

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Ђурица М. Марковић

**НЕПАРАМЕТАРСКО ГЕНЕРИСАЊЕ  
СТОХАСТИЧКИХ ХИДРОЛОШКИХ  
ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА**

докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Đurica M. Marković

**NON-PARAMETRIC GENERATION OF  
STOCHASTIC HYDROLOGIC  
TIME SERIES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

Ментор:

**Проф. др Јасна Плавшић**, Грађевински факултет Универзитета у Београду

## ЗАХВАЛНОСТ

Захваљујем се Републичком хидрометеоролошком заводу Србије, а посебно г-ђи Бранки Капор и г-дину Самиру Ћатовићу који су ми омогућили да располажем подацима неопходним за истраживање извршено у оквиру израде ове докторске дисертације.

Велику захвалност дугујем др Неши Илићу, који је увек благовремено одговарао на сва питања у вези са моделом, на саветима којима је усмеравао израду модела и рада објављеном у часопису *Water Resources Management*, као и на достављеним подацима чиме је омогућио да се направљени модел тестира на различитим сетовима података.

Захваљујем се мом пријатељу и колеги др Сениши Илићу на помоћи у реализацији мојих идеја.

Неизмерно се захваљујем мом ментору др Јасни Плавшић, што је имала велико разумевање и стрпљење приликом трајања овог истраживања, припреме рада који је објављен у часопису *Water Resources Management* и несебично уложила велики труд да би овај рад добио коначни облик.

На крају, захваљујем се мојој породици на огромном разумевању и подршци током свих ових година.

Наслов докторске дисертације:

## **Непараметарско генерисање стохастичких хидролошких временских серија**

### **Апстракт**

Предмет истраживања у овој дисертацији је непараметарска методологија за стохастичко генерисање дугачких хидрометеоролошких серија података. Метода се састоји од три засебна корака за генерисање серија података на основу података осматрања на више мерних места. Први корак подразумева генерисање низова независних података у парцијалним низовима (дневним, недељним, месечним) дужине 1000 година методом Монте Карло на основу непараметарских расподела осматрених низова. Други корак подразумева преслагање добијених независних података тако да се подесе жељене аутокорелације у оквиру сваке симулиране године, годишње статистике и корелације, као и крос-корелација између станица. Трећи корак обухвата преслагање целих година да би се подесила корелација између узастопних година (тј. између чланова на почетку посматране и крају претходне године), чиме се симулирани подаци преводе годишњих низова у временске серије уз захтевану аутокорелациону и крос-корелациону структуру годишњих вредности. Допринос ове дисертације је унапређење оригиналне методологије коју је дао Pich (2009) и која се огледа у увођењу логаритамске трансформације улазних података и процедуре за екстраполацију непараметарских расподела у првом кораку, као и додатни део у трећем кораку којим се подешавају вишегодишње карактеристике серија. Као резултат овакве методологије добијају се генерисани низови чије стохастичке особине у потпуности одговарају осматреним низовима како за изабрану временску дискретизацију, тако и агрегирано на годишњем нивоу. Под стохастичким особинама подразумевају се основне статистике као што су средња вредност, стандардна девијација и коефицијент асиметрије, расподеле парцијалних и агрегираних средњих годишњих и екстремних годишњих вредности низова, аутокорелациона функција и крос-корелациона матрица и вишегодишње карактеристике као што је број и распон корака (који се дефинишу као пресецања серије и њене средње вредности). Методологија је приказана кроз два модела: модел за генерисање протока (модел 1) и модел за генерисање протока и падавина (модел 2). Други модел узима у обзир да су падавине прекидан процес и моделира их засебном оценом вероватноће појаве и вероватноће висине падавина. Оба модела су примењена на два сета података: за слив реке Студенице у Србији и за слив реке Олдман у Канади, и то са три

временске дискретизације: са дневним, недељним и месечним подацима. Резултати су показали да се све стохастичке карактеристике симулираних серија одлично слажу са карактеристикама осматраних серија. Међу свим резултатима, они који се односе на слагање расподела великих и малих вода (годишњих максимума и минимума) су прихватљиви са становишта практичне примене, али остављају могућност за даља побољшања у будућим истраживањима.

На основу свега може се закључити да предложена методологија може да генерише и прекидне и непрекидне временске серије на више локација и за било коју временску дискретизацију, и да тиме представља целовит стохастички хидролошки модел који се може користити у анализама сложених водопривредних система као што су системи вишенаменских акумулација.

**Кључне речи:** стохастичко генерисање, Монте Карло метод, непараметарски метод, логаритамска трансформација, аутокорелација, крос-корелација, дугогодишње карактеристике временских серија

Научна област: **Грађевинарство**

Ужа научна област: **Хидрологија; Стохастичка хидрологија**

УДК број:

Dissertation title:

**Non-parametric generation of stochastic hydrologic time series**

**Abstract**

This dissertation deals with the development of a non-parametric methodology for stochastic generation of long hydrometeorological series. The method has three distinct steps to generate the series based on the observed data at multiple gauges. In the first step, the Monte Carlo method is used to generate series of 1000 years of simulated independent data for each partial (daily, weekly or monthly) series based on the non-parametric distributions of the observed data. The second step consists of permutations of the independent data to adjust the target (observed) serial correlation within each simulated year, including the aggregated annual statistics and correlation, as well as the cross-correlation between the sites. The third step involves permutation of complete years to adjust the correlation between the consecutive years (i.e. correlation between the values at the beginning of a year with that at the end of a previous year), thereby virtually transforming the simulated data into the time series while also adjusting the correlation of annual flows with the target autocorrelation and cross-correlation structure. Logarithmic transformation of the input data and a procedure for extrapolation of the non-parametric distributions in the first step, and a sub-step in the third step that performs additional adjustment to the long-term characteristics of the series are the new contribution to this methodology proposed in this dissertation and an amendment to the original methodology by Ilich (2009). The methodology results in the generated series with stochastic properties that fully correspond to those of the observed series both at the selected time discretisation and aggregated on the annual level. The stochastic properties include main statistics such as the mean, standard deviation and skewness, distributions of partial and aggregated annual mean and extreme series, autocorrelation and cross-correlation structure of the series, and the long-term properties such as the number and range of the runs (defined as crossings of the series with the process mean). The methodology is presented by two models: the model for generating streamflow series (model 1) and the model for generating streamflow and precipitation series (model 2). The second model takes into account the intermittency of the precipitation process and models it by estimating separately the precipitation occurrence and precipitation depth probabilities. Both models are tested against two data sets: the Studenica River basin in

Serbia and the Oldman River basin in Canada, at three time discretisation levels: daily, weekly or monthly data. The results indicate an excellent agreement of all stochastic properties of the simulated series with the observed ones. Although the results are related to the agreement between the distributions of low and high extreme values in the series are satisfactory from a practical point of view, further improvement in this direction is still possible and can be a subject of further research.

As a conclusion, the proposed methodology is able to generate intermittent and continuous time series at multiple locations and for any time discretisation, thus representing a comprehensive stochastic hydrologic model suitable for complex water resources management analysis such as the multi-purpose reservoir cascades.

**Keywords:** stochastic generation, Monte Carlo method, Non-parametric method, Logarithmic transformation, Serial correlation, Cross-correlation, Long-term persistence

Research field: **Civil Engineering**

Research sub-field: **Hydrology; Stochastic hydrology**

UDK number:



## САДРЖАЈ

Садржај.....	i
1 Увод.....	1
2 Временске серије и стохастички модели.....	7
2.1 Преглед хидролошких модела.....	7
2.2 Историјски развој стохастичких модела за генерисање синтетичких хидролошких низова.....	9
2.3 Основни појмови о временским серијама.....	19
2.3.1 Класификација хидролошких временских серија.....	19
2.3.2 Особине хидролошких серија.....	21
2.3.3 Стационарне временске серије.....	22
2.3.4 Трансформација података.....	23
3 Генерисање хидролошких низова.....	25
3.1 Значај синтетичких хидролошких низова.....	25
3.2 Методе генерисања хидролошких низова.....	26
3.3 Принципи за генерисање временских серија.....	27
3.4 Генерисање случајних низова.....	32
3.4.1 Оцена расподела вероватноће случајних низова.....	32
3.4.2 Компромисне вероватноће као емпиријска расподела низа.....	33
3.4.3 Приказ емпиријске расподеле помоћу хистограма.....	34
3.4.4 Непараметарске расподеле.....	35
3.4.4.1 Оцена густине расподеле помоћу кернел функције.....	37
3.4.4.2 Оцена функције расподеле помоћу кернел функција.....	41
3.5 Примена модела временских серија за генерисање.....	42
3.5.1 Приступ Бокс-Денкинса за анализу временских серија.....	43
3.5.2 Сезонска периодичност.....	45
3.5.3 Модели временске дисагрегације.....	46
3.6 Непараметарско генерисање временских серија.....	47
3.6.1 Бутстрап (Bootstrap) методе.....	48
3.6.2 KNN (K-nearest neighbour) методе.....	49
3.6.3 Методе вејвлета (Wavelet).....	50
4 Приказ модела за генерисање прекидних и непрекидних временских серија.....	53
4.1 Увод.....	53
4.2 Основне поставке модела.....	54
4.3 Структура модела.....	56
4.3.1 Приказ података у моделу.....	56
4.3.2 Логаритамска трансформација.....	57
4.3.3 Главни кораци у моделу.....	58
4.3.4 Корак 1. – Генерисање података.....	59
4.3.4.1 Екстраполација крајева непараметарских функција расподеле.....	60
4.3.4.2 Монте Карло симулације низова.....	63
4.3.5 Корак 2. – Постизање корелационе структуре низова.....	65
4.3.5.1 Алгоритам 1.....	66
4.3.5.2 Алгоритам 2.....	70
4.3.5.3 Подешавање расподеле генерисаних података на годишњем нивоу.....	71
4.3.6 Корак 3. – Постизање корелационе структуре агрегираних низова.....	72

4.3.6.1	Подешавање аутокорелације чланова са краја и почетака година и годишње аутокорелације .....	72
4.3.6.2	Вишегодишње особине годишњих серија.....	74
5	Резултати примене методологије на одабраним примерима.....	77
5.1	Улазни подаци.....	77
5.1.1	Временска дискретизација података .....	79
5.1.2	Анализа података .....	80
5.1.2.1	Тестирање хомогености хидролошких низова .....	82
5.1.2.1	Тестирање постојања тренда .....	83
5.1.2.1	Тестирање случајности .....	84
5.1.2.2	Тестирање нормалности улазних серија података .....	85
5.1.2.3	Тестирање постојања изузетака .....	86
5.2	Прелиминарне анализе за примену непараметарских расподела за генерисање случајних низова .....	87
5.3	Модел за генерисање протока (модел 1) .....	89
5.3.1	Резултати генерисања случајних парцијалних низова .....	89
5.3.2	Корелација парцијалних низова .....	96
5.3.3	Годишњи протоци .....	100
5.3.4	Годишњи екстреми.....	103
5.3.5	Вишегодишње карактеристике .....	105
5.4	Модел за генерисање протока и падавина (модел 2) .....	109
5.4.1	Резултати генерисања случајних парцијалних низова .....	110
5.4.2	Корелација парцијалних низова .....	117
5.4.3	Годишњи протоци и падавине .....	121
5.4.4	Годишњи екстреми.....	123
5.4.5	Вишегодишње карактеристике .....	125
6	Закључак.....	129
7	Литература .....	135
8	Прилог 1 – Резултати генерисања случајних парцијалних низова.....	143
9	Прилог 2 – Корелација парцијалних низова .....	179
10	Прилог 3 – Годишњи подаци.....	217
11	Прилог 4 – Годишњи екстреми .....	231

**Попис слика:**

Слика 1 – Подела хидролошких модела према Сингу .....	7
Слика 2 – Различити временски интервали у подацима за различите временске оквире управљања .....	26
Слика 3 – Средњи протоци на хидролошкој станици C5AE27 на реци St. Mary у Канади за делове низа различите дужине .....	28
Слика 4 – Кумулативно одступање од средње вредности годишњих протока на хидролошкој станици C5AE27 на реци St. Mary у Канади.....	29
Слика 5 – Различите дефиниције корака за дати ниво пресецања $x_0$ .....	30
Слика 6 – Пример одређивања трајања сушних периода $n$ и дефицита $D$ , као и трајања водних периода $m$ и вишкова $S$ на хидролошкој станици C5AE27 на реци St. Mary у Канади.....	31
Слика 7 – Различите ширине класних интервала за исте податке: горе лево је већи број класних интервала од оптималног, а доле лево мањи. Горе десно је оптимални број класа и доле десно његово одређивање на основу средње квадратне грешке у односу на број класа (преузето из (Wasserman, 2006)) .....	35
Слика 8 – Правоугаоно језгро у односу на податак $x_i$ и ширина интервала $h$ .....	37
Слика 9 – Пример непараметарске густине расподеле са Гаусовим језгром за податке (извор: Wasserman, 2006) .....	38
Слика 10 – Пример непараметарске густине расподеле са правоугаоним језгром за индивидуалне податке.....	38
Слика 11 – Изглед Гаусовог и Епанечниковог језгра (Wasserman, 2006).....	38
Слика 12 – Матрица улазних података – осмотрених вредности (пример недељних података).....	56
Слика 13 – Корелациона матрица свих осмотрених вектора за недељне податке.....	57
Слика 14 – Линеарна екстраполација расподеле на дијаграму лог–нормалне вероватноће према идеји Шолца (Scholz, 1995).....	61
Слика 15 – Екстраполација расподеле примењена у моделу спајањем екстремних осмотрених података $Y_{\min}$ и $Y_{\max}$ и случајно изабраних тачака (крстићи) из интервала поверења 1000-годишњих квантила .....	62
Слика 16 – Генерисање података из униформне расподеле.....	63
Слика 17 – Приказ једне од осмотрених временских серија годишњих протока и кумулативне сумарне криве одступања од средње вредности .....	74
Слика 18 – Приказ генерисаних серија годишњих протока и кумулативне сумарне криве одступања од средње вредности за исту станицу као на слици 17, после преслагања у 3. кораку и разлог потребе за додатним алгоритмом.....	75
Слика 19 – Географски положај слива реке Студенице .....	77
Слика 20 – Географски положај слива реке Олдман, Канада .....	78
Слика 21 – Хидрограм дневних протока на реци Студеници за одабрани летњи период .....	80
Слика 22 – Хидрограм дневних протока на реци Студеници за одабрани зимски период.....	81
Слика 23 – Годишњи протоци за хидролошку станицу Ушће (RS3): а) средњи годишњи и минимуми, б) максимуми.....	81

Слика 24 – Годишње падавине за падавинску станицу СА10: а) недељни максимуми, б) годишње падавине .....	81
Слика 25 – Заступљеност вредности коефицијента асиметрије у недељним (лево) и месечним (десно) низовима на канадским станицама пре и после логаритамске трансформације.....	86
Слика 26 – Непараметарске расподеле логаритмованих осмотрених протока у 8. недељи на станици Девихи на реци Студеници за различите ширине језгра $h$ (лево: густине расподеле и десно: функције расподеле на дијаграму лог–нормалне вероватноће).....	88
Слика 27 – Резултати корака 1 за недељне протоке на станици RS2: а) емпиријске расподеле осмотрених и генерисаних протока и типичне теоријске расподеле за недељу 10; б) осмотрени и генерисани средњи недељни протоци; с) осмотрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осмотрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије.....	90
Слика 28 – Резултати корака 1 за недељне протоке на станици СА1: а) емпиријске расподеле осмотрених и генерисаних протока и типичне теоријске расподеле за недељу 12; б) осмотрени и генерисани средњи недељни протоци; с) осмотрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осмотрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије.....	92
Слика 29 – Недељни екстреми на станици RS2: а) осмотрени и генерисани минимуми; б) осмотрени и генерисани максимуми.....	93
Слика 30 – Недељни екстреми на станици СА1: а) осмотрени и генерисани минимуми б) осмотрени и генерисани максимуми.....	94
Слика 31 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Девихи на Студеници .....	95
Слика 32 – Vox-plot расподеле, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Ушће на Студеници .....	96
Слика 33 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда парцијалних недељних низова на станици Мланча на реци Студеници .....	97
Слика 34 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда парцијалних недељних низова на станици СА1 на реци Олдман .....	97
Слика 35 – Коефицијенти крос-корејације за временски помак 0 и 1 између парцијалних недељних низова на станицама Девихи и Ушће на реци Студеници .....	97
Слика 36 – Коефицијенти крос-корејације за временски помак 0 и 1 између парцијалних недељних низова на станици СА1 и СА4 на реци Олдман.....	98
Слика 37 – Аутокорејациона функција осмотрених и генерисаних недељних временских серија до реда 30 за станицу Мланча на Студеници (горе) и СА1 на реци Олдман (доле).....	100
Слика 38 – Расподела средњих годишњих протока за станицу Мланча на Студеници (горе) и за станицу СА1 на реци Олдман (доле).....	101
Слика 39 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Мланча на Студеници (лево) и за станицу СА1 на реци Олдман (десно) .....	102
Слика 40 – Кумулативна крива одступања годишњих протока од средње вредности осмотрених (горе лево), генерисаних (горе десно) и генерисаних после додатног пермутовања редова (доле) на реци Студеници на станици Мланча .....	107
Слика 41 – Кумулативна крива одступања годишњих протока од средње вредности осмотрених и линија покретних просека (горе лево), генерисаних (горе десно)	

и генерисаних после додатног пермутовања редова (доле) на реци Олдман за станицу СА1 .....	108
Слика 42 – Резултати корака 1 за недељне падавине на станици Краљево: а) емпиријске расподеле осматраних и генерисаних падавина и типичне теоријске расподеле за недељу 10; б) осматрене и генерисане средње недељне падавине; с) осматрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осматрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије.....	111
Слика 43 – Резултати корака 1 за недељне протоке на станици Мланча: а) емпиријске расподеле осматраних и генерисаних протока и типичне теоријске расподеле за недељу 10; б) осматрени и генерисани средњи недељни протоци; с) осматрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осматрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије.....	112
Слика 44 – Резултати корака 1 за недељне падавине на станици Cards. Pt. (СА8): а) емпиријске расподеле осматраних и генерисаних падавина и типичне теоријске расподеле за недељу 22; б) осматрене и генерисане средње недељне падавине; с) осматрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осматрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије.....	113
Слика 45 – Недељни екстреми падавина на станици RS4: а) осматрени и генерисани минимуми; б) осматрени и генерисани максимуми .....	114
Слика 46 – Недељни екстреми падавина на станици СА8: а) осматрени и генерисани минимуми б) осматрени и генерисани максимуми .....	115
Слика 47 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осматраних и генерисаних дневних низова на падавинској станици Краљево .....	116
Слика 48 – Vox-plot расподеле, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осматраних и генерисаних месечних низова на падавинској станици Краљево ....	117
Слика 49 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда парцијалних недељних низова падавина на станици Краљево за слив реке Студенице.....	118
Слика 50 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда парцијалних недељних низова протока на станици Мланча на реци Студенице.....	118
Слика 51 – Коефицијенти крос-корељације за временски помак 0 и 1 између парцијалних недељних низова на станицама Краљево и Мланча за слив реке Студенице .....	119
Слика 52 – Аутокорељациона функција осматраних и генерисаних недељних временских серија до реда 30 за станицу Краљево за српски сет података (горе) и СА8 за слив на реци Олдман (доле).....	121
Слика 53 – Расподела годишњих падавина за станице Краљево (горе) и за станицу СА8 (доле).....	122
Слика 54 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Краљево (лево) и за станицу СА8 (десно).....	123
Слика 55 – Распон теоријских квантила годишњих максимума дневних падавина за осматрену и генерисану серију на станици Краљево.....	124
Слика 56 – Распон теоријских квантила минималних и максималних годишњих протока за осматрену и генерисану серију дневних података на станици Мланча .....	124
Слика 57 – Распон теоријских квантила за минималне и максималне годишње протоке из осматрене и генерисане серије дневних података на станици Мланча добијених моделом 1 .....	125

Слика 58 – Кумулативна крива одступања осмотрених (горе лево) и генерисаних (горе десно) годишњих падавина од средње вредности за станицу Краљево; крива после додатног пермутовања редова (доле).....	126
Слика 59 – Кумулативна крива одступања осмотрених (горе лево) и генерисаних (горе десно) годишњих падавина од средње вредности и линија покретних просека за станицу СА8 у Канади; сумарна крива после додатног преслагања (доле).....	127

## Попис табела:

Табела 1 – Најчешће коришћени обрасци за израчунавање компромисне вероватноће и повратног периода $T$ , где $m$ представља редни број података у низу уређеном по опадајућем редоследу.....	33
Табела 2 – Приказ најчешће коришћених језгара у за непараметарске густине расподеле, где је $t = x - x_{ih}$ .....	39
Табела 3 – Коефицијенти за промену ширине различитих језгара (Hardle, et al., 1994) .....	41
Табела 4 – Преглед свих водомерних станица, њихових ознака и сливних површина.....	79
Табела 5 – Преглед свих падавинских станица, њихових ознака.....	79
Табела 6. – Процент хидролошких низова за које је одбачена хипотеза о хомогености по станицама за све временске дискретизације .....	83
Табела 7. – Процент низова за који је одбачена хипотеза о одсуству тренда по станицама за све временске дискретизације .....	84
Табела 8. – Процент парцијалних низова за које је одбачена хипотеза о случајности по станицама за све временске дискретизације .....	84
Табела 9. – Процент парцијалних низова са прихваћеном хипотезом о значајности коефицијента асиметрије по станицама за све временске дискретизације .....	85
Табела 10. – Процент парцијалних низова са детектованим изузецима по станицама за све временске дискретизације .....	86
Табела 11 – Поређење релативних грешки у статистикама низова при симулацијама генерисања са два и са три постављена критеријума за станице на реци Студеници.....	93
Табела 12 – Просечне разлике у средњим вредностима генерисаних и осмотрених низова на свим станицама за различите временске дискретизације .....	94
Табела 13 – Просечна и највећа апсолутна одступања између корелационих матрица генерисаних и осмотрених низова .....	98
Табела 14 – Коефицијенти корелације на крају и почетку године за осмотрене и генерисане недељне серије за станицу Мланча .....	99
Табела 15 – Основне статистике низова средњих годишњих протока из генерисаних недељних протока за станице на реци Студеници. ....	102
Табела 16 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Студеници.....	103
Табела 17 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Олдман .....	103
Табела 18 – Опсег квантила теоријских расподела и расподела осмотрених и генерисаних за максималне и минималне годишње протоке на станици Ушће .....	104

---

Табела 19 – Опсег квантила теоријских расподела и расподела осмотрених и генерисаних за средње годишње протоке на станици СА4 .....	105
Табела 20 – Параметри сумарних кривих при анализи корака на станици Мланча .....	106
Табела 21 – Параметри сумарних кривих при анализи корака на реци Олдман за станицу СА1 .....	107
Табела 22 – Релативне грешке осмотрених и генерисаних средњих вредности за недељне податке на станицама у сливу реке Олдман у Канади .....	114
Табела 23 – Просечне релативне разлике у средњим вредностима генерисаних и осмотрених низова на српским станицама за различите временске дискретизације .....	115
Табела 24 – Просечна и највећа апсолутна одступања између корелационих матрица генерисаних и осмотрених низова .....	119
Табела 25 – Коефицијенти корелације на крају и почетку године за осмотрене и генерисане недељне серије за станицу Мланча .....	120
Табела 26 – Основне статистике низова годишњих протока и падавина за станице на сливу реке Студеници. ....	122
Табела 27 – Параметри сумарних кривих одступања од средње вредности при анализи корака за падавинску станицу Краљево .....	126
Табела 28 – Параметри сумарних кривих при анализи корака за станицу СА8.....	128





# 1 УВОД

Квалитетна вода као ресурс има јасно исказани тренд смањења услед непрестаног и увећаног загађења. Поред тога, услед утицаја климатских промена и изразитог увећања просторне и временске неравномерности појаве воде као ресурса, долази до придавања све већег значаја максималном искоришћењу водних ресурса. Максимално искоришћење водних ресурса претпоставља максимално искоришћење расположивог хидропотенцијала водотока (акумулације у низу), при чему корисници као што су водоснабдевање, пољопривреда, енергетика или туризам могу, уз оптимално управљање таквим системима акумулација, да добију максималну обезбеђеност у односу на унапред одређене параметре.

Генерално се може рећи да су постојећи нивои осматрања протока недовољни за поуздано планирање и управљање акумулацијама. Зато се као основа за одређивање оптималне запремине акумулације, одређивање оптималних правила управљања расподелом воде и сл., користе генерисане хидролошке серије. Од синтетичких серија се захтева да имају статистичке особине које се не разликују од осмотрених, као што су средња вредност, стандардна девијација, корелације и сл. Основна идеја генерисања синтетичких низова је да се водопривредни систем тестира под различитим условима, са много дужим нивозима протока него што су осмотрени. При томе се претпоставља да ће дужи нивои протока садржати екстремније протоке од осмотрених и на тај начин ће се тестирати систем под строжим условима (Lawrance & Kottegoda, 1977). Поред израженијих екстремних појава, у довољно дугим генерисаним серијама могу да се очекују и узастопни нивои сушних и водних година, што би дало могућност у планирању да се на такве догађаје одговори оптималним управљањем које ће задовољити потребе свих корисника са одређеном обезбеђеношћу. У овом процесу планирања и управљања нарочито су важни генерисани нивои у којима се јављају узастопне сушне године јер оне могу бити ограничавајући фактор при избору величине акумулације или одређивању поузданости снабдевања или одобрених количина за снабдевање одређених корисника воде из акумулације. Ово указује на потребу да се у случају појаве сушних периода потрошња воде из акумулације минимизира и троши према утврђеним приоритетима и обезбеђеношћу. Тако би интерес енергетике, који захтева да се користе максималне запремине воде при максималном нивоу воде у акумулацији, морао да се усклађује са захтевима осталих корисника. Такође, за процес планирања и управљања

важна је и појава узастопних водних година или појава великих вода одговарајућег повратног периода, када је за кориснике воде и за производњу електричне енергије веома битно да се максимално искористе сви дотоци у акумулацију. Са становишта енергетике свако испуштање воде преко евакуационих органа је чист губитак, али се при појави ових вода може минимизирати запремина воде која се из акумулације евакуише мимо енергетских постројења. На основу претходног се закључује да се за планирање величине акумулације и управљање расподелом воде из акумулације разним корисницима морају користити методе оптимизације уз унапред дефинисане циљеве, који се могу поставити тако да се оствари највећа поузданост у снабдевању корисника водом и по времену и по испорученим количинама уз остваривање највеће добити.

Поступак генерисања низова независних података у хидрологији се базира на генерисању случајних бројева Монте Карло методом који се онда на основу одговарајуће расподеле вероватноће разматране величине преводе у догађаје одређене вероватноће појаве. У принципу, расподеле вероватноће одређују се на основу осматрених низова података прилагођавањем теоријске расподеле емпиријској расподели. Овај поступак се врши на основу оцене параметара, али је избор типа расподеле делимично субјективан на основу визуелног прегледа, нарочито у домену екстремних вредности. У новије време, користе се и непараметарске расподеле код којих је могуће у потпуности аутоматизовати поступак генерисања података, што представља велику предност приликом генерисања низова у односу на теоријске расподеле.

Генерисање хидролошких временских серија је захтевнији поступак него генерисање низова независних података јер генерисане серије треба да задрже и корелациону структуру осматрених временских серија. Класичан приступ за ово генерисање је примена модела временских серија заснованих на Бокс-Џенкинс приступу (Box and Jenkins 1976), као што су ауторегресивни процеси и процеси покретних средина (тзв. ARMA модели). У новије време, за генерисање хидролошких временских серија користе се и непараметарски модели који се темеље на осматреним подацима без формирања аналитичког модела.

Међу непараметарским приступима за генерисање хидролошких временских серија, недавно се појавила методологија коју је предложио Илић (Ilich & Despotovic, 2008; Ilich, 2009, 2014), а заснива се на преслагању матрица генерисаних случајних података за постизање жељене аутокорелационе структуре низова. Ова методологија пружа велике могућности за даљи развој у овој области.

Предмет истраживања у овој дисертацији је потврђивање и унапређење новоразвијене методологије у стохастичкој хидрологији за генерисање дугачких хидрометеоролошких серија података. Истраживање полази од методологије коју је предложио Илић (Plich & Despotovic, 2008; Plich, 2009, 2014). Метода се састоји од три корака за генерисање серија протока на више локација, а на основу података осматрања на хидролошким станицама. Први корак подразумева генерисање низова случајних бројева, а други и трећи корак подразумевају различите начине за преуређење потпуно случајних низова у серије са захтеваном аутокорељационом и крос-корељационом структуром. Генерисање низова случајних бројева се спроводи коришћењем расподеле учесталости осматраних података, при чему се не користе класичне параметарске расподеле вероватноће, већ се користе непараметарске расподеле које се заснивају на подацима осматрања. Резултат овакве методологије треба да буду генерисани низови чије стохастичке особине у потпуности одговарају осматраним низовима. Под стохастичким особинама подразумевају се основне статистике као што су средња вредност и стандардна девијација, аутокорељациона функција и крос-корељациона матрица за више промелјивих.

Поред протока који представљају непрекидне хидролошке серије и имају изразиту аутокорељацију, на сличан начин могу да се генеришу друге хидрометеоролошке серије од значаја за управљање водама, као што су падавине и температуре. Док се температуре по структури, на неки начин, могу сматрати сличне протоцима јер представљају непрекидне серије са веома израженом аутокорељацијом и крос-корељацијом, падавине су променљиве прекидног типа, имају знатно слабију корелеацију и у временском и у просторном домену, па представљају већи изазов за квалитетно генерисање низова. Израда модела способног да генерише и прекидне и непрекидне временске серије зато представља један од циљева дисертације, чиме би се добио целовит стохастички хидролошки модел.

У развоју ове методологије полази се од хипотезе да су историјски хидролошки низови заправо низови природних протока, што практично значи да хидролошки режим на разматраним сливовима није под утицајем рада објеката за контролу тока воде. Такође се претпоставља да су сви хидрометеоролошки низови стационарни, односно да у низовима нису присутни трендови или скокови.

Циљ докторске дисертације је успостављање ефикасног алгоритма за симултано генерисање серија протока и падавина на хидролошким и падавинским станицама у хидролошки хомогеном региону за потребе управљачких модела у водопривреди. У

развоју ове методологије посебна пажња је посвећена ефикасном генерисању низова помоћу непараметарских функција расподеле коришћењем логаритамске или неке друге погодне трансформације низова. Избором непараметарских расподела вероватноће као алата за генерисање случајних низова избегава се полазна хипотеза о томе да разматране хидрометеоролошке величине прате неку одређену теоријску расподелу вероватноће, што није пожељно јер такве полазне претпоставке могу да ограниче валидност резултата.

Други важан аспект којим се дисертација бави јесте развој методологије за генерисање прекидних серија падавина, где је одвојено моделирање учесталости појаве падавина и саме висине падавина.

Истраживање се највећим делом бави хидрометеоролошким временским серијама са недељним временским кораком, као најинтересантнијим серијама за потребе управљања хидроенергетским системима, где су дугачке генерисане серије података неопходне као улаз за моделирање рада акумулационих језера. Други временски кораци су такође могући (дневни, месечни, сезонски или годишњи подаци).

На основу претходног, задаци ове дисертације су:

- преглед литературе и приказ постојећих стохастичких модела за генерисање хидрометеоролошких величина,
- истраживање и развој алгоритма за генерисање низова независних података коришћењем непараметарских функција расподеле уз логаритамску трансформацију оригиналне променљиве,
- истраживање и развој алгоритма за претварање низова независних података у временске серије уз постизање жељене стохастичке структуре у серијама,
- анализа резултата добијених генерисањем временских серија на два примера са различитим бројем улазних хидрометеоролошких података,
- извођење закључака и давање препорука за даља истраживања.

Поред овог првог и уводног дела, дисертација је организована на следећи начин:

- у другом поглављу се разматрају основни појмови о временским серијама и стохастичким моделима, даје се хронолошки развој стохастичких модела за генерисање синтетичких хидролошких низова;
- у трећем поглављу су дате методе за генерисање хидролошких низова, принципи за генерисање и примена модела временских серија, и непараметарске методе за генерисање временских серија,

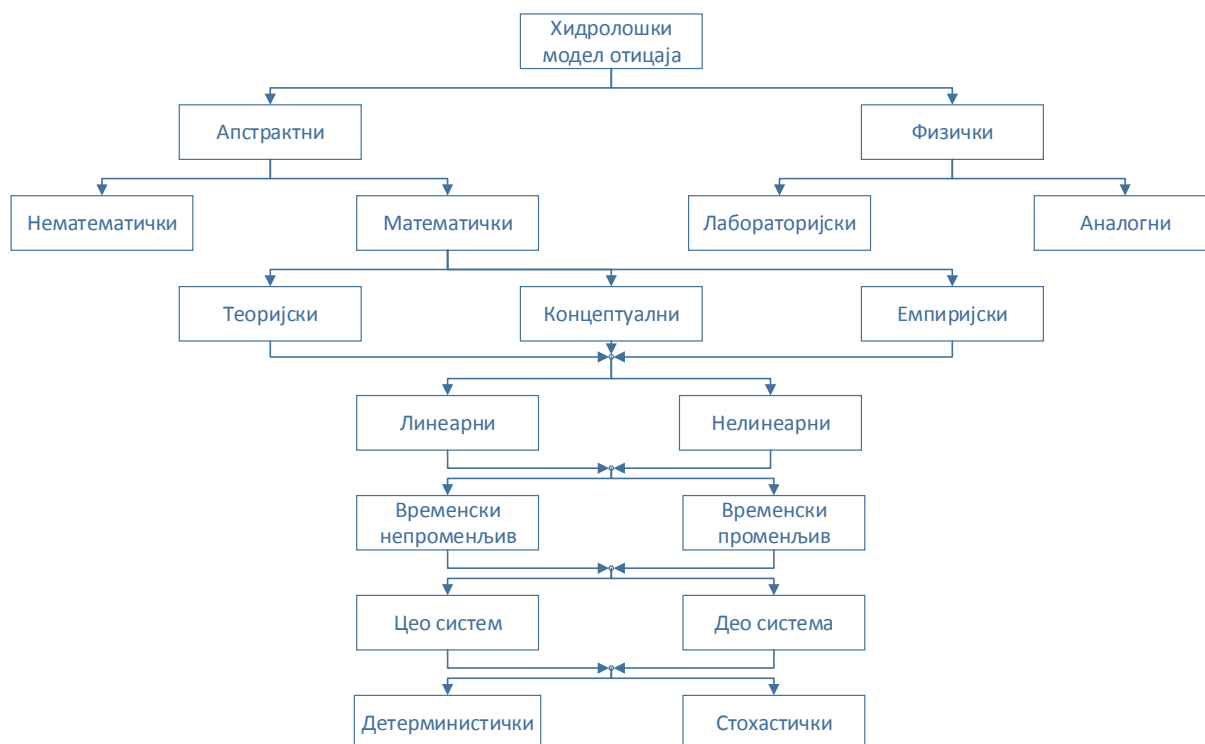
- у четвртом поглављу се даје приказ модела за генерисање прекидних и непрекидних временских серија, који је заснован на споменутим радовима Илића, укључујући и измене до које су примењене у моделу а резултат су истраживања спроведеног за потребе израде ове дисертације,
- у петом поглављу су приложени резултати добијени коришћењем модела примењеног на два сета података; у првој примени модела су коришћени само подаци о протоцима, а у другој примени поред протока и подаци о падавинама – један сет података је из Србије где је разматран слив реке Студенице (три хидролошке станице) и једна метеоролошка станица, док је други сет података из Канаде, са слива реке St. Mary, са седам хидролошких станица и четири метеоролошке станице,
- у шестом поглављу се дају закључци са препорукама за даље унапређење примењеног модела и даље истраживање.



## 2 ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ И СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ

### 2.1 Преглед хидролошких модела

Очигледно је да се јављају велике потребе за израду модела хидролошких система у сврху његовог планирања, тестирања, управљања, прогнозирања понашања и сл. У ту сврху су развијани различити хидролошки модели. Једну од подела хидролошких модела дао је Синг (Singh, 1988), чија је схема дата на слици 1.



Слика 1 – Подела хидролошких модела према Сингу

Физички модели представљају приказ неког система неким другим системом, са којим је лакше радити, а има сличне особине. Лабораторијски модели су обично модели који су направљени у одређеној размери и представљају неки природни систем. Аналогни модели су модели у којима се појаве у правом моделу моделирају неком другом појавом нпр. проток струје симулира проток воде.

Код апстрактних модела су симболички приказане особине природног система, релативно поједностављене и у логичком смислу идеализоване у односу на оригинални систем. Математички модел је представљен низом математичких једначина и логичких изјава које повезују променљиве и параметре у једначинама, којима се представља понашање система.

Теоријски модели или модели беле кутије, односно физички засновани модели, описују математичким једначинама физичке процесе који се дешавају у систему. Емпиријски модели или модели црне кутије, односно модели улаза и излаза се базирају на моделирању излаза на основу улаза у систем, не задржавајући пажњу на описивање физичких процеса у самом систему. Концептуални модели или модели сиве кутије, представљају нешто између претходна два модела.

Линеарност система се исказује кроз линеарност односа променљивих улаза и излаза из систем. Временска променљивост модела је исказана кроз стационарност, односно нестационарност променљивих које се моделирају.

Уколико су променљиве система које се разматрају случајног карактера и имају расподелу вероватноће појаве, онда је модел стохастички, и обрнуто, ако променљиве система немају случајни карактер онда је модел детерминистички.

Стохастички модели су значајни и неопходни при планирању и коришћењу водних ресурса и њихово коришћење се може поделити у следећих пет група активности (Ху, 2002):

#### 1. Предвиђање учесталости екстремних догађаја

Стохастички модели се користе за предвиђање учесталости појаве екстремних хидрометеоролошких догађаја. На основу одабраног стохастичког модела и осмотрених серија праве се синтетичке серије у којима се јављају екстремни догађаји одређене учесталости и која се даље сматра као учесталост која се може јавити у дугачким серијама података.

#### 2. Истраживање правила управљања системом

Синтетичке серије хидролошких података генерисане стохастичким моделом се користе и за проверу предложених правила управљања за испоруку воде из комплексних водопривредних система са више акумулација. На основу синтетичког улаза и предложених правила управљања, одређује се временска и количинска обезбеђеност испоруке воде корисницима, а на основу тога квалитет датог управљања акумулацијама и водопривредним системом. На основу оваквих истраживања, могуће је модификовати и унапређивати правила управљања.

#### 3. Израда краткорочних прогноза

Стохастички модели се користе и за прављење краткорочних прогноза. На основу улазних података о осмотреним вредностима неке хидролошке величине стохастички модел даје као излаз прогнозу појаве дате хидролошке величине за одређени временски период. Ова прогноза се даје на основу процењених параметара модела и интервалима



поверења за дат временски период. Што је временски период прогнозе дужи, то су и интервали поверења шири и већа је неизвесност појаве вредности у прогнози, што је и разлог због чега се користе за краткорочне прогнозе.

#### 4. Продужење осматраних низова регресионом анализом

У пракси се често у неком мањем сливу јавља потреба да се на основу кратког осматреног низа ти низови продуже. На пример, код мањег слива на којем су успостављена мерења протока у периоду од 10 година, а јавила се потреба да се пројектује акумулација са енергетским постројењем и у ту сврху неопходност продужења улазних података. Ако се за те потребе може наћи близак слив на којем постоје мерења хидролошких величина веће дужине са високом корелацијом према посматраном сливу, онда се помоћу регресионе анализе попуњавају недостајући подаци на посматраном сливу са кратким осматреним низом.

#### 5. Формирање дугих синтетичких низова као улаза у систем

Уколико имамо стохастички модел неког хидролошког система који као улаз има низове падавина, а као излаз низове протока, при чему се синтетички низови падавина генеришу задржавајући особине осматреног низа падавина, синтетички низ падавина трансформише се у низ протока. Добијени низ протока се затим може користити за испитивање учесталости појаве екстремних догађаја.

У овом раду се разматра и развија модел за генерисање дугачких синтетичких серија који је апстрактан, математички, емпиријски (модел црне кутије), линеаран, временски непроменљив (стационаран), разматран за цео слив и стохастички. Модел може да се развија за цео систем (слив) или за само један његов део. Модел је намењен генерисању свих хидрометеоролошких величина, а у овом раду се примењује на протоке и падавине. У том смислу, он може да се примени за генерисање само хидролошких синтетичких низова за потребе анализе водопривредних система, само низова синтетичких падавина за потребе улаза за детерминистичке хидролошке моделе, или за генерисање свих релевантних величина за потребе једне целовите анализе.

## **2.2 Историјски развој стохастичких модела за генерисање синтетичких хидролошких низова**

Почетни кораци у моделирању хидролошких серија су направљени још давне 1914. године када је Хејзен (Hazen, 1914) користио низове стандардизованих осматраних протока, дужине 25 до 45 година, са 14 америчких река за формирање низа дужине 300

година. Са овим синтетичким низовима, направио је више сценарија коришћења воде из акумулације, без ограничавања почетне запремине акумулације. Даље је рачунао учесталости прекорачења потрошње воде за сваки од различитих сценарија, што му је послужило за дефинисање потребне запремине акумулације.

Садлер (Sudler, 1927) је генерисао годишње низове протока дужине 1000 година на основу низа осмотрених протока дужине 50 година. Он је вредности осмотрених годишњих протока записао на картама, мешао их и делио без права замене, формирајући на тај начин низове дужине 50 година. Тај поступак је поновио 20 пута и формирао низ од 1000 година. Добијене низове је користио као доток у акумулацију одређене запремине и за различите симулације потрошње добијао трајекторије запремине акумулације. Статистичком анализом резултујућих трајекторија издвајао је одговарајућу потрошњу и стања запремине у акумулацији. На споменути начин Садлер је добио низове дужине 1000 година, али ти низови су садржали само осмотрене вредности протока, што је велики недостатак добијених серија јер се нису могле појавити вредности изван распона осмотрених.

Ови први покушаји генерисања хидролошких серија су вршени без генерисања података са вероватноћом појаве која се очекује из низова већих дужина. Такође, није се обраћала пажња ни на аутокорељационе и крос-корељационе особине низова, на шта је пажња усмерена након наглог развоја случајних процеса и примене стохастичких модела у хидрологији 50-тих година XX века.

Први модели за стохастичко генерисање хидролошких серија су направљени 60-тих година прошлог века са развојем првих ауторегресивних модела (Thomas & Fiering, 1962). У свом раду, Томас и Фиринг су на основу осмотреног узорка дужине 32 године на 5 мерних станица направили модел који је разматрао месечне протоке и генерисао 10 серија од 52 године. Значај модела је у томе што су они у моделу репродуковали, поред средње вредности и стандардне девијације месечних протока, коефицијенте аутокорељације између месечних протока и коефицијенте крос-корељације између месечних протока на различитим станицама.

Маталас је, такође, развио ауторегресивни (AR) модел првог реда за примену на више мерних места (Matalas, 1967), којим је обезбедио аутокорељацију и крос корелеацију између серија података о протоцима.

Поред споменутих аутора, AR моделе су развијали и многи други аутори (Yevjevich, 1963; Pegram & James, 1972; Kelman, 1977; Salas, et al., 1980) итд. AR модели се најчешће користе за годишње серије података о протоцима на једном или више мерних

места (Salas & Pielke, 2003). Предност AR модела је њихова једноставност, док је велики недостатак њихова немогућност репродукције коваријансе реда вишег од реда модела. На пример, ако су у моделу коришћени месечни подаци, све месечне статистике ће бити добро репродуковане као и коефицијенти корелације између месеци, али састављењем месечних података у више година не репродукују се добро осмотрене серије јер недостаје аутокорелација између крајева и почетака година.

Бокс и Џенкинс (Box & Jenkins, 1976) су дали велики допринос давањем научних основа модела временских серија, што је условило развој великог броја различитих модела намењених различитим типовима временских серија. Они су 70-тих година развили ауторегресивни модел покретних средина или ARMA (Auto Regressive Moving Average) модел као стационарни модел о којем су писали Carlson, et al. (1970) и O'Connell (1974). Како су AR и MA модели специјални случајеви ARMA модела, у зависности од тога која компонента у моделу надвладава, моделирају се краткорочне или дугорочне зависности података (Hipel & McLeod, 1994). Уколико је то AR модел, онда он добро репродукује краткорочне зависности, док MA модел репродукује дугорочне зависности. Недостатак ових модела јесте велики број параметара који морају да се процене као и немогућност истовременог моделирања и краткорочних и дугорочних зависности међу подацима временских серија.

Бокс и Џенкинс (Box & Jenkins, 1976) су развили и интегрални ауторегресивни модел покретних средина или ARIMA (Auto Regressive Integrated Moving Average) модел за моделирање нестационарних временских серија. ARIMA модел је настао као алтернатива ARMA моделу за моделирање месечних, недељних или дневних података у случајевима када ARMA модел захтева уклањање нестационарности и има велики број параметара и при најнижем реду модела.

Један од недостатака приступа Бокса и Џенкинса који се често спомиње у литератури, а који ограничава коришћење овог приступа, јесте тај да квалитет резултата зависи од стручности аналитичара који развија модел (Salas, et al., 1980).

Недостатак „дуге меморије“ у моделима које су развијали Бокс и Џенкинс разни аутори су покушали да превазиђу новим типом модела. Један број аутора је развијао моделе фракционог Гаусовог шума (FGN), који су описани у радовима Mandelbrot & Wallisa (1968) и Matalasa & Wallisa (1971). Овај тип модела је направљен са намером моделирања процеса са вишегодишњим зависностима, што га је у то време чинило значајним јер је то био први модел који је могао да успешно моделира временске серије у којима је испољен Хурстов (Hurst) феномен, тј. појава нагомилавања водних и сушних

година. Неки аутори су у својим радовима интерпретирали Хурстов феномен као да је Хурст дефинисао принцип и понашање ове појаве, иако је сам Хурст наглашавао да је то емпиријска веза на основу великог броја података, а да вредност тзв. Хурстовог коефицијента  $h$  може да варира (Јевђевић, 1974). Коефицијент  $h$  представља експонент у релацији  $E[R_n^{**}] \propto n^h$  где је  $n$  укупан број података а  $R_n^{**}$  представља разлику између максималне и минималне ординате сумарних кривих стандардизованих одступања протока од вишегодишњег просека. За низове независних података, при великим вредностима  $n$  коефицијент  $h$  асимптотски тежи 0.5, док код дугачких осмотрених серија овај коефицијент има вредности око 0.7.

У слично време настао је и модел изломљених линија (*broken line process*) (Мејја, et al., 1972; Мејја, et al., 1974) којим су аутори такође обухватили дугачку меморију процеса. Ови модели са којима се постиже дугорочна зависност у временској серији захтевају велики број параметара који требају да се оцене.

Валенсија и Шаке (Valencia & Schaake, 1973) су предложили модел временске декомпозиције података којим би се генерисали нпр. годишњи подаци уз подешавање дугорочних зависности, а затим би се над таквим подацима вршила декомпозиција на сезонске, месечне, десетодневне, недељне и дневне податке уз задржавање свих зависности које имају осмотрене серије. Аутори наводе да се линеарна зависност између узастопних осмотрених података у потпуности преноси на генерисане податке. Модел задржава корелације између различитих сезонских утицаја у току године, али не репродукује корелацију са крајева године и почетака следеће године. Оригинални модел није могао да задржи адитивност декомпонованих елемената па је касније модел проширен како би се превазишао споменути проблем (Мејја & Rousselle, 1976), мада допуњен модел није увек добро репродуковао статистике које је требао да задржи (Војилова, 2004).

У почетном периоду наглог развоја модела временских серија у хидрологији 70-тих и 80-тих година, углавном су развијане бројне варијације споменутих типова модела, у којима је наглашавана стационарност, нестационарност, вишедимензионалност и сличне особине модела, и то најчешће из велике фамилије модела Бокса и Џенкинса. Само неки од модела описани су у радовима (Hipel, et al., 1977; McLeod, et al., 1977; McLeod & Hipel, 1978; Hipel & McLeod, 1978; Hipel & McLeod, 1978; Meija, et al., 1974; Rao, et al., 1982; Salas, et al., 1980; Salas, et al., 1985; Salas, et al., 1981; Salas, 1993; Obeysekera & Salas, 1986; Salas, 1993; Yakowitz, 1973) итд. Овде ће се само споменути неки од тих модела: PAR (периодични AR модел), PARMA (периодични ARMA модел),

SARMA (сезонски ARMA модел), SARIMA (сезонски ARIMA модел), GAR (генерализовани AR модел), CAR (континуални AR модел), FARIMA (фракциони ARIMA модел), и слично.

Почетком 90-тих и нарочито након 2000-те године, нагли развој персоналних рачунара условио је и развој разних програма и програмских решења што је омогућило истраживачима да уведу другачије приступе у моделирању временских серија. Ово се пре свега односи на развијање варијанти непараметарских модела и модела заснованих на вештачким неуронским мрежама, мада је у последњој декади видљив развој и других модела од којих је најчешћи модел таласића (*wavelet*).

О стохастичким симулационим моделима објављени су бројни радови, а добар преглед о томе су дали Сринивас и Сринивасан (Srinivas & Srinivasan, 2005). У споменутом раду каже се да идеални модел за стохастичку симулацију на више мерних места и са вишесезонским нивовима података треба да задржи статистике осмотреног низа, структуру зависности (линеарну и нелинеарну), маргиналне расподеле на различитим временским скалама, на сваком мерном месту, крос-корелацију између симулираних мерних места као и збирне карактеристике (сезонске, годишње...) на самом мерном месту и између симулираних мерних места. Аутори су у раду приказали хибридни *bootstrap* модел са покретним блоковима, који се заснива на формирању великог броја серија из осмотрених података, тако да нови нивои у потпуности задржавају осмотрену расподелу. Модел са покретним блоковима је формиран са идејом задржавања корелационе структуре осмотрене серије на тај начин да се уместо узорковања појединих података из скупа осмотрених података (ресампловања), узоркују блокови осмотрених података. Овај модел, поред тога што има напред наведене особине, репродукује појаву сушних и водних периода током времена у средњим годишњим протоцима. Ово је био један од ређих покушаја у литератури да се прикажу резултати зависности модела „у свим правцима“: на нивоу мерних места у изабраном временском кораку, сумарно на нивоу године за свако мерно место и на нивоу средњих годишњих података, са аутокорелацијом и кроскорелацијом на мерним местима за избрани временски корак (месец).

Метода К најближих суседа (K-NN, *K nearest neighbours*) је описана у великом броју радова (Lall & Sharma, 1996; Rajagopalan & Lall, 1999; Sharif & Burn, 2006; Sharif & Burn, 2007; Prairie, et al., 2006; Nowak, et al., 2010). Ова метода се, такође, заснива на узорковању из скупа осмотрених података (ресампловању). Прво се из скупа осмотрених података бира нека референтна тачка око које се генеришу (опет из скупа осмотрених

података) нове тачке по принципу најближег Еуклидовог (геометријског) или Махаланобисовог (корелационог) растојања. На основу претходно постављених услова бира се тачка која затим постаје следећа референтна тачка а поступак се наставља. Највећи недостатак K-NN методе, као и групе *bootstrap* метода, јесте немогућност генерисања података изван опсега осматраних.

Лал и Шарма (Lall & Sharma, 1996) су међу првима истраживали K-NN методу. Они су резултате проверавали узорковањем (ресампловањем) из три скупа података за реку Weber у Јути (САД): 1. осматрени узорак од 84 године месечних података, 2. узорак добијен генерисањем 500 података AR1 моделом и 3. узорак величине 200 података добијених генерисањем SETAR моделом (self-exciting threshold autoregressive model). У раду су разматрали и примену језгра које при ресампловању омогућава добијање података између осматраних вредности, као и делимично екстраполовање изван осматреног опсега. Лал и Шарма су показали ефикасаност K-NN методе која се може користити због добре структуре зависности променљивих и комплексних веза између променљивих које је тешко постићи традиционалним методама. Аутори истичу да коришћење оваквог непараметарског метода има доста предности у односу на параметарске методе, нарочито при коришћењу са дневним подацима.

Раџагопалан и Лал (Rajagopalan & Lall, 1999) су разматрали коришћење K-NN методе за генерисање 6 типова метеоролошких података (сунчева радијација, максимална температура, минимална температура, просечна брзина ветра, просечна температура појаве росе и падавине) на примеру осматраних дневних података у периоду од 1961-1991, на станици Salt Lake City у САД. Они су направили 25 симулација и на основу добијених резултата су истакли да овај модел добро репродукује међусобне зависности између променљивих као и да се оваквим моделом превазилази потреба да се формирају засебни модели код падавина: једни за количину падавина, а други за одређивање појаве падавина. Такође, нагласили су недостатке K-NN методе који су наведени у претходном пасусу, а односе се на немогућност генерисања података различитих од осматраних, које су покушали да превазиђу коришћењем новог језгра за ресампловање података.

Шариф и Бурн (Sharif and Burn 2006; 2007) су користили K-NN методу за генерисање метеоролошких променљивих и формирање различитих сценарија климатских промена. У радовима су користили метеоролошке податке са горњег дела слива реке Темзе у Онтарију, Канада. У оба рада су користили податке о падавинама и максималним и минималним температурама са 15 метеоролошких станица, за период осматрања од 1964-2001. године. Као и аутори претходна два наведена рада, Шариф и

Бурн су проширили K-NN методу за генерисање вредности падавина изван опсега осмотрених, као и за генерисање вредности различитих од осмотрених података. Ово су постигли додавањем случајне вредности на вредност коју би поновио K-NN модел, али тако да се на крају задрже статистичке особине осмотрене величине. Аутори наводе да се овом методом лако могу генерисати подаци за различите климатске сценарије и на тај начин разматрати много екстремнији услови од оних осмотрених. Такође, наводе да се моделом задржавају статистике осмотрених узорака, њене аутокорелационе и крос-корелационе зависности.

Прери и сарадници (Prairie et al., 2006) су приказали модификовану K-NN методу. Они су формирали међусобне зависности података о протоцима посматраног месеца са подацима из претходног месеца кроз које је затим одређена оптимизирана линија. На основу ове линије, за неку референтну тачку, могуће је одредити њеног најближег суседа. Аутори су модел применили на сет месечних података о протоцима са реке Колорадо у САД у периоду од 1906-1995. године. Као недостатак модела наводи се немогућност репродукције зависности података на прелазима из године у годину.

Методу таласића (*wavelets*) као методу за генерисање протока су међу првима применили Bayazit & Aksoy (2001) и Aksoy (2001) на годишњим и месечним протоцима на једној реци у Турској и једној у САД-у. Поступак генерисања података је такав да се прво изврши декомпозиција података, при чему се издваја случајна компонента, сезонска компонента, средња вредност и стандардна девијација. Затим се свака од компоненти моделира вејвлетима, тако да се након агрегације вејвлета могу генерисати случајни подаци који одговарају осмотреним подацима. Као предност ове методе при генерисању низова наводи се то да нема потребе за избором одговарајућег стохастичког модела нити за оценом параметара (што је својствено параметарским моделима), а као недостатак модела се наводи да се коефицијенти асиметрије осмотрених серија не могу репродуковати. Као могућност превазилажења овог недостатка, предлаже се нормализација података пре поступка декомпозиције за потребе модела вејвлета.

Ünal et al. (2004) су поредили резултате генерисања методом вејвлета са другим методама на примеру осмотрених месечних података о падавинама са станице Goztepe у Истанбулу током 64 године. Разматрали су резултате добијене генерисањем 100 серија за сваки од различитих модела: ауторегресивног модела (AR), модела Томаса и Фиринга (TF), двостепеног модела (*two-tier*, TT) у коме су годишње вредности генерисане методом таласића а затим месечне вредности методом Томаса и Фиринга, методом фрагмената (F), модификованом методом фрагмената (MF) и методом таласића (W).

Закључили су да је недостатак параметарских метода AR и TF тај што захтевају да временске серије прате неку расподелу вероватноће, као и њихово уклапање на месечном а затим на годишњем нивоу. Код непараметарских метода (TT, F, MF, W) је показано да резултати не зависе од типа расподеле којем подаци припадају и да метод таласића може представљати добру алтернативу класичним моделима у генерисању годишњих и месечних хидрометеоролошких података, упркос лошој репродукцији коефицијента асиметрије у подацима ако се подаци претходно не нормализују.

Ванг и сарадници (Wang et al., 2011) су применили методу таласића за генерисање дневних серија протока на основу осмотреног узорка дужине 53 године за станицу Pingshan на реци Jinsha у Кини. Као предности предложене методе наводе: да се методом може генерисати велики број дневних секвенци које су различите од осмотрених а статистички су сличне осмотреној серији, да не зависи од типа разматране величине, стационарности, несатационарности, асиметрије, нормалности осмотрене серије и да задржава структуру зависности осмотрене серије.

Поред ових примена метода таласића, било је и истраживања са хибридниим методама, односно комбинацијом метода таласића и ауторегресивних модела (WARM модел - Wavelet Autoregressive Model). Прво истраживање су изложили Kwon et al. (2007), где су прво методом таласића извршили декомпозицију временских серија на њене компоненте, а затим сваку од тих компонената моделирали ауторегресивним моделом. На крају су добијени резултати агрегирани у генерисану временску серију. Модел је примењен на временским серијама температуре, падавина и температуре површине мора. Навешће се неке особине WARM модела: модел задржава маргиналне расподеле временске серије и њене статистике као што су средња вредност, стандардна девијација и аутокорелација са помаком првог реда; модел боље репродукује спектар серије у односу на традиционалне моделе (AR, ARMA, PAR,...); WARM модел може да репродукује вишегодишњу перзистенцију и цикличан карактер осмотрених серија.

Исти модел су користили Nowak et al. (2011) применом на податке о годишњим протоцима на више мерних места, са значајним нестационарним особинама, унапређујући претходни модел који су развили Квон и остали (Kwon et al., 2007). Побољшање модела се огледа у додатном кораку при моделирању који омогућава симулацију података са нестационарним карактеристикама што омогућава моделирање перзистенције водних и маловодних периода, а који су битни у планирању и управљању водопривредним системима. Такође, извршен је покушај да се вејвлетима генеришу



протоци на више мерних места тако што се генерисане серије на разматраној станици просторно дисагрегирају узводно од разматране станице.

У доступној литератури су углавном приказивани модели развијани за примену са подацима о протоцима или модели за примену са метеоролошким подацима, најчешће падавинама. Код података о падавинама је специфично то што ови подаци могу имати нулте вредности на десетодневном, недељном и дневном нивоу (у аридним срединама и на месечном, па и на годишњем нивоу). Такви процеси представљају прекидне процесе које су приказали Јаковиц (Yakowitz, 1973) и Келман (Kelman, 1977). Поред количине падавина, код прекидних процеса потребно је моделирати и појављивање падавина у времену. За то се често користе два типа модела: модели засновани на ланцима Маркова и модели засновани на процесима обнављања.

Модели за генерисање појаве падавина имају своје почетке још од 1852. године, када је Quetelet известио о постојању перзистенције у узастопним кишним и сувим данима у Бриселу за период од 1833-1850. Без даљег улажења у историју моделирања падавина, први модел појаве падавина заснован на ланцима Маркова првог реда предложили су Габријел и Њуман (Gabriel & Neumann, 1962), према којем вероватноћа појаве падавина у било којем дану зависи само од тога да ли је претходни дан био са падавинама или без њих. Овај модел је потпуно дефинисан са две условне вероватноће, које зовео прелазне вероватноће:

$$p_{01} = P(\text{падавине у дану } t \mid \text{без падавина у дану } t - 1)$$

$$p_{11} = P(\text{падавине у дану } t \mid \text{падавине у дану } t - 1)$$

(значење индекса 0 и 1: 0 представља дан без падавина, а 1 представља дан са падавинама). Како су могућа само два стања у посматраном дану, имамо и две комплементарне вероватноће  $p_{00} = 1 - p_{01}$  (дан без падавина после дана без падавина) и  $p_{10} = 1 - p_{11}$  (дан без падавина после дана са падавинама).

Велики је број аутора који су користили моделе ланаца Маркова првог реда, а касније и другог или вишег реда. Модели су примењивани на подацима широм света, а резултати су зависили од климатског подручја и дужини низова осмотрених података. Сматра се да у овом раду није неопходно улазити даље у преглед литературе моделирања метеоролошких величина. Заустављајући се на моделима од интереса за овај рад, наводи се да су добар преглед споменутих модела дали Вилкс и Вилби (Wilks & Wilby, 1999) и Срикантан и МекМехон (Srikanthan & McMahon, 2001).

Модели за генерисање количине падавина су слични моделима за генерисање протока осим што се ради о прекидним процесима, па се њихово моделирање врши из

два дела: најпре се процењује вероватноћа  $p_0$  појаве нулте вредности (тј. релативна учесталост бескишних временских интервала), док висина падавина у кишним интервалима прати неку расподелу вероватноће  $F_1$ . Функција расподеле висине падавина се онда може приказати изразом:

$$F(x) = p_0 + (1 - p_0) \cdot F_1(x)$$

Како је моделирање висине падавина у делу расподеле за вредности различите од нуле идентично моделирању протока, у даљем тексту се неће даље приказивати хронолошки развој таквих модела, јер важи све што је изложено за протоке.

У последње време се у литератури често јављају истраживања о моделирању појаве падавина непараметарским методама. Тако су Харолд и сарадници (Harrold et al., 2003a; Harrold et al., 2003b) анализирали примену непараметарских метода у моделирању појаве и количина дневних падавина на основу осмотреног узорка дужине 140 година за град Сиднеј. Модел за симулацију појаве дневних падавина (Harrold et al., 2003b) представља K-NN метод за ресампловање података уз додатни Марковљев модел са предикторима за одређивање појаве падавина. Овај модел задржава дугорочне и краткорочне особине временских серија, односно модел при генерисању обухвата сезонске, годишње и вишегодишње карактеристике осмотрених серија података. Модел за количину дневних падавина (Harrold et al., 2003a) заснива се на непараметарској оцени условне густине вероватноће кернел расподелама, којима су добро репродуковали краткорочне карактеристике. Аутори су повезали ове моделе и на тај начин комбинованим моделом репродуковали, поред краткорочних карактеристика, и дугорочне карактеристике осмотрених серија.

Модели за генерисање метеоролошких величина у литератури се најчешће називају генераторима времена (*weather generators*). У скорије време често се развијају стохастички генератори времена. Један од таквих генератора приказан је у радовима (Srivastav & Simonovic, 2014a; Srivastav & Simonovic, 2014b), којим се генерише више променљивих величина на више мерних места. Генератор користи принцип максималне ентропије и *bootstrap* методу и има могућност репродукције статистика осмотрених величина, задржавајући просторну и временску структуру зависности међу подацима. Као *bootstrap* методу, аутори су користили K-NN методу за генерисање података, док су модел тестирали на дневним подацима са укупно 22 станице на сливу горње Темзе у Онтарију, Канада, са три хидрометеоролошке величине (падавине, максимална температура, минимална температура).

Иако још увек не постоји општеприхваћени универзални хидролошки модел којим се може извршити генерисање различитих типова хидролошких променљивих (протоци, падавине, температура,...), новији покушаји се, углавном, базирају на непараметарским методама. Поред наведених непараметарских метода, истраживања која је у радовима приказао Илић (Ilich & Despotovic, 2008; Ilich, 2009; Ilich, 2014) показују веома значајне резултате у генерисању хидролошких величина. Овај модел је представљао основу за развој методологије генерисања прекидних и непрекидних временских серија у овој докторској дисертацији и детаљно је приказан у поглављу 0. Серије података генерисане овим моделом задржавају све статистичке особине осматраних серија, заједно са статистикама агрегираних низова на годишњи ниво, у потпуности репродукује корелациону структуру осматраних низова, укључујући и зависности на прелазу из године у годину, као и зависности агрегираних годишњих података. Овај модел је мултиваријантни, што значи да се могу генерисати и различите променљиве, чије се међусобне зависности пресликавају у генерисаним серијама. Поред тога, уколико се у генеришу подаци о падавинама није потребно засебно моделирање количине и распореда појављивања падавина у времену. У овом моделу се и количина и распоред појаве падавина у потпуности репродукују кроз исти поступак који се спроводи и код генерисања протока.

## **2.3 Основни појмови о временским серијама**

Временске серије чине нумеричке вредности или мерења било које променљиве величине која се мења током времена. Такође, поред наведене, често се среће и дефиниција да је временска серија низ мерења у времену прикупљених у једнаким временским интервалима. Временске серије се могу састојати од вредности променљивих у дискретном тренутку времена, вредности које су осредњене у датом интервалу времена или од континуално осматраних вредности током времена. Уобичајени интервали времена у којима се користе временске серије у хидрологији јесу: сат, дан, недеља, месец, сезона и година.

### **2.3.1 Класификација хидролошких временских серија**

Класификација хидролошких временских серија се може извршити на више категорија у зависности од различитих и бројних фактора а најприкладнију

класификација хидролошких временских серија је дао Салас (Salas, 1993). Према његовој класификацији дате су следеће категорије хидролошких временских серија:

- **Једноструке или униваријационе временске серије** (*single time series* или *univariate series*) представљају временске серије једне хидролошке величине на једном мерном месту.
- **Вишеструке или мултиваријационе временске серије** (*multiple time series* или *multivariate series*) чини скуп мерења неке величине на више мерних места. Такође, уколико се на једном мерном месту мери више хидролошких величина (падавине, протоци, температура) онда за то мерно место имамо вишеструку временску серију.
- **Некорелисане и корелисане временске серије.** За један низ за који постоји зависност у времену између вредности кажемо да је аутокорелисан, серијски корелисан или корелисан у времену. Уколико не постоји корелација кажемо да је серија некорелисана или да је независна. Неке хидролошке временске серије имају значајну аутокорелацију која указује нпр. код протока, на ефекат задржавања, односно акумулирања воде.  
Уколико посматрамо две временске серије, нпр. протока, на два мерна места и између њих постоји зависност, кажемо да између њих постоји крос-корелација.
- **Прекидне временске серије** (*intermittent time series*) у хидрологији су оне временске серије које могу да садрже и нулте вредности у низу. Нпр. падавине осмотрене на једном мерном месту представљају прекидну континуалну временску серију. Дискретне временске серије падавина могу, такође, да буду прекидне за мањи временски корак (нпр. часовне, дневне и недељне вредности падавина а у сушним регионима и месечне вредности могу да буду са нултом вредношћу) док месечне и годишње обично нису прекидне.
- **Бројане временске серије** (*counting time series*). Разматране променљиве могу бити резултат бројања појаве неког хидролошког догађаја. Као пример се може узети број кишних дана у месецу током периода осматрања а као резултат имамо низ целобројних чланова.
- **Временске серије са фиксним и променљивим временским интервалима.** У хидрологији се временске серије најчешће дефинишу у једнаким временским интервалима, где се вредности бележе сваког сата, сваког дана, сваке седмице итд. током периода осматрања.

- **Стационарне и нестационарне временске серије.** Временске серије у хидрологији се сматрају стационарним уколико у њима нема тренда, скока или цикличности, односно ако се током времена не мењају статистички параметри као што су средња вредност и варијанса.

### 2.3.2 Особине хидролошких серија

Статистичке карактеристике временске серије се рачунају на основу доступног узорка и као такве представљају оцену карактеристика целе популације. Најчешће се оцењују статистичке карактеристике: мере локације (средња вредност узорка, медијана), мере варијације (стандардна девијација), мере асиметрије (коэффициент асиметрије, *skewness*) и мере спљоштености (коэффициент спљоштености, *kurtosis*).

Од мера локације, свакако је најзначајнија средња вредност или очекивање низа  $E(X_t)$  која се најчешће оцењује аритметичком средином  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$ , где  $n$  представља број података у узорку.

Поред средње вредности, као мера локације, користи се и медијана односно вредност која дели посматрани низ на два једнака дела, односно, представља вредност од које је 50% вредности у низу и мање и веће. Медијана се сматра робусном оценом средње вредности низа јер је мање осетљива на постојање изузетака у низу који могу значајно да утичу на вредност аритметичке средине.

Мера одступања низа од средње вредности је дисперзија или варијанса  $\sigma^2$ . Корен дисперзије је стандардна девијација и она представља одступање у димензији променљиве. Варијанса је други момент расподеле, односно  $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ . Непристрасна оцена стандардна девијација узорка се рачуна према обрасцу  $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ . У присуству изузетака ова мера одступања постаје нестабилна и повећава јој се вредност (Machiwal & Jha, 2012). Поред ове мере постоје и друге мере одступања низа, као што су размак између квартила, коэффициент варијације и сл.

Трећи моменат расподеле променљиве је мера асиметрије расподеле у односу на средњу вредност низа. У хидрологији променљиве од интереса по правилу имају позитивну асиметрију што указује на то да имају дугачак горњу (десну) страну расподеле. Асиметрија се описује као бездимензионални трећи моменат преко коэффициента асиметрије  $C_s = \frac{E[(x_i - \bar{x})^3]}{\sigma^3}$ , док је његова непристрасна оцена  $C_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ .

Овде свакако треба додати још једну значајну карактеристику временских серија а то је коваријанса. Коваријанса одражава јачину везе између две променљиве и дефинише се изразом

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

У једној временској серији коваријанса постаје аутоковаријанса, која показује повезаност узастопних чланова серије.

### 2.3.3 Стационарне временске серије

Кажемо да је временска серија слабо стационарна или стационарна у ширем смислу ако су њени моменти до другог реда константни и ако њена коваријанса не зависи од два временска пресека већ само од њиховог размака. Математички то можемо написати (Mališić 1989):

$$E(X_t) = \mu$$

$$Var(X_t) = \sigma^2$$

$$Cov(X_t, X_{t+l}) = C(l)$$

Кажемо да случајни процес има строгу стационарност ако су све његове коначнодимензионалне расподеле инваријантне у односу на транслацију времена (Малишић, 1989).

У пракси, међутим, није увек неопходна строга стационарност процеса већ се претпоставља нека слабија форма стационарности. У хидрологији се моменти трећег и виших реда ретко разматрају због непоузданости њихових оцена, док се сматра да је слаба стационарност тј. стационарност у моментима до другог реда најчешће довољна за анализу.

Аутоковаријанса са временским помаком  $l$  између чланова низа се дефинише као:

$$Cov(X_t, X_{t+l}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)]$$

Бездимензионални показатељ аутоковаријансе је коефицијент аутокорељације за помак  $l$ :

$$\rho(X_t, X_{t+l}) = \rho(l) = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t+l} - \mu)]}{\sigma^2}$$

Аналогно се дефинише и коефицијент крос-корељације за две временске серије  $X$  и  $Y$  са помаком  $l$ :

$$\rho_{XY}(X_t, Y_{t+l}) = \rho_{XY}(l) = \frac{E[(X_t - \mu_X)(Y_{t+l} - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Зависност коефицијената аутокорејације од временског помака  $l$  представља аутокорејациону функцију (ACF). Аутокорејациона функција се оцењује за максимални број помака за који се препоручује да буде око  $l = \frac{n}{4}$  (Box & Jenkins, 1976). Дијаграм узорачких коефицијената аутокорејације  $r_l$  приказан у односу на помаке  $l$  називамо корелограм. Уколико је  $r_l \approx 0$  за  $l \neq 0$ , онда се ради о некорелисаној серији и за тај процес кажемо да је чисто случајни процес. Ако имамо случај да је  $r_l \neq 0$  за неке вредности  $l \neq 0$ , али да  $r_l \approx 0$  за  $l > \tau$  кажемо да је серија са кратком меморијом до  $l = \tau$ . У осталим случајевима имамо аутокорејисану серију.

### 2.3.4 Трансформација података

Трансформација података је често коришћена техника за нормализацију података, када расподеле осмотрених података имају изражену асиметрију и одступање од нормалне расподеле као и код „елиминације“ изузетака у низовима. Нормализација података се користи и приликом анализе и тестирања јер се тестови углавном заснивају на претпоставци да подаци припадају нормалној расподели.

Трансформације података се користе да би се код података постигло да (Helsel & Hirsch, 2002):

1. Постану симетричнији (да се умањи асиметрија),
2. Постану линеарнији,
3. Постану константнији у варијанси (да се умање одступања).

Најчешће коришћене трансформације података јесу логаритамска трансформација, трансформација степеновањем података, трансформација Wilson-Hilferty-ја и Воx-Сох-ова трансформација.

Логаритамска трансформација се може писати у следећем облику:  $y_i = \log(x_i - c)$  где је  $x_i$  податак из оригиналног низа а  $c$  параметар ограничења са доње стране, где за  $c = 0$  добијамо обичну логаритамску трансформацију.

Слично, трансформација степеновањем има општи облик  $y_i = (x_i - c)^b$  где је  $b$  параметар и обично је  $b < 1$  (најчешће  $\frac{1}{2}$  или  $\frac{1}{3}$ ).

Вох-Сох-ова трансформација има следећи облик

$$y_i = \begin{cases} \frac{(x_i^\lambda - 1)}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(x_i) & \lambda = 0 \end{cases}$$

где је  $\lambda$  параметар које се процењује тако да асиметрија новог низа  $y_i$  постане 0.





## 3 ГЕНЕРИСАЊЕ ХИДРОЛОШКИХ НИЗОВА

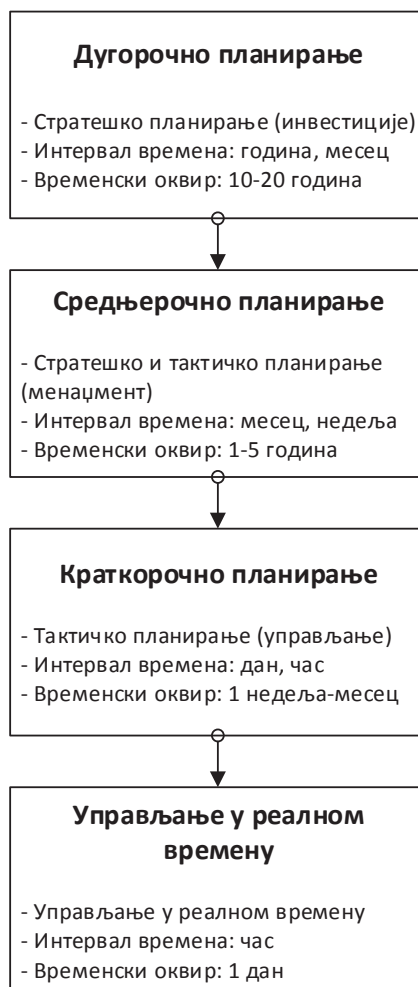
### 3.1 Значај синтетичких хидролошких низова

Као што је речено у уводу, генерисању хидролошких временских серија се приступа пре свега из разлога формирања дугачких серија података које ће имати екстремније услове од оних који се могу наћи у осмотреним низовима и са те стране омогућити одређену обезбеђеност у процесу пројектовања водопривредних објеката и система. Поред пројектовања, генерисане серије се користе и за потребе дефинисања циљева и њихове провере у процесу управљања водопривредним објектима и системима, где су, поред екстремних података, значајни и подаци о дуготрајним сушнијим периодима када се проверавају управљачке одлуке.

Једна од основних претпоставки је да се хидролошке временске серије при моделирању сматрају стационарним. Стационарним се сматрају оне временске серије чије се статистичке карактеристике не мењају током времена. Ово би значило да средњи годишњи протоци, који у различитим годинама имају различите вредности, у два дужа и једнака временска интервала имају једнаку средњу вредност, односно приближно једнаку средњу вредност.

Генерално, може се рећи да се за различите нивое планирања у водопривреди користе и различити временски интервали за које се врши генерисање (слика 2). На пример, за праћење квалитета воде и у еколошким разматрањима, као и за појаву поплавних таласа (нарочито на мањим сливовима) и сл., серије дневних података имају већи значај. Месечни временски корак се најчешће користи за потребе дефинисања капацитета акумулације. Недељни или десетодневни подаци могу бити значајни у хидроенергетици. Уколико се захтева оптимално управљање неком акумулацијом или системом акумулација за потребе енергетике, тј. коришћење водних снага, може се рећи да су оптималне одлуке резултат процеса који садржи делове модела са различитим временским оквирима. Тако се за дугорочно планирање користе годишњи или месечни подаци, на основу којих се доноси стратешка или тактичка политика управљања системом. Као резултат донетих дугорочних одлука, дају се гранични услови за ниже нивое планирања – за средњорочне и краткорочне временске оквире, за које се најчешће користе од недељних до дневних података. На крају, за управљање у реалном времену

користе се часовни подаци и на основу њих се доносе одлуке о расподели, оптерећењу постројења и сл.



Слика 2 – Различити временски интервали у подацима за различите временске оквире управљања

### 3.2 Методе генерисања хидролошких низова

Основна разлика у методама које се примењују за генерисање синтетичких низова је између метода за генерисање серија са или без аутокорељације. За временски независне серије, за које се примењују стандардне статистичке методе које подразумевају рад са простим случајним узорцима, генерисање се своди на узорковање из расподеле вероватноће за коју се сматра да најбоље описује осмотрене податке. Ове методе су описане у одељку 3.4.

За временски зависне серије поступак генерисања је сложенији јер се мора узети у обзир и аутокорељација серије, па се примењују методе анализе временских серија и случајних процеса. Најсложенији случај је када је потребно генерисати низове више променљивих (нпр. протоке на више хидролошких станица или протоке и падавине са

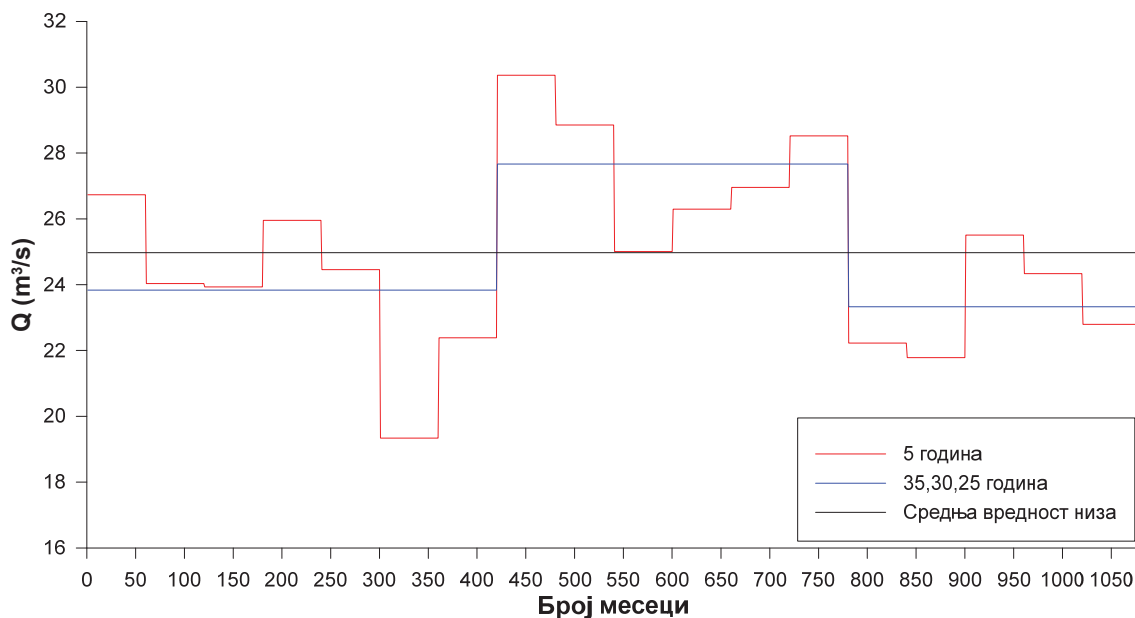
више станица), када је потребно узети у обзир и крос-корелацију између станица. Велики број модела за генерисање хидролошких временских серија је заснован на моделима случајних процеса, а нарочито на моделима временских серија (из групе ARMA модела). Овај приступ је описан у одељку 3.5. Новије непараметарске методе генерисања временских серија су описане у одељку 3.6.

У хидрологији још увек нема неког општеприхваћеног модела који би био способан да ради са различитим типовима променљивих, нпр. протоци, падавине, температура, и сл. На основу раније дате класификације временских серија може се претпоставити сложеност коју модел треба да репродукује. На пример, код моделирања протока на више мерних места, потребно је да модел буде способан да репродукује: основне статистичке карактеристике за временски корак за који се врши моделирање (дан, недеља, месец), основне статистичке карактеристике на нивоу године, да екстраполује крајеве расподела променљивих за тражене вероватноће појаве за временски корак за који се врши моделирање (дан, недеља, месец) а то ће условити и екстраполацију на нивоу године, аутокорелационе и крос-корелационе коефицијенте за временски корак за који се врши моделирање (дан, недеља, месец), аутокорелационе и крос-корелационе коефицијенте на нивоу године, распоред појава сушних и водних периода током године (репродукција сезонских карактера хидролошких временских серија) или код моделирања падавина на дневном нивоу потребно је репродуковати и распоред појаве падавина, распоред појаве узастопних падавина и сушних дана као и њихову дужину и интензитет, итд.

### 3.3 Принципи за генерисање временских серија

Генерисање временских серија има за циљ да се на основу осматрених серија репродукују основне статистичке карактеристике, односно да генерисане серије „личне“ на осматрене серије. Овде се поставља питање: које статистичке карактеристике модел треба да репродукује и како те карактеристике треба тумачити и разумети (Salas, et al., 1980). Одговор на ово питање је тешко дати, пре свега имајући у виду да један осматрени низ од  $N$  година осматрања представља само једну реализацију процеса који се анализира, што значи да нека друга реализација истог процеса и исте дужине осматрања од  $N$  година може имати потпуно другачије статистичке карактеристике од осматрене серије. То значи и да је оцена статистичких карактеристика низова случајна променљива и као таква неизвесна. Као илустрација (слика 3), приказане су средње вредности протока

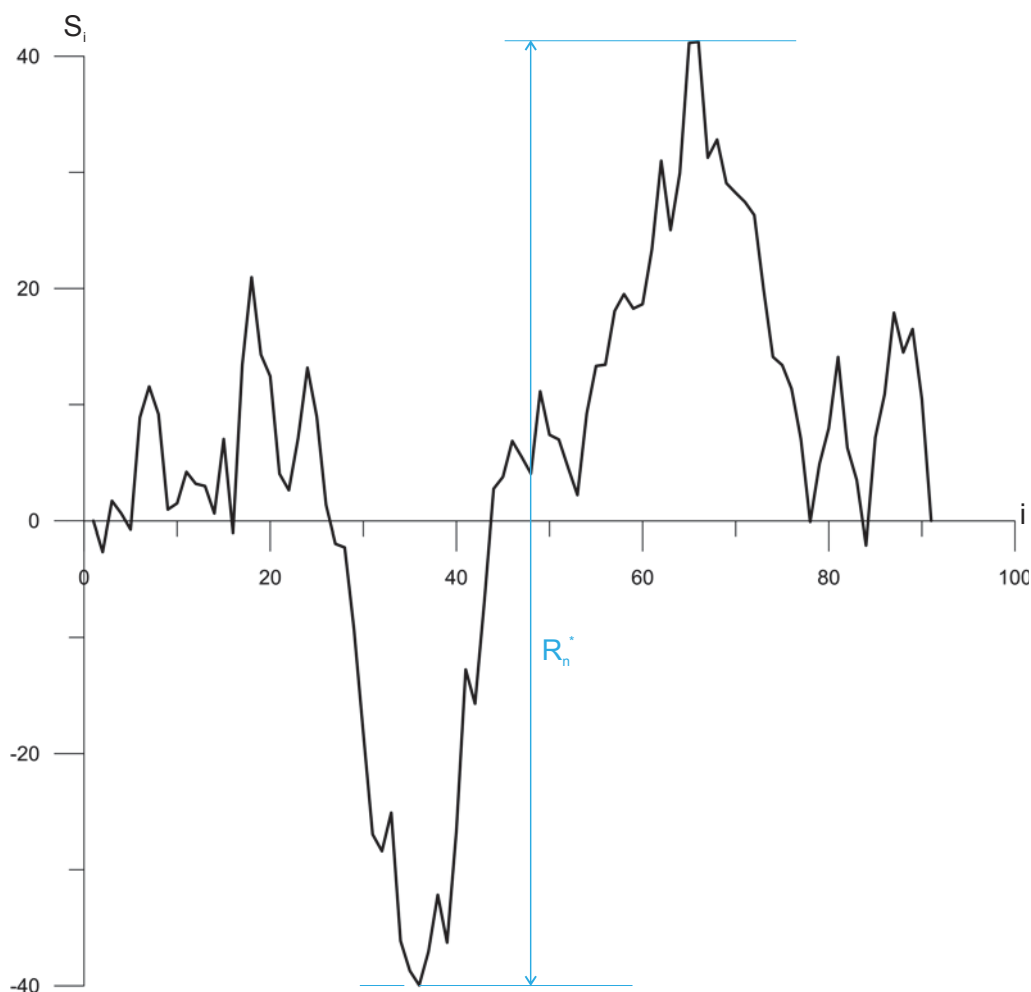
за делове низа различите дужине на једној од хидролошких станица на реци *St. Mary* у Канади за период од 1912-2001. године. Срачунате су средње вредности протока за 5-годишње периоде, за три периода од 35, 30 и 25 година, као и средња вредност целог низа. Дакле, поред избора периода осматрања, неизвесности су везане и за дужину осмотреног низа.



Слика 3 – Средњи протоци на хидролошкој станици C5AE27 на реци *St. Mary* у Канади за делове низа различите дужине

Главне карактеристике серија за које се очекује да буду очуване при генерисању су средња вредност, стандардна девијација, асиметричност расподеле и аутокорелација. Оцена прве две статистике из узорка су мање неизвесне, док асиметрија и аутокорелација могу да имају велики степен неизвесности. Ово је значајно, јер тумачење аутокорелације треба да допринесе избору стохастичког модела.

Поред ових главних статистичких карактеристика хидролошких серија често се при проучавању расположивости водних ресурса разматрају и карактеристике временских серија у вези са очувањем и обнављањем запремине воде у акумулацијама, као и карактеристике серија које описују дужину трајања суше, њену величину и интензитет. Ове карактеристике је добро описао Салас (Salas, 1993).



Слика 4 – Кумулативно одступање од средње вредности годишњих протока на хидролошкој станици C5AE27 на реци St. Marry у Канади

Једна од стандардних анализа расположивости вода је крива кумулативних одступања годишњих протока од средње вредности, која се може записати као:

$$S_i = S_{i-1} + (y_i - \bar{y}_N) \cdot t \text{ за } i = 1, 2, \dots, N$$

где је  $S_0 = 0$  почетна запремина,  $y_1, y_2, \dots, y_N$  су годишњи протоци, а  $\bar{y}_N$  је средња вредност узорка. Разматран је један пример ове криве (слика 4). Крива показује вишкове и мањкове количине вода у односу на вишегодишњи просек, а на основу ње се може одредити најмања потребна запремина акумулације која би обезбедила корисницима константну испоруку у воде током времена. Потребна запремина акумулације се може срачунати као разлика (распон) између највећег вишка и најмањег мањка воде:

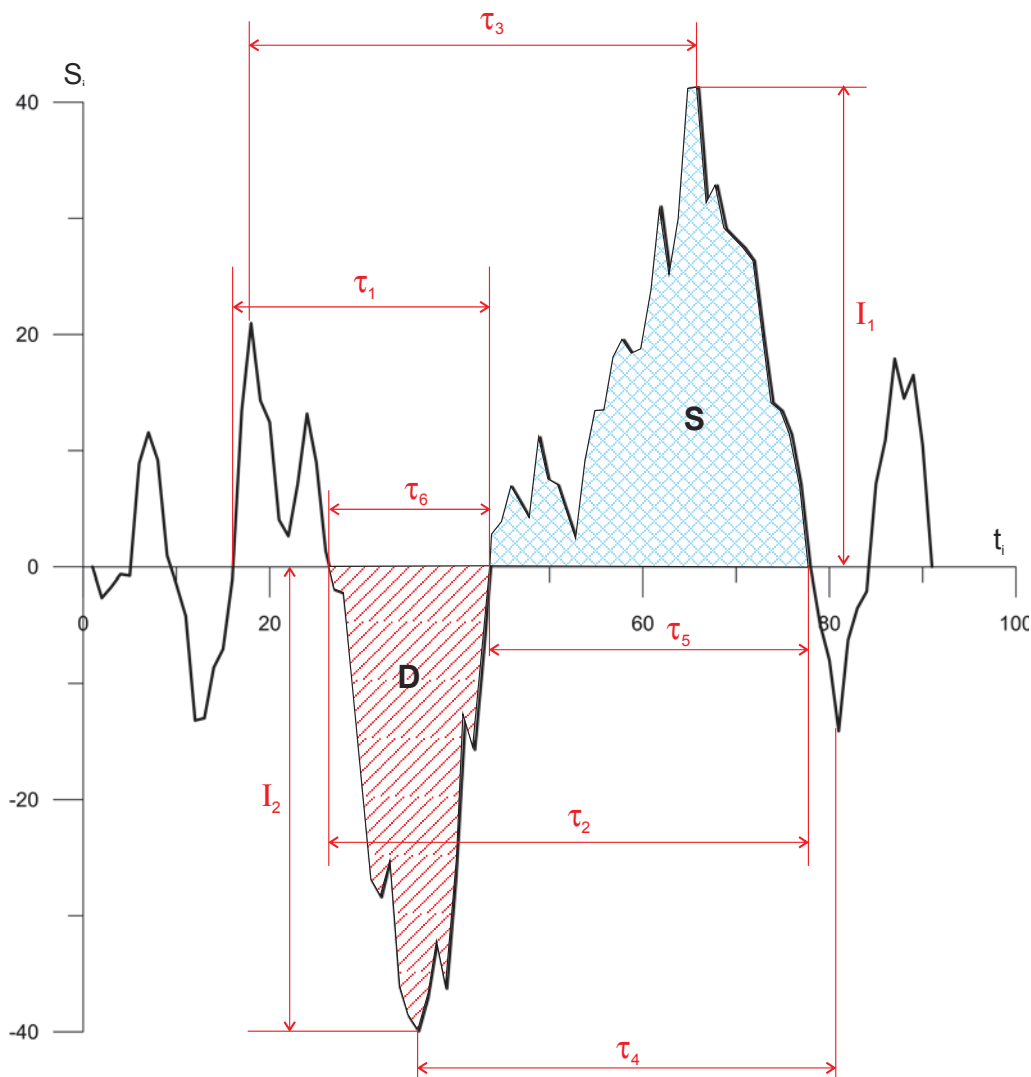
$$R_N^* = \max(S_1, S_2, \dots, S_N) - \min(S_1, S_2, \dots, S_N)$$

Величина која се назива сведени распон рачуна се према обрасцу

$$R_N^{**} = \frac{R_N^*}{S_N}$$

где је  $S_N$  стандардна девијација узорка. Величина  $R_N^{**}$  се често користи као параметар који описује степен вишегодишњих зависности у временским серијама.

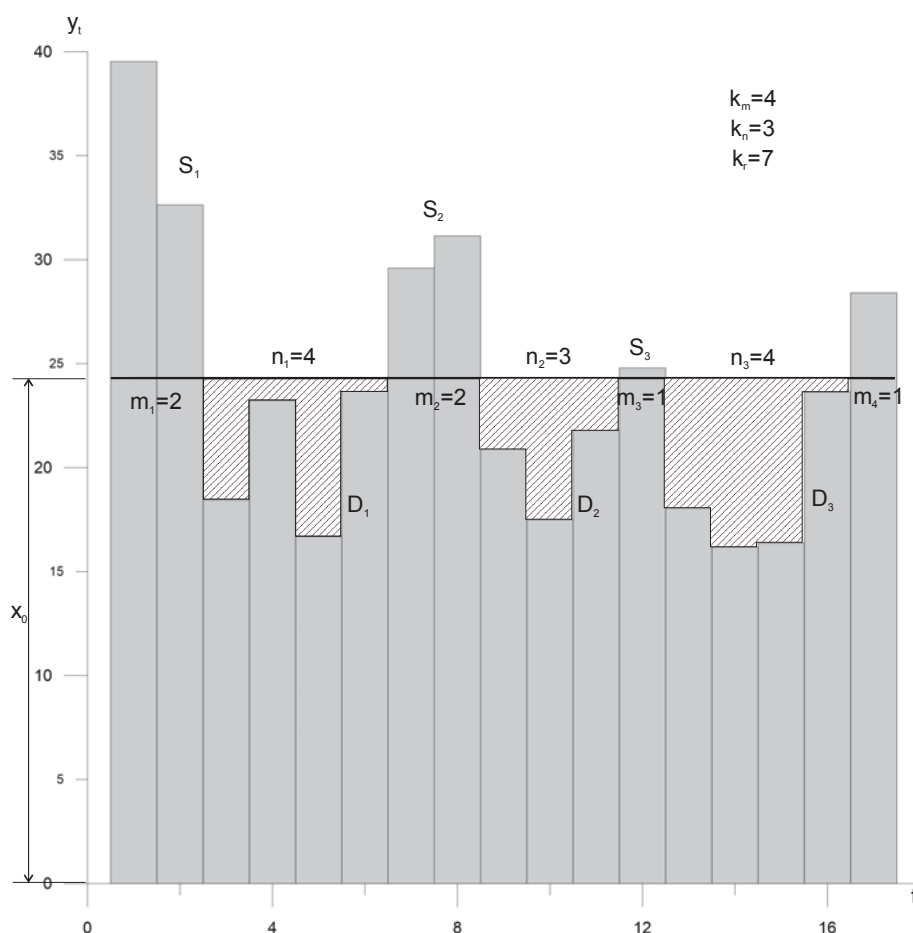
Поред вишкова и мањкова воде (слика 4), могу се разматрати и особине у вези са трајањем појава као што су суше или водни периоди. Ове карактеристике временских серија су дефинисане као кораци (*runs*) у односу на пресецање два процеса. Један процес обично представља средња вредност временске серије а други је крива кумулативних одступања од средње вредности. У зависности од сврхе анализе, пресецање може да буде и са неким другим параметром, различитим од средње вредности, као што је нпр. праг плавлјења одређене површине, запремина воде потребна за неку потрошњу као што је водоснабдевање, наводњавање, оптимална производња у хидроелектранама и слично.



Слика 5 – Различите дефиниције корака за дати ниво пресецања  $x_0$

Да би се направила разлика између више врста коришћених корака у литератури, на слици 5 су приказане следеће величине:  $\tau_1$  – удаљеност између узлазних пресецања,  $\tau_2$  – удаљеност између силазних пресецања,  $\tau_3$  – удаљеност између суседних максимума,

$\tau_4$  – удаљеност између суседних минимума,  $\tau_5$  – удаљеност између суседног узлазног и силазног пресецања односно дужина позитивног корака,  $\tau_6$  – удаљеност између суседног силазног и узлазног пресецања односно дужина негативног корака. Сви ови дефинисани кораци се могу применити на различите проблеме у хидрологији и водопривреди, али Јевђевић (Јевђевић, 1974) сматра да су од других важнији трајање водног корака  $\tau_5$ , трајање сушног корака  $\tau_6$ , вишак запремине позитивног корака  $S$ , мањак запремине негативног корака или дефицит  $D$  и интензитети корака  $I$ . Последње три величине су такође приказане на слици 6. Интересантно је познавати и укупан број позитивних и негативних корака у серији  $k_m$  и  $k_n$ .



Слика 6 – Пример одређивања трајања сушних периода  $n$  и дефицита  $D$ , као и трајања водних периода  $m$  и вишкова  $S$  на хидролошкој станици C5AE27 на реци St. Mary у Канади

Карактеристике које описују појаву суше у временској серији јесу дужина трајања суше, њен интензитет и дефицит. Међу  $k_n$  сушних периода у серији од највећег интересовања је вредност  $D^* = \max(D_1, D_2, \dots, D_{kn})$  коју називамо критичном сушом. Слично томе, дефинишу се критичне вредности и за интензитет суше  $I_D^* = \max(I_1, I_2, \dots, I_{kn})$ . Аналогно томе, међу  $k_m$  периода вишкова у серији, од интереса су

највећи вишак  $S^* = \max(S_1, S_2, \dots, S_{km})$  и највећи интензитет водног периода  $I_S^* = \max(I_1, I_2, \dots, I_{km})$ .

### 3.4 Генерисање случајних низова

Методe генерисања случајних бројева се називају Монте Карло методe. Монте Карло приступ се заснива на генерисању случајних вероватноћа, односно бројева између 0 и 1 из униформне расподеле. Случајни бројеви из неке друге расподеле се добијају тако што се за случајне вероватноће примени инверзна функција жељене расподеле.

У процесу генерисања случајних низова велику улогу има избор случајних бројева. Неопходно је да случајни бројеви буду независни и да потичу из неке расподеле, а најчешће се користи униформна расподела. Уз примену данашњих рачунара, генерисање случајних бројева је брже и једноставније него раније када су се користиле таблице готових случајних бројева. Међутим, у рачунарима се најчешће користе програми који имају имплементиране алгоритме за генерисање случајних бројева према одређеним обрасцима. Овако добијени случајни бројеви се називају псеудослучајни бројеви и такав низ није у потпуности случајан, јер је одређен скупом почетних вредности али има све особине које случајни бројеви требају да имају. Овакви низови се после одређеног броја елемената периодично понављају. Предност овог начина одређивања случајног броја је свакако брзина, али и могућност понављања опита, јер омогућава да се експеримент понови више пута под идентичним условима.

Особине које генерисани низови случајних бројева требају да задовоље јесу:

- да узорачка средина и узорачка дисперзија одговарају математичком очекивању средње вредности и дисперзије случајне величине која је дефинисана одређеном расподелом.
- да задовољи услове независности чланова низа добијањем малих вредности серијских коефицијената корелације са неким кораком  $l$ .
- да при графичком приказу парова узастопних тачака раван графика буде подједнако покривена тачкама.

#### 3.4.1 Оцена расподела вероватноће случајних низова

Статистичка анализа независних података се најчешће заснива на тражењу неке од теоријских расподела вероватноће која се најбоље прилагођава осмотреним подацима, односно емпиријској расподели низа. Овај поступак се спроводи уз претпоставке да су



низови хомогени (сви подаци потичу из исте популације) и случајни. Ове претпоставке се проверавају одговарајућим статистичким тестовима, који се приказују у одељку 2.3.4. Овде се укратко приказује формирање емпиријске расподеле низова. Затим се приказују непараметарске расподеле које су у овом раду основа за генерисање низова случајних података. На крају овог одељка приказују се и најзначајније параметарске расподеле које се користе у хидрологији а у овом раду су коришћене за поређење са резултатима непараметарских расподела.

### 3.4.2 Компромисне вероватноће као емпиријска расподела низа

Емпиријска расподела низа се дефинише додељивањем неке вероватноће члановима уређеног низа. Те вероватноће се заснивају на редоследу података у низу. У литератури су предложене разне формуле тзв. компромисне вероватноће за емпиријску расподелу низа. У табели 1 су дате најчешће коришћене формуле за израчунавање компромисне вероватноће у хидрологији.

Табела 1 – Најчешће коришћени обрасци за израчунавање компромисне вероватноће и повратног периода  $T$ , где  $m$  представља редни број података у низу уређеном по опадајућем редоследу

	$p_m$	$T$
Weibull	$\frac{m}{N+1}$	$\frac{N+1}{m}$
Gringorton	$\frac{m-0.44}{N+0.12}$	$\frac{N+0.12}{m-0.44}$
Hazen	$\frac{m-0.5}{N}$	$\frac{N}{m-0.5}$
Blom	$\frac{m-0.375}{N+0.25}$	$\frac{N+0.25}{m-0.375}$
Cunnane	$\frac{m-0.4}{N+0.2}$	$\frac{N+0.2}{m-0.4}$
California	$\frac{m-1}{N}$	$\frac{N}{m-1}$
Chegodayev	$\frac{m-0.3}{N+0.4}$	$\frac{N+0.4}{m-0.3}$
Adamowski	$\frac{m-0.25}{N+0.5}$	$\frac{N+0.5}{m-0.25}$

Обрасци за израчунавање вредности вероватноће се могу подвести под један општи образац (Gringorten, 1963):

$$p_k = \frac{m - \alpha}{N + 1 - 2\alpha}$$

где је  $\alpha$  константа која зависи од избора расподеле, и нпр. за униформну расподелу износи 0, чиме добијамо најчешће коришћен Вејбулов образац за компромисну вероватноћу.

За потребе овог истраживања је коришћен образац који је дао Адамовски (Adamowski, 1981) и који се може у општој форми дати као

$$p_k = \frac{k - a}{N + b}$$

Адамовски је дао и обрасце за израчунавање коефицијената  $a$  и  $b$  у зависности од дужине узорка  $N$ :

$$a = \frac{1 - b}{2}$$

$$b = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{N + 1}{N}}}$$

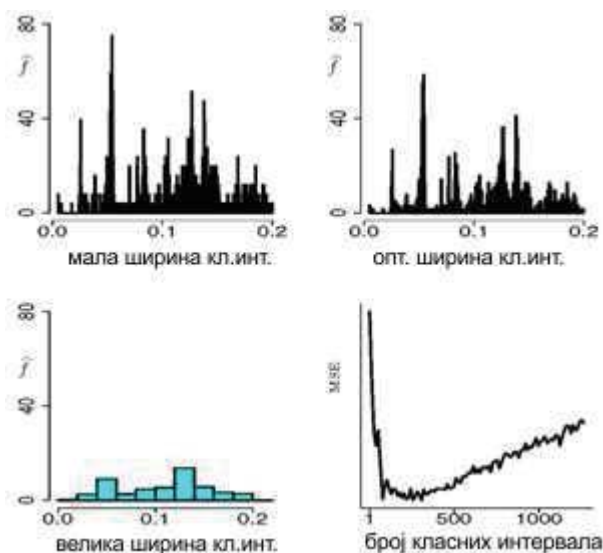
Адамовски је даље дошао до емпиријских вредности коефицијената  $a$  и  $b$  за узорак са  $N > 25$  које износе  $a = 0.25$   $b = 0.5$ . Тако је коначни израз за израчунавање компромисне вероватноће дат у следећем облику

$$p_k = \frac{k - 0.25}{N + 0.5}$$

### 3.4.3 Приказ емпиријске расподеле помоћу хистограма

Док се у примени параметарских расподела у хидрологији најчешће користе емпиријске функције расподеле са компромисним вероватноћама за поређење са теоријским расподелама, за примену непараметарских расподела од важности је и апроксимација густине расподеле помоћу хистограма.

Хистограм емпиријске расподеле се заснива на подели узорка на класе и приказу одговарајућих учесталости.



Слика 7 – Различите ширине класних интервала за исте податке: горе лево је већи број класних интервала од оптималног, а доле лево мањи. Горе десно је оптимални број класа и доле десно његово одређивање на основу средње квадратне грешке у односу на број класа (преузето из (Wasserman, 2006))

Код овог формирања хистограма је битно да се одреди такав број класних интервала који ће омогућити најбољи приказ густине расподеле. Уколико би се одабрао велики број класних интервала, добио би се дијаграм са великим бројем класа што би хистограм густине расподеле чинило веома грубим - неизглађеним. Међутим, уколико се изабере мањи број класних интервала, хистограм густине расподеле ће изгледати изглађено, али може дати сасвим другачију слику у односу на расподелу коју имају или којој теже емпиријски подаци. То се може видети са слике 7 на којој су приказани подаци са различитом ширином класних интервала. Права мера ширине класних интервала се може одредити минимизацијом средње квадратне грешке (MSE) оцене густине хистограмом у односу на број класа (Wasserman, 2006). Ово се може видети на споменутој слици доле десно.

Међутим, како хистограми не дају глатку линију густине расподеле, на трагу те идеје дошло је до развоја непараметарских метода за описивање густине расподеле, које су предмет наредног одељка.

#### 3.4.4 Непараметарске расподеле

Расподеле вероватноће хидролошких променљивих се уобичајено представљају теоријским, тј. параметарским расподелама. Поступак се своди на избор најбоље теоријске расподеле у односу на емпиријску расподелу осмотреног низа. Мада се овај

приступ примењује веома успешно, он има и својих недостатака. Најчешћи проблем је да се осмотреном низу података довољно добро прилагођава више теоријских расподела, при чему се највеће разлике јављају на крајевима расподела који се екстраполују изван распона осмотрених вредности. Не постоји статистички метод обраде података који ће превазићи недостатак познавања теоријске расподеле популације (Dooge, 1986). Стварна расподела популације је увек непозната у пракси, док произвољан избор или претпоставка о облику стварне расподеле повећава неизвесност (Faucher, et al., 2001).

Са практичног становишта, сматра се да методе за статистичку анализу треба да (Lall, et al., 1993):

- 1) буду робусне у погледу избора модела и утицаја изузетака,
- 2) буду консистентне у примени на различитим мерним местима,
- 3) буду довољно флексибилне за примену на различите осмотрене податке,
- 4) пруже максимум информација из датог узорка,
- 5) на одговарајући начин опишу крајеве расподеле, који су од великог интереса, и
- 6) воде ка доследним резултатима без обзира на објективност истраживача.

Параметарске методе не задовољавају потпуно наведене критеријуме (Lall, et al., 1993).

Свесни ових недостатака Јаковиц и Адамовски су независно почели да користе непараметарске функције расподеле у хидрологији. Тако су у својим радовима (Adamowski, 1985; 1987; 1989; Schuster & Yakowitz, 1985) применили ове методе на анализу појаве великих вода као и анализу појаве малих вода.

Постоји више непараметарских метода за одређивање густине расподеле осмотреног низа. Најчешће коришћене методе су: метода оцене густине расподеле помоћу тзв. функције-језгра (*kernel density estimator*), метода  $K$ -најближих суседних вредности (*K-nearest neighbour*), оцена помоћу сплајнова (*spline estimator*) и сл.

Од непараметарских расподела се не може очекивати да задовоље све критеријуме које методе за статистичку анализу требају да поседују. За непараметарске методе се може рећи да (Lall, et al., 1993):

- 1) не зависе од избора модела, тј. теоријске расподеле,
- 2) применљиве су на различитим мерним местима и пружају доследност резултата без обзира на објективност истраживача,
- 3) могу да јасније одреде утицај изузетака у подацима на расподелу,
- 4) доста су флексибилније, и

5) како су засноване на локалним средњим вредностима, дају боље тежине крајевима расподеле у односу на параметарске методе (код којих је тежина централног дела расподеле много већа).

Недостаци непараметарских метода су:

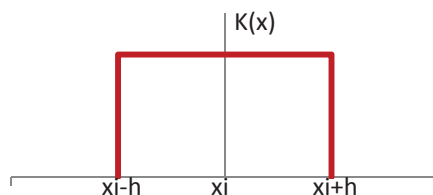
- добијена расподела не представља теоријску расподелу разматране величине,
- с обзиром да се описује преко осмотрених података, постоји мала могућност екстраполације изван распона осмотрених података,
- постоји субјективност истраживача при избору оптималне ширине интервала  $h$ .

#### 3.4.4.1 Оцена густине расподеле помоћу кернел функције

Оцена густине расподеле помоћу кернел функције или функције-језгра, односно непараметарска функција густине расподеле  $f_n(x)$  из узорка  $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  обима  $n$  дата је изразом

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

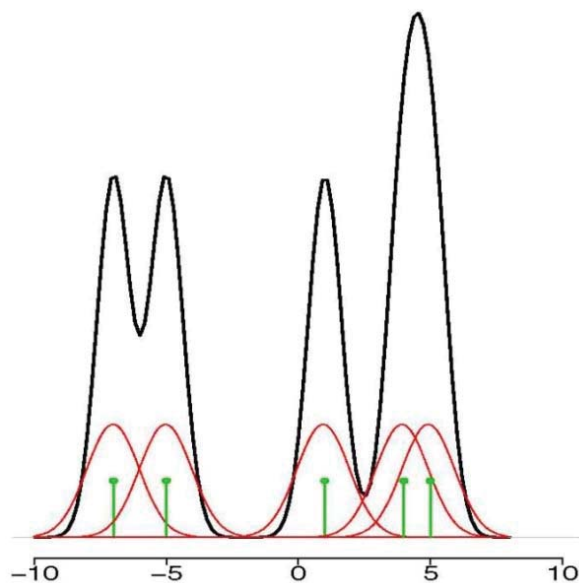
где је  $K(\cdot)$  функција језгра центрирана у односу на податак  $x_i$ , док је  $h$  ширина интервала који одређује простирање језгра око осмотрене тачке, што је приказано на примеру правоугаоног језгра (слика 8).



Слика 8 – Правоугаоно језгро у односу на податак  $x_i$  и ширина интервала  $h$

Горња једначина показује да се непараметарска густина расподеле за произвољну тачку  $x$  добија суперпозицијом свих језгара који се преклапају у тој тачки. Постоји више различитих типова функција језгра, међу којима је Гаусово језгро чест и популаран избор (Sharma et al, 1997). На следећим сликама 9 и 10 је приказана апроксимација густине расподеле помоћу Гаусових и правоугаоних језгара. Непараметарска функција густине у ствари представља конволуцију индивидуалних функција језгара. Непараметарска функција расподеле је онда дата изразом:

$$F_n(x) = \int_{t=-\infty}^{t=x} \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t - x_i}{h}\right) dt = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K^*\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$



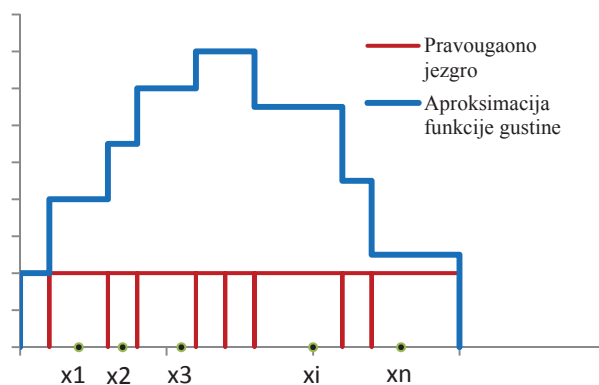
Слика 9 – Пример непараметарске густине расподеле са Гаусовим језгром за податке (извор: Wasserman, 2006)

Функција језгра  $K$  треба да има следеће особине (Wasserman, 2006):

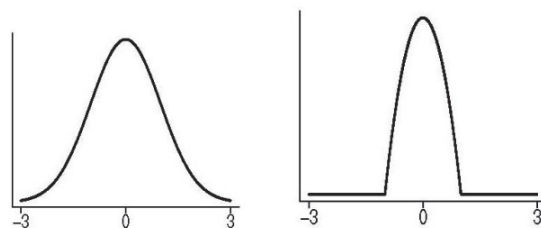
- то је континуална функција, симетрична око 0 и са интегралом који је једнак 1:

$$K(t) = K(-t)$$

$$\int K(t)dt = 1$$



Слика 10 – Пример непараметарске густине расподеле са правоугаоним језгром за индивидуалне податке



Слика 11 – Изглед Гаусовог и Епанечниковог језгра (Wasserman, 2006)

Приложене су функције најчешће коришћених типова језгара (табела 2). Овде је дат приказ облика Гаусовог и Епанечниковог језгра (слика 11).

Табела 2 – Приказ најчешће коришћених језгара у за непараметарске густине расподеле, где је  $t = \left(\frac{x-x_1}{h}\right)$

Назив језгра	Функција
Епанечниково	$K(t) = \frac{3}{4}(1 - t^2)$ за $ t  \leq 1$ $K(t) = 0$ у осталим случајевима
Гаусово	$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$
Двотежинско (biweight)	$K(t) = \frac{15}{16}(1 - t^2)^2$ за $ t  \leq 1$ $K(t) = 0$ у осталим случајевима
Троугаоно	$K(t) = 1 -  t $ за $ t  \leq 1$ $K(t) = 0$ у осталим случајевима
Правоугаоно	$K(t) = \frac{1}{2}$ за $ t  \leq 1$ $K(t) = 0$ у осталим случајевима

Утицај типа језгра на непараметарску функцију расподеле је мањи него утицај ширине интервала  $h$  (Adamowski, 1989). Поред тога, треба рећи да се Епанечниково језгро сматра оптималним, а затим следе двотежинско, троугаоно, Гаусово и правоугаоно (Hardle & Linton, 1994).

Као и код апроксимације густине расподеле хистограмом фреквенција, непараметарска густина расподеле зависи од избора ширине интервала  $h$ . Иако би се могло закључити да се најбоља функција расподеле добија за најмању ширину интервала  $h$  јер би средње квадратно одступање од емпиријских тачака увек било мање када је  $h$  мање, то није тачно јер се прекомерним смањивањем ширине интервала  $h$  повећава варијанса. Због тога је потребно одредити неку оптималну ширину интервала која ће имати одређено средње квадратно одступање, а истовремено неће увећати варијансу. Оптимално  $h$  често се одређује пробањем за више вредности ширине интервала док се не одреди оптимална вредност.

Наведено важи за непараметарске функције расподеле са фиксном ширином језгра. Значајно је напоменути да се фиксна ширина језгра најчешће користи када се располаже са подацима који немају изражену асиметрију. Асиметрија се може ублажити логаритамском трансформацијом података. Уколико се ни на тај начин не умањи изразита асиметричност података, може се применити функција са променљивом ширином језгра. Променљива ширина језгра има следећи смисао: на местима где се

налази већи број података – ближе централном делу расподеле, користи се мања ширина интервала, док се на крајевима расподеле – где је мали број података, најчешће по један, користи већа ширина интервала и на тај начин избегава осетљивост расподеле на различиту концентрацију података.

У литератури се може пронаћи велики број радова са различитим методама за избор оптималне ширине језгра  $h$ . Постоји више група метода за одређивање оптималне ширине интервала (Wasserman, 2006). Једна група метода се базира на разматрању грешака као што су: ISE – интегрална квадратна грешка (Integrated Square Error), IMSE – средња интегрална квадратна грешка (Mean Integrated Square Error) и AMISE – асимптотска средња интегрална квадратна грешка (Asymptotic Mean Integrated Square Error). Ова група метода има више теоретски значај. У другој групи су тзв. брзи и приближни („quick and dirty“) методи, где спадају и разна неписана правила, а засновани су на AMISE грешци. У трећу групу спадају методе крос-валидације (cross-validation). У четврту групу спадају методе замене (plug-in methods). У петој групи су остале методе и методе које представљају неке варијације осталих метода. У овом раду ће бити споменути само неки од метода за избор ширине језгра.

#### Средња интегрална квадратна грешка (Integrated Mean Square Error IMSE)

Оптимална вредност ширине језгра се може одредити на основу минимизације грешке IMSE која је дата као:

$$IMSE = \int_{-\infty}^{\infty} E[\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx$$

где је  $\hat{f}(x)$  оцена непознате функције густине  $f(x)$ .

Коришћењем овог критеријума, (Adamowski, 1989) је дао образац за рачунање оптималне вредности за  $h$ :

$$h = \frac{\sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)}{\sqrt{5}N \left(N - \frac{10}{3}\right)}$$

На основу нумеричких проучавања Адамовски је дошао до закључка да је овако срачунато  $h$  оптимално и за мале узорке ( $N=25$  је најмањи разматрани узорак).

#### Образац Адамовског за троугаоно језгро

Адамовски (Adamowski, 1987) је дао образац за рачунање ширине  $h$  за троугаоно језгро:

$$h = \left(\frac{5}{192}\pi N\right)^{\frac{1}{5}}$$



Неписано правило Силвермана

Овај метод је дат у књизи (Silverman, 1986) као тзв. "rule of thumb":

$$h = 1.06\hat{\sigma}N^{-\frac{1}{5}}$$

где је  $\hat{\sigma}$  стандардна девијација узорка, а  $N$  обим узорка. Овај образац за оптимално  $h$  је преопоручен за популације из нормалне расподеле.

Hardle and Linton (Hardle & Linton, 1994) су дали коефицијенте којима се оптимална вредност  $h$  за једну врсту језгра може претворити у оптималну вредност  $h$  за другу врсту језгра. У овом раду су приложени коефицијенти (табела 3) којима се могу мењати ширине интервала одређених језгара. Нпр. ширину опсега  $h = 0.2$  за двотежинско језгро, преводимо у ширину опсега  $h = 0.133$  за правоугаоно језгро и  $h = 0.076$  за Гаусово језгро.

Табела 3 – Коефицијенти за промену ширине различитих језгара (Hardle, et al., 1994)

Језгро ( $s_j/s_i$ )	Правоугаоно	Троугаоно	Епанечниково	Двотежинско	Гаусово
Правоугаоно	1.000	0.715	0.786	0.663	1.740
Троугаоно	1.398	1.000	1.099	0.927	2.432
Епанечниково	1.272	0.910	1.000	0.844	2.214
Двотежинско	1.507	1.078	1.185	1.000	2.623
Гаусово	0.575	0.411	0.452	0.381	1.000

#### 3.4.4.2 Оцена функције расподеле помоћу кернел функција

Ако је густина расподеле оцењена помоћу језгара, тада је оцена функције расподеле:

$$\hat{F}(x) = \int_{-\infty}^x \hat{f}(u) du = \int_{-\infty}^x \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{u-x_i}{h}\right) du = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^x K\left(\frac{u-x_i}{h}\right) du$$

Величина

$$K^*\left(\frac{x-x_i}{h}\right) = \int_{-\infty}^x K\left(\frac{u-x_i}{h}\right) du$$

назива се интегралним језгром, па се непараметарска функција расподеле може приказати као:

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K^*\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$$

Другим речима, непараметарска функција расподеле се може схватити као конволуција интегралних језгара над члановима низа.

Оптимална ширина интервала  $h$  за интегрално језгро функције расподеле разликује се од оптималне ширине за густину расподеле. У општем случају се може рећи да је ширина интервала за функцију расподеле једнака

$$h = b \left( \frac{1}{N} \right)^{\frac{2m}{2m+1}}$$

где је  $b > 0$ , што одређује ширину интервала  $h$  само у зависности од броја чланова узорка  $N$ . Може се показати (Lall, et al., 1993) да је однос оптималних  $h$  за густину расподеле и функцију расподеле једнак  $N^{-1/3} / N^{-1/5}$ . У даљем раду ће се сматрати да је  $h$  ширина интервала за функцију расподеле.

### 3.5 Примена модела временских серија за генерисање хидролошких низова

За хидролошке временске серије се у најопштијем случају може рећи да се састоје од детерминистичке ( $d_t$ ) и стохастичке компоненте ( $\varepsilon_t$ ). Циљ стохастичке анализе је идентификација ових компоненти временских серија. Детерминистичка компонента може да се састоји од тренда, скоковите промене или од периодичних промена. Стохастичка компонента обухвата део који представља аутокорелацију између чланова серије и потпуно случајну компоненту. У једној серији ове компоненте могу бити изражене у различитој мери.

Декомпозицијом временске серије се издвајају поједине компоненте и оне се посебно моделирају. У општем случају хидролошке временске серије можемо математички изразити на следећи начин:

$$X_t = d_t + \varepsilon_t$$

Након идентификације и уклањања детерминистичке компоненте, преостаје стохастички део за који се сматра да представља стационарну серију и који се може описати моделима временских серија.

С обзиром да се овај рад бави генерисањем стационарних хидрометеоролошких серија, детерминистичке компоненте временских серија као што су тренд, скокови и вишегодишња цикличност овде неће бити разматране. Једина детерминистичка компонента од интереса јесте сезонска периодичност, уз коју се серије месечних, недељних или дневних података и даље сматрају стационарним.

У наставку се разматрају модели стационарних временских серија према познатом Бокс-Џенкинс приступу као традиционални метод за генерисање серија са

временском зависношћу. Затим се разматра укључивање сезонске периодичне компоненте, а на крају дисагрегациони модели.

### 3.5.1 Приступ Бокс-Џенкинса за анализу временских серија

Класичан приступ анализи временских серија представља тзв. Бокс-Џенкинс приступ. У овом приступу се формирају модели зависности садашње вредности процеса  $y_t$  од претходних вредности  $y_{t-1}$ ,  $y_{t-2}$ , итд., као и од низа случајних вредности из садашњег и претходних временских корака  $\varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_{t-1}$ ,  $\varepsilon_{t-2}$ , итд. Линеарна комбинација ових елемената чини један општи модел временске серије:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

где су  $\phi_p, \theta_q$  коефицијенти који дају тежине појединим елементима и представљају параметре модела. У претходној једначини садашња вредност  $y_t$  зависи од  $p$  претходних вредности  $y$  и од  $q$  вредности  $\varepsilon$ . Број ових елемената који се узимају у обзир дефинише колико је дугачка меморија процеса.

При моделирању хидролошких временских серија, у литератури се препоручује методологија која се може поделити у следећа четири корака, за коју се каже да је итеративни процес (Box & Jenkins, 1976):

1. избор типа модела,
2. идентификација форме модела,
3. оцена параметара модела,
4. верификација модела.

Бокс и Џенкинс разликују два основна типа модела временских серија (Box & Jenkins, 1976): ауторегресивне (AR) моделе и моделе покретних средина (MA). Комбинацијом ова два модела, настаје ARMA модел. Из ових основних типова настали су и многи други модели, као што је речено у поглављу 2.2.

Ауторегресивни (AR) модели представљају најједноставнији тип модела временских серија. Можемо разликовати ауторегресивне моделе са константним параметрима, параметрима који су променљиви током времена и комбинацију претходна два типа. Модел са константним параметрима се најчешће користи са годишњим вредностима, а остала два са месечним или сезонским вредностима.

Временска серија  $\{y_t\}$  која има средњу вредност  $\mu$ , коначну варијансу  $\sigma^2$ , случајну компоненту  $\varepsilon_t$  са карактеристикама  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  представља ауторегресивни процес реда  $p$  и означавамо је са  $AR(p)$ , а представља се следећим обрасцем:

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

где су коефицијенти  $\phi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  константе, односно параметри модела. Процес првог реда  $AR(1)$  се често зове и Марковљев процес.

Аутокорелациона функција AR модела гласи:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}$$

Овај последњи образац је познат и као Yule-Walker-ова једначина, која се користи за оцену параметара модела за дати узорак временске серије.

AR модели могу да дају добре резултате али имају и своја ограничења. Ови модели добро описују особине краткорочне перзистенције (кратке „меморије“) у подацима.

Модели покретних средина (MA) се користе за процесе код којих се јављају догађаји који производе краткотрајне ефекте. Модел покретних средина реда  $q$  означавамо са  $MA(q)$  и може се представити следећим обрасцем:

$$y_t = \mu - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t$$

где су  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$  коефицијенти MA модела,  $\mu$  - средња вредност серије, а  $\varepsilon_{t-j}$  - компонента случајне грешке у подацима за одговарајуће временске тренутке.

Између процеса покретних средина и ауторегресивног процеса постоји дуализам (Box & Jenkins, 1976). Процес  $MA(q)$  није јединствено одређен аутокорелационом функцијом. Међутим, јединствена веза између параметара процеса покретних средина и његове аутокорелационе функције је потребна да би се коефицијенти процеса могли оценити из емпиријске аутокорелационе функције. Бокс и Џенкинс су зато увели услов инвертибилности да се процес  $MA(q)$  може написати (инвертовати) у ауторегресивни облик. Овде треба споменути да је услов инвертибилности код процеса покретних средина аналоган услову стационарности код ауторегресивног процеса.

Ауторегресивни процеси (AR) или процеси покретних средина (MA) вишег реда могу имати велики број параметара које треба оценити. Комбиновањем флексибилности компоненте покретних средина и ауторегресивне компоненте омогућава се да се направи модел са мањим бројем параметара.

Ауторегресивни процес покретних средина  $ARMA(p, q)$  можемо да напишемо у следећем облику

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Потребно је напоменути да ARMA модели, за разлику од AR модела који имају „кратку меморију“, могу да имају и „дугу меморију“ за параметре срачунате под

одређеним условима. Међутим, у условима постојања „дуге меморије“ губе се способности модела да задржи карактеристике „кратке меморије“, што значи да ARMA модели могу репродуковати само један унапред одабран тип „меморије“ модела.

Ауторегресивни интегрални модел покретних средина ARIMA представља ARMA модел примењен на диференцирану серију, односно на серију разлика узастопних чланова серије. Диференцирањем серије могу да се трансформишу у стационарне серије, при чему се диференцирање може применити једном или више пута до постизања стационарности. Да би се након моделирања, подаци вратили у оригиналан процес, потребно је да се изврши узастопно сумирање података (инверзни поступак од поступка уклањања нестационарности у подацима), што је аналогно операцији интегралења података, те је на тај начин и усвојен израз који описује додатну операцију у односу на ARMA модел.  $ARIMA(p, d, q)$  модел је  $ARMA(p, q)$  са разликама реда  $d$ .

После идентификације модела и оцене параметара, модел се верификује тако што се испитују његови резидуали, односно разлике између осмотрене и моделиране серије. Ако је модел добро формиран, резидуали треба да представљају низ нормално распоређених независних вредности чија аутокорелациона функција нема значајних чланова.

### 3.5.2 Сезонска периодичност

Хидролошке серије у временском кораку мањем од године, нпр. месечне, показују јасно изражену сезонску периодичност. Ово је последица једног циклуса кружења Земље око Сунца и која производи годишње циклусе у многим хидролошким процесима. Сезонске или периодичне појаве у хидролошким серијама се преносе и у статистичке карактеристике које су променљиве током године (или недеље или дана што зависи од појаве која се посматра). Генерално, важно је идентификовати периодичне и сезонске варијације у средњој вредности, варијанси, коваријанси и асиметрији у временским серијама.

Сезонске периодичне компоненте временских серија се могу моделирати на различите начине. У Бокс-Џенкинс прису, могу се формирати сезонски модели у којима фигурише ауторегресивна компонента са редом који одговара временској дискретизацији (нпр. тај ред AP модела је 12 ако се ради о месечним подацима). Сезонски модели временских серија се идентификују на основу аутокорелационе функције периодичних података.

Други начин за издвајање сезонске периодичне компоненте јесте анализа серије у фреквентном домену и њено моделирање помоћу Фуријеових низова. Детаље овог приступа описао је Јевђевић (Jevjevich 1972)

Уклањање сезонске периодичности из средње вредности се може постићи разликом  $y_t - \bar{y}_t$ , где су  $\bar{y}_t$  месечне средње вредности (за јануар, фебруар,... па је  $t$  месечни индекс). Тако добијени низ има вредности које флукутирају око 0, док њихове варијације могу бити променљиве током годишњег циклуса. Појава ових варијација указује на сезоналност у варијанси која се може уклонити трансформацијом према  $\frac{(y_t - \bar{y}_t)}{s_t}$ . Овај поступак је познат и као сезонална стандардизација, односно, десезонализација.

Иако десезонализована серија може изгледати као случајна, она и даље може садржати сезонске карактеристике у подацима која се може видети на корелограму. Међутим, бољи начин анализирања зависне структуре у подацима је одређивање коефицијената корелације између појединих сезона. На пример, за месечне серије, могу се корелисати вредности осмотрене у месецу фебруару, за све године осматрања, са одговарајућим осмотреним вредностима месеца јануара. На тај начин се добија коефицијент корелације  $r_{1,2}$ , а слично и остали коефицијенти до  $r_{1,12}$ . Ти коефицијенти се уопштено могу означити као  $r_{k,1}, \dots, r_{k,12}$ , за  $k = 1, 2, \dots, 12$ , и могу указати на преостале сезонске карактеристике.

### 3.5.3 Модели временске дисагрегације

У свом раду Валенсија и Шаке (Valencia & Schaake, 1973) су користили моделе временске дисагрегације за генерисање хидролошких величина. Под дисагрегацијом се подразумева формирање низова у краћим временским интервалима из познатих (осмотрених) низова у дужим временским интервалима. На пример, годишњи подаци се могу дисагрегирати на месечне податке, дневни на часовне и слично. када се ови модели користе за генерисање низова, обично се прво генеришу годишњи низови помоћу нпр. АР модела, а затим се генеришу месечни подаци помоћу модела дисагрегације.

Ови модели су настали са идејом да се побољшају модели у којима се за генерисање користи један временски интервал (нпр. месечни) и који верно репродукују осмотрене серије и њихове статистике само за тај интервал, али не дају одговарајуће статистике агрегираних (нпр. годишњих) осмотрених серија. Циљ је, дакле, да ови модели имају и особину адитивности поред задржавања основних статистика.

Основни облик модела дисагрегације који су дали Валенсија и Шаке се може писати у следећем облику

$$Y = AX + B\varepsilon$$

где су  $X$  – вектор дужине  $n$  и представља годишње вредности,  $Y$  – вектор дужине  $n\omega$  где  $\omega$  представља број сезона у години,  $A$  и  $B$  – матрице параметара димензија  $n\omega \times n\omega$  и  $\varepsilon$  је вектор димензије  $n\omega$  а представља независну променљиву која прати нормалну расподелу. Променљиве  $X$  и  $Y$  су нормализоване променљиве са средњом вредношћу једнаком нули. Међутим, овај модел не задржава коваријансу између прве сезоне у години и сезонама у претходној године. Споменути недостатак се може превазићи доградњом модела на следећи начин:

$$Y = AX + B\varepsilon + CZ$$

где су  $C$  – нова матрица параметара а  $Z$  – вектор сезонских вредности из претходних година. Уобичајено је да вектор  $Z$  садржи вредности само последње сезоне у претходној години и у том случају је матрица  $C$  диманзија  $n\omega \times n$ .

### 3.6 Непараметарско генерисање временских серија

У последње две декаде је започела интензивна примена непараметарских метода у моделирању временских серија. Томе су допринели развој математичких процедура и метода, а нарочито интензивни развој могућности рачунара и алата који се користе за извршавање споменутих прорачуна. Велики је број развијених метода, а овде ће се споменути најзаступљеније у истраживањима и радовима у научним часописима.

Код непараметарских метода се може генерализовати поступак којим се генеришу временске серије: прво се на основу осмотреног узорка генеришу нове временске серије, које задовољавају статистике осмотрених серија; затим се подешавају стохастичке карактеристике временских серија које требају да у потпуности буду пресликане из осмотрене временске серије. Разлике међу непараметарским методама се примећују пре свега, у начинима генерисања временских серија, а затим у начину подешавања стохастичких особина.

У наставку ће се извршити компаративна анализа неких од често коришћених непараметарских метода са методом Илића, која је основа за истраживања у овом докторату.

### 3.6.1 Бутстрап (Bootstrap) методе

На енглеском језику израз ресампловање (resampling) има значење узимања нових узорака и у том смислу ће се користити у даљем раду. Најједноставнија метода ресампловања је бутстрап метода. Бутстрап метода је једноставна техника за симулирање расподеле вероватноће било које статистике и заснована је на идеји ресампловања осмотреног узорка, односно формирања новог случајног низа на основу постојећег узорка. Узастопним ресампловањем осмотреног узорка, може се добити велики број генерисаних серија  $N$ . Овако добијени узорци су случајни, немају никакву међусобну зависност и из  $N$  серија се могу формирати емпиријске расподеле вероватноће сваке жељене статистике популације. Из осмотреног узорка дужине  $n$  врши се ресампловање осмотрених података (са заменом података), тако да добијени низ има идентичну расподелу, а вероватноћа појаве сваког податка је  $1/n$  (Vogel and Shallcross 1996).

Бутстрап методе се могу користити и за потребе моделирања временских серија, код којих се ресамплују серије података одређеног трајања из осмотрене серије. Ове ресамповане серије треба укомпоновати у временску серију тако да задрже временску и просторну коваријансну структуру осмотрене временске серије. Једна од често спомињаних метода у литератури јесте бутстрап метода покретних блокова (Moving Blocks Bootstrap). Идеја ове методе је да се ресамплују блокови података (тј. део осмотрене серије) уместо појединачних података и да се тако задржи корелациона структура серије. Код ове методе треба обратити пажњу на величину блока како би се могле обухватити и сезонске карактеристике приликом ресампловања осмотрених података (нпр. једна година је најмања дужина блока за месечне податке). Главни недостатак ових метода је што се ресампловање података (серија) врши само из скупа осмотрених података (серија), па тако добијене синтетичке серије немају екстремне изван осмотрених вредности. Поред тога, проблем је и повезивање блокова (Srinivas and Srinivasan 2005), тј. симулирање зависности података (серија) са краја године и почетка следеће године.

Методологија која је коришћена у овом раду, а базирана је на радовима Илића (Plich and Despotovic 2008; Plich 2009; 2013) посебно је развијан модел за генерисање серија код којих се јављају подаци који могу појавити у дужем временском периоду (што је период од нпр. 1000 година за који се врши генерисање) и у складу су са статистичким очекивањем, односно у оквирима су интервала поверења. Поред тога, посебан модул се



бави уклапањем зависности података са краја посматране и почетка следеће године, тако да симулиране серије у потпуности задржавају зависности осмотрене серије.

### 3.6.2 KNN (K-nearest neighbour) методе

Као алтернатива методи оцене функције густине расподеле помоћу функције језгра, створена је непараметарска KNN метода (метода  $K$  најближих суседа). Уопштено говорећи, KNN метод је техника по којој се осмотрени податак узима као нека дефинисана, референтна тачка  $x_i$ , око које се генеришу нове тачке. Формира се скуп стања који чине све осмотрене вредности. За одабрану референтну тачку  $x_i$  из скупа стања, који има своју расподелу, одређује се  $K$  најближих суседа. Тачка која наставља низ након референтне тачке  $x_i$  назива се сукцесор и бира се из подскупа од  $K$  најближих суседа који имају најкраћа растојања од референтне тачке. При томе се растојања између тачака могу мерити Еуклидовим растојењем (класичним или пондерисаним), или Махаланобисовим растојањем које узима у обзир корелацију између података. После избора сукцесора, поступак генерисања се наставља од њега као референтне тачке.

Овакав поступак се може проширити и са више претходних података у низу када треба задржати аутокорелацију серије до неког жељеног реда  $L$ , па референтна тачка постаје референтни вектор претходних  $L$  података за који се тражи скуп  $K$  најближих суседних вектора. Сличан је поступак и за генерисање нових низова у случају више мерних места или више променљивих, када треба задржати и крос-корелацију између серија.

Моделирање временских серија методом  $K$ -најближих суседа нарочито се користи у случају када се моделирају падавине, мада то није ограничење већ се користи и код осталих хидролошких величина. Овај метод оцене функције густине расподеле је једноставан, флексибилан и робустан (Sharif and Burn 2006), па се због споменутих особина често примењује у моделирању временских серија.

Један од недостатака KNN метода је немогућност да се генеришу вредности изван опсега осмотрених величина, у домену малих и великих вода, мада су неки аутори унели модификације које омогућавају да се генеришу и вредности изван опсега осмотрених (Prairie et al. 2006). Немогућност симулирања зависности између серија на прелазу из године у годину је још један недостатак ове методе.

Као што је већ речено, методологија која је коришћена у овом раду успешно превазилази споменуте недостатке непараметарских метода уз задржавање свих

претпоставки доброг модела за генерисање стохастичких хидролошких временских серија.

### 3.6.3 Методе вејвлета (Wavelet)

Технике метода вејвлета у моделирању и прогнози временских серија су све чешће коришћене у последњој декади. Вејвлети или у преводу таласићи су математичке функције које задовољавају одређене услове, од којих је један да је њихов интеграл једнак нули, док се вејвлети периодично смењују изнад и испод  $x$  осе. Комбинацијом разних таласа, препознатих и издвојених из оригиналне временске серије, формирају се нове серије података, водећи рачуна о свим аспектима које имају осмотрене серије: сезонски карактер података, случајна компонента, детерминистичке појаве у подацима, коваријансна структура осмотрене серије и сл.

Основна идеја код генерисања података вејвлет методом јесте да се изврши декомпозиција података, нпр. да се издвоји случајна компонента, сезонска компонента, средња вредност или стандардна девијација. Затим се свака компонента моделира вејвлетима на тај начин да се након агрегације вејвлета могу генерисати случајни подаци који одговарају осмотреним подацима.

Вејвлет  $\psi(t)$  је функција са средњом вредношћу једнакој нули и варијансом која је коначна, а математички је дефинисана на следећи начин (Bayazit & Aksoy, 2001):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

Вејвлет  $\psi_{a,b}(t)$  који има исту варијансу као  $\psi(t)$  је дефинисан као

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

где је  $a$  коефицијент размере променљиве а  $b$  коефицијент translације променљиве. Ако је  $|a| > 1$  врши се истезање променљиве, док  $|a| < 1$  значи стезање променљиве. Очигледно је да постоји бесконачно много функција које се могу користити као вејвлети. Једна од једноставних функција вејвлета су Хаар вејвлети који су дефинисани као

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{остало} \end{cases}$$

Примена вејвлета може бити за разне потребе. Код генерисања временских серија се користе након декомпозиције, а свакој декомпонованој компоненти се додељује одређени вејвлет тако да се након спајања компоненти реконструишу временске серије.

Вејвлети представљају моћан непараметарски апарат за моделирање временских серија и у литератури се могу наћи разне варијације модела засноване на таласићима. Предности вејвлета су што може моделирати временску серију са потпуном репродукцијом аутокорелације осмотрене серије, и из године у годину (што је мана осталих непараметарских метода) и осталих њених карактеристика. Оно што је још увек проблем код ових метода је да се не репродукују асиметрије осмотрених расподела (Bayazit and Aksoy 2001; Ünal, Aksoy and Akar 2004) као и ограниченост на једно мерно место, односно немогућност репродукције крос-корелације.

Сви недостаци наведених типова непараметарских метода су успешно превазиђени у методи која је коришћена у овом раду и бројни резултати о томе ће бити представљени у поглављима 5.3 и 5.4.



## 4 ПРИКАЗ МОДЕЛА ЗА ГЕНЕРИСАЊЕ ПРЕКИДНИХ И НЕПРЕКИДНИХ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА

### 4.1 Увод

Стохастички модели за генерисање хидролошких серија се базирају на улазним подацима који представљају мерења неке од хидролошких величина. За одређену хидролошку величину (променљиву) потребно је на основу осматраних карактеристика одредити њено понашање у будућности (прогнозу) или за анализирање учесталости појаве одређених екстремних величина.

Успешан модел за генерисање хидролошких величина треба да задовољи следеће карактеристике (Ilich & Despotovic, 2008):

- Серије података о протоцима морају представљати природне протоке.
- Осмотрене серије података представљају стационарне временске серије.
- Делови осмотрене серије коју чине подаци за изабрани временски корак модела (месец, недеља или дан) имају јединствену расподелу вероватноће према којој треба ускладити генерисану серију. Ова функција расподеле може бити представљена неком од познатих теоријских функција расподеле која се добро прилагођава подацима, или коришћењем непараметарских расподела.
- Генерисана серија треба да задржи основне статистичке карактеристике осмотрене серије, као што су средња вредност, стандардна девијација и коефицијент асиметрије за сваку променљиву на нивоу изабраног временског корака (месец, недеља или дан);
- Генерисане серије треба да имају корелациону структуру која одговара осмотреној аутокорелацији и кроскорелацији;
- Годишње статистике осмотрене серије, тј. средња вредност, стандардна девијација, коефицијент варијације, коефицијент асиметрије, аутокорелација и кроскорелација годишњих вредности, треба да буду репродуковане у генерисаним серијама.

Поред споменутих захтева, требало би додати и да је аутоматизација прорачуна карактеристика модела за генерисање којој се тежи. Примена непараметарских метода у моделу омогућава потпуну аутоматизацију и доноси још побољшања у односу на параметарске методе, које се уобичајено користе у хидрологији.

Модел за непараметарско генерисање хидрометеоролошких низова који је развио Илић (Ilich & Despotovic, 2008; Ilich, 2009; 2014) тежи ка универзалном моделу, репродукујући основне статистике осмотрених величина и њихову просторну и временску зависност и обезбеђујући исте резултате на различитим временским корацима истовремено. Овом методологијом је могуће добити подједнако добре резултате независно од временског корака (дневни, недељни, месечни или сезонски), задржавајући све параметре осмотрених података. Поред тога, предложена методологија се може сматрати општом јер не зависи од типа података. Метода је непараметарска јер се не морају оцењивати параметри за сваку разматрану величину, као код модела временских серија у Бокс-Џенкинс приступу. Такође, метода веома добро репродукује аутокорелативну структуру осмотрених величина, у општем случају до било ког реда, а практично до реда који има смисла (до препоручених  $n/4$ ). Уз аутокорелативну структуру, генерисани низови задржавају и крос-корелацију између станица и различитих величина садржану у осмотреним подацима. Све статистике и зависности међу подацима осмотрених серија задржавају се у генерисаним серијама временским кораком за који је вршено генерисање (нпр. месечни подаци), али и на годишњем нивоу, уз задржану аутокорелативну структуру између почетака године са крајевима претходне године. На овај начин генерисани низови могу добро послужити у разматрањима планирања и управљања акумулацијама са вишегодишњим изравнањем.

Према томе, модел који је развио Илић може да генерише податке на више мерних места, са више променљивих хидролошких величина, и за више временских корака (*multi-site, multi-variate, multi-temporal methodology*).

## 4.2 Основне поставке модела

У овом раду је непараметарски модел Илића за стохастичко генерисање искоришћен као основа за успостављање свеобухватне методологије генерисања хидрометеоролошких података. Модел је модификован и унапређен тако да задовољи различите захтеве у могућој примени. Модификације модела се највећим делом односе на ефикасније генерисање низова применом логаритамске трансформације података и контроле генерисања екстремних вредности на крајевима расподела, као и на постизање бољих резултата у агрегираним (годишњим) подацима из основних (дневних, недељних, месечних) података.

Неке од основних претпоставки приказане методологије су да се временске серије које се користе као улазни подаци у модел сматрају стационарним, док се протоци сматрају природним.

Временске серије које се моделирају сматрају се стационарним. Ово се односи на слабу стационарност, како је то уобичајено у хидрологији, када се сматра да временске серије немају детектован тренд у подацима, нити скоковите промене које су последица наглих промена карактеристика у сливу.

Представљени модел подразумева коришћење хидрометеоролошких података, што значи података о протоцима, падавинама, температурама итд. Међутим, код података о протоцима постоји могућност да услед изградње грађевинских објеката у сливу за разне водопривредне потребе дође до промене режима вода на мерним местима. Да би временска серија била хомогена, и као таква моделирана, захтева се да протоци изражавају природни хидролошки режим. Уколико на неком сливу постоји више мерних места, као и више објеката као што су бране, канали за пребацивање воде са места мање потражње на место веће потражње (за водоснабдевање, за енергетику уз остварење веће производње енергије и сл.), водозхвати итд, потребно је на основу података осматрених пре изградње ових објеката, као и потрошње која је остварена на објектима, односно губитака, извршити реконструкцију природних протока на целом сливу, од једног до другог мерног места. У свом раду Илић је дао приказ апликације којом се рачунају природни протоци (Piich, 2012). Као што је и аутор напоменуо, апликација може формирати природне протоке на сливу само када постоји довољно улазних података о протоцима, губицима и потрошњи.

Имајући у виду све претходно споменуто, предложена је методологија којом се хидролошке величине генеришу новим приступом у односу на досадашње стохастичке хидролошке моделе. Ако је као основни циљ модела за генерисање задржавање статистичких особина осматрених серија и задржавање корелационе структуре података, потребно је оба циља постићи на различитим нивоима. Основне статистике, пре свега средње вредности и стандардне девијације, треба да буду задовољене за низове по одабраном временском кораку (нпр. за месечне податке), затим за парцијалне низове (нпр. за јануарске, фебруарске итд. податке), као и за низове агрегираних података на годишњем нивоу (нпр. средње годишње вредности). Такође, одговарајућу корелациону структуру треба постићи тако да се задовољи аутокорелација на нивоу одабраног корака на једном мерном месту, крос-корелација са свим мерним местима, аутокорелација на

прелазу из године у годину, аутокорелација и крос-корелација на годишњем нивоу итд., и то до произвољног реда (помака у времену).

У следећим потпоглављима је описана методологија која је коришћена при непараметарском генерисању стохастичких хидрометеоролошких временских серија, где су детаљно приказани структура модела, трансформација улазних података и кораци у генерисању.

### 4.3 Структура модела

#### 4.3.1 Приказ података у моделу

Због лакшег рада са подацима усвојен је матрични приказ података (Ilich & Despotovic, 2008) где су у колонама дати низови (вектори) разматраних променљивих у усвојеној временској дискретизацији (дани, недеље или месеци). На слици 12 приказана је матрица  $\mathbf{X}$  осматраних низова недељних података, тако да блокови од по 52 колоне представљају податке са једне станице. У даљем излагању ће се као временски корак сматрати недеља, док би за друге временске кораке матрица  $\mathbf{X}$  имала сличну структуру. Ако се располаже са подацима са  $K$  станица, у матрици  $\mathbf{X}$  има  $K$  блокова са по 52 колоне, па је укупан број колона  $M = 52K$ . (У случају дневних података, укупан број колона је  $M = 365K$ , а код месечних  $M = 12K$ ). Матрица  $\mathbf{X}$  има  $n$  редова где је  $n$  број година осматрања. Улазна матрица  $\mathbf{X}$  се онда може написати као:

$$\mathbf{X} = [x_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Вектори из појединих недеља су тада вектори  $X_j, j = 1, 2, \dots, M$ . За овако формиране векторе одређују се основне статистике као што је средња вредност, стандардна девијација и коефицијент асиметрије.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \overbrace{x_{1,1} \quad x_{1,2} \quad \dots \quad x_{1,52}}^{\text{Станица 1}} & \overbrace{x_{1,53} \quad x_{1,54} \quad \dots \quad x_{1,104}}^{\text{Станица 2}} & \dots & \overbrace{x_{1,M-51} \quad x_{1,M-50} \quad \dots \quad x_{1,M}}^{\text{Станица } K} \\ x_{2,1} \quad x_{2,2} \quad \dots \quad x_{2,52} & x_{2,53} \quad x_{2,54} \quad \dots \quad x_{2,104} & \dots & x_{2,M-51} \quad x_{2,M-50} \quad \dots \quad x_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} \quad x_{n,2} \quad \dots \quad x_{n,52} & x_{n,53} \quad x_{n,54} \quad \dots \quad x_{n,104} & \dots & x_{n,M-51} \quad x_{n,M-50} \quad \dots \quad x_{n,M} \end{bmatrix}$$

Слика 12 – Матрица улазних података – осматраних вредности (пример недељних података)

За дату матрицу података формира се корелациона матрица  $\mathbf{C}$  димензија  $M \times M$  (слика 13) са корелационим коефицијентима



$$\rho_{ij} = \text{corr}(X_i, X_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

У овој матрици дијагонални елементи  $\rho_{ii}$  имају вредност 1. Корелациона матрица  $\mathbf{C} = [\rho_{ij}]$  обухвата и аутокорелацију на једној станици и крос-корелацију између станица за различите временске помаке. На пример, елемент  $\rho_{1,20}$  представља аутокорелацију између прве и 20. недеље на станици 1; елемент  $\rho_{2,72}$  представља крос-корелацију између друге недеље на станици 1 и 20. недеље на станици 2.

На овај начин, корелациона матрица  $\mathbf{C}$  описује корелациону структуру осмотрених података и представља циљну матрицу у процесу генерисања низова не само за краће временске помаке (као што је случај код Бокс-Џенкинс приступа) већ и за дуже помаке, чиме се задржава комплетна стохастичка структура осмотрених серија. Како корелациона матрица осликава аутокорелацију на сваком мерном месту и корелацију у свакој недељи према свим другим недељама на свим мерним местима, она такође садржи и информацију о кашњењу кроскорелације тј. временском помаку између различитих мерних станица. На пример, две и више станица на истој реци могу имати кашњење везано за пропагацију протицаја у трајању више од једне недеље, тј. врх таласа у недељи  $i-1$  на узводној станици може се јавити у  $i$ -тој недељи на низводној станици. Из споменутих разлога је важно задржати корелациону структуру у симулираним подацима.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \quad \rho_{1,2} \quad \dots \quad \rho_{1,52}}^{\text{Станица 1}} & \overbrace{\rho_{1,53} \quad \dots \quad \rho_{1,104}}^{\text{Станица 2}} & \overbrace{\rho_{1,M-51} \quad \rho_{1,M-50} \quad \dots \quad \rho_{1,M-1} \quad \rho_{1,M}}^{\text{Станица K}} \\ \rho_{2,1} \quad 1 \quad \dots \quad \rho_{2,52} & \rho_{2,53} \quad \dots \quad \rho_{2,104} & \rho_{2,M-51} \quad \rho_{2,M-50} \quad \dots \quad \rho_{2,M-1} \quad \rho_{2,M} \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \rho_{n-1,1} \quad \rho_{n-1,2} \quad \dots \quad \rho_{n-1,52} & \rho_{n-1,53} \quad \dots \quad \rho_{n-1,104} & \rho_{n-1,M-51} \quad \rho_{n-1,M-50} \quad \dots \quad 1 \quad \rho_{n-1,M} \\ \rho_{n,1} \quad \rho_{n,2} \quad \dots \quad \rho_{n,52} & \rho_{n,53} \quad \dots \quad \rho_{n,104} & \rho_{n,M-51} \quad \rho_{n,M-50} \quad \dots \quad \rho_{n,M-1} \quad 1 \end{bmatrix}$$

Слика 13 – Корелациона матрица свих осмотрених вектора за недељне податке

### 4.3.2 Логаритамска трансформација

Логаритамска трансформација је један од често коришћених типова трансформације у хидрологији и ефикасна је при израженој асиметрији у подацима, што је чест случај код података о протоцима за временску дискретизацију краћу од године. Може се користити логаритам са било којом основом, али је у овом раду коришћен природни логаритам. Резултат ове трансформације је да се велике вредности у временским серијама више смањују од малих вредности, што умањује изражену асиметрију у подацима.

За низове који садрже нулте податке често се користи трансформација у облику  $y = \ln(x + 1)$ , чиме се избегава да чланови низа који имају вредност једнакој нули након логаритмовања имају бесконачну вредност. У општем случају, трансформација може да се формулише као  $y = \ln(x + a)$ , када променљива величина има и негативне вредности чланова низа, док се вредност константе  $a$  одређује као  $a = |\min(x_i)|$ .

У овом раду за протоке је коришћена трансформација  $y = \ln x$ , а за падавине  $y = \ln(x + 1)$ .

### 4.3.3 Главни кораци у моделу

Предложени метод генерисања хидролошких серија се састоји из три основна корака:

**Корак 1:** генерисање независних низова (низова случајних бројева) уз репродукцију расподела осматраних величина за усвојену временску дискретизацију (дневни, недељни, месечни подаци). За овај корак користи се Монте Карло приступ за добијање случајних бројева, који се онда усвојеном инверзном расподелом „преводе“ у одговарајућу вредност дате величине. Низови добијени на овај начин су случајни и не садрже никакву аутокорељацију, нити крос-корељацију између низова.

**Корак 2:** постизање жељене корелационе структуре у генерисаним независним низовима, укључујући и аутокорељацију и крос-корељацију између низова са изабраном временском дискретизацијом. У овом кораку се користе пермутације елемената у парцијалним низовима, која се изводе према алгоритму Имана и Коновера (Iman & Copover, 1982). На крају овог корака, генерисани низови имају потпуну корелациону структуру садржану у осматраним низовима и статистике осматраних низова на годишњем нивоу.

**Корак 3:** постизање корелационе структуре за агрегиране низове на годишњем нивоу и повезивање елемената на крају претходне године са почетком текуће године. У овом кораку користе се пермутације већ сложених година тако да се минимизују разлике квадрата коефицијената аутокорељације осматраних и генерисаних годишњих вредности, и коефицијената аутокорељације осматраних и генерисаних вредности са краја текуће и почетка следеће године. У оквиру овог корака подешава се и вишегодишње понашање осматраних серија у погледу цикличног смењивања сушних и водних периода, доводећи распоред годишњих вредности у редослед који не ремети постигнуту корелациону структуру а постиже дугогодишње усклађивање генерисаних и осматраних серија.

Примени предложеног метода за генерисање хидрометеоролошких серија претходи припрема и трансформација података, о чему се говори у наредна два одељка, док су главни кораци детаљно описани након тога.

#### 4.3.4 Корак 1. – Генерисање података

Корак 1 подразумева генерисање вектора са 1000 случајних података за сваку недељу, што одговара низовима дужине 1000 година (дужина генерисане серије од 1000 података је изабрана као пример у овом раду, док су у примени могуће и друге дужине). Генерисани вектори треба да имају исту расподелу као и осмотрени подаци, а тиме и одговарајуће статистичке карактеристике. С обзиром да је осмотрени низ знатно мање дужине од генерисаног низа, у дужој генерисаној серији се очекује већи распон вредности. Ово претпоставља и да су минимума генерисане серије мањи од осмотрених минимума, као и да су генерисани максимуми већи од максимума осмотрене серије.

У овој методи подаци се генеришу из непараметарских расподела вероватноће осмотрених недељних (дневних, месечних) низова на које је претходно примењена логаритамска трансформација. За описивање расподела недељних низова могле би се користити и стандардне параметарске расподеле. Недостатак примене параметарских расподела је у томе што се мора изабрати одговарајућа теоријска расподела за сваку станицу и величину, а затим и за сваку недељу. Када би се за све недеље на једној станици усвојио само један тип параметарске расподеле, то би довело до неједнаког слагања емпиријских расподела појединих низова са усвојеном теоријском расподелом. То би даље значило да би генерисање података у недељи у којој је слагање боље било поузданије него у недељи где слагање није задовољавајуће. С друге стране, избор различитих теоријских расподела за различите недељне низове није практично, нити је логично да вредности из једне недеље имају другачији тип расподеле од друге недеље. Овакви проблеми се не јављају са непараметарским расподелама. Предност непараметарских расподела се огледа и у могућности аутоматизације процеса генерисања, док код параметарских расподела увек постоји потреба за субјективном проценом при усвајању типа расподеле, што се тешко може аутоматизовати.

Како је непараметарска функција расподеле дефинисана само у распону осмотрених вредности, функцију треба екстраполовати да би се могле генерисати и вредности изван распона осмотрених. У овој дисертацији је разрађен поступак за екстраполацију расподеле, који је описан наредном одељку, док је алгоритам генерисања независних низова приказан у одељку 4.3.4.2.

#### 4.3.4.1 Екстраполација крајева непараметарских функција расподеле

Екстраполација непараметарске расподеле у овом раду је примењена са циљем да се избегне коришћење теоријских расподела у процесу генерисања. Једно од решења за екстраполацију може бити да се користи непараметарска расподела на делу осматрених података, а затим да се на делу екстраполације изврши прелаз у неку од теоријских расподела, уз изглађивање прелаза из једне у другу функцију (Plich, 2014).

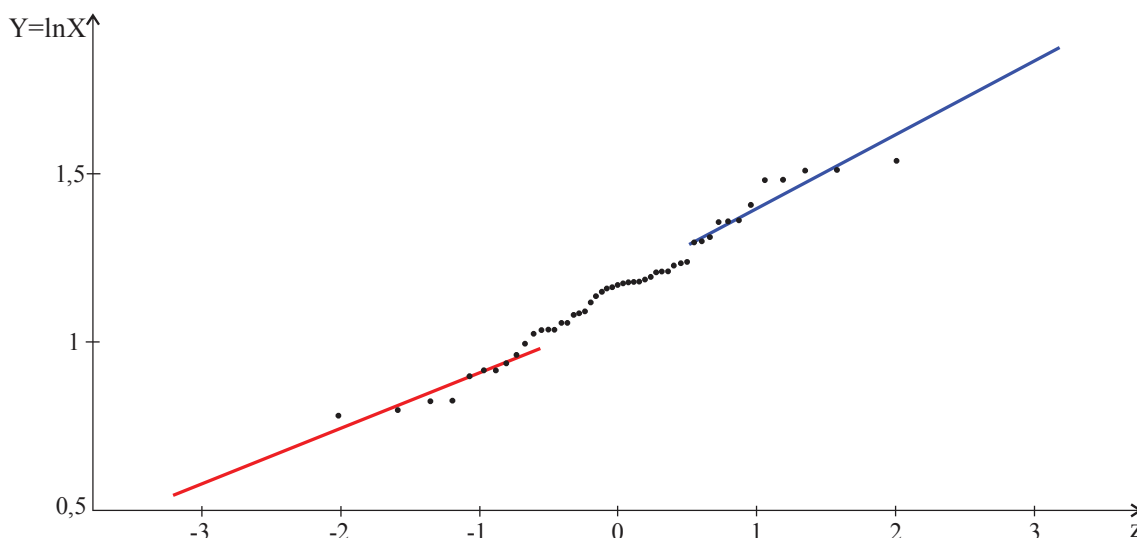
Идеја за екстраполацију крајева расподеле у овом раду је потекла из рада Шолца (Scholz, 1995) који је извршио екстраполацију уводећи линеаризацију крајева расподеле осматрених података. Под линеаризацијом сматра се линеарна веза између променљиве (нпр. протока) и неке стандардизоване променљиве (нпр. стандардне нормалне променљиве). Ова веза се формира из одређеног броја  $k$  осматрених тачака са једне стране расподеле (слика 14). Број тачака који се користи за линеаризацију краја расподеле се бира из интервала  $[K_1, K_2]$ . Шолц је предложио да се вредности  $K_1$  и  $K_2$  рачунају у зависности од дужине осматреног низа  $n$  према следећем:

$$K_1 = \max(6, \lfloor 1.3\sqrt{n} \rfloor)$$

$$K_2 = 2\lfloor \log_{10}(n) \sqrt{n} \rfloor$$

У једном од примера који су приказани у овом раду, број осматрених података је  $n = 90$ , па се број тачака које се користе за линеаризацију крајева налази у интервалу  $k \in [13, 37]$ . Према Шолцу, да би се изабрао неки број  $k$  из овог интервала, траже се једначине праве методом најмањих квадрата обухватајући одређени број тачака почев од броја  $K_1$  и закључно са  $K_2$ , при чему се бира она једначина праве која има најбоље слагање са осматрених  $k$  тачака. Оно што је важно напоменути, јесте да се екстраполација врши у логаритамској размери с обзиром да је на податке примењена логаритамска трансформација. Исти поступак се понавља и за други део расподеле. Поступак са апроксимираним правима са обе стране расподеле је приказан на слици 14.

Међутим, у зависности од распореда података и постојања и положаја изузетака, овако добијене праве на доњем крају расподеле за неке низове секу апсцису код вероватноће мање него што је вероватноћа најмањег осматреног податка. То значи да би се из расподеле екстраполоване на доњу страну генерисале вредности мање од нуле. Слично се може десити и са горње стране расподеле, где за неке недеље нагиб праве може бити такав да су генерисане вредности и десетоструко веће од највеће осматрене вредности, тј. од осматреног максимума у датој недељи.



Слика 14 – Линеарна екстраполација расподеле на дијаграму лог-нормалне вероватноће према идеји Шолца (Scholz, 1995)

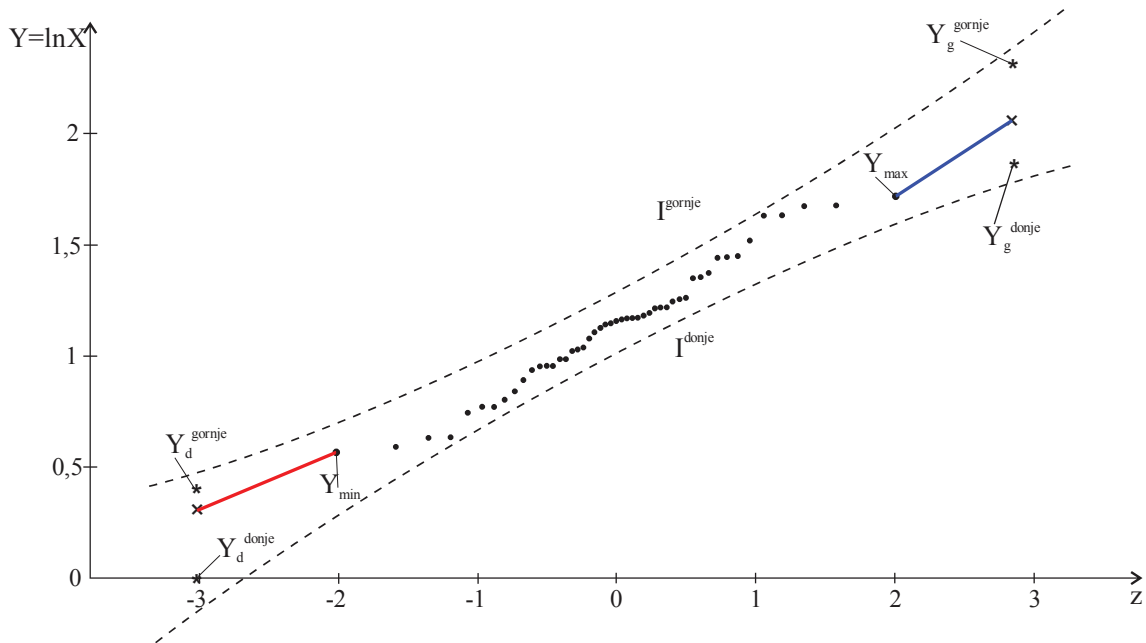
Да би се превазишли ови проблеми Шолцовог предлога, примењен је другачији алгоритам за екстраполацију крајева расподеле, при чему је задржана идеја о линеарној екстраполацији у систему стандардизоване нормалне променљиве и логаритмоване променљиве (другим речима, ради се о линеарној екстраполацији на дијаграму лог-нормалне вероватноће). У алгоритму развијеном у овом раду, пошло се од идеје да се права којом се екстраполује расподела мора наћи у интервалу поверења расподеле осматраних вредности. Како су интервали поверења непараметарске расподеле ограничени на распон осматраних података исто као и сама расподела, за оцену интервала поверења изабрано је да се они апроксимирају интервалом поверења опште расподеле екстремних вредности (GEV). Ова расподела је изабарана као расподела којом се крајеви расподеле могу добро репродуковати. Параметри GEV расподеле су оцењени за сваки недељни низ помоћу методе L-момената, а процењени су и интервали поверења 90% према поступку који су дали (Rao & Nared, 2000).

Да би се одредила једначина праве којом се екстраполује расподела, а која треба да се нађе унутар интервала поверења, дефинишу се две тачке кроз које права треба да прође. За горњи крај расподеле, прва тачка је дефинисана највећом осматреном вредношћу и одговарајућом компромисном вероватноћом, док се друга тачка бира из интервала поверења од 90% од 1000-годишњег квантила према GEV расподели (слика 15). За доњи крај расподеле тачке се аналогно дефинишу као минимална осматрена вредност и тачка из интервала поверења 90% GEV квантила за вероватноћу од 0,001.

При избору тачке из интервала поверења са горњег краја расподеле треба водити рачуна да се не изабере вредност променљиве која је мања од осмотреног максимума. Аналогно томе, не може се изабрати тачка из интервала поверења на доњем крају расподеле већа од осмотреног минимума. Такође, тачка из интервала поверења на доњем крају расподеле не сме да буде негативна уколико доња граница интервала поверења сече апсцису. Зато се постављају сужене границе интервала из којег се тачка може изабрати (слика 15). Ако се са  $I^{donje}$  и  $I^{gornje}$  означе горња и доња граница интервала поверења, тада се тачка за екстраполацију на доњем крају расподеле бира случајно из суженог интервала између  $Y_d^{donje}$  и  $Y_d^{gornje}$ . При томе је:

$$Y_d^{donje} = \begin{cases} I^{donje}, & I^{donje} > 0 \\ 0, & I^{donje} < 0 \end{cases}$$

$$Y_d^{gornje} = \min(x_{min}, I^{gornje})$$



Слика 15 – Екстраполација расподеле примењена у моделу спајањем екстремних осмотрених података  $Y_{min}$  и  $Y_{max}$  и случајно изабраних тачака (крстићи) из интервала поверења 1000-годишњих квантила

Слично важи и за горњи део расподеле, где се тачка за екстраполацију бира случајно из подинтервала између  $Y_g^{donje}$  и  $Y_g^{gornje}$ , при чему је:

$$Y_g^{donje} = \max(x_{max}, I^{donje})$$

$$Y_g^{gornje} = I^{gornje}$$

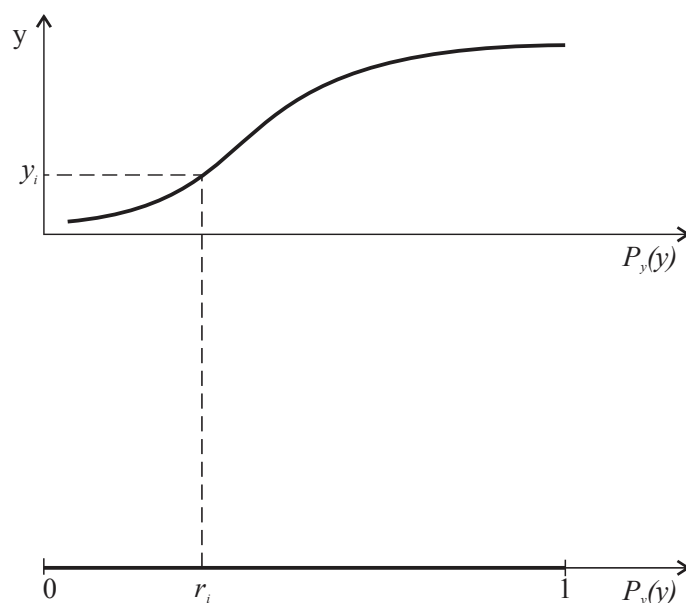
У опсегу између срачунатих граница генерише се случајни број у интервалу  $(0, 1)$ , којим се множи распон између дефинисаних граница и додаје на  $Y_g^{donje}$  односно одузима од  $Y_d^{gornje}$ .

Друга тачка одређена на описани начин се спаја правом линијом са тачком најмање односно највеће осмотрене вредности. Та права на папиру лог-нормалне вероватноће служи за генерисање случајних бројева изван распона осмотрених података, као што је приказано на слици 15.

#### 4.3.4.2 Монте Карло симулације низова

Поступак генерисања низова случајних података у првом кораку предложене методологије је следећи:

1. За осмотрене недељне низове формира се непараметарска функција расподеле за логаритамски трансформисане податке према поступку описаном у 3.4.4.2 уз екстраполацију крајева расподеле као што је описано у претходном одељку.



Слика 16 – Генерисање података из униформне расподеле

2. Генерисање вредности недељних протока спроводи се Монте Карло техником, којом се генеришу случајне вредности за сваку недељу из непараметарске расподеле осмотрених низова недељних протока. Прво се генерише низ случајних бројева (у овој дисертацији 1000 бројева) у интервалу  $(0, 1)$  који представљају вероватноћу односно вредност функције расподеле. За те случајне бројеве тј. вероватноћу одређују се одговарајући протоци из

функције расподеле, као што је приказано на слици 16. На тај начин добијају се генерисани недељни низови са 1000 вредности протока.

3. Генерисање вредности падавина, као и у другим серијама које садрже нулте податке, врши се на следећи начин. Нека осмотрени низ има укупно  $n$  чланова, од којих је  $n_0$  број чланова низа који имају вредност 0. Обележимо функцију расподеле низа са нулама са  $F(x)$ , а функцију расподеле ненултих чланова са  $F_1(x)$ . Функција расподеле  $F_1(x)$  се описује непараметарском расподелом из  $n_1 = n - n_0$  осмотрених података различитих од нуле. Тада се расподела целог низа може приказати као:

$$F(x) = p_0 + (1 - p_0) \cdot F_1(x)$$

где је  $p_0 = \frac{n_0}{n}$  проценат нултих података у осмотреном низу којим се оцењује вероватноћа појаве нулте вредности (тј. појаве дана без падавина). На овако описани начин, приликом генерисања серија, одређујемо прво број нултих података (тј.  $1000 \cdot p_0$ ) који је забележен у осмотреној серији. Затим се генерише преостали део серије из непараметарске расподеле ненултих вредности  $F_1(x)$  на начин описан у претходној тачки.

4. Генерисање серија се завршава када су статистике генерисаног низа довољно блиске осмотреним статистикама, коришћењем унапред усвојених критеријума. У овом раду постављени су критеријуми за слагање средњих вредности, стандардних девијација и коефицијената асиметрије генерисаних низова са осмотреним. Ако после генерисаних 1000 недељних података нису задовољени критеријуми за слагање статистика осмотрених и генерисаних низова, алгоритам наставља да генерише 1001. податак, а статистике се рачунају за серију [2, 1001] и пореде се статистикама прве серије [1, 1000]. Генерисање новог податка и поређење статистика се наставља за дату недељу док генерисане статистике не буду довољно блиске. На пример, критеријум за слагање средњих вредности је усвојен да буде 0.001 (ради се са логаритмованим подацима) и када је разлика средњих вредности мања од критеријума сматра се да су услови за генерисање задовољени. Уколико се критеријум за слагање средњих вредности не задовољи до генерисаног 2000-тог податка, онда је усвојено да критеријум буде 0.002, чиме се олакшава проналажење одговарајућег низа. Уколико не добијемо низ који је задовољио постављене критеријуме до 4000-тог генерисаног податка, генерише се нови



низ и понавља цео поступак. Исто важи и за коефицијент асиметрије, при чему су постављени критеријуми 0.025 до 2000-тог податка а затим 0.05 до 4000-тог генерисаног податка.

На напред описан начин су добијени генерисани 1000-годишњи низови недељних података са статистикама усклађеним са осмотреним серијама. Док овако добијене хидролошке серије задржавају само статистике осмотрених серија, између података не постоји никаква зависност, односно корелациона веза. Добијене серије података се антилогаритмују на крају овог корака. При антилогаритмовању не долази до значајних одступања статистика генерисаних и осмотрених оригиналних низова с обзиром да су критеријуми за слагање статистика у логаритамском домену строго постављени.

Као резултат првог корака добија се матрица  $\mathbf{G}$  генерисаних података са  $M$  колона ( $M$  променљивих) и 1000 редова, по аналогији са матрицом улазних тј. осмотрених података  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{G} = [G_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, 1000, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

Иако би се у следећем кораку и даље могло радити са логаритмованим подацима, у овом раду је изабрано да се у други корак уђе са оригиналним подацима како би се репродуковале њихове корелације а не корелације логаритмованих података.

#### 4.3.5 Корак 2. – Постизање корелационе структуре низова

Да би генерисани подаци могли да добро представљају осмотрене податке, потребно је, поред слагања статистичких карактеристика независних променљивих које је обезбеђено генерисањем серија у првом кораку, да серије података садрже и корелацију коју показују осмотрени подаци. Подешавање жељене корелације се може посматрати као проблем комбинаторике (Ilich, 2009), јер је могуће систематским преслагањем података у случајним низовима постићи жељену корелацију. Пермутација података у свакој колони матрице  $\mathbf{G}$  случајних недељних података генерисаних у првом кораку врши се све док се не добије циљана структура коваријансе осмотрених података. На овај начин се не мењају функције расподеле и статистички параметри генерисаних серија, који су усклађени са осмотреним низом и добијени у првом кораку.

Уколико посматрамо две случајне променљиве  $X$  и  $Y$ , као меру јачине њихове статистичке зависности користимо коефицијент корелације  $\rho_{X,Y}$ :

$$\rho_{X,Y} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y}$$

где су  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  средње вредности, а  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  стандардне девијације променљивих  $X$  и  $Y$ . Из обрасца се може уочити да ће се вредност коефицијента корелације  $\rho_{X,Y}$  променити уколико се промене места било која два члана низа  $y_i$  и  $y_k$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ). Дакле, узастопним заменама вредности у низовима може се постићи циљана корелација. При тим заменама не мењају се статистике и расподела генерисаних низова из првог корака.

Током истраживања за потребе ове дисертације, коришћена су два алгоритма за постизање корелационе структуре података:

1. Алгоритам који као циљ користи матрицу регресионих коефицијената у регресији између  $M$  колона осмотрених података (Plich, 2009), и
2. Алгоритам Iman-Conover-a (Iman & Conover, 1982) који као циљ има корелациону матрицу осмотрених података  $C$  (слика 13).

#### 4.3.5.1 Алгоритам 1.

Достизање жељеног коефицијента корелације између два низа није тешко, међутим, када треба подесити аутокорелацију између нпр. 52 недељна низа и крос-корелацију између више станица, задатак се вишеструко усложњава. На пример, за три станице и недељне податке, имамо  $3 \cdot 52 = 156$  коефицијената корелације које треба подесити.

Овај алгоритам користи везу између коефицијента корелације са линеарном регресијом. Линеарни регресиони модел можемо да напишемо као:

$$y = a_0x + a_1 + u$$

где је  $x$  независна променљива,  $a_0$  и  $a_1$  су регресиони коефицијенти, а  $u$  је случајни члан (резидуал) са нормалном расподелом  $N[0, \varepsilon_y]$  где је  $\varepsilon_y$  је стандардна грешка резидуала. Вредности коефицијената  $a_0$ ,  $a_1$  и стандардна грешка резидуала  $\varepsilon_y$  се оцењују из осмотрених података.

Стандардна грешка резидуала се рачуна по обрасцу:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2}{n - 2}}$$

где  $y'_i$  представља ординату регресионе линије ( $y'_i = a_0x_i + a_1$ ). Стандардну грешку можемо да изразимо и следећим обрасцем:

$$\varepsilon_y^2 = \frac{n - 1}{n - 2} (1 - r^2) \sigma_y^2$$

Коефицијент детерминације регресије представља део варијансе података објашњене регресијом и рачуна се по обрасцу:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Код просте линеарне регресије, коефицијент детрминације је једнак квадрату коефицијента корелације две променљиве, док код вишеструке линеарне регресије зависи од међусобне корелације променљивих. Као и код коефицијента корелације, примећује се да и коефицијент детерминације може да промени вредност као резултат промене места чланова низа, што се види из члана  $(y_i - \hat{y}_i)^2$  који фигурише и у обрасцу за стандардну грешку. Када се коефицијент детерминације повећава и тежи 1, повећава се и коефицијент корелације (тежи 1 или -1) а стандардна грешка се смањује и тежи 0. Ова чињеница, да преслагањем елемената низа мењамо вредност стандардне грешке и вредност коефицијента корелације, тј. смањењем стандардне грешке повећава се коефицијент корелације и обрнуто, омогућава да се направи алгоритам за преслагање чланова низа.

Циљ алгоритма је, дакле, да се између генерисаних недељних низова постигне исти коефицијент детерминације и иста стандардна грешка регресије као код осмотрених низова. Међутим, због различитих дужина осмотрених и генерисаних низова, однос њихових стандардних грешака можемо да изразимо према следећем:

$$\varepsilon_{osm}^2 = \frac{n_{osm} - 1}{n_{osm} - 2} (1 - r^2) \sigma_{osm}^2$$

$$\varepsilon_{gen}^2 = \frac{n_{gen} - 1}{n_{gen} - 2} (1 - r^2) \sigma_{gen}^2$$

$$\frac{\varepsilon_{gen}^2}{\varepsilon_{osm}^2} = \frac{\frac{n_{gen} - 1}{n_{gen} - 2} \sigma_{gen}^2}{\frac{n_{osm} - 1}{n_{osm} - 2} \sigma_{osm}^2}$$

па се циљна стандардна грешка добија множењем овог односа и стандардне грешке регресије осмотрених низова у и  $x$ .

Овај алгоритам најпре подешава корелацију између прве и друге колоне у матрици  $\mathbf{G}$  (тј. коефицијент корелације  $\rho_{12}$ ), при чему се користи проста линеарна регресија. Алгоритам затим подешава корелацију треће колоне са претходне две (тј. коефицијенте корелације  $\rho_{13}$  и  $\rho_{23}$ ), чиме се већ прелази на вишеструку регресију.

Поступак се даље наставља колону по колону до постизања жељене корелационе структуре.

Процедура за преслагање елемената може да буде описана детаљније кроз више корака.

1. Са регресионим коефицијентима  $a_0$  и  $a_1$  између два осматрана низа и низом независне променљиве  $x_i$  формира се низ  $y'_i = a_0x_i + a_1$ . Генерише се привремени низ  $\tau$  случајног члана  $u_i$  из нормалне расподеле  $N[0, \varepsilon_y]$ . Вредности ова два низа чувају за следеће итерације. Додавањем случајног члана добијамо низ зависне променљиве:

$$y''_i = a_0x_i + a_1 + N[0, \varepsilon_y]$$

Овако добијени низ је помоћни низ за преслагање елемената у случајном низу  $y$  из матрице  $\mathbf{G}$ , јер нови низ  $y''$  има жељену корелацију са низом  $x$ .

2. Низови  $y''$  и  $y$  се сортирају (по опадајућем или растућем редоследу) и тако поређани дају највећу могућу корелацију између та два низа. При томе низ  $y''$  има жељену корелацију са низом  $x$ , док низ  $y$  има жељену расподелу.

3. Врши се замена елемената низа  $y''$  са елементима низа  $y$  одговарајућег ранга. На овај начин се низ  $y$  приближава жељеној корелацији у односу на независну променљиву  $x$ .

4. Прерачунава се вредност коефицијента детерминације  $R'^2$  низа  $y$  са низом  $x$  који одговара новом редоследу  $y$  у низу  $y$ .

5. Пореди се коефицијент детерминације  $R'^2$  са жељеном вредношћу коефицијента  $R^2$ . Уколико је разлика коефицијента довољно мала (нпр. 0.005), сматра се да је достигнута жељена вредност коефицијента детерминације. Ако то није случај, наставља се са прорачуном.

6. Рачуна се стандардна грешка  $\varepsilon'_y$  регресије низа  $y$  са низом  $x$  који одговара новом редоследу  $y$  у низу  $y$ , и њен однос  $\delta$  са жељеном стандардном грешком:

$$\delta = \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon_y}$$

7. Елементи низа  $\tau$  се коригују као  $\tau' = \tau\delta$ , а затим се формира нови помоћни низ

$$y''_i = a_0x_i + a_1 + \tau' = y'_i + \tau'$$

Даље се понављају кораци од 2 до 7 док коефицијент детерминације и стандардна грешка не конвергирају, односно док се не добије побољшање коефицијента детерминације у даљем понављању прорачуна. Обично се у две до три итерације достигне конвергенција рачуна.

Убрзање конвергенције датог алгоритма може се постићи бољим избором вредности  $\delta$  којом се коригује случајни вектор у регресионом моделу. Од треће итерације користи се линеарна интерполација две претходне вредности  $\delta$ . Ако са  $g_k$  обележимо усвојену вредност  $\delta$  у итерацији  $k$ , а са  $c_k$  обележимо њену вредност кориговану према разлици циљне и текуће вредности коефицијента детерминације:

$$c_k = g_k + \frac{r'^2 - r^2}{r^2}$$

тада се сматра да је достигнута конвергенција када релативна грешка између циљане вредности и срачунате вредности постане занемарљива.

Када је постигнута жељена корелација између два низа, на претходно описани начин врши се и подешавање корелације између више променљивих (нпр.  $x$ ,  $y$  и  $z$ ). При томе се користи једначина вишеструке регресије:

$$z'_i = a_0 x_i + a_1 y_i + a_2 + N[0, \varepsilon_z]$$

Преслагањем елемената низа  $z$  врши се симултано подешавање корелације низа  $z$  према  $x$  и корелације низа  $z$  према  $y$ . Међутим, када број независних променљивих у овом алгоритму превазиђе број година осматрања, систем једначина из који се рачунају регресиони коефицијенти постаје неодређен и жељена корелација се тешко постиже.

С друге стране, жељени коефицијент корелације може да се понекад постигне и само преслагањем једног мањег броја чланова низа (нпр. првих 30-так чланова у низу од 1000), а да након тога сви остали чланови не промене место.

Мана овог алгоритма је и то што премештање једног елемента из текуће колоне побољшава корелацију те колоне са једном колоном, док истовремено умањује корелацију са неком другом колоном.

Овај алгоритам није показао задовољавајуће резултате у примени, где се јавио проблем лошег слагања расподела годишњих протока осматрених података и података из преуређених генерисаних недељних низова. Генерисани средњи годишњи протоци су обично имали расподелу са веома израженом асиметријом, што не одговара расподели осматрених вредности, а што је последица постепеног подешавања корелационе структуре по колонама матрице генерисаних података  $\mathbf{G}$ , где се због побољшања корелације у неком наредном кораку квари постигнута корелација из неког претходног корака. Из наведеног разлога, прешло се на примену другог алгоритма који се описује у наредном одељку.

#### 4.3.5.2 Алгоритам 2.

Иман-Коноверов алгоритам (Iman & Conover, 1982) за постизање жељене корелационе структуре заснован је непараметарској корелацији, односно на корелацији рангова два низа. Јачина ове корелације се најчешће описује Спирмановим (Spearman) коефицијентом корелације рангова. Предност ове непараметарске методе је та што се може применити на податке из било које расподеле. У овом алгоритму тражена корелација може се постићи само преслагањем елемената у једном низу, чиме се не ремети расподела тог низа јер се оригиналне вредности задржавају. У алгоритму се користи корелација рангова, за коју се сматра да може да добро опише корелациону структуру података. С друге стране, вредности Пирсоновог коефицијента корелације између низова који значајно одступају од нормалне расподеле или који имају изузетке могу дати погрешне информације о јачини корелационе везе између два низа.

Алгоритам се заснива на следећој идеји: трансформацијом више некорелисаних низова може се постићи да они имају жељену корелациону матрицу, при чему се та трансформација заснива на декомпозицији жељене корелационе матрице. На тај начин, трансформисани низови са жељеном корелационом матрицом могу да представљају образац распореда (тј. кључ за преслагање) елемената у низовима уз који се постиже жељена корелација рангова у било ком другом низу. У наставку се овај алгоритам детаљно описује.

Као резултат првог корака имамо матрицу  $\mathbf{G}$  генерисаних независних низова димензија  $n \times M$ . Овде је  $n = 1000$ , а  $M$  зависи од броја разматраних станица и усвојеног временског корака (нпр. за 3 станице и недељне податке  $M = 3 \times 52 = 156$ ).

Нека је  $\mathbf{C}$  циљна корелациона матрица и представља корелациону матрицу осматраних података. Матрица  $\mathbf{C}$  треба да буде позитивно дефинитна матрица са дијагоналним члановима једнаким 1, а сви остали чланови треба да су мањи од 1 по апсолутној вредности. Уколико нису сви дијагонални чланови матрице  $\mathbf{C}$  једнаки 1, потребно је да се изврши корекција тако да се добије позитивно дефинитна матрица са дијагоналним члановима једнаким 1.

На основу матрице  $\mathbf{C}$  потребно је Холескијевом (Cholesky) декомпозицијом срачунати елементе доње торугаоне матрице  $\mathbf{P}$  такве да важи релација  $\mathbf{C} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T$ .

Затим се формира низ случајних елемената, узоркованих из нормалне расподеле, исте дужине  $n$  као и улазни подаци. Са  $M$  пермутација овог низа формира се матрица  $\mathbf{R}$ , која је дакле истих димензија као и улазна матрица  $\mathbf{G}$ . За потпуно независне низове,

корелациона матрица је јединична матрица, тј. матрица са јединицама на главној дијагонали док су сви остали елементи нуле. Корелациона матрица  $T$  случајних низова у матрици  $R$  је само приближно једнака јединичној матрици (дијагонални елементи су блиски 1, а остали елементи су блиски 0). Ако матрицу  $T$  декомонујемо у доњу троугаону матрицу  $Q$  из  $T = Q Q'$ , матрица  $R^*$  срачуната као  $R^* = R Q^{-1} P'$  је трансформисана матрица која има жељену корелациону структуру дату матрицом  $C$ . На крају, рангови елемената у матрици  $R^*$  се користе као кључ за преслагање елемената матрице  $G$ .

Иман-Коноверовим алгоритмом постиже се одлично слагање између циљне корелационе матрице  $C$  и корелационе матрице трансформисаних низова у матрици  $R^*$ . Пресложени низови у матрици  $G$  ће имати исту корелацију рангова као и матрица  $R^*$ , док ће корелациона матрица са Пирсоновим коефицијентима бити врло блиска циљној матрици, али неће бити идентична.

Ово је једноставан и ефикасан алгоритам, који непараметарским поступком некорелисане променљиве претвара у променљиве са циљном корелационом структуром. Резултат овог корака јесу репродуковани коефицијенти аутокорелације и крос-корелације осмотрених величина по колонама у матрици генерисаних променљивих.

#### *4.3.5.3 Подешавање расподеле генерисаних података на годишњем нивоу*

Након преслагања елемената према једном од претходно описаних алгоритама подаци у матрици генерисаних низова имају произведене коефицијенте корелације који су веома блиски осмотреним серијама. Међутим, имајући у виду да је крајња сврха једног оваквог алгоритма одређивање запремине акумулације или одређивање правила управљања расподелом воде из акумулације, веома је значајно да у генерисаним серијама постоје године у којима је укупна годишња запремина отицаја мања од минималне годишње запремине у осмотреним серијама, а што се свакако очекује у једном низу трајања 1000 година у односу на осмотрени низ. Најмањи недељни протоци у генерисаним недељним подацима су мањи од одговарајућих осмотрених вредности, али то није гаранција да ће се у генерисаним серијама сигурно појавити година са годишњим отицајем мањим него што је најмањи годишњи отицај у осмотреном низу. Да би се то осигурало, може се увести алгоритам којим ће се додатно пресложити недељни подаци из дефинисаног броја година (нпр. до 5). Ово додатно преслагање практично неће променити претходно подешене коефицијенте корелације.

Овај део алгоритма се спроводи на следећи начин: тражи се у генерисаном низу година са најмањим годишњим отицајем, а онда се у тој години најмања недељна вредност замењује са апсолутно најмањом вредношћу за ту недељу из неке друге године. Овакве замене се могу наставити са другом, трећом, итд. најмањом недељном вредношћу у изабраној години до задовољења услова да годишњи отицај буде мањи од најмањег осмотреног за неки фактор (нпр. 1.15). Након подешавања минималног генерисаног годишњег отицаја, може се подесити и следећи најмањи годишњи отицај, где се води рачуна да се недељни подаци из већ подешених година не користе за замену. Поступак се на описани начин понавља док се не задовоље унапред постављени услови. Треба напоменути да са овим преслагањем практично нема промене коефицијената корелације, а као резултат добијамо одређени број година које су битне приликом оцењивања резултата модела у погледу статистичких карактеристика годишњих низова.

После овог преслагања имамо потпуно подешене статистике генерисаних серија и корелациону структуру веома блиску осмотреној корелационој матрици.

#### 4.3.6 Корак 3. – Постизање корелационе структуре агрегираних низова

##### 4.3.6.1 Подешавање аутокорелације чланова са краја и почетака година и годишње аутокорелације

У временским серијама се ауторегресионе везе настављају из године у годину. На пример, протицаји у недељама 50, 51 и 52 у било којој години треба да буду корелирани са протицајима у недељама 1, 2 итд. у следећој години. Поред тога, за све станице у генерисаној серији треба подесити и годишње аутокорелације. Ово се постиже преслагањем редова генерисаних података, тј. целих година са већ сложеним недељним подацима (Ilich & Despotovic, 2008). Овим кораком се завршава претварање низова случајних бројева у временске серије са захтеваном аутокорелационом структуром.

Нека  $s$  представља индекс последњег протицаја током године (52. у случају недељних протицаја) за дате станице и  $\rho_{s,1}$  коефицијент корелације осмотрених података (слика 13) између протицаја у недељи 52. за било коју годину и протицаја у недељи 1. за следећу годину. Слично,  $\rho_{s-1,1}$  повезује протицаје у недељи 51. са протицајима у првој недељи следеће године, а  $\rho_{s,2}$  повезује протицаје у недељи 52. са протицајем у другој недељи следеће године. Исто важи и за корелације  $\rho_{s,1}^G$ ,  $\rho_{s-1,1}^G$  и  $\rho_{s,2}^G$  добијене из генерисаних серија. Ако се ово додатно преслагање спроведе тако да се подесе корелације између последња два податка у једној години и прва два податка у следећој



години, то би било еквивалентно AR(2) процесу. У том случају, критеријум за преслагање за станицу  $k$  је сума квадрата разлика коефицијената аутокорелације до другог реда генерисаних и осмотрених низова  $D_k$  на тој станици (Ilich & Despotovic, 2008):

$$D_k = (\rho_{s-1,1}^G - \rho_{s-1,1})^2 + (\rho_{s,1}^G - \rho_{s,1})^2 + (\rho_{s,2}^G - \rho_{s,2})^2$$

Уопштено, за слагање коефицијената аутокорелације недељних протока са прелаза из једне у другу годину до реда  $L$ , ф-ја  $D_k$  је дефинисана као:

$$D_k = \sum_{p=1}^L \sum_{q=n-L+p}^s (\rho_{q,p}^{kG} - \rho_{q,p}^k)^2$$

где  $q$  и  $p$  представљају индексе недеље у датој и следећој години, док је  $s$  укупан број недеља у години.

Поред аутокорелације недељних протока на прелазу из једне у другу годину, потребно је подесити и коефицијенте аутокорелације годишњих протока. Слично претходном, уводи се означавање са  $AO_l$  и  $AG_l$  за осмотрене и генерисане годишње корелационе функције за помак  $l$ . Претходно дат критеријум  $D_k$  допуњује се додавањем члана за слагање осмотрене и генерисане годишње аутокорелације до реда  $m$ :

$$D_k = \sum_{p=1}^L \sum_{s=s-L+p}^s (\rho_{q,p}^{kG} - \rho_{q,p}^k)^2 + \sum_{l=1}^m (AO_l^k - AG_l^k)^2$$

Проширењем наведеног принципа на више станица, уводимо сложени критеријум  $D$  као суму свих појединачних функција  $D_k$ :

$$D = \sum_{k=1}^K D_k$$

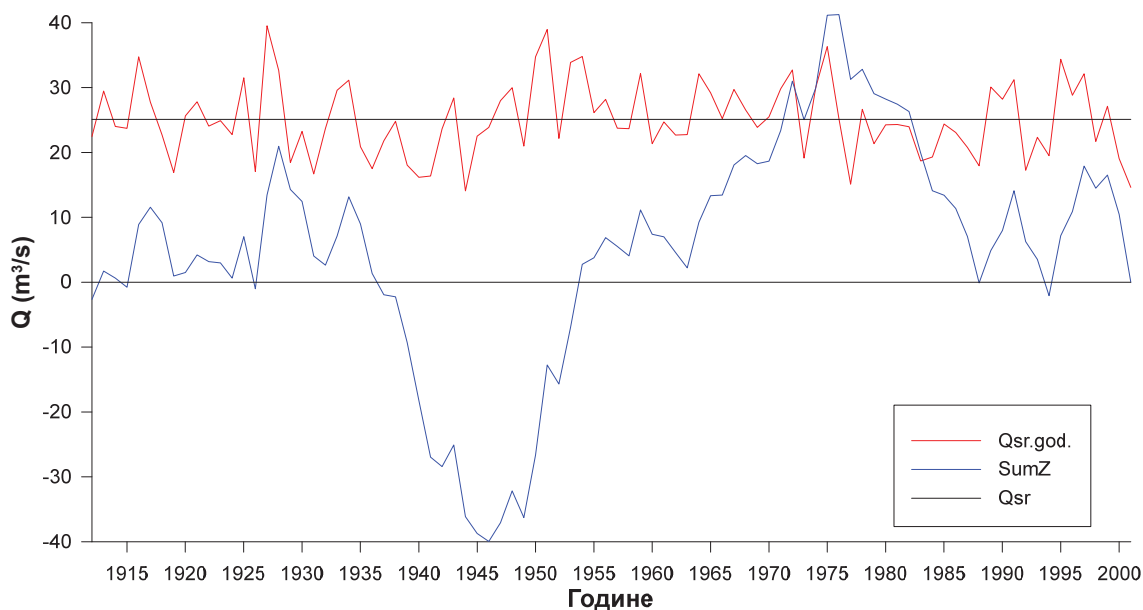
где је  $K$  укупан број станица које су узете у обзир. Преслагање редова генерисане матрице се врши док се не добију вредности  $D$  довољно блиске 0, што је еквивалент слагања жељене недељне и годишње аутокорелације за све станице. У практичној примени, за  $D$  се може дати ограничење  $\varepsilon$ , тако да је одговарајући редослед редова у симулираној матрици пронађен ако је  $D < \varepsilon$ .

Тражење одговарајућег редоследа се врши коришћењем комбинованог алгоритма који симултано тражи редове за замену и од почетка и од краја генерисаног низа. У низовима са довољно великим бројем података може бити више могућих распореда редова који ће задовољити жељене критеријуме, док је довољно наћи само један. Један важан аспект алгоритма преслагања редова је да треба одржавати релативну

униформност статистичких особина кроз генерисане серије. Ово се може постићи пермутацијом редова подједнако кроз целу генерисану серију (Ilich & Despotovic, 2008).

#### 4.3.6.2 Вишегодишње особине годишњих серија

На крају претходног алгоритма, подаци у редовима матрице **G** (целовите године на свим станицама) су оптимизовани и поређани тако да задовоље тражене аутокорељације на недељном и годишњем нивоу. Међутим, карактеристике низова годишњих протока у погледу вишегодишњих промена и веома дуге меморије процеса у генерисаном низу од 1000 година не морају да одговарају онима из осматрених низова. Један од разлога за то је што се аутокорељациона функција годишњих протока подешава за онолико временских помака колико има смисла у односу на дужину осматреног низа ( $n/4$ ), па ако то износи око 15-25 година за уобичајене дужине низова, тада је логично што се у генерисаним низовима од 1000 година не репродукују те дугорочне карактеристике.

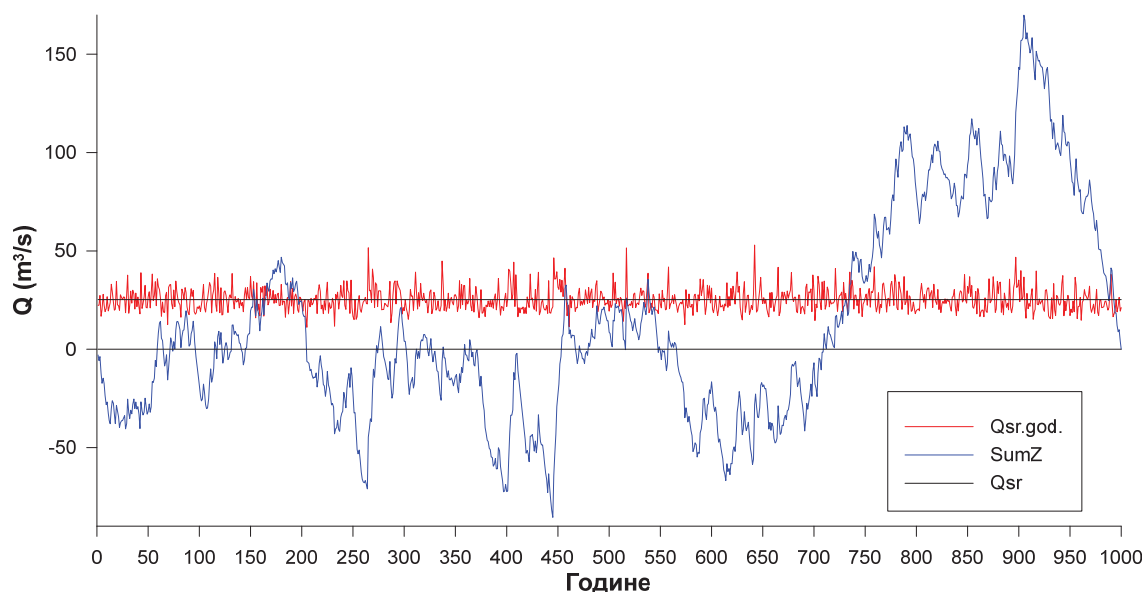


Слика 17 – Приказ једне од осматрених временских серија годишњих протока и кумулативне сумарне криве одступања од средње вредности

Дугорочне карактеристике низова које се могу разматрати су приказане у одељку 3.3, укључујући годишње распоне, вишкове, дефиците, пресецања и њихово трајање током година. У генерисаним низовима се уочава да трајање и интензитет вишегодишњих водних и сушних периода не прати исте карактеристике осматрених серија. На пример, код једне од осматрених серија се јавља низ годишњих дефицита или вишкова дужине до око 35 година, њихов распон је око 80 m³/s, укупни број пресецања 12 (слика 17). Код одговарајуће генерисане серије се јављају потпуно другачије

вредности: низ годишњих дефицита или вишкова траје и до неколико стотина година (у овом примеру око 300), њихов распон је око  $255 \text{ m}^3/\text{s}$ , а укупни број пресецања 32 (слика 18). Очигледно је и без срачунавања статистика да добијене величине не одговарају осмотреним и да у том смислу добијене серије не репродукују довољно добро осмотрене серије.

Да би се генерисане серије података прилагодили и у односу на ове параметре при вишегодишњем сагледавању, довољно је извршити додатно минимално преслагање вишегодишњих сегмената на начин да се повећа број пресецања, умањи дужина трајања вишкова или дефицита и смањи распон сумарне криве одступања од средње вредности, не нарушавајући значајно добијени резултат претходних корака. Овај додатни корак је извршен у односу на криву покретних средина сумарне криве одступања од средње вредности годишњих протока. Сегменти низа на растућој грани сумарне криве се премештају на опадајућу грану сумарне криве, прекидајући тако неодговарајући тренд. Овим поступком се изврши до 10-так премештања сегмената од 3-10 узастопних година и на тај начин се значајно не нарушава претходно постигнута корелација и аутокорелација, а додатном пермутацијом се подешава и ова дугогодишња карактеристика осмотреног низа.



Слика 18 – Приказ генерисаних серија годишњих протока и кумулативне сумарне криве одступања од средње вредности за исту станицу као на слици 17, после преслагања у 3. кораку и разлог потребе за додатним алгоритмом

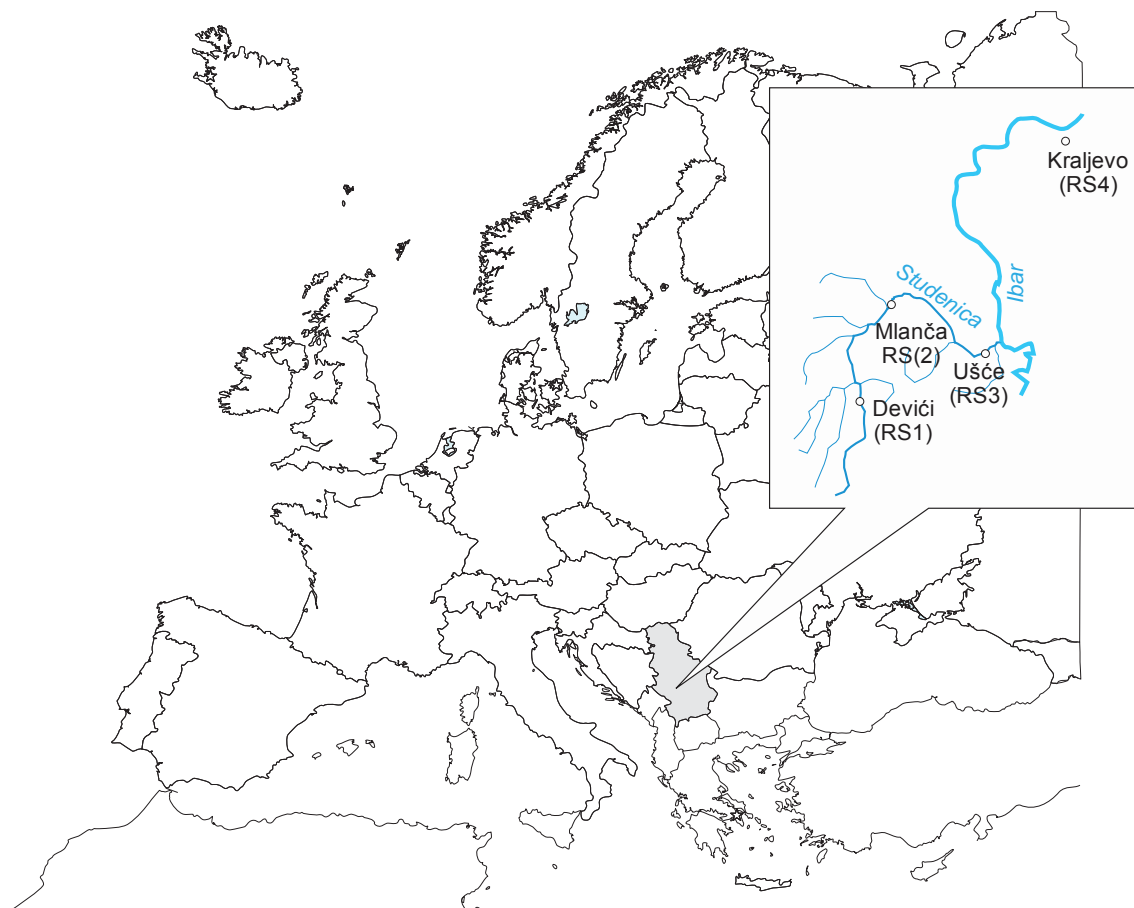
Основни параметри на основу којих се врши преслагање сегмената јесу број прелаза (узлазно или силазно пресецање сумарне криве са нултом вредношћу), максимално трајање корака (број година од једног до другог прелаза), распоређеност

позитивних и негативних корака у серији (њихова вероватноћа појаве и трајања у односу на средњу вредност тежи изједначавању, тј.  $p = q = 0.5$ , где је  $p$  вероватноћа појаве или трајања позитивних корака, а  $q$  негативних корака), максимална и минимална вредност и сл. Сви карактеристични параметри описани су у књизи Јевђевића (Јевђевић, 1972) где је дат детаљан приказ анализе распона хидролошких серија и анализе хидролошких серија помоћу корака. У овом раду се користе карактеристике процеса које је Јевђевић дефинисао, али се не улази у њихову дубљу анализу јер би то превазишло циљеве овог истраживања. Приказаће се само резултати и делимична анализа параметара с циљем побољшања временских серија и њихове применљивости у даљим анализама пројектовања, коришћења и управљања водама.

## 5 РЕЗУЛТАТИ ПРИМЕНЕ МЕТОДОЛОГИЈЕ НА ОДАБРАНИМ ПРИМЕРИМА

### 5.1 Улазни подаци

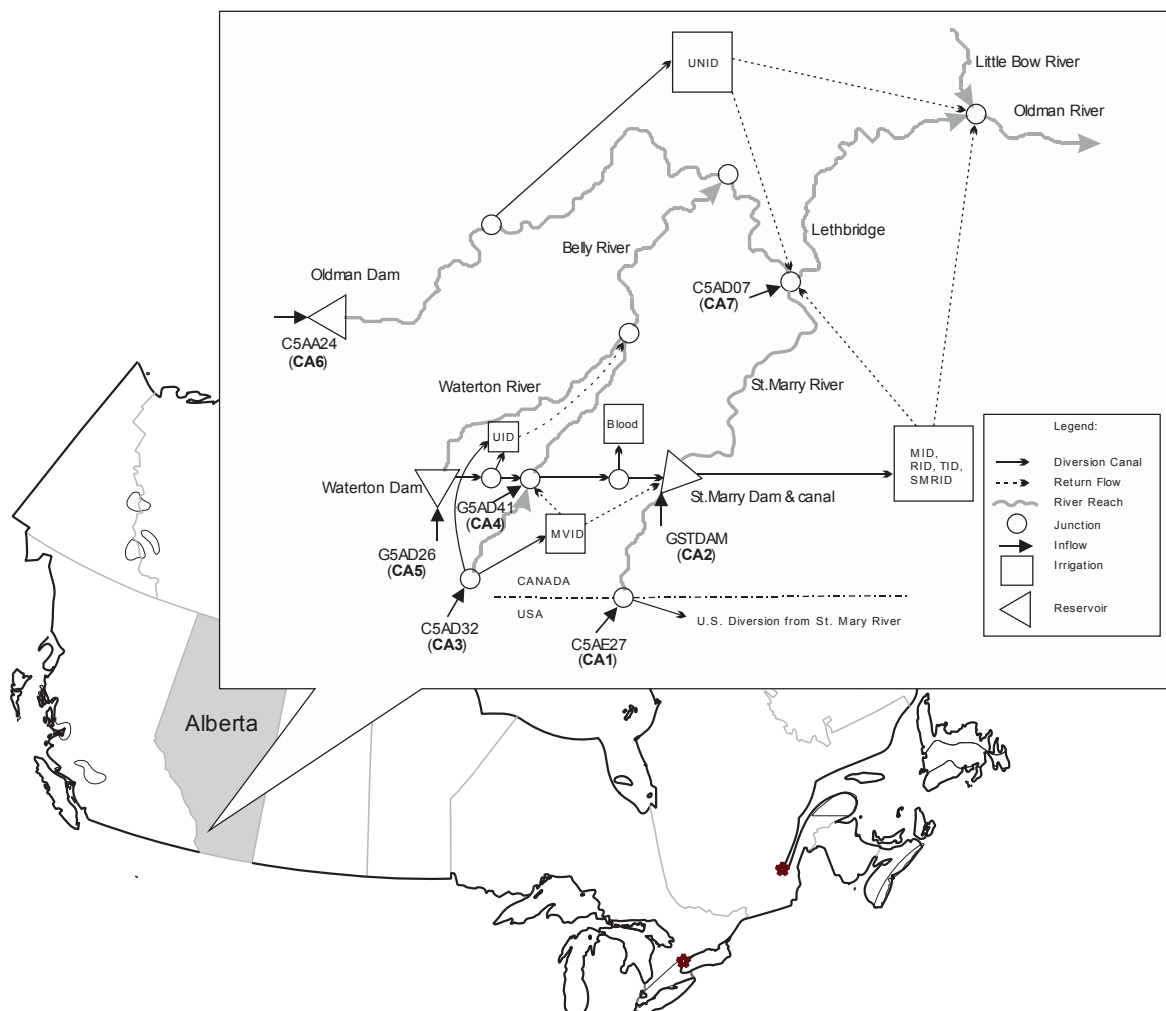
За примену предложене методологије одабрани су сливови реке Студенице у Србији и реке Олдман у Канади. Избор сливова ових река је извршен, пре свега, због расположивих података о природним протоцима, постојања више мерних места на водотоку и дужине расположивих осматраних низова. Поред протока, коришћени су и подаци о падавинама како би се показало да модел може да успешно генерише низове разнородних хидролошких и метеоролошких величина, на више мерних места истовремено и са различитим временским корацима без израде засебних модела.



Слика 19 – Географски положај слива реке Студенице

У Србији није постојао велики број река са споменутим условима, па је изабрана река Студеница на којој режим није под утицајем објеката. На овој реци постоје три хидролошке станице са подацима о протоцима у периоду од 1964. до 2012. године, што

представља низ од 49 година. Поред тога, коришћени су подаци о падавинама са кишомерне станице у Краљеву, која се не налази на сливу Студенице, али је једина у окружењу имала потпуни низ података у споменутом периоду. Подаци су добијени од РХМЗ Србије за потребе израде модела у оквиру ове докторске дисертације. Географски положај реке Студенице и водомерних станица је дат на слици 19.



Слика 20 – Географски положај слива реке Олдман, Канада

Подаци о протоцима и падавинама из Канаде добијени су од Илића (2013, лична комуникација) а преузети су од агенције задужене за прикупљање и обраду података о протоцима Alberta Environment's Natural Flow Database, за потребе овог истраживања. Податке је користио Илић у својим радовима (Ilich & Despotovic, 2008; Ilich, 2009; 2014), чиме је омогућено и поређење резултата са резултатима добијеним овим истраживањем. Подаци о недељним протоцима за слив реке Олдман обухватају 7 станица и представљају реконструисане податке на основу потрошње и захватања за разне потребе и срачунатих губитака као што је испаравање, чиме су добијени природни протоци у периоду од 1912-2001, што представља низ од 90 година. Са споменутог слива на располагању су били и

подаци о падавинама са 4 станице за период 1928-2001, што за комбинацију са више хидролошких величина представља низ од 74 године, на 11 станица. Географски положај водомерних станица је дат на слици 20, где су приказани и објекти у водопривредном систему на реци Олдман. Приложени су називи хидролошких станица и ознаке које ће се користити у раду (табела 4) и кишомерних станица са њиховим ознакама (табела 5).

Табела 4 – Преглед свих водомерних станица, њихових ознака и сливних површина

Подаци са слива реке Студенице			Подаци са слива реке Олдман		
Ознака станице	Назив станице	Сливна површина (km <sup>2</sup> )	Ознака станице	Назив станице	Сливна површина (km <sup>2</sup> )
RS1	Девихи	191.4	CA1	C5AE27	1206.4
RS2	Мланча	310.0	CA2	GSTDAM	2286.3
RS3	Ушће	540.0	CA3	C5AD32	192.0
			CA4	C5AD41	653.0
			CA5	G5AD26	1272.1
			CA6	C5AA24	4401.1
			CA7	C5AD07	17031.2

Табела 5 – Преглед свих падавинских станица, њихових ознака

Подаци са слива реке Студенице		Подаци са слива реке Олдман	
Ознака станице	Назив станице	Ознака станице	Назив станице
RS4	Краљево	CA8	Cardstone
		CA9	Lethbridge
		CA10	M.View
		CA11	Taber

### 5.1.1 Временска дискретизација података

За водомерне станице на реци Студеници располагало се дневним подацима, па су за потребе рада формиране и нивои недељних и месечних података.

До недељних података се може доћи на више начина, а у овом раду је усвојен следећи: формирају се осредњени протоци на по 7 дана почевши од 1. јануара, па за тако формиране 52 недеље преостаје један дан на крају године; он се додељује последњој недељи у години. Значи, последња недеља је осредњена на основу 8 података. У случају преступне године, последњој недељи се додаје и 9 дан. Поступак је исти и код падавина, осим што се дневне падавине сабирају да би се добиле недељне падавине.

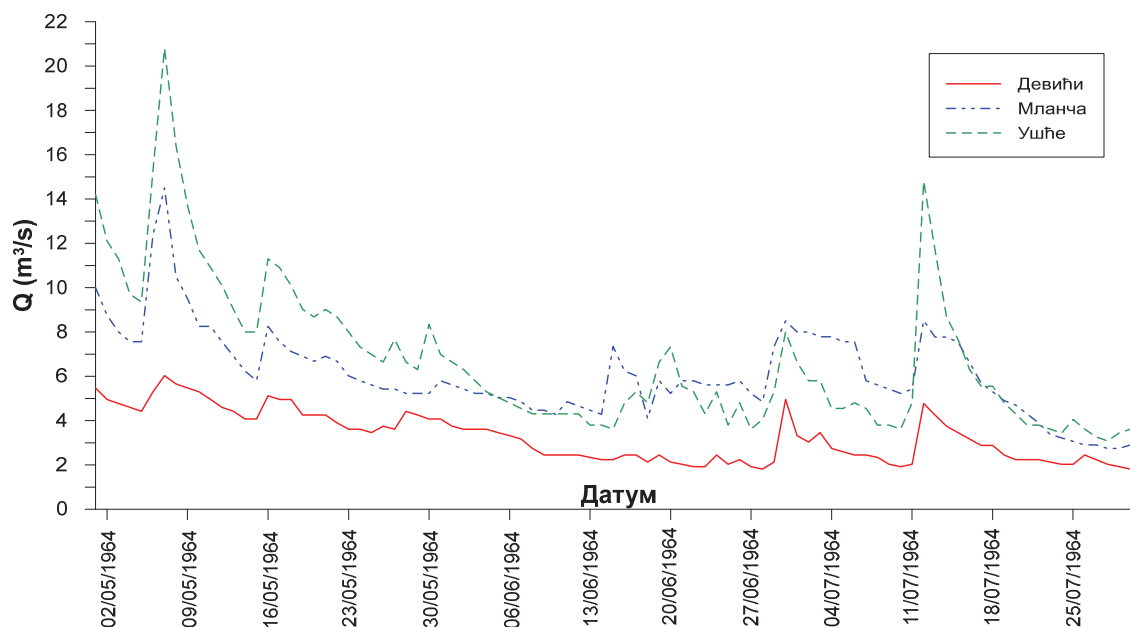
Код припреме дневних серија за поступак генерисања, усвојено је да свака година има 365 података, при чему су вредности протока измерене 29.02. осредњене са вредношћу измереном 28.02. Код падавина на станици Краљево вредност падавина измерена 29.02. додата је вредности измереној 28.02.

За канадске станице на располагању су били низови недељних података, тако да је било потребно формирање низова месечних података. Како су недељни протоци осредњене недељне вредности, дневни протоци за разматрани дан су усвојени према недељним протоцима за текућу недељу, па је средњи месечни проток добијен осредњавањем дневних протока.

### 5.1.2 Анализа података

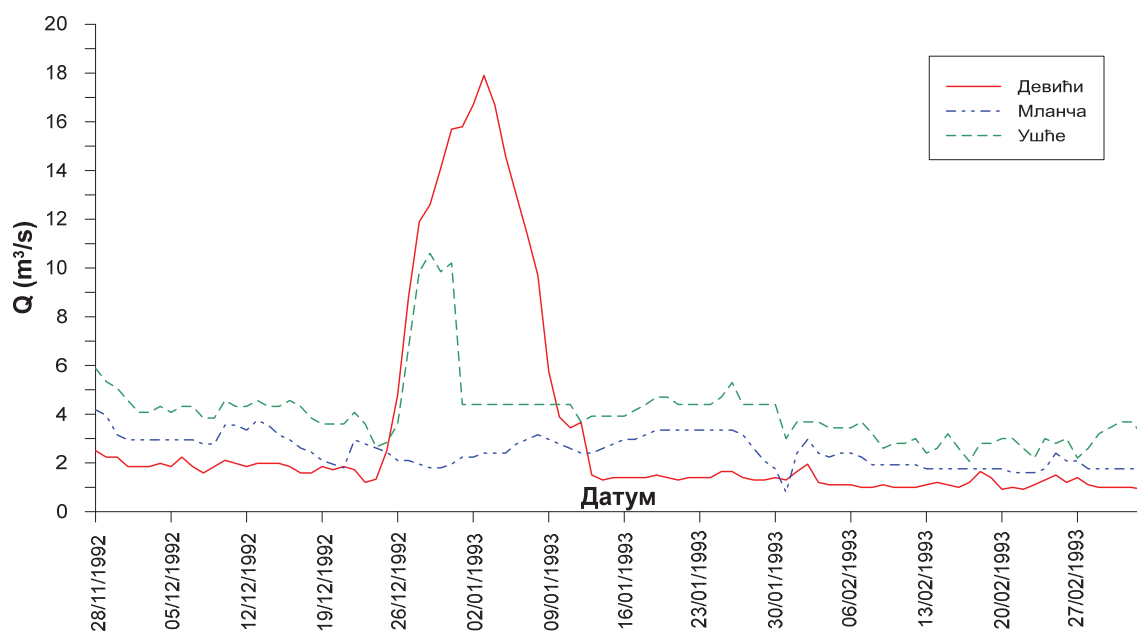
Анализа улазних података је извршена визуелно тј. графички, и рачунски – применом тестова за хомогеност, случајност, тренд, изузетке и нормалност података.

Прегледом свих података, највише проблема је уочено у хидролошким подацима на реци Студеници. Упоредним прегледом хидрограма на три станице примећене су одређене нелогичности у подацима дневних протока, као што су већи узводни протоци од низводних (слика 21) или отказ уређаја (слика 22, где је до отказа дошло због појаве леда). Сви периоди на којима су примећене споменуте нелогичности у дневним протоцима су размотрени и на нивоу недељних протока, где се сматрало да уколико се на недељном нивоу не покажу исте појаве такви подаци прихвате као одговарајући. Показало се да је и на недељном нивоу регистрован исти проблем у пар случајева, али нису вршене никакве корекције података јер је тест симулацијама утврђено да ове нелогичности не утичу на крајњи резултат генерисања низова.

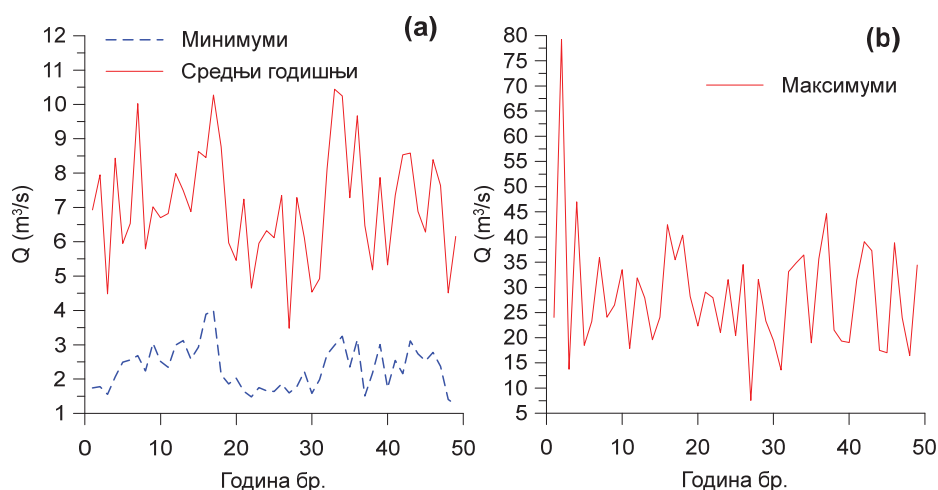


Слика 21 – Хидрограм дневних протока на реци Студеници за одабрани летњи период

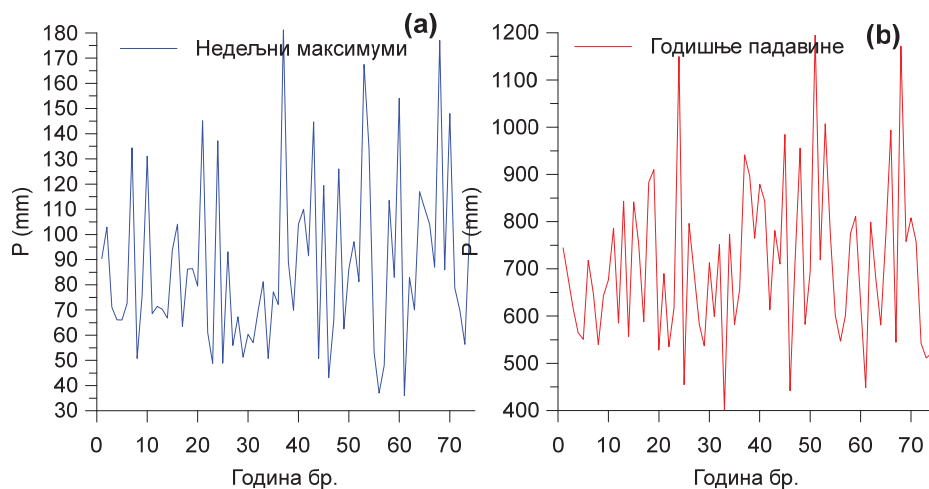




Слика 22 – Хидрограм дневних протока на реци Студеници за одабрани зимски период



Слика 23 – Годишњи протоци за хидролошку станицу Ушће (RS3): а) средњи годишњи и минимуми, б) максимуми



Слика 24 – Годишње падавине за падавинску станицу SA10: а) недељни максимуми, б) годишње падавине

Како би се приказали хидролошки и падавински режими на разматраним станицама, на сликама 23 и 24 приказани су низови средњих, максималних и минималних годишњих протока на станици Ушће, као и низови годишњих падавина и максималних годишњих недељних падавина на падавинској станици СА10 (због недостатка дневних података).

Хидролошки низови су детаљније анализирани применом различитих статистичких тестова како би се стекао увид у карактеристике парцијалних низова (дневних, недељних, месечних) за које је требало формирати непараметарске расподеле вероватноће и спровести поступак генерисања. Различити проблеми који су се јављали током разраде алгоритма генерисања су потицали из ових карактеристика низова, због чега је алгоритам додатно развијан да би добио коначни облик приказан у овом раду.

#### *5.1.2.1 Тестирање хомогености хидролошких низова*

Хомогеност серија података о протоцима је испитивана прво параметарским тестовима једнакости средњих вредности и варијанси два једнака подниза ( $z$  – тестом,  $F$  – тестом,  $t$  – тестом), и непараметарским Мен-Витнијевим (Mann-Whitney) тестом и Колмогоров-Смирнов тестом којима се тестира једнакост расподела два подниза. Сви тестови су примењени са прагом значајности 5%. Резултати су дати у табели 6. Резултати показују да се нулта хипотеза о хомогености генерално одбацује код веома малог броја парцијалних (дневних, недељних, месечних) низова – до 4% у односу на укупни број низова (365, 52 или 12 низова). Једини изузеци су станица Девићи на Студеници и канадска станица СА6, код којих је овај проценат нешто већи и иде до 9%, а у случају примене Мен-Витни теста на недељне протоке на СА6 хипотеза о хомогености одбачена је код чак 17% недељних низова. Ове две станице су карактеристичне по томе да су то најузводније станице на Студеници и на реци Олдман, са типично планинским режимима и великом варијабилношћу протока.

Резултати добијени  $F$  – тестом су показали да се за велики број парцијалних низова (око 50%) за све временске дискретизације и за све станице не може прихватити хипотеза о једнакости варијанси два подниза. Међутим, како се у низовима средњих годишњих протока на свим станицама може прихватити ова хипотеза, закључује се да су хидролошки режими на овим станицама генерално хомогени упркос статистичкој нехомогености на нивоу појединих парцијалних низова.

Табела 6. – Процент хидролошких низова за које је одбачена хипотеза о хомогености по станицама за све временске дискретизације

	RS1	RS2	RS3	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
z-тест										
Дневни	6%	1%	2%							
Недељни	4%	0%	2%	0%	0%	2%	4%	2%	8%	2%
Месечни	8%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	8%	0%
t-тест										
Дневни	5%	1%	1%							
Недељни	4%	0%	0%	0%	0%	0%	4%	2%	6%	2%
Месечни	8%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	8%	0%
MW тест										
Дневни	9%	2%	0%							
Недељни	8%	2%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	17%	4%
Месечни	8%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	8%	0%
KS тест										
Дневни	9%	3%	0%							
Недељни	8%	2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	6%	4%
Месечни	8%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	8%	0%
F тест										
Дневни	53%	48%	53%							
Недељни	48%	46%	42%	33%	40%	40%	48%	50%	52%	44%
Месечни	33%	33%	8%	50%	42%	50%	42%	58%	42%	25%

### 5.1.2.1 Тестирање постојања тренда

У временским серијама улазних података нема појаве изразитог тренда, а што је добијено као резултат испитивања тестом Мен-Кендаловим (Mann-Kendall) тестом Спирмановог коефицијента корелације рангова, и тестом значајности коефицијента правца линеарног тренда. Сви тестови су извршени са прагом значајности 5%. Резултати тестирања су приложени у табели 7, за све станице, и за све дискретизације времена: дневне, недељне и месечне. Слично као код хомогености, највећи број низова за које је одбачена хипотеза о значајном тренду је на станици Девихи на Студеници (до 8%) и на канадској станици СА6 (до 12%). Код осталих станица, највише 4% парцијалних низова од укупно 365/52/12 није задовољило хипотезу о одсуству тренда.

Табела 7. – Процент низова за који је одбачена хипотеза о одсуству тренда по станицама за све временске дискретизације

	RS1	RS2	RS3	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
Mann-Kendall тест										
Дневни	7%	2%	1%							
Недељни	4%	4%	0%	0%	2%	2%	2%	4%	12%	4%
Месечни	8%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Spearman rank corr. тест										
Дневни	7%	2%	1%							
Недељни	4%	2%	0%	0%	2%	2%	2%	4%	8%	4%
Месечни	8%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Тест значајности коефицијента правца										
Дневни	3%	1%	1%							
Недељни	0%	2%	0%	0%	0%	2%	2%	2%	8%	0%
Месечни	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

#### 5.1.2.1 Тестирање случајности

Испитивање случајности хидролошких серија је извршено тестом квадрата узастопних разлика и Бартлетовим тестом аутокорељације првог реда (што одговара помаку од једне године) за праг значајности од 5%. Резултати тестирања су дати у табели 8. Резултати за дневне низове на Студеници не показују случајност у веома малом броју случајева (до 4%), а у нешто већем број случајева за недељне (до 6%) и месечне податке (до 17%). Ови резултати су логични, јер се не може очекивати изражена годишња аутокорељација између нпр. 1. јануара из две узастопне године, док аутокорељација између два јануара из две изастопне године већ може бити израженија. Резултати на канадским станицама су слични.

Табела 8. – Процент парцијалних низова за које је одбачена хипотеза о случајности по станицама за све временске дискретизације

	RS1	RS2	RS3	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
Тест квадрата узастопних разлика										
Дневни	1%	2%	1%							
Недељни	0%	2%	0%	4%	4%	2%	6%	4%	10%	4%
Месечни	0%	17%	8%	0%	0%	0%	8%	8%	8%	0%
Бартлетов тест аутокорељације										
Дневни	2%	4%	2%							
Недељни	2%	6%	2%	6%	6%	4%	6%	8%	10%	6%
Месечни	8%	17%	8%	0%	0%	0%	8%	8%	8%	0%

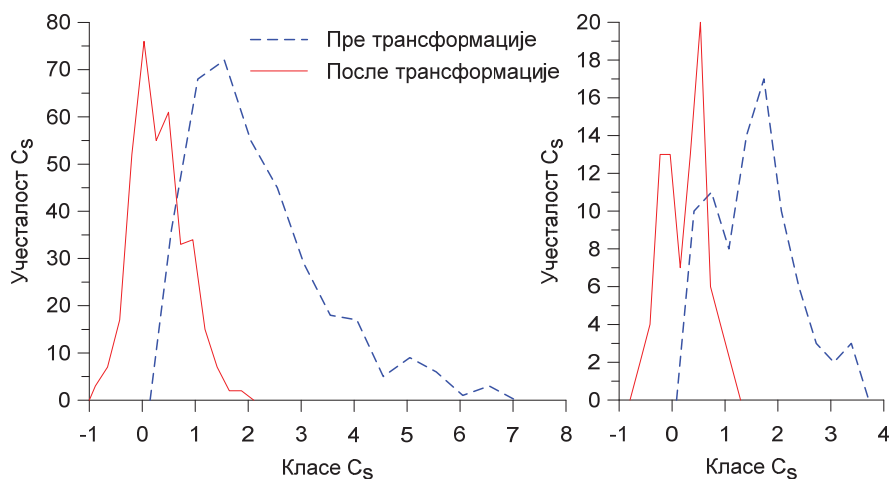
### 5.1.2.2 Тестирање нормалности улазних серија података

Да би се потврдила потреба за логаритамском трансформацијом низова, спроведено је тестирање нормалности низова чиме се заправо тестира одсуство асиметрије у подацима. Прво је анализиран параметар  $\lambda$  у Бокс-Коксовој трансформацији (поглавље 2.3.4). Како су резултати анализе показали да је најпогоднија трансформација при  $\lambda = 0$ , усвојена је трансформација података  $y_i = \ln(x_i)$ . Затим је тестирана значајност коефицијента асиметрије оригиналних и логаритмованих података за праг значајности од 5%. Резултати су показали да је у највећем броју низова (за све станице и све дискретизације) асиметрија значајна, док после логаритмовања асиметрија није значајно различита од нуле у великом броју случајева. Процентуално исказано, нулта хипотеза о нормалности је прихваћена код само 2% дневних низова, код не више од 6% недељних и код 8% месечних. С друге стране, после логаритамске трансформације, хипотеза о нормалности је прихваћена код преко 60% низова. Сви резултати су дати у табели 9.

Табела 9. – Процент парцијалних низова са прихваћеном хипотезом о значајности коефицијента асиметрије по станицама за све временске дискретизације

	RS1	RS2	RS3	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
Оригинални подаци										
Дневни	2%	2%	1%							
Недељни	6%	2%	2%	6%	4%	6%	4%	2%	0%	0%
Месечни	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%	8%
Логаритмовани подаци										
Дневни	70%	64%	64%							
Недељни	71%	65%	69%	67%	67%	62%	62%	71%	52%	65%
Месечни	83%	75%	83%	67%	83%	67%	67%	75%	42%	50%

Смањење асиметрије логаритамском трансформацијом је значајније у низовима са краћом временском дискретизацијом, с обзиром да се у овим низовима јављају веома велики коефицијенти асиметрије (нпр. на српским станицама коефицијенти асиметрије у дневним низовима се крећу и до 6.82). На слици 25 је илустровано смањење асиметрије у недељним и месечним низовима кроз дијаграме заступљености (учесталости) коефицијената асиметрије у оригиналним и логаритамски трансформисаним низовима на свим канадским станицама. За српске станице и за све временске дискретизације се добијају слични резултати.



Слика 25 – Заступљеност вредности коефицијента асиметрије у недељним (лево) и месечним (десно) низовима на канадским станицама пре и после логаритамске трансформације.

### 5.1.2.3 Тестирање постојања изузетака

Одређивање непараметарских расподела за сваки парцијални низ и њена екстраполација изван распона осматраних вредности доста зависи од постојања изузетака у низу. Испитивање постојања изузетака у серијама је извршено Грубсовим (Grubbs) тестом са прагом значајности 5%. Након елиминисања податка који је проглашен изузетком, тест је извођен поново и у другом извођењу теста није било појава изузетака, што значи да је у свим серијама обележен само по један изузетак и то у горњем делу расподеле. Резултати су дати у табели 10 за све низове и за све временске дискретизације. Од 8% до 31% парцијалних низова на појединим станицама има изузетак. Из резултата се примећује да је највећи број изузетака на станици Мланча за реку Студеницу и станицу СА6 на реци Олдман. При коришћењу низова са детектованим изузецима није вршена никаква исправка или корекција изузетака, јер би то умањило информације из осматреног узорка за формирање реалистичних расподела парцијалних низова.

Табела 10. – Процент парцијалних низова са детектованим изузецима по станицама за све временске дискретизације

	RS1	RS2	RS3	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
	Grubbs-ов тест									
Дневни	18%	27%	24%							
Недељни	17%	17%	21%	13%	23%	27%	23%	29%	31%	23%
Месечни	8%	17%	0%	8%	8%	8%	17%	8%	25%	17%

## 5.2 Прелиминарне анализе за примену непараметарских расподела за генерисање случајних низова

У оквиру овог рада коришћене су непараметарске кернел функције расподеле за генерисање случајних низова. Као што је већ речено у поглављу 3.4.4, изглед функције расподеле највише зависи од избора типа и ширине језгра, при чему ширина има већи утицај него тип. Као језгро функције је коришћено Гаусово језгро и примењено је за све низове протока и падавина. Овај тип језгра је изабран као једини који није дефинисан на ограниченом интервалу, већ се крајеви овог језгра простиру довољно широко тако да се од овог језгра очекује да боље опише расподелу у интервалима без тачака осматрања.

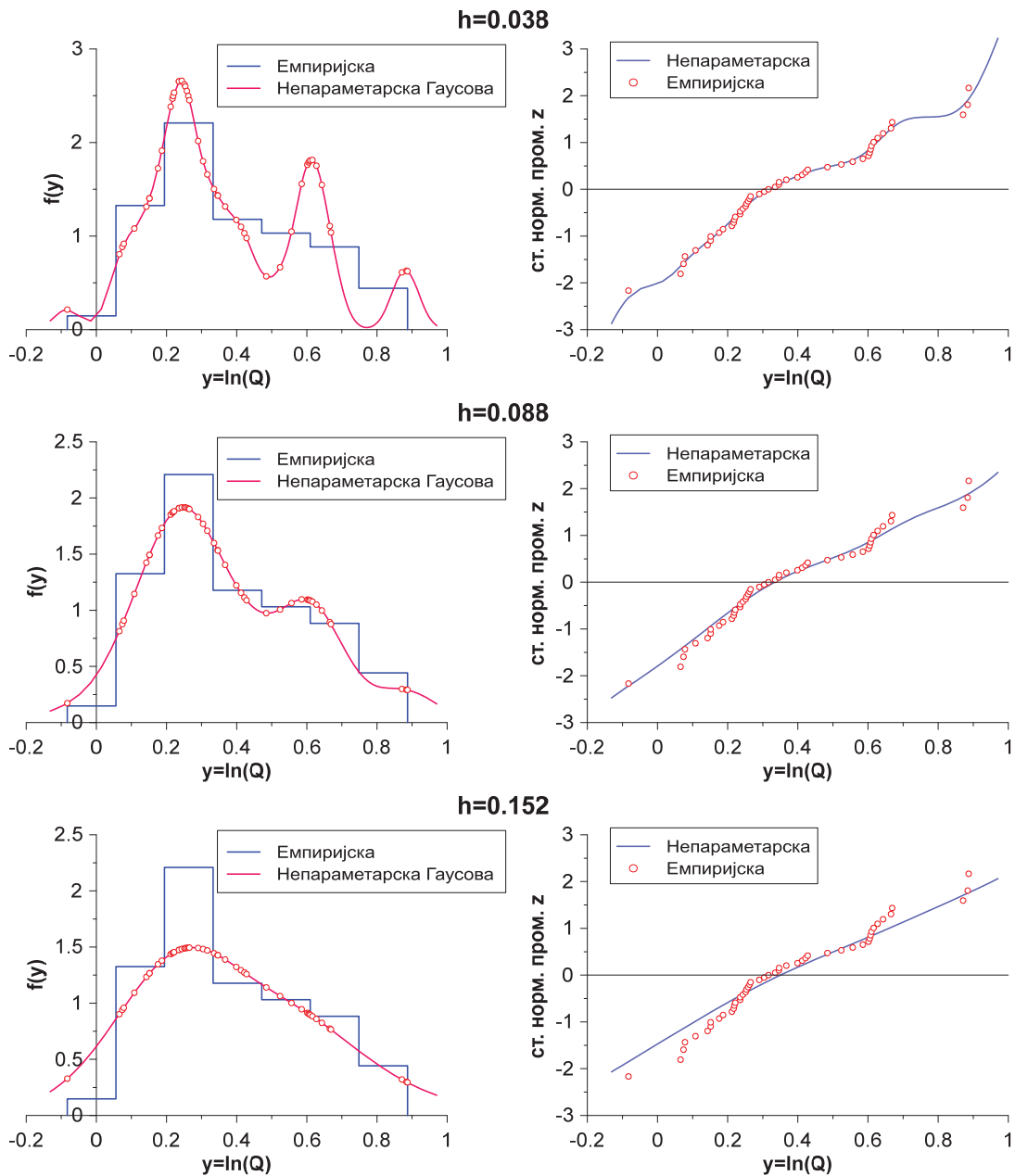
С обзиром да осмотрени подаци имају висок коефицијент асиметрије и да је примењена њихова логаритамска трансформација, непараметарске расподеле су због тога формиране за логаритмоване низове.

Овде треба нагласити да са премалом ширином језгра облик расподеле постаје веома осетљив на појединачне податке. Са друге стране, превелика ширина језгра даје превише глатку густину расподеле која не може да опише стварну дисперзију и асиметричност података (Faucher, et al., 2001).

Утицај ширине језгра  $h$  на непараметарску расподелу је илустрован на слици 26 где су на левој страни приказане непараметарске густине расподеле за један низ недељних протицаја са различитим вредностима  $h$ . Може се видети да за малу вредност ширине језгра  $h = 0.038$  густина расподеле има више модалних вредности. У овом примеру ширина језгра је одређена као оптимална за Епанечниково језгро, а затим трансформисана коефицијентима из табеле Табела 3 на ширину за Гаусово језгро. На слици 26 у средини лево, ширина језгра је повећана на  $h = 0.088$ , што видимо по глађој густини расподеле. Ова ширина језгра је оцењена као права мера за дате податке. На слици 26 доле лево ширина језгра је још повећана на  $h = 0.152$ , где се види да се тада добија веома глатка густина расподеле.

Поред густине расподеле, потребно је посматрати и понашање функције расподеле. На разматраном примеру дају се дијаграми функције расподеле на слици 26 са десне стране. Лако је уочити да непараметарска функција расподеле за најмању вредност  $h$  највише „прати“ осмотрене податке, док се са повећањем  $h$  прво удаљава од емпиријских тачака на крајевима расподеле, а затим, за велико  $h$ , и на осталим деловима функције расподеле. Такође, за мале вредности  $h$  непараметарска расподела постаје ограничена са оба краја расподеле, док се тај ефекат смањује за већу вредност  $h$  на

дијаграму у средини. За највеће  $h$  непараметарска функција расподеле се највише удаљава од емпиријске, тако да губи део информација којим се описује осмотрену асиметрију и дисперзију.



Слика 26 – Непараметарске расподеле логаритмованих осмотрених протока у 8. недељи на станици Девиди на реци Студеници за различите ширине језгра  $h$  (лево: густине расподеле и десно: функције расподеле на дијаграму лог-нормалне вероватноће)

На основу прегледа литературе и примене различитих решења, дошло се до прикладног обрасца за одређивање ширине језгра, а то је образац Силвермана (Silverman, 1986) дат у 3.4.4.1, који је измењен у складу са препорукама које су дате у раду (Lall, et al., 1993) да је однос оптималних ширина језгара за густину расподеле и функцију



расподеле једнак  $N^{1/3} / N^{1/5}$  где је  $N$  број података у низу. Дакле, за ширину језгра је коришћен образац:

$$h = 1.06\hat{\sigma}N^{-\frac{1}{3}}$$

Непараметарске расподеле формиране са усвојеном ширином језгра и уз екстраполацију објашњену у поглављу 4.3.4.1 коришћене су у поступку генерисања дугачких синтетичких низова.

### 5.3 Модел за генерисање протока (модел 1)

Систематизација резултата добијених непараметарским моделом за стохастичко генерисање извршена је према главним корацима модела, тако да су прво дати резултати генерисања података, затим постизања корелационе структуре у генерисаним низовима и на крају превођење корелираних генерисаних низова у временске серије. Како је модел развијан и контролисан за недељне податке, резултати генерисања недељних података се најдетаљније разматрају и, уколико се не нагласи временска дискретизација, говори се о недељним подацима. Резултати генерисања месечних и дневних података су такође приказани, али у мањем обиму.

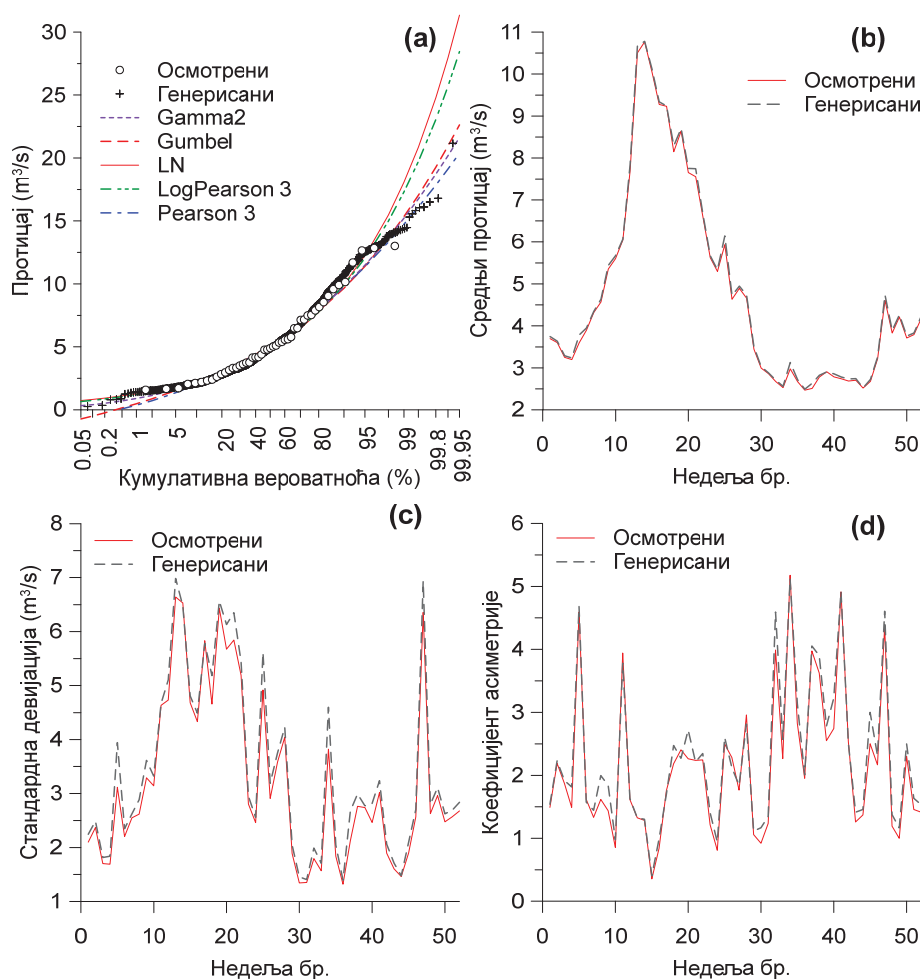
#### 5.3.1 Резултати генерисања случајних парцијалних низова

Као што је објашњено у поглављу 4.3.3, процес генерисања података почиње формирањем непараметарске расподеле за сваки недељни низ из логаритмованих осмотрених података. Како дужина низова на станицама у Србији износи 49 година, осмотрени подаци дефинишу расподелу сваког појединог низа у распону вероватноћа од 0.015 до 0.985, при чему је емпиријска расподела оцењена помоћу формуле Адамовског за компромисну вероватноћу. Екстраполација крајева расподеле спроведена је за вероватноће мање од 0.015 и веће од 0.985 преко интервала поверења GEV расподеле, као што је објашњено у 4.3.4.1. Дужина низова на канадским станицама је 90 година, па је екстраполација била неопходна за вероватноће мање од 0.008 и веће од 0.992.

Симулацијама Монте Карло се генерише првих 1000 бројева из одговарајуће непараметарске расподеле логаритмованих протока и пореде се статистике генерисаног низа са осмотреним. Уколико нису задовољени критеријуми за слагање, генеришу се нове вредности до задовољења критеријума. У овом раду постављени су критеријуми за слагање средњих вредности и коефицијента асиметрије генерисаних и осмотрених низова. Како се генерисање изводи на логаритмованим подацима и критеријуми су дати

са логаритамским вредностима, па је за средњу вредност дозвољена грешка износила 0.001, а уколико се овај критеријум не задовољи до 10000 итерација онда се дозвољава грешка до 0.002. Аналогне дозвољене грешке за коефицијент асиметрије су биле 0.025 и 0.05.

На крају корака 1, када се задовоље критеријуми и генеришу сви низови, подаци се антилогаритмују и на тај начин припремају за следећи корак.



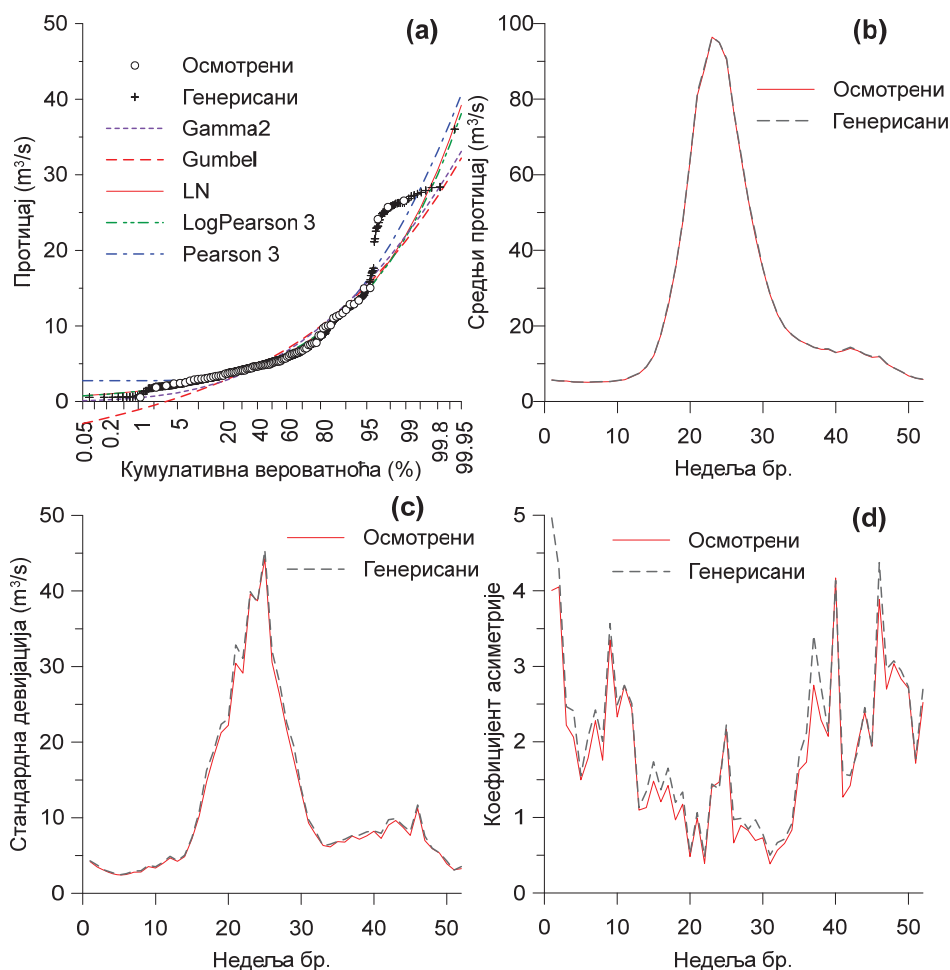
Слика 27 – Резултати корака 1 за недељне протоке на станици RS2: а) емпиријске расподеле осмотрених и генерисаних протока и типичне теоријске расподеле за недељу 10; б) осмотрени и генерисани средњи недељни протоци; с) осмотрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осмотрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије

Задовољењем критеријума за слагање статистика логаритмованих низова у Монте Карло симулацијама постиже се и задовољавајуће слагање статистика оригиналних (антилогаритмованих) низова. Резултати 1. корака се могу видети на слици 27 за реку Студеницу и на слици 28 за реку Олдман у Канади. На слици 27 под а) је дат пример емпиријских расподела вероватноће осмотрених и генерисаних протока за једну недељу,

и види се да расподела генерисаних протока у потпуности прати расподелу осматраних. На истом дијаграму приказане су и најчешће коришћене теоријске расподеле у анализи протока које су прилагођене низу осматраних протока (лог-нормална, Гумбелова, Пирсон 3, лог-Пирсон 3, двопараметарска гама). У зони екстраполације непараметарске расподеле уочљиво је да се генерисане вредности за вероватноћу 99.9 % налазе у оквиру распона приказаних теоријских расподела, иако су у распону вероватноћа од 95 % до 99 % изван распона теоријских расподела. Овај део расподеле генерисаних протока у потпуности прати расподелу осматраних, која је у том распону, такође, изван распона теоријских расподела. Аналогно горњем делу расподеле, и у доњем делу се потпуно подударују расподеле осматраних и генерисаних вредности, док размера на слици не дозвољава да се уочи да се генерисане вредности за вероватноћу 0.1 % такође налазе у распону одговарајућих теоријских квантила. Слично се може видети за реку Олдман на слици 28-а, где су израженије вредности које излазе из распона теоријских расподела у делу расподеле вероватноћа од 95 % до 99 %. Ово се понавља као правило код свих недељних расподела где осматрене вредности излазе изван распона вредности теоријских расподела. У недељама у којима нема изузетака на крајевима расподела, цела расподела осматраних и генерисаних остаје у оквиру распона теоријских расподела.

Генерисањем низова „пресликава“ се расподела осматраних протока и омогућава се да генерисани низови задрже статистичке параметре које имају осматрани низови.

Када се посматрају средње вредности низова недељних протока (слике 27-b и 28-b), на примеру обе станице се види да се оне практично подударују за осматрене и генерисане низове. Релативне грешке средњих вредности осматраних и генерисаних недељних низова за станицу Девићи кретале су се од 0.1% до 3.9% (у просеку 1.9 %), за станицу Мланча од 0.3% до 6.6% (у просеку 2.4 %) и за станицу Ушће од 0.2% до 4.9% (у просеку 2.1 %). Укупно посматрано за реку Студеницу, просечна релативна грешка у средњим вредностима је 2.1 %. Средње вредности недељних протока са канадских станица показују још боља слагања, где просечна релативна грешка за све станице између осматраних и генерисаних низова износи 0.03 %, а грешке се крећу у границама од 0 до 3.6 %. При вредновању резултата генерисања треба имати у виду дужину осматраних серија и начин добијања осматраних података – за канадске станице низови осматрања су дужи и састоје се од дерегулисаних протока, тј. од срачунатих вредности природних протока.



Слика 28 – Резултати корака 1 за недељне протоке на станици СА1: а) емпиријске расподеле осмотрених и генерисаних протока и типичне теоријске расподеле за недељу 12; б) осмотрени и генерисани средњи недељни протоци; с) осмотрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осмотрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије

Стандардне девијације недељних низова су приказане на сликама 27-с и 28-с, где се види њихово добро слагање на обе станице. При томе је слагање на канадским станицама боље него на Студеници, вероватно као последица дужих осмотрених низова. Релативне грешке између стандардних девијација у осмотреним и генерисаним низовима за све станице на реци Студеници у просеку износе 6.8 % и крећу се у распону од 0–27.7 %, а за канадске станице просечно су 0.1 % и крећу се у границама од 0–19.75 %.

Слично се може закључити и за коефицијенте асиметрије недељних низова приказаним на сликама 27-d и 28-d. Просечна грешка за домаће станице је 10 % (грешке су у границама 0.1–69.5 %) а за канадске 0.3 % (грешке су у распону од 0–46.7 %).

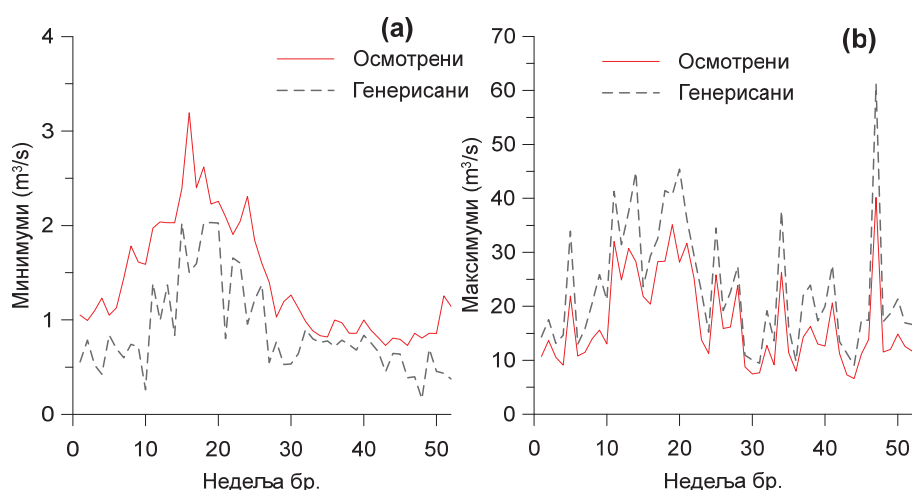
Поред симулација са усвојеним критеријумима за средњу вредност и коефицијент асиметрије, извршена и симулација генерисања података са постављањем критеријума за средњу вредност, стандардну девијацију и коефицијент асиметрије. У том случају

генерисање траје значајно дуже због задовољавања више критеријума, али се резултати не разликују значајно од резултата добијених са два постављена критеријума. Са три критеријума средња вредност и стандардна девијација показују нешто боља слагања, док се просечна релативна грешка коефицијента асиметрије повећала (табела 11). Као закључак се може дати да се може направити компромис са нешто лошијим подацима за средњу вредност и стандардну девијацију у односу на време потребно за генерисање низова. У случају са два постављена критеријума, укупно време потребно за генерисање је износило до 30 минута, док уз постављена три критеријума генерисање траје више од 3 сата. Имајући то у виду, остале симулације генерисања су вршене са два критеријума.

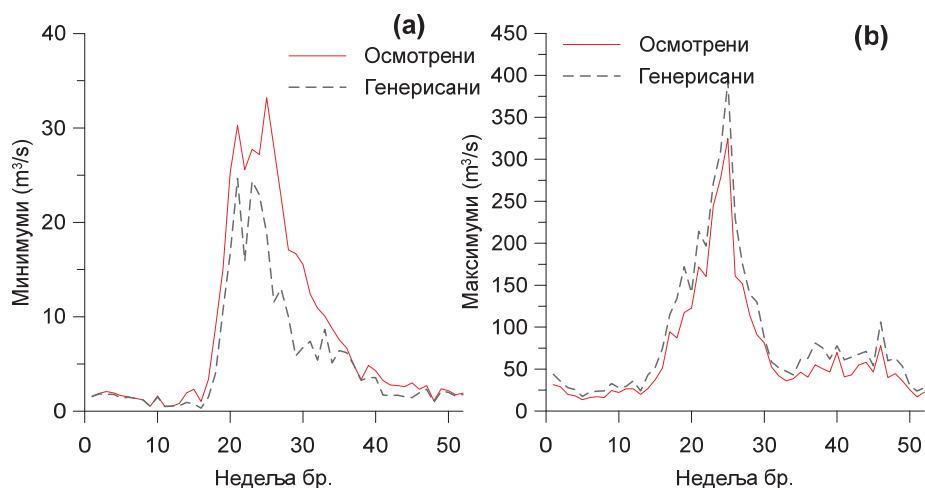
Табела 11 - Поређење релативних грешака у статистикама низова при симулацијама генерисања са два и са три постављена критеријума за станице на реци Студеници

	Генерисање са два критеријума			Генерисање са три критеријума		
	Просечно	Максимум	Минимум	Просечно	Максимум	Минимум
Ср. вредност	2.11%	6.59%	0.13%	1.47%	3.33%	0.04%
Ст. девијација	6.82%	27.7%	0.04%	3.53%	10.5%	0.03%
Коеф. асиметрије	9.98%	69.5%	0.06%	12.6%	185%	0.15%

Поред наведених статистика, у првом кораку генерисани низови екстраполацијом добијају екстремније вредности од оних које су осмотрене. Тако се на сликама 29 и 30 могу видети да се у свим недељама, за оба сета података, јављају екстремније вредности од оних осмотрених. Ово је у складу са очекивањима да ће се у много дужој серији јавити екстремније вредности у подацима и усвојеног начина екстраполације у моделу.



Слика 29 – Недељни екстремни на станици RS2: а) осмотрени и генерисани минимуми; б) осмотрени и генерисани максимуми



Слика 30 – Недељни екстремии на станици СА1: а) осмотрени и генерисани минимуми  
 б) осмотрени и генерисани максимуми

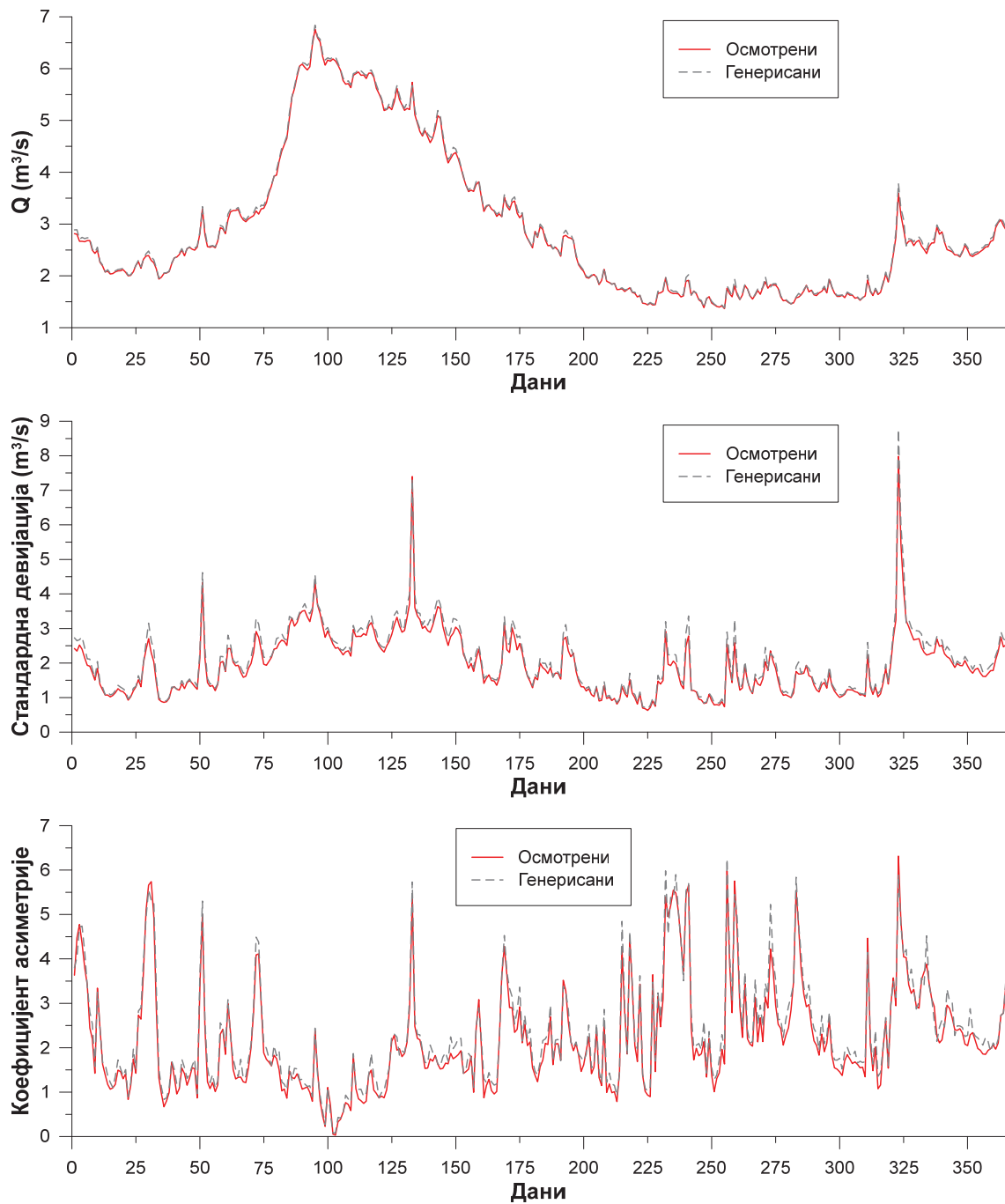
Аналогно недељним подацима, за дневне и месечне низове се добијају слични резултати. У табели 12 приказане су просечне релативне разлике у средњим вредностима генерисаних и осмотрених низова на свим станицама за различите временске дискретизације. На основу приложених резултата може се закључити да је генерисање, према средњим вредностима, веома уједначено без обзира на временску дискретизацију и да се просечне грешке крећу од 0% до 2.4%. Генерално посматрајући, резултати на канадским станицама су бољи од резултата са станица на реци Студеници. Као што је напоменуто, ово је последица веће дужине осмотрених података и претварања појединих канадских хидролошких низова у природне протоке. На слици 31 приказан је пример слагања статистика осмотрених и генерисаних низова дневних протока за станицу Девићи на Студеници. На слици 32 је дат приказ расподела осмотрених и генерисаних месечних протока на станици Ушће на Студеници box plot дијаграмом, где се види одлична репродукција месечних средњих вредности, квантила, минимума и максимума, док је на преостала два дијаграма дато поређење стандардних девијација и коефицијената асиметрије.

Табела 12 – Просечне разлике у средњим вредностима генерисаних и осмотрених низова на свим станицама за различите временске дискретизације

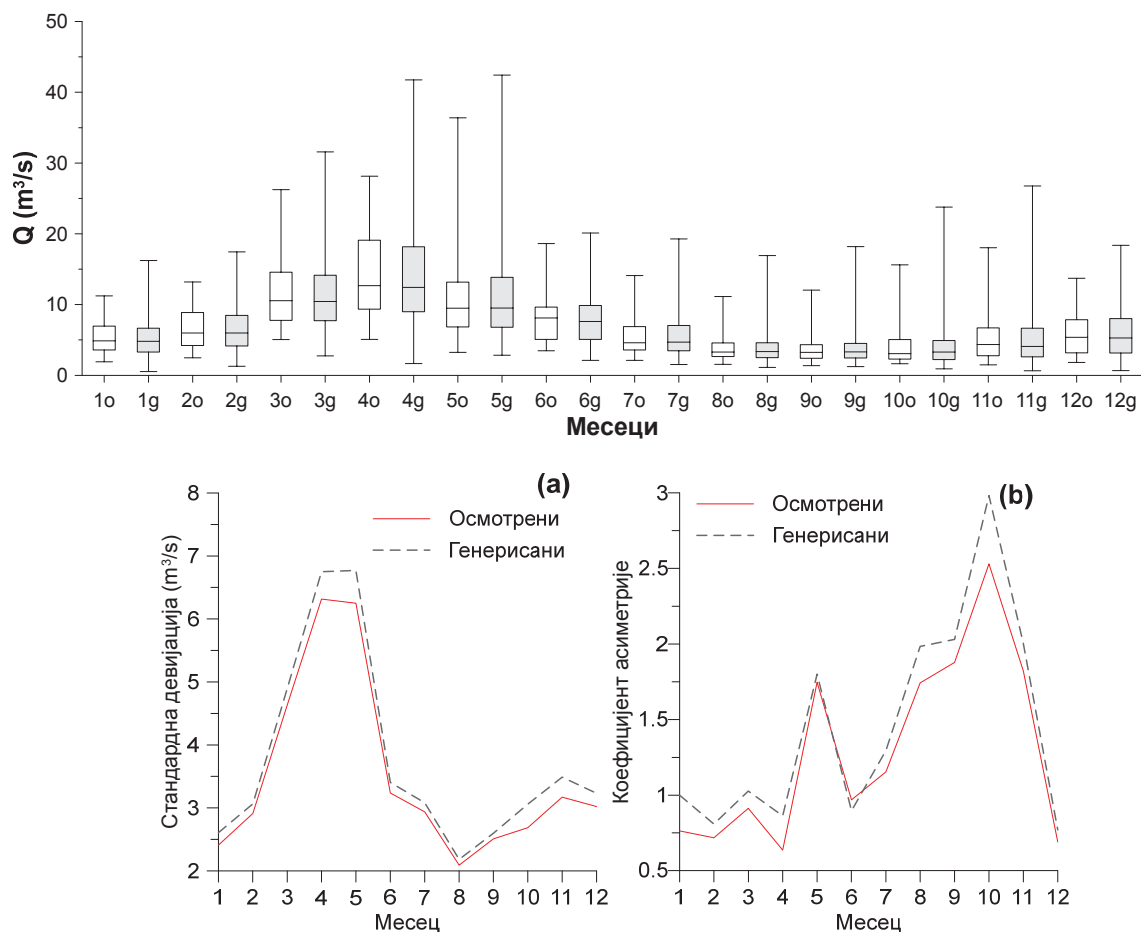
	RS1	RS2	RS3	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
Дневни	1.3%	1.6%	1.6%							
Недељни	1.9%	2.4%	2.1%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%
Месечни	0.1%	1.2%	1.2%	0.7%	0.8%	0.5%	0.5%	0.9%	0.9%	0.6%

У прилогу 1 детаљно су приказани резултати првог корака за све временске дискретизације. На сликама у прилогу су упоређиване следеће карактеристике

осмотрених и генерисаних низова: средње вредности, стандардне девијације, коефицијенти асиметрије, максималне и минималне вредности за сваку станицу и за све временске дискретизације.



Слика 31 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Девичи на Студеници



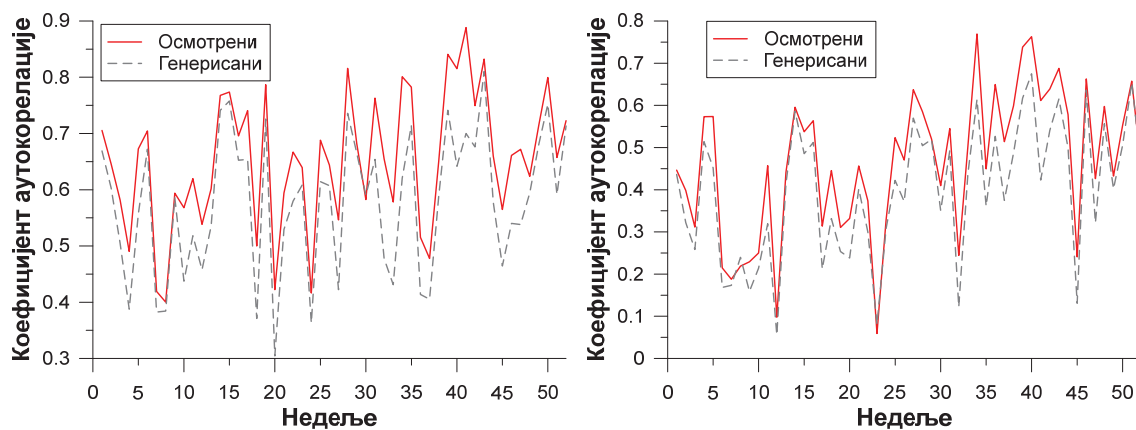
Слика 32 – Вох-plot расподеле, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Ушће на Студеници

### 5.3.2 Корелација парцијалних низова

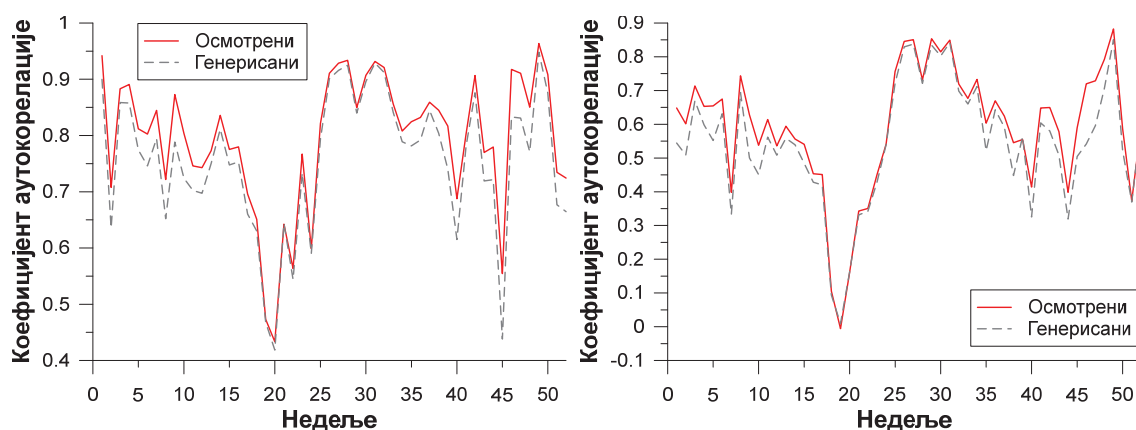
Други корак у моделу подразумева примену Иман-Коноверовог алгоритма за преслагање података унутар парцијалних низова за постизање жељене корелације између тих низова. На тај начин се подешава и аутокорелација у низовима на истој станици и крос-корелација између станица.

На сликама 33 и 34 приказано је поређење коефицијената аутокорелације првог и другог реда у осмотреним и генерисаним недељним парцијалним низовима за две станице. На слици 35 приказани су коефицијенти крос-корелације између две станице на Студеници за помаке реда 0 и 1. Аналоган пример за две канадске станице је приказан на слици 36.

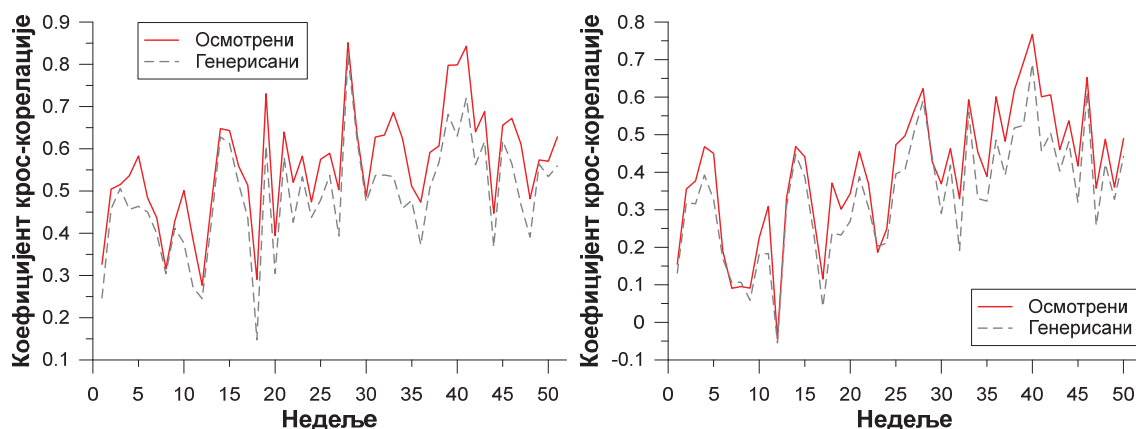




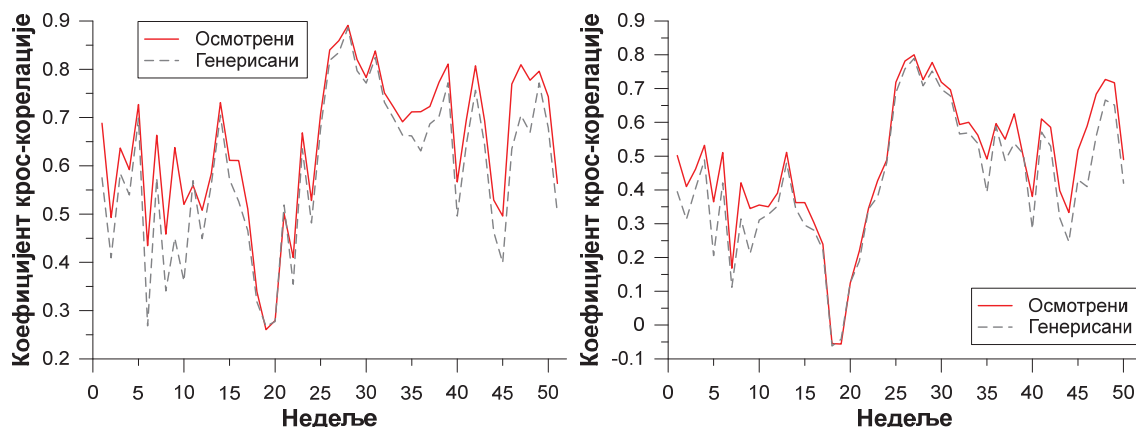
Слика 33 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда парцијалних недељних низова на станици Мланча на реци Студеници



Слика 34 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда парцијалних недељних низова на станици СА1 на реци Олдман



Слика 35 – Коefицијенти крос-корејације за временски помак 0 и 1 између парцијалних недељних низова на станицама Девићи и Ушће на реци Студеници



Слика 36 – Коефицијенти крос-корелације за временски помак 0 и 1 између парцијалних недељних низова на станици CA1 и CA4 на реци Олдман

У прилогу 2 дати су и резултати за друге станице и друге временске дискретизације. Приложени су коефицијенти аутокорелација првог и другог реда за све станице и све временске дискретизације. Како би приказ свих дијаграма коефицијената крос-корелације захтевао веома много простора, приложене су крос-корелационе функције. У табели 13 приказане су просечне и највеће разлике између коефицијената корелације осмотрених и генерисаних низова (приказана је просечна односно највећа вредност из матрице која представља разлику између корелационе матрице генерисаних низова и корелационе матрице осмотрених низова).

Табела 13 – Просечна и највећа апсолутна одступања између корелационих матрица генерисаних и осмотрених низова

Скуп података		
	RS	CA
дневни низови		
прос.	0.041	
макс.	0.448	
недељни низови		
прос.	0.037	0.034
макс.	0.230	0.267
месечни низови		
прос.	0.027	0.025
макс.	0.103	0.135

Комплетирање репродукције корелационе структуре парцијалних низова завршава се у кораку 3 методологије када се подешавају коефицијенти корелације низова са краја и почетка године. У табели 14 дат је пример ових коефицијената за осмотрене и генерисане недељне низове и они показују високо слагање. Просечно и највеће апсолутно одступање између корелационих коефицијената генерисаних и осмотрених низова на крајевима и почецима године износе 0.023 и 0.353. На слици 37 су дати

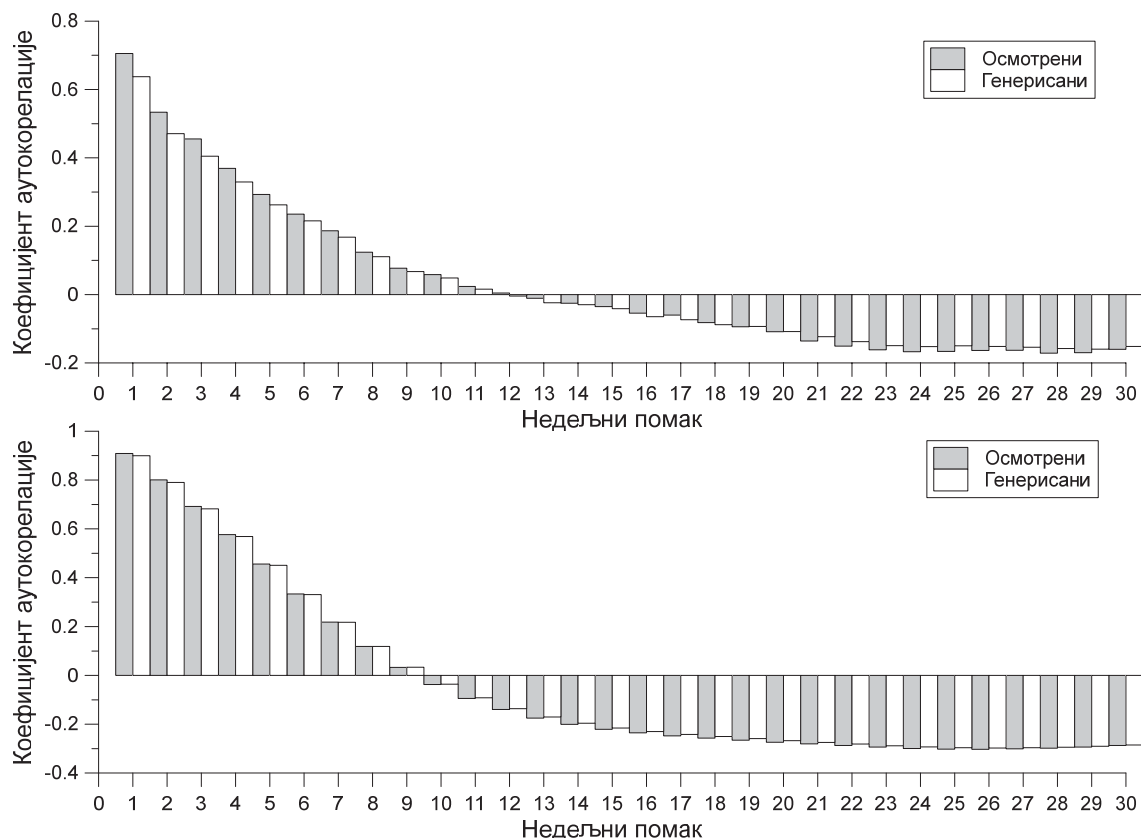
примери аутокорелационих функција недељних протока као целих временских серија, на којима се види да је у случају канадске станице аутокорелациона функција генерисане серије скоро идентична осмотреној. Поред аутокорелационих функција за друге станице, у прилогу 2 су приказане и крос-корелационе функције између станица које такође показују добра слагања. Резултати за друге временске дискретизације су такође приказани у прилогу 2.

Табела 14 – Коефицијенти корелације на крају и почетку године за осмотрене и генерисане недељне серије за станицу Мланча

<b>Осмотрени</b>								
Недеља	49	50	51	52	1	2	3	4
49	1.000	0.721	0.438	0.385	0.422	0.289	0.345	0.517
50		1.000	0.801	0.555	0.673	0.459	0.381	0.371
51			1.000	0.659	0.665	0.481	0.322	0.327
52				1.000	0.729	0.472	0.328	0.287
1					1.000	0.709	0.453	0.362
2						1.000	0.647	0.398
3							1.000	0.579
4								1.000

<b>Генерисани</b>								
Недеља	49	50	51	52	1	2	3	4
49	1.000	0.681	0.402	0.357	0.406	0.267	0.194	0.164
50		1.000	0.752	0.506	0.648	0.461	0.329	0.241
51			1.000	0.592	0.654	0.461	0.316	0.271
52				1.000	0.714	0.462	0.318	0.272
1					1.000	0.665	0.429	0.334
2						1.000	0.597	0.325
3							1.000	0.508
4								1.000

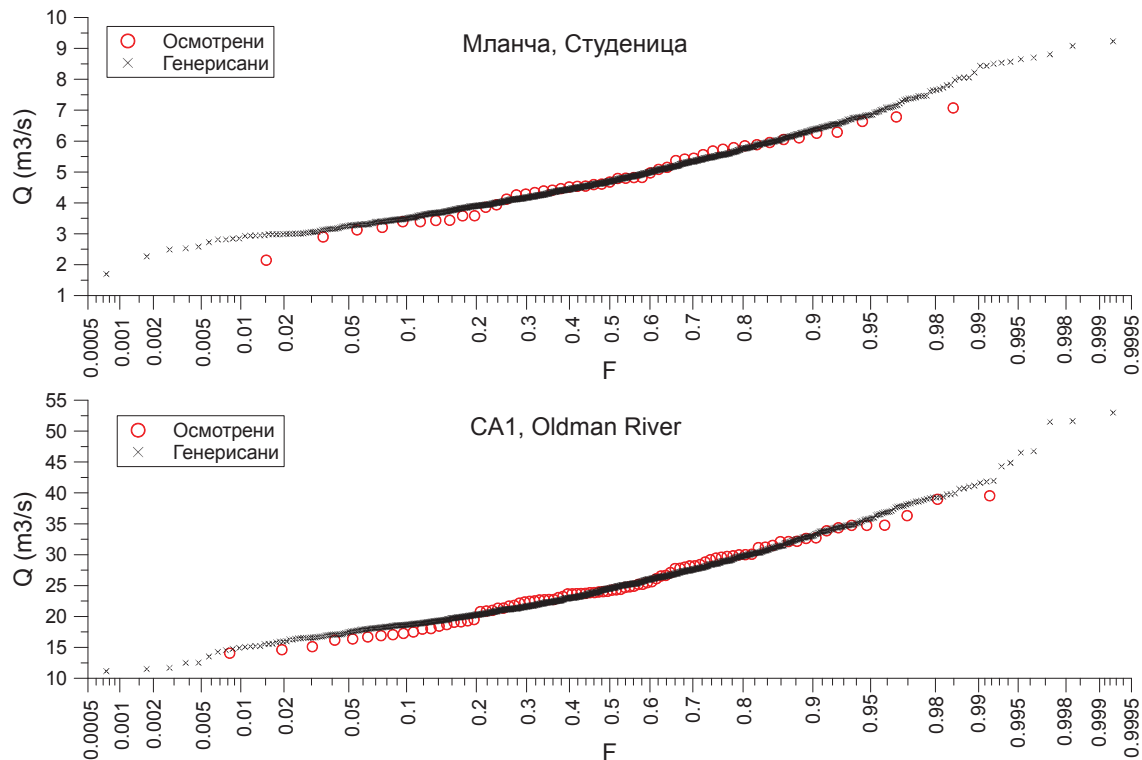
Модел добро врши репродукцију корелационе структуре осмотрених података, при чему су резултати бољи на канадским станицама него на српским, па се може рећи да за дуже осмотрене временске серије можемо да добијемо не само поузданије генерисане податке из непараметарске функције расподеле већ и боље слагање корелација.



Слика 37 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних временских серија до реда 30 за станицу Мланча на Студеници (горе) и СА1 на реци Олдман (доле)

### 5.3.3 Годишњи протоци

Квалитет генерисања и преслагања података у корацима 1 и 2 методологије може се проверити и поређењем карактеристика генерисаних података агрегираних на годишњи ниво у односу на одговарајуће осмотрене податке. Примери расподела осмотрених и генерисаних средњих годишњих протока добијених из недељних серија приказани су на слици 38. На овој слици може се приметити и резултат додатног подешавања података у годинама са минималним средњим годишњим протоцима описаном у поглављу 4.3.5.3. За серију генерисаних података на канадској станици на десном дијаграму на слици 38, види се да је шест података добило ниже вредности од најниже осмотрене годишње вредности, чиме је задовољен и услов да у 1000-годишњем низу има и екстремнијих сушних година од оних у осмотреном 90-годишњем низу. У расподели генерисаних вредности за станицу Мланча на Студеници на горњем дијаграму на слици 38 види се да постоји један податак који је нижи од најекстремније осмотрене суше, па у овом случају додатни алгоритам није активиран.



Слика 38 – Расподела средњих годишњих протока за станицу Мланча на Студеници (горе) и за станицу CA1 на реци Олдман (доле)

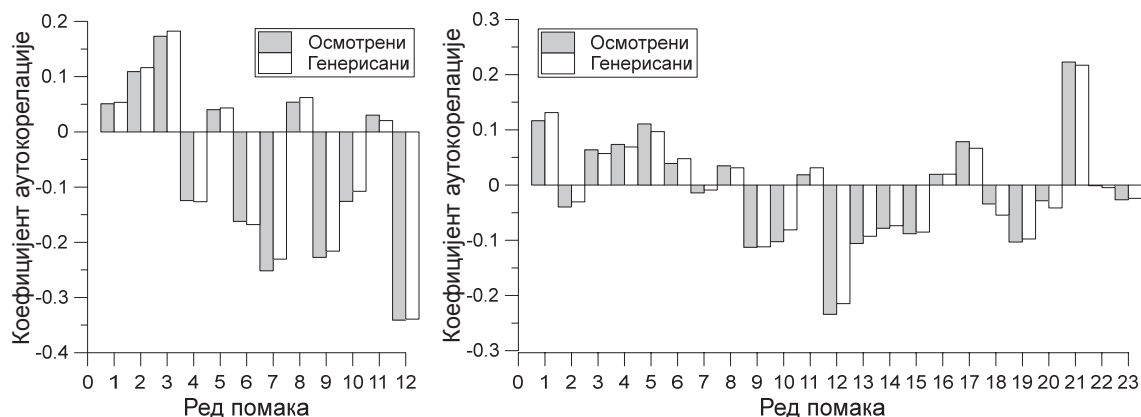
Пример поређења статистика осмотрених и генерисаних годишњих протока дат је у табели 15, који се односи на годишње протоке одређене из недељних низова. Може се рећи да су статистике генерисаних средњих годишњих протока у потпуној сагласности са осмотреним карактеристикама. Релативна грешка у средњој вредности низа се креће од 1.1% до 1.4% за Студеницу и од 0.5% до 1.2% за канадске станице, док се релативна грешка у стандардној девијацији креће од 1.3% до 1.7% за Студеницу и од 0.2% до 3.1% за реку Олдман. Истовремено, у генерисаним низовима на свим станицама јављају се вредности мање од осмотреног минимума и вредности веће од осмотреног максимума (последња два реда у табели 15).

Агрегација годишњих протока из низова са дневном и месечном дискретизацијом такође показује добра слагања. На станицама на Студеници, релативна грешка у средњој вредности низа годишњих протока добијених из дневних временских серија износи од 1.0% до 1.4%, а у стандардној девијацији од 0.7% до 1.0%. Исте релативне грешке за низове добијене из месечних временских серија износе од 0.9% до 1.1% (Студеница) и од 0.4% до 1.2% (канадске станице) за средњу вредност и од 1.3% до 3.8% (Студеница) и од 1.0% до 6.1% (канадске станице) за стандардну девијацију.

Табела 15 – Основне статистике низова средњих годишњих протока из генерисаних недељних протока за станице на реци Студеници.

	RS 1			RS 2			RS 3		
	осм.	ген.	рел. грешка	осм.	ген.	рел. грешка	осм.	ген.	рел. грешка
Ср. вр.	2.93	2.96	1.4%	4.78	4.85	1.4%	7.07	7.16	1.3%
Ст. дев.	0.68	0.69	1.3%	1.11	1.13	1.7%	1.65	1.63	-1.5%
Мин.	1.28	1.01		2.15	1.70		3.48	2.77	
Макс.	4.66	6.08		7.07	9.23		10.44	15.37	

Аутокорелација у низовима годишњих протока приказана је на слици 39 где се види да генерисане серије изузетно добро прате понашање осмотрених серија у погледу карактеристика дуге меморије. Слични резултати се добијају за све временске дискретизације. У прилогу 3 су дате слике аутокорелационих функција и табеле са коефицијентима корелације средњих годишњих протока за све станице и све временске дискретизације.



Слика 39 – Коефицијенти аутокорелације средњих годишњих протока за станицу Мланча на Студеници (лево) и за станицу СА1 на реци Олдман (десно)

У табелама 16 и 17 су дати корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података. Из резултата се види да су корелациони коефицијенти осмотрених и генерисаних средњих годишњих низова скоро идентични. Када се срачунају релативне грешке за коефицијенте на реци Студеници, добија се да оне износе до 1%. За реку Олдман су релативне грешке за првих пет станица су до 0.7%, за седму станицу до 1.6% и за шесту станицу до 3.2%. Иако су нешто веће разлике на станици СА6, генерално је показано да су коефицијенти корелације генерисаних низова добро пресликали коефицијенте осмотрених низова.

Табела 16 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Студеници

Осмотрени	RS1	RS2	RS3	Генерисани	RS1	RS2	RS3
RS1	1.000	0.877	0.786	RS1	1.000	0.883	0.779
RS2		1.000	0.888	RS2		1.000	0.878
RS3			1.000	RS3			1.000

Табела 17 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Олдман

Осмотрени	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
CA1	1.000	0.964	0.966	0.957	0.944	0.831	0.881
CA2		1.000	0.924	0.958	0.948	0.865	0.914
CA3			1.000	0.968	0.926	0.822	0.869
CA4				1.000	0.948	0.873	0.930
CA5					1.000	0.906	0.941
CA6						1.000	0.966
CA7							1.000

Генерисани	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
CA1	1.000	0.963	0.965	0.953	0.939	0.807	0.869
CA2		1.000	0.924	0.954	0.942	0.837	0.900
CA3			1.000	0.967	0.924	0.800	0.856
CA4				1.000	0.944	0.850	0.915
CA5					1.000	0.888	0.932
CA6						1.000	0.957
CA7							1.000

Слични резултати се добијају за средње годишње протоке добијене генерисањем дневних и месечних података, уз напомену да се максимална релативна грешка од 1.4% добијена код месечних података за канадске станице.

### 5.3.4 Годишњи екстреми

Као што је већ више пута напоменуто у претходном излагању, веома је важно да се у генерисаним низовима дужине 1000 година појаве екстремније вредности у подацима од оних у осмотреним серијама. Показано је да се у генерисаним низовима јављају екстремнији подаци од осмотрених. Међутим, веома је значајно да и на годишњем нивоу дође до појаве екстремнијих података. Вредности генерисаних годишњих екстрема су контролисане у односу на опсег вредности екстрема за одређену вероватноћу појаве добијених из најчешће коришћених теоријских расподела. Резултати за екстреме из низова недељних протока су приказани у табелама 18 и 19, где су дати квантили из емпиријске расподеле и највећи и најмањи квантил из теоријских расподела (лог-нормална, Гумбелова, Пирсон 3, лог-Пирсон 3, двопараметарска гама). За годишње

максимуме на станици Ушће квантили из генерисаних низова су генерално већи од квантила из осмотрених низова, при чему се распони вредности квантила из осмотрених и генерисаних низова делимично преклапају. То указује на солидно слагање расподела годишњих максимума. За годишње недељне минимуме, квантили из генерисаних низова су знатно мањи од квантила из осмотрених низова и цео опсег вредности је знатно испод опсега квантила из осмотрених података. То указује на лошије слагање расподела годишњих минимума.

Табела 18 – Опсег квантила теоријских расподела и расподела осмотрених и генерисаних за максималне и минималне годишње протоке на станици Ушће

Функција расподеле	Годишњи максимуми			
	Осмотрени		Генерисани	
	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.
0.96	50.6	53.8	54.3	57.8
0.98	55.8	61.2	61.4	66.8
0.99	60.6	68.5	67.3	75.7
0.995	65.4	75.7	73.1	84.6
0.998	71.3	85.3	80.4	96.4

Функција расподеле	Годишњи минимуми			
	Осмотрени		Генерисани	
	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.
0.2	1.76	1.79	1.41	1.43
0.1	1.53	1.61	1.24	1.29
0.05	1.36	1.47	1.11	1.20
0.02	1.18	1.34	0.89	1.04

У случају канадских података, на станици СА4, опсег расподела годишњих максимума из генерисаних података се преклапа са опсегом расподела из осмотрених података, али је шири. То указује на одлично слагање расподела осмотрених и генерисаних годишњих максимума, где се у генерисаним низовима јављају и већи теоријски квантили. За годишње недељне минимуме, квантили из генерисаних низова су генерално мањи од квантила из осмотрених низова, при чему се распони вредности квантила из осмотрених и генерисаних низова делимично преклапају. То указује на нешто боље слагање расподела минимума на овој станици него на станици Ушће. Дакле, слагања расподела екстремних вредности су генерално боља за канадске податке, што је



поново последица дужих низова. Међутим, евидентно је да у овом сегменту постоје могућности за даље унапређење методе.

Табела 19 – Опсег квантила теоријских расподела и расподела осмотрених и генерисаних за средње годишње протоке на станици СА4

Функција расподеле	Годишњи максимуми			
	Осмотрени		Генерисани	
	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.
0.96	83.5	93.3	80.4	92.2
0.98	94.1	109.4	89.4	108.7
0.99	104.7	125.8	98.4	125.5
0.995	115.5	142.2	107.4	142.6
0.998	130.2	164.2	119.4	165.5

Функција расподеле	Годишњи минимуми			
	Осмотрени		Генерисани	
	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.	Мин. теор. расп.	Макс. теор. расп.
0.2	0.90	0.94	0.81	0.84
0.1	0.78	0.84	0.71	0.75
0.05	0.67	0.77	0.61	0.69
0.02	0.53	0.70	0.43	0.58

У прилогу 4 су дате слике са резултатима и за остале станице и временске дискретизације.

### 5.3.5 Вишегодишње карактеристике

На крају, као што је и напоменуто у опису модела, сагледане су карактеристике кумулативних сумарних линија одступања од средње вредности са циљем да се генерисане серије у потпуности могу користити у процесу пројектовања и управљања акумулацијама, подешавајући одабране карактеристике у генерисаним серијама. Карактеристике од интереса за ову анализу су прелази кумулативне сумарне криве, позитивни и негативни кораци, максимална и минимална вредност корака и њихов распон. Под прелазом се сматра пресек кумулативне линије и нулте вредности, при чему корак прелази из позитивног у негативни предзнак, и обрнуто. У довољно дугом осмотреном низу се може очекивати да ће вредности дужине позитивних и негативних корака бити уједначени, односно да дужина корака са позитивним и негативним предзнаком буду слични. Исто се очекује и да максималне и минималне вредности криве буду приближно једнаке (Yevjevich, 1972).

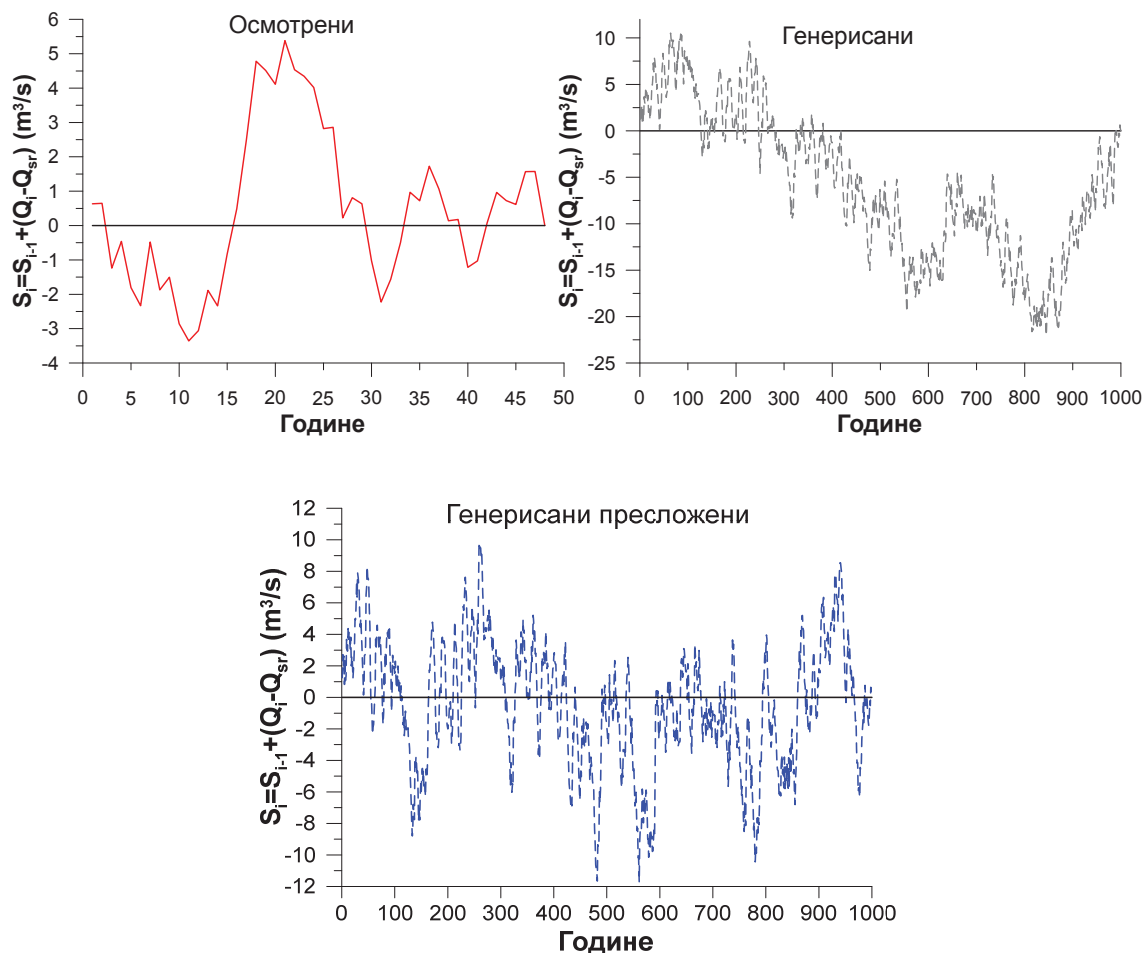
Прво се за осмотрене серије средњих годишњих протока формира кумулативна сумарна линија одступања од средње вредности. Ова линија за осмотрене годишње протоке на једној од станица на реци Студеници, дужине 49 година, дата је на слици 40 (горе лево), а њене карактеристике у табели 20. Осмотрени период садржи 7 прелаза, максимална дужина прелаза са позитивним предзнаком је 14 година, док је највећа дужина корака са негативним предзнаком 13 година. На истој слици са десне стране је приказана кумулативна сумарна линија одступања од средње вредности формирана од генерисаних протока. У трећем кораку су генерисане године преслагане и оптимизоване према критеријуму коефицијената корелације на крајевима и почецима година и аутокорелације годишњих вредности, па се не може очекивати да ће и вредности кумулативних сумарних линија бити подешене према осмотреној серији. Као што се може видети са слике 40 горе десно и из табеле 20, главна карактеристика генерисане серије је дужина корака од 571 године, што би значило да у генерисаној серији постоји сушни период тог трајања. Поред ове карактеристике, проценат прелаза у генерисаној серији је значајно мањи и постоји несразмера минимума и максимума кумулативне сумарне криве.

Табела 20 – Параметри сумарних кривих при анализи корака на станици Мланча

	Осмотрени подаци	Генерисани подаци	Генерисани после преслагања
Број година	49	1000	1000
Број прелаза	7	37	93
Процент прелаза	14.29%	3.70%	9.30%
Највећа дужина корака	14	571	56
Максимум	5.38	10.52	9.85
Минимум	-3.36	-22.05	-11.74

Да би се карактеристике генерисане серије што више приближиле карактеристикама осмотрене серије, извршено је додатно преслагање, којим се није значајно нарушио резултат претходног подешавања коефицијената корелације добијених у трећем кораку. Резултат додатног преслагања је дат на слици 40 доле, а карактеристике у последњој колони табеле 20. Апсолутне вредности минимума и максимума сумарне криве у пресложеној генерисаној серији су приближно једнаке, а самим тим је смањен и распон корака, повећан је број прелаза и значајно умањена дужина корака. Може се сматрати да су карактеристике сумарне криве пресложене генерисане серије много боље и приближније сумарној кривој осмотрене серије, иако се из осмотрене серије трајања 49 година не могу добро оценити дугорочне карактеристике серија. Оно што је значајно

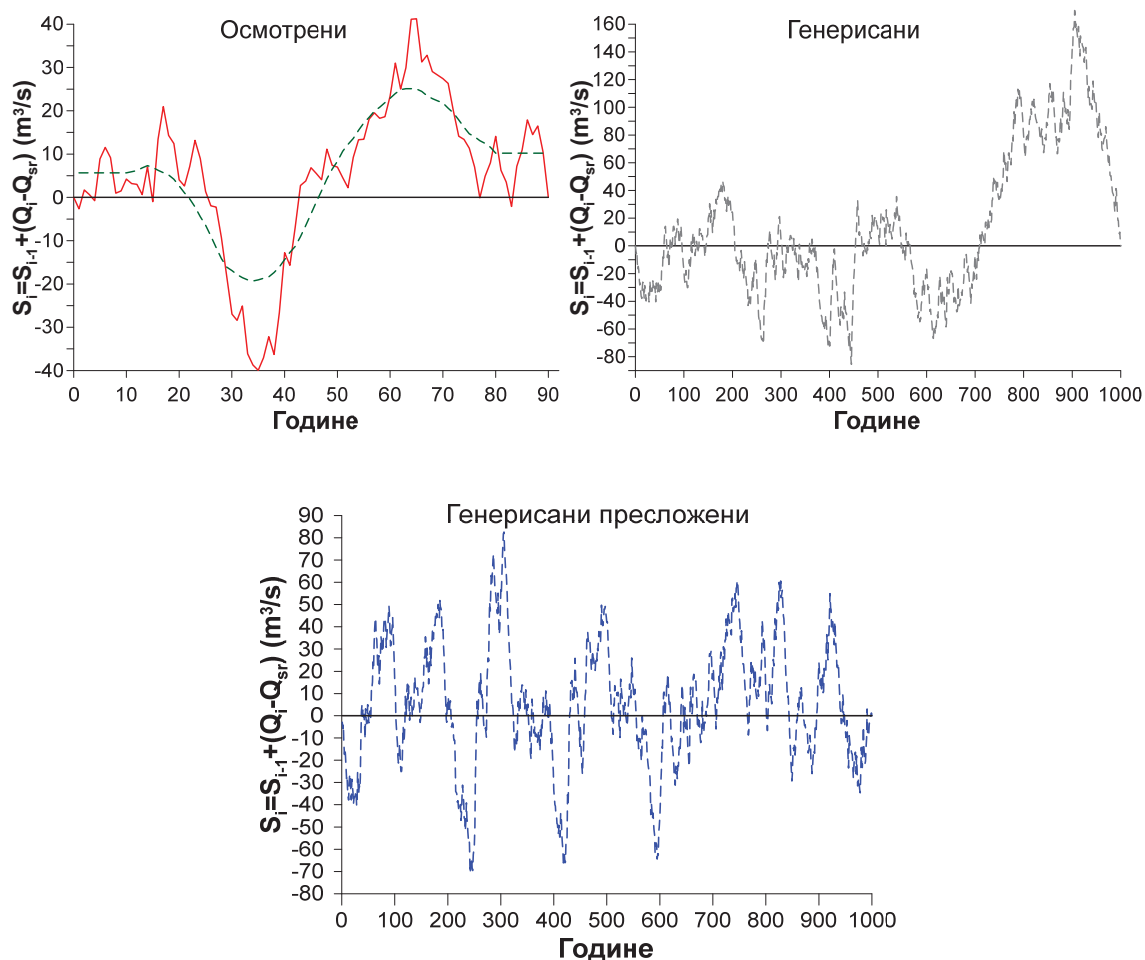
јесте да у генерисаној серији постоје дугорочни сушнији и воднији периоди са екстремнијим појавама него што су евидентирани у осмотреној серији, а што омогућава много боље сагледавање понашања акумулација при дугорочном планирању коришћења вода.



Слика 40 – Кумулативна крива одступања годишњих протока од средње вредности осмотрених (горе лево), генерисаних (горе десно) и генерисаних после додатног пермутовања редова (доле) на реци Студеници на станици Мланча

Табела 21 – Параметри сумарних кривих при анализи корака на реци Олдман за станицу СА1

	Осмотрени подаци	Генерисани подаци	Генерисани после преслагања
Број година	90	1000	1000
Број прелаза	12	48	86
Процент прелаза	13.33%	4.80%	8.60%
Највећа дужина корака	34	290	59
Максимум	41.25	169.91	82.60
Минимум	-39.94	-85.49	-70.86



Слика 41 – Кумулативна крива одступања годишњих протока од средње вредности осмотрених и линија покретних просека (горе лево), генерисаних (горе десно) и генерисаних после додатног пермутовања редова (доле) на реци Олдман за станицу СА1

За осмотрену серију средњих годишњих вредности на реци Олдман (слика 41 горе лево) се види да кумулативна сумарна линија одступања обухвата и период сушних и водних година са сличним вредностима минимума и максимума криве, што је вероватно једна од последица дужег низа осматрања. Карактеристике сумарне криве су приложене у табели 21. Ово може бити добар пример за поређење са линијом покретних средина за неки дужи период (нпр. период од 20 година), која може да укаже на цикличност осмотрене серије, њене амплитуде и полупериоде. Међутим, на основу једне осмотрене периоде се не може оценити цела појава, али се може очекивати да карактеристике генерисаних протока не одступају значајно од тих вредности. У осмотреном периоду се јавља већи број прелаза једногодишњег трајања (тачније 5, односно 5.56%), што је утицало на укупан проценат осмотрених прелаза. Међутим, када се погледа број корака од 10 или више година, онда је таквих прелаза 4 (што је изражено у процентима 4.44%).

У табели 21 види се велика разлика у параметрима сумарних кривих између осмотрених и генерисаних података. Број прелаза дужине једне године у генерисаној серији је укупно 11 (или 1.1%) а прој прелаза дужих од 10 година је 15 (или 1.5%), што је мање него у осмотреним серијама. Након додатног преслагања добијена је реалнија слика временске серије што се види поређењем на слици 41 (горе десно и доле), и параметара кривих у табели 21. Број прелаза је повећан са 48 на 86 (8.6%), што је још увек мање од осмотрене серије, али судећи на основу већег броја симулација где се овај проценат креће око 10%, може се сматрати добрим резултатом. Највећа дужина корака је смањена са 290 на 59 година, што је дуже у односу на осмотрену серију, али очекивање је да ће се у серији од 1000 година јавити и дужи сушни/водни периоди од осмотрених. Такође, максималне и минималне вредности криве су сличне и распон је смањен са 255  $m^3/s$  на 153  $m^3/s$ , што је у односу на осмотрену вредност скоро двоструко више, али је добро симулирана вредност екстремних услова за одређивање сценарија управљања акумулацијама. Број једногодишњих прелаза је 21 (или 2.1%), што је процентуално доста ниже од осмотреног низа, али је веће него пре преслагања. Такође, број прелаза дужих од 10 година је 29 (или 2.9%) што је веће него пре преслагања, али је и даље мањи него у осмотреној серији.

Потребно је напоменути да је приликом додатног преслагања основни критеријум био да се уз минимални број преслагања, којим се практично не би нарушио добијени резултат коефицијената корелације на почецима и крајевима година и коефицијенти аутокорелације средњих годишњих вредности, добије што реалнији вишегодишњи распоред годишњих протока разматрајући кумулативну сумарну линију одступања од средње вредности. Сложенија анализа, која би узимала у обзир све параметре који се разматрају при анализи хидролошких серија помоћу корака, захтевала би још сложенији алгоритам, који би могао да знатно поремети већ добијене резултате, што никако није циљ овог додатног преслагања. Ово оставља довољно простора за даље разматрање и унапређење алгоритма за репродукцију дугогодишњег понашања хидролошких серија. Као што се може видети из приложених резултата, озбиљна препрека овој анализи може представљати кратак низ осмотрених података приликом одређивања дужине корака.

## **5.4 Модел за генерисање протока и падавина (модел 2)**

У овом поглављу биће приказани резултати модела за генерисање протока и падавина. Коришћени су осмотрени низови са три мерна места на реци Студеници и са једне падавинске станице, са различитим дискретизацијама (дневни, недељни и месечни

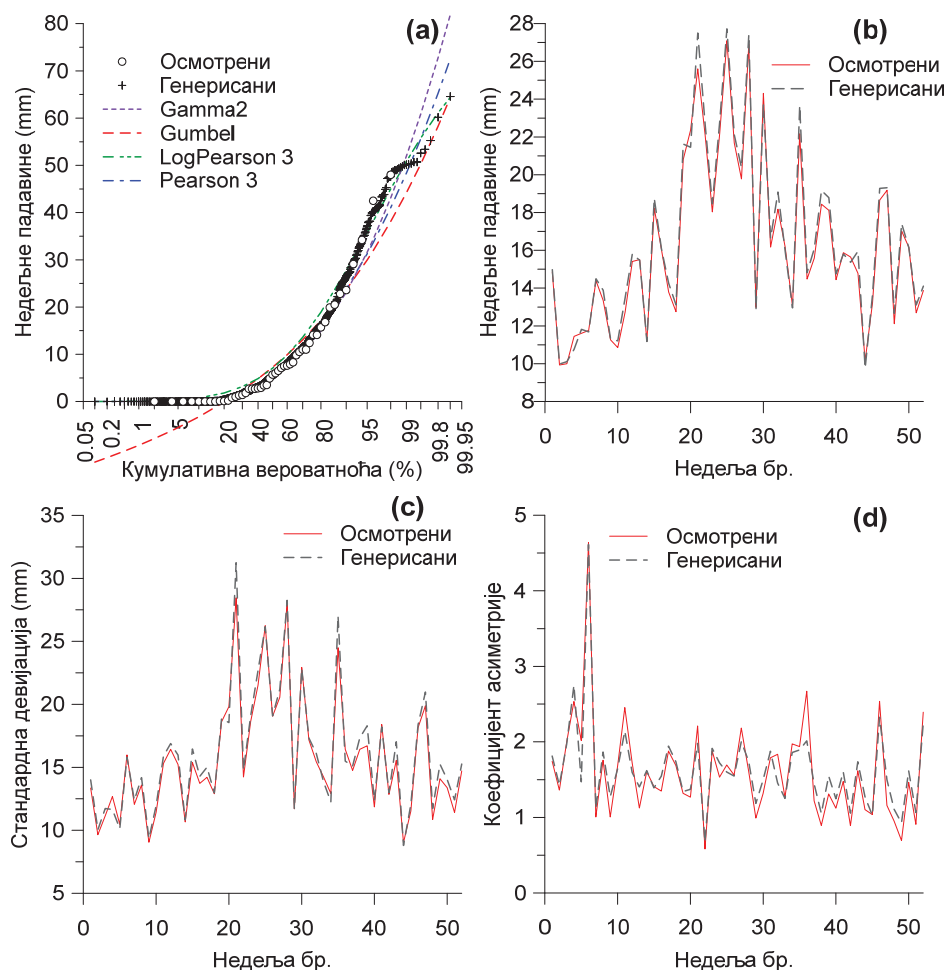
подаци), на основу улазних серија од 49 година. За слив реке Олдман у Канади коришћени су подаци са седам хидролошких и четири падавинске станице, са дискретизацијом на недељном и месечном нивоу, а дужина улазних серија је 74 године (период од 1928-2001). Период осматрања је мањи у односу на улазне податке за модел за генерисање протока због краћих доступних података о падавинама. У овом поглављу се заправо приказује способност модела за рад са различитим величинама (*multi-variate*), коришћењем протока и падавина, уз задржављање већ описаних карактеристика модела за рад са више мерних места (*multi-site*) и са различитим временским дискретизацијама (*multi-temporal*). Коришћен је претходни модел, али су резултати раздвојени да би се приказала разлика при коришћењу истих и различитих хидролошких променљивих у моделу. У овом раду коришћени су протоци и падавине, али би модел на исти начин могао да репродукује карактеристике улазних серија и у случају неке друге променљиве, нпр. температуре. Једина разлика код генерисања у односу на претходни модел јесте што серије о падавинама садрже и вредности једнаке нули, па се примењује алгоритам за генерисање променљивих са нултим вредностима који је објашњен у делу 4.3.4.2.

Како су већ приказани резултати за протоке у претходном делу, овде ће акценат бити на резултатима серија са падавинама, њиховим корелацијама, резултатима годишњих вредности и одговарајућим аутокорелационим и корелационим везама.

#### 5.4.1 Резултати генерисања случајних парцијалних низова

Генерисање низова падавина који садрже нулте податке разликује се од генерисања низова протока само у томе што се њихова расподела састоји из два дела: вероватноћа појаве нултих података и вероватноћа података већих од нуле. Као што је показано у поглављу 4.3.4.2, прво се генерише број нултих података који је забележен у осмотреној серији, а затим преостали део серије из непараметарске расподеле ненултих вредности на исти начин као и за серије које немају нуле.

Екстраполација крајева расподеле је спроведена на исти начин преко интервала поверења GEV расподеле, за део података већих од нуле. Да би се спровела и логаритамска трансформација података, коришћена је трансформација за протоке  $y = \ln x$ , а за падавине  $y = \ln(x + 1)$ .

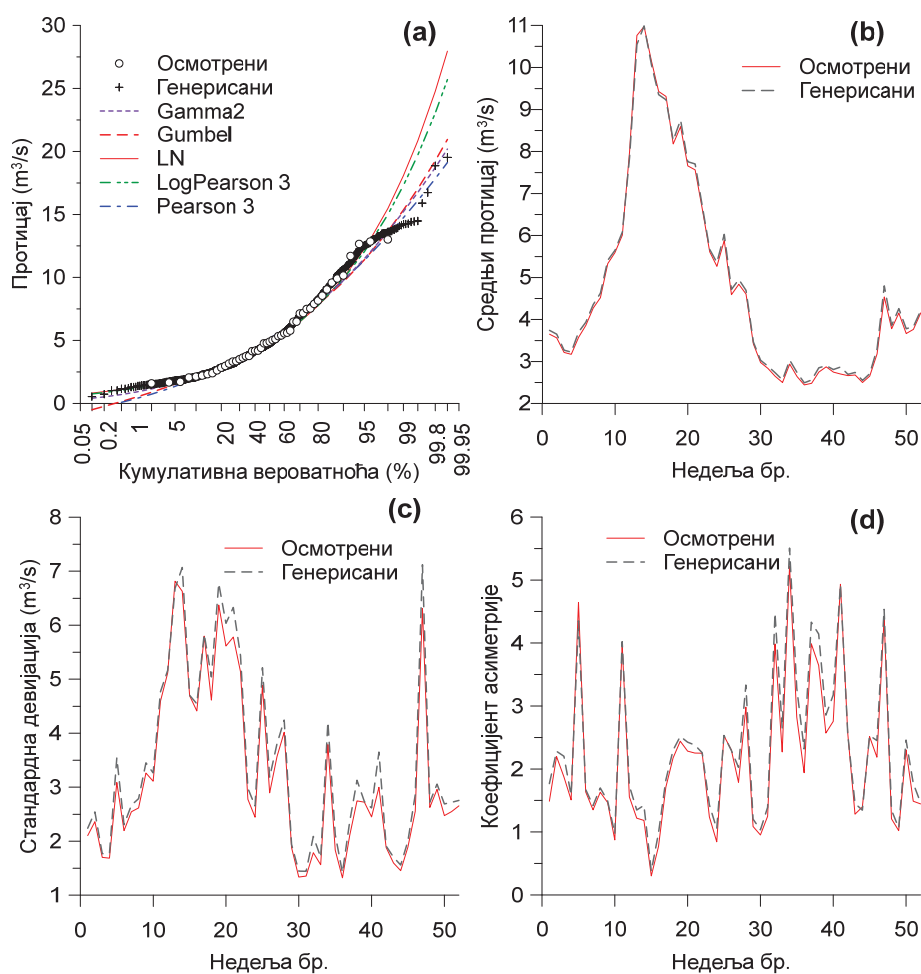


Слика 42 – Резултати корака 1 за недељне падавине на станици Краљево: а) емпиријске расподеле осмотрених и генерисаних падавина и типичне теоријске расподеле за недељу 10; б) осмотрене и генерисане средње недељне падавине; с) осмотрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осмотрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије

Симулацијама Монте Карло се генерише првих 1000 бројева из одговарајуће непараметарске расподеле логаритмованих протока и пореде се статистике генерисаног низа са осмотреним. Критеријуми за слагање статистика низова падавина су исти као и за протоке. На крају корака 1, када су сви низови генерисани, подаци се антилогаритмују и на тај начин припремају за следећи корак.

На слици 42 су дати резултати 1. корака за падавинску станицу Краљево, на слици 43 резултати генерисања за хидролошку станицу Мланча, а за слив реке Олдман у Канади резултати са падавинске станице СА8 на слици 44. На слици 42 под а) је дат пример емпиријских расподела вероватноће осмотрених и генерисаних падавина за недељу 10, где се види да расподела генерисаних падавина у потпуности прати расподелу осмотрених. На истом дијаграму приказане су и најчешће коришћене теоријске

расподеле које су прилагођене низу осмотрених падавина (Гумбелова, Пирсон 3, лог-Пирсон 3, двопараметарска гама). Као и у претходним резултатима, у зони екстраполације непараметарске расподеле генерисаних падавина за вероватноћу 99.9 % налазе се у оквиру распона приказаних теоријских расподела, иако су за вероватноће између 90 % и 98 % изван распона теоријских расподела. Овај део расподеле генерисаних података у потпуности прати расподелу осмотрених, која је у том распону, такође, изван распона теоријских расподела. Аналогно горњем делу расподеле, и у доњем делу се потпуно подударају расподеле осмотрених и генерисаних вредности, као и у подручју појаве нултих вредности. Слично се може видети за падавине на сливу реке Олдман на слици 44-а, док исто важи и за остале недеље на обе станице.



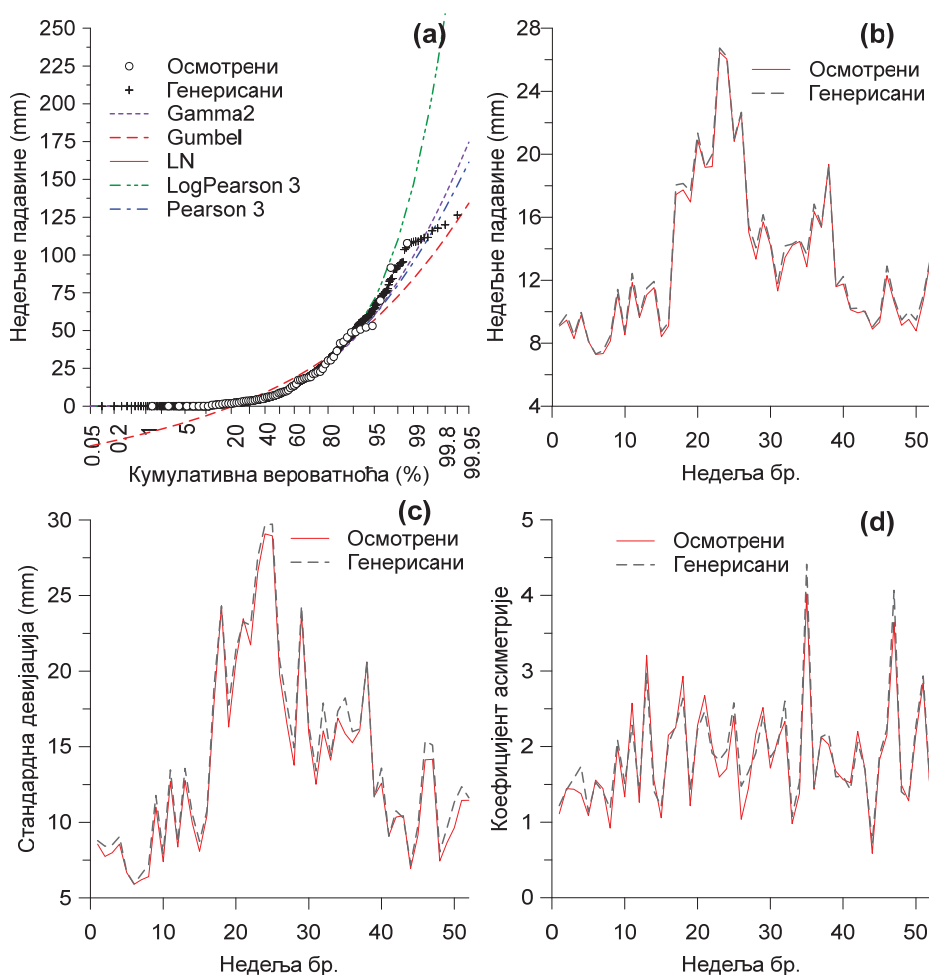
Слика 43 – Резултати корака 1 за недељне протоке на станици Мланча: а) емпиријске расподеле осмотрених и генерисаних протока и типичне теоријске расподеле за недељу 10; б) осмотрени и генерисани средњи недељни протоци; в) осмотрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; д) осмотрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије

На слици 43 су дати резултати генерисања протока за 10. недељу на станици Мланча ради поређења са резултатима првог корака претходног модела. Ако се упореде



слике 27 и 43, може се приметити да су резултати скоро идентични, што је и очекивано имајући у виду да сам поступак генерисања не зависи од осталих низова. Међутим, право поређење резултата два модела је могуће тек на основу резултата у осталим корацима.

Средње недељне падавине на обе станице (слике 42-b и 44-b) се практично подударају за осмотрене и генерисане низове. Релативне грешке средњих вредности осмотрених и генерисаних недељних низова су за станицу Девићи од 0.2% до 6.4% (у просеку 2.1%), за станицу Мланча од 0.1% до 6.2% (у просеку 2.2%), за станицу Ушће од 0.0% до 5.9% (у просеку 2.3%) и за падавинску станицу Краљево од 0.1% до 7.9% (у просеку 2.7%). Релативне грешке средњих недељних протока не разликују се много од грешака при генерисању само хидролошких низова. Релативне грешке средњих вредности низова за канадске станице су дате у табели 22.



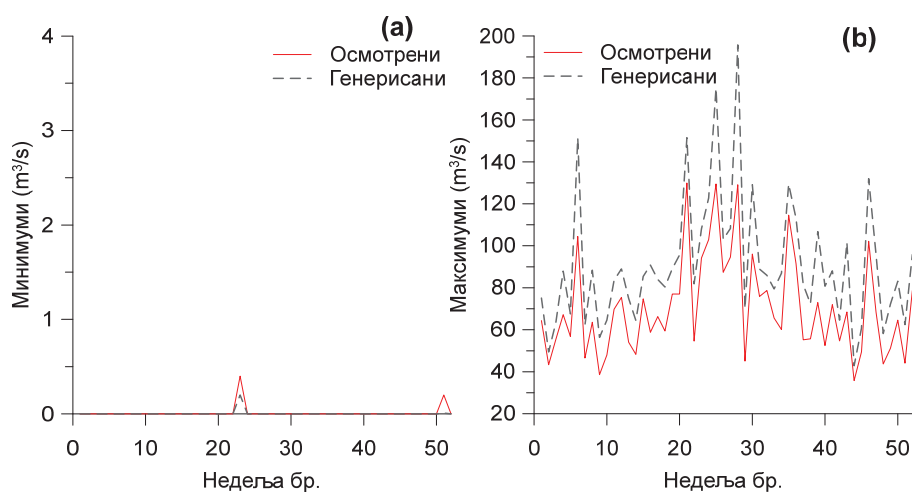
Слика 44 – Резултати корака 1 за недељне падавине на станици Cards. Pr. (CA8): a) емпиријске расподеле осмотрених и генерисаних падавина и типичне теоријске расподеле за недељу 22; b) осмотрене и генерисане средње недељне падавине; c) осмотрене и генерисане вредности недељних стандардних девијација; d) осмотрене и генерисане вредности недељних коефицијената асиметрије

Табела 22 – Релативне грешке осмотрених и генерисаних средњих вредности за недељне податке на станицама у сливу реке Олдман у Канади

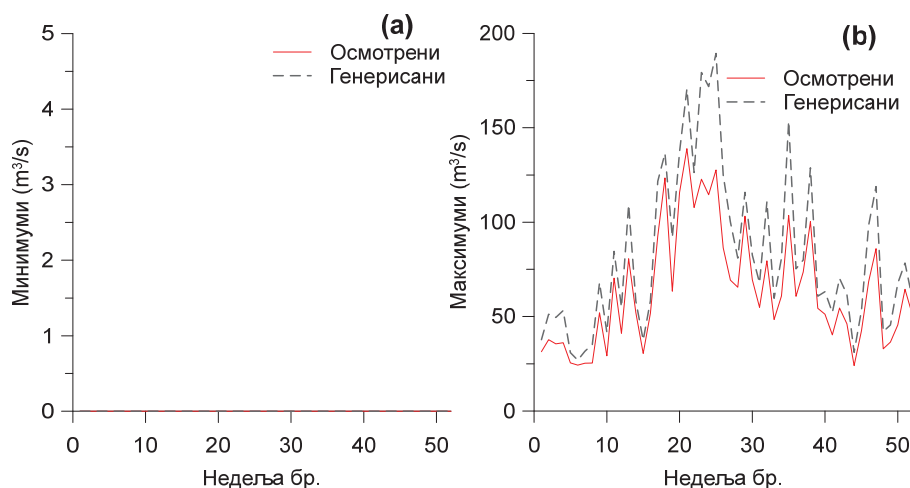
	CA1	CA 2	CA 3	CA 4	CA 5	CA 6	CA 7	CA 8	CA 9	CA 10	CA 11
Средња вредност	0.9%	1.2%	0.7%	0.8%	1.2%	1.2%	1.2%	2.6%	2.2%	3.3%	2.8%
Максимална вредност	2.5%	5.4%	3.1%	3.0%	3.6%	3.8%	4.0%	7.8%	7.0%	9.2%	7.4%
Минимална вредност	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.1%	0.0%

Средње недељне падавине на обе станице (слике 42-b и 44-b) се практично подударају за осмотрене и генерисане низове. Релативне грешке средњих вредности осмотрених и генерисаних недељних низова су за станицу Девићи од 0.2% до 6.4% (у просеку 2.1%), за станицу Мланча од 0.1% до 6.2% (у просеку 2.2 %), за станицу Ушће од 0.0% до 5.9% (у просеку 2.3 %) и за падавинску станицу Краљево од 0.1% до 7.9% (у просеку 2.7%). Релативне грешке средњих недељних протока не разликују се много од грешака при генерисању само хидролошких низова. Релативне грешке средњих вредности низова за канадске станице су дате у табели 22.

Релативне грешке стандардних девијација генерисаних низова за све станице крећу се у распону од 0 до 10.3 % (просечно 4.1 %) за станицу Краљево, односно у границама од 0 до 17.5 % (просечно 5.4 %) за канадске станице. Просечна грешка за коефицијенте асиметрије недељних низова за домаће станице је 10.8 % (грешке су у границама 0.6-33.6 %), а за канадске 8.8 % (грешке у распону од 0.2 до 42.2 %). За падавине су релативне грешке статистика нешто веће него за протоке.



Слика 45 – Недељни екстрими падавина на станици RS4: а) осмотрени и генерисани минимуми; б) осмотрени и генерисани максимуми



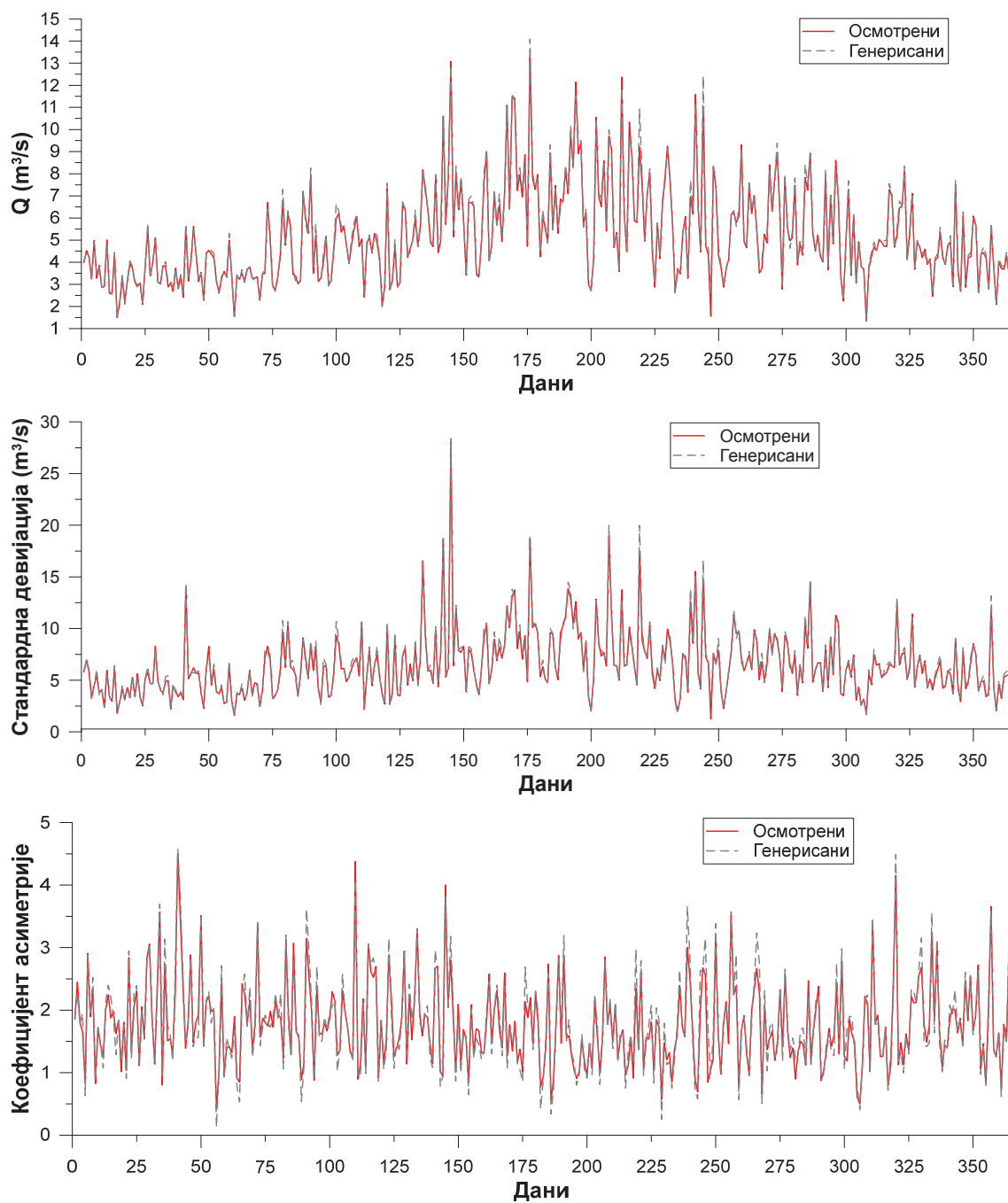
Слика 46 – Недељни екстреми падавина на станици СА8: а) осмотрени и генерисани минимуми б) осмотрени и генерисани максимуми

На сликама 45 и 46 се може видети да се у свим недељама, за оба сета података, јављају екстремније вредности од осмотрених. Како је нула најчешћа минимална вредност у осмотреним низовима, тако су минимуми и у генерисаним низовима нулте вредности, осим у две недеље на станици Краљево које су веће од нуле, али мање од осмотрених минимума.

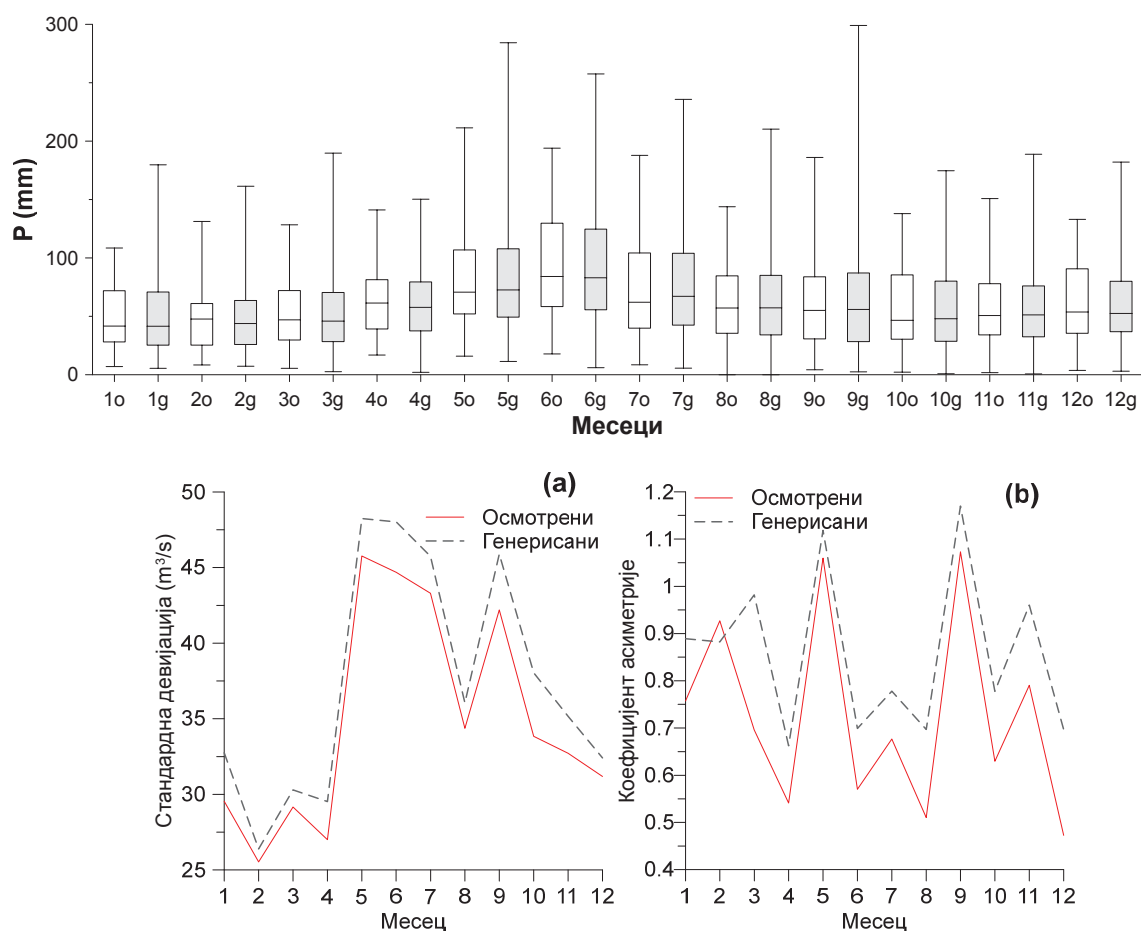
Аналогно недељним подацима, за дневне и месечне низове се добијају слични резултати. У табели 23 су приказане просечне релативне разлике у средњим вредностима генерисаних и осмотрених низова на српским станицама за различите временске дискретизације, које се крећу од 0.9% до 3.1%. На канадским станицама релативне грешке се крећу од 0.4% до 3.3%. На основу приложених вредности може се закључити да је генерисање, према средњим вредностима, веома уједначено за све временске дискретизације и да се одступања не разликују од одступања у претходном моделу.

Табела 23 – Просечне релативне разлике у средњим вредностима генерисаних и осмотрених низова на српским станицама за различите временске дискретизације

	RS1	RS2	RS3	RS4
Дневни	2.0%	2.0%	1.7%	3.1%
Недељни	2.1%	2.2%	2.3%	2.7%
Месечни	0.9%	0.8%	1.0%	2.1%



Слика 47 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осмотрених и генерисаних дневних низова на падавинској станици Краљево

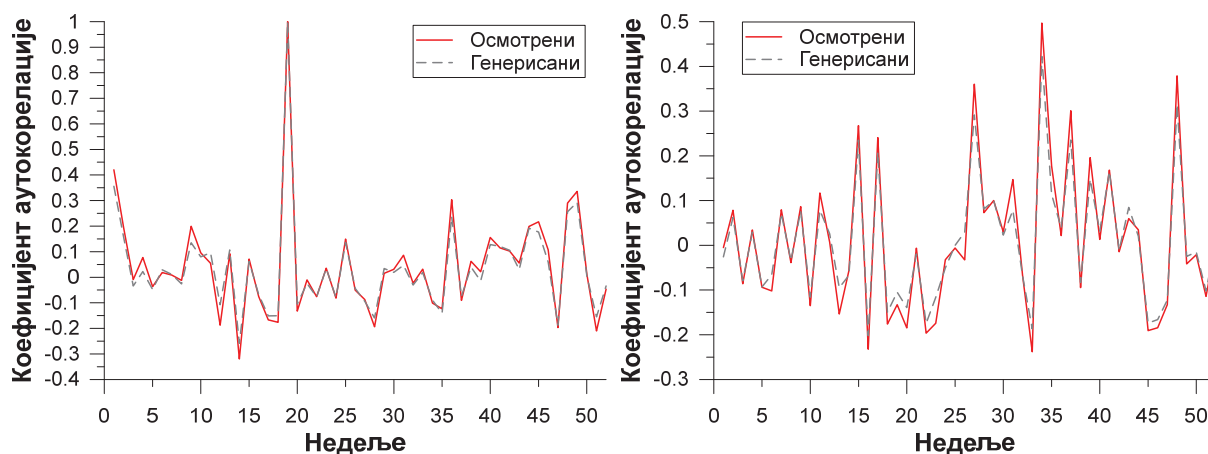


Слика 48 – Вох-plot расподеле, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије осматрених и генерисаних месечних низова на падавинској станици Краљево

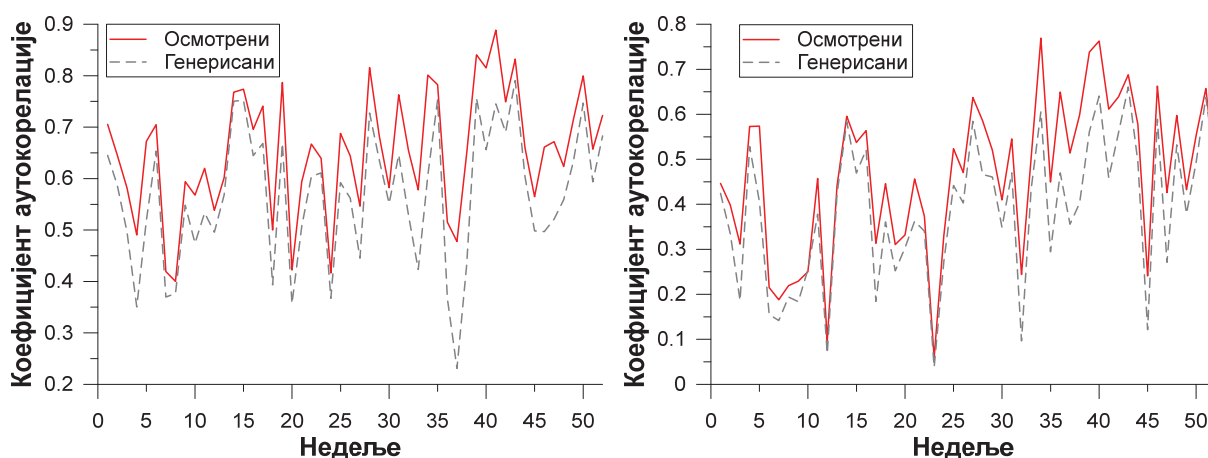
#### 5.4.2 Корелација парцијалних низова

Применом алгоритма Иман-Коновера за преслагање података унутар парцијалних низова, у моделу за генерисање протока и падавина подешавају се и аутокорелација у низовима на истој станици и крос-корелација између станица.

На сликама 49 и 50 приказано је поређење коефицијената аутокорелације првог и другог реда у осматреним и генерисаним недељним парцијалним низовима за две станице. За приказ је одабрана падавинска станица Краљево и хидролошка станица Мланча с циљем поређења резултата са резултатима модела за генерисање протока. На слици 51 приказани су коефицијенти крос-корелације између наведене две станице за слив реке Студенице за помаке реда 0 и 1. Слични резултати се добијају и за канадске станице, што се може видети у прилогу 2.

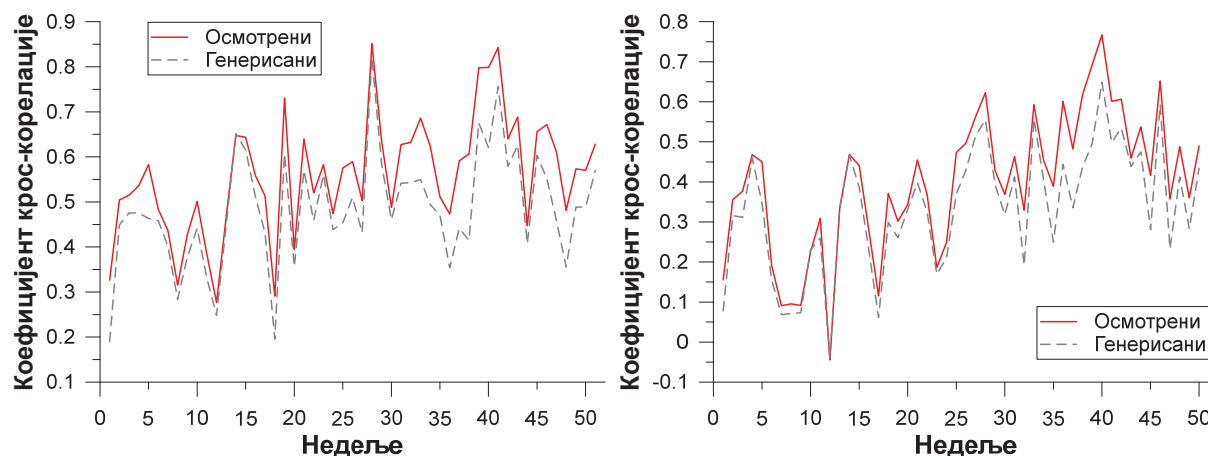


Слика 49 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда парцијалних недељних низова падавина на станици Краљево за слив реке Студенице



Слика 50 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда парцијалних недељних низова протока на станици Мланча на реци Студеници

Иако коefицијенти аутокорејације за станицу Краљево имају мале вредности, осим за недељу 19 (слика 49 лево), што је сасвим нормално за податке о падавинама, резултати су скоро идентични за осмотрене и генерисане низове, па се може рећи да се коefицијенти аутокорејације одлично репродукују. За станицу Мланча се поређењем слика 33 и 50 може видети да су одступања коefицијената аутокорејације првог и другог реда парцијалних осмотрених и генерисаних недељних низова протока скоро иста за два модела. Чак се на споменутим сликама за коefицијенте аутокорејације другог реда може рећи да се добијају скоро исти резултати. Веома су слични резултати коefицијената аутокорејације недељних низова за канадске станице. Исти закључак се може извести и када се пореде резултати добијени за различите временске дискретизације за оба сета података.



Слика 51 – Коефицијенти крос-корелације за временски помак 0 и 1 између парцијалних недељних низова на станицама Краљево и Мланча за слив реке Студенице

На слици 51 дати су коефицијенти крос-корелације за временски помак 0 и 1 између парцијалних недељних низова на станицама Краљево и Мланча за слив реке Студенице, где се могу видети резултати преслагања елемената у 2. кораку Иман-Коноверовим алгоритмом којим се постиже репродукција коефицијената корелације целе корелационе матрице. У табели 24 приказане су просечне и највеће разлике између коефицијената корелације осмотрених и генерисаних низова (приказана је просечна односно највећа вредност из матрице која представља разлику између корелационе матрице генерисаних низова и корелационе матрице осмотрених низова).

Табела 24 – Просечна и највећа апсолутна одступања између корелационих матрица генерисаних и осмотрених низова

Скуп података		
	RS	CA
дневни низови		
прос.	0.044	
макс.	0.356	
недељни низови		
прос.	0.035	0.033
макс.	0.273	0.308
месечни низови		
прос.	0.021	0.022
макс.	0.118	0.169

Као што је речено код претходног модела, комплетирање репродукције корелационе структуре парцијалних низова завршава се у кораку 3 методологије када се подешавају коефицијенти корелације низова са краја и почетка године. У табели 25 дат је пример ових коефицијената за осмотрене и генерисане недељне низове и они показују високо слагање за исту станицу као и у првом моделу. Просечна и највећа апсолутна

одступања између корелационих коефицијената генерисаних и осмотрених низова на крајевима и почецима године износе 0.028 и 0.383. На основу свих приложених дијаграма, релативних грешки и одступања, може се закључити да су резултати подешавања корелционе структуре скоро идентични за моделе са и без падавина. Слични резултати добијени су за канадске станице.

Табела 25 – Коефицијенти корелације на крају и почетку године за осмотрене и генерисане недељне серије за станицу Мланча

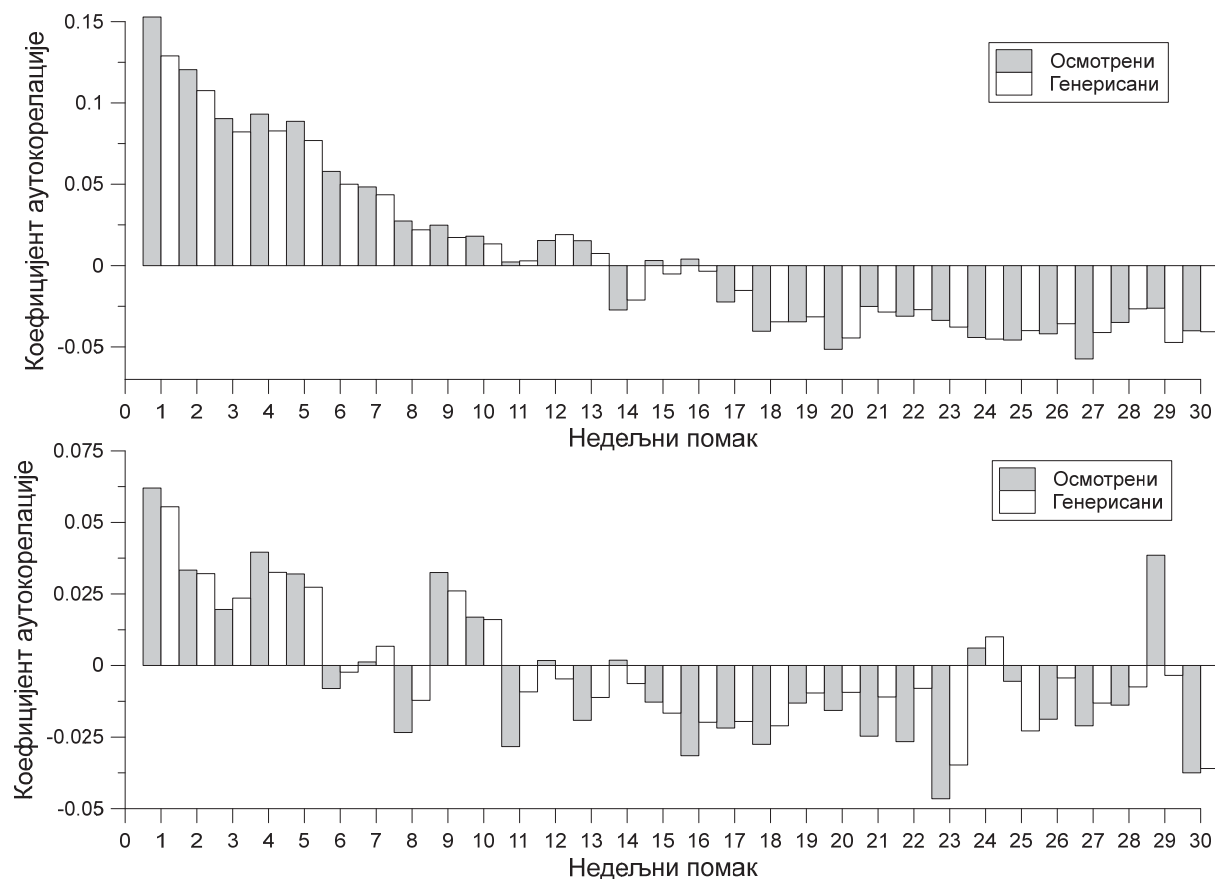
<b>Осмотрени</b>								
Недеља	49	50	51	52	1	2	3	4
49	1.000	0.721	0.438	0.385	0.422	0.289	0.345	0.517
50		1.000	0.801	0.555	0.673	0.459	0.381	0.371
51			1.000	0.659	0.665	0.481	0.322	0.327
52				1.000	0.729	0.472	0.328	0.287
1					1.000	0.709	0.453	0.362
2						1.000	0.647	0.398
3							1.000	0.579
4								1.000

<b>Генерисани</b>								
Недеља	49	50	51	52	1	2	3	4
49	1.000	0.635	0.381	0.348	0.411	0.283	0.217	0.134
50		1.000	0.747	0.493	0.637	0.474	0.299	0.211
51			1.000	0.593	0.638	0.450	0.299	0.259
52				1.000	0.683	0.477	0.331	0.254
1					1.000	0.645	0.424	0.313
2						1.000	0.587	0.334
3							1.000	0.496
4								1.000

На слици 52 су дати примери аутокорелационе функције недељних падавина као целе временске серије, на којима се види усклађеност генерисане и осмотрене серије. Аутокорелационе функције на овој слици имају вредности блиске нули, али се корелациона структура у подацима ипак задржава и показују се иста аутокорелациона својства у генерисаној серији.

Поред аутокорелационих функција за друге станице, у прилогу 2 су приказане и крос-корелационе функције између станица које такође показују добра слагања. Резултати за друге временске дискретизације су, такође, приказани у прилогу 2.



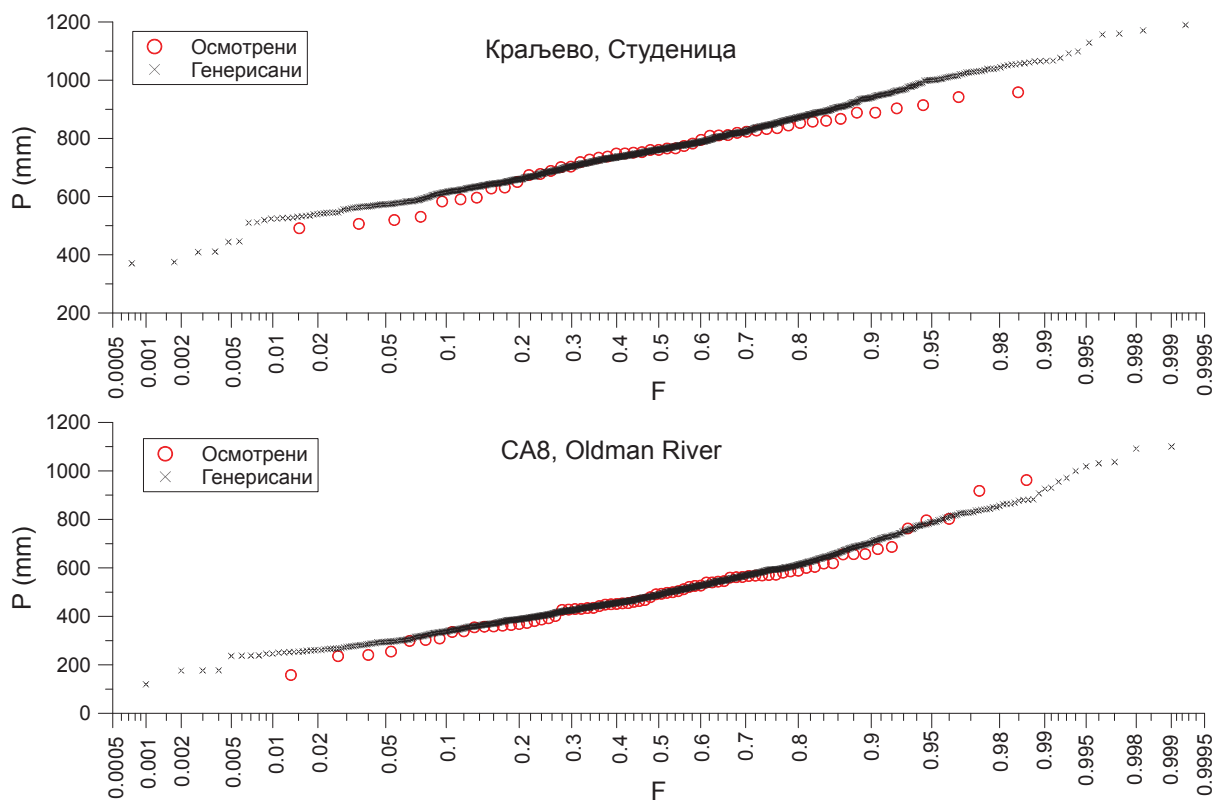


Слика 52 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних временских серија до реда 30 за станицу Краљево за српски сет података (горе) и СА8 за слив на реци Олдман (доле)

### 5.4.3 Годишњи протоци и падавине

Подаци генерисани за одређену временску дискретизацију се агрегирају на годишњи ниво и затим се пореде карактеристике осмотрених и генерисаних низова. На слици 53 се види да расподела генерисаних годишњих падавина сасвим добро прати расподелу осмотрених годишњих падавина. На истој слици се може приметити и резултат додатног подешавања података у годинама са најмањим годишњим падавинама, описаном у поглављу 4.3.5.3.

Поређење статистика годишњих протока и падавина на српским станицама дато је у табели 26, за годишње вредности одређене из недељних низова. Може се рећи да су статистике генерисаних годишњих протока у потпуној сагласности са осмотреним карактеристикама и да не одступају од оних које су добијене у моделу 1. На падавинским станицама су већа одступања него на хидролошким, али и овакав резултат је очекиван за падавине које имају случајнији карактер. Резултати на канадским станицама и за различите временске дискретизације су слични приказаним недељним подацима за српски сет података.

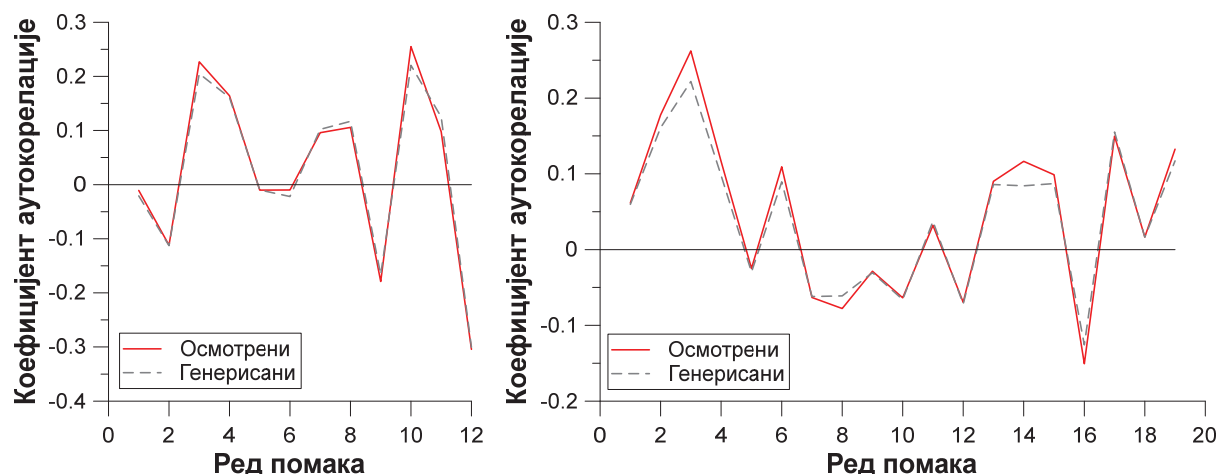


Слика 53 – Расподела годишњих падавина за станице Краљево (горе) и за станицу CA8 (доле)

Табела 26 – Основне статистике низова годишњих протока и падавина за станице на сливу реке Студеници.

	RS 1			RS 2			RS 3			RS 4		
	осм.	ген.	рел. грешка	осм.	ген.	рел. грешка	осм.	ген.	рел. грешка	осм.	ген.	рел. грешка
Ср. вр.	2.92	2.96	1.4%	4.78	4.84	1.4%	7.05	7.16	1.6%	751.7	769.4	2.3%
Ст. дев.	0.67	0.67	0.1%	1.10	1.10	0.5%	1.64	1.63	0.7%	115.1	125.7	9.2%
Мин.	1.28	1.03		2.15	1.63		3.48	2.68		491.2	370.7	
Макс.	4.66	5.37		7.07	9.46		10.44	13.17		958.5	1190.0	

Аутокорелација у низовима годишњих протока приказана је на слици 54 где се види да генерисане серије изузетно добро прате понашање осматраних серија у погледу карактеристика дуге меморије. Слични резултати се добијају за све временске дискретизације. И за годишње низове падавина важи да су коефицијенти аутокорелације мали, али да се у потпуности репродукују у генерисаним серијама. У прилогу 3 су дати резултати аутокорелационих функција за све станице и за све временске дискретизације.

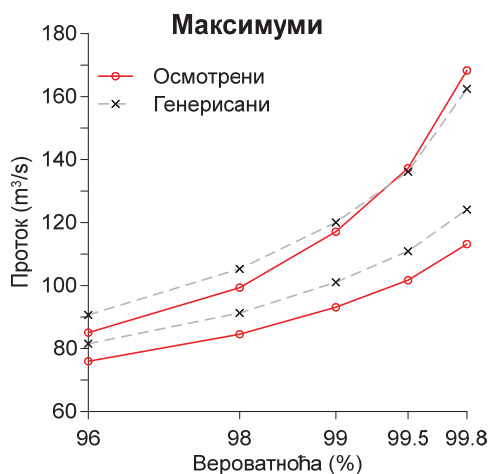


Слика 54 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Краљево (лево) и за станицу СА8 (десно)

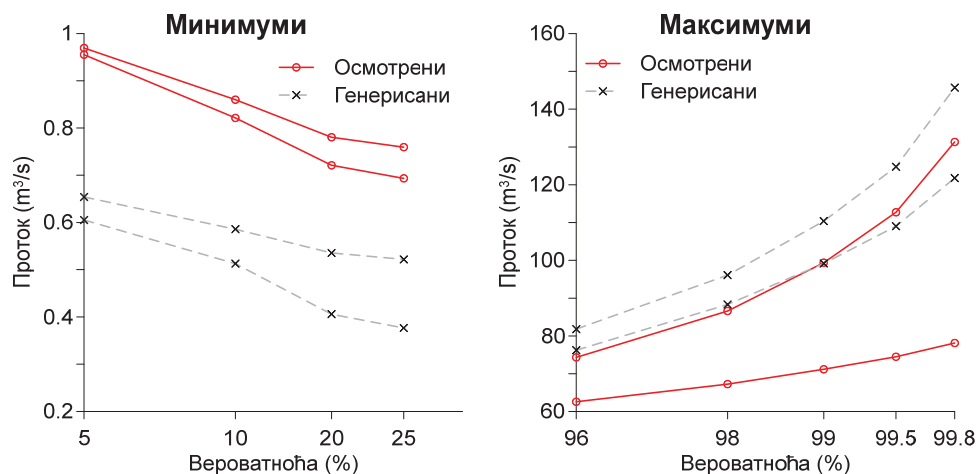
Крос-корелациони коефицијенти генерисаних годишњих низова имају веома блиске вредности крос-корелационим коефицијентима осмотрених низова. Тако је за српске станице просечно одступање крос-корелационих коефицијената генерисаних низова од осмотрених низова 0.008, а максимална вредност одступања је 0.048. На канадским станицама иста одступања износе 0.016 и 0.080. На канадским станицама су одступања нешто већа, што се може протумачити као последица већег броја падавинских станица за које се подешавање врши.

#### 5.4.4 Годишњи екстремни

У моделу 1 је показано да се у генерисаним парцијалним низовима дужине 1000 година јављају екстремније вредности у подацима од оних у осмотреним серијама на нивоу усвојене временске дискретизације. Међутим, веома је значајно да и на годишњем нивоу дође до појаве екстремнијих података. Вредности годишњих екстрема у генерисаним подацима су контролисане у односу на распон квантила одређене вероватноће појаве из најчешће коришћених теоријских расподела. Резултати су приказани у односу на највећи и најмањи квантил из неколико теоријских расподела (лог-нормална, Гумбелова, Пирсон 3, лог-Пирсон 3, двопараметарска гама) за дате податке. Као карактеристична серија одабрана је серија максималних годишњих падавина за дневне податке на падавинској станици Краљево. На слици 55 је приказан распон теоријских квантила за осмотрену и генерисану серију годишњих максимума дневних падавина на станици Краљево. Распони квантила годишњих максимума за две серије имају добро слагање а нарочито у делу вероватноћа изнад 99%.

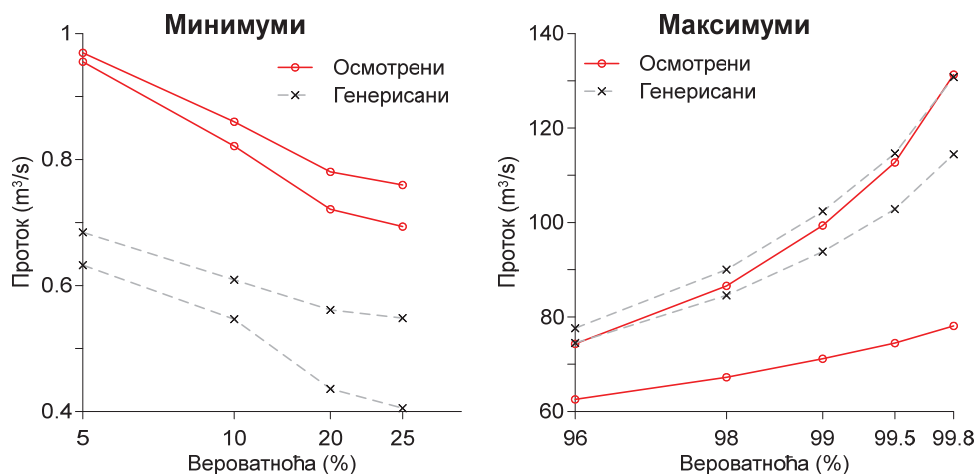


Слика 55 – Распон теоријских квантила годишњих максимума дневних падавина за осмотрену и генерисану серију на станици Краљево



Слика 56 – Распон теоријских квантила минималних и максималних годишњих протока за осмотрену и генерисану серију дневних података на станици Мланча

Када се посматрају квантили минималних и максималних годишњих протока на станици Мланча из осмотрених и генерисаних дневних података (слика 56) види се да су распони теоријских квантила за генерисане минимуме знатно испод распона за осмотрене. Овај део резултата у моделу оставља могућност за даљи развој и унапређење модела. Распони теоријских квантила генерисаних годишњих максимума су изнад осмотрених, мада се у једном делу преклапају. Ово неслагање није последица укључивања различитих типова променљивих у овом моделу за генерисање (модел 2), што се може видети поређењем са резултатима модела за генерисање протока (модел 1) на слици 57 за исту станицу и временску дискретизацију. Слични резултати су приказани за модел 1, али табеларно за станицу Ушће и СА4 (табеле 18 и 19). На слици 57 се види да су у моделу 1 добијени нешто бољи резултати код максимума, док је за минимуме резултат исти.



Слика 57 – Распон теоријских квантила за минималне и максималне годишње протоке из осмотрене и генерисане серије дневних података на станици Мланча добијених моделом 1

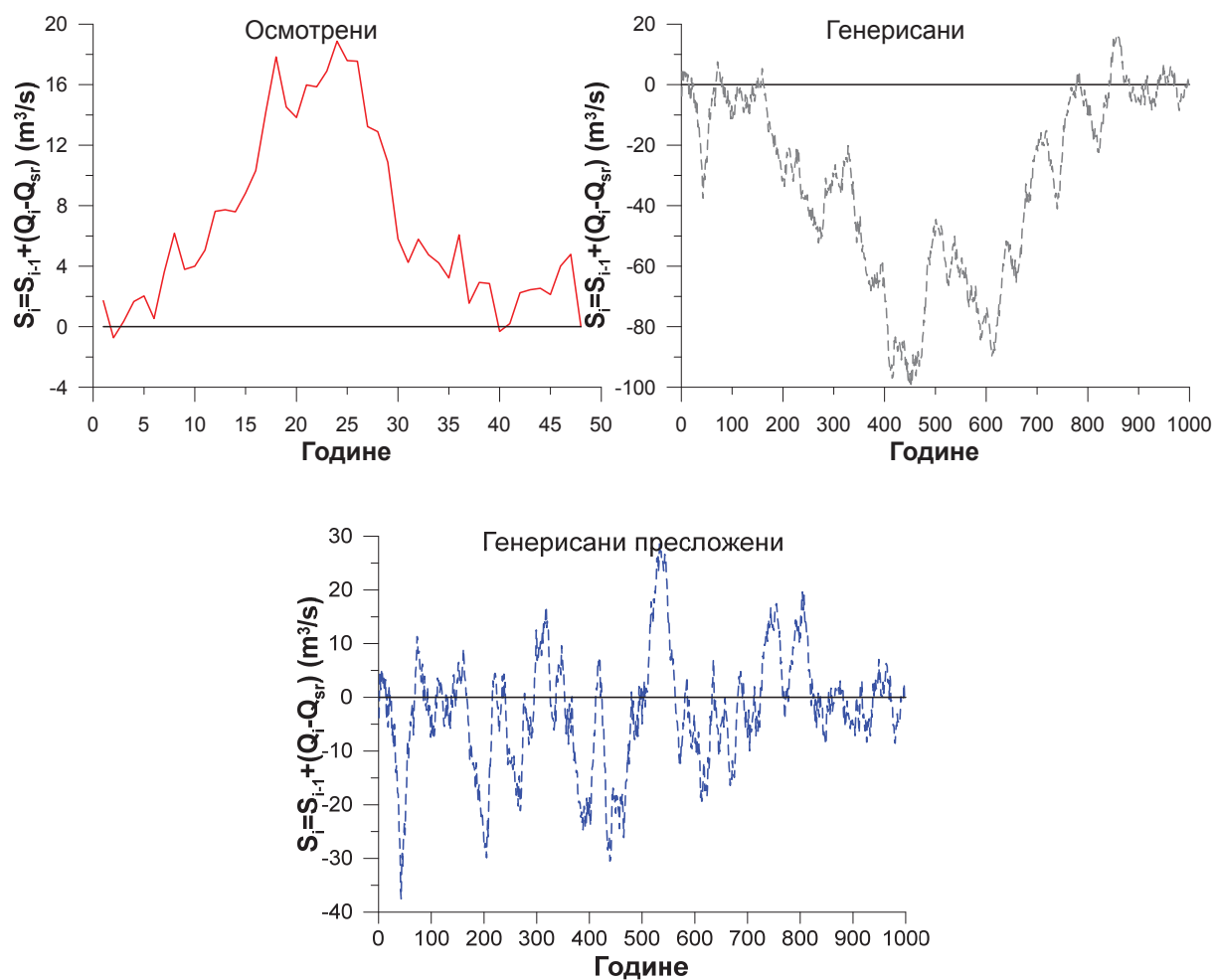
У прилогу 4 су дате слике и за остале станице и временске дискретизације.

#### 5.4.5 Вишегодишње карактеристике

Као и за модел 1, сагледане су карактеристике кумулативних сумарних линија одступања од средње вредности за станице са падавинама, са циљем да се покаже да се за генерисане серије могу подешавати одабране карактеристике. Иако код падавинских станица кумулативна сумарна линија одступања од средњих вредности има другачије карактеристике у односу на хидролошке податке, применом истог алгоритма на податке о падавинама на исти начин као код хидролошких станица, подешавају се и карактеристике падавинских станица. Када се погледају осмотрене серије падавина (слика 58 горе лево), у њима се може видети само један циклус, за који се не може рећи да је завршен.

За осмотрене серије годишњих падавина на станици Краљево, дужине 49 година, формирана је кумулативна сумарна линија одступања од средње вредности, дата на слици 58 (лево), док су њене карактеристике дате у табели 27. Осмотрени период садржи само 10.2% прелаза. Основна карактеристика ове сумарне линије је што одступање од средње вредности у целом осмотреном периоду има само позитивни корак (само у две године се дешава прелаз у негативни корак, једногодишњег трајања). На истој слици са десне стране је приказана кумулативна сумарна линија одступања од средње вредности за 1000 година генерисаних падавина. У овом случају процентуални број прелаза је 4.4%, а највећа дужина корака износи 651 годину, при чему је тај корак негативан док је веома мали број корака са позитивним предзнаком или су кратког трајања. Пошто је проценат

прелаза у генерисаној серији доста мањи, постоји очигледна несразмера између минимума и максимума кумулативне сумарне криве.

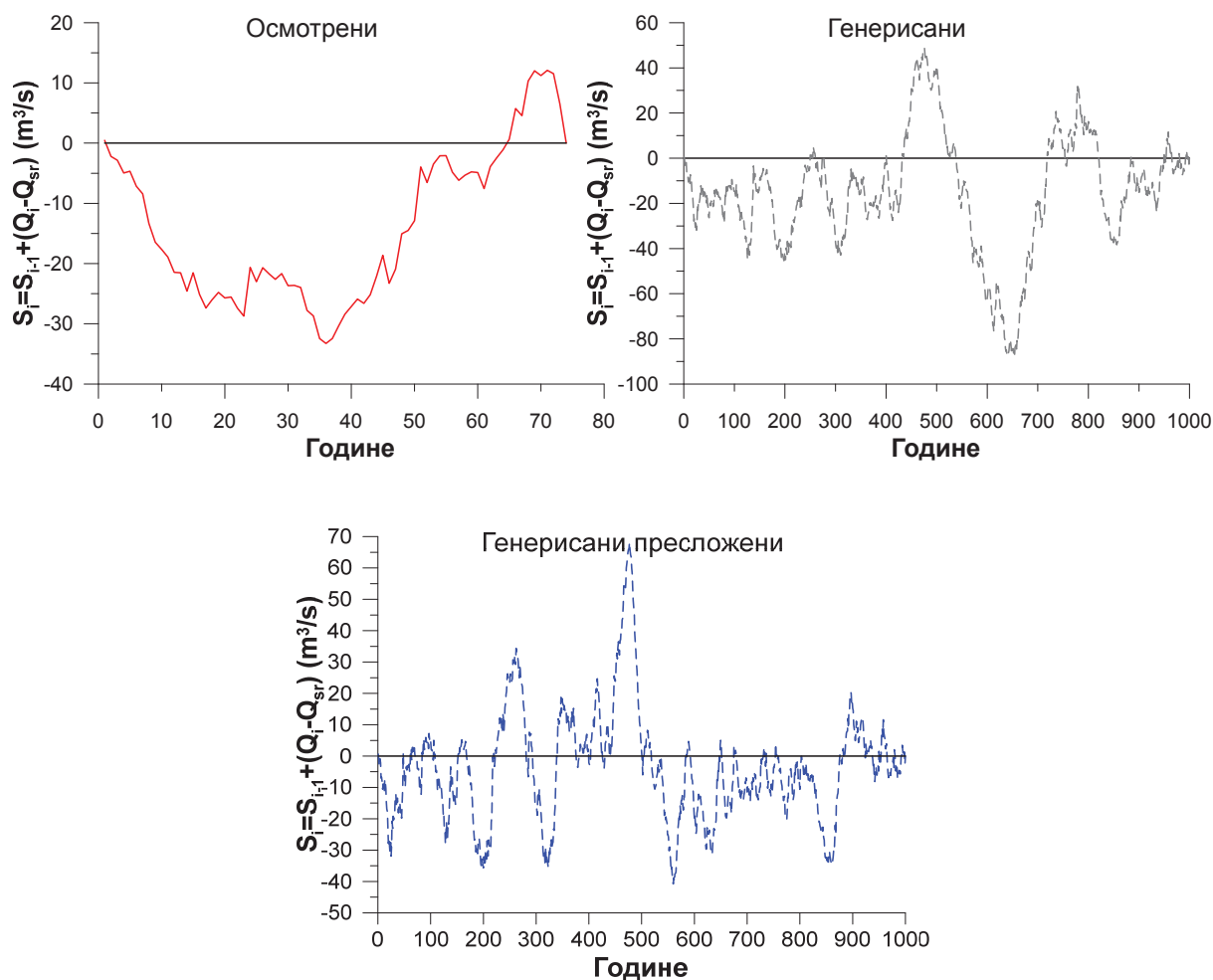


Слика 58 – Кумулативна крива одступања осматраних (горе лево) и генерисаних (горе десно) годишњих падавина од средње вредности за станицу Краљево; крива после додатног пермутовања редова (доле)

Табела 27 – Параметри сумарних кривих одступања од средње вредности при анализи корака за падавинску станицу Краљево

	Осмотрена серија	Генерисана серија пре преслагања	Генерисана серија после преслагања
Број осматраних година	49	1.000	1.000
Број прелаза	5	44	104
Процент прелаза	10.21%	4.40%	10.40%
Највећа дужина корака	37	615	56
Максимум	18.87	16.61	28.78
Минимум	-0.73	-99.19	-37.51

Да би се карактеристике генерисане серије приближиле карактеристикама осмотрене серије, извршено је додатно преслагање, одговарајућа сумарна крива је такође приказана на слици 58. Апсолутне вредности минимума и максимума у пресложеној генерисаној серији су приближно исте, а самим тим је смањен и распон корака, повећан је број прелаза и значајно умањена дужина корака (табела 27). Пресложена серија има исти проценат прелаза као осмотрена серија, а највећа дужина корака има вредност ближу оној за осмотрену серију.



Слика 59 – Кумулативна крива одступања осмотрених (горе лево) и генерисаних (горе десно) годишњих падавина од средње вредности и линија покретних просека за станицу СА8 у Канади; сумарна крива после додатног преслагања (доле)

За осмотрену серију одступања од средње вредности за падавинску станицу СА8 на сливу реке Олдман (слика 59 лево) се види да кумулативна сумарна линија има сличне карактеристике као сумарна кумулативна линија одступања за станицу Краљево. За ову станицу се може рећи да је један полуциклус завршен али још увек нема довољно података да се оцени цео циклус. Карактеристике сумарних кумулативних линија

одступања од средње вредности су дате у табели 28. За 74 године осматрања падавина, на сумарној линији се јавља само 3 прелаза, рачунајући почетни и крајњи који су увек у нули. Очигледно је да циклуси за податке о падавинама имају другачије карактеристике од хидролошких и захтева дубљу анализу, што није циљ овог истраживања.

Табела 28 – Параметри сумарних кривих при анализи корака за станицу СА8

	Осмотрена серија	Генерисана серија пре преслагања	Генерисана серија после преслагања
Број осмотрених година	74	1.000	1.000
Број прелаза	3	32	80
Процент прелаза	4.05%	3.20%	8.00%
Највећа дужина корака	63	248	72
Максимум	12.10	48.94	68.19
Минимум	-33.27	-88.11	-40.79

Иако су проценти прелаза осмотрене и генерисане серије приближније, недовршеност циклуса посматраног процеса у осмотреним подацима оставља простора за очекивање већег процента прелаза у генерисаној серији. Међутим, дужина корака је приближнија дужини корака регистрованој у осмотреној серији.

Поново се напомиње да је приликом додатног преслагања основни критеријум био да се добије што реалнији вишегодишњи распоред средњих годишњих вредности разматрајући кумулативну сумарну линију одступања од средње вредности, али уз минимални број преслагања којим се не би нарушила добијена корелација на почецима и крајевима година и аутокорелација годишњих серија. Код података о падавинама је нарочито изражено да озбиљна препрека овој анализи може представљати кратак низ осмотрених података приликом одређивања дужине корака, јер се не обухватају цели природни циклуси посматраних процеса.



## 6 ЗАКЉУЧАК

У овој дисертацији развијен је поступак генерисања података у стохастичкој хидрологији, који се базира на непараметарским методама за описивање расподела података и њихове корелационе структуре. Предложена методологија представља даљи развој алгоритма за генерисање дугачких хидрометеоролошких серија коју је предложио Н. Илић (Ilich & Despotovic, 2008; Ilich 2009; 2014), а којом се добијају синтетички низови чије стохастичке особине у потпуности одговарају осматраним низовима. Уз потврђивање методологије Илића, извршена су и њена додатна унапређења.

Истраживања која је приказао Илић у поменутим радовима показују веома значајне резултате у генерисању хидролошких величина. Методологија за генерисање тежи ка универзалном хидролошком моделу, репродукујући основне статистике осматраних величина и њихову просторну и временску зависност. Овом методологијом је могуће добити исте резултате независно од временског корака (дневни, недељни, месечни или сезонски), задржавајући све особине процеса садржане у осматраним подацима. Поред тога, методологија се може сматрати општом јер не зависи од врсте података (не морају се посебно оцењивати параметри за сваку станицу, за друге хидролошке величине, или за различити корак дискретизације). Овде свакако треба споменути и верну репродукцију корелационе и аутокорелационе структуре осматраних величина практично до било ког реда. Такође, води се рачуна и о прелазу из једне године у другу подешавањем корелације на крају и на почетку године, чиме се у потпуности репродукује и аутокорелациона функција за разматрану временску дискретизацију, али и дугорочне карактеристике временске серије, иако аутор у својим радовима није стављао акценат на аутокорелациону функцију. Дугачки низови генерисани овом методологијом могу добро послужити у разматрањима планирања и управљања акумулацијама са вишегодишњим изравнањем.

У најкраћем, предложена методологија састоји се од три главна корака: 1) независног генерисања парцијалних низова случајних бројева (низова за месеце, недеље, дане у години) методом Монте Карло из непараметарских расподела осматраних низова, 2) уношења циљне (осматрене) корелационе структуре у независне низове применом непараметарског алгоритма са пермутовањем редоследа података, и 3) претварања парцијалних низова у временске серије додатним пермутацијама за постизање комплетне корелационе структуре.

За практичну примену предложене методологије је важно нагласити да је она развијена уз потпуну аутоматизацију поступка генерисања података, што је омогућено применом непараметарских расподела и непараметарских алгоритама за постизање корелационе структуре.

Карактеристике непараметарског модела који је развијен у оквиру ове докторске дисертације огледају се у следећем:

- Генерисање се врши уз претходну логаритамску трансформацију осмотрених података, без било какве потребе за корекцијама осмотрених података, нпр. при појави изузетака.
- Генерисање дугачких серија у делу расподеле вероватноће изван осмотрених података се врши према оригиналном алгоритму базираном на идеји екстраполације непараметарских расподела приказаној у раду (Scholz, 1995) уз додатна прилагођавања.
- Преслагање низова у другом кораку методологије се врши уз коришћење алгоритма Иман-Коновера (Iman & Conover, 1982) јер се показало да, уз предложени алгоритам у радовима Илића, агрегирани годишњи подаци не „прате“ расподелу осмотрених годишњих података. И сам Илић је у раду из 2014.године напустио претходни алгоритам и користио алгоритам Имана и Коновера за преслагање у другом кораку.
- На крају другог корака је уведено додатно минимално преслагање података за обезбеђење екстремних годишњих појава у генерисаним серијама, уз задржавање свих коефицијената корелације добијених у другом кораку.
- На крају трећег корака предложено је додатно минимално преслагање редова матрице генерисаних података за постизање очекиваних карактеристика вишегодишњих варијација у серијама хидролошких величина, а које проистичу из анализе корака (Yevjevich, 1974). Овим се у генерисаним серијама елиминишу појаве вишевековне концентрације података са сушним или водним карактеристикама. Споменуто преслагање је извршено уз потпуно задржавање усаглашених коефицијената корелације и аутокорелације осмотрене и генерисане серије. Међутим, за сада се преслагање врши засебно за сваку станицу због неусаглашености распореда података између станица преслагањем у корацима 2 и 3, што свакако треба даље унапредити.

Предложена методологија је примењена у виду два посебна модела: модела за генерисање протока (модел 1) и модела за генерисање протока и падавина (модел 2).

Резултати примене ових модела на два независна скупа података (из Србије и из Канаде) показују да модели добро репродукују расподеле осматраних серија у генерисаним низовима, што је евидентно на основу одличног слагања прва три момента (средња вредност, стандардна девијација и коефицијент асиметрије) ових расподела. Такво слагање је постигнуто пажљивом применом непараметарских расподела вероватноће формираним на логаритамски трансформисаним осматраним подацима и уз развој алгоритма за екстраполацију непараметарских расподела.

Велика пажња посвећена је оптималном избору ширине језгра код непараметарских функција расподеле, јер од те ширине зависе резултати генерисања. Међу више препоручених израза у литератури, дошло се до закључка да је оптималне резултате у развоју ове методологије показало неписано правило Силвермана (поглавље 3.4.4.1) уз корекцију којом се оптимална ширина језгра за густину расподеле смањује за фактор  $N^{1/5} / N^{1/3}$  где је  $N$  број података у низу, чиме се добија бољи опис функције расподеле. С обзиром да се у овој методологији генерисање случајних података врши из функције расподеле (а не из густине), очигледно је да се оваквим усвојеним обрасцем за ширину језгра дошло до оптималне равнотеже између потребе да се што ближе прати емпиријска расподела с једне стране, и потребе да се изглади густина расподеле са друге стране.

Логаритамском трансформацијом података се постигло ублажавање асиметрије у расподели осматраних података, као и умањење утицаја изузетака на резултат генерисања. Илић је нагласио у свом раду (Ilich, 2009) да неки од постојећих модела за генерисање стохастичких модела имају ограничени успех у примени логаритамске трансформације на средње месечне податке. Међутим, у овом истраживању је показано да се логаритамска трансформација уз примену непараметарске расподеле може успешно користити.

Алгоритам за екстраполацију непараметарске расподеле је развијен тако да се расподела линеарно екстраполује на папиру лог-нормалне вероватноће. Екстраполација се изводи у оквиру интервала поверења 90% опште расподеле екстремних вредности за 1000-годишње квантиле. Овим алгоритмом је омогућено да се, уз коришћење непараметарске расподеле и логаритамске трансформације, подједнако добро генеришу серије протока и падавина у хидролошки хомогеном региону.

Посебна пажња је дата развоју методологије за генерисање прекидних серија падавина, али и „нултих“ протока, засебним моделирањем учесталости појаве падавина и саме висине падавина. Тиме је постигнут постављени циљ - израда модела способног да генерише и прекидне и непрекидне временске серије, чиме је добијен целовит стохастички хидролошки модел.

Истраживање је извршено са хидрометеоролошким временским серијама са различитим корацима временске дискретизације (дневни, недељни, месечни), чиме се дугачке генерисане серије података могу користити као улаз за пројектовање али и оптимално управљање акумулационим језерима. На почетку истраживања је фокус стављен на серије са недељним подацима, али је касније проширен на месечне и дневне податке, уз намеру да се докаже да модел даје подједнако добре резултате без обзира на временску дискретизацију, што је истраживањем и потврђено.

Применом алгорита за постизање циљне корелационе структуре садржане у осмотреним подацима, подешавају се аутокорелације низова за било који помак. Истовремено се подешавају и крос-корелације чиме су потврђене постављене хипотезе да се предложена методологија може несметано применити на више мерних места, и то не само за исте хидролошке величине (протоке), већ и за разнородне величине (протоци и падавине). Ово је потврђено и кроз чињеницу да оба примењена модела (модел 1 са протоцима и модел 2 са протоцима и падавинама) дају скоро исте резултате у погледу корелационе структуре протока.

Као последица добро репродуковане корелационе структуре у генерисаним серијама задате временске дискретизације и задржавања расподела и статистичких особина осмотрених низова, агрегацијом на годишњем нивоу добијају се генерисани годишњи низови који имају добро слагање са осмотреним годишњим низовима. Додатним преслагањем елемената на крају другог корака, које је уведено у овој дисертацији, обезбеђује се да распон годишњих генерисаних низова увек буде већи од осмотреног.

Иако је стационарност процеса једна од основних претпоставки на којој се заснива предложена методологија, не може се занемарити чињеница да хидрометеоролошке серије исказују и сложено вишегодишње (циклично) понашање које се огледа у сменама водних и сушних периода. У оквиру дисертације у предложену методологију је укључен и модул развијен за подешавање вишегодишњих особина серија, које су исказане кроз годишње распоне серија, вишкове, дефиците, пресецања и њихово трајање током година. Резултати су показали да се споменуте вишегодишње карактеристике временских серија

усклађују са осмотреним уз минимално додатно преслагање вишегодишњих сегмената, не нарушавајући значајно претходно подешене параметре.

Поредећи приказани непараметарски модел са моделима временских серија према приступу Бокса и Џенкинса, може се рећи да развијени непараметарски модел има предност што у њему нема потребе за проценом великог броја параметара и за избором типа расподеле, потпуно је аутоматизован па не зависи од умешности аналитичара, као и да репродукује краткорочне и дугорочне карактеристике осмотрених временских серија. Поред споменутог, приказани модел одлично репродукује велики број карактеристика осмотрених временских серија: расподелу серија за одабрану временску дискретизацију и њихове моменте, корелациону структуру серија на једном и више мерних места, за једну или више хидролошких величина, коефицијенте корелације на прелазу из једне у другу годину, расподелу серије агрегиране на годишњем нивоу, њену аутокорелацију и крос-корелацију са другим станицама.

Ранији стохастички модели за генерисање хидролошких временских серија могу да дају добре резултате или са краткорочним или са дугорочним карактеристикама (тј. моделирају или кратку или дугу меморију процеса). Предложени модел превазилази споменуто ограничење, јер се њим репродукују све особине временских серија.

За разлику од хибридног бустрап модела са покретним блоковима (Srinivas & Srinivasan, 2005), развијени непараметарски модел може да репродукује аутокорелацију и крос-корелацију било ког реда, аутокорелацију на нивоу агрегираних годишњих података и дугу меморију процеса уз задовољење корака сушних и водних периода на нивоу године. Оба модела показују добре резултате у раду са више станица истовремено, односно спадају у моделе за више мерних места (тј. *multi-site* модели). Такође, предложени модел показује подједнако добре резултате при измени временског корака, односно има особине мулти-темпоралног модела. И на крају, за разлику од хибридног бутстрап модела који је примењен са једном хидролошком величином – протоцима, модел развијен у овој дисертацији показује довољно добре резултате у раду са различитим хидролошким величинама, односно показује особине мулти-варијантног модела.

Оригинални модел који је развио Илић знатно брже долази до коначних резултата, што је последица другачијих софтверских решења у алгоритму приликом генерисања података и оптимизационог поступка у трећем кораку (Илић, 2013, лична комуникација). Време потребно за прорачун Илићевог модела мери се минутима, а модела развијеног у овој дисертацији мери се сатима. Са друге стране, развијеним моделом се добијају бољи

резултати по неким параметрима од резултата које је Илић добио (Илић, 2014, лична комуникација).

Резултати добијени овим истраживањем у потпуности су потврдили методологију коју је предложио Илић, као и почетна очекивања у погледу ефикасности логаритамске трансформације при генерисању података. Простор за даље истраживање је пре свега у побољшању алгоритма у смислу скраћења времена до његовог завршетка, што се код постојећег алгоритма за велики број станица и одабраном малом временском дискретизацијом (нпр. дневном) манифестује и вишедневним радом рачунара. Такође, и даље су могућа побољшања при екстраполацији непараметарских расподела, избору ефикасније методе оптимизације коефицијената у трећем кораку као и резултата додатног подешавања параметара анализе хидролошких величина методом корака. На крају, даље унапређење модела је потребно и са циљем дугорочног преслагања података, што је овде постигнуто кораком 3б, док би ефектнији начин био да се ове карактеристике узму у обзир приликом преслагања података у корацима 2 и 3.

На крају, може се закључити да је развијени модел способан да изврши генерисање на више мерних места, користи више променљивих величина, ради са више временских корака (multi-site, multi-variate, multi-temporal methodology), подешава параметре карактеристичне за дугорочне особине временских серија као што је аутокорељациона функција и параметре у вези са анализом хидролошких временских серија помоћу корака, и има генеричке особине тј. да се може применити на било ком сливу. Такође, модел се може сврстати у групу модела за генерисање серија уз репродукцију њихових и краткорочних и дугорочних особина. Све ове карактеристике чине да развијени модел има висок потенцијал за примену у различитим врстама хидротехничких и водопривредних анализа у којима је потребно анализирати понашање сложених система као што су вишенаменски системи са великим бројем акумулација који, у условима повећавања вредности воде као ресурса, захтевају пажљиво временски и економски оптимизовану испоруку воде корисницима.

## 7 ЛИТЕРАТУРА

- Adamowski, K., 1981. Plotting formula for flood frequency. *Journal of the American Water Resources Association - JAWRA*, 17(2), p. 197–202.
- Adamowski, K., 1985. Nonparametric Kernel Estimation of Flood Frequencies. *Water Resources Research*, 21(11), pp. 1585-1590.
- Adamowski, K., 1987. Nonparametric techniques for analysis of hydrological events. *Water for the Future: Hydrology in Perspective (Proceedings of the Rome Symposium)*, pp. 67-76.
- Adamowski, K., 1989. A Monte Carlo Comparison of Parametric and Nonparametric Estimation of Flood Frequencies. *Journal of Hydrology*, Volume 108, pp. 295-308.
- Adamowski, K., 1996. Nonparametric Estimation of Low-Flow Frequencies. *Journal of Hydraulic Engineering*, 122(1), pp. 46-49.
- Aksoy, H., 2001. Storage Capacity for River Reservoir by Wavelet-Based Generation of Sequential-Peak Algorithm. *Water Resources Management*, 15(6), p. 423–437.
- Alley, W. & Burns, A., 1983. Mixed-Station Extension of Monthly Streamflow Records. *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(10), pp. 1272-1284.
- Barnes, F. B., 1954. Storage required for a city water supply. *J. Inst. Eng. Australia*, 26(9), pp. 198-203.
- Bayazit, M. & Aksoy, H., 2001. Using wavelets for data generation. *Journal of Applied Statistics*, 28(2), pp. 157-166.
- Boes, D. & Salas, J., 1978. Nonstationarity of the mean and the hurst Phenomenon. *Water Resources Research*, 14(1), pp. 135-143.
- Bojilova, Elena, 2004, Dissaggregation modelling of spring discharges. *International Journal of Speleology*, 33 (1/4), pp. 65-72.
- Box, G. & Jenkins, G., 1976. In: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Oakland, California: Holden-Day, Inc..
- Bras, R. & Rodriguez-Iturbe, I., 1985. *Random Functions and Hydrology*. Reading: Addison-Wesley.
- Cario, M. & Nelson, B., 1996. Autoregressive to anything: Time-series input processes for simulation. *Operations Research Letters*, Volume 19, pp. 51-58.
- Carlson, R., MacCormick, A. & Watts, D., 1970. Application of Linear Random Models to Four Annual Streamflow Series. *Water Resources Research*, 6(4), p. 1070–1078.
- Cunnane, C., 1978. Unbiased plotting positions — A review. *Journal of Hydrology*, 37(3-4), p. 205–222.
- Dooge, J., 1986. Looking for Hydrologic Laws. *Water Resources Research*, 22(9), pp. 46S-58S.
- Faucher, D., Rasmussen, P.F., Bobee, B., 2001. A distribution function based bandwidth selection method for kernel quantile estimation. *Journal of Hydrology*, Volume 250, pp. 1-11.

- Gabriel, K. & Neumann, J., 1962. A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel Aviv. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 88(375), p. 90–95.
- Gringorten, I., 1963. A plotting rule for extreme probability paper. *Journal of Geophysical Research*, 68(3), p. 813–814.
- Hameed, T., Mariño, M., DeVries, J. & Tracy, J., 1997. Method for Trend Detection in Climatological Variables. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2(4), p. 154–160.
- Hardle, W. & Linton, O., 1994. *Applied Nonparametric Methods*. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University.
- Harrold, T., Sharma, A. & Sheather, S., 2003a. A nonparametric model for stochastic generation of daily rainfall amounts. *Water Resources Research*, 39(12), p. 1343.
- Harrold, T., Sharma, A. & Sheather, S., 2003b. A nonparametric model for stochastic generation of daily rainfall occurrence. *Water Resources Research*, 39(10), p. 1300.
- Hazen, A., 1914. Storage to be provided in impounding reservoirs for municipal. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, Volume 77, pp. 1539–1640.
- Helsel, D. & Hirsch, R., 2002. *Statistical Methods in Water Resources*. In: Book 4, *Hydrologic Analysis and Interpretation, Techniques of Water-Resources Investigations of the United States Geological Survey*. Reston: United States Geological Survey (SGS).
- Hipel, K. & McLeod, A., 1978. Preservation of the rescaled adjusted range: 2. Simulation studies using Box-Jenkins Models. *Water Resources Research*, 14(3), p. 509–516.
- Hipel, K. & McLeod, A., 1978. Preservation of the rescaled adjusted range: 3. Fractional Gaussian noise algorithms. *Water Resources Research*, 14(3), p. 517–518.
- Hipel, K. & McLeod, A., 1978. Simulation Procedures for Box-Jenkins Models. *Water Resources Research*, 14(5), p. 969–975.
- Hipel, K. & McLeod, A., 1994. *Time Series Modelling of Water Resources and Environmental Systems*. Amsterdam: Elsevier.
- Hipel, K., McLeod, A. & Lennox, W., 1977. Advanced in Box-Jenkins Modeling 1. Model Construction. *Water Resources Research*, 13(3), p. 567–575.
- Hirsch, R., 1982. A Comparison of Four Record Extension Techniques. *Water Resources Research*, 18(4), pp. 1081–1088.
- Hosking, J., 1990. L-Moments: Analysis and Estimation of Distributions using Linear Combinations of Order Statistics. *Journal of Royal Statistical Society B*, Tom 52, pp. 105–124.
- Hui, D. et al., 2004. Gap-filling missing data in eddy covariance measurements using multiple imputation (MI) for annual estimations. *Agricultural and Forest Meteorology*, Volume 121, pp. 93–111.
- Ilich, N., 2009. A matching algorithm for generation of statistically dependent random variables with arbitrary marginals. *European Journal of Operational Research*, Volume 192, pp. 468–478.
- Ilich, N., 2012. A New Natural Flow Calculation Program. Donji Milanovac, 16. savetovanje SDHA i SDH.
- Ilich, N., 2014. An Effective Three-Step Algorithm for Multi-Site Generation of Stochastic Weekly Hydrologic Time Series. *Hydrological Sciences Journal*, 59(1), pp. 85–98.



- Ilich, N. & Despotovic, J., 2008. A simple method for effective multi-site generation of stochastic hydrologic time series. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 22(2), pp. 265-279.
- Iman, R. & Conover, W., 1982. A Distribution-free Approach to Inducing Rank Correlation Among Input Variables. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 11(3), pp. 311-334.
- Jackson, B., 1975. Markov mixture models for drought lengths. *Water Resources Research*, 11(1), p. 64-74.
- Jevđević, V., 1974. Stohastički procesi u hidrologiji, prevod Stochastic Processes in Hydrology. Sarajevo: Zavod za hidrotehniku građevinskog fakulteta .
- Kelman, J., 1977. Stochastic Modeling of Hydrologic, Intermittent Daily Processes. *Hydrology Papers* yp. Fort Collins, Colorado: Colorado State University.
- Kim, K.-D. & Heo, J.-H., 2002. Comparative study of flood quantiles estimation by nonparametric models. *Journal of Hydrology*, Volume 260, pp. 176-193.
- Kim, T.-W. & Valdes, J. B., 2005. Synthetic Generation of Hydrologic Time Series Based on Nonparametric Random Generation. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(5), pp. 395-404.
- Koutroumanidis, T., Sylaios, G., Zafeirou, E. & Tsihrintzis, V., 2009. Genetic modeling for the optimal forecasting of hydrologic time-series: Application in Nestos River. *Journal of Hydrology*, Volume 368, pp. 156-164.
- Kreiss, J.-P. & Lahiri, S., 2012. Bootstrap Methods for Time Series. Y: C. Rao, yp. Time Series Analysis: Methods and Applications. *Handbook of Statistics*, Vol.30 yp. Amsterdam: Elsevier, pp. 3-26.
- Kumar, N., Lall, U. & Petersen, M., 2000. Multisite disaggregation of monthly to daily streamflow. *Water Resources Research*, 36(7), p. 1823-1833.
- Kwon, H.-H., Lall, U. & Khalil, A., 2007. Stochastic simulation model for nonstationary time series using an autoregressive wavelet decomposition: Applications to rainfall and temperature. *Water Resources Research*, 43(5), p. W05407.
- Labatiuk, C. & Adamowski, K., 1987. Application of Nonparametric Density Estimation to Computation of Flood Magnitude/Frequency. *Stochastic Hydrology*, pp. 161-180.
- Lall, U., Moon, Y.-I. & Bosworth, K., 1993. Kernel Flood Frequency Estimators: Bandwidth Selection and Kernel Choice. *Water Resources Research*, 29(4), pp. 1003-1015.
- Lall, U. & Sharma, A., 1996. A nearest neighbour bootstrap for resampling hydrologic time series. *Water Resources Research*, 32(3), p. 679-693.
- Lawrance, A. & Kottegoda, N., 1977. Stochastic Modelling of Riverflow Time Series. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A: Statistics in Society*, 140(1), pp. 1-47.
- Lettenmaier, D. & Burges, S., 1977. Operational assessment of hydrologic models of long-term persistence. *Water Resources Research*, 13(1), p. 113-124.
- Machiwal, D. & Jha, M., 2012. *Hydrologic Time Series Analysis: Theory and Practice*. Dordrecht: Springer.
- Mandelbrot, B. & Wallis, J., 1968. Noah, Joseph and Operational Hydrology. *Water Resources Research*, 4(5), pp. 909-918.

- Marković, Đ., Plavšić, J., Ilich, N. & Ilić, S., 2015. Non-parametric Stochastic Generation of Streamflow Series at Multiple Locations. *Water Resources Management*, 29(13), pp. 4787-4801.
- Marković, Đ., Plavšić, J., Stanić, M. & Sekulić, G., 2011. Neparametarske funkcije raspodele u hidrologiji. *Vodoprivreda*, Volume 43, pp. 249-259.
- Marković, Đ., Stanić, M., Plavšić, J. & Sekulić, G., 2008. Efekti primene upravljanja pri raspodeli vode iz višenamenske akumulacije. *Vodoprivreda*, 40(234-236), pp. 201-213.
- Matalas, N., 1967. Mathematical assessment of synthetic hydrology. *Water Resources*, 3(4), pp. 937-945.
- Matalas, N. & Wallis, J., 1971. Statistical Properties of Multivariate Fractional Noise Processes. *Water Resources Research*, 7(6), p. 1460–1468.
- McLeod, A. & Hipel, K., 1978. Preservation of the rescaled adjusted range: 1. A reassessment of the Hurst Phenomenon. *Water Resources Research*, 14(3), p. 491–508.
- McLeod, A., Hipel, K. & Lennox, W., 1977. Advances in Box-Jenkins modeling: 2. Applications. *Water Resources Research*, 13(3), p. 577–586.
- Meija, J., Dawdy, D. & Nordin, C., 1974. Streamflow simulation: 3. The broken line process and operational hydrology. *Water Resources Research*, 10(2), p. 242–245.
- Meija, J., Rodriguez-Iturbe, I. & Dawdy, D., 1972. Streamflow simulation: 2. The broken line process as a potential model for hydrologic simulation. *Water Resources Research*, 8(4), p. 931–941.
- Meija, J. & Rousselle, J., 1976. Disaggregation models in hydrology revisited. *Water Resources Research*, 12(2), p. 185–186.
- Moon, Y. I., Lall, U. & Bosworth, K., 1993. A comparison of tail probability estimators for flood frequency analysis. *Journal of Hydrology*, Volume 151, pp. 343-363.
- Nowak, K., Prairie, J., Rajagopalan, B. & Lall, U., 2010. A Non-parametric Stochastic Approach for Multisite Disaggregation of Annual to Daily Streamflow. *Water Resources Research*, 46(8).
- Nowak, K., Rajagopalan, B. & Zagana, E., 2011. Wavelet Auto-Regressive Method (WARM) for multi-site streamflow simulation of data with non-stationary spectra. *Journal of Hydrology*, 410(1-2), pp. 1-12.
- Obeysekera, J. & Salas, J., 1986. Modeling of Aggregated Hydrologic Time Series. *Journal of Hydrology*, 86(3-4), pp. 197-219.
- O'Connell, P., 1974. A simple stochastic modelling of Hurst's law. *Mathematical models in hydrology*, Том 1, pp. 169-187.
- Ofungwu, J., 2014. *Statistical Applications for Environmental Analysis and Risk Assessment. Statistics in Practice* yp. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc..
- Pegram, G. & James, W., 1972. Multilag multivariate autoregressive model for the generation of operational hydrology. *Water Resources Research*, 8(4), p. 1074–1076.
- Petrović, J., 2001. Uvod u hidrologiju. Skripta. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu: s.n.
- Phatarfod, R., 1989. Riverflow and reservoir storage models. *Mathematical and Computer Modelling*, 12(9), pp. 1057-1077.

- Plavšić, J., 2012. Stohastička hidrologija, Materijal za praćenje predmeta na master studijama. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu: s.n.
- Prairie, J., Rajagopalan, B., Fulp, T. & Zagona, E., 2006. Modified K-NN Model for Stochastic Streamflow Simulation. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(4), p. 371–378.
- Rajagopalan, B. & Lall, U., 1999. A k-nearest-neighbour simulator for daily precipitation and other weather variables. *Water Resources Research*, 35(10), p. 3089–3101.
- Rao, R. & Hamed, K., 2000. *Flood Frequency Analysis*. Boca Raton: CRC Press.
- Rao, R., Hamed, K. & Chen, H.-L., 2003. *Nonstationarities in Hydrologic and Environmental Time Series*. Water Science and Technology Library ed. Dordrecht: Springer Science+Business Media .
- Rao, R., Kashyap, R. & Mao, L., 1982. Optimal choice of type and order of river flow time series models. *Water Resources Research*, 18(4), p. 1097–1109.
- Roshan, S. & Simonovic, S., 2014. Multi-site, multivariate weather generator using maximum entropy bootstrap. *Climate Dynamics*, Том DOI: 10.1007/s00382-014-2157-x, pp. 1-18.
- Salas, J., 1993. (Maidment) *Handbook of Hydrology*, Chapter 19 - Analysis and Modeling of Hydrologic Time Series. New York: McGraw - Hill, Inc..
- Salas, J., Obeysekera, J. & Smith, R., 1981. Identification of Streamflow Stochastic Models. *Journal of the Hydraulics Division*, 107(HY7), pp. 853-866.
- Salas, J. & Pielke, R., 2003. Chapter 32: Stochastic simulation of precipitation and streamflow processes. У: T. Potter & C. Bradley, уредници *Handbook of Weather, Climate, and Water: Atmospheric Chemistry, Hydrology, and Societal Impacts*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., pp. 607-640.
- Salas, J., Tabios, G. & Bartolini, P., 1985. Approaches to Multivariate Modeling of Water Time Series. *Water Resources Bulletin*, 21(4), pp. 683-708.
- Salas, J., Delleur, J., Yevjevich, V. & Lane, W., 1980. *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*. Littleton, Colorado: Water Resources Publications.
- Schneider, T., 2001. Analysis of Incomplete Climate Data: Estimation of Mean Values and Covariance Matrices and Imputation of Missing Values. *American Meteorological Society*, pp. 853-871.
- Scholz, F., 1995. *Nonparametric Tail Extrapolation*, s.l.: Boeing Information & Support Services.
- Schuster, E. & Yakowitz, S., 1985. Parametric/nonparametric mixture density estimation with application to flood-frequency analysis. *Water Resources Bulletin*, Volume 21, pp. 797-804.
- Shao, Q., Wong, H., Li, M. & Ip, W.-C., 2009. Streamflow forecasting using functional-coefficient time series model with periodic variation. *Journal of Hydrology*, Volume 368, pp. 88-95.
- Sharif, M. & Burn, D. H., 2006. Simulating climate change scenarios using an improved K-nearest neighbour model. *Journal of Hydrology*, Volume 325, pp. 179-196.
- Sharif, M. & Burn, D. H., 2007. Improved K-Nearest Neighbour Weather Generating Model. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(1), pp. 42-51.

- Sharif, M., Burn, D. & Hofbauer, K., 2013. Generation of Daily and Hourly Weather Variables for use in Climate Change Vulnerability Assessment. *Water Resources Management*, 27(5), pp. 1533-1550.
- Sharma, A., 2000. Seasonal to interannual rainfall probabilistic forecast for improved water supply management: Part 3 – A nonparametric probabilistic forecast model. *Journal of Hydrology*, Volume 239, pp. 249-258.
- Sharma, A. & Lall, U., 1999. A nonparametric approach for daily rainfall simulation. *Mathematics and Computers in Simulation*, Volume 48, pp. 361-371.
- Sharma, A., Lall, U. & Tarboton, D., 1998. Kernel bandwidth selection for a first order non-parametric streamflow simulation model. *Statistic Hydrology and Hydraulics*, Volume 12, pp. 33-52.
- Sharma, A., Tarboton, D. & Lall, U., 1997. Streamflow simulation: A nonparametric approach. *Water Resources Research*, 33(2), pp. 291-308.
- Silverman, B. W., 1986. *Density Estimator for Statistics and Data Analysis*. Statistics and Applied Probability.
- Silverman, B. W. & Jones, M. C., 1989. E.Fix and J.L.Hodges (1951): An Important Contribution to Nonparametric Discriminant Analysis and Density Estimation. Volume 3, pp. 233-247.
- Singh, V. P., 1988. *Hydrologic Systems*. Volume 1: Rainfall-runoff modelling. New Jersey: Prentice Hall.
- Sivakumar, B. & Berndtsson, R., 2010. *Advances in Data-Based approaches for Hydrologic Modeling and Forecasting*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd..
- Smakhtin, V., 2001. Low flow hydrology: a review. *Journal of Hydrology*, Volume 240, pp. 147-186.
- Srikanthan, R. & McMahon, T., 2001. Stochastic generation of annual, monthly and daily climate data: A review. *Hydrology and Earth System Sciences*, Том 5, pp. 653-670.
- Srinivas, V. & Srinivasan, K., 2005. Hybrid moving block bootstrap for stochastic simulation of multi-site multi-season streamflows. *Journal of Hydrology*, Volume 302, pp. 307-330.
- Srivastav, R. & Simonovic, S., 2014. An analytical procedure for multi-site, multi-season streamflow generation using maximum entropy bootstrapping. *Environmental Modelling & Software*, Том 59, p. 59–75.
- Sudler, C., 1927. Storage Required for the Regulation of Stream Flow. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 91(2), pp. 622-660.
- Thomas, H. J. & Fiering, M., 1962. Mathematical synthesis of streamflow sequences for analyses of river basins by simulation. In: A. Maass, ed. *Design of Water Resource Systems*. s.l.:Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, pp. 459-493.
- Turlach, B. A., 1993. Bandwidth Selection in Kernel Density Estimation: A Review.
- Ünal, N., Aksoy, H. & Akar, T., 2004. Annual and monthly rainfall data generation schemes. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 18(4), pp. 245-257.
- Valencia, D. & Schaake, J., 1973. Disaggregation processes in stochastic hydrology. *Water Resources Research*, 9(3), p. 580–585.

- Wang, Q. & Nathan, R., 2007. A method for coupling daily and monthly time scales in stochastic generation of rainfall series. *Journal of Hydrology*, Volume 346, pp. 122-130.
- Wang, W., Hu, S. & Li, Y., 2011. Wavelet Transform Method for Synthetic Generation of Daily Streamflow. *Water Resources Management*, 25(1), pp. 41-57.
- Wasserman, L., 2006. *All of Nonparametric Statistics*. New York: Springer Science and Business Media, Inc..
- Wilks, D. & Wilby, R., 1999. The weather generation game a review of stochastic weather models. *Progress in Physical Geography*, 23(3), pp. 329-357.
- Xu, C.-y., 2002. *Hydrologic Models*. Uppsala: Department of Earth Sciences, Air and Water Science, Uppsala University.
- Yakowitz, S., 1973. A stochastic model for daily river flows in an arid region. *Water Resources Research*, 9(5), p. 1271–1285.
- Yevjevich, V., 1963. *Fluctuation of wet and dry years, Research data assembly and mathematical models*. Hydrology Papers yp. Fort Collins, Colorado: Colorado State University.
- Yevjevich, V., 1972. *Stochastic Processes in Hydrology*. Fort Collins, Colorado: Water Resources Publications.
- Yue, S., Pilon, P. & Phinney, B., 2003. Canadian streamflow trend detection: impacts of serial and cross-correlation. *Hydrological Sciences Journal* , 48(1), pp. 51-63.



## 8 ПРИЛОГ 1 - РЕЗУЛТАТИ ГЕНЕРИСАЊА СЛУЧАЈНИХ ПАРЦИЈАЛНИХ НИЗОВА

Резултати генерисања случајних парцијалних низова су систематизовани на следећи начин:

### **Прилог 1.1: Модел 1 – Модел за генерисање протока**

- 1.1.1 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Девићи на Студеници
- 1.1.2 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Мланча на Студеници
- 1.1.3 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Ушће на Студеници
- 1.1.4 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици Девићи на Студеници
- 1.1.5 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици Мланча на Студеници
- 1.1.6 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици Ушће на Студеници
- 1.1.7 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици СА1 на реци Олдман
- 1.1.8 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици СА2 на реци Олдман
- 1.1.9 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици СА3 на реци Олдман
- 1.1.10 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици СА4 на реци Олдман
- 1.1.11 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици СА5 на реци Олдман
- 1.1.12 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици СА6 на реци Олдман

- 1.1.13 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици СА7 на реци Олдман
- 1.1.14 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Девићи на Студеници
- 1.1.15 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Мланча на Студеници
- 1.1.16 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Ушће на Студеници
- 1.1.17 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА1 на реци Олдман
- 1.1.18 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА2 на реци Олдман
- 1.1.19 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА3 на реци Олдман
- 1.1.20 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА4 на реци Олдман
- 1.1.21 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА5 на реци Олдман
- 1.1.22 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА6 на реци Олдман
- 1.1.23 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА7 на реци Олдман
- 1.2.1 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Девићи на Студеници

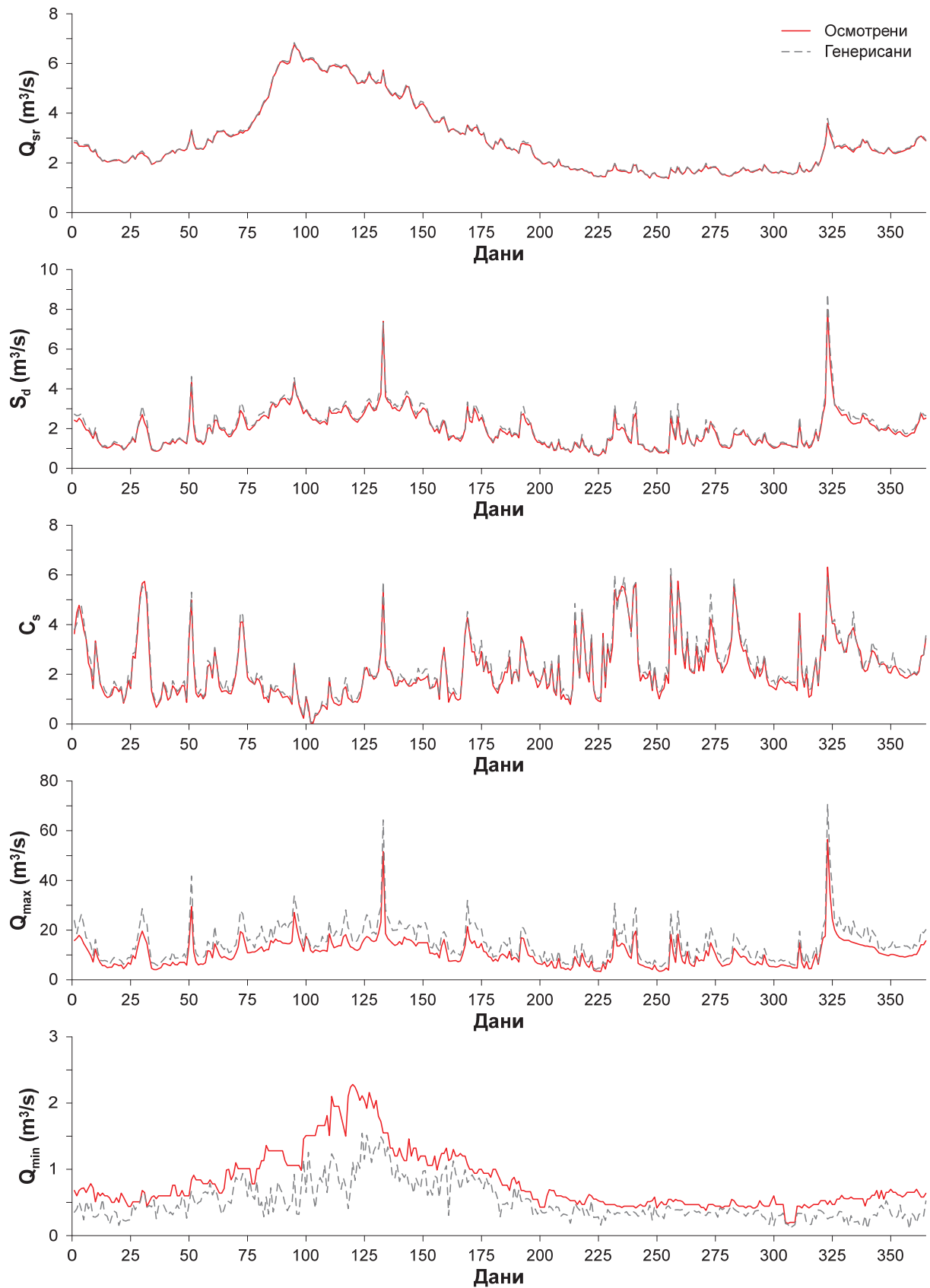
### **Прилог 1.2: Модел 2 – Модел за генерисање протока и падавина**

- 1.2.2 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Мланча на Студеници
- 1.2.3 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Ушће на Студеници

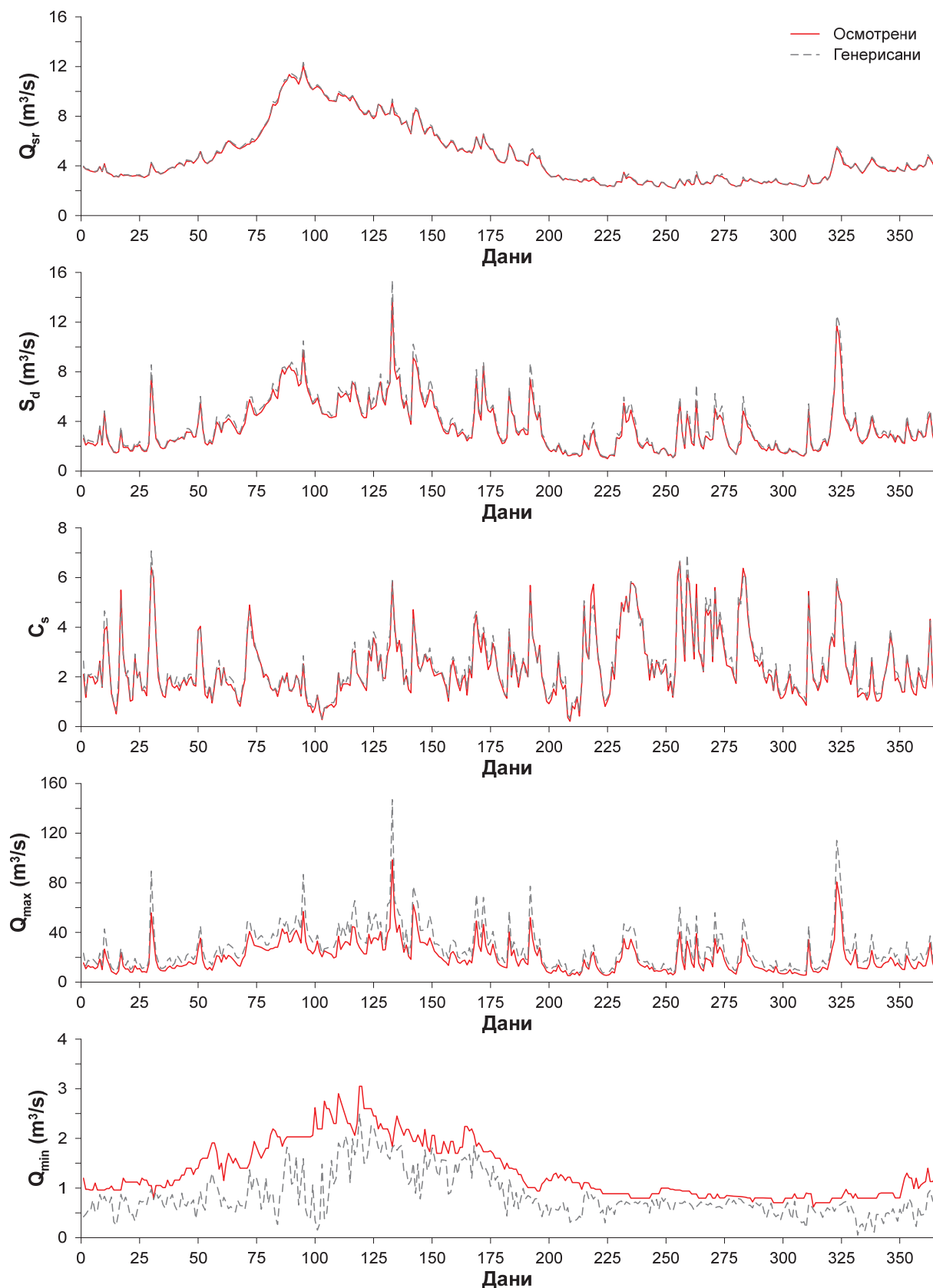




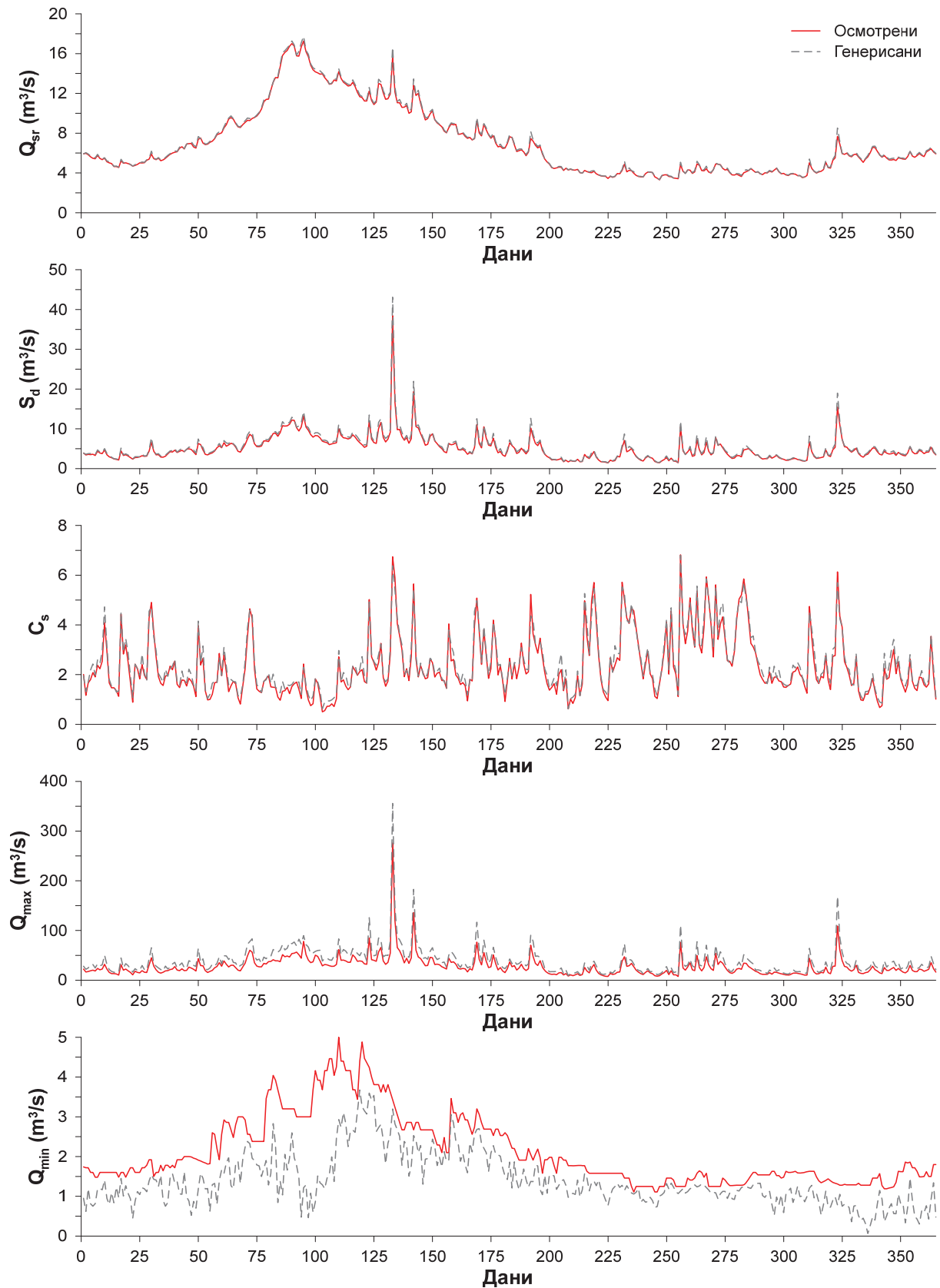
- 1.2.22 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Ушће на Студеници
- 1.2.23 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Краљево
- 1.2.24 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА1 на реци Олдман
- 1.2.25 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА2 на реци Олдман
- 1.2.26 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА3 на реци Олдман
- 1.2.27 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА4 на реци Олдман
- 1.2.28 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА5 на реци Олдман
- 1.2.29 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА6 на реци Олдман
- 1.2.30 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА7 на реци Олдман
- 1.2.31 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА8
- 1.2.32 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА9
- 1.2.33 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА10
- 1.2.34 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА11



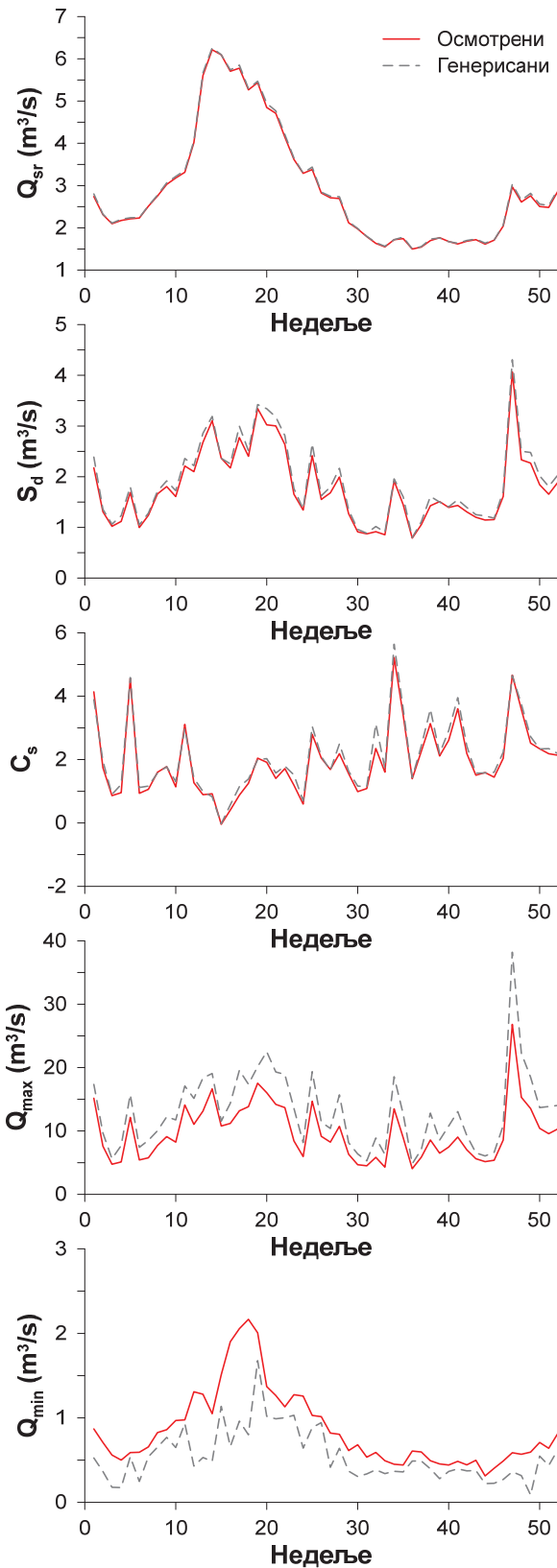
1.1.1 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних дневних низова на станици Девићи на Студеници



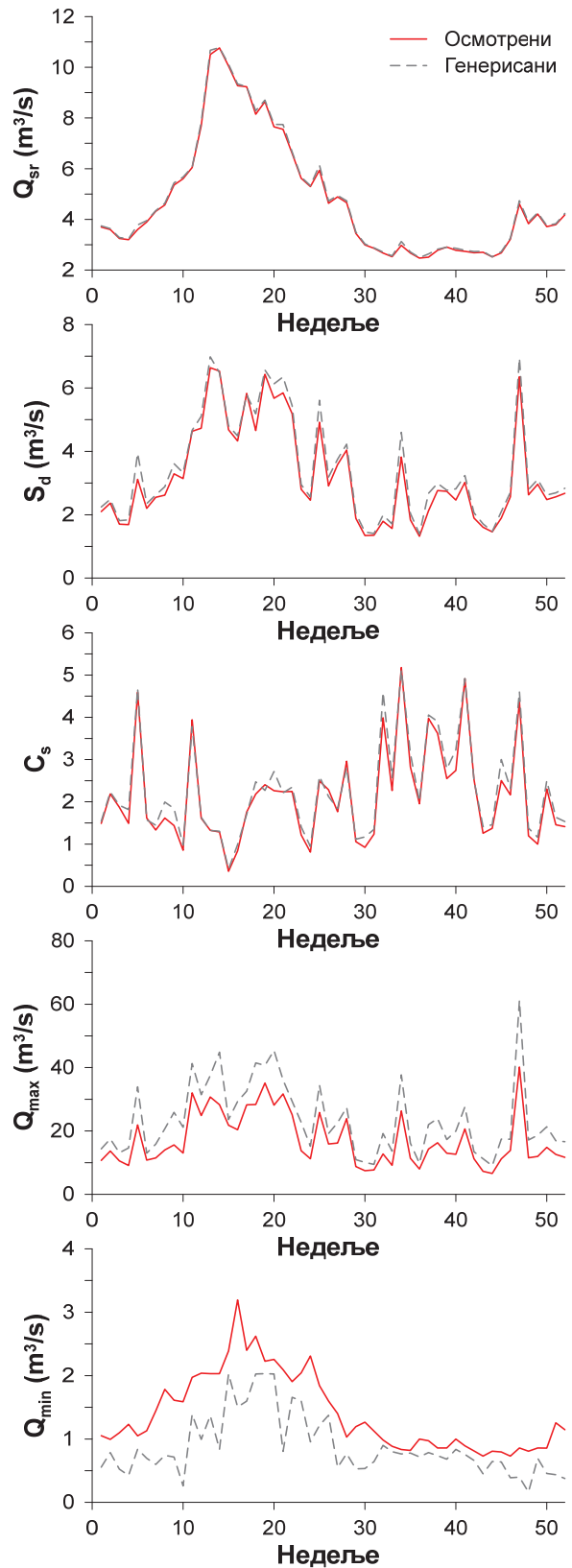
1.1.2 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматраних и генерисаних дневних низова на станици Мланча на Студеници



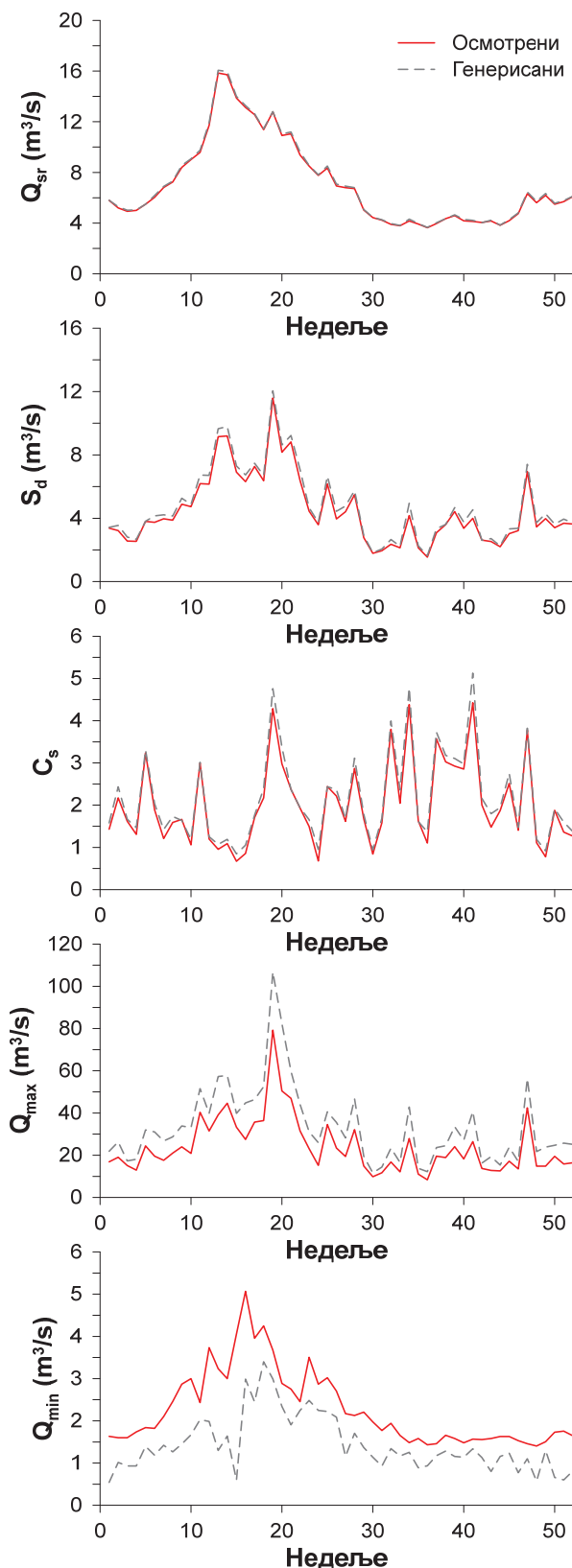
1.1.3 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних дневних низова на станици Ушће на Студеници



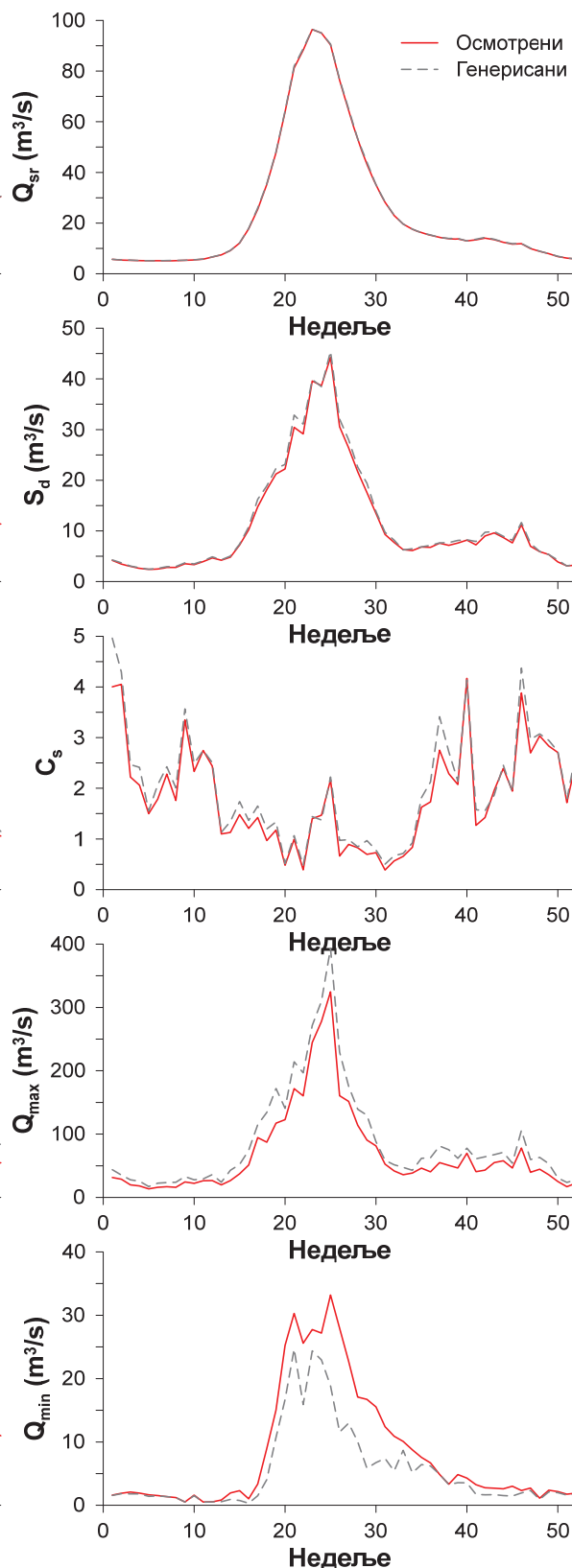
1.1.4 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици Девišћи на Студеници



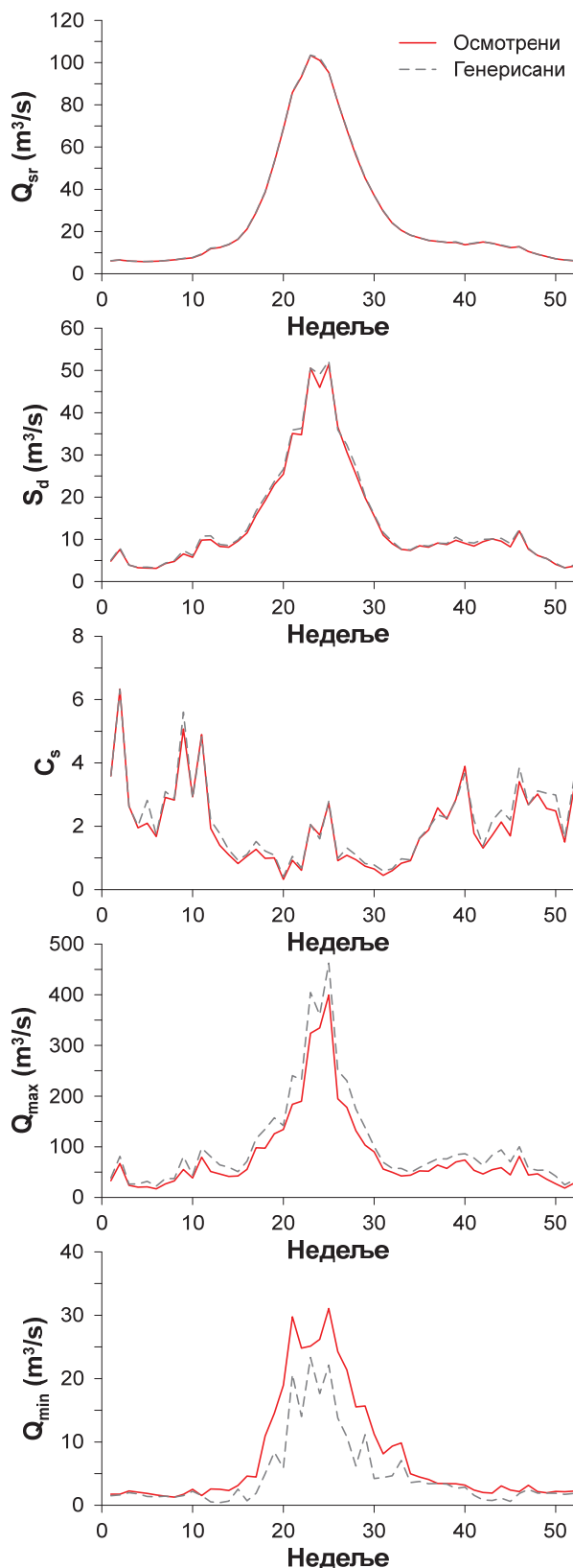
1.1.5 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици Мланча на Студеници



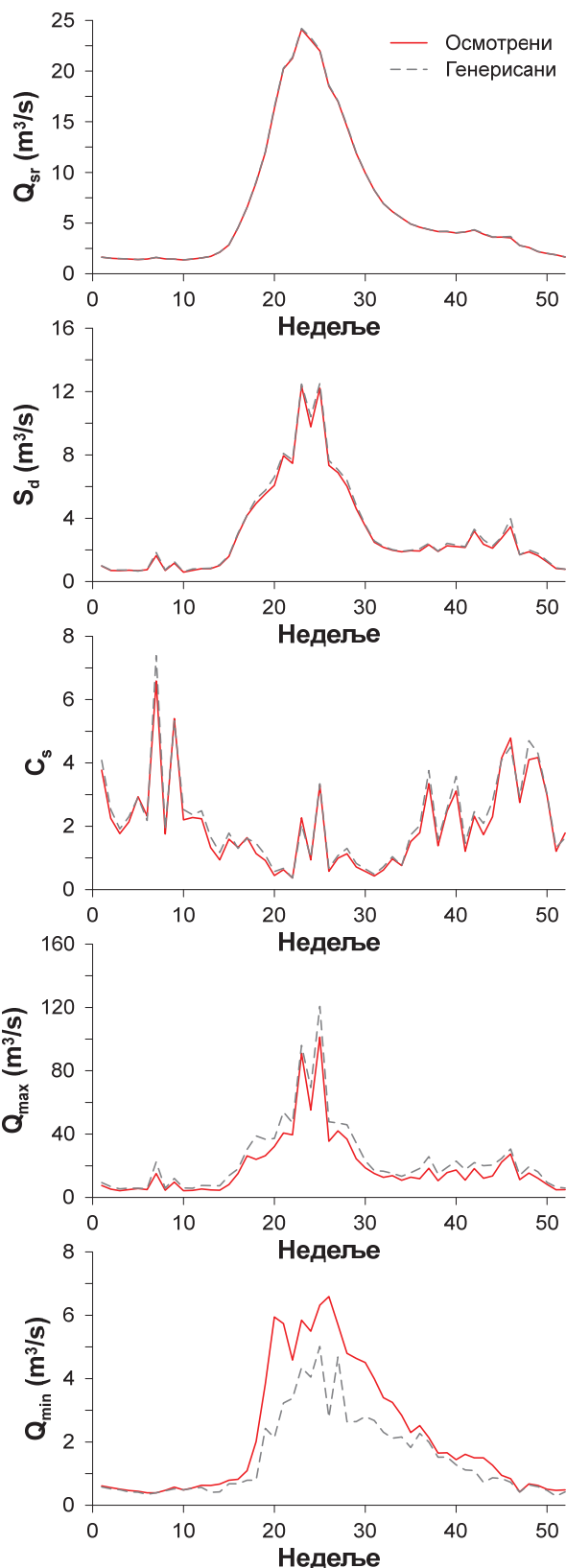
1.1.6 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици Ушће на Студеници



1.1.7 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици SA1 на реци Олдман

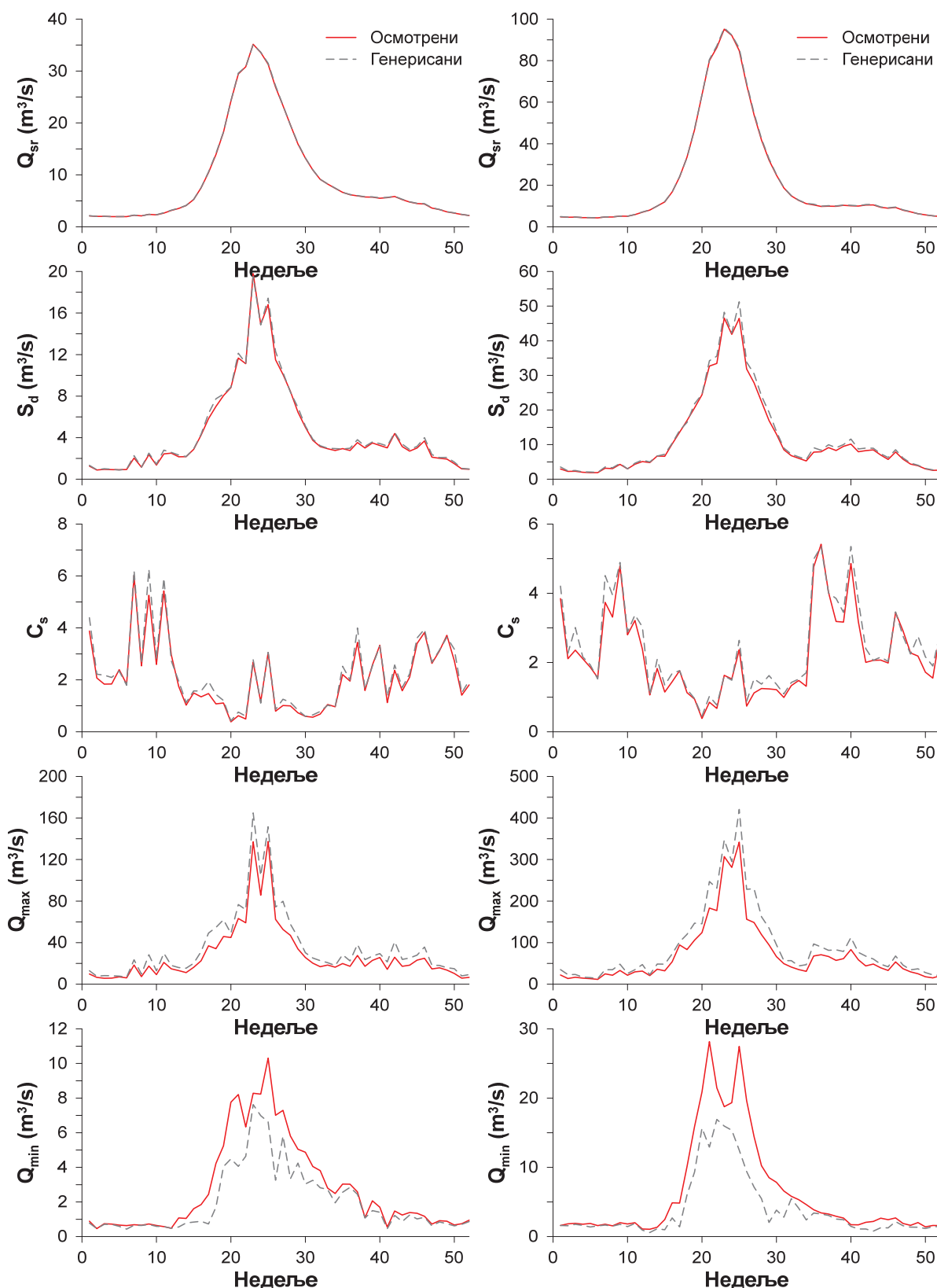


1.1.8 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА2 на реци Олдман



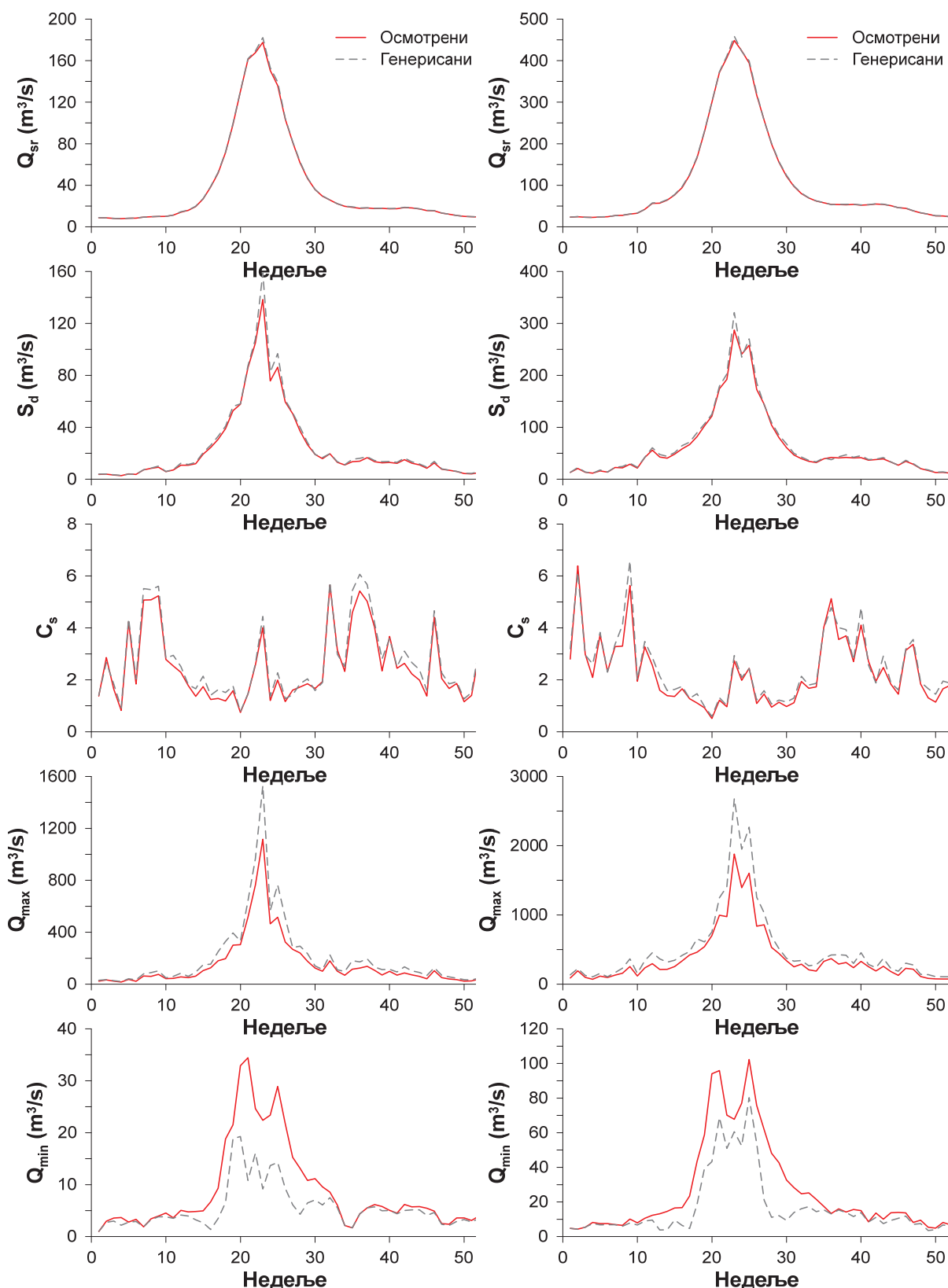
1.1.9 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА3 на реци Олдман





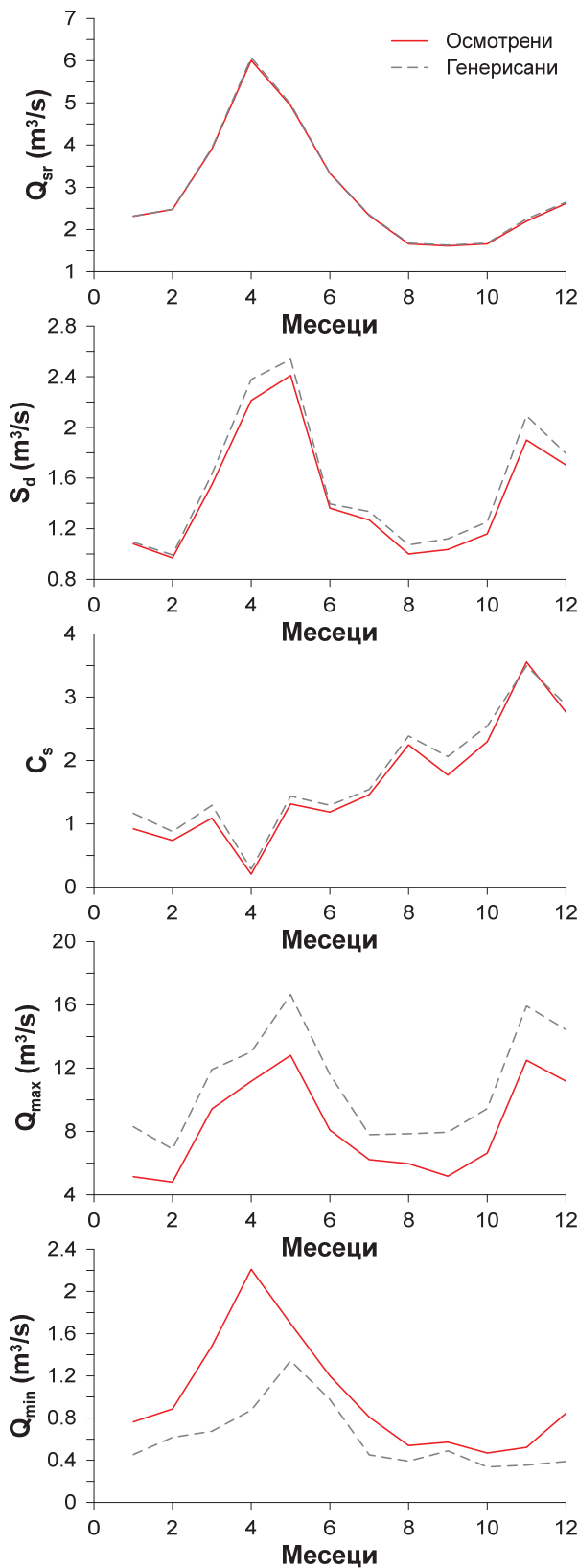
1.1.10 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА4 на реци Олдман

1.1.11 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА5 на реци Олдман

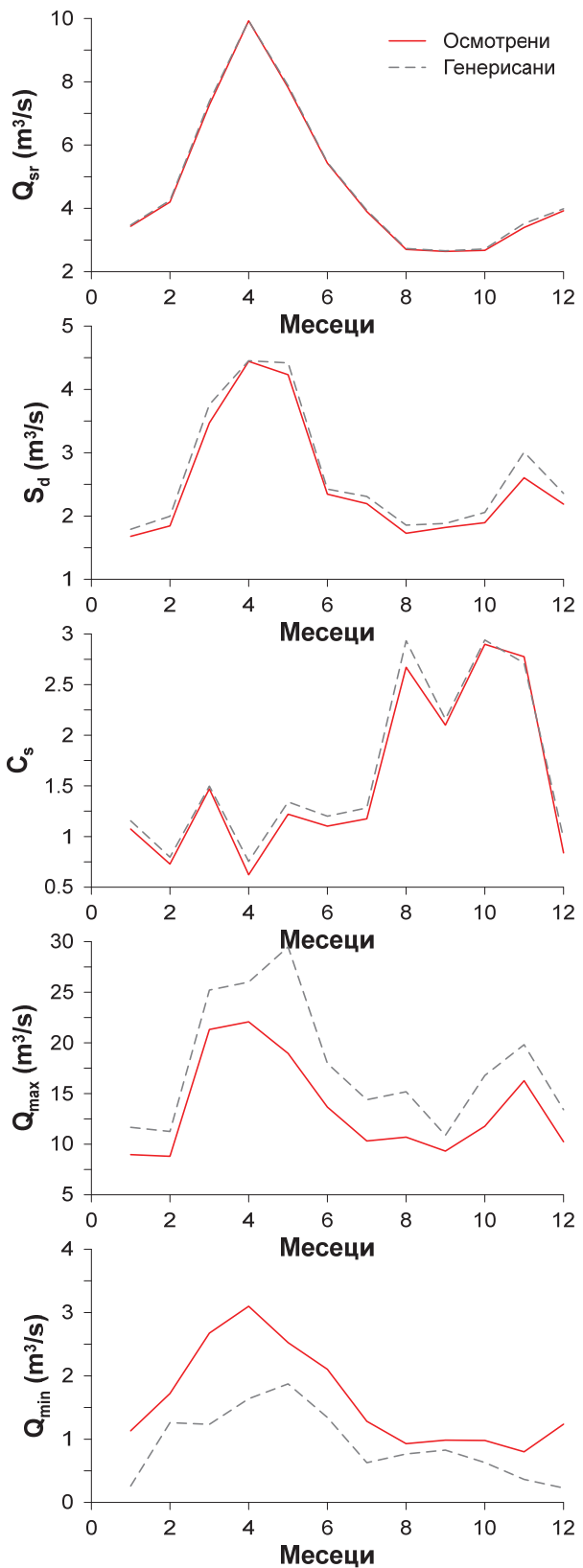


1.1.12 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА6 на реци Олдман

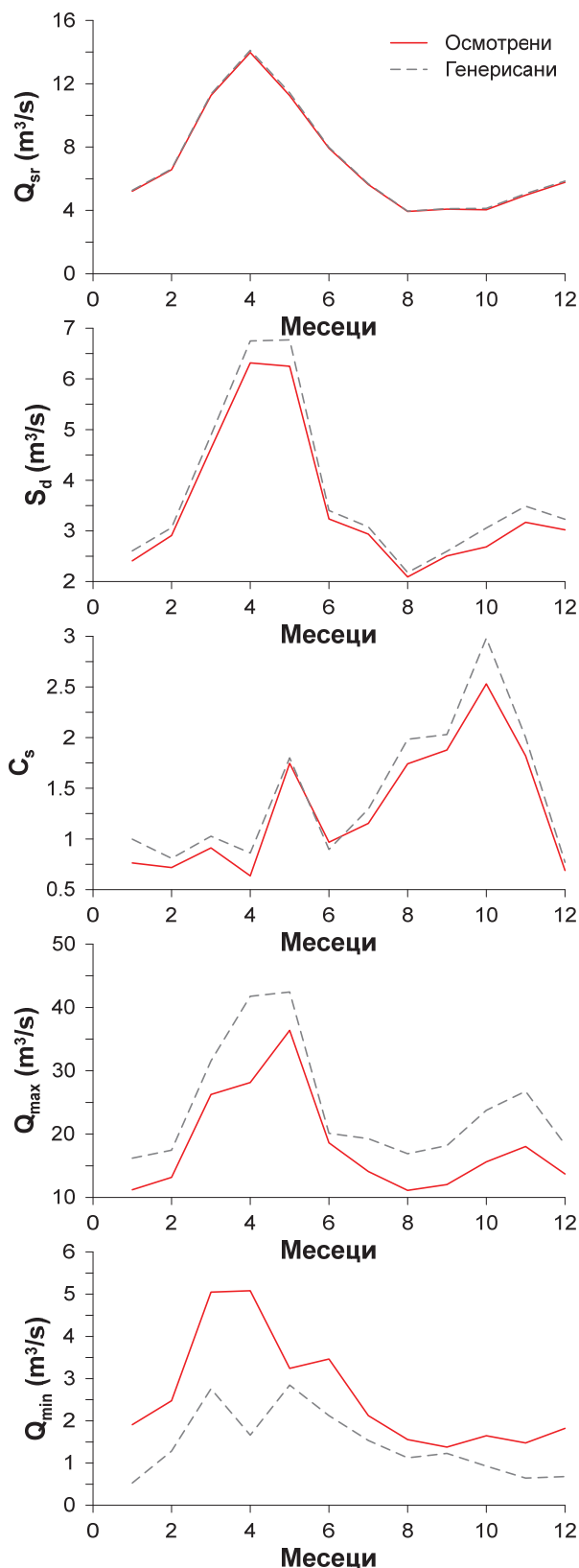
1.1.13 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА7 на реци Олдман



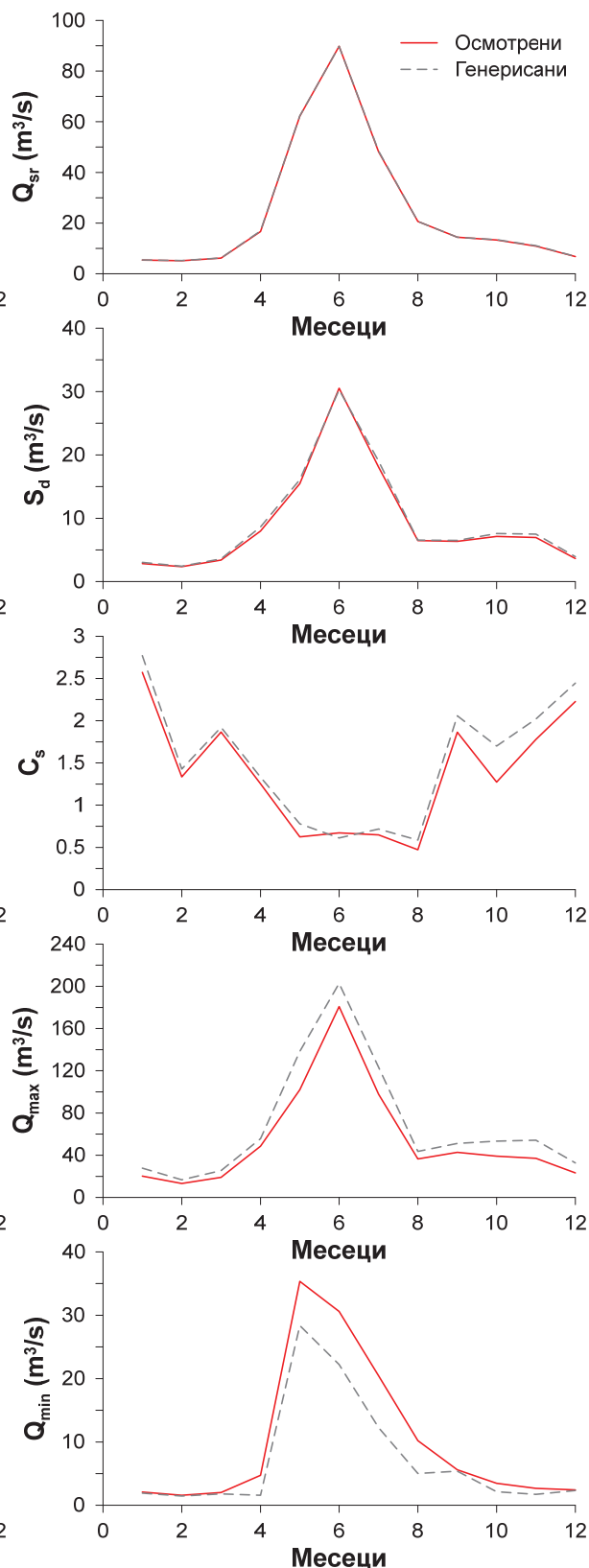
1.1.14 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Дeвићи на Студеници



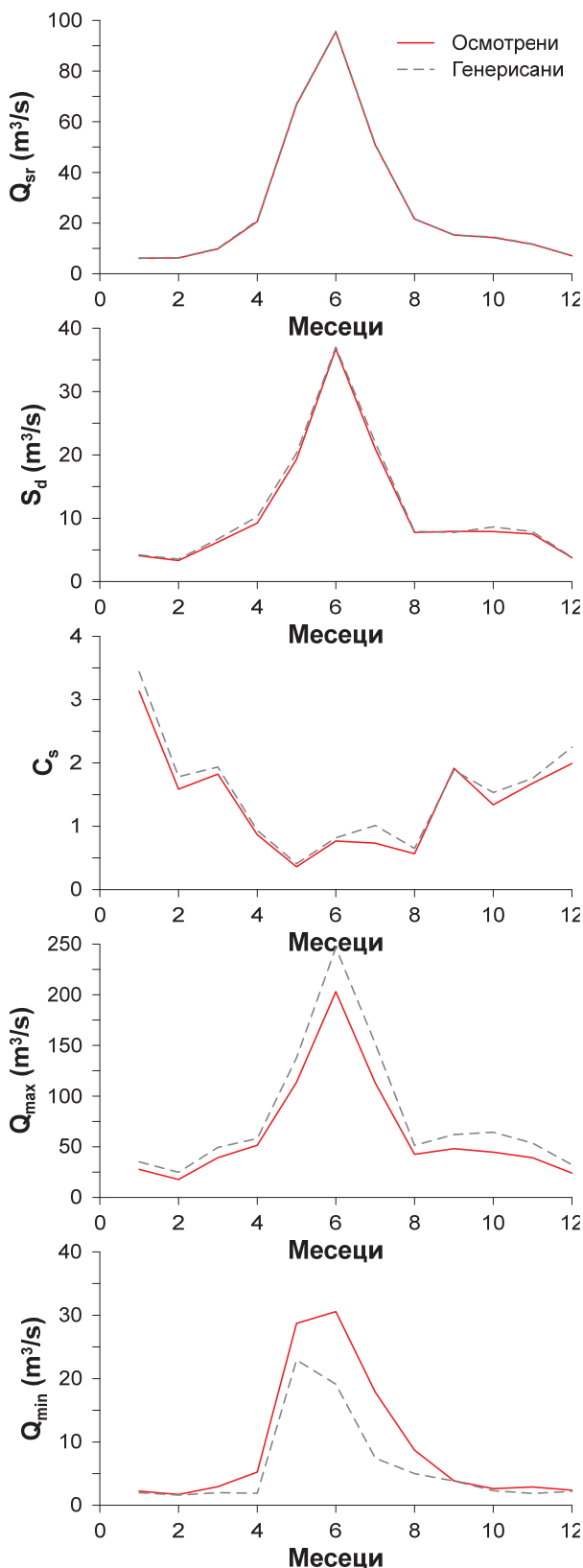
1.1.15 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Мланча на Студеници



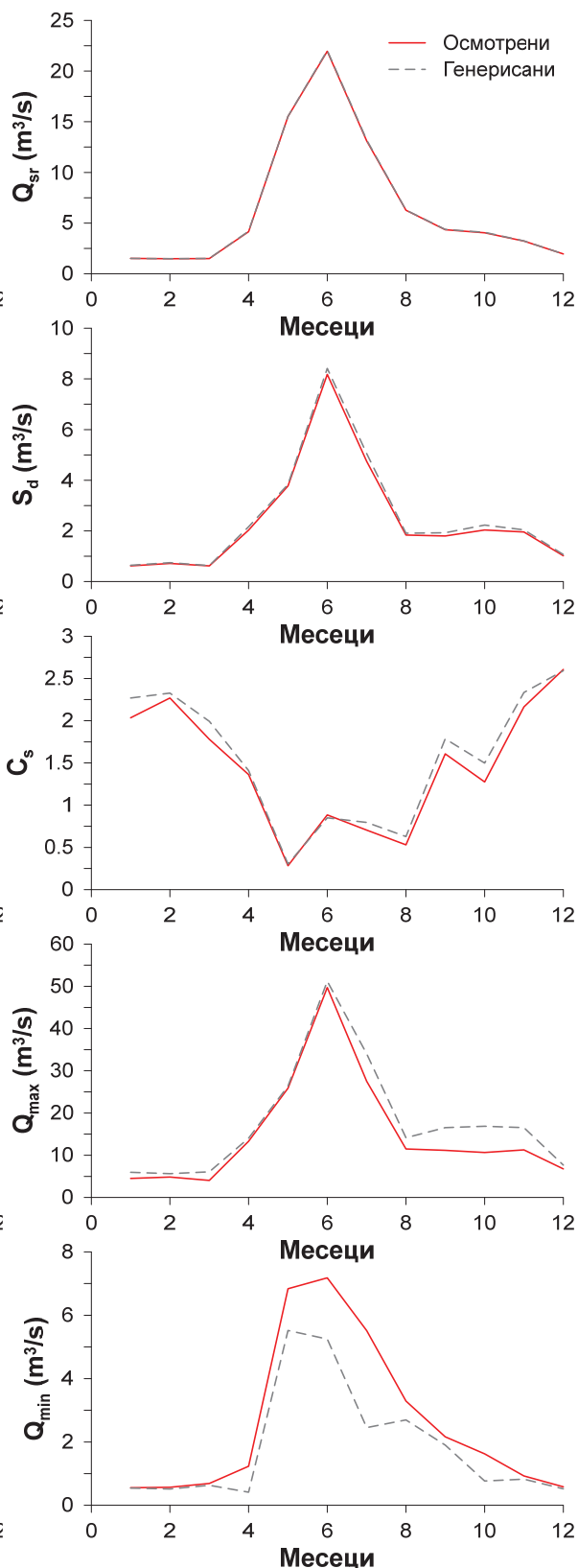
1.1.16 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици Ушће на Студеници



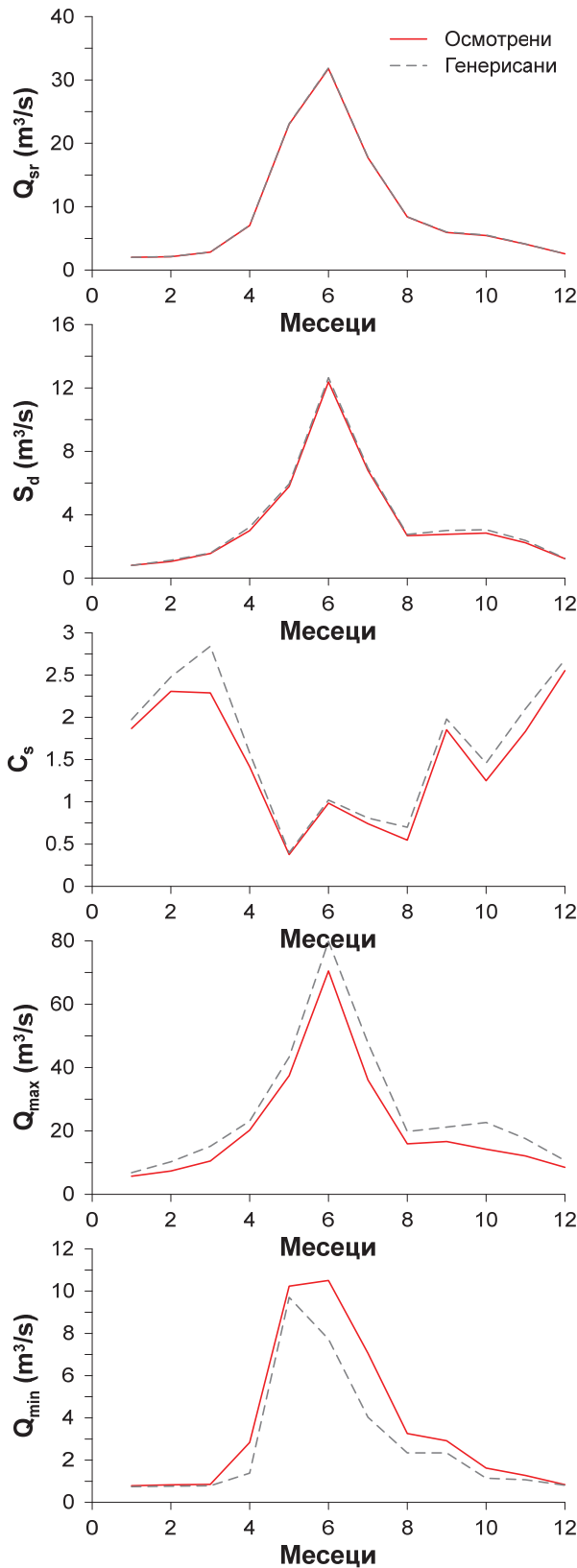
1.1.17 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици SA1 на реци Олдман



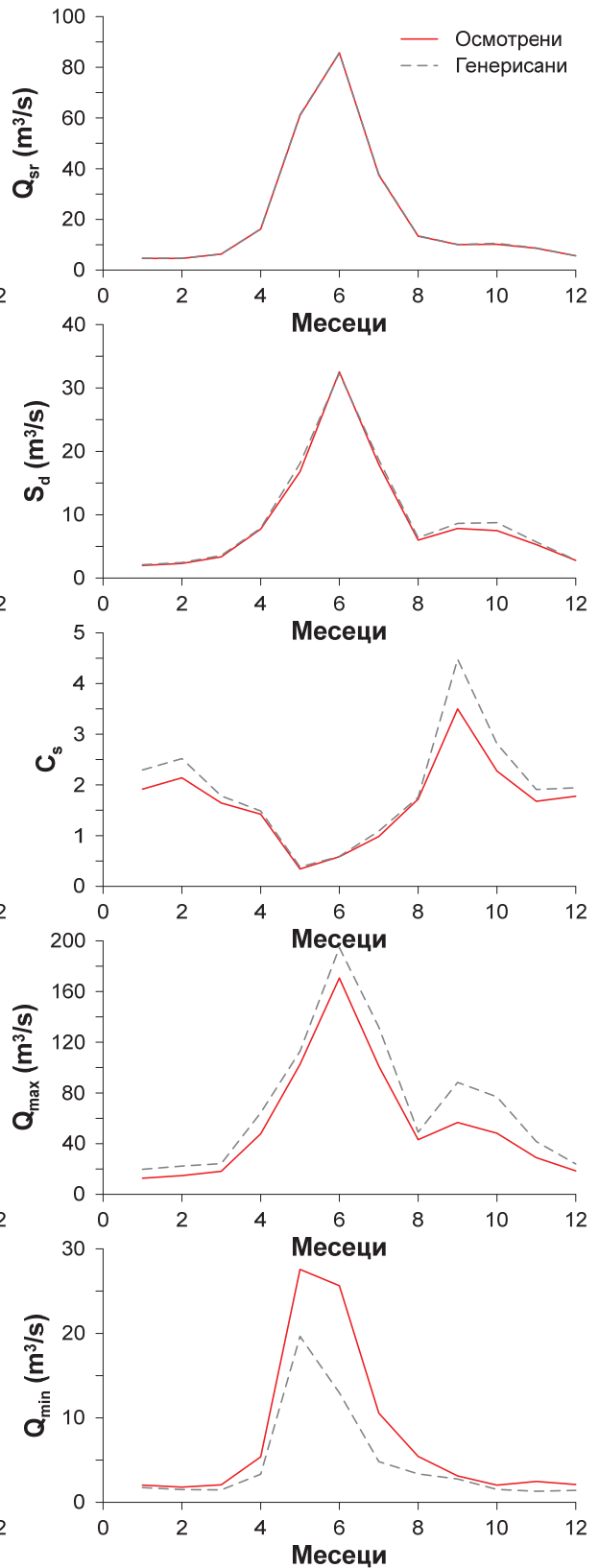
1.1.18 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА2 на реци Олдман



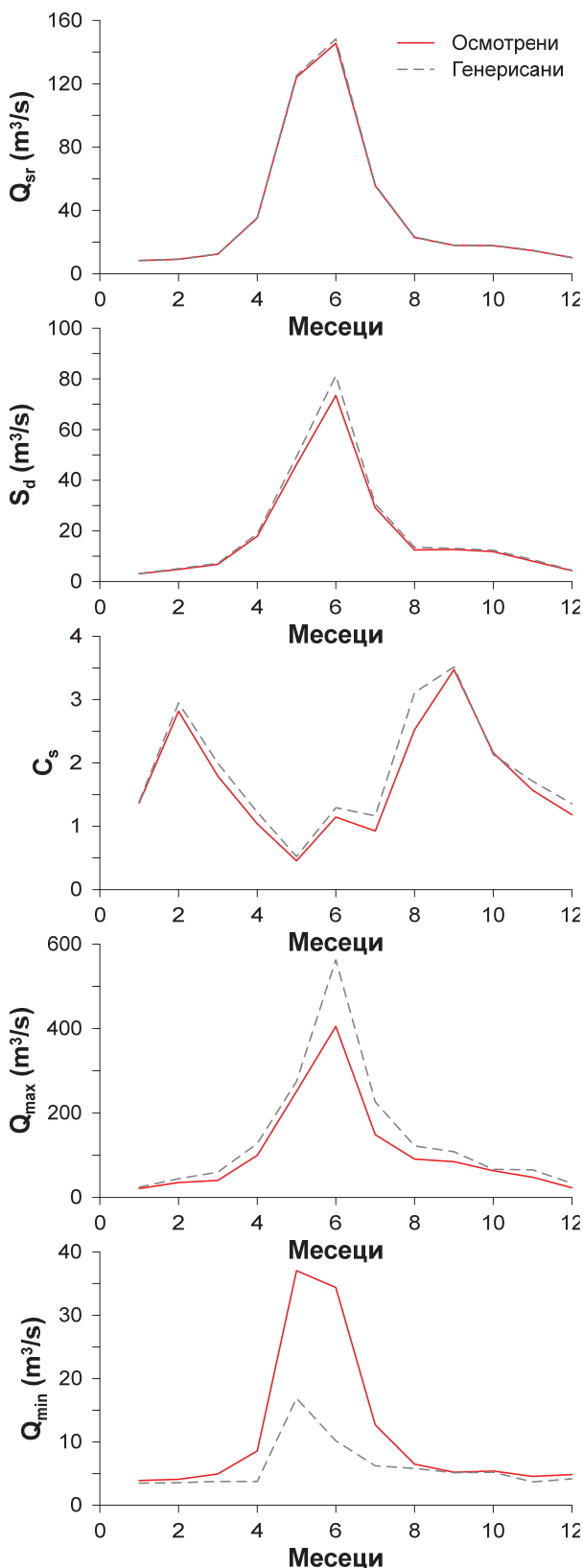
1.1.19 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА3 на реци Олдман



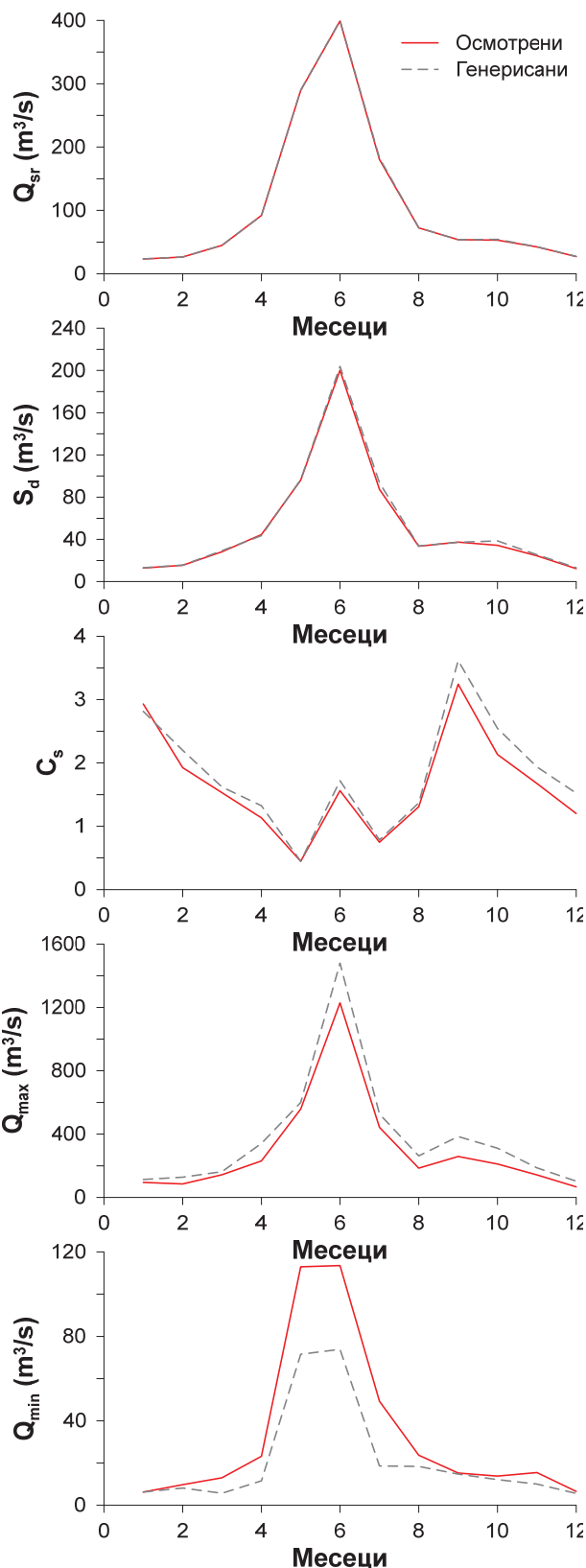
1.1.20 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА4 на реци Олдман



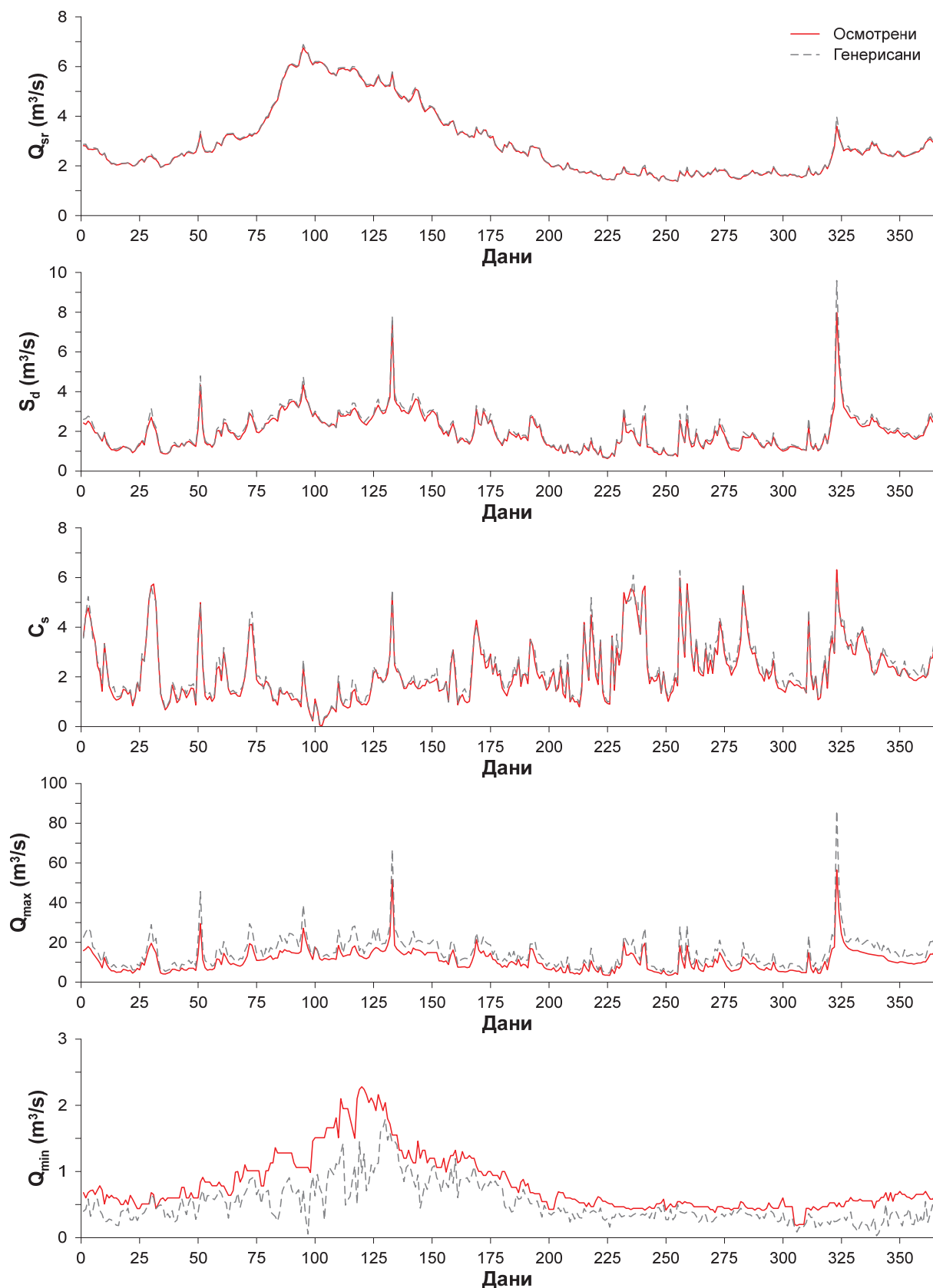
1.1.21 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА5 на реци Олдман



1.1.22 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматраних и генерисаних месечних низова на станици СА6 на реци Олдман

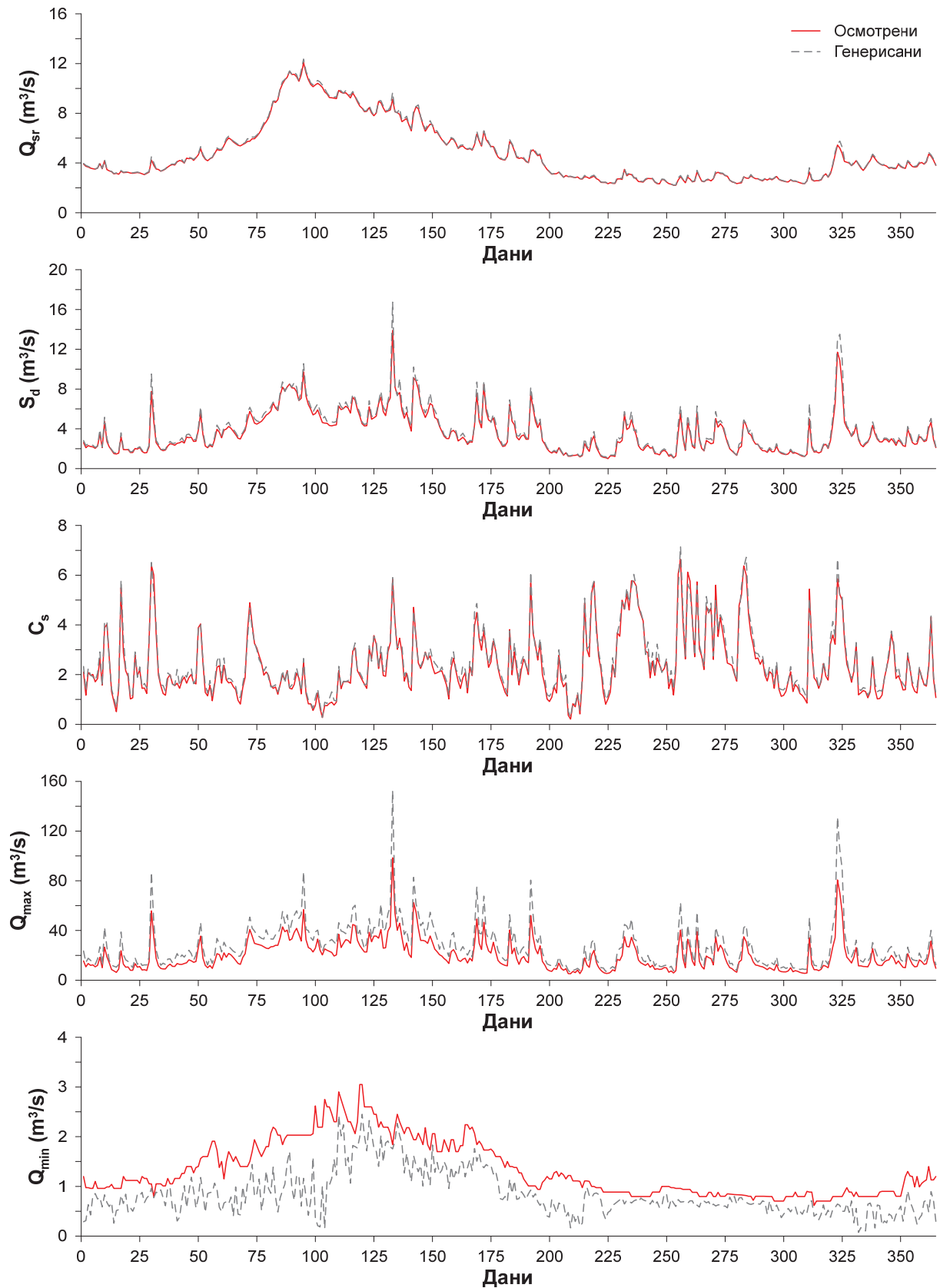


1.1.23 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматраних и генерисаних месечних низова на станици СА7 на реци Олдман

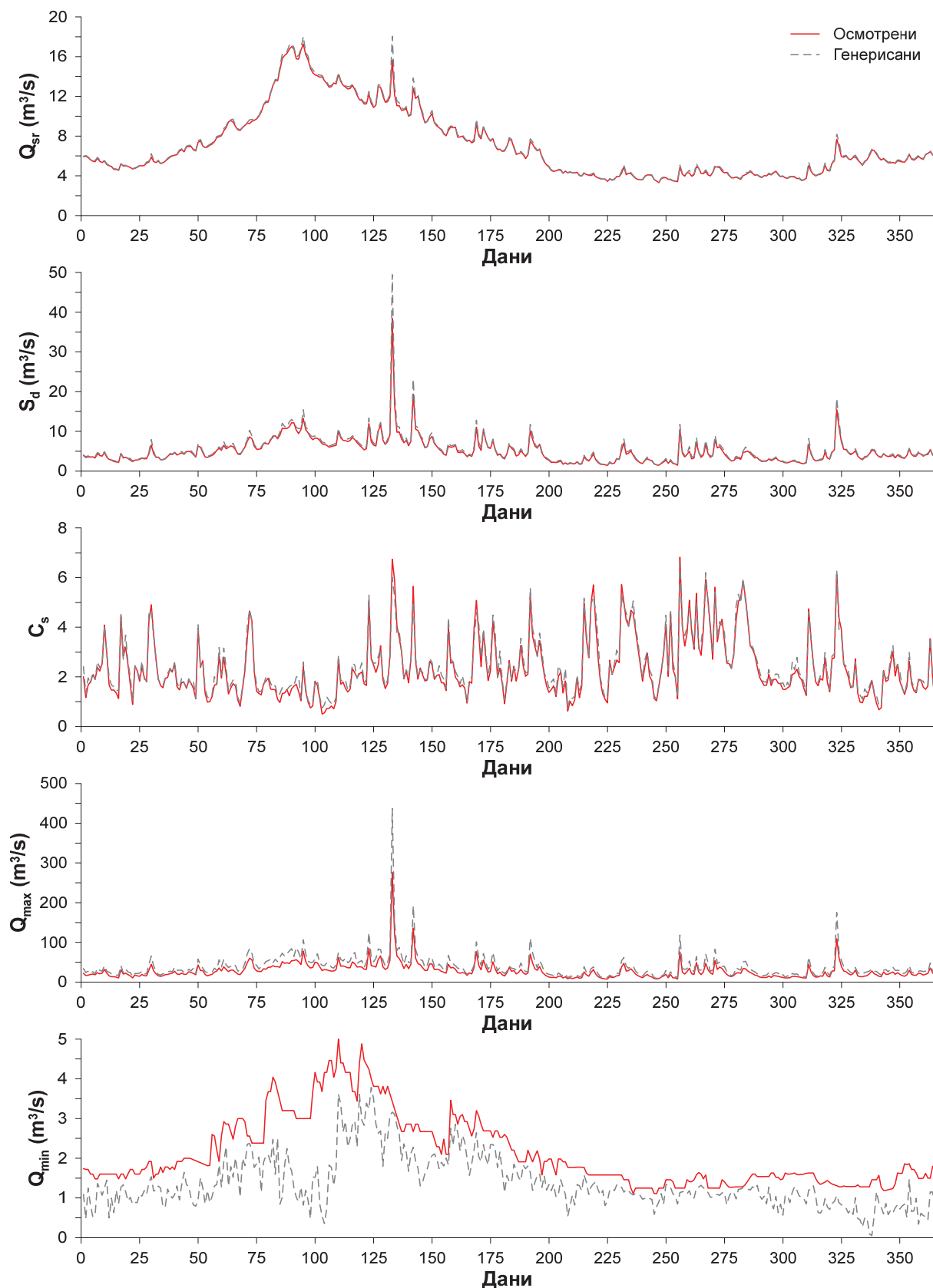


1.2.1 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних дневних низова на станици Девићи на Студеници

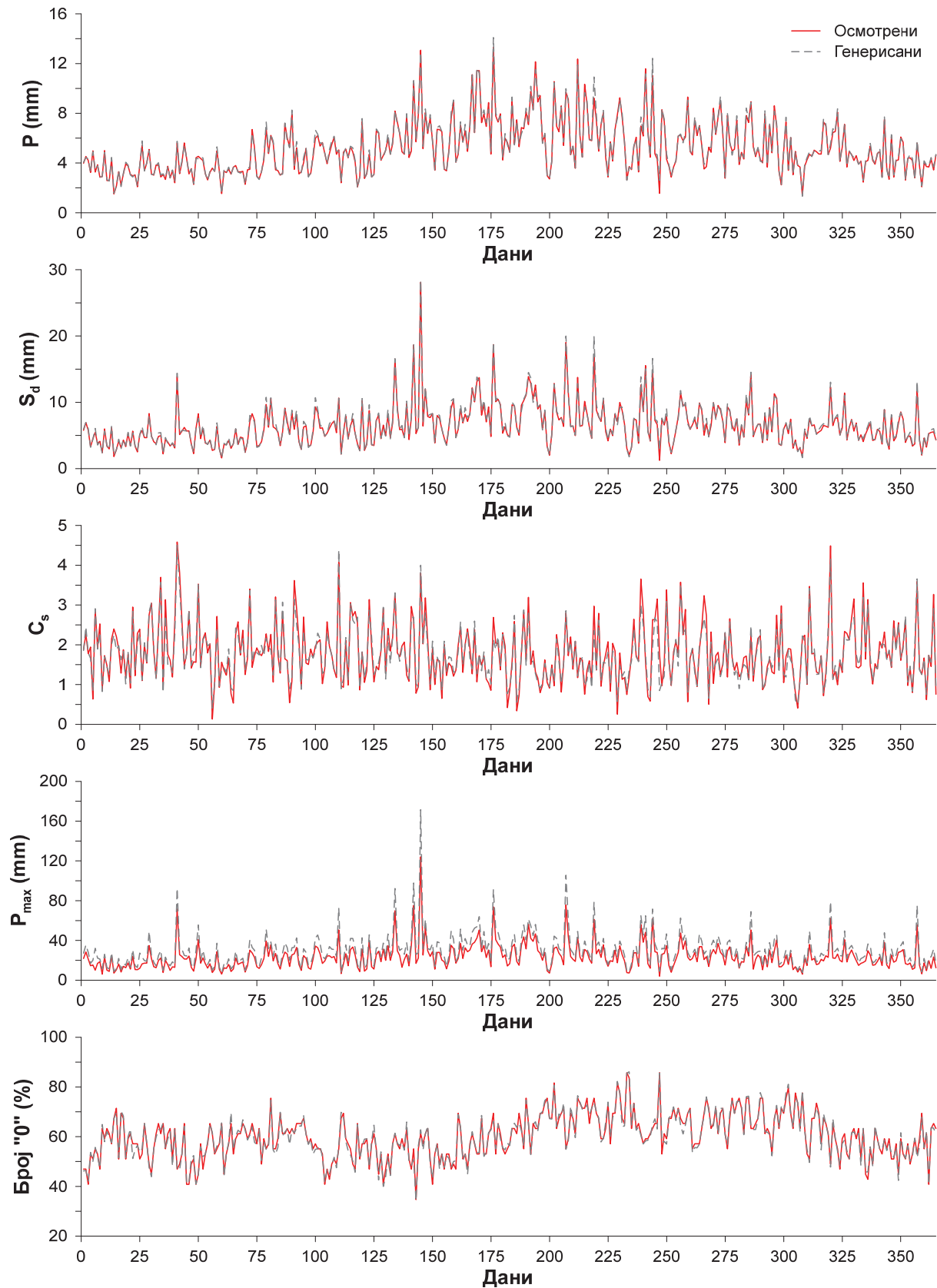




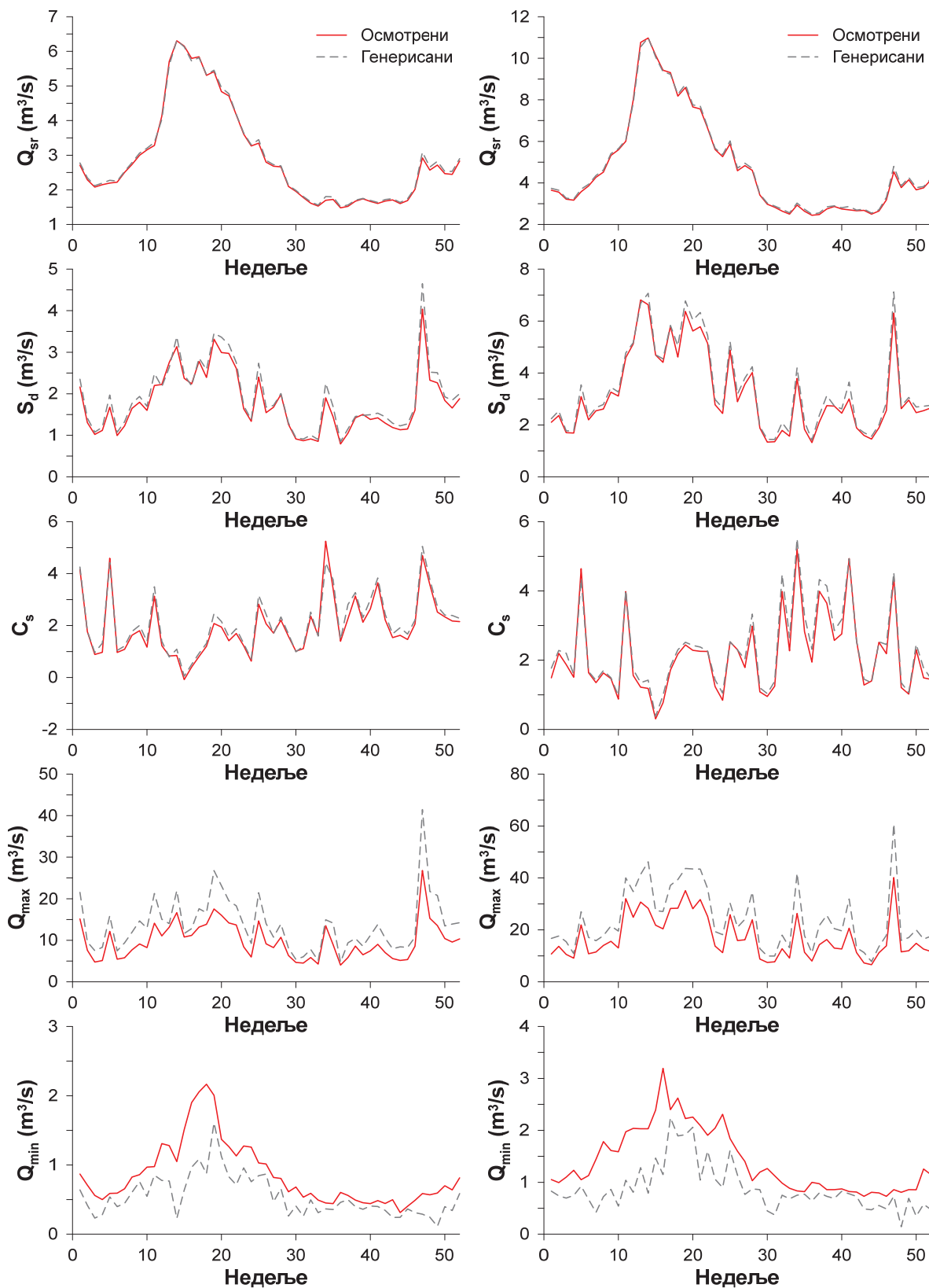
1.2.2 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Мланча на Студеници



1.2.3 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних дневних низова на станици Ушће на Студеници

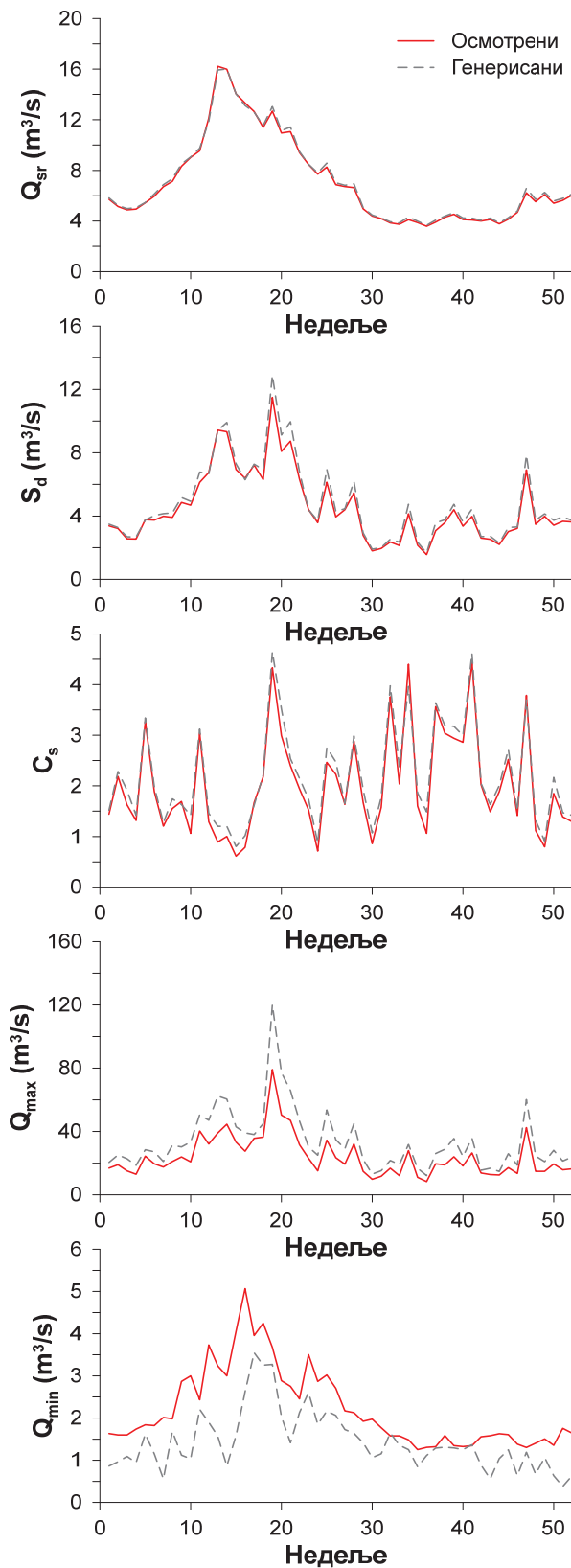


1.2.4 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и број дана без падавина, осмотрених и генерисаних дневних низова на станици Краљево за слив реке Студенице

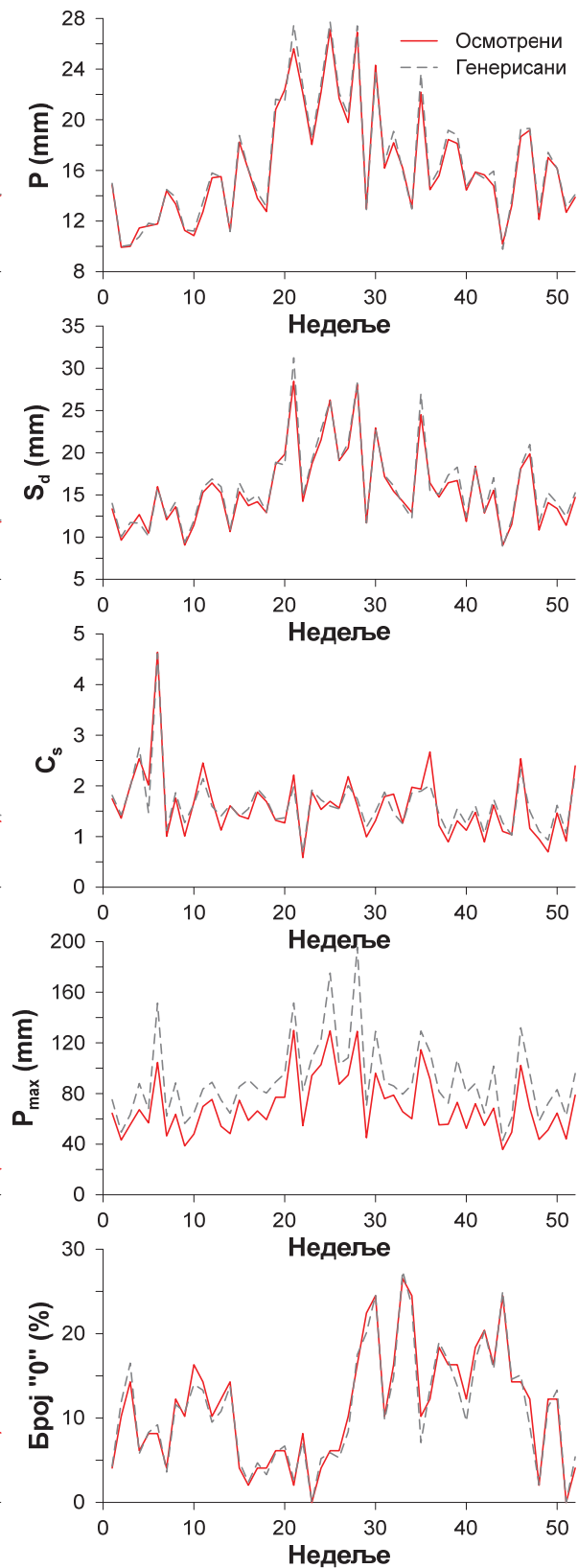


1.2.5 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици Девићи на Студеници

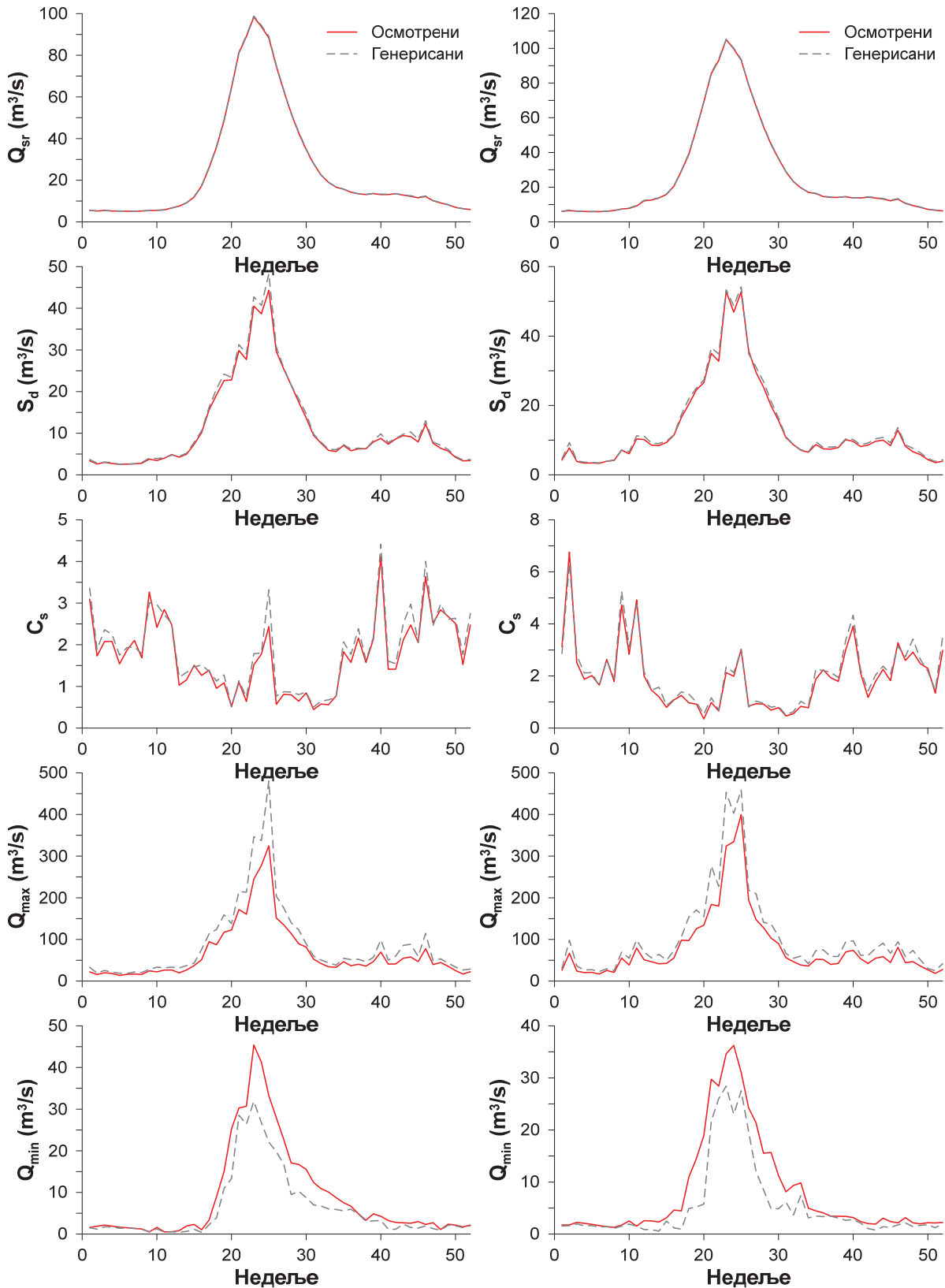
1.2.6 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици Мланча на Студеници



1.2.7 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрованих и генерисаних недељних низова на станици Ушће на Студеници

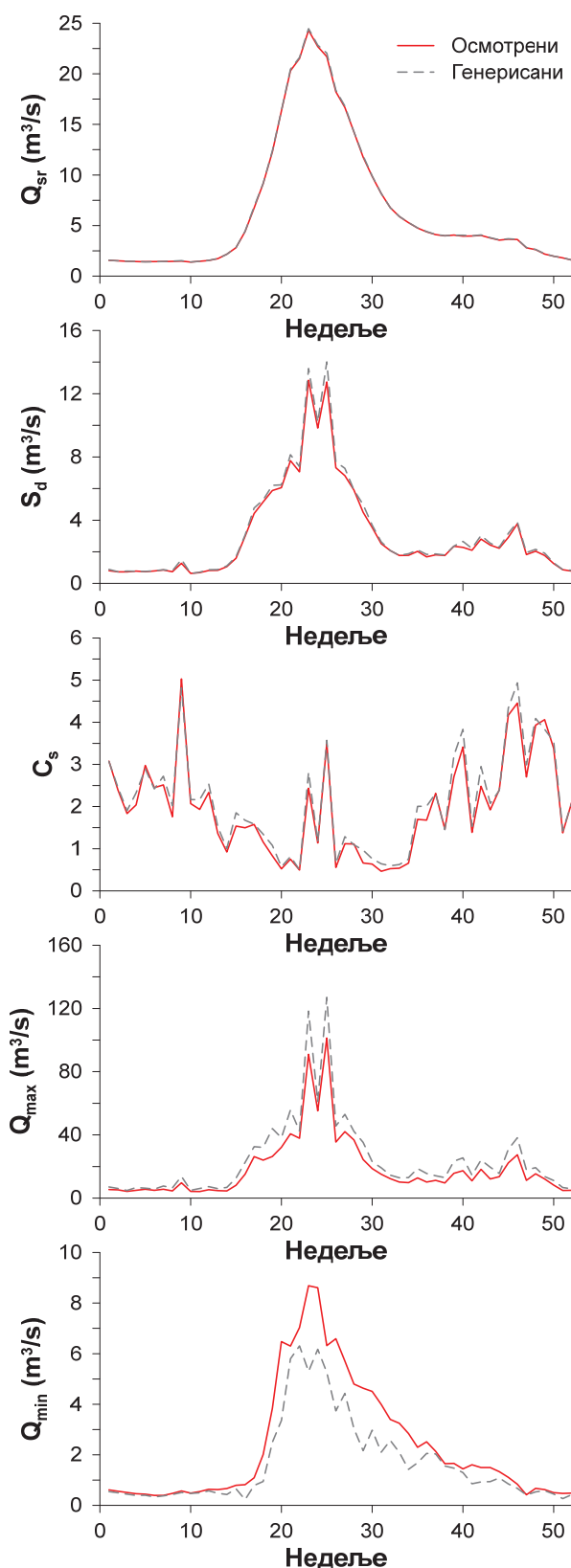


1.2.8 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрованих и генерисаних недељних низова на станици Краљево

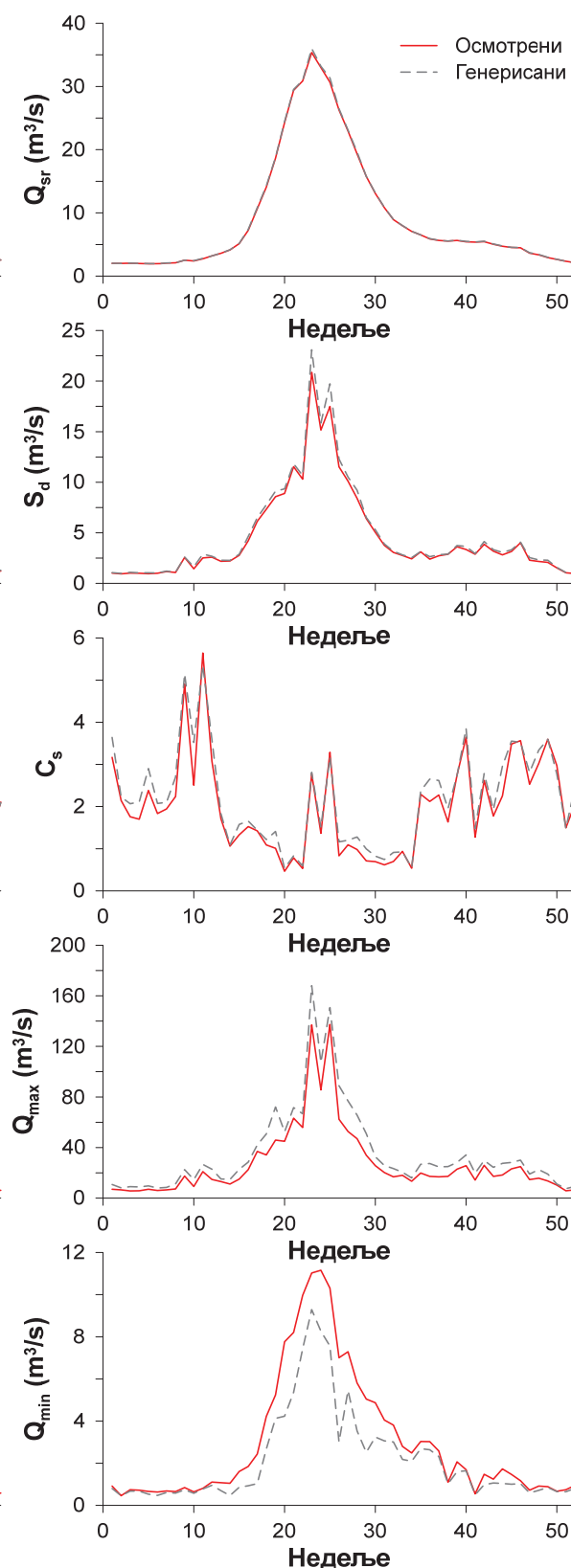


1.2.9 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици CA1 на реци Олдман

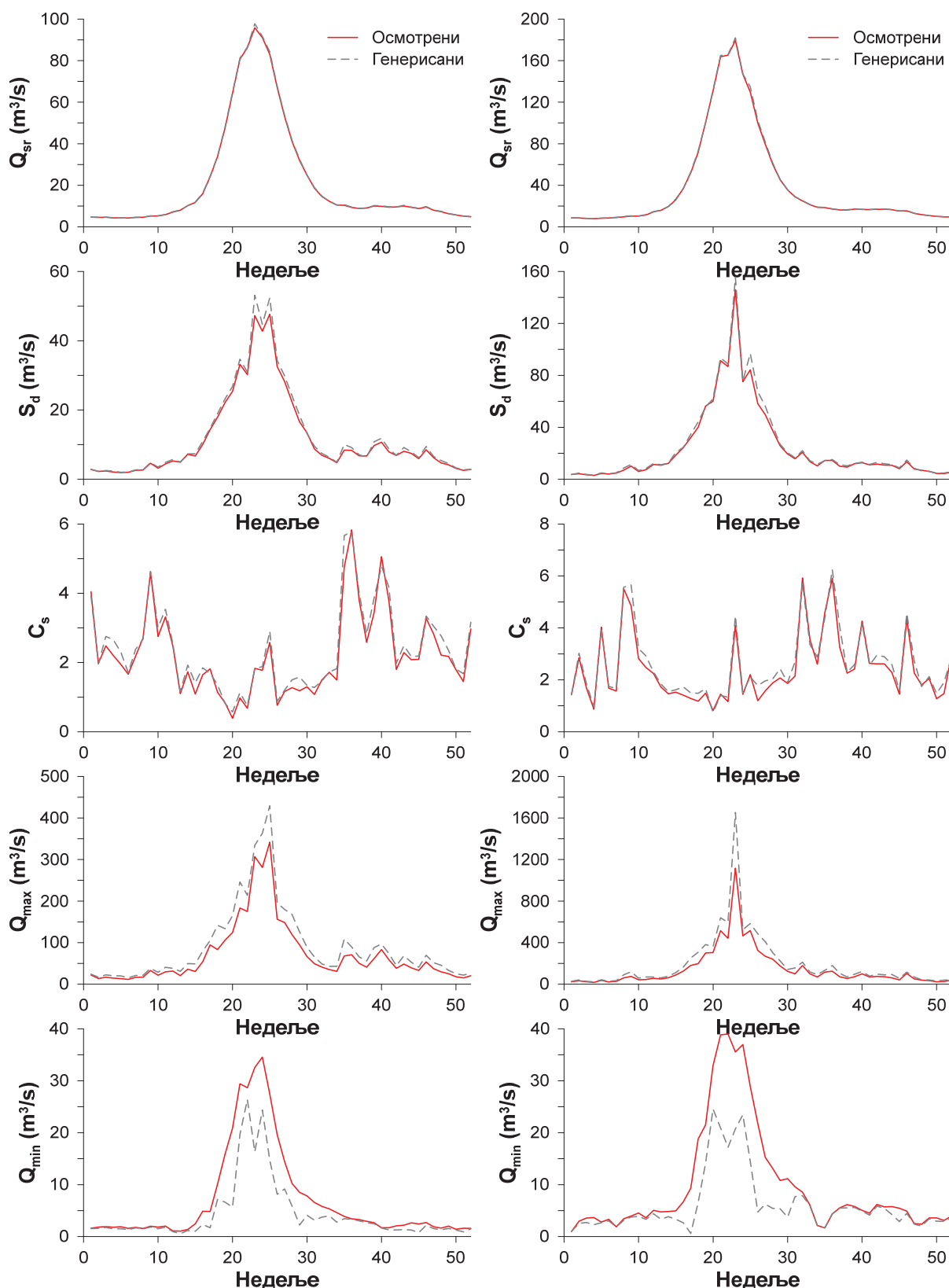
1.2.10 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици CA2 на реци Олдман



1.2.11 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА3 на реци Олдман



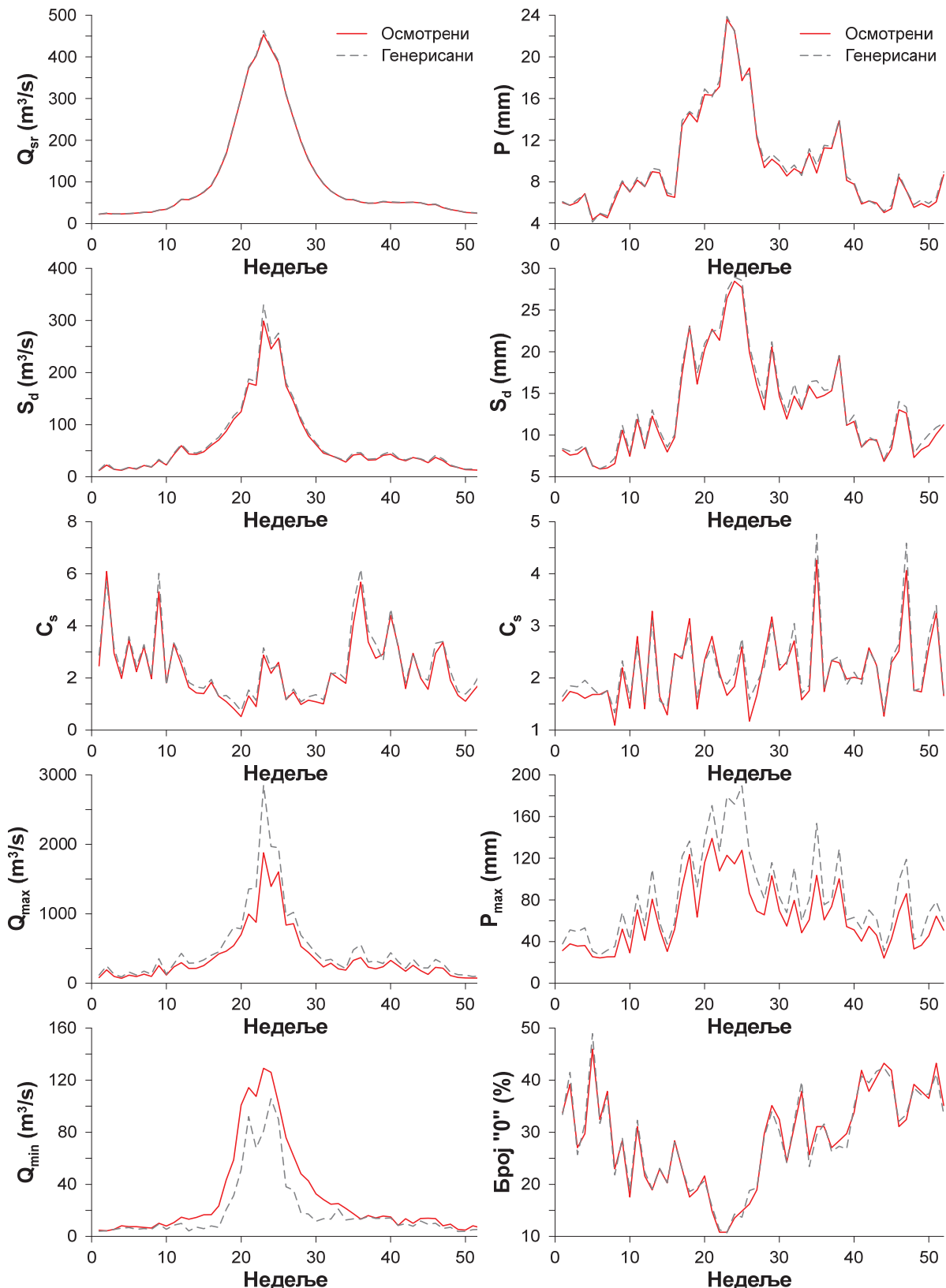
1.2.12 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА4 на реци Олдман



1.2.13 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА5 на реци Олдман

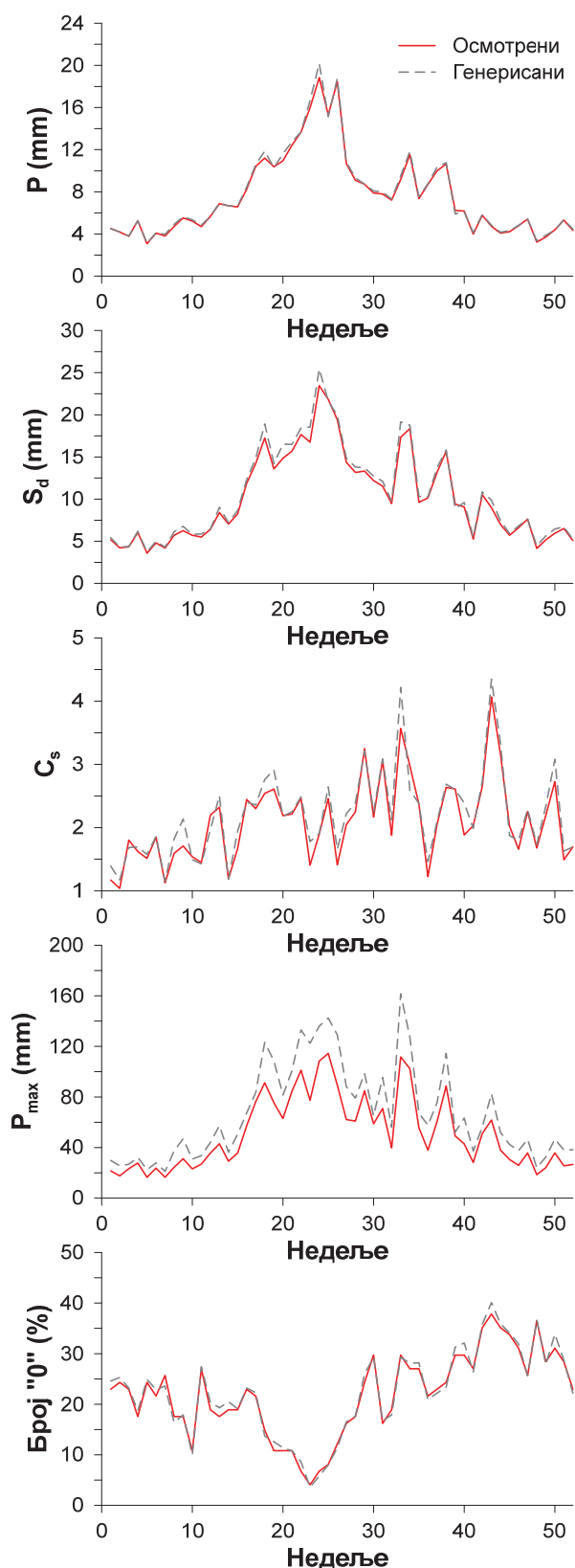
1.2.14 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА6 на реци Олдман



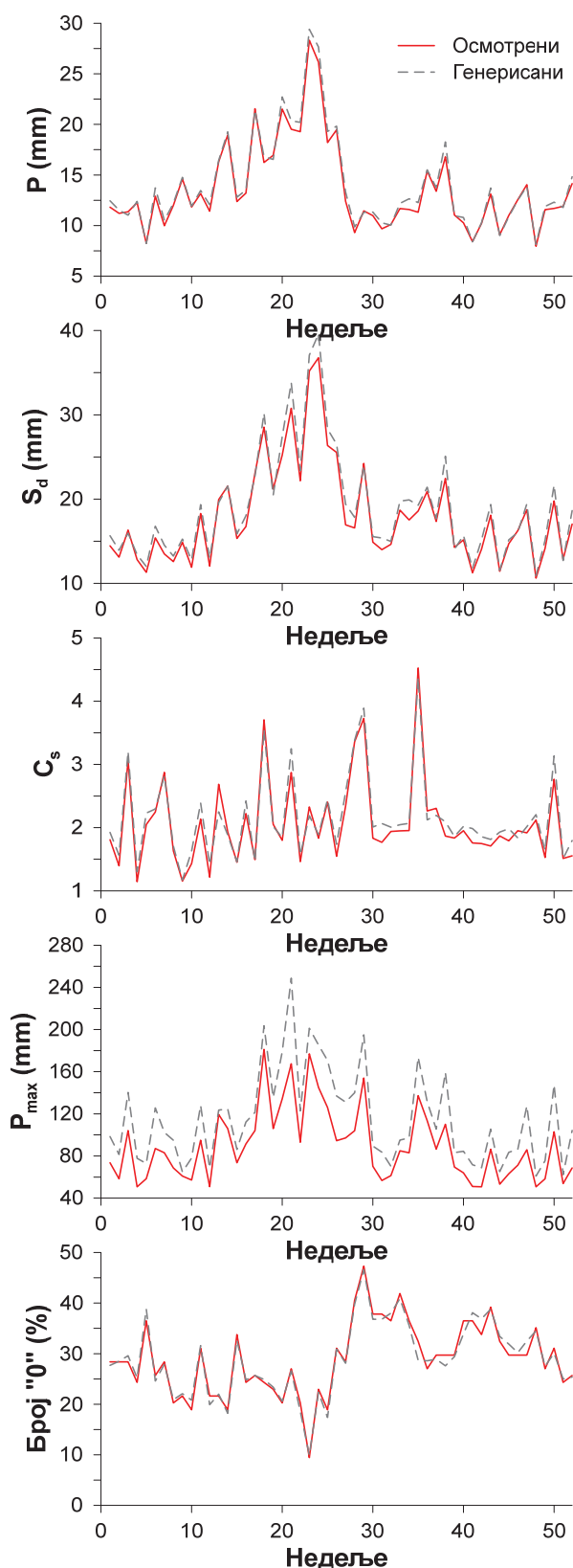


1.2.15 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици CA7 на реци Олдман

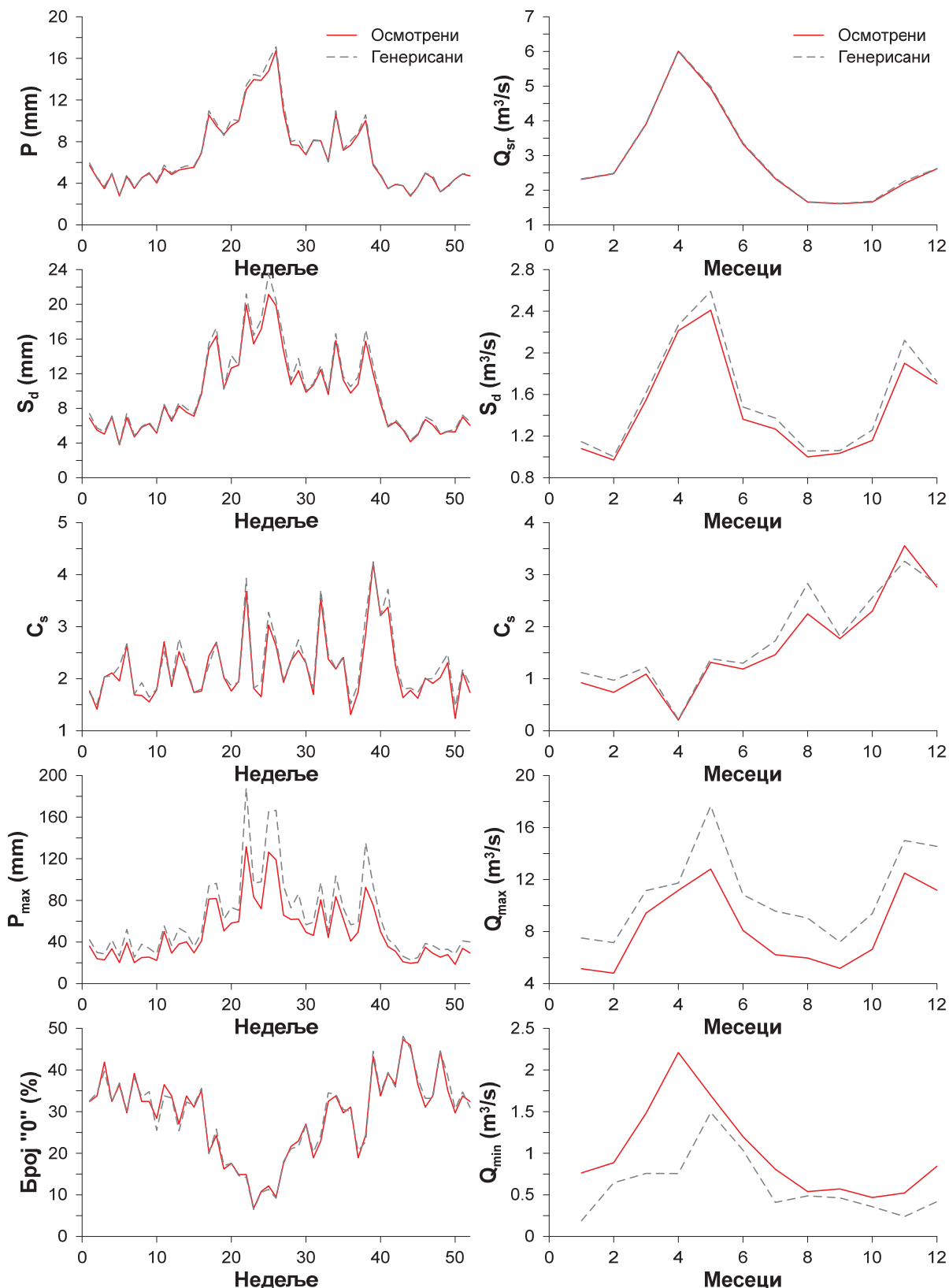
1.2.16 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних недељних низова на станици CA8



1.2.17 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици CA9

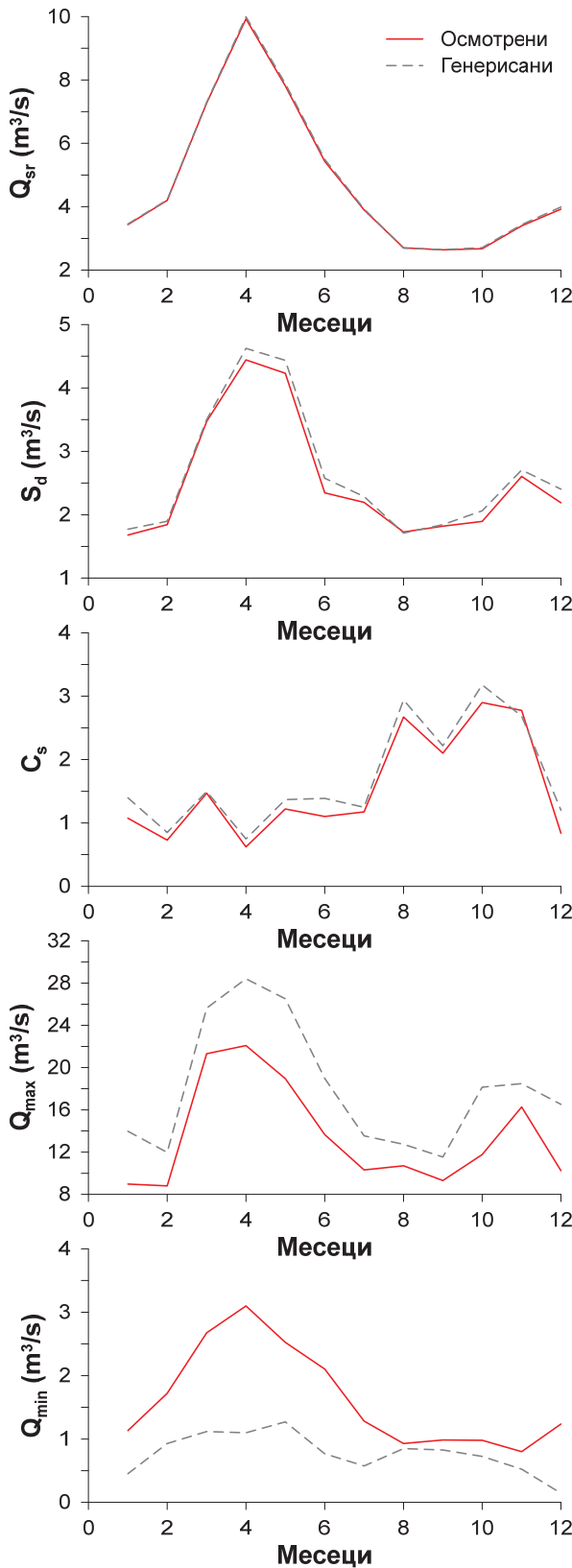


1.2.18 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици CA10

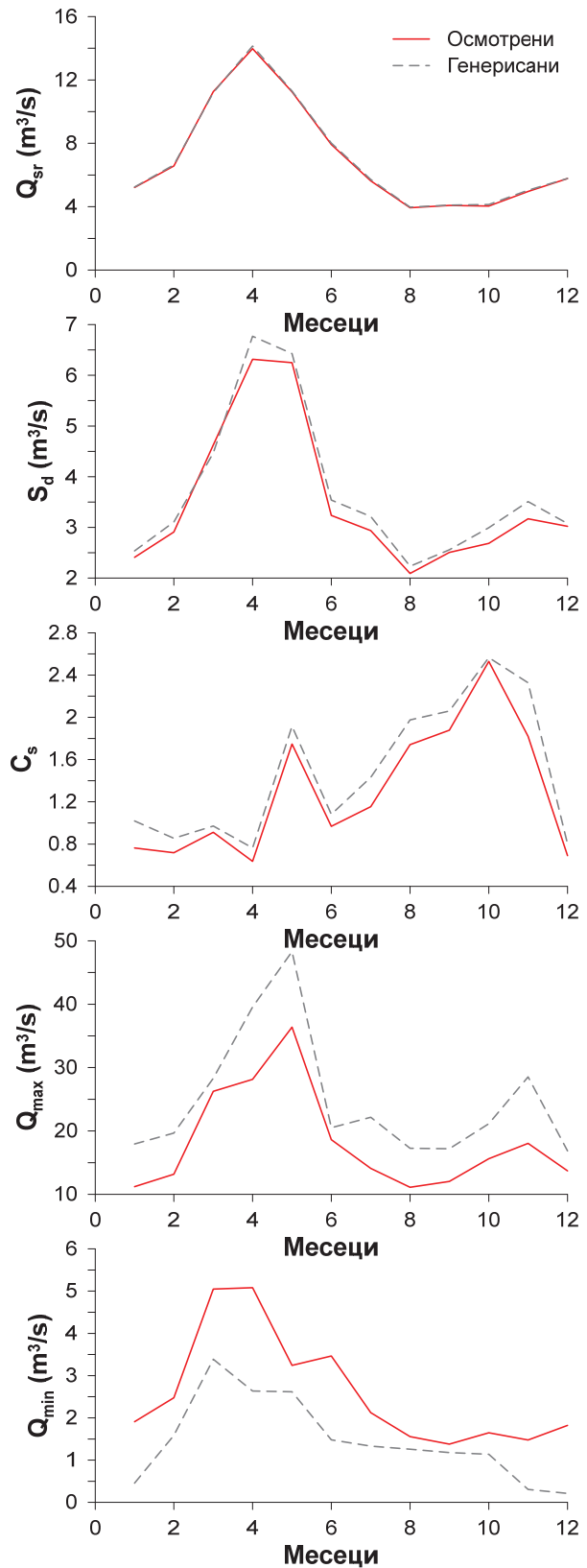


1.2.19 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних недељних низова на станици СА11

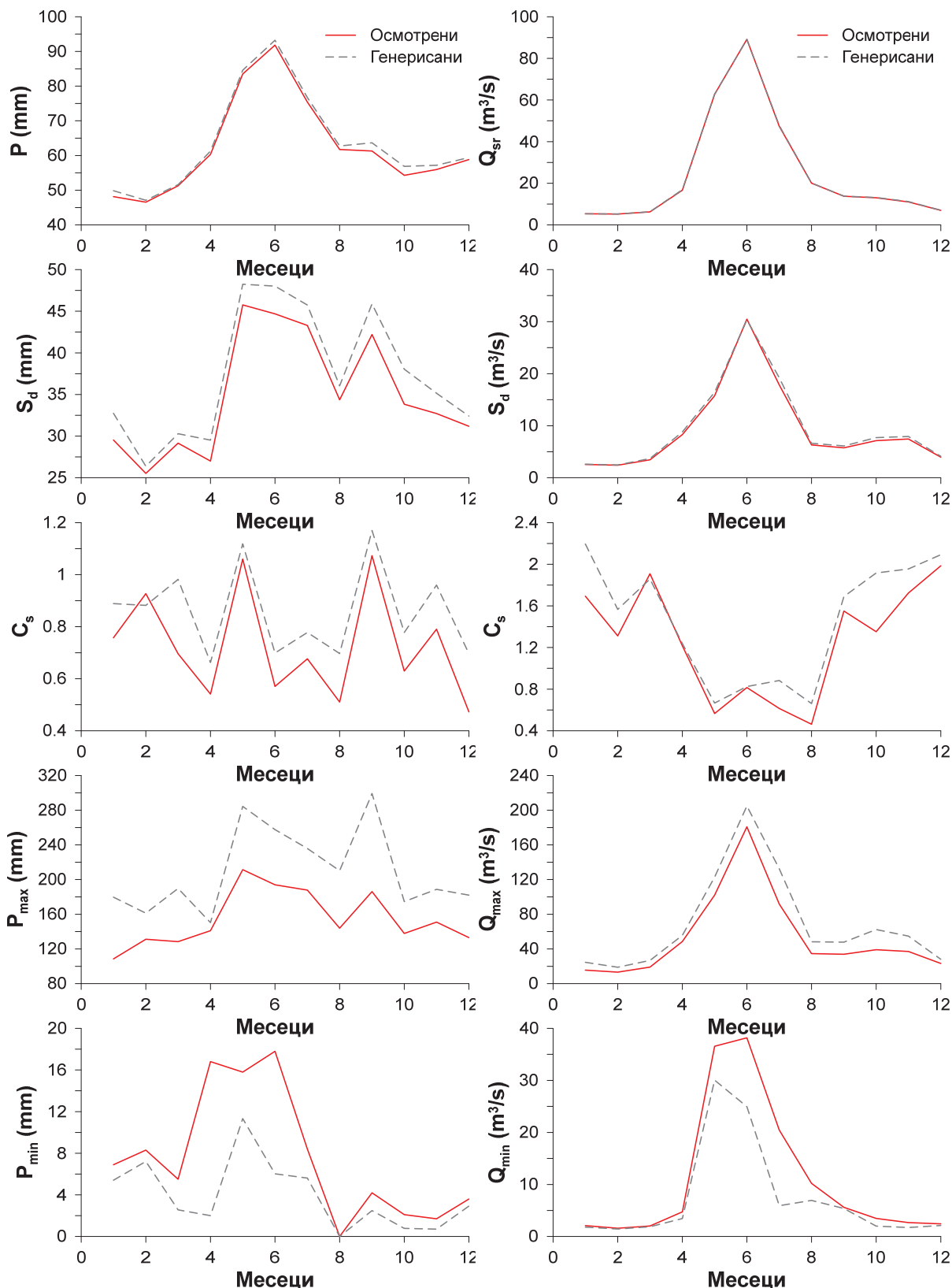
1.2.20 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици Девићи на Студеници



1.2.21 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици Мланча на Студен

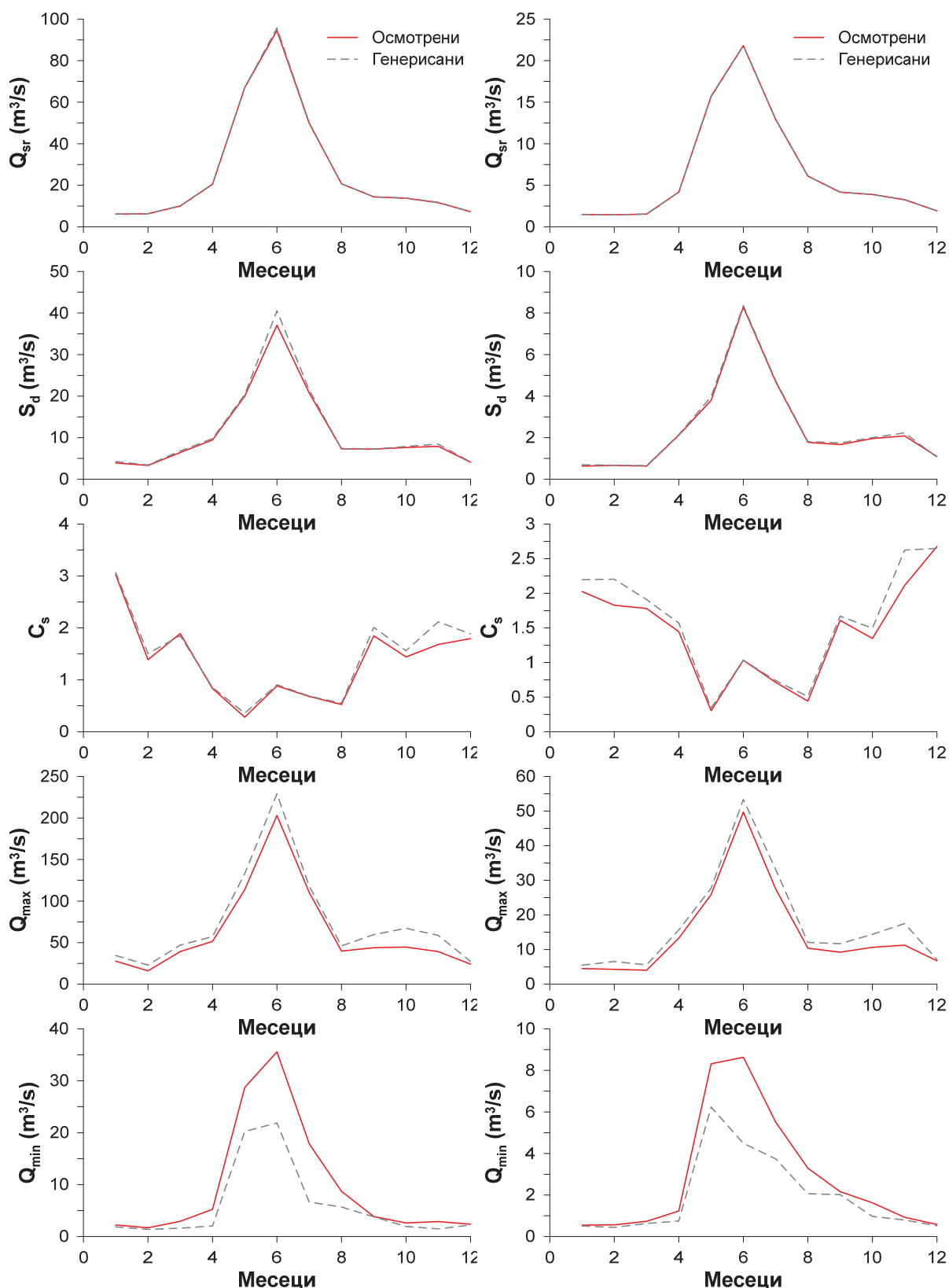


1.2.22 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици Ушће на Студеници



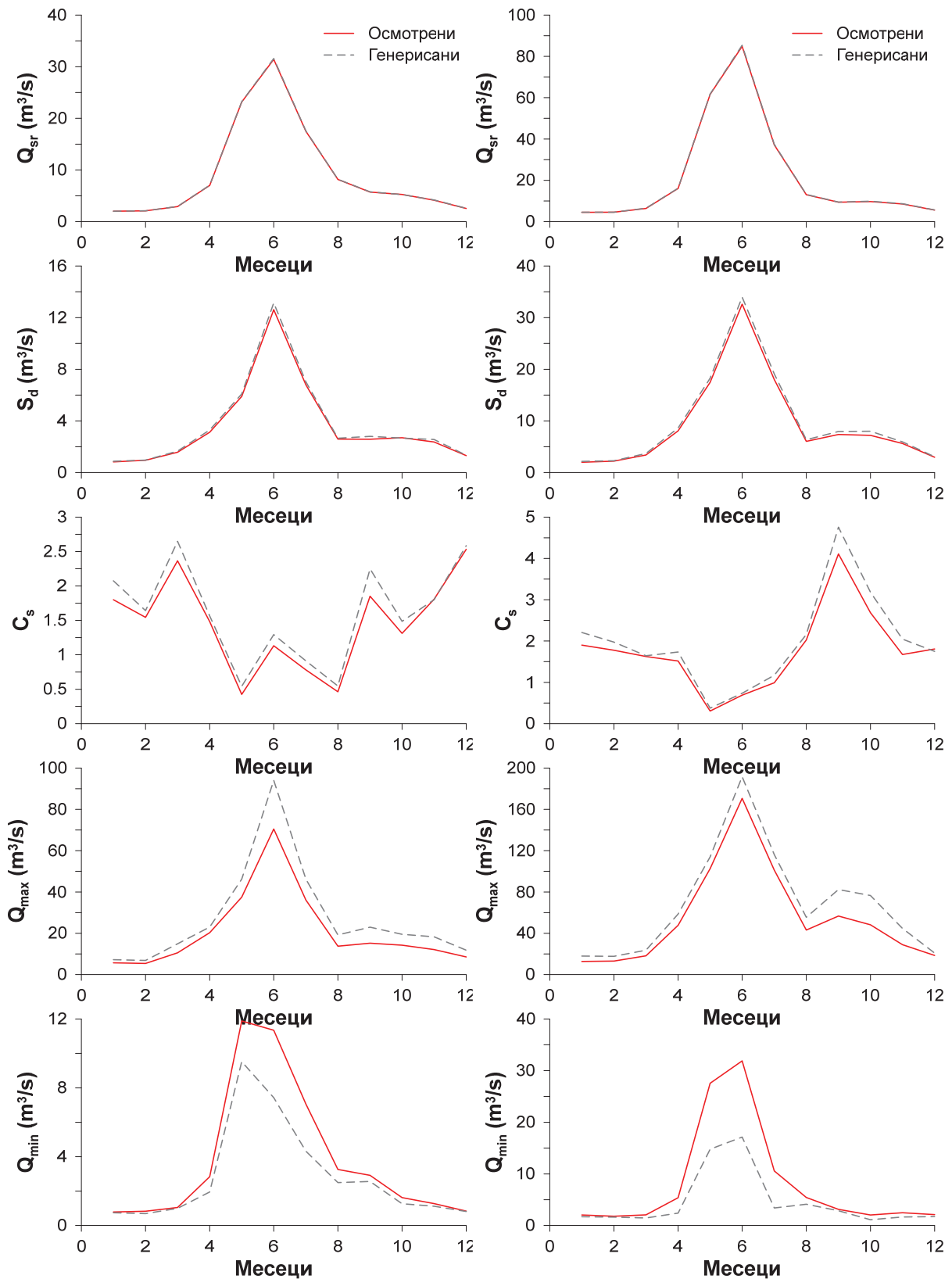
1.2.23 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици Краљево

1.2.24 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осмотрених и генерисаних месечних низова на станици СА1 на реци Олдман



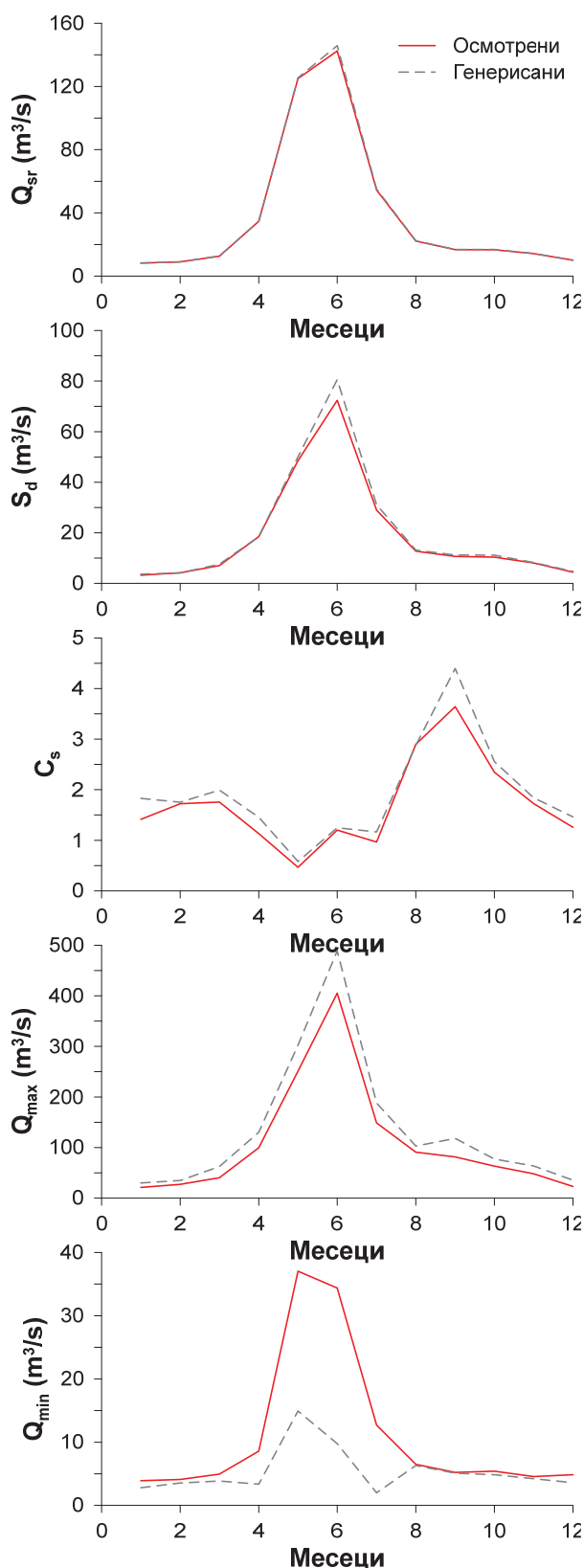
1.2.25 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА2 на реци Олдман

1.2.26 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА3 на реци Олдман

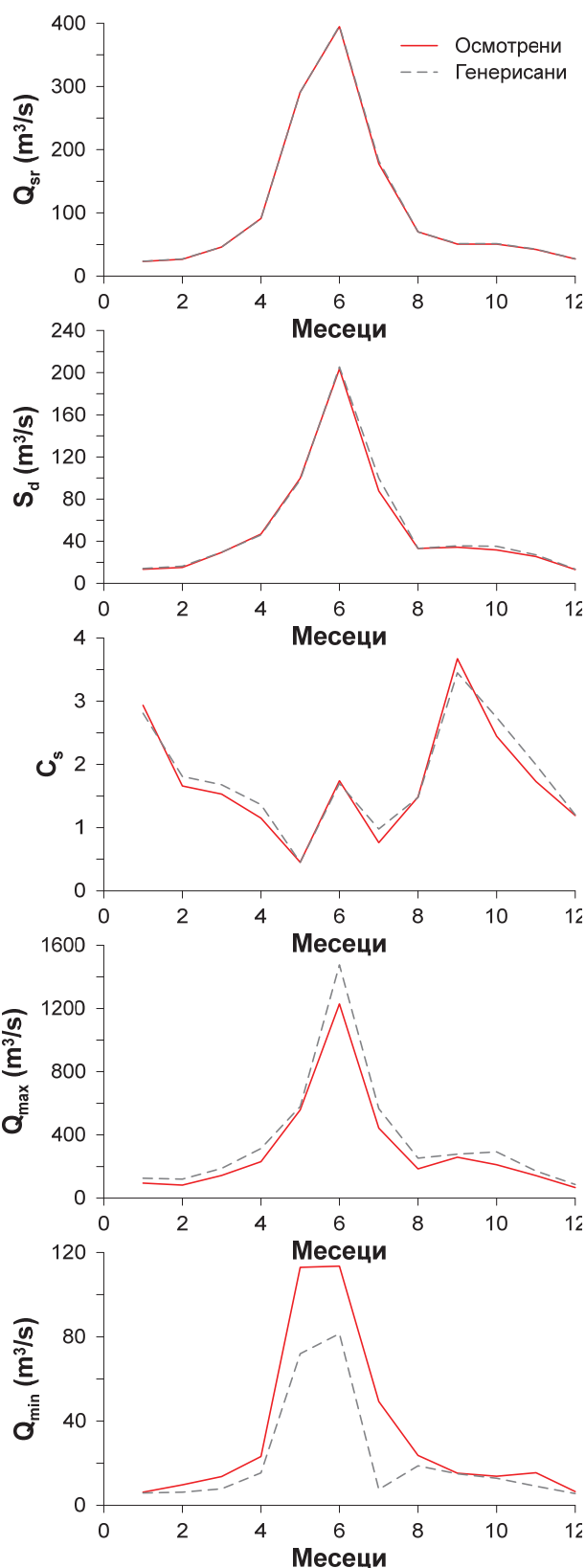


1.2.27 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА4 на реци Олдман

1.2.28 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА5 на реци Олдман

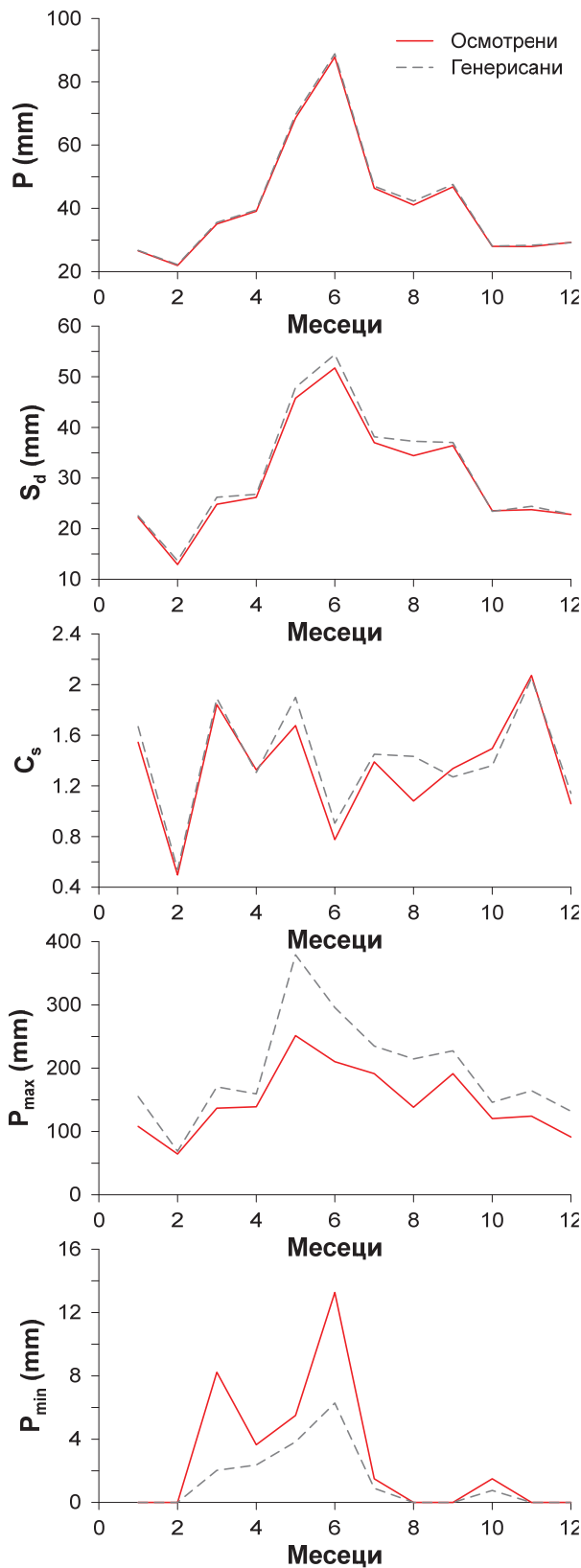


1.2.29 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА6 на реци Олдман

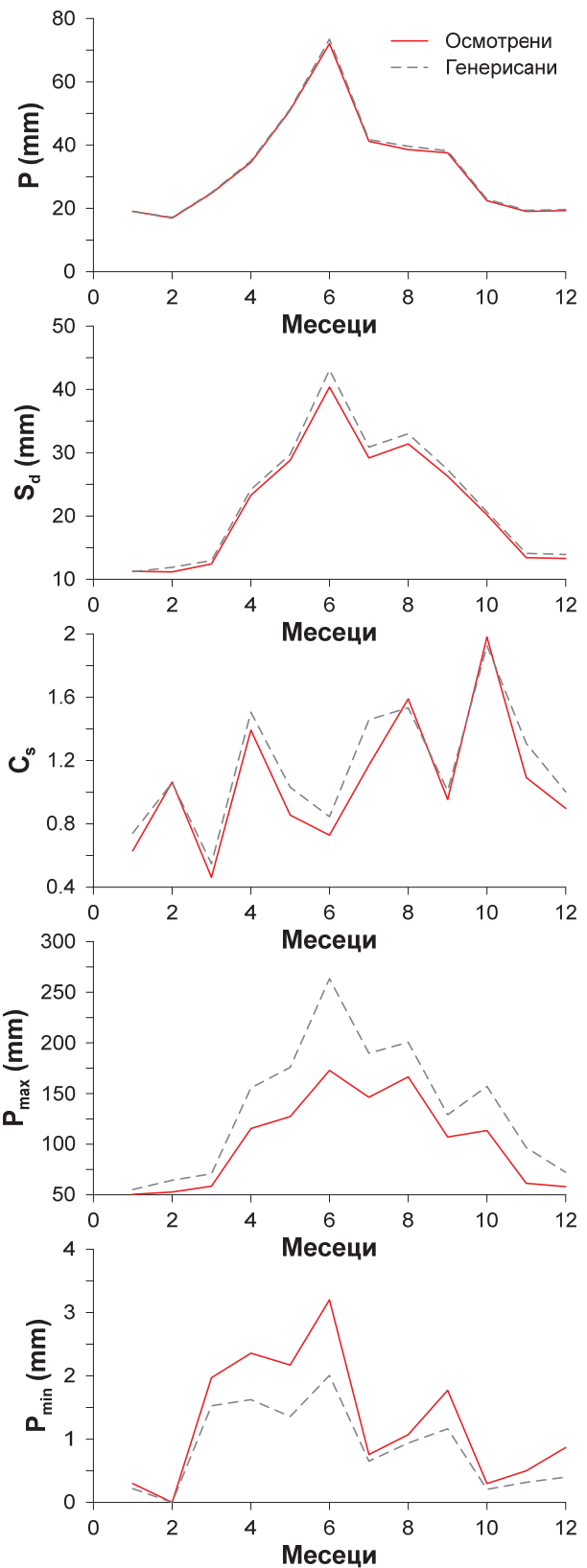


1.2.30 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици СА7 на реци Олдман

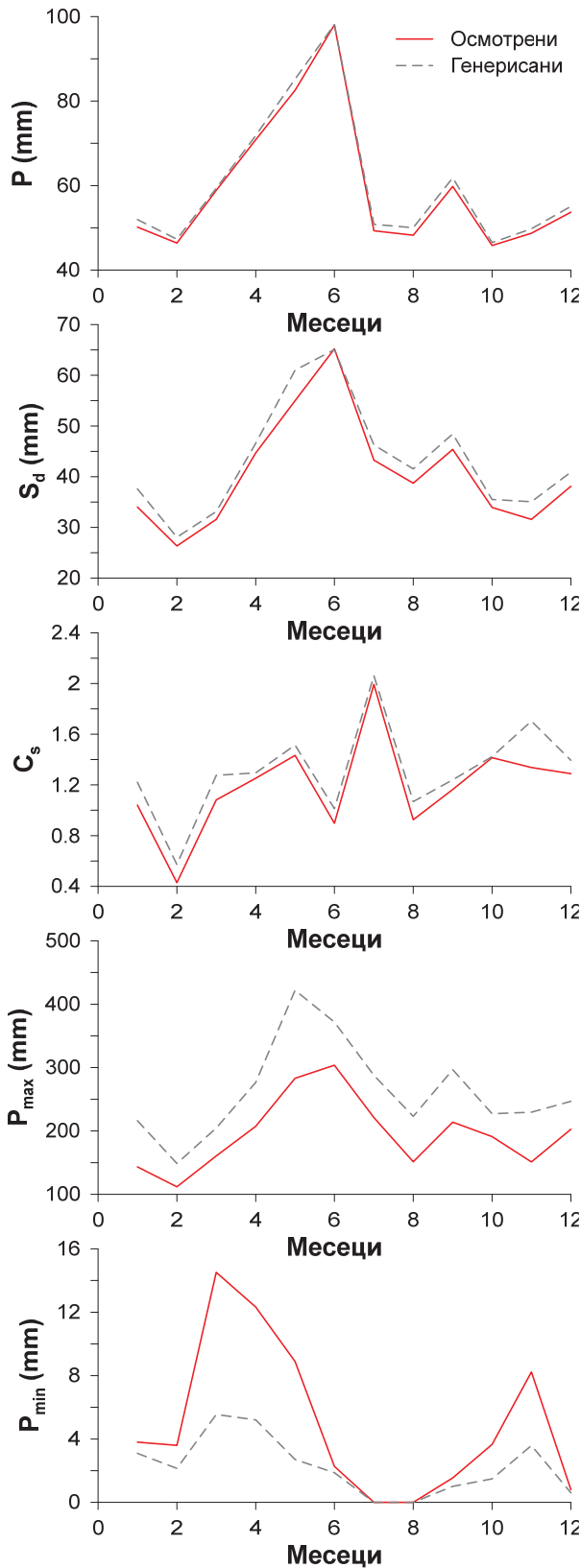




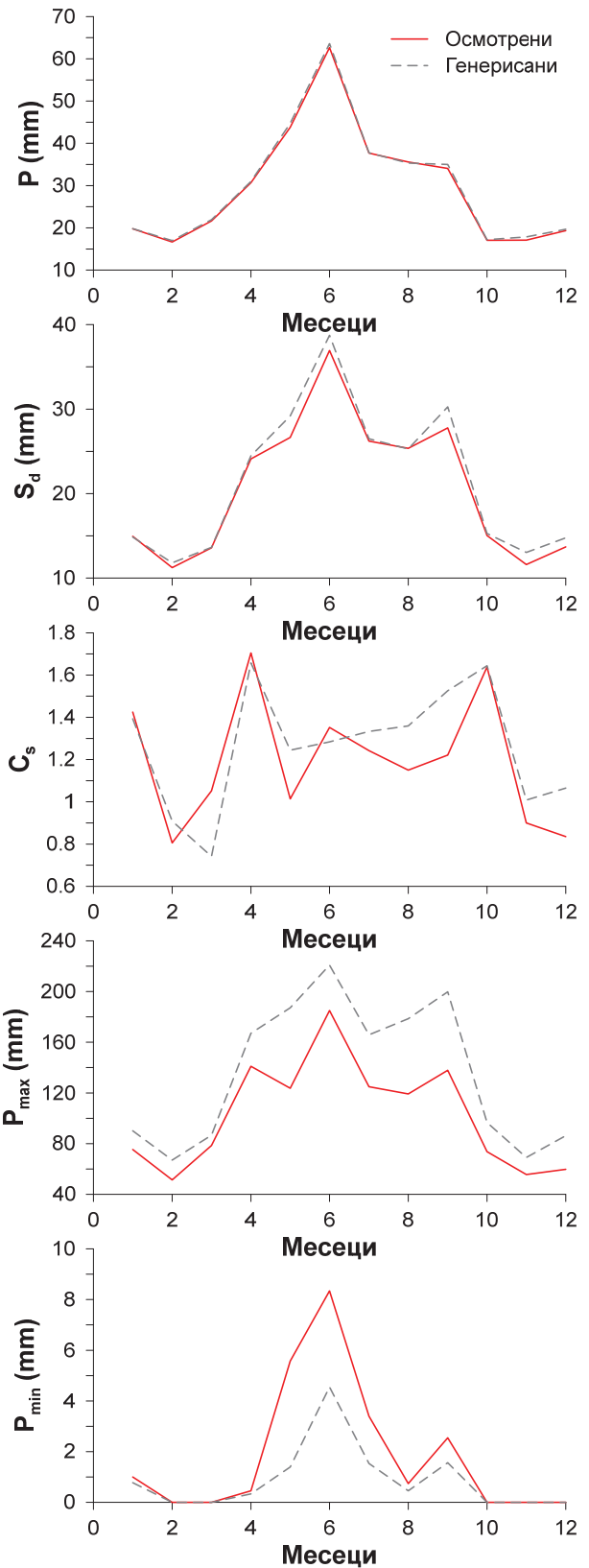
1.2.31 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици CA8



1.2.32 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици CA9



1.2.33 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици CA10



1.2.34 – Средње вредности, стандардне девијације и коефицијенти асиметрије, максимуми и минимуми осматрених и генерисаних месечних низова на станици CA11

## 9 ПРИЛОГ 2 – КОРЕЛАЦИЈА ПАРЦИЈАЛНИХ НИЗОВА

У прилогу 2 се дају коефицијенти аутокорејације за помак 1 и 2 реда, аутокорејациона функција и крос-корејациона функција према следећем редоследу:

### **Прилог 2.1: Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда, Модел 1**

- 2.1.1 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Девићи на реци Студеници
- 2.1.2 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Мланча на реци Студеници
- 2.1.3 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Ушће на реци Студеници
- 2.1.4 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици Девићи на реци Студеници
- 2.1.5 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици Мланча на реци Студеници
- 2.1.6 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици Ушће на реци Студеници
- 2.1.7 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА1 на реци Олдман
- 2.1.8 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА2 на реци Олдман
- 2.1.9 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА3 на реци Олдман
- 2.1.10 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА4 на реци Олдман
- 2.1.11 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА5 на реци Олдман
- 2.1.12 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА6 на реци Олдман
- 2.1.13 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА7 на реци Олдман
- 2.1.14 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Девићи на реци Студеници
- 2.1.15 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Мланча на реци Студеници
- 2.1.16 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Ушће на реци Студеници
- 2.1.17 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА1 на реци Олдман
- 2.1.18 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА2 на реци Олдман
- 2.1.19 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА3 на реци Олдман
- 2.1.20 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА4 на реци Олдман
- 2.1.21 – Коефицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА5 на реци Олдман





2.3.12 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА7 на реци Олдман и дневних на станици Девећи на реци Студеници

#### **Прилог 2.4: Аутокорелациона функција, Модел 2**

- 2.4.1 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних дневних серија на станицама Мланча и Ушће на реци Студеници
- 2.4.2 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Краљево и недељних на станици Девећи на реци Студеници
- 2.4.3 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама Мланча и Ушће на реци Студеници
- 2.4.4 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама Краљево и СА1 на реци Олдман
- 2.4.5 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА2 и СА3 на реци Олдман
- 2.4.6 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА4 и СА5 на реци Олдман
- 2.4.7 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА6 и СА7 на реци Олдман
- 2.4.8 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА8 и СА9 на реци Олдман
- 2.4.9 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА10 и СА11 на реци Олдман
- 2.4.10 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама Девећи и Мланча на реци Студеници
- 2.4.11 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама Ушће на реци Студеници и Краљево
- 2.4.12 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА1 и СА2 на реци Олдман
- 2.4.13 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА3 и СА4 на реци Олдман
- 2.4.14 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА5 и СА6 на реци Олдман
- 2.4.15 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА7 и СА8 на реци Олдман
- 2.4.16 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА9 и СА10 на реци Олдман
- 2.4.17 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА11 на реци Олдман

#### **Прилог 2.5: Крос-корелациона функција, Модел 1**

- 2.5.1 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних дневних серија на реци Студеници
- 2.5.2 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних недељних серија на реци Студеници
- 2.5.3 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних недељних серија на реци Олдман

2.5.4 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних месечних серија на реци Студеници

2.5.6 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних месечних серија на реци Олдман

### **Прилог 2.6: Крос-корелациона функција, Модел 2**

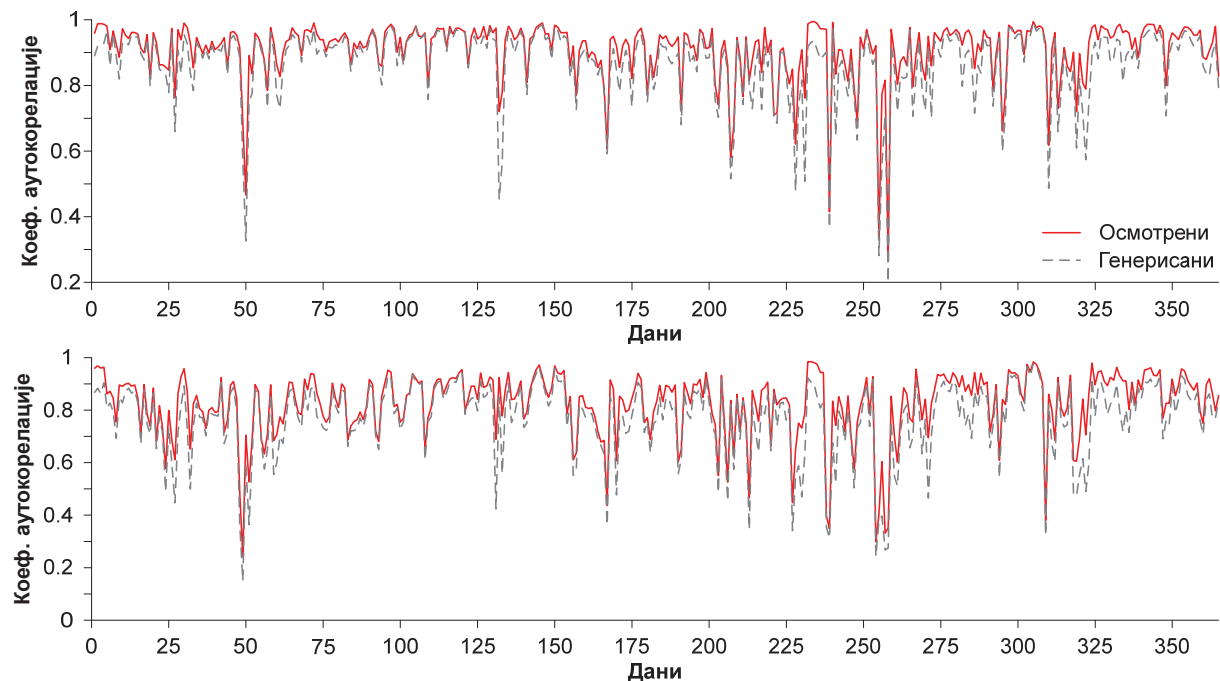
2.6.1 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних дневних серија на реци Студеници

2.6.2 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних недељних серија на реци Студеници

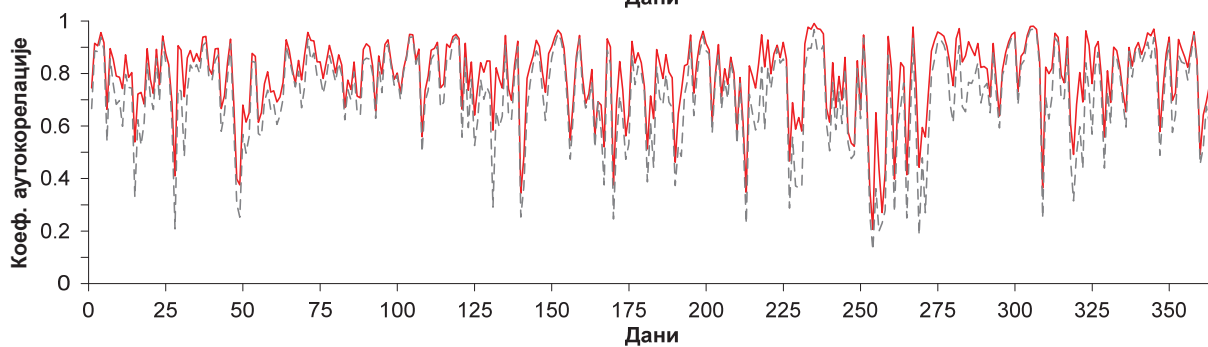
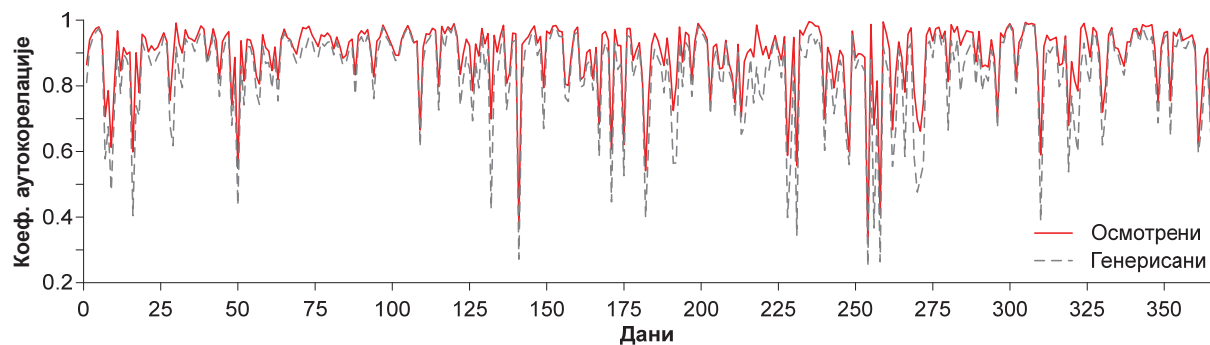
2.6.3 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних недељних серија на реци Олдман

2.6.4 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних месечних серија на реци Студеници

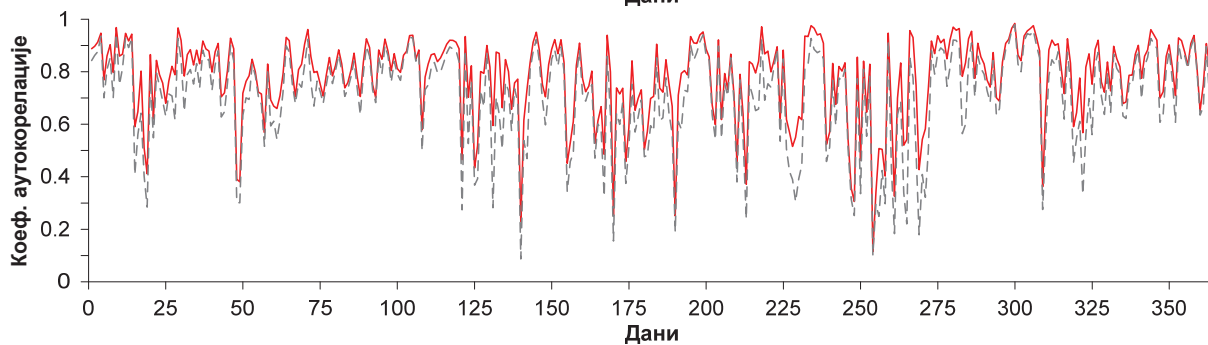
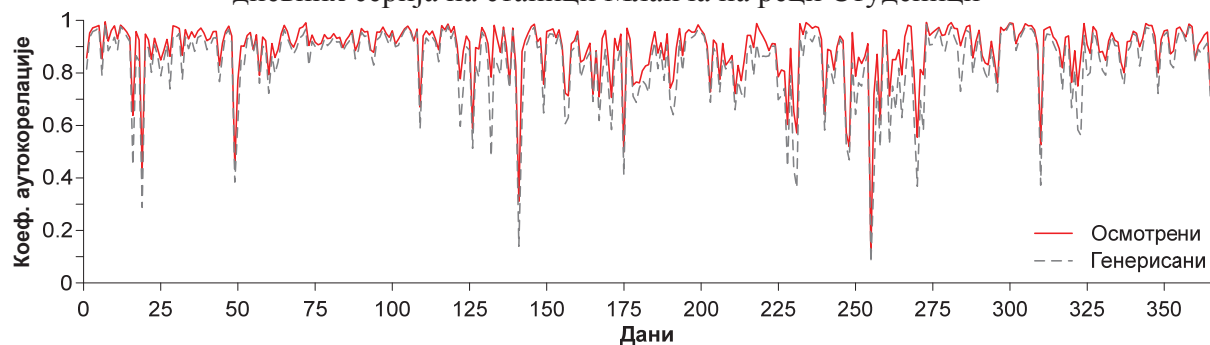
2.6.5 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних месечних серија на реци Олдман



2.1.1 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Девићи на реци Студеници

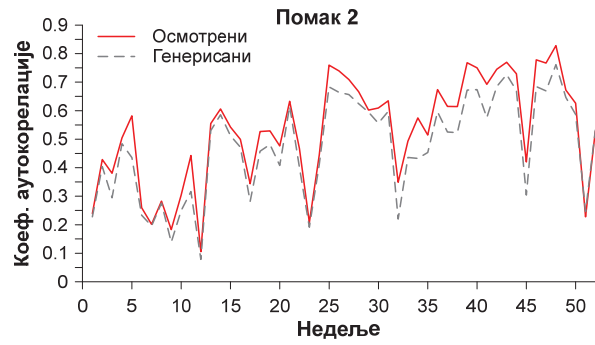
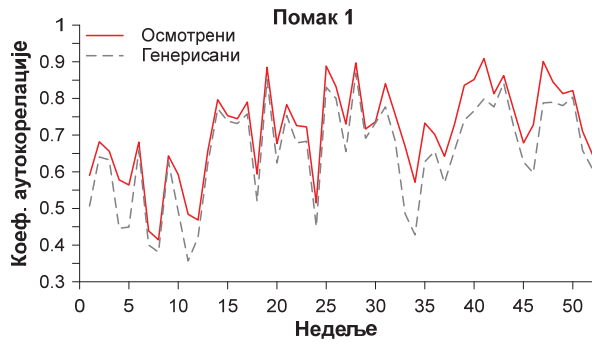


2.1.2 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Мланча на реци Студеници

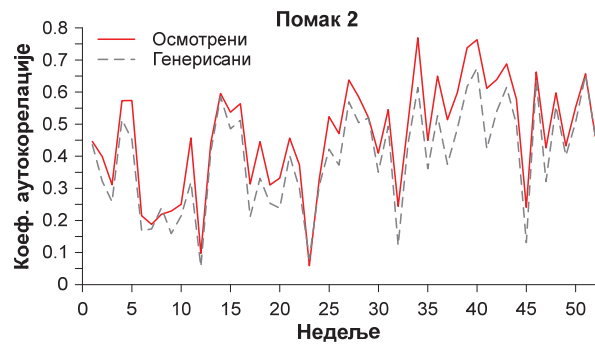
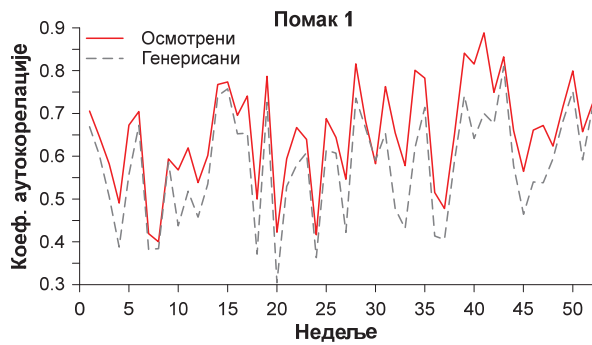


2.1.3 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Ушће на реци Студеници

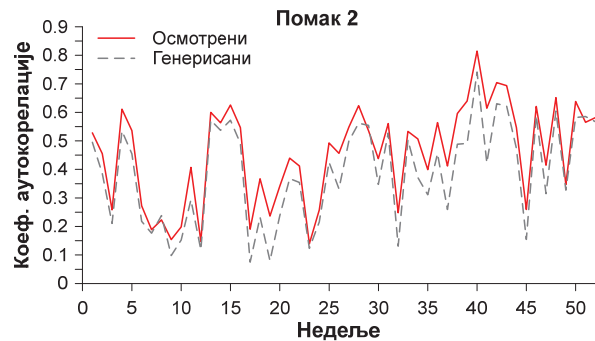
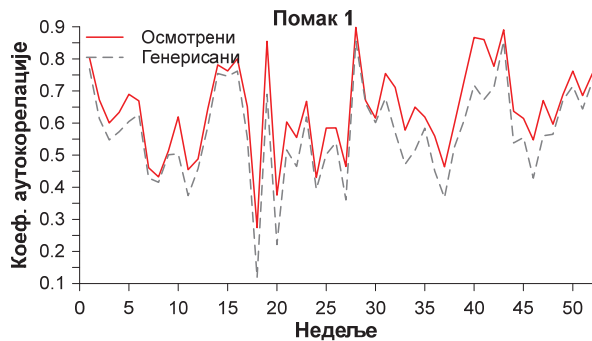




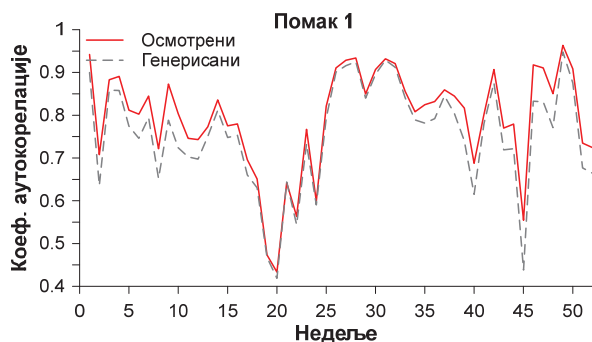
2.1.4 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици Девићи на реци Студеници



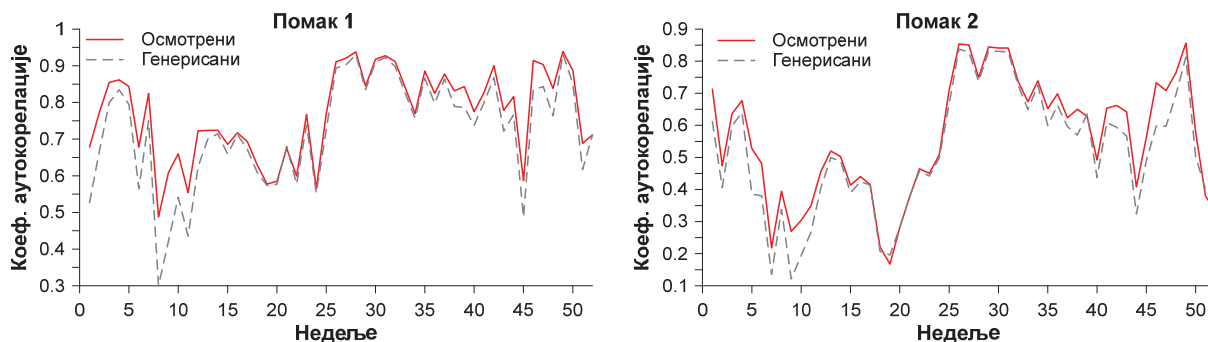
2.1.5 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици Мланча на реци Студеници



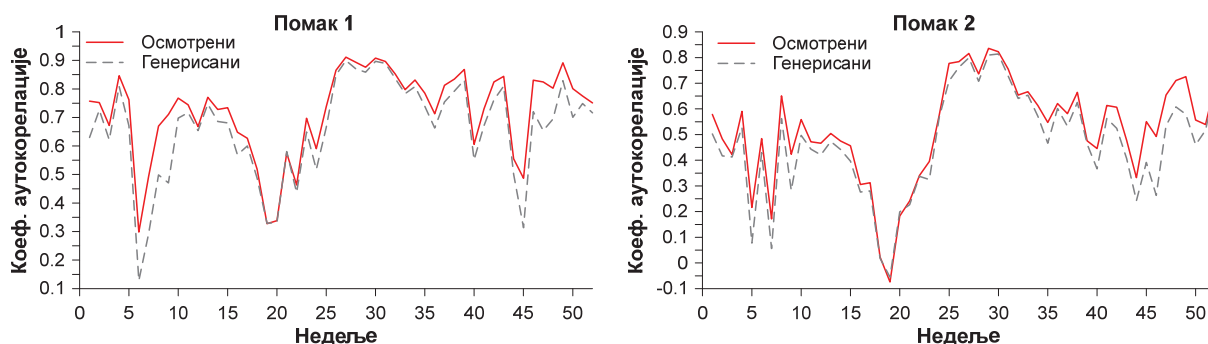
2.1.6 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици Ушће на реци Студеници



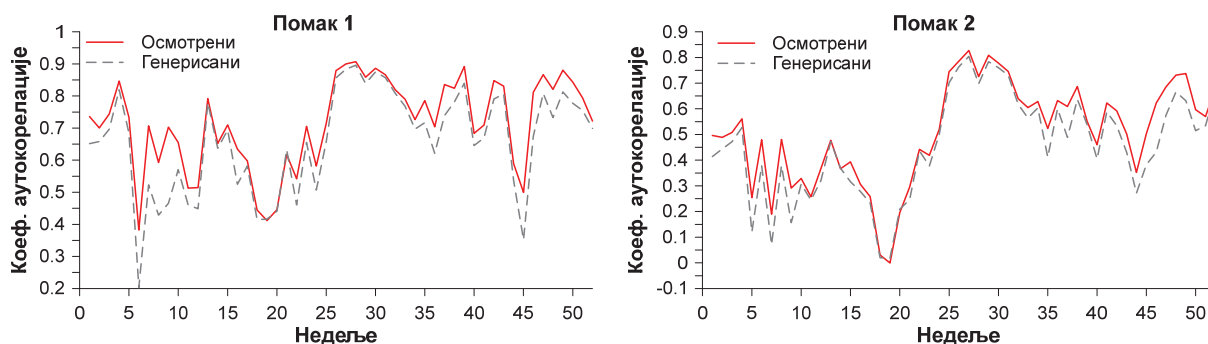
2.1.7 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА1 на реци Олдман



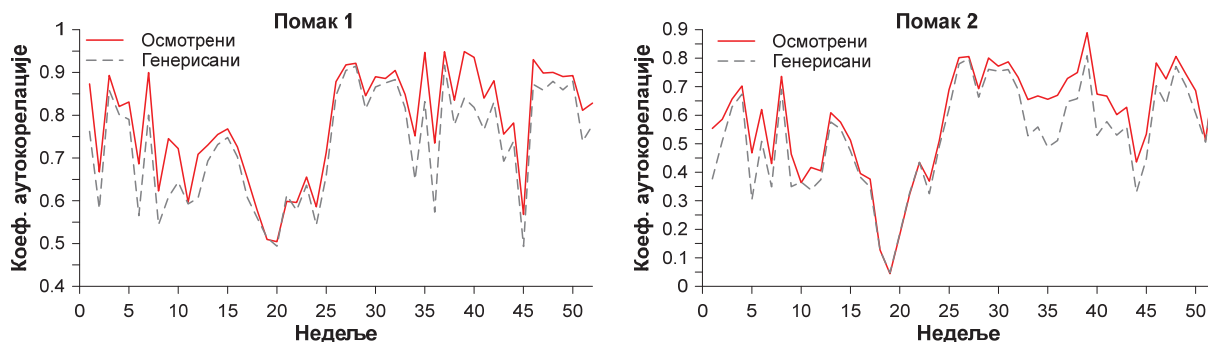
2.1.8 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА2 на реци Олдман



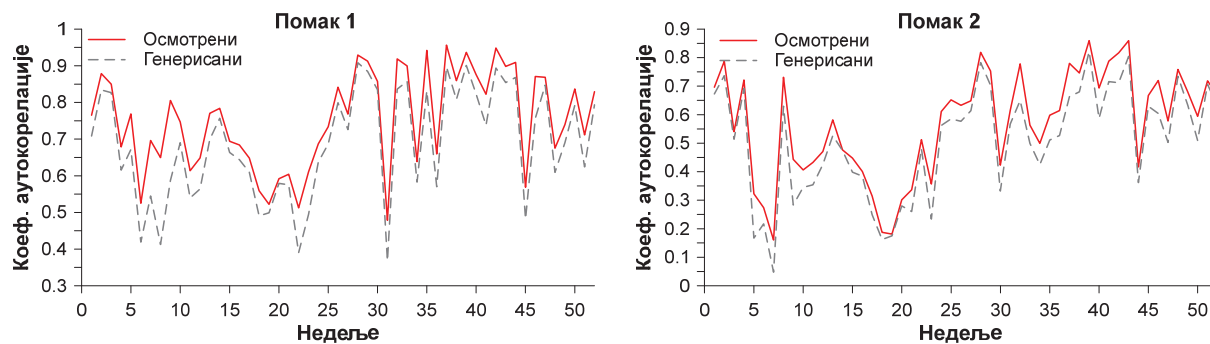
2.1.9 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА3 на реци Олдман



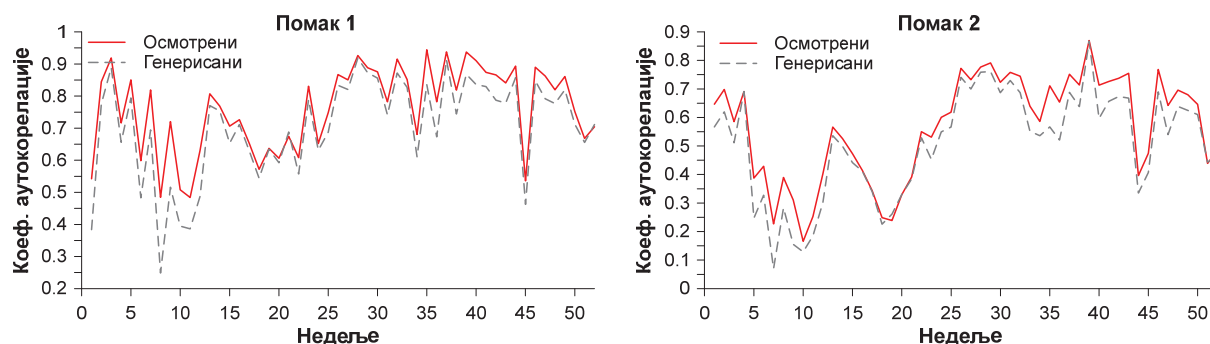
2.1.10 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА4 на реци Олдман



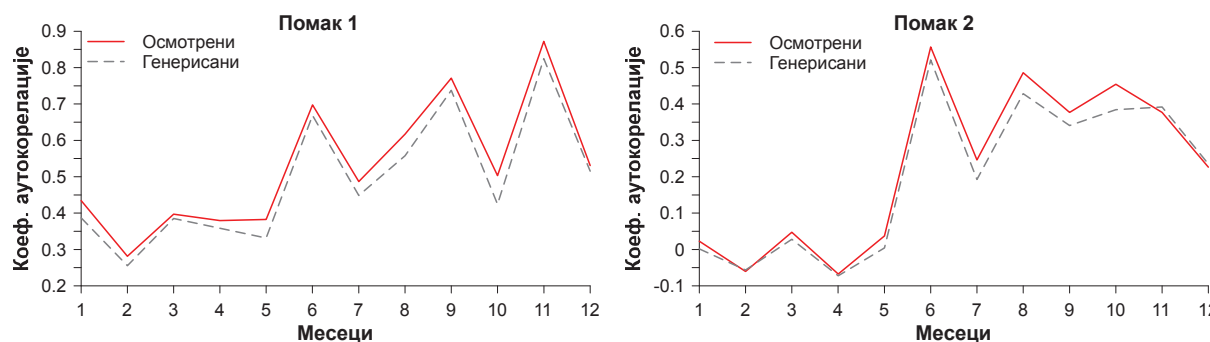
2.1.11 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА5 на реци Олдман



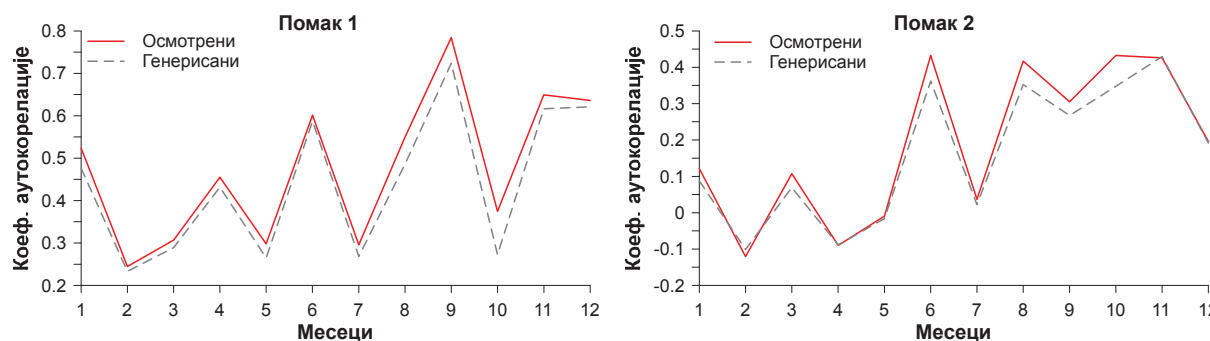
2.1.12 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА6 на реци Олдман



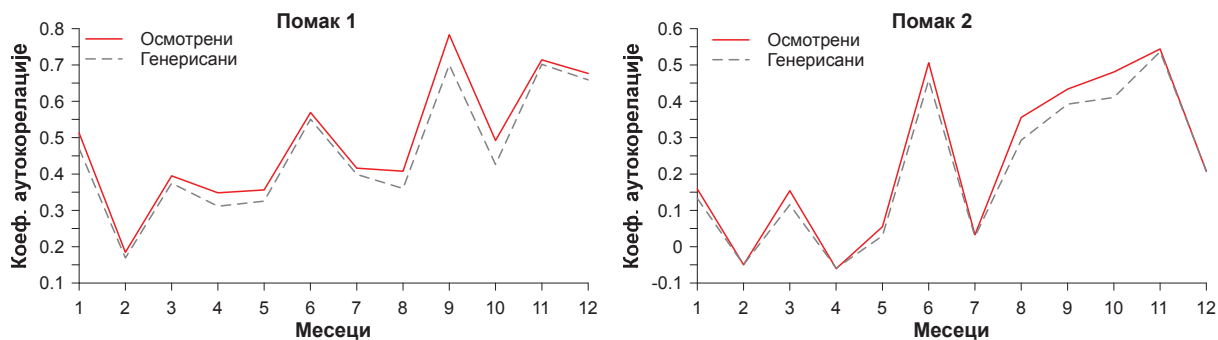
2.1.13 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА7 на реци Олдман



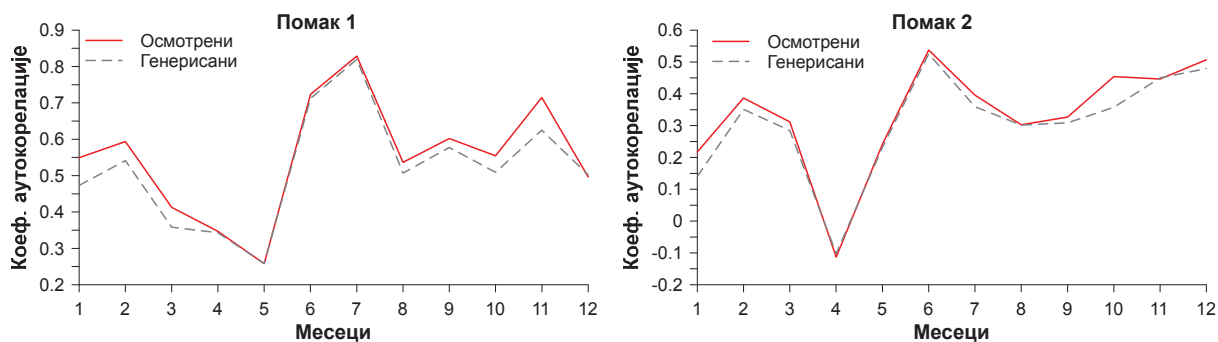
2.1.14 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Девићи на реци Студеници



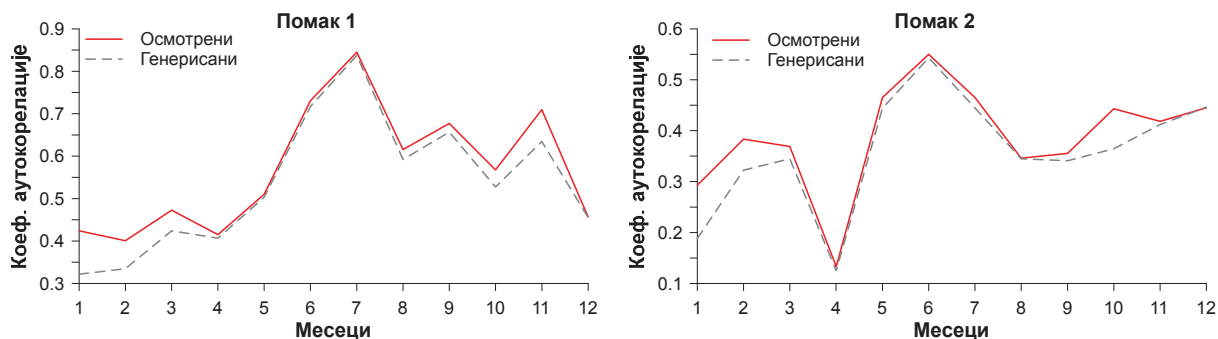
2.1.15 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Мланча на реци Студеници



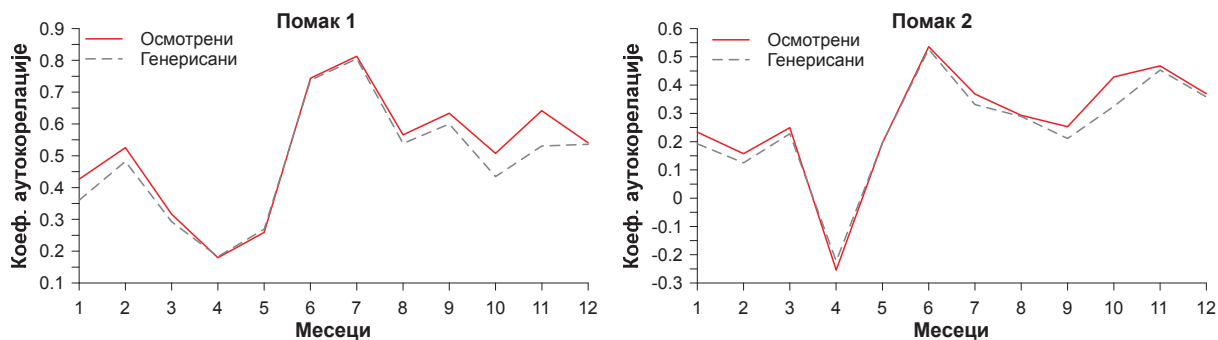
2.1.16 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Ушће на реци Студеници



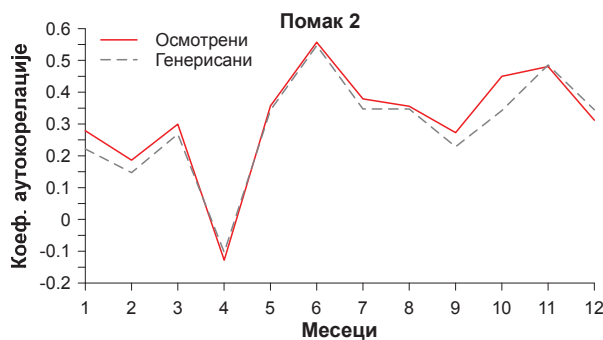
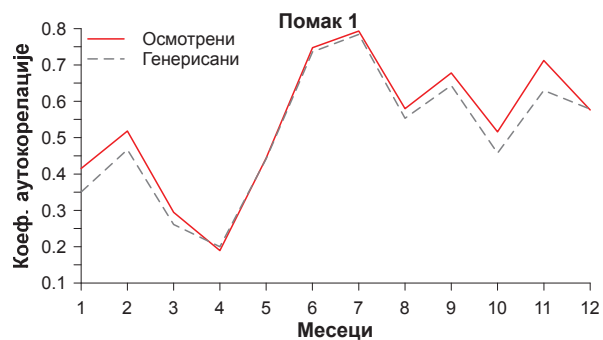
2.1.17 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА1 на реци Олдман



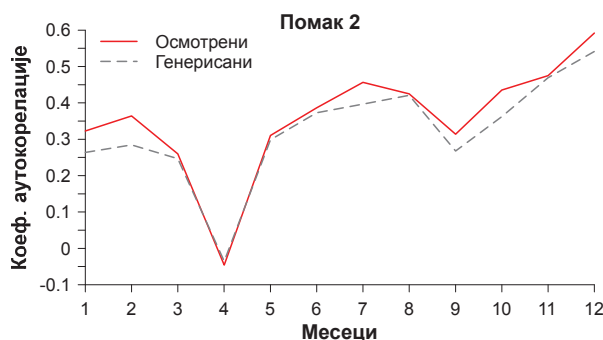
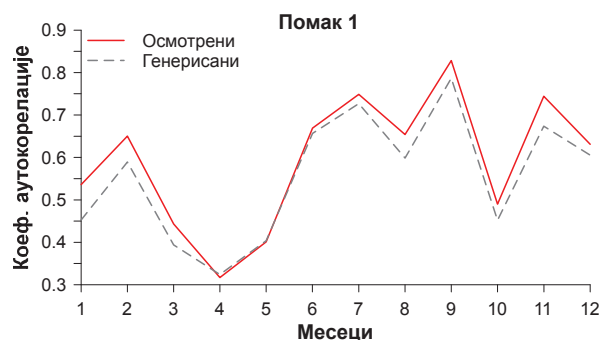
2.1.18 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА2 на реци Олдман



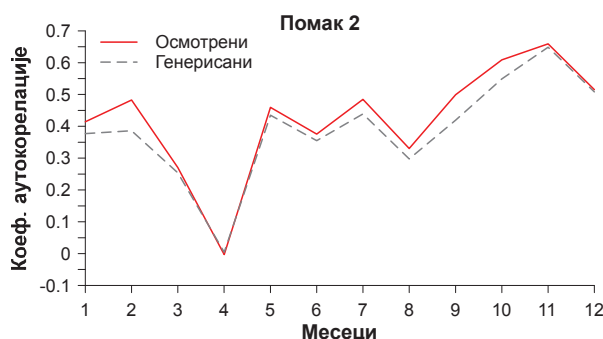
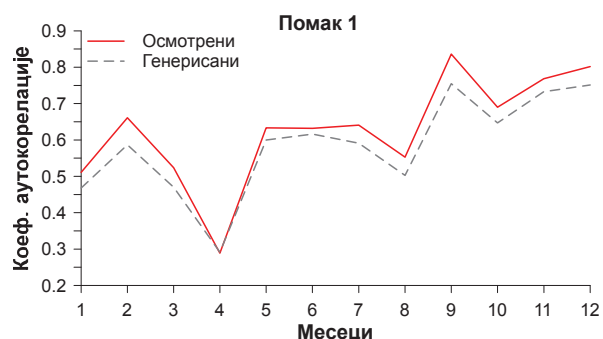
2.1.19 – Коefицијенти аутокорејације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА3 на реци Олдман



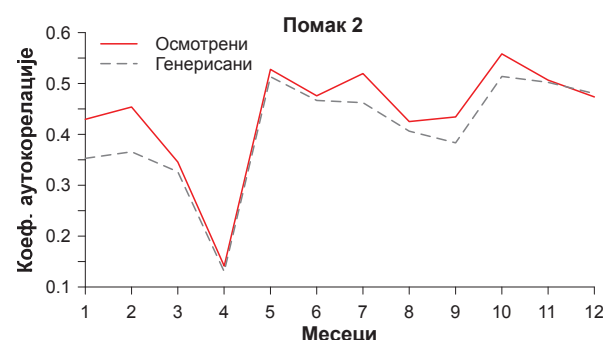
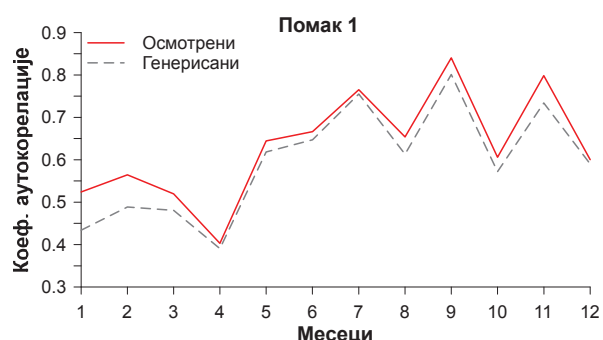
2.1.20 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА4 на реци Олдман



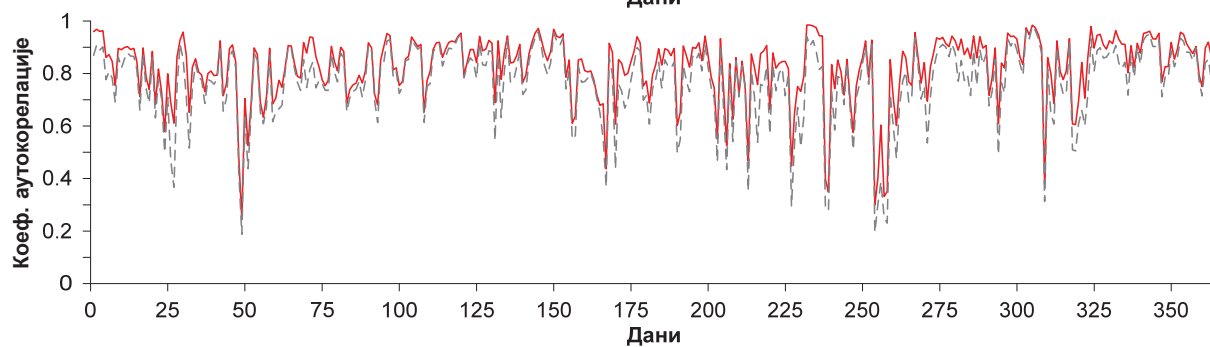
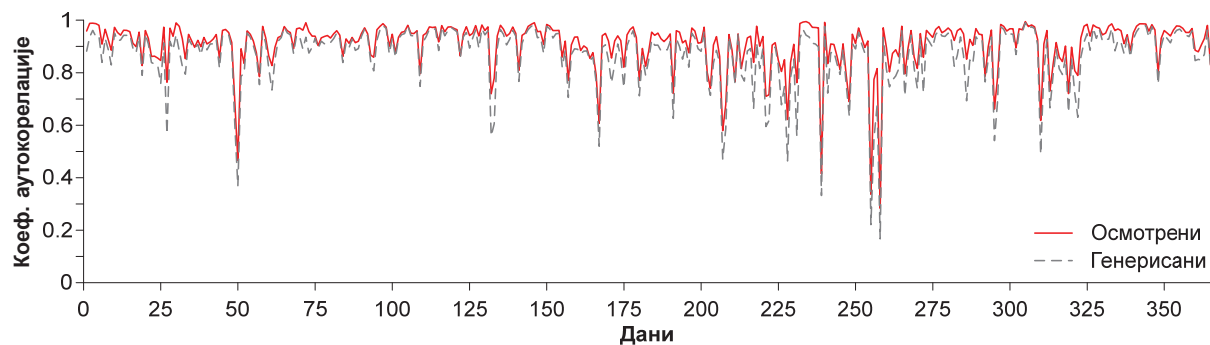
2.1.21 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА5 на реци Олдман



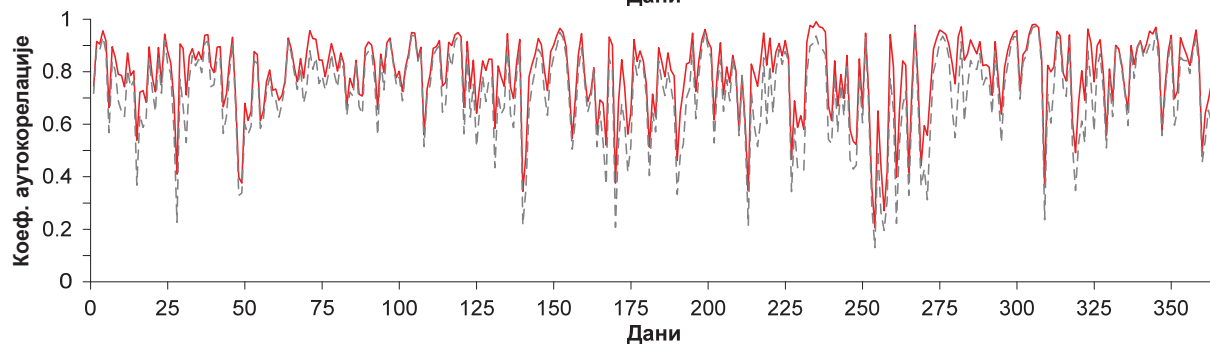
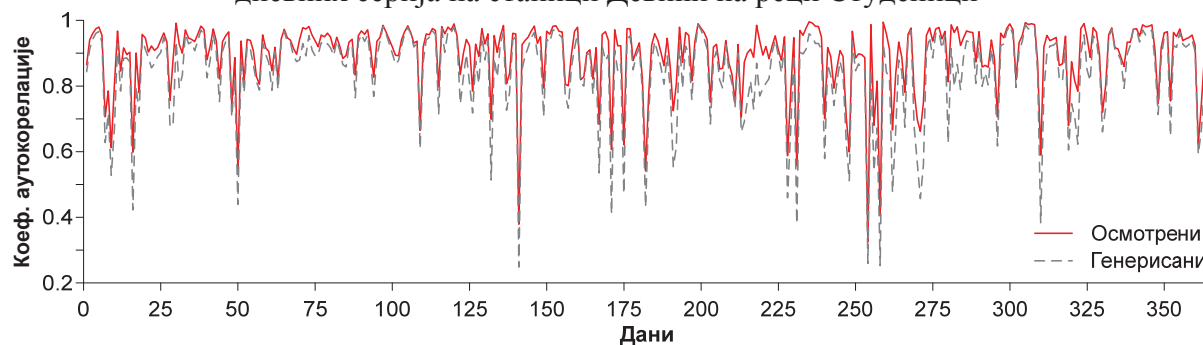
2.1.22 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА6 на реци Олдман



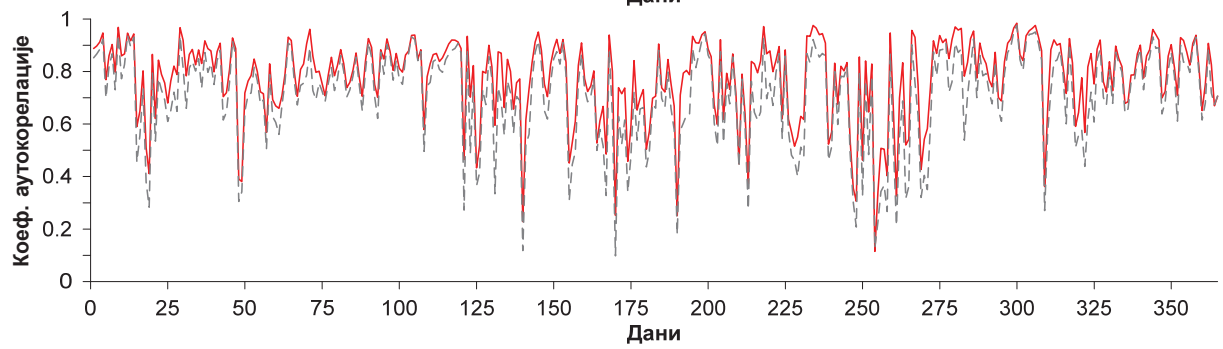
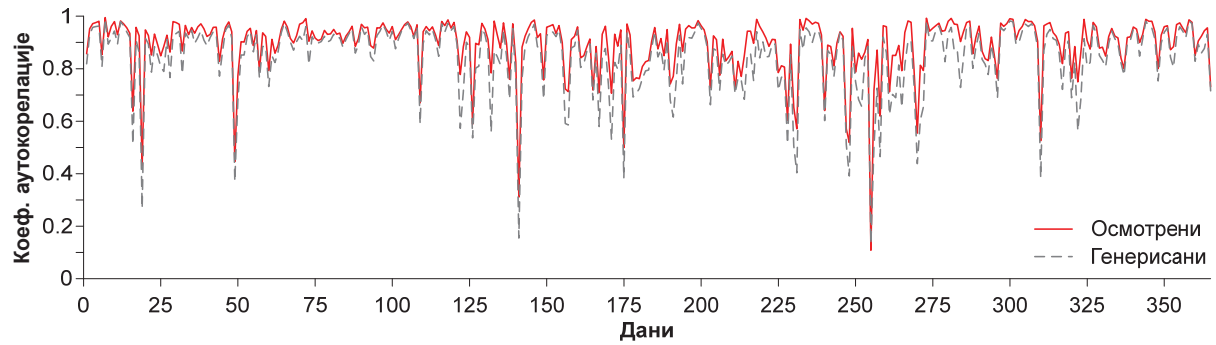
2.1.23 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА7 на реци Олдман



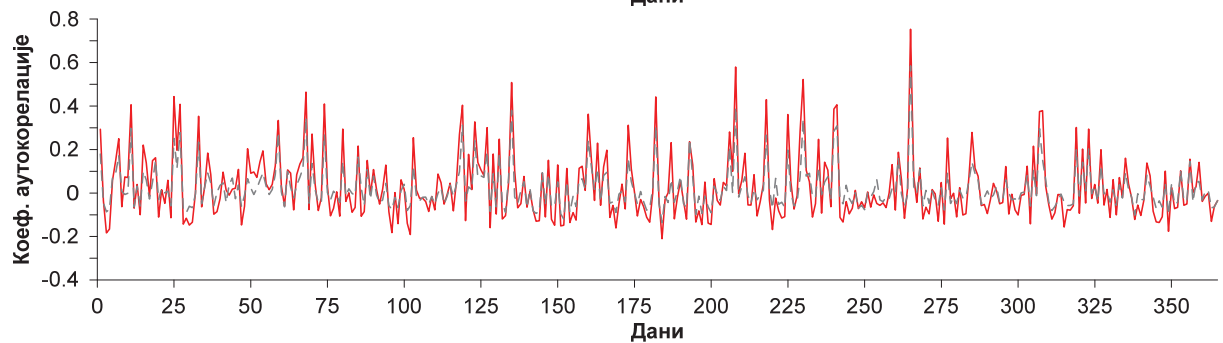
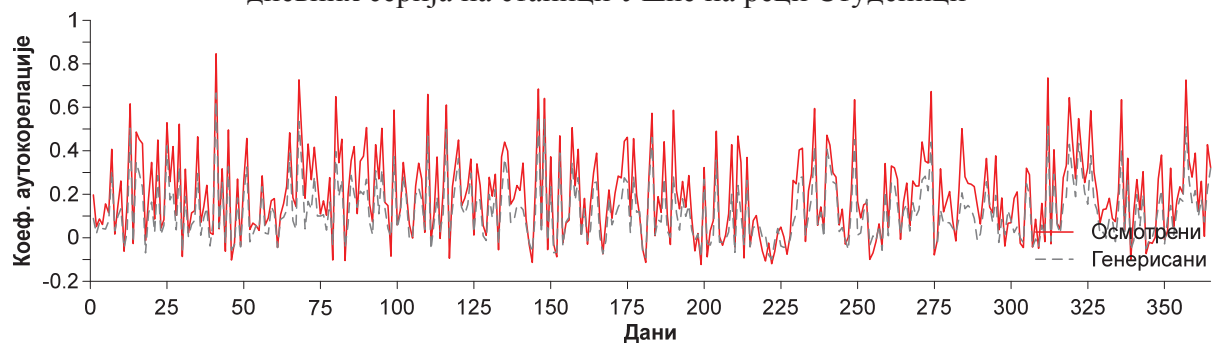
2.2.1 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Девићи на реци Студеници



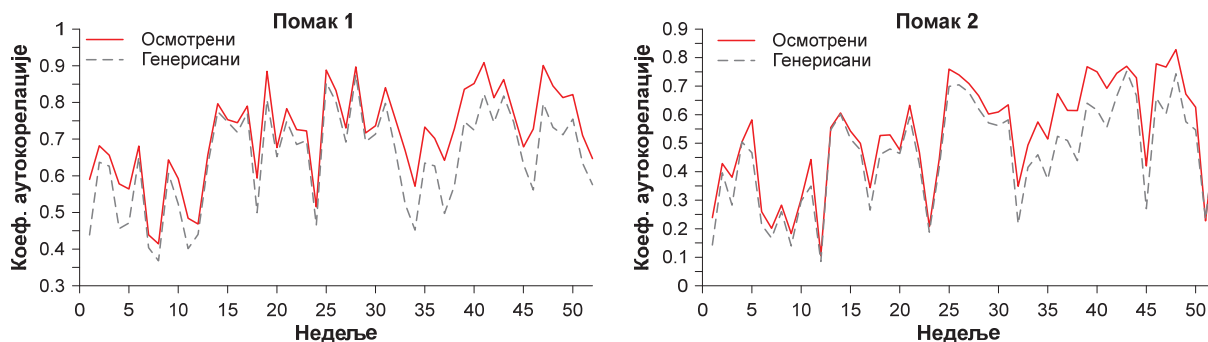
2.2.2 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Мланча на реци Студеници



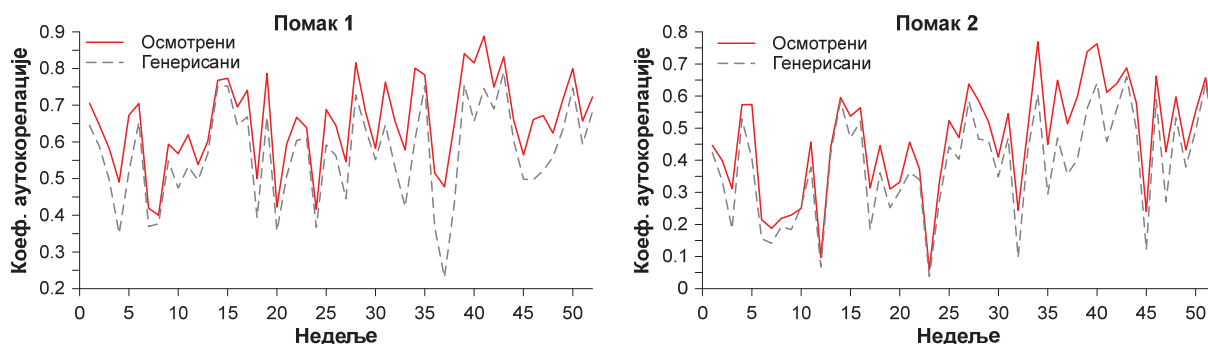
2.2.3 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Ушће на реци Студеници



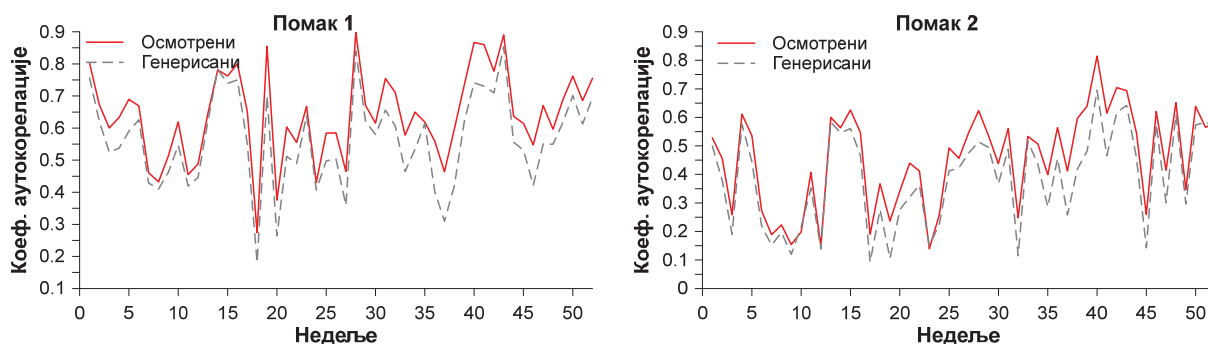
2.2.4 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Краљево



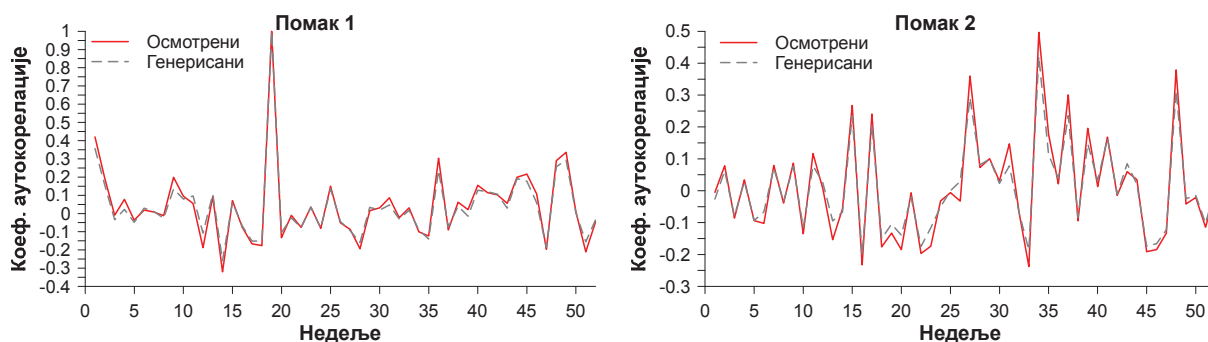
2.2.5 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрих и генерисаних недељних серија на станици Девићи на реци Студеници



2.2.6 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрих и генерисаних недељних серија на станици Мланча на реци Студеници

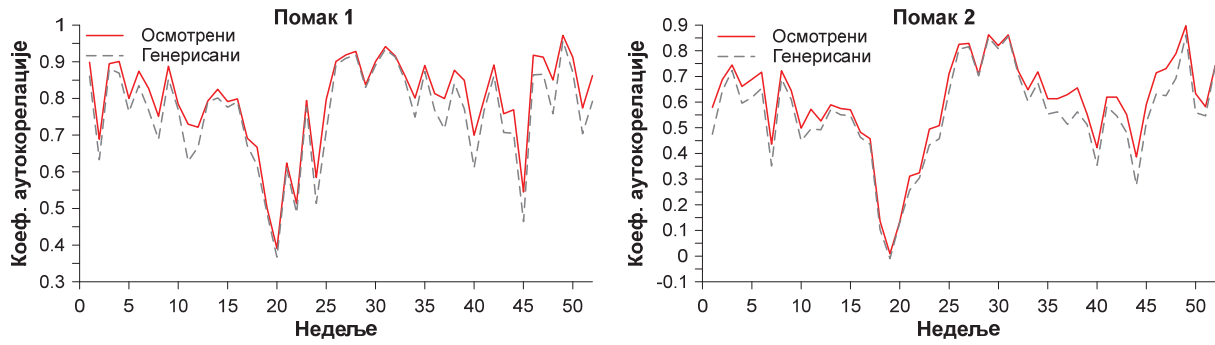


2.2.7 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрих и генерисаних недељних серија на станици Ушће на реци Студеници

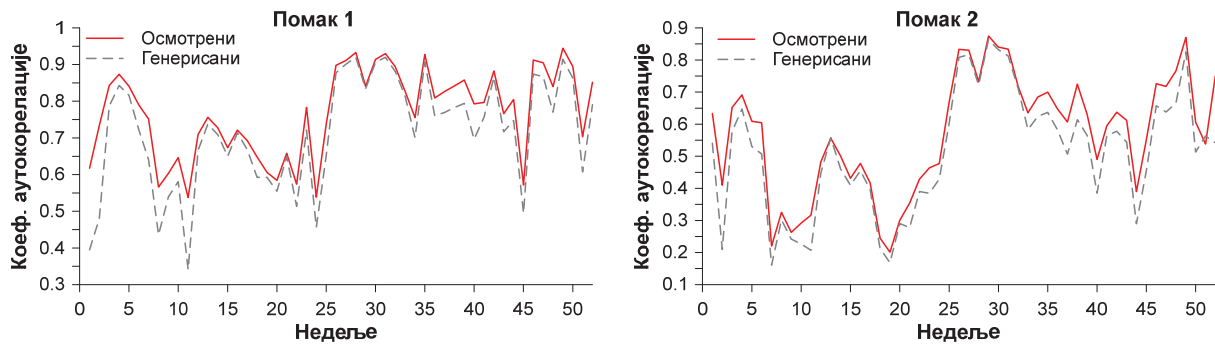


2.2.8 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрих и генерисаних недељних серија на станици Краљево

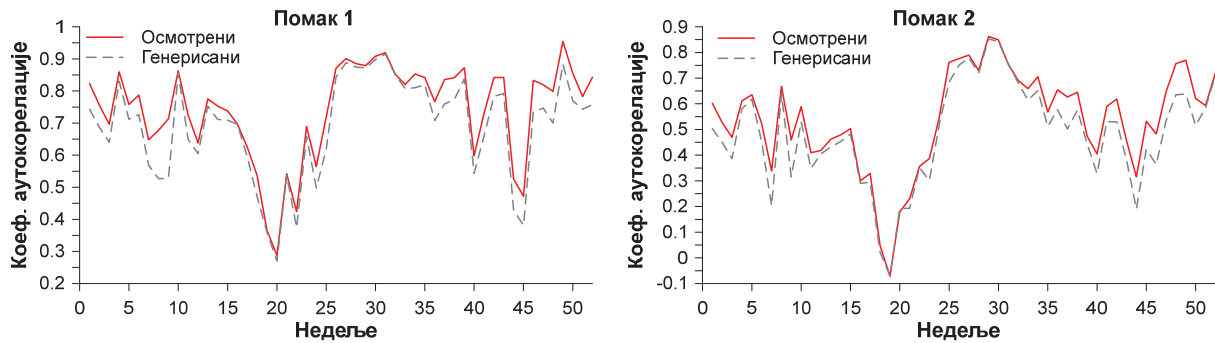




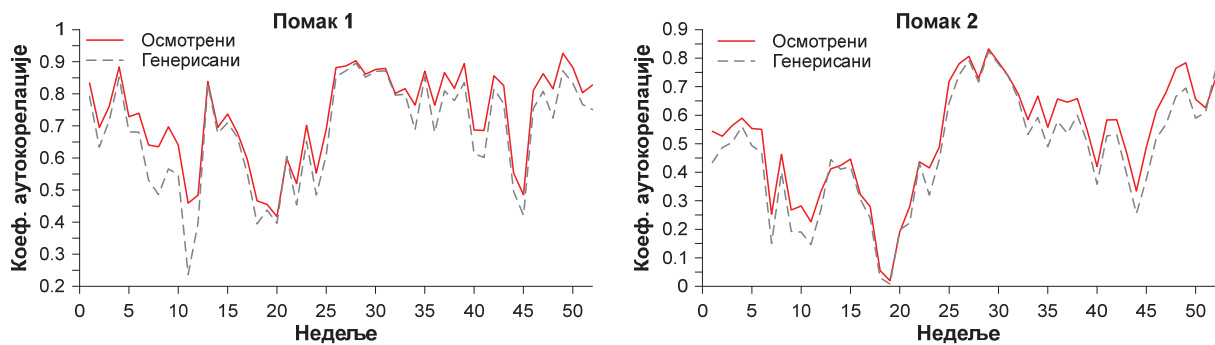
2.2.9 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА1 на реци Олдман



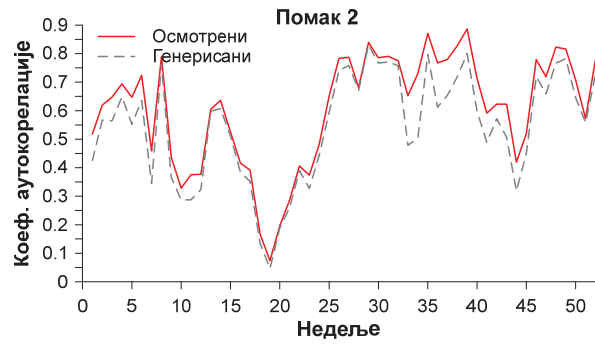
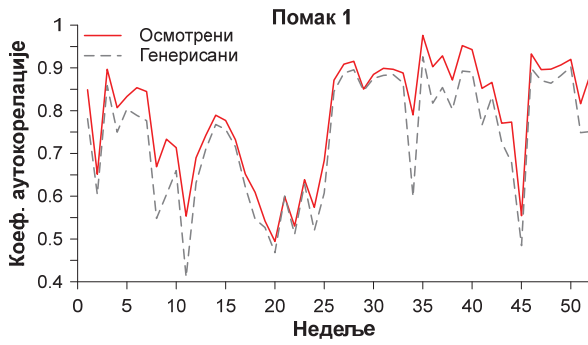
2.2.10 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА2 на реци Олдман



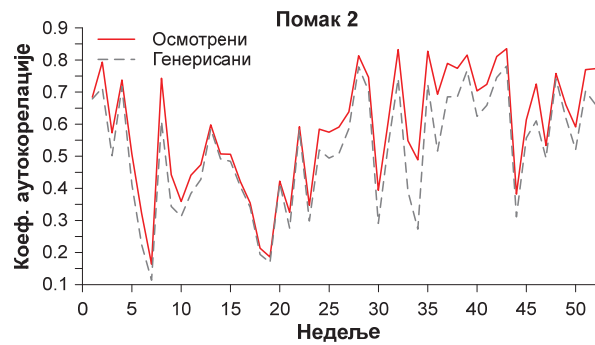
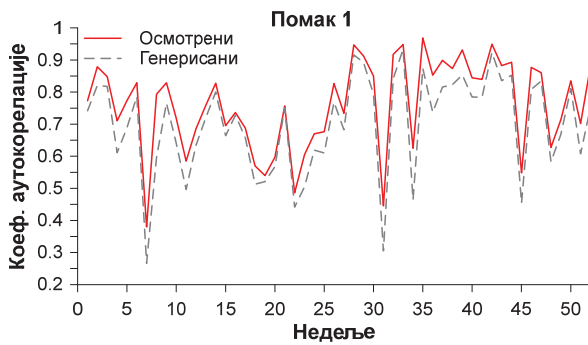
2.2.11 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА3 на реци Олдман



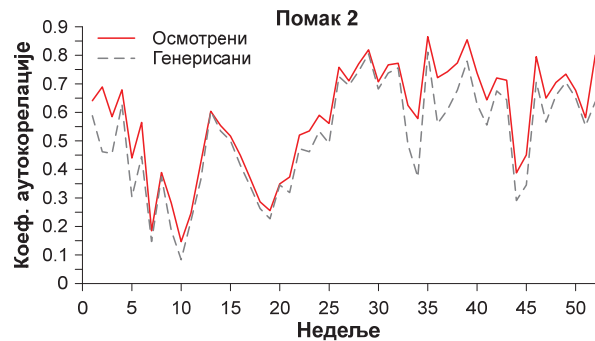
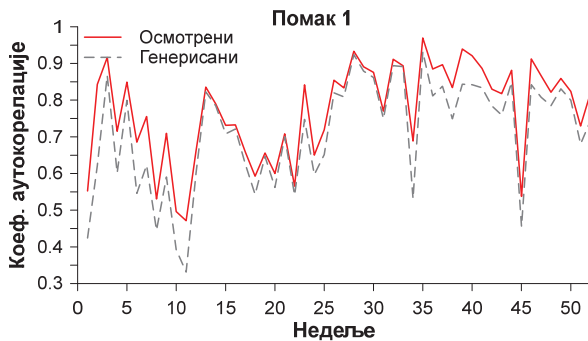
2.2.12 – Коefицијенти аутокорелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА4 на реци Олдман



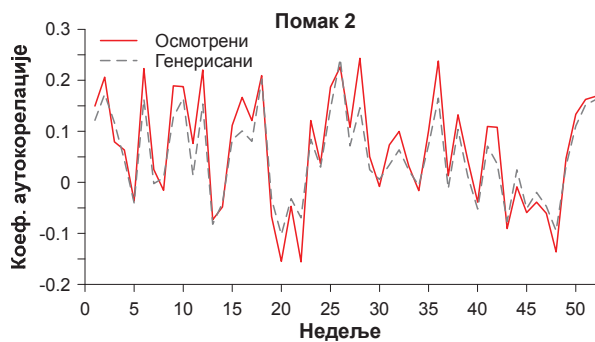
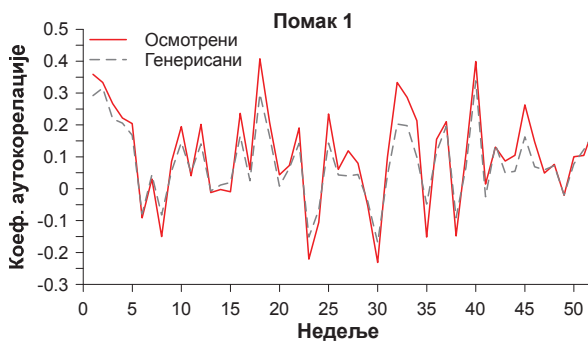
2.2.13 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА5 на реци Олдман



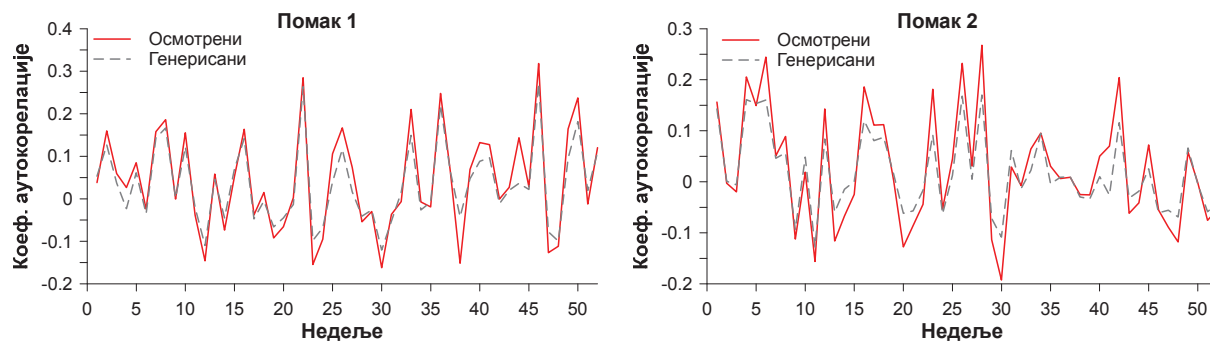
2.2.14 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА6 на реци Олдман



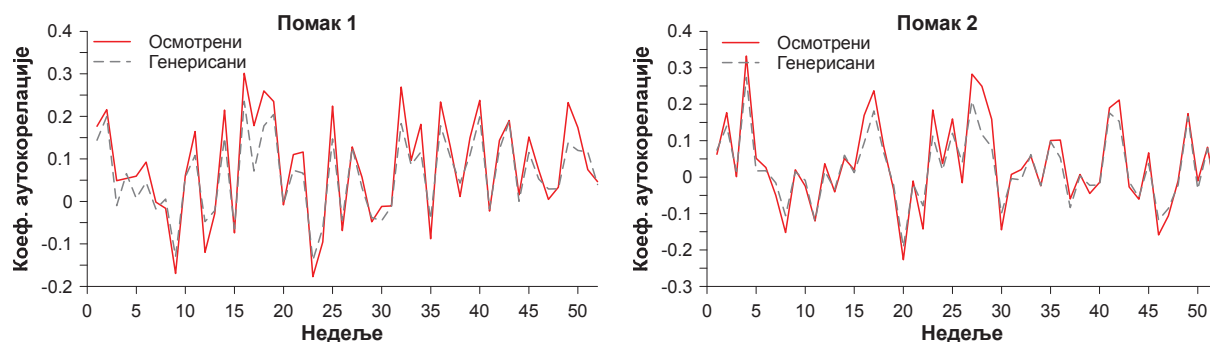
2.2.15 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА7 на реци Олдман



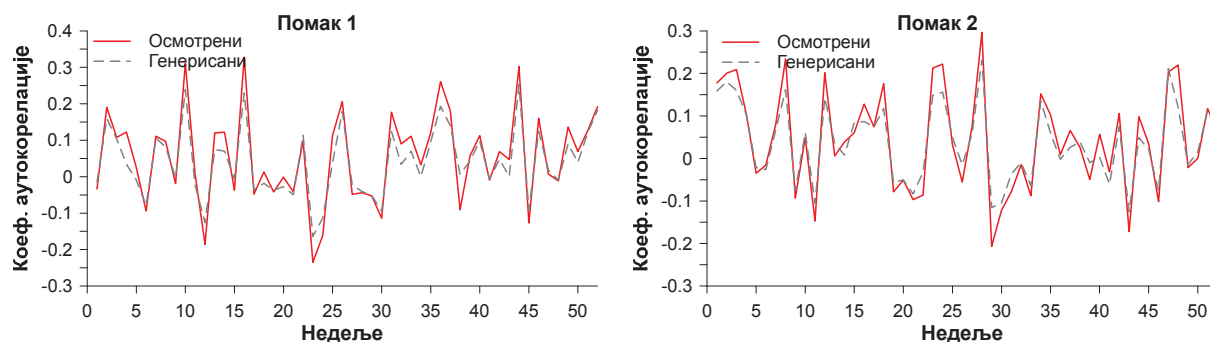
2.2.16 – Коefицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА8



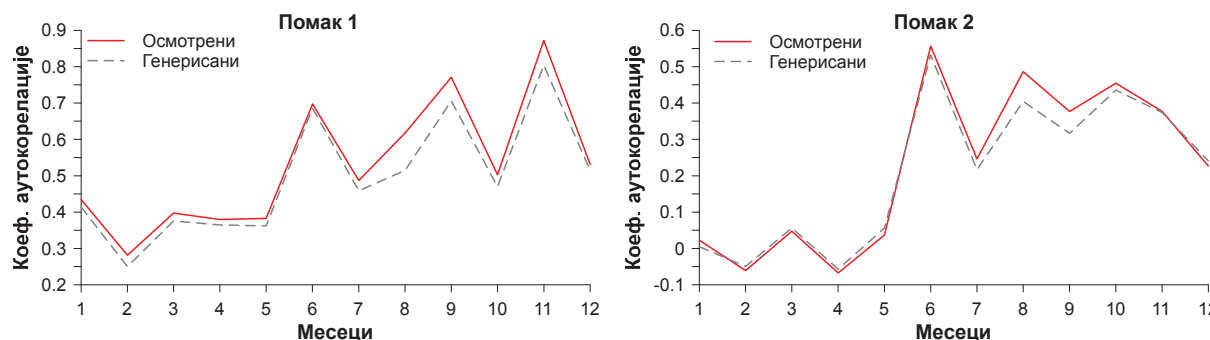
2.2.17 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА9



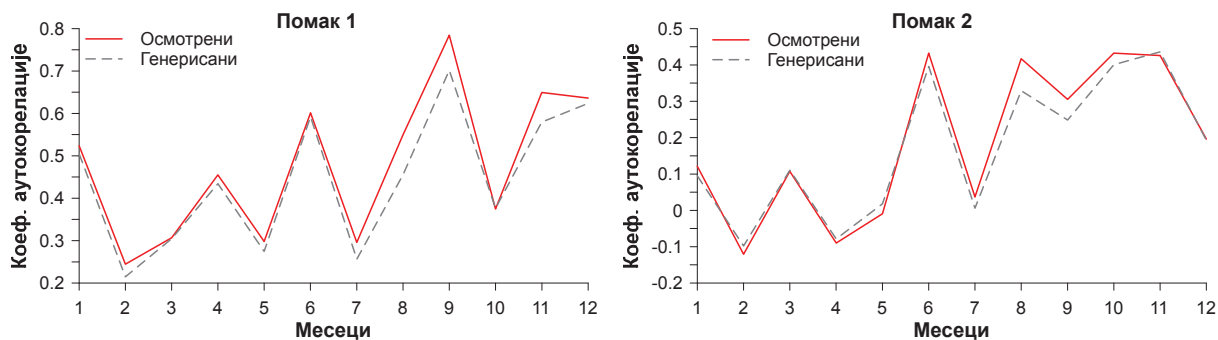
2.2.18 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА10



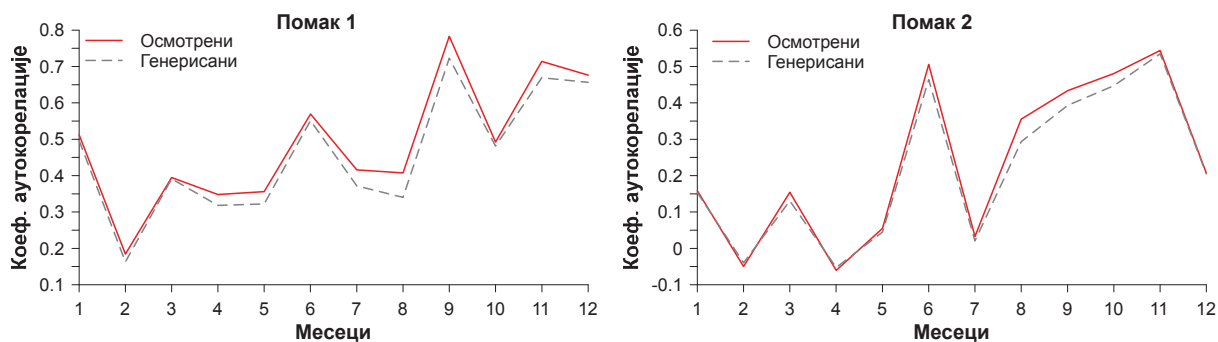
2.2.19 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних недељних серија на станици СА11



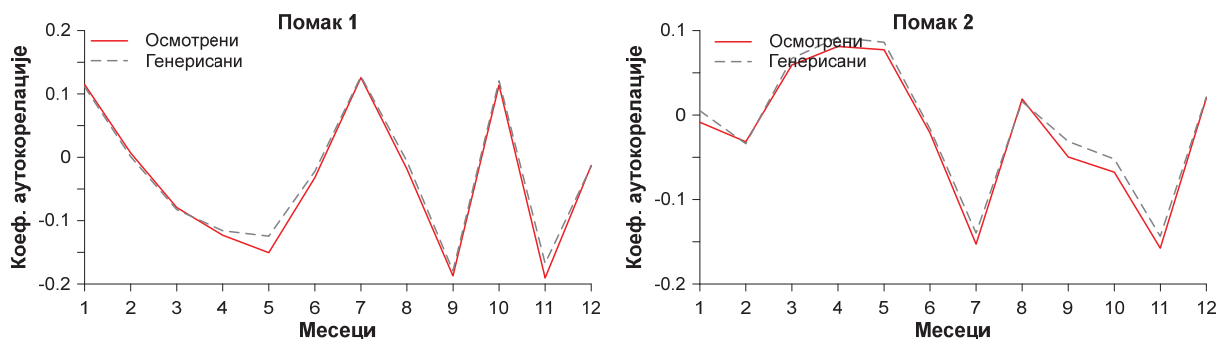
2.2.20 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Дeвићи на реци Студеници



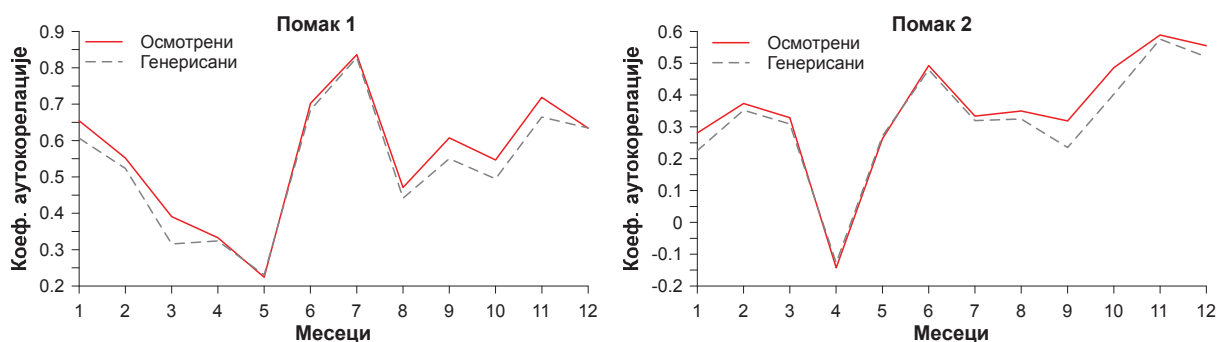
2.2.21 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Мланча на реци Студеници



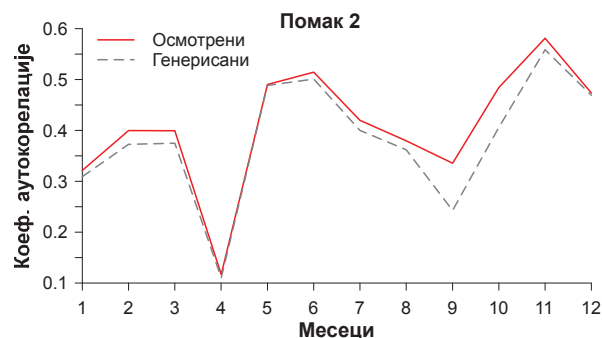
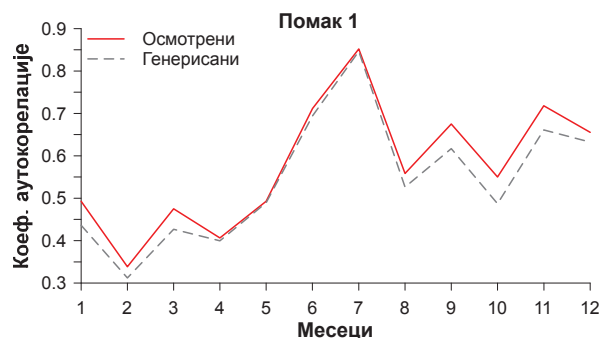
2.2.22 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Ушће на реци Студеници



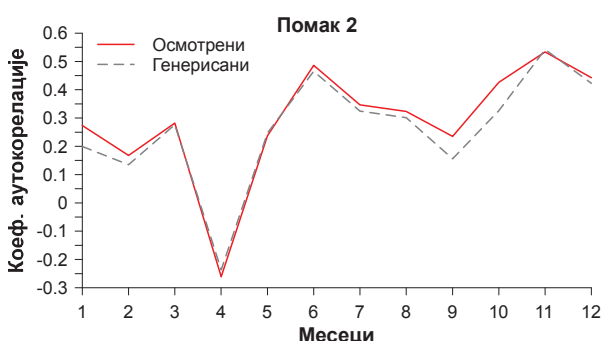
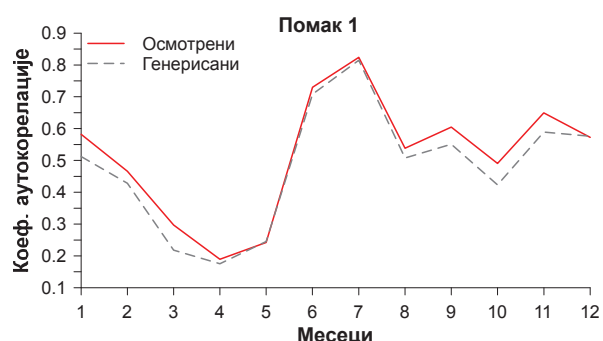
2.2.23 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици Краљево



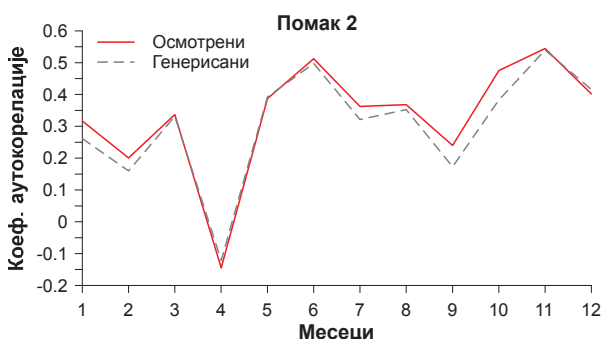
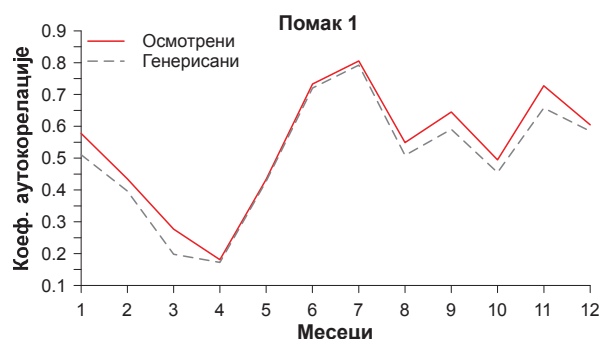
2.2.24 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА1 на реци Олдман



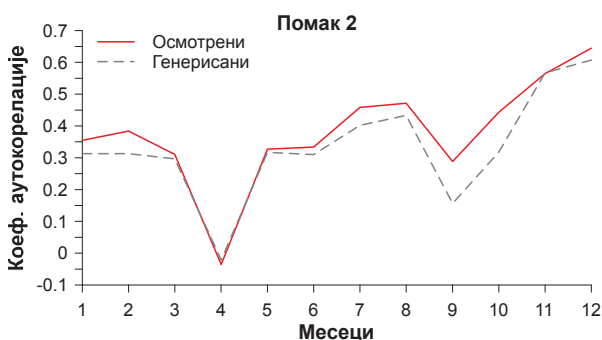
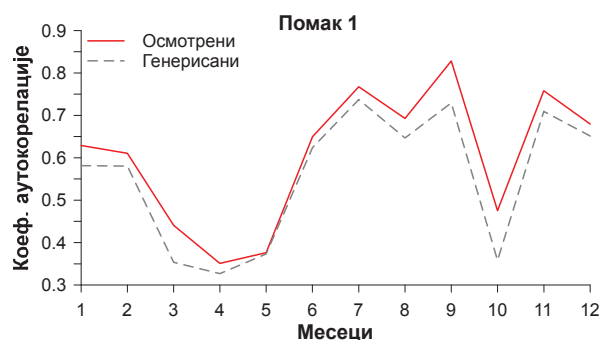
2.2.25 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА2 на реци Олдман



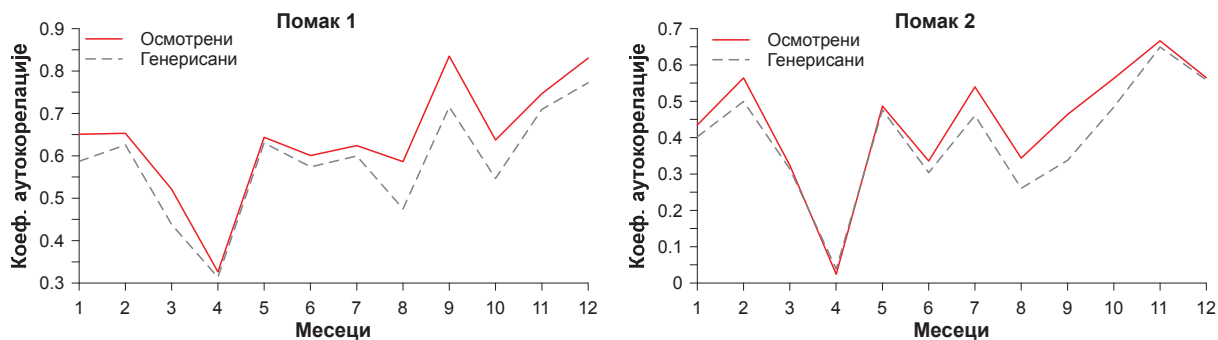
2.2.26 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА3 на реци Олдман



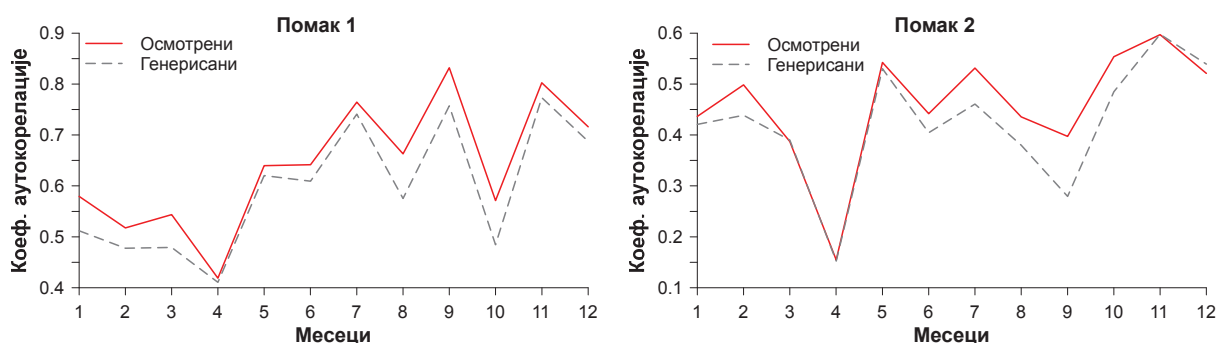
2.2.27 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА4 на реци Олдман



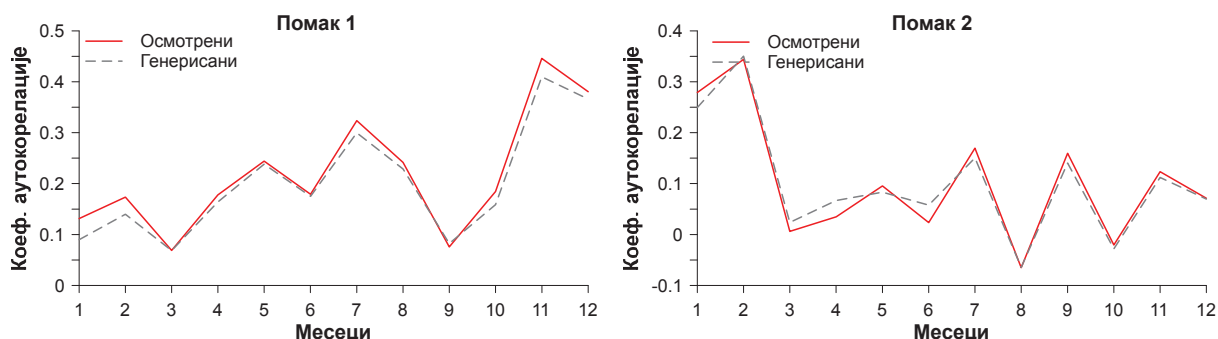
2.2.28 – Коэффициенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА5 на реци Олдман



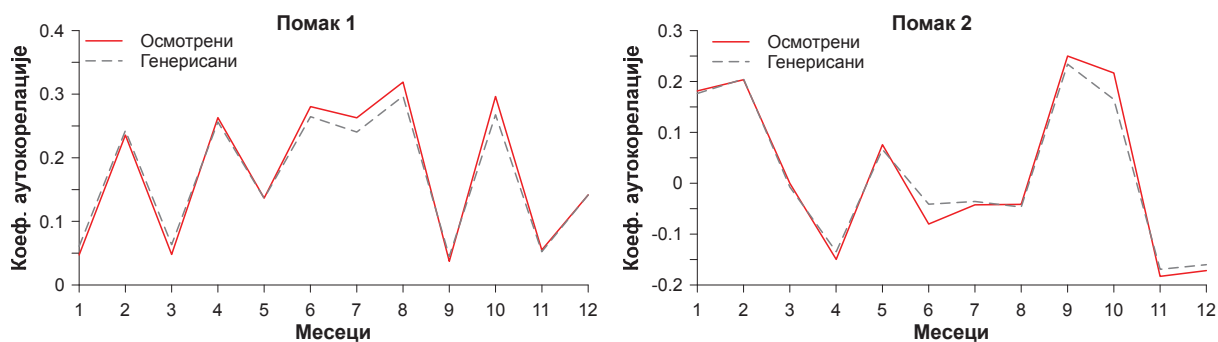
2.2.29 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА6 на реци Олдман



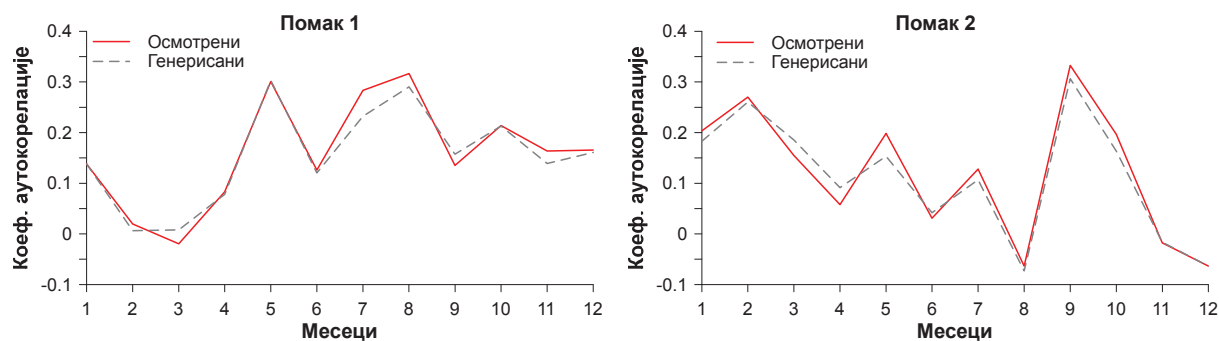
2.2.30 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА7 на реци Олдман



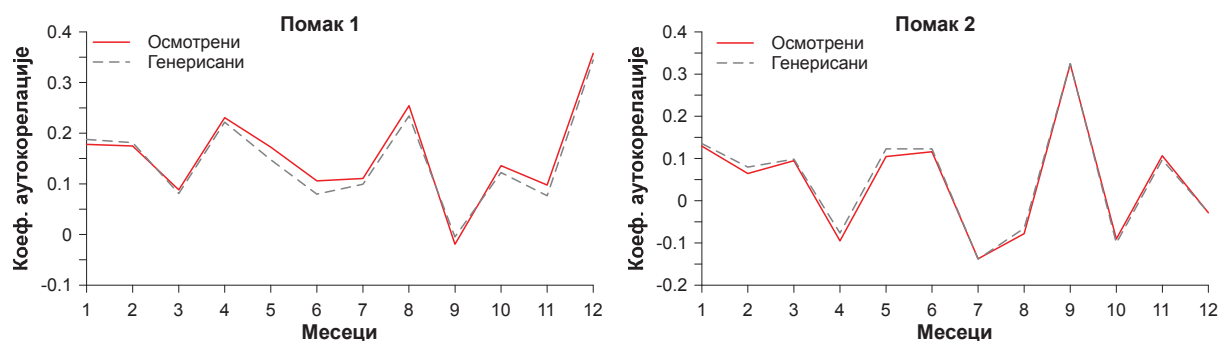
2.2.31 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА8 на реци Олдман



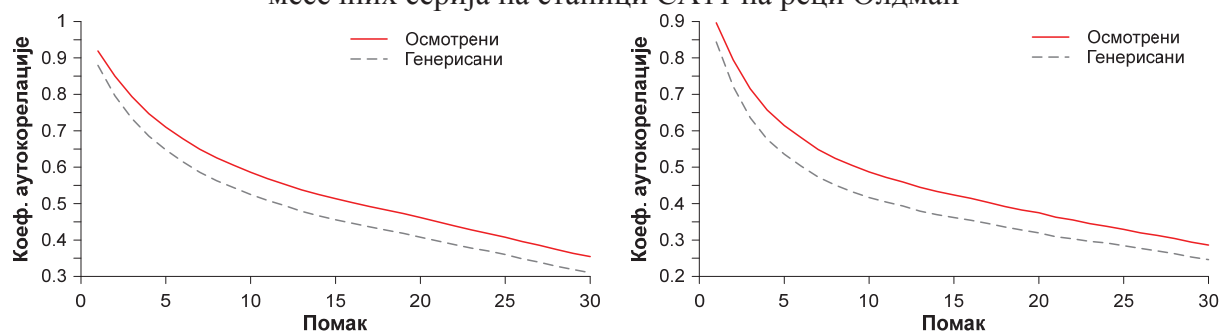
2.2.32 – Коefицијенти аутокореелације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА9 на реци Олдман



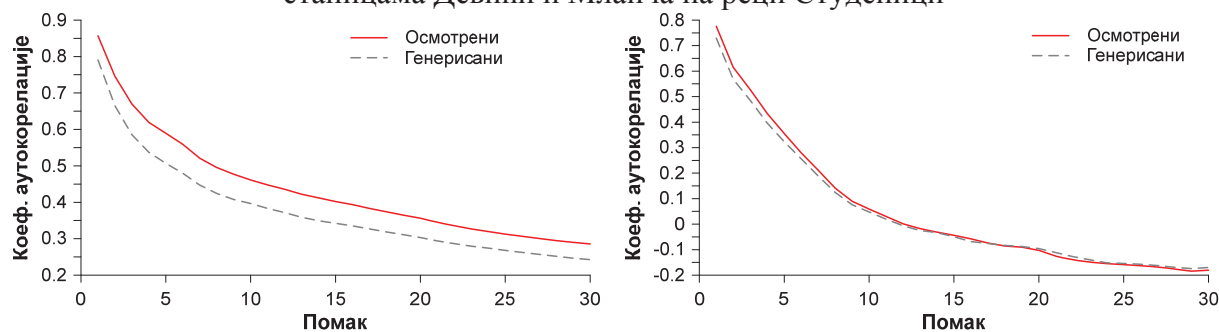
2.2.33 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА10 на реци Олдман



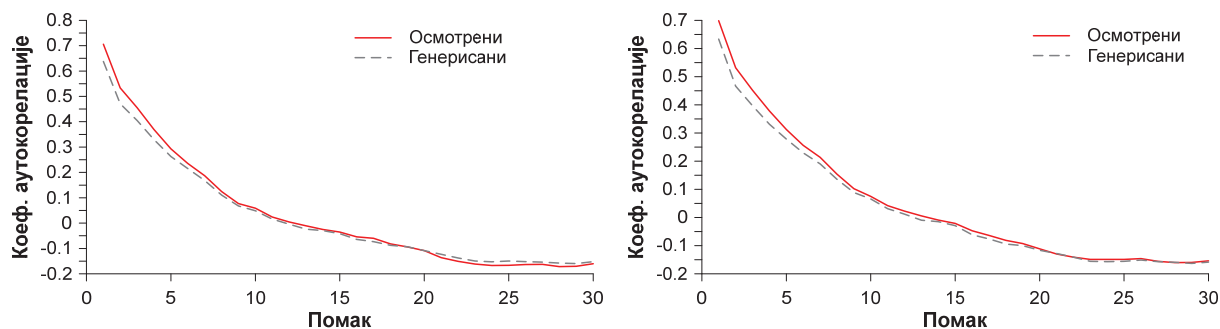
2.2.34 – Коефицијенти аутокорељације првог и другог реда осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА11 на реци Олдман



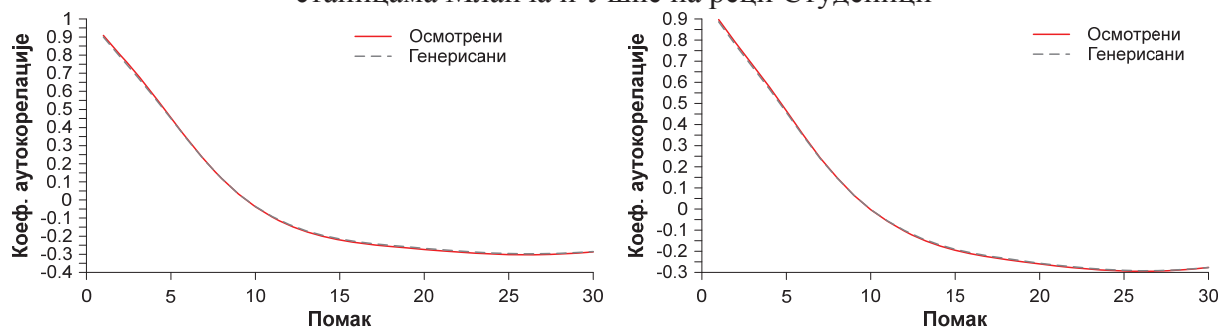
2.3.1 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних дневних серија на станицама Девићи и Мланча на реци Студеници



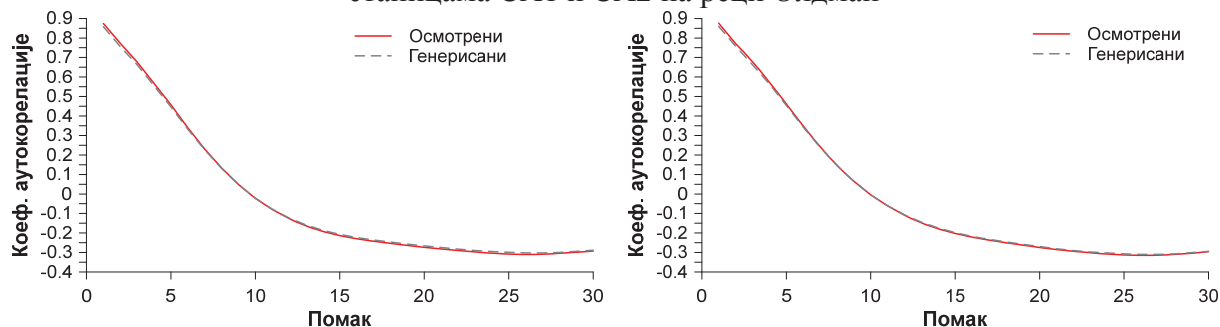
2.3.2 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Ушће и недељних серија на станици Девићи на реци Студеници



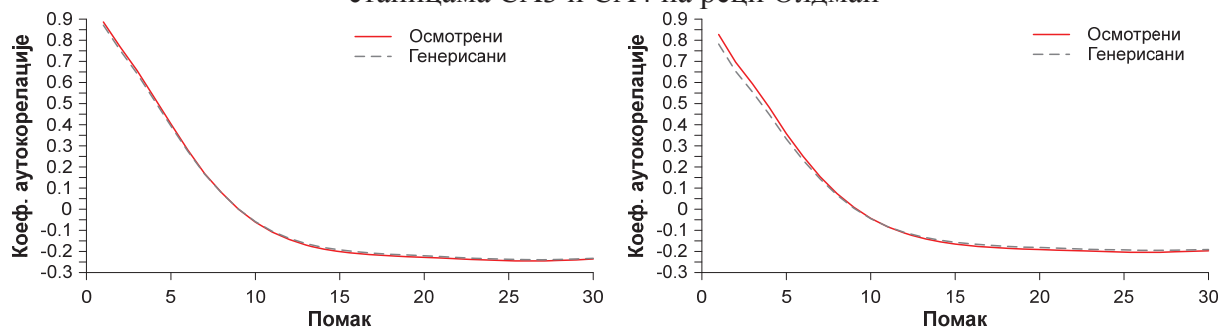
2.3.3 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама Мланча и Ушће на реци Студеници



2.3.4 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА1 и СА2 на реци Олдман

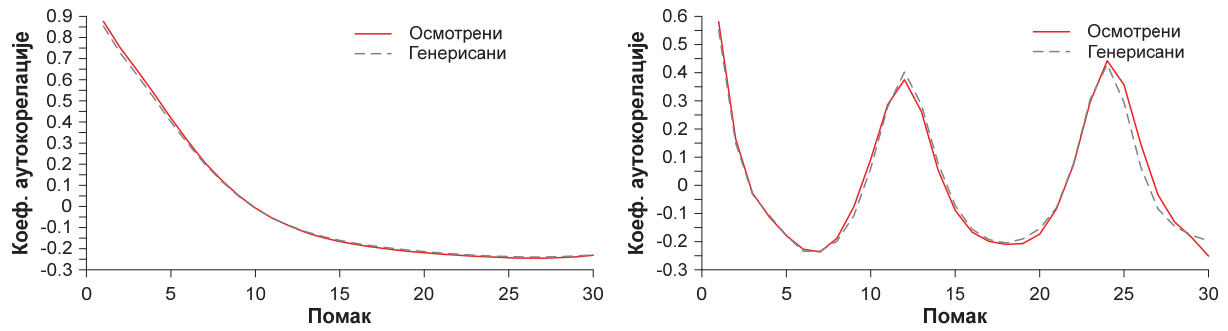


2.3.5 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА3 и СА4 на реци Олдман

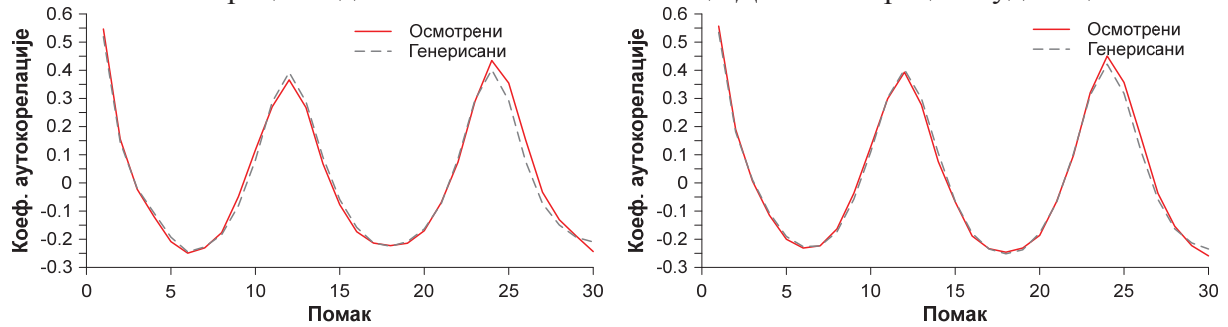


2.3.6 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА5 и СА6 на реци Олдман

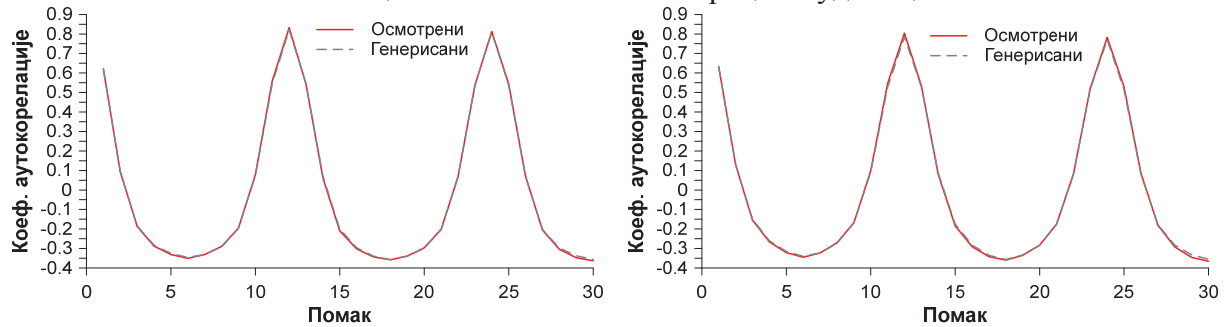




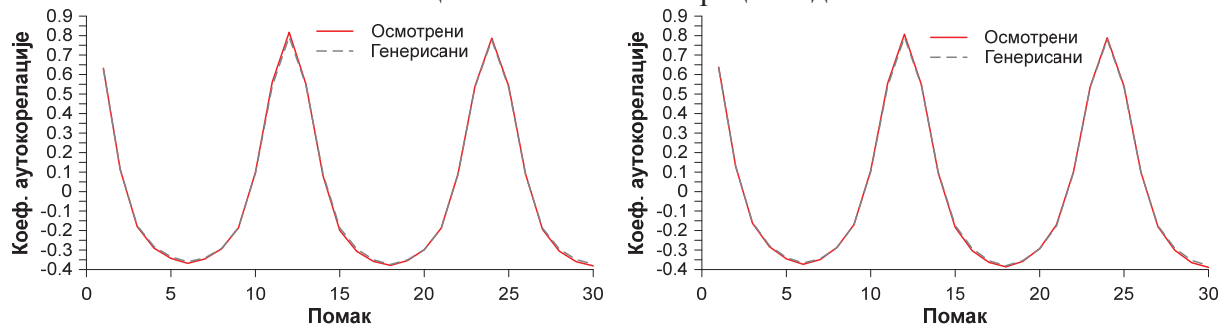
2.3.7 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних недељних на станици СА7 на реци Олдман и месечних на станици Девићи на реци Студеници



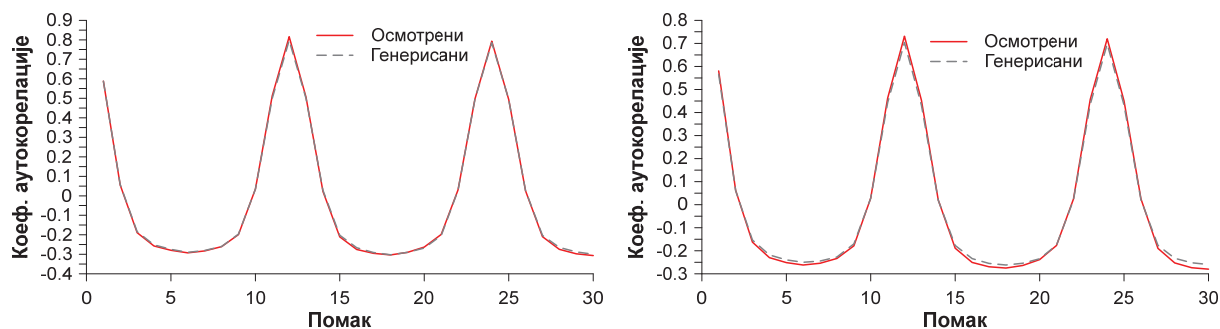
2.3.8 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама Мланча и Ушће на реци Студеници



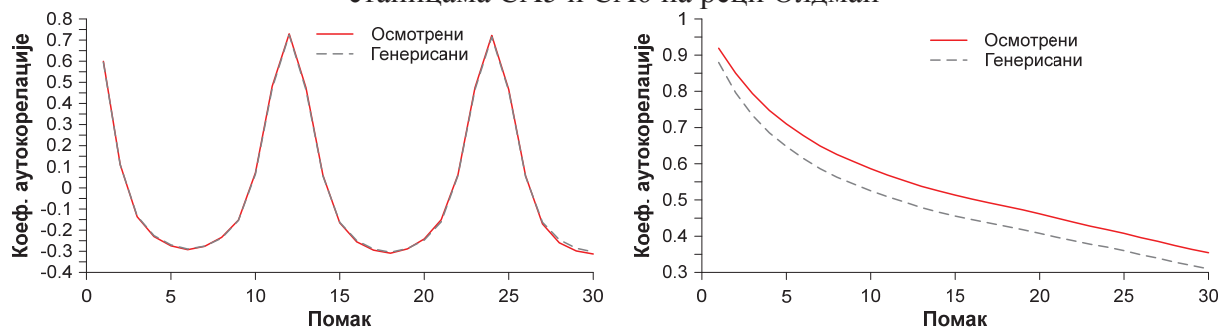
2.3.9 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА1 и СА2 на реци Олдман



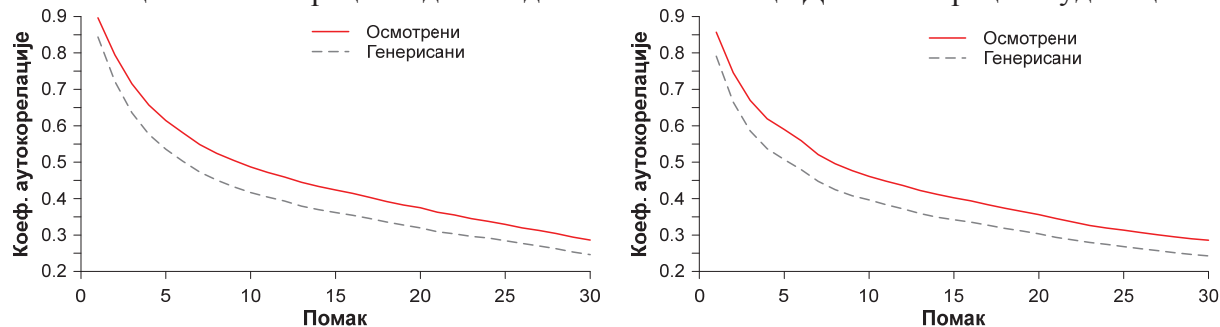
2.3.10 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА3 и СА4 на реци Олдман



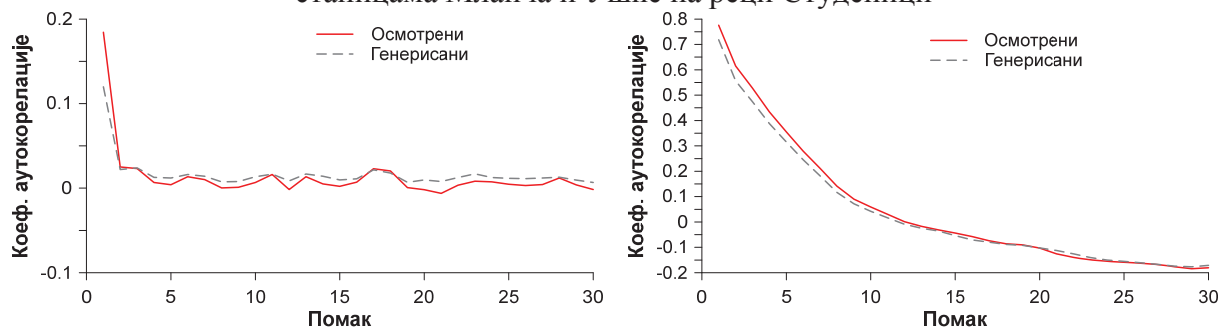
2.3.11 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА5 и СА6 на реци Олдман



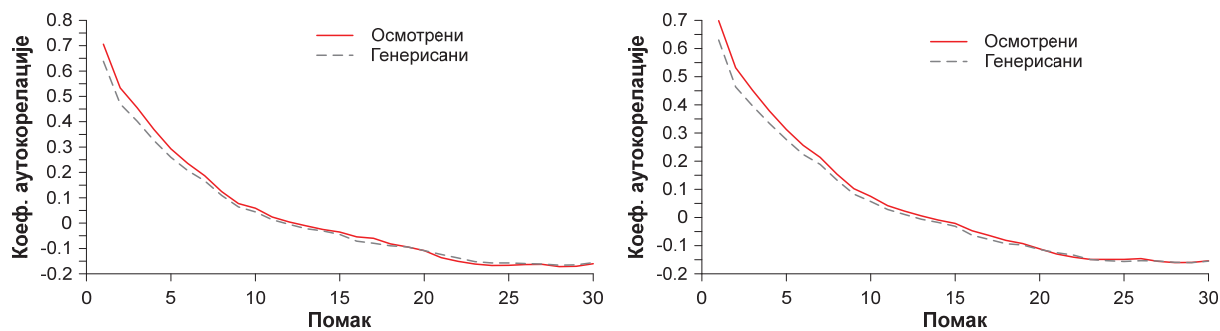
2.3.12 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА7 на реци Олдман и дневних на станици Девићи на реци Студеници



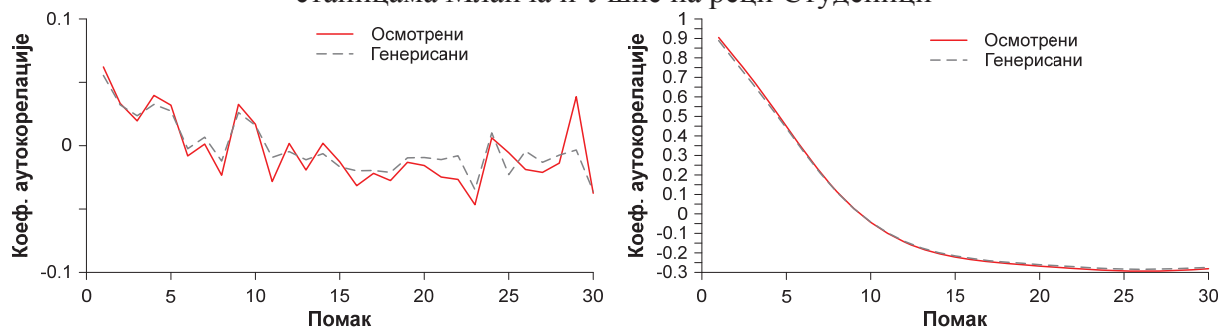
2.4.1 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних дневних серија на станицама Мланча и Ушће на реци Студеници



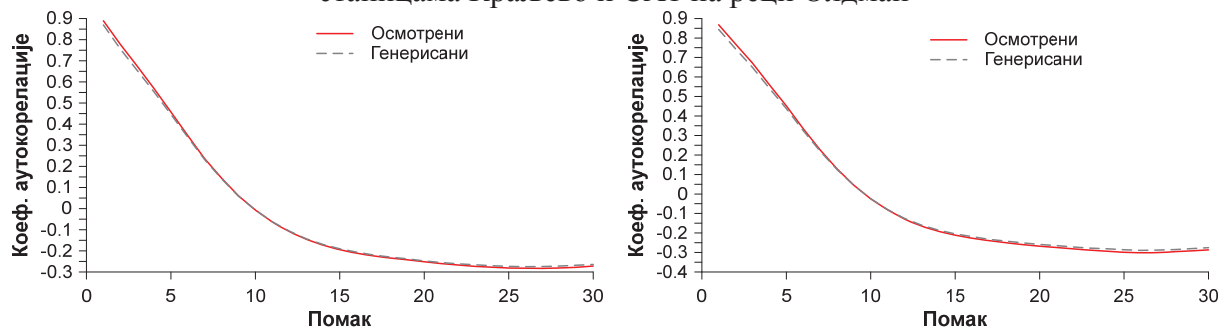
2.4.2 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних дневних серија на станици Краљево и недељних на станици Девићи на реци Студеници



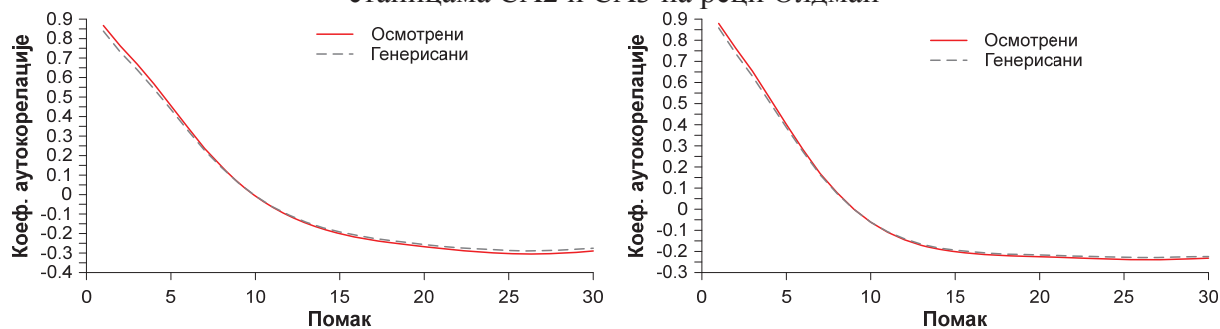
2.4.3 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама Мланча и Ушће на реци Студеници



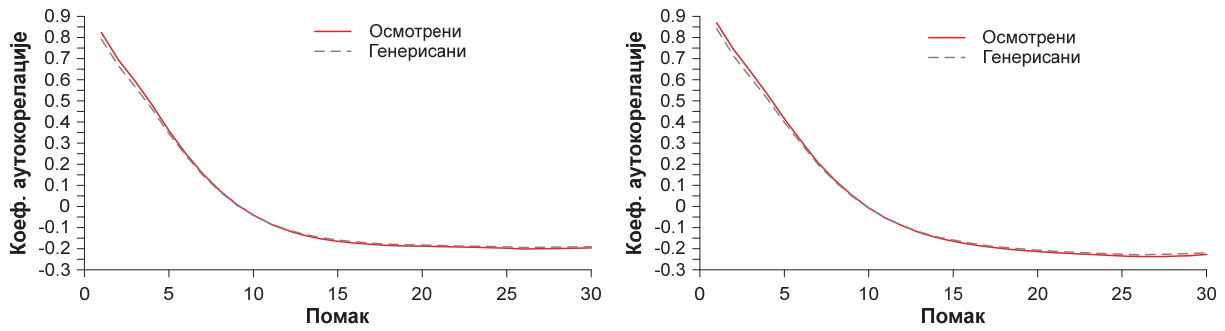
2.4.4 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама Краљево и СА1 на реци Олдман



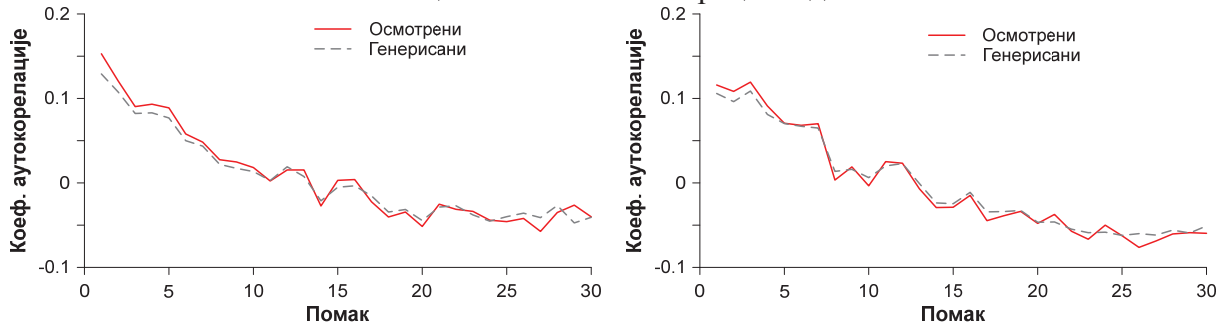
2.4.5 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА2 и СА3 на реци Олдман



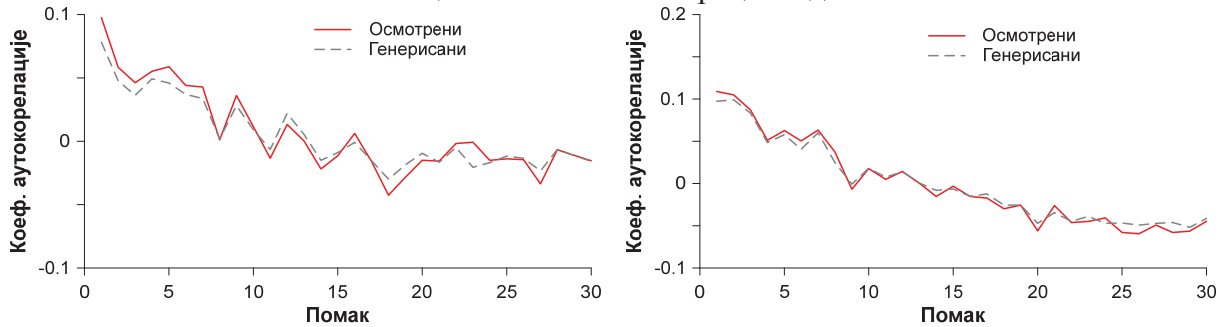
2.4.6 – Аутокорељациона функција осмотрених и генерисаних недељних серија на станицама СА4 и СА5 на реци Олдман



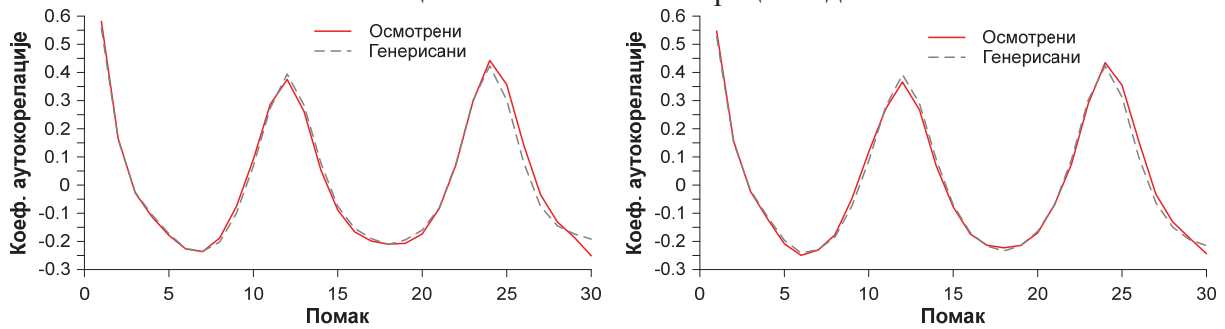
2.4.7 – Аутокорељациона функција осматрених и генерисаних недељних серија на станицама СА6 и СА7 на реци Олдман



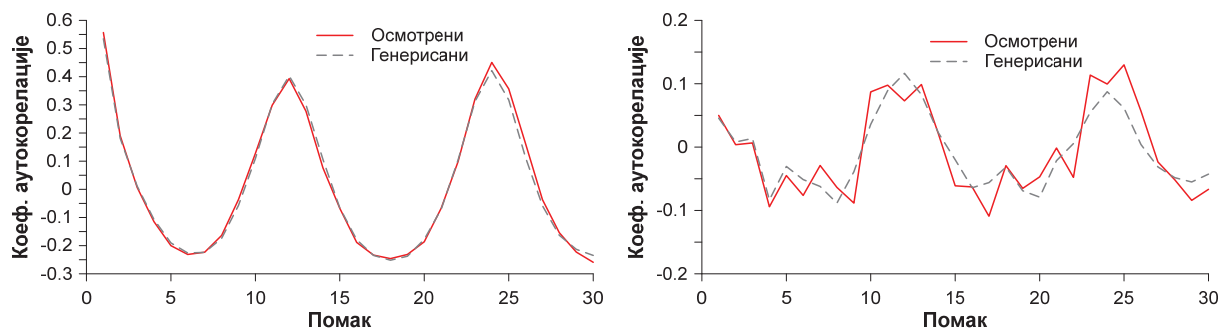
2.4.8 – Аутокорељациона функција осматрених и генерисаних недељних серија на станицама СА8 и СА9 на реци Олдман



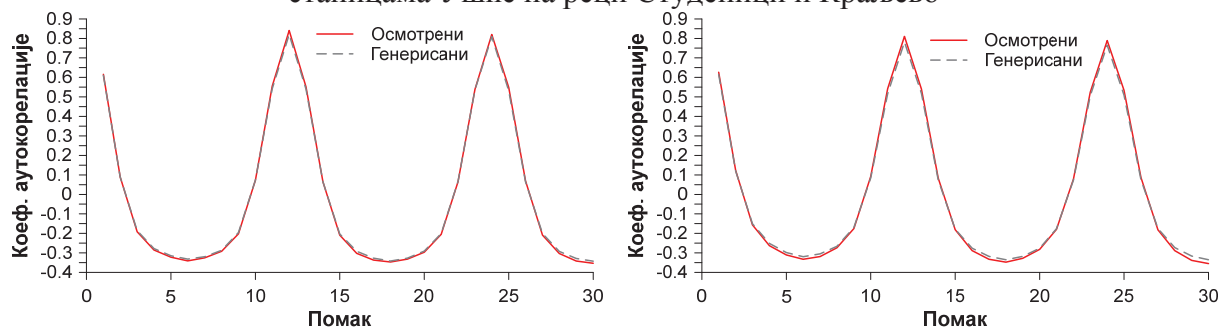
2.4.9 – Аутокорељациона функција осматрених и генерисаних недељних серија на станицама СА10 и СА11 на реци Олдман



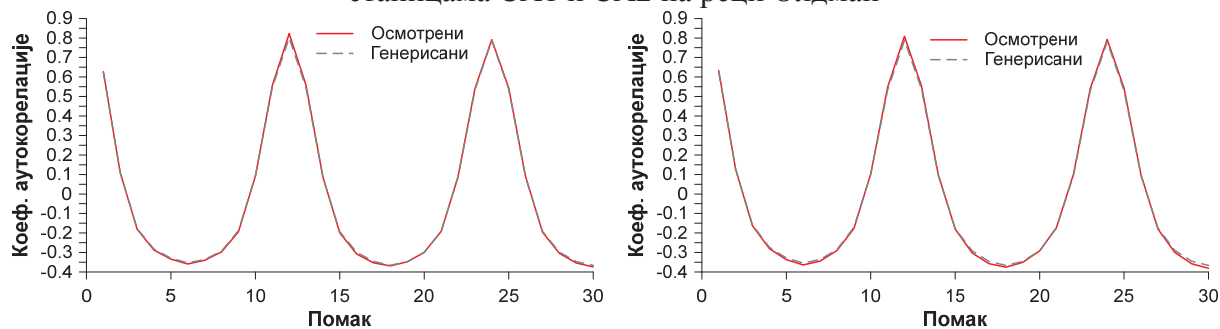
2.4.10 – Аутокорељациона функција осматрених и генерисаних месечних серија на станицама Девихи и Мланча на реци Студеници



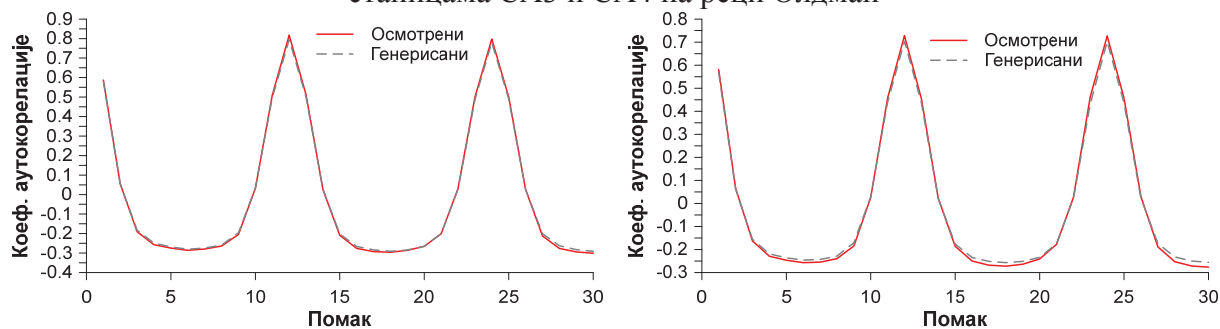
2.4.11 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама Ушће на реци Студеници и Краљево



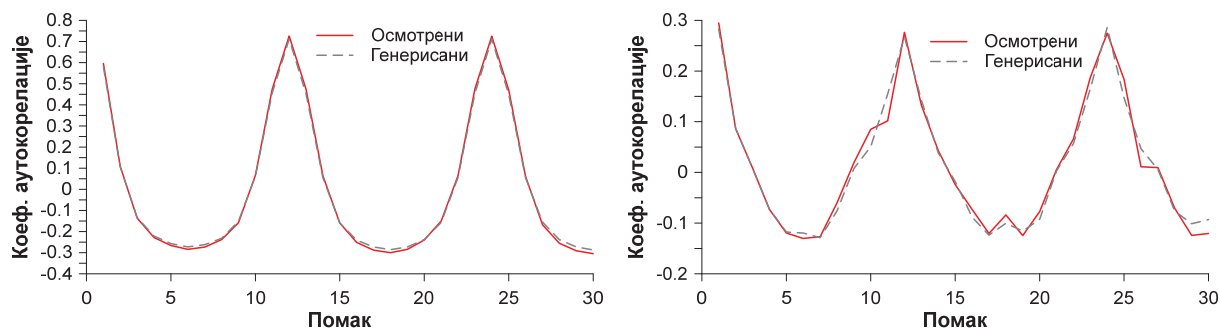
2.4.12 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА1 и СА2 на реци Олдман



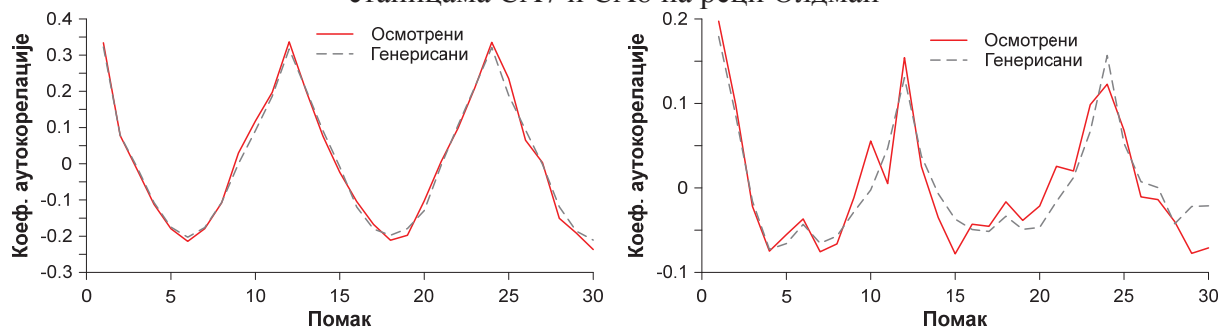
2.4.13 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА3 и СА4 на реци Олдман



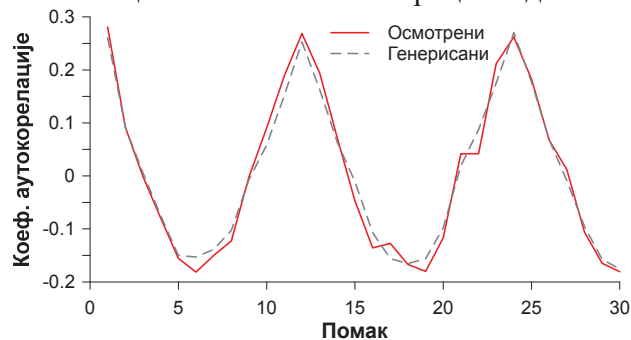
2.4.14 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА5 и СА6 на реци Олдман



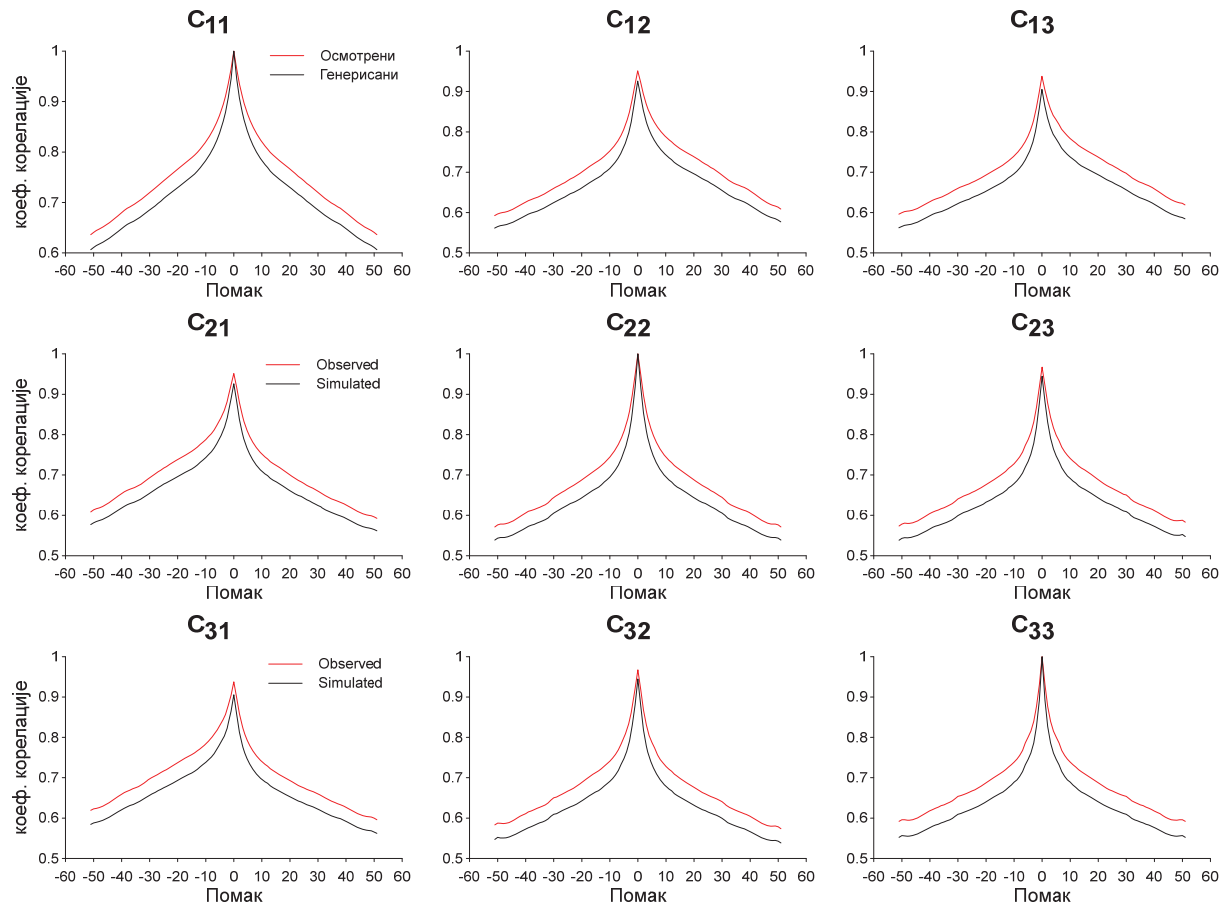
2.4.15 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА7 и СА8 на реци Олдман



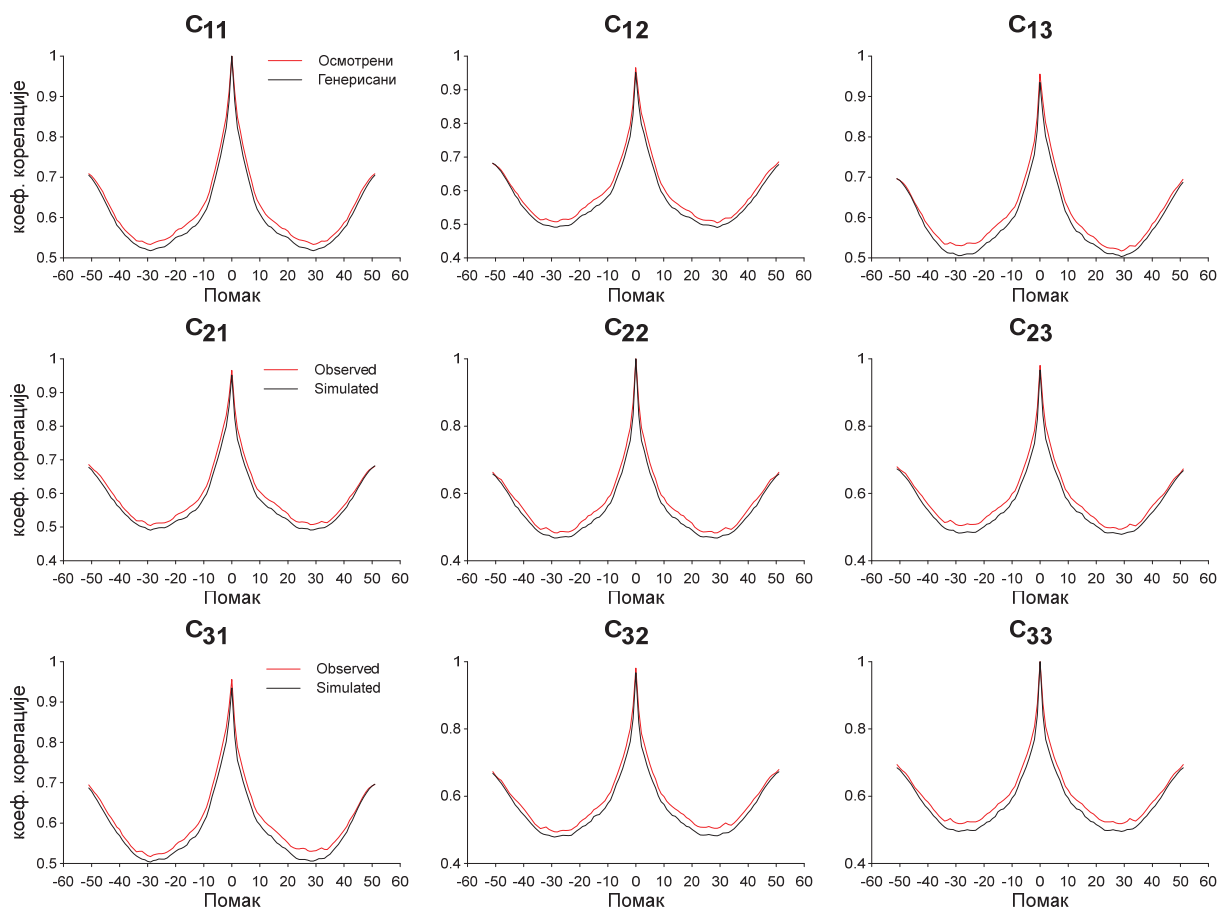
2.4.16 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станицама СА9 и СА10 на реци Олдман



2.4.17 – Аутокорелациона функција осмотрених и генерисаних месечних серија на станици СА11 на реци Олдман

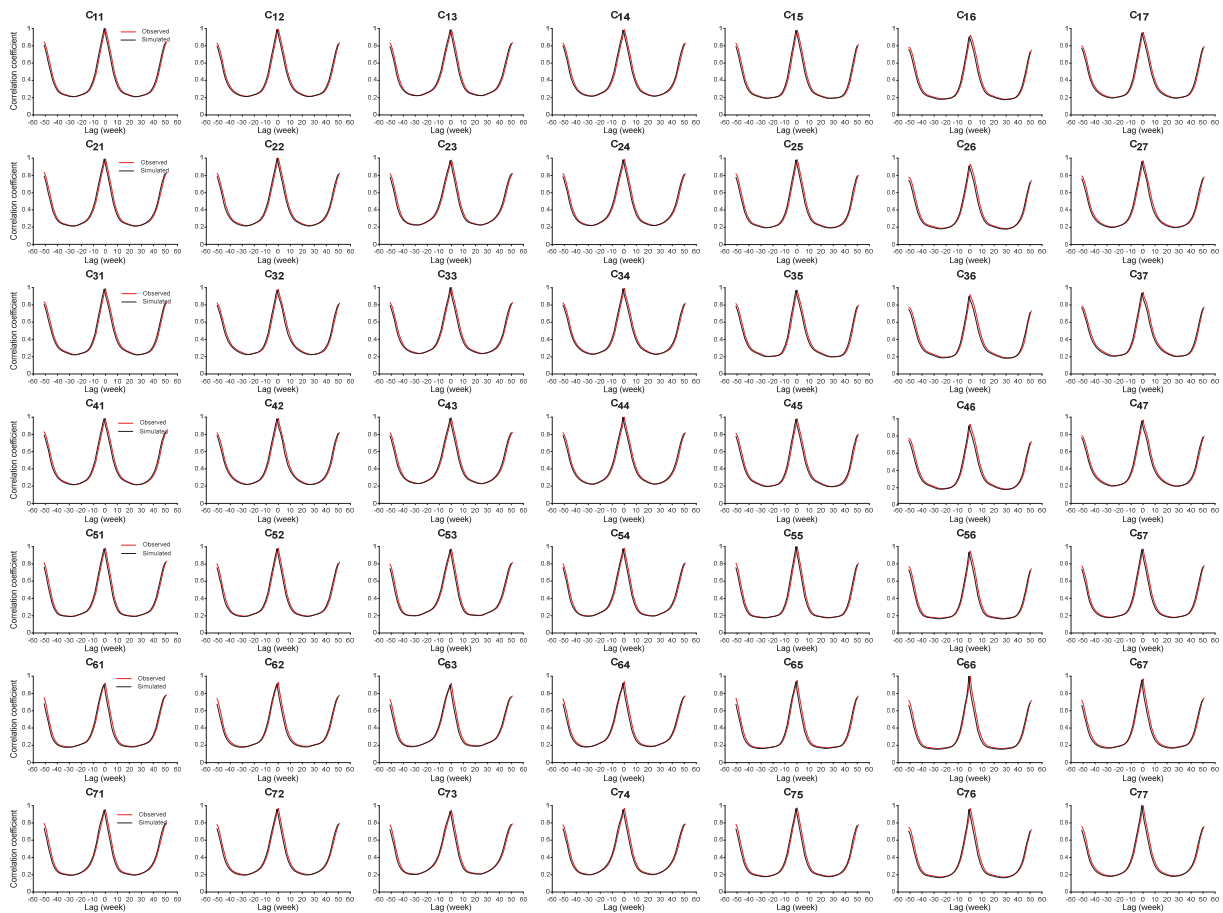


2.5.1 – Крос-корелационе функције осматрених и генерисаних дневних серија на реци Студеници

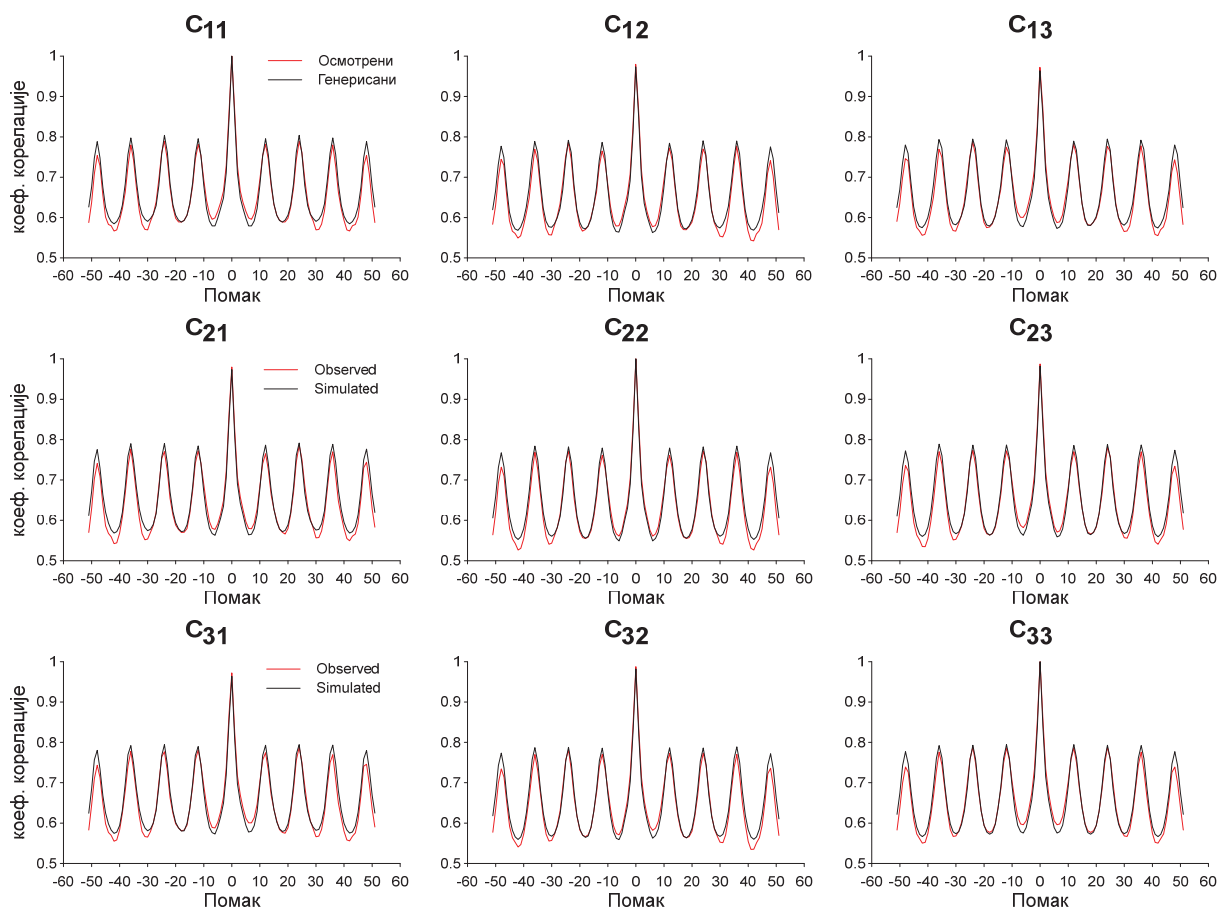


2.5.2 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних недељних серија на реци Студеници





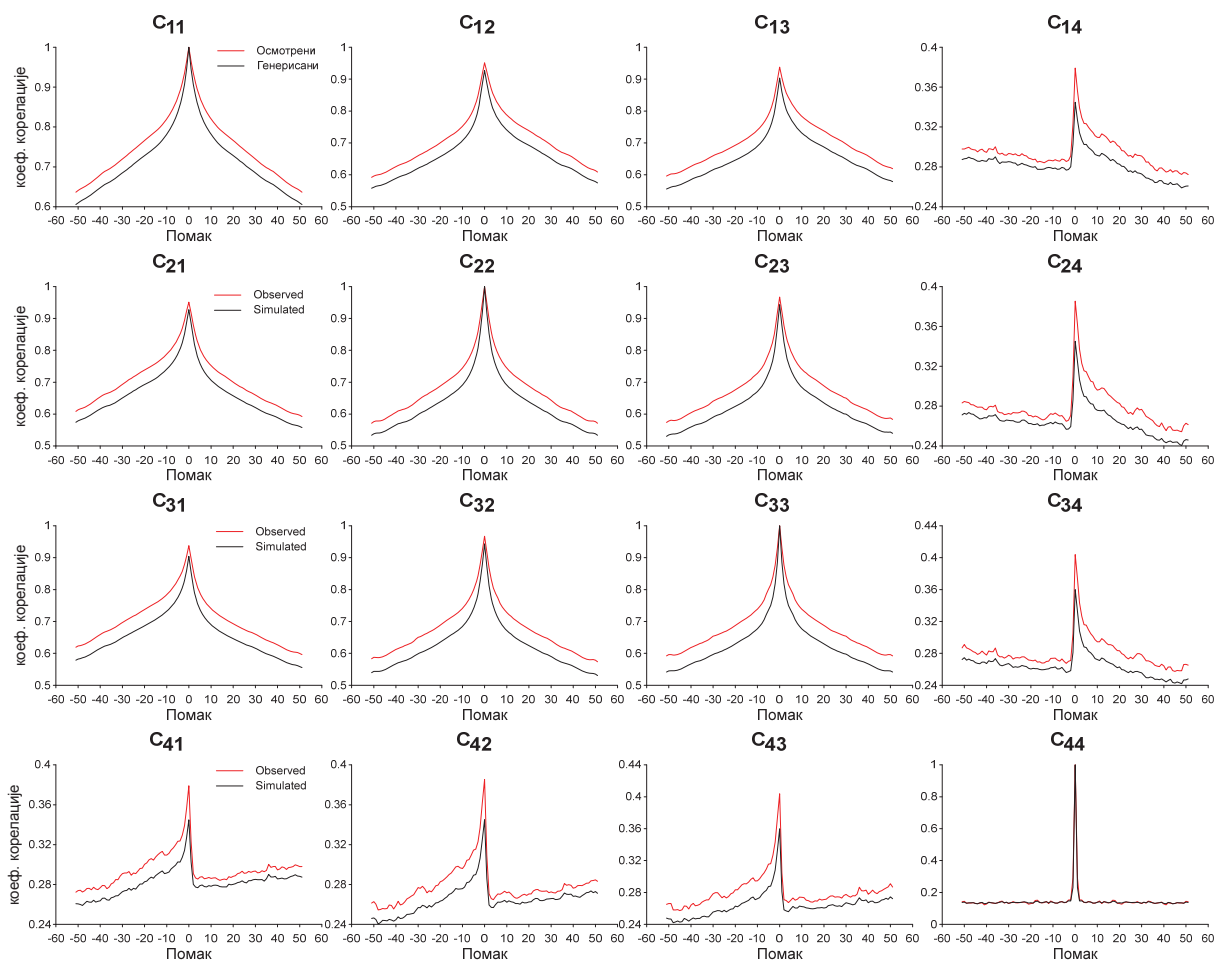
2.5.3 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних недељних серија на реци Олдман



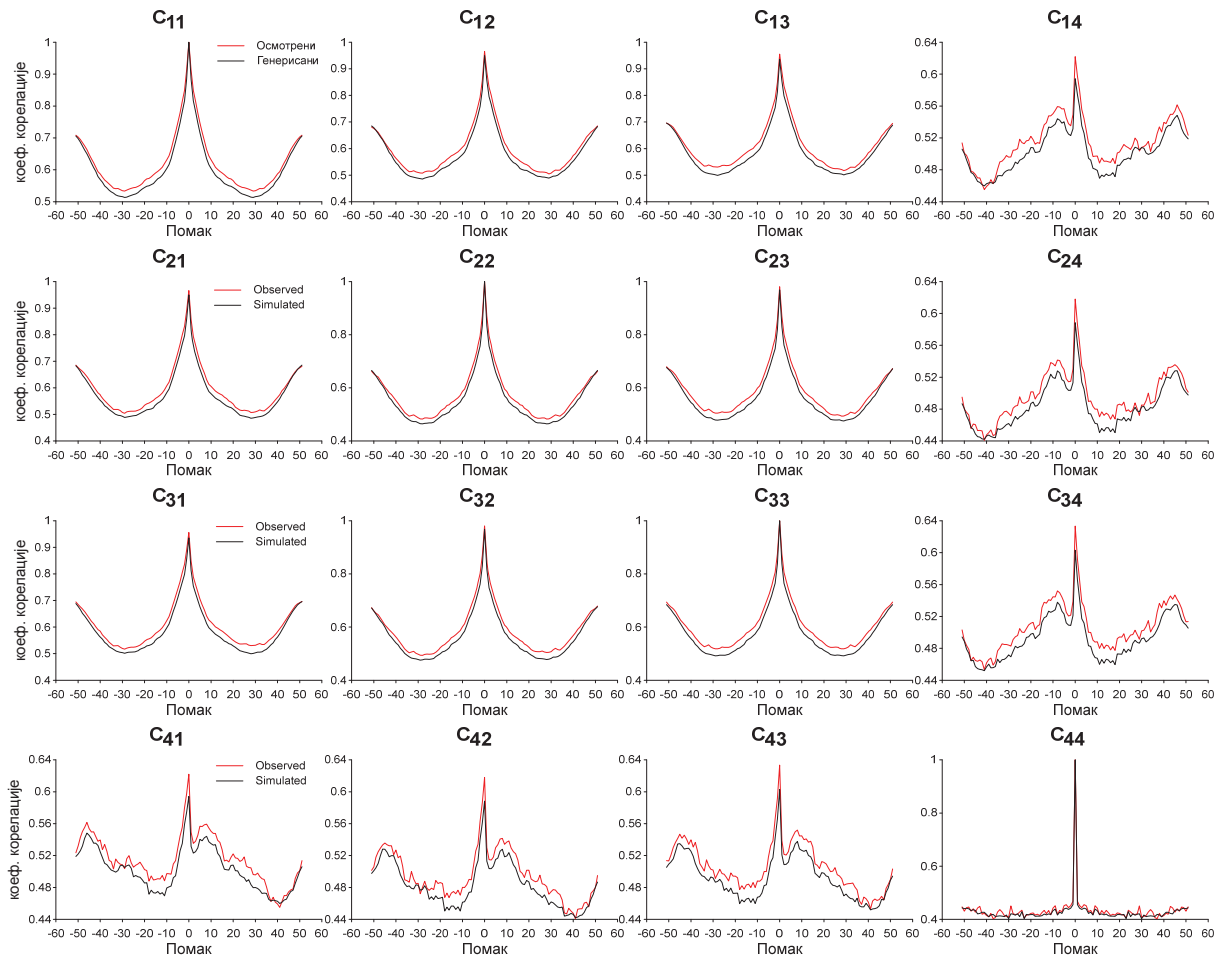
2.5.4 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних месечних серија на реци Студеници



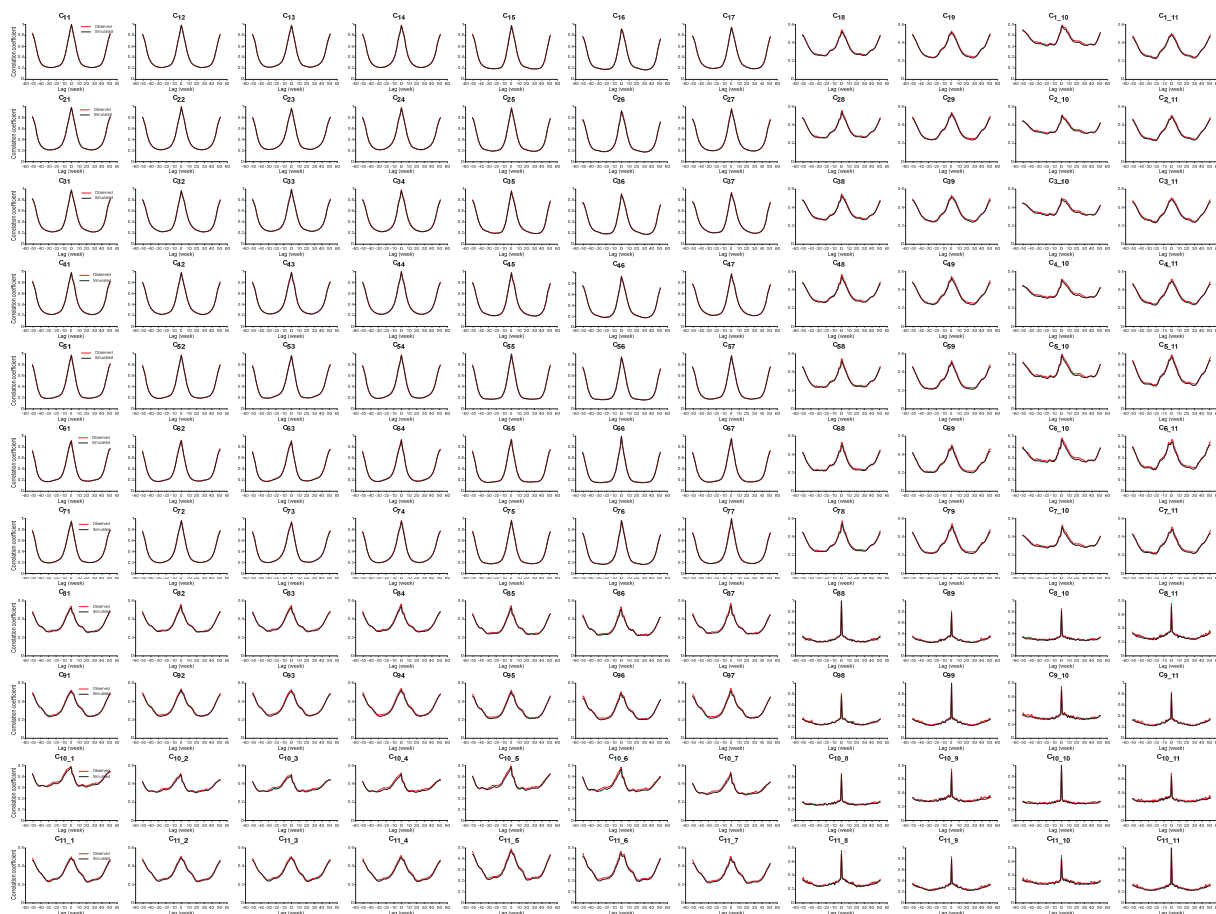
2.5.6 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних месечних серија на реци Олдман



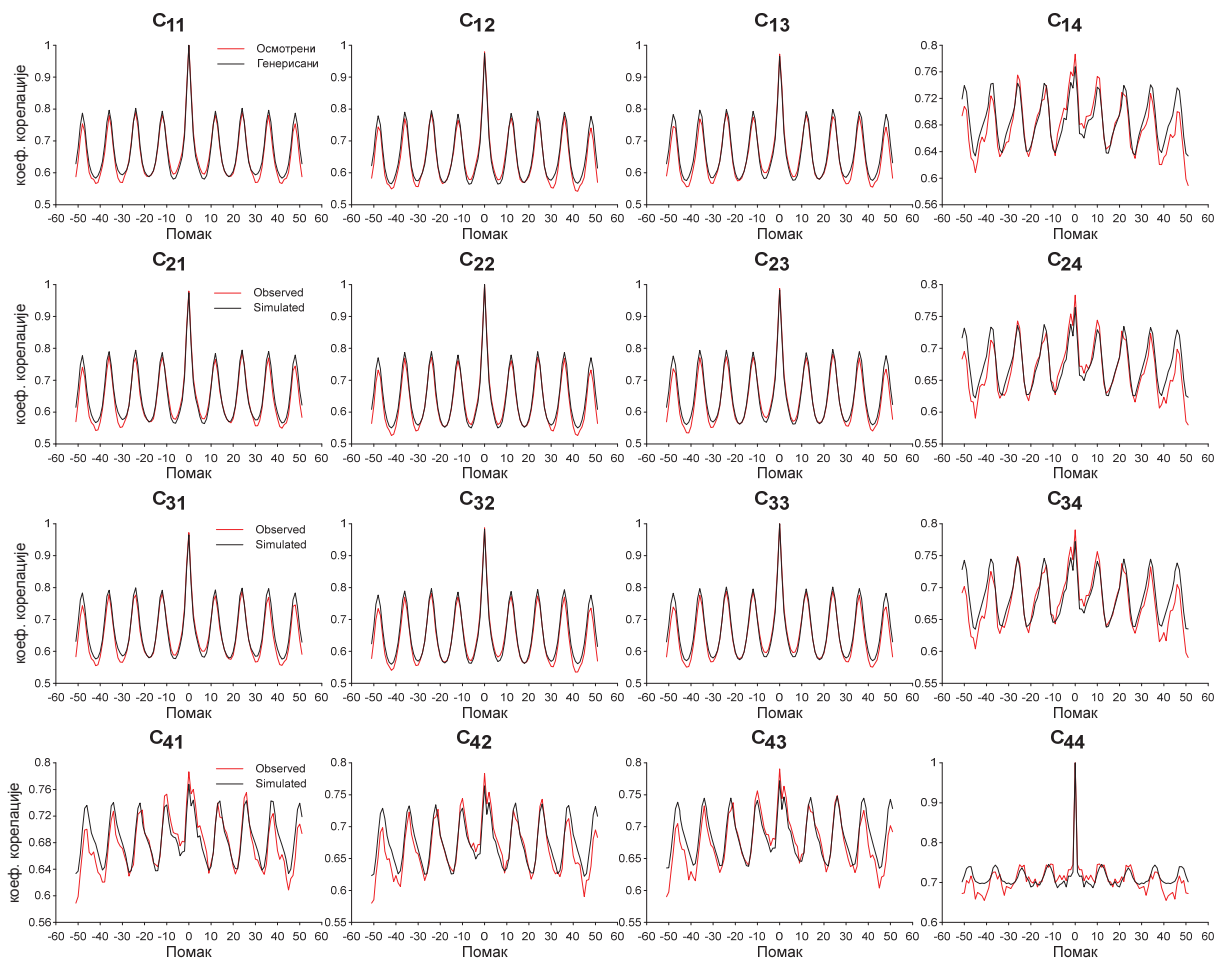
2.6.1 – Крос-корелационе функције осматрених и генерисаних дневних серија на реци Студеници



2.6.2 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних недељних серија на реци Студеници



2.6.3 – Крос-корелационе функције осматрених и генерисаних недељних серија на реци Олдман



2.6.4 – Крос-корелационе функције осмотрених и генерисаних месечних серија на реци Студеници



2.6.5 – Крос-корелационе функције осматрених и генерисаних месечних серија на реци Олдман

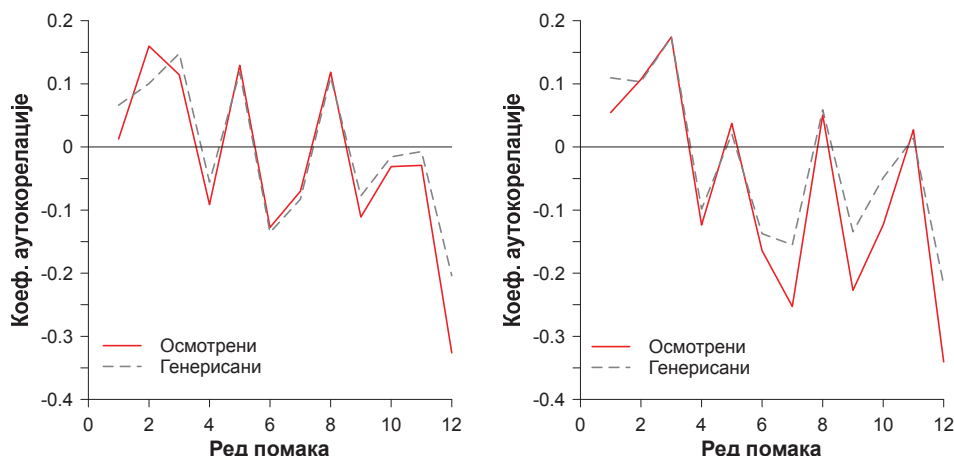


## 10 ПРИЛОГ 3 – ГОДИШЊИ ПОДАЦИ

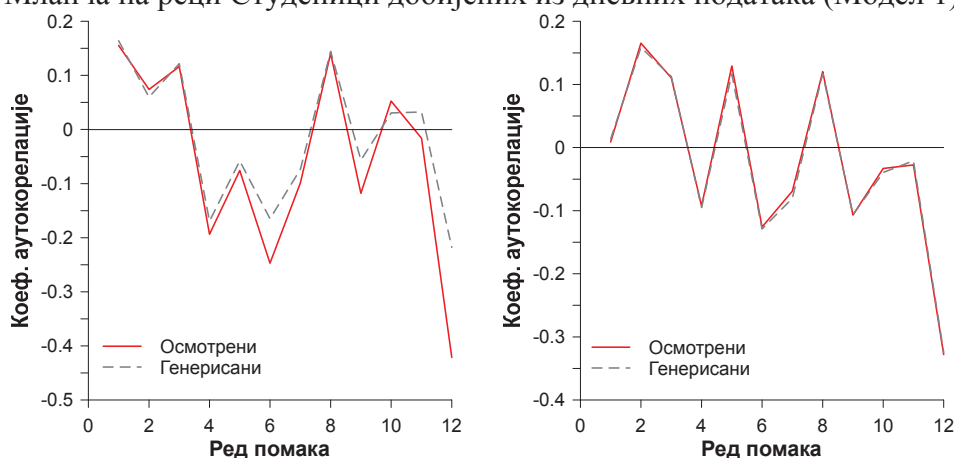
Код годишњих података, за оба модела припремљени су следећи прилози:

- 3.1 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Девићи и Мланча на реци Студеници добијених из дневних података (Модел 1)
- 3.2 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Ушће из дневних и Девићи из недељних података на реци Студеници (Модел 1)
- 3.3 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из недељних података (Модел 1)
- 3.4 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА1 и СА2 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 1)
- 3.5 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА3 и СА4 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 1)
- 3.6 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА5 и СА6 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 1)
- 3.7 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА7 из недељних и за станицу Девићи из месечних података (Модел 1)
- 3.8 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из месечних података (Модел 1)
- 3.9 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА1 и СА2 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 1)
- 3.10 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА3 и СА4 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 1)
- 3.11 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА5 и СА6 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 1)
- 3.12 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА7 из месечних (Модел 1) и за станицу Девићи из дневних података (Модел 2)
- 3.13 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из дневних података (Модел 2)
- 3.14 – Коефицијенти аутокорејације годишњих падавина за станицу Краљево из дневних и протока за станицу Девићи добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.15 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.16 – Коефицијенти аутокорејације годишњих падавина за станицу Краљево и протока за станицу СА1 добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.17 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА2 и СА3 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.18 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА4 и СА5 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.19 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА6 и СА7 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.20 – Коефицијенти аутокорејације годишњих падавина за станицу СА8 и СА9 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.21 – Коефицијенти аутокорејације годишњих падавина за станицу СА10 и СА11 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)
- 3.22 – Коефицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу Девићи и Мланча на реци Студеници добијених из месечних података (Модел 2)

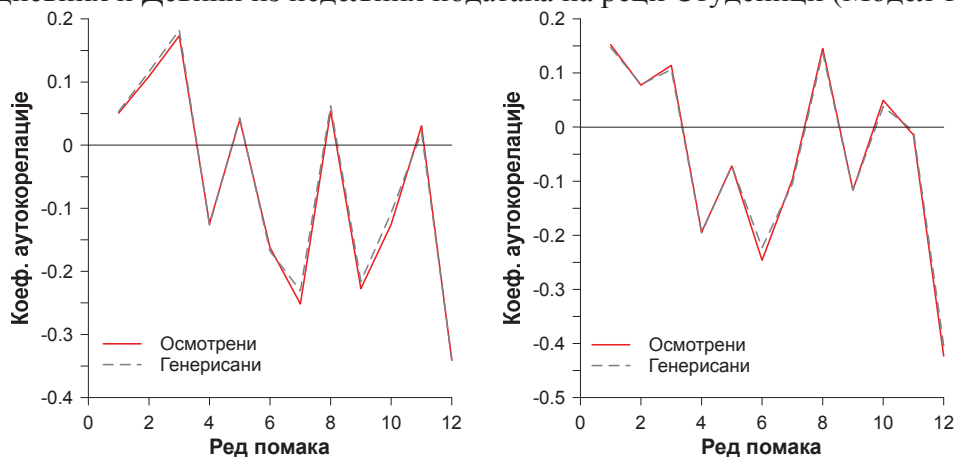
- 3.23 – Коефицијенти аутокорелације средњих годишњих протока за станицу Ушће и годишњих падавина на станици Краљево добијених из месечних података (Модел 2)
- 3.24 – Коефицијенти аутокорелације средњих годишњих протока за станицу СА1 и СА2 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 2)
- 3.25 – Коефицијенти аутокорелације средњих годишњих протока за станицу СА3 и СА4 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 2)
- 3.26 – Коефицијенти аутокорелације средњих годишњих протока за станицу СА5 и СА6 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 2)
- 3.27 – Коефицијенти аутокорелације средњих годишњих протока за станицу СА7 и годишњих падавина на станици СА8 добијених из месечних података (Модел 2)
- 3.28 – Коефицијенти аутокорелације годишњих падавина за станицу СА9 и СА10 на сливу реке Олдман добијених из месечних података (Модел 2)
- 3.29 – Коефицијенти аутокорелације годишњих падавина за станицу СА11 добијених из месечних података (Модел 2)
- 3.30 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из дневних података за станице на реци Студеници (Модел 1)
- 3.31 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Студеници (Модел 1)
- 3.32 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Олдман (Модел 1)
- 3.33 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Студеници (Модел 1)
- 3.34 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Олдман (Модел 1)
- 3.35 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из дневних података за станице на реци Студеници (Модел 2)
- 3.36 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Студеници (Модел 2)
- 3.37 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Олдман (Модел 2)
- 3.38 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Студеници (Модел 2)
- 3.39 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Олдман (Модел 2)



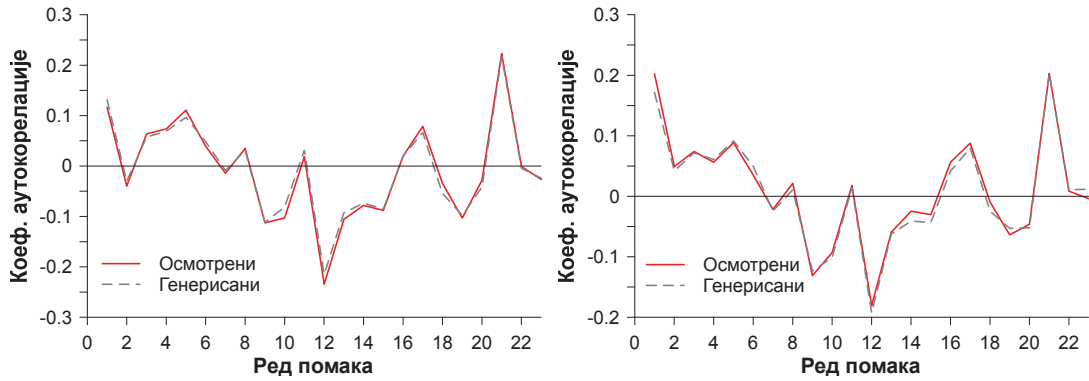
3.1– Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Девићи и Мланча на реци Студеници добијених из дневних података (Модел 1)



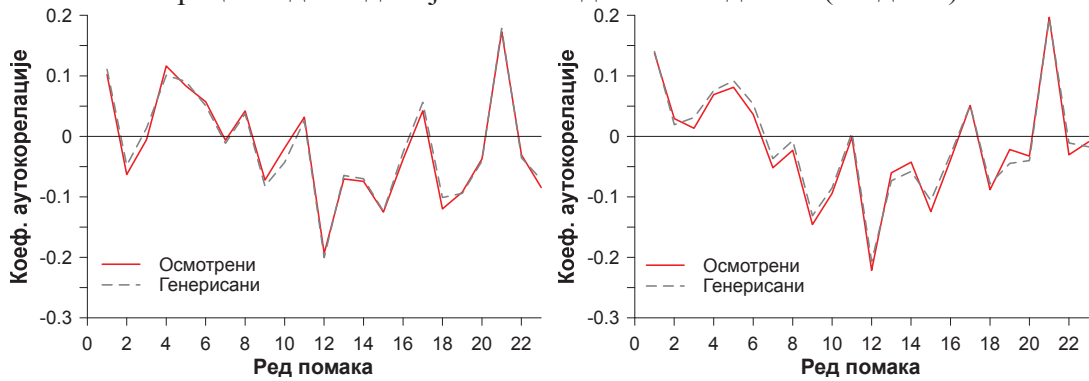
3.2 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Ушће из дневних и Девићи из недељних података на реци Студеници (Модел 1)



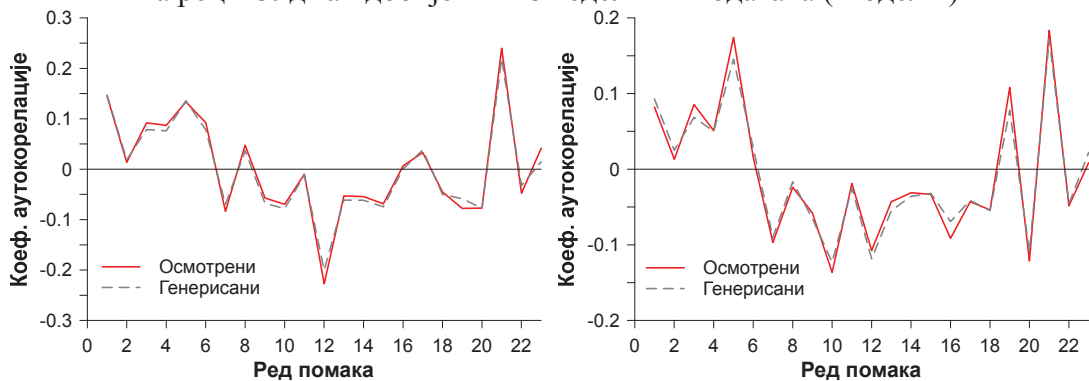
3.3 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из недељних података (Модел 1)



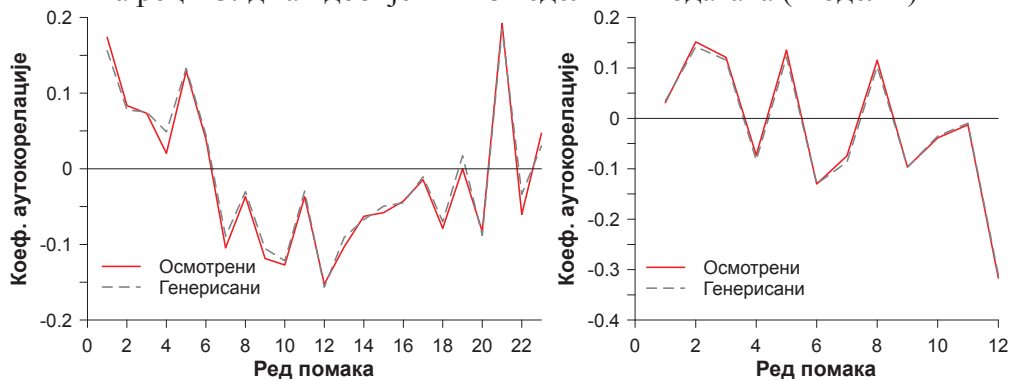
3.4 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА1 и СА2 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 1)



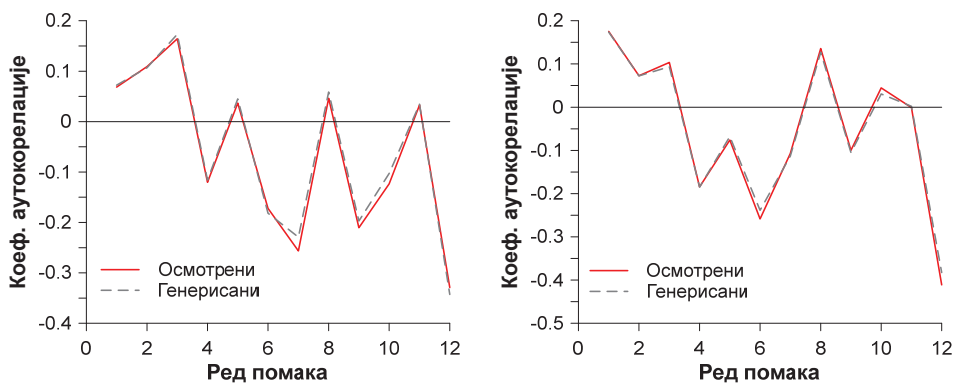
3.5 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА3 и СА4 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 1)



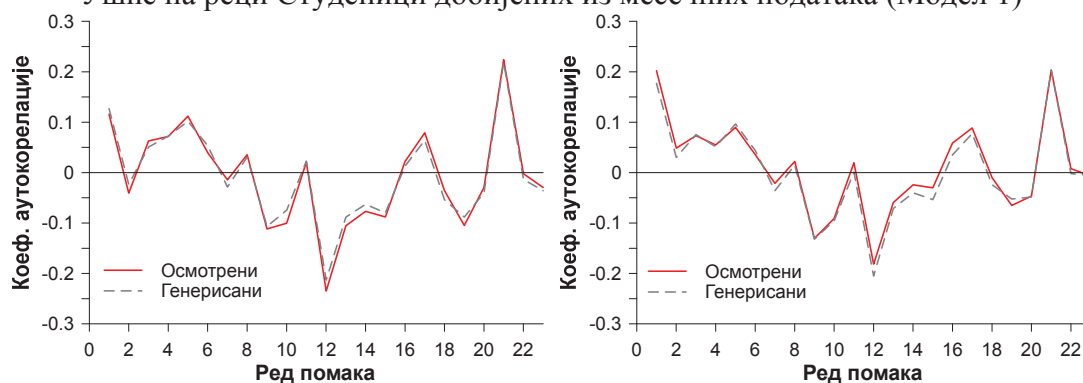
3.6 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА5 и СА6 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 1)



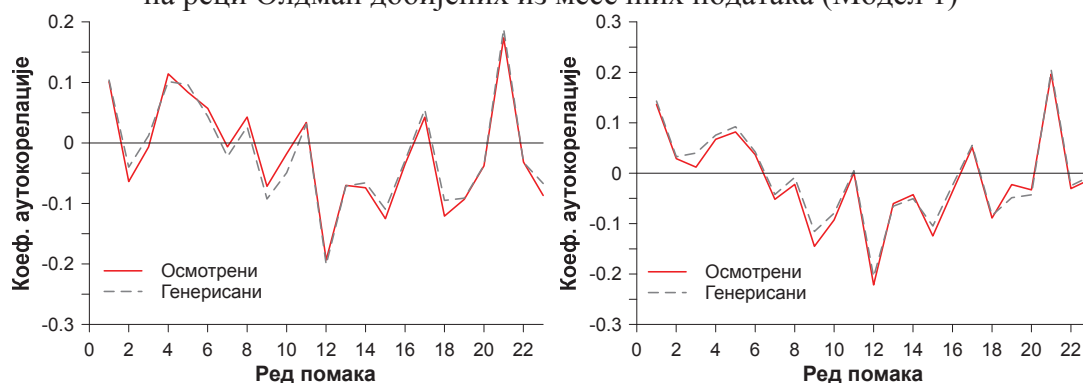
3.7 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА7 из недељних и за станицу Девићи из месечних података (Модел 1)



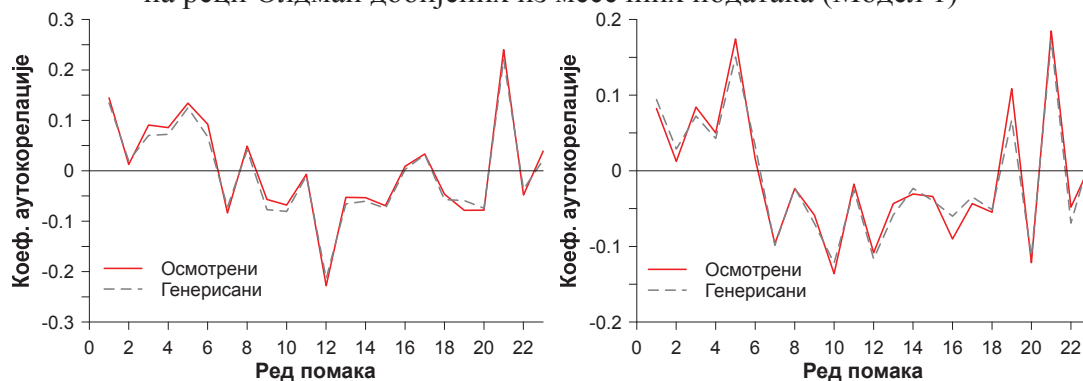
3.8 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из месечних података (Модел 1)



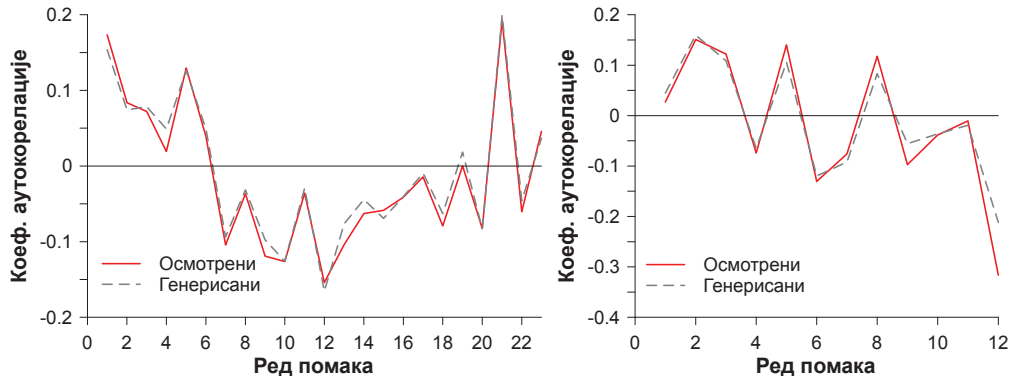
3.9 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА1 и СА2 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 1)



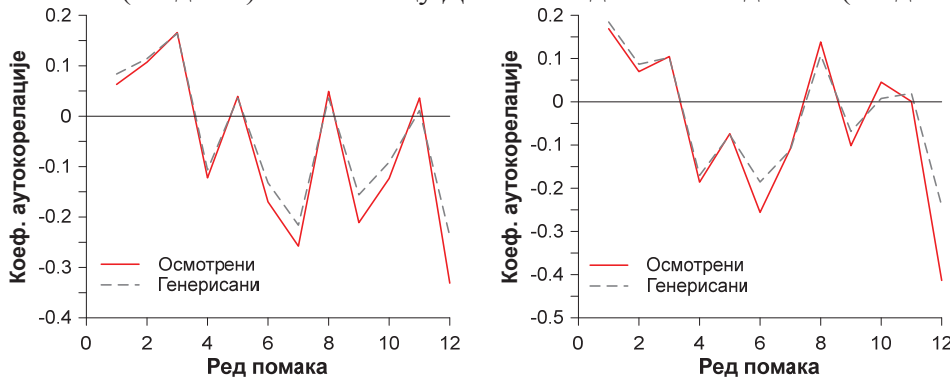
3.10 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА3 и СА4 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 1)



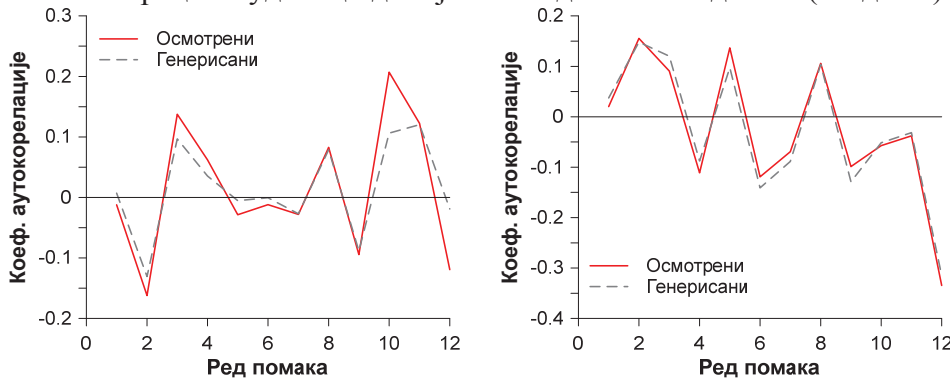
3.11 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА5 и СА6 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 1)



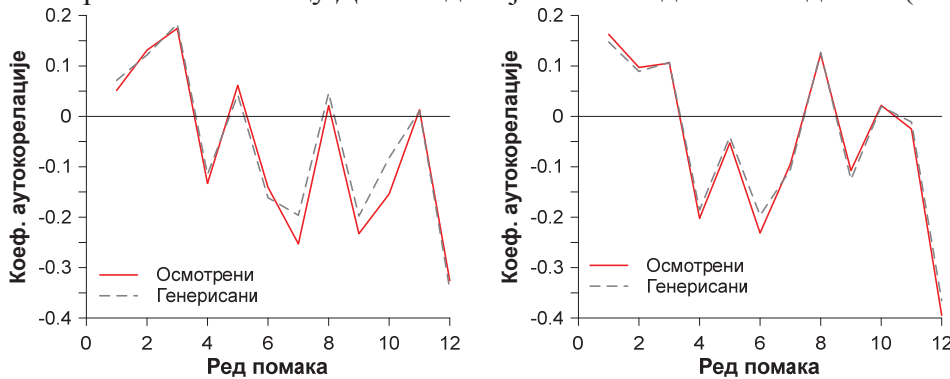
3.12 – Коэффициенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА7 из месечних (Модел 1) и за станицу Девићи из дневних података (Модел 2)



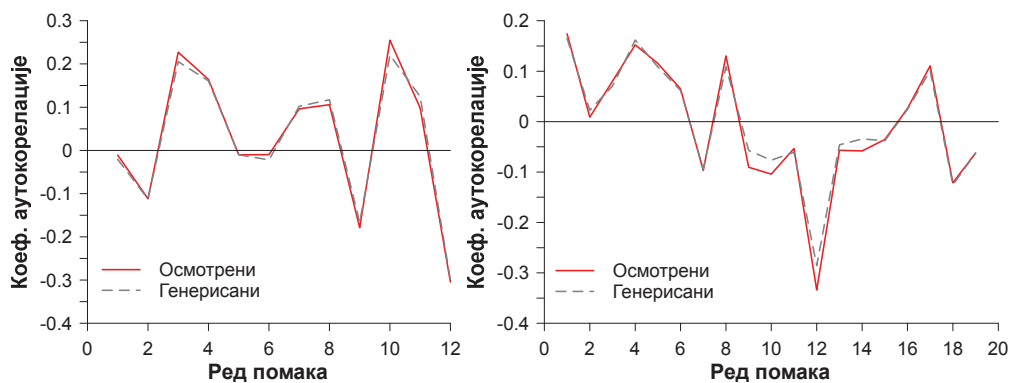
3.13 – Коэффициенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из дневних података (Модел 2)



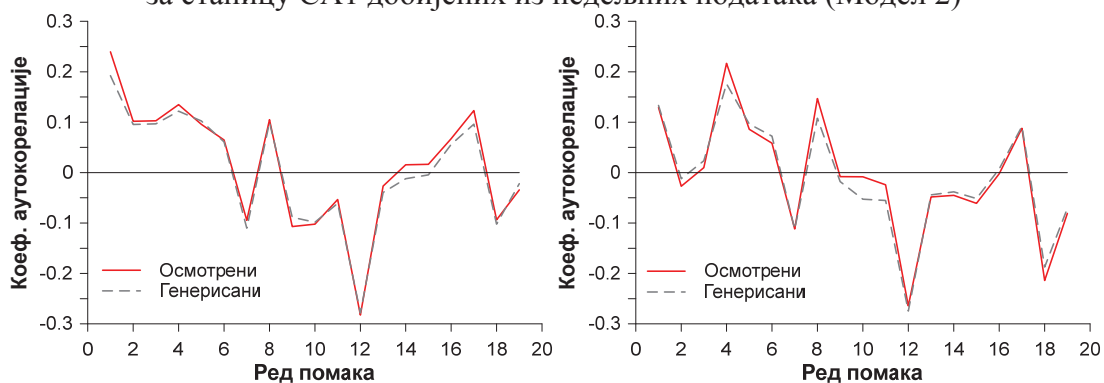
3.14 – Коэффициенти аутокорељације годишњих падавина за станицу Краљево из дневних и протока за станицу Девићи добијених из недељних података (Модел 2)



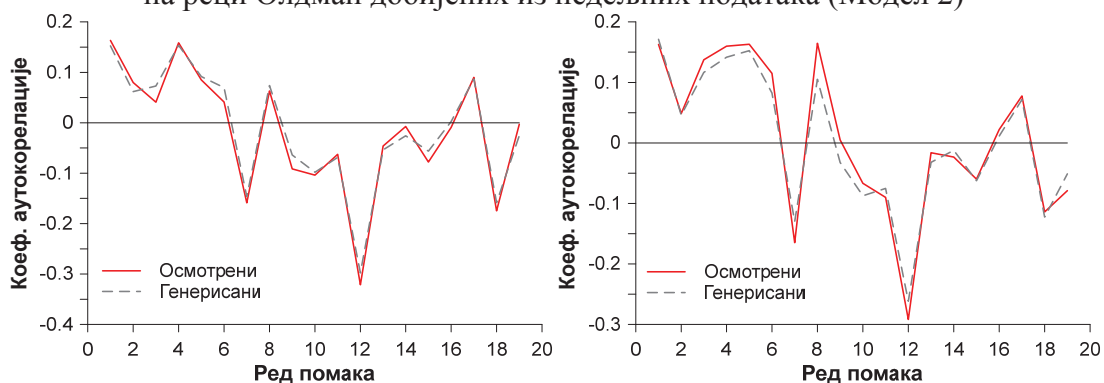
3.15 – Коэффициенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Мланча и Ушће на реци Студеници добијених из недељних података (Модел 2)



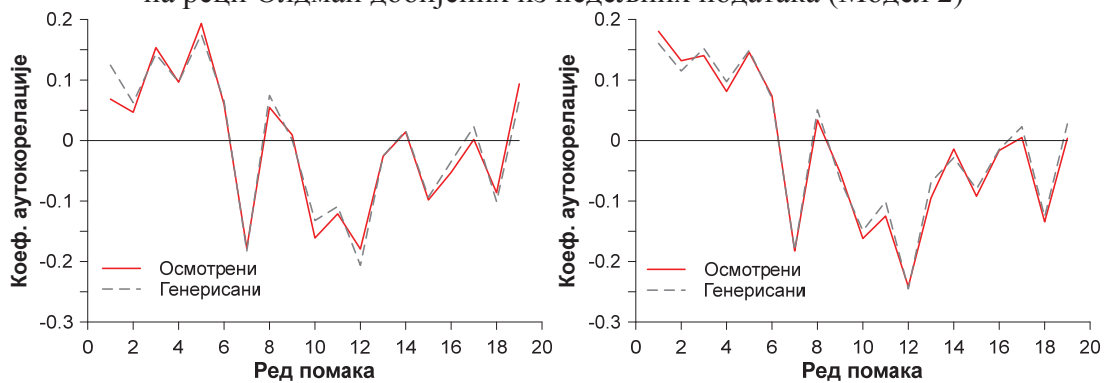
3.16 – Коefицијенти аутокорејације годишњих падавина за станицу Краљево и протока за станицу СА1 добијених из недељних података (Модел 2)



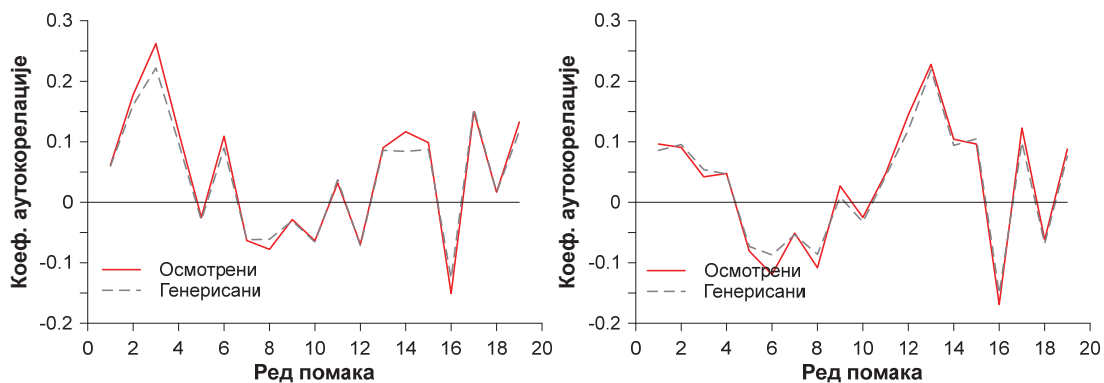
3.17 – Коefицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА2 и СА3 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)



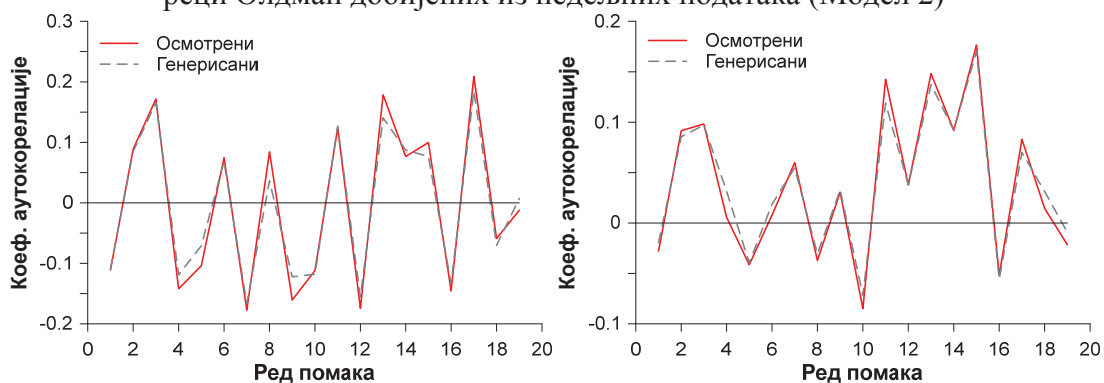
3.18 – Коefицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА4 и СА5 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)



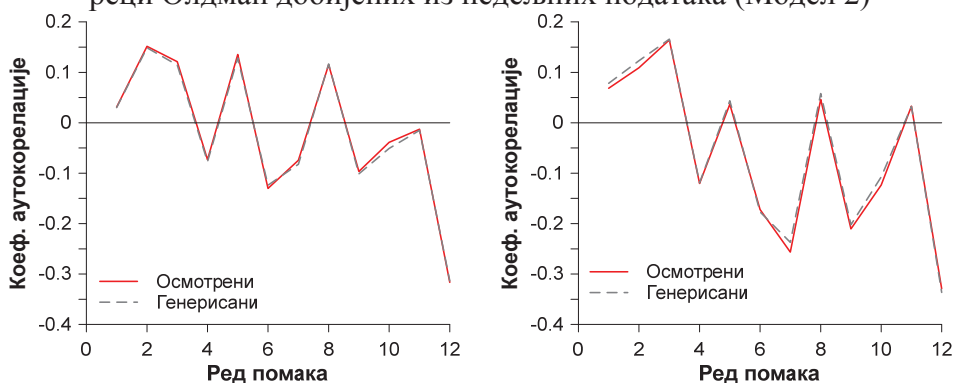
3.19 – Коefицијенти аутокорејације средњих годишњих протока за станицу СА6 и СА7 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)



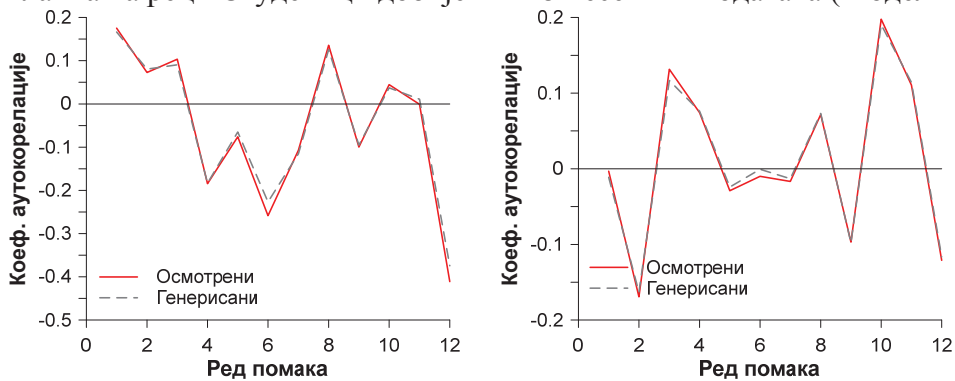
3.20 – Коефицијенти аутокорељације годишњих падавина за станицу СА8 и СА9 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)



3.21 – Коефицијенти аутокорељације годишњих падавина за станицу СА10 и СА11 на реци Олдман добијених из недељних података (Модел 2)

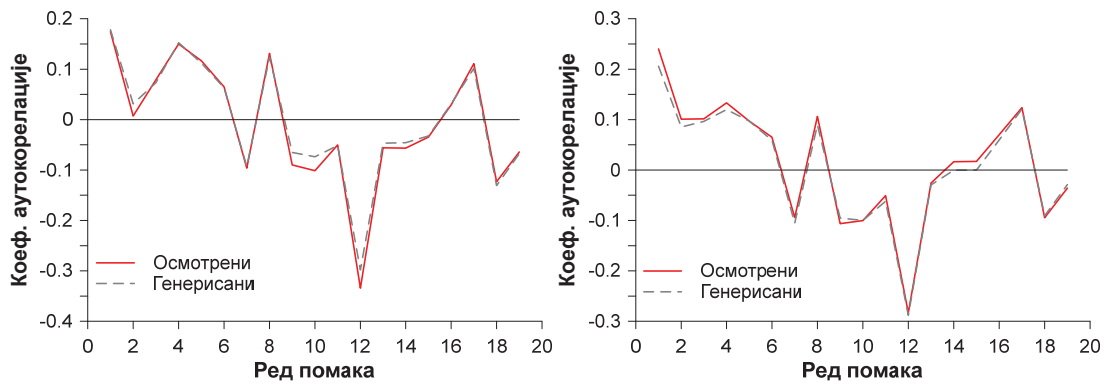


3.22 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Девићи и Мланча на реци Студеници добијених из месечних података (Модел 2)

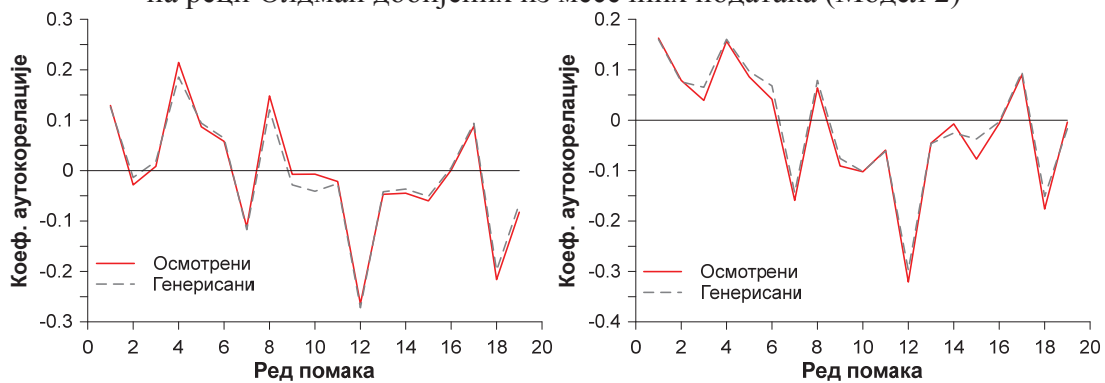


3.23 – Коефицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу Ушће и годишњих падавина на станици Краљево добијених из месечних података (Модел 2)

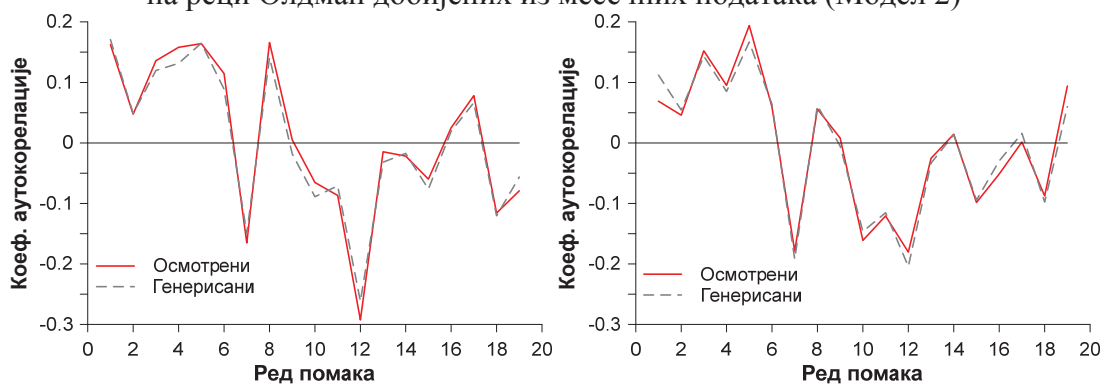




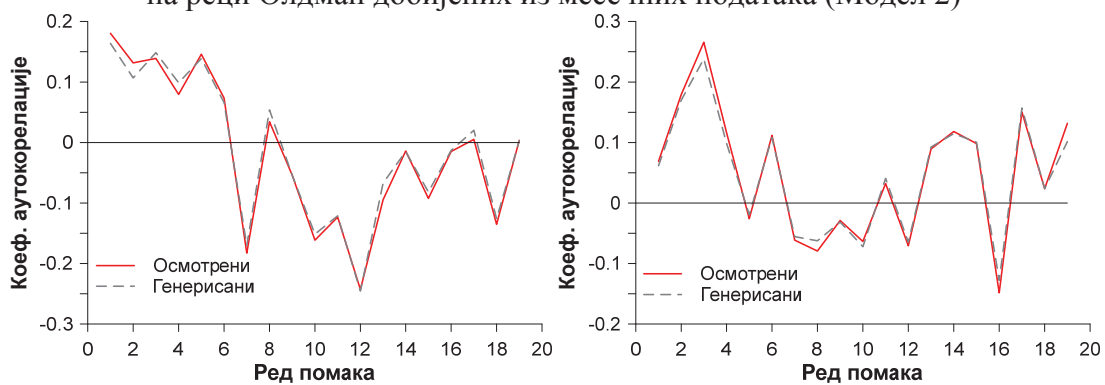
3.24 – Коefицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА1 и СА2 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 2)



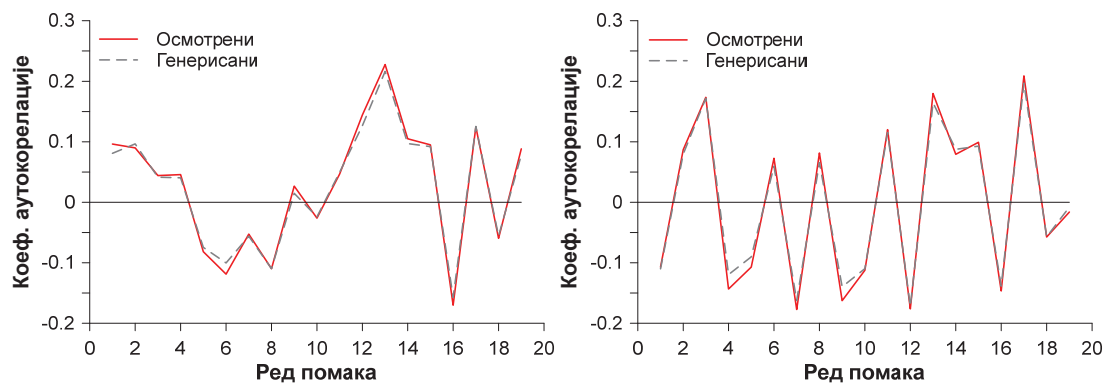
3.25 – Коefицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА3 и СА4 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 2)



3.26 – Коefицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА5 и СА6 на реци Олдман добијених из месечних података (Модел 2)



3.27 – Коefицијенти аутокорељације средњих годишњих протока за станицу СА7 и годишњих падавина на станици СА8 добијених из месечних података (Модел 2)



3.28 – Коефицијенти аутокорељације годишњих падавина за станицу CA9 и CA10 на сливу реке Олдман добијених из месечних података (Модел 2)



3.29 – Коефицијенти аутокорељације годишњих падавина за станицу CA11 добијених из месечних података (Модел 2)

3.30 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из дневних података за станице на реци Студеници (Модел 1)

Осмотрени	RS 1	RS 2	RS 3	Генерисани	RS 1	RS 2	RS 3
RS 1	1.000	0.877	0.786	RS 1	1.000	0.873	0.785
RS 2		1.000	0.888	RS 2		1.000	0.890
RS 3			1.000	RS 3			1.000

3.31 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Студеници (Модел 1)

Осмотрени	RS 1	RS 2	RS 3	Генерисани	RS 1	RS 2	RS 3
RS 1	1.000	0.877	0.786	RS 1	1.000	0.883	0.779
RS 2		1.000	0.888	RS 2		1.000	0.878
RS 3			1.000	RS 3			1.000

3.32 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Олдман (Модел 1)

Осмотрени	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
CA1	1.000	0.964	0.966	0.957	0.944	0.831	0.881
CA2		1.000	0.924	0.958	0.948	0.865	0.914
CA3			1.000	0.968	0.926	0.822	0.869
CA4				1.000	0.948	0.873	0.930
CA5					1.000	0.906	0.941
CA6						1.000	0.966
CA7							1.000

Генерисани	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
CA1	1.000	0.963	0.965	0.953	0.939	0.807	0.869
CA2		1.000	0.924	0.954	0.942	0.837	0.900
CA3			1.000	0.967	0.924	0.800	0.856
CA4				1.000	0.944	0.850	0.915
CA5					1.000	0.888	0.932
CA6						1.000	0.957
CA7							1.000

3.33 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Студеници (Модел 1)

Осмотрени	RS 1	RS 2	RS 3	Генерисани	RS 1	RS 2	RS 3
RS 1	1.000	0.877	0.787	RS 1	1.000	0.868	0.786
RS 2		1.000	0.888	RS 2		1.000	0.882
RS 3			1.000	RS 3			1.000

3.34 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Олдман (Модел 1)

Осмотрени	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
CA1	1.000	0.964	0.966	0.957	0.944	0.831	0.881
CA2		1.000	0.924	0.958	0.948	0.865	0.913
CA3			1.000	0.968	0.926	0.822	0.868
CA4				1.000	0.948	0.873	0.930
CA5					1.000	0.906	0.941
CA6						1.000	0.965
CA7							1.000

Генерисани	CA1	CA2	CA3	CA4	CA5	CA6	CA7
CA1	1.000	0.962	0.964	0.954	0.939	0.821	0.867
CA2		1.000	0.921	0.954	0.942	0.858	0.905
CA3			1.000	0.966	0.919	0.813	0.856
CA4				1.000	0.941	0.862	0.919
CA5					1.000	0.896	0.930
CA6						1.000	0.960
CA7							1.000

3.35 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из дневних података за станице на реци Студеници (Модел 2)

Осмотрени	RS 1	RS 2	RS 3	RS 4	Генерисани	RS 1	RS 2	RS 3	RS 4
RS 1	1.000	0.877	0.786	0.473	RS 1	1.000	0.867	0.781	0.367
RS 2		1.000	0.888	0.569	RS 2		1.000	0.889	0.441
RS 3			1.000	0.546	RS 3			1.000	0.425
RS 4				1.000	RS 4				1.000

3.36 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Студеници (Модел 2)

Осмотрени	RS 1	RS 2	RS 3	RS 4	Генерисани	RS 1	RS 2	RS 3	RS 4
RS 1	1.000	0.872	0.779	0.482	RS 1	1.000	0.860	0.784	0.440
RS 2	0.872	1.000	0.882	0.567	RS 2	0.860	1.000	0.881	0.520
RS 3	0.779	0.882	1.000	0.519	RS 3	0.784	0.881	1.000	0.496
RS 4	0.482	0.567	0.519	1.000	RS 4	0.440	0.520	0.496	1.000

3.37 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из недељних података за станице на реци Олдман (Модел 2)

Осмотрени	CA 1	CA 2	CA 3	CA 4	CA 5	CA 6	CA 7	CA 8	CA 9	CA 10	CA 11
CA 1	1.000	0.961	0.965	0.956	0.942	0.844	0.881	0.542	0.403	0.482	0.347
CA 2		1.000	0.915	0.954	0.947	0.873	0.910	0.582	0.493	0.539	0.372
CA 3			1.000	0.964	0.916	0.824	0.860	0.561	0.409	0.530	0.384
CA 4				1.000	0.942	0.879	0.928	0.616	0.482	0.586	0.436
CA 5					1.000	0.914	0.943	0.571	0.480	0.535	0.391
CA 6						1.000	0.969	0.604	0.522	0.547	0.430
CA 7							1.000	0.598	0.513	0.561	0.431
CA 8								1.000	0.699	0.801	0.778
CA 9									1.000	0.631	0.696
CA 10										1.000	0.644
CA 11											1.000

Генер.	CA 1	CA 2	CA 3	CA 4	CA 5	CA 6	CA 7	CA 8	CA 9	CA 10	CA 11
CA 1	1.000	0.957	0.960	0.948	0.934	0.830	0.868	0.482	0.357	0.425	0.312
CA 2		1.000	0.909	0.945	0.938	0.857	0.897	0.518	0.436	0.475	0.341
CA 3			1.000	0.961	0.909	0.816	0.852	0.497	0.364	0.468	0.336
CA 4				1.000	0.935	0.869	0.920	0.544	0.422	0.514	0.382
CA 5					1.000	0.903	0.935	0.500	0.412	0.466	0.344
CA 6						1.000	0.962	0.524	0.456	0.468	0.381
CA 7							1.000	0.526	0.448	0.488	0.383
CA 8								1.000	0.692	0.783	0.741
CA 9									1.000	0.642	0.689
CA 10										1.000	0.624
CA 11											1.000

3.38 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Студеници (Модел 2)

Осмотрени	RS 1	RS 2	RS 3	RS 4
RS 1	1.000	0.877	0.787	0.484
RS 2		1.000	0.888	0.570
RS 3			1.000	0.557
RS 4				1.000

Генерисани	RS 1	RS 2	RS 3	RS 4
RS 1	1.000	0.869	0.787	0.455
RS 2		1.000	0.882	0.540
RS 3			1.000	0.528
RS 4				1.000

## 3.39 – Корелациони коефицијенти средњих годишњих низова добијених из месечних података за станице на реци Олдман (Модел 2)

Осмотрени	СА 1	СА 2	СА 3	СА 4	СА 5	СА 6	СА 7	СА 8	СА 9	СА 10	СА 11
СА 1	1.000	0.961	0.965	0.956	0.942	0.844	0.881	0.540	0.402	0.481	0.346
СА 2		1.000	0.915	0.954	0.947	0.873	0.910	0.580	0.492	0.538	0.371
СА 3			1.000	0.964	0.916	0.824	0.860	0.558	0.408	0.529	0.382
СА 4				1.000	0.942	0.880	0.928	0.613	0.480	0.583	0.434
СА 5					1.000	0.914	0.943	0.569	0.479	0.533	0.389
СА 6						1.000	0.969	0.602	0.521	0.545	0.428
СА 7							1.000	0.596	0.511	0.559	0.429
СА 8								1.000	0.697	0.799	0.778
СА 9									1.000	0.631	0.696
СА 10										1.000	0.645
СА 11											1.000

Генер.	СА 1	СА 2	СА 3	СА 4	СА 5	СА 6	СА 7	СА 8	СА 9	СА 10	СА 11
СА 1	1.000	0.959	0.963	0.951	0.934	0.839	0.873	0.518	0.381	0.465	0.324
СА 2		1.000	0.913	0.951	0.938	0.869	0.904	0.554	0.464	0.511	0.347
СА 3			1.000	0.958	0.908	0.823	0.852	0.536	0.383	0.514	0.359
СА 4				1.000	0.932	0.877	0.922	0.594	0.455	0.568	0.410
СА 5					1.000	0.906	0.933	0.539	0.437	0.500	0.353
СА 6						1.000	0.968	0.581	0.486	0.527	0.391
СА 7							1.000	0.575	0.484	0.536	0.392
СА 8								1.000	0.690	0.787	0.755
СА 9									1.000	0.611	0.684
СА 10										1.000	0.623
СА 11											1.000





4.1.22 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА6

4.1.23 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА7

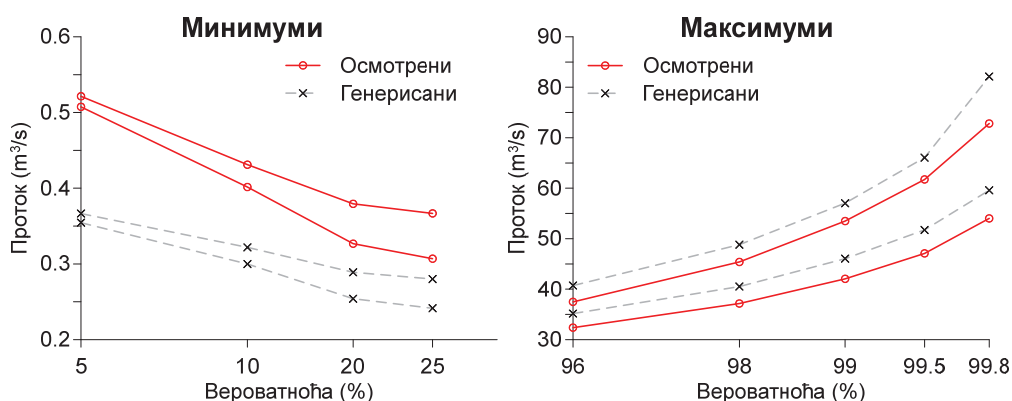
**Прилог 4.2 – Распон расподела за минималне и максималне годишње протоке и падавине, Модел 2**

4.2.1 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Девићи

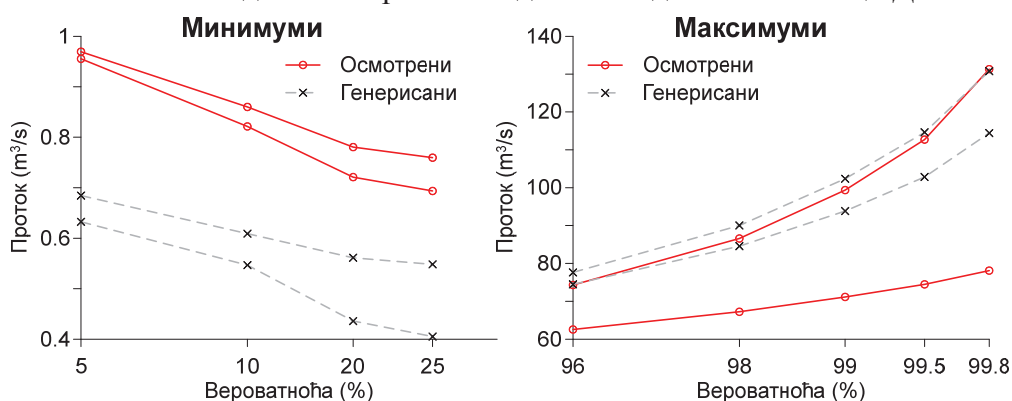
4.2.2 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Мланча

4.2.3 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Ушће

4.2.4 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију максималних годишњих падавина за дневне податке на станици Краљево

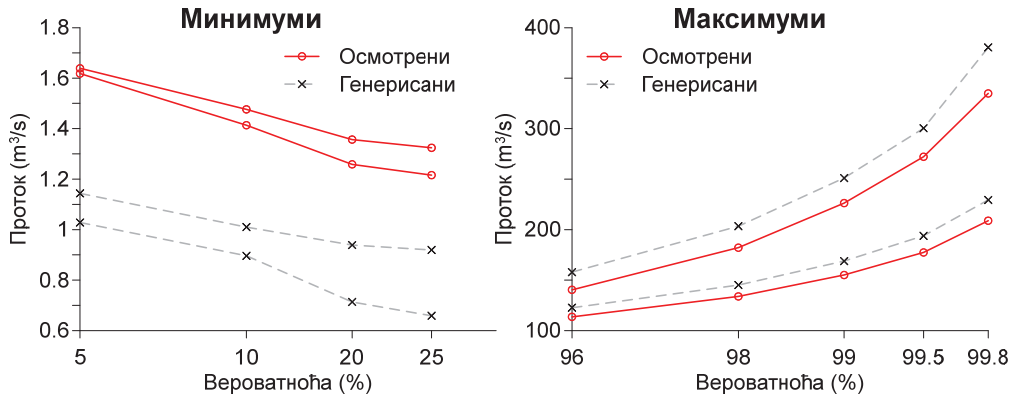


4.1.1 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Девићи

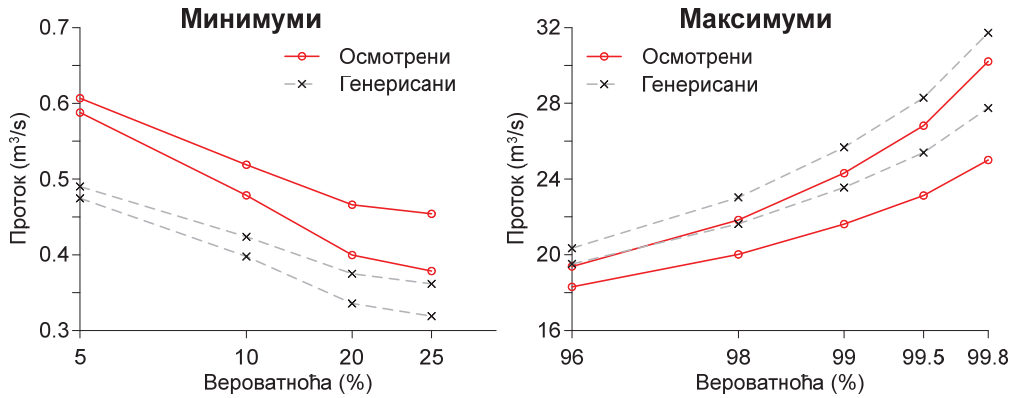


4.1.2 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Мланча

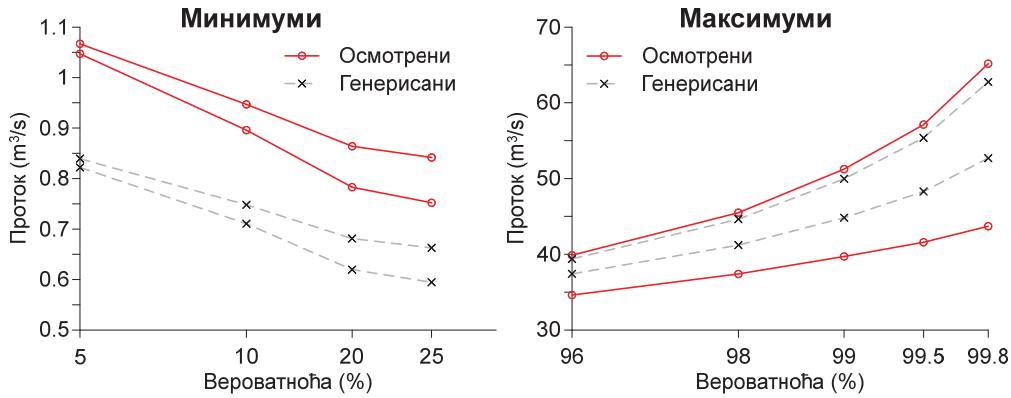




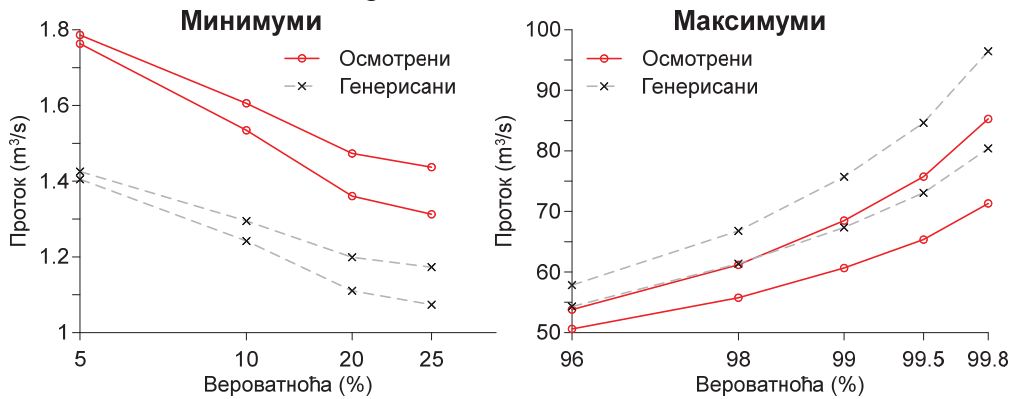
4.1.3 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Ушће



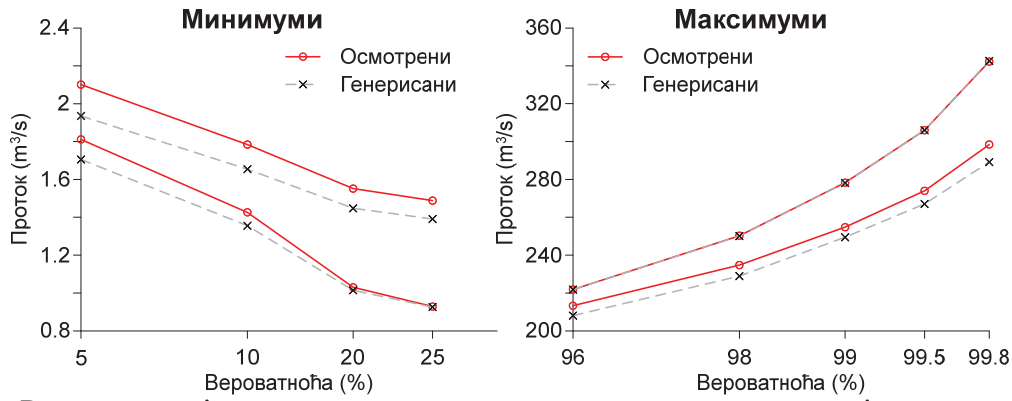
4.1.4 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици Девићи



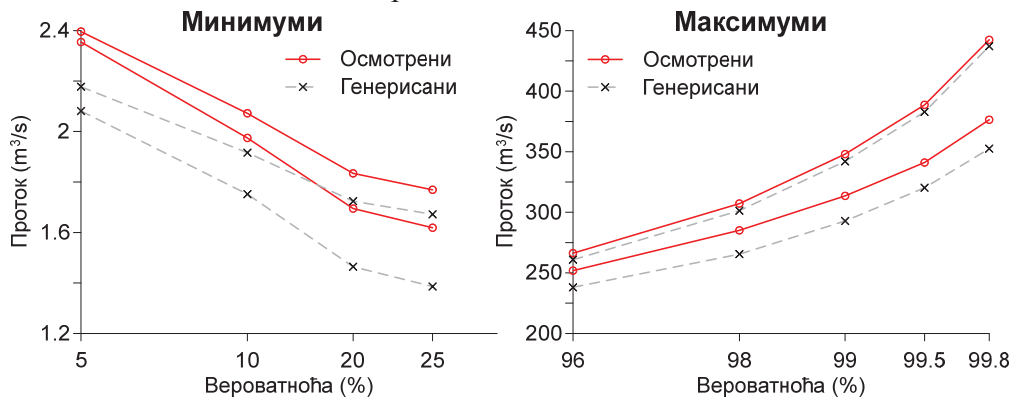
4.1.5 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици Мланча



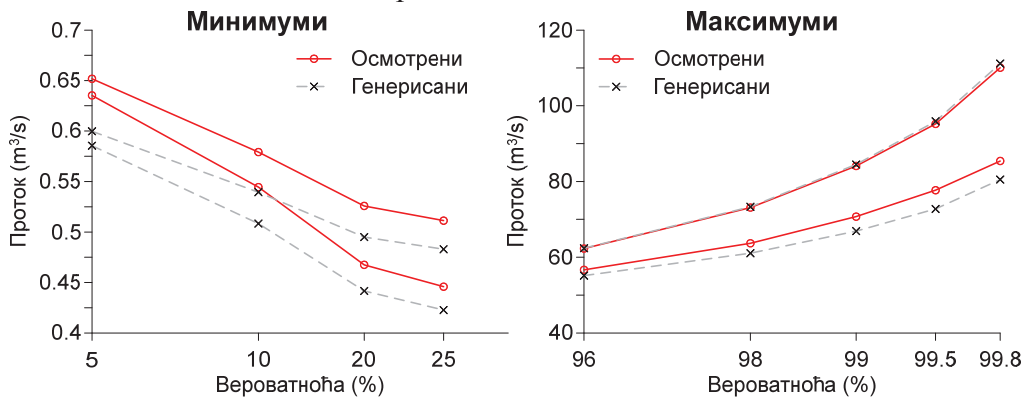
4.1.6 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици Ушће



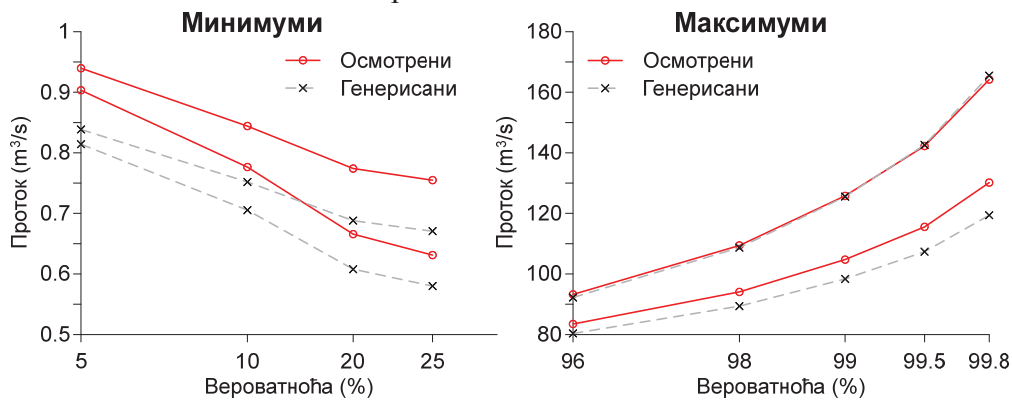
4.1.7 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици СА1



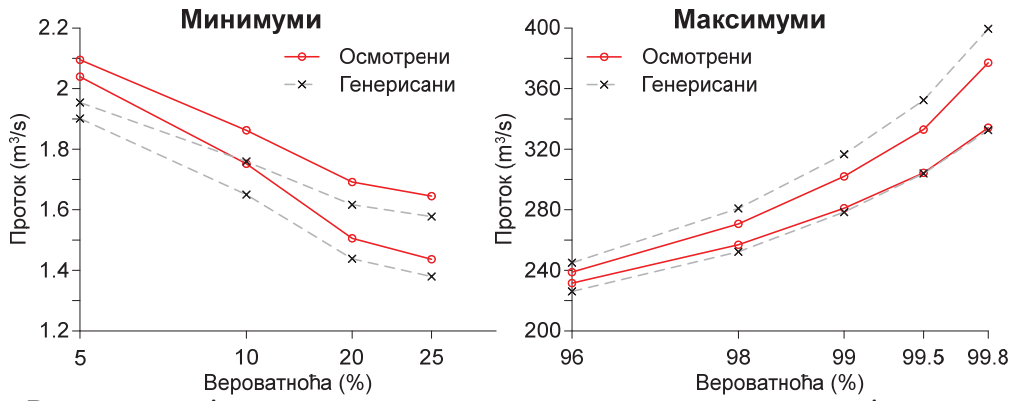
4.1.8 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици СА2



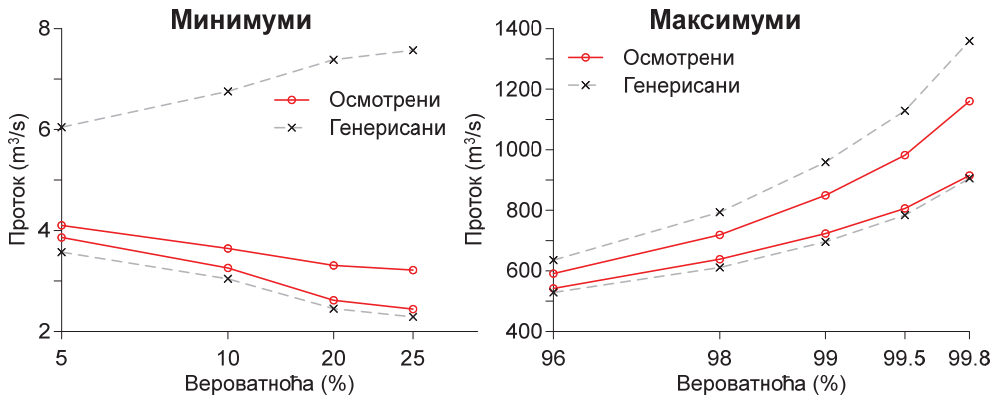
4.1.9 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици СА3



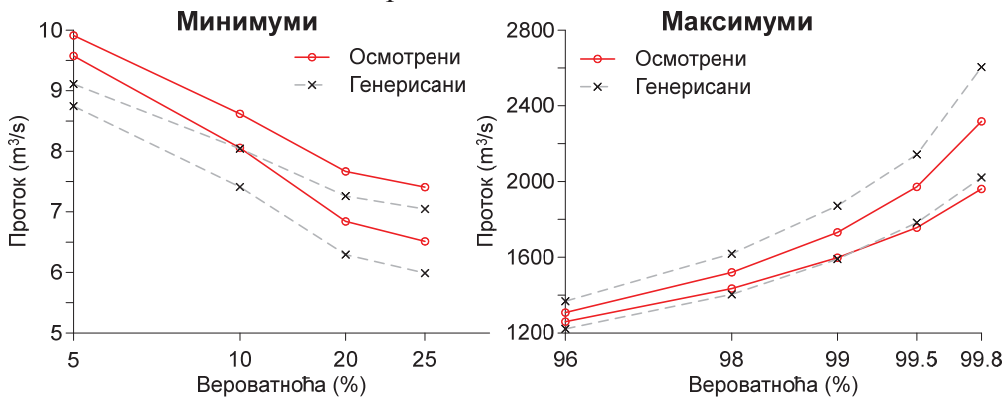
4.1.10 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици СА4



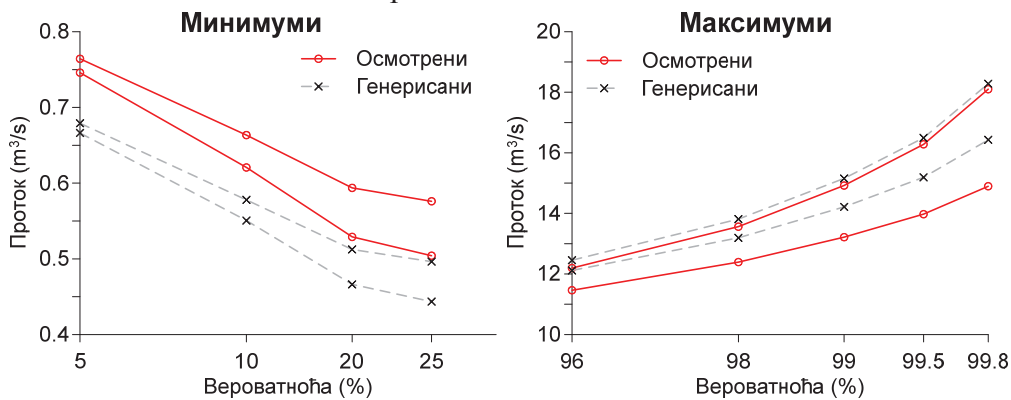
4.1.11 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици СА5



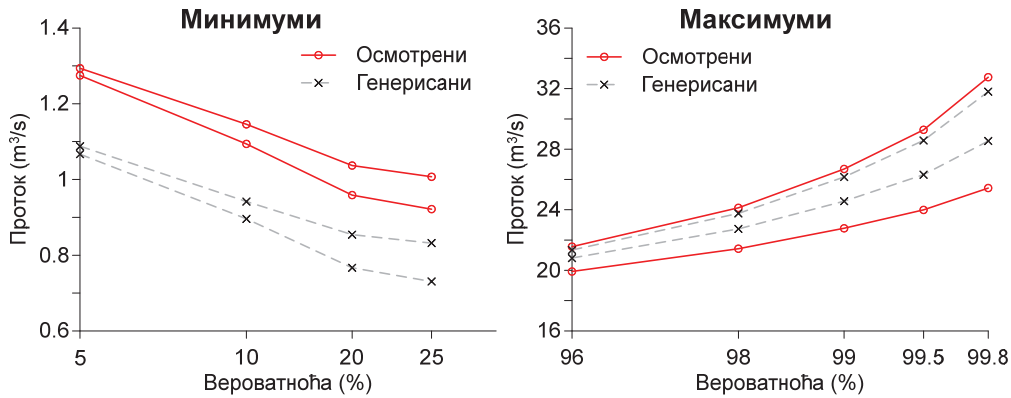
4.1.12 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици СА6



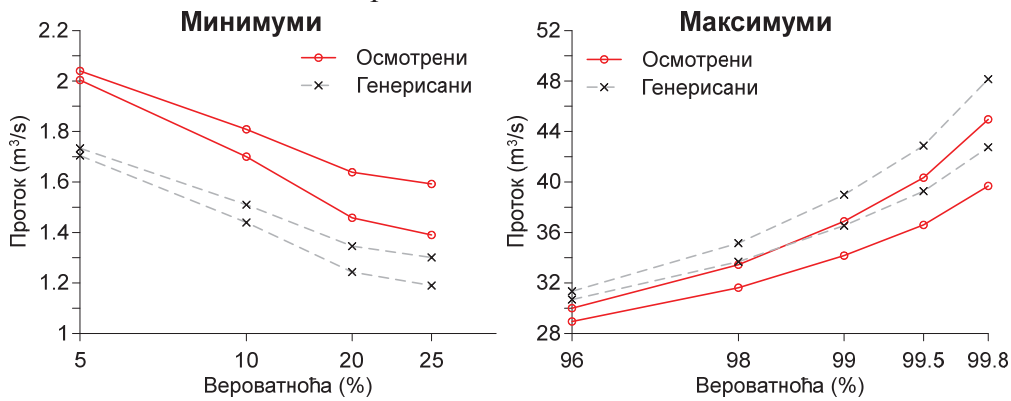
4.1.13 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за недељне податке на станици СА7



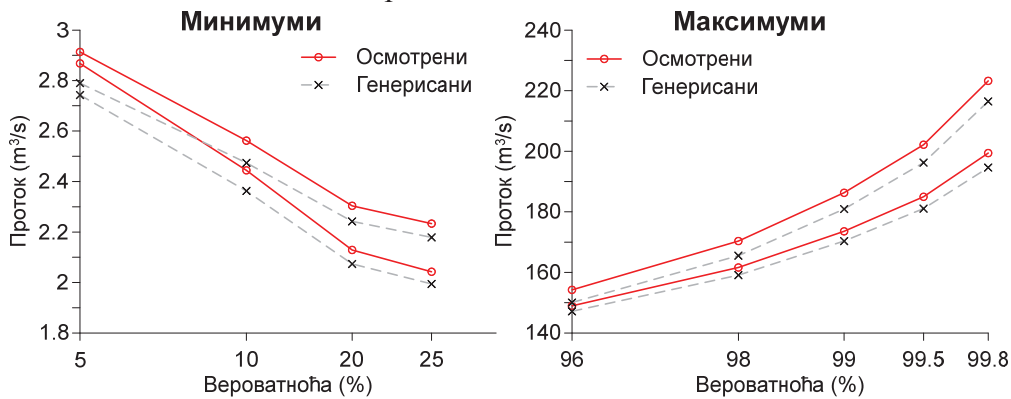
4.1.14 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици Девићи



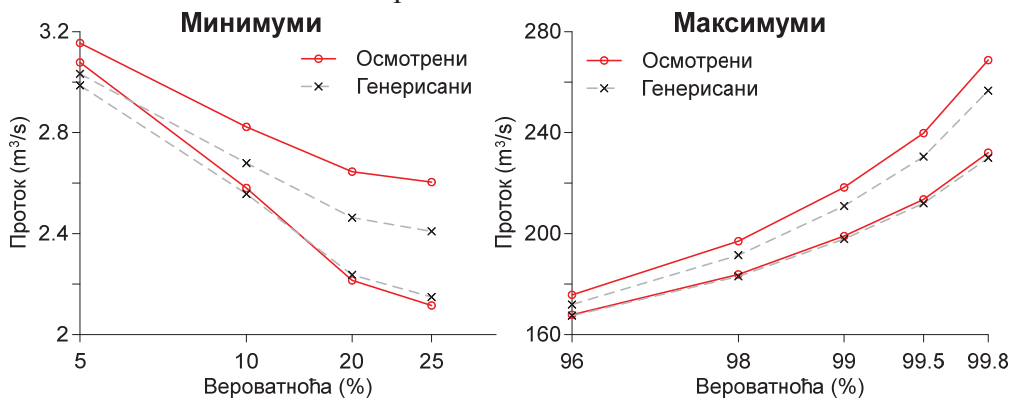
4.1.15 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици Мланча



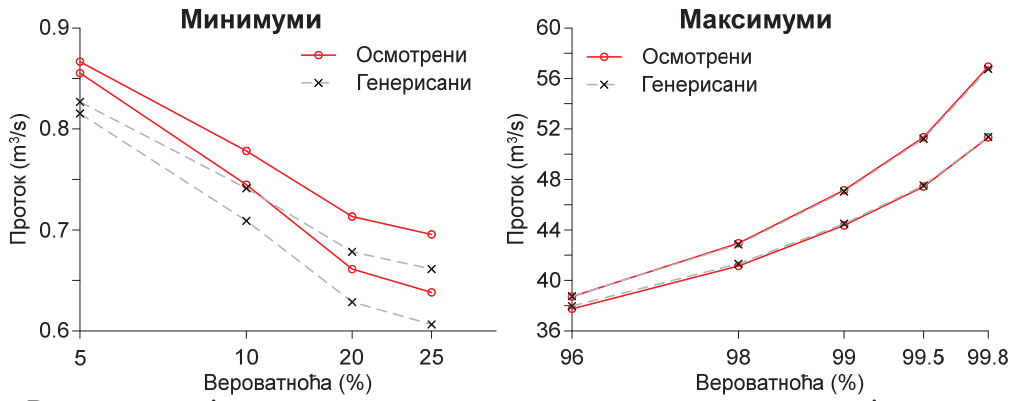
4.1.16 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици Ушће



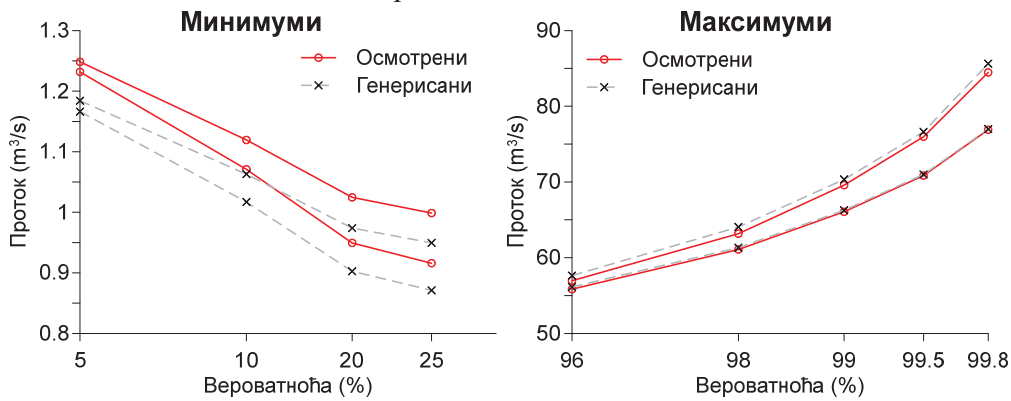
4.1.17 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА1



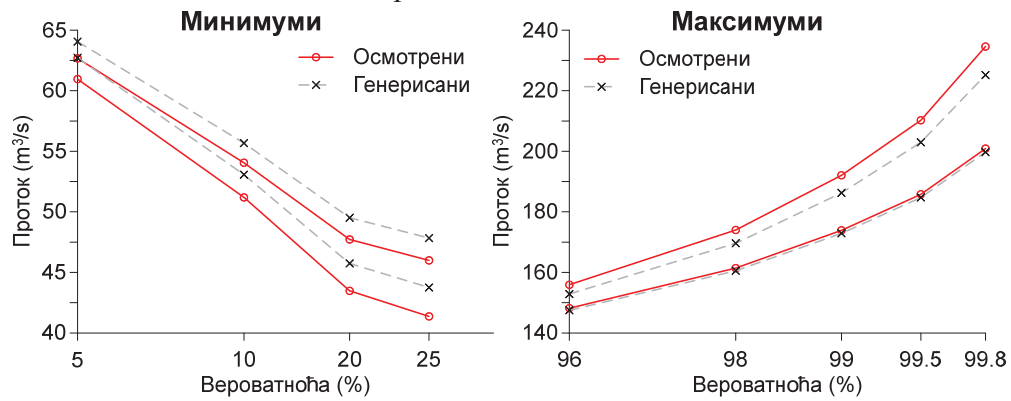
4.1.18 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА2



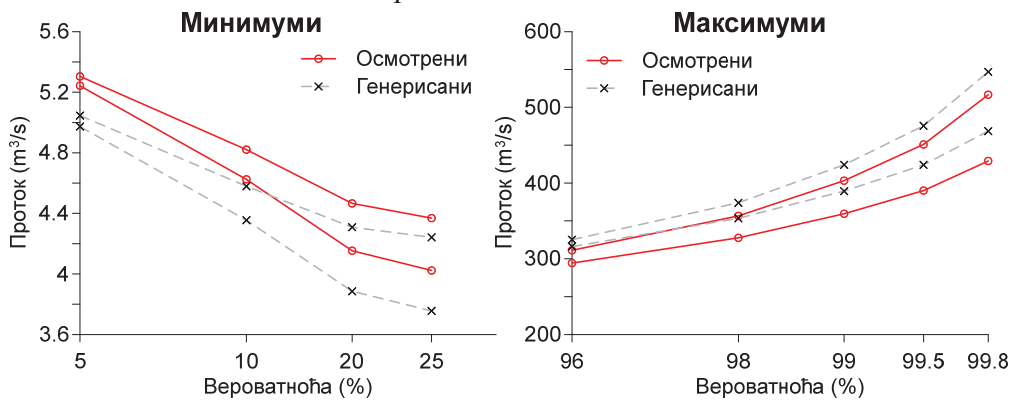
4.1.19 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА3



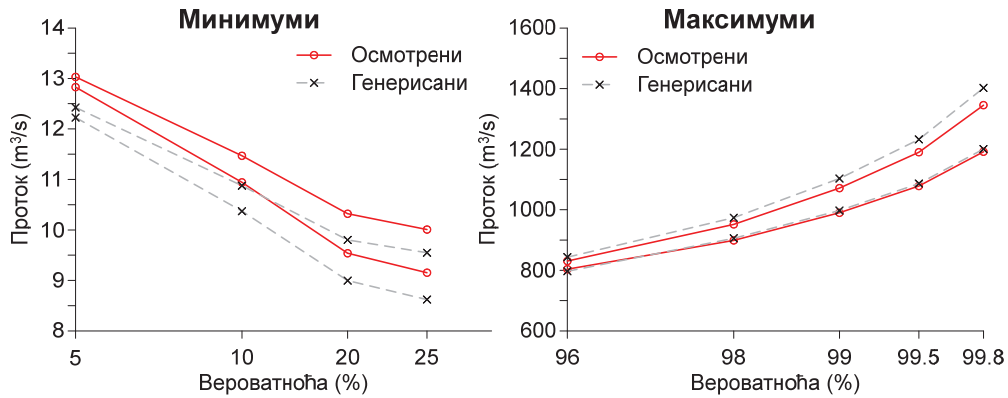
4.1.20 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА4



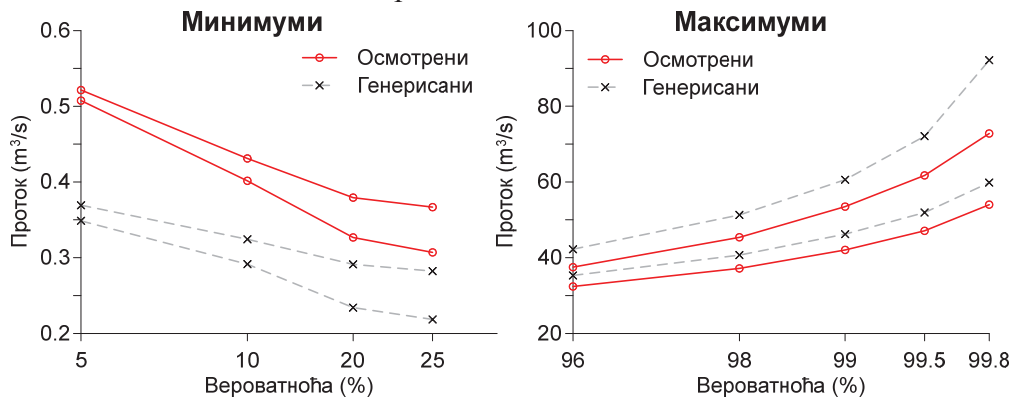
4.1.21 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА5



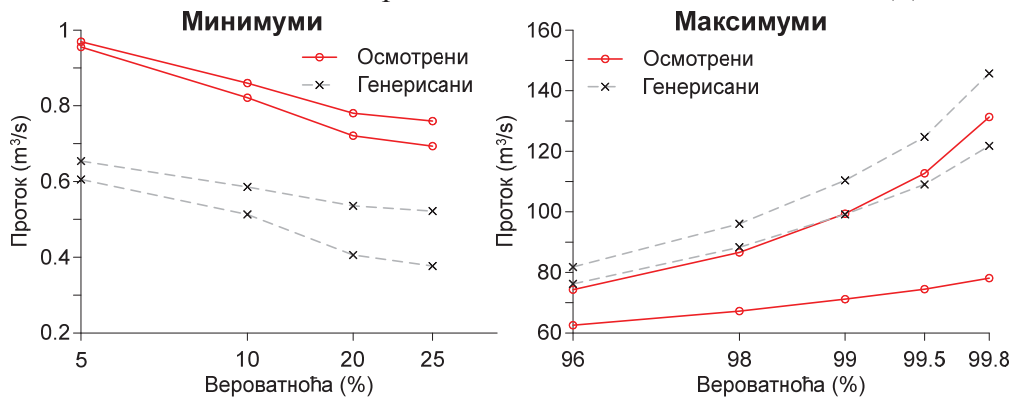
4.1.22 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА6



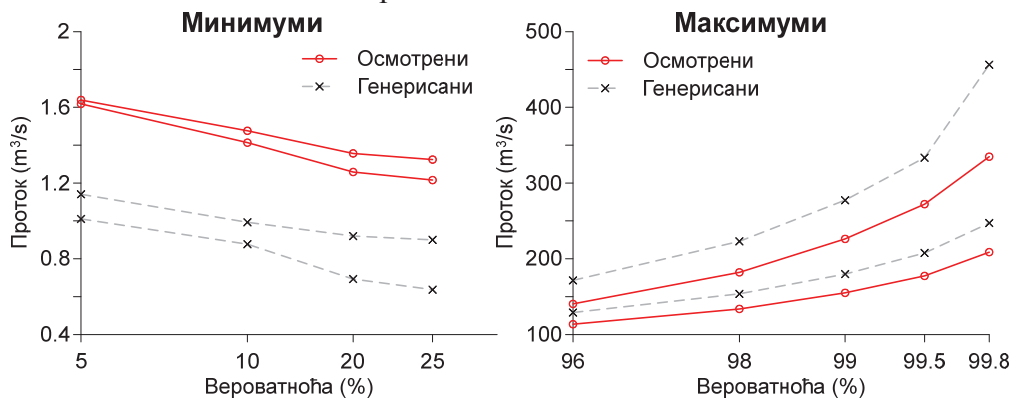
4.1.23 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за месечне податке на станици СА7



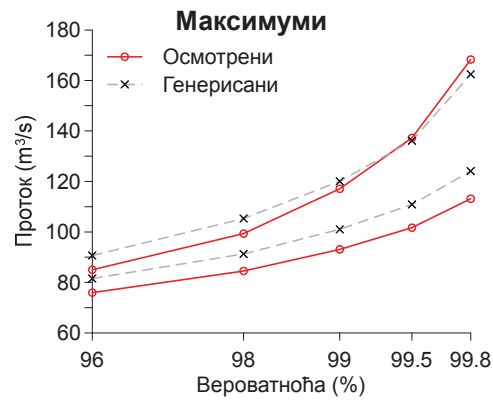
4.2.1 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Девићи



4.2.2 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Мланча



4.2.3 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију минималних и максималних годишњих протока за дневне податке на станици Ушће



4.2.4 – Распон теоријских расподела за осмотрену и генерисану серију максималних годишњих падавина за дневне податке на станици Краљево





## Биографија аутора

### Општи подаци

Ђурица Марковић, дипл.инж.грађ. рођен је 05.05.1968. године у Приштини. Основну школу завршио је у Приштини. Прва два разреда средње школе завршио је у гимназији „Иво Лола Рибар“ у Приштини а трећи и четврти разред средњег усмереног образовања завршио је у средњој грађевинској школи „Штјефан Ђечови“ у Приштини 1986. године. Уписао је Грађевинско-архитектонски факултет Универзитета у Приштини школске 1986/87 године. Студије је завршио 1992. године са просечном оценом 7,46. Дипломски рад је одбранио из предмета „Снабдевање водом и каналисања насеља“ под називом „Идејни пројекат канализације за град Подујево“ са оценом 10 (десет) и стекао стручни назив дипломираног инжењера грађевинарства, хидротехничког смера.

Последипломске студије уписује 1994. године на Грађевинском факултету Универзитета у Београду. Након одслушаних последипломских студија, положио је све испите предвиђене наставним планом и програмом факултета са просечном оценом 9,36. Стекао је академски степен магистара наука 2008. године, одбранивши магистарску тезу под називом „**Оптимално управљање расподелом воде из акумулације помоћу генерисаних хидролошких низова**“.

По завршетку редовних студија, од 1992. до 1996. године радио је у приватном предузећу Coming у Приштини. Од 1996. године је запослен на Грађевинско-архитектонском факултету Универзитета у Приштини (данас у склопу Факултета техничких наука Универзитета у Приштини са седиштем у Косовској Митровици). Ради као асистент на предметима: Хидротехника, Рачунарско цртање у грађевинарству, Примена табеларних прорачуна, Технике презентације 3 - 2D технике и Технике презентације 4 - 3D технике. Био је ангажован и на предметима: Механика 1, Механика 2 и Механика и отпорност материјала, Рачунарска графика и Принципи СААД-а.

На матичном факултету учествовао је и учествује у научно-истраживачким пројектима Министарства науке Србије и у ТЕМПУС пројектима. Као члан Комисије за акредитацију на Факултету техничких наука у Косовској Митровици учествовао је у припреми акредитационих програма за област Грађевинарство, у акредитационим циклусима 2008 и 2013. године.

Аутор је једног рада у водећем међународном часопису са SCI листе и три рада у домаћим научним и стручним часописима, као и више радова у саопштењима са научних и стручних скупова.

Упоредо са радом на факултету, био је ангажован на разним пројектима у припреми, пројектовању, тендерисању, извођењу, техничкој контроли и пријему објеката. Члан је Инжењерске коморе Србије. У току професионалне каријере учествовао је у тимовима за пројектовање и за вршење надзора изградње великог броја хидротехничких објеката.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани \_\_\_\_\_ Ђурица Марковић \_\_\_\_\_

број индекса \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

### **НЕПАРАМЕТАРСКО ГЕНЕРИСАЊЕ СТОХАСТИЧКИХ ХИДРОЛОШКИХ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, 18.01.2016.

\_\_\_\_\_

## Прилог 2.

**Изјава  истоветности штампане и електронске верзије  
докторског рада**Име и презиме аутора Ђурица Марковић

Број индекса \_\_\_\_\_

Студијски програм хидротехникаНаслов рада Непераметарско генерисање стохастичких  
хидролошких временских серијаМентор Проф. др Јасна ПлавшићПотписани/а Ђурица Марковић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**У Београду, 18.01.2016.

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

### **НЕПАРАМЕТАРСКО ГЕНЕРИСАЊЕ СТОХАСТИЧКИХ ХИДРОЛОШКИХ ВРЕМЕНСКИХ СЕРИЈА**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

**Потпис докторанда**

У Београду, 18.01.2016.

---