



Универзитет у Београду
Физички факултет

Докторска дисертација

**Методe за израчунавање ефеката коинцидентног
сумирања у гама спектроскопији**

Драгана Јорданов

Београд, 2015.



University of Belgrade
Faculty of Physics

Doctoral Dissertation

**Methods for calculating coincidence summing effects for
gamma spectroscopy**

Dragana Jordanov

Belgrade, 2015.

Ментор:

Др Ласло Нађђерђ, научни сарадник, научна област – нуклеарна физика,
Институт за Нуклеарне Науке "Винча", Београд

Чланови комисије:

Др Јован Пузовић, ванредни професор, Универзитет у Београду, Физички
Факултет

Др Милош Вићић, ванредни професор, Универзитет у Београду, Физички
Факултет

Др Иван Аничин, редовни професор у пензији, Универзитет у Београду,
Физички Факултет

Датум одбране: _____

Методе за израчунавање ефекта коинцидентног сумирања у гама спектроскопији

Резиме

У овој докторској дисертацији разматрано је коинцидентно сумирање које се јавља у гама спектрометрији. Развијен је нов метод за одређивање брзина бројања у гама спектрима радионуклида код којих се каскадна деексцитација језгра одвија истовремено са каскадном деексцитацијом атомског омотача. Метод је успешно примењен на радионуклиде церијума ^{139}Ce , кобалта ^{57}Co , баријума ^{133}Ba и европијума ^{152}Eu .

Ефекти коинцидентног сумирања настају када се распадом неког језгра у каскадним прелазима емитују два или више фотона, у кратком временском интервалу, краћем од времена разлагања детектора, а као резултат, детектор их третира као једну интеракцију, тако да ће енергетски трансфер представљати суму трансфера појединачних интеракција (сумациони пик). То доводи до повећања одброја у сумационом пику али и до смањења одброја у фотопиковима каскадних фотона. Примена аналитичког приступа проблему коинцидентног сумирања даје могућност да се предвиде сви сумациони пикови који се могу појавити у спектру. Овим приступом се може одредити активност извора директно без калибрације детектора, што је веома значајно у метрологији радионуклида. Односно, на основу вредности површина пикова у спектру и познавањем вероватноћа прелаза између побуђених стања језгра, могуће је одредити и ефикасности детекције и активност радиоактивног извора.

Дисертација је обухватила анализу и модификацију постојећих метода за решавање проблема коинцидентног сумирања увођењем новог метода са једноставнијом алгебром. Нов аналитички приступ који смо развили описан је у шестом поглављу дисертације. Након једноставних аритметичких операција може се добити систем једначина брзина бројања за одређивање ефикасности детекције и активности радионуклида. Значај новог метода је што на једноставан начин даје прорачун доприноса ефекта коинцидентног сумирања. Пошто се резултати добијају на јаснији начин, нов приступ је много лакши за практичну употребу. Дисертација обухвата и успешну примену новог метода на радионуклидима који се користе у реалним експериментима. Дат је детаљан опис метода од формирања одговарајућих матрица до коначног резултата –

одређених активности и ефикасности детекције. Поред тога, метод је примењен и на симулираним спектрима чиме је извршена додатна провера тачности добијених резултата.

Кључне речи: Метрологија радионуклида, Коинцидентно сумирање, Активност извора, Ефикасност детектора, Европијум ^{152}Eu ,

Научна област: Нуклеарна физика

Ужа научна област: Метрологија радионуклида

УДК број:

Methods for calculating coincidence summing effects for gamma spectroscopy

Abstract

This thesis considers the coincidence summing that occurs in gamma spectroscopy. A new method has been developed for deriving the counting rate for gamma spectra of radionuclides in which the nucleus de-excitation cascade takes place simultaneously with the cascade de-excitation of the atomic layer. This method is successfully applied to the decay of radionuclides ^{139}Ce , ^{57}Co , ^{133}Ba and ^{152}Eu .

The coincidence summing effects occur whenever two or more cascading photons are emitted from the same nucleus and detected within the resolving time of spectrometer. As a result, the spectrometer treats them as one interaction, so that the energy transfer represents the sum of the transfers of individual interactions (summation peak). This leads to an increase of counts in summation peaks as well as the reduction of counts in full-energy peaks of cascading photons. The application of analytical approaches to coincidence summing effects makes it possible to predict all summation peaks that occur in the spectrum. This approach also allows us to determine the activity of sources directly without calibration of the detector, which is very important in metrology of radionuclides. Accordingly, based on the value of the peak area in the spectrum and knowledge of probability transitions between excited states of a nucleus, it is possible to determine the efficiency of detection and activity of radioactive sources.

The dissertation includes an analysis and modification of the existing methods for solving the problems of coincidence summing by introducing the new method with simpler algebra. The new analytical approach that we have developed is described in the sixth chapter of the thesis. Following simple arithmetic operations, the system counting rate equation can be obtained for the determination of the detection efficiency and radionuclide activity.

The importance of the new method is that it gives, in a simple way, an estimate of contribution of coincidence summing effects. Since the results are obtained in a clearer way, the new approach is much easier for practical use. The dissertation also

includes the successful implementation of a new method to radionuclides used in real experiments. It provides a detailed description of the method of forming the matrix corresponding to the final result - determined activities and the efficiency of detection. In addition, the method has been applied to simulated spectra, providing an additional check of the accuracy of the results.

Keywords: Metrology of radionuclides, Coincidence summing, Activity of source, Detector efficiency, ^{152}Eu .

Scientific field: Nuclear physics

Field of Academic Expertise: Metrology of radionuclides

UDC number:

Методы расчета последствий совпадения подведения гамма-спектроскопии

Резюме

В этой докторской диссертации исследуется совпаденое подведения что происходит в гамма-спектрометрии. Разработана новая методика для определения скорости подсчета гамма спектров радионуклидов, при девозбуждении каскад ядро происходит одновременно с каскадной дезактивацей атомного слоя. Метод был успешно применен для радионуклидов церия ^{139}Ce , кобальта ^{57}Co , бария ^{133}Ba и европий ^{152}Eu .

Эффекты совпадениями подведения возникают, когда распад ядра в каскадных переходах испускают два или более фотонов в короткий период времени, короче от времени детектора разложения, и в результате, детектор воспринимает их как одно взаимодействие, так что передача энергии - сумма перевода отдельных взаимодействий (Суммированный пик). Это приводит к увеличению отсчетов в суммированом пике, а и к уменьшению отсчетов в пике полной энергии каскадных фотонов. Применение аналитических подходов к проблеме совпадения подведения дает возможность предвидеть все суммирования пиков, которые могут возникнуть в спектре. Этим способом подход может быть определена по активности источников непосредственно без детектора калибровки, что очень важно в метрологии радионуклидов. То есть, исходя из площади пиков в спектре и знание вероятностных переходов между возбужденными состояниями ядра, можно определить эффективность регистрации и активности радиоактивных источников.

Диссертация включала анализ и модификацию существующих методов решения проблемы суммирования совпадение с кратким введением нового метода с более простой алгеброй. Новый аналитический подход, который мы разработали описан в шестой главе диссертации. Следующие простые арифметические операции могут быть получены скорости системы уравнение считая, для определения эффективности регистрации и активности радионуклидов. Важность нового метода является в том, что простым способом даётся подсчет вклада эффектов подведения последствий совпадения. Так результаты, полученные более четким образом, новый подход гораздо проще в практическом использовании. Диссертация включает в себя также

успешную реализацию нового метода для радионуклидов, используемых в реальных экспериментах. Она содержит подробное описание способа формирования матрицы, соответствующий конечный результат - определенные активности и эффективности регистрации. Кроме того, метод применяется к моделируемым спектрам, чем осуществляются дополнительные проверки точности результатов.

Ключевые слова: радионуклидная метрологии, совпадающая сумма, активность источника, эффективности детекторы, европий ^{152}Eu ,

Научная область: Ядерная физика

Специальные темы: Радионуклидная метрологии

Садржај

<i>Апстракт</i>	3
<i>Садржај</i>	4
<i>Увод</i>	6
<i>1 Интеракција гама зрачења са материјом</i>	<i>10</i>
1.1 Фото-електрични ефекат	11
1.2 Комптоново расејање	13
1.3 Стварање парова	17
<i>2 Полупроводнички детектори</i>	<i>20</i>
2.1 Механизам детекције полупроводничким детекторима	25
2.2 Карактеристике германијумских детектора	29
<i>3 Сумација пикова, ефекти правог коинцидентног сумирања</i>	<i>36</i>
<i>4 Приступ сумационим ефектима по методу Андрејева</i>	<i>41</i>
<i>5 Нови матрични метод X-гама коинцидентног сумирања</i>	<i>47</i>
5.1 Модификована шема распада	48
5.2 Матрица вероватноће прелаза	50
5.3 Вероватноће каскадних прелаза	51
5.4 Вероватноће детекције	52
5.5 Вероватноће детекције коинцидентних фотона	56
<i>6 Примена метода на ¹³⁹Се, ⁵⁷Со и ¹³³Ва</i>	<i>61</i>
6.1 Церијум ¹³⁹ Се	61
6.2 Кобалт ⁵⁷ Со	65
6.3 Баријум ¹³³ Ва	68
<i>7 Примена метода на европијум ¹⁵²Еу</i>	<i>73</i>
<i>8 Експеримент</i>	<i>91</i>
<i>Закључак</i>	<i>99</i>

<i>Литература</i>	<i>100</i>
<hr/> <hr/> <i>ПРИЛОГ А</i>	<hr/> <hr/> <i>104</i>
<hr/> <hr/> <i>ПРИЛОГ Б</i>	<hr/> <hr/> <i>108</i>
<hr/> <hr/> <i>ПРИЛОГ В</i>	<hr/> <hr/> <i>112</i>
<hr/> <hr/> <i>ПРИЛОГ Г</i>	<hr/> <hr/> <i>113</i>

Увод

Нуклеарна физика је крајем 19. века израсла из покушаја научника да открију и схвате структуру материје и њене основне конституенте. Постала је грана науке која је снажно утицала на развој и саме науке, и друштва у целини. Откако је утврђено да у атомима постоје језгра, нуклеарна физика се развија као грана физике која се бави нуклеусом атома и феноменом радиоактивности као важним процесом у нуклеусу. Са открићем радиоактивности настала је потреба за развојем техника за детекцију и идентификацију радиоактивних изотопа, тј. радионуклида. Први уређаји за детекцију зрачења били су осетљиви само на алфа и бета зрачење, да би са развојем јонизационе коморе добили детекторе осетљиве и на гама зрачење [1]. Касније се усавршавају и детектори који осим регистровања зрачења могу да раздвајају енергије датог зрачења, односно могу да се користе као спектрометри. Метрологија радионуклида, односно мерење активности радионуклида развија се паралелно са развојем нуклеарне технологије и постаје комплексна научноистраживачка област.

За детекцију гама зрачења првобитно је коришћен кристал натријум-јодида допиран талијумом, NaI(Tl), а касније су у широкој употреби били и други сцинтилациони спектрометри [1]. Они су потом, са развојем полупроводничке технологије, скоро у потпуности потиснути, тако да се данас у спектрометрији гама зрачења користе готово искључиво полупроводнички детектори [2]. Карактеристике и предности полупроводничких детектора детаљније су описани у другом поглављу овог доктората

Једна од важних карактеристика детектора за детекцију гама зрачења је симултана детекција фотона (емитованих у процесу каскадне деексцитације), што резултује појавом сумационих пикова, односно коинцидентним сумирањем. Све чешће коришћење BEGe детектора, са проширеном детекторском осетљивошћу ка нижим енергијама, доводи до детекције и X-фотона (насталих у процесима електронског захвата и/или интерне конверзије), што додатно усложњава енергетски спектар детектованих фотона. Ефекти коинцидентног сумирања се такође повећавају са порастом ефикасности савремених детектора.

Проблематици коинцидентног сумирања, која је једна од најважнијих проблема у гама спектрометрији, научници посвећују велику пажњу већ педесет и више година. Још су 1956. Гупта и Џа [3] развили технику одређивања сумационих пикова. Међу првима који су се бавили овом проблематиком су и Бринкман са сарадницима [4]. Андрејев са сарадницима [5, 6] су успешно одредили једначине за корекцију брзина бројања у тзв. „*single*“ пиковима због појаве сумационих пикова у гама спектру да би затим Мек Калум и Кут [7] ослањајући се на те резултате, даље промовисали овај метод. Семков са сарадницима [8] је развио тзв. *матрични формализам*, математички поступак за одређивање тих корекција и добио одличне резултате. Са циљем да у формализам укључе и допринос коинцидентног X-зрачења, Корун и Мартинчић [9] су, увођењем виртуелних нивоа, проширили матрични формализам Семкова. Овај проширени матрични формализам успешно је примењен на распад церијума ^{139}Ce . Новковић са сарадницима уочио је недостатке матричног формализма проширеног увођењем виртуелних нивоа и представио научној јавности нов метод [10]. Ту је по први пут успешно инкорпориран допринос коинцидентног X-зрачења.

Циљ ове докторске тезе побољшање досадашњих и развој новог матричног метода за израчунавање ефеката коинцидентног сумирања у гама спектроскопији. Као резултат рада на развоју новог метода за опис и израчунавање доприноса ефеката коинцидентног сумирања X и гама зрачења објављена су два рада у врхунском часопису међународног значаја [11,12]:

- Laslo J. Nadderđ, Dragana J. Jordanov, Miloš D. Davidović, “A new matrix method for calculating coincidence summing effects for gamma spectroscopy”, Nuclear Instruments and Methods A **662**(1) (2012) 21–25.
- Laslo J. Nadderđ, Miloš D. Davidović, Dragomir M. Davidović, Miodrag J. Milošević, Dragana J. Jordanov, Srboljub J. Stanković, Slobodan L. Prvanović, “A possible improvement of the determination of ^{133}Ba activity and detection efficiency by the sum-peak method, by inclusion of the previously neglected transitions”, Nuclear Instruments and Methods A **698** (2013) 60–65.

Предмет ове докторске дисертације су представљање новог аналитичког приступа проблему X-гама коинцидентног сумирања и његова примена.

Ова дисертација се састоји од девет тематских целина, тј. поглавља. Да бисмо читаоцу што више приближили физички садржај представљеног метода у првом поглављу дисертације описани су основни ефекти који настају у интеракцији гама зрачења и материје. У другом поглављу дате су карактеристике полупроводничког кристала и његова структура, а затим и основни принцип рада и механизам детекције полупроводничким детекторима, са посебним освртом на карактеристике германијумских детектора. Основне поставке у вези са коинцидентним сумирањем и разлика између правог и случајног коинцидентног сумирања разматрани су у трећем поглављу и дат је пример како долази до сумационих ефеката у спектру радионуклида са једноставном шемом распада. У четвртном поглављу приказан је метод корекција на сумационе ефекте по Андрејеву, који се сматра једним од зачетника аналитичког приступа проблематици коинцидентног сумирања [5, 6].

Нов аналитички метод који смо развили описан је у петом поглављу, Детаљно је приказан цео поступак, од формирања матрица вероватноће прелаза, дефинисања матрица вероватноће детекције и добијања свих исхода детекције. Такође, у петом поглављу смо се осврнули и на Новковићев метод развијен у Лабораторији за нуклеарну и плазма физику Института за нуклеарне науке „Винча“, који превазилази недостатке ранијих метода [10, 13]. У шестом поглављу метод је примењен на радионуклиде церијум ^{139}Ce , кобалт ^{57}Co и баријум ^{133}Ba који су анализирани и ранијим методима. У седмом поглављу нови метод примењен је на европијум ^{152}Eu , радионуклид са сложеном шемом распада. У осмом поглављу описан је експеримент. Сва израчунавања урађена су у програму MathCad 15.

Тачност метода проверена је на симулираним реакцијама распада кобалта ^{57}Co и европијума ^{152}Eu што је приказано у деветом поглављу. Симулације распада урађене су програмом за Монте-Карло симулације на Природно-Математичком факултету у Београду.

1 Интеракција гама зрачења са материјом

Зрачење проласком кроз материју изазива низ интеракционих процеса. Фотон као квант електромагнетног поља интерагује са електронима из омотача и протонима у језгру атома. У интеракцији фотона са електронима и протонима може доћи до еластичног и нееластичног расејања; затим, у интеракцији фотона са атомом као целином може доћи и до апсорпције фотона [14]. При расејању фотон је скренут из снопа; код апсорпције долази до потпуне или делимичне директне конверзије енергије фотона у кинетичку енергију честица. У овим процесима долази до слабљења интензитета гама зрачења експоненцијално са дебљином материјала. Ови процеси се описују одговарајућим коефицијентима слабљења (атенуације), који зависе од атомског броја материјала апсорбера и енергије упадног зрачења. Њихове вредности су одређене специфичностима процеса интеракције. Ти процеси су:

- еластична расејања (Рејлијево и Томсоново)
- фотоелектрични ефекат
- Комптоново расејање
- производња парова e^+e^- (за фотоне енергије изнад 1 MeV).

Последња три процеса се наводе као нееластични процеси, мада се Комптоново расејање може сматрати еластичним јер се не јавља губитак кинетичке енергије, али се јавља промена таласне дужине, а расејано зрачење је некохерентно са упадним снопом. Од еластичних процеса Рејлијево расејање (на везаним електронима) обично је најважније, мада постоји и Томсоново расејање (на наелектрисању језгра).

На нижим енергијама фотона доминира интеракција фото-ефектом, на средњим енергијама преовладава Комптоново расејање, а изнад ових енергија производња парова (Сл. 1.1).

Наелектрисане честице захваљујући томе што имају наелектрисање дају до знања да су присутне у детектору [1]. За разлику од њих, ненаелектрисана зрачења могу проћи кроз комплетну запремину детектора а да се не открије ни најмањи наговештај да су икада ту била. Да би били детектовани, гама фотони

морају претрпети драстичне интеракције: наиме, код проласка гама зрачења кроз дату материју фотон или нестаје или се расејава у широком опсегу углова. Ови процеси воде парцијалном или потпуном трансферу енергије фотона гама зрачења у енергију електрона и тако настају слободни електрони, који на свом путу кроз материју стварају парове јон-електрон или електрон-шупљина [2]. Ови парови наелектрисања у детекторима фотона омогућавају стварање сигнала који носи информацију о проласку фотона али и о његовој енергији на основу амплитуде сигнала, тј. количине произведеног наелектрисања.

1.1 Фото-електрични ефекат

Фото-електрични ефекат (фотоефекат) настаје у судару фотона са електроном везаним на некој од унутрашњих љуски атома апсорбера, при чему фотон нестаје предајући целокупну своју енергију. Највећи део те енергије преузима сам електрон, који онда напушта атом, док много мањи део (често се може занемарити у односу на први) остаје атому и манифестује се у виду узмака атома. Енергију коју је примио електрон користи да би се ослободио из атома (енергија везе E_b) а делом као кинетичку енергију (E_k) за своје кретање. Може се рећи да атом апсорбује фотон и та интеракција се увек дешава са атомом као целином, а не са слободним електроном. Разлог је тај што слободни електрон не може потпуно да апсорбује фотон уз очување импулса (немогуће је одржати истовремено и енергију, и импулс). Фотоефекат је, дакле, карактеристичан за везане електроне и вероватнији је ако је електрон чвршће везан. Око 80 % фото-електрона потиче из К-љуске.

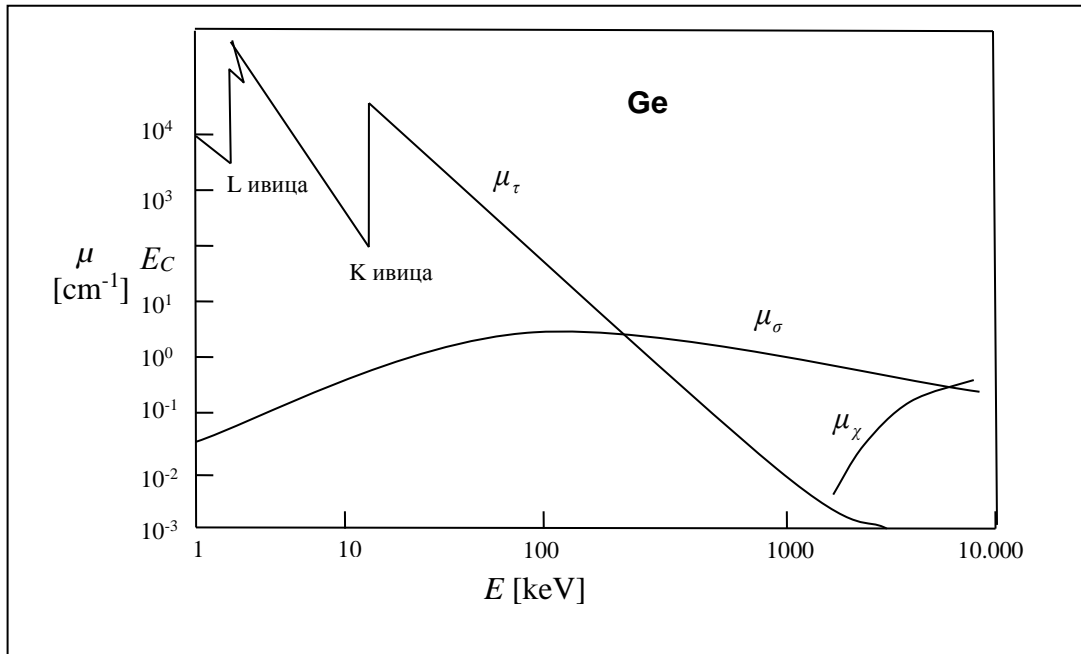
Да би дошло до фотоефекта, фотон треба да има енергију само нешто већу од енергије везе електрона и тада је фотоефекат најефикаснији. Вероватноћа настанка фотоефекта мери се пресеком. За фотоефекат, пресек зависи од редног броја атома апсорбера, од упадне енергије фотона, као и од везивне енергије електрона у електронском омотачу атома. Вероватноћа догађаја фотоефекта расте за теже материјале, а опада за веће енергије, односно сразмерна је Z^4/E_γ^3 . Јака зависност од Z показује да су материјали са великим атомским бројем врло ефикасни у апсорпцији фотона. Зависност фотоелектричне апсорпције од атомског броја главни је разлог због којег се даје предност материјалима са

великим Z у заштити од гама зрачења. Јака зависност од енергије фотона показује зашто је тај ефекат доминантан облик интеракције на нижим енергијама, а постаје занемарив на високим енергијама.

Дакле, за гама фотоне нижих енергија извор фото-електрона су они најјаче везани или они из К-љуске; за гама фотоне са енергијама вишим од неколико стотина килоелектронволта фото-електрон односи већину енергије упадног фотона. Ова интеракција у апсорбујућем атому изазива стварање шупљине на некој од везивних љуски (са које одлази електрон); та шупљина се брзо попуњава захватом слободног електрона из медијума и/или реорганизацијом електрона из других љуски атома. Услед тога ће се генерисати један Х-фотон или више карактеристичних Х-фотона, односно фотоефекат прати емисија карактеристичног Х-зрачења. Дакле, фотоефекат доводи до смањења електрона у омотачу атома, што доводи до прегруписавања електрона и емисије Х-зрачења. Њихова миграција и вероватни излазак из детектора утичу на одзив детектора. У многим случајевима ти Х-фотони се реапсорбују близу места фотоелектричне апсорпције. У неким случајевима емисија нискоенергетских Ожеових електрона (ПРИЛОГ В) може заменити карактеристичне Х-зраке.

Када је целокупна енергија фото-електрона и другог секундарног зрачења апсорбована у детектору, онда је та енергија једнака енергији упадног фотона. Амплитуда сигнала у детектору биће пропорционална енергији упадног фотона. Флуктуација ове амплитуде узрокована је флуктуацијом примарних носилаца наелектрисања у детектору и флуктуацијама у претпојачавачу и појачавачу, што ће резултовати гаусовском расподелом спектралног одзива детектора, која се назива фото-пик [15].

Енергетска зависност апсорпције фотона показана је на слици (Сл. 1.1) за германијум [2]. На ординати је коефицијент линеарног слабљења, $\mu = \tau \rho \cdot N_A / M$, где је ρ - густина материјала, N_A - Авогадров број, M - моларна маса германијума и τ - ефикасни пресек интеракције. На везивним енергијама електрона љуски К-, L-, M-, N-... итд., се јављају дисконтинуитети у виду оштрих ивица (нпр. за К-љуску, у случају германијума, то је на енергији 11,1 keV- Сл. 1.1). На нижим енергијама се дешавају дисконтинуитети које одговарају електронским везивним енергијама виших љуски. Ове ивице настају зато што фотони са енергијама које припадају ивици не могу интераговати са електронима одговарајуће љуске.

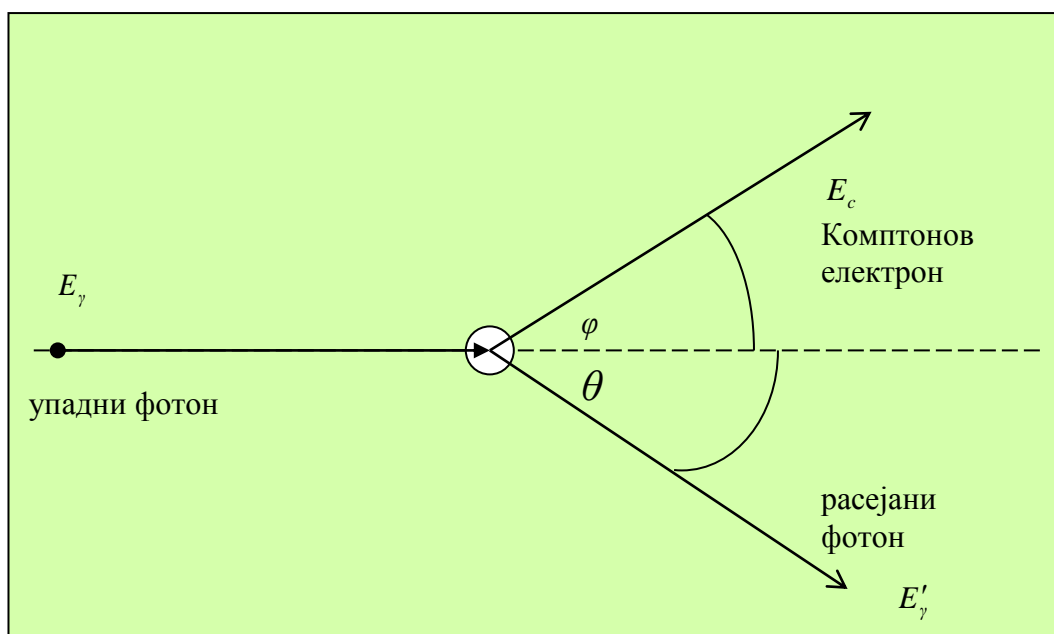


Сл. 1.1 Линеарни коефицијент слабења у германијуму за фотоелектрични ефекат (μ_τ), Комптоново расејање (μ_σ) и производњу парова (μ_χ) у функцији енергије упадног фотона. Комптоново расејање је присутно у целом опсегу енергија. За ниже енергије гама фотона (за германијум око 40 кеВ) доминира фотоелектрични ефекат, на средњим енергијама (за германијум око 7 МеВ) Комптоново расејање, а изнад тих енергија производња парова електрон–позитрон.

1.2 Комптоново расејање

Комптоново расејање је карактеристично за слабо везане електроне. Стога се и дешава када је енергија упадног гама фотона већа од 0,1 МеВ – тада се везивна енергија електрона може занемарити. Процес се приближно сматра еластичним сударом фотона са слободним електронем (углавном су то електрони на некој од спољашњих љуски, који се у принципу могу сматрати слободним и у стању мировања, а често се називају *квазислободним*), при чему фотон предаје део своје енергије електрону а сам скреће са свог правца – расејава се (Сл. 1.2). Фотон губи више енергије уколико је његово скретање веће. Преостали део енергије се појављује као расејани фотон. Такође долази до узмака електрона (Комптонов електрон). Угао под којим електрон може бити избачен је од $\varphi = 0^\circ$ до $\varphi = 90^\circ$. Највише енергије електрон добија кад полази напред, а фотон се враћа назад ($\varphi = 0^\circ$, $\theta = 180^\circ$). Најмање енергије се преноси кад електрон креће у

страну, а фотон не мења правац ($\varphi = 90^\circ$, $\theta = 0$). Између ова два случаја могућ је континуалан низ вредности θ и φ . Како су могући сви углови расејања, енергија пренета на електрон може се мењати од нуле до максималне енергије, која је нешто нижа од енергије упадног гама зрачења. Са порастом енергије фотона расте вероватноћа да електрон буде избачен под углом $\varphi = 0^\circ$ [14].



Сл. 1.2 Шематски приказ Комптоновог расејања

Расејано електромагнетно зрачење је некохерентно јер таласна дужина расејаног зрачења зависи од угла расејања. Израз који повезује трансфер енергије и углове расејања фотона дат је са:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)}, \quad (1.2.1)$$

где је $m_0 c^2$ - енергија мировања електрона (511 keV), E'_γ - енергија расејаног фотона а E_γ - енергија упадног фотона.

Енергија Комптоновог електрона (расејаног) биће:

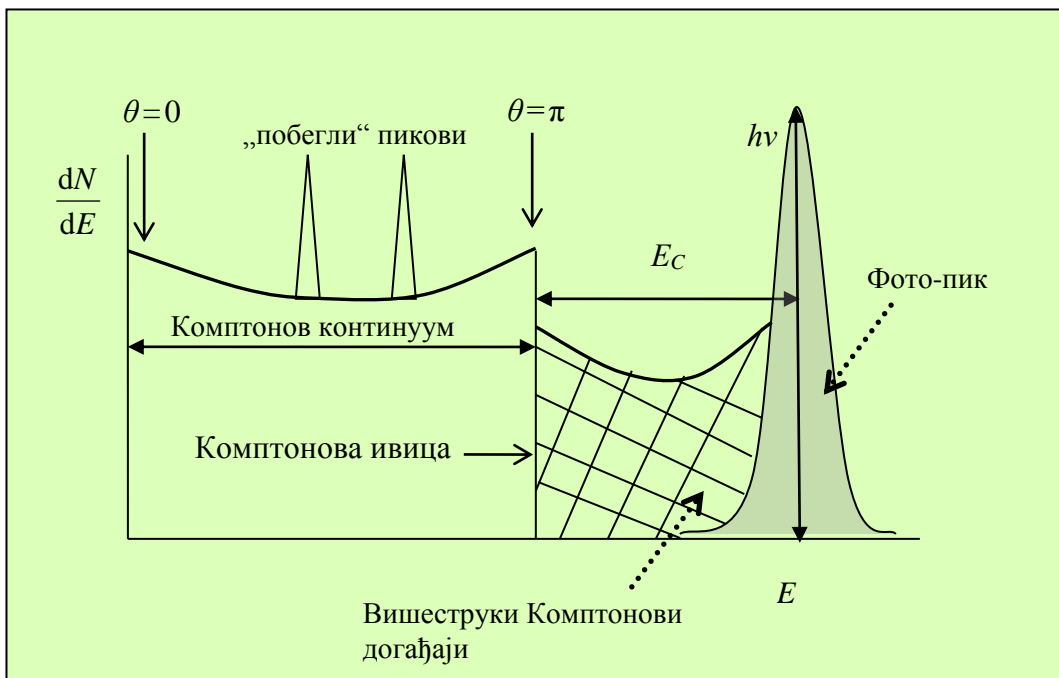
$$E_c = E_\gamma - \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)}. \quad (1.2.2)$$

Максимална енергија расејаног електрона је онда:

$$E_c^{\max} = E_\gamma \frac{2 \cdot \frac{E_\gamma}{m_0 c^2}}{1 + 2 \cdot \frac{E_\gamma}{m_0 c^2}}, \quad (1.2.3)$$

и представља Комптонову ивицу која се у енергетском спектру појављује на максималној енергији електрона, односно за угао расејања фотона $\theta = 180^\circ$ (Сл. 1.3). Релација која повезује угао расејања фотона θ и угао расејања електрона φ је:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} \right) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (1.2.4)$$



Сл. 1.3 Шематски изглед спектра. Облик Комптоновог континуума: континуална Комптонова расподела се завршава Комптоновом ивицом на максималној енергији Комптонових електрона, која је нижа од енергије упадног гама зрачења; Фото-пик настаје доприносом и фото-ефекта и Комптоновог ефекта; Поред фото-пика и Комптонове области у спектру се појављује и област вишеструких Комптонових догађаја, смештена између Комптонове ивице и фото-пика.

Комптоново расејање је карактеристично за лакше елементе и средње енергије фотона. Вероватноћа Комптоновог расејања по атому зависи од броја електрона

који су на располагању као мете и услед тога расте линеарно са Z . За енергије фотона веће од 0,6 MeV вероватноћа Комптоновог расејања сразмерна је Z/E_γ . Док овај процес повлачи за собом емисију расејаног фотона, тотална енергија улазног фотона није цела потрошена у тој интеракцији. Зато енергија улазног фотона може изазвати серију догађаја Комптонових расејања, од којих сваки редукује енергију расејаног фотона пре крајњег дела са догађајем фотоелектричне апсорпције, па на тај начин енергија улазног фотона може бити дистрибуирана по значајној запремини материјала.

Ако у детектору долази до Комптоновог расејања, највећи део расејаних гама фотона напушта ефикасну запремину детектора, а у детектору своју енергију остављају Комптонови електрони – њихов спектар је континуалан и распростире се од нуле до максималне енергије, која је нешто нижа од енергије упадног гама зрачења. Онај део расејаних гама фотона који се апсорбују у ефикасној запремини детектора даје импулсе који ће се гомилати у фото-пику. Спектар, дакле, изгледа на следећи начин: има континуалну Комптонову расподелу која се завршава Комптоновом ивицом на максималној енергији и фото-пик настао доприносом и фото-ефекта, и Комптоновог ефекта (Сл. 1.3). Што су димензије детектора веће, то је фото-пик израженији у односу на Комптонову расподелу јер је вероватноћа апсорпције расејаног гама зрака већа. Због тога је и однос пик–Комптон већи, па такав детектор има боље карактеристике.

Размак између максималне енергије узмаклог Комптоновог електрона и упадне енергије гама зрачења дат је као:

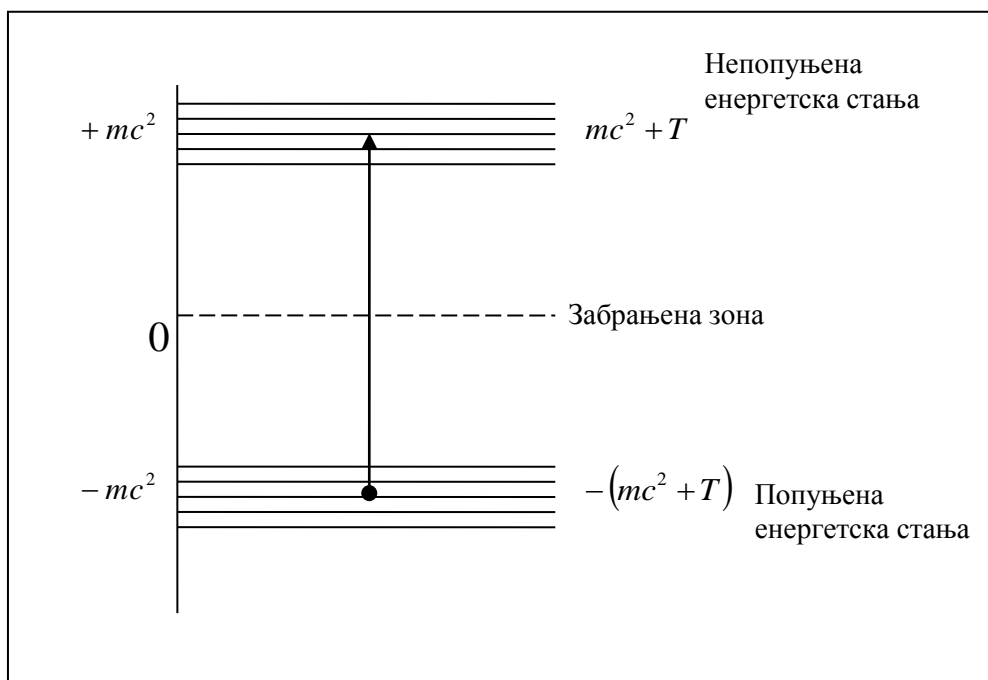
$$E_C = h\nu - E_e|_{\theta=\pi} = \frac{h\nu}{1 + \frac{2h\nu}{m_0c^2}}. \quad (1.2.5)$$

Комптонов ефекат је најважнији механизам апсорпције гама зрачења за енергије између 0,5 MeV и 10 MeV. За мерење енергија и идентификацију зрачења уопште, континуални спектри нису подесни, тако да Комптонови електрони отежавају мерења. Њихов ефекат се умањује коинцидентним и другим посебним методима [14].

1.3 Стварање парова

Парови e^-e^+ (електрон–позитрон) се стварају при проласку фотона у близини језгра где је јако електрично поље. Фотон нестаје у интеракцији са Кулоновим пољем језгра, а настаје пар e^-e^+ . Минимална енергија фотона потребна за стварање пара је $2m_0c^2 = 1,022 \text{ MeV}$. Ова енергија пропорционална је збиру маса мировања електрона и позитрона, односно двострукој маси мировања електрона. Ако фотон има већу енергију од минималне, тај вишак енергије претвара се у кинетичку енергију електрона и позитрона. Када се позитрон успори, он се *анихилира* са најближим електроном дајући два фотона са енергијама од по $0,511 \text{ MeV}$. Сваки $0,511 \text{ MeV}$ фотон ће носити своју енергију на другу локацију, где ће интераговати даље Комптоновим расејањем или фото-ефектом. Дакле, коначан ефекат је стварање електрона и два фотона ниже енергије. Као и код Комптоновог расејања, почетна енергија фотона није цела потрошена у првој интеракцији. Даља судбина анихилираног зрачења има важну улогу у одговору гама детектора.

Производња пара електрон–позитрон објашњава се Дираковом теоријом електрона [19]. По тој теорији, електрон може запосести сва стања са позитивном енергијом од m_0c^2 до $+\infty$ и сва стања са негативном енергијом од $-m_0c^2$ до $-\infty$ (Сл. 1.4). Са класичне тачке гледишта, стања са негативном енергијом немају физичког смисла. Међутим, са становишта квантне механике, таква стања су могућа. Према Дираку, она су попуњена електронима, отуда су спонтани прелази тотално забрањени и због тога се не запажају у експерименту. Стања са позитивном енергијом нису сва попуњена електронима, између њих се могу десити прелази и због тога се експериментално запажају. Размак између ове две енергетске зоне (Сл. 1.4) износи $2m_0c^2$. Прелази електрона из једне у другу зону могући су под одређеним условима. Прелаз електрона из стања са негативном енергијом у стања са позитивном енергијом могућ је само под условом да му се преда енергија већа од ширине забрањене зоне, тј. када је $E_\gamma > 2m_0c^2$. Недостатак електрона у стању са негативном енергијом чини га електрично позитивним, тј. шупљина у стању са негативном енергијом је електрично позитивна.



Сл. 1.4 Енергетска шема електронских стања

Прелазак електрона из стања са позитивном у стања са негативном енергијом могућ је ако у стању са негативном енергијом постоји мањак електрона. У том случају електрон попуњава шупљину, односно анихилира се. Овај процес је праћен емисијом два кванта енергије од $0,511 \text{ MeV}$. Кванти зрачења се емитују под углом од 180° (Сл. 2.4). Ако се оба анихилациона фотона апсорбују у ефикасној запремини детектора, укупна енергија биће једнака енергији упадног фотона и догађај ће допринети фото-пику. Ако један анихилациони фотон напусти детектор, у енергетском спектру, формираће се пик на енергији нижој за 511 keV од енергије упадног фотона (*single escape* пик), а ако детектор напусте оба анихилациона фотона, формираће се пик на енергији нижој за $1,022 \text{ MeV}$ од енергије упадног фотона – *double escape* пик (Сл. 1.3). Када су енергије упадног фотона ниже, сва три пика имају симетричну гаусовску функцију, а ако су енергије више (од 4 MeV), добијају благ реп. Ако имамо зрачење енергије изнад $1,022 \text{ MeV}$ тада се у спектру увек формира фото-пик на енергији од 511 keV , јер у детектор стижу фотони настали анихилацијом у његовој околини. За образовање пара електрон–позитрон у присуству електрона, енергија прага расте и износи $E_0 = 4m_e c^2 = 2,04 \text{ MeV}$.

Пресек за стварање пара електрон–позитрон има врло сложену форму и може се у аналитичком виду представити само у домену енергија $5m_e c^2 < E_\gamma < 50m_e c^2$. Овај пресек је апроксимативно дат као:

$$\sigma_{pp} = Z^2 \ln E_\gamma . \quad (1.3.1)$$

Дакле, стварање парова је карактеристично за високе енергије и тешке елементе. За енергије гама зрака у опсегу од неколико мегаелектронволти водећи механизам интеракције постаје продукција парова.

Укупни пресек за интеракцију фотона са материјом једнак је суми пресека за фотоелектрични ефекат, Комптоново расејање и производњу парова:

$$\sigma = \sigma_{fe} + \sigma_{ke} + \sigma_{pp} . \quad (1.3.2.)$$

Веза која постоји између пресека за интеракцију и линеарног коефицијента слабљења приказана је у потпоглављу 1.1.

2 Полупроводнички детектори

Људи немају чула којима би могли опажати радиоактивна зрачења. Зрачење се може регистровати само на индиректан начин. Зрачење интерагује са материјом и ствара дефекте у материјалу: јонизује гас, узрокује луминисценције, ствара слободне носиоце наелектрисања, узрокује хемијске реакције и сл., зависно од типа материјала. На тим својствима зрачења заснива се принцип детекције. Детектори гама зрачења се дизајнирају тако да фаворизују интеракције које доприносе добијању сигнала (импулса) који се може мерити. Одзив детектора је веза између енергије зрачења и висине излазног сигнала. Три процеса интеракција гама зрачења са материјом (описаних у претходном поглављу) су најважнија у мерењима и детекцији овог зрачења, а то су:

- фотоелектрична апсорпција (фото-ефекат),
- Комптоново расејање и
- стварање парова.

Технолошки развој је омогућио настанак све бољих и савршенијих инструмената за детекцију различитих типова зрачења, као и за мерење њихових енергија и активности. За детекцију гама фотона користе се углавном гасни детектори, NaI(Tl) сцинтилатори и полупроводнички детектори. Најпопуларнији полупроводнички детектори су германијумски и силицијумски детектори. Германијумски детектори су врло погодни за детекцију фотона (X и гама). Силицијумски детектори, због мањег редног броја Z , погоднији су за електроне и зрачења нижих енергија (X-зрачење). Мање се употребљавају CdTe и HgI₂ детектори.

Сви они имају заједничке принципе у механизму детекције фотона: први корак у детекцији је конверзија енергије фотона у кинетичку енергију електрона и позитрона фото-ефектом, Комптоновим ефектом и производњом парова; затим ти електрони иницирају производњу парова електрон–јон, парова електрон–шупљина или ексцитованих молекуларних стања, зависно од типа детектора. На крају долази до прикупљања тих носилаца наелектрисања или

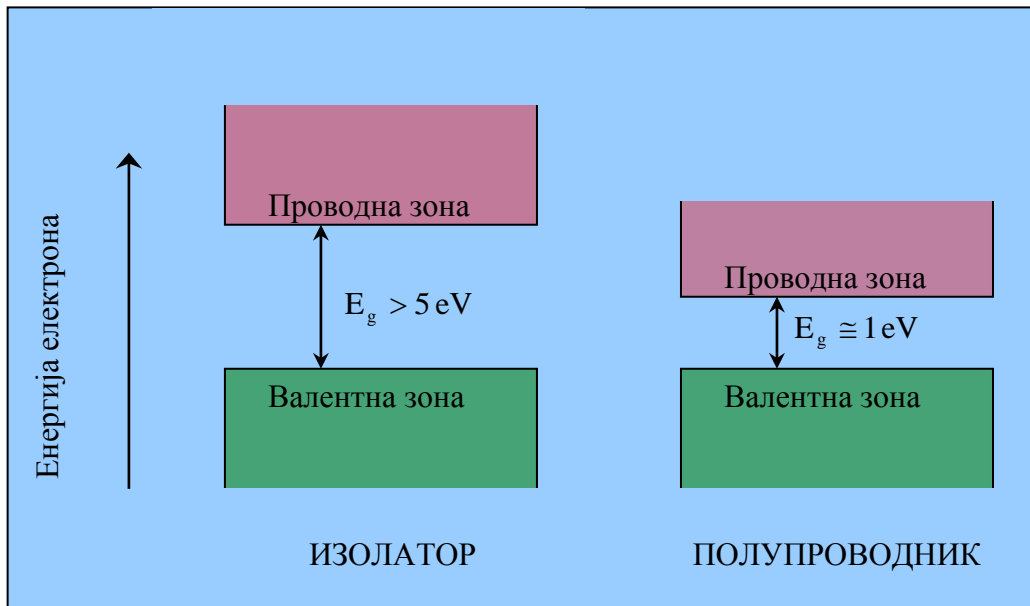
светлости емитоване у деекситацији молекуларних стања и стварања сигнала (импулса). Начин добијања импулса зависи од природе детекционе средине. Импулси се складиште у виду спектра, који се обрађује одговарајућим софтвером.

Полупроводнички детектори су уређаји код којих је активна средина детектора полупроводнички материјал. Полупроводник се може користити за мерење зрачења на следећи начин: зрачење проласком јонизује средину, тј. стварају се парови електрон–шупљина који су носиоци наелектрисања; прикупљањем насталог наелектрисања под утицајем електричног поља ствара се импулс чија је амплитуда пропорционална енергији детектованог фотона.

Полупроводници су материјали који су основа данашње модерне електронике. У нормалним условима они не проводе струју као метали али повишењем температуре или применом јачег електричног поља могу проводити струју, за разлику од изолатора. Периодична решетка у кристалима полупроводника омогућава успостављање енергетских зона за електроне који се налазе у том чврстом материјалу. Валентна зона је попуњена електронима спољашње љуске који су везани у специфичним стањима у решетки кристала. Они су делови ковалентне везе која конституише међуатомске силе унутар кристала. Проводну зону чине електрони који слободно мигрирају кроз кристал. Ти електрони доприносе електричној проводљивости материјала. Ове две зоне раздваја енергетски процеп (забрањена зона), од чије величине зависи да ли ће материјал бити изолатор или полупроводник [1]. Полупроводници се одликују релативно уским енергетским процепом и специфичном електричном отпорношћу. Код њих је енергетски процеп, који дели подручје енергија валентних (везаних у атому) електрона и проводних (слободних) електрона негде између проводника и изолатора. За разлику од изолатора, енергетски процеп између проводног и валентног нивоа код полупроводника је много мањи, реда 1 eV .

Структура зона код полупроводника слична је структури код изолатора. И код изолатора и код полупроводника електрон мора да пређе тај процеп да би пунио проводну зону – зато је проводност много мања него код метала код којих електрони треба да постигну само мали прираштај енергије да би били изнад попуњених стања (Сл. 2.1). Ако електрон прескочи из атомског стања (валентне зоне) у квазислободно стање (проводна зона), тада струју може

проводити електрон, као и шупљина која остаје у валентној зони одласком електрона.



Сл. 2.1 Зонска структура енергија електрона у изолаторима и полупроводницима

Вероватноћа да се електрон нађе у проводној зони зависи од температуре. На некој температури различитој од апсолутне нуле постоји вероватноћа да валентни електрон добије довољно термалне енергије да буде подигнут кроз процеп у проводну зону; то је заправо екситација електрона који је део ковалентне везе, тако да он напушта специфично везано стање и дрефтује кроз кристал. На тај начин се креира електрон у проводној зони али се креира и шупљина у валентној зони; комбинација овога јесте пар шупљина–електрон. Ови парови су аналогни јонским паровима у гасовима. Њихово кретање у примењеном електричном пољу генерише основни електрични сигнал кроз детектор. Дакле, постоје два типа носиоца наелектривања у полупроводницима: електрони (негативно) и шупљине (позитивно наелектривање). Услед повећања концентрације слободних носилаца наелектривања (електрона и шупљина) са повишењем температуре смањује се специфична електрична отпорност, што је једна од битнијих карактеристика за примену полупроводничких материјала. У беспримесном полупроводнику при нормалним условима има врло мало слободних електрона и шупљина. Сви електрони у проводној зони и одговарајуће шупљине у валентној зони настају термичким побуђивањем. У том

случају концентрације електрона и шупљина су једнаке ($n = p$) и систем је у равнотежи. Ова концентрација зависи од величине енергетског процепа полупроводничког материјала и од температуре на којој се материјал налази. На пример, на собној температури концентрација у силицијуму је $1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, а у германијуму $2.4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ [16].

Ако се полупроводнику додају одређени елементи (примесе), они могу променити њихова својства. Доминантна карактеристика полупроводника је да њихова специфична електрична отпорност изразито зависи од концентрације и врсте примесних атома у материјалу. Тако се додавањем елемената (донора) који отпуштају електроне добија n -тип полупроводника. У таквим полупроводницима већински носиоци струје су слободни електрони. Ако атоми додатог елемента (акцептори) узимају електроне из валентне зоне, стварају се шупљине и такав полупроводник се зове p -тип полупроводника. У њему су шупљине већински носиоци наелектрисања (струје).

Нарочито је интересантан спој p -типа и n -типа полупроводника. Такав спој се зове полупроводничка диода. Основно својство полупроводничке диоде је да при једном поларитету прикљученог сталног напона води струју практично без отпора, а променом поларитета напона диода даје врло велики електрични отпор. Детекторска полупроводничка диода ради у инверзном режиму, тј. када је поларитет напона такав да диода има велики електрични отпор. У радним условима је детектор прикључен на високи напон у инверзном смеру. Примењују се високи напони ($\sim 2500\text{--}4500 \text{ V}$). Такав напон ствара између p - и n -полупроводника широко подручје осиромашења наелектрисања. У том подручју постоје само мањински носиоци наелектрисања којих је врло мало (шупљине у n -типу и електрони у p -типу). Ако зрачење прође кроз подручје осиромашења наелектрисања, оно ствара парове електрон–шупљина. Ти се парови раздвајају под утицајем снажног електричног поља. Електрони се одводе у n -тип полупроводника а шупљине у p -тип. Долази до наглог пораста струје, тј. до електричног импулса. Принцип рада је, дакле, аналоган раду јонизационе коморе. Треба нагласити да је осетљиви слој детектора (или, како се још назива, активна запремина) само подручје осиромашења наелектрисања, а не цела диода. Због тога се тежи да то подручје буде што веће. Такође, у изради и употреби тих детектора тежи се да се постигну што мање инверзне струје јер се тиме смањује шум бројача и побољшава резолуција.

Први комерцијално доступни детектори направљени од полупроводника појављују се крајем шездесетих година, што их чини најмлађом врстом детектора зрачења.

Коришћење чврстог медијума у детекцији радијације има велике предности као што су компактност, релативно брзе временске карактеристике, ефективна дебљина која може да варира зависно од захтева примене. Способност детектора да раздвоји енергетски блиске импулсе је његова резолуција и пожељно је да она буде што боља. Једна од предности полупроводника над осталим детекторима и јесте његова резолуција, односно разлагање енергија. Полупроводник, за разлику од других детектора радијације, има много већи број носилаца наелектрисања за дато упадно зрачење. Ова карактеристика је од великог значаја јер дозвољава раздвајање јако блиских енергија фотона, које остају нерешене у, нпр., NaI(Tl) сцинтилаторима, а доноси и велику уштеду у времену. Ограничење за разлагање представља варијација средње енергије потребне за формирање пара електрон–шупљина. Предност полупроводничких детектора је та што је средња енергија за креирање пара електрон–шупљина око десет пута мања него за стварање јонизационог пара унутар гаса (2,98 eV у просеку за полупроводник германијум и 3,62 eV за силицијум, а око 30 eV за формирање пара електрон–јон). Дакле, најбоља енергетска резолуција спектрометара радијације у рутинској употреби постигнута је полупроводничким детекторима. Важне карактеристике детектора су и густина и атомски број материјала од кога је детектор сачињен, као и његова запремина. Даља предност полупроводничких детектора је и у томе што њихове димензије могу бити много мање од гасних детектора јер су густине чврстих материјала хиљаду пута веће него гасова. Такође, што може да буде врло корисно, због веће густине материјала имају већу зауставну моћ. Полупроводници, дакле, имају велики коефицијент апсорпције, односно добру ефикасност. Гама зрачење је врло продорно, па је неопходно да детектор буде што бољи апсорбер за гама зраке. Због своје велике продорности ово зрачење захтева детекторску средину од што тежег материјала и што веће радне запремине. Због свих ових својстава полупроводнички детектори су врло квалитетни спектрометарски системи и као такви доприносе развоју метода детекције и спектрометрије јонизујућег зрачења.

Због великих могућности примене, од полупроводничких материјала се захтевају прецизно дефинисана својства, пре свега величина и тип енергетског процепа, што се реализује кроз технике инжењеринга енергетског процепа, израдом полупроводничких вишекомпонентних легура и нано-структура. Осим тога, због захтева што веће брзине рада и мањих димензија полупроводничких направа, полупроводници се практично искључиво израђују у форми монокристала.

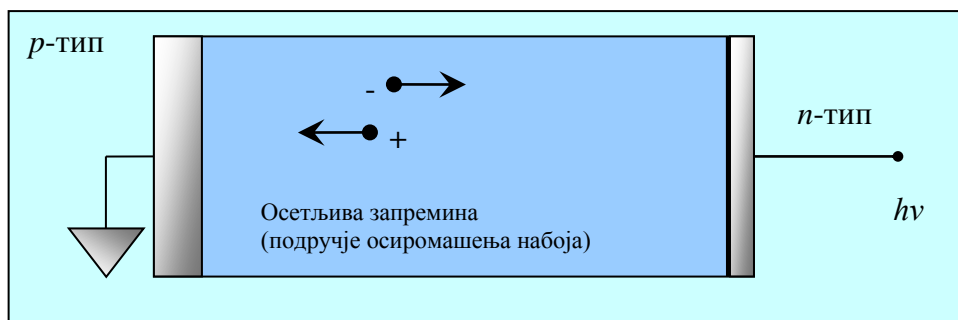
Полупроводнички детектори се данас углавном користе за прецизна мерења радијационе енергије гама зрачења.

2.1 Механизам детекције полупроводничким детекторима

Полупроводнички детектори спадају у спектрометре, односно поред одброја честица могу да одреде и њихову енергију. Да би било детектовано, зрачење мора да доспе у ефикасну (осетљиву) запремину детектора. После проласка зрачења долази до промена у овој средини, која је код полупроводничких детектора у чврстом агрегатном стању. Зрачење пролазећи кроз детекциону средину троши енергију на ексцитацију атома, чиме се стварају покретни носиоци наелектрисања, позитивног и негативног, електрони у проводној зони и шупљине у валентној. Ови носиоци наелектрисања се под дејством електричног поља крећу према позитивној, односно негативној електроди детектора. Ствара се електрични сигнал (импулс), пропорционалан губитку енергије честице у осетљивом слоју детектора. Електрични импулс се онда појачава, мери и региструје. Полазна тачка за детекцију зрачења је ефекат који оно производи пролазећи кроз дату средину. Код полупроводника је тај ефекат мали јер је енергија радиоактивног зрачења веома мала, због чега је потребно појачање. Код полупроводничких детектора појачање се врши електронским уређајима на које се преноси сигнал из детектора.

Процесом допирања, односно контролисаног додавања одређене количине примеса чистом полупроводнику, концентрације електрона и шупљина се мењају. Ако примесе повећавају концентрацију електрона у полупроводнику, оне су *донорске*, а полупроводник је *n*-типа. Донорске примесе стварају дискретан електронски енергетски ниво у забрањеној зони, близу доње ивице

проводне зоне. Енергетски размак овог дискретног нивоа и проводне зоне је довољно мали да се све донорске примесе могу сматрати јонизованим већ на собној температури. Електрони свих атома донора термички су побуђени у проводну зону. Концентрација донорских примеса је најчешће много већа од сопствене концентрације електрона у проводној зони; стога је укупна концентрација слободних електрона у полупроводнику n -типа једнака збиру ове две концентрације. Због повећане концентрације електрона у проводној зони расте брзина рекомбинације електрона и шупљина, што мења равнотежне концентрације двеју врста носилаца наелектрисања. У полупроводнику n -типа електрони представљају већинске, а шупљине мањинске носиоце. Како је укупна концентрација обе врсте носилаца наелектрисања у допираном полупроводнику увек већа него у чистом, електрична проводност допираног полупроводника знатно је већа од проводности чистог материјала. Проводност допираног полупроводника везана је превасходно за кретање већинских носилаца наелектрисања. Ако примесе повећавају концентрацију шупљина у полупроводнику, оне су *акцепторске*, а полупроводник је p -типа. Концентрација акцепторских примеса је много већа од сопствене концентрације шупљина у валентној зони, па је укупна концентрација шупљина у полупроводнику p -типа једнака збиру ових концентрација. У полупроводнику p -типа електрони представљају *мањинске*, а шупљине *већинске* носиоце.



Сл. 2.2 Шематски приказ p - n типа полупроводника

Спајањем p - и n -типа полупроводника на контакту се формира тзв. деплетациони слој који настаје дифузијом шупљина на n -страну и електрона на p -страну (Сл. 2.2). p - n спој је, заправо, монокристал полупроводника који на једном крају има високу концентрацију шупљина, а на другом високу

концентрацију електрона. Носиоци наелектрисања који пређу на супротну страну се рекомбинују, тако да настала област постаје испражњена (област осиромашења). Управо област осиромашења $p-n$ споја (односно деплетациони слој) представља активну запремину полупроводничког детектора. Апсорпцијом упадних фотона или сударима наелектрисаних честица са валентним електронима настају парови електрон–шупљина у активnoj запремини. Ако је p -страна више допирана, деплетациони слој ће се више ширити на n -страну. Дебљина деплетационог слоја је једнака [1]:

$$d = \left(\frac{2\varepsilon V}{eN} \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

где је V -инверзни напон, ε -диелектрична константа, N -концентрација нечистоћа у полупроводном материјалу а e - наелектрисање електрона.

Идеално би било постићи што је могуће већи деплетациони слој за што је могуће нижи напон напајања. Према наведеној формули, најбоље би било имати полупроводник са што је могуће мање нечистоћа. На датом напону, веће дебљине деплетационог слоја се постижу смањењем вредности N (редуковањем концентрације нечистоћа). То се постиже на два начина.

1. Редуковањем концентрације нечистоћа на око 10^{10} атома/cm³, чиме се постиже дебљина деплетационог слоја од 10 mm при напону од 1.000 V; ове технике редуковања су развијене за германијум, али не и за силицијум. Детектори израђени од овог ултрачистог германијума називају се беспримесни Ge или Ge високе чистоће (HPGe) и могу достићи дебљине деплетационих слојева од неколико центиметара.
2. Редуковање концентрације нечистоћа прављењем тзв. компензованог материјала, тј. материјала у коме је остатак нечистоћа балансиран једнаком концентрацијом допант атома супротног типа; развијена је техника уношења јона литијума; резултујући компензовани материјал има многе особине беспримесног или чистог материјала.

Када се позитивни напон веже на n -крају p - n споја, деплетациони слој се повећава (инверзно поларисани спој). Електрично поље инверзно поларисаног споја ефикасно раздваја генерисане електроне и шупљине, спречавајући њихову рекомбинацију и дајући излазну струју детектора.

Детектори зрачења најчешће користе инверзно поларисане полупроводничке диоде. Код таквих полупроводника електрон лакше прелази из валентне у проводну енергетску зону (већа је вероватноћа стварања пара електрон–шупљина), под условом да је енергија фотона или наелектрисане честице већа од енергетског процепа. Енергетски процеп материјала одређује горњу границу таласних дужина зрачења које тај детектор може да детектује.

По уласку у ефикасну запремину детектора гама зрачење губи енергију углавном преко три процеса разматраних у претходном поглављу: фото-ефекта, Комптоновог ефекта и производње парова. Интеракција фото-ефектом предаје укупну енергију фотона детектору, док друга два процеса предају само део енергије. У тим процесима настају фото-електрони, Комптонови електрони и електрони из створених парова. На тај начин фотон предаје своју енергију електрону (или позитрону у случају производње парова), односно електрон бива ексцитован и прелази из валентне зоне у проводну, а у валентној зони остаје шупљина. Број парова електрон–шупљина сразмеран је енергији радиоактивних честица. Електрони се у електричном пољу крећу према позитивно поларисаном тзв. n -слоју и предају му своје наелектрисање, док се шупљине крећу ка негативно поларисаном тзв. p -слоју. Прикупљањем насталог наелектрисања под утицајем електричног поља ствара се струјни сигнал (импулс) чија је амплитуда пропорционална енергији детектованог фотона. Задатак електронског система привезаног за детектор је да прикупи ове носиоце, измери количину и ускладишти информацију (сигнал). Даље се сигнал анализира, односно импулси се одвајају према висини у хиљаде група названих канали.

Међутим, овај струјни сигнал бива у потпуности прекривен шумом омске струје (коју у проводнику узрокује примењени напон). Да до овог не би долазило, треба елиминисати струју која потиче од слободне измене електрона између полупроводника и електрода. То се постиже управо помоћу p - n споја. У њему нема слободних носилаца наелектрисања. Довођењем инверзног напона нема омске струје и шири се област где нема слободних носилаца наелектрисања (ефикасна запремина).

Спектар фотона емитован из извора обично настаје од групе фотона од којих је свака група моноенергетска. Детектор ће конвертовати тај линијски спектар у комбинацију линијских и континуалних компонената. Линијске компоненте се могу користити за одређивање енергије и интензитета фотона из извора, али ако су линије изгубљене у придруженом континууму, није могуће одредити ове величине. Могућност детектора да даје на излазу линије или пикове за моноенергетске фотоне окарактерисана је ширином и ефикасношћу пика. Ширина пика се обично описује као FWHM (*full width at half maximum*) у килоелектронволтима и такође се назива и резолуција. Поасоновска дистрибуција се јавља само кад су догађаји независни (а то је случај у кристалу); зато је разлагање у полупроводничким кристалима много боље него у другим материјалима.

Одзив детектора представља количину носилаца наелектрисања која је пропорционална количини депоноване енергије у детектору. У реалном детектору за догађајима Комптоновог расејања следи једна или више даљих Комптонових реакција, при чему сваки апсорбује мали део енергије гама зрачења, пре него што гама зрачење изађе из активне запремине детектора. Може се десити и интеракција гама зрачења са окружењем детектора – заштита, криостат, капица детектора, носач извора – у спектру ће се онда појавити и ови пикови. Анихилационо зрачење које се појави у детектору последица је производње парова у заштити.

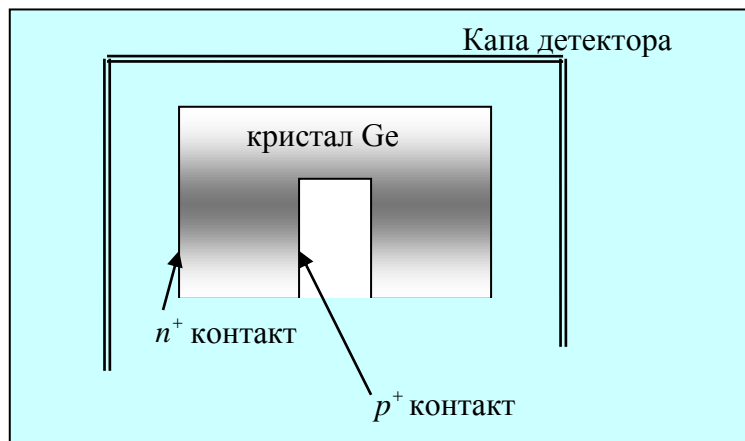
2.2 Карактеристике германијумских детектора

У мерењима енергија гама зрачења избор детектора се своди углавном на то да детектор мора да задовољи два услова – бројачку ефикасност и енергетску резолуцију. Германијумски детектори имају карактеристике које их чине погодним за спектрометрију гама зрачења. Чисти германијум се показао као најефикаснији у мерењима X-зрачења и гама зрачења. Детектори направљени од овог чистог германијума обично се називају беспримесним детекторима или детекторима високе чистоће – *High Purity* (HPGe); примесе у тим монокристалима су $1:10^{12}$ [1], па су то изразито најчистије познате супстанце. Ge(Li) детектор се употребљава за детекцију фотона у подручју енергија од 3

keV до око 3 MeV, као и за детекцију наелектрисаних честица (нпр. протона енергије од 1 до 60 MeV, деутеријума од 1 до 80 MeV). HPGe у производњи је готово сасвим потиснуо Ge(Li) детектор. HPGe се употребљава чешће од литијумом-дрифтованих Ge детектора због веће операционе погодности коју има HPGe. Недостатак Ge(Li) детектора је у томе што се не смеју загрејати на собну температуру јер дифузија јона литијума постаје толико снажна да за неколико минута уништи деплетациони слој. Зато се ови детектори морају константно хладити. То је ипак недостатак јер детектор са претпојачавачем мора бити у посебном кућишту спојеном са посудом у којој је течни азот, ради хлађења. Таква конструкција може ометати или онемогућити неке експерименте. Осим тога, у посуду се мора повремено доливати азот, што захтева континуирано одржавање таквих детектора. HPGe детектор може бити на собној температури између употребе, односно само је у току рада потребно одржавати ниску температуру. Иначе, ефикасност и резолуција су добре код оба детектора.

Енергетска резолуција је могућност детектора да раздвоји енергије у спектру детектованих фотона. Резолуција говори о томе колико детектор може разликовати две линије блиских енергија, односно колика је минимална енергетска разлика два фотона да би могли да се раздвоје. Енергетска резолуција се одређује слањем моноенергетског зрачења ка детектору, а затим се анализира добијени спектар. Идеалан случај би био да се добије оштра делта функција. У реалности ово никад није случај; добија се сложени пик са неком коначном ширином, обично гаусовског облика. Ширина овог пика расте са флукуацијама у јонизацијама и екситацијама. Резолуција је обично дата у смислу пуне ширине на половини висине пика (FWHM) и изражава се у процентима. Германијумски детектори имају резолуцију реда величине 0,1 % [17], што је одлична резолуција за примену у гама спектроскопији. Енергетска резолуција је доминантна карактеристика германијумских детектора. Из тог разлога се данас практично сва гама спектроскопија која обухвата комплексне енергетске спектре обавља германијумским детекторима. Уопште, резолуција је функција енергије депоноване унутар осетљиве запремине детектора, која се побољшава са растом енергије. Како расте енергија, расте и број јонизација, а релативне флукуације се смањују. Средња енергија која се депонује је константантна, и зависи само од материјала.

Германијум има много већу густину од силицијума, као и већи атомски број (Z). Зато су апсорпција фотона у германијуму и заустављање брзих јона много већи него у силицијуму. Уношењем литијума у монокристал германијума методом који се само у детаљима разликује од метода за израду Si(Li) детектора постижу се знатно дебљи деплетациони слојеви (10–15 mm). Енергетска резолуција Ge(Li) детектора је стога много боља. Израдом HPGe детектора добијени су још дебљи деплетациони слојеви, од чак неколико центиметара.



Сл. 2.3 Конфигурација германијумског детектора. Кристал германијума се налази у вакууму. Кућиште је од алуминијума типичне дебљине 1,5 mm. Са унутрашње стране је p^+ контакт дебљине око 0,3 μm , док је n^+ контакт дебљи – 0,9 mm.

Код апсолутно чистог германијума (беспримесног) термална екситација доприноси преласку одређеног броја електрона из валентног нивоа у проводни ниво, остављајући иза себе исти број позитивно наелектрисаних шупљина. Додатни носиоци наелектрисања (који повећавају резолуцију детектора) могу се унети у кристалну решетку германијума допирањем. Германијум је четворовалентан, што значи да је сваки атом окружен са друга четири. Ако се неки од ових атома замени атомом другачије валентности, нарушиће се равнотежа. Ако је, на пример, атом примесе из треће групе Периодног система, дакле тровалентни елемент, у његовој кристалној решетки постоји један електрон мање, па он не може да попуни електронску конфигурацију, односно он је акцептор. Германијум са овим типом примесе постаје p -тип германијума. С друге стране, петовалентна примеса (из пете групе елемената) има један електрон више него што је потребно за равнотежу. Такав атом зове се донорски

атом и доводи до формирања донорских стања непосредно испод проводног нивоа. Германијум са таквом примесом назива се германијум n -типа. У пракси се детектори гама зрачења не праве постављањем различитих типова полупроводника једног поред другог, већ се користи један тип полупроводника и на њега се постави n^+ и p^+ контакт, који омогућава стварање споја (Сл. 2.3). То је основа израде свих германијумских детектора.

Време разлагања је најмањи временски интервал у којем се два узастопна зрачења могу детектовати одвојено.

Основна карактеристика сваког детектора је његова **ефикасност**, која се дефинише као однос реакције инструмента и вредности физичке величине која се мери. У спектрометрији фотона та физичка величина је брзина бројања. Ефикасност детектора радијације зависи од врсте зрачења и од његове енергије. Детекциона ефикасност германијумских детектора показује који се део од свих зрачења која стижу до ефикасне запремине детектора детектује. У гама спектрометрији уобичајени су следећи појмови везани за ефикасност. Тотална ефикасност ε_t по дефиницији је вероватноћа да фотон емитован из извора преда било који део своје енергије активној запремини детектора. Дакле, она обухвата све интеракције фотона без обзира на количину предате енергије. Ефикасност у фото-пику ε посматра само оне интеракције фотона које предају укупну енергију фотона и дефинише се као вероватноћа да фотон емитован из извора преда сву своју енергију активној запремини детектора. Однос ефикасности у фото-пику и тоталне ефикасности назива се однос пик–тотал.

Релативна ефикасност је договором дефинисана као однос ефикасности гама фотона енергије 1332,5 keV, који потиче из кобалта ^{60}Co , према ефикасности стандардног сцинтилационог NaI(Tl) детектора. Апсолутна ефикасност у фото-пику је однос површине фото-пика у мереном спектру према броју гама фотона емитованих из извора. Из ње се одређује активност радионуклида у извору, а она, поред осталог, зависи и од геометријске поставке извор–детектор. Овде се узимају у обзир фото-пик и све некомплетне апсорпције представљене Комптоновим континуумом. Однос пик–Комптон дефинисан је као однос одброја у максимуму фото-пика и просечног одброја у каналима испод Комптонове ивице (на Комптоновом континууму), коригованих на фон. Типична вредност за HPGe детекторе за однос пик–Комптон је између 10 и 60.

Сопствена ефикасност је однос одброја у спектру према броју гама фотона који падну на детектор. Може се дефинисати као сопствена ефикасност фотопика или као сопствена тотална ефикасност. Ова ефикасност је основни параметар детектора и не зависи од геометрије извор–детектор.

У основне карактеристике детектора спада њихова **осетљивост**, тј. способност детектора да произведе користан сигнал за дато зрачење и енергију. Не постоји универзални детектор који би могао да детектује све врсте зрачења и све енергије. Зато постоје детектори који су оптимални за дати тип зрачења и за одговарајуће опсеге енергија. Осетљивост детектора за дати тип зрачења одређене енергије зависи од:

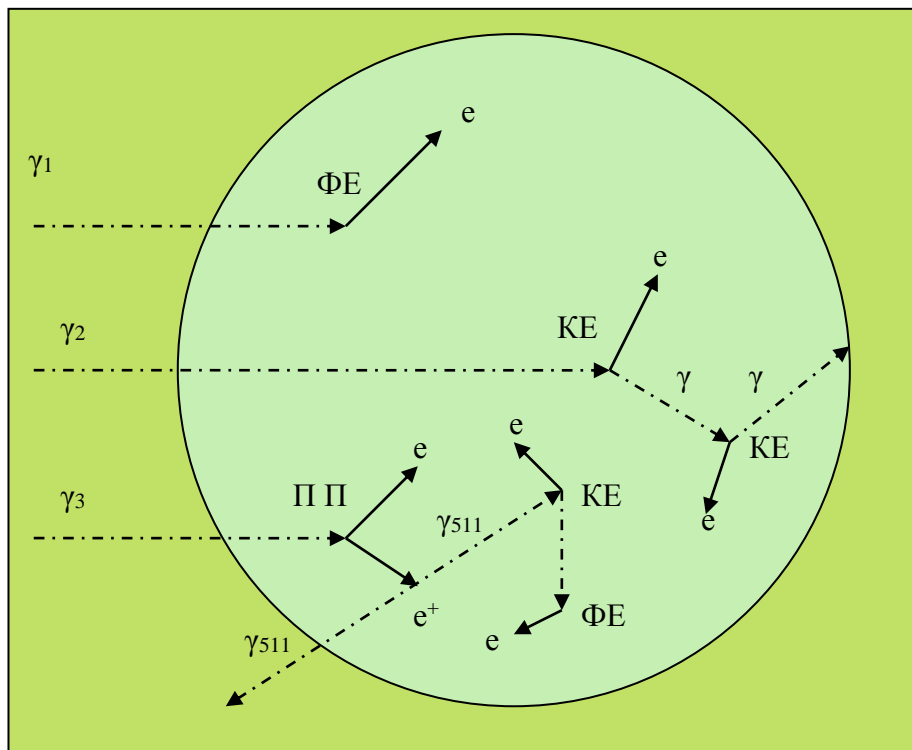
- пресека за јонизујуће реакције у детектору,
- масе детектора,
- инхерентног детекторског шума,
- заштитног материјала који опкољава осетљиву запремину детектора.

Пресек за реакцију и маса детектора одређују вероватноћу да се енергија или део енергије упадног зрачења утроши на јонизацију унутар детектора. Сигнал који настаје мора бити јачи од средњег шума детектора како би био користан. Материјал који опкољава детектор одређује доњу границу енергије која може бити детектована.

Одзив детектора: поред детекције постојећег зрачења, већина детектора је у стању да обезбеди неке информације о енергији тог зрачења. Количина јонизације (или екситације) пропорционална је губитку енергије зрачења унутар осетљиве запремине детектора. Ако се енергија упадног зрачења у потпуности утрошила на јонизације унутар детектора, онда је мера количине јонизације у ствари информација о енергији упадног зрачења. Уопште, излазни сигнал електричних детектора има форму струјног сигнала. Количина јонизације се тада огледа у створеној количини наелектрисања. Веза између енергије зрачења и висине излазног сигнала представља у ствари одзив детектора. Идеално би било да је ова веза линеарна. За многе детекторе одзив детектора јесте линеаран или бар апроксимативно у одређеном интервалу енергија. Функција одзива детектора је важан фактор који треба размотрити

приликом снимања енергетског спектра, за дати тип детектованог зрачења. Она се може дефинисати када се детектор изложи датом типу моноенергетског зрачења. Идеално би било да се у спектру добије Гаусова крива. У случају да се детектор излаже гама зрацима, облик криве се може предвидети ако се зна како фотони интерагују са материјалом од кога је израђен детектор. Механизми који то омогућују су фото-ефекат, Комптоново расејање и производња парова. Фото-електрони добијени од моноенергетског зрачења имају исте енергије, те доприносе гаусовском облику криве у спектру. Комптонови електрони имају континуалну расподелу, као такви представљају сметњу у снимљеном спектру. Ефекат парова такође неповољно утиче на добијену слику о моноенергетском зрачењу усмереном ка детектору.

Време одзива је веома важна карактеристика детектора. То је време потребно да се генерише сигнал након пристизања зрачења у детектор. Пожељно је да ово време буде што је могуће краће.



Сл. 2.4 Могуће интеракције у „реалном” детектору, где је ФЕ – фото-ефекат, КЕ – Комптонов ефекат и ПП – производња парова електрон–позитрон

Време трајања сигнала је такође важна карактеристика. У току овог периода други догађај не може бити регистрован јер детектор није осетљив на зрачење, или ће се други догађај сумирати са првим. Ако се други догађај сумира са првим, онда сигнал мења облик. Ефекат се зове насумично сумирање. Ово доприноси такозваном мртвом времену детектора и ограничава да стваран број упадних фотона буде регистрован. Овакве сигнале је могуће одбацити одговарајућим струјним колом.

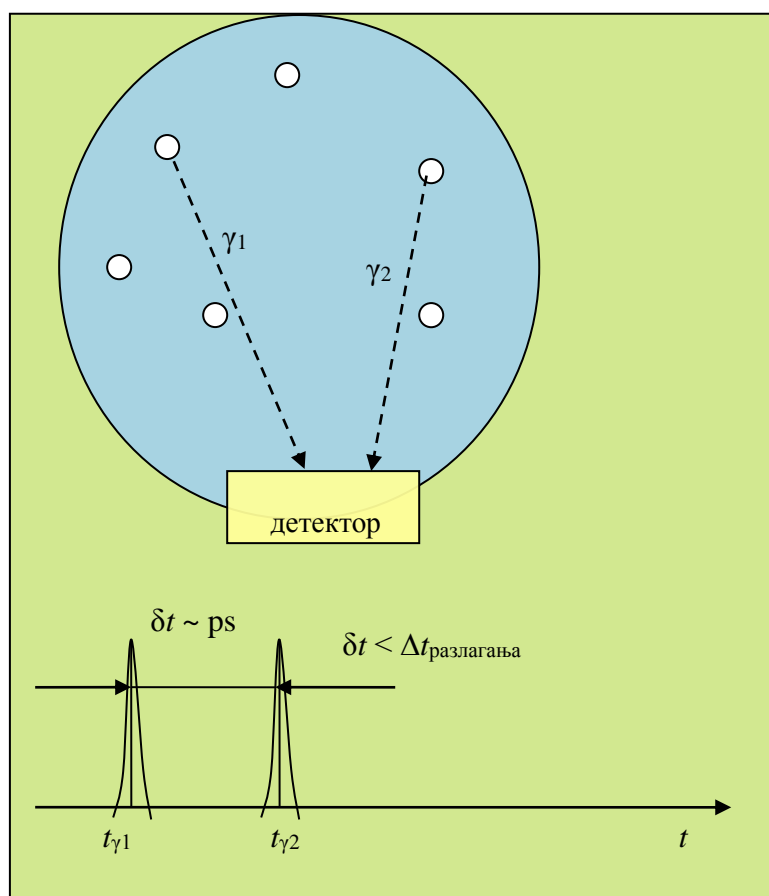
Мртво време је временски интервал током кога је бројач неспособан да региструје следећу честицу. То је заправо коначан интервал времена потребан да детектор процесира догађај који је обично једнак времену трајања сигнала. У зависности од типа детектора, детектор може бити али и не мора бити осетљив у интервалу мртвог времена. Германијумски спектрометри нису осетљиви у интервалу мртвог времена, тј. свака информација о фотону који упадне у детектор у току мртвог времена је изгубљена.

На слици (Сл. 2.4) шематски су приказане могуће интеракције у детектору. У реалном детектору догађаје Комптоновог расејања следи једна или више даљих Комптонових интеракција, при чему сваки апсорбује мали део енергије гама зрачења, пре него што гама зрачење изађе из активне запремине детектора [1].

3 Сумација пикова, ефекти правог коинцидентног сумирања

Коинцидентно сумирање је последица симултане детекције коинцидентних фотона. Резултујући импулс у енергетском спектру даје пик који ће одговарати збиру (суми) енергија детектованих коинцидентних фотона [2]. Притом ће изостати допринос пиковима у енергетском спектру који одговарају енергијама тих појединачних фотона.

Право коинцидентно сумирање разликује се од насумичног. Насумично коинцидентно сумирање се дешава између зрачења која потичу из различитих језгара (Сл. 3.1). Њиховом детекцијом се у детектору стварају независни импулси који се, ако су створени у интервалу времена мањем од времена разлагања детектора, сабирају у један догађај.



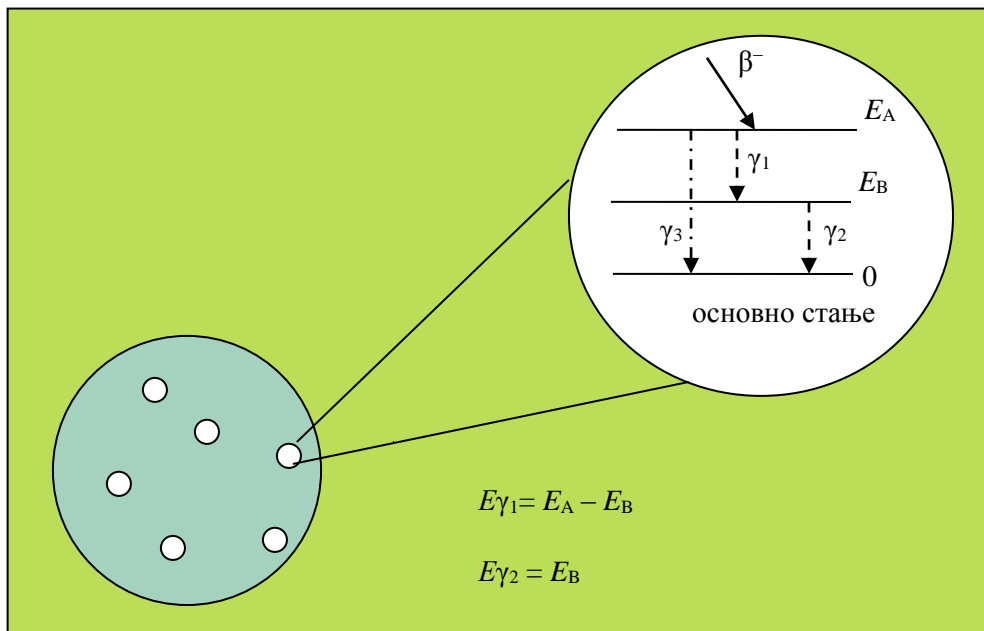
Сл. 3.1 Шематски приказ насумичног коинцидентног сумирања. Зрачења која потичу из различитих језгара се могу симултано појавити у активној запремини детектора у временском интервалу мањем од времена разлагања детектора ($\delta t < \Delta t_{\text{разлагања}}$). Онда ће они бити регистровани као један догађај.

Код правог коинцидентног сумирања импулси настају када се симултано детектују фотони из једног језгра, у оквиру одређеног временског интервала, при чему је тај интервал мањи од времена разлагања детектора (Сл. 3.2). Након радиоактивног распада језгро потамак се најчешће налази у неком од побуђених стања. Прелаз са побуђених стања до основног стања може се догодити уз емисију једног или више гама фотона у каскади. Времена живота побуђених нивоа су најчешће реда величине пикосекунде до наносекунде, док је време прикупљања носилаца наелектрисања у детектору реда величине микросекунде. Због тога је велика вероватноћа да ће гама фотони емитовани у каскади бити детектовани у оквиру временског разлагања гама спектрометра. Код радиоактивног распада у процесима електронског захвата и интерне конверзије, може се емитовати и X-зрачење у коинциденцији са гама зрачењем.

Разлика између насумичног и правог коинцидентног сумирања је, дакле, у пореклу. Услед тога право коинцидентно сумирање, за разлику од оног насумичног, не зависи од брзине бројања, односно активности извора. У овом докторату даље ћемо разматрати само право коинцидентно сумирање.

Ефекти коинцидентног сумирања зависе од шеме распада језгра али и од ефикасности детектора и просторног угла детекције (геометрије). Што је шема распада језгра компликованија и са већим бројем каскадних прелаза, то ће право коинцидентно сумирање бити израженије. Вероватноћа за сумационе ефекте расте са порастом тоталне ефикасности детектора, односно са смањењем растојања између извора и детектора [2]. Постојање ефекта коинцидентног сумирања је и установљено тако што су извори мерени на истом детектору али на различитим растојањима од њега. Германијумски детектори „*well-type*”, код којих је извор скоро комплетно окружен детектором, нарочито су осетљиви на сумационе ефекте због одговарајуће геометрије. Германијумски детектори *n*-типа имају танке прозоре, па пропуштају нискоенергетско X-зрачење или закочно зрачење које може бити емитовано при распаду језгра, што повећава могућност коинцидентног сумирања. Смањење одброја услед коинцидентног сумирања зависи од тоталне ефикасности детектора; он може да детектује и укупну енергију коју депонују једни гама фотони и део енергије коју депонују други гама фотони, због чега је смањен одброј у фото-пику првих гама фотона; ови догађаји ће се појавити у континуалном делу спектра између енергија тих гама фотона и енергије сумационог пика. Аналогно се и за остале гама фотоне

може смањити одброј у њиховим фото-пиковима. Ако произвољан број гама фотона који су у коинциденцији депонују своје целокупне енергије у детектору, појавиће се резултујући догађаји на енергијама на којима се појављују нормално неки други фотони са одговарајућих прелаза (са тим конкретним енергијама). Последица тога је да неки догађаји нестају из фото-пика где је требало да се нађу, док се, с друге стране, појављују догађаји у другим фото-пиковима на енергијама које нису стварне енергије тих појединачних фотона. Први се називају *summing-out* догађаји, а други *summing-in* догађаји. Оба догађаја доприносе нетачном резултату за активност извора израчунату на основу ових фото-пикова. Смањење одброја у фото-пиковима појединих фотона, услед правог коинцидентног сумирања, резултује мањим вредностима за ефикасност од стварних, а повећање одброја даје веће вредности ефикасности.



Сл. 3.2 Једноставна шема распада језгра код којег се јавља право коинцидентно сумирање. Са различитих енергетских нивоа једног језгра се симултано емитују гама фотони у блиском временском интервалу, мањем од времена разлагања детектора, тако да бивају регистровани као један догађај.

На примеру једноставне шеме распада језгра може се показати како у спектру настају сумациони ефекти. Језгро родитељ β^- распадом прелази на побуђени енергетски ниво језгра потомка E_A . На слици (Сл. 3.2) виде се два гама фотона у каскади. Ако оба каскадна гама фотона, γ_1 и γ_2 , интерагују са детектором фото-

апсорпцијом, тада ће у енергетском спектру у фото-пику γ_3 доћи до *summing-in* догађаја, док ће се у фото-пиковима γ_1 и γ_2 јавити *summing-out* догађаји. Колико ће се догађаја појавити у сумационом пику зависи од односа гранања два гама зрака, угаоне корелације која може постојати између њих и просторног угла под којим извор види детектор (геометрије мерења). Величина смањења и повећања одброја зависи и од ефикасности детектора, али и од вероватноћа емисије појединих гама фотона. Ова величина, као што смо већ рекли, неће зависити од активности извора.

Угаона корелација између праваца емисије два гама фотона у каскади настаје због тога што је правац емисије првог гама фотона повезан са оријентацијом угаоног момента међустања у каскади; ако је време живота међустања веома кратко, оријентација угаоног момента се не мења до емисије другог гама фотона у каскади; правац другог гама фотона повезан је са угаоним моментом међустања, а тиме и са угаоним моментом првог гама фотона. Ефекти угаоних корелација два гама фотона дају релативни принос другог гама фотона у правцу у коме је емитован и први, али нису од великог значаја код корекција на каскадно сумирање, па се углавном могу и занемарити (осим ако се захтева велика тачност – реда величине промила) [2].

Како просторни угао и угаона корелација утичу на коинцидентно сумирање може се видети ако се уместо апсолутне ефикасности (однос броја регистрованих импулса и броја кваната зрачења емитованих из извора) користи сопствена ефикасност (однос броја регистрованих импулса и броја кваната зрачења који уђу у детектор; $\varepsilon_{\text{int}} = \varepsilon_{\text{abs}} 4\pi/\Omega$). Нека је ε_1 сопствена ефикасност у фото-пику за гама зрачење γ_1 , Ω – просторни угао под којим извор види детектор. Брзина бројања испод пика за гама зрачење γ_1 у одсуству сумационог ефекта је тада:

$$n_1 = \varepsilon_1 \Omega A p_1, \quad (3.1)$$

где је A – активност извора и p_1 – квантни принос гама зрачења γ_1 . Ако применимо исту дефиницију и на гама зрачење γ_2 , добијамо:

$$n_2 = \varepsilon_2 \Omega A p_2. \quad (3.2)$$

Вероватноћа истовремене детекције оба гама зрачења је производ обе индивидуалне вероватноће детекције са функцијом угаоне корелације између два гама фотона, $W(0^\circ)$. Тада је брзина бројања сумационог пика:

$$\begin{aligned} n_{12} &= A(\varepsilon_1 \Omega p_1)(\varepsilon_2 \Omega p_2)W(0^\circ) \\ &= A\varepsilon_1 p_1 \varepsilon_2 \Omega^2 p_2 W(0^\circ) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сумациони процес, као што смо рекли, не само да креира сумациони пик већ и уклања догађаје који би требало да се нађу у фото-пику. Тако ће брзина бројања у фото-пику гама зрачења γ_1 када се урачуна сумација бити:

$$\begin{aligned} n_1 \Big|_{\text{сумацијом}}^{\text{са}} &= n_1 - n_{12} \\ &= \varepsilon_1 \Omega A p_1 [1 - \varepsilon_2 \Omega p_2 W(0^\circ)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

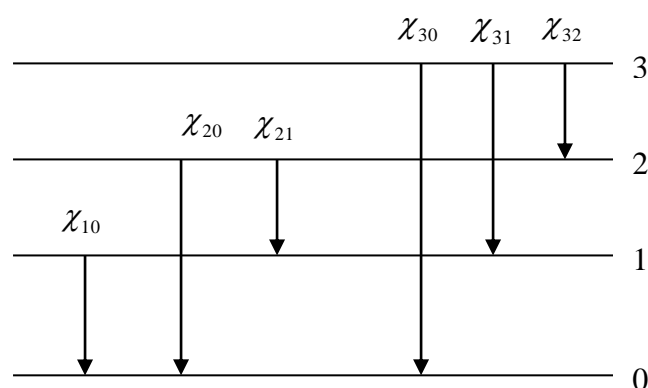
Пошто сви коинцидентни догађаји који потичу од гама зрачења γ_2 (не само догађаји из фотопика) уклањају одброје из n_1 , детекциона ефикасност ε_2 третира се као тотална ефикасност.

У литератури постоји неколико метода за прорачун корекција на коинцидентно сумирање, а које ћемо размотрити у наредним поглављима дисертације.

4 Приступ сумационим ефектима по методу Андрејева

Гупта и Џа [3] су 1956. развили технику одређивања сумационих пикова у спектрима добијеним сцинтилационим спектрометрима. Бринкман са сарадницима су 1963. године међу првима дали теоријски приступ проблематици сумације пикова [4]. Они су показали да радиоактивни извори, чији распад је праћен сукцесивном емисијом два фотона, може бити стандардизован коришћењем једног детектора. Тај метод је данас познат као метод сумације пикова. Андрејев и сарадници [5, 6] запазили су да је, када је неопходно одредити ефикасност детектора у условима блиске геометрије, дотадашњи начин калибрације водио приметним грешкама, повезаним са ефектом коинцидентног сумирања. Приликом израчунавања приноса гама фотона по површини фото-пика потребно је урачунати допринос фото-пику (сумација) од стране коинцидентних гама кваната емитованих у паралелним каскадним прелазима, а истовремено и изостанак импулса из пикова на енергијама где би дати импулси гама кваната заиста требало да се налазе. Тај допринос је пропорционалан производу ефикасности детекције каскадних гама кваната у сумационим пиковима тоталне енергије.

Андрејев је карактеристике насталих корекција показао на примеру радионуклида са три ексцитована нивоа (Сл. 4.1).



Сл. 4.1 Шема могућих прелаза при ексцитацији три нивоа

Изрази за површине фото-пикова, S_{ik} дати су следећим формулама:

$$S_{10} = N_1^* \frac{\varepsilon_{10}^\Phi}{1 + \alpha_{10}} + N_2^* \chi_{21} \frac{\varepsilon_{10}^\Phi}{1 + \alpha_{10}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{21} \bar{W}_{2110}}{1 + \alpha_{21}} \right) + N_3^* \cdot \left[\chi_{31} \frac{\varepsilon_{10}^\Phi}{1 + \alpha_{10}} \left(1 - \frac{\varepsilon_{31} \bar{W}_{3110}}{1 + \alpha_{31}} \right) + \chi_{32} \frac{\varepsilon_{10}^\Phi}{1 + \alpha_{10}} \chi_{21} \left(1 - \frac{\varepsilon_{32} \bar{W}_{3210}}{1 + \alpha_{32}} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{21} \bar{W}_{2110}}{1 + \alpha_{21}} \right) \right] \quad (4.1)$$

$$S_{21} = N_2^* \frac{\varepsilon_{21}^\Phi}{1 + \alpha_{21}} \chi_{21} \left(1 - \frac{\varepsilon_{10} \bar{W}_{2110}}{1 + \alpha_{10}} \right) + N_3^* \frac{\varepsilon_{21}^\Phi}{1 + \alpha_{21}} \chi_{32} \chi_{21} \left(1 - \frac{\varepsilon_{32} \bar{W}_{3221}}{1 + \alpha_{32}} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_{10} \bar{W}_{2110}}{1 + \alpha_{10}} \right) \quad (4.2)$$

$$S_{20} = N_2^* \left[\frac{\varepsilon_{20}^\Phi}{1 + \alpha_{20}} \chi_{20} + \chi_{21} \frac{\varepsilon_{21}^\Phi \varepsilon_{10}^\Phi \bar{W}_{2110}}{(1 + \alpha_{21})(1 + \alpha_{10})} \right] + N_3^* \chi_{32} \left[\frac{\varepsilon_{20}^\Phi}{1 + \alpha_{20}} \chi_{20} \left(1 - \frac{\varepsilon_{32} \bar{W}_{3220}}{1 + \alpha_{32}} \right) + \chi_{21} \frac{\varepsilon_{21}^\Phi \varepsilon_{10}^\Phi \bar{W}_{2110}}{(1 + \alpha_{21})(1 + \alpha_{10})} \left(1 - \frac{\varepsilon_{32} \bar{W}_{3221}}{1 + \alpha_{32}} \right) \right] \quad (4.3)$$

где је: χ_{ik} – фракција прелаза (гама прелаз и унутрашња конверзија) са i -тог на k -ти ниво у односу на укупан број прелаза са i -тог нивоа, ε_{ik}^Φ – ефикасност детекције у фото-пику гама фотона енергије E_{ik} , ε_{ik} – тотална ефикасност детекције, α_{ik} – тотални коефицијент унутрашње конверзије за прелаз $i \rightarrow k$, N_i^* – број директних ексцитација i -тог нивоа (овај број не обухвата попуњавање i -тог нивоа ексцитацијом нивоа који се налазе изнад њега, или прелазе са тих нивоа на ниво који се разматра), \bar{W}_{iklm} – вредност функције угаоне корелације каскадних гама фотона који имају енергије E_{ik} и E_{lm} . У условима блиске геометрије у експерименту се може узети да је $\bar{W}_{iklm} = 1$.

У општем случају побуђивања m нивоа важе следеће једначине:

$$S_{ik} = N_i A_{ik} M_k, \quad (4.4)$$

$$N_i = N_i^* + \sum_{n=i+1}^m N_n b_{ni}, \quad (4.5)$$

$$A_{ik} = a_{ik} + \sum_{j=k+1}^{i-1} a_{ij} A_{jk}, \quad (4.6)$$

$$M_k = \sum_{j=0}^{k-1} b_{kj} M_j; M_0 = 1, \quad (4.7)$$

$$a_{ik} = \chi_{ik} \varepsilon_{ik}^{\Phi} / (1 + \alpha_{ik}), \quad (4.8)$$

$$b_{ik} = \chi_{ik} [1 - \varepsilon_{ik} / (1 + \alpha_{ik})], \quad (4.9)$$

$$\sum_{k=0}^{i-1} \chi_{ik} = 1. \quad (4.10)$$

За прелаз између суседних нивоа важи: $A_{ik} = a_{ik}$.

Из система једначина (4.4 – 4.9), ако су познате вредности $S_{ik}, \varepsilon_{ik}^{\Phi}, \varepsilon_{ik}$ и α_{ik} , могу се израчунати вероватноће попуњавања и пражњења i -тог нивоа (N_i^* и χ_{ik}). Из тог разлога се дефинише једна помоћна величина која је обележена са K_{ik} :

$$K_{ik} = N_i a_{ik} = N_i \chi_{ik} \varepsilon_{ik}^{\Phi} / (1 + \alpha_{ik}). \quad (4.11)$$

Множењем обе стране једначине (4.6) са N_i и ако приметимо да је $A_{ik} = S_{ik} / M_k N_i$, добија се следећа рекурентна релација:

$$K_{ik} = S_{ik} / M_k - \sum_{p=k+1}^{i-1} K_{ip} A_{pk}, \quad (4.12)$$

где је $K_{ip} \equiv 0$, ако је $i \leq p$. За израчунавање вредности K_{ik} која произилази из (4.12), у општем случају неопходно је познавати величине M_k и A_{pk} . За $i = 1, 2$ вредност K_{ik} се израчунава непосредно (у том случају је $M_0 = 1, M_1 = b_{10}, A_{10} = a_{10}$) као и $\chi_{10} = 1$.

Из формуле (4.12) се види да су индекси k и p мањи од i , тако да је за одређивање величине K_{ik} неопходно одредити вредности M_k и A_{pk} за ниже нивое. За израчунавање вредности M_k и A_{pk} користе се једначине (4.6-4.9).

Вредности χ_{ik} које фигуришу у тим формулама одређују се на основу вредности K_{ik} за ниже нивое помоћу израза:

$$\chi_{ik} = K_{ik}(1 + \alpha_{ik}) / \varepsilon_{ik}^{\Phi} N_i, \quad (4.13)$$

где је

$$N_i = \sum_{k=0}^{i-1} K_{ik} \frac{1 + \alpha_{ik}}{\varepsilon_{ik}^{\Phi}}. \quad (4.14)$$

Формула (4.14) се добија када се поделе обе стране једначине (4.11) са $\varepsilon_{ik}^{\Phi} / (1 + \alpha_{ik})$ и просумирају по свим k , узимајући при томе, да је $\sum_{k=0}^{i-1} \chi_{ik} = 1$.

Како је вредност K_{ik} за први и други ниво ($i = 1, 2$) већ одређена, то се уз помоћ израза (4.13) и (4.14) може одредити вредност χ_{ik} , а тиме и вредности M_k и A_{pk} , неопходне за одређивање вредности K_{ik} за трећи ниво. Аналогним начином сукцесивно се налазе вредности K_{ik} за више нивое. Дакле, коришћењем рекурентних формула, полазећи од најнижег нивоа, могу се израчунати и вредности N_i и χ_{ik} за све нивое, док се помоћу једначина (4.5) и (4.9) могу израчунати вредности N_i^* . У реалним случајевима са порастом броја разматраних побуђених нивоа израчунавање постаје веома тешко.

Изложени приступ омогућава да се на основу вредности површина фотопикова у спектру гама зрака редефинишу ефикасни пресеци побуде нуклеарних нивоа у различитим нуклеарним реакцијама (на пример у реакцијама $(p, p'\gamma)$, $(n, n'\gamma)$, Кулоновог побуђења, итд.), вероватноће попуњавања различитих нивоа језгра потомка при β -распаду, као и почетне релације за прелазе између побуђених стања језгра [5]. Такође, оно што је за нас још важније, метод Андрејева могуће је применити и обрнуто. Односно, на основу вредности површина пикова у спектру и познавањем вероватноћа прелаза између побуђених стања језгра, могуће је одредити ефикасности детекције и активност радиоактивног извора [6].

Ако употребимо једначине (4.4 – 4.10) за одређивање вредности ε_{ik}^{Φ} , то ће познате величине бити χ_{ik} , α_{ik} (подаци о њима се добијају из датих спектроскопских истраживања) а такође и вредност ε_{ik} . Вредности ε_{ik} се за

планарни детектор могу одредити рачунски. За коаксијални тип детектора рачун је знатно сложенији па се вредности ефикасности добијају интерполацијом из спектроскопских истраживања, одређених у ранијим радовима.

Неопходно је приметити да вредност ε_{ik} која фигурише у горенаведеним формулама, одређује малу корекцију вредности ε_{ik}^{Φ} , и у првој апроксимацији грешке израчунатих вредности ε_{ik} можемо занемарити. Односно ε_{ik} су само мале поправке у израчунавању ε_{ik}^{Φ} . Поред тога, израчунатим вредностима ε_{ik} можемо повећати тачност, ако уз помоћ моноенергетског извора одредимо експерименталне вредности ε_{ik} , најмање за једну вредност енергије. Непознате величине у једначинама за одређивање вредности ε су $m(m+1)/2$, које улазе у коефицијенте α_{ik} , а самим тим, и у вредност A_{ik} .

Вредности A_{ik} се одређују уз помоћ система $m(m+1)/2$ једначине (4.4). Али у тај систем једначина улазе, такође, m непознатих N_i , које можемо одредити уз помоћ система m једначина (4.5).

Величине N_i^* које фигуришу у једначини (4.5) се одређују на независан начин, мерењем у условима далеке геометрије, спектра гама фотона, емитованог од извора са сложенем шемом распада:

$$N_i^* = \sum_{k=0}^{i-1} J_{ik} (1 + \alpha_{ik}) - \sum_{k=i+1}^m J_{ki} (1 + \alpha_{ki}), \quad (4.15)$$

где је J_{ik} - апсолутни интензитет гама прелаза са нивоа i на ниво k .

У условима далеке геометрије експеримента ефекти каскадног сумирања се могу занемарити па је тада:

$$J_{ik} = S_{ik}^{(D)} / \varepsilon_{ik}^{(D)}. \quad (4.16)$$

Вредност ефикасности у фотопику $\varepsilon_{ik}^{(D)}$ се одређује уз помоћ калибрационог моноенергетског извора који има пик на енергији прелаза $i \rightarrow k$ блиској енергији извора који се испитује.

Када је одређен из једначине (4.16), апсолутни интензитет J_{ik} и примењени подаци одговарајућих интензитета гама фотона употребљеног извора са сложенем шемом распада, можемо одредити све вредности J_{ik} и J_{ki} које фигуришу у једначинама (4.15).

Одредивши A_{ik} из једначине (4.4) уз помоћ (4.6) налази се вредност a_{ik} . При том за сваки ниво ℓ поново се налази вредност $a_{\ell\ell-1} \equiv A_{\ell\ell-1}$, затим $a_{\ell\ell-2}$ итд. На крају, вредност ε_{ik}^{Φ} која нас интересује се добија из (4.8).

У случају сложених шема распада израчунавање постаје тешко па су Андрејев и сарадници [6] та израчунавања изводили уз помоћ рачунарског програма „Алгол“. На основу гореописане процедуре они су урадили калибрацију ефикасности Ge(Li) детектора коаксијалног типа. У улози извора гама фотона био је ^{152}Eu а мерење је вршено у блиској геометрији. Вредности одговарајућих интензитета гама прелаза и вредности коефицијената интерне конверзије за К-љуску узете су из референце [26]. Вредности укупних коефицијената интерне конверзије су израчунате тако што су експерименталним вредностима α_K додате израчунате вредности коефицијената конверзије за L- и M-љуску. Апсолутни интензитети гама прелаза су одређени за спектар гама фотона (за извор ^{152}Eu), у условима далеке геометрије. При томе за калибрацију вредности $\varepsilon_{ik}^{\Phi(D)}$ је коришћен еталонски извор гама фотона ^{57}Co . Вредности ефикасности у условима блиске геометрије одређени су за највеће интензитете гама фотона ^{152}Eu .

У нашем методу, који ћемо изложити у наредном поглављу, ми ћемо такође користити формулу (4.15) за одређивање N_i^* , односно x_{ni} у нашој нотацији. Користићемо и комбинацију израза (4.13) и (4.14) за одређивање χ_{ik} , односно x_{ik} у нашој нотацији.

5 Нови матрични метод X-гама коинцидентног сумирања

У претходном поглављу приказали смо процедуру за третирање коинцидентних ефеката коју је Андрејев са сарадницима [5] изложио 1972. године, а потом метод и проширио у наредном раду [6] објављеном 1973. године. Меккалум и Кут су користили нумерички метод Андрејева који захтева познавање ефикасности у фото-пику и тоталне ефикасности [7]. Дебертин и Шутцинг [18] су 1979. године експериментално одредили корекционе факторе и те таблице се и данас користе. Семков са сарадницима [8], 1990. године уводи у анализу проблема матрични формализам, указујући на потпуну аналогију са рекурентним релацијама Андрејева чиме је успешно заокружена теоријска основа гама-гама коинцидентног сумирања.

Међутим, нови изазови у гама спектроскопији стигли су са развојем експерименталне технике. Израда нових германијумских детектора који имају проширену детекторску осетљивост ка нижим енергијама – BEGe (broad energy HPGe) омогућило је да се истовремено са гама зрачењем ефикасно детектује и X-зрачење које настаје у процесима електронског захвата и интерне конверзије. Поред дотадашњег гама-гама, код овог типа детектора, појавило се додатно X-X и X-гама коинцидентно сумирање што додатно усложњава проблем деконволуције енергетског спектра. Корун и Мартинчић [9] решавали су тај проблем додатног коинцидентног сумирања модификовањем матричног метода Семкова [8], увођењем, у шеме распада, виртуелних нивоа за сваки X-прелаз. Такву модификацију успешно су применили на радионуклид церијума ^{139}Ce који има врло једноставну шему распада. Наиме, потомак церијума ^{139}Ce , језгро лантана ^{139}La , има само један побуђени ниво, тако да је то најједноставнији случај X-гама коинцидентног сумирања. Међутим, и поред свих покушаја да се тај формализам примени на радионуклиде са иоле сложенијом шемом распада, то није уродило плодом. Наиме, код радионуклида чији потомак има више од једног нивоа побуђења, *ad hoc* уведени виртуелни нивои, помоћу којих је требало да се укључе доприноси коинцидентних K_α и K_β фотона, не само да не могу у потпуности да их све укључе, већ се помоћу њих генеришу исходи којих у стварности нема. Чак ни модификација овог формализма измештањем

виртуелних нивоа изнад или испод (или комбиновано) у односу на нивое побуђења језгра потомка, није дала резултате.

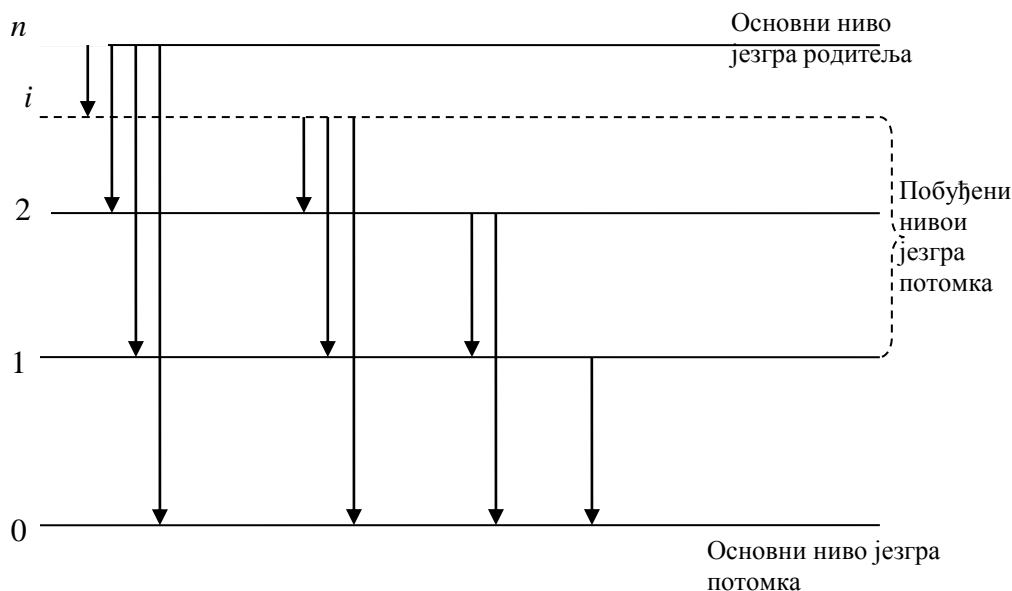
Изменом дотадашњег формализма Коруна и Мартинчића и увођењем новог приступа, Новковић са сарадницима [10] развија метод који омогућава одређивање свих путања распада и класификацију свих исхода детекције без обзира на сложеност шеме распада. Метод превазилази све недостатке ранијих метода и представља први успешан метод за решавање проблема ефеката X-гама коинцидентног сумирања. У свом приступу аутори метода се ослањају на матрични формализам само у почетној фази, да би даљу идентификацију свих путања распада и њихових вишеструких исхода извршили дефинисањем посебне алгебре над скупом свих прелаза. Међутим, алгебра са операцијама директног множења и директног сабирања чини овај метод прилично сложеним. У недавно објављеном раду [11] представили смо научној јавности нов матрични метод за решавање проблема X-гама коинцидентног сумирања са много једноставнијом алгебром. Детаље метода приказаћемо у наредним параграфима овог поглавља.

5.1 Модификована шема распада

Излагање новог метода почињемо анализом радионуклида који се електронским захватом распада на радионуклид са више побуђених нивоа. Разматрамо распад електронским захватом а не β^\pm распадом јер је распад електронским захватом са аспекта X-гама коинцидентног сумирања најопштији случај. Наиме, након електронског захвата и језгро и атомски омотач потомка могу бити у побуђеном стању док након β^\pm распада једино језгро може бити у побуђеном стању. Тек у наредном кораку деекситације језгра потомка у процесу интерне конверзије може доћи до екситације атомског омотача потомка тако да тек од тог другог корака распад електронским захватом и β^\pm распад сматрамо сличним процесима, са становишта X-гама коинцидентног сумирања, и третирамо их на сличан начин.

Шема распада модификована је за потребе матричног формализма (Сл. 5.1). Модификација се састоји у томе што је основни ниво језгра родитеља представљен као највише побуђени ниво језгра потомка. Основни ниво језгра

потомка означен је нулом, као код Андрејева (Сл. 4.1), док су његови побуђени нивои редом, бројевима 1, 2, 3, ... све до највише побуђеног нивоа (основно стање језгра претка), означеног бројем n . Између ова два нивоа имамо $n - 1$ побуђених нивоа језгра потомка. Вредност броја n зависиће од разматраног радионуклида и степена тачности којим се он жели описати. Наиме, у пракси се често могу занемарити неки енергетски нивои. То су они енергетски нивои за које постоји јако мала вероватноћа да се језгро потомак нађе у побуђеном стању описаном датим енергетским нивоом. Тада се такви енергетски нивои игноришу чиме се практично смањује разматрани број побуђених стања језгра потомка, n . Дакле, изузев мале измене око обележавања основног стања потомка, која нам се учинила пригоднијом због физичког садржаја, у новом методу се користи шема распада модификована на исти начин као код Новковића са сарадницима [10]:



Сл. 5.1 Модификована шема распада са основног нивоа језгра родитеља преко побуђених нивоа језгра потомка до основног нивоа језгра потомка

5.2 Матрица вероватноће прелаза

Вероватноће прелаза x_{ij} са енергетског нивоа i на ниво j (Сл. 5.1) образују једну квадратну матрицу димензија $(n + 1) \times (n + 1)$ коју називамо матрицом вероватноће прелаза (stochastic, transition or probability matrix) \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{20} & x_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Матрица \mathbf{X} је строго доњетроугаона, чиме је уткан физички садржај о немогућности спонтане екситације. Дакле, могући су једино догађаји деекситације, односно прелази са вишег на нижи енергетски ниво. Збир матричних елемената у последњем реду матрице \mathbf{X} једнак је јединици:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ni} = 1, \quad (5.2)$$

чиме је математички изражена сигурност распада језгра родитеља. Такође, збир матричних елемената и у свим осталим редовима матрице \mathbf{X} једнак је јединици:

$$\sum_{j=0}^{i-1} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (5.3)$$

чиме је математички изражена сигурност деекситације из датог степена побуђења језгра потомка. По стохастичкој класификацији, видимо да матрица \mathbf{X} припада тзв. десно стохастичким (right stochastic) матрицама јер су јој нормирани редови а не колоне.

5.3 Вероватноће каскадних прелаза

Вероватноћа прелаза у једном кораку из било ког енергетског стања i у стање j дата је самим матричним елементом x_{ij} односно $(\mathbf{X})_{ij}$ док је вероватноћа прелаза у два корака између стања i и j дата елементом $(\mathbf{X}^2)_{ij}$, односно (i,j) -елементом квадрата матрице \mathbf{X} . У општем случају, вероватноћа прелаза у k корака из стања i у стање j дата је елементом- (i,j) k -тог степена матрице \mathbf{X} , односно $(\mathbf{X}^k)_{ij}$. Међутим, од свих прелаза највише нас занимају прелази из основног стања језгра претка (стање n у модификованој шеми распада) на основно стање језгра потомка, 0. Тако је вероватноћа директног прелаза (прелаз у једном кораку) у основно стање језгра потомка дата матричним елементом, x_{n0} , који се налази у последњем, n -том реду и нултој колони матрице вероватноће прелаза \mathbf{X} :

$$n \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{20} & x_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \cdots & x_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

$\uparrow 0$

Квадрирањем матрице \mathbf{X} добија се матрица \mathbf{X}^2 чији елемент који се налази у последњем, n -том реду и нултој колони представља збир свих вероватноћа прелаза у основно стање језгра потомка у два корака, $x_{ni}x_{i0}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$:

$$n \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21}x_{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_{ni}x_{i0} & \sum_{i=2}^{n-1} x_{ni}x_{i1} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

$\uparrow 0$

Степеновањем матрице \mathbf{X} на трећи, четврти, итд. степен добијају се матрице чији елемент који се налази у n -том реду и нултој колони дају одговарајуће вероватноће прелаза у основно стање језгра потомка у три, четири, итд. корака, респективно. Језгро родитељ може прећи у основно стање језгра потомка у

највише $v - 1$ корака, где је $v \leq n + 1$, степен нилпотентности матрице вероватноће прелаза \mathbf{X} . Наиме, из линеарне алгебре [35] је познато да је свака троугаона матрица са нулама на главној дијагонали (строго горње- и доњетроугаоне матрице), димензија $m \times m$, нилпотентна чији степен нилпотентности, v , не може бити већи од m .

Матрични елемент који се налази у последњем реду и првој колони збира свих на k -ти број ($k = 1, 2, 3, \dots, v - 1$) степенованих матрица вероватноће прелаза \mathbf{X} , једнак је јединици:

$$\sum_{k=1}^{v-1} [\mathbf{X}^k]_{n0} = 1, \quad (5.6)$$

чиме је математички изражена сигурност прелаза из основног стања језгра претка у основно стање језгра потомка.

5.4 Вероватноће детекције

Када се распад језгра одвија у близини детектора тада се фотони, који се емитују у каскадним прелазима, могу детектовати. При електронском захвату језгро може да захвати електроне из различитих атомских љуски. Вероватноћу да се захвати електрон из K-љуске обележавамо са P_{K_i} . Вероватноће захвата електрона из осталих атомских љуски P_{L_i}, P_{M_i}, \dots , не само да су мање него су и енергије одговарајућих X-фотона доста ниже тако да их ни гама детектори са проширеном осетљивошћу ка нижим енергијама не детектују. Према томе, производ вероватноћа $P_{K_i} x_{ni}$ једнак је вероватноћи да се при електронском захвату језгро нашло у побуђеном стању i и да се појавила ваканција управо у K-љусци атомског омотача.

Ваканцију попуњава електрон са виших атомских љуски након чега атомски омотач постаје побуђен. Вишка енергије се атомски омотач ослобађа на два дисјунктна начина: или емисијом X-фотона или емисијом Ожеовог електрона (ПРИЛОГ В). Удео емитованих фотона по ваканцији описујемо флуоресцентним квантним приносом, ω . Флуоресцентни квантни принос за K-љуску, $\omega_K = N_{X_K} / N_K$, показује колико K-фотона можемо очекивати ако

посматрамо N_K таквих ваканција у К-љусци, или ако имамо једну ваканцију колика је вероватноћа да се емитује К-фотон. Према томе, производ вероватноћа $\omega_K P_{Ki} x_{ni}$ једнак је вероватноћи да се при електронском захвату језгро потомак нађе у побуђеном стању i , да се ваканција појавила у К-љусци и да се деексцитација атомског омотача догодила емисијом К-фотона.

Међутим, овим није одређено који К-фотон ће се емитовати. Помоћу фракције флуоресцентног приноса, $f_{\alpha,\beta}$ прецизирамо који К-фотон се емитовао. Пошто вероватноће за емисију K_α , K_β , итд. фотона брзо опадају са грчким индексом, задржавамо се на прва два тврдећи да је $f_\alpha + f_\beta = 1$. Дакле, емитоваће се или K_α или K_β фотон. Производ вероватноћа $f_\beta \omega_K P_{Ki} x_{ni}$ једнак је вероватноћи да се при електронском захвату језгро потомак нађе у побуђеном стању i , да се ваканција појавила у К-љусци и да се деексцитација атомског омотача догодила емисијом K_β -фотона.

Вероватноће детекције K_α и K_β фотона емитованих при електронском захвату, $n \rightarrow i$, дате су следећим релацијама (ПРИЛОГ А):

$$\begin{aligned} a_{ni} &= \varepsilon_\alpha f_\alpha \omega_K P_{Ki} x_{ni} \\ b_{ni} &= \varepsilon_\beta f_\beta \omega_K P_{Ki} x_{ni} \end{aligned} \quad (5.7)$$

где су ε_α и ε_β фото-пик ефикасности детекције K_α и K_β фотона, респективно.

Вероватноћа недетекције иједног фотона при електронском захвату, $n \rightarrow i$, дата је релацијом:

$$q_{ni} = (1 - t_\alpha f_\alpha \omega_K P_{Ki} - t_\beta f_\beta \omega_K P_{Ki}) x_{ni}, \quad (5.8)$$

где су t_α и t_β тоталне ефикасности детекције K_α и K_β фотона, респективно.

Прелазом на ниже побуђена стања, $i \rightarrow j$, језгро се ослобађа вишка енергије емисијом гама фотона или интерном конверзијом. Одговарајуће вероватноће повезане су релацијом:

$$P_{ij}^\gamma + P_{ij}^{IT} = 1. \quad (5.9)$$

Међутим, у литератури се обично даје само однос ових вероватноћа који се назива тотални коефицијент интерне конверзије:

$$\alpha_{ij}^T = \frac{P_{ij}^\pi}{P_{ij}^\gamma}. \quad (5.10)$$

Из горња два израза није тешко одредити израз за вероватноћу емисије гама фотона, при прелазу на мање побуђени ниво $i \rightarrow j$:

$$P_{ij}^\gamma = \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T}. \quad (5.11)$$

Вероватноћа детекције гама фотона емитованог при прелазу $i \rightarrow j$, дата је следећом релацијом (ПРИЛОГ Б):

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T} x_{ij}. \quad (5.12)$$

где је ε_{ij} фото-пик ефикасност детекције на енергији која одговара прелазу $i \rightarrow j$.

На основу релација (5.9) и (5.10) вероватноћа за интерну конверзију је:

$$P_{ij}^\pi = \frac{\alpha_{ij}^T}{1 + \alpha_{ij}^T}. \quad (5.13)$$

Услед интерне конверзије настаје ваканција у атомском омотачу. Међутим, од свих ваканција које настају након интерне конверзије:

$$\alpha_{ij}^T = \alpha_{ij}^K + \alpha_{ij}^L + \alpha_{ij}^M + \dots, \quad (5.14)$$

од значаја за ову проблематику су једино ваканције које настају у К-љусци које описујемо коефицијентом интерне конверзије за К-љуску, α_{ij}^K . Према томе,

вероватноћа да се при прелазу на мање побуђени ниво $i \rightarrow j$ догоди интерна конверзија и да настане ваканција управо у K-љусци дата је изразом:

$$\frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T}. \quad (5.15)$$

Вероватноће детекције K_α и K_β фотона насталих интерном конверзијом при прелазу између два побуђена нивоа језгра потомка, $i \rightarrow j$, дате су следећим релацијама (ПРИЛОГ Б):

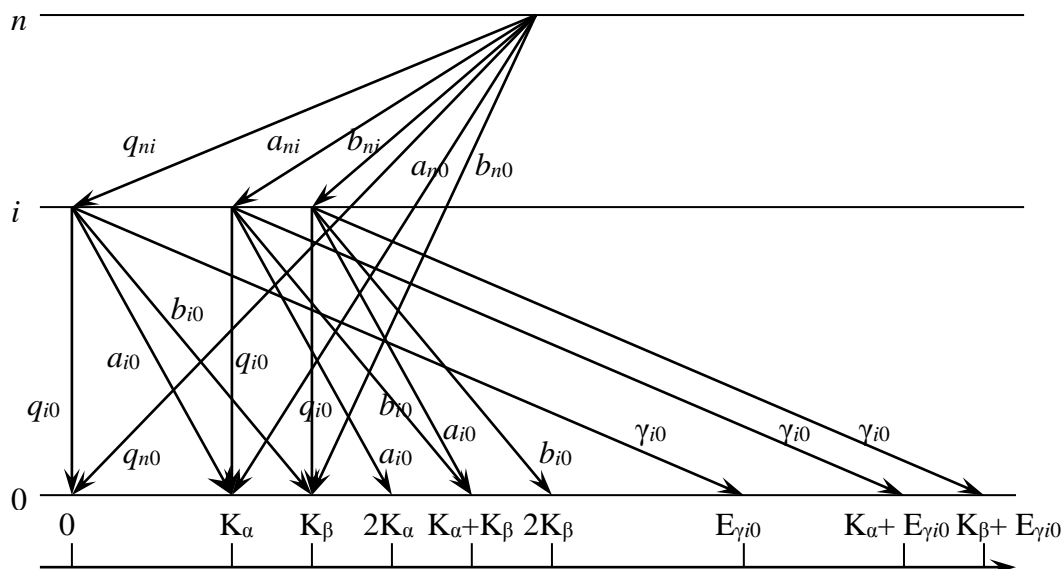
$$\begin{aligned} a_{ij} &= \varepsilon_\alpha f_\alpha \omega_K \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} x_{ij} \\ b_{ij} &= \varepsilon_\beta f_\beta \omega_K \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} x_{ij} \end{aligned}, \quad (5.16)$$

Вероватноћа недетекције иједног фотона при прелазу на мање побуђени ниво језгра потомка, $i \rightarrow j$, дата је релацијом:

$$q_{ij} = \left(1 - t_{ij} \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T} - t_\alpha f_\alpha \omega_K \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} - t_\beta f_\beta \omega_K \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} \right) x_{ij}, \quad (5.17)$$

где је t_{ij} тотална ефикасност детекције на енергији која одговара гама фотону емитованог при $i \rightarrow j$ прелазу.

Скуп свих вероватноћа детекције формирају карактеристичан дијаграм приказан на слици (Сл. 5.2). Дијаграм почиње од највише побуђеног нивоа, n , и садржи по три гране, a_{ni} , b_{ni} , q_{ni} (5.7, 5.8) које се простиру до сваког нижег побуђеног нивоа i . Из сваке од тих грана даље извире по четири нове гране, a_{ij} , b_{ij} , γ_{ij} , q_{ij} (5.12, 5.16, 5.17) које се простиру до нижих побуђених нивоа j .



Сл. 5.2 Дијаграм вероватноћа детекције са одговарајућим енергијама депоновања.

5.5 Вероватноће детекције коинцидентних фотона

Вероватноће детекције фотона, који су настали при прелазима у једном кораку, дате су у претходном параграфу. Међутим, потребно је доћи до израза за вероватноће истовремене детекције фотона који настају при каскадном прелазу, односно прелазу у више сукцесивних корака. У том циљу Новковић са сарадницима [10] уводи квадратну матрицу путања распада, \mathbf{Y} , чији се елементи састоје од одговарајућих вероватноћа детекције:

$$y_{ni} = \{a_{ni}, b_{ni}, q_{ni}\}, \quad y_{ij} = \{a_{ij}, b_{ij}, \gamma_{ij}, q_{ij}\} \quad j < i < n. \quad (5.18)$$

А заправо је само требало уочити да изрази (5.7, 5.8) заједно са изразима (5.12, 5.16, 5.17) нису ништа друго до изрази за матричне елементе матрица које смо у раду [11] назвали **матрицама вероватноћа детекције**:

Матрица вероватноће детекције K_α фотона:

$$\mathbf{A} = e^{iE_\alpha} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

Матрица вероватноће детекције K_β фотона:

$$\mathbf{B} = e^{iE_\beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{20} & b_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & b_{n2} & b_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

Матрица вероватноће детекције гама фотона:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{10} e^{iE_{10}^\gamma} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_{20} e^{iE_{20}^\gamma} & \gamma_{21} e^{iE_{21}^\gamma} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

Матрица вероватноће не-детекције иједног фотона:

$$\mathbf{Q} = e^{i0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{10} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_{20} & q_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & q_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Матрице \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{\Gamma}$ и \mathbf{Q} смо допунили комплексним бројевима $e^{iE_{ij}}$, где је E_{ij} енергија која се депонује у детектору при прелазу $i \rightarrow j$. Како је енергија

депоновања K_α , односно K_β фотона, иста за све прелазе, комплексни бројеви e^{iE_α} , односно e^{iE_β} , извучени су испред одговарајућих матрица. Енергија депоновања у одсуству детекције фотона једнака је нули тако да је одговарајући комплексни број испред матрице \mathbf{Q} једнак e^{i0} . Улога уведених комплексних бројева постаће јаснија ниже у тексту када будемо анализирали исходе детекције при каскадним прелазима.

Уведимо матрицу збира свих матрица вероватноћа детекције:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q}. \quad (5.23)$$

Матрица \mathbf{S} садржи све вероватноће (не)детекције фотона који се емитују при прелазима у једном кораку. Аналогно потенцијама матрице вероватноће прелаза, \mathbf{X}^k , потенције збира матрица вероватноћа детекције, \mathbf{S}^k , садрже све вероватноће детекције фотона емитованих при каскадним прелазима у k корака. Према томе, збир свих потенција матрице \mathbf{S} садржи све вероватноће детекције фотона емитованих при каскадним прелазима у било ком могућем броју корака:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{v-1} \mathbf{S}^k = \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3 + \dots + \mathbf{S}^{v-1}, \quad (5.24)$$

где је v степен нилпотентности матрице \mathbf{S} (који је исти као код матрице \mathbf{X}).

Међутим, за проблематику коинцидентног сумирања интересантни су само комплетни каскадни прелаз, односно каскадни прелаз који почињу од основног стања претка а завршавају се основним стањем језгра потомка, $n \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow 0$. Разлог за то је што исходи само делова таквих каскада нису директно опсервабилни. На пример, исход једног дела комплетне каскаде, $i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-2}$, је неразличиво суперпониран са исходима дела каскаде који му претходи, $n \rightarrow i_1 \rightarrow i_2$ и дела каскаде који га следи, $i_{k-2} \rightarrow i_{k-1} \rightarrow 0$, итд. Због тога, уместо целе матрице \mathbf{M} , која садржи све могуће вероватноће детекције, за нашу даљу анализу потребан нам је само њен елемент који се налази у последњем, n -том реду, и нултој колони, $[\mathbf{M}]_{n,0}$. Тај матрични елемент садржи вероватноће детекције фотона емитованих при свим комплетним

каскадним прелазима. Односно, тај матрични елемент садржи све могуће исходе детекције:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}]_{n,0} = & \overbrace{a_{n,0}e^{iE_\alpha} + b_{n,0}e^{iE_\beta} + q_{n,0}e^{i0}}^{1 \text{ корак}} + \\
 & + \overbrace{\left(a_{n,n-1}e^{iE_\alpha}a_{n-1,0}e^{iE_\alpha} + a_{n,n-2}e^{iE_\alpha}a_{n-2,0}e^{iE_\alpha} + \dots + a_{n,1}e^{iE_\alpha}a_{1,0}e^{iE_\alpha} \right) +}^{2 \text{ корака}} \\
 & + \overbrace{\left(a_{n,n-1}e^{iE_\alpha}b_{n-1,0}e^{iE_\beta} + a_{n,n-2}e^{iE_\alpha}b_{n-2,0}e^{iE_\beta} + \dots + a_{n,1}e^{iE_\alpha}b_{1,0}e^{iE_\beta} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(a_{n,n-1}e^{iE_\alpha}\gamma_{n-1,0}e^{iE_{n-1,0}^\gamma} + a_{n,n-2}e^{iE_\alpha}\gamma_{n-2,0}e^{iE_{n-2,0}^\gamma} + \dots + a_{n,1}e^{iE_\alpha}\gamma_{1,0}e^{iE_{1,0}^\gamma} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(a_{n,n-1}e^{iE_\alpha}q_{n-1,0}e^{i0} + a_{n,n-2}e^{iE_\alpha}q_{n-2,0}e^{i0} + \dots + a_{n,1}e^{iE_\alpha}q_{1,0}e^{i0} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(b_{n,n-1}e^{iE_\beta}a_{n-1,0}e^{iE_\alpha} + b_{n,n-2}e^{iE_\beta}a_{n-2,0}e^{iE_\alpha} + \dots + b_{n,1}e^{iE_\beta}a_{1,0}e^{iE_\alpha} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(b_{n,n-1}e^{iE_\beta}b_{n-1,0}e^{iE_\beta} + b_{n,n-2}e^{iE_\beta}b_{n-2,0}e^{iE_\beta} + \dots + b_{n,1}e^{iE_\beta}b_{1,0}e^{iE_\beta} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(b_{n,n-1}e^{iE_\beta}\gamma_{n-1,0}e^{iE_{n-1,0}^\gamma} + b_{n,n-2}e^{iE_\beta}\gamma_{n-2,0}e^{iE_{n-2,0}^\gamma} + \dots + b_{n,1}e^{iE_\beta}\gamma_{1,0}e^{iE_{1,0}^\gamma} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(b_{n,n-1}e^{iE_\beta}q_{n-1,0}e^{i0} + b_{n,n-2}e^{iE_\beta}q_{n-2,0}e^{i0} + \dots + b_{n,1}e^{iE_\beta}q_{1,0}e^{i0} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(q_{n,n-1}e^{i0}a_{n-1,0}e^{iE_\alpha} + q_{n,n-2}e^{i0}a_{n-2,0}e^{iE_\alpha} + \dots + q_{n,1}e^{i0}a_{1,0}e^{iE_\alpha} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(q_{n,n-1}e^{i0}b_{n-1,0}e^{iE_\beta} + q_{n,n-2}e^{i0}b_{n-2,0}e^{iE_\beta} + \dots + q_{n,1}e^{i0}b_{1,0}e^{iE_\beta} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(q_{n,n-1}e^{i0}\gamma_{n-1,0}e^{iE_{n-1,0}^\gamma} + q_{n,n-2}e^{i0}\gamma_{n-2,0}e^{iE_{n-2,0}^\gamma} + \dots + q_{n,1}e^{i0}\gamma_{1,0}e^{iE_{1,0}^\gamma} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(q_{n,n-1}e^{i0}q_{n-1,0}e^{i0} + q_{n,n-2}e^{i0}q_{n-2,0}e^{i0} + \dots + q_{n,1}e^{i0}q_{1,0}e^{i0} \right) +} \\
 & + \overbrace{\left(a_{n,n-1}e^{iE_\alpha}a_{n-1,n-2}e^{iE_\alpha}a_{n-2,0}e^{iE_\alpha} + \dots + a_{n,2}e^{iE_\alpha}a_{2,1}e^{iE_\alpha}a_{1,0}e^{iE_\alpha} \right) +}^{3 \text{ корака}} \\
 & + \overbrace{\left(a_{n,n-1}e^{iE_\alpha}a_{n-1,n-2}e^{iE_\alpha}b_{n-2,0}e^{iE_\beta} + \dots + a_{n,2}e^{iE_\alpha}a_{2,1}e^{iE_\alpha}b_{1,0}e^{iE_\beta} \right) +} \\
 & + \dots + \\
 & + \underbrace{q_{n,n-1}e^{i0}q_{n-1,n-2}e^{i0}q_{n-2,n-3}e^{i0} \dots q_{1,0}e^{i0}}_{\nu-1 \text{ корака}}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

При множењу комплексних бројева у изразу (5.25) њихови модули ће се међусобно измножити док ће се аргументи међусобно сумирати. Због ове особине производа комплексних бројева смо иначе и увели комплексну нотацију за матрице вероватноће детекције (5.19-5.22). На тај начин смо у формализам аутоматски укључили својство коинцидентног сумирања према којем је енергија која се депонује у детектору при коинцидентној детекцији каскадних фотона једнака суми енергија које се депонују при прелазима који формирају саму каскаду.

Различити догађаји детекције чије вероватноће у изразу (5.25) имају исти аргумент заправо припадају групи догађаја са истим исходом детекције. Сви ти чланови дају допринос истом фото-пику. Тиме је коначно успостављена веза са енергетским спектром. Наиме, нормирана површина испод одређеног пика у енергетском спектру једнака је суми вероватноћа детекције свих догађаја са истим исходом. Односно, теоријска брзина бројања у одговарајућем фото-пику добија се множењем активности извора, R , са сумом вероватноћа детекције свих догађаја са истим исходом:

$$n^{\text{Th}}(E_\ell) \equiv R \sum_k p_k(E_\ell) \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (5.26)$$

Изједначавањем теоријских са експерименталним брзинама бројања добија се систем једначина за брзине бројања у свим пиковима у енергетском спектру:

$$R \sum_k p_k(E_\ell) = n^{\text{Exp}}(E_\ell) \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (5.27)$$

Познавањем ефикасности детекције и активности извора, на основу горњег система једначина, могуће је одредити вредности одговарајућих нуклеарних и атомских параметара. Такође, могуће је решавати и инверзни проблем, као што ћемо у наредним поглављима демонстрирати, да се познавањем нуклеарних и атомских параметара одреде непозната активност извора и непознате ефикасности детекције.

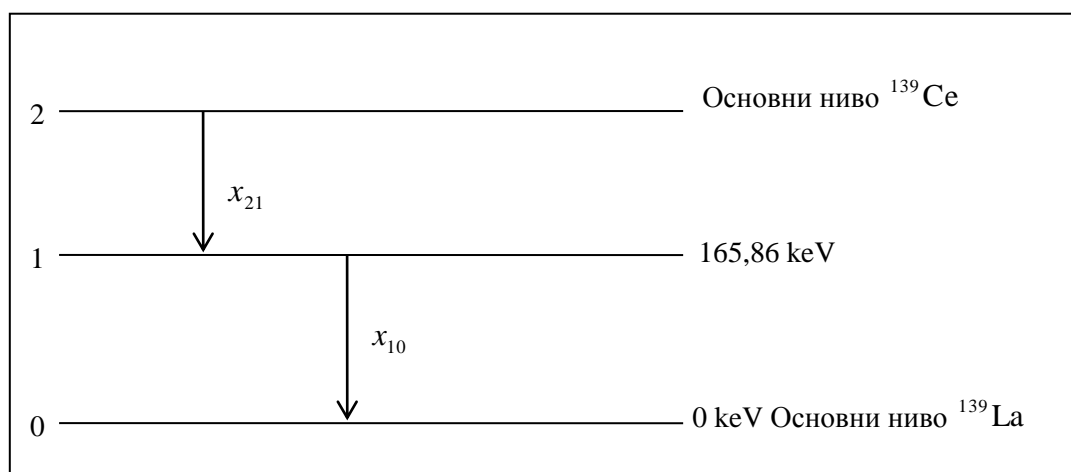
У следећем поглављу применићемо описани метод на радионуклиде церијума ^{139}Ce , кобалта ^{57}Co и баријума ^{133}Ba .

6 Примена метода на ^{139}Ce , ^{57}Co и ^{133}Ba

Нов матрични метод X-гама коинцидентног сумирања у германијумском детектору применићемо на радионуклиде церијума ^{139}Ce , кобалта ^{57}Co и баријума ^{133}Ba [11, 12].

6.1 Церијум ^{139}Ce

Церијум ^{139}Ce се електронским захватом распада на побуђено стање језгра лантана ^{139}La . Распад на основно стање лантана може се занемарити ($<0,008\%$) [22]. Модификована шема распада ^{139}Ce приказана је на слици (Сл. 6.1).



Сл. 6.1 Модификована шема распада церијума ^{139}Ce . Модификација шеме се састоји у томе што је основно стање церијума приказано као друго побуђено стање лантана.

Матрица вероватноће прелаза је:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{10} & 0 & 0 \\ 0 & x_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

На основу матрице \mathbf{X} формирамо одговарајуће матрице вероватноћа детекције.

Матрице вероватноће детекције K_α и K_β фотона су:

$$\mathbf{A} = e^{i33} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{B} = e^{i38} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

јер се K_α и K_β фотони емитују при деексцитацији атомског омотача лантана са енергијама 33 и 38 keV, респективно.

Матрица вероватноће детекције гама фотона:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{10} e^{i166} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Матрица вероватноће не-детекције иједног фотона:

$$\mathbf{Q} = e^{i0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ q_{10} & 0 & 0 \\ 0 & q_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Матрични елементи, односно саме вероватноће детекције при електронском захвату дате су изразима (5.7) и (5.8). За случај церијума ови изрази се свде на:

$$\begin{aligned} a_{21} &= \varepsilon_\alpha f_\alpha \omega_K P_{K1} x_{21} \\ b_{21} &= \varepsilon_\beta f_\beta \omega_K P_{K1} x_{21} \\ q_{21} &= (1 - t_\alpha f_\alpha \omega_K P_{K1} - t_\beta f_\beta \omega_K P_{K1}) x_{21} \end{aligned}, \quad (6.6)$$

где су ε_α и ε_β непознате фото-пик а t_α и t_β непознате тоталне ефикасности детекције K_α и K_β фотона, респективно.

Вероватноће детекције K_α и K_β фотона насталих интерном конверзијом при прелазу са побуђеног на основно стање језгра лантана, $1 \rightarrow 0$, на основу израза (5.16) дате су следећим изразима:

$$\begin{aligned} a_{10} &= \varepsilon_\alpha f_\alpha \omega_K \frac{\alpha_{10}^K}{1 + \alpha_{10}^T} x_{10} \\ b_{10} &= \varepsilon_\beta f_\beta \omega_K \frac{\alpha_{10}^K}{1 + \alpha_{10}^T} x_{10} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Вероватноћа детекције гама фотона емитованог при истом том прелазу на основу израза (5.12) дата са:

$$\gamma_{10} = \varepsilon_{10} \frac{1}{1 + \alpha_{10}^T} x_{10}, \quad (6.8)$$

док је вероватноћа недетекције иједног фотона при прелазу $1 \rightarrow 0$, на основу израза (5.17) једнака:

$$q_{10} = \left(1 - t_{10} \frac{1}{1 + \alpha_{10}^T} - t_\alpha f_\alpha \omega_K \frac{\alpha_{10}^K}{1 + \alpha_{10}^T} - t_\beta f_\beta \omega_K \frac{\alpha_{10}^K}{1 + \alpha_{10}^T} \right) x_{10}, \quad (6.9)$$

где су ε_{ij} непозната фото-пик а t_{ij} непозната тотална ефикасност детекције на енергији која одговара гама фотону емитованог при $1 \rightarrow 0$ прелазу.

Сума матрица вероватноће детекције је:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{10}e^{i33} + b_{10}e^{i38} + \gamma_{10}e^{i166} + q_{10}e^{i0} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21}e^{i33} + b_{21}e^{i38} + q_{21}e^{i0} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Матрица \mathbf{M} , која садржи резултате детекције свих путања распада је:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{S}^k = \mathbf{S} + \mathbf{S}^2. \quad (6.11)$$

јер је степен nilпотентности матрице \mathbf{M} , $\nu = 3$.

Матрични елемент који садржи све исходе детекције је:

$$[\mathbf{M}]_{n,0} = [\mathbf{M}]_{2,0} = [\mathbf{S}^2]_{2,0}, \quad (6.12)$$

зато што је $[\mathbf{S}]_{2,0}$ једнако нули за случај церијума ^{139}Ce .

$$[\mathbf{S}^2]_{2,0} = [a_{21}e^{i33} + b_{21}e^{i38} + q_{21}e^{i0}] \cdot [a_{10}e^{i33} + b_{10}e^{i38} + \gamma_{10}e^{i166} + q_{10}e^{i0}]. \quad (6.13)$$

Након множења и узимајући у обзир (6.12), добијамо:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{2,0} = & a_{21}a_{10}e^{i33}e^{i33} + a_{21}b_{10}e^{i33}e^{i38} + a_{21}\gamma_{10}e^{i33}e^{i166} + a_{21}q_{10}e^{i33}e^{i0} + \\ & + b_{21}a_{10}e^{i38}e^{i33} + b_{21}b_{10}e^{i38}e^{i38} + b_{21}\gamma_{10}e^{i38}e^{i166} + b_{21}q_{10}e^{i38}e^{i0} + \\ & + q_{21}a_{10}e^{i0}e^{i33} + q_{21}b_{10}e^{i0}e^{i38} + q_{21}\gamma_{10}e^{i0}e^{i166} + q_{21}q_{10}e^{i0}e^{i0} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Вероватноће детекције које одговарају истим енергијама депоновања су већ груписане помоћу експоненцијалних фактора e^{iE_j} , тако да се могу формирати једначине за брзине бројања за церијум ^{139}Ce :

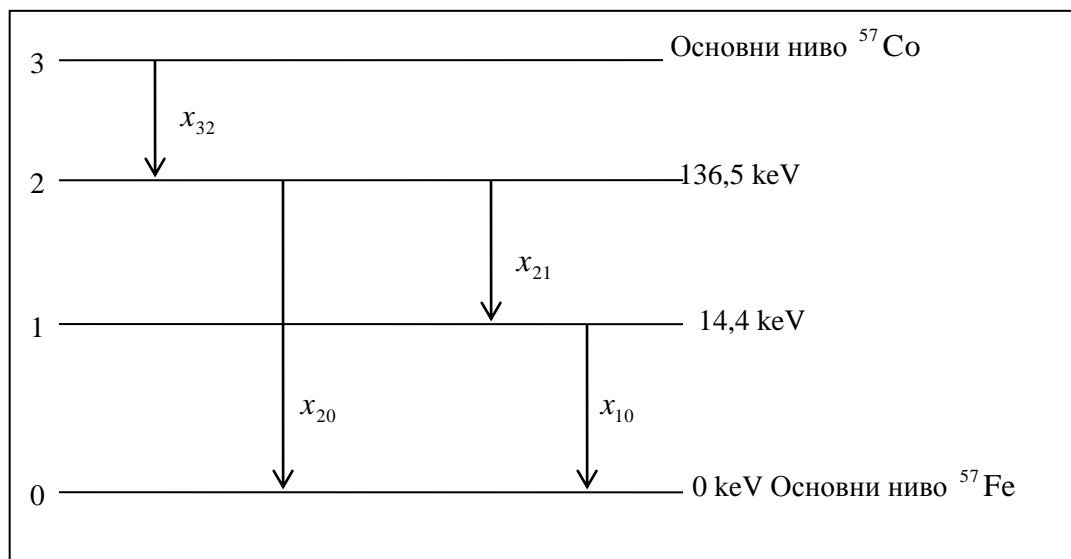
$$\begin{aligned} R(1 - q_{21}q_{10}e^{i0}e^{i0}) &= N_{\text{tot}}e^{i0} && \text{Укупна брзина бројања} \\ R(a_{21}q_{10}e^{i33}e^{i0} + q_{21}a_{10}e^{i0}e^{i33}) &= N(33)e^{i33} && \text{K}_\alpha - \text{линија} \\ R(b_{21}q_{10}e^{i38}e^{i0} + q_{21}b_{10}e^{i0}e^{i38}) &= N(38)e^{i38} && \text{K}_\beta - \text{линија} \\ Ra_{21}a_{10}e^{i33}e^{i33} &= N(66)e^{i66} && 2\text{K}_\alpha - \text{линија} \\ R(a_{21}b_{10}e^{i33}e^{i38} + b_{21}a_{10}e^{i38}e^{i33}) &= N(71)e^{i71} && \text{K}_\alpha + \text{K}_\beta - \text{линија} \\ Rb_{21}b_{10}e^{i38}e^{i38} &= N(76)e^{i76} && 2\text{K}_\beta - \text{линија} \\ Rq_{21}\gamma_{10}e^{i0}e^{i166} &= N(166)e^{i166} && \gamma(166 \text{ keV}) - \text{линија} \\ Ra_{21}\gamma_{10}e^{i33}e^{i166} &= N(199)e^{i199} && \text{K}_\alpha + \gamma(166 \text{ keV}) - \text{линија} \\ Rb_{21}\gamma_{10}e^{i38}e^{i166} &= N(204)e^{i204} && \text{K}_\beta + \gamma(166 \text{ keV}) - \text{линија} \end{aligned} \quad (6.15)$$

где је R непозната активност извора ^{139}Ce .

Након скраћивања експоненцијалних фактора у једначинама (6.15) добија се систем једначина који су добили и Новковић са сарадницима [10]. Помоћу израза (6.6-6.9) и добијеног система једначина за брзине бројања могу се одредити непознате ефикасности детекције на енергијама 33, 38 и 166 keV као и вредност непознате активности извора церијума ^{139}Ce .

6.2 Кобалт ^{57}Co

Кобалт ^{57}Co се електронским захватом распада на гвожђе ^{57}Fe . Велика је вероватноћа (99,82 %) да ће се језгро гвожђа ^{57}Fe након тога наћи у свом другом побуђеном стању са енергијом од 136,47 keV [23]. Услед мале вероватноће (<0.18 %) [23], занемарићемо распад на остала побуђена стања. Модификована шема распада кобалта ^{57}Co се у том случају може приказати као на слици (Сл. 6.2).



Сл. 6.2 Модификована шема распада кобалта ^{57}Co

Вероватноће детекције K_α и K_β фотона емитованих при електронском захвату су:

$$\begin{aligned} a_{3i} &= \varepsilon_\alpha f_\alpha \omega_K P_{Ki} x_{3i} \\ b_{3i} &= \varepsilon_\beta f_\beta \omega_K P_{Ki} x_{3i} \end{aligned} \quad (6.16)$$

где су ε_α и ε_β непознате фото-пик ефикасности детекције K_α и K_β фотона, респективно. x_{3i} су вероватноће одговарајућих прелаза [23]:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.123 & 0.877 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Вероватноћа недетекције иједног фотона при електронском захвату, $3 \rightarrow i$, дата је релацијом:

$$q_{3i} = (1 - t_\alpha f_\alpha \omega_K P_{Ki} - t_\beta f_\beta \omega_K P_{Ki}) x_{3i}, \quad (6.18)$$

где су t_α и t_β непознате тоталне ефикасности детекције K_α и K_β фотона, респективно.

Вероватноће детекције K_α и K_β фотона насталих интерном конверзијом, детекције гама фотона и недетекције иједног фотона при прелазу између нивоа језгра потомка, $i \rightarrow j$, ($i = 2, 1 > j = 1, 0$) дате су релацијама (5.16), (5.12) и (5.17) респективно.

Матрица вероватноће детекције K_α и K_β фотона су:

$$\mathbf{A} = e^{i6.4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{B} = e^{i7.1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & 0 & 0 \\ b_{20} & b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

јер су енергије K_α и K_β фотона 6,4 и 7,1 keV респективно.

Матрица вероватноће детекције гама фотона је:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{10}e^{i14.4} & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{20}e^{i136.5} & \gamma_{21}e^{i122.1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

Матрица вероватноће не-детекције иједног фотона:

$$\mathbf{Q} = e^{i0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{10} & 0 & 0 & 0 \\ q_{20} & q_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Збир свих матрица вероватноћа детекције је:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q}. \quad (6.23)$$

Матрица која садржи резултате детекције свих путања распада је:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{S}^k = \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3. \quad (6.24)$$

јер је степен nilпотентности матрице \mathbf{S} , $\nu = 4$.

Матрични елемент који садржи све исходе детекције је:

$$[\mathbf{M}]_{3,0} = [\mathbf{S}^2]_{3,0} + [\mathbf{S}^3]_{3,0}, \quad (6.25)$$

зато што је $[\mathbf{S}]_{3,0}$ једнак нули за случај кобалта ^{57}Co .

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{3,0} &= (a_{32}e^{i6.4} + b_{32}e^{i7.1} + q_{32}e^{i0})(a_{20}e^{i6.4} + b_{20}e^{i7.1} + \gamma_{20}e^{i136.5} + q_{20}e^{i0}) + \\ &+ (a_{32}e^{i6.4} + b_{32}e^{i7.1} + q_{32}e^{i0})(a_{21}e^{i6.4} + b_{21}e^{i7.1} + \gamma_{21}e^{i122.1} + q_{21}e^{i0}) \cdot \\ &\cdot (a_{10}e^{i6.4} + b_{10}e^{i7.1} + \gamma_{10}e^{i14.4} + q_{10}e^{i0}) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Односно, након множења:

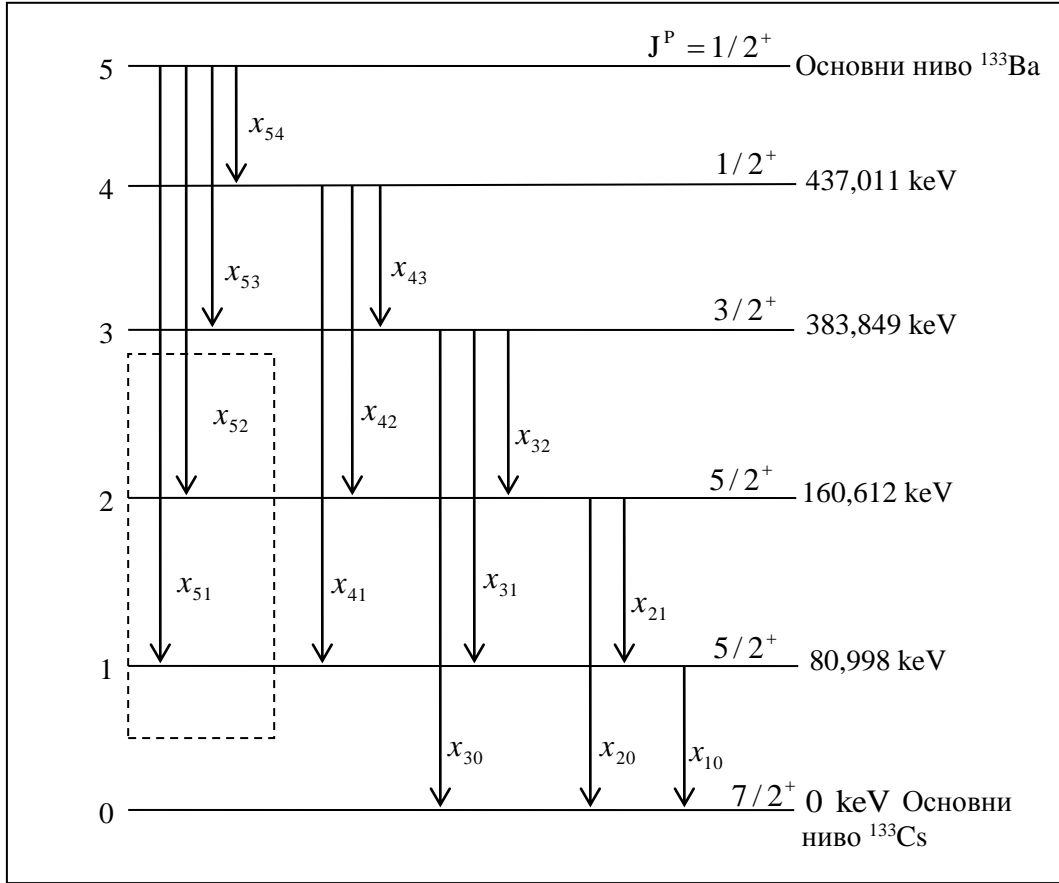
$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}]_{3,0} = & a_{32}a_{20}e^{i6.4}e^{i6.4} + a_{32}b_{20}e^{i6.4}e^{i7.1} + a_{32}\gamma_{20}e^{i6.4}e^{i136.5} + a_{32}q_{20}e^{i6.4}e^{i0} + \\
 & + b_{32}a_{20}e^{i7.1}e^{i6.4} + b_{32}b_{20}e^{i7.1}e^{i7.1} + b_{32}\gamma_{20}e^{i7.1}e^{i136.5} + b_{32}q_{20}e^{i7.1}e^{i0} + \\
 & + q_{32}a_{20}e^{i0}e^{i6.4} + q_{32}b_{20}e^{i0}e^{i7.1} + q_{32}\gamma_{20}e^{i0}e^{i136.5} + q_{32}q_{20}e^{i0}e^{i0} + \\
 & + a_{32}a_{21}a_{10}e^{i6.4}e^{i6.4}e^{i6.4} + a_{32}b_{21}b_{10}e^{i6.4}e^{i7.1}e^{i7.1} + a_{32}\gamma_{21}\gamma_{10}e^{i6.4}e^{i122.1}e^{i14.4} \quad (6.27) \\
 & + a_{32}q_{21}q_{10}e^{i6.4}e^{i0}e^{i0} + b_{32}a_{21}a_{10}e^{i7.1}e^{i6.4}e^{i6.4} + b_{32}b_{21}b_{10}e^{i7.1}e^{i7.1}e^{i7.1} + \\
 & + b_{32}\gamma_{21}\gamma_{10}e^{i7.1}e^{i122.1}e^{i14.4} + b_{32}q_{21}q_{10}e^{i7.1}e^{i0}e^{i0} + q_{32}a_{21}a_{10}e^{i0}e^{i6.4}e^{i6.4} + \\
 & + q_{32}b_{21}b_{10}e^{i0}e^{i7.1}e^{i7.1} + q_{32}\gamma_{21}\gamma_{10}e^{i0}e^{i122.1}e^{i14.4} + q_{32}q_{21}q_{10}e^{i0}e^{i0}e^{i0}
 \end{aligned}$$

Вероватноће детекције које одговарају истим енергијама депоновања су већ груписане помоћу експоненцијалних фактора e^{iE_j} , тако да се могу формирати једначине за брзине бројања за кобалт ^{57}Co . Помоћу израза за вероватноће детекције (5.12), (5.16), (5.17), (6.16-6.18) и добијеног система једначина за брзине бројања могу се одредити непознате ефикасности детекције на енергијама 6,4, 7,1, 14,4, 122,1 и 136,5 keV као и вредност непознате активности извора кобалта ^{57}Co .

6.3 Баријум ^{133}Ba

Анализирајмо сада распад баријума ^{133}Ba . Пошто основно стање баријума ^{133}Ba има спин и парност $J^P = 1/2^+$, оно се првенствено распада на $1/2^+$ и $3/2^+$ нивое побуђења цезијума ^{133}Cs на енергијама 437,0 и 383,8 keV респективно (Сл. 6.2). На овој шеми, испрекиданом линијом смо означили два прелаза третирана у нашој анализи [12], за разлику од претходних радова где су ови прелази у потпуности занемарени [13, 41, 42]. У раду [12] кориговали смо матрицу вероватноће прелаза укључивањем поменутих прелаза, примењујући тачније вредности доступне у литератури [24].

Интензитети преосталих грана распада могу се проценити из $\log ft$ систематике [43]. $\log ft$ двоструко забрањеног распада на основно стање је већи од 13,9, са резултујућом вероватноћом мањом од 0,0005 %.



Сл. 6.2 Модификована шема распада баријума ^{133}Ba . Испрекиданом линијом су означена два прелаза која се у литератури неоправдано занемарују.

Вероватноће детекције K_α и K_β фотона емитованих при електронском захвату су:

$$\begin{aligned} a_{5i} &= \varepsilon_\alpha f_\alpha \omega_K P_{Ki} x_{5i} \\ b_{5i} &= \varepsilon_\beta f_\beta \omega_K P_{Ki} x_{5i} \end{aligned} \quad (6.28)$$

где су ε_α и ε_β непознате фото-пик ефикасности детекције K_α и K_β фотона, респективно. x_{5i} су вероватноће одговарајућих прелаза [24]:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.102689 & 0.897311 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.317019 & 0.665670 & 0.017311 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.738197 & 0.087809 & 0.173994 & 0 & 0 \\ 0 & 0.007 & 0.003 & 0.133 & 0.857 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Вероватноћа недетекције иједног фотона при електронском захвату, $5 \rightarrow i$, дата је релацијом:

$$q_{5i} = (1 - t_\alpha f_\alpha \omega_K P_{Ki} - t_\beta f_\beta \omega_K P_{Ki}) x_{5i}, \quad (6.30)$$

где су t_α и t_β непознате тоталне ефикасности детекције K_α и K_β фотона, респективно.

Вероватноће детекције K_α и K_β фотона насталих интерном конверзијом, детекције гама фотона и недетекције иједног фотона при прелазу између нивоа језгра потомка, $i \rightarrow j$, ($i = 4, 3, 2, 1 > j = 3, 2, 1, 0$) дате су релацијама (5.16), (5.12) и (5.17) респективно.

Матрице вероватноће детекције K_α и K_β фотона су:

$$\mathbf{A} = e^{i30.8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{20} & a_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{B} = e^{i35.3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{20} & b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & 0 & 0 \\ 0 & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

јер су енергије K_α и K_β фотона 30,8 и 35,3 keV респективно.

Матрица вероватноће детекције гама фотона:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{10} e^{i81.0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{20} e^{i160.6} & \gamma_{21} e^{i79.6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{30} e^{i383.8} & \gamma_{31} e^{i302.9} & \gamma_{32} e^{i223.2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{41} e^{i356.0} & \gamma_{42} e^{i276.4} & \gamma_{43} e^{i53.2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Матрица вероватноће не-детекције иједног фотона:

$$\mathbf{Q} = e^{i0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{20} & q_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{41} & q_{42} & q_{43} & 0 & 0 \\ 0 & q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Матрица \mathbf{M} која која садржи резултате детекције свих путања распада је:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{S}^k = \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3 + \mathbf{S}^4 + \mathbf{S}^5, \quad (6.35)$$

где је $\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{\Gamma} + \mathbf{Q}$. Степен nilпотентности матрице \mathbf{S} је: $\nu = 6$.

Матрични елемент који садржи све исходе детекције је:

$$[\mathbf{M}]_{n,0} = [\mathbf{M}]_{5,0} = [\mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3 + \mathbf{S}^4 + \mathbf{S}^5]_{5,0}, \quad (6.36)$$

зато што је $[\mathbf{S}]_{5,0} = 0$ за случај баријума ^{133}Ba .

Након једноставних аритметичких операција добијамо:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{5,0} = & q_{54}q_{41}q_{10} + q_{53}q_{31}q_{10} + \dots + a_{54}q_{41}q_{10}e^{i30.8} + q_{54}q_{41}a_{10}e^{i30.8} + \dots \\ & + b_{54}q_{41}q_{10}e^{i35.3} + q_{54}q_{41}b_{10}e^{i35.3} + \dots + q_{54}\gamma_{43}q_{31}q_{10}e^{i53.2} + q_{54}\gamma_{43}q_{30}e^{i53.2} + \\ & + q_{54}q_{42}\gamma_{21}q_{10}e^{i79.6} + q_{52}\gamma_{21}q_{10}e^{i79.6} + \dots + q_{54}q_{41}\gamma_{10}e^{i81.0} + q_{53}q_{31}\gamma_{10}e^{i81.0} + \\ & + q_{54}q_{42}\gamma_{20}e^{i160.6} + q_{54}q_{42}\gamma_{21}\gamma_{10}e^{i79.6}e^{i81.0} + \dots + q_{53}\gamma_{32}q_{21}q_{10}e^{i223.2} + \dots \\ & + q_{54}\gamma_{42}q_{21}q_{10}e^{i276.4} + q_{54}\gamma_{42}q_{20}e^{i276.4} + \dots + q_{53}\gamma_{31}q_{10}e^{i302.9} + \dots \\ & + q_{54}q_{43}\gamma_{31}q_{10}e^{i302.9} + q_{53}\gamma_{32}q_{21}\gamma_{10}e^{i223.2}e^{i81.0} + q_{54}q_{43}\gamma_{32}q_{21}\gamma_{10}e^{i223.2}e^{i81.0} + \\ & + q_{54}\gamma_{41}q_{10}e^{i356.0} + q_{54}\gamma_{42}q_{21}\gamma_{10}e^{i276.4}e^{i81.0} + q_{54}\gamma_{43}\gamma_{32}q_{21}\gamma_{10}e^{i53.2}e^{i223.2}e^{i81.0} \\ & + q_{53}\gamma_{30}e^{i383.8} + q_{54}q_{43}\gamma_{30}e^{i383.8} + \dots + q_{54}\gamma_{41}\gamma_{10}e^{i356.0}e^{i81.0} + \dots \\ & + q_{54}\gamma_{43}\gamma_{30}e^{i53.2}e^{i383.8} + \dots \end{aligned} \quad (6.37)$$

Вероватноће детекције које одговарају истим енергијама депоновања су већ груписане помоћу експоненцијалних фактора e^{-iE_j} , тако да се могу формирати једначине за брзине бројања за баријум ^{133}Ba . Помоћу израза за вероватноће детекције (5.12), (5.16), (5.17), (6.28), (6.30) и добијеног система једначина за брзине бројања могу се одредити непознате ефикасности детекције и вредност непознате активности извора баријума ^{133}Ba . При решавању система једначина за брзине бројања показало се веома корисно [12, 13] увођење релације између пик- и тоталне ефикасности детекције:

$$t_{ij} = \varepsilon_{ij}(1 + kE_{ij}), \quad (6.38)$$

где је E енергија а k непознати коефицијент који зависи од геометрије мерења и карактеристичан је параметар за сваки детектор. Релација (6.38) веома добро описује везу између пик- и тоталне ефикасности у широком енергетском опсегу. Релација омогућава да се увођењем само једног новог непознатог параметра, k , број непознатих преполови што знатно олакшава решавање система једначина.

7 Примена метода на европијум ^{152}Eu

^{152}Eu се електронским захватом (72.1 %) или β^+ емисијом (око 0.027 %) распада на самаријум ^{152}Sm а β^- емисијом (27.9 %) распада на гадолинијум ^{152}Gd [45]. Помоћу података датих у табелама вероватноћа прелаза [45] формирали смо матрице вероватноће прелаза, **X** за обе гране распада и приметили низ неправилности. Наиме, код појединих енергетских нивоа, интензитети прелаза нису избалансирани. Односно, интензитети прелаза са и на посматрани ниво нису међусобно једнаки. Пошто то директно утиче на даље прорачуне одлучили смо да прво испитамо извор тих неправилности. Анализирајући израчунавања датих у прилогу [47] које прате табеле [45] уочили смо читав низ грешака и омашки које директно утичу на вредности препоручених интензитета прелаза. Једна од најинтересантнијих омашки учињена је при раздвајању дублета на енергији 1086 keV, где су евалуатори врло педантно изоловали мањи пик и балансирајући интензитете прелаза тачно израчунали одговарајући интензитет прелаза електронским захватом али су омашком у табели гама прелаза оставили вредност интензитета целог дублета. У намери да будућим истраживачима олакшамо истраживање у ПРИЛОГУ Г ове дисертације приказали смо компилацију свих грешака које су евалуатори [45, 47] начинили.

Ова дигресија нас је навела да у анализу уведемо релативне интензитете емисије гама зрачења J_{ij}^R уместо, до сада коришћених, апсолутних вероватноћа гама прелаза $P_{ij}^{\gamma+ce}$ датих у табели 2.4 референце [45]. Ове последње су иначе и добијене из првих једноставним прерачунавањем:

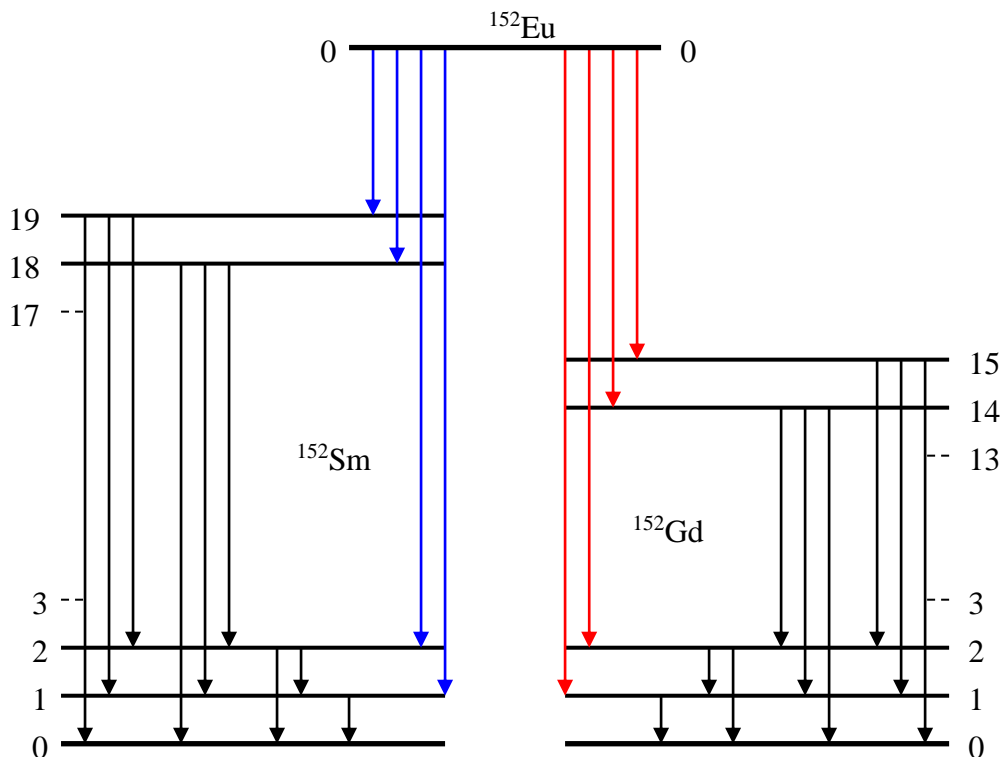
$$P_{ij}^{\gamma+ce} = J_{ij} \cdot [1 + \alpha_{ij}^T] \cdot 100\%, \quad J_{ij} = J_{13,1} \cdot \frac{J_{ij}^R}{J_{13,1}^R}, \quad (7.1)$$

где су: $J_{13,1}$ - апсолутни интензитет емисије гама зрачења на енергији 1408 keV (прелаз са тринаестог на прво побуђено стање) која је договором узета као референтна у гама спектру европијума ^{152}Eu и чија је вредност одређена интеркомпарацијом $J_{13,1} = 0.2085(8)$, J_{ij}^R - релативни интензитети емисије гама

зрачења чије су вредности одређене експериментално, α_{ij}^T - одговарајући тотални коефицијент интерне конверзије. Као пример наведимо израчунавање апсолутне вероватноће гама прелаза са првог побуђеног на основно стање у самаријумској грани распада којој одговара енергија 121.8 keV (табела 2.4 референце [45]):

$$P_{1,0}^{\gamma+ce} = 0.2085(8) \cdot \frac{136.35(25)}{100.00(12)} \cdot [1 + 1.165(3\%)] \cdot 100\% = 61.5(10)\% . \quad (7.2)$$

Тотални коефицијенти интерне конверзије су теоријски одређени и дати су такође у табели 2.4 референце [45] са грешком од 3%, изузев прелаза мултиполарности E0 чије су вредности експериментално одређене као и њихове грешке.



Сл. 7.1 Шема распада европијума ^{152}Eu .

На основу шеме распада ^{152}Eu (Сл. 7.1) видимо да самаријумска грана поред основног има и деветнаест побуђених нивоа. Матрица интензитета емисије гама зрачења за самаријумску грану, \mathbf{J}^R , је димензија 20 x 20:

$$\mathbf{J}^R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 136.34(25) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36.23(8) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.151(16) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.520(11) & 4.038(22) & 1.53(9) & 0.086(29) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.643(16) & 0.782(9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.404(16) & 0.689(8) & 0 & 0.015(5) & 0.0943(29) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.060(20) & 0.814(19) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 47.46(10) & 69.54(10) & 1.29(4) & 0 & 0 & 0.158(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64.31(10) & 20.31(7) & 0 & 0 & 0.0153(23) & 0 & 0 & 0 & 0.165(24) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.499(15) & 0.175(6) & 1.312(18) & 0 & 0 & 0.135(7) & 0.617(26) & 0.027(12) & 0.323(7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.894(15) & 3.19(6) & 0 & 0.045(14) & 0.0052(10) & 0 & 0 & 0.029(8) & 0.048(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100.01(12) & 0 & 0 & 0 & 0.28(3) & 0.627(18) & 0 & 1.986(9) & 13.45(10) & 2.124(13) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.388(17) & 6.794(27) & 0 & 0 & 0.424(16) & 0.044(3) & 0.084(6) & 0.020(3) & 0.134(9) & 0 & 0 & 0.0284(19) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.077(5) & 0 & 0 & 0 & 0.023(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.349(21) & 0 & 0 & 0 & 0.077(4) & 0.095(8) & 0 & 0 & 2.19(6) & 0.523(8) & 0.0194(24) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0254(16) & 0.123(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.030(3) & 0.024(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0007(2) & 0.0226(29) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.093(6) & 0.054(10) & 0 & 0.024(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0442(16) & 0.0304(19) & 0 & 0 & 0 & 0.101(9) & 0.060(4) & 0 & 0.053(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.036(16) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Шема распада модификује се на тај начин што се основно стање европијума представи као највише побуђено стање број 20 у самаријумској грани. На тај начин, вероватноће детекције K_α и K_β фотона емитованих при електронском захвату, $20 \rightarrow i$, дате су следећим изразима:

$$\begin{aligned} a_{20i} &= \varepsilon_\alpha^{Sm} f_\alpha^{Sm} \omega_K^{Sm} P_{Ki} x_{20i} \\ b_{20i} &= \varepsilon_\beta^{Sm} f_\beta^{Sm} \omega_K^{Sm} P_{Ki} x_{20i} \\ q_{20i} &= \left(1 - t_\alpha^{Sm} f_\alpha^{Sm} \omega_K^{Sm} P_{Ki} - t_\beta^{Sm} f_\beta^{Sm} \omega_K^{Sm} P_{Ki}\right) x_{20i} \end{aligned} \quad , \quad (7.3)$$

где су ε_α^{Sm} ефикасност детекције K_α фотона, f_α^{Sm} удео K_α фотона, t_α^{Sm} тотална ефикасност детекције K_α фотона; ове исте величине само са индексом бета одговарају K_β фотонима; ω_K^{Sm} је флуоресцентни принос самаријумове К-љуске (ПРИЛОГ А) и износи $\omega_K^{Sm} = 0.926(4)$ [45]. P_{Ki} су вероватноће захвата електрона из К љуске и резултујућих прелаза са језгра ^{152}Eu на i -те нивое самаријума ^{152}Sm [45]. x_{20i} су вероватноће прелаза са основног стања европијума на побуђена стања i језгра самаријума добијене балансирањем апсолутних интензитета гама прелаза:

$$x_{20i} = \sum_{j=0}^{i-1} J_{ij} (1 + \alpha_{ij}^T) - \sum_{j=i+1}^{19} J_{ji} (1 + \alpha_{ji}^T). \quad (7.4)$$

Слично, при прелазу са побуђеног нивоа i на мање побуђени ниво j језгра самаријума, имамо следеће вероватноће: детекције K_α фотона, детекције K_β фотона, насталих процесом интерне конверзије, детекције гама фотона и одсуства детекције фотона. Одговарајуће вероватноће означавамо са a_{ij} , b_{ij} , γ_{ij} , q_{ij} и оне су дате са:

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= \varepsilon_\alpha^{Sm} f_\alpha^{Sm} \omega_K^{Sm} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} x_{ij} \\
 b_{ij} &= \varepsilon_\beta^{Sm} f_\beta^{Sm} \omega_K^{Sm} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} x_{ij} \\
 \gamma_{ij} &= \varepsilon_{ij} \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T} x_{ij} \\
 q_{ij} &= \left(1 - t_{ij} \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T} - t_\alpha^{Sm} f_\alpha^{Sm} \omega_K^{Sm} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} - t_\beta^{Sm} f_\beta^{Sm} \omega_K^{Sm} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} \right) x_{ij}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

где су x_{ij} вероватноће прелаза између два побуђена стања језгра самаријума добијене нормирањем релативних интензитета емисије гама зрачења уместо нормирања апсолутних вероватноћа гама прелаза $P_{i,j}^{\gamma+ce}$ као што је до сада била пракса:

$$x_{ij} = \frac{J_{ij}^R (1 + \alpha_{ij}^T)}{\sum_{j=0}^{i-1} J_{ij}^R (1 + \alpha_{ij}^T)} \tag{7.6}$$

Предност рада са релативним интензитетима емисије гама зрачења J_{ij}^R уместо, до сада коришћених, апсолутних вероватноћа гама прелаза $P_{ij}^{\gamma+ce}$ огледа се у томе што су интензитети прелаза спектроскопске величине добијене компилацијом експерименталних података те као такви представљају примарне величине помоћу којих се описује структура енергетских нивоа језгра потомка. Као такви, интензитети прелаза се могу сматрати некорелисаним величинама за разлику од вероватноћа прелаза које се, као што смо показали, добијају на основу интензитета прелаза.

Матрица вероватноће не-детекције иједног фотона:

$$\mathbf{Q} = e^{i0} \begin{bmatrix}
 0 & 0 \\
 q_{10} & 0 \\
 0 & q_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & q_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_{50} & q_{51} & q_{52} & q_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_{60} & q_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{71} & q_{72} & 0 & q_{74} & q_{75} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{81} & q_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_{90} & q_{91} & q_{92} & 0 & 0 & q_{95} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{101} & q_{102} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{109} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_{110} & q_{111} & q_{112} & 0 & 0 & q_{115} & q_{116} & q_{117} & q_{118} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{121} & q_{122} & 0 & q_{124} & q_{125} & 0 & 0 & q_{128} & q_{129} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{131} & 0 & 0 & 0 & q_{135} & q_{136} & 0 & q_{138} & q_{139} & q_{1310} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{141} & q_{142} & 0 & 0 & q_{145} & q_{146} & q_{147} & q_{148} & q_{149} & 0 & 0 & q_{1412} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & q_{154} & 0 & 0 & 0 & q_{158} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{161} & 0 & 0 & 0 & q_{165} & q_{166} & 0 & 0 & q_{169} & q_{1610} & q_{1611} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{171} & q_{172} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{179} & q_{1710} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{181} & q_{182} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{189} & q_{1810} & 0 & q_{1812} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_{190} & q_{191} & 0 & 0 & 0 & q_{195} & q_{196} & 0 & q_{198} & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{1913} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & q_{201} & q_{202} & 0 & 0 & q_{205} & 0 & q_{207} & q_{208} & q_{209} & q_{2010} & q_{2011} & q_{2012} & q_{2013} & q_{2014} & q_{2015} & q_{2016} & q_{2017} & q_{2018} & q_{2019} & 0
 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Модули матричних елемената су вероватноће детекције одговарајућих фотона (K_α , K_β , гама или без фотона) при датом прелазу. Када су у питању матрице детекције K_α и K_β фотона, при свим прелазима европијума на самаријум увек се депонује иста енергија, 40 keV и 46 keV респективно, тако да смо испред матрица \mathbf{A} и \mathbf{B} издвојили експоненцијалну функцију са заједничким аргументом. Код матрице детекције гама фотона, \mathbf{G} , сваки прелаз има своју одговарајућу енергију па се не може издвојити експоненцијална функција са заједничким аргументом испред матрице. Код матрице не-детекције, \mathbf{Q} , енергија депоновања је нула па имамо испред матрице e^{i0} .

Збир свих вероватноћа детекције за самаријумову грану је:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{G} + \mathbf{Q}. \quad (7.11)$$

Матрица \mathbf{M} , која садржи резултате детекције свих путања распада на самаријум је:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \mathbf{S}^k = \sum_{k=1}^8 \mathbf{S}^k = \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 + \mathbf{S}^3 + \dots + \mathbf{S}^8, \quad (7.12)$$

јер је степен нилпотентности матрице \mathbf{S} , $\nu = 9$. Дакле, без обзира што је $n = 20$, степен нилпотентности је 9. Односно у самаријумској грани нема каскада дужих од 8 корака: $20 \rightarrow 19 \rightarrow 13 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow (3,2) \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Матрични елемент, који садржи све резултате за све путање распада на самаријум:

$$[\mathbf{M}]_{20,0} = [\mathbf{S}^2]_{20,0} + [\mathbf{S}^3]_{20,0} + \dots + [\mathbf{S}^8]_{20,0}, \quad (7.13)$$

зато што је $[\mathbf{S}]_{20,0}$ једнак нули. Видећемо у следећем поглављу да се у пракси све каскаде дуже од 5 корака могу занемарити.

Након прорачуна добијамо да је матрични елемент који садржи све исходе детекције распада европијума на самаријум:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{20,0} = & (a_{20,1}e^{i40} + b_{20,1}e^{i46} + q_{20,1}e^{i0})(a_{1,0}e^{i40} + b_{1,0}e^{i46} + \gamma_{1,0}e^{i122} + q_{1,0}e^{i0}) + \\ & + (a_{20,5}e^{i40} + b_{20,5}e^{i46} + q_{20,5}e^{i0})(a_{5,0}e^{i40} + b_{5,0}e^{i46} + \gamma_{5,0}e^{i810} + q_{5,0}e^{i0}) + \dots \\ & + (a_{20,19}e^{i40} + b_{20,19}e^{i46} + q_{20,19}e^{i0})(a_{19,0}e^{i40} + b_{19,0}e^{i46} + \gamma_{19,0}e^{i1769} + q_{19,0}e^{i0}) \\ & + (a_{20,2}e^{i40} + b_{20,2}e^{i46} + q_{20,2}e^{i0})(a_{2,1}e^{i40} + b_{2,1}e^{i46} + \gamma_{2,1}e^{i245} + q_{2,1}e^{i0}) \cdot \\ & \cdot (a_{1,0}e^{i40} + b_{1,0}e^{i46} + \gamma_{1,0}e^{i122} + q_{1,0}e^{i0}) + \dots + \\ & (a_{20,19}e^{i40} + b_{20,19}e^{i46} + q_{20,19}e^{i0})(a_{19,1}e^{i40} + b_{19,1}e^{i46} + \gamma_{19,1}e^{i1647} + q_{19,1}e^{i0}) \\ & (a_{1,0}e^{i40} + \dots) + (a_{19,5}e^{i40} + \dots)(a_{5,0}e^{i40} + \dots) + \\ & + (a_{19,6}e^{i40} + \dots)(a_{6,0}e^{i40} + b_{6,0}e^{i46} + \gamma_{6,0}e^{i963} + q_{6,0}e^{i0}) + \dots \end{aligned} \quad (7.14)$$

Односно, након множења:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]_{20,0} = & a_{20,1}a_{1,0}e^{i80} + a_{20,1}b_{1,0}e^{i86} + a_{20,1}\gamma_{1,0}e^{i162} + a_{20,1}q_{1,0}e^{i40} + b_{20,1}a_{1,0}e^{i86} + \\ & + b_{20,1}b_{1,0}e^{i92} + b_{20,1}\gamma_{1,0}e^{i168} + b_{20,1}q_{1,0}e^{i46} + q_{20,1}a_{1,0}e^{i40} + q_{20,1}b_{1,0}e^{i46} + \\ & + q_{20,1}\gamma_{1,0}e^{i122} + q_{20,1}q_{1,0}e^{i0} + a_{20,5}a_{5,0}e^{i80} + \dots + a_{20,19}a_{19,0}e^{i80} + \dots \\ & + q_{20,19}q_{19,0}e^{i0} + \dots + a_{20,2}a_{2,1}a_{1,0}e^{i120} + a_{20,2}a_{2,1}b_{1,0}e^{i126} + a_{20,2}a_{2,1}\gamma_{1,0}e^{i202} \\ & + a_{20,2}a_{2,1}q_{1,0}e^{i80} + a_{20,2}b_{2,1}a_{1,0}e^{i126} + a_{20,2}b_{2,1}b_{1,0}e^{i132} + \dots + \\ & + a_{20,19}a_{19,1}a_{1,0}e^{i120} + \dots + a_{20,19}a_{19,5}a_{5,0}e^{i120} + \dots + a_{20,19}a_{19,6}a_{6,0}e^{i120} + \dots \\ & + a_{20,19}a_{19,6}b_{6,0}e^{i126} + a_{20,19}a_{19,6}\gamma_{6,0}e^{i1043} + a_{20,19}a_{19,6}q_{6,0}e^{i80} + \dots \\ & + b_{20,19}b_{19,6}a_{6,0}e^{i132} + b_{20,19}b_{19,6}b_{6,0}e^{i138} + \dots + q_{20,19}q_{19,6}q_{6,0}e^{i0} + \dots \end{aligned} \quad (7.15)$$

Европијум ^{152}Eu се β^- распадом распада на гадолинијум ^{152}Gd који поред основног има и петнаест побуђених стања (Сл. 7.1). Матрица интензитета емисије гама зрачења за гадолинијумску грану, \mathbf{J}^R , је димензија 16 x 16:

$$\mathbf{J}^R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 127.53(20) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.376(14) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.735(20) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.349(9) & 2.215(19) & 0.239(9) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.008(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.896(18) & 0.911(21) & 0.044(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62.16(9) & 0 & 4.137(18) & 0.0326(10) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0623(29) & 0.067(11) & 0 & 0.040(28) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.024(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.066(4) & 0.017(3) & 0 & 0.0140(10) & 0 & 0 & 0.029(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.30(3) & 0 & 2.255(15) & 0.735(8) & 0 & 0.355(7) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.065(4) & 0 & 0.126(5) & 0 & 0 & 0.064(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0388(20) & 0.161(5) & 0.151(6) & 0 & 0.082(8) & 0.022(4) & 0.0203(24) & 0.0068(29) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0071(21) & 7.83(3) & 0 & 0 & 0.461(9) & 0 & 0.18(4) & 0.257(6) & 0 & 0 & 0 & 0.0266(25) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.084(4) & 0 & 0.013(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Шема распада модификује се на тај начин што се основно стање европијума представи као највише побуђено стање број 16 у гадолинијумској грани. Дакле, основно стање европијума смо у самаријумској грани означили бројем 20 а исто то стање смо у гадолинијумској грани означили бројем 16. Оваква двоименост не уноси пометњу у даљој анализи јер се ради о дисјунктним гранама деексцитације.

Распад језгра европијума, ^{152}Eu , β^- распадом не утиче на његов атомски омотач. Због тога атомски омотач при томе остаје непобуђен тако да нема емисије а самим тим ни детекције X зрачења. Слично као и код распада електронским захватом ни овде при самом процесу распада нема ни емисије нити детекције гама зрачења. Одговарајуће вероватноће детекције K_α , K_β , и гама фотона и недетекције иједног фотона при β^- распаду, $16 \rightarrow i$, означавамо са c_{16i} , d_{16i} , δ_{16i} , w_{16i} , респективно и дате су следећим изразима:

$$\begin{aligned} c_{16i} &= 0 \\ d_{16i} &= 0 \\ \delta_{16i} &= 0 \\ w_{16i} &= y_{16i} \end{aligned} \quad , \quad (7.16)$$

где су y_{16i} вероватноће прелаза са основног стања европијума на побуђена стања i језгра гадолинијума добијене балансирањем апсолутних интензитета гама прелаза:

$$y_{16i} = \sum_{j=0}^{i-1} J_{ij} (1 + \alpha_{ij}^T) - \sum_{j=i+1}^{15} J_{ji} (1 + \alpha_{ji}^T). \quad (7.17)$$

Након β^- распада европијума остаје нам потомак, језгро гадолинијума, у побуђеном стању. Оно се деексцитује или емисијом гама фотона или процесом интерне конверзије. Одговарајуће вероватноће детекције дате су следећим изразима:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \varepsilon_{\alpha}^{Gd} f_{\alpha}^{Gd} \omega_K^{Gd} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} y_{ij} \\ d_{ij} &= \varepsilon_{\beta}^{Gd} f_{\beta}^{Gd} \omega_K^{Gd} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} y_{ij} \\ \delta_{ij} &= \varepsilon_{ij} \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T} y_{ij} \\ w_{ij} &= \left(1 - t_{ij} \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T} - t_{\alpha}^{Gd} f_{\alpha}^{Gd} \omega_K^{Gd} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} - t_{\beta}^{Gd} f_{\beta}^{Gd} \omega_K^{Gd} \frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T} \right) y_{ij} \end{aligned} \quad (7.18)$$

где је α_{ij}^K коефицијент интерне конверзије за К-љуску при прелазу $i \rightarrow j$, а α_{ij}^T одговарајући тотални конверзиони коефицијент (прилог Б), док ε_{ij} и t_{ij} означавају ефикасност у пику и тоталну ефикасност детекције гама фотона емитованих у наведеном прелазу. ω_K^{Gd} је флуоресцентни принос гадолинијумове К-љуске и износи $\omega_K^{Gd} = 0.932(4)$ [42]. y_{ij} су вероватноће прелаза између два побуђена стања језгра гадолинијума добијене нормирањем релативних интензитета емисије гама зрачења:

$$y_{ij} = \frac{J_{ij}^R (1 + \alpha_{ij}^T)}{\sum_{j=0}^{i-1} J_{ij}^R (1 + \alpha_{ij}^T)}. \quad (7.19)$$

Матрице вероватноће детекције, за гадолинијумску грану формиране су на основу матричних елемената (7.16 и 7.18):

$$\mathbf{C} = e^{i42} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{60} & c_{61} & c_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{71} & 0 & c_{73} & c_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{90} & 0 & 0 & c_{83} & c_{84} & 0 & c_{86} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{101} & c_{102} & 0 & c_{104} & 0 & 0 & c_{107} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{111} & 0 & c_{113} & c_{114} & 0 & c_{116} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{121} & 0 & c_{123} & 0 & 0 & c_{126} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{130} & c_{131} & c_{132} & 0 & c_{134} & c_{135} & c_{136} & c_{137} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{140} & c_{141} & 0 & 0 & c_{144} & 0 & c_{146} & c_{147} & 0 & 0 & 0 & c_{1411} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{151} & 0 & c_{153} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$\mathbf{D} = e^{i49} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{40} & d_{41} & d_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{60} & d_{61} & d_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{71} & 0 & d_{73} & d_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{90} & 0 & 0 & d_{83} & d_{84} & 0 & d_{86} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{101} & d_{102} & 0 & d_{104} & 0 & 0 & d_{107} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{111} & 0 & d_{113} & d_{114} & 0 & d_{116} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{121} & 0 & d_{123} & 0 & 0 & d_{126} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{130} & d_{131} & d_{132} & 0 & d_{134} & d_{135} & d_{136} & d_{137} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{140} & d_{141} & 0 & 0 & d_{144} & 0 & d_{146} & d_{147} & 0 & 0 & 0 & d_{1411} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{151} & 0 & d_{153} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{10}e^{i344} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{21}e^{i271} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{31}e^{i411} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{40}e^{i931} & \delta_{41}e^{i586} & \delta_{42}e^{i315} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{51}e^{i703} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{60}e^{i1109} & \delta_{61}e^{i765} & \delta_{62}e^{i494} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{71}e^{i779} & 0 & \delta_{73}e^{i368} & \delta_{74}e^{i193} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{83}e^{i527} & \delta_{84}e^{i352} & 0 & \delta_{86}e^{i173} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{90}e^{i1315} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{101}e^{i974} & \delta_{102}e^{i703} & 0 & \delta_{104}e^{i388} & 0 & 0 & \delta_{107}e^{i195} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{111}e^{i1090} & 0 & \delta_{113}e^{i679} & \delta_{114}e^{i503} & 0 & \delta_{116}e^{i325} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{121}e^{i1206} & 0 & \delta_{123}e^{i795} & 0 & 0 & \delta_{126}e^{i441} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{130}e^{i1606} & \delta_{131}e^{i1261} & \delta_{132}e^{i990} & 0 & \delta_{134}e^{i675} & \delta_{135}e^{i558} & \delta_{136}e^{i496} & \delta_{137}e^{i482} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{140}e^{i1644} & \delta_{141}e^{i1299} & 0 & 0 & \delta_{144}e^{i713} & 0 & \delta_{146}e^{i534} & \delta_{147}e^{i520} & 0 & 0 & 0 & \delta_{1411}e^{i209} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{151}e^{i1348} & 0 & \delta_{153}e^{i937} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{40} & w_{41} & w_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{60} & w_{61} & w_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{71} & 0 & w_{73} & w_{74} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{83} & w_{84} & 0 & w_{86} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{90} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{101} & w_{102} & 0 & w_{104} & 0 & 0 & w_{107} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{111} & 0 & w_{113} & w_{114} & 0 & w_{116} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{121} & 0 & w_{123} & 0 & 0 & w_{126} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{130} & w_{131} & w_{132} & 0 & w_{134} & w_{135} & w_{136} & w_{137} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_{140} & w_{141} & 0 & 0 & w_{144} & 0 & w_{146} & w_{147} & 0 & 0 & 0 & w_{1411} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{151} & 0 & w_{153} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{161} & 0 & w_{163} & w_{164} & 0 & w_{166} & w_{167} & w_{168} & w_{169} & w_{1610} & w_{1611} & w_{1612} & w_{1613} & w_{1614} & w_{1615} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Збир свих вероватноћа детекције за гадолинијумову грану је:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} + \mathbf{D} + \Delta + \mathbf{W}. \quad (7.24)$$

Матрица која садржи све резултате детекције за све путање распада на гадолинијум је:

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^{\nu-1} \mathbf{T}^k = \sum_{k=1}^6 \mathbf{T}^k = \mathbf{T} + \mathbf{T}^2 + \mathbf{T}^3 + \dots + \mathbf{T}^6. \quad (7.25)$$

јер је степен нилпотентности матрице \mathbf{T} , $\nu = 7$. Дакле, без обзира што је $n = 16$, степен нилпотентности је 7 тако да се након β^- распада језгро гадолинијума

деексцитује до основног стања у највише 6 корака. Односно, у гадолинијумској грани нема каскада дужих од 6 корака.

Матрични елемент, који садржи све резултате за све путање распада на гадолинијум:

$$[\mathbf{N}]_{16,0} = [\mathbf{T}^2]_{16,0} + [\mathbf{T}^3]_{16,0} + [\mathbf{T}^4]_{16,0} + [\mathbf{T}^5]_{16,0} + [\mathbf{T}^6]_{16,0}. \quad (7.26)$$

$[\mathbf{T}]_{16,0}$ је једнак нули за случај распада на гадолинијум.

Након прорачуна добијамо да је матрични елемент који садржи све исходе детекције распада европијума на гадолинијум:

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}]_{16,0} = & w_{16,1} e^{i0} (c_{1,0} e^{i42} + d_{1,0} e^{i49} + \delta_{1,0} e^{i344} + w_{1,0} e^{i0}) + \\ & + w_{16,4} e^{i0} (c_{4,0} e^{i42} + d_{4,0} e^{i49} + \delta_{4,0} e^{i931} + w_{4,0} e^{i0}) + \dots \\ & + w_{16,14} e^{i0} (c_{14,0} e^{i42} + d_{14,0} e^{i49} + \delta_{14,0} e^{i1644} + w_{14,0} e^{i0}) + \\ & + w_{16,3} e^{i0} (c_{3,1} e^{i42} + d_{3,1} e^{i49} + \delta_{3,1} e^{i411} + w_{3,1} e^{i0}) \cdot \\ & \cdot (c_{1,0} e^{i42} + d_{1,0} e^{i49} + \delta_{1,0} e^{i344} + w_{1,0} e^{i0}) + \dots + \\ & + w_{16,15} e^{i0} (c_{15,1} e^{i42} + d_{15,1} e^{i49} + \delta_{15,1} e^{i1348} + w_{15,1} e^{i0}) \cdot \\ & \cdot (c_{1,0} e^{i42} + d_{1,0} e^{i49} + \delta_{1,0} e^{i344} + w_{1,0} e^{i0}) + \dots \end{aligned} \quad (7.27)$$

Односно, након множења:

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}]_{16,0} = & w_{16,1} c_{1,0} e^{i42} + w_{16,1} d_{1,0} e^{i49} + w_{16,1} \delta_{1,0} e^{i344} + w_{16,1} w_{1,0} e^{i0} + \dots + \\ & + w_{16,15} c_{15,1} c_{1,0} e^{i84} + w_{16,15} c_{15,1} d_{1,0} e^{i91} + w_{16,15} c_{15,1} \delta_{1,0} e^{i386} + \\ & + w_{16,15} c_{15,1} w_{1,0} e^{i42} + w_{16,15} d_{15,1} c_{1,0} e^{i91} + w_{16,15} d_{15,1} d_{1,0} e^{i98} + \\ & + w_{16,15} d_{15,1} \delta_{1,0} e^{i393} + w_{16,15} d_{15,1} w_{1,0} e^{i49} + w_{16,15} \delta_{15,1} c_{1,0} e^{i1390} + \\ & + w_{16,15} \delta_{15,1} d_{1,0} e^{i1397} + w_{16,15} \delta_{15,1} \delta_{1,0} e^{i1692} + w_{16,15} \delta_{15,1} w_{1,0} e^{i1348} + \\ & + w_{16,15} w_{15,1} c_{1,0} e^{i42} + w_{16,15} w_{15,1} d_{1,0} e^{i49} + w_{16,15} w_{15,1} \delta_{1,0} e^{i344} + \\ & + w_{16,15} w_{15,1} w_{1,0} e^{i0} + \dots \end{aligned} \quad (7.28)$$

Комбиновањем израза (7.15) и (7.28) можемо формирати једначине за брзине бројања у свим пиковима који се појављују у енергетском спектру европијума ^{152}Eu . Због релативно малог броја прелаза код церијума ^{139}Ce , кобалта ^{57}Co и баријума ^{133}Ba били смо у могућности да тачно наведемо све њихове једначине за брзине бројања. Међутим, код европијума ^{152}Eu нити смо у могућности да

наведемо све једначине за брзине бројања, због њиховог великог броја, нити да тачно наведемо неке од једначина, због великог броја чланова од којих се састоје. Због тога наводимо један решив систем једначина за најинтензивније пикове у апроксимацији у којој је занемарен β^+ распад. Чланови у свим једначинама поређани су по величини, по опадајућем низу, тако да је веома лако редуковати систем занемаривањем одређених чланова и одбацивањем одговарајућих једначина:

$$n_{tot} = [1 - q_{2013}q_{131}q_{10} - w_{167}w_{71}w_{10} - w_{161}w_{10} - q_{2010}q_{101}q_{10} - q_{209}q_{90} - q_{209}q_{91}q_{10} - q_{2010}q_{102}q_{21}q_{10} - w_{1611}w_{111}w_{10} - w_{1614}w_{141}w_{10} - q_{201}q_{10} - w_{163}w_{31}w_{10} - q_{2013}q_{139}q_{90} - q_{2013}q_{139}q_{91}q_{10} - q_{2014}q_{142}q_{21}q_{10} - w_{167}w_{73}w_{31}w_{10} - q_{205}q_{51}q_{10} - q_{202}q_{21}q_{10} - w_{1611}w_{113}w_{31}w_{10} - q_{2014}q_{141}q_{10} - q_{2012}q_{122}q_{21}q_{10} - q_{205}q_{50} - w_{164}w_{41}w_{10} - q_{2016}q_{161}q_{10} - q_{2013}q_{1310}q_{101}q_{10} - w_{166}w_{60} - q_{2013}q_{138}q_{81}q_{10} - q_{2016}q_{169}q_{90} - q_{2011}q_{112}q_{21}q_{10} - q_{2012}q_{121}q_{10} - q_{205}q_{52}q_{21}q_{10} - w_{166}w_{61}w_{10} - q_{209}q_{92}q_{21}q_{10} - q_{2011}q_{110} - w_{1611}w_{114}w_{41}w_{10} - q_{207}q_{72}q_{21}q_{10} - w_{1614}w_{144}w_{41}w_{10} - q_{207}q_{71}q_{10} - w_{164}w_{40} - q_{2013}q_{136}q_{60} - q_{2016}q_{1610}q_{101}q_{10} - q_{2013}q_{138}q_{82}q_{21}q_{10} - q_{208}q_{81}q_{10} - q_{2013}q_{136}q_{61}q_{10} - q_{2011}q_{116}q_{60} - q_{2013}q_{1310}q_{102}q_{21}q_{10} - w_{1611}w_{116}w_{60} - w_{1614}w_{147}w_{71}w_{10} - q_{2011}q_{116}q_{61}q_{10} - w_{1613}w_{131}w_{10}]R$$

Првим наредним чланом у горњој једначини уводи се допринос који потиче од β^+ распада. За све практичне прорачуне непознате активности извора показало се да је систем једначина у којој је занемарен овај допринос и више него довољан.

$$n(39.9) = (a_{2013}q_{131}q_{10} + a_{2010}q_{101}q_{10} + a_{209}q_{90} + a_{209}q_{91}q_{10} + q_{2013}q_{131}a_{10} + q_{2010}q_{101}a_{10} + q_{209}q_{91}a_{10} + a_{2010}q_{102}q_{21}q_{10} + a_{201}q_{10} + a_{2013}q_{139}q_{90} + a_{2013}q_{139}q_{91}q_{10} + q_{2010}q_{102}q_{21}a_{10} + a_{2014}q_{142}q_{21}q_{10} + q_{201}a_{10} + a_{205}q_{51}q_{10} + a_{202}q_{21}q_{10} + a_{2014}q_{141}q_{10} + q_{2013}q_{139}q_{91}a_{10} + a_{2012}q_{122}q_{21}q_{10} + q_{2014}q_{142}q_{21}a_{10} + a_{205}q_{50} + q_{205}q_{51}a_{10} + a_{2016}q_{161}q_{10} + q_{202}q_{21}a_{10} + q_{2010}q_{102}a_{21}q_{10} + a_{2013}q_{1310}q_{101}q_{10} + a_{2013}q_{138}q_{81}q_{10} + q_{2014}q_{141}a_{10} + a_{2016}q_{169}q_{90} + a_{2016}q_{169}q_{91}q_{10} + a_{2011}q_{112}q_{21}q_{10} + a_{2012}q_{121}q_{10} + a_{205}q_{52}q_{21}q_{10} + q_{2012}q_{122}q_{21}a_{10} + a_{209}q_{92}q_{21}q_{10} + a_{2011}q_{110} + q_{2016}q_{161}a_{10} + q_{2013}q_{1310}q_{101}a_{10} + a_{207}q_{72}q_{21}q_{10} + q_{2014}q_{142}a_{21}q_{10} + q_{2013}q_{138}q_{81}a_{10} + q_{2016}q_{169}q_{91}a_{10} + a_{207}q_{71}q_{10} + q_{2011}q_{112}q_{21}a_{10} + q_{2012}q_{121}a_{10} + q_{205}q_{52}q_{21}a_{10} + a_{2013}q_{136}q_{60} + a_{208}q_{81}q_{10} + a_{2013}q_{138}q_{82}q_{21}q_{10} + q_{209}q_{92}q_{21}a_{10} + q_{202}a_{21}q_{10} + a_{2011}q_{116}q_{60} + a_{2016}q_{1610}q_{101}q_{10} + a_{2013}q_{136}q_{61}q_{10} + a_{2013}q_{1310}q_{102}q_{21}q_{10} + a_{2011}q_{116}q_{61}q_{10} + q_{2012}q_{122}a_{21}q_{10})R$$

$$\begin{aligned}
 n(43) = & (w_{167}w_{71}c_{10} + w_{161}c_{10} + w_{1611}w_{111}c_{10} + w_{1614}w_{141}c_{10} + \\
 & + w_{163}w_{31}c_{10} + w_{167}c_{71}w_{10} + w_{167}w_{73}w_{31}c_{10} + w_{163}c_{31}w_{10} + \\
 & + w_{167}w_{73}c_{31}w_{10} + w_{1611}w_{113}w_{31}c_{10} + w_{164}w_{41}c_{10} + w_{1611}w_{113}c_{31}w_{10} + \\
 & + w_{167}c_{73}w_{31}w_{10} + w_{164}c_{41}w_{10} + w_{166}w_{61}c_{10} + w_{1611}c_{111}w_{10} + \\
 & + w_{1611}w_{114}w_{41}c_{10} + w_{1611}c_{113}w_{31}w_{10} + w_{1611}c_{116}w_{60} + \\
 & + w_{1614}w_{144}w_{41}c_{10} + w_{1611}w_{114}c_{41}w_{10} + w_{1611}c_{116}w_{61}w_{10})R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n(45.9) = & (b_{2013}q_{131}q_{10} + b_{2010}q_{101}q_{10} + b_{209}q_{90} + b_{209}q_{91}q_{10} + q_{2013}q_{131}b_{10} + \\
 & + q_{2010}q_{101}b_{10} + q_{209}q_{91}b_{10} + b_{2010}q_{102}q_{21}q_{10} + b_{201}q_{10} + b_{2013}q_{139}q_{90} + \\
 & + b_{2013}q_{139}q_{91}q_{10} + q_{2010}q_{102}q_{21}b_{10} + b_{2014}q_{142}q_{21}q_{10} + q_{201}b_{10} + b_{205}q_{51}q_{10} + \\
 & + b_{202}q_{21}q_{10} + b_{2014}q_{141}q_{10} + q_{2013}q_{139}q_{91}b_{10} + b_{2012}q_{122}q_{21}q_{10} + \\
 & + q_{2014}q_{142}q_{21}b_{10} + b_{205}q_{50} + q_{205}q_{51}b_{10} + b_{2016}q_{161}q_{10} + q_{202}q_{21}b_{10} + \\
 & + q_{2010}q_{102}b_{21}q_{10} + b_{2013}q_{1310}q_{101}q_{10} + b_{2013}q_{138}q_{81}q_{10} + q_{2014}q_{141}b_{10} + \\
 & + b_{2016}q_{169}q_{90} + b_{2016}q_{169}q_{91}q_{10} + b_{2011}q_{112}q_{21}q_{10} + b_{2012}q_{121}q_{10} + \\
 & + b_{205}q_{52}q_{21}q_{10} + q_{2012}q_{122}q_{21}b_{10} + b_{209}q_{92}q_{21}q_{10} + b_{2011}q_{110} + q_{2016}q_{161}b_{10} + \\
 & + q_{2013}q_{1310}q_{101}b_{10} + b_{207}q_{72}q_{21}q_{10} + q_{2014}q_{142}b_{21}q_{10} + q_{2013}q_{138}q_{81}b_{10} + \\
 & + q_{2016}q_{169}q_{91}b_{10} + b_{207}q_{71}q_{10} + q_{2011}q_{112}q_{21}b_{10} + q_{2012}q_{121}b_{10} + \\
 & + q_{205}q_{52}q_{21}b_{10} + b_{2013}q_{136}q_{60} + b_{208}q_{81}q_{10} + b_{2013}q_{138}q_{82}q_{21}q_{10} + \\
 & + q_{209}q_{92}q_{21}b_{10} + q_{202}b_{21}q_{10} + b_{2011}q_{116}q_{60} + b_{2016}q_{1610}q_{101}q_{10} + \\
 & + b_{2013}q_{136}q_{61}q_{10} + b_{2013}q_{1310}q_{102}q_{21}q_{10} + b_{2011}q_{116}q_{61}q_{10} + q_{2012}q_{122}b_{21}q_{10})R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n(49) = & (w_{167}w_{71}d_{10} + w_{161}d_{10} + w_{1611}w_{111}d_{10} + w_{1614}w_{141}d_{10} + \\
 & + w_{163}w_{31}d_{10} + w_{167}d_{71}w_{10} + w_{167}w_{73}w_{31}d_{10} + w_{163}d_{31}w_{10} + \\
 & + w_{167}w_{73}d_{31}w_{10} + w_{1611}w_{113}w_{31}d_{10} + w_{164}w_{41}d_{10} + w_{1611}w_{113}d_{31}w_{10} + \\
 & + w_{167}d_{73}w_{31}w_{10} + w_{164}d_{41}w_{10} + w_{166}w_{61}d_{10} + w_{1611}d_{111}w_{10} + \\
 & + w_{1611}w_{114}w_{41}d_{10} + w_{1611}d_{113}w_{31}w_{10} + w_{1611}d_{116}w_{60} + \\
 & + w_{1614}w_{144}w_{41}d_{10} + w_{1611}w_{114}d_{41}w_{10} + w_{1611}d_{116}w_{61}w_{10})R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n(121.8) = & (q_{2013}q_{131} + q_{2010}q_{101} + q_{209}q_{91} + q_{2010}q_{102}q_{21} + q_{201} + q_{2013}q_{139}q_{91} + \\
 & + q_{2014}q_{142}q_{21} + q_{205}q_{51} + q_{202}q_{21} + q_{2014}q_{141} + q_{2012}q_{122}q_{21} + q_{2016}q_{161} + \\
 & + q_{2013}q_{1310}q_{101} + q_{2013}q_{138}q_{81} + q_{2016}q_{169}q_{91} + q_{2011}q_{112}q_{21} + q_{2012}q_{121} + \\
 & + q_{205}q_{52}q_{21} + q_{209}q_{92}q_{21} + q_{207}q_{72}q_{21} + q_{207}q_{71} + q_{2016}q_{1610}q_{101} + \\
 & + q_{2013}q_{138}q_{82}q_{21} + q_{208}q_{81} + q_{2013}q_{136}q_{61} + q_{2013}q_{1310}q_{102}q_{21} + q_{2011}q_{116}q_{61})\gamma_{10}R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n(161.7) = & (a_{2013}q_{131} + a_{2010}q_{101} + a_{209}q_{91} + a_{2010}q_{102}q_{21} + a_{201} + a_{2013}q_{139}q_{91} + \\
 & + a_{2014}q_{142}q_{21} + a_{205}q_{51} + a_{202}q_{21} + a_{2014}q_{141} + a_{2012}q_{122}q_{21} + a_{2016}q_{161} + \\
 & + q_{2010}q_{102}a_{21} + a_{2013}q_{1310}q_{101} + a_{2013}q_{138}q_{81} + a_{2016}q_{169}q_{91} + a_{2011}q_{112}q_{21} + \\
 & + a_{2012}q_{121} + a_{205}q_{52}q_{21} + a_{209}q_{92}q_{21} + a_{207}q_{72}q_{21} + q_{2014}q_{142}a_{21} + a_{207}q_{71} + \\
 & + a_{208}q_{81} + a_{2013}q_{138}q_{82}q_{21} + q_{202}a_{21} + a_{2016}q_{1610}q_{101} + a_{2013}q_{136}q_{61} + \\
 & + a_{2013}q_{1310}q_{102}q_{21} + a_{2011}q_{116}q_{61} + q_{2012}q_{122}a_{21})\gamma_{10}R
 \end{aligned}$$

$$n(244.7) = (q_{2010}q_{102} + q_{2014}q_{142} + q_{202} + q_{2012}q_{122} + q_{2011}q_{112} + q_{205}q_{52} + q_{209}q_{92} + q_{207}q_{72} + q_{2013}q_{138}q_{82} + q_{2013}q_{1310}q_{102})\gamma_{21}q_{10}R$$

$$n(295.9) = q_{2013}\gamma_{1310}(q_{101} + q_{102}q_{21})q_{10}R$$

$$n(324.8) = (a_{2010}q_{102}\gamma_{21}a_{10} + w_{1611}\delta_{116}w_{60} + w_{1611}\delta_{116}w_{61}w_{10} + a_{2014}q_{142}\gamma_{21}a_{10} + a_{202}\gamma_{21}a_{10} + a_{2012}q_{122}\gamma_{21}a_{10} + a_{2011}q_{112}\gamma_{21}a_{10} + a_{205}q_{52}\gamma_{21}a_{10} + a_{209}q_{92}\gamma_{21}a_{10} + a_{207}q_{72}\gamma_{21}a_{10} + a_{2013}q_{138}q_{82}\gamma_{21}a_{10} + a_{2013}q_{1310}q_{102}\gamma_{21}a_{10})R$$

Овде се пик који је требало израчунати није могао раздвојити од доминантнијег пика на енергији 324.5 keV тако да су на овај начин и теоријски сабрани у један.

$$n(329.4) = (q_{2011}\gamma_{116}q_{60} + q_{2011}\gamma_{116}q_{61}q_{10} + b_{2010}q_{102}\gamma_{21}a_{10} + a_{2010}q_{102}\gamma_{21}b_{10} + b_{2014}q_{142}\gamma_{21}a_{10} + a_{2014}q_{142}\gamma_{21}b_{10} + b_{202}\gamma_{21}a_{10} + a_{202}\gamma_{21}b_{10} + b_{2012}q_{122}\gamma_{21}a_{10} + a_{2012}q_{122}\gamma_{21}b_{10} + b_{2011}q_{112}\gamma_{21}a_{10} + a_{2011}q_{112}\gamma_{21}b_{10} + b_{205}q_{52}\gamma_{21}a_{10} + a_{205}q_{52}\gamma_{21}b_{10} + b_{209}q_{92}\gamma_{21}a_{10} + a_{209}q_{92}\gamma_{21}b_{10} + a_{207}q_{72}\gamma_{21}b_{10} + b_{207}q_{72}\gamma_{21}a_{10} + b_{2013}q_{138}q_{82}\gamma_{21}a_{10} + a_{2013}q_{138}q_{82}\gamma_{21}b_{10} + b_{2013}q_{1310}q_{102}\gamma_{21}a_{10} + a_{2013}q_{1310}q_{102}\gamma_{21}b_{10})R$$

Овде је укључен и коинцидентни пик на енергији 330.5 keV.

$$n(344.3) = (w_{167}w_{71} + w_{161} + w_{1611}w_{111} + w_{1614}w_{141} + w_{163}w_{31} + w_{167}w_{73}w_{31} + w_{1611}w_{113}w_{31} + w_{164}w_{41} + w_{166}w_{61} + w_{1611}w_{114}w_{41} + w_{1614}w_{144}w_{41} + w_{1614}w_{147}w_{71} + w_{1613}w_{131} + w_{1611}w_{116}w_{61})\delta_{10}R$$

$$n(367.8) = (w_{167}\delta_{73}w_{31}w_{10} + w_{1614}w_{147}\delta_{73}w_{31}w_{10})R$$

Код спектра снимљених у даљој геометрији приметили смо да се горњи пик не може раздвојити од коинцидентних пикова (γ_{116}, K_{α}) и (γ_{21}, γ_{10}).

$$n(411) = (w_{163}\delta_{31}w_{10} + w_{167}w_{73}\delta_{31}w_{10} + w_{1611}w_{113}\delta_{31}w_{10} + b_{2010}q_{102}\gamma_{21}\gamma_{10})R$$

Овде је укључен допринос коинцидентног пика на енергији 412.4 keV.

$$n(416) = (q_{2013}\gamma_{1310}q_{101}\gamma_{10} + q_{2016}\gamma_{1610}q_{101}q_{10} + q_{2013}\gamma_{1310}q_{102}q_{21}\gamma_{10} + q_{2016}\gamma_{1610}q_{102}q_{21}q_{10} + w_{167}\delta_{73}w_{31}d_{10} + w_{167}\delta_{73}d_{31}w_{10} + b_{2011}\gamma_{116}q_{61}a_{10} + a_{2011}\gamma_{116}q_{61}b_{10})R$$

Пик који је требало израчунати није се могао раздвојити од доминантнијег пика на енергији 417.7 keV. Такође, укључени су и коинцидентни пикови на енергијама 417.1 и 415.3 keV.

$$n(444) = (q_{2013}\gamma_{139}q_{90} + q_{2013}\gamma_{139}q_{91}q_{10} + q_{205}\gamma_{52}q_{21}q_{10} + q_{2013}\gamma_{139}q_{92}q_{21}q_{10})R$$

$$n(488.7) = (q_{2013}\gamma_{138}q_{81}q_{10} + b_{2013}\gamma_{139}q_{90} + b_{2013}\gamma_{139}q_{91}q_{10} + q_{2013}\gamma_{138}q_{82}q_{21}q_{10} + q_{2013}\gamma_{139}q_{91}b_{10} + b_{205}\gamma_{52}q_{21}q_{10} + q_{205}\gamma_{52}q_{21}b_{10} + a_{2011}\gamma_{116}q_{61}\gamma_{10} + q_{205}\gamma_{52}b_{21}q_{10} + b_{2013}\gamma_{139}q_{92}q_{21}q_{10})R$$

Овде су укључени коинцидентни пикови на енергијама 489.9 и 491.1 keV.

$$n(503.5) = w_{1611}\delta_{114}(w_{41}w_{10} + w_{40})R$$

$$n(520.2) = w_{1614}\delta_{147}(w_{71} + w_{73}w_{31})w_{10}R$$

$$n(564) = (q_{2016}\gamma_{169}q_{90} + q_{2016}\gamma_{169}q_{91}q_{10} + q_{2016}\gamma_{169}q_{92}q_{21}q_{10} + w_{1614}\delta_{147}w_{71}c_{10})R$$

Овде је укључен и коинцидентни пик на енергији 563 keV.

$$n(566.4) = (q_{2013}\gamma_{139}q_{91}\gamma_{10} + q_{2013}\gamma_{136}q_{60} + q_{2013}\gamma_{136}q_{61}q_{10} + q_{205}\gamma_{52}q_{21}\gamma_{10} + a_{2013}\gamma_{138}q_{81}a_{10} + q_{2013}\gamma_{139}q_{92}q_{21}\gamma_{10})R$$

Овде се пик који је требало израчунати није могао раздвојити од доминантнијег пика на енергији 565.7 keV. Такође, укључен је и пик на енергији 568.5 keV.

$$n(586.3) = (w_{164} + w_{1611}w_{114} + w_{1614}w_{144})\delta_{41}w_{10}R$$

$$n(656.5) = q_{207}\gamma_{72}q_{21}q_{10}R$$

$$n(675) = (q_{2013}q_{138} + q_{208})\gamma_{82}q_{21}q_{10}R$$

$$n(678.6) = w_{1611}\delta_{113}w_{31}w_{10}R$$

$$n(688.7) = q_{205}(\gamma_{51} + \gamma_{52}\gamma_{21})q_{10}R$$

$$n(712.8) = (w_{167}\delta_{73}w_{31}\delta_{10} + w_{1614}\delta_{144}w_{41}w_{10} + w_{1614}\delta_{144}w_{40})R$$

Овде се пик који је требало израчунати није могао раздвојити од доминантнијег пика на енергији 712.1 keV.

$$N(719.3) = (q_{209}\gamma_{92}q_{21}q_{10} + q_{2013}q_{139}\gamma_{92}q_{21}q_{10} + b_{2013}q_{138}\gamma_{82}q_{21}q_{10} + q_{2016}q_{169}\gamma_{92}q_{21}q_{10} + q_{2013}q_{138}\gamma_{82}q_{21}b_{10} + b_{208}\gamma_{82}q_{21}q_{10})R$$

Овде је укључен и коинцидентни пик на енергији 720.6 keV.

$$n(764.9) = (w_{166} + w_{1611}w_{116})\delta_{61}w_{10}R$$

$$n(778.9) = (w_{167}\delta_{71}w_{10} + w_{167}\delta_{73}\delta_{31}w_{10} + w_{1614}w_{147}\delta_{71}w_{10} + q_{207}\gamma_{72}q_{21}\gamma_{10})R$$

У горњу једначину смо убацили и допринос малог пика на енергији 778.3 keV јер се не могу раздвојити.

$$n(810.5) = q_{205}(\gamma_{50} + \gamma_{51}\gamma_{10})R$$

$$n(841.6) = (q_{2013}q_{136}\gamma_{61}q_{10} + q_{2011}q_{116}\gamma_{61}q_{10} + q_{209}\gamma_{92}q_{21}\gamma_{10})R$$

Овде је укључен и коинцидентни пик на енергији 841.1 keV.

$$n(867.4) = (q_{2010} + q_{2013}q_{1310} + q_{2016}q_{1610})\gamma_{102}q_{21}q_{10}R$$

$$n(901.2) = q_{207}(\gamma_{71} + \gamma_{72}\gamma_{21})q_{10}R$$

$$n(919.3) = (q_{2013}q_{138} + q_{208})\gamma_{81}q_{10}R$$

$$n(926.3) = q_{2011}\gamma_{112}q_{21}q_{10}R$$

$$n(930.6) = (w_{164}\delta_{41}\delta_{10} + w_{164}\delta_{40} + w_{1611}w_{114}\delta_{41}\delta_{10} + w_{1611}w_{114}\delta_{40} + w_{1614}w_{144}\delta_{41}\delta_{10} + w_{1614}w_{144}\delta_{40})R$$

$$n(964.1) = (q_{209}\gamma_{91}q_{10} + q_{2013}q_{139}\gamma_{91}q_{10} + q_{2016}q_{169}\gamma_{91}q_{10} + q_{2013}q_{136}\gamma_{60} + q_{2011}q_{116}\gamma_{60} + a_{2011}\gamma_{112}q_{21}q_{10} + q_{209}\gamma_{92}\gamma_{21}q_{10} + q_{2011}\gamma_{112}q_{21}a_{10})R$$

У горњу једначину смо укључили и доприносе пикова на енергијама 963.4 и 966.2 keV јер се тешко могу међусобно раздвојити.

$$n(1005.3) = (a_{209}\gamma_{91}q_{10} + q_{209}\gamma_{91}a_{10} + q_{2012}\gamma_{122}q_{21}q_{10} + a_{2013}q_{139}\gamma_{91}q_{10} + q_{2013}q_{139}\gamma_{91}a_{10} + a_{2016}q_{169}\gamma_{91}q_{10} + q_{2016}q_{169}\gamma_{91}a_{10} + a_{2013}q_{136}\gamma_{60} + a_{2011}q_{116}\gamma_{60} + a_{209}\gamma_{92}\gamma_{21}q_{10} + a_{2011}\gamma_{112}q_{21}a_{10})R$$

Овде се пик који је требало израчунати није могао раздвојити од доминантнијег пика на енергији 1004 и 1003.3 keV а ту је и мали пик на енергији 1006.1 keV.

$$n(1086) = (q_{209} + q_{2013}q_{139} + q_{2016}q_{169})(\gamma_{90} + \gamma_{91}\gamma_{10})R$$

$$n(1089.7) = (w_{1611}\delta_{111}w_{10} + w_{1611}\delta_{113}\delta_{31}w_{10} + w_{1611}\delta_{114}\delta_{41}w_{10} + a_{2011}\gamma_{112}q_{21}\gamma_{10} + w_{1611}\delta_{116}\delta_{61}w_{10})R$$

Овде је укључен коинцидентни пик на енергији 1088.1 keV.

$$n(1109.2) = (w_{166}\delta_{60} + w_{1611}w_{116}\delta_{60} + w_{166}\delta_{61}\delta_{10})R$$

$$n(1112) = (q_{2010}\gamma_{101} + q_{2010}\gamma_{102}\gamma_{21} + q_{2013}q_{1310}\gamma_{101} + q_{2016}q_{1610}\gamma_{101} + q_{2013}q_{1310}\gamma_{102}\gamma_{21})q_{10}R$$

$$n(1212.9) = (q_{2014}\gamma_{142}q_{21} + a_{2011}\gamma_{112}\gamma_{21})q_{10}R$$

Овде је укључен коинцидентни пик на енергији 1210.8 keV.

$$n(1249.9) = (q_{2012}\gamma_{121}q_{10} + q_{2012}\gamma_{122}\gamma_{21}q_{10} + a_{2011}\gamma_{112}\gamma_{21}a_{10})R$$

Овде је укључен и коинцидентни пик на енергији 1250.8 keV.

$$n(1261.3) = w_{1613}\delta_{131}w_{10}R$$

$$n(1292.8) = (q_{2011}\gamma_{110} + a_{2014}\gamma_{142}q_{21}a_{10} + q_{2011}\gamma_{116}\gamma_{60} + q_{2011}\gamma_{112}\gamma_{21}\gamma_{10})R$$

Овде је укључен и коинцидентни пик на истој енергији од 1292.8 keV.

$$n(1299.1) = (w_{1614}\delta_{141}w_{10} + w_{1614}\delta_{144}\delta_{41}w_{10} + w_{1614}\delta_{147}\delta_{71}w_{10} + b_{2014}\gamma_{142}q_{21}a_{10} + a_{2014}\gamma_{142}q_{21}b_{10})R$$

Овде је укључен коинцидентни пик на енергији 1298.8 keV.

$$n(1408) = q_{2013}(\gamma_{131} + \gamma_{139}\gamma_{91} + \gamma_{1310}\gamma_{101} + \gamma_{138}\gamma_{81} + \gamma_{136}\gamma_{61})q_{10}R$$

$$n(1457.6) = q_{2014}(\gamma_{141} + \gamma_{142}\gamma_{21})q_{10}R$$

$$n(1528.1) = (q_{2013}\gamma_{131}\gamma_{10} + q_{2016}\gamma_{161}q_{10} + q_{2013}\gamma_{139}\gamma_{90} + q_{2013}\gamma_{139}\gamma_{91}\gamma_{10} + q_{2016}\gamma_{169}\gamma_{91}q_{10} + q_{2013}\gamma_{1310}\gamma_{101}\gamma_{10} + q_{2016}\gamma_{1610}\gamma_{101}q_{10} + q_{2013}\gamma_{136}\gamma_{60} + q_{2013}\gamma_{138}\gamma_{81}\gamma_{10})R$$

Овде се пик који је требало израчунати није могао раздвојити од доминантнијег пика на енергији 1529.8 keV.

8 Експеримент

Тачкасти извор европијума, ^{152}Eu , (Сл. 8.1) референтне активности $7037 \text{ Bq} \pm 4 \%$ на дан калибрације 09.06.1987., мерен је 27.09.2011. германијумским детектором високе чистоће са енергетским опсегом проширеним ка нижим вредностима (Extendent Range Coaxial Canberra Ge detector GX5020). Релативна ефикасност детекције је $\sim 50 \%$ док је енергетска резолуција 2 keV на кобалтовој, ^{60}Co , линији $1,33 \text{ MeV}$. Спектар европијума, ^{152}Eu , је снимљен на растојањима извор-детектор од $0,1 \text{ cm}$, 1 cm , 2 cm , 3 cm , 5 cm , 7 cm и 12 cm . (Сл. 8.2).



Сл. 8.1 Тачкасти извор европијума, ^{152}Eu



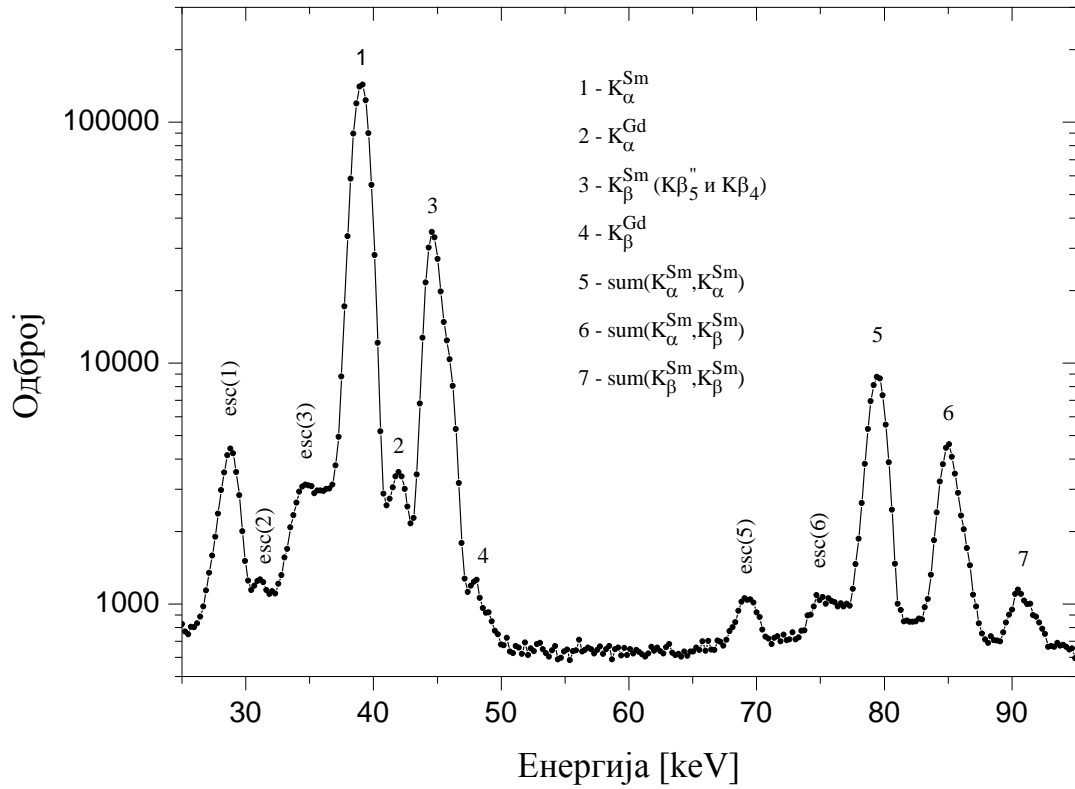
Сл. 8.2 Унутрашњост система. Канберин GX5020 коаксијални детектор окружен је оловном заштитом

На слици (Сл. 8.3) приказан је Канберин систем за гама спектрометрију који се састоји из BEGe детектора GX5020, Canberra 2020 појачавача и вишеканалног анализатора Canberra Multiport II.

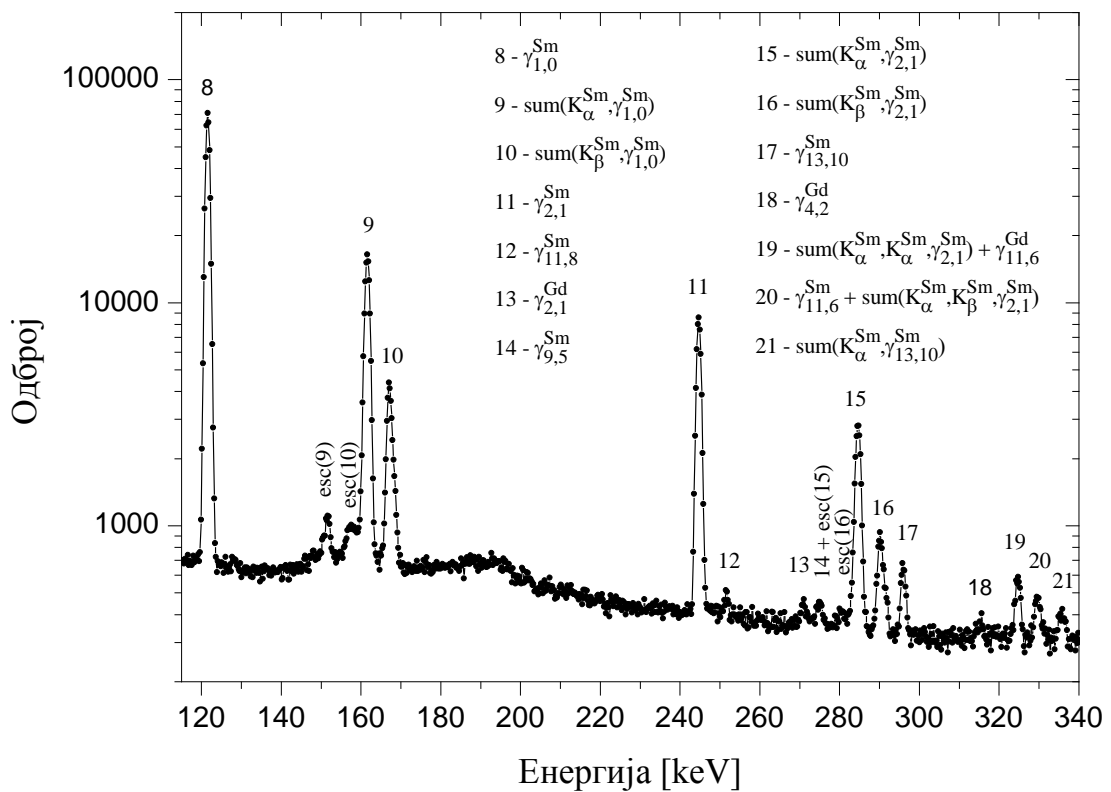


Сл. 8.3 Канберин систем за гама спектрометрију

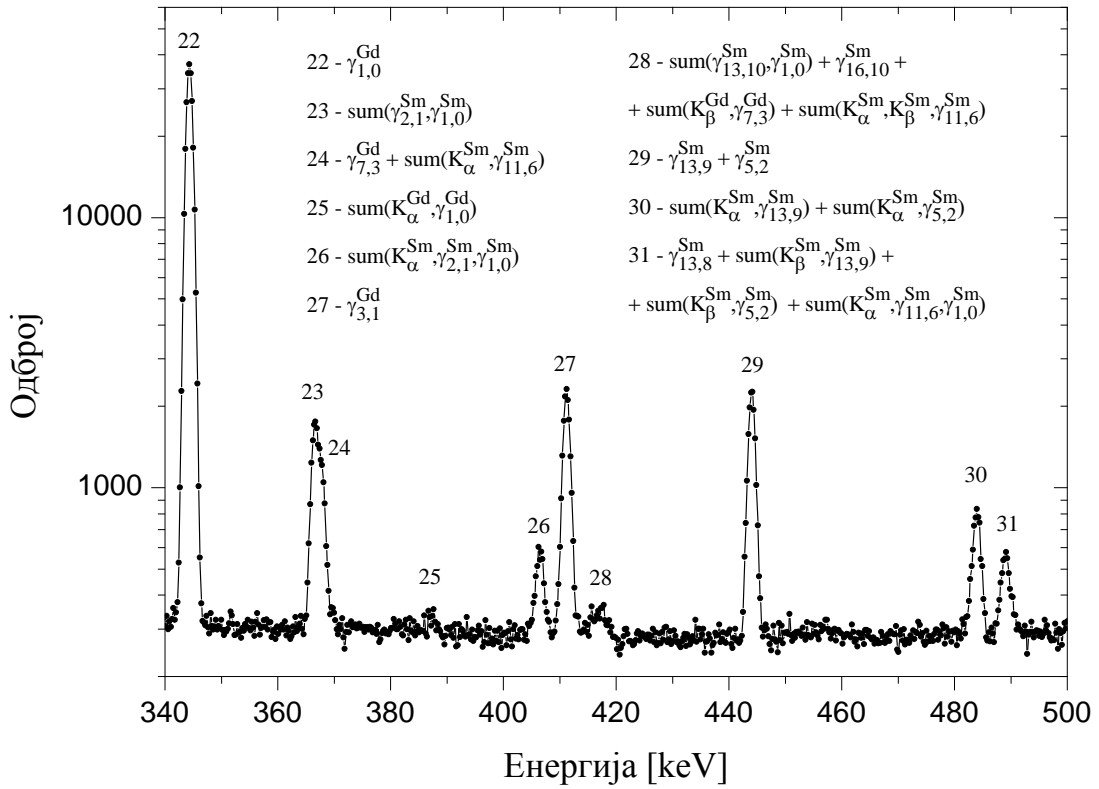
Проширени енергетски опсег овог типа детектора омогућава ефикасну детекцију K_{α} и K_{β} зрачења. Мртво време мерења у најближој геометрији је испод 3 %. Спектри су снимљени помоћу програма Genie 2000. За квантитативну и квалитативну анализу снимљених спектра коришћен је такође програм Genie 2000.



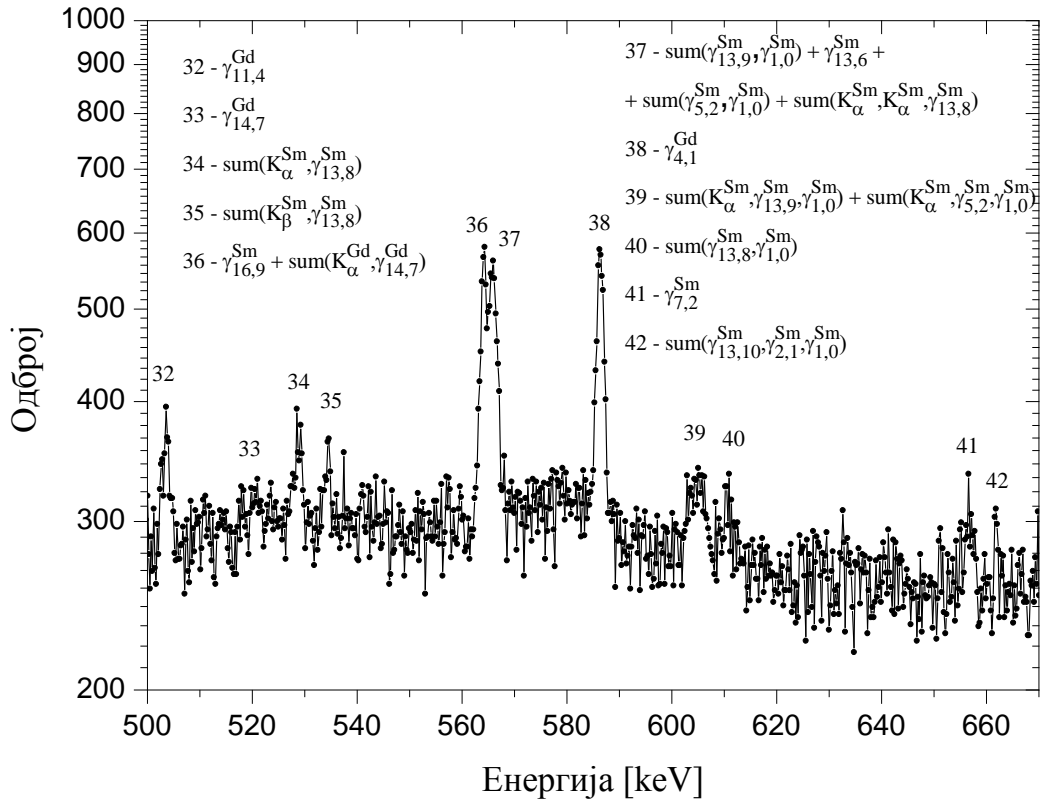
Сл. 8.4 Први део спектра ^{152}Eu



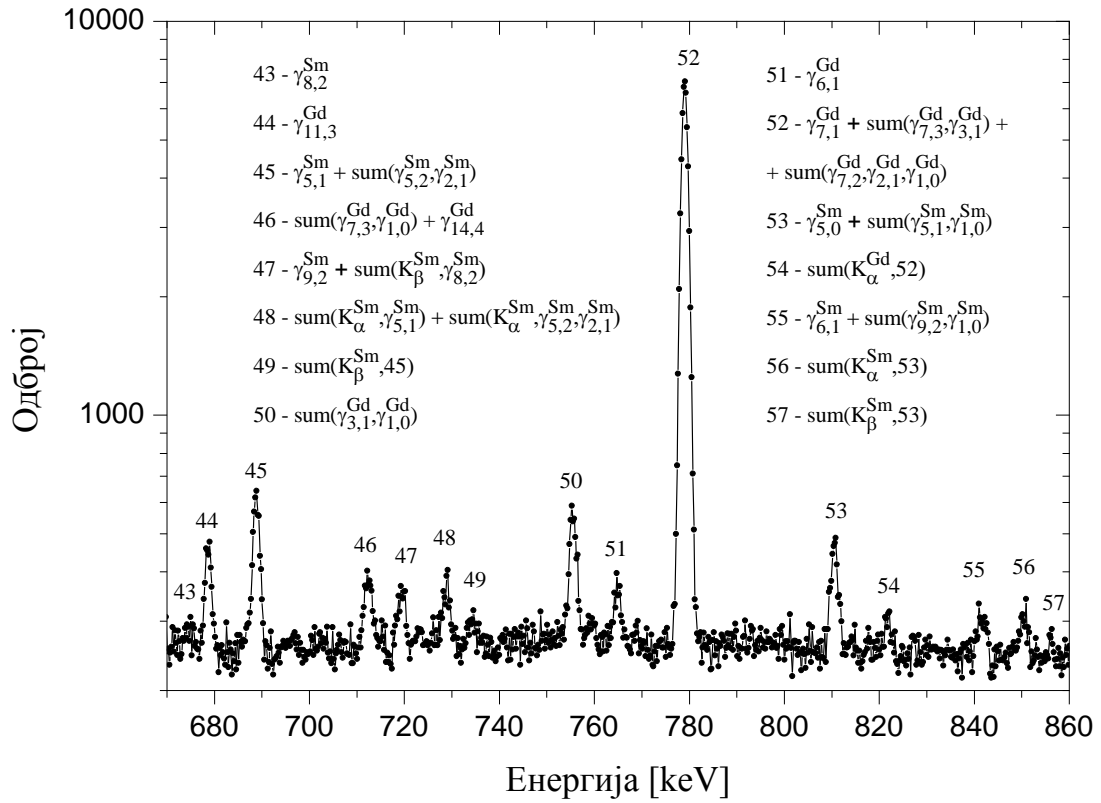
Сл. 8.5 Други део спектра ^{152}Eu



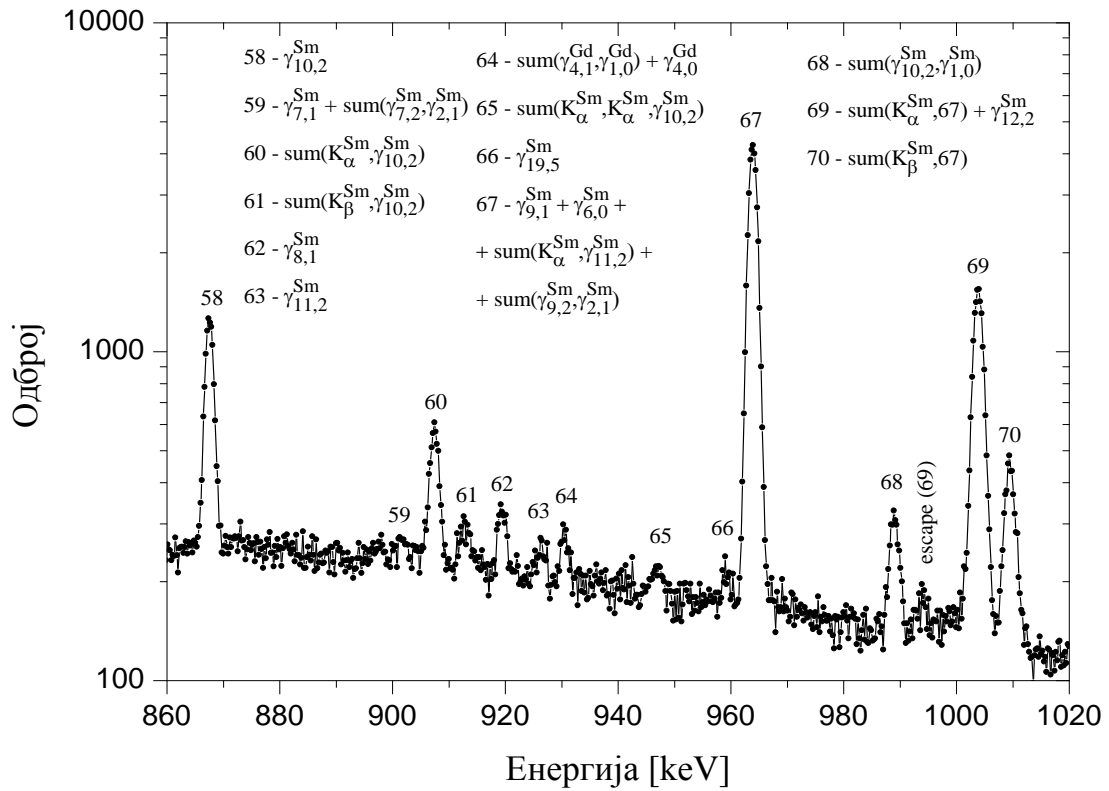
Сл. 8.6 Трећи део спектра ^{152}Eu



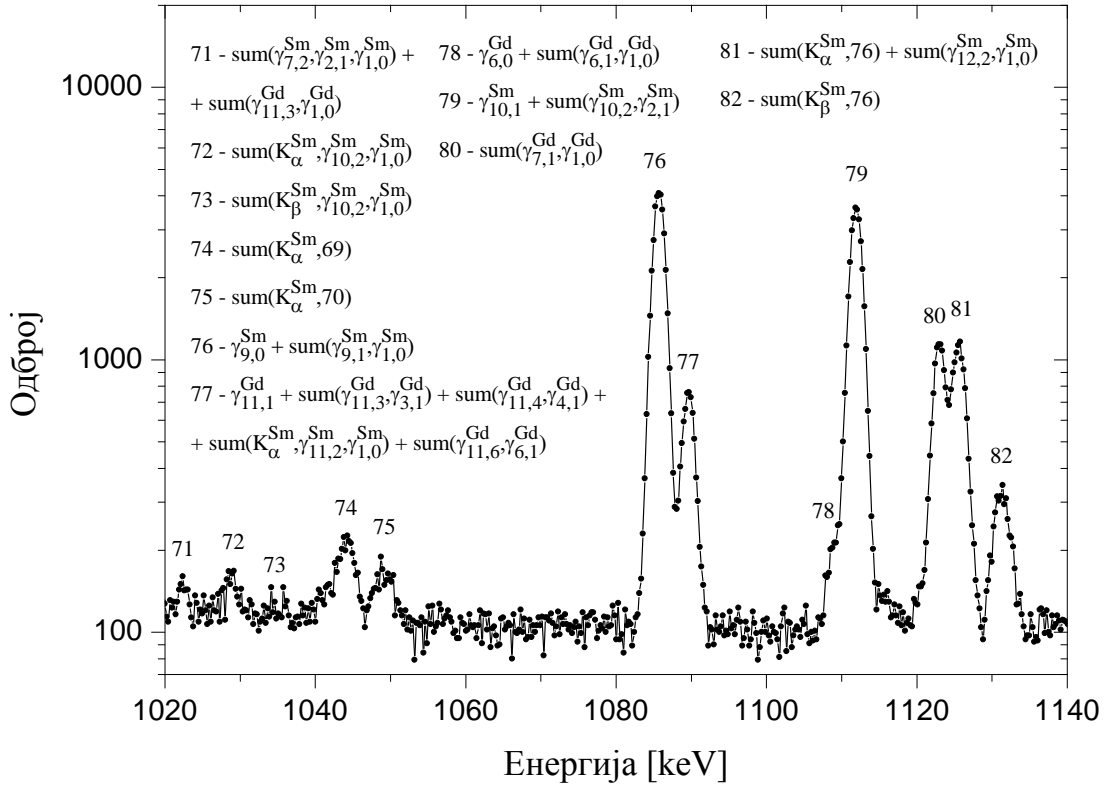
Сл. 8.7 Четврти део спектра ^{152}Eu



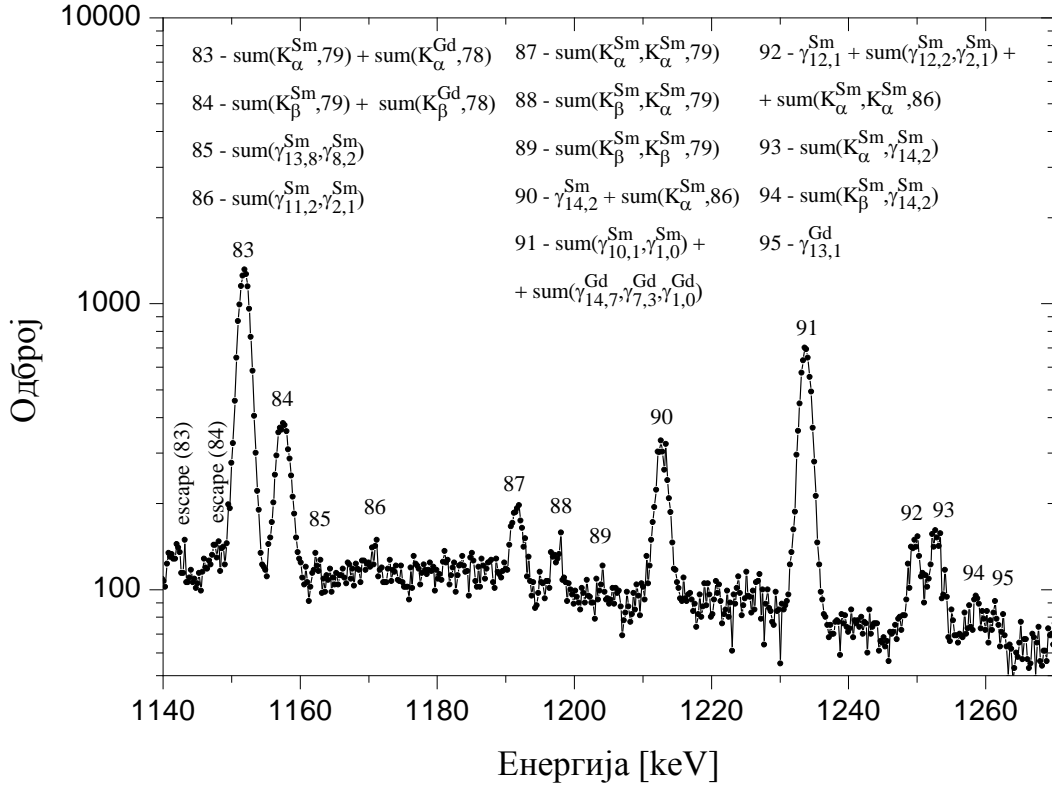
Сл. 8.8 Пети део спектра ^{152}Eu



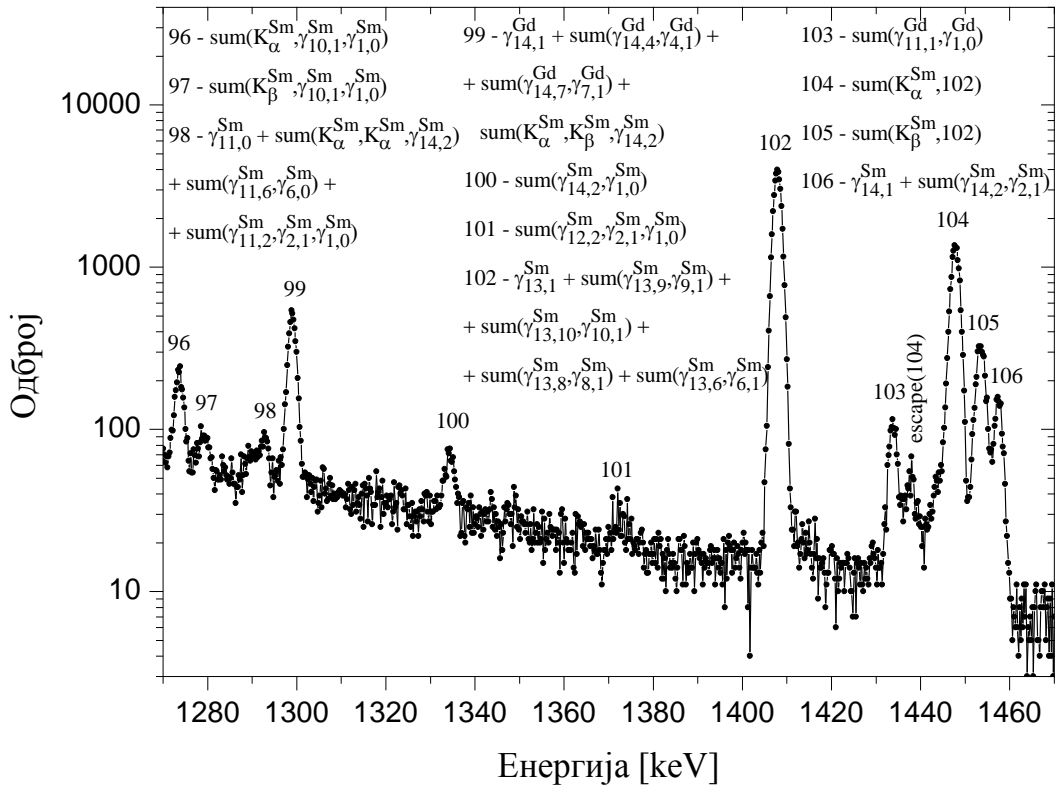
Сл. 8.9 Шести део спектра ^{152}Eu



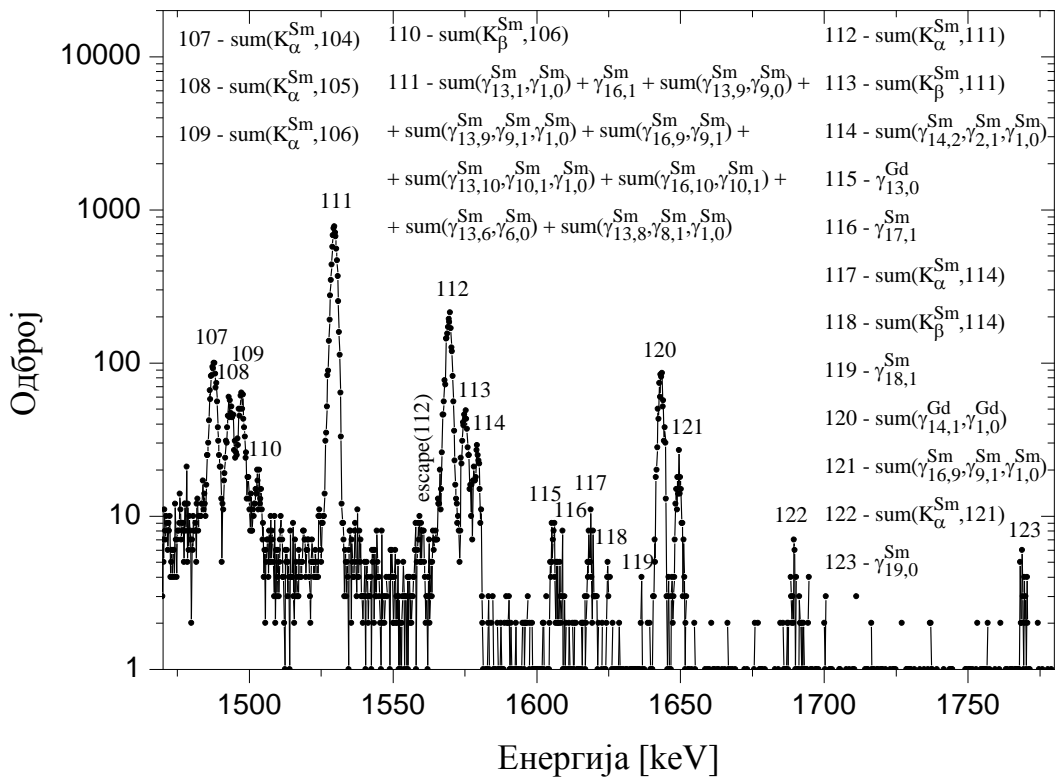
Сл. 8.10 Седми део спектра ^{152}Eu



Сл. 8.11 Осми део спектра ^{152}Eu



Сл. 8.12 Девети део спектра ^{152}Eu



Сл. 8.13 Десети део спектра ^{152}Eu

Након одузимања фона, спектар европијума ^{152}Eu анализиран је помоћу програма Genie2000. Одређен је укупан одброј и површине испод свих пикова заједно са њиховим грешкама. У енергетском спектру европијума ^{152}Eu који смо снимили уочили смо, не рачунајући побегле пикове, чак 123 пика. Резултати мерења и прорачуна дати су у табели Т 1.

Т 1 Резултати мерења и израчунавања. Грешке су дате на нивоу поверења од 1 сигма.

Референтна активност	2023 ± 81 Bq						
Број спектра	1	2	3	4	5	6	7
Удаљеност извора од детектора	0.1 cm	1 cm	2 cm	3 cm	5 cm	7 cm	12 cm
Израчуната активност извора	2070 ± 26 Bq	2083 ± 34 Bq	2076 ± 35 Bq	2142 ± 54 Bq	2088 ± 127 Bq	2169 ± 84 Bq	1882 ± 109 Bq

При рачунању мерне несигурности активности извора узели смо да је корелација између нуклеарних и атомских параметара и свих брзина бројања максимално позитивна, +1. Ово смо урадили из предострожности због недовољног познавања корелација између улазних величина тако да је приказана мерна несигурност активности намерно прецењена.

Закључак

У оквиру ове дисертације обрађена је проблематика коинцидентног сумирања која је веома актуелна у међународним групама које се баве метрологијом радионуклида, односно спектрометријом гама зрачења. Интересовање за ефекте коинциденције у гама спектрометрији повезано је с њиховим утицајем на тачност одређивања ефикасности детектора и активности радионуклида.

У овој докторској дисертацији описан је нов теоријски приступ проблему коинцидентног сумирања, односно нов, једноставнији метод за одређивање сумационих ефеката. Експериментална потврда новог теоријског приступа сумационим ефектима урађена је на радионуклидима који се користе у реалној метрологији.

Резултати за израчунавање једначина брзина бројања које описују коинцидентно сумирање X и гама зрака у германијумским спектрометрима, добијени овим методом у потпуности се слажу с резултатима добијеним коришћењем других метода

У овој тези приказани су оригинални резултати анализе радионуклида европијума ^{152}Eu . Добијене су вредности активности и ефикасности овог радионуклида из експерименталних спектра сниманих у различитим геометријама. Такође урађена је и провера тачности метода на симулираном спектру европијума.

Литература

- [1] Glenn F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*, JOHN WILEY & SONS. Inc., New York etc., 1999
- [2] Klaus Debertin and Richard G. Helmer, *Gamma- and X-ray spectrometry with semiconductor detectors*, North-Holland Amsterdam etc., 1988
- [3] R. K. Gupta and S. JHA, *Studies with the scintillation spectrometer*, Nuclear Physics **1** (1956) 2-8
- [4] G. A. Brinkman, A. H. W. Aten, Jr. and J. Th. Veenboer, *Absolute Standardization with a NaI (Tl) Cristal-I*, International Journal of Applied Radiation and Isotopes, **14** (1963) 153-157
- [5] Д. С. Андреев, К. И. Ерохина, В. С. Звонов и И. Х. Лемберг, *Определение эффективности регистрации γ -квантов в пиках энергии с помощью нуклидов со сложной схемой распада в условиях близкой геометрии*, Известия академии наук СССР сепия физическая, т. **37**, (1973)1609-1612
- [6] Д. С. Андреев, К. И. Ерохина, В. С. Звонов и И. Х. Лемберг, *Учет каскадных переходов при определении абсолютного выхода гамма-лучей*, Физико-технический институт, Техника Эксперимента, т. **5**, (1972) 63-65
- [7] G. J. McCallum, G. E. Coote, *Influence of source-detector distance on relative intensity and angular correlation measurements with Ge(Li) spectrometers*, Nuclear Instruments and Methods **130** (1975) 189-197
- [8] T. M. Semkov, G. Mehmood, P. P. Parekh, M. Virgil, *Coincidence summing in gamma-ray spectroscopy*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A **290** (1990) 437-444
- [9] M. Korun, R. Martinčič, *Coincidence summing in gamma and X-ray spectrometry*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A **325** (1993) 478-484
- [10] D. Novković, A. Kandić, M. Đurašević, I. Vukanac, Z. Milošević, L. Nadderđ, *Coincidence summing of X- and γ - rays in γ -ray spectrometry*, Nuclear Instruments and Methods in Physical Research A **578** (2007) 207-217
- [11] Laslo J. Nadderđ, Dragana J. Jordanov, Miloš D. Davidović, *A new matrix method for calculating coincidence summing effects for gamma spectroscopy*, Nuclear Instruments and Methods A **662**(1) (2012) 21-25

- [12] Laslo J. Nadderđ, Miloš D. Davidović, Dragomir M. Davidović, Miodrag J. Milošević, Dragana J. Jordanov, Srboľjub J. Stanković, Slobodan L. Prvanović, *A possible improvement of the determination of ^{133}Ba activity and detection efficiency by the sum-peak method, by inclusion of the previously neglected transitions*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A **698** (2013) 60-65
- [13] D. Novković, M. Đurašević, A. Kandić, I. Vukanac, Z. Milošević, L. Nadderđ, *Coincidence summing of X- and gamma rays of ^{133}Ba* , Nuclear Instruments and Methods in Physical Research A **582**(2) (2007) 592-602
- [14] I. Draganić, ed., *Radioaktivni izotopi i zraćenja*, Institut za nuklearne nauke „Boris Kidrić“, Beograd, 1981
- [15] Michael F. L'Annunziata, *Handbook of Radioactivity Analysis (Second Edition)*, Academic Press Amsterdam etc., 2004
- [16] S. Ristić, *Fizička elektronika*, Elektronski fakultet, Niš, 2008
- [17] Шћепан С. Миљанић, *Уџбеник нуклеарне хемије*, Факултет за Физичку хемију, Универзитет у Београду, 2008
- [18] K. Debertin, U. Schötzig, *Coincidence summing corrections in Ge(Li)-spectrometry at low source-to-detector distances*, Nuclear Instruments and Methods **158** (1979) 471-477
- [19] R. D. Evans, *The atomic nucleus*, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. New York etc., 1955
- [20] Octavian Sima, Dirk Arnold, *Accurate computation of coincidence summing corrections in low level gamma-ray spectrometry*, Applied Radiation and Isotopes **53** (2000) 51-56
- [21] Laboratoire National Henri Becquerel / Table of Radioisotope, Internet Information, http://www.nucleide.org/DDEP_WG/introduction.pdf
- [22] Laboratoire National Henri Becquerel, Internet Information, Updated: 28th January 2015 http://www.nucleide.org/DDEP_WG/Nuclides/Ce-139_tables.pdf
- [23] Laboratoire National Henri Becquerel, Internet Information, Updated: 28th January 2015 http://www.nucleide.org/DDEP_WG/Nuclides/Co-57_tables.pdf
- [24] Laboratoire National Henri Becquerel, Internet Information, Updated: 28th January 2015 http://www.nucleide.org/DDEP_WG/Nuclides/Ba-133_tables.pdf
- [25] A. Notea, E. Elias, *Low energy photons from ^{152g}Eu for Ge(Li) calibration*, Nuclear Instruments and Methods **86** (1970) 269-272

- [26] L. L. Riedinger, Noah R. Johnson and J. H. Hamilton, *Studies of Radioactive Decays of ^{152}Eu and ^{154}Eu* , Physical Review C **2**(6) (1970) 2358-2378
- [27] J. Barrette, M. Barrette, A. Boutard, G. Lamoureux, S. Monaro and S. Markiza, *Transitional Nuclei. II. Properties of the Levels in ^{152}Sm and ^{152}Gd from the Decay of the $^{152}\text{Eu}^{m,g}$ Isomeric Pair*, Canadian Journal of Physics **49** (1971) 2462
- [28] K. R. Baker, J. H. Hamilton and A. V. Ramayya, *Detailed Ge(Li)-Ge(Li) Coincidence Studies of Levels in ^{152}Sm and ^{152}Gd* , Z.Physik **256** (1972) 387-415
- [29] R. J. Gehrke, R. G. Helmer and R. C. Greenwood, *Precise Relative γ -ray Intensities for Calibration of Ge Semiconductor Detectors*, Nuclear Instruments and Methods **147** (1977) 405-423
- [30] A. K. Sharma, R. Kaur, H. R. Verma and P. N. Trehan, *Precision Energy and Intensity Measurements in ^{152}Sm , ^{152}Gd and ^{154}Gd* , Journal of the Physical Society of Japan **48**(5) (1980) 1407-1414
- [31] Yohsei Iwata, Masayuki Yasuhara, Keisuke Maeda and Yasukazu Yoshizawa, *Precision Measurements of gamma-ray Intensities VI. ^{120}Sb , ^{124}Sb and ^{125}Sb* , Nuclear Instruments and Methods in Physics Research **219** (1984) 123-133
- [32] Devinder Mehta, M. L. Garg, Jasbir Singh, Nirmal Singh, T. S. Cheema and P. N. Trehan, *Precision Measurements of X- and gamma-ray Intensities in ^{192}Ir , ^{160}Tb , ^{169}Yb and ^{152}Eu decays*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A **245** (1986) 447-454
- [33] V. N. Danilenko, N. P. Gromova, A. A. Konstantinov, N. V. Kurenkov, A. B. Malinin, S. V. Matveev, T. E. Sazonova, E. K. Stepanov, S. V. Sepman and I. N. Tronova, *Methods of Producing Radionuclides for Spectrometric Gamma-ray Sources and their Standardization-2. Europium-152*, Applied Radiation and Isotopes **40** (8) (1989) 711-713
- [34] Richard A. Meyer, *Multigamma-ray Calibration Standards*, Fizika **22** (1990) 1, 153-182
- [35] N. M. Stewart, E. Eid, M. S. S. El-Daghmah, and J. K. Jabber, *Levels in ^{152}Gd and ^{152}Sm Populated by the Decay of ^{152}Eu* , Zeitschrift für Physik A-Atomic Nuclei **335** (1990) 13-23
- [36] H. Y. Hwang, T. S. Park, C. B. Lee, *Multi-channel time scaling technique in γ -ray spectrometry*, Applied Radiation and Isotopes **49** (1998) 1201-1205

- [37] Dragana J. Jordanov, Bojana S. Grabež, Krunoslav M. Subotić, and Laslo J. Nadjdjerdj, New method for determination of temperature in spallation reactions, *Nuclear Technology and Radiation Protection* **26** (2011) 153 – 157
- [38] S. Kurepa, Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb(1967)
- [39] Kandić Aleksandar, *Direktna metoda za određivanje niskih aktivnosti izvora sa jakim koincidentnim sumiranjem – primena na ^{57}Co* , Doktorska teza (2008) Физички факултет, Универзитет у Београду
- [40] Laboratoire National Henri Becquerel, Internet Information, Updated: 10th February 2014, < http://www.nucleide.org/DDEP_WG/DDEPdata.htm>
- [41] D. Novković, L. Nađderđ, M. Đurašević, I. Vukanac, A. Kandić, Z. Milošević, *The direct measurement of ^{133}Ba activity by the sum-peak method*, Nuclear Instruments and Methods in Physical Research A **608** (2009) 116-120
- [42] I. Bikit, T. Nemeš, D. Mrđa, N. Jovančević, *On the absolute source activity measurement with a single detector: The ^{133}Ba case* Nuclear Instruments and Methods in Physical Research A **612** (2009) 103-111
- [43] B. Singh, J. L. Rodriguez, S. S. M. Wong, J.K. Tuli, *Review Of LogftValues In β Decay*, Nuclear Data Sheets **84** (1998) 487-563
- [44] Laboratoire National Henri Becquerel, *^{133}Ba -Comments on evaluation of decay data*, by V. P. Chechev and N. K. Kuzmenko, Internet Information, Updated: June 2012< http://www.nucleide.org/DDEP_WG/DDEPdata.htm>
- [45] Laboratoire National Henri Becquerel, Internet Information, Updated: 24th March2014<http://www.nucleide.org/DDEP_WG/Nuclides/Eu-2_tables.pdf.>
- [46] M. Mladjenović, *Uvod u nuklearnu fiziku*, Institut za nuklearne nauke Vinča, Beograd (1967)
- [47] Laboratoire National Henri Becquerel, “ ^{152}Eu – Comments on evaluation of decay data”, by Vito R. Vanin, Ruy M. de Castro and Edgardo Browne, Internet information updated: June 2012
http://www.nucleide.org/DDEP_WG/DDEPdata.htm

ПРИЛОГ А

Електронски захват

Бета нестабилна језгра се распадају на три начина:

- бета минус (β^-) распад,
- позитронски или бета плус (β^+) распад,
- електронски захват (ЕЗ)

Код електронског захвата неки од електрона из атомског омотача (најчешће из К-љуске) бива захваћен од стране једног протона из језгра и долази до реакције:



Захватом електрона протон у језгру се трансформише у неутрон, а дезинтеграциону енергију односи неутрино. Маса неутрина и узмак језгра се могу занемарити. Да би дошло до електронског захвата, мора да буде задовољен енергетски услов [46]:

$$M_a(Z, A) > M_a(Z-1, A) + \varepsilon , \quad (\text{A.2})$$

где је ε енергија побуђења омотача атома новонасталог језгра (потомка). Дакле, увек када је то енергетски дозвољено од стране разлике у масама између суседних изобара, језгро може захватити један од својих сопствених атомских електрона [19]. Захват позитрона као пратећа реакција није виђен у експериментима јер није могуће произвести густину позитрона у језгру која би била упоредива са густином атомских електрона.

Захватом електрона у језгро се уноси тачно одређена количина енергије дефинисана његовим положајем у електронској љусци. Из језгра се затим, због одржања момента импулса, емитује неутрино који је сада моноенергетски јер је и електрон био моноенергетски, за разлику од β^- распада, при коме се неутрино емитује из језгра са широким опсегом енергија. Језгро прелази с једног

дискретног енергетског нивоа на други, а разлика између њих је једнака збиру енергија захваћеног електрона и неутрина. На овај начин нестабилно језгро повећава однос неутрона и протона N/Z , односно захватом атомског електрона настаје неутрон који остаје унутар језгра а из језгра се емитује неутрино тачно дефинисане енергије. Поред емисије неутрина, електронски захват је праћен емисијом унутрашњег закочног зрачења, које је последица убрзања електрона ка језгру. Спектар закочног зрачења је континуалан.

Захватом електрона остаје шупљина у електронској љусци, која се попуњава електроном из спољашње љуске, а у тој љусци настаје нова шупљина. Тако настаје каскадно стварање и попуњавање шупљина при чему се емитују карактеристични X-фотони, на основу којих потомак може бити идентификован. Језгро може да захвати електроне из различитих атомских љуски: K, L, M, N, O, ... Вероватноће електронског захвата обележавају се са P_K , P_L , P_M итд. у зависности од тога са које електронске љуске је захваћен електрон. Ове вероватноће задовољавају следећу једнакост:

$$P_K + P_L + P_M + P_N + \dots = 1. \quad (\text{A.3})$$

Највећи број захваћених електрона је из језгру најближе K-љуске јер је тамо највећа вероватноћа њиховог налажења. Ређе се дешава L и M захват, само онда када енергија није довољна да откине електроне из K-љуске где су иначе они најјаче везани. Вредности вероватноћа електронског захвата могу се пронаћи у таблицама радионуклида [21].

У нашим прорачунима користимо само вероватноћу захвата електрона из K-љуске, P_{Ki} јер остале вероватноће не само да су мање него се у спектру налазе на нижим енергијама, па их детектор и не детектује. Ове вредности се такође налазе у таблицама радионуклида. Те вредности су дате, код на пример европијума, ^{152}Eu , у табели 2.1 у референци [45]. Ове вредности онда множимо са вероватноћом x_{ni} (вероватноћа прелаза са основног стања језгра родитеља n на неко побуђено стање језгра потомка i). Њихов производ је једнак вероватноћи да се при електронском захватухватио управо електрон из K-љуске и језгро се нашло на побуђеном нивоу i .

Дакле, после захвата електрона из К-љуске, у тој љусци настаје шупљина (ваканција). Ова шупљина ће сигурно да се попуни тако што електрон са неког од виших атомских омотача попуни дату шупљину. Када се то догоди, атомски омотач постаје побуђен. Атомски омотач се ослобађа вишка енергије на два могућа начина: емисијом Х-фотона (у овом случају К-фотона јер је шупљина настала у К-љусци) или емисијом Ожеовог електрона. Наиме, у овом другом случају је побуђени атомски омотач неемисионо пренео своју енергију побуђења на неки од електрона из спољашњих љуски и тиме га катапултирао из љуске.

Дакле, пошто при деекситацији атомски омотач може да и не емитује Х-фотоне, нас занима колики је удео емитованих фотона по шупљини а то је управо флуоресцентни квантни принос:

$$\omega_K = \frac{N_{X_K}}{N_K}, \quad (\text{A.4})$$

који показује колико К-фотона можемо очекивати ако посматрамо N_K таквих шупљина у К-љусци. Или ако имамо једну шупљину, колика је вероватноћа да се емитује К-фотон (остатак вероватноће односи се на Ожеову емисију). Податак о ω_K такође се налази у референци [45]. Када помножимо вероватноће: $x_{ni}P_{Ki}\omega_K$, добијамо да је тај производ једнак вероватноћи да се при електронском захвату захвати електрон из К-љуске, да се тиме језгро нашло у побуђеном стању i потомка и да се притом из атомског омотача емитовао један К-фотон.

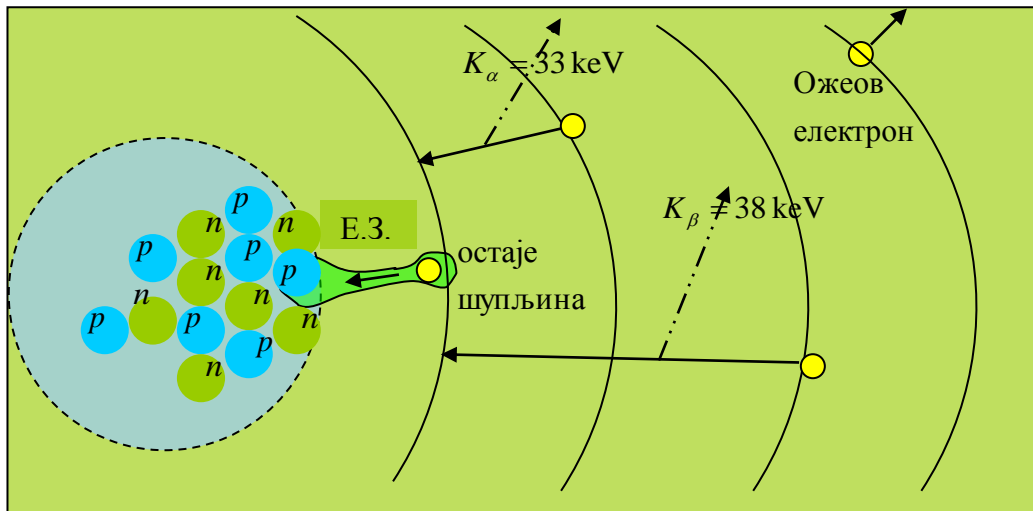
Емитовани К-фотон може бити K_α , K_β , K_γ , итд. (Сл. А.1.) а вероватноће се изражавају преко $f_{\alpha,\beta}$ - фракције флуоресцентног приноса. Ове вероватноће брзо опадају са грчким индексом, па се у рачуну задржавамо само на прва два и тврдимо да је:

$$f_\alpha + f_\beta = 1. \quad (\text{A.5})$$

Односно, или ће се емитовати K_α или K_β фотон.

Дакле, када измножимо следеће вероватноће $x_{ni}P_{Ki}\omega_K f_\beta$ овај производ једнак је вероватноћи да при једном распаду буде захваћен електрон из К-љуске и тиме

језгро пређе на побуђени ниво i потомка и да се притом из атомског омотача емитује K_{β} -фотон.



Сл. А.1. Шематски приказ електронског захвата

ПРИЛОГ Б

Унутрашња (интерна) конверзија

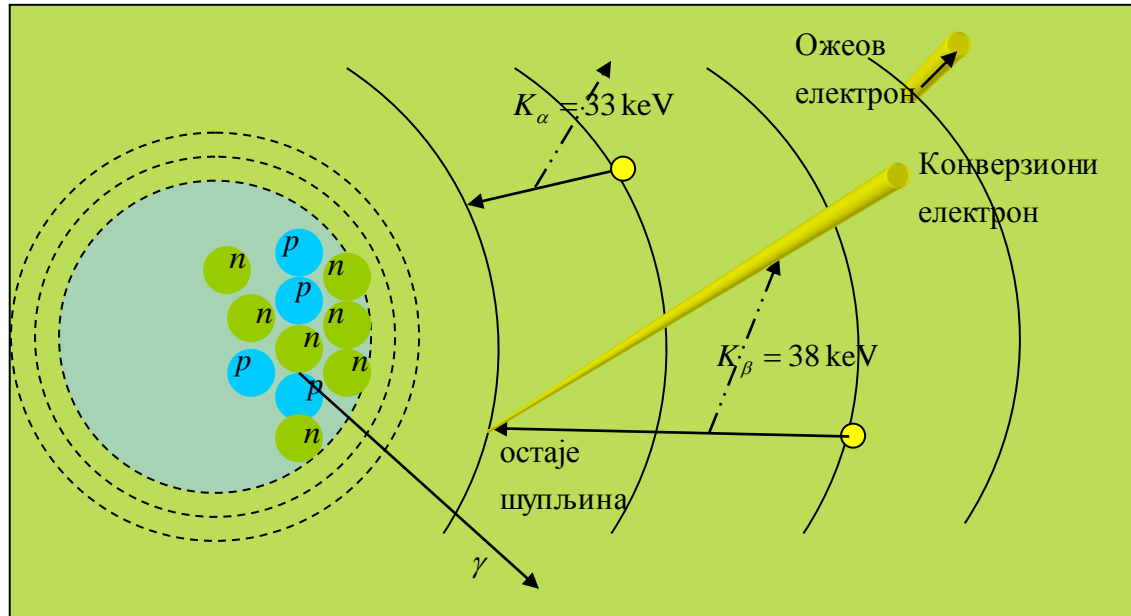
После α или β распада остатак језгра (језгро потомак) може да остане у неком од побуђених стања. Таква језгра не могу да остану дуго у тим стањима, већ се деексцитирају. Средњи живот ових побуђених стања је најчешће у интервалу $10^{-9} - 10^{-15}$ секунди. Језгро потомак може да се ослободи вишка енергије на два начина: емисионим и неемисионим путем. Односно, да језгро или емитује гама фотон или побуђење пренесе на свој атомски омотач (путем тзв. интерне конверзије). У овом другом процесу неки од електрона из омотача пошто прими ту енергију бива „катапултиран“ (Сл. Б.1).

Интерна конверзија (ИК) представља електромагнетни процес конкурентан емисији гама кванта. Процес интерне конверзије почиње побуђеним стањем. У овом процесу деекситација језгра не иде преко емисије фотона, већ се енергија пренесе на један од електрона који окружују језгро. До преношења енергије ексцитације долази услед интеракције електромагнетног поља језгра са електроном из омотача. Енергија прелаза E_γ , коју би иначе однео фотон, делом се утроши на ослобађање електрона од везе $E_{\text{везе}}$ за језгро, а остатак E_e односи конверзиони електрон. На основу закона одржања енергије имамо: $E_e = E_\gamma + E_{\text{везе}}$ [19].

Дакле, у овом случају електромагнетна мултиполна поља језгра не дају као резултат γ -квант већ уместо тога интереагују са атомским електронима, што доводи до емисије електрона. Овде немамо случај да језгро прелазно емитује γ -квант који избацује тај електрон, већ је ИК директна интеракција електромагнетног поља језгра са електроном из његовог омотача. Као резултат језгро се деексцитује, а електрон излази из система.

Тај електрон се назива електрон интерне конверзије или конверзиони електрон. Овај процес се објашњава преклапањем таласне функције језгра и таласне функције електрона, па долази до интеракције интерне конверзије. Конверзиони електрони, за разлику од β -електрона, постоје у атому, тј. не креирају се у самом процесу. Конверзиони електрони имају дискретан спектар (линијски) док β -електрони имају континуални спектар. Пошто конверзија електрона може бити са било које електронске љуске, један ексцитовани

нуклеарни ниво генерално води настајању неколико група електрона са различитим енергијама. Када снимамо конверзиони спектар, може се добити следеће: имамо на континуалном β -спектру родитељског језгра надовезан дискретни спектар електронских енергија, тј. линије од конверзионих електрона.



Сл. Б.1 Шематски приказ интерне конверзије и настанка Ожеовог електрона

С обзиром на то да конверзија може да настане у ма ком слоју за један прелаз, добија се низ линија К, L, M, ... Највећа је вероватноћа да дође до емисије К-електрона, јер су они најближи језгру. За емисију К-електрона мора да буде задовољен услов [46]: $E_\gamma > E_{\text{везе}K}$, ако ово није испуњено, онда ће се десити емисија L-електрона. Ако имамо радиоактивни извор са скупом језгара, језгра се деексцитирају путем гама кванта и ИК која може бити К- и L-. Како је $E_e = E_\gamma - E_{\text{везе}}$, $E_{\text{везе}K} > E_{\text{везе}L} \rightarrow E_{eK} < E_{eL}$ (L-електрони ће бити даље на енергетској оси него К-електрони). Дакле, при деексцитацији потомка са нивоа i на мање побуђени ниво j може да се деси или емисија гама фотона са вероватноћом P_{ij}^γ или емисија конверзионог електрона путем процеса интерне конверзије са вероватноћом P_{ij}^{IT} (горњи индекси IT потичу од назива *Internal Transition*):

$$P_{ij}^{IT} + P_{ij}^\gamma = 1. \quad (\text{Б.1})$$

Вредности P_{ij}^γ и P_{ij}^{Π} се не наводе одвојено у литератури већ се даје њихов однос α_{ij}^T који се назива тотални коефицијент конверзије:

$$\alpha_{ij}^T = \frac{P_{ij}^{\Pi}}{P_{ij}^\gamma}. \quad (\text{Б.2})$$

Из наведена два израза можемо одредити колика је вероватноћа да се при деекситацији потомка са нивоа i на мање побуђени ниво j емитује гама фотон P_{ij}^γ :

$$P_{ij}^\gamma = \frac{1}{1 + \alpha_{ij}^T}. \quad (\text{Б.3})$$

Пошто нас занима и ова друга могућност неемисије гама фотона, односно процес интерне конверзије (јер ће услед ње настати ваканција у атомском омотачу што за собом повлачи могућност поновне емисије X-фотона), имамо на основу наведених израза да је вероватноћа да се при деекситацији потомка са нивоа i на мање побуђени ниво j догоди интерна конверзија (и тиме настане ваканција у атомском омотачу) P_{ij}^{Π} :

$$P_{ij}^{\Pi} = \frac{\alpha_{ij}^T}{1 + \alpha_{ij}^T}. \quad (\text{Б.4})$$

Но, пошто нас не занимају сви догађаји који могу настати при интерној конверзији већ само они процеси који доводе до ваканције у К-љусци, издвојићемо коефицијент конверзије за К-љуску: α_{ij}^K . При томе, наравно, имамо на уму да је тотални коефицијент конверзије једнак збиру свих ових коефицијената конверзије за поједине љуске:

$$\alpha_{ij}^K + \alpha_{ij}^L + \alpha_{ij}^M + \dots = \alpha_{ij}^T. \quad (\text{Б.5})$$

Због тога је вероватноћа да се при деексцитацији потомка са нивоа i на мање побуђени ниво j догоди интерна конверзија и да настане ваканција управо у К-љусци, једнака:

$$\frac{\alpha_{ij}^K}{1 + \alpha_{ij}^T}. \quad (\text{Б.6})$$

Нуклеарни процес интерне конверзије је извор конверзионих електрона који су близу моноенергетским. Због тога је користан за практичну примену као извор моноенергетских електронских група у опсегу од keV до MeV.

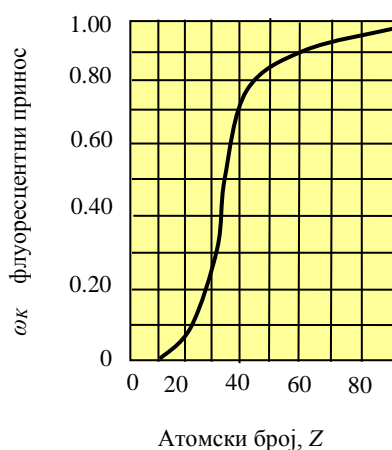
ПРИЛОГ В

Ожеови електрони

Ожеови електрони су, грубо говорећи, аналогни конверзионим електронима само што код њих енергија побуђења потиче од атомског омотача а не од језгра. Процес као што је, на пример, електронски захват, оставља атом са шупљином у електронској љусци. Та шупљина се попуњава електроном из једне од спољашњих љуски атома уз емисију карактеристичног X-фотона. Алтернативно, енергија побуђења атома може се предати директно неком од спољних електрона, узрокујући да он буде избачен из атома (Сл. Б.1, ПРИЛОГ Б). Тај електрон се назива Ожеов (Auger) електрон и појављује се са енергијом једнаком разлици између оригиналне енергије побуђења атома и везивне енергије љуске из које је избачен.

Ожеови електрони дају дискретан енергетски спектар са различитим групама које одговарају различитим почетним и крајњим стањима. Њихове енергије су релативно мале (типично неколико keV) у поређењу са енергијама β -честица или конверзионих електрона.

Конкурентност између емисије K X-фотона и емисије Ожеових електрона описана је флуоресцентним приносом који се дефинише као број K X-фотона емитованих по шупљини у K-љусци $\omega_K = N_{XK}/N_K$ (ПРИЛОГ А). Вероватноћа да ће K X-фотон бити емитован је скоро јединица за елементе са високим Z и скоро нула за елементе са малим Z . Зато је емисија Ожеових електрона фаворизирана код елемената са малим Z код којих су везивне енергије електрона мале. Слика (Сл. В.1.) показује емпиријске варијације ове вероватноће са Z .



Сл. В.1 Емпиријске варијације вероватноће емисије KX фотона са редним бројем Z

ПРИЛОГ Г

Компилација грешака код нуклеарних параметара

- Препоручена вредност релативног интензитета гама зрачења на енергији 269.9 keV је 0.029(12) [47]. Међутим, на основу цитираних радова који су коришћени при тој евалуацији усредњавани су, коришћењем LWM методе, релативни интензитети 0.015(6) и 0.039(4). Провером смо установили да се заправо добија вредност 0.027(12) са управо истим редукованим хи-квадратом, 8.0 који је и наведен у евалуацији [47]. Напомена: Коришћењем тачнијег, оригиналног експерименталног резултата прва вредност релативног интензитета која се усредњава, 0.012 ± 0.005 , након нормирања на самаријумову линију од 1408 keV (јер су у оригиналном раду сви релативни интензитети дати у односу на гадолинијумову линију на 344 keV), добија се, без заокруживања, вредност: 0.015384 ± 0.00641 . Када се ова вредност користи при усредњавању добија се, унутар интервала грешке, иста вредност, 0.027(12), али са редукованим хи-квадратом од 6.8.
- Претходна омашка на жалост утиче и на следећу вредност на енергији 271.1 keV јер је од вредности 0.403(7) потребно одузети допринос мањег пика са којим заједно чини дублет. Тако се уместо погрешне вредности од 0.374(14) добија тачнија вредност 0.376(14). Редуковани хи-квадрат је тачно наведен и износи 1.9.
- За релативни интензитет гама зрачења на енергији 275.5 keV је у Табели 1 [47] наведена погрешна вредност 0.161(50) уместо 0.161(5) [34]. Пошто је ова вредност коришћена при евалуацији препорученог релативног интензитета гама зрачења добијена је погрешна вредност 0.155(8) уместо 0.158(5).
- Супротан пример, где су евалуатори [47] дошли до закључка да је у оригиналном раду [35], вероватно штампарском грешком, за релативни интензитет гама зрачења (у односу на линију гадолинијума од 344 keV) на енергији 295.9 keV уписана вредност 0.72(5) уместо 1.72(5).

Напомена; Након нормирања на самаријумову линију од 1408 keV, њена вредност је управо она која је и дата у Табели 1 [47] и износи 2.21(6). Коришћењем ове, преправљене вредности, добијена је препоручена вредност 2.123(13), Табела 2, [47].

- Слично је и на енергији 523.1 keV где је у оригиналном раду [34] вероватно омашком стављена вредност 0.71(4) (напомена; у том раду су све релативне вероватноће помножене са 10), а евалуатори су ову вредност превели, врло вероватно тачно судећи по вредностима датим од стране других аутора, у вредност 0.071(4).
- У раду [34] за релативни интензитет гама зрачења на енергији 728.0 keV уписана је вредност 0.054(5) (као што је већ речено, у том раду су све вероватноће помножене са 10) док су евалуатори [47] употребили вредност 0.054(50) без икаквог коментара. Дакле, највероватније је штампарска грешка али на жалост та грешка даље производи грешку при израчунавању препорученог релативног интензитета гама зрачења на тој енергији. Тако уместо вредности 0.053(4), аутори [47] дају погрешну вредност 0.051(6).
- Из нама непознатих разлога, без икаквог појашњења, грешка препорученог релативног интензитета гама зрачења на енергији 493.5 keV увећана је два пута, 0.178(16) уместо 0.178(8), Табела 2 [47]. Вредност редукованог хи-квадрата је при томе тачно израчуната и износи 2.1.
- На енергији 534.4 keV у Табели 2 [47] уместо вредности 0.179(4) која се добија усредњавањем вредности 0.179(51) и 0.179(51) из Табеле 1 [47] (и из оригиналних радова [27] и [28]), уписана је, највероватније штампарском грешком, вредност 0.176(9). Ова грешка се даље преноси на вредност релативног интензитета гама зрачења на блиској енергији од 535.4 keV са којом заједно чини дублет. Срећом, тај мањи пик на енергији 535.4 keV се не користи у даљој евалуацији због малог интензитета.
- На енергији 562.9 keV у Табели 1 [47] је грешком означено да је одговарајући релативни интензитет добијен из резултата објављеног у раду [28] а заправо је добијен на основу баланса интензитета прелаза као што је то објашњено (опет са штампарском грешком) у коментару #10

[47]. Наиме, у том коментару пише да је вредност $I_{\gamma}(562.9) = 2.37(2)$ добијена из баланса интензитета прелаза, уместо тачног исказа: $I_{\gamma}(562.9) = 0.18(6)$. Наведена вредност $2.37(2)$ је заправо добијена усредњавањем експерименталних релативних интензитета гама зрачења целог дублета $(562.9 + 564.0)$ keV. Иако је погрешно објашњено у евалуацији [47], аутори су ипак све тачно израчунали када је овај дублет у питању тако да ова непотребна заврзлама не утиче на даље прорачуне.

- Напомена у вези евалуације релативног интензитета гама зрачења на енергији 688.7 keV: аутори [47] су без икаквог упозорења при израчунавању овог интензитета користили податке за цео дублет $(686.6 + 688.7)$ keV а потом од те вредности одузимали вредност релативног интензитета на енергији 686.6 keV. Све је коректно одрађено али на жалост овај поступак није и описан у раду [47] тако да може изазвати фрустрацију при покушају да се њихови резултати репродукују. Због тога и дајемо ову напомену будућим истраживачима.
- При израчунавању препорученог релативног интензитета на енергији 764.9 keV (Табела 2 у раду [47]) без икаквог објашњења је потпуно игнорисана вредност коју су дали аутори [30]. Највероватније се ради о неком критеријуму који су аутори [47] применили помоћу којег су одбацили наведену вредност. Ово је вредно напомене јер у покушају репродукције препоручених података овај корак нигде није наведен.
- Исто је урађено и на енергији 1089.7 keV где је одбачена вредност $8.72(8)$ која је објављена у раду [33]. Упоредјујући ово са претходним примером наслућујемо да се ради о одбацивању (не најављеном) експерименталних резултата чије вредности излазе изван очекиваних предефинисаних оквира (тзв. outliers).
- Претходна два примера игнорисања експерименталних резултата у још драматичнијем облику примењен је и при израчунавању препоручене вредности релативног интензитета гама зрачења на енергији 841.6 keV. Наиме, овде су без икаквог објашњења игнорисана чак три резултата [26] [30] [31].
- У закључку ових примера са одбацивањем експерименталних података наведимо још и пример на енергији 1643.6 keV са том разликом што је ту експлицитно у коментару #16 додатка [47] наведено који су извори

коришћени при израчунавању препорученог релативног интензитета. Наравно, опет није речено зашто остали нису коришћени. Остаје на нама да закључимо да се највероватније ради о одбацивању тзв. outliers података.

- У раду [35] је дат релативни (у односу на гадолинијумову линију 344.3 keV) интензитет гама зрачења на енергији 926.3 keV. Када се ова вредност прерачуна у односу на самаријумову линију од 1408.0 keV добија се вредност 1.3461 ± 0.0641 док се у Табели 1 [47], очигледно омашком, нашла вредност 1.346 ± 0.641 . На жалост, ова омашка утиче на препоручени релативни интензитет па је уместо вредности 1.312(18) у Табели 2 [47] наведена вредност 1.309(19) која се иначе заиста и добија употребом наведеног, погрешног податка.
- Релативни интензитет гама зрачења на енергији 963.4 keV је израчунат на основу односа гранања линија 964.0 и 841.6 keV при распаду европијума ^{152}Eu (9.3 h) као што је то и описано у коментару #14 [47]. Када се тај однос гранања, 0.823(18), помножи са одговарајућим релативним интензитетом гама зрачења на енергији 841.6 keV разматраног радионуклида европијума ^{152}Eu (13.5 година) добија се управо наведена вредност 0.644. Међутим, грешка ове вредности која је наведена у раду [47], 0.644(9) не обухвата грешку поменутог односа гранања, 0.823(18) иако би по нама требала да је укључује. Када се и та грешка урачуна добија се вредност 0.644(16). На срећу, ово не утиче на грешку препорученог релативног интензитета гама зрачења на енергији 964.0 keV.
- Грешка препорученог релативног интензитета гама зрачења на енергији 1005.3 keV је из непознатих разлога дуплирана.
- Исто је урађено и на енергији 1086.0 keV.
- Интересантно је навести и следећи случај на истој тој енергији. У Табели 2 додатка [47] је експлицитно наведена вредност 47.46(20) за релативни интензитет гама зрачења која одговара прелазу $\gamma_{9,0}(^{152}\text{Sm})$. Та вредност је добијена (коментар #17 у раду [47]) тако што се од експериментално добијеног релативног интензитета дублета на енергији 1086.0 keV: 48.63(20) одузме 1.17(4) што одговара доприносу релативног интензитета гама зрачења на енергији ~ 1084 keV [34]. Међутим, при израчунавању

апсолутне вероватноће прелаза $\gamma_{9,0}(^{152}\text{Sm})$ коришћена је, највероватније омашком, вредност релативног интензитета целог дублета. Уместо вредности 9.92(6) у Табели 2.4 у раду [45] наведена је погрешна вредност 10.15(6) иако се лепо види да је вредност 10.16(6) заправо сума апсолутних вероватноћа прелаза $\gamma_{9,0}(^{152}\text{Sm})$ и $\gamma_{-1,15}(^{152}\text{Sm})$: $9.916(58)+0.2439(84)$. Иста грешка се понавља и у Табели гама зрачења 5.2 у раду [45]. Најчудније у целој ствари је што иста грешка на волшебан начин нестаје при навођењу вероватноће прелаза за електронски захват $\varepsilon_{0,9}$ у Табели 2.1 [45]. Наиме, у тој табели се налази податак добијен коришћењем тачне вредности 9.92(6).

- У Табели 2 у раду [47] за препоручени релативни интензитет гама зрачења на енергији 1109.2 keV, вероватно штампарском грешком, је стављена вредност 0.892(18) док је њена тачна вредност једнака 0.895(18) као што је то и наведено у коментару #15 истог тог рада [47]. Срећом, ово је сувише мала разлика да би се осетила приликом израчунавања препорученог релативног интензитета пика на енергији 1112.0 keV са којом први пик чини дублет.