

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Nada M. Vučijak

**ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE FAZNE  
RAZLIKE SINUSNIH SIGNALA NISKIH  
UČESTANOSTI**

doktorska disertacija

Beograd, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Nada M. Vučijak

**THE ALGORITHM FOR PHASE  
DIFFERENCE DETERMINATION OF  
LOW FREQUENCY SINUSOIDAL  
SIGNALS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016.

# Podaci o mentoru i članovima komisije

## Mentor:

dr Lazar Saranovac, vanredni profesor,  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

## Članovi komisije:

dr Lazar Saranovac, vanredni profesor,  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Predrag Pejović, redovni profesor,  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Dragutin Salamon, vanredni profesor u penziji,  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Zoran Stojanović, docent,  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

dr Aleksandar Rakić, docent,  
Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet

Datum: \_\_\_\_\_.

# Algoritam za određivanje fazne razlike sinusnih signala niskih učestanosti

## Rezime

Pouzdana merenje fazne razlike između električnih signala neophodno je u mnogim mernim sistemima kao što su: merenje aktivne i reaktivne električne snage i energije, faktora snage, harmonika u električnom naponu i struji, određivanje kompleksnog odnosa izlaznog i ulaznog signala mernih pretvarača (delitelji napona i strujni šantovi).

O značaju merenja faznog ugla najbolje govori činjenica da su mogućnosti merenja i etaloniranja koje se kraće označavaju CMCs (engl. Calibration and Measurement Capabilities) faznog ugla, nacionalnih metroloških instituta pojedinih država, objavljene na internet stranici Međunarodnog biroa za tegove i mere (fr. Bureau International des Poids et Mesures - BIPM) <http://kcdb.bipm.org>, pošto ih je prethodno odobrila regionalna metrološka organizacija EURAMET (engl. European Association of National Metrology Institutes).

Danas se fazna razlika između dva kontinualna sinusna signala najčešće određuje koristeći uzorke signala koji se obrađuju nekim od algoritama za određivanje fazne razlike. U NMI (engl. National Metrological Institutes) se za uzorkovanje signala uobičajeno koriste DSV (engl. digital sampling voltmeters) koji obavljaju vremensku i amplitudnu diskretizaciju signala.

Uz rezultate merenja obavezno se daje i procena merne nesigurnosti, u skladu sa međunarodnim dokumentima.

Predmet istraživanja disertacije je algoritam za određivanje fazne razlike iz uzoraka dva sinusna signala. Na osnovu poznatih algoritama UQDE (engl. unbiased quadrature delay estimator) i QDE (engl. quadrature delay estimator) razvijen je i testiran novi algoritam MSAL (engl. modified simple algorithm) za određivanje fazne razlike iz uzoraka dva sinusna signala. U novom algoritmu, korišćenjem dva postojeća signala uvode se dva nova signala fazno pomerena u odnosu na postojeće signale. Testira se hipoteza da je izborom faznog kašnjenja moguće dobiti vrednost fazne razlike između dva sinusna signala koristeći po jedan uzorak svakog signala (algoritam nazvan SAL), a

takođe i da se primenom nešto složenije formule na veći broj uzoraka signala, može odrediti vrednost fazne razlike između dva sinusna signala sa znatno manjom mernom nesigurnošću (algoritam nazvan MSAL). Dat je matematički model, rezultati simulacija i rezultati primene novih algoritama na uzorke realnih signala.

U literaturi postoji mnogo algoritama za određivanje fazne razlike između dva sinusna električna signala, a u disertaciji je dat pregled samo onih algoritama koji su od interesa za temu disertacije. Prvo je razmatran algoritam UQDE na kojem su zasnovani novi algoritmi predloženi u disertaciji. Dat je i kratak pregled algoritama 3PSF, 4PSF i 7PSF (engl. three, four and seven parameter sinus fitting) koji su primenjeni na uzorke realnih signala u cilju poređenja rezultata određivanja fazne razlike sa rezultatima dobijenim koristeći nove algoritme, kao i kratak pregled algoritama za određivanje fazne razlike zasnovanih na Furijeovoj transformaciji, maksimalnoj verodostojnosti i linearnoj predikciji.

Upoređeni su rezultati dobijeni primenom novih algoritama za određivanje fazne razlike iz uzoraka realnih električnih signala sa rezultatima dobijenim primenom drugih postojećih algoritama na iste uzorke signala. To je omogućilo da se verifikuju i uporede karakteristike postojećih i novih algoritama za određivanje fazne razlike i dokažu pretpostavljene hipoteze istraživanja. U disertaciji su algoritmi primenjeni na uzorke realnih električnih signala niskih učestanosti jer je na raspolaganju bila takva oprema za uzorkovanje signala.

Uz rezultate za faznu razliku date su i procene merne nesigurnosti tih rezultata u skladu sa Uputstvom za izražavanje nesigurnosti u merenju (engl. „Guide to the expression of uncertainty in measurement”- GUM).

U disertaciji je dat i kratak pregled metoda merenja koje se danas koriste za etaloniranje fazne razlike električnih signala niskih učestanosti u nacionalnim metrološkim institutima.

**Ključne reči:** sinusni električni signali, fazna razlika, uzorkovanje signala, algoritam MSAL, etaloniranje, merna nesigurnost.

**Naučna oblast:** tehničke nauke, elektrotehnika

**Uža naučna oblast:** elektronika

**UDK broj:** 621.3

# **The Algorithm for Phase Difference Determination of Low Frequency Sinusoidal Signals**

## **Abstract**

The reliable measurement of phase difference between two signals is essential in many measurement systems such as: measurement of active and reactive electric power and energy, power factor, voltage and current harmonics, the determination of the complex ratios between the output and input signals of transducers (voltage dividers and current shunts).

The importance of phase angle measurements is the best illustrated by fact that calibration and measurement capabilities (CMCs) of the national metrological institutes of individual countries are published at website of International Bureau of Weights and Measures (Bureau International des Poids et Mesures - BIPM), <http://kcdb.bipm.org>, as previously approved by the regional metrological organization EURAMET (European Association of National Metrology Institutes).

Nowadays, the phase difference between two continuous sinusoidal signals is usually determined by means of discrete samples of signals processed by some of the algorithms for the phase difference estimation. DSV (digital sampling voltmeters) are usually used for the time and amplitude discretization of signals in NMI (National Metrological Institutes).

The results of measurements must be accompanied with the estimates of uncertainties according to the international recommendations.

The subject of the dissertation research is algorithm for phase difference determination using samples of two sinusoidal signals. On the basis of known algorithms UQDE (unbiased quadrature delay estimator) and QDE (quadrature delay estimator) the new algorithm MSAL (modified simple algorithm) for phase difference determination from the samples of two sinusoidal signals is developed and tested. Two new signals phase shifted to the existing signals are introduced in new algorithm. The hypothesis that it is possible to get the phase difference between two sinusoidal signals

by choice of phase delay between two samples, one sample of each signal (algorithm called SAL) is tested, and also by applying the more complex formula to a larger number of samples phase difference between two sinusoidal signals can be determined with lower uncertainty (algorithm called MSAL). The mathematical model, results of simulations and results of applications of new algorithms on real samples, are given.

There are many algorithms for estimation of the phase difference between two electrical sinusoidal signals, in literature. The short overview of those algorithms that are of interest for dissertation, is provided. The algorithm UQDE is first considered because new algorithms suggested in dissertation are based on it. Also, 3PSF, 4PSF and 7PSF (three, four and seven parameter sinus fitting) algorithms are considered, because those algorithms are applied on samples of real signals for phase difference determination in order to compare obtained results with results for the phase difference determined by new algorithms. The algorithms for the phase difference determination based on Fourier transform, maximum likelihood and linear prediction, are also short reviewed.

The results obtained using a new algorithm MSAL for determination of the phase difference of samples of real electrical signals are compared with those obtained by other existing algorithms, applied on the same signals samples. That enabled to verify and compare the characteristics of the existing and proposed algorithm for determination of the phase difference and demonstrate assumed research hypotheses. The algorithms are applied to a low frequency real electrical signals because such equipment for signals sampling were available.

Together with results of phase difference determination, the estimation of uncertainties of those results is given according to „Guide to the expression of uncertainty in measurement” – GUM.

The dissertation provides also a brief overview of measurement methods that are nowadays used for calibration of the phase difference of electrical signals in the national metrological institutes (MNIs).

**Key words:** sinusoidal electrical signals, phase difference, signal sampling, MSAL algorithm, calibration, measurement uncertainty.

**Scientific area:** technical sciences, electrical engineering

**Specific scientific area:** electronics

**UDK number:** 621.3



# Sadržaj

Spisak slika .....	xii
Spisak tabela .....	xvi
Oznake i skraćenice .....	xviii
<b>1 Uvod .....</b>	<b>1</b>
1.1 Predmet istraživanja disertacije .....	2
1.2 Organizacija disertacije .....	5
<b>2 Pregled u oblasti istraživanja .....</b>	<b>7</b>
<b>2.1 Uzorkovanje dva sinusna signala u mernim sistemima sa DSV .....</b>	<b>8</b>
2.1.1 Šeme mernih sistema koji koriste DSV za uzorkovanje dva sinusna signala .....	10
2.1.2 Matematički model DSV .....	15
2.1.3 Uticaj ostalih delova mernog sistema na rezultate merenja fazne razlike .....	20
<b>2.2 Algoritmi QDE i UQDE .....</b>	<b>23</b>
2.2.1 Estimator faznog ugla sinusnog signala .....	23
2.2.2 Algoritam QDE .....	26
2.2.3 Algoritam UQDE .....	28
<b>2.3 Procena merne nesigurnosti prema uputstvima JCGM .....</b>	<b>30</b>
2.3.1 Procena merne nesigurnosti u skladu sa GUM .....	31
2.3.2 Dodatak 1 GUM .....	36
2.3.3 Dodatak 2 GUM .....	38

<b>3</b>	<b>Novi algoritam za određivanje fazne razlike između sinusnih signala .....</b>	<b>40</b>
3.1	Algoritam SAL .....	44
3.2	Algoritam MSAL.....	48
3.3	Simulacije sa primenom algoritma SAL .....	53
3.4	Simulacije sa primenom algoritma MSAL .....	57
3.5	Zaključak .....	60
<b>4</b>	<b>Poređenje rezultata za faznu razliku dobijenih primenom novog i postojećih algoritama na uzorke realnih signala .....</b>	<b>61</b>
4.1	Oprema koja je korišćena za merenje .....	62
4.2	Primer sa 18 uzoraka u periodu signala .....	63
4.2.1	Rezultati za faznu razliku .....	64
4.2.2	Procena merne nesigurnosti .....	68
4.2.3	Validacija .....	83
4.2.4	Zaključak .....	86
4.3	Primer sa 200 uzoraka u periodu signala .....	89
4.4	Primeri kada količnik učestanosti uzorkovanja i učestanosti signala nije ceo broj .....	99
4.5	Poređenje rezultata primene algoritama – zaključak .....	106
<b>5</b>	<b>Zaključak .....</b>	<b>108</b>
	<b>Literatura .....</b>	<b>111</b>
<b>Prilog A</b>	<b>Radjan i stepen .....</b>	<b>121</b>
<b>Prilog B</b>	<b>Izabrani algoritmi iz literature za određivanje fazne razlike iz uzoraka sinusnih signala .....</b>	<b>123</b>
B.1	Algoritmi zasnovani na fitovanju.....	124
B.1.1	Algoritam za fitovanje tri parametra sinusnog signala .....	124
B.1.2	Algoritam za fitovanje četiri parametra sinusnog signala .....	126

B.1.3	Algoritam za fitovanje sedam parametara dva sinusna signala	129
B.2	Algoritmi zasnovani na Furijeovoj transformaciji .....	131
B.2.1	Modifikovan estimator faznog kašnjenja zasnovan na DTFT	133
B.2.2	Estimator faznog kašnjenja zasnovan na DTFT koji koristi i negativne učestanosti .....	135
B.3	Algoritmi zasnovani na kriterijumu maksimalne verodostojnosti .....	137
B.4	Algoritam zasnovan na primeni linearne predikcije .....	140

**Prilog C    Etaloniranje etalona faznog ugla u NMI. .... 142**

Biografija autora

Izjava o autorstvu

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Izjava o korišćenju

## Spisak slika

Slika 2.1.1 Asinhrono uzorkovanje dva sinusna signala .....	9
Slika 2.1.1.1 Blok šema sistema sa dva DSV za sinhrono uzorkovanje električnog napona i struje (trigger za signale fazno spregnut za napon iz izvora).....	12
Slika 2.1.1.2 Blok šema sistema sa jednim DSV za sinhrono generisanje i uzorkovanje električnog napona i struje, i preklopnikom signala .....	12
Slika 2.1.1.3 Blok šema sistema sa dva DSV za sinhrono uzorkovanje električnog napona i struje, sa istovremenim spoljašnjim trigerovanjem DSV1 i DSV2 .....	13
Slika 2.1.1.4 Blok šema sistema sa dva DSV za sinhrono uzorkovanje električnog napona i struje, DSV1 – „master“, DSV2 – „slave“ .....	13
Slika 2.1.1.5 Princip uzorkovanja jednog a zatim drugog signala istim DSV .....	15
Slika 2.1.2.1 Ilustracija tehnike uzorkovanja sinusnog signala u mernom sistemu koji koristi IADC .....	16
Slika 3.3.1 Zavisnost greške fazne razlike između dva sinusna signala $\Delta\varphi$ od greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala $\delta\psi$ , za vrednosti fazne razlike $5^\circ$ , $45^\circ$ i $85^\circ$ , algoritam SAL .....	53
Slika 3.3.2 Zavisnost greške fazne razlike između dva sinusna signala $\Delta\varphi$ od faze prvog uzorka $\varphi_1$ za vrednosti fazne razlike $5^\circ$ , $45^\circ$ i $85^\circ$ , algoritam SAL .....	54

Slika 3.3.3 Zavisnost srednje kvadratne greške fazne razlike $MSE$ od odnosa signal-šum $SNR$ , za vrednosti greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala $0^\circ$ ; $0,1^\circ$ ; $0,5^\circ$ i $1^\circ$ , algoritam SAL .....	55
Slika 3.3.4 Zavisnost srednje kvadratne greške fazne razlike $MSE$ od fazne razlike $\varphi$ između dva signala određena koristeći algoritam SAL, za uslove kada su vrednosti greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala $0^\circ$ ; $0,1^\circ$ ; $0,5^\circ$ i $1^\circ$ i odnos signal-šum $SNR = 70$ dB .....	56
Slika 3.4.1 Zavisnost greške fazne razlike između dva sinusna signala $\Delta\varphi$ od greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala $\delta\psi$ , za faznu razliku između dva signala $45^\circ$ , algoritami MSAL i UQDE .....	57
Slika 3.4.2 Srednja kvadratna greška fazne razlike između dva sinusna signala $MSE$ u funkciji od odnosa signal-šum $SNR$ za fazni pomeraj dodatnih signala $89,47^\circ$ dobijena primenom algoritama MSAL, UQDE i QDE .....	58
Slika 3.4.3 Srednja kvadratna greška fazne razlike $MSE$ u funkciji od odnosa signal-šum $SNR$ za fazni pomeraj dodatnih signala $89,65^\circ$ za 1,7 perioda signala dobijena primenom algoritama MSAL, UQDE i QDE .....	59
Slika 4.2.1. Uzorci dva realna sinusna signala učestanosti 53 Hz sa faznom razlikom između signala $59,9^\circ$ , broj uzoraka u periodu signala 18 .....	63
Slika 4.2.1.1 Fazna razlika vrednosti $59,9^\circ$ između dva sinusna signala učestanosti 53 Hz, broj uzoraka u periodu signala 18, u zavisnosti od delova periode signala, dobijena koristeći algoritme 7PSF, UQDE4, UQDE5, MSAL4 i MSAL5 .....	66
Slika 4.2.2.1 Rezultati za faznu razliku $59,9^\circ$ određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja ( $r$ uzoraka) dodatnih signala i proširena merna nesigurnost $U_{RSSuC}$ , primer sa 18 uzoraka u periodu signala .....	82
Slika 4.2.2.2 Rezultati za faznu razliku $59,9^\circ$ određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja ( $r$ uzoraka) dodatnih signala i proširena merna nesigurnost $U_{RSSU}$ , primer sa 18 uzoraka u periodu signala .....	82

Slika 4.2.2.3 Rezultati za faznu razliku $59,9^\circ$ određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja ( $r$ uzoraka) dodatnih signala i proširena merna nesigurnost $U_{SUMU}$ , primer sa 18 uzoraka u periodu signala .....	83
Slika 4.3.1 Uzorci dva realna sinusna signala učestanosti 50 Hz, fazna razlika $10^\circ$ , broj uzoraka u periodu po 200 .....	89
Slika 4.3.2 Vrednosti fazne razlike $10^\circ$ između dva realna sinusna signala sa 200 uzoraka u periodu signala u zavisnosti od broja perioda signala, određene primenom algoritama MSAL50, UQDE50, 3PSF i 7PSF na ceo broj perioda signala .....	91
Slika 4.3.3 Vrednosti fazne razlike $10^\circ$ između dva realna sinusna signala u zavisnosti od broja uzoraka u dvanaestoj periodu signala; primenjeni algoritmi UQDE50, MSAL50 i 7PSF, broj uzoraka u periodu signala 200 .....	92
Slika 4.3.4 Fazna razlika vrednosti $10^\circ$ u zavisnosti od broja perioda dva uzorkovana sinusna signala sa 200 uzoraka u periodu signala, kada su dodatni signali fazno pomereni za 1, 10, 25, 30, 50, 75, 85, 150 i 190 uzoraka; primenjen algoritam MSAL .....	93
Slika 4.3.5 Rezultati za faznu razliku $10^\circ$ između dva realna sinusna napona određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala, primer sa 200 uzoraka u periodu signala .....	97
Slika 4.4.1 Uzorci dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, fazna razlika $30^\circ$ , učestanost uzorkovanja 10 kHz .....	100
Slika 4.4.2 Vrednost fazne razlike $30^\circ$ između dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka signala dobijena koristeći algoritme MSAL1, MSAL3, MSAL4, MSAL7, MSAL10, MSAL12 .....	100
Slika 4.4.3 Vrednost fazne razlike $30^\circ$ između dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka signala dobijena primenom algoritma MSAL13 .....	101

Slika 4.4.4 Vrednost fazne razlike $30^\circ$ između dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od bilo kog broja uzoraka signala dobijena primenom algoritma MSAL3 .....	102
Slika 4.4.5 Vrednosti fazne razlike $63^\circ$ između dva realna sinusna signala učestanosti 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka, dobijene primenom algoritama 7PSF, MSAL50(q/p), MSAL50(fo/fs), MSAL51(q/p) i MSAL51(fo/fs).....	103
Slika 4.4.6 Fazna razlika vrednosti $88^\circ$ između dva realna sinusna signala učestanosti 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od delova periode signala, dobijena primenom algoritama MSAL i 7PSF .....	104
Slika C.1 Blok šema etaloniranja kalibratora fazne razlike pomoću mosta sa impedansama $Z_1$ i $Z_2$ .....	144
Slika C.2: šema veza jednog kapacitivnog mosta proizvođača Clarke-Hes .....	146
Slika C.3 Šema heterodinskog mernog sistema za merenje fazne razlike između dva napona $u_N$ i $u_X$ .....	147
Slika C.4 a) Šema sistema za merenje fazne razlike između napona $U_1$ i $U_2$ metodom tri voltmetra koji mere napone $U_1$ , $U_2$ i $U_3$ , b) vektorski dijagram za merenje fazne razlike .....	149

## Spisak tabela

Tabela 4.2.1.1 Fazna razlika vrednosti $59,9^\circ$ između dva realna sinusna signala učestanosti 53 Hz, broj uzoraka u periodu 18, dobijena primenom algoritama 3PSF, 4PSF, 7PSF, UQDE4, MSAL4, UQDE5, MSAL5 na ceo broj perioda signala .....	65
Tabela 4.2.2.1 Vrednosti uzoraka jedne periode napona $u_1(t)$ , koeficijenti osetljivosti i merna nesigurnost $u_B$ u skladu sa GUM, primer sa 18 uzoraka u periodu napona .....	72
Tabela 4.2.2.2 Vrednosti uzoraka jedne periode napona $u_2(t)$ , koeficijenti osetljivosti i merna nesigurnost $u_B$ u skladu sa GUM, primer sa 18 uzoraka u periodu signala .....	72
Tabela 4.2.2.3 Standardne merne nesigurnosti tipa A za uzorke dva napona, primer sa 18 uzoraka u periodu napona .....	74
Tabela 4.2.2.4 Kombinovane merne nesigurnosti za uzorke napona, primer sa 18 uzoraka u periodu napona .....	75
Tabela 4.2.2.5 Vrednosti uzoraka jedne periode napona $u_1(t)$ , $u_2(t)$ , $u'_1(t)$ i $u'_2(t)$ iz kojih se izračunava fazna razlika koristeći algoritam MSAL .....	76
Tabela 4.2.2.6 Detaljan proračun merne nesigurnosti rezultata za faznu razliku između dva napona određena primenom algoritma MSAL za $r = 4$ i $r = 5$ , primer sa 18 uzoraka u periodu .....	80
Tabela 4.2.2.7 Rezultati za faznu razliku između dva napona određeni primenom algoritma MSAL, rezultati za bias i proširena merna nesigurnost, u zavisnosti od	



uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala, primer sa 18 uzoraka u periodi .....	81
Tabela 4.2.3.1 Budžet merne nesigurnosti za direktno merenje fazne razlike 59,9° između dva napona etalonom tip SD1000 .....	85
Tabela 4.3.1 Vrednosti fazne razlike 10° između dva realna sinusna signala određeni primenom algoritama UQDE50, MSAL50, 3PSF, 4PSF i 7PSF; broj uzoraka u periodu signala 200 .....	90
Tabela 4.3.2 Rezultati za faznu razliku 10° između dva realna sinusna signala, broj uzoraka u periodu signala 200, dobijeni koristeći MSAL algoritam primenjen na ceo broj perioda signala, kada su dodatni signali fazno pomereni za 1, 6, 10, 15, 25, 30, 40, 49, 50, 51, 65, 73, 75, 85, 89, 97, 98, 110, 150, 190 uzoraka .....	94
Tabela 4.3.3 Vrednosti fazne razlike 10° između dva realna sinusna signala sa 200 uzoraka u periodu signala, u zavisnosti od broja uzoraka koji ne odgovara celom broju perioda signala; primenjeni algoritmi UQDE30, MSAL30, MSAL49, MSAL50 i MSAL51 .....	95
Tabela 4.3.4 Rezultati za faznu razliku 10° između dva napona određeni primenom algoritma MSAL na 19 perioda napona u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala, primer sa 200 uzoraka u periodu signala .....	96
Tabela 4.4.1 Vrednosti fazne razlike 63° između dva realna sinusna signala učestanosti 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka signala koji odgovara približno celom broju perioda signala .....	105
Tabela 4.4.2 Razlike između vrednosti fazne razlike 63° koje su određene primenom algoritma MSAL kada se koristi količnik q/p i algoritma MSAL kada se koristi količnik fo/fs, za bilo koji broj uzoraka signala .....	105

## Oznake i skraćenice

$\varphi$	Fazna razlika između dva signala – Phase difference between two signals
$\varphi_1, \varphi_2, \theta$	Početna faza signala – The initial phase of signal
$\psi$	Fazni pomeraaj dodatnog signala – Phase delay of introduced signal
$\Delta\varphi$	Greška fazne razlike – Error of phase difference
$\Delta\psi$	Greška faznog pomeraja – Error of phase delay
$u_1(t), u_2(t)$	Električni napon – Voltage
$U_k(kT_s)$	Srednja vrednost $k$ -tog uzorka napona – The mean value of voltage sample $k$
$U_{\text{eff}}$	Efektivna (rms) vrednost signala – Effective (rms) value of signal
$u_S(t)$	Napon šuma izvora signala – Noise of source of signal
$u_{\text{sn}}(t)$	Napon šuma uzorkovanja DSV – Sampling noise of DSV
$w_n(t)$	Napon belog Gausovog šuma – White Gaussian noise voltage
$\varepsilon$	Relativna greška – Relative error
$f_0$	Učestanost (frekvencija) signala – Frequency of signal
$f_s$	Učestanost (frekvencija) uzorkovanja – Sampling frequency
$\omega$	Ugaona učestanost (frekvencija) signala – Angular frequency of signal
$\sigma$	Standardna devijacija – Standard deviation
$\sigma^2$	Varijansa (kvadrat standardne devijacije) – Variance (squared standard deviation)
$c_i$	Koeficijent osetljivosti – The sensitivity coefficient
$U$	Proširena merna nesigurnost – Expanded uncertainty
$\xi, \zeta$	Vektor parametara – Parameters vector
$N_p$	Broj uzoraka u periodu signala – Number of samples in period of signal
$N$	Ukupan broj uzoraka – Total number of samples
$T$	Operacija transponovanja – Mathematical transpose

$T_0$	Perioda signala – Signal period
$T_s$	Vreme uzorkovanja signala – Sampling time
$T_i$	Vreme integraljenja signala – Integration time
$t$	Vreme – Time
$i$	Broj iteracije – Iteration number
$SNR$	Odnos signal šum – Signal to Noise Ratio
$E$	Procena – Estimate
PDF	Funkcija gustine verovatnoće – Probability density function
MSE	Srednja kvadratna greška – Mean Squared Error
ADC	Analogno digitalni konvertor - Analog to Digital Converter
IADC	Analogno-digitalni konvertor sa integraljenjem – Integrating Analog to Digital Converter
DAC	Digitalno-analogni konvertor – Digital to Analog Converter
DSV	Digitalni sempling voltmetar – Digital Sampling Voltmeter
MSAL	Modifikovan jednostavan algoritam - Modified simple algorithm
SAL	Jednostavan algoritam - Simple algorithm
UQDE	Nepriistrasan (centriran) estimator kvadraturnog kašnjenja - Unbiased quadrature delay estimator
QDE	Estimator kvadraturnog kašnjenja - Quadrature delay estimator
3PSF	Fitovanje 3 parametara sinusoide - Three parameters sinus fitting
4PSF	Fitovanje 4 parametara sinusoide - Four parameters sinus fitting
7PSF	Fitovanje 7 parametara dve sinusoide - Seven parameters sinus fitting
DFT	Diskretna Furijeova transformacija - Discrete Fourier transform
DTFT	Diskretna Furijeova transformacija u vremenskom domenu - Discrete Time Fourier transform
ML	Maksimalna verodostojnost – Maximum Likelihood
LP	Linearna predikcija – Linear prediction
CRB	Kramer Rao granica – Cramer Rao bound
JCGM	Zajednički komitet za uputstva u metrologiji – Joint Committee for Guides in Metrology
GUM	Uputstvo za izražavanje nesigurnosti u merenju – Guide to the expression of uncertainty in measurement

MCM	Monte Karlo metod – Monte Carlo method
CMC	Mogućnosti etaloniranja i merenja – Calibration and Measurement Capabilities
NMI	Nacionalni metrološki institut – National Metrological Institute

# Glava 1

## Uvod

Fazni ugao je jedna od veličina u klasifikaciji Međunarodnog biroa za tegove i mere (engl. International Bureau of Weights and Measures – BIPM), za koju se objavljuju mogućnosti etaloniranja i merenja (engl. Calibration and Measurement Capabilities – CMCs) nacionalnih metroloških instituta (NMI) pojedinih država. CMCs se objavljuju na sajtu BIPM [1.1], pošto ih je prethodno odobrilo Evropsko udruženje nacionalnih metroloških instituta (engl. European Association of National Metrology Institutes – EURAMET) i druge regionalne metrološke organizacije (engl. Regional metrological organizations – RMOs). Iz podataka trenutno objavljenih na sajtu BIPM, CMCs su date za opseg merenja faznog ugla od 0° do 360°, za vrednosti naizmeničnog električnog napona od 10 mV do 350 V, učestanosti od 1 Hz do 100 kHz, sa proširenom mernom nesigurnošću 0,001° do 1,68° za nivo poverenja 95 %.

U standardu SRPS EN 8000-6:2010. koji se odnosi na veličine i jedinice, u delu Elektromagnetizam [1.2] definisani su pojmovi početna faza, faza i fazna razlika, na sledeći način:

- sinusna varijacija u vremenu, električne struje predstavlja se formulom:

$$i = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \varphi_i), \quad (1.1)$$

gde je  $i$  - trenutna vrednost struje,  $I$  - njena efektivna (rms) vrednost,  $(\omega t - \varphi_i)$  je faza,  $\varphi_i$  je početna faza,  $\omega$  je ugaona učestanost.

- fazna razlika  $\varphi$  između napona  $u$  i električne struje  $i$ :

$$u = \hat{U} \cos(\omega t - \varphi_u), \quad (1.2)$$

$$i = \hat{I} \cos(\omega t - \varphi_i), \quad (1.3)$$

data je formulom:

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i, \quad (1.4)$$

gde je  $\varphi_u$  - početna faza napona,  $\varphi_i$  - početna faza električne struje,  $u$  - trenutna vrednost napona,  $i$  - trenutna vrednost struje,  $\hat{U}$  - vršna vrednost napona,  $\hat{I}$  - vršna vrednost struje (ovde simbol  $\wedge$  označava vršnu vrednost).

## 1.1 Predmet istraživanja disertacije

Fazni ugao opisuje svojstva električnih kola sa naizmeničnom električnom strujom. Njegovo merenje je važno u mnogim primenama kao što su: merenje aktivne i reaktivne električne snage i energije, faktora snage, određivanje kompleksnog odnosa izlaznog i ulaznog signala mernih pretvarača (delitelji napona i strujni šantovi), karakterizacija mernih transformatora, merenje harmonika u električnom naponu i struji, analiza pojačavača sa povratnom spregom, kola oscilatora i filtera [1.3 – 1.7].

Metode merenja fazne razlike između dva električna signala mogu biti direktne i indirektne [1.8 – 1.10]. Oprema koja se koristi pri indirektnom merenju fazne razlike unosi dodatni fazni pomeraj u merenje koji se mora poznavati i uzeti u obzir.

Fazna razlika između dva električna signala, meri se na mnogo načina [1.3 – 1.6, 1.11 – 1.15]: osciloskopom, vektor voltmetrom, frekvencmetrom, sinhroskopima, fazmetrom sa ukrštenim kalemovima, etalonima faznog ugla, sistemima za uzorkovanje signala, metodom tri voltmetra, metodom heterodinovanja, fazno kontrolisanim petljama, merenjem faktora snage iz kojeg se zatim izračunava fazna razlika.

U nacionalnim metrološkim institutima (NMI) danas se fazna razlika meri koristeći: sistem za uzorkovanje signala (engl. sampling system), heterodinski merni sistem, merne mostove i metodu tri voltmetra [1.16 – 1.31].

Kada se fazna razlika između dva kontinualna sinusna signala meri tako da se kontinualni signal konvertuje u digitalni onda se koristi neki od algoritama za određivanje vrednosti fazne razlike iz uzoraka dva signala. Algoritam je formula ili komplet koraka za rešavanje određenog problema. Postoji mnogo algoritama za određivanje fazne razlike, a detaljnije su u ovoj disertaciji opisani

- algoritmi QDE i UQDE na kojima je zasnovan novi izloženi algoritam,
- algoritmi 3PSF, 4PSF i 7PSF zasnovani na fitovanju uzoraka merenog signala na idealnu sinusoidu, koji će biti primenjeni na uzorke realnih signala radi poređenja dobijenih rezultata za faznu razliku sa rezultatima dobijenim novim algoritmom,
- odabrani algoritmi zasnovani na Furijeovoj transformaciji, maksimalnoj verodostojnosti i linearnoj predikciji.

Neki od navedenih algoritama zahtevaju obimno izračunavanje tako da nisu od interesa za praktične primene gde se traži brzo određivanje fazne razlike.

Važne karakteristike estimatora faznog ugla, su: pristrasnost (bias, necentriranost), varijansa, standardna devijacija i srednja kvadratna greška (engl. mean squared error – *MSE*) [1.32 – 1.33]. Pokazuje se da je procena faznog ugla sinusnog signala uvek pristrasna [1.33], posebno u uslovima kada je odnos signal-šum mali i/ili kad je mali broj uzoraka signala. Pristrasnost procene faznog ugla sinusnog signala i varijansa se mogu smanjiti ako se poveća broj uzoraka signala.

U disertaciji se polazi od hipoteze da je potrebno odrediti faznu razliku između dva realna sinusna signala koji nemaju pomeraj (engl. offset) usled jednosmenog napona. Korišćenjem uzoraka dva originalna signala, uvode se dodatni signali koji su fazno pomereni za  $\pi/2$  u odnosu na originalne signale. Testira se hipoteza da je izborom faznog pomeraja dodatnih signala moguće dobiti vrednost fazne razlike između dva originalna sinusna signala koristeći samo po dva uzorka svakog signala (algoritam nazvan SAL), a takođe i da se koristeći nešto složeniju formulu može odrediti sa znatno manjom greškom vrednost fazne razlike ukoliko uzorci dodatnih signala nisu fazno

pomereni za  $\pi/2$  u odnosu na originalne signale, već imaju proizvoljan fazni pomeraj (algoritam nazvan MSAL). Rezultati za faznu razliku određeni primenom algoritma MSAL na uzorke dodatnih signala koji imaju proizvoljan fazni pomeraj u odnosu na originalne signale, biće približno jednaki rezultatima dobijenim u slučaju kada dodatni signali imaju fazni pomeraj  $\pi/2$ .

Algoritmi QDE i UQDE mogu da se koriste za određivanje fazne razlike samo ako su dodatni signali fazno pomereni za  $\pi/2$ , a ako to nije slučaj algoritmi daju pogrešne rezultate.

Sinusno fitovanje signala je algoritam u kojem se razmatra najmanja kvadratna greška (engl. least square error – LSE) zasnovana na razlici između uzoraka merenog signala i uzoraka idealnog sinusnog signala. Sinusni signal se karakteriše sa 3 parametra: amplituda, učestanost i faza ili sa 4 parametra: DC komponenta, amplituda, učestanost i faza. Koriste se: sinusno fitovanje 3 parametra (3PSF) ili 4 parametra (4PSF) jednog sinusnog signala, i sinusno fitovanje 7 parametara dva sinusna signala (7PSF). Kada treba odrediti faznu razliku između dva sinusna signala tada se na svaki sinusni signal posebno primeni algoritam 3PSF ili 4PSF i odredi početna faza svakog signala. Zatim se na osnovu tako dobijenih rezultata izračuna fazna razlika između dva sinusna signala. Algoritam istovremenog fitovanja sedam parametara dva sinusna signala (7PSF) primenjuje se istovremeno na oba signala a kao rezultat fitovanja dobije se fazna razlika između ta dva signala.

Za izračunavanje fazne razlike za  $N$  uzoraka dva signala koristi se i diskretna Furijeova transformacija (DFT). Fazna razlika između osnovnih harmonika dva signala se određuje kao razlika faza DFT osnovnih harmonika dva signala. Kod sinusnog signala postoji samo jedna spektralna linija ako je uzorkovan ceo broj perioda signala. U slučaju asinhronog uzorkovanja, za obradu uzoraka signala koriste se dodatno prozorske funkcije i interpolacija. Za izračunavanje fazne razlike dva signala u vremenskom domenu koristi se DTFT (engl. Discrete-Time Fourier Transform) signala.

Procena početne faze sinusnog signala koristeći maksimalnu verodostojnost (engl. Maximum Likelihood – ML) dobije se rešavanjem veoma nelinearne jednačine. U literaturi su predloženi postupci za određivanje faze sinusnog signala koristeći ML zasnovani na Newton-Raphson metodi.



U disertaciji su prikazani uzorci dva realna sinusna signala dobijeni koristeći sistem za uzorkovanje signala. Na uzorke realnih signala primenjeni su postojeći algoritmi opisani u literaturi i novi algoritam za određivanje fazne razlike izložen u disertaciji i upoređeni su dobijeni rezultati. Analizirana je primenljivost, prednosti, nedostaci i merna nesigurnost rezultata određivanja fazne razlike koristeći novi algoritam.

Uz izmerenu vrednost veličine danas se obavezno daje i merna nesigurnost te vrednosti. Merna nesigurnost (nesigurnost merenja, nesigurnost), definiše se kao parametar koji nije negativan, koji karakteriše rasipanje vrednosti koje se pripisuju merenoj veličini na osnovu upotrebljenih informacija [1.8 – 1.10]. Postoji međunarodni dogovor o načinu izražavanja merne nesigurnosti rezultata merenja [1.34 – 1.45].

## 1.2 Organizacija disertacije

Disertacija je organizovana po poglavljima na sledeći način:

Poglavlje 1 je uvod u kojem je ukratko opisan značaj merenja fazne razlike, dostignuti rezultati u merenju fazne razlike u nacionalnim metrološkim institutima koristeći različite metode merenja, navedeni algoritmi za određivanje fazne razlike iz uzoraka realnih sinusnih signala opisani u literaturi, objašnjen razlog uvođenja novog algoritma MSAL i navedena organizacija disertacije.

Poglavlje 2 sadrži kratak pregled u oblasti istraživanja i sastoji se iz tri dela:

- u delu 2.1 dat je opis mernih sistema koji se danas koriste za dobijanje uzoraka realnih sinusnih signala i načini uzorkovanja sinusnih signala, obzirom da se novi algoritam koristi za određivanje fazne razlike iz uzoraka sinusnih signala;
- u delu 2.2 date su osnovne informacije o estimatoru faznog ugla sinusnog signala i pregled algoritama QDE i UQDE na kojima je zasnovan novi algoritam;
- u delu 2.3 dat je kratak sadržaj uputstava Zajedničkog komiteta za uputstva u metrologiji (JCGM) za procenu merne nesigurnosti rezultata merenja.

Poglavlje 3 sadrži opis algoritma SAL, razvoj novog algoritma MSAL, koji se koriste za određivanje fazne razlike iz uzoraka sinusnih signala, kao i opis i rezultate simulacija izvedenih u cilju validacije ovih algoritama.

Poglavlje 4 prikazuje rezultate primene različitih algoritama na uzorke realnih signala u cilju određivanja fazne razlike između dva sinusna signala i poređenje rezultata za faznu razliku dobijenih primenom algoritma MSAL sa rezultatima dobijenim primenom drugih algoritama. Razmatrani su primeri kada je broj uzoraka u periodi signala deljiv sa 4, kada nije deljiv sa 4 i kada količnik učestanosti uzorkovanja i učestanosti signala nije ceo broj. Procenjena je merna nesigurnost rezultata za faznu razliku između dva sinusna signala određenu primenom novog algoritma MSAL. Merna nesigurnost je procenjena primenom Uputstva za izražavanje merne nesigurnosti rezultata merenja (GUM) [1.34]. Vrednosti za faznu razliku između dva sinusna signala dobijene primenom novog algoritma i procenjena merna nesigurnost tih rezultata upoređeni su sa rezultatima dobijenim koristeći etalon koji ima metrološku sledivost u cilju validacije metode.

Poglavlje 5 sadrži zaključak i završne komentare.

U prilogu A date su informacije o jedinicama za merenje fazne razlike: radijan i stepen.

U prilogu B dat je pregled algoritama sa kojima je upoređen novi algoritam predložen u disertaciji i odabranih algoritama iz literature koji se koriste za određivanje fazne razlike iz uzoraka sinusnih signala (zasnovanih na Furijeovoj transformaciji, maksimalnoj verodostojnosti i linearnoj predikciji).

U prilogu C dat je kratak pregled metoda koje se danas koriste u oblasti etaloniranja etalona faznog ugla u nacionalnim metrološkim institutima.

## Glava 2

# Pregled u oblasti istraživanja

U ovom poglavlju dat je kratak pregled u oblasti istraživanja, i to:

- kratak pregled mernih sistema koji koriste DSV (engl. digital sampling voltmetar) za uzorkovanje dva sinusna signala između kojih treba odrediti faznu razliku, a koji se danas koriste u nacionalnim metrološkim institutima (NMI),
- opis algoritama QDE i UQDE za određivanje fazne razlike iz uzoraka sinusnih signala, jer je na osnovu algoritma UQDE razvijen novi algoritam MSAL, i
- pregled načina procene merne nesigurnosti rezultata merenja u skladu sa uputstvima JCGM (engl. Joint Committee for Guides in Metrology).

Pregled drugih algoritama za određivanje fazne razlike iz uzoraka sinusnih signala iz literature i to onih sa kojima će biti upoređen novi algoritam izložen u disertaciji i odabranih algoritama, dat je u prilogu B.

## 2.1 Uzorkovanje dva sinusna signala u mernim sistemima sa DSV

Novi algoritam prikazan u ovoj disertaciji koristi uzorke dva sinusna signala za izračunavanje fazne razlike između ta dva signala.

U literaturi je opisano korišćenje različitih strategija uzorkovanja signala.

S obzirom na vremenske razmake u kojima se uzimaju uzorci, uzorkovanje može biti uniformno i neuniformno. Kod uniformnog uzorkovanja signala vreme između svaka dva uzorka signala je isto, a što nije slučaj kod neuniformnog uzorkovanja signala.

S obzirom na sinhronizaciju merenog signala i signala trigeru (engl. trigger) koji započinje uzorkovanje signala, uzorkovanje može biti sinhrono i asinhrono.

Sinhrono uzorkovanje odnosi se na uzorkovanje signala koji je fazno spregnut sa učestanošću uzorkovanja.

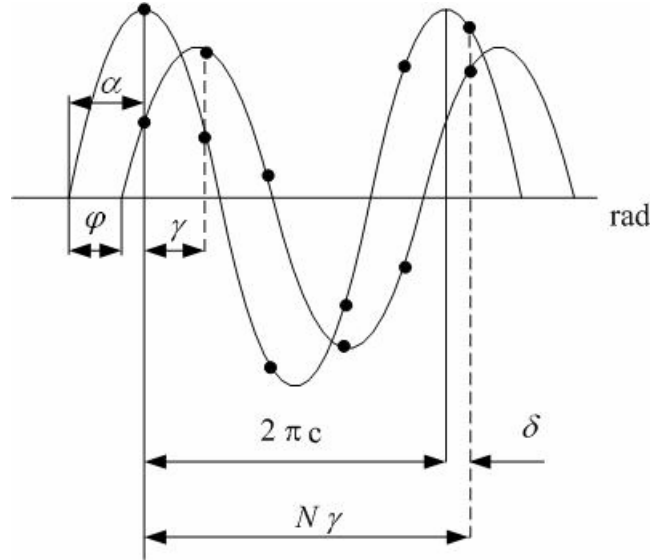
Asinhrono uzorkovanje odnosi se na uzorkovanje signala koji nije fazno spregnut sa učestanošću uzorkovanja. Asinhronim se smatra i uzorkovanje signala ako se uzorci dva signala ne uzorkuju sa istom učestanošću uzorkovanja, što je slučaj u mernim sistemima koji imaju dva nezavisna časovnika koji kontrolišu uzorkovanje pojedinih kanala.

Definiše se koherentno uzorkovanje periodičnog signala [2.28 – 2.29] koje podrazumeva da broj uzetih uzoraka signala odgovara celom broju ciklusa signala, a pri tom broj uzoraka signala i broj ciklusa signala nemaju zajedničke faktore. Kod koherentnog uzorkovanja zadovoljena je sledeća jednačina:

$$f_s \cdot M = f_0 \cdot N \quad (2.1.1)$$

gde su:  $f_s$  – učestanost uzorkovanja signala;  $M$  – ceo broj ciklusa signala;  $f_0$  – učestanost signala;  $N$  – broj uzoraka signala, a  $M$  i  $N$  su uzajamno prosti brojevi.

Kod asinhronog uzorkovanja, u slučaju da je učestanost uzorkovanja mnogo veća od učestanosti signala, broj uzoraka signala može da se izabere tako da se postigne kvazikoherentno uzorkovanje [2.25].



Slika 2.1.1 Asinhrono uzorkovanje dva sinusna signala.

Na slici 2.1.1 prikazano je istovremeno asinhrono uzorkovanje dva sinusna signala [1.25, 2.8]. Na slici  $\gamma$  označava fazni ugao uzorka,  $N$  je ukupan broj uzoraka signala koji su uzeti u razmatranje,  $\varphi$  je fazna razlika između dva signala a  $\delta$  je razlika između celog broja perioda signala označenog  $2\pi c$  i intervala sabiranja označenog  $N\gamma$ .

Kada se istovremeno uzorkuju dva signala iste učestanosti, a uzorkovanje nije sinhronizovano sa učestanošću signala, pri određivanju fazne razlike iz uzoraka signala dolazi do greške odsecanja (engl. truncation error) [1.25]. Na slici 2.1.1 prikazana je jedna perioda signala u kojoj se uzima  $N$  uzoraka signala. Može se izvesti jednačina za relativnu grešku odsecanja  $\varepsilon$  za rms vrednost signala [2.8]:

$$\varepsilon = \frac{1}{2N} \frac{\sin \delta}{\sin\left(2\pi \frac{f}{f_s}\right)} \cos\left(2\omega T_{start} - \delta - 2\pi \frac{f}{f_s}\right), \quad (2.1.2)$$

gde je:  $N$  – broj uzoraka signala,  $f$  – učestanost signala,  $f_s$  – učestanost uzorkovanja ( $f_s = 1/T_s$ ),  $T_{\text{start}}$  – početak merenja,  $\omega$  – ugaona učestanost signala,  $\delta$  – ugao odsecanja. Pri tom važi relacija  $\gamma = \omega T_s = 2\pi \cdot f / f_s$ , i za početni ugao  $\alpha = \omega T_{\text{start}}$ .

Sa slike 2.1.1 je:

$$\delta = 2\pi c - N \cdot \gamma, \quad (2.1.3)$$

gde je:  $c$  – ceo broj, u ovom slučaju  $c = 1$ ,  $N\gamma$  – interval sabiranja koji ne odgovara celom broju perioda signala.

U idealnom slučaju je

$$N \cdot \gamma = 2\pi c. \quad (2.1.4)$$

Da bi se smanjila greška usled odsecanja signala, iz jednačine (2.1.2) je očigledno da treba smanjiti  $\delta$  i povećati broj uzoraka  $N$ . Greška je funkcija početka merenja  $T_{\text{start}}$  što daje mogućnost da se izborom vremena početka merenja smanji greška [2.8]. Ideja je da se kod svakog sledećeg ciklusa uzorkovanja menja početna faza i na taj način smanji greška odsecanja.

Da bi se iz uzoraka signala mogao potpuno rekonstruisati vremenski kontinualan signal mora biti zadovoljena Nikvistova (Nyquist), teorema koja glasi: vremenski kontinualan signal može se potpuno rekonstruisati iz svojih uzoraka samo ako je učestanost uzorkovanja bar dva puta veća od najviše učestanosti u spektru signala. Ova teorema se naziva još i Šenonova (Shannon) ili Kotelnjikova teorema.

## 2.1.1 Šeme mernih sistema koji koriste DSV za uzorkovanje dva sinusna signala

Za uniformno uzorkovanje dva signala u NMIs danas se koriste digitalni sempling voltmetri (DSV) tip 3458A, Agilent [1.23 – 1.29 , 2.2 – 2.11] koji imaju analogno-digitalni konvertor sa funkcijom integraljenja (IADC). Ovaj instrument se može koristiti

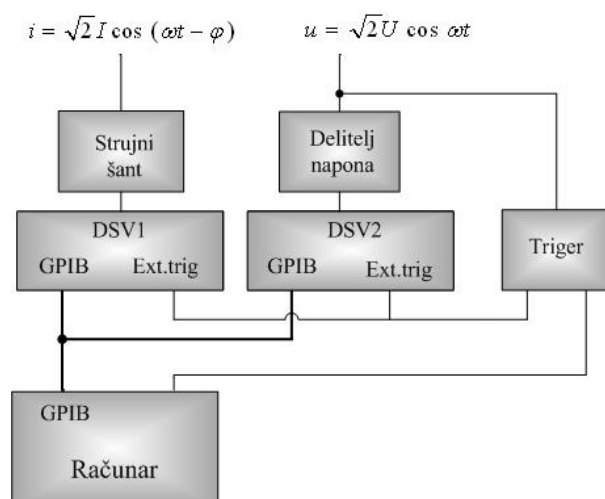
za merenje signala učestanosti od 0,01 Hz do 1 kHz, efektivne vrednosti napona od 10 mV do 700 V, kada je izobličenje merenog napona do 1%.

Na slikama 2.1.1.1 do 2.1.1.4 su date blok šeme mernih sistema, iz literature, za uniformno uzorkovanje signala koje se koriste za određivanje fazne razlike između električnog napona i struje. Prikazani su sledeći načini uzorkovanja signala:

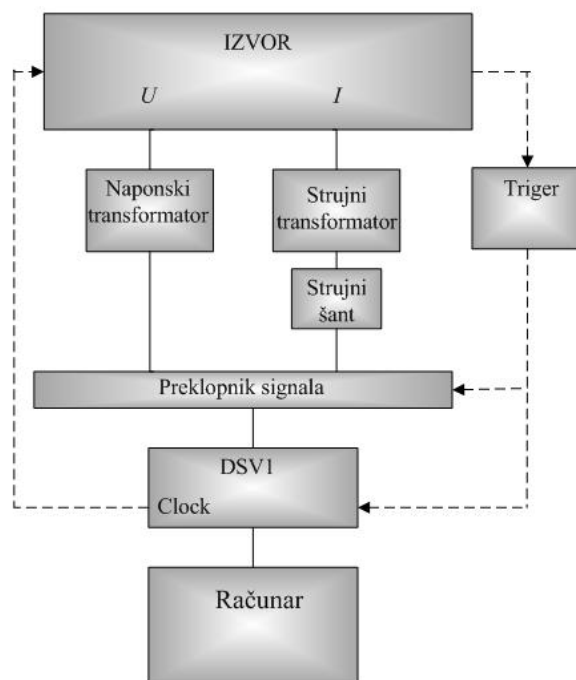
- slika 2.1.1.1: sinhrono uzorkovanje dva signala, kod kojeg DSV radi sa sopstvenom vremenskom bazom, a signal za triger DSV1 i DSV2 u cilju uzimanja uzoraka signala je spregnut (engl. locked) sa vremenskom bazom izvora signala [1.28],
- slika 2.1.1.2: sinhrono generisanje i uzorkovanje dva signala koristeći jedan DSV1 [1.23, 2.7, 2.10], kod kojeg je takt iz časovnika IADC sampling voltmetra DSV1 koji uzorkuje signal, spojen hardverski sa generatorom signala u kojem se koristi kao njegov interni takt, a signal za triger DSV1 je izveden iz generatora signala,
- slika 2.1.1.3: asinhrono uzorkovanje dva signala, kod kojeg se koristi spoljašnji triger za DSV1 i DSV2 nezavisno od učestanosti signala iz izvora [1.24 – 1.25], tako da ne postoji sinhronizacija između časovnika koji se koristi za uzorkovanje signala i ulaznih signala,
- slika 2.1.1.4: voltmetri DSV1 i DSV2 su u „master-slave“ konfiguraciji. DSV1 (engl. master) je trigerovan interno a zatim se koristi da trigeruje drugi voltmetar DSV2 (engl. slave) koji je konfigurisan za spoljašnje trigerovanje, tako da uzorkuje mereni signal samo kada DSV1 pošalje digitalni signal trigerskom ulazu DSV2 [2.11]. Kašnjenje između dva DSV mora se poznavati i korigovati rezultat za faznu razliku. Uzorkovanje je asinhrono.

Ovi merni sistemi se koriste za uzorkovanje signala u opsegu učestanosti do 200 Hz u kojem se ostvaruje merenje napona sa najmanjom mernom nesigurnošću [2.9].

DSV1 i DSV2 imaju IADC velike rezolucije, koji radi na principu tehnike integraljenja sa više nagiba (engl. multi-slope-integration) [2.5 – 2.6]. U mernim sistemima za uzorkovanje signala DSV1 i DSV2 se koriste u „DCV sampling“ načinu rada [2.3].

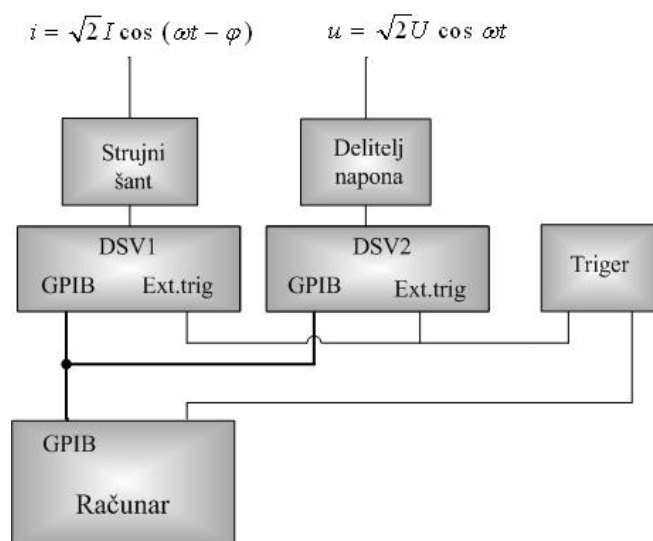


Slika 2.1.1.1 Blok šema mernog sistema sa dva DSV za sinhrono uzorkovanje električnog napona i struje (triger za signale fazno spregnut za napon iz izvora).

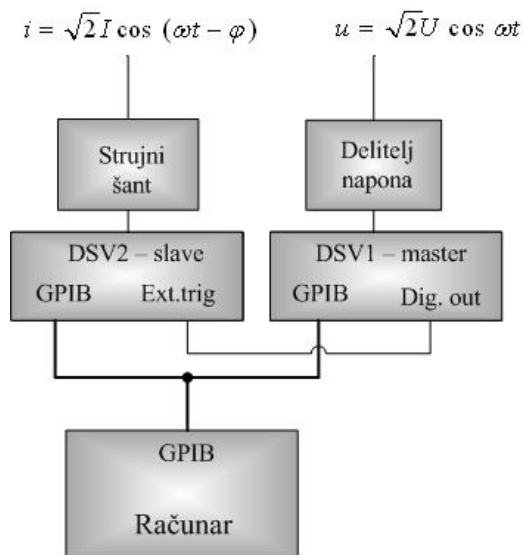


Slika 2.1.1.2 Blok šema mernog sistema sa jednim DSV za sinhrono generisanje i uzorkovanje električnog napona i struje, i preklopnikom signala.





Slika 2.1.1.3 Blok šema mernog sistema sa dva DSV za asinhrono uzorkovanje električnog napona i struje, sa istovremenim spoljašnjim trigerovanjem DSV1 i DSV2.



Slika 2.1.1.4 Blok šema mernog sistema sa dva DSV za asinhrono uzorkovanje električnog napona i struje, DSV1 – „master“, DSV2 – „slave“.

Uzorci napona iz DSV1 i DSV2, prenose se u računar gde se obrađuju koristeći neki od algoritama opisanih u poglavlju 2.2 i prilogu B ili novi algoritam MSAL opisan u poglavlju 3.

Za uzorkovanje dva signala mogu da se koriste dva DSV kao što je prikazano na slikama 2.1.1.1, 2.1.1.3 i 2.1.1.4, a može da se koristi preklopnik signala (engl. signal switch) i samo jedan DSV koji naizmenično uzorkuje jedan zatim drugi signal, slika 2.1.1.2.

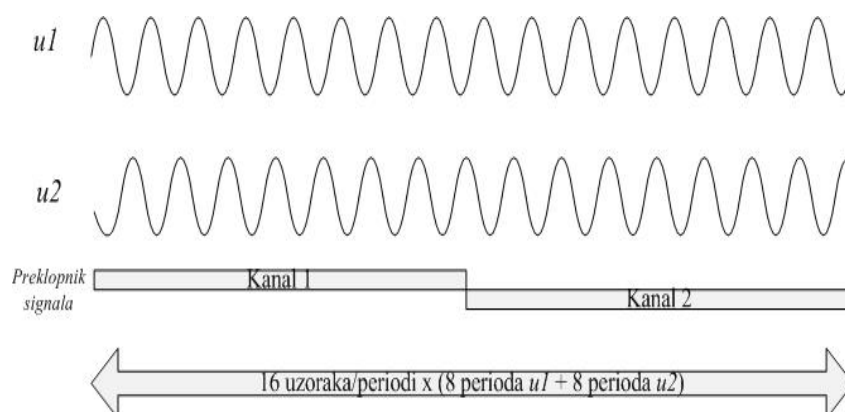
Na slikama 2.1.1.1, 2.1.1.3 i 2.1.1.4 električni napon iz izvora signala priključen je na delitelj napona a izlaz iz delitelja napona priključen je na ulaz digitalnog sempling voltmetra koji uzima uzorke električnog napona. Umesto otporničkog delitelja napona u nekim šemama se koristi naponski merni transformator.

Na istim slikama električna struja iz izvora priključena je na ulaz strujnog šanta a naponski izlaz strujnog šanta priključen je na ulaz drugog digitalnog sempling voltmetra koji uzima uzorke tog električnog napona. Umesto otporničkog strujnog šanta u nekim šemama se koristi strujni merni transformator sa šantom.

U mernim sistemima za uzorkovanje signala prikazanim na slikama 2.1.1.1 do 2.1.1.4, vrednost izlaznog napona iz delitelja napona treba da je približno jednaka naponu koji se dobije na strujnom šantu, da bi se oba DSV koristila za merenje na istom mernom opsegu i time postiglo da merna nesigurnost merenja fazne razlike bude manja.

Kada se umesto izvora napona, struje i faznog ugla koristi izvor dva napona sa mogućnošću zadavanja fazne razlike između njih, onda se u šemama na slikama 2.1.1.1 do 2.1.1.4 umesto strujnog šanta upotrebljava još jedan delitelj napona.

Na slici 2.1.1.5 prikazan je princip uzorkovanja dva signala koji koristi šemu predstavljenu na slici 2.1.1.2 sa jednim DSV, tako da se najpre uzimaju uzorci 8 perioda jednog napona a zatim 8 perioda drugog napona, sa učestanošću 16 uzoraka po periodu što je ukupno 256 uzoraka [1.23]. U daljoj obradi uzoraka odbacuju se prve tri periode svakog signala, i obrađuje se samo po 5 perioda oba signala.



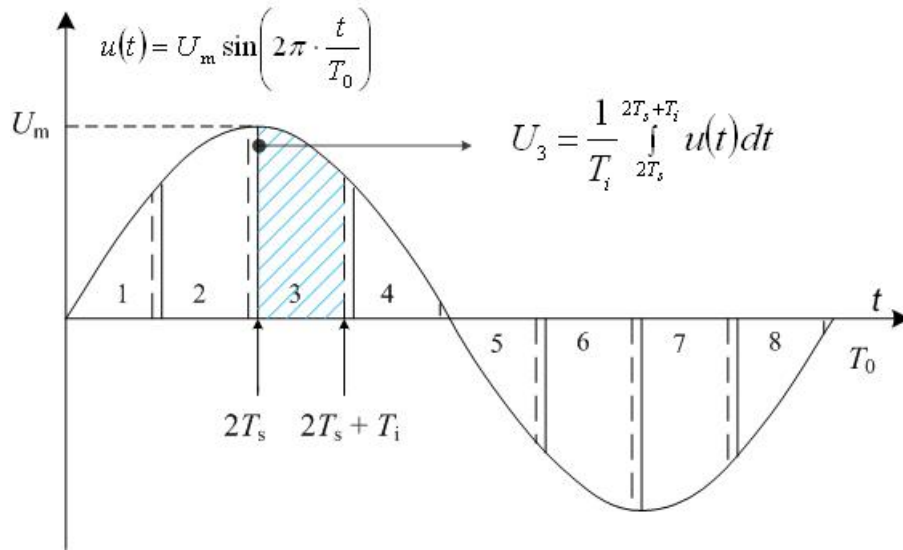
Slika 2.1.1.5 Princip uzorkovanja jednog a zatim drugog signala istim DSV.

## 2.1.2 Matematički model DSV

Kod proračuna merne nesigurnosti rezultata merenja, polazi se od matematičkog modela merenja [1.37]. U slučajevima koji se razmatraju u ovoj disertaciji najpre treba odrediti mernu nesigurnost pojedinih uzoraka signala, a zatim mernu nesigurnost fazne razlike određene iz uzoraka signala koristeći dati algoritam.

Na slici 2.1.2.1 ilustrovan je princip sinhronog uzorkovanja idealnog sinusnog signala u mernom sistemu koji koristi analogno-digitalni konvertor sa funkcijom integraljenja (IADC) [2.10]. Uzorci merenog signala prikazani su na rastojanju  $T_s$  jedan od drugog na vremenskoj osi. Vrednost svakog uzorka dobije se tako da se integri mereni napon za vreme  $T_i$ . Vreme integraljenja  $T_i$  se bira što je moguće duže [2.10, 2.16].

Napon koji IADC uzorkuje u jednakim intervalima vremena  $T_s$  obeležen je na slici 2.1.2.1 sa  $u(t)$ . Uzorkovani napon  $U_k$ , u trenutku  $kT_s$  gde je  $k$  ceo broj, predstavlja srednju vrednost napona  $u(t)$  u vremenu integraljenja  $T_i$  [2.10]. Na slici 2.1.2.1 krug na liniji  $2T_s$  predstavlja srednju vrednost napona  $U_3$  koja je dobijena integraljenjem napona  $u(t)$  u vremenu od  $2T_s$  do  $2T_s + T_i$ .



Slika 2.1.2.1 Ilustracija tehnike uzorkovanja sinusnog signala u mernom sistemu koji koristi IADC.

Matematički model IADC koji uzorkuje idealni sinusni napon  $u(t)$  u trenutku vremena  $kT_s$  dat je jednačinom [2.10]:

$$U_k = \frac{1}{T_i + \varepsilon_{JTi}} \left( 1 + \varepsilon_{REF} + \varepsilon_G + \frac{\varepsilon_{LIN} + \varepsilon_{RES}}{Abs[U_k]} \cdot U_{FS} \right) \cdot \int_{kT_s + \varepsilon_{JTs}}^{kT_s + \varepsilon_{JTs} + T_i + \varepsilon_{JTi}} [u(t) + u_{sn}(t)] dt + u_{sn}(t), \quad (2.1.2.1)$$

gde su:

$U_k$  – uzorkovani napon u trenutku vremena  $kT_s$ ;

$\varepsilon_{REF}$  – odstupanje internog referentnog DC napona IADC od idealne vrednosti;

$\varepsilon_G$  – odstupanje pojačanja  $A = (1 + \varepsilon_G)$  ulaznog pojačavača IADC u zavisnosti od  $T_i$ ;

$\varepsilon_{LIN}$  – odstupanje od linearnosti IADC dato u odnosu na kraj opsega  $U_{FS}$ , koje obuhvata efekte usled diferencijalne i integralne nelinearnosti;

$\varepsilon_{RES}$  – odstupanje usled rezolucije u zavisnosti od  $T_i$  dato u odnosu na  $U_{FS}$ ;

$U_{FS}$  – opseg DSV na kojem se meri;

$\varepsilon_{JTs}$  – odstupanje  $T_s$  ili džiter vremena uzorkovanja;

$\varepsilon_{JTi}$  – odstupanje  $T_i$  ili džiter vremena integraljenja;

$u_s(t)$  – šum izvora signala;  $u_{sn}(t)$  – šum uzorkovanja DSV.

Apsolutna vrednost napona  $\text{Abs}[U_k]$  uzorka dobije se uz pretpostavku da su vrednosti svih parametara iz formule (2.1.2.1) jednake nuli, odnosno  $\varepsilon_{\text{REF}} = \varepsilon_G = \varepsilon_{\text{LIN}} = \varepsilon_{\text{RES}} = \varepsilon_{\text{JTs}} = \varepsilon_{\text{JTi}} = 0$ .

Svako odstupanje od idealnih vrednosti internog referentnog dc napona ( $\varepsilon_{\text{REF}}$ ) i pojačanja ( $\varepsilon_G$ ) IADC imaće uticaj na izmerenu vrednost svakog uzorka signala  $U_k$ , što znači da postoji korelacija između uzoraka povezana sa  $\varepsilon_{\text{REF}}$  i  $\varepsilon_G$ . U odnosu na ostale slučajne promenljive može se smatrati da su uzorci signala nekorelisani.

#### *a) Doprinosi grešci merenja amplitude signala u mernim sistemima sa IADC*

##### *1) Interni referentni DC napon*

Odstupanje internog referentnog DC napona DSV od idealne vrednosti jednako je zbiru sledećih komponenti [2.16]:

$$\varepsilon_{\text{REF}} = \varepsilon_{\text{DC}} + \varepsilon_{\text{DCd}} + \varepsilon_c(T - T_{\text{amb}}), \quad (2.1.2.2)$$

gde su:

$\varepsilon_{\text{DC}}$  - odstupanje internog referentnog DC napona od vrednosti spoljašnjeg etalona DC napona,

$\varepsilon_{\text{DCd}}$  - drift internog referentnog DC napona u toku određenog vremena, i

$\varepsilon_c(T - T_{\text{amb}})$  - proizvod temperaturnog koeficijenta internog referentnog DC napona i razlike između temperature ambijenta na kojoj se vrše merenja i nominalne specificirane temperature ambijenta.

##### *2) Vreme integraljenja IADC*

Zbog vremena integraljenja ( $T_i$ ), rms vrednost signala na ulazu u DSV posle uzorkovanja je različita od rms vrednosti originalnog signala čija je perioda  $T_0$ . Ova greška se može korigovati [2.10, 2.40] deljenjem sa vrednošću:

$$\text{sinc}(\pi T_i/T_0) = \sin(\pi T_i/T_0) / (\pi T_i/T_0).$$

### 3) Propusni opseg IADC

Različiti merni opsezi za napon jednog istog DSV, imaju različite propusne opsege učestanosti. Analogni ulaz DSV deluje kao jednopolni filter propusnik niskih učestanosti i doprinosi faznom pomeraju. To je sistematska greška koja se može korigovati.

Procena efektivne vrednosti električnog napona iz  $MN_p$  uzoraka, gde je  $N_p$  broj uzoraka u periodu,  $M$  broj perioda signala učestanosti  $f_0$  sa periodom  $T_0 = 1/f_0$ , data je formulom:

$$U_{eff} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(f/f_c)^2}}}{\text{sinc}\left(\frac{\pi T_i}{T_0}\right)} \sqrt{\frac{1}{MN_p} \sum_{k=1}^{MN_p} U_k^2}, \quad (2.1.2.3)$$

gde je  $f$  – učestanost signala,  $f_c$  je učestanost odsecanja filtra koja za DSV tip 3458A, Agilent iznosi 150 kHz za opsege merenja 1 V i 10 V i 30 kHz za opsege merenja 100 V i 1000 V.

4) Šum uzorkovanja (engl. sampling noise) signala koji u merenje unosi upotreba DSV sa IADC dat je formulom [2.16]:

$$U_{sn} = 10^{-6} \sqrt{0,81 \cdot \left(\frac{0,001}{T_i}\right) \cdot U_{FS}^2} \quad (2.1.2.4)$$

gde je  $U_{FS}$  vrednost opsega napona DSV u voltima,  $T_i$  vreme integraljenja IADC u sekundama,  $U_{sn}$  napon šuma u mikrovoltima [ $\mu$ V].

### b) Doprinosi grešci merenja fazne razlike u mernim sistemima sa dva IADC

Kada se u sistemu za merenje fazne razlike koriste dva IADC, onda treba voditi računa o uticajima: razlike vremena integraljenja dva DSV, različitih propusnih opsega dva DSV i različitih kašnjenja trigeru dva DSV.

### 1) Uticaj razlike vremena integraljenja dva DSV

Kada se za merenje dva električna napona koriste istovremeno dva DSV, postoji razlika vremena integraljenja dva DSV, označena  $T_{i1}$  i  $T_{i2}$ , koja unosi grešku u merenje fazne razlike [1.28, 2.17]:

$$\Delta \varepsilon_{\varphi_{aperture1,2}} = \omega \Delta t_{A1,A2}, \quad (2.1.2.5)$$

gde su:  $\Delta t_{A1,A2} = (T_{i1} / 2) - (T_{i2} / 2)$  razlika apertura dva DSV, i  $\omega$  – kružna učestanost merenog signala.

### 2) Uticaj različitih propusnih opsega dva DSV

Kada se dva napona mere na dva različita opsega jednog DSV razlika grešaka faznog ugla koja nastaje usled različitih propusnih opsega može se izračunati prema formuli:

$$\Delta \varepsilon_{\varphi_{BW1,2}} = \arctan\left(\frac{f}{f_{BW1}}\right) - \arctan\left(\frac{f}{f_{BW2}}\right) \approx \frac{f}{f_{BW1}} - \frac{f}{f_{BW2}}, \quad (2.1.2.6)$$

gde učestanosti  $f_{BW1}$ ,  $f_{BW2}$  označavaju različite gornje granice širine dva propusna opsega, a  $f$  je učestanost merenog signala koja treba da je znatno manja od gornje granice širine propusnog opsega,  $f \ll f_{BW1}, f_{BW2}$ .

Ista formula (2.1.2.6) se koristi i za određivanje greške faznog ugla koja nastaje usled različitih propusnih opsega dva DSV koji se koriste na istom opsegu merenja. Propusni opseg multimetra tip 3458A, Agilent za opseg merenja napona 10 V, ima vrednost 140 kHz do 160 kHz.

### 3) Uticaj različitih kašnjenja trigeru dva DSV

Padajuća ivica signala za uzorkovanje trigeruje DSV da uzme uzorak merenog signala. Postoji interno kašnjenje trigeru u DSV pre nego mereni signal bude integraljen. DSV pamti rezultat merenja i čeka sledeći triger. Vrednost uzorka memorisana u DSV predstavlja srednju vrednost merenog analognog signala za vreme  $T_s$ . Ova srednja vrednost odnosi se na centar uzorka. Jedan DSV unosi u merenje faznog ugla grešku datu formulom:

$$\varepsilon_{\varphi \text{ trigger}} = \omega t_D, \quad (2.1.2.7)$$

gde je:  $\omega$  – ugaona učestanost merenog signala,  $t_D$  – vreme kašnjenja signala trigera.

Kada se za merenje dva električna napona koriste istovremeno dva DSV sa spoljašnjim trigerovanjem (EXT TRIG) signala, u merenje faznog ugla unosi se greška zbog vremena kašnjenja trigera, koja će dovesti do greške, prema formuli:

$$\Delta\varepsilon_{\varphi \text{ trigger}1,2} = \omega \Delta t_{D1,D2}, \quad (2.1.2.8)$$

gde je:  $\omega$  – ugaona učestanost merenog signala,  $\Delta t_{D1,D2}$  – razlika vremena kašnjenja signala trigera za dva DSV.

Razlika vremena kašnjenja signala trigera za dva multimetra tip 3458A, Agilent je 75 ns prema specifikaciji proizvođača.

### **2.1.3 Uticaj ostalih delova mernog sistema na rezultate merenja fazne razlike**

Na rezultate merenja fazne razlike dobijene koristeći navedene merne sisteme uzorkovanja signala, utiču: karakteristike izvora signala, delitelja napona, strujnog šanta, tehnika uzorkovanja i algoritam za obradu uzoraka signala. Neki od navedenih uticaja unose se kao korekcije a drugi doprinose ukupnoj mernoj nesigurnosti rezultata merenja fazne razlike [1.9].

Fazna razlika između električnog napona i struje, odnosno između dva električna napona, određuje se primenom nekog od algoritama, kao što su oni opisani u poglavljima 2.2, 3 i prilogu B, na uzorke signala. Tako određena vrednost fazne razlike koriguje se za poznate vrednosti faznih uglova koje unose delovi sistema za merenje (delitelj napona, strujni šant, merni transformator) i za neke uticaje IADC.

Ako je uzorkovanje sinhronizovano sa učestanošću ulaznog signala [2.18], uzorci tog signala su korelisani.



Kada se istovremeno uzorkuju dva signala  $u_1$  i  $u_2$  iste učestanosti, a uzorkovanje nije sinhronizovano sa učestanošću signala, uzorci svakog signala posebno nisu korelisani (uzorci signala  $u_1$  nisu korelisani, uzorci signala  $u_2$  nisu korelisani) ali postoji korelacija između uzoraka dva signala  $u_1$  i  $u_2$ .

### ***Delitelji napona***

U opisanim mernim sistemima za uzorkovanje signala koriste se otpornički ili induktivni delitelji napona [1.28 – 1.29, 2.12 – 2.13].

Otpornički delitelji napona napravljeni su od velikog broja otpornika da se minimizira snaga disipirana na svakom otporniku. Danas se prave otpornički delitelji napona, koji u merenje unose fazni pomeraj tipično  $0,2^\circ$  kada je učestanost merenog napona 60 Hz, odnosno  $2^\circ$  kad je učestanost 1500 Hz. Vrednost faznog ugla delitelja napona unosi se kao korekcija pri određivanju fazne razlike između napona i struje, odnosno između dva napona.

Koriste se i induktivni delitelji napona koji takode unose u merenje fazni pomeraj.

### ***Strujni šantovi***

U mernom sistemu za uzorkovanje signala koriste se otpornički strujni šantovi, bazirani na konstrukciji Mendeljejevog Instituta, St Petersburg [1.28 – 1.29, 2.13 – 2.15].

Danas se prave otpornički strujni šantovi koji unose u merenje fazni pomeraj približno  $0,3^\circ$  kada je učestanost merene struje 60 Hz i  $13^\circ$  kada je učestanost 1500 Hz [1.29]. Vrednost faznog ugla strujnog šanta unosi se kao korekcija pri određivanju fazne razlike između napona i struje.

Fazni pomeraj koji u merenje unosi strujni šant, za niske učestanosti signala, može da se proceni prema sledećoj formuli:

$$\Delta\varphi_{sh} = \frac{\omega L_{sh}}{R_{sh}}, \quad (2.1.3.1)$$

gde je:  $L_{sh}$  - induktivnost šanta,  $R_{sh}$  - otpornost šanta,  $\omega$  - ugaona učestanost merenog signala,  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ .

Kod strujnih šantova treba voditi računa i o temperaturnoj zavisnosti otpornosti šanta, koja se menja u stanju kada kroz šant protiče struja u odnosu na stanje kada kroz

šant ne protiče struja. Nesigurnost rezultata merenja zbog te pojave procenjena je na  $10 \mu\Omega/\Omega$ .

### ***Merni transformatori***

Umesto delitelja napona, u mernom sistemu sa uzorkovanjem signala učestanosti 50 Hz, koriste se i naponski merni transformatori, a umesto strujnih šantova koriste se i strujni merni transformatori [1.14].

Merni transformatori imaju amplitudnu i faznu grešku koje se moraju uzeti u obzir kada se merni transformatori koriste da prilagode mereni signal ulazu u DSV.

### ***Izvor signala***

Šum izvora signala potiče od harmonika, kvantizacije digitalno-analognog konvertora (DAC), šiljaka (engl. spikes) i gličeva (engl. glitches) na signalu, diferencijalne i integralne nelinearnosti (engl. differential and integral nonlinearity) DAC, vremenskog džitera časovnika, termičkog šuma i fliker šuma [2.10, 2.16].

Kratkotrajna stabilnost izvora signala mora se uzeti u obzir pri proračunu merne nesigurnosti rezultata merenja u slučaju kada se za uzorkovanje dva signala koristi samo jedan DSV, jer se tada uzorkuje naizmenično jedan zatim drugi signal, kao na slici 2.1.1.5.

### ***Faktor disipacije***

Faktor disipacije usled kapacitivnosti štampane ploče DSV uzima se u obzir samo za opsege voltmetra 100 V i 1000 V. Za niže opsege merenja napona 10 V i 1 V, ovaj uticaj može da se zanemari [1.28].

### ***Kablovi***

Uticaj upletenih kablova dužine 30 cm, na ulazu u DSV, na rezultate merenja može da se zanemari za niske učestanosti signala.

U cilju smanjenja merne nesigurnosti rezultata merenja fazne razlike koristi se i postupak međusobne zamene mesta DSV1 i DSV2, a vrednost fazne razlike se izračuna kao srednja vrednost rezultata dobijenih merenjem pre i posle zamene [1.24].

## 2.2 Algoritmi QDE i UQDE

U literaturi je opisano mnogo algoritama za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala sa šumom [2.19 – 2.37]. U ovom poglavlju ukratko su izloženi algoritam QDE (engl. quadrature delay estimator) i algoritam UQDE (engl. unbiased quadrature delay estimator). Novi algoritam MSAL opisan u ovoj disertaciji izveden je polazeći od algoritma UQDE.

Algoritmi QDE i UQDE [2.19 – 2.20] primenjeni su za rešavanje problema određivanja faznog kašnjenja jednog sinusnog signala primljenog na dva različita mesta, čiji su uzorci uzeti u diskretnim vremenskim intervalima. Takav problem pojavljuje se u mnogim oblastima kao što su sonar, radar, biomedicina i ultrazvučna dijagnostika.

### 2.2.1 Estimator faznog ugla sinusnog signala

Da bi odredili estimator početne faze  $\theta$  diskretizovanog sinusnog signala sa aditivnim šumom dobijenog uniformnim uzorkovanjem signala, polazi se od jednačine [1.32, 1.33]:

$$x[n] = A \cos[2\pi f_0 n + \theta] + w[n], \quad (2.2.1.1)$$

gde je:  $n = 1, 2, \dots, N$  broj uzoraka signala;  $A$  – amplituda signala;  $f_0$  – učestanost signala;  $\theta$  – početna faza signala i  $w[n]$  beli Gausov šum sa varijansom  $\sigma^2$ .

Važne karakteristike svakog estimatora parametra su: necentriranost (pristrasnost, pomerenost, bias), (engl. bias), varijansa, standardna devijacija i srednja kvadratna greška (engl. mean squared error –  $MSE$ ) [1.32 – 1.33].

Necentriranost  $B$  estimatora početne faze  $\hat{\theta}$  definiše se jednačinom:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta, \quad (2.2.1.2)$$

gde je  $\hat{\theta}$  – estimator početne faze,  $E$  - matematičko očekivanje i  $\theta$  - prava vrednost početne faze sinusnog signala.

Ako je  $B(\hat{\theta}) = 0$  onda je estimator početne faze centriran (nepistrasan).

Pokazuje se da je procena početne faze sinusnog signala sa šumom uvek necentrirana [1.33], posebno u uslovima kada je odnos signal-šum mali i/ili kada je mali broj uzoraka signala.

Varijansa estimatora  $\hat{\theta}$  definiše se kao matematičko očekivanje  $E$  dato formulom:

$$\text{var}\{\hat{\theta}\} = E\left\{\left(\hat{\theta} - E\{\hat{\theta}\}\right)^2\right\}. \quad (2.2.1.3)$$

Standardna devijacija estimatora  $\hat{\theta}$  definiše se kao kvadratni koren iz varijanse.

Srednja kvadratna greška  $MSE$  [1.32 – 1.33] estimatora  $\hat{\theta}$  definiše se kao matematičko očekivanje dato formulom:

$$MSE\{\hat{\theta}\} = E\left\{\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right\}. \quad (2.2.1.4)$$

Može se pokazati da važi sledeći odnos između  $MSE$ , varijanse i necentriranosti procene estimatora početne faze  $\hat{\theta}$ :

$$MSE\{\hat{\theta}\} = \text{var}\{\hat{\theta}\} + B^2(\hat{\theta}). \quad (2.2.1.5)$$

Minimalna  $MSE$  u nekim slučajevima postiže se u uslovima kada postoji necentrirana procena, a ne u uslovima kada je procena centrirana [1.33].

Kramer-Rao granica (engl. Cramér–Rao bound CRB) ili Kramer-Rao donja granica (engl. Cramér–Rao lower bound CRLB) je donja granica varijanse parametra.

Pod pretpostavkom da funkcija gustine verovatnoće (engl. probability density function PDF) signala  $x$  zadovoljava uslov da je:

$$E\left[\frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta}\right] = 0, \text{ za svako } \theta, \quad (2.2.1.6)$$

gde je  $E$  – matematičko očekivanje,  $p(x; \theta)$  funkcija gustine verovatnoće signala  $x$  u zavisnosti od parametra  $\theta$ , a  $\ln$  je prirodni logaritam, tada varijansa centriranog estimatora  $\hat{\theta}$  zadovoljava granicu:

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-E\left\{\left(\frac{\partial^2 \ln p(x; \theta)}{\partial \theta^2}\right)\right\}}. \quad (2.2.1.7)$$

Za signal dat jednačinom (2.2.1.1) kada su poznati parametri amplituda i učestanost a nepoznati parametar je početna faza  $\theta$  koju treba proceniti iz uzoraka merenja  $x[n]$ , klasičan način izvođenja Kramer-Rao granice (CRB) za varijansu estimatora početne faze je sledeći [1.33]:

- uzorci merenja  $x[n]$  imaju funkciju gustine verovatnoće (PDF) datu formulom:

$$p(x; \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] - A \cos(2\pi f_0 n + \theta)]^2\right\}; \quad (2.2.1.8)$$

- prirodni logaritam jednačine (2.2.1.8) je:

$$\ln p(x; \theta) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] - A \cos(2\pi f_0 n + \theta)]^2; \quad (2.2.1.9)$$

- jednačina (2.2.1.9) se diferencira po  $\theta$ , dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] - A \cos(2\pi f_0 n + \theta)] A \sin(2\pi f_0 n + \theta) \\ &= -\frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x[n] \sin(2\pi f_0 n + \theta) - \frac{A}{2} \sin(4\pi f_0 n + 2\theta) \right]; \end{aligned} \quad (2.2.1.10)$$

- drugi izvod jednačine (2.2.1.9) po  $\theta$  jednak je:

$$\frac{\partial^2 \ln p(x; \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] \cos(2\pi f_0 n + \theta) - A \cos(4\pi f_0 n + 2\theta)]; \quad (2.2.1.11)$$

- negativna očekivana vrednost (Fišerova informacija)  $I(\theta)$  data je jednačinom:

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x; \theta)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [A \cos^2(2\pi f_0 n + \theta) - A \cos(4\pi f_0 n + 2\theta)] \\
&= \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 n + 2\theta) - \cos(4\pi f_0 n + 2\theta) \right] \approx \frac{NA^2}{2\sigma^2}
\end{aligned} \quad ; \quad (2.2.1.12)$$

s obzirom da je

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(4\pi f_0 n + 2\theta) \approx 0; \quad (2.2.1.13)$$

uz uslov da vrednost  $f_0$  nije blizu 0 ili  $\frac{1}{2}$ .

Sledi iz formula (2.2.1.7) i (2.2.1.12) da je:

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{N \cdot SNR}, \quad (2.2.1.14)$$

gde je  $SNR$  odnos signal šum,  $SNR = A^2/2\sigma^2$ .

Iz formule (2.2.1.14) zaključuje se da ne postoji estimator početne faze sinusnog signala datog jednačinom (2.2.1.1) koji je centriran i koji dostiže  $CRB$ .

U slučaju kada je broj uzoraka signala veliki, postiže se asimptotska  $CRB$ .

## 2.2.2 Algoritam QDE

U literaturi [2.19] razmatraju se dva realna kontinualna sinusna signala sa šumom opisana jednačinama:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \theta) + w_1(t), \quad (2.2.2.1)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \theta - \varphi) + w_2(t). \quad (2.2.2.2)$$

Kada se uzorkuju ova dva signala sa periodom uzorkovanja  $T_s$ , mogu se opisati jednačinama:

$$x_1(kT_s) = A_1 \cos(\omega_0 kT_s + \theta) + w_1(kT_s), \quad (2.2.2.3)$$

$$x_2(kT_s) = A_2 \cos(\omega_0 kT_s + \theta - \varphi) + w_2(kT_s), \quad (2.2.2.4)$$

gde je  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ; nepoznate amplitude signala su  $A_1$  i  $A_2$ ; poznata ugaona učestanost je  $\omega_0$  u radijanima;  $\theta$  je nepoznata početna faza;  $\varphi$  je fazno kašnjenje između dva sinusna signala;  $w_1$  i  $w_2$  označavaju nekorelisan beli Gausov šum čija je srednja vrednost jednaka nuli;  $T_s$  označava periodu uzorkovanja i  $N$  je broj uzoraka svakog od dva signala. Zadatak je da se odredi fazno kašnjenje  $\varphi$  između signala  $x_1(kT_s)$  i  $x_2(kT_s)$ .

QDE algoritam koristi komponente u fazi i kvadraturi faze (pomerene za  $\pi/2$ ) jednog signala. Za signal  $x_1(kT_s)$  komponente u fazi su date jednačinom (2.2.2.3), a komponente u kvadraturi faze sledećom jednačinom:

$$\begin{aligned} x_1((k - \Delta)T_s) &= A_1 \cos(\omega_0(k - \Delta)T_s + \theta) + w_1((k - \Delta)T_s) \\ &= A_1 \sin(\omega_0 kT_s + \theta) + w_1((k - \Delta)T_s) \end{aligned} \quad (2.2.2.5)$$

gde je  $k - \Delta = 0, 1, \dots, N-1$ , pri čemu je  $\Delta$  pozitivan ceo broj (engl. positive integer) uz uslov da je  $\frac{\pi}{2\omega_0} = \Delta \cdot T_s$ , što se može postići izborom vremena uzorkovanja signala  $T_s$ .

Komponenta signala sa fazom pomerenom za  $\pi/2$  može se jednostavno generisati vremenskim pomeranjem signala za  $\Delta$  uzoraka.

Za izračunavanje estimatora faznog kašnjenja QDE koristi se formula:

$$\hat{\phi}_{QDE} = \arctan\left(\frac{Q_{m1}}{Q_{m2}}\right), \quad (2.2.2.6)$$

gde su

$$Q_{m1} = \frac{1}{N - \Delta} \sum_{k=\Delta}^{N-1} x_1((k - \Delta)T_s) \cdot x_2(kT_s), \quad (2.2.2.7)$$

$$Q_{m2} = \frac{1}{N - \Delta} \sum_{k=\Delta}^{N-1} x_1(kT_s) \cdot x_2(kT_s), \quad (2.2.2.8)$$

srednje vrednosti proizvoda uzoraka dva signala.

Matematička očekivanja za  $Q_{m1}$  i  $Q_{m2}$  data su jednačinama:

$$E\{ Q_{m1} \} = \sin(\varphi) + \frac{A_1 A_2}{2(N - \Delta)} \sum_{k=\Delta}^{N-1} \sin(2\omega_0 k T_s + 2\theta - \varphi), \quad (2.2.2.9)$$

$$E\{ Q_{m2} \} = \cos(\varphi) + \frac{A_1 A_2}{2(N - \Delta)} \sum_{k=\Delta}^{N-1} \cos(2\omega_0 k T_s + 2\theta - \varphi). \quad (2.2.2.10)$$

Iz jednačina (2.2.2.9) i (2.2.2.10) vidi se da se očekivane vrednosti  $E\{ Q_{m1} \}$  i  $E\{ Q_{m2} \}$  približavaju vrednosti  $\sin\varphi$  odnosno  $\cos\varphi$ , respektivno, kada  $N$  teži beskonačnosti.

Kada je broj uzoraka konačan, drugi članovi u jednačinama (2.2.2.9) i (2.2.2.10) doprinosiće da procena fazne razlike bude necentrirana (pristrasna).

Rezultati dobijeni koristeći algoritam QDE su necentrirani čak i kada jednačine (2.2.2.3) i (2.2.2.4) nemaju šum.

Necentriranost (pristrasnost) procene u opštem slučaju opada kada se  $N$  povećava.

## 2.2.3 Algoritam UQDE

U literaturi [2.20] predloženo je poboljšanje algoritma QDE tako da se koriste komponente u fazi i kvadraturi faze za oba signala  $x_1(kT_s)$  i  $x_2(kT_s)$  koji su definisani jednačinama (2.2.2.3) i (2.2.2.4).

Koristeći iste oznake kao za QDE algoritam, definišu se nove veličine:

$$Q_{m3} = \frac{1}{N - \Delta} \sum_{k=\Delta}^{N-1} x_1(kT_s) \cdot x_2((k - \Delta)T_s), \quad (2.2.3.1)$$

$$Q_{m4} = \frac{1}{N - \Delta} \sum_{k=\Delta}^{N-1} x_1((k - \Delta)T_s) \cdot x_2((k - \Delta)T_s), \quad (2.2.3.2)$$

koje predstavljaju srednje vrednosti proizvoda uzoraka signala.



Estimator faznog kašnjenja UQDE dobije se koristeći komponente  $Q_{m1}$ ,  $Q_{m2}$ ,  $Q_{m3}$  i  $Q_{m4}$  definisane jednačinama (2.2.2.7), (2.2.2.8), (2.2.3.1) i (2.2.3.2) tako da se dobije jednačina:

$$\hat{\phi}_{UQDE} = \arctan\left(\frac{Q_{m1} - Q_{m3}}{Q_{m2} + Q_{m4}}\right). \quad (2.2.3.3)$$

Matematička očekivanja za  $Q_{m3}$  i  $Q_{m4}$  data su jednačinama:

$$E\{Q_{m3}\} = -\sin(\varphi) + \frac{A_1 A_2}{2(N - \Delta)} \sum_{k=\Delta}^{N-1} \sin(2\omega_0 k T_s + 2\theta - \varphi), \quad (2.2.3.4)$$

$$E\{Q_{m4}\} = \cos(\varphi) - \frac{A_1 A_2}{2(N - \Delta)} \sum_{k=\Delta}^{N-1} \cos(2\omega_0 k T_s + 2\theta - \varphi). \quad (2.2.3.5)$$

Iz jednačina (2.2.3.4) i (2.2.3.5) vidi se da se očekivane vrednosti  $E\{Q_{m3}\}$  i  $E\{Q_{m4}\}$  približavaju vrednosti  $(-\sin\varphi)$ , odnosno  $\cos\varphi$ , respektivno, kada  $N$  teži beskonačnosti.

Ako je uslov  $\frac{\pi}{2\omega_0} = \Delta \cdot T_s$  zadovoljen, onda je procena fazne razlike dobijena koristeći algoritam UQDE centrirana (nepistrasna).

#### *Asimptotska Cramer-Rao granica za UQDE*

Pretpostavljajući da je odnos signal šum  $SNR$  za oba signala predstavljena jednačinama (2.2.2.3) i (2.2.2.4) identičan, asimptotska vrednost Kramer-Rao granice  $CRB$  za UQDE estimator faznog kašnjenja između dva sinusna signala sa šumom, data je izrazom [2.20]:

$$CRB(\hat{\phi})_{UQDE} = \frac{2}{N \cdot SNR}. \quad (2.2.3.6)$$

## 2.3 Procena merne nesigurnosti prema uputstvima JCGM

Zajednički komitet za uputstva u metrologiji (engl. Joint Committee for Guides in Metrology – JCGM) formirale su sledeće međunarodne organizacije, 1997. godine:

- Međunarodni biro za tegove i mere (fr. Bureau International des Poids et Mesures – BIPM),
- Međunarodna elektrotehnička komisija (engl. International Electrotechnical Commission – IEC),
- Međunarodna federacija kliničke hemije i medicinskih laboratorija (engl. International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine – IFCC),
- Međunarodna saradnja laboratorija za akreditaciju (engl. International Laboratory Accreditation Cooperation – ILAC),
- Međunarodna organizacija za standardizaciju (engl. International Organization for Standardization – ISO),
- Međunarodna unija za čistu i primenjenu hemiju (engl. International Union of Pure and Applied Chemistry – IUPAC),
- Međunarodna unija za čistu i primenjenu fiziku (engl. International Union of Pure and Applied Physics – IUPAP), i
- Međunarodna organizacija za zakonsku metrologiju (engl. International Organization of Legal Metrology – OIML).

Zadatak komiteta je da promoviše upotrebu Uputstva za izražavanje merne nesigurnosti rezultata merenja i Međunarodnog rečnika osnovnih i opštih pojmova i pridruženih termina u metrologiji i da pripremi dodatna uputstva.

Međunarodno prihvaćena uputstva za procenu merne nesigurnosti danas, su:

- JCGM 100:2008 Uputstvo za izražavanje nesigurnosti u merenju (GUM) [1.37],
- JCGM 101:2008 Dodatak 1 GUM - Prostiranje raspodela koristeći metodu Monte Karlo [1.35],

- JCGM 102:2011 Dodatak 2 GUM – Primena na bilo koji broj izlaznih veličina [1.36],
- JCGM 104:2009 Uvod u GUM i dokumente povezane sa njim [1.38],
- JCGM 106:2012 Uloga merne nesigurnosti u ocenjivanju usaglašenosti (engl. conformity assesment) [1.45].

Trenutno JCGM priprema sledeća uputstva:

- Dodatak 3 GUM – Modelovanje i
- Vrednovanje mernih podataka – Primena metode najmanjih kvadrata.

Svetska saglasnost o oceni i izražavanju merne nesigurnosti treba da doprinese da se smisao rezultata merenja u nauci, tehnici, trgovini, industriji i pri izradi propisa lako razume i pravilno tumači. Jedinstven metod za ocenjivanje i izražavanje nesigurnosti u čitavom svetu, omogućava da se merenja izvršena u različitim zemljama mogu lako da uporede.

Klasičan pristup polazi od pretpostavke da merenjem određujemo pravu vrednost merene veličine i njene greške, koje mogu biti slučajne ili sistematske prirode.

Obzirom da je praktično nemoguće odrediti pravu vrednost merene veličine, zbog nesavršenosti samog merenja i predmeta koji se meri, novi pristup razmatra interval u kojem se sa određenom verovatnoćom ta vrednost nalazi. Rezultat merenja je procena vrednosti merene veličine i on je kompletan tek kada mu je pridružen iskaz o nesigurnosti te procene. Pretpostavlja se da je rezultat merenja korigovan za sve značajne sistematske efekte.

### **2.3.1 Procena merne nesigurnosti u skladu sa GUM**

Uputstvo za izražavanje nesigurnosti u merenju (engl. „Guide to the expression of uncertainty in measurement“ - GUM) [1.34, 1.37, 1.40] bavi se izražavanjem merne nesigurnosti dobro definisanih fizičkih veličina koje se mogu opisati jedinstvenom

vrednošću. Ovo uputstvo se takođe primenjuje za određivanje i izražavanje merne nesigurnosti pridružene misaonom oblikovanju i teorijskoj analizi eksperimenata, metoda merenja i kompleksnih komponenata i sistemima.

U praksi postoji mnogo mogućih izvora nesigurnosti u merenju, kao što su: nepotpuna definicija merene veličine, nereprezentativno uzorkovanje, nedovoljno poznavanje delovanja uslova okoline na merenje, lična pristrasnost u očitavanju analognih instrumenata, konačna rezolucija instrumenta, vrednosti konstanti i etalona koje nisu egzaktna, aproksimacije i pretpostavke uključene u metodu merenja, varijacije u ponovljenim opažanjima merene veličine u očigledno identičnim uslovima.

GUM pruža opšta pravila za ocenu i izražavanje nesigurnosti u merenju a zasnovan je na sledećim osnovnim konceptima:

- saznanje o bilo kojoj veličini, koja utiče na merenu veličinu je nepotpuno i može da se izrazi pomoću funkcije gustine verovatnoće (engl. probability density function - PDF) za vrednosti veličine zasnovane na tom saznanju,
- očekivanje (očekivana vrednost) te PDF se uzima kao najbolja procena vrednosti veličine,
- standardna devijacija te PDF se uzima kao standardna nesigurnost pridružena proceni,
- PDF je zasnovana na saznanju o merenoj veličini koje potiče od ponovljenih merenja i naučnog prosuđivanja zasnovanog na svim dostupnim informacijama o merenoj veličini.

Ovde je dat kratak pregled osnovnih pojmova iz GUM [1.34].

Matematički *model merenja* transformiše niz ponovljenih opažanja u rezultat merenja. Uz opažanja on obično uključuje i različite uticajne veličine koje nisu tačno poznate.

Kada se merena veličina  $Y$  ne meri direktno već se određuje iz  $N$  drugih veličina  $X_1, \dots, X_N$ , preko funkcije  $f$ , model merenja se predstavlja jednačinom:

$$Y = f(X_1, \dots, X_N). \quad (2.3.1.1)$$

Nesigurnost rezultata merenja, sastoji se od više komponenti koje se, u zavisnosti od načina na koji se procenjuju njihove broјčane vrednosti, mogu da grupišu u dve

kategorije: A - one koje se ocenjuju statističkim metodama i B - one koje se ocenjuju na druge načine.

Ako se merenje ponavlja, onda se iz statističke raspodele rezultata serije merenja dobija eksperimentalna standardna devijacija. To je ocena *standardne merne nesigurnosti tipa A*. Uz vrednost ocene merne nesigurnosti tipa A uvek se daje broj stepeni slobode.

Ocena *standardne merne nesigurnosti tipa B* je metoda ocenjivanja merne nesigurnosti na osnovu svih dostupnih informacija kao što su: podaci o prethodnim merenjima, iskustvo, specifikacije proizvođača, uverenje o etaloniranju. Te komponente merne nesigurnosti se takođe mogu okarakterisati standardnom devijacijom na osnovu pretpostavljenih (a priori) raspodela verovatnoće.

Procenjena standardna devijacija pridružena proceni izlazne veličine  $y$ , naziva se *kombinovana standardna nesigurnost* i označava se  $u_c(y)$ . Kombinovana standardna nesigurnost jednaka je pozitivnom kvadratnom korenu kombinovane varijanse dobijene iz svih komponenata varijanse i kovarijanse korišćenjem zakona prostiranja nesigurnosti.

*Proširena nesigurnost*  $U$  je veličina koja definiše interval oko rezultata merenja za koji može da se očekuje da obuhvata veliki deo raspodele vrednosti koje opravdano mogu da se pripišu merenoj veličini. Taj deo može da se posmatra kao verovatnoća obuhvata ili nivo poverenja za taj interval.

*Faktor obuhvata/prekrivanja*  $k$  je brojčani faktor kojim se množi kombinovana standardna nesigurnost  $u_c(y)$  da bi se dobila proširena nesigurnost. Faktor prekrivanja  $k$  obično ima vrednost između 2 i 3. Koristi se jednačina:

$$U = k \cdot u_c(y). \quad (2.3.1.2)$$

U najvećem broju slučajeva, najbolja procena  $x_i$  očekivane vrednosti veličine, koja se menja na slučajan način, za  $n$  nezavisnih merenja (opažanja), koja su dobijena pod istim uslovima, je *aritmetička sredina*  $\bar{x}$  tih merenja [1.34]:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.3.1.3)$$

*Eksperimentalna standardna devijacija* merenja (opažanja) za niz od  $n$  ponovljenih merenja iste merene veličine je veličina, koja karakteriše disperziju (rasipanje) rezultata merenja i data je formulom [1.34]:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}, \quad (2.3.1.4)$$

gde je  $x_i$  rezultat  $i$ -tog merenja, a  $\bar{x}$  je aritmetička sredina  $n$  razmatranih rezultata.

*Eksperimentalna standardna devijacija srednje vrednosti* je veličina, koja karakteriše disperziju (rasipanje) aritmetičke sredine  $\bar{x}$  niza ponovljenih merenja iste merene veličine i data je izrazom [1.34]:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (2.3.1.5)$$

U cilju dobijanja zakona prostiranja nesigurnosti koristi se *Tejlorov (Taylor) razvoj prvog reda* jednačine (2.3.1.1). Smatra se da su članovi višeg reda Tejlorovog razvoja zanemarljivi. Ako ulazne veličine nisu korelisane, izraz za kombinovanu varijansu rezultata merenja dat je jednačinom:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (2.3.1.6)$$

gde su:  $y$  - najbolja procena izlazne veličine  $Y$ ;  $f$  – funkcija data jednačinom (2.3.1.1);  $x_1, x_2, \dots, x_N$  su procene ulaznih veličina. Parcijalni izvodi u jednačini (2.3.1.6) nazivaju se *koeficijenti osetljivosti* i označavaju sa  $c_i$ . Koeficijenti osetljivosti opisuju kako procene  $y$  variraju sa promenama vrednosti procena ulaza  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Kada je nelinearnost funkcije  $f$  značajna, moraju se uključiti članovi višeg reda u Tejlorov razvoj u izrazu 2.3.1.6. Kad je raspodela za svako  $X_i$  simetrična u odnosu na njenu srednju vrednost, najvažniji članovi sledećeg najvišeg reda koje treba dodati članovima jednačine (2.3.1.6) su

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j). \quad (2.3.1.7)$$

Kada su ulazne veličine korelisane, odgovarajući izraz za kombinovanu varijansu  $u_c^2(y)$  pridružen rezultatu merenja je:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) u(x_j) r_C(x_i, x_j). \quad (2.3.1.8)$$

gde su  $x_i$  i  $x_j$  procene veličina  $X_i$  i  $X_j$  a  $r_C(x_i, x_j)$  je koeficijent korelacije. Stepen korelacije između  $x_i$  i  $x_j$  se karakteriše procenjenim *koeficijentom korelacije*:

$$r_C(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}, \quad (2.3.1.9)$$

gde su:  $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$  procenjena kovarijansa pridružena  $x_i$  i  $x_j$ ;  $r_C(x_i, x_j) = r_C(x_j, x_i)$ , i  $-1 \leq r_C(x_i, x_j) \leq +1$ . Ako su procene  $x_i$  i  $x_j$  nezavisne, tada je  $r_C(x_i, x_j) = 0$ .

Jednačina (2.3.1.6) i njoj odgovarajuća jednačina (2.3.1.8) za korelisane ulazne veličine, bazirane su na aproksimaciji prvog reda Tejlorovog reda za funkciju  $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_N)$  i nazivaju se *zakon prostiranja nesigurnosti*.

*Efektivni broj stepeni slobode*  $v_{\text{eff}}$ , koji se koristi pri određivanju faktora obuhvata, izračuna se iz Velč - Satervajtove (Welch-Satterwaite) formule [1.34]:

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}, \quad (2.3.1.10)$$

gde je:  $u_c$  - kombinovana merna nesigurnost;  $v_i$  - broj stepeni slobode;  $u_i(y) = c_i u(x_i)$ ;  $c_i$  - koeficijent osetljivosti.

Ukoliko rezultati merenja imaju sistematsku grešku (bias), rezultati merenja se koriguju za vrednost te sistematske greške. Postoje slučajevi kada to nije pogodno te je dozvoljeno bias uračunati u proširenu mernu nesigurnost [GUM t. 6.3.1, F.2.4.5]. Mora se naznačiti na koji način je bias uračunat u proširenu mernu nesigurnost [4.7].

## 2.3.2 Dodatak 1 GUM

Dodatak 1 GUM [1.35] bavi se prenosom (rasprostiranjem) raspodela verovatnoće preko matematičkog modela merenja kao osnove za određivanje vrednosti nesigurnosti i njenu primenu metodom simulacije Monte Karlo. Taj postupak se primjenjuje na model koji ima bilo koji broj ulaznih veličina i jednu izlaznu veličinu.

Dodatak 1 GUM razmatra nezavisne ulazne veličine kojima su pripisane odgovarajuće PDF i na veličine koje nisu nezavisne kada je nekima ili svima pripisana zajednička funkcija gustine verovatnoće (engl. joint PDF).

Tipični problemi određivanja merne nesigurnosti na koje se može primeniti Dodatak 1 GUM su:

- nije podesno da se odrede parcijalni izvodi modela merenja koji su neophodni u primeni zakona prostiranja nesigurnosti,
- merne nesigurnosti ulaznih veličina nemaju približno isti doprinos,
- PDF za ulazne veličine su asimetrične,
- PDF za izlaznu veličinu nije Gausova ili skalirana i pomerena  $t$  – raspodela,
- procena izlazne veličine i njoj pripisana standardna nesigurnost su približno iste vrednosti,
- komplikovani modeli merenja.

Glavne faze određivanja nesigurnosti izlazne veličine u Dodatku 1 GUM [1.35, tačka 5.1] su formulisanje, prostiranje i prikazivanje u sažetom obliku, a realizuju se na sledeći način:

a) u fazi formulisanja:

- 1) definisanje izlazne veličine  $Y$  odnosno veličine koju treba izmeriti,
- 2) određivanje ulaznih veličina  $X_1, \dots, X_N$  od kojih zavisi izlazna veličina,
- 3) razvoj modela koji pokazuje zavisnost izlazne veličine od ulaznih veličina,
- 4) na osnovu dostupnog znanja pripisivanje vrednostima ulaznih veličina odgovarajuće funkcije gustine verovatnoće (PDF),

b) u fazi prostiranja:

realizacija prostiranja funkcija gustine verovatnoće slučajnih veličina  $X_i$  kroz model da bi se dobila funkcija gustine verovatnoće slučajne veličine  $Y$ ,



c) u fazi prikazivanje u sažetom obliku:

funkcija gustine verovatnoće izlazne veličine  $Y$  koristi se da se odredi: njeno matematičko očekivanje, standardna devijacija i interval obuhvata/pokrivanja koji sadrži vrednost izlazne veličine sa specificiranom verovatnoćom.

Prostiranje raspodela može se realizovati na nekoliko načina [1.35, tačka 5.4.1]:

- analitičkim metodama, tj. metodama koje daju matematički prikaz funkcije gustine verovatnoće izlazne veličine;
- prostiranjem nesigurnosti koje se zasniva na zameni modela aproksimacijom prvog reda razvoja u Tejlorov red – zakon prostiranja nesigurnosti;
- kao u prethodnoj stavci osim što su u aproksimaciju razvojem u Tejlorov red uključeni doprinosi izvedeni iz članova višeg reda;
- numeričkim metodama koje se primenjuju za prostiranje raspodela, posebno upotrebom metode Monte Karlo.

Metoda Monte Karlo (MCM), kao primena prostiranja raspodela, za unapred zadati broj  $M$ , realizuje se na sledeći način [1.35, tačka 5.9.6]:

- 1) izabere se broj Monte Karlo pokušaja  $M$ ;
- 2) generiše se  $M$  vektora  $N$  ulaznih veličina uzorkovanjem iz odgovarajućih funkcija gustine verovatnoće;
- 3) za svaki takav vektor odredi se odgovarajuća vrednost modela  $Y$  čiji je rezultat  $M$  vrednosti modela;
- 4) dobijene vrednosti koriste se da se dobije gustina raspodele za vrednost izlazne veličine, koja se koristi za određivanje procene vrednosti izlazne veličine njene standardne nesigurnosti i intervala obuhvata/prekrivanja vrednosti izlazne veličine za dogovorenu vrednost verovatnoće pokrivanja  $p$ .

Broj Monte Karlo simulacija (pokušaja)  $M$  može se izabrati na dva načina:

- 1) a priori, ili 2) koristiti postupak koji određuje  $M$  adaptivno.

A priori se bira broj simulacija (engl. trials) tako da je bar  $10^4$  puta veći od  $1/(1-p)$ , gde je  $p$  verovatnoća [1.35, tačka 7.2].

Koristi se i adaptivni Monte Karlo postupak u kojem se broj simulacija povećava dok se ne postigne da je dvostruka vrednost standardne devijacije rezultata za izlaznu

veličinu manja od dozvoljene numeričke tolerancije pridružene standardnoj nesigurnosti izlazne veličine [1.35, tačka 7.9].

Metoda Monte Karlo se koristi i za validovanje rezultata za mernu nesigurnost dobijenih primenom GUM (koristi se i termin GUM okvir nesigurnosti) [1.35, tačka 8.1]. Porede se rezultati za interval obuhvata dobijeni primenom GUM i metode Monte Karlo u granicama dogovorenog numeričkog odstupanja. Ako poređenje da zadovoljavajuće rezultate onda se za slične probleme proračuna merne nesigurnosti može koristiti GUM. Ako poređenje ne daje zadovoljavajuće rezultate tada treba razmotriti korišćenje metode Monte Karlo ili drugog pristupa.

PRNG (engl. pseudo-random numbers generator) za neku raspodelu može da se dobije iz njene funkcije raspodele zajedno sa korišćenjem generatora pravougaone raspodele [1.35, tačka C]. Svaki upotrebljeni PRNG treba da zadovoljava uslove [1.35, tačka C.3.2]:

- da ima dobre statističke karakteristike [2.38 – 2.39],
- da se može lako realizovati u bilo kojem programskom jeziku,
- da daje iste rezultate za ista ispitivanja na bilo kojem računaru.

### 2.3.3 Dodatak 2 GUM

Osim modela merenja koji imaju jednu izlaznu veličinu, u GUM su dati i primeri modela sa više izlaznih veličina [1.34, aneks H].

U Dodatku 2 GUM [1.36] razmatraju se modeli merenja koji imaju više izlaznih veličina. Takve veličine su u opštem slučaju korelisane jer zavise od zajedničkih ulaznih veličina.

Ulazne ili izlazne veličine u modelu mogu biti realne ili kompleksne.

Ovakvi modeli se mogu tretirati na tri načina: analitički, primenom aproksimacije prvog reda razvoja modela u Tejlorov red ili primenom metode Monte Karlo na prostiranje raspodela [1.36, tačka 5.6.1].

Broj Monte Karlo simulacija  $M$  može se izabrati na dva načina:

1) a priori [1.36, tačka 7.2], ili

2) koristiti postupak koji određuje  $M$  adaptivno [1.36, tačka 7.8].

Osim intervala obuhvata [1.36, tačka 3.23], u Dodatku 2 GUM definišu se i novi pojmovi: oblast obuhvata (engl. coverage region) [1.36, tačka 3.24] i najmanja oblast obuhvata (engl. smallest coverage region) [1.36, tačka 3.26].

## Glava 3

# Novi algoritam za određivanje fazne razlike između sinusnih signala

U ovom poglavlju izloženi su novi algoritmi SAL i MSAL za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala sa aditivnim šumom [3.1 – 3.2]. Algoritmi su zasnovani na množenju uzoraka dva signala sa uzorcima dodatnih signala koji predstavljaju fazno pomerene uzorke originalnih signala. Izborom faznog kašnjenja dodatnih signala moguće je odrediti vrednost fazne razlike između dva originalna signala koristeći samo po dva uzorka svakog signala (algoritam SAL). Algoritam MSAL koristi nešto složeniju formulu za određivanje vrednost fazne razlike.

Dva realna kontinualna sinusna signala sa aditivnim šumom  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  bez DC pomeraja mogu da se opišu sledećim jednačinama:

$$u_1(t) = U_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + w_1(t), \quad (3.1)$$

$$u_2(t) = U_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_2) + w_2(t), \quad (3.2)$$

gde su  $U_1$  i  $U_2$  nepoznate amplitude signala;  $\omega_0$  je poznata ugaona učestanost signala;  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  su nepoznate početne faze signala  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ ;  $w_1(t)$  i  $w_2(t)$  predstavljaju nekorelisan beli Gausov šum.

Zadatak je da se odredi fazna razlika  $\varphi$  između dva sinusna signala predstavljena jednačinama (3.1) i (3.2):

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.3)$$

Signali  $u_1'(t)$  i  $u_2'(t)$  koji fazno kasne za signalima predstavljenim jednačinama (3.1) i (3.2) mogu da se opišu sledećim jednačinama:

$$u_1'(t) = U_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1 - \psi_1) + w_1'(t), \quad (3.4)$$

$$u_2'(t) = U_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_2 - \psi_2) + w_2'(t), \quad (3.5)$$

gde su  $\psi_1$  i  $\psi_2$  poznata fazna kašnjenja signala,  $\psi_1, \psi_2 \in (0, 2\pi)$ ,  $w_1'(t)$  i  $w_2'(t)$  predstavljaju fazno pomeren šum  $w_1(t)$  i  $w_2(t)$ , respektivno.

Definišemo  $m_a(t)$  i  $m_r(t)$  kao zbir i razliku sledećih proizvoda signala opisanih jednačinama (3.1), (3.2), (3.4) i (3.5):

$$m_a(t) = u_1(t) \cdot u_2(t) + u_1'(t) \cdot u_2'(t), \quad (3.6)$$

$$m_r(t) = u_1(t) \cdot u_2'(t) - u_1'(t) \cdot u_2(t). \quad (3.7)$$

#### *Razvoj formule za $m_a(t)$*

Kada se u jednačinu (3.6) zamene jednačine (3.1), (3.2), (3.4) i (3.5) dobije se jednačina:

$$\begin{aligned} m_a(t) = & U_1 U_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \sin(\omega_0 t + \varphi_2) + \\ & + U_1 U_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_1 - \psi_1) \sin(\omega_0 t + \varphi_2 - \psi_2) + w_a(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Primenom trigonometrijske formule za proizvod sinusa dva ugla  $\alpha$  i  $\beta$  koja glasi [3.3]:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \quad (3.9)$$

na jednačinu (3.8) dobije se sledeća jednačina:

$$m_a(t) = \frac{U_1 U_2}{2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \psi_1 + \psi_2)] - \frac{U_1 U_2}{2} [\cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_1 - \psi_2)] + w_a(t). \quad (3.10)$$

Na jednačinu (3.10) mogu da se primene trigonometrijske formule za zbir kosinusa dva ugla  $\alpha$  i  $\beta$  i za kosinus negativnog ugla, koje glase:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right); \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad (3.11)$$

tako da se iz jednačine (3.10) dobije sledeća jednačina:

$$m_a(t) = U_1 U_2 \cos\left(\varphi_1 - \varphi_2 + \frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) - U_1 U_2 \cos\left(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) + w_a(t). \quad (3.12)$$

*Razvoj formule za  $m_r(t)$*

Kada se u jednačinu (3.7) zamene jednačine (3.1), (3.2), (3.4) i (3.5) dobije se sledeća jednačina:

$$m_r(t) = U_1 U_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_1 - \psi_1) \sin(\omega_0 t + \varphi_2) - U_1 U_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \sin(\omega_0 t + \varphi_2 - \psi_2) + w_r(t). \quad (3.13)$$

Primenom trigonometrijske formule (3.9) za proizvod sinusa dva ugla, iz jednačine (3.13) dobije se jednačina:

$$m_r(t) = \frac{U_1 U_2}{2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \psi_1) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \psi_2)] - \frac{U_1 U_2}{2} [\cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_1) - \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_2)] + w_r(t). \quad (3.14)$$

Na jednačinu (3.14) mogu da se primene trigonometrijske formule za razliku kosinusa dva ugla  $\alpha$  i  $\beta$  i za sinus negativnog ugla, koje glase:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right); \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha), \quad (3.15)$$

tako da se iz jednačine (3.14) dobije sledeća jednačina:

$$m_r(t) = U_1 U_2 \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2 + \frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) + U_1 U_2 \sin\left(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) + w_r(t). \quad (3.16)$$

U jednačinama (3.12) i (3.16),  $w_a(t)$  i  $w_r(t)$  sadrže sve komponente šuma dobijene množenjem signala. Za nekorelisan beli Gausov šum srednje vrednosti  $w_a(t)$  i  $w_r(t)$  su jednake nuli.

Ako su fazna kašnjenja dva signala jednaka, odnosno ako je:

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi, \quad (3.17)$$

jednačine (3.12) i (3.16) imaju sledeće oblike:

$$m_a(t) = U_1 U_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - U_1 U_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2 - \psi) \cos(\psi) + w_a(t), \quad (3.18)$$

$$m_r(t) = U_1 U_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\psi) + w_r(t), \quad (3.19)$$

pri čemu je  $\psi \neq a\pi$ ,  $a$  je ceo broj.

U slučaju uzorkovanja signala koji su dati jednačinama (3.1) i (3.2) sa vremenom uzorkovanja  $T_s$ , dobiju se za  $m_a(kT_s)$  i  $m_r(kT_s)$  jednačine (3.18) i (3.19), izračunate u vremenskim intervalima  $kT_s$ , gde je  $k$  ceo broj, odnosno:

$$m_a(kT_s) = U_1 U_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - U_1 U_2 \cos(2\omega_0 kT_s + \varphi_1 + \varphi_2 - \psi) \cos(\psi) + w_a(kT_s), \quad (3.20)$$

$$m_r(kT_s) = U_1 U_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \sin(\psi) + w_r(kT_s). \quad (3.21)$$

Jednačine (3.20) i (3.21) zavise, između ostalih parametara, i od uvedenog faznog kašnjenja  $\psi$ .

### 3.1 Algoritam SAL

Ako se izabere da uvedeno fazno kašnjenje zadovoljava sledeći uslov:

$$\psi_1 = \psi_2 = \psi = (4l + 1) \pi / 2, \quad (3.1.1)$$

gde je  $l$  ceo broj, dobiju se iz jednačina (3.20) i (3.21) sledeće jednačine:

$$m_a(kT_s) = U_1 U_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + w_a(kT_s), \quad (3.1.2)$$

$$m_r(kT_s) = U_1 U_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + w_r(kT_s). \quad (3.1.3)$$

Za veliki odnos signal šum ( $SNR$ ), iz jednačina (3.1.2) i (3.1.3), dobije se sledeća formula za faznu razliku  $\varphi$  između dva sinusna signala:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \approx \arctan \frac{m_r(kT_s)}{m_a(kT_s)}. \quad (3.1.4)$$

Iz jednačine (3.1.4) možemo zaključiti da su potrebni samo prvi uzorci oba signala i  $r$ -ti uzorci signala fazno pomerenih za  $\pi/2$ , da se odredi fazna razlika između dva signala. Ovaj algoritam određivanja fazne razlike između dva signala koristeći samo po dva uzorka svakog signala, nazivamo jednostavan algoritam, ili kraće SAL (engl. simple algorithm) [3.1 – 3.2].

*Uslov za primenu algoritma SAL*

Za vremenski diskretizovane signale, fazno kašnjenje dato formulom (3.1.1) može se



realizovati kašnjenjem uzorka signala tako da je:

$$u_1'(kT_s) = u_1(kT_s - rT_s), \quad (3.1.5)$$

gde je  $r$  ceo broj (engl. integer).

Iz jednačina (3.4) i (3.1.5) za diskretizovane signale dobije se:

$$u_1(kT_s - rT_s) = U_1 \sin(\omega_0(kT_s - rT_s) + \varphi_1) + w_1'(kT_s). \quad (3.1.6)$$

Kada se u jednačinu (3.1.5) uvrste jednačine (3.4) i (3.1.6) dobije se:

$$U_1 \sin(\omega_0 kT_s + \varphi_1 - \psi) + w_1'(kT_s) = U_1 \sin(\omega_0(kT_s - rT_s) + \varphi_1) + w_1'(kT_s) \quad (3.1.7)$$

Ako se u jednačini (3.1.7) izjednače argumenti u funkciji sin sa obe strane znaka jednakosti, dobije se:

$$\psi = r \cdot \omega_0 \cdot T_s. \quad (3.1.8)$$

Za koherentno uzorkovanje signala, odnos između učestanosti signala  $f_0$  i učestanosti uzorkovanja  $f_s$  dat je jednačinom (2.1.1), koju ovde pišemo:

$$f_s \cdot q = f_0 \cdot p. \quad (3.1.9)$$

gde je  $p$  broj uzoraka signala,  $q$  je broj perioda signala, uz uslov da su  $p$  i  $q$  pozitivni međusobno prosti brojevi.

Kada se u jednačinu (3.1.9) uvrste formule za učestanost signala  $f_0 = \omega_0 / 2\pi$  i učestanost uzorkovanja  $f_s = 1/T_s$  dobije se jednačina:

$$\omega_0 T_s = \frac{2\pi q}{p}. \quad (3.1.10)$$

Kada se jednačina (3.1.10) uvrsti u (3.1.8) dobije se:

$$\psi = r \frac{2\pi q}{p}. \quad (3.1.11)$$

Iz jednačina (3.1.1) i (3.1.11), dobije se:

$$r = (4l + 1) \frac{p}{4q}. \quad (3.1.12)$$

U jednačini (3.1.12),  $p$  mora biti deljivo sa 4, i  $(4l+1)$  mora biti deljivo sa  $q$ .

Kada je šum zanemarljiv i kada postoji vrednost  $r$  koja zadovoljava uslov dat jednačinom (3.1.11), primena SAL za određivanje fazne razlike daje vrednost fazne razlike bez greške.

Ako nije moguće izabrati vrednost  $r$  tako da zadovolji uslov dat jednačinom (3.1.11), onda uvedeno fazno kašnjenje dato jednačinom (3.1.12) nije jednako  $\pi/2$ , i postoji greška faznog kašnjenja  $\Delta\psi = \psi - \pi/2$ .

### *Izvori grešaka u algoritmu SAL*

Algoritam SAL dat jednačinom (3.1.4), bez komponenti šuma, ima dva izvora greške određivanja fazne razlike.

Jedan izvor greške određivanja fazne razlike je druga komponenta u jednačini (3.20). Relativna greška određivanja komponente  $m_a$  data je jednačinom:

$$\varepsilon_a(kT_s) = \frac{m_a(kT_s) - \hat{m}_a(kT_s)}{\hat{m}_a(kT_s)} = \frac{-\cos(2\omega_0 kT_s + \varphi_1 + \varphi_2 - \psi) \cos(\psi)}{\cos(\varphi)}, \quad (3.1.13)$$

gde je

$$\hat{m}_a(kT_s) = U_1 U_2 \cos(\varphi). \quad (3.1.14)$$

Iz jednačine (3.1.13) se vidi da relativna greška  $\varepsilon_a(kT_s)$ , zavisi, između ostalih parametara, i od  $k$ , i ima srednju vrednost datu formulom  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_a(kT_s)$  koja je približno jednaka nuli za veliki broj uzoraka  $N$ , ili je jednaka nuli kada je broj uzoraka  $N$  jednak proizvodu celog broja i broja uzoraka u periodu signala.

Drugi izvor greške određivanja fazne razlike je komponenta  $\sin(\psi)$  u jednačini (3.21). Relativna greška određivanja komponente  $m_r$  data je formulom:

$$\varepsilon_r(kT_s) = \frac{m_r(kT_s) - \hat{m}_r(kT_s)}{\hat{m}_r(kT_s)} = \sin(\psi) - 1 = \varepsilon_\psi, \quad (3.1.15)$$

gde je

$$\hat{m}_r(kT_s) = U_1 U_2 \sin(\varphi). \quad (3.1.16)$$

Iz jednačine (3.1.15) se vidi da relativna greška  $\varepsilon_r(kT_s)$  zavisi samo od uvedenog faznog kašnjenja i ima konstantnu vrednost  $\varepsilon_\psi$ .

Kada se za određivanje fazne razlike koristi algoritam SAL, izraz za grešku [1.8] fazne razlike  $\Delta\varphi$  dobije se na sledeći način, polazeći od formule:

$$\Delta\varphi_k = \varphi_k - \hat{\varphi}, \quad (3.1.17)$$

gde je  $\varphi_k$  izmerena vrednost fazne razlike za uzorak  $kT$ ,  $\hat{\varphi}$  je referentna vrednost fazne razlike.

Tangens fazne razlike može da se napiše prema trigonometrijskoj formuli za tangens razlike dva ugla [3.3] na sledeći način:

$$\tan(\Delta\varphi_k) = \tan(\varphi_k - \hat{\varphi}) = \frac{\tan \varphi_k - \tan \hat{\varphi}}{1 + \tan \varphi_k \tan \hat{\varphi}}. \quad (3.1.18)$$

U formulu (3.1.17) uvrste se sledeće formule:

$$\hat{\varphi} = \arctan \frac{\hat{m}_r(kT_s)}{\hat{m}_a(kT_s)}, \quad (3.1.19)$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{m_r(kT_s)}{m_a(kT_s)}. \quad (3.1.20)$$

Zatim se koriste formule (3.8), (3.1.13) i (3.1.14) i dobije se sledeća formula za grešku određivanja fazne razlike za algoritam SAL:

$$\Delta\varphi_k = \varphi_k - \hat{\varphi} = \arctan \left( \frac{\tan(\hat{\varphi})(\varepsilon_\psi - \varepsilon_a(kT_s))}{1 + \varepsilon_a(kT_s) + (1 + \varepsilon_\psi)\tan^2(\hat{\varphi})} \right). \quad (3.1.21)$$

## 3.2 Algoritam MSAL

Vrednost relativne greške fazne razlike  $\varepsilon_a(kT_s)$  data formulom (3.1.13) može se svesti na nulu za veliki broj uzoraka  $N$ , ili kada je broj uzoraka  $N$  jednak proizvodu celog broja  $i$  i broja uzoraka u periodu signala, ali se vrednost relativne greške  $\varepsilon_r(kT_s) = \varepsilon_\psi$  date formulom (3.1.15) ne može svesti na nulu takvim izborom broja uzoraka  $N$ .

Vrednost relativne greške fazne razlike može se svesti na nulu ako se umesto formula za  $m_a(kT_s)$  i  $m_r(kT_s)$  koriste sledeće formule za  $M_a(kT_s)$  i  $M_r(kT_s)$ :

$$M_a(kT_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} m_a(kT_s) \quad (3.2.1)$$

$$M_r(kT_s) = \frac{1}{N(\varepsilon_r + 1)} \sum_{k=0}^{N-1} m_r(kT_s) \quad (3.2.2)$$

gde je  $N$  broj uzoraka, i taj broj treba da bude jednak celobrojnom umnošku broja uzoraka u periodu.

Kada se u (3.2.1) uvrste jednačine (3.1.13) i (3.1.14) dobije se sledeća jednačina:

$$\begin{aligned} M_a(kT_s) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{m}_a(kT_s) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_a(kT_s) \hat{m}_a(kT_s) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_a(kT_s) \\ &\approx U_1 U_2 \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Kada se u (3.2.2) uvrste jednačine (3.1.15) i (3.1.16) dobije se sledeća jednačina:

$$\begin{aligned} M_r(kT_s) &= \frac{1}{N(\varepsilon_r + 1)} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{m}_r(kT_s) + \frac{1}{N(\varepsilon_r + 1)} \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_r(kT_s) \hat{m}_r(kT_s) + \\ &+ \frac{1}{N(\varepsilon_r + 1)} \sum_{k=0}^{N-1} w_r(kT_s) \approx U_1 U_2 \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Iz jednačina (3.2.1) do (3.2.4) dobije se sledeći estimator za faznu razliku između dva sinusna signala:

$$\hat{\varphi}_{MSAL} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arctan \frac{\sum_{k=0}^{N-1} m_r(kT_s)}{(\varepsilon_r + 1) \sum_{k=0}^{N-1} m_a(kT_s)}. \quad (3.2.5)$$

Ako se jednačine (3.1.11) i (3.1.15) uvrste u jednačinu (3.2.5), dobije se za estimator za faznu razliku sledeća jednačina:

$$\hat{\varphi}_{MSAL} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arctan \frac{\sum_{k=0}^{N-1} m_r(kT_s)}{\sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right) \sum_{k=0}^{N-1} m_a(kT_s)}. \quad (3.2.6)$$

gde je  $(2\pi r q/p) \neq a\pi$ , za  $a = 0, 1, 2, \dots$

Jednačinu (3.2.6) nazivamo MSAL (engl. modified simple algorithm) ili modifikovan jednostavan algoritam za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala iste učestanosti.

Kada se u jednačinu (3.2.6) uvrste jednačine (3.6) i (3.7) dobije se sledeći izraz za faznu razliku:

$$\hat{\varphi}_{MSAL} = \arctan \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [u_1(kT_s) \cdot u_2'(kT_s) - u_1'(kT_s) \cdot u_2(kT_s)]}{\sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right) \sum_{k=0}^{N-1} [u_1(kT_s) \cdot u_2(kT_s) + u_1'(kT_s) \cdot u_2'(kT_s)]}, \quad (3.2.7)$$

gde je  $(2\pi r q/p) \neq a\pi$ , za  $a = 0, 1, 2, \dots$

Kada se fazna razlika između dva signala određuje koristeći formulu (3.2.6) nije potrebno poznavati učestanost signala ili učestanost uzorkovanja. Potrebno je znati samo broj uzoraka u periodu signala. Broj uzoraka u periodu signala treba da bude deljiv sa 4, a uzorkovanje treba da bude koherentno.

*Bias estimatora  $\hat{\varphi}_{MSAL}$*

Ako  $r, p, q$  zadovoljavaju jednačine (3.1.9) i (3.1.12), fazna razlika određena prema jednačini (3.2.7) nema bias; estimator  $\hat{\varphi}_{MSAL}$  je centriran, i ako se obeleži sa  $\hat{\varphi}_{MSAL\_UB}$  to se može napisati na sledeći način:

$$\operatorname{tg}(\hat{\varphi}_{MSAL\_UB}) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [u_1(kT_s) \cdot u_2'(kT_s) - u_1'(kT_s) \cdot u_2(kT_s)]}{\sum_{k=0}^{N-1} [u_1(kT_s) \cdot u_2(kT_s) + u_1'(kT_s) \cdot u_2'(kT_s)]} \left| \sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right) = 1 \right. \quad (3.2.8)$$

Ako  $r$ ,  $p$ ,  $q$  ne zadovoljavaju jednačine (3.1.9) i (3.1.12), fazna razlika određena prema jednačini (3.2.7) ima bias; estimator  $\hat{\varphi}_{MSAL}$  nije centriran. Bias estimatora fazne razlike određen prema formuli (2.2.1.2), dat je sledećim izrazom:

$$\operatorname{Bias}(\tan(\hat{\varphi}_{MSAL})) = \tan(\hat{\varphi}_{MSAL\_UB}) - \tan(\hat{\varphi}_{MSAL}), \quad (3.2.9)$$

gde je  $\hat{\varphi}_{MSAL}$  dato formulom (3.2.7) u kojoj je  $\sin(2\pi r q/p) \neq 1$ .

*Asimptotska Cramer – Rao granica za estimator  $\hat{\varphi}_{MSAL}$*

Za izvođenje CRB polazi se od jednačina (3.1) i (3.2) napisanih za diskretizovane sinusne signale u obliku:

$$u_1[n] = U_1 \sin(\omega n + \varphi_1) + w_1[n], \quad (3.2.10)$$

$$u_2[n] = U_2 \sin(\omega n + \varphi_2) + w_2[n]. \quad (3.2.11)$$

Pretpostavljamo da su parametri  $U_1$ ,  $U_2$  i  $\omega$  u jednačinama (3.2.10) i (3.2.11) nepoznati i da komponente koje predstavljaju Gausov beli šum  $w_1[n]$  i  $w_2[n]$  imaju srednje vrednosti nula sa varijansama  $\sigma_1^2$  i  $\sigma_2^2$ , respektivno, i da su međusobno nezavisne.

Traži se minimum sledeće funkcije [1.33, 2.35]:

$$\sum_{n=1}^N ((u_1[n] - U_1 \sin(\omega n + \varphi_1)) + (u_2[n] - U_2 \sin(\omega n + \varphi_2)))^2 \quad (3.2.12)$$

Za signale date jednačinama (3.1) i (3.2) kada su poznati parametri amplitude i učestanost a nepoznati parametri su početne faze  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , klasičan način izvođenja Kramer-Rao granice (CRB) za varijansu estimatora fazne razlike kada oba signala imaju jednak beli Gausov beli šum je sledeći [1.33]:

- uzorci merenja imaju funkciju gustine verovatnoće (PDF) datu formulom:

$$p(x; \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [(u_1[n] - U_1 \sin(\omega n + \varphi_1)) + (u_2[n] - U_2 \sin(\omega n + \varphi_2))]^2 \right\}; \quad (3.2.13)$$

- prirodni logaritam jednačine (3.2.13) je:

$$\begin{aligned} \ln p(x; \theta) &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(\sigma^2) - \\ &- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [(u_1[n] - U_1 \sin(\omega n + \varphi_1)) + (u_2[n] - U_2 \sin(\omega n + \varphi_2))]^2; \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

- jednačina (3.2.14) se diferencira po  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  i dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \varphi_1} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [(u_1[n] - U_1 \sin(\omega n + \varphi_1)) U_1 \cos(\omega n + \varphi_1)] \\ &= \frac{U_1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ u_1[n] \cos(\omega n + \varphi_1) - \frac{U_1}{2} \cos(2\omega n + 2\varphi_1) \right]; \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \varphi_2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [(u_2[n] - U_2 \sin(\omega n + \varphi_2)) U_2 \cos(\omega n + \varphi_2)] \\ &= \frac{U_2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ u_2[n] \cos(\omega n + \varphi_2) - \frac{U_2}{2} \cos(2\omega n + 2\varphi_2) \right]; \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

- drugi izvodi jednačine (3.2.15) po  $\varphi_1$  i (3.2.16) po  $\varphi_2$  su:

$$\frac{\partial^2 \ln p(x; \theta)}{\partial \varphi_1^2} = -\frac{U_1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \left( u_1[n] \sin(\omega n + \varphi_1) + \frac{U_1}{2} \sin(2\omega n + 2\varphi_1) \right) \right]; \quad (3.2.17)$$

$$\frac{\partial^2 \ln p(x; \theta)}{\partial \varphi_2^2} = -\frac{U_2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \left( u_2[n] \sin(\omega n + \varphi_2) + \frac{U_2}{2} \sin(2\omega n + 2\varphi_2) \right) \right]; \quad (3.2.18)$$

- negativne očekivane vrednosti su:

$$\begin{aligned} -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x; \theta)}{\partial \varphi_1^2} \right] &= -\frac{U_1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [\sin^2(\omega n + \varphi_1) + U_1 \sin(2\omega n + 2\varphi_1)] \\ &= -\frac{U_1^2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1 - \cos(2\omega n + 2\varphi_1)}{2} + \sin(2\omega n + 2\varphi_1) \right] \approx \frac{NU_1^2}{2\sigma^2}; \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$$\begin{aligned}
-E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(x; \theta)}{\partial \varphi_2^2} \right] &= -\frac{U_2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [(\sin^2(\omega n + \varphi_2) + U_1 \sin(2\omega n + 2\varphi_2))] \\
&= -\frac{U_2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \frac{1 - \cos(2\omega n + 2\varphi_2)}{2} + \sin(2\omega n + 2\varphi_2) \right] \approx \frac{NU_2^2}{2\sigma^2}
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

s obzirom da su:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\omega n + 2\varphi_1) &\approx 0; & \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sin(2\omega n + 2\varphi_1) &\approx 0; \\
\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2\omega n + 2\varphi_2) &\approx 0; & \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sin(2\omega n + 2\varphi_2) &\approx 0.
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Kada je broj uzoraka signala veliki, asimptotska vrednost Cramer-Rao granice (CRB) data je formulom:

$$CRB(\hat{\varphi}_{MSAL}) = \frac{1}{N} \left( \frac{1}{SNR_1} + \frac{1}{SNR_2} \right), \tag{3.2.22}$$

gde je odnos signal-šum dat formulom

$$SNR_i = \frac{U_i^2}{2\sigma_i^2}, \tag{3.2.23}$$

$i = 1, 2$  oznaka signala.

CRB fazne razlike  $\hat{\varphi}_{MSAL}$  ako su amplitude dva signala jednake  $U_1 = U_2$  i šum signala  $\sigma_1 = \sigma_2$ , data je sledećim izrazom:

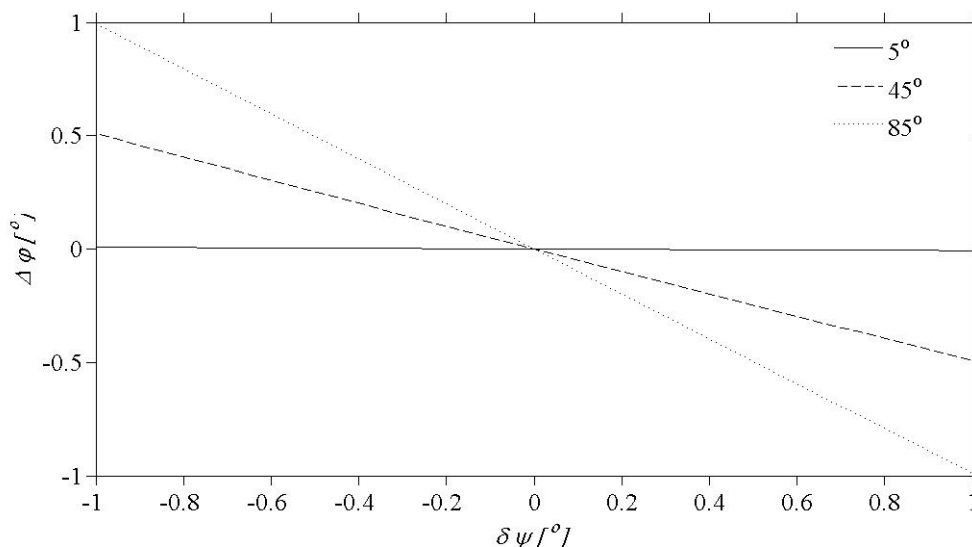
$$CRB(\hat{\varphi}_{MSAL}) = \frac{2}{N \cdot SNR}. \tag{3.2.24}$$



### 3.3 Simulacije sa primenom algoritma SAL

U cilju validacije novog algoritma za određivanja fazne razlike između dva sinusna napona urađene su simulacije na računaru koristeći program Matlab [3.4].

Na slici 3.3.1 predstavljen je rezultat simulacije zavisnosti greške fazne razlike  $\Delta\varphi$  između dva sinusna signala od greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$ , za vrednosti fazne razlike  $5^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $85^\circ$ , kada se fazna razlika određuje koristeći algoritam SAL. U simulaciji je broj perioda 40, fazni pomeraj dodatnih signala  $\psi = 90^\circ + \delta\psi$ , gde je greška uvedenog faznog pomeraja u opsegu  $\delta\psi \in [-1^\circ, 1^\circ]$ . Greška fazne razlike između dva sinusna signala za faznu razliku  $5^\circ$  je izračunata prema formuli  $\Delta\varphi = \varphi - 5^\circ$ , gde je  $\varphi$  izračunato koristeći algoritam SAL. Analogno su izračunate i greške za vrednosti fazne razlike  $45^\circ$  i  $85^\circ$ .

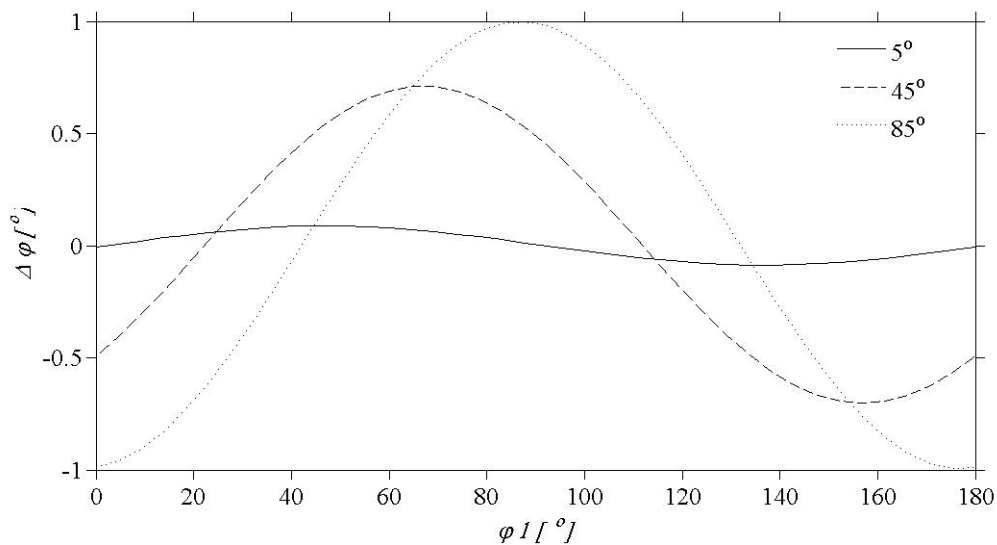


Slika 3.3.1 Zavisnost greške fazne razlike između dva sinusna signala  $\Delta\varphi$  od greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$ , za vrednosti fazne razlike  $5^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $85^\circ$ , algoritam SAL.

Sa slike 3.3.1 se vidi da, u zavisnosti od greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala u opsegu  $\delta\psi \in [-1^\circ, 1^\circ]$ , greška fazne razlike  $\Delta\varphi$  između dva signala ima sledeće vrednosti:

- za faznu razliku  $\varphi = 5^\circ$ , greška  $\Delta\varphi \approx 0^\circ$ ,
- za faznu razliku  $\varphi = 45^\circ$ , greška  $\Delta\varphi$  ima vrednosti do približno  $\pm 0,5^\circ$ ,
- za faznu razliku  $\varphi = 85^\circ$ , greška  $\Delta\varphi$  ima vrednosti do približno  $\pm 1^\circ$ .

Na slici 3.3.2 predstavljen je rezultat simulacije zavisnosti greške fazne razlike  $\Delta\varphi$  između dva sinusna signala od faze prvog uzorka  $\varphi_1 \in [0^\circ, 180^\circ]$  i to za vrednosti fazne razlike  $5^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $85^\circ$ , kada se fazna razlika određuje koristeći algoritam SAL. U simulaciji je broj perioda 40, fazni pomeraj dodatnih signala  $\psi = 90^\circ + \delta\psi$ , gde je greška uvedenog faznog pomeraja  $\delta\psi = 1^\circ$ . Greška fazne razlike  $\Delta\varphi$  za faznu razliku  $\varphi = 5^\circ$  izračunata je prema formuli  $\Delta\varphi = \varphi - 5^\circ$ , gde je fazna razlika  $\varphi$  izračunata koristeći algoritam SAL. Analogno su izračunate i greške za vrednosti fazne razlike  $45^\circ$  i  $85^\circ$ .



Slika 3.3.2 Zavisnost greške fazne razlike između dva sinusna signala  $\Delta\varphi$  od faze prvog uzorka  $\varphi_1$  za vrednosti fazne razlike  $5^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $85^\circ$ , algoritam SAL.

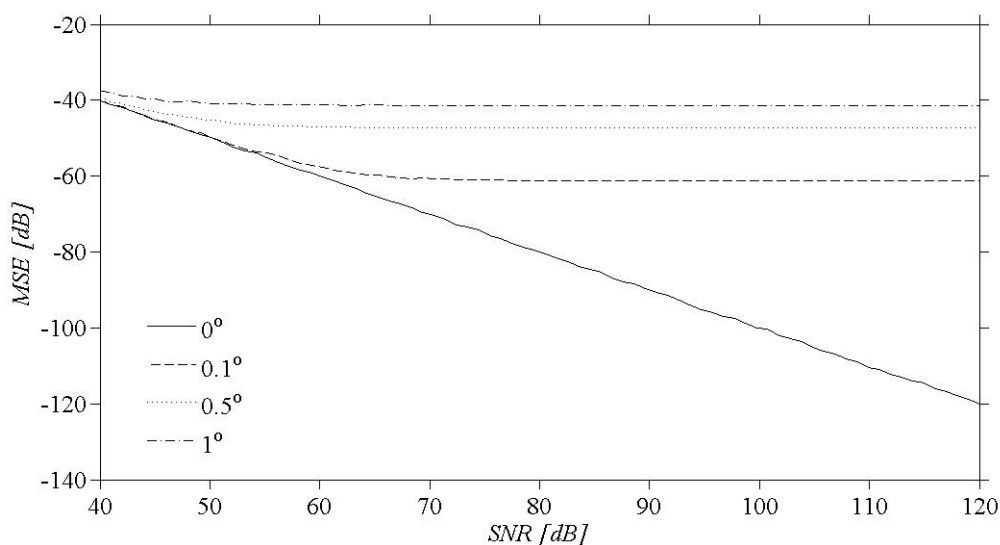
Sa slike 3.3.2 se vidi da, u zavisnosti od faze prvog uzorka:

- za  $\varphi = 5^\circ$ , greška fazne razlike  $\Delta\varphi$  je približno  $0^\circ$ ,
- za  $\varphi = 45^\circ$ , greška fazne razlike  $\Delta\varphi$  ima vrednosti do približno  $\pm 0,6^\circ$ ,
- za  $\varphi = 85^\circ$ , greška fazne razlike  $\Delta\varphi$  ima vrednosti do približno  $\pm 1^\circ$ .

Algoritam SAL se može koristiti za brzo određivanje fazne razlike između dva sinusna signala pri čemu je greška određivanje fazne razlike  $\leq \pm 1^\circ$ .

Na slici 3.3.3 predstavljeni su rezultati simulacije 1000 određivanja srednje kvadratne greške fazne razlike između dva sinusna signala  $MSE = (\varphi - 45^\circ)^2$  u zavisnosti od odnosa signal-šum  $SNR$ , za vrednost fazne razlike  $45^\circ$ . Simulacija je urađena sa sledećim uslovima: početne faze oba signala jednake su  $0^\circ$ , vrednosti greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$  imaju vrednosti  $0^\circ$ ;  $0,1^\circ$ ;  $0,5^\circ$  i  $1^\circ$ , a fazna razlika  $\varphi$  je izračunata koristeći algoritam SAL.

Procena fazne razlike dobijena primenom algoritma SAL je necentrirana, a to je uzrokovano greškom uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala. Vrednosti srednje kvadratne greške fazne razlike  $MSE$  su manje od  $-35$  dB za grešku uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $1^\circ$ .

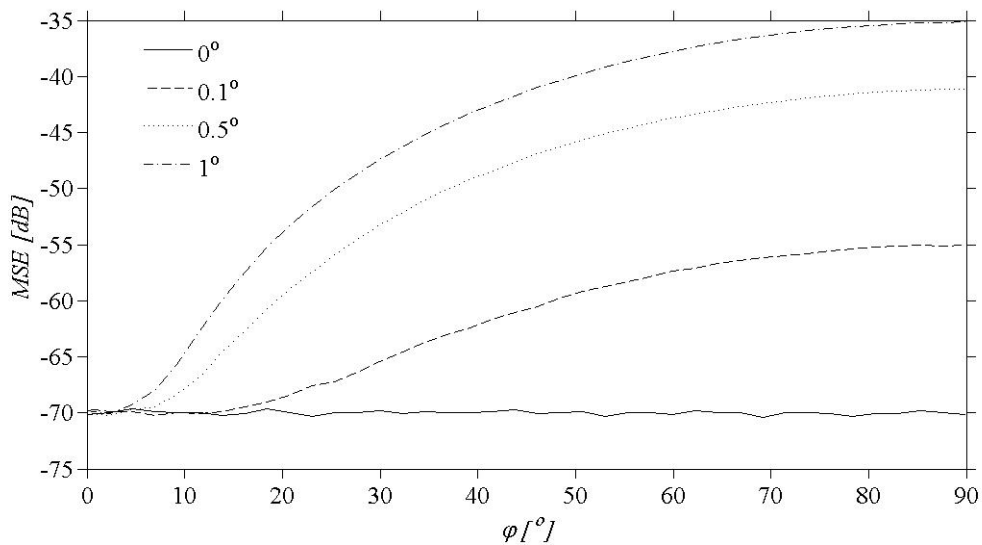


Slika 3.3.3 Zavisnost srednje kvadratne greške fazne razlike  $MSE$  od odnosa signal-šum  $SNR$ , za vrednosti greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $0^\circ$ ;  $0,1^\circ$ ;  $0,5^\circ$  i  $1^\circ$ , algoritam SAL.

Kada je  $\delta\psi = 0^\circ$  tada je vrednost  $MSE$  blizu asimptotske Kramer-Rao granice  $CRB = 2 / (N \cdot SNR)$  izražene u dB, ako su amplitude i šum za oba signala jednaki.

Izbor opsega  $SNR$  je motivisan činjenicom da 40 dB odgovara približno realnoj 8-bit A/D konverziji, a 120 dB odgovara približno realnoj 24-bit A/D konverziji.

Na slici 3.3.4 prikazani su rezultati simulacija određivanja srednje kvadratne greške fazne razlike  $MSE$ , koristeći algoritam SAL, u zavisnosti od fazne razlike  $\varphi$  između dva sinusna signala, za uslove kada je  $SNR = 70$  dB i vrednosti greške  $\delta\psi$  uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $0^\circ$ ;  $0,1^\circ$ ;  $0,5^\circ$  i  $1^\circ$ . U simulaciji je broj perioda 40, fazna razlika između dva signala  $45^\circ$ , fazni pomeraj dodatnih signala  $\psi = 90^\circ + \delta\psi$ .

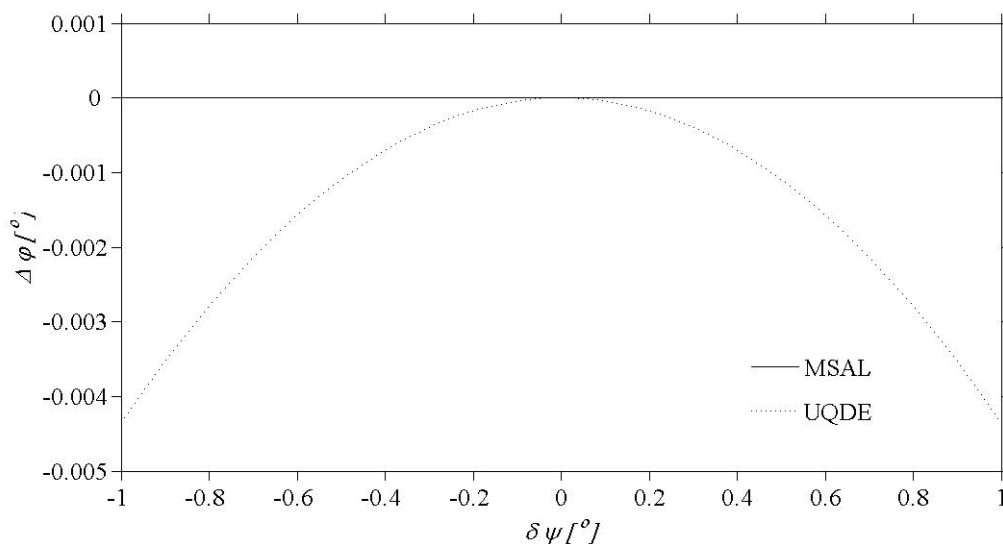


Slika 3.3.4 Zavisnost srednje kvadratne greške fazne razlike  $MSE$  od fazne razlike  $\varphi$  između dva signala određena koristeći algoritam SAL, za uslove kada su vrednosti greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $0^\circ$ ;  $0,1^\circ$ ;  $0,5^\circ$  i  $1^\circ$  i odnos signal-šum  $SNR = 70$  dB.

Sa slike 3.3.4 se vidi da je srednja kvadratna greška fazne razlike  $MSE$  u okviru asimptotske Kramer-Rao granice (CRB) kada je greška uvedenog faznog pomeraja signala jednaka  $0^\circ$ , ali za vrednosti greške uvedenog faznog pomeraja signala  $0,1^\circ$ ;  $0,5^\circ$  i  $1^\circ$ , procena  $MSE$  je necentrirana do vrednosti -35 dB.

### 3.4 Simulacije sa primenom algoritma MSAL

Na slici 3.4.1 prikazani su rezultati simulacija određivanja greške fazne razlike  $\Delta\varphi$ , koristeći algoritme MSAL i UQDE, u zavisnosti od greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$ . U simulaciji je broj perioda 40, fazni pomeraj dodatnih signala  $\psi = 90^\circ + \delta\psi$ , gde je greška uvedenog faznog pomeraja  $\delta\psi \in [-1^\circ, 1^\circ]$ . Greška fazne razlike za faznu razliku  $45^\circ$  izračunata je prema formuli  $\Delta\varphi = \varphi - 45^\circ$ , gde je  $\varphi$  izračunato prema formuli (2.2.3.3) za algoritam UQDE i formuli (3.2.7) za algoritam MSAL. Za oba algoritma MSAL i UQDE uzeto je da je ukupan broj uzoraka signala  $N (= 4000)$  jednak celobrojnom umnošku broja uzoraka u periodu ( $= 100$ ) i da signali nemaju šum.

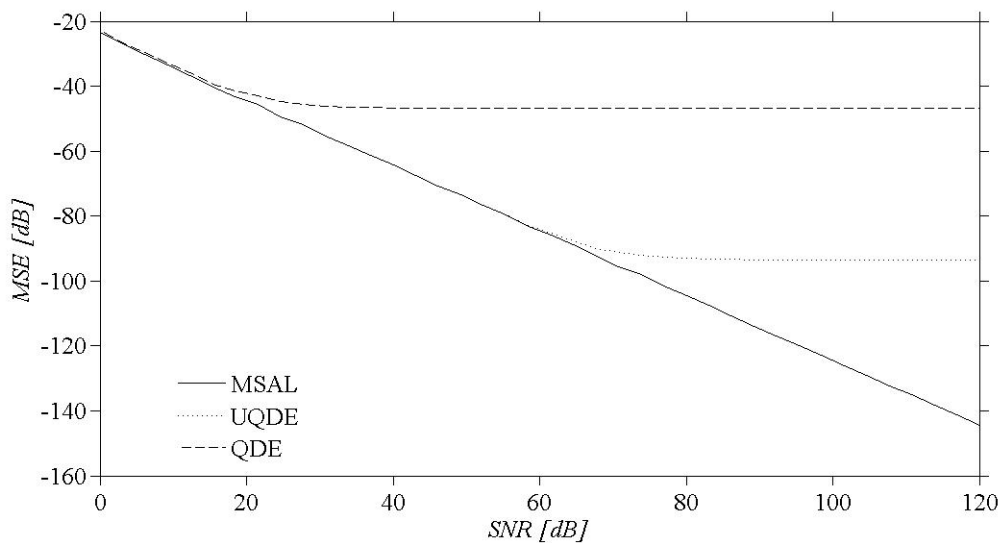


Slika 3.4.1 Zavisnost greške fazne razlike između dva sinusna signala  $\Delta\varphi$  od greške uvedenog faznog pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$ , za faznu razliku između dva signala  $45^\circ$ , algoritami MSAL i UQDE.

Sa slike 3.4.1 je očigledno da je za MSAL algoritam vrednost greške  $\Delta\varphi = 0$  za sve vrednosti  $\delta\psi$ , a za UQDE algoritam ta je vrednost nula samo za  $\delta\psi = 0^\circ$ . Za ostale

vrednosti  $\delta\psi$ , vrednosti  $\Delta\varphi$  izračunate koristeći algoritam UQDE su veće od nule i rastu do približno  $4,5 \text{ m}^\circ$ .

Na slici 3.4.2 prikazani su rezultati simulacija za srednju kvadratnu grešku fazne razlike  $MSE$  u zavisnosti od odnosa signal-šum  $SNR$ , dobijeni primenom algoritama MSAL, UQDE i QDE. Donja granica za  $SNR$  je postavljena na 0 dB da ilustruje da za male vrednosti  $SNR$  sva tri algoritma daju približno iste vrednosti za faznu razliku. Simulacije su urađene za ukupan broj uzoraka  $N$  koji je celobrojni umnožak periode signala. Uslovi u simulaciji su: broj simulacija 1000, signali sa šumom, fazna razlika između dva signala  $45^\circ$ , broj uzoraka u jednoj periodu je 511, pomeraj dodatnih signala  $\psi = (360^\circ/511) \times \text{INT}(511/4) = 89,47^\circ$ , greška faznog pomeraja dodatnih signala je  $89,47^\circ - 90^\circ = -0,53^\circ$ . Napomena:  $\text{INT}(511/4) = 127$ .



Slika 3.4.2 Srednja kvadratna greška fazne razlike između dva sinusna signala  $MSE$  u funkciji od odnosa signal-šum  $SNR$  za fazni pomeraj dodatnih signala  $89,47^\circ$  dobijena primenom algoritama MSAL, UQDE i QDE.

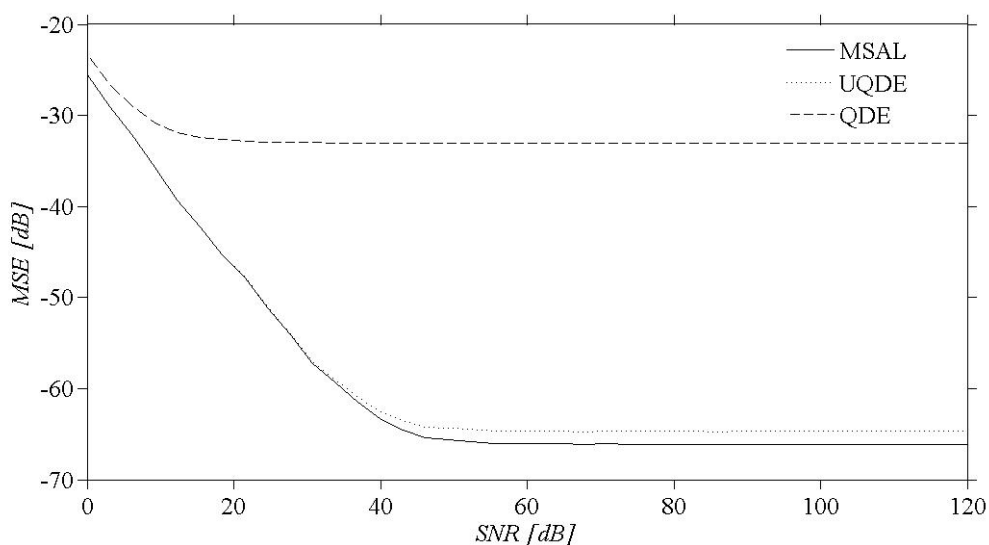
Sa slike 3.4.2 se vidi da se sa porastom vrednosti  $SNR$  necentriranost pokazuje najpre u rezultatima za  $MSE$  dobijenim korišćenjem algoritma QDE a kasnije i u

rezultatima dobijenim korišćenjem algoritma UQDE. Vrednosti fazne razlike određene koristeći algoritam MSAL su centrirane i odgovaraju vrednosti asimptotske CRB.

Kada postoji greška faznog pomeraja dodatnih signala, ukupan broj uzoraka  $N$  koji se koriste za određivanje fazne razlike mora biti ceo broj dobijen množenjem broja perioda sa brojem uzoraka po periodu.

Na slici 3.4.3 predstavljeni su rezultati 1000 simulacija određivanja srednje kvadratne greške fazne razlike  $MSE$  u zavisnosti od odnosa signal šum  $SNR$ , za 1,7 perioda signala. Ostali uslovi u ovoj simulaciji su: broj uzoraka po periodu 510, fazna razlika između dva signala  $45^\circ$ , fazni pomeraj dodatnih signala je  $\psi = (360^\circ/510) \times \text{INT}(510/4) = 89,65^\circ$ , greška pomeraja dodatnih signala je  $89,65^\circ - 90^\circ = -0,35^\circ$ . Napomena:  $\text{INT}(510/4) = 127$ .

U ovom slučaju, kada broj perioda signala nije ceo broj, vrednosti fazne razlike dobijene koristeći algoritme MSAL, UQDE i QDE su necentrirane.



Slika 3.4.3 Srednja kvadratna greška fazne razlike  $MSE$  u funkciji od odnosa signal-šum  $SNR$  za fazni pomeraj dodatnih signala  $89,65^\circ$  za 1,7 perioda signala dobijena primenom algoritama MSAL, UQDE i QDE

## 3.5 Zaključak

Iz rezultata navedenih simulacija mogu se izvesti sledeći zaključci:

a) za algoritam SAL:

- simulacije određivanja greške fazne razlike između dva sinusna signala  $\Delta\varphi$  u zavisnosti od greške pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$ , kao i simulacije u zavisnosti od faznog pomeraja prvog uzorka  $\varphi_1$ , pokazuju da se algoritam može koristiti za brzo određivanje fazne razlike, pri čemu je greška  $\Delta\varphi \leq \pm 1^\circ$ ;
- simulacija određivanja srednje kvadratne greške fazne razlike između dva sinusna signala  $MSE$  u zavisnosti od odnosa signal-šum  $SNR$  za konkretnu vrednost greške pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$  pokazuje da je procena  $MSE$  necentrirana zbog postojanja  $\delta\psi$ ;
- simulacija određivanja srednje kvadratne greške fazne razlike između dva sinusna signala  $MSE$  u zavisnosti od fazne razlike  $\varphi$  za konkretnu vrednost greške pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$  i odnos signal-šum  $SNR$ , pokazuje da je procena  $MSE$  necentrirana zbog postojanja  $\delta\psi$ .

b) za algoritam MSAL:

- simulacija određivanja greške fazne razlike između dva sinusna signala  $\Delta\varphi$  u zavisnosti od greške pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi \in [-1^\circ, 1^\circ]$  pokazuje da je  $\Delta\varphi = 0$ ;
- simulacija određivanja srednje kvadratne greške fazne razlike između dva sinusna signala  $MSE$  u zavisnosti od odnosa signal-šum  $SNR$  za konkretnu vrednost greške pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$ , pokazuje da je procena  $MSE$  centrirana kada je ukupan broj uzoraka  $N$  koji se koriste za određivanje fazne razlike jednak proizvodu celog broja perioda signala i broja uzoraka u periodu;
- simulacija određivanja srednje kvadratne greške fazne razlike između dva sinusna signala  $MSE$  u zavisnosti od odnosa signal-šum  $SNR$  za konkretnu vrednost greške pomeraja dodatnih signala  $\delta\psi$ , za vrednost broja perioda signala, koji nije ceo broj, pokazuje da je procena  $MSE$  necentrirana.



## **Glava 4**

# **Poređenje rezultata za faznu razliku dobijenih primenom novog i postojećih algoritama na uzorke realnih signala**

U ovom poglavlju dati su rezultati primene algoritama SAL i MSAL (koji su opisani u poglavlju 3) na uzorke dva realna sinusna signala. Tako dobijeni rezultati za faznu razliku upoređeni su sa rezultatima dobijenim primenom algoritama UQDE (opisan u poglavlju 2.2.3), 3PSF, 4PSF i 7PSF (opisani u prilogu B) na iste uzorke signala. U literaturi [2.27, 4.1 – 4.2] algoritam 7PSF je upoređen sa drugim algoritmima za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala i ocenjeno je da daje najtačnije rezultate za faznu razliku.

Uzorci dva signala dobijeni su koristeći merni sistem sa dva DSV. Na tako dobijene uzorke primenjeni su algoritmi za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala. Dobijene rezultate za faznu razliku trebalo bi korigovati za vrednost necentriranosti (bias) rezultata ukoliko postoji i za vrednosti faznih pomeraja koje unose ostali delovi mernog sistema kao što su delitelji napona, strujni šantovi i IADC. Navedene korekcije

se ne moraju izvršiti već se mogu prikazati u mernoj nesigurnosti dobijenih rezultata za faznu razliku [1.37, 4.7].

## 4.1 Oprema koja je korišćena za merenje

Za merenje je korišćena oprema Direkcije za mere i dragocene metale (DMDM), gde postoje dva merna sistema za uzorkovanje dva signala: merni sistem sa sinhronim uzorkovanjem (blok šema na slici 2.1.1.1) i merni sistem sa asinhronim uzorkovanjem signala (blok šema na slici 2.1.1.3).

Korišćena merna oprema obuhvata:

- izvor napona, struje i fazne razlike, tip 6100A, Fluke [4.3],
- izvor dva sinusna napona i fazne razlike, tip 5500-2, Clarke Hess [4.4],
- otporničke delitelje napona, proizvođač SP, Švedska,
- otporničke strujne šantove, proizvođač SP, Švedska ,
- digitalne multimetre, tip 3458A, Agilent [2.3], 2 komada,
- trigger za sinhrono uzorkovanje signala, proizvođač SP, Švedska ,
- trigger za asinhrono uzorkovanje signala,
- računar sa odgovarajućim softverom,
- etalon faznog ugla, tip SD1000, proizvođač AVPower, Engleska [4.5].

Izvor električnog napona, struje i fazne razlike između njih, tip 6100A, proizvođača Fluke, generiše sinusni napon efektivne vrednosti do 700 V i struje do 20 A, učestanosti 16 Hz do 850 Hz, sa mogućnošću zadavanja fazne razlike između napona i struje sa rezolucijom 1 m°. Amplitude napona i struje zadaju se sa rezolucijom od 6 digita.

Izvor dva napona i fazne razlike između njih, uređaj tip 5500-2, proizvođača Clarke Hess, generiše istovremeno dva sinusna napona efektivne vrednosti 50 mV do 120 V, učestanosti 1 Hz do 200 kHz, sa mogućnošću zadavanja fazne razlike između dva napona sa rezolucijom 1 m°.

Delitelji napona i strujni šantovi koriste se da bi se zadati napon i struja iz izvora konvertovali u električni napon pogodan za merenje na opsezima 1 V i 10 V multimetra tip 3458A, Agilent. Navedeni delitelji napona i strujni šantovi izrađeni su od otpornika

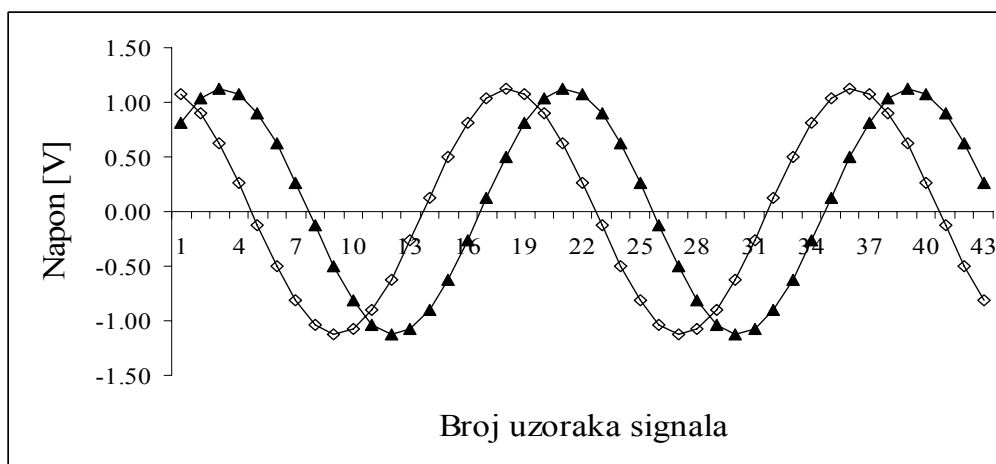
koji imaju mali temperaturni koeficijent i unose veoma mali fazni pomeraj koji treba uzeti u obzir pri merenju fazne razlike.

Za dobijanje uzoraka signala korišćena su dva multimetra tip 3458A, Agilent u funkciji dva IADCs.

Etalon faznog ugla, tip SD1000, proizvođač AVPower, Engleska meri faznu razliku između dva ulazna napona efektivne vrednosti od 1 mV do 350 V, učestanosti 0,1 Hz do 700 kHz i ima metrološku sledivost prema nacionalnom metrološkom institutu ČMI, Češka. Etalon je korišćen za merenje fazne razlike između dva sinusna napona i poređenje dobijenih rezultata sa rezultatima za faznu razliku koji su dobijeni uzorkovanjem signala mernim sistemom i primenom algoritma MSAL na te uzorke signala.

## 4.2 Primer sa 18 uzoraka u periodu signala

Dat je postupak određivanja fazne razlike vrednosti  $59,9^\circ$  primenom algoritama MSAL, SAL, UQDE, 3PSF, 4PSF i 7PSF na uzorke dva realna sinusna signala prikazana na slici 4.2.1, kada u periodama signala ima 18 uzoraka, procena merne nesigurnosti u skladu sa GUM [1.34] i validacija metode [4.6].



Slika 4.2.1. Uzorci dva realna sinusna signala učestanosti 53 Hz sa faznom razlikom između signala  $59,9^\circ$ , broj uzoraka u periodu signala 18.

Korišćen je izvor dva sinusna napona tip 5500-2, Clarke Hess [4.4]. Izabrana je učestanost signala 53 Hz, amplitude oba signala 1,13 V. Za dobijanje uzoraka ta dva napona koristi se sinhrono uzorkovanje sa dva DSV tip 3458A, Agilent. Signali su uzorkovani sa učestanošću uzorkovanja 954 Hz. Uzorci su uzeti na jednakom rastojanju jedan od drugog.

Izabrano je da broj uzoraka u periodama dva realna sinusna signala bude po 18 jer taj broj nije deljiv sa 4 što će znatno uticati na rezultate primene nekih algoritama.

## 4.2.1 Rezultati za faznu razliku

Rezultati za faznu razliku vrednosti  $59,9^\circ$  dobijeni primenom algoritama 3PSF, 4PSF, 7PSF, UQDE4, MSAL4, UQDE5, MSAL5 na dva realna sinusna signala koji imaju 18 uzoraka u periodu prikazani su u tabeli 4.2.1.1. Oznake MSAL4 i MSAL5 pokazuju da su dodatni signali pomereni za 4 odnosno 5 uzoraka u odnosu na originalne signale.

### *1) Primena algoritma MSAL na broj uzoraka koji odgovara celom broju perioda signala*

Iz tabele 4.2.1.1 se vidi:

- da su rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni primenom algoritama MSAL4 i MSAL5 na iste uzorke signala, približno jednaki,
- da rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni primenom algoritma MSAL4 odstupaju za najviše  $0,00058^\circ$  od rezultata dobijenih primenom algoritma 7PSF na iste uzorke signala, a rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni primenom algoritma MSAL5 odstupaju za najviše  $0,00069^\circ$  od rezultata dobijenih primenom algoritma 7PSF,
- da se rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni koristeći formulu  $(MSAL4+MSAL5)/2$  razlikuju od rezultata dobijenih primenom algoritma 7PSF najviše za  $0,00064^\circ$ .

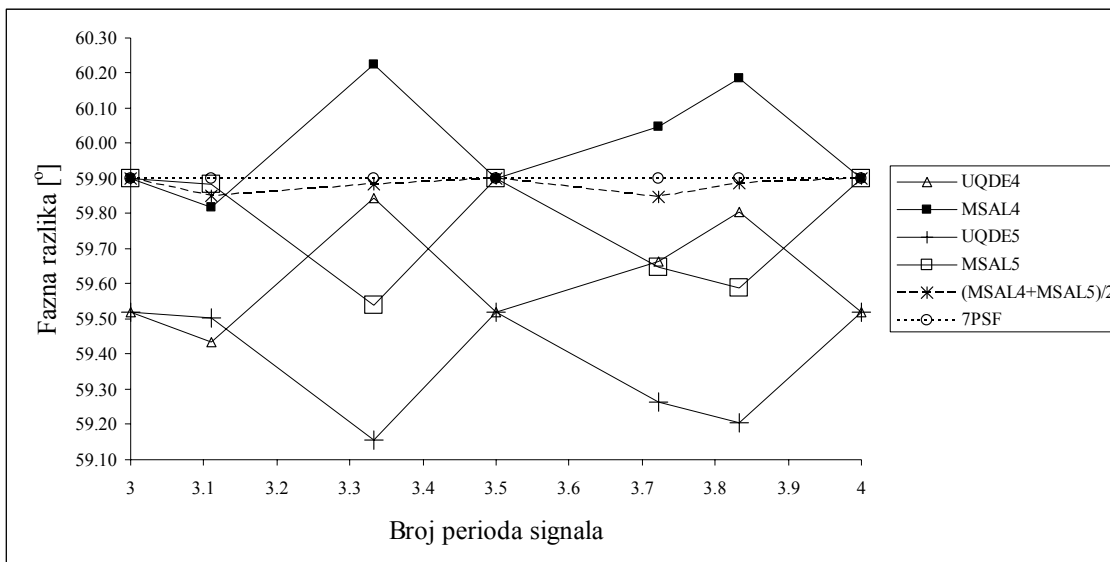
Tabela 4.2.1.1 Fazna razlika vrednosti 59,9° između dva realna sinusna signala učestanosti 53 Hz, broj uzoraka u periodu 18, dobijena primenom algoritama 3PSF, 4PSF, 7PSF, UQDE4, MSAL4, UQDE5, MSAL5 na ceo broj perioda signala.

broj uzor.	ceo broj perioda	7PSF	UQDE4	MSAL4	UQDE5	MSAL5	3PSF	4PSF	(MSAL4+MSAL5)/2	MSAL4-7PSF	MSAL4-UQDE4	(MSAL4+MSAL5)/2-7PSF	MSAL5-MSAL4
		$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\Delta\varphi$ [°]	$\Delta\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\Delta\varphi$ [°]	$\Delta\varphi$ [°]	$\Delta\varphi$ [°]	$\Delta\varphi$ [°]
18	1	59,9004	59,5190	59,9010	59,5191	59,9011	59,9005	59,9016	59,9010	0,00058	0,3820	0,00064	0,00011
36	2	59,9006	59,5185	59,9005	59,5187	59,9007	59,9007	59,9006	59,9006	-0,00005	0,3820	0,00003	0,00016
54	3	59,9007	59,5186	59,9006	59,5187	59,9007	59,9008	59,9004	59,9007	-0,00009	0,3820	-0,00003	0,00013
72	4	59,9008	59,5187	59,9007	59,5188	59,9008	59,9008	59,9005	59,9008	-0,00007	0,3820	-0,00004	0,00007
90	5	59,9006	59,5188	59,9008	59,5188	59,9008	59,9007	59,9007	59,9008	0,00017	0,3820	0,00018	0,00001
108	6	59,9003	59,5187	59,9007	59,5187	59,9007	59,9003	59,9013	59,9007	0,00040	0,3820	0,00040	0,00000
126	7	59,9000	59,5184	59,9004	59,5184	59,9004	59,9000	59,9015	59,9004	0,00041	0,3820	0,00042	0,00003
144	8	59,8998	59,5181	59,9001	59,5181	59,9001	59,8998	59,9015	59,9001	0,00031	0,3820	0,00033	0,00003
162	9	59,8996	59,5179	59,8999	59,5179	59,8999	59,8996	59,9015	59,8999	0,00028	0,3820	0,00029	0,00003
180	10	59,8995	59,5179	59,8997	59,5177	59,8997	59,8995	59,9013	59,7087	0,00019	0,3820	0,00020	0,00003
198	11	59,8996	59,5176	59,8996	59,5176	59,8996	59,9002	59,9008	59,8996	0,00004	0,3820	0,00004	0,00001
216	12	59,8997	59,5177	59,8997	59,5177	59,8997	59,8997	59,9004	59,8997	0,00003	0,3820	0,00003	0,00001
234	13	59,8999	59,5178	59,8998	59,5179	59,8999	59,8999	59,8999	59,8999	-0,00005	0,3820	-0,00004	0,00002
252	14	59,9002	59,5180	59,9000	59,5180	59,9000	59,9002	59,8994	59,9000	-0,00019	0,3820	-0,00017	0,00004
270	15	59,9004	59,5182	59,9002	59,5183	59,9003	59,9004	59,8991	59,9002	-0,00017	0,3820	-0,00016	0,00004
288	16	59,9007	59,5184	59,9005	59,5185	59,9005	59,9007	59,8987	59,9005	-0,00024	0,3820	-0,00023	0,00003
306	17	59,9010	59,5187	59,9007	59,5187	59,9008	59,9010	59,8985	59,9007	-0,00027	0,3820	-0,00026	0,00003
324	18	59,9012	59,5190	59,9010	59,5190	59,9010	59,9012	59,8984	59,9010	-0,00022	0,3820	-0,00021	0,00002
342	19	59,9014	59,5192	59,9012	59,5192	59,9012	59,9015	59,8982	59,9012	-0,00021	0,3820	-0,00020	0,00004

- da se rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni koristeći algoritam UQDE4 i UQDE5 (kada su dodatni signali pomereni za 4 odnosno 5 uzoraka u odnosu na originalne signale) razlikuju za  $0,382^\circ$  od rezultata dobijenih koristeći MSAL4 i MSAL5 algoritam.

**2) Primena algoritma MSAL na bilo koji broj uzoraka signala koji ne odgovara celom broju perioda signala**

Na slici 4.2.1.1 prikazani su rezultati za faznu razliku vrednosti  $59,9^\circ$  između dva sinusna signala učestanosti 53 Hz, broj uzoraka u periodu signala 18, u zavisnosti od delova četvrte periode dva signala, dobijeni primenom algoritama UQDE4, UQDE5, MSAL4, MSAL5 i 7PSF. Sa slike je očigledno da rezultati za faznu razliku dobijeni koristeći algoritam MSAL4 i MSAL5 imaju jednake vrednosti kada broj uzoraka na koje su primenjeni odgovara 3; 3,5 i 4 periode signala. Isto važi i za rezultate za faznu razliku dobijene koristeći algoritme UQDE4 i UQDE5. Rezultati za faznu razliku dobijeni kao srednja vrednost  $(MSAL4 + MSAL5)/2$  približno su jednaki rezultatima dobijenim primenom algoritma 7PSF.



Slika 4.2.1.1 Fazna razlika vrednosti  $59,9^\circ$  između dva sinusna signala učestanosti 53 Hz, broj uzoraka u periodu signala 18, u zavisnosti od delova periode signala, dobijena koristeći algoritme 7PSF, UQDE4, UQDE5, MSAL4 i MSAL5.

Rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni za broj uzoraka koji ne odgovara celom broju perioda se razlikuju od rezultata za faznu razliku dobijenih koristeći 7PSF algoritam, i to: do  $0,74^\circ$  kada se koristi UQDE algoritam i do  $0,36^\circ$  kada se koristi MSAL algoritam.

### **3) Primena algoritma MSAL kada dodatni signali imaju proizvoljan fazni pomeraj**

S obzirom da vrednosti  $r$ ,  $p$ ,  $q$  ne zadovoljavaju jednačine (3.1.9) i (3.1.12), vrednosti fazne razlike između dva signala određene primenom algoritma MSAL tako da su dodatni signali pomereni za proizvoljan broj uzoraka, su pristrasne (imaju bias), a prikazane su na slici 4.2.2.1 u poglavlju 4.2.2. Podaci za sliku 4.2.2.1: u periodu jednog signala je 18 uzoraka; rezultati su dati za 19 perioda; za  $r = 9$  uzoraka (odgovara  $2\pi r q/p = \pi$ ) i  $r = 18$  uzoraka (odgovara  $2\pi r q/p = 2\pi$ ) algoritam MSAL nije primenljiv; vrednosti za faznu razliku date su u tabeli 4.2.2.7.

Kada su pomoćni signali pomereni za broj uzoraka tako da je  $2\pi r q/p = a\pi$ , gde je  $a$  ceo broj, algoritam MSAL se ne može primenjivati.

Iz tabele 4.2.2.7, u poglavlju 4.2.2, vidi se da se vrednosti fazne razlike između dva realna signala predstavljena sa po 18 uzoraka u periodu, određene koristeći algoritam MSAL kada su uzorci pomoćnih signala pomereni za broj uzoraka  $r$  koji se kreće od 1 do 27, imaju bias najveće vrednosti  $11 m^\circ$ .

Vrednosti fazne razlike dobijene primenom algoritma MSAL mogu se korigovati za vrednosti biasa.

Rezultati za faznu razliku između dva sinusna signala dobijeni primenom algoritma UQDE u slučaju kada su dodatni signali pomereni za proizvoljan broj uzoraka znatno odstupaju od stvarnih vrednosti fazne razlike, tako da se algoritam UQDE u tom slučaju ne može koristiti.

## 4.2.2 Procena merne nesigurnosti

Proračun merne nesigurnosti fazne razlike dobijene primenom algoritma MSAL na uzorke signala, u skladu sa GUM, je složen.

Najpre treba odrediti kombinovanu mernu nesigurnost uzoraka dva napona, a dobijeni rezultati se zatim koriste kao ulazni podaci za određivanje merne nesigurnosti fazne razlike između dva realna sinusna napona određene primenom algoritma MSAL.

### 1) Merna nesigurnost uzoraka napona

Izmerene vrednosti 18 uzoraka jedne periode napona  $u_1(t)$  koji su obeleženi  $U_{1k}$  date su u tabeli 4.2.2.1, a izmerene vrednosti 18 uzoraka jedne periode napona  $u_2(t)$  koji su obeleženi  $U_{2k}$  date su u tabeli 4.2.2.2. Oznaka  $k$  se koristi da označi pojedinačni uzorak.

Uzorci napona  $u_1(t)$  i  $u_2(t)$  dobijeni su koristeći dva IADC, a rad jednog IADC može da se predstavi formulom (2.1.2.1) datom u poglavlju 2.1.2.

Sinusni signal na ulazu IADC predstavlja se formulom:

$$u(t) = U_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_0 + \varepsilon_{JT_0}}\right), \quad (4.2.2.1)$$

gde je  $T_0$  perioda signala, a  $\varepsilon_{JT_0}$  džiter periode signala, a formula (2.1.2.1) u kojoj je zanemaren šum ima oblik:

$$U_k = \frac{1}{T_i + \varepsilon_{JT_i}} \left( 1 + \varepsilon_{REF} + \varepsilon_G + \frac{\varepsilon_{LIN} + \varepsilon_{RES}}{Abs[U_k]} \cdot U_{FS} \right) \cdot \int_{kT_s + \varepsilon_{JT_s}}^{kT_s + \varepsilon_{JT_s} + T_i + \varepsilon_{JT_i}} u(t) dt. \quad (4.2.2.2)$$

Iz jednačina (4.2.2.1) i (4.2.2.2) posle integraljenja, dobije se jednačina za uzorke napona:



$$U(kT_s) = \frac{U_{1m} \cdot (T_0 + \varepsilon_{JT_0}) \cdot \left( 1 + \varepsilon_{REF} + \varepsilon_G + \frac{\varepsilon_{LIN} + \varepsilon_{RES}}{Abs[U_k]} \cdot U_{FS} \right)}{[2\pi \cdot (T_i + \varepsilon_{JT_i})]} \cdot \left\{ \cos \left[ \frac{2\pi}{(T_0 + \varepsilon_{JT_0})} \cdot (k \cdot T_s + \varepsilon_{JT_s}) \right] - \cos \left[ \frac{2\pi}{(T_0 + \varepsilon_{JT_0})} \cdot (k \cdot T_s + \varepsilon_{JT_s} + T_i + \varepsilon_{JT_i}) \right] \right\}, \quad (4.2.2.3)$$

gde je apsolutna vrednost uzorka napona data formulom:

$$Abs[U_k] = \left| \frac{1}{T_i} \int_{kT_s}^{kT_s+T_i} U_m \cdot \sin \left( \frac{2\pi \cdot t}{T_0} \right) dt \right| = |U(k \cdot T_s)|_{\varepsilon_G = \varepsilon_{REF} = \varepsilon_{LIN} = \varepsilon_{RES} = \varepsilon_{JT_i} = \varepsilon_{JT_s} = 0}. \quad (4.2.2.4)$$

Za analizu merne nesigurnosti, IADC se smatra idealnim, što znači da su vrednosti svih izvora merne nesigurnosti jednake nuli.

Vrednosti promenljivih i parametara u ovom primeru uzorkovanja dva sinusna napona učestanosti 53 Hz su [2.3, 4.3]:

- $\varepsilon_{REF}$  - greška referentnog napona DSV uzima se da je  $\varepsilon_{REF} = 0$ , raspodela verovatnoće uniformna, granice raspodele  $\pm 0,5 \mu\text{V/V}$ ;
- $\varepsilon_G$  - greška pojačanja DSV uzima se da je  $\varepsilon_G = 0$ , raspodela verovatnoće Gausova, granice raspodele  $\text{INT}(0,002/(T_i/s))$ , gde su oznake INT za integer,  $T_i$  za vreme integraljenja;
- $\varepsilon_{RES}$  - greška usled rezolucije DSV uzima se da je  $\varepsilon_{RES} = 0$ , raspodela verovatnoće uniformna, granice raspodele  $\pm (10^{-6,5}/2) \mu\text{V/V}$ ;
- $\varepsilon_{LIN}$  - greška usled linearnosti DSV uzima se da je  $\varepsilon_{LIN} = 0$ , raspodela verovatnoće uniformna, granice raspodele  $\pm 0,1 \mu\text{V/V}$ ;
- $\varepsilon_{JT_0}$  - greška usled džitera merenja periode signala uzima se da je  $\varepsilon_{JT_0} = 0$ , raspodela verovatnoće uniformna, granice raspodele  $\pm 5 \text{ ns}$ ;
- $\varepsilon_{JT_s}$  - greška usled džitera vremena integraljenja signala uzima se da je  $\varepsilon_{JT_s} = 0$ , raspodela verovatnoće uniformna, granice raspodele  $\pm 5 \text{ ns}$ ;
- $\varepsilon_{JT_i}$  - greška usled džitera uzorkovanja signala uzima se da je  $\varepsilon_{JT_i} = 0$ , raspodela verovatnoće uniformna, granice raspodele  $\pm 5 \text{ ns}$ ;

- $U_{FS}$  - opseg merenja dc napona na oba DSV:  $\pm 10$  V,
- $U_m$  - amplitude merenih napona  $U_m = 1,13$  V,
- perioda dva sinusna napona  $T_0 = 0,018868$  s, odnosno učestanost napona 53 Hz,
- vreme integraljenja signala na oba DSV je  $T_i = 0,001025$  s,
- broj digita DSV:  $6 \frac{1}{2}$ ,
- učestanost uzorkovanja signala 954 Hz, odnosno vreme uzorkovanja  $T_s = 0,001048$  s,
- propusni opseg DSV1 i DSV2: oko 150 kHz,
- najveća vrednost razlike kašnjenja između trigera dva DSV: 75 ns,
- vrednost šuma izvora napona iz specifikacije proizvođača  $u_s(t) < 0,05$  mV, za učestanosti do 200 kHz.

Uzorci napona su međusobno korelisani u odnosu na dc referencu koja se nalazi u DSV, koji se koristi za merenje kao i u odnosu na varijacije pojačanja IADC sa vremenom aperture.

Uzorkovani napon  $U_{1k}$  u trenutku  $kT_s$  gde je  $k$  ceo broj, je srednja vrednost napona  $u_1(t)$  u vremenu integraljenja  $T_i$ .

Da bi se odredila kombinovana merna nesigurnost prema formuli (2.3.1.8) datoj u poglavlju 2.3.1 u skladu sa GUM [1.34], treba da se prethodno odrede koeficijenti osetljivosti.

Za svaki uzorak  $U_{1k}$  napona  $u_1$  dat jednačinom (4.2.2.3), koeficijenti osetljivosti  $c_1$  do  $c_7$  su, prema GUM [1.34], izvodi  $U_{1k}$  po promenljivim, dati formulama:

$$c_1 = \frac{\partial U_{1k}}{\partial \varepsilon_{REF1}}, c_2 = \frac{\partial U_{1k}}{\partial \varepsilon_{G1}}, c_3 = \frac{\partial U_{1k}}{\partial \varepsilon_{RES1}}, c_4 = \frac{\partial U_{1k}}{\partial \varepsilon_{LIN1}},$$

$$c_5 = \frac{\partial U_{1k}}{\partial \varepsilon_{JT\theta1}}, c_6 = \frac{\partial U_{1k}}{\partial \varepsilon_{JT_s1}}, c_7 = \frac{\partial U_{1k}}{\partial \varepsilon_{JT_i1}}. \quad (4.2.2.5)$$

Za svaki uzorak  $U_{2k}$  napona  $u_2$  dat jednačinom (4.2.2.3), koeficijenti osetljivosti  $c_8$  do  $c_{14}$  su izvodi  $U_{2k}$  po promenljivim, dati sledećim jednačinama:

$$c_8 = \frac{\partial U_{2k}}{\partial \varepsilon_{REF2}}, c_9 = \frac{\partial U_{2k}}{\partial \varepsilon_{G2}}, c_{10} = \frac{\partial U_{2k}}{\partial \varepsilon_{RES2}}, c_{11} = \frac{\partial U_{2k}}{\partial \varepsilon_{LIN2}},$$

$$c_{12} = \frac{\partial U_{2k}}{\partial \varepsilon_{JT02}}, c_{13} = \frac{\partial U_{2k}}{\partial \varepsilon_{JT32}}, c_{14} = \frac{\partial U_{2k}}{\partial \varepsilon_{JT12}}. \quad (4.2.2.6)$$

Iz formula (4.2.2.5) i jednačina (4.2.2.3) i (4.2.2.4) dobiju se koeficijenti osetljivosti za svaki uzorak  $U_{1k}$  napona  $u_1$ :

$$c_1 = U_{1k}, c_2 = U_{1k}, c_3 = U_{1FS}, c_4 = U_{1FS},$$

$$c_5 = \frac{U_{1k}}{T_0} + \frac{U_m}{T_i \cdot T_0} \left\{ kT_s \cdot \sin\left(\frac{2\pi k \cdot T_s}{T_0}\right) - (kT_s + T_i) \cdot \sin\left(\frac{2\pi(k \cdot T_s + T_i)}{T_0}\right) \right\},$$

$$c_6 = \frac{U_m}{T_i} \left\{ -\sin\left(\frac{2\pi k \cdot T_s}{T_0}\right) + \sin\left(\frac{2\pi(k \cdot T_s + T_i)}{T_0}\right) \right\},$$

$$c_7 = \frac{U_{1k}}{T_i} + \frac{U_m}{T_i} \sin\left(\frac{2\pi(k \cdot T_s + T_i)}{T_0}\right), \quad (4.2.2.7)$$

gde je  $U_{1FS}$  opseg napona prvog DSV.

Analogno se dobiju koeficijenti osetljivosti  $c_8$  do  $c_{14}$  za svaki uzorak drugog napona  $U_{2k}$  iz formula (4.2.2.6) i jednačina (4.2.2.3) i (4.2.2.4).

Merna nesigurnost, tipa B, svakog uzorka  $U_{1k}$  jednog signala označena  $u_B(U_{1k})$  data je formulom:

$$u_B(U_{1k}) = [c_1^2 u^2(\varepsilon_{REF1}) + c_2^2 u^2(\varepsilon_{G1}) + c_3^2 u^2(\varepsilon_{RES1}) + c_4^2 u^2(\varepsilon_{LIN1}) + c_5^2 u^2(\varepsilon_{JT01}) + c_6^2 u^2(\varepsilon_{JT31}) + c_7^2 u^2(\varepsilon_{JT11}) + u_{w1}^2]^{1/2} \quad (4.2.2.8)$$

gde su:  $c_1$  do  $c_7$  koeficijenti osetljivosti dati formulama (4.2.2.5) za svaki uzorak  $U_{1k}$ , napona  $u_1$ , a  $u_{w1}^2$  je varijansa usled šuma prvog signala (šum izvora signala i šum uzorkovanja).

Tabela 4.2.2.1 Vrednosti uzoraka jedne periode napona  $u_1(t)$ , koeficijenti osetljivosti i merna nesigurnost  $u_B$ , u skladu sa GUM, primer sa 18 uzoraka u periodu napona.

$k$	$U_{1k}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$u_B(U_{1k})$
	[V]	[V]	[V]	[V]	[V]	[V/s]	[V/s]	[V/s]	[ $\mu$ V]
1	0,129951	0,1300	0,1300	10	10	-73	460	867	166
2	0,504598	0,5046	0,5046	10	10	-84	342	853	149
3	0,818463	0,8185	0,8185	10	10	-70	183	736	116
4	1,033572	1,0336	1,0336	10	10	-29	2	530	67
5	1,124001	1,1240	1,1240	10	10	36	-179	261	29
6	1,078850	1,0789	1,0789	10	10	115	-339	-41	54
7	0,903546	0,9035	0,9035	10	10	196	-458	-337	99
8	0,619273	0,6193	0,6193	10	10	264	-521	-592	136
9	0,260405	0,2604	0,2604	10	10	303	-522	-776	157
10	-0,129899	-0,1299	-0,1299	-10	-10	302	-460	-867	160
11	-0,504526	-0,5045	-0,5045	-10	-10	255	-342	-853	144
12	-0,818356	-0,8184	-0,8184	-10	-10	162	-183	-736	112
13	-1,033465	-1,0335	-1,0335	-10	-10	30	-2	-530	68
14	-1,123912	-1,1239	-1,1239	-10	-10	-125	179	-261	29
15	-1,078824	-1,0788	-1,0788	-10	-10	-284	339	41	54
16	-0,903589	-0,9036	-0,9036	-10	-10	-425	458	337	99
17	-0,619357	-0,6194	-0,6194	-10	-10	-524	521	592	136
18	-0,260512	-0,2605	-0,2605	-10	-10	-564	522	777	157

Tabela 4.2.2.2 Vrednosti uzoraka jedne periode napona  $u_2(t)$ , koeficijenti osetljivosti i merna nesigurnost  $u_B$ , u skladu sa GUM, primer sa 18 uzoraka u periodu napona.

$k$	$U_{2k}$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$	$u_B(U_{2k})$
	[V]	[V]	[V]	[V]	[V]	[V/s]	[V/s]	[V/s]	[ $\mu$ V]
1	1,031419	1,0314	1,0314	10	10	-25	460	-14	87
2	1,122462	1,1225	1,1225	10	10	-52	342	249	62
3	1,078107	1,0781	1,0781	10	10	-57	183	482	70
4	0,903626	0,9036	0,9036	10	10	-36	2	657	102
5	0,620167	0,6202	0,6202	10	10	9	-179	753	133
6	0,262030	0,2620	0,2620	10	10	72	-339	758	153
7	-0,127721	-0,1277	-0,1277	-10	-10	142	-458	671	158
8	-0,502052	-0,5021	-0,5021	-10	-10	204	-521	504	146
9	-0,815880	-0,8159	-0,8159	-10	-10	246	-522	275	120
10	-1,031253	-1,0313	-1,0313	-10	-10	255	-460	14	87
11	-1,122210	-1,1222	-1,1222	-10	-10	223	-342	-249	62
12	-1,077772	-1,0778	-1,0778	-10	-10	148	-183	-482	71
13	-0,903321	-0,9033	-0,9033	-10	-10	37	-2	-657	103
14	-0,619898	-0,6199	-0,6199	-10	-10	-98	179	-753	133
15	-0,261827	-0,2618	-0,2618	-10	-10	-241	339	-758	153
16	0,127784	0,1278	0,1278	10	10	-370	458	-671	156
17	0,502035	0,5020	0,5020	10	10	-465	521	-504	145
18	0,815872	0,8159	0,8159	10	10	-507	522	-275	115

Merna nesigurnost, tipa B, svakog uzorka  $U_{2k}$  drugog signala označena  $u_B(U_{2k})$ , data je formulom:

$$u_B(U_{2k}) = [c_8^2 u^2(\varepsilon_{REF2}) + c_9^2 u^2(\varepsilon_{G2}) + c_{10}^2 u^2(\varepsilon_{RES2}) + c_{11}^2 u^2(\varepsilon_{LIN2}) + c_{12}^2 u^2(\varepsilon_{JT02}) + c_{13}^2 u^2(\varepsilon_{JT32}) + c_{14}^2 u^2(\varepsilon_{JT12}) + u_{w2}^2]^{1/2}, \quad (4.2.2.9)$$

gde su:  $c_8$  do  $c_{14}$  koeficijenti osetljivosti za svaki uzorak  $U_{2k}$  napona  $u_2$  dati formulama (4.2.2.6), a  $u_{w2}^2$  je varijansa usled šuma drugog signala (šuma izvora signala i šuma uzorkovanja).

U tabeli 4.2.2.1 date su:

- vrednosti uzoraka jedne periode napona  $u_1(t)$ ,
- vrednosti koeficijenata osetljivosti  $c_1$  do  $c_7$ ,
- merna nesigurnost tipa B svakog uzorka u periodi napona  $u_B(U_{1k})$  prema formuli 4.2.2.8.

U tabeli 4.2.2.2 date su:

- vrednosti uzoraka jedne periode napona  $u_2(t)$ ,
- vrednosti koeficijenata osetljivosti  $c_8$  do  $c_{14}$ ,
- merna nesigurnost tipa B svakog uzorka u periodi napona  $u_B(U_{2k})$  prema formuli 4.2.2.9.

Rezultati ocene tipa A standardne merne nesigurnosti  $u_{A1}$  za svaki od 18 uzoraka iz 19 perioda signala  $u_1$  i standardne merne nesigurnosti  $u_{A2}$  za svaki od 18 uzoraka iz 19 perioda signala  $u_2$ , prema formuli (2.3.1.5) datoj u poglavlju 2.3.1, prikazani su u tabeli 4.2.2.3.

Merna nesigurnost tipa A za uzorak  $k$  dobijena je na sledeći način:

- iz zbira vrednosti svih  $k$ -tih uzoraka u 19 perioda signala određena je srednja vrednost,
- iz vrednosti svih  $k$ -tih uzoraka u 19 perioda signala određena je eksperimentalna standardna devijacija prema formuli (2.3.1.4) datoj u poglavlju 2.3.1,
- zatim je primenjena formula (2.3.1.5) data u poglavlju 2.3.1.

Tabela 4.2.2.3 Standardne merne nesigurnosti tipa A za uzorke dva napona, primer sa 18 uzoraka u periodi napona.

Uzorak	Merna nesigurnost tipa A za uzorke prvog napona $u_{A1}$	Merna nesigurnost tipa A za uzorke drugog napona $u_{A2}$
	[mV]	[mV]
1	0,1635	0,0634
2	0,1468	0,0159
3	0,1127	0,0426
4	0,0614	0,0918
5	0,0087	0,1292
6	0,0462	0,1512
7	0,0951	0,1551
8	0,1330	0,1404
9	0,1542	0,1081
10	0,1572	0,0637
11	0,1409	0,0157
12	0,1084	0,0457
13	0,0621	0,0926
14	0,0094	0,1293
15	0,0457	0,1507
16	0,0950	0,1535
17	0,1330	0,1389
18	0,1545	0,1072

Kombinovana merna nesigurnost za svaki uzorak u periodi signala dobije se iz mernih nesigurnosti tipa A i tipa B, u skladu sa GUM [1.34], prema formuli (2.3.1.8) datoj u poglavlju 2.3.1.

U tabeli 4.2.2.4 dati su:

- kombinovana merna nesigurnost uzoraka prvog napona  $u_{C1}$ ,
- kombinovana merna nesigurnost uzoraka drugog napona  $u_{C2}$ .

Iz tabele 4.2.2.4 se vidi da najmanje vrednosti kombinovane merne nesigurnosti imaju uzorci u periodi napona koji su u blizini približno  $\pm \pi / 2$ , a to su u ovom primeru uzorci 4, 5, 13 i 14.

Tabela 4.2.2.4 Kombinovane merne nesigurnosti za uzorke napona, primer sa 18 uzoraka u periodu napona.

Uzorak	Kombinovana merna nesigurnost za uzorke prvog napona $u_{C1}$	Kombinovana merna nesigurnost za uzorke drugog napona $u_{C2}$
	[mV]	[mV]
1	0,1785	0,0935
2	0,1554	0,0717
3	0,1286	0,0776
4	0,0922	0,1070
5	0,0703	0,1362
6	0,0796	0,1555
7	0,1098	0,1601
8	0,1399	0,1493
9	0,1584	0,1245
10	0,1622	0,0938
11	0,1498	0,0716
12	0,1248	0,0793
13	0,0927	0,1076
14	0,0704	0,1364
15	0,0793	0,1549
16	0,1097	0,1586
17	0,1398	0,1479
18	0,1605	0,1186

## 2) Merna nesigurnost rezultata za faznu razliku

U mernom sistemu se koriste dva DSV čiji propusni opsezi prema specifikaciji proizvođača mogu da budu od 140 kHz do 160 kHz, usled čega može doći do greške merenja  $\Delta\varphi_{BW} = 0,00271^\circ$  (dobije se kao rezultat razlike (53Hz/140 kHz - 53 Hz/160 kHz), prema formuli 2.1.2.6). Zato se  $(\Delta\varphi_{BW} / \sqrt{3}) = 0,00157^\circ = u_{\text{propusni-opseg}}$  uzima kao komponenta merne nesigurnosti tipa B, uniformna raspodela.

Razlika u triggerima različitih DSV prema specifikaciji proizvođača može da bude do 75 ns, što može dovesti do greške  $\Delta\varphi_{\text{trigger}} = 0,00143^\circ$  (dobije se kao rezultat  $2 \cdot \pi \cdot (53 \text{ Hz}) \cdot (75 \text{ ns})$ , prema formuli 2.1.2.7). Zato se  $(\Delta\varphi_{\text{trigger}} / \sqrt{3}) = 0,00083^\circ = u_{\text{razlika-apertura}}$  uzima kao komponenta merne nesigurnosti tipa B, uniformna raspodela.

U tabeli 4.2.2.5 date su vrednosti uzoraka jedne periode napona  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u'_1(t)$  i  $u'_2(t)$  iz kojih se izračunava fazna razlika koristeći algoritam MSAL. Koriste se sledeće oznake:

$U_{1k}$  – vrednost k-tog uzorka napona  $u_1(t)$ ;  $U'_{1k}$  – vrednost k-tog uzorka dodatnog napona  $u'_1(t)$  koji je fazno pomeren u odnosu na napon  $u_1(t)$  za 4 uzorka;  $U_{2k}$  – vrednost k-tog uzorka napona  $u_2(t)$ ;  $U'_{1k}$  – vrednost k-tog uzorka dodatnog napona  $u'_1(t)$  koji je fazno pomeren u odnosu na napon  $u_1(t)$  za 4 uzorka.

Tabela 4.2.2.5 Vrednosti uzoraka jedne periode napona  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u'_1(t)$  i  $u'_2(t)$  iz kojih se izračunava fazna razlika koristeći algoritam MSAL.

$k$	$U_{1k}$	$U'_{1k}$	$U_{2k}$	$U'_{2k}$
	[V]	[V]	[V]	[V]
1	<b>0,129951</b>	-1,078795	<b>1,031419</b>	-0,261747
2	0,504598	-0,903502	1,122462	0,127901
3	0,818463	-0,619268	1,078107	0,502169
4	1,033572	-0,260379	0,903626	0,815989
5	1,124001	<b>0,129951</b>	0,620167	<b>1,031419</b>
6	1,078850	0,504598	0,262030	1,122462
7	0,903546	0,818463	-0,127721	1,078107
8	0,619273	1,033572	-0,502052	0,903626
9	0,260405	1,124001	-0,815880	0,620167
10	-0,129899	1,078850	-1,031253	0,262030
11	-0,504526	0,903546	-1,122210	-0,127721
12	-0,818356	0,619273	-1,077772	-0,502052
13	-1,033465	0,260406	-0,903321	-0,815880
14	-1,123912	-0,129900	-0,619898	-1,031253
15	-1,078824	-0,504526	-0,261827	-1,122210
16	-0,903589	-0,818356	0,127784	-1,077772
17	-0,619357	-1,033465	0,502035	-0,903320
18	-0,260512	-1,123912	0,815872	-0,619898

Model merenja [1.34]: Da bi se primenom algoritma MSAL odredila fazna razlika između dva sinusna napona, treba vrednosti svakog uzorka napona  $u_1(t)$ ,  $u'_1(t)$ ,  $u_2(t)$  i  $u'_2(t)$  uvrstiti u formulu (3.2.7), koja se može napisati na sledeći način:

$$\hat{\phi} = \arctan \frac{\sum_{k=0}^{N-1} [M_{1k} - M_{3k}]}{\sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right) \sum_{k=0}^{N-1} [M_{2k} + M_{4k}]} = \arctan \frac{M_1 - M_3}{\sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right) (M_2 + M_4)}, \quad (4.2.2.10)$$

gde su proizvodi vrednosti uzoraka dva napona označeni:

$$M_{1k} = U_{1k} \cdot U'_{2k}, \quad M_{3k} = U'_{1k} \cdot U_{2k},$$



$$M_{2k} = U_{1k} \cdot U_{2k}, M_{4k} = U'_{1k} \cdot U'_{2k}. \quad (4.2.2.11)$$

Koristeći formule (2.3.1.8) i (4.2.2.11) dobije se izraz za kvadrat standardne merne nesigurnosti proizvoda označenog  $M_{1k}$  [1.34]:

$$\begin{aligned} u^2(M_{1k}) &= \left( \frac{\partial M_{1k}}{\partial U_{1k}} \right)^2 \cdot u^2(U_{1k}) + \left( \frac{\partial M_{1k}}{\partial U'_{2k}} \right)^2 \cdot u^2(U'_{2k}) + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial M_{1k}}{\partial U_{1k}} \right) \left( \frac{\partial M_{1k}}{\partial U'_{2k}} \right) \cdot u(U_{1k}) \cdot u(U'_{2k}) \cdot r_c(U_{1k}, U'_{2k}) = \\ &= U_{2k}^2 \cdot u^2(U_{1k}) + U_{1k}^2 \cdot u^2(U'_{2k}) + \\ &2U'_{2k} U_{1k} \cdot u(U_{1k}) \cdot u(U'_{2k}) \cdot r_c(U_{1k}, U'_{2k}) \end{aligned} \quad (4.2.2.12)$$

gde je  $r_c(U_{1k}, U'_{2k})$  koeficijent korelacije između uzoraka dva napona.

Analogno se dobiju izrazi za kvadrat standardne merne nesigurnosti proizvoda označenih  $M_{2k}$ ,  $M_{3k}$  i  $M_{4k}$ :

$$\begin{aligned} u^2(M_{2k}) &= \left( \frac{\partial M_{2k}}{\partial U_{1k}} \right)^2 \cdot u^2(U_{1k}) + \left( \frac{\partial M_{2k}}{\partial U_{2k}} \right)^2 \cdot u^2(U_{2k}) + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial M_{2k}}{\partial U_{1k}} \right) \left( \frac{\partial M_{2k}}{\partial U_{2k}} \right) \cdot u(U_{1k}) \cdot u(U_{2k}) \cdot r_c(U_{1k}, U_{2k}) = \\ &= U_{2k}^2 \cdot u^2(U_{1k}) + U_{1k}^2 \cdot u^2(U_{2k}) + \\ &2U_{2k} \cdot U_{1k} \cdot u(U_{1k}) \cdot u(U_{2k}) \cdot r_c(U_{1k}, U_{2k}) \end{aligned} \quad (4.2.2.13)$$

$$\begin{aligned} u^2(M_{3k}) &= \left( \frac{\partial M_{3k}}{\partial U'_{1k}} \right)^2 \cdot u^2(U'_{1k}) + \left( \frac{\partial M_{3k}}{\partial U_{2k}} \right)^2 \cdot u^2(U_{2k}) + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial M_{3k}}{\partial U'_{1k}} \right) \left( \frac{\partial M_{3k}}{\partial U_{2k}} \right) \cdot u(U'_{1k}) \cdot u(U_{2k}) \cdot r_c(U'_{1k}, U_{2k}) = \\ &= U_{2k}^2 \cdot u^2(U'_{1k}) + U_{1k}^2 \cdot u^2(U_{2k}) + \\ &2U_{2k} \cdot U'_{1k} \cdot u(U'_{1k}) \cdot u(U_{2k}) \cdot r_c(U'_{1k}, U_{2k}) \end{aligned} \quad (4.2.2.14)$$

$$\begin{aligned}
u^2(M_{4k}) &= \left( \frac{\partial M_{4k}}{\partial U'_{1k}} \right)^2 \cdot u^2(U'_{1k}) + \left( \frac{\partial M_{4k}}{\partial U'_{2k}} \right)^2 \cdot u^2(U'_{2k}) + \\
&+ 2 \left( \frac{\partial M_{4k}}{\partial U'_{1k}} \right) \left( \frac{\partial M_{4k}}{\partial U'_{2k}} \right) \cdot u(U'_{1k}) \cdot u(U'_{2k}) \cdot r_c(U'_{1k}, U'_{2k}) = \\
&= U_{2k}'^2 \cdot u^2(U'_{1k}) + U_{1k}'^2 \cdot u^2(U'_{2k}) + \\
&2U'_{2k} \cdot U'_{1k} \cdot u(U'_{1k}) \cdot u(U'_{2k}) \cdot r_c(U'_{1k}, U'_{2k}).
\end{aligned} \tag{4.2.2.15}$$

U formuli 4.2.2.10 koriste se oznake:

$$M_1 = \sum_{k=0}^{N-1} M_{1k}, \quad M_2 = \sum_{k=0}^{N-1} M_{2k}, \quad M_3 = \sum_{k=0}^{N-1} M_{3k}, \quad M_4 = \sum_{k=0}^{N-1} M_{4k}. \tag{4.2.2.16}$$

Primenom GUM [1.34] kombinovana merna nesigurnost fazne razlike  $u_c(\hat{\varphi})$  koja je određena koristeći algoritam MSAL, može se izraziti formulom:

$$\begin{aligned}
u_{c\_MSAL}(\hat{\varphi}) &= [c_{15}^2 u^2(M_1) + c_{16}^2 u^2(M_2) + c_{17}^2 u^2(M_3) + c_{18}^2 u^2(M_4) + \\
&+ u_A^2(\varphi) + 2c_{15}c_{16}u(M_1)u(M_2)r_c(M_1, M_2) + 2c_{15}c_{17}u(M_1)u(M_3)r_c(M_1, M_3) + \\
&+ 2c_{15}c_{18}u(M_1)u(M_4)r_c(M_1, M_4) + 2c_{16}c_{17}u(M_2)u(M_3)r_c(M_2, M_3) + \\
&+ 2c_{16}c_{18}u(M_2)u(M_4)r_c(M_2, M_4) + 2c_{17}c_{18}u(M_3)u(M_4)r_c(M_3, M_4)]^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.2.2.17}$$

gde su koeficijenti osetljivosti dati formulama:

$$\begin{aligned}
c_{15} &= \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial M_1} = \frac{\sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right)(M_2 - M_4)}{\left[ \sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right)(M_2 - M_4) \right]^2 + (M_1 - M_3)^2}, \\
c_{16} &= \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial M_2} = \frac{-\sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right)(M_1 - M_3)}{\left[ \sin\left(\frac{2\pi r q}{p}\right)(M_2 - M_4) \right]^2 + (M_1 - M_3)^2}, \\
c_{17} &= \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial M_3} = -c_{15}, \quad c_{18} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial M_4} = -c_{16},
\end{aligned} \tag{4.2.2.18}$$

$r_C$  su koeficijenti korelacije,  $u_A(\varphi)$  je tip A merne nesigurnosti određen tako da je za svaku od 19 perioda posebno izračunata fazna razlika koristeći algoritam MSAL a zatim iz tih vrednosti određena standardna devijacija i tip A merne nesigurnosti u skladu sa GUM.

Kvadrati standardne nesigurnosti u jednačini (4.2.2.17), koristeći formule (4.2.2.16), se mogu napisati:

$$u^2(M_1) = u^2\left(\sum_{k=1}^N M_{1k}\right), u^2(M_2) = u^2\left(\sum_{k=1}^N M_{2k}\right), u^2(M_3) = u^2\left(\sum_{k=1}^N M_{3k}\right), \\ u^2(M_4) = u^2\left(\sum_{k=1}^N M_{4k}\right). \quad (4.2.2.19)$$

Rezultati merenja fazne razlike određene iz uzoraka 19 perioda dva realna sinusna signala, koristeći algoritam MSAL dati su u tabeli 4.2.2.7. Rezultati nisu centrirani (imaju bias).

Rezultat za faznu razliku korigovan za bias je  $\varphi_{\text{corr}} = 59,90135^\circ$ , proširena merna nesigurnost tog rezultata, sa  $k = 2$  je  $U = 0,004^\circ$ . S obzirom da je u periodu signala 18 uzoraka i da je  $18 / 4 = 4,5$  uzeto je aproksimativno da je vrednost bez biasa jednaka srednjoj vrednosti fazne razlike koja je dobijena za fazne pomeraje dodatnih signala  $r = 4$  i  $r = 5$ , i iznosi  $(59,9011^\circ + 59,9016^\circ) = 59,90135^\circ$ .

Bias rezultata merenja kao sistematsku grešku, u principu treba primeniti kao korekciju na izmerene vrednosti, ali to se ne mora uraditi već se bias može izraziti u proširenoj mernoj nesigurnosti [GUM, tačka F.2.4.5.].

U skladu sa referencom [4.7] koriste se sledeće tri metode za proračun proširene merne nesigurnosti u koju je uključen bias  $\delta$ :

RSS $u_C$  metoda:

$$Y = y \pm U_{\text{RSS}u_C}, \text{ gde je } U_{\text{RSS}u_C} = k\sqrt{u_C^2 + \delta^2} \quad (4.2.2.20)$$

RSS $U$  metoda:

$$Y = y \pm U_{\text{RSS}U}, \text{ gde je } U_{\text{RSS}U} = \sqrt{k^2 u_C^2 + \delta^2} \quad (4.2.2.21)$$

SUM $U$  metoda:

$$Y = y \begin{cases} +U_+ \\ -U_- \end{cases} \quad (4.2.2.22)$$

gde je

$$U_+ = \begin{cases} ku_c - \delta, & \text{ako je } ku_c - \delta > 0 \\ 0, & \text{ako je } ku_c - \delta \leq 0 \end{cases}$$

$$U_- = \begin{cases} ku_c + \delta, & \text{ako je } ku_c + \delta > 0 \\ 0, & \text{ako je } ku_c + \delta \leq 0. \end{cases}$$

U formulama (4.2.2.20) do (4.2.2.22) oznaka  $Y$  je za rezultat merenja,  $y$  označava najbolju procenu merene veličine, a interval od  $-U$  do  $+U$  predstavlja proširenu mernu nesigurnost,  $u_c$  označava kombinovanu mernu nesigurnost,  $\delta$  označava bias, koeficijent  $k = 2$ , za verovatnoću približno 95%.

Tabela 4.2.2.6 Detaljan proračun merne nesigurnosti rezultata za faznu razliku između dva napona određena primenom algoritma MSAL za  $r = 4$  i  $r = 5$ , primer sa 18 uzoraka u periodu.

fazno kašnjenje dodatnih signala		$r = 4$ uzorka	$r = 5$ uzorka
$\hat{\phi}$ fazna razlika (sa biasom)	[°]	59,9011	59,9016
$\hat{\phi}_{\text{corr}}$ korigovano za bias	[°]	59,90135	59,90135
Proračun prema formuli (4.2.2.17)			
$(c_{15})^2 \cdot u^2 (M_1)$		$5,25 \cdot 10^{-21}$	$1,65 \cdot 10^{-20}$
$(c_{16})^2 \cdot u^2 (M_2)$		$5,85 \cdot 10^{-11}$	$5,85 \cdot 10^{-11}$
$(c_{17})^2 \cdot u^2 (M_3)$		$8,75 \cdot 10^{-21}$	$1,90 \cdot 10^{-20}$
$(c_{18})^2 \cdot u^2 (M_4)$		$5,82 \cdot 10^{-11}$	$5,86 \cdot 10^{-11}$
$2 \cdot c_{15} \cdot c_{16} \cdot u(M_1) \cdot u(M_2) \cdot r_C (M_1, M_2)$		$1,92 \cdot 10^{-16}$	$-3,41 \cdot 10^{-16}$
$2 \cdot c_{15} \cdot c_{17} \cdot u(M_1) \cdot u(M_3) \cdot r_C (M_1, M_3)$		$-1,30 \cdot 10^{-20}$	$-3,41 \cdot 10^{-20}$
$2 \cdot c_{15} \cdot c_{18} \cdot u(M_1) \cdot u(M_4) \cdot r_C (M_1, M_4)$		$-1,92 \cdot 10^{-16}$	$3,41 \cdot 10^{-16}$
$2 \cdot c_{16} \cdot c_{17} \cdot u(M_2) \cdot u(M_3) \cdot r_C (M_2, M_3)$		$-2,39 \cdot 10^{-16}$	$3,66 \cdot 10^{-16}$
$2 \cdot c_{16} \cdot c_{18} \cdot u(M_2) \cdot u(M_4) \cdot r_C (M_2, M_4)$		$1,20 \cdot 10^{-10}$	$1,10 \cdot 10^{-10}$
$2 \cdot c_{17} \cdot c_{18} \cdot u(M_3) \cdot u(M_4) \cdot r_C (M_3, M_4)$		$2,38 \cdot 10^{-16}$	$-3,67 \cdot 10^{-16}$
$u_A$ merna nesigurnost tip A	[°]	0,00058	0,00058
$u_{c\_MSAL}(\hat{\phi})$ formula (4.2.2.17)	[°]	0,001	0,001
Dodatni doprinosi m. nesigurnosti			
$u_{\text{propusni-opseg}}$	[°]	0,00157	0,00157
$u_{\text{razlika apertura}}$	[°]	0,00083	0,00083
$u_c(\hat{\phi})$ kombinovana m. nesigurnost	[°]	0,00205	0,00205
$U = 2 \cdot u_c(\hat{\phi})$ proširena m. nesigurnost	[°]	0,004	0,004

Rezultati su za 19 perioda, primenjene su formule iz poglavlja 4.2.2.

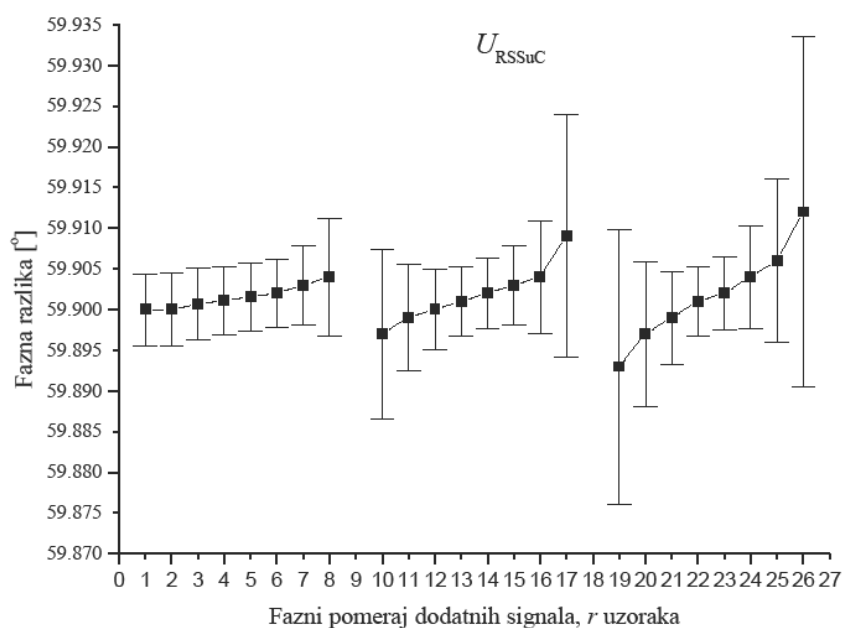
U referenci [4.7] se zaključuje da SUMU metoda daje najrealnije vrednosti proširene merne nesigurnosti za nivo poverenja približno 95%. Metoda RSS $u_c$  daje

vrednosti proširene merne nesigurnosti koje su znatno veće nego što je realno. Do istih zaključaka se dolazi i u ovom primeru.

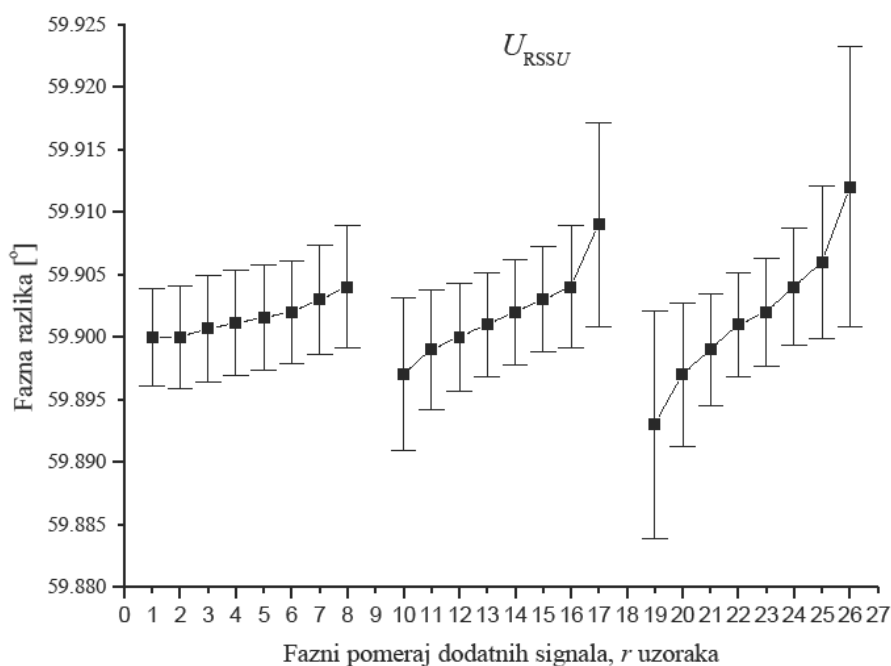
Tabela 4.2.2.7 Rezultati za faznu razliku između dva napona određeni primenom algoritma MSAL, rezultati za bias i proširena merna nesigurnost u koju je dodat bias na 3 načina, u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala, primer sa 18 uzoraka u periodu.

Fazni pomeraj $r$ [br.uzoraka]	MSAL $\varphi$ [°]	bias $\delta$ [°]	$U_{RSSuC}$ [°]	$U_{RSSU}$ [°]	$U_{SUMU+}$ [°]	$U_{SUMU-}$ [°]
1	59,9003	-0,00106	0,0044	0,0039	0,0049	0,0027
2	59,9004	-0,00098	0,0045	0,0041	0,0050	0,0030
3	59,9007	-0,00067	0,0044	0,0043	0,0049	0,0035
4	59,9011	-0,00023	0,0042	0,0042	0,0044	0,0040
5	59,9016	0,00023	0,0042	0,0042	0,0040	0,0044
6	59,9020	0,00069	0,0042	0,0041	0,0033	0,0047
7	59,9026	0,00128	0,0049	0,0044	0,0029	0,0055
8	59,9044	0,00304	0,0072	0,0049	0,0008	0,0068
9	-	-	-	-	-	-
10	59,8965	0,0048	0,0104	0,0061	0,0086	0
11	59,8987	0,0027	0,0066	0,0048	0,0066	0,0014
12	59,8998	0,0016	0,0050	0,0043	0,0055	0,0025
13	59,9008	0,0006	0,0043	0,0042	0,0047	0,0037
14	59,9017	-0,0003	0,0043	0,0042	0,0038	0,0046
15	59,9027	-0,0014	0,0049	0,0042	0,0026	0,0054
16	59,9042	-0,0029	0,0069	0,0049	0,0012	0,0068
17	59,9086	-0,0072	0,0149	0,0082	0	0,0110
18	-	-	-	-	-	-
19	59,8931	0,0083	0,0169	0,0091	0,0120	0
20	59,8974	0,0040	0,0089	0,0057	0,0080	0,00001
21	59,8993	0,0021	0,0057	0,0045	0,0060	0,0020
22	59,9008	0,0006	0,0043	0,0042	0,0047	0,0037
23	59,9022	-0,0008	0,0045	0,0043	0,0033	0,0051
24	59,9038	-0,0024	0,0063	0,0047	0,0016	0,0064
25	59,9060	-0,0046	0,0101	0,0061	0	0,0086
26	59,9119	-0,0106	0,0215	0,0112	0	0,0144
27	-	-	-	-	-	-

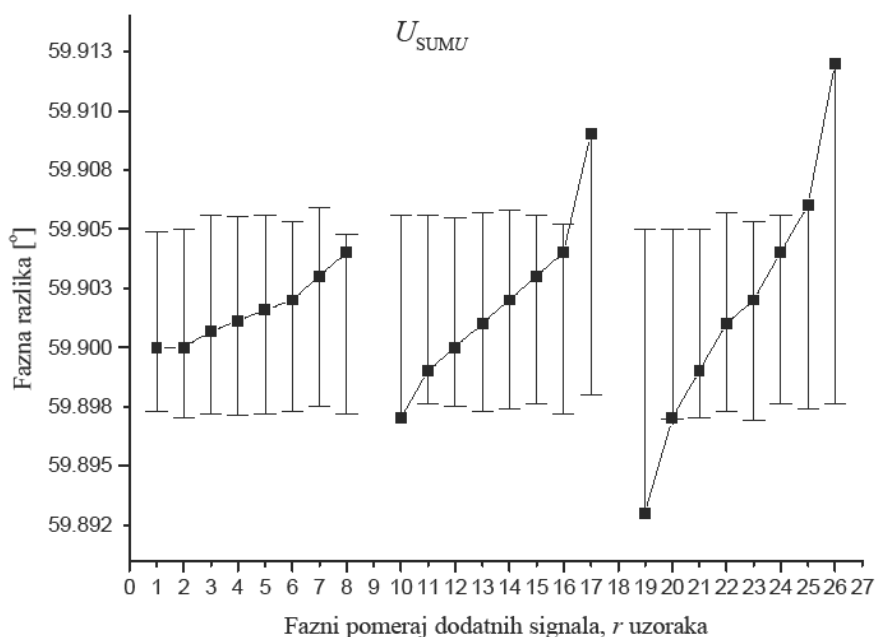
Na slikama 4.2.2.1 do 4.2.2.3 prikazani su rezultati iz tabele 4.2.2.7 za faznu razliku u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja ( $r$  uzoraka) dodatnih signala i merna nesigurnost izračunata prema formulama (4.2.2.20) do (4.2.2.22).



Slika 4.2.2.1 Rezultati za faznu razliku  $59,9^\circ$  određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja ( $r$  uzoraka) dodatnih signala, i proširena merna nesigurnost  $U_{RSSuC}$ , primer sa 18 uzoraka u periodi signala.



Slika 4.2.2.2 Rezultati za faznu razliku  $59,9^\circ$  određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja ( $r$  uzoraka) dodatnih signala, i proširena merna nesigurnost  $U_{RSSU}$ , primer sa 18 uzoraka u periodi signala.



Slika 4.2.2.3 Rezultati za faznu razliku  $59,9^\circ$  određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja ( $r$  uzoraka) pomoćnih signala, i proširena merna nesigurnost  $U_{SUMU}$ , primer sa 18 uzoraka u periodu signala.

### 4.2.3 Validacija

Rezultati za faznu razliku između dva realna sinusna signala dobijeni primenom sistema za uzorkovanje signala i algoritma MSAL opisani u poglavlju 4.2.1, upoređeni su sa rezultatima merenja fazne razlike etalonom tip SD1000, proizvođača AVPower, koji ima sledivost prema ČMI, Češka, u cilju validacije metode [4.6].

Rezultat merenja fazne razlike etalonom tip SD1000 i proširena merna nesigurnost tog rezultata, data sa faktorom obuhvata  $k = 2$ , za normalnu raspodelu i verovatnoću približno 95 % u skladu sa GUM je:  $\varphi = 59,9000^\circ \pm 0,0889^\circ$ .

Za određivanje merne nesigurnosti u skladu sa GUM [3.14], polazi se od matematičkog modela merenja fazne razlike koji je za direktno merenje etalonom tip SD1000 dat jednačinom:

$$\varphi_X = \varphi_S - \delta\varphi_{X-res} + \delta\varphi_{S-spec} + \delta\varphi_{S-res} + \delta\varphi_{S-cal} \quad (4.2.3.1)$$

gde je:

- $\varphi_X$  – vrednost fazne razlike između dva napona 59,900° zadata iz izvora,
- $\varphi_S$  – srednja vrednost fazne razlike koju pokazuje etalon tip SD1000 određena iz 10 ponovljenih merenja; ova vrednost iznosi 59,900° a tip A merne nesigurnosti usled ponavljanja merenja fazne razlike etalomom: 0,0001°,
- $\delta\varphi_{X-res}$  – vrednost rezolucije zadavanja fazne razlike iz izvora dva napona; ova vrednost iznosi 0,001°,
- $\delta\varphi_{S-spec}$  – vrednost greške merenja fazne razlike etalomom tip SD1000 koju je dao proizvođač; ova vrednost iznosi  $\pm 0,075^\circ$ ,
- $\delta\varphi_{S-res}$  – vrednost rezolucije merenja fazne razlike etalomom tip SD1000; ova vrednost iznosi 0,001°,
- $\delta\varphi_{S-cal}$  – vrednost merne nesigurnosti etaloniranja etalona tip SD1000 koja je data u uverenju o etaloniranju; ova vrednost iznosi 0,02°, za faktor obuhvata  $k=2$ , i verovatnoću približno 95%.

Smatra se da su komponente  $\delta\varphi_{X-res}$ ,  $\delta\varphi_{S-spec}$ ,  $\delta\varphi_{S-res}$ ,  $\delta\varphi_{S-cal}$  u jednačini (4.2.3.1) jednake nuli, a njihove vrednosti se koriste za određivanje komponenti merne nesigurnosti u skladu sa GUM na sledeći način:

- $u(\delta\varphi_{X-res}) = 0,001^\circ/2\sqrt{3}$ , uniformna raspodela verovatnoće,
- $u(\delta\varphi_{S-spec}) = 0,075^\circ/\sqrt{3}$ , uniformna raspodela verovatnoće,
- $u(\delta\varphi_{S-res}) = 0,001^\circ/2\sqrt{3}$ , uniformna raspodela verovatnoće,
- $u(\delta\varphi_{S-cal}) = 0,02^\circ/2$ , normalna raspodela verovatnoće.

Kombinovana merna nesigurnost označena  $u_c$  određuje se u skladu sa GUM koristeći jednačinu (2.3.1.6), u poglavlju 2.3.1. Za ovaj primer može se napisati:

$$u_c^2(\varphi_x) = (c_1 \cdot u(\varphi_S))^2 + (c_2 \cdot u(\delta\varphi_{X-res}))^2 + (c_3 \cdot u(\delta\varphi_{S-spec}))^2 + (c_4 \cdot u(\delta\varphi_{S-res}))^2 + (c_5 \cdot u(\delta\varphi_{S-cal}))^2 \quad (4.2.3.2)$$

Koeficijenti osetljivosti su parcijalni izvodi funkcije (4.2.3.1) i imaju vrednosti:



$$c_1 = \frac{\partial \varphi_X}{\partial (\varphi_S)} = 1, c_2 = \frac{\partial \varphi_X}{\partial (\delta \varphi_{X-res})} = -1, c_3 = \frac{\partial \varphi_X}{\partial (\delta \varphi_{S-spec})} = 1, c_4 = \frac{\partial \varphi_X}{\partial (\delta \varphi_{S-res})} = 1,$$

$$c_5 = \frac{\partial \varphi_X}{\partial (\delta \varphi_{S-cal})} = 1. \quad (4.2.3.3)$$

Efektivni broj stepeni slobode  $v_{\text{eff}}$  izračuna se prema Welch – Satterthwaite formuli (2.3.1.10) datoj u poglavlju 2.3.1.

U tabeli 4.2.3.1 dat je proračun budžeta merne nesigurnosti (MN) za direktno merenje fazne razlike između dva napona etalomom tip SD1000.

Tabela 4.2.3.1 Budžet merne nesigurnosti za direktno merenje fazne razlike 59,9° između dva napona etalomom tip SD1000.

Veličina	Vrednost	$u(x_i)$	Tip MN	Br. stepeni slobode	Koef. oset. $c_i$	$c_i \cdot u(x_i)$	$[c_i^2 \cdot u^2(x_i) / u_c^2] \cdot 100$
	[°]	[°]			[°]	[°]	(%)
$\varphi_X$	59,900	-		-	-	-	-
$\varphi_S$	59,900	0,0001	A	9	1	0,0001	0,0005
$\delta \varphi_{X-res}$	0	0,00029	B	$\infty$	-1	-0,00029	0,004
$\delta \varphi_{S-spec}$	0	0,0433	B	$\infty$	1	0,0433	94,93
$\delta \varphi_{S-res}$	0	0,00029	B	$\infty$	1	0,00029	0,004
$\delta \varphi_{S-cal}$	0	0,01	B	50	1	0,01	5,06

$$v_{\text{eff}} = 19507 \quad u_c = 0,0444^\circ$$

Proširena merna nesigurnost rezultata merenja fazne razlike koji je dat u tabeli 4.2.3.1, za faktor obuhvata  $k=2$ , normalnu raspodelu verovatnoće i nivo poverenja približno 95% je:  $U = 2 u_c = 0,0889^\circ$ .

Rezultati za izmerenu faznu razliku 59,9° koristeći etalon SD1000 i rezultati dobijeni koristeći sistem za uzorkovanje signala i algoritam MSAL, mogu se uporediti na osnovu izračunatog broja  $E_n$  prema formuli [4.8]:

$$E_n = \frac{e_1 - e_{REF}}{\sqrt{U_1^2 + U_{REF}^2}} \quad (4.2.3.4)$$

gde je:

$e_{REF}$  - rezultat za izmerenu grešku fazne razlike 59,9° dobijen koristeći etalon SD1000,

$U_{REF}$  - rezultat za proširenu mernu nesigurnost za izmerenu grešku fazne razlike  $59,9^\circ$  dobijen koristeći etalon SD1000,

$e_1$  - rezultat za izmerenu grešku fazne razlike  $59,9^\circ$  dobijen koristeći sistem za uzorkovanje signala i algoritam MSAL,

$U_1$  - rezultat za proširenu mernu nesigurnost za izmerenu grešku fazne razlike  $59,9^\circ$  dobijen koristeći sistem za uzorkovanje signala i algoritam MSAL.

Kriterijum za ocenu rezultata za faznu razliku između dva sinusna signala, dobijenih merenjem sa različitom opremom [4.8] je:

$|E_n| \leq 1$  rezultati zadovoljavaju,

$|E_n| > 1$  rezultati ne zadovoljavaju (potrebno je pristupiti analizi mogućih uzroka i predlaganje korektivnih mera).

U ovom primeru  $e_1 = 0,0013^\circ$ ,  $e_{REF} = 0^\circ$ ,  $U_1 = 0,004^\circ$ ,  $U_{REF} = 0,0889^\circ$ , tako da se na osnovu formule (4.2.3.4) dobije broj  $E_n = 0,015 < 1$ , što znači da rezultati za faznu razliku između dva sinusna signala dobijeni merenjem u ovom primeru zadovoljavaju kriterijum  $|E_n| \leq 1$ .

## 4.2.4 Zaključak

U ovom primeru dati su rezultati određivanja vrednosti fazne razlike između dva realna sinusna napona primenom algoritma MSAL na uzorke napona.

- ***Uzorci napona***

Za uzorkovanje signala korišćena su dva DSV, tip 3458A, Agilent.

Uzorkovano je 19 perioda signala sa po 18 uzoraka u periodu. Učestanost signala 53 Hz, učestanost uzorkovanja 954 Hz. Broj uzoraka u periodu signala nije deljiv sa 4.

- ***Primena algoritma MSAL***

Za primenu algoritma MSAL za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala nije potrebno poznavati učestanost signala i učestanost uzorkovanja već samo broj uzoraka u periodu signala.

Vrednosti  $r$ ,  $p$ ,  $q$  u ovom primeru sa dva realna sinusna napona, ne zadovoljavaju jednačinu (3.1.12). Vrednosti fazne razlike između ova dva napona određene primenom algoritma MSAL su pristrasne (imaju bias). Razlika između najveće i najmanje vrednosti fazne razlike dobijene primenom algoritma MSAL je:  $4,1 \text{ m}^\circ$  ako su pomoćni signali fazno pomereni u odnosu na originalne signale za ugao  $(2\pi/18)$  koji ima vrednosti u opsegu  $(0, \pi)$  odnosno  $r$  ima vrednost 1 do 8;  $12,1 \text{ m}^\circ$  ako su dodatni signali fazno pomereni za ugao koji ima vrednosti u opsegu  $(\pi, 2\pi)$  odnosno  $r$  ima vrednost 10 do 17, i  $18,8 \text{ m}^\circ$  ako su pomoćni signali fazno pomereni za ugao koji ima vrednosti u opsegu  $(2\pi, 3\pi)$  odnosno  $r$  ima vrednost 19 do 27.

Obično se dodatni signali fazno pomeraju u odnosu na originalne signale za ugao u opsegu  $(0, \pi)$ . Ostali rezultati su dati zbog ilustracije primene algoritma na realne signale.

- ***Poređenje sa rezultatima drugih algoritama***

U tabeli 4.2.1.1 date su vrednosti fazne razlike  $59,9^\circ$  dobijene primenom algoritama 3PSF, 4PSF, 7PSF, UQDE4, MSAL4, UQDE5 i MSAL5 na ceo broj perioda signala. Iz tabele se vidi da rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni primenom algoritma MSAL4 odstupaju za najviše  $0,00058^\circ$  od rezultata dobijenih primenom algoritma 7PSF na iste uzorke signala, a rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni primenom algoritma MSAL5 odstupaju za najviše  $0,00069^\circ$  od rezultata dobijenih primenom algoritma 7PSF.

Na slici 4.2.1.1 prikazani su rezultati dobijeni primenom navedenih algoritama na broj uzoraka koji ne odgovara celom broju perioda signala. Iz slike se vidi da rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni primenom algoritma MSAL4 ili MSAL5 odstupaju za najviše  $0,36^\circ$  od rezultata dobijenih primenom algoritma 7PSF na isti broj uzoraka signala.

- ***Proračun merne nesigurnosti rezultata za faznu razliku***

Proračun je urađen u skladu sa GUM [1.34] na sledeći način:

- određena je kombinovana merna nesigurnost vrednosti pojedinačnih uzorka sinusnih napona. Najmanju vrednost kombinovane merne nesigurnosti imaju uzorci sinusnog

napona koji imaju najveće amplitude napona, odnosno koji su u blizini  $\pm \pi / 2$ , što je očekivano,

- određena je merna nesigurnost vrednosti fazne razlike koja je izračunata primenom algoritma MSAL na uzorke 19 perioda signala. U toj mernoj nesigurnosti ulazni podaci su merne nesigurnosti uzoraka signala,

- određena je proširena merna nesigurnost rezultata za faznu razliku. Bias rezultata je izražen u proširenoj mernoj nesigurnosti [GUM, tačka F.2.4.5.], [4.7]. Uzeto je aproksimativno da je srednja vrednost rezultata za faznu razliku određena primenom algoritama MSAL4 i MSAL5, vrednost bez biasa. U odnosu na tu vrednost određena je vrednost biasa za rezultate za faznu razliku dobijene kada su dodatni signali fazno pomereni za proizvoljan broj uzoraka.

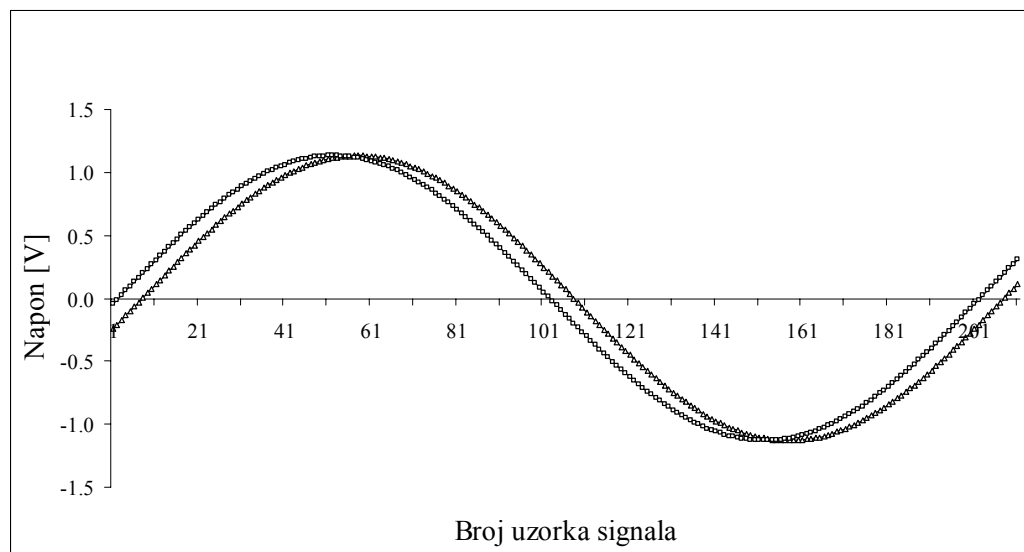
Najmanja merna nesigurnost vrednosti fazne razlike koja je izračunata primenom algoritma MSAL na uzorke signala je kada je vrednost faznog pomeraja dodatnih signala bliska  $\pi / 2$ .

- ***Validacija***

Rezultati dobijeni koristeći dve različite metode merenja fazne razlike između dva sinusna napona, i to: 1) sistem za uzorkovanje signala uz primenu algoritma MSAL i 2) etalon tip SD1000, upoređeni su i izračunat je broj  $E_n = 0,015 < 1$ , što pokazuje ekvivalentnost rezultata određivanja fazne razlike.

## 4.3 Primer sa 200 uzoraka u periodi signala

Kao primer za broj uzoraka u periodi signala koji je deljiv sa 4 data su dva realna sinusna signala učestanosti 50 Hz koji su uzorkovani sa učestanošću 10 kHz. U tom slučaju je broj uzoraka u periodi svakog signala 200. Uzorci su uzeti na jednakom rastojanju jedan od drugog (engl. equidistantly) i prikazani na slici 4.3.1.



Slika 4.3.1 Uzorci dva realna sinusna signala učestanosti 50 Hz, fazna razlika  $10^\circ$ , broj uzoraka u periodi po 200.

U ovom primeru dati su rezultati za faznu razliku dobijeni primenom algoritma MSAL i algoritama UQDE, 3PSF, 4PSF, 7PSF na iste uzorke signala, u cilju poređenja.

### ***Primena algoritma MSAL na broj uzoraka koji odgovara celom broju perioda signala***

U tabeli 4.3.1 date su vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  između dva realna sinusna signala koje su određene primenom algoritama UQDE50, MSAL50, 3PSF, 4PSF i 7PSF na uzorke dva sinusna signala sa po 200 uzoraka u periodi signala.

Tabela 4.3.1 Vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  između dva realna sinusna signala određeni primenom algoritama UQDE50, MSAL50, 3PSF, 4PSF i 7PSF; broj uzoraka u periodu signala 200.

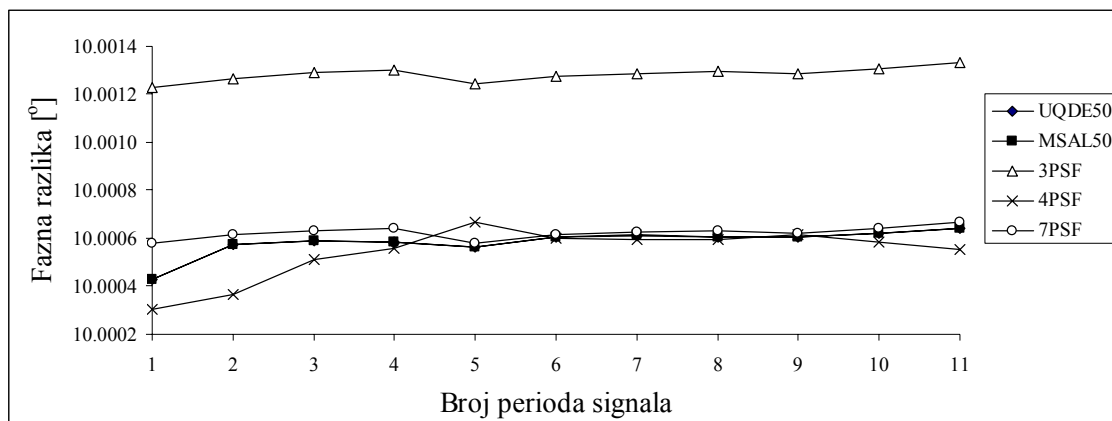
Broj uzoraka	broj perioda	UQDE50, MSAL50 $\varphi_{10}$ [°]	3PSF $\varphi_{10}$ [°]	4PSF $\varphi_{10}$ [°]	7PSF $\varphi_{10}$ [°]	MSAL50-7PSF $\Delta\varphi_{10}$ [°]
128	0,64	10,02142	10,00010	10,00466	10,00084	+0,02058
200	1	10,00043	10,00123	10,00030	10,00058	-0,00015
210	1,05	9,99852	10,00096	10,00051	10,00047	-0,00195
256	1,28	9,99946	10,00045	10,00071	10,00034	-0,00088
300	1,5	10,00691	10,00113	10,00033	10,00050	+0,00641
328	1,64	10,00884	10,00074	10,00021	10,00063	+0,00821
350	1,75	10,00752	10,00064	10,00022	10,00061	+0,00692
390	1,95	10,00186	10,00132	10,00026	10,00065	+0,00121
400	2	10,00057	10,00126	10,00037	10,00061	-0,00004
500	2,50	10,00446	10,00100	10,00051	10,00047	+0,00399
512	2,56	10,00530	10,00114	10,00037	10,00066	+0,00464
600	3	10,00059	10,00129	10,00051	10,00063	-0,00004
800	4	10,00059	10,00130	10,00056	10,00064	-0,00006
1000	5	10,00056	10,00124	10,00067	10,00058	-0,00002
1002	5,01	10,00048	10,00123	10,00066	10,00057	-0,00010
1005	5,025	10,00035	10,00120	10,00067	10,00058	-0,00022
1010	5,05	10,00018	10,00113	10,00068	10,00057	-0,00040
1024	5,12	9,99989	10,00086	10,00065	10,00059	-0,00070
1050	5,25	10,00016	10,00061	10,00063	10,00060	+0,00238
1100	5,5	10,00234	10,00128	10,00057	10,00062	+0,00171
1128	5,64	10,00299	10,00081	10,00060	10,00061	+0,00209
1150	5,75	10,00270	10,00061	10,00062	10,00060	+0,00041
1190	5,95	10,00102	10,00126	10,00060	10,00061	+0,00041
1200	6	10,00061	10,00127	10,00060	10,00061	-0,00001
1400	7	10,00061	10,00129	10,0006	10,00063	-0,00001
1600	8	10,00061	10,00129	10,0006	10,00063	-0,00003
1800	9	10,00060	10,00128	10,00062	10,00062	-0,00002
2000	10	10,00062	10,00130	10,00059	10,00064	-0,00002
2200	11	10,00064	10,00133	10,00055	10,00067	-0,00003
2205	11,025	10,00054	10,00129	10,00055	10,00066	-0,00012
2210	11,05	10,00046	10,00122	10,00057	10,00065	-0,00020
2225	11,125	10,00032	10,00092	10,00058	10,00065	-0,00033
2240	11,2	10,00035	10,00068	10,00059	10,00065	-0,00031
2250	11,25	10,00045	10,00066	10,00059	10,00065	-0,00020
2280	11,4	10,00105	10,00117	10,00055	10,00067	-0,00038
2300	11,5	10,00149	10,00134	10,00054	10,00067	-0,00082
2328	11,64	10,00181	10,00088	10,00055	10,00068	-0,00114
2350	11,75	10,00168	10,00068	10,00056	10,00067	-0,00101
2400	12	10,00063	10,00132	10,00058	10,00066	-0,00003
8192	40,96	10,00071	10,00133	10,00063	10,00069	+0,00002

Oznakama UQDE50 i MSAL50 u tabeli 4.3.1 obeleženi su rezultati za faznu razliku dobijeni kada su dodatni signali u primeni algoritama UQDE i MSAL pomereni za 50 uzoraka u odnosu na originalne signale, što odgovara faznom pomeraju od  $\pi/2$ .

Ukoliko se u formulu za algoritam MSAL umesto celih vrednosti 50 i 10000 uvrste vrednosti izmerene frekvencmetrom za učestanost signala 50,00336 Hz i učestanost uzorkovanja 10000,008 Hz dobiju se vrednosti fazne razlike koje se od vrednosti MSAL50 navedene u tabeli 4.3.1 razlikuju za  $5 \cdot 10^{-8}^\circ$ .

U poslednjoj koloni tabele 4.3.1 data je vrednost razlike rezultata za faznu razliku dobijenih primenom algoritama MSAL50 i 7PSF.

Na slici 4.3.2 prikazane su vrednosti fazne razlike iz tabele 4.3.1 određene primenom algoritama na ceo broj perioda signala. Sa slike 4.3.2 je očigledno da su rezultati za faznu razliku dobijeni koristeći algoritme UQDE50 i MSAL50 jednaki i da odstupaju od rezultata za faznu razliku dobijenih koristeći algoritam 7PSF najviše za  $0,00015^\circ$ . Vrednosti za faznu razliku dobijene primenom algoritma 3PSF pokazuju necentriranost (bias) i odstupaju od vrednosti dobijenih primenom algoritma 7PSF za  $0,00066^\circ$ . Vrednosti za faznu razliku dobijene primenom algoritma 4PSF odstupaju od vrednosti dobijenih primenom algoritma 7PSF za  $0,00001^\circ$  do  $0,00028^\circ$ .



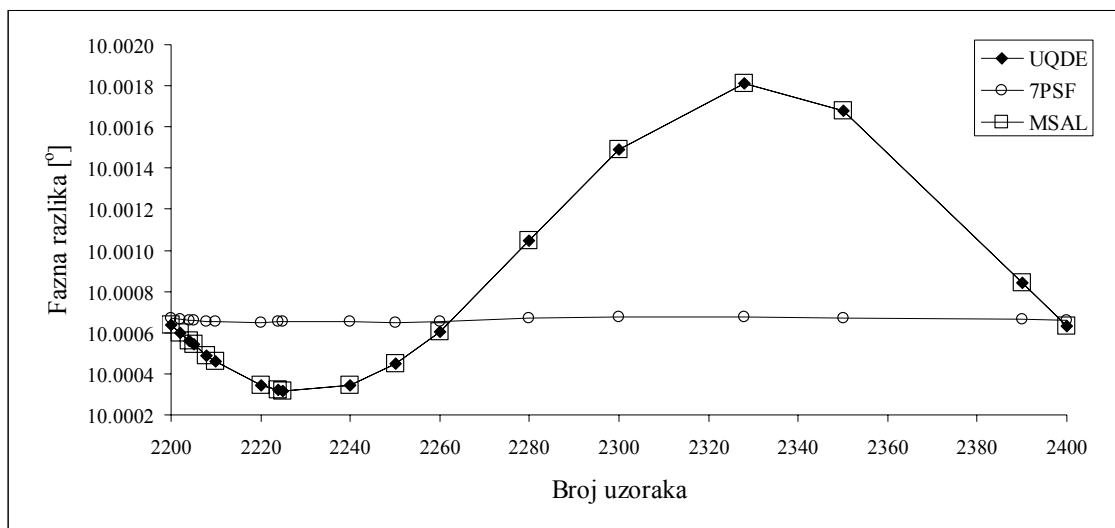
Slika 4.3.2 Vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  između dva realna sinusna signala sa 200 uzoraka u periodu signala u zavisnosti od broja perioda signala, određene primenom algoritama MSAL50, UQDE50, 3PSF, 4PSF i 7PSF na ceo broj perioda signala.

Kada se, u ovom primeru, na uzorke signala primeni algoritam SAL dobije se vrednost fazne razlike  $9,95684^\circ$ .

### ***Primena algoritma MSAL na broj uzoraka koji ne odgovara celom broju perioda signala***

Na slici 4.3.3 prikazane su vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  dobijene primenom algoritama UQDE50, MSAL50 i 7PSF na uzorke dva realna sinusna signala sa 200 uzoraka u periodu signala, kada broj uzoraka signala na koje su primenjeni ne odgovara celom broju perioda signala. Na slici su prikazani rezultati za faznu razliku određeni za delove dvanaeste periode. Vrednosti za faznu razliku prikazane na slici 4.3.3 odstupaju od vrednosti dobijenih primenom navedenih algoritama na broj uzoraka signala koji odgovara celom broju perioda najviše za  $0,00114^\circ$ .

Kada se algoritmi UQDE50 i MSAL50 primene na broj uzoraka dva signala koji ne odgovara celom broju perioda signala, oba algoritma daju iste rezultate za faznu razliku.



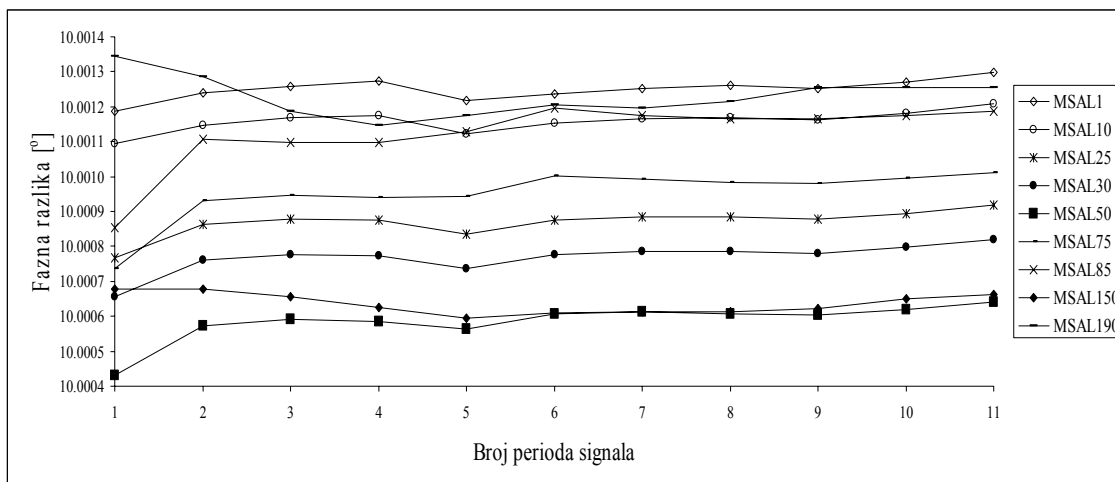
Slika 4.3.3 Vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  između dva realna sinusna signala u zavisnosti od broja uzoraka u dvanaestoj periodi signala; primenjeni algoritmi UQDE50, MSAL50 i 7PSF, broj uzoraka u periodu signala 200.

### ***Primena algoritma MSAL kada dodatni signali imaju proizvoljan fazni pomeraj***

U tabeli 4.3.2 date su vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  dobijene primenom algoritma MSAL na ceo broj perioda dva signala, kada su dodatni signali pomereni za  $r = 1, 6, 10, 15, 25,$



30, 40, 49, 50, 51, 65, 73, 75, 85, 89, 97, 98, 110, 150, 190 uzoraka u odnosu na originalne signale. Deo tih rezultata prikazan je na slici 4.3.4.



Slika 4.3.4 Fazna razlika vrednosti  $10^\circ$  u zavisnosti od broja perioda dva uzorkovana sinusna signala sa 200 uzoraka u periodu signala, kada su dodatni signali fazno pomereni za 1, 10, 25, 30, 50, 75, 85, 150 i 190 uzoraka; primenjen algoritam MSAL.

Iz tabele 4.3.2 se vidi da kada se algoritam MSAL primeni na ceo broj perioda signala iako dodatni signali nisu fazno pomereni za  $\pi/2$  (odnodno 50 uzoraka) u odnosu na originalne signale, dobiju se rezultati koji neznatno odstupaju od vrednosti  $10^\circ$ .

Kada su dodatni signali fazno pomereni u odnosu na originalne signale za vrednost različitou od  $\pi/2$ , ako se primeni formula koju koristi algoritam UQDE dobiju se vrednosti za faznu razliku koje znatno odstupaju od realnih vrednosti, jer je taj algoritam predviđen da se koristi samo kada su dodatni signali fazno pomereni u odnosu na originalne signale za vrednost  $\pi/2$ .

U tabeli 4.3.3 date su vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  između dva realna sinusna signala učestanosti 50 Hz, sa 200 uzoraka u periodu signala dobijeni primenom algoritama UQDE30, MSAL30, MSAL49, MSAL50 i MSAL51 u zavisnosti od broja uzoraka koji ne odgovara celom broju perioda signala na koje su primenjeni.

Tabela 4.3.2 Rezultati za faznu razliku  $10^\circ$  između dva realna sinusna signala, broj uzoraka u periodu signala 200, dobijeni koristeći MSAL algoritam primenjen na ceo broj perioda signala, kada su dodatni signali fazno pomereni za 1, 6, 10, 15, 25, 30, 40, 49, 50, 51, 65, 73, 75, 85, 89, 97, 98, 110, 150, 190 uzoraka.

Perioda	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Fazna razlika/ Algoritam	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]	$\varphi$ [°]
MSAL1	10,00119	10,00124	10,00126	10,00127	10,00122	10,00124	10,00125	10,00126	10,00125	10,00127	10,00130
MSAL6	10,00116	10,00119	10,00122	10,00123	10,00118	10,00120	10,00121	10,00122	10,00121	10,00123	10,00126
MSAL10	10,00109	10,00115	10,00117	10,00118	10,00112	10,00115	10,00116	10,00117	10,00116	10,00118	10,00121
MSAL15	10,00100	10,00107	10,00108	10,00109	10,00104	10,00107	10,00108	10,00109	10,00108	10,00110	10,00112
MSAL25	10,00077	10,00086	10,00088	10,00088	10,00083	10,00087	10,00088	10,00088	10,00088	10,00090	10,00092
MSAL30	10,00066	10,00076	10,00078	10,00077	10,00074	10,00078	10,00079	10,00078	10,00078	10,00080	10,00082
MSAL40	10,00049	10,00061	10,00063	10,00062	10,00059	10,00064	10,00064	10,00064	10,00064	10,00065	10,00067
MSAL49	10,00043	10,00057	10,00059	10,00058	10,00056	10,00060	10,00061	10,00060	10,00060	10,00062	10,00064
MSAL50	10,00043	10,00057	10,00059	10,00059	10,00056	10,00061	10,00061	10,00061	10,00060	10,00062	10,00064
MSAL51	10,00043	10,00058	10,00060	10,00059	10,00057	10,00061	10,00062	10,00061	10,00061	10,00062	10,00064
MSAL 65	10,00057	10,00074	10,00076	10,00075	10,00074	10,00079	10,00079	10,00078	10,00080	10,00080	10,00081
MSAL73	10,00071	10,00089	10,00091	10,00090	10,00090	10,00096	10,00095	10,00094	10,00094	10,00095	10,00097
MSAL75	10,00074	10,00093	10,00095	10,00094	10,00094	10,00100	10,00099	10,00098	10,00098	10,00100	10,00101
MSAL85	10,00085	10,00111	10,00110	10,00110	10,00113	10,00120	10,00117	10,00117	10,00116	10,00117	10,00119
MSAL89	10,00086	10,00116	10,00112	10,00113	10,00118	10,00126	10,00122	10,00122	10,00122	10,00122	10,00123
MSAL97	10,00054	10,00118	10,00089	10,00093	10,00123	10,00146	10,00127	10,00128	10,00130	10,00123	10,00120
MSAL98	10,00028	10,00115	10,00071	10,00076	10,00122	10,00156	10,00127	10,00129	10,00132	10,00120	10,00115
MSAL110	10,00124	10,00120	10,00129	10,00128	10,00115	10,00111	10,00118	10,00117	10,00115	10,00121	10,00125
MSAL150	10,00068	10,00068	10,00066	10,00063	10,00059	10,00061	10,00061	10,00061	10,00062	10,00065	10,00066
MSAL190	10,00134	10,00129	10,00119	10,00115	10,00118	10,00120	10,00120	10,00122	10,00126	10,00126	10,00125

Tabela 4.3.3 Vrednosti fazne razlike  $10^\circ$  između dva realna sinusna signala sa 200 uzoraka u periodu signala, u zavisnosti od broja uzoraka koji ne odgovara celom broju perioda signala; primenjeni algoritmi UQDE30, MSAL30, MSAL49 i MSAL51.

Broj uzoraka	broj perioda	UQDE30 $\varphi [^\circ]$	MSAL30 $\varphi [^\circ]$	MSAL49 $\varphi [^\circ]$	MSAL51 $\varphi [^\circ]$
128	0,64	7,78352	9,58959	9,97060	10,07473
210	1,05	8,15407	10,04299	9,96292	10,00555
256	1,28	7,59127	9,35419	9,96292	10,03547
300	1,5	8,11951	10,00072	10,00654	10,00730
328	1,64	7,98474	9,83585	9,98896	10,02957
350	1,75	7,75419	9,55368	9,97924	10,03569
390	1,95	8,03571	9,89821	10,00035	10,00289
512	2,56	8,13136	10,01521	10,00168	10,00931
1010	5,05	8,12654	10,00932	9,99888	10,00165
1024	5,12	8,09064	9,96541	9,99475	10,00529
1050	5,25	7,99141	9,84401	9,99070	10,00955
1100	5,5	8,11957	10,00079	10,00223	10,00244
1128	5,64	8,07955	9,95185	9,99719	10,00902
1150	5,75	8,00453	9,86007	9,99408	10,01125
1190	5,95	8,09198	9,96704	10,00053	10,00135
8192	40,96	8,11669	9,99727	10,00068	10,00073

Iz tabele 4.3.3 je jasno da kada se navedeni algoritmi primene na broj uzoraka signala koji ne odgovara celom broju perioda signala, primena formule UQDE30 daje rezultate koji odstupaju oko  $2^\circ$  a algoritam MSAL30 daje rezultate koji odstupaju do  $0,7^\circ$  u odnosu na rezultate dobijene primenom algoritama na ceo broj perioda signala.

U tabeli 4.3.4 dati su rezultati za faznu razliku  $10^\circ$  dobijeni primenom algoritma MSAL na 19 perioda dva signala u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala, i izračunate vrednosti necentriranosti (biasa) u odnosu na vrednost fazne razlike koja odgovara  $r = 50$  uzoraka. Vrednosti biasa u tabeli su najveće kada je fazni pomeraj blizak vrednostima  $180^\circ$  i  $360^\circ$ .

S obzirom da je vrednost za faznu razliku dobijena primenom algoritma 7PSF skoro identična vrednosti rezultata za faznu razliku dobijenih primenom algoritma MSAL50, sledi da su vrednosti biasa skoro identične razlici  $\varphi_{\text{MSAL}} - \varphi_{\text{7PSF}}$ .

Tabela 4.3.4 Rezultati za faznu razliku  $10^\circ$  između dva napona određeni primenom algoritma MSAL na 19 perioda napona, u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala; primer sa 200 uzoraka u periodu signala.

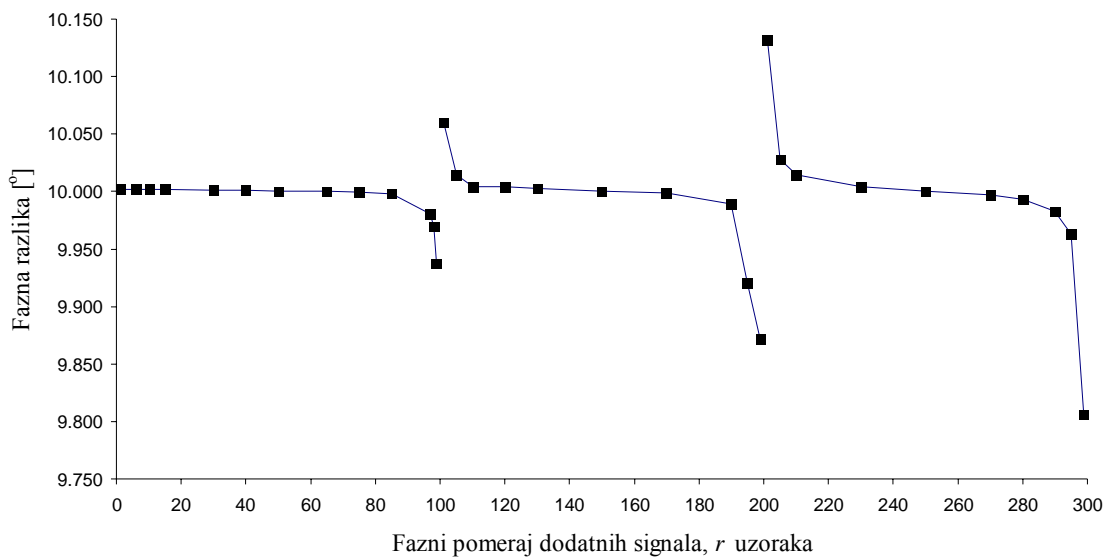
Fazno kašnjenje dodatnih signala,		Oznaka algoritma	MSAL,	Bias	Razlika
$r$ [uzorak]	$[\circ]$		fazna razlika	rezultata	MSAL-7PSF
			$\varphi$ $[\circ]$	$\delta$ $[\circ]$	$\varphi_{\text{MSAL}} - \varphi_{\text{7PSF}}$ $[\circ]$
1	2	MSAL1	10,0019	0,0013	0,0013
6	11	MSAL6	10,0019	0,0013	0,0012
10	18	MSAL10	10,0018	0,0012	0,0012
15	27	MSAL15	10,0017	0,0011	0,0011
30	54	MSAL30	10,0014	0,0008	0,0008
40	72	MSAL40	10,0009	0,0003	0,0003
50	90	<b>MSAL50</b>	<b>10,0006</b>	<b>REF</b>	-0,00002
65	117	MSAL65	10,0001	-0,0005	-0,0005
75	135	MSAL75	9,9995	-0,0012	-0,0012
85	153	MSAL85	9,9978	-0,0029	-0,0029
97	175	MSAL97	9,9803	-0,0204	-0,0204
98	176	MSAL98	9,9694	-0,0313	-0,0313
99	178	MSAL99	9,9367	-0,0639	-0,0639
100	180	-	-	-	-
101	182	MSAL101	10,0599	0,0592	0,0592
105	189	MSAL105	10,0148	0,0142	0,0142
110	198	MSAL110	10,0045	0,0038	0,0038
120	216	MSAL120	10,0044	0,0038	0,0038
130	234	MSAL130	10,0028	0,0021	0,0021
150	270	<b>MSAL150</b>	<b>10,0006</b>	<b>0,0000</b>	-0,00001
170	306	MSAL170	9,9984	-0,0022	-0,0023
190	342	MSAL190	9,9893	-0,0113	-0,0114
195	351	MSAL195	9,9201	-0,0805	-0,0805
199	358	MSAL199	9,8716	-0,1290	-0,1290
200	360	-	-	-	-
201	362	MSAL201	10,1322	0,1315	0,1315
205	369	MSAL205	10,0277	0,0271	0,0271
210	378	MSAL210	10,0144	0,0138	0,0138
230	414	MSAL230	10,0042	0,0036	0,0036
250	450	<b>MSAL250</b>	<b>10,0006</b>	<b>0,0000</b>	-0,00002
270	486	MSAL270	9,9969	-0,0037	-0,0038
280	504	MSAL280	9,9932	-0,0074	-0,0074
290	522	MSAL290	9,9830	-0,0176	-0,0177
295	531	MSAL295	9,9632	-0,0375	-0,0375
299	538	MSAL299	9,8065	-0,1942	-0,1942
300	540	-	-	-	-

Napomene uz tabelu:

- 1) Rezultat za faznu razliku dobijen primenom algoritma 7PSF na 19 perioda signala je  $10,0006519^\circ$ .

- 2) U periodi jednog signala ima 200 uzoraka; rezultati za faznu razliku dobijeni primenom algoritma MSAL su dati za 19 perioda signala;
- 3) za uvedeno fazno kašnjenje dodatnih signala  $r = 100$  uzoraka (odgovara  $\pi$ ),  $r = 200$  uzoraka (odgovara  $2\pi$ ) i  $r = 300$  uzoraka (odgovara  $3\pi$ ) algoritam MSAL nije primenljiv.

Na slici 4.3.5 prikazani su rezultati za faznu razliku  $10^\circ$  između dva realna sinusna napona određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala prema tabeli 4.3.4.



Slika 4.3.5 Rezultati za faznu razliku  $10^\circ$  između dva realna sinusna napona određeni primenom algoritma MSAL u zavisnosti od uvedenog faznog kašnjenja dodatnih signala; primer sa 200 uzoraka u periodu signala.

Na slici 4.3.5 se vidi da kada je potrebno dobiti najtačnije rezultate za faznu razliku između dva signala koriste se pomoćni signali sa faznim pomerajem jednakim do 80 uzoraka signala. Vrednosti fazne razlike koje se dobiju za druge pomeraje dodatnih signala prikazane su na slici radi ilustracije.

### **Zaključak**

U ovom poglavlju prikazan je primer određivanja fazne razlike primenom algoritma MSAL na uzorke dva realna sinusna napona, kada je u periodu signala uzorkovano 200 uzoraka, tako da je broj uzoraka u periodu signala deljiv sa 4.

Bias vrednosti fazne razlike je određen u odnosu na vrednost dobijenu koristeći algoritam MSAL50. Najveća vrednost tako određenog biasa u opsegu signala  $(0, \pi)$  je  $0,064^\circ$ .

Iz tabele 4.3.4 se vidi da je razlika između najveće i najmanje vrednosti fazne razlike dobijene primenom algoritma MSAL jednaka:

- $0,064^\circ$  ako dodatni signali imaju fazni pomeraj u odnosu na originalne signale za ugao u opsegu  $(0, \pi)$ , odnosno za broj uzoraka  $r$  od 1 do 99;
- $0,129^\circ$  ako dodatni signali imaju fazni pomeraj u odnosu na originalne signale za ugao u opsegu  $(\pi, 2\pi)$  odnosno za broj uzoraka  $r$  od 101 do 199, i
- $0,194^\circ$  ako dodatni signali imaju fazni pomeraj u odnosu na originalne signale za ugao u opsegu  $(2\pi, 3\pi)$  odnosno za broj uzoraka  $r$  od 201 do 299.

Kada se ne zahteva veća tačnost određivanja fazne razlike između dva signala koristeći algoritam MSAL, onda se u ovom primeru algoritam može primeniti:

- bez obzira na to koliko iznosi izabrani pomeraj dodatnih signala, i
- bez obzira da li se primenjuje na ceo broj perioda signala ili na broj uzoraka koji ne odgovara celom broju perioda signala.

Kada se zahteva veća tačnost određivanja fazne razlike između dva signala koristeći algoritam MSAL, onda se:

- bira fazni pomeraj dodatnih signala u blizini vrednosti  $\pi/2$ , ili
- vrši se korekcija za vrednost biasa rezultata.

## 4.4 Primeri kada količnik učestanosti uzorkovanja i učestanosti signala nije ceo broj

Uzorkovanje realnih signala nikada nije idealno. U praksi se događa da količnik učestanosti uzorkovanja i učestanosti signala nije ceo broj. U ovom poglavlju razmatrana je primena formule MSAL na takve primere uzorkovanja.

Data su dva primera uzorkovanja dva realna sinusna signala:

- 1) učestanost signala 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz i
- 2) učestanost signala 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz.

Uzorci su uzeti na jednakom rastojanju jedan od drugog. U ovim slučajevima uzorkovanja, u susjednim periodama signala pojavljuje se broj uzoraka koji se razlikuje za 1, što se vidi na slici 4.4.1.

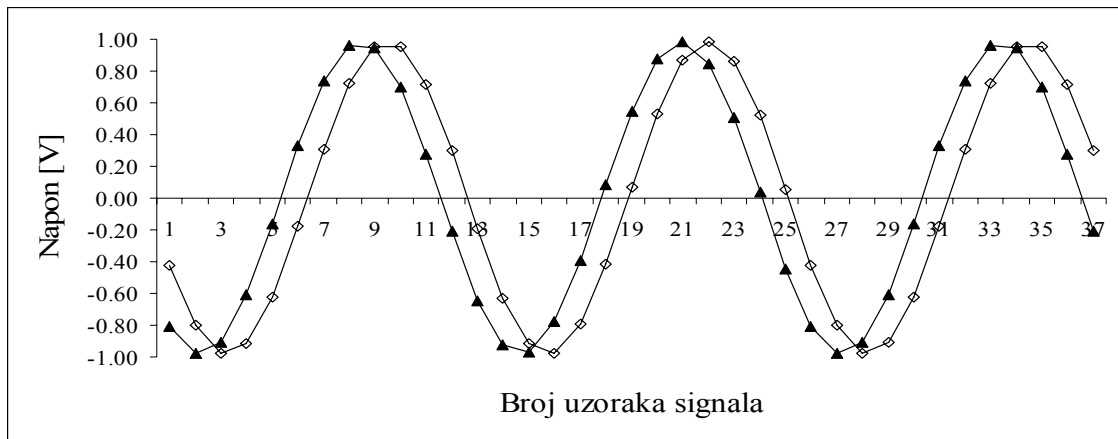
Fazna razlika između dva navedena signala može da se izračuna primenom formule za MSAL algoritam (3.2.7) iz poglavlja 3, na kvazikoherentno uzorkovanje koje se realizuje tako da se algoritam primenjuje na veliki broj perioda koji odgovara približno celom broju perioda signala.

Drugi način određivanja fazne razlike dva navedena signala je da se u formulu za MSAL algoritam (3.2.7) iz poglavlja 3, uvrsti vrednost količnika učestanosti  $f_s/f_0$  umesto količnika  $p/q$ , pri čemu su  $f_s$  i  $f_0$  vrednosti učestanosti izmerene frekvencmetrom.

### 1) Primer: učestanost signala 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz

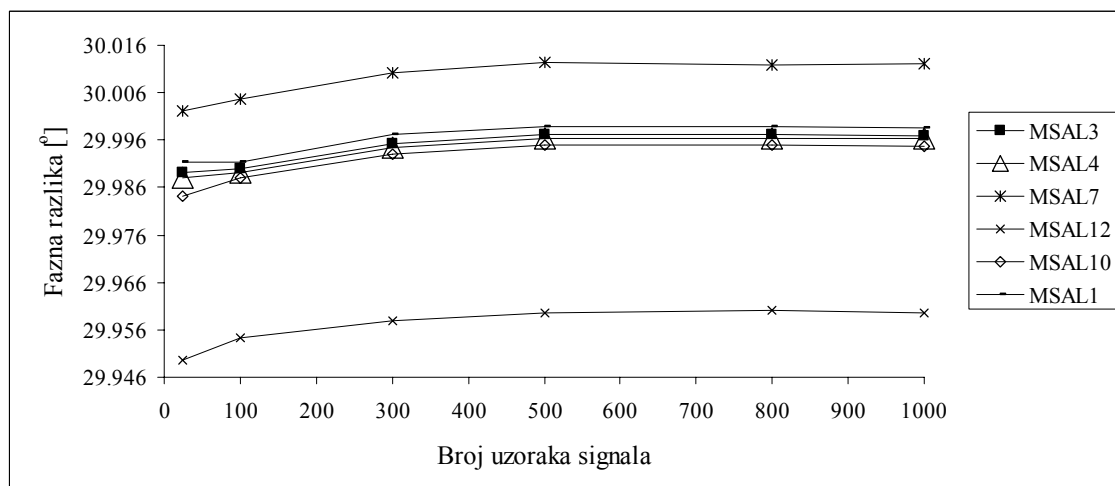
Na slici 4.4.1 prikazani su uzorci dva realna sinusna signala učestanosti  $f_0 = 800$  Hz, fazna razlika  $30^\circ$  dobijeni uzorkovanjem sa učestanošću  $f_s = 10$  kHz. Vrednost količnika učestanosti uzorkovanja i učestanosti signala je  $f_s/f_0 = 12,5$ .

Na slici je očigledno da je uzorkovanjem signala dobijeno u periodama signala 12 i 13 uzoraka. Broj 12 uzoraka u periodu signala deljiv je sa 4, odnosno faznom pomeraju  $\pi/2$  odgovaraju 3 uzorka signala. Kada je 13 uzoraka u periodu signala onda faznom pomeraju  $\pi/2$  odgovara matematički  $13/4 = 3,25$  uzoraka signala.



Slika 4.4.1 Uzorci dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, fazna razlika  $30^\circ$ , učestanost uzorkovanja 10 kHz.

Na slici 4.4.2 prikazani su rezultati određivanja fazne razlike između dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, fazna razlika  $30^\circ$ , učestanost uzorkovanja 10 kHz, dobijeni koristeći formulu (3.2.7) u koju se uvrsti stvarna vrednost količnika učestanosti  $f_s/f_0$  umesto količnika  $p/q$ , kada su dodatni signali u algoritmima MSAL1, MSAL3, MSAL4, MSAL7, MSAL10, MSAL12 pomereni u odnosu na originalne signale za 1, 3, 4, 7, 10, 12 uzoraka, respektivno.



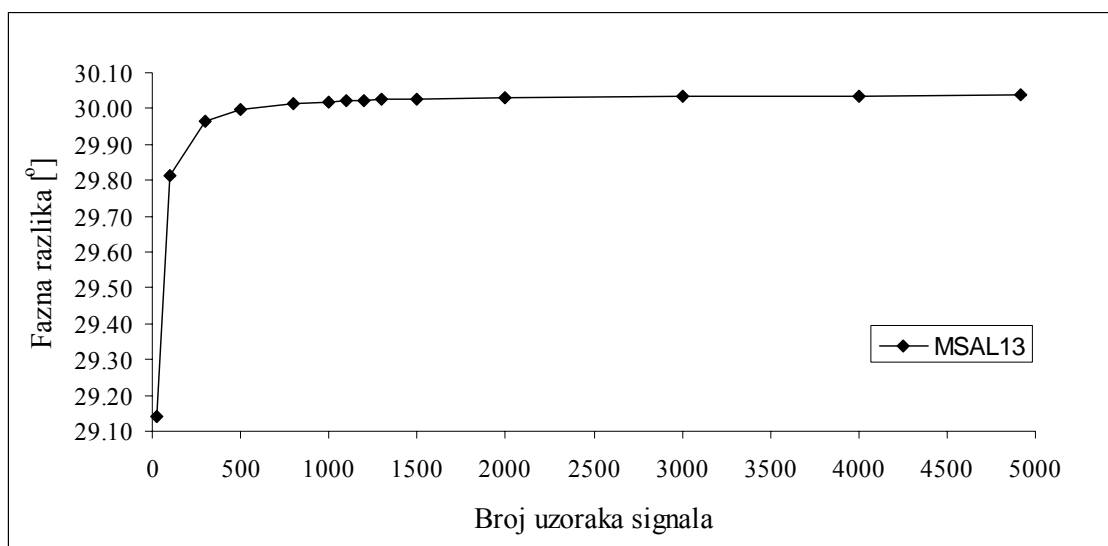
Slika 4.4.2 Vrednost fazne razlike  $30^\circ$  između dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka signala dobijena koristeći algoritme MSAL1, MSAL3, MSAL4, MSAL7, MSAL10, MSAL12.

Najveća vrednost odstupanja rezultata za faznu razliku od vrednosti  $30^\circ$  na slici 4.4.2 je  $0,05^\circ$  za MSAL12 (fazni pomeraj uzoraka dodatnih signala je blizu vrednosti



2 $\pi$ ). Najmanja vrednost odstupanja rezultata za faznu razliku od vrednosti 30° na slici 4.4.2 je 0,003° za 500 i više uzoraka signala za MSAL3 i MSAL4 (fazni pomeraj uzoraka dodatnih signala u odnosu na originalne signale je blizu vrednosti  $\pi/2$ ).

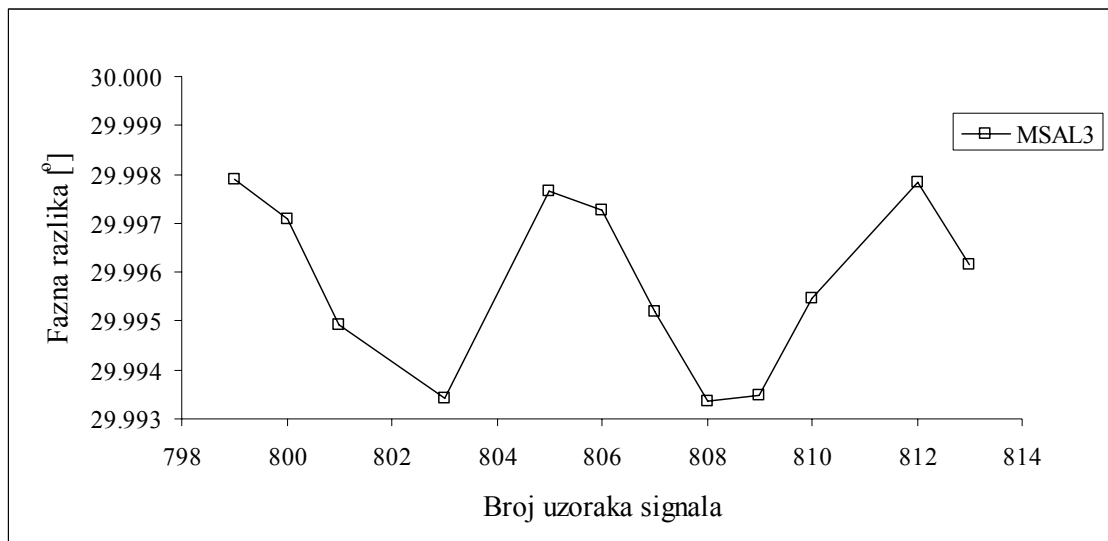
Rezultati za faznu razliku između dva signala dobijeni primenom algoritma MSAL13 (fazni pomeraj uzoraka dodatnih signala je blizu vrednosti 2 $\pi$ ) prikazani su posebno na slici 4.4.3 iz koje se vidi da je najveća vrednost odstupanja rezultata za faznu razliku od vrednosti 30° dobijena za 25 uzoraka i iznosi 0,86°, a kada se algoritam primeni na više od 300 uzoraka to odstupanje je manje od 0,04°.



Slika 4.4.3 Vrednost fazne razlike 30° između dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka signala dobijena primenom algoritma MSAL13.

Na slici 4.4.4 prikazana je zavisnost vrednosti fazne razlike 30° između dva sinusna signala učestanosti 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od proizvoljnog broja uzoraka signala (između 799 do 813), kada su dodatni signali fazno pomereni za 3 uzorka (fazni pomeraj uzoraka dodatnih signala je blizu vrednosti  $\pi/2$ ) u odnosu na originalne signale.

Sa slike 4.4.4 se vidi da najveća vrednost odstupanja rezultata za faznu razliku od vrednosti 30° iznosi -0,007°.



Slika 4.4.4 Vrednost fazne razlike  $30^\circ$  između dva realna sinusna signala učestanosti 800 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od bilo kog broja uzoraka signala dobijena primenom algoritma MSAL3.

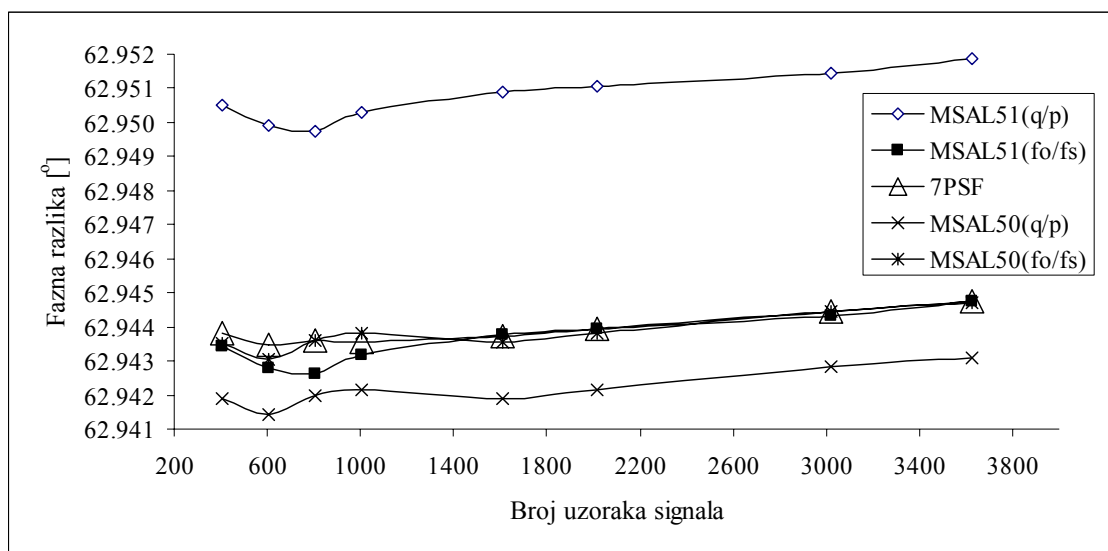
## 2) Primer: učestanost signala 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz

Uzorci dva sinusna signala učestanosti  $f_0 = 49,623$  Hz (izmereno frekvencometrom), amplituda 1,2 V, fazna razlika između signala  $63^\circ$ , dobijeni su uzorkovanjem sa učestanošću  $f_s = 10$  kHz. Broj tako dobijenih uzoraka u periodama signala je 201 i 202, naizmenično. Količnik  $f_s/f_0 = 201,52$ . Kada je broj uzoraka signala u periodu 201, onda je matematički  $201/4 = 50,25$  uzoraka. Kada je broj uzoraka signala u periodu 202, onda je matematički  $202/4 = 50,5$  uzoraka.

### *Primena algoritma MSAL na približno ceo broj perioda signala*

Na slici 4.4.5 prikazane su vrednosti fazne razlike  $63^\circ$  između dva navedena sinusna signala određene primenom algoritama 7PSF, MSAL50(q/p), MSAL50(fo/fs) MSAL51(q/p) i MSAL51(fo/fs) na broj uzoraka 403, 605, 806, 1008, 1613, 2016, 3023 i 3628 uzoraka, koji odgovaraju približno sledećem broju perioda napona: 2, 3, 4, 5, 8, 10, 15 i 18. Oznaka MSAL50 (q/p) označava da je u formuli za MSAL korišćen

količnik broja perioda i broja uzoraka signala bez poznavanja učestanosti signala i učestanosti uzorkovanja. Oznaka MSAL50(fo/fs) označava da je u formuli za MSAL korišćen količnik učestanosti signala i učestanosti uzorkovanja umesto količnika q/p. Oznaka MSAL50 znači da se koristi algoritam MSAL kada dodatni signali imaju fazni pomeraj u odnosu na originalne signale, koji odgovara 50 uzoraka.



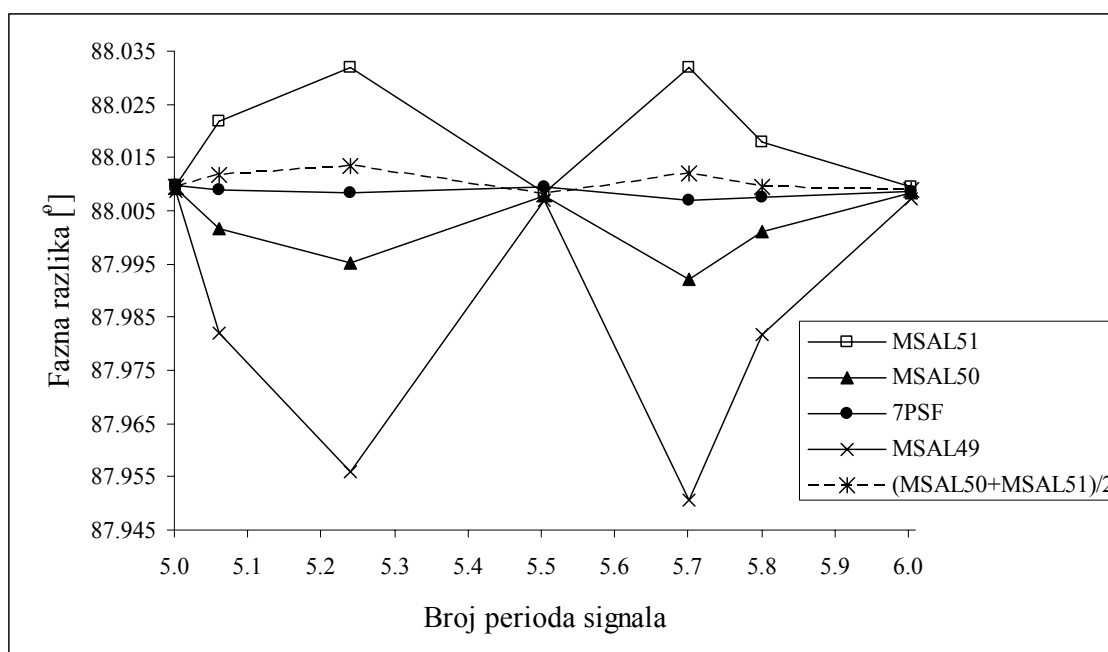
Slika 4.4.5 Vrednosti fazne razlike  $63^\circ$  između dva realna sinusna signala učestanosti 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka, dobijene primenom algoritama 7PSF, MSAL50(q/p), MSAL50(fo/fs), MSAL51(q/p) i MSAL51(fo/fs).

Sa slike 4.4.5 je očigledno da su rezultati dobijeni primenom algoritama MSAL50(fo/fs) i MSAL51(fo/fs) na broj uzoraka koji je jednak približno celom broju perioda signala, približno jednaki vrednostima dobijenim primenom algoritma 7PSF na iste uzorke signala. Razlika vrednosti dobijenih primenom algoritama MSAL50(q/p) i MSAL50(fo/fs) je  $1,6 \text{ m}^\circ$ , a primenom MSAL51(q/p) i MSAL51(fo/fs) je  $7,1 \text{ m}^\circ$ .

### ***Primena algoritma MSAL na bilo koji broj uzoraka signala***

Na slici 4.4.6 prikazane su vrednosti fazne razlike  $88^\circ$  između dva sinusna signala učestanosti 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, za izabrani proizvoljan broj uzoraka u šestoj periodi signala (1008 uzoraka  $\approx$  5 perioda, 1210 uzoraka  $\approx$  6 perioda), dobijene primenom algoritama MSAL49, MSAL50, MSAL51 i 7PSF.

Sa slike 4.4.6 je očigledno da vrednosti fazne razlike dobijene koristeći algoritam MSAL50 odstupaju  $\leq 0,015^\circ$  od vrednosti fazne razlike izračunate primenom algoritma 7PSF, a da u tačkama koje odgovaraju približno celom broju perioda signala odstupaju  $\leq 0,0004^\circ$ . Između vrednosti fazne razlike dobijenih koristeći formulu  $(MSAL50 + MSAL51)/2$  i vrednosti dobijenih primenom algoritma 7PSF, najveća razlika vrednosti je  $0,0053^\circ$ .



Slika 4.4.6 Fazna razlika vrednosti  $88^\circ$  između dva realna sinusna signala učestanosti 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od delova periode signala, dobijena primenom algoritama MSAL i 7PSF.

### ***Primena algoritma MSAL kada dodatni signali imaju proizvoljan fazni pomeraj***

U tabeli 4.4.1 prikazani su rezultati određivanja fazne razlike vrednosti  $63^\circ$  koristeći algoritme 7PSF i MSAL za uvedeno fazno kašnjenje dodatnih signala koje odgovara 5, 10, 15, 20, 51 i 76 uzoraka. Algoritmi su primenjeni na približno ceo broj perioda signala. Algoritam MSAL je primenjen tako da se umesto celobrojne vrednosti  $q/p$  koristi vrednost  $f_0/f_s$ . U tabeli su posebno označena najveća odstupanja dobijenih vrednosti u odnosu na vrednost dobijenu primenom algoritma 7PSF.

Tabela 4.4.1 Vrednosti fazne razlike 63° između dva realna sinusna signala učestanosti 49,623 Hz, učestanost uzorkovanja 10 kHz, u zavisnosti od broja uzoraka signala koji odgovara približno celom broju perioda signala.

	MSAL51 (fo/fs)	MSAL51(fo/fs) -7PSF	MSAL20 (fo/fs)	MSAL20(fo/fs) -7PSF	MSAL15 (fo/fs)	MSAL15(fo/f s) -7PSF
N	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]
403	62,94341	<b>-0,00042</b>	62,94337	<b>-0,00046</b>	62,94269	-0,00114
605	62,94376	0,00031	62,94357	0,00011	62,94873	<b>0,00528</b>
806	62,94261	-0,00098	62,94368	0,00009	62,94277	-0,00082
1008	62,94316	-0,00038	62,94368	0,00014	62,94651	0,00297
1613	62,94376	0,00005	62,94364	-0,00007	62,94732	0,00361
2016	62,94395	0,00003	62,94391	-0,00002	62,94672	0,00280
3023	62,94432	-0,00014	62,94456	0,00010	62,94505	0,00059
3628	62,94474	-0,00001	62,94481	0,00006	62,94608	0,00133

	MSAL10 (fo/fs)	MSAL10(fo/fs) -7PSF	MSAL5 (fo/fs)	MSAL5(fo/fs) -7PSF	MSAL76 (fo/fs)	MSAL76(fo/fs) -7PSF
N	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]	[°]
403	62,94194	-0,00189	62,94120	-0,00264	62,93995	-0,00388
605	62,95445	<b>0,01100</b>	62,96018	<b>0,01672</b>	62,96978	<b>0,02632</b>
806	62,94202	-0,00157	62,94128	-0,00231	62,94005	-0,00354
1008	62,94965	0,00611	62,95279	0,00925	62,95796	0,01443
1613	62,95142	0,00771	62,95553	0,01182	62,96264	0,01893
2016	62,94985	0,00592	62,95300	0,00907	62,95837	0,01444
3023	62,94354	-0,00092	62,94613	0,00167	62,94695	0,00249
3628	62,94748	0,00273	62,94889	0,00414	62,95122	0,00647

Tabela 4.4.2 Razlike između vrednosti fazne razlike 63° koje su određene primenom algoritma MSAL kada se koristi količnik q/p i algoritmom MSAL kada se koristi količnik fo/fs, za bilo koji broj uzoraka signala.

Algoritam	Razlika [°]
MSAL50(q/p) - MSAL50(fo/fs)	0,002
MSAL51(q/p) - MSAL51(fo/fs)	0,007
MSAL76(q/p) - MSAL76(fo/fs)	0,42 do 0,44
MSAL20(q/p) - MSAL20(fo/fs)	0,15 do 0,16
MSAL15(q/p) - MSAL15(fo/fs)	0,16 do 0,17
MSAL10(q/p) - MSAL10(fo/fs)	0,17 do 0,18
MSAL5(q/p) - MSAL5(fo/fs)	0,17 do 0,19

Iz tabele 4.4.2 se vidi da postoji razlika između vrednosti fazne razlike koje su određene algoritmom MSAL kada se koristi količnik q/p i algoritmom MSAL kada se umesto njega koristi količnik fo/fs, koja se kreće do 0,44°.

## 4.5 Poređenje rezultata primene algoritama – zaključak

U tabelama u poglavlju 4 dati su rezultati za faznu razliku koji su dobijeni primenom različitih algoritama na uzorke dva realna sinusna signala u cilju određivanja fazne razlike između dva signala. Uzorkovanje signala je bilo uniformno.

Razmatrani su uzorci dva realna sinusna signala kada je broj uzoraka u periodu signala deljiv sa 4, kada broj uzoraka u periodu signala nije deljiv sa 4 i kada količnik učestanosti uzorkovanja i učestanosti signala nije ceo broj.

U slučajevima kada količnik učestanosti uzorkovanja i učestanosti signala nije ceo broj, u susednim periodama uzorkovanog signala dobije se broj uzoraka koji se razlikuje za 1. Takva situacija je prikazana u primerima poglavlja 4.4, kada u periodama signala ima naizmenično 12 i 13 uzoraka i primeru kada u periodama signala ima naizmenično 201 i 202 uzorka.

Iz rezultata za faznu razliku dobijenih primenom algoritama UQDE, MSAL, 3PSF, 4PSF i 7PSF na uzorke realnih električnih signala niskih učestanosti, zaključuje se sledeće:

- kada se algoritmi UQDE i MSAL primene na bilo koji broj uzoraka dva signala koji zadovoljavaju uslov da je broj uzoraka u periodu signala deljiv sa 4, dobiju se približno isti rezultati za faznu razliku između signala primenom oba algoritma, za slučaj kada su dodatni signali fazno pomereni za  $\pi/2$  u odnosu na originalne signale. Navedeni rezultati su približno jednaki rezultatima dobijenim primenom algoritma 7PSF;
- algoritam MSAL se može koristiti i kada dodatni signali nisu pomereni za  $\pi/2$  u odnosu na originalne signale već za bilo koju vrednost faznog pomeraja (osim  $a\pi$ ,  $a = 0, 1, 2, \dots$ ), ako se proračun fazne razlike odnosi na ceo broj perioda signala; kada broj perioda signala nije ceo broj, MSAL daje necentrirane rezultate za faznu razliku;
- prethodni zaključci važe i za situacije kada se algoritmi UQDE i MSAL primene na uzorke dva signala koji ne zadovoljavaju uslov da je broj uzoraka u periodu signala deljiv sa 4. U tom slučaju, rezultati za faznu razliku dobijeni kao srednja vrednost rezultata dobijenih primenom algoritma MSAL<sub>x</sub> i MSAL<sub>(x+1)</sub> približno su jednaki

rezultatima dobijenim primenom algoritma 7PSF, gde je  $x$  ceo broj uzoraka signala koji odgovara približno vrednosti faznog pomeraja dodatnih signala  $\pi/2$  u odnosu na originalne signale;

- primenom algoritma MSAL za određivanje fazne razlike između dva realna sinusna signala u slučaju kada količnik  $f_s/f_0$  nije ceo broj, zbog čega se uzorkovanjem dobije broj uzoraka signala u susednim periodama koji se razlikuje za 1 uzorak, utvrđeno je da se dobiju zadovoljavajući rezultati za faznu razliku kada se u formuli za MSAL umesto  $q/p$  koristi se vrednost  $f_0/f_s$ .

## Glava 5

### Zaključak

Procena fazne razlike između dva sinusna signala sa aditivnim belim Gausovim šumom razmatrana je u mnogim radovima. Razlog za to je primena u raznim oblastima elektrotehnike, kao što su merenje aktivne i reaktivne električne snage i energije, faktora snage, harmonika električnog napona i struje, određivanja kompleksnog odnosa izlaznog i ulaznog signala mernih pretvarača (delitelji napona i strujni šantovi), analize pojačavača sa povratnom spregom, kola oscilatora i filtera.

Tipični zahtevi za estimator fazne razlike su tačnost procene, brzina dobijanja rezultata i manja kompleksnost algoritma.

Iz uzoraka dva sinusna signala može da se odredi fazna razlika. U disertaciji su opisani različiti postupci uzorkovanja signala. Danas se u Nacionalnim metrološkim institutima koriste analogno-digitalni konvertori sa funkcijom integraljenja (IADC) za dobijanje uzoraka signala. U ovoj disertaciji je za merenje korišćen sistem sa dva IADC.

Postoji mnogo algoritama za određivanje fazne razlike iz uzoraka dva sinusna signala. U disertaciji je detaljnije obrađen najpre algoritam UQDE (engl. unbiased quadrature delay estimator) na osnovu kojeg su izvedeni novi algoritmi nazvani SAL i MSAL. Detaljnije su opisani i algoritmi 3PSF, 4PSF i 7PSF (engl. three, four and seven parameter sinus fitting algorithms) jer su rezultati određivanja fazne razlike dobijeni



primenom algoritma MSAL upoređeni sa rezultatima dobijenim primenom tih algoritama na iste uzorke signala. Dat je pregled i nekih složenijih algoritama za određivanje fazne razlike zasnovanih na Furijeovoj transformaciji, maksimalnoj verodostojnosti i linearnoj predikciji. Od interesa za praktičnu upotrebu su oni algoritmi koji ne zahtevaju obimno izračunavanje.

Novi algoritam MSAL predložen u disertaciji ima za cilj da se smanji složenost izračunavanja a zadrži tačnost algoritma za određivanje fazne razlike iz uzoraka dva sinusna signala sa aditivnim šumom. Algoritam je zasnovan na množenju uzoraka dva originalna sinusna signala sa dodatnim signalima koji predstavljaju fazno pomerene uzorke originalnih signala. Izborom faznog kašnjenja dodatnih signala moguće je odrediti vrednost fazne razlike između dva originalna signala koristeći samo po dva uzorka svakog signala (algoritam nazvan SAL), a koristeći nešto složeniju formulu može da se odredi vrednost fazne razlike sa znatno manjom greškom (algoritam nazvan MSAL).

Simulacije u cilju provere performansi novih algoritama urađene su u Matlabu.

Algoritam SAL, zaključci iz simulacija:

- može se koristiti za brzo određivanje fazne razlike sa greškom  $\leq 1^\circ$ ,
- simulacija određivanja srednje kvadratne greške (*MSE*) fazne razlike koristeći algoritam SAL u zavisnosti od odnosa signal-šum, za konkretnu vrednost greške faznog pomeraja dodatnih signala, pokazuje da je procena *MSE* u tom slučaju necentrirana (ima bias),
- simulacija određivanja *MSE* fazne razlike u zavisnosti od fazne razlike za konkretnu vrednost greške faznog pomeraja dodatnih signala i odnos signal-šum, pokazuje da je procena *MSE* necentrirana (ima bias).

Algoritam MSAL, zaključci iz simulacija:

- simulacija određivanja greške fazne razlike u zavisnosti od greške pomeraja dodatnih signala, pokazuje da je greška fazne razlike jednaka nuli,
- simulacija određivanja *MSE* fazne razlike koristeći algoritam MSAL u zavisnosti od odnosa signal-šum, za konkretnu vrednost greške faznog pomeraja dodatnih signala, pokazuje da je procena *MSE* centrirana (nema bias) kada je ukupan broj uzoraka signala koji se koriste za određivanje fazne razlike jednak proizvodu celog broja perioda signala i broja uzoraka po periodu,

- simulacija određivanja *MSE* fazne razlike koristeći algoritam MSAL u zavisnosti od odnosa signal-šum za konkretnu vrednost greške faznog pomeraja dodatnih signala, za vrednost broja perioda signala, koji nije ceo broj, pokazuje da je procena *MSE* necentrirana (ima bias).

Zatim su novi algoritmi primenjeni na određivanje fazne razlike iz uzoraka realnih električnih signala. Upoređeni su dobijeni rezultati za faznu razliku koristeći algoritme SAL i MSAL sa rezultatima dobijenim primenom algoritama QDE, UQDE, 3PSF, 4PSF i 7PSF na iste uzorke signala.

Algoritmi su primenjeni na realne električne signale niskih učestanosti jer je takva oprema bila na raspolaganju.

Algoritam MSAL, zaključci iz rezultata primene na uzorke realnih električnih signala niskih učestanosti:

- kada se algoritmi UQDE i MSAL primene na bilo koji broj uzoraka dva signala koji zadovoljavaju uslov da je broj uzoraka u periodu signala deljiv sa 4, dobiju se približno isti rezultati za faznu razliku primenom oba algoritma, u slučaju kada su dodatni signali fazno pomereni za  $\pi/2$  u odnosu na originalne signale. Kada broj perioda signala nije ceo broj, rezultati za faznu razliku imaju bias;

- algoritam MSAL može da se koristi i kada dodatni signali nisu fazno pomereni za  $\pi/2$  u odnosu na originalne signale, već za bilo koju vrednost (odnosno broj uzoraka signala); u tom slučaju kada se proračun fazne razlike odnosi na ceo broj perioda signala rezultati imaju neznatan bias.

Merna nesigurnost rezultata određivanja fazne razlike postupkom u kojem se koristi algoritam MSAL određena je primenom međunarodnog Uputstva za određivanje merne nesigurnosti (GUM).

Rezultati za faznu razliku dobijeni postupkom u kojem je primenjen algoritam MSAL na uzorke realnih signala upoređeni su sa rezultatima za faznu razliku dobijenim merenjem etalom koji ima metrološku sledivost. Izračunat je  $E_n$  broj koji je zadovoljio kriterijum  $E_n \leq 1$ , i na taj način je validovan algoritam.

Za primenu algoritma MSAL nije potrebno poznavati učestanost signala i učestanost uzorkovanja. U budućem radu može se proveriti primena algoritma MSAL za određivanje fazne razlike između realnih sinusnih signala visokih učestanosti.

## Literatura

- [1.1] BIPM *Calibration and Measurement Capabilities of National Metrology Institutes* <http://kcdb.bipm.org/AppendixC/default.asp>
- [1.2] SRPS EN 8000-6:2010. Veličine i jedinice — Deo 6: Elektromagnetizam.
- [1.3] *The Measurement, Instrumentation and Sensors Handbook*, editor-in-Chief John Webster, CRC Press, IEEE Press, 1999., poglavlje 41.
- [1.4] H. Buckingham, E. M. Price „*Principles of electrical measurements*“, The English Universities Press Limited, London, 1966. poglavlje 11.
- [1.5] Alan S. Morris „*Measurement and Instrumentation Principles*“, izdavač Butterworth - Heinemann, Oxford, USA, ISBN 0 7506 5081 8.
- [1.6] Ilya Budovsky „*Measurement of Phase Angle Errors of Precision Current Shunts in the Frequency Range From 40 Hz to 200 kHz*“, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 56, no. 2, str. 284–288, april 2007, DOI 10.1109/ TIM.2007.891117.
- [1.7] Kes Tam „*Current-Transformer Phase-Shift Compensation and Calibration*“, Texas Instrument, Application Report, 2001., [www.ti.com](http://www.ti.com)
- [1.8] JCGM 200:2008 *International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms* (VIM), BIPM, Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM), 2008.
- [1.9] ISO/IEC Guide 99-12:2007 *International Vocabulary of Metrology - Basic and General Concepts and Associated Terms*, VIM.

- [1.10] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, *Međunarodni rečnik osnovnih i opštih termina u metrologiji*, prevod Savezni zavod za mere i dragocene metale, Beograd, 1996.
- [1.11] Predrag Pejović „*Princip rada i primena osciloskopa*” – priručnik za rad u laboratoriji, Beograd, 1999.
- [1.12] Gabriele D’Antona, Alessandro Ferrero „*Digital Signal Processing for Measurement Systems, Theory and Applications*”, 2006 Springer Science+Business Media, Inc., USA, ISBN-10: 0-387-24966-4, ISBN-13: 978-0387-24966-7, e-ISBN 0-387-28666-7.
- [1.13] N. Oldham, T. Nelson, R. Bergeest, G. Ramm, R. Carranza, A. C. Corney, M. Gibbes, G. Kyriazis, H. M. Laiz, L. X Liu, Z. Lu, U. Pogliano, K.-E. Rydler, E. Shapiro, Eddy So, M. Temba, and P. Wright “*An International Comparison of 50/60 Hz Power (1996–1999)*,” IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 50, pp. 356–360, April 2001.
- [1.14] H. Çayci „*Final report on key comparison EURAMET.EM-K5.1 (EURAMET Project No. 687): Comparison of 50/60 Hz power*“, 2011., Metrologia 48 01009, DOI: 10.1088/0026-1394/48/1A/01009.
- [1.15] F. L. Bertotti, M. S. Hara, P. J. Abatti „*A simple method to measure phase difference between sinusoidal signals*”, Review of scientific instruments 81, 115106 (2010).
- [1.16] K. K. Clarke and D. T. Hess „*Phase Measurement, Traceability, and Verification Theory and Practice*,” IEEE Transaction Instrument. Measurement vol. 39, No. 1, 1990., IEEE Log Number 8931812.
- [1.17] D. T. Hess, K. K. Clarke „*Phase Standards: Design, Construction, Traceability and Verification*”, Cal Lab, september-October 1995, str. 33-38.
- [1.18] D. Hess, K. Clarke „*Circuit Techniques for Use in a Digital Phase-Angle Generator*”, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. IM-36, no. 2, p. 394–399, jun 1987, IEEE Log Number 8613442.
- [1.19] Model 5002 Phase verification bridge set, Clarke-Hess Communication Research Corporation, <http://www.clarke-hess.com/5002M.pdf>
- [1.20] D. T. Hess and K. K. Clarke „*External Phase Autozero Loop to Extend the Voltage and/or Current Capabilities of a Digital Phase Standard*”, IEEE

- Transaction Instrument. Measurement vol. 41, No. 6, str. 938-941, decembar 1992., IEEE Log Number 9205051.
- [1.21] E. Mohns, M. Kahmann „*Heterodyne Measurement System (HMS) for Determining Phase Angles*,“ IEEE Transaction Instrument. Measurement vol. 56, No. 2, pp 505-508, april 2007., DOI 10.1109/TIM.2007.890624.
- [1.22] Calibration and Measurement Capabilities, Electricity and Magnetism, United Kingdom, NPL (National Physical Laboratory), 3 voltmeter method, [http://kcdb.bipm.org/appendixc/EM/GB/EM\\_GB.pdf](http://kcdb.bipm.org/appendixc/EM/GB/EM_GB.pdf).
- [1.23] G. Ramm, H. Moser, and A. Braun, „*A new scheme for generating and measuring active, reactive and apparent power at power frequencies with uncertainties of  $2.5 \cdot 10^{-6}$* “, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 48, str. 422–426, Apr. 1999. Publisher Item Identifier S 0018-9456(99)02921-6.
- [1.24] B.C.Waltrip, M. E. Parker, N. M. Oldham and B. A. Bell „*The NIST Sampling System for the Calibration of Phase Angle Generators from 1 Hz to 100 kHz*“, NCSL Workshop and Symposium, 1992.
- [1.25] G. Stenbakken „*Dual-channel sampling system*“ u knjizi „*Digital Methods in Waveform Metrology*“, NBS Special Publication 707, str. 55-73, 1983.
- [1.26] R. Lapuh „*Accurate Phase Measurement with Two Sampling Voltmeters*“, IEEE IMTC, Budapest, Hungary, 2001.
- [1.27] U. Pogliano „*Use of Integrative Analog-to-Digital Converters for High-Precision Measurement of Electrical Power*“, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 50, no. 5, p. 1315–1318, October 2001.
- [1.28] Stefan Svensson „*Power measurement techniques for non-sinusoidal conditions*“, Doctoral thesis for the degree of PhD, Chalmers university of technology, Goteborg, Sweden, 1999.
- [1.29] G. Ives „*Easing problem of traceability for complex waveform by optimizing instrument design*“, NCSL International Workshop and Symposium, 2003.
- [1.30] G. C. Bosko, M. Garcocz, K. Lind, U. Pogliano, G. Rietveld, V. Tarasso, B. Voljč, V. Novakova Zachovalova, „*Phase Comparison of High-Current Shunts up to 100 kHz*“, IEEE Transaction Instrument. Measurement vol. 60, No. 7, pp 2359-2365, july 2011.

- [1.31] U. Pogliano, B. Trinchera, D. Serazio „*Wideband digital phase comparator for high current shunts*”, arXiv, Physics, 4. Oct. 2011.
- [1.32] M. Merkle „*Verovatnoća i statistika: za inženjere i studente tehnike*“, Akademska misao, Beograd, 2010., ISBN 978-86-7466-375-2.
- [1.33] S. M. Kay *Fundamentals of Statistical Signal Processing-Estimation Theory*, Englewood Clifs, NJ Prentice-Hall, 1993.
- [1.34] BIPM,IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML „*Guide to the expression of uncertainty in measurement*”, International Organization for Standardization, štampano u Švajcarskoj, prvo izdanje 1993. Ispavljeno i ponovo štampano 1995.
- [1.35] JCGM 101:2008 „*Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*”, Joint Committee for Guides in Metrology, 2008, [www.bipm.org](http://www.bipm.org)
- [1.36] JCGM 102:2011 „*Evaluation of measurement data — Supplement 2 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities*, Joint Committee for Guides in Metrology, 2011, [www.bipm.org](http://www.bipm.org)
- [1.37] JCGM 100:2008 GUM 1995 with minor corrections „*Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*”, Joint Committee for Guides in Metrology, 2008, [www.bipm.org](http://www.bipm.org)
- [1.38] JCGM 104:2009 „*Evaluation of measurement data - An introduction to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents*” Joint Committee for Guides in Metrology, 2009, [www.bipm.org](http://www.bipm.org).
- [1.39] EA-4/02 M *Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration, European co-operation for Accreditation*, December 1999 rev00, [www.european-accreditation.com](http://www.european-accreditation.com).
- [1.40] G1-100 „*Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement*”, OIML Guide, 2008. [www.oiml.org](http://www.oiml.org).
- [1.41] G1-101 „*Evaluation of measurement data - Supplement 1 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” - Propagation of distributions using a Monte Carlo method*”, OIML Guide, 2008. [www.oiml.org](http://www.oiml.org).

- [1.42] G1-102 „*Evaluation of measurement data - Supplement 2 to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” - Extension to any number of output quantities*”, OIML Guide, 2011. [www.oiml.org](http://www.oiml.org).
- [1.43] G1-104 „*Evaluation of measurement data - An introduction to the „Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents*”, OIML Guide, 2009. [www.oiml.org](http://www.oiml.org).
- [1.44] B. N. Taylor and C. E. Kuyatt „*NIST Technical Note 1297 Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results*”, 1994, [www.nist.gov](http://www.nist.gov).
- [1.45] JCGM 106:2012 „*Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment*”, [www.bipm.org](http://www.bipm.org).
- [2.1] „*Sampling oscilloscope technique*”, Technique Primer 47W-7209, Tektronix.
- [2.2] H. Çayci, Ö. Yılmaz, B. Ayhan, T. Kefeli, M. Güne, E. Kazanç „*AC Power Measurement System of UME*”, XVIII IMEKO WORLD CONGRESS, September, 2006, Rio de Janeiro, Brazil.
- [2.3] Multimeter 3458A, Operating, programming and configuration Manual, Agilent, 2000.
- [2.4] R. Swerlein „*A high accuracy digital ac voltage measurement algorithm*”, NCLS Workshop&Symposium, 1991.
- [2.5] D. A. Czenkusch „*High-Resolution Digitizing Techniques with an Integrating Digital multimeter*”, Hewlett-Packard Journal, April 1989, p. 39-49.
- [2.6] W. C. Goeke „*An 8 1/2-Digit Integrating Analog-to-Digital Converter with 16-Bit, 100,00-Sample-per-Second Performance*”, Hewlett-Packard Journal, April 1989, p. 8-15.
- [2.7] E. Mohns, G. Ramm, W. G. Kürten Ihlenfeld, L. Palafox, H. Moser „*The PTB Primary Standard for Electrical AC Power*”, MAPAN – Journal of Metrology Society of India, Vol. 24, No. 1, 2009; pp. 15-19.
- [2.8] E. Tóth, Ana Maria R. Franco, and R. M. Debatin „*Power and Energy Reference System, Applying Dual-Channel Sampling*”, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 54, no. 1, p. 404–408, February 2005., DOI 10.1109/TIM.2004.839772

- [2.9] P. Espel, A. Poletaeff and A. Bounouh „*Characterisation of analogue-to-digital converters of a commercial digital voltmeter in the 20 Hz to 400 Hz frequency range*”, Metrologia 46 (2009), str. 578-584.
- [2.10] W. G. Kürten Ihlenfeld, E. Mohns, H. Bachmair, G. Ramm, and Harald Moser „*Evaluation of the Synchronous Generation and Sampling Technique*”, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 52, no. 2, p. 371–374, April 2003., DOI10.1109/TIM.2003.811575.
- [2.11] L. Di Lillo, H. Laiz, E. Yasuda, R. Garcia „*Sampling wattmeter at INTP*”, VIII Semetro, Brazil, 2009.
- [2.12] K.-E. Rydler, S. Svensson, and V. Tarasso „*Voltage dividers with low phase angle errors for a wideband power measuring system*”, Conference on Precision Electromagnetic Measurements CPEM 2002, Conference Digest, p. 382-383, Ottawa, Ontario, Canada. DOI 10.1109/CPEM.2002.1034882
- [2.13] Stefan Svensson „*A Wattmeter Standard for the Audio Frequency Range*”, IEEE Trans. Instrum. Meas. vol. 48, No. 2, str. 431 – 433, april 1999., Publisher Item Identifier S 0018-9456(99)02888-0.
- [2.14] S. Svensson, K.-E. Rydler and V. Tarasso „*Improved model and phase-angle verification of current shunts for AC and power measurements*”, Conference on Precision Electromagnetic Measurements CPEM 2004, Conference Digest, p. 82-83, London, 2004. DOI 10.1109/CPEM.2004.305451.
- [2.15] B. Voljč, M. Lindič, and R. Lapuh „*Direct Measurement of AC Current by Measuring the Voltage Drop on the Coaxial Current Shunt*“, IEEE Trans. Instrum. Meas. vol. 58, No. 4, str. 863 – 867, april 2009., DOI 10.1109/TIM.2008.2007074.
- [2.16] W. G. Kürten Ihlenfeld and E. Mohns „*AC-dc transfer measurement of highest accuracy with synchronous analogue-to-digital conversion*“, Metrologia 41 (2004), str. 111-115.
- [2.17] Stefan Svensson „*Electrical metering in the presence of harmonic distortion*”, 5<sup>th</sup> Semetro, april 2002., Brazil.
- [2.18] W. G. Kürten Ihlenfeld and M. Seckelmann „*Simple Algorithm for Sampling Synchronization of ADCs*”, IEEE Trans. Instrum. Meas. vol. 58, No. 4, str. 781 – 785, april 2009., DOI 10.1109/ TIM.2008.2007053.



- [2.19] D.L.Maskell and G.S.Woods, „*The discrete-time quadrature subsample estimation of delay*“, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 51, no.1, pp. 133–137, Feb. 2002, Publisher Item Identifier S 0018-9456(02)02295-7.
- [2.20] H. C. So „*A Comparative Study of Two Discrete – Time Phase Delay Estimators*,“ IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 54, str. 2501–2504, Decembar 2005., DOI 10.1109/TIM.2005.859143.
- [2.21] X. Dai and R. Gretsch „*Quasi-Synchronous Sampling Algorithm and Its Applications*“, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 43, no.2, pp. 204–209, April 1994., IEEE Log number 9215991.
- [2.22] D. Agrež „*Interpolation in the frequency domain to improve phase measurement*“ Measurement 41 (2008) str. 151 – 159.
- [2.23] D. Agrež „*Improving Phase Estimation With Leakage Minimization*“, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 54, no.4, pp. 1347–1353, August 2005., DOI: 10.1109/TIM.2005.851058.
- [2.24] S. Schuster, S. Scheiblhofer, and A. Stelzer „*The Influence of Windowing on Bias and Variance of DFT-Based Frequency and Phase Estimation*“, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 58, no. 6, str.. 1975–1990, June 2009.
- [2.25] X. Dai and R. Gretsch „*Quasi-Synchronous Sampling Algorithm and Its Application*“, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 43, no.2, pp. 204–209, April 1994., IEEE Log Number 9215991.
- [2.26] Y. Tu, H. Zhang, Y. Mao, T. Shen, H. Yang and F. Su „*Unbiased Phase Delay Estimator with Negative Frequency Contribution for Real Sinusoids*,“ Journal of Applied Sciences 13 (8): 1160-1168, 2013, ISSN 1812-5654 / DOI 10.3923/jas.2013.1160.1168.
- [2.27] M. Sedlaček, M. Krumpholc „*Digital measurement of phase difference - a comparative study of DSP algorithms*“, Metrology and Measurement Systems, vol. XII, str. 427 -448, 2005.
- [2.28] *IEEE Standard for Digitizing Waveform Recorders*, IEEE Std 1057-1994.
- [2.29] IEEE Standard for terminology and test methods for analog-to-digital converters, IEEE Standard 1241, 2000.

- [2.30] T. Andersson, P. Handel „*IEEE Standard 1057, Cramer-Rao Bound and the Parsimony Principle*”, IEEE TIM, vol 55, No. 1, Februar 2006., str. 44-53, DOI: 10.1 109/TIM.2005.861497
- [2.31] T. Bilau, T. Megyeri, A. Sarhegyi, J. Markus, I. Kollar „*Four-parameter sine wave testing results: iteration and convergence*”, 4<sup>th</sup> Internacinal Conference on Advanced A/D and D/A Conversion Techniques and their Applications, and 7<sup>th</sup> European Workshop on ADC Modelling and Testing, Prague, Czech Republik, 2002.
- [2.32] M. Fonseca da Silva, P.M. Ramos, A. Cruz Serra „*A new four parameter sine fitting technique*”, Measurement 35 (2) (2004) 131–137, doi: 10.1016/j.measurement.2003.08.006.
- [2.33] Kui-Fu Chen, Yi-Ming Xue „*Four-parameter sine wave fitting by Gram–Schmidt Orthogonalization*”, Measurement 41 (2008) 76–87, DOI:10.1016/j.measurement.2006.11.016.
- [2.34] P. M. Ramos, A. Cruz Serra „*A new sine-fitting algorithm for accurate amplitude and phase measurements in two channel acquisition systems*” Measurement 41 (2008), str. 135 – 143, DOI: 10.1016 / j.measurement.2006.03.011.
- [2.35] P. Handel „*Cramer-Rao Bounds and Non-Linear Least Squares for a Seven Parameter Dual Channel Sinewave Model*”, IMTC 2007, Varšava, Poljska.
- [2.36] H. C. So „*Implementation of Exact Maximum Likelihood Phase Estimators for a Single Real Sinusoid in White Gaussian Noise*”, IEICE Trans. Fundamentals, vol. E88-A, No. 7, juli 2005, str. 2019–2022, DOI: 10.1093/ietfec/e88–a.7.2019.
- [2.37] H. C. So, Z. Zhou „*Two accurate phase-difference estimators for dual-channel sine-wave model*”, EURASIP Journal on Advances In Signal Processing, Springer Open, june 2013., DOI: 10.1186/1687-6180-2013-122.
- [2.38] The Marsaglia Random Number CDRom including the Diehard Battery of Tests of Randomness, George Marsaglia, Department of statistics and supercomputer computations research institute, 1995.  
<http://www.stat.fsu.edu/pub/diehard/>

- [2.39] L'Ecuyer, P. and Simard, R. „*TestU01: A software library in ANSI C for empirical testing of random number generators*”.  
<http://www.iro.umontreal.ca/~simardr/testu01/tu01.html>
- [2.40] M. Kampik, H. Laiz, and M. Klonz “*Comparison of Three Accurate Methods to Measure AC Voltage at Low Frequencies*”, IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 49, no 2, p 429 – 433, April 2000.
- [3.1] N. Vučijak and L. Saranovac „*A Simple Algorithm for Estimation of Phase Difference between Two Sinusoidal Voltages*” IEEE Trans. Instrum. Meas., vol. 59, no 12, p. 3152 – 3158, December 2010.
- [3.2] L. Saranovac, N. Vučijak „*Algoritmi za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala*“, Tehnika - Kvalitet, standardizacija i metrologija, vol. 10, br. 5, str. 15-18, 2010.
- [3.3] A. Jeffrey, Hui-Hui Dai „*Handbook of Mathematical Formulas and Integrals*“, The fourth edition, Academic Press, Elsevier, USA, 2008.
- [3.4] B. Hunt, R. Lipsman, J. Rosenberg with K. Coombes, J. Osborn, G. Stuck „*A Guide to MATLAB*“, Cambridge, University Press, New York, USA, 2001.
- [4.1] N. Vučijak, N. Radojević, R. Lapuh, Z. Svetik „*An application of sine wave fitting algorithm in electric power measurement*“, Kongres metrologa 2005., Zbornik radova, strana 119-124, Beograd.
- [4.2] N. Vučijak, N. Radojević, „*Three, Four and Seven Parameters Sine-fitting Algorithms Applied in Electric Power Calibrations*“, EUROCON 2005, Computer as a tool, 21. do 24.11.2005., Beograd, Proceedings vol.2 strana 1148-1150. DOI 10.1109/EURCON.2005.1630156.
- [4.3] 6100A Electrical Power Standard, Users Manual, Fluke, 2008.
- [4.4] Digital Phase Standard model 5500-2, Operating Manual, Clarke Hess Communication Research Corp, USA.
- [4.5] SD1000 Phase Meter, User Manual, AVPower, Engleska, 2002.
- [4.6] SRPS ISO/IEC 17025:2006 Opšti zahtevi za kompetentnost laboratorija za ispitivanje i laboratorija za etaloniranje, ISS, Beograd.
- [4.7] S. Phillips and K. Eberhardt „*Guidelines for Expressing the Uncertainty of Measurement Results Containing Uncorrected Bias*“, Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 102, 577 (1997).

- [4.8] SRPS ISO/IEC17043:2010 Ocenjivanje usaglašenosti – Opšti zahtevi za ispitivanje osposobljenosti.
- [A.1] „*The International System of Units (SI)*“, 8th edition 2006., Bureau International des Poids et Mesures. [http://www.bipm.org/utis/common/pdf/si\\_brochure\\_8.pdf](http://www.bipm.org/utis/common/pdf/si_brochure_8.pdf)
- [A.2] OIML D 2 „*Legal units of measurement*“, 2007.  
[http://www.oiml.org/en/files/pdf\\_d/d002-e07.pdf](http://www.oiml.org/en/files/pdf_d/d002-e07.pdf)
- [A.3] „*Uredba o određenim zakonskim mernim jedinicama i načinu njihove upotrebe*“, Sl. glasnik RS, br. 43/2011.

## Prilog A

### Radijan i stepen

Međunarodnim i domaćim propisima [1.2, A.1 – A.3] regulisana je upotreba jedinica radijan i stepen.

Jedinice Međunarodnog sistema jedinica (engl. Systeme International d 'Units, SI) [A.1] dele se na osnovne i izvedene. Osim njih postoje i jedinice čija je upotreba dozvoljena samo u specifičnim oblastima.

U dokumentu „The International System of Units (SI),” [A.1], navedena je sledeća izvedena jedinica SI sistema:

SI koherentna izvedena jedinica				
Izvedena veličina	ime	simbol	Izraženo preko drugih SI jedinica	Izraženo u osnovnim SI jedinicama
ugao u ravni	radian	rad	1	m/m

Jedinice koje su koherentno izvedene iz osnovnih SI jedinica, date su kao algebarski izrazi u obliku proizvoda stepenovanih osnovnih SI jedinica.

Međunarodni komitet za tegove i mere (CIPM) je 2004. usvojio da se uz SI sistem jedinica mogu koristiti i jedinice izvan SI sistema jer su u upotrebi u svakodnevnoj praksi, i to:

Veličina	ime jedinice	simbol jedinice	Vrednost u SI jedinicama
ugao u ravni	stepen	°	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
	minut	'	$1' = (1/60)^\circ = (\pi/10\ 800) \text{ rad}$
	sekund	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\ 000) \text{ rad}$

Radijan je posebno ime za broj jedan koje se može upotrebljavati da ukaže na veličinu koja se razmatra. U praksi se simbol radijan koristi gde je pogodno, ali se simbol za izvedenu jedinicu jedan izostavlja kada se navode bezdimenzione veličine.

Oznaka stepen piše se bez razmaka uz broj na koji se odnosi.

Oznaka rad piše se razdvojeno od broja na koji se odnosi.

U međunarodnom standardu IEC 80000-6:2008 [1.2] definiše se jedinica za faznu razliku na sledeći način:

Naziv jedinice: radijan

Međunarodna oznaka jedinice: rad

Naziv jedinice: jedan

Međunarodna oznaka jedinice: 1

Primedba: Koherentna jedinica za bilo koju veličinu sa dimenzijom jedan jeste broj jedan (1). Kada se izražava vrednost takve veličine, po pravilu se eksplicitno ne piše jedinica 1.

## **Prilog B**

# **Izabrani algoritmi iz literature za određivanje fazne razlike iz uzoraka sinusnih signala**

U literaturi je opisano mnogo algoritama za određivanje fazne razlike između dva sinusna signala. U disertaciji je dat je kratak pregled sledećih algoritama iz literature:

- 1) QDE – estimator sa kvadraturnim kašnjenjem (engl. quadrature delay estimator) i UQDE – centriran estimator sa kvadraturnim kašnjenjem (engl. unbiased quadrature delay estimator) [2.19 – 2.20], opisani su u poglavlju 2.2, jer je novi algoritam MSAL opisan u ovoj disertaciji zasnovan na algoritmu UQDE,
- 2) algoritama koji su primenjeni na rezultate merenja fazne razlike u cilju poređenja sa rezultatima dobijenim primenom novog algoritma MSAL, a to su algoritmi za fitovanje uzoraka signala na oblik sinusoide [2.27 – 2.35] i to:
  - algoritam za fitovanje tri parametra sinusoide (3PSF),
  - algoritam za fitovanje četiri parametra sinusoide (4PSF) i
  - algoritam za fitovanje sedam parametara dve sinusoide (7PSF).
- 3) nekih poznatijih algoritama, a to su:

- diskretna Furijeova transformacija (engl. Discrete Fourier Transform – DFT) i algoritmi zasnovani na Furijeovoj transformaciji u diskretnom vremenu (DTFT) [2.21 – 2.26],
- algoritmi zasnovani na kriterijumu maksimalne verodostojnosti (engl. maximum likelihood – ML) [2.36 – 2.37],
- algoritmi zasnovani na linearnoj predikciji (LP) [2.37].

Za određivanje fazne razlike iz uzoraka dva realna sinusna signala od interesa za praktičnu upotrebu su oni algoritmi koji ne zahtevaju obimno izračunavanje.

## B.1 Algoritmi zasnovani na fitovanju

U literaturi [2.27] dato je poređenje je više algoritama za određivanje fazne razlike i zaključeno, da algoritam fitovanja 7 parametara dva sinusna signala daje najtačnije rezultate.

### B.1.1 Algoritam za fitovanje tri parametra sinusnog signala

Algoritam fitovanja tri parametra sinusoide (3PSF) primenjuje se na svaki sinusni signal posebno da se odrede njihove početne faze. Fazna razlika između dva signala dobije se kao razlika početnih faza pojedinačnih signala.

Dva sinusna signala mogu se opisati sledećim jednačinama:

$$s_{1,n}(A_1, B_1, C_1) = A_1 \cos(\omega \cdot t_{1,n}) + B_1 \sin(\omega \cdot t_{1,n}) + C_1, \quad (\text{B.1.1.1})$$

$$s_{2,n}(A_2, B_2, C_2) = A_2 \cos(\omega \cdot t_{2,n}) + B_2 \sin(\omega \cdot t_{2,n}) + C_2, \quad (\text{B.1.1.2})$$

$n = 1, 2, \dots, N,$

gde su:

- $A_1$  i  $B_1$  – amplitude komponenti u fazi i kvadraturi, prvog signala;
- $C_1$  – DC nivo, za prvi signal;
- $A_2$  i  $B_2$  – amplitude komponenti u fazi i kvadraturi, drugog signala;
- $C_2$  – DC nivo, za drugi signal;



- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$  – ugaona učestanost zajednička za oba signala;  
 $f$  – učestanost zajednička za oba signala;  
 $t_{1,n}$  – vreme  $n$ -tog uzorka prvog signala;  
 $t_{2,n}$  – vreme  $n$ -tog uzorka drugog signala.

Algoritam 3PSF se koristi da se odrede vrednosti parametara  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  jednog signala za koje sledeća suma kvadrata razlika ima minimalnu vrednost [2.28 – 2.29]:

$$\sum_{n=1}^N [y_{1,n} - s_{1,n}(A_1, B_1, C_1)]^2. \quad (\text{B.1.1.3})$$

Za određivanje vrednosti parametara  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C_1$  najčešće se koristi matrični račun.

Analogno se određuju parametri drugog signala.

Model fitovanja sinusoide može da se napiše i sa parametrima  $\alpha_1$ ,  $\varphi_1$  i  $C_1$ , na sledeći način [2.28 – 2.29]:

$$s_{1,n}(\alpha_1, \varphi_1, C_1) = \alpha_1 \sin(\omega t_n + \varphi_1) + C_1, \quad (\text{B.1.1.4})$$

gde je  $A_1 = \alpha_1 \sin \varphi_1$ ,  $B_1 = \alpha_1 \cos \varphi_1$  u odnosu na jednačinu (B.1.1.1):

$$\alpha_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad (\text{B.1.1.5})$$

$$\varphi_1 = \arctan \left[ -\frac{B_1}{A_1} \right], \text{ ako je } A \geq 0, \quad (\text{B.1.1.6})$$

$$\varphi_1 = \arctan \left[ -\frac{B_1}{A_1} \right] + \pi, \text{ ako je } A < 0. \quad (\text{B.1.1.7})$$

Analogno jednačinama (B.1.1.4) do (B.1.1.7) određuju se parametri drugog signala.

*Asimptotska Cramer-Rao granica za procenu faznog ugla dobijenu primenom 3PSF*

Realan sinusni signal sa aditivnim šumom može da se predstavi jednačinom [2.31]:

$$y_{1n} = s_{1n}(\alpha_1, \varphi_1, C_1) + w_{1n}, \quad (\text{B.1.1.8})$$

$n = 1, 2, \dots, N,$

gde su:

$y_{1,n}$  - uzorci realnog signala;

$s_{1,n}(\alpha_1, \varphi_1, C_1)$  - sinusni signal (B.1.1.1) opisan parametrima  $\alpha_1, \varphi_1, C_1$ ;

$w_{1,n}$  - beli Gausov šum čija je srednja vrednost nula i varijansa  $\sigma_1^2$ .

Varijansa estimatora faze  $\text{var}(\hat{\varphi}_1)$  i asimptotska Cramer-Rao granica (CRB) za jedan realan sinusni signal, predstavljen jednačinom (B.1.1.4), na čije uzorke je primenjen algoritam 3PSF, dati su sledećom jednačinom [2.30]:

$$\text{var}(\hat{\varphi}_1) \geq CRB(\varphi_1)_{3\text{PSF}} \approx \frac{3\sigma_1^2}{N \cdot \alpha_1^2} = \frac{3}{2N \cdot SNR_1} \quad (\text{B.1.1.9})$$

Asimptotska CRB dobije se kada je broj uzoraka signala  $N$  veliki, i kada je odnos signal šum  $SNR_1$  veliki. Odnos signal-šum dat je jednačinom:  $SNR_i = \alpha_i^2 / 2\sigma_i^2$ ,  $i = 1, 2$  oznaka dva signala.

## B.1.2 Algoritam za fitovanje četiri parametra sinusnog signala

Posmatramo  $N$  uzoraka jednog sinusnog signala  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , koji su uzeti u trenucima  $t_1, t_2, \dots, t_N$ . Algoritam za fitovanje četiri parametra sinusoide (4PSF) koristi iterativni postupak da nađe vrednosti četiri parametra  $A_i, B_i, C_i$  i  $\omega_i$  za koje sledeća suma kvadrata razlika [2.28 – 2.29]:

$$\sum_{n=1}^N [y_n - A_1 \cos(\omega_1 t_n) - B_1 \sin(\omega_1 t_n) - C_1]^2, \quad (\text{B.1.2.1})$$

ima minimalnu vrednost. U jednačini (B.1.2.1)  $\omega_i$  je ugaona učestanost signala određena u  $i$ -toj iteraciji.

Koristi se sledeći iterativni postupak:

- Postaviti index  $i = 0$ . Uradi se početna procena ugaone učestanosti  $\omega_0$  uzoraka signala. Učestanost se može proceniti koristeći DFT (na celom zapisu ili delu zapisa

uzoraka signala), ili brojeći prolaske kroz nulu, ili izmeriti. Izvede se fitovanje koristeći 3PSF algoritam da se prethodno procene vrednosti parametara  $A_0$ ,  $B_0$  i  $C_0$ .

b) Postavi se  $i = i + 1$  za sledeću iteraciju.

c) Ponovo se procene ugaone učestanosti koristeći sledeću jednačinu:

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \Delta\omega_{i-1}, (\Delta\omega_{i-1} = 0 \text{ za } i = 1). \quad (\text{B.1.2.2})$$

d) Formiraju se sledeće matrice:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.2.3})$$

$$D_i = \begin{bmatrix} \cos(\omega_i t_1) & \sin(\omega_i t_1) & 1 & -A_{i-1} t_1 \sin(\omega_i t_1) + B_{i-1} t_1 \cos(\omega_i t_1) \\ \cos(\omega_i t_2) & \sin(\omega_i t_2) & 1 & -A_{i-1} t_2 \sin(\omega_i t_2) + B_{i-1} t_2 \cos(\omega_i t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\omega_i t_N) & \sin(\omega_i t_N) & 1 & -A_{i-1} t_N \sin(\omega_i t_N) + B_{i-1} t_N \cos(\omega_i t_N) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1.2.4})$$

$$x_i = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ \Delta\omega_i \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1.2.5})$$

e) izračuna se rešenje  $x_i$  iz jednačine:

$$x_i = (D_i^T D_i)^{-1} (D_i^T y). \quad (\text{B.1.2.6})$$

f) Izračunaju se amplituda  $\alpha$  i faza  $\varphi$  iz sledeće jednačine:

$$y'_n = \alpha_1 \cos(\omega t_n + \varphi_1) + C_1, \quad (\text{B.1.2.7})$$

gde je:

$$\alpha_1 = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}, \quad (\text{B.1.2.8})$$

$$\varphi_1 = \arctan \left[ -\frac{B_i}{A_i} \right], \text{ ako je } A_i \geq 0, \quad (\text{B.1.2.9})$$

$$\varphi_1 = \arctan \left[ -\frac{B_i}{A_i} \right] + \pi, \text{ ako je } A_i < 0. \quad (\text{B.1.2.10})$$

g) ponove se postupci opisani u b), c), d), e) i f) ponovo računajući model na osnovu novih vrednosti  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ , i  $\omega_i$  izračunatih u prethodnoj iteraciji. Nastavi se računanje sve dokle promene vrednosti parametara  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $\omega$  postanu dovoljno male.

Reziduali fitovanja dati su jednačinom:

$$r_n = y_n - A_i \cos(\omega_i t_n) - B_i \sin(\omega_i t_n) - C_i. \quad (\text{B.1.2.11})$$

Rms vrednost greške data je jednačinom:

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N r_n^2}. \quad (\text{B.1.2.12})$$

*Asimptotska Cramer-Rao granica za procenu fazne razlike dobijene primenom algoritma 4PSF*

Varijansa estimatora faze  $\text{var}(\hat{\varphi}_1)$  i asimptotska Cramer-Rao granica (CRB) za jedan realan sinusni signal, sa belim Gausovim šumom na koji je primenjen algoritam 4PSF, date su jednačinom [2.30]:

$$\text{var}(\hat{\varphi}_1) \geq \text{CRB}(\varphi_1)_{4\text{PSF}} \approx \frac{8\sigma_1^2}{N \cdot \alpha_1^2} = \frac{4}{N \cdot \text{SNR}_1}. \quad (\text{B.1.2.13})$$

gde je  $\sigma_1^2$  varijansa šuma, a odnos signal šum  $\text{SNR}_1 = \alpha_1^2 / 2\sigma_1^2$ .

Asimptotska CRB se određuje kada je broj uzoraka signala  $N$  veliki, i kada je odnos signal-šum veliki.

Da bi odredili faznu razliku između dva sinusna signala primenimo algoritam 4PSF posebno na svaki signal sa ciljem da odredimo njihove početne faze označene  $\varphi_1$  odnosno  $\varphi_2$ , a zatim izračunamo faznu razliku  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Varijansa estimatora procene fazne razlike  $\text{var}(\hat{\varphi})$  i asimptotska CRB za faznu razliku dati su jednačinom:

$$\text{var}(\hat{\varphi}) \geq \text{CRB}(\varphi)_{4\text{PSF}} \approx \frac{4}{N} \left( \frac{1}{\text{SNR}_1} + \frac{1}{\text{SNR}_2} \right). \quad (\text{B.1.2.14})$$

gde  $\text{SNR}_1$  i  $\text{SNR}_2$  označavaju odnos signal-šum za dva signala.

## Poboljšanja algoritma 4PSF

Iterativni postupak rešavanja nelinearnih jednačina kod algoritma 4PSF zahteva rešavanje matrica u svakom koraku. Na konvergenciju algoritma mogu uticati početne vrednosti parametara, broj uzoraka signala, učestanost i kriterijum za zaustavljanje iteracija [2.31].

Dato je više predloga za poboljšanje algoritma 4PSF, a neki od njih su:

- da se koristeći DFT (ili FFT) na ukupnom broju uzoraka i primenjujući interpolaciju postigne bolja prva procena učestanosti signala [2.32],
- da se primeni Gram-Šmitova (engl. Gram-Schmidt) procedura ortogonalizacije na koeficijente matrice čime se znatno povećava tačnost algoritma [2.33].

## B.1.3 Algoritam za fitovanje sedam parametara dva sinusna signala

Kod primene algoritma fitovanja sedam parametara dve sinusoide (7PSF) istovremeno se fituju uzorci dva sinusna signala da se dobiju: vrednosti dve amplitude, dve početne faze, dva DC ofseta i vrednost zajedničke učestanosti signala [2.34]. Za primenu algoritma 7PSF uzorkovanje sinusnih signala ne mora da bude koherentno [2.27].

Posmatramo  $N$  uzoraka jednog sinusnog signala:  $y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{1,N}$ , uzetih u trenucima  $t_{1,1}, t_{1,2}, \dots, t_{1,N}$ . Isti broj uzoraka  $N$  drugog sinusnog signala:  $y_{2,1}, y_{2,2}, \dots, y_{2,N}$ , uzet je u trenucima  $t_{2,1}, t_{2,2}, \dots, t_{2,N}$ .

Dva sinusna signala mogu se opisati koristeći jednačine (B.1.1.1) i (B.1.1.2).

Vektor parametara  $\xi$  koji nisu poznati, dat je izrazom:

$$\xi = [A_1, B_1, C_1, \omega, C_2, B_2, A_1]^T, \quad (\text{B.1.3.1})$$

gde T označava operaciju transponovanja vektora.

Algoritam 7PSF nalazi vrednosti parametara datih vektorom (B.1.3.1) za koje je sledeći zbir kvadrata razlika minimalan [2.35]:

$$\sum_{n=1}^N [y_{1,n} - s_{1,n}(A_1, B_1, C_1)]^2 + \sum_{n=1}^N [y_{2,n} - s_{2,n}(A_2, B_2, C_2)]^2. \quad (\text{B.1.3.2})$$

Za rešavanje ovog problema koristi se matični račun pri čemu matrica u svakoj iteraciji ima  $2N$  redova i 7 kolona.

Dva sinusna signala mogu da se opišu i koristeći parametre  $\alpha_k$ ,  $\varphi_k$  i  $C_k$  na sledeći način:

$$s_{1n}(\alpha_1, \varphi_1, C_1) = \alpha_1 \sin(\omega t_n + \varphi_1) + C_1, \quad (\text{B.1.3.3})$$

$$s_{2,n}(\alpha_2, \varphi_2, C_2) = \alpha_2 \sin(\omega t_n + \varphi_2) + C_2, \quad (\text{B.1.3.4})$$

$n = 1, 2, \dots, N$ ,

tako da je  $A_k = \alpha_k \sin \varphi_k$ ,  $B_k = \alpha_k \cos \varphi_k$ ,  $k = 1, 2$  oznaka signala 1 i 2. Vektor parametara u ovom slučaju dat je izrazom:

$$\zeta = (\alpha_1, \varphi_1, C_1, \omega, C_2, \varphi_2, \alpha_2)^T. \quad (\text{B.1.3.5})$$

*Asimptotska Cramer-Rao granica za procenu fazne razlike dobijenu primenom algoritma 7PSF*

Polazi se od predstavljanja dva realna sinusna signala sa aditivnim šumom:

$$y_{1,n}(\alpha_1, \varphi_1, C_1) = s_{1,n}(\alpha_1, \varphi_1, C_1) + w_{1,n}, \quad (\text{B.1.3.6})$$

$$y_{2,n}(\alpha_2, \varphi_2, C_2) = s_{2,n}(\alpha_2, \varphi_2, C_2) + w_{2,n}, \quad (\text{B.1.3.7})$$

$n = 1, 2, \dots, N$ ,

gde  $w_{1,n}$  i  $w_{2,n}$  označavaju beli Gausov šum čija je srednja vrednost nula a varijanse  $\sigma_1^2$  i  $\sigma_2^2$  respektivno [2.35].

Estimator fazne razlike, između dva sinusna signala  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ , određen koristeći algoritam 7PSF kada su poznati amplitude i učestanost signala, ima asimptotsku Cramer-Rao granicu (CRB) datu jednačinom:

$$CRB(\hat{\varphi}) = \frac{SNR_1 + SNR_2}{N \cdot SNR_1 \cdot SNR_2}, \quad (\text{B.1.3.8})$$

gde su  $SNR_1$  i  $SNR_2$  vrednosti odnosa signal-šum date formulom (B.1.1.10), za signale  $y_1$  i  $y_2$ .

Asimptotska CRB dobije se kad je broj uzoraka signala  $N$  veliki i kad je odnos signal-šum veliki.

## B.2 Algoritmi zasnovani na Furijeovoj transformaciji

Fazna razlika između dva diskretizovana sinusna signala može da se odredi koristeći diskretnu Furijeovu transformaciju (engl. Discrete Fourier Transform – DFT) [2.21 – 2.26].

Model jednog sinusnog signala za  $N$  uzoraka koji su dobijeni uniformnim uzorkovanjem, može da se predstavi jednačinom:

$$x_1[nT] = A_1 \cos(\omega \cdot n \cdot T + \varphi_1) + w[nT], \quad (\text{B.2.1})$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ,

gde  $x_1[nT]$  označava uzorke signala;  $N$  - broj uzoraka;  $A_1$  – amplitudu signala;  $\omega$  – ugaonu učestanost signala;  $\varphi_1$  – početnu fazu;  $w[nT]$  je beli Gausov šum koji ima srednju vrednost jednaku nuli i varijansu  $\sigma^2$ .

U frekvencijskom domenu definiše se DFT za sekvencu jednog signala koja se sastoji od  $N$  uzoraka u vremenskom domenu na sledeći način:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[nT] \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{B.2.2})$$

gde je  $k$  broj uzorka signala u frekvencijskom domenu.

Formula (B.2.2) može da se napiše na sledeći način :

$$X_1[k] = \text{Re } X_1[k] + j \text{Im } X_1[k]. \quad (\text{B.2.3})$$

gde je:

$$\operatorname{Re} X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), \quad (\text{B.2.4})$$

$$\operatorname{Im} X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} nk\right). \quad (\text{B.2.5})$$

Fazni ugao uzoraka sinusnog signala dat je formulom:

$$\varphi_1[k] = \arctan\left(-\frac{\operatorname{Im} X_1[k]}{\operatorname{Re} X_1[k]}\right). \quad (\text{B.2.6})$$

Varijansa procene faznog ugla jednog sinusnog signala određena koristeći Furijeovu transformaciju data je jednačinom:

$$\operatorname{var}\{\hat{\varphi}_1\} \approx \frac{8 \cdot \sigma^2}{A^2 N} = \frac{4}{N \cdot \text{SNR}}. \quad (\text{B.2.7})$$

Fazna razlika između dva sinusna signala koji imaju istu učestanost određuje se kao razlika početnih faza signala [2.25].

### *Asinhrono uzorkovanje signala*

Ako uzorkovanje signala nije sinhronizovano sa učestanošću merenog sinusnog signala, onda je intervalom uzorkovanja obuhvaćen broj ciklusa signala koji nije ceo broj. U tom slučaju, pri obradi uzoraka u cilju određivanja parametara sinusoide, koristite se interpolacija i prozorske funkcije da se smanji curenje (engl. leakage) spektra signala [2.21 – 2.26]. Korišćenje prozorske funkcije dovodi do porasta vrednosti varijanse procene fazne razlike dobijene koristeći DFT u odnosu na vrednost CRB datu jednačinom (B.2.7).



## B.2.1 Modifikovan estimator faznog kašnjenja zasnovan na DTFT

Razmatra se slučaj prijema jednog signala na dva različita senzora [2.20]. Procena kašnjenja se izračuna koristeći faznu razliku DTFT primljenih signala na poznatoj učestanosti signala. Koristi se ideja generisanja komponentata u fazi i kvadraturi faze da se dobije procena faznog kašnjenja između realnih sinusnih signala. Dva realna sinusna signala sa šumom predstavljaju se u analitičkom obliku koristeći komponente u fazi i kvadraturi, jednačinama:

$$r_i(kT) = x_i(kT) + jx_i((k - \Delta)T), \quad (\text{B.2.1.1})$$

$$i = 1, 2; k = \Delta, \Delta + 1, \dots, N - 1; j = \sqrt{-1}.$$

Zatim se za  $r_i(kT)$  odredi DTFT i označi sa  $R_1(\omega)$ :

$$\begin{aligned} R_1(\omega) &= \sum_{k=\Delta}^{N-1} r_i(kT) e^{-j\omega kT} \\ &= jA_1 e^{j(\theta + (\omega_0 - \omega)(N - \Delta - 1)/2)} \frac{\sin\left(\frac{(\omega_0 - \omega)(N - \Delta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right)} + \\ &\quad + \sum_{k=\Delta}^{N-1} (n_1(kT) + jn_1((k - \Delta)T)) e^{-j\omega kT} \end{aligned} \quad (\text{B.2.1.2})$$

Vrednost  $R_1(\omega_0)$  na učestanosti  $\omega = \omega_0$  je:

$$R_1(\omega_0) = j(N - \Delta)A_1 e^{j\theta} (1 + Q_1(\omega_0)), \quad (\text{B.2.1.3})$$

gde je:

$$Q_1(\omega_0) = \frac{1}{j(N - \Delta)A_1} \sum_{k=\Delta}^{N-1} (n_1(kT) + jn_1((k - \Delta)T)) e^{-j(\omega_0 kT + \theta)} \quad (\text{B.2.1.4})$$

Za velike vrednosti odnosa signal – šum,  $R_1(\omega_0)$  se može aproksimirati sa:

$$R_1(\omega_0) \approx j(N - \Delta)A_1 e^{j\theta} \cdot e^{j\text{Im}\{Q_1(\omega_0)\}}, \quad (\text{B.2.1.5})$$

gde Im označava imaginarni deo.

Fazni ugao za  $R_1(\omega_0)$  je:

$$\angle\{R_1(\omega_0)\} \approx \frac{\pi}{2} + \theta + \text{Im}\{Q_1(\omega_0)\}, \quad (\text{B.2.1.6})$$

čija je srednja vrednost  $\pi/2 + \theta$ .

Analogno se za  $r_2(kT)$  odredi  $R_2(\omega_0)$  i fazni ugao:

$$\angle\{R_2(\omega_0)\} \approx \frac{\pi}{2} + \theta - \phi + \text{Im}\{Q_2(\omega_0)\}, \quad (\text{B.2.1.7})$$

gde je:

$$Q_2(\omega_0) = \frac{1}{j(N-\Delta)A_2} \sum_{k=\Delta}^{N-1} (n_2(kT) + jn_2((k-\Delta)T)) e^{-j(\omega_0 kT + \theta - \phi)} \quad (\text{B.2.1.8})$$

čija je srednja vrednost  $\pi/2 + \theta - \phi$ .

Na osnovu jednačina (B.2.1.6) i (B.2.1.7) dobije se centriran estimator fazne razlike između  $R_1(\omega_0)$  i  $R_2(\omega_0)$  dat jednačinom:

$$\hat{\phi} = \angle\{R_1(\omega_0)R_2^*(\omega_0)\}, \quad (\text{B.2.1.9})$$

gde se oznaka \* koristi za konjugovanu vrednost. Jednačina (B.2.1.9) predstavlja estimator faznog kašnjenja nazvan modifikovan DTFT algoritam.

Pokazuje se da je varijansa estimatora fazne razlike u ovom slučaju:

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \min\left\{\frac{\pi^2}{3\omega_0^2}, \frac{2}{(N-\Delta) \cdot \text{SNR}}\right\}. \quad (\text{B.2.1.10})$$

Vrednost  $\pi^2/3$  je dobijena iz pretpostavke da estimator fazne razlike ima uniformnu raspodelu između  $-\pi$  i  $\pi$ .

## B.2.2 Estimator faznog kašnjenja zasnovan na DTFT koji koristi i negativne učestanosti

Na osnovu estimatora zasnovanog na DTFT, predložen je centriran estimator faznog kašnjenja koji koristi i negativne učestanosti za realne signale sa nepoznatom učestanošću [2.26]. Konstatovano je da je doprinos negativne učestanosti glavni uzrok necentriranosti estimatora faznog kašnjenja zasnovanog na Furijeovoj transformaciji u diskretnom vremenu DTFT, u slučajevima kada je učestanost sinusoide veoma niska ili bliska Nikvistovoj učestanosti ili kada je mali broj uzoraka uzet u izračunavanje DTFT.

Polazi se od jednačina dva realna sinusna signala iste učestanosti:

$$s_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t + \theta_1) \quad (\text{B.2.2.1})$$

$$s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_0 t + \theta_2) \quad (\text{B.2.2.2})$$

gde su  $A_1$  i  $A_2$  amplitude,  $f_0$  učestanost signala,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  početne faze.

Fazno kašnjenje  $\Delta\theta$  definisano je  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ .

Sekvence uzoraka dva sinusna signala mogu se napisati na sledeći način:

$$s_1(n) = A_1 \cos(\omega_0 \cdot n + \theta_1) \quad (\text{B.2.2.3})$$

$$s_2(n) = A_2 \cos(\omega_0 \cdot n + \theta_2) \quad (\text{B.2.2.4})$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$ , učestanost  $\omega_0 = 2\pi f_0 / f_s$ , učestanost uzorkovanja  $f_s \geq 2 f_0$ , broj uzoraka signala je  $N$ .

Ako se sa  $\hat{\omega}_0$  označi procenjena vrednost učestanosti  $\omega_0$  onda se DTFT od  $s_1(n)$  na učestanosti  $\hat{\omega}_0$  izračuna koristeći formulu:

$$S_1(\hat{\omega}_0) = \sum_{n=0}^{N-1} A_1 \cos(\omega_0 \cdot n + \theta_1) \cdot e^{-j\hat{\omega}_0 n} \quad (\text{B.2.2.5})$$

Na sličan način odredi se  $S_2(\hat{\omega}_0)$ .

Ako se zanemare negativne učestanosti, dolazi se do rezultata za fazno kašnjenje:

$$\Delta\theta \approx \phi_2 - \phi_1 \quad (\text{B.2.2.6})$$

gde je:

$$\phi_1 \approx \theta_1 + \frac{(\omega_0 - \hat{\omega}_0)N}{2} - \frac{(\omega_0 - \hat{\omega}_0)}{2} \quad (\text{B.2.2.7})$$

$$\phi_2 \approx \theta_2 + \frac{(\omega_0 - \hat{\omega}_0)N}{2} - \frac{(\omega_0 - \hat{\omega}_0)}{2} \quad (\text{B.2.2.8})$$

što znači da je fazno kašnjenje dva sinusna signala približno jednako razlici DTFT dve faze na procenjenoj učestanosti. Ova jednačina se primenjuje na dva realna sinusna signala nepoznate učestanosti. Najpre treba proceniti vrednost učestanosti signala, a zatim izračunati DTFT za tu učestanost.

Ako se negativne učestanosti ne zanemare, dobije se nova formula za izračunavanje faznog kašnjenja:

$$\Delta\theta = \arctan \left[ \frac{m_5(\tan\phi_2 - \tan\phi_1)}{m_6 + m_7(\tan\phi_1 + \tan\phi_2) + m_8 \tan\phi_1 \tan\phi_2} \right] \quad (\text{B.2.2.9})$$

gde je:

$$m_5 = (N \sin \hat{\omega}_0)^2 - (\sin \beta)^2,$$

$$m_6 = (N \sin \hat{\omega}_0)^2 + (\sin \beta)^2 - 2N \sin \hat{\omega}_0 \sin \beta \cos(\beta - \hat{\omega}_0)^2,$$

$$m_7 = N \sin \hat{\omega}_0 + \sin \beta \sin(\beta - \hat{\omega}_0),$$

$$m_8 = (N \sin \hat{\omega}_0)^2 + (\sin \beta)^2 + 2N \sin \hat{\omega}_0 \sin \beta \cos(\beta - \hat{\omega}_0),$$

$$\beta = N \hat{\omega}_0.$$

Koriste se sledeći koraci u izračunavanju faznog kašnjenja:

- 1) proceni se učestanost signala  $\hat{\omega}_0$ ,
- 2) izračunaju se DTFT za  $s_1(n)$  i  $s_2(n)$  na učestanosti  $\hat{\omega}_0$  označene sa  $S_1(\hat{\omega}_0)$  i  $S_2(\hat{\omega}_0)$ ,
- 3) iz realnih i imaginarnih delova  $S_1(\hat{\omega}_0)$  i  $S_2(\hat{\omega}_0)$  izračunaju se
 
$$\tan\phi_1 = \text{Im}[S_1(\hat{\omega}_0)]/\text{Re}[S_1(\hat{\omega}_0)] \quad \text{i} \quad \tan\phi_2 = \text{Im}[S_2(\hat{\omega}_0)]/\text{Re}[S_2(\hat{\omega}_0)],$$
- 4) vrednosti za  $\hat{\omega}_0$ ,  $N$ ,  $\tan\phi_1$  i  $\tan\phi_2$  uvrste se u jednačinu (B.2.2.9).

Pokazuje se da je varijansa estimatora za veliko  $N$  i  $SNR$ , jednaka CRB:

$$\text{var}(\Delta\hat{\theta}) \approx \frac{2}{N \cdot SNR}. \quad (\text{B.2.2.10})$$

## B.3 Algoritmi zasnovani na kriterijumu maksimalne verodostojnosti

Postoji obimna literatura o estimatoru faznog ugla zasnovanog na kriterijumu maksimalne verodostojnosti, od koje su ovde navedena dva rada, u cilju ilustracije složenosti postupka.

U literaturi [2.36] polazi se od modela jednog sinusnog signala sa šumom predstavljenog jednačinom:

$$x_1(n) = A_1 \cos(\omega_0 n + \varphi_1) + w_1(n), \quad (\text{B.3.1})$$

gde je:  $n = 0, 1, \dots, N-1$ ; amplituda signala  $A_1 > 0$ ; poznata ugaona učestanost je  $\omega_0$ ;  $\varphi_1$  je nepoznata početna faza;  $w_1(n)$  je beli Gausov šum sa nepoznatom varijansom  $\sigma_1^2$ . Zadatak je da se odredi početna faza  $\varphi_1 \in [-\pi, \pi)$  koristeći  $N$  merenja signala  $x_1(n)$ .

Za veliki broj uzoraka signala bez obzira na to da li je amplituda sinusnog signala poznata ili ne, aproksimativna procena početne faze koristeći kriterijum maksimalne verodostojnosti (AML) dobije se iz sledeće formule:

$$\hat{\varphi}_{1AML} = -\arctan \left( \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \sin(\omega_0 n)}{\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cos(\omega_0 n)} \right), \quad (\text{B.3.2})$$

gde  $\hat{\varphi}_{1AML}$  označava aproksimativnu procenu vrednosti početne faze signala dobijenu koristeći kriterijum maksimalne verodostojnosti.

Egzaktna procena početne faze sinusnog signala pomoću kriterijuma ML dobije se rešavanjem nelinearne jednačine (B.3.2). Pomoću ove formule ne može da se dobije centrirana procena početne faze posebno za slučaj malog broja uzoraka sinusnog signala i/ili mali odnos signal šum.

Na osnovu Newton-Raphson iterativnog metoda u [2.36] su predložena dva postupka za egzaktnu procenu početne fazne sinusnog signala pomoću kriterijuma ML za poznatu i nepoznatu amplitudu signala. Pri tome je učestanost signala poznata.

Kada su nepoznati i amplituda i početna faza sinusnog signala, njihove procene dobiju se određivanjem minimuma sledeće funkcije:

$$J(\tilde{A}_1, \tilde{\varphi}_1) = \sum_{n=0}^{N-1} [x_1(n) - \tilde{A}_1 \cos(\omega_0 n + \tilde{\varphi}_1)]^2, \quad (\text{B.3.3})$$

gde su  $\tilde{A}_1$  i  $\tilde{\varphi}_1$  promenljive koje se koriste za dobijanje optimalnih vrednosti za  $A_1$  i  $\varphi_1$ .

Funkcija (B.3.3) se diferencira po  $\tilde{A}_1$  a zatim po  $\tilde{\varphi}_1$  i dobiju se dve jednačine. Iz jedne jednačine izrazi se  $\tilde{A}_1$  i zameni u drugu jednačinu tako da se dobije jednačina u kojoj je promenljiva  $\tilde{\varphi}_1$ .

$$f_1(\tilde{\varphi}_1) = \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(\omega_0 n + \tilde{\varphi}_1) \right] \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin(\omega_0 n + \tilde{\varphi}_1) \right] - \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos(\omega_0 n + \tilde{\varphi}_1) \right] \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega_0 n + \tilde{\varphi}_1) \sin(\omega_0 n + \tilde{\varphi}_1) \right]. \quad (\text{B.3.4})$$

Procena početne faze se izračuna tako što se nelinearna jednačina (B.3.4) izjednači sa nulom.

Predložen je sledeći iterativni postupak određivanja ML procene faze na osnovu Newton-Raphson iterativnog metoda:

$$\hat{\varphi}_{1,k+1} = \hat{\varphi}_{1,k} - \frac{f_1(\hat{\varphi}_{1,k})}{f_1'(\hat{\varphi}_{1,k})}, \quad (\text{B.3.5})$$

gde  $f_1'(\hat{\varphi}_{1,k})$  predstavlja prvi izvod funkcije  $f_1(\hat{\varphi}_{1,k})$  a  $\hat{\varphi}_{1,k}$  je procena početne faze u  $k$ -toj iteraciji. Kao početni uslov koristi se  $\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_{AML}$ . Postupak se ponavlja onoliko iteracija koliko je potrebno da parametar konvergira.

Isti postupak je predložen za procenu početne faze kada je amplituda signala  $A_1$  poznata. U tom slučaju funkcija (B.3.3) se diferencira samo po  $\tilde{\varphi}_1$ .

Rezultati simulacija pokazuju da predložena dva iterativna algoritma zasnovana na Newton-Raphson metodi daju veoma dobre rezultate za slučaj kad je broj uzoraka signala mali, kao i da se vrednosti srednje kvadratne greške početne faze poklapaju sa Cramer-Rao granicom.

U literaturi [2.37] za nalaženje fazne razlike između dva realna sinusna signala polazi se od formule:

$$x_i(n) = A_i \sin(\omega_0 n + \varphi_i) + w_i(n), \quad (\text{B.3.6})$$

gde je  $i = 1, 2$  oznaka signala;  $n = 1, \dots, N$ ; amplitude signala  $A_i > 0$ ; početne faze signala  $\varphi_i \in [0, \pi)$ ; aditivni beli Gausov šum  $w_i(n)$  sa varijansama  $\sigma_1^2$  i  $\sigma_2^2$ .

Kada se odrede početne faze  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  pojedinačno svakog od dva signala, fazna razlika između njih označena  $\varphi$  dobije se kao razlika početnih faza dva signala.

Polazi se od pretpostavke da su poznati  $\omega_0$  i odnos  $r = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ .

Označi se  $\alpha_i = A_i \cos(\varphi_i)$  i  $\beta_i = A_i \sin(\varphi_i)$  i dolazi se do jednačine:

$$\Lambda_i(\alpha_i, \beta_i) = \sum_{n=1}^N (x_i(n) - \alpha_i \sin(\omega_0 n) - \beta_i \cos(\omega_0 n))^2, \quad (\text{B.3.7})$$

a zatim se traži minimum ove funkcije, tako što se odrede izvodi po  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  i izjednače sa nulom. ML estimator za  $\varphi_i$  je:

$$\hat{\varphi}_i = \arctan\left(\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\alpha}_i}\right), \quad i = 1, 2. \quad (\text{B.3.8})$$

ML estimator za  $\varphi$  dobije se iz jednačine:

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_2. \quad (\text{B.3.9})$$

Kada  $N \rightarrow \infty$  dobije se za asimptotsku vrednost varijanse:

$$\text{var}(\hat{\varphi}) = \frac{1}{N} \left( \frac{1}{\text{SNR}_1} + \frac{1}{\text{SNR}_2} \right), \quad (\text{B.3.10})$$

gde je odnos signal-šum  $\text{SNR}_i = A_i^2 / (2\sigma_i^2)$ ,  $i = 1, 2$ .

## B.4 Algoritmi zasnovani na primeni linearne predikcije

U literaturi [2.37] opisan je estimator faznog ugla zasnovan na linearnoj predikciji (LP).

Model dva sinusna signala sa aditivnim šumom predstavlja se jednačinom

$$x_i(n) = A_i \sin(\omega_0 n + \varphi_i) + w_i(n), \quad (\text{B.4.1})$$

gde je:  $i = 1, 2$  broj sinusnih signala,  $n = 1, \dots, N$ ; amplitude signala  $A_i > 0$ ; poznata ugaona učestanost je  $\omega_0$ ;  $\varphi_i \in [0, 2\pi)$  je nepoznata početna faza;  $w_i(n)$  je nekorelisan beli Gausov šum sa poznatom varijansom  $\sigma_i^2$ . Zadatak je da se odredi fazna razlika  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  koristeći  $N$  uzoraka signala  $x_i(n)$ .

Osnovna ideja je da se vrednost  $x_2(n + 1)$  aproksimira linearnom kombinacijom vrednosti  $x_1(n)$  i  $x_1(n + 1)$  a zatim minimizira funkcija cena (engl. cost function) za resultantni LP vektor. Interval uzorkovanja se bira tako da je učestanost u diskretnom vremenu  $\omega_0 = \pi/2$ . U tom slučaju mogu da se napišu sledeće jednačine:

$$x_1(n) = A_1 \sin(\omega_0 n + \varphi_1) + w_1(n), \quad (\text{B.4.2})$$

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= A_1 \sin(\omega_0(n+1) + \varphi_1) + w_1(n+1) \\ &= A_1 \cos(\omega_0 n + \varphi_1) + w_1(n+1) \end{aligned} \quad (\text{B.4.3})$$

$$\begin{aligned} x_2(n+1) &= A_2 \sin(\omega_0(n+1) + \varphi_2) + w_2(n+1) \\ &= A_2 \cos(\omega_0 n + \varphi_1) \cos(\varphi) + A_2 \sin(\omega_0 n + \varphi_1) \sin(\varphi) + w_2(n+1) \end{aligned} \quad (\text{B.4.4})$$

Iz jednačina (B.4.2) do (B.4.4) konstruiše se LP vektor za  $n = 1, \dots, N - 1$ :

$$\vec{e} = \vec{\mu} - \tilde{c}_1 \vec{v}_1 - \tilde{c}_2 \vec{v}_2 \quad (\text{B.4.5})$$

gde je:  $\vec{\mu} = [x_2(2) \dots x_2(N)]^T$ ,  $\vec{v}_1 = [x_1(1) \dots x_1(N-1)]^T$ ,  $\vec{v}_2 = [x_1(2) \dots x_1(N)]^T$ .

Definiše se vektor LP koeficijenata:



$$\vec{c}_2 = [c_1 \ c_2]^T = \left[ \frac{A_2}{A_1} \sin(\varphi) \quad \frac{A_2}{A_1} \cos(\varphi) \right]^T. \quad (\text{B.4.6})$$

Zatim se odredi optimalna procena elemenata vektora LP koeficijenata označena sa:

$$\hat{\vec{c}}_2 = [\hat{c}_1 \ \hat{c}_2]^T. \quad (\text{B.4.7})$$

Procena fazne razlike odredi se prema jednačini:

$$\hat{\varphi} = \arctan\left(\frac{\hat{c}_1}{\hat{c}_2}\right). \quad (\text{B.4.8})$$

Kad  $N \rightarrow \infty$ , dobije se izraz za varijansu fazne razlike  $\text{var}(\varphi)$  jednak izrazu (B.3.10).

Za dobijanje rezultata za faznu razliku koristeći ML ili LP algoritam koristi se matrični račun,  $N \times N$  matrica. Složenost algoritma se povećava sa povećanjem broja  $N$ .

## **Prilog C**

# **Etaloniranje etalona faznog ugla u NMI**

U ovom prilogu dat je kratak opis metoda etaloniranja etalona faznog ugla koje se danas obavlja u nacionalnim metrološkim institutima (NMI).

Pojmovi: merilo, etalon, kalibrator, etaloniranje i metoda merenja, definisani su u međunarodnom rečniku metrologije [1.8 – 1.10].

Međunarodna poređenja u kojima učestvuju NMI organizuju se u cilju uspostavljanja efektivnosti i uporedivosti metoda merenja, obezbeđenje dodatnog poverenja i potvrđivanja kompetentnosti učesnika. U julu 2011. godine objavljeni su rezultati međunarodnog poređenja merenja vrednosti faznih uglova strujnih šantova za struje od 10 A do 100 A i učestanosti 500 Hz do 100 kHz, koje koriste NMI za potrebe etaloniranja etalona električne snage [1.30 – 1.31].

### **1) Etalonski sistemi sa uzorkovanjem signala**

Etalonski sistemi za uzorkovanje signala opisni su u poglavlju 2.1.

Kada se za etaloniranje etalona koji meri faznu razliku koristiti sistem za uzorkovanje signala [1.23 – 1.29], vrednost fazne razlike određena iz uzoraka signala koristeći neki od algoritama za obradu signala, smatra se etalonskom vrednošću, i poredi se sa vrednošću prikazanom na etalonu koji etaloniramo. Vrednost kombinovane merne nesigurnosti, u skladu sa GUM, merenja fazne razlike između dva napona je reda  $0,06 \text{ m}^\circ$  (ili  $1 \text{ } \mu\text{rad}$ ), kada se koristi sistem sa sinhronim generisanjem i uzorkovanjem napona efektivne vrednosti 1 V do 5 V, učestanosti 10 Hz do 400 Hz.

## 2) Merni mostovi

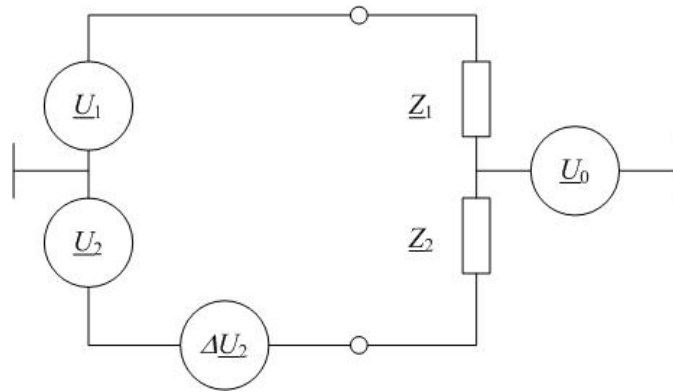
Merni mostovi obezbeđuju najveću tačnost merenja faznog ugla električnih signala, ali njihov nedostatak je što rade samo u određenim mernim tačkama  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  i  $270^\circ$ . Ovi merni mostovi koriste se u opsegu učestanosti napona 10 Hz do 200 kHz i za amplitude napona 50 mV do 500 V. Kombinovana merna nesigurnost u skladu sa GUM, rezultata merenja faznog ugla etalonskim mernim mostom je reda  $0,006 \text{ m}^\circ$  (ili  $0,1 \text{ } \mu\text{rad}$ ) [1.16 – 1.20].

Na slici C.1 prikazana je blok šema etaloniranja kalibratora fazne razlike između napona  $\underline{U}_1$  i  $\underline{U}_2$  koristeći impedanse  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$ . Kalibrator fazne razlike ima dva naponska izlaza od kojih je jedan ( $\underline{U}_1$ ) referentni, a drugi ( $\underline{U}_2$ ) se može podešavati po amplitudi i fazi tako da se može postići ravnoteža mosta. Ravnoteža mosta se detektuje pomoću detektora nule  $\underline{U}_0$  koji meri amplitudu i fazu napona.

Koriste se mostovi čije su komponente  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  etalonirani otpornici ili kondenzatori.

Pretpostavlja se:

- impedanse  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  su iste vrste i imaju jednake vrednosti,
- napon  $\underline{U}_2$  se može podešavati po amplitudi i fazi tako da se most može potpuno uravnotežiti,
- odnos napona  $\underline{U}_2/\underline{U}_1$  se ne menja kad impedanse  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  zamene mesta.



Slika C.1 Blok šema etaloniranja kalibratora fazne razlike pomoću mosta sa impedansama  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$ .

Kada impedanse  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  imaju iste vrednosti modula i faznog ugla most će biti u ravnoteži kada je fazna razlika između napona  $\underline{U}_1$  i  $\underline{U}_2$  jednaka  $180^\circ$ . Tada su:  $\underline{U}_1 = U$  i  $\underline{U}_2 = -U$ .

Kada je u mostu sa impedansama  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  prikazanom na slici C.1, postignuta ravnoteža koristeći podešavanje napona  $\underline{U}_2$  koje ćemo označiti  $\Delta\underline{U}_{21}$ , tada je napon  $\underline{U}_0 = 0$ , i važi jednačina:

$$\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{U}_2 + \Delta\underline{U}_{21}}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} + \frac{\Delta\underline{U}_{21}}{\underline{U}_1} . \quad (\text{C.1})$$

Kada impedanse  $\underline{Z}_1$  i  $\underline{Z}_2$  zamene mesta, i kad je ponovo postignuta ravnoteža koristeći podešavanje napona  $\underline{U}_2$  koje ćemo označiti  $\Delta\underline{U}_{22}$ , tada je napon  $\underline{U}_0 = 0$ , i važi jednačina:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_2 + \Delta\underline{U}_{22}}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} + \frac{\Delta\underline{U}_{22}}{\underline{U}_1} . \quad (\text{C.2})$$

Obzirom da je  $\underline{Z}_1 \approx \underline{Z}_2$  i  $\underline{U}_1 \approx \underline{U}_2$ , koristimo formule:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1 + \alpha_z + j\beta_z; \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = 1 + \alpha_U + j\beta_U; \frac{\Delta\underline{U}_{21}}{\underline{U}_1} = \alpha_{21} + j\beta_{21}; \frac{\Delta\underline{U}_{22}}{\underline{U}_1} = \alpha_{22} + j\beta_{22} \quad (\text{C.3})$$

gde su:

$\alpha_Z$  – realni deo,  $\beta_Z$  – imaginarni deo odstupanja od  $(Z_1/Z_2) = 1$ ,  
 $\alpha_U$  – realni deo,  $\beta_U$  – imaginarni deo odstupanja od  $(U_1/U_2) = 1$ ,  
 $\alpha_{21}$  – realni deo,  $\beta_{21}$  – imaginarni deo od  $\Delta U_{21}/U_1$ ,  
 $\alpha_{22}$  – realni deo,  $\beta_{22}$  – imaginarni deo od  $\Delta U_{22}/U_1$ .

Ako se jednačine (C.3) uvrste u jednačine (C.2) i (C.1) dobiju se sledeće jednačine:

$$\alpha_U = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22}}{2}, \quad \beta_U = \frac{\beta_{22} + \beta_{21}}{2}, \quad (C.4)$$

$$\alpha_Z = \frac{\alpha_{22} - \alpha_{21}}{2}, \quad \beta_Z = \frac{\beta_{22} - \beta_{21}}{2}. \quad (C.5)$$

Jednačine (C.4) se koriste za izračunavanje greške kalibratora fazne razlike, a jednačine (C.5) za izračunavanje greške mosta sa impedansama  $Z_1$  i  $Z_2$ .

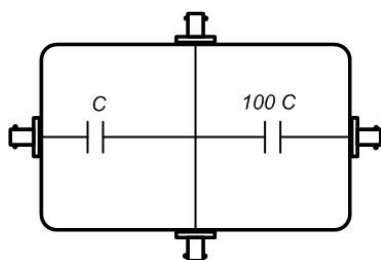
Ukoliko most nije u potpunosti uravnotežen moguće je koristiti grafičko rešenje da se odredi greška faznog ugla.

Eksperimenti su pokazali da je teško postići ravnotežu mosta kada se kao detektor nule koristi voltmetar koji meri samo moduo napona mosta a ne i komponente napona mosta u fazi i kvadraturi.

Za jednake amplitude izlaza meri se faza koristeći etalonski otpornički fazni most sa odnosom 1 prema 1. Takvi mostovi su komercijalno dostupni sa faznim greškama manjim od  $1 \text{ m}^\circ$  na učestanosti signala 50 kHz. S obzirom da su linearni, greške ispod 50 kHz su zanemarljive. Njihove fazne performanse se verifikuju koristeći dva merenja: jedno sa priključenim mostom i drugo kada delovi mosta zamene mestima. Zbir dva očitavanja podeljen sa 2 je fazna greška etalona faze, a razlika podeljena sa dva je fazna greška mosta.

Pošto etalon faze ima izlazne napone koji se podešavaju od 50 mV do 120 V, most sa odnosom 1 prema 1 koji sa jedne strane ima direktan priključak na etalon faze može se koristiti da se direktno uravnoteže ulazi sa amplitudama bilo gde u opsegu.

Da bi mogli koristiti veće napone i nejednake amplitude koriste se kapacitivni mostovi sa odnosom 100 prema 1 ili više. Takav kapacitivni most mora imati stabilne vrednosti tako da lutajuće kapacitivnosti ne uzrokuju grešku faznog pomeraja.



Slika C.2: Šema veza jednog kapacitivnog mosta proizvođača Clarke-Hess.

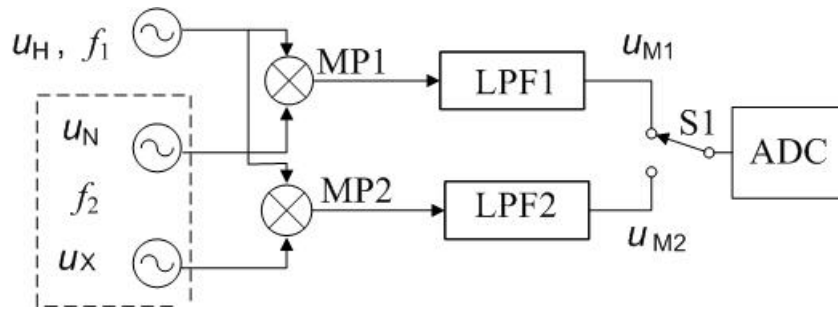
### 3) Heterodinski merni sistem

Kombinovana merna nesigurnost u skladu sa GUM, rezultata merenja fazne razlike heterodinskim mernim sistemom [1.21] je reda 0,06 m° (ili 1 μrad), za napone koji imaju učestanost u audiofrekvencijskom opsegu, amplitude do 7 V i maksimalni odnos amplituda merenih napona 1:10.

Proizvod dva sinusna signala može se napisati na sledeći način:

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]. \quad (\text{C.6})$$

U jednačini (C.6) vide se dva bočna opsega učestanosti. Niži bočni opseg koji ima tzv. heterodinsku učestanost ( $\alpha - \beta$ ) koristi se da pomeri merene signale u niži domen učestanosti.



Slika C.3 Šema heterodinskog mernog sistema za merenje fazne razlike između dva napona  $u_N$  i  $u_X$ .

Osnovni princip heterodinskog mernog sistema (HMS) prikazan je na slici C.3. Signali između kojih treba odrediti faznu razliku označeni su  $u_N$  i  $u_X$ . Oba signala imaju istu učestanost  $f_2$ . Pomoćni napon  $u_H$  koji ima učestanost  $f_1$  dovodi se na dva analogna množača MP1 i MP2. Nisko – propusni filtri LPF1 i LPF2 postavljeni posle množača eliminišu više bočne opsege učestanosti ( $\alpha + \beta$ ). Da bi odredili faznu razliku, jedan analogno-digitalni konvertor (ADC) uzorkuje sinhrono sa heterodinskom učestanošću izlazne napone  $u_{M1}$  i  $u_{M2}$  sa izlaza LPF1 odnosno LPF2, naimenično jedan zatim drugi napon. Iz uzoraka napona određuje se fazna razlika između  $u_N$  i  $u_X$  koristeći diskretnu Furijeovu transformaciju (DFT). HMS transformiše signale učestanosti  $f_2$  u signale željene razlike učestanosti na kojoj je mnogo lakše odrediti Furijeove komponente sa većom tačnošću nego direktno na učestanosti  $f_2$ .

Ulazni naponi se mogu opisati sledećim jednačinama:

$$\begin{aligned}
 u_X &= \sqrt{2} \cdot U_X \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_X), \\
 u_N &= \sqrt{2} \cdot U_N \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_N), \\
 u_H &= \sqrt{2} \cdot U_H \cdot \sin(\omega_1 t + \psi).
 \end{aligned}
 \tag{C.7}$$

gde su:  $U_X$ ,  $U_N$  i  $U_H$  – rms vrednosti napona;  $\varphi_X$  i  $\varphi_N$  – fazni uglovi čiju razliku treba odrediti;  $\psi$  fazni ugao pomoćnog signala;  $\omega_2 = 2\pi f_2$  i  $\omega_1 = 2\pi f_1$  – kružne učestanosti.

Pretpostavljajući da su MP1 i MP2 linearni i slični, a takođe i i LPF1 i LPF2 linearni i slični, izlazni naponi su dati jednačinama:

$$\begin{aligned} u_{M1} &= F_M \cdot U_H \cdot U_N \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \psi + \delta - \varphi_N), \\ u_{M2} &= F_M \cdot U_H \cdot U_X \cdot \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \psi + \delta - \varphi_X), \end{aligned} \quad (C.8)$$

gde je konstanta  $F_M$  ( $V^{-1}$ ) faktor pojačanja a  $\delta$  je zbir faznih grešaka za svaki MP i LPF za učestanost  $f_d = f_1 - f_2$ . Komponenta napona sa zbirom učestanosti je zanemarena.

Iz uzoraka signala  $u_{M1}$  i  $u_{M2}$  odrede se fazni uglovi  $\varphi_{M1}$  i  $\varphi_{M2}$  koristeći DFT. Važi sledeća jednačina:

$$\varphi_{M1} - \varphi_{M2} = (\psi + \delta - \varphi_N) - (\psi + \delta - \varphi_X) = \varphi_X - \varphi_N. \quad (C.9)$$

Da bi se smanjile greške merenja ovim sistemom, dodaje se poseban preklopnik S2 na izlazu signala  $u_N$  i  $u_X$  koji omogućava da signali  $u_N$  i  $u_X$  međusobno zamene mesta u odnosu na ulaze u MP1 i MP2. Vrš se merenja:  $u_{M1a}$  i  $u_{M2a}$  kad je preklopnik S2 u položaju (a) i  $u_{M1b}$  i  $u_{M2b}$  kad je preklopnik S2 u položaju (b). Izračunaju se fazne razlike za rezultate merenja kad je preklopnik S2 u položaju (a) i kad je u položaju (b), i odredi se srednja vrednost:

$$\varphi_{HMS} = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{2} = \varphi_X - \varphi_N + \frac{1}{2} [(\delta_1(U_N) - \delta_1(U_X)) + (\delta_2(U_N) - \delta_2(U_X))]. \quad (C.10)$$

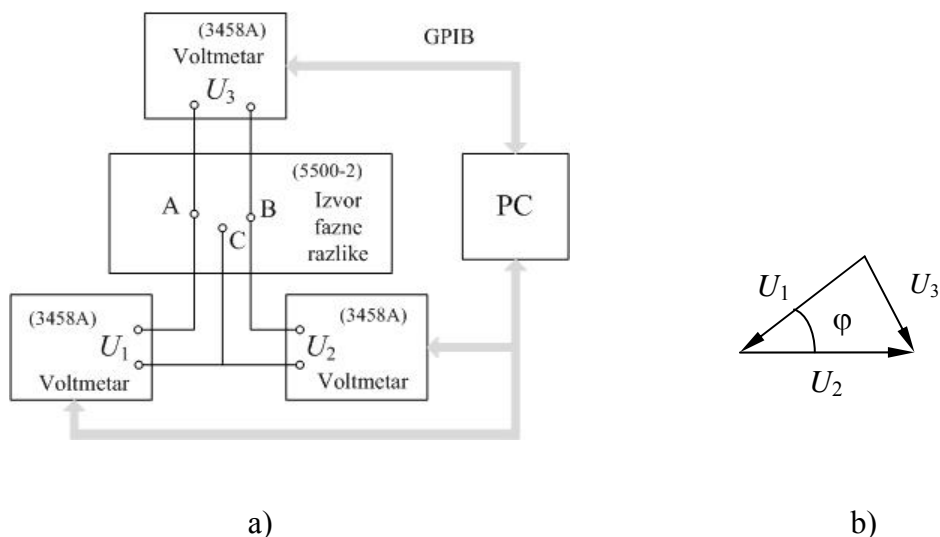
Deo u uglastoj zagradi predstavlja grešku merenje fazne razlike  $\varphi_X - \varphi_N$  ovim sistemom zbog nelinearnosti faznog odziva multiplexera na različitim naponskim nivoima.

Merna nesigurnost tipa B [1.21] potiče od nesigurnosti merenja faznog ugla usled šuma oba MP, nesigurnosti merenja fazne razlike zbog metode uzorkovanja i varijacije faznog ugla MP na učestanosti  $f_2$ . Uticaji džitera pri uzorkovanju signala  $u_{M1}$  i  $u_{M2}$  i konačna rezolucija ADC mogu da se zanemare za merenja pri kojima je  $f_d = 1$  Hz, i učestanost uzorkovanja 20 Hz.



#### 4) Metoda tri voltmetra

Ova metoda merenja fazne razlike između dva napona koristi se za etaloniranje etalona fazne razlike za učestanosti koje ne pokrivaju prethodno navedene metode, a ograničena je opsegom učestanosti voltmetara koji se koriste za merenje [1.3, 1.17, 1.22 – 1.23].



Slika C.4 a) Šema sistema za merenje fazne razlike između napona  $U_1$  i  $U_2$  metodom tri voltmetra, koji mere napone  $U_1$ ,  $U_2$  i  $U_3$ , b) vektorski dijagram za merenje fazne razlike  $\varphi$  između napona  $U_1$  i  $U_2$ .

Na slici C.4 prikazana je šema merenja fazne razlike između dva napona  $U_1$  i  $U_2$ . Tri voltmetra (tip 3458A, Agilent) istovremeno mere tri napona označena na slici C.4 sa  $U_1$ ,  $U_2$  i  $U_3$ . Napone  $U_1$  i  $U_2$  daje etalon fazne razlike (npr. tip 5500-2, Clarke Hess) na svojim izlazima obeleženim na slici sa AC i BC, a napon  $U_3$  se meri između tačkaka A i B. Podaci se prebacuju u računar (na slici označen sa PC) gde se obrađuju.

Utjecaji voltmetra na merenje napona  $U_3$  se minimiziraju merenjem napona u oba smera i uzimanjem srednje vrednosti.

Koristi se formula za izračunavanje faznog ugla  $\varphi$  između dva napona  $U_1$  i  $U_2$ :

$$\varphi = \arccos\left(\frac{U_1^2 + U_2^2 - U_3^2}{2 \cdot U_1 \cdot U_2}\right). \quad (\text{C.11})$$

## Biografija autora

Nada M. Vučijak rođena je 1952. god u Zenici, BiH. Osnovnu školu i gimnaziju završila je u Čapljini, BiH. Na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu završila je odsek Tehničke fizike, i stekla stručni naziv diplomirani elektrotehnički inženjer. Magistarsku tezu pod naslovom „Razvoj sistema za proveru metroloških karakteristika elektroencefalografa“, odbranila je u decembru 2002. godine na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu kod mentora prof. dr Dragana Stankovića i prof. dr Predraga Pejovića.

Najpre se zaposlila u Obrazovnom elektrotehničkom centru „Rade Končar“, Beograd, Braće Grim 32, gde je držala predavanja i vežbe iz više predmeta elektrotehničke struke, od 1980. do 1985. godine. Zatim se zaposlila u DP „Teleoptik“, Zemun, Cara Dušana 139-141, u ovlašćenoj metrološkoj laboratoriji ML21 kao metrolog za etaloniranje merila električnih veličina. Neko vreme radila je u istraživačkoj radnoj jedinici u preduzeću „Teleoptik“ na projektima koji su realizovani u saradnji sa Institutom za fiziku, Zemun. Kraće vreme bila je šef ovlašćene metrološke laboratorije ML21 u preduzeću „Teleoptik-Žiroskopi“ i šef Centralne laboratorije u preduzeću „Teleoptik“. Zatim se 1997. godine zaposlila u Saveznom zavodu za mere i dragocene metale (danas Direkcija za mere i dragocene metale DMDM), Beograd, Mike Alasa 14, gde je radila kao metrolog. 2014. godine zaposlila se u Elektrotehničkom Institutu DEC, d.o.o., Zrenjanin, kao metrolog.

Važniji projekti na kojima je učestvovala:

- „Razvoj laserskog bar-kod čitača“, saradnja DP „Teleoptik“, Zemun sa Institutom za fiziku na projektu Republičkog fonda za tehnološki razvoj 1989.-1991.,
- „Key Comparison EURAMET.EM-K5.1, EURAMET Project No. 687 Comparison of 50/60 Hz Power“, 2005.-2011., međunarodni projekat, učešće DMDM,
- EURAMET project 1013 Peer review - ocenjivanje jednakih u oblasti električne snage, 2007., međunarodni projekat, učešće DMDM,
- „CARDS PT3 Intercomparison with electricity meter“, 2008., međunarodni projekat, učešće DMDM,
- „Bilateral comparison between EIM-Greece and DMDM-Serbia, Calibration of an energy meter“, 2010., međunarodni projekat, učešće DMDM,

- „EURAMET project 1187: Comparison of Instrument Current Transformers up to 10 kA“, 2012., međunarodni projekat, učešće DMDM.

Do sada je objavila jedan rad u međunarodnom časopisu sa impact faktorom sa SCI liste koji je u direktnoj vezi sa disertacijom, dva rada u zbornicima međunarodnih konferencija, koautor je jedne knjige, autor je poglavlja u drugoj knjizi, objavila je 9 radova u domaćim časopisima i 18 radova u zbornicima domaćih konferencija. Bila je recenzent radova za Kongres metrologa i za časopise Eurasip i Measurement Science Rewiev. Član je Društva metrologa Srbije.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписана Нада М. Вучијак

број индекса (по старом је програму)

### Изјављујем

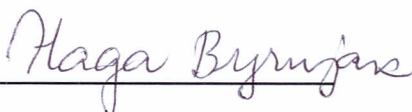
да је докторска дисертација под насловом

„Алгоритам за одређивање фазне разлике синусних сигнала ниских учестаности“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршила ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 21.10.2015.

  
\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора	Нада М. Вучијак
Број индекса	(по старом је програму)
Наслов рада	„Алгоритам за одређивање фазне разлике синусних сигнала ниских учестаности“
Ментор	др Лазар Сарановац, ванредни професор, Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Потписана Нада Вучијак

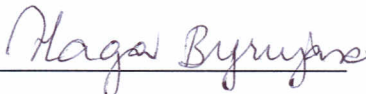
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 21.10.2015.

  
\_\_\_\_\_

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом: „Алгоритам за одређивање фазне разлике синусних сигнала ниских учестаности“ која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

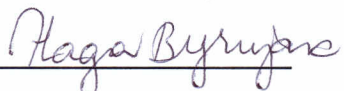
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучила.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 21.10.2015.

Потпис докторанда



1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.