

Matematički Fakultet, Univerzitet u Beogradu

Ivan Milić

**UBRZANJE METODA ZA  
REŠAVANJE PROBLEMA PRENOSA  
POLARIZOVANOG ZRAČENJA U  
VIŠE DIMENZIJA I NJIHOVA  
PRIMENA**

Doktorska Disertacija

Beograd, 2014

Faculty of Mathematics, University of Belgrade

Ivan Milić

**ACCELERATION OF METHODS FOR  
MULTIDIMENSIONAL POLARIZED  
RADIATIVE TRANSFER AND THEIR  
APPLICATION**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2014

## Mentori:

Profesor Olga Atanacković

Redovni Profesor, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Profesor Marianne Faurobert

Redovni Profesor, Univerzitet u Nici Sophia-Antipolis

## Članovi komisije:

dr Jiří Štěpán

Viši naučni saradnik, Opservatorija Ondřejov

Astronomski institut AN Republike Češke

Profesor Dejan Urošević

Vanredni Profesor, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

# Predgovor i zahvalnice

Ova teza je rezultat, manje-više, trogodišnjeg rada tokom mojih doktorskih studija astrofizike na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. U tom periodu sam radio kao istraživač pripravnik (i, kasnije, kao istraživač saradnik) na Astronomskoj Opservatoriji u Beogradu i kao gostujući doktorant u laboratoriji “Lagrange” na Univerzitetu u Nici. Takođe, bio sam angažovan kao vođa seminara astronomije u Istraživačkoj stanici Petnica. Teme obrađene u ovoj tezi predstavljaju ona moja interesovanja u astrofizici na koja sam se najviše fokusirao.

Tokom dela doktorskih studija sam radio na određivanju magnetnog polja mirnog Sunca na osnovu Hanle efekta. Vreme provedeno radeći na toj temi me je naučilo da je prenos zračenja bez primena kao “kajgana bez jaja”. Tokom poslednje decenije smo svedoci mnogih primera gde prenos polarizovanog zračenja u više dimenzija i Hanle dijagnostika idu zajedno i ovo je, bez sumnje, jedan od važnih pravaca u budućim istraživanjima. Razlog za to je činjenica da postoje spektralne linije čiji oblici i polarizovani profili ne mogu biti objašnjeni na osnovu jednostavnih pretpostavki kao što je jednodimenzionalna plan-paralelna atmosfera. U ovoj tezi sam pokušao da predstavim i neke nove, nadam se, zanimljive, primere primene prenosa zračenja u više dimenzija.

Sva istraživanja predstavljena u ovoj tezi su daleko od “gotovih” i mnogo stvari ostaje da se uradi bolje i temeljnije. Nadam se da će u tome učestvovati i neki novi studenti, zainteresovani za ovu oblast. Pre nego što se pozabavimo ovom lepom i nadasve važnom disciplinom, želeo bih da izrazim svoju zahvalnost svima koji su na neki način pomogli nastanak ovog teksta.

Večno sam zahvalan mojim mentorkama, Profesorki Olgi Atanacković i Profesorki Marianne Faurobert. Njih dve su mi, ne samo pružale naučnu i duhovnu

podršku tokom mojih studija, pisale pisma preporuke i pomagale da nađem stipendije, već su u potpunosti poštovale moje želje, smatrale sve moje ideje i mišljenja jednakim njihovim i učinile su da ove tri godine budu apsolutno najzanimljiviji deo mog dosadašnjeg školovanja. Sve vreme dok sam radio sa njima bio sam potpuno ispunjen samopouzdanjem i pozitivnim stavom prema astrofizici. Ne postoji nikakav opipljiv način kako da im se zahvalim za ovo.

Želeo bih da se zahvalim dr Gojku Đuraševiću, šefu projekta "Fizika zvezda" na Astronomskoj opservatoriji, koji mi je dao apsolutnu slobodu da radim na oblastima koje me zanimaju i obezbedio mi sredstva sa projekta kada god je to bilo moguće. Ceo kolektiv AO je zaslužan za to da se tamo osećam kao kod kuće ali posebnu zahvalnost dugujem Nemanji Martinoviću, koji je uvek imao vremena da mi pomogne, kakve god probleme da sam imao, kao i Mileni Jovanović koja mi je pružala preko potrebnu moralnu podršku, čak i onda kada to nisam zasluživao. Moji prijatelji u Nici, Silvia Paris, Jie Chen i Arwa Dabbech su moj boravak tamo načinili jako prijatnim i intelektualno stimulirajućim. Među osobama koje su upoznate sa mojim radom i koje su na neki način pomogle kritikama i savetima su i Jiří Štěpán (Ondřejov), Nikola Vitas (IAC), Helene Frisch (OCA), Veronique Bommier (IAP), Slobodan Jankov (AOB) i Irena Pirković (AOB).

Sa druge strane, ne bih mogao da zamislim moj život bez IS Petnica i ljudi sa kojima tamo provodim vreme. Oni su mi mnogo više od kolega, oni su, zaista, fantastični prijatelji. Tokom godina provedenih tamo sam, ne samo naučio mnogo stvari o astronomiji, već i o nauci uopšte. Vrlo je nezahvalan posao izdvojiti bilo koga od njih ali posebnu zahvalnost zaslužuju Andrej Obuljen, sa kojim sam delio bitan deo mojih mišljenja, nedoumica, planova i strahova, Nikola Božić i Marko Simonović koji mi je pokazao da čista ljubav prema nauci i snaga volje mogu da donesu izuzetne rezultate. Takođe zahvaljujem svim mojim prijateljima koji definitivno čine da se osećam voljenim ali posebno Milici Vučetić, mojoj prijateljici i kolegici tokom poslednjih 22 godine. Veliko hvala Dušanu Oniću, Mileni Jovanović, Milanu Darijeviću i Slobodanu Milovanoviću na korisnim savetima oko teksta i forme ove teze.

Voleo bih da pomenem Institut Francais, COST akciju MP1104, Francusku Vladu, Ministarstvo nauke Republike Srbije, Opservatoriju u Nici i sve druge in-

stitucije koje su mi finansijski pomogle.

Možda bi ishod svega ovoga bio isti, ali ja definitivno ne bih bio ovako srećan i spokojan da nisam odrastao u najboljoj mogućoj porodici koju je moguće zamisliti. Tokom ove tri godine njih dvoje je preminulo. Moja baka, Branka Simić, od koje sam nasledio osobinu da ne mogu da sedim miran više od deset minuta, i moj otac Zoran Milić koji je bio jedini uzor kog sam ikad imao i koji me naučio verovatno najvažniju lekciju u životu: da budem smiren i tolerantan. Najiskreniju i najveću zahvalnost, ne samo za razne oblike pomoći, podrške i razumevanja, već i za bezbrojne male darove mudrosti dugujem mojoj majci Zorici i mojoj sestri Milici.

Nica, januar 2014

IM

# UBRZANJE METODA ZA REŠAVANJE PROBLEMA PRENOSA POLARIZOVANOG ZRAČENJA U VIŠE DIMENZIJA I NJIHOVA PRIMENA

## Sažetak

Prenos zračenja u više dimenzija je neophodan sastavni deo modernog pristupa modelovanju astrofizičkih objekata. Realistično modelovanje podrazumeva korišćenje pretpostavke o ne-lokalnoj statističkoj ravnoteži, koja, opet, podrazumeva potrebu za istovremenim i samokonzistentnim rešavanjem spregnutih jednačina prenosa zračenja i statističke ravnoteže. Ovim pristupom možemo da, na osnovu teorijskih modela, izračunamo spektre nebeskih tela što je, u principu, neophodan korak u korektnoj interpretaciji rezultata. Zahvaljujući preciznim posmatranjima visoke spektralne rezolucije često je moguće meriti ne samo intenzitet već i polarizaciju svetlosti. Za interpretaciju ovakvih posmatranja neophodno je u rešavanje problema prenosa zračenja uključiti i polarizaciju i primeniti odgovarajući teorijski pristup.

Ova disertacija se bavi problemom ne-LTR prenosa (u opštem slučaju, polarizovanog) zračenja u dvodimenzionim sredinama. Teza se konceptualno može podeliti u dva dela. U prvom delu, predstavljen je numerički metod za formalno rešavanje jednačine prenosa zračenja u 2D Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu. Ovaj metod omogućava eksplicitno obračunavanje doprinosa ne-lokalnih funkcija izvora lokalnom specifičnom intenzitetu a samim tim i integralu rasejanja. Ovi doprinosi su neophodni za iterativno rešavanje spregnutih jednačina prenosa zračenja i statističke ravnoteže. Na osnovu ovog formalnog rešenja uvedene su dve nove sheme za višedimenzioni prenos zračenja koje su do sada bile korišćene samo u 1D slučajevima: simetrična Gauss-Seidel-ova iteracija i "Prolaz-po-prolaz" implicitna lambda iteracija. Obe metode su zasnovane na implicitnom tretmanu lokalne funkcije izvora i na popravkama funkcije izvora tokom svakog prolaza kroz koordinatnu mrežu (četiri puta po iteraciji). "Prolaz-po-prolaz" implicitna lambda iteracija takođe koristi ideju iteracionih faktora i zahvaljujući tome, ostvaruje ubrzanje od oko 7 puta u odnosu na referentni metod, Jacobi iteraciju. Oba nova metoda

su takođe daleko brža od referentnih metoda (Jacobi iteracije i obične Gauss-Seidel iteracije) i na problemima sa periodičnim graničnim uslovima. Takođe, ispostavlja se da se “Prolaz-po-prolaz” implicitna lambda iteracija bolje skalira sa prostornom rezolucijom od ostalih testiranih metoda.

Drugi deo disertacije se bavi numeričkim prenosom polarizovanog zračenja na 2D cilindričnim koordinatnim mrežama. Metod je zasnovan na formalnom rešenju koje koristi metod kratkih karakteristika drugog reda i na standardnoj Jacobi iteraciji sa Ng ubrzanjem (generalizacija na druge metode ubrzanja je data u dodatku A). Metod omogućava samo-konzistentno numeričko rešavanje spregnutih jednačina prenosa zračenja i statističke ravnoteže za zračenje polarizovano rasejanjem koristeći formalizam redukovanog intenziteta. U ovom formalizmu, polarizovani intenzitet i funkcija izvora su napisani kao šest-vektori gde funkcija izvora ne zavisi od pravca, omogućavajući time značajne uštede u računarskom vremenu i memoriji. Metod je pogodan za modelovanje osno-simetričnih objekata, kao što su astrofizički diskovi. Metod je testiran na jednostavnim primerima cirkumstelarnih i samo-emitujućih diskova. Glavni zaključak ovih testova je da je prisustvo diska u sistemu disk-zvezda izvor značajne količine linearne polarizacije usled procesa rasejanja i da isto može biti detaljno modelirano ovim pristupom. Takođe, izračunavanja pokazuju da rotacija u samo-emitujućim diskovima drastično menja ne samo profile spektralnih linija već i polarizaciju u spektralnim linijama. Kombinacija ne-LTR, višedimenzionih efekata i rotacije dovodi do vrlo komplikovanih profila koji su ne-trivijalni za interpretaciju. Ipak, generalni zaključak je da rotacija smanjuje količinu  $Q$  komponente polarizacije  $i$ , zavisno od brzine rotacije, prouzrokuje pojavu karakteristične  $U$  komponente polarizacije. Ukoliko ovi efekti mogu biti posmatrani, ovakvo modelovanje nudi koristan alat za interpretaciju posmatranja.



**Ključne reči:** formiranje spektralnih linija, numerički prenos zračenja, polarizacija rasejanjem

**Naučna oblast:** Astronomija

**Uža naučna oblast:** Astrofizika

**UDK broj:** [52-355]+[52-64:52-17]+[52-357](043.3)

# ACCELERATION OF METHODS FOR MULTIDIMENSIONAL POLARIZED RADIATIVE TRANSFER AND THEIR APPLICATION

## Abstract

Multidimensional radiative transfer is an essential ingredient of modern approach to modeling of astrophysical objects. Realistic modeling calls for the assumption of non-local thermodynamic equilibrium (NLTE), which, in turn requires self-consistent solution of coupled equations of radiative transfer statistical equilibrium. This approach allows us to compute emergent spectrum from a given model of the object, which is, in principle, a necessary step in interpretation of observational results. Thanks to the high-resolution and high signal to noise observations, it is often possible to measure not only intensity of the light but also its state of polarization. For interpretation of such observations it is necessary to solve radiative transfer problem for polarized radiation.

This thesis deals with non-LTE transfer of (generally polarized) radiation in two-dimensional media. Thesis can be divided in two parts. In the first part, we present a numerical method for the formal solution of the radiative transfer equation in 2D Cartesian coordinate system. This method allows us to explicitly account for the contribution of non-local source functions to the local specific intensity, and, hence, to the local scattering integral. The knowledge of these contributions is necessary for an iterative solution of coupled equations of radiative transfer and statistical equilibrium. Based on this formal solution we introduce two novel schemes for multidimensional NLTE radiative transfer which have so far been used only in 1D geometry: symmetric Gauss-Seidel iteration and “Sweep-by-sweep” implicit lambda iteration, latter one being based on “Forth-and-back” implicit lambda iteration. Both methods utilize implicit use of the local source function and the source function corrections each sweep of the computational grid (four times per iteration). “Sweep-by-sweep” implicit lambda iteration also uses the idea of iteration factors and achieves acceleration of about factor of seven with respect to the referent Ja-

cobi method. Both new methods also significantly surpass both Jacobi iteration and Gauss-Seidel iteration on problems with periodic boundary conditions. Also, it turns out that “Sweep-by-sweep” implicit lambda iteration scales with grid resolution better than the Jacobi iteration.

The second part of the thesis deals with numerical polarized radiative transfer on 2D cylindrical grids. The method is based on the second order short characteristics for the formal solution and uses standard Jacobi iteration with Ng acceleration to solve the polarized non-LTE problem (Generalization to other iterative schemes is given in appendix A). This method allows for the self-consistent solution of coupled equations of radiative transfer and statistical equilibrium equation for a two level atom model for polarized radiation. The method employs reduced intensity basis where intensity and source function are written as six-vectors and source function does not depend on direction which allows for significant saving in memory and computing time. It is applicable for modeling of axisymmetric objects such as astrophysical disks. The method has been tested on simple models of circumstellar and self-emitting disks. The most important conclusion of these computations is that the presence of the disk in the system introduces a significant degree of linear polarization due to the scattering processes and that one is able to model it in detail using our approach. Also, it is shown that the presence of rotation in self-emitting disks dramatically changes not only intensity, but also polarized spectral lines profiles. Interplay of non-LTE, multidimensional effects and rotation results in very complicated line profiles which are non-trivial for interpretation. However, the main effect is that the rotation decreases the amount of Stokes  $Q$  component and, depending on the rotation velocity causes appearance of double-lobed  $U$  polarization profile. If these effects can be observed, this kind of modeling provides a useful tool for interpretation of the spectropolarimetric observations.

**Keywords:** spectral line formation, numerical radiative transfer, scattering polarization

**Scientific area:** Astronomy

**Scientific field:** Astrophysics

**UDC number:** [52-355]+[52-64:52-17]+[52-357](043.3)

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Specifični intenzitet i jednačina prenosa zračenja . . . . .	6
1.1.1	Atmosfera u (lokalnoj) termodinamičkoj ravnoteži . . . . .	9
1.1.2	Apsorpcija i emisija u spektralnim linijama . . . . .	12
1.2	Ne-LTR slučaj . . . . .	15
1.3	Rešavanje ne-LTR problema . . . . .	17
1.3.1	Numeričko rešenje u 1D . . . . .	22
1.4	Prenos polarizovanog zračenja . . . . .	24
1.4.1	Prenos polarizovanog zračenja u spektralnim linijama . . . . .	26
1.5	Potreba za prenosom zračenja u više dimenzija . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Formalno rešenje jednačine prenosa metodom kratkih karakteris- tika</b>	<b>32</b>
2.1	“Deo-po-deo” aproksimacija funkcije izvora polinomom . . . . .	33
2.2	Diskretizacija . . . . .	36
2.3	Odabir uzlazne tačke . . . . .	39
2.4	Modifikovani oblik kratkih karakteristika sa pretpostavkom kvadratne interpolacije . . . . .	41
2.5	Polja brzine u referentnom sistemu posmatrača . . . . .	44
2.6	Nekoliko napomena o implementaciji . . . . .	47

<b>3</b>	<b>Implicitna lambda iteracija na dvodimenzionim Dekartovskim koordinatnim mrežama</b>	<b>50</b>
3.1	Jacobi-jeva iteracija . . . . .	53
3.2	Gauss-Seidel-ova iteracija . . . . .	56
3.3	Simetrična Gauss-Seidel-ova iteracija . . . . .	60
3.4	Implicitna lambda iteracija . . . . .	61
3.4.1	FBILI metod za 1D polubeskonačne atmosfere . . . . .	61
3.4.2	“Prolaz-po-prolaz” implicitna lambda iteracija na 2D Dekartovskim koordinatnim mrežama . . . . .	64
3.5	Konvergentne osobine iterativnih procedura: Test problem iz rada Auer & Paletou (1994) . . . . .	66
3.6	Performanse opisanih procedura na koordinatnoj mreži sa periodičnim graničnim uslovima . . . . .	69
3.7	Skaliranje sa prostornom rezolucijom . . . . .	73
3.8	Zaključci i planovi za dalji rad . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Polarizacija rasejanjem u spektralnim linijama u formalizmu redukovanog intenziteta</b>	<b>77</b>
4.1	Uvod . . . . .	77
4.2	Razvoj funkcije izvora i intenziteta u redukovanom formalizmu . . . . .	79
4.3	Numeričko rešavanje . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Prenos zračenja polarizovanog rasejanjem u 2D cilindričnim koordinatama</b>	<b>86</b>
5.1	Uvod . . . . .	86
5.2	Metod . . . . .	89
5.2.1	Metod kratkih karakteristika u cilindričnim koordinatama . . . . .	90
5.2.2	Interpolacija pravca i numerička integracija po pravcima . . . . .	93
5.2.3	Granični uslovi . . . . .	96
5.2.4	Jacobi-jeva iteracija primenjena na cilindrične koordinate . . . . .	99
5.2.5	Polarizovana jednačina prenosa u redukovanom formalizmu . . . . .	100

5.2.6	Granični uslovi za polarizovano zračenje . . . . .	102
5.3	Poređenje sa 1D primerima . . . . .	103
5.4	Rasejanje u spektralnim linijama u cirkumstelarnom disku . . . . .	105
5.5	Efekti rotacije u samo-emitujućim Keplerovskim diskovima . . . . .	112
5.6	Zaključci . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Završne napomene i planovi za dalji rad</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Numeričko rešavanje prenosa polarizovanog zračenja u formalizmu redukovanog intenziteta korišćenjem implicitne reprezentacije funkcije izvora</b>	<b>126</b>

# Glava 1

## Uvod

There is a crack in everything, that's  
how the light gets in.

---

Leonard Cohen, 'Anthem'

Nema mnogo astrofizičkih disciplina koje uživaju tako malo interesovanja i pažnje kao što je prenos zračenja (engleski: *radiative transfer*, *radiative transport*, *transfer of radiation*). Pošto zahteva znanje atomske i kvantne fizike, generalno poznavanje astrofizike i “osećaj” (da ne kažemo, talenat) za interpretaciju rezultata, prenos zračenja se često smatra “teškim” ili “nepotrebno komplikovanim”. Povrh toga, moderne metode zahtevaju napredne programerske veštine kao i poznavanje osnova numeričke algebre. Ipak, ovo je oblast u kojoj znanja moraju biti sačuvana i produbljena. Cilj ove teze je da objasni zašto i da dâ mali, ali nadamo se merljiv, doprinos ovoj oblasti.

Prenos zračenja je pretežno teorijska disciplina koja se bavi ispitivanjem nastanka i, kako samo ime kaže, prenosa svetlosti (fotona) kroz različite sredine. Pretpostavljamo da nebesko telo emituje svetlost i da emitovana svetlost, nakon eventualne interakcije sa međuzvezdanom ili međugalaktičkom materijom, stiže do posmatrača. Rezultati posmatranja (ili, generalno rečeno, eksperimenta) skoro nikada ne mogu biti direktno interpretirani. Naime, posmatrane veličine (spektri, krive sjaja, itd.) su, u većini slučajeva, rezultat istovremenog uticaja različitih fenomena. Spektar je jedan od najboljih primera, pošto na njegov nastanak utiče veliki broj mikroskopskih i makroskopskih procesa. Fizička veličina koja se u ovom slučaju



meri je intenzitet, tj. fluks i njegova spektralna raspodela (raspodela po talasnim dužinama/frekvencijama). U slučaju objekata koji imaju konačnu ugaonu veličinu, čiji je najbolji primer Sunce, možemo analizirati takođe i prostornu raspodelu intenziteta. U slučaju kada je signal dovoljno jak (kada dovoljno fotona stiže do našeg detektora) možemo izmeriti i polarizaciju (polarimetrija) ili čak i spektralnu raspodelu polarizacije (spektropolarimetrija) svetlosti. Kako je (u opštem slučaju, polarizovani) spektar zračenja nekog objekta rezultat različitih procesa koji se u njemu dešavaju, da bismo pravilno izveli zaključke iz posmatranja, neophodno je napraviti teorijski model posmatranog objekta.

Pod pojmom “model” najčešće podrazumevamo nekakav kvantitativni opis objekta u vidu raspodele relevantnih fizičkih veličina (npr. temperature, gustine, brzine čestica, magnetnog polja, itd.). Da bismo modelirali objekat koji izučavamo, uglavnom smo suočeni sa rešavanjem sistema jednačina (integralnih i/ili diferencijalnih) koje slede iz odgovarajućih fizičkih zakona koji, opet, povezuju relevantne fizičke veličine. Prenos zračenja se bavi, između ostalog, rešavanjem odgovarajućih jednačina sa ciljem izračunavanja intenziteta i polarizacije zračenja<sup>1</sup> koje razmatrano telo emituje. Analitička rešenja su moguća samo u jako malom broju slučajeva koji su relativno daleko od realnog opisa objekata na koje nailazimo u svemiru. U stvari, u mnogim situacijama je neophodno jako detaljno *numeričko* modeliranje da bismo uspeali da objasnimo posmatrane detalje u spektru. Jedan od najboljih primera za ovo su posmatranja Sunca koja se sada rutinski vrše sa jako visokom tačnošću (odnos signal/šum  $> 10^4$ ), spektralnom rezolucijom ( $\approx 10^6$ ) i diferencijalnom polarimetrijskom osetljivošću ( $\approx 10^{-5}$ ).

Ukoliko je posmatrani objekat moguće opisati relativno malim brojem parametara, i ako izlazni intenzitet možemo izračunati relativno brzo, interpretacija posmatranja se može izvršiti takozvanom “inverzijom”. Ova tehnika se zasniva na minimizacionoj proceduri pomoću koje se traže vrednosti parametara koje daju izračunati spektar koji najbolje odgovara (“fituje”) posmatranom spektru. Ovakve metode su zaslužne za veliki napredak u razumevanju, npr. prirode magnetnih polja na Suncu. Poslednjih godina, u upotrebi su jako kompleksni metodi (na primer: van

---

<sup>1</sup>U tezi ćemo ravnopravno koristiti izraze “zračenje” i “svetlost”.

Noort 2012). Važno je naglasiti da inverzija zahteva jednostavne fizičke modele i da stoga za inverziju spektroskopskih i spektropolarimetrijskih posmatranja koristimo samo jednodimenzionalne modele (osobine objekta zavise samo od jedne prostorne koordinate). Multi-dimenzionalni (2D i 3D) modeli nisu podobni za inverziju iz dva razloga: i) za opis modela je potreban jako veliki broj parametara, što bi dovelo do degeneracije<sup>2</sup> između istih, a samim tim i do problema u interpretaciji rezultata; ii) rešavanje problema prenosa zračenja i računanje izlaznog spektra u višedimenzionim modelima je jako “skupo” u smislu procesorskog vremena, tako da smo, čak i sa današnjim računarima, suočeni sa ograničenjima u smislu realnog vremena potrebnog za izračunavanje.

Drugi pristup modeliranju je takozvano direktno modeliranje (ili “rešavanje direktnog problema”). Ovaj pristup se zasniva na osmišljavanju što realnijeg modela i poređenju izračunatog i posmatranog spektra, na osnovu čega pokušavamo da izvedemo neke, najčešće kvalitativne zaključke. Ipak, ovaj pristup nam može pružiti i kvantitativne informacije, npr. reprodukovanjem različitih statističkih raspodela posmatranih veličina.

Metodi za prenos zračenja u višedimenzionim modelima su razvijeni upravo za ovakvo modeliranje. Oni nam omogućavaju da na adekvatan način razmatramo zavisnost relevantnih fizičkih veličina od prostornih koordinata. Modeli koji se ovde koriste su, sa druge strane, i sami uglavnom rezultat komplikovanih računarskih simulacija kao što su, npr., moderne MHD (magneto-hidrodinamičke) simulacije zvezdanih atmosfera i akrecionih diskova. Kompleksnost (a, samim tim, i nivo realnosti) modernih metoda za prenos zračenja u više dimenzija i njihova zahtevnost u pogledu procesorskog vremena i memorije je demonstrirana u nekim od najnovijih radova u ovoj oblasti (na primer Štěpán & Trujillo Bueno 2013; Anusha et al. 2011b). Prodiskutujmo, za momenat, pojam “simulacija”. U modernoj numeričkoj astrofizici dotični termin se koristi za širok dijapazon numeričkih izračunavanja, počevši od rešavanja problema istinskim “imitiranjem” fizičkih procesa (Monte Karlo simulacije) pa do problema koji se svode na rešavanje sistema diferencijalnih jednačina.

---

<sup>2</sup>Pod degeneracijom parametara podrazumevamo situaciju u kojoj ne možemo da razlučimo koji fenomen je odgovoran za posmatrane karakteristike objekta. Što je model objekta kompleksniji, tj. što sadrži više parametara, to je degeneracija između parametara verovatnija.

Iako se numerički prenos zračenja može svrstati u ovu drugu grupu mi ćemo, po ugledu na ostatak naučne zajednice koja se bavi prenosom zračenja, ovde izbegavati izraz “simulacija” (ovo izbegavanje verovatno dolazi iz tradicionalnih razloga, pošto numerička rešavanja problema prenosa zračenja imaju istoriju ukorenjenu još u 50-im godinama prošlog veka) .

Koretan opis nastanka i prenosa zračenja nije bitan samo zato da bismo mogli da interpretiramo posmatranja već i zato što zračenje interaguje sa materijom i utiče na strukturu i evoluciju samog objekta<sup>3</sup>, kao i na stanje jonizacije i ekscitacije gasa. Ukoliko je gas dovoljno gust, odnosno ukoliko je učestanost sudara među samim česticama mnogo veća od učestanosti radijativnih procesa (“sudara” između čestica i fotona), stanje gasa (raspodela po brzinama i stanjima jonizacije/ekscitacije) je u potpunosti opisano lokalnom temperaturom. Ovaj slučaj je poznat kao (ponekad veoma korisna) aproksimacija lokalne termodinamičke ravnoteže (LTR). Sa druge strane, u razređenoj sredini, gas i zračenje više nisu “spregnuti” (*eng: coupled*) i situacija postaje komplikovanija. Ovaj problem je poznat kao ne-lokalna termodinamička ravnoteža (ne-LTR, *eng: NLTE, non-local thermodynamic equilibrium*). Ne-LTR efekti u retkoj sredini mogu da budu veoma veliki i da u velikoj meri utiču na oblik i jačinu spektralnih linija, kao i na pritisak zračenja, stanje jonizacije i ekscitacije gasa, pa samim tim i na strukturu objekta uopšte.

Istraživanja predstavljena u ovoj tezi se fokusiraju na probleme gde se zračenje koristi kao sredstvo informacija, odnosno za takozvanu “spektralnu dijagnostiku.” Ovo znači da je cilj izračunati intenzitet zračenja na osnovu zadatog fizičkog modela, uz pretpostavku ne-LTR. Bez obzira na to, u principu, metodi koji će biti predstavljeni u tekstu teze mogu biti implementirani u moderne radijativno-magneto-hidrodinamičke (RMHD) simulacije.

Pre kratkog teorijskog uvoda, pomenućemo neke od referentnih udžbenika i monografija koji se izdvajaju iz ostale literature korišćene u ovde predstavljenim istraživanjima. Najpoznatija referenca je svakako knjiga Dmitrija Mihalasa, “Stellar Atmospheres” (Mihalas 1978), koja se bavi osnovama numeričkog prenosa zračenja,

---

<sup>3</sup>Neki od primera su: kosmološka epoha kada je zračenje bilo dominantno, pritisak zračenja u zvezdanim omotačima, povratni procesi usled aktivnosti galaktičkih jezgara, zvezdani vetrovi...

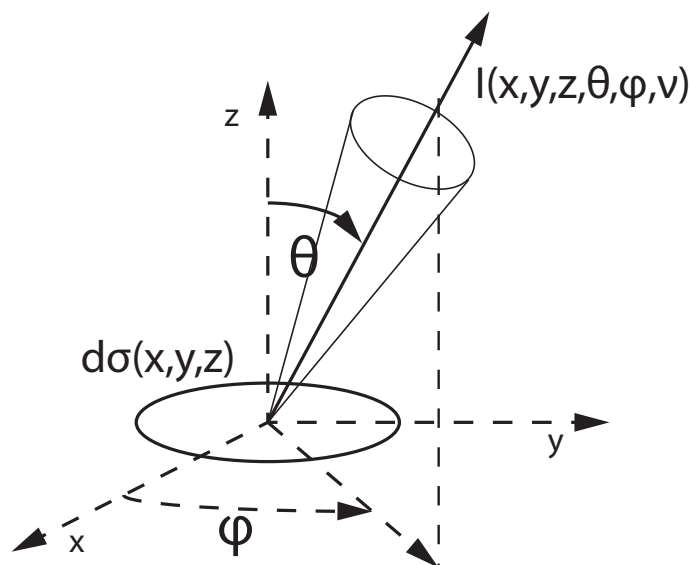
ne-LTR problemom i modeliranjem zvezdanih atmosfera. Dva zbornika preglednih radova, “Methods in Radiative Transfer” (Kalkofen 1984) i “Numerical Radiative Transfer” (Kalkofen 1987) sadrže mnogo saveta, rezultata i referenci, korisnih čak i sada, nakon skoro 30 godina. “Biblija” za prenos polarizovanog zračenja i polarizaciju u spektralnim linijama uopšte je “Polarization in Spectral Lines” (Landi Degl’Innocenti & Landolfi 2004), verovatno jedna od najdetaljnijih i najlepših knjiga u astrofizici uopšte<sup>4</sup>. Drugi pristup problemu, sa primerima inverzije spektropolarimetrijskih posmatranja je dat u knjizi “Introduction to Spectropolarimetry” (del Toro Iniesta 2007). Još jedna korisna referenca za polarizovano zračenje uopšte je “Astrophysical Spectropolarimetry” (Trujillo-Bueno et al. 2002).

Tematski, ova teza se može podeliti na dva dela: i) prvi deo (glave 2 i 3) se bavi generalizacijom metoda dvosmerno-implicitne lambda iteracije (FBILI - *forth-and-back implicit lambda iteration*) na 2D Dekartov koordinatni sistem. ii) drugi deo (glave 4 i 5) pokriva ne-LTR prenos polarizovanog zračenja u 2D cilindričnom koordinatnom sistemu i primene istog na jednostavne modele gasovitih diskova. Ideja je da se uvide i ispituju uticaji efekata geometrije, multidimenzionalnosti i uticaja polja brzina u objektu. U svim primerima je korišćena aproksimacija atoma sa dva nivoa. Svi primeri su detaljno ispitani i objavljeni su (ili će biti objavljeni) kao originalni naučni radovi. Glavna motivacija za celokupan predstavljeni rad je značaj efekata multidimenzionalnosti u različitim klasama astrofizičkih objekata.

Nastavak ovog poglavlja ima sledeću strukturu: U odeljku 1.1 ćemo uvesti specifični intenzitet zračenja i ostale neophodne fizičke veličine, u odeljku 1.2. je detaljnije definisan ne-LTR problem, dok se odeljak 1.3 bavi rešavanjem ne-LTR problema i jednostavnim primerima u jednodimenzionim zvezdanim atmosferama. U odeljku 1.4 uvodimo osnovne veličine koje opisuju polarizovano zračenje i tzv. ne-LTR problem druge vrste, odnosno problem prenosa zračenja koje je polarizovano procesima rasejanja u spektralnim linijama.

---

<sup>4</sup>Jednom prilikom, napola ozbiljno, mi je Profesorka Faurobert predložila da se povučem u manastir na ostrvo nadomak Nice i prostudiram knjigu na miru.



Slika 1.1: Standardna definicija 3D Dekartovog pravoulogog koordinatnog sistema, koju koristimo da izrazimo prostornu zavisnost i sferni koordinatni sistem u kom definišemo pravac prostiranja zračenja.

## 1.1 Specifični intenzitet i jednačina prenosa zračenja

Posmatrajmo snop zračenja koji obuhvata prostorni ugao  $d\hat{\Omega}$ , emitovan sa elementarne površine  $d\sigma$  čije su koordinate date vektorom  $\vec{r}$ , i koji je okarakterisan određenom frekventnom i vremenskom zavisnošću. Specifični (monohromatski) intenzitet zračenja u tački  $\vec{r}$ , u pravcu  $\vec{\Omega}$ , frekvencije  $\nu$  u trenutku  $t$  je definisan kao energija, emitovana sa jedinične površine, unutar jediničnog prostornog ugla, u jedinici vremena  $dt$ , u jediničnom frekventnom intervalu  $d\nu$ , dakle:

$$I(\vec{r}, \hat{\Omega}, \nu, t) = \frac{d^4 E}{dt d\hat{\Omega} d\nu d\sigma}. \quad (1.1)$$

Ovde smo sa  $\hat{\Omega}$  obeležili pravac prostiranja snopa zračenja određenom parom uglova  $(\theta, \varphi)$  koji imaju svoj standardan smisao u sfernom koordinatnom sistemu:  $\theta$  je polarni ugao a  $\varphi$  azimut, meren od pozitivnog smera  $x$  ose u direktnom smeru (vidi sliku 1.1). Takođe,  $d\hat{\Omega} = \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Razmatraćemo probleme gde su intenzitet i ostale relevantne veličine (koefici-

jent apsorpcije i emisije, temperatura, gustina...) nezavisni od vremena<sup>5</sup>. Ova pretpostavka je poznata kao pretpostavka stacionarnosti. Vremenski zavisani (nestacionaran) prenos zračenja je bitan u jako dinamičnim procesima, kao što su npr. eksplozije supernovih, gde se takođe koristi i za prenos neutrina.

U nastavku teksta, “specifični monohromatski intenzitet” ćemo često zvati samo “intenzitet”, dok će eventualna integracija po pravcu prostiranja, prostornim koordinatama ili frekvenciji biti jasna iz konteksta, ili eksplicitno napomenuta.

Do sada nismo pominjali jednu važnu osobinu svetlosti: polarizaciju. Polarizacija će biti uvedena u odeljku 1.4 (intenzitet će postati 4-vektor).

Zarad boljeg uvida u značaj i problematiku prenosa zračenja u više dimenzija (sve potrebne veličine će odmah biti formulisane u 3D Dekartovom koordinatnom sistemu), važno je shvatiti da je ovako definisan intenzitet 6-dimenzionalna veličina (zavisi od tri prostorne, dve uglovne koordinate i frekvencije). Kako se sve relevantne jednačine rešavaju numerički, jasno je da sve promenljive moraju biti diskretizovane. Jednostavniji 3D<sup>6</sup> problemi se rešavaju na “koordinatnim mrežama” (*eng: computational grid, mesh*) koje se sastoje od reda  $100 \times 100 \times 100$  tačaka, sa diskretizacijom u bar  $10 \times 10$  pravaca i na bar 10 frekvencija, što znači da treba izračunati ukupno  $10^9$  promenljivih da bi kompletno polje zračenja u objektu bilo poznato. Pitanje koje se prirodno nameće je: “Zašto računamo intenzitet u svakoj tački ako nas zanima samo izlazni intenzitet?” Nadamo se da će se odgovor na ovo pitanje iskristalisati do kraja poglavlja, ali evo kratkog objašnjenja za nestrupljive: Ukoliko je gas redak, procesi rasejanja dovode do “sprezanja” (*eng: coupling*, koristićemo i izraz pozajmljen od kolega kvantnih mehaničara: “kuplovanje”) između zračenja i gasa u različitim tačkama prostora, kao i između različitih pravaca i frekvencija. Da bismo mogli da izračunamo samokonzistentno rešenje u jednoj tački, polje zračenja mora biti poznato u svim drugim tačkama, u svim pravcima, i na svim frekvencijama.

Do izlaznog intenziteta na “posmatranoj površini” objekta (na primer, gor-

---

<sup>5</sup>Ili je vremenska skala na kojoj se menjaju mnogo duža od vremena potrebnom svetlosti da pređe odgovarajuću karakterističnu dužinu u objektu.

<sup>6</sup>U nastavku teksta ćemo za probleme gde fizičke veličine zavise od jedne, dve ili tri prostorne koordinate nekada koristiti kraći zapis, 1D, 2D, 3D, respektivno.

njoj granici zvezdane atmosfere) se dolazi rešavanjem jednačine prenosa zračenja. Jednačina prenosa je nehomogena diferencijalna jednačina prvog reda koja opisuje prostornu promenu intenziteta usled postojanja izvora i ponora fotona:

$$\nabla I(\vec{r}, \hat{\Omega}, \nu) = -\chi(\vec{r}, \hat{\Omega}, \nu)I(\vec{r}, \hat{\Omega}, \nu) + \eta(\vec{r}, \hat{\Omega}, \nu), \quad (1.2)$$

gde su  $\chi$  i  $\eta$  koeficijenti apsorpcije i emisije, respektivno. U suštini, jednačina prenosa zračenja je Bolcmanova kinetička jednačina za fotone.

Brojne vrednosti parametara  $\chi$  i  $\eta$  i njihova ugaona i frekventna određeni su prirodom atomskih procesa u sredini kroz koju se zračenje<sup>7</sup> prostire. Od sada ćemo podrazumevati da se sredina sastoji od atoma mada je opisani formalizam u potpunosti primenjiv i na molekule, jone, slobodne elektrone pa čak i na makroskopske čestice kao što su prašina i makromolekuli. Od sada ćemo izostaviti (ali i dalje podrazumevati) prostornu zavisnost fizičkih veličina. Takođe, dok ne uvedemo polarizovano zračenje i anizotropno rasejanje i/ili kretanje sredine, pretpostavićemo da  $\chi$  i  $\eta$  ne zavise od pravca. U numeričkom pristupu prenosu zračenja je pogodno koristiti jednačinu prenosa u obliku koji opisuje promenu intenziteta duž “zraka” (*along-the-ray* pristup). To znači da pravac prostiranja smatramo zadatim i analiziramo ponašanje inteziteta duž tog pravca. Jednačina 1.2 se u tom slučaju svodi na običnu diferencijalnu jednačinu oblika:

$$\frac{dI(\hat{\Omega}, \nu)}{ds(\hat{\Omega})} = -\chi(\nu)I(\hat{\Omega}, \nu) + \eta(\nu). \quad (1.3)$$

Takođe ćemo izostaviti zavisnost  $ds$  od pravca, pošto je njegova orijentacija određena pravcem prostiranja razmatranog zraka. Deljenjem jednačine 1.3 sa  $-\chi(\nu)$  dolazimo do uobičajenog oblika jednačine prenosa u astrofizičkoj literaturi:

$$\frac{dI(\hat{\Omega}, \nu)}{d\tau(\nu)} = I(\hat{\Omega}, \nu) - S(\nu), \quad (1.4)$$

---

<sup>7</sup>Umesto “zračenje” ćemo nekad koristiti i pojam “svetlost”. Prenos zračenja se u najvećoj meri i primenjuje na ultraljubičasto, vidljivo i infracrveno zračenje.

gde smo definisali *element optičke putanje* kao:

$$d\tau(\nu) = -\chi(\nu)ds, \quad (1.5)$$

i *nepolarizovanu* (u žargonu prenosa polarizovanog zračenja: “skalarnu”) funkciju izvora kao:

$$S(\nu) = \frac{\eta(\nu)}{\chi(\nu)}. \quad (1.6)$$

Lako se može pokazati da je, za dve zadate tačke U i L, između kojih je monohromatska optička razdaljina jednaka  $\Delta\tau_\nu$ <sup>8</sup>, rešenje j-ne 1.4:

$$I_L(\nu) = I_U(\nu)e^{-\Delta\tau_\nu} + \int_0^{\Delta\tau_\nu} S_\nu(t)e^{-(\Delta\tau_\nu-t)} dt. \quad (1.7)$$

Ova integralna jednačina je poznata kao *integralni oblik jednačine prenosa zračenja* (ili: *formalno rešenje*), i često se koristi u numeričkim metodama za rešavanje problema prenosa zračenja. Uz odgovarajuće modifikacije, jednačina 1.7 se može primeniti i na polarizovano zračenje. Primena formalnog rešenja na slučaj kada su  $\chi_\nu$  i  $\eta_\nu$  (odnosno  $\tau_\nu$  i  $S_\nu$ ) poznati je trivijalna. Videćemo, ipak, da je formalno rešenje od ključne važnosti čak i u slučaju kada koeficijenti emisije i apsorpcije nisu eksplicitno poznati već zavise od samog polja zračenja.

Sada, pre nego što pređemo na razmatranje koeficijenta emisije i apsorpcije u opštem slučaju, analiziraćemo dva rešenja jednačine prenosa u veoma jednostavnim modelima zvezdanih atmosfera.

### 1.1.1 Atmosfera u (lokalnoj) termodinamičkoj ravnoteži

Posmatrajmo potpuno izotermalnu atmosferu u kojoj su sudari između čestica dovoljno učestali, tako da je cela atmosfera u termodinamičkoj ravnoteži, odnosno: raspodela brzina je data Maksvelovom raspodelom, raspodela čestica po stanjima ekscitacije/ionizacije Saha-Bolcman-ovom jednačinom, dok je raspodela fotona po energijama data Plankovom funkcijom. U ovom slučaju, u svim raspodelama figuriše ista temperatura, i ta temperatura je ista svuda u atmosferi.

---

<sup>8</sup>Zavisnost od frekvencije se, tradicionalno, označava u indeksu.



Postavićemo koordinatni sistem tako da je  $z$  osa normalna na površinu (plan-paralelne) atmosfere i usmerena prema posmatraču. Infinitezimalna geometrijska putanja  $ds$  je u ovom slučaju:

$$ds = dz / \cos \theta. \quad (1.8)$$

Iz jednačine 1.5 se vidi da, ako merimo  $z$  (a samim tim i  $s$ ) od “dna” atmosfere, optička dubina  $\tau$  treba da bude merena od površine. Za “dno” (donju granicu) atmosfere ćemo uzeti sloj gde je neprozračnost materije tolika da je verovatnoća da foton, emitovan u tom sloju, napusti atmosferu bez ikakve interakcije sa česticama praktično nula na svim razmatranim frekvencijama. Na putu od donje granice ka površini atmosfere fotoni bivaju apsorbirani, emitovani i rasejani. Želimo da izračunamo izlazni intenzitet, ali bez razmatranja svakog pojedinačnog fotona<sup>9</sup>. Najopštije rečeno, ovo možemo uraditi tako što ćemo rešiti jednačinu prenosa zračenja i samokonzistentno izračunati koeficijente apsorpcije i emisije svuda u sredini (pošto, u opštem slučaju, oni zavise i od polja zračenja). Počecemo analizu sa najjednostavnijim slučajem, pretpostavkom termodinamičke ravnoteže a zatim napredovati ka komplikovanijim (i samim tim, realnijim) slučajevima. Pretpostavimo da tačke  $U$  i  $L$  odgovaraju donjoj i gornjoj granici atmosfere, respektivno i da monohromatski optički put između njih teži beskonačnosti. Izlazni intenzitet u pravcu određenom uglom  $\theta$  je, na osnovu jednačine 1.7:

$$I_{\text{izlazno}}(\theta, \nu) = \int_0^\infty S_\nu e^{-t/\cos \theta} dt / \cos \theta, \quad (1.9)$$

gde je  $T_\nu$  ukupan monohromatski optički put između dve granice a  $t$  je tekuća promenljiva merena od površine atmosfere ka unutra.

Setimo se da je u slučaju termodinamičke ravnoteže, odnos između koeficijenta emisije i apsorpcije jednak Plankovoj funkciji.

$$\frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = S_\nu = B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)} - 1}, \quad (1.10)$$

gde je  $h$  Plankova konstanta,  $k$  Bolcmanova konstanta,  $c$  brzina svetlosti u vakuumu

---

<sup>9</sup>I ovaj pristup je moguć. Poznat je kao Monte Karlo metod i koristi se za prenos zračenja kroz prašinu i slične makro-čestice.

a  $T$  temperatura sredine koja emituje (apsorbuje) zračenje. Ulazni intenzitet na donjoj granici je takođe jednak  $B(\nu, T)$ . Pošto je atmosfera izotermalna, nakon zamene jednačine 1.10 u jednačinu 1.7 se vidi da je, za svaku frekvenciju  $\nu$ ,  $I_\nu(\hat{\Omega})$  jednako  $B_\nu$ , u svakoj tački i u svakom pravcu. Samim tim, i izlazni intenzitet je jednak Plankovoj funkciji. Ovo je “nulta” aproksimacija, koja, u doba modernih teleskopa i relativno preciznih posmatranja, nema neku praktičnu upotrebu. Ona predviđa spektar koji takođe odgovara Plankovoj funkciji, što drastično odstupa od posmatranih spektara zvezda i drugih objekata<sup>10</sup>. Prvi važan razlog za ovo odstupanje je činjenica da objekti u svemiru nisu izotermalni (termički izolovani), a drugi da sem apsorpcije i emisije u atmosferama zvezda dolazi i do još jednog važnog efekta, *rasejanja* (*eng: scattering*) zračenja.

Relaksirajmo prvo izotermalnu aproksimaciju i pretpostavimo da temperatura u atmosferi varira od tačke do tačke. Pretpostavićemo, ipak, da je gas *lokalno* u ravnoteži, tj. da su stanja jonizacije i ekscitacije, kao i raspodela brzina u ravnoteži i da su određena jednom istom, lokalnom, temperaturom  $T$ . Funkcija izvora je i dalje jednaka lokalnoj Plankovoj funkciji (na lokalnoj temperaturi), koja sada ima različitu raspodelu po frekvencijama u različitim tačkama u atmosferi. Ova aproksimacija je poznata kao *lokalna* termodinamička ravnoteža (LTR). Izračunajmo ponovo izlazni intenzitet rešavajući jednačinu prenosa zračenja na različitim frekvencijama:

Pretpostavimo isti donji granični uslov kao i prethodnom primeru (TR) i nađimo izlazni intenzitet na osnovu j-ne 1.9. Na različitim frekvencijama ćemo dobiti vrednosti izlaznog intenziteta, koje zavise od prostorne raspodele funkcije izvora i koeficijenta apsorpcije (neprozračnosti) u atmosferi. Vrednost izlaznog intenziteta na jednoj frekvenciji se može poistovetiti sa vrednošću Plankove funkcije na *nekoj* temperaturi. Međutim, na različitim frekvencijama ćemo “meriti” različite temperature i samim tim vidimo da je nemoguće da se spektar posmatranog objekta opiše jednom Plankovom funkcijom koja odgovara jedinstvenoj temperaturi. Ova aproksimacija je dosta realnija i, kao što ćemo videti u nastavku ove glave, može da objasni prisustvo spektralnih linija u posmatranom spektru.

---

<sup>10</sup>“Jedan ali vredan” izuzetak je spektar mikrotalasnog pozadinskog zračenja koji je izuzetno dobro opisan Plankovom funkcijom zračenja apsolutno crnog tela.

Sada ćemo se ograničiti na prenos zračenja u spektralnim linijama i, pre nego što počnemo sa analizom procesa rasejanja, razmotrićemo detaljnije koeficijente apsorpcije i emisije u spektralnoj liniji.

### 1.1.2 Apsorpcija i emisija u spektralnim linijama

Razumevanje nastanka spektralnih linija je veoma važno za spektralnu dijagnostiku pošto su linije generalno mnogo osetljivije na različite procese koji se odigravaju u posmatranom objektu nego što je zračenje u kontinuumu. U stvari, samo prisustvo linija u spektru nam daje dokaz da zvezdane atmosfere nisu u termodinamičkoj ravnoteži i da u atmosferi postoji gradijent funkcije izvora. Koeficijent apsorpcije u liniji vrlo izraženo zavisi od frekvencije, tako da jedan isti objekat može biti neproziran na jednoj, ali proziran na nekoj drugoj frekvenciji. Samim tim, informacije iz različitih delova objekta dolaze do nas unutar relativno malog frekventnog intervala. Konačno, polarizacija u spektralnim linijama je osetljiva na jačinu i orijentaciju magnetnog polja, što otvara mogućnosti korišćenja Zeemanovog i Hanle efekta zarad “dijagnostikovanja” magnetnog polja<sup>11</sup>.

Razlog za postojanje spektralnih linija u spektrima nebeskih tela (i uopšte u spektru bilo koje sredine koja emituje ili apsorbuje svetlost) je postojanje diskretnih energetske nivoa u česticama koje sačinjavaju sredinu kroz koju se svetlost prostire. Pretpostavimo, bez gubitka opštosti, da su u pitanju različita energetska stanja elektrona u atomima. Apsorpcija (ili emisija) fotona usled procesa prelaska elektrona sa jednog nivoa na drugi, u opštem slučaju, dovodi do manjka (ili viška) fotona u polju zračenja. Ovo su, doduše fenomenološki, i bez znanja o kvantnoj prirodi materije i svetlosti demonstrirali još Kirhof i Bunzen u svom čuvenom eksperimentu.

Ako pretpostavimo da je atmosfera zvezde u termodinamičkoj ravnoteži, procesi emisije i apsorpcije su izbalansirani i izlazni intenzitet ima, kao što smo videli, Plankovu raspodelu po frekvencijama, odnosno spektralne linije ne postoje. Da bi se u spektru pojavile spektralne linije potrebno je da postoji gradijent temperature (ili, u opštem slučaju, funkcije izvora) duž posmatranog pravca. Razmotrimo sada поблиže fizičke procese koji utiču na formiranje spektralne linije.

---

<sup>11</sup>Za nešto više detalja videti odeljak 1.4 i glavu 4.

Posmatrajmo česticu koja prelazi iz stanja 1 (sa energijom  $E_1$ ) u stanje 2 ( $E_2$ )<sup>12</sup> kojoj se preda je energija  $E_{12} \pm \Delta E$  ( $E_{12} = E_2 - E_1$ ). Neodređenost energije  $\Delta E$  je posledica konačne “širine” energetskih nivoa. Konkretizujmo ovo na slučaj elektrona koji prelazi iz vezanog stanja 1 u vezano stanje 2 i fotona energije bliske energiji  $E_{12}$ . Verovatnoća apsorpcije fotona od strane atoma zavisi od energije samog fotona. Tačnije, što je energija bliža vrednosti  $E_{12}$ , verovatnoća apsorpcije je veća.

Ukoliko je koncentracija atoma u stanju 1 jednaka  $n_1$  a atoma u stanju 2 jednaka  $n_2$ , koeficijent apsorpcije u liniji na frekvenciji  $\nu$  je:

$$\chi(\nu) = (n_1 \frac{h\nu}{4\pi} B_{12} - n_2 \frac{h\nu}{4\pi} B_{21}) \phi(\nu) = \chi \phi(\nu), \quad (1.11)$$

gde su  $B_{12}$  i  $B_{21}$  Einstein-ovi koeficijenti apsorpcije i stimulisane emisije, respektivno, a  $\phi(\nu)$  je apsorpcioni profil u liniji, čija vrednost zavisi od procesa koji utiču na formiranje spektralne linije. Ovde smo takođe uveli korekciju koeficijenta apsorpcije usled efekta stimulisane emisije (koja se tretira kao negativna apsorpcija).

U idealizovanom slučaju gasa, apsorpcioni profil zavisi samo od (konačne) širine energetskih nivoa u atomu. Termalno kretanje gasa na nekoj konačnoj temperaturi dovodi do promene oblika profila, usled Doplerovog efekta. U još opštijem slučaju, na apsorpcioni profil linije utiče i koncentracija čestica koje perturbuju energetske nivoe u atomu (sudarno širenje linije), kao i magnetno polje (Zeemanovo širenje). Ograničićemo se sada na slučaj beskonačno uskih energetskih nivoa i na širenje usled Doplerovog efekta koji je posledica ravnotežne (Maksvelovske) raspodele brzina atoma duž pravca vizure. Apsorpcioni profil tada ima oblik Gausove raspodele (tzv. Doppler-ov profil):

$$\phi_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} e^{-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2}. \quad (1.12)$$

$\nu_0$  je frekvencija koja odgovara centru linije a  $\Delta\nu_D$  je takozvana “Doplerova širina”, koja zavisi od mase  $m$  apsorbujućih atoma i stanja gasa:

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{2kT/m + v_{\text{mt}}^2}, \quad (1.13)$$

---

<sup>12</sup> $E_1 < E_2 < 0$

kao i od kinetičke temperature  $T$ , i mikroturbulentne brzine  $v_{mt}$ , koja opisuje uticaj ne-termalnog, ali i dalje nasumičnog kretanja atoma. Ova veličina je uvedena da bi objasnila razliku između izračunatih i posmatranih spektralnih linija u jednodimenzionim modelima. Važno je napomenuti da je, uvođenjem multidimenzionih MHD simulacija i računanjem oblika linija na osnovu njih, ova veličina, kao i *makroturbulentna* brzina, postala nepotrebna. Za detalje oko mikro- i makro- turbulentne brzine videti npr. Gray (2005).

Koeficijent emisije, kao što je i za očekivati, zavisi od naseljenosti gornjeg nivoa prelaza u kom nastaje linija:

$$\eta(\nu) = \frac{n_2 h \nu A_{21}}{4\pi} \psi_\nu. \quad (1.14)$$

Ovde je  $A_{21}$  Ajnštajnov koeficijent spontane emisije a  $\psi_\nu$  je *emisioni profil*. Koristeći relacije između Einstein-ovih koeficijenata, funkcija izvora može biti izražena kao:

$$S = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left( \frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1 \right)^{-1} \quad (1.15)$$

gde je  $S$  nezavisno od frekvencije pošto smo pretpostavili da su emisioni i apsorpcioni profil jednaki. Ovo važi u aproksimaciji kompletne redistribucije (*complete frequency redistribution - CRD*, koristićemo engleski oblik skraćenice u nastavku teksta) pod kojom podrazumevamo da su frekvencije upadnog i izlaznog fotona u procesu rasejanja potpuno nekorelisane<sup>13</sup> tj. da su procesi apsorpcije i naknadne emisije potpuno nezavisni.

Napominjemo da je funkcija izvora u liniji u prisustvu rasejanja i pod pretpostavkom CRD nezavisna od pravca (u žargonu prenosa zračenja ovakve veličine nazivamo nepolarizovanim ili skalarnim) i od frekvencije. Ovo čini numerički pristup i samu implementaciju metoda mnogo jednostavnijim. Prvu aproksimaciju ćemo relaksirati kada uvedemo anizotropno rasejanje i polarizaciju, a druga prestaje da važi u slučajevima kada efekti tzv. “parcijalne redistribucije po frekvencijama” postanu bitni. Tretman problema u kojima je bitna parcijalna redistribucija (PRD) ne spada

---

<sup>13</sup>Ovo je, naravno, vrlo štur opis samog fenomena. Detaljniji opis bi zauzeo previše mesta. Zainteresovanog čitaoca upućujemo na sjajne udžbenike kao što su Mihalas (1978), Cannon (2012), ili, za one koji se zalažu za otvoren pristup znanju, Rutten (2003).

u ciljeve ove teze, ali se, u principu, metodi opisani ovde mogu generalisati i na probleme gde su PRD efekti značajni.

## 1.2 Ne-LTR slučaj

Razmotrimo ponovo šta se dešava u atomu pod pretpostavkom lokalne termodinamičke ravnoteže. Jednostavnosti radi, pretpostavićemo da je u pitanju atom sa dva nivoa. Ukoliko je ulazni foton apsorbovan, elektron će preći u stanje sa višom energijom. Atom može da se vrati u osnovno stanje na dva načina: radijativno (spontana emisija) ili sudarno (neelastičan sudar). Ukoliko do de-ekscitacije dođe usled sudara, višak energije će biti predat gasu i pretvoren u termalnu energiju. To znači da je energija fotona efektivno pretvorena u kinetičku energiju gasa (foton je termalizovan). Takođe, moguć je i obrnuti proces: sudarna ekscitacija, praćena radijativnom de-ekscitacijom. Ovi procesi su poznati kao “prava” ili termalna apsorpcija, odnosno emisija. Ako je gustina gasa dovoljno velika, odnosno ukoliko su sudarni procesi mnogo učestaliji od radijativnih, gas i zračenje su u ravnoteži na lokalnoj temperaturi, stoga ovu aproksimaciju i zovemo lokalna termodinamička ravnoteža. Naseljenosti nivoa se, u principu, mogu izračunati na osnovu Saha-Boltzmann-ove raspodele. Kada se naseljenosti zamene u jednačinu 1.15, dobijamo poznat izraz  $S_\nu = B_\nu$ . Očigledno ova aproksimacija čini numerička izračunavanja mnogo prostijim pošto je funkcija izvora eksplicitno poznata. Da bi LTR aproksimacija važila, potrebno je da gustina materije bude takva da je učestanost de-ekscitujućih sudara ( $C_{21}$ ) mnogo veća od učestalosti radijativne deekscitacije ( $A_{21}$ ). Poređenja radi,  $A_{21}$  je, za linije od interesa u optičkom delu spektra reda veličine  $10^6 - 10^8 \text{ s}^{-1}$ . Za linije formirane u gustoj sredini, kao što su npr. duboki slojevi Sunčeve fotosfere, važi LTR aproksimacija. Poznat primer je par linija gvožđa na 6301/6302 Å, za koje se kaže da su “formirane u LTR”.

Sa druge strane, u retkoj sredini kao što je sunčeva hromosfera, ovaj uslov je daleko od ispunjenog i za većinu bitnih linija procesi spontane emisije prevladavaju nad sudarnim procesima ( $A_{21} \gg C_{21}$ ). Šta se onda dešava? Sledeći diskusiju u prethodnom pasusu, ekscitovani atom (najverovatnije) neće proći kroz sudarnu

deekscitaciju, već kroz proces spontane emisije, emitujući foton. Ako se ovo dešava dovoljno često, deo apsorbovanog zračenja neće biti termalizovan već “sačuvan” i re-emitovan, bez kuplovanja sa gasom. Aproksimacija LTR prestaje da bude validna (odatle izraz ne-LTR) i naseljenosti  $n_1$  i  $n_2$  u jednačini 1.15 je sada mnogo teže izračunati, pošto zavise i od polja zračenja. Ovo je suština ne-LTR prenosa zračenja: naseljenosti nivoa zavise od polja zračenja koje, sa druge strane, zavisi od naseljenosti nivoa. Drugim rečima, suočeni smo sa problemom rešavanja spregnutih jednačina: prenosa zračenja i statističke ravnoteže.

Kako samokonzistentno izračunati funkciju izvora u liniji u ovom slučaju? Pre svega, definišimo verovatnoću termalizacije fotona:

$$\epsilon = \frac{C_{21}}{C_{21} + A_{21}}. \quad (1.16)$$

Broj procesa apsorpcije koji rezultuju termalizacijom fotona je srazmeran sa  $\epsilon$ , dok je broj “rasejanja”, očigledno, srazmeran sa  $1 - \epsilon$ <sup>14</sup>. Ako pretpostavimo da je rasejani deo zračenja re-emitovan uniformno u prostorni ugao  $4\pi$  dobijamo sledeći izraz za koeficijent emisije:

$$\eta_\nu = \epsilon\eta_\nu^{\text{LTE}} + \chi_0\phi_\nu(1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\nu d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} I(\hat{\Omega}, \nu), \quad (1.17)$$

odnosno, nakon što podelimo jednačinu apsorpcionim koeficijentom  $\chi_0\phi_\nu$ , dobijamo izraz za funkciju izvora, nezavisnu od frekvencije:

$$S = \epsilon B(\nu_0) + (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} I(\hat{\Omega}, \nu). \quad (1.18)$$

Sada ćemo uvesti *srednji intenzitet integraljen po profilu linije* (ili, kao što je uobičajeno,

---

<sup>14</sup>Napomena: “Rasejanje” u spektralnim linijama je fundamentalno drugačije od, recimo, rasejanja na slobodnom elektronu. Prvi fenomen je čisto kvantne prirode i posledica je prisustva diskretnih energetskih nivoa u atomima (ili molekulima), dok se drugi fenomen može lako opisati i na klasičan način. U formalizmu prenosa zračenja jednačine kojima tretiramo i jedan i drugi problem, pak, imaju isti oblik, i otud izraz “rasejanje” (od sada bez znakova navoda). Ipak, i rasejanje u liniji može heuristički biti opisano modelom klasičnog prigušenog oscilatora. Ovim modelom se došlo do mnogih korisnih rezultata (videti, npr. Mihalas 1978; Stenflo 1994).

samo “srednji intenzitet”, poznat kao i “integral rasejanja”):

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} I(\hat{\Omega}, \nu). \quad (1.19)$$

Formalno, jednačina prenosa ne menja oblik, ali, za razliku od aproksimacije LTR (j-na 1.10), funkcija izvora sada zavisi i od intenziteta:

$$\frac{dI(\hat{\Omega}, \nu)}{d\tau} = \phi_\nu \left[ I(\hat{\Omega}, \nu) - S \right] \quad (1.20)$$

$$= \phi(\nu) \left[ I(\hat{\Omega}, \nu) - \epsilon B - (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} I(\hat{\Omega}, \nu) \right]. \quad (1.21)$$

Ovde smo definisali *srednju optičku dubinu* kao  $d\tau = -\chi_0 ds$ . Ovo je jednačina prenosa u ne-LTR, izvedena pod pretpostavkom kompletne redistribucije i pod pretpostavkom da su emisija i apsorpcija u liniji jedini izvori/ponori zračenja. U pitanju je integro-diferencijalna jednačina koja, u velikoj većini problema sa kojima se srećemo u modeliranju realnih objekata, mora biti rešavana numerički<sup>15</sup>. Tačno, precizno i brzo rešavanje ovog problema, čak i u 1D, nije trivijalno i podsticalo je napredak u polju prenosa zračenja tokom poslednjih pola veka. Neki od modernih metoda su opisani u, npr. Atanacković-Vukmanović et al. (1997) i Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho (1995).

Iako je veličina koju želimo da dobijemo kao krajnji rezultat rešenja specifični intenzitet zračenja, važno je shvatiti da je isti jednoznačno određen ako je funkcija izvora poznata. Zbog toga ćemo, uglavnom, funkciju izvora smatrati kao glavnu nepoznatu veličinu u ne-LTR problemu prenosa zračenja. Sada ćemo ukratko predstaviti neke iterativne metode.

### 1.3 Rešavanje ne-LTR problema

Proces rasejanja donosi neizbežan problem kuplovanja po pravcima i frekvencijama zračenja koji ne postoji u LTR aproksimaciji. Nakon pionirskih radova

---

<sup>15</sup>Za idealizovane modele homogene i izotermne zvezdane atmosfere postoji nekoliko aproksimativnih rešenja kao i egzaktno analitičko rešenje metodom diskretnih ordinata. Za detaljan istorijski pregled ove oblasti videti monografiju Mihalas (1978).



Schuster-a, (Schuster 1905) koji je verovatno prvi koji je detaljnije razmotrio problem formiranja spektralnih linija, bitan napredak u problemima rešavanja jednačine prenosa uz procese rasejanja napravili su Chandrasekhar (1950)<sup>16</sup> i Thomas (1957).

Jedan od načina za rešavanje ovog spregnutog problema je da se nepoznata funkcija izvora nađe iterativno. Najjednostavnija ideja je da počnemo od neke vrednosti funkcije izvora (uobičajen izbor je  $S = B$ ) i da, koristeći tu vrednost, formalno rešimo jednačinu prenosa zračenja. Zatim, zamenjujući izračunati intenzitet u jednačinu 1.18<sup>17</sup>, dobijamo novu vrednost funkcije izvora koja je bliža tačnom rešenju. Postupak ponavljamo do konvergencije. Ovaj metod je poznat kao  $\Lambda$  iteracija. Naziv potiče od  $\Lambda$  operatora koji je uveo Schwarzschild (1906) i kojim se formalno rešenje jednačine prenosa može napisati konciznije kao:

$$J = \Lambda[S]. \quad (1.22)$$

U kontekstu prenosa zračenja,  $\Lambda$  operator treba shvatiti kao (obično numerički) način izračunavanja vrednosti srednjeg intenziteta iz datih vrednosti funkcije izvora. Ako je  $S$  vektor od  $N$  elemenata (ne govorimo nužno o 1D geometrijama), onda je i  $J$  vektor od  $N$  elemenata a  $\Lambda$  je kvadratna matrica dimenzija  $N \times N$ . Oba vektora i matrica su realni. Jednačina 1.18 sa ovom notacijom postaje:

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon)\Lambda[S], \quad (1.23)$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$(I - (1 - \epsilon)\Lambda)[S] = \epsilon B, \quad (1.24)$$

ili, u skraćenoj notaciji:

$$Ax = b. \quad (1.25)$$

Sada eksplicitno vidimo da se ne-LTR problem prenosa zračenja u spektralnoj liniji svodi na problem nalaženja  $N$  nepoznatih iz sistema  $N$  linearnih algebarskih

---

<sup>16</sup>Za zanimljiv autobiografski pogled na rad Chandrasekhar-a, videti Wali (2001)

<sup>17</sup>Jednačina 1.18 *jednačina statističke ravnoteže za atom sa dva nivoa* i često ćemo se na ovaj način pozivati na nju ili je pisati skraćeno kao:  $S = \epsilon B + (1 - \epsilon)J$ .

jednačina. Pošto je  $A$  matrica čiji su svi elementi poznati i zavise samo od optičkih razdaljina između tačaka, nepoznata  $x$  (funkcija izvora) se može naći direktno. Jedan od metoda za direktno numeričko rešenje je tzv. Feautrier metod (Feautrier 1964). Ovaj metod koristi diskretizovani oblik jednačine prenosa u diferencijalnoj formi. Može se pokazati da se, ako za nepoznatu veličinu uzmemo intenzitet, diskretizovani sistem jednačina za atom sa dva nivoa (ili za rasejanje u kontinuumu) svodi na blok tridijagonalni sistem koji se može rešiti odgovarajućim sistemom zamene i eliminacije nepoznatih. Ovaj metod je omogućio rešavanje realističnih problema u nehomogenim atmosferama a može se koristiti i kao metod za formalno rešenje jednačine prenosa (za detaljniji opis metoda vidi Mihalas 1978).

Direktno rešenje je pak, numerički veoma zahtevno, posebno u višedimenzionim problemima zbog neophodne inverzije matrica. Takođe,  $A$  (odnosno  $\Lambda$  matrica) se nikada ne računa eksplicitno. Ispostavlja se da je taj proces komplikovan, i najvažnije od svega, nepotreban. Takođe, u generalnom slučaju atoma sa više nivoa, matrica nije konstantna i rešenje se mora naći iteracijom.

Najjednostavnija iterativna metoda, gorepomenuta  $\Lambda$  iteracija, ima sledeći oblik:

$$x_{n+1} = x_n + b - Ax_n, \quad (1.26)$$

gde je  $x_n$  “staro” a  $x_{n+1}$  “novo” rešenje. Ova metoda konvergira izuzetno sporo i praktično je neupotrebljiva u numeričkom rešavanju problema prenosa zračenja u optički gustoj sredini. Sada ćemo, pozivajući se na udžbenik Saad (2003), predstaviti tri metoda numeričke algebre koji su do sada primenjeni u rešavanju problema ne-LTR prenosa zračenja. Ove metode ćemo ponovo, detaljnije, predstaviti u poglavlju 3, u astrofizičkom kontekstu.

Ako razložimo matricu  $A$  kao  $A = D - E - F$ , gde je  $D$  dijagonala,  $-F$  striktno gornji trougaoni deo a  $-E$  striktno donji trougaoni deo, možemo definisati Jacobi iteraciju na sledeći način:

$$x_{n+1} = D^{-1}(E + F)x_n + D^{-1}b. \quad (1.27)$$

Kako je  $D$  dijagonalna matrica, njena inverzna matrica se nalazi prostim deljenjem.

U numeričkom prenosu zračenja ova šema, ukoliko je rasejanje dominantno, dovodi do ubrzanja konvergencije od nekoliko redova veličine u poređenju sa  $\Lambda$  iteracijom.

Ovaj pristup, kao način da se  $\Lambda$  iteracija ubrza je prvi put nagovestio Rybicki (1972), koji je uveo tzv. “core saturation” metod. Osnovna ideja se zasniva na uklanjanju iz razmatranja fotona u centru linije koji ne doprinose prenosu pošto su u dubljim slojevima lako apsorbovani. Ako je monohromatska optička dubina u datoj tački atmosfere veća od parametra  $\gamma$  (koji je reda veličine jedan), uzima se da je lokalni monohromatski (dakle *neintegraljen* po profilu linije) srednji intenzitet jednak lokalnoj funkciji izvora. Kada se ova aproksimacija uvede u  $\Lambda$  iteraciju rezultujuće ubrzanje je ogromno i metod je upotrebljiv za praktičan račun, čak i za model atoma sa više nivoa.

Pored Rybicki-ja, temelje za razvoj perturbativnih metoda su udarili Cannon (1973) i Scharmer (1981) uvođenjem ideje “deljenja” operatora (*engleski: operator splitting*) u ne-LTR prenos zračenja. Ideja ove klase metoda je da se  $\Lambda$  matrica aproksimira jednostavnijim operatorom čiji inverzni operator je relativno lako naći, dok se greške koje se ovom aproksimacijom uvode popravljaju iterativno. Olson et al. (1986) su pokazali da je dijagonalni operator najbolji izbor pošto se najlakše invertuje i najstabilniji je. Takođe ga je vrlo lako generalizovati na višedimenzione probleme. Bitan napredak u perturbativnim metodama je ostvaren uvođenjem metoda kratkih karakteristika (*eng: the method of short characteristics*) koji se koristi za formalno rešavanje jednačine prenosa zračenja (videti Olson & Kunasz 1987; Kunasz & Olson 1988; Kunasz & Auer 1988). Verovatno najbitnija referenca za perturbativne metode je Rybicki & Hummer (1991), u kojoj je ideja ubrzanja korišćenjem lokalnog operatora implementirana u metod za rešavanje spregnutih jednačina prenosa zračenja i statističke ravnoteže za atom sa više nivoa. Uz ove metode je neophodno pomenuti i tzv. Ng ubrzanje (Ng 1974) Dalji napredak se uglavnom odnosio na dodatno ubrzanje konvergencije rešenja ne-LTR problema korišćenjem Gauss-Seidel (Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho 1995) i FBILI (Atanacković-Vukmanović 1991; Atanacković-Vukmanović et al. 1997) metoda (koji su opisani u ovoj tezi).

Gauss-Seidel (GS) iteracija u numeričkoj algebri ima sledeći oblik:

$$x_{n+1} = (D - E)^{-1}Fx_n + (D - E)^{-1}b. \quad (1.28)$$

Ovde se inverzija matrica  $(D - E)$  ne vrši eksplicitno već računanjem novih vrednosti  $x_{n+1}$  čim je to moguće. Princip po kom se računaju nove vrednosti će biti jasniji kada predstavimo primenu GS metoda na prenos zračenja u spektralnim linijama. Još brži metod, poznat iz numeričke algebre je simetrični Gauss-Seidel (SGS), koji se sastoji od jednog prolaska kroz matricu “unapred” (ovaj prolazak je definisan jednačinom 1.28) i odmah nakon toga jednog prolaska kroz matricu “unazad”:

$$x_{n+1} = (D - F)^{-1}Ex_n + (D - F)^{-1}b. \quad (1.29)$$

“Overrelaksirane“ (“Overrelaksacija” podrazumeva popravku vrednosti tokom iteracije za faktor  $w$ ,  $1 < w < 2$ ) varijante Gauss-Seidel i simetrične Gauss-Seidel metode su poznate pod imenima SOR (*Successive Overrelaxation*) i SSOR (*Symmetric Successive Overrelaxation*). Korišćenje overrelaksacije generalno dovodi do brže konvergencije ali takođe može da poremeti stabilnost metode.

Postoje metode koje još brže konvergiraju od (simetrične) Gauss-Seidel iteracije, kao što su linearni (Steiner 1991) i nelinearni (Fabiani Bendicho et al. 1997) multi-grid metod, kao i metodi zasnovani na konjugovanim gradijentima (Papkalla 1995; Anusha et al. 2011b). Svi ovi pristupi su zasnovani na odgovarajućim metodama iz numeričke algebre i omogućavaju bitnu uštedu u procesorskom vremenu u odnosu na Jacobi iterativni metod.

Postoje i drugi efikasni pristupi za rešavanje ne-LTR problema. Metod promenljivih Eddington-ovih faktora, (*Variable Eddington Factors - VEF*) je zasnovan na takozvanim iteracionim faktorima  $i$ , u trenutku kada je uveden, doneo je bitno ubrzanje u odnosu na Feautrier metod. Iteracione faktore su detaljno analizirali i primenili na problem formiranja linije u atomu sa dva nivoa Atanacković-Vukmanović & Simonneau (1994), dok je generalizacija na model atoma sa više nivoa data u Kuzmanovska-Barandovska & Atanacković (2010). Još jedan metod u kom su primenjeni promenljivi Eddington-ovi faktori i koji je doneo veliko ubrzanje u ne-LTR

prenosu zračenja i napredak u modeliranju zvezdanih atmosfera je metod kompletne linearizacije (*eng: complete linearization, CL*) koji su razvili Auer & Mihalas (1969). Takođe je zanimljiv i implicitni integralni metod (Simonneau & Crivellari 1993), koji, koristeći rešenje jednačine prenosa u integralnom obliku, direktno rešava ne-LTR problem za model atoma sa dva nivoa, bez potrebe za inverzijom matrica. Generalizacija na prenos zračenja sa modelima atoma sa više nivoa dat je u radu Crivellari et al. (2002). Pregled ovih metoda je dat i u radu Atanackovic-Vukmanovic (2004).

Sada ćemo se ponovo osvrnuti na rešenje problema prenosa zračenja u ne-LTR i ispitati neke veoma jednostavne, ilustrativne primere.

### 1.3.1 Numeričko rešenje u 1D

Iako se ova teza bavi isključivo višedimenzionim problemima, ovde ćemo navesti nekoliko jednostavnih primera u jednodimenzionom modelu atmosfere, iz sledećih razloga:

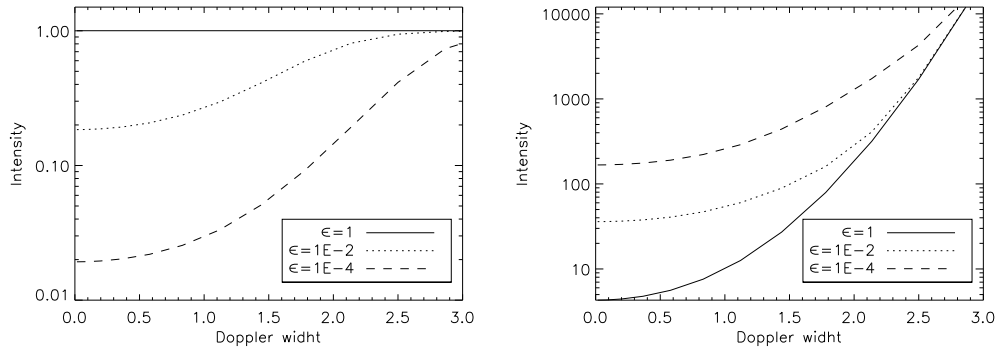
- Prvi test za višedimenzioni kod je reprodukcija poznatih rezultata iz jednodimenzionih modela.
- Važno je shvatiti posledice ne-LTR efekata na jednostavnim primerima da bismo mogli da razumemo i interpretiramo rezultate dobijene na osnovu kompleksnih modela.

Razmatraćemo dva idealizovana modela zvezdanih atmosfera: (1) izotermalnu atmosferu ( $B = \text{const}$ ) i (2) Milne-Eddington-ov model atmosfere:

$$B(\tau) = a + b\tau. \tag{1.30}$$

Interesuje nas kakav je uticaj ne-LTR efekata, (tj. rasejanja) na funkciju izvora u atmosferi i, samim tim, na oblik rezultujućih spektralnih linija.

Pre nego što analiziramo rezultate (koji su ovde izračunati Feautrier metodom), pristupimo problemu fenomenološki: Pošto su fotoni većinom rasejani a ne apsorbirani, onda mogu da napuste atmosferu sa većih dubina nego što bi mogli u slučaju kada važi LTR. Usled ovog efekta, količina rasejanih fotona blizu površine je manja,



Slika 1.2: Izlazni intenzitet u zavisnosti od talasne dužine u pravcu  $\theta = 0$ , za različite vrednosti verovatnoće termalizacije fotona  $\epsilon$ . Levo: izotermalna atmosfera. Desno: Milne-Eddington atmosfera sa  $a = 1$  i  $b = 2$ . Obe atmosfere su polubeskonačne.

što rezultuje manjom vrednošću srednjeg intenziteta  $J$ , a samim tim i smanjenjem funkcije izvora. Ovo znači da ćemo, čak i u slučaju izotermalne atmosfere gde je Plankova funkcija konstantna, imati pad funkcije izvora ka površini. Ovaj efekat se vidi na slici 1.2. Linija u LTR aproksimaciji ne postoji dok se u ne-LTR slučaju manifestuje kao apsorpciona linija koja postaje sve dublja sa smanjenjem verovatnoće termalizacije fotona ( $\epsilon$ ). U Milne-Eddingtonovoj atmosferi linija postoji čak i u LTR ali se njen oblik i izlazni intenzitet bitno menjaju kada uključimo rasejanje.

Sada je očito da se linije formirane u sredini gde je rasejanje dominantno bitno razlikuju od linija formiranih u aproksimaciji lokalne termodinamičke ravnoteže. Samim tim, ne-LTR efekti se ne smeju zanemariti ako želimo da interpretiramo oblike linija koje su formirane u razređenoj sredini. Takođe rasejanje dovodi do tzv. “polarizacije rasejanjem” (*eng: scattering polarization*). U pitanju je kvantni fenomen, koji odgovara dobro poznatom Rejljevom rasejanju<sup>18</sup>. Kao što ćemo videti, polarizacija u spektralnim linijama nije osetljiva samo na količinu rasejanja, već i na geometriju objekta, anizotropiju zračenja, nehomogenosti, kao i na magnetno polje. Takođe, osetljivost polarizacije svetlosti na ove efekte je mnogo izraženija od zavisnosti skalarnog intenziteta ( $I$  komponenta Stokes-ovog vektora). Sada ćemo definisati neke osnovne veličine bitne za opisivanje polarizovanog zračenja.

<sup>18</sup>Koje je, sem što prouzrokuje plavu boju dnevnog neba, odgovorno i za polarizaciju rasejane dnevne svetlosti.

## 1.4 Prenos polarizovanog zračenja

Polarizacija je osobina transverzalnih talasa kojima, na sreću, pripadaju i elektromagnetni talasi. Kako dva uzajamno normalna vektora električnog polja ne utiču jedan na drugi, dva nezavisna elektromagnetna talasa mogu da se prostiru u istom pravcu u isto vreme, tako da su im vektori električnog polja normalni. Bez gubljenja opštosti, razmatraćemo samo električno polje i pretpostavićemo da se talas prostire u pravcu  $z$  ose. Interesuju nas  $x$  i  $y$  komponente vektora električnog polja u slučaju monohromatskog ravnog talasa:

$$E_x = E_{x,0} \cos(\omega t - kz + \psi_1) \quad (1.31)$$

$$E_y = E_{y,0} \cos(\omega t - kz + \psi_2). \quad (1.32)$$

Ovde je  $w = 2\pi\nu$  i  $k = 2\pi/\lambda$ , dok su  $\psi_1$  and  $\psi_2$  početne faze talasa. U svakom trenutku vremena možemo definisati rezultujući vektor  $\vec{E}$  tako da:

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y. \quad (1.33)$$

U opštem slučaju, vrh vektora  $\vec{E}$  će tokom vremena opisivati elipsu<sup>19</sup>, poznatu kao “polarizaciona elipsa”. Stanje polarizacije (tj. opis ponašanja elektromagnetnog polja u smislu ravni u kojoj osciluje) je kompletno opisano amplitudama dveju komponentata i faznom razlikom između njih. Definišimo:

$$\psi = \psi_1 - \psi_2, \quad (1.34)$$

i zatim:

$$I = I_x + I_y, \quad (1.35)$$

$$Q = I_x - I_y, \quad (1.36)$$

$$U = \sqrt{2I_x I_y} \cos \psi, \quad (1.37)$$

$$V = \sqrt{2I_x I_y} \sin \psi, \quad (1.38)$$

---

<sup>19</sup>Dva posebna slučaja su  $\psi_1 = \psi_2$  kada električno polje uvek osciluje u istoj ravni, i  $\psi_1 = \psi_2 \pm \pi/2$ ,  $E_1 = E_2$ , kada  $\vec{E}$  opisuje krug.

gde smo iskoristili svojstvo  $I \propto E_x^2 + E_y^2$ . Lako se vidi da je  $I = Q^2 + U^2 + V^2$ . Ukoliko teleskop opremimo odgovarajućim optičkim elementima (linearnim polarizatorima i retarderima) možemo, u principu, da izmerimo ove četiri veličine koje su u fizici poznate kao *Stokes-ovi parametri*. Definisaćemo stepen polarizacije kao:

$$P = \frac{(Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}}{I}. \quad (1.39)$$

Iz dosadašnje diskusije se vidi da je strogo monohromatski elektromagnetni talas uvek 100% polarizovan. Ono što mi, pak, posmatramo, nisu pojedinačni talasi (ili, ako čitalac preferira, fotoni) već veliki ansambl njih. Kada vršimo polarimetrijska posmatranja mi u stvari merimo neke vremenski usrednjene vrednosti ove četiri komponente Stokes-ovog vektora. Može se videti da će u velikom ansamblu talasa doći do poništavanja između  $Q$ ,  $U$  i  $V$  komponenti različitih talasa dok je ukupna vrednost  $I$  prosto suma pojedinačnih talasa. Prema tome:

$$\langle I \rangle^2 \geq \langle Q \rangle^2 + \langle U \rangle^2 + \langle V \rangle^2, \quad (1.40)$$

gde smo uglavnom zagradaama obeležili vremensko usrednjavanje. Od sada ćemo izostaviti zagrade i koristiti sledeću notaciju:  $\hat{I} = (I, Q, U, V)^T$  da opišemo polarizovano zračenje. Ovu notaciju je uveo ser George Stokes, dok je u astrofizičkom kontekstu prvi koristio Subrahmanyan Chandrasekhar (Chandrasekhar 1960). U principu (Chandrasekhar 1960), uvek je moguće pretpostaviti da se elektromagnetno zračenje sastoji od potpuno polarizovanog dela  $I_p = Q^2 + U^2 + V^2$  i potpuno nepolarizovanog dela  $I_u = I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$ .

Chandrasekhar je takođe pokazao da za polarizovano zračenje u kontinuumu važi sledeća relacija:

$$\frac{d\hat{I}}{d\tau} = \hat{I} - \hat{S}. \quad (1.41)$$

Ovde je  $\hat{S}$  polarizovana funkcija izvora koja ima sledeći oblik:

$$\hat{S}(\hat{\Omega}) = \varepsilon \hat{B} + (1 - \varepsilon) \oint \frac{d\hat{\Omega}'}{4\pi} \hat{P}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') \hat{I}(\hat{\Omega}'), \quad (1.42)$$



gde je  $\varepsilon$  verovatnoća termalizacije fotona u *kontinuumu*, a  $\hat{B} = (B, 0, 0, 0)^T$ .  $\hat{P}$  je Raighley-jeva matrica rasejanja koja opisuje korelaciju između upadnih ( $\hat{\Omega}'$ ) i izlaznih ( $\hat{\Omega}$ ) fotona.

Sada ćemo, bez ikakvog izvođenja (detaljna analiza je data u Landi Degl'Innocenti & Landolfi 2004), navesti osnovne jednačine koje opisuju prenos polarizovanog zračenja u spektralnim linijama.

### 1.4.1 Prenos polarizovanog zračenja u spektralnim linijama

Polarizacija svetlosti je razmatrana još u radovima Chandrasekhar-a (Chandrasekhar 1950). Ipak, numerički prenos polarizovanog zračenja je donekle kasnio za proračunima u nepolarizovanom slučaju. Faurobert (1987) se bavila formiranjem polarizacije u linijama u jednodimenzionim konačnim slojevima sa različitim pretpostavkama o redistribuciji zračenja u liniji. Proračuni u jednodimenzionim modelima atmosfera su dati u Faurobert (1988). Problemi u kojima postoji zavisnost zračenja i od azimuta (usled prisustva orijentisanog magnetnog polja) su prvobitno rešavani primenom Fourier-ovog razvoja (npr. Faurobert-Scholl 1991). Generalizacija perturbativnih metoda na prenos polarizovanog zračenja u linijama je opisana u Faurobert-Scholl et al. (1997). Svi ovi radovi su se bavili modelom atoma sa dva nivoa. Teoriju neophodnu da se formulišu jednačine statističke ravnoteže za atom sa više nivoa u polarizovanom slučaju je razvio Landi Degl'Innocenti (1984). Veliki deo njegovog rada i teorija neophodna za opis i tretman polarizacije u spektralnim linijama je sumirana u monografiji Landi Degl'Innocenti & Landolfi (2004).

Iako polarizacija rasejanjem u jednostavnom modelu atoma sa dva nivoa može biti objašnjena i opisana klasičnim pristupom (prigušeni harmonijski oscilator), ona je fundamentalno drugačiji fenomen u odnosu na polarizaciju koja nastaje rasejanjem na slobodnim česticama kao što su molekuli ili elektroni. Rasejanje u spektralnim linijama je kvantni fenomen i možemo ga objasniti na sledeći način: Fotoni koji se rasejavaju na atomu dolaze iz različitih pravaca i imaju različite momente impulsa u odnosu na osu kvantizacije u atomu. Apsorpcija ovih fotona će, zbog zakona održanja momenta impulsa dovesti do različite naseljenosti podnivoa sa različitim kvantnim brojem  $M$ . Ovi podnivoi su poznati pod imenom *Zeeman-ovi podnivoi*.

Sada, svaka re-emisija će rezultovati fotonom čija polarizacija zavisi od kvantnih brojeva ugaonog momenta ( $J$ ) gornjeg i donjeg nivoa. Ako je atom osvetljen izotropnim zračenjem, svi Zeeman-ovi podnivoi su pođednako naseljeni i rasejano zračenje je nepolarizovano. Anizotropija upadnog zračenja (po polarnom uglu ili po azimutu) će prouzrokovati različite naseljenosti Zeeman-ovih podnivoa što će rezultovati polarizacijom svetlosti usled rasejanja. Polarizacija rasejanjem je linearna polarizacija svetlosti, dakle Stokes-ove komponente  $Q$  i  $U$  su različite od nule. Ovu linearnu polarizaciju dalje modifikuje Hanle efekat. Ovaj efekat se manifestuje kao promena količine i ravni polarizacije svetlosti usled prisustva orijentisanog magnetnog polja u sredini u kojoj se dešava rasejanje. Dalje, za slaba polja (sam termin “slabo” zavisi od linije do linije) se može pokazati da se kružna polarizacija tretira odvojeno od linearne i da je za nju odgovoran isključivo Zeeman-ov efekat. U opštem slučaju, za proizvoljna polja i za kompleksne atomske modele, sva četiri Stokes-ova parametra su spregnuta (kuplovana).

Opisali smo glavni mehanizam nastanka linearne polarizacije u spektralnim linijama: Rasejanje anizotropnog zračenja koje ostvetljava atom. Za detaljan pregled ovog fenomena kao i za zanimljiv i koristan opis Zeeman-ovog efekta u ne-LTR slučaju videti Trujillo Bueno (2003) i navedene reference. Važno je naglasiti da je višedimenzioni prenos zračenja veoma važan u računanju polarizacije pošto efekti geometrije i nehomogenosti objekta značajno utiču na anizotropiju, menjajući time rezultujuću polarizaciju u liniji.

U daljim razmatranjima ćemo pretpostaviti da je donji nivo prelaza *nepolarizovan*. Nivo je nepolarizovan ako su u njemu svi Zeeman-ovi podnivoi pođednako naseljeni. Ovo važi za nivoe koji su lako perturbovani sudarima kao što su osnovni nivou u atomima, dakle ova pretpostavka važi za rezonantne prelaze. To, dalje, znači da svi efekti koji prouzrokuju polarizaciju u liniji nastaju zbog atomske polarizacije gornjeg nivoa prelaza. Ova pretpostavka bitno pojednostavljuje problem pošto je u tom slučaju koeficijent apsorpcije (neprozračnost) identičan za sve Stokes-ove komponente. U opštem slučaju, neprozračnost je matrica dimenzija  $4 \times 4$  (videti, npr. Trujillo Bueno 2003).

Ovde dajemo izraz za jednačinu prenosa polarizovanog zračenja u spektralnim

linijama (pogledati, npr. Landi Degl’Innocenti & Landolfi 2004; Trujillo Bueno 2003):

$$\frac{d\hat{I}(\hat{\Omega}, \nu)}{d\tau} = \phi(\nu)(\hat{I}(\hat{\Omega}, \nu) - \hat{S}(\hat{\Omega})), \quad (1.43)$$

kao i jednačinu statističke ravnoteže za atom sa dva nivoa:

$$\hat{S}(\hat{\Omega}) = \epsilon\hat{B} + (1 - \epsilon)\hat{W}\hat{W}_C \int \phi(\nu) \oint \frac{d\hat{\Omega}'}{4\pi} \hat{P}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}', \vec{B}) \hat{I}(\hat{\Omega}', \nu). \quad (1.44)$$

Ovde je  $\hat{W}$  tzv. *sopstvena polarizabilnost linije*, koja zavisi od kvantnih brojeva za ugaoni momenat gornjeg i donjeg nivoa prelaza.  $\hat{W}_C$  je vektor koje opisuje uticaj sudarne depolarizacije a  $\vec{B}$  je vektor magnetnog polja.  $\hat{P}$  je *matrica rasejanja* koja opisuje korelacije između pravaca ulaznog i izlaznog fotona u prisustvu magnetnog polja. Važno je napomenuti dve stvari:

- Polarizovana funkcija izvora i polarizovani intenzitet (kao rezultat formalnog rešenja jednačine prenosa) zavise i od magnetnog polja. Ovo je gore opisani Hanle efekat koji nam pruža izuzetno koristan način za dijagnostiku magnetnog polja.
- Funkcija izvora je zavisna od pravca. Ovo značajno povećava memorijsku zahtevnost kodova koji se koriste za rešavanje ne-LTR prenosa polarizovanog zračenja. Ovaj problem ćemo rešiti u poglavlju 4 uvođenjem bazisa *redukovano* intenziteta.

U tretmanu polarizovanog zračenja smo u jednačinu statističke ravnoteže uveli matricu rasejanja. Važno je naglasiti da je ovakav pristup moguć samo za model atoma sa dva nivoa. Sa druge strane, korišćenje matrice rasejanja omogućava tretman PRD efekata (Bommier 1997a,b). Drugi pristup opisu polarizovanog zračenja je tzv. formalizam matrice gustine (*eng: density matrix formalism*) koji je detaljno opisan u Landi Degl’Innocenti & Landolfi (2004). Prednost formalizma matrice gustine je u mogućnosti opisa modela atoma sa više nivoa, ali bez parcijalne redistribucije (PRD). Za model atoma sa dva nivoa, u CRD aproksimaciji, oba pristupa su ekvivalentna.

## 1.5 Potreba za prenosom zračenja u više dimenzija

U uvodnom delu teze smo naveli osnovne jednačine koji opisuju prenos zračenja u ne-LTR i prodiskutovali rešenja nekih jednostavnih jednodimenzionih problema. Modeli atmosfera u 1D su tokom godina dostigli veliku složenost i omogućili nam dubok i suštinski uvid u formiranje spektara i ulogu zračenja u dinamici zvezdanih atmosfera. Ne-malu ulogu u toj oblasti su odigrali precizni i efikasni metodi za prenos zračenja kao što je npr. ALI (za pregled ALI metoda i napretka koji je napravljen, videti, npr. Hubeny 2003).

Ipak, neki astrofizički objekti prosto *ne mogu* biti opisani jednodimenzionim modelima. To znači da, ako pretpostavimo da su takvi objekti jednodimenzioni, pravimo ozbiljne sistematske greške u interpretaciji rezultata. Uzmimo, na primer, gasoviti disk koji rasejava zračenje i neprozračan je, ali opet konačan i u radijalnom i u vertikalnom pravcu. Ne možemo da pretpostavimo da je disk beskonačan ni po  $z$  ni po  $r$  i u tom slučaju moramo da ga modelujemo kao višedimenzionalni (2D ili 3D) objekat. Ovo je “geometrijski” razlog zašto, ako želimo da se bavimo realističnim modelovanjem, moramo da uplovimo u vode višedimenzionog prenosa zračenja.

Postoji i drugi bitan razlog za ovakav pristup prenosu zračenja a to je nehomogenost modeliranih objekata i uticaj tih nehomogenosti na izlazni spektar. Pokazano je da se spektar izlaznog zračenja izračunat na osnovu 1D modela i 2D/3D modela bitno razlikuju (jedan od skorijih primera je iztraživanje predstavljeno u doktorskoj tezi Vitas 2011). Tako su, na primer, višedimenzioni modeli zvezdanih atmosfera sa poljima brzina koji slede iz (magneto)hidrodinamičkih simulacija potpuno eliminisali potrebu za *ad hoc* uvođenjem mikro- i makro-turbulentnih brzina. Razlike su još veće ako se analizira polarizacija rasejanjem. Za detaljnu demonstraciju uticaja nehomogenosti na izlazni Stokes-ov vektor videti Manso Sainz & Trujillo Bueno (2011) a za ubedljivu primenu na Hanle dijagnostiku videti Trujillo Bueno et al. (2004).

Tokom poslednjih nekoliko decenija, proračuni u višedimenzionim modelima su u stopu pratili napredak u jednodimenzionim izračunavanjima. Stenholm (1977) je

rešio ne-LTR problem formiranja linije u dvo-dimenzionim cilindrima koristeći *core saturation* metod. Mihalas et al. (1978) su izvršili opširnu analizu ne-LTR prenosa zračenja na 2D pravouglim modelima gde su takođe uključili polja brzina kao i prostorne nehomogenosti temperature i neprozračnosti. U stvari, ovi autori su prvi iskoristili ideju metoda kratkih karakteristika ali su koristili direktan metod da reše ne-LTR problem, što je nepraktičniji pristup od iterativnog metoda za rešavanje. Auer & Paletou (1994) su koristili ALI metod da ispituju formiranje spektralnih linija u 2D modelima uz PRD aproksimaciju. Prenos zračenja u 3D je takođe razmatran, kako u skalarnom (Fabiani Bendicho & Trujillo-Bueno 1999), tako i u polarizovanom slučaju, uz uključivanje Hanle efekta (Manso Sainz & Trujillo-Bueno 1999). Prva decenija XXI veka je dovela do mnogih unapređenja i primena, i kulminirala je tehnikama koje nam omogućuju da tretiramo prenos polarizovanog zračenja u multidimenzionalnim modelima, sa modelom atoma sa više nivoa, koristeći moderne superkompjutere (na primer Štěpán & Trujillo Bueno 2013). Iako se parcijalna redistribucija po frekvencijama može uključiti u model atoma sa dva nivoa metodama koje su razvili Frisch (2007) i Anusha & Nagendra (2011a), trenutno ne postoji teorija koja omogućava uključivanje PRD efekata u model atoma sa više nivoa, u polarizovanom slučaju<sup>20</sup>.

Kao što je za očekivati, većina istraživanja se prvo bavila test problemima, a zatim primenama na atmosfere zvezda (pre svega Sunca). Retki kontra-primeri obuhvataju različite vidove modeliranja gasovitih diskova kao što su Adam (1990) i Papkalla (1995). U ovoj tezi su predstavljene i neke primene na upravo takve objekte (videti glavu 5). Takođe je važno pomenuti da se danas za rešavanje problema prenosa zračenja u astrofizici često koriste i Monte Karlo metode. Ta istraživanja se uglavnom bave rasejanjem na prašini u različitim tipovima diskova: protoplanetarnim, diskovima oko mladih zvezdanih objekata i onima u aktivnim galaktičkim jezgrima.

Ova teza se može konceptualno podeliti na dva dela: Prvi deo se bavi ne-LTR

---

<sup>20</sup>Napomena: U trenutku neposredno pred predaju ove teze (maj 2014.) autor je u programu radionice o teoriji i modelovanju polarizacije u Pragu (5. maj 2014) video dva predavanja o polarizaciji u modelu atoma sa više nivoa u PRD aproksimaciji, tako da nije isključeno da je rešenje “pred vratima”.

formiranjem linija na 2D pravouglim koordinatnim mrežama (*možda nesrećan prevod izraza “grid”, poznatog iz numeričke astrofizike*) i novom metodom za ubrzanje konvergencije: “Sweep-by-sweep ILI” (Prolaz-po-prolaz implicitna lambda iteracija). Drugi deo se bavi formiranjem linija i polarizacije u 2D cilindričnom koordinatnom sistemu i primenama na jednostavne modele gasovitih diskova, koje se ne sreću često u literaturi o prenosu zračenja. Poglavlje 2 daje detaljan prikaz metoda krakatih karakteristika primenjenog na 2D dekartove koordinate. Poglavlje 3 sadrži implementaciju dve dobro poznate iterativne metode (Jacobi, Gauss-Seidel), kao i dve metode razvijene u okviru istraživanja predstavljenog u tezi (simetričnog Gauss-Seidel i “Prolaz-po-prolaz” implicitne lambda iteracije -“Sweep-by-sweep implicit lambda iteration”), za rešavanje ne-LTR prenosa zračenja u 2D. U poglavlju 4 damo kratak pregled formalizma redukovano intenziteta za rešavanje takozvanog ne-LTR problema druge vrste (ne-LTR sa polarizacijom rasejanjem i Hanle efektom). Poglavlje 5 se bavi primenom ovog formalizma i Jacobi iteracije na formiranje linija u 2D cilindričnim koordinatnim sistemima i primenom na jednostavne modele gasovitih diskova. Konačno, u poglavlju 6 ćemo sumirati glavne rezultate teze i prodiskutovati o nekim mogućim pravcima za dalje istraživanje.

## Glava 2

# Formalno rešenje jednačine prenosa metodom kratkih karakteristika

Preko preče, naokolo bliže.

---

Srpska izreka

U prethodnoj glavi smo naglasili da je jedna od komponenti (možda čak i najvažnija) iterativnog metoda način za računanje formalnog rešenja jednačine prenosa zračenja. Pod formalnim rešenjem podrazumevamo postupak izračunavanja (uglavnom numeričkog) specifičnog intenziteta u datoj tački u prostoru, pod pretpostavkom da je funkcija izvora poznata svuda i da su dati odgovarajući granični uslovi. Za sada ćemo razmatrati najopštiji slučaj: rešavanje jednačine prenosa u proizvoljnom koordinatnom sistemu (1-, 2- ili 3D, u pravouglim, cilindričnim ili sfernim koordinatama). U poglavlju 2.3 ćemo svesti razmatranje na 2D Dekartov pravougli koordinatni sistem. Važno je uvek imati u vidu da je formalno rešenje ključni element iterativnog metoda i da odabir formalnog rešenja ima značajne posledice. Moderni kompjuterski kôdovi uglavnom koriste neku varijantu metoda kratkih karakteristika (neki od bitnijih radova su: Mihalas et al. 1978; Olson & Kunasz 1987; Kunasz & Olson 1988; Kunasz & Auer 1988). U ovoj glavi ćemo detaljno objasniti našu verziju metoda kratkih karakteristika.

Pre nego što pređemo na detalje, prodiskutujemo najočigledniji način za računanje formalnog rešenja. Recimo da posmatrač želi da izračuna izlazni intenzitet duž datog pravca vizure, za neku frekvenciju zračenja. Pravac vizure se onda može produžiti tako da prođe kroz ceo objekat (granični uslovi za ulazno zračenje su dati) i jednačina prenosa se može integraliti po tom pravcu, uz neophodnu prostornu interpolaciju da bi se našle vrednosti funkcije izvora neophodne za ovu integraciju (pošto odabrane tačke u principu neće pripadati diskretnoj koordinatnoj mreži). Ovaj pristup je poznat kao “ray tracing” ili “metod dugih karakteristika” (*long characteristics method*). Metod kratkih karakteristika je pak baziran na formalnom rešenju duž kratkog intervala (duži) na zadatom pravcu. Kao što ćemo videti ta duž povezuje tačku u modelu u kojoj tražimo formalno rešenje i ivicu ćelije kojoj razmatrana tačka pripada. Kada detaljno opišemo metod krakatih karakteristika, vratićemo se na diskusiju o razlikama između ova dva pristupa.

U poglavlju 2.1 ćemo predstaviti osnovnu ideju metoda kratkih karakteristika koja se zasniva na polinomijalnoj aproksimaciji za ponašanje funkcije izvora između dve tačke. Poglavlje 2.2 se bavi diskretizacijom po prostornim, ugaonim i frekventnim koordinatama, a 2.3. odabirom takozvane “uzlazne” (*eng: upwind*) tačke. U poglavlju 2.4. ćemo formulirati našu varijantu rešenja, koja je od suštinske važnosti za predstavljanje iterativnih metoda iz glave 3. U 2.5 je izloženo tretiranje polja brzina u referentnom sistemu posmatrača dok ćemo u 2.6. prodiskutovati o nekim programerskim detaljima koji se tiču implementacije metoda u kôd i diskutovaćemo o skaliranju računarskog vremena sa veličinom koordinatne mreže.

## 2.1 “Deo-po-deo” aproksimacija funkcije izvora polinomom

Razmatrajmo tačku  $L$  u modelu ( $L$  kao “lokalna”) u kojoj želimo da izračunamo intenzitet zračenja u datom pravcu koji je određen parom uglova  $\theta$  i  $\varphi$  (pogledati sliku 1.1). Da bismo iskoristili jednačinu 1.7, odaberimo, za sada proizvoljnu, tačku  $U$  u uzlaznom (suprotnom) smeru u odnosu na smer prostiranja zračenja. Ovo znači da se zrak koji razmatramo prostire u smeru  $UL$ . U tom slučaju formalno rešenje



izgleda ovako:

$$I_L = I_U e^{-\Delta} + \int_0^{\Delta} S(t) e^{(t-\Delta)} dt, \quad (2.1)$$

gde je  $\Delta$  monohromatska optička razdaljina između tačaka  $U$  i  $L$ . Sada ćemo pretpostaviti da se funkcija izvora na ovom intervalu ponaša kao polinom stepena  $N^1$ :

$$S(t) = \sum_0^N p_n t^n. \quad (2.2)$$

Onda dobijamo:

$$I_L = I_U e^{-\Delta} + \int_0^{\Delta} \sum_0^N p_n t^n e^{(t-\Delta)} dt. \quad (2.3)$$

Ova jednačina se može rešiti analitički, pa iz nje sledi:

$$I_L = I_U e^{-\Delta} + \sum_0^N \psi_n S_L^{(n)}, \quad (2.4)$$

gde koeficijenti  $\psi_n$  slede iz koeficijenata  $p_n$  izvornog polinoma, a  $S_L^{(n)}$  označava  $n - ti$  izvod funkcije izvora u tački  $L$ . Da bi rešenje bilo što “lokalnije”, obično se biraju polinomi niskog stepena. Najjednostavniji izbor je naravno, linearna aproksimacija, iz koje dobijamo:

$$I_L = I_U e^{-\Delta} + p S_L + r S_L'. \quad (2.5)$$

Ovaj metod je poznat pod imenom *kratke karakteristike prvog reda*. Prednosti ovakvog pristupa su jednostavnost i monotonost (za detaljnu diskusiju o velikom značaju monotonosti videti Kunasz & Auer 1988; de la Cruz Rodríguez & Piskunov 2013) ali postoji i veliki nedostatak - nepreciznost. Takođe je važno napomenuti da se  $S_L'$  obično ne računa eksplicitno, već se eliminiše korišćenjem funkcije izvora u uzlaznoj tački:

$$S_L' = \frac{S_L - S_U}{\Delta}. \quad (2.6)$$

Očigledno unapređenje ove šeme je pretpostavka o parabolničnom ponašanju funkcije izvora na intervalu. Ovo vodi ka pojavljivanju drugog izvoda funkcije izvora. Drugi izvod ćemo eliminisati korišćenjem Tejlorovog razvoja funkcije izvora u uzlaznoj

---

<sup>1</sup>Za različite intervale ćemo imati različite koeficijente polinoma, otud i izraz “deo-po-deo”.

tački:

$$S_U = S_L - S'_L \Delta + S''_L \frac{\Delta^2}{2}. \quad (2.7)$$

Ovo rezultuje sledećim oblikom formalnog rešenja:

$$I_L = I_U e^{(-\Delta)} + p S_L + q S_U + r S'_L. \quad (2.8)$$

Jednačina 2.8 je po prvi put izvedena i korišćena u ovom obliku u radu Atanacković-Vukmanović et al. (1997) za rešavanje problema ne-LTR formiranja linija u modelu atoma sa dva i više nivoa u jednodimenzionim, polubeskonačnim, plan-paralelnim modelima zvezdanih atmosfera korišćenjem dvosmerne implicitne lambda iteracije (Forth and Back impliti lambda iteration - FBILI). Njihovo istraživanje je početna tačka za naš rad, i izvor ideje za uvođenje novih iterativnih metoda predstavljenih u glavi 3. Generalno gledano, metod kratkih karakteristika je prvi put uveden u radu Mihalas et al. (1978) i nakon toga iskorišćen, u drugom obliku, u radovima Olson & Kunasz (1987) i Kunasz & Olson (1988) za rešavanje ne-LTR problema prenosa zračenja u 1D i 2D slojevima konačne debljine korišćenjem Jacobi iteracije. U njihovom pristupu, lokalni izvod se eliminiše uvođenjem treće tačke na zraku, u silaznom pravcu (tačka  $D$ , od engleskog *downwind*). Mi ćemo koristiti jednačinu 2.8 upravo ovako kako je data i tretirati lokalni izvod funkcije izvora na drugi način (osim u glavi 5, gde koristimo “klasični” oblik kratkih karakteristika). Koeficijenti  $p$ ,  $q$  i  $r$  zavise samo od  $\Delta$ :

$$p = 1 + \frac{2}{\Delta} \left( e^{-\Delta} - \frac{1}{\Delta} + \frac{e^{-\Delta}}{\Delta} \right), \quad (2.9)$$

$$q = -e^{-\Delta} - \frac{2}{\Delta} \left( e^{-\Delta} - \frac{1}{\Delta} + \frac{e^{-\Delta}}{\Delta} \right), \quad (2.10)$$

$$r = -1 + \frac{2}{\Delta} - e^{-\Delta} - \frac{2e^{-\Delta}}{\Delta}. \quad (2.11)$$

Takođe je moguće koristiti polinome višeg stepena. Kratke karakteristike trećeg reda su koristili, na primer, Simonneau et al. (2012), a postoje i drugi pristupi. Auer (2003) je predložio splajnove drugog ili trećeg reda za formalno rešavanje jednačine

prenosa, kao na primer, Hermite-ove i Bezier-ove splajnovne. Umesto lokalnog izvoda, ovi metodi koriste takozvanu “kontrolnu tačku” koja može biti odabrana tako da splajn bude ili monoton ili gladak. Ove splajnovne su koristili de la Cruz Rodríguez & Piskunov (2013) i Ibgui et al. (2013). Štěpán & Trujillo Bueno (2013) su predstavili BESSER, formalno rešenje koje koristi monotone i glatke splajnovne drugog reda. Svi monotoni splajnovi imaju jednu izuzetno važnu osobinu: sprečavaju pojavu “premašivanja” (*eng: overshoot*), tj. situacija u kojima bi interpolirana vrednost bila veća od najveće (ili manja od najmanje) vrednosti korišćene za interpolaciju. Problem premašivanja su diskutovali još Kunasz & Auer (1988) i Auer & Paletou (1994). U ovoj tezi ćemo koristiti različite metode da aproksimiramo ponašanje funkcije izvora na intervalu  $UL$ . Poglavlja 2 i 3 koriste polinom drugog reda, a drugi deo poglavlja 5 koristi BESSER interpolaciju drugog reda (Štěpán & Trujillo Bueno 2013).

## 2.2 Diskretizacija

Analitički oblik zavisnosti  $I(\vec{r}, \hat{\Omega}, \nu)$  je praktično nemoguće naći, pošto se u većini slučajeva bavimo problemom spregnutih jednačina prenosa zračenja i statističke ravnoteže, a taj problem je analitički rešiv samo u idealizovanim test primerima. Numeričko rešavanje jednačina zahteva diskretizaciju, kako po prostornim koordinatama (što je čest slučaj u numeričkim simulacijama), tako i po pravcima i frekvencijama.

Prostorna diskretizacija veličine  $f$  podrazumeva nalaženje načina da se zavisnost  $f(x, y)$  (ako se ograničimo na 2D Dekartov koordinatni sistem) predstavi korišćenjem konačnog broja tačaka na datim intervalima duž  $x$  i  $y$  ose. Ovaj skup tačaka ćemo zvati “koordinatna mreža” (*eng: mesh, grid*). U ovom istraživanju koristimo pravilne, struktuirane koordinatne mreže, što znači da su koordinatne tačke u preseku  $NX + 1$  pravih paralelnih sa  $y$  osom i  $NY + 1$  pravih paralelnih sa  $x$  osom. Moderne (radijativno-magneto-)hidrodinamičke simulacije koriste nestruktuirane i nepravilne koordinatne mreže (npr. Voronoi taselaciju), ali je primena metoda kratkih karakteristika na takve koordinatne mreže izuzetno komp-

likovana i problematična. Trenutno se, za prenos zračenja na ovakvim premžama, uglavnom koriste Monte Karlo metodi.

Iskustvo pokazuje da je u slučaju kada je neprozračnost konstantna (kao što je u test problemima u ovoj tezi) poželjno, preciznosti radi, odabrati koordinatnu mrežu koja ima finiju prostornu rezoluciju blizu ivica objekta. Uobičajen izbor je logaritamska skala, što znači da tačke sa istom  $y$  koordinatom imaju konstantan razmak po  $x$ -logaritamskoj skali i obrnuto. Na primer, ako bismo želeli da koristimo logaritamsku koordinatnu mrežu sa 10 tačaka po dekadi, gde prva tačka ima koordinatu  $x_1 = 0$ , druga, na primer,  $x_2 = 10^{-2}$ , ostale  $x$  koordinate bi bile date sa:

$$x_i = 10^{-2+0.1(i-2)}; \quad i = 3, NX/2 \quad (2.12)$$

Ovakva koordinatna mreža ima finiju rezoluciju blizu granice  $x = 0$ . Sa druge strane, želimo finu rezoluciju i na suprotnoj granici:

$$x_{NX+1-i} = x_{\max} - x_i; \quad i = 1, NX/2 \quad (2.13)$$

Gde je  $x_{\max}$  veličina objekta po  $x$  koordinati. Primer ovakve koordinatne mreže po  $x$  i  $y$  je korišćen, između ostalog, u radu Auer & Paletou (1994) i u numeričkim testovima u poglavlju 3. Napominjemo da je prostorna integracija jednačine prenosa u stvari formalno rešenje i da tačnost istog zavisi  $i$  od odabrane interpolacije *kao*  $i$  od rezolucije same koordinatne mreže.

U slučaju diskretizacije po frekvencijama, ekvidistantna diskretizacija u 9 tačaka od centralne frekvencije do četiri Doplerove širine linije je sasvim zadovoljavajuća<sup>2</sup> ukoliko se koristi Gausov (Doppler-ov) profil. U statičnim slučajevima, kada nema makroskopskog polja brzina, usled simetrije problema u odnosu na centar linije, dovoljno je razmatrati samo jednu polovinu linije (na primer, nekoliko Doppler-ovih širina od centra linije ka plavom delu spektra). Sa druge strane, ukoliko su polja brzine važna, moramo razmotriti celu liniju (vidi poglavlje 2.5). Težine za numeričku integraciju se računaju trapeznim pravilom i moraju biti normalizovane tako da je

---

<sup>2</sup>Uobičajeno je da se za frekvenciju koristi bezdimenziona veličina, tj. frekventna udaljenost od centra linije u jedinicama Doppler-ove širine:  $\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_D}$ .

integral profila linije jednak jedinici:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\nu d\nu = \sum_{n=1}^{NF} w_n \phi_n = 1. \quad (2.14)$$

Od sada, kada budemo koristili diskretizovane veličine, frekvencije ćemo numerisati sa  $n$ , gde je  $n = 1, NF$ .

Trapezno pravilo za integraciju nije optimalno za integraciju po pravcima. U problemima gde polje zračenja ne zavisi od  $\varphi$ , uobičajen izbor je Gausova kvadratura po  $\cos\theta$ . To znači da koristimo sledeću smenu:

$$\int_0^\pi f(\theta) \sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 f(\mu) d\mu, \quad (2.15)$$

gde je  $\mu = \cos\theta$  uobičajena notacija u jednodimenzionim problemima<sup>3</sup>.

Ako polje zračenja zavisi i od  $\theta$  i od  $\varphi$  (što je slučaj u višedimenzionim koordinatnim sistemima), može se koristiti Gausova kvadratura po  $\mu$ , u kombinaciji sa trapezoidnom kvadraturom po  $\varphi$ . Treba imati u vidu, pak, da je polje zračenja periodično po  $\varphi$ , sa periodom  $2\pi$ . Diskretne vrednosti korišćene za opisivanje zavisnosti polja zračenja od pravca ćemo obeležiti sa  $\theta_g$ ,  $g = 1, NT$  i  $\varphi_m$ ,  $m = 1, NP$ . Za integraciju po azimutu smo, u ovom slučaju koristili sledeće vrednosti:

$$\varphi_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{2\pi}{NP - 1}, \quad (2.16)$$

$$w_m = \frac{2\pi}{NP - 1}, \quad (2.17)$$

dok su težine i pravci po  $\theta$  dati Gausovom kvadraturom. Integral neke veličine  $f(\theta, \varphi)$  će izgledati ovako:

$$\oint f(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\phi = \sum_g^{NT} \sum_m^{NP} f_{g,m} w_g w_m. \quad (2.18)$$

---

<sup>3</sup>Važno je razumeti da polje zračenja može da zavisi i od  $\theta$  i od  $\varphi$ , čak i u jednodimenzionim problemima. Neki od primera su atmosfera čija je površina obasjana zračenjem iz datog pravca, ili prenos polarizovanog zračenja kroz atmosferu prožetu orijentisanim magnetnim poljem

Radi ilustracije integracije po pravcima i frekvencijama, pogledajmo kako izgleda numerički izračunat integral rasejanja:

$$J = \frac{1}{4\pi} \sum_g^{NT} \sum_m^{NP} \sum_n^{NF} w_g w_m w_n \phi_n I_{g,m,n}. \quad (2.19)$$

Drugi pristup za integraciju po pravcima je korišćenje kvadrature koja je invarijantna u odnosu na rotiranje koordinatnih osa. Najkorišćenija varijanta ovakve kvadrature je tzv Carlson-ova kvadratura (Carlson 1963). Prednost ovog metoda je u tome što se koristi manji broj uglova u odnosu na gore navedenu kvadraturu. Trebao bi da ima prednost u problemima gde ne postoji “privilegovani” pravac za prenos zračenja (npr. duboko u zvezdanoj atmosferi). Prema našem iskustvu (Fau-robot et al. 2013), ovakav tip kvadrature nije optimalan za probleme gde postoji dominantan pravac u polju zračenja kao što je slučaj sa, npr. Sunčevim protuberancama. Takođe, ova kvadratura može dovesti do nezanemarljivih grešaka pri računanju tenzora polarizovanog srednjeg intenzeta (vidi glavu 4, ili za više detalja Landi Degl’Innocenti & Landolfi 2004). Još jedan nedostatak je to što ne postoji algoritam za računanje Carlson-ove kvadrature proizvoljne rezolucije.

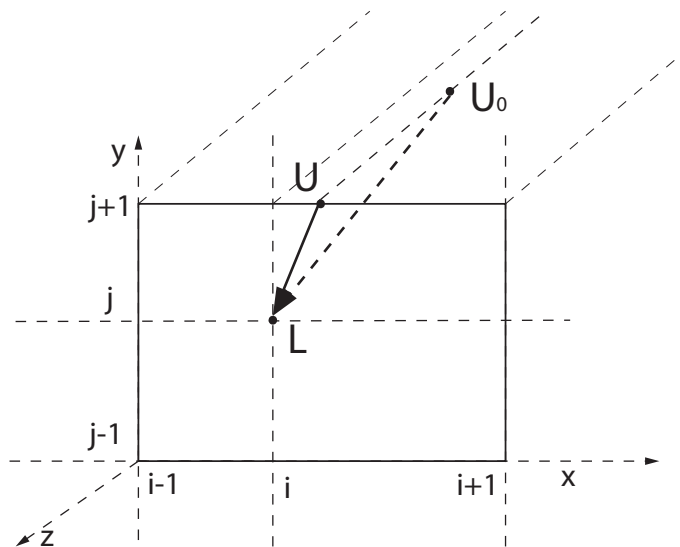
U proračunima predstavljenim u nastavku teze, korišćićemo uglavnom Carlson-ov set C, ali i mešavinu Gausove i trapezne kvadrature. Upotreba jedne ili druge metode će biti eksplicitno naglašena.

## 2.3 Odabir uzlazne tačke

Pokazali smo kako se formalno rešava jednačina prenosa zračenja, tj. kako se računa specifični intenzitet u datom pravcu i na datoj frekvenciji, ako znamo gde je uzlazna tačka i odgovarajući<sup>4</sup> intenzitet. Do sada nismo diskutovali odabir uzlazne tačke. Iskustvo pokazuje da bi optički put između tačaka  $U$  i  $L$  trebao da bude reda veličine optičkog puta između tačke  $L$  i najbliže granice objekta. U principu,

---

<sup>4</sup>Što znači: uzlazni intenzitet iz jednačine 1.7. U Dekartovim koordinatama u referentnom sistemu posmatrača to znači: intenzitet u uzlaznoj tački u istom pravcu i na istoj frekvenciji kao što je intenzitet koji izračunavamo u lokalnoj tački. Videćemo da se ugao menja u zakrivljenim koordinatnim sistemima. Takođe ako radimo u referentnom sistemu fluida (*eng: co-moving frame*), razmatramo različitu frekvenciju.



Slika 2.1: Primena kratkih karakteristika na 2D Dekartove koordinate.

moгуće je odabrati proizvoljnu tačku  $U$  na zraku i naći vrednosti  $I_U$  i  $S_U$  na osnovu prostorne interpolacije po sve tri (ili u 2D slučaju, dve) prostorne koordinate. Ipak, optimalan izbor (barem za sada) je da se odabere *prvi presek zraka sa koordinatnom mrežom*. U ovom slučaju je potrebna interpolacija po jednoj koordinati manje (po dve u slučaju 3D a po jednoj u slučaju 2D koordinata).

Jednostavnosti radi, a bez gubljenja opštosti, razmatrajmo 2D Dekartov pravougli koordinatni sistem. Fizičke veličine su zadate u svim tačkama u  $xy$  ravni i ne zavise od  $z$ . Uglovi  $\theta$  i  $\varphi$  imaju svoj uobičajen smisao, dat na slici 1.1. Slika 2.1 prikazuje primenu metoda kratkih karakteristika. Tačka  $U_0$  je uzlazna tačka u prostoru a  $U$  je njena projekcija na ravan  $xy$ . Obeležimo diskretizovane prostorne koordinate po  $x$  i  $y$  sa  $x_i$  i  $y_i$ , respektivno. Tačka  $L$  ima koordinate  $(x_i, y_j)$  ili kraće  $(i, j)$ . Primećujemo da, ako je  $0 < \varphi < \pi/2$ , onda sledi da je  $x_U < x_L$  i da je  $y_U < y_L$ ; ako je  $\pi/2 < \varphi < \pi$ ,  $x_U > x_L$  i  $y_U < y_L$ , itd. Iz ovoga je odmah jasno da redosled u kom se prolazi kroz koordinatnu mrežu zavisi od azimuta intenziteta koji se trenutno izračunava. Ako ugao  $\varphi$  pripada prvom kvadrantu, prolaz počinje od tačke  $(1, 1)$  u pravcu rastućeg  $x$  i  $y$ , itd. U principu nema razlike da li se prolaz kroz koordinatnu mrežu vrši prvo duž  $x$  ili duž  $y$ .

U primeru datom na slici 2.1, prvi presek između zraka i koordinatne mreže leži na liniji koja je paralelna sa  $x$  osom. Vidi se da je  $y_U = y_{j+1}$ . Vrednost  $x_U$

ne pripada koordinatnoj mreži i vrednosti potrebnih fizičkih veličina (intenziteta, funkcije izvora, neprozračnosti) se moraju naći interpolacijom (poželjno drugog reda ili preciznijom) po  $x$ . Postoje različiti pristupi za ovu interpolaciju, ali generalan zaključak je da je poželjno koristiti što lokalniju proceduru. Postupak je identičan ukoliko zrak preseca ćeliju duž linije paralelne se  $y$  osom. Interpolacija u slučaju 3D koordinatnih mreža je slična: pretpostavimo da se tačka preseka nalazi u ravni paralelnoj sa ravni  $xy$ . Onda je poznato  $z_U$ , ali moramo izvršiti 2D interpolaciju po  $x$  i  $y$  da bismo našli vrednosti fizičkih veličina u uzlaznoj tački.

Pretpostavimo sada da smo našli uzlaznu tačku i interpolirane vrednosti potrebnih fizičkih veličina (u najjednostavnijem slučaju su nam potrebni samo funkcija izvora i specifični intenzitet) i razmotrimo postupak formalnog rešenja.

## 2.4 Modifikovani oblik kratkih karakteristika sa pretpostavkom kvadratne interpolacije

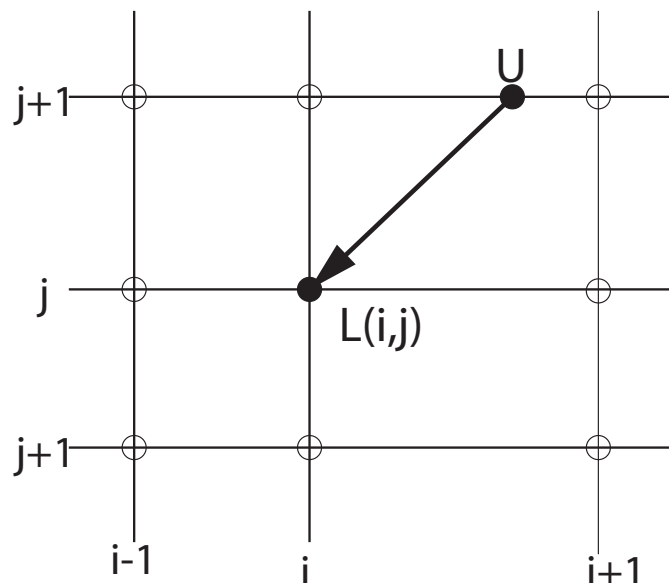
Da bismo iz jednačine 2.8 izračunali lokalni specifični intenzitet potrebno nam je da izračunamo “uzlazni” intenzitet, “uzlaznu” funkciju izvora, optički put  $UL$ , lokalnu funkciju izvora i njen izvod. Sada ćemo pojedinačno prodiskutovati o svakoj od ovih veličina, pod pretpostavkom da formalno rešenje vršimo na 2D Dekartovoj koordinatnoj mreži.

Intenzitet i funkcija izvora u uzlaznoj tački se nalaze prostornom interpolacijom po  $x$  ili  $y$ . Za intenzitet ćemo uvek koristiti striktno monotone Bezier splajnove trećeg reda koji sprečavaju pojavu ne-fizičkih negativnih intenziteta. Ukoliko želimo da koristimo “uzlaznu” funkciju izvora *eksplicitno*, možemo da koristimo proizvolnu interpolaciju. Mi ćemo, pak, za iterativne šeme predstavljene u glavi 3 izraziti  $S_U$  kao linearnu kombinaciju 8 susednih funkcija izvora:

$$S_U = \sum_{i',j'} w_{i',j'} S_{i',j'}, \quad (2.20)$$

gde je  $i' = i - 1, i, i + 1$  a  $j' = j - 1, j, j + 1$ . Napominjemo da su najviše tri od ovih vrednosti različite od nule i da je  $w_{ij}$  identična nuli. U razmatranom primeru,





Slika 2.2: Interpolacija fizičkih veličina u uzlaznoj tački korišćenjem Lagrange-ovog polinoma duž  $x$  ose. Nakon integracije po pravcima, sve susedne funkcije izvora (obeležene praznim krugovima) doprinose srednjem intenzitetu  $J$  u tački  $L$ .

sledeće težine su različite od nule i njihove vrednosti su:

$$\begin{aligned}
 w_{i-1,j+1} &= \frac{(x_U - x_i)(x_U - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})}, \\
 w_{i,j+1} &= \frac{(x_U - x_{i-1})(x_U - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})}, \\
 w_{i+1,j+1} &= \frac{(x_U - x_{i-1})(x_U - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ovde je pretpostavljena parabolična (kvadratna) interpolacija. To je donekle rizična pretpostavka pošto se u ekstremnim slučajevima mogu pojaviti ne-fizičke (negativne) vrednosti uzlazne funkcije izvora, ali pošto ovaj razvoj zahteva poznavanje samo vrednosti nezavisne promenljive za nalaženje težina za interpolaciju, možemo da konstruišemo izuzetno brze iterativne procedure opisane u glavi 3. U primerima koje predstavljamo u tezi nije bilo nikakvih problema sa konvergencijom i/ili stabilnošću.

Lokalnu funkciju izvora smatramo poznatom, dok se lokalni izvod duž pravca

može zapisati na sledeći način:

$$S'_L = \cos \theta \cos \phi \frac{\partial S}{\partial x} + \cos \theta \sin \phi \frac{\partial S}{\partial y}. \quad (2.22)$$

Ovde smo pretpostavili da je neprozračnost konstantna i jednaka jedinici. Ukoliko nam je potrebna eksplicitna vrednost izvoda, postoji nekoliko pristupa, od Lagrange-ove interpolacije do sofisticiranijih šema kao što je ona koju predlažu Fritsch & Butland (1984). Kao i u interpolaciji  $S_U$ , ograničićemo se na šeme u kojima težine zavise samo od vrednosti nezavisne promenljive ( $x$  ili  $y$ ). Pretpostavljajući Lagrange-ovu interpolaciju drugog reda za ponašanje funkcije izvora u okolini tačke  $L$  dobijamo:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \sum_i \Pi_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)_{x=x_L}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial y} \sum_j \Pi_{k \neq j} \frac{y - y_k}{y_j - y_k} \right)_{y=y_L}. \quad (2.24)$$

Na granicama koordinatne mreže se koristi linearna interpolacija.

Zamenom izraza 2.20 do 2.24 u jednačinu 2.8, formalno rešenje jednačine prenosa zračenja postaje:

$$I_L(\varphi, \nu) = I_U(\varphi, \nu)e^{-\Delta} + p'S_L + \sum_{i'} \sum_{j'} r_{i',j'} S_{i',j'}. \quad (2.25)$$

Ovde smo sa  $p'$  obeležili koeficijent  $p$  modifikovan tako da uzima u obzir doprinose lokalne funkcije izvora lokalnim parcijalnim izvodima funkcije izvora. Ovaj korak je veoma bitan za stabilnost i brzinu konvergencije metoda. Koeficijenti  $r_{i',j'}$  opisuju doprinose susednih osam funkcija izvora lokalnom specifičnom intenzitetu. Od sada ćemo koeficijent  $p'$  obeležavati samo sa  $p$ . Ovakav zapis formalnog rešenja (2.25) je sličan formalnom rešenju koje se pojavljuje u Kunasz & Auer (1988).

Nagoveštavajući diskusiju iz glave 3, integralićemo jednačinu 2.25 po pravcima i frekvencijama:

$$J_L = a + bS_L + \sum c_{i',j'} S_{i',j'}. \quad (2.26)$$

U glavi 1 smo već spomenuli najjednostavniju (i uglavnom neupotrebljivu) iterativnu

metodu,  $\Lambda$  iteraciju:

1. Računamo formalno rešenje jednačine prenosa zračenja u svim pravcima i na svim frekvencijama, a zatim i srednji intenzitet  $J$ .
2. Računamo nove vrednosti funkcije izvora u svim tačkama pomoću  $S = \epsilon B + (1 - \epsilon)J$ .
3. Ponavljamo korake 1 i 2 do konvergencije.

Čitalac upoznat sa konceptom Jacobi-jeve iteracije će odmah shvatiti da obična lambda iteracija može biti znatno ubrzana ako se koeficijent  $b$  jednačine 2.26 iskoristi kao aproksimativni operator. Glava 3 se iscrpno bavi iterativnim šemama ali bismo voleli da već ovde spomenemo smisao koeficijenta  $b$ : Ovaj koeficijent opisuje doprinos lokalne funkcije izvora lokalnom srednjem intenzitetu, odnosno, na neki način, funkcija izvora je “implicitno poznata” (Atanacković-Vukmanović et al. 1997). Jacobi-jeva iteracija u odnosu na  $\Lambda$  iteraciju ima jednu, naizgled trivijalnu izmenu, nakon izračunavanja koeficijenata  $a$ ,  $b$  i  $c$ , nova funkcija izvora se računa iz jednačina 2.26 i 1.18 kao:

$$S_{\text{new}} = \frac{\epsilon B_P + (1 - \epsilon)(a + \sum c_{i',j'} S_{i',j',\text{old}})}{1 - (1 - \epsilon)b}. \quad (2.27)$$

Ovo jednostavno “rearanžiranje” koeficijenata toliko ubrzava običnu  $\Lambda$  iteraciju da će neko ko se po prvi put sreće sa problemima u NLTE prenosu zračenja verovatno ostati zaprepašćen!

## 2.5 Polja brzine u referentnom sistemu posmatrača

Na neki način smo se već sreli sa poljima brzine, kada smo uveli Doplerov profil i objasnili kako je isti posledica nasumičnog (na primer, termalnog) kretanja apsorbujućih (i emitujućih) atoma koji se kreću sa Maksvelovoj raspodelom po brzinama. Sa druge strane, astrofizička plazma je prožeta i drugim poljima brzine: u Sunčevim protuberancama možemo detektovati vertikalne tokove gasa, kao i oscilacije. Gas u akrecionim i cirkumstelarnim diskovima se kreće po Keplerovskim orbitama, koje

se prepliću sa različitim turbulentnim kretanjima. Gas u zvezdanim atmosferama takođe ima turbulentne komponente brzine usled konvekcije, itd. Ako su intenziteti ovih brzina mnogo manji od prosečne termalne brzine gasa, onda one nemaju nikakav uticaj na spektar i mogu biti zanemarene. U najvećem broju primera, pak, to nije slučaj. Pre nego što ukratko predstavimo metod za uključivanje ovih brzina u referentnom sistemu posmatrača (za detaljnije objašnjenje, videti, npr. Mihalas 1978), fenomenološki ćemo objasniti kako polje brzina utiče na prenos zračenja u spektralnim linijama.

Razmotrimo sloj gasa koji miruje (npr. 1D atmosferu koju smo razmatrali u glavi 1) i nazovimo ga “sloj 1”. Pretpostavimo da se iznad njega nalazi drugi sloj gasa (“sloj 2”), koji se sistematski kreće ka posmatraču brzinom koja je, na primer, reda veličine Doplerove brzine gasa. Neka su parametri (temperatura, hemijski sastav...) oba sloja identični. Koncentrišimo se na akademski primer prenosa zračenja u spektralnoj liniji. Neka je sloj 1 polubeskonačna atmosfera u kojoj je formirana apsorpciona linija i neka izlazno zračenje iz sloja 1 obasjava sloj 2. Pretpostavimo sada, povrh svega, da sloj 2 ima neku nezanemarljivu optičku debljinu ( $\tau \approx 1$ ). Ako bi sloj 2 bio nepokretan, došlo bi do nekog dodatnog prenosa zračenja u liniji ali bi izlazni spektar bio praktično identičan izlaznom spektru iz sloja 1. Međutim, pošto se sloj 2 kreće u odnosu na posmatrača, pa samim tim i u odnosu na nepokretni sloj 1, posmatrač će “videti” kako sloj 2, usled Doplerovog efekta, apsorbuje na drugačijim frekvencijama u odnosu na statičan slučaj. Maksimum apsorpcije (pa samim tim, i emisije) je pomeren ka frekvenciji:

$$\nu_{\max} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (2.28)$$

Na ovoj frekvenciji, ulazno zračenje na donjoj granici sloja 2, ne odgovara centru linije (manji intenzitet), već krilu linije (veći intenzitet). Prema tome, u tom delu spektra će doći do dodatne apsorpcije. Sa druge strane, centar linije će “proći” kroz prozračniji deo spektra i biti propušten u mnogo većoj meri.

U principu, ovim jednostavnim misaonim eksperimentom smo demonstrirali kako se uticaj polja brzina implementira u prenos zračenja koristeći referentni sistem pos-

matrača. Pretpostavimo da tačka unutar objekta ima brzinu  $\vec{v}$  u referentnom sistemu posmatrača i da se zračenje prostire u pravcu  $\vec{l}$ . Monohromatski koeficijenti apsorpcije i emisije u liniji sada takođe postaju zavisni *i od pravca* i imaju sledeće oblike:

$$\chi(\nu, \vec{l}) = \chi_0 \phi \left[ \nu \left( 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{l}}{c} \right) \right], \quad (2.29)$$

$$\eta(\nu, \vec{l}) = \eta_0 \phi \left[ \nu \left( 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{l}}{c} \right) \right]. \quad (2.30)$$

U smislu numeričke implementacije ovog formalizma za rešavanje jednačine prenosa zračenja, jedina bitna komplikacija je račun monohromatskih optičkih udaljenosti između tačaka ( $\Delta$ ). Usled prisustva polja brzina, neprozračnost na datoj frekvenciji duž zraka više nije konstantna (čak ni ako srednja neprozračnost u liniji jeste!) i  $\Delta$  se mora naći integracijom  $\chi(\nu, \vec{l})$  na intervalu  $UL$ . Jedan od načina je da koristimo, strogo monotonu, interpolaciju drugog reda (de la Cruz Rodríguez & Piskunov 2013):

$$\Delta = \frac{\delta s}{2}(\chi_L + \chi_U) + \frac{\delta s}{12}(\chi'_L - \chi'_U), \quad (2.31)$$

gde je  $\delta s$  udaljenost između  $U$  i  $L$ . Izvodi neprozračnosti se računaju u datom pravcu korićenjem pristupa iz Fritsch & Butland (1984), da bi se zagarantovala tačnost i monotonost<sup>5</sup>.

Da bi se  $\Delta$  izračunalo što tačnije, takođe je bitno postarati se da je razlika između brzina projektovanih na pravac ka posmatraču u tačkama  $U$  i  $L$  manja od  $v_D$ . U praksi, ukoliko koordinatna mreža nije dovoljno fina, ovo se može postići podelom intervala  $UL$  na podintervale, kao što je detaljno objašnjeno u Ibgui et al. (2013). U ovom pristupu interval  $UL$  se deli na podintervale, gde se neprozračnost računa u svakoj od “dodatnih” tačaka a zatim se  $\Delta$  dobija numeričkom integracijom. Ovo donekle usporava formalno rešenje ali bitno unapređuje tačnost (vidi van Noort et al. 2002; Ibgui et al. 2013). U primerima razmotrenim u ovoj tezi nije bilo potrebe za ovim pristupom pošto razmatrane brzine nisu previše velike.

---

<sup>5</sup>Za razliku od nerealističnih vrednosti funkcije izvora usled interpolacije, koje mogu da prođu neprimećene, nerealne, tj. negativne, vrednosti  $\chi$  dovode do negativnih optičkih udaljenosti koje skoro sigurno ugrožavaju stabilnost numeričkog metoda.

Takođe je bitno uzeti u obzir polje brzina pri računanju integrala rasejanja (tj. srednjeg intenziteta  $J$ ) gde je takođe potrebno uračunati pomeranje apsorpcionog profila u referentnom sistemu posmatrača. Radi potpune korektnosti, poželjno je proveriti integraciju po frekvencijama i postarati se da je apsorpcioni profil i dalje normiran na 1. Važno je primetiti da je neophodno da interval frekvencija koji se koristi u proračunima mora biti proširen tako da obuhvati maksimalne plave i crvene pomake usled polja brzina. Upravo ovo je razlog zašto je ovaj metod nepraktičan kada je potrebno razmotriti brzine koje imaju veliki raspon intenziteta. Na primer, ako je maksimalni crveni/plavi pomak usled kretanja gasa jednak  $10v_D$ , neophodno je proširiti opseg frekvencija koji se razmatra sa dodatnih 10 Doplerovih širina u crvenom/plavom delu spektra, što, u konkretnim primerima koje ovde razmatramo znači dodavanje dodatnih 20 diskretnih frekventnih tačaka pored postojećih 9. Na primer, za tipičnu liniju vodonika u sunčevoj atmosferi ovih  $10v_D$  iznosi oko 100 km/s. Zvezde tipa Be, oko kojih se nalaze cirkumstelarni diskovi, rotiraju brzinama od oko 250 km/s. Korišćenje referentnog sistema posmatrača u ovom slučaju zahteva uključivanje velikog broja dodatnih diskretnih frekvencija. Jedan način da se ovaj problem izbegne je korišćenje referentnog sistema vezanog za lokalnu tačku (eng: *co-moving frame formalism*). Ovaj pristup je, sa druge strane, komplikovaniji i izlazi van okvira ove teze. Rezultati predstavljeni u glavi 5 su računati korišćenjem referentnog sistema vezanog za posmatrača.

## 2.6 Nekoliko napomena o implementaciji

Ovde ćemo izložiti kratku diskusiju o nekoliko aspekata numeričke implementacije opisanih procedura. Izbor redosleda numeričkih operacija će postati jasniji nakon što uvedemo iterativne metode (glava 3), dok je većina objašnjenja data u ovom poglavlju najpre zarad čitalaca koji će, nadamo se, pročitati tezu da bi koristili neke od ovih rešenja i metoda za njihova sopstvena istraživanja. Važno je napomenuti, iako je do sada možda i očigledno, da se formalno rešenje u kompjuterskom kôdu realizuje kroz korišćenje nekoliko ugneždenih petlji. Sada ćemo prodiskutovati redosled ovih petlji.

Što se tiče formalnog rešenja, frekvencije i pravci se razmatraju odvojeno. U principu, moguće je izvršiti formalno rešenje na koordinatnoj mreži za svaku moguću kombinaciju pravac-frekvencija pojedinačno. Ipak, praktično je, barem za jednostavnije primere koji se izvršavaju na PC računarima, naći uzlaznu tačku i interpolirati funkciju izvora za dati pravac jednom, a zatim izvršiti formalno rešenje za svaku frekvenciju. Ovo nas dovodi do zaključka da bi najbrža petlja trebala biti ona po frekvencijama. Zatim treba da odaberemo da li će nam spoljna petlja biti petlja po pravcima ili po prostornim koordinatama. Uobičajen izbor za standardne metode, kao što je Jacobi, (koji se obično kombinuje sa multi-grid pristupom, npr. Steiner 1991), koji se izvršavaju na superkompjuterima bi bili uglovi, pošto je tako mnogo jednostavnije implementirati paralelizovano formalno rešenje. Pristup koji mi ovde predlažemo, sa druge strane, je zasnovan na principu da je “najsporija” petlja ona po prostornim koordinatama, tako da naš pseudokod za formalno rešenje izgleda ovako:

**Za** svaku tačku u koordinatnoj mreži (za Dekartove koordinate, recimo, petlja ide prvo po  $i$  pa po  $j$ ):

**Za** svaki pravac (ovo znači za svaku kombinaciju uglova  $\theta$  i  $\varphi$ ):

Nađi uzlaznu tačku.

Interpoliraj funkciju izvora, srednju neprozračnost i brzinu.

**Za** svaku frekvenciju:

Izračunaj  $\Delta$  i koeficijente  $p$ ,  $q$ ,  $r$ .

Interpolacijom nađi intenzitet u uzlaznoj tački.

Izračunaj lokalni intenzitet.

Dodaj odgovarajuće članove koeficijentima  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

Nakon ovog postupka, poznati su specifični intenziteti u svim tačkama u koordinatnoj mreži. U praksi se (vidi poslednji korak u pseudokodu) odmah obračunava doprinos specifičnog intenziteta koeficijentima  $a$ ,  $b$  i  $c$  pošto su oni nezavisni od pravca i frekvencije. Ovako se specifični intenzitet može obrisati iz računarske memorije čim više nije potreban za interpolaciju.

Ono što je takođe važno objasniti, na kraju ove glave, je zašto je ovaj pristup (kratke karakteristike) efikasniji od dugih karakteristika. Prvo napomenimo da,

prema našem iskustvu, jedna interpolacija i račun jedne “trojke” koeficijenata  $p$ ,  $q$ ,  $r$  traje otprilike isto vreme. Uzmimo ovo vreme za jedinično. Za jednu tačku, jedno formalno rešenje (jednostavnosti radi, uzmimo da se isto sastoji samo od interpolacije i računa koeficijenata), “košta”  $\mathcal{O}(NA \times NF)$  vremena, gde je  $NA$  ukupan broj pravaca a  $NF$  ukupan broj frekvencija. Za celu koordinatnu mrežu ovo je  $\mathcal{O}(N^2 \times NA \times NF)$  gde je  $N$  broj prostornih tačaka po jednoj koordinati. U slučaju dugih karakteristika, formalno rešenje u jednoj tački se zasniva na produžavanju zraka dok isti ne preseče spoljnu granicu objekta gde je intenzitet dat i nije ga potrebno interpolirati. Sa druge strane funkcija izvora mora biti interpolirana u svakoj tački preseka između koordinatne mreže i zraka, i koeficijenti  $p$ ,  $q$  i  $r$  moraju biti izračunati na svakom podintervalu. Kako koeficijenti zavise od frekvencije, a funkcija izvora ne zavisi, većina računarskog vremena se troši na račun transportnih koeficijenata. Za datu tačku, pravac i frekvenciju, imamo  $\mathcal{O}(N)$  preseka sa koordinatnom mrežom. To znači da, za jedno formalno rešenje, treba potrošiti  $\mathcal{O}(N^3 \times NA \times NF)$  vremena. Ovo znači da je odnos efikasnosti između metoda dugih i kratkih karakteristika:

$$\frac{T_{LC}}{T_{SC}} = \mathcal{O}(N) \quad (2.32)$$

Očigledno metod kratkih karakteristika nudi bitnu uštedu računarskog vremena. Sa druge strane, u metodu kratkih karakteristika, interpoliraju se i intenzitet i funkcija izvora što dovodi do veštačke (i neželjene) “difuzije” intenziteta (vidi Kunasz & Auer 1988; Auer & Paletou 1994; Ibgui et al. 2013). U metodu dugih karakteristika, interpolira se samo funkcija izvora, dok je uzlazni intenzitet zadat kao granični uslov problema. U najvećem broju praktičnih primena, gubitak na preciznosti usled interpolacije intenziteta je sveden na minimum, osobito kada se koriste striktno monotoni pristupi za interpolaciju, tako da je metod kratkih karakteristika trenutno apsolutno najzastupljeniji od svih metoda koji se koriste u modernim kodovima za prenos zračenja u više dimenzija.



## Glava 3

# Implicitna lambda iteracija na dvodimenzionim Dekartovskim koordinatnim mrežama

I'm built for comfort baby,

I ain't built for speed

---

Howling Wolf

Razlozi zašto je nekad (a striktno rečeno - uvek) potrebno koristiti višedimenzione modele za rešavanje problema prenosa zračenja i izračunavanje izlaznog spektra su dati u glavi 1. Sada ćemo se pozabaviti i konkretnim iterativnim metodama i ubrzanjem istih. Efikasnost (u smislu brzine konvergencije) je, bez sumnje, važna za bilo kakvo numeričko modeliranje. Ovo posebno važi za ne-LTR prenos zračenja, prevashodno zbog sledeća dva razloga:

- Prenos zračenja je često potrebno uključiti u magneto-hidrodinamičke simulacije plazme (za neke od modernih radova na tu temu videti, na primer Hayek et al. 2010; Davis et al. 2012). U ovakvim simulacijama, deo koda odgovoran za prenos zračenja u prisustvu rasejanja je obično bitno sporiji u odnosu na magneto-hidrodinamički deo, što čini problem sprezanja dvaju fenomena (prenosa zračenja i magneto-hidrodinamike) problematičnim za numerički tretman.

- Detaljna, 3D ne-LTR izračunavanja intenziteta u spektralnim linijama na velikim koordinatnim mrežama (koje su uglavnom rezultat modernih MHD simulacija i dostižu veličinu i do  $512^3$  tačaka) zahtevaju enormnu količinu procesorskog vremena. Faktor od nekoliko u brzini konvergencije može uštedeti dane, pa čak i nedelje računarskog vremena na modernim superkompjuterima, što, sem vremena štedi i resurse kao što je, između ostalog, električna energija.

U ovoj glavi ćemo prvo eksplicitno predstaviti naše implementacije dva najkorišćenija metoda za rešavanje problema prenosa zračenja u ne-LTR: Jacobi i Gauss-Seidel, na dvodimenzionim koordinatnim mrežama. Nakon toga, uvešćemo dve nove šeme za ne-LTR prenos zračenja u 2D. One odgovaraju simetričnoj Gauss-Seidel-ovoj iteraciji i dvosmerno implicitnoj lambda iteraciji (FBILI: *Forth-and-Back implicit lambda iteration*), koje su do sada korišćene za rešavanje 1D problema. Opis sve četiri šeme se zasniva na formalnom rešenju predstavljenom u glavi 2.

Za sada ćemo se ograničiti na skalarni prenos zračenja, tj. razmatraćemo samo intenzitet ali ne i polarizaciju. Da rezimiramo problem: potrebno je samokonzistentno rešiti jednačinu prenosa zračenja u 2D Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu:

$$\frac{dI(x, y, \hat{\Omega}, \nu)}{d\tau(\hat{\Omega})} = \phi(\nu) \left[ I(x, y, \hat{\Omega}, \nu) - S(x, y) \right], \quad (3.1)$$

i jednačinu statističke ravnoteže za atom sa dva nivoa:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \epsilon B_P + (1 - \epsilon) \int \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} I(x, y, \hat{\Omega}, \nu) \\ &= \epsilon B_P + (1 - \epsilon) J. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Podsećamo da je  $\hat{\Omega} = (\theta, \phi)$ ,  $\epsilon$  je verovatnoća za termalizaciju fotona,  $\phi(\nu)$  apsorpcioni profil spektralne linije,  $B_P$  Plankova funkcija a eksplicitno smo napomenuli da infinitezimalni optički put zavisi od pravca pišući  $d\tau(\hat{\Omega})$ . Od sada pa nadalje ćemo podrazumevati da je optički put zavisao od pravca, kao i da su sve veličine zavisne od prostornih koordinata, i to nećemo eksplicitno navoditi u notaciji.

U glavi 2 smo detaljno objasnili postupak formalnog rešenja jednačine prenosa na 2D pravouglim koordinatnim mrežama, tj. kako izračunati specifični (pa samim

tim i srednji) intenzitet na osnovu *zadate* vrednosti funkcije izvora. Od sada ćemo koristiti formalno rešenje u obliku:

$$I(\vec{\Omega}, \nu)_L = I_U(\vec{\Omega}, \nu)e^{-\Delta} + pS_L + \sum_{i'} \sum_{j'} r_{i',j'} S_{i',j'}, \quad (3.3)$$

Ovde je  $i' = i - 1, i, i + 1$  i  $j' = j - 1, j, j + 1$ .  $S_L$  označava *lokalnu funkciju izvora*, tj.  $S_L = S(x_i, y_j) = S_{ij}$  dok je  $I_U$  specifični intenzitet u uzlaznoj tački, koji moramo naći interpolacijom.  $\Delta$  je monohromatski optički put između tačaka U i L. Koeficijenti  $p$  i  $r_{i',j'}$  zavise samo od  $\Delta$ .

Već smo pomenuli da je, u principu, ne-LTR problem prenosa zračenja moguće rešavati, tzv. “Lambda iteracijom” koja se svodi na naizmenično rešavanje jednačina 3.1 i 3.2 dok se ne dostigne konvergencija. Usled izuzetno spore konvergencije, Lambda iteracija je praktično neupotrebljiva. Takođe, relativna promena između dve uzastopne iteracije brzo postaje jako mala, iako je metod još daleko od “tačnog rešenja”, tako da je vrlo teško odrediti kriterijum za konvergenciju. Za iscrpnu diskusiju o Lambda iteraciji i slabim performansama iste, videti Mihalas (1978).

Ova glava je organizovana na sledeći način: U poglavlju 3.1 ćemo opisati glavnu ideju perturbativnih metoda i naš predlog za implementaciju Jacobi-jeve iteracije za rešavanje gore definisanog ne-LTR problema. Poglavlje 3.2 se bavim drugim, takođe često korišćenim iterativnim perturbativnim metodom, poznatim pod imenom Gauss-Seidel. U poglavljima 3.3 i 3.4 ćemo opisati generalizaciju simetričnog Gauss-Seidel-ovog metoda i Dvosmerno implicitne lambda iteracije, respektivno, na 2D pravougle koordinatne mreže. U poglavlju 3.5 ćemo ispitati konvergenciju sva četiri metoda na test problemu koji su dali Auer & Paletou (1994) dok se poglavlje 3.6 bavi primenom ovih metoda na koordinatne mreže sa periodičnim graničnim uslovima, na veoma jednostavnom primeru nehomogene, polubeskonačne atmosfere. Zatim ćemo testirati kako se implicitna lambda iteracija skalira sa rezolucijom koordinatne mreže. Na kraju poglavlja ćemo ukratko sumirati zaključke i navesti neke od mogućih pravaca za nastavak rada na ovoj temi.

### 3.1 Jacobi-jeva iteracija

Da bismo objasnili princip Jacobi iteracije i, generalno, cele klase perturbativnih metoda<sup>1</sup>, krenimo od formalnog rešenja datog u operatorskoj notaciji:

$$J = \hat{\Lambda}[S], \quad (3.4)$$

gde su  $J$  i  $S$  vektori koji sadrže vrednosti srednjeg intenziteta i funkcije izvora, respektivno. U dvodimenzionom slucaju, koji razmatramo ovde, dimenzija ovih vektora je  $NX \times NY$  gde su  $NX$  i  $NY$  broj diskretnih tacaka po  $x$ - i  $y$ -osi, respektivno. Jednacina 3.4 zamenjena u jednačinu statističke ravnoteže (3.2) daje:

$$(\hat{I} - (1 - \epsilon)\hat{\Lambda})[S] = \epsilon B_P \quad (3.5)$$

gde je  $\hat{I}$  jedinična matrica. Kako je invertovanje matrice na levoj strani neoptimalno sa numeričke tacke gledišta, koristimo iterativno rešenje. Uvešćemo aproksimativni Lambda operator  $\Lambda^*$  i napisati jednačinu 3.2 u sledećem obliku:

$$S = \epsilon B_P + (1 - \epsilon)\hat{\Lambda}^*[S] + (1 - \epsilon)J^* \quad (3.6)$$

gde je

$$J^* = J - \hat{\Lambda}^*[S]. \quad (3.7)$$

Aproksimativni operator  $\Lambda^*$  treba odabrati tako da je jednostavan za invertovanje. Funkcija izvora onda može biti izražena kao:

$$S = \left( \hat{I} - (1 - \epsilon)\hat{\Lambda}^* \right)^{-1} [\epsilon B_P + (1 - \epsilon)J^*]. \quad (3.8)$$

Pošto je operator  $\Lambda^*$  samo aproksimacija punog Lambda operatora, “tačna” vrednost funkcije izvora mora biti dobijena iterativno. Olson et al. (1986) su pokazali da je dijagonalni operator (dijagonala punog  $\Lambda$  operatora) najoptimalniji i najstabilniji

---

<sup>1</sup>Koristimo odrednicu “perturbativnih” pošto je lambda operator podeljen u dva dela: jedan koji je lako invertovati i drugi, koji se tretira kao perturbacija i greška se iterativno popravljaju. Vidi nastavak poglavlja za detaljnije objašnjenje.

izbor za aproksimativni operator  $\Lambda^*$ . U tom slučaju, iterativna šema je poznata kao Jacobi iteracija i popravka funkcije izvora izgleda ovako:

$$S = \frac{\epsilon B_P + (1 - \epsilon)J^*}{1 - (1 - \epsilon)\Lambda^*}. \quad (3.9)$$

Za probleme prenosa zračenja u sredinama velike optičke dubine, ovaj pristup dovodi do ubrzanja od nekoliko redova veličine, dok se vreme izvršavanja po iteraciji praktično ne menja. Ovo je razlog zašto se Jacobi iteracija i srodni metodi ponekad nazivaju ALI - *Accelerated Lambda Iteration*. Za detaljan opis Jacobi iteracije u numeričkoj algebri, videti Saad (2003), a za upotrebu lokalnog operatora u problemima prenosa zračenja videti, na primer: Cannon (1973), Scharmer (1981) i Olson et al. (1986). Napomenimo ipak, da se ideja lokalnog operatora se pojavila još ranije, u radu Rybicki (1972). U pitanju je, dobro poznati, “Core-saturation” metod, koji smo već pominjali u glavi 1. Ideja metoda je da se svi “pasivni” fotoni uklone iz problema prenosa. Takva je situacija, na primer, sa fotonima u jezgru linije, pošto su oni vrlo lako ”lokalno” apsorbovani i ne doprinose prenosu zračenja na većim optičkim dubinama.

U nastavku ovog poglavlja, koristićemo aproksimativni operator na nešto drugačiji način, ili, bolje rečeno, u nešto drugačijem kontekstu. Naše rezonovanje prati koncept izložen u Atanacković-Vukmanović et al. (1997)<sup>2</sup>: Iako je vrednost funkcije izvora nepoznata, njen doprinos lokalnom srednjem intenzitetu (integralu rasejanja) je poznat, iz integralnog oblika jednačine prenosa, tj. funkcija izvora je *implicitno* poznata (setimo se jednačine 2.26). Posmatrajmo sledeću linearnu relaciju između  $S$  i  $J$ :

$$J = a + bS, \quad (3.10)$$

gde koeficijent  $b$  opisuje doprinos lokalne funkcije izvora lokalnom srednjem intenzitetu, dok koeficijent  $a$  opisuje sve ne-lokalne doprinose. Nakon računanja koefici-

---

<sup>2</sup>Ovaj rad je od suštinske važnosti za rezultate predstavljene u ovom delu teze pošto je u njemu do detalja opisana Dvosmerno implicitna lambda iteracija za 1D polubeskonačne atmosfere. Formalno rešenje napisano preko lokalne funkcije izvora i njenog izvoda (2.8) je takođe zasnovano na radu Atanacković-Vukmanović et al. (1997).

jenata  $a$  i  $b$ , zamenom jednačine 3.10 u jednačinu 3.2 dobijamo:

$$S = \frac{\epsilon B_P + (1 - \epsilon)a}{1 - (1 - \epsilon)b}. \quad (3.11)$$

Jednačine 3.9 i 3.11 su formalno identične. Da bismo se uverili u to, podsetimo se kako se dolazi do koeficijenata  $a$  i  $b$  u jednačini 3.10: Integriramo jednačinu 3.3 po pravcima i frekvencijama i grupisati članove na desnoj strani na sledeći način:

$$b = \int \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} p \quad (3.12)$$

i:

$$a = \int \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} [I_U(\hat{\Omega}, \nu) e^{-\Delta} + \sum_{i'} \sum_{j'} r_{i',j'} S_{i',j'}]. \quad (3.13)$$

Nakon što su koeficijenti  $a$  i  $b$  izračunati tokom formalnog rešenja, popravka funkcije izvora se vrši na osnovu jednačine 3.11. Iterativno izračunavanje koeficijenata  $a$  i  $b$  dovodi do mnogo brže konvergencije u odnosu na običnu  $\Lambda$  iteraciju. Napominjemo takođe da koeficijent  $b$  zavisi od pretpostavljene aproksimacije za ponašanje funkcije izvora, a samim time i tačnost i brzina konvergencije cele procedure. Na osnovu gore rečenog, predlažemo sledeću šemu za Jacobi-jevu iteraciju:

1. Prolazimo kroz 2D koordinatnu mrežu četiri puta (za svaki kvadrant po  $\varphi$  po jednom), formalno rešavajući jednačinu prenosa koristeći oblik dat jednačinom 3.3. Tokom prolaska kroz koordinatnu mrežu, računaju se koeficijenti  $a$  i  $b$  jednačine 3.10.
2. Nakon završetka sva četiri prolaska, popravljaju se vrednosti funkcije izvora na celoj koordinatnoj mreži pomoću jednačine 3.11.
3. Koraci 1 i 2 se ponavljaju do konvergencije.

Očigledno je da razlike u vremenu računanja u odnosu na  $\Lambda$  iteraciju praktično ne postoje pošto je jedina razlika pregrupisanje članova. Konceptualna razlika je, sa druge strane, ogromna, pošto je sada uzeto u obzir da je lokalna funkcija izvora implicitno poznata<sup>3</sup>. Ova jednostavna modifikacija dovodi do toga da se konvergencija

---

<sup>3</sup>Ili: "lenji" fotoni su uklonjeni iz centra linije, ili: lokalni  $\Lambda$  operator je invertovan i iterativno

dostiže za vreme koje je nekoliko redova veličine manje nego u slučaju klasične  $\Lambda$  iteracije i omogućava nam rešavanje ne-LTR problema prenosa zračenja u optički gustim sredinama. Ipak, kako ne-LTR problemi ponekad zahtevaju ekstremno duge numeričke proračune, potrebno je dodatno ubrzati Jacobi iteraciju, pošto čak i ona može biti “prespora” u nekim problemima (jake linije formirane u sredini gde preovladava rasejanje).

## 3.2 Gauss-Seidel-ova iteracija

Jedan od mogućih načina da Jacobi iteracija ubrza je takozvana “Ng akceleracija” (Ng 1974, Ng ubrzanje,). Metod se zasniva na korišćenju funkcije izvora u nekoliko prethodnih iteracija (tipično 3-5) da bi se izračunala nova vrednost funkcije izvora koja je bliža “tačnom” rešenju. Ovo je, na neki način, “tradicionalan” pristup pošto je Ng akceleracija korišćena u nekim od najvažnijih radova u oblasti, kao što su Olson et al. (1986) i Rybicki & Hummer (1991). Govoreći na osnovu našeg iskustva, ovaj metod može da radi izuzetno dobro i da smanji broj iteracija potreban za dostizanje konvergencije oko tri puta. Ali, u nekim slučajevima, takođe može da prouzrokuje nestabilnosti i u stvari uspori konvergenciju ili čak da dovede do divergencije cele procedure (vidi Rybicki & Hummer 1991)!

Drugi pristup je da se naprosto koristi brža iterativna šema. Metod čija je filozofija bliska Jacobi iteraciji je Gauss-Seidel-ov (GS) metod (koji je, opet, vrlo dobro poznat u numeričkoj algebri, za detaljan opis videti Saad 2003), koji je takođe moguće primeniti na probleme prenosa zračenja. Da bismo bolje razumeli GS metod, prisetimo se da se u Jacobi-jevom metodu jedna iteracija sastoji od četiri prolaska kroz koordinatnu mrežu i da se tokom tih prolazaka koeficijenti  $a$  i  $b$  izračunavaju na osnovu “stare”<sup>4</sup> vrednosti funkcije izvora. Tek nakon što se dobiju vrednosti  $a$  i  $b$  na celoj koordinatnoj mreži, funkcija izvora se popravljja pomoću formule 3.11.

Cela iterativna procedura može biti bitno ubrzana ako se nova funkcija izvora izračuna *čim koeficijenti  $a$  i  $b$  postanu dostupni*. Ovo je, na primer, slučaj u

---

primenjen

<sup>4</sup>Pod “starim” vrednostima podrazumevamo vrednosti koje su date na početku iteracije, bilo da su u pitanju početne vrednosti za celu proceduru ili vrednosti poznate iz prethodne iteracije.

graničnim tačkama koordinatne mreže, nakon što smo već prošli kroz mrežu tri puta i izračunali odgovarajuće doprinose koeficijentima  $a$  i  $b$ . Četvrti prolaz započinjemo sa poznatim vrednostima specifičnog intenziteta na dvema granicama  $(1, j)$ ;  $j = 1, NY$  i  $(i, NY)$ ;  $i = 1, NX$  (vidi sliku 3.1). Nove vrednosti funkcije izvora u tim tačkama se onda mogu odmah izračunati primenom jednačine 3.11. Naš cilj je da osmislimo šemu koja koristi ovu ideju i u narednim tačkama pošto očekujemo da korišćenje “novih”<sup>5</sup> funkcija izvora u računanju specifičnih intenziteta u četvrtom prolasku ubrza konvergenciju.

U rešenju ne-LTR prenosa zračenja u jednodimenzionim atmosferama ova ideja je implementirana na dva različita načina od strane Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho (1995) i Atanacković-Vukmanović et al. (1997) (videti i Atanacković-Vukmanović 1991). U radu Trujillo Bueno & Fabiani Bendicho (1995) korišćen je standardni aproksimativni  $\Lambda$  operator sa kratkim karakteristikama drugog reda sa interpolacijom između tri tačke. Ovaj metod (Gauss-Seidel) je generalizovan na 2D Dekartov pravougli koordinatni sistem u radu Léger et al. (2007). FBILI metod (dvosmerno implicitna lambda iteracija, Atanacković-Vukmanović et al. 1997), koristi metod kratkih karakteristika u dve tačke i baziran je na računanju koeficijenata implicitne relacije koja izražava lokalni intenzitet preko funkcije izvora i izvoda funkcije izvora u dva uzastopna sloja u 1D modelu.

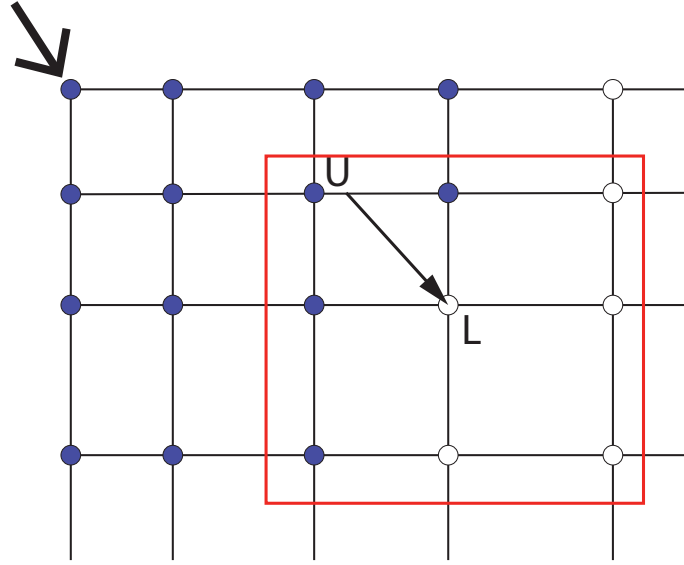
Implementacija GS metoda u višedimenzione geometrije je dosta komplikovanija, zbog prostorne interpolacije koja je neophodna da bi se dobile vrednosti funkcije izvora i intenziteta u uzlaznoj tački. U našem slučaju, korišćenje jednačine 3.3 za formalno rešenje nam omogućava da postavimo vrlo jednostavnu proceduru, baziranu na eksplicitnom računanju doprinosa “susednih” funkcija izvora lokalnom srednjem intenzitetu kroz sumu  $\sum_{i'} \sum_{j'} r_{i'j'} S_{i'j'}$ . Integralimo jednačinu 3.3 po pravcima i frekvencijama i definišimo koeficijente  $a$  i  $c_{i'j'}$  na sledeći način:

$$a = \int \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} I_U(\hat{\Omega}, \nu) e^{-\Delta} \quad (3.14)$$

---

<sup>5</sup>Pod “novim” podrazumevamo vrednosti koje su izračunate u *tekućoj* iteraciji.





Slika 3.1: Četvrti prolazak kroz koordinatnu mrežu i popravka funkcije izvora po našoj implementaciji Gauss-Seidel-ovog metoda.

i:

$$c_{i',j'} = \int \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} r_{i',j'}. \quad (3.15)$$

Prateći rezonovanje na osnovu kog je izvedena jednačina 3.11 dobijamo:

$$S = \frac{\epsilon B_P + (1 - \epsilon)(a + \sum_{i'} \sum_{j'} c_{i',j'} S_{i',j'})}{1 - (1 - \epsilon)b}. \quad (3.16)$$

Ovo je jednačina koju ćemo koristiti da izračunamo novu vrednost (“popravimo”) funkcije izvora. Dalje, jasnoće radi, podelićemo svaki od koeficijenata  $a$ ,  $b$  i  $c_{i',j'}$  na četiri dela. Svaki deo odgovara jednom prolasku kroz koordinatnu mrežu. Očigledno važi:

$$(a, b, c_{i',j'}) = \sum_{k=1}^4 (a_k, b_k, c_{i',j'_k}) \quad (3.17)$$

Na osnovu ovoga, predlažemo sledeći algoritam kao našu verziju Gauss-Seidel-ovog metoda:

1. Kroz koordinatnu mrežu se prolazi tri puta i iz starih vrednosti funkcije izvora se računaju i čuvaju odgovarajući koeficijenti:  $a_k$ ,  $b_k$  i  $c_{i',j'_k}$ , ( $k = 1, 3$ ).
2. Započinje se četvrti prolazak. U tačkama mreže na dvema granicama (vidi sliku 3.1), granični uslovi su dati, a samim tim i  $a_4$ ,  $b_4$  i  $c_{i',j'_4}$ , pa se funkcija

izvora može odmah izračunati korišćenjem jednačine 3.16.

3. U svim sledećim tačkama, prvo se računa specifični intenzitet  $I_U$ , na osnovu vrednosti intenziteta u prethodnim tačkama. Zatim se računaju koeficijenti  $a_4$ ,  $b_4$  i  $c_{i'j'_4}$  i popravljaju funkcija izvora korišćenjem jednačine 3.16. Konačno, nova vrednost specifičnog intenziteta u pravcu 4 se dobija na osnovu jednačine 3.3.
4. Koraci 1-3 se ponavljaju do konvergencije.

Ponovo naglašavamo da jednačina 3.16 *automatski* obračunava sve doprinose novih a ne-lokalnih vrednosti funkcija izvora, kroz sumu  $\sum_{j'} c_{i'j'} S_{i'j'}$ . Da bolje ilustrujemo ovu, vrlo važnu, napomenu, posmatrajmo sliku 3.1: Pretpostavimo da smo već izvršili prostornu interpolaciju i našli intenzitet u uzlaznoj tački. Koristeći gore navedene izraze za  $a$ ,  $b$  i  $c_{i'j'}$  i jednačinu 3.16 možemo popraviti funkciju izvora u tački  $L$ . Važno je primetiti da funkcije izvora u tačkama unutar crvenog kvadrata na slici 3.1 doprinose sumi  $\sum_{i'} \sum_{j'} c_{i',j'} S_{i',j'}$ . Tačke obeležene plavim su već popravljene (“nove”) u tekućoj iteraciji, dok su praznim kružićima obeležene tačke čije su vrednosti “stare” (tj. tek će biti popravljene u trenutnoj iteraciji). Pravilan doprinos svih ovih tačaka je na ovaj način automatski obračunat.

Da rezimiramo: ključna razlika između Jacobi i Gauss-Seidel iteracije je u tome što je GS metoda bazirana na računanju nove funkcije izvora *tokom* četvrtog (poslednjeg) prolaska kroz koordinatnu mrežu. Od sada na dalje ćemo takav prolazak zvati “prolaz unazad”. Slično tome, prolasku kroz koordinatnu mrežu u kojima se samo vrši formalno rešenje jednačine prenosa zračenja i računaju se odgovarajući koeficijenti ćemo zvati prolaz “unapred”. Dakle, Jacobi-jeva iteracija se sastoji od četiri prolaska kroz mrežu unapred a Gauss-Seidel-ova iteracija od tri prolaska unapred, praćena prolaskom unazad.

Ova varijanta GS metoda, prema našem iskustvu ubrzava konvergenciju za oko 75% u odnosu na Jacobi iteraciju. Naravno, razlika zavisi od problema na kom vršimo testiranje metoda. Za detalje o konvergenciji za dva jednostavna test problema videti poglavlja 3.5 i 3.6.

### 3.3 Simetrična Gauss-Seidel-ova iteracija

Jedina razlika između Jacobi iteracije i GS iteracije je način na koji se vrši četvrti prolaz kroz koordinatnu mrežu. Naglasili smo da se u Gauss-Seidel pristupu funkcija izvora popravlja u četvrtom prolasku kroz koordinatnu mrežu i dodali tom prolazu odrednicu “unazad” a ostalim prolascima “unapred.” Popravljanje funkcije izvora *tokom prolaska* kroz mrežu umesto *posle prolaska* ubrzava konvergenciju pošto koristi nove informacije (tj. nove vrednosti funkcije izvora i intenziteta) čim postanu dostupne. Sa druge strane, vidi se da do novih, boljih, vrednosti možemo da dođemo u *svakom* prolasku kroz koordinatnu mrežu. Nema razloga zašto ne bismo istu ideju (prolaz unazad) iskoristili i za prva tri prolaza. Drugačije rečeno, trudimo se da osmislimo shemu koja se sastoji od četiri prolaza unazad i nijednog prolaza unapred, tj. shemu koja popravlja funkciju izvora u svakom prolazu kroz koordinatnu mrežu.

Na osnovu veoma jednostavne popravke funkcije izvora primenom jednačine 3.16, predložimo sledeću iterativnu proceduru:

1. Vršiti se jedna GS iteracija i čuvaju se koeficijenti  $a_k, b_k, c_{i'j'k}$  i funkcija izvora se popravlja tokom četvrtog prolaza.
2. Započinje se prvi prolaz. U svakoj tački, čim se izračunaju potrebni koeficijenti  $a_1, b_1$  i  $c_{i'j'1}$ , funkcija izvora se popravlja na osnovu jednačine 3.16 a zatim se računa i specifični intenzitet na osnovu jednačine 3.3.
3. Započinje se drugi prolaz. U svakoj tački se identično kao u koraku 2 računaju potrebni koeficijenti a zatim i nova funkcija izvora i specifični intenzitet.
4. Treći prolaz se vrši identično kao u koracima 2 i 3.
5. Konačno, i četvrti prolazak se vrši identično kao i prethodna tri.
6. Koraci 2-5 se ponavljaju do konvergencije.

Ova ideja je već poznata iz rešavanja 1D ne-LTR problema kao SSOR (simetrična sukcesivna over-relaksacija, vidi npr. Sampoorna & Trujillo Bueno 2010). SSOR je over-relaksirana varijanta simetričnog Gauss-Seidel-ovog metoda koji je takođe poznat iz numeričke algebre (vidi glavu 1). Upravo predstavljena iterativna shema

odgovara simetričnom Gauss-Seidel-ovom metodu generalizovanom na 2D koordinatne mreže. Glavna prednost ovog metoda leži u tome što se funkcija izvora popravljaju *četiri* (odnosno dva puta u 1D slučaju, a osam puta u 3D) puta tokom jedne iteracije, umesto samo jednom i, samim tim, koristi nove informacije o polju zračenja čim iste postanu dostupne. Ovaj pristup ubrzava konvergenciju oko dva puta u odnosu na standardan GS metod, a zahteva praktično isto procesorsko vreme (računanje funkcije izvora troši zanemarljivo malo resursa u odnosu na formalno rešenje). U daljoj diskusiji ćemo ovaj metod zvati “simetrični Gauss-Seidel” (SGS).

### 3.4 Implicitna lambda iteracija

U potrazi za još bržim metodom, primenili smo ideju Atanacković-Vukmanović et al. (1997), koji su, između ostalog, koristili iteracioni faktor da ubrzaju konvergenciju. Prvo ćemo ukratko predstaviti dvosmerno implicitnu lambda iteraciju (FBILI), onako kako je uvedena prvo u doktorskoj disertaciji Atanacković-Vukmanović (1991), a zatim u Atanacković-Vukmanović et al. (1997) za primenu na 1D probleme.

#### 3.4.1 FBILI metod za 1D polubeskonačne atmosfere

Ponovo ćemo se ograničiti na model atoma sa dva nivoa sa kompletnom redistribucijom zračenja (CRD) u statičnoj i izotermalnoj, plan-paralelnoj, 1D zvezdanoj atmosferi. Jednačina prenosa zračenja ima sledeći oblik:

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}(\tau)}{d\tau} = \phi_{\nu}[I_{\nu\mu}(\tau) - S(\tau)] , \quad (3.18)$$

gde je  $I_{\nu\mu}(\tau)$  specifični intenzitet na srednjoj optičkoj dubini  $\tau$ , na frekvenciji  $\nu$  i u pravcu  $\mu$  ( $\mu = \cos\theta$ ). Analogno prethodnim razmatranjima, funkcija izvora je data kao  $S = \epsilon B + (1 - \epsilon)J$ , gde je:

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\nu} d\nu \int_{-1}^1 I_{\nu\mu}(\tau) d\mu \quad (3.19)$$

srednji intenzitet, takođe poznat i kao integral rasejanja. Napominjemo da, za razliku od 2D problema, intenzitet sada zavisi samo od ugla  $\theta$  (tj.  $\mu$ ). Ulazni intenziteti  $I_{\nu\mu}^-(\tau = 0)$  na površini i izlazni intenziteti  $I_{\nu\mu}^+(\tau = T)$  na donjoj granici se smatraju poznatima. Umesto korišćenja indeksa  $k$  za numeraciju prolazaka kroz koordinatnu mrežu, ovde ćemo koristiti gornje indekse  $-$  i  $+$  da obeležimo ulazno ( $\mu < 0$ ) i izlazno ( $\mu > 0$ ) zračenje i odgovarajuće prolaskе kroz koordinatnu mrežu. Ista se sastoji od  $NL$  tačaka duž  $z$ - ose ( $z$  osa je atmosferska normala, i usmerena je ka posmatraču).

Koristeći integralni oblik jednačine prenosa za ulazni intenzitet i pretpostavljajući paraboličnu interpolaciju za funkciju izvora na intervalima duž zraka, dobijamo sledeći oblik formalnog rešenja:

$$I_l^- = I_{l-1}^- e^{-\Delta} + q_l^- S_{l-1} + p_l^- S_l + r_l^- S_l'. \quad (3.20)$$

Koji prati ideju metoda kratkih karakteristika i baziran je na algoritmu u dve tačke (umesto u tri, kao u “standardnom” pristupu). Dakle, došli smo do implicitne relacije između ulaznog intenziteta  $i$ , za sada nepoznate, lokalne funkcije izvora  $i$  njenog izvoda. Konciznosti radi, u jednačini 3.20 nismo eksplicitno obeležili zavisnost  $I = I(\nu, \mu)$ , a diskretizaciju po dubini smo obeležili kao donji indeks. Integraleći jednačinu 3.20 po pravcima i frekvencijama, dobijamo novu implicitnu relaciju:

$$J_l^- = a_l^- + b_l^- S_l + c_l^- S_l'. \quad (3.21)$$

Polazeći od površine atmosfere, na kojoj je ulazni intenzitet dat, računamo koeficijente  $a^-$ ,  $b^-$  i  $c^-$  redom u svim tačkama i čuvamo ih za popravljjanje funkcije izvora u prolasku “unazad” kroz koordinatnu mrežu.

U prolasku unazad, opet koristimo integralni oblik jednačine prenosa zračenja:

$$\begin{aligned} I_l^+ &= I_{l+1}^+ e^{-\Delta} + \int_0^\Delta S(t) e^{t-\Delta} dt = \\ &= I_{l+1}^+ e^{-\Delta} + q_l^+ S_{l+1} + p_l^+ S_l + r_l^+ S_{l+1}'. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dakle, izrazili smo izlazni intenzitet u tački  $l$  preko nepoznatih  $S_l$  i veličina  $I_{l+1}^+$ ,

$S_{l+1}$  i  $S'_{l+1}$  koje su već popravljene u tekućoj iteraciji. Prolazak unazad, prirodno, započinjemo na donjoj granici koordinatne mreže, gde je ulazni intenzitet zadat. Pretpostavićemo da je  $J_{NL}^+ = S_{NL}$  i  $S'_{NL} = 0$ . Dakle, u tački  $NL$  možemo odmah popraviti funkciju izvora:

$$S_{NL} = \frac{\varepsilon B + (1 - \varepsilon)a_{NL}^-}{1 - (1 - \varepsilon)(b_{NL}^- + 1)}. \quad (3.23)$$

U svakoj sledećoj tački u mreži  $(NL - 1, 1)$  primenjujemo sledeći postupak: Koeficijenti relacije 3.21 su poznati iz prolaska “unapred”. Na osnovu pretpostavke o paraboličnom ponašanju funkcije izvora, možemo iskoristiti relaciju:

$$S'_l = \frac{2}{\Delta\tau}[S_{l+1} - S_l] - S'_{l+1}, \quad (3.24)$$

da izrazimo  $S'_l$  u jednačini 3.20 preko poznatih vrednosti  $S_{l+1}$  i  $S'_{l+1}$  i, za sada još uvek nepoznate vrednosti  $S_l$ . Koristeći jednačinu 3.24 da eliminišemo izvod  $S'_l$  iz jednačine 3.21, dobijamo  $J_l^-$  kao linearnu funkciju samo  $S_l$ . Integraleći formalno rešenje za  $I_l^+$  (jednačina 3.22) po pravcima i frekvencijama, dobijamo identičnu relaciju za  $J_l^+$ . Zatim lako dobijamo:

$$J(\tau) = a + bS(\tau) \quad (3.25)$$

koju, zajedno sa jednačinom statističke ravnoteže, koristimo za dobijanje nove vrednosti funkcije izvora. Sa novom funkcijom izvora možemo izračunati lokalni izvod koristeći 3.24 a zatim i specifični intenzitet koristeći 3.22. Isti proces ponavljamo sloj po sloj dok ne dođemo do površine, tj. do tačke  $l = 1$ .

Naglasimo ovde da se ubrzanje konvergencije ostvaruje zahvaljujući iterativnom računanju koeficijenata ovih implicitnih relacija, umesto samih intenziteta. Dodatno ubrzanje se postiže korišćenjem iteracionog faktora  $(I_{l-1}^- e^{-\Delta} + q_l^- S_{l-1})/S_l^{old}$  u “lokalnom” koeficijentu (koeficijent uz lokalnu funkciju izvora  $S_l$ ) u jednačini 3.20:

$$I_l^- = \left( \frac{I_{l-1}^- e^{-\Delta} + q_l^- S_{l-1}}{S_l^{old}} + p_l^- \right) S_l + r_l^- S'_l. \quad (3.26)$$

Drugim rečima, tokom prolaska unapred, u svakoj tački  $l$  računamo i čuvamo odnos ne-lokalnog dela ulaznog intenziteta i lokalne funkcije izvora  $S_l^{\text{old}}$ . Ovaj odnos je jedina informacija o polju zračenja koja “preostaje” iz prethodne iteracije. Kako je odnos dveju homolognih veličina dobra kvazi-invarijanta, možemo je koristiti kao iteracioni faktor koji igra jako bitnu ulogu u ubrzavanju cele procedure. Iteracioni faktor vrlo brzo dostiže tačnu vrednost i samim tim vodi ka tačnom rešenju cele procedure.

### 3.4.2 “Prolaz-po-prolaz” implicitna lambda iteracija na 2D Dekartovskim koordinatnim mrežama

Kao što smo naglasili u prethodnom odeljku, glavni razlog za ubrzanje FBILI metoda u odnosu na Gauss-Seidel leži u korišćenju iteracionog faktora  $((q_l^- S_{l-1} + I_{l-1}^- e^{-\Delta})/S_l)$  u ulaznom prolasku kroz 1D koordinatnu mrežu. Pokazuje se da je ovaj faktor izuzetno bitan pošto varijanta implicitne lambda iteracije bez njega konvergira oko 4 puta sporije u 1D problemu koji smo razmatrali u prethodnom odeljku. Evidentno je da ova “nadogradnja” lokalnog operatora bitno utiče na konvergenciju, pa smo stoga pokušali da ga uključimo u gore opisanu shemu za SGS iteraciju. Cilj nam je da uključimo iteracioni faktor, ali da zadržimo oblik formalnog rešenja koji rezultuje jednačinom 3.3. Očigledno moramo koristiti nešto drugačiji pristup u odnosu na Atanacković-Vukmanović et al. (1997).

Najjednostavnije je da u definiciju lokalnog operatora uključimo odnos adekvatno atenuiranog uzlaznog intenziteta i lokalne funkcije izvora, u prolascima 1 i 2<sup>6</sup>. Za ova dva pravca ( $0 < \varphi < \pi/2$  i  $\pi/2 < \varphi < \pi$ , respektivno) koeficijent  $b_k$  ima sledeći oblik:

$$b_{1,2} = \int \phi(\nu) d\nu \int \frac{d\Omega}{4\pi} (p_{1,2} + \frac{I_{U;1,2} e^{-\Delta}}{S_L}). \quad (3.27)$$

U tom slučaju očigledno važi:

$$a_{1,2} = 0, \quad (3.28)$$

dok za pravce 3 i 4 koeficijenti  $a_{3,4}$  i  $b_{3,4}$  zadržavaju isti oblik kao i u SGS iteraciji,

---

<sup>6</sup>U slučaju test problema koje razmatramo u ovoj glavi, ovi pravci odgovaraju ulaznom zračenju sa površine “atmosfera” koje je jednako nuli na odgovarajućim granicama.

dat jednačinama 3.12 i 3.14. Sada, “Prolaz-po-prolaz” implicitna lambda iteracija izgleda slično kao SGS iteracija, koju smo već opisali u ovoj glavi:

1. Kroz koordinatnu mrežu se prolazi četiri puta, popravljajući funkciju izvora samo u četvrtom prolazu, kao u prvom koraku SGS iteracije, ali sa iteracionim faktorom u pravcima 1 i 2, kao što je definisano jednačinom 3.27. U četvrtom prolazu, nakon računanja nove funkcije izvora, intenzitet se računa korišćenjem jednačine 3.3.
2. Prolaz u pravcu 1 se vrši kao u SGS iteraciji ali sa iteracionim faktorom, zajedno sa računanjem nove funkcije izvora i intenziteta tokom prolaza.
3. Zatim se vrši prolaz u pravcu 3 (bez iteracionog faktora), zajedno sa računanjem nove funkcije izvora i intenziteta.
4. Zatim sledi prolaz u pravcu 2, identično prolazu u pravcu 1 (korak 2).
5. Konačno se vrši prolaz u pravcu 4, bez iteracionog faktora, dakle identično kao prolaz 3.
6. Koraci 2-5 se ponavljaju do konvergencije.

Upravo opisana shema spaja ideju simetričnog Gauss-Seidela (popravljamo funkciju izvora u *svakom* prolasku kroz koordinatnu mrežu), ideju implicitnog tretiranja funkcije izvora  $i$ , konačno, ideju iteracionih faktora dodatih lokalnom koeficijentu  $b$ . Kao što ćemo videti, upotreba ovog iteracionog faktora rezultuje dodatnim ubrzanjem za oko faktor dva u odnosu na SGS metod. Upravo opisani iterativni metod ćemo zvati “Prolaz-po-prolaz implicitna lambda iteracija”, ili SILI (*Sweep-by-sweep implicit lambda iteration*) ili, 2D FBILI, da bismo čitaoca asocijali na FBILI metod koji su razvili Atanacković-Vukmanović et al. (1997) za 1D.

Posvetimo još malo prostora diskusiji o, ovako uvedenim, iteracionim faktorima pošto se isti ne kombinuju često sa perturbacijom operatora. Generalno, iteracioni faktori su dobro poznat metod za ubrzavanje rešenja problema prenosa zračenja u n-LTR. Za detaljan opis metode promenljivih Eddington-ovih faktora videti Mihalas (1978) a za nešto drugačiji pristup problemu Atanacković-Vukmanović & Simonneau



(1994). Primenu metoda iteracionih faktora na model atoma sa više nivoa je data u radu Kuzmanovska-Barandovska & Atanacković (2010).

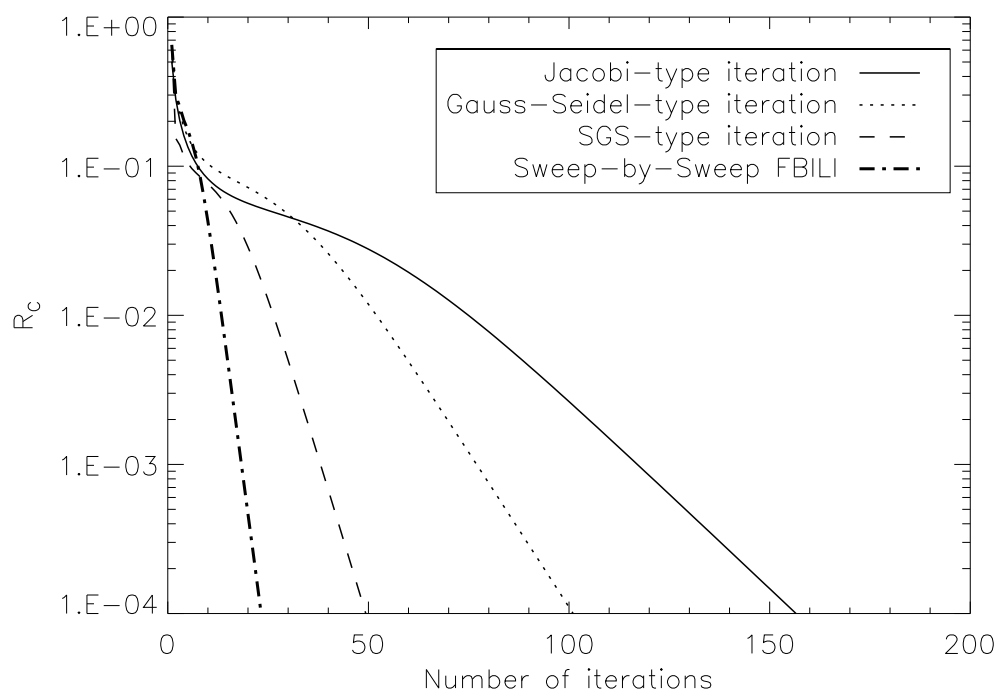
Uobičajena interpretacija za efikasnost iteracionih faktora u ubrzanju konvergencije je sledeća: Mnogo je brže vršiti iteraciju baziranu na odnosu dve nepoznate veličine za koje se pretpostavlja da se slično ponašaju nego iterativno određivati samu tu veličinu. Ako iteracioni faktor definišemo kao odnos dve homologne veličine, on će relativno brzo dostići tačnu vrednost  $i$ , samim tim, dovesti do tačnog rešenja cele procedure. Iz ovoga se vidi da iteracione faktore treba odabrati tako da budu dobre “kvazi-invarijante” problema.

Iako je ovo objašnjenje bez sumnje tačno, ovde ćemo ponuditi i dodatno objašnjenje za ovaj konkretni slučaj (implicitna lambda iteracija): Iteracioni metodi bazirani na lokalnom operatoru više ubrzavaju konvergenciju na velikim dubinama (gde su optičke udaljenosti između tačaka veće) nego blizu površine (gde su optičke udaljenosti manje). To se dešava zato što koeficijent  $p$ , pa samim tim i koeficijent  $b$ , raste sa povećanjem optičke udaljenosti između tačaka. Blizu površine, optička rastojanja su mala, koeficijent  $b$  faktički teži nuli i popravke funkcije izvora se ne razlikuju bitno od obične  $\Lambda$  iteracije. “Nadograđivanje” lokalnog operatora faktorom koji u stvari raste sa smanjenjem optičkih udaljenosti ( $I_U e^{-\Delta}/S_L$ ), povećava efikasnost lokalnog operatora blizu površine, što rezultuje bržom konvergencijom.

Sada ćemo predstaviti rezultate testova konvergencije četiri metode koje smo opisali u ovom poglavlju.

### **3.5 Konvergentne osobine iterativnih procedura: Test problem iz rada Auer & Paletou (1994)**

Da bismo testirali osobine gore opisanih metoda, numerički smo rešili test problem opisan u radu Auer & Paletou (1994). Razmatramo sloj konačne debljine, konstantne neprozračnosti i optičke debljine od  $10^4$  duž obe ose. Koeficijent  $\epsilon$  i Plankova funkcija su konstantni i jednaki  $10^{-4}$  i  $1$ , respektivno. Koristili smo logaritamsku prostornu diskretizaciju sa finijom rezolucijom blizu ivica sa  $129 \times 129$  diskretnih tačaka (tj. sa nešto više od 10 tačaka po dekadi). Objekat je obasjan odozdo i sa



Slika 3.2: Evolucija najveće relativne promene sa brojem iteracija, za četiri opisane iterativne procedure.

strane, iz pravaca  $\pi < \varphi < 2\pi$ , zračenjem koje je jednako Plankovoj funkciji. Za ugaonu integraciju koristimo Carlsonov set B (Carlson 1963) sa  $n = 8$  (što rezultuje sa ukupno 12 uglova po oktantu). Za diskretizaciju po frekvencijama koristimo 9 frekventnih tačaka, koje pokrivaju pola profila linije i trapezoidnu integraciju.

Osobine iterativnih procedura analiziramo tako što u svakoj tački koordinatne mreže, nakon svake iteracije računamo najveću relativnu promenu funkcije izvora između dve iteracije,  $i - 1$  i  $i$ :

$$R_c^i = \left( \frac{S^i - S^{i-1}}{S^i} \right)_{\max} \quad (3.29)$$

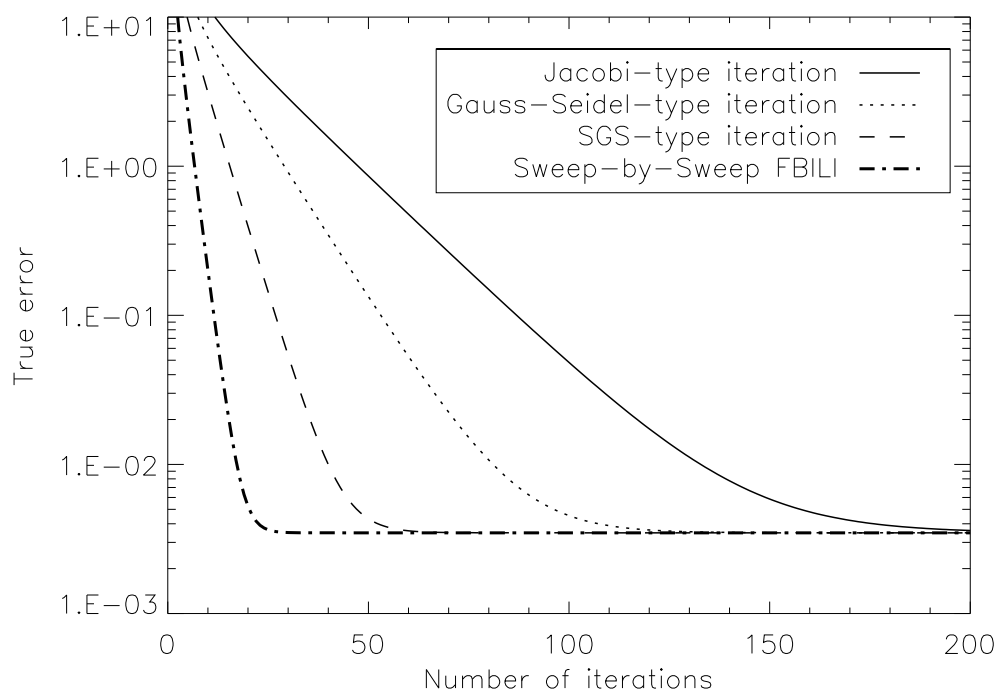
Korišćenjem naše implementacije Jacobi procedure, bilo nam je potrebno 118, odnosno 195 iteracija da dostignemo najveću relativnu promenu  $R_c$  od  $10^{-3}$  odnosno  $10^{-5}$ , respektivno. Korišćenjem Gauss-Seidel metoda, došli smo do odgovarajućih rešenja u 77, odnosno 126 iteracija. Ubrzanje je očigledno i nezanemarljivo ali opet manje nego u 1D slučaju (gde je približno 100%).

Konačno, dve nove procedure, koje koriste ideju popravke funkcije izvora tokom svakog prolaza kroz mrežu dramatično povećavaju brzinu konvergencije (videti sliku 3.2). Za ove dve metode i dalje definišemo jednu iteraciju kao set od četiri prolaska kroz mrežu, iako se funkcija izvora popravlja četiri puta (ponovo napominjemo da je sam proces izračunavanja funkcije izvora veoma brz). Simetrični Gauss-Seidel dostiže  $R_c = 10^{-3}$  za 39 a  $R_c = 10^{-5}$  za 61 iteraciju, dok "Prolaz-po-prolaz ILL" metod to isto postiže za 19, odnosno 29 iteracija (7 puta brže od Jacobi iteracije). Važnost iteracionih faktora je očigledna pošto isti ubrzavaju konvergenciju za više od 2 puta u odnosu na simetrični Gauss-Seidel metod.

Da bismo detaljno ispitali performanse iterativnog metoda, takođe je potrebno analizirati tzv. pravu grešku (*true error*,  $T_e$ ). Kako je analitičko rešenje ovog problema nepoznato (i nemoguće), pravu grešku ćemo računati u odnosu na  $S_{\text{REF}}^\infty$  - konvergirano "tačno" rešenje do kog smo došli nekim referentnim metodom. U ovom slučaju smo koristili rešenje dobijeno Jacobi iteracijom, primenjenom na četiri puta finiju koordinatnu mrežu ( $513 \times 513$  tačaka), nakon 2000 iteracija ( $R_c \approx 10^{-13}$ ). Uzevši u obzir da se funkcija izvora duž centralne "vertikale" objekta,  $S(NX/2, j); j = 1, NY$  ponaša slično kao u slučaju 1D atmosfere, uzeli smo centralnu tačku na površini  $(NX/2, 1)$  kao referentnu tačku za računanje prave greške. Pravu grešku u  $i$ -toj iteraciji ćemo definisati kao:

$$T_e^i = \left( \frac{S(NX/2, 1)^i - S_{\text{REF}}^\infty}{S_{\text{REF}}^\infty} \right)_{\text{max}} \quad (3.30)$$

Evolucija prave greške kroz iteracije je prikazana na slici 3.3. Izuzetne konvergentne osobine 2D FBILI metode su očigledne. Za metod koji konvergira brzo kao ovaj, moguće je koristiti manji  $R_c$  kao kriterijum za konvergenciju. Podsećamo da metod koji sporo konvergira, brzo dostiže malu relativnu promenu ali i dalje može biti daleko od tačnog rešenja. Naglašavamo da bi, hipotetički gledano, prava greška trebala biti kriterijum za konvergenciju, ali kako ista ne može biti poznata, potrebno je dobro poznavati konvergentne osobine metoda kojim se bavimo da bismo postavili odgovarajuće  $R_c$  kao kriterijum za konvergenciju i samim tim optimizovali procesorsko vreme.



Slika 3.3: Evolucija “prave” greške sa brojem iteracija.

### 3.6 Performanse opisanih procedura na koordinatnoj mreži sa periodičnim graničnim uslovima

Gore korišćeni test problem je dobro poznat u literaturi o prenosu zračenja ali je prilično daleko od realističnih slučajeva. Zbog toga smo pokušali da testiramo naše novo-razvijene metode na modelima koji više odgovaraju modernim primenama ne-LTR prenosa zračenja u više dimenzija. Pre nego što razmotrimo model atoma sa više nivoa (što je jedan od ciljeva našeg daljeg rada), testirali smo naše metode na 2D Dekartovim pravouglim mrežama sa periodičnim graničnim uslovima. Ovakvi granični uslovi se često sreću u modeliranju atmosfere Sunca i drugih zvezda. Razmatra se simulaciona “kutija”, za koju se pretpostavlja da statistički reprezentuje atmosferu, tj. pretpostavlja se da je atmosfera sastavljena od mnogo ovakvih “kutija” koje su postavljene jedna do druge.

Ako razmatramo 2D koordinatnu mrežu, koja je konačna duž  $x$  i  $y$ , gde je  $y$

normala na ravan atmosfere, i pretpostavimo da periodični granični uslovi važe na normalama sa  $x = 0$  i  $x = x_{\max}$ , onda važe sledeći izrazi za granične uslove: Ulazno zračenje na površini atmosfere je jednako nuli:

$$I(x, y = 0, \theta, \varphi < \pi, \nu) = 0. \quad (3.31)$$

Ulazno zračenje na dnu atmosfere je jednako Plankovoj funkciji:

$$I(x, y = y_{\max}, \theta, \varphi > \pi, \nu) = B(x, y). \quad (3.32)$$

Polje zračenja na bočnim ivicama “kutije” je identično na obe ivice:

$$I(x = 0, y, \theta, \varphi, \nu) = I(x = x_{\max}, y, \theta, \varphi, \nu). \quad (3.33)$$

Gornji i donji granični uslovi se jednostavno implementiraju u numeričke metode, dok bočni granični uslovi, koji su periodični, zahtevaju detaljniju diskusiju. Razmotrimo upadno zračenje na levoj granici, u tački  $(0, j)$  iz pravca za koji važi  $\cos \varphi > 0$ , koje je, u ovom slučaju, implicitno zadato preko zračenja u tački  $x = x_{\max}$  sa identičnim pravcem prostiranja. U stvari, ovo zračenje dolazi iz susedne “kutije”, koja je, po pretpostavci identična ovoj koju trenutno razmatramo. Najjednostavniji način da se ova implicitna zavisnost uzme u obzir je da se kao granični uslov na levoj granici koriste “stare” (poznate iz prethodne iteracije) vrednosti intenziteta na desnoj granici. Ovaj pristup bitno usporava konvergenciju, što su pokazali van Noort et al. (2002).

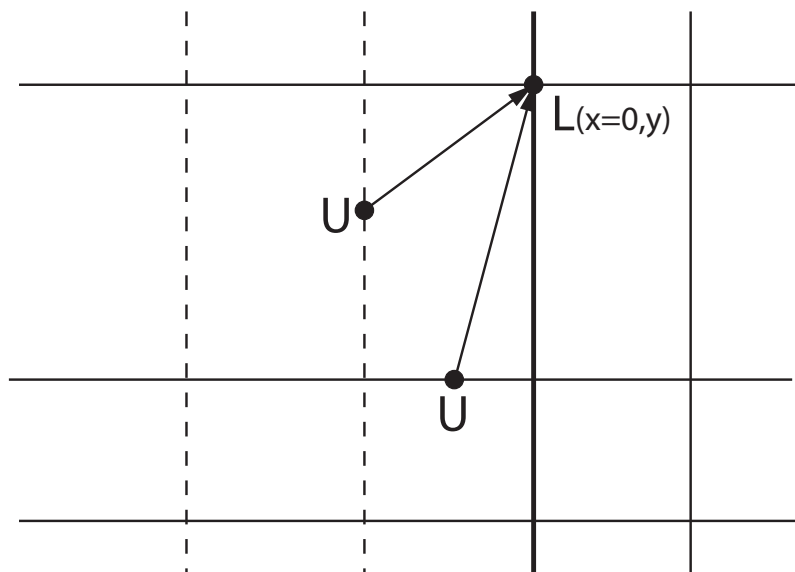
Komplikovaniji, ali takođe i konzistentniji pristup je predložen u Ibgui et al. (2013). Ovde ćemo samo ukratko predstaviti ideju. Razmatramo 2D Dekartovsku koordinatnu mrežu kroz koju se prolazi u smeru koji odgovara  $0 < \varphi < \pi/2$  i koncentrišemo se na tačku na granici koja je određena indeksima  $i = 1$  i  $j > 1$  (za  $j = 1$  u stvari imamo donji granični uslov). Recimo da se kroz mrežu prolazi prvo po  $x$  (sporija petlja iz glave 2) pa onda po  $y$  (brža petlja). Ovo znači da su intenziteti već izračunati u svim tačkama  $j - 1$ . Konstruišemo “lažni deo” mreže levo od granice koju razmatramo (tj. “proširujemo” našu mrežu). Kako

podrazumevamo periodične granične uslove, možemo ponovo koristiti kratke karakteristike. Ako zrak seče susednu ćeliju duž horizontale ( $y = \text{const}$ ), intenzitet se može naći interpolacijom na osnovu “novih” vrednosti i rešenje izgleda kao i u unutrašnjim tačkama. Ako, pak, zrak seče ćeliju duž vertikalne granice, produžujemo ga, koliko god je potrebno, do preseka sa horizontalnom granicom. U ovom slučaju ćemo praktično raditi sa dugim karakteristikama, koje je potrebno implementirati i rešiti. Prednost ovog metoda je u tome što ćemo uvek koristiti “nove” vrednosti intenziteta da izračunamo uzlazni intenzitet.

U izračunavanjima koje ćemo predstaviti u ovom poglavlju ćemo koristiti mešavinu dva opisana pristupa. Generalno pratimo ideju iz rada Ibgui et al. (2013), ali, u slučaju da zrak seče vertikalnu granicu, mi ga ne produžujemo, već koristimo mešavinu novih i starih vrednosti intenziteta da bismo izvršili potrebnu interpolaciju (vidi sliku 3.4). Striktno gledano, ovaj pristup nije potpuno konzistentan, ali donosi tu prednost da zadržava identičan oblik formalnog rešenja u svim tačkama (tj. vrlo je jednostavno definisati “susedne” funkcije izvora). Primenjujući ovaj pristup nismo naišli ni na kakve probleme sa stabilnošću i/ili konvergencijom. Ipak, planiramo da implementiramo pristup iz Ibgui et al. (2013) koji uključuje rad sa dugim karakteristikama, zarad potpune konzistentnosti metode.

Za ovaj test razmatramo model opisan Dekartovskom mrežom dimenzija  $10^3 \times 10^5$ . Neprozračnost je konstantna i jednaka jedinici, tako da se geometrijska i optička skala dubina ponovo poklapaju. Koeficijent  $\epsilon$  je jednak  $10^{-4}$ . Udaljenosti između tačaka po  $y$  su logaritamske, slično 1D modelima. Udaljenosti po  $x$  su, sa druge strane, ekvidistantne. Koordinatna mreža ima 65 tačaka po  $x$  i isto toliko po  $y$ . Diskretizacije po pravcima i frekvencijama su iste kao one koje smo koristili da rešimo test problem iz rada Auer & Paletou (1994). Ako je Plankova funkcija konstantna, ovaj primer savršeno odgovara 1D problemu, za koji je poznato analitičko rešenje. Prvo smo proverili da li se numeričko rešenje sa konstantnom Plankovom funkcijom poklapa sa 1D slučajem (greška je oko 0.4%, što je posledica prostorne diskretizacije). Nakon toga smo za poređenje koristili sledeću raspodelu Plankove funkcije:

$$B(x, y) = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{x_{\max}}\right), \quad (3.34)$$

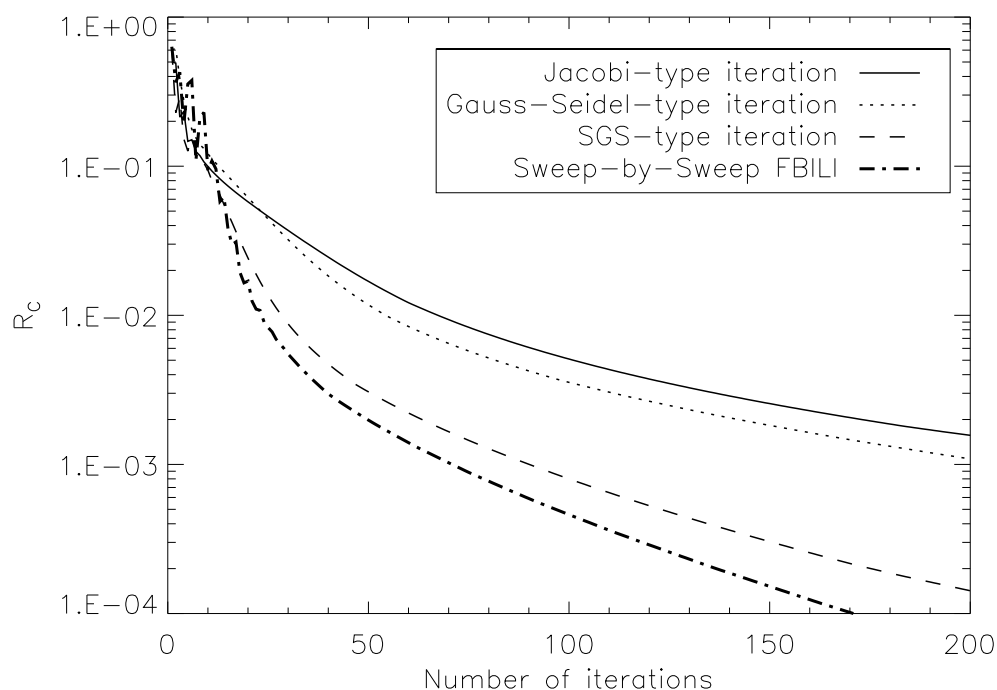


Slika 3.4: Ilustracija naše varijante za implementaciju periodičnih graničnih uslova. Podebljana vertikalna linija označava levu granicu objekta ( $x = 0$ ). “Produžili” smo koordinatnu mrežu ka negativnom smeru  $x$  ose. Metod kratkih karakteristika se primenjuje kao i inače.

koja imitira horizontalne nehomogenosti, koje nastaju, na primer, usled konvektivnih kretanja u zvezdanim atmosferama. Rešili smo problem ne-LTR formiranja linije koristeći Jacobi, GS, Simetrični GS i “Prolaz-po-prolaz” implicitnu lambda iteraciju i uporedili brzine konvergencije metoda. Moramo prvo da naglasimo da u ovakvom test problemu očekujemo sporu konvergenciju usled relativno malog optičkog rastojanja po  $x$ , čak i na velikim dubinama (videti diskusiju dole). Slika 3.5 prikazuje konvergenciju za četiri opisane iterativne metode. Vidi se, da za ovaj konkretan slučaj Jacobi i G-S iteracije nisu od velike koristi pošto za 200 iteracija jedva dostižu  $R_C = 10^{-3}$ . SGS i SILI, pak, pokazuju mnogo bolje performanse, i dostižu najveću relativnu promenu od  $10^{-3}$  u manje od 100 iteracija.

Ponovo naglašavamo da ni ovaj test problem nije realističan pošto se ekvidistantna optička udaljenost između tačaka po  $x$  osi ne sreće u praksi. U realističnim modelima zvezdanih atmosfera, neprozračnost se generalno smanjuje ka površini, što je praćeno manjim nehomogenostima u horizontalnoj ravni. Prema tome, očekivano je da se optička udaljenost po  $x$  osi povećava sa sličnim trendom sa kojim se povećava optička udaljenost po  $y$  osi<sup>7</sup>. Ipak, naš cilj je da demonstriramo, na što jednostavni-

<sup>7</sup>Inače je uobičajno koristiti  $z$  osu kao atmosfersku normalu. Naglašavamo da mi u ovim primerima kao normalu koristimo  $y$ -osu.



Slika 3.5: Evolucija najveće relativne promene kroz iteracije za četiri razmatrane iterativne procedure na modelu atmosfere sa periodičnim graničnim uslovima

jem primeru, ubrzanje koje donose SGS i “Prolaz-po-prolaz” ILI u odnosu na često korišćene Jacobi i Gauss-Seidel. Primena i testiranje na realističnim modelima atmosfera je naš glavni cilj istraživanja u bliskoj budućnosti. Takođe planiramo da implementiramo periodične granične uslove opisane u Ibgui et al. (2013) i da detaljnije testiramo razlike između opisanih iterativnih metoda.

### 3.7 Skaliranje sa prostornom rezolucijom

Do sada nepominjana, ali veoma važna osobina jednog iterativnog metoda je to kako se isti skalira sa prostornom rezolucijom. Očigledno je da ako povećamo rezoluciju koordinatne mreže, recimo, dva puta, da će se broj tačaka povećati četiri (ili u 3D slučaju osam) puta. Na prvi pogled se čini da će se potrebno procesorsko vreme povećati četiri puta ali postoji dodatni efekat koji nismo uzeli u obzir: *Za metode bazirane na perturbaciji  $\Lambda$  operatora na finijim koordinatnim mrežama potrebno je izvršiti više iteracija da bi se došlo do konvergencije.* Razlog za to leži u činjenici



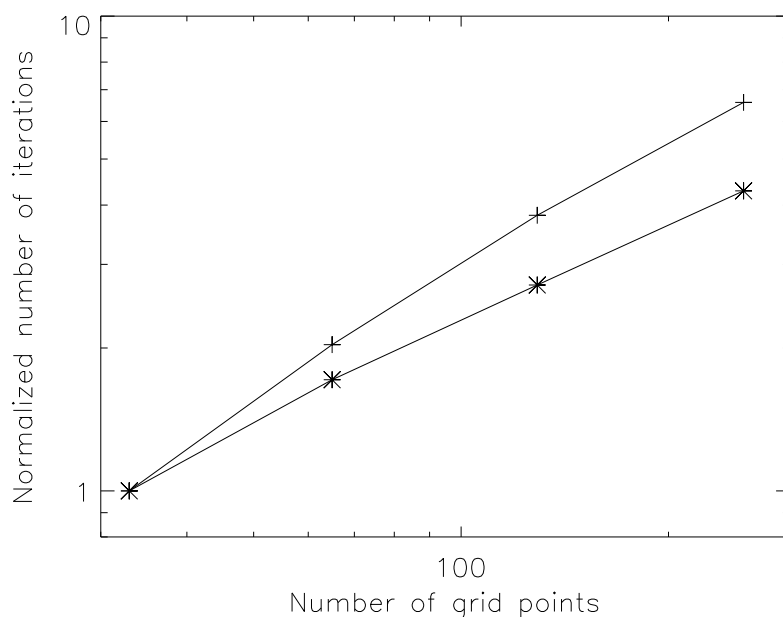
Rezolucija mreže	33×33	65×65	129×129	257×257
Jacobi iteracija	30	63	118	204
Prolaz-po-prolaz ILI	7	12	19	30

Tabela 3.1: Broj iteracija potreban da se dostigne  $R_C = 10^{-3}$  za Jacobi i FBILI iteraciju, za različite rezolucije koordinatne mreže.

da je brzina konvergencije određena najvećom sopstvenom vrednošću operatora koji koristimo da korigujemo rešenje. Što je finija prostorna diskretizacija, optičke udaljenosti između tačaka su manje. Ovo vodi ka manjim vrednostima elemenata  $\Lambda$  operatora (razmotriti jednačinu 2.11 za malu vrednost  $\Delta$ ), koje opet rezultuju većim svojstvenim vrednostima operatora kojim korigujemo funkciju izvora. Za mnogo detaljniju diskusiju videti izuzetno bitan rad Olson et al. (1986).

Očekujemo da se Jacobi, GS i SGS sheme ponašaju vrlo slično u smislu skaliranja sa rezolucijom pošto su sve, na neki način bazirane na aproksimativnom operatoru (tj. koeficijentu  $b$ , koji sledi iz koeficijenta  $p$ ). Sa druge strane, “Prolaz-po-prolaz” ILI metod unapređuje lokalni operator iteracionim faktorom koji raste sa povećanjem rezolucije (pošto se  $e^{-\Delta}$  povećava sa smanjenjem  $\Delta$ ), pa očekujemo da će njegovo skaliranje sa rezolucijom biti drugačije. Da bismo ispitali ovo skaliranje, rešili smo test problem iz Auer & Paletou (1994) za različite rezolucije koordinatne mreže, korišćenjem Jacobi i “Prolaz po prolaz” ILI metoda. Uporedili smo broj iteracija potreban svakoj od metoda da dostigne  $R_C = 10^{-3}$ , za svaku od rezolucija koordinatne mreže. Rezultati su dati u Tabeli 3.1.

Vidi se da “Prolaz-po-prolaz” ILI metod bitno nadmašuje Jacobi iteraciju na svim prostornim rezolucijama. Sa slike 3.6 se takođe vidi da se naš novi metod skalira nešto bolje sa rezolucijom od standardnog Jacobi metoda. Ipak, ovo skaliranje je i dalje daleko od multigrid metoda (Steiner 1991) koji se, makar teoretski, skalira savršeno dobro sa rezolucijom mreže, tj. broj iteracija se ne povećava sa povećanjem broja tačaka. Ipak, važno je imati u vidu da multigrid metodi pripadaju potpuno drugačijoj klasi metoda, koji koriste, npr. Jacobi iteraciju kao takozvani “smoothing step”. Bilo bi veoma zanimljivo i korisno pokušati implementaciju SGS i SILI pristupa u multigrid metod i testirati konvergenciju rezultujuće sheme.



Slika 3.6: Grafički prikaz podataka iz tabele 3.1 normalizovan na broj iteracija potrebnih za konvergenciju na “najgrubljoj” koordinatnoj mreži. Plusevi obeležavaju Jacobi iteraciju a zvezdice “Prolaz-po-prolaz” implicitnu lambda iteraciju.

### 3.8 Zaključci i planovi za dalji rad

U ovoj glavi smo predstavili generalizaciju dve veoma brze ne-LTR sheme poznate iz jednodimenzionih problema na 2D Dekartovske koordinatne mreže. I simetrični Gauss-Seidel i “Prolaz-po-prolaz” ILI metod značajno nadmašuju “standardne” Jacobi i Gauss-Seidel pristupe. Glavna prednost novih metoda dolazi iz popravljjanja funkcije izvora tokom četiri prolaska kroz koordinatnu mrežu u jednoj iteraciji, umesto tek nakon sva četiri prolaska (Jacobi) ili samo tokom četvrtog prolaska (Gauss-Seidel). Dodatno ubrzanje u slučaju “Prolaz-po-prolaz” ILI metoda se ostvaruje korišćenjem iteracionog faktora, koje su prethodno u ovom kontekstu uveli Atanacković-Vukmanović et al. (1997). Testirali smo razvijene metode na test problemu iz rada Auer & Paletou (1994) kao i na veoma jednostavnom test problemu polubeskonačne 2D atmosfere sa periodičnim graničnim uslovima. Metodi su se pokazali kao stabilni i tačni.

Dalja istraživanja mogu, u principu, ići u nekoliko različitih pravaca. Prvo

planiramo da testiramo novo-razvijene metode na koordinatnim mrežama gde neprozračnost nije konstantna, što će biti prvi “realan” test njegove primenljivosti. Takođe je neophodno uvesti konzistentniju implementaciju periodičnih graničnih uslova. Na duže staze, planiramo da uporedimo ovaj metod sa drugim izuzetno brzim pristupom, CG-BiStab (Anusha et al. 2011b), i da pokušamo da iskoristimo implicitnu lambda iteraciju kao “smoothing-step” u linearnim multigrid metodima. Proširenje na polarizovani prenos zračenja u bazu redukovano intenziteta je takođe interesantan u kontekstu modernih istraživanja (videti dodatak A).

# Glava 4

## Polarizacija rasejanjem u spektralnim linijama u formalizmu redukovanog intenziteta

A case of mortis portalis tackulum with complications.

---

Terry Pratchett, 'Pyramids'

### 4.1 Uvod

Sada ćemo preći na jednačinu prenosa zračenja i jednačinu statističke ravnoteže za atom sa dva nivoa u slučaju kada je zračenje polarizovano. Polarizacija rasejanjem i Hanle efekat utiču samo na linearnu polarizaciju, tj. na  $Q$  i  $U$  komponente Stoksovog vektora. Dakle, razmatraćemo samo prve tri komponente Stoksovog vektora i pretpostaviti da je  $V = 0$  ili da ga računamo odvojeno<sup>1</sup>. Pretpostavljamo da je donji nivo prelaza nepolarizovan, što rezultuje identičnom skalom optičkih dubina za sve tri komponente. Jednačina prenosa polarizovanog zračenja onda ima sledeći

---

<sup>1</sup> $V$  komponenta polarizovanog intenziteta nastaje usled Zemanovog efekta. U tzv. aproksimaciji slabog magnetnog polja,  $V$  se može izračunati kao:  $V = -4.73 \cdot 10^{-13} \text{A}^{-1} \text{G}^{-1} g \lambda^2 B \frac{\partial I}{\partial \lambda}$ , gde je  $B$  intenzitet longitudinalne komponente magnetnog polja a  $g$  je takozvani Lande faktor. Za detaljniju diskusiju, uticaj transverzalnog magnetnog polja itd., videti Stenflo (2013).

oblik:

$$\frac{d\hat{I}(\hat{\Omega}, \nu)}{d\tau} = \phi(\nu)[\hat{I}(\hat{\Omega}, \nu) - \hat{S}(\hat{\Omega})]. \quad (4.1)$$

Notacija sa “kopicom” označava da su intenzitet i funkcija izvora sada tri-vektori, tj. da važi  $\hat{I} = (I, Q, U)$  i  $\hat{S} = (S_I, S_Q, S_U)$ . Formalno rešenje u ovom slučaju izgleda isto kao ono opisano u glavi 2, sa istim transportnim koeficijentima i ostalim relevantnim veličinama ( $\Delta, p, q, r\dots$ ). Funkcija izvora je data sa:

$$\hat{S}(\Omega) = \epsilon\hat{B} + (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\Omega'}{4\pi} \hat{P}(\Omega, \Omega') \hat{I}(\Omega', \nu'). \quad (4.2)$$

Ovde je  $\hat{P}(\Omega, \Omega')$  matrica poznata kao *matrica rasejanja*. U pitanju je  $3 \times 3$  matrica čije komponente zavise od pravca apsorbovanog i emitovanog fotona u procesu rasejanja. Matrica rasejanja je, u stvari,  $4 \times 4$  matrica, ali kako se cirkularna polarizacija ne menja u procesima rasejanja, Stoksova  $V$  komponenta je dekuplovana i tretira se odvojeno od linearne polarizacije. Napominjemo da ovo nikako ne znači da je  $V$  komponenta manje bitna za dijagnostiku i modelovanje nego što su  $Q$  i  $U$ . U stvari, većina kodova za inverziju, osobito onih čiji je cilj da se dijagnostikuju jaka magnetna polja na Suncu i drugim zvezdama, se oslanja na modelovanje Stoksove  $V$  komponente pod uticajem Zemanovog efekta.

Izuzetno je važno naglasiti da je, sa numeričke strane, najveća razlika između skalarnog i polarizovanog slučaja činjenica da funkcija izvora sada zavisi i od pravca. Ovo čini problem numeričkog rešavanja mnogo zahtevnijim po pitanju računarske memorije. Da bismo ubedili čitaoca, setimo se da se *sve* vrednosti funkcije izvora moraju čuvati u memoriji sve vreme<sup>2</sup>. Ovo znači da je, za čuvanje vrednosti funkcije izvora potrebno  $NA$  puta više memorije nego u skalarnom slučaju ( $NA$  je broj pravaca). Drugo, potrebno je više procesorskog vremena za računanje funkcije izvora ( $NA$  integracija po pravcima i frekvencijama da bi se našla polarizovana funkcija izvora, umesto samo jedne integracije u skalarnom slučaju). Ovi problemi čine numeričko rešenje veoma zahtevnim, i sa ovim pristupom (eksplicitnim korišćenjem matrice rasejanja u izrazu za polarizovanu funkciju izvora) je praktično nemoguće raditi sa jako velikim modelima koji se danas koriste i najčešće su rezultat MHD

---

<sup>2</sup>Ili snimiti na hard disk, ali to sa sobom povlači ekstremno usporeenje zbog čitanja i pisanja.

(magneto-hidrodinamičkih) simulacija atmosfera Sunca i drugih zvezda.

Jedno od mogućih rešenja je pristup predložen u Landi Degl’Innocenti & Landolfi (2004) gde su jednačine statističke ravnoteže date u tzv. formalizmu matrice rasejanja. Izračunavanje funkcije izvora koja je zavisna od pravca se svodi na izračunavanje tenzora polarizacije (koji se, opet, u praksi svodi nekoliko skalarnih veličina) na osnovu kog se, u procesu formalnog rešenja, dobijaju eksplicitne vrednosti funkcije izvora za svaku od Stoksovih komponenti, a zatim iteracijom rešavamo ne-LTR problem. Ovaj formalizam takođe omogućava tretman modela atoma sa više nivoa, što je vrlo važno pošto interakcija između nivoa može uticati na polarizaciju. Međutim, ovaj formalizam ne omogućava uključivanje efekata parcijalne redistribucije po frekvencijama (PRD)<sup>3</sup>.

Sa druge strane, formalizam redukovanog intenziteta, predstavljen u seriji radova počevši od Anusha & Nagendra (2011a), daje delimično rešenje problema na drugi način: uključivanje PRD efekata je vrlo prirodno, uvođenjem drugačije matrice rasejanja, ali je metod primenljiv isključivo na model atoma sa dva nivoa. Ovaj formalizam je baziran na razvoju jednačine prenosa u set od nekoliko “redukovanih jednačina” u kojima funkcija izvora ne zavisi od pravca. Sada ćemo dati vrlo brz pregled i osnovna izvođenja neophodna za numeričko rešavanje problema.

## 4.2 Razvoj funkcije izvora i intenziteta u redukovanom formalizmu

Notacija i redosled izlaganja ovog odeljka verno prate rad Anusha & Nagendra (2011a). Zarad konciznosti, glavni rezultati su predstavljeni samo okvirno. Zain-

---

<sup>3</sup>Iako se u ovoj tezi bavimo uglavnom makroskopskim efektima (nehomogenosti, geometrija) nekoliko rečenica o parcijalnoj redistribuciji je neizbežno. PRD efekti su važni u veoma jakim linijama gde je učestanost radijativnih procesa veća ne samo od ne-elastičnih, već i od elastičnih sudara. U odsustvu elastičnih sudara, frekvencije apsorbovanog i emitovanog fotona su donekle korelisane. Ovo rezultuje time da je emisioni profil drugačiji od apsorpcionog i funkcija izvora je zavisna od frekvencije. Gruba aproksimacija parcijalne redistribucije je kompletna redistribucija u jezgu linije i koherentno rasejanje u krilima. Realan slučaj je, naravno, mnogo komplikovaniji i detaljno je objašnjen u radu Hummer (1962). Kako se ova teza bavi numeričkim pristupom i kôdovima, važno je pomenuti RH kôd (Uitenbroek 2001) koji je trenutno jedini program za prenos zračenja u više dimenzija poznat autoru koji inkorporira, kako model atoma sa više nivoa, tako i PRD efekte, naravno, za nepolarizovano zračenje.

teresovanog čitaoca upućujemo na rad Frisch (2007) za originalnu ideju i na radove Anusha & Nagendra (2011a); Anusha et al. (2011b); Anusha & Nagendra (2011b) za uopštenje na 3D prenos zračenja. Deo ove teze (vidi glavu 5) opisuje implementaciju ovog formalizma u rešenju na 2D cilindričnim koordinatnim mrežama i objavljen je u Milić (2013).

Metod se zasniva na de-kompoziciji matrice rasejanja u referentnom sistemu vezanom za atmosferu (Bommier 1997a):

$$R_{ij}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') = \sum_{KQ} W_K \mathcal{T}_Q^K(i, \hat{\Omega}) (-1)^Q \mathcal{T}_{-Q}^K(j, \hat{\Omega}'), \quad (4.3)$$

gde smo pretpostavili CRD i zanemarili magnetno polje. Uglovi  $\Omega$  i  $\Omega'$  označavaju pravce emitovanog i apsorbovanog zračenja, respektivno.  $W_K$  je, takozvana, sopstvena polarizabilnost spektralne linije i zavisi od kvantnih brojeva koji opisuju ugaoni momenat gornjeg i donjeg nivoa prelaza.  $\mathcal{T}_Q^K(i, \Omega)$  su ireducibilni simetrični tenzori, uvedeni još u Landi Degl'Innocenti (1984). Indeksi  $i$  i  $j$  se odnose na Stoksove komponente. Pošto smo diskusiju sveli na polarizaciju rasejanjem i Hanle efekat, vrednosti ova dva koeficijenta idu od 0 do 2. Za linearnu polarizaciju  $K$  je nula ili dva a za  $Q$  važi  $|Q| \leq K$ . Ovo rezultuje u ukupno šest različitih kombinacija za  $Q$  i  $K$ . Ovakva matrica rasejanja ulazi u izraz za Stoksovu funkciju izvora (ovde je prepisujemo u notaciji iz Anusha & Nagendra 2011a), koja za Stoksovu komponentu  $i$  izgleda ovako:

$$S_i = \epsilon B_i + (1 - \epsilon) \sum_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} R_{ij}(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') I_j(\hat{\Omega}', \nu) \quad (4.4)$$

Jednačinu 4.3 zamenjujemo u jednačinu 4.4 i definišemo novu veličinu, *redukovanu funkciju izvora*:

$$S_Q^K = \epsilon B_Q^K + (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} \sum_{j=0}^2 (-1)^Q \mathcal{T}_{-Q}^K(j, \hat{\Omega}') I_j(\hat{\Omega}', \nu). \quad (4.5)$$

Ovde  $B_Q^K$  obeležava termalne izvora fotona,  $B_Q^K = (B, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Redukovana funkcija izvora je *nezavisna* od pravca i ima ukupno šest kompleksnih komponenti.

Iz nje možemo lako izračunati polarizovanu funkciju izvora:

$$S_i(\Omega) = \sum_{KQ} \mathcal{T}_Q^K(i, \Omega) S_Q^K. \quad (4.6)$$

Ovde smo već nagovestili ideju ovog pristupa: Treba čuvati vrednosti redukovane funkcije izvora u tačkama modela umesto polarizovane funkcije izvora koja je zavisna od pravca. U procesu formalnog rešenja, prelaz između redukovanog “bazisa” u Stoksov se vrši preko jednačine 4.6, i dobijene vrednosti se koriste da se izračuna polarizovani intenzitet. Ovo je donekle nezgodno pošto je redukovana funkcija izvora kompleksna veličina. Takođe, prelazak između dva bazisa troši procesorsko vreme. Pozabavimo se prvo drugim problemom. Njega ćemo rešiti uvođenjem redukovanog intenziteta koji definišemo kao formalno rešenje sa redukovanom funkcijom izvora:

$$I_Q^K(\Omega, \nu) = \Lambda(\hat{\Omega}, \nu)[S_Q^K]. \quad (4.7)$$

Ovde operatorom  $\Lambda(\hat{\Omega}, \nu)$  obeležavamo kompletan proces numeričkog formalnog rešenja koje smo opisali u glavama 1 i 2. Kako su integracije po pravcima i frekvencijama, prelazak između redukovanog i Stoksovog bazisa, i integracija po optičkom putu međusobno nezavisni, vidi se da se i polarizovani intenzitet može razviti uvođenjem *redukovanog* intenziteta.

$$I_i(\hat{\Omega}, \nu) = \sum_{KQ} \mathcal{T}_Q^K(i, \hat{\Omega}) I_Q^K(\hat{\Omega}, \nu). \quad (4.8)$$

Nakon kraćih algebarskih izračunavanja, jednačina statističke ravnoteže za polarizovano zračenje u redukovanom formalizmu se može napisati kao:

$$S_Q^K = \epsilon B_Q^K + (1 - \epsilon) J_Q^K, \quad (4.9)$$

gde je:

$$J_Q^K = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}'}{4\pi} \sum_{j=0}^2 \sum_{K'Q'} (\mathcal{T}_Q^K)^*(j, \hat{\Omega}') \mathcal{T}_{Q'}^{K'}(j, \hat{\Omega}') I_{Q'}^{K'}(\hat{\Omega}', \nu). \quad (4.10)$$



Dakle, rešili smo problem konstantnog prelaska između Stoksovog i redukovanog formalizma. Ako su granični uslovi dati u redukovanoj formi (što ne mora biti slučaj, ukoliko je ulazno zračenje polarizovano, vidi Faurobert et al. 2013, za detalje) onda jednačine 4.7 i 4.9 mogu biti samokonzistentno rešene nekim od opisanih numeričkih metoda iz glave 3 (posle adekvatne modifikacije) i izlazni Stoksov vektor se može naći iz jednačine 4.8. Sada ćemo rešiti i problem sa kompleksnim veličinama i uprostiti celu proceduru svodeći sve veličine na realni domen.

Slično kao u Frisch (2007), definišemo set realnih veličina koje opisuju intenzitet polarizovanog zračenja u redukovanom formalizmu:

$$\mathcal{I}_0 = I_0^0 \quad (4.11)$$

$$\mathcal{I}_1 = I_0^2 \quad (4.12)$$

$$\mathcal{I}_2 = \text{Re}(I_1^2) \quad (4.13)$$

$$\mathcal{I}_3 = \text{Im}(I_1^2) \quad (4.14)$$

$$\mathcal{I}_4 = \text{Re}(I_2^2) \quad (4.15)$$

$$\mathcal{I}_5 = \text{Im}(I_2^2). \quad (4.16)$$

Ove veličine možemo koristiti umesto redukovanih (kompleksnih) veličina  $I_Q^K$ , pošto  $I_Q^K$  i  $I_{-Q}^K$  imaju iste realne i imaginarne komponente, do na znak. Takođe ćemo definisati realnu redukovanu funkciju izvora koja odgovara realnom redukovanom intenzitetu:

$$\hat{\mathcal{S}}^r = \epsilon \hat{\mathcal{B}}^r + (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} \hat{\Psi}^r(\hat{\Omega}) \hat{\mathcal{I}}^r(\hat{\Omega}, \nu). \quad (4.17)$$

Ovde smo se vratili na vektorsku notaciju:  $\hat{\mathcal{S}}^r = (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5)$  i  $\hat{\mathcal{I}}^r = (\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{I}_4, \mathcal{I}_5)$ . Realni redukovani intenzitet i funkcija izvora zadovoljavaju istu jednačinu prenosa zračenja kao i polarizovani intenzitet i funkcija izvora u Stoksovom formalizmu:

$$\frac{d\hat{\mathcal{I}}^r(\hat{\Omega}, \nu)}{d\tau} = \phi(\nu) [\hat{\mathcal{I}}^r(\hat{\Omega}, \nu) - \hat{\mathcal{S}}^r]. \quad (4.18)$$

### 4.3 Numeričko rešavanje

U principu, ovaj problem je sličan ne-LTR problemu u skalarnom (nepolarizovanom) slučaju prenosa zračenja u liniji u modelu atoma sa dva nivoa. Glavna razlika je u tome što su komponente realnog redukovano intenziteta međusobno spregnute matricom rasejanja u izrazu za funkciju izvora. Anusha et al. (2011b) su predstavili numerički metod za rešavanje korišćenjem Jacobi ili CG-BiStab metoda.

Drugi pristup je sledeći: Prvo se rešava skalarni problem, zanemarujući polarizaciju<sup>4</sup>, a onda se, sa početnim vrednostima  $\mathcal{S}_0 = S$  i  $\mathcal{S}_{i \neq 0} = 0$ , vrši jednostavna  $\Lambda$  iteracija za polarizovano zračenje, tj. jednačine 4.18 i 4.17, se rešavaju naizmenično, do konvergencije.

Ova procedura konvergira mnogo brže od  $\Lambda$  iteracije za nepolarizovano zračenje iz dva razloga:

- Prvo, zato što je dominantna komponenta Stoksovog vektora,  $I$ , već prilično dobro poznata iz rešavanja skalarnog problema. Kako je polarizacija u realnim problemima generalno mala (na primer: nekoliko procenata u Sunčevim protuberancama, nekoliko desetih delova procenta u Sunčevoj atmosferi), sprezanje između različitih komponenta polarizovanog intenziteta ne menja bitnije vrednost za  $I$  (odnosno, u redukovanom bazu  $\mathcal{I}_0$ ). Opet, na samu polarizaciju najviše utiče anizotropija  $I$  (odnosno,  $\mathcal{I}_0$ ) komponente, koja je poznata do na visoku tačnost iz rešavanja skalarnog ne-LTR problema.
- Druga napomena je više tehničke prirode ali je pođednako važna. Svojstvene vrednosti  $\Lambda$  operatora definisanog za polarizovano zračenje izgledaju drugačije nego svojstvene vrednosti  $\Lambda$  operatora za skalarni slučaj (za detaljnu diskusiju vidi Faurobert-Scholl & Frisch 1989). Konkretno, najveća svojstvena vrednost operatora za korekciju rešenja pri  $\Lambda$  iteraciji za nepolarizovano zračenje je  $\approx 1$ , i  $\Lambda$  iteracija konvergira jako sporo. Za polarizovano zračenje, pak, odgovarajuća svojstvena vrednost je  $< 1$  (za primer iz rada Faurobert-Scholl & Frisch 1989, ova vrednost je 0.7), tako da je konvergencija mnogo brža,

---

<sup>4</sup>U realnim problemima, u odsustvu magnetnog polja, najčešće važi  $I \gg Q \gg U$ .

iako se koristi  $\Lambda$  iteracija. Naravno, formalno rešenje je i dalje nekoliko puta sporije.

Primera radi, u slučajevima koje ćemo razmatrati u ovoj tezi, do konvergencije u polarizovanom slučaju se obično dolazi u deset do dvadeset iteracija, što znači da je vreme potrebno za rešavanje polarizovanog problema uporedivo sa vremenom koje je potrebno da se reši ne-polarizovani problem pre toga.

Što se tiče samog postupka formalnog rešenja, iz oblika jednačine 4.18 je jasno da je kompletan proces identičan onom iz nepolarizovanog slučaja. Razlog za ovo leži u tome da su komponente redukovano intenziteta (a i Stoksovog vektora) spregnute samo u jednačini statističke ravnoteže. Takođe, činjenica da za sve komponente važi ista skala optičkih dubina takođe znači da za njih važe isti “transportni” koeficijenti tako da možemo koristiti jednačinu 2.8 za formalno rešenje za svih šest komponenti. Ukoliko koristimo metod kratkih karakteristika, predstavljen u glavi 2:

$$\mathcal{I}^r = \mathcal{I}_u^r \exp(-\Delta) + p\mathcal{S}^r + q\mathcal{S}_u^r + r(\mathcal{S}^r)'. \quad (4.19)$$

Nakon što dobijemo samokonzistentno rešenje, izlazne vrednosti intenziteta u realnom redukovanom formalizmu se koriste da iz njih izračunamo Stoksov vektor, koristeći sledeće veze:

$$\begin{aligned} I = & \mathcal{I}_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(3\cos^2\theta - 1)\mathcal{I}_1 - \sqrt{3}\cos\theta\sin\theta(\mathcal{I}_2\cos\varphi - \mathcal{I}_3\sin\varphi) \\ & + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \cos^2\theta)(\mathcal{I}_4\cos 2\varphi - \mathcal{I}_5\sin 2\varphi) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} Q = & \frac{3}{2\sqrt{2}}(\cos^2\theta - 1)\mathcal{I}_1 - \sqrt{3}\cos\theta\sin\theta(\mathcal{I}_2\cos\varphi - \mathcal{I}_3\sin\varphi) \\ & - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos^2\theta)(\mathcal{I}_4\cos 2\varphi - \mathcal{I}_5\sin 2\varphi) \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
U = & \sqrt{3} \sin \theta (\mathcal{I}_2 \sin \varphi + \mathcal{I}_3 \cos \varphi) \\
& + \sqrt{3} \cos \theta (\mathcal{I}_4 \sin 2\varphi + \mathcal{I}_5 w \cos 2\varphi)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ove jednačine su identične jednačinama 36-38 iz Anusha & Nagendra (2011b). Razlog zašto konačno rešenje izražavamo u Stoksovima komponentama  $(I, Q, U)$  je zato što komponente Stoksovog vektora imaju fizički smisao pošto ih, u principu možemo meriti i tako uporediti rezultate izračunavanja sa posmatranjima.

Formalizam opisan u ovoj glavi ćemo koristiti da rešimo polarizovani ne-LTR problem i izračunamo rezultujući Stoksov vektor u glavi 5. Takođe je korišćen za opis graničnih uslova za polarizovano zračenje u radu Faurobert et al. (2013). U ovom radu je pokazano da je optimalan način za tretman polarizovanog ulaznog zračenja na granicama objekta da se isto “podeli”, slično pristupu iz Chandrasekhar (1960). “Difuzna” komponenta zračenja se onda tretira kao što je opisano u ovoj glavi, sa graničnim uslovima koji su jednaki nuli. Upadni deo zračenja, koji je zadat kao Stoksov vektor se direktno transformiše i integriše da bi se dobio dodatni doprinos polarizovanoj funkciji izvora u redukovanom bazu, koja ulazi u funkciju izvora za difuzni deo intenziteta. Detaljnije objašnjenje je dato u glavi 5, kao i u Faurobert et al. (2013).

Ovaj pristup ne-LTR izračunavanjima za zračenje polarizovano rasejanjem je nedavno korišćen za ispitivanje PRD efekata u nekim spektralnim linijama koje su važne za dijagnostikovanje magnetnog polja Sunca. Na primer, Anusha et al. (2011a) su koristili redukovani bazu sa uključivanjem parcijalne redistribucije da analiziraju Hanle efekat u Ca I 4227 liniji. Sličnim istraživanjem su se bavili Anusha & Nagendra (2013), vezano za Ca II 3933 liniju. U ovim, a i u drugim radovima koji koriste realni redukovani bazu, isti se koristi da se ne-LTR problem za polarizovano zračenje reši na Dekartovskim koordinatnim mrežama (koje mogu biti 1-, 2- ili 3D). U sledećoj glavi predstavljamo rešenje za 2D cilindrične koordinatne mreže koje podrazumevaju osnu simetriju.

# Glava 5

## Prenos zračenja polarizovanog rasejanjem u 2D cilindričnim koordinatama

Normal treatment is called normal treatment because sometimes you have to use *abnormal* treatment.

---

House M.D.

### 5.1 Uvod

U glavamama 1 i 3 smo, nadamo se, objasnili koliko je važan prenos zračenja koji uzima u obzir višedimenzionalnost objekta. Najveći deo radova objavljenih do sada, kao i glave 2 i 3 ove teze se bave Dekartovskim koordinatnim mrežama. Ipak, razmatrane su i druge opcije: Stenholm (1977) je predstavio ne-LTR prenos zračenja u 2D cilindričnim koordinatama, koristeći “core-saturation” metod. U nešto novijem radu, van Noort et al. (2002) (dalje u tekstu VNHL02) su opisali 2D prenos zračenja u Dekartovom, cilindričnom i sfernom koordinatnom sistemimu koristeći metod kratkih karakteristika i Jacobi-jevu iteraciju. U nizu radova (počevši od Gouttebroze 2005), predstavljen je drugačiji pristup cilindričnom modelovanju, gde su koordinatne mreže nehomogene po koordinatama  $r$  i  $\varphi$ , umesto po  $r$  i  $z$ .

Ova glava se bavi proširenjem dosadašnjih istraživanja na cilindričnim objektima tako što predstavlja ne samo računanje intenziteta već i polarizacije rasejanjem ( $Q$  i  $U$  komponenti Stoksovog vektora). Polarizacija rasejanjem je posledica anizotropije polja zračenje, na koje, opet, utiču geometrija i nehomogenosti objekta. Veoma je važno uzeti u obzir posledice višedimenzionalnosti pri računanju polarizacije rasejanjem u različitim astrofizičkim objektima. Sunčeve protuberance, akrecioni diskovi i atmosfere ekstrasolarnih planeta su samo neki od objekata koji rasejavaju anizotropno zračenje i isto, samim tim, biva polarizovano. Pristup koji ovde koristimo (2D cilindrični koordinatni sistem) je prirodan za opis astrofizičkih diskova tako da predstavljamo nekoliko jednostavnih primera gde je akcentat više stavljen na efekte geometrije i polja brzina nego na realističan opis problema sa aspekta mikro-fizike. Značajan deo ove glave je objavljen u samostalnom naučnom radu (Milić 2013).

Opis tretiranja zračenja polarizovanog rasejanjem je dat u prethodnoj glavi. Ovaj formalizam takođe omogućava samokonzistentan tretman parcijalne redistribucije po frekvencijama i Hanle efekta (Anusha & Nagendra 2011a; Anusha et al. 2011b; Anusha & Nagendra 2011b). Za istraživanja u ovoj glavi koristimo taj formalizam upravo onako kako je predstavljen u glavi 4: sa CRD aproksimacijom i bez uključivanja magnetnog polja. Za spektralne linije gde su PRD efekti važni, potrebna proširenja metoda su relativno jednostavna. Isti je slučaj sa Hanle efektom koji je posledica makroskopskih magnetnih polja, ali treba naglasiti da bi ovo polje moralo da bude osno simetrično što donekle ograničava primene ovog metoda na izračunavanje Hanle efekta u spektralnim linijama. Prilaz modelovanju koji predstavljamo u ovoj glavi je donekle sličan istraživanju iz Busche & Hillier (2000) u smislu da se oba rada bave primenom kratkih karakteristika na ne-LTR prenos zračenja u osno-simetričnim objektima i računom polarizacije. Ipak, metod iz Busche & Hillier (2000) je prilagođen za sferične objekte (npr. rotirajuće zvezde).

U ovom poglavlju, dakle, razmatramo 2D cilindrični koordinatni sistem gde fizičke veličine zavise samo od  $r$  i  $z$  prostornih koordinata. Polje zračenja, naravno, dodatno zavisi od pravca prostiranja, opisanog uglovima  $\theta$  i  $\varphi$  (koji imaju svoje uobičajeno značenje), a, kako se bavimo prenosom zračenja u spektralnim linijama, zavisi i od frekvencije. I dalje se zadržavamo na aproksimaciji atoma sa dva nivoa.

Za računanje polarizacije koristimo formalizam redukovanog intenziteta (vidi glavu 4). U ovom formalizmu, intenzitet i funkcija izvora su napisani kao šest-vektori koje ćemo zvati realni redukovani intenzitet i realna redukovana funkcija izvora (određnicu “realan” ćemo ponekad podrazumevati). Realni redukovani intenzitet zavisi od pravca dok redukovana funkcija izvora *ne* zavisi od pravca, i time zadržavamo jednostavnost iz skalarnog (nepolarizovanog) slučaja. Ovaj prelaz iz Stoksovog u redukovani formalizam je veoma važan u praktičnom radu pošto bitno smanjuje i memorijsku zahtevnost i računarsko vreme.

Pitanje na koje bismo odmah da odgovorimo je: Zašto odabrati 2D *cilindrični* koordinatni sistem a ne 2- ili 3D Dekartovske koordinate? U poređenju sa 2D Dekartovskim koordinatama, cilindrični pristup dozvoljava mnogo veći stepen realnosti, pošto omogućava modelovanje objekata koji su i dalje konačni u sve tri prostorne dimenzije (npr. diskovi, prstenovi, razne “niti” i “petlje” u Sunčevoj atmosferi...), a zahteva sličnu količinu računarskog vremena. Ovome ide u prilog činjenica da se za astrofizičke objekte relativno često pretpostavlja osna simetrija. 3D modeli na Dekartovskim koordinatnim mrežama bi nam omogućili da relaksiramo i tu pretpostavku ali bitno je napomenuti da 3D prenos zračenja zahteva jako mnogo procesorskog vremena i memorijskog prostora. Tačnije, veličina koordinatne mreže, pa samim tim i procesorsko vreme i memorijska zahtevnost se povećavaju  $\mathcal{O}(N)$  puta, gde je  $N$  neki karakteristični broj diskretnih tačaka po prostornoj koordinati. U praktičnom radu,  $N$  je reda veličine 100, što je bitan skok u zahtevnosti i često traži veću paralelizaciju kôda i mnogo procesorskog vremena. Po našem mišljenju korišćenje 2D cilindričnih koordinata za modelovanje odgovarajućih objekata je optimalan pristup. Ipak, kao što ćemo videti u nastavku teksta, ovaj pristup unosi nepreciznosti i donekle komplikuje formulaciju i računanje nekih veličina koje su u Dekartovskim koordinatama trivijalne.

Ostatak ove glave je strukturiran na sledeći način: u odeljku 5.2 ćemo ukratko predstaviti pristup iz rada VNHL02 koji je polazna tačka u našem radu. Takođe ćemo detaljnije prodiskutovati o nekim spornim stavkama kao što su granični uslovi, interpolacija pravca i izbor kvadrature za integraciju po pravcima. Objasnićemo kako se izračunava i polarizacija rasejanjem ( $Q$  i  $U$  komponente Stoksovog vektora).

Odeljak 5.3 se bavi poređenjem predstavljenog metoda sa dobro poznatnim rezultatima iz 1D geometrije. Odeljci 5.4 i 5.5 sadrže jednostavne astrofizičke primere koji su pogodni za primenu 2D cilindričnih koordinata. Na kraju, odeljak 5.6 se bavi detaljnijom diskusijom prednosti i mana ovog pristupa kao i nekim mogućim unapređenjima i planovima za dalji rad.

## 5.2 Metod

Kako je uključivanje polarizacije rasejanjem, zahvaljujući formalizmu opisanom u glavi 4, relativno pravolinijsko proširenje nepolarizovanog problema (naravno, samo ukoliko je donji nivo prelaza nepolarizovan), prvo ćemo opisati rešenje (pre svega formalno) u skalarnom slučaju, tj. kada nas interesuje samo  $I$  komponenta Stoksovog vektora. Kao što smo videli, da bismo izračunali izlazni intenzitet potrebno je rešiti jednačinu prenosa zračenja, što znači izvršiti formalno rešenje u svim tačkama koordinatne mreže, u svim razmatranim pravcima i na svim frekvencijama. Ponovo ćemo napisati jednačinu prenosa zračenja u formi “duž zraka” (ovakav oblik jednačine prenosa ne zavisi eksplicitno od geometrije problema):

$$\frac{dI(r, z, \theta, \varphi, \nu)}{d\tau} = \phi(\nu) (I(r, z, \theta, \varphi, \nu) - S(r, z, \nu)). \quad (5.1)$$

Ovde je  $\nu$  frekvencija zračenja a  $\phi(\nu)$  je apsorpcioni profil linije.  $\tau$  je srednja optička dubina duž zraka:

$$d\tau = -\chi ds, \quad (5.2)$$

gde je  $\chi$  srednji koeficijent apsorpcije u liniji a  $ds$  je elementarna geometrijska putanja duž zraka. Pod pretpostavkom kompletne redistribucije po frekvencijama (CRD) funkcija izvora je nezavisna od frekvencije. Podsetimo se izraza za funkciju izvora u modelu atoma sa dva nivoa:

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon)J. \quad (5.3)$$



Konciznosti radi nismo naglasili (podrazumevanu) zavisnost od prostornih koordinata. Ovde je  $B$  Plankova funkcija a  $J$  srednji intenzitet integraljen po liniji (ili samo: srednji intenzitet, ili: integral rasejanja), koji je, kao i do sada, definisan kao:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} I(\theta, \varphi, \nu) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.4)$$

Jednačine 5.1 i 5.3 zajedno čine jednu integro-diferencijalnu jednačinu koju je moguće rešiti direktno samo u posebnim slučajevima. Generalno, potrebno je numeričko rešenje. Ovde koristimo standardnu Jacobi iteraciju, opisanu u glavi 3, i standardnu formu kratkih karateristika (Olson & Kunasz 1987), primenjenu na cilindrične koordinatne mreže kao u radu VNHL02.

### 5.2.1 Metod kratkih karateristika u cilindričnim koordinatama

Kao što je objašnjeno u poglavlju 2, metod kratkih karakteristika je baziran na integralnom obliku jednačine prenosa zračenja:

$$I_L(\nu) = I_U(\nu)e^{-\Delta\tau_U\phi(\nu)} + \int_0^{\Delta\tau_U\phi(\nu)} S(t)e^{(t-\Delta\tau_U)\phi(\nu)} dt\phi(\nu). \quad (5.5)$$

Kao i u 2D Dekartovskim koordinatama, indeks  $L$  obeležava “lokalnu” tačku, dok  $U$  označava *uzlaznu* tačku, koja je odabrana kao prva tačka preseka između zraka i koordinatne mreže, u uzlaznom smeru, tj. smeru suprotnom od prostiranja zraka.  $\Delta\tau_U$  je srednji optički put između tačaka  $U$  i  $L$ . Ponovo ćemo pretpostaviti parabolično ponašanje funkcije izvora na intervalu  $UD$  i analitički rešiti jednačinu prenosa u integralnom obliku:

$$I_L(\nu) = I_U(\nu)e^{-\Delta\tau_U\phi(\nu)} + \psi_U(\nu)S_U + \psi_L(\nu)S_L + \psi_D(\nu)S_D. \quad (5.6)$$

U ovoj jednačini indeks  $D$  obeležava “donju” ili “silaznu” (kako je engleski izraz *downwind*, držaćemo se izraza “donja” iako to nije odgovarajući antonim termina “uzlazna”) tačku, koja je, analogno uzlaznoj tački, prvi presek zraka sa koordinatnom mrežom u smeru prostiranja zraka. Za razliku od pristupa iz glave 2, ovde smo lokalni izvod eliminisali koristeći i donju tačku. Koeficijenti  $\psi$  zavise od optičkih

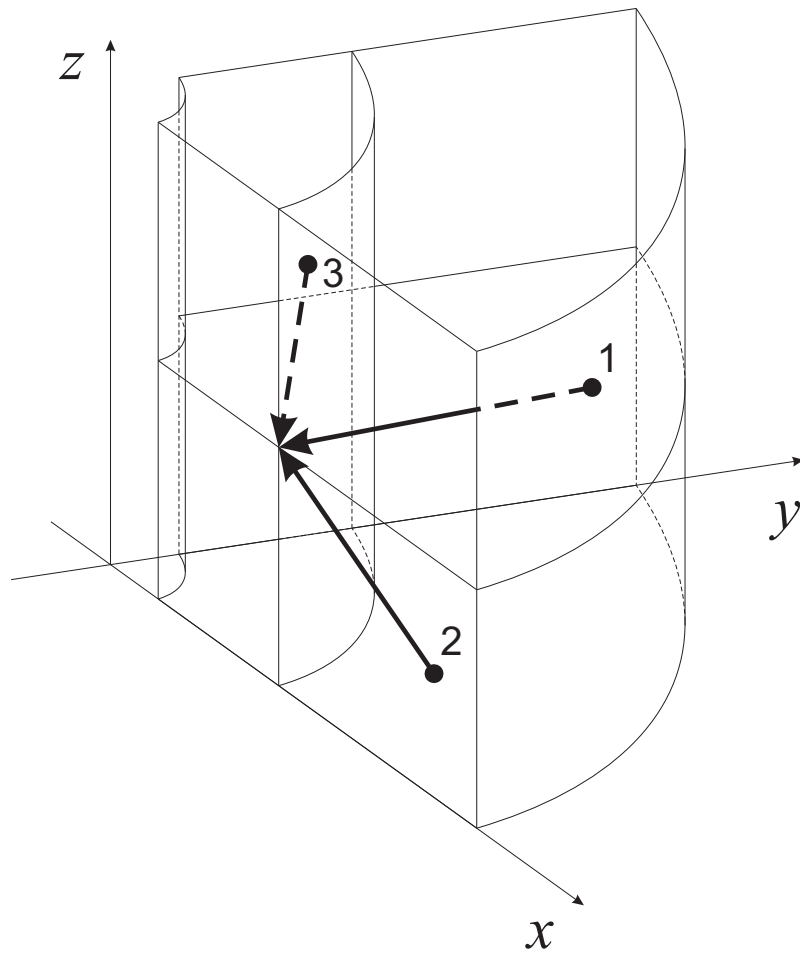
udaljenosti između tačkaka U i L, odnosno L i D, tako da implicitno zavise i od pravca u kom se zrak prostire. Da bi se dobile vrednosti funkcije izvora, neprozračnosti i specifičnog intenziteta u tačkama U i D neophodno je, kao i na Dekartovskim mrežama izvršiti prostornu interpolaciju. Kako ovde koristimo Jacobi iteraciju koja ne zahteva “prolaze unazad”, slobodni smo da odaberemo komplikovaniju, a i precizniju shemu za interpolaciju. U primerima predstavljenim u odeljku 5.3 koristimo kvadratičnu interpolaciju kao u Auer & Paletou (1994) koja je u svojoj suštini Lagrange-ova interpolacija sa “veštačkim” suzbijanjem nerealističnih maksimuma i minimuma. U odeljku 5.5, pak, implementirali smo glatku, strogo monotonu interpolaciju drugog reda poznatu kao BESSER i predstavljenu u Štěpán & Trujillo Bueno (2013).

Pogledajmo kako izgleda proces formalnog rešenja za već poznati slučaj 2D Dekartovske mreže ali sada sa korišćenjem i tačke D:

1. Za dati pravac zraka, krećemo od odgovarajuće granice koordinatne mreže, gde je ulazno zračenje zadato.
2. Prolazeći kroz mrežu u zadatom pravcu, nalazimo ulazne i donje tačke i interpoliramo potrebne fizičke veličine.
3. Rešavamo jednačinu 5.6 za sve frekvencije. Specifični intenzitet se zatim dalje koristi za interpolaciju u narednim tačkama.
4. Koraci 1-3 se ponavljaju za svaki zadati smer zrakova, polazeći od odgovarajuće granice koordinatne mreže.

Primena metoda kratkih karakteristika u cilindričnim koordinatama je ipak nešto drugačija nego u pravouglim koordinatama. Implementacija u cilindričnom slučaju je detaljno opisana u radu VNHL02 a ovde ćemo sumirati samo glavne ideje.

Prvo, setimo se da na pravouglim koordinatnim mrežama (glava 2) zrak može da preseče ili horizontalnu ili vertikalnu granicu ćelije. Ovo vodi ka dva različita tipa zraka, za koje je potrebna interpolacija ili po vertikalnoj ( $y$ ) ili po horizontalnoj ( $x$ ) koordinati. Tačka U uvek “prethodi” lokalnoj tački (u smislu smera prolaska kroz mrežu) dok tačka D uvek “sledi nakon” lokalne tačke. Formalno rešenje i



Slika 5.1: Različiti tipovi zrakova u cilindričnoj geometriji. Tipovi 1 i 2 su slični pravouglnoj geometriji opisanoj u glavi 2 i seku ili horizontalnu ili vertikalnu ivicu ćelije. Tip 3 postoji samo u cilindričnoj geometriji i kod njega su  $r$  koordinata uzlazne i lokalne tačke jednake.

sva pripadajuća razmatranja su vrlo prirodna i intuitivna, pošto projektujemo tro-dimenzionalni prostor na 2D ravan.

U cilindričnim koordinatama, projekcije kratkih karakteristika na 2D koordinatnu mrežu su, strogo govoreći, *zakrivljene* (videti VNHL02 za ilustraciju i detaljnu diskusiju). Naravno, uvek je moguće razmatrati ih kao prave linije, integraleći duž linije koja spaja tačke U i L. Ovo će neizbežno dovesti do nepreciznosti u numeričkoj integraciji, i ta nepreciznost zavisi od rezolucije koordinatne mreže. Takođe, postoji i treća vrsta zraka, ilustovana na slici 5.1. Na ovoj ilustraciji zraci 1 i 2 su “ulazni” zraci, za koje važi da je radijalna koordinata uzlazne tačke veća od one koja odgovara lokalnoj tački. Ova dva zraka su slična zracima koje srećemo u pravouglim koordinatama, tj. seku koordinatnu mrežu duž granica kojima je  $r = \text{const}$  ili  $z = \text{const}$  pa samim tim zahtevaju interpolaciju duž jedne od ove dve prostorne koordinate. Slučaj je isti sa “izlaznim” zrakovima, s tim što se, usled zakrivljenosti koordinatne mreže, može pojaviti i treći tip (vidi sliku 5.1). U ovom slučaju tačke U i L imaju istu prostornu koordinatu  $r$ . Prostorna interpolacija se vrši po  $z$ , dok ugaona interpolacija nije potrebna (videti diskusiju u nastavku glave oko detalja vezanih za neophodnu interpolaciju po uglovima). Lako se vidi da, za ovaj tip zraka, važi  $\varphi_U = \pi - \varphi$ . Kako se kroz koordinatnu mrežu, kao i u slučaju Dekartovog pravouglom koordinatnog sistema, prolazi ugaoni kvadrant po ugaoni kvadrant (tj. imamo četiri prolaska), ovo će dovesti do nezgodnih problema u dinamičkoj alokaciji/dealokaciji memorije. Tačnije, neki od intenziteta se moraju konstantno čuvati u memoriji. Sa druge strane, setimo se da je na pravouglim mrežama moguće de-alocirati specifični intenzitet čim više nije potreban za interpolaciju. Na ovaj način se memorijski prostor mnogo manje opterećuje i, samim tim, moguće je uzeti u obzir mnogo veće koordinatne mreže.

## 5.2.2 Interpolacija pravca i numerička integracija po pravcima

Kao što je detaljno opisano u radu VNHL02 i ilustrovano na slici 5.2, ugao koji opisuje azimut jednog istog zraka je različit u lokalnoj i uzlaznoj tački. Obeležimo azimut zraka u uzlaznoj tački sa  $\varphi_U$ . U opštem slučaju ta vrednost se ne nalazi u skupu diskretnih uglova koji koristimo za numeričko rešenje, pa vrednost  $I_U(\theta, \varphi_U)$  mora biti izračunata interpolacijom po azimutu. Najjednostavniji pristup je, nar-

avno, da ta interpolacija bude linearna. Kao što je uobičajeno, poželjna je interpolacija višeg reda, preciznosti radi. Poželjno bi bilo da interpolacija takođe bude monotona u smislu eliminacije neželjenih minimuma i maksimuma, pa možemo koristiti, na primer, metod predstavljen u Auer & Paletou (1994), u tom radu korišćen za prostornu interpolaciju.

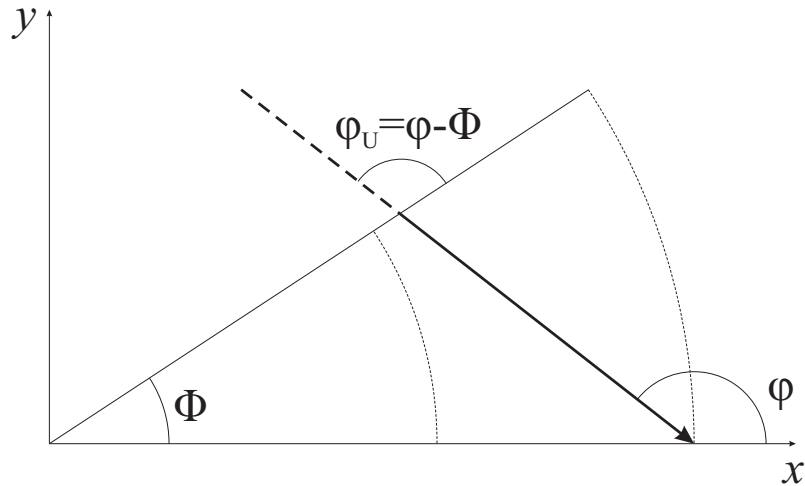
Postoje i sofisticiraniji pristupi, kao što je Fourier-ov razvoj polja zračenja po azimutu, originalno predstavljen u radu Gouttebroze (2005). Ovakav pristup nam omogućava da eksplicitno uzmemo u obzir periodičnost polja zračenja po  $\varphi$ . U originalnom radu Gouttebroze-a, ova interpolacija je korišćena za prostornu interpolaciju po azimutu (u pitanju su cilindrične koordinate koje *ne* pretpostavljaju osnu simetriju). Implementirali smo ovaj metod u naš kôd, ali ovaj put za interpolaciju uzlaznog intenziteta po pravcima. Za test probleme predstavljene u 5.3, ovaj metod je pokazao dobro slaganje sa polinomijalnom interpolacijom, ali se ispostavilo da je bitno vremenski zahtevniji.

Konačno, iskoristili smo ideju Bezier-ovih splajnova koje je originalno u kontekst interpolacije u prenosu zračenja uveo Auer (2003) a nedavno su korišćeni za prostornu interpolaciju u problemima prenosa zračenja (npr. de la Cruz Rodríguez & Piskunov 2013). U pitanju je interpolacija drugog ili trećeg reda, koja automatski čuva monotonost funkcije, što opet automatski sprečava pojavljivanje neželjenih maksimuma i minimuma. Iako ova shema ne uzima eksplicitno u obzir periodičnost intenziteta po azimutu<sup>1</sup>, po našem iskustvu ona predstavlja najbolji spoj preciznosti i stabilnosti. U rezultatima predstavljenim u odeljcima 5.3 i 5.4 je koristimo samo za ugaonu interpolaciju, dok u nastavku ove glave (odeljak 5.5) koristimo sličan metod, BESSER, kako za interpolaciju po uglovima, tako i za prostornu interpolaciju i za formalno rešenje.

Iz našeg iskustva, odabir sheme za ugaonu interpolaciju može bitno da utiče na konačni rezultat (tj. vrednosti funkcije izvora). Za jednostavne probleme, kao što su oni koje koristimo za testiranje u odeljku 5.3, razlike su manje od 1% i smatramo da su prihvatljive. U situacijama gde je polje zračenja jako anizotropno i nehomogeno,

---

<sup>1</sup>Mada se periodičnost uvek može delimično uzeti u obzir, proširivanjem skupa interpolanada sa leve i desne strane.



Slika 5.2: Razlika između azimuta zraka u lokalnoj i u uzlaznoj tački. Ova, u opštem slučaju nezanemarljiva razlika, čini interpolaciju po pravcima neophodnom.

razlike, u principu, mogu biti mnogo veće. Skrećemo pažnju na ove probleme i napominjemo da ih mi smatramo verovatno najvećim nedostatkom ovog pristupa modelovanju osno-simetričnih objekata.

Drugi važan aspekt, ne samo modelovanja u cilindričnim koordinatama, je odabir diskretizacije, pa samim tim i integracije po pravcima. Kao što smo opisali u glavi 2, jednačina prenosa se rešava za odabran broj pravaca koji su opisani kombinacijom vrednosti uglova  $\theta$  i  $\varphi$  a dobijeni intenzitet se zatim numerički integrirani po pravcima i frekvencijama da bi se dobili odgovarajući momenti polja zračenja (npr. srednji intenzitet  $J$ ). Već smo napomenuli da je odabir integracije po frekvencijama relativno jednostavan, barem u slučaju CRD aproksimacije i Gausovog profila linije, kada se razmatraju jedino frekvencije koje su blizu centra linije. Sa druge strane, odabir integracije po pravcima može bitno da utiče na tačnost i konvergenciju metoda.

O integraciji po pravcima smo već govorili u glavi 2. Za izračunavanja u ovoj glavi smo takođe odabrali Carlson-ov set B (Carlson 1963). Ova kvadratura “imitira” Gausovske težine za integraciju po oba ugla i zadržava invarijantnost na rotaciju, koordinatnog sistema za  $90^\circ$ . Korišćena je u nekoliko nedavno objavljenih radova (npr. Anusha & Nagendra 2011a; Ibgui et al. 2013). U rešavanju test problema iz 5.3 smo poredili različite sheme za diskretizaciju po pravcima i relativne razlike nisu bile veće od 0.5% što možemo smatrati prihvatljivim. Ipak, u nekim “ekstremnijim” problemima, razlike bi mogle biti dosta veće. Očigledno su i interpolacija i integracija

po pravcima vrlo važne za tačnost cele metode i preporučujemo pažljiva razmatranja i preliminarna testiranja pre odabira sheme za konkretan problem.

### 5.2.3 Granični uslovi

Najveći broj pomenutih radova koji se bave cilindričnom geometrijom se bavi ili samo-emitujućim objektima (Stenholm 1977, VNHL02) ili jednostavnim oblikom ulaznog zračenja. Kako je glavna ideja ovog dela teze da predstavi metode za računanje polarizacije rasejanjem, koja je osetljiva na anizotropiju polja zračenja, veoma je važno pravilno obračunati uticaj izvora koji obasjavaju objekat koji ispituujemo. Razmotrimo, na primer, modelovanje Sunčevih protuberanci: potreban nam je ne samo srednji intenzitet zračenja koje obasjava objekat, već i njegova ugaona zavisnost (usled tzv. potamnjenja ka rubu), da bismo precizno izračunali tenzore polja zračenja koji utiču na polarizaciju rasejanjem. U ovom konkretnom slučaju postoji takođe nagli prekid funkcije  $I^{\text{inc}}(\theta)$ , gde je  $I^{\text{inc}}$  intenzitet ulaznog zračenja. Sa sličnom situacijom smo suočeni ako razmatramo primer cirkumstelarnog diska koji je obasjan matičnom zvezdom.

Za ovakve slučajeve preciznu strategiju je predložio Gouttebroze (2005). Ako je anizotropija ulaznog zračenja dobro poznata (npr. iz tablica potamnjenja ka rubu), možemo da napravimo veoma finu diskretizaciju po pravcima (u našem slučaju 100 puta finiju nego što je diskretizacija koju koristimo za numeričko rešavanje unutar objekta). Zatim možemo da usrednjimo ulazno zračenje, tako da za svaki ulazni zrak imamo njegov “srednji” intenzitet definisan na ugaonom intervalu koji taj zrak “pokriva”. U principu, ovo stvara greške u ulaznom intenzitetu, ali ne i u funkciji izvora pošto ista zavisi samo od momenata polja zračenja koji su, zapravo, tačnije izračunati ovim pristupom. Nakon što dođemo do konvergencije, potrebno je još jedno dodatno formalno rešenje bez usrednjavanja ulaznog zračenja da bismo našli adekvatan izlazni intenzitet.

Drugi važan aspekt su “unutrašnji” granični uslovi, tj. granični uslovi na  $r = r_{\text{min}}$ . Ako je  $r_{\text{min}} = 0$ , prvo je potrebno izvršiti formalno rešenje u “ulaznim” pravcima a zatim iskoristiti argumente simetrije da se nađu granični uslovi na un-

utrašnjoj granici. Ispostavlja se da je:

$$I(\theta, \varphi, \nu) = I(\theta, \pi - \varphi, \nu). \quad (5.7)$$

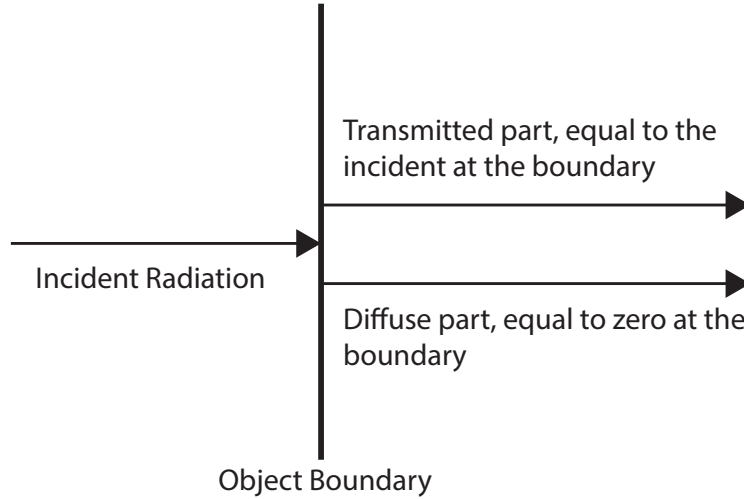
Napominjemo ovde da je ovaj oblik graničnih uslova pogodan i za tretman komponenti redukovanog intenziteta koji koristimo za računanje polarizovanog polja zračenja, pošto komponente redukovanog intenziteta ne menjaju znak usled rotacije. Takođe smo primetili da je veoma važno da se  $\Lambda$  operator, tj. koeficijenti  $\psi$  izračunaju korišćenjem kratkih karakteristika drugog reda u ovom slučaju (obično se na granicama koordinatne mreže koriste karakteristike prvog reda). Za razliku od “spoljnih” graničnih uslova, ovde je moguće iskoristiti kratke karakteristike drugog reda, usled simetrije objekta u odnosu na  $r = 0$  (tj. iako je lokalna tačka na “ivici” koordinatne mreže i dalje možemo naći “donju” tačku).

Sa druge strane, ako je  $r_{\min} \neq 0$ , neophodno je eksplicitno dati granične uslove na unutrašnjoj granici. Primer za ovaj slučaj je modelovanje diska ili prstena koji obasjava zvezda koja se nalazi unutar njega. U ovom slučaju “ulazni” zraci, koji napuštaju unutrašnju granicu se zanemaruju, tj. smatra se da ih apsorbuje objekat koji se nalazi u centru diska. Ulazno zračenje na unutrašnjoj granici se računa i usrednjava kao što je navedeno na početku ovog odeljka.

Dodatne komplikacije sa graničnim uslovima se pojavljuju ukoliko je objekat obasjan zračenjem koje dolazi iz tačkastog izvora. Primer za ovo je gas u laboratoriji kog obasjava laser, ili ekstrasolarna planeta koju obasjava udaljena zvezda. Izuzetno je naporno i nepraktično odabrati odgovarajuću diskretizaciju po pravcima da bi se ovi slučajevi pravilno obračunali. Mnogo zgodniji metod je predložen u Chandrasekhar (1950). U ovom pristupu, polje zračenja se deli u dve komponente (vidi sliku 5.3): i) propušteni deo ulaznog zračenja koje prodire u objekat i ulazi u jedan deo srednjeg intenziteta, pa samim tim i funkcije izvora; ii) difuzni deo polja zračenja koji nastaje u procesima rasejanja (ili usled termalne emisije gasa). Polje zračenja onda izgleda ovako:

$$I^{\text{total}}(\theta, \varphi, \nu) = I(\theta, \varphi, \nu) + I^{\text{tr}}(\theta, \varphi, \nu). \quad (5.8)$$





Slika 5.3: Ilustracija “podele” zračenja na dve komponente. Propuštena (transmitted) komponenta je na granici jednaka ulaznom zračenju i biva apsorbirana unutar objekta. Difuzna komponenta je na granici jednaka nuli i podleže jednačini prenosa zračenja gde funkcija izvora zavisi od integrala rasejanja u koji ulaze obe komponente zračenja, usrednjene po pravcima.

Ovde je  $I$  difuzni deo intenziteta. Kako propušteni deo intenziteta (obebežen gornjim indeksom “tr”) dolazi iz diskretnog pravca, tretiraćemo ga kao delta funkciju po  $\theta$  i  $\varphi$ . Sad, jednačina prenosa zračenja se može podeliti u dve jednačine, od kojih svaka odgovara jednom delu ukupnog intenziteta. Difuzno zračenje je opisano jednačinom prenosa sa graničnim uslovima koji su nula (jednačine 5.1) a funkcija izvora ima oblik dat sa 5.3. Jednačina prenosa za propušteno zračenje je jednostavnija pošto za dotično ne postoji funkcija izvora, pa isto samo biva oslabljeno usled apsorpcije u objektu. Analogno možemo podeliti srednji intenzitet odnosno integral rasejanja na difuzni i propušteni deo:

$$J^{\text{tr}}(z, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_0^{\text{tr}}(\nu) e^{-\tau(\nu)} \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(\theta - \theta_0) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (5.9)$$

gde  $\theta_0$  i  $\varphi_0$  opisuju pravac ulaznog zračenja. Koristeći osobine delta funkcije:

$$J^{\text{tr}}(z, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu I_0^{\text{tr}}(\nu) e^{-\tau(\nu)}, \quad (5.10)$$

gde je  $\tau(\nu)$  monohromatski optički put koji je ulazno zračenje prošlo kroz objekat. Ovaj srednji intenzitet dodajemo ukupnom srednjem intenzitetu difuznog

polja zračenja da bismo adekvatno izračunali funkciju izvora (koja ulazi samo u jednačinu prenosa za difuzni deo intenziteta). Kako ulazno zračenje ima oblik delta funkcije, ono direktno utiče na izlazno zračenje samo u vrlo specifičnim slučajevima. Na primer, ako nas interesuje doprinos procesa rasejanja transmissionom spektru ekstrazolarne planete, potrebno je dodati difuzni intenzitet na, adekvatno oslabljen, ulazni intenzitet.

#### 5.2.4 Jacobi-jeva iteracija primenjena na cilindrične koordinate

Istorijski pregled perturbativnih metoda pa samim tim i Jacobi-jeve iteracije je dat na kraju prve glave. Implementacija u slučaju 2D pravouglanih koordinatnih mreža je opisana u glavi 3. Ovde ćemo vrlo sažeto ponoviti osnovnu ideju.

Formalno rešenje jednačine prenosa i jednačina statističke ravnoteže za atom sa dva nivoa se mogu zajedno napisati kao:

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon)\Lambda[S]. \quad (5.11)$$

$\Lambda$  operator predstavlja ceo proces numeričkog izračunavanja srednjeg intenziteta iz funkcije izvora za koju pretpostavljamo da je poznata. Nijedan od dva “ekstremna” slučaja za rešavanje ovog problema ( $\Lambda$  iteracija i direktno rešenje) nisu optimalni u smislu procesorskog vremena. Optimum je, u stvari, “sredina” između ova dva pristupa: korišćenje aproksimativnog operator koji se lako invertuje a zatim iterativna primena istog zarad popravke rešenja:

$$S = \epsilon B + (1 - \epsilon)\Lambda^*[S] + (\Lambda - \Lambda^*)[S]. \quad (5.12)$$

Ako koristimo *lokalni* operator, kao što su predložili Olson et al. (1986), inverzija aproksimativnog operatora  $\Lambda^*$  se svodi na prosto deljenje, tako da jednačina za popravku funkcije izvora izgleda ovako:

$$\Delta S = \frac{\epsilon B + (1 - \epsilon)J - S^{\text{old}}}{1 - (1 - \epsilon)\Lambda^*}. \quad (5.13)$$

Ovo je identičan pristup Jacobi iteraciji opisanoj u glavi 3, osim što, umesto koeficijenta  $b$  koristimo aproksimativni operator  $\Lambda^*$ . Jednačina 5.13 se rešava iterativno, sve dok  $\Delta S/S$  ne bude manje od neke predefinisane vrednosti  $\delta$ . Za izračunavanja u ovoj glavi koristimo  $\delta = 10^{-5}$ .  $\Lambda^*$  se u praksi računa integracijom koeficijenta  $\psi_L$  po pravcima i frekvencijama. Takođe je potrebna odgovarajuća popravka pošto, formalno gledano, tačka  $D$  takođe doprinosi lokalnom operatoru (i to negativno, vidi Asensio Ramos & Trujillo Bueno 2006). U našim izračunavanjima ova popravka je neophodna (iako VNHL02 tvrde da to nije slučaj). Razlog za to je što u zakrivljenim koordinatama optičke udaljenosti  $UL$  i  $LD$  mogu bitno da se razlikuju. Ukoliko bismo koristili neku striktno monotonu interpolaciju (npr. BESSER, vidi odeljak 5.5), ova popravka bi postala nepotrebna.

Takođe smo testirali Ng akceleraciju (Ng 1974), koja na osnovu nekoliko prethodnih (tipično 3-5) vrednosti funkcije izvora računa novu, tačniju vrednost funkcije izvora metodom minimizacije reziduala. Veoma jasno objašnjenje primene Ng akceleracije je dato u Olson et al. (1986). Za probleme predstavljene u 5.3, ostvarujemo nekih 2.5 - 3 puta bržu konvergenciju koristeći ovaj metod za dodatno ubrzanje.

### 5.2.5 Polarizovana jednačina prenosa u redukovanom formalizmu

U prethodnoj glavi smo pokazali da polarizovani intenzitet i funkcija izvora mogu biti razvijeni uz pomoć ireducibilnih simetričnih tenzora, koji problem prebacuju u bazu gde su intenzitet i funkcija izvora šest-vektori:  $\hat{\mathcal{I}}^r = (\mathcal{I}_i)$  i  $\hat{\mathcal{S}}^r = (\mathcal{S}_i)$ , gde  $i = 0..5$ . Naglašavamo još jednom da je glavni razlog za primenu ovog formalizma to što funkcija izvora postaje nezavisna od pravca, što znatno smanjuje memorijsku zahtevnost i procesorsko vreme. U slučaju kada je donji nivo prelaza nepolarizovan, redukovani intenzitet zadovoljava istu jednačinu prenosa kao i nepolarizovani intenzitet:

$$\frac{d\hat{\mathcal{I}}^r(r, z, \theta, \varphi, \nu)}{d\tau} = \phi(\nu) \left( \hat{\mathcal{I}}^r(r, z, \theta, \varphi, \nu) - \hat{\mathcal{S}}^r(r, z) \right), \quad (5.14)$$

dok je redukovana funkcija izvora data kao:

$$\hat{\mathcal{S}}^r = \epsilon \hat{\mathcal{B}}^r + (1 - \epsilon) \hat{\mathcal{J}}^r, \quad (5.15)$$

gde je redukovani integral rasejanja  $\hat{\mathcal{J}}^r$ :

$$\hat{\mathcal{J}}^r = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \hat{\Psi}^r(\theta, \varphi) \hat{\mathcal{I}}^r(\theta, \varphi, \nu) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.16)$$

Setimo se da je  $\hat{\Psi}^r$  matrica dimenzija  $6 \times 6$  čiji elementi zavise od pravca i koja opisuje sprezanje između različitih komponenti redukovanog intenziteta. Elementi su dati u apendixu D u radu Anusha & Nagendra (2011b).  $\hat{\mathcal{B}}^r$  je Plankova funkcija u redukovanom bazu  $\hat{\mathcal{B}}^r = (B, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

Da bismo izračunali izlazno polarizovano zračenje potrebno je da rešimo polarizovani ne-LTR problem formiranje linije, odnosno da konzistentno rešimo jednačine 5.14 - 5.16. Koristimo pristup opisan u prethodnoj glavi: Prvo, standardnom Jacobi iteracijom dobijamo samokonzistentno rešenje zanemarujući polarizaciju a zatim naizmenično rešavamo jednačine 5.14 - 5.16 do konvergencije. Ovo je, praktično,  $\Lambda$  iteracija za polarizovano zračenje koja, kao što smo objasnili u glavi 4, konvergira relativno brzo i upotrebljiva je za praktičnu primenu.

Jasnoće radi, izložićemo još jednom ceo proces rešenja polarizovanog ne-LTR problema po stavkama:

1. Jacobi iteracijom sa Ng ubrzanjem dolazimo do rešenja nepolarizovanog problema.
2. Početne vrednosti redukovanog intenziteta postavljamo na  $\hat{\mathcal{I}} = (I^{\text{scalar}}, 0, 0, 0, 0, 0)$ .
3. Zatim na smenu rešavamo polarizovane jednačine prenosa zračenja i statističke ravnoteže. Za kriterijum za konvergenciju koristimo  $R_C < \delta = |\Delta \mathcal{S}_0 / \mathcal{S}_0| < 10^{-5}$ .
4. Iz komponenti redukovanog intenziteta računamo Stoksov vektor koristeći jednačine 4.20 - 4.22.

## 5.2.6 Granični uslovi za polarizovano zračenje

Kako smo, u okviru ovog istraživanja, zainteresovani za objekte koji nisu samo-emitujućí već i rasejavaju upadno zračenje, neophodno je da postavimo odgovarajuće granične uslove i za polarizovano zračenje. U principu, ulazno zračenje se može opisati koristeći odgovarajuće vrednosti Stoksovih parametara. Problem nam, pak, stvara činjenica da prelaz iz Stoksovog vektora u vektor redukovano g intenziteta nije jednoznačan, tako da je neophodno opisati ulazno zračenje koristeći redukovani bazis. Redukovani intenzitet, opet, nije veličina koja se može odrediti iz posmatranja, sem komponente  $I_0$  koju možemo da smatramo jednakom  $I$  komponenti Stoksovog vektora. Ukoliko je zračenje ne-polarizovano ili je polarizacija upadnog zračenja zanemarljiva u odnosu na polarizaciju koja nastaje u samom objektu (kao što je slučaj sa, npr., Sunčevim protuberancama), ostale komponente redukovano g intenziteta možemo postaviti na nulu.

I u slučaju polarizovanog zračenja možemo biti suočeni sa situacijom kada ugaona raspodela zračenja ima oblik delta funkcije. U tom slučaju možemo da pišemo, po uzoru na jednačinu 5.10:

$$\hat{\mathcal{J}}_{\text{incident}}^r = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \hat{\Psi}^r(\theta, \varphi) \hat{\mathcal{I}}^r(\nu) e^{-\tau(\nu)} \times \delta(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5.17)$$

$\hat{\mathcal{J}}_{\text{incident}}^r$  se onda može izračunati analitički i dodati na polarizovanu funkciju izvora u redukovanom bazisu, kao i u nepolarizovanom slučaju.

U opštijem slučaju ulaznog zračenja na granicama kada polarizacija nije zanemarljiva, koristimo pristup opisan u radu Faurobert et al. (2013). U ovom radu je pokazano da se polarizovana funkcija izvora u realnom redukovanom formalizmu može podeliti na difuzni i transmitovani (propušteni) deo. Propušteni deo se računa direktno na osnovu upadnog zračenja koje je dato u obliku Stoksovog vektora, dok se difuzna komponenta tretira kao šest-vektor redukovano g intenziteta. U radu Faurobert et al. (2013) je pokazano da je u nekim primerima polarizacija upadnog zračenja bitna i da mora biti pravilno uzeta u obzir.

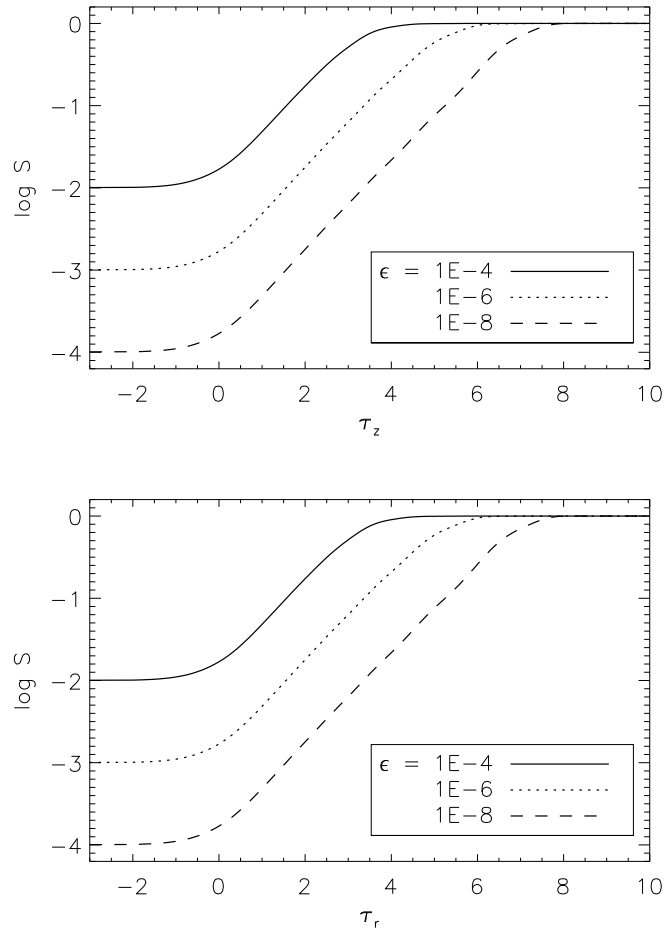
Sada predstavljamo test našeg metoda, tj. odgovarajućeg računarskog kôda na

nekim poznatim test problemima.

### 5.3 Poređenje sa 1D primerima

Gore opisani metod je implementiran u C++ kôd. Tačke u koordinatnoj mreži se tretiraju kao objekti što čini operacije kao što je formalno rešavanje i interpolacija intuitivnijim i modularnim. Sva izračunavanja u ovom odeljku su izvršena koristeći Carlson-ov set B sa  $n = 10$  za diskretizaciju po pravcima i 17 ekvidistantnih tačaka za trapezoidnom integracijom za diskretizaciju po frekvencijama. Koristili smo koordinatnu mrežu sa logaritamskim razmakom sa 10 tačaka po dekadi sa, kao što je uobičajeno, finijom rezolucijom blizu ivica objekta. Kao i u glavi 3, neprozračnost je konstantna i jednaka jedinici, tako da su geometrijska i optička skala udaljenosti identične. U ovom odeljku, cilindri su samo-emitujući bez dodatnih izvora zračenja. Za nepolarizovani slučaj i za koordinatnu mrežu koja se sastoji od  $132 \times 263$  tačaka, jedna iteracija traje oko 25 sekundi na Intel i7-2600 3.4 Ghz procesoru. U polarizovanom slučaju, iteracija traje oko šest puta duže.

Da bismo testirali naš metod, prvo smo pokušali da reprodukujemo poznate rezultate iz 1D plan-paralelne geometrije. U slučaju kada je ukupna optička debljina cilindra duž  $z$  i  $r$  mnogo veća od dužine termalizacije ( $1/\epsilon$ ), funkcija izvora će saturirati na vrednosti jednako Plankovoj funkciji i u oblastima daleko od “bočnih” ivica bi se trebala ponašati slično kao u 1D geometriji. Ovde smo razmatrali cilindre sa optičkom debljinom od  $10^{11}$  i po  $z$  i po  $r$ . Plankova funkcija je jednaka jedinici a ne-LTR problem rešavamo za  $\epsilon = 10^{-4}$ ,  $10^{-6}$  i  $10^{-8}$ . U svakom od ovih primera, cilindar je mnogo veći od dubine termalizacije. Ponašanje funkcije izvora duž  $z$  koordinate za  $r = R_{\min}$  je isto kao u 1D plan-paralelnoj atmosferi. To znači da očekujemo da funkcija izvora saturira na optičkoj dubini približnoj dubini termalizacije i da na površini dostigne vrednost  $\sqrt{\epsilon}B$ . Kako je i radijalna optička debljina jako velika, ne bi trebalo da primetimo efekat zakrivljenosti cilindra, pošto je oblast u kom je funkcija izvora ne-termalizovana mnogo manja od oblasti u kojoj važi  $S \approx B$ . Prema tome, ponašanje funkcije izvora duž  $r$  za  $z = z_{\max}/2$  bi takođe trebalo da odgovara 1D slučaju. Slika 5.4 pokazuje da je ponašanje funkcije izvora zaista takvo, i to



Slika 5.4: Zavisnost skalarne funkcije izvora od optičke dubine, u slučaju koji odgovara 1D plan-paralelnoj atmosferi. Gore  $S(\tau_z)$  za  $r = 0$ . Dole:  $S(\tau_r)$  za  $z = z_{\max}/2$

za sve korišćene vrednosti  $\epsilon$ . U ova tri slučaja, konvergenciju smo dostigli nakon 82, 121 i 224 iteracije, respektivno, koristeći Ng akceleraciju. Sada ćemo analizirati izračunavanja u polarizovanom slučaju.

Rezultati test problema za prenos polarizovanog zračenja nisu tako dobro poznati kao u skalarnom slučaju. Jedan od primera vredan pomena je polarizacija u polubeskonačnim atmosferama koju je detaljno ispitala Faurobert (1988). U ovom radu je razmatran prenos polarizovanog zračenja u spektralnim linijama u atmosferi kojom dominira rasejanje, za različite pretpostavke redistribucije po frekvencijama. Mi ćemo uporediti naše rezultate sa njenim, dobijenim za pretpostavku CRD. Ako razmatramo tačku sa koordinatama  $(z_{\max}, 0)$ , očekujemo da se izlazno zračenje ponaša kao zračenje koje napušta površinu 1D atmosfere.

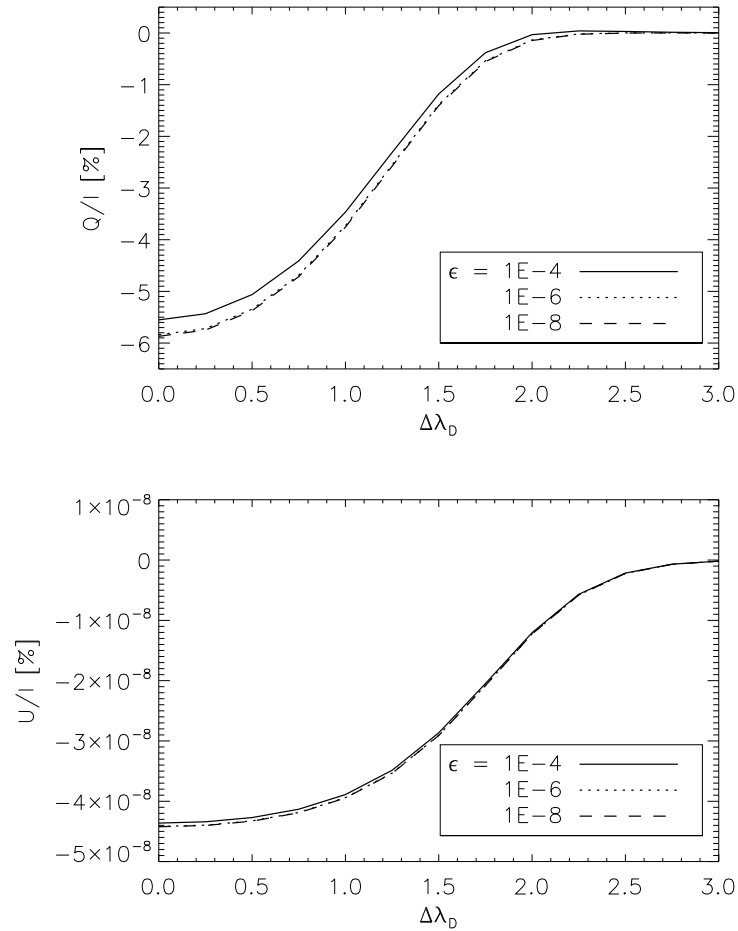
Izlazni  $Q/I$  polarizovani profili bi trebalo da imaju sličan oblik kao u Faurobert (1988), dok očekujemo da  $U/I$  bude približno nula, pošto je ova tačka daleko od ivica i ne očekujemo azimutalnu asimetriju. Sa slike 5.5 se vidi da je ovo zaista tako.  $Q/I$  se ponaša kao u Faurobert (1988) (razlike u stepenu polarizacije su posledica nešto drugačije ugaone kvadrature), dok je  $U/I$  mnogo manje od  $Q/I$  i možemo ga smatrati zanemarljivim, tj. jednakim nuli. Sa druge strane, na ivicama cilindra očekujemo drugačije ponašanje pošto će anizotropija polja zračenja biti drugačija. Na slici 5.6 je su prikazani  $Q/I$  i  $U/I$  profili za različite azimute i  $\theta \approx 84^\circ$  u tački sa koordinatama  $(z_{\max}, r_{\max})$  (ivica cilindra), za  $\epsilon = 10^{-4}$ . Vidi se da se i  $Q/I$  i  $U/I$  značajno razlikuju (polarizacija je veća) od 1D slučaja. Objašnjenje za ovo leži u činjenici da su i horizontalne i vertikalne nehomogenosti u funkciji izvora velike blizu ivica objekta, usled “bežanja” fotona kroz ivice objekta. Takođe, osna simetrija zračenja ne postoji na ivicama objekta što rezultuje značajnom Stoksovom  $U$  komponentom. Takođe se vidi da se  $Q/I$  ne menja monotono sa azimutom. Teško je povući paralelu sa interpretacijama poznatim iz 1D slučaja pošto je, u ovom slučaju objekat *trodimensionalan*. Važno je, ipak, razumeti da različiti pravci pružaju informacije o vertikalnim nehomogenostima na različit način, što rezultuje drugačijim  $Q/I$  profilima za drugačije azimute. Napominjemo da je  $Q/I$  negativno, što odgovara apsorpcionoj liniji formiranoj u polubeskonačnoj atmosferi.

Ovi rezultati se, na neki način, mogu koristiti kao referentna rešenja. Bilo bi jako korisno uporediti ih sa rezultatima dobijenim drugim pristupima, npr. kôdom koji je baziran na 3D pravougloj geometriji, između ostalog i zato što metod koji predstavljamo ovde treba da bude zamena za 3D modele u slučaju kada je moguće pretpostaviti osnu simetriju.

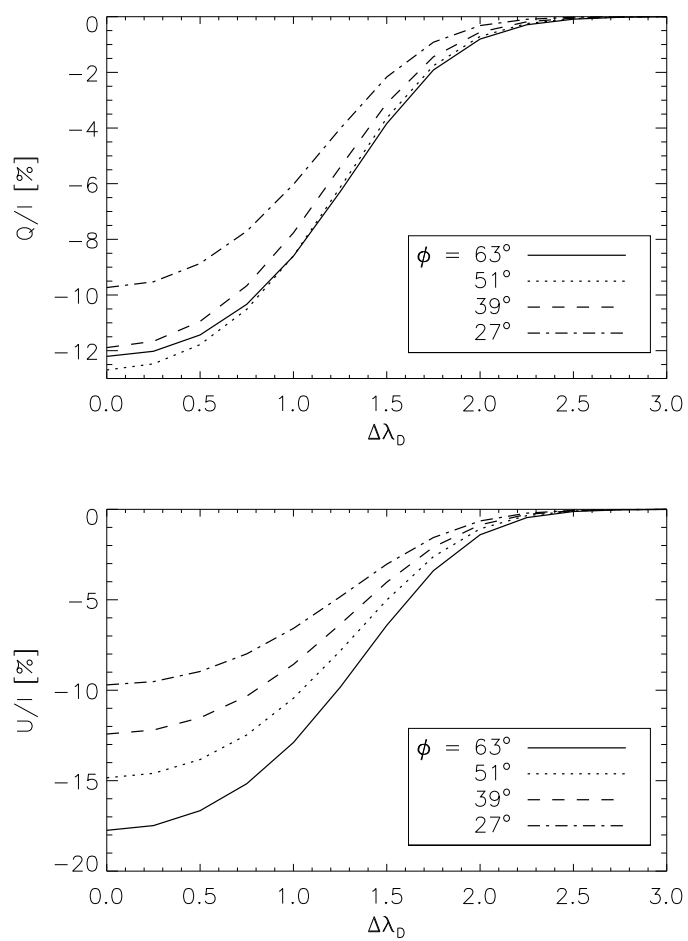
## 5.4 Rasejanje u spektralnim linijama u cirkumstelarnom disku

Jedan očigledan primer diskolike strukture je gasoviti, cirkumstelarni disk formiran oko zvezde koja ga osvetljava. Disk rasejava zračenje zvezde ali takođe može i da termalno emituje. Pravilno predviđanje oblika spektralnih linija je jako važno





Slika 5.5:  $Q/I$  i  $U/I$  profili spetkralnih linija u tački sa koordinatama  $(z_{\max}, 0)$  za pravac  $\theta = 84^\circ$ . Kako je ova tačka daleko od bočnih ivica objekta, polarizovani profili odgovaraju linijama formiranim u 1D atmosferi. Napominjem da je  $U/I$  reda veličine  $10^{-8}\%$ , što je zanemarljivo malo u odnosu na  $Q/I$ , kao što je i očekivano.



Slika 5.6:  $Q/I$  i  $U/I$  profili spektralnih linija u tački na ivici cilindra ( $z_{\max}, r_{\max}$ ), za for  $\theta \approx 84^\circ$  i različite azimute.

i nadalje korisno za interpretaciju posmatranja ovakvih objekata (za neke primere prenosa zračenja u diskovima vidi Papkalla 1995; Elitzur et al. 2012). Nedavno su Halonen et al. (2013) poduzeli opsežnu studiju koja se bavi polarizacijom rasejanjem u kontinuumu u ovakvim objektima. Cirkumstelarni diskovi su gasoviti diskovi koji se nalaze, između ostalog, oko Be zvezda. Zvezde sfernog oblika generalno ne emituju zračenje koje je polarizovano rasejanjem, pošto se isto poništava na suprotnim ivicama zvezde (znak  $Q$  i  $U$  polarizacije se krati na suprotnim rubovima). Ako postoji disk, koji ruši tu simetriju i rasejava zračenje, onda možemo očekivati izvesnu količinu polarizacije rasejanjem.

Ovde ćemo razmotriti jedan jednostavan primer da bismo ilustrovali primenu našeg kôda za prenos zračenja. Disk se nalazi u ravni ekvatora i ima sledeće radijalne dimenzije:  $R_{\max} = 10R_*$  and  $R_{\min} = R_*$ , gde je  $R_*$  poluprečnik zvezde. Preuzećemo raspodelu gustine iz rada Halonen et al. (2013):

$$\chi(z, r) = \chi_0 \exp(-z^2/H^2)(R/R_*)^{-3}. \quad (5.18)$$

Konstante  $\chi_0$  i  $H$  biramo tako da radijalna srednja optička debljina diska bude 100 i da disk bude veoma tanak, tj. “zarobljen” u ravni ekvatora. Ovo znači da su oblasti daleko od ravni  $z = 0$  praktično prozirne. Pretpostavljamo da disk isključivo rasejava rasejanje ( $\epsilon = 0$ ). Disk je obasjan iznutra zračenjem zvezde. Granični uslovi onda izgledaju ovako:

$$I(z, r = R_{\min}, \theta, \varphi < \pi/2, \nu) = I_*(\mu, \nu) \quad (5.19)$$

i

$$I(z, r, \theta, \varphi > \pi/2, \nu) = 0 \quad (5.20)$$

na drugim granicama. Ovde  $I_*$  označava intenzitet zračenja koje napušta površinu zvezde.  $\mu$  ima svoje uobičajeno značenje ( $\mu = \cos \theta_*$ ) i odnosi se na koordinatni sistem vezan za površinu zvezde dok su  $\theta$  i  $\varphi$  uglovi u koordinatnom sistemu vezanom za disk. U opštem slučaju važi da je  $\mu = \mu(\theta, \varphi)$ . Ulazno zračenje trpi, tzv. potam-

njenje ka rubu, i, u ovom primeru, ne zavisi od frekvencije:

$$I(\mu) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mu. \quad (5.21)$$

Dakle, za ulazno zračenje smo odabrali kontinuum zvezde koji podleže jednostavnom zakonu potamnjenja ka rubu. Za računanje graničnih uslova koristimo “usrednjavanje” koje je predložio Gouttebroze (2005) i koje smo ukratko sumirali u prvom delu ove glave. Ponovo koristimo 17 tačka za diskretizaciju po frekvencijama i Carlson-ov set B sa  $n = 10$ . Sem intenziteta u spektralnoj liniji, interesuju nas i  $Q/I$  i  $U/I$  polarizacioni profili. Ono što “posmatrač” vidi je (polarizovani) intenzitet koji napušta površinu diska u kombinaciji sa svetlošću zvezde. Napominjemo da  $Q$  i  $U$  komponente dolaze isključivo od diska dok je  $I$  zbir direktno primljenog, propuštenog i rasejanog zračenja zvezde.

Ako je  $x$  osa usmerena ka posmatraču, izraz za ukupni Stokes-ov vektor koji emituje disk izgleda ovako:

$$\hat{I} = \hat{I}_{\text{top}} \cos \theta + \hat{I}_{\text{side}} \sin \theta. \quad (5.22)$$

Napominjemo ovde da ugao  $\theta$  ima isti smisao kao inklinacija koja se koristi u naučnoj zajednici koja se bavi, npr. dvojnim zvezdama (za posmatrača u ravni diska  $\theta = i = \pi/2$ ). Indeksi “top” i “side” obeležavaju doprinose gornje površine diska (ravan sa  $z = z_{\text{max}}$ ) i omotača diska (zakrivljena površ sa  $r = r_{\text{max}}$ ). Odgovarajuće jednačine za ova dva doprinosa su:

$$\hat{I}_{\text{top}} = \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{I}(z_{\text{max}}, r, \varphi) r dr d\varphi \quad (5.23)$$

i

$$\hat{I}_{\text{side}} = \int_{z_{\text{min}}}^{z_{\text{max}}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{I}(z, r_{\text{max}}, \varphi) r_{\text{max}} dz d\varphi. \quad (5.24)$$

Ovde smo, konciznosti radi, izostavili podrazumevanu zavisnost od  $\theta$  i  $\nu$ .

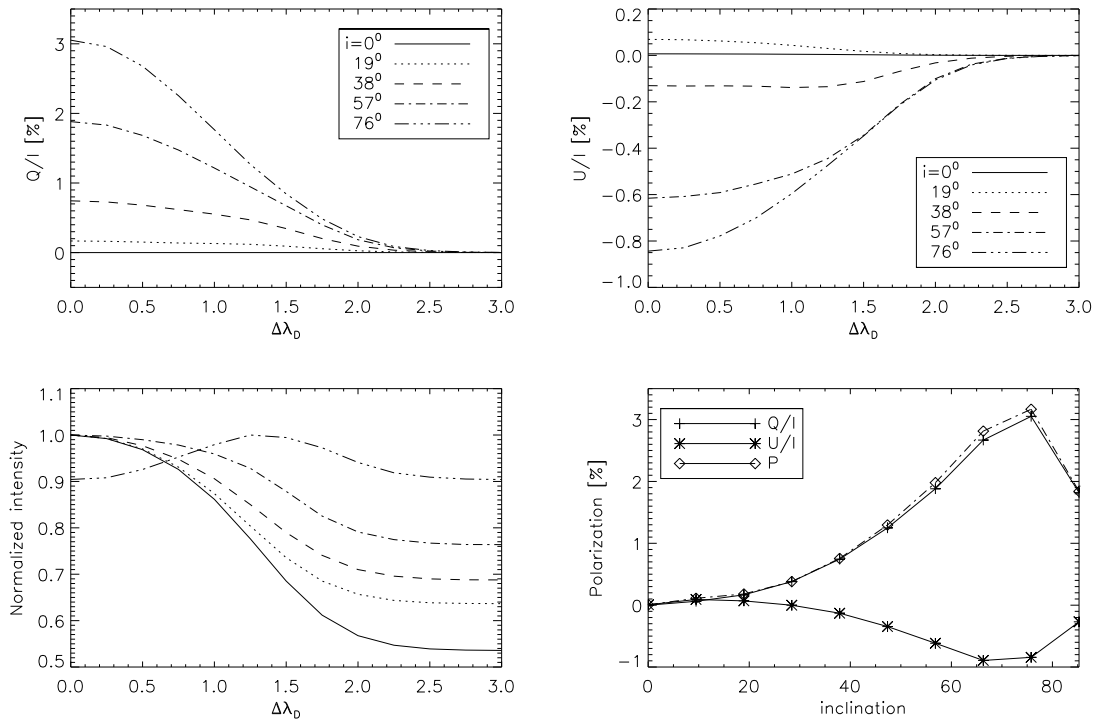
Rezultujući polarizacioni profili za različite vrednosti inklinacije diska su prikazani na slici 5.7. Očigledno je da disk unosi značajnu polarizaciju u sistem. U realnim slučajevima, za očekivati je da će nivo polarizacije u centru linije biti manji, zbog

efekata depolarizujućih efekata, kao što su sudarni procesi i sopstvena polarizabilnost linije koja je često manja od 1. Ponašanje ukupne polarizacije sa inklinacijom se slaže sa rezultatima iz Halonen et al. (2013): ukupna polarizacija dostiže maksimum na inklinaciji od oko  $75^\circ$ .

Nedvosmislena interpretacija ovih rezultata je verovatno nemoguća pošto su ovakva izračunavanja zavisna od modela. Rad na koji svakako ovde skrećemo pažnju je članak Poeckert & Marlborough (1978), koji se bavi detaljnom analizom zvezde  $\gamma$  Cas. Kada govorimo o našim rezultatima, verovatno najinteresantniji i najkorisniji rezultat je upravo zavisnost ukupne polarizacije od inklinacije (panel 4 slike 5.7), pošto je verovatno i dalje teško dobiti precizna posmatranja visoke spektralne rezolucije i polarimetrijske osetljivosti za ovakve zvezde. Ako bi disk bio obasjan tačkastim izvorom svetlosti, ukupna polarizacija bi se ponašala kao  $P \propto \sin^2 i / (2 + \sin^2 i)$ . Ova funkcija je monotono rastuća na intervalu  $(0, \pi)$ . Sa druge strane, naša izračunata zavisnost opada nakon  $i \approx 75^\circ$ , što je posledica sve veće i veće količine direktno propuštene svetlosti zvezde (a, opet, sve manjeg i manjeg doprinosa diska, čija se projekcija na ravan neba smanjuje), koja samim tim smanjuje ukupan udeo polarizovane svetlosti u sistemu.

$I$  profili spektralne linije se vide u emisiji. Samo za veliku inklinaciju vidimo nešto samo-apsorpcije u liniji, pošto u tom slučaju zračenje prolazi najveći put kroz disk. Napominjemo da su profili panelu 3 na slici 5.7 normalizovani u odnosu na maksimum intenziteta za datu inklinaciju, tako da to rezultuje prividno drugačijim nivoima kontinuuma.

$Q/I$  profili, koji dominiraju polarizacijom, izgledaju kao tipični profili u CRD aproksimaciji koji nastaju rasejanjem upadnog zračenja na objektu relativno male optičke debljine. Napominjemo ovde da su Poeckert & Marlborough (1978) takođe razmatrali i realistične  $H\alpha$  profile, sa mnogo više detalja nego što je navedeno ovde. Oni su takođe razmatrali uticaj atoma sa više nivoa kao i polja brzine. Bez obzira na to, i njihovi rezultati pokazuju da glavni doprinos polarizaciji daje Stokes-ova  $Q$  komponenta i da su profili uglavnom jednostavni, mada sa dva maksimuma, usled efekata polja brzine (vidi sledeći odeljak). Razlog zašto  $Q$  komponenta daje najveći doprinos polarizaciji je to što vršimo integraciju po azimutu, tako da se bitan



Slika 5.7:  $Q/I$  (gore levo) i  $U/I$  (gore desno) polarizovani profili za sistem diska i zvezde, gde pretpostavljamo da polarizacija nastaje isključivo rasejanjem na disku. Umesto polarnog ugla  $\theta$ , ovde koristimo inklinaciju  $i$  tako da je inklinacija nula ako je disk u ravni neba.

deo anizotropije po azimutu, koja utiče na Stokes-ovu  $U$  komponentu međusobno poništava. U slučaju prostorno razlučenih posmatranja, ovo, naravno, ne bi bio slučaj.

Naglašavamo da je kratka diskusija predstavljena u ovom odeljku samo jedan jednostavan primer primene našeg 2D koda za prenos zračenja u cilindričnim koordinatama. Napominjemo da je glavno odstupanje od realnosti odsustvo polja brzine. Da bismo ilustrovali važnost istih, u sledećem odeljku ćemo se baviti polarizovanim profilima spektralnih linija koji nastaju u diskovima koji Keplerovski rotiraju.

## 5.5 Efekti rotacije u samo-emitujućim Keplerovskim diskovima

Kao što smo naglasili u prethodnom odeljku (i u glavi 2), polja brzina su važan faktor u izračunavanju prenosa zračenja u spektralnim linijama u diskolikim objektima koje ovde razmatramo. Važno je odmah naglasiti da su polja brzine važna *samo ako* postoji gradijent brzine unutar objekta (vidi glavu 2). U suprotnom slučaju, ako se objekat kao ceo kreće ili rotira kao čvrsto telo, prenos zračenja se može tretirati kao u statičnom slučaju a izlazni spektar treba samo korigovati usled odgovarajućeg Doppler-ovog efekta nakon izračunavanja. Mi se ovde, pak, bavimo komplikovanijim slučajem. Gasoviti diskovi, koji uglavnom rotiraju oko centralnog tela (zvezda, crna rupa) se povinuju Keplerovom zakonu rotacije:

$$v(r) = \left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}, \quad (5.25)$$

gde je  $G$  gravitaciona konstantna a  $M$  je masa centralnog tela za koje pretpostavljamo da je gravitaciono dominantno. Za brzinu, naravno, uvek pretpostavljamo da je normalna na radijus vektor položaja (tj. pretpostavljamo kružne orbite). Od sada pa nadalje ćemo, kao referentnu veličinu, razmatrati neku karakterističnu brzinu rotacije na radijusu  $R_0$ . U tom slučaju:

$$v(r) = v_0 \left(\frac{R_0}{R_r}\right)^{1/2}. \quad (5.26)$$

Efekte polja brzina smo implementirali koristeći formalizam referentnog sistema posmatrača opisan u glavi 2. Ovaj pristup je relativno jednostavan za implementaciju ali može biti problematičan u slučaju kada su brzine mnogo veće od Doppler-ove brzine za datu liniju (videti Adam 1990; Papkalla 1995). U daljim izračunavanjima ćemo, shodno tome, ograničiti razmatranja na diskove koji rotiraju relativno sporo (do 10 Doppler-ovih brzina). Ove vrednosti su realistične za, na primer, cirkumstelarne diskove. Kako zvezde oko kojih se ovi diskovi nalaze rotiraju brzinama od oko 200 km/s, razumno je pretpostaviti da je karakteristična brzina rotacije diska tog reda veličine (ili manja). Kako su ovi diskovi takođe prožeti različitim turbulentnim

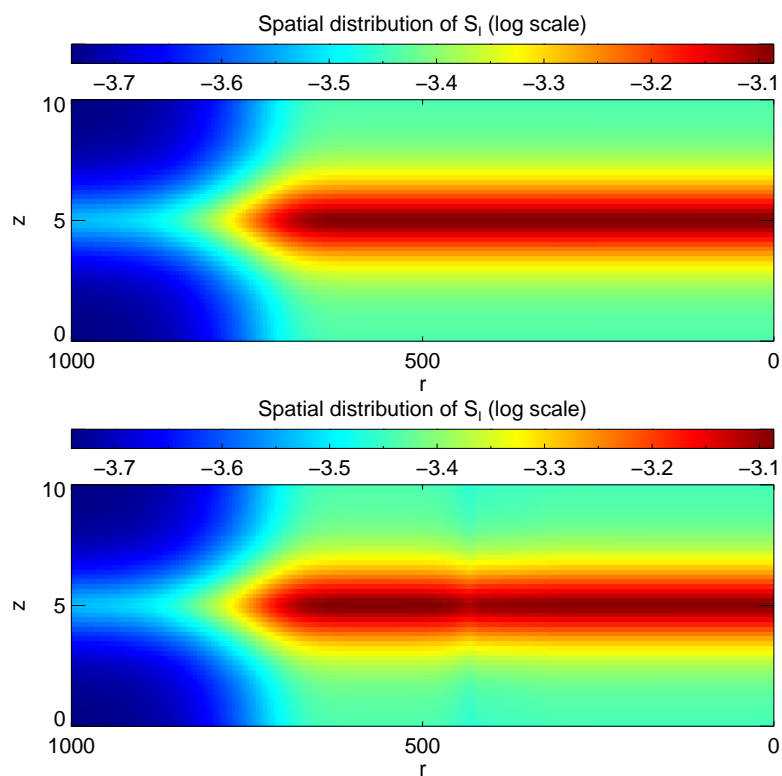
kretanjima, Doppler-ova širina linije raste, tako da je realno očekivati da dostigne i do 20 km/s. Treba imati u vidu da je glavni cilj ovog odeljka da *ilustruje* kako prisustvo polja brzine utiče na oblik spektralnih linija i polarizaciju u njima, a ne da se bavi modelovanjem realističnih gasovitih diskova.

Bitno je da odmah razumemo zbog čega polja brzine utiču na izlazni spektar: i) Prvo, gradijent brzine, ako je dovoljno veliki, može da utiče na raspodelu funkcije izvora unutar objekta, pošto fotoni mogu lakše da napuste objekat; ii) Formalno rešenje sada uključuje polja brzine odnosno rezultujući Doppler-ov efekat i izlazni intenzitet ima drugačiju raspodelu po frekvencijama. Za brzine koje nisu previše velike, kao što je slučaj ovde, očekujemo da drugi efekat dominira.

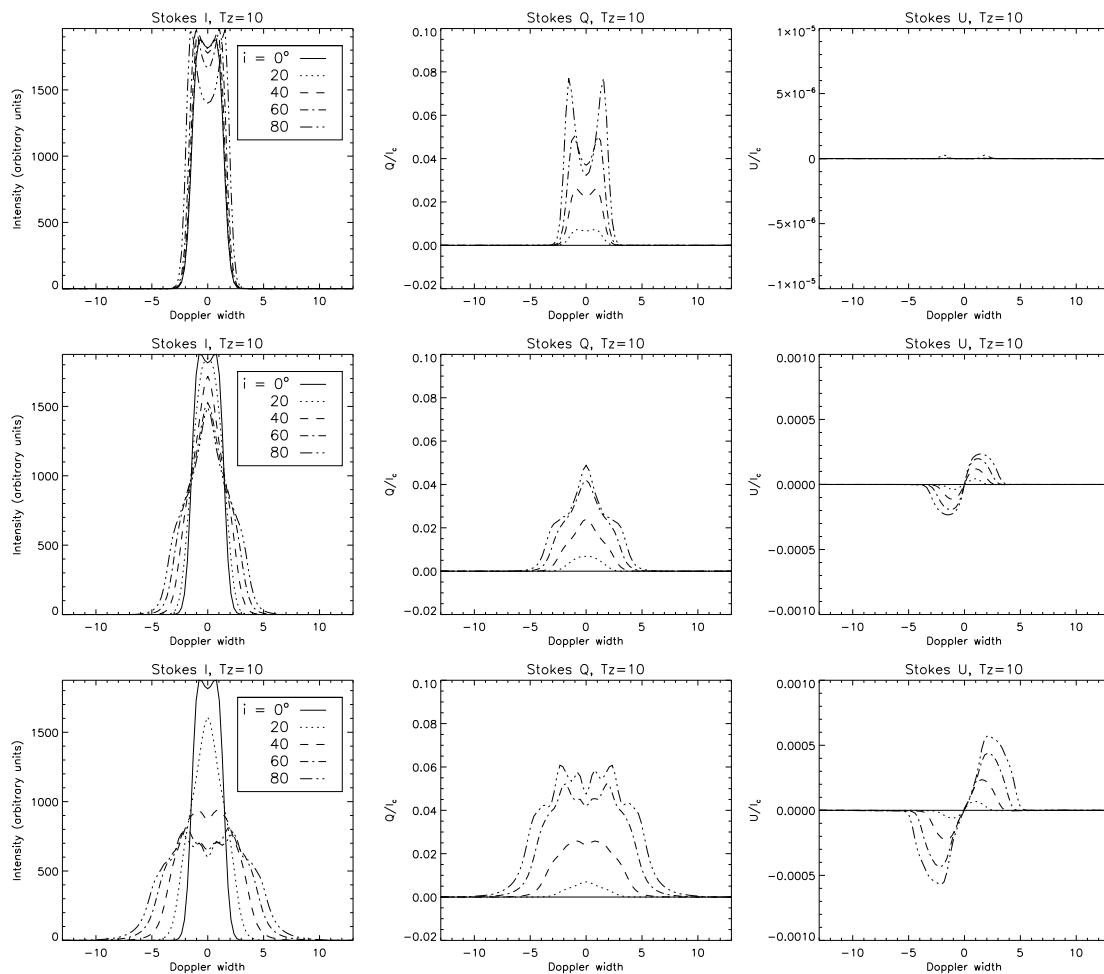
Da bismo ovo proverili prvo smo ispitali prvi efekat, tj. smanjenje funkcije izvora usled gubitka fotona koji nastaje zbog gradijenta brzine. Izračunali smo vrednosti funkcije izvora za statični slučaj, kao i za slučaj kada je  $v_0 = 10v_D$  i uporedili vrednosti  $\mathcal{S}_0$  (prva komponenta redukovane funkcije izvora). 2D raspodela funkcije izvora u ova dva slučaja je data na slici 5.8. Ovde smo koristili model koji ima srednju optičku debljinu duž  $z$  i  $r$  koordinata jednaku 10 odnosno  $10^3$ , respektivno. Disk je homogen i izotermalan sa Plankovom funkcijom jednakom jedan. Neprozračnost je takođe jednaka jedinici a koordinatna mreža ima logaritamski razmak sa finijom rezolucijom duž ivica objekta. Parametar  $\epsilon$  je jednak  $10^{-4}$ . Napominjemo da je, iako je optička debljina diska duž obe ose nezanemarljiva, disk i dalje *efektivno optički tanak*, tj. optička debljina je mnogo manja od dubine termalizacije za rasejanje u liniji ( $1/\epsilon$ ).

Rezultati pokazuju da su relativne razlike između ova dva slučaja manje od 5%. Shodno tome, zaključujemo da su razlike između rezultujućih spektara posledica pretežno Doppler-ovog pomaka zračenja usled rotacije diska. Napominjemo da, čak i samo usled ne-LTR efekata, oblici spektralnih linija imaju ne-trivijalne oblike (za detaljnu diskusiju o važnosti rasejanja u ovakvim objektima vidi Elitzur et al. 2012). Kao što se vidi sa slike 5.8, funkcija izvora značajno varira i sa  $z$  i sa  $r$  koordinatom. Prema tome, nakon uključenja polja brzina, očekujemo komplikovane spektralne profile sa više maksimuma kako što su oni prikazani u Elitzur et al. (2012). Sada ćemo diskutovati izgled spektralnih linija za različite brzine rotacije.





Slika 5.8: 2D raspodela  $\mathcal{S}_0$  komponente realne redukovane funkcije izvora u  $z, r$  ravni za ne-rotirajući disk (gore) i za cilindar koji rotira karakterističnom brzinom  $v_0 = 10v_D$  (dole). Funkcija izvora je data u jedinicama Plankove funkcije. Napominjemo da su razlike između dva slučaja praktično zanemarljive.



Slika 5.9: Izlazni profili spektralnih linija: intenzitet (levo),  $Q/I$  (sredina) i  $U/I$  (desno) za statičan disk (gore), disk koji rotira sa  $v_0 = 5v_D$  (sredina) i disk koji rotira sa  $v_0 = 10v_D$  (dole). Disk ima radialnu optičku debljinu 1000 i vertikalnu optičku debljinu 10.

Slika 5.9 (gornji panel) prikazuje rezultujuće spektralne linije za različite inklinacije. U statičnom slučaju, profili za različite inklinacije imaju slične oblike. Intenzitet u centru linije se smanjuje sa inklinacijom, pošto to zračenje stiže iz oblasti bližih površini, gde je funkcija izvora manja. Ovo je efekat sličan potamnjenju ka rubu koji je poznat fenomen iz fizike Sunca i zvezda. Kao što je i za očekivati,  $Q/I$  polarizacija se povećava sa inklinacijom. Ovo je, takođe poznat efekat: iz posmatranja i modelovanja polarizacije u Sunčevoj atmosferi znamo da se polarizacija rasejanjem drastično povećava blizu ruba. Profili imaju centralni “minimum” usled preplitanja efekata prostorne zavisnosti različitih komponenti polarizovane funkcije izvora. Očekujemo da je Stoksov parametar  $U$  jednak nuli, pošto je objekat potpuno osno simetričan (naglašavamo da je objekat samo-emitujući i da nema centralne zvezde koja bi pomračenjem poremetila osnu simetriju). Naša izračunavanja pokazuju jako malu polarizaciju komponente  $U$ , što zaista znači da je ista zanemarljiva u odnosu na komponente  $I$  i  $Q$ .

Sa srednjeg i donjeg panela slike 5.9 se vidi da Keplerovska rotacija ostavlja primetan trag na izgled izlaznih profila. Pre svega, profili linija u slučaju kada je inklinacija jednaka nuli ostaju isti što je i očekivano pošto se vrednosti funkcije izvora menjaju zanemarljivo malo, a za ovaj pravac posmatranja Doppler-ov efekat ne utiče na formiranje linije pošto se rotacija odigrava u  $xy$  ravni. Sa povećanjem inklinacije, profili postaju širi i na kraju možemo videti višestruke maksimume i komplikovane oblike koji su rezultat Doppler-ovog efekta, kombinovanog sa nehomogenostima u funkciji izvora usled uticaja ne-LTR. Uobičajeno tumačenje da će profili linija imati dva maksimuma usled rotacije nije validno u ovom slučaju. Samo za  $v_0 = 10v_D$  i veliku inklinaciju vidimo neke indikacije dvostrukih maksimuma, koji su i dalje kombinovani sa komplikovanim i netrivialnim oblikom linije.

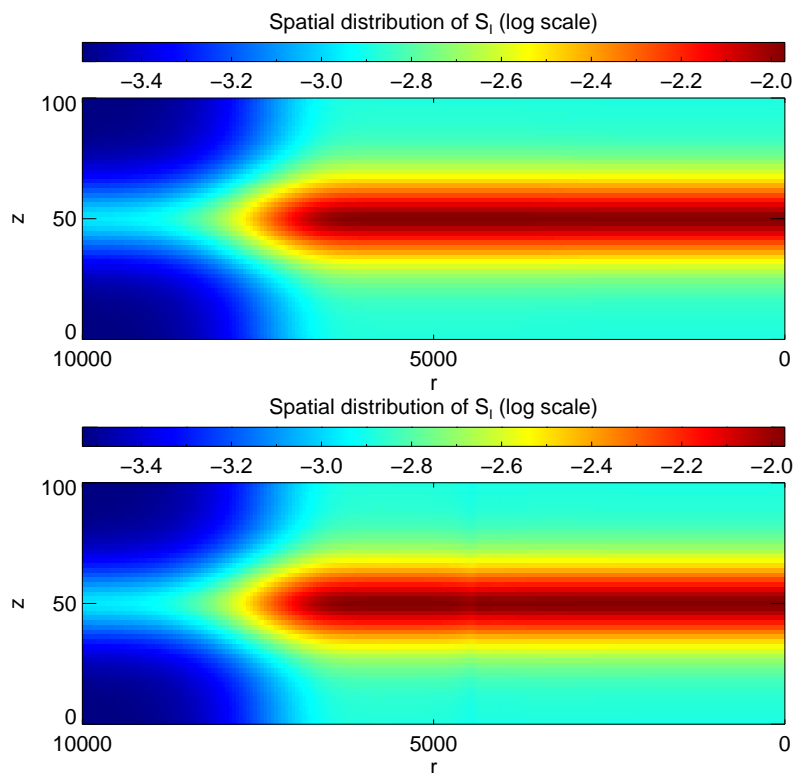
Slični efekti se vide u  $Q/I$  profilima. Isti postaju širi i takođe se vide različiti maksimumi, ali, interesantno, polarizacija u centru linije se ne menja sa brzinom rotacije. Oblike linija je teško interpretirati, pošto su isti rezultat ne-LTR efekata, prenosa zračenja u više dimenzija i polja brzina. Malo “cepanje” linija se može ponovo primetiti za velike inklinacije u slučaju  $v_0 = 10v_D$ . Najzanimljivija razlika između statičnog i rotirajućeg slučaja je Stoksova  $U$  komponenta koja je bitno ra-

zličita od nule. Ovo je takođe očekivan efekat koji su već diskutovali Vink et al. (2005). Sada ćemo malo detaljnije prodiskutovati o razlozima za ovaj efekat i objasniti njegovo nastajanje.

Setimo se da, u odsustvu magnetnih polja,  $Q/I$  i  $U/I$  daju informaciju o vertikalnoj i azimutalnoj anizotropiji zračenja, respektivno. U odsustvu potamnjenja ka rubu (ili posvetljenja), Stoksova  $Q$  komponenta bi bila jednaka nuli. Isto važi i za  $U$ , u slučaju kada je zračenje (lokalno) osno simetrično. Napominjemo da je, u slučaju osno-simetričnog diska *zračenje*, strogo govoreći i dalje asimetrično za svako  $r \neq 0$ . Stoksova  $U$  komponenta zavisi od azimutalne anizotropije. Pretpostavimo da se posmatrač nalazi na  $x$  osi i razmotrimo četiri elementarne površine na istom rastojanju od centra i sa azimutima  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  i  $2\pi$ , respektivno. U statičnom slučaju, nakon integracije po površini diska,  $U$  komponente koje dolaze sa prvog i trećeg elementa će se poništiti kao i one sa drugog i četvrtog. Sada, pak, razmotrimo disk koji rotira Keplerovski. Zračenje sa prvog u trećeg elementa ne trpi Doppler-ov efekat pa će se opet poništiti. Sa druge strane, zračenje sa elementa 2 trpi plavi pomak dok zračenje sa elementa 4 trpi crveni pomak. Rezultujuć i  $U$  profili se *neće* poništiti već će rezultovati dvostruko ispupčenim profilom koji možemo videti na donja dva panela slike 5.9. Ovi profili podsećaju na Stoksove  $V$  profile poznate iz fizike Sunca i, na neki način ih možemo razumeti na sličan način: kao superpoziciju dva profila suprotnog znaka, od kojih je jedan pomeren ka plavom a drugi ka crvenom delu spektra.

Kako bismo detaljnije ispitali efekte višestrukog rasejanja i prenosa zračenja izračunali smo i profile linija na osnovu istog, ali 10 puta neprozračnijeg diska. Dakle, optičke debljine diska po  $z$  odnosno po  $r$  su sada jednake 100, odnosno  $10^4$ . Sada očekujemo veći gradijent funkcije izvora unutar objekta i, samim tim, drugačije oblike spektralnih linija. Raspodela funkcije izvora unutar objekta je prikazana na slici 5.10. Napominjemo da sada vrednosti funkcije izvora variraju skoro za dva reda veličine i da su gradijenti iste unutar objekta zaista dosta veći. Razlika između statičnog i rotirajućeg modela je ponovo praktično nepostojeća.

Na slici 5.11 vidimo spektralne linije i polarizaciju koji su izračunati na osnovu ovog modela. U  $I$  profilima sada vidimo veći centralni minimum. Ovo je posledica

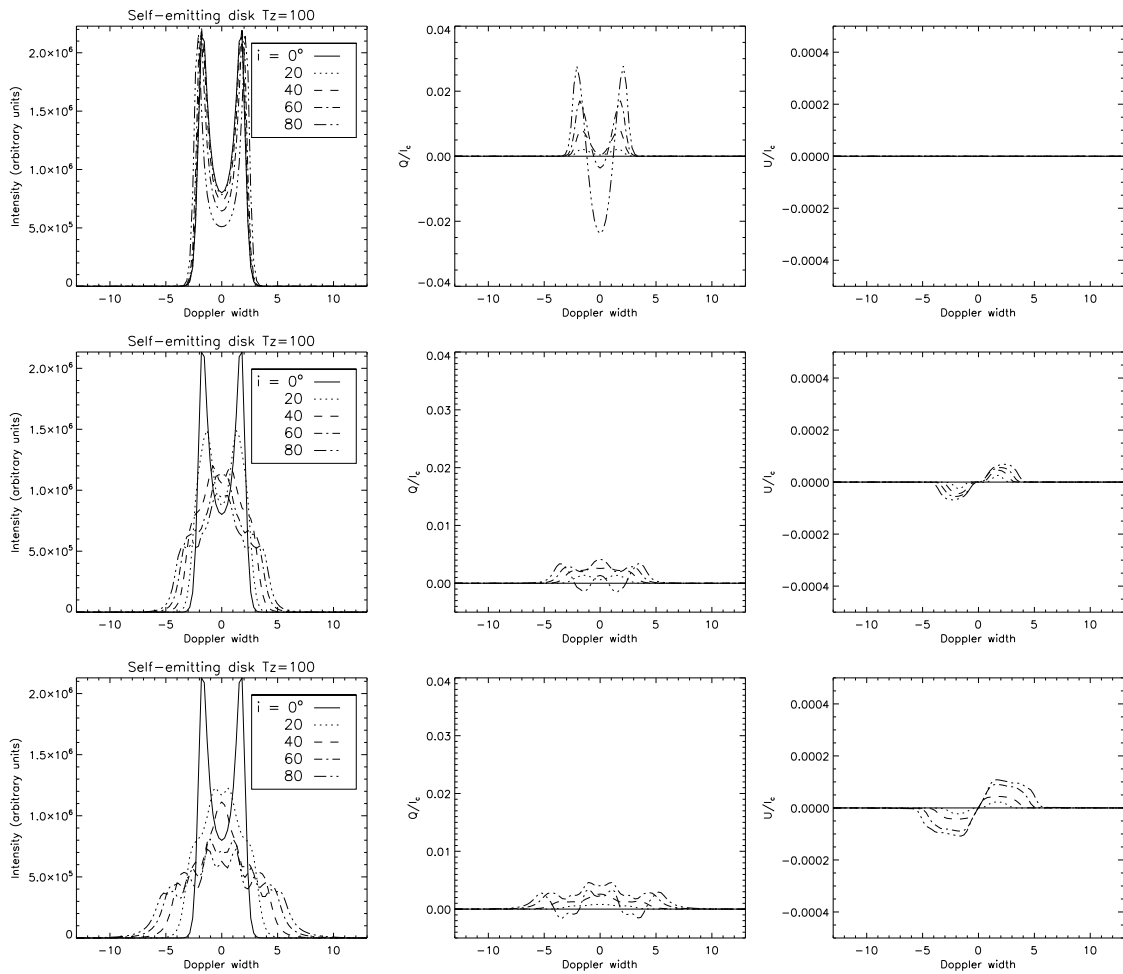


Slika 5.10: Raspodela funkcije izvora kao na slici 5.8, samo za 10 puta optički gušći disk.

činjenice da su krila linije (maksimumi) formirani na dubinama gde je funkcija izvora mnogo veća nego u prethodnom primeru.  $Q/I$  profili imaju sličan oblik kao u radu Faurobert (1988), za slučaj polubeskonačne atmosfere.

Nakon uključenja rotacije, profili su bitno drugačiji, što nije iznenađenje. Stoksovi  $I$  profili postaju širi, sa višestrukim maksimumima i kompleksnom strukturom. Iako je malo verovatno da bi varijacije u centru linije mogle biti posmatrane (spektralna rezolucija današnjih instrumenata za posmatranja zvezda nije dovoljna), detekciju širenja linija usled rotacije možemo očekivati. Veoma važna razlika između rotirajućeg i ne-rotirajućeg slučaja je tome što su profili u statičnom slučaju, bez izuzetka, emisijski profili sa “samo-apsorpcijom” u centru linije i dva dobro definisana maksimuma, usled ne-LTR efekata. Čak i pri najmanjim vrednostima  $v \sin i$ , samo-apsorpcija nestaje i profili izgledaju kao emisijski profili sa jednim maksimumom (koji, ipak, definitivno nema jednostavan Gausovski oblik) i finom strukturom koja bi, ipak, bila problematična za posmatranje.

Polarizacija u linijama je još interesantnija. Osim (očekivanog) širenja,  $Q/I$  pro-



Slika 5.11: Profili spektralnih linija kao na slici 5.9 ali za 10 puta optički gušći disk.

fili imaju drastično manji intenzitet u centru linije. Naša interpretacija ovog efekta je sledeća: Usled prisustva polja brzina, nakon prostorne integracije, “vidimo” dublje oblasti diska. Duboko u objektu, anizotropija je manja, što znači da “vidimo” manje vrednosti polarizovane funkcije izvora. Stoksova komponenta  $U$  je ponovo različita od nule i povećava se sa brzinom rotacije, usled istih efekata kao u prethodnom primeru. Ova polarizacija je, opet, dosta manja. Objašnjenje je sledeće: kako je disk optički deblji po  $r$  koordinati, zračenje je bliže osno-simetričnom slučaju, što, na kraju, rezultuje manjom vrednošću za  $U$  komponentu.

Kao zaključak ove diskusije želimo da napomenemo da, iako su ovi modeli vrlo jednostavni (homogeni, izotermalni, samo-emitujući), na njima se vrlo jasno vidi da kombinovani efekti rasejanja, višedimenzionog prenosa zračenja i polja brzina rezultuju ne samo širenjem linije već i приметnim razlikama u njenom obliku. Rotacija rezultuje ne-nultim vrednostima  $U$  komponente Stoksovog vektora, koja menja znak u centru linije. Dalje, za optički deblje diskove, brzina takođe smanjuje  $Q/I$  polarizaciju i prouzrokuje širenje profila. Ova dva efekta koji su retko, ako uopšte, opisani u literaturi se mogu pokazati kao vrlo korisna dijagnostička alatka za prostorno nerazlučena posmatranja diskova u doba modernih posmatranja sa velikim odnosom signala prema šumu.

## 5.6 Zaključci

U ovoj glavi smo predstavili metod za rešavanje ne-LTR problema prenosa polarizovanog zračenja u 2D cilindričnoj geometriji gde pretpostavljamo da su cilindri osno-simetrični. Formalno rešenje je implementirano preko metoda kratkih karakteristika drugog reda a spregnute jednačine prenosa zračenja i statističke ravnoteže su rešene Jacobi-jevom iteracijom sa Ng akceleracijom. Rešavanje polarizovanog problema je implementirano metodom redukovano formalizma. Pretpostavili smo kompletnu redistribuciju po frekvencijama, ali, sa adekvatnim izmenama, naš metod može da tretira i parcijalnu redistribuciju. Predstavili smo i dva načina za tretman graničnih uslova, zavisno od prirode upadnog zračenja.

Rezultujući kôd smo testirali upoređujući rezultate sa dobro poznatim rezulta-

tima iz 1D geometrije, i zaključili da naš metod uspešno reprodukuje raspodelu funkcije izvora i polarizaciju. Moguće primene metoda su ilustrovane na jednostavnim primerima cirkumstelarnih i samo-emitujućih diskova. U završnoj diskusiji bismo želili da izložimo prednosti i mane ovog pristupa.

Prednosti:

- Metod omogućava modelovanje osnosimetričnih objekata bez potrebe za korišćenjem 3D pravougljih mreža, i samim tim nudi veliku uštedu računarskog vremena i memorije. 2D cilindrična geometrija je mnogo realnija od 2D pravougla, pošto dozvoljava opis objekata koji su konačni u sve tri dimenzije. Omogućava jednostavno modelovanje diskova i prstenova koji bi inače zahtevali 3D modele sa mnogo diskretnih tačaka u prostoru. Takođe, osna simetrija je automatski zadovoljena.
- U praksi je moguće koristiti kôd bez paralelne implementacije, što dozvoljava jednostavno izvršavanje na PC računarima.
- Ukoliko je model moguće opisati sa nekoliko parametara moguće je čak implementirati inverzne procedure.

Mane:

- Interpolacija po pravcima je neophodna, što usporava formalno rešenje i smanjuje tačnost. Ovo je posebno važno za račun polarizacije pošto je ona osetljiva na anizotropiju polja zračenja koja bi, u ekstremnim slučajevima, mogla da bude neprecizno izračunata usled interpolacije po pravcima.
- Kratke karakteristike su komplikovanije nego u pravougljnoj geometriji. Proces interpolacije intenziteta nekad zahteva poznavanje intenziteta čiji pravac pripada različitom oktantu u odnosu na razmatrani pravac. Ovo stvara komplikacije u procesu dinamičke alokacije i de-alokacije intenziteta u računarskom kôdu.
- Uključivanje magnetnog polja je ograničeno na osno-simetrične slučajeve.



Imajući u vidu gore rečeno, zaključujemo da je ovaj pristup koristan u nekim slučajevima, na primer, pri modelovanju objekata za koje možemo pretpostaviti osnu simetriju. Bilo bi jako korisno uporediti ova izračunavanja sa rezultatima 3D koda u Dekartovim pravouglim koordinatama i analizirati ne samo razlike u tačnosti veći u računarskom vremenu. Ovo je naš glavni dugoročni cilj. Sledeća proširenja metoda će uključivati polja brzine u referentnom sistemu fluida. Ovo će omogućiti modelovanje objekata u kojima su polja brzine jaka, kao što su akrecioni diskovi.

## Glava 6

# Završne napomene i planovi za dalji rad

And the moon is swimming naked  
And the summer night is fragrant  
With a mighty expectation of relief

---

Leonard Cohen, 'Closing time'

U ovoj glavi ćemo ukratko sumirati rezultate predstavljene u tezi i pomenuti neke planove i pravce za dalji rad.

Ova teza se bavi numeričkim rešavanjem ne-LTR problema prenosa zračenja u spektralnim linijama na dvodimenzionim koordinatnim mrežama. U slučaju 2D pravouglanih mreža, predstavili smo modifikovani metod za formalno rešenje jednačine prenosa koji, umesto uobičajenog algoritma u tri tačke, koristi lokalni izvod funkcije izvora. Na osnovu ovog formalnog rešenja smo razvili dve nove iterativne sheme koje donose značajno ubrzanje u odnosu na Jacobi i Gauss-Seidel iterativne metode. Naša najbrža metoda, "Prolaz-po-prolaz" implicitna lambda iteracija, koristi ideju iteracionih faktora koju su uveli Atanacković-Vukmanović et al. (1997) i popravlja funkciju izvora u svakom prolasku kroz koordinatnu mrežu, dakle četiri puta po iteraciji. Ovo dovodi do ubrzanja od skoro red veličine (6-7 puta) u odnosu na Jacobi iteraciju. Metod takodje donosi bitno ubrzanje na mrežama sa periodičnim graničnim uslovima i skalira se nešto bolje sa prostornom rezolucijom u odnosu

na Jacobi iteraciju. Formalno rešenje je pogodno i za primenu na prenos polarizovanog zračenja. Razvoj novih metoda za ne-LTR prenos zračenja je jako bitan pošto je sprezanje gasa i zračenja u modernim simulacijama od velike važnosti a prenos zračenja i dalje “kasni” za MHD simulacijama u smislu potrebnog računarskog vremena.

Prikazali smo ubrzanje konvergencije iterativnih procedura na akademskim test problemima (glava 3). Ipak, ovo je tek početak istraživanja novog iterativnog metoda. Ovde navodimo neke od mogućih pravaca za dalji rad:

- Implementacija u slučaju kada neprozračnost objekta nije konstantna i testiranje metoda na realističnim modelima.
- Ispitivanje konvergencije i stabilnosti u problemima koji uključuju model atoma sa više nivoa.
- Generalizacija na 3D koordinatne sisteme i testiranje na problemima prenosa zračenja u kontinuumu sa rasejanjem. Ovo je ključni test primenljivosti metoda u modernim MHD simulacijama.
- Generalizacija na polarizovani prenos zračenja u formalizmu redukovano intenziteta (vidi dodatak A za nacrt metoda).

U drugom delu teze smo se bavili ne-LTR prenosom polarizovanog zračenja na cilindričnim koordinatnim mrežama. Polarizacija rasejanjem je uključena primenom formalizma redukovano intenziteta, kao u radu Anusha & Nagendra (2011a). Ova geometrija je potencijalno veoma korisna za računanje polarizacije rasejanjem u osnosimetričnim objektima kao što su akrecioni i cirkumstelarni diskovi. Pokazali smo primenu našeg metoda na veoma jednostavne modele cirkumstelarnog i samo-emitujućeg diska. Takodje smo pokazali da rotacija diska bitno utiče ne samo na intenzitet već i na polarizaciju u spektralnoj liniji.

Iako je pristup prenosu zračenja koji koristi cilindričnu geometriju veoma zanimljiv, on nije bez mana. Interpolacija po pravcima može biti problematična i vrlo je važno koristiti shemu koja je tačna i čuva monotonost i sprečava pojavu nerealističnih vrednosti. Ovo je veoma važno u slučajevima kada polje brzina utiče na

problem prenosa zračenja.

Planiramo da nastavimo primenu 2D ne-LTR prenosa u cilindričnim koordinatama. Konkretno, želimo da radimo na efektima prenosa zračenja u više dimenzija na intenzitet i polarizaciju u realističnim modelima cirkumstelarnih diskova oko *Be* zvezda. Za ovakvo istraživanje, implementacija modela atoma sa više nivoa je poželjna, ako ne i neophodna. Takođe planiramo da radimo na implementaciji referentnog sistema vezanog za fluid i da ispitamo polarizaciju u brzo-rotirajućim diskovima, kao što su oni oko kompaktnih objekata, kao, na primer u radu Papkalla (1995).

Prenos zračenja u više dimenzija je definitivno neophodan sastavni deo modelovanja astrofizičkih objekata. Neophodno ga je uključiti pošto jedino na taj način možemo pravilno da uzmemo u obzir sprezanje između gasa i zračenja. Korišćenjem ne-LTR izračunavanja, moguće je na samokonzistentan način predvideti izlazno zračenje na osnovu datog modela objekta. Ova numerička izračunavanja su veoma važna i korisna pošto je zračenje i dalje osnovni izvor za dobijanje informacija o uslovima u nebeskim telima.

Na kraju, naglasimo opet da prenos zračenja u više dimenzija ne može biti rutinski korišćen u rešavanju inverznog problema i da će moderne tehnike za dijagnostiku koje koriste spektropolarimetrijska posmatranja najverovatnije kombinovati detaljan prenos zračenja u više dimenzija i robusnu i jednostavnu inverziju koja koristi jednodimenzione modele.

# Dodatak A

## Numeričko rešavanje prenosa polarizovanog zračenja u formalizmu redukovanog intenziteta korišćenjem implicitne reprezentacije funkcije izvora

U glavi 4 smo problem formiranja polarizovane spektralne linije u ne-LTR definisali u realnom redukovanom formalizmu. U ovom formalizmu intenzitet i funkcija izvora su vektorski i funkcija izvora je *nezavisna* od pravca. Jednačina prenosa zračenja ima sledeći oblik:

$$\frac{d\hat{\mathcal{I}}^r(\hat{\Omega}, \nu)}{d\tau} = \phi(\nu)[\hat{\mathcal{I}}^r(\hat{\Omega}, \nu) - \hat{\mathcal{S}}^r]. \quad (\text{A.1})$$

Različite komponente redukovanog vektora su, u izrazu za funkciju izvora, spregnute realnom redukovanom matricom rasejanja,  $\hat{\Psi}^r$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}^r &= \epsilon \hat{\mathcal{B}}^r + (1 - \epsilon) \hat{\mathcal{J}}^r \\ &= \epsilon \hat{\mathcal{B}}^r + (1 - \epsilon) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} \hat{\Psi}^r(\hat{\Omega}) \hat{\mathcal{I}}^r(\hat{\Omega}, \nu). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

U glavi 4 smo, takođe objasnili da je za iterativno rešavanje spregnutih jednačina A.1 i A.2 moguće koristiti standardnu  $\Lambda$  iteraciju, ukoliko se počne od konvergirano rešenja skalarnog slučaja. Ipak, bilo bi korisno ubrzati ovu  $\Lambda$  iteraciju *za polarizovano zračenje* korišćenjem metoda predstavljenih u glavi 3. Podsetimo se da se novi, brzi metodi (simetrični Gauss-Seidel i “Prolaz-po-prolaz” implicitna lambda iteracija) oslanjaju na formalno rešenje u obliku:

$$I_L(\varphi, \nu) = I_U(\varphi, \nu)e^{(-\Delta)} + p'S_L + \sum_{i'} \sum_{j'} r_{i',j'} S_{i',j'}. \quad (\text{A.3})$$

Nakon integracije jednačine A.3 po pravcima i frekvencijama, dobijamo:

$$J_L = a + bS_L + \sum c_{i',j'} S_{i',j'}. \quad (\text{A.4})$$

Ova jednačina se zatim zamenjuje u jednačinu statističke ravnoteže i koristi za računanje nove funkcije izvora. Znatno ubrzanje konvergencije ostvarujemo popravljanjem funkcije izvora u *svakom* prolazu i korišćenjem iteracionih faktora koje dodajemo koeficijentu  $b$ .

Sada ćemo dati kratak nacrt slične sheme za polarizovano zračenje. Numeričko testiranje za ovu shemu tek sledi, tako da ćemo ovde dati jedan opšti slučaj. Prvo, setimo se da formalno rešenje za polarizovano zračenje u slučaju kada je donji nivo prelaza nepolarizovan ima sledeći oblik:

$$\hat{I}_L(\varphi, \nu) = \hat{I}_U(\varphi, \nu)e^{-\Delta} + p'\hat{S}_L + \sum_{i'} \sum_{j'} r_{i',j'} \hat{S}_{i',j'}. \quad (\text{A.5})$$

Zamenimo sada jednačinu A.5 u izraz za polarizovanu funkciju izvora A.2, i dobijamo, nakon sređivanja (izostavljamo index  $U$  konciznosti radi):

$$\hat{S}^r = \epsilon \hat{B}^r + (1 - \epsilon) \hat{A}^r + (1 - \epsilon) \hat{\mathcal{P}}^r \hat{S}^r. \quad (\text{A.6})$$

Ovde smo  $\hat{\mathcal{A}}^r$  definisali kao vektor koji sadrži sve ne-lokalne doprinose, dakle:

$$\hat{\mathcal{A}}^r = \int \phi(\nu) d\nu \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} \hat{\Psi}^r(\hat{\Omega}) \left[ \hat{\mathcal{I}}_U^r e^{-\Delta} + \sum_{i'} \sum_{j'} r_{i'j'} \hat{\mathcal{S}}_{i'j'}^r \right]. \quad (\text{A.7})$$

Dok je  $\hat{\mathcal{P}}^r$  matrica dimenzija  $6 \times 6$ :

$$\hat{\mathcal{P}}^r = \int \phi(\nu) \oint \frac{d\hat{\Omega}}{4\pi} p(\hat{\Omega}, \nu) \hat{\Psi}^r(\hat{\Omega}), \quad (\text{A.8})$$

gde smo eksplicitno napomenuli da koeficijent  $p$  zavisi od pravca i frekvencije.

Polarizovana funkcija izvora se sada računa na sledeći način:

$$\hat{\mathcal{S}}^r = (\hat{I} - (1 - \epsilon)\hat{\mathcal{P}}^r)^{-1}(\epsilon\hat{\mathcal{B}}^r + (1 - \epsilon)\hat{\mathcal{A}}^r). \quad (\text{A.9})$$

Ova popravka zahteva inverziju  $6 \times 6$  matrice u svakoj tački modela. Kako je naš pristup rešavanju ne-LTR problema *već* iterativan, možemo i matricu  $\hat{\mathcal{P}}^r$  aproksimirati njenom dijagonalom i onda dobijamo jednostavniji, aproksimativni, pristup za popravku  $i$ -te komponente polarizovane funkcije izvora ( $i = 1, 6$ ):

$$\mathcal{S}_i^r = \frac{\epsilon\mathcal{B}_i^r + (1 - \epsilon)\mathcal{A}_i^r}{1 - (1 - \epsilon)\mathcal{P}_{ii}} \quad (\text{A.10})$$

U ovakvoj definiciji vektora  $\hat{\mathcal{A}}^r$  i matrice  $\hat{\mathcal{P}}^r$  nismo definisali iteracione faktore. Isti se jednostavno mogu uključiti u proceduru takošto će se članovi oblika  $\hat{\mathcal{I}}_U^r e^{-\Delta}$ , koji ulaze u definiciju vektora  $\hat{\mathcal{A}}^r$  dodati, umesto vektoru  $\hat{\mathcal{A}}^r$ , koeficijentu  $p$  i time biti uračunati u matricu  $\hat{\mathcal{P}}^r$ .

Očekujemo da implementacija ovakve procedure za rešavanje polarizovanog ne-LTR problema bitno poveća brzinu konvergencije i svede broj iteracija potreban za rešavanja polarizovanog dela (ako se počne od poznatih vrednosti skalarnih intenziteta) na svega nekoliko iteracija. Bilo bi izuzetno zanimljivo i korisno testirati performanse iteracionog faktora u ovom slučaju. Treba imati u vidu, pak, da, dok je prva komponenta realne redukovane funkcije izvora uvek veća od nule, druge komponente nisu, i na velikim dubinama, gde je anizotropija velika, očekujemo da budu približne nuli. Shodno tome, testiranje iteracionih faktora planiramo da počnemo

korišćenjem istih samo za prvu komponentu realne redukovane funkcije izvora.

Takodje (vidi Trujillo Bueno 2003), ispostavlja se da je za rešavanje polarizovanog problema dovoljno ubrzavati konvergenciju samo prve, dominantne komponente intenziteta. U tom slučaju, popravka funkcije izvora bi izgledala ovako:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i^r &= \frac{\epsilon \mathcal{B}_i^r + (1 - \epsilon) \mathcal{A}_i^r}{1 - (1 - \epsilon)b}; i = 1 \\ \mathcal{S}_i^r &= \epsilon \mathcal{B}_i^r + (1 - \epsilon) \mathcal{J}^r; i \neq 1 \end{aligned} \tag{A.11}$$

gde je  $\mathcal{J}_i^r$  integral rasejanja za polarizovano zračenje u realnom redukovanom bazisu a  $b$  je “lokalni” koeficijent koji je u ovom slučaju definisan kao u 1D slučaju, sa opcionim uključivanjem iteracionog faktora. Iteracioni faktor se, u ovom slučaju računa samo iz prve komponente realnog redukovanog intenziteta i funkcije izvora.

Implementacija ovakvog ubrzanja za numeričko rešavanje ne-LTR problema za polarizovano zračenje ne bi trebala da bude komplikovana i u narednim radovima ćemo izvestiti o njenim performansama.



# Bibliografija

Adam, J. 1990, A&A, 240, 541

Anusha, L. S. & Nagendra, K. N. 2011a, ApJ, 726, 6

Anusha, L. S. & Nagendra, K. N. 2011b, ApJ, 738, 116

Anusha, L. S. & Nagendra, K. N. 2013, ApJ, 767, 108

Anusha, L. S., Nagendra, K. N., Bianda, M., et al. 2011a, ApJ, 737, 95

Anusha, L. S., Nagendra, K. N., & Paletou, F. 2011b, ApJ, 726, 96

Asensio Ramos, A. & Trujillo Bueno, J. 2006, in EAS Publications Series, Vol. 18, EAS Publications Series, ed. P. Stee, 25–48

Atanacković-Vukmanović, O. 1991, PhD thesis, Matematički Fakultet Univerziteta u Beogradu

Atanackovic-Vukmanovic, O. 2004, SerAJ, 169, 1

Atanacković-Vukmanović, O., Crivellari, L., & Simonneau, E. 1997, ApJ, 487, 735

Atanacković-Vukmanović, O. & Simonneau, E. 1994, JQSRT, 51, 525

Auer, L. 2003, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 288, Stellar Atmosphere Modeling, ed. I. Hubeny, D. Mihalas, & K. Werner, 3

Auer, L. H. & Mihalas, D. 1969, ApJ, 158, 641

Auer, L. H. & Paletou, F. 1994, A&A, 285, 675

Bommier, V. 1997a, A&A, 328, 706

- Bommier, V. 1997b, *A&A*, 328, 726
- Busche, J. R. & Hillier, D. J. 2000, *ApJ*, 531, 1071
- Cannon, C. J. 1973, *ApJ*, 185, 621
- Cannon, C. J. 2012, *The Transfer of Spectral Line Radiation* (Cambridge University Press)
- Carlson, B. G. 1963, in *Methods in Computational Physics, Vol. 1, Statistical Physics*, ed. B. Adler, S. Fernbach, & M. Rotenberg (New York: Academic Press), 1
- Chandrasekhar, S. 1950, *Radiative transfer*. (Dover Publications)
- Chandrasekhar, S. 1960, *Radiative transfer* (Dover Publications)
- Crivellari, L., Cardona, O., & Simonneau, E. 2002, *Astrophysics*, 45, 480
- Davis, S. W., Stone, J. M., & Jiang, Y.-F. 2012, *ApJS*, 199, 9
- de la Cruz Rodríguez, J. & Piskunov, N. 2013, *ApJ*, 764, 33
- del Toro Iniesta, J. C. 2007, *Introduction to Spectropolarimetry* (Cambridge University Press)
- Elitzur, M., Asensio Ramos, A., & Ceccarelli, C. 2012, *MNRAS*, 422, 1394
- Fabiani Bendicho, P. & Trujillo-Bueno, J. 1999, in *Astrophysics and Space Science Library, Vol. 243, Polarization*, ed. K. N. Nagendra & J. O. Stenflo, 219–230
- Fabiani Bendicho, P., Trujillo Bueno, J., & Auer, L. 1997, *A&A*, 324, 161
- Faurobert, M. 1987, *A&A*, 178, 269
- Faurobert, M. 1988, *A&A*, 194, 268
- Faurobert, M., Milić, I., & Atanacković, O. 2013, *A&A*, 559, A68
- Faurobert-Scholl, M. 1991, *A&A*, 246, 469

- Faurobert-Scholl, M. & Frisch, H. 1989, *A&A*, 219, 338
- Faurobert-Scholl, M., Frisch, H., & Nagendra, K. N. 1997, *A&A*, 322, 896
- Feautrier, P. 1964, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 258, 3189
- Frisch, H. 2007, *A&A*, 476, 665
- Fritsch, F. N. & Butland, J. 1984, *SIAM J. Sci. Stst. Computing*, 5, 001
- Gouttebroze, P. 2005, *A&A*, 434, 1165
- Gray, D. F. 2005, *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres* (Cambridge University Press)
- Halonen, R. J., Mackay, F. E., & Jones, C. E. 2013, *ApJS*, 204, 11
- Hayek, W., Asplund, M., Carlsson, M., et al. 2010, *A&A*, 517, A49
- Hubeny, I. 2003, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 288, *Stellar Atmosphere Modeling*, ed. I. Hubeny, D. Mihalas, & K. Werner, 17
- Hummer, D. G. 1962, *MNRAS*, 125, 21
- Ibgui, L., Hubeny, I., Lanz, T., & Stehlé, C. 2013, *A&A*, 549, A126
- Kalkofen, W. 1984, *Methods in radiative transfer* (Cambridge University Press)
- Kalkofen, W. 1987, *Numerical radiative transfer* (Cambridge University Press)
- Kunasz, P. & Auer, L. H. 1988, *JQSRT*, 39, 67
- Kunasz, P. B. & Olson, G. L. 1988, *JQSRT*, 39, 1
- Kuzmanovska-Barandovska, O. & Atanacković, O. 2010, *JQSRT*, 111, 708
- Landi Degl'Innocenti, E. 1984, *Solar Physics*, 91, 1
- Landi Degl'Innocenti, E. & Landolfi, M., eds. 2004, *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 307, *Polarization in Spectral Lines*
- Léger, L., Chevallier, L., & Paletou, F. 2007, *A&A*, 470, 1

- Manso Sainz, R. & Trujillo-Bueno, J. 1999, in *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 243, Polarization, ed. K. N. Nagendra & J. O. Stenflo, 143–156
- Manso Sainz, R. & Trujillo Bueno, J. 2011, *ApJ*, 743, 12
- Mihalas, D. 1978, *Stellar atmospheres /2nd edition/* (W.H.Freeman & Co Ltd)
- Mihalas, D., Auer, L. H., & Mihalas, B. R. 1978, *ApJ*, 220, 1001
- Milić, I. 2013, *A&A*, 555, A130
- Ng, K.-C. 1974, *JCP*, 61, 2680
- Olson, G. L., Auer, L. H., & Buchler, J. R. 1986, *JQSRT*, 35, 431
- Olson, G. L. & Kunasz, P. B. 1987, *JQSRT*, 38, 325
- Papkalla, R. 1995, *A&A*, 295, 551
- Poeckert, R. & Marlborough, J. M. 1978, *ApJ*, 220, 940
- Rutten, R. J. 2003, *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*
- Rybicki, G. B. 1972, in *Line Formation in the Presence of Magnetic Fields*, 145
- Rybicki, G. B. & Hummer, D. G. 1991, *A&A*, 245, 171
- Saad, Y. 2003, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd edn. (Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics)
- Sampoorna, M. & Trujillo Bueno, J. 2010, *ApJ*, 712, 1331
- Scharmer, G. B. 1981, *ApJ*, 249, 720
- Schuster, A. 1905, *ApJ*, 21, 1
- Schwarzschild, K. 1906, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Klasse*, 195, p. 41-53, 195, 41
- Simonneau, E., Cardona, O., & Crivellari, L. 2012, *Astrophysics*, 55, 110
- Simonneau, E. & Crivellari, L. 1993, *ApJ*, 409, 830

- Steiner, O. 1991, *A&A*, 242, 290
- Stenflo, J., ed. 1994, *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 189, *Solar Magnetic Fields: Polarized Radiation Diagnostics*
- Stenflo, J. O. 2013, *Astronomy & Astrophysics Reviews*, 21, 66
- Stenholm, L. G. 1977, *A&A*, 54, 577
- Thomas, R. N. 1957, *ApJ*, 125, 260
- Trujillo Bueno, J. 2003, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 288, *Stellar Atmosphere Modeling*, ed. I. Hubeny, D. Mihalas, & K. Werner, 551
- Trujillo Bueno, J. & Fabiani Bendicho, P. 1995, *ApJ*, 455, 646
- Trujillo-Bueno, J., Moreno-Insertis, F., & Sánchez, F., eds. 2002, *Astrophysical spectropolarimetry* (Cambridge University Press)
- Trujillo Bueno, J., Shchukina, N., & Asensio Ramos, A. 2004, *Nature*, 430, 326
- Uitenbroek, H. 2001, *ApJ*, 557, 389
- Štěpán, J. & Trujillo Bueno, J. 2013, *A&A*, 557, A143
- van Noort, M. 2012, *AA*, 548, A5
- van Noort, M., Hubeny, I., & Lanz, T. 2002, *ApJ*, 568, 1066
- Vink, J. S., Harries, T. J., & Drew, J. E. 2005, *A&A*, 430, 213
- Vitas, N. 2011, PhD thesis, Utrecht University
- Wali, K. C. 2001, *A quest for perspectives : selected works of S. Chandrasekhar: with commentary* (World Scientific Publishing Company)

# Biografija kandidata

Ivan Milić je rođen 10. januara 1985. godine u Valjevu, od oca Zorana i majke Zorice. 2004 godine je završio Valjevsku Gimnaziju i upisao Matematički Fakultet Univerziteta u Beogradu, smer astrofizika, gde je diplomirao 2010. godine sa prosekom 8.94. Iste godine je upisao doktorske studije astrofizike pod rukovodstvom Profesorke Olge Atanacković. U prvoj polovini 2011. godine je proveo tri meseca na praksi na Univerzitetu u Nici, gde je radio sa Profesorkom Marianne Faurobert, koja je ko-mentor na njegovoj doktorskoj tezi od decembra 2011. godine. Od februara 2011. godine radi na Astronomskoj Opservatoriji, prvo kao istraživač-pripravnik, a zatim i kao istraživač-saradnik. Tokom poslednje četiri godine u Nici je proveo ukupno 15 meseci, radeći na dijagnostici Sunčevih magnetnih polja i prenosu zračenja u više dimenzija.

Glavna interesovanja su mu numerički prenos zračenja, Hanle efekat, inverzni problemi u spektropolarimetriji i fizika Sunca. Objavio je 5 radova u međunarodnim časopisima sa recenzijom, od kojih četiri spadaju u grupu vrhunskih međunarodnih časopisa (M21). Učestvovao je na više međunarodnih konferencija i aktivno učestvuje u radionicama i konferencijama koje organizuje COST akcija 1104: "Polarization as a tool to study Solar system and beyond." Od 2010 do 2013 godine je bio rukovodilac seminara astronomije u IS Petnica, gde je i sada aktivan kao stručni saradnik. Autor je nekoliko naučno popularnih tekstova i održao je više naučno popularnih predavanja u Domu Omladine Beograda u Studentskom Kulturnom Centru.

Od jeseni 2014. godine će provesti dve godine na Max-Planck Institutu za istraživanje Sunčevog sistema u Getingenu, kao postdoktorant.

Ima sestru Milicu, studenta doktorskih studija antropologije na Univerzitetu u Minesoti.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а \_\_\_\_\_ Ivan Milić \_\_\_\_\_

број уписа \_\_\_\_\_

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„Убрзање метода за решавање проблема преноса polarizovanog зрачења у више  
dimenzija i njihova primena“

---

---

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 03. 05. 2014



---

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Ivan Milić

Број уписа \_\_\_\_\_

Студијски програм Astronomija/Astrofizika

Наслов рада „Убрзање метода за решавање проблема преноса polarizovanog  
зрачења у више димензија и њихова примена“

Ментор Prof. dr Olga Atanacković

Потписани *Ivan Milić*

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 03.05.2014.

*Milan Milić*



Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Ubrzanje metoda za rešavanje problema prenosa polarizovanog zračenja u više dimenzija i njihova primena“

---

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, \_\_\_\_\_ 03.05.2014. \_\_\_\_\_

Потпис докторанда

