



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У  
НОВОМ САДУ



Mr. Ištvan Kiralj

**PROŠIRENA TEORIJA PROSTORNIH  
VEKTORA ZA ODREĐIVANJE  
PARAMETARA EKVIVALENTNE ŠEME  
ASINHRONIH MAŠINA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor: dr Đura Oros

Novi Sad, 2016. godine



## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, <b>РБР:</b>	
Идентификациони број, <b>ИБР:</b>	
Тип документације, <b>ТД:</b>	Монографска публикација
Тип записа, <b>ТЗ:</b>	Текстуални штампани материјал
Врста рада, <b>ВР:</b>	Докторска дисертација
Аутор, <b>АУ:</b>	мр Иштван Кираљ
Ментор, <b>МН:</b>	др Ђура Орос, ванредни професор
Наслов рада, <b>НР:</b>	Проширена теорија просторних вектора за одређивање параметара еквивалентне шеме асинхроних мотора
Језик публикације, <b>ЈП:</b>	Српски
Језик извода, <b>ЈИ:</b>	Српски
Земља публикавања, <b>ЗП:</b>	Србија
Уже географско подручје, <b>УГП:</b>	Војводина
Година, <b>ГО:</b>	2016
Издавач, <b>ИЗ:</b>	Ауторски репринт
Место и адреса, <b>МА:</b>	Нови Сад, Трг Доситеља Обрадовића 6
Физички опис рада, <b>ФО:</b> <small>(поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)</small>	11/130/80/1/34/0/2
Научна област, <b>НО:</b>	Електротехничко и рачунарско инжињерство
Научна дисциплина, <b>НД:</b>	Енергетска електроника и електричне машине
Предметна одредница/Кључне речи, <b>ПО:</b>	Просторни вектори, Метод коначних елемената, Карактеристике асинхроних машина
<b>УДК</b>	
Чува се, <b>ЧУ:</b>	Библиотека Факултета техничких наука, Нови Сад.
Важна напомена, <b>ВН:</b>	
Извод, <b>ИЗ:</b>	<p>Дефинисан је метод за одређивање просторних вектора струје ротора асинхроних машина са кавезним намотајем, као и метод за прорачун фазора флуksних обухвата и струја ротора и статора.</p> <p>Уведена је струјни флуksни обухват, који поједностављује поступак одређивања фазора флуksних обухвата.</p> <p>Дефинисан је метод за прорачун индуктивности и отпорности Т еквивалентне шеме асинхроних машина.</p> <p>Дефинисан је метод за прорачун компонената момента, које потичу од високих просторних хармоника струје, као и правило за прорачун резултантног момента на основу хармоничких компонената момента.</p>
Датум прихватања теме, <b>ДП:</b>	
Датум одбране, <b>ДО:</b>	
Чланови комисије, <b>КО:</b>	Председник: др Владимир Катић, ред.проф.
	Члан: др Дамир Жарко, ванр.проф.
	Члан: др Веран Васић ред.проф
	Члан: др Дарко Марчетић ванр.проф
	Члан, ментор: др Ђура Орос ванр.проф
	Потпис ментора



## KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, <b>ANO</b> :	
Identification number, <b>INO</b> :	
Document type, <b>DT</b> :	Monographic publication
Type of record, <b>TR</b> :	Textual printed material
Contents code, <b>CC</b> :	Doctoral dissertation
Author, <b>AU</b> :	Ištvan Kiralj, MSc
Mentor, <b>MN</b> :	Đura Oros, Ph. D., Associate Professor
Title, <b>TI</b> :	Extended space vector theory for determination of parameters of induction machines
Language of text, <b>LT</b> :	Serbian
Language of abstract, <b>LA</b> :	Serbian
Country of publication, <b>CP</b> :	Serbia
Locality of publication, <b>LP</b> :	Vojvodina
Publication year, <b>PY</b> :	2016
Publisher, <b>PB</b> :	Author's reprint
Publication place, <b>PP</b> :	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, <b>PD</b> : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	11/130/80/1/34/0/2
Scientific field, <b>SF</b> :	Electrical and Computer Engineering
Scientific discipline, <b>SD</b> :	Power electronic and electrical machines
Subject/Key words, <b>S/KW</b> :	Space vectors, Finite element method, Characteristics of induction motors
<b>UC</b>	
Holding data, <b>HD</b> :	Library of the Faculty of Technical Sciences in Novi Sad
Note, <b>N</b> :	
Abstract, <b>AB</b> :	<p>Method for determination of space vectors of currents in induction motors with squirrel cage, and a method for calculation phasors of flux linkages and currents of rotor and stator are determined.</p> <p>Current-flux linkage is introduced, which simplifies determination of phasors of flux linkages.</p> <p>Methods for calculation of inductances and resistances of T equivalent circuit for induction motors are defined.</p> <p>A method for calculation of components of torque, which originate from high space harmonics of currents, and rules for calculation resultant torque on the basis of harmonic components of torque are determined.</p>
Accepted by the Scientific Board on, <b>ASB</b> :	
Defended on, <b>DE</b> :	
Defended Board, <b>DB</b> :	President: PhD Vladimir Katić, professor
	Member: PhD Damir Žarko, associate professor
	Member: PhD Veran Vasić, professor
	Member: PhD Darko Marčetić, associate professor
Member, Mentor:	PhD Djura Oros, associate professor
	Mentor's sign

## Sažetak

Ova disertacija se bavi proračunom parametara i karakteristika asinhronih motora na osnovu rešavanja magnetnog polja metodom konačnih elemenata. Tokom proračuna sa konačnim elementima primenjena su vremenski-harmonična magnetna polja. Na osnovu analize tradicionalne teorije prostornih vektora razvijen je modifikovani metod za određivanje prostornih vektora, radi proračuna fazora T ekvivalentne šeme asinhronog motora, pomoću rešenja magnetnog polja sa metodom konačnih elemenata.

Modifikovani metod prostornih vektora je primenjen za određivanje fazora struja rotora i statora. Fazori fluksnih obuhvata su izračunati na osnovu strujno-fluksnih obuhvata i fazora struja.

Vrednosti induktivnosti motora i otpornosti rotora izračunate su na osnovu fazora struja i fluksnih obuhvata.

Modifikovani metod prostornih vektora omogućava određivanje prostornih vektora prostornih harmonika struja rotora. Na taj način je omogućen proračun komponenata momenta, koji potiču od struje prostornih harmonika. Neki harmonici proizvode kočioni moment u motornom režimu, te zbog toga je neophodno primeniti novi metod za proračun momenta na osnovu gubitaka razvijenih od strane prostornih harmonika struja rotora.

U tezi su diskutovana dve različita konfiguracije asinhronih motora. Prva je niskonaponski asinhroni motor, koji je iskorišćen za potvrđivanje predloženog metoda za proračun vrednosti induktivnosti na osnovu merenih rezultata iz oglada praznog hoda i kratkog spoja.

Po potvrđivanju ispravnosti predloženog metoda, izračunate su karakteristike motora za niskonaponsku i visokonaponsku asinhronu mašinu u funkciji klizanja motora.

Izračunati parametri T ekvivalentne šeme mašine različitim metodima (predloženom i analitičkom) su upoređeni. Izračunati parametri su neznatno različiti od istih određenih analitičkom metodom, pošto analitički izrazi ne uzimaju u obzir prisutno zasićenje magnetnog materijala.

Izračunate karakteristike momenta predloženom metodom su upoređene sa karakteristikama određenim sa analitičkom metodom i Maxwell-ovim stress tenzorom. Izračunate karakteristike momenta predloženom metodom pokazuju dobro slaganje sa istim određenim sa Maxwell-ovom stress tenzorom.

## Abstract

This dissertation addresses the calculation of induction motor parameters and electromagnetic performance based on the solution of the magnetic field using the Finite Element Model. During the Finite Element calculation the time-harmonic formulation of magnetic field is used. Based on the analysis of traditional space vector theory a modified space vector method is developed to determine the phasors of the T equivalent circuit of induction motors on the basis of solution of magnetic field with Finite Element Method.

The modified space vector method was applied to determine the rotor and stator current phasors of the induction motor. The flux linkage phasors of the rotor and stator were calculated on the basis of current phasors and current-flux linkage. The motor inductances and rotor resistance were calculated on the basis of calculated current and flux linkage phasors.

The modified space vector method allows for the current space vectors of space harmonics of rotor current to be determined. This makes it possible to calculate the torque components which originate from current space harmonics. Certain harmonics develop braking torque in motor regime, which makes necessary a new method for calculation of motor torque on the basis of losses developed by current space harmonics in the rotor bars.

In the thesis, two different motor topologies were studied. The first one was a low voltage induction motor which was used to validate the proposed method for calculation of inductances on the basis of measurement results of open circuit and locked rotor test.

After the validation of the proposed method, the motor characteristics were calculated as the function of motor slip for a low voltage and a high voltage induction motor. The calculated motor characteristics of parameters of T equivalent circuit with different methods (proposed and analytical) were compared. The calculated characteristics of parameters are slightly different from those determined by analytical method, because the analytical expressions does not take into account magnetic saturation. The torque characteristics calculated with the proposed method are compared with those calculated analytically and Maxwell stress tensor. The results show good torque agreement between the proposed method and Maxwell stress tensor.

## OZNAKE

$\mathbf{x}$  - prostorni vektor električne veličine,

$\hat{X}$  - intenzitet električne veličine,

$j$  - kompleksni operator,

$\varphi$  - električni ugao,

$d$  - uzdužna osa sinhronih mašina,

$q$  - poprečna osa sinhronih mašina,

$\mathbf{B}$  - vektor magnetne indukcije,

$\mathbf{H}$  - vektor jačine magnetnog polja,

$N_i$  - interpolaciona funkcija,

$\mathbf{n}$  - normalni vektor pri određivanju interpolacione funkcije,

$\mathbf{v}$  - željeni vektor pri određivanju izraza interpolacione funkcije,

$x_i, y_i, z_i$  - koordinate tačke  $i$ ,

$\Re$  - skup realnih brojeva,

$\mathbf{v}_2$  i  $\mathbf{v}_3$  - vektori za određivanje normalnog vektora ravne segmenta interpolacione funkcije,

$\Delta$  - površina elementa (trougla),

$[K]$  - matrica krutosti,

$[\phi]$  - vektor nepoznatih potencijala,

$[f]$  - vektor pobude,

$L$  - diferencijalni operator,

$\alpha$  - koeficijent izvoda drugog reda u diferencijalnim jednačinama elektromagnetnih problema.

$\beta$  - koeficijent komponenta prvog reda u diferencijalnim jednačinama elektromagnetnih problema.

$r$  - ostatak (rezidijum),

$w_i$  - težinska funkcija,

$R_i$  - integral težinskih ostataka,

$F$  - funkcional približnog rešenja,

$K_{ij}$  - koeficijent matrice krutosti,

$b_i$  - element vektora pobude,

$l_e$  - dužina jednodimenzionalnog elementa,

$\delta_{ij}$  - dirac delta funkcija,

$\phi_i$  - vrednost tražene veličine u tački  $i$ ,

$\alpha, \gamma$  i  $q$  - koeficijenti diferencijalne jednačine graničnih uslova,

$g_N$  - ostatak kod elementa na granici domena,  
 $\nabla$  - diferencijalni operator prvog stepena,  
 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  i  $\mathbf{k}$  - jedinični vektori paralelni osama koordinatnog sistema,  
 $div$  -operator divergencije,  
 $\mathbf{D}$  - vektor gustine električnog fluksa,  
 $\mathbf{J}$  - vektor gustine struje,  
 $\mathbf{E}$  - vektor električnog polja,  
 $\mathbf{X}$  - harmonički vektor određene veličine,  
 $\hat{X}$  - vršna vrednost određene veličine,  
 $e^{j\alpha}$  - kompleksni operator,  
 $\rho$  - gustina elektriciteta ili specifična otpornosti materijala,  
 $\epsilon$  - permitivnosti medijuma,  
 $\mu$  - magnetni permeabilitet,  
 $\sigma$  - specifična provodnosti,  
 $\phi$  - potencijal električnog polja,  
 $\mathbf{F}$  - sila,  
 $I$  - električna struja,  
 $\mathbf{A}$  - vektorski potencijal magnetnog polja,  
 $n_{1x}$  i  $n_{1y}$  - komponente normalnog vektora,  
 $\omega$  - kružna frekvencija,  
 $\mathbf{J}_v$  - gustina struje potiče od indukovano električnog polja,  
 $\mathbf{J}_s$  - gustina dolazi iz spoljašnjeg izvora,  
 $\mathbf{S}$  - vektor pritiska na površini,  
 $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y$  i  $\mathbf{B}_z$  - komponenti vektora magnetne indukcije,  
 $l_m$  - dužina modela,  
 $R$  - poluprečnik rotora,  
 $\mathbf{a}$  - jedinični kompleksni operator,  
 $\mathbf{x}_s$  - prostorni vektor trofazne veličine,  
 $x_i$  - trenutna vrednost date veličine  $i$ -te faze,  
 $x_{s0}$  - nulta komponenta,  
 $\mathbf{X}_k$  - element Fourier-voga reda,  
 $N$  - broj faza ili broj navoja po strani kalema,  
 $\mathbf{r}$  - vektora položaja,  
 $\mathbf{M}$  - vektor magnetopobudne sile,  
 $k_M$  - koeficijent magnetopobudne sile,

$\mathbf{r}_k$  -vektor položaja,

$p$  -broj pari polova,

$N$ -broj strana kalema,

$\varphi_r$ -fazni pomak između realne ose koordinatnog sistema i vektora položaja prve strane kalema,

$\mathbf{e}_k$  - jedinični vektor,

$\mathbf{i}_r$  -prostorni vektor struje rotora,

$i_k$  -trenutna vrednost struje,

$k_{ik}$ -koeficijent za skaliranje prostornog vektora struje, u slučaju kada trenutni vrednosti struja kalema izraženi sa kompleksnim brojevima,

$\varphi_i$ -početni fazni pomak struje prve strane kalema,

$k_{ir}$  - koeficijent za skaliranje prostornog vektora struje, u slučaju kada trenutni vrednosti struja kalema izraženi sa realnim brojevima,

$p_k$  -broj parih polova  $k$ -prostornog harmonica,

$Q_s$  - broj žlebova statora,

$Q_r$  - broj žlebova rotora,

$n_s$  - broj navoja u žlebovima statora,

$n_r$  -broj navoja u žlebovima rotora,

$\xi_s$  - koeficijent namotaja statora,

$\xi_r$  - koeficijent namotaja rotora,

$\psi$  - fluksni obuhvat,

$S_k$  - površina jednog elementa,

$\mathbf{A}_{sr-kalem}$  -srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala u strani kalema,

$\mathbf{A}_{k,sred}$  -srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala u jednom elementu,

$\kappa$  - strujni fluksni obuhvat,

$\kappa_{r,n}$  - strujni-fluksni obuhvat u određenom žlebu rotora,

$\Psi_{r,n}$  - fazor fluksnog obuhvata štapa,

$\Psi_{r,v}$  - $v$ -i prostorni harmonik fluksnog obuhvata rotora,

$\mathbf{i}_{r,n}$  -fazor struje štapa rotora,

$\mathbf{I}_{r,v}$  - $v$ -i prostorni harmonik struje rotora,

$\kappa_{r,n-sred}$  - srednja vrednosti strujno-fluksnih obuhvata u štapovima,

$\Psi_r$  - fazor fluksnog obuhvata rotora,

$f_m$  - frekvencija modela,



$s$ -klizanje rotora,

$f_s$  -frekvencija priključnog napona realne mašine,

$f_{rv}$  -frekvencija  $v$ - tog harmonika,

$s_v$  -klizanje  $v$ - tog harmonika,

$\omega_s$  -sinhrona brzina osnovnog prostornog harmonika,

$\omega_r$  -električna ugaona brzina rotora,

$\Psi_s$  -fluksni obuhvat statora,

$\Psi_{s\sigma}$  -rasipni fluksni obuhvat statora,

$\Psi'_r$  -svedena vrednost fluksnog obuhvata rotora na statorsku stranu,

$\Psi'_{r\sigma}$  -svedena vrednost rasipnog fluksnog obuhvata rotora na statorsku stranu,

$\Psi_m$  -fluksni obuhvat glavnog polja,

$i_m$  -struja magnećenja,

$R'_2$  -svedena vrednost otpornosti namotaja rotora na statorsku stranu,

$R_1$  - otpornosti faznih namotaja,

$L_{s\sigma}$  -rasipni induktivitet statora,

$L'_{r\sigma}$  -svedena vrednost rasipnog induktiviteta rotora na statorskoj strani,

$L_m$  -induktivitet glavnog polja ili induktivitet magnećenja,

$i_s$  - prostorni vektor struje statora,

$i'_r$  - svedena vrednost prostornog vektora struja rotora na statorsku stranu,

$P_{cu}$  - gubici u bakru,

$R_{stap-sred}$  -srednja vrednost otpornosti jednog štapa,

$m$  - broj faze,

$M$  - moment motora,

$R_{r,bar}$  - otpornosti jednog štapa,

$P_{cu-rotor}$  -gubici u bakru rotora,

$\omega'_{r,v}$  - sinhrona brzine viših harmonika  $v$ ,

$M_v$  -moment viših harmonika  $v$ ,

$M_{res}$  - rezultatni moment,

$L_{end-wind}$  -induktivnosti glava namotaja,

$\Lambda_t$  -magnetni permeabilitet glave namotaja,

$\tau_p$  -polni korak,

$N_1$  -broj navoja namotaja jedne faze.

## SPISAK SLIKA

1. Položaj namotaja u kompleksnom koordinatnom sistemu i smer prostornog vektora sa referentnim smerovima električne veličine.
2. Konstrukcija rotora sinhronne mašine,
  - a.) valjkasti rotor,
  - b.) rotor sa izraženim polovima.
3. Konstrukcija rotora sinhronih mašina sa permanentnim magnetima,
  - a.) rotor sa spoljnim permanentnim magnetima,
  - b.) rotor sa unutrašnjim permanentnim magnetima.
4. Konstrukcija rotora sinhronne reluktantne mašine.
5. Konstrukciona izvedba rotora i statora asinhronih mašina.
6. Interpolacione funkcije jednodimenzionalnih elemenata.
7. Normalni vektor i segment interpolacione funkcije.
8. Interpolaciona funkcija za jedan čvor u dvodimenzionalnom modelu.
9. Interpolacione funkcije čvorova u jednom elementu domena.
10. Interpolacione funkcije čvorova u jednom elementu domena.
11. Eliminisanje viših harmonika fluksnog obuhvata
12. Projekcija rotirajućeg vektora na osu jednog faznog namotaja.
13. Raspodela namotaja dvopolnog trofaznog namotaja u žlebovima limpaketa.
14. Raspodela magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja u vazдушnom procepu.
15. Raspodela trofazne magnetopobudne sile u vazдушnom procepu.
16. Raspodela indukcije u vazдушnom procepu.
17. Raspodela magnetopobudne sile glavnog namotaja monofaznih asinhronih motora, osnovni prostorni harmonik raspodele i pokretne sinusoidalne raspodele.
18. Model pulsirajućeg vektora sa rotirajućim vektorima.
19. Pulsirajući vektori pobude pojedinačnih faznih namotaja.
20. Pulsirajući vektori pobude pojedinačnih faznih namotaja i rotacioni vektori pojedinačnih pulsirajućih vektora.
21. Klasični model kalema sa referentnim smerovima struje i magnetopobudne sile kalema određene na osnovu klasičnog modela.
22. Rezultantna magnetopobudna sila kalema sa neparalelnim osama simetrije.
23. Model rotora sa tri žleba, za određivanje prostornog vektora nekonvencionalnih namotaja.
24. Model kalema u kompleksnoj ravni sa vektorima položaja i vektorom magnetopobudne sile određene na osnovu klasičnog metoda.
25. Kontura sa referentnim smerovima integrala.
26. Neravnomerna raspodela struje u jednom žlebu asinhronne mašine.
27. Ekvivalentna šema asinhronne mašine.
28. a.) Zbir rasipnih induktiviteta statora i rotora i promena temperature namotaja statora u funkciji struje motora,
  - b.) Promena rasipnih induktiviteta statora i rotora u funkciji struje motora.
29. a.) Ekvipotencijalne linije magnetnog vektorskog potencijala kod motora 1 za nazivnu vrednost klizanja i rotorsku frekvenciju od 2 Hz,

- b.) Ekvipotencijalne linije magnetnog vektorskog potencijala kod motora 2 za nazivnu vrednosti klizanja i rotorsku frekvenciju 0.4 Hz
30. a.) Konfiguracija merne opreme korišćene prilikom ogleđa praznog hoda i kratkog spoja motora 1 (motor se nalazi u sredini),  
b.) promena induktiviteta magnećenja u funkciji napona motora.
31. a.) Promena rasipnih induktiviteta statora i rotora u funkciji klizanja,  
b.) promena induktiviteta magnećenja u funkciji klizanja.
32. a.) Promena otpornosti rotora, svedena na statorsku stranu  $R'_2$  u funkciji klizanja i  
b.) promena momenta motora u funkciji klizanja.
33. Model četvrtastog žleba sa provodnikom i referentni koordinatni sistem.
34. Karakteristike koeficijenta  $k_R$  i  $k_L$ .

# SADRŽAJ

<i>Sadržaj</i>	1
1. <i>Uvod</i>	3
1.1 <i>Predmet, problem i cilj istraživanja</i>	3
1.2 <i>Stanje u oblasti istraživanja</i>	4
1.3 <i>Pregled ostvarenih rezultata</i>	6
1.4 <i>Pregled sadržaja disertacije po poglavljama</i>	6
2. <i>Pregled vrsta rotacionih električnih mašina</i>	8
2.1 <i>Rotacione električne mašine</i>	8
2.2 <i>Pojam prostornih vektora</i>	9
2.3 <i>Višefazni namotaji</i>	10
2.4 <i>Veza između elektromagnetnih veličina</i>	11
2.5 <i>Veza između prostornih i vremenskih harmonika</i>	12
2.6 <i>Vrsta prostornih vektora</i>	12
2.7 <i>Električne mašine sa rotacionim magnetnim poljem</i>	13
2.7.1 <i>Sinhrono mašine</i>	13
2.7.2 <i>Asinhrono mašine</i>	16
3. <i>Teorija konačnih elemenata</i>	19
3.1 <i>Diskretizacija modela</i>	20
3.2 <i>Određivanje vrsta interpolacione funkcije</i>	21
3.2.1 <i>Određivanje interpolacione funkcije jednodimenzionalnih modela</i>	21
3.2.2 <i>Određivanje interpolacione funkcije dvodimenzionalnih domena</i>	24
3.3 <i>Konstruisanje sistema algebarskih jednačina</i>	26
3.3.1 <i>Metod težinskih ostataka</i>	28
3.3.2 <i>Varijacioni metod</i>	30
3.3.3 <i>Određivanje integrala za proračun koeficijenata sistema algebarskih jednačina jednodimenzionalnih modela</i>	30
3.3.4 <i>Određivanje integrala za proračun koeficijenata sistema algebarskih jednačina dvodimenzionalnih modela</i>	31
3.3.5 <i>Određivanje formule za proračun koeficijenata sistema linearnih jednačina</i>	32
3.3.6 <i>Konstruisanje matrice i vektora pobude sistema linearnih jednačina</i>	35
3.3.7 <i>Dopuna linearne jednačine sa izrazima graničnih uslova</i>	36
4. <i>Maxwell-ove jednačine elektromagnetnog polja</i>	39
4.1 <i>Kratak pregled vektorske analize</i>	39
4.1.1 <i>Divergencija vektorskog polja</i>	39
4.1.2 <i>Rotor vektorskog polja</i>	40
4.1.3 <i>Gradijent</i>	41
4.1.4 <i>Identiteti u vektorskoj analizi</i>	41
4.2 <i>Integralni oblici Maxwell-ovih jednačina</i>	41
4.3 <i>Diferencijalni oblici Maxwell-ovih jednačina</i>	42
4.4 <i>Elektro i magnetno statički oblici Maxwell-ove jednačine</i>	43
4.5 <i>Vremenski-harmonički oblici Maxwell-ovih jednačina</i>	43
4.6 <i>Konstitutivne relacije</i>	44
4.7 <i>Skalarni i vektorski potencijali</i>	45
4.7.1 <i>Skalarni potencijal električnog polja</i>	45
4.7.2 <i>Vektorski potencijal magnetnog polja</i>	45

4.8	Granični uslovi	46
4.9	Određivanje magnetne indukcije na osnovu rešenja magnetnog polja sa MKE	47
4.10	Vremenski harmonički oblik parcijalne diferencijalne jednačine magnetnog polja	48
4.11	Određivanje elektromagnetnih sila pomoću Maxwell-stress tensora	49
5.	Metodologija prostornih vektora	51
5.1	Određivanje komponenata ortogonalnog dvofaznog sistema	53
5.2	Izrazi za određivanje fazne veličine pomoću prostornih vektora	54
5.3	Model za određivanje prostornih vektora	54
6.	Model prostornog vektora	57
6.1	Prostorni vektor magnetopobudne sile trofaznog namotaja	57
6.1.1	Raspodela magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja	57
6.1.2	Rezultantna magnetopobudna sila i magnetna indukcija u vazдушnom procepu	59
6.1.3	Pulsirajuća raspodela magnetopobudnih sila pojedinačnih faznih namotaja	60
6.1.4	Određivanje intenziteta sinusoidalne raspodele u vazдушnom procepu	61
6.1.5	Određivanje prostornog vektora trofazne magnetopobudne sile	62
6.2	Klasični model kalema	63
6.3	Matematički modeli nekonvencionalnih namotaja	64
6.4	Prostorni vektor struje višefaznog namotaja	66
6.4.1	Određivanje prostornih vektora struja sa kompleksnim vrednostima struja namotaja	67
6.4.2	Određivanje prostornih vektora struja sa realnim vrednostima struja namotaja	68
6.5	Konverzija prostornih vektora struje između različitih sistema namotaja	70
6.6	Određivanje fazora fluksnog obuhvata	70
6.6.1	Definicija magnetnog fluksnog obuhvata pomoću magnetnog vektorskog potencijala	71
6.6.2	Određivanje magnetnog fluksnog obuhvata kalema sa ravnomernom raspodelom struje	72
6.6.3	Određivanje magnetnog fluksnog obuhvata kalema sa neravnomernom raspodelom struje	73
6.6.4	Određivanje magnetnog fluksnog obuhvata sistema nekonvencionalnih namotaja	75
6.6.5	Frekvencija vremenskog harmoničkog modela	77
7.	Određivanje induktivnosti asinhronne mašine	79
8.	Određivanje ekvivalentne otpornosti rotora i otpornosti statora	81
8.1	Proračun ekvivalentne otpornosti rotora	81
8.2	Proračun otpornosti namotaja statora	82
9.	Određivanje momenta	83
10.	Eksperimentalni rezultati	85
10.1	Definicija modela asinhronne mašine	85
10.2	Određivanje podataka na osnovu rešenja elektromagnetnog polja	86
10.3	Određivanje karakteristike mašine na osnovu podataka	86
10.4	Primena metoda za određivanje parametara asinhronne mašine u kratkom spoju	87
10.5	Određivanje induktiviteta magnećenja (Motor 1)	90
10.6	Karakteristike induktiviteta (motor 1 i motor 2)	90
10.7	Karakteristike otpornosti motora	93
11.	Zaključak	95
	Literatura	98
	Dodatak	105

## 1. UVOD

U rotacionim električnim mašinama električna energija se pretvara u mehaničku energiju. Zato je od interesa poznavati ponašanje električnih mašina, koje je pre svega određeno njenim parametrima. Parametri rotacionih električnih mašina najčešće se određuju primenom metoda prostornih vektora. U ovom radu je prikazan metod za određivanje karakteristika asinhronih mašina primenom proširene teorije prostornih vektora.

### 1.1 Predmet, problem i cilj istraživanja

Osnovna hipoteza zasnovana je na pretpostavci da je kod asinhronih mašina moguće odrediti parametre T ekvivalentne šeme, na osnovu rešenja raspodele magnetnog polja dobijenih metodom konačnih elemenata (MKE) u dvodimenzionalnom modelu magnetnog kruga. Ova hipoteza se bazira na činjenici, da se elektromagnetni sistem asinhronih mašina može smatrati sistemom koji sadrži tri nezavisna induktiviteta (induktiviteta u T ekvivalentnoj šemi).

Ostale hipoteze su:

- Prostorni vektor struje rotora može se odrediti proširenjem metoda prikazanih u knjigama [1], [2]. Ova hipoteza se bazira na pretpostavci, da u klasičnom modelu za određivanje rezultatnog prostornog vektora struje kalema (koji se u modelima konačnih elemenata sastoji od dve strane kalema), rezultatni prostorni vektor se može izraziti kao zbir prostornih vektora pojedinačnih strana kalema.
- Fazori struja u T ekvivalentnoj šemi asinhronne mašine su ekvivalentni sa prostornim vektorima osnovnih prostornih harmonika struja.
- Fazori fluksnih obuhvata rotora i statora mogu se odrediti pomoću strujnih fluksnih obuhvata i struja rotora i statora.
- Fazori fluksnih obuhvata mogu se izraziti linearnom kombinacijom fazora struja statora i rotora. Koeficijenti linearne kombinacije su jednaki vrednostima induktiviteta u T ekvivalentnoj šemi asinhronne mašine.
- Gubici u bakru rotora potiču od struja prostornih harmonika. Zato pri proračunu rezultatnog momenta motora treba uzeti u obzir da se predznaci komponenata momenata, koji potiču od različitih prostornih harmonika struje rotora, razlikuju.

Naučni metodi primenjeni u okviru ove teze su metod konačnih elemenata (MKE) [3]-[5] i prošireni metod za određivanje prostornih vektora struje i fluksnih obuhvata. Za određivanje raspodela magnetnog polja sa MKE korišćen je softverski paket FEMM 4.2., dok je za određivanje fazora struje i fluksnih obuhvata na osnovu raspodela elektromagnetnog polja, korišćen softverski paket OCTAVE.

Potvrđivanje ispravnosti predloženog metoda, koji se zasnovan na prethodno opisanim hipotezama, izvršeno je poređenje parametara izračunatih na osnovu oglada kratkog spoja i praznog hoda asinhronne mašine, sa parametrima određenim na osnovu rešenja elektromagnetnog polja modela, koji su definisani za prethodno

spomenute radne tačke mašine.

Ispravnost predloženog metoda kod radnih tačaka, različitih od prethodno spomenutih, mogu se dokazati poređenjem karakteristika parametara određenih sa metodima opisanim u radovima [6]-[16] sa karakteristikama izračunatim sa predloženom metodom u okviru ove teze.

Prethodno navedeni rezultati i karakteristike su izračunate na osnovu raspodela elektromagnetnog polja, određenih sa softverskim paketom FEMM4.2. Raspodela elektromagnetnog polja određuje fluksni obuhvat, struje i strujno fluksne obuhvate, koji su primenjeni pri određivanju fazora struja i fluksnih obuhvata statora i rotora. Pored navedenih fazora izračunati su prostorni harmonici struje rotora, koji su korišćeni pri određivanju komponenata momenata sa softverskim paketom OCTAVE.

## **1.2 Stanje u oblasti istraživanja**

Teorija prostornih vektora električnih mašina omogućila je proračun električnih veličina  $n$ -faznog sistema, primenom Clark-ine transformacije pomoću dvofaznog ortogonalnog sistema. Kovács u svom radu [1] prikazao je primenu prostornih vektora za određivanje električnih veličina trofaznih asinhronih i sinhronih mašina. Unapređenjem računarske i poluprovodničke tehnologije pojavili su servo pogoni. Prelazni režimi ovih pogona najefikasnije su simulirani pomoću numeričkih metoda, kao što je metoda Runge-Kutt-a. Primenom diferencijalnih jednačina, određenih na osnovu prostornih vektora, te njihovim rešavanjem numeričkim metodima, opisani su prelazni režimi asinhronih i sinhronih mašina, što je detaljno prikazao Vas u svom radu [2].

Unapređenje računarske tehnologije omogućilo je primenu numeričkih metoda kao što je MKE, pri proračunu parametara mašine. Prvi put MKE su publikovali Hrennikoff i Courant, a kasnije je metod primenjen pri proračunu različitih problema u različitim inženjerskim disciplinama. Adaptacija MKE za magnetno polje je detaljno opisana u knjigama [3]-[5]. Pored određivanja raspodele magnetnog polja sa MKE, pojavila se potreba za proračun parametara mašine na osnovu tog rešenja. Unapređenjem računara i matematičkih postupaka, pojavili su se i radovi iz oblasti proračuna parametara asinhronih mašina [6] – [40].

Proračun parametara elektromagnetnih sistema, kao što su magnetni krugovi asinhronih i sinhronih mašina uvek je bio veliki izazov, te je broj radova na tu temu veoma veliki. Tokom izrade disertacije korišćena je literatura [41] – [45], koja obuhvata problematiku proračuna parametara asinhronih mašina pomoću analitičkih izraza.

Sa povećanjem kapaciteta računara pojavili su se radovi, koji su predložili metode za proračun parametara asinhronih mašina. Jedan od njih je rad iz sredine devetstodevedesetih publikovan od strane Yahiaoui A., and Bouillault F. [6], u kojem su prikazani načini određivanja parametara primenom vremenskih harmonika magnetnih polja. U ovom radu tokom proračuna induktivnosti magnećenja L-ekvivalentne šeme primenjeni su zamrznuti permeabiliteti magnetnog kruga, koji su određeni tokom proračuna raspodele magnetnog polja opterećenog motora.

U radu [7] Suzuki A. i ostalih, određeni su parametri asinhronih mašina u domenu promene klizanja 0-5%, sa zamrznutim permeabilitetom magnetnog kruga.

Yamazaki K. je u radovima [8] i [9], predložio metod za proračun parametara ekvivalentne šeme asinhronih mašina. U ovim radovima autor uzima u obzir neravnomernu raspodelu struje u štapovima rotora, a i međusobne induktivitete je izračunao pomoću zamrznutih permeabiliteta. Tokom proračuna momenta mašine

pretpostavio je da gubici u bakru rotora potiču od osnovnog prostornog harmonika struje rotora. Zato se u karakteristikama mogu videti razlike između karakteristika izračunatih na osnovu gubitaka i Maxwell-stress tenzora.

Stermecki A. i ostali u radu [10] predlažu metod za određivanje prostornih vektora rotora, kod koga se za neparni broj žlebova po polu rotora, moraju primeniti aproksimacije. Neravnomerna raspodela struja u štapovima rotora je uzeta u obzir pri proračunu parametara, dok je uticaj prostornih viših harmonika na karakteristike momenta zanemaren. Zato se kod karakteristika momenta izračunatih sa Virtula work metodom i sa gubicima u bakru rotora mogu uočiti značajne razlike.

Dolar D. i ostali u radu [11] su prikazali postupak određivanja parametara modela dvofazne asinhronne mašine. Primenili su zamrznuti permeabilitet, a i prikazali su postupak određivanja faznog pomaka između električnih veličina u štapovima rotora. Tokom proračuna momenta koristili su ukupne gubitke u bakru rotora, a nisu uzeli u obzir uticaj viših prostornih harmonika. Induktivnosti su određene na osnovu sopstvenih i međusobnih induktiviteta namotaja izračunatih sa zamrznutim permeabilitetima magnetnog kruga.

Alberti L. i ostali u radovima [12] i [13], namotaj rotora zamenjuju sa dvo [12] ili sa tro [13] faznim namotajima, gde je pretpostavljeno da su namotaji raspoređeni sinusoidalno po obimu rotora.

Ling Z. i ostali u radu [14] zamrznute permeabilitete su koristili pri proračunu rasipnog induktiviteta statora.

Yamazaki K. i ostali u radu [15], odredili su parametre asinhronne mašine u domenu 0-5% klizanja sa smrznutin permeabilitetom magnetnog kruga i na osnovu rezultata predložili modifikovanu ekvivalentnu šemu asinhronne mašine.

Zhou P. i ostali u radu [16] prikazuju metod za proračun karakteristike parametara asinhronih mašina na osnovu vremenskih harmonika. Tokom određivanja parametara koristili su zamrznute permeabilitete magnetnog kruga mašine.

U radovima [46]-[53], pored parametara, određeni su i detaljno diskutovani harmonici struje rotora, a u radovima [54]-[59] obrađen je i harmonični sadržaj magnetnog polja u vazдушnom procepu mašine.

U radovima [60]-[62] određene su karakteristike asinhronne mašine sa namotanim rotorom i sa kompaktnim rotorom (solid rotor cage induction machine) [63]. Pored određivanja parametara, simulirani su i kompletni sistemi modela asinhronne mašine u sklopu sa MKE [64].

U prethodnim radovima, na osnovu raspodele magnetnog polja na površini rotora, često su određene i sile i momenti. Ove sile se mogu odrediti primenom Maxwell stress tenzora [65] [66].

Pored trofazne asinhronne mašine često su obrađene i monofazne ili dvofazne asinhronne mašine. Ove mašine poseduju pulsaciono magnetno polje, koje je simulirano u radovima [67]-[69]. Simulacija ovih mašina sa MKE zahteva specifičnu konfiguraciju modela i proračuna parametara, [32] [70]-[74].

Kao što se vidi, tokom proračuna karakteristika i parametara asinhronih mašina najčešće se koristi metoda sa zamrznutim permeabilitetima. U radu [75] prikazan je metod, koji na osnovu rešenja magnetnog polja sa uračunatim vremenskim harmonicima, određuje parametre T ekvivalentne šeme asinhronih mašina bez zamrzavanja permeabiliteta u magnetnom krugu. Pored proračuna parametara u ovom radu, prikazan je metod za određivanje komponenata momenta, koji potiču od viših prostornih harmonika struje. Pomoću harmoničkih komponenata izračunata je karakteristika momenta, koja se znatno bolje približava



karakteristikama izračunatim pomoću Maxwell-stress- tenzora, od karakteristika, koje ne uzimaju u obzir te komponente momenta.

### **1.3 Pregled ostvarenih rezultata**

U radu je prikazan metod za određivanje prostornog vektora struje višefaznih namotaja, kao što su kavezni namotaj rotora, koji je identičan sa fazorom struje. Zbog neravnomerne raspodele struje u štapovima rotora, fazor fluksnih obuhvata je računat pomoću strujno-fluksnih obuhvata i fazora struje.

Na osnovu fazora struje i fluksnih obuhvata određene su rasipne induktivnosti i induktivnost magnećenja kao i ekvivalentna otpornost rotora.

Pored prostornog vektora osnovnog harmonika struje rotora, određeni su i njeni viši prostorni harmonici. Na osnovu tih harmonika izračunate su komponente momenta, koje zajedno sa osnovnim harmonikom proizvode ukupni moment motora. Neki od tih momenata deluju u suprotnom smeru u odnosu na moment osnovnog harmonika.

U predloženoj metodi prilikom proračuna, uzeti su u obzir odgovarajući predznaci komponenta momenta u odnosu na moment motora izračunatog na osnovu gubitaka u provodnicima rotora. Vrednost momenta izračunatog na osnovu predložene metode približava se vrednosti momenta izračunatog na osnovu Maxwell stress tensor-a.

### **1.4 Pregled sadržaja disertacije po poglavljama**

U prvom poglavlju je dat pregled ciljeva, problematika i literature korišćene pri istraživanju. Sem toga u poglavlju su predložene hipoteze, na osnovu kojih je definisan postupak za proračun karakteristika i parametara asinhronih mašina obrađen u kasnijim poglavljima.

U drugom poglavlju data je definicija električnih mašina, kao i definicija rotacionih električnih mašina. Pored definicije mašina diskutovano je i ukazano na značaj primene prostornih vektora u postupku određivanja parametara. Preko višefaznih namotaja i veza između elektromagnetnih veličina spomenute su prednosti primene prostornih vektora u analizi rotacionih električnih mašina.

U ovom poglavlju spomenuta je još i veza između prostornih i vremenskih harmonika, a dat je i pregled vrsta prostornih vektora primenjenih pri proračunu karakteristika mašine.

Na kraju drugog poglavlja ukratko su prikazane različite vrste rotacionih električnih mašina sa višefaznim namotajima.

U trećem poglavlju dat je pregled MKE. Dobro poznavanje MKE je neophodno pri definisanju modela mašine, kao i pri interpretiranju rezultata proračuna magnetnog polja. Prikazan je značaj postupka diskretizacije modela, a obrađen je i uticaj konfiguracije mreže diskretnih elemenata na preciznost rešenja elektromagnetnog polja.

Dalje je dat pregled metoda za određivanje karakterističnih sistema jednačina, pri formulaciji različitih elektromagnetnih problema. Sem toga, u ovom poglavlju detaljno su analizirani glavni elementi MKE, koji obezbeđuju pogodne konfiguracije modela elektromagnetnog polja električne mašine.

U četvrtom poglavlju prikazani su glavni delovi vektorske analize i različitih oblika Maxwell-ove diferencijalne jednačine. Pored navedenih diferencijalnih jednačina, diskutovano je ponašanje elektromagnetnog polja na granici domena sa različitim elektromagnetnim osobinama. Pored diferencijalnih i integralnih oblika, određeni su statički i vremenski harmonički oblici Maxwell-ovih jednačina. Pored Maxwell-ove jednačine prikazane su definicije skalarnog potencijala električnog polja, kao i definicija vektorskog potencijala magnetnog polja.

Na kraju ovog poglavlja, definisan je način proračuna magnetnog fluksa na osnovu magnetnog vektor potencijala, prikazan je vremenski harmonični oblik diferencijalne jednačine magnetnog polja i metod za određivanje elektromagnetne sile na osnovu komponenata magnetne indukcije.

U petom poglavlju opisana je metodologija prostornih vektora, kao i veza između višefaznog i ortogonalnog dvofaznog sistema.

Na osnovu rezultata analize primenom klasičnih metoda, definisana je veza između prostornih vektora [1] i Fourier-ove analize.

U šestom poglavlju, prikazana je raspodela magnetopobudne sile trofaznog namotaja. Pored osnovnog prostornog harmonika prikazane su raspodele značajnih viših prostornih harmonika, a i definisana je veza između rotirajućeg prostornog vektora i raspodele osnovnog prostornog harmonika.

Prikazan je način određivanja rotirajućeg prostornog vektora magnetopobudne sile pomoću pulsirajućih magnetopobudnih sila pojedinačnih faznih namotaja,

Dalje u ovom poglavlju prikazana je definicija prostornih vektora nekonvencionalnih namotaja, koja je definisana na osnovu analize klasičnih modela kalema. Pomoću definicije vektora magnetopobudne sile, definisani su izrazi prostornih vektora struje, kao i konverzija vektora struje između namotaja statora i rotora.

U zadnjoj tački šestog poglavlja, prikazan je postupak određivanja fazora fluksnog obuhvata pri različitim vrstama raspodele struje u provodnicima.

U sedmom i osmom poglavlju prikazane su formule za proračun parametara ekvivalentnih šema asinhronih motora, dobijene na osnovu fazora struja i fluksnih obuhvata statora i rotora.

U devetom poglavlju prikazan je predloženi metod proračuna komponenata momenta i rezultantnog momenta.

U desetom poglavlju su prikazani parametri dobijeni proračunom korišćenog modela električne mašine, a u cilju njegovog potvrđivanja njegove ispravnosti. Radi potvrđivanja ispravnosti predloženog metoda prikazane su karakteristike rasipnih induktiviteta i induktiviteta magnećenja motora i upoređene su sa istim dobijenim iz oglada kratkog spoja i praznog hoda pri različitim vrednostima struja.

Na kraju desetog poglavlja upoređene su karakteristike rasipnih induktiviteta i otpornosti rotora određene analitičkom i novom predloženom metodom.

## 2. PREGLED VRSTA ROTACIONIH ELEKTRIČNIH MAŠINA

Električne mašine pripadaju porodici električnih uređaja, koji su omogućili široku primenu električne struje u svakodnevnom životu.

Električne mašine se dele na dve grupe, na osnovu toga dali poseduju pokretne elemente ili ne.

U prvu grupi pripadaju transformatori koji pomoću magnetnog polja povezuju različite naponske sisteme. Tako omogućuju efikasno snabdevanje potrošača, koji se nalaze na velikim udaljenostima od elektrana.

Drugoj grupi pripadaju rotacione električne mašine, koje pretvaraju električnu energiju u mehaničku ili obratno.

Ova doktorska disertacija se bavi sa određivanjem parametara asinhronih motora, koji pripadaju široj porodici rotacionih električnih mašina.

### 2.1 Rotacione električne mašine

Rotacione električne mašine se koriste za pretvaranje električne energije u mehaničku i nazad mehaničke u električnu energiju. Pretvaranje energije u oba smera, često se izvodi u istoj električnoj mašini, a sam smer toka energije određuje režim rada, koji može biti motorni i generatorski.

U motornom režimu, kada mašina radi kao motor, vrši se pretvaranje električne energije u mehaničku, dok u generatorskom režimu, kada mašina radi kao generator, mehanička energija se pretvara u električnu. Električne mašine preko svojih električnih priključaka, uzimaju i odaju električnu energiju, dok se mehanička energija uzima ili odaje preko vratila motora.

Mašine koji proizvode mehaničku energiju ili je pretvaraju u električnu energiju, poseduju pokretni i nepokretni deo. Kod električnih mašina, nepokretni deo se naziva stator, dok rotirajući ili pokretni deo se naziva rotor.

Električni priključci se nalaze na statoru motora, dok je vratilo motora čvrsto spojeno sa rotirajućem delom lim-paketa sa kojim zajedno obrazuje rotor.

Statori električne mašine najčešće su napravljeni od dinamo-limova i provodnika. U nekim specijalnim slučajeva koriste se permanentni magneti u konstrukciji statora.

U konstrukciji rotora koriste se isti materijali kao i kod statora. Kod nekih mašina, postoji značajna razlika između konstrukcije statora i rotora, jer rotor pojedinih vrsta sinhronih mašina ne sadrži provodnike te se i zato kod njih ne pojavljaju gubici u provodnicima pokretnog dela mašine. Ove mašine se mogu podeliti na sinhronne reluktantne mašine i na sinhronne mašine sa permanentnim magnetima. Sinhronne mašine sa permanentnim magnetima, često se koriste u savremenim pogonima sa visokim dinamičkim osobinama.

Električne mašine su najčešće okarakterisane sa snagom i momentom koji odaju ili uzimaju na vratilu. Električna snaga mašine se javlja na priključcima, a određuje se na osnovu trenutnih vrednosti napona i struje, dok mehaničku snagu određuju trenutne vrednosti brzine obrtanja vratila mašine i mehaničkog obrtnog momenta.

Pretvaranje električne energije u mehaničku ili mehaničku nazad u električnu

odigrava se usled dejstva elektromagnetnih sila koje se pojavljuju na pokretnim nosiocima elektricitetima (najčešće slobodni elektroni u metalima) u magnetnom polju. U svakodnevnom životu pokretni nosioci elektriciteta najčešće su slobodni elektroni u metalima, koji svojim kretanjem čine električnu struju kroz provodnike. U slučajevima kada se kretanje elektrona odigrava u provodniku koji se nalazi u magnetnom polju, interakcija struje i magnetnog polja proizvodi silu koja utiče na provodnik. Intenzitet sile je proporcionalan sa vektorskim proizvodom vektora struje i vektora magnetne indukcije.

Kada sila koju proizvodi interakcija struje provodnika i spoljašnjeg magnetnog polja, ili spoljašnja sila, npr. kod generatora, koja potiče od momenta koji deluje na vratilu rotora, te pokreće provodnike u spoljašnjem magnetnom polju, onda se u provodnicima javlja indukovana elektromotorna sila. Indukovana elektromotorna sila uvek pokušava da proizvede struju, koja sprečava promenu koja je izazvala indukovanu elektromotornu silu.

Prethodno opisana interakcija magnetnog polja i slobodnih elektrona u provodnicima povezuje magnetno polje (kao što je povezana magnetna indukcija  $B$  i jačina magnetnog polja  $H$ ) sa električnim veličinama (struja i napon u strujnom krugu mašine).

Veze između električnih veličina, određene su naponskim jednačinama, koje se u slučaju složenih sistema namotaja, pišu pomoću prostornih vektora. Veze između elektromagnetnih veličina (kao što su struja, napon, magnetna indukcija i jačina magnetnog polja) opisane su sa Maxwell-ovim diferencijalnim jednačinama.

Pri proračunu karakteristika električne mašine, rešen je složen sistem elektromagnetnih diferencijalnih jednačina. Naponske diferencijalne jednačine u ovim sistemima određuju električnu struju, koja uvek ispunjava pravila opisana sa I. i II. Kirchoff-ovim zakonima. U naponskim jednačinama pored priključnog napona javljaju se indukovane elektromotorne sile, koji potiču od promene magnetnog polja.

U magnetnom kolu električne mašine raspodela magnetnog polja opisana je sa Maxwell-ovim diferencijalnim jednačinama. Raspodela magnetnog polja u svakoj tački magnetnog kruga ispunjava uslove definisane sa diferencijalnim jednačinama. Tokom postupka rešavanja diferencijalnih jednačina elektromagnetnog polja u modelima električne mašine, uzeta je u obzir neravnomerna raspodela feromagnetnih materijala i strujnih pobuda.

## **2.2 Pojam prostornih vektora**

Određivanje električnih struja pri analizi složenih električnih kola uvek je bila od značaja, radi boljeg upoznavanja ponašanja električnih uređaja u različitim režimima rada. Ovo izuzetno važi za električne mašine, gde pored kompleksnog sistema namotaja, treba uzimati u obzir i nelinearnosti magnetnog kruga, te specifične promene karakteristika parametara, koje zavise od položaja ili brzine rotora.

Modeli koji su korišćeni pri istraživanju i projektovanju električnih mašina su konstruisani korišćenjem različitih karakterističnih parametara. Najčešće tokom ovih procesa električne mašine su optimizovane, radi ispunjavanja uslova koje zahtevaju pogoni.

Kod električne mašine složenost sistema modeliranja, proizilazi iz činjenice postojanja međusobno magnetno spojenih namotaja višefaznog sistema, koji pored

osnovnog harmonika struje i napona često proizvode njihove više harmonike. U većini slučajeva modeli su konstruisani tako da zanemaruju uticaj viših prostornih harmonika struja i napona. Pretpostavljeno je za osnovne harmonike (struja ili fluksnih obuhvata), da su u namotajima pomereni sa odgovarajućim faznim pomakom. Fazni pomak između veličina karakterističnih za pojedini namotaj je proporcionalan sa mehaničkim uglom između osa namotaja i izražen je električnim uglom. Ovaj pristup omogućuje značajno uprošćenje opisa električnih veličina višefaznih namotaja. Ove veličine mogu se izraziti kao linearna kombinacija dvaju nezavisnih komponenata, što znači, da se simetrični višefazni sistem može transformisati u ortogonalni dvofazni sistem .

Primena ortogonalnog dvofaznog sistema omogućuje određivanje osnovnog harmonika višefaznih električnih sistema pomoću dvofaznog namotaja. Što znači da se rešenjem sistema diferencijalnih jednačina dvofaznog sistema i primenom pravila transformacije veličine iz dvofaznog sistema u višefazni sistem i nazad, mogu odrediti osnovni harmonici električnih veličina  $n$ -faznog sistema.

Prednosti ovoga metoda se nalazi u tome, da umesto  $n$ -diferencijalnih jednačina, koje su povezane preko međusobnih induktivnosti, problem može rešiti rešenjem sistema od dve diferencijalne jednačine ortogonalnog dvofaznog sistema. Ose namotaja ortogonalnog dvofaznog sistema zaklapaju električni ugao od 90 stepeni. Na taj način obezbeđeno je da diferencijalne jednačine dvofaznog sistema nisu vezane preko međusobnih induktivnosti.

Primenom ortogonalnog dvofaznog sistema omogućeno je određivanje pojedinačnih asimetričnih režima rada višefaznih mašina, gde se asimetrije mogu opisati u dvofaznom sistemu [67], [68] .

Električne veličine u dvofaznim ortogonalnim sistemima mogu se posmatrati kao komponente dvodimenzionalnog vektora, koje su određene u kompleksnom koordinatnom sistemu. Što znači da se promene jedne električne veličine (npr. struje) u namotajima  $n$ -faznog sistema mogu opisati pomoću kompleksnog vektora.

### **2.3 Višefazni namotaji**

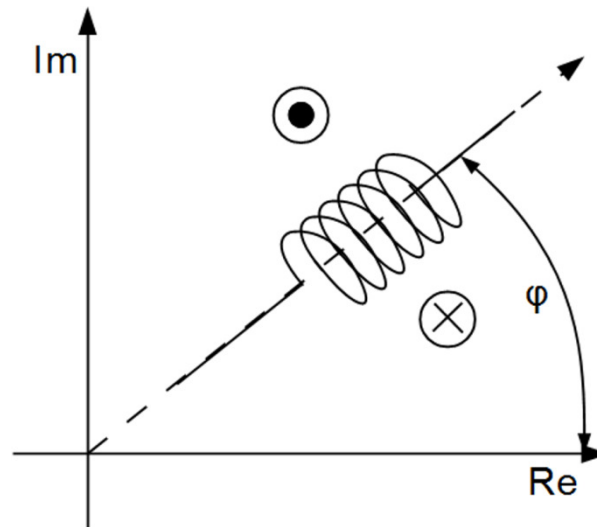
Zbog prednosti koje donosi primena višefaznih sistema kod električnih mašina umesto dvofaznih namotaja najčešće se primenjuju trofazni namotaji. Pored trofaznog sistema kod nekih specijalnih mašina broj faza statora može biti 5 ili 6, dok broj faza rotora asinhronih mašina sa kaveznom namotajem je jednak njegovom broju žlebova. Kod asinhronih mašina manjih snaga (najčešće do 3 kW) koristi se dvofazni namotaj, koji obezbeđuje obrtni moment i pri pokretanju i u mirnom stanju rotora. Fazni pomak između faza dvofaznog sistema najčešće se ostvaruje primenom kondenzatora i asimetričnim dvofaznim namotajem [69].

Namotaji pojedinih faza su podeljeni u sekcije, gde je broj kalemova jednak sa brojem žlebova po polu i fazu. Ovi kalemovi se nalaze u žlebovima statora i rotora (kod asinhronih motora sa namotanim rotorom), ili se primenjuje štapni namotaj (kod rotora asinhronih mašina sa kaveznom rotorom).

Kalemovi su raspoređeni u žlebovima, tako da svaki kalem ima osu simetrije (Slika 1), koja određuje njegovu poziciju u odnosu na referentnu poziciju. Ugao između referentne pozicije i osa namotaja je mehanički ugao, koji je kod dvopolnih mašina jednak sa električnim faznim pomakom namotaja od referentne pozicije. Kod višepolnih mašina, gde je broj pari polova dva ili više, električni fazni pomak je

jednak proizvodu broja pari polova i mehaničkog ugla, koji se meri između ose namotaja i referentne pozicije.

Položaj osa namotaja mogu se predstaviti orijentisanim jediničnim vektorom izraženim kompleksnim operatorom  $e^{j\varphi}$  kao što je predstavljeno na slici 1. Uticaj električne veličine u namotaju određen je intenzitetom te veličine i faznim položajem namotaja. Intenzitet i smer električne veličine može se izraziti primenom kompleksnih prostornih vektora (1).



Slika 1. Položaj namotaja u kompleksnom koordinatnom sistemu i smer prostornog vektora sa referentnim smerovima električne veličine.

Prostorni vektor namotaja je prikazan na slici 1. Zbog trodimenzionalne konfiguracije modela, gde su električne veličine normalne u kompleksnoj ravni (kao što su struje u namotajima), potrebno je označiti referentne smerove kod različitih strana ose namotaja, kao što je i označeno na slici 1. Prostorni vektor namotaja na željene veličine određen je sledećim matematičkim izrazom:

$$\mathbf{x} = \hat{X} \cdot e^{j\varphi} \quad (1)$$

Gde je:  $\mathbf{x}$  prostorni vektor veličine,  $\hat{X}$  intenzitet veličine u kalem,  $j$  je kompleksni operator,  $\varphi$  je električni ugao između ose kalema i realne ose kompleksnog koordinatnog sistema. Referentni smerovi veličine u provodnicima kalema su označeni sa simbolima  $\otimes$  i  $\odot$  u skladu sa osnovnim pravilima fizike.

## 2.4 Veza između elektromagnetnih veličina

Struja i indukovani napon su karakteristične veličine mašine. Priključni napon namotaja, jednak je zbiru indukovane elektromotorne sile i pada napona na omskoj otpornosti namotaja. Indukovana elektromotorna sila u namotaju prouzrokovana je promenom fluksnog obuhvata, koja potiče od magnetnog polja obuhvaćenog provodnicima namotaja. Magnetni fluks koji obuhvata provodnike potiče od magnetopobudnih sila. Magnetopobudnu silu proizvode zajedno struje u namotajima i permanentni magneti (ako ih ima u mašini) u magnetnom krugu. Prema tome, magnetni fluks zavisi od struja namotaja, dok indukovana elektromotorna sila zavisi od promene magnetnog fluksa ili fluksnog obuhvata. Zbog nelinearnosti magnetnog kruga, odnos magnetnog fluksa i struja se ne može opisati

linearnim izrazom, te se zato i ne može ni indukovana elektromotorna sila izraziti kao proizvod konstante i izvoda struje.

Zbog nelinearne karakteristike magnetnog kruga i složenosti višefaznog sistema, fluksni obuhvat ili deo fluksnog obuhvata namotaja ne može se odrediti kao funkcija struje jednog namotaja, jer raspodela magnetnog polja zavisi od zajedničkih uticaja magnetopobudnih sila namotaja višefaznog sistema u magnetnom krugu električne mašine. Zato u višefaznim sistemima karakteristične veličine, koje određuju rešenja naponske diferencijalne jednačine, su fluksni obuhvati i struje namotaja.

Promena fluksnog obuhvata proizvodi indukovane elektromotorne sile, koje su jednake priključnim naponima na krajevima namotaja, smanjenim za pad napona na omskim otpornostima namotaja. Prema tome, može se uočiti da priključni naponi indirektno utiču na promenu fluksnih obuhvata, preko struja namotaja.

## **2.5 Veza između prostornih i vremenskih harmonika**

Kod rotacionih mašina pored promene struja u namotajima, kretanje delova magnetnog kruga proizvodi promena fluksnog obuhvata u namotajima, koja prouzrokuje promene indukovano napona. Promena fluksnog obuhvata tokom rotacije pored osnovnog harmonika sadrži i visoke harmonike, koji proizvode i visoke harmonike indukovano napona.

Frekvencija osnovnog harmonika indukovano napona koja potiče od rotacije rotora je jednaka sa frekvencijom osnovnog harmonika priključno napona. Projektovanjem mašine uticaj viših harmonika, koji potiču od viših prostornih harmonika, se smanjuje na prihvatljiv nivo. Zato rezultati proračuna, koji uzimaju u obzir samo osnovne harmonike, neodstupaju znatno od realnih koji se dobijaju tokom ispitivanja električne mašine.

Zbog ovih razloga, uticaj viših prostornih harmonika se zanemaruje, te se najčešće tokom proračuna i simulacije električne mašine, koriste samo osnovni harmonici prostornih vektora struje i fluksnih obuhvata.

## **2.6 Vrsta prostornih vektora**

Kao što je već spomenuto, struje višefaznih namotaja proizvode magnetopobudnu silu koja stvara magnetno polje u magnetnom krugu mašine. Raspodela struje u namotajima i magnetnog polja u magnetnom krugu se može napisati kao zbir prostornih harmonika. Najznačajniji je osnovni prostorni harmonik, jer on u najvećoj meri utiče na pogonske osobine mašine, te se zato tokom projektovanja električne mašine uticaj ostalih prostornih harmonika redukuje.

Raspodela osnovnih harmonika, struje ili fluksnog obuhvata, po unutrašnjem obimu statora može se smatrati da je sinusoidalna. Zato su promene osnovnog harmonika u faznim namotajima identične, a razlikuju se samo u faznim pomacima. Razlika između faznih stavova osnovnih harmonika električnih veličina u različitim faznim namotajima je proporcionalna sa uglom koji zaklapaju ose navedenih namotaja. Odnos faznih pomaka između fazne veličine i ugla koji zaklapaju namotaji pojedinačnih faza je jednak broju pari polova.

Na osnovu prethodno opisanih faznih pomaka između električnih veličina različitih namotaja, može se zaključiti, da se promena osnovnog harmonika, struje ili

fluksnog obuhvata, u pojedinim faznim namotajima može odrediti kao projekcija rotacionog vektora tih veličina na osu datog faznog namotaja.

Rotirajući prostorni vektor jednostavno se može izraziti kao linearna kombinacija ortogonalnih jediničnih vektora, gde su koeficijenti linearne transformacije funkcija kosinusa uglova izmerenih između odgovarajućih osa i rotacionog vektora. Fazni pomak između trigonometrijskih funkcija, koje određuju koeficijente linearne transformacije je 90 stepeni. Rotirajući prostorni vektori najčešće su određeni u kompleksnom koordinatnom sistemu, gde se fazni stav vektora meri u odnosu na položaj realne ose koordinatnog sistema.

Zbog praktičkih razloga najčešće se koriste prostorni vektori struja i fluksnih obuhvata. Ostali prostorni vektori mogu se odrediti kao linearna kombinacija prostornih vektora struje i izvoda prostornog vektora fluksnog obuhvata. Veličine određene kompleksnom funkcijom izvoda vremena su identične sa proizvodom vektora veličine, kružne frekvencije vektora i jediničnog kompleksnog operatora  $j$ .

Veličine, koje zavise od struje kao što je veličina pad napona na otpornosti je jednaka proizvodu struje i veličine otpornosti, dok je veličina indukovane elektromotorne sile jednaka proizvodu jediničnog kompleksnog operatora  $j$ , kružne frekvencije i fluksnog obuhvata.

To znači da prostorni vektori struje, pad napona na otpornosti i komponente magnetopobudne sile koje potiču od te struje su u fazi, dok prostorni vektor napona i fluksnog obuhvata zaklapaju ugao od 90 stepeni u ustaljenim režimima rada.

## **2.7 Električne mašine sa rotacionim magnetnim poljem**

Rotaciono magnetno polje prvi put je koristio Nikola Tesla kod asinhronne mašine i patentirao prijavom "U.S. Patent 381968". Rotaciono magnetno polje najlakše se može prikazati pomoću rotacionih vektora. Ovi vektori rotiraju u dvodimenzionalnom prostoru ili ravni, a pomoću teorije prostornih vektora mogu se opisati specifičnosti i pravila rotacionog magnetnog polja.

Rotaciono magnetno polje proizvodi se primenom višefaznih namotaja u asinhronim i sinhronim mašinama. Zajedničko kod ovih mašina je da magnetno polje u vazдушnom procepu rotira u odnosu na namotaje. Ove mašine se mogu raspodeliti u dve grupe. U prvu grupu spadaju sinhronne mašine, kod kojih se rotor zajedno okreće sa rotacionim magnetnim poljem. U drugu grupu spadaju asinhronne ili indukcione mašine, kod kojih tokom rada uvek postoji razlika između brzine magnetnog polja i rotora.

U svakom slučaju brzina rotacionog magnetnog polja je jednaka sa brzinom, sa kojom se okreće osnovni prostorni harmonik magnetnog polja u vazдушnom procepu mašine.

### *2.7.1 Sinhronne mašine*

Kod sinhronih mašina, kao što iz imena može naslutiti, rotor se zajedno okreće sa magnetnim poljem. Ove mašine se mogu podeliti u tri grupe. U prvu grupu spadaju sinhronne mašine sa namotanim rotorom, gde magnetopobudne sile rotora potiču od pobudnog namotaja, koji je napajan jednosmernom strujom. U drugu grupu spadaju sinhronne mašine sa permanentnim magnetima, gde magnetopobudnu silu rotora obezbeđuju permanentni magneti rotora. U trećoj grupi se nalaze sinhroni reluktantni motori, gde magnetno polje motora proizvodi magnetopobudna sila



namotaja statora. Fazni pomak između fluksa rotora i struje statora je obezbeđen konstrukcijom rotora.

Kod sinhronne mašine mogu se razlikovati dve vrste momenta. Prva vrsta je elektromagnetni moment, proizveden interakcijom magnetopobudne sile rotora i magnetnog polja. Druga vrsta je reluktantni moment, koji potiče od razlike magnetnog permeabiliteta rotora u ortogonalnim smerovima, koji zaklapaju električni ugao od 90 stepeni.

#### Sinhronne mašine sa pobudnim namotajima na rotoru:

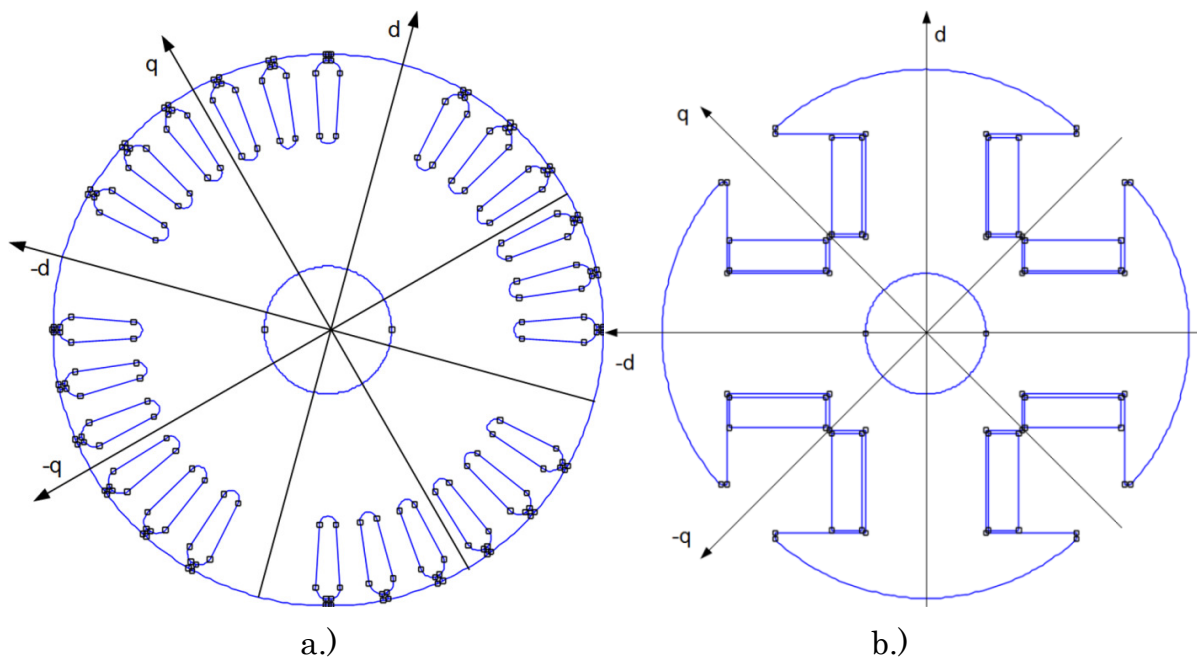
Kod ovih mašina na statoru se nalazi višefazni namotaj napajan naizmeničnom strujom. Najčešće se koristi trofazni namotaj, gde je fazni pomak između napona pojedinih faza 120 stepeni. Na osnovu oblika rotora mogu se razlikovati mašine sa valjkastim rotorom i rotori sa izraženim polovima (Slika 2. a.) i b.)).

Kod ovih mašina osa koja se poklapa sa osom pobudnog namotaja je označena sa "d" i zove se uzdužna osa, dok osa koja zaklapa električni ugao od 90 stepeni sa uzdužnom osom je označena sa "q" i zove se poprečna osa.

Na osnovu slika 2. a.) i b.), gde su prikazane konstrukcione izvedbe, može se primetiti da rezultatni vazdušni procep u poprečnim smeru je veći u odnosu na vazdušni procep u uzdužnom smeru. Što znači da je magnetna provodnost je veća u uzdužnom smeru.

Razlika između magnetnih provodnosti kod valjkastog rotora potiče od ožljebljenja  $2/3$  rotora, gde je srednja vrednost vazdušnog procepa znatno veća, a odnos magnetnih provodnosti je približno jedinični.

Kod rotora sa izraženim polovima pobudni namotaji se nalaze u prostoru između polova. Permeabiliteti materijala namotaja i vakuma mogu se smatrati jednakim, te je zato magnetna provodnost znatno manja u poprečnom smeru rotora.



Slika 2. Konstrukcija rotora sinhronne mašine,  
a.) valjkasti rotor,  
b.) rotor sa izraženim polovima.

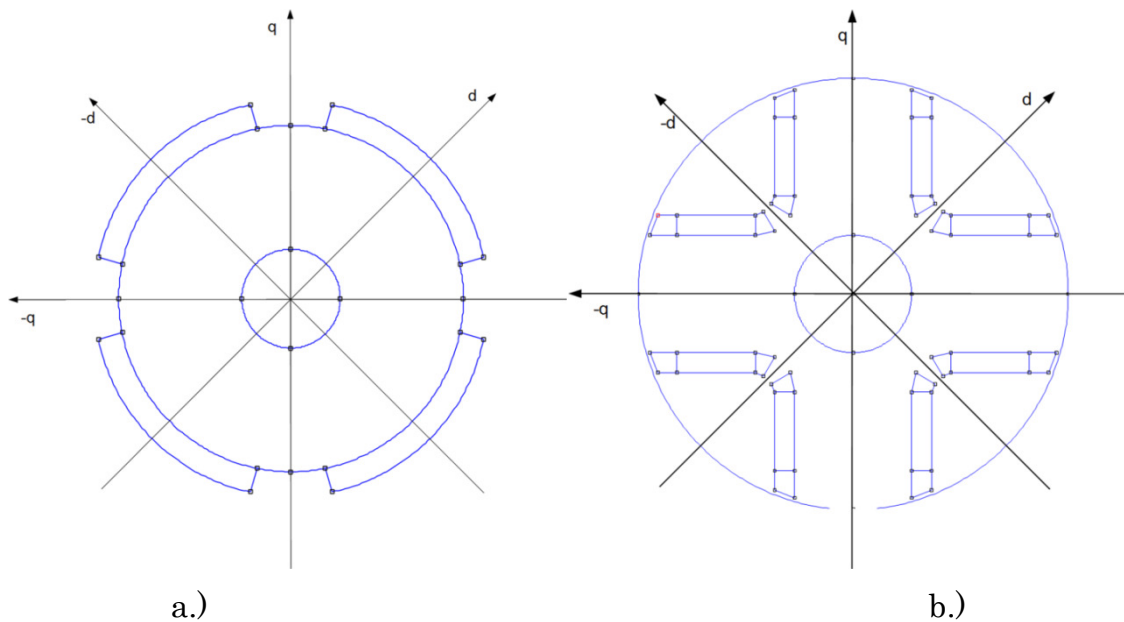
Zbog razlika u magnetnim provodnostima u uzdužnom i poprečnom smeru kod sinhronne mašine sa pobudnim namotajima, na vratilu mašine pored elektromagnetnog momenta javlja se i reluktantni moment.

#### Sinhronne mašine sa permanentnim magnetima:

Kod sinhronne mašine sa permanentnim magnetima magnetopobudnu silu rotora obezbeđuju permanentni magneti smešteni na rotoru. Kao i kod sinhronne mašine sa pobudnim namotajem i mašine sa permanentnim magnetima na osnovu položaja magnetna mogu se podeliti u dve grupe.

Prva vrsta su rotor sa spoljnim permanentnim magnetima, gde se magneti nalaze na površini rotora (Slika 3. a.). Uzdužna osa rotora je identična sa osom simetrije permanentnog magnetna. Magnetna permeabilnost permanentnih magnetna je jednaka permeabilitetu vazduha, te se permanentni magneti ponašaju kao vazdušni procep, a magnetne provodnosti u uzdužnom i poprečnom smeru ovih motora su jednake. Rotor sa spoljašnjim permanentnim magnetima se koriste kod manjih brzina obrtanja, jer su magneti često pričvršćeni lepljenjem na limpaketa rotora.

Druga vrsta su rotor sa unutrašnjim permanentnim magnetima (Slika 3. b.). Kod ovih rotora permanentni magneti su ugrađeni u sam limpaketa



Slika 3. Konstrukcija rotora sinhronih mašina sa permanentnim magnetima,  
 a.) rotor sa spoljnim permanentnim magnetima,  
 b.) rotor sa unutrašnjim permanentnim magnetima.

rotora, što obezbeđuje njihovo korišćenje pri većim brzinama obrtanja. Uzdužna osa rotora je identična osi simetrije grupe permanentnih magnetna koji se nalaze u jednom polu mašine. Magnetna provodnost ove mašine u uzdužnom smeru je znatno manja od magnetne provodnosti u poprečnom smeru. Što znači da ovaj motor poseduje reluktantni moment, kao i sinhronne mašine sa pobudnim namotajima.

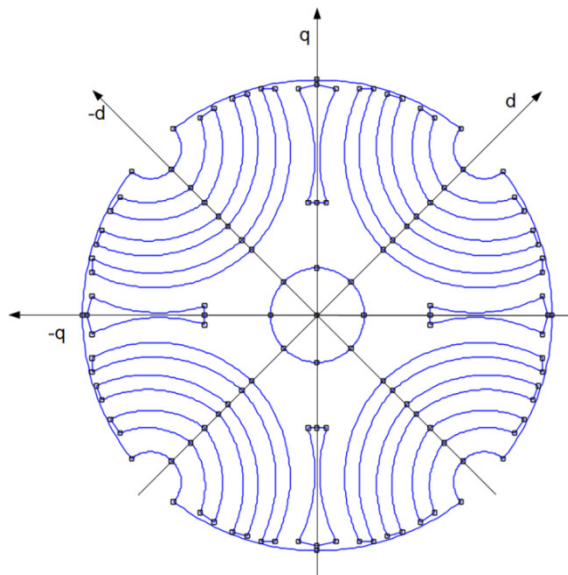
Magnetopobudna sila kod mašine sa permanentnim magnetima menja se sa magnetnim fluksom permanentnih magnetna, što znači da se sa promenom magnetopobudne sile (slabljenjem magnetnog polja) statora može uticati na magnetopobudnu silu rotora.

Indukcija u permanentnim magnetima je funkcija jačine magnetnog polja, koja obezbeđuje magnetopobudnu silu rotora. Veza između indukcije ( $B$ ) i jačine magnetnog polja ( $H$ ) najčešće je opisana BH karakteristikom, koja se kod permanentnih materijala nalazi u drugom i trećem kvadrantu BH koordinatnog sistema. Ova karakteristika savremenih permanentnih magnetnih materijala je linearna u drugom kvadrantu gde se indukcija smanjuje sa rastom negativne vrednosti jačine magnetnog polja.

#### Sinhronne reluktantne mašine:

Sinhronne reluktantne mašine znatno se razlikuju od prethodno opisanih sinhronih mašina, jer rotori ove mašine ne proizvode magnetopobudne sile, a od prethodno opisanih elektromagnetnih i reluktantnih momenta proizvode samo reluktantni moment.

Reluktantni moment zavisi od razlike magnetne provodnosti rotora u uzdužnom i poprečnom smeru. Što znači da kod ovih motora magnetni krug tokom projektovanja je optimizovan tako da je ostvarena što je moguće veća razlika između magnetnih provodnosti u navedenim smerovima. Najčešće magnetna provodnost je povećana u poprečnom smeru rotora korišćenjem magnetno izolovanih "feromagnetnih mostova" u rotoru. Zbog vazdušnih procepa između feromagnetnih mostova magnetna provodnost rotora je smanjena u uzdužnom smeru (slika 4.).



Slika 4. Konstrukcija rotora sinhronne reluktantne mašine.

Tokom rada mašine poprečna komponenta struje statora proizvodi magnetno polje preko feromagnetnih mostova rotora, a interakcija fluksa i uzdužne komponente struje statora razvija obrtni moment na vratilu motora.

Prednost ovih motora, zasniva se na činjenici da rotor ne sadrži ni permanentne magnete ni pobudne namotaje. Permanentni magneti su osetljivi na porast temperature motora, dok sistem za napajanje pobudnih namotaja povećava dimenzije i usložnjava izvedbu motora.

#### *2.7.2 Asinhronne mašine*

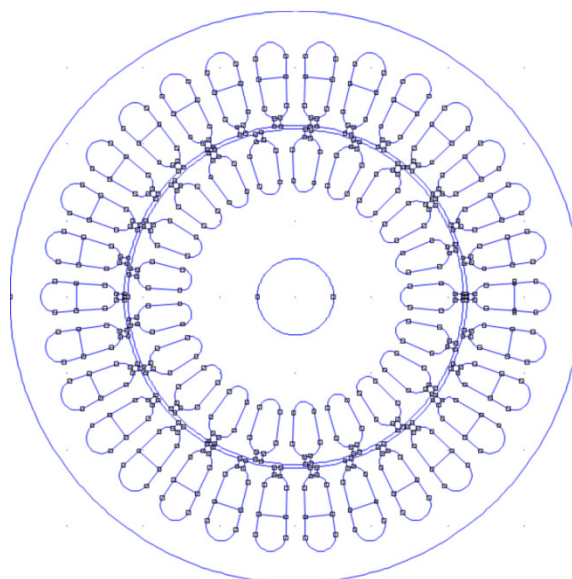
Kao što je izloženo u prethodnom delu teksta, kod sinhronne mašine interakcija magnetnog polja i struje proizvodi obrtni moment motora. Vrednost proizvedenog momenta motora zavisi od vrednosti jačine magnetnog fluksa i vrednosti struje i od

ugla koji zaklapaju njihovi prostorni vektori osnovnih prostornih harmonika. Kod sinhronne mašine pored toga, moment zavisi od vrednosti sinusa ugla između vektora jačine magnetnog fluksa i struje, što znači da sa faznim pomakom između struje i fluksnog obuhvata statora može uticati na vrednost momenta motora. Fazni pomak između vektora fluksnog obuhvata i struje može se ostvariti primenom pobudnih namotaja na rotoru (rotor sa jednosmernom pobudom), korišćenjem permanentnih magneta (magnetopobudna sila rotora se menja sa strujom statora) ili sa konstrukcijom rotora (smanjena magnetna provodnost u uzdužnom smeru kod reluktantnih motora).

Pored navedenih metoda za povećanje faznog pomaka između struje i fluksnog obuhvata postoji još jedan metod, koji kao i kod sinhronih motora sa namotanim rotorom primenjuje struju u namotajima rotora.

Najčešće su kod ovih mašina namotaji raspoređeni u žlebovima rotora, radi boljeg iskorišćenja preseka žlebova korišćen je štapni namotaj, koji znatno smanjuje složenost konstrukcije i proizvodnje mašine.

Napajanje namotaja rotora je obezbeđeno preko magnetnog polja mašine tako da se brzina obrtanja rotora razlikuje od brzine obrtanja osnovnog prostornog harmonika obrtnog magnetnog polja. Razlika brzine prouzrokuje promenu fluksnog obuhvata u provodnicima u žlebovima rotora, šta proizvodi elektromotornu silu u njima. Provodnici rotora, koji su najčešće štapovi u žlebovima, kratkospojeni su preko prstenova na krajevima lim-paketa i formiraju zatvorene strujne krugove. U ovim električnim krugovima javljaju se struje koje obezbeđuju ravnotežu između pada napona na omskim otpornostima namotaja i indukovane elektromotorne sile u njima. Zbog činjenice, da su padovi napona na otpornostima uvek u fazi sa naponom može se zaključiti, da su prostorni harmonici struja i indukovanih napona u provodnicima rotora u fazi, te zato prostorni vektor osnovnog harmonika struje rotora zaklapa električni ugao od 90 stepeni sa prostornim vektorom osnovnog harmonika fluksnog obuhvata. Može se konstatovati, da je kod ove mašine ostvaren idealni fazni pomak između struje i fluksnih obuhvata rotora, koji obezbeđuje najveći mogući moment motora određen sa vrednostima osnovnih prostornih harmonika struje i fluksnog obuhvata.



Slika 5. Konstrukciona izvedba rotora i statora ainhronih mašina.

Ove električne mašine obezbeđuju napajanje namotaja rotora samo u slučaju da rotor ne rotira zajedno sa obrtnom magnetnom poljem. To znači da rotor nije u sinhronizmu sa obrtnom magnetnom poljem, te se zato ove mašine i nazivaju asinhronim. Drugi naziv mašine je indukciona mašina, koja potiče iz činjenice da promena fluksnog obuhvata, koja potiče od razlike brzine obrtanja rotora i obrtnog magnetnog polja, indukuje elektromotorne sile u provodnicima rotora. Razliku između brzine obrtnog magnetnog polja i rotora izražava se sa klizanjem, koje je jednako odnosu frekvencija osnovnih harmonika struja rotora i statora.

Polazeći od konstrukcione izvedbe asinhronih motora (prikazano je na slici 5.), može se zaključiti, da kod ove mašine se ne mogu odrediti uzdužne ili poprečne ose rotora kao kod sinhronne mašine. Zato se može pretpostaviti da je magnetna provodnost rotora ista u svakoj osi koji ravnomerno prelazi preko ose rotora.

### 3. TEORIJA KONAČNIH ELEMENATA

Kao što je prikazano u poglavlju 2.7, magnetni krugovi električne mašine sastoje se od kompleksnih oblika. Raspodela magnetnog polja u ovim magnetnim krugovima električne mašine u klasičnoj literaturi je određena sa složenim analitičkim metodima. Preciznost analitičkih metoda za određivanje magnetnog polja značajno zavisi od ljudskog faktora i od korišćenih koeficijenta kojima su uzete u obzir specifičnosti magnetnog kruga.

Zbog složenosti analitičkih metoda koristi se MKE, koji spada u porodicu numeričkih metoda.

Raspodela magnetnog polja je određena kod jednodimenzionalnih problema sa običnim jednačinama ili kod dvo ili više-dimenzionalnih problema sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama uz date granične i početne uslove. Diferencijalne jednačine u svakom slučaju određuju raspodelu tražene veličine u domenu ( $V$  ili  $\Omega$ ), čije granice su određene sa konturom ( $\Gamma$  kontura, jednodimenzionalni domeni su ograničeni sa tačkama, dvodimenzionalni domeni su ograničeni sa zatvorenom konturom dok trodimenzionalni domeni su ograničeni sa zatvorenim površinama) [3]-[5]. Na konturi domena definisani su granični ili početni uslovi, koji su neophodni pri rešavanju diferencijalnih jednačina. Tokom rešavanja problema je određen skup funkcija, koji ispunjava uslove definisane graničnim uslovima i diferencijalnim jednačinama (npr. kao što kod koaksijalnih kondenzatora mora se odrediti željeni nulti potencijal, a potencijali u ostalim tačkama prostora su određeni u odnosu na tačku nultog potencijala).

U ovom poglavlju su prikazani glavni koraci i matematička pozadina teorije MKE preko postupka za jedno- i dvo- dimenzionalne probleme. Određivanje postupka za tro- dimenzionalne probleme je izvan dometa ove disertacije, jer kao što je ranije spomenuto magnetni krug rotacione električne mašine sa radijalnom fluksnom raspodelom se može svesti na dvo- dimenzionalni problem.

Model magnetnog kruga u matematičkom smislu se može posmatrati kao domen, na kojem se rešava (parcijalna) diferencijalna jednačina radi određivanja raspodele magnetnog polja. Magnetno polje u nekim specijalnim slučajevima može se opisati pomoću analitičkih izraza (uglavnom kod jedno- dimenzionalnih problema), ali kod dvo- (kao što je svedeni model rotacione električne mašine) ili više- dimenzionalnih problema zbog složenih konfiguracija magnetnih krugova skoro je nemoguće naći analitičke izraze koji određuju raspodelu magnetnog polja u modelu.

Tokom rešavanja diferencijalne jednačine metodom MKE, određuje se funkcija sa karakteristikom potencijala, koja obezbeđuje kontinualno rešenje u celom modelu. Zbog složenih oblika magnetnog kruga rešenje se sastoji od skupa funkcija koje opisuju raspodelu potencijala u diskretnim domenima modela. Tokom postupka rešavanja problema, određeni su karakteristični koeficijenti funkcije sa primenom metoda za redukovanje razlike između modela i objekta simulacije (npr. električne mašine).

Karakteristična veličina sa osobinom potencijala kod magnetnog polja je magnetni vektorski potencijal. Raspodela magnetnog vektorskog potencijala u dvo- dimenzionalnim modelima može se prikazati primenom ekvipotencijalne linije, dok kod trodimenzionalnih problema sa ekvipotencijalnim površinama. Integral normalnih komponentata na ekvipotencionalnoj površini gustine magnetnog fluksa ima vrednost nula.

Proces proračuna magnetnog polja sa konačnim elementima se može podeliti na sledeće korake [3]:

- Diskretizacija modela na pod-domene,
- Određivanje vrsta interpolacionih funkcija,
- Konstruisanje sistema algebarskih jednačina,
- Rešenje sistema algebarskih jednačina.

### **3.1 Diskretizacija modela**

Parcijalne diferencijalne jednačine zajedno sa graničnim uslovima određuju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina na domenu kontinualnog modela, koji se ponaša kao beskonačni linearno nezavisni sistem. Zbog velikog broja nepoznatih, koji opisuju kontinualni sistem, potrebno je podeliti model na pod-domene koji se zovu elementi. Sa ovako podeljenim modelom na diskretne elemente originalni model prelazi u diskretni sistem sa konačnim linearnim nezavisnostima. Rešenje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina posle diskretizacije modela, određuje se primenom MKE. Raspodela tražene veličine određena sa MKE nije ekvivalentna sa stvarnom raspodelom te veličine, jer tokom proračuna je tražena približna raspodela. Na razlike između rešenja i stvarnog modela utiče kvalitet diskretizacije modela.

Broj dimenzija elementa, sa kojima je podeljen domen, je identičan sa brojem dimenzija domena, što znači da ako je domen površina onda se koriste dvo-dimenzionalni elementi za pokrivanje površine.

Najčešće korišćeni oblik konačnih elemenata su linijski segmenti kod jedno-dimenzionalnih, trouglovi kod dvo-dimenzionalnih i tetraedari kod tro-dimenzionalnih domena. Prilikom diskretizacije modela u prvom koraku linije se dele u segmente, a kasnije u drugom koraku površine se dele na trouglove, u trećem koraku zapremine tela se dele na tetraedre. Ivice i trouglovi koji su generisani u ranijim fazama ne menjaju se u kasnijim koracima diskretizacije. Ovako u ranoj fazi diskretizacije generisane mreže, utiču na kvalitet diskretizacije u kasnijim fazama.

Prethodno opisani elementi, sa kojima su podeljeni modeli, su određeni sa tačkama koje su čvorovi u mreži segmenata pravih linija. Broj čvorova je identičan sa stepenom nezavisnosti linearnog sistema jednačina. Stepem nezavisnosti modela je jednak sa brojem nepoznatih sistema jednačina, koji je rešen tokom određivanja raspodela tražene veličine u modelu.

Pored broja čvorova oblik elementa (polazeći od dvo- dimenzionalnih modela) utiče na tačnost proračuna, što znači da pri generisanju mreže trouglova treba nastojati da najmanji uglovi u trouglovima postižu najveće moguće vrednosti. Ovaj uslov se može zadovoljiti primenom Delaunay-ove metode za datu konfiguraciju čvorova pri generisanju mreže trouglova.

Kvalitet diskretizacije modela utiče na dimenzije modela, koji je primenjen tokom rešavanja problema pomoću MKE. Zato efikasna diskretizacija modela znatno smanjuje vreme proračunavanja.

Sa ravnomernom raspodelom čvorova u modelu mogu se eliminisati nepotrebne tačke i smanjiti stepen slobode sistema koji je proporcionalan sa brojem linearnih jednačina.

Pri rešavanju sistema linearnih jednačina određeni su koeficijenti, koji zajedno

opisuju raspodelu tražene veličine. Broj koeficijenata je jednak sa brojem jednačina, što znači da sa smanjenjem broja čvorova opada veličina modela i potrebni računski kapacitet za rešavanje raspodele veličine sa potencijalnom osobinom.

Pored redukovano broj jednačina, broj čvorova utiče i na potrebni računski kapacitet za rešavanje raspodele tražene veličine, kao i na potrebno vreme obrade rezultata. (npr. prilikom proračuna gubitaka u gvožđu za jedan električni period obavlja se Fourier-ova analiza magnetne indukcije za određivanje viših harmonika za svaki element, što znači da u nekim slučajevima sa brojem čvorova ili elemenata znatno se povećava broj potrebnih izračunavanja).

### 3.2 Određivanje vrsta interpolacione funkcije

Sa diskretizacijom, model je podeljen sa elementima, u kojima su osobine materijala konstantne, a raspodela potencijala u tačkama elemenata je linearna kombinacija potencijala u čvorovima datog elementa. Što znači da je pomoću poznatih vrednosti potencijala u čvorovima, moguće izraziti raspodelu potencijala u celom domenu elementa. Koeficijenti linearne kombinacije su ekvivalentni sa vrednostima interpolacione funkcije, koja je u svakoj tački elementa kontinualna funkcija. Zato pomoću kontinualnih interpolacionih funkcija, koje određuju vrednosti koeficijenata u svakoj tački elementa, moguće je proračunati kontinualnu raspodelu potencijala u svakoj tački elementa sa linearnom kombinacijom vrednosti potencijala u čvorovima elementa. Na taj način dolazi se do definicije kontinualne funkcije raspodele potencijala.

Interpolacione funkcije posebno su definisane u svakom elementu modela, koji je određen čvorovima. Zato u izrazima interpolacione funkcije koeficijenti, zavise od koordinate čvorova, koji su određene u postupku diskretizacije modela. Tokom postupka konstruisanja interpolacione funkcije, primenjuju se elementarne funkcije. Najčešće su elementarne funkcije polinomi, koji mogu biti različitog stepena. Zbog povećanja broja nepoznatih koeficijenata sa stepenom polinoma, najčešće se ipak koriste interpolacione funkcije konstruisane primenom polinoma prvog stepena.

Sa povećanjem stepena korišćenih interpolacionih funkcija, značajno raste stepen slobode sistema. Ovo utiče na složenost sistema jednačina, iako se pri tome preciznost dobijenih rezultata ne poboljšava značajno.

#### 3.2.1 Određivanje interpolacione funkcije jednodimenzionalnih modela

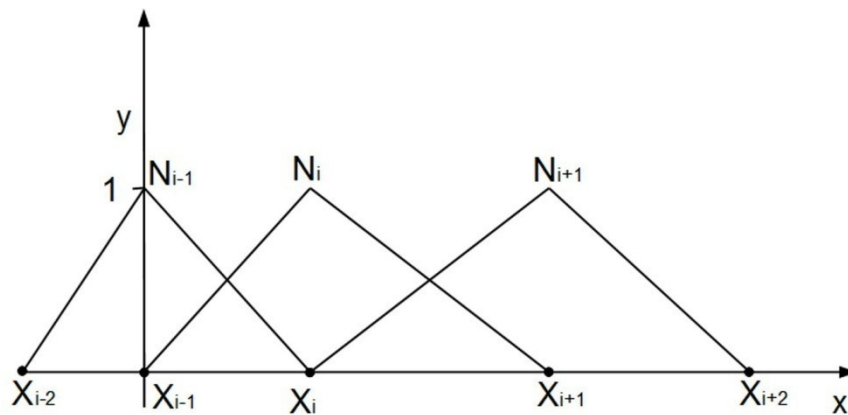
Interpolacione funkcije prvog stepena, su linearne funkcije pozicije u domenu modela, a označene indeksom čvora u kojoj imaju jediničnu vrednost. U jednom poddomenu (elementu) definisane su dve interpolacione funkcije u jednodimenzionalnom modelu. Indeksi interpolacione funkcije čije se vrednosti razlikuju od nule u elementu i čvorova na krajevima segmenta (elementa) su ekvivalentne. Na slici 6. je prikazana raspodela interpolacione funkcije  $N_i$  i  $N_{i+1}$  u domenima određenim čvorovima  $i$  i  $i+1$ , u kojima su definisane interpolacione funkcije. Kao što se uočava na prikazanoj slici 6., ove funkcije u jednodimenzionalnim modelima podeljene su na segmente, gde je interpolaciona funkcija  $N_i$  sastavljena od četiri segmenta.

Prvi segment se nalazi levo od tačke  $x_{i-1}$ . U ovom delu domena funkcija ima vrednost nula. U drugom segmentu, koji se nalazi između tačke  $x_{i-1}$  i  $x_i$  promena



interpolacione funkcije je opisana linearnom funkcijom, koja ima vrednost nula u tački  $x_{i-1}$  i ima jediničnu vrednost u tački  $x_i$ . Treći segment se nalazi između tačke  $x_i$  i  $x_{i+1}$ . U ovom segmentu, kao i u drugom, promena interpolacione funkcije je opisana linearnom funkcijom, koja ima jediničnu vrednost u tački  $x_i$  i ima vrednost nula na kraju segmenta u tački  $x_{i+1}$ . U četvrtom segmentu koji se nalazi desno od tačke  $x_{i+1}$  funkcija ima vrednost nula. Na osnovu prethodne definicije može se zaključiti da interpolaciona funkcija nestaje u domenima, koji ne sadrže čvor sa indeksom interpolacione funkcije.

Vrednost veličine koja je određena za čvor sa indeksom  $i$  nema uticaja na raspodelu date veličine u segmentima gde interpolaciona funkcija sa indeksom  $i$  ima vrednost nula. Dok u segmentima ograničenim sa čvorovima  $i-1$ ,  $i$  i  $i+1$ , uticaj veličine određene za čvor sa indeksom  $i$  linearno nestaje približavanjem tačkama  $x_{i-1}$  i  $x_{i+1}$ , kao što je prikazano na slici 6.



Slika 6. Interpolacione funkcije jednodimenzionalnih elemenata.

Vrednosti interpolacione funkcije su ekvivalentne koeficijentima, koji su korišćeni pri određivanju potencijala u željenim tačkama datog elementa, kao linearna kombinacija potencijala u čvorovima koji se nalaze u krajnjim tačkama segmenta. Što znači da vrednost interpolacione funkcije u datom elementu sa indeksom čvorova, koji ne ograničavaju dati element ima vrednost nula. U čvorovima se može na sličan način definisati vrednost interpolacione funkcije, jer u čvoru kod kojeg je indeks jednak indeksu interpolacione funkcije vrednost funkcije je jedinična.

Segment interpolacione funkcije sa indeksom  $i$  je prikazan na slici 7. Kao što je već pomenuto, polazeći od čvora  $i$  prema tački sa indeksom  $i+1$  vrednost funkcije se smanjuje sa jedinične vrednosti na nulu, što znači da na osnovu grafikona jednoznačno su određene karakteristične tačke sa koordinatama  $(x_i, 1)$  i  $(x_{i+1}, 0)$ . Preko definisanih karakterističkih tačaka, prelazi linearna funkcija, ekvivalentna sa interpolacionom funkcijom u domenu ograničenom sa čvorovima  $i$  i  $i+1$ .

Linearne funkcije se mogu odrediti na različite načine. Zbog praktičkih razloga korišćen je metod sa normalnim vektorom, jer se on efikasno može primeniti pri određivanju linearnih funkcija kod višedimenzionalnih modela.

U prvom koraku definisan je normalni vektor na liniji linearne funkcije u dvodimenzionalnom koordinatnom sistemu na osnovu koordinate karakteristične tačke:

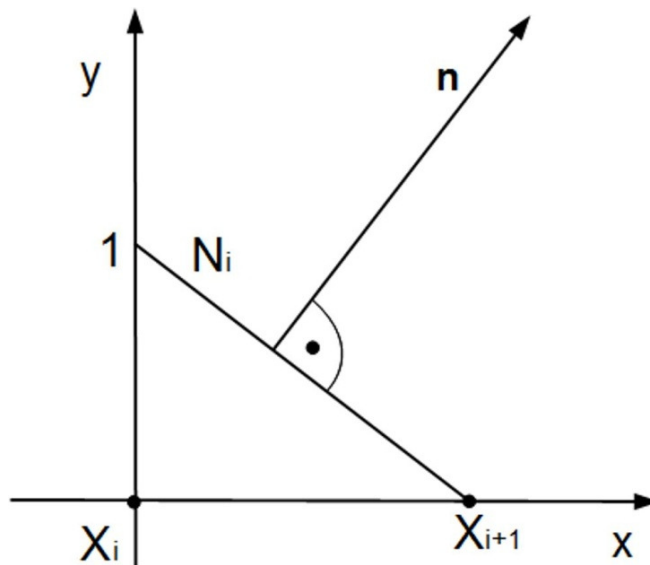
$$\mathbf{n} = (1, x_{i+1} - x_i) \quad (2)$$

Izraz linearne funkcije definisane pomoću normalnog vektora je određen na osnovu činjenice da skalarni proizvod dva normalna vektora ima vrednost nula. Zato u sledećem koraku je definisan izraz željenog vektora, koji se nalazi u ravni određenoj sa linearnom funkcijom i tačkom  $(x_i, 0)$ .

Tokom definicije željenog vektora, koji se nalazi u prethodno opisanoj ravni, korišćena je željena tačka, čije su koordinate  $(x, y)$  međusobno nezavisne. Ova definicija praktično važi za tačke koje se nalaze u ravni. Izraz željenog vektora (3) je određen kao razlika vektora položaja tačaka  $(x, y)$  i  $(x_i, y_i)$ .

$$\mathbf{v} = (x - x_i, y - y_i) \quad (3)$$

Kao što se vidi iz izraza (3), između koordinata druge tačke nije definisana zavisnost, što znači da su njene koordinate koordinate željene tačke iz ravni  $xy$  u kojoj se nalazi  $N_i$  interpolaciona funkcija.



Slika 7. Normalni vektor i segment interpolacione funkcije.

Jednačina koju ispunjavaju koordinate željene tačke  $x$  i  $y$ , koja se nalazi na liniji interpolacione funkcije  $N_i$  je određena na osnovu identiteta, u kom skalarni proizvod normalnih vektora ima vrednost nula (4):

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{n} \cdot (x - x_i, y - y_i) = x - x_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot (y - y_i) = 0 \quad (4)$$

Što znači da skup tačaka, koje ispunjavaju uslov definisan jednačinom (4), i vrednosti koordinate  $x$  pripadaju domenu  $[x_i, x_{i+1}]$ , čine interpolacionu funkciju  $N_i$  u domenu između tačaka  $i$  i  $i+1$ .

Izražavanjem  $y$  iz jednačine (4) određen je izraz interpolacione funkcije  $N_i$  u domenu  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$y = N_i = -\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + y_i \quad (5)$$

Pomoću izraza (5) koji određuje  $N_i$  u domenu  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  može se napisati interpolaciona funkcija u celom domenu modela:

$$N_i = -\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + 1, \quad x_i \leq x < x_{i+1}$$

$$N_i = -\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + 1, \quad x_{i-1} < x < x_i \quad (6)$$

$$N_i = 0, \quad x \in \mathfrak{R} \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

Kao što se vidi jednodimenzionalne interpolacione funkcije (6), su normalizovane, tako da kodomen funkcije je ekvivalentan sa  $[0,1]$ .

### 3.2.2 Određivanje interpolacione funkcije dvodimenzionalnih domena

Linearne interpolacione funkcije dvo-dimenzionalnih domena određuju se na sličan način, koji je prikazan kod jedno-dimenzionalnih modela. Elementi u dvo-dimenzionalnim modelima najčešće su trouglovi, a čvorovi mreže nalaze se u vrhovima trougla (slika 8.).

Kao i kod jedno-dimenzionalnih modela, ako interpolaciona funkcija  $N_i$  ima jediničnu vrednost, u čvoru  $c_i$ , onda u elementima, koji se nalaze oko čvora  $c_i$  vrednost interpolacione funkcije linearno se smanjuje sa približavanjem ivicama trouglova, koje ne sadržavaju čvor  $c_i$ . U tačkama, koje se nalaze na ivicama trouglova oko čvora  $c_i$ , koje ne sadržaju  $c_i$ , interpolaciona funkcija  $N_i$  ima vrednost nula, kao što je i prikazano na slici 8.

Interpolacione funkcije dvo-dimenzionalnih modela su sastavljene od segmenata ravni kao što je prikazano na slici 8. Jednačine segmenata ravni se mogu odrediti pomoću metoda prikazanih kod jedno-dimenzionalnih interpolacionih funkcija, gde skalarni proizvod normalnog vektora linije (2) i željenog vektora (3) ima vrednost nula.

Pri određivanju jednačine segmenata ravni koristi se normalni vektor ravni i željeni vektor koji se nalazi u ravni.

Jedan od segmenata ravni, koji čini interpolacionu funkciju, prikazan je na slici 9., gde je normalni vektor ravni označena sa  $\mathbf{n}$ . Normalni vektor je paralelan sa vektorskim proizvodom dva ne kolinearna vektora  $\mathbf{v}_2$  i  $\mathbf{v}_3$  .koji se nalaze u ravni segmenta interpolacione funkcije:

$$\mathbf{v}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, -1)$$

$$\mathbf{v}_3 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, -1) \quad (7)$$

Vektori  $\mathbf{v}_2$  i  $\mathbf{v}_3$  određeni su tako da, pokazuju ka čvorovima označenim sa indeksima 2 i 3 iz tačke, koja se nalazi iznad čvora označena sa indeksom 1, na

jediničnoj udaljenosti od ravni  $xy$  kao što je prikazano na slici 9. Zato indeksi vektora  $\mathbf{v}_2$  i  $\mathbf{v}_3$  su identični sa indeksima čvorova ka kojima pokazuju.

Posle određivanja komponenta vektora  $\mathbf{v}_2$  i  $\mathbf{v}_3$  izračunava se normalni vektor ravni  $\mathbf{n}$  izrazom (8), kao vektorski proizvod dva vektora:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = (y_3 - y_2, x_2 - x_3, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)) \quad (8)$$

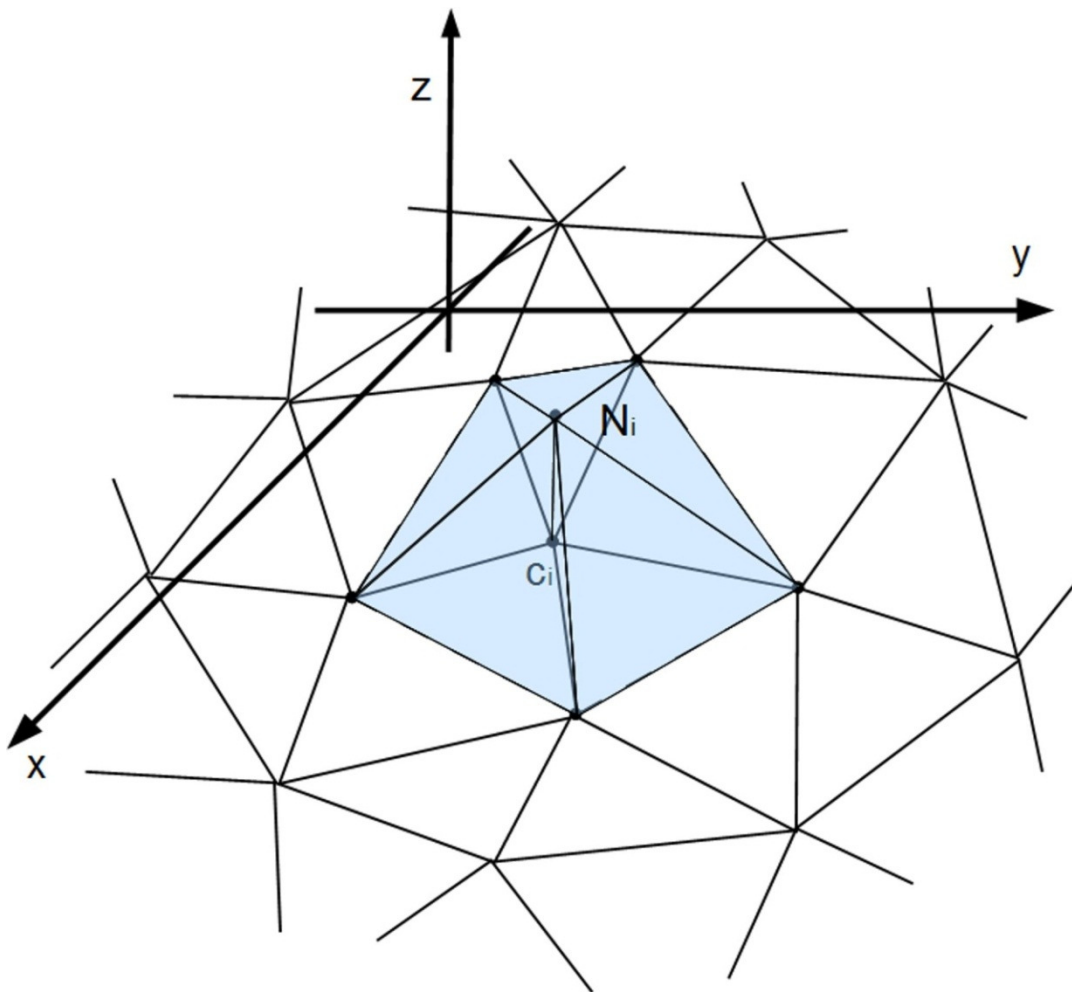
Izraz (8) se može podeliti na dva dela, u prvom delu se nalaze komponente  $y_3 - y_2$  i  $x_2 - x_3$  koje su praktično projekcije  $\mathbf{n}$  vektora na ravan  $xy$  i normalne na segmentu koji se nalazi između čvorova 2 i 3.

$$(y_3 - y_2, x_2 - x_3, 0) \quad (9)$$

Drugi deo normalnog vektora  $\mathbf{n}$  u izrazu (8) je normalan na ravan  $xy$  i jednak vektorskom proizvodu vektora, koji ukazuju na putanje iz čvora 1 ka čvorovima 2 i 3, a nalaze se u ravni  $xy$ :

$$(0, 0, (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)) \quad (10)$$

Dužina vektora određena je vektorskim proizvodom vektora koji se nalaze u ravni  $xy$ , a jednaka je površini paralelopipeda, koji je jednak dvostrukoj vrednosti površine elementa (trougla).



Slika 8. Interpolaciona funkcija za jedan čvor u dvodimenzionalnom modelu.

Na osnovu izraza vektora (10), kojim je definisan vektor, gde je apsolutna

vrednost treće koordinate vektora dvostruka vrednost površine elementa (trougla), moguće je izračunati površinu trougla pomoću koordinata čvorova, označene sa indeksima 1, 2 i 3, a određene formulom (11).

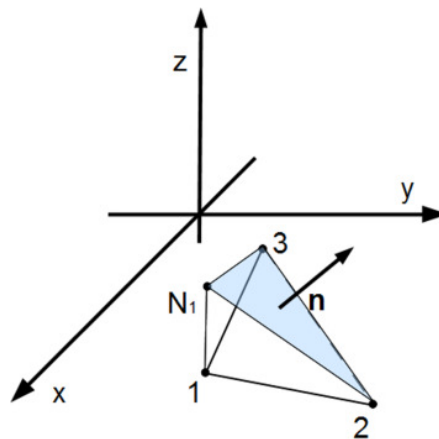
$$\Delta = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{2} \quad (11)$$

Kao i kod postupka određivanja jedno- dimenzionalne interpolacione funkcije, veličina elementa (kod jedno- dimenzionalne dužina segmenta, kod dvo- dimenzionalne površina trougla) se koristi za normalizaciju interpolacione funkcije (12).

Posle detaljne analize komponentata normalnog vektora  $\mathbf{n}$  može se napisati jednačina ravni (12), koja je ekvivalentna sa interpolacionom funkcijom  $N_1$  (slika 9.) u domenu, određenom čvorovima 1, 2 i 3 prikazanom na slici 9.

$$0 = z \cdot 2 \cdot \Delta + (x - x_3)(y_3 - y_2) + (y - y_3)(x_2 - x_3) \quad (12)$$

U izrazu (12) komponenta  $z$  je identična sa interpolacionom funkcijom  $N_1(x, y)$ .



Slika 9. Interpolacione funkcije čvorova u jednom elementu domena.

Uvrštavanjem  $N_1(x, y)$  u izraz (12) jednačina interpolacione funkcije prikazane na slici 9. može se napisati u sledećem obliku:

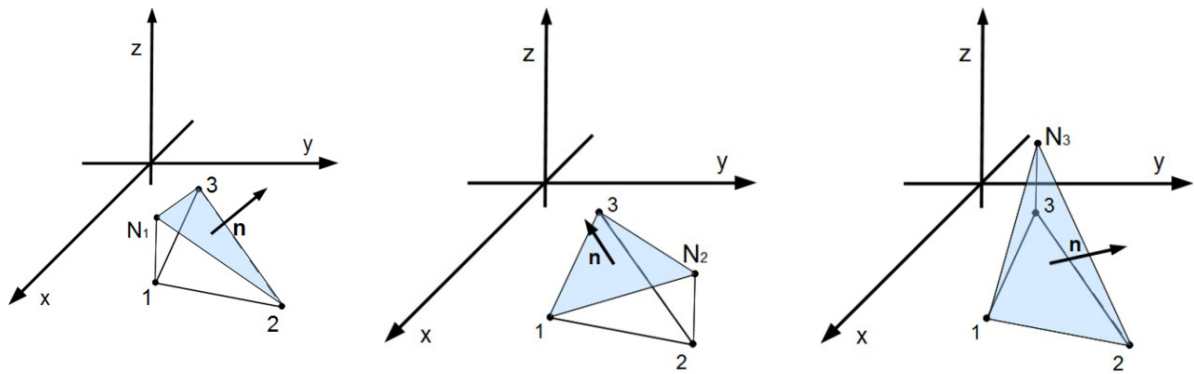
$$N_1(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot (x \cdot (y_2 - y_3) + y \cdot (x_3 - x_2) + x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3) \quad (13)$$

Na sličan način se mogu odrediti interpolacione funkcije  $N_2$  i  $N_3$  prikazane na slici 10. za čvorove 2 i 3.

### 3.3 Konstruisanje sistema algebarskih jednačina

Tokom proračuna raspodele tražene veličine u modelu određen je skup funkcija, koje opisuju približnu raspodelu veličine sa osobinama potencijala (kod magnetnih krugova magnetni vektorski potencijal). Na osnovu ove definicije se može zaključiti da između stvarne raspodele i rešenja modela uvek postoji razlika (greška rešenja), koja je redukovana na prihvatljiv nivo, tako da rešenje daje uvid u prirodu

ponašanja modelovanog fizičkog problema.



Slika 10. Interpolacione funkcije čvorova u jednom elementu domena.

Radi smanjenja greške, određuje se linearna kombinacija probnih funkcija, kojom je izračunata raspodela potencijala, koja se najbolje približava stvarnoj. Koeficijenti linearne kombinacije probnih funkcija se koriste u postupku rešavanja sistema algebarskih jednačina. Sistem linearnih algebarskih jednačina je konstruisan primenom metoda za redukovanje greške između modela i stvarnog sistema.

Zbog velikih broja nepoznatih, sistem algebarskih jednačina najbolje je napisati u matricnom obliku, sa vektorima nepoznatih i pobude:

$$[K][\phi] = [f] \quad (14)$$

Gde je:  $[K]$  matrica krutosti (naziv je nasleđen, pošto je prvi put metod konačnih elemenata korišćen pri optimalizaciji mašinskih elemenata) [3],  $[\phi]$  i  $[f]$  su vektori nepoznatih potencijala i pobude u čvorovima mreže generisane tokom postupka diskretizacije domena modela.

Redukovanje razlika između stvarnog sistema i modela najčešće se realizuje metodom težinskih ostataka (weighted residual methods) ili varijacione metode (variational method). U modelima raspodela tražene veličine se ispunjava uslovima definisanim sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama (15), čija rešenja zadovoljavaju granične uslove.

$$L(\phi) = f \quad (15)$$

Gde je:  $L$  diferencijalni operator,  $\phi$  funkcija koja zadovoljava granične uslove i opisuje raspodelu tražene veličine u domenu,  $f$  pobuda sistema.

Izraz (15) kod magnetnog polja je ekvivalentan diferencijalnom obliku Maxwell-Amper-ove jednačine, u kojem umesto gustine magnetnog fluksa figuriše rotor magnetnog vektorskog potencijala. U originalnom Maxwell-Amper zakonu rotor indukcije je jednak proizvodu magnetnog permeabiliteta medijuma i gustine struje u datoj tački prostora (u ovom slučaju gustina struje obuhvata sve vrste pomeranja elektriciteta, koji izazivaju magnetno polje). Primenom magnetnog vektorskog potencijala Maxwell-Amper-ova jednačina postaje diferencijalna jednačina drugog

reda (kod dvo- ili više- dimenzionalnih modela one se pretvaraju u parcijalne diferencijalne jednačine).

U slučaju jedno-dimenzionalnih elektromagnetnih problema diferencijalna jednačina (15), poprima sledeći oblik, u kojem sem izvoda drugog reda egzistira proizvod potencijala i skalarne veličine:

$$-\frac{d}{dx} \cdot \left( \alpha \cdot \frac{d\phi}{dx} \right) + \beta \cdot \phi = f \quad (16)$$

Rešenje jednačine (16) može se predstaviti kao linearna kombinacija poznatih funkcija (probnih funkcija), koje su najčešće polinomi prvog reda (linearne zavisnosti) sličnim interpolacionim funkcijama opisanim u poglavlju 2.1.

Zbog konačnih dimenzija modela potrebno je opisati pravila ponašanja modela na granici domena. Korišćena pravila za definisanje graničnih uslova detaljno su analizirana u oblasti metoda za rešenje parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Polazeći od činjenice da je izraz (16) diferencijalna jednačina drugog reda, zaključuje se da na granici domena rešenje diferencijalne jednačine (16) treba da ispuni Dirichlet-ove ili Neuman-ove granične uslove.

Dirichlet-ovim graničnim uslovima određene su vrednosti tražene veličine na granicama domena (17) [3].

$$\phi(a) = c \quad (17)$$

Neuman-ovim graničnim uslovima (18) određene su vrednosti prvog izvoda tražene veličine na granici domena [3].

$$\phi'(a) = c \quad (18)$$

Polazeći od činjenice da je rešenje raspodele tražene veličine linearna kombinacija interpolacione funkcije određene sa formulama (6) i (13), koje ujedno zadovoljavaju jednačinu (16) i granične uslove (17), može se zaključiti da su rešenja jednaka proizvodu interpolacionih funkcija i skalarnih veličina.

Skalarne vrednosti su jednake sa vrednostima potencijala u čvorovima gde odgovarajuće interpolacione funkcije imaju jediničnu vrednost, te se skup funkcija, koje opisuju promenu potencijala, može napisati kao vektorski proizvod vektora interpolacione funkcije i vektora potencijala u čvorovima (19) :

$$\bar{\phi} = [N_i] [\bar{\phi}_i] \quad (19)$$

Gde je:  $\bar{\phi}$  približno rešenje raspodele potencijala,  $[N_i]$  je vektor interpolacione funkcije, dok su  $\bar{\phi}_i$  vrednosti potencijala u čvorovima generisane mreže, tokom diskretizacije modela.

Uvrštavanjem  $\bar{\phi}$  u diferencijalnu jednačinu (16), dobija se opšti oblik jednačine, koji se koristi kod izračunavanja težinskih ostataka i varijacione metode za određivanje sistema jednačina za proračun elementa  $\bar{\phi}_i$ .

### 3.3.1 Metod težinskih ostataka

Poznate su različite varijante metode težinskih ostataka, od kojih je najčešće

koristi Galerkin-ova metoda.

Primenom ovog metoda minimizirana je greška koja potiče od razlike ulazne energije modela i energije sistema.

Ulazna energija se određuje na osnovu pobude, dok je energija sistema jednaka integralu gustine energije u prostoru (domenu) modela.

Uvrštavanjem  $\bar{\phi}_i$  umesto  $\phi$  u izraz (15) može se napisati izraz za izračunavanje ostataka (rezidijuma)  $r$ , koji određuje razliku ili ostatak između približnog rešenja i stvarne raspodele potencijala [3].

$$r = L(\bar{\phi}) - f \neq 0 \quad (20)$$

Najbolja aproksimacija stvarne raspodele potencijala  $\bar{\phi}$  obezbeđuje najmanju vrednost integrala težinskih ostataka, koji je izračunat kao integral proizvoda vektora težinske funkcije  $[w_i]$  i vektora ostataka  $[r_i]$  [3]. Težinske funkcije na sličan način se mogu odrediti kao interpolacione funkcije određene u poglavlju 2.2.

$$R_i = \int_{\Omega} w_i \cdot r_i \cdot d\Omega \quad (21)$$

Gde su:  $R_i$  integrali težinskih ostataka,  $w_i$  težinske funkcije. Broj integrala jednak je broju potencijalnih čvorova. Integral (37) se može rastaviti na delove, u kojima su posebno izračunati pojedini elementi u kojima se vrednost težinskih funkcija  $w_i$  razlikuju od nule. Ovi elementi sadržavaju čvor sa indeksom  $i$  (kod jedno-dimenzionalnih segmenata čvor se nalazi na kraju segmenta, kod dvo-dimenzionalnih elemenata nalazi se u vrhu trougla). Izraz integrala ostataka (21) dobija se na osnovu diferencijalne jednačine (16) koja se uvrštavanjem  $\bar{\phi}_i$  može napisati u sledećem obliku:

$$R_i = \int_{\Omega} w_i \cdot \left( -\frac{d}{dx} \cdot \left( \alpha \cdot \frac{d\bar{\phi}}{dx} \right) + \beta \cdot \bar{\phi} - f \right) \cdot d\Omega \quad (22)$$

Uočava se da izraz (22) sadrži izvode drugog stepena, koji se mogu eliminisati primenom pravila parcijalnih integrala:

$$\int_{\Omega_i} w_i \cdot \left( -\frac{d}{dx} \cdot \left( \alpha \cdot \frac{d\bar{\phi}}{dx} \right) \right) \cdot dx = -\alpha \cdot w_i \cdot \frac{d\bar{\phi}}{dx} \Big|_{\Omega_i} + \int_{\Omega_i} \alpha \cdot \frac{dw_i}{dx} \cdot \frac{d\bar{\phi}}{dx} \cdot dx \quad (23)$$

Prvi član na desnoj strani jednačine (23) ima vrednost nula, pošto je težinska funkcija  $w_i$  identična sa interpolacionom funkcijom, koja na granici domena  $\Omega_i$  nestaje (ima vrednost nula), te se izraz (22) može napisati u sledećem obliku:

$$R_i = \int_{\Omega_i} \left( \alpha \cdot \frac{dw_i}{dx} \cdot \frac{d\bar{\phi}}{dx} + \beta \cdot w_i \cdot \bar{\phi} - w_i \cdot f \right) \cdot dx \quad (24)$$

Za čvorove koji se nalaze na granici domena, pri graničnim uslovima određenim Neuman-ovim kriterijumom (18), prvi član u izrazu (23) se razlikuje od nule, što je uzeto u obzir pri određivanju koeficijenta sistema linearnih jednačina [3].



Uvrštavanjem odgovarajućih funkcija  $N_i \bar{\phi}_i$  umesto  $\bar{\phi}$ , gde je  $\bar{\phi}_i$  konstanta, te uzimajući u obzir da je težinska funkcija  $w_i$  jednaka interpolacionoj funkciji  $N_i$ , izraz (24) poprima sledeći oblik:

$$R_i = \sum_{j \in G} \int_{\Omega_i} \left( \alpha \cdot \bar{\phi}_j \cdot \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} + \beta \cdot \bar{\phi}_j \cdot N_i \cdot N_j \right) \cdot dx - \int_{\Omega_i} N_i \cdot f \cdot dx \quad (25)$$

Gde je  $G$  skup tačaka koje su direktno povezane sa čvorom  $i$  (npr. u jedno-dimenzionalnom slučaju, na slici 6., čvor  $i$  je direktno vezan sa čvorovima  $i-1$  i  $i+1$ ).

### 3.3.2 Varijacioni metod

Varijacioni metod određuje ekstremne vrednosti funkcionala, što znači da se sa varijacionom metodom određuje skup funkcija koje za jedan domen daju minimum ili maksimum tražene veličine.

Funkcional približnog rešenja veličine ( $\bar{\phi}$ ) koja je određena diferencijalnom jednačinom (16) za  $\Omega$  domen, može se odrediti varijacionom formulom [3]:

$$F(\bar{\phi}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \alpha \cdot \left( \frac{d\bar{\phi}}{dx} \right)^2 + \beta \cdot \bar{\phi}^2 \right) \cdot dx - \int_{\Omega} f \cdot \bar{\phi} \cdot dx \quad (26)$$

Gde  $F(\bar{\phi})$  označava varijacioni integral. Uvrštavanjem umesto  $\bar{\phi}$  odgovarajuće  $N_i \bar{\phi}_i$  funkcije za element  $i$  se može napisati (26) u sledećem obliku:

$$F^i = \frac{1}{2} \sum_{j \in G} \int_{\Omega_i} \left( \alpha \cdot \bar{\phi}_i \cdot \bar{\phi}_j \cdot \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} + \beta \cdot \bar{\phi}_i \cdot \bar{\phi}_j \cdot N_i \cdot N_j \right) \cdot dx - \int_{\Omega_i} N_i \cdot \bar{\phi}_i \cdot f \cdot dx \quad (27)$$

Gde su  $\bar{\phi}_i$  i  $\bar{\phi}_j$  konstante. Izvodom  $F^i$  po  $\bar{\phi}_i$  dobija se izraz za određivanje ekstremne vrednosti funkcionala:

$$\frac{\partial F^i}{\partial \bar{\phi}_i} = \sum_{j \in G} \int_{\Omega_i} \left( \alpha \cdot \bar{\phi}_j \cdot \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} + \beta \cdot \bar{\phi}_j \cdot N_i \cdot N_j \right) \cdot dx - \int_{\Omega_i} N_i \cdot f \cdot dx \quad (28)$$

Gde je  $G$  skup tačaka koje sadrže čvor sa indeksom  $i$  kao i tačaka koje su direktno povezane sa čvorom  $i$  (npr. u jedno-dimenzionalnom slučaju, na slici 6., čvor  $i$  je direktno vezan sa čvorovima  $i-1$  i  $i+1$ ).

Upoređenjem izraza (25) sa (28) zaključuje se da metodi težinskih ostataka i varijacioni metod generišu iste formule [3], koje se mogu koristiti za određivanje koeficijenata sistema linearnih jednačina (14), za proračun približne vrednosti  $\bar{\phi}_i$  u čvorovima.

### 3.3.3 Određivanje integrala za proračun koeficijenata sistema algebarskih jednačina jednodimenzionalnih modela

Kod ekstremnih vrednosti težinskih ostataka ili funkcionala, izrazi (25) i (28) imaju vrednost nula. Ovako dobijeni izrazi za različite vrednosti  $i$  određuju linearno nezavisne jednačine. Broj jednačina je jednak broju čvorova mreže generisane pri diskretizaciji domena modela. Koeficijenti  $K_{ij}$ , koji čine  $K$  matricu u jednačini (14), mogu se izračunati po sledećoj formuli:

$$K_{ij} = \int_{\Omega_i} \left( \alpha \cdot \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} + \beta \cdot N_i \cdot N_j \right) dx, \quad j \in G \quad (29)$$

Formula za proračun koeficijenata (29) može se odrediti kao odnos jednog člana zbira integrala u izrazu (28) i odgovarajuće vrednosti tražene veličine  $\bar{\phi}_j$ .

Elementi vektora  $f$  u jednačini (14) se izračunavaju na osnovu sledećeg integrala:

$$b_i = \int_{\Omega_i} N_i \cdot f \cdot dx \quad (30)$$

Formula za proračun elemenata vektora  $f$  je određena na osnovu (29), a jednaka je drugom integralu na desnoj strani jednačine (28).

Iz prethodnih izraza se uočava, da metodi težinskih ostataka i varijacionog funkcionala određuju sistem linearnih jednačina, koji se koriste za proračun potencijala u čvorovima mreže generisane pri diskretizaciji modela.

### 3.3.4 Određivanje integrala za proračun koeficijenata sistema algebarskih jednačina dvodimenzionalnih modela

U prethodnim poglavljima određene su formule za proračun tražene veličine u jedno- dimenzionalnim modelima. U ovom delu rada prikazan je postupak određivanja formule proračuna koeficijenata sistema linearnih jednačina za dvo- dimenzionalne raspodele tražene veličine.

Polazeći od diferencijalne jednačine (16), raspodela tražene veličine u dvo- dimenzionalnim modelima zadovoljava sledeću jednačinu [3]:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \alpha_x \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left( \alpha_y \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \beta \cdot \phi = f \quad (31)$$

Upoređenjem jednačine (16) i (31) može se primetiti, da se u izrazu (31) pored izvoda drugog reda potencijala po  $x$  nalazi izvod potencijala drugog reda po  $y$ , što znači da u dvo- dimenzionalnom slučaju umesto obične diferencijalne jednačine drugog stepena (16), problem se opisuje sa parcijalnom diferencijalnom jednačinom drugog reda (31).

Formule (28) i (25) su identične, što znači da metode težinskih ostataka i varijacionog funkcionala daju iste rezultate, te nije potrebno posebno odrediti formule za proračuna koeficijenata sistema linearnih jednačina.

Formule (28) i (25) dobijaju sledeći oblik u dvo- dimenzionalnim slučajevima, koji pored drugog izvoda po koordinati  $x$ , je dopunjen i sa izrazom drugog izvoda po koordinati  $y$  [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^i}{\partial \bar{\phi}_i} = \sum_{j \in G} \iint_{\Omega_i} & \left( \alpha_x \cdot \bar{\phi}_j \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \alpha_y \cdot \bar{\phi}_j \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \beta \cdot \bar{\phi}_j \cdot N_i \cdot N_j \right) \cdot dx dy \\ & - \iint_{\Omega_i} N_i \cdot f \cdot dx dy \end{aligned} \quad (32)$$

Gde je  $G$  skup čvorova koji sadrži čvor sa indeksom  $i$  i tačke koji su direktno povezane sa čvorom  $i$  (npr. u dvo- dimenzionalnom slučaju, na slici 10., čvor 1 je direktno povezan sa čvorovima 2 i 3, preko kojih prelazi interpolaciona funkcija  $N_1$ ).

Koeficijenti  $K_{ij}$ , koji čine matricu  $K$  u jednačini (14), mogu se odrediti po sledećoj formuli, koja proizilazi iz izraza prvog izvoda funkcionala (32):

$$K_{ij} = \iint_{\Omega_i} \left( \alpha_x \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \alpha_y \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \beta \cdot N_i \cdot N_j \right) dx dy, \quad j \in G \quad (33)$$

Elementi vektora  $f$  u jednačini (14) su izračunati na osnovu drugog integrala na desnoj strani jednačine (32):

$$b_i = \iint_{\Omega_i} N_i \cdot f \cdot dx dy \quad (34)$$

### 3.3.5 Određivanje formule za proračun koeficijenata sistema linearnih jednačina

Koeficijenti  $K_{ij}$ , koji čine matricu  $K$  u jednačini (14) i elementi  $b_i$  vektora  $f$  u jednačini (14), kao što je prikazano u prethodnim poglavljima, određeni su običnim integralima kod jedno- dimenzionalnih domena i sa parcijalnim integralima kod dvo- dimenzionalnih domena.

Na osnovu prethodno određenih integrala moguće je odrediti formule koeficijenta  $K_{ij}$  matrice  $K$  i elemente  $b_i$  vektora pobude  $f$ .

#### Formule za proračun koeficijenata u jedno-dimenzionalnom domenu

Za proračun koeficijenata segmenta je korišćen integral (29), a pobude u pojedinim elementima su određene izrazom (30). U ovim integralima primenjene su interpolacione funkcije, koje su posebno određene na elementima i formiraju domene integrala, jer su interpolacione funkcije u različitim domenima opisane sa različitim linearnim funkcijama (6), te je zato potrebno posebno računati koeficijente za svaki element.

U prvom koraku određene su interpolacione funkcije u jednom elementu. Kao što se vidi na slici 6., u svakom elementu treba uzimati u obzir dve interpolacione funkcije, kod kojih je indeks jednak sa indeksima čvorova koji se nalaze na krajevima segmenta. Ove interpolacione funkcije imaju jediničnu vrednost u odgovarajućim potencijalnim čvorovima. U elementu koji se nalazi između čvorova  $i$  i  $i+1$  u datom domenu, same interpolacione funkcije  $N_i$  i  $N_{i+1}$  imaju vrednosti različite od nule, a ostale interpolacione funkcije imaju vrednost nula, kao što je prikazano na slici 6.

Na osnovu pravila koja definišu jedno- dimenzionalnu interpolacionu funkciju željenog čvora, izrazi funkcije  $N_i$  i  $N_{i+1}$  u domenu između čvorova  $i$  i  $i+1$  su sledeći (na osnovu oznaka korišćenih na slici 6.):

$$N_i = -\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} + 1 \quad (35)$$

$$N_{i+1} = -\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + 1$$

U integralima pored interpolacione funkcije su korišćeni sledeći izvodi te funkcije po  $x$ :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{x_i - x_{i+1}}$$

$$\frac{\partial N_{i+1}}{\partial x} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}$$
(36)

Domen  $\Omega_i$  za koji treba izračunati integrale (29) i (30) je  $]x_i, x_{i+1}[$ . Koristi se otvoreni interval, jer su izvodi interpolacione funkcije  $N_i$  i  $N_{i+1}$  neodređeni u koordinatama čvorova koje imaju indekse  $i$  i  $i+1$ .

Iz praktičkih razloga izraz (29) zgodno je rastaviti na dva integrala:

$$K_{ij} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha \cdot \frac{dN_i}{dx} \cdot \frac{dN_j}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \beta \cdot N_i \cdot N_j dx$$
(37)

Prvi član u izrazu (37), je integral konstante, koji je jednak proizvodu koeficijenta  $\alpha$  sa izvodima interpolacione funkcije  $N_i$  i  $N_{i+1}$  definisanih izrazom (36). Drugi član je integral proizvoda koeficijenta  $\beta$  i interpolacionih funkcija  $N_i$  i  $N_{i+1}$  definisanih izrazom (35). Rezultat integrala (37), su formule za određivanje koeficijenata  $K_{ij}$  u željenom jedno- dimenzionalnom elementu:

$$l_e = x_{i+1} - x_i$$

$$K_{ii} = \frac{\alpha}{l_e} + \beta \frac{l_e}{3}$$

$$K_{ij} = -\frac{\alpha}{l_e} + \beta \frac{l_e}{6}$$
(38)

Kao što se vidi iz prethodnih izraza  $K_{ii}$  i  $K_{ij}$ , koeficijenti zavise od dužine elementa  $l_e$ , koji se nalazi između čvorova sa indeksom  $i$  i  $j$ . Interpolacione funkcije na krajevima elementa imaju jedinične vrednosti.

Uz pretpostavku da pobude  $f$  imaju konstantnu vrednost u jednom elementu, integral pobude (30) u elementu između čvorova  $i$  i  $j$  se može napisati u sledećem obliku:

$$b_i = f_e \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i dx$$
(39)

Odatle proizilazi, da je pobuda u jednom elementu proporcionalna sa dužinom datog elementa:

$$b_i = f_e \cdot \frac{l_e}{2}$$
(40)

### Formule za proračun koeficijenata u dvo-dimenzionalnom domenu

Kod proračuna koeficijenata  $K_{ij}$  jednog segmenta koristi se integral (33), pri čemu elementi vektora pobude su određeni izrazom (34). U integralima primenjene su interpolacione funkcije, koje su određene posebno na elementima koji formiraju domen integrala. Zbog toga su interpolacione funkcije u različitim dvodimenzionalnim elementima opisane sa jednačinama različitih ravni, kao što je prikazano na slici 8.

Određivanje integrala koeficijenta  $K_{ij}$  je kompleksan postupak, pa će zbog toga u sledećem koraku biti prikazane korišćene krajnje formule interpolacione funkcije za koordinate čvorova.

Prvi korak postupka, je određivanje interpolacione funkcije u datom elementu. Kao što se može videti na slici 9. u jednom datom elementu, tokom proračuna koeficijenata, treba uzeti u obzir tri interpolacione funkcije (slika 10.) Indeksi interpolacione funkcije su jednaki sa indeksima čvorova, koji se nalaze u vrhovima trougla. Ostale interpolacione funkcije imaju vrednost nula u datom elementu, kao što je i prikazano na slici 8..

Za element koji je identičan sa jednim segmentom sa slike 8., na slici 10. su prikazane interpolacione funkcije. Čvorovi elementa su indeksirani brojevima 1, 2 i 3, kao što su indeksirane i interpolacione funkcije  $N_1, N_2$  i  $N_3$ , koje u datom elementu imaju vrednost različiti od nule.

Na osnovu formule i metoda prikazanih u poglavlje 3.2.2, određuje se interpolacione funkcije, prikazane na slici 10., primenom sledećih formula:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot (x \cdot (y_2 - y_3) + y \cdot (x_3 - x_2) + x_2 \cdot y_3 - y_2 \cdot x_3) \\ N_2(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot (x \cdot (y_3 - y_1) + y \cdot (x_1 - x_3) + x_3 \cdot y_1 - y_3 \cdot x_1) \\ N_3(x, y) &= \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot (x \cdot (y_1 - y_2) + y \cdot (x_2 - x_1) + x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2) \end{aligned} \quad (41)$$

Integracijom izraza (33) i (34) i uvrštavanjem interpolacione funkcije (41) dobijene su formule za proračun koeficijenata matrice sistema linearnih jednačina  $K_{ij}$ :

$$K_{ij} = \frac{1}{4 \cdot \Delta} \left( \alpha_x \cdot n_{ix} \cdot n_{jx} + \alpha_y \cdot n_{iy} \cdot n_{jy} + \frac{\Delta}{12} \beta (1 + \delta_{ij}) \right) \quad (42)$$

U prvom i u drugom članu izraza komponente  $n_x$  i  $n_y$  su  $x$  i  $y$  koordinate normalnih vektora (8) korišćene pri određivanju formule interpolacione funkcije (13). Treći član u zagradi je proporcionalan sa površinom elementa. Vrednost trećeg člana zavisi pored površine elemenata i od vrednosti funkcije  $\delta_{ij}$  koja ima jediničnu vrednost u slučaju kad je  $i$  jednako sa  $j$ .

Prvi i drugi član u zagradi može se napisati pomoću elementa normalnih vektora i matrice koeficijenata  $\alpha_x$  i  $\alpha_y$  na sledeći način:

$$\alpha_x \cdot n_{ix} \cdot n_{jx} + \alpha_y \cdot n_{iy} \cdot n_{jy} = \mathbf{n}_i^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}_j \quad (43)$$

Iz formula za proračun elemenata vektora  $b_i$  se vidi da je pobuda elementa proporcionalna sa njegovom površinom:

$$b_i = f_e \cdot \frac{\Delta}{3} \quad (44)$$

### 3.3.6 Konstruisanje matrice i vektora pobude sistema linearnih jednačina

U prethodnom poglavlju određene su formule za proračun koeficijenata matrice i komponenata vektora pobude za jedan element (segment u jedno-dimenzionalnim i trougao u dvo-dimenzionalnim domenima). Izračunati koeficijenti određuju vezu između tražene veličine u čvorovima datog elementa. Zato je za svaki element određena linearna jednačina sa brojem nepoznatih jednakim sa brojem čvorova, koji određuju element.

Sistem linearnih jednačina, koji opisuju odnose između potencijala u segmentu  $i$ , a nalazi se između čvorova  $i$  i  $i+1$ , prikazan je na slici 6., može se napisati u sledećem obliku:

$$\begin{bmatrix} K_{i,i}^i & K_{i,i+1}^i \\ K_{i+1,i}^i & K_{i+1,i+1}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i^i \\ b_{i+1}^i \end{bmatrix} \quad (45)$$

Gde  $K_{x,y}^i$  označava koeficijent određen na osnovu formule (38) za element  $i$ ,  $\phi_x$  vrednost tražene veličine u čvoru  $x$ ,  $b_x^i$  označava komponentu vektora pobude određenu na osnovu formule (40) za element  $x$ . Kao što se vidi iz formule (40) i (44) vrednosti komponenata pobude ne zavise od interpolacione funkcije, već samo od veličine (dužine, površine itd.) elementa.

Na sličan način se može odrediti sistem linearnih jednačina, za segment  $i-1$  koji se nalazi između čvorova  $i-1$  i  $i$ , prikazan na slici 6.:

$$\begin{bmatrix} K_{i-1,i-1}^{i-1} & K_{i-1,i}^{i-1} \\ K_{i,i-1}^{i-1} & K_{i,i}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{i-1} \\ \phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i-1}^{i-1} \\ b_i^{i-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Kao što se vidi, tražena veličina  $\phi_i$  u čvoru  $i$  treba da ispuni uslove određene sa sistemima jednačina (45) i (46). Tražene veličine  $\phi_{i+1}$  i  $\phi_{i-1}$  u čvorovima  $i+1$  i  $i-1$  treba da ispunjavaju uslove i ostalih sistema jednačina, pored (45) i (46), koje su određene na isti način kao i (45) i (46).

Prethodne jednačine su određene na elementima jedno-dimenzionalnog domena, gde se interpolacione funkcije nalaze u dva segmenta. Na osnovu trenda koji se javlja kod sistema jednačina napisanih na elementima jednodimenzionalnih modela, može se zaključiti da je broj sistema linearnih jednačina određenih sa elementima i uslova koje tražena veličina u jednom čvoru treba da ispuni, je jednak sa brojem elemenata u kojima interpolaciona funkcija sa indeksom čvora ima vrednost različitu od nule.

Na osnovu prethodno objašnjenog pravila može se zaključiti, da broj elementarnih sistema jednačina, koje treba da ispuni tražena veličina  $\phi_i$  u čvoru  $c_i$  u dvo-dimenzionalnom domenu (prikazano je na slici 8.), je 5, jer interpolaciona funkcija  $N_i$  ima vrednost različitu od nule kod 5 elemenata dvo-dimenzionalnog modela.

Polazeći od činjenice, da je broj elemenata u jednom modelu često veći od broja čvorova, može se zaključiti, da je rešavanje problema pomoću elementarnih sistema jednačina neefikasan, te da je pogodnije koristiti sistem jednačina gde je broj nepoznatih jednak broju čvorova.

U sledećem koraku je prikazan način integrisanja jednačine, napisane za jedan element, u globalnom sistemu jednačina.

Prvo je prikazan postupak određivanja jednačina napisanih za traženu veličinu u čvoru  $i$  u globalnom sistemu jednačina jedno-dimenzionalnog modela. Kao što se vidi jednačina (47) u globalnom sistemu jednačina je jednaka zbiru jednačina, koje sadržavaju koeficijente  $K_{i,i}^i$  i  $K_{i,i}^{i-1}$  u sistemima jednačine (45) i (46), koje su određene za elemente  $i$  i  $i-1$ .

$$K_{i,i-1}^{i-1}\phi_{i-1} + [K_{i,i}^i + K_{i,i}^{i-1}]\phi_i + K_{i,i+1}^i\phi_{i+1} = b_i^i + b_i^{i-1} \quad (47)$$

Broj jednačina kao i broj nepoznatih u sistemu linearnih jednačina je jednak sa brojem čvorova. To znači da koeficijenti koji se u jednačini (47) ne pojavljuju, imaju vrednost nula, šta znatno olakšava rešenje sistema linearnih jednačina.

Kao što je prikazano kod više-dimenzionalnih domena, broj elementarnih sistema jednačina, koje kao uslov treba da ispunjava tražena veličina u čvoru  $i$  je jednak broju elemenata u kojima se vrednost interpolacione funkcije  $i$  razlikuje od nule. Broj ovih elemenata, u kojima vrednost interpolacione funkcije se razlikuje od nule, može se smanjiti primenom Dealunay-og pravila pri određivanju trouglova, jer Dealunay-ov metod maksimizuje vrednosti najmanjih uglova u trouglovima, kod dvo-dimenzionalnih modela. Na taj način se smanjuje maksimalni broj elemenata u kojima se vrednost interpolacione funkcije razlikuje od nule, koji je jednak sa brojem koeficijenata u jednačinama određenim za jedno-dimenzionalne modele (47).

### 3.3.7 Dopuna linearne jednačine sa izrazima graničnih uslova

Tokom postupka definisanja izraza matrice koeficijenta  $K$  i vektora  $f$  u sistemu linearnih jednačina (14), nisu uzeti u obzir granični uslovi, koji definišu ponašanje tražene veličine na granici domena modela.

Definisanjem graničnih uslova uzima se u obzir uticaj okoline na model. Zato pri određivanju raspodele tražene veličine uz pretpostavku, da su vrednosti te veličine poznati u čvorovima koji se nalazi na granici modela, korišćen je Dirichlet-ov granični uslov (17). U slučajevima kada je poznata promena tražene veličine u čvorovima granice modela primenjuje se Neuman-ov granični uslov (18). Spomenuti granični uslovi mogu se izraziti sa jednom diferencijalnom jednačinom u jedno-dimenzionalnom domenu:

$$\left[ \alpha \frac{d\phi}{dx} + \gamma\phi \right]_{x=L} = q \quad (48)$$

Kombinacijom koeficijenata  $\alpha$ ,  $\gamma$  i  $q$ , pored uslova definisanih izrazima (17) i (18), mogu se odrediti željene kombinacije graničnih uslova.

#### Dirichlet-ov granični uslov

Na osnovu Dirichlet-ova graničnog uslova koeficijent  $\alpha$  u diferencijalnoj jednačini (65) ima vrednost nula. To znači da sa primenom izraza za funkcional (27) koji je bio određen za diferencijalnu jednačinu (16), može napisati funkcional za diferencijalnu jednačinu (48), u sledećem obliku:

$$F(\phi) = \left[ \frac{1}{2} \gamma \phi^2 - q \phi \right]_{x=L} \quad (49)$$

Kao što se vidi izraz (49) je funkcional za elemente koji se nalaze na granici domena, vrednost tražene veličine na granici domena je jednaka sa rešenjem jednačine, koja je napisana na osnovu pravila za proračun ekstremnih vrednosti izraza (49).

$$\frac{dF(\phi)}{d\phi} = \gamma \phi - q = 0 \quad (50)$$

Rešenje jednačine (50) daje vrednost tražene veličine u čvoru koji se nalazi na granici domena:

$$\phi = \frac{q}{\gamma} \quad (51)$$

Polazeći od činjenice, da Dirichlet-ov uslov određuje vrednosti tražene veličine u čvorovima, sistem linearnih jednačina (14) može se redukovati eliminisanjem jednačine, napisane za čvorove koji se nalaze na granici modela.

Na primer ako je potencijal u  $n$ -tom čvoru poznat, onda u prvom koraku treba zameniti  $n$ -tu komponentu u vektoru pobude  $f$ , sa vrednošću određenoj sa formulom (51). Nakon toga, ostale komponente treba smanjiti sa proizvodom potencijala u čvoru  $n$  i odgovarajućim koeficijentom iz kolona  $n$  u matrici  $K$ . U drugom koraku treba zameniti vektor reda i kolona  $n$  sa jediničnim vektorima u matrici  $K$ , tako da koeficijent  $K_{n,n}$  ima jediničnu vrednost. Nakon toga, ostali koeficijenti u redu i koloni  $n$  imaju vrednost nula.

#### Neuman-ov granični uslov

Kao što je već kod izraza (23) spomenuto, u čvorovima koji se nalaze na granici domena deo ostataka razlikuje se od nule.

Uzimajući u obzir da je težinska funkcija  $w_i$  jednaka sa interpolacionom funkcijom  $N_i$ , a na granici domena vrednost te funkcije je jedinična, može se napisati sledeći izraz:

$$-\alpha \cdot w_i \cdot \frac{d\phi}{dx} \Big|_{\Omega_i} = -\alpha \cdot \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=L} \quad (52)$$

Koji se na osnovu diferencijalne jednačine (48) može se napisati u sledećem obliku, koji više ne sadržava izvod potencijala:



$$-\alpha \cdot \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=L} = q - \phi_N = g_N \quad (53)$$

Što znači da ostatak (25) kod elemenata na granici domena kod primene Neuman-ov graničnog uslova sadrži član  $g_N$ , koji modifikuje vrednosti komponenta vektora pobude  $f$  u izrazu (14), koje su bile određene sa formulama (40) (za jedno-dimenzionalne domene) i (44) (za dvo-dimenzionalne domene).

$$b_i^{new} = b_i + g_i \quad (54)$$

## 4. MAXWELL-OVE JEDNAČINE ELEKTROMAGNETNOG POLJA

Ponašanje elektromagnetnog polja opisano je Maxwell-ovim jednačinama, nastalim na osnovu rezultata ranijih istraživanja i prezentovanih radova Oersted-a, Biot-Savart-a, Amper-a, Faraday-a i Gauss-a. Spomenuti fizičari su opisali pojedinačno određene fenomene, vezane za elektromagnetno polje. Maxwell je u svom radu ove jednačine organizovao u jednom sistemu, koristeći ih u diferencijalnom i integralnom obliku. Pomoću sistema Maxwell-ovih diferencijalnih jednačina određeno je električno polje, kao funkcija promene magnetnog polja i pokazano je da električno polje izazivanjem kretanja elektriciteta generiše magnetno polje.

Maxwell-ove diferencijalne jednačine su određene primenom pravila vektorske analize, koje opisuju vezu između vektorskih i skalarnih veličina u više-dimenzionalnom prostoru pomoću matematičkih izraza. U vektorskoj analizi mogu se razlikovati skalarne funkcije, koje opisuju raspodele skalarnih veličina u prostoru i vektorske funkcije, koje određuju intenzitet i orijentaciju vektorskih veličina u prostoru.

Primenom operatora iz skalarne funkcije konstruišu se vektorske funkcije i obrnuto pomoću inverznih operatora iz vektorske funkcije konstruišu se skalarne funkcije.

Radi lakšeg razumevanja pojmova, korišćenih tokom primene sistema Maxwell-ovih diferencijalnih jednačina, u ovom poglavlju dat je kratak pregled delova vektorske analize, koji su relevantni za određivanje jednačina magnetnog polja.

U literaturi postoji veliki broj radova, koji opisuju elektromagnetno polje pomoću Maxwell-ovih jednačina. U ovom poglavlju prikazani su Maxwell-ove jednačine i delovi vektorske analize na osnovu opisa iznetih u literaturi [3].

### 4.1 Kratak pregled vektorske analize

Najčešće korišćeni matematički alati vektorske analize u opisu fenomena u elektromagnetnom polju su divergencija, rotor i gradijent, gde su prvi izvodi skalarnih ili vektorskih funkcija određeni po poziciji. Diferencijalni operator prvog stepena, korišćen u predhodno spomenutim matematičkim alatima je označen simbolom  $\nabla$ . U trodimenzionalnom Descartes-ovom koordinatnom sistemu operator  $\nabla$  se može napisati u sledećem obliku [3]:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (55)$$

Gde su  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  i  $\mathbf{k}$  jedinični vektori paralelni osama koordinatnog sistema,  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  su diferencijalni operatori prvog reda.

#### 4.1.1 Divergencija vektorskog polja

Divergencija se interpretira kao vektorska funkcija, a opisuje se kao skalarni proizvod diferencijalnog operatora  $\nabla$  i vektorske funkcije  $\mathbf{f}$ . Polazeći od činjenice da je divergencija skalarni proizvod vektorskog operatora i vektora, primena operatora divergencije na vektor funkcije  $\mathbf{f}$  generiše skalarnu funkciju, koja najčešće opisuje raspodelu skalarne veličine u prostoru [3].

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_S \mathbf{f} \, ds \quad (56)$$

Gde je  $\mathbf{f}$  vektorska funkcija,  $ds$  je elementarni vektor površine, normalan na površinu  $ds$ , intenzitet vektora je jednak površini  $ds$ ,  $S$  je zatvorena površina koja obuhvata zapreminu  $\Delta V$ .

Leva strana jednačine (56) može se napisati u sledećem obliku primenom definicije diferencijalnog operatora  $\nabla$  (55) [3]:

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \text{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad (57)$$

Ako su funkcija  $\mathbf{f}$  i njen izvod kontinualne u zapremini  $V$ , onda na osnovu izraza (56) proizlazi da važi:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dv = \iiint_S \mathbf{f} \, ds \quad (58)$$

Na osnovu izraza (58) može se zaključiti, da veličina, čija je raspodela jednaka divergenciji vektorske funkcije  $\mathbf{f}$ , se ponaša kao izvor vektorskog polja opisanog sa vektorskom funkcijom  $\mathbf{f}$ . Na osnovu Gauss-ovog zakona integral izvora vektorskog polja (određenog sa vektorskom funkcijom) u zapremini  $V$  jednak je integralu vektorskog polja na zatvorenoj površini koju obuhvata.

#### 4.1.2 Rotor vektorskog polja

Rotor (označen sa rot ili sa curl) je definisan kao vektorski proizvod diferencijalnog operatora  $\nabla$  i vektorske funkcije  $\mathbf{f}$  [3]:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_S ds \times \mathbf{f} \quad (59)$$

Može se uočiti, da se u integralu vektorskog proizvoda na desnoj strani jednačine (59), komponenta vektorske funkcije  $\mathbf{f}$ , normalna na zatvorenu površinu eliminiše, jer je jednaka integralu vektorskog proizvoda funkcije  $\mathbf{f}$  i vektora  $ds$ . Iz definicije vektorskog proizvoda vektora proizilazi, da proizvod paralelnih vektora ima vrednost nula. To praktično znači da se komponente vektorske funkcije paralelne sa površinom u izrazu na desnoj strani jednačine (59) eliminišu u integralu.

Integral skalarnog proizvoda rotora (59) i normalnog vektora  $ds$  na površinu  $S$  koja je određena zatvorenim konturom  $C$  je jednaka integralu vektorske funkcije na konturi  $C$  [3].

$$\iiint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot ds = \oint_C \mathbf{f} \, dl \quad (60)$$

Rotor vektorske funkcije u tro-dimenzionalnom prostoru je određen sledećom determinantom [3]:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{bmatrix} \quad (61)$$

Gde su  $f_x$ ,  $f_y$  i  $f_z$  komponente vektora funkcije  $\mathbf{f}$ .

### 4.1.3 Gradijent

Operator gradijenta određuje promenu raspodele gustine veličine izražen skalarnom funkcijom  $f$ . Operator gradijenta, može se smatrati proizvodom operatora  $\nabla$  sa skalarnom funkcijom  $f$  [3]:

$$\nabla f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iiint_S f \, ds \quad (62)$$

U izrazu (62) gradijent je određen u smeru vektora (1,1,1). U željenom smeru, koji je paralelan sa vektorom  $\mathbf{n}$ , gradijent se može odrediti po sledećoj formuli:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla f = \frac{df}{dn} \quad (63)$$

### 4.1.4 Identiteti u vektorskoj analizi

Pored alata navedenih u prethodnim poglavljima, potrebno je opisati pojam identiteta [3] koji proizilazi iz prethodno opisanih pravila:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (64)$$

Iz izraza (64) sledi da rotor divergencije ima vrednost nula, što znači da rotor polja koji sadrži izvore ima vrednost nula.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0 \quad (65)$$

Iz prethodnog izraza sledi da divergencija rotora ima vrednost nula, što znači da polje sa rotorom ne sadrži izvore polja.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla \nabla \cdot \mathbf{f} - \nabla^2 \mathbf{f} \quad (66)$$

Izrazom (66) je ilustrovana formula za određivanje rotora rotora, gde je  $\nabla^2$  Laplac-ov operator.

## 4.2 Integralni oblici Maxwell-ovih jednačina

Kao što je spomenuto ranije, fenomeni koji su bili uočeni tokom eksperimenata opisani su pomoću odgovarajućih jednačina. Prva posmatrana pojava je bio uticaj magnetnog polja električne struje na magnetni kompas (Oersted). Uočavanje ovog fenomena dovelo je do definisanja zakona vezanih za magnetno polje provodnika (Ampere i Biot-Savart), koji se može napisati u sledećem integralnom obliku [3]:

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (67)$$

Izraz (67) određuje odnos integrala jačine magnetnog polja u zatvorenoj konturi i struje, koju čini kretanje elektriciteta preko površine ograničene sa istom konturom. Ova jednačina je poznata kao Maxwell-Amper-ov zakon.

Sledećom jednačinom je pokazano, da promena gustine magnetnog fluksa kroz površinu proizvodi indukovanu elektromotornu silu, čija je vrednost jednaka integralu električnog polja u konturi oko površine.

$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (68)$$

Jednačina (68) poznato je kao Faraday-ov zakon.

Jednačine (67) i (68) opisuju vezu između magnetnog i električnog polja, bez objašnjenja same prirode magnetnog polja.

Specifičnost magnetnog polja je da su linije njegovog polja zatvorene, što znači da im se ne može odrediti početak i kraj linija, odnosno to znači da magnetno polje ne sadrži izvor. Zato polje koji ne sadrži izvore ispunjava sledeći uslov, definisan od strane Gauss-a:

$$\oint_S \mathbf{B} ds = 0 \quad (69)$$

Praktično jednačina (69) izražava, da divergencija (58) magnetnog polja ima nultu vrednost, jer bi se u suprotnom slučaju integral magnetnog polja kroz zatvorenu površinu razlikovao od nule.

Sem pored navedenih specifičnosti magnetnog polja, potrebno je definisati, činjenicu da je naelektrisanje izvor električnog fluksa (70).

$$\oint_S \mathbf{D} ds = \iiint_V \rho dv \quad (70)$$

Gauss-ov zakon (70) za električno polje pokazuje, da je integral gustine električnog fluksa na zatvorenoj površini jednak sa zapreminskim integralom naelektrisanja.

Korisno je još prikazati i jednačinu koja pokazuje konzervaciju naelektrisanja, što znači, da naelektrisanje ne može nestati, niti iz ničega se stvoriti.

$$\oint_S \mathbf{J} ds = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dv \quad (71)$$

Izraz (71) je praktično prvi izvod jednačine (70) po vremenu, što znači da promena integrala gustine električnog fluksa na zatvorenoj površini se može smatrati kao električna struja, jer se naelektrisanje u zapremini ne menja, već se ono samo premešta.

Navedeni izrazi (67) - (71) važe pri svim uslovima, nezavisne su od materijala medijuma i određuju ponašanje elektromagnetnog polja.

### 4.3 Diferencijalni oblici Maxwell-ovih jednačina

Diferencijalni oblici Maxwell-ovih jednačina su određeni na osnovu formule (67) - (71), sa primenom Gauss-ov i Stokes teorije, a izražavaju odnose veličina u datoj tački prostora [3].

Diferencijalni oblik jednačine (67) izražava činjenicu, da se linije sila jačine magnetnog polja nalaze u ravni, na kojoj su vektor gustine struje i promene gustine fluksa električnog polja normalni.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (72)$$

Iz izraza (72) se vidi, da se rotor jačine magnetnog polja nalazi u ravni, na koju su normalni vektori gustine struje i gustine električnog polja. Stoga se može zaključiti da se vektor jačine magnetnog polja nalazi u ravni normalnoj na vektorima gustine električnog polja i struje.

Slično kao što i promene fluksa električnog polja tako i promene gustine magnetnog fluksa u jednoj tački određuju rotor električnog polja u normalnoj ravni na promene magnetne indukcije:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (73)$$

Električna polja u izrazu (73) se značajno razlikuju od onih električnih polja koja potiču od nepokretnih naelektrisanja, jer u ovom slučaju ona nastaju usled promene magnetne indukcije.

Trećom formulom je dokazano, da magnetno polje ne sadrži izvor. Raspodela izvora vektorskog polja, na osnovu definicije divergencije (56), je identična sa divergencijom vektorske funkcije indukcije.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (74)$$

Diferencijalni oblik jednačine (70) izražava činjenicu da je izvor statičkog električnog polja ekvivalentan sa gustinom raspodele naelektrisanja u prostoru:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (75)$$

Prvi izvod izraza (75) po vremenu je ekvivalentan sa definicijom električne struje, koja je izražena u formuli (76) kao promena gustine naelektrisanja:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (76)$$

Sa diferencijalnim oblicima Maxwell-ove jednačine (72)-(76) određen je skup pravila, čija rešenja određuju elektromagnetno polje u svakoj tački prostora.

#### 4.4 Elektro i magnetno statički oblici Maxwell-ove jednačine

Kod statičkih oblika Maxwell-ove jednačine, vremenski promenjivi delovi izraza imaju nultu vrednost, što znači da se diferencijalni oblici jednačina (72), (73) i (76) mogu napisati u sledećim oblicima:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (77)$$

Izraz (77) opisuje raspodelu jačine magnetnog polja za konstantnu raspodelu pobudne struje.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (78)$$

Ranije je zaključeno da u datoj tački prostora rotacija električnog polja zavisi od promene gustine magnetnog fluksa, te da kao što se vidi iz izraza (78) statičko magnetno polje ne indukuje elektromotornu silu.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (79)$$

Iz jednačine (79) može videti da u elektrostatičkom polju pomeranje naelektrisanja ima vrednost nula, što znači da u elektrostatičkom polju ne postoje izvori električne struje.

Iz izraza (77) i (79) može se zaključiti da ne postoji interakcija između statičkog električnog i magnetnog polja.

#### 4.5 Vremenski-harmonički oblici Maxwell-ovih jednačina

Vremenski-harmonički oblici Maxwell-ovih jednačina se primenjuju u slučajevima kada vremenske funkcije veličina opisanih sa njima, pulsiraju sa zajedničkom frekvencijom. Opšti oblik vremenske funkcije željene veličine, koja pulsira sa  $\omega$  kružnom frekvencijom može se napisati u sledećem obliku:

$$\mathbf{X} = \hat{X} \cdot e^{j\omega t} \quad (80)$$

Gde je  $\hat{X}$  vršna vrednost određene veličine, a  $e^{j\omega t}$  kompleksni operator. Izrazi (72), (73) i (76) u kojima figurišu vremenski izvodi veličina, mogu se preformulisati, na osnovu izvoda opšteg oblika vremenske funkcije željene veličine (80), koji se može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{X} \cdot e^{j\omega t}}{\partial t} = j\omega \cdot \hat{X} \cdot e^{j\omega t} = j\omega \cdot \mathbf{X} \quad (81)$$

Diferencijalni oblici Maxwell-ovih jednačina (72), (73) i (76), na osnovu formule (81), mogu se napisati u vremenskom harmoničkom obliku kao:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \cdot \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (82)$$

Iz jednačine (82) se vidi, da ako gustina struje  $\mathbf{J}$  ima vrednost nula, onda fazni pomak između gustine električnog fluksa i rotacije jačine magnetnog polja je  $90^\circ$ .

Uvrštavanjem kompleksnog oblika indukcije u Faraday-ovu jednačinu, i zamenom diferencijalnog operatora po vremenu umnoškom  $-j\omega$ , veza između rotora električnog polja i intenziteta magnetne indukcije, može se napisati u sledećem obliku (83):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \cdot \mathbf{B} \quad (83)$$

Iz jednačine (83) se vidi, da je fazni pomak između električnog polja i indukcije  $90^\circ$ . Ovaj fazni pomak je ekvivalentan faznom pomaku između struje i indukovane elektromotorne sile u induktivitetima. Ova analogija proizilazi iz činjenice, da magnetni fluks potiče od struje, dok indukovana elektromotorna sila je proporcionalna izvodu fluksnog obuhvata namotaja po vremenu.

Uvrštavanjem kompleksne vremenske funkcije gustine elektriciteta u diferencijalni oblik izraza kontinuiteta i zamenom diferencijalnog operatora sa umnoškom  $-j\omega$  određena je formula (84).

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \cdot \rho \quad (84)$$

Iz izraza (84) sledi da je fazni pomak između promena napona i struje kondenzatora  $90^\circ$ , jer je napon proporcionalan sa gustinom naelektrisanja na elektrodama kondenzatora, dok je gustina struje proporcionalna sa strujom kondenzatora.

## 4.6 Konstitutivne relacije

Od pet Maxwell-ovih jednačina, tri su nezavisne (72), (73) i (76). Te tri jednačine sadrže šest nepoznatih, to znači da sistem jednačina treba dopuniti sa još tri jednačine radi opisa relacija između karakterističnih veličina koje nedostaju. Ove nove jednačine opisuju odnos magnetnih veličina ( $\mathbf{B}, \mathbf{H}$ ) i električnih veličina ( $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ ) i ( $\mathbf{J}, \mathbf{E}$ ) pomoću koeficijenata zavisnih od medijuma.

Veza između gustine električnog fluksa i električnog polja definiše se pomoću permitivnosti medijuma, što određuje prvu nedostajuću jednačinu (85):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (85)$$

Druga nedostajuća jednačina dobija se iz definicije odnosa jačine magnetnog polja i magnetne indukcije, izrazom (86):

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (86)$$

Treća nedostajuća jednačina dobija se iz međuzavisnosti električne struje od električnog polja, definisane izrazom (87)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (87)$$

Jednačine (85)-(87) izražavaju linearne zavisnosti između veličina, što ne odgovara stvarnom stanju, gde su koeficijenti  $(\varepsilon, \mu, \sigma)$  funkcije polja  $(\varepsilon(\mathbf{E}), \mu(\mathbf{B}))$ , što znači da je sistem Maxwell-ovih jednačina u suštini sistem diferencijalnih jednačina sa nelinearnim koeficijentima.

## 4.7 Skalarni i vektorski potencijali

Za rešavanje fenomena sa MKE potrebno je obezbediti raspodelu veličine sa osobinama potencijala. Veličina sa osobinom potencijala nije određena Maxwell-ovim jednačinama, zato ju je potrebno posebno definisati. Pri definisanju potencijala potrebno je pre svega odrediti nulti potencijal, pri čemu potencijal u ostalim tačkama prostora određuje se sa vrednošću rada potrebnog da se obavi premeštanje probne veličine iz tačke nultog potencijala u željenu tačku.

Pri određivanju potencijala električnog polja, probna veličina je jedinično naelektrisanje, dok je kod magnetnog polja probna veličina provodnik jedinične dužine sa jediničnom jačinom struje.

### 4.7.1 Skalarni potencijal električnog polja

Pri kretanju naelektrisanja u električnom polju njegova potencijalna energija se menja, pri čemu je promena potencijalne energije određena integralom vektora sile po konturi po kojoj se kreće naelektrisanje. Razlika potencijalne energije između dve krajne tačke konture jednaka je radu koji je potrebno uložiti da bi se pomerilo naelektrisanje duž konture.

Iz praktičkih razloga, umesto rada izračuna se razlika potencijala između krajne tačke konture, koja je jednaka radu koji je potrebno uložiti da bi se pomerio jedinični elektricitet duž konture. Razlika potencijala između dva kraja konture izračunava se kao linijski integral po konturi skalarnih proizvoda vektora električnog polja i tangencijalnog vektora konture. Zbog toga potencijal električnog polja je skalarna veličina, što znači da se električno polje može odrediti kao gradijent skalarnog potencijala (88):

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (88)$$

Uvrštavanjem izraza (88) u diferencijalni oblik Maxwell-ove jednačine (75), dobija se parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda (89), koja se koristi kao polazna jednačina, pri određivanju formule za proračun raspodele potencijala električnog polja sa MKE:

$$-\nabla(\varepsilon\nabla\phi) = \rho \quad (89)$$

### 4.7.2 Vektorski potencijal magnetnog polja

Magnetno polje deluje na električnu struju silom (Lorenz (90)), koja se može odrediti kao vektorski proizvod vektora struje (ili provodnika u kojoj teče struja) i vektora gustine magnetnog fluksa, što znači da je sila normalna na vektor gustine magnetnog fluksa.

$$\mathbf{F} = I \cdot \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (90)$$

Pri proračuna rada, koji je potreban za određivanje pojma potencijala u magnetnom polju, treba integrisati silu (90) po dužini konture.



Pod pretpostavkom da je vrednost struje u provodniku jedinična i da je provodnik normalan na ravan koja određuje tangencijalni vektor konture i magnetne indukcije (sa pretpostavkom da tangencijalni vektor konture i vektor magnetne indukcije nisu paralelni), vrednost linijskog integrala po konturi je jednak integralu normalne komponente magnetne indukcije po liniji konture.

Pod pretpostavkom idealnog slučaja, kada je segment konture paralelan sa osom  $x$  dok je magnetna indukcija paralelna sa osom  $y$  i ima konstantnu vrednost, integral vektorskog proizvoda magnetne indukcije i elementarnog malog pomeraja je jednak vektorskom proizvodu vektora magnetne indukcije i vektora, koji ukazuje na pravac iz početne tačke ka krajnjoj tački konture (91).

$$\mathbf{B} \times \partial \mathbf{x} = \partial \mathbf{A} = B_y \cdot \partial x = -\partial A_z \quad (91)$$

Upoređenjem izraza (61) sa izrazom (91), vidi se da (91) odgovara slučaju, kada komponente  $x$  i  $z$  rotora vektorske funkcije  $\mathbf{f}$  u izrazu (61) imaju nultu vrednost (u ovom slučaju  $B_x = 0$  i  $B_z = 0$ ), a komponenta vektora rotacije (u ovom slučaju  $B_y$ ) na osnovu (91) je jednaka komponenti  $y$  rotora vektorske funkcije  $\mathbf{f}$  u izrazu (61), sa pretpostavkom da komponente  $x$  i  $y$  vektorske funkcije (u ovom slučaju  $A_x$  i  $A_y$ ) imaju nulte vrednosti.

Na osnovu prethodno opisanog, upoređenjem izraza (61) i (91) može se zaključiti, da se magnetni vektorski potencijal ponaša kao vektor, te se vektor gustine magnetnog fluksa može izraziti kao rotor magnetnog vektorskog potencijala (92).

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (92)$$

Uvrštavanjem izraza (92) u diferencijalni oblik jednačine (72) i primenjujući pravila opisanog sa (86), može se odrediti parcijalna diferencijalna jednačina drugog stepena za određivanje formule za proračun magnetnog vektorskog potencijala statičkog magnetnog polja, potrebna za obezbeđenje primene MKE:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (93)$$

Rešenje jednačine (93) određuje funkcije koje zavise od definisanih graničnih uslova. Uprkos razlikama između rešenja pri različitim graničnim uslovima, raspodela magnetne indukcije je jednoglasno određena sa različitim rešenjima izraza (93).

Za magnetni vektorski potencijal važi, kao što važi za magnetnu indukciju (74), da ne sadrži izvor:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (94)$$

## 4.8 Granični uslovi

Granični uslovi definišu ponašanje elektromagnetnih polja pri prelazu preko granice između različitih medijuma.

Iz izraza (95) se vidi da su komponente električnog polja paralelne sa površinom, koja se nalazi između medijuma, konstantne:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (95)$$

Iz izraza (96) sledi, da su normalne komponente gustine električnog fluksa na površini, koji se nalazi između medijuma, konstantne:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \quad (96)$$

Iz izraza (97) sledi da su komponente jačine magnetnog polja paralelne sa površinom, koja se nalazi između medijuma, konstantne:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (97)$$

Iz izraza (96) sledi, da su normalne komponente magnetne indukcije na površini, koja se nalazi između medijuma, konstantne.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (98)$$

Izraz (96) izražava činjenicu da je razlika normalnih komponentata gustine električnog fluksa na površini, koja se nalazi između medijuma, jednaka gustini površinskog naelektrisanja na definisanoj površini.

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (99)$$

Iz izrazu (100) se uočava da je razlika komponenti jačine magnetnog polja paralelnih sa površinom, koji se nalaze između medijuma, jednaka sa gustinom površinske struje na definisanoj površini:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (100)$$

#### 4.9 Određivanje magnetne indukcije na osnovu rešenja magnetnog polja sa MKE

Prethodno prikazane formule u ovom poglavlju su izvedene na kontinualnim modelima, kod kojih je linearna nezavisnost sistema beskonačna, šta otežava određivanje raspodele magnetnog polja kod kompleksnih sistema. Zato se kontinualni modeli dele na diskretne delove (npr. primenom mreže trouglova kod dvo- dimenzionalnih), gde je mreža diskretnih elementa sastavljena od čvorova i segmentnih linija, koje dele domen modela na elemente.

Kod rešavanja magnetnog polja određene su vrednosti magnetnog vektorskog potencijala u čvorovima mreže, dok u tačkama koji se nalaze u elementima može se potencijal izraziti kao linearna kombinacija potencijala u vrhovima elemenata. Koeficijenti linearne kombinacije su jednaki vrednostima interpolacione funkcije u datoj tački gde se određuje magnetni vektorski potencijal. To znači da je gustina magnetnog fluksa u jednoj tački zavisna od potencijala u vrhovima elementa i od vrednosti interpolacione funkcije. Zbog linearosti sistema posebno se mogu odrediti komponente gustine magnetnog fluksa, koje pojedinačno zavise od potencijala i vrednosti interpolacione funkcije određene za čvor koji se nalazi u vrhu elementa.

Za određeni dvo- dimenzionalni elemenat raspodela komponenti magnetnog vektorskog potencijala, koja potiče od potencijala u čvoru 1, na osnovu formule (41) može se napisati u sledećem obliku:

$$\mathbf{A}_1(x, y) = \hat{A}_1 \cdot N_1(x, y) \quad (101)$$

Gde je  $\hat{A}_1$  skalarna vrednost, koja je jednaka komponenti  $z$  magnetnog vektorskog potencijala, što znači da pri rešavanju rotora u izrazu (61) treba uvrstiti  $N_1$ .

Ne sme se zaboraviti da u dvo- dimenzionalnim modelima, uvek se računa komponenta  $z$  magnetnog vektorskog potencijala, koja je normalna na ravan  $xy$ .

$$\mathbf{B}_1(x, y) = \hat{A}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & N_1(x, y) \end{bmatrix} = \hat{A}_1 \cdot \left( \mathbf{i} \cdot \frac{\partial}{\partial y} N_1(x, y) - \mathbf{j} \cdot \frac{\partial}{\partial x} N_1(x, y) \right) \quad (102)$$

Uvrštavanjem izraza  $N_1(x, y)$  iz (41) u jednačinu (102), dobija se formula za proračun komponenta magnetne indukcije u željenoj tački elementa koji potiče od vektorskog potencijala u čvoru 1.

$$\mathbf{B}_1(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \hat{A}_1 \cdot (\mathbf{i} \cdot (x_3 - x_2) - \mathbf{j} \cdot (y_2 - y_3)) = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \hat{A}_1 \cdot (\mathbf{i} \cdot n_{1y} - \mathbf{j} \cdot n_{1x}) \quad (103)$$

Gde su  $n_{1x}$  i  $n_{1y}$  komponente normalnog vektora  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$  (8) korišćene pri određivanju interpolacione funkcije  $N_1$ .

Rezultantna gustina magnetnog fluksa u željenoj tački datog elementa može se napisati kao zbir komponenta gustine magnetnog fluksa određenih izrazom (103).

$$\mathbf{B}(x, y) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i(x, y) \quad (104)$$

#### 4.10 Vremenski harmonički oblik parcijalne diferencijalne jednačine magnetnog polja

U ovom poglavlju je prikazan način za određivanje parcijalne diferencijalne jednačine magnetnog vektorskog potencijala koji je identičan sa oblikom jednačine (31).

Iz vremenskog harmoničkog oblika Farady-ove jednačine (83) i izraza gustine magnetnog fluksa kao rotora magnetnog vektorskog potencijala (92) može se dobiti sledeći izraz:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \cdot \nabla \times \mathbf{A} \quad (105)$$

Odatle proizilazi da indukovano električno polje u datoj tački poseduje linearnu zavisnost od magnetnog vektorskog potencijala:

$$\mathbf{E} = -j\omega \cdot \mathbf{A} \quad (106)$$

U jednačini (93) gustina struje  $\mathbf{J}$  može se podeliti na dve komponente, prvu komponentu koja potiče od struje koja dolazi iz spoljašnjeg izvora  $\mathbf{J}_s$  i drugu koja potiče od indukovanog električnog polja  $\mathbf{J}_v$ . Na osnovu izraza (87), može se odrediti vrednost druge komponente sledećom formulom:

$$\mathbf{J}_v = \sigma \mathbf{E} = -j\omega\sigma \cdot \mathbf{A} \quad (107)$$

Uvrštavanjem izraza (107) u jednačinu (93), gde je struja podeljena na dve komponente, može se napisati sledeća parcijalna diferencijalna jednačina:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) + j\omega\sigma \cdot \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad (108)$$

Primenom identiteta (66) i uzimanjem u obzir da divergencija magnetnog vektorskog potencijala ima nultu vrednost (94), izraz (108) dobija sledeći oblik:

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} + j\omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad (109)$$

Gde  $\nabla^2$  je Laplac-ov diferencijalni operator i označava izvod drugog stepena po koordinatima.

$$-\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + j\omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad (110)$$

Izraz (110) je identičan sa parcijalnom differencijalnom jednačinom (31), uz pretpostavku da  $\frac{1}{\mu} = \alpha$ ,  $j\omega \boldsymbol{\sigma} = \beta$ ,  $\mathbf{A} = \phi$  i  $\mathbf{J}_s = f$ .

#### 4.11 Određivanje elektromagnetnih sila pomoću Maxwell-stress tensora

Elektro-magnetno polje kod električne mašine, proizvodi pritisak na površine. Ovaj pritisak na površine rotora ima velikog značaja kod rotacionih električnih mašina, jer moment, kao karakteristična veličina mašina, je proporcionalan sa tangencijalnom komponentom pritiska koji se javlja na površini rotora.

U modelima električne mašine, gde je magnetno polje određeno sa primenom MKE, moment mašine je računat sa integrisanjem tangencijalnih komponenata pritiska na površini rotora. Izraz, koji opisuje pritisak na osnovu magnetnog polja u određenoj tački na površini rotora u vazдушnom procepu motora izražava se sa Maxwell- stress tensor – om, koji je određen sa formulom (111) [65]:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{|\mathbf{B}|^2}{2} \mathbf{I} \right] \quad (111)$$

U izrazu (111)  $\otimes$  označava tenzorski proizvod vektora,  $\mathbf{B}$  je vektor magnetne indukcije,  $\mathbf{I}$  je jedinična dijagonalna matrica. Na osnovu formule (111) tenzor pritiska na površini rotora izražen je sa komponentama magnetne indukcije i može se napisati sa sledećom matricom:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x^2 - \frac{\mathbf{B}^2}{2} & \mathbf{B}_x \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_x \mathbf{B}_z \\ \mathbf{B}_y \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_y^2 - \frac{\mathbf{B}^2}{2} & \mathbf{B}_y \mathbf{B}_z \\ \mathbf{B}_z \mathbf{B}_x & \mathbf{B}_z \mathbf{B}_y & \mathbf{B}_z^2 - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \end{bmatrix} \quad (112)$$

Na osnovu formule (112) sila koja deluje na površini rotora izračunava se pomoću sledećeg integrala [66]:

$$\mathbf{F} = \iint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dA \quad (113)$$

U dvodimenzionalnim modelima električnih mašina prilikom proračuna magnetnog polja sa primenom MKE, površina rotora je ograničena sa strane trouglova koji se nalaze u vazдушnom procepu. Po definiciji magnetnog fluksa u diskretnim modelima (poglavlje 4.9), moment koji deluje na rotor mašine izračunava se na osnovu sledećeg izraza:

$$M = R \cdot l_m \cdot \sum_{i \in K} l_i \cdot \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{S}_i \quad (114)$$

U izrazu (114)  $K$  je skup elemenata (trouglova), koji ograničavaju rotor,  $\mathbf{n}_i$  je

vektor normalan na stranu  $i$ -tog elementa koji odrađava rotor, dužine je  $l_i$ .  $\mathbf{B}_i$  je vektor magnetne indukcije u elementu  $i$ ,  $l_m$  je dužina modela i  $R$  je poluprečnik rotora.

## 5. METODOLOGIJA PROSTORNIH VEKTORA

Rotacione električne mašine pretvaraju električnu energiju u mehaničku i nazad u električnu, interakcijom magnetnog polja i električnih struja u provodnicima mašine. Tokom pretvaranja energije u magnetnom krugu i u provodnicima mašine odigravaju se elektromagnetni fenomeni, kao što je promena fluksa preko namotaja. Uticaj promene fluksa na električne veličine u namotajima, opisuje se diferencijalnim jednačinama struja i fluksnih obuhvata.

Veliki broj provodnika u električnim mašinama, formira se u grupe takozvanih kalemova koji sadrže više provodnika, a grupe čine fazne namotaje. Provodnici koji pripadaju jednom faznom namotaju napajani su iz zajedničkog izvora, te su struje u njima u fazi.

Kalemovi jednog faznog namotaja su smešteni u žlebove limpaketa, te između električnih veličina provodnika koji se nalaze u različitim žlebovima postoji fazni pomak.

U faznim namotajima koristi se kombinacija redne i paralelne veze provodnika. Primenom redne veze provodnika sabiraju se trenutne vrednosti fluksnih obuhvata pojedinačnih provodnika, te se povećava vrednost indukovano napona između krajeva faznog namotaja. Pored povećanja indukovano napona, odgovarajućom rednom vezom provodnika, koje se nalaze u različitim žlebovima, sabiraju se fluksni obuhvati sa različitim faznim pomakom, te eliminiše uticaj pojedinačnih viših harmonika.

U nekim slučajevima umesto redne veze koristi se paralelna veza kalema, ako mreža za napajanje mašine zahteva manji napon od onog koji se dobija rednom vezom kalema jedne faze. Na taj način pored smanjenja priključno napona motora, struja jedne faze se raspodeljuje između paralelnih grana.

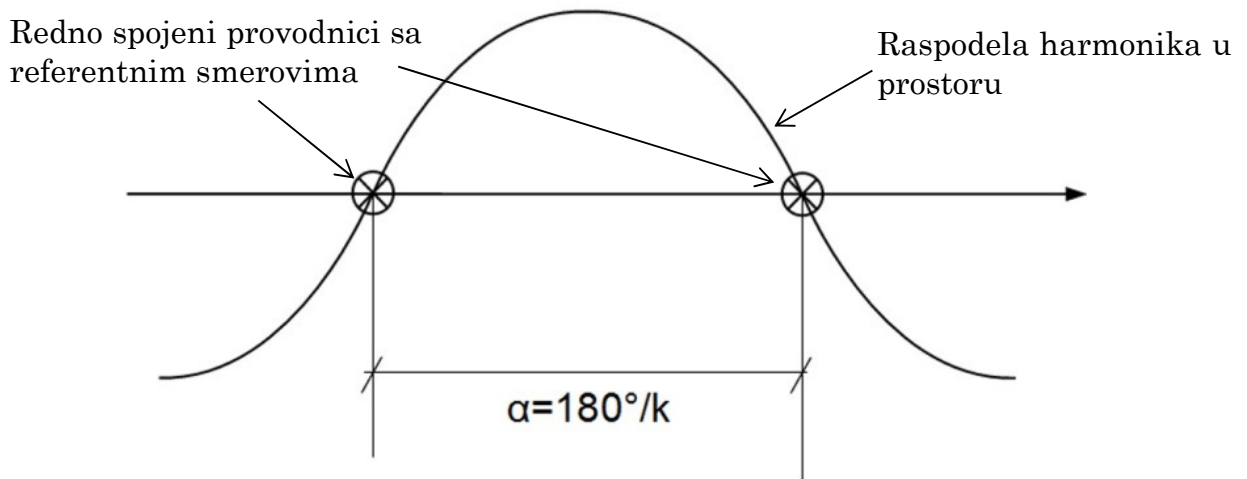
Rednom vezom provodnika sa različitim faznim pomakom, pored viših harmonika fluksnog obuhvata, smanjuju se i harmonici magnetopobudne sile, koji potiču od struje provodnika.

Na slici 11. je prikazan način eliminisanja harmonika sa rednim brojem  $k$ , koji se izvodi rednom vezom provodnika sa označenim referentnim smerovima kao na slici.11. Fazni pomak između provodnika je  $180/k$ , jednakim sa polovinom dužine punog talasa  $k$ -og harmonika kao što je prikazano na slici 11.

Promena  $k$ -tog harmonika fluksnog obuhvata proizvodi indukovanu elektromotornu silu u provodnicima. Fazni pomak u označenim provodnicima između indukovane elektromotorne sile  $k$ -tog harmonika je 180 stepeni. U slučaju, kada su označeni provodnici spojeni tako, da im se referentni smerovi označeni kao na slici 11. označavaju smer struje u provodnicima, komponente elektromotorne sile  $k$ -tog harmonika u provodnicima su u protivfazi te se potiru, Zbog toga spektar indukovane elektromotorne sile ne sadrži  $k$ -ti harmonik.

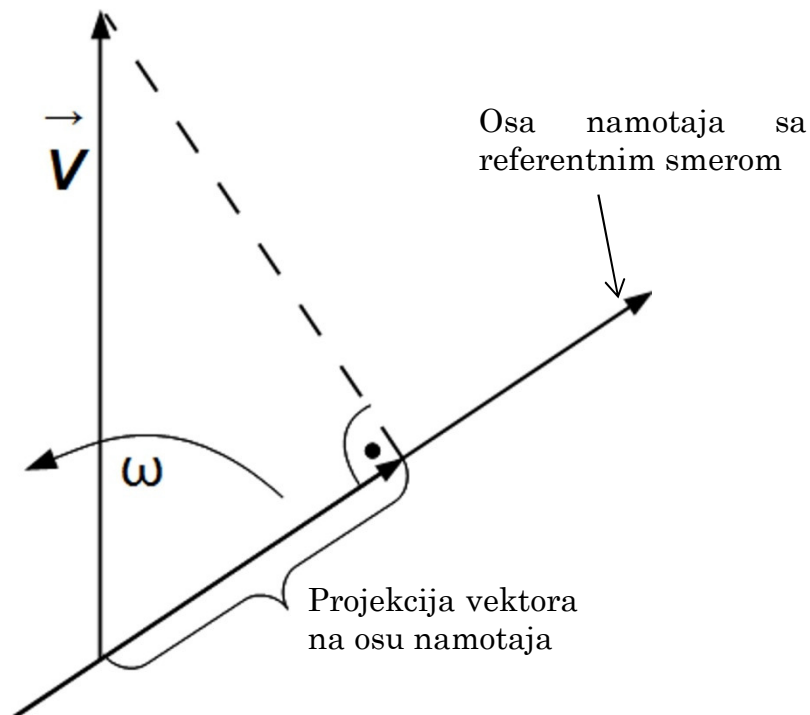
Na sličan način se može dokazati, da magnetopobudna sila provodnika, koji su raspoređeni kao što je prikazano na slici 11., ne sadrži viši harmonik sa polovinom dužine talasa jednakim  $180/k$ .

Na osnovu prethodno napisanih metoda mogu se redukovati prostorni viši harmonici fluksnih obuhvata i magnetopobudnih sila faznih namotaja. Zbog redukovanja prostornih viših harmonika, pri proračunu faznih veličina dovoljno je uzimati u obzir samo fazne veličine osnovnih prostornih harmonika.



Slika 11. Eliminisanje viših harmonika fluksnog obuhvata

Na osnovu prethodno opisanog metoda za redukovanje prostornih viših harmonika i zbog identičnosti faznih namotaja, može se pretpostaviti, da su osnovni harmonici faznih električnih veličina ekvivalentni sa komponentom rotirajućeg prostornog vektora paralelnog sa osom faznih namotaja, kao što je prikazano na slici 12. Fazni pomak između fazne veličine osnovnih harmonika u višefaznim namotajima jednak je proizvodu ugla, koji zaklapaju ose pojedinačnih faznih namotaja i broja pari polova.



Slika 12. Projekcija rotirajućeg vektora na osu jednog faznog namotaja.

Kao što je prikazano, trenutne vrednosti osnovnog harmonika električne veličine simetričnog višefaznog sistema određuju se kao projekcija jednog rotirajućeg vektora na osu namotaja, te je zato za određivanju fazne veličine dovoljno odrediti dve ortogonalne komponente rotirajućeg vektora. Tako se broj faza statora  $n$  može redukovati na dva, primenom dvofaznog ortogonalnog sistema. Redukovanjem broja faza sistem jednačina umesto  $2n$  jednačina sadrži 4 jednačine. Od te 4 jednačine, dve su naponske diferencijalne jednačine, dok ostale dve jednačine određuju vezu između

struja i fluksnih obuhvata, pomoću koeficijenata koji zavise od zasićenja magnetnog kruga.

Broj jednačina se povećava ako se na rotoru nalazi višefazni namotaj. U slučaju simetričnog sistema namotaja rotora (npr. asinhrona mašine), sistem jednačina statora treba dopuniti sa dve diferencijalne jednačine napona napisanih za rotor i sa dve jednačine za određivanje struja rotora na osnovu fluksnih obuhvata.

U slučajevima asimetričnog sistema namotaja (npr. kod sinhrona mašine sa prigušnim kavezom i pobudnim namotajem na rotoru) broj naponskih diferencijalnih jednačina se povećava na 5, kao i broj jednačina za određivanje struje na osnovu fluksnih obuhvata.

## 5.1 Određivanje komponentata ortogonalnog dvofaznog sistema

Pri transformaciji višefaznog sistema u dvofazni ortogonalni sistem određeni su prostorni vektori električne veličine. Prostorni vektori su izraženi kompleksnim brojevima, gde realni deo odgovara trenutnoj vrednosti električne veličine u prvoj fazi dok vrednost imaginarnog dela je jednaka trenutnoj vrednosti veličine druge faze dvofaznog ortogonalnog sistema.

U svakodnevnoj praksi najviše se koristi trofazni sistem, koji je u stručnoj literaturi najdetaljnije i najviše istraživani. Zato transformacije višefaznog sistema u dvofazni ortogonalni sistem će biti prikazane pomoću izraza koji se koriste pri određivanju prostornih vektora trofazne veličine.

Ose trofaznih namotaja zaklapaju električni ugao od  $2\pi/3$ , što znači da fazni pomak između njih se može izraziti u kompleksnoj ravni pomoću jediničnog kompleksnog operatora [1]:

$$\mathbf{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (115)$$

Prostorni vektor trofazne veličine trofaznog namotaja statora u kompleksnoj ravni određuje se pomoću sledećeg izraza [1]:

$$\mathbf{x}_s = \frac{2}{3}(x_1 + x_2 \cdot \mathbf{a} + x_3 \cdot \mathbf{a}^2) \quad (116)$$

Gde je  $\mathbf{x}_s$  prostorni vektor trofazne veličine,  $x_i$  trenutna vrednost date veličine  $i$ -te faze. Realna komponenta prostornog vektora (116), jednaka je trenutnoj vrednosti veličine prve faze, dok je imaginarna komponenta jednaka sa trenutnom vrednošću veličine druge faze ortogonalnog dvofaznog sistema.

Pored definisanog izraza za prostorni vektor (116) definiše se i nulta komponenta trofazne veličine, koja je neophodna za matematičko opisivanje asimetričnih režima [1]:

$$x_{s0} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad (117)$$

Nulta komponenta (117) je skalarna veličina, a najčešće se koristi pri jedno ili dvofaznoj asimetriji mašine (koje se javljaju pri ispadu ili prekidu jedne ili dve faze delta spoja namotaja), kada se algebarski zbir faznih veličina razlikuje od nule.

U simetričnom trofaznom režimu rada i u dvofaznom režimu rad trofazne mašine u spoju zvezda nulta komponenta ima nultu vrednost.



## 5.2 Izrazi za određivanje fazne veličine pomoću prostornih vektora

U prethodnom poglavlju prikazan je metod za određivanje prostornih vektora i komponentata nultog sistema, koji omogućava rešenje višefaznog sistema pomoću prostornih vektora. Posle rešavanja vektorske diferencijalne jednačine, potrebno je iz prostornih vektora odrediti fazne veličine, koje se mogu meriti kod električne mašine.

Formule za određivanje faznih veličina na osnovu prostornih vektora i nulte komponente [1] su sledeće:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{s0} + \operatorname{Re}(\mathbf{x}_s) \\x_2 &= x_{s0} + \operatorname{Re}(\mathbf{x}_s \cdot \mathbf{a}^2) \\x_3 &= x_{s0} + \operatorname{Re}(\mathbf{x}_s \cdot \mathbf{a})\end{aligned}\tag{118}$$

Izrazi pokazuju, da se fazne veličine sastoje od dva člana, prvi član je nulta komponenta, koja u normalnim režimima motora ima nultu vrednost. Drugi član je jednak projekciji prostornog vektora na osu faznog namotaja.

## 5.3 Model za određivanje prostornih vektora

Kao što je prikazano, pomoću poznatih trofaznih veličina određuju se prostorni vektori, čija primena pojednostavljuje proračun parametara motora i prostornih vektora nepoznatih višefaznih veličina. Nakon određivanja prostornih vektora nepoznatih trofaznih veličina moguće je odrediti trenutne vrednosti tih veličina.

Zato je pri proračunu parametara asinhronog motora, potrebno odrediti prostorne vektore statora i rotora sa kaveznom namotajem. Kavezni namotaj rotora asinhronih motora se ponaša kao višefazni sistem, gde je broj faza veći od tri. To znači da prikazane formule, za transformaciju trofaznog sistema u dvofazni i za određivanje faznih veličina na osnovu prostornih vektora se ne mogu direktno koristiti kod kaveznih namotaja.

Uprkos značajne razlike u broju faza kaveznih namotaja rotora i trofaznih namotaja statora asinhronne mašine, analizom izraza (116) - (118), moguće je definisati pravila, koja se mogu primeniti pri određivanju prostornih vektora veličina kaveznih namotaja rotora.

U prvom koraku potrebno je definisati matematički model za određivanje prostornog vektora trofaznih namotaja na osnovu izraza prostornog vektora (116). Veličine u izrazu prostornog vektora su koncentrisane u smerovima ose faznih namotaja, te se mogu smatrati kao veličine raspodeljene u diskretnim pozicijama po obimu statora.

Matematički se može raspodela trofazne veličine, koncentrisane u smerovima ose namotaja, opisati primenom Dirac-ove delta funkcije. Raspodela definisana sa Dirac-ovim delta funkcijama omogućuje primenu formula za proračun diskretnih veličina umesto integrala kontinualnih izraza.

Funkcijom (119) prikazana je raspodela trofazne veličine po obimu statora.

$$x(\alpha) = x_1 \delta(\alpha) + x_2 \delta\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + x_3 \delta\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right)\tag{119}$$

U izrazu (119)  $x_k$  su projekcije rotirajućeg prostornog vektora na ose faznih namotaja, gde  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

Formulu za određivanje koeficijenata diskretnog Fourier-ovoga reda moguće je napisati u sledećem obliku, gde je funkcija  $x$  je definisana u izrazu (119).

$$\mathbf{X}_k = \sum_{n=1}^3 x \left( \frac{2\pi(n-1)}{3} \right) \cdot e^{-j\frac{2\pi k(n-1)}{3}} \quad (120)$$

Uvrštavanjem odgovarajućih vrednosti funkcije (119) u izraz za određivanje komponenti Fourier-ovog reda (120), dobijaju se sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \mathbf{X}_1 &= x_1 + x_2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x_3 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} \\ \mathbf{X}_2 &= x_1 + x_2 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} + x_3 \cdot e^{-j\frac{8\pi}{3}} = x_1 + x_2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + x_3 \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{aligned} \quad (121)$$

Na osnovu izraza (121) može se zaključiti da za elemente Fourier-ovoga reda važi da je  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{N-k}^*$ , gde  $*$  označava operator konjugovanja kompleksnih brojeva. Što znači da se primenom prethodnog identiteta, izraz za inverznu Fourier-ovu transformaciju može napisati u sledećem obliku u slučaju da je broj faza  $N$  neparan.

$$x_n = \frac{1}{N} \left( \mathbf{X}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \left( \mathbf{X}_k \cdot e^{j\frac{2\pi k(n-1)}{N}} + \mathbf{X}_{N-k} \cdot e^{j\frac{2\pi(N-k)(n-1)}{N}} \right) \right) \quad (122)$$

U izrazu (122) je izračunat zbir konjugovanih kompleksnih brojeva  $\mathbf{X}_{N-k} \cdot e^{j\frac{2\pi(N-k)(n-1)}{N}} = \left( \mathbf{X}_k \cdot e^{j\frac{2\pi k(n-1)}{N}} \right)^*$ , šta omogućuje daljnje uprošćavanje formule, jer zbir konjugovanih kompleksnih brojeva je jednak dvostrukoj vrednosti realnog dela kompleksnog broja.

$$x_n = \frac{1}{N} \left( \mathbf{X}_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2 \cdot \operatorname{Re} \left( \mathbf{X}_{N-k} \cdot e^{j\frac{2\pi(N-k)(n-1)}{N}} \right) \right) \quad (123)$$

Uvrštavanjem broja faze umesto  $N$  u izrazu (123), dobija se formula za određivanje električnih veličina pojedinačnih faznih namotaja, na osnovu elemenata Fourier-ovog reda, određenih izrazom (121):

$$x_n = \frac{1}{3} \left( \mathbf{X}_0 + 2 \cdot \operatorname{Re} \left( \mathbf{X}_2 \cdot e^{j\frac{4\pi(n-1)}{3}} \right) \right) = \frac{1}{3} \mathbf{X}_0 + \operatorname{Re} \left( \frac{2}{3} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot e^{j\frac{4\pi(n-1)}{3}} \right) \quad (124)$$

Prvi član u formuli (124), je jednak nultoj komponenti definisanoj formulom (117). Drugi član je realna komponenta kompleksnog broja, koji je transformisan jediničnim kompleksnim operatorom.

Jedinični kompleksni operator u izrazu (124) služi za rotiranje u kompleksnoj ravni komponente  $\frac{2}{3} \cdot \mathbf{X}_2$ , koji je ekvivalentan izrazu prostornih vektora fazne veličine (116). Vrednost kompleksnog jediničnog operatora u izrazu (124) može se napisati u sledećem obliku na osnovu izraza (115):

$$e^{j\frac{4\pi(n-1)}{3}} = \mathbf{a}^{2(n-1)} \quad (125)$$

Odatle je za vrednosti  $n=1,2,3$  na osnovu identiteta (125) vrednosti

kompleksnog jediničnog operatora u (124) poprimaju sledeće vrednosti  $1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^4$ . Gde je  $\mathbf{a}^4 = \mathbf{a}$ . To znači da sa uvrštavanjem rednih brojeva fazne veličine u formulu (124) dobijaju se izrazi identični sa (118).

U ovom poglavlju je prikazano, da izrazi za transformaciju faznih veličina trofaznih namotaja u prostorne vektore, a i obrnuto, u suštini predstavljaju specijalnu primenu Fourier-ovoga reda.

## 6. MODEL PROSTORNOG VEKTORA

U prethodnoj poglavlju prikazana je veza između Fourier-ove transformacije, metoda za određivanje prostornih vektora trofazne veličine i formula za proračunavanje faznih veličina na osnovu prostornih vektora. U ovim izrazima pri određivanju trofaznih prostornih vektora primenjen je idealizovani model namotaja prikazan na slici 1. [1], a nije uzeta u obzir raspodela namotaja po obimu statora.

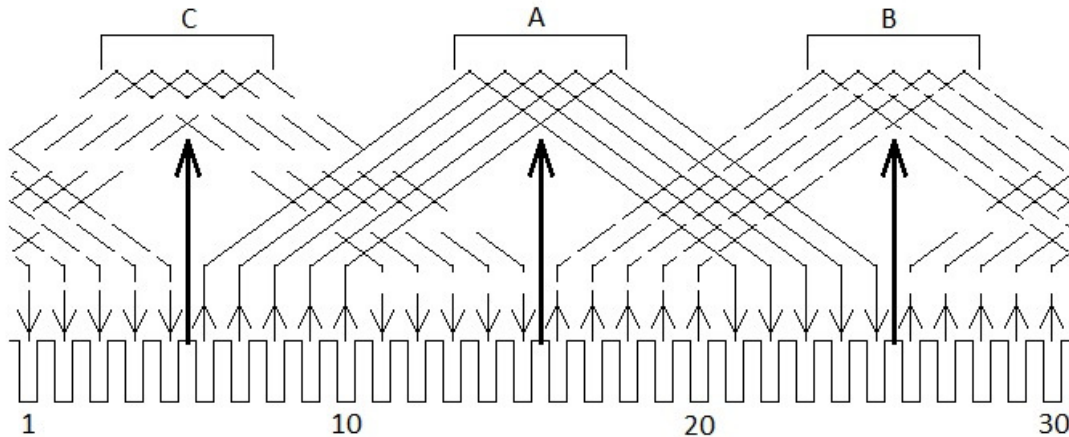
U sledećem poglavlju je prikazan metod za određivanje prostornog vektora trofaznog namotaja koji se sastoji od klasičnih kalema.

### 6.1 Prostorni vektor magnetopobudne sile trofaznog namotaja

U ovom poglavlju je prikazano određivanje prostornog vektora trofaznog namotaja pomoću jedne konfiguracije trofaznog namotaja. Podaci namotaja su sledeći: broj faza je 3, jednoslojni namotaj, broj pari polova je jedan i broj žlebova po polu i po fazi je 5. Na osnovu podataka namotaja broj žlebova je 30, i zbog jednoslojnog namotaja korak namotaja je dijametralni.

Raspodela provodnika pojedinačnih faza je prikazana na slici 13, sa označenim referentnim smerovima struje u pojedinačnim stranama kalema, koje se nalaze u žlebovima. Ose simetrije namotaja su označene debelim strelicama.

Na horizontalnim osama sledećih dijagrama označeni su položaji žlebova u kojima se nalaze strane kalema. Promena magnetopobudne sile u položajima pojedinačnih žlebova je proporcionalna sa strujom u datom žlebu. Vrednosti na vertikalnim osama dijagrama su proporcionalne sa magnetopobudnim silama.

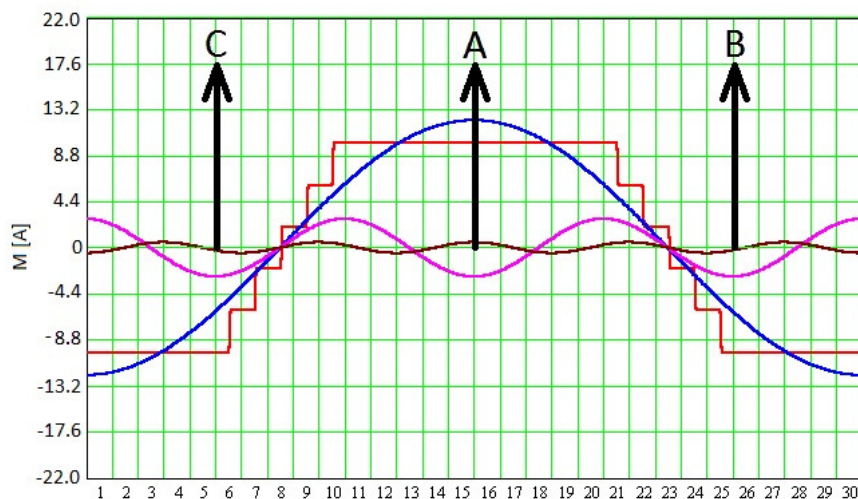


Slika 13. Raspodela namotaja dvopolnog trofaznog namotaja u žlebovima limpaketa.

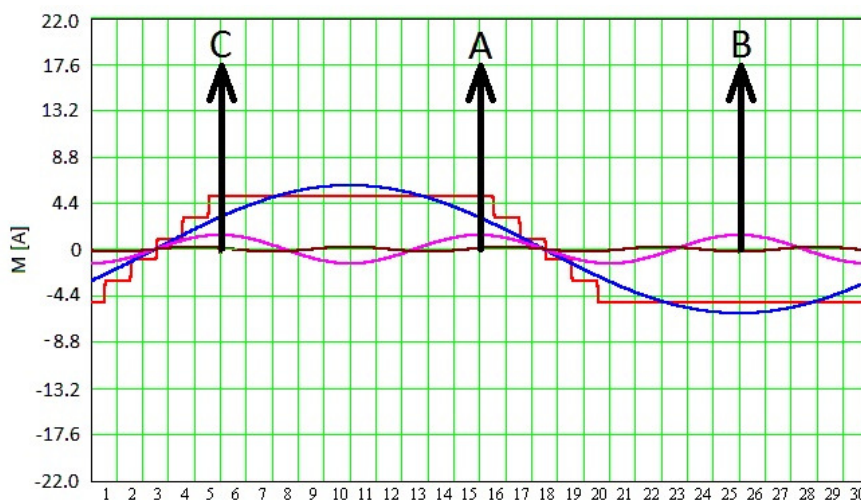
#### 6.1.1 Raspodela magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja

Namotaji su napajani sa trofaznim strujama, koje pulsiraju sa frekvencijom mreže a fazni pomak između struja je 120 stepeni. Na slici 14 je prikazana raspodela magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja u vazдушnom procepu u trenutku, kada struja u fazi A ima vršnu vrednost, dok u fazama B i C vrednost struje je jednaka polovini negativne vršne vrednosti. Pored raspodele magnetopobudne sile na slikama 14 a.), b.) i c.) prikazani su osnovni, 3-i i 5-i

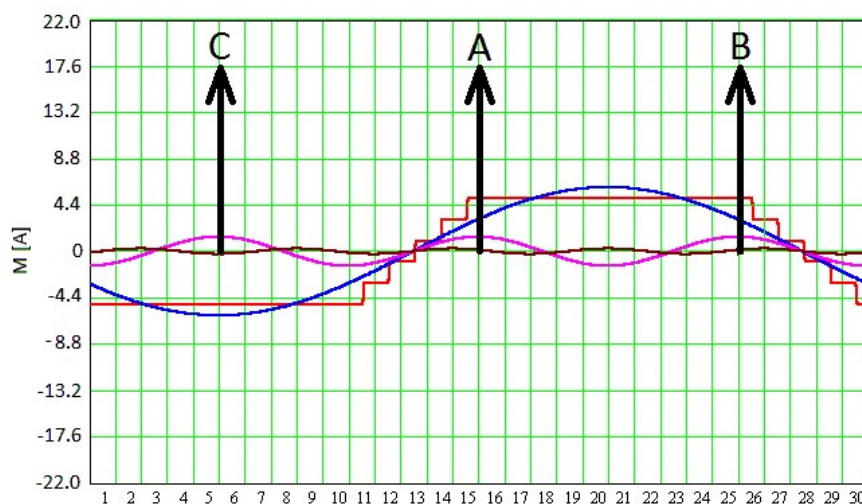
prostorni harmonik magnetopobudnih sila pojedinačnih faznih namotaja, koji su određeni na osnovu



a.)



b.)



c.)

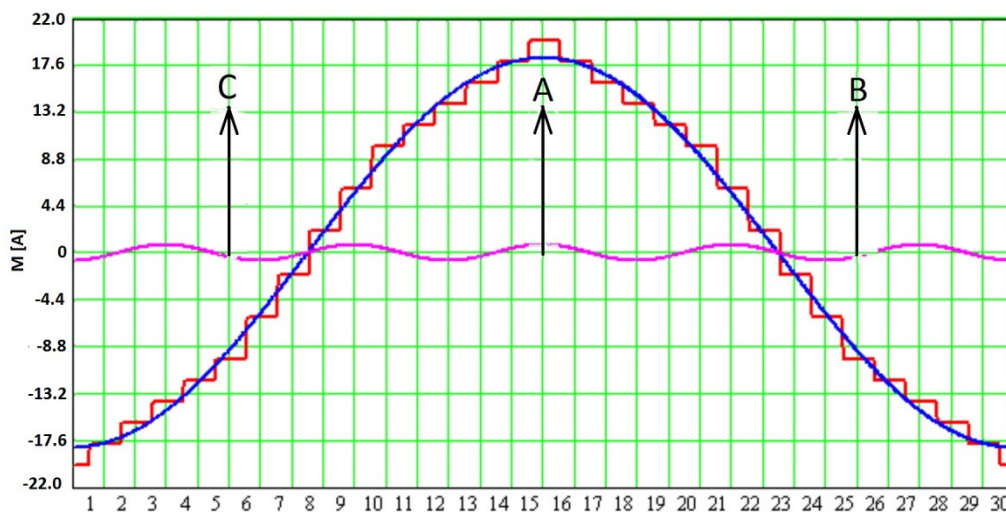
Slika 14. Raspodela magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja u vazдушnom procepu.

raspodela magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja. Upoređenjem raspodela magnetopobudnih sila faze A (slika 14 a.), faze B (slika 14 b.) i faze C (slika 14 c), može se videti, da su intenziteti magnetopobudnih sila su proporcionalni sa strujom pojedinačnih faznih namotaja.

Na slikama sa vektorima su obeleženi referentni smerovi osa simetrije pojedinačnih faznih namotaja.

### 6.1.2 Rezultantna magnetopobudna sila i magnetna indukcija u vazдушnom procepu

Zbirna raspodela magnetopobudnih sila prikazanih na slikama 14 a.), b.) i c.) se može videti na slici 15. Kao što se vidi na slici 15 su prikazane raspodele osnovnog i petog prostornog harmonika. Treći prostorni harmonik ima vrednost nula zbog simetričnog trofaznog namotaja i konfiguracije faznih struja, koje odgovaraju vrednosti trofaznih struja u ranije opisanom trenutku.

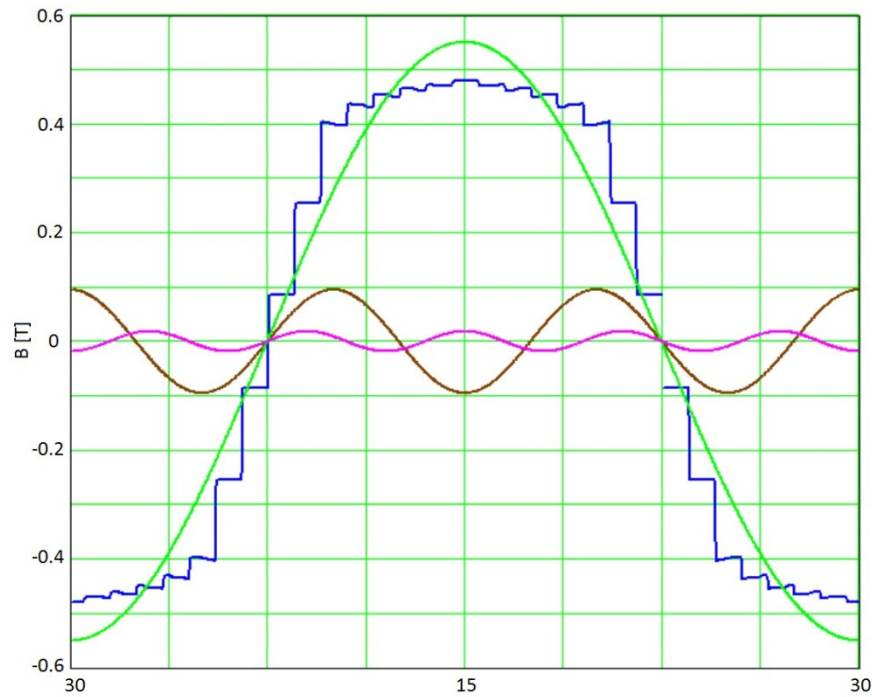


Slika 15. Raspodela trofazne magnetopobudne sile u vazдушnom procepu.

Prikazana raspodela magnetopobudne sile proizvodi magnetnu indukciju u vazдушnom procepu električne mašine, čija je raspodela prikazana na slici 16.

Na slici pored raspodela magnetne indukcije u vazдушnom procepu prikazane su raspodele osnovnog, trećeg i petog prostornog harmonika magnetne indukcije. Zbog zasićenja magnetnog kruga, koje proizilazi iz nelinearne karakteristike materijala magnetnog kruga, raspodela magnetne indukcije značajno se razlikuje od raspodele trofazne magnetopobudne sile. Upoređenjem raspodele trofazne pobude i magnetne indukcije u vazдушnom procepu, može se zaključiti, da trofazna magnetopobudna sila ne sadrži treći harmonik, a odnos amplitude petog i osnovnog harmonika kod trofazne magnetopobudne sile je znatno manji od odnosa amplitude tih harmonika kod raspodele magnetne indukcije.

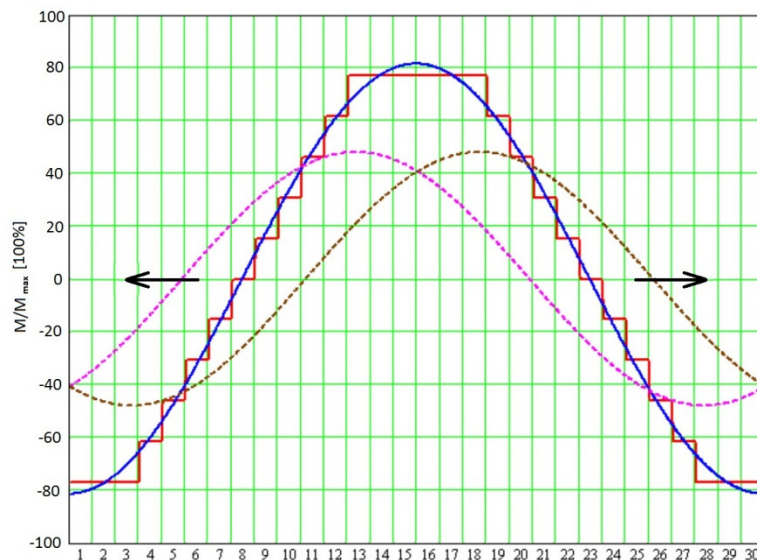
Treći prostorni harmonik, i povećan odnos petog i osnovnog prostornog harmonika u raspodeli magnetne indukcije u odnosu na odnos tih harmonika magnetopobudne sile u vazдушnom procepu je rezultat nelinearne magnetne karakteristike materijala magnetnog kruga.



Slika 16. Raspodela indukcije u vazдушnom procepu.

### 6.1.3 Pulsirajuća raspodela magnetopobudnih sila pojedinačnih faznih namotaja

Kao što je već spomenuto, intenzitet magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja zavisi od vrednosti struje u njima. Što znači da magnetopobudne sile pojedinačnih faznih namotaja pulsiraju, kao što pulsira magnetopobudna sila glavnog namotaja monofaznih asinhronih motora. Raspodela osnovnog prostornog harmonika pulsirajućih magnetopobudnih sila je jednaka zbiru dve sinusoidalne raspodele, koji se okreću u suprotnim smerovima, kao što je prikazano na slici 17.



Slika 17. Raspodela magnetopobudne sile glavnog namotaja monofaznih asinhronih motora, osnovni prostorni harmonik raspodele i pokretne sinusoidalne raspodele.

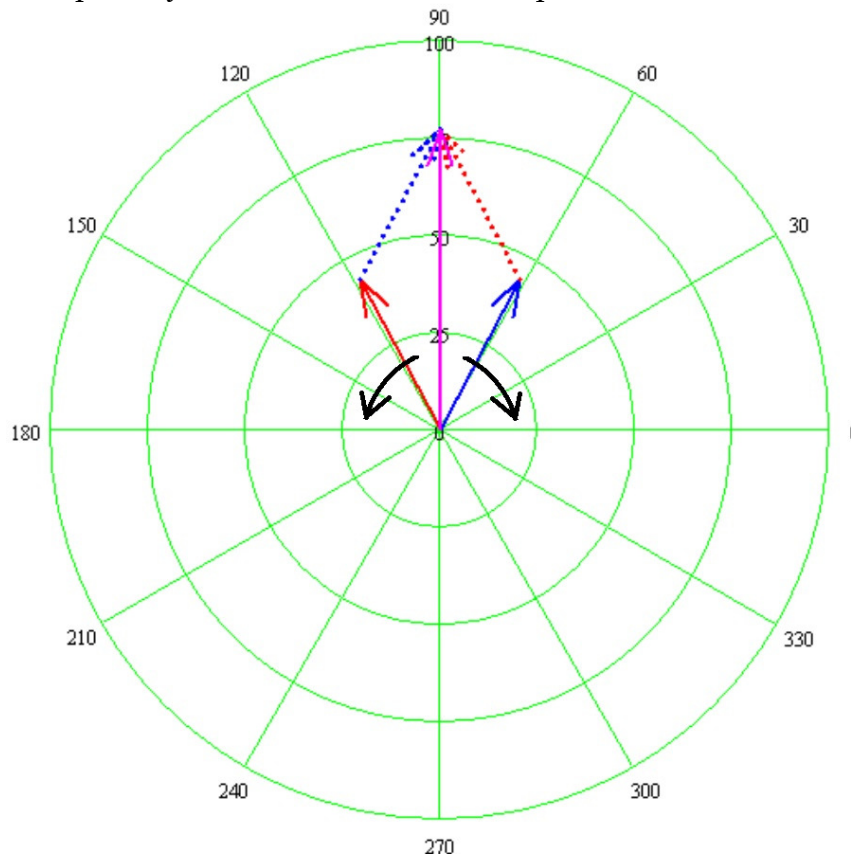
Vršna vrednost pokretnih sinusoidalnih raspodele je jednaka polovini vršne vrednosti pulsirajućeg osnovnog prostornog harmonika.



### 6.1.4 Određivanje intenziteta sinusoidalne raspodele u vazдушnom procepu

Kao što je prikazano na slikama 14.-17., osnovni harmonik magnetopobudne sile je sinusoidalno raspodeljen u vazдушnom procepu mašine. Ovu raspodelu moguće je opisati u kompleksnom koordinatnom sistemu pomoću jednog vektora. U ovom koordinatnom sistemu početna tačka vektora se nalazi u centru kompleksnog koordinatnog sistema, dok vrh vektora se nalazi na krugu sa poluprečnikom jednakim vršnoj vrednosti osnovnog prostornog harmonika. Fazni položaj vektora, je izračunat na osnovu, položaja u dijagramima, koji su prikazani na slikama 14.-17., tako da ceo krug u kompleksnom koordinatnom sistemu odgovara pomeraju od 30 žlebova na horizontalnoj osi dijagrama (na slikama 14.-17.). Vrednosti raspodela osnovnog harmonika u željenoj tački mogu se izraziti kao projekcija vektora na osu koja je određena na osnovu položaja željene tačke na horizontalnoj osi dijagrama.

Na slici 18. je prikazan pulsirajući vektor, koji je jednak zbiru dva rotirajuća vektora, koji rotiraju u označenim smerovima. Vršne vrednosti rotirajućih vektora su jednake polovini vršne vrednosti pulsirajućeg vektora. Početni položaj na slici 17. odgovara faznom položaju označenom sa 270 (stepeni) na slici 18.



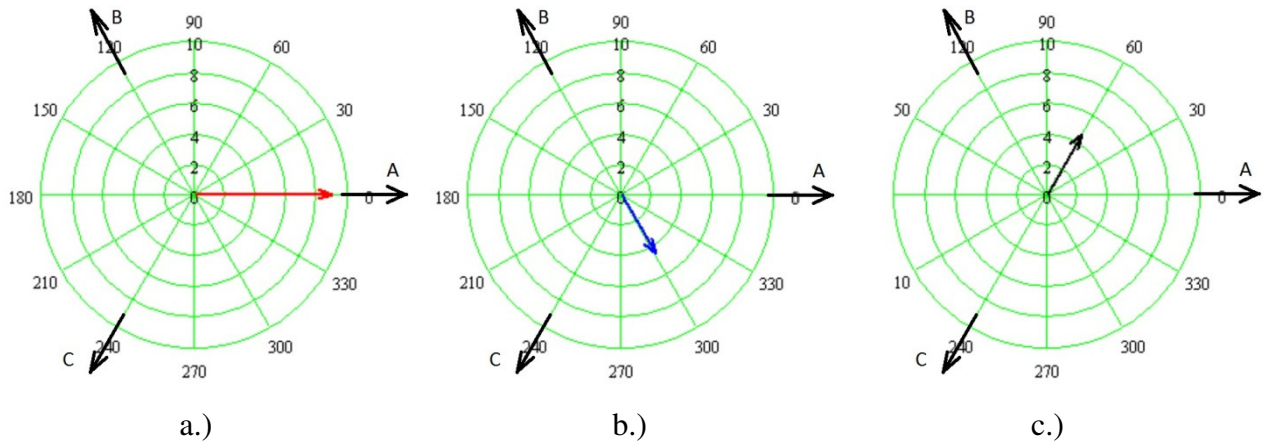
Slika 18. Model pulsirajućeg vektora sa rotirajućim vektorima.

Na osnovu ovih pravila može se zaključiti, da veličine, koje su raspodeljene sinusoidalno u vazдушnom procepu mogu se opisati sa vektorima u kompleksnom koordinatnom sistemu. U slučaju pulsirajućih raspodela, vektor u kompleksnom koordinatnom sistemu može se definisati kao zbir dva rotirajuća vektora kao što je i prikazano na slici 18.



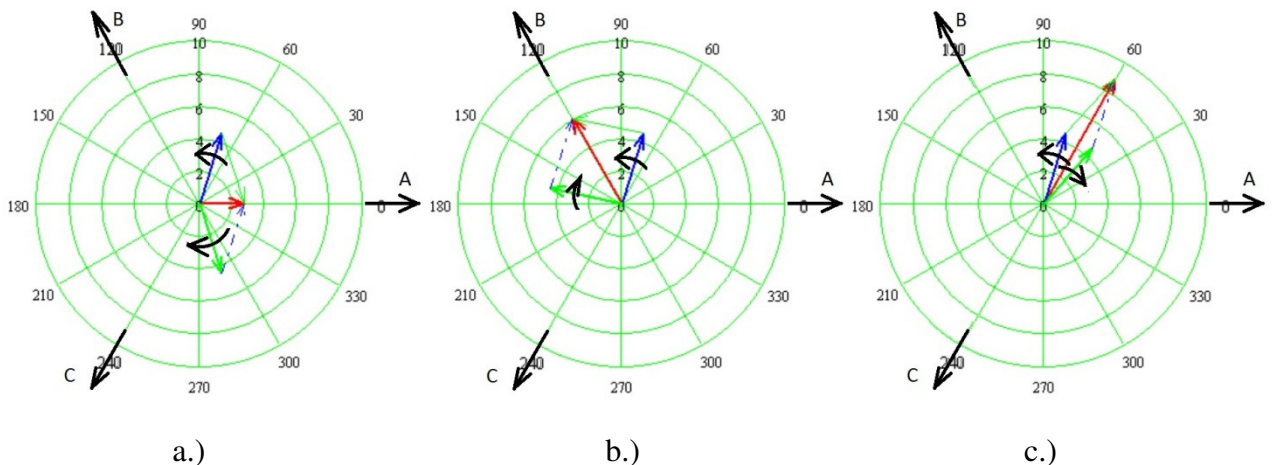
### 6.1.5 Određivanje prostornog vektora trofazne magnetopobudne sile

Raspodela magnetopobudnih sila prikazanih na slikama 14 a.), b.) i c.) na osnovu definisanih pravila u poglavlju 6.1.4 u kompleksnom koordinatnom sistemu je prikazana na slici 19. a.), b.) i c.). Početni položaj na slikama 14 a.), b.) i c.) odgovara faznom položaju od 180 stepeni na slikama 19. a.), b.) i c.) (ose simetrije faznih namotaja su označene).



Slika 19. Pulsirajući vektori pobude pojedinačnih faznih namotaja.

Pulsirajući vektori trofazne magnetopobudne sile dobijenih zbirom rotirajućih vektora su prikazani na slici 20. (trenutne vrednosti faznih struja na slikama 19. i 20. se razlikuju radi lakšeg prikazivanja rotacionih vektora)



Slika 20. Pulsirajući vektori pobude pojedinačnih faznih namotaja i rotacioni vektori pojedinačnih pulsirajućih vektora.

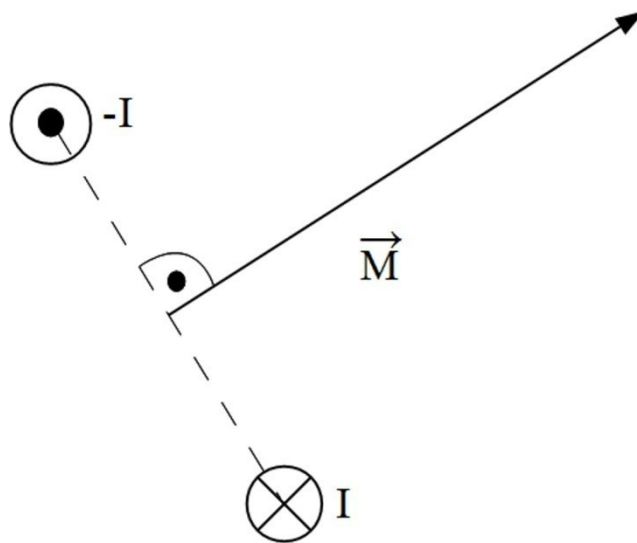
Kao što se vidi na slici 20. rotacioni vektori, koji rotiraju u pozitivnom referentnom smeru (direktne komponente) su u fazi, dok rotacioni vektori, koji rotiraju u negativnom (inverzne komponente) sa referentnim smerom zaklapaju ugao od 120 stepeni. Zato vektorski zbir direktnih komponentata je vektor sa dužinom tri polovine vršne vrednosti osnovnog prostornog harmonika magnetopobudnih sila pojedinačnih faznih namotaja. Dok, zbog faznog pomaka od 120 stepeni između inverznih komponentata osnovnih prostornih harmonika magnetopobudnih sila faznih namotaja vektorski zbir ovih vektora ima nultu vrednost.

Kao što se vidi inverzne komponente nestaju i vektorski zbir magnetopobudnih sila osnovnog harmonika pojedinačnih faznih namotaja je rotirajući vektor, čiji intenzitet je jednak tri polovine vršne vrednosti tih osnovnih prostornih harmonika. Trenutne vrednosti magnetopobudne sile u smerovima ose simetrije pojedinačnih faznih namotaja su jednake dve trećine projekcije rotirajućeg vektora magnetopobudne sile na odgovarajuće ose simetrije faznih namotaja.

U ovom pod-poglavlju je prikazan način određivanja prostornog vektora magnetopobudne sile trofaznog namotaja. U sledećim pod-poglavljima su definisani izrazi za proračun prostornih vektora željenih nekonvencionalnih sistema namotaja.

## 6.2 Klasični model kalema

Pri analizi magnetopobudne sile višefaznih namotaja je korišćen klasični model kalema, prikazan na slici 21.



Slika 21. Klasični model kalema sa referentnim smerovima struje i magnetopobudne sile kalema određene na osnovu klasičnog modela.

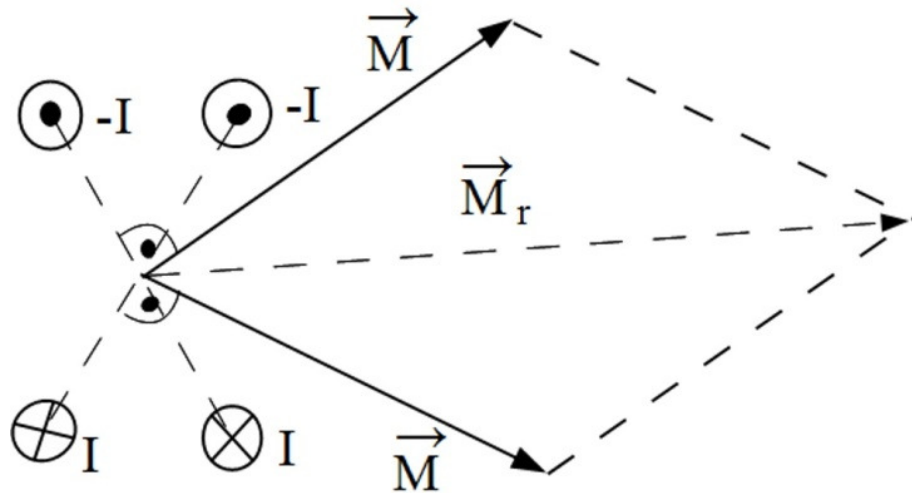
Kao što se vidi na slici 21. struja na jednoj strani kalema, gde je označena referentnom smerom  $\otimes$  ulazi u ravan normalnu na provodnike kalema, dok na drugoj strani kalema gde je označena sa  $\ominus$  izlazi iz ravni. U ovom modelu ista struja teče u različitim stranama kalema sa suprotnim predznakom.

Struja, koja teče preko provodnika kalema u označenim smerovima na slici 21., proizvodi magnetopobudnu silu normalnu na ravan određenu stranama kalema. Intenzitet vektora magnetopobudne sile je jednak proizvodu rezultantnog broja navoja namotaja i vrednosti struje u provodnicima, što znači da je vektor magnetopobudne sile jednak proizvodu struje i skalarne veličine. Zato su pravac i smer prostornih vektora struje i magnetopobudne sile isti.

U višefaznim namotajima, gde se namotaj jedne faze često sastoji od više kalemova, magnetopobudna sila se izražava vektorskim zbirom magnetopobudnih sila pojedinačnih kalemova. Vektorskim zbirom pored intenziteta uzima se u obzir i fazni pomak između magnetopobudnih sila, što je ilustrovano slikom 22.

Rezultantna magnetopobudna sila dva ekvivalentna namotaja jednaka je proizvodu zbira magnetopobudnih sila pojedinačnih namotaja i kosinusa polovine ugla  $\alpha$ , koji zaklapaju ose simetrije namotaja. Zbog množenja sa kosinusom ugla, koji

se razlikuje od nule, rezultantna magnetopobudna sila namotaja sa neparalelnim osama simetrije je uvek manja od algebarskog zbira tih veličina, kao što je i prikazano na slici 22. Odnos vektorskog i algebarskog zbira magnetopobudne sile izražava se takozvanim zonskim faktorom namotaja.



Slika 22. Rezultantna magnetopobudna sila kalema sa neparalelnim osama simetrije.

Prikazani modeli kalema na slikama 21. i 22. uvek pretpostavljaju da je broj strana kalema ceo broj po polu. U slučajevima, kada broj žlebova po polu nije ceo broj, kao kod nekih konfiguracija rotora asinhronih motora sa kaveznom namotajem, određivanje prostornog vektora struje ili pobude je nemoguće izvesti pomoću klasičnog modela namotaja.

### 6.3 Matematički modeli nekonvencionalnih namotaja

U prethodnim modelima je pretpostavljeno, da je broj strana kalema u jednom polnom koraku ceo broj. Ovaj pristup se ne može koristiti kod kaveznih namotaja, gde je broj žlebova po polu razlomak.

Jednostavan primer slučaja, kada broj žlebova po polu nije ceo broj, je prikazan na slici 23. U tom slučaju pretpostavljeno je da je broj polova dva a ukupan broj žlebova je tri. Može se videti, da se klasičan pristup za određivanje prostornog vektora kalema (prikazan na slici 21.) ne može primeniti. Struja rotora je raspodeljena između datih provodnika tako da algebarski zbir struje ima vrednost nula. Ovaj uslov važi za kavezne namotaje gde nulta komponenta struje (117) ima nultu vrednost.

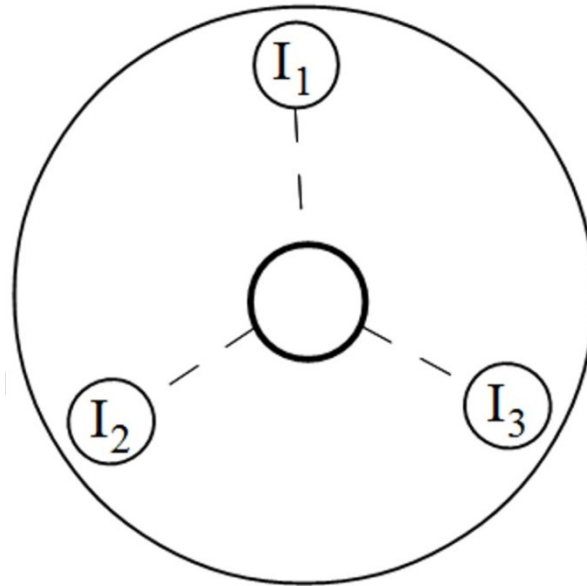
Zbog nemogućnosti primene klasičnog metoda, potrebno je definisati novi metod, koji omogućuje određivanje prostornog vektora nekonvencionalnih konfiguracija provodnika (npr. prikazanog na slici 23.), koji se može primeniti kod klasičnih kalemova prikazanih na slici 21.

Na osnovu modela, prikazanog na slici 21., gde su označene strane kalema sa smerovima struje i prostorni vektor magnetopobudne sile, može se konstatovati, da matematički izraz prostornog vektora magnetopobudne sile jedne strane kalema treba da uzima u obzir polaritet struje i međusobni položaj strane kalema i prostornog vektora magnetopobudne sile određen klasičnom metodom.

Međusobni položaj vektora magnetopobudne sile i strane kalema može se

izraziti vektorom položaja dvo- dimenzionalnog koordinatnog sistema, koji se nalazi u ravni normalnoj na provodnike kalema, kao što je prikazano na slici 24. Zbog praktičkih razloga centar odabranog koordinatnog sistema se nalazi u centru simetrije segmenta, koji povezuje težišne tačke strane kalema u ravni.

Na osnovu modela prikazanog na slici 24., može se videti da je proizvod vektora položaja  $-\mathbf{r}$  i skalara  $-I$  jednak sa proizvodom vektora položaja  $\mathbf{r}$  i skalara  $I$ .



Slika 23. Model rotora sa tri žleba, za određivanje prostornog vektora nekonvencionalnih namotaja.

Smer i pravac proizvoda vektora položaja i struje su ekvivalentni sa smerom i pravcem vektora položaja  $\mathbf{r}$ , koji zaklapa ugao od 90 stepeni sa vektorom magnetopobudne sile. Predznak faznog pomeraja između vektora magnetopobudne sile i vektora položaja  $\mathbf{r}$  (na slici 24.) , je +90 stepeni.

U kompleksnom koordinatnom sistemu, gde su prikazani vektori, proizvod vektora položaja  $\mathbf{r}$  i jediničnog kompleksnog operatora  $j$  je paralelan sa vektorom magnetopobudne sile  $\mathbf{M}$ , što znači da se vektor magnetopobudne sile može izraziti kao proizvod struje, vektora položaja i koeficijenta  $k_M$ .

Odnos vektora magnetopobudne sile, izračunatog klasičnom metodom i zbira vektora, određenog proizvodom struje i vektora položaja, definiše koeficijent sa izrazom (126), za određivanje prostornog vektora magnetopobudne sile jedne strane kalema.

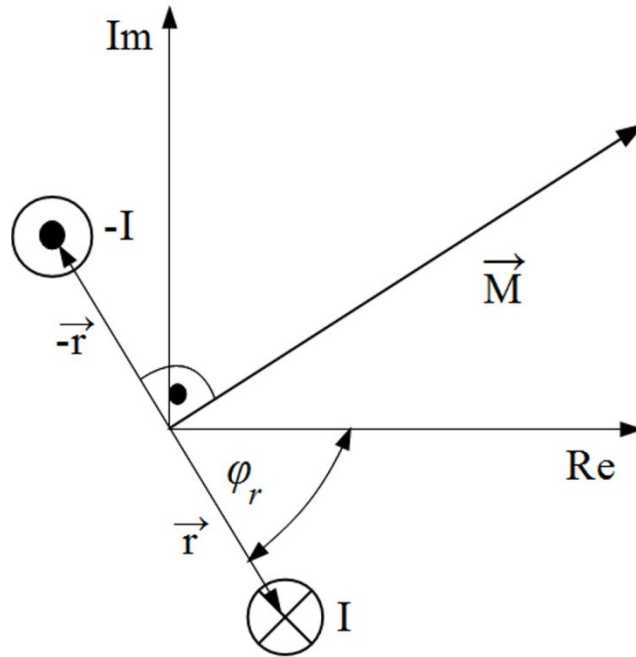
$$k_M = \frac{\mathbf{M}}{2 \cdot \mathbf{r} \cdot I} \quad (126)$$

Polazeći od činjenice da je intenzitet vektora magnetopobudne sile kalema  $|\mathbf{M}| = N \cdot I$ , izraz (126) se može napisati u sledećem obliku:

$$k_M = \frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{M}|} \frac{N \cdot I}{2 \cdot \mathbf{r} \cdot I} = j \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \frac{N}{2 \cdot \mathbf{r}} = j \cdot \frac{N}{2 \cdot |\mathbf{r}|} \quad (127)$$

U prethodnom izrazu  $N$  je broj navoja u jednoj strani kalema. Kao što se vidi izraz  $k_M$  sadržava jedinični kompleksni operator  $j$ . Na taj način, omogućeno je određivanje magnetopobudne sile pojedinih strana kalema, koji se nalaze u

kompleksnoj ravni u položajim određenim vektorom položaja  $\mathbf{r}_x$ .



Slika 24. Model kalema u kompleksnoj ravni sa vektorima položaja i vektorom magnetopobudne sile određene na osnovu klasičnog metoda.

Rezultantna magnetopobudna sila strane kalema, koji se nalazi u kompleksnoj ravni, može se izračunati, kao proizvod koeficijenta  $k_M$  i zbira proizvoda vektora položaja i struje strane kalema, sa formulom (128):

$$\mathbf{M}_r = k_M \cdot \sum_{k=1}^Z \mathbf{r}_k I_k = j \cdot \frac{N}{2 \cdot |\mathbf{r}|} \cdot \sum_{k=1}^Z \mathbf{r}_k I_k = j \cdot \frac{N}{2} \cdot \sum_{k=1}^Z \frac{1}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r}_k \cdot I_k \quad (128)$$

Formula (128) može se koristiti kod modela, gde su udaljenosti težišnih tačaka strane kalema od centra koordinatnog sistema identične, što znači da se težišne tačke strana kalema nalaze na krugu poluprečnika  $|\mathbf{r}|$ .

## 6.4 Prostorni vektor struje višefaznog namotaja

Prostorni vektor struje se može odrediti na sličan način kao i magnetopobudne sile višefaznog sistema. Tokom određivanja formule prostornog vektora struje, pretpostavljeno je da su strane kalema raspoređene ravnomerno oko centra koordinatnog sistema, kao što je prikazano na slici 23.

Najčešće korišćeni višefazni namotaj je kavezni namotaj rotora asinhronih motora. Kod ovih namotaja strane kalema su štapovi, koji se nalaze u žlebovima rotora. Fazni pomak između osnovnih harmonika struje u štapovima je jednak proizvodu broja pari polova i mehaničkog ugla između žlebova, koji je ekvivalentan električnom uglom između žlebova.

Na osnovu faznih pomaka, izraženih električnim uglovima, može se definisati matematički izraz vektora položaja težišnih tačaka strane kalema, u kompleksnom koordinatnom sistemu [75]:

$$\mathbf{r}_k = |\mathbf{r}_k| e^{j \left( p \frac{2\pi}{N} (k-1) + \varphi_r \right)} \quad (129)$$

Gde je:  $\mathbf{r}_k$  vektor položaja,  $|\mathbf{r}_k|$  dužina vektora položaja, koja je identična kod svih vektora,  $p$  broj pari polova,  $N$  broj strana kalema,  $\varphi_r$  fazni pomak između realne ose koordinatnog sistema i vektora položaja prve strane kalema.

Uzimajući u obzir, da u formuli (127) u imeniocu se nalazi  $|\mathbf{r}|$ , koji je ekvivalentan sa  $|\mathbf{r}_k|$ , u izrazu (128) proizvod  $\mathbf{r}_k$  i  $1/|\mathbf{r}|$  se može zameniti jediničnim vektorom  $\mathbf{e}_k$ . Zato u daljnjim proračunima umesto vektora položaja je prikladnije koristiti jedinični kompleksni vektor:

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|} = e^{j\left(p\frac{2\pi}{N}\cdot(k-1)+\varphi_r\right)} \quad (130)$$

#### 6.4.1 Određivanje prostornih vektora struja sa kompleksnim vrednostima struja namotaja

Na osnovu izraza prostornog vektora magnetopobudne sile (128) formula prostornog vektora struje može se odrediti pomoću formule (131). u slučaju kad su trenutne vrednosti struje strane kalema izražene sa kompleksnim brojevima [75]:

$$\mathbf{i}_r(t) = k_{ik} \cdot \sum_{k=1}^N j \cdot \mathbf{e}_k \cdot i_k(t) \quad (131)$$

U formuli (131)  $i_k$  trenutna vrednost struje u kompleksnom obliku određena je izrazom (132),  $\mathbf{e}_k$  vektori položaja strane kalema su definisani formulom (130),  $k_{ik}$  je koeficijent za skaliranje prostornog vektora struje. Zbog faznog pomaka od 90 stepeni između prostornog vektora struje i jediničnog kompleksnog vektora  $\mathbf{e}_k$ , paralelnog sa vektorom položaja, u formuli (131) u zbiru se nalazi proizvod jediničnog kompleksnog vektora  $\mathbf{e}_k$  i kompleksnog operatora  $j$ .

Kao što se vektori položaja u izrazu (129), tako se i trenutne vrednosti osnovnog vremenskog harmonika struje mogu definisati u pojedinim stranama kalema. U izrazima za struje treba uzimati u obzir vremenski pomak između struje osnovnih harmonika u žlebovima rotora.

U ustaljenim režimima rada asinhronne mašine, vremenski pomak između osnovnih harmonika struje u štapovima rotora, gde broj faza jednak sa brojem štapova  $N$  (ili žlebova), je proporcionalan sa mehaničkim uglom između žlebova rotora, koji je uzet u obzir u kompleksnom obliku izraza struje (132) [75]:

$$i_k(t) = I_{maks} \cdot e^{j\left(\omega t - p\frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_r\right)} = I_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_r)} \cdot e^{-j \cdot p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1)} \quad (132)$$

U izrazu (132) operator  $e^{-j \cdot p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1)}$  izražava fazni pomak između struje prvog i  $k$ -tog žleba.

Uvrštavanjem trenutnih vrednosti struje osnovnog harmonika (132), u formulu prostornog vektora (131), izraz prostornog vektora osnovnog harmonika može se napisati u sledećem obliku [75]:

$$\mathbf{i}_r(t) = k_{ik} \cdot j \cdot N \cdot I_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_r + \varphi_r)} \quad (133)$$

Trenutne vrednosti struje u strani kalema, gde se referentni smer ose simetrije kalema nalazi u položaju određenom sa proizvodom operatora  $j$  i

jediničnog kompleksnog operatora (130), računatim pomoću modifikovanih izraza (118).

U izrazima (118) za određivanje veličine u jednom kalemu računat je proizvod prostornog vektora veličine i inverznog jediničnog kompleksnog operatora, koji određuje referentni položaj ose simetrije namotaja u kompleksnoj ravni. Ovaj proizvod je jednak kompleksnoj vrednosti struje u jednoj strani kalema, ili u jednom štapu kaveznog namotaja rotora.

U slučaju kada je reč o jednom štapu rotora, referentni smer ose simetrije namotaja je evivalentan smeru magnetopobudne sile jedne strane kalema kao što je prikazano na slici 24.

Na taj način, kompleksna trenutna vrednost struje u jednoj strani kalema ili u jednom štapu pomoću inverznog kompleksnog operatora položaja ose simetrije može se napisati u sledećem obliku (134):

$$i_k(t) = \mathbf{i}_r(t) \cdot \left( -j \cdot e^{-j\left(p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_r\right)} \right) \quad (134)$$

Vrednost koeficijenta  $k_{ik}$  može se izračunati po sledećoj formuli pomoću definicije struje u stranama kalema (132), prostornog vektora struje osnovnog harmonika (133), i definicije struje u strani kalema na osnovu izraza (134):

$$\begin{aligned} k_{ik} &= \frac{\mathbf{i}_r(t)}{j \cdot N \cdot I_{maks} \cdot e^{j(\alpha + \varphi_i + \varphi_r)}} = \frac{i_k(t)}{(-j) \cdot e^{-j\left(p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_r\right)}} = \\ &= \frac{I_{maks} \cdot e^{j\left(\alpha - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right)}}{(-j) \cdot e^{-j\left(p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_r\right)}} = \frac{I_{maks} \cdot e^{j\left(\alpha - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right)}}{j \cdot N \cdot I_{maks} \cdot e^{j(\alpha + \varphi_i + \varphi_r)} \cdot (-j) \cdot e^{-j\left(p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_r\right)}} = \\ &= \frac{I_{maks} \cdot e^{j\left(\alpha - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right)}}{N \cdot I_{maks} \cdot e^{j\left(\alpha - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right)}} = \frac{1}{N} \end{aligned} \quad (135)$$

#### 6.4.2 Određivanje prostornih vektora struja sa realnim vrednostima struja namotaja

Na sličan način, kao što je prikazano u predhodnom poglavlju, može se odrediti prostorni vektor struje sa realnim vrednostima struje strana kalema. Formula prostornog vektora struje sa realnim vrednostima na osnovu (131) može se napisati u sledećem obliku [75]:

$$\mathbf{i}_r(t) = k_{ir} \cdot \sum_{k=1}^N j \cdot \mathbf{e}_k \cdot i_k(t) \quad (136)$$

Pri rešavanju magnetnog polja sa MKE primenom formule vremenskih koraka, vrednosti struje su izražene realnim brojevima (137). Vremenski pomak između osnovnog harmonika struje u štapovima rotora, gde je broj faza jednak sa brojem štapova  $N$  (ili žlebova), je proporcionalan mehaničkom uglu koji zaklapaju



žlebovi, u kojima se nalaze odgovarajućih štapovi. Kod realnih vrednosti struje u štapovima rotora fazni pomak je uzet u obzir trigonometrijskim funkcijama kao što je prikazano u izrazu (137) [75].

$$i_k(t) = I_{maks} \cdot \cos\left(\omega t - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right) \quad (137)$$

U formuli za određivanje prostornog vektora struje (136) se nalazi proizvod trenutnih vrednosti struje i jediničnih prostornih vektora. Zato je potrebno napisati izraz struje (137) na osnovu definicije trigonometrijske kosinusne funkcije preko jediničnih kompleksnih operatora [75]:

$$i_k(t) = I_{maks} \cdot \frac{e^{j\left(\omega t - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right)} + e^{-j\left(\omega t - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right)}}{2} \quad (138)$$

Uvrštavanjem (138) u formulu (136) nestaje trigonometrijska funkcija, a zbir vektora može se smatrati zbirom geometrijskog niza:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_r(t) &= k_{ir} \cdot \sum_{k=1}^N j \cdot e^{j\left(p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_r\right)} \cdot I_{maks} \cdot \cos\left(\omega t - p \cdot \frac{2\pi}{N}(k-1) + \varphi_i\right) = \\ &= k_{ir} \cdot j \cdot I_{maks} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{e^{j\left(-\omega t + p \cdot \frac{4\pi}{N}(k-1) - \varphi_i + \varphi_r\right)} + e^{j(\omega t + \varphi_i + \varphi_r)}}{2} \end{aligned} \quad (139)$$

Dalje, posle primene matematičkih identiteta zbir jediničnih kompleksnih operatora u izrazu (139) preuzima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{e^{j\left(-\omega t + p \cdot \frac{4\pi}{N}(k-1) - \varphi_i + \varphi_r\right)} + e^{j(\omega t + \varphi_i + \varphi_r)}}{2} &= \frac{N \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i + \varphi_r)}}{2} + \frac{e^{j(-\omega t - \varphi_i + \varphi_r)}}{2} \sum_{k=1}^N e^{j \cdot p \cdot \frac{4\pi}{N}(k-1)} = \\ &= \frac{N \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i + \varphi_r)}}{2} + \frac{e^{j(-\omega t - \varphi_i + \varphi_r)}}{2} \cdot \frac{1 - \left(e^{j \cdot p \cdot \frac{4\pi}{N}}\right)^N}{1 - e^{j \cdot p \cdot \frac{4\pi}{N}}} \end{aligned} \quad (140)$$

U izrazu (140) važi  $\left(e^{j \cdot p \cdot \frac{4\pi}{N}}\right)^N = 1$ , što znači da drugi član u izrazu ima nultu vrednost. Uvrštavanjem izraza (140) u formulu (139), prostorni vektor struje, sa realnim vrednostima struje u strani kalema, može se izračunati sledećim izrazom:

$$\mathbf{i}_r(t) = k_{ir} \cdot j \cdot \frac{N}{2} \cdot I_{maks} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i + \varphi_r)} \quad (141)$$

Upoređenjem izraza prostornih vektora struje (131) i (141), može se videti, da je koeficijent  $k_{ir}$  dvostruko veći od koeficijenta  $k_{ic}$ , što znači da se njegova vrednost može izračunati sa sledećim izrazom:

$$k_{ir} = 2 \cdot k_{ic} = \frac{2}{N} \quad (142)$$

Formule za izračunavanje realnih vrednosti struje u strani kalema na osnovu prostornog vektora struje (141) i kompleksnih trenutnih vrednosti struje u strani kalema (134), može se napisati u sledećem obliku:



$$i_k(t) = \operatorname{Re} \left( \mathbf{i}_r(t) \cdot (-j) \cdot e^{-j \left( p \frac{2\pi}{N} (k-1) + \varphi_r \right)} \right) \quad (143)$$

Pomoću formula (134) i (143) moguće je odrediti prostorne vektore viših prostornih harmonika struje. Tokom proračuna prostornih vektora viših prostornih harmonika primenjen je odgovarajući broj polova viših prostornih harmonika, koji se može odrediti na osnovu sledećeg izraza [75]:

$$p_k = k \cdot p \quad (144)$$

## 6.5 Konverzija prostornih vektora struje između različitih sistema namotaja

Kod asinrone mašine sistemi namotaja rotora i statora se razlikuju zbog primenjenih pravila tokom određivanja broja žlebova, koji rezultiraju različitim brojem žlebova statora i rotora.

U nekim slučajevima namotaji statora i rotora izrađeni su na sličan način (asinrone mašine sa namotanim rotorom), koji omogućuje ravnomernu raspodelu struja u žlebovima rotora. Kod ovih motora trofazni namotaji su korišćeni kod statora i kao kod rotora, dok brojevi provodnika po žlebu i broj žlebova po polu i po fazi statora i rotora su različiti.

U savremenim pogonima najčešće se koriste asinhronne mašine sa kaveznom namotajem. Kod ovih motora statori i rotori, pored brojeva žlebova i provodnika po žlebu, imaju različite i brojeve faza.

Zbog ovih razlika između sistema namotaja rotora i statora, pri određivanju ekvivalentne šeme mašine, potrebno je preračunati prostorni vektor struje rotora na stranu statora. Formule za preračunavanje prostornih vektora struje se zasnivaju na ravnoteži magnetopobudnih sila. Prema tome, magnetopobudna sila struje rotora koja teče provodnicima rotora je ekvivalentna sa magnetopobudnom silom struje statora, koja je ekvivalentna preračunatoj vrednosti struje rotora na statorsku stranu [42] – [44]:

$$\mathbf{i}'_r \cdot Q_s \cdot n_s \cdot \xi_s = \mathbf{i}_r \cdot Q_r \cdot n_r \cdot \xi_r \quad (145)$$

Gde su:  $Q_s$  i  $Q_r$  brojevi žlebova statora i rotora,  $n_s$  i  $n_r$  brojevi navoja u žlebovima statora i rotora,  $\xi_s$  i  $\xi_r$  koeficijenti namotaja statora i rotora. Kod kaveznih namotaja  $n_r$  ima jediničnu vrednost, a  $\xi_r$  je određena na osnovu zakošenja žlebova rotora.

## 6.6 Određivanje fazora fluksnog obuhvata

Pored struje motora druga važna karakteristična veličina je priključni napon motora, koji je jednak zbiru pada napona na otpornostima i indukovane elektromotorne sile. Indukovani napon motora jednak je prvom izvodu fluksnog obuhvata namotaja po vremenu.

Fluksni obuhvat namotaja električnih mašina po klasičnoj definiciji se izračunava kao proizvod integrala magnetne indukcije na površini koju je obuhvaćena konturom namotaja i broja navoja namotaja. Ovaj postupak može se koristiti kod idealnih namotaja, kod kojih je presek provodnika zanemarljivo mali.

Kod električnih mašina provodnici namotaja se nalaze u žlebovima, koji formiraju kalemove. Namotaj jedne faze često se sastoji od više kalemova, što znači da se strane kalemova sa ekvivalentnim polaritetom struje nalaze u različitim žlebovima.

Klasična definicija prostornog vektora ne uzima u obzir dimenzije strane kalema u žlebovima. Ovaj postupak znatno otežava primenu klasične definicije za proračun magnetnog fluksa namotaja električne mašine.

Zbog nedostataka klasičnog metoda, uprkos preciznosti proračuna magnetnog polja pomoću MKE, zanemarenjem dimenzija provodnika koji su raspoređeni u žlebovima, izračunate i stvarne vrednosti fluksnih obuhvata namotaja znatno se razlikuju.

Zato se u dvo- dimenzionalnim modelima mašine za određivanje fluksnih obuhvata koristi srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala, preko koje se može definisati fluksni obuhvat strane kalema. Kod dvo- dimenzionalnih modela pretpostavljeno je da komponente magnetnog vektorskog potencijala koje su paralelne sa ravni dvo-dimenzionalnog modela imaju nulte vrednosti, kao i komponente magnetnog fluksa normalne na ravan dvodimenzionalnog modela.

### 6.6.1 Definicija magnetnog fluksnog obuhvata pomoću magnetnog vektorskog potencijala

Polazeći od definicije magnetnog vektorskog potencijala (92), koja proizilazi iz izraza (91), može se zaključiti, da je integral normalne komponente gustine magnetnog fluksa na određenoj otvorenoj konturi, koja se nalazi između dve tačke (prikazano na slici 25.) je jednaka razlici magnetnog vektorskog potencijala između te dve tačke (tačke 1 i 2 na slici 25.).

Integral magnetne indukcije na određenoj konturi je praktično integral vektorskog proizvoda vektora magnetne indukcije i elementarnog malog tangencijalnog vektora konture:

$$\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 = \int_1^2 \mathbf{B} \times d\mathbf{l} \quad (146)$$

Na osnovu prethodnog integrala može se definisati metod za određivanje magnetnog fluksa koji prelazi preko jednog navoja kalema. U modelima konačnih elementa provodnici kalema nalaze se u žlebovima i normalni su na ravan modela. Ako se dimenzije preseka provodnika mogu zanemariti, onda je magnetni fluks koji prelazi preko površine, određen sa prethodno opisanim navojem kalema, jednak integralu normalne komponente vektora gustine magnetnog fluksa na površinu, koji je praktično jednak proizvodu dužine modela KE i leve strane izraza (146).

Primenom prethodne definicije na modelu prikazanom na slici 25., umesto integrisanjem komponente gustine magnetnog fluksa, fluksni obuhvat određenog kalema može se odrediti pomoću sledećeg izraza:

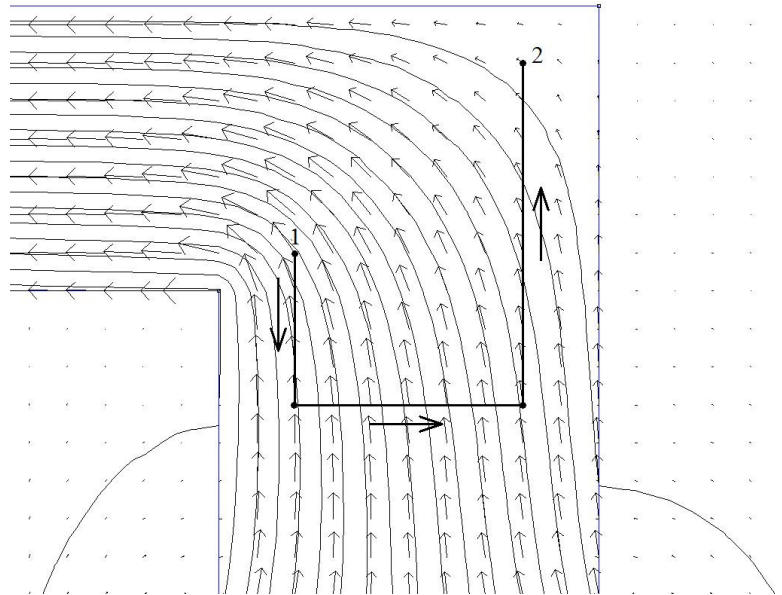
$$\psi = N \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{l} \quad (147)$$

Gde je  $N$  broj navoja kalema, a  $\mathbf{l}$  dužina modela u smeru  $z$ .

Kao što se vidi, određivanje fluksnog obuhvata na osnovu rešenja magnetnog polja sa MKE svodi se na određivanje razlike magnetnog vektorskog potencijala.

### 6.6.2 Određivanje magnetnog fluksnog obuhvata kalema sa ravnomernom raspodelom struje

U prethodnoj definiciji fluksnog obuhvata dimenzije preseka provodnika su zanemarene, šta dovodi do značajnih razlika u odnosu na modele korišćene pri rešavanju elektomagnetnog polja sa MKE.



Slika 25. Kontura sa referentnim smerovima integrala.

Provodnici kalema raspodeljeni su u određenom delu prostora, čiji je magnetni permeabilitet najčešće jednak magnetnom permeabilitetu vakuma. Zbog magnetopobudne sile provodnika u žlebu statora i magnetnog permeabiliteta žleba preko strana kalema prelazi deo magnetnog fluksa, što znači da vrednost magnetnog vektorskog potencijala ne može se smatrati konstantom u delu modela gde se nalaze provodnici kalema.

Zbog promenljive vrednosti magnetnog vektorskog potencijala u provodnicima kalema, pri proračunu fluksnog obuhvata strane kalema, koji se nalazi u jednom žlebu, može se primeniti izraz (147), u kojem je korišćena srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala.

Uzimajući u obzir da je prostor gde se nalaze provodnici raspodeljen sa diskretnim elementima (trouglovima), srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala, koja je primenjena u izrazu (147), može se izračunati kao težišna srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala elementa:

$$\mathbf{A}_{sr-kalem} = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{A}_{k,sred} \cdot S_k}{\sum_{k=1}^N S_k} \quad (148)$$

Gde je:  $\mathbf{A}_{sr-kalem}$  srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala u strani kalema,  $\mathbf{A}_{k,sred}$  srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala u jednom elementu, a  $S_k$  površina jednog elementa.

Pri određivanju raspodele magnetnog polja izračunate su vrednosti vektorskog potencijala u čvorovima koji se nalaze u vrhovima trouglova. Na osnovu tih

potencijala, srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala u jednom elementu se može odrediti pomoću sledećeg izraza:

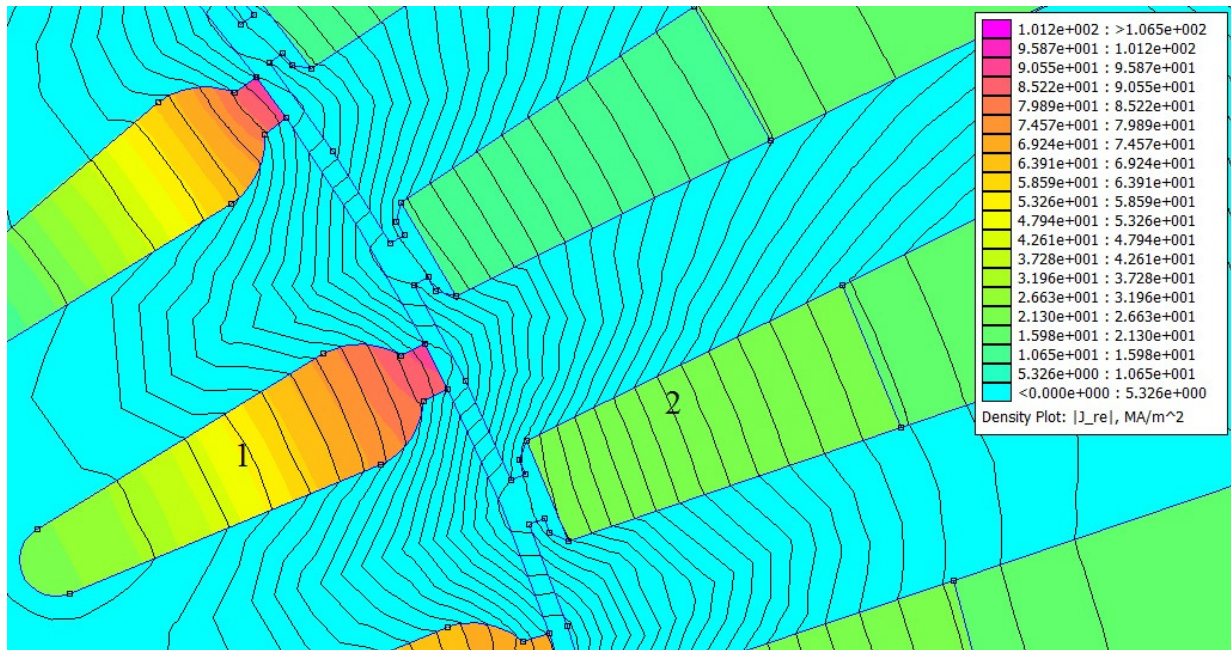
$$\mathbf{A}_{k,sred} = \frac{\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3}{3} \quad (149)$$

Gde su  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  i  $\mathbf{A}_3$  vektorski potencijali u vrhovima elementa.

### 6.6.3 Određivanje magnetnog fluksnog obuhvata kalema sa neravnomernom raspodelom struje

Kod asinhronne mašine sa kaveznim namotajem, raspodela struje je neravnomerna u provodnicima namotaja, zbog potiskivanje struje koji se javlja u štapovima rotora. Zato fluksni obuhvati izračunati na osnovu prethodne definicije srednje vrednosti magnetnog vektorskog potencijala se razlikuje od stvarne vrednosti ove veličine.

Na slici 26. je prikazana raspodela realne komponente gustine struje i ekvipotencijalnih linija magnetnog vektorskog potencijala u jednom žlebu asinhronne mašine. Rešenje prikazano na slici 26. je izračunato na osnovu vremenske-harmoničke formule magnetnog vektorskog potencijala.



Slika 26. Neravnomerna raspodela struje u jednom žlebu asinhronne mašine.

Kao što se može uočiti magnetni fluks, prelazi preko žleba, obilazi deo struje koja je neravnomerno raspodeljena u žlebu. Zbog neravnomerne raspodele struje, fluksni obuhvat izračunat na osnovu srednje vrednosti magnetnog vektorskog potencijala u žlebu rotora se značajno razlikuje od stvarne vrednosti fluksnog obuhvata.

Zbog nedostataka prethodno opisanog metoda, definisanog formulama (148) i (149), stvarna srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala može se odrediti na osnovu integrala proizvoda magnetnog vektorskog potencijala i konjugovane vrednosti gustine struje (150), gde je vrednost integrala strujni-fluksni obuhvat [75].

$$\kappa = l \cdot \iint_{S_{zleb}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}^* ds \quad (150)$$

U izrazu (150)  $\kappa$  označava strujni fluksni obuhvat, a  $\mathbf{J}^*$  je konjugovana vrednost gustine struje. U izrazu (150) korišćena je konjugovana vrednost gustine struje, jer se na taj način uzima u obzir fazni pomak između kompleksne veličine magnetnog vektorskog potencijala i gustine struje.

Konjugovana vrednost struje u jednom štupu može se izračunati sa sledećim integralom(151):

$$\mathbf{i}^* = \iint_{S_{zleb}} \mathbf{J}^* ds \quad (151)$$

Stvarna srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala je jednaka odnosu strujnog fluksnog obuhvata (150) i konjugovane vrednosti struje(151).

Izraz za određivanje stvarne srednje vrednosti magnetnog vektorskog potencijala u jednoj strani kalema ili u jednom štupu rotora, može se odrediti sa strujnim fluksnim obuhvatom i konjugovanom vrednošću struje:

$$\mathbf{A}_{sr-kalem} = \frac{\kappa}{\mathbf{i}^*} \quad (152)$$

Srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala definisana sa formulom (152), može se koristiti kao fluksni obuhvat jedne strane kalema ili jednog štapa rotora pri proračunu fluksnog obuhvata.

Potreba uvođenja strujno-fluksnog obuhvata i ispravnost metode za određivanje srednje vrednosti magnetnog vektorskog potencijala, može se potvrditi na primeru prikazanom na slici 26. Kao što se vidi raspodela struje u žlebu rotora (označena sa 1) je neravnomerna, dok je u žlebu statora (označena sa 2) raspodela struje ravnomerna.

Pomoću izračunatih vrednosti strujnog fluksnog obuhvata, struja i srednje vrednosti magnetnog vektorskog potencijala sa integralima za regione 1 i 2 je prikazana efikasnost primena formula (148) i (150) - (152).

Izračunate vrednosti integralom za region 1 su sledeće:

Strujni fluksni obuhvat:  $(2.36 \cdot 10^{-16} + j \cdot 37.3697) HA^2$

Srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala:

$$(-6.7896 - j \cdot 28.5077) \cdot 10^{-4} HA$$

Struja žleba:  $(-9298.84 + j \cdot 2214.68)A$

Srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala izračunata formulom (152) iznosi:

$$(-9.0576 - j \cdot 38.03) \cdot 10^{-4} HA$$

Upoređenjem srednjih vrednosti magnetnog vektorskog potencijala izračunatog sa integralom i sa strujnom-fluksnom obuhvatom pomoću formule (152), može se uočiti da je razlika između izračunatih vrednosti fluksnih obuhvata različitim metodima značajna.

Izračunate vrednosti integralom za region 2 su sledeće:

Strujni fluksni obuhvat:  $(42.8358 + j \cdot 17.0891) HA^2$

Srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala:

$$(107.92 - j \cdot 43.0539) \cdot 10^{-4} HA$$

Struja u regionu 2:  $(3969.22)A$

Srednja vrednost magnetnog vektorskog potencijala izračunata formulom (152) iznosi:

$$(107.92 - j \cdot 43.054) \cdot 10^{-4} \text{ HA}$$

Upoređenjem srednjih vrednosti magnetnog vektorskog potencijala izračunatih sa integralom i sa formulom (152), može se zaključiti da se pri ravnomernoj raspodeli struje razlika između rezultata izračunatih sa različitim metodima može zanemariti.

#### 6.6.4 Određivanje magnetog fluksnog obuhvata sistema nekonvencionalnih namotaja

U prethodnim poglavljima prikazan je metod za određivanje fluksnog obuhvata jednog kalema i srednje vrednosti magnetnog vektorskog potencijala u jednoj strani kalema. Ovaj postupak se može koristiti kod sistema namotaja, gde je broj strana kalema po polu ceo broj.

Primenom metoda za određivanje strujnog-fluksnog obuhvata u ovom delu teze je prikazano određivanje fazora fluksnog obuhvata sistema namotaja rotora i statora.

Formule, prikazane u ovom poglavlju omogućuju određivanje prostornih vektora u slučajevima, kada broj žlebova po polu nije ceo broj.

Na osnovu formule (150) - (152), može se napisati strujni-fluksni obuhvat u određenom žlebu rotora, kao proizvod fazora fluksnog obuhvata i konjugovane vrednosti struje.

$$\kappa_{r,n} = \Psi_{r,n} \cdot \mathbf{i}_{r,n}^* \quad (153)$$

Gde indeks  $r$  označava rotor, a  $n$  je redni broj štapa,  $\Psi_{r,n}$  je fazor fluksnog obuhvata štapa, jednak sa  $\mathbf{A}_{sr-kalem}$  izračunatim sa formulom (152).

Fazor fluksnog obuhvata štapa sa indeksom  $n$  može se napisati kao zbir prostornih vektora harmonika [75].

$$\Psi_{r,n} = \sum_{\nu} \Psi_{r,\nu} \cdot e^{-j\nu\alpha_n p} \quad (154)$$

Gde je:  $\Psi_{r,n}$  fazor fluksnog obuhvata štapa rotora,  $\Psi_{r,\nu}$   $\nu$ -i prostorni harmonik fluksnog obuhvata rotora,  $\nu$  redni broj harmonika,  $\alpha_n$  geometrijski ugao između prvog i  $n$ -tog štapa,  $p$  broj pari polova mašine. Redni broj harmonika kreće se od  $-Q_r/2$  i završava se sa  $Q_r/2$  (ako  $Q_r$  je parno), za neparne vrednosti  $Q_r$  redni broj harmonika se kreće od  $-(Q_r - 1)/2$  i završava se sa  $-(Q_r + 1)/2$ .

U slučaju, kada su veličine (struja ili fluksni obuhvat) u štapovima izražene sa kompleksnim brojevima, a fazni položaj prvog štapa poklapa sa realnom osom kompleksnog koordinatnog sistema, vrednosti ovih veličina u prvom štapu su ekvivalentne sa vektorom prostornog harmonika.

U izrazima (154) i (155) pomoću kompleksnog operatora  $e^{-j\nu\alpha_n p}$  je izražen fazni pomak između vrednosti date veličine (struja ili fluksni obuhvat) prostornog harmonika sa rednim brojem  $\nu$  u prvom i u  $n$ -tom štapu.

Kao što je prikazano na slici 15. raspodela magnetopobudne sile trofaznih namotaja u vazдушnom procepu pored osnovnog harmonika sadržava visoke

prostorne harmonike, koji proizvode raspodelu magnetne indukcije u vazдушnom procepu sa istim rednim brojem. Spektar raspodele magnetopobudne sile ne sadržava harmonike sa rednim brojevima  $3k$  (gde  $k$  je ceo broj), zbog primena simetričnog torfaznog namotaja i pobudnih struja čiji zbir ima vrednost nula. Pored ovih prostornih harmonika u spektru raspodele magnetne indukcije u vazдушnom procepu javljaju se harmonici koji potiču od zasićenja magnetnog kruga kao što je prikazano na slici 16. Kao što se vidi raspodela magnetne indukcije prikazano na slici 15, koja potiče od magnetopobudne sile, u vazдушnom procepu sadrži treći harmonik (slika 16.). Što znači da se u spektru magnetne indukcije pojavljaju harmonici sa neparnim rednim brojem, koji se ne javljaju u spektru magnetopobudne sile.

Prostorni harmonici raspodele magnetne indukcije ispravnih mašina u vazдушnom procepu sadržavaju harmonike sa neparnim rednim brojevima. Ovi harmonici u štapovima kaveznog namotaja induciraju elektromotornu silu, koja proizvodi prostornu raspodelu struje sa rednim brojem harmonika magnetne indukcije u vazдушnom procepu.

Fazor struje štapa, kao i fazor fluksnog obuhvata sa indeksom  $n$ , može se napisati kao zbir prostornih vektora harmonika [75]:

$$\mathbf{i}_{r,n} = \sum_v \mathbf{I}_{r,v} \cdot e^{-jv\alpha_n p} \quad (155)$$

Gde je:  $\mathbf{i}_{r,n}$  fazor struje štapa rotora,  $\mathbf{I}_{r,v}$   $v$ -i prostorni harmonik struje rotora. Ostali parametri su identični sa parametrima definisanim kod izraza (154).

Formule za određivanje fazora fluksnog obuhvata (154) i struje (155) su vremenski invarijantni oblici, što znači da su identiteti određeni primenom formule fazora (154) i (155) vremenski invarijantni.

Izrazi fazora fluksnog obuhvata (154) i struje (155) određeni su na osnovu činjenice, da se raspodela periodične veličine po obimu rotora može napisati kao zbir harmonika, koji su određeni na sličan način kao i harmonici periodičnih vremenskih funkcija.

U izrazima fazora fluksnog obuhvata (154) i struje (155) broj pari polova viših harmonika jednak je proizvodu broja pari polova mašine i rednog broja harmonika. Redni brojevi prostornih harmonika su definisani kod izraza (154).

$$p_v = p \cdot v \quad (156)$$

Polazeći od definicije rednog broja harmonika, može se uočiti da su formulom (156) određeni parovi harmoničnih broja polova (izuzetci su  $v=0$  i  $v=(Q_r+1)/2$  za neparne vrednosti broja žlebova rotora  $Q_r$ ).

Na osnovu izraza za određivanje fazora fluksnih obuhvata (154) i fazora struje (155) strujni- fluksni obuhvat u jednom štapu može se napisati u sledećem obliku [75]:

$$\kappa_{r,n} = \Psi_{r,n} \cdot \mathbf{i}_{r,n}^* = \sum_v \sum_{\mu} \Psi_{r,v} \cdot \mathbf{I}_{r,\mu}^* \cdot e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}} \quad (157)$$

U izrazu (157) eksponencijalne komponente nestaju u proizvodima fluksnih obuhvata i struje za jednake redne brojeve harmonika ( $v = \mu$ ).

Izraz za određivanje srednje vrednosti strujno-fluksnih obuhvata u štapovima je prema tome [75]:

$$\kappa_{r,n-sred} = \sum_v \Psi_{r,v} \cdot \mathbf{I}_{r,v}^* \quad (158)$$

Zbir proizvoda komponenti u izrazu za određivanje srednje vrednosti strujno-fluksnog obuhvata (158) sa različitim rednim broja nestaju, na osnovu identiteta geometrijskog zbira:

$$\sum_{n=1}^{Q_r} e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi n}{Q_r}} = \begin{cases} \text{ako } \mu \neq v & \text{onda } Q_r \\ \text{ako } \mu \neq v & \text{onda } e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}} \cdot \frac{1 - e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi Q_r}{Q_r}}}{1 - e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}}} = \\ = e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}} \cdot \frac{1 - e^{j(\mu-v)p 2\pi}}{1 - e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}}} = e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}} \cdot \frac{1 - (e^{j2\pi})^{(\mu-v)p}}{1 - e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}}} = \\ = e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}}} = e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}} \cdot \frac{0}{1 - e^{j(\mu-v)p \frac{2\pi}{Q_r}}} = 0 \end{cases} \quad (159)$$

Strujno-fluksni obuhvat rotora jednak je proizvodu srednje vrednosti strujno-fluksnog obuhvata u štapovima rotora i broja žlebova  $Q_r$  [75]:

$$\kappa_r = Q_r \cdot \sum_v \Psi_{r,v} \cdot \mathbf{I}_{r,v}^* \quad (160)$$

Polazeći od činjenice da je kod vremensko-harmoničnog rešenja magnetnog polja pretpostavljeno da veličine pulsiraju istom frekvencijom. Ako svi prostorni harmonici pulsiraju sa istom frekvencijom, to znači da fazor fluksnog obuhvata rotora zavisi od prostornih harmonika fluksnih obuhvata, kod kojih je frekvencija jednaka sa frekvencijom modela.

U ekvivalentnoj šemi asinhronne mašine korišćeni su fazori struje i fluksnih obuhvata osnovnih vremenskih harmonika. Proizvod ovih veličina jednak je srednjoj vrednosti strujnog fluksnog obuhvata (158). Pri određivanju fazora fluksnog obuhvata pretpostavljeno je da je fazor struje jednak prostornom vektoru osnovnog harmonika struje [75], te se fazor fluksnog obuhvata može odrediti na sledeći način:

$$\Psi_r = \frac{\kappa_r}{\mathbf{I}_{r,1}^*} \cdot \frac{1}{Q_r} \quad (161)$$

Gde je  $\mathbf{I}_{r,1}$  vektor osnovnog prostornog harmonika struje rotora.

### 6.6.5 Frekvencija vremenskog harmoničkog modela

U prethodnim poglavljima određene su formule za proračun prostornih vektora struje i fazora struje i fluksnog obuhvata na osnovu rešenja magnetnog polja vremensko-harmoničnom metodom. Raspodela magnetnog polja kod ovih rešenja ispunjava kriterijume, određene parcijalnom diferencijalnom jednačinom (110), gde je kružna frekvencija određena na osnovu sledećeg izraza:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f_m \quad (162)$$

Gde je  $f_m$  frekvencija modela.

Frekvencija modela može se odrediti proizvodom sinhronne frekvencije priključnog napona i klizanja asinhronne mašine u datoj radnoj tački:



$$f_m = s \cdot f_s \quad (163)$$

Gde je:  $s$  klizanje rotora, a  $f_s$  frekvencija priključnog napona realne mašine.

U izrazima za određivanje fazora fluksnog obuhvata (154) i struje (155) korišćeni su viši prostorni harmonici, čija se frekvencija analogno sa (163) može izračunati sledećem formulom:

$$f_{rv} = s_v \cdot f_m \quad (164)$$

Gde je  $f_{rv}$  frekvencija, a  $s_v$  klizanje  $v$ -tog harmonika.

Uzimajući u obzir da je broj pari polova magnetopobudne sile  $v$  – tog prostornog harmonika struje rotora  $v \cdot p$ , sledi da je sinhrona brzina tog harmonika  $\omega_s / v$ , gde je  $\omega_s$  sinhrona brzina osnovnog prostornog harmonika. Dakle sledi da se klizanje  $v$  – tog prostornog harmonika može odrediti pomoću sledećeg izraza [43]:

$$s_v = \frac{\frac{\omega_s}{v} - \omega_r}{\frac{\omega_s}{v}} = 1 - v \cdot \frac{\omega_r}{\omega_s} = 1 - v \cdot (1 - s) \quad (165)$$

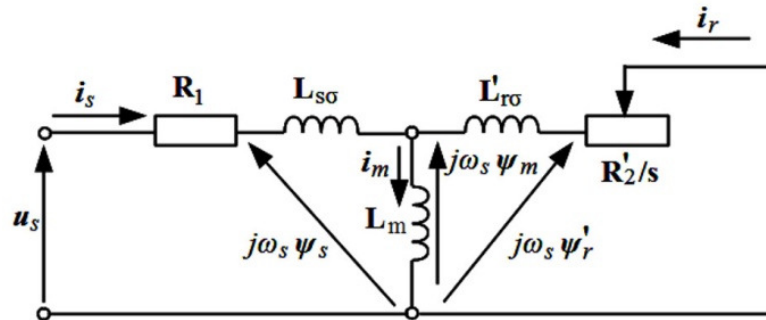
Gde je  $\omega_r$  električna ugaona brzina rotora. U slučaju zakočenog rotora asinhronne mašine klizanje viših prostornih harmonika ima jediničnu vrednost kao i osnovni prostorni harmonik, što znači da su frekvencije svih prostornih harmonika tada identične.

Kao što se vidi, kod vremensko – harmoničnog modela asinhronne mašine izračunatog za zakočeni rotor, frekvencija priključnog napona je jednaka frekvenciji modela.

## 7. ODREĐIVANJE INDUKTIVNOSTI ASINHRONE MAŠINE

Kao i ostali fenomeni, tako i ponašanje asinhronne mašine u različitim režimima rada se simulira pomoću odgovarajućeg modela. Model asinhronne mašine, kao i ostalih električnih mašina, sastoji se od otpornosti i induktiviteta. Ovi elementi zajedno čine ekvivalentnu šemu, koja opisuje ponašanje motora u različitim radnim tačkama.

Ekvivalentna šema asinhronne mašine prikazana je na slici 27. Induktiviteti su vezani tako da formiraju figuru u obliku slova T, te se zato ovaj model često naziva T-ekvivalentnom šemom [43]-[44].



Slika 27. Ekvivalentna šema asinhronne mašine

U modelu asinhronne mašine veza između električnih i magnetnih veličina izražena je pomoću induktiviteta  $L_{s\sigma}$ ,  $L'_{r\sigma}$  i  $L_m$ . Induktiviteti izražavaju uticaj struje motora na magnetno polje, pri čemu je fluksni obuhvat određen kao proizvod struje i induktiviteta. Pri tome promena fluksnih obuhvata u namotajima modela utiče na struje u strujnom krugu asinhronne mašine.

Pored induktiviteta ekvivalentna šema asinhronne mašine sadrži otpornosti. Zbir snage na otpornostima je jednak električnoj snazi, koju mašina uzima iz električne mreže. Jedan deo snage, koji se javlja na otpornosti  $R'_2/s$  u rotorskom krugu može se podeliti na gubitke u namotajima rotora i mehaničku snagu, koja se javlja na vratilu mašine.

Otpornost  $R_1$  potiče od omskog otpora provodnika namotaja statora, dok je otpornost  $R'_2$  svedena vrednost otpornosti namotaja rotora na statorsku stranu, a kao i otpornost statora potiče od omskog otpora provodnika namotaja rotora.

Induktiviteti se mogu raspodeliti u dve grupe, u prvu grupu spadaju rasipni induktiviteti, preko kojih su uzeti u obzir delovi fluksa u modelu, koji obuhvataju samo namotaje statora ili rotora. Rasipni induktivitet statora je označena sa  $L_{s\sigma}$ , dok je svedena vrednost rasipnog induktiviteta rotora na statorskoj strani označena sa  $L'_{r\sigma}$ . U drugu grupu pripada induktivitet glavnog polja ili induktivitet magnećenja  $L_m$  sa kojim je uzet u obzir deo fluksa, koji obuhvata namotaje i statora i rotora.

U ekvivalentnoj šemi označeni su fluksni obuhvati statora, rotora i glavnog polja. Fluksni obuhvati rotora i statora mogu se rasklopiti na odgovarajuće rasipne fluksne obuhvate i fluksni obuhvat magnećenja (166):

$$\Psi_s = \Psi_{s\sigma} + \Psi_m \quad (166)$$

$$\Psi'_r = \Psi'_{r\sigma} + \Psi_m$$

U jednačini (166)  $\Psi_s$  je fluksni obuhvat statora,  $\Psi_{s\sigma}$  je rasipni fluksni obuhvat statora,  $\Psi'_r$  je svedena vrednost fluksnog obuhvata rotora na statorsku stranu,  $\Psi'_{r\sigma}$  je svedena vrednost rasipnog fluksnog obuhvata rotora na statorsku stranu i  $\Psi_m$  je fluksni obuhvat glavnog polja.

Rasipni fluksni obuhvati se pojavljuju na rasipnim induktivitetima, stoga se u izrazima (166) mogu izraziti proizvodom struje (statora ili rotora) i odgovarajućeg rasipnog induktiviteta (statora ili rotora).

Fluksni obuhvat glavnog polja, slično rasipnim induktivitetima, može se izraziti proizvodom induktiviteta magnećenja i zbirom struje statora i svedene vrednosti struje rotora.

Odnosi fazora struja, određenih sa (131) ili (141) na osnovu rešenja magnetnog polja sa KE i fluksnih obuhvata određenih sa izrazom (161), mogu se opisati sledećim izrazima [1],[2]:

$$\begin{aligned}\Psi_s &= \mathbf{i}_s \cdot L_{s\sigma} + \mathbf{i}_m \cdot L_m = \mathbf{i}_s \cdot (L_{s\sigma} + L_m) + \mathbf{i}'_r \cdot L_m \\ \Psi'_r &= \mathbf{i}'_r \cdot L'_{r\sigma} + \mathbf{i}_m \cdot L_m = \mathbf{i}'_r \cdot (L'_{r\sigma} + L_m) + \mathbf{i}_s \cdot L_m\end{aligned}\quad (167)$$

U jednačini (167)  $\mathbf{i}_m$  je struja magnećenja, koja se može izračunati kao zbir struje statora i svedene vrednosti struje rotora na statorsku stranu.

$$\mathbf{i}_m = \mathbf{i}_s + \mathbf{i}'_r \quad (168)$$

U jednačinama (167), veze između fazora fluksnih obuhvata i struja su opisane pomoću induktiviteta. Vrednosti induktiviteta su nepoznate, a polazeći od činjenice da je broj nepoznatih veći od broja jednačina, na prvi pogled nemoguće je jednoznačno odrediti vrednosti induktiviteta.

Vrednosti fazora struje i fluksnih obuhvata su izraženi kompleksnim brojevima, dok su induktiviteti realne veličine, te se jednačine (167) sa realnim koeficijentima (induktivnosti), mogu smatrati kao linearna kombinacija fazora struje, jednakih sa fazorima fluksnih obuhvata.

Ovakav način pristupa problemu omogućuje dekompoziciju prethodne jednačine sa kompleksnim koeficijentima na četiri jednačine sa realnim koeficijentima [1]:

$$\begin{aligned}\Psi_{sd} &= i_{sd} \cdot (L_{s\sigma} + L_m) + i'_{rd} \cdot L_m \\ \Psi_{sq} &= i_{sq} \cdot (L_{s\sigma} + L_m) + i'_{rq} \cdot L_m \\ \Psi'_{rd} &= i'_{rd} \cdot (L'_{r\sigma} + L_m) + i_{sd} \cdot L_m \\ \Psi'_{rq} &= i'_{rq} \cdot (L'_{r\sigma} + L_m) + i_{sq} \cdot L_m\end{aligned}\quad (169)$$

U izrazima (169), realne komponente fazora označene su indeksom  $d$ , dok su imaginarne komponente označene indeksom  $q$ .

Od četiri jednačine tri su potrebne za određivanje induktivnosti, dok se četvrta može koristiti za proveru izračunatih vrednosti induktivnosti.

## 8. ODREĐIVANJE EKVIVALENTNE OTPORNOSTI ROTORA I OTPORNOSTI STATORA

Na otpornostima u asinhronim mašinama se javljaju gubici, koji proizvode toplotu u namotajima. Poznavanje vrednosti ovih gubitaka je značajno za projektovanje hlađenja mašine, od kojeg zavisi dozvoljeno opterećenje mašine.

### 8.1 Proračun ekvivalentne otpornosti rotora

Od otpornosti rotora pored proizvedenih gubitaka u rotoru, zavisi moment asinhronne mašine. Zato karakteristika otpornosti ima veliki uticaj na ponašanje asinhronne mašine u različitim radnim tačkama.

Otpornost rotora zavisi od dimenzija, materijala provodnika i od frekvencije struje u štapovima kaveznog namotaja, što znači da je jedan deo otpornosti konstantan, dok je drugi deo funkcija frekvencije.

Ekvivalentna otpornost provodnika, u kojoj teče naizmenična struja, a i pored rezultatne struje se javljaju i vrtložne struje, obično se izračunava na osnovu gubitaka u provodniku i rezultatne struje, koja prelazi preko provodnika.

Gubici u provodnicima su jednaki integralu proizvoda kvadrata gustine struje i specifične otpornosti materijala.

$$P_{cu} = \iiint_V \rho \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^* dv \quad (170)$$

U izrazu (170) je iskorišćena konjugovana vrednost vektora gustine struje, jer pri proračunu raspodele elektromagnetnog polja na osnovu formule vremenskih harmonika, gustina struja u štapovima rotora je određena sa kompleksnim vrednostima.

U modelima asinhronne mašine, gde su vrtložne struje u štapovima kaveznog namotaja izračunate na osnovu formule vremenskih harmonika, rezultatna vrednost struje se može napisati kao zbir prostornih harmonika (155). Polazeći od činjenice da je frekvencija prostornih harmonika struje jednaka, jer je klizanje jedinično (165), može se zaključiti da je u jednom datom žlebu raspodela struja različitih prostornih harmonika identična [75].

Zbog identičnih raspodela struja različitih harmonika u žlebovima rotora, može se pretpostaviti, da otpornost štapa ne zavisi od rednog broja prostornog harmonika. Zato se srednja vrednost otpornosti jednog štapa može izračunati na osnovu gubitaka u bakru rotora i zbira kvadrata harmoničkih komponenata [75].

$$R_{stap-sred} = \frac{P_{cur}}{Q_r \sum_V \mathbf{i}_{r,v} \cdot \mathbf{i}_{r,v}^*} \quad (171)$$

Gde je:  $Q_r$  broj žlebova rotora,  $i_{r,v}$   $v$ -i prostorni harmonik struje rotora, određen na osnovu modifikovane formule (131) ili (136), gde je broj pari polova izračunat sa formulom (156).

Srednja vrednost otpornosti štapa je određena pomoću viših harmonika struje i gubitaka u štapovima rotora. U ekvivalentnoj šemi motora gubici u rotoru su izraženi pomoću fazora struje rotora, koji je ekvivalentan sa prostornim vektorom osnovnog harmonika struje rotora određenim sa formulom (131) ili (136).

Vrednost otpornosti rotora svedena na statorsku stranu, u ekvivalentnoj šemi asinhronne mašine, izračunava se pomoću sledeće formule [75].

$$R'_2 = \frac{P_{cur}}{\frac{m}{2} \mathbf{i}'_{r,1} \cdot \mathbf{i}'_{r,1}^*} \quad (172)$$

Razlog, što su otpornost žleba i svedena vrednost otpornosti rotora na statorsku stranu u ekvivalentnoj šemi, određene sa različitim metodom, nalazi se u tome, da je u ekvivalentnoj šemi zbir gubitaka harmonika struje korišćen za određivanje gubitaka, dok su za određivanje momenta motora, korišćene komponente gubitaka koji potiču od harmonika struje rotora. Zato je radi proračuna komponenata momenta potrebno odrediti srednju vrednost otpornosti štapa, uzimajući u obzir uticaj svih prostornih harmonika.

## 8.2 Proračun otpornosti namotaja statora

Pored svedene vrednosti otpornosti rotora  $R'_2$  u ekvivalentnoj šemi asinhronih mašina se pojavljuje otpornost faznih namotaja statora  $R_1$ . Izvedba provodnika, koji su korišćeni u namotajima statora zavisi od primene i od snage mašine. Najčešće su korišćeni provodnici sa kružnim presekom, gde prilikom izrada namotaja više navoja se smešta u jedan kalem, koji je smešten u jednom žlebu. U nekim slučajevima, kada vrednost struje zahteva veći presek jednog navoja od preseka jednog provodnika, potrebno je paralelno spojiti više provodnika. Kod ovih namotaja može se zanemariti potiskivanje struje u provodnicima, što znači da otpornost ne zavisi od frekvencije napajanja.

Kod većih snaga električne mašine često se koriste provodnici četvrtastog preseka. Ovi provodnici bolje ispunjavaju prostor žleba, šta omogućava veće struje u jediničnom preseku žleba. Prilikom projektovanja ovih namotaja potrebno je uzeti u obzir potiskivanje struje, koje povećava otpornosti sa frekvencijom napajanja mašine.

Proračun otpornosti faznih namotaja u svakom slučaju je svedena na proračun otpornosti spoja provodnika korišćenih tokom izrada namotaja. Sa sledećom formulom jednostavno se može izračunati otpornost namotaja jedne faze:

$$R_1 = \rho_{prov} \frac{N \cdot l_{sr}}{S_{prov} \cdot a} \quad (173)$$

U izrazu otpornosti namotaja jedne faze  $\rho_{prov}$  je specifična otpornost materijala provodnika,  $N$  je broj navoja po fazi,  $l_{sr}$  je srednja dužina jednog navoja,  $S_{prov}$  - presek jednog navoja,  $a$  je broj paralelnih grana.

## 9. ODREĐIVANJE MOMENTA

Moment asinhronih motora je rezultat interakcije magnetnog fluksa i struje. Intenzitet momenta zavisi od jačine struje, fluksnog obuhvata i sinusa ugla koji se nalazi između fazora tih veličina. Navedena korelacija između fazora i momenta može se uzeti u obzir pomoću sledećeg izraza [2]:

$$M = \frac{Q_r}{2} \cdot p \cdot \text{Im}(\boldsymbol{\psi}_r \mathbf{i}_r^*) \quad (174)$$

U formuli momenta (174) broj žlebova  $Q_r$  potrebno je podeliti sa dva, jer su u proizvodu fazora fluksnog obuhvata  $\boldsymbol{\psi}_r$  i struje  $\mathbf{i}_r^*$  uračunate vršne vrednosti tih veličina.

Na osnovu ekvivalentne šeme asinhronog motora prikazane na slici 27., fazor fluksnog obuhvata se može izraziti pomoću struje, otpornosti rotora i kružne frekvencije struje rotora u sledećem obliku:

$$\boldsymbol{\psi}_r = -\frac{R_{stap-sred} \mathbf{i}_r}{j \omega_r^r} \quad (175)$$

Električna ugaona brzina osnovnog harmonika  $\omega_r^r$  je izračunata izrazom (176), a zavisi od frekvencije vremenskog-harmoničnog modela, koja je korišćena tokom rešavanja elektromagnetnog polja kod vremenskih-harmoničkih dvodimenzionalnih modela asinhronih mašina.

$$\omega_r^r = 2\pi f_{sl} \quad (176)$$

Frekvencija modela  $f_{sl}$  je određena na osnovu simulirane radne tačke asinhronog motora pomoću formule (163).

Uvrštavanjem izraza fazora fluksnog obuhvata (175) u formulu (174), moment motora se može napisati preko struje rotora u sledećem obliku [75]:

$$M = \frac{Q_r}{2} \cdot p \cdot \frac{R_{r,bar} |\mathbf{i}_r|^2}{\omega_r^r} \quad (177)$$

Gubici u rotoru kaveznog namotaja su jednaki proizvodu srednje vrednosti gubitaka u štapovima rotora i broja žlebova [75]:

$$P_{cu-rotor} = Q_r \cdot \frac{R_{r,bar} |\mathbf{i}_r|^2}{2} \quad (178)$$

Posle uvrštavanja gubitaka u bakru rotora (178), izraz momenta (177) se može napisati u sledećem obliku [75]:

$$M = \frac{p}{\omega_r^r} \cdot P_{cu-rotor} \quad (179)$$

Na osnovu formule (177) - (179) izračunavaju se komponente momenta  $M_\nu$ , koje potiču od odgovarajućih harmonika struje.

Tokom postupka određivanja  $M_\nu$  treba uzeti u obzir da se broj pari polova osnovnog harmonika razlikuje od broja pari polova viših harmonika  $\nu$ , koji su izračunati formulom (156). U izrazima momenta sinhronne brzine viših harmonika  $\nu$ , se određuju sledećom formulom:

$$\omega_{r,v}^r = \frac{\omega_r^r}{|\nu|} \quad (180)$$

Gubici u kaveznom namotaju koji potiču od struje harmonika  $\nu$  računaju se na osnovu izraza (178) [75]:

$$P_{cu-rotor,\nu} = Q_r \cdot \frac{R_{r,bar} |\mathbf{i}_{r,\nu}|^2}{2} \quad (181)$$

Moment  $M_\nu$  izračunat na osnovu gubitaka izazvanih strujom  $\nu$ -og harmonika u kavezu rotora mogu se napisati u sledećem obliku, gde je potrebno uzeti u obzir da je sinhrona brzina viših harmonika definisana formulom (180) [75]:

$$M_\nu = \text{sign}_T(\nu) |\nu| \frac{P}{\omega_r^r} \cdot P_{cu-rotor,\nu} \quad (182)$$

Apsolutna vrednost funkcije  $\text{sign}_T(\nu)$ , koja određuje predznak komponente momenta na osnovu smera rotacije harmonika  $\nu$ , je jedinični. U slučaju kada prostorni vektori određenog harmonika rotiraju u suprotnom smeru u odnosu na prostorni vektor osnovnog harmonika, predznak funkcije  $\text{sign}_T(\nu)$  je negativan [75].

$$\text{sign}_T(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{ako } \nu = 1 + m_s k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ -1 & \text{ako } \nu = -1 + m_s k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{cases} \quad (183)$$

Broj faza statora  $m_s$  se koristi za određivanje mogućih rednih brojeva harmonika struje. Redni brojevi harmonika struje rotora ispravnog motora su neparni brojevi. Harmonici sa parnim rednim brojevima javljaju se kod mašine sa ekscentričnim rotorom.

Kao što se vidi iz definicije funkcije  $\text{sign}_T(\nu)$ , neke harmonične komponente momenta imaju negativan predznak, te je rezultatni moment motora jednak zbiru komponentata  $M_\nu$  koje potiču od odgovarajućih komponentata strujnih harmonika [75].

$$M_{res} = \sum_{\nu} M_\nu \quad (184)$$

Rezultatni moment  $M_{res}$  je manji od momenta određenog na osnovu gubitaka u bakru kaveznog namotaja rotora, jer kao što se vidi iz definicije funkcije  $\text{sign}_T(\nu)$  određene komponente momenta imaju negativan predznak (181).

## 10. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

Polazeći od činjenice, da u predloženom metodu za određivanje parametara mašine, nisu definisana nikakva ograničenja (kao što je broj žlebova rotora kod nekih autora – paran ili neparan broj žlebova), on se može koristiti za proračun parametara za bilo koju željenu konfiguraciju žlebova rotora i statora, kao i za bilo koju radnu tačku motora.

U ovoj glavi potvrđena je ispravnost prethodno predloženog metoda poređenjem rezultata merenja kratkog spoja i praznog hoda asinhronne mašine sa rezultatima proračuna niskonaponskog asinhronog motora (motor 1 u tabeli 1) na osnovu KE modela. Parametri motora su izračunati prethodno opisanom metodom na osnovu rešenja raspodele elektromagnetnog polja sa vremenskom harmoničnom formulacijom. Pored parametara motora 1. određeni su i parametri visokonaponskog motora 2, čiji su podaci prikazani u tabeli 1.

Ispravnost predloženog metoda najlakše se može potvrditi poređenjem izračunatih karakteristika zbira rasipnih induktiviteta kratkospojenog motora 1, određenih predloženom metodom, u funkciji struje, sa karakteristikama iste veličine izračunatim na osnovu ogleđa kratkog spoja navedene mašine (slika 28. a.). Pored poređenja karakteristika izračunate za kratak spoja mašine, upoređena je i karakteristika induktiviteta magnećenja, izračunata za prazan hod u funkciji priključnog napona (slika 28. b.).

Radi poređenja rezultata izračunatih predloženom metodom, karakteristike parametara ekvivalentne šeme, kao i moment mašine određeni su u funkciji klizanja, pa su upoređeni sa karakteristikama izračunatim analitičkim izrazima [43][44]. Uticaj potiskivanja struje na karakteristike otpornosti rotora i rasipnih induktiviteta su uzete u obzir primenom Multilayer – metode [43], tokom određivanja otpornosti rotora analitičkim izrazima. Pri poređenju karakteristike momenta mašine izračunatog analitičkim izrazima, predloženom metodom i pomoću Maxwell-stress-tenzor-a, mogu se uočiti razlike između karakteristika.

Oblici žlebova motora 1 i 2 su prikazani na slici 29., kao i rešenje magnetnog polja za nazivne radne tačke mašina. Raspodela magnetnog polja je izračunata primenom softvera FEMM 4.2 [76].

Motor 1 je dvokavezni, materijal štapova je aluminijum, dok motor 2 ima štapove od bakra trapezoidalnog preseka. Kvadrat ispod trapezoidalnih štapova kod motora 2 je ispunjen nemagnetnom letvicom radi njegovog fiksiranja u žlebu.

### 10.1 Definicija modela asinhronne mašine

Raspodela elektromagnetnog polja asinhronih mašina je izračunata pomoću besplatnog softvera FEMM 4.2 [76]. Korišćen je modul za proračun dvodimenzionalnih magnetnih modela, koji se opciono može podesiti u softveru kao i ostali parametri simulacije.

U postupku definisanja problema potrebno je odrediti frekvenciju modela i jedinicu dužine. Frekvencija modela pri primeni jednosmerne struje ima nultu vrednost. Pri proračunu modela asinhronne mašine, frekvencija modela jednaka je frekvenciji struje rotora u datoj radnoj tački. Pored frekvencije potrebno je odrediti dužinu modela u smeru  $z$ , kao i tačnost proračuna i najmanji ugao trouglova koji su korišćeni pri diskretizaciji modela.



U softveru FEMM 4.2 postoji mogućnost automatizacije proračuna ili konstruisanje modela pomoću skript jezika LUA. Primenom definisanih postupaka sa jezikom LUA, može se ponavljati proračun sa različitim vrednostima parametara, što omogućuje određivanje karakteristike u funkciji datog parametra.

Konstruisanje geometrije mašine može se obaviti na različite načine. Ručno, što se u pojedinim slučajevima može koristiti, ali pri konstruisanju celog modela nije efikasno. Pomoću LUA skripta može se automatizovati konstruisanje modela mašine na osnovu parametara. Pored navedenih metoda moguće je i uneti oblik magnetnog kruga definisanog u DXF formatu.

Detaljan opis softvera može se naći u dokumentaciji [76] (posle instalacije programa upustvo je sadržano u mapi programa), gde je detaljno opisana njegova primena.

Vrednosti struje u provodnicima se definišu pomoću strujnih kola. Vrednost struje strujnog kola u modelu je ekvivalentna sa strujom u provodniku u datom delu žleba. Pomeranje u vremenu između struja trofaznog sistema pri definisanju struja u provodnicima statora, uzima se u obzir u modelu primenom kompleksnih brojeva.

Na granici modela je korišćen Dirichlet-ov granični uslov, te zbog simetrije magnetnog kruga mašine vrednost magnetnog vektorskog potencijala na granici modela ima nultu vrednost.

Posle definisanja problema softver generiše mrežu i izračunava raspodelu elektromagnetnog polja, koja se može naći u datoteci sa ekstenzijom “.ans”.

## **10.2 Određivanje podataka na osnovu rešenja elektromagnetnog polja**

U prethodnim glavama rada, prikazani su metodi za određivanje prostornih vektora struje statora i rotora, kao i metod za proračunavanje fazora fluksnog obuhvata na osnovu strujno-fluksnog obuhvata i fazora struje.

U formulama prostornih vektora struje korišćene su vrednosti struje u pojedinim žlebovima mašine. Pored prostornih vektora struje, izračunati su strujni fluksni obuhvati, kao i moment koji proizvodi motor. Ovi podaci su određeni na osnovu rešenja elektromagnetnog polja pomoću LUA programskog skripta i upisani su u datoteke, koje su kasnije korišćene pri određivanju parametara, struje, napona i momenta mašine.

U softveru FEMM 4.2 implementirani su metodi za određivanje struje i strujnih fluksnih obuhvata u okviru površinskih integrala. Na taj način bez složenih daljnjih proračuna moguće je izračunati potrebne podatke.

## **10.3 Određivanje karakteristike mašine na osnovu podataka**

Određivanje karakteristika na osnovu vrednosti struje, fluksa i strujno-fluksnih obuhvata zahteva primenu kompleksnih matematičkih alata. Zato je pogodnije koristiti matematički softver tokom proračuna karakteristike motora. U okviru teze potrebni matematički proračuni su obavljani primenom matematičkog softvera OCTAVE (besplatni softver, sa ograničenim mogućnostima korišćenja funkcija MATLAB-a).

## 10.4 Primena metoda za određivanje parametara asinhronne mašine u kratkom spoju

Vrednosti rasipnih induktiviteta su određene na osnovu rezultata oglada kratkog spoja. Tokom oglada kratkog spoja napon motora se menja, dok struja ne postiže nazivnu ili malo veću vrednost od nazivne, zavisno od temperature motora i izvora napona. Na osnovu merene vrednosti struje određena je struja kratkog spoja pri nazivnom naponu motora. Rezultati merenja omogućuju određivanje zbira rasipnih induktiviteta statora i rotora u funkciji struje statora. Razdvajanje zbira rasipnih induktiviteta na statorski i rotorski je nemoguće, zato se najčešće pretpostavlja, da su rasipni induktiviteti statora i rotora jednaki, što ne važi u većini slučajeva.

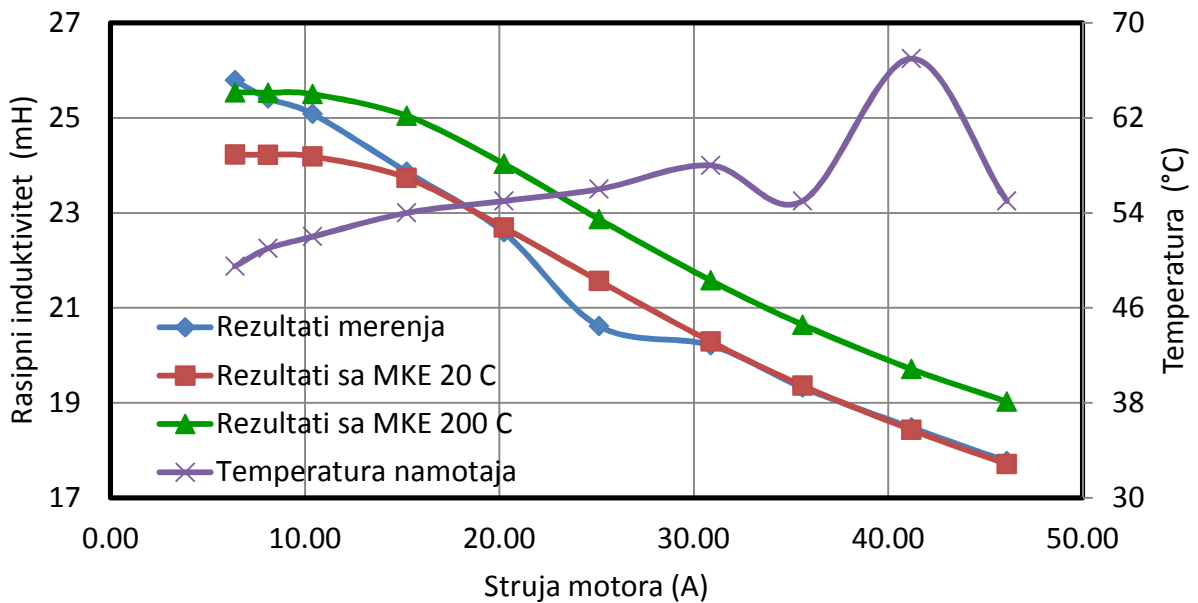
**TABELA 1.** Dimenzije i nazivni podaci asinhronih motora

	Param.	Merna jedinica	Motor 1 (niskonaponski, aluminijumski kavez)	Motor 2 (visokonaponski, bakarni kavez)
Spoljašnji prečnik statora	$D_{\text{spol-stator}}$	mm	200	970
Spoljašnji prečnik rotora	$D_{\text{spol-rotor}}$	mm	124,3	666,5
Unutrašnji prečnik statora	$D_{\text{un-stator}}$	mm	125	670
Unutrašnji prečnik rotora	$D_{\text{un-rotor}}$	mm	48	420
Dužina limpaketa	$L_{\text{limpaket}}$	mm	150	600
Broj žlebova statora	$Z_{\text{stator}}$	-	36	72
Broj žlebova rotora	$Z_{\text{rotor}}$	-	28	86
Košenje štapa rotora	<i>košenje</i>	-	1/36	-
Broj pari polova	$p$	-	2	3
Korak namotavanja	$y$	-	9/9	10/12
Linijski napon	$V_L$	V	400	6300
Nazivna snaga	$P$	kW	7,5	800
Nazivni moment	$M$	Nm	49,7	7701
Nazivna struja	$I$	A	15	85
Frekvencija	$f$	Hz	50	50
Nazivna brzina	$n$	rpm	1440	992
Spoj namotaja	-	-	D	Y
Materijal namotaja statora	-	-	bakar	bakar
Materijal štapa rotora	-	-	aluminijum	bakar

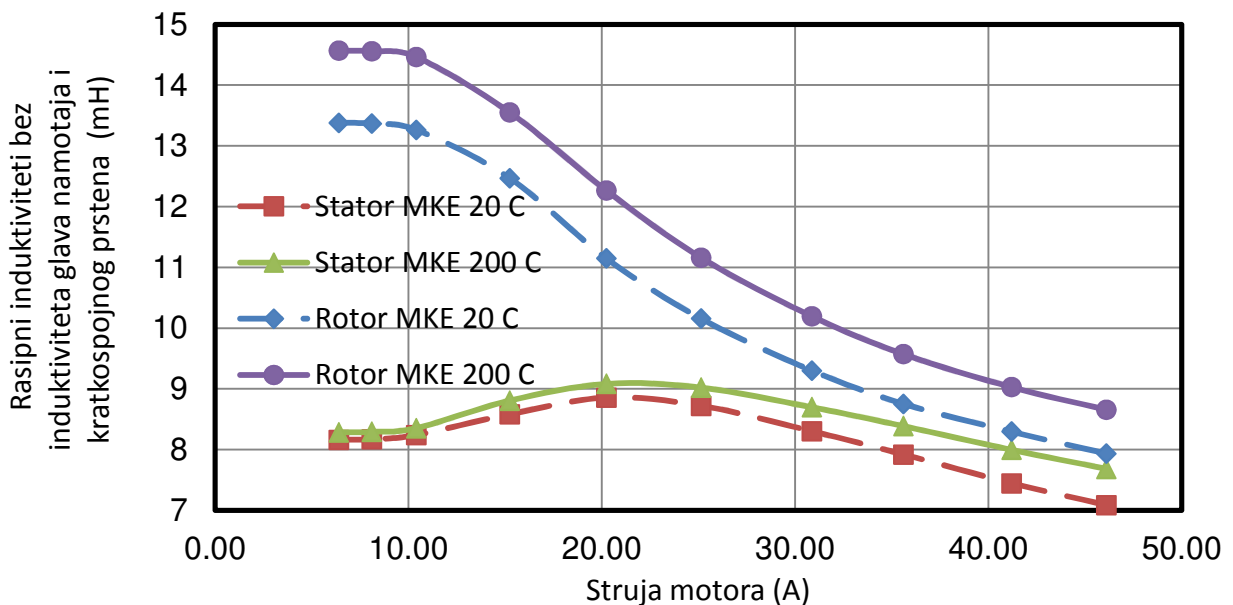
Posle određivanja zbira rasipnih induktiviteta na osnovu oglada kratkog spoja izračunate su iste veličine na osnovu modela KE.

Tokom proračuna zbira rasipnih induktiviteta pomoću modela konačnih elemenata, vrednosti struje statora vremensko-harmoničkog modela su jednake sa

vrednostima struje izmerenim tokom oglada kratkog spoja. Vrednosti rasipnih induktiviteta su izračunate predloženom metodom, radi provere ispravnosti metoda.



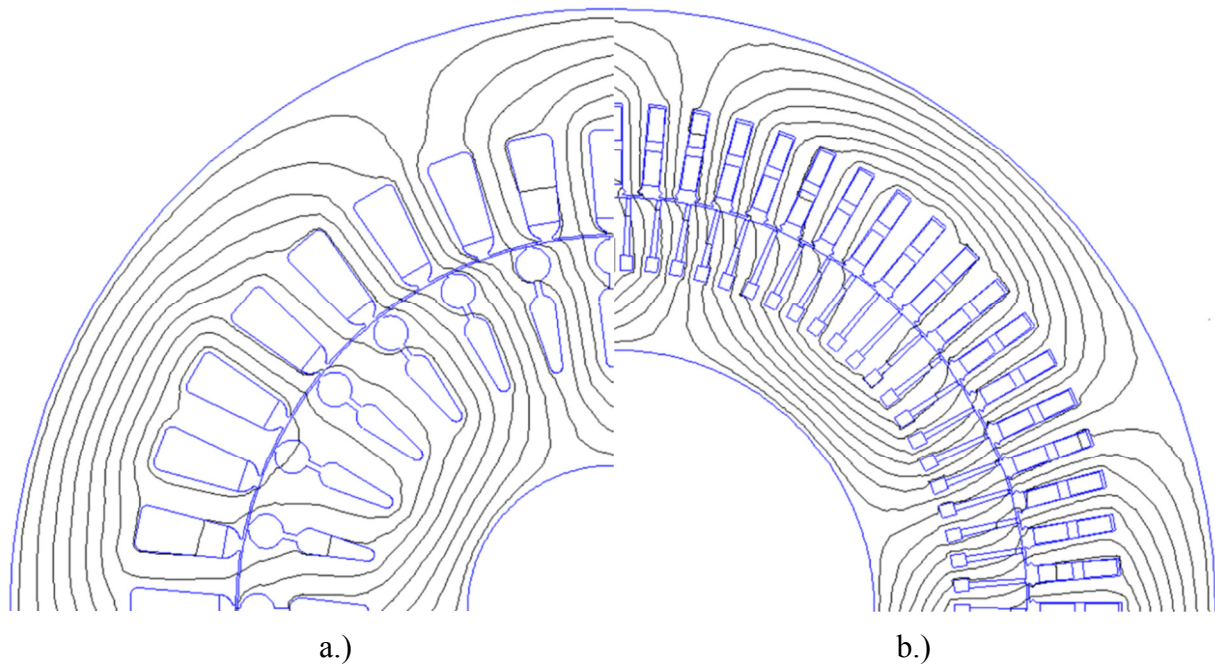
a.)



b.)

Slika 28. a.) Zbir rasipnih induktiviteta statora i rotora i promena temperature namotaja statora u funkciji struje motora, b.) Promena rasipnih induktiviteta statora i rotora u funkciji struje motora.

Zbir rasipnih induktiviteta realnog motora i modela KE funkcije struje statora je prikazana na slici 28. a.). Na slici 28. a.) je prikazana vrednost zbira rasipnih induktiviteta izračunata pomoću 2D vremensko-harmoničnog modela KE i rasipnog induktiviteta glava namotaja izračunata sa analitičkim izrazom, pri različitim temperaturama motora.



Slika 29. a.) Ekvipotencijalne linije magnetnog vektorskog potencijala kod motora 1 za nazivnu vrednost klizanja i rotorsku frekvenciju od 2 Hz,  
b.) Ekvipotencijalne linije magnetnog vektorskog potencijala kod motora 2 za nazivnu vrednosti klizanja i rotorsku frekvenciju 0.4 Hz

Glava namotaja asinhronne mašine u ovom opsegu snage formira prsten od provodnika, te se njen induktivitet može odrediti na osnovu izraza za određivanje rasipnog induktiviteta glave dvoslojnog namotaja [41]:

$$L_{end-wind} = 2 \cdot \frac{N_1^2}{p} \cdot \Lambda_r (1.3 \cdot \tau_p + 0.05) \quad (185)$$

U izrazu za određivanje rasipnog induktiviteta  $\Lambda_r$  je magnetni permeabilitet glave namotaja ( $0.41 \cdot 10^{-6}$  Vs/Am<sup>2</sup>),  $\tau_p$  je polni korak (izražen u metrima), i  $N_1$  je broj navoja namotaja jedne faze. Induktivitet glave namotaja motora 1 iznosi  $2.685 \cdot 10^{-3}$  H.

Za velike šablonske namotaje asinhronne i sinhronne mašine, induktivitet glave namotaja može se odrediti primenom kompleksnih analitičkih izraza. Ovaj induktivitet potiče od magnetnog fluksa koji se zatvara u vazduhu. Magnetni krug u ovom slučaju ne sadrži gvožđe i zato nema zasićenja magnetnog kruga kod porasta gustine magnetnog fluksa. Uticaj lim paketa statora može se uračunati primenom modela „slike“, koji pretpostavlja konstantni permeabilitet [77], [78].

Tokom izvođenja ogleđa kratkog spoja temperatura rotora se povećava, zbog čega se menja impedansa rotora. U KE modelima kratkog spoja motora je podešena tako da je jednaka merenoj vrednosti struje. Međutim, raspodela struje u štapovima rotora, koja potiče od promene magnetnog vektorskog potencijala, zavisi od specifične otpornosti materijala provodnika, koja se menja sa temperaturom. Zbog toga, za iste vrednosti struje, izračunate su vrednosti zbira rasipnih induktiviteta, koje se razlikuju i zavise od specifične otpornosti provodnika rotora.

Ogled kratkog spoja na motoru 1 izveden je pri početnoj temperaturi od 23 °C. Tokom merenja struje i promene napona, temperature namotaja statora i rotora su se povećavale. Promena temperature namotaja statora je merena pomoću Pt100 termo otpornika. Srednje vrednosti temperature u tri faze su prikazane na slici 28. a.). Rast temperature nije bio konstantan, jer su vremenski intervali između pojedinačnih merenja bili različiti zbog sporog podešavanja napona na izlazu autotransformatora za napajanje motora. Problem je bio spor odgovor motora za podešavanje pozicije kliznih četkica na sekundaru transformatora. Promena vrednosti temperature kaveznog namotaja rotora je bila nepoznata, te je zbir rasipnih induktiviteta izračunat za temperature motora 20 °C i 200 °C, kao što je prikazano na slici 28. a.). Ove vrednosti su realno očekivane minimalne i maksimalne vrednosti temperature, koje se pojavljuju pri ogledu kratkog spoja. Na početka ogleada kratkog spoja vrednost struje je bila 46 A koja je redukovana u koracima na 6.4 A. Na taj način temperatura je bila stabilizovana tokom celog postupka merenja.

Vrednosti rasipnih induktiviteta, takođe zavise od stepena zasićenja, te zbog toga tokom ogleada kratkog spoja dolazi do smanjenja rasipnog induktiviteta sa rastom struje motora. Uticaj zasićenja je demonstriran na slici 28. b.), na kojoj je prikazana promena rasipnih induktiviteta statora i rotora u funkciji struje na pretpostavljenim vrednostima temperature. Na slici 30. a.) je prikazana konfiguracija opreme za merenje ogleada kratkog spoja i praznog hoda za motor 1.

## **10.5 Određivanje induktiviteta magnećenja (Motor 1)**

Promena induktiviteta magnećenja sa priključnim naponom je određena iz ogleada praznog hoda. Uticaj zasićenja magnetnog kruga na ovu reaktansu je značajno. Tokom ogleada praznog hoda napon motora je smanjivan neprekidno počevši od približno 10% povišenog nazivnog napona pa sve do vrednosti kod koje klizanje motora počinje da se poveća. Zbog smanjenja fluksa statora, aktivna komponenta struje statora raste, da bi motor razvijao dovoljan moment na vratilu koji kompenzuje gubitke trenja i ventilacije. Zbog toga u ogledu praznog hoda, radna tačka u kojoj priključni napon ima vrednost nula, ne može se ostvariti, te se gubici trenja i ventilacije uobičajeno određuju ekstrapolacijom gubitaka u gvožđu tokom smanjenja napona na vrednost nula. Teoretski, vrednost aktivne komponente struje motora treba da ima vrednost nula tokom ogleada praznog hoda, ali taj uslov nije ispunjen u stvari, jer je uvek potrebno razvijati mali moment na vratilu mašine radi pokrivanja gubitaka trenja i ventilacije. U vremenski harmoničnom modelu ovo odstupanje od realnog modela nije uzeto u obzir. Vrednosti struje statora u praznom hodu u vremenskom harmoničnom modelu su određene tako da napon izračunat na osnovu fluksnog obuhvata i pada napona na otpornosti namotaja statora, je jednak naponu na priključcima motora [79]. Na slici 30. b.) je prikazana promena induktiviteta magnećenja u funkcija napona, izračunata na osnovu praznog hoda modela KE. Povećavanje odstupanja između karakteristika može se objasniti smanjenjem napona zbog smanjenja brzine obrtanja motora.

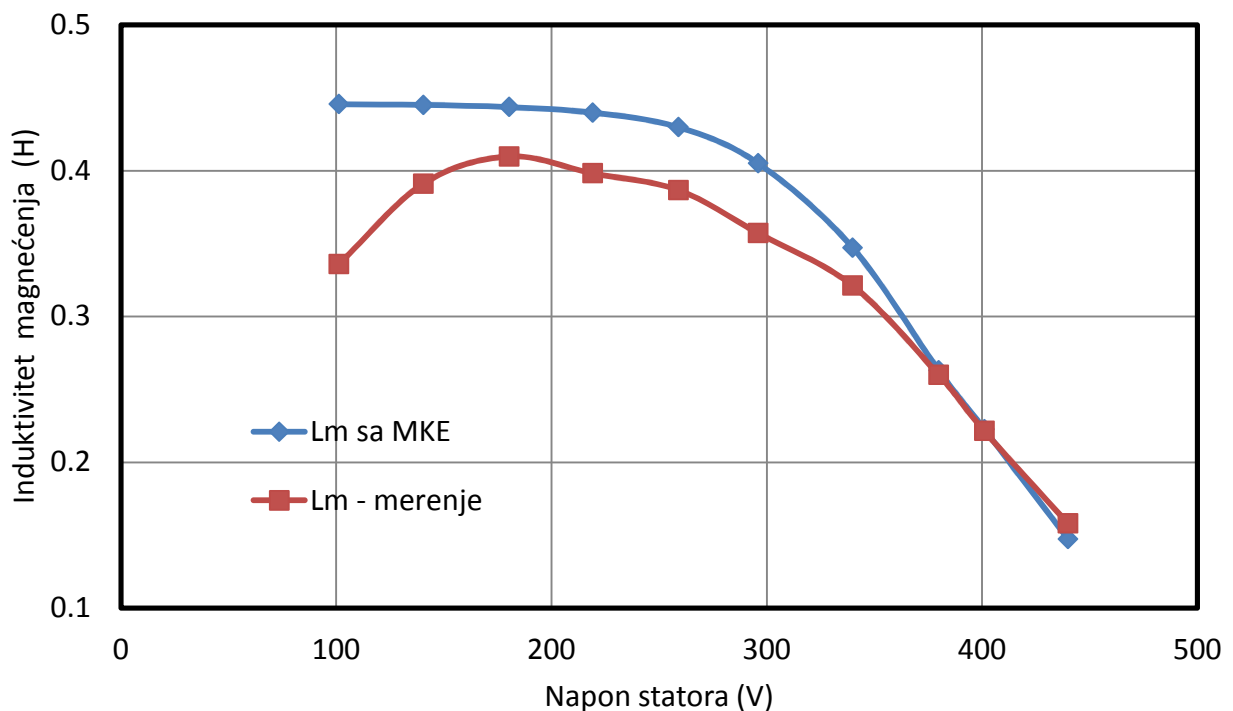
## **10.6 Karakteristike induktiviteta (motor 1 i motor 2)**

U ovom poglavlju karakteristike motora (sa tehničkim podacima navedenim u tabeli 1.), su određene pomoću predloženog metoda za različite vrednosti frekvencije vremensko-harmoničnog modela i primenom klasičnih analitičkih formula sa višeslojevitim pristupom potiskivanja struje u štapovima rotora.

Na slikama 31.a.) i 31.b.) su prikazane promene rasipnih induktiviteta i induktiviteta magnećenja u funkciji klizanja. Namotaj statora je napajan sa nazivnim naponom u svakoj radnoj tački sa odgovarajućim vrednostima struja određenih metodom opisanom u [79]. Rasipni induktiviteti izračunati su sa analitičkim formulama i nisu funkcija klizanja, te zato imaju konstantnu vrednost  $L_{\sigma} = 14.4mH$  (motor 1) i  $L_{\sigma} = 12.04mH$  (motor 2). Na osnovu karakteristike prikazane na slici 31.a.) može se zaključiti, da se rasipni induktiviteti povećavaju tokom zaleta motora, dok se frekvencija rotora i struja motora smanjuju. To se očekuje jer se impedansa rotora povećava sa brzinom rotora, te zato struje statora i rotora opadaju, te se smanjuje zasićenje komponentata magnetnog kruga, preko kojih se zatvaraju magnetne silnice rasipnih magnetnih fluksova.



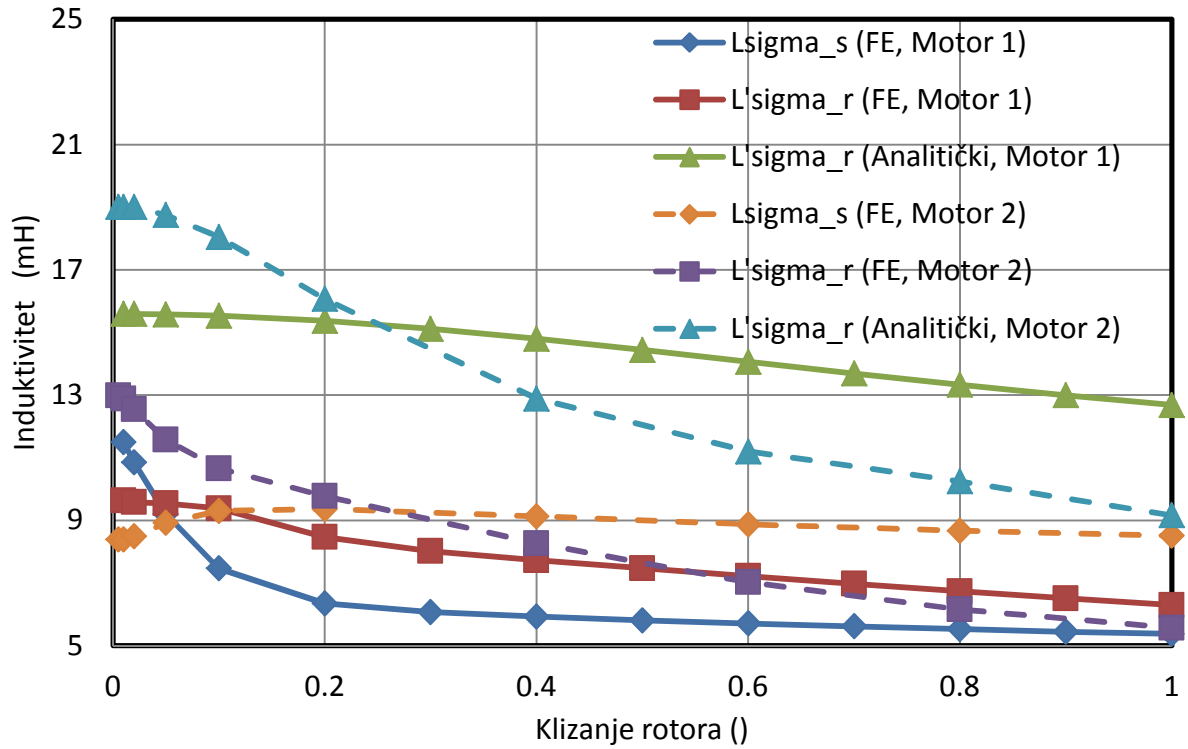
a.)



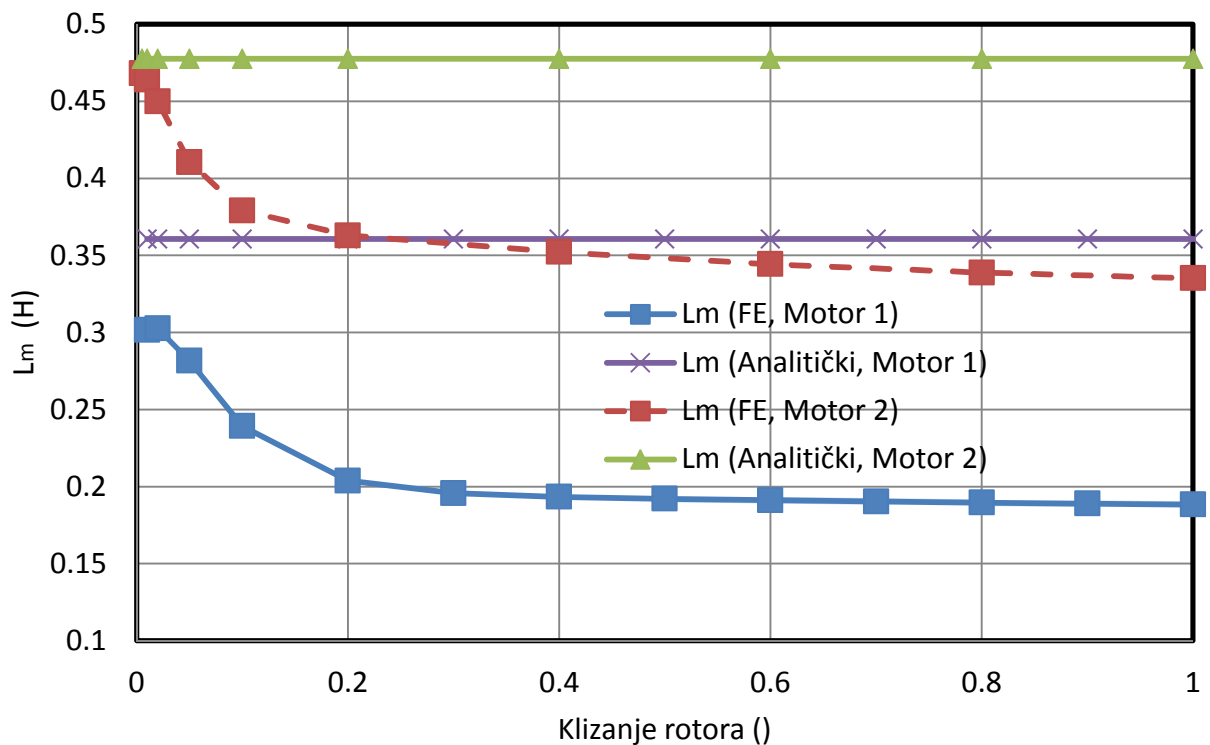
b.)

- Slika 30. a.) Konfiguracija merne opreme korišćene prilikom oglada praznog hoda i kratkog spoja motora 1 (motor se nalazi u sredini),  
 b.) promena induktiviteta magnećenja u funkciji napona motora.

Rasipni induktiviteti izračunati sa analitičkim izrazima imaju veće vrednosti od istih određenih pomoću MKE. Ovo se može pripisati činjenici da vrednosti



a)



b)

Slika 31. a.) Promena rasipnih induktiviteta statora i rotora u funkciji klizanja,  
b.) promena induktiviteta magnećenja u funkciji klizanja.

rasipnih induktiviteta, izračunate sa analitičkim izrazima, ne uzimaju u obzir

zasićenje magnetnog kruga rasipnog fluksa u gvožđu.

Zasićenje magnetnog kruga kod malih brzina smanjuje vrednosti induktiviteta magnećenja (slika 31.b.)). kako raste brzina obrtaja motora smanjuje se zasićenje te raste i induktivitet magnećenja.

Induktivitet magnećenja određen sa analitičkim izrazom nije funkcija klizanja jer pri proračunu ne uzima se u obzir zasićenje magnetnog kruga, a približno je jednak sa vrednostima računatim pomoću MKE u praznom hodu, posebno za motor 2.

Ispravnost novog metoda za proračun karakteristike rasipnih induktiviteta štapa rotora se može potvrditi poređenjem karakteristike promene rasipnih induktiviteta, prikazanim na slici 31.a.), i promene rasipnog induktiviteta četvrtastog štapa određena u dodatku a.). Pri poređenju karakteristika treba uzeti u obzir, da karakteristike na slici 31.a.) određene u funkciji klizanja rotora, koje je proporcionalno sa frekvencijom struje u štapovima, dok karakteritika u dodatku je određena u funkciji veličine, proporcionalnoj sa kvadratnim korenom frekvencije.

## **10.7 Karakteristike otpornosti motora**

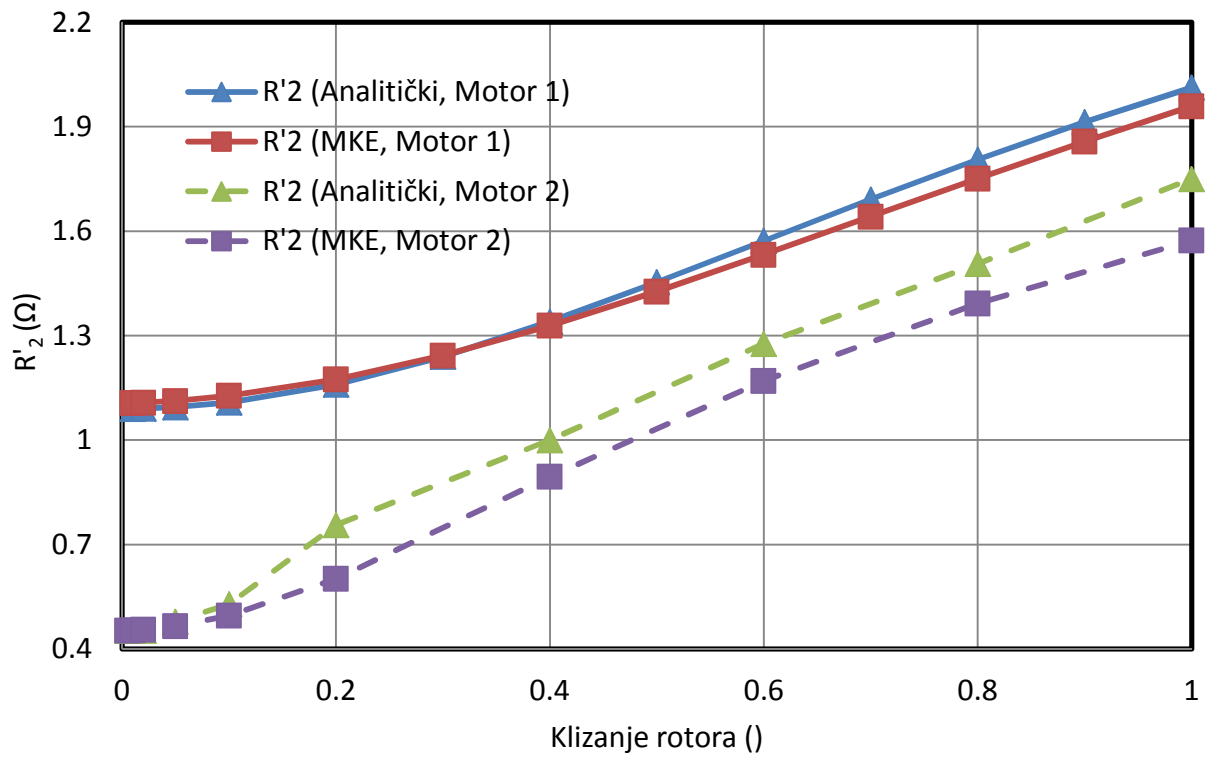
Promena otpornosti rotora, svedena na statorsku stranu u funkciji klizanja je prikazana na slici 32. a.). Promena vrednosti otpornosti rotora može se aproksimirati linearnom funkcijom frekvencije struje rotora. Kod većih frekvencija, struja rotora je koncentrisana u blizini otvora žlebova gde se gustina struje povećava, izazvajući povećanje otpornosti rotora.

Na slici 32. b.), je prikazana promena momenta u funkcija klizanja, izračunata sa predloženom metodom, sa analitičkim izrazima i Maxwell stress tenzorom. Upoređenjem karakteristika može se zaključiti da predloženi metod izračunava vrednost momenta prilično dobro u odnosu na moment određen sa Maxwell stress tenzorom. Tačnost obe metoda je veća od analitičke. Karakteristike momenta izračunate predloženom metodom opisanom u poglavlju 9. praktično se podudaraju sa izračunatim karakteristikama primenom Maxwell stress tenzor-a. To znači da predloženi metod prevazilazi ograničenosti proračuna momenta na osnovu gubitaka u otpornostima štapova rotora.

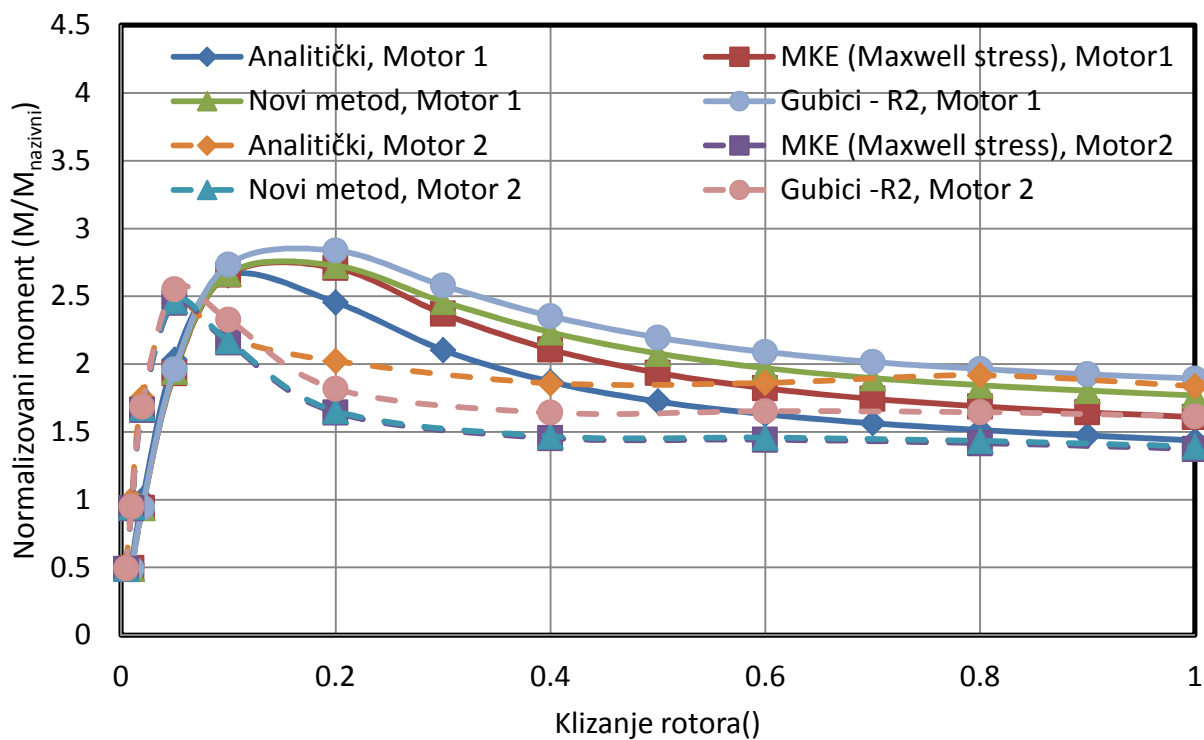
Vrednosti otpornosti rotora na osnovu formule (172) ne određuje tačne vrednosti momenta, jer proračun momenta ne uzima u obzir uticaj viših harmonika struje rotora. Ovaj moment značajno se razlikuje od momenta određenog sa Maxwell stress tenzorom kao što je prikazano na slici 32. b.) jer komponente momenta viših harmonika struja, razvijaju kočione momente, smanjuju rezultantni moment i stepen korisnog dejstva motora.

Ispravnost novog metoda za proračun karakteristike otpornosti štapa rotora se može potvrditi poređenjem karakteritike promene otpornosti rotora, prikazanoj na slici 32.a.), i promene otpornosti četvrtastog štapa određenoj u dodatku a.). Pri upoređenju karakteristika treba uzeti u obzir, da karakteristike na slici 32.a.) određene u funkciji klizanja rotora, koje je proporcionalno sa frekvencijom struje u štapovima, dok karakteritika u dodatku je određena u funkciji veličine, proporcionalne sa kvadratnim korenom frekvencije.





(a)



(b)

Slika 32. a.) Promena otpornosti rotora, svedena na statorsku stranu  $R'_2$  u funkciji klizanja  $i$   
 b.) promena momenta motora u funkciji klizanja.

## 11. ZAKLJUČAK

Asinhrona mašina su najviše korišćene mašine u današnjim savremenim pogonima, te je nalaženje efikasnog metoda za određivanje njihovih karakteristika na osnovu rešenja elektromagnetnih polja vrlo aktuelno.

U ovom radu je predložen novi pristup proračuna parametara asinhronih motora na osnovu rešenja elektromagnetnog polja pomoću vremensko-harmonične formulacije modela KE. Novi metod pojednostavljuje određivanje fazora struje i fluksnih obuhvata, uključujući i njihove harmonične komponente, te omogućuje proračun karakteristika induktiviteta i otpornosti rotora u funkciji struje motora.

U tezi je predložen novi metod za određivanje prostornih vektora višefaznih namotaja kaveznih namotaja asinhronih mašina. Prednosti predloženog metoda su sledeće:

- Određuju se prostorni vektori osnovnih prostornih harmonika struja statora i rotora, koji su ekvivalentni sa fazorima struja u T ekvivalentnoj šemi asinhronih motora, što znači da se ne zahteva primena novih modifikovanih složenijih modela asinhronih mašina.
- Metod je kompatibilan sa klasičnom metodom za određivanje prostornih vektora struja trofaznih namotaja, što znači da prostorni vektori izračunati sa predloženom novom metodom se slažu sa prostornim vektorima određenim sa klasičnim formulama prostornih vektora.
- Prikazan je način određivanja prostornih vektora struje u slučajevima kada su vrednosti struje strane kalema određene i sa kompleksnim i sa realnim brojevima.
- Metod za određivanje prostornih vektora struje je fleksibilan, što znači da ne zavisi od broja žlebova ili konfiguracije namotaja rotora ili statora.
- Fazori fluksnih obuhvata su izračunati na osnovu strujno-fluksnih obuhvata i struja statora i rotora. Ovaj pristup ne zahteva poseban proračun prostornih vektora fluksnih obuhvata.

Na osnovu prethodnih zaključaka može se smatrati, da su hipoteze metoda za određivanje prostornih vektora višefaznih namotaja iz poglavlje 1.1 dokazane.

Upoređenjem karakteristika induktiviteta izračunatih na osnovu fazora struje i fluksnih obuhvata statora i rotora u praznom hodu i kratkom spoju sa karakteristikama istih veličina izračunatih na osnovu ogleđa praznog hoda i kratkog spoja, može se zaključiti da se karakteristike dobro slažu. Na osnovu prethodnih poređenja karakteristika, može se smatrati da je ispravnost predloženog metoda dokazana.

Ovaj metod takođe je pogodan za izračunavanja induktiviteta, otpornosti rotora i momenta, a omogućuje i određivanje ovih karakteristika u funkciji klizanja, što se u poglavlju 1.1 takođe pojavljuje kao hipoteza predloženog metoda.

Prednost metoda za proračuna induktivnosti prikazanog u tezi su:

- Vrednosti induktiviteta T ekvivalentne šeme asinhrona mašine određene su na osnovu činjenice da su fazori fluksnih obuhvata linearne kombinacije fazora

struje. Na taj način iz jednog rešenja magnetnog polja se mogu odrediti navedene induktivnosti, pri čemu nije potrebno primeniti metod smrznutih permeabiliteta. Metod sa smrznutim permeabilitetima zahteva ponavljanje proračuna magnetnog polja, radi određivanja sopstvenih i međusobnih induktiviteta strana kalema.

- Postupak određivanja karakteristika induktiviteta uzima u obzir raspodelu struje u žlebovima rotora i statora, kao i oblik magnetnog kruga. Pri proračunu međusobnih induktiviteta pojedinačnih strana kalema, sa smrznutim permeabilitetom magnetnog kruga, raspodela struja se znatno razlikuje od stvarne raspodele u računatoj radnoj tački.
- Povećavanjem klizanja rotora opada induktivnosti magnećenja, kao posledica karakteristike magnećenja može se posmatrati, uprkos činjenici da jaram rotora nije zasićen. Razlog ovoga fenomena je činjenica da se veliki deo glavnog magnetnog polja zatvara preko žleba rotora, zbog potiskivanja magnetnog polja, što znači da resultantni permeabilitet magnetnog kruga glavnog polja je znatno manji od onog koji se može očekivati kod primene smrznutih magnetnih permeabiliteta.

Ekvivalentna otpornost namotaja rotora u T ekvivalentnoj šemi asinhrona mašine je izračunata na osnovu gubitaka u bakru rotora.

- Iz definicije formulacije vremenskog harmoničkog modela magnetnog polja proizilazi, da svi prostorni harmonici struje statora i rotora pulsiraju sa frekvencijom modela, što znači da su vrednosti ekvivalentnih otpornosti namotaja rotora svakog prostornog harmonika struje rotora jednake.

U zadnjoj hipotezi u poglavlju 1.1 je pomenuta metoda proračuna komponenata momenata, koje potiču od prostornih harmonika struje rotora. U poglavlju 10.7 prikazane su karakteristike momenta izračunatih za različite motore..

Na osnovu rešenja magnetnog polja sa MKE, mogu se odrediti gubici u štapovima rotora i moment motora, na osnovu Maxwell stress tenzora. Između karakteristike momenta, određenog sa gubicima u bakru rotora i sa Maxwell stress tenzorom, postoji razlika. Polazeći od činjenice, da pojedinačne komponente momenta, koji potiču od viših harmonika struje, razvijaju kočioni moment u odnosu na moment izazvan osnovnim harmonikom, kod karakteristika momenta dolazi do odstupanja. Komponente momenta i njihovi predznaci takođe se mogu odrediti sa predloženom metodom. Ovaj pristup proračunu momenta određuje njegovu karakteristiku, koja se dobro slaže sa karakteristikom momenta izračunatom pomoću Maxwell stress tenzora.

Izrazi korišćeni tokom proračuna parametara mogu se primeniti kod sistema namotaja sa bilo kojim brojem faza, a i omogućuju proračun komponenata momenta, koje potiču od harmonika struje asinhrona mašine sa brojem faza većim od tri [80].

Prilikom izrade ove doktorske disertacije jedan deo rezultata istraživanja objavljen je u naučnom časopisu *Electric Power Components and Systems*:

I. Király, D. Žarko, “Extended Space Vector Method for Calculation of Induction Motor Parameters“, *Electric Power Components and Systems*, vol. 44., pp. 928-940, Apr 2016.

Predloženi metod u ovom radu približava se problemu proračuna parametara rotacione električne mašine na različiti način u odnosu na metode koje su opisane u literaturi [6]-[16]. To znači da postoji mogućnosti za proširenje novog metoda i definisanje novih metoda proračuna parametara različitih vrsta rotacionih električnih mašina.

Daljnja moguća primena predloženih metoda su:

- Određivanje parametara asinhronne mašine, kao i sinhronne mašine sa izraženim polovima i valjkastim rotorom na osnovu rešenja magnetnog polja sa vremenskim korakom. Pri proračunu elektromagnetnog polja sa formulacijom vremenskih koraka, vrednosti struje su izražene sa realnim brojevima, što znači da treba definisati strujni fluksni obuhvat sa realnim vrednostima gustine struje i magnetnog vektorskog potencijala.
- Proširenje metoda za proračun parametara sinhronne mašine sa permanentnim magnetima.
- Određivanje komponenata momenta na osnovu viših prostornih harmonika struje statora.
- Modifikacija modela za određivanje parametara i karakteristika asinhronne mašine, uzimajući u obzir otpornosti i induktivnosti kratkospojenih prstena kavezni namotaja asinhronih mašina.

## LITERATURA

1. P. K. Kovács, *Transient Phenomena in Electrical Machines*, Akadémiai Kiadó, 1984.
2. P. Vas, *Sensorless Vector and Direct Torque Control*, Oxford University Press, 1998.
3. J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, INC, 2002
4. Humphries S. Jr ,*Finite element methods for electromagnetics*, [http://fieldp.com/documents/Finite\\_Element\\_Electromag.pdf](http://fieldp.com/documents/Finite_Element_Electromag.pdf) (preuzeto 05.05.2016).
5. G. R. Buchanan, *Finite Element Analysis*, MsGraw-Hill Companies, INC, 1995.
6. A. Yahiaoui, F. Bouillault, “2D and 3D Numerical Computation of Electrical Parameters of an Induction Motor“, *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 30, pp. 3690-3692, Sep 1994.
7. A. Suzuki, M. Ohto, T. Takakura, “Circuit Parameters Determination Involving Stray Load Loss and Harmonic Torques for High-Speed Induction Motors Fed by Inverters“, *IEEE Trans. Energy Conversion*, vol. 28, pp. 154-163, March 2013.
8. K. Yamazaki, “Comparison of Induction Motor Characteristics Calculated from Electromagnetic Field and Equivalent Circuit Determined by 3D FEM“, *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 36, pp. 1881-1885, Jul 2000.
9. K. Yamazaki, “An Efficient Procedure to Calculate Equivalent Circuit Parameter of Induction Motor Using 3-D Nonlinear Time-Stepping Finite-Element Method“, *IEEE Trans. Magnetics*, vol 38, pp.1281-1284, March 2002.
10. A. Stermecki, O. Bíró, K. Preis, S. Rainer, K. Krischan, G. Ofner, “Calculation of load-dependent equivalent circuit parameters of squirrel cage induction motors using time-harmonic FEM“, *COMPEL*, vol. 29, pp.1331 – 1344, 2010.
11. D. Dolinar, R. de Weerdet, R. Belmans, E. M. Freeman, “Calculation of Two-Axis Induction Motor Model Parameters Using Finite Elements“, *IEEE Trans. Energy Conversion*, vol. 12, pp.133-142, 1997.
12. L. Alberti, N. Bianchi, S. Bolognani, “A Finite-Element Procedure to Compute Variable Speed Induction Machines Performance“, *IEEE in Proc. ECCE 2009.*, pp1280-1287. Sept. 2009.
13. L. Alberti, N. Bianchi, S. Bolognani, “Field Oriented Control of Induction Motor: a Direct Analysis Using Finite Element“ , *IEEE in Proc. IECON 2008*, pp1206-1209, Nov. 2008.
14. Z. Ling, L. Zhou, S. Guo, Y. Zhang , “Equivalent Circuit Parameters Calculation of Induction Motor by Finite Element Analysis“, *IEEE Transaction Magnetics*, vol. 50, pp. 1-4, Feb. 2014.

15. K. Yamazaki, A. Suzuki, M. Ohto, T. Takakura, S. Nakagawa, "Equivalent Circuit Modeling of Induction Motors Considering Stray Load Loss and Harmonic Torques Using Finite Element Method", *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 47, pp. 986-989, May. 2011.
16. P. Zhou, J. Gilmore, Z. Badics, Z. J. Cendes, "Finite Element Analysis of Induction Motors Based on Computing Detailed Equivalent Circuit Parameters", *IEEE Trans. Magnetics*, vol. 34, pp. 3499-3502, Sep 1998.
17. S. Williamson, M. J. Robinson, "Calculation of cage induction motor equivalent circuit parameters using finite elements", *IEE Proceedings B - Electric Power Applications*, vol. 138, pp. 264-276, Sep 1991.
18. R. Belmans, R.D. Findlay, W. Geysen, "A circuit approach finite element analysis of a double squirrel cage induction motor", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 5, pp. 719-724, Dec 1990.
19. D. W. Kim, H. K. Jung, S. Y. Hahn, "Equivalent circuit modelling for transient analysis of induction motors with three dimensional finite-element analysis", *Electric Machines and Drives*, 1999. *International Conference IEMD '99*, pp. 201-203, May 1999.
20. S. Williamson, L. H. Lim, M. J. Robinson, "Finite-element models for cage induction motor analysis", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 26, pp. 1007-1017, Nov/Dec 1990.
21. N. A. Demerdash, P. Baldassari, "A combined finite element-state space modeling environment for induction motors in the abc frame of reference: The no-load condition", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 7, pp. 698-709, Dec 1992.
22. M. Mohr, O. Bíró, A. Stermecki, F. Diwojy, "Parameter identification of a finite element based model of wound rotor induction machines", *COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, vol. 32, pp. 1665 – 1678, 2013.
23. A. Sarikhani, O. A. Mohammed, "Non-linear FE-based modeling of induction machine for integrataded drives", *IET 8th International Conference on Computation in Electromagnetics (CEM 2011)*, Wroclaw, Poland, 2011.
24. R. A. McMahon, P. C. Roberts, M. R. Tatlow, E. Abdi, A. Broekhof, S. Abdi, "Rotor parameter determination for the Brushless Doubly Fed (Induction) Machine (BDFM)", *IET Electric Power Applications*, vol. 9, pp. 549-555, Jun 2015.
25. P. Immonen, V. Ruuskanen, J. Nerg, J. Pyrhönen, "Inductance saturation of the induction machine as a function of stator voltage and load with steady state AC magnetic Finite element solver", *International Review on Modelling and Simulations (IREMOS)*, Vol 7, pp. 450-456, 2014.
26. L. A. Pereira, S. Haffner, L. F. A. Pereira, R. A. Benvenuti, R. S. da Rosa, "Parameterized Model and Performance of Five-Phase Induction Machines including Losses and Saturation", *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Volume 26, pp 255-271, June 2015

27. A. Demenko, L. Nowak, "Finite element analysis of saturation effects in a squirrel cage electrical machine", *COMPEL, Int. J. Comput. Math. Elect. Electron. Eng.*, vol. 15, pp. 88-95, 1996.
28. V. Fireteanu, P. Taras, "Teaching induction machine through finite element models", *18th International Conference on Electrical Machines, 2008. ICEM*, Vilamoura, Portugal, 2008.
29. A. C. Smith, "Integrating FE into induction motor design—A marriage of inconvenience?", *Proc. IEE Semin. Current Trends Use FE Electromech. Des. Anal.*, pp. 4/1-4/7, London, UK, 2000.
30. T. J. E. Miller, M. McGilp, A. Wearing, "Motor design optimization using SPEED CAD software", *Proc. IEE Semin. Practical Electromagn. Des. Synthesis*, pp. 2/1-2/5, London, UK, 1999.
31. V. Sarac, G. Stefanov, "Calculation of Electromagnetic Fields in Electrical Machines using Finite Elements Method", *International Journal of Engineering and Industries*, vol. 2, pp. 21-29., March 2011.
32. V. Sarac, "FEM Aided Design of Permanently Split Capacitor Motor under Different Operating Regimes", *Electrical Engineering, Electronics, Automation*, 64 (2). pp. 63-71., 2016.
33. S. D. Sudhoff, B.T. Kuhn, K. A. Corzine, B. T. Branecky, "Magnetic equivalent circuit modelling of induction motors", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol 22., pp. 259-270, June 2007.
34. M. R. Hachicha, N. B. Hadj, M. Ghariani, R. Neji, "Finite element method for induction machine parameters identification", *2012 First International Conference on Renewable Energies and Vehicular Technology*, Hammaet, Tunisia, March 2012.
35. M. H. Gmiden, H. Trabelsi, "Calculation of two-axis induction motor model using finite elements with coupled circuit", *6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, 2009. SSD '09.*, Djerba, Tunisia, March 2009.
36. T. Yang, L. Zhou, L. Li, "Parameters and performance calculation of induction motor by nonlinear circuit-coupled finite element analysis", *2009 International Conference on Power Electronics and Drive Systems (PEDS)*, Taipei, Taiwan, Nov. 2009.
37. J. Faiz, M. B. B. Sharifian, M. R. Feyzi , K. Shaarbafi , "A complete lumped equivalent circuit of three-phase squirrel-cage induction motors using two-dimensional finite-elements technique," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 17, pp. 363-367, Sep. 2002.
38. D. Fodorean, S. Giurgea, A. Djerdir, A. Miraoui, "Numerical approach for optimum electromagnetic parameters of electrical machines used in vehicle traction applications", *Energy Conversion and Management*, vol. 50, pp. 1288-1294. May 2009.
39. V. Jaiswal, M. Fazil, A. Hangal, N. Ravi, "Accurate performance prediction of three-phase induction motor by FEM using separate saturation curves for teeth

- and yoke”, *International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems, 2006. PEDES '06.*, pp. 1-4, New Delhi, India, Dec 2006.
40. C. Grabner, “Simplified evaluation of equivalent circuit parameters of squirrel cage induction motor by finite element calculations and measurement”, *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering, 2008. CCECE 2008.*, pp. 295-300, Niagara Falls, Canada, May 2008.
  41. M. Barabás, *Villamos Gépek I.*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1981.
  42. W. Schuisky, *Induktionsmaschinen*, Wien, Springer-Verlag, 1957,.
  43. I. Boldea, S. A. Nasar, *The induction machine handbook*, Washington: CRC Press, 2002,.
  44. J. Pyrhönen, T. Jokinen, V. Hrabovcová, *Design Of Rotating Electrical Machines*, John Wiley & Sons, 2008.
  45. C. G. Veinott, *Theory and Design of Small Induction Motors*, McGraw-Hill , 1959.
  46. T. W. Preston, A. B. J. Reece, P. S. Sangha, "Induction motor analysis by time-stepping techniques", *IEEE Transactions on Magnetics.*, vol. 24, pp. 471-474, Jan 1988.
  47. K. Yamazaki, "Induction motor analysis considering both harmonics and end effects using combination of 2-D and 3-D finite-element method", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 14, pp. 698-703, Sep 1999.
  48. S. Williamson, J. W. Ralph, "Finite-element analysis of an induction motor fed from a constant-voltage source", *IEE Proceedings B - Electric Power Applications*, vol. 130, pp. 18-24, Jan 1983.
  49. S. Williamson, L. H. Lim, A. C. Smith, "Transient analysis of cage-induction motors using finite-elements", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, pp. 941-944, Mar 1990.
  50. P. Baldassari, N. A. Demerdash, "A combined finite element-state space modeling environment for induction motors in the abc frame of reference: The blocked-rotor and sinusoidally energized load conditions", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 7, pp. 710-720, Dec 1992.
  51. A. Arkkio, "Finite element analysis of cage induction motors fed by static frequency converters", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, pp. 551-554, Mar 1990.
  52. X. Liang, Y. Luy, “Harmonic analysis for induction motors”, *2006 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Ottawa, Canada, pp. 172-177., May 2006.
  53. A. Stermecki, O. Biro, K. Preis, S. Rainer, “Determination of the starting and operational characteristics of large squirrel cage induction motor using harmonic and transient FEM”, *18th International Conference on Electrical Machines, 2008. ICEM 2008.*, Vilamoura, Portugal, pp.1-5, Sept. 2008.



54. S. Mezani, N. Takorabet, B. Laporte, "Saturation and space harmonics in the complex finite element computation of induction motors", *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 41, pp. 1460-1463, May 2005.
55. G. Vinsard, B. Laporte, "A new formulation for induction machine computation", *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 30, pp. 3693-3696, Sep 1994.
56. S. A. Prashanth, S. Nekkalapu, A. Dalal, P. Kumar, "Analytical determination of slot harmonics content of air-gap magnetic field for an induction machine", *2015 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, Denver, USA, 2015.
57. M. Sawahata, K. Nishihama, H. Mikami, T. Fujigaki, "Magnetic flux density analysis of wound rotor induction motor by permeance model", *Electrical Machines and Systems, ICEMS 2009. International Conference*, pp. 1-6, Tokyo, Japan, 2009.
58. L. M. Neto, J. Camacho, C. H. Salerno, B. P. Alvarenga, "Analysis of a three-phase induction machine including time and space harmonic effects: the, a b, c reference frame", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 14, pp. 80-85, Mar 1999.
59. S. Williamson, Y. N. Feng, "Slot-Harmonic Fields in Closed-Slot Machines", *Industry Applications, IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 44, pp. 1165-1171, July-Aug. 2008.
60. S. Mezani, T. Hamiti, L. Belguerras, T. Lubin, "Computation of Wound Rotor Induction Machines Based on Coupled Finite Elements and Circuit Equation Under a First Space Harmonic Approximation", *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 52, Sep 2015.
61. R. De Weerd, E. Tuinman, K. Hameyer, R. Belmans, "Finite element analysis of steady-state behavior of squirrel cage induction motors compared with measurements", *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 33, pp. 2093-2096, Mar 1997.
62. L. Alberti, N. Bianchi, S. Bolognani, "Variable-Speed Induction Machine Performance Computed Using Finite-Element", *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol 47, pp789-797, Jan 2011.
63. T. Yang, L. Zhou, W. Jiang, "Calculation of eddy current losses in a solid-rotor cage induction motor by finite element analysis", *The International Conference on Electrical Machines and Systems ICEMS 2008*, October 17-20, 2008, Wuhan, China, pp. 3656 - 3659.
64. T. F. Chan, L. L. Lai, L. T. Yan, "A coupled circuit and field analysis of a three-phase induction motor with the Smith connection", *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 42, pp. 1315-1318, April 2006.
65. F. Henrotte, K. Hameyer, "Computation of electromagnetic force densities: Maxwell stress tensor vs. virtual work principle", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 168., pp. 235-243, July 2004.
66. S. Humphries, (2012), Theory and applications of the Maxwell stress tensor, <http://www.fieldp.com/documents/stresstensor.pdf> (preuzeto 06.05.2016)

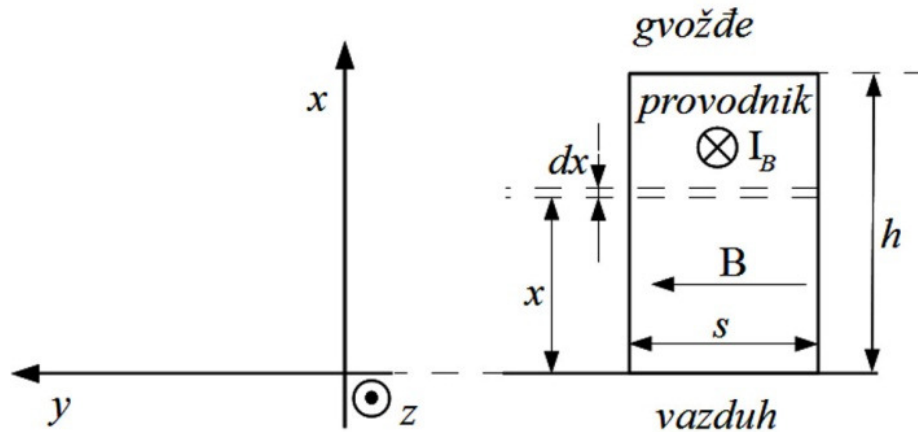
67. J. Varga, D. Basič, “Analysis of the characteristics of single phase shaded pole induction motor with two short-circuited auxiliary phases”, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 12, pp. 269-274, Dec 1997.
68. J. Varga, I. Kiralj, "Analiza rada jednofaznih asinhronih motora sa zasencenim polovima metodom dvofaznih ortogonalno pulsirajućih harmonijskih polja", *XII Medunarodni simpozijum Energetska elektronika – Ee 2003*, Novi Sad, SERBIA & MONTENEGRO, 2003.
69. M. Adžić, I. Kiralj, “ Simulacija rada tiristorski regulisanog jednofaznog asinhronog motora pomoću MATHCAD programa”, *Zbornik radova 52. Konferencije za ETRAN*, Palić, Serbia, 2008.
70. S. Williamson, M. C. Begg, "Analysis of cage induction motors - A combined fields and circuits approach", *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, pp. 2396-2399, Nov 1985.
71. H. De Gerssem, K. Hameyer, "Air-gap flux splitting for the time-harmonic finite-element simulation of single-phase induction machines", *IEEE Transactions on Magnetics.*, vol. 38, pp. 1221-1224, Mar 2002.
72. N. Sadowski, R. Carlson, S. R. Arruda, C. A. da Silva, M. Lajoie-Mazenc, "Simulation of single-phase induction motor by a general method coupling field and circuit equations", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, pp. 1908-1911, May 1995.
73. N. Tong, F. Zhang, J. Wang, “ Analysis of single-phase induction motor by using circuit-coupled finite element method“, *The International Conference on Electrical Machines and Systems ICEMS 2008*, Wuhan, China, pp. 4127 – 4130, October 17-20, 2008.
74. H. Zhong, X. Wang, D. Wang, D. Qiao, “Analysis and design of a new type high-efficiency single-phase induction motor based on negative sequence magnetic field compensation”, *The International Conference on Electrical Machines and Systems ICEMS 2008*, Wuhan, China, pp. 3962 - 3966, October 17-20, 2008.
75. I. Király, D. Žarko, “Extended Space Vector Method for Calculation of Induction Motor Parameters“, *Electric Power Components and Systems*, vol. 44., pp. 928-940, Apr 2016.
76. D. Meeker, Finite Element Method Magnetics (FEMM 42). <http://www.femm.info/Archives/doc/manual42.pdf>, (preuzeto 09.10.2012)
77. A. Tessarolo, F. Luise, “ An Analytical-Numeric Method for Stator End-Coil Leakage Inductance Computation in Multi-Phase Electric Machines“, *IEEE in Proc. IAS '08.*, Edmonton, USA, pp1-8., Oct. 2008.
78. D. Ban, D. Zarko, I. Mandić, “ Turbogenerator end-winding leakage inductance calculation using a 3-D analytical approach based on the solution of Neumann Integrals“, *IEEE Trans. Energy Conversion*, vol. 20, pp. 98-105. Marc. 2005.
79. Meeker D., Induction Motor Example . <http://www.femm.info/wiki/InductionMotorExample>, (preuzeto 09.10.2014).

80. R. O. C. Lyra , T. A. Lipo, “ Torque Density Improvement in a Six-Phase Induction Motor With Third Harmonic Current Injection“, *IEEE Trans. Industry Applications*, vol. 38, pp. 1351-1360, Sep-Oct 2002.

## DODATAK

- a. Postupak određivanja promene induktivnosti i otpornosti četvrtastog štapa u žlebu rotora u funkciji frekvencije struje

Na slici 33. je prikazan model žleba za koji je prikazan postupak proračuna promene induktivnosti i otpornosti štapa u žlebu. Provodnik (štap) ispunjava žleb četvrtastog oblika. Referentni smerovi struje i magnetne indukcije su označeni sa  $I_B$  i  $\mathbf{B}$ . Dimenzije žleba su označene sa  $a$  (debljina) i  $b$  (širina).



Slika 33. Model četvrtastog žleba sa provodnikom i referentni koordinatni sistem.

U modelu, pretpostavljeno je da gvožđe poseduje beskonačni magnetni permeabilitet, a magnetna indukcija ima u žlebu smer označen na slici 33. Zbog simetrije u idealizovanom modelu, može se pretpostaviti da komponente magnetnog vektorskog potencijala  $A_x$  i  $A_y$  u žlebu imaju nultu vrednost, koju imaju i komponente magnetne indukcije  $B_x$  i  $B_z$ . Dužina modela u smeru  $z$  jednaka je dužini žleba  $l_{stap}$ .

$$\begin{aligned} I_x = I_y = 0, \quad I_z = -I_B \\ B_x = B_z = 0, \quad B_y \neq 0 \\ A_x = A_y = 0, \quad A_z \neq 0 \end{aligned} \quad (186)$$

Promenu induktivnosti i otpornosti najpogodnije je izraziti kao odnos tih veličina u funkciji frekvencije i vrednosti istih veličina izračunatih pomoću jednosmernih struja. Zato su u prvom koraku određene otpornosti i induktivnosti štapa prikazane na slici 33. za slučaj kada frekvencija struje ima nultu vrednost.

Otpornost štapa, izražena dimenzijama žleba i specifičnom provodnosti  $\sigma$  materijala štapa, je sledeća:

$$R_{stap-jed} = \frac{l_z}{\sigma \cdot h \cdot s} \quad (187)$$

Induktivnost štapa je izračunata na osnovu vrednosti akumulisane magnetne energije u prostoru žleba. Akumulisana energija u gvožđu ima vrednost nula, zbog beskonačnog permeabiliteta gvožđa.

Tokom proračuna potrebno je odrediti gustinu magnetne energije u žlebu u funkciji  $x$ . Magnetni permeabilitet materijala provodnika (bakar ili aluminijum),

približno je ekvivalentna sa permeabilitetom vazduha, što znači da je magnetna karakteristika linearna. Zbog toga gustina magnetne energije je jednaka polovini proizvoda jačine magnetnog polja  $\mathbf{H}$  i magnetne indukcije  $\mathbf{B}$ . Magnetna indukcija u vazduhu je proporcionalna sa jačinom magnetnog polja, te se na osnovu izraza jačine magnetnog polja može jednoznačno odrediti magnetna indukcija i gustina magnetne energije.

Jačina magnetnog polja je proporcionalna struji koja je obuhvaćena konturom po kojoj je integrisana jačina magnetna polja. Zbog beskonačnog permeabiliteta gvožđa jačina magnetnog polja u gvožđu ima nultu vrednost, te se integrisanje po konturi svodi na integrisanje jačine magnetnog polja na delu konture koja se nalazi u žlebu.

Vrednost struje, koju obuhvata kontura za proračun jačine magnetnog polja, zavisi od njenog položaja koji prelazi preko žleba, a može se odrediti sledećim izrazom:

$$I(x) = \frac{(h-x) \cdot I_B}{h} \quad (188)$$

Jačina magnetnog polja na osnovu izraza za struju (188) u funkciji od  $x$  je:

$$H(x) = \frac{I(x)}{s} = \frac{(h-x) \cdot I_B}{h \cdot s} \quad (189)$$

Izraz za određivanje gustine magnetne energije u žlebu u funkciji  $x$  je prema tome:

$$w(x) = \frac{1}{2} \cdot H(x) \cdot B(x) = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot H^2(x) = \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{(h-x)^2 \cdot I_B^2}{h^2 s^2} \quad (190)$$

Ukupna energija u žlebu na osnovu integrala gustine energije je:

$$W = l_{stap} \cdot s \cdot \int_0^h w(x) dx = l_{stap} \cdot s \cdot \int_0^h \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{(h-x)^2 \cdot I_B^2}{h^2 s^2} dx = l_{stap} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu_0 \cdot \frac{h \cdot I_B^2}{3 \cdot s} \quad (191)$$

Induktivnost određena na osnovu energije, koja je jednaka polovini proizvoda induktivnosti i kvadrata struje, je sledeća:

$$L_{stap-jed} = \frac{2 \cdot W}{I_B^2} = \mu_0 \cdot l_{stap} \cdot \frac{h}{3 \cdot s} \quad (192)$$

Sledeći korak, koji sledi posle proračuna vrednosti otpornosti i induktivnosti sa jednosmernom strujom, je određivanje otpornosti i induktivnosti u funkciji frekvencije struje. Proračun je obavljen primenom vremenske harmonične definicije elektromagnetnog polja.

Otpornost i reaktansu žleba određuje odnos napona i struje štapa, te je zato potrebno odrediti vezu između napona, priključenog na krajevima štapa i struje koja protiče preko preseka žleba.

Naizmenična struja štapa sastoji se od dve komponente. Prva komponenta je proporcionalna sa naponom između krajeva štapa, dok je druga komponenta vrtložna struja, koja je u svakoj tački proporcionalna sa vrednošću magnetnog vektorskog potencijala  $\mathbf{A}$ . Ovako rezultatna gustina struje u štapu izražena na osnovu formule (110) je sledeća:

$$\mathbf{J}_{rez} = \mathbf{J}_o - j\omega\sigma \cdot \mathbf{A} = \frac{U_{stap}}{l_{stap}} \cdot \sigma - j\omega\sigma \cdot A_z \quad (193)$$

U izrazu za rezultatnu gustinu struje  $\mathbf{J}_o$  je vektor gustine struje, koji potiče od spoljašnjeg naponskog izvora,  $\omega$  je kružna frekvencija struje,  $\mathbf{A}$  je magnetni vektorski potencijal,  $U_{stap}$  je napon između krajeva štapa,  $A_z$  je  $z$  komponenta magnetnog vektorskog potencijala, jer u modelu prikazanom na slici 33. po definiciji (186) ostale komponente magnetnog vektorskog potencijala imaju nultu vrednost.

Struja preko preseka žleba, određena integralom gustine struje, uzimajući u obzir referentne smerove, je sledeća:

$$I = -I_B = s \cdot \int_0^h \left( \frac{U_{stap}}{l_{stap}} \cdot \sigma - j\omega\sigma \cdot A_z \right) dx = \frac{U_{stap} \cdot h \cdot s}{l_{stap}} \cdot \sigma - s \cdot j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \int_0^h A_z dx \quad (194)$$

Raspodela magnetnog vektorskog potencijala u žlebu zadovaljava sledeću diferencijalnu jednačinu, koja je određena na osnovu formule (110):

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{d^2 A_z}{dx^2} + j\omega\sigma \cdot A_z = J_0 \quad (195)$$

Kao što se vidi, proračun raspodele vrednosti magnetnog vektorskog potencijala svodi se na jednodimenzionalni slučaj, a opisan je sa difrencijalnom jednačinom drugog reda. Rešenje magnetnog vektorskog potencijala je sledećeg oblika:

$$A_z(x) = a \cdot e^{\lambda_1 x} + b \cdot e^{\lambda_2 x} + c \quad (196)$$

$\lambda_1$  i  $\lambda_2$  su izračunati iz kvadrantne jednačine, sa sledećim koeficijentima određenim na osnovu jednačine (195):

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\mu_0} \\ v &= 0 \\ w &= j\omega\sigma \end{aligned} \quad (197)$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4 \cdot u \cdot w}}{2 \cdot u} = \pm \sqrt{-\frac{w}{u}} = \pm \sqrt{j\omega\sigma\mu_0}$$

Rešenje diferencijalne jednačine (195) treba da ispuni granične uslove. Broj koeficijenta u izrazu (196) je tri, što znači da je potrebno odrediti tri granična uslova.

Prvi uslov je da magnetni vektorski potencijala ima nultu vrednost u poziciji  $x=0$ . Pored vrednosti magnetnog vektorskog potencijala, jednostavno se može utvrditi, na osnovu izraza (189), da magnetna indukcija u poziciji  $x=a$  ima nultu vrednost, a u poziciji  $x=0$  na osnovu izraza (92) jednaku sa  $-\mu_0 \cdot I_B / s$ .

$$\begin{aligned} x=0, \quad a+b+c &= 0 \\ x=0, \quad a\lambda_1 + b\lambda_2 &= a\lambda_1 - b\lambda_1 = -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{s} \Rightarrow a-b = -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{s\lambda_1} \\ x=a, \quad a\lambda_1 e^{\lambda_1 a} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 a} &= a\lambda_1 e^{\lambda_1 a} - b\lambda_1 e^{-\lambda_1 a} = 0 \Rightarrow b = a e^{2\lambda_1 h} \end{aligned} \quad (198)$$

Rešavanjem sistema jednačine (198), određuju se vrednosti koeficijenta u

izrazu magnetnog vektorskog potencijala:

$$\begin{aligned}
 a &= -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1 \cdot s \cdot (1 - e^{2\lambda_1 h})} \\
 b &= \frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1 \cdot s \cdot (1 - e^{-2\lambda_1 h})} \\
 c &= \frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1 \cdot s} \left( \frac{1}{(1 - e^{2\lambda_1 h})} - \frac{1}{(1 - e^{-2\lambda_1 h})} \right)
 \end{aligned} \tag{199}$$

Rezultat integraljenja magnetnog vektorskog potencijala posle uvrštavanja koeficijenata (199) u izraz (196) je sledeći:

$$\begin{aligned}
 \int_0^h A_z dx &= \frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1 \cdot s} \cdot \int_0^h \left( -\frac{e^{\lambda_1 x}}{(1 - e^{2\lambda_1 h})} + \frac{e^{-\lambda_1 x}}{(1 - e^{-2\lambda_1 h})} - \frac{1}{(1 - e^{-2\lambda_1 h})} + \frac{1}{(1 - e^{2\lambda_1 h})} \right) dx = \\
 &= \frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1 \cdot s} \cdot \left( -\frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_1} - \frac{x}{(1 - e^{-2\lambda_1 h})} + \frac{x}{(1 - e^{2\lambda_1 h})} \right) \Bigg|_0^h = \\
 &= -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1 \cdot s} \cdot \left( \frac{e^{\lambda_1 h} - 1}{\lambda_1} + \frac{e^{-\lambda_1 h} - 1}{\lambda_1} + \frac{h}{(1 - e^{-2\lambda_1 h})} - \frac{h}{(1 - e^{2\lambda_1 h})} \right) = \\
 &= -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1^2 \cdot s} \cdot \left( \frac{e^{\lambda_1 h} - 1 - h\lambda_1}{-e^{\lambda_1 h} (e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h})} + \frac{e^{-\lambda_1 h} - 1 + h\lambda_1}{e^{-\lambda_1 h} (e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h})} \right) = \\
 &= -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1^2 \cdot s} \cdot \left( \frac{1 - e^{-\lambda_1 h} - h\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} - 1 + e^{\lambda_1 h} - h\lambda_1 e^{\lambda_1 h}}{-(e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h})} \right) = \\
 &= -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1^2 \cdot s} \cdot \left( \frac{e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h}}{-(e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h})} + \frac{-h\lambda_1 (e^{\lambda_1 h} + e^{-\lambda_1 h})}{-(e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h})} \right) = \\
 &= -\frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1^2 \cdot s} \cdot \left( \frac{h\lambda_1 (e^{\lambda_1 h} + e^{-\lambda_1 h})}{(e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h})} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{200}$$

Posle uvrštavanja rezultata integraljenja u izraz (194) i uzimanjem u obzir da je  $\lambda_1^2 = j\omega\sigma\mu_0$  sledi:

$$\begin{aligned}
 I &= -I_B = \frac{U_{stap} \cdot h \cdot s}{l_{stap}} \cdot \sigma + s \cdot j \cdot \omega \cdot \sigma \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_B}{\lambda_1^2 \cdot s} \cdot \left( \frac{h\lambda_1 (e^{\lambda_1 h} + e^{-\lambda_1 h})}{(e^{\lambda_1 h} - e^{-\lambda_1 h})} - 1 \right) = \\
 &= \frac{U_{stap} \cdot h \cdot s}{l_{stap}} \cdot \sigma + I_B \cdot \left( \frac{h\lambda_1 \cosh(\lambda_1 h)}{\sinh(\lambda_1 h)} - 1 \right)
 \end{aligned} \tag{201}$$

Na osnovu jednačine (201) sledi sledeći odnos napona i struje štapa:

$$\frac{U_{stap}}{I_B} = \frac{l_{stap}}{h \cdot s \cdot \sigma} \cdot \frac{h\lambda_1 \cosh(\lambda_1 h)}{\sinh(\lambda_1 h)} \tag{202}$$

Posle primene pravila funkcije  $\sinh(x)$  i  $\cosh(x)$  i uvrštavanjem  $\lambda_1 h = \xi + j \cdot \xi$ ,

gde je  $\xi = h \cdot \sqrt{\omega \mu_0 \sigma / 2}$  sledi:

$$\frac{U_{stap}}{I_B} = \frac{l_{stap}}{h \cdot s \cdot \sigma} \cdot \left( \xi \frac{\sinh(2\xi) + \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} + j \cdot \xi \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} \right) \quad (203)$$

Realni deo izraza (203) jednak je otpornosti štapa, a imaginarni deo jednak je reaktansi štapa.

$$R_{sta-naiz} = \frac{l_{stap}}{h \cdot s \cdot \sigma} \cdot \xi \frac{\sinh(2\xi) + \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} = \frac{l_{stap}}{h \cdot s \cdot \sigma} \cdot k_R = R_{jed-naiz} \cdot k_R \quad (204)$$

$$X_{sta-naiz} = \frac{l_{stap}}{h \cdot s \cdot \sigma} \cdot \xi \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} \Rightarrow L_{sta-naiz} = \frac{l_{stap}}{h \cdot s \cdot \sigma \cdot \omega} \cdot \xi \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)}$$

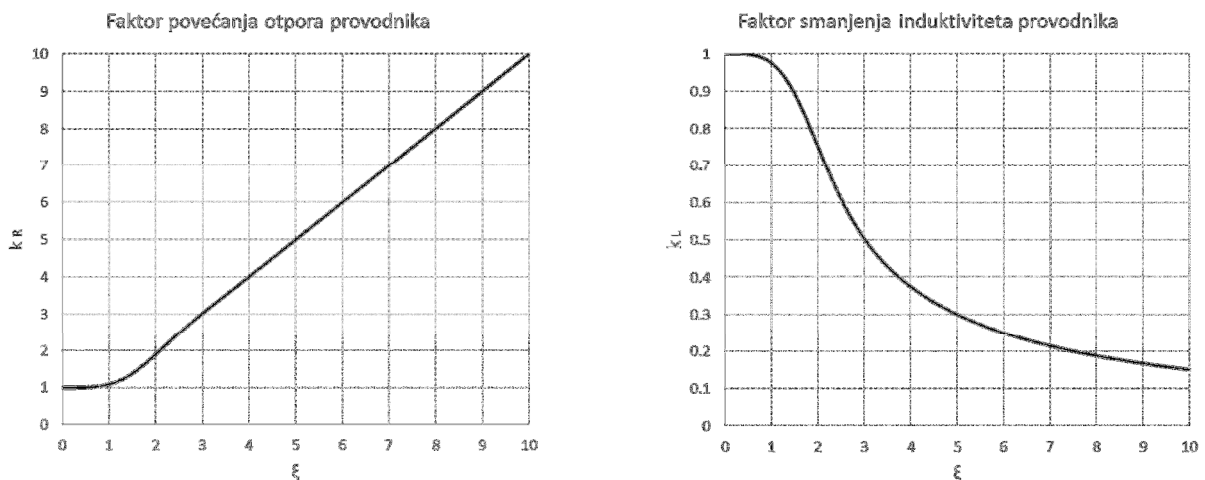
Na osnovu izraza (192) odnos dužine i širine štapa na osnovu izraza (192) je oblika  $\frac{l_{stap}}{s} = \frac{L_{stap-jed} \cdot 3}{\mu_0 \cdot h}$ , te se induktivnost u funkciji frekvencije može napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} L_{sta-naiz} &= \frac{L_{stap-jed} \cdot 3}{h^2 \cdot \mu_0 \cdot \sigma \cdot \omega} \cdot \xi \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} = \frac{L_{stap-jed} \cdot 3}{2 \cdot \xi^2} \cdot \xi \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} = \\ &= \frac{L_{stap-jed} \cdot 3}{2 \cdot \xi} \cdot \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} = L_{stap-jed} \cdot k_L \end{aligned} \quad (205)$$

Koeficijenti  $k_R$  i  $k_L$  preko kojih su izražene induktivnosti i otpornosti u funkciji frekvencije i vrednosti istih veličina izračunatih pomoću jednosmernih struja, se na kraju mogu napisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} k_R &= \frac{R_{sta-naiz}}{R_{sta-jed}} = \xi \frac{\sinh(2\xi) + \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} \\ k_L &= \frac{L_{sta-naiz}}{L_{sta-jed}} = \frac{3}{2 \cdot \xi} \cdot \frac{\sinh(2\xi) - \sin(2\xi)}{\cosh(2\xi) - \cos(2\xi)} \end{aligned} \quad (206)$$

Karakteristike koeficijenata  $k_R$  i  $k_L$  su prikazani na slici u funkciji  $\xi$



Slika 34. Karakteristike koeficijenta  $k_R$  i  $k_L$ .



- b. Datoteke za proračun parametara asinhronne mašine u različitim radnim tačkama pomoću predloženog metoda

Proces proračuna parametara, fazora struje i fazora fluksnih obuhvata sastoji se od dva dela. U prvom delu izračunato je elektromagnetno polje, a na osnovu rešenja određene su vrednosti struja, fluksnih obuhvata i strujnih fluksnih obuhvata u provodnicima modela. Ove veličine su ispisane u odgovarajuće datoteke.

U prvom delu korišćen je LUA script jezik za implementaciju procesa za izčitavanje struje, fluksnih obuhvata i strujnih fluksnih obuhvata iz modela. LUA script jezik je ugrađen u FEMM 4.2 softver.

U drugom delu korišćeni su postupci, koji su definisani u poglavljima 6 - 9, koji zahtevaju implementaciju funkcija, dostupnih u matematičkim softverima kao što je OCTAVE. Određivanje parametara ekvivalentne šeme asinhronog motora, kao i vrednosti struje statora i rotora i priključnog napon je obavljena pomoću skripta u kojima su primenjeni prethodno opisani metodi.

Proračun modela KE preko prethodno opisanih funkcija pokreće se pomoću skripta „lua\_run.lua“. Sadržaj skripta je sledeći:

```
--  
-- lua_run.lua  
--  
  
-- otvaranje fajla koji sadrži vrednosti struje modela  
  
handle_1=openfile("new_currents.txt","r")  
  
-- otvaranje fajlova koji sadržavaju vrednosti frekvencije  
-- izraz frekvencije se sastoji od tri dela  
  
handle_2=openfile("freq_1.txt","r")  
  
handle_3=openfile("freq_2.txt","r")  
  
handle_4=openfile("freq_3.txt","r")  
  
-- izčitavanje reda iz fajla koje sadržaju komentari u fajlu vrednosti struje  
  
str=read(handle_1,"*1")  
str=read(handle_1,"*1")
```

```
str=read(handle_1,"*1")
str=read(handle_1,"*1")
str=read(handle_1,"*1")

-- ciklus za proračun modela pri različitim radnih tačka
-- u ciklusu podešeni su frekvencija modela i struje u provodnicima modela

for i=1,13 do

-- izčitavanje vrednosti struje statora, koji su korišćeni tokom podešavanje
-- modela
str=read(handle_1,"*1")

-- izčitavanje vrednosti frekvencije i podaci za podešavanje modela konačnih
elemenata

str_1=read(handle_2,"*1")

-- izčitavanje podaci korišćeni tokom generisanje ime fajla
str_2=read(handle_3,"*1")
str_3=read(handle_4,"*1")

-- pretvaranje stringa u brojeva
ef=str_2+0
tf=str_3+0
freq=str_1+0
I_cur=str+0

-- podešavanje promenjive za dalnjih proračuna
i_mm=ef
i_qq=tf

-- otvaranje modela za dalnjih proračuna

open(format("sample_%d.fem",0))
```

```
-- podešavanje struje u modelu
dofile("stator_current_set.lua")

-- proračun modela konačnih elemenata
-- određivanje potrebnih veličina struja, fluksnih obuhvata i strujnih fluksnih
obuhvata
-- izpisavanje veličine u fajlovima
dofile("inductivity_determination.lua")

end

-- zatvaranje fajlova
closefile(handle_1)
closefile(handle_2)
closefile(handle_3)
closefile(handle_4)
```

Kao što se vidi u „lua\_run.lua“ fajlu sa upustvom dofile("stator\_current\_set.lua") pozvan je fajl „stator\_current\_set.lua“, koji služi za podešavanje struje u pojedinačnim provodnicima statora, i parametara modela.

```
-- stator_current_set.lua
-- otvaranje fajla parametara motora

handle_7=openfile("motor_data.txt","r")

-- izčitavanje parametara motora

str=read(handle_7,"*1")
while ((str~=nil)) do

if (strfind(str,'=')~=nil) then str_1=strsub(str,1,strfind(str,'=')-1)
else str_1="semmi"
end

if (str_1=="d") then
    d=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="air_gap") then
    air_gap=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
```

```
elseif (str_1=="p") then
    p=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="m") then
    m=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="step") then
    step=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="shif") then
    shif=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="d_k") then
    d_k=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="r_1") then
    r_1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="r_2") then
    r_2=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="h") then
    h=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="ds1") then
    ds1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="hs1") then
    hs1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="Ik") then
    Ik=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="N1") then
    N1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="mesh_size") then
    mesh_size=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="q") then
    q=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="d_1") then
    d_1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0

end
str=read(handle_7,"*l")
end

closefile(handle_7)
```

-- podešavanje parametara modela

*mi\_probdef(freq, "centimeters", "planar", 1E-10, 15, 22);*

-- podešavanje vrednosti struje modela

-- struja u jednom stranu kalema je definisani kao strujni krug

-- kod jednoslojnih namotaja u jenom žlebu se

-- nalazi jedna strana jednog kalema

-- organizovana je ciklus od tri nivoa

-- za podešavanje vrednosti struje u strane kalema

-- na prvom nivou se nalazi broj pari polova

-- to znači da prvom su podešeni vrednosti struje

-- koji se nalaze u prvom polnom paru

*for k\_k=0, (p-1) do*

-- u jednom polnom paru broj različitih struja

-- je jednako dva puta broj faze, jer u različitim

-- stranama jednog kalema razlikuju se predznaci struje

*for i\_k=0, (2\*m-1) do*

-- broj kalema, preko kojih se teče ista struja, je jednako sa brojem

-- žleba po polu i po fazi

*for j\_k=0, (q-1) do*

-- određivanje struje u jednom stranu kalema

*asdf=(cos(2\*i\_k\*pi/(2\*m))-I\*sin(2\*i\_k\*pi/(2\*m)))\*I\_cur;*

-- podešavanje vrednosti struje u jednoj strani kalema

*mi\_modifycircprop( format("curent%d\_%d\_%d", i\_k, j\_k, k\_k), 1, asdf);*

```
end
end
end

-- ispisivanje modela
-- ovako rešenje elektromagnetnog polja za
-- različitih radnih tačka je čuvana ispod različitih ime

mi_saveas(format("elso_1_cikl_%d_%d.fem",ef,tf));
```

Posle ispisavanje modela sledi rešavanje modela pomoću skripta definisanog u fajlu „inductivity\_determination.lua“:

```
-- inductivity_determination.lua

-- otvaranje fajla parametara motora

handle_8=openfile("motor_data.txt","r")

-- izčitavanje parametara motora
str=read(handle_8,"*l")
while ((str~=nil)) do

if (strfind(str,'=')~=nil) then str_1=strsub(str,1,strfind(str,'=')-1)
else str_1="semmi"
end

if (str_1=="Z_r") then
    Z_r=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="h_r3") then
    h_r3=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="b_r2") then
    br2=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="b_r1") then
    br1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="h_r1") then
```

```

        h_r1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="d_r1") then
        d_r1=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="d") then
        d=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="b_k") then
        b_k=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="air_gap") then
        air_gap=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="D_b") then
        D_b=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="m") then
        m=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="q") then
        q=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="Ik") then
        Ik=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0
elseif (str_1=="p") then
        p=strsub(str,strfind(str,"")+1)+0

```

end

str=read(handle\_8,"\*l")

end

closefile(handle\_8)

-- definisanje vektora za struje rotora

current\_rotor={}

-- određivanje mehaničkog ugla između žlebova rotora

alfa\_r=2\*pi/Z\_r

-- broj žleba statora

Z\_s=2\*p\*m\*q

```

i_m=0
i_q=0

-- otvaranje fajlova za pisanje
-- u fajlovima su sadržani podaci iz modela
-- kao što struje, fluksni obuhvati, naponi, gubici i moment određena na osnovu
Maxwell-stress tensora
-- fajlovi podataka su smešteni u mapi "fem_result"

flux_link_s=openfile(format("fem_result/flux_linkage_s_%d_%d.txt",i_mm,i_qq
), "w");
flux_link_r=openfile(format("fem_result/flux_linkage_r_%d_%d.txt",i_mm,i_qq
), "w");

current_s=openfile(format("fem_result/current_s_%d_%d.txt",i_mm,i_qq), "w");
current_r=openfile(format("fem_result/current_r_%d_%d.txt",i_mm,i_qq), "w");

voltage_s=openfile(format("fem_result/voltage_s_%d_%d.txt",i_mm,i_qq), "w");
voltage_r=openfile(format("fem_result/voltage_r_%d_%d.txt",i_mm,i_qq), "w");

resistive_r=openfile(format("fem_result/res_losses_r_%d_%d.txt",i_mm,i_qq), "
w")

torque_stress=openfile(format("fem_result/torque_stress_%d_%d.txt",i_mm,i_q
q), "w")

-- x_r=sqrt((D_b/2)^2+(d_r1/2)^2)

-- x_r2=x_r-h_r1

-- x_r3=x_r2-b_k

-- rešavanje modela u FEMM 4.2
mi_analyze(1)

-- učitavanje rešenje u FEMM 4.2 za određivanje potrebnih podataka
mi_loadsolution()

```



```
-- ciklusi za izčitavanje podataka iz modela strujnih krugova - strane kalema
-- prvi nivo je ciklus broja prih polova
for i_p=0,(p-1) do

-- ciklus dva puta broja faza
for i=0,(2*m-1) do

    -- broj žlebova po polu i po fazi
    for j=0,(q-1) do

        -- izčitavanje struje, pad napona na otpornosti i
        -- fluksnog obuhvata u strujnom krugu jedne
        -- strane jednog kalema
        -- u ovom delu programa određene su i ispisane su u
        -- odgovarajućih fajlova
        curent_l_f,voltage_l_f,flux_l_f=mo_getcircuitproperties(
format("curent%d_%d_%d", i,j,i_p));

        -- upisanje vrednost struje u promenljivu
        curent_l=curent_l_f;

        -- upisanje pad napona na otpornosti u promenljivu
        voltage_l=voltage_l_f

        -- upisanje vrednost fluksnog obuhvata u promenljivu
        flux_l=flux_l_f

        -- određivanje strujnog fluksnog obuhvata
        current_flux=flux_l*(re(curent_l)-I*im(curent_l))

        -- ispisivanje fluksnog obuhvata (realni i imaginarni komponent),
        strujni fluksni obuhvat (realni i imaginarni komponenti)
        write
        (flux_link_s,format("%f",re(flux_l*1000000)), "\t",format("%f",im(flux_l*1000000)), "\t"
        ,format("%f",re(current_flux)), "\t",format("%f",im(current_flux)), "\n");

        -- ispisivanje struja statora u fajlu
```

```

        write
(current_s,format("%f",re(curent_l)), "\t",format("%f",im(curent_l)), "\n");

        -- izpisivanje pad napona u fajlu
        write
(voltage_s,format("%f",re(voltage_l)), "\t",format("%f",im(voltage_l)), "\n");

    end

end

end

-- ciklus za određivanje vrednosti struje, fluksnih obuhvata i strujnih fluksnih
obuhvata
for i_f=0,(Z_r-1) do

    -- izbor žleba u kojoj je odeređena vrednosti struje, fluksnih obuhvata i
strujnih fluksnih obuhvata
    -- blok žleba je aktivirana
    -- integrali su računati na aktivnim blokovima
    mo_selectblock((D_b/2-
h_r3)*cos(i_f*alfa_r+(i_m*q+i_q)*2*pi/(Z_s*2*q)),(D_b/2-
h_r3)*sin(i_f*alfa_r+(i_m*q+i_q)*2*pi/(Z_s*2*q)))

    -- proračun preseka žleba
    area=mo_blockintegral(5)

    -- proračun fluksnog obuhvata
    flux_l=mo_blockintegral(1)*1000000000/area

    -- proračun struje
    curent_r=mo_blockintegral(7)

    -- proračun strujnog fluksnog obuhvata
    flux_cur=mo_blockintegral(0)

    -- proračun gubici u žlebu
    res_los=mo_blockintegral(4)

```

```
-- proračun otpornosti žleba na osnovu gubici i struje žleba
resistance_1=res_loss/abs(curent_r)^2*1000;

-- upisanje odgovarajući vrednost struje rotora u vektoru
current_rotor[i_f+1]=curent_r

-- ispisivanje podataka u odgovarajućim fajlovima
write
(flux_link_r,format("%f",re(flux_l)), "\t",format("%f",im(flux_l)), "\t",format("%f",area),
"\t",format("%f",re(flux_cur)), "\t",format("%f",im(flux_cur)), "\n");
write
(current_r,format("%f",re(curent_r)), "\t",format("%f",im(curent_r)), "\n");
write
(resistive_r,format("%f",re(res_loss)), "\t",format("%f",re(resistance_1)), "\n");

-- blok žleba je deaktivirana
mo_clearblock()

end

-- izabrani su žlebovi rotora i limpaket rotora za proračun momenta sa
metodom Maxwell stress tensor-a
mo_groupselectblock(5);
mo_groupselectblock(20);

-- proračun momenta
T_1=mo_blockintegral(22);

-- ispisivanje vrednosti momenta u odgovarajućim fajlu
write (torque_stress,format("%f",re(T_1)), "\n");

-- deaktiviranje blokova žleba i limpaketa rotora
mo_clearblock()

-- zatvaranje fajla rešenje i modela
mo_close()
mi_close()
```

*flush()*

-- zatvaranje fajlova u kojima su sadržani potrebni podaci

*closefile(flux\_link\_s)*

*closefile(flux\_link\_r)*

*closefile(current\_s)*

*closefile(current\_r)*

*closefile(voltage\_s)*

*closefile(voltage\_r)*

U drugom koraku korišćene su skript datoteke za određivanje parametara i vrednosti struje i napona motora u određenim radnim tačkama..

U datoteci „data\_run.m“ definisani su parametri namotaja motora i ciklus u kom se poziva funkcija „motor\_parameter“ (definisana u datoteci motor\_parameter.m), radi proračuna prethodno spomenutih podataka u različitim radnim tačkama..

*% data\_run.m*

*clear*

*% podešavanje mapa u kojoj se nalazi mapa "fem\_results"*

*% u mapi "fem\_results" čuvani su vrednosti struje, fluksa*

*% i strujnih fluksnih obuhvata u odgovarajućim fajlovima*

*cd C:\XXXXXX*

*% promenljivi u kojima su čuvani podaci određeni*

*% na osnovu vrednosti struje, fluksa i strujnih fluksnih obuhvata*

*Voltage=0;*

*I\_snew=0;*

*I\_sold=0;*

*Torque=0;*

*I\_r=0;*

*R\_rr=0;*

*L\_sig\_s=0;*

*L\_sig\_r=0;*

*L\_m=0;*

```
% linijski napon motora
V_line=400;

printf("\n")

% frekvencije modela u pojediničnim radnim tačkama
fre_qw=[0.50,1.0,2.50,5.0,10.0,15.0,20.0,25.0,30.0,35.0,40.0,45.0,50.0]';

% ciklus za proračuna parametara
for ikl=1:(size(fre_qw)(1))

    printf("\n")
    % ispisanje frekvencije struje rotora
    printf("frequency\n")

    fre_qw(ikl)

    % povratni vrednosti funkcije "motor_parameter"
    [U_s_abs,I_s,M_r,I_r_ki,R_rr,L_sig_s,L_sig_r,L_m]=motor_parameter(fre_
qw(ikl))

    % upisanje povratnih vrednosti funkcije "motor_parameter" u odgovarajućim
vektorima
    Voltage(ikl)=U_s_abs;

    I_sold(ikl)=abs(I_s);
    Torque(ikl)=M_r;
    I_r(ikl)=I_r_ki;
    R_rr(ikl)=R_rr;
    L_sig_s(ikl)=L_sig_s;
    L_sig_r(ikl)=L_sig_r;
    L_m(ikl)=L_m;

    % određivanje vrednost novih vrednosti struje
    % ove struje su korišćene tokom ponavljenog proračuna karakteristike
```

```
I_snew(ikl)=abs(I_s)*sqrt(2)*V_line/U_s_abs;
```

```
end
```

```
% izpisanje promenljivih u odgovarajućih fajlova
```

```
temp=I_snew';
```

```
save 'result\new_currents.txt' temp;
```

```
temp=Voltage';
```

```
save 'result\voltage.txt' temp;
```

```
temp=I_sold';
```

```
save 'result\old_currents.txt' temp;
```

```
temp=Torque';
```

```
save 'result\torque.txt' temp;
```

```
temp=I_r';
```

```
save 'result\r_currents.txt' temp;
```

```
temp=R_rr';
```

```
save 'result\r_rr.txt' temp;
```

```
temp=(L_sig_s');
```

```
save 'result\l_sig_s.txt' temp;
```

```
temp=(L_sig_r');
```

```
save 'result\l_sig_r.txt' temp;
```

```
temp=(L_m');
```

```
save 'result\l_m.txt' temp;
```

Definicija funkcije „motor\_parameter“ u datoteci „motor\_parameter.m“ je sledeća:

*% definicija funkcije "motor\_parameter" za određivanje parametra motora  
function  
[U\_s\_abs,I\_s\_vek,M\_r,I\_r\_vek,R\_rr,L\_sig\_s,L\_sig\_r,L\_m]=motor\_parameter(f\_)*

*% određivanje vrednosti promenljiva "m\_p" i "p\_p"*

*% korišćeni su prilikom generisanje ime fajla*

*m\_p=fix(f\_)*

*p\_p=fix((f\_-fix(f\_\*100))*

*% parametri namotaja motora*

*% broj faze*

*m=3;*

*% broj žleba po polu i po fazi*

*q=3;*

*% broj navoja u jednom žlebu*

*N=16;*

*% pomak između slojeva dvoslojnog namotaja*

*shift=0;*

*% broj pari polova*

*p=2;*

*% induktivitet glava namotaja*

*L\_s\_end\_wind=10.0844\*10^-3;*

*% inicijalizacija vrednosti vektora fluksnih obuhvata*

*Psi\_s\_vek=0;*

*Psi\_m\_vek=0;*

$\Psi_{r\_vek}=0;$

*% koeficijenti namotaja*

*% zonski faktor*

$kszi\_1=\sin(\pi/6)/(q*\sin(\pi/(6*q)));$

*% tetivni faktor*

$kszi\_2=\cos(shift/(m*q)*\pi/2);$

*% mapa gde se nalaze podaci određeni na osnovu FE modela*

$directory='fem\_result/';$

*% otpornost jedne faze*

$R\_phase=1.81;$

*% frekvencija pruključnog napona statora stvarnog motora*

$f=50;$

*% izčitavne podaci iz fajlova u odgovarajućih promenljivima*

*% strujni fluksni obuhvati pojedinačnih štapa rotora*

$stry=strcat(directory,'flux\_linkage\_r\_',int2str(m\_p),'_',int2str(p\_p),'.txt');$

$flux\_linkage\_r=load(stry);$

*% fluksni obuhvati strane kalema koji se nalaze u jednom žlebu statora*

$stry=strcat(directory,'flux\_linkage\_s\_',int2str(m\_p),'_',int2str(p\_p),'.txt');$

$flux\_linkage\_s=load(stry);$

*% struje u pojedinim žlebovima*

$stry=strcat(directory,'current\_r\_',int2str(m\_p),'_',int2str(p\_p),'.txt');$

$current\_r=load(stry);$

*% struja u pojedinim žlebovima statora*

$stry=strcat(directory,'current\_s\_',int2str(m\_p),'_',int2str(p\_p),'.txt');$

$current\_s=load(stry);$



*% gubici u pojedinim štapovima rotora*

*stry=strcat(directory,'res\_losses\_r\_',int2str(m\_p),'\_',int2str(p\_p),'.txt');*

*res\_losses\_r=load(stry);*

*% određivanje dimenzije matriksa*

*A\_r=size(flux\_linkage\_r);*

*A\_s=size(flux\_linkage\_s);*

*% inicijalizacija vrednosti vektora struje*

*I\_s\_vek=0;*

*I\_r\_vek=0;*

*% ciklus za određivanje fazora struje i strujnog fluksnog obuhvata rotora*

*for i\_k=1:(A\_r(1))*

*alfa\_r\_i=2\*p\*pi/A\_r(1)\*(i\_k-1)\*(1);*

*I\_r\_vek=I\_r\_vek+(current\_r(i\_k,1)+I\*current\_r(i\_k,2))\*1/(2\*N\*kszi\_1\*kszi\_2\*A\_s(1))\*(cos(alfa\_r\_i)+I\*sin(alfa\_r\_i));*

*fluks\_linkage\_op(i\_k)=(flux\_linkage\_r(i\_k,4)+I\*flux\_linkage\_r(i\_k,5));*

*end*

*% određivanje fazora fluksnog obuhvata rotora pomoću fazora struje i strujnog fluksnog obuhvata*

*Psi\_r\_vek=sum(fluks\_linkage\_op)/conj(I\_r\_vek)\*1/(m);*

*% ciklus za određivanje fazora struje i strujnog fluksnog obuhvata statora*

*for i\_k=1:(A\_s(1))*

*alfa\_s\_=2\*p\*pi/A\_s(1)\*(i\_k-1);*

---

```

I_s_vek=I_s_vek+1/(A_s(1)*kszi_1*kszi_2)*(current_s(i_k,1)+I*current_s(i_k,2)
)*(cos(alfa_s_)+I*sin(alfa_s_));

```

```

fluks_linkage_o(i_k)=(flux_linkage_s(i_k,3)+I*flux_linkage_s(i_k,4));

```

```

end

```

```

% određivanje fazora fluksnog obuhvata statora pomoću fazora struje i
strujnog fluksnog obuhvata

```

```

Psi_s_vek=sum(fluks_linkage_o)/conj(I_s_vek)*1/(m);

```

```

% fazor struja magnećenje je jednako sa zbirom fazora struje statora i rotora

```

```

I_m=(I_s_vek+I_r_vek);

```

```

%

```

```

%

```

```

% određivanje rasipnog induktiviteta rotora

```

```

% i induktiviteta magnećenje na osnovu fazora struje i fluksnih obuhvata

```

```

%

```

```

%

```

```

% matriks generisana na osnovu komponenta struje rotora i struje magnećenje

```

```

A=[real(I_r_vek),real(I_m);imag(I_r_vek),imag(I_m)];

```

```

% vektor na osnovu komponenta fazora fluksnih obuhvata rotora

```

```

B=[real(Psi_r_vek);imag(Psi_r_vek)];

```

```

% rešenje linearne jednačine

```

```

Res=(A^-1)*B;

```

```

% rasipni induktivitet rotora

```

```

L_sig_r=real(Res(1));

```

```

% induktivitet magnećenja

```

```

L_m=real(Res(2));

```

```

%

```

```

%

```

---

*% određivanje rasipnog induktiviteta statora*  
*% i induktiviteta magnećenje na osnovu fazora struje i fluksnih obuhvta*  
*%*  
*%*  
*% matriks generisana na osnovu komponenta struje statora i struje*  
*magnećenje*

$A=[\text{real}(I_s\_vek),\text{real}(I_m);\text{imag}(I_s\_vek),\text{imag}(I_m)];$   
 $B=[\text{real}(\Psi_s\_vek);\text{imag}(\Psi_s\_vek)];$

*% rešenje linearne jednačine*  
 $Res=(A^{-1})*B;$

*% rasipni induktivitet statora*  
 $L\_sig\_s=\text{real}(Res(1));$

*% određivanje ekvivalentne otpornosti rotora u ekvivalentnoj šemi*  
 $R\_rr=\text{real}(-f\_ *I^2*\pi*(\Psi_r\_vek)/(I_r\_vek));$

*% ispisivanje absolutnih vrednosti struje radi kontrola tokom rešenje*  
 $I\_s\_abs=\text{abs}(I\_s\_vek)$   
 $I\_r\_abs=\text{abs}(I\_r\_vek)$   
 $I\_m\_abs=\text{abs}(I\_m)$

*% proračun napona motora na osnovu fazore fluksnih obuhvata*  
*% i pad napona na otpornosti i na glavu namotaja*  
 $U\_s=I\_s\_vek*(R\_phase+I^2*f*\pi*L\_s\_end\_wind)+I^2*f*\pi*\Psi_s\_vek;$

*% ispisanje absolutne vrednosti napona motora*  
 $U\_s\_abs=\text{abs}(U\_s)$

*% moment određena na osnovu gubici u bakru rotora*  
 $M\_s=m/2*p*\text{imag}((\Psi_s\_vek*\text{conj}(I_s\_vek)))$

*% određivanje Fourierovog reda struje rotora*

```

I_r_asd_r=abs(fft(current_r(:,1)-I*current_r(:,2)))*1/(A_r(1)));

%
%
% proračuna zbira kvadrata harmoničkih komponenta struje rotora
% na osnovu zbira kvadrata hamoničkih komponenta i zbira
% gubitaka u štapovima rotora određena je otpornosti štapa
%
%
% promenljiv za čuvanje zbir kvdrata harmoničkih komponenta

I_ktemp=0;

% ciklus za proračun zbira kvadrata harmoničkih komponenata
for olk=1:A_r(1)

I_ktempa=I_ktemp;
I_ktemp=I_ktempa+abs(I_r_asd_r(olk))^2/2;

end

% određivanje zbir otpornosti štapa rotora
R_bar_av_sum=real(sum(res_losses_r(:,1)))/I_ktemp

%
% određivanje snaga koji se proizvode pojedinim viši harmonici
% tokom određivanje korišćena je zbir otpornosti štapa R_bar_av_sum
%
%
% pomoću predznaka pojedinim harmonika je uzeta u obzir predznak momenta
% koji se potiče od datog harmonika
%
% promenljiv zbira snage
P_torque=0;

```

```

% poračun zbira snage harmonika
P_temp=P_torque;
P_torque=P_temp+(abs(I_r_asd_r(1+p))^2-abs(I_r_asd_r(A_r(1)+1-
p))^2)*R_bar_av_sum/2;
P_temp=P_torque;
P_torque=P_temp+(abs(I_r_asd_r(1+p*3))^2*3-abs(I_r_asd_r(A_r(1)+1-
p*3))^2*3)*R_bar_av_sum/2;
P_temp=P_torque;
P_torque=P_temp+(abs(I_r_asd_r(1+p*5))^2*5-abs(I_r_asd_r(A_r(1)+1-
p*5))^2*5)*R_bar_av_sum/2;
P_temp=P_torque;
P_torque=P_temp-(abs(I_r_asd_r(1+p*7))^2*7+abs(I_r_asd_r(A_r(1)+1-
p*7))^2*7)*R_bar_av_sum/4;

% moment određena na osnovu zbira komponenta snage
M_r=P_torque/(f_*pi*(2/p));

endfunction

```

Pomoću prethodnih datoteka moguće je odrediti parametre mašine 1, čije dimenzije i parametri su dati u tabeli 1. Zbog dijametralnog koraka namotavanja statora može se smatrati da ova mašina ima jednoslojni namotaj.

Kao što se vidi u tabeli 1, korak namotavanja kod motora 2 je skraćen, te se ne može koristiti prethodna konfiguracija jednoslojnog namotaja. Modifikovanjem prethodnih skriptova određene su karakteristike datog visokonaponskog motora.