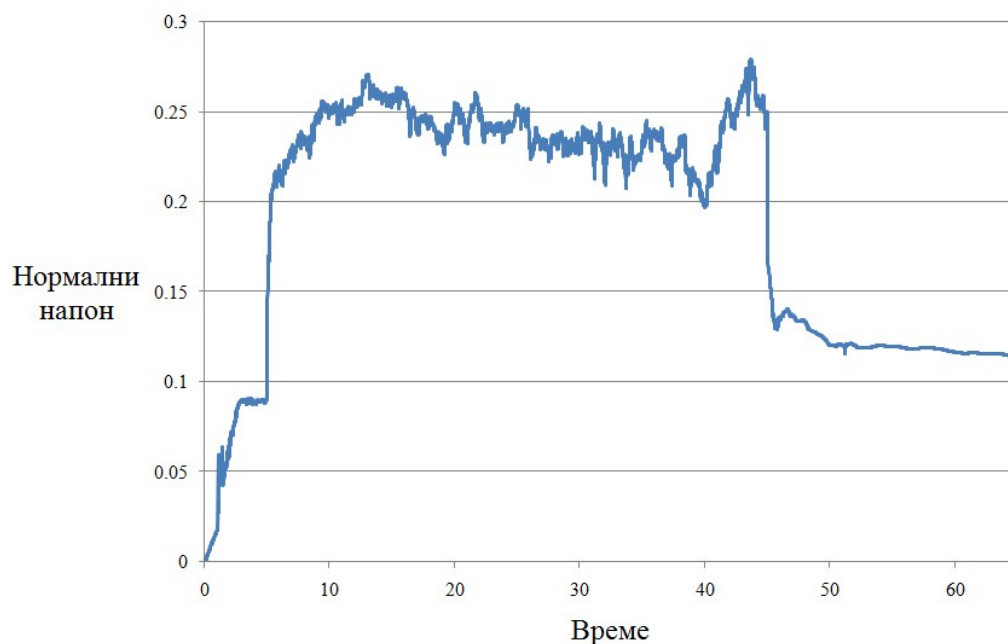


Слика 3.4.24 Нормализовани момент у честици 886 а) 30000 корака б) 300 корака

Са претходно приказаних слика (први делови слика под а) види се да за сваку честицу силе у правцима  $x$  и  $y$  као и моменти пролазе истовремено кроз фазе интензивног осциловања и мирније фазе. Овакво понашање је последица тога што у већини случајева контактне силе међу честицама имају и  $x$  и  $y$  компоненте, тако да осцилације контактних сила доводе до осцилација нормалних компоненти укупне силе и момента. У деловима слика под б дат је детаљнији дијаграм са мање корака (300) у коме се јасно виде ове осцилације (под условом да их има у првих 300 корака). Иако осцилације у већини случајева делују равномерно као што је случај дат на сликама 3.4.7.б- 3.4.9.б, постоје и случајеви где су осцилације неравномерне амплитуде као што је приказано на сликама 3.4.10.б-3.4.15.б или где је период осциловања променљив (3.4.16.б-3.4.18.б). Честице 885 и 886 немају интензивних осциловања у првих 300 корака што се види са одговарајућих слика.

Ове осцилације су карактеристика ДЕМ методе и не могу се избећи, већ се могу само ублажити смањивањем временског корака, што поред повећања компјутерске захтевности не доводи до промене макроскопског понашања материјала.

Један од најбитнијих показатеља макроскопског понашања материјала је нормални напон на плочама који карактерише способност материјала да носи оптерећење. Нормални напон на плочи у ДЕМ методи се рачуна као сума  $x$  компоненти сила у честицама које остварују контакт са датом плочом подељена са укупном дужином контакта, а потом се рачуна средња вредност када се збир напона на горњој и доњој плочи подели са два. Дијаграм промене нормалног напона на плочама током целог прорачуна је дат на слици 3.4.25.



Слика 3.4.25 Нормални напон на плочама у току прорачуна

Са слике 3.4.25 се види да напон на плочама расте приближно линеарно током фазе 1 у којој се задаје притисак на честице на левој и десној страни модела које играју улогу еластичне мембране. У фази два напон на плочама је константан (са занемарљивим осцилацијама). На почетку треће фазе напон нагло скаче а потом у току целе треће фазе осцилује око неке просечне вредности од 0.225 МПа. На почетку четврте фазе-релаксације напон нагло опада што није реално понашање већ је последица осцилација које се јављају у ДЕМ честицама. Овај проблем ће бити обрађен у наредној глави.

Поред нормалног напона на плочама, још једна битна карактеристика која се може пратити у току треће фазе ДЕМ анализе троосног теста је промена запреминске деформације која је теоретски дата у оквиру описа слике 2.3.8.б а која је овде потврђена нумеричким прорачуном (слика 3.4.26).



Слика 3.4.26 Промена запреминске деформације у трећој фази ДЕМ анализе

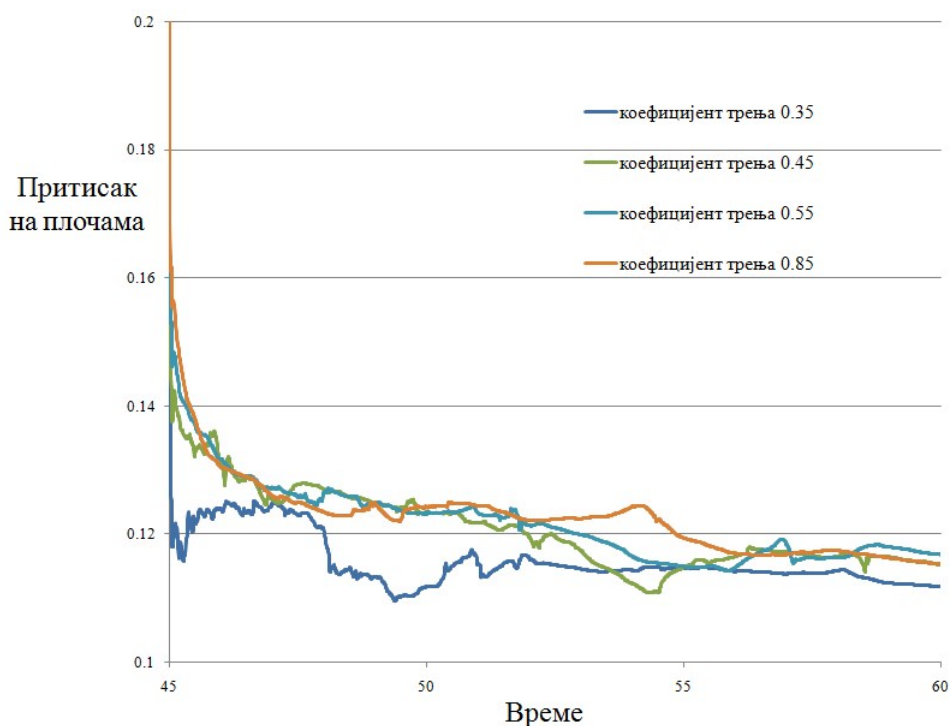


На слици 3.4.26 се види да је запреминска деформација у почетку негативна и опадајућа, а како уздужна деформација наставља да расте, дијаграм пролази кроз тачку у којој је градијент промене запремине једнак нули а потом се запреминска деформација повећава. Дилатација достиже максимум при уздужној деформацији од 6% након чега више нема промене запремине (осим незнатних осцилација) и материјал се налази у критичном стању.

### 3.5 Период релаксације

Након престанка померања плоча, кретање грануларних честица карактеришу пригушене осцилације услед (3.2.5), које су сличне осцилацијама атома у молекуларној динамици флуида., Услед њих долази до померања честица којима се смањује њихова потенцијална енергија еластичности а последично и Херцове силе односно напони у плочама. На понашање честица при релаксацији битно утичу материјалне карактеристике грануларног материјала.

Нумеричка анализа релаксације ДЕМ методом за различите вредности коефицијента трења  $\mu$  је дата на слици 3.5.1.



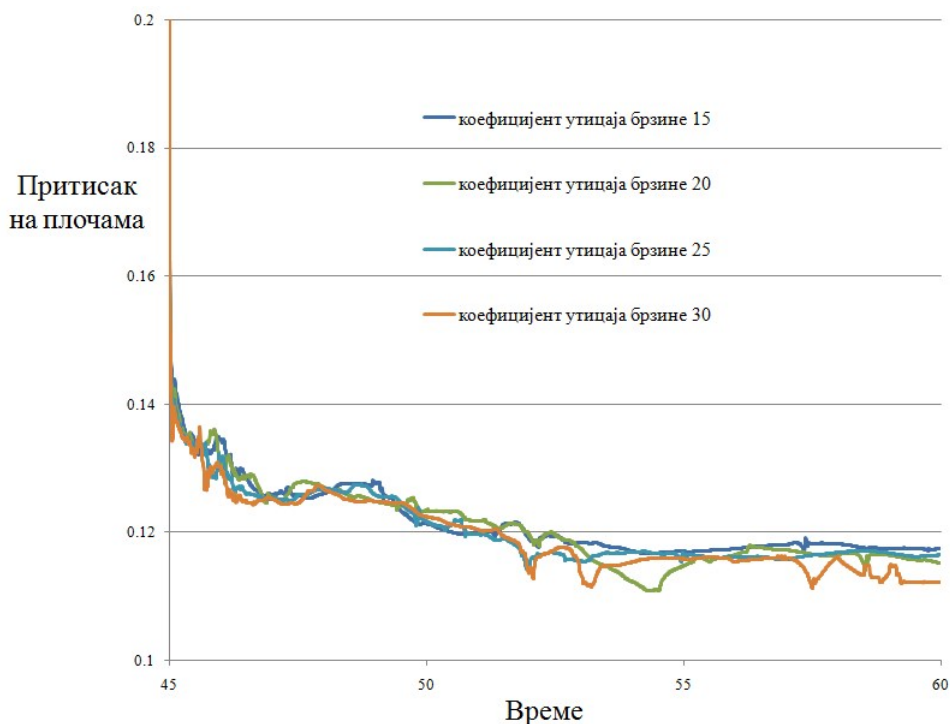
Слика 3.5.1 Утицај коефицијента трења  $\mu$  на нормалне напоне у плочама при релаксацији

Коефицијент трења може бити статички или кинематски. Статички коефицијент је знатно већи и он карактерише максималну силу трења при мировању, док кинематски карактерише силу трења приликом кретања. У случају чистог сувог контакта за стакло (кварц) статички коефицијент трења је 0.9 док је кинематски 0.4. Са обзиром да реалне грануларне честице могу бити неправилног облика, храпаве површине али и са

одређеним супстанцама у међучестичном простору (које делују као мазива) коефицијент трења може знатно да варира. па што је коефицијент трења  $\mu$  већи то су мање осцилације притиска на плочама, али крајња вредност притиска не зависи много од вредности коефицијента трења  $\mu$ .

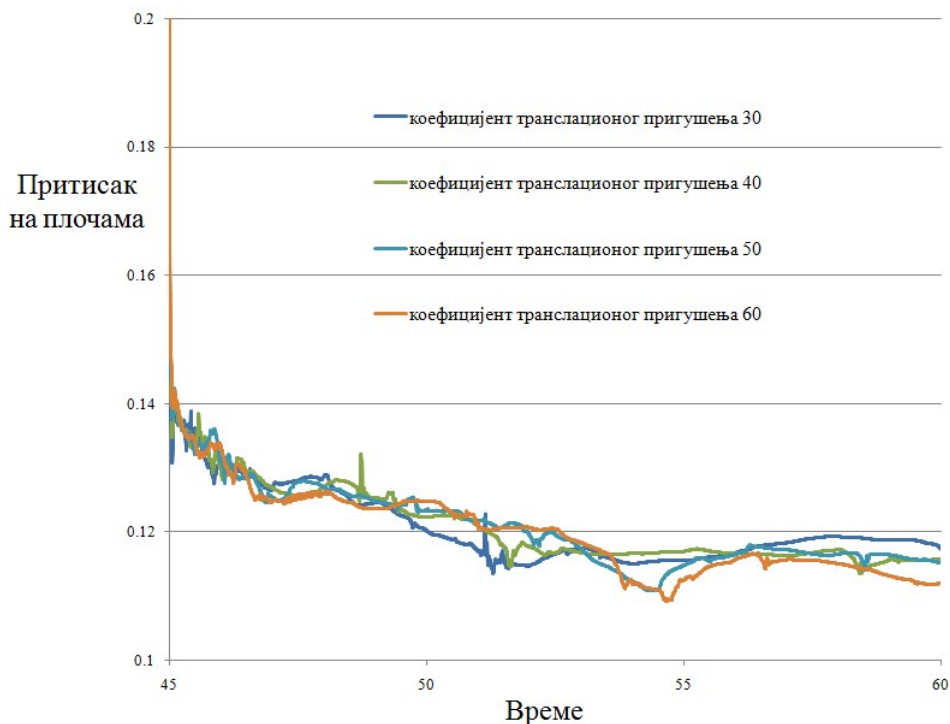
Поред коефицијента трења  $\mu$ , на интензитет сила међу честицама утичу још и коефицијенти транслационог и контактнoг пригушења као и коефицијент утицаја брзине  $m$ .

На слици 3.5.2 дат је приказ нормалног напона на плочама при релаксацији грануларног материјала за различите вредности коефицијента утицаја брзине  $m$ .



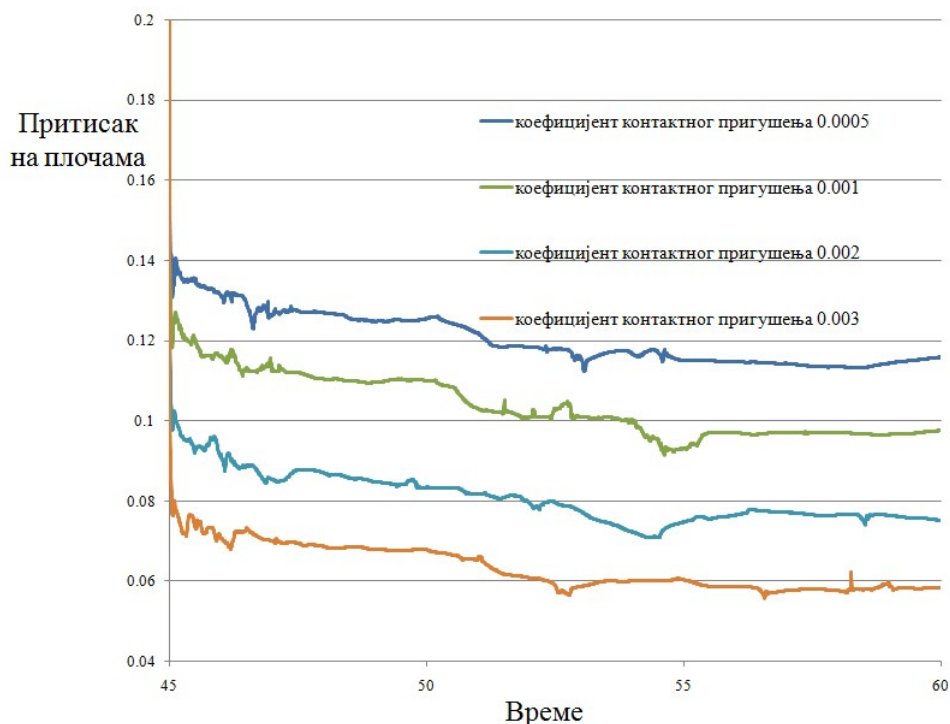
Слика 3.5.2 Нормални напони на плочама за различите вредности коефицијента утицаја брзине  $m$

Повећање коефицијента транслационог пригушења  $\eta$  слично промени коефицијента трења  $\mu$  доводи до смањења осцилација притиска на плочама али се крајња вредност притиска не разликује много за различите вредности коефицијента транслационог пригушења  $\eta$  (слика 3.5.3).



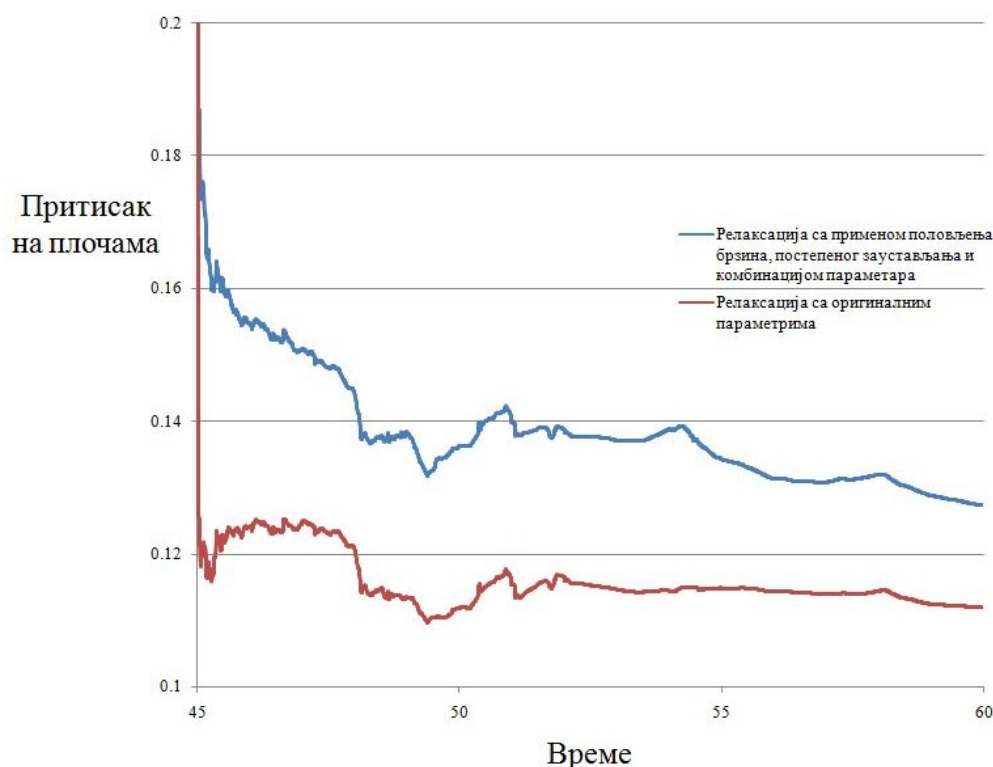
Слика 3.5.3 Утицај коефицијента вискозног пригушења  $\eta_{visc}$  на нормалне напоне у плочама при релаксацији

Коефицијент контактнoг пригушења  $T$  је једини параметар у једначинама за рачунање сила у ДЕМ методи који битно утиче на макроскопско понашање грануларног материјала при релаксацији што је приказано на слици 3.5.4.



Слика 3.5.4 Утицај коефицијента контактнoг пригушења  $T$  на нормалне напоне у плочама при релаксацији

Са обзиром да нереално понашање материјала при релаксацији потиче искључиво од особина ДЕМ методе, нагли пад притиска на плочама је могуће ублажити нулирањем брзине свих честица на почетку релаксације и накнадним половљењем брзина при сваком кораку. Други начин спречавања наглог пада притиска је постепено опадање брзине плоча уместо њиховог наглог заустављања. Комбинацијом претходно наведених модификација ДЕМ програма и одабиром параметара који дају најбоље резултате могуће је делимично ублажити нагли пад напона при релаксацији (слика 3.5.5), али добијени резултати и даље не одговарају реалном понашању грануларних материјала.

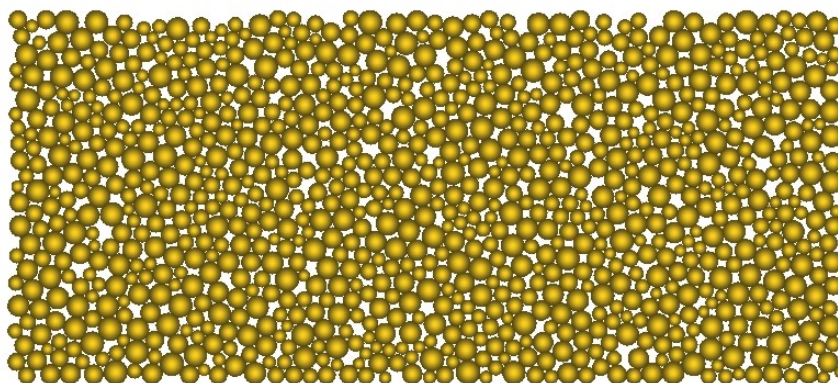


Слика 3.5.5 Ублажавање наглог пада напона при релаксацији коришћењем половљења брзина, постепеног заустављања и комбинације контактних параметара

### 3.6 Моделирање вртлога у траци смицања

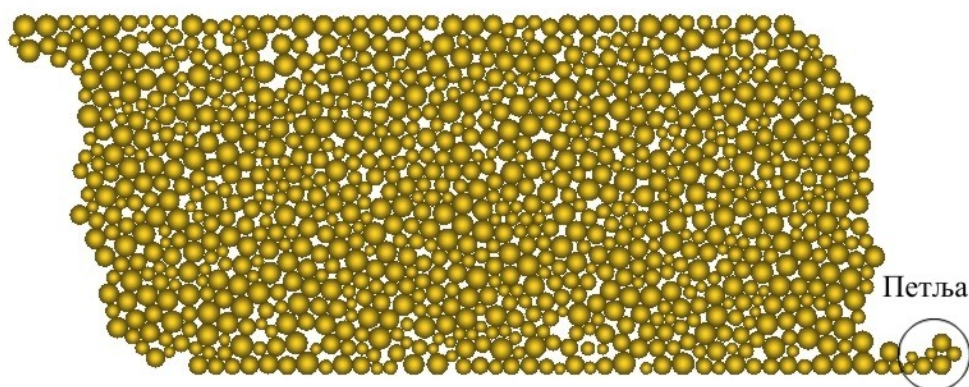
Формирање вртложних структура у траци смицања очљиво је када се од укупног поља деформација у грануларном материјалу одузме поље које представља допринос од деформација које се добијају применом механике континуума [25]. Приликом колапса ланца сила околне честице које су пре колапса биле пасивне се доводе у циркуларно кретање [26]. Вртлози су структуре са релативно кратким животним веком (у просеку 9% смичуће деформације) које нестају при контакту два вртлога истог смера обртања при чему долази до заглављивања вртлога у пределу њиховог контакта и до формирања новог ланца сила [5]. Да би се детаљније проучио настанак вртлога уместо

целокупног модела троосног теста који је претходно анализиран, у овој глави биће представљено моделирање искључиво траке смицања (слика 3.6.1).



Слика 3.6.1 ДЕМ модел траке смицања

Приликом овог прорачуна, као и код модела троосног теста (слика 2.4.3) прво је потребно задати притисак на граничне честице, а потом након фазе смиривања, граничним честицама се задају померања. Честицама које су на горњој страни се задаје померање (или притисак) на лево, честицама на доњој страни померање (или притисак) на десно а такође честицама на бочним странама се задаје померање (или притисак) и то десним честицама на горе а левим на доле. Смичућа деформација на горњој и доњој страни модела је 100%. Овим моделом је могуће посматрати понашање грануларног материјала у траци смицања у дужем временском периоду у односу на троосни тест, али због карактеристика ДЕМ методе и грануларних материјала може доћи до знатне деформације граничног слоја честица (слика 3.6.2).



Слика 3.6.2 Неправилан облик границе при моделирању траке смицања

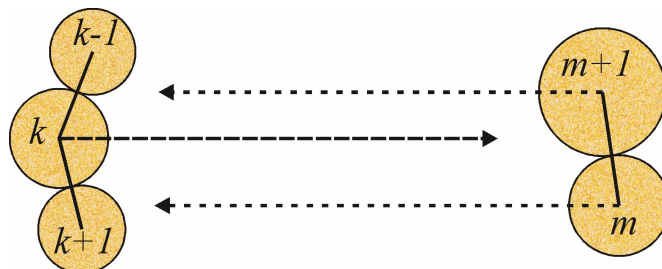
Неправилна граница приказана на слици 3.6.2 може да изазове блокаду у методама програма које служе за идентификацију граничних честица тако да је потребно додати силе које ће да исправљају бочне стране модела. Најлогичније решење би било дефинисање периодичних граничних услова који би пребацивали честице са једног на други крај модела и тако стварали привид континуалности. Пошто су честице различитог пречинка и на различитим висинама у односу на хоризонталну раван, примена периодичног граничног услова није могућа јер би пребацивањем честице са



једног на други крај модела могло доћи до појаве огромних Херцових сила уколико је пречник честице већи од празног простора који се налази на другом крају модела. Да би се овај проблем превазишао, у ДЕМ програм су уграђени слаби периодични гранични услови који уместо пребацивања честица са краја на крај модела само преносе оптерећења која на њих делују док саме честице остају у оквиру граница којима припадају. Сила коју треба пренети на одређену честицу  $k$  може да се израчуна као парцијални извод снаге према следећој једначини:

$$F_k = \frac{\partial W}{\partial v_k}, \quad (3.6.1)$$

где је  $v_k$  хоризонтална брзина честице  $k$ . Посматрана честица  $k$  је повезана са честицама  $k-1$  и  $k+1$ , док је са друге стране, на истој висини, гранична линија која повезује честице  $m$  и  $m+1$ , као што је приказано на слици 3.6.3.



Слика 3.6.3 Одређивање слабих периодичних граничних услова на основу брзина честица

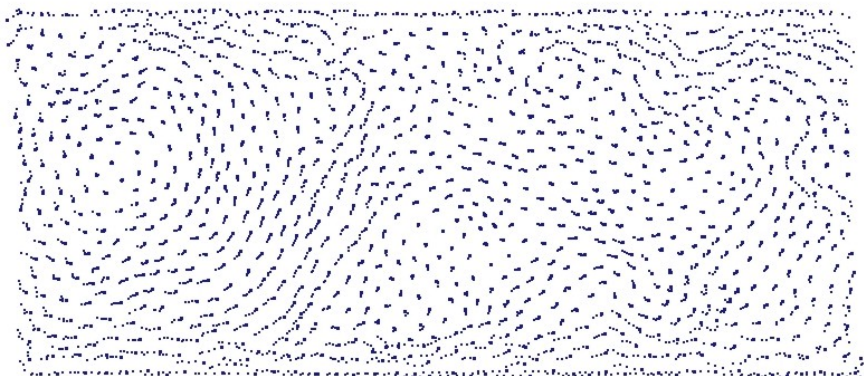
Ако се узму у обзир све честице које припадају левој или десној граници, укупан рад је дат изразом:

$$W = \sum_L \frac{1}{2} K (v^L - \tilde{v}^D)^2 + \sum_D \frac{1}{2} K (v^D - \tilde{v}^L)^2, \quad (3.6.2)$$

где је  $L$  број честица са леве стране, а  $D$  је број честица са десне стране.  $K$  је коефицијент који зависи од просечне масе честица. Брзина реалне честице са леве стране је тада означена са  $v^L$  док  $\tilde{v}^D$  представља интерполирану брзину на десној граничној линији. Иста нотација се примењује и на брзине на десној граници. Решавање парцијалне диференцијалне једначине (3.6.1) за рад израчунат као (3.6.2) даје силу којом је неопходно деловати на честицу  $k$ , а која је дата следећим изразом:

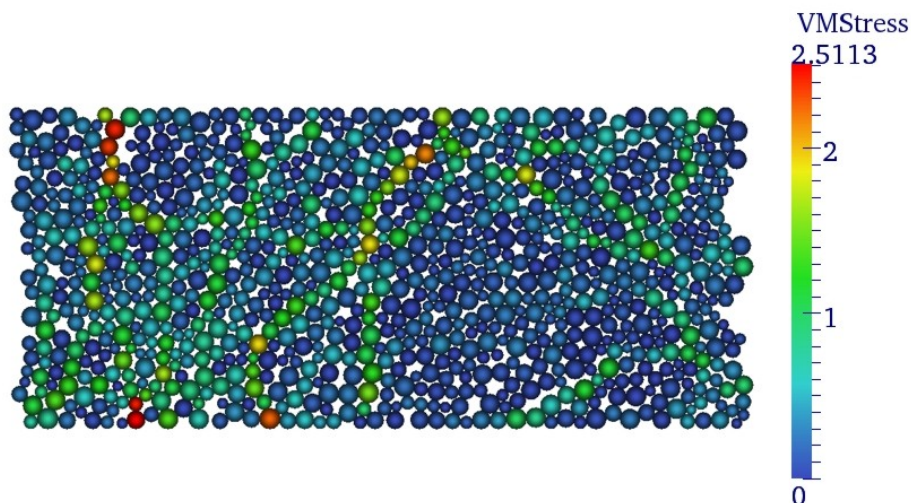
$$F_k = \frac{\partial W}{\partial v_k} = K \left[ \begin{aligned} & v_k^L - v_{m+1}^D \frac{y_k^L - y_m^D}{y_{m+1}^D - y_m^D} + v_m^D \frac{y_k^L - y_{m+1}^D}{y_{m+1}^D - y_m^D} - \\ & v_m^D \frac{y_m^D - y_{k+1}^L}{y_k^L - y_{k+1}^L} + v_k^L \left( \frac{y_m^D - y_{k+1}^L}{y_k^L - y_{k+1}^L} \right)^2 - v_{k+1}^L \frac{y_m^D - y_{k+1}^L}{y_k^L - y_{k+1}^L} \frac{y_m^D - y_k^L}{y_k^L - y_{k+1}^L} + \\ & v_{m+1}^D \frac{y_{m+1}^D - y_{k-1}^L}{y_{k-1}^L - y_k^L} + v_k^L \left( \frac{y_{m+1}^D - y_{k-1}^L}{y_{k-1}^L - y_k^L} \right)^2 - v_{k-1}^L \frac{y_{m+1}^D - y_k^L}{y_{k-1}^L - y_k^L} \frac{y_{m+1}^D - y_{k-1}^L}{y_{k-1}^L - y_k^L} \end{aligned} \right]. \quad (3.6.3)$$

Применом тако добијене силе на граничне честице, деформације граничног слоја се сведе на прихватљиву меру, па не долази до грешака у потпрогамима за одређивање граничног слоја, чиме је омогућено спровођење целокупне анализе понашања грануларног материјала у траци смицања где задата смичућа деформација износи 100%. Просечна вредност пута које пређу честице у граничном слоју једнака је дужини модела траке смицања. На следећој слици дате су струјнице које праве грануларне честице током кретања, при чему је у датом опсегу временских корака уочљива појава вртлога на левој стани модела



Слика 3.6.4 Вртложно кретање грануларних честица у траци смицања

Ланци сила који настају у грануларном материјалу могу се уочити уколико се прикажу еквивалентни тј. Фон Мизесови напони (слика 3.6.5).



Слика 3.6.5 Еквивалентни напони у грануларном материјалу

Иако ДЕМ метода најреалније моделира карактеристике грануларних материјала као што су траке смицања, ланци сила и вртлози, њена компјутерска захтевност је чини непрактичном са инжењерског становишта, па је за практичне инжењерске проблеме, неопходно користити нумеричке методе засноване на механици континуума, код којих се занемарују претходно описане карактеристике и цео грануларни материјал се посматра као непрекидна средина (континуум), што ће бити представљено у наредним главама.

## 4 ГЛАТКА ЧЕСТИЧНА ХИДРОДИНАМИКА (СПХ)

### 4.1 Значај и историја развоја

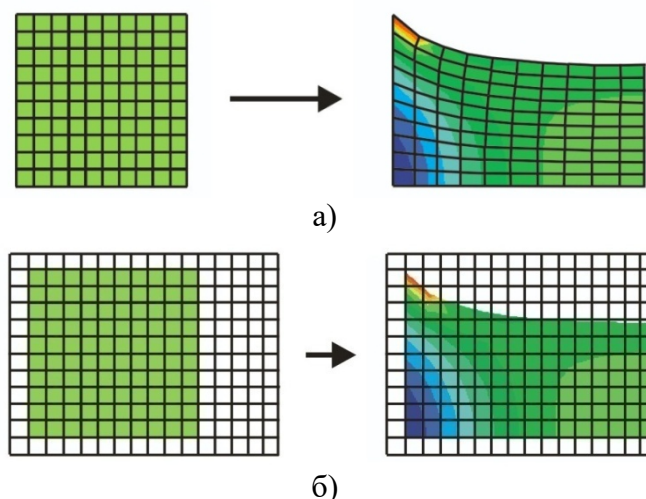
Глатка честична хидродинамика је најпопуларнија безмрежна нумеричка метода заснована на механици континуума. Позната је и као СПХ метода, назив који потиче од акронима методе на енглеском језику (*Smoothed Particle Hydrodynamic*) и који ће се због своје одомаћености у стручној литератури користити у даљем тексту.

СПХ метода је првобитно развијена 1977. године за моделирање астрофизичких проблема настанка и еволуције звезда [27],[28] користећи претпоставку да је колективно кретање тих честица слично кретању гасова и течности, и да се може моделирати једначинама стања Њутнове хидро-динмике [29]. Током наредне деценије имала је ограничену примену у научним круговима, а основни помаци су се односили на симулирање простирања ударних таласа [30] код којих су превелике осцилације пригушене коришћењем израза за вештачку вискозност [31]. Значајан напредак СПХ метода доживљава почетком деведесетих година увођењем тензора напона чиме је проширена област примене и на механику чврстих тела, где чврстоћа материјала игра пресудну улогу, прво у 2Д [32] а потом и у 3Д простору [33]. Увођењем чврстоће материјала у СПХ методу дошли су до изражаја многи њени недостаци као што су недовољна тачност, конзистенција, нестабилност при истезању, нулти енергетски мод [34]. Детаљни преглед ових недостака дат је у извештајима [35] и [36] из 1994. који представљају мотивацију за даље истраживање и развој СПХ методе. Проблеми тачности и конзистенције који се јављају код безмрежних метода [37] карактеристични су и за СПХ методу. Побољшање тачности могуће је постићи адекватнијим дефинисањем граничних услова и једначина закона одржања [38]. Постизање линеарне конзистенције је омогућено нормализацијом основних функција СПХ методе [39] о чему ће касније бити више речи. Проблем нестабилности при истезању је решен увођењем вештачких напона [40]. Нулти енергетски мод је последица рачунања променљивих и њихових извода у истим тачкама, а да би се овај проблем превазишао проблем се моделира са два типа честица, један који служи за рачунање брзина а други за рачунање напона [41]. Решавање претходно поменутих проблема оригиналне СПХ методе довело је до развоја већег броја нових метода које потичу од СПХ методе (чији су називи дати на енглеском језику) као што су *Element Free Galerkin Method* [42], *Reproducing Kernel Particle Method* [43], *Moving Least Square Particle Hydrodynamics* [44], *Meshless Local Petrov Galerkin Method* [45]. Такође, отклањањем поменутих недостатака долази до раста популарности СПХ методе и проширења области примене подстакнутим предностима које доноси безмрежни карактер СПХ методе. Моделирање удара пројектила који изазива драстично разарање материјала истиче предности СПХ методе која због недостатка мреже реално симулира фрагментацију материјала [46], која се такође јавља и при моделирању детонације и распршивања експлозива [47]. Такође, уместо пројектила, могуће је моделирати удар птице у део авиона при великим брзинама [48] или пад летелице (хеликоптера, авиона или свемирске капсуле) у воду [49],[50] помоћу интеракције солида и флуида која је постигнута спрезањем СПХ и методе коначних елемената [46],[51]. СПХ метода се користи и у механици лома где се, између осталог, посматра разарање стенске масе под притиском, проблем који се често јавља у обради минерала и руда [52]. Велике деформације које се јављају при појави клизишта такође се успешно моделирају овом методом коришћењем Дракер-Прагер материјалног модела који ће бити коришћен у оквиру ове дисертације [53].



## 4.2 Основне карактеристике СПХ методе

СПХ метода је нумеричка метода заснована на законима механике континуума код које се укупан домен проблема дели на под-домене тзв. псеудо честице које нису повезане мрежом (отуда назив безмрежна). Одсуство мреже омогућава лаку примену Лагранжове материјалне формулације код које се прате физичке величине везане за посматрану материјалну честицу која се креће у простору (слика 4.2.1.а). Ова формулација у МКЕ се користи при проучавању механике чврстих тела код којих су деформације релативно мале у односу на величину посматраног система. У случају проучавања кретања флуида, у МКЕ је неопходно користити Ојлеров просторни приступ (слика 4.2.1.б) у коме се промене физичких величина прате у фиксној тачки у простору кроз коју пролазе различите честице флуида. Ако би се честица флуида везала за чвор у мрежи коначних елемената, у Лагранжовом приступу, долазило би до велике дисторзије мреже због великих померања честица флуида, као на пример код турбулентног струјања.



Слика 4.2.1 Деформације у МКЕ а) Лагранжова материјална формулација б) Ојлерова просторна формулација

Безмрежни карактер СПХ методе омогућава посматрање кретања флуида у Лагранжовом материјалном опису што може бити корисно при анализи интеракције флуида са чврстим телима (као што је на пример удар птица у крило авиона [48] или пад летелица у воду [50]).

Механика континуума је грана механике која се бави анализом механичког понашања материјала моделираног као континуалног тела коју је први увео Коши у XIX веку и која занемарује постојање дисконтинуитета [54], односно чињеницу да је материја сачињена од молекула (постојање међу-молекуларног простора) као и друге облике дисконтинуитета као што је простор између зрна грануларног материјала. Нумеричко решавање проблема подразумева дискретизацију посматраног система на коначан број под-домена на које се примењују закони механике континуума. Код мрежних метода (као што је МКЕ) под-домени су дефинисани мрежом чворова који ограничавају

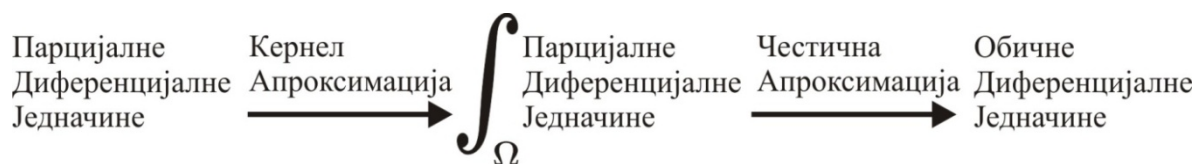
коначне елементе [54]. Код безмрежних метода механике континуума (као што је СПХ) под-домени представљају псеудо-честице које по много чему одговарају елементима у МКЕ методи, али које имају ту предност и ману да нису међусобно стриктно повезане мрежом. Током прорачуна могуће је да се некој псеудо честици мењају суседи, што представља предност СПХ методе у односу на МКЕ приликом прорачуна великих деформација. 3. За сваку честицу, током прорачуна, врши се периодично одређивање суседних честица што повећава компјутерску захтевност СПХ методе., Недостатак мреже је у погледу перформанси мана СПХ методе у односу на МКЕ.

Псеудо-честице (слично елементима у МКЕ) представљају под-домене континуума и треба их разликовати од реалних честица које се срећу у ДЕМ методи. Псеудо-честица у СПХ методи при моделирању грануларног материјала може имати огроман број реалних честица. При дефинисању СПХ псеудо-честица користе се материјалне карактеристике које описују понашање целог материјала док се за реалне ДЕМ честице користе карактеристике материјала од којих су честицесачињене. Пошто је велики број реалних грануларних честица у СПХ методи апроксимиран једном великом псеудо честицом, овом методом се не могу моделирати интеракције између реалних грануларних честица, већ између група реалних грануларних честица представљених једном псеудо честицом.

За нумеричко решавање диференцијалних једначина механике континуума већина безмрежних метода (међу њима и СПХ) користи колокациону дискретну методу[55], док МКЕ и понеке безмрежне методе (*Element Free Galerkin Method* [42] или *Meshless Local Petrov Galerkin Method* [45]) користе Галеркинову методу. Идеја на којој се заснива колокациона метода је да се изабере коначно димензионални простор могућих решења (обично, полиноми до одређеног степена) и одређен број тачака у домену (које се зову колокационе тачке), да би се нашло решење које задовољава дату једначину у колокационим тачкама [55]. Коришћење колокационе методе је узрок појаве одређених проблема као што су математичка неодређеност или нестабилност при истезању али је њена примена у безмрежним методама знатно погоднија од Галеркинове методе која захтева постојање одређене ћелијске структуре неопходне за интеграцију и код које постоје тешкоће задавања есенцијалних граничних услова. Колокациона метода је основа СПХ формулације која ће бити детаљно објашњена у наредном делу.

### 4.3 СПХ формулација

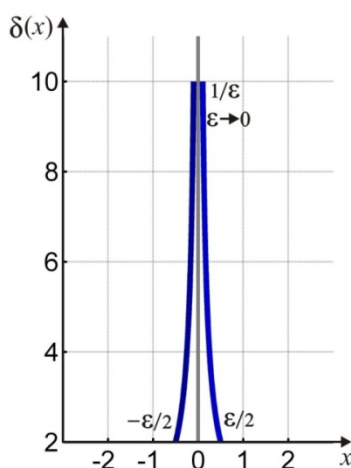
Закони одржања механике континуума који су дати у форми парцијалних диференцијалних једначина се преводe у обичне диференцијалне једначине коришћењем кернел апроксимације и честичне апроксимације које представљају основу СПХ формулације (слика 4.3.1).



Слика 4.3.1 СПХ формулација кернел и честична апроксимација

### 4.3.1 Кернел апроксимација

У СПХ методи вредности физичких величина су познате само су одређеним дискретним тачкама (псеудо честице), тако да би се извршило интегрално представљање неке функције потребно је увести импулсну функцију која ће учинити да вредност функције буде једнака нули у свим тачкама осим у непосредној околини посматране тачке (псеудо честице) [56]. Да би се то постигло импулсна функција у посматраној тачки (унутар интеграла) има бесконачну вредност док у свим осталим тачкама има вредност 0 тако да се интеграљењем импулсне функције добија вредност 1. Ова импулсна функција се зове Диракова  $\delta$  функција [56] и приказана је на слици 4.3.1.1.



Слика 4.3.1.1 Диракова  $\delta$  функција

Диракова  $\delta$  функција представља граничну вредност функције  $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(x)$  дате

$$\text{са; } \delta_{\epsilon}(x) = \begin{cases} 0 & x < -\epsilon/2 \\ |1/\epsilon| & -\epsilon/2 < x < 0 \vee 0 < x < \epsilon/2 \\ 0 & x > \epsilon/2 \end{cases}$$

Пошто Диракова  $\delta$  функција испуњава услов деобе целине  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$  можемо је користити приликом интегралног представљања функције једне променљиве  $f(x)$  дате изразом:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta(x - x') dx', \tag{4.3.1.1}$$

и функција више променљивих тј. функција вектора положаја  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  у тродимензионалном домену проблема означеном са  $\Omega$  код којих је интегрална репрезентација дата са:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (4.3.1.2)$$

У једначини (4.3.1.1)  $x$  представљаја параметар а  $x'$  представља променљиву док у тродимензионалном домену датом у једначини (4.3.1.2)  $\mathbf{x}$  означава вектор положаја посматране псеудо честице док  $\mathbf{x}'$  представља вектор положаја материјалне тачке која припада домену утицаја  $\Omega$  посматране псеудо-честице [57]. Диракове  $\delta$  функције  $\delta(x - x')$  и  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  у околини вредности  $x$  односно тачке са вектором положаја  $\mathbf{x}$  [58].

Диракова  $\delta$  функција се не може сматрати класичном математичком функцијом јер је интеграл класичне функције која има вредности 0 у свим осим у једној тачки такође једнак 0, док је интеграл Диракове  $\delta$  функције једнак 1.

Такође Дираковој  $\delta$  функцији недостају одређене особине класичних математичких функција као што су континуалност или диференцијабилност што је чини непогодном за нумеричко рачунање, па се мења са тзв кернел функцијом  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  која најчешће има облик Гаусијана или полинома, а параметар  $h$  представља дужину глачања (*smoothing length*) која одређује зону утицаја кернел функције (о чему ће касније бити више речи). Увођењем смене Диракове функције са кернел функцијом у израз (4.3.1.2) добијамо интегрално представљање функције  $f(\mathbf{x})$  у облику:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \quad (4.3.1.3)$$

где је кернел апроксимација означена са угластим заградама  $\langle \rangle$ .

Исту апроксимацију функције  $f(\mathbf{x})$  дату изразом 4.3.1.3 могуће је применити и на

градијент функције [29]  $\nabla f = \left( \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f \equiv \vec{i}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f$ , након чега добијамо

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla f(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (4.3.1.4)$$

Користећи парцијалну интеграцију

$$\int_{\Omega} [\nabla f(\mathbf{x}')] W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} \nabla [f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)] d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') [\nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)] d\mathbf{x}' \quad (4.3.1.5)$$

и Гаус-Грин-Остроградски теорему којом се претвара запремински у површински интеграл  $\int_V (\nabla \mathbf{F}) dV = \int_S (\mathbf{F} \mathbf{n}) dS$  добијамо:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = \underbrace{\int_S f(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) \mathbf{n} dS}_{=0} - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}', \quad (4.3.1.6)$$

где  $S$  представља затворену грану површ око запремине  $\Omega$ . Ако је домен интеграције површинског интеграла  $S$  већи од домена утицаја кернела  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h)$  следи да је површински интеграл из једначине (4.3.1.6) једнак нули [59]. Исто важи и када је функција  $f(\mathbf{x}')$  једнака нули на слободној површини модела, тако да из (4.3.1.6) коначно добијамо:

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (4.3.1.7)$$

Кернел функција мора да задовољи услове деобе целине и компактности домен утицаја да би могла да замени Диракову  $\delta$  функцију. Услов деобе целине је дат изразом:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 1, \quad (4.3.1.8)$$

док је компактност домена дефинисана са:

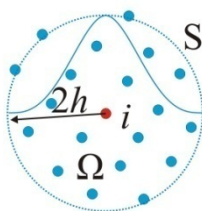
$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = 0, \quad (4.3.1.9)$$

за  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > k \cdot h$ , где је  $h$  дужина глачања а  $k$  је фактор скалирања.

Ова два услова осигуравају да када дужина глачања  $h$  тежи 0 кернел функција тежи Дираковој  $\delta$  функцији што је математички дато као:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.3.1.10)$$

У практичној примени СПХ методе, дужина глачања  $h$  се одређује на основу дефинисаног међучестишног растојања а најчешће се узима тако да на дужину  $h$  дође једна псеудо-честица. Зона (домен) утицаја честице  $i$  је дужине  $kh$  (обично се узима вредности  $k=2$ ) и представља околинду посматране честице дефинисане вектором  $\mathbf{x}$  у којој се налазе суседне честице. О суседним честицама биће речи у наредној глави, а за сада треба истаћи да се оне користе за рачунање физичких величина сумирањем у оквиру домена утицаја. Утицај суседних честица при сумирању није исти већ зависи од удаљености суседне честице од посматране честице а та зависност је дефинисана кернел функцијом која је облика звона (слика 4.3.1.2).

Слика 4.3.1.2 Домен утицаја за честицу  $i$ 

Кернел функција мора бити позитивна у оквиру домена утицаја и монотono опадајућа, тако да се са порастом растојања од посматране честице вредност функције смањује.

Поред наведених услова, кернел функција мора да има непрекидне изводе реда који одговара реду диференцијалне једначине.

Поред релације дате једначином (4.3.1.7), приликом извођења закона одржања у СПХ формулацији важну улогу има и следећа апроксимација: уколико се непрекидне и диференцијабилне функције  $f(\mathbf{x})$  и  $g(\mathbf{x})$  нађу у оквиру интегралне репрезентације дате изразом:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (4.3.1.11)$$

Подинтегралну функцију је могуће развити у Тејлоров ред око тачке  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = \\ \int_{\Omega} \left\{ f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{d}{d\mathbf{x}} \left( f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) + \dots \right\} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (4.3.1.12)$$

Кернел функција је парна  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = W(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, h)$ , па се сви чланови из израза (4.3.1.12) који имају непаран степен  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  губе, и ако се занемаре сви чланови другог и вишег реда, једначина (4.3.1.12) постаје:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (4.3.1.13)$$

Пошто се вектор положаја посматране псеудо честице  $\mathbf{x}$  не мења приликом рачунања интеграла,  $f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  може да иде испред интеграла, а унутар интеграла остаје само кернел функција  $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'$  чији је интеграл на основу услова деобе целине (4.3.1.8) једнак 1, па на основу тога добијамо:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}. \quad (4.3.1.14)$$

Сада се кернел апроксимација (4.3.1.4) примењује на градијент функције  $g(\mathbf{x})$  тако да на основу претходног поступка долазимо до израза која се често користи за упрошћавање СПХ једначина:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \approx f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \frac{\partial g(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}'. \quad (4.3.1.15)$$

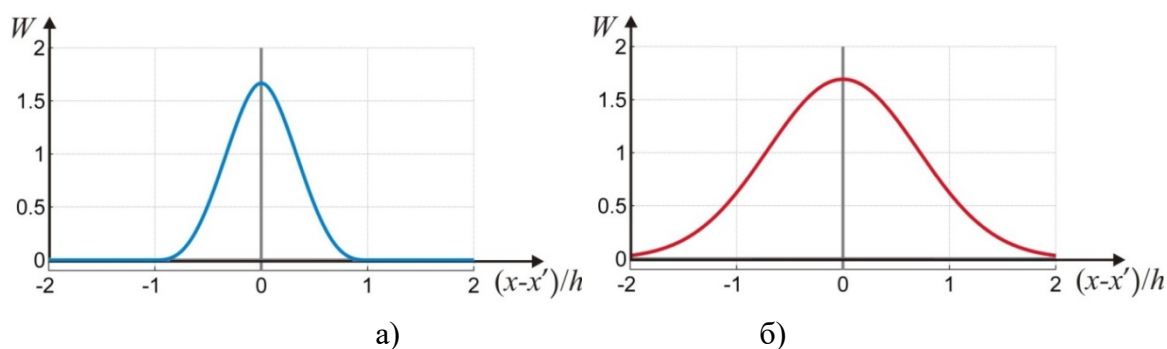
Првобитне кернел функције дате на слици 4.3.1.3 су биле облика полинома [27]

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} (1 + 3R)(1 - R)^3 & R \leq 1 \\ 0 & R > 1 \end{cases}, \quad (4.3.1.16)$$

где је  $R$  релативна раздаљина између честица  $R = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{h}$  а  $\alpha_d$  је коефицијент који зависи од димензије система (за 1Д  $\alpha_d = 5/4h$ , за 2Д  $\alpha_d = 5/\pi h^2$ , а за 3Д  $\alpha_d = 105/16\pi h^3$ ) и Гаусијана [28]

$$W(R, h) = \alpha_d e^{-R^2}, \quad (4.3.1.17)$$

код кога коефицијент  $\alpha_d$  има следеће вредности: за 1Д  $\alpha_d = 1/\pi^{1/2}h$ , за 2Д  $\alpha_d = 1/\pi h^2$ , а за 3Д  $\alpha_d = 1/\pi^{3/2}h^3$ .



Слика 4.3.1.3 Првобитне апроксимације Диракове  $\delta$  функције а) функција облика полинома (једначина 4.3.1.16) и б) функција облика Гаусијана (једначина 4.3.1.17)

Гаусијан је бесконачно пута диференцијабилан и представљао би идеалан избор за изводе вишег реда, врло је стабилан и тачан поготову за неправилно распоређене псеудо-честице, али није компактан пошто никада не опада на вредност 0 осим ако релативна раздаљина између честица  $R$  не тежи бесконачности. Гаусијан је прорачунски доста захтевнији пошто је потребна већа раздаљина да би се кернел приближио 0 (посебно за изводе вишег реда) што доводи до великог домена утицаја и

укључивања већег броја честица у апроксимацију. Полиноми вишег реда представљају најчешће коришћени облик кернел функције јер довољно добро апроксимирљају Гаусијан а при том су прорачунски доста ефикаснији [60]. Најчешће коришћени полином трећег реда је дат једначином:

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2}R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6}(2-R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases}, \quad (4.3.1.18)$$

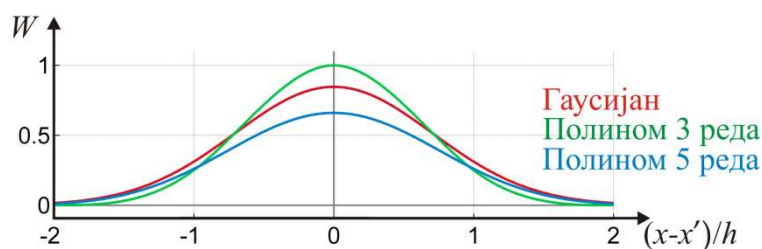
где коефицијент  $\alpha_d$  има следеће вредности: за 1Д  $\alpha_d = 1/h$ , за 2Д  $\alpha_d = 15/7\pi h^2$ , а за 3Д  $\alpha_d = 3/2\pi h^3$ .

Други извод полинома трећег степена је изломљена линија што може изазвати нестабилности током прорачуна (на пример код моделирања струјања флуида са малим Рејнолдсовим бројевима [61]) тако да је у тим случајевима боље користити полином петог степена који је диференцијабилнији али знатно рачунски захтевнији и који је дат следећом једначином:

$$W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} (3-R)^5 - 6(2-R)^5 + 15(1-R)^5 & 0 \leq R < 1 \\ (3-R)^5 - 6(2-R)^5 & 1 \leq R < 2 \\ (3-R)^5 & 2 \leq R < 3 \\ 0 & R > 3 \end{cases}, \quad (4.3.1.19)$$

где коефицијент  $\alpha_d$  има следеће вредности: за 1Д  $\alpha_d = 120/h$ , за 2Д  $\alpha_d = 7/478\pi h^2$ , а за 3Д  $\alpha_d = 3/359\pi h^3$ .

Кернел функције дате једначинама (4.3.1.18) и (4.3.1.19) су приказане на слици 4.3.1.3 а поред њих постоје и функције облика полинома четвртог реда или супер Гаусијана [29] али оне нису толико заступљене.



Слика 4.3.1.4 Кернел функције: полином трећег реда (једначина 4.3.1.18), и полином петог реда (једначина 4.3.1.19) у поређењу са Гаусијаном (једначина 4.3.1.17)



Програмска имплементација различитих кернел функција је једноставна, пошто је рачунање кернел функција могуће издвојити у потпрограме, тако да се у зависности од карактеристика проблема који се моделира позива одговарајућа кернел функција која за дати пример даје најбоље резултате (слично избору типа елемента код МКЕ методе).

### 4.3.2 Честична апроксимација

Да би се нумерички израчунала вредност функције након кернел апроксимације (једначина 4.3.1.3) потребно је извршити још једну, честичну апроксимацију. Пошто број честица није бесконачан већ је домен утицаја  $\Omega$  подељен на коначан број под-домена дефинисаних колокационим псеудо-честицама које заузимају свој део простора и имају константну масу. Континуални облик дат једначином 4.3.1.3 се преводи у дискретни облик сумирањем по свим честицама у оквиру домена утицаја  $\Omega$  при чему се инфинитезимална запремина  $d\mathbf{x}'$  која одговара простору око вектора променљивих  $\mathbf{x}'$  претвара у коначну запремину  $\Delta V^j$  која одговара суседној псеудо-честици  $j$ . Свака посматрана псеудо-честица одређена вектором положаја  $\mathbf{x}$  (односно  $\mathbf{x}^i$ ) има одређен скуп суседних честица које се налазе у оквиру њеног домена утицаја које су дефинисане вектором положаја  $\mathbf{x}^j$  и које имају запремину:

$$\Delta V^j = \frac{m^j}{\rho^j}, \quad (4.3.2.1)$$

где је  $m^j$  маса а  $\rho^j$  густина суседне честице. Овај скуп суседних честица означавамо са  $SS$  (скуп суседа) тако да имамо  $j \in SS$ . Сада десну страну једначина 4.3.1.3 и 4.3.1.7 можемо апроксимирати на следећи начин:

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \approx \sum_{j \in SS} \Delta V^j f(\mathbf{x}^j) \mathcal{W}(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h), \quad (4.3.2.2)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla \mathcal{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' \approx - \sum_{j \in SS} \Delta V^j f(\mathbf{x}^j) \nabla \mathcal{W}(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h). \quad (4.3.2.3)$$

Користећи израз 4.3.2.1 добијамо коначне изразе који математички описују СПХ формулацију приказану на слици 4.3.1, и који су дати са:

$$\langle f(\mathbf{x}^i) \rangle \approx \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} f(\mathbf{x}^j) \mathcal{W}(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h), \quad (4.3.2.4)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^i) \rangle \approx - \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} f(\mathbf{x}^j) \nabla \mathcal{W}(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h). \quad (4.3.2.5)$$

## 4.4 Недостаци СПХ методе

Претходно описана СПХ формулација има и одређених недостатака, посебно приликом моделирања чврстих тела и нестишљивих флуида, који потичу од коришћених апроксимација [62].

#### 4.4.1 Конзистенција

Код нумеричких метода ред конзистенције означава ред полинома који се датом методом може репродуковати потпуно тачно. Уколико је аналитичко решење вишег реда од реда конзистенције долази до грешке при нумеричком решавању. Ред конзистенције који нека нумеричка метода мора да задовољи се одређује на основу реда парцијалне диференцијалне једначине која се решава датом методом тако да за једначине реда  $2k$  потребна је конзистенција  $k$ -тог реда односно  $C^k$ . На основу услова деобе целине датог једначином 4.3.1.8 закључујемо да у интегралној форми СПХ метода поседује конзистенцију нултог реда тј. може потпуно тачно да репродукује полиноме нултог реда (константе)  $f(\mathbf{x}) = c$ :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} c W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = c. \quad (4.4.1.1)$$

За линеарну функцију  $f(\mathbf{x}) = c_0 + c_1 \mathbf{x}$  треба да буде задовољено:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} (c_0 + c_1 \mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = c_0 + c_1 \mathbf{x}. \quad (4.4.1.2)$$

Једначина 4.4.1.2 може да се упрости као:

$$\int_{\Omega} \mathbf{x}' W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = \mathbf{x}. \quad (4.4.1.3)$$

Ако једначину 4.3.1.8 помножимо са леве стране са  $\mathbf{x}$  добијамо:

$$\int_{\Omega} \mathbf{x} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = \mathbf{x}. \quad (4.4.1.4)$$

Ако сада одузмемо једначину 4.4.1.3 од једначине 4.4.1.4 добијамо услов линеарне конзистенције СПХ кернел апроксимације:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0. \quad (4.4.1.5)$$

На сличан начин добија се и услов за конзистенцију  $k$ -тог реда [29]

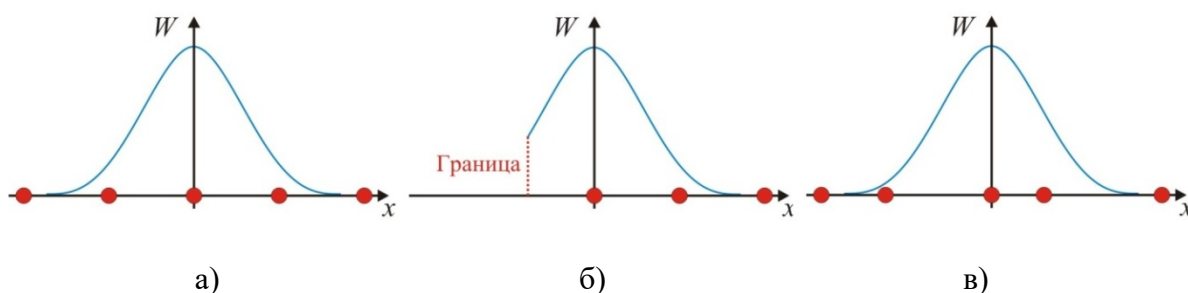
$$\int_{\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^k W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) d\mathbf{x}' = 0. \quad (4.4.1.6)$$

Претходно дати услови конзистенције важе само у интегралној форми док се након честичне апроксимације губи конзистенција услед такозване честичне неконзистентности [37]. Дискретни облици услова конзистентности за константу и линеарну једначину су дати једначинама 4.4.1.7 и 4.4.1.8 респективно:

$$\sum_{j=1}^{SS} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \frac{m^j}{\rho^j} = 1, \quad (4.4.1.7)$$

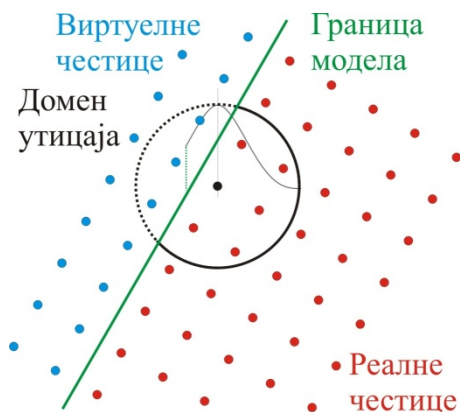
$$\sum_{j=1}^{SS} (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j) W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h) \frac{m^j}{\rho^j} = 0. \quad (4.4.1.8)$$

Ови услови нису увек испуњени (слика 4.4.1.1), на пример када се честице нађу на или близу границе домена проблема па се домен утицаја честице сече са границом домена проблема (слика 4.4.1.1.б). У том случају са једне (унутрашње) стране постоје честице које доприносе суми док са друге (спољашње) стране те честице недостају тако да није испуњен услов деобе целине [57]. Други случај када овај услов није испуњен је у случају неравномерне расподеле честица (слика 4.4.1.1.в).



Слика 4.4.1.1 Утицај распореда честица на конзистенцију а) равномеран распоред честица унутар домена, б) честице на граници домена проблема, в) неравномеран распоред честица

Да би се отклонили ови недостаци користе се одређене методе [29], тако да се на границама домена уводе виртуелне честице (слика 4.4.1.2) док се неравномерни распоред честица анулира променљивом дужином глачања  $h$  тако да ако је размак између честица већи већи је и домен утицаја честице и обрнуто.



Слика 4.4.1.2 Додавање виртуелних честица да би се употпунио домен утицаја граничне честице

Такође, постизање линеарне конзистенције је омогућено нормализацијом кернел функција [39],[41]. За 1Д проблем ако посматрамо тачку која се налази близу границе имамо:

$$\langle f(x) \rangle = \int_A f(x') W(x-x', h) dx' = B_1 \int_{A'} f(x') W(x-x', h) dx'. \quad (4.4.1.9)$$

где је  $A$  комплетни домен утицаја кернел функције,  $A'$  је некомплетни домен, док је  $B_1$  корекциони израз који можемо добити ако функцију развијемо у Тејлоров ред око тачке  $x$ :

$$\begin{aligned} & \left[ f(x) + \frac{f(x)}{dx}(x-x') + \dots \right] \int_A W(x-x', h) dx' = \\ & = B_1 \left[ f(x) + \frac{f(x)}{dx}(x-x') + \dots \right] \int_{A'} W(x-x', h) dx' \end{aligned} \quad (4.4.1.10)$$

коришћењем само првих чланова у једначини 4.4.1.10 добијамо:

$$1 = B_1 \int_{A'} W(x-x', h) dx'. \quad (4.4.1.11)$$

Одакле је корекциони фактор  $B_1$

$$B_1 = \frac{1}{\int_{A'} W(x-x', h) dx'} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{SS} \frac{m^j}{\rho^j} W(x-x', h)}. \quad (4.4.1.12)$$

тако да једначину 4.4.1.9 можемо да напишемо као:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int_{A'} f(x') W(x-x', h) dx'}{\int_{A'} W(x-x', h) dx'}. \quad (4.4.1.13)$$

Ако уместо функције  $f(x)$  тражимо градијент функције  $\nabla f(x)$  имамо:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x) \rangle &= \frac{\int_{A'} \nabla f(x') W dx'}{\int_{A'} W dx'} = \\ &= \nabla \left[ \frac{\int_{A'} f(x') W dx'}{\int_{A'} W dx'} \right] + \frac{\left[ \int_{A'} f(x') W dx' \right] \left[ \int_{A'} \nabla W dx' \right] - \left[ \int_{A'} f(x') \nabla W dx' \right] \left[ \int_{A'} W dx' \right]}{\left[ \int_{A'} W dx' \right]^2} \end{aligned} \quad (4.4.1.14)$$

где се ради краћег записа кернел функција представља без параметара  $W(x-x', h) \rightarrow W$

Пошто је први члан у изразу (4.4.1.14) једнак 0 за цео домен утицаја имамо

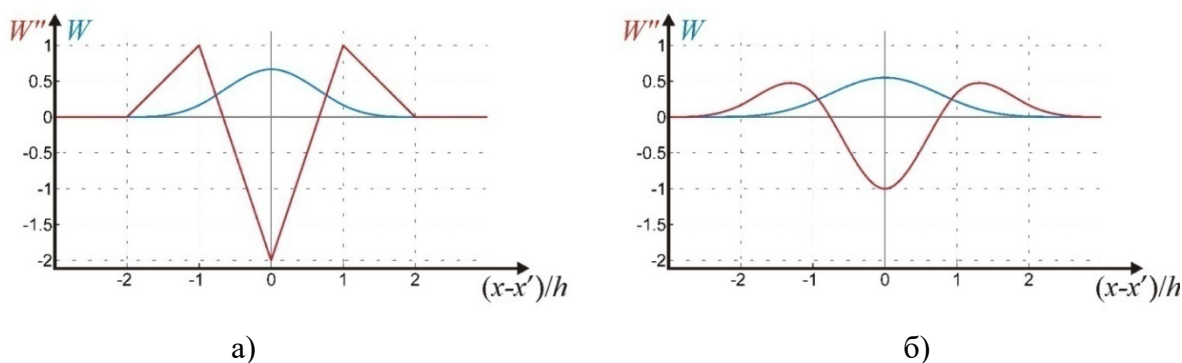
$$\langle \nabla f(x) \rangle = \frac{\left[ \int_{A'} f(x') W dx' \right] \left[ \int_{A'} \nabla W dx' \right] - \left[ \int_{A'} f(x') \nabla W dx' \right] \left[ \int_{A'} W dx' \right]}{\left[ \int_{A'} W dx' \right]^2}. \quad (4.4.1.15)$$

#### 4.4.2 Нестабилност при истезању

Проблем нестабилности при истезању не зависи од коришћене интеграционе шеме или величине временског корака и последица је карактеристика кернел функције [35]. Коришћењем Фон-Нојманове анализе стабилности која посматра пропацију малих пертурбација независних променљивих у једначини кретања долази се до услова који мора бити испуњен да би дошло до нестабилности датог изразом:

$$W'' \sigma > 0, \quad (4.4.2.1)$$

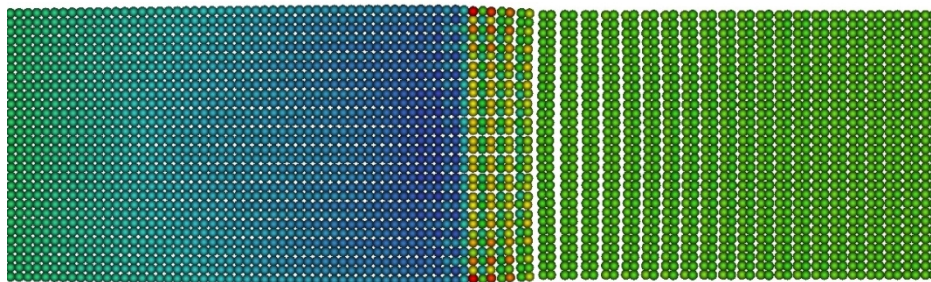
где је  $\sigma$  напон који је позитиван у случају затезања а негативан у случају притиска, а  $W''$  је други извод кернел функције тако да ако су  $W''$  и  $\sigma$  истог знака долази до нестабилности [35]. Са обзиром да је уобичајни избор дужине глачања  $h$  једнак почетном размаку између честица, за 1Д проблем имамо да се прва суседна честица налази на растојању  $\frac{x-x'}{h} = 1$  а друга на растојању  $\frac{x-x'}{h} = 2$  тако да је вредност  $W''$  на интервалу 1-2 пресудна за стабилност. За кернел функције облика полинома трећег и петог реда други извод је дат на слици 4.4.2.1. Са ове слике се види да је на интервалу 1-2 други извод за оба кернела позитиван, тако да је за позитиван напон (затезање) услов 4.4.2.1 задовољен те долази до нестабилности док је за притисак (негативан напон) модел стабилан.



Слика 4.4.2.1 Најчешћи облици кернел функција са другим изводима а) полином трећег реда б) полином петог реда

Нестабилност при истезању карактерише експоненцијални раст вредности у основним једначинама који се манифестује неприродним збијањем честица и фрагментацијом услед нумеричких уместо физичких узрока. На слици 4.4.2.2 приказана су померања у подужном правцу модела који је фиксиран на средини, тако да је леви део модела оптерећен на притисак и у њему су померања честица равномерна, док је десни део

оптерећен на затезање и у том делу долази до неравномерних померања и последично до збијања честица а касније и до фрагментације модела.



Слика 4.4.2.2 Нестабилност при истезању: модел фиксиран у средини, леви део је оптерећен на притисак а десни на истезање

Постоји више приступа којима се врши корекција ове грешке. Ови приступи су праћени одређеним недостацима, и биће укратко наведени у наставку.

Пошто је нестабилност прузрокована карактеристикама кернел функције, било је покушаја да се проблем реши дефинисањем кернела који би спречио неприродно груписање честица [63], али овакви кернели су знатно осетљивији на неправилан распоред честица [40].

Додавање дисипативних чланова за стабилизацију диференцијалних једначина је основа Приступа конзервативног глачања (*Conservative Smoothing Approach*) [38], [64] али код овог приступа може доћи до смањења тачности резултата.

Такође, постоји и приступ код кога се рачунање напона врши ван СПХ тачака практично подразумева постојање два скупа честица. Први скуп носи податке о брзини, маси и дужини глачања, док други скуп носи информације о напону, густини и унутрашњој енергији [65]. Код овог приступа проблем представља дефинисање напонских тачака у простору код 2Д и 3Д проблема и њихово кретање приликом деформација.

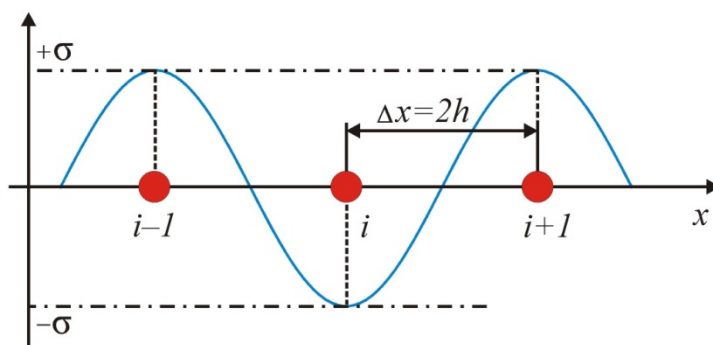
Неприродно збијање СПХ честица би у реалним телима било онемогућено деловањем одбојних сила међу атомима [40], тако да је на основу те аналогије уведена вештачка сила, која је у функцији од кернела и која расте како се растојање међу суседним честицама смањује [40].

#### 4.4.3 Нулти енергетски мод

Нулти енергетски мод је шаблон померања честица који не представља кретање крутог тела и проузрокује деформациону енергију једнаку нули што је последица рачунања променљивих и њихових извода у истим колокационим тачкама. То доводи до режима деформација којима се не супротставља унутрашњи напон. Нулти енергетски мод се најчешће јавља у облику осцилација поља брзина или поља напона са таласном дужином дупло већом од међучестичног растојања.

Уколико поље брзина осцилује таласном дужином дупло већом од међучестичног растојања долази до појаве да поље напона изгледа константно у честицама. Тако да пошто нема промене напона услед осцилације брзина нема ни убрзања честица које би се супротставило овом кретању.

Уколико поље напона осцилује таласном дужином дупло већом од међучестичног растојања  $2h$  (слика 4.4.3.1) напони у честици пре и честици после посматране честице (за 1Д пример) услед карактеристика кернел функције  $W'(-\Delta x) = -W'(\Delta x)$  се поништавају у изразу за убрзање, а пошто је први извод кернел функције за посматрану тачку  $i$  ( $W'(x^i) = 0$ ) добијамо да је за ту тачку убрзање такође једнако нули



Слика 4.4.3.1 Осцилација поља напона које проузрокују нулти енергетски мод

За сада једини начин превазилажења овог недостатка је моделирање проблема са два типа честица, један који служи за рачунање брзина а други за рачунање напона [41], [65] и који такође служи за решавање проблема нестабилности при истезању. Као што је већ речено код овог приступа проблем представља дефинисање напонских тачака у простору код 2Д и 3Д проблема и њихово кретање приликом деформација.

## 4.5 Закони баланса

Закон одржања масе, закон баланса момента и закон баланса енергије представљају фундаменталне законе механике континуума који важе у свим гранама механике континуума и морају бити задовољени у нумеричким методама које се користе при решавању различитих проблема за било који материјални модел и у сваком тренутку времена [66],[67].

### 4.5.1 Изводи физичких величина

У зависности од типа формулације, у механици континуума постоје три врсте извода неке физичке величине који ће бити укратко описани, а детаљније објашњење је дато у [66].

Материјални извод материјалног поља. Материјално поље неке скаларне, векторске или тензорске величине је поље у коме су независне променљиве почетни вектор положаја  ${}^0\mathbf{x}$  и време  $t$  и означава се са  ${}^0\mathcal{F}({}^0\mathbf{x}, t)$ . Материјални извод материјалног поља може да се дефинише као:

$${}^0\dot{\mathcal{F}}({}^0\mathbf{x}, t) = \frac{D {}^0\mathcal{F}({}^0\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left( \frac{\partial {}^0\mathcal{F}({}^0\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{0\mathbf{x}}. \quad (4.5.1.1)$$

Доњи индекс у (4.5.1.1) означава да је вектор положаја  ${}^0\mathbf{x}$  константан док се врши парцијални извод. Дати израз означава промену величине материјалног поља  ${}^0\mathcal{F}$  за специфичну честицу која у почетном тренутку заузима положај  ${}^0\mathbf{x}$  и назива се материјални извод по времену. Другим речима, материјални извод представља брзину којом се величина  ${}^0\mathcal{F}$  мења у току времена док се посматрач креће заједно са честицом.

Просторни извод просторног поља. У просторном пољу  ${}^t\mathcal{F}({}^t\mathbf{x}, t)$  независне променљиве су тренутни вектор положаја  ${}^t\mathbf{x}$  и време  $t$ . Просторни извод по времену просторног поља  ${}^t\mathcal{F}({}^t\mathbf{x}, t)$  представља извод тог поља у односу на време  $t$  при чему је позиција фиксна односно  ${}^t\mathbf{x} = const$

$${}^t\dot{\mathcal{F}}({}^t\mathbf{x}, t) = \frac{d {}^t\mathcal{F}({}^t\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial {}^t\mathcal{F}({}^t\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (4.5.1.2)$$

Другим речима, просторни извод представља брзину којом се величина  ${}^t\mathcal{F}$  мења у току времена док се посматрач не помера са позиције  ${}^t\mathbf{x} = const$  кроз коју пролазе различите материјалне честице [68].

Материјални извод просторног поља. Материјални извод по времену просторног поља  ${}^t\mathcal{F}({}^t\mathbf{x}, t)$  представља извод по времену тог поља док је  ${}^0\mathbf{x} = const$

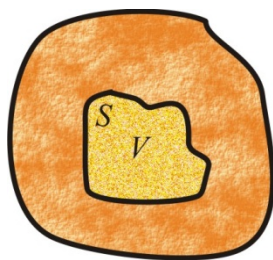
$${}^t\dot{\mathcal{F}}({}^t\mathbf{x}, t) = \frac{D {}^t\mathcal{F}({}^t\mathbf{x}, t)}{Dt} = \left( \frac{\partial {}^t\mathcal{F}[\chi({}^0\mathbf{x}, t), t]}{\partial t} \right)_{0\mathbf{x}=\chi^{-1}({}^t\mathbf{x}, t)}. \quad (4.5.1.3)$$

Овај извод се добија тако што се прво просторно поље пресликава у материјалном опису где за вектор положаја имамо релацију  ${}^t\mathbf{x} \rightarrow \chi({}^0\mathbf{x}, t)$  користећи функцију пресликавања  $\chi$ , након чега се налази материјални извод тако пресликаног поља, а потом се резултат пресликава уназад у просторни опис коришћењем  ${}^0\mathbf{x} \rightarrow \chi^{-1}({}^t\mathbf{x}, t)$  функција пресликавања [68].

#### 4.5.2 Коначна и инфинитезимална контролна запремина

Ако посматрамо контролну запремину коначних димензија у неком телу означену са  $V$  која је ограничена са затвореном површином  $S$  у Лагранжовом материјалном опису, у зависности од проблема, она може да мења положај, запремину и облик, али иста количина материје се увек налази унутар контролне запремине тако да је њена маса константна (слика 4.5.2.1).

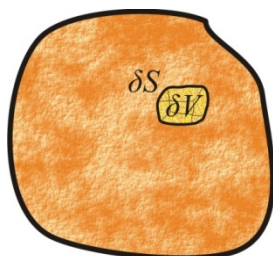




Слика 4.5.2.1 Контролна запремина и контролна површина у посматраном телу

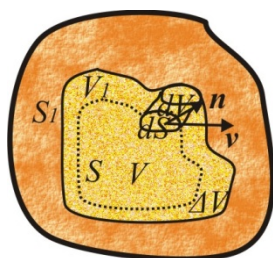
Ако се закони одржања примене на контролну запремину  $V$  добијамо водеће једначине у интегралној форми [29].

Други приступ је посматрање инфинитезималне контролне запремене означене са  $\delta V$  која је ограничена инфинитезималном контролном површином  $\delta S$  (слика 4.5.2.2).



Слика 4.5.2.2 Инфинитезимална контролна запремина и инфинитезимална контролна површина у посматраном телу

Ова инфинитезимална запремина је довољно велика да у њој важе претпоставке механике континуума а са друге стране је довољно мала да је вредност неке величине поља константна [29]. Инфинитезималну запремину  $\delta V$  и површину  $\delta S$  можемо заменити диференцијалном запремином  $dV$  и површином  $dS$ .



Слика 4.5.2.3 Диференцијална запремина и површина

Вектор брзине инфинитезималне запремене је дат са  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Ако се закони одржања примене на инфинитезималну контролну запремину добијамо водеће једначине у форми парцијалних диференцијалних једначина које се користе у СПХ методи [29].

Промена контролне површине изазива промену контролне запремене тако да за случај диференцијалне површине и запремене имамо:

$$\Delta V_d = \mathbf{v} \Delta t \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (4.5.2.1)$$

где је  $\hat{\mathbf{n}}$  јединични вектор нормале на површину  $dS$  а  $\Delta t$  је временски инкремент. Укупна промена контролне запремине се добија интегралњем израза (4.5.2.1) по површини  $S$ :

$$\Delta V = \int_S \mathbf{v} \Delta t \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (4.5.2.2)$$

Дељењем обе стране са  $\Delta t$  и применом Гаус-Грин-Остроградски теореме добијамо:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{v} dV. \quad (4.5.2.3)$$

Уколико се коначна контролна запремина у једначини (4.5.2.3) смањи на инфинитезималну величину једначина (4.5.2.3) постаје:

$$\frac{\Delta(\delta V)}{\Delta t} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \int_V d(\delta V) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta V. \quad (4.5.2.4)$$

Тако да је извод по времену промене инфинитезималне контролне запремине дат са:

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta V. \quad (4.5.2.5)$$

Из једначине (4.5.2.5) израз за дивергенцију брзине [29] се добија у следећем облику:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt}. \quad (4.5.2.6)$$

### 4.5.3 Закон одржања масе

За инфинитезималну масу  $\delta m$  коју посматрамо у Лагранжовој материјалној формулацији и која заузима инфинитезималну запремину  $\delta V$  имамо:

$$\delta m = \rho \delta V. \quad (4.5.3.1)$$

Пошто је маса константна у контролној запремини материјални извод израза (4.5.3.1) је:

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = \frac{D(\rho \delta V)}{Dt} = \delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0. \quad (4.5.3.2)$$

Претходна једначина може да се напише као:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0. \quad (4.5.3.3)$$

Комбиновањем једначине (4.5.2.6) са једначином (4.5.3.3) добијамо:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v} = -\rho \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta}. \quad (4.5.3.3)$$

Применом кернел апроксимације, израз (4.5.3.3) постаје:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle = -\int_{\Omega} W \rho' \frac{\partial v'_\beta}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.3.4)$$

где су са ' означене вредности које се рачунају у тачки која је дефинисана са вектором променљивих  $\mathbf{x}'$ .

Упрошћавањем једначине (4.5.3.4) коришћењем израза (4.3.1.15) добија се:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle = -\rho \int_{\Omega} W \frac{\partial v'_\beta}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.3.5)$$

Парцијалном интеграцијом израз (4.5.3.5) постаје:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle = -\rho W v'_\beta + \rho \int_{\Omega} v'_\beta \frac{\partial W}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.3.6)$$

Први члан десне стране једначине (4.5.3.6) може да се прошири на следећи начин:

$$\rho W v'_\beta = \rho \int_{\Omega} \frac{d}{d\mathbf{x}'} (W v'_\beta) d\mathbf{x}'. \quad (4.5.3.7)$$

Користећи Гаус-Грин-Остроградски теорему запремински интеграл (4.5.3.7) се преводи у површински:

$$\rho \int_{\Omega} \frac{d}{d\mathbf{x}'} (W v'_\beta) d\mathbf{x}' = \rho \int_S W v'_\beta n dS. \quad (4.5.3.8)$$

Ако претпоставимо да је запремина  $\Omega$  довољно велика да на њеној површини  $S$  компактни кернел  $W(\mathbf{x}-\mathbf{x}', h)$  тежи нули следи да је површински интеграл дат једначином (4.5.3.8) једнак нули односно први члан десне стране једначине (4.5.3.6) може да се занемари тако да се добија:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle = \rho \int_{\Omega} v'_\beta \frac{\partial W}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.3.9)$$

Применом честичне апроксимације израз (4.5.3.9) постаје:

$$\frac{D\rho^i}{Dt} = \rho^i \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} v_\beta^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i}. \quad (4.5.3.10)$$

Да би једначина одржања масе (4.5.3.10) била у складу са једначином баланса енергије (која ће бити дата у поглављу 4.5.5) потребно је увести разлику брзина користећи [33] чињеницу да кернел ишчезава у бесконачности (4.3.1.9)

$$\int_{\Omega} 1 \frac{\partial W}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho v_\beta \int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}' = 0. \quad (4.5.3.11)$$

Применом честичне апроксимације од израза (4.5.3.11) се добија:

$$\rho^i v_\beta^i \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} = \rho^i \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} v_\beta^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} = 0. \quad (4.5.3.12)$$

Одузимањем израза (4.5.3.12) од израза (4.5.3.10) добија се коначни облик закона одржања масе који се користи у СПХ формулацији:

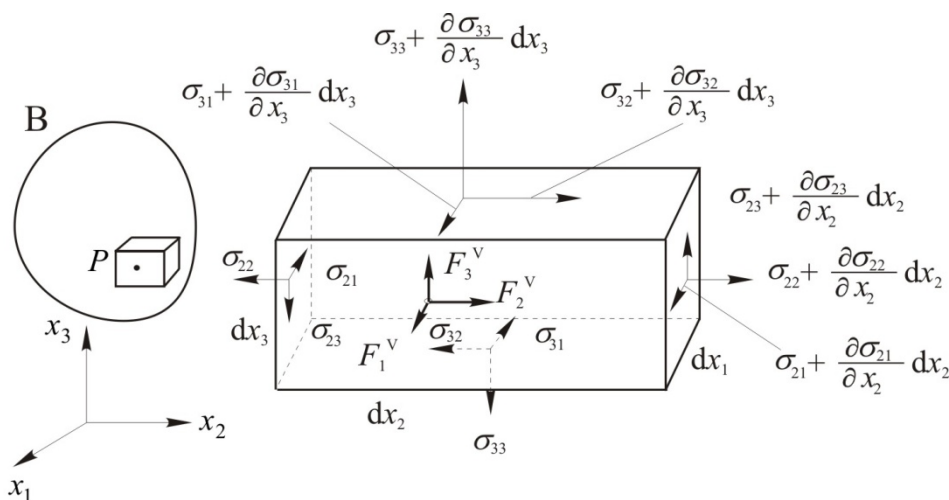
$$\frac{D\rho^i}{Dt} = \rho^i \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} (v_\beta^j - v_\beta^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i}. \quad (4.5.3.13)$$

#### 4.5.4 Закон баланса количине кретања

Закон одржања количине кретања (који се у страниј литератури често назива законом одржања линеарног момента) представља примену другог Њутновог закона у механици континуума [29]:

$$m a_\alpha = m \frac{Dv_\alpha}{Dt} = \rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{Dv_\alpha}{Dt} = \sum F_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.5.4.1)$$

Посматрана контролна запремина дата је на слици 4.5.4.1.



Слика 4.5.4.1 Закон одржања количине кретања за контролну запремину

Сума сила које делују на контролну запремину једнака је производу масе материјала унутар запремине и убрзања. На слици 4.5.4.1 осе координатног система у коме се посматра контролна запремина су дате са  $x_1, x_2, x_3$  док су напони који делују на

контролну запремину дати са  $\sigma_{\alpha\beta}$ . У једначини кретања 4.5.4.1 у обзир се узимају и прираштаји напона

$$\begin{aligned} \rho dx_1 dx_2 dx_3 \frac{Dv_1}{Dt} = & \left( \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left( \sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \\ & - \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \left( \sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + F_1^V dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (4.5.4.2)$$

где  $F_1^V$  представља запреминску силу у правцу  $x_1$ . Дељењем једначине (4.5.4.2) са  $dx_1 dx_2 dx_3$  и сређивањем добијамо:

$$\rho \frac{Dv_1}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1^V. \quad (4.5.4.3)$$

До једначина сличног облика долази се и у правцима оса  $x_2$  и  $x_3$  постављањем једначина равнотеже за те осе:

$$\rho \frac{Dv_2}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + F_2^V, \quad (4.5.4.4)$$

$$\rho \frac{Dv_3}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3^V, \quad (4.5.4.5)$$

што се може уопштено записати као:

$$\frac{Dv_\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\beta\alpha}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} F_\alpha^V. \quad (4.5.4.6)$$

Уколико на контролну запремину не делује запреминска сила једначина (4.5.4.6) постаје:

$$\frac{Dv_\alpha}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \quad (4.5.4.7)$$

Користећи правило о изводу производа, једначину (4.5.4.7) можемо представити у облику:

$$\frac{Dv_\alpha}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho} \right) + \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_\beta}. \quad (4.5.4.8)$$

Применом кернел апроксимације једначина (4.5.4.8) постаје:

$$\left\langle \frac{Dv_\alpha}{Dt} \right\rangle = \int_{\Omega} W \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \left( \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\rho'^2} \right) d\mathbf{x}' + \int_{\Omega} W \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\rho'^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.4.9)$$

Коришћењем релације (4.3.1.15) може се упростити израз (4.5.4.9) тако да се добије

$$\left\langle \frac{Dv_\alpha}{Dt} \right\rangle = \int_{\Omega} W \frac{\partial}{\partial x'_\beta} \left( \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\rho'} \right) d\mathbf{x}' + \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \int_{\Omega} W \frac{\partial \rho'}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.4.10)$$

Применом парцијалне интеграције на други члан једначине (4.5.4.10) и применом Гаус-Грин-Остроградски теореме уз занемаривање површинских чланова (4.3.1.6) једначина (4.5.4.10) постаје:

$$\left\langle \frac{Dv_\alpha}{Dt} \right\rangle = - \int_{\Omega} \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\rho'} \frac{\partial W}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}' - \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \int_{\Omega} \rho' \frac{\partial W}{\partial x'_\beta} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.4.11)$$

Применом честичне апроксимације континуална форма (4.5.4.11) се преводи у дискретну:

$$\frac{Dv_\alpha^i}{Dt} = - \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} - \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{\rho^{i2}} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i}, \quad (4.5.4.12)$$

која након сређивања постаје:

$$\frac{Dv_\alpha^i}{Dt} = - \sum_{j \in SS} m^j \left( \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^{j2}} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{\rho^{i2}} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i}. \quad (4.5.4.13)$$

#### 4.5.5 Закон баланса енергије

Закон одржања енергије представља први закон термодинамике који каже да је брзина промена енергије унутар инфинитезималне контролне запремине једнака суми топлотног флукса унутар инфинитезималне контролне запремине и брзине промене рада који врше површинске и запреминске силе које делују на инфинитезималну запремину. Ако се занемаре топлотни флукс и запреминске силе, закон одржања енергије садржи рад који врши притисак на запреминској деформацији и дисипацију енергије услед девијаторских сила[29] и дат је следећим изразом:

$$\begin{aligned} \rho \frac{DE}{Dt} = & p \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + S_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + S_{21} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + S_{31} \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \\ & + S_{12} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + S_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + S_{32} \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + S_{13} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + S_{23} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + S_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (4.5.5.1)$$

Дата релација садржи сферни и девијаторски део напона, па помоћу израза:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}, \quad (4.5.5.2)$$

добијамо закон баланса енергије у облику:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}. \quad (4.5.5.3)$$

Користећи правило о изводу производа једначину (4.5.5.3) можемо представити у облику:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial(\rho v_{\alpha})}{\partial x_{\beta}} - \frac{\sigma_{\alpha\beta} v_{\alpha} \partial \rho}{\rho^2 \partial x_{\beta}}. \quad (4.5.5.4)$$

Користећи кернел апроксимацију (4.3.1.3) добијамо:

$$\left\langle \frac{DE}{Dt} \right\rangle = \int_{\Omega} W \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\rho'^2} \frac{\partial(\rho' v'_{\alpha})}{\partial x'_{\beta}} d\mathbf{x}' - \int_{\Omega} W \frac{\sigma'_{\alpha\beta} v'_{\alpha}}{\rho'^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x'_{\beta}} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.5.5)$$

Упрошћавањем израза (4.5.5.5) уз помоћ релације (4.3.1.15) добија се:

$$\left\langle \frac{DE}{Dt} \right\rangle = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \int_{\Omega} W \frac{\partial(\rho' v'_{\alpha})}{\partial x'_{\beta}} d\mathbf{x}' - \frac{\sigma_{\alpha\beta} v_{\alpha}}{\rho^2} \int_{\Omega} W \frac{\partial \rho'}{\partial x'_{\beta}} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.5.6)$$

Након парцијалне интеграције и примене Гаус-Грин-Остроградски теореме уз занемаривање површинских чланова (4.3.1.6) једначина (4.5.5.6) постаје:

$$\left\langle \frac{DE}{Dt} \right\rangle = -\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\rho^2} \int_{\Omega} \rho' v'_{\alpha} \frac{\partial W}{\partial x'_{\beta}} d\mathbf{x}' + \frac{\sigma_{\alpha\beta} v_{\alpha}}{\rho^2} \int_{\Omega} \rho' \frac{\partial W}{\partial x'_{\beta}} d\mathbf{x}'. \quad (4.5.5.7)$$

Применом честичне апроксимације континуална форма (4.5.5.7) се преводи у дискретну:

$$\frac{DE^i}{Dt} = -\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{\rho^{i2}} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \rho^j v_{\alpha}^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^i} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i v_{\alpha}^i}{\rho^{i2}} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \rho^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^i}, \quad (4.5.5.8)$$

где је  $W^{ij} = W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j, h)$ . Сређивањем израза (4.5.5.8) добијамо коначан облик закона одржања енергије који се примењује у СПХ програму:

$$\frac{DE^i}{Dt} = -\frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{\rho^{i2}} \sum_{j \in SS} m^j (v_{\alpha}^j - v_{\alpha}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^i}. \quad (4.5.5.9)$$

## 4.6 Примена СПХ методе у механици чврстих тела

### 4.6.1 Рачунање напона у чврстим телима

У закону одржања количине кретања и закону одржања енергије фигурише тензор укупног напона дат једначином (4.5.5.2) који се састоји од изотропског притиска  $p$  и девијатора напона  $S$ . Девијатор напона  $S$  представља отпор материјала промени

облика.. Изотропски притисак се може добити на два начина: преко средњег напона датог изразом:

$$p = -\frac{\sigma_{ii}}{3} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad (4.6.1.1)$$

или преко функције промене густине дате једначином стања. Један од најчешће коришћених облика је Монаганова једначина стања [69]

$$p = c_0^2 (\rho - \rho_0), \quad (4.6.1.2)$$

где је  $c_0$  брзина звука а  $\rho_0$  је референтна густина.

За решавање проблема који укључују велике промене у густини и температури користи се Мие-Грунисен једначина стања [69], [33]

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 (\eta - 1)}{(\eta - h(\eta - 1))^2} \left( \eta - \frac{\Gamma_0}{2} (\eta - 1) \right) + \Gamma_0 E, \quad (4.6.1.3)$$

где је  $\eta = \frac{\rho}{\rho_0}$  однос тренутне и референтне густине,  $E$  је унутрашња енергија по јединици запремине а  $h = dU_S / dU_P$  је коефицијент нагиба Игоњу-ове криве за брзину простирања таласа  $U_S$  и брзину честица  $U_P$ , при чему је са  $\Gamma_0$  означен Грунисенов параметар у референтној конфигурацији[33].

Девиијатор напона из једначине (4.5.5.2) се добија помоћу Хуковог закона, где је за случај анизотропног смичућег напона, ако се претпостави да су померања мала, брзина промене девијатора напона пропорционална брзини девијатора деформације [70]

$$\frac{dS_{\alpha\beta}}{dt} = G \left( \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{mm} \right). \quad (4.6.1.4)$$

У једначини (4.6.1.4)  $G$  је модуо смицања а  $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}$  је брзина промене тензора деформације и дата је једначином:

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right). \quad (4.6.1.5)$$

Да би се добила објективна брзина промене напона (која не зависи од избора референтне конфигурације) у конститутивној релацији се користи Јауманова брзина промене напона [70]

$$\overset{\circ}{S}_{\alpha\beta} = \frac{dS_{\alpha\beta}}{dt} - S_{\alpha\gamma} \Omega_{\beta\gamma} - S_{\gamma\beta} \Omega_{\alpha\gamma}, \quad (4.6.1.6)$$



при чему је  $\Omega_{\beta\gamma}$  тензор ротације или тензор спина, који је дат изразом:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \right). \quad (4.6.1.7)$$

Коришћењем Јауманове брзине промене напона конститутивна релација постаје [70]

$$\frac{dS_{\alpha\beta}}{dt} = G \left( \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{mm} \right) + S_{\alpha\gamma} \Omega_{\beta\gamma} + S_{\gamma\beta} \Omega_{\alpha\gamma}. \quad (4.6.1.8)$$

У СПХ формулацији, поред закона одржања који су дати у претходној глави, потребно је извршити кернел и честичну апроксимацију претходно датих израза који дефинишу зависност напона од деформација. Користећи кернел апроксимацију на изразу за брзину промене тензора деформације (4.6.1.5) добија се:

$$\langle \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} W \left( \frac{\partial v'_\alpha}{\partial x'_\beta} + \frac{\partial v'_\beta}{\partial x'_\alpha} \right) d\mathbf{x}'. \quad (4.6.1.9)$$

Користећи апроксимацију дату релацијом (4.3.1.7) из (4.6.1.9) добија се:

$$\langle \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( v'_\alpha \frac{\partial W}{\partial x'_\beta} + v'_\beta \frac{\partial W}{\partial x'_\alpha} \right) d\mathbf{x}'. \quad (4.6.1.10)$$

Након честичне апроксимације изарз за брзину промене тензора деформације постаје:

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \left( v_\alpha^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} + v_\beta^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\alpha^i} \right). \quad (4.6.1.11)$$

Као и у случају једначине одржања масе (4.5.3.13) и у израз за брзину промене тензора деформације потребно је увести разлику брзина [33] користећи чињеницу да кернел ишчезава у бесконачности (4.3.1.9), па као и приликом извођења израза (4.5.3.11) имамо да је следећи израз једнак нули:

$$\frac{1}{2} v_\alpha^i \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} = \frac{1}{2} v_\beta^i \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\alpha^i} = 0. \quad (4.6.1.12)$$

Одузимањем леве и десне стране израза (4.6.1.12) од релације (4.6.1.11) коначно добијамо [32]

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} (v_\alpha^j - v_\alpha^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} + \frac{1}{2} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} (v_\beta^j - v_\beta^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\alpha^i}. \quad (4.6.1.13)$$

Исти поступак се примењује и на тензор ротација (4.6.1.7) који након кернел апроксимације постаје:

$$\langle \Omega_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} W \left( \frac{\partial v'_{\alpha}}{\partial x'_{\beta}} - \frac{\partial v'_{\beta}}{\partial x'_{\alpha}} \right) d\mathbf{x}'. \quad (4.6.1.14)$$

Користећи апроксимацију дату релацијом (4.3.1.6) из (4.6.1.14) добија се:

$$\langle \Omega_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( v'_{\alpha} \frac{\partial W}{\partial x'_{\beta}} - v'_{\beta} \frac{\partial W}{\partial x'_{\alpha}} \right) d\mathbf{x}'. \quad (4.6.1.15)$$

Након честичне апроксимације изрз за тензор ротације постаје:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} \left( v_{\alpha}^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^i} - v_{\beta}^j \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\alpha}^i} \right). \quad (4.6.1.16)$$

Одузимањем леве и десне стране израза (4.6.1.12) од релације (4.6.1.16) коначно добијамо:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} (v_{\alpha}^j - v_{\alpha}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\beta}^i} - \frac{1}{2} \sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} (v_{\beta}^j - v_{\beta}^i) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_{\alpha}^i}. \quad (4.6.1.17)$$

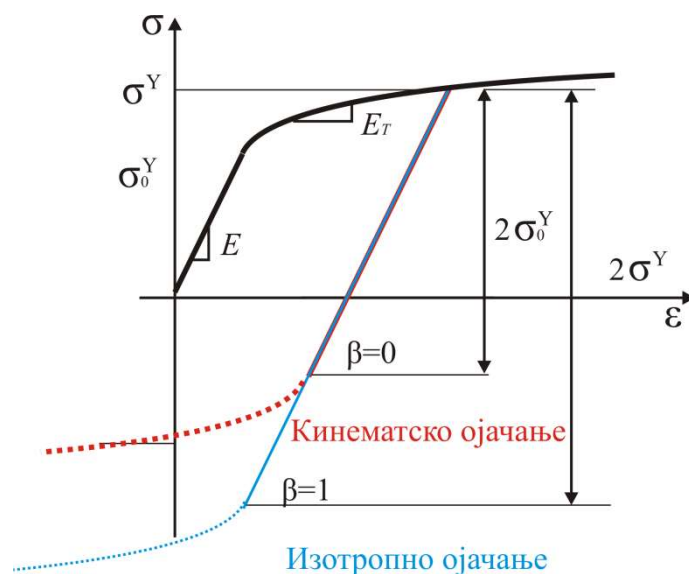
У случају да нема пластичне деформације израз (4.6.1.4) је довољан за рачунање напона у наредном кораку на основу напона у текућем кораку и брзине промене напона:

$${}^{t+\Delta t} S_{\alpha\beta} = {}^t S_{\alpha\beta} + dt \cdot \frac{dS_{\alpha\beta}}{dt}. \quad (4.6.1.18)$$

#### 4.6.2 Еласто-пластични конститутивни модел са ојачањем

Када оптерећења изазову напоне који су изнад напона течења долази до пластичног деформисања материјала [71] што значи да при растерећењу остају сталне пластичне деформације  $\varepsilon^P$ . Уколико се приликом пластичних деформација не повећавају напони или оптерећења за материјал се каже да је идеално пластичан, а ако је након постизања напона течења потребно даље повећање оптерећења да би се наставило са деформацијом материјал је са ојачањем [68]. Материјали могу имати изотропно [72], кинематско (транслационо), мешовито ојачање, могу бити анизотропно или термо-пластични, а посебну категорију чине геолошки материјали [73].

У случају изотропног ојачања центар површи течења је фиксиран али је радијус у функцији пластичне деформације. У случају кинематског ојачања радијус површи течења је константан али се њен центар помера у правцу пластичне деформације. При дефинисању израза за напон уводи се параметар  $\beta$  којим се одређује тип ојачања ( $\beta = 0$  за чисто кинематско ојачање,  $\beta = 1$  за чисто изотропно ојачање) [74]. Дијаграм напон-деформација за еласто-пластични конститутивни модел са изотропним и кинематским ојачањем дат је на слици 4.6.2.1.



Слика 4.6.2.1 Дијаграм напон-деформација у случају једноосног оптерећења за материјал са кинематским ојачањем ( $\beta = 0$ ) и изотропним ојачањем ( $\beta = 1$ )

Једноосно оптерећење са слике 4.6.2.1 се састоји од два корака: затезања и притиска [72]. Уколико је реч о изотропном ојачању, повећање напона течења при затезању доводи до повећања напона течења и при притискању. Код кинематског ојачања приликом цикличног оптерећења материјала долази до омекшавања. Приликом испитивања материјала, почетни напон течења  $\sigma_0^Y$  зависи од претходне историје оптерећења коме је узорак био подвргнут а која није позната испитивачу [72]. Однос напон-деформација у било ком тренутку времена је дефинисан Тангентним модулом  $E_T$  који је испод границе течења еквивалентан Јанговом модулу еластичности  $E$ . Пластични модул  $E_p$  се израчунава као:

$$E_p = \frac{EE_T}{E - E_T}. \quad (4.6.2.1)$$

Укупна деформација  $\varepsilon$  се састоји од пластичне деформације  $\varepsilon^P$  и еластичне деформације  $\varepsilon^E$  [24]

$$\varepsilon = \varepsilon^P + \varepsilon^E, \quad (4.6.2.2)$$

а брзина промене укупне деформација је дата изразом

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^P + \dot{\varepsilon}^E. \quad (4.6.2.3)$$

Прираштај напона је могуће израчунати на основу одговарајућих модула и деформација [71] као:

$$d\sigma = E d\varepsilon^E = E_p d\varepsilon^P = E_T d\varepsilon. \quad (4.6.2.4)$$

Да би се испитало да ли се материјал налази у еластичној или еласто-пластичној области потребно је испитати Фон Мизесов критеријум течења који каже да до пластичне деформације долази када друга инваријанта девијатора напона достигне критичну вредност. Функција течења је дата изразом:

$$f = \sqrt{3J_{2D}} - \sigma^Y \leq 0. \quad (4.6.2.5)$$

где је  $\sigma^Y$  напон течења а друга инваријанта девијатора напона  $J_{2D}$  је дата изразом:

$$J_{2D} = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.6)$$

У изразу (4.6.2.5)  $\sqrt{3J_{2D}}$  представља еквивалентни Фон Мизесов напон  $\sigma^V$  и ако је он мањи од напона течења  $\sigma^Y$  не долази до пластичних деформација. Општи облик закона течења дат је изразом:

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{\alpha\beta}}. \quad (4.6.2.7)$$

где је  $\dot{\lambda}$  брзина промене пластичног множиоца а  $g$  је функција пластичног потенцијала. Уколико је функција пластичног потенцијала  $g$  идентична функцији течења  $f$  ради се о асоцијативном закону течења, у супротном, реч је о не-асоцијативном закону течења.

За случај асоцијативног услова течења са изотропним ојачањем брзина промене пластичне деформације је:

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} = \dot{\lambda} n_{\alpha\beta}, \quad (4.6.2.8)$$

где је  $n_{\alpha\beta}$  Прандл-Реусов вектор течења који је експлицитно дат као:

$$n_{\alpha\beta} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{S_{\alpha\beta}}{\|S_{\alpha\beta}\|}, \quad (4.6.2.9)$$

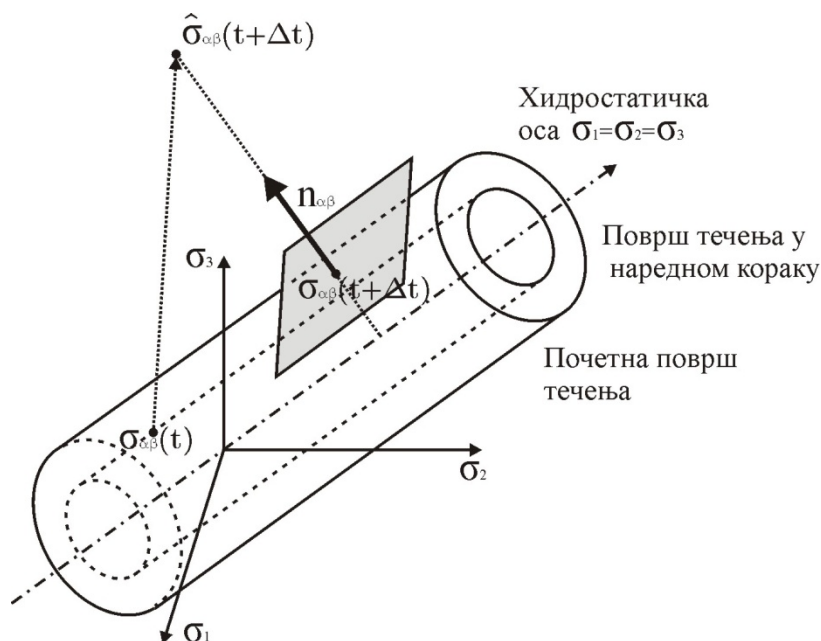
при чему је са  $\| \cdot \|$  означена норма вектора, у овом случају за вектор девијатора напона његова норма је дата као:

$$\|S_{\alpha\beta}\| = \sqrt{S_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}}. \quad (4.6.2.10)$$

Главни напони представљају компоненте тензора напона у координатном систему заокренутом тако да су смичући напони једнаки нули. Уколико су главни напони једнаки  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  тада у материјалу уопште нема смичућих напона, за тензор напона

се каже да је сферни, а напонско стање хидростатичко како у случају течности у стању мировања [54].

За случај изотропног ојачања полупречник цилиндра који представља површ течења Фон Мизесовог модела датог у простору главних напона се повећава а предиктор коректор алгоритам треба на основу пробних напона да одреди корекције, односно стварне напоне (слика 4.6.2.2).



Слика 4.6.2.2 Предиктор-коректор шема рачунања напона за Фон Мизесов услов течења

Приликом нумеричког решавања потребно је прво наћи пробне (еластичне) напоне и на основу њих проверити услов течења. Пробни напони ће бити означени са  $\hat{\sigma}$  (слика 4.6.2.2). За укупни напон дат једначином (4.5.5.2) пробна вредност се рачуна на основу вредности напона у претходном кораку и инкрементата притиска и инкремента девијатора напона датог изразом (4.6.1.4)

$$\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} - \Delta p \delta_{\alpha\beta} + \Delta S_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.11)$$

Пробни девијаторски напон се добија на основу израза:

$$\hat{S}_{\alpha\beta} = \hat{\sigma}_{\alpha\beta} + p \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.12)$$

За случај кинематског ојачања приликом провере услова течења користи се разлика девијатора тоталног и резидуалног девијатора напона дата изразом:

$$\hat{\eta}_{\alpha\beta} = \hat{S}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.13)$$

где је  $\xi_{\alpha\beta}$  девијаторски део тензора резидуалног (заосталог) напона.

Пробни еквивалентни Фон Мизесов напон  $\hat{\sigma}^V$  треба бити мањи од тренутног напона течења  $\sigma^Y$  да би материјал био у еластичној области

$$f = \hat{\sigma}^V - \sigma^Y \leq 0. \quad (4.6.2.14)$$

Коришћењем израза (4.6.2.6) и пробних напона датим изразима (4.6.2.12) и (4.6.2.13) пробни еквивалентни Фон Мизесов напон може да се представи као:

$$\hat{\sigma}^V = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{S}_{\alpha\beta} \hat{S}_{\alpha\beta}}, \quad (4.6.2.15)$$

или за случај кинематског ојачања, изразом

$$\hat{\sigma}^V = \sqrt{\frac{3}{2} \hat{\eta}_{\alpha\beta} \hat{\eta}_{\alpha\beta}}. \quad (4.6.2.16)$$

Тренутни напон течења  $\sigma^Y$  (који може зависити од ефективне пластичне деформације  $\bar{\varepsilon}^P$  ако се дешава ојачање) дат је изразом:

$$\sigma^Y = \sigma^0 + H \bar{\varepsilon}^P. \quad (4.6.2.17)$$

при чему је  $\sigma^0$  почетни напон течења а модуло ојачања је дат као  $H = \beta E_p$  где је  $\beta$  претходно описани параметар који дефинише карактер ојачања.

Уколико је у услову течења (4.6.2.14) пробни еквивалентни Фон Мизесов напон већи од тренутног напона течења у том кораку постоји инкремент пластичне деформације.

За случај асоцијативног закона ојачања брзина промене ефективне пластичне деформације  $\dot{\bar{\varepsilon}}^P$  је дата следећим изразом [75]

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}^P\| = \dot{\lambda}. \quad (4.6.2.18)$$

Приликом нумеричког решавања ефективна пластична деформација у наредном кораку се рачуна на основу ефективне пластичне деформације у текућем кораку и њеног инкремента [71]

$${}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}^P = {}^t \bar{\varepsilon}^P + \Delta \bar{\varepsilon}^P, \quad (4.6.2.19)$$

односно на основу (4.6.2.18)

$${}^{t+\Delta t} \bar{\varepsilon}^P = {}^t \bar{\varepsilon}^P + \Delta \lambda. \quad (4.6.2.20)$$

док се пластична деформација у наредном кораку рачуна на основу следећег израза [75]

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_{\alpha\beta}^P = {}^t\varepsilon_{\alpha\beta}^P + \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta}}{\|{}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta}\|}. \quad (4.6.2.21)$$

Девиијатор напона у наредном кораку се добија корекцијом пробног девијатора напона и дат је изразом:

$${}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta} = {}^{t+\Delta t}\hat{S}_{\alpha\beta} - 2G\Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{{}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta}}{\|{}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta}\|}. \quad (4.6.2.22)$$

где је  $G$  модул смицања. Пошто су пробни и кориговани девијатори напона колинеарни важи:

$$\frac{{}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta}}{\|{}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta}\|} = \frac{{}^{t+\Delta t}\hat{S}_{\alpha\beta}}{\|{}^{t+\Delta t}\hat{S}_{\alpha\beta}\|}. \quad (4.6.2.23)$$

Сменом дефинисаном једначином (4.6.2.23) и сређивањем једначине (4.6.2.22) добијамо:

$${}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta} = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\lambda 2G}{\|{}^{t+\Delta t}\hat{S}_{\alpha\beta}\|}\right) {}^{t+\Delta t}\hat{S}_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.24)$$

Користећи израз за еквивалентни напон (4.6.2.15) из израза (4.6.2.24) добија се:

$${}^{t+\Delta t}S_{\alpha\beta} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda 3G}{{}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}^V}\right) {}^{t+\Delta t}\hat{S}_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.25)$$

тако да је фактор скалирања дат са:

$$1 - \frac{\Delta\lambda 3G}{{}^{t+\Delta t}\hat{\sigma}^V}. \quad (4.6.2.26)$$

Када се укупна ефективна пластична деформација  $\bar{\varepsilon}^P$  увећа за инкремент  $\Delta\bar{\varepsilon}^P$  (односно  $\Delta\lambda$ ) функција течења мора бити једнака 0 [75]

$$\tilde{f}(\Delta\bar{\varepsilon}^P) = \hat{\sigma}^V - 3G\Delta\lambda - \left[\sigma^0 + (\bar{\varepsilon}^P + \Delta\lambda)\right]H = 0. \quad (4.6.2.27)$$

Из једначине (4.6.2.27) коначно се добија израз за инкремент пластичног множиоца:

$$\Delta\lambda = \frac{\hat{\sigma}^V - \sigma^Y}{3G + H}. \quad (4.6.2.28)$$

Након што се израчуна инкремент пластичног множиоца (инкремент ефективне пластичне деформације) у датом кораку потребно је кориговати пробне (еластичне) напоне.

Корекција укупног напона се врши на основу следећег израза:

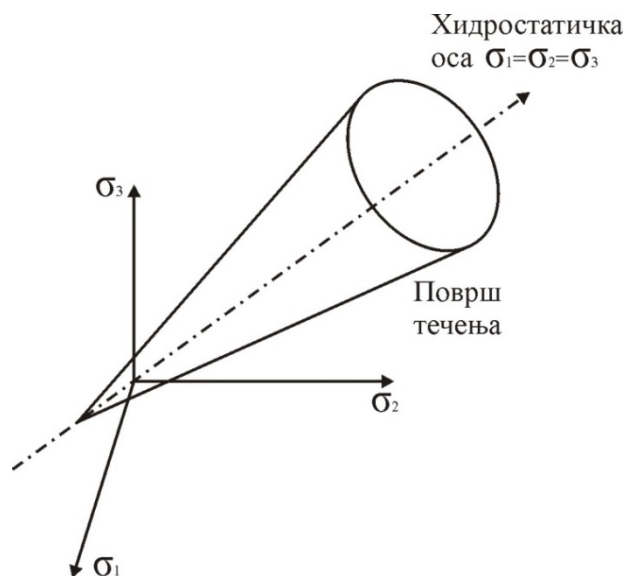
$${}^{t+\Delta t}\sigma_{\alpha\beta} = \hat{\sigma}_{\alpha\beta} - \frac{3G\Delta\bar{\varepsilon}^P}{\hat{\sigma}^V} \hat{\eta}_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.29)$$

Девијаторски део тензора резидуалног (заосталог) напона  $\xi_{\alpha\beta}$  у наредном кораку се рачуна на основу следећег израза [76]

$${}^{t+\Delta t}\xi_{\alpha\beta} = {}^t\xi_{\alpha\beta} + \frac{(1-\beta)E_P\Delta\bar{\varepsilon}^P}{\hat{\sigma}^V} \hat{\eta}_{\alpha\beta}. \quad (4.6.2.30)$$

#### 4.6.3 Генералисани модел са капом и Дракер-Прагер материјални модел

Пластично деформисање грануларних материјала карактерише површ течења која мора да узме у обзир чињеницу да се смичућа чврстоћа грануларних материјала повећава са повећањем хидростатичког притиска. Док је у случају метала описаних Фон Мизесовим условом течења површ течења представљена као цилиндар у простору главних напона, најједноставнији услов течења за грануларне материјале дат је Дракер Прагер-овом површи течења [77] која представља кружни конус у простору главних напона (настао ротацијом праве линије око хидростатичке осе, (слика 4.6.3.1).



Слика 4.6.3.1 Дракер Прагер површ течења

У геомеханици се притискајући напони сматрају позитивним док су затежући негативни, супротно конвенцији која важи за метале и која је до сада коришћена (на пример приликом дефиниције нестабилности при истегању (глава 4.4.2).

Дракер Прагер услов течења представља модификацију Фон Мизесовог услова течења при чему је у израз укључен и члан који представља осетљивост на притисак. За асоцијативни услов течења једначина површи течења је дата изразом:

$$f_1 = \sqrt{J_{2D}} - k - \theta I_1, \quad (4.6.3.1)$$

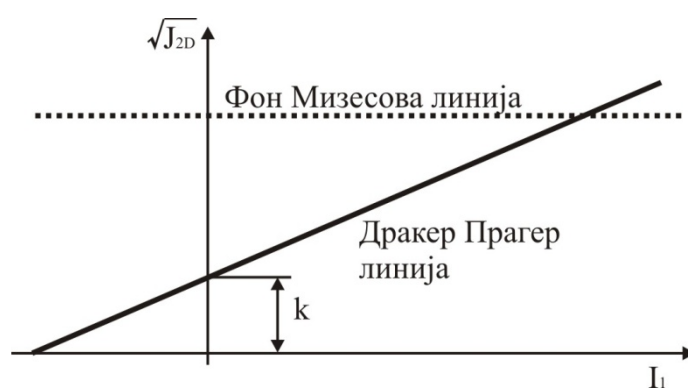


где  $I_1$  представља прву инваријанту напона [54]

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\sigma_m = -3p. \quad (4.6.3.2)$$

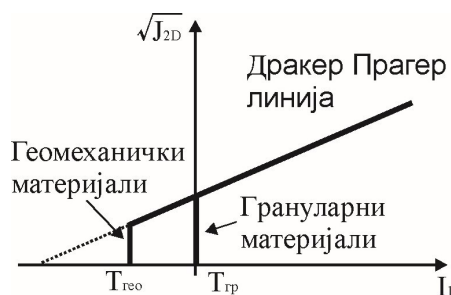
при чему је са  $\sigma_m$  означен средњи напон, притисак је означен као  $p$  а  $k$  и  $\theta$  представљају материјалне константе [78].

На основу израза за површ течења (4.6.3.1) може се закључити да је за представљање Дракер Прагер материјалног модела најпогоднији простор  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  тако да је у том простору површ течења дата косом линијом. Повећање притиска (повећање прве инваријанте) доводи до ојачања материјала и повећања границе пластичности, док је за случај Фон Мизесовог услова течења та линија хоризонтална (слика 4.6.3.2).



Слика 4.6.3.2 Дракер Прагер материјални модел у  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  простору

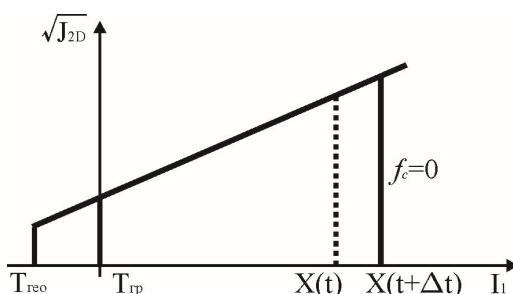
Положај површи течења у простору  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  се не мења, осим ако није присутно кинематско ојачање. У зависности од састава, геомеханички материјали имају одређену затезну чврстоћу, и уколико напони на затезање достигну ту вредност долази до пуцања материјала, док грануларни материјали чије поре нису испуњене везивном материјом (течношћу) губе чврстоћу чим напони постану негативни (затезање). На дијаграму у простору  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  затезна чврстоћа је представљена линијом максималног затезања  $I_1 = T$  (слика 4.6.3.3).



Слика 4.6.3.3 Линија максималног затезања за Дракер Прагер материјални модел у  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  простору

Метали и други хомогени материјали могу поднети огроман притисак (нормалне напоне) док се пластичне деформације и лом дешавају искључиво као последица девијатора напона.

Са друге стране, услед нехомогеног састава грануларних и геомеханичких материјала који се састоје од чврстог материјала (агрегата) и пора, до пластичних деформација може доћи и услед притиска који проузрокује гушће паковање или лом грануларних честица и повећања специфичне запремине. Због тога је потребно проширити материјални модел са још једном површином (у простору главних напона) односно линијом у простору  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  која се назива капом и која ограничава еластичну област у правцу повећања притиска. Док се Дракер Прагер линија не мења и одговара идеалној пластичности, капа има карактеристику ојачања јер се гушћим паковањем или ломом грануларних честица смањују поре између чврстог материјала тако да је потребно повећати напоне уколико се жели даљи наставак збијања материјала. Примена Дракер Прагер модела може довести до претеране пластичне дилатације која није у складу са експерименталним резултатима па капа служи и да побољша слагање модела са експерименталним подацима ограничавајући пластичну дилатацију [78]. Најједноставнији облик капе у простору  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  представља праву линију [78] и приказана је на слици 4.6.3.4.



Слика 4.6.3.4 Равна капа за Дракер Прагер материјални модел у  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  простору

Једначина равне капе је дата са:

$$f_c = I_1 - X = 0, \tag{4.6.3.3}$$

где позиција капе зависи од запреминске пластичне деформације  $X = X(\varepsilon_V^P)$ .

Закон ојачања [78] је дат изразом:

$$\varepsilon_V^P = W \left[ 1 - e^{-D(X-X_0)} \right]. \quad (4.6.3.4)$$

где су  $W$  и  $D$  константе (које су позитивне ако применимо конвенцију да је напон на притисак позитиван) а  $X_0$  је почетни положај капе [78].

Брзина промене запреминске пластичне деформације у односу на хидростатички напон притиска опада током деформације:

$$\frac{\partial \varepsilon_V^P}{\partial X} = W D e^{-D(X-X_0)} = W D \left( 1 - \frac{\varepsilon_V^P}{W} \right). \quad (4.6.3.5)$$

Константа  $W$  представља максималну вредност запреминске пластичне деформације:

$$W = \left( \varepsilon_V^P \right)_{\max}, \quad (4.6.3.6)$$

док константа  $D$  карактерише брзину промене запреминске деформације у односу на хидростатички притисак:

$$D = \frac{\partial \varepsilon_V^P}{\partial X} \frac{1}{W - \varepsilon_V^P}. \quad (4.6.3.7)$$

Преуређивањем и логаритмовањем једначине (4.6.3.4) закон ојачања може се написати и у облику

$$X = X_0 - \frac{1}{D} \ln \left( 1 - \frac{\varepsilon_V^P}{W} \right). \quad (4.6.3.8)$$

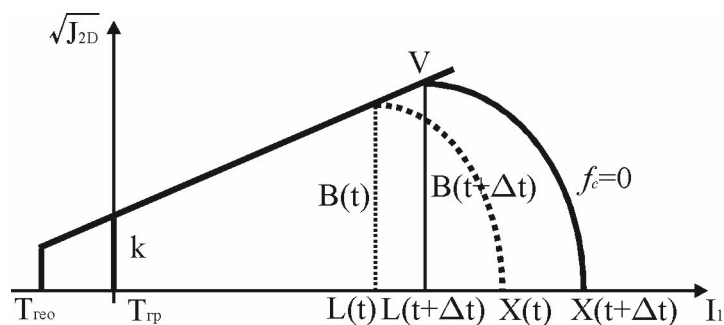
За тачније приказивање пластичног понашања грануларних материјала услед притиска уместо равне капе потребно је користити капу облика елипсе [79], [78], [73] која је дата једначином:

$$f_c = (I_1 - L)^2 + R^2 (J_{2D} - B^2) = 0, \quad (4.6.3.9)$$

где су  $B$  полуоса елипсе,  $L$  положај средишта елипсе, а  $R$  је однос између полуоса елипсе дат са:

$$R = \frac{(X - L)}{B}, \quad (4.6.3.10)$$

где је  $X$  пресек капе са  $I_1$  осом (слика 4.6.3.5).



Слика 4.6.3.5 Елиптична капа за Дракер Прагер материјални модел у  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  простору

Једначина капе поред израза (4.6.3.9) може бити дата и еквивалентним изразом:

$$f_c = \sqrt{J_{2D}} - \frac{1}{R} \sqrt{(X-L)^2 - (I_1-L)^2} = 0. \quad (4.6.3.11)$$

Квадрирањем једначине (4.6.3.11) и коришћењем (4.6.3.10) може се добити израз (4.6.3.9).

Веза између дужине полуосе елипсе  $B$  и положаја средишта елипсе  $L$  може се се добити из услова да је врх елипсе  $V$  на Дракер Прагер линији дефинисаној изразом (4.6.3.1) и дата је релацијом:

$$B = \theta L + k. \quad (4.6.3.12)$$

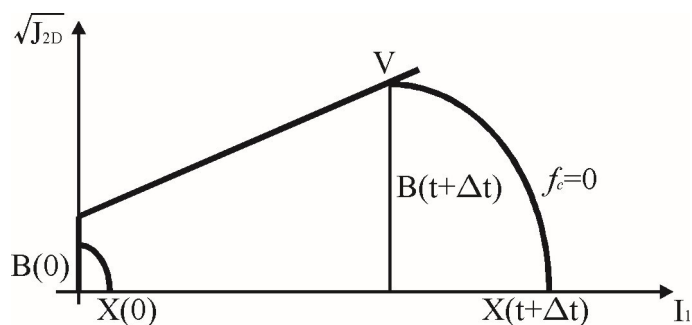
За случај да је  $X = L$  однос дат изразом (4.6.3.10) постаје једнак 0 а елиптична капа дата изразом (4.6.3.9) постаје равна капа (4.6.3.3).

Однос између полуоса елипсе  $R$  може се добити на основу експеримената [78] и дат је следећим изразом:

$$R = \frac{R_0}{1+R_1} \left[ 1 + R_1 e^{(-R_2 L)} \right] + R_3 \left[ e^{(-R_4 (R_5 - L)^2)} \right]. \quad (4.6.3.13)$$

где су  $R_0, R_1, \dots, R_5$  материјалне константе.

Код грануларних материјала пластичне деформације се јављају при јако малим напонима [80] тако да је почетни положај капе приказан на слици 4.6.3.6 занемарљиво мала величина.



Слика 4.6.3.6 Почетни положај капе за грануларне материјале

Грануларни материјали испољавају особину ојачања приликом промене величине капе [78]. Параметар који описује ово ојачање је запреминска пластична деформација  $\varepsilon_V^P$  и рачуна се на основу закона ојачања који је дат следећим изразом [81]

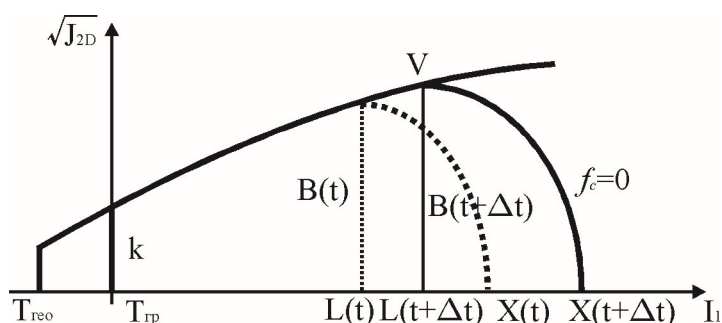
$$\varepsilon_V^P = W \left[ 1 - e^{(-DX)} - \omega DX e^{(-D_1 X - D_2 X^2)} \right] + W_1 X^2 e^{(-D_3 X)}, \quad (4.6.3.14)$$

где су  $\omega, D_1, D_2, D_3, W_1$  материјалне константе. Општи облик закона ојачања дат једначином (4.6.3.14) може се упростити до облика датог релацијом (4.6.3.4) ако се за вредност коефицијената  $\omega$  и  $W_1$  узме вредност 0.

Уколико се жели тачније приказивање површи течења, уместо праве Дракер Прагер линије користи се општији израз за површ течења дат следећом једначином:

$$f_1 = \sqrt{J_{2D}} - k - \theta I_1 + \gamma e^{-B_1 I_1}, \quad (4.6.3.15)$$

где су  $\gamma$  и  $B_1$  материјалне константе. Овакав материјални модел се зове генералисани и представља општи случај који ако се узме да константа  $\gamma$  има вредност 0 постаје Дракер-Прагеров модел. Изглед површи течења за генералисани материјални модел са капом приказан је на слици 4.6.3.7.



Слика 4.6.3.7 Генералисани модел са капом

Позицију тачке  $L$  односно центра елипсе капе можемо добити из једначине (4.6.3.9) за  $I_1 = L$  као:

$$f_c = R^2 J_{2D} - R^2 B^2 = 0. \quad (4.6.3.16)$$

Коришћењем израза (4.6.3.10) из израза (4.6.3.16) добијамо:

$$f_c = R^2 J_{2D} - (X - L)^2 = 0. \quad (4.6.3.17)$$

Када  $(X - L)^2$  пребацимо на десну страну можемо наћи корен леве и десне стране

$$R\sqrt{J_{2D}} = X - L. \quad (4.6.3.18)$$

Сређивањем израза  $X - L$  и заменом  $\sqrt{J_{2D}}$  из једначине (4.6.3.15) добијамо једначину

$$f = L - X + R(k + \theta L - \gamma e^{-B_1 L}). \quad (4.6.3.19)$$

из које можемо добити  $L$  применом Њутн-Рапсон итеративног поступка, при чему је извод једначине (4.6.3.19) по  $L$  дат са:

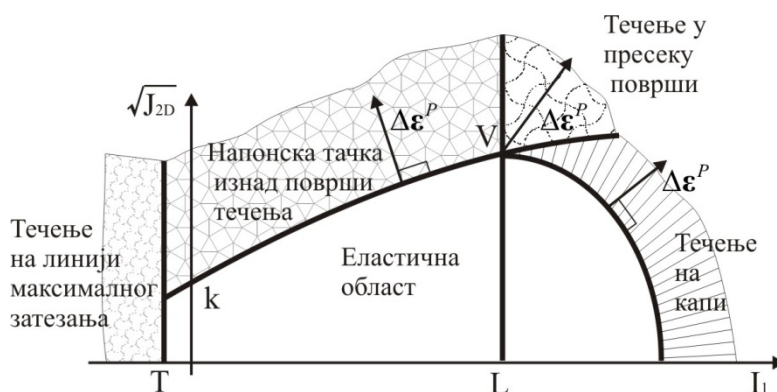
$$f' = 1 + R(\gamma B_1 e^{-B_1 L} + \theta), \quad (4.6.3.20)$$

а вредност се тражи помоћу

$$L_i = L_{i-1} - \frac{f_{i-1}}{f'_{i-1}}, \quad (4.6.3.21)$$

све док инкремент  $\frac{f}{f'}$  не постане довољно мали [78].

Сада када имамо позицију центра елипсе капе можемо поделити простор  $I_1 - \sqrt{J_{2D}}$  на еластичну област и пластичне области.



Слика 4.6.3.8 Простор  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  подељен на еластичну и пластичне области генерализаног модела са капом

Приликом прорачуна при сваком временском кораку  $\Delta t$  потребно је утврдити да ли се дата честица налази у еластичној или у некој од пластичних области [78]. Да би се одредио положај напонске тачке у  $(I_1, \sqrt{J_{2D}})$  простору прво се рачунају пробни девијаторски и средњи напон:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^E = {}^t\mathbf{S} + 2{}^tG\Delta\boldsymbol{\varepsilon}', \quad (4.6.3.22)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m^E = {}^t\sigma_m^E + {}^t c_m \Delta\varepsilon_m \quad (4.6.3.23)$$

где су  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}'$  и  $\Delta\varepsilon_m$  инкременти девијаторске и средње деформације у току корака а  ${}^tG$  и  ${}^t c_m$  модули који одговарају почетку корака. При дефинисању материјалних карактеристика, за грануларне и геоматеријале се обично узимају запремински модул  $K$ , модул смицања  $G$  као и Поасонов коефицијент  $\nu$  док се Јангов модул  $E$  рачуна на основу њих.

Након рачунања пробних еластичних напона могу се израчунати и инваријанте  $I_1$  и  $\sqrt{J_{2D}}$  а на основу њих могуће је проверити положај напонске тачке у односу на једначине капе и површи течења (4.6.3.11) и (4.6.3.15).

**Напонска тачка изнад површи течења**

Уколико је  ${}^{t+\Delta t} f_1^E > 0$  и  $3 \cdot {}^{t+\Delta t} \sigma_m^E < {}^t L$  напонска тачка се налази изнад површи течења, а инкременти девијаторске и средње пластичне деформације су дати са:

$$\Delta \varepsilon_m^P = -\Delta \lambda \left[ B_1 \gamma e^{-B_1 {}^{t+\Delta t} I_1} + \theta \right], \quad (4.6.3.24)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{tP} = \frac{\Delta \lambda}{2} \sqrt{{}^{t+\Delta t} J_{2D}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}, \quad (4.6.3.25)$$

где се користи закон течења дат са:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P = \Delta \lambda \frac{\partial {}^{t+\Delta t} f_1}{\partial {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.6.3.26)$$

при чему  $\Delta \lambda$  представља инкрементални пластични множилац. Из (4.6.3.24) следи да је  $\Delta \varepsilon_m^P < 0$  (дилатација), што се може видети и на слици 4.6.3.8 где је пројекција  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P$  на осу  $I_1$  негативна [78].

Сада се средњи и девијаторски напон могу израчунати као:

$${}^{t+\Delta t} \sigma_m = {}^{t+\Delta t} \sigma_m^E - {}^t c_m \Delta \varepsilon_m^P, \quad (4.6.3.27)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S} = \frac{{}^{t+\Delta t} \mathbf{S}^E}{1 + \Delta \lambda {}^t G \sqrt{{}^{t+\Delta t} J_{2D}}} \quad (4.6.3.28)$$

при чему је корен друге инваријанте напона дат као:

$$\sqrt{{}^{t+\Delta t} J_{2D}} = \sqrt{{}^{t+\Delta t} J_{2D}^E} - \Delta \lambda {}^t G. \quad (4.6.3.29)$$

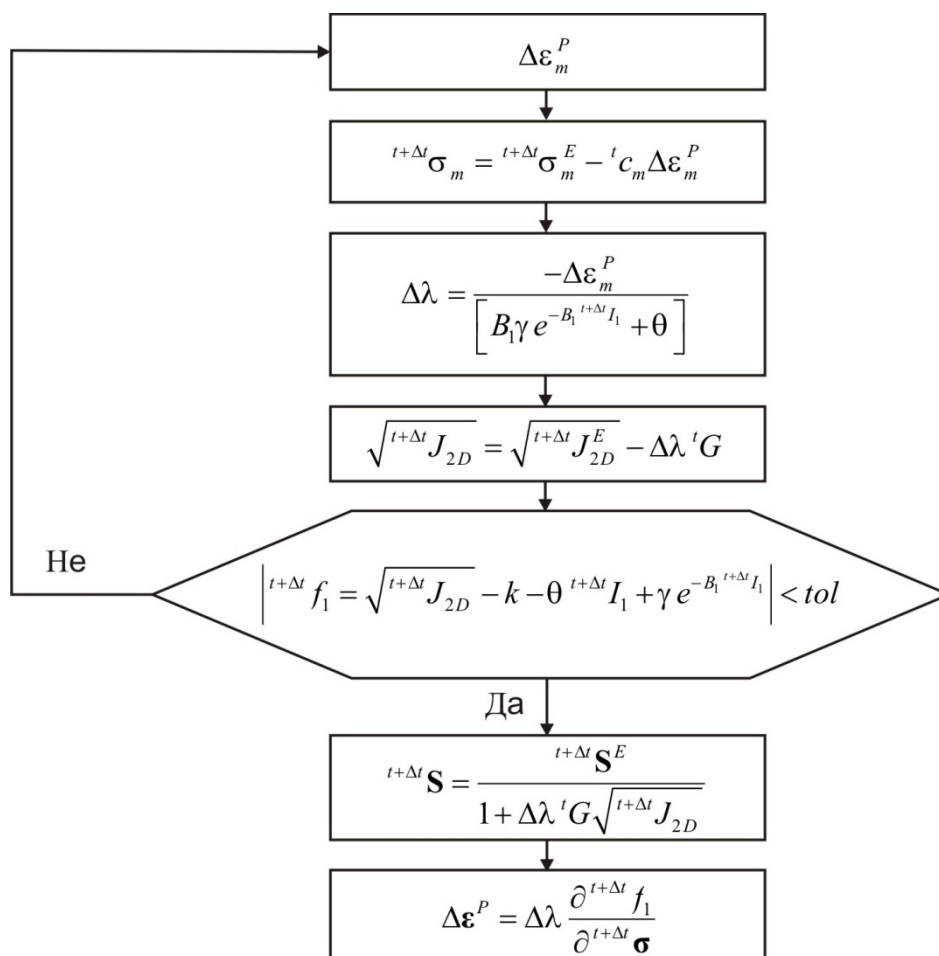
На крају корака услов течења мора бити задовољен:

$${}^{t+\Delta t} f_1 = \sqrt{{}^{t+\Delta t} J_{2D}} - k - \theta {}^{t+\Delta t} I_1 + \gamma e^{-B_1 {}^{t+\Delta t} I_1}. \quad (4.6.3.30)$$

Да би се нашле непознате величине на крају временског корака потребно је решити нелинеарну једначину (4.6.3.30) у односу на водећи параметар  $\Delta \varepsilon_m^P$  итеративним поступком при чему се за дату вредност  $\Delta \varepsilon_m^P$  рачуна  ${}^{t+\Delta t} \sigma_m$  на основу (4.6.3.27),  $\Delta \lambda$  на основу (4.6.3.24) а корен друге инваријанте  $\sqrt{{}^{t+\Delta t} J_{2D}}$  на основу (4.6.3.29). Уколико је услов дат једначином (4.6.3.30) задовољен у оквиру дате толеранције, рачунају се вредности девијаторског напона на основу (4.6.3.28) и инкремента пластичне деформације на основу (4.6.3.25). Пошто је  $\Delta \varepsilon_m^P < 0$  имамо да је  ${}^{t+\Delta t} X < {}^t X$  па пластично течење на  $f_1 = 0$  доводи до смањења величине капе и представља деформационо омекшање.



Алгоритам рачунања непознатих вредности за случај када се напонска тачка нађе изнад површи течења дат је на следећој слици.



Слика 4.6.3.9 Алгоритам за рачунање коригованих вредности када се напонска тачка нађе изнад површи течења

### Течење на капи

Уколико су испуњени услови  ${}^{t+\Delta t} f_c^E > 0$ ,  $3 \cdot {}^{t+\Delta t} \sigma_m^E > {}^t L$  и  ${}^{t+\Delta t} f_1^E < 0$  долази до течења на капи. Овај вид пластичне деформације је карактеристичан за грануларне материјале. Напонска тачка пробног еластичног напона се налази испод или на површи течења  $f_1 = 0$  и десно од линије  $I_1 = {}^t L$  (слика 4.6.3.8). Поступак одређивања стварних напона на основу пробних је аналоган поступку у случају када се напонска тачка нађе изнад површи течења при чему су инкременти средње и девијаторске пластичне деформације дати са:

$$\Delta \varepsilon_m^P = 2 \Delta \lambda_c \left( 3 \cdot {}^{t+\Delta t} \sigma_m^E - {}^{t+\Delta t} L \right), \quad (4.6.3.31)$$

$$\Delta \varepsilon^{P'} = \Delta \lambda_c {}^{t+\Delta t} R^2 {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}, \quad (4.6.3.32)$$

где је  $\Delta\lambda_c$  позитиван скалар [78].

Коришћењем израза (4.6.3.22) и (4.6.3.32) добија се израз за рачунање давијаторских напона:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^E}{1 + 2\Delta\lambda_c {}^tG {}^{t+\Delta t}R^2}, \quad (4.6.3.33)$$

при чему је корен друге инваријанте напона дат као:

$$\sqrt{{}^{t+\Delta t}J_{2D}} = \frac{\sqrt{{}^{t+\Delta t}J_{2D}^E}}{\left(1 + 2\Delta\lambda_c {}^tG {}^{t+\Delta t}R^2\right)^2}. \quad (4.6.3.34)$$

Ако се претпостави вредност  $\Delta L$  имамо да је  ${}^{t+\Delta t}L = {}^tL + \Delta L$  па се на основу (4.6.3.15) добија вредност величине  ${}^{t+\Delta t}B$  као:

$${}^{t+\Delta t}B = k - \gamma e^{-B_1 {}^{t+\Delta t}L} + \theta {}^{t+\Delta t}L, \quad (4.6.3.35)$$

где је  $I_1$  замењено са  ${}^{t+\Delta t}L$ .

На основу (4.6.3.10) имамо да је

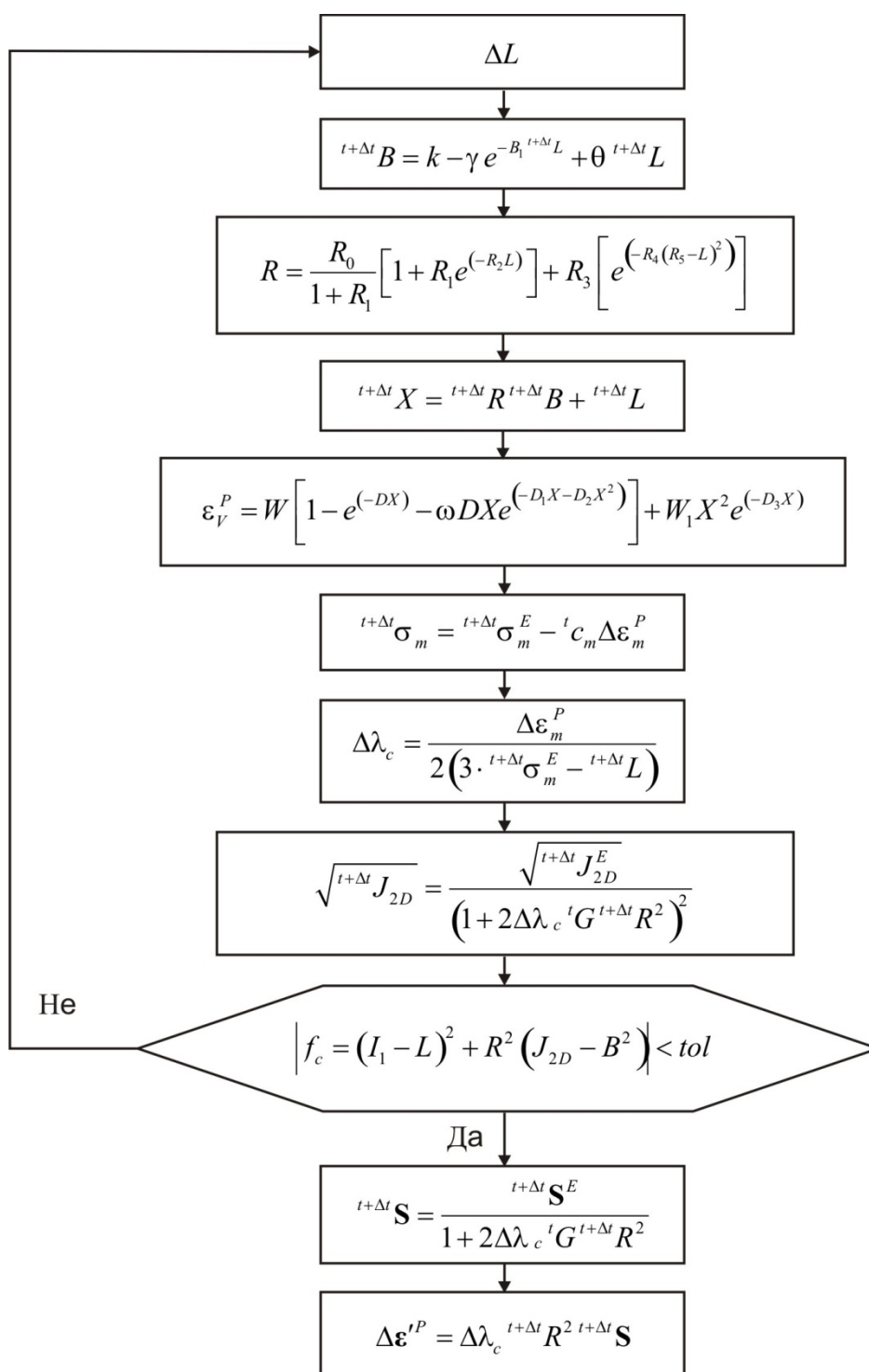
$${}^{t+\Delta t}X = {}^{t+\Delta t}R {}^{t+\Delta t}B + {}^{t+\Delta t}L. \quad (4.6.3.36)$$

Запреминска пластична деформација се може изразити као:

$${}^{t+\Delta t}\varepsilon_V^P = 3 {}^{t+\Delta t}\varepsilon_m^P. \quad (4.6.3.37)$$

У случају течења на капи за водећи параметар се узима  $\Delta L$  [78] а претходно описана интеграциона шема може се користити и у случају равне капе при чему се мора узети да је  ${}^{t+\Delta t}L = {}^{t+\Delta t}X$  из чега следи да је  ${}^{t+\Delta t}R = 0$ . Такође, на основу (4.6.3.32) следи да је  $\Delta\varepsilon'^P = 0$ , а инкремент средње деформације  $\Delta\varepsilon_m^P$  се добија на основу услова да део у загради у изразу (4.6.3.31) мора да буде једнак 0 где је средњи напон  ${}^{t+\Delta t}\sigma_m$  дат са (4.6.3.27).

Алгоритам рачунања непознатих вредности за случај течења на капи дат је на следећој слици.



Слика 4.6.3.10 Алгоритам за рачунање коригованих вредности при течењу на капи

### Напонска тачка изнад пресека површи течења и капе

Уколико се напонска тачка еластичног пробног напона нађе изнад пресека површи течења и капе, могу се јавити два случаја:

- у првом специјалном случају тачка је на линији  $3 \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_m^E = {}^{t+\Delta t}I_1^E = {}^tL$  и изнад површи течења  ${}^{t+\Delta t}f_1^E > 0$ , долази до идеално пластичног одговора са смичућим течењем [78] (нема промене запреминске пластичне деформације  $\Delta\varepsilon_V^P = 0$ ) где је  ${}^{t+\Delta t}I_1 = {}^tI_1 = {}^tL$ ,  ${}^{t+\Delta t}R = {}^tR$  а инкремент пластичног множиоца може да се добије на основу следећег израза:

$$\Delta\lambda_c = \frac{\sqrt{{}^{t+\Delta t}J_{2D}^E} / ({}^tB - 1)}{2{}^tG {}^tR^2}. \quad (4.6.3.38)$$

У овом специјалном случају када је напонска тачка на линији  $3 \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_m^E = {}^{t+\Delta t}I_1^E = {}^tL$ , течење се своди на течење на капи па се девијаторски напон  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$  рачуна на основу (4.6.3.33) а инкремент девијаторске деформације  $\Delta\varepsilon'^P$  на основу (4.6.3.32).

- У другом, општијем случају, уколико се напонска тачка еластичног пробног напона нађе изнад површи течења  ${}^{t+\Delta t}f_1^E > 0$  и десно од линије  ${}^tL$  односно када важи  $3 \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_m^E = {}^{t+\Delta t}I_1^E > {}^tL$  имамо допринос и од површи течења и од капе. У овом случају водећи параметар је такође  $\Delta L$  (као и код течења на капи) а рачунање брзине промене пластичне деформације се врши на основу једначине изведене на основу опште једначине дате са:

$$d\varepsilon^P = d\lambda \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.6.3.39)$$

при чему код генералисаног материјалног модела са капом  $f_y$  означава површи течења  $f_1$  и капу  $f_c$  [78]. У овом случају је потребно узети у обзир допринос обе површи.

Коришћењем израза (4.6.3.25) и (4.6.3.32) на основу (4.6.3.39) добија се следећи израз

$$\Delta\varepsilon'^P = \left( \frac{\Delta\lambda_f}{2} \sqrt{{}^{t+\Delta t}J_{2D}} + \Delta\lambda_c {}^{t+\Delta t}R^2 \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = \Delta\bar{\lambda} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S}, \quad (4.6.3.40)$$

где  $\Delta\lambda_f$  одговара површи течења а  $\Delta\lambda_c$  одговара капи, док је  $\Delta\bar{\lambda}$  позитиван скалар који множи  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{S}$ .

Девијаторски напон у наредном кораку се рачуна на основу следећег израза:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{S} = \frac{{}^{t+\Delta t}\mathbf{S}^E}{1 + 2{}^tG\Delta\bar{\lambda}}, \quad (4.6.3.41)$$

а инкремент корена друге инваријанте се добија помоћу израза:

$$\sqrt{{}^{t+\Delta t}J_{2D}} = \frac{\sqrt{{}^{t+\Delta t}J_{2D}^E}}{1+2{}^tG\Delta\bar{\lambda}}. \quad (4.6.3.41)$$

Пошто у тачки пресека површи течења са капом, која је на слици 4.6.3.7 означена са  $V$ , важи да је  ${}^{t+\Delta t}J_{2D} = {}^{t+\Delta t}B$ , једначина (4.6.3.41) може се решити по  $\Delta\bar{\lambda}$  према:

$$\Delta\bar{\lambda} = \left[ \frac{\sqrt{{}^{t+\Delta t}J_{2D}^E}}{{}^{t+\Delta t}B} - 1 \right] / 2{}^tG. \quad (4.6.3.42)$$

За рачунање  ${}^{t+\Delta t}B$  и  ${}^{t+\Delta t}X$  користе се изрази (4.6.3.35) и (4.6.3.36), а пошто је напонску тачку на крају корака потребно вратити у тачку пресека важи да је  ${}^{t+\Delta t}I_1 = {}^{t+\Delta t}L$ . Коришћењем дате једнакости из израза (4.6.3.37) можемо добити инкремент запреминске пластичне деформације дат са:

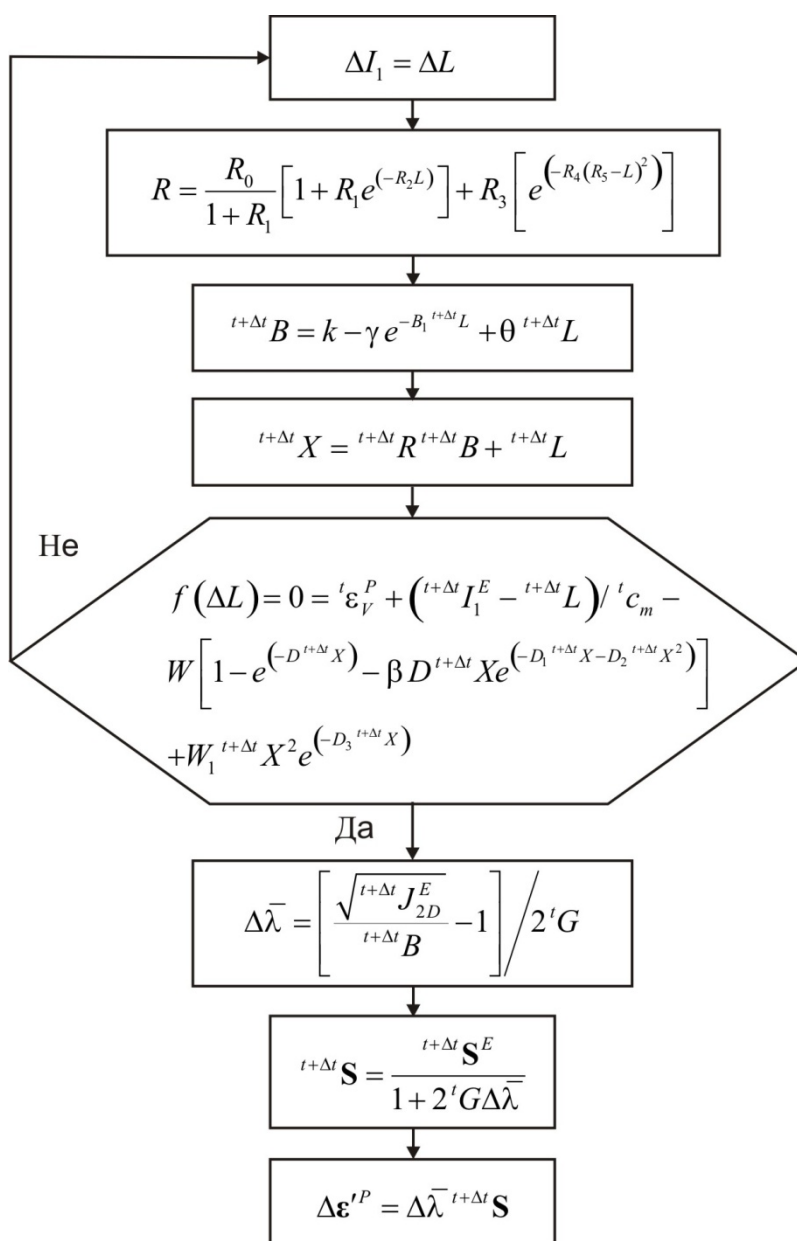
$$\Delta\varepsilon_V^P = \left( {}^{t+\Delta t}I_1^E - {}^{t+\Delta t}L \right) / {}^t c_m, \quad (4.6.3.43)$$

при чему је коришћена једнакост  ${}^{t+\Delta t}I_1^E = 3 \cdot {}^{t+\Delta t}\sigma_m^E$ .

Закон ојачања дат изразом (4.6.3.14) у комбинацији са изразима за  ${}^{t+\Delta t}B$  и  ${}^{t+\Delta t}X$  односно (4.6.3.35) и (4.6.3.37) уз коришћење (4.6.3.43) даје израз:

$$\begin{aligned} f(\Delta L) = 0 = & {}^t\varepsilon_V^P + \left( {}^{t+\Delta t}I_1^E - {}^{t+\Delta t}L \right) / {}^t c_m - \\ & W \left[ 1 - e^{(-D_1 {}^{t+\Delta t}X)} - \beta D {}^{t+\Delta t}X e^{(-D_1 {}^{t+\Delta t}X - D_2 {}^{t+\Delta t}X^2)} \right] \\ & + W_1 {}^{t+\Delta t}X^2 e^{(-D_3 {}^{t+\Delta t}X)} \end{aligned} \quad (4.6.3.44)$$

Водећи параметар је као и у случају течења на капи  $\Delta L$  [78], и може се изразити као  $\Delta L = \Delta I_i = 3\Delta\sigma_m$ . Инкремент средње пластичне деформације  $\Delta\varepsilon_m^P = \frac{1}{3}\Delta\varepsilon_V^P$  се рачуна помоћу еластичног конститутивног закона (4.6.3.43) и закона ојачања (4.6.3.44). Претходно дефинисана процедура може се користити и у случају да се упрошћавањем  $\gamma = 0$  генерализаног модела са капом датог једначином (4.6.3.15) добије Дракер-Прагер материјални модел [78]. Такође поменути процедуру могуће је користити и у случају равне капе када се  ${}^{t+\Delta t}B$  рачуна на основу (4.6.3.35) након одређивања водећег параметра  ${}^{t+\Delta t}L$ . У општем случају алгоритам за случај када се напонска тачка нађе у области која се добија у пресеку површи течења и капе је дат на следећој слици.



Слика 4.6.3.11 Алгоритам за рачунање коригованих вредности при течењу када се напонска тачка нађе у области насталој у пресеку површи течења и капе

Уколико су напони затежући обично долази до колапса грануларног материјала, а уколико материјал поседује одређену затезну чврстоћу означену линијом максималног затезања (слика 4.6.3.7), приликом прекорачења те линије нормални напони се редукују до максималног хидростатичког притиска који одговара линији максималног затезања  $\left(\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\frac{T}{3}\right)$  а смичући напони постају једнаки нули  $(\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0)$ .

---

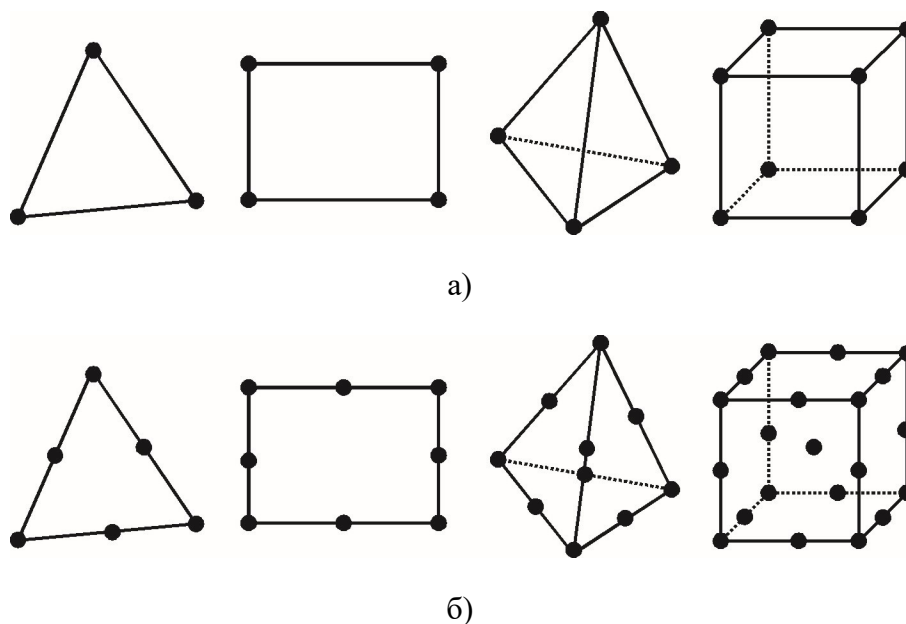
Највећа предност генералисаног модела са капом је могућност контролисања величине дилатације при смичућем оптерећењу. Узроци настанка дилатације у грануларном материјалу су детаљно објашњени у претходним главама, а у случају генералисаног матријалног модела са капом дилатација је последица позитивног нагиба површи течења у односу на  $I_1$  осу, тако да је пластично течење нормално на површину течења што доводи до вектора пластичне деформације који има компоненту у запреминском (хидростатичком) правцу (слика 4.6.3.8). Код Дракер-Прагер материјалног модела дилатација се наставља све док су задата смичућа оптерећења што може довести до много веће дилатације него што се добија приликом експеримената. Код генералисаног модела са капом закон ојачања омогућава контракцију капе све док се тачка пресека капе са површи течења не поклопи са напонском тачком, па вектор пластичне деформације у том случају постаје нормалан на  $I_1$  и нема компоненту запреминских пластичних деформација. Подешавање параметара који контролишу брзину контракције капе омогућавају да се дилатација добијена овим моделом поклапа са експерименталним резултатима. Друга предност генералисаног модела са капом је моделирање пластичности при компресији. Приликом чисто хидростатичког оптерећења грануларног материјала, понашање материјала је еластично све док се напонска тачке не нађе на капи. Брзина запреминске пластичне деформације отуда зависи од закона ојачања којим се одређује тренутни положај капе.

## 5 ПОВЕЗИВАЊЕ СПХ И МЕТОДЕ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА (МКЕ)

### 5.1 Значај методе коначних елемената и њене теоријске основе

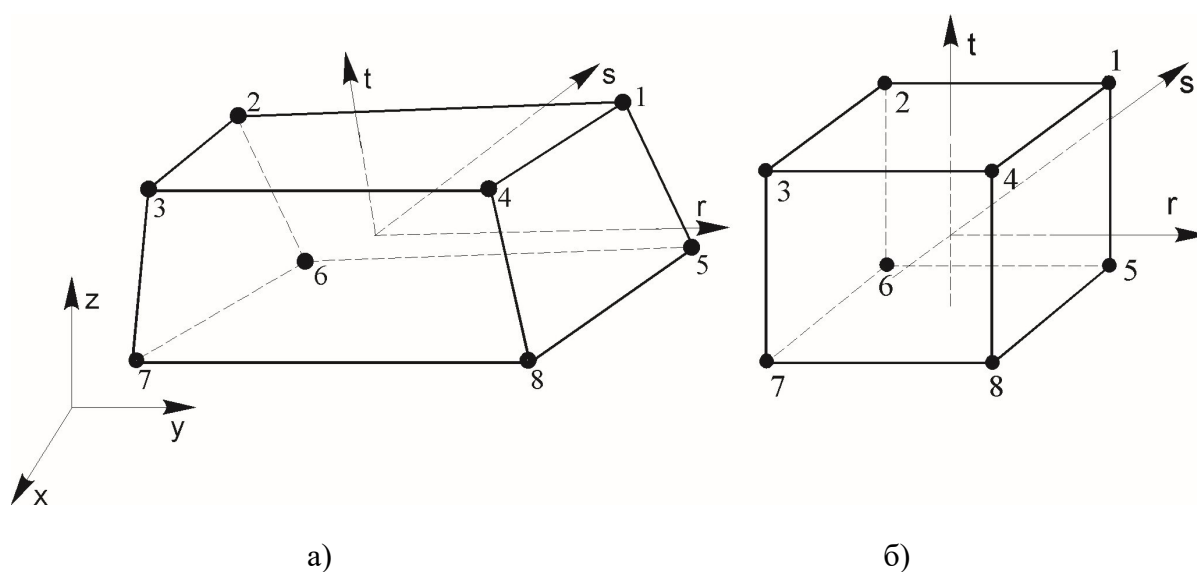
МКЕ је најпопуларнија нумеричка метода механике континуума, која служи за приближно решавање граничних проблема код парцијалних диференцијалних једначина [82]. Настала је из потребе решавања комплексних проблема структурне анализе у урбаном и авио инжењерству и заснива се на идејама које су изнели Александар Хреников 1941. године [83] и Рихард Курант 1943. [84]. Значајни развој МКЕ је започео шездесетих и седамдесетих година двадесетог века пратећи напредак рачунарске технике. Сматра се да је МКЕ метод који је, у поређењу са другим, имао највећи утицај на развој и домете техничких дисциплина у двадесетом веку. Велики број међународних часописа највишег нивоа, читава индустрија за развој софтвера на основима МКЕ, свакодневна примена комерцијалних и специјалних МКЕ програмских пакета у оквиру Компјутерски подржаног моделирања (*Computer Aided Design CAD*) у свим индустријским гранама, и интезивна научна истраживања у МКЕ, најкраћа су илустрација претходне тврдње. Данас МКЕ представља најраспрострањенију нумеричку методу која се користи за прорачун широког спектра физичких величина, почев од напона и деформација у механици солида [82] (што представља изворну примену МКЕ) преко компјутерске механике флуида (*Computational Fluid Dynamics CFD*), прорачуна простирањатоплоте, електромагнетног поља, звучних таласа и др [54]. Предности методе коначних елемената су могућност анализе широког дијапазона проблема, уштеда времена и новца јер су промене модела и њихова поновна анализа знатно једноставније и јефтиније од измене и анализе прототипова. МКЕ има и своје недостатке као и код сваке друге приближне нумеричке методе решење добијено МКЕ садржи одређену грешку. Величина грешке зависи од типа, величине и тачности модела коришћеног при анализи. Два најзначајнија фактора су знање и искуство аналитичара и софистицираност програма који се користи. МКЕ се заснива на подели укупног посматраног модела (домена) у већи број геометријски простијих под-домена на које се примењују закони механике континуума и правила нумеричке математике [54]. Ако се посматра, на пример, дискретизација круга помоћу великог броја кратких, правих линија, повећање броја линија смањује грешку услед апроксимације, али се тиме повећавају меморијски захтеви за компјутерско решавање нумеричким методама. Физичке величине чије се вредности рачунају помоћу МКЕ добијају се у дискретном облику у тачкама које потичу из поделе домена на елементе и које се зову чворови [54]. Код најједноставнијих елемената чворови се налазе искључиво на крајевима ивица односно страница које представљају границе између коначних елемената (слика 5.1.1.а). Уколико се жели већа тачност са истим бројем коначних елемената користе се елементи који садрже међучворове на средини ивица, страница и у средини елемента (слика 5.1.1.б).





Слика 5.1.1 Типови коначних елемената а) основни елементи б) елементи са међучворовима

Ради лакшег рачунања физичких величина за сваки елемент се уводи локални природни координатни систем [54] који се обично везује за средиште елемента (слика 5.1.2).



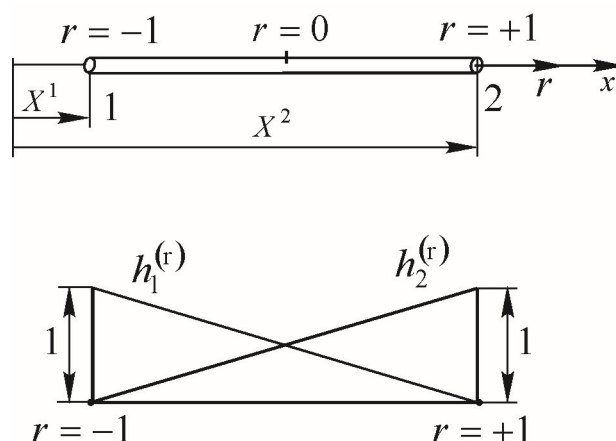
Слика 5.1.2 Коначни елемент са чворовима а) представљен у Декартовом координатном систему б) представљен у природном координатном систему

Максималне вредности природних координата могу бити 1 или -1 тако да су координате чворова у природном координатном систему дате у следећој табели

Табела 5.1.1 Природне координате чворова за елемент приказан на слици 5.1.2

Чвор	r	s	t
1	+1	+1	+1
2	-1	+1	+1
3	-1	-1	+1
4	+1	-1	+1
5	+1	+1	-1
6	-1	+1	-1
7	-1	-1	-1
8	+1	-1	-1

Посматране величине у било којој тачки у коначном елементу могу се израчунати на основу познатих величина у чворовима и интерполационих функција које су у функцији природних координата [54]. Сваки тип коначних елемената има своје интерполационе функције [54] а најједноставнији је случај за 1Д елемент приказан на слици 5.1.3.



Слика 5.1.3 1Д коначни елемент у природном координатном систему са интерполационим функцијама

За 1Д елемент приказан на слици 5.1.3 интерполационе функције које одговарају чворовима 1 и 2 су дате следећим изразима:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2}(1-r) \\ h_2 &= \frac{1}{2}(1+r) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

У случају сложенијих елемената, од појединачних интерполационих функција потребно је формирати матрицу интерполационих функција. Ако су малим словима  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{x}$  означена померања и координате одређена тачке у коначном елементу а са  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{X}$  вектори померања и координата чворова, општи изрази за рачунање померања и координата одређене тачке у коначном елементу су дати следећим изразима:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{U}, \quad (5.1.2)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{X}, \quad (5.1.3)$$

где је са  $\mathbf{H}$  означена интерполациона матрица.

Померање дато једначином (5.1.2) се односи искључиво на Лангражову материјалну формулацију и неопходно је за решавање равнотежних једначина (о којима ће касније бити више речи), док се код Ојлерове просторне формулације (која се користи у CFD програмима заснованим на МКЕ) чворови не померају већ су равнотежне једначине које се решавају у функцији притиска, док су при примени МКЕ за топлотне прорачуне, равнотежне једначине у функцији од температуре. У МКЕ се на основу равнотежних једначина за сваки елемент њиховим спрезањем долази до система глобалних једначина трансформацијом из локалних у глобални координатни систем, па анализа система спрегнутих коначних елемената подразумева решавање равнотежних једначина у матричном облику, при чему се у механици солида на основу улазних ограничења и оптерећења добијају померања тачака која представљају решење анализираног проблема.

Проблеми који се решавају помоћу МКЕ могу бити статички (који не зависе од времена) и динамички (код којих променљиве зависе од времена). Статички проблеми се решавају у току једног корака док се динамички проблеми решавају у више временских корака.

За решавање равнотежних једначина у МКЕ могуће је користити експлицитни (инкрементални) приступ или имплицитни (инкрементално итеративни) приступ. Претходно описане методе ДЕМ и СПХ су експлицитне а избор приступа код МКЕ зависи од проблема који се моделира.

Имплицитне методе су знатно сложеније и теже за примену али су знатно стабилније и омогућавају рачунање са знатно већим временским кораком  $\Delta t$  у односу на експлицитне методе. У случају статичке анализе примењује се имплицитни приступ код кога је у току једног временског корака у одређеном броју итерација могуће доћи до конвергенције решења и постизања равнотежног стања, док је за случај анализе ударних оптерећења или судара (креш тестова) погодније користити експлицитни приступ са веома малим временским кораком. У овој дисертацији биће коришћено спрезање експлицитне СПХ методе са имплицитном МКЕ јер у случају коректно димензионисаних уређаја за транспорт, обраду и складиштење грануларних материјала ударна оптерећења од грануларних материјала не изазивају разарање материјала.

У механици солида МКЕ се користи за линеарну анализу где се уводи претпоставка о малим померањима и линеарно еластичном материјалу која се решава у једном кораку, МКЕ се такође користи и за нелинеарну анализу где се узима у обзир било ефекат геометријске нелинеарности било материјалне или оба истовремено при чему се анализа врши у већем броју корака у току којих се оптерећење или ограничење инкрементално повећава од 0 до максималне задате вредности.

## 5.2 Инкрементално-итеративни приступ у МКЕ

Решавање нелинеарних проблема у МКЕ се заснива на инкрементално-итеративном поступку код кога се на основу почетног познатог стања у текућем кораку тражи ново равнотежно стање у наредном кораку [71]. Ако је познато равнотежно стање тела  ${}^t\mathbf{A}$  при коме су унутрашње и спољашње генералисане силе  ${}^t\mathbf{F}^u$  и  ${}^t\mathbf{F}^s$  у равнотежи тј.

$${}^t\mathbf{F}^u = {}^t\mathbf{F}^s. \quad (5.2.1)$$

Ново равнотежно стање  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{A}$  при коме су унутрашње и спољашње генералисане силе  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u$  и  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s$  је дато изразом:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s. \quad (5.2.2)$$

Унутрашње силе у наредном кораку  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s$  су нелинеарне функције померања [71] које се означавају са  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^s$ . Ако се израз (5.2.2) линеаризује добија се релација:

$${}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u, \quad (5.2.3)$$

где је  $\Delta\mathbf{U}$  вектор прираштаја чворних померања а  ${}^t\mathbf{K}$  је матрица крутости [71] дата као:

$${}^t\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{F}^u}{\partial \mathbf{U}}. \quad (5.2.4)$$

Итеративна равнотежна једначина која се добија на основу (5.2.3) је облика:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)}, \quad (5.2.5)$$

где  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$  и  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)}$  одговарају последњем познатом стању означеном са  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{A}^{(i-1)}$  а вектор прираштаја померања у  $i$ -тој итерацији је дат као  $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$ .

Укупни вектор померања у  $i$ -тој итерацији за наредни корак [71] добија се када се укупни вектор померања из претходног корака увећа за све инкременте до инкремента  $i$  (укључујући и њега)

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^t\mathbf{U}^{(1)} + \Delta\mathbf{U}^{(2)} + \dots + \Delta\mathbf{U}^{(i)}. \quad (5.2.6)$$

Једначина (5.2.5) се решава итеративно све док се не испуни дефинисани критеријум конвергенције који може бити: критеријум по померањима, критеријум по неуравнотеженим силама или критеријум по инкременталној унутрашњој енергији, који су дати следећим изразима:

$$\|\Delta\mathbf{U}^{(i)}\| \leq \varepsilon_U \|\mathbf{U}^{(i)}\|, \quad (5.2.7)$$

$$\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)} \right\| \leq \varepsilon_F \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^t\mathbf{F}^u \right\|, \quad (5.2.8)$$

$$\Delta \mathbf{U}^{(i)T} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)} \right) \leq \varepsilon_E \Delta \mathbf{U}^{(1)T} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u \right). \quad (5.2.9)$$

где  $\varepsilon_U$ ,  $\varepsilon_F$  и  $\varepsilon_E$  представљају толеранције за померања, неуравнотежене силе и неуравнотежену енергију [78].

Вектор унутрашњих сила [73] се добија из принципа виртуелног рада:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)} = \sum_j \int_{V^j} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)T} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} dV^j. \quad (5.2.10)$$

при чему се сумирање врши по свим коначним елементима у запремини  $V^j$  а матрица  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)}$  означава матрицу извода интерполационих функција (5.1.2, 5.1.3) која служи за трансформацију између малих деформација у материјалној тачки и чворних померања елемената:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}. \quad (5.2.11)$$

За 3Д елементе претходна релација у индексној нотацији има облик [54]

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccccc} h_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & h_{N,1} & 0 & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & \cdots & 0 & h_{N,2} & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} & \cdots & 0 & 0 & h_{N,3} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & 0 & \cdots & h_{N,2} & h_{N,1} & 0 \\ 0 & h_{1,3} & h_{1,2} & \cdots & 0 & h_{N,3} & h_{N,2} \\ h_{1,3} & 0 & h_{1,1} & \cdots & h_{N,3} & 0 & h_{N,1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ \vdots \\ U_1^N \\ U_2^N \\ U_3^N \end{array} \right\}, \quad (5.2.12)$$

при чему је ради краћег писања уведена ознака  $h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial x_j}$ .

Ако се израз за интерполирање померања (5.1.2) напише у одговарајућем облику за инкрементално итеративни поступак [71] добија се релација за рачунање померања у тачки  $\mathbf{u}^{(i-1)}$  на основу померања у чворовима  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}$  и интерполационе матрице  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{u}^{(i-1)} = \mathbf{H} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}. \quad (5.2.13)$$

Матрица  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)}$  зависи од промене геометрије, и за случај малих померања је константна [71].

Напон  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  се може израчунати на основу:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}, \quad (5.2.14)$$

где је прираштај напона  $\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  дат као:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}}^{\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}} d\boldsymbol{\sigma}. \quad (5.2.15)$$

Конститутивни закон представља везу између напона и деформација тако да за нелинеарну зависност имамо:

$$d \boldsymbol{\sigma} = {}^t \mathbf{C} d \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (5.2.16)$$

где су  $d \boldsymbol{\sigma}$  и  $d \boldsymbol{\varepsilon}$  прираштаји напона и деформација а  ${}^t \mathbf{C}$  је конститутивна матрица која зависи од напона и деформација [76].

Заменом (5.2.16) у (5.2.15) добија се израз за одређивање инкремента напона у кораку интеграцијом конститутивне релације:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} = \int_{\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}}^{\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}} \mathbf{C} d \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (5.2.17)$$

У случају да не постоји материјална нелинеарност (еластични материјали) конститутивна матрица  $\mathbf{C}^E$  је константна па једначина (5.2.17) има једноставно решење:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} = \mathbf{C}^E \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} \right), \quad (5.2.18)$$

док је у општем случају матрица  $\mathbf{C}$  нелинеарна функција напона односно деформација па је интеграција једначине (5.2.17) сложен поступак код кога су познате величине на почетку корака: напон  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ , укупне  ${}^t \boldsymbol{\varepsilon}$  и пластичне деформације  ${}^t \boldsymbol{\varepsilon}^P$  као и унутрашње променљиве  ${}^t \boldsymbol{\beta}$  које описују понашање материјала (на пример положај капе код генерализаног модела са капом), као и укупне деформације на крају корака  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}$  у претходној итерацији. Непознате величине које треба израчунати на крају корака су означене са  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{P(i-1)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}$ . Унутрашње променљиве  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\beta}^{(i-1)}$  и пластичне деформације  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^{P(i-1)}$  су нелинеарне функције напона [71], а ако се њихови прираштаји  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^P$  и  $\Delta \boldsymbol{\beta}$  изражавају преко напона на крају корака  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$  реч је о имплицитном интеграционом поступку. За рачунање ових величина најпогоднији је метод водећег (осовног) параметра код кога се све непознате величине на крају корака изразе преко једног параметра  $p$  [71]. Након тога формира се нелинеарна једначина:

$$f(p) = 0, \quad (5.2.19)$$

која се користи за одређивање решења  ${}^{t+\Delta t}p$  након чега се на основу израчунате вредности основног параметра  ${}^{t+\Delta t}p$  рачунају непознате величине  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{P(i-1)}$  и  ${}^{t+\Delta t}\beta^{(i-1)}$  што је приказано у алгоритму у табели 5.2.1.

Табела 5.2.1 Имплицитна интеграција напона методом водећег параметра

<p>Познате величине: <math>{}^t\boldsymbol{\sigma}</math>, <math>{}^t\boldsymbol{\varepsilon}</math>, <math>{}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P</math>, <math>{}^t\beta</math>, <math>{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}</math></p> <p>Непознате величине: <math>{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}</math>, <math>{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{P(i-1)}</math>, <math>{}^{t+\Delta t}\beta^{(i-1)}</math></p> <p>Корак 1: Представљање свих непознатих величина помоћу основног параметра <math>p</math></p> ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}\left({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}\right)$ ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{P(i-1)}\left({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}\right) \quad (\text{a})$ ${}^{t+\Delta t}\beta^{(i-1)}\left({}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P, {}^t\beta, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}\right)$ <p>Корак 2: Формирање основне нелинеарне једначине <math>f(p) = 0</math> и израчунавање <math>{}^{t+\Delta t}p</math></p> <p>Корак 3: Одређивање непознатих величина (a) на основу израчунатог <math>{}^{t+\Delta t}p</math></p>
--

Тачност решења нелинеарног проблема зависи од тачности интеграције напона у кораку [73], док брзина конвергенције решења зависи од начина рачунања матрице крутости. Уколико је матрица крутости тангентна (одређена на основу величина на крају корака интеграције) постиже се квадратна брзина конвергенције [73]. Тангентна матрица крутости се одређује на основу израза:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} = \int_{V^j} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i-1)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)} dV^j, \quad (5.2.20)$$

при чему је потребно одредити и тангентну конститутивну матрицу помоћу израза:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i-1)} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}}, \quad (5.2.21)$$

на основу напона и деформација на крају корака [73]. У табели 5.2.2 је дат алгоритам инкрементално-итеративног поступка у МКЕ.

Табела 5.2.2 Алгоритам инкрементално-итеративног поступка у МКЕ

<p>А. Почетни услови за корак</p> ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^0 = {}^t\mathbf{U}$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s$ $i = 0$ <p>Б. Равнотежне итерације, петља по свим елементима</p> $i = i + 1 \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} = 0 \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} = 0$							
<p>В. Петља по интеграционим тачкама</p> ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}$ <p>Интеграција напона методом водећег параметра (Табела 5.2.1)</p> <p>познате: <math>{}^t\boldsymbol{\sigma}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}, {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^P, {}^t\boldsymbol{\beta}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}</math></p> <p>непознате: <math>{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{P(i-1)}, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\beta}^{(i-1)}</math></p> <p>Конститутивна матрица <math>{}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i-1)} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}}{\partial {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}}</math></p> <p>Силе у чворовима <math>{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} = \sum_j \int_{V^j} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)T} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} dV^j</math></p> <p>Матрица крутости <math>{}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} = \int_{V^j} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}^{(i-1)T} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}^{(i-1)} dV^j</math></p> <p>Прираштај померања и кориговање померања</p> ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)}$ ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)}$ <p>Провера конвергенције</p> <table border="1"> <tr> <td>а)</td> <td><math>\ \Delta\mathbf{U}^{(i)}\  \leq \varepsilon_U \ \mathbf{U}^{(i)}\ </math></td> </tr> <tr> <td>б)</td> <td><math>\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)}\  \leq \varepsilon_F \ \mathbf{F}^s - \mathbf{F}^u\ </math></td> </tr> <tr> <td>в)</td> <td><math>\Delta\mathbf{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)}) \leq \varepsilon_E \Delta\mathbf{U}^{(1)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u)</math></td> </tr> </table>		а)	$\ \Delta\mathbf{U}^{(i)}\  \leq \varepsilon_U \ \mathbf{U}^{(i)}\ $	б)	$\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)}\  \leq \varepsilon_F \ \mathbf{F}^s - \mathbf{F}^u\ $	в)	$\Delta\mathbf{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)}) \leq \varepsilon_E \Delta\mathbf{U}^{(1)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u)$
а)	$\ \Delta\mathbf{U}^{(i)}\  \leq \varepsilon_U \ \mathbf{U}^{(i)}\ $						
б)	$\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)}\  \leq \varepsilon_F \ \mathbf{F}^s - \mathbf{F}^u\ $						
в)	$\Delta\mathbf{U}^{(i)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i)}) \leq \varepsilon_E \Delta\mathbf{U}^{(1)T} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^s - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^u)$						
<p>Ако услови конвергенције нису испуњени, рачунање се понавља у следећој итерацији</p>							

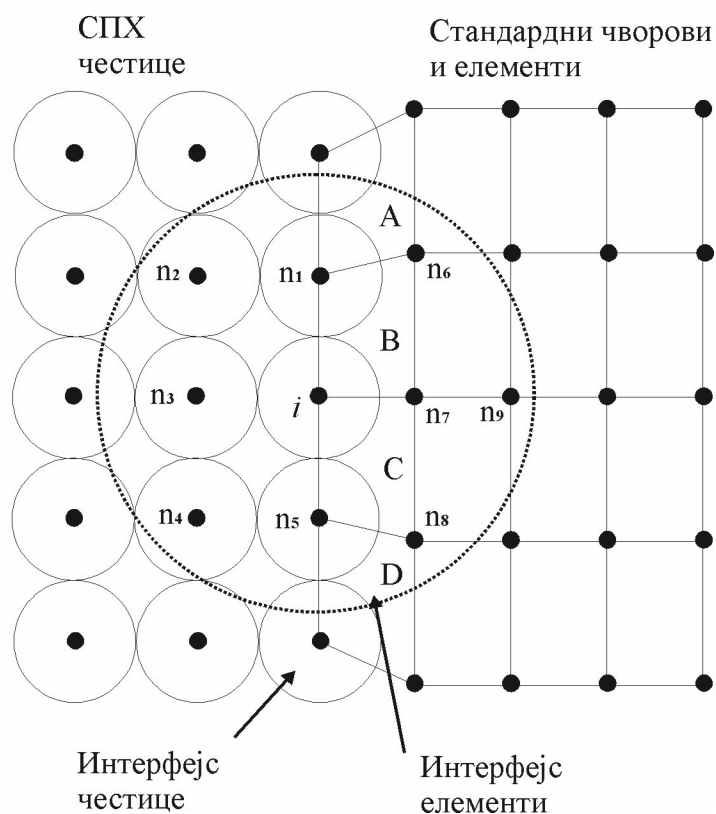
### 5.3 Повезивање МКЕ чворова и СПХ псеудо-честица

Моделирање интеракције тела која су дискретизована помоћу МКЕ и СПХ се заснива на принципу господар/слуга (роб у изворном енглеском облику master/slave) код кога се контрола одвија једносмерно (господар контролише слугу док обратно није могуће) [51]. У случају повезивања МКЕ и СПХ програма, МКЕ програм игра улогу господара док је СПХ програм слуга. Овај метод повезивања омогућава анализу интеракције флуида и солида као и моделирање балистичког удара и продирања [51]. Првобитна имплементација господар/слуга принципа се заснивала на предиктор-коректор методи, где је прво у предиктор фази приликом рачунања положаја господар површина и слуга псеудо-честица претпостављено да нема контакта а потом се у коректор фази рачуна дубина продора слуга псеудо-честица у господар површине [85]. На основу



израчунаог продора, рачуна се контактна сила која делује на господар површине и слуга псеудо-честице, која раздваја контакт у наредном временском кораку.

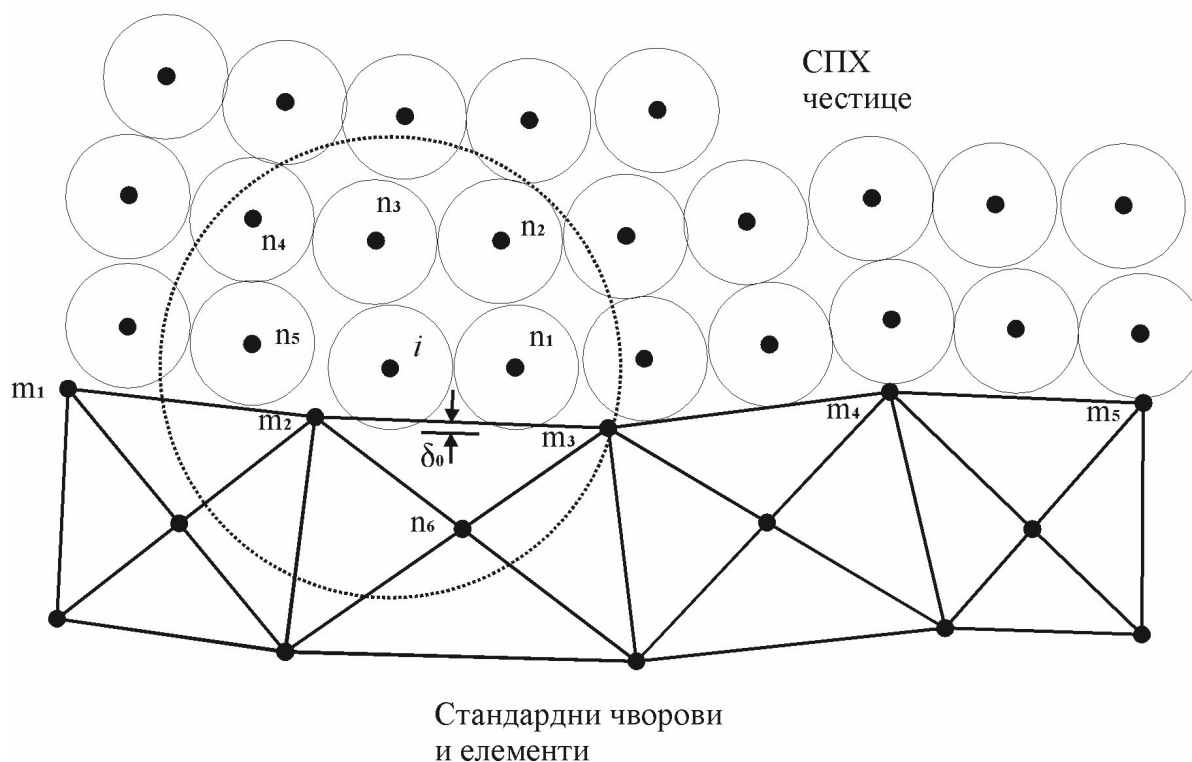
Господар/слуга алгоритми који се користе за повезивање СПХ и МКЕ се заснивају на два приступа, приступ причвршћених честица и приступ клизајућег контакта [86]. У првом приступу чворови елемената који учествују у контакту уједно представљају и контактни слој СПХ честица (слика 5.3.1).



Слика 5.3.1 СПХ чворови причвршћени за МКЕ мрежу

Величина контактних честица одговара величини контактних елемената (слика 5.3.1) а маса контактних честица потиче искључиво од материјала моделираног СПХ честицама па је маса свих контактних честица иста [86]. За посматрану честицу  $i$  домен утицаја је представљен испрекиданом линијом (слика 5.3.1). Иако се у датом домену утицаја поред СПХ честица налазе и стандардни МКЕ чворови ( $n_6, \dots, n_9$ ), деформације  $\epsilon$  и брзине деформација  $\dot{\epsilon}$  се рачунају само на основу чворова  $i, n_1, \dots, n_5$ . Силе у честици  $i$  потичу од чворова  $n_1, \dots, n_5$  и елемената В и С док стандардни чворови  $n_6, \dots, n_9$  не учествују директно већ преко елемената В и С [86].

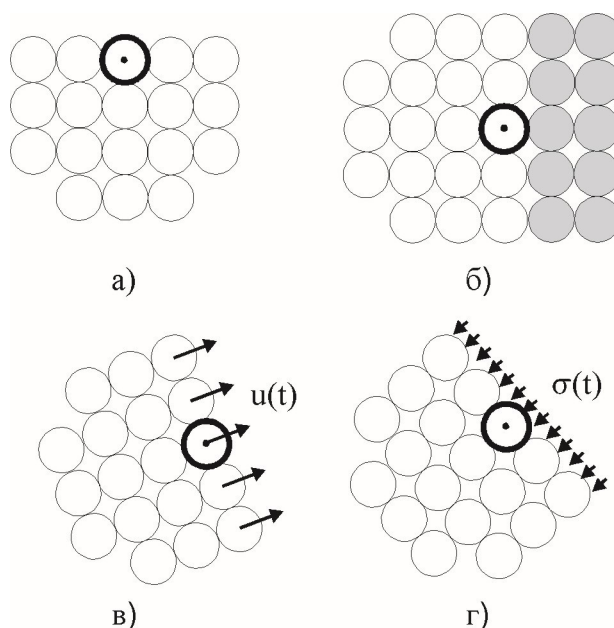
Приступ клизајућег контакта подразумева да СПХ честице и чворови МКЕ нису чврсто везани већ се контакт остварује између СПХ честица и ивица/страница коначних елемената (слика 5.3.2)



Слика 5.3.2 Клизајући интерфејс између СПХ честица и МКЕ елемената

Слично као и у случају причвршћених честица, и код клизајућег контакта стандардни МКЕ чворови  $m_2, m_3, n_6$  не учествују у рачунању деформација  $\epsilon$ , брзине деформација  $\dot{\epsilon}$  и сила у посматраној СПХ честици  $i$  [86]. Максимално дозвољено преклапање слуга СПХ честице  $i$  са господар МКЕ површином  $m_2 - m_3$  је означено са  $\delta_0$  и у случају класично генерисаних СПХ честица једнако је нули, док у случају да су СПХ честице добијене ерозијом МКЕ елемената,  $\delta_0$  може имати малу вредност која представља делић међучестичног растојања [87]. Уколико дође до делимичног преклапања слуга честице  $i$  са господар сегментом  $m_2 - m_3$  које је означено као  $(\delta > \delta_0)$  нормалне брзине честице  $i$  и чворова  $m_2$  и  $m_3$  морају бити ажуриране тако да важи закон одржања количине кретања (4.5.4.12) и да нормална брзина честице  $i$  одговара брзини сегмента  $m_2 - m_3$  [46].

Поред поменутих интерфејса са причвршћеним честицама и са клизајућим контактом (који проистичу из повезивања СПХ са МКЕ) граничне СПХ честице могу бити на слободној површини (слика 5.3.3.а), у контакту са другим материјалом (слика 5.3.3.б), могу им бити задати есенцијални (геометријски) гранични услови (померање) или природни гранични услови (силе односно напони) који су представљени на слици 5.3.3.в и 5.3.3.г [88].



Слика 5.3.3 Границе СПХ честица: а) на слободној површини, б) у контакту са другим материјалом, в) есенцијални (геометријски) гранични услови, г) или природни гранични услови

У случају слободне површине, гранични слој честица има непотпун скуп суседних честица (пошто гранична површина сече домен утицаја) па ако се жели избећи овај недостатак, могуће је додати виртуелне честице (слика 4.4.1.2). Ако су два различита материјала у контакту (слика 5.3.3.б) долази до грешке при рачунању брзине промене деформације (4.6.1.13) и тензора ротације (4.6.1.17) јер приликом сумирања по свим суседним честицама у суму улазе честице различитих материјала са различитим материјалним карактеристикама [88]. Што је разлика материјалних карактеристика мања, мања је и грешка, тако да ако се моделира контакт два тела од истог материјала [89] у контактним слојевима нема грешке. У случају различитих материјала долази од извесног продирања и мешања на контактної површини пошто СПХ не захтева да поље брзине има јединствену вредност [90]. Решење је представљало увођење принудне силе (*penalty force*) у оквиру флипер (*pinball*) алгоритма [91], која делује између честица у контакту и чији интензитет зависи од преклапања и брзине промене преклапања (слично рачунању силе код ДЕМ методе) и која се рачуна на основу следећих израза:

$$p = \frac{h_i + h_j}{2} - |x_j - x_i| \geq 0, \tag{5.3.1}$$

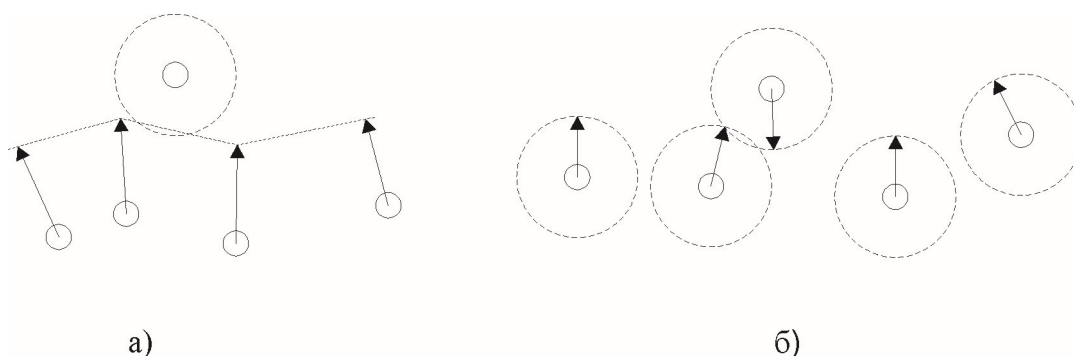
$$F = K_p \min(F_1, F_2), \tag{5.3.2}$$

$$F_1 = \begin{cases} \frac{\rho_i \rho_j R_i^3 R_j^3}{\rho_i R_i^3 + \rho_j R_j^3} \cdot \frac{\dot{p}}{\Delta t} & \dot{p} > 0 \\ 0 & \dot{p} < 0 \end{cases}, \tag{5.3.3}$$

$$F_2 = \left[ \frac{G_i G_j}{G_i + G_j} \sqrt{\frac{R_i R_j}{R_i + R_j}} \right] p^{3/2}. \quad (5.3.4)$$

У претходним изразима, за честице у контакту дефинисане координатама  $x_i$  и  $x_j$  дужине глачања су означене са  $h_i$  и  $h_j$ , њихово преклапање је означено са  $p$ , док  $\rho_i$  и  $\rho_j$  њихове густине,  $R_i$  и  $R_j$  су њихови радијуси, а  $G_i$  и  $G_j$  су модули смицања за дате материјале [91]. Овако израчунату силу могуће је кориговати одређеним фактором скалирања  $K_p$  [90].

Контакт између два различита материјала у СПХ методи може да се посматра као контакт између честице и површине (слика 5.3.4.а) или као контакт између честица (слика 5.3.4.б).



Слика 5.3.4 Одређивање контакта

Контакт између честица је погоднији за примену и више је у складу са безмрежним карактером СПХ методе али код њега постоји питање одређивања правца деловања контактне силе пошто се нормале у контактним честицама у општем случају не поклапају [90]. Уколико се контактне силе дефинишу дуж вектора који спаја центре честица у контакту (као што је то случај код флипер алгоритма) контактне силе имају нормалну и тангентну компоненту. Уколико је потребно избећи тангентну компоненту контактних сила потребно је израчунати средњу нормалу међу честицама и дуж ње дефинисати контактне силе [90]. Након флипер алгоритма [91], појавили су се и други облици израза за рачунање принудних сила [90] међу којима треба нагласити алгоритам контактнег потенцијала који ће бити модификован и коришћен у овој дисертацији [92]. Алгоритам контактнег потенцијала је заснован на идеји Монагана о увођењу одбојног члана  $Rf_n^{ij}$  за ублажавање нестабилности при истезању у израз за одржање количине кретања [40], који сада гласи:

$$\frac{Dv_\alpha^i}{Dt} = - \sum_{j \in SS} m^j \left( \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^{j2}} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{\rho^{i2}} + Rf_n^{ij} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i}, \quad (5.3.5)$$

где  $R$  коефицијент који зависи од притиска и густине, а одбојна сила  $f_n^{ij}$  је дата изразом:

$$f_n^{ij} = \frac{W(r^{ij})}{W(\Delta p_{avg})}, \quad (5.3.6)$$

при чему је  $r^{ij} = |\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j|$  растојање међу честицама  $i$  и  $j$ , а  $\Delta p_{avg}$  је средње међучестично растојање у околини посматране честице  $i$ . Како се растојање  $r^{ij}$  смањује тако се одбојна сила повећава [40].

Контактни потенцијал је дат изразом:

$$\phi(\mathbf{x}^i) = \int_{\Omega_c} K \left( \frac{W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x})}{W(\Delta p_{avg})} \right)^n dV, \quad (5.3.7)$$

где је  $\Omega_c$  пресек домена утицаја посматране честице и суседног тела са којим је посматрана честица у контакту а  $K$  и  $n$  су кориснички дефинисани параметри којима се регулише интензитет потенцијала [92]. На основу једначине (5.3.7) следи да је вредност контактнoг потенцијала увек већа или једнака нули унутар домена коме припада контактна честица и да слично Монагановој одбојној сили (5.3.6), расте како се растојање међу честицама у контакту смањује [51].

Користећи честичну апроксимацију израз за контактни потенцијал (5.3.7) постаје:

$$\phi(\mathbf{x}^i) = \sum_j^{N_{CONT}} \frac{m^j}{\rho^j} K \left( \frac{W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)}{W(\Delta p_{avg})} \right)^n. \quad (5.3.8)$$

Запреминска сила  $b_c(\mathbf{x}^i)$  се рачуна као градијент контактнoг потенцијала [92]

$$b_c(\mathbf{x}^i) = \nabla \phi(\mathbf{x}^i) = \sum_j^{N_{CONT}} \frac{m^j}{\rho^j} K \frac{W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)^{n-1}}{W(\Delta p_{avg})^n} \nabla_{\mathbf{x}^i} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j). \quad (5.3.9)$$

Вектор контактне силе  $f_c(\mathbf{x}^i)$  се добија интеграцијом вектора запреминске силе  $b_c(\mathbf{x}^i)$

$$f_c(\mathbf{x}^i) = \int_{\Omega_c} \mathbf{N}^T b_c(\mathbf{x}^i) dV, \quad (5.3.10)$$

при чему је  $\mathbf{N}$  нормализована матрица тежинских односно интерполационих функција чији су чланови:

$$N_{ij} = \frac{m^j}{\rho^j} \frac{W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)}{\sum_{j \in SS} \frac{m^j}{\rho^j} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)} = \frac{m^j}{\rho^j} \tilde{W}(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j), \quad (5.3.11)$$

где је  $SS$  скуп суседних честица а ради једноставности писања нормализовани кернел је означен са  $\tilde{W}(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)$ .

Заменом израза (5.3.11) и (5.3.9) у (5.3.10) и интегралњем, имајући у виду да је члан  $\frac{m^i}{\rho^i}$  константан и на основу услова деобе целине (4.3.1.8), добијамо коначан облик израза за вектор контактне силе:

$$f_c(\mathbf{x}^i) = \sum_j^{NCONT} \frac{m^j}{\rho^j} \frac{m^i}{\rho^i} K \frac{W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)^{n-1}}{W(\Delta p_{avg})^n} \nabla_{x_i} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j). \quad (5.3.12)$$

Правац контактне силе је одређен градијентом кернел функције  $\nabla_{x_i} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j)$  [93].

Када се убрзање услед контактне силе  $\frac{f_c(\mathbf{x}^i)}{m^i}$  дода у израз (4.5.4.12) добија се коначан облик закона баланса количине кретања за алгоритам контактнег потенцијала [92]

$$\frac{Dv_\alpha^i}{Dt} = - \sum_{j \in SS} m^j \left( \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^{j2}} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{\rho^{i2}} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} - \frac{f_c(\mathbf{x}^i)}{m^i}. \quad (5.3.13)$$

## 5.4 Третман трења у контакту

Било да се контакт између материјала у СПХ методи моделира помоћу алгоритма контактнег потенцијала, или помоћу укључивања честица оба материјала у сумирање у оквиру домена утицаја  $2h$ , трењу као основној карактеристици грануларних материјала није посвећена адекватна пажња. У циљу моделирања интеракције грануларних материјала са уређајима за њихов транспорт, обраду и складиштење, која се заснива на повезивању МКЕ са СПХ, треба истаћи пар битних претпоставки:

- За моделирање поменутих уређаја користе се коначни елементи љуске које карактерише особина да им је једна димензија знатно мања од преостале две. Приликом повезивања МКЕ и СПХ методе од чворова тих елемената се генеришу СПХ честице. За разлику од оригиналног приступа причвршћених честица (слика 5.3.1) код кога су све СПХ честице (укључујући и контактне) од истог материјала, у овом случају честицама генерисаним од МКЕ чворова додељују се материјалне карактеристике одговарајућих елемената.

- Померања чворова се рачунају у МКЕ, док су одговарајуће генерисане СПХ честице током СПХ прорачуна фиксиране. Силе које делују на генерисане контактне честице се преносе из СПХ у МКЕ (по истом принципу по коме ради флуид-структурна интеракција у МКЕ) где се на основу њих рачунају померања и напони.

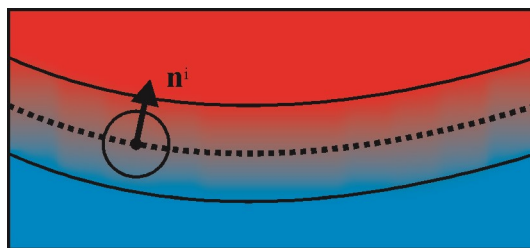
- Контактне силе се растављају на нормалне и тангентне компоненте, након чега се проверава услов трења, односно да ли је трење статичко или динамичко. У случају статичког трења нема клизања гранулатног материјала по контактної површини, док у случају динамичког трења постоји клизање, а сила трења се супротставља том клизању.

Са обзиром на то да контактна површина може бити неправилног облика, прво је потребно наћи нормалу на контактну површину у посматраној честици  $i$ . Да ли нека честица припада граничном слоју може да се утврди ако се изврши кернел апроксимација неке карактеристичне "боја" скаларне функције  $\psi$  [38] тако да за граничну честицу  $i$  важи:

$$\psi^i \neq \sum_{j \in SS} \psi^j \frac{m^j}{\rho^j} W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j), \quad (5.4.1)$$

пошто у сумирање по свим суседним честицама  $SS$  улазе и честице "друге боје".

Као "боја" функција користи се идентификација материјала. Одређивање нормале на основу "боја" функције је првобитно коришћено при МКЕ анализи контакта два флуида у Ојлеровој просторној формулацији [94], док су потом Рандлес и Либерски применили тај принцип у СПХ методи [38]. Шематски приказ два флуида у контакту дат је на следећој слици.



Слика 5.4.1 Нормала на контактну површину у тачки  $i$

Нормала у посматраној контактної честици се рачуна на основу следећег израза:

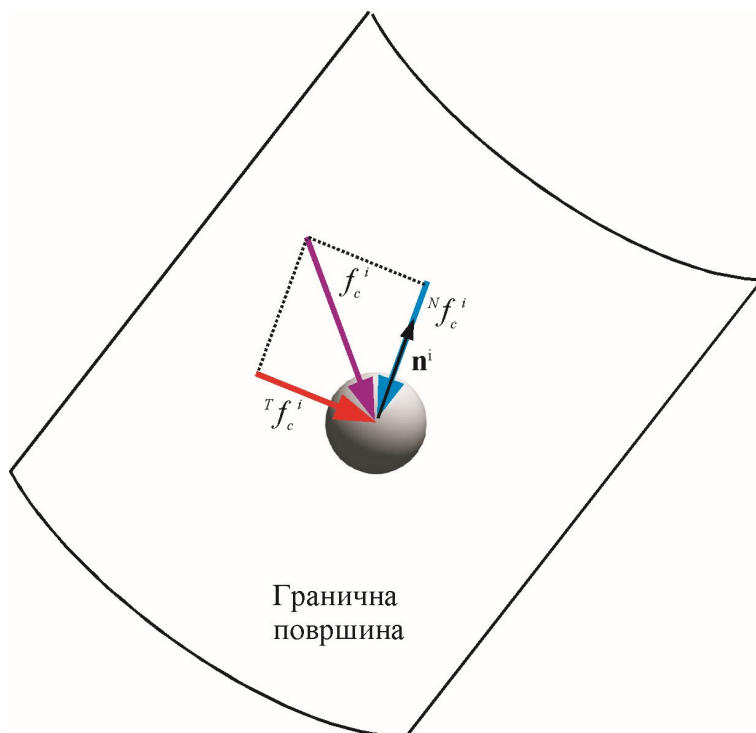
$$\mathbf{n}^i = \pm \nabla \psi^i, \quad (5.4.2)$$

где је

$$\nabla \psi^i \neq \sum_{j \in SS} \psi^j \frac{m^j}{\rho^j} \nabla W(\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j). \quad (5.4.3)$$

Знак у једначини (5.4.2) је увек минус ако су све суседне честице истог материјала као и посматрана честица  $i$  [38].

Након одређивања нормале, могуће је контактну силу дату изразом (5.3.11) разложити на нормалну и тангентну компоненту (слика 5.4.2).



Слика 5.4.2 Компоненте контактне силе у граничној честици

Нормална компонента се рачуна као пројекција вектора на основу следећег израза:

$${}^N \mathbf{f}_c^i = \frac{\mathbf{f}_c^i \cdot \mathbf{n}^i}{|\mathbf{n}^i|} \frac{\mathbf{n}^i}{|\mathbf{n}^i|}, \quad (5.4.4)$$

док је тангентна компонента дата једначином

$${}^T \mathbf{f}_c^i = \mathbf{f}_c^i - {}^N \mathbf{f}_c^i. \quad (5.4.5)$$

Сада је потребно проверити да ли се ради о статичком или динамичком трењу на основу Кулоновог закона трења. У случају статичког трења нема кретања између контактних површина, јер је интензитет тангентне компоненте контактне силе мањи од критичне вредности, што се математички представља помоћу неједначине:

$$\mathbf{f}_{fs}^i = -{}^T \mathbf{f}_c^i \leq \mu_s {}^N \mathbf{f}_c^i, \quad (5.4.6)$$

где је  $\mu_s$  статички коефицијент трења.



У случају статичког трења, сила трења  $\mathbf{f}_{fs}^i$  је истог интензитета а супротног смера од тангентне компоненте контактне силе  ${}^T \mathbf{f}_c^i$  и може имати вредност од 0 до  $\mu_s {}^N \mathbf{f}_c^i$ . Уколико је тангентна компонента  ${}^T \mathbf{f}_c^i$  већа од  $\mu_s {}^N \mathbf{f}_c^i$  долази до кретања међу контактним површинама а сила трења клизања је дата изразом:

$$\mathbf{f}_{fk}^i = \mu_k {}^N \mathbf{f}_c^i, \quad (5.4.7)$$

где је  $\mu_k \leq \mu_s$  коефицијент кинетичког трења.

Без обзира да ли се ради о статичком или динамичком трењу израз за закон одржања количине кретања дат изразом (5.3.13) треба кориговати укључивањем силе трења:

$$\frac{Dv_\alpha^i}{Dt} = - \sum_{j \in SS} m^j \left( \frac{\sigma_{\alpha\beta}^j}{\rho^{j2}} + \frac{\sigma_{\alpha\beta}^i}{\rho^{i2}} \right) \frac{\partial W^{ij}}{\partial x_\beta^i} - \frac{f_c(\mathbf{x}^i)}{m^i} - \frac{f_{f\alpha}^i}{m^i}, \quad (5.4.8)$$

где силе трења  $f_f^i$  може бити статичка или динамичка на основу услова (5.4.6)

$$f_{f\alpha}^i = \begin{cases} f_{fs\alpha}^i = -{}^T f_c^i & {}^T \mathbf{f}_c^i \leq \mu_s {}^N \mathbf{f}_c^i \\ f_{fk\alpha}^i = -\mu_k {}^N f_c^i & {}^T \mathbf{f}_c^i > \mu_s {}^N \mathbf{f}_c^i \end{cases} \quad (5.4.9)$$

## 6 МЕТОДОЛОГИЈА ПРЕ И ПОСТ-ПРОЦЕСИРАЊА

Један од основних циљева ове дисертације био је развој методологије за моделирање грануларних материјала и анализу интеракције грануларних материјала са еластичним и еласто-пластичним материјалима од којих су сачињени уређаји и конструкције за њихов транспорт, складиштење и обраду. Након материјалног модела за грануларне материјале и интеракције МКЕ и СПХ солвера који су описани у претходним главама, у овој глави биће дат кратак осврт на још два битна дела поменуто методологије: процес генерисања улазних датотека за МКЕ и СПХ солвере и процес анализе добијених резултата. Тачност резултата који се добијају МКЕ анализом зависи од тога колико је модел детаљан и од квалитета мреже коначних елемената, тако је пожељно имати што правилније елементе а исто се може закључити и за равномеран распоред СПХ честица [95].

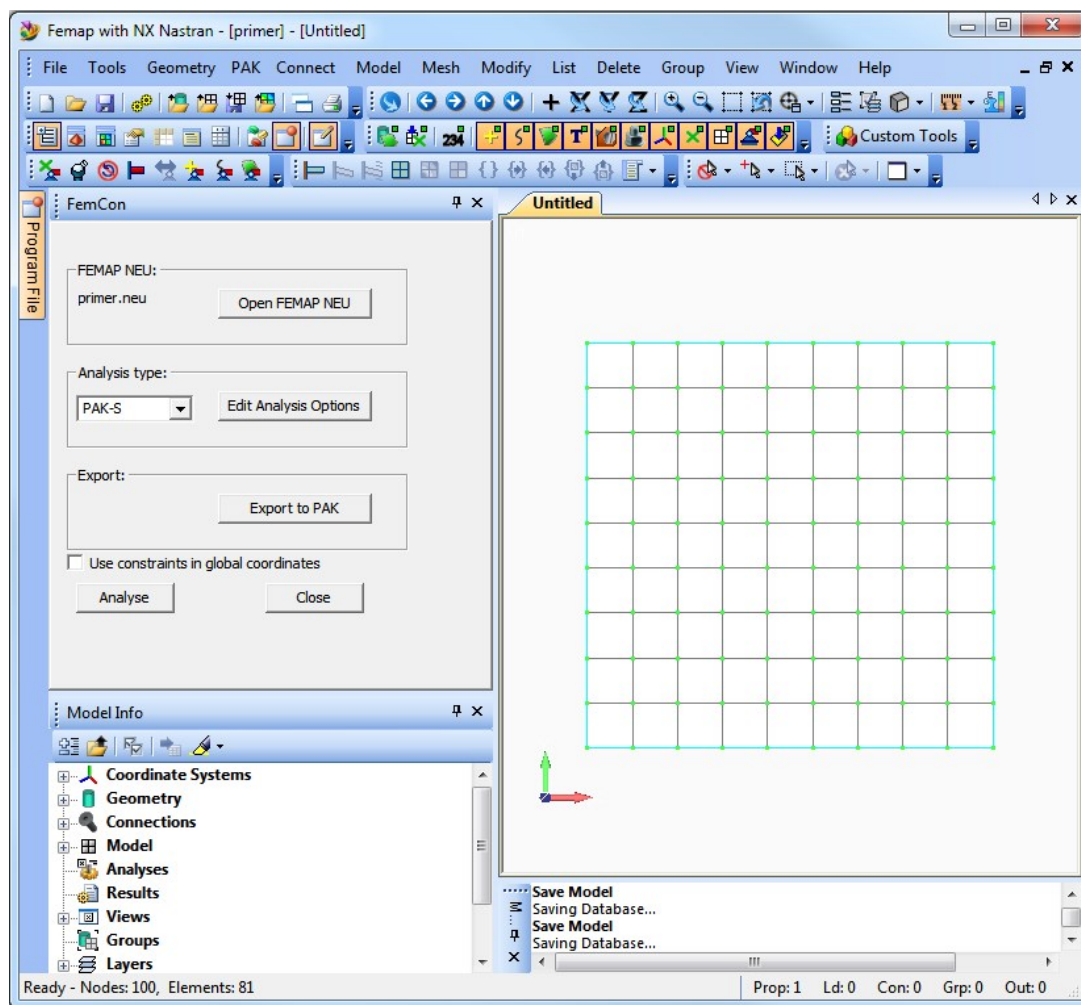
У оквиру ове дисертације коришћени су РАК (Програм за Анализу Конструкција) МКЕ солвер који се развија у Лабораторији за композитне материјале и инжењерски софтвер на Факултету инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу [54], МСМ (Meshless Continuum Mechanics) СПХ солвер који је развијен на Кренфилд универзитету у Великој Британији у оквиру групе за испитивање судара и структурну механику проф. Вигњевића [41] и SPH07 солвер [59], који се развија на Институту за математику и информатику Природно-Математичког факултета Универзитета у Крагујевцу, а који је заснован на МСМ-у [95].

Међу комерцијалним програмима СПХ опција није широко распрострањена и за сада постоји само у LS-DYNA-и (од верзије 971 из 2000) [96] а одскора (од верзије 6.11 из 2011) и у ABAQUS-у [97]. У лабораторији за композитне материјале и инжењерски софтвер за генерисање улазне датотеке се користи SIEMENS-ов програм FEMAP [98] који омогућава учитавање већине стандардних геометријских формата, има широк спектар алата за дефинисање геометрије и омогућава креирање улазних датотека за већину комерцијалних МКЕ солвера. FEMAP представља један од најфункционалнијих програма за генерисање МКЕ мреже али на жалост, обзиром на малу заступљеност СПХ опције у комерцијалним солверима, опција генерисања СПХ честица још увек не постоји у FEMAP-у, тако да је за пре-процесирање (поред FEMAP-а који служи за генерисање МКЕ улазне датотеке) потребно користити друге програме за генерисање СПХ улазне датотеке, као и за пост-процесирање резултата анализе, о чему ће бити речи у наредним поглављима.

### 6.1 Генерисање улазне датотеке за МКЕ солвер

Модел генерисан у FEMAP могуће је извести и учитати у већини комерцијалних МКЕ програма, али за креирање улазне датотеке за РАК било је потребно креирати посебан преводилац програм (транслатор, одомаћени англицизам), који учитава све неопходне податаке сачуване у FEMAP \*.neu фајлу и пакује их у формату РАК улазне датотеке

\*.dat. FEMAP омогућава знатна прилагођавања корисничког окружења, тако да је могуће додати екстерни програм у главни мени (у овом случају РАК транслатор), који када се покрене, постаје саставни део FEMAP-овог окружења (слика 6.1.1).



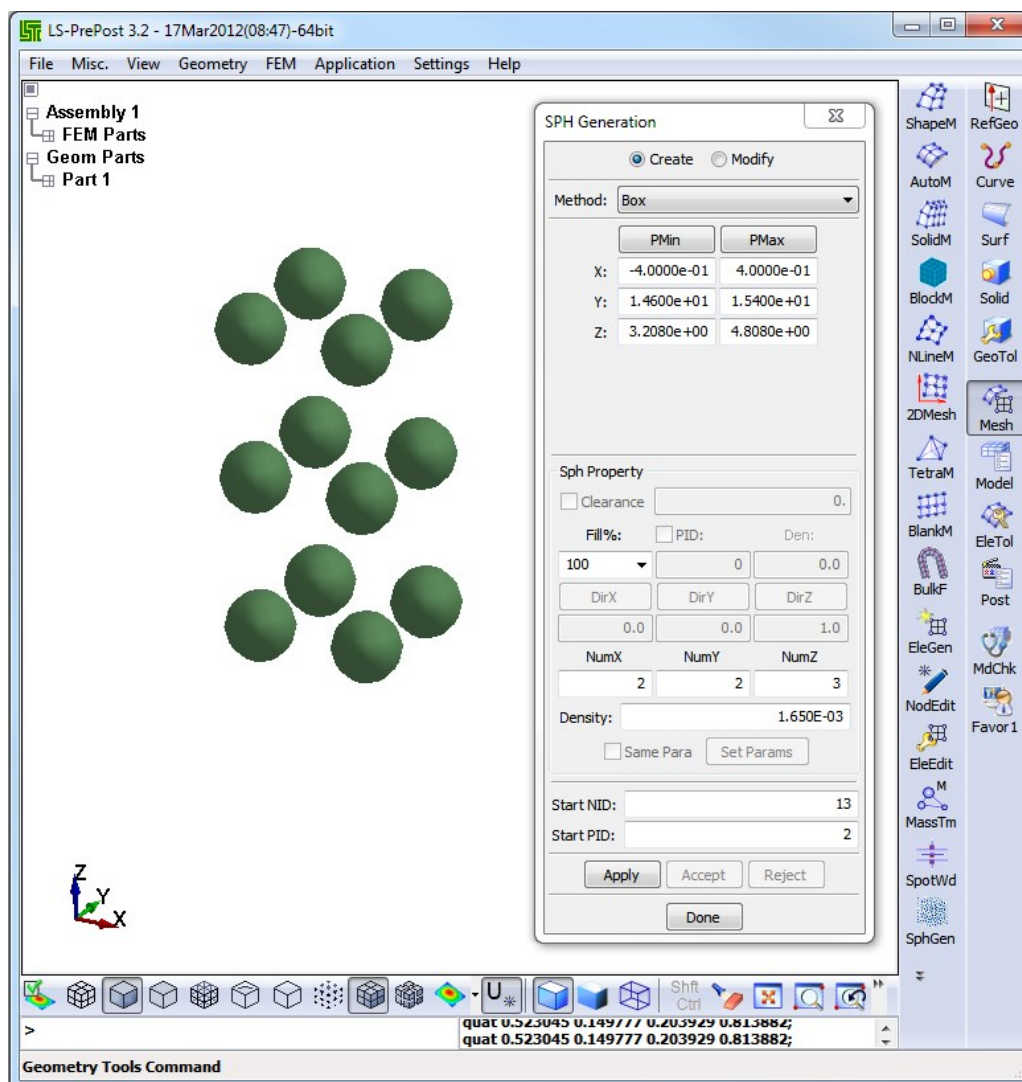
Слика 6.1.1 Изглед FEMAP окружења са РАК транслатором

РАК транслатор и FEMAP комуницирају преко API (Application Programming Interface) метода које омогућавају РАК транслатору да аутоматски задаје наредбе FEMAP-у које би без API метода корисник сам морао да задаје, тако да је помоћу РАК транслатора могуће покренути анализу у РАК-у и учитати резултате у FEMAP након завршетка анализе. Пошто је у случају МКЕ-СПХ повезивања неоподно имати и улазну датотеку за СПХ коју није могуће направити у FEMAP-у РАК транслатор се користи да изведе улазну датотеку за РАК, која се при покретању анализе ручно уноси у солвер (заједно са СПХ улазном датотеком).

## 6.2 Генерисање улазне датотеке за СПХ солвер

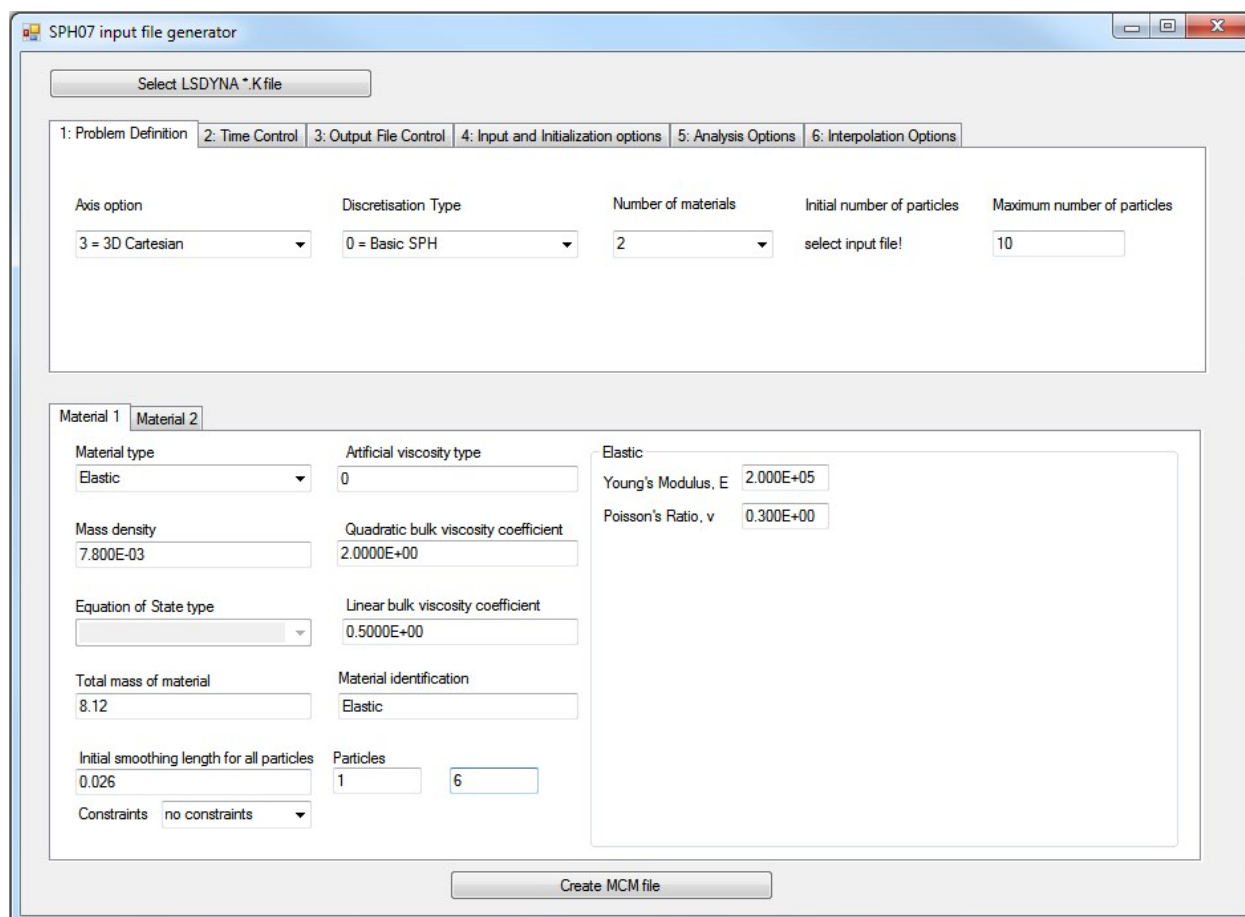
Пошто улазну датотеку за СПХ није могуће направити у FEMAP-у, за генерисање СПХ честица коришћен је програм LS-PrePost који представља основни алат за пре и пост-

процесирање за солвер LS-DYNA који развија Livermore Software Technology Corporation а који је за разлику од LS-DYNA солвера бесплатан за коришћење.



Слика 6.2.1 Корисничко окружење програма LS-PrePost

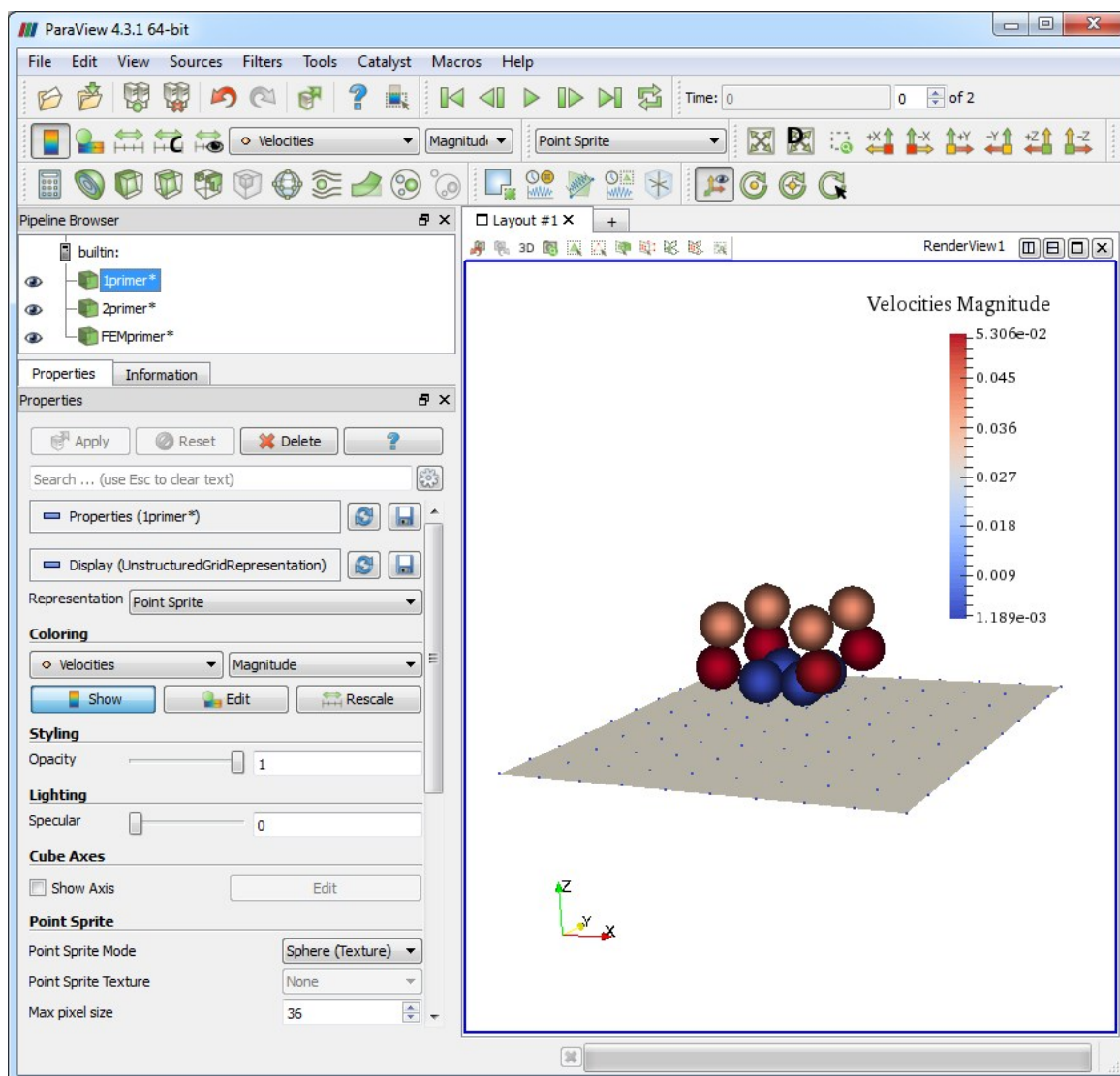
Током израде ове дисертација развијен је транслатор програм који служи за креирање улазних датотека за MCM и SPH07 програме на основу скупа честица генерисаних у програму LS-PrePost. У односу на FEMAP, LS-PrePost је мање интуитиван и има мање функција за генерисање геометрије и мреже, а такође нема ни API функције тако да у њега није могуће уградити транслатор за SPH. SPH транслатор се покреће изван LS-PrePost програма, при чему се прво модел извози у LS-DYNA улазну датотеку \*.k, која се потом учитава у SPH транслатор, у коме се подешавају додатни параметри који дефинишу анализу у SPH07 или MCM програмима, након чега се генерише улазна датотека \*.mcm (слика 6.2.2).



Слика 6.2.2 Транслатор програм за генерисање СПХ улазних датотека

### 6.3 Пост-процесирање резултата

За представљање резултата након завршетка анализе потребно је користити програм који може да прикаже како СПХ честице, тако и коначне елементе. За ту сврху коришћен је бесплатни програм ParaView који развија Kitware inc. у сарадњи са Los Alamos National Laboratory. ParaView може да учита широк спектар излазних формата а приликом израде ове дисертације коришћен је \*.vtk формат који има једноставну структуру и омогућава лако генерисање излазног фајла након сваког корака у СПХ и МКЕ анализи. Излазни фајлови се генеришу за сваки материјал у СПХ анализи посебно, као и за све СПХ честице и све елементе, тако да је могуће укључивати и искључивати приказ честица одређеног материјала по потреби (слика 6.3.1).



Слика 6.3.1 Пос-процесирање резултата у програму ParaView

Приликом подешавања опција за приказ СПХ честица коришћен је Point Sprite додаток (plugin) за ParaView који омогућава приказ честица као сфера.

ParaView је претходно коришћен и за визуелизацију ДЕМ резултата.

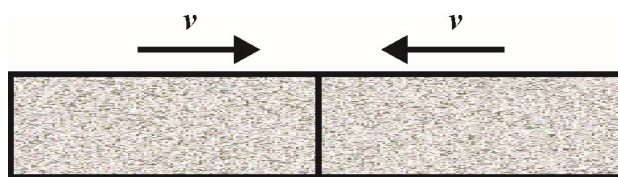
## 7 ПРИМЕРИ

У овој глави дати су примери који су коришћени за верификацију развијене методологије моделирања интеракције грануларних материјала са уређајима и конструкцијама за њихов транспорт, складиштење и обраду а која се заснива на повезивању МКЕ и СПХ методе. Примери анализе понашања грануларног материјала помоћу ДЕМ методе дати су на крају треће главе и њихова сврха је нумеричка верификација теоретских претпоставки заснованих на експерименталном проучавању грануларних материјала, док су примери у овој глави орјентисани ка практичној примени и приказују поступак који се може користити при анализи реалних проблема сложене геометрије.

Први пример судара два цилиндра је коришћен за верификације еластопластичног материјалног модела и контактнoг алгоритма. Други пример представља нумеричко моделирање колапса стуба грануларног материјала (песка) и коришћен је за верификацију генералисаног материјалног модела са капом. Трећи пример представља киповање купе сачињене од грануларног материјала и коришћен је за верификацију интеракције МКЕ и СПХ методе. Четврти пример представља пут даљег истраживања где се у материјални модел укључује и утицај температуре која битно одређује карактеристике супстанце која се налази између грануларних честица.

### 7.1 Судар два цилиндра

У овом примеру анализира се понашање два цилиндра од легуре алуминијума при судару (слика 7.1.1).

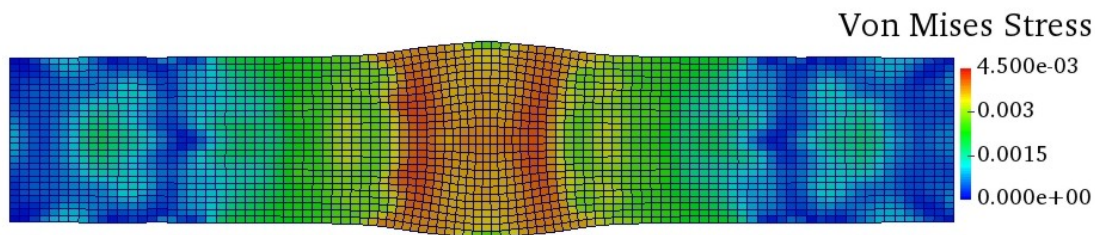


Слика 7.1.1 2Д модел судара

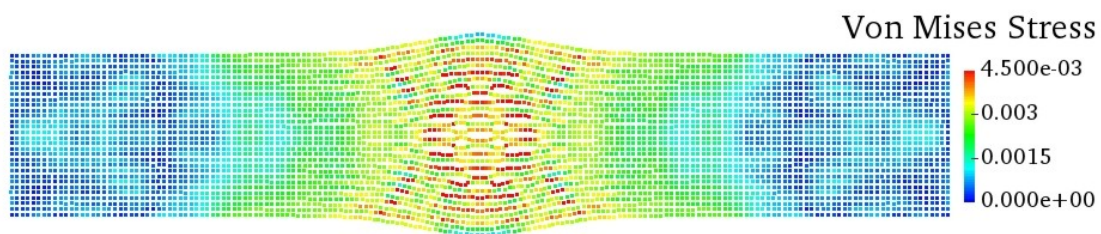
Густина легуре је  $\rho = 2700 \text{ kg} / \text{m}^3$ , Поасонов коефицијент је  $\nu = 0.33$ , Јангов кодул је  $E = 1.65 \times 10^5 \text{ MPa}$  док је граница течења  $\sigma^y = 290 \text{ MPa}$ . Брзина оба цилиндра је  $v = 10 \text{ m} / \text{s}$ .

Ради провере тачности, резултати СПХ анализе су упоређени са резултатима МКЕ анализе извршене у програму LS-DYNA. Због аксијалне симетрије цилиндара анализа се врши у 2Д простору и то са 25x50 коначних елемената и 30x90 СПХ псеудо-честица. На слици 7.1.2 дати су Фон Мизесови напони добијени помоћу МКЕ док су на слици 7.1.3 дати Фон Мизесови напони добијени СПХ методом.





Слика 7.1.2 Фон Мизесови напони добијени помоћу МКЕ

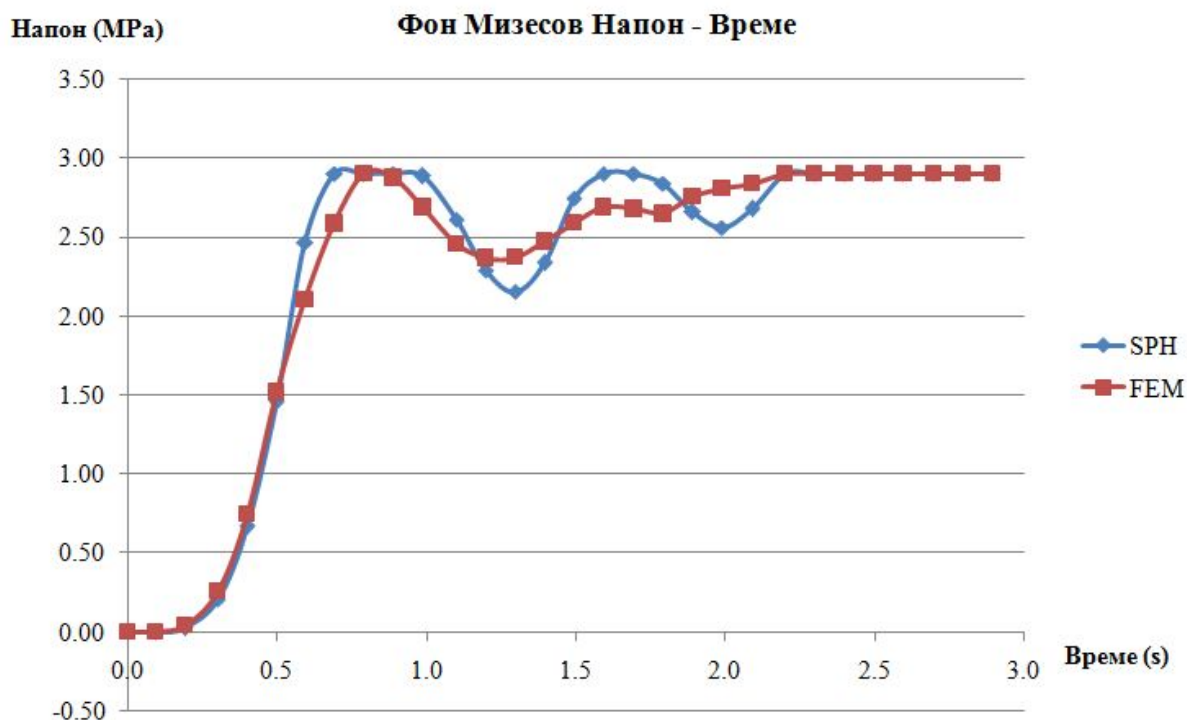


Слика 7.1.3 Фон Мизесови напони добијени СПХ методом

На основу слика 7.1.2 и 7.1.3 види се да за дати пример МКЕ и СПХ метода дају сличне резултате [89], с тим што се мора нагласити да је поље напона у СПХ методи мање хомогено.

Промене Фон Мизесових напона у току времена за елемент и СПХ честицу који се налазе на срединама цилиндара на месту контакта дате су на следећој слици:





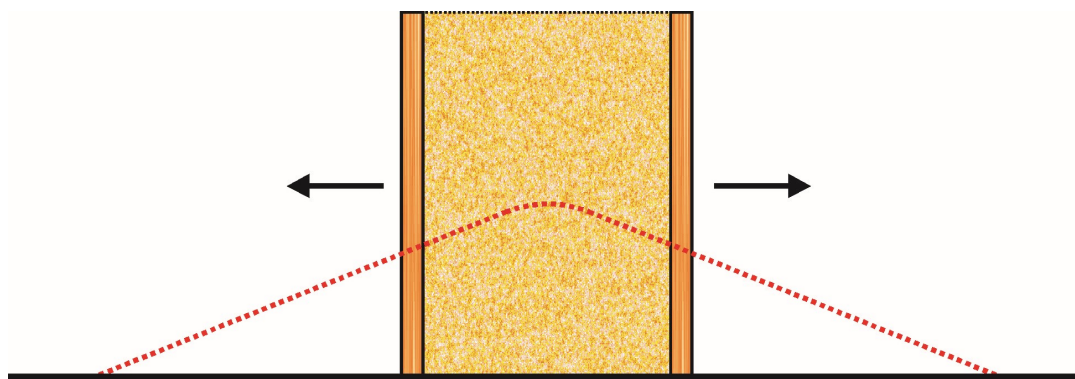
Слика 7.1.4 Промена напона у току времена

Са претходне слике се види да су осцилације напона у СПХ методи веће од осцилација напона у МКЕ, али је подударање резултата на високом нивоу.

Контактни алгоритам међу СПХ псеудо-честицама адекватно рачуна контактне силе па је понашање цилиндара идентично понашању које се добија применом МКЕ [89].

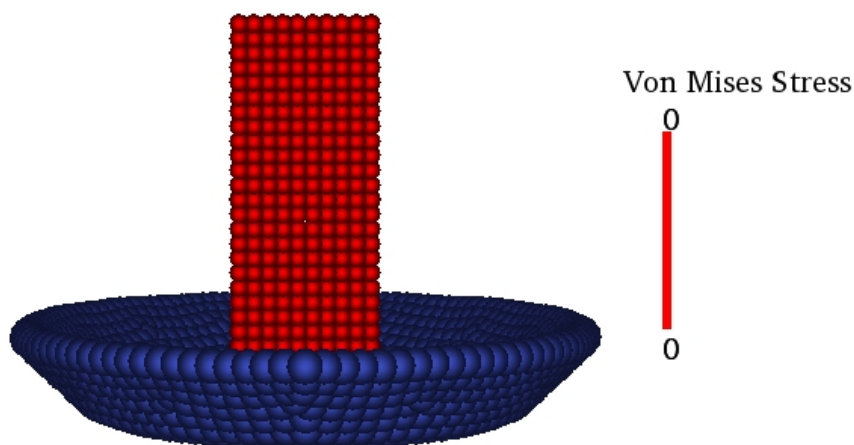
## 7.2 Колапс стуба грануларног материјала

Грануларни материјали имају ограничену способност да носе сопствену тежину, тако да ако нису ограничени зидовима формирају структуре облика купе чија изводница са хоризонталом заклапа угао који је једнак или мањи углу природног трења. Уколико се зидови који држе грануларни материјал нагло уклоне долази до колапса грануларног материјала, док угао изводнице не достигне вредност угла природног трења. Материјални модел који се користи за анализу понашања грануларних материјала мора да омогући реалну симулацију претходно описаног понашања. У сврху тестирања генералисаног материјалног модела са капом, извршено је моделирање колапса стуба грануларног материјала на основу експеримента који су вршили Ју и коаутори [99] а чији је шематски приказ дат на слици 7.2.1.



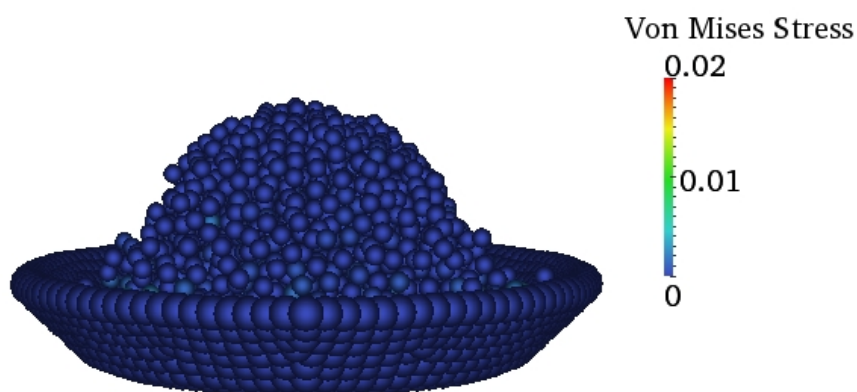
Слика 7.2.1 Шематски приказ колапса стуба грануларног материјала и формирања купе

Густина материјала је  $\rho = 2099 \text{ kg / m}^3$ , запремински модул је дат са  $K = 30.62 \text{ GPa}$ , док је смичући модул  $G = 8.23 \text{ GPa}$ . Материјалне карактеристике за генерализани материјални модел са капом које описују површ течења дефинисану једначином (4.6.3.15) су  $k = 0.03858$ ,  $\theta = 0.03$ ,  $\gamma = 0.03858$ ,  $B_1 = 9.0$ , док су за закон ојачања дат са (4.6.3.4) константе  $D = 7.25$ ,  $W = 0.18$ ,  $X_0 = 0.0$ . Однос између полуоса елипсе капе (једначина 4.6.3.10) је  $R = 2.0$ . Колапс стуба грануларног материјала моделиран је у две верзије: у првој верзији стуб се налази у посуди чија је сврха да ограничи хоризонтално кретање честица грануларног материјала по подлози чиме се искључује утицај контакта и трења [100], док се у другој верзији стуб налази на равnoj плочи, што одговара експерименту приказаном у [99]. Грануларни стуб је димензија  $72\text{mm} \times 72\text{mm} \times 192\text{mm}$  и моделиран је са 2500 СПХ честица. Изглед прве варијанте модела у почетном тренутку (након уклањања зидова) дат је на слици 7.2.2.



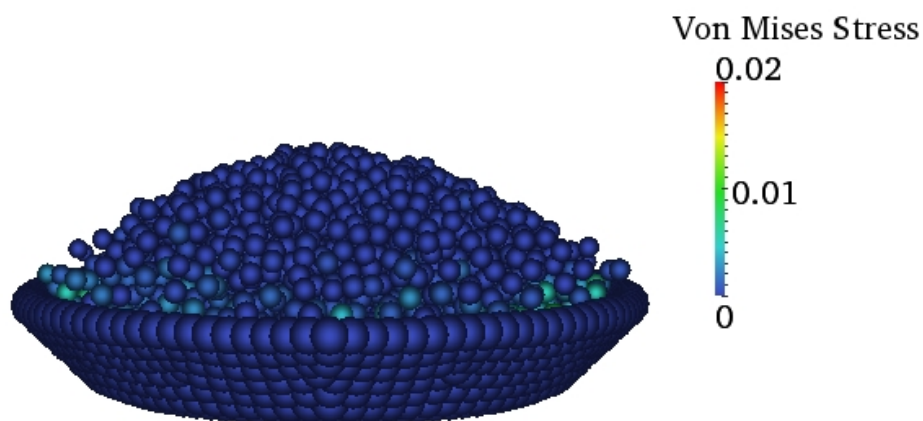
Слика 7.2.2 Почетно стање ( $t=0\text{s}$ ) при колапсу стуба песка (1. варијанта)

На слици 7.2.3 дат је изглед модела након  $0.2\text{s}$ .



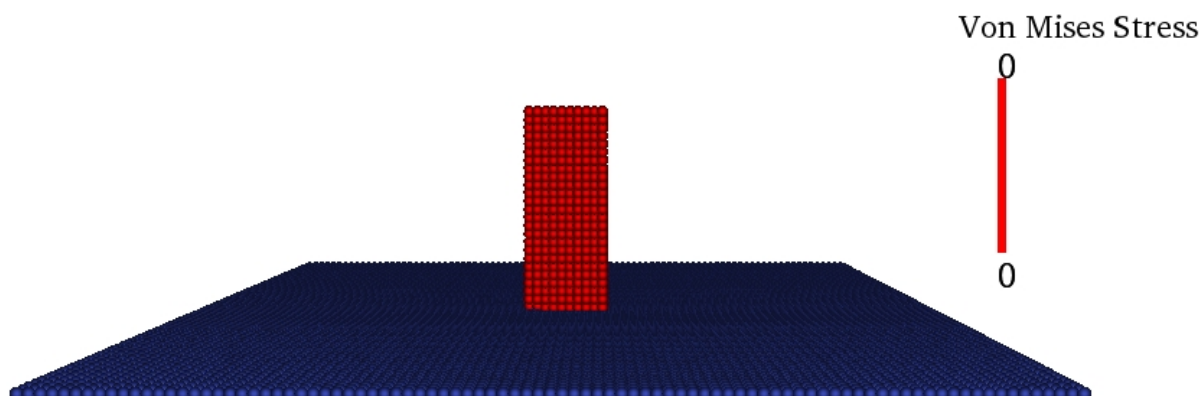
Слика 7.2.3 Стање модела у тренутку  $t=0.2s$  (1. варијанта)

На слици 7.2.4 дат је изглед модела након  $1s$  када долази до слегања материјала и опадања брзине на вредност приближну  $0$ , при чему је посуда у потпуности испуњена, а грануларни материјал формира купасту структуру која је очекивана на основу карактеристика понашања датих у глави 2 ове дисертације.



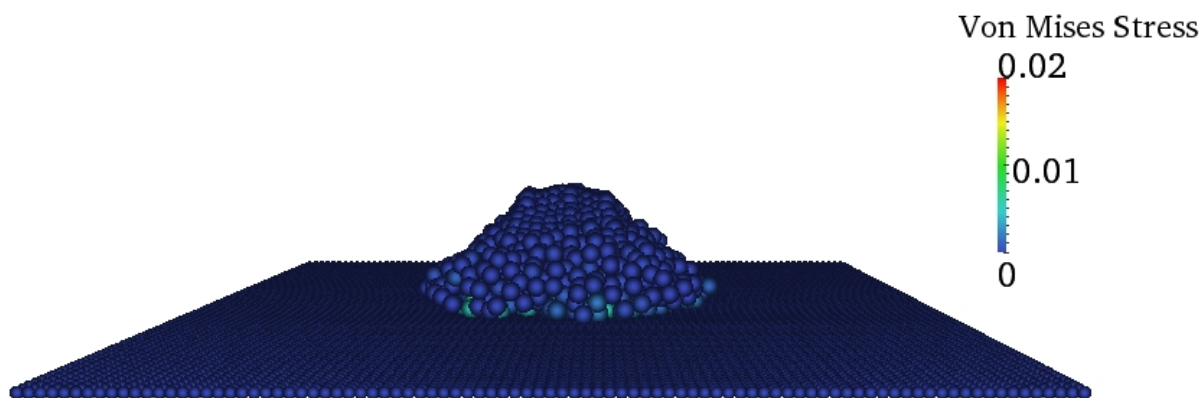
Слика 7.2.4 Крајње стање модела колапса стуба песка у тренутку  $t=1s$  (1. варијанта)

У другој варијанти модела материјални параметри и димензије стуба су исте као и у првој варијанти а уместо посуде, грануларни стуб се налази на равној плочи (слика 7.2.5).



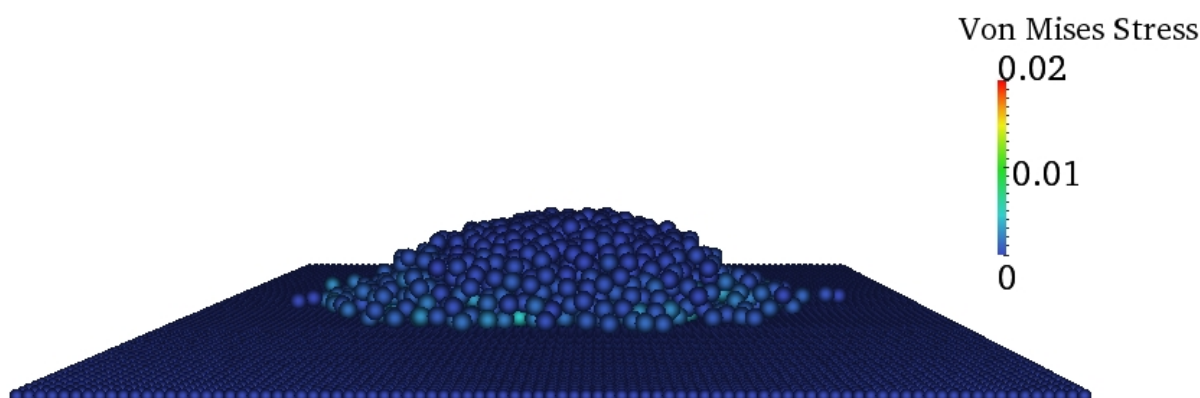
Слика 7.2.5 Почетно стање ( $t=0s$ ) при колапсу стуба песка (2. варијанта)

На слици 7.2.6 дат је изглед модела након  $0.2s$  при чему је изглед грануларног материјала сличан изгледу који је материјал имао када се стуб налазио у посуди, а који је дат на слици 7.2.3.



Слика 7.2.6 Стање модела у тренутку  $t=0.2s$  (2. варијанта)

Крајње стање које се добија након  $1s$  је дато на слици 7.2.7.

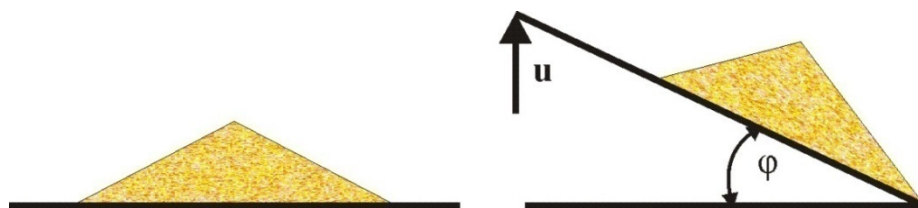


Слика 7.2.7 Крајње стање модела колапса стуба песка у тренутку  $t=1\text{s}$  (2. варијанта)

Са претходних слика се види да се за дате материјалне параметре модел понаша реалистично и у складу да експерименталним резултатима датим у [99].

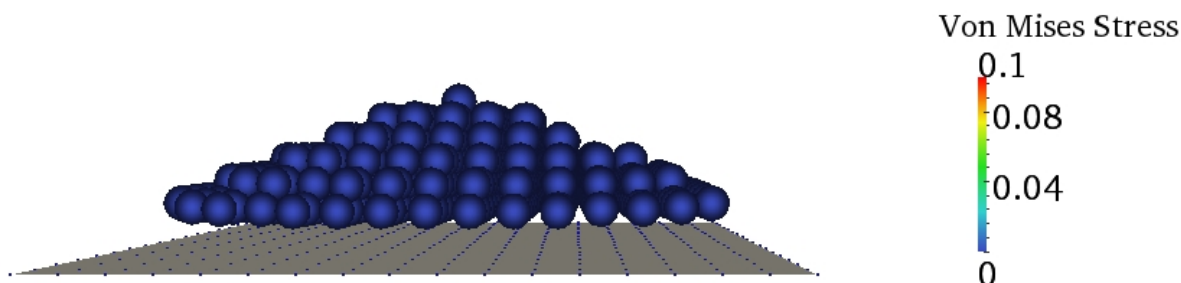
### 7.3 Киповање грануларног материјала

Адекватно моделирање интеракција грануларног материјала са уређајима који служе за њихово складиштење транспорт и обраду затхева спрезање МКЕ и СПХ методе при чему се грануларни материјал моделира СПХ честицама, док се еластопластични материјал од кога су направљени поменути уређаји моделира коначним елементима. Ово спрезање представља унапређење у односу на прорачун танкозидних конструкција за складиштење флуида код кога се аналитички израчунате силе услед притиска користе као оптерећење на чворовима [101]. Методологија заснована на спреси МКЕ и СПХ методе користи контактне силе израчунате у СПХ солверу као чворна оптерећења у МКЕ прорачуну. За верификацију спреге МКЕ и СПХ методе коришћен је модел киповања купе сачињене од грануларног материјала чије су материјалне карактеристике идентичне са грануларним материјалом коришћеним у претходном примеру а купа је измоделирана у програму LS-PrePost са 478 СПХ честица. Плоча је измоделирана у FEMAP-у са 289 елементата и 324 чвора који се у току прорачуна копирају у 324 СПХ честице. Померање једног краја плоче је задато а померање осталих МКЕ чворова се рачуна у РАК-у (слика 7.3.1).



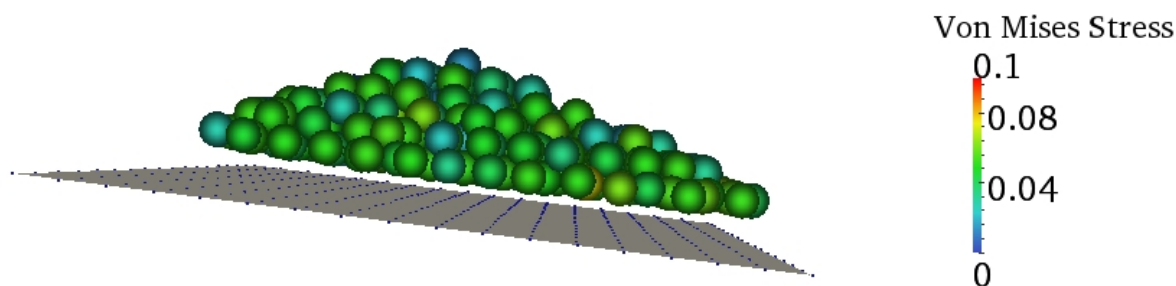
Слика 7.3.1 Шематски приказ модела киповања

Угао који изводнице заклапају са хоризонталом је нешто мањи од угла природног трења. Изглед модела у почетном тренутку је дат на слици 7.3.2.



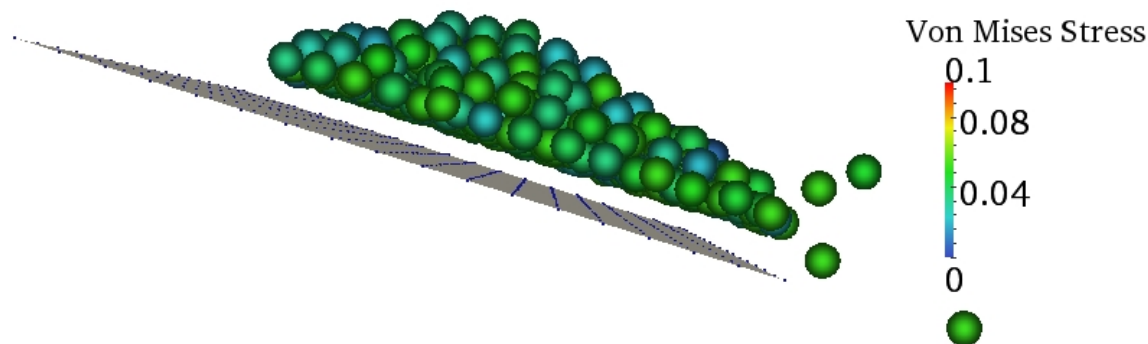
Слика 7.3.2 Почетно стање модела киповања у тренутку  $t=0s$

Након 0.2 s угао изводнице купе ка фиксној ивици плоче постаје већи од угла природног трења и почиње осипање те стране купе (слика 7.3.3)

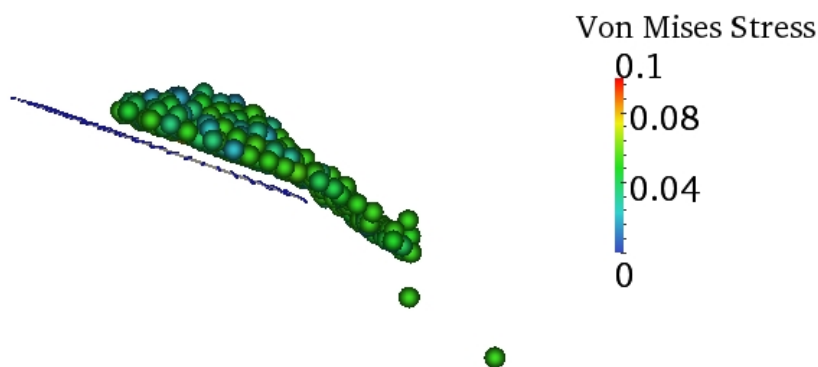


Слика 7.3.3 Почетак осипања у тренутку  $t=0.2s$

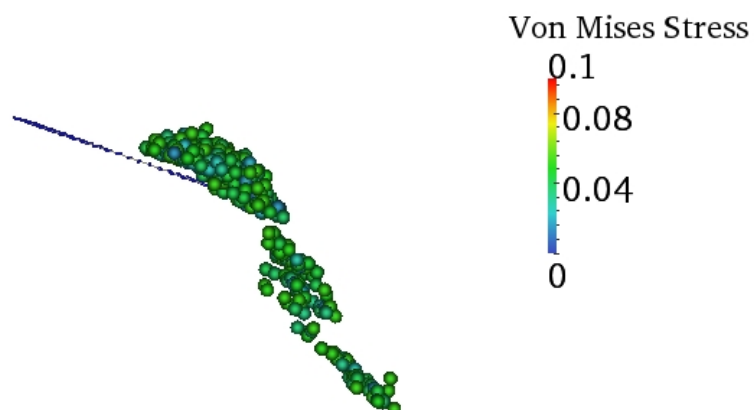
На наредној слици приказан је изглед модела када се плоча нађе под углом једнаким углу природног трења и када почиње клизање целе купе по плочи.

Слика 7.3.4 Почетак клизања у тренутку  $t=0.45s$ 

Клизање и осипање се настављају и убрзавају са повећањем угла плоче а у тренутку  $t=0.5s$  се кретање плоче зауставља. Услед земљине теже долази до убрзања честица па је изглед модела након  $0.65s$  дат на слици 7.3.4.

Слика 7.3.5 Изглед модела у тренутку  $t=0.46s$ 

Након  $1s$  знатан део грануларног материјала се налази у стању слободног пада а остатак купе се налази близу фиксне ивице плоче (слика 7.3.6).



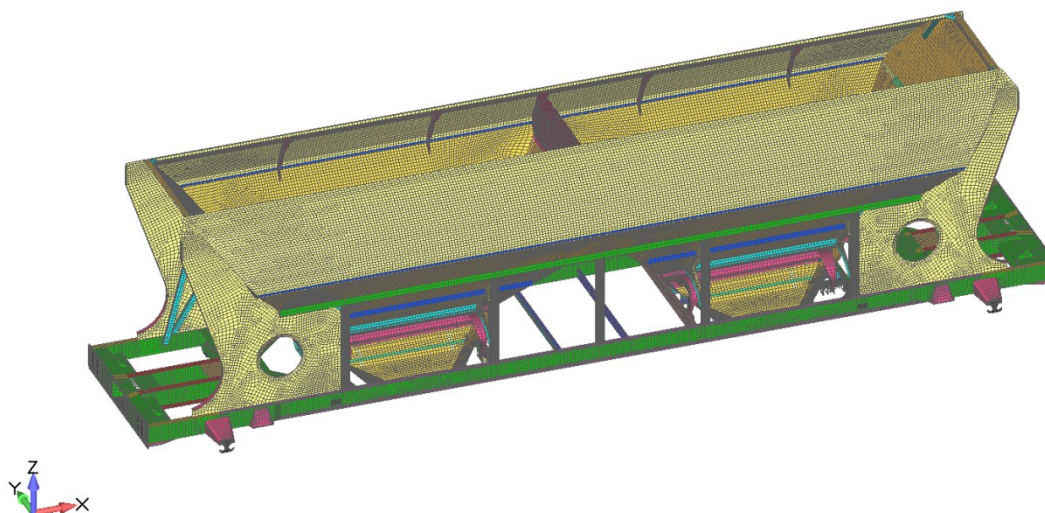
Слика 7.3.6 Изглед модела на крају прорачуна у тренутку  $t=1s$

Са претходних слика се види да развијена методологија даје реалистичне резултате и да је њена примена у анализи реалних конструкција могућа и сврсисходна.



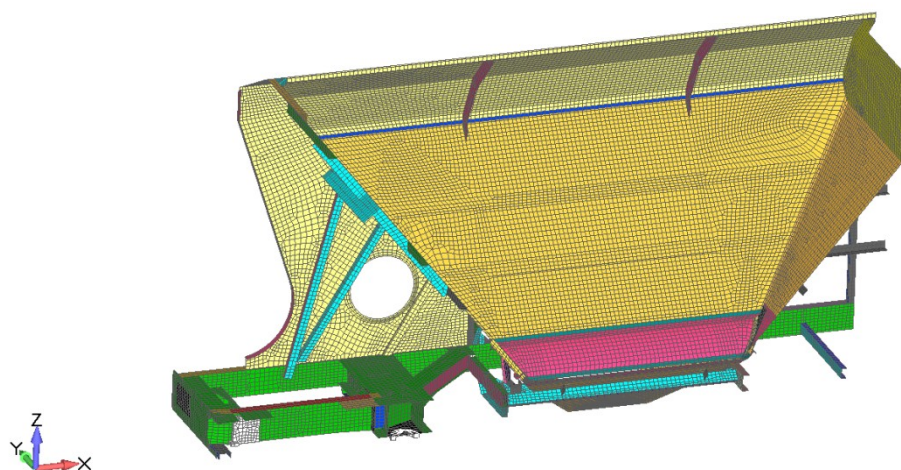
## 7.4 Моделирање пражњења теретног вагона

Употреба спреге МКЕ и СПХ методе на примерима реалних конструкција које се користе за транспорт грануларних материјала демонстрирана је на моделу пражњења теретног вагона. Вагон служи за превоз песка и шљунка густине  $\rho = 2099 \text{ kg/m}^3$ , и запреминског модула датог са  $K = 30.62 \text{ GPa}$ , док је смичући модул  $G = 8.23 \text{ GPa}$ . Материјалне карактеристике за генерализани материјални модел са капом су  $k = 0.00106$ ,  $\theta = 0.004$ ,  $\gamma = 0$ ,  $B_1 = 1.0$ , док су за закон ојачања  $D = 7.25$ ,  $W = 2.58$ ,  $X_0 = 0.0$ . Однос између полуоса елипсе је  $R = 2.0$ . Коefицијент статичког трења између челика и грануларног материјала је  $\mu_s = 0.65$ , док је кинематски коefицијент трења  $\mu_k = 0.55$ . У реалној конструкцији услед трења долази до таложења материјала на ивицама сандука и на површини левка за пражњење. Мрежа коначних елемената је направљена у програму FEMAP. Модел целог вагона се састоји од 156236 елемената и приказан је на слици 7.4.1.



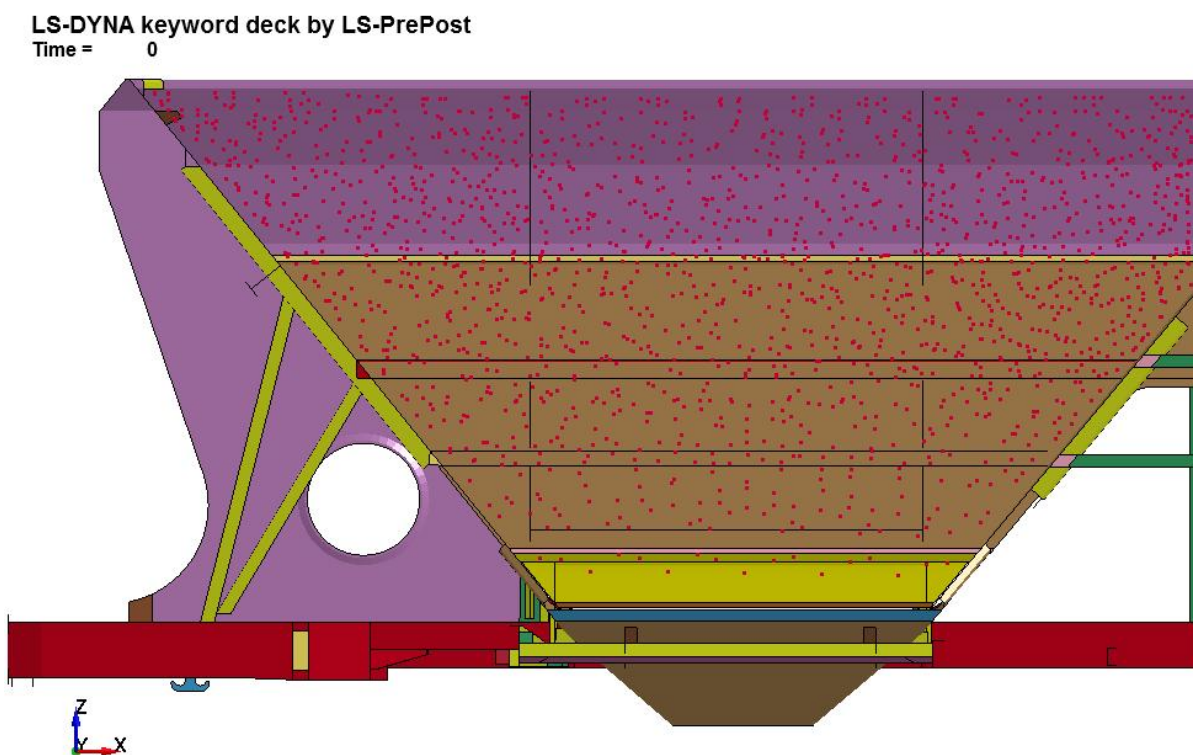
Слика 7.4.1 Цео модел теретног вагона

Због услова симетрије у МКЕ анализи [102] се најчешће користи четвртина модела, која је у случају теретног вагона моделирана са 39589 елемената и дата је на следећој слици.



Слика 7.4.2 Четвртина модела теретног вагона

Четвртина модела која је креирана у програму FEMAP је учитана у програм LS-PrePost у коме су генерисане СПХ честице, што је приказано на следећој слици.

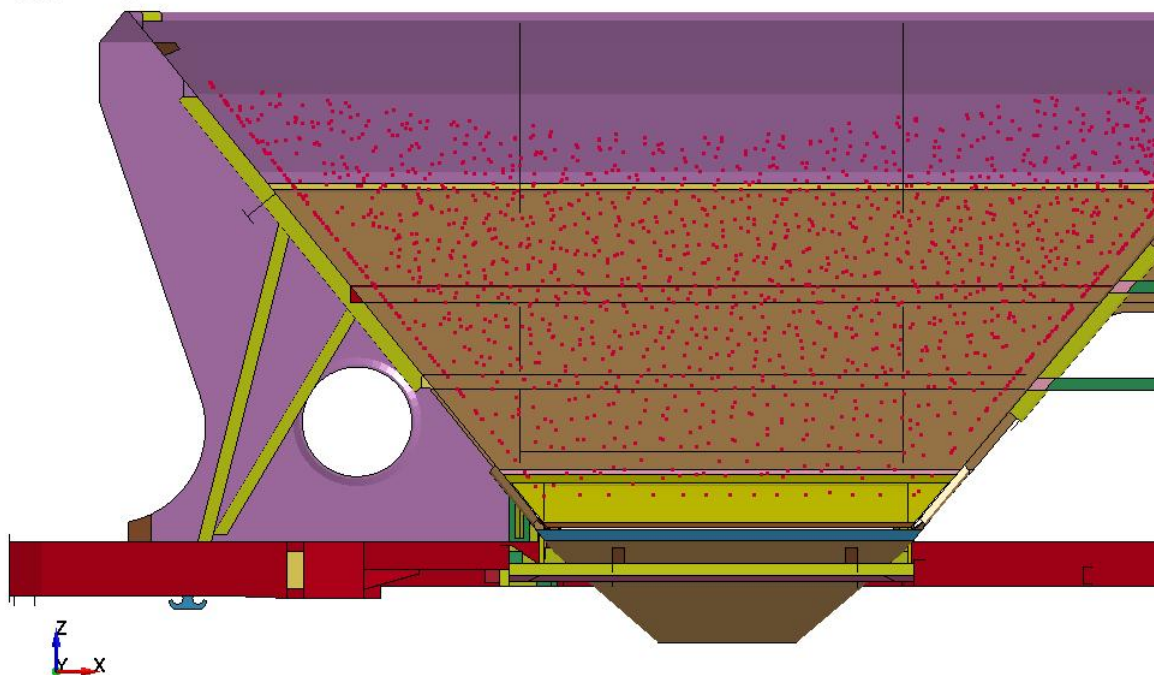


Слика 7.4.3 Почетни положај честица

Анализа пражњења вагона је обављена у програму LS DYNA. Након слегања које траје 1.5 секунди, изглед модела је приказан на слици 7.4.4.

LS-DYNA keyword deck by LS-PrePost

Time = 1.5

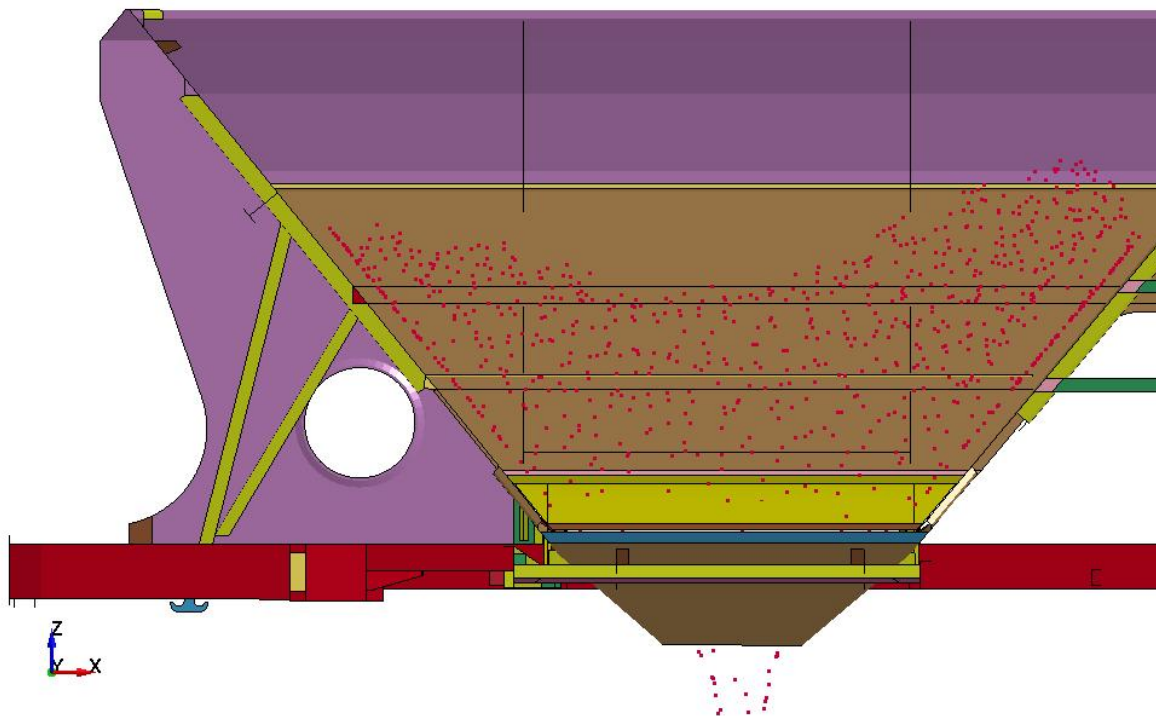


Слика 7.4.4 Положај честица након слегања

Након 1.5 секунде отварају се вратанца на левку и почиње пражњење вагона. Изглед модела након 10 секунди дат је на слици 7.4.5.

LS-DYNA keyword deck by LS-PrePost

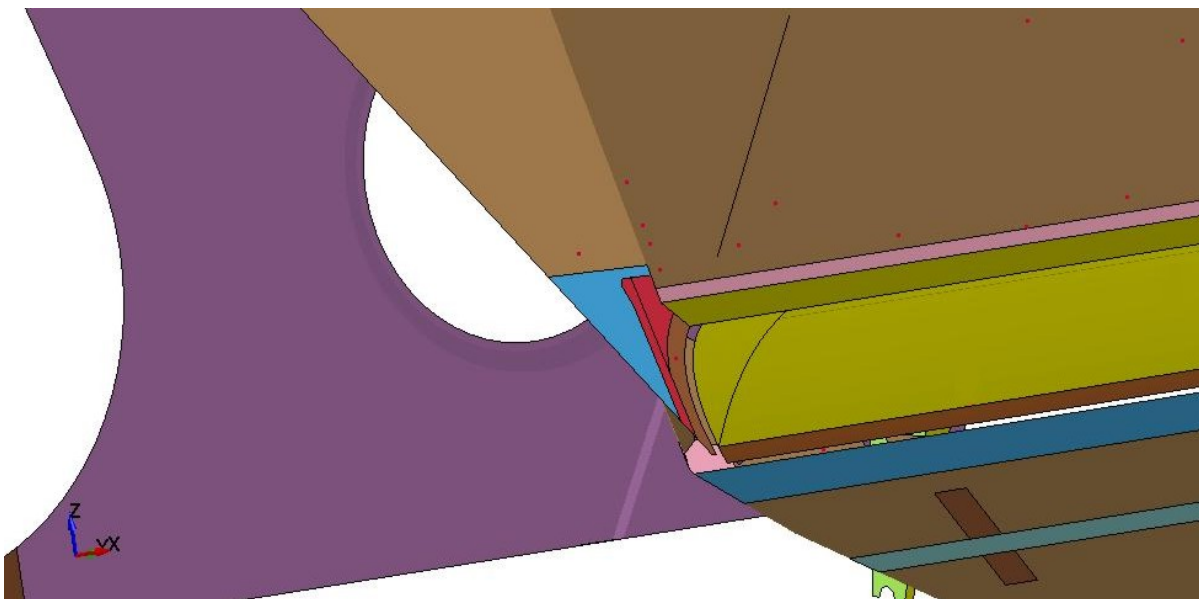
Time = 10



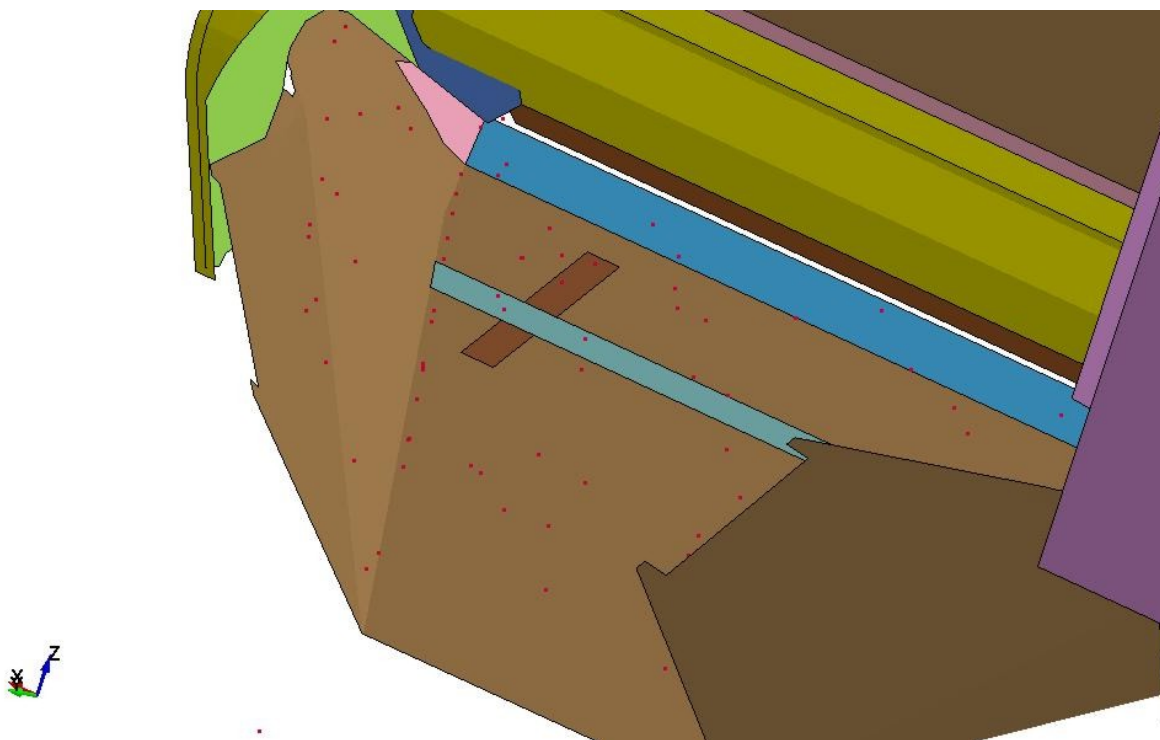
Слика 7.4.5 Пражњење вагона након 10 секунди



Услед великих коефицијената трења део грануларног материјала не истекне, већ се наталожи на ивици сандука и на површини левка, што је приказано на сликама 7.4.6 и 7.4.7.



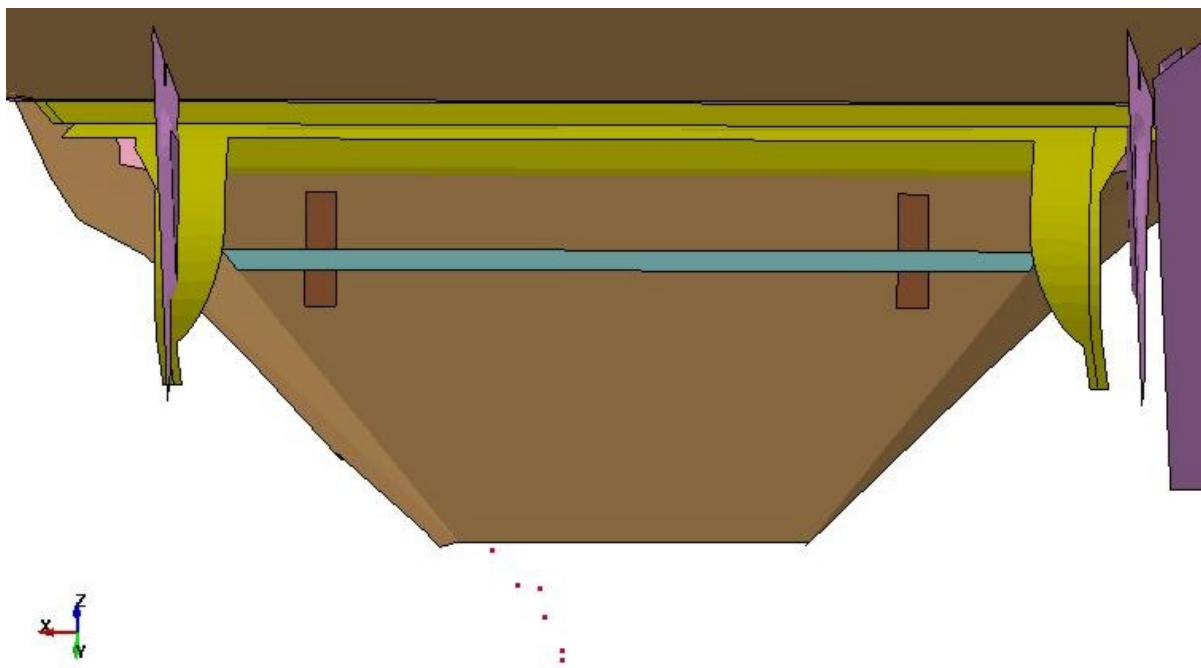
Слика 7.4.6 Таложење материјала на ивици сандука



Слика 7.4.7 Таложење материјала на површини левка

Решење проблема таложења материјала код нових вагона може бити измена геометрије односно повећање радијуса и углова левка, док је код вагона који су већ у експлоатацији могуће офарбати вагон са унутрашње стране, чиме би се смањило трење између грануларног материјала и делова вагона. Смањење коефицијената трења на

вредности  $\mu_s = 0.55$  и  $\mu_k = 0.45$  резултира потпуним пражњењем вагона што је дато на следећој слици.



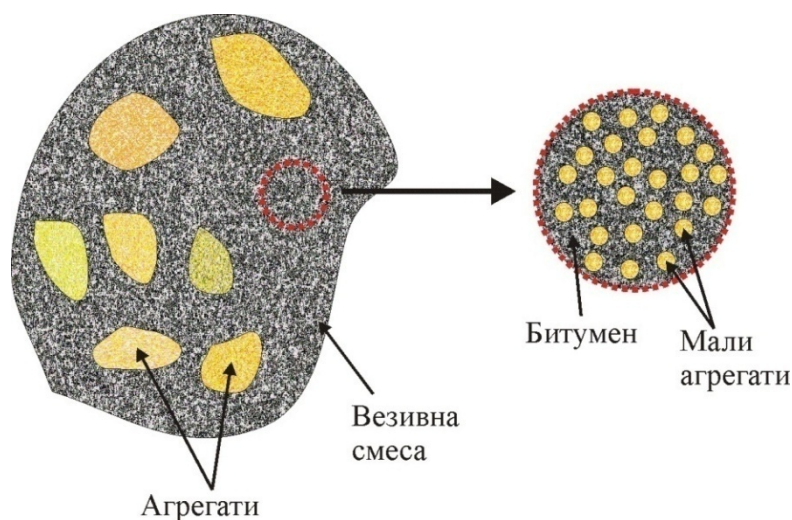
Слика 7.4.8 Потпуно пражњење вагона са смањеним коефицијентима трења

## 8 МКЕ АНАЛИЗА ПОНАШАЊА АСФАЛТА СА УТИЦАЈЕМ ТОПЛОТЕ

У претходно изнетим разматрањима изложена је анализа понашања грануларних материјала ДЕМ и СПХ методама чији безмрежни карактер омогућава моделирање великих деформација. Уколико грануларни материјали нису изложени великим деформацијама, погодније је користити МКЕ. При проучавању тла у геомеханици [1] посебна пажња се поклања утицају воде и ваздуха који се налазе у порама између зрна грануларног материјала (слика 2.1.1) и који могу битно утицати на материјалне карактеристике. У општем случају у порама се могу налазити и друге течности и гасови, али је у оквиру ове дисертације њихов утицај у до сада изложеним теоретским разматрањима и нумеричким примерима занемарен, иако може бити узет у обзир посредно, преко коефицијента трења код ДЕМ методе, или материјалних карактеристика код СПХ методе. У неким случајевима карактеристике супстанце која се налази у порама се битно мењају са променама температуре и са протоком времена па се ове промене морају узети у обзир при нумеричкој анализи. У овој глави биће дата анализа адаптације материјалног модела за асфалт и моделирање понашања асфалтне подлоге у контакту са точком.

### 8.1 Анализа материјалних модела за моделирање асфалта

Асфалт се састоји од 93-97% шљунка и песка (слика 2.1.2) који чине агрегат, и битумена који служи као везиво. За моделирање асфалта коришћен је хијерархијски приступ [103] код кога се прва фаза састоји од агрегата чији је еквивалентни пречник  $D$  већи од 0.3 mm (средњи песак, слика 2.1.2) а друга фаза је хомогена смеша мањих агрегата и везива (битумена) што је приказано на слици 8.1.



Слика 8.1.1 Хијерархијски приступ анализи састава асфалта

Са обзиром да су агрегати јако неправилног облика и широког спектра величина, мора се користити феноменолошки приступ апроксимације агрегатних укључака (фазе 1) и матрице (фазе 2) у хомогену супстанцу на основу Ешелбијеве теорије утиснутих укључака [104]. На основу ове теорије ако је у матрици хомогено поље деформација тада и у елиптичном укључку имамо хомогено поље деформација. Тада се примењује самоусаглашавајућа (selfconsistent на енглеском) теорија помоћу које се добијају ефективне материјалне константе репрезентативног запреминског елемента [67].

Битумен се добија током процеса фракционе дестилације сирове нафте и при високим температурама се понаша као вискозни флуид. Хлађењем, долази до његовог стврдњавања, што се користи приликом асфалтирања. Током времена услед цикличног оптерећења, долази до појаве пластичних деформација у асфалу, његовог старења и појаве пукотина. Главна идеја у ендохроној термодинамици је замена стварног времена неком не-оппадајућом скаларном функцијом историје нееластичне деформације која је одговорна за старење а коју се назива термодинамичким временом. Такво време се уводи помоћу акумулације нееластичне ентропије [105] на основу следећег израза:

$$\psi = (\rho/T) ds/dt + \nabla \cdot (\mathbf{q}/T), \quad (8.1.1)$$

где је  $\rho$  густина,  $s$  је специфична ентропија,  $\mathbf{q}$  је вектор специфичног топлотног флукса а  $T$  је апсолутна температура. У хомогеном температурном пољу  $\psi$  ишчежава, па према томе нееластични део једначине (8.1.1) је дат изразом:

$$\psi^P = \psi - \psi^T \rightarrow \psi^P \equiv \psi + \mathbf{q} \cdot \nabla T / T^2 \quad (8.1.2)$$

где је  $\psi^T$  ентропијски извор у термоеластичности [67]. Израз (8.1.2) може да се преформулише у следећу једначину помоћу првог закона термодинамике [105]

$$T\psi^P = \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon}/dt + \rho ds/dt - \rho du/dt, \quad (8.1.3)$$

где је  $\boldsymbol{\sigma}$  Кошијев тензор напона,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  је тензор укупне деформације, а  $u$  је густина унутрашње енергије. Редукована неједнакост дисипације је дата као:

$$\mathbf{q} \cdot \nabla (1/T) \geq 0, \quad (8.1.4)$$

и показује да се топлота преноси са честице која има вишу температуру на честицу која има нижу температуру. На основу претпоставке да је  $\rho\psi^P \geq 0$ , дефинисано је термодинамичко време [106] као:

$$\zeta(t) = \int_0^t \rho\psi^P(\tau) d\tau, \quad (8.1.5)$$

где је са  $\tau$  означено претходно време а са  $t$  садашње време. Функција  $\zeta(t)$  је континуална и не-оппадајућа па важи да је  $D_t\zeta(t) \equiv d\zeta(t)/dt = 0$  у еластичној области и

$d\zeta(t)/dt > 0$  у пластичној области. Овде је са  $D_t$  означен материјални извод описан у глави 4.5.1. Уколико се претпостави да се у сваком временском тренутку коначно стање може добити тренутним оптерећењем или растерећењем и да се подела целе временске историје на низ инфинитезималних сегмената, уз помоћ претпоставке да постоје суперпозиција и каузалност Болцманова и Волтерова суперпозиција је проширена на нелинеарне нееластичне феномене [105]. Користећи акумулацију инфинитезималне меморије добија се интегрална релација између девијатора Ојлерове пластичне деформације и девијатора историје напона [105]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p(\zeta) = \int_0^\zeta \boldsymbol{\Phi}\left(\zeta - \xi, \boldsymbol{\sigma}(\xi), \frac{d}{d\xi}\boldsymbol{\sigma}(\xi)\right) d\xi, \quad (8.1.6)$$

где је  $\xi$  претходно термодинамичко време у тренутку  $\tau$  дато као  $\xi = \zeta(\tau)$ . Тензор пластичне деформације се добија као функција напона и историје брзине промене напона при чему је са  $\boldsymbol{\Phi}$  означен функционал. За рачунање брзине промене пластичне деформације могуће је користити више приступа (материјалних модела), од којих ће фокус бити стављен на МАМ (Micunović-Albertini-Montagnani) модел, заснован на тензорским генераторима [67], и Пержинин материјални модел који се највише користи у пракси [107].

#### МАМ модел

Инкремент тензора пластичне деформације у МАМ моделу је нормалан на површ оптерећења  $\Omega = const$  где  $\Omega$  зависи од напона, температуре и шаблона унутрашњег преуређења (*Pattern of Internal Rearrangement* PIR на енглеском) [108]. Еволуциона једначина за тензор брзине пластичне деформације има облик:

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon}_p = \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \Omega(\boldsymbol{\sigma}, T, PIR). \quad (8.1.7)$$

Шаблон унутрашњег преуређења може бити представљен преко тензора пластичне деформације, а једначина (7.4.7) такође може да се прошири са скаларном функцијом  $\Lambda$  која узима у обзир линеарну везу између брзине промене еквивалентног Фон Мизесовог напона и брзине промене еквивалентне пластичне деформације [67]

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon}_p(D_t \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, T) = \Lambda \partial_{\boldsymbol{\sigma}} \Omega(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, T), \quad (8.1.8)$$

где је скаларна функција  $\Lambda$  [67] дата изразом:

$$\Lambda = \eta(\sigma_{eq} - \sigma^Y) \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0^Y} - 1 \right)^\lambda D_t \sigma_{eq} e^{-M}. \quad (8.1.9)$$

У изразу (8.1.9) динамички и статички почетни еквивалентни напони течења су дати са  $\sigma^Y$  и  $\sigma_0^Y$ , Хевисајдова функција је означена са  $\eta$  док су  $\lambda$  и  $M$  материјалне константе.



Рајсова функција оптерећења  $\Omega(\gamma, T)$  зависи од температуре и низа инваријанти [67]

$$\gamma \equiv \{s_1, s_2, s_3, \pi_2, \pi_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}, \quad (8.1.10)$$

где су  $s_1 = tr\boldsymbol{\sigma}$ ,  $s_2 = tr\mathbf{S}^2$ ,  $s_3 = tr\mathbf{S}^3$ ,  $\pi_2 = tr\boldsymbol{\varepsilon}_p^2$ ,  $\pi_3 = tr\boldsymbol{\varepsilon}_p^3$ ,  $\mu_1 = tr\{\mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}_p\}$ ,  $\mu_2 = tr\{\mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}_p^2\}$ ,  $\mu_3 = tr\{\mathbf{S}^2\boldsymbol{\varepsilon}_p\}$ ,  $\mu_4 = tr\{\mathbf{S}^2\boldsymbol{\varepsilon}_p^2\}$ .

Ако се  $\Omega$  апроксимира полиномом четвртог реда у односу на  $\boldsymbol{\sigma}$  и први члан у  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  добија се следећи једноставни полином:

$$2\Omega = a_1 s_2 + (a_2 + a_4 \mu_1)(s_1 s_2 - s_3) + \frac{1}{2} a_3 s_2^2 + \frac{1}{3} a_5 (3\mu_3 s_2 - 2\mu_1 s_3). \quad (8.1.11)$$

У изразу (8.1.11) фигурише 5 независних константи  $a_1, \dots, a_5$  чије вредности је потребно дефинисати [109]. Заменом претходних израза у једначину (8.1.8) добија се релација:

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon}_p = \Lambda \sum_{\alpha=1}^4 \Gamma_\alpha(\gamma) \mathbf{H}_\alpha. \quad (8.1.12)$$

Коректно дефинисање неког тензора који је функција од више тензора-аргумента захтева увођење као независних променљивих скаларне инваријанте и неки низ тензора који се добијају међусобним производима степена тензора-аргумента. Поступак је сложен и доводи до минималног скупа оваквих производа тзв. тензорских генератора. Скуп се зове *integrity base* [110],[111]. У [67] је показано да је такав поступак неопходан нарочито за непропорционалне напонске путеве код нееластичних материјала. Генератори тензора [110], [67] из једначине (8.1.12) су дати са:

$$\begin{aligned} Y_0 \mathbf{H}_1 &= \boldsymbol{\sigma} - 1tr\boldsymbol{\sigma}/3 \equiv dev\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{S}, \quad \mathbf{H}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ Y_0^2 \mathbf{H}_2 &= dev(\mathbf{S}^2), \quad Y_0 \mathbf{H}_4 = dev(\mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{S}) \end{aligned} \quad (8.1.13)$$

а одговарајући скаларни коефицијенти [67], који зависе од претходно датих инваријанти (8.1.10) су дати са:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= a_1 + a_2 s_1 + a_3 s_2 + a_4 \mu_1 + a_5 \mu_3, \quad \Gamma_2 = -3(a_2 + a_4 \mu_1)/2 - 2a_5 \mu_1, \quad (8.1.14) \\ \Gamma_3 &= a_4 (s_1 s_2 - s_3)/2 - 2a_5 s_3/3, \quad \Gamma_4 = a_5 s_2. \end{aligned}$$

### Модификовани Пержинин модел

Материјално Брзина промене пластичне деформације која се користи у Пержинином материјалном моделу [112], је дата са:

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon}_p = \left( \frac{\langle f \rangle}{\eta} \right)^m \frac{1}{x + \kappa^l} \mathbf{v}, \quad (8.1.15)$$

док је брзина промене скаларног фактора ојачања дата са:

$$D_t \kappa = \left( \frac{\langle f \rangle}{\eta} \right)^m \frac{1}{x + \kappa^l}, \quad (8.1.16)$$

где је Маколијев оператор  $\langle x \rangle = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ , а  $x$  и  $l$  су материјалне константе.

Површ течења [109],[112] је дата са:

$$\Omega = \sqrt{J_2} + \gamma I_1, \quad (8.1.17)$$

а нормала на површ течења је

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{S}}{2\sqrt{J_2}} + \gamma \mathbf{1}. \quad (8.1.18)$$

Функција течења која дели поље напона на еластични и пластични део [109],[112] је дата изразом:

$$f = s_1 s_2 + \alpha s_3 - H \kappa, \quad (8.1.19)$$

где је  $H$  параметар изотропног ојачања,  $\kappa$  је променљива изотропног ојачања, а  $\alpha$  такође представља параметар материјалног модела.

Хипереластични нелинеарни конститутивни закон [112] који повезује напоне и еластичне деформације је дат са:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \equiv \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_E) = (2b_2 I_1 + 3b_3 I_1^2 + b_4 I_2) \mathbf{1} + (b_5 I_1 + b_4 I_1) \boldsymbol{\varepsilon}_E + b_6 \boldsymbol{\varepsilon}_E^2, \quad (8.1.20)$$

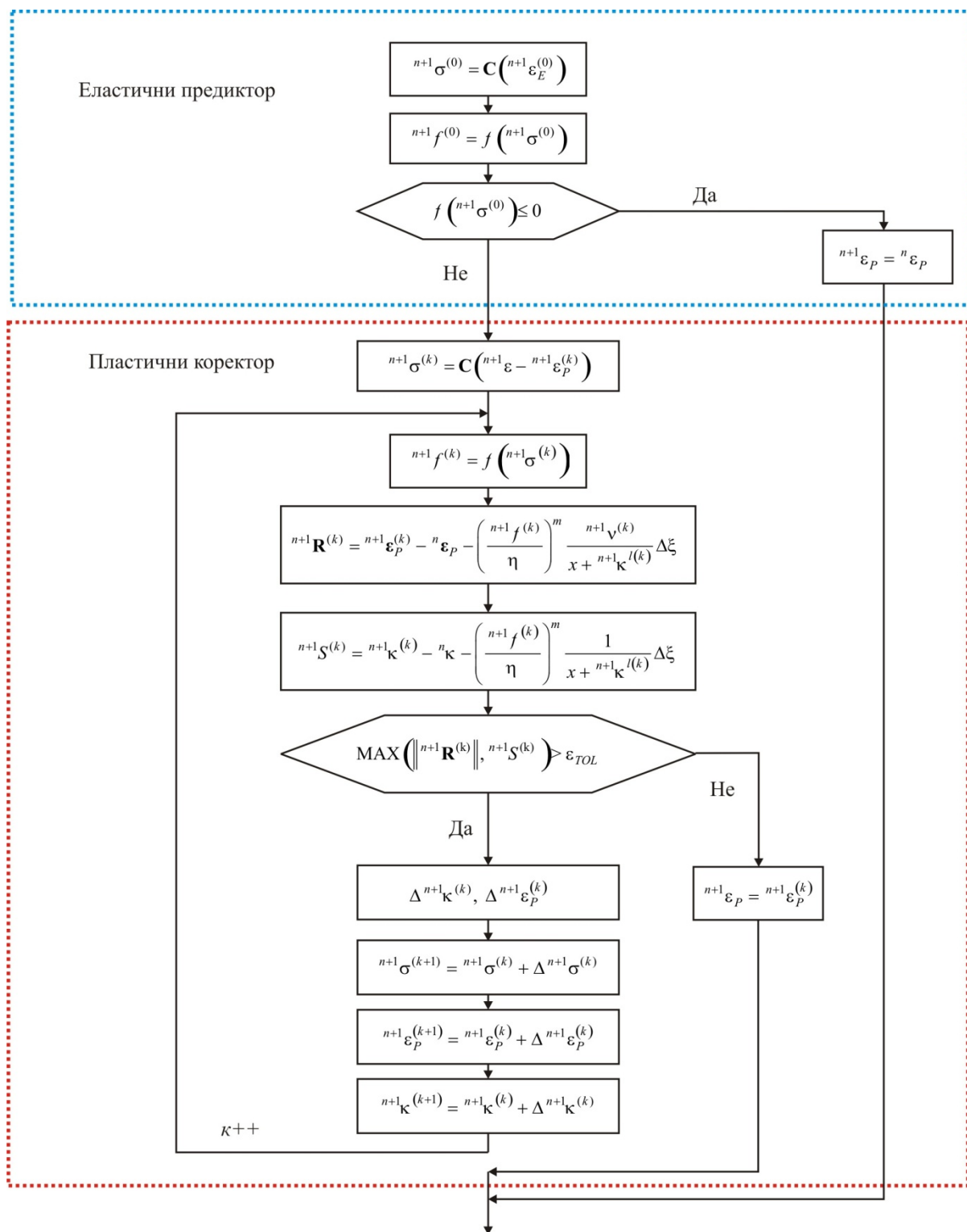
при чему је  $\mathbf{C}$  тензор констаната еластичности четвртог реда. Инваријанте напона и еластичних деформација које се користе у изразу (8.1.20) могуће скупити у низ дат следећим изразом:

$$\gamma \equiv \{I_1, I_2, I_3, s_1, s_2, s_3\} = \{tr \boldsymbol{\varepsilon}_E, tr \boldsymbol{\varepsilon}_E^2, tr \boldsymbol{\varepsilon}_E^3, tr \boldsymbol{\sigma}, (tr \boldsymbol{\sigma}^2 - s_1^2)/2, \det \boldsymbol{\sigma}\}, \quad (8.1.21)$$

који оговара низу константи за МАМ материјални модел датим изразом (8.1.10).

Константе материјалног модела  $A = \{b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, H, \alpha, \eta, m, l\}$  након калибрације су различите за експерименте смицања и затезања што наглашава недостатке материјалних модела који нису базирани на тензорским генераторима [112],[67]. Примена модификованог Пержининог модела се заснива на предиктор-коректор алгоритму, тако да се прво рачунају пробни еластични напони и на основу њих се проверава да ли се напонска тачка налази изнад или испод површи течења. Уколико је напонска тачка у пластичној области, у коректор делу алгоритма се врши итеративно

ажурирање тензора напона, вископластичних деформација и променљиве изотропног ојачања  $\kappa$  све док се не задовољи услов конвергенције, што је приказано на следећој слици.



Слика 8.1.2 Алгоритам модификованог Пержининог модела

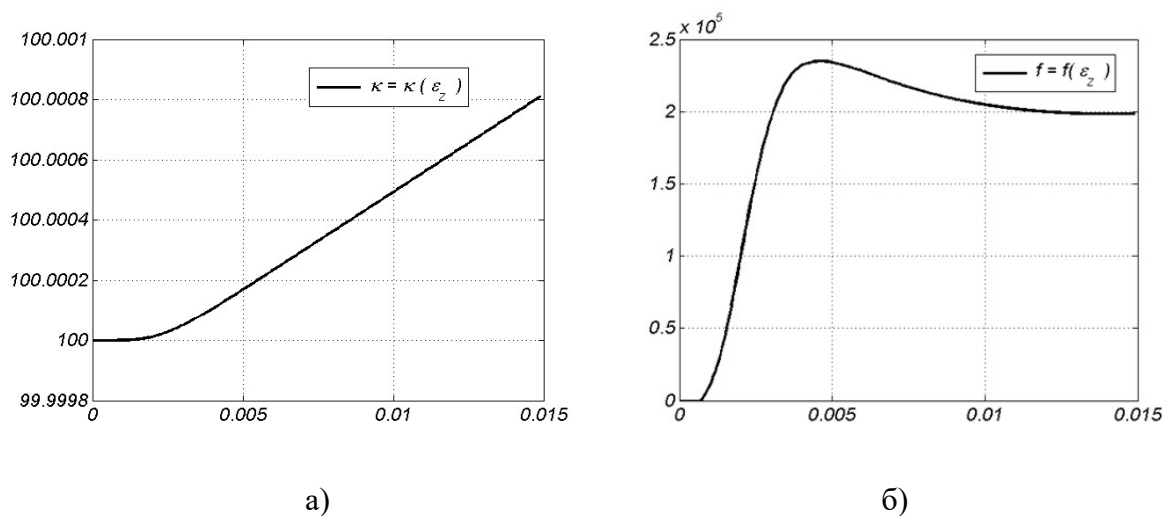
## 8.2 МКЕ анализа асфалтне подлоге у контакту са точком коришћењем модификованог Пержининог модела.

Асфалтна подлога је димензија 1000x1000x10 mm и моделирана је са 20x20x2 коначних елемената у програму ABAQUS. Чворовима на горњој површини се задаје померање које изазива прелазак точка преко подлоге.

Модификовани Пержинин модел код кога су брзине промене пластичне деформације  $D_t \epsilon_p$  и брзина промене скаларног фактора  $D_t \kappa$  замењени са одговарајућим брзинама у термодинамичком времену  $D_\xi \epsilon_p$  и  $D_\xi \kappa$  је испрограмиран у ABAQUS кориснички потпрограм [109]. Константе које су коришћене при анализи [113] имају следеће вредности:

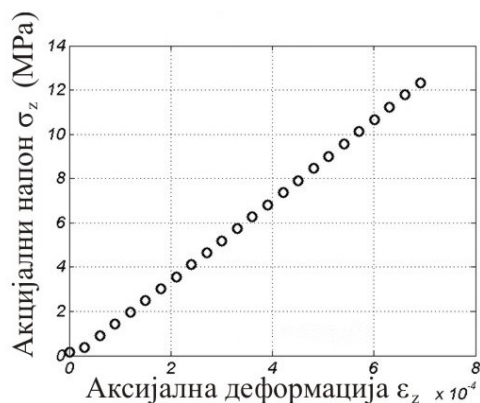
$$A = \left\{ \begin{array}{l} b_2 = 70.3 \times 10^2, \quad b_3 = 3.6 \times 10^3, \quad b_4 = -1.81 \times 10^5, \quad b_5 = -9.06 \times 10^4, \quad b_6 = -6.046 \times 10^4, \\ H = 50, \quad \alpha = 14.2, \quad \eta = 1.34 \times 10^4, \quad x = 1.03 \times 10^{-3}, \quad m = 1, \quad l = 2.2 \end{array} \right\}. \quad (8.2.1)$$

За материјалне карактеристике дате са (8.2.1) и почетну вредност променљиве изотропног ојачања  $\kappa = 100$ , функције ојачања (8.1.16) и течења (8.1.19) су дате на следећој слици



Слика 8.2.1 Модификовани Пержинин модел а) функција ојачања б) функција течења

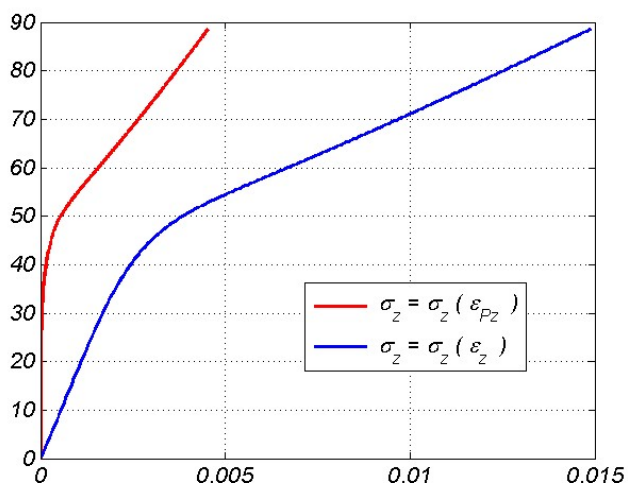
Верификација ABAQUS корисничког потпрограма за модификовани Пержинин материјални модел извршена је поређењем резултата за један осмочворни 3Д елемент са резултатима добијеним помоћу MATLAB функције у којој је испрограмиран дати материјални модел. Однос аксијалних напона у зависности од аксијалних деформација добијен у ABAQUS-у, за материјалне карактеристике дате са (8.2.1) је представљен на слици 8.2.2.



Слика 8.2.2 Однос аксијалних напона у зависности од аксијалних деформација за један осмочворни 3Д коначни елемент

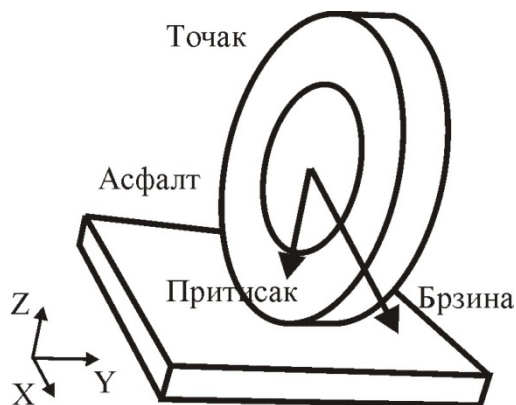
Резултати приказани на слици 8.2.2 се налазе у хипер-еластичној области.

У MATLAB-у су анализирани аксијални напони за шири опсег аксијалних деформација, као и у хипер-еластичној и виско-пластичној области, то је приказано на следећој слици.



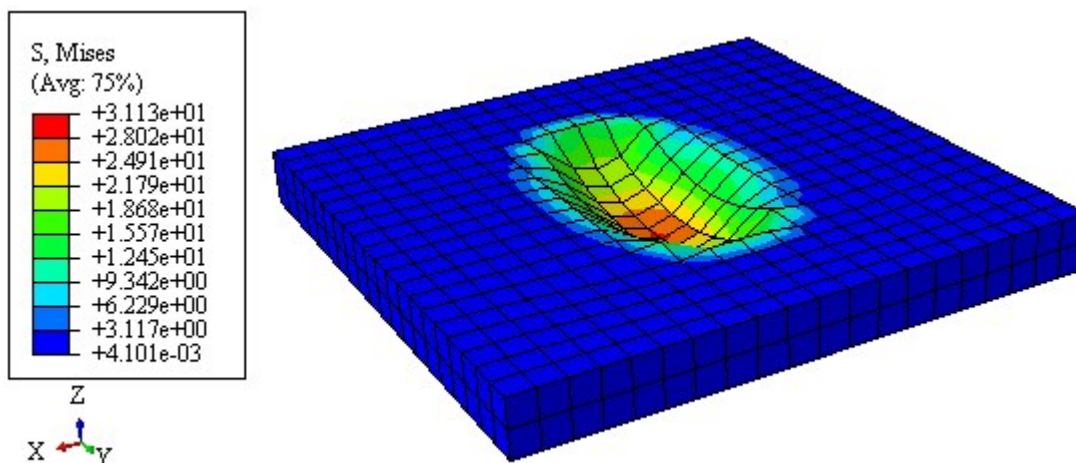
Слика 8.2.3 Верификација модификованог Пержининог модела у MATLAB-у резултати у хипер-еластичној  $\sigma_z = \sigma_z(\epsilon_z)$  и виско-пластичној области  $\sigma_z = \sigma_z(\epsilon_{pz})$

Шема модела асфалта у тренутку када преко њега прелази точак аутомобила дата је на слици 8.2.4.



Слика 8.2.4 Део асфалта оптерећен точком

Резултати прорачуна у ABAQUS-у су дати на слици 8.2.5, при чему су деформације асфалта који је оптерећен точком мале у односу на димензије модела, па су на слици 8.2.5 вишеструко скалаиране у циљу боље визуелизације.



Слика 8.2.5 Поље ефективних напона у асфалту

## 9 ЗАКЉУЧЦИ

Грануларни материјали представљају другу најманипулисанију материју у инжењерству, и њихово адекватно нумеричко моделирање је неопходно у циљу оптималног пројектовања уређаја за њихов транспорт, складиштење и обраду. Грануларне материјале карактерише понашање које зависи од унутрашње енергије, а услед трења грануларне честице губе енергију па је трење једна од најбитнијих карактеристика грануларних материјала. Понашање грануларних материјала зависи и од величине и облика гранула (зрна), па се за анализу састава грануларних материјала користи гранулометријски дијаграм. Напони у грануларном материјалу се рачунају као сума напона међу честицама, док је за анализу деформација потребно генерисати Деланеј мрежу од центара честица. Приликом деформација долази до промене топологије и дилатације чија величина зависи од компактности материјала. При деформацији узорка грануларног материјала пластичне деформације су сконцентрисане у уској области (траци смицања) у којој долази до појаве вртлога. Трака смицања је дебљине 10-20 просечних пречника зрна и заклапа угао од  $60^{\circ}$  до  $45^{\circ}$  у зависности од хомогености величине зрна. Оптерећење у грануларном материјалима није хомогено распоређено на све честице, већ се највећи део оптерећења преноси путем честица које формирају ланце сила док остале честице врше потпорну улогу. За анализу микромеханичког понашања грануларних материјала коришћена је ДЕМ метода помоћу које су моделирани троосни тест и трака смицања и на основу које су потврђене теоретске претпоставке и резултати експеримената које су публиковали водећи светски стручњаци из области анализе понашања грануларних материјала.

### 9.1 Постигнути циљеви

Основни циљ ове дисертације био је развој методологије прорачуна интеракције грануларних материјала са уређајима за њихов транспорт, складиштење и обраду која би инжењерима омогућила анализу реалних конструкција са што мањим апроксимацијама и грешкама. Тај циљ није било могуће остварити применом само једне нумеричке методе, већ је затхео повезивање методе засноване на мрежи чворова (МКЕ) и безмрежне методе (СПХ) да би се у њиховој синергији заобишли њихови недостаци и искористиле предности које ове две методе имају једна у односу на другу. Пут до тог циља је обухватао низ корака у оквиру којих је извршена програмска имплементација анализираних теоретских модела и алгоритама, као и њихова верификација на примерима.

- У оквиру рада на овој дисертацији еластични и еласто-пластични материјални модел је уграђен у SPH07 програм. На примеру судара два цилиндра, који су моделирани еласто-пластичним материјалним моделом, поређени су резултати добијени SPH07 и MCM програмима. Занемарљива разлика у решењима потиче од различитих програмских језика којима су SPH07 и MCM програмирани. . За моделирање

грануларних материјала била је неопходна уградња специјализованог материјалног модела. Након више неуспешних покушаја имплементације материјалних модела за грануларне материјале који су специјално развијени за СПХ методу [99], [53] у SPH07 програм, фокус је стављен на генералисани материјални модел са капом, који се већ дуго низ година користи у програмском пакету ПАК за анализу геотехничких проблема [71]. Генералисани материјални модел са капом је уграђен у SPH07 и MCM програме. Потом је у оквиру рада на дисертацији било неопходно одредити материјалне параметре чијом се применом добија реалистично понашање грануларних материјала. У ту сврху коришћен је пример колапса стуба грануларног материјала при коме се формира купа са изводницама под углом природног трења а који је упоређен са експерименталним резултатима датим у [99].

- Други корак је био повезивање МКЕ и СПХ солвера по истом принципу по ком је извршена флуид-солид интеракција у програмском пакету ПАК при чему улогу флуида играју СПХ псеудо-честице. Развијена методологија подразумева да се деформације конструкција рачунају у МКЕ док се деформације грануларног материјала рачунају у СПХ а сама интеракција се заснива на алгоритму господар-слуга при чему је МКЕ господар а СПХ игра улогу слуге. У овој дисертацији фокус је стављен на прорачун конструкција које су моделиране коначним елементима љуске. СПХ честице које су настале копирањем од МКЕ чворова у СПХ прорачуну имају задата померања која одговарају померањима чворова израчунатим у ПАК-у. Контактне силе које делују између честица грануларног материјала и честица генерисаних од МКЕ чворова рачунају се на основу СПХ контактне алгоритма, након чега се уносе у МКЕ прорачун као силе у чворовима.

- Обзиром да трење као једна од основних карактеристика грануларних материјала није адекватно третирано у постојећим СПХ контактним алгоритмима, у наредном кораку извршена је њихова адаптација и проширење коришћењем Кулоновог закона трења. На основу овог закона одређује се да ли се у контакту јавља статичко или динамичко трење. Имплементација Кулоновог закона захтевала је одређивање нормале на контактну површину у свакој честици и декомпоновање контактне силе на нормалну и тангентну компоненту. Уколико тангентна компонента превазиђе производ нормалне компоненте и коефицијента трења, долази до клизања грануларног материјала по подлози. Ово се дешава када се подлога нађе под углом већим од угла природног нагиба. Да би се тестирао унапређени контактни алгоритам, коришћен је модел киповања код кога се купа од грануларног материјала налази на металној плочи чији се један крај подиже све док не дође до клизања грануларне купе по плочи.

- Последњи корак у развоју методологије представља развој програмских решења за пре и пост процесирање чији је циљ да максимално поједностави процес генерисања улазних датотека за МКЕ и СПХ солвере. У овом кораку проблем је представљало непостојање универзалног софтверског решења, па се за креирање ПАК улазног фајла користи комерцијални софтвер FEMAP и одговарајући транслатор програм који је модификован током рада на изради дисертације, а за генерисање СПХ честица се користи бесплатни LS-PrePost и одговарајући транслатор који је у целости развијен



током израде дисертације. LS-PrePost би било могуће користити и за генерисање МКЕ улаза, али је његова функционалност у великом заостатку у односу на FEMAP, па би генерисање мреже сложене геомерије представљало додатни изазов у имплементацији методологије. За постпроцесирање резултата потребан је софтвер који може да приказује и коначне елементе и СПХ честице па је у ту сврху одабран бесплатни програм ParaView. И у овом случају било је могуће користити LS-PrePost, али је ParaView представљао боље решење због флексибилности и интуитивности које га одликују. Током спрегнутог МКЕ-СПХ прорачуна петљу по временским периодима контролише РАК па се тако прво извршава МКЕ па потом СПХ прорачун у МСМ-у. РАК користи имплицитну интеграцију, док је МСМ заснован на експлицитној интеграцији па су временски кораци у МСМ-у знатно мањи у односу на оне из РАК-а и одређују се унутар МСМ солвера. Због тога се креирање излазних датотека из РАК-а и МСМ-а врши на крајевима периода, када солвери заврше свој део прорачуна, тако да свакој излазној датотеци из РАК-а одговара излазна датотека из МСМ-а, које описују стање модела у истом временском тренутку.

## 9.2 Правци даљег истраживања

Утицај температуре на материјалне карактеристике мора се узети у обзир уколико се жели свеобухватно и тачно моделирање понашања свих, па самим тим и грануларних материјала. Приликом анализе понашања грануларних материјала у оквиру ове дисертације у свим случајевима осим примера у одељку 7.4, утицај промене температуре је занемарен и материјалне карактеристике су константне током целог прорачуна. Као последњи пример је дат развој материјалног модела за асфалт који укључује и утицај температуре. Да би се утицај температуре укључио у развијену методологију потребно је испрограмирати једначине провођења топлоте у СПХ код, адаптирати развијени материјални модел за примену у СПХ програму и укључити пренос топлоте са МКЕ елемената на СПХ честице (и обрнуто) у контактни алгоритам. Поред тога, приказани резултати анализе грануларних материјала ДЕМ методом представљају одличну основу за даље проширивање постојећих и развој нових материјалних модела који би били фокусирани на понашање грануларних материјала у тракама смицања као и гасовитој фази. Развојем рачунарске технике у будућности, ДЕМ метода ће постати применљива и за моделирање реалних проблема, па ће тако повезивање МКЕ и ДЕМ методе постати логичан наредни корак развоја МКЕ солвера. У оквиру ове дисертације акценат је био стављен на развој методологије прорачуна интеракције грануларних материјала са уређајима за њихов транспорт, складиштење и обраду, али развијену методологију је могуће адаптирати за моделирање интеракције солида и флуида у биомеханици дајући могућност посматрања струјања флуида у Лагранжовом материјалном опису што отвара нову перспективу анализе кретања еластичних честица кроз крвоток.

---

## 10 ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. M. Maksimović, *Mehanika Tla*, AGM knjiga, 2008.
- [2] K. Bagi, "Stress and strain in granular assemblies," *Mechanics of Material*, vol. 22, pp. 165-177, 1996.
- [3] J. Christoffersen, M. M. Mehrabadi and S. Nemat-Nasser, "A Micromechanical Description of Granular Material Behavior," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, pp. 339-344, 1981.
- [4] N. Hu and J. F. Molinari, "Shear bands in dense metallic granular materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 52, p. 499 – 531, 2004.
- [5] S. Abedi, A. L. Rechenmacher and A. D. Orlando, "Vortex formation and dissolution in sheared sands," *Granular Matter*.
- [6] S. D. Mesarovic, J. M. Padbidri and B. Muhunthan, "Micromechanics of dilatancy and critical state in granular matter," *Geotechnique Letters*, vol. 2, p. 61–66, 2012.
- [7] P. W. Rowe, "The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, p. 500–527, 9 October 1962.
- [8] P. A. Cundall and O. D. Strack, "A discrete numerical model for granular assemblies," *Geotechnique*, vol. 29, no. 1, pp. 47-65, 1979.
- [9] T. Kawaguchi, T. Tanaka and Y. Tsuji, "Numerical simulation of two-dimensional fluidized beds using the discrete element method (comparison between the two- and three-dimensional models)," *Powder Technology*, pp. 129-138, 1998.
- [10] K. Iwashita and M. Oda, "Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method," *Powder Technology*, vol. 109, p. 192–205, 2000.
- [11] J. P. Bardet and J. Proubet, "A numerical investigation of the structure of persistent shear bands in granular media," *Geotechnique*, vol. 41, no. 4, pp. 599-613, 1991.
- [12] S. Fazekas, J. Török, J. Kertész and D. E. Wolf, "Morphologies of three-dimensional shear bands in granular media," *Physical Review E*, vol. 74, no. 3, p. 031303, 2006.
- [13] A. Bobet, A. Fakhimi, S. Johnson, J. Morris, F. Tonon and M. Yeung, "Numerical

- Models in Discontinuous Media: Review of Advances for Rock Mechanics Applications," *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 135, no. 11, p. 1547–1561, 2009.
- [14] J. Morris and S. Johnson, "Dynamic simulations of geological materials using combined FEM/DEM/SPH analysis," *Geomechanics and Geoengineering, Special Issue: Advances in discrete element methods for geomechanics*, vol. 4, no. 1, pp. 91–101, 2009.
- [15] A. (. Munjiza, *The Combined Finite-Discrete Element Method*, London: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- [16] J. M. Padbidri and S. D. Mesarović, "Acceleration of DEM algorithm for quasistatic processes," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 86, p. 816–828, 2011.
- [17] J. M. Padbidri, C. M. Hansen, S. D. Mesarović and B. Muhunthan, "Length Scale for Transmission of Rotations in Dense Granular Materials," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 79, pp. 031011-1, 2012.
- [18] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch and T. Pöschel, "Model for collisions in granular gases," *Physical Review E*, vol. 53, p. 5382, 1996.
- [19] H. Kruggel-Emden, M. Sturm, S. Wirtz and V. Scherer, "Selection of an appropriate time integration scheme for the discrete element method (DEM)," *Computers and Chemical Engineering*, vol. 32, p. 2263–2279, 2008.
- [20] E. Rougier, A. Munjiza and N. W. John, "Numerical comparison of some explicit time integration schemes used in DEM, FEM/DEM and molecular dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, p. 856–879, 2004.
- [21] F. Y. Fraige and P. A. Langston, "Integration schemes and damping algorithms in distinct element models," *Advanced Powder Technology*, vol. 15, no. 2, p. 227– 245, 2004.
- [22] P. A. Langston, U. Tuzun and D. M. Heyes, "Continuous Potential Discrete Particle Simulations of Stress and Velocity Fields in Hoppers: Transition from Fluid to Granular Flow," *Chemical Engineering Science*, vol. 49, no. 8, pp. 1259-1275, 1994.
- [23] D. Zhang and W. J. Whiten, "Step Size Control for Efficient Discrete Element Simulation," *Minerals Engineering*, vol. 14, no. 10, pp. 1341-1346, 2001.
- [24] M. Živković, M. Topalović, M. Blagojević, A. Nikolić, V. Milovanović, S. Mesarović and J. Padbidri, "Boundary Identification and Weak Periodic Condition Application in DEM Method," in *Proceedings COMETA 2nd International Scientific Conference*,

- Jahorina, B&H, 2014.
- [25] J. R. Williams and N. Rege, "Coherent vortex structures in deforming granular materials," *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, vol. 2, p. 223±236, 1997.
- [26] J. R. Williams and N. Rege, "The Development of Circulation Cell Structures in Granular Materials Undergoing Compression," *Powder Technology*, vol. 90, pp. 187-194, 1997.
- [27] L. B. Lucy, "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis," *The Astronomical Journal*, vol. 82, no. 12, pp. 1013-1024, 1977.
- [28] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 181, pp. 375-389, 1977.
- [29] G. R. Liu and M. B. Liu, *Smoothed Particle Hydrodynamics a meshfree particle method*, Singapore: World Scientific Publishing, 2003.
- [30] J. J. Monaghan and R. A. Gingold, "Shock Simulation by the Particle Method SPH," *Journal of Computational Physics*, vol. 52, pp. 374-389, 1983.
- [31] J. J. Monaghan and H. Pongracic, "Artificial Viscosity for Particle Methods," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 1, pp. 187-194, 1985.
- [32] L. D. Libersky and A. G. Petschek, "Smooth particle hydrodynamics with strength of materials," in *Lecture Notes in Physics*, Berlin, Springer Link, 2005, pp. 248-257.
- [33] L. D. Libersky, A. G. Petschek, T. c. Carney, J. R. Hipp and F. A. Allahdadi, "High Strain Lagrangian Hydrodynamics A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response," *Journal of Computational Physics*, vol. 109, pp. 67-75, 1993.
- [34] R. Vignjević and J. Campbell, "Review of Development of the Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) Method," in *Predictive Modeling of Dynamic Processes*, Dordrecht, Springer, 2009, p. Predictive Modeling of Dynamic Processes.
- [35] J. W. Swegle, S. W. Attaway, M. W. Heinstein, F. J. Mello and D. L. Hicks, "An analysis of smoothed particle hydrodynamics," Sandia National Labs, Albuquerque, NM (United States), 1994.
- [36] Y. Wen, D. L. Hicks and J. W. Swegle, "Stabilizing S. P. H. with Conservative Smoothing," Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM (United States), 1994.
- [37] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl, "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments," *Computer Methods in Applied Mechanics*

- 
- and Engineering*, vol. 139, no. 1-4, p. 3–47, 1996.
- [38] P. W. Randles and L. D. Libersky, "Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, no. 1-4, p. 375–408, 1996.
- [39] G. R. Johnson and S. R. Beissel, "Normalized Smoothing Functions for SPH Impact Computations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, no. 16, pp. 2725-2741, 1996.
- [40] J. J. Monaghan, "SPH without a Tensile Instability," *Journal of Computational Physics*, vol. 159, p. 290–311, 2000.
- [41] R. Vignjević, J. Campbell and L. Libersky, "A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 184, no. 1, p. 67–85, 2000.
- [42] T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, "Element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229-256, 1994.
- [43] W. K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee and T. Belytschko, "Reproducing kernel particle methods for structural dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, no. 10, pp. 1655--1679, 1995.
- [44] G. A. Dilts, "Moving Least Squares Particle Hydrodynamics-I. Consistency and Stability," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, pp. 1115-1155, 1999.
- [45] S. N. Atluri and T. Zhu, "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics," *Computational Mechanics*, vol. 22, p. 117±127, 1998.
- [46] G. R. Johnson, R. A. Stryk and S. R. Beissel, "SPH for high velocity impact computations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, no. 1-4, pp. 347-373, 1996.
- [47] M. B. Liu, G. R. Liu, Z. Zong and K. Y. Lam, "Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology," *Computers & Fluids*, vol. 32, p. 305–322, 2003.
- [48] M. Guida, F. Marulo, M. Meo, A. Grimaldi and G. Olivares, "SPH – Lagrangian study of bird impact on leading edge wing," *Composite Structures*, vol. 93, p. 1060–1071, 2011.
- [49] T. A. I. De Vuyst, "Hydrocode Modelling of Water Impact," in *Doktorska disertacija*, Cranfield, Cranfield University, School of Engineering, 2003.
-

- 
- [50] K. Hughes, R. Vignjević, J. Campbell, T. De Vuyst, N. Đorđević and L. Papagiannis, "From aerospace to offshore: Bridging the numerical simulation gaps—Simulation advancements for fluid structure interaction problems," *International Journal of Impact Engineering*, vol. 61, pp. 48-63, 2013.
- [51] T. De Vuyst, R. Vignjević and J. C. Campbell, "Coupling between meshless and finite element methods," *International Journal of Impact Engineering*, vol. 31, p. 1054–1064, 2005.
- [52] R. Das and P. W. Cleary, "Effect of rock shapes on brittle fracture using Smoothed Particle Hydrodynamics," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 53, p. 47–60, 2010.
- [53] H. H. Bui, R. Fukagawa, K. Sako and S. Ohno, "Lagrangian meshfree particles method (SPH) for large deformation and failure flows of geomaterial using elastic–plastic soil constitutive model," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 32, p. 1537–1570, 2008.
- [54] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković and N. Grujović, *Metod konačnih elemenata I, Linearna analiza*, Kragujevac: Mašinski fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, 1998.
- [55] T. Belytschko, Y. Guo, W. K. Liu and S. P. Xiao, "A unified stability analysis of meshless particle methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, p. 1359–1400, 2000.
- [56] S. Li and W. K. Liu, *Meshfree Particle Methods*, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [57] J. R. Reveles, "Development of a Total Lagrangian SPH Code for the Simulation of Solids Under Dynamic Loading," in *Doktorska disertacija*, Cranfield, Cranfield University, School of Engineering, 2007.
- [58] T. Djukic, M. Topalovic and N. Filipovic, "Numerical simulation of isolation of cancer cells in a microfluidic chip," *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 25, no. 8, p. 084012, 2015.
- [59] M. Ivanović, "Glatka čestična hidrodinamika-paralelizacija algoritama i primena u dinamičnom fluidu," in *Doktorska disertacija*, Kragujevac, Univerzitet u Kragujevcu, Prirodno-matematički fakultet, 2010.
- [60] J. J. Monaghan and J. C. Lattanzio, "A refined particle method for astrophysical problems," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 149, pp. 135-143, 1985.
- [61] J. P. Morris, P. J. Fox and Y. Zhu, "Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH," *Journal of Computational Physics*, vol. 136, p. 214–226, 1997.
-

- 
- [62] J. Campbel, "Lagrangian hydrocode modelling of hypervelocity impact on spacecraft," in *Doktorska disertacija*, Cranfield, Cranfield University, College of Aeronautics, 1998.
- [63] M. Schussler and D. Schmitt, "Comments on Smoothed Particle Hydrodynamics," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 97, pp. 373-379, 1981.
- [64] C. Guenther, D. L. Hicks and J. W. Swegle, "Conservative smoothing versus artificial viscosity," Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM (United States), 1994.
- [65] C. T. Dyka and R. P. Ingel, "Addressing Tension Instability in SPH Methods," Naval Research Laboratory, Washington, DC (United States), 1994.
- [66] G. A. Holzapfel, *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- [67] M. Micunovic, *Thermomechanics of Viscoplasticity, Fundamentals and Applications*, Berlin: Springer Science+Business Media, 2009.
- [68] M. Micunovic, *Primenjena mehanika kontinuuma*, Beograd: Naučna knjiga, 1990.
- [69] J. P. Gray and J. J. Monaghan, "Numerical modelling of stress fields and fracture around magma chambers," *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, vol. 135, p. 259– 283, 2004.
- [70] M. B. Liu, G. R. Liu and K. Y. Lam, "Adaptive smoothed particle hydrodynamics for high strain hydrodynamics with material strength," *Shock Waves*, vol. 15, no. 1, pp. 21-29, 2006.
- [71] M. Živković, *Nelinearna Analiza Konstrukcija*, Kragujevac: Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, 2006.
- [72] S. Mesarovic, *Lecture notes*, Kragujevac: Fakultet inženjerskih nauka Univerziteta u Kragujevcu, 2014.
- [73] M. Kojić, *Opšti koncept implicitne integracije konstitutivnih relacija pri neelastičnom deformisanju materijala*, Kragujevac: Srpska akademija nauka i umetnosti - Univerzitet u Kragujevcu Centar za naučna istraživanja, 1993.
- [74] R. D. Krieg and S. W. Key, "On the Accurate Representation of Large Strain Non-Proportional Plastic Flow in Ductile Materials," in *Proceedings ASME Winter Annual Meeting*, New Orleans, LA, 1984.
- [75] E. A. de Souza Neto, D. Perić and D. R. Owen, *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*, Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
-

- 
- [76] R. I. Borja, *Plasticity Modeling & Computation*, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [77] D. C. Drucker and W. Prager, "Soil mechanics and plastic analysis for limit design," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 10, no. 2, p. 157–165, 1952.
- [78] M. Kojić and K.-J. Bathe, *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [79] I. S. Sandler, "Review of the development of Cap Models for geomaterials," *Shock and Vibration*, vol. 12, p. 67–71, 2005.
- [80] K. Z. Z. Lee, N.-Y. Chang and K.-T. Chang, "Determination of Cap Model Parameters Using Drained Conventional Triaxial Compression Test Results," in *Proceedings Modernization and Optimization of Existing Dams and Reservoirs*, Philadelphia, Pennsylvania (United States), 2007.
- [81] I. S. Sandler, F. L. DiMaggio and G. Y. Baladi, "A Generalized Cap Model for Geological Materials," Defence Nuclear Agency, Washington DC (United States), 1974.
- [82] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Upper Saddle River: Prentice Hall, 2007.
- [83] A. Hrennikoff, "Solution of problems of elasticity by the framework method," *Journal of applied mechanics*, vol. 8, no. 4, p. 169–175, 1941.
- [84] R. Courant, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 49, p. 1–23, 1943.
- [85] S. W. Attaway, M. W. Heinstein and J. W. Swegle, "Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 150, pp. 199-205, 1994.
- [86] G. R. Johnson, "Linking of Lagrangian particle methods to standard finite element methods for high velocity impact computations," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 150, pp. 265-274, 1994.
- [87] G. R. Johnson and R. A. Stryk, "Conversion of 3Ddistorted elements into meshless particles during dynamic deformation," *International Journal of Impact Engineering*, vol. 28, p. 947–966, 2003.
- [88] G. R. Johnson, S. R. Beissel and R. A. Stryk, "An Improved Generalized Particle Algorithm that Includes Boundaries and Interfaces," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 53, p. 875–904, 2002.
-



- 
- [89] M. Topalović, M. Ivanović, M. Živković and A. Dišić, "Comparison of FEM and SPH Methods used for Analysis of Solid Bodies," in *Proceedings Forth Serbian (29th Yu) Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Vrnjačka Banja, Serbia, 2013.
- [90] J. Campbell, R. Vignjević and L. Libersky, "A contact algorithm for smoothed particle hydrodynamics," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 184, no. 1, p. 49–65, 2000.
- [91] T. Belytschko and I. S. Yeh, "The splitting pinball method for contact-impact problems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 105, pp. 375-393, 1993.
- [92] R. Vignjevic, T. De Vuyst and J. C. Campbell, "A Frictionless Contact Algorithm for Meshless Methods," in *Proceedings International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences ICCES*, Miami (United States), 2007.
- [93] R. Vignjevic, T. De Vuyst and J. Campbell, "The Use of a Homogeneous Repulsive Force for Contact Treatment in SPH," in *Fifth World Congress on Computational Mechanics WCCM V*, Vienna, Austria, 2002.
- [94] J. U. Brackbill, D. B. Kothe and C. Zemach, "A Continuum Method for Modeling Surface Tension," *Journal of Computational Physics*, vol. 100, pp. 335-354, 1992.
- [95] N. Filipovic, M. Ivanovic and M. Kojic, "A comparative numerical study between dissipative particle dynamics and smoothed particle hydrodynamics when applied to simple unsteady flows in microfluidics," *Microfluid Nanofluid*, vol. 7, p. 227–235, 2009.
- [96] J. L. Lacome, "Smooth particle hydrodynamics (SPH): a new feature in LS-DYNA," in *Proceedings 6th international LS-DYNA user's conference simulation*, Detroit (United States), 2000.
- [97] N. A. Nordendale, W. F. Heard and P. K. Basu, "Modeling of High-Rate Ballistic Impact of Brittle Armors with Abaqus/Explicit," in *Proceedings Simulia Comunity Conference*, Viena Austria, 2013.
- [98] M. Topalović, M. Živković, N. Busarac and S. Vulović, "Improvement and Integration of FEM Solution used for R&D into FEMAP," in *Proceedings COMETA 2012 1st International Scientific Conference*, Jahorina B&H, 2012.
- [99] S. Yuu, T. Umekage, Y. Mitsuiki and F. Koga, "Constitutive Relations Based on Distinct Element Method Results for Granular Materials and Simulation of Granular Collapse and Heap by Smoothed Particle Hydrodynamics, and Experimental Verification," *Advanced Powder Technology*, vol. 19, p. 153–182, 2008.
-

- 
- [100] M. D. Topalović, "Modeling Granular Materials With Meshless DEM And SPH Methods," in *Proceedings 5th International Congress of Serbian Society of Mechanics*, Arandjelovac, Serbia, 2015.
- [101] R. Petrović, M. Živković, M. Topalović and R. Slavković, "Analytical, Numerical and Experimental Stress Assessment of the Spherical Tank with Large Volume," *Tehnički vjesnik*, vol. 22, no. 5, pp. 1135-1140, 2015.
- [102] V. Milovanović, A. Dišić, D. Rakić and M. Živković, "Static and fatigue strength analysis of 4 – axle bogie wagon type Faccns," "Đuro Đaković holding d.d.", Slavonski brod, Croatia and "Prorail Ltd." Subotica, Serbia, 2011.
- [103] K. Mitra, A. Das and S. Basu, "Mechanical behavior of asphalt mix: An experimental and numerical study," *Construction and Building Materials*, vol. 27, p. 545–552, 2012.
- [104] J. D. Eshelby, "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems," *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 241, no. 1226, p. 376–396, 1957.
- [105] V. L. Fomin, *Continuum Mechanics for Engineers*, St. Petersburg: St. Petersburg University Publ., 1975.
- [106] A. A. Vakulenko, "Superposition in continuum rheology (in Russian)," *AN SSSR Mekhanika Tverdogo Tela*, vol. 1, pp. 69-74, 1970.
- [107] P. Perzyna, "Fundamental Problems in Viscoplasticity," *Advances in Applied Mechanics*, vol. 9, p. 243–377, 1966.
- [108] J. R. Rice, "Inelastic Constitutive Relations for Solids : an Internal-Variable Theory and its Application to Metal Plasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 19, pp. 433-455, 1971.
- [109] L. T. Kudrjavceva, M. V. Mićunović, M. D. Topalović and S. A. Sedmak, "Thermomechanics of Soft Inelastics Bodies with Application to Asphalt Behavior," *Thermal Science*, vol. 18, pp. S221-S228, 2014.
- [110] A. M. Spencer, "Theory of invariants," *Continuum Physics*, vol. 1, no. 1, pp. 239-353, 1971.
- [111] J.-P. Boehler, "A Simple Derivation of Representations for Non-Polynomial Constitutive Equations in Some Cases of Anisotropy," *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 59, no. 4, p. 157–167, 1979.
- [112] S. Bahuguna, V. P. Panoskaltsis and K. D. Papoulia, "Identification and Modeling of
-

- Permanent Deformations of Asphalt Concrete," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 132, no. 3, pp. 231-239, 2006.
- [113] D. Panneerselvam, "Mechanics of Asphalt Concrete: Analytical and Computational Studies," Department of Civil Engineering, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, 2005.
- [114] J. J. Monaghan, "On the problem of penetration in particle methods," *Journal of Computational Physics*, vol. 82, no. 1, pp. 1-15, 1989.
- [115] J. J. Monaghan, "SPH compressible turbulence," *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society*, vol. 335, no. 3, pp. 843-852, 2002.
- [116] M. Mićunović and A. Baltov, "Plastic wave propagation in Hopkinson bar- revisited," *Archives of Mechanics*, vol. 54, no. 5-6, pp. 577-602, 2002.