



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA



Aleksandar Košarac

**RAZVOJ MAŠINA ALATKI PRIMJENOM
VIRTUALNIH MODELA SA POSEBNIM OSVRTOM
NA DINAMIČKO PONAŠANJE SKLOPA GLAVNOG
VRETENA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2016.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска публикација
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација
Аутор, АУ:	Мр Александар Кошарац, дипл.инж.
Ментор, МН:	Проф. др Милан Зељковић
Наслов рада, НР:	Развој машина алатки примјеном виртуалних модела са посебним освртом на динамичко понашање склопа главног вретена
Језик публикације, ЈП:	Српски
Језик извода, ЈИ:	Српски/Енглески
Земља публикавања, ЗП:	Република Србија
Уже географско подручје, УГП:	АП Војводина
Година, ГО:	2016
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	7/141/38/13/116/0/3
Научна област, НО:	Машинско инжењерство
Научна дисциплина, НД:	Производно инжењерство
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Машина алатка, главно вретено, виртуална машина алатка, вибрације, метода коначних елемената, модална анализа
УДК	
Чува се, ЧУ:	Библиотека Факултета техничких наука
Важна напомена, ВН:	
Извод, ИЗ:	<p>У првом, уводном поглављу представљени су циљеви истраживања, хипотезе и примјењена методологија истраживања. У овом поглављу дат је приказ досадашњих истраживања у сљедећим областима: пројектовање виртуалних машина алатки, савремене методе моделовања и симулације у идентификацији понашања машина алатки примјеном метода коначних елемената, те примјена редукција реда модела у пројектовању машина алатки.</p> <p>У другом поглављу дате су теоријске основе методе редукције реда модела. При анализи система који имају велики број чворова (под велики број чворова се подразумјева 10^5 - 10^6 чворова, па и више) вријеме потребно за извођење симулација, али и потребне карактеристике рачунара на ком се изводи анализа могу представљати значајан проблем, поготово првим фазама процеса пројектовања када су честе измјене пројектоване структуре.</p>



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Технике редукације реда, односно редукације броја степени слободe МКЕ модела, подразумевају да се системи добијени примјеном метода коначних елемената замјене редукованим системима, (системима првог реда), који са довољном тачношћу описује динамичко понашање посматраног система. Након што се систем преведе у простор стања, даље се врши модална редукација, гдје се на бази утврђених критеријума селектује потребан број модова. У овом поглављу за рангирање модова користе се два критеријума: појачање у максимуму и појачање на нултој фреквенцији, односно критеријум балансираних редукација.

У оквиру трећег поглавља описана је процедура извођења експерименталне модалне анализе и утврђивања модалних параметара, релативног коефицијента пригушења, сопствених фреквенција осциловања, модалне масе, модалне крутости, вискозног пригушења и облика осциловања. Приказани су принципи аквизиције података при извођењу експерименталне модалне анализе и дат приказ кориштене аквизиционе и мјерне опреме. На примјеру греде константног кружног попречног пресека приказан је аналитички начин утврђивања модалних параметара на основу Ојлер – Бернулијеве теорије греда, те модална анализа у временском домену примјеном ARX директне методе утврђивања модалних параметара, те дато поређење добијених резултата.

У четвртном поглављу описана је проблематика аналитичког одређивања преносне функције на примјеру греде промјењивог кружног попречног пресека (тростепеног цилиндра).

У петом поглављу анализира се динамичко понашање склопа главног вретена модула радне јединице (јединице пиноле), за које су одређени математички модел динамичког

понашања, те потом извршена нумеричка и експериментална верификација добијених резултата.

У шестом поглављу приказано је кориштење нумеричких и експерименталних метода у циљу утврђивања сопствених фреквенција и облика осциловања,

као и модалних параметара (модалне масе, модалне крутости и модалног пригушења) различитих компоненти хоризонталног обрадног центра за глодање ФМ38.

У седмом поглављу дата су закључна разматрања, критички осврт на извршена истраживања и правци и смјернице за даља истраживања.

Датум прихватања теме, ДП:		25.11.2013.	
Датум одбране, ДО:			
Чланови комисије,	Председник:	Др Љубодраг Тановић, редовни професор	
	Члан:	Др Слободан Табаковић, ванредни професор	
	Члан:	Др Ђорђе Чича, ванредни професор	
	Члан:	Др Александар Живковић, доцент	Потпис ментора
	Члан, ментор:	Др Милан Зељковић, редовни професор	



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographic publication
Type of record, TR :	Textual material, printed
Contents code, CC :	Doctoral dissertation
Author, AU :	Mr Aleksandar Košarac, M.E.
Mentor, MN :	Professor dr Milan Zeljković
Title, TI :	Development of machine tool by applying virtual models with special emphasis on main spindle dynamic behaviour
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian/English
Country of publication, CP :	Republic of Serbia
Locality of publication, LP :	AP Vojvodina
Publication year, PY :	2016
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	7/141/38/13/116/0/3
Scientific field, SF :	Mechanical Engineering
Scientific discipline, SD :	Production Engineering
Subject/Key words, S/KW :	Machine tools, main spindle, virtual machine tools, vibrations, finite element method, modal analysis
UC	
Holding data, HD :	The Library of the Faculty of Technical Sciences
Note, N :	
Abstract, AB :	<p>The first introduction chapter presents research objectives, hypotheses and applied methodology. This chapter provides an overview of current research in the following areas: design of virtual machine tools, modern methods of modelling and simulation in identifying the behaviour of machine tools using the finite element method, as well as the use of model order reduction in the design of machine tools.</p> <p>The second chapter provides a theoretical bases for model order reduction. In analysing systems that have a large number of nodes (a large number of nodes alludes to 10^5 - 10^6 nodes, or more) the following can present significant problem: time required to perform the simulation and necessary characteristics of the computer on which the analysis is performed, especially in the early stages of the process design when changes of designed structure are frequent.</p>



KEY WORDS DOCUMENTATION

Model order reduction techniques, i.e. reduction of the number of degrees of FEM model freedom, imply that the systems obtained by using the finite element method are replaced by the one (the first order system) that describes the dynamic behaviour of the observed system with sufficient accuracy. Once the system is converted to state space, modal reduction continues whereby on the basis of established criteria required number of modes are selected. In this chapter the following criteria are used for ranking modes: DC gain / peak gain, and the balanced reduction.

Third chapter shows procedures of performing experimental modal analysis and determining the following parameters: relative damping ratio, natural frequencies, modal mass and stiffness and viscous damping coefficient. The principles of data acquisition and equipment used for experimental modal analysis are shown. Analytical model of determining modal parameters based on Euler - Bernoulli beam theory is shown on the sample of constant cross-section beam. For the same model, modal analysis in the time domain using the ARX direct method of determining the modal parameters is performed. The results obtained thereafter, using both methods, are compared.

The fourth chapter describes the analytical determination of the transfer function in the case of beam with changing cross-section (three-stage cylinder).

The fifth chapter analyses the dynamic behaviour of the main spindle assembly of experimental model. Mathematical model is made, and then gained results are verified numerically, by FEM analysis and experimentally by experimental modal analysis.

Sixth chapter shows the usage of different numerical and experimental methods in order to determine the natural frequencies, mode shapes, modal mass and stiffness and damping ratio of the various components of the horizontal machining center FM38.

The seventh chapter contains the concluding observation, critical review of research that was carried out and directions for further researches.

Accepted by the Scientific Board on, ASB :	25.11.2013.	
Defended on, DE :		
Defended Board, DB	President:	Dr Ljubodrag Tanović, Full Professor
	Member:	Dr Slobodan Tabaković, Associate Professor
	Member:	Dr Đorđe Čiča, Associate Professor
	Member:	Dr Aleksandar Živković, Assistant Professor
	Member, mentor:	Dr Milan Zeljković, Full Professor
		Mentor's sign

SADRŽAJ

SADRŽAJ SLIKA	III
SADRŽAJ TABELA	VIII
PREGLED KORIŠĆENIH OZNAKA I SKRAĆENICA.....	IX
1 UVOD.....	1
1.1 PREDMET I CILJ ISTRAŽIVANJA	1
1.2 DEFINISANJE PROBLEMA I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA	2
1.3 PRIKAZ STANJA U OBLASTI PROJEKTOVANJA I ISPITIVANJA SAVREMENIH MAŠINA ALATKI	3
1.3.1 Virtualne mašine alatke	4
1.3.2 Savremene metode modelovanja i simulacije mašina alatki.....	6
1.4 STRUKTURA DISERTACIJE	12
2 REDUKCIJA REDA MODELA KONAČNIH ELEMENATA	14
2.1 UVODNE NAPOMENE	14
2.2 TEORIJSKE OSNOVE PROSTORA STANJA.....	17
2.3 TEORIJSKE OSNOVE MODALNE ANALIZE	21
2.3.1 Normalizovane matrice.....	21
2.3.2 Definisane jednačina kretanja u generalisanim koordinatama.....	27
2.4 ODREĐIVANJE MODELA PROSTORA STANJA SLOBODNO OSLONJENE GREDE KRUŽNOG POPREČNOG PRESJEKA.....	30
2.4.1 Određivanje modalnih parametara potrebnih za prelazak u model prostora stanja ..	30
2.4.2 Određivanje modela prostora stanja primjenom Matlab-a.....	33
2.4.3 Amplitudno-frekventna karakteristika prenosne funkcije neredukovanog modela i modela redukovanog na osnovu dc gain i peak gain kriterijuma.....	35
2.4.4 Redukcija modela metodom balansiranih redukcija	43
3 MODALNA ANALIZA VIBRACIJA NA KONSTRUKCIJI.....	55
3.1 UVODNA RAZMATRANJA	55
3.2 SISTEMATIZACIJA METODA IDENTIFIKACIJE DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA SISTEMA.....	56
3.3 MJERNI SISTEM ZA EKSPERIMENTALNO IDENTIFIKOVANJE MODALNIH PARAMETARA	59
3.4 IDENTIFIKACIJA MODALNIH PARAMETARA U FREKVENTNOM DOMENU PRIMJENOM METODA SELEKTOVANJA VRHOVA (PEAK PICKING).....	60
3.4.1 Eksperimentalno određivanje glavnih oblika oscilovanja.....	64
3.5 IDENTIFIKACIJA MODALNIH PARAMETARA U VREMENSKOM DOMENU PRIMJENOM ARX MODELA.....	68
3.6 POREĐENJE FRF PRENOSNIH FUNKCIJA ODREĐENIH ANALITIČKI I EKSPERIMENTALNIM PUTEM PRI POPREČNIM VIBRACIJAMA GREDE	70
3.7 MODELOVANJE PRIGUŠENJA	74
3.8 UPOREDNI PRIKAZ DIREKTNE I UNAKRSNE FRF DOBIJENE ANALITIČKI I IZVOĐENJEM EMA	76
4 POZICIONO SPREZANJE.....	78
4.1 UVODNA RAZMATRANJA	78
4.2 ODREĐIVANJE PRENOSNE FUNKCIJE SISTEMA SPREZANJEM PRENOSNIH FUNKCIJA PODSISTEMA	79
4.2.1 Sprezanje elemenata krutim vezama.....	79
4.2.2 Sprezanje elemenata elastičnim vezama.....	82

4.2.3 Sprezanje elemenata čiji spojevi imaju karakteristike elastičnosti i viskoznog prigušenja	82
4.3 ODREĐIVANJE PRENOSNE FUNKCIJE SA UTICAJEM ROTACIONIH STEPENI SLOBODE.....	83
4.4 ODREĐIVANJE PRENOSNE FUNKCIJE PRI TRANSVERZALNIM VIBRACIJAMA KONTINUALNIH SISTEMA.....	87
4.4.1 Prenosna funkcija konzole pri transversalnim vibracijama	89
4.4.2 Prenosna funkcija slobodno oslonjene grede pri transversalnim vibracijama	90
4.4.3 Ugaona FRF konzole.....	92
4.4.4 Ugaona FRF slobodno oslonjene grede	94
4.5 ANALITIČKO ODREĐIVANJE FUNKCIJE FREKVENTNOG ODZIVA GREDE.....	97
4.6 VERIFIKACJA ANALITIČKI ODREĐENIH PRENOSNIH FUNKCIJA	100
4.7 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA.....	101
5 ANALIZA DINAMIČKOG PONAŠANJA SKLOPA GLAVNOG VRETENA MAŠINE ALATKE	103
5.1 UVOD	103
5.2 DINAMIČKO PONAŠANJE SLOBODNO OSLOJENOG GLAVNOG VRETENA 108	
5.2.1 Analitičko određivanje dinamičkih karakteristika slobodno oslonjenog glavnog vretena.....	108
5.2.2 Numeričko određivanje dinamičkih karakteristika slobodno oslonjenog glavnog vretena.....	110
5.2.3 Poređenje rezultata modalne analize slobodno oslonjenog glavnog vretena.....	111
5.2.4 Analitičko određivanje dinamičkih karakteristika slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena.....	112
5.3 DINAMIČKO PONAŠANJE ULEŽIŠTENOG GLAVNOG VRETENA	114
5.3.1 Analitičko određivanje dinamičkih karakteristika uležištenog glavnog vretena	114
5.3.2 Numeričko određivanje dinamičkih karakteristika uležištenog glavnog vretena	117
5.3.3 Poređenje rezultata modalne analize uležištenog glavnog vretena.....	118
6 MODALNA ANALIZA HORIZONTALNOG OBRADNOG CENTRA	119
6.1 UVODNA RAZMATRANJA	119
6.2 NUMERIČKO - EKSPERIMENTALNA MODALNA ANALIZA.....	121
6.2.1 Oprema korišćena pri izvođenju eksperimentalne modalne analize	121
6.2.2 Numeričko određivanje i eksperimentalna verifikacija modalnih parametara strukture obradnog centra	121
6.2.3 Modelovanje mjesta spojeva primjenom metoda konačnih elemenata.....	127
6.2.4 Određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja sklopa glavnog vretena	129
6.2.5 Određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja i prenosne funkcije alata.....	130
7 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA	133

SADRŽAJ SLIKA

Slika 1.1 Poređenje tradicionalnog načina projektovanja i procesa projektovanja primjenom virtualnih modela [4].....	4
Slika 1.2 Modelovanje odziva strukture u zavisnosti od pozicije kinematskog modula.....	10
Slika 1.3 Redukcija reda modela konačnih elemenata u prostoru stanja.....	11
Slika 2.1 Postupak redukcije reda modela konačnih elemenata.....	15
Slika 2.2 Postupak određivanja modalnih parametara transformacijom fizičkih u generalisane koordinate	17
Slika 2.3 Sistem sa četiri stepena slobode kretanja	18
Slika 2.4 Blok dijagram prostora stanja	20
Slika 2.5 Oblici oscilovanja - prva četiri glavna oblika oscilovanja (moda).....	23
Slika 2.6 Postavka eksperimenta i ekvivalentni model koncentrisanih masa.....	32
Slika 2.7 Pojačanje u maksimumu za $\zeta=0,001$	35
Slika 2.8 Pojačanje na nultoj frekvenciji za $\zeta=0,001$	35
Slika 2.9 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – neredukovani model, svih 9 glavnih oblika oscilovanja uključeno	37
Slika 2.10 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – neredukovani model, uticaj pojedinačnih glavnih oblika oscilovanja na AF karakteristiku	38
Slika 2.11 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – redukovani model, uključena prva 4 od ukupno 9 izdvojenih oblika oscilovanja (nesortiranih).....	39
Slika 2.12 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – redukovani model, uključena prva 4 od ukupno 9 izdvojenih oblika oscilovanja (sortiranih prema najvećem pojačanjem u maksimumu).....	39
Slika 2.13 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – uključeno 4 od 9 glavnih oblika oscilovanja – redukcija funkcijom modred opcija del.....	41
Slika 2.14 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – uključeno 4 od 9 glavnih oblika oscilovanja– redukcija modred opcija mdc	42
Slika 2.15 Odziv dobijenih modela u prostoru stanja na impulsnu pobudu	42
Slika 2.16 Pojačanje na nultoj frekvenciji kao proizvod vektora ulaza i vektora izlaza	44
Slika 2.17 Gramian kontrolabilnosti na linearnoj osi u zavisnosti od pozicije u matrici	46
Slika 2.18 Gramian opservabilnosti na linearnoj osi u zavisnosti od pozicije u matrici.....	47
Slika 2.19 Dijagonalni elementi Gramijana kontrolabilnosti	48
Slika 2.20 Dijagonalni elementi Gramijana opservabilnosti	48
Slika 2.21 Stanja pozicija i brzna dijagonalnih elementa Gramijana kontrolabilnosti.....	49
Slika 2.22 Stanja pozicija i brzna dijagonalnih elementa Gramijana opservabilnosti	50
Slika 2.23 Balansirani Gramian kontrolabilnosti i opservabilnosti	51
Slika 2.24 Sortirani dijagonalni elementi balansiranog gramijana i pojačanje na nultoj frekvenciji.....	51
Slika 2.25 AF karakteristika, redukcija izvršena funkcijom modred opcija mdc.....	52

Slika 2.26 AF karakteristika, redukcija izvršena funkcijom modred opcija del	53
Slika 2.27 Odziv sistema na pobudu u obliku jediničnog impulsa	53
Slika 2.28 Uvećan segment odziva sistema na jediničnu pobudu	54
Slika 3.1 Sistematizacija metoda modalne analize [50]	57
Slika 3.2 Sistematizacija metoda modalne analize u vremenskom domenu [50]	58
Slika 3.3 Sistematizacija metoda modalne analize u frekventnom domenu [50]	58
Slika 3.4 Šema sistema za akviziciju podataka	59
Slika 3.5 Oprema korištena pri izvođenju eksperimentalne modalne analize	60
Slika 3.6 Eksperimentalno identifikovanje modalnih parametara slobodno oslonjene grede	61
Slika 3.7 Mjerenje direktne funkcije frekventnog odziva u tački 1 i „unakrsne“ funkcije frekventnog odziva u tačkama 2-11	61
Slika 3.8 Pobuda (a) i odziv (b) u vremenskom domenu	62
Slika 3.9 Realni i imaginarni dio prenosne funkcije sistema sa jednim stepenom slobode	63
Slika 3.10 Prva četiri moda oscilovanja slobodno oslonjene grede određena analitički (a) i eksperimentalno (b)	65
Slika 3.11 Imaginarni dio direktne funkcije frekventnog odziva (X_1/F_1) i unakrsne funkcije frekventnog odziva ($X_2/F_1 - X_{11}/F_1$)	66
Slika 3.12 Realni i imaginarni dio FRF sa slike 3.12 (sa uvećanjem svakog moda)	67
Slika 3.13 Direktna FRF slobodno oslonjene grede	68
Slika 3.14 Poređenje signala dobijenog mjerenjem i primjenom ARX modela (a) i uvećan prikaz oba signala (b)	70
Slika 3.15 AF karakteristika (Bodev dijagram) prenosne funkcije dobijene primjenom ARX modela	70
Slika 3.16 Slobodno oslonjena greda kružnog poprečnog presjeka opterećena silom F na mjestu 1	71
Slika 3.17 Kulonova sila trenja	74
Slika 3.18 Direktna FRF za slobodno oslonjenu gredu sa slike 3.17	77
Slika 3.19 Unakrsna FRF za slobodno oslonjenu gredu sa slike 3.17	77
Slika 4.1 Model sprezanja tri tijela (fleksibilno - elastično)	80
Slika 4.2 Određivanje prenosnih funkcija i sistem tri elementa spregnuta krutim vezama	84
Slika 4.3 Geometrijske karakteristike sistema tri elementa spregnuta krutim vezama	84
Slika 4.4 Funkcija prenosa sistema koja uključuje uticaj transverzalnih pomjeranja i rotacionih stepeni slobode	86
Slika 4.5 Model konzole (A) i slobodno oslonjene grede (B) opterećene harmonijskom silom F na mjestu 1	89
Slika 4.6 Prenosna funkcija grede pri čemu su h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} određene analitički	99
Slika 4.7 Prenosna funkcija grede pri čemu su h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} određene numerčki	100
Slika 4.8 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (Workbench) 137,81 Hz	100

Slika 4.9 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (APDL – Solid 186) 136,612 Hz	100
Slika 4.10 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (APDL – Beam 188) 136,785 Hz	101
Slika 4.11 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (EMA) 138,5 Hz	101
Slika 5.1 Izgled eksperimentalnog modela – 1 glavno vreteno, 2 aksijalno pokretna čaura – pinola, noseća čaura, postolja, pogonski elektromotor, prenosnik glavnog kretanja	105
Slika 5.2 Sklop glavnog vretena 1. glavno vreteno, 2. distantna čaura, 3. prednje uležištenje, 4. zadnje uležištenje, 5. pinola 6. čaura pinole.....	105
Slika 5.3 Model glavnog vretena.....	105
Slika 5.4 Dimenzije glavnog vretena.....	106
Slika 5.5 Model sklopa glavnog vretena	107
Slika 5.6 Modelovanje oslonaca primjenom konačnog elementa COMBIN 14	107
Slika 5.7 Slobodno oslonjeni segmenti glavnog vretena (dva krajnja desna segmenta) ..	108
Slika 5.8 Slobodno oslonjeni segmenti glavnog vretena nakon sprežanja.....	108
Slika 5.9 Sprežanje trećeg segmenta sa prethodno spregnutim segmentima	109
Slika 5.10 Glavno vreteno jedinice pinole podijeljeno na šest segmnata, nakon sprežanja	109
Slika 5.11 Prenosna funkcija slobodno oslonjenog glavnog vretena	110
Slika 5.12 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja 282,95 Hz, konačni element BEAM188	110
Slika 5.13 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja 855,1 Hz, konačni element BEAM188	110
Slika 5.14 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja 1631,63 Hz, konačni element BEAM188.....	110
Slika 5.15 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja 2636,49 Hz, konačni element BEAM188.....	110
Slika 5.16 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja 281,94 Hz, konačni element SOLID186	111
Slika 5.17 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja 854,63 Hz, konačni element SOLID186	111
Slika 5.18 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja 1629,1 Hz, konačni element SOLID186	111
Slika 5.19 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja 3818,54 Hz, konačni element SOLID186	111
Slika 5.20 Amplitudno – frekvencijska karakteristika prenosne funkcije slobodno	111
Slika 5.21 Model sklopa glavnog vretena dobijen sprežanjem segmenata konstantnog poprečnog presjeka	113
Slika 5.22 Amplitudno frekvencijska karakteristika prenosne funkcije slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena	113
Slika 5.23 Model oslonjenog glavnog vretena	114

Slika 5.24 AF karakteristika direktne prenosne funkcije H11 – vrh glavnog vretena	116
Slika 5.25 AF karakteristika direktne prenosne funkcije H22 – zadnji kraj glavnog vretena	116
Slika 5.26 AF karakteristika unakrsne prenosne funkcije H12	116
Slika 5.27 AF karakteristika unakrsne prenosne funkcije H21	116
Slika 5.28 Ansys APDL model glavnog vretena konačni element SOLID 186	117
Slika 5.29 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186	117
Slika 5.30 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186	117
Slika 5.31 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186	117
Slika 5.32 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186	117
Slika 5.33 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188	118
Slika 5.34 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188	118
Slika 5.35 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188	118
Slika 5.36 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188	118
Slika 6.1 Modul „Z“ ose u prednjem položaju	122
Slika 6.2 Modul „Z“ ose u zadnjem položaju	122
Slika 6.3 Podešavanje eksperimenta pri eksperimentalnom identifikovanju AF karakteristike klizača X ose.....	123
Slika 6.4 AF karakteristika prenosne funkcije klizača X ose određena brzom Furijeovom transformcijom odziva, Slika 6.3	123
Slika 6.5 Frekvencije oscilovanja stola obradnog centra 162,23 Hz i 364,12 Hz identifikovane primjenom MKE	124
Slika 6.6 Frekvencija oscilovanja pogonskog sistema horizontalnog obradnog centra 135,68 Hz	126
Slika 6.7 Frekvencija oscilovanja pogonskog sistema horizontalnog obradnog centra 179,58 Hz	126
Slika 6.8 Frekvencija oscilovanja pogonskog sistema horizontalnog obradnog centra 416,07 Hz	127
Slika 6.9 RBS model horizontalnog obradnog centra	128
Slika 6.10 Simbolički prikaz implementacije spoja	129
Slika 6.11 Spoj između klizne vođice i klizača „X“ ose	129
Slika 6.12 3D CAD model modula kretanja po „X“ osi	129
Slika 6.13 Diskretizovan „pojednostavljen“ modul kretanja po „X“ osi	129
Slika 6.14 Mjerenje vibracija glavnog vretena.....	130

Slika 6.15 FFT odziva glavnog vretena.....	130
Slika 6.16 Realni dio prenosne funkcije.....	130
Slika 6.17 Imaginarni dio prenosne funkcije.....	130
Slika 6.18 Eksperimentalno određivanje modalnih parametara glodala $\Phi 10$	131
Slika 6.19 Prenosna funkcija određena eksperimentalno i na osnovu utvđenih modalnih parametara	132

SADRŽAJ TABELA

Tabela 2.1 Poređenje sopstvenih frekvencija oscilovanja određenih izvođenjem eksperimentalne modalne analize primjenom metoda konačnih elemenata i analitički	32
Tabela 2.2 Koeficijenti relativnog prigušenja ζ za prvih devet modova savojnih vibracija	34
Tabela 3.1 Modalni parametri određeni metodom selektovanja vrha („Peack – Picking“)	68
Tabela 3.2 Vrijednost bezdimenzionog faktora strukturnog prigušenja [47].....	75
Tabela 3.3 Prigušenja kotrljajnih ležajeva [47].....	76
Tabela 3.4 Prigušenja linearnih vođica [47].....	76
Tabela 4.1 Prva i druga sopstvena frekvencija oscilovanja dobijene analitički, numerički i primjenom EMA (Hz)	101
Tabela 5.1 Krutost uležištenja u zavisnosti od prednaprezanja [80].....	106
Tabela 5.2 Uporedne vrijednosti rezultata modalne analize slobodno oslonjenog glavnog vretena	112
Tabela 5.3 Uporedne vrijednosti rezultata modalne analize sklopa glavnog vretena	114
Tabela 5.4 Uporedne vrijednosti rezultata modalne analize uležištenog glavnog vretena određene primjenom metoda konačnih elemenata i analitički.....	118
Tabela 6.1 Uporedni prikaz prvih dvadeset vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja modula Z ose za različita podešavanja gustine mreže konačnih elementa	124
Tabela 6.2 Uporedni prikaz prvih dvadeset vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja modula Z ose za različita podešavanja gustine mreže konačnih elementa - nastavak	125

Pregled korišćenih oznaka i skraćenica

ADC	<i>Analog Digital Converter</i> – analogno digitalni (ADC) konvertor
AF	Amplitudno – frekvencijska karakteristika prenosne funkcije (Bodeov dijagram)
ARX	<i>Autoregressive Models with Exogenous Inputs</i> – autoregresioni model sa spoljašnjim ulazom
CAD	<i>Computer Aided Design</i> – računarom podržano projektovanje proizvoda
CAM	<i>Computer Aided Manufacturing</i> – računarom podržana proizvodnja
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i> – računarom podržano inženjerstvo
dc gain	Pojačanje na nultoj frekvenciji
EMA	Eksperimentalna modalna analiza
FRF	<i>Frequency Response Function</i> – funkcija frekventnog odziva
MBS	<i>Multibody Simulation</i> – metod numeričke simulacije krutih ili elastičnih tijela
MDOF	<i>Multy Degree of Freedom</i> – više stepeni slobode
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> – više ulaza više izlaza
MKE	Metod konačnih elemenata
modred	<i>MODal REDuction</i> – modalna redukcija
MOR	<i>Model Order Reduction</i> – redukcija reda modela
pick gain	Pojačanje u maksimumu
OMA	Operaciona modalna analiza
PLM	<i>Product Lifecycle Management</i> – upravljanje životnim ciklusom proizvoda
SDOF	<i>Single Degree of Freedom</i> – jedan stepen slobode
SISO	<i>Single Input Single Output</i> – jedan ulaz jedan izlaz

1 UVOD

1.1 PREDMET I CILJ ISTRAŽIVANJA

Savremeni pristupi u projektovanju mašina alatki podrazumijevaju integraciju različitih virtuelnih analiza u koncept koji se naziva virtualna mašina alatka. U ovoj disertaciji razmatraju se mogućnosti za razvoj platforme koja bi integrisala različite faze procesa projektovanja i omogućila transver modela tokom projektovanja, testiranja i optimizacije mašine alatke u računarskom simulacionom okruženju, a na kraju i integrisanje virtualnog modela mašine alatke sa numeričkom simulacijom procesa rezanja. Novi koncepti simulacije moraju se nositi sa visokim nivoom složenosti savremenih mašina alatki, te zahtjevaju korištenje sofisticiranih alata kako bi se obuhvatile karakteristike svih komponenti.

Uobičajena raspodjela alata za izvođenje simulacija pokazuje nedovoljnu integraciju između različitih okruženja u kojima se vrše provjere tokom projektovanja strukture mašine alatke.

Dio razvojnog okruženja i metodologije za evaluaciju mašine alatke, po potrebi, može biti zasnovan na principu simulacije kretanja krutog tijela i redukciji veličine modela konačnih elemenata.

Ciljevi istraživanja:

Ciljevi istraživanja u okviru disertacije usmjereni su ka:

- Analizi postojećih metoda i procedura evaluacije virtualnih mašina alatki u računarskom projektantskom okruženju,
- Izradi virtualnog modela mašine alatke i verifikaciji tačnosti na izabranom primjeru mašine alatke
- Analizi dinamičkog ponašanja mašina alatki sa posebnim osvrtom na sklop glavnog vretena.

Rezultati koji se očekuju:

U računarskom projektantskom okruženju projektovanje i evaluacija virtualnih modela savremenih mašina alatki i komponente strukture mašina alatki, sa posebnim osvrtom na modul glavnog kretanja. Verifikaciju tačnosti dobijenih modela izvršiti poređenjem dobijenih rezultata sa rezultatima dobijenim mjerenjem na izabranom primjeru troosnog obradnog centra FM38.

1.2 DEFINISANJE PROBLEMA I HIPOTEZE ISTRAŽIVANJA

Primjena virtualnih mašina alatki u procesu projektovanja put je ka poboljšanju kvaliteta i skraćivanju vremena potrebnog za plasiranje proizvoda na tržište, uz istovremeno smanjenje troškova projektovanja.

Predmet disertacije je modelovanje i evaluacija virtualnih modela mašina alatki i komponenata strukture tokom različitih faza projektovanja. Virtualni model mašine alatke je računarski (digitalni) model na kome se izvode različite simulacije, testiranja, verifikacija, čime se skraćuje vrijeme razvoja, te istovremeno redukuje broj realnih fizičkih prototipova na bar jedan. Verifikacija tačnosti dobijenih modela vrši se eksperimentalnim putem na primjeru troosnog obradnog centra za glodanje.

Pri projektovanju vitalnih sklopova, modula za glavno kretanje, modula za pomoćno kretanje i modula noseće strukture, zavisno od složenosti, koristi se simulacija kretanja krutog tijela za brzo definisanje koncepcije, a metod konačnih elemenata za detaljnu analizu. Sa stanovišta dinamičkog ponašanja dobijenog modela virtualne mašine alatke izvršice se verifikacija poređenjem sa rezultatima eksperimentalne modalne analize. Ova disertacija može doprinijeti boljem tumačenju koncepta virtualnih mašina alatki i postupaka projektovanja savremenih mašina alatki u računarskom projektantskom okruženju.

Tokom projektovanja mašina alatki korišćiće se sljedeći pristupi:

- Primjena CAD/CAM/CAE okruženja za kreiranje virtualnih modela mašina alatki i komponenti strukture. Pri tome će se koristiti CATIA PLM programski sistem opšte namjene, ANSYS Workbench softver za proračun metodom konačnih elemenata i Matlab / Simulink okruženje.

- Analiziraće se mogućnosti integracije okruženja za analizu metodom konačnih elemenata ANSYS Workbench i Matlab / Simulink okruženja primjenom tehnike redukcije reda modela (*Model Order Reduction*)

- Urađiće se analiza i dati uporedni prikaz mogućnosti postojećih softverskih rješenja koji se mogu koristiti za optimizaciju i evaluaciju proizvoda tokom različitih faza projektovanja.

Na osnovu sveobuhvatne analize dosadašnjih istraživanja mašina alatki, a posebno glavnog vretena kao vitalnog elementa, u radu su postavljene sljedeće hipoteze:

1. Primjenom virtualnog modela moguće je vršiti iterativne izmjene tokom procesa projektovanja mašina alatki sve do zadovoljavanja zahtjevanih karakteristika mašine i značajno smanjiti vrijeme i troškove razvoja nove mašine alatke.
2. Koncept virtualnog modela mašine alatke može značajno olakšati ispitivanje velikog broja varijantnih rješenja tokom rane faze procesa razvoja, ali također, moguća je primjena i u drugim oblastima, kao što je edukacija, procjena bezbjednosti rukovanja i marketing.
3. Razvojem virtualnih mašina alatki moguće je izvršiti predikciju ponašanja mašina alatki tokom eksploatacije.

Potvrđivanje postavljenih hipoteza zahtijeva obimna teorijska i eksperimentalna ispitivanja koja podrazumijevaju:

- Detaljnu analizu konstrukcije mašina alatki.
- Eksperimentalno utvrđivanje dinamičkih parametara glavnog vretena, sklopa glavnog vretena i noseće strukture mašine alatke, za različite granične i početne uslove.
- Razvoj programskih rješenja za obradu i analizu podataka dobijenih tokom eksperimentalnih ispitivanja.
- Matematički model određivanja dinamičkih parametara vitalnih elemenata mašina alatki, zasnovan na primjeni Ojler – Bernulijeve teorije greda i metodama sprezanja prenosnih funkcija.
- Numeričko određivanje (primjenom metoda konačnih elemenata) dinamičkih karakteristika glavnog vretena i noseće strukture mašine alatke.
- Upoređivanje rezultata eksperimentalnih ispitivanja, rezultata matematičkog i numeričkog modelovanja.

1.3 PRIKAZ STANJA U OBLASTI PROJEKTOVANJA I ISPITIVANJA SAVREMENIH MAŠINA ALATKI

Mašina alatka predstavlja složeni mehatronički sistem čiji zahtjevi u pogledu kompleksnosti i tačnosti zahvata obrade na globalnom tržištu postaju sve veći izazov. Industrija mašina alatki doživljava značajan rast u proteklim dekadama. Globalno otvaranje tržišta, efekti rasta konkurentnosti, smanjenje cijena i preovlađujući zahtjevi za proizvodima visoke klase kvaliteta, uvode nove prilaze u razvoju mašina alatki. Pred proizvođače mašina alatki tržište postavlja sve oštrije zahtjeve, često međusobno suprotstavljene: multifunkcionalosti proizvoda, manje potrošnje energije tokom proizvodnje, ali i manje potrošnje energije u eksploataciji. Sa druge strane javljaju se suprotstavljene zahtjevi u vidu što nižih cijena proizvoda i što kraćeg vremena potrebnog za plasiranje proizvoda na tržište. U cilju prilagođavanja novim zahtjevima neophodno je smanjiti vrijeme razvoja mašina alatki, kao i toškove izrade fizičkog prototipa, ali istovremeno biti spreman za brzo prilagođavanje zahtjevima (potrebama) kupca koje se stalno mijenjaju.

Da bi se prethodno navedeno moglo realizovati neophodni su novi „alati“ i smjernice koji bi se koristili pri projektovanju mašina alatki. Odgovor na ove zahtjeve je novi koncept projektovanja i proizvodnje, baziran na smanjenju vremena razvoja, uz težnju da se broj fizičkih prototipova svede na najmanju mjeru. Ovo zahtjeva izvođenje različitih simulacija tokom projektovanja koje se mogu primjeniti na složene mehatroničke sisteme kakav je mašina alatka. Istovremeno softverski alati bi trebali biti prihvatljivi, sa stanovišta cijene, ne samo velikim sistemima i korporacijama, te imati mogućnost za rad na PC platformama dostupnim većini projekatana.

S obzirom da zahtjevi kupaca diktiraju proizvodnju u „malim“ serijama, pri projektovanju i proizvodnji mašina alatki sve više se primjenjuje koncept upravljanja kvalitetom „*right first time*“ (pojedini autori ga nazivaju i pristup „zero defect“, odnosno nulta greška) koji se bazira na pretpostavci da je mnogo jeftinije organizovati sve faze procesa kako bi se postigao potreban kvalitet proizvoda nego otklanjati posljedice grešaka koje se javljaju u proizvodnji.

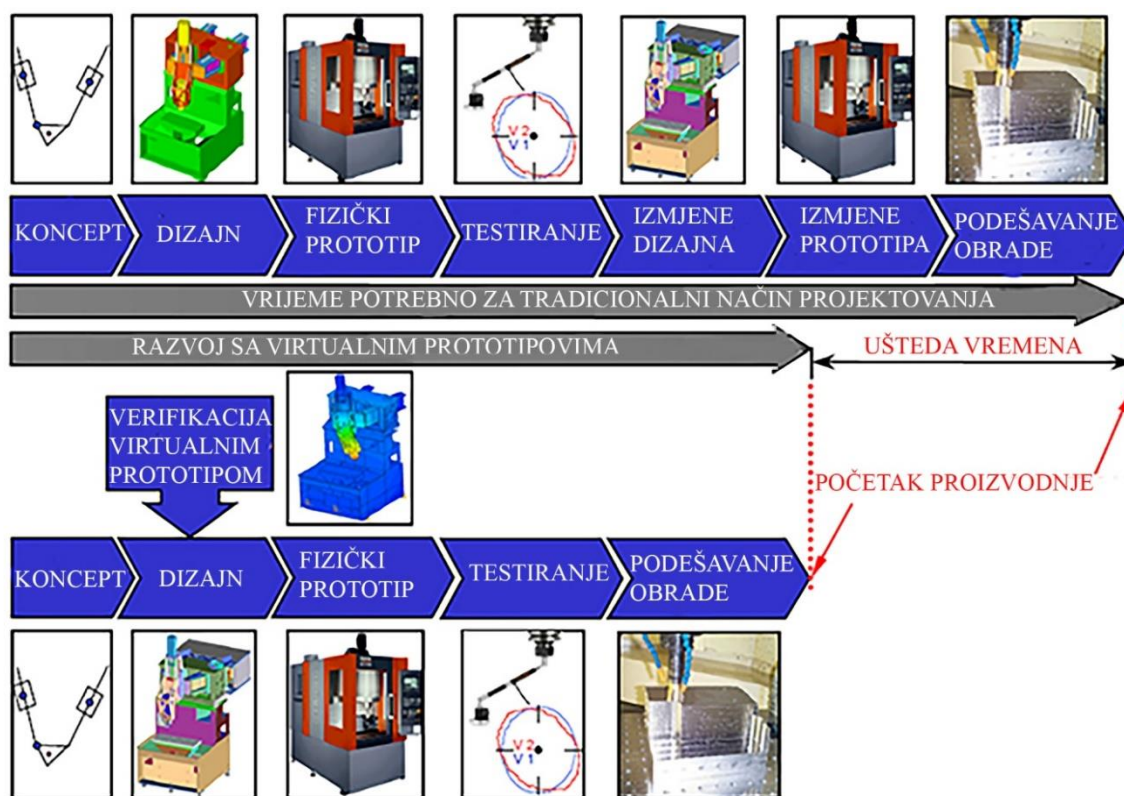
Pri projektovanju savremenih mašina alatki javljaju se i dva međusobno suprotstavljena zahtjeva. Prvi zahtjev je povećanje produktivnosti i ekonomičnosti, što

zahtjeva primjenu tzv. „*light weight*“ konstrukcija, odnosno konstrukcija male mase, kako bi se postigla veća ubrzanja pokretnih elemenata mašine. Tome je suprotstavljen drugi zahtjev, povećanje kvaliteta obrade, odnosno povećanje tačnosti, budući da zahtjeva veću statičku i dinamičku krutost, a time i povećanje mase.

Mogući odgovor na sve ove zahtjeve može biti primjena koncepta „virtualne mašine alatke“, pod čim se podrazumijeva širok pristup koji objedinjuje mogućnosti izvođenja različitih simulacija tokom svih faza projektovanja, a posebno faze koncipiranja idejnog rješenja, uglavnom zasnovan na analizi strukturalnog dinamičkog ponašanja.

1.3.1 Virtualne mašine alatke

Tradicionalni način projektovanja mašine alatke, podrazumijeva skup i dugotrajan proces projektovanja gdje svaku izmjenu konstrukcije proizvoda prati izrada fizičkog prototipa [4]. Savremeni pristup projektovanju mašina alatki podrazumijeva izradu virtualnih modela mašina alatki, gdje se tokom projektovanja izvršavaju procesi pri kojim se mašina analizira i redizajnira, sve dok se na zadovolje postavljene ciljevi. Izrada realnog fizičkog prototipa koji bi služio za potrebna ispitivanja, ostaje za sam kraj procesa razvoja, čime se vrijeme i troškovi projektovanja značajno smanjuju, Slika 1.1.



Slika 1.1 Poređenje tradicionalnog načina projektovanja i procesa projektovanja primjenom virtualnih modela [4]

Virtualna mašina alatka predstavlja računarski simulacioni model fizičkog proizvoda mašine alatke koji se može vizualizovati (u smislu prikazivanja) i sa kojim se mogu izvoditi različita ispitivanja i vršiti analize, kao kod realnih fizičkih mašina alatki. U poređenju sa tradicionalnim načinom projektovanja mašina alatki, primjenom virtualnih modela, kroz interaktivne izmjene, sve do postizanja postavljenih zahtjeva, značajno se redukuju toškovi i vrijeme izrade proizvoda. Virtualni modeli mašina alatki inženjerima pružaju mogućnosti

za izvođenje statičke, kinematske i dinamičke analize, optimizaciju oblika, simulaciju rada mašina alatki, vizualizaciju obrade dijela na CNC mašini tj. promjenu geometrije obratka sa izvršavanjem upravljačkog programa, generisanje putanje alata, upravljanje kretanjima osa, simulaciju kretanja i detekciju kolizije alata, naprezanja alata, naponsko temperaturne simulacije strugotine i alata i dr. Jasno je da tehnologija virtualnih mašina alatki i istraživački izazovi s tim u vezi imaju veliki značaj u projektovanju savremenih mašina alatki.

Danas projektanti mašina alatki koriste veliki broj različitih softverskih alata za optimizaciju i evaluaciju modela tokom različitih faza projektovanja.

Prema Altintasu [4] razvoj mašina alatki primjenom virtualnih modela podrazumijeva izvođenje sljedećih analiza:

1. Simulacija kretanja ima za cilj optimizaciju kinematske konfiguracije mašine alatke. Cilj kinematske simulacije je određivanje kinematske topologije i verifikacija dimenzija elemenata kinematskog lanca. Značajna je posebno kod mašina sa paralelnom kinematikom. Simulacija kretanja se izvodi tokom faze projektovanja koncepcije, primjenom softvera za simulaciju i analizu kretanja krutog tijela.

2. Simulacija krutih tijela MBS (engl. *Multybody simulation*) omogućava preliminarnu analizu kinematskog ponašanja, analizu sklopa, dinamičku i inverznu dinamičku analizu, statičku analizu.

3. MKE (metod konačnih elemenata) analiza i optimizacija ponašanja strukture mašine alatke pod dejstvom statičkog, dinamičkog i toplotnog opterećenja obuhvata linearne i nelinearne statičke analize, dinamičke analize (modalne, analize u vremenskom domenu i analize u frekventnom domenu, „crash“ analize), toplotne analize. MKE se može primjeniti na ukupni sistem mašine alatke, ali i nezavisno na elemente noseće strukture i ostale podsisteme mašine alatke.

4. Optimizacija strukture mašine alatke podrazumijeva optimizaciju topologije i optimizaciju različitih parametara.

5. Integracija strukturalnih i upravljačkih modela. Najčeće se inegrišu geometrijski modeli (npr. kruti „*Multybody*“ model) ili MKE modeli sa različitim blokovskim upravljačkim strukturama čiji su modeli definisani u Simulinku. Također, moguće je izvršiti međusobnu integraciju „*Multy Body*“ modela pri čemu veze posjeduju svojstva krutosti i prigušenja, kao što je na primjer veza mašine alatke sa podlogom odnosno temeljom.

Smirnova [69] koristi virtualno okruženje za izradu modela tzv. aktivnog alata za unutrašnju obradu struganjem (prostrugivanjem), u cilju smanjenja broja fizičkih prototipova. U radu se istražuju vibracije alata za unutrašnju obradu struganjem u procesu obrade. Ideja je da se vibracije nastale u procesu rezanja mogu eliminisati primjenom koncepta vještačkog izazivanja vibracija. Pri tome se koristi tzv. „aktivni“ alat za unutrašnju obradu, koji je posebno prilagođen, odnosno opremljen akcelerometrom koji mjeri vibracije u smjeru brzine rezanja i piezoelektričnim davačem koji generiše vibracije koje su u „protufazi“ sa vibracijama iz procesa rezanja. Povratna veza na bazi LMS algoritma - adaptivnog algoritma zasnovanog na metodi najstrmijeg pada, prikuplja i šalje piezoelektričnom aktuatoru signale koje mjeri akcelerometar. Akcelerometar se pri tome nalazi u tijelu alata i formira povratnu vezu sa procesom. Pozicija i potrebne karakteristike aktuatora određuju se primjenom vještačkih neuronskih mreža na osnovu dinamičke analize modela sistema alat za unutrašnje struganje - držač alata za unutrašnje struganje - aktuator.

1.3.2 Savremene metode modelovanja i simulacije mašina alatki

1.3.2.1 Uvodna razmatranja

Pri projektovanju mašina alatki teži se da mašina može proizvesti dio željene geometrije za najkraće vrijeme i uz najmanje troškove. Odgovarajuća statička i dinamička krutost strukture mašine alatke svakako je jedan od najvažnijih preduslova za stabilan rad. Produktivnost mašine alatke i mogućnost izrade dijelova određenog geometrijskog oblika u direktnoj je vezi sa dinamičkom krutosti vrha alata. Nedovoljna dinamička krutost može dovesti do nestabilnog režima rezanja i pojave podrhtavanja (engl. *chatter*). Podrhtavanje ima uticaj na rad cijelog sistema. Posljedica podrhtavanja su lošiji kvalitet obrađene površine, ubrzano habanje alata, oštećenje obratka, kao i vitalnih elemenata mašine alatke, a sve to na kraju utiče i na smanjenje produktivnosti. Najveći uticaj na krutost sistema ima sklop alat – nosač alata i glavno vreteno mašine alatke.

Savremene metode za simulaciju virtualnih mašina alatki mogu se klasifikovati u dvije kategorije: simulacije ponašanja krutog tijela (*Rigid Body Simulation, RBS-engl.*) i metode konačnih elemenata (MKE). Ovu podjelu, međutim, treba shvatiti kao veoma grubu, budući da postoje različiti prilazi pri projektovanju aplikacija za izvođenje simulacija virtualnih mašina alatki koji „kombinuju“ mogućnosti oba ova prilaza, pa su tako i razvijena okruženja u kojima se integrišu statičke i dinamičke karakteristike komponenti strukture sa regulacionim kolom pogona pomoćnog kretanja.

Altintas [4] dijeli savremene sisteme za simulaciju mašina alatki na sisteme za simulaciju elastičnog tijela, sisteme za simulaciju ponašanja krutog tijela i sisteme za simulaciju u MKE okruženju sa integrisanim regulacionim kolom.

Simulacija ponašanja elastičnog tijela (*Coupled flexible multi-body simulation*) podrazumijeva modelovanje dinamičkog ponašanja pogona kinematskih modula, kao i uticaj komponenti strukture. Smatra se da je krutost i prigušenje sistema dominantno koncentrisano u spojevima, te mjesta spojeva modeluju na način da posjeduju karakteristike krutosti i prigušenja.

Simulacija ponašanja krutog tijela (engl. *Coupled rigid multi-body simulation*) podrazumijeva da su modeli komponenti strukture apsolutno kruti, a da su komponente strukture povezane idealizovanim spojevima. Obično se modeli kreiraju primjenom nekog od 3D softverskih paketa opšte namjene, a potom eksportuju u okruženje za simulaciju ponašanja krutog tijela. Regulaciono kolo se može kreirati u Simulink okruženju i integrisati sa modelom, ili u okruženju u kom se izvodi simulacija ponašanja krutog tijela.

Simulacija u MKE okruženju sa integrisanim regulacionim kolom (*Coupled Finite-Element simulation*), koja se izvodi u samo određenim MKE sistemima prilagođenim za modelovanje regulacionog kola.

1.3.2.2 Primjena metoda konačnih elemenata u identifikaciji ponašanja mašina alatki

Široko zastupljena numerička metoda koja se koristi u svrhu identifikacije dinamičkog ponašanja mašina alatki je metoda konačnih elemenata. Analiza metodom konačnih elemenata je prikladna za analizu složenih mehatroničkih sistema, budući da obezbjeđuje model sa proizvoljno visokim nivoom detalja. Međutim, veliki broj stepeni slobode sa kojima se ponekad mora računati čini ovaj metod neprimjenjivim za većinu istraživača i inženjera, koji na raspolaganju imaju ograničeno vrijeme kao i računarske resurse. Nedostak ove metode, pored naprijed navedenog, je i složena priroda MKE modela koji zahtijevaju

ponovno izvođenje simulacije nakon svake modifikacije geometrije, što čini svaku narednu izmjenu CAD modela problematičnim.

Vrijeme potrebno za analizu metodom konačnih elemenata složenog mehatroničkog sistema mašine alatke, i pored toga što su projektantima dostupne sve bolje hardverske konfiguracije računara po prihvatljivim cijenama, je predugačka da bi se ova vrsta analize mogla uvijek integrisati u proces projektovanja.

Altintas [4] pod virtualnom mašinom alatkom podrazumijeva proces projektovanja, ispitivanja i optimizacije u računarkom okruženju. Komponente i sklopovi mašine alatke se projektuju primjenom CAD softvera, te potom eksportuju u okruženje za analizu metodom konačnih elemenata u kom se vrše dalje strukturalne analize. Model konačnih elemenata se može dalje redukovati u model krutog tijela pri čemu se elementi posmatraju kako kruti, dok su međusobne veze realizovane kao fleksibilne. Na kraju se uspostavlja veza između CNC upravljačkih modela i strukture mašine alatke te vrše različite simulacije, uključujući i simulaciju procesa rezanja, gdje se mašina alatka ispituje pri različitim uslovima rezanja. U ovom radu primjenom metoda konačnih elemenata analizira ponašanje sklopa glavnog vretena. Koriste se nelinearni konačni elementi za određivanje krutosti ležajeva i opterećenja kotrljajnih tijela. Model sadrži uticaj prednaprežanja ležajeva i efekte centrifugalnih sila. Na bazi tako postavljenog modela određene su sopstvene frekvencije, oblike oscilovanja i FRF vrha alata navedene strukture.

Assefa [8] izvodi numeričku analizu stubova glodalice različitog geometrijskog oblika primjenom metoda konačnih elemenata, pri čemu se razmatra uticaj konusnog završetka stuba, položaj i orijentacija otvora na stubu, poklopca stuba, oblika osnove stuba (kvadratna i pravougaona) i sl. Izvodi se statička analiza, gdje je vrh stuba opterećen silom i momentom uvijanja. Na osnovu dobijenih deformacija, odnosno pomjeranja čvorova, određuju se matrice krutosti kompletne strukture. Također, izvodi se modalna analiza sa ciljem određivanja sopstvene frekvencije oscilovanja strukture. Dobijeni rezultati su verifikovani poređenjem sa rezultatima izračunatim analitički.

Veliki broj istraživača proučava različite načine određivanja krutosti spojeva elemenata mašina alatki eksperimentalnim, analitičkim ili numeričkim metodama. Huang [31] prikazuje način određivanja krutosti spojeva elemenata mašina alatki primjenom CAE tehnika. Određivanje krutosti podrazumijeva sljedeće: izradu MKE modela mašine alatke, utvrđivanje sile na mjestu kontakta alata i radnog predmeta, te zadavanje sile na mjestu kontakta alata i obradka, uz odgovarajuće granične uslove. Autor analizira glodalicu koja se sastoji od sljedećih modula: modula vreteništa, stuba, stola, poprečnog klizača i postolja. Pri tome za određivanje krutosti razmatra dva pristupa: metod pojedinačnih modula (Single module method, SMM) i metod hibridnog modelovanja (Hibrid modeling method, HMM).

Prvi pristup, metod pojedinačnih modula (SMM), podrazumijeva analizu samo jednog od navedenih modula, dok se uticaj ostalih modula uzima tako što se jedinično opterećenje na mjestu kontakta alata i radnog predmeta transformiše u ekvivalentne sile i prenosi na površine na kojima se modul koji se analizira spaja sa susjednim modulom, odnosno modulima. Potom se određuju pomjeranja, a zatim i krutost modula na kontaktnim površinama i to kao recipročna vrijednost pomjeranja čvorova. Ova metoda ima više nedostataka, na primjer pri određivanju krutosti jednog modula ne može se uzeti u obzir uticaj krutosti ostalih modula. Također, procedura transformacije spoljašnjeg opterećenja u ekvivalentne sile zahtijeva obiman matematički aparat i može predstavljati izvor grešaka.

Drugi pristup, metod hibridnog modelovanja (HMM), podrazumijeva analizu sklopa mašine alatke, s tim da se krutost u jednom trenutku određuje za samo jedan od modula. Pri

tome modul koji se analizira ima mrežu konačnih elementa veće gustine i normalnu vrijednost modula elastičnosti, a svi ostali pojednostavljenu mrežu konačnih elemenata i 100 puta veću vrijednost modula elastičnosti. Na ovaj način modul koji se analizira se posmatra kao elastičan, a svi ostali krutim, što ovakav pristup čini hibridnim. Krutost se određuje pojedinačno za svaki modul kao recipročna vrijednost pomjeranja čvorova na površini koja se posmatra.

Primjenom oba pristupa, određene su krutosti na kontaktnim površinama svih pet modula, u tri pravca, zavisno od smjera djelovanja jedinične sile.

1.3.2.3 Simulacija ponašanja krutog tijela

Simulacija ponašanja krutog tijela (engl. *Rigid Body Simulation*) podrazumijeva koncept simulacije tijela koja imaju masu i inerciju, ne mogu se deformisati i međusobno su povezana elastičnim elementima. Na tržištu postoje programski sistemi za simulaciju krutog tijela, ali još uvek nema komercijalnih programskih sistema koji bi omogućili razmjenu podataka između MKE modela i programskog sistema za simulaciju krutog tijela, što podrazumijeva redukciju reda modela.

Simulacija ponašanja krutog tijela je brza i efikasna metoda, ali ne uzima u obzir deformacione i vibracione karakteristike elemenata strukture. Kod mašina alatki sa rednom kinematikom elementi strukture imaju mnogo veću krutost od spojeva, te je pretpostavka da su elastične deformacije koncentrisane u spojevima. Kod mašina alatki sa paralelnom kinematikom ova pretpostavka nije opravdana zbog manje mase elemenata strukture. Manja masa ovih elemenata je posljedica zahtjeva za većim brzinama kretanja istih.

Prema Zhang [79] 60% ukupne krutosti i oko 90% ukupnog prigušenja mašine alatke koncentrisano je u spojevima, pa prema tome korektan model spojeva predstavlja važan segment pri analizi dinamičkog ponašanja mašine alatke. S obzirom da analiza modela konačnih elemenata mašine alatke zahtjeva značajno vrijeme, kao i računarske resurse, autor razmatra dinamički model zasnovan na bazi metode sinteze popustljivosti spojeva. Na osnovu predloženog modela razvijen je softver za predviđanje dinamičkog ponašanja, odnosno određivanje sopstvenih frekvencija kompletne mašine alatke tokom faze projektovanja idejnog rješenja, pri čemu spojevi imaju nelinearne karakteristike. Ove karakteristike se eksperimentalno određuju. Model sačinjavaju sljedeći elementi: greda sa distribuiranom (raspodjeljenom) masom, greda sa koncentrisanom masom i spojevi. Pri definisanju modela mašine alatke elementi strukture koji se mogu smatrati vitkim kao što su stub, postolje, konzola i sl. modeluju se elementima grede sa distribuiranom masom. Dijelovi koji se ne smatraju vitkim ekvivalentni su elementima sa koncentrisanom masom, dok se veza između različitih elemenata smatra spojem. Verifikacija je izvršena izvođenjem eksperimentalne modalne analize obradnog centra. Rezultati pokazuju dobru korelaciju sopstvenih frekvencija određenih primjenom softvera i eksperimentalno uz maksimalno odstupanje od 10,71% na trećoj sopstvenoj frekvenciji.

Bossoni [11] prikazuje mogućnosti za identifikaciju dinamičkog ponašanja obradnog centra primjenom Axes Construction Kit (ACK) modula za simulaciju krutog tijela u okviru Matlab / Simulink okruženja, koji je razvijen na Institutu za mašine alatke i proizvodnju iz Ciriha. Troosni obradni centar je modelovan od četiri kruta tijela i odgovarajućih veza. Izvršeno je poređenje rezultata dinamičkog ponašanja modela dobijenih primjenom ACK sa rezultatima eksperimentalne modalne analize na prototipu. Konstatovano je da model krutog tijela obradnog centra aproksimira ponašanje fizičkog modela prototipa sa malim

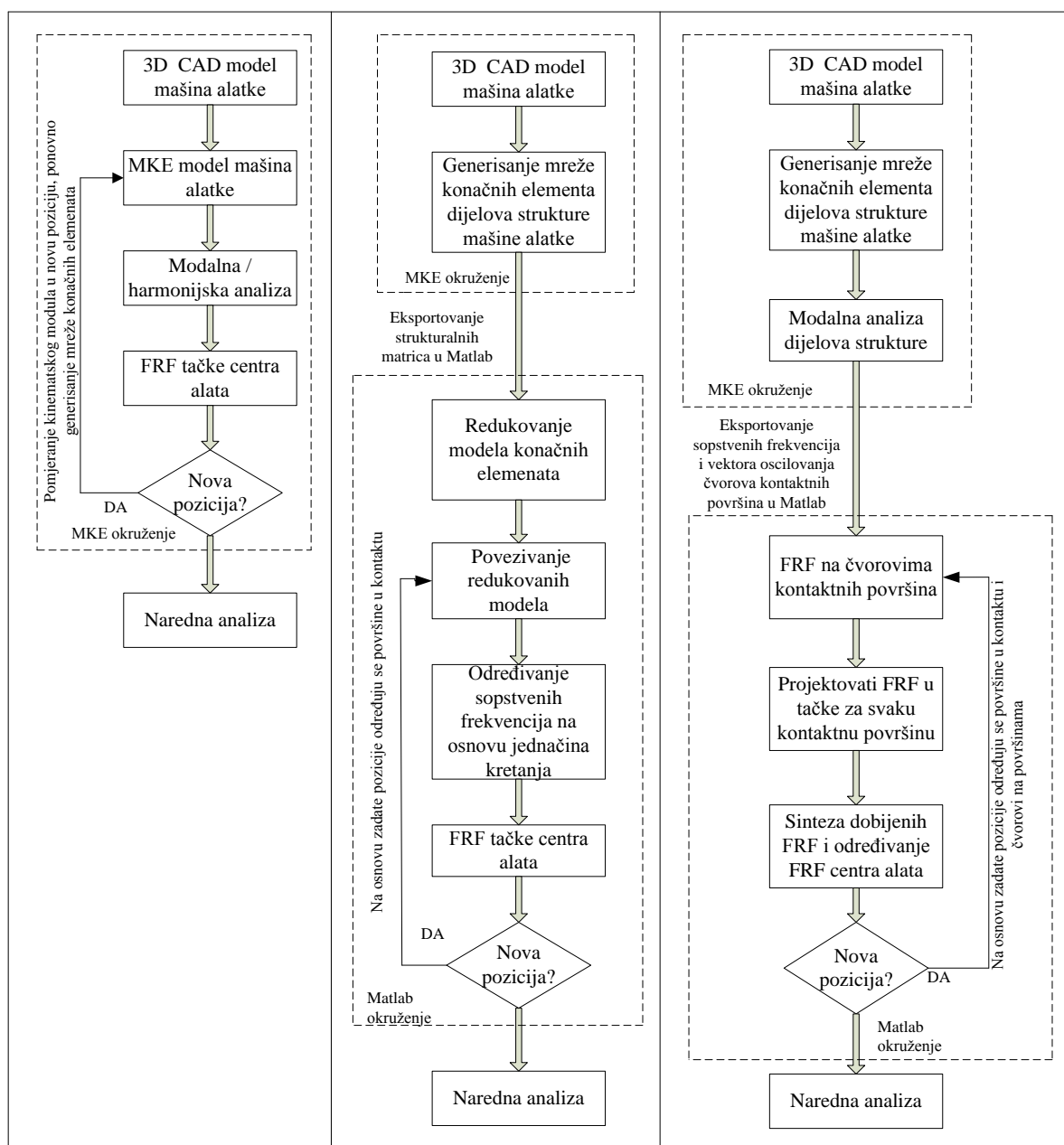
odstupanjima. Na bazi prethodnog zaključeno je da elementi spojeva imaju mogućnost aproksimacije nastalih elastičnih deformacija.

1.3.2.4 Simulacija ponašanja elastičnog tijela

Sistem elastičnih tijela (Flexible Multibody System) podrazumijeva računarsko modelovanje i analizu sistema međusobno povezanih elastičnih tijela, koji izvode translatorna i rotaciona kretanja. Kretanja se mogu posmatrati kao kretanja krutog tijela, ali se tijela istovremeno mogu elastično deformisati. Ovakav sistem sačinjavaju elastične i krute komponente, međusobno povezane spojevima koji mogu sadržavati i elemente krutosti i prigušenja, ili aktuatore.

Izradu virtualnog modela mašina alatki kroz integraciju MKE modela i modela krutog tijela prikazuje Zaeh [77]. Ovaj koncept, koji se u savremenoj literaturi označava MFBD (Multi-Flexible Body Dynamics), podrazumijeva simulaciju kretanja elastičnog tijela u okviru sistema za izvođenje simulacije krutog tijela. Kod ovog koncepta bitan faktor predstavlja odnos pomjeranja koje vrši kruto tijelo i elastičnih deformacija tijela. Kao najveći nedostaci ovog modela navodi se relativna pouzdanost pri određivanju krutosti lokalnih kontakata, što je bitno za pouzdanu simulaciju dinamičkog ponašanja mašine alatke.

Law [43] razmatra mogućnosti analize dinamičkog ponašanja u okviru virtualne mašine alatke pri različitim međusobnim položajima kinematskih modula, polazeći pri tom od pretpostavke da mašina alatka predstavlja skup međusobno povezanih elastičnih tijela koja između sebe ostvaruju translatorna i rotaciona kretanja kako bi se ostvarila željena geometrija obratka. Promjene međusobnog položaja ovih tijela, zajedno sa procesom rezanja određuju dinamičko ponašanje mašine alatke. Autor predstavlja prilaz zasnovan na frekvencijskoj analizi u kojem kombinuje popustljivosti spojeva, kako bi dobio odziv vrha alata u zavisnosti od međusobne pozicije kinematskih modula, Slika 1.2. Popustljivost mjesta spojeva se aproksimira njihovim projektovanjem u tačke kako bi se olakšala dalja formulacija popustljivosti spojeva. Na ovaj način dinamičko ponašanje mašine alatke se predstavlja setovima popustljivosti dok je vrijeme potrebno za analize značajno manje od vremena potrebnog za analizu kompletnog MKE modela.



Tradicionalni prilaz

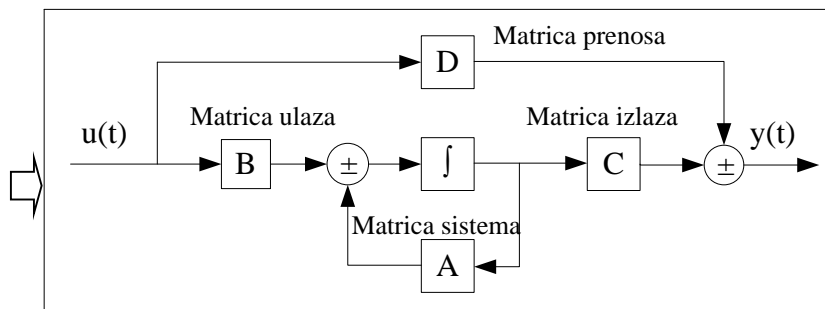
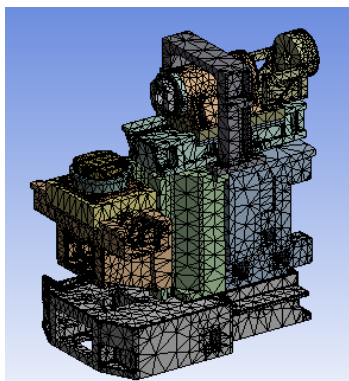
Sinteza dinamičkog ponašanja podsklopova

Prilaz baziran na sintezi frekventnog odziva podsklopova

Slika 1.2 Modelovanje odziva strukture u zavisnosti od pozicije kinematskog modula

1.3.2.5 Redukcija reda modela konačnih elemenata

Jedna od glavnih poteškoća pri radu sa modelima konačnih elementata predstavlja dimenzija sistema. Mašina alatka može imati i do 10^5 , pa čak i do 10^6 čvorova, čije procesiranje zahtjeva značajno vrijeme i računarske resurse. Uprkos velikoj brzini razvoja hardvera i softvera, takvi modeli su neprikladni za rad sa savremenim algoritmima teorije sistema. Zbog toga su razvijene metode redukcije reda modela (engl. *Model Order Reduction, MOR*) kojima se modeli konačnih elementata zamjenjuju redukovanim modelima u prostoru stanja, pri čemu je neophodno da se redukcijom sačuva dinamičko ponašanje sistema originalnog modela, Slika 1.3.



Dijagram metode prostora stanja

Slika 1.3 Redukcija reda modela konačnih elemenata u prostoru stanja

Matematički model dobijen primjenom metoda konačnih elemenata je linearni vremenski invarijantni model dinamičkog sistema, s obzirom da jednačine koje ga opisuju ne sadrže vrijeme kao nepoznatu.

Metod konačnih elemenata predstavlja model drugog reda. Njegovom primjenom se definišu matrice prigušenja, krutosti i inercije sistema, dok su promjenjive pomaci. Ovakav model može se transformisati u prostor stanja sistema, odnosno model prvog reda kod koga su promjenjive pomaci i brzine čvorova.

Mehatronički sistem pri izvođenju određenih analiza, kao što je npr. modalna analiza, ima veoma kompleksan matematički model čije rješavanje može da bude dugotrajno. Kako bi se smanjilo vrijeme potrebno za izvođenje simulacije, pri čemu se ne odstupa od tačnosti rezultata, primjenju se tehnike redukcije modela. Maglie [47] koristi MKE model kako bi odredio relativno pomjeranje vrha alata u odnosu na radni predmet pod djelovanjem opterećenja, odnosno sile rezanja. Razvijena je platforma za razmjenu podataka između ANSYS Workbench-a i simulacionog modela razvijenog u Matlab / Simulink okruženju gdje se vrše dalje statičke i dinamičke analize. Platforma je modularna i integriše module koji sadrže karakteristike spojeva, opisuju ponašanje strukture tijela i upravljanja. Set makroa eksportuje modele iz ANSYS Workbnch-a u Matlab / Simulink okruženje u vidu matrica konačnih elemenata, uključujući i karakteristike spojeva, krutost i prigušenje. Pri tome se koristi MOR for ANSYS, samostalni program koji čita datoteke iz ANSYS-a i redukuje red matrica.

Vesely [74] analizira uticaj sopstvenih frekvencija strukture mašine alatke (nosećih elemenata) na dinamičko ponašanje modela pogona pomoćnog kretanja, pri čemu njenu strukturu posmatra na dva načina: kao koncentrisane mase u jednom, te preko modela konačnih elementa u drugom. Mašina alatka se modeluje kao sistem elastičnih tijela, a redukcija reda modela konačnih elementa se vrši primjenom Craig – Bamton -ove tehnike redukcije. Ova tehnika omogućava selektovanje određenog broja sopstvenih frekvencija, koje će redukovani model zadržati u odnosu na originalni model, te odabir tzv. „interfejs“ čvorova koji se koriste za spoj sa drugim tijelima. Autor, također, analizira dva načina za određivanju uticaja noseće strukture na dinamičko ponašanje mašine alatke, prvi način - tehniku modalne dekompozicije pri čemu se transformacija izvodi na osnovu matrica masa, prigušenja i krutosti dobijenih iz MKE sistema, te drugi način - rješavanjem jednačina kretanja datih u modalnim koordinatama.

1.4 STRUKTURA DISERTACIJE

Osnovni pravci istraživanja u okviru ove disertacije su teorija, simulacija i eksperimenti. Kod teorijskih istraživanja predstavljena je modalna analiza, redukcija reda modela, te metode pozicionog sprežanja za određivanje prenosnih funkcija pri različitim graničnim uslovima. Numerička istraživanja podrazumijevaju izvođenje simulacija primjenom ANSYS softvera za analizu metodom konačnih elemenata pri čemu se koriste različiti tipovi konačnih elementa – tip grede, izoparametarski 3D konačni elementi i elementi koji posjeduju karakteristike opruge i prigušenja. Numeričke simulacije se paralelno izvode u dva okruženja koja posjeduju Ansys softver – APDL i Workbench okruženje. Eksperimentalna modalna analiza (EMA) je izvršena upotrebom opreme za akviziciju podataka National Instruments, LabView softvera, impulsnog čekića i davača ubrzanja – akcelerometra.

Sva istraživanja (teorijska, numerička i eksperimentalna) izvedena su prvo na nekoliko prostih geometrijskih elemenata (greda konstantnog kružnog poprečnog presjeka i greda kružnog poprečnog presjek sa prelazima) kako bi se odredili modalni parametri, te potvrdili dobijeni analitički modeli određivanja prenosnih funkcija dobijeni primjenom metode pozicionog sprežanja. Dalja istraživanja se izvode na eksperimentalnom modelu razvijenom za potrebe istraživanja [80], glavnom vretenu i sklopu glavnog vretena modela, te glavnom vretenu i nosećoj strukturi horizontalnog obradnog centra FM38.

U prvom, uvodnom poglavlju predstavljene su ciljevi istraživanja, hipoteze i primjenjena metodologija istraživanja. U ovom poglavlju dat je prikaz dosadašnjih istraživanja u sljedećim oblastima: projektovanje virtualnih mašina alatki, savremene metode modelovanja i simulacije u identifikaciji ponašanja mašina alatki primjenom metoda konačnih elemenata, te primjena redukcija reda modela u projektovanju mašina alatki.

U drugom poglavlju date su teorijske osnove metode redukcije reda modela. Pri analizi sistema koji imaju veliki broj čvorova (pod pojmom veliki broj čvorova se podrazumijeva 10^5 - 10^6 čvorova, pa i više) vrijeme potrebno za izvođenje simulacija, ali i potrebne karakteristike računara na kojem se izvodi analiza mogu predstavljati značajan problem, pogotovo u prvim fazama procesa projektovanja kada su česte izmjene projektovane strukture. Tehnike redukcije reda, odnosno redukcije broja stepeni slobode MKE modela, podrazumijevaju da se sistemi dobijeni primjenom metoda konačnih elemenata zamjene redukovanim sistemima, (sistemima prvog reda), koji sa dovoljnom tačnošću opisuju dinamičko ponašanje posmatranog sistema. Nakon što se sistem prevede u prostor stanja, dalje se vrši modalna redukcija, gdje se na bazi utvrđenih kriterijuma selektuje potreban broj modova. U ovom poglavlju za rangiranje modova koriste se dva kriterijuma: pojačanje u maksimumu i pojačanje na nultoj frekvenciji, odnosno kriterijum balansiranih redukcija.

U okviru trećeg poglavlja opisana je procedura izvođenja eksperimentalne modalne analize i identifikacije modalnih parametara, relativnog koeficijenta prigušenja, sopstvenih frekvencija oscilovanja, modalne mase, modalne krutosti, viskoznog prigušenja i oblika oscilovanja. Prikazani su principi akvizicije podataka pri izvođenju eksperimentalne modalne analize i dat prikaz korištene akvizicione i mjerne opreme. Na primjeru grede konstantnog kružnog poprečnog presjeka prikazan je analitički način utvrđivanja modalnih parametara na osnovu Ojler – Bernulijeve teorije grede, te modalna analiza u vremenskom domenu primjenom ARX direktne metode identifikacije modalnih parametara, te dato poređenje dobijenih rezultata.

U četvrtom poglavlju opisana je problematika analitičkog određivanja prenosne funkcije na primjeru grede promjenjivog kružnog poprečnog presjeka (trostepenog cilindra). Prenosna funkcija određuje se analitički, primjenom Ojler – Bernulijeve teorije greda i metode pozicionog spreznja, numerički primjenom ANSYS programa za analizu metodom konačnih elemenata, te izvođenjem eksperimentalne modalne analize.

U petom poglavlju analizira se dinamičko ponašanje sklopa glavnog vretena modula radne jedinice (jedinice pinole), za koje je određen matematički model dinamičkog ponašanja, te potom izvršena numerička i eksperimentalna verifikacija dobijenih rezultata. Modul radne jedinice predstavlja glavno vreteno uležišteno u aksijalno pomjerljivoj čauri (pinoli) sa pogonsko – prenosnom strukturom za glavno obrtno i pomoćno pravolinijsko kretanje. Prvo je izvršena modalna analiza slobodno oslonjenog glavnog vretena primjenom matematičkog modelovanja (pozicionog spreznja), numerički, primjenom različitih tipova konačnih elemenata, te izvođenjem eksperimentalne modalne analize. Nakon toga izvršena je modalna analiza uležištenog glavnog vretena, gdje je prikazan način matematičkog modelovanja oslonaca (ležajeva), te poređenje sa rezultatima dobijenim numerički. Pri numeričkoj analizi primjenom metoda konačnih elemenata, oslonci su modelovani primjenom COMBIN14 konačnog elementa koji posjeduje svojstva krutosti i prigušenja. Poredeći rezultate dobijene numerički, analitički i eksperimentalno može se konstatovati da prezentovani matematički model daje zadovoljavajuće rezultate.

U šestom poglavlju prikazano je korištenje numeričkih i eksperimentalnih metoda u cilju identifikacije sopstvenih frekvencija i oblika oscilovanja, kao i modalnih parametara različitih komponenti horizontalnog obradnog centra FM38. Obradni centar je modelovan u CATIA programskom sistemu, a MKE analiza izvršena u ANSYS-u. Sopstvene frekvencije dobijene MKE metodom i eksperimentalnim putem pokazuju zadovoljavajuće podudaranje. Također, prikazana je „*peak peaking*“ metodologija određivanja modalnih parametara na primjeru alata za glodanje. Na ovaj način određeni su modalni parametri komponenti čije vibracije dovode do pojave podrhtavanja (engl *chatter*).

U sedmom poglavlju data su zaključna razmatranja, kritički osvrt na izvršena istraživanja i pravci i smjernice za dalja istraživanja.

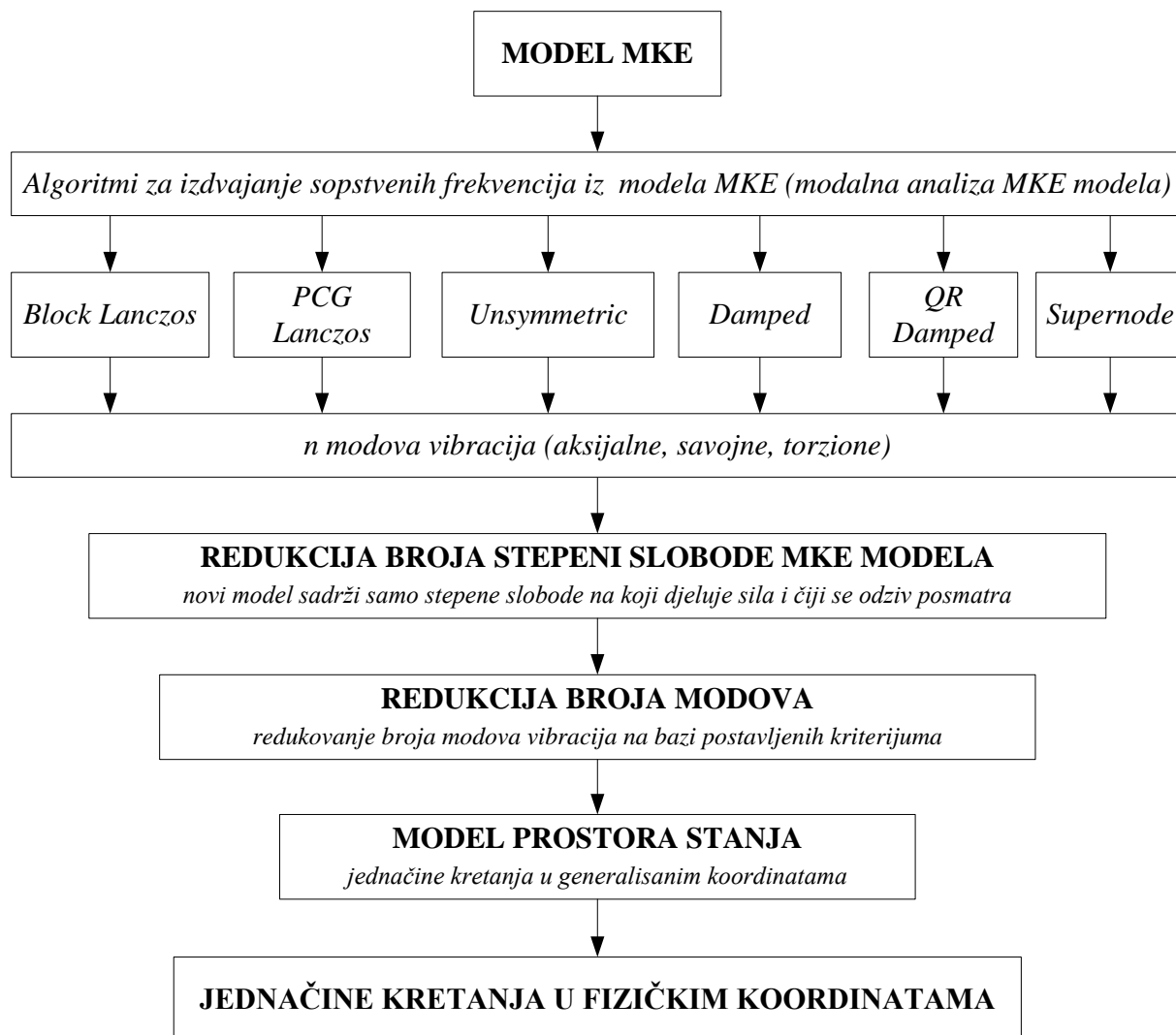
U osmom poglavlju dat je pregled korištene literature, koju čini 90 referenci.

Zasebnu cjelinu predstavljaju prilozi koji su podijeljeni u tri dijela.

2 REDUKCIJA REDA MODELA KONAČNIH ELEMENATA

2.1 UVODNE NAPOMENE

Jedna od glavnih poteškoća pri radu sa konačnim elementima predstavlja veličina modela. Kako je već ranije konstatovano, složeni sistem kao što je mašina alatka može imati i do 10^5 , pa čak i do 10^6 čvorova, čije procesiranje zahtjeva značajno vrijeme i računarske resurse. I pored velike brzine razvoja hardvera i softvera, takvi modeli su neprikladni za rad sa savremenim algoritmima teorije sistema. Zbog toga su razvijene metode redukcije reda modela (engleski Model Order Reduction, MOR) kojima se sistemi dobijeni primjenom metoda konačnih elementata zamjenjuju redukovanim sistemima, pri čemu se nastoji da se redukcijom sačuva dinamičko ponašanje sistema. Na slici 2.1 prikazan je postupak transformacije modela konačnih elemenata, koji može da sadrži i više stotina hiljada čvorova, u manje složen model, koji sa dovoljnom tačnošću opisuje dinamičko ponašanje.



Slika 2.1 Postupak redukcije reda modela konačnih elemenata

Modalnom analizom, primjenom metoda konačnih elemenata, dobijaju se rezonantne frekvencije i oblici oscilovanja, ali je količina podataka koja se dobije izvođenjem analize obično prevelika da bi se mogla importovati u Matlab i dalje koristiti. Dakle, cilj koji se želi postići nije dobijanje pouzdanog dinamičkog modela, budući da je takav model već određen primjenom metoda konačnih elemenata. Ciljevi koji se žele ostvariti su:

- Što je moguće manji i efikasniji model, pod čim se podrazumijeva zadovoljavajuća tačnost izvođenja različitih dinamičkih analiza u poređenju sa MKE modelom,
- Model koji se može dalje integrisati u modele složenijih sistema u Matlab - u, ili nekom drugom softveru,
- Redukovati veličinu modela, pri čemu treba sačuvati vezu ulaza i izlaza originalnog modela.

Pri izvođenju redukcije modela konačnih elemenata i transformacije u prostor stanja potrebno je izvršiti sljedeće korake:

1. Izvršiti modalnu analizu i izdvojiti sopstvene frekvencije i pomjeranja primjenom programskog sistema na bazi konačnih elemenata (npr. iz ANSYS-a),

2. Redukovati broj stepeni slobode originalog MKE modela (ANSYS). Model smanjiti tako što se u modalnu matricu uključuju oni stepeni slobode gdje djeluje opterećenje i oni čije se pomjeranje posmatra,
3. Analizirati modalni doprinos svih modova i izvršiti njihovo sortiranje u opadajućem poretku. Redukovati broj modova vibracija na bazi definisanih kriterijuma,
4. Formirati elemente prostora stanja,
5. Odrediti jednačine kretanja u fizičkim koordinatama.

Modalna analiza podrazumijeva određivanje sopstvenih frekvencija (*eigenvalue*, *prirodne*) i oblika oscilovanja (*eigen vector*) u željenom frekventnom domenu, te formiranje modalne matrice ($n \times n$) čije kolone predstavljaju sistem od n vektora oblika oscilovanja, počev od prvog oblika oscilovanja. Savremeni programski sistemi za analizu metodom konačnih elemenata posjeduju mnoštvo različitih algoritama za izdvajanje sopstvenih frekvencija pri izvođenju modalne analize. U savremenim programima najčešće korišten algoritam je Block – Lanczosov. Kod starijih sistema za MKE analizu uglavnom se koristi Gyanova redukcija i to pri analizi struktura koje imaju relativno mali broj čvorova (do nekoko hiljada).

Pri formiranju modalne matrice posmatra se samo određen broj čvorova i to prije svega oni čvorovi gdje djeluje opterećenje i čije se pomjeranje analizira. Definisanjem čvorova koji se smatraju ulaznim i izlaznim, formira se novi model koji sadrži isključivo stepene slobode čije se pomjeranje posmatra.

U okviru ovoga istraživanja razmatraju se sistemi kod kojih je prigušenje neznatno (malo) (*lightly damped*). Stoga se smatra da je prigušenje dominantno prisutno u spojevima, iako je prigušenje prisutno i kao posljedica procesa u samom materijalu. Ukoliko se prigušenje smatra proporcionalim, problem modalne analize se svodi na analizu uticaja pojedinih oblika oscilovanja na funkciju frekventnog odziva, a odziv sistema identifikuje na osnovu doprinosa pojedinačnih modova. Pri redukciji broja modova vibracija, najvažniji korak je definisati kriterijume na osnovu kojih se određuje uticaj pojedinih modova vibracija, odnosno vrši procjena učešća pojedinih modova u funkciji frekventnog odziva sistema. Utvrđivanje kriterijuma zavisi od prirode samog sistema koji se razmatra, odnosno od toga da li se radi o SISO (Single Input Single Output – jedan ulaz jedan izlaz) ili pak o MIMO (Multiple Input Multiple Output – više ulaza više izlaza). Kod SISO sistema rangiranje uticaja pojedinačnih modova vibriranja vrši se prema kriterijumu pojačanja na nultoj frekvenciji (*dc gain*) ili kriterijumu pojačanja u maksimumu (*pick gain*). Koji će od dva navedena kriterijuma biti primjenjen zavisi isključivo od toga da li koeficijent relativnog prigušenja ima jedinstvenu ili različitu vrijednost za svaki pojedinačni mod vibracija. U slučaju MIMO sistema primjenjuje se metoda balansiranih redukcija, pri kojoj se vrši analiza kontrolabilnost (upravljivosti) i opservabilnosti (osmotrivosti) sistema.

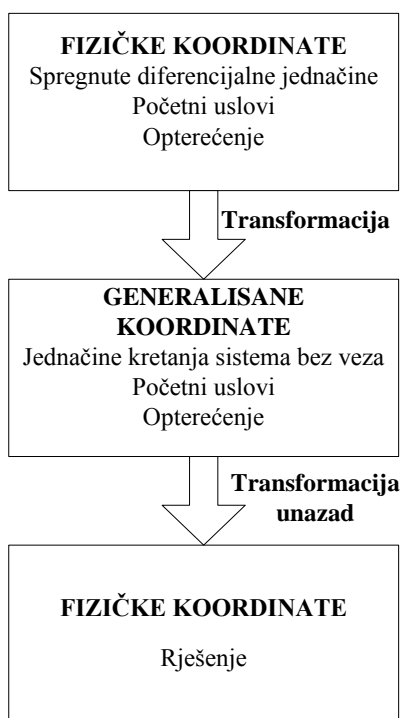
Jedan od načina za izvođenje modalne redukcije je odbacivanje modova na višim frekvencijama. Ukoliko se izvrši odbacivanje modova a da se pri tome zanemari uticaj pojedinih modova na ukupnu funkciju frekventnog odziva sistema, mogu se očekivati značajna odsupanja dobijene veličine u odnosu na željenu i to iz dva razloga:

- Prvi razlog je moguće prisustvo frekvencijskog preklapanja (*aliasing*) do koga dolazi ukoliko frekvencija osnovnog kontinualnog signala veća od Nyquist –ove frekvencije ω_n .

- Drugi razlog je moguće prisustvo u „višem“ frekventnom području modova čiji je uticaj u funkciji frekventnog odziva značajno veći u odnosu na modove u nižem frekventnom području, iako najčešće uticaj modova opada sa porastom frekvencije.

Matematički model dobijen na bazi metoda konačnih elemenata je linearni vremenski invarijantni model dinamičkog sistema, s obzirom da jednačine koje ga opisuju ne sadrže vrijeme kao nepoznatu. Analizom sistema primjenom metoda konačnih elemenata dobijaju se matrice krutosti, prigušenja i inercije, promjenjive su pomaci čvorova, dok je sam model drugog reda. Ovakav model može se transformisati u prostor stanja sistema, odnosno model prvog reda gde su promjenjive pomaci i brzine čvorova, što je osnovna zamisao redukcije modela konačnih elemenata. Definisanjem prostora stanja sistema u potpunosti je određeno njegovo dinamičko ponašanje, te moguć prelaz u oblik prenosne funkcije.

Transformacija sistema spregnutih diferencijalnih jednačina kretanja u fizičkim koordinatama u model nespregnutih jednačina kretanja u generalisanim koordinatama vrši se transformacijama matrica mase i krutosti primjenom normalizovane matrice, odnosno modalne matrice normalizovane s obzirom na masu. Pri tome svaka od nespregnutih jednačina opisuje kretanje pojedinačnog moda vibracija. Konačno, dobijene jednačine kretanja se ponovnom transformacijom vraćaju u fizički koordinatni sistem, Slika 2.2.



Slika 2.2 Postupak određivanja modalnih parametara transformacijom fizičkih u generalisane koordinate

2.2 TEORIJSKE OSNOVE PROSTORA STANJA

Matematički model sistema u prostoru stanja opisuje ponašanje nekog sistema skupom diferencijalnih jednačina prvog reda umjesto matematičkog modela definisanog diferencijalnom jednačinom n-tog reda. Model u prostoru stanja sistema pokazuje dinamičku zavisnost između ulaznih i izlaznih veličina, odnosno zavisnosti ponašanja

sistema od početnih uslova. Vektorsko-matrični oblik modela linearnog u prostoru stanja sistema je definisan na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (2.1)$$

pri čemu se prva jednačina naziva jednačinom stanja, a druga jednačina jednačinom izlaza. Pri tome su:

x – vektor promjenljivih stanja,

u – vektor ulaznih promjenljivih

y – vektor izlaznih promjenljivih,

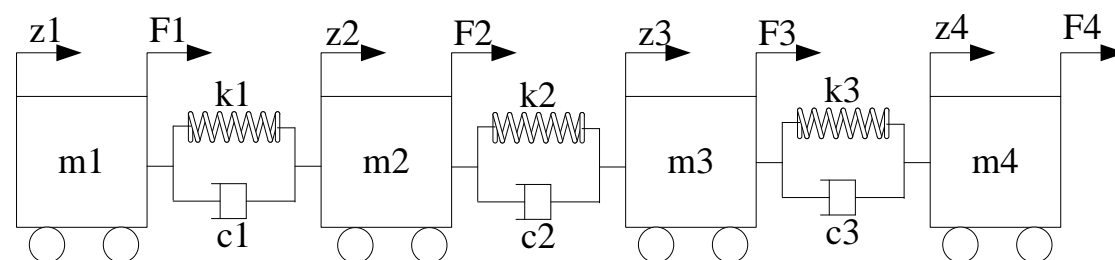
A – matrica stanja ili matrica sistema,

B – ulazna matrica,

C – matrica izlaza,

D – matrica direktnog preslikavanja ulaza u izlaz, ili ulazna–izlazno matrica.

U nastavku su date teorijske osnove prostora stanja na primjeru sistema sa četiri stepena slobode kretanja prikazanog na slici 2.3.



Slika 2.3 Sistem sa četiri stepena slobode kretanja

Jednačine kretanja u matričnom obliku za prethodno prikazani primjer su:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \\ \ddot{z}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Na osnovu jednačine kretanja u matričnom obliku dobija se sistem četiri spregnute diferencijalne jednačine drugog reda čije rješavanje zahtjeva poznavanje početnih uslova (pozicije i brzine.)

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{z}_1 + c_1 \dot{z}_1 - c_1 \dot{z}_2 + k_1 z_1 - k_1 z_2 &= F_1 \\ m_2 \ddot{z}_2 - c_1 \dot{z}_1 + (c_1 + c_2) \dot{z}_2 - c_2 \dot{z}_3 - k_1 z_1 + (k_1 + k_2) z_2 - k_2 z_3 &= F_2\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{z}_3 - c_2 \dot{z}_2 + (c_2 + c_3) \dot{z}_3 - c_3 \dot{z}_4 - k_2 z_2 + (k_2 + k_3) z_3 - k_3 z_4 &= F_3 \\ m_4 \ddot{z}_4 + c_3 \dot{z}_3 - c_3 \dot{z}_4 + k_3 z_3 - k_3 z_4 &= F_4 \end{aligned}$$

Sistem diferencijalnih jednačina postaje:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= (F_1 - c_1 \dot{z}_1 + c_1 \dot{z}_2 - k_1 z_1 + k_1 z_2) / m_1 \\ \ddot{z}_2 &= (F_2 + c_1 \dot{z}_1 - (c_1 + c_2) \dot{z}_2 + c_2 \dot{z}_3 + k_1 z_1 - (k_1 + k_2) z_2 + k_2 z_3) / m_2 \\ \ddot{z}_3 &= (F_3 + c_2 \dot{z}_2 - (c_2 + c_3) \dot{z}_3 + c_3 \dot{z}_4 + k_2 z_2 - (k_2 + k_3) z_3 + k_3 z_4) / m_3 \\ \ddot{z}_4 &= (F_4 - c_3 \dot{z}_3 + c_3 \dot{z}_4 - k_3 z_3 + k_3 z_4) / m_4 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ukoliko se uvede promjenjiva x koja određuje stanja, kojih u konkretnom slučaju ima osam - četiri pozicije i četiri brzine, odnosno

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 && \text{pozicija mase 1} \\ x_2 &= \dot{z}_1 && \text{brzina mase 1} \\ x_3 &= z_2 && \text{pozicija mase 2} \\ x_4 &= \dot{z}_2 && \text{brzina mase 2} \\ x_5 &= z_3 && \text{pozicija mase 3} \\ x_6 &= \dot{z}_3 && \text{brzina mase 3} \\ x_7 &= z_4 && \text{pozicija mase 4} \\ x_8 &= \dot{z}_4 && \text{brzina mase 4} \end{aligned} \quad (2.5)$$

te uspostavljajući zavisnost između stanja i njihovih prvih izvoda

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= x_2 = \dot{x}_1 \\ \dot{z}_2 &= x_4 = \dot{x}_3 \\ \dot{z}_3 &= x_6 = \dot{x}_5 \\ \dot{z}_4 &= x_8 = \dot{x}_7 \end{aligned} \quad (2.6)$$

odnosno između prvih i drugih izvoda:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= \dot{x}_2 \\ \ddot{z}_2 &= \dot{x}_4 \\ \ddot{z}_3 &= \dot{x}_6 \\ \ddot{z}_4 &= \dot{x}_8 \end{aligned} \quad (2.7)$$

sistem diferencijalnih jednačina 2.4 postaje:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (F_1 - c_1 x_2 + c_1 x_4 - k_1 x_1 + k_1 x_3) / m_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= (F_2 + c_1 x_2 - (c_1 + c_2) x_4 + c_2 x_6 + k_1 x_1 - (k_1 + k_2) x_3 + k_2 x_5) / m_2 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= (F_3 + c_2 x_4 - (c_2 + c_3) x_6 + c_3 x_8 + k_2 x_3 - (k_2 + k_3) x_5 + k_3 x_7) / m_3 \\ \dot{x}_7 &= x_8 \\ \dot{x}_8 &= (F_4 - c_3 x_6 + c_3 x_8 + k_3 x_5 - k_3 x_7) / m_4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

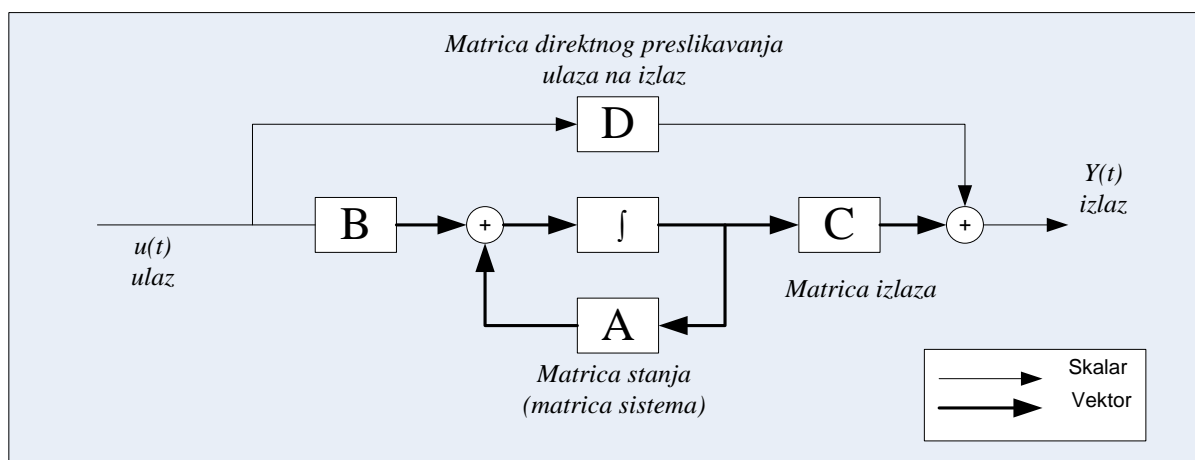
Sistem jednačina 2.8. se može prikazati u matričnom obliku kao

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{(k_1+k_2)}{m_2} & -\frac{(c_1+c_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & \frac{c_2}{m_3} & -\frac{(k_2+k_3)}{m_3} & -\frac{(c_2+c_3)}{m_3} & \frac{k_3}{m_3} & \frac{c_3}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_3}{m_4} & \frac{c_3}{m_4} & -\frac{k_3}{m_4} & -\frac{c_3}{m_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{F_2}{m_2} \\ 0 \\ \frac{F_3}{m_3} \\ 0 \\ \frac{F_4}{m_4} \end{bmatrix}$$

Šematski prikaz prostora stanja dat je na slici 2.4. Skalarna veličina u predstavlja ulaz u matricu ulaza B i ulazno – izlaznu matricu D, dok je izlaz Y vektor izlaznih varijabli. Kod sistema sa jednom ulaznom i jednom izlaznom veličinom (SISO) ulazno - izlazna matrica D je skalar čiji izlazi se sabiraju sa matricom izlaza C.

Varijable stanja određuju matricu A dimenzija n x n. Elementi matrice A su sopstvene frekvencije i koeficijenti relativnog prigušenja svakog oblika oscilovanja, strukturirani dijagonalno unutar matrice A u vidu podmatrica 2x2, izraz 2.9.



Slika 2.4 Blok dijagram prostora stanja

S obzirom da je u skalarna veličina, red matrice B zavisi od vektora ulaza, dakle matrica B je dimenzija n x p, gdje je p broj ulaza. Kod SI (engl. *Single Input*) sistema, odnosno sistema sa jednim ulazom, matrica B je vektor kolona. Isto vrijedi i ukoliko opterećenje djeluje istovremeno na više masa. Međutim, kod sistema sa više ulaza (engl. *Multiple Input*, MI), gdje više opterećenja djeluju nezavisno jedna od druge na različite mase, matrica B ima više ulaza.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F_4}{m_4} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{F_1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_4}{m_4} \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

Izgled matrice B
SI (Single Input) sistema

Izgled matrice B MI
(Multiple Input) sistema

Matrica C je dimenzija r x n, gdje je r broj izlaza, a n broj stanja. U navedenom primjeru u kom se posmatra osam stanja (pomjeranja i brzina), uz pretpostavku da je matrica D jednaka nuli, matrična jednačina izlaza postaje:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1) \qquad (2.11)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 = z_1 \\ y_2 &= x_2 = \dot{z}_1 \\ y_3 &= x_3 = z_2 \\ y_4 &= x_4 = \dot{z}_2 \\ y_5 &= x_5 = z_3 \\ y_6 &= x_6 = \dot{z}_3 \\ y_7 &= x_7 = z_4 \\ y_8 &= x_8 = \dot{z}_4 \end{aligned} \qquad (2.12)$$

2.3 TEORIJSKE OSNOVE MODALNE ANALIZE

2.3.1 Normalizovane matrice

Ukoliko se izvrši Laplasova transformacija jednačine kretanja u matričnom obliku 2.3., uz nulte početne uslove dobija se

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 z_1 \\ s^2 z_2 \\ s^2 z_3 \\ s^2 z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s z_1 \\ s z_2 \\ s z_3 \\ s z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Postoji ukupno 16 prenosnih funkcija koje predstavljaju rješenja jednačine (2.13), Slika 2.5., za svaku kombinaciju stepeni slobode na kojima djeluje opterećenje i na kojima se posmatra pomjeranje. Zbog obimnog matematičkog aparata za rješavanje se koristi Matlab simbolička algebra.

$\frac{z_1}{F_1}$	$\frac{z_1}{F_2}$	$\frac{z_1}{F_3}$	$\frac{z_1}{F_4}$
$\frac{z_2}{F_1}$	$\frac{z_2}{F_2}$	$\frac{z_2}{F_3}$	$\frac{z_2}{F_4}$
$\frac{z_3}{F_1}$	$\frac{z_3}{F_2}$	$\frac{z_3}{F_3}$	$\frac{z_3}{F_4}$
$\frac{z_4}{F_1}$	$\frac{z_4}{F_2}$	$\frac{z_4}{F_3}$	$\frac{z_4}{F_4}$

Slika 2.5. Moguća rješenja jednačine (2.13) – ukupno 16 prenosnih funkcija

Kako bi se uprostilo rješavanje prenosnih funkcija usvaja se da je $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $c_1 = c_2 = c$, $k_1 = k_2 = k$, te određuju rješenja prenosne funkcije $z_{11} = \frac{z_1}{F_1}$, $z_{12} = \frac{z_1}{F_2}$...

Na svakoj sopstvenoj frekvenciji, vektor oblika oscilovanja definiše relativno pomjeranje između stepeni slobode. Kada se razmatra relativno pomjeranje, potrebno je prvo definisati one stepene slobode u odnosu na koje se posmatra pomjeranje ostalih. Relativno pomjeranje se može odrediti koristeći bilo koju od kolona matrice prenosne funkcije. Ukoliko se odabere prva kolona, te z_1 kao referentni stepen slobode, relativna pomjeranja su z_2 / z_1 , z_3 / z_1 i z_4 / z_1 . Polovi ili rezonantne frekvencije predstavljaju korijene karakteristične jednačine i u slučaju razmatranog sistema su

$$\begin{aligned} \omega_{n1/2} &= 0 \\ \omega_{n3/4} &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m} (2 - \sqrt{2})} \\ \omega_{n5/6} &= \pm i \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ \omega_{n7/8} &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m} (2 + \sqrt{2})} \end{aligned} \quad (2.14)$$

S obzirom da se u ovom trenutku zanemaruje prigušenje sistema, odnosno smatra se da je prigušenje jednako nuli, svi polovi se nalaze na imaginarnoj osi s ravni. Četiri kolone modalne matrice predstavljaju oblike oscilovanja prva četiri moda, dok redovi predstavljaju relativno pomjeranje svakog od stepeni slobode. Ukoliko se usvoji da je $m=k=l$, modalna matrica sistema sa četiri stepena slobode je

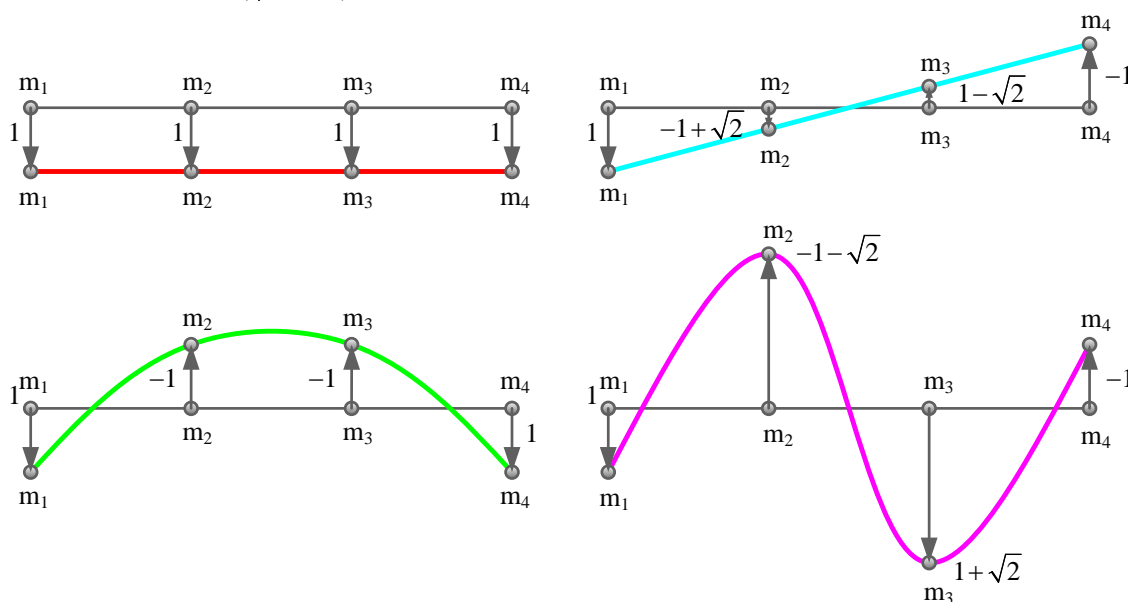
$$z_m = \begin{matrix} \text{Mod} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} & -1 & -1-\sqrt{2} \\ 1 & 1-\sqrt{2} & -1 & 1+\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Stepen slobode 1} \\ \text{Stepen slobode 2} \\ \text{Stepen slobode 3} \\ \text{Stepen slobode 4} \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.15)$$

$z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4$

Očigledno je da glavni oblici oscilovanja (modovi) 1 i 2, odgovaraju pomjeranju krutog tijela, dok su glavni oblici oscilovanja 3 i 4 prvi i drugi oblik savojnih (poprečnih, transverzalnih) vibracija, Slika 2.5.

Sopstvene frekvencije

- Mod 1 0 Hz
- Mod 2 $(\sqrt{2}-\sqrt{2})/2\pi$ Hz
- Mod 3 $\sqrt{2}/2\pi$ Hz
- Mod 4 $(\sqrt{2}+\sqrt{2})/2\pi$ Hz



Slika 2.5 Oblici oscilovanja - prva četiri glavna oblika oscilovanja (moda)

Modalna matrica se može odrediti i na drugi način uz pretpostavku da je sistem konzervativan (nema prigušenja) te da se kretanje može izraziti jednačinom

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad (2.16)$$

Ako se pretpostavi da je rješenje jednačine 2.16 oblika $z_i = z_{mi} \sin(\omega_i + \varphi_i)$, te prvi i drugi izvod uvrsti u jednačinu kretanja, uzimajući pri tome da je $\omega^2 = k/m$ dobija se

$$\ddot{z}_i = -\omega_i^2 z_{mi} \sin(\omega_i + \varphi_i), \text{ odnosno} \quad (2.17)$$

$$m[-\omega_i^2 z_{mi} \sin(\omega_i + \varphi_i)] + k[z_{mi} \sin(\omega_i + \varphi_i)] = 0$$

Ukoliko se prethodni izraz podijeli sa $\sin(\omega_i + \varphi_i)$ diferencijalna jednačina kretanja postaje homogena jednačina oblika

$$(k - \omega_i^2 m) z_{mi} = 0 \quad (2.18)$$

Trivijalno rješenje ove jednačine je $z_{mi} = 0$, dok netrivialna rješenja postoje jedino ukoliko je determinanta koeficijenata matrice jednaka nuli. Prethodna jednačina može se napisati u obliku

$$\left\{ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \right\} z_{mi} = 0 \quad (2.19)$$

Determinanta matrice 2.19. ima oblik

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.20)$$

Rješenja determinante $\omega_{1/2n}^2 = 0$, $\omega_{3/4n}^2 = 2 - \sqrt{2}$, $\omega_{5/6n}^2 = 2$, $\omega_{7/8n}^2 = 2 + \sqrt{2}$ predstavljaju polove, odnosno rezonantnu frekvenciju sistema. Za svaku od dobijenih frekvencija postoji vektor oblika oscilovanja koji određuje pomjeranje svakog od stepeni slobode na datoj frekvenciji. Kako bi se odredio vektor oblika oscilovanja potrebno je pomjeranje jednog stepena slobode kretanja posmatrati kao referentan, te u odnosu na njega odrediti relativna pomjeranja ostalih stepeni slobode, odnosno

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & 0 & -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{m1i} \\ z_{m2i} \\ z_{m3i} \\ z_{m4i} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

Prethodna jednačina se može predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} z_1 (k - m\omega^2) - kz_2 &= 0 \\ z_2 (2k - m\omega^2) - kz_3 - kz_1 &= 0 \\ z_3 (2k - m\omega^2) - kz_4 - kz_2 &= 0 \\ z_4 (k - m\omega^2) - kz_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Na osnovu prethodnih jednačina mogu se odrediti relativna pomjeranja pojedinačnih stepeni slobode u odnosu na pomjeranje referentnog stepena slobode, u konkretnom slučaju z_1 .

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{k - m\omega^2}{k} \quad (2.23)$$

$$\frac{z_3}{z_1} = \left(\frac{k - m\omega^2}{k} \right) \left(\frac{2k - m\omega^2}{k} \right) - 1$$

$$\frac{z_4}{z_1} = \left[\left(\frac{k - m\omega^2}{k} \right) \left(\frac{2k - m\omega^2}{k} \right) - 1 \right] \left(\frac{2k - m\omega^2}{k} \right) - \left(\frac{k - m\omega^2}{k} \right)$$

Ukoliko se usvoji da je $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m = 1$, te da je $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k = 1$ zamjenom izračunatih rezonantnih frekvencija u gornje jednačine dobijaju se oblici oscilovanja za svaku pojedinačnu frekvenciju, što je predstavljeno kolonama modalne matrice 2.24.

$$z_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 + \sqrt{2} & -1 & -1 - \sqrt{2} \\ 1 & 1 - \sqrt{2} & -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

S obzirom da vektori oblika oscilovanja predstavljaju odnose amplituda, dakle ne predstavljaju amplitude u apsolutnim vrijednostima, potrebno je izvršiti njihovu normalizaciju.

Postoji više tehnika normalizacije, u primjeru koji slijedi koristi se normalizacija u odnosu na masu, s obzirom da se ova tehnika primjenjuje u programima za analizu metodom konačnih elemenata. Uobičajeno je da se usvoji vrijednost amplitude prvog stepena slobode 1.

$$z_{ni} = \frac{z_{mi}}{\left[z_{mi}^T m z_{mi} \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{z_{mi}}{q}$$

$$q_i = \left[\sum_{j=1}^n z_{mji} \left(\sum_{k=1}^n m_{jk} z_{mki} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

$$q_i = \left[\sum_{k=1}^n m_k z_{mki}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$q_1 = \sqrt{m(1)^2 + m(1)^2 + m(1)^2 + m(1)^2} = 2\sqrt{m}$$

$$q_2 = \sqrt{m(1)^2 + m(-1 + \sqrt{2})^2 + m(1 - \sqrt{2})^2 + m(-1)^2} = 2\sqrt{m}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad (2.26)$$

$$q_3 = \sqrt{m(1)^2 + m(-1)^2 + m(-1)^2 + m(1)^2} = 2\sqrt{m}$$

$$q_4 = \sqrt{m(1)^2 + m(-1 - \sqrt{2})^2 + m(1 + \sqrt{2})^2 + m(-1)^2} = 2\sqrt{m}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Modalna matrica normalizovana u odnosu na masu ima oblik:

$$z_n = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & -1 & \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & -1 & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\ 1 & \frac{-1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} & 1 & \frac{-1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Dobijeno rješenje se može veoma lako provjeriti budući da proizvod transponovane modalne matrice normalizovane u odnosu na masu, matrice mase i modalne matrice mora biti jedinična matrica, odnosno

$$z_{ni}^T m z_{ni} = 1.0 \quad (2.28)$$

$$z_{ni}^T m z_{ni} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{-1+\sqrt{2}}{2\sqrt{m}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{m}\sqrt{2-\sqrt{2}}} & \frac{-1}{2\sqrt{m}\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m}} & \frac{-1}{2\sqrt{m}} & \frac{-1}{2\sqrt{m}} & \frac{1}{2\sqrt{m}} \\ \frac{1}{2\sqrt{m}\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{-1-\sqrt{2}}{2\sqrt{m}\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{m}\sqrt{2+\sqrt{2}}} & \frac{-1}{2\sqrt{m}\sqrt{2+\sqrt{2}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Na sličan način vrši se transformacija matrice krutosti u normalizovanu matricu krutosti, poznatu i pod nazivom spektralna matrica.

$$k_n = z_n^T k z_n \quad (2.30)$$

Važno je uočiti da je normalizovana matrica krutosti dijagonalna matrica, dok su elementi na glavnoj dijagonali u stvari kvadrati rezonantnih frekvencija oscilovanja, što predstavlja još jedan način provjere dobijenih rezultata.

Spektralna matrica ima oblik

$$k_n = z_n^T k z_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5858 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.4142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Jednačina kretanja u generalisanom koordinatnom sistemu glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_{p1} \\ \ddot{z}_{p2} \\ \ddot{z}_{p3} \\ \ddot{z}_{p4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2-\sqrt{2})k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(2+\sqrt{2})k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \\ z_{p3} \\ z_{p4} \end{bmatrix} = [0] \quad (2.30)$$

2.3.2 Definisanje jednačina kretanja u generalisanim koordinatama

U opštem slučaju matrica prigušenja se ne može transformisati u normalizovanu matricu prigušenja na način na koji je to učinjeno sa matricama mase i krutosti. Kako bi se mogla dobiti matrica prigušenja u normalizovanom obliku pretpostavlja se da je prigušenje proporcionalno, odnosno da predstavlja linearnu kombinaciju mase i krutosti.

U opštem slučaju prigušenje se javlja zbog dva razloga. Prvi razlog je pojava histereze, odnosno vremenskog zaostajanja deformacije u odnosu na naprezanje i pojava disipacije energije usljed nelinearnih svojstava materijala. Drugi razlog su viskoelastična svojstva materijala, pri čemu se prigušenje uglavnom javlja na mjestima spojeva. Smatra se da je kod većine elemenata koji se primjenjuju u konstrukcijama vrijednost prigušenja od 0,05% do 2% vrijednosti kritičnog prigušenja.

Kod proporcionalnog prigušenja, prigušenje svakog moda se smatra jednakim, iako je u opštem slučaju različito. Smatra se da je prigušenje svakog moda proporcionalno kritičnom prigušenju tog moda, te da se zbog viskoelastičnih svojstava materijala može smatrati proporcionalnim brzini.

Ukoliko se posmatra jednačina prinudnih prigušenih vibracija

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F \quad (2.31)$$

te ako se pretpostavi da je prigušenje linearna kombinacija mase i krutosti, jednačina prinudnih prigušenih vibracija se može napisati kao

$$\begin{matrix} z_n^T m z_n & z_n^{-1} \ddot{z} & z_n^T c z_n & z_n^{-1} \dot{z} & z_n^T k z_n & z_n^{-1} z & z_n^T F \\ I & \ddot{z}_p & c_p & \dot{z}_p & k_p & z_p & F_p \end{matrix} \quad (2.32)$$

dok se normalizovana matrica prigušenja može izraziti kao:

$$z_n^T c z = a z_n^T m z + b z_n^T k z = aI + b k_p = a + b\omega_i^2 \quad (2.33)$$

Ako se relativno prigušenje izrazi kao

$$\zeta_i = \left(\frac{c_i}{c_{ci}} \right)_i = \frac{c_i}{2\sqrt{k_{pi}m_{pi}}} = \frac{c_i}{2m_{pi}\omega_i^2} \quad (2.34)$$

s obzirom da su elementi normalizovane matrice mase jedanki 1, jednačina 2.36 postaje

$$\zeta_i = \frac{a + b\omega_i^2}{2\omega_i} \quad (2.35)$$

$$2\zeta_i\omega_i = a + b\omega_i^2$$

dok jednačina prinudnih prigušenih vibracija u generalisanim koordinatama ima sljedeći oblik:

$$\ddot{z}_{pi} + 2\zeta_i\omega_i\dot{z}_{pi} + \omega_i^2z_{pi} = F_{pi} \quad (2.36)$$

Ukoliko se jednačina 2.38. izrazi u matričnom obliku dobija se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_{p1} \\ \ddot{z}_{p2} \\ \ddot{z}_{p3} \\ \ddot{z}_{p4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_3\omega_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta_4\omega_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_{p1} \\ \dot{z}_{p2} \\ \dot{z}_{p3} \\ \dot{z}_{p4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{p1} \\ z_{p2} \\ z_{p3} \\ z_{p4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{p1} \\ F_{p2} \\ F_{p3} \\ F_{p4} \end{bmatrix}$$

Prethodna matrična jednačina se može izraziti kao

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{p1} &= F_{p1} \\ \ddot{z}_{p2} + 2\zeta_2\omega_2\dot{z}_{p2} + \omega_2^2z_{p2} &= F_{p2} \\ \ddot{z}_{p3} + 2\zeta_3\omega_3\dot{z}_{p3} + \omega_3^2z_{p3} &= F_{p3} \\ \ddot{z}_{p4} + 2\zeta_4\omega_4\dot{z}_{p4} + \omega_4^2z_{p4} &= F_{p4} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sistem jednačina 2.39 se može drugačije napisati kao

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{p1} &= F_{p1} \\ \ddot{z}_{p2} &= F_{p2} - 2\zeta_2\omega_2\dot{z}_{p2} - \omega_2^2z_{p2} \\ \ddot{z}_{p3} &= F_{p3} - 2\zeta_3\omega_3\dot{z}_{p3} - \omega_3^2z_{p3} \\ \ddot{z}_{p4} &= F_{p4} - 2\zeta_4\omega_4\dot{z}_{p4} - \omega_4^2z_{p4} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Uvođenjem nepoznate x, odnosno definisanjem osam stanja - četiri pozicije i četiri brzine, dobija se:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_{p1} \\ x_2 &= \dot{z}_{p1} \\ x_3 &= z_{p2} \\ x_4 &= \dot{z}_{p2} \\ x_5 &= z_{p3} \\ x_6 &= \dot{z}_{p3} \\ x_7 &= z_{p4} \\ x_8 &= \dot{z}_{p4} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Uvrštavanjem 2.41 u 2.40 dobija se:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= F_{p1} \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= F_{p2} - \omega_2^2 x_3 - 2\zeta_2 \omega_2 x_4 \\
 \dot{x}_5 &= x_6 \\
 \dot{x}_6 &= F_{p3} - \omega_3^2 x_5 - 2\zeta_3 \omega_3 x_6 \\
 \dot{x}_7 &= x_8 \\
 \dot{x}_8 &= F_{p4} - \omega_4^2 x_7 - 2\zeta_4 \omega_4 x_8
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Jednačina 2.42 može se napisati u matričnom obliku:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & -2\zeta_2 \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_3 & -2\zeta_3 \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_4 & -2\zeta_4 \omega_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{p1} \\ 0 \\ F_{p2} \\ 0 \\ F_{p3} \\ 0 \\ F_{p4} \end{bmatrix} \\
 \dot{x} &= A x + B u
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

Analizirajući jednačinu 2.43. može se uočiti da se duž dijagonale izdvajaju četiri podmatrice reda dva, pri čemu prva podmatrica 2x2 predstavlja odziv prvog oblika oscilovanja, druga matrica drugog oblika oscilovanja itd.

$$\begin{aligned}
 \text{Prva podmatrica 2x2: } & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{Druga podmatrica 2x2: } & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_2 & -2\zeta_2 \omega_2 \end{bmatrix} \\
 \text{Treća podmatrica 2x2: } & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_3 & -2\zeta_3 \omega_3 \end{bmatrix} \\
 \text{Četvrta podmatrica 2x2: } & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_4 & -2\zeta_4 \omega_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Ukoliko se pođe od pretpostavke da su vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja i relativnog prigušenja poznate, tada se na jednostavan način može doći do elemenata matrice A. Također, važno je uočiti da četiri moda nisu spregnuti, te da se jednačine kretanja u prostoru stanja mogu prikazati nezavisno

$$\begin{aligned}
 \text{Za prvi oblik oscilovanja: } & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{p1} \end{bmatrix} u \\
 \text{Za drugi oblik oscilovanja: } & \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_2 & -2\zeta_2 \omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{p2} \end{bmatrix} u
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} \text{Za treći oblik oscilovanja:} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_3 & -2\zeta_3\omega_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{p3} \end{bmatrix} u \\ \text{Za četvrti oblik} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_4^2 & -2\zeta_4\omega_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_{p4} \end{bmatrix} u \\ \text{oscilovanja:} \end{aligned}$$

2.4 ODREĐIVANJE MODELA PROSTORA STANJA SLOBODNO OSLONJENE GREDE KRUŽNOG POPREČNOG PRESJEKA

2.4.1 Određivanje modalnih parametara potrebnih za prelazak u model prostora stanja

U ovom poglavlju prikazano je određivanje modela prostora stanja na osnovu prethodno izloženih teorijskih razmatranja. Analiza je izvršena na geometrijskom tijelu jednostavnog oblika – gredi kružnog poprečnog presjeka prikazanoj na slici 2.7.

Na ovom primjeru prikazana je primjena ranije izloženog metoda redukcije veličine modela konačnih elemenata, kao i metoda modalne redukcije, koji će u nastavku rada biti primjenjeni pri analizi složenijih modela, odnosno glavnog vretena i elemenata noseće strukture mašine alatke.

Kao preduslov za prelazak iz modela konačnih elemenata u model prostora stanja potrebno je najprije, primjenom metoda konačnih elemenata odrediti modalne parametre posmatranog sistema, odnosno sopstvene frekvencije oscilovanja i pomjeranja čvorova gdje se nanosi opterećenje, te onih čvorova čiji se odziv posmatra u konkretnom slučaju.

Navedeni modalni parametri se određuju primjenom ANSYS programskog sistema, dok se verifikacija sopstvenih frekvencija dobijenih primjenom MKE vrši na dva načina – analitički i izvođenjem eksperimentalne modalne analize.

Pri određivanju modalnih parametara primjenom MKE koristi se više različitih algoritama za izdvajanje sopstvenih frekvencija, te se potom vrši poređenje dobijenih rezultata.

Razmatra se slobodno oslonjena greda sljedećih geometrijskih i mehaničkih karakteristika: kružni poprečni presjek, prečnik grede $d = 25$ mm, dužina $l = 1005$ mm, materijal – čelik, modul elastičnosti $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ N/mm², Poasonov koeficijent $\nu = 0,3$, gustina materijala $\rho = 7850$ N/mm².

Masa grede utvrđena mjerenjem iznosi 3,854 kg, dok masa izračunata analitički na osnovu karakteristika materijala iznosi $m = 3,871$ kg.

2.4.1.1 Numeričko određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja primjenom metoda konačnih elemenata

Pri generisanju mreže konačnih elemenata u ANSYS-u koristi se SOLID186 tip konačnog elementa. Ovako modelovana greda ima 48823 čvora. U konkretnom primjeru određuju se sopstvene frekvencija oscilovanja grede i pomjeranja jednog čvora na vrhu, dok sistem koji se posmatra predstavlja SISO sistem (jedan ulaz i jedan izlaz).

Kod ovakvog modela gdje se opterećenje nanosi u istom čvoru u kom se analizira pomjeranje, odnosno na istoj „lokaciji“ na gredi, amplitudno – frekvencijska karakteristika dobijena na osnovu prenosne funkcije određene u prostoru stanja se naziva „direktna“ (engleski *direct FRF*). Nasuprot tome, u slučaju kada čvor u kom se nanosi opterećenje nije

ujedno i čvor čije se pomjeranja analizira, odnosno kada tačke u kojima se nanosi opterećenje i određuje pomjeranje nisu na istoj lokaciji, dobijena amplitudno – frekvencijska karakteristika naziva se „unakrsna“ (engleski *cross FRF*).

Izdvajanje sopstvenih frekvencija oscilovanja, odnosno prvih devet oblika savojnih vibracija izvodi se primjenom dva algoritma: Block Lanczos-ov i Supernode.

Na osnovu rezultata izvršene modalne analize određene su modalne matrice, odnosno pomjeranja čvorova na mjestu gdje djeluje opterećenje, kao i čvora čije se pomjeranje posmatra za prvih devet sopstvenih frekvencija oscilovanja.

Dobijeni model ima osamnaest stanja, budući da je broj stanja jednak dvostrukom broju modova.

2.4.1.2 Analitičko određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja

Sopstvena ugaona frekvencija može se analitički odreti prema obrascu $\omega_n = A \sqrt{\frac{E \cdot I}{\mu \cdot l^4}}$, gdje su: E –modul elastičnosti N/m^2 , I – aksijalni moment inercije poprečnog presjeka m^4 , l – dužina grede m, μ - masa po jedinici dužine, A – koeficijent koji za slobodno oslonjenu gredu ima sljedeće vrijednosti: A = 22,4 za prvi oblik oscilovanja, A = 61,7 za drugi oblik oscilovanja, A = 121 za treći oblik oscilovanja, A = 200 za četvrti oblik oscilovanja, A = 298 za peti oblik oscilovanja.

$$I = \frac{0,025^4 \cdot \pi}{64} = 1,9175 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\mu = \frac{3,854}{1,005} = 3,834 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$\omega_{n1} = 22,4 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9175 \cdot 10^{-8}}{1,005^4}} = 718,73 \text{ s}^{-1}, f_1 = 114,44 \text{ Hz}$$

$$\omega_{n2} = 61,7 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9175 \cdot 10^{-8}}{1,005^4}} = 1979,72 \text{ s}^{-1}, f_2 = 315,24 \text{ Hz} \quad (2.44)$$

$$\omega_{n3} = 121 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9175 \cdot 10^{-8}}{1,005^4}} = 3882,43 \text{ s}^{-1}, f_3 = 618,22 \text{ Hz}$$

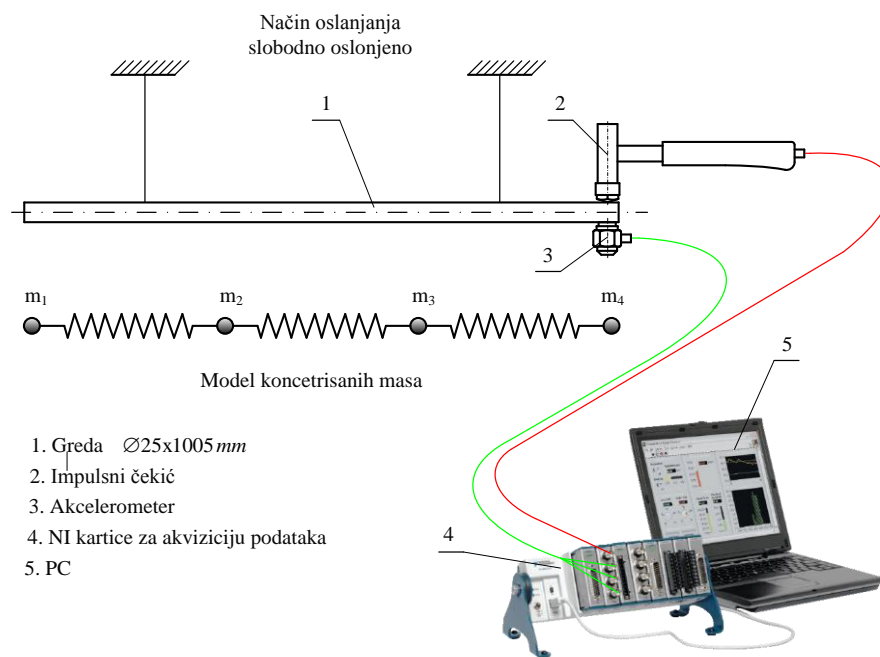
$$\omega_{n4} = 200 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9175 \cdot 10^{-8}}{1,005^4}} = 6417,25 \text{ s}^{-1}, f_4 = 1021,85 \text{ Hz}$$

$$\omega_{n5} = 298 \cdot \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9175 \cdot 10^{-8}}{1,005^4}} = 9561,7 \text{ s}^{-1}, f_5 = 1522,56 \text{ Hz}$$

2.4.1.3 Eksperimentalni način određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja

Postavka eksperimenta pri izvođenju eksperimentalne modalne analize data je na slici 2.7. Slobodno oslonjena greda se pobuđuje impulsnom pobudom, te u vremenskom domenu mjeri odziv – ubrzanje. Primjenom FFT analize određuje se prenosna funkcija u obliku „realni – imaginarni“. Rezonantna frekvencija se određuje na osnovu vrha imaginarnog dijela prenosne funkcije, a relativni koeficijent prigušenja na osnovu realnog i imaginarnog,

primjenom metoda „korijen iz dva“, što će biti detaljno analizirano i objašnjeno u narednom poglavlju.



Slika 2.6 Postavka eksperimenta i ekvivalentni model koncentrisanih masa

2.4.1.4 Usporedni prikaz sopstvenih frekvencija oscilovanja dobijenih numerički, analitički i eksperimentalnim putem

U tabeli 2.1 prikazani su rezultati prvih pet od ukupno devet modova oscilovanja dobijeni izvođenjem eksperimentalne modalne analize, primjenom metoda konačnih elemenata i analitički. S obzirom da se eksperimentalni način određivanja sopstvenih frekvencija može smatrati tačnim, u tabeli 2.1 su data odstupanja rezultata dobijenih primjenom metoda konačnih elemenata i analitički ispitivanjem u odnosu na rezultate dobijene eksperimentalnim putem. Može se vidjeti da su odstupanja dobijena analitički nešto veća u odnosu na odstupanja dobijena numerički. Najveće odstupanje u odnosu na eksperimentalno dobijene rezultate je za analitički način određivanja i iznosi -2,68%, za peti oblik oscilovanja'. Sa druge strane rezultati dobijeni numerički, primjenom Block-Lanczos metoda izdvajanja sopstvenih frekvencija najmanje odstupaju u odnosu na rezultate dobijene primjenom eksperimentalne modalne analize.

Tabela 2.1 Poređenje sopstvenih frekvencija oscilovanja određenih izvođenjem eksperimentalne modalne analize primjenom metoda konačnih elemenata i analitički

Mod	EMA	MKE - Metod izdvajanja sopstvenih frekvencija Hz		Analitički
		Block Lanczos	Supermode	
1.	113,2	113,78 (-0,51%)	113,78 (-0,51%)	114,44 (-1,1%)
2.	311,2	312,71 (-0,48%)	312,87 (-0,53%)	315,24 (-1,3%)
3.	607,6	610,40 (-0,46%)	611,20 (-0,59%)	618,22 (-1,74%)
4.	998,8	1003,3 (-0,45%)	1006,8 (-0,82%)	1021,85 (-2,31%)
5.	1482,8	1488,4 (-0,38%)	1508,1 (-1,7%)	1522,56 (-2,68%)

2.4.2 Određivanje modela prostora stanja primjenom Matlab-a

Prvi korak pri određivanju modela prostora stanja primjenom Matlab-a, na osnovu modela dobijenog primjenom metoda konačnih elementa, je određivanje elemente modalne matrice, u kojoj svaka kolona predstavlja određeni oblik oscilovanja.

Drugi korak je analiza modalnog doprinosa pojedinačnih modova i njihovo sortiranje prema veličini njihovog učešća u prenosnoj funkciji.

U cilju smanjenja reda modela, prvo se vrši redukcija broja stepeni slobode MKE modela, što znači da se dalje analiziraju samo red/redovi modalne matrice koji odgovaraju stepenima slobode na kojima djeluje opterećenje, kao i red/redovi koji odgovaraju stepenima slobode čije se pomjeranje posmatra.

Nakon što se rangiraju na osnovu njihovog uticaja u prenosnoj funkciju, eliminišu se oblici oscilovanja sa manjom vrijednosti modalnog doprinosa. Kao posljedica eliminisanja određenog broja oblika oscilovanja, ukupna vrijednost pojačanja na nultoj frekvenciji ima manju vrijednost u odnosu na pojačanje na nultoj frekvenciji neredukovanog sistema. Kako bi se nadomjestio uticaj ove greške, koristi se *modred* funkcija u Matlabu. Ova funkcija, analogna Guyan-ovoj redukciji, ukupno pojačanje u nižem frekventnom području povećava kao bi se nadomjestio uticaj eliminisanih oblika oscilovanja. Parametar na osnovu koga se vrši sortiranje modova je koeficijent relativnog prigušenja ζ . Kriterijumi koji se primjenjuju za sortiranje modova zavise od toga da li se vrijednost koeficijenta relativnog prigušenja ζ smatra jedinstvenom ili različitom za svaki mod. U prvom slučaju kriterijum za sortiranje je pojačanje na nultoj frekvenciji (dc gain), dok se u drugom slučaju koristi kriterijum pojačanja u maksimumu (pick gain).

2.4.2.1 Sortiranje modova na osnovu pojačanja na nultoj frekvenciji i pojačanja u maksimumu

Polazeći od izraza za prenosnu funkciju neprigušenog i prigušenog sistema,

$$\frac{z_j}{F_k} = \sum_{i=1}^m \frac{z_{nji} z_{nki}}{s^2 + \omega_i^2} \quad (2.45)$$

$$\frac{z_j}{F_k} = \sum_{i=1}^m \frac{z_{nji} z_{nki}}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (2.46)$$

koje se mogu predstaviti kao zbir više podsistema sa jednim stepenom slobode, unutar koga svaki podsistem ima rezidum određen ulazno / izlaznom kombinacijom vektora oblika oscilovanja i sopstvenom frekvencijom oscilovanja, te uvodeći smjenu $s = 0$, pojačanje na nultoj frekvenciji postaje

$$\frac{z_j}{F_k} = \sum_{i=1}^m \frac{z_{nji} z_{nki}}{\omega_i^2} \quad (2.47)$$

gdje z_{nji} i z_{nki} predstavljaju proizvod pomjeranja j-tog izlaznog reda i opterećenja k-tog ulaznog reda pri određenoj sopstvenoj frekvenciji, podijeljen sa kvadratom sopstvene frekvencije. Maksimalna vrijednost koju amplituda ima pri rezonanci određuje se ukoliko se u opštu jednačinu prigušenog sistema uvrsti $s = j\omega$, odnosno $s^2 = -\omega_i^2$, čime ona postaje

$$\frac{z_{ji}}{F_{ki}} = \frac{z_{nji} z_{nki}}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} = \frac{z_{nji} z_{nki}}{-\omega_i^2 + 2\zeta_i \omega_i^2 j + \omega_i^2} = \frac{z_{nji} z_{nki}}{2\zeta_i \omega_i^2 j} = \frac{-j \cdot z_{nji} z_{nki}}{2\zeta_i \omega_i^2} \quad (2.48)$$

$$= \frac{-j}{2\zeta_i} \left(\frac{z_{nji} z_{nki}}{\omega_i^2} \right) = \frac{-j}{2\zeta_i} (\text{pojačanje na nultoj frekvenciji}).$$

Poredeći izraze 2.49 i 2.50 može se zaključiti da pojačanje u maksimumu fazno zaostaje u odnosu na pojačanje na nultoj frekvenciji, ali i da ima amplitudu veću za $1/2\zeta_i$. Pri konstantnoj vrijednosti koeficijenta relativnog prigušenja ζ vrijednosti pojačanja u maksimumu su veće u odnosu na pojačanje na nultoj frekvenciji, ali je odnos amplituda konstantan, što znači da u tom slučaju obje metode daju isti redoslijed oblika oscilovanja, bez obzira koji od kriterijuma rangiranja je primjenjen.

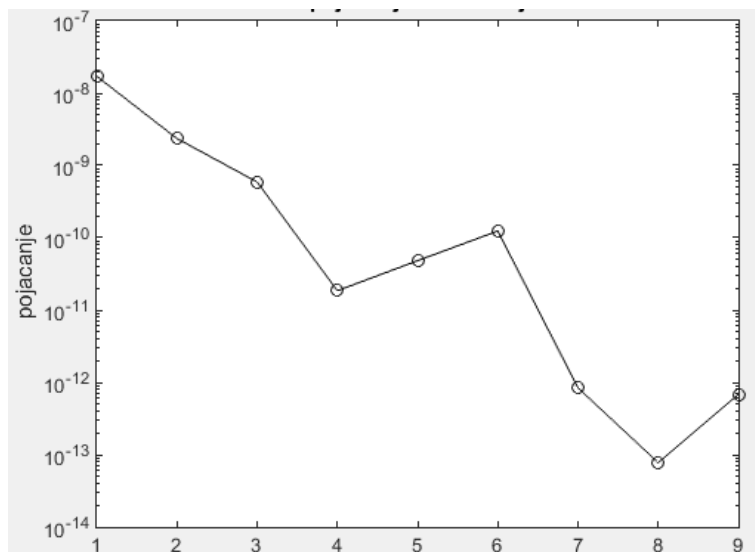
Ukoliko se prigušenje smatra jedinstvenim za sve oblike oscilovanja, tada je potrebno odrediti kolika je njegova vrijednost. Obično se vrijednost jedinstvenog prigušenja nalazi u intervalu od 0,005 (0,5% kritičnog prigušenja) do 0,02 (2% kritičnog prigušenja). Ukoliko su dostupni eksperimentalni rezultati, odnosno realni i imaginarni dio prenosne funkcije, tada se vrijednost koeficijenta relativnog prigušenja ζ određuje za svaki pojedinačni oblik, a dobijene vrijednosti prigušenja smještaju u zasebnu tekstualnu datoteku.

S obzirom da je izvršena eksperimentalna modalna analiza, vrijednost koeficijenta relativnog prigušenja ζ se određuje za svaki oblik oscilovanja, a kao kriterijum za sortiranje koristi pojačanje u maksimumu. Vrijednosti koeficijenata relativnog prigušenja ζ date su u tabeli 2.2.

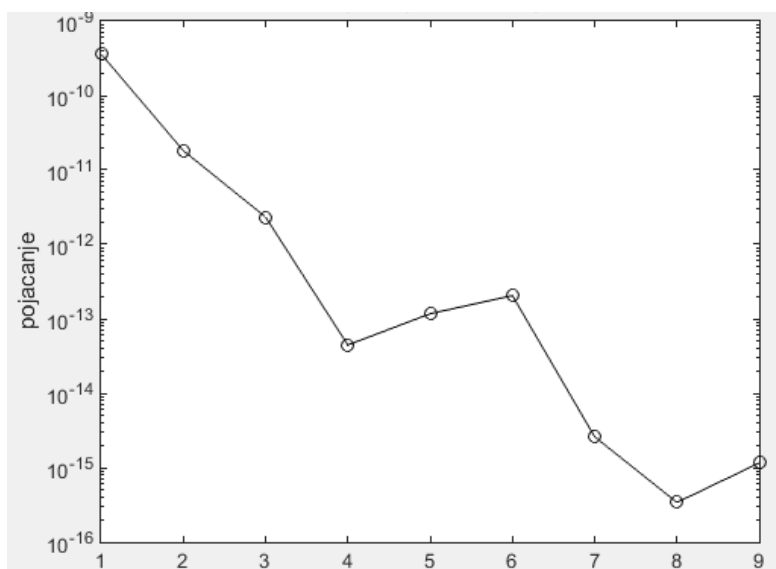
Tabela 2.2 Koeficijenti relativnog prigušenja ζ za prvih devet modova savojnih vibracija

Oblik oscilov. br.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frekvencija	113,2	311,2	607,6	998,8	1482,8	2054,4	2707,5	3451,2	4265,6
Koeficijenti relativnog prigušenja ζ	0,0106	0,0038	0,0019	0,0012	0,0012	0,00082	0,0015	0,0021	0,00084

Na slici 2.7 prikazano je pojačanje u maksimumu, a na slici 2.8 pojačanje na nultoj frekvenciji u zavisnosti od broja oblika oscilovanja, pri čemu je za određivanje pojačanja na nultoj frekvenciji korištena jedinstvena vrijednost koeficijenta relativnog prigušenja $\zeta=0,001$. Može se uočiti da je uticaj pojedinih glavnih oblika oscilovanja veoma sličan bez obzira koja metoda je korištena, zatim da postoji trend opadanja uticaja sa porastom broja oblika oscilovanja, odnosno frekvencije, osim u slučaju glavnog oblika oscilovanja broj 4 koji ima manji uticaj od 5. i 6. glavnog oblika oscilovanja, a također i glavnog oblika oscilovanja broj 8. koji ima manji uticaj od glavnog oblika oscilovanja broj 9.



Slika 2.7 Pojaćanje u maksimumu za $\zeta=0,001$



Slika 2.8 Pojaćanje na nultoj frekvenciji za $\zeta=0,001$

2.4.3 Amplitudno-frekventna karakteristika prenosne funkcije neredukovanog modela i modela redukovanog na osnovu *dc gain* i *peack gain* kriterijuma

Amplitudno-frekventna karakteristika prenosne funkcije razmatrane grede kružnog poprečnog presjeka, dobijena redukovanjem veličine modela konačnih elemenata u model u prostoru stanja, određena je za dva različita slučaja. U prvom slučaju amplitudno-frekventna karakteristika sadrži sve glavne oblike oscilovanja redukovane iz ANSYS-a, dok je u drugom slučaju izvršena modalna redukcija, pri kojoj je ukupan broj glavnih oblika oscilovanja redukovan na željeni broj oblika oscilovanja.

Ovo znači da su formirana dva različita modela prostora stanja, pri čemu prvi model uključuje sve glavne oblike oscilovanja izdvojene iz ANSYS-a, a drugi samo određeni broj glavnih oblika oscilovanja (redukovani).

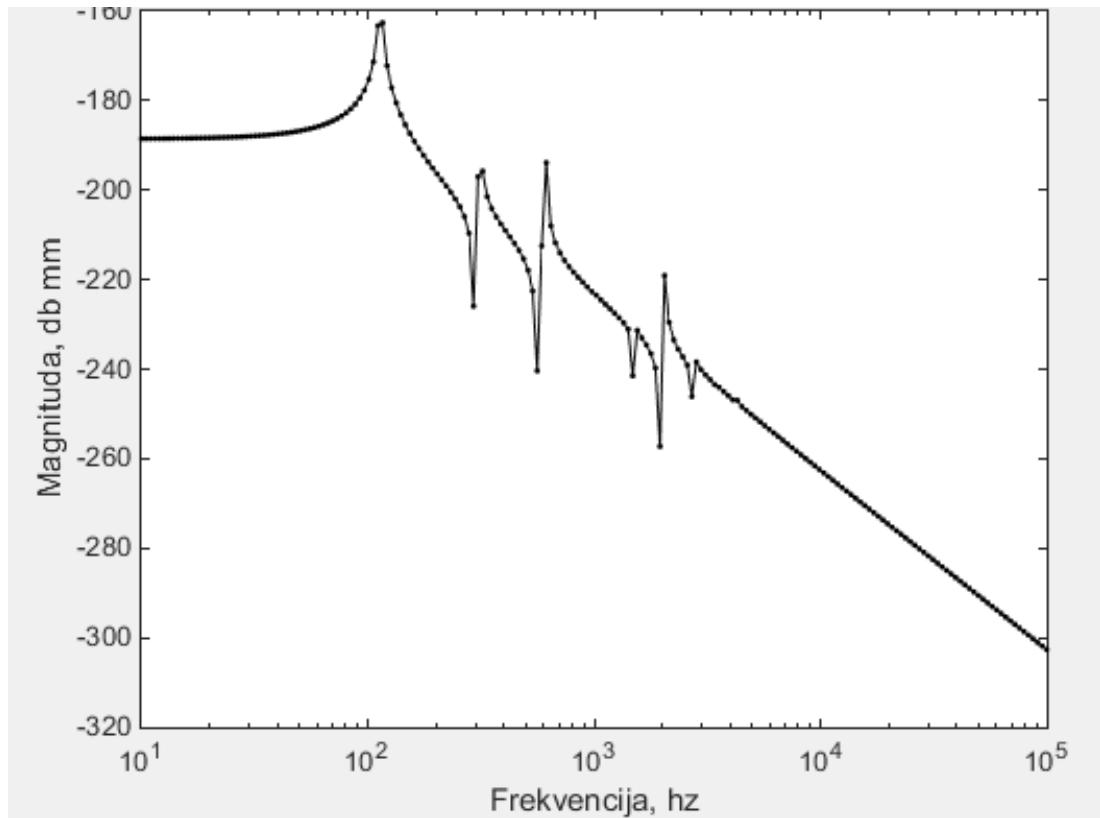
Analogno, formirana su dva seta modalnih parametara – dvije vektor kolone sopstvenih frekvencija i dvije modalne matrice. Prvi set sadrži originalne, nesortirane i

neredukovane vrijednosti modalnih parametara, dok su u drugom setu elementi rangirani na osnovu usvojenog kriterijuma, te sortirani u opadajućem poretku.

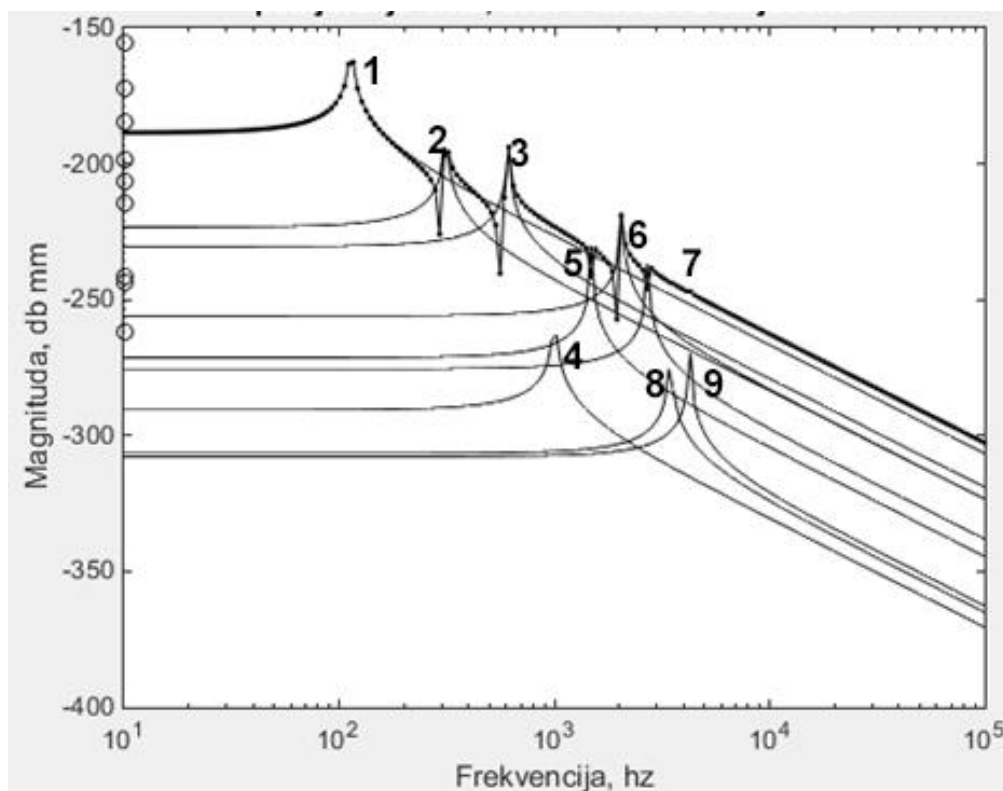
Nakon određivanja elemenata matrica prostora stanja, koristeći Matlab programski sistem određene su prenosne funkcije. Mogući su sljedeći slučajevi modela sistema:

- Model sistema uključuje sve glavne oblike oscilovanja izdvojene iz ANSYS-a u originalnom, nesortiranom poretku.
- Model sistema uključuje sve glavne oblike oscilovanja izdvojene iz ANSYS-a, sortirane u opadajućem poretku na osnovu usvojenih kriterijuma.
- Model sistema uključuje samo određen broj glavnih oblika oscilovanja od ukupnog broja izdvojenog iz ANSYS-a. Modalnom redukcijom formira se redukovani model, pri čemu glavni oblici oscilovanja mogu, ali i ne moraju biti sortirani. Modalna redukcija vrši se na jedan od sljedećih načina:
 - Odbacivanjem modova koji imaju manji uticaj – Matlab funkcija *modred*, opcija *del*.
 - Odbacivanjem modova koji imaju manji uticaj – Matlab funkcija *modred*, opcija *mdc*. Ova opcija istovremeno eliminiše razlike pojačanja na nultoj frekvenciji redukovanog modela u odnosu na originalni, nastale zbog uticaja odbačenih modova.

Na slici 2.9 prikazana je amplitudno – frekvencijska karakteristika vrha grede, pri čemu je uključeno svih 9 modova izdvojenih iz ANSYS-a, dok je na slici 2.10 prikazan uticaj pojedinačnih modova u amplitudno – frekvencijskoj karakteristici. Sa slike 2.10 se može uočiti da je uticaj 4. 8. i 9. glavnog oblika oscilovanja zanemarljivo mali, tako da se može konstatovati da ti modovi nemaju značajno učešće u AF karakteristici, odnosno u prenosnoj funkciji.



Slika 2.9 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – neredukovani model, svih 9 glavnih oblika oscilovanja uključeno

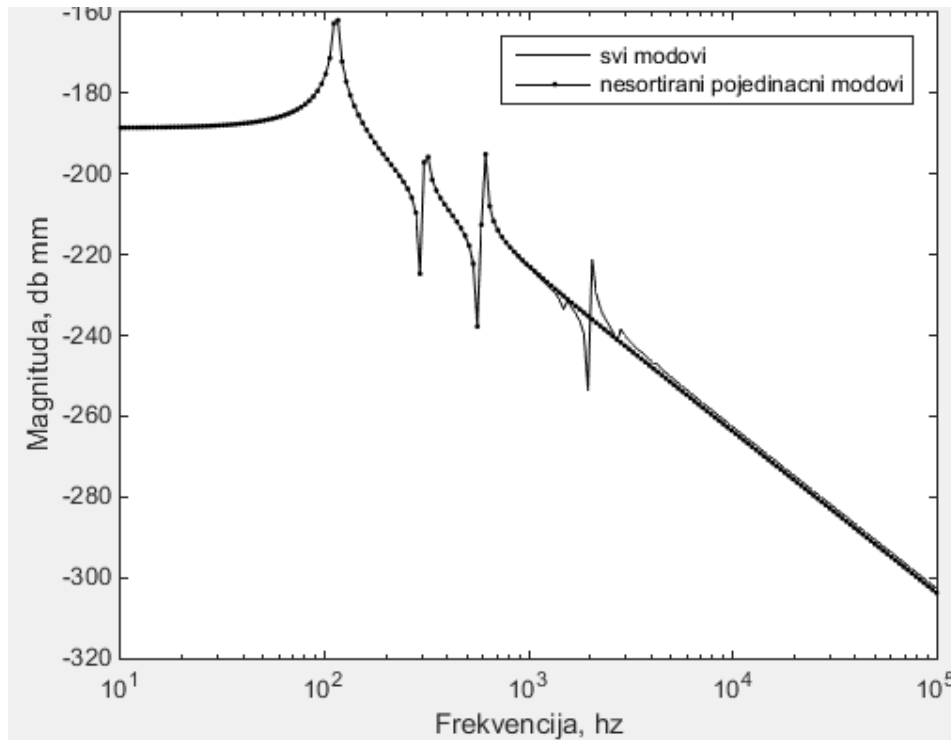


Slika 2.10 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – neredukovani model, uticaj pojedinačnih glavnih oblika oscilovanja na AF karakteristiku

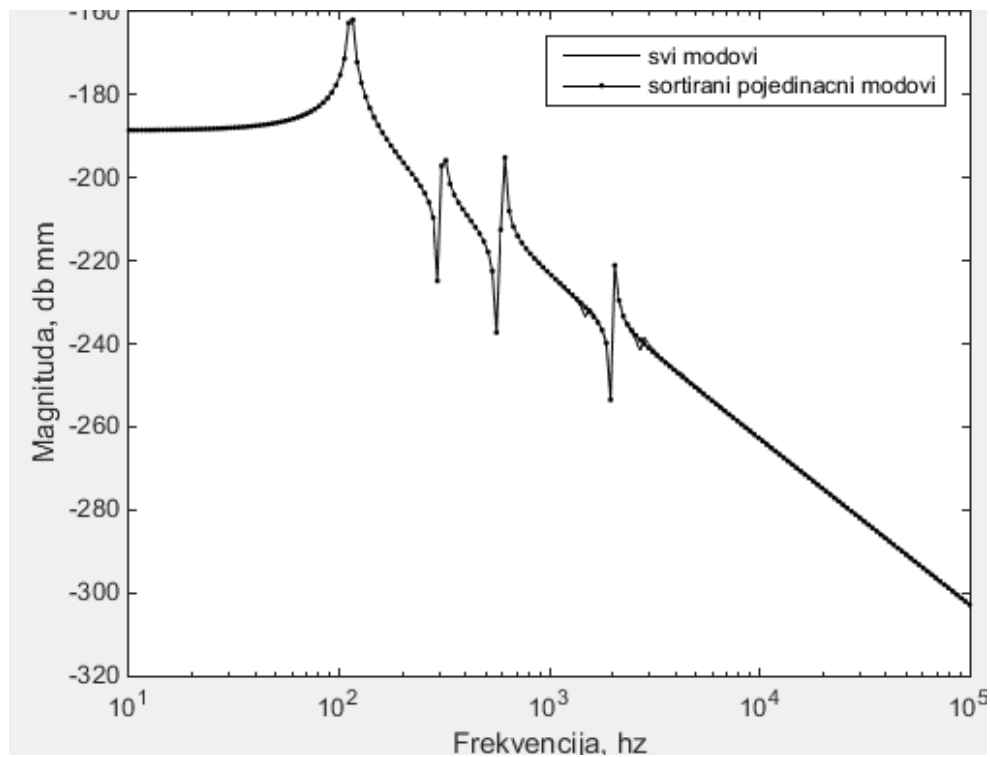
Na slici 2.11 prikazan je efekat eliminisanja viših frekvencija bez uzimanja u obzir uticaja pojedinačnih glavnih oblika oscilovanja na AF karakteristiku. Poredeći AF karakteristiku prenosne funkcije neredukovanog modela (Slika 2.10 i 2.11) i AF karakteristiku prenosne funkcije redukovano modela koja uključuje 4 od ukupno 9 glavnih oblika oscilovanja izdvojenih iz ANSYS-a (Slika 2.12), može se uočiti sljedeće: iako na prvi pogled izgleda da AF karakteristika redukovano modela sadrži samo prva tri moda umjesto četiri koja su definisana, 4. glavni oblik oscilovanja jeste dio AF karakteristike prikazane na slici 12. Međutim, 4. glavni oblik oscilovanja ima veoma malo pojačanje u maksimumu te kao takav gotovo uopšte ne utiče na AF karakteristiku, a što se može vidjeti na slici 2.11.

Na slici 2.12 prikazana je AF karakteristika (Bodeov dijagram) prenosne funkcije vrha grede gdje je primjenjen kriterijum selektovanja glavnih oblika oscilovanja prema najvećem pojačanju u maksimumu. U ovom, kao i u prethodnom slučaju selektovana su 4 od ukupno 9 glavnih oblika oscilovanja izdvojenih iz ANSYS-a. Može se uočiti da AF karakteristika prenosne funkcije redukovano modela sadrži modove 1,2,3 i 6. Ovo u potpunosti odgovara raspodjeli uticaja glavnih oblika oscilovanja na osnovu pojačanja u maksimumu i pojačanja na nultoj frekvenciji prikazanih na slikama 2.8. i slici 2.9, gdje je vidljivo da 1,2,3. i 6. glavni oblik oscilovanja imaju veći uticaj od preostalih.

Ovo znači da 4. i 5. glavni oblik oscilovanja, koji imaju manji uticaj od 6. glavnog oblika oscilovanja, nisu uključeni u AF karakteristiku prenosne funkcije prikazane na slici 2.12. Također sa slike 2.11. i 2.12 može se uočiti da se u višem frekventnom području AF karakteristike prenosne funkcije redukovano i neredukovanog modela ne poklapaju u potpunosti (ravni dio prenosne funkcije) što je posljedica različitog uticaja odbačenih modova kod redukovano i neredukovanog modela na AF karakteristike.



Slika 2.11 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – redukovani model, uključena prva 4 od ukupno 9 izdvojenih oblika oscilovanja (nesortiranih)



Slika 2.12 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – redukovani model, uključena prva 4 od ukupno 9 izdvojenih oblika oscilovanja (sortiranih prema najvećem pojačanjem u maksimumu)

Kod obje AF karakteristike prikazane na Slici 2.11 i 2.12, pri odbacivanju viših (Slika 2.12), odnosno manje uticajnih glavnih oblika oscilovanja (Slika 2.13), pojačanje na nultoj frekvenciji ima grešku kao posljedicu uticaja odbačenih modova. U prvom slučaju greška iznosi -0.0545 % dok u drugom slučaju iznosi -0.0127%. U cilju smanjenja ove greške, odnosno kako bi se i nakon redukcije zadržala nepromijenjena vrijednost pojačanja na nultoj frekvenciji, koristi se Matlab funkcija *modred* (MODal REDuction), koja sadrži dvije opcije: *mdc*(Matched DC) i *del*.

Primjena opcije *del* daje bolje rezultate u višem frekventnom području, dok opcija *mdc* daje bolje rezultate u nižem frekventnom području, ali može da ima i značajna odstupanja u području visokih frekvencija, što će u nastavku biti objašnjeno.

Opcija *mdc* izjednačuje sa nulom izvode stanja koja će biti odbačena, nakon čega se rješavaju preostala stanja. Na taj način pojačanje stanja koja se odbacuju su uključena u preostala stanja na nižim frekvencijama.

Opcija *del* uklanja glavne oblike oscilovanja sa manjim uticajem, koji su najčešće na višim frekvencijama.

Problem koji primjena opcije *mdc* može izazvati u višem frekventnom području proizilazi iz sljedećeg: formulacija prostora stanja data je izrazom 2.51.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.49)$$

Sortiranjem modova primjenom kriterijuma pojačanja na nultoj frekvenciji ili pojačanja u maksimumu istovremeno formiraju se nove matrice prostora stanja. Ukoliko se, nadalje, matrice prostora stanja preurede na način da se razdvoje stanja koja odgovaraju glavnim oblicima oscilovanja koji su redukovani i onim koji se uklanjaju, te redukovani glavni oblici oscilovanja označe sa x_r , a modove koji se uklanjaju sa x_e , dobija se izraz za prostor stanja 2.52.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{x}_e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{re} \\ A_{er} & A_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ B_e \end{bmatrix} u \\ y &= [C_r \quad C_e] \begin{bmatrix} x_r \\ x_e \end{bmatrix} + Du \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ukoliko se prethodni izraz napiše u obliku

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_{rr}x_r + A_{re}x_e + B_r u \\ \dot{x}_e &= A_{er}x_r + A_{ee}x_e + B_e u \end{aligned} \quad (2.51)$$

te u 2.53 uvrsti da su stanja koja se eliminišu jednaka nuli, odnosno da je $\dot{x}_e = 0$, dobija se izraz

$$0 = A_{er}x_r + A_{ee}x_e + B_e u \quad (2.52)$$

čijim se daljim rješavanjem dobija

$$x_e = -A_{ee}^{-1}A_{er}x_r - A_{ee}^{-1}B_e u \quad (2.53)$$

Uvrštavajući nadalje izraz 2.55 u 2.53 dobija se

$$\dot{x}_r = A_{rr}x_r + A_{re}(-A_{ee}^{-1}A_{er}x_r - A_{ee}^{-1}B_e u) + B_r u = (A_{rr} - A_{re}A_{ee}^{-1}A_{er})x_r + (B_r - A_{re}A_{ee}^{-1}B_e)u \quad (2.54)$$

Uvrštavajući 2.56 u 2.51 dobija se

$$y = C_r x_r + C_e x_e + Du = C_r x_r + C_c (-A_{ee}^{-1} A_{er} x_r - A_{ee}^{-1} B_e u) + Du = (C_r - C_e A_{ee}^{-1} A_{er}) x_r + (D - C_e A_{ee}^{-1} B_e) u \quad (2.55)$$

Na osnovu 2.56 i 2.57 nove matrice redukovanog modela postaju

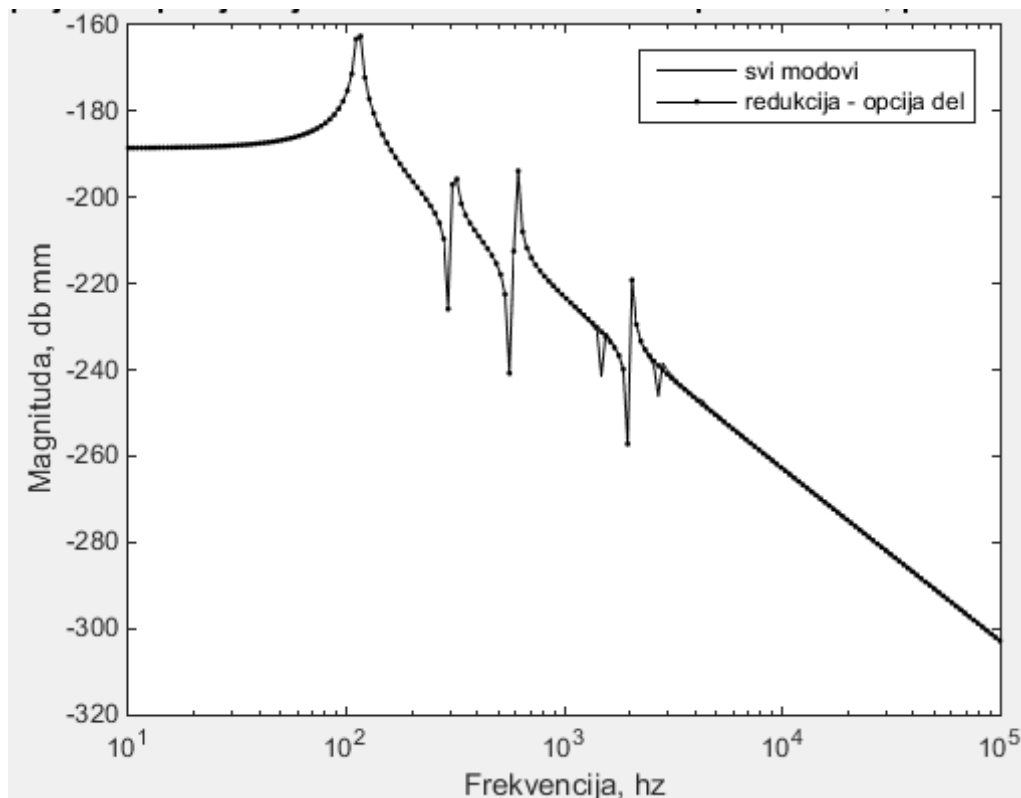
$$\begin{aligned} A_{red} &= A_r - A_{re} A_{ee}^{-1} A_{er} \\ B_{red} &= B_r - A_{re} A_{ee}^{-1} B_e \\ C_{red} &= C_r - C_e A_{ee}^{-1} A_{er} \\ D_{red} &= D - C_e A_{ee}^{-1} B_e \end{aligned} \quad (2.56)$$

dok su nove jednačine prostora stanja

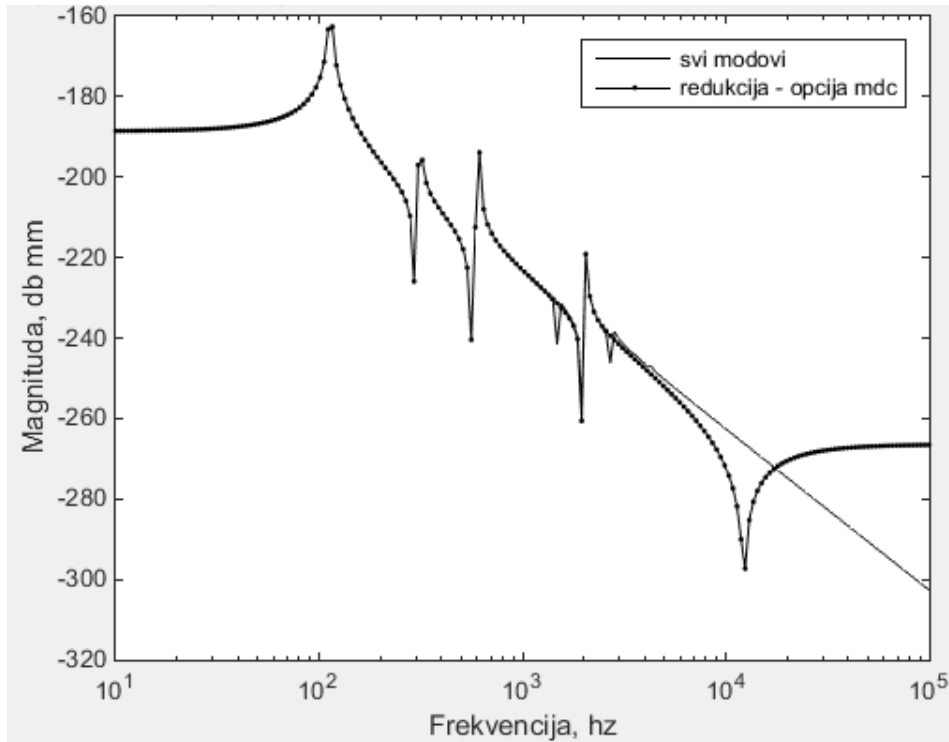
$$\begin{aligned} \dot{x}_{red} &= A_{red} x_{red} + B_{red} u \\ y_{red} &= C_{red} x_{red} + D_{red} u \end{aligned} \quad (2.57)$$

Na bazi prethodnog mogu se izvesti sljedeći zaključci:

Iako je matrica direktnog preslikavanja ulaza na izlaz D najčešće nula ($D=0$), na osnovu 2.58 može se vidjeti da D_{red} ne zavisi samo od D već i od izraza $-C_e A_{ee}^{-1} B_e$, koji je različit od nule. To znači da redukovana matrica D_{red} neće imati vrijednost nula, bez obzira na vrijednost matrice D . U višem frekventnom području kada redukovana matrica stanja A_{red} počinje da slabi, redukovana matrica D_{red} počinje da dominira, što za posljedicu ima da u višem frekventnom području magnituda AF karakteristike prenosne funkcije nema pad kao što to ima kod primjene opcije *del* (Slika 2.13), nego je znatno položenija (Slika 2.14).

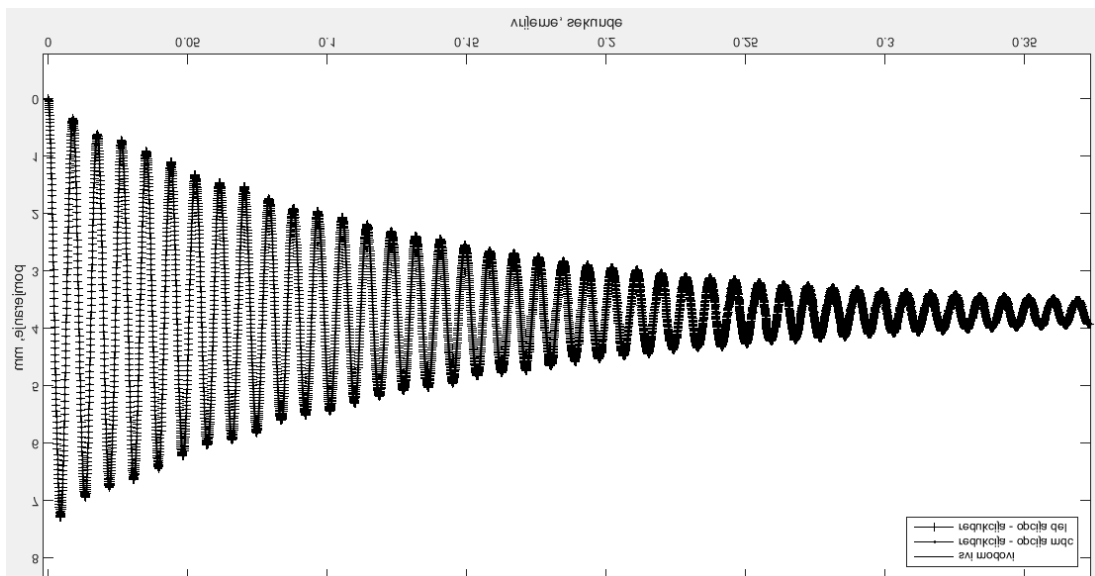


Slika 2.13 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – uključeno 4 od 9 glavnih oblika oscilovanja – redukcija funkcijom modred opcija del



Slika 2.14 AF karakteristika prenosne funkcije vrha grede – uključeno 4 od 9 glavnih oblika oscilovanja – redukcija modred opcija mdc

Odziv u vremenskom domenu tri različita modela dobijena u prostoru stanja na impulsnu pobudu prikazan je na slici 2.15. Prvi model predstavlja neredukovani sistem, drugi redukovani sistem pri čemu je redukcija izvršena pomoću funkcije *modred*, opcije *mod*, dok je treći redukovani sistem primjenom funkcije *modred* opcija *del*. Sa slike 2.15. se može uočiti da nema značajnog odstupanja odziva u vremenskom domenu ovih modela.



Slika 2.15 Odziv dobijenih modela u prostoru stanja na impulsnu pobudu

2.4.4 Redukcija modela metodom balansiranih redukcija

2.4.4.1 Uvodna razmatranja

U prethodnom poglavlju prikazane su dvije metode na osnovu kojih su rangirani uticaji pojedinih glavih oblika oscilovanja prema učešću u prenosnoj funkciji - pojačanje na nultoj frekvenciji i pojačanje u maksimumu, dok je primjena ovih metoda zavisila isključivo od toga da li se smatra da koeficijent relativnog prigušenja ζ ima jedinstvenu ili različitu vrijednost za pojedinačne glavne oblike oscilovanja.

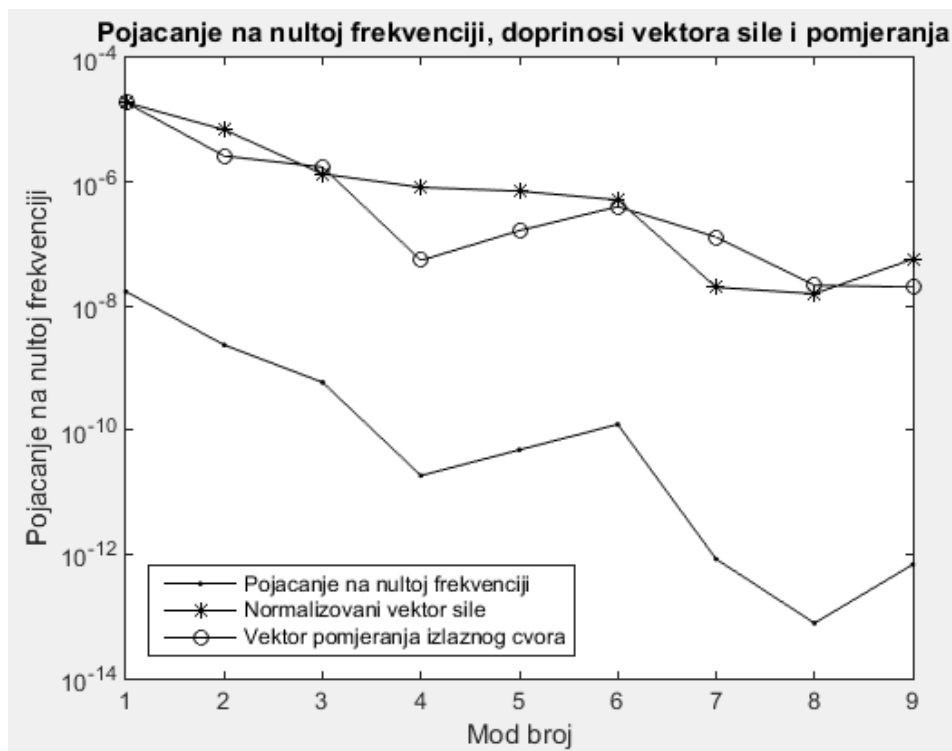
U ovom poglavlju biće predstavljen koncept kontrolabilnost (upravljivosti) i opservabilnost (osmotrivost) na osnovu kojih se vrši rangiranje uticaja glavnih oblika oscilovanja, te metoda redukcije modela „balansirana redukcija“ koja istovremeno koristi oba koncepta.

U prethodnim poglavljima razmatrani su SISO modeli kod kojih se za rangiranje modova mogu koristiti metode pojačanja na nultoj frekvenciji, pojačanja u maksimumu ili tehnika balansiranih redukcija. Međutim, kod MIMO modela redukcija se može izvršiti isključivo na bazi balansiranih redukcija.

Ukoliko se pojačanje na nultoj frekvenciji izrazi kao

$$\frac{z_{ij}}{F_{ki}} = \frac{z_{nji} z_{nki}}{\omega_i^2} = \left(\frac{z_{nji}}{\omega_i} \right) \left(\frac{z_{nki}}{\omega_i} \right) = (\text{vektor izlaza})(\text{vektor opterećenja}) \quad (2.58)$$

gdje je u brojniku proizvod j-tog reda koji predstavlja vektor izlaza i k-tog reda koji predstavlja vektor opterećenja, može se uočiti da je pojačanje proizvod „doprinosa“ vektora ulaza i vektora izlaza. Pod pojmom vektor izlaza podrazumijeva se red normalizovane modalne matrice koji se odnosi na pomjeranje čvora koji se posmatra. Pod pojmom vektor opterećenja podrazumijeva se red matrice opterećenja koji se odnosi na čvor u kom djeluje opterećenje, a koja predstavlja proizvod transponovanog vektora opterećenja u fizičkim koordinatama i normalizovane modalne matrice. Na slici 2.16 prikazano je pojačanje na nultoj frekvenciji kao proizvod normalizovanog vektora opterećenja i vektora pomjeranja čvora za svaki glavni oblik oscilovanja prethodno razmatranog primjera slobodno oslonjene grede.



Slika 2.16 Pojaćanje na nultoj frekvenciji kao proizvod vektora ulaza i vektora izlaza

2.4.4.2 Kontrolabilnost i opservabilnost

Za sistem opisan jednačinama prostora stanja 2.61 postoje različite definicije kontrolabilnosti i opservabilnosti.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.59)$$

Za neki sistem se kaže da je kontrolabilan ukoliko se mogu pobuditi svi njegovi strukturalni modovi. Sistem je opservabilan ukoliko je moguće utvrditi pomjeranja svih njegovih glavnih oblika oscilovanja.

Također, za sistem se kaže da je kontrolabilan ako je moguće naći skup kontrolnih aktivnosti koje će u konačnom definisanom vremenu prevesti sistem iz početnog stanja „x“ u neko unaprijed definisano krajnje stanje. Za sistem se kaže da je opservabilan ukoliko je moguće iz skupa podataka koji definišu željeni izlazni vektor C iz sistema, naći skup kojim je definisano početno stanje sistema „x“ i ako je moguće naći skup kontrolnih aktivnosti koje će u konačno definisanom vremenu omogućiti realizaciju željenog izlaznog vektora.

Kontrolabilnost, kao mjera uzajamnog dejstva ulaza i stanja sistema, uključuje matricu stanja A i ulaznu matricu B. Opservabilnost, kao mjera uzajamnog dejstva stanja sistema i izlaza uključuje matricu stanja A i matricu izlaza C.

2.4.4.3 Kriterijumi za utvrđivanje kontrolabilnosti i opservabilnosti sistema

Postoji više kriterijuma kojima se utvrđuje da li je sistem kontrolabilan i opservabilan. Prema jednom od kriterijuma linearni, vremenski invarijantan sistem (A, B, C) koji ima „s“ ulaza, potpuno je kontrolabilan, samo i samo ukoliko $N \times N$ matrica

$$C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.60)$$

ima rang N .

Linearni, vremenski invarijantan sistem (A, B, C) sa r izlaza, potpuno je opservabilan, samo i samo ukoliko $rN \times N$ matrica

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

ima rang N .

Dva su nedostatka ovog kriterijuma. Prvi je što je pogodan za rad samo sa sistemima malih dimenzija. Naime, za odgovor na pitanje da li je neki sistem kontrolabilan, odnosno opservabilan treba naći A^{n-1} , što je očigledno problem sa stanovišta numeričke obrade podataka ukoliko se radi o sistemu većih dimenzija. Drugi nedostatak je što na pitanje da li je sistem kontrolabilan, odnosno opservabilan, daje isključivo odgovor „da“ ili „ne“, a što ne mora biti slučaj primjene li se drugi kriterijumi.

Drugi kriterijum utvrđivanja kontrolabilnosti i opservabilnosti koristi *gramiane* (koriste se i termini *Gramian matrica* i *Gram matrica*). Gramian kontrolabilnosti i opservabilnosti se definiše kao

$$\begin{aligned} \dot{W}_c &= AW_c + W_cA^T + BB^T \\ \dot{W}_o &= A^TW_o + W_oA + C^TC \end{aligned} \quad (2.62)$$

Rješenja jednačina predstavljaju vremenski zavisne matrice. Za stabilan sistem, rješenja jednačina se dobiju ukoliko se uzme da je $\dot{W}_c = \dot{W}_o = 0$ pri čemu diferencijalne jednačine postaju algebarske jednačine, poznate i kao Lyapun-ove jednačine

$$\begin{aligned} AW_c + W_cA^T + BB^T &= 0 \\ A^TW_o + W_oA + C^TC &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

gdje su W_c gramian kontrolabilnosti, a W_o gramian opservabilnosti. *Gramian* dominantno dijagonalne matrice su rješenja *Lyapunov*-ih jednačina kontrolabilnosti i opservabilnosti. Pozitivne vrijednosti dijagonalnih elemenata *Gram* matrice date u opadajućem redosledu zovu se *Hankel*-ove singularne vrijednosti sistema. Redukovani model se dobija eliminisanjem stanja koja odgovaraju najmanjim *Hankel*-ovim singularnim vrijednostima, te samim tim sadrži manje stanja od originalnog.

$$\begin{aligned} W_c &= \int_0^{\infty} e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau \\ W_o &= \int_0^{\infty} e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.64)$$

Elementi na glavnoj dijagonali *Gramiana* kontrolabilnosti i opservabilnosti pružaju informacije o relativnoj kontrolabilnosti, odnosno opservabilnosti pojedinačnih glavnih oblika oscilovanja. Za fleksibilne strukture *Gramian* svakog glavnog oblika oscilovanja se može izraziti u zatvorenom obliku. Prema *Gawronsi* [2004] najveći element u 2×2 *Gramianu* kontrolabilnosti i opservabilnosti se može izraziti

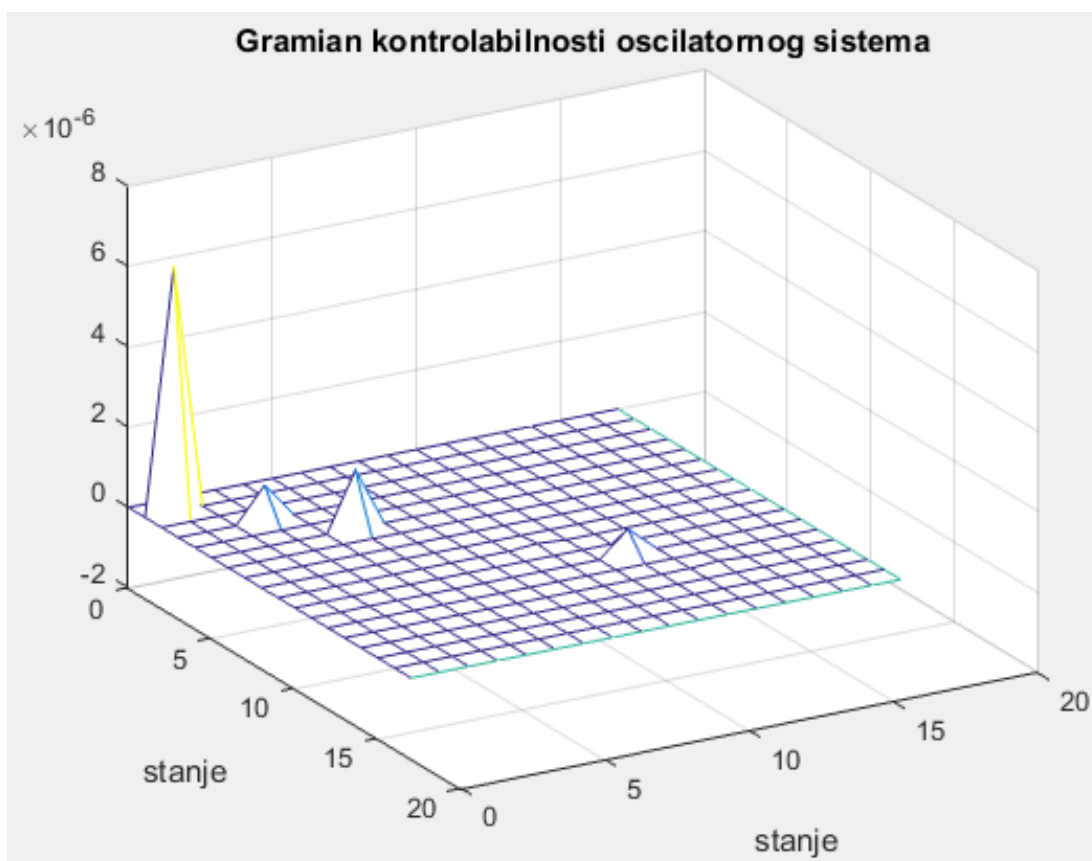
$$w_{ci} = \frac{\|B_i\|_2^2}{4\zeta_i\omega_i} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ F_k z_{nki} \end{bmatrix} \right\|_2^2}{4\zeta_i\omega_i} = \frac{F_k^2 z_{nki}^2}{4\zeta_i\omega_i} \quad (2.65)$$

$$w_{oi} = \frac{\|C_i\|_2^2}{4\zeta_i\omega_i} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} z_{nji} & 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2}{4\zeta_i\omega_i} = \frac{z_{nji}^2}{4\zeta_i\omega_i}$$

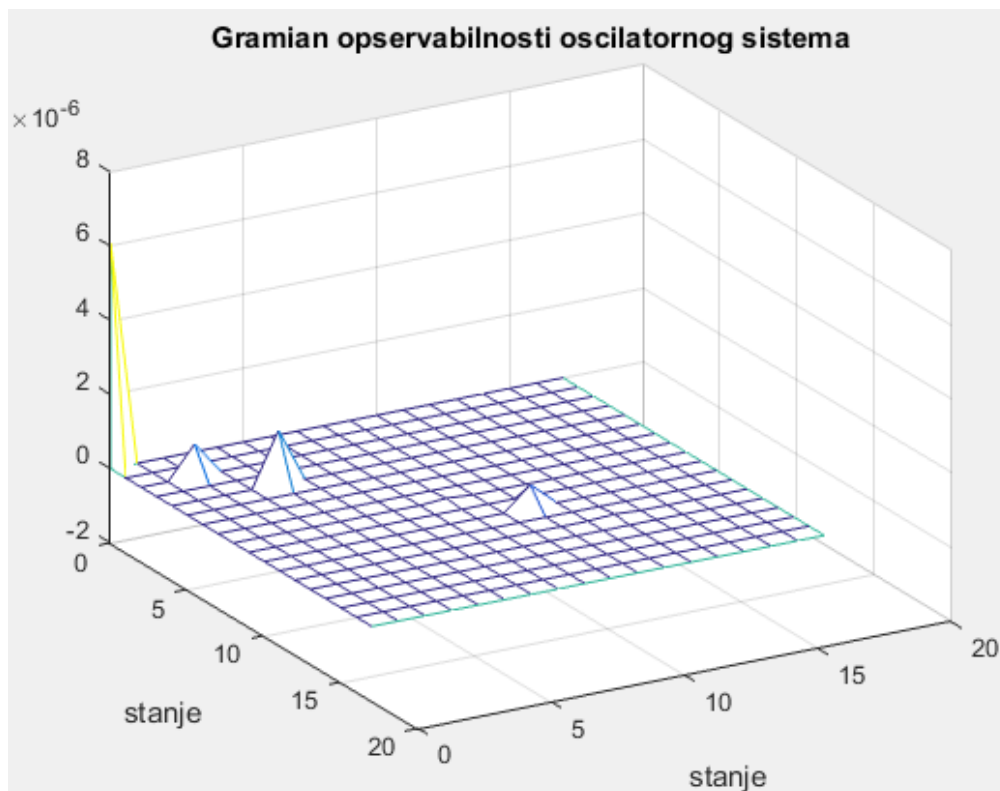
dok se *Hankel*- ove singularne vrijednosti sistema mogu odrediti kao

$$\gamma_i \cong \frac{\|B_i\|_2 \|C_i\|_2}{4\zeta_i\omega_i} \quad (2.66)$$

Za sisteme koji imaju relativno malu vrijednosti relativnog prigušenja ζ , *Gram* matrica je dominantno dijagonalna, što znači da elementni izvan glavne dijagonale imaju značajno manje vrijednosti u odnosu na elemente koji pripadaju glavnoj dijagonali. Za razmatrani primjer, može se vidjeti da se elementi *Gramina* kontrolabilnosti koji imaju najveću kontrolabilnost nalaze se na drugom, četvrtom, šestom i dvanaestom stanju, što odgovara prvom, drugom, trećem i šestom glavnom obliku oscilovanja, Slika 2.17. Ovo je u potpunosti usaglašeno sa ranije dobijenim rezultatima rangiranja glavnih oblika oscilovanja na osnovu pojačanja na nultoj frekvenciji i pojačanja u maskimumu, Slika 2.8 i 2.9. Elementi *Gramiana* opservabilnosti, prikazani na slici 2.18, rangirani su u istom poretku.



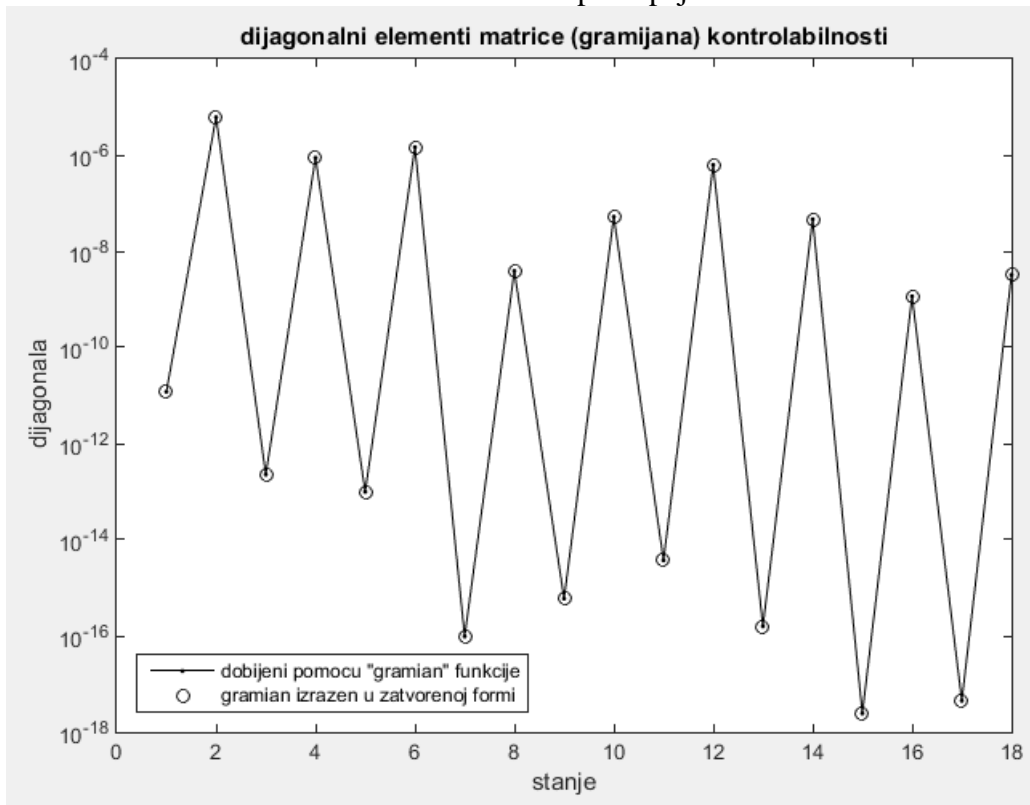
Slika 2.17 Gramian kontrolabilnosti na linearnoj osi u zavisnosti od pozicije u matrici



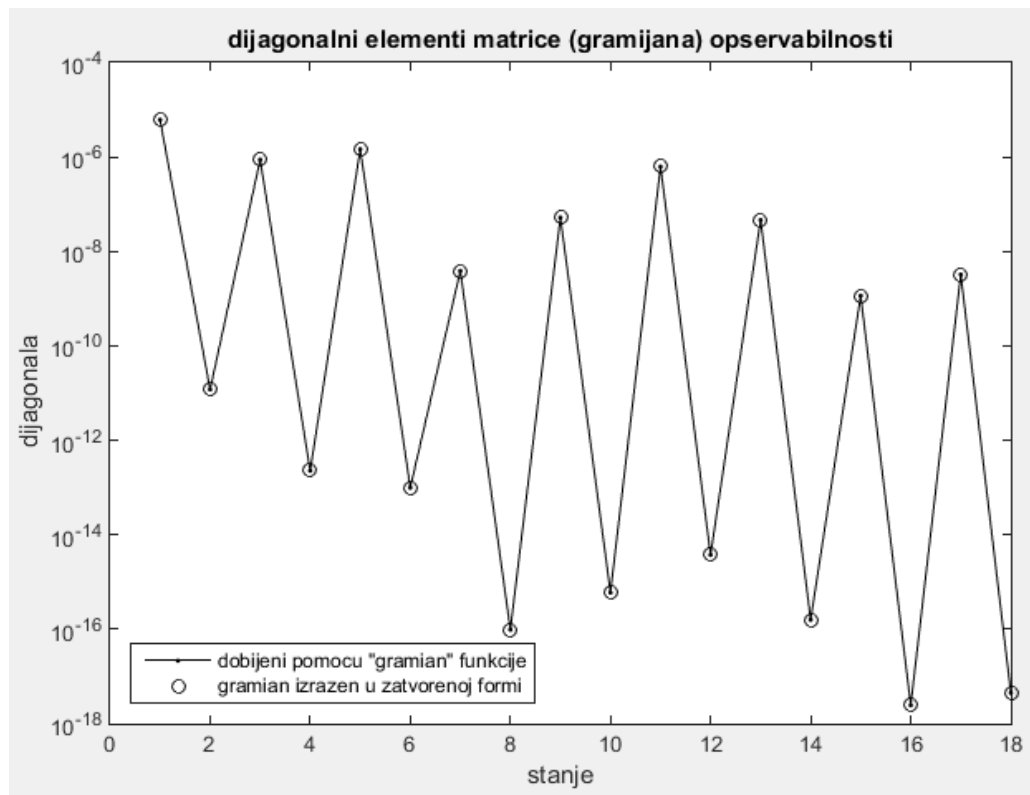
Slika 2.18 Gramian opservabilnosti na linearnoj osi u zavisnosti od pozicije u matrici

Na slici 2.19 i 2.20 date su vrijednosti dijagonalnih elementa Gram matrice kontrolabilnosti i Gram matrice opservabilnosti. Pri tome neparna stanja predstavljaju pozicije, a parna brzine. Vrijednosti dijagonalnih elementa su dobijene na dva načina: prvi način, pomoću „gram“ funkcije i drugi način izražavajući Gramian svakog glavnog oblika oscilovanja, odnosno stanja u zatvorenoj formi, izraz 2.67. S obzirom da svakom modu odgovaraju dva stanja, pozicija i brzina, svaki glavni oblik oscilovanja ima maksimalni i minimalni element, pri čemu maksimalnom elementu odgovara brzina, a minimalnom pozicija. **Konkretno, to znači da se na osnovu izraza 2.67 određuje stanje brzine, dok je prema Hatch [2001] stanje pozicije u odnosu na stanje brzine pomjereno (umanjeno) za kvadrat sopstvene frekvencije svakog glavnog oblika oscilovanja.** Sa slike 2.19 i 2.20 može se vidjeti da se vrijednosti elemenata matrice dobijenih primjenom

navedenih metoda poklapaju.

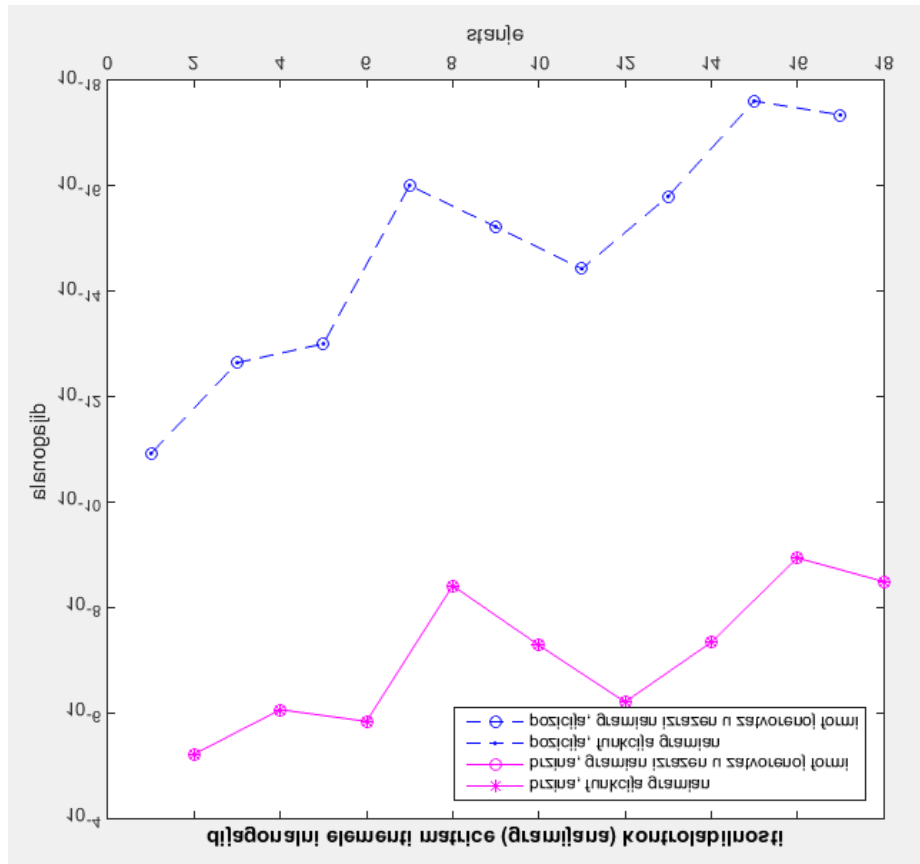


Slika 2.19 Dijagonalni elementi Gramijana kontrolabilnosti

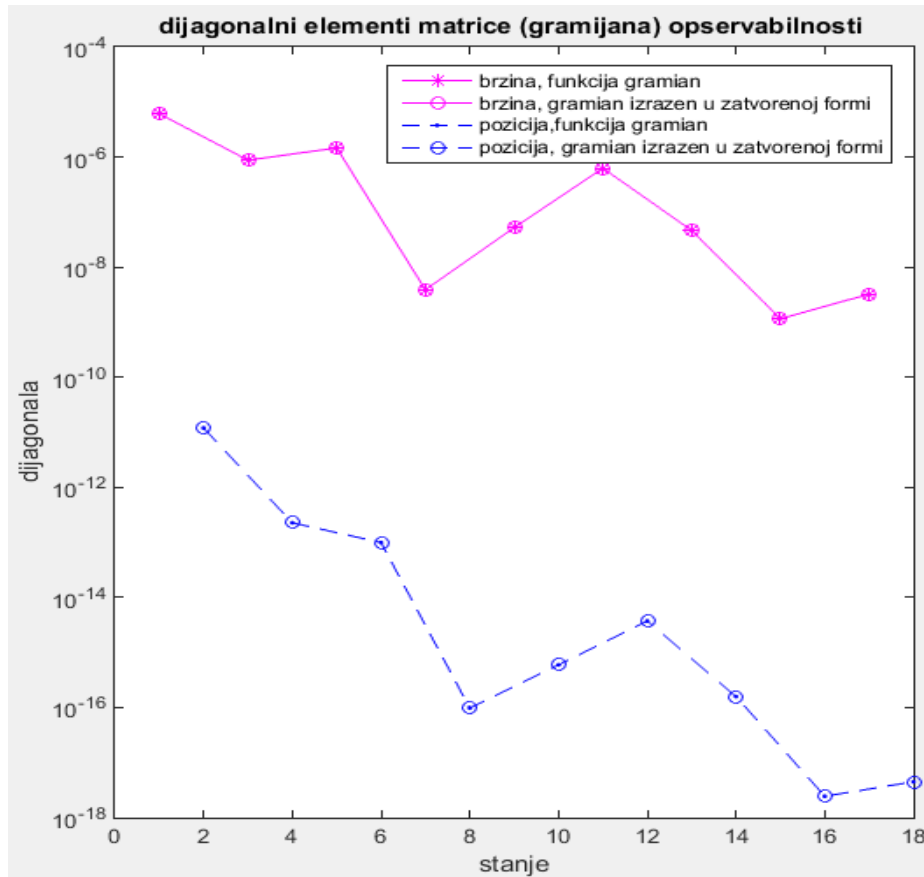


Slika 2.20 Dijagonalni elementi Gramijana opservabilnosti

Na slikama 2.21 i 2.22 nezavisno su prikazana stanja pozicija i brzina Gramijana kontrolabilnosti i Gramijana opservabilnosti.



Slika 2.21 Stanja pozicija i brzina dijagonalnih elementa Gramijana kontrolabilnosti



Slika 2.22 Stanja pozicija i brzina dijagonalnih elementa Gramijana opservabilnosti

2.4.4.4 Balansirana redukcija

Algoritam kreira dva identična gramiana (Gramian kontrolabilnosti i Gramian opservabilnosti) pa se dalje rangiranje, odnosno donošenje odluke koja su stanja manje važna vrši prema bilo kojoj od dobijenih matrica, na način da se zadržavaju stanja sa najvećim dijagonalnim elementima. Funkcija *balreal* kojom se u Matlabu izvodi balansirana redukcija linearnog sistema u prostoru stanja ima oblik:

$$[sysb, g, T, Ti] = balreal(sys) \quad (2.67)$$

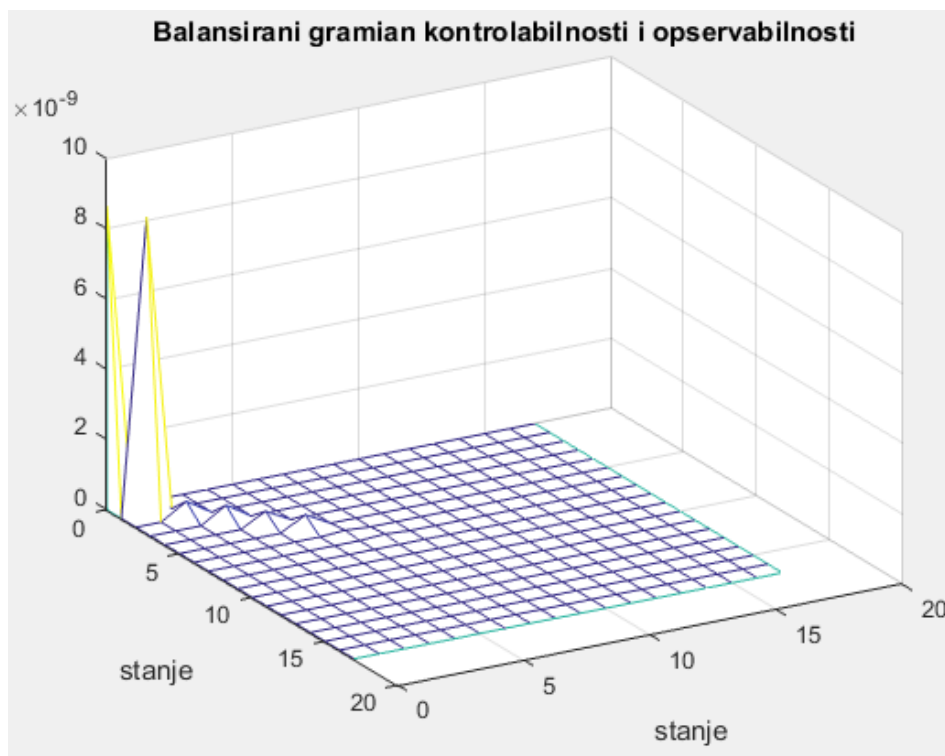
pri čemu *sysb* predstavlja novi, balansirani sistem, čije dijagonale formiraju vektor Hankelovih singularnih vrijednosti sistema. Hankelova matrica predstavlja proizvod Gramiana kontrolabilnosti i Gramiana opservabilnosti, dok su Hankelove singularne vrijednosti kvadrati sopstvenih vrijednosti *Hankelove* matrice. *T* predstavlja matricu transformacije stanja koja se zajedno sa svojom inverznom matricom *Ti* koristi pri prevođenju sistema *sys* u sistem *sysb*.

$$\begin{aligned} \dot{x}_b &= TAT^{-1}x_b + TBu \\ y &= CT^{-1}x_b + Du \end{aligned} \quad (2.68)$$

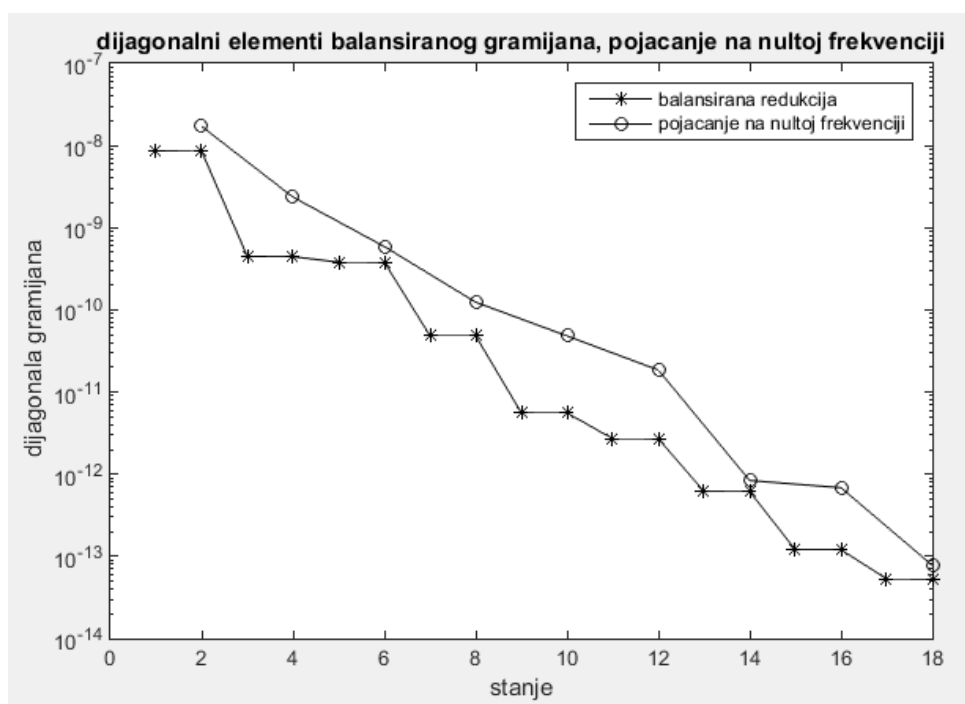
Matrica transformacije *T* se također koristi pri transformaciji *Gramijana* kontrolabilnosti i *Gramijana* opservabilnosti u identičnu dijagonalnu formu

$$W_{bo} = W_{bc} = diag(g) \quad (2.69)$$

Na slici 2.22 date su potpuno identične dijagonalne *Gram* matrice kontrolabilnosti i opservabilnosti balansirano sistema, dok su na slici 2.23 date *Hankelove* singularne vrijednosti i sortirane vrijednosti pojačanja na nultoj frekvenciji, u funkciji broja stanja. Nakon što su stanja sortirana u opadajućem poretku, može se primjeniti funkcija *modred*, opcija *del* ili *mdc*, kako bi se eliminisala stanja koja imaju najmanju zajedničku vrijednost kontrolabilnosti, odnosno opservabilnosti.



Slika 2.23 Balansirani Gramian kontrolabilnosti i opservabilnosti



Slika 2.24 Sortirani dijagonalni elementi balansirano gramijana i pojačanje na nultoj frekvenciji

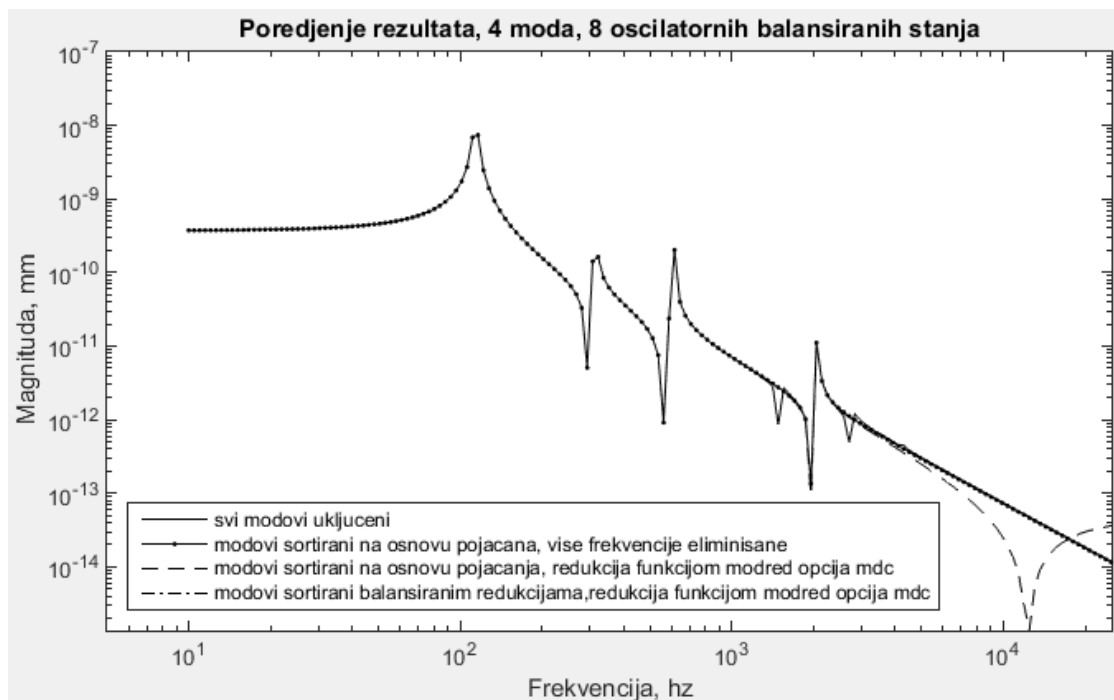
Na slikama 2.25 i 2.26 prikazane su funkcije frekventnog odziva svih devet izdvojenih glavnih oblika oscilovanja, te četiri od devet glavnih oblika oscilovanja pri čemu su sortiranje i redukcija izvršeni na različite načine. Na odzivu prikazanom na slici 2.25 sortiranje je izvršeno na sljedeći način:

- a) glavni oblici oscilovanja su sortirani na osnovu pojačanja u maksimumu, te potom eliminisane više frekvencije,
- b) glavni oblici oscilovanja su sortirani na osnovu pojačanja u maksimumu, a redukcija izvršena funkcijom *modred* opcija *mdc*,
- c) glavni oblici oscilovanja su sortirani na osnovu balansiranih redukcija, a redukcija izvršena funkcijom *modred* opcija *mdc*,

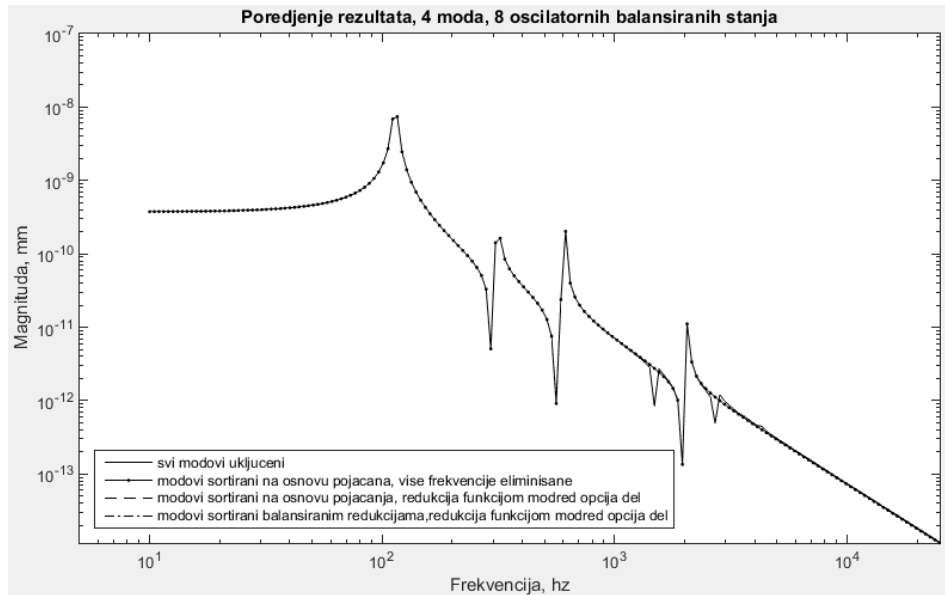
Na odzivu prikazanom na slici 2.26 glavni oblici oscilovanja su sortirani:

- a) na osnovu pojačanja u maksimumu, nakon čega su eliminisane više frekvencije,
- b) na osnovu pojačanja u maksimumu, dok je redukcija izvršena funkcijom *modred* opcija *del*,
- c) na osnovu balansiranih redukcija, dok je redukcija izvršena funkcijom *modred* opcija *del*.

Može se vidjeti da primjenom bilo koje od metoda za sortiranje uticaja glavnih oblika oscilovanja, modovi 4 i 5 nisu uključeni u redukovani model, odnosno 4. glavni oblik oscilovanja redukovanog modela je 6. glavni oblik oscilovanja originalnog modela. Također, može se uočiti da pri selektovanju modova na osnovu pojačanja u maksimumu i redukcijom reda primjenom funkcije *modred* opcija *mdc* u višem frekventnom području postoji odstupanje odziva redukovanog modela u odnosu na originalni model, koga primjenom opcije *del* nema. Međutim, sortiranjem modova na osnovu balansiranih redukcija, odstupanja u višem frekventnom području nema, bez obzira koja se od opcija funkcije *modred* koristi pri redukciji.

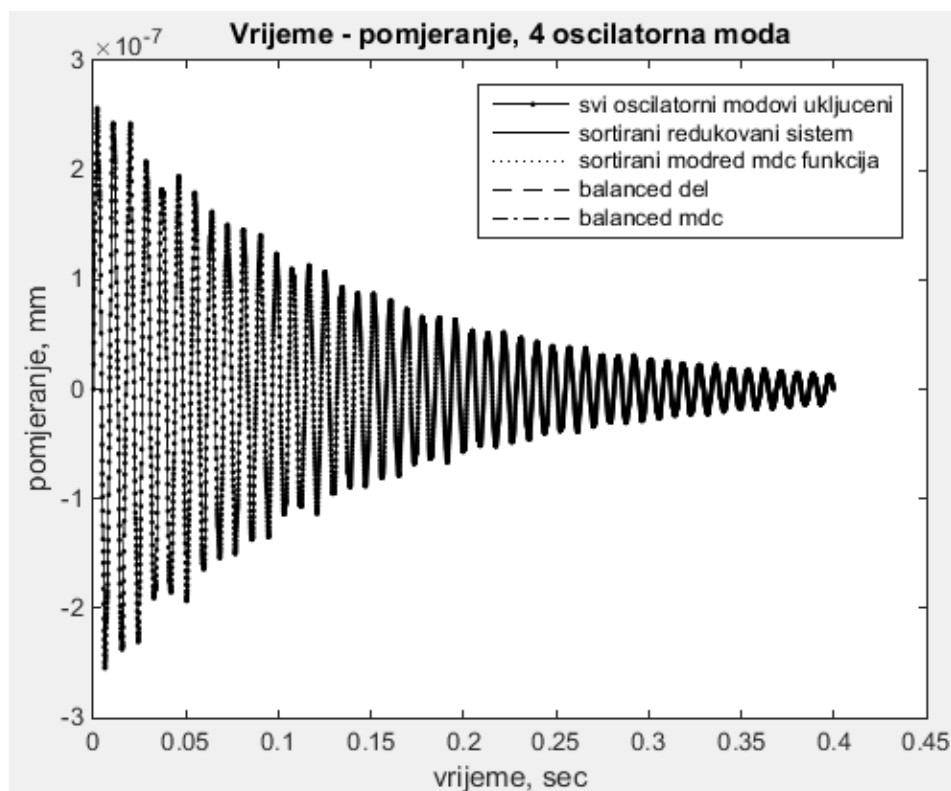


Slika 2.25 AF karakteristika, redukcija izvršena funkcijom *modred* opcija *mdc*

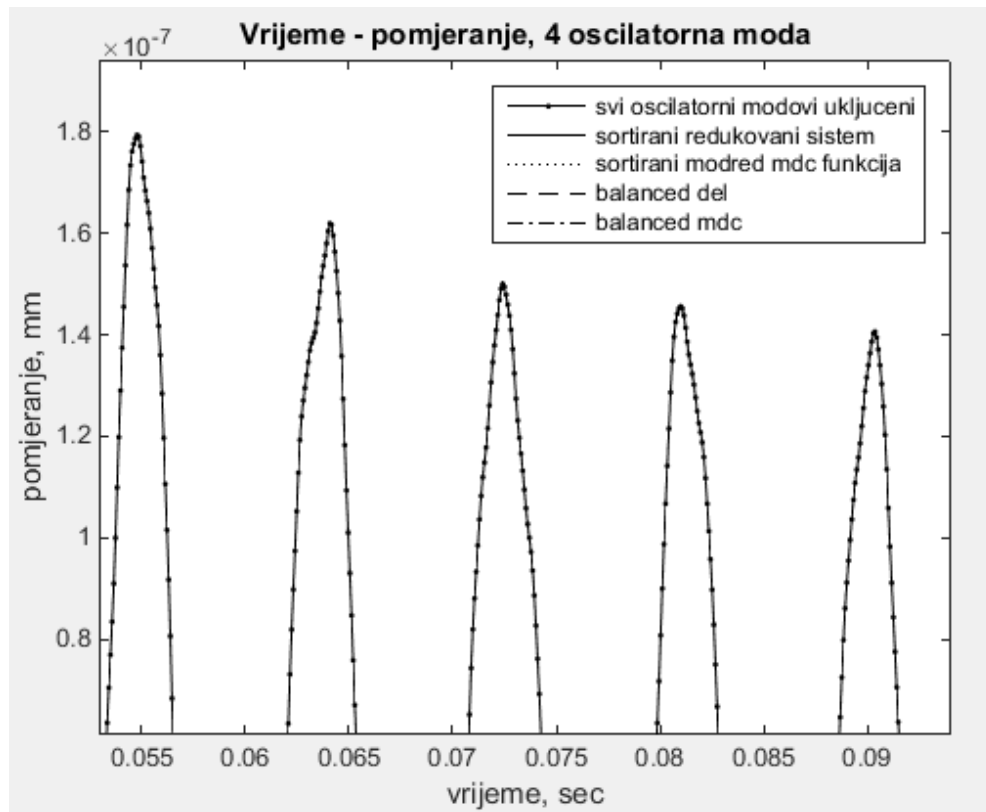


Slika 2.26 AF karakteristika, redukcija izvršena funkcijom modred opcija del

Poređenje odziva sistema na pobudu u obliku jediničnog impulsa dato je na slikama 2.28 i 2.29. Na slici 2.27 prikazan je odziv svih devet oscilatornih modova, te odzivi sistema pri čemu su korištene različite tehnike modalne redukcije. Slika 2.28. prikazuje izdvojen, uvećan segment odziva sistema prikazanog na slici 2.27. Na osnovu slike 2.28. može se zaključiti da je dobijeni impulsni odziv sistema gotovo identičan bez obzira koja tehnika redukcije je primjenjena.



Slika 2.27 Odziv sistema na pobudu u obliku jediničnog impulsa



Slika 2.28 Uvećan segment odziva sistema na jediničnu pobudu

3 MODALNA ANALIZA VIBRACIJA NA KONSTRUKCIJI

3.1 UVODNA RAZMATRANJA

Modalna analiza predstavlja proces identifikacije dinamičkih karakteristika, odnosno modalnih parametara. Na osnovu identifikovanih modalnih parametara moguće je dobiti matematički model dinamičkog ponašanja koji opisuje vibraciono ponašanje konstrukcije pod uticajem spoljašnjeg opterećenja.

Za identifikovanje modalnih parametara konstrukcije u primjeni je velik broj postupaka, koji se grubo mogu razvrstati na postupke zasnovane na primjeni analitičkih metoda, numeričkih metoda, te eksperimentalnih metoda.

Analitički način identifikovanja modalnih parametara podrazumijeva i tačna matematička rješenja koja opisuju ponašanje konstrukcije pri dinamičkom djelovanju, što je moguće samo u jednostavnim i idealizovane slučajeve, kakvi se uglavnom ne sreću u praksi.

Numerički način identifikovanja modalnih parametara najčešće podrazumijeva primjenu programskih sistema za analizu konačnim elementima.

Dinamički parametri se, osim analitički i numerički, mogu odrediti i eksperimentalnim ispitivanjem.

Eksperimentalna ispitivanja predstavljaju veoma poželjnu metodu određivanja modalnih parametara budući da su, uglavnom, jednostavna, brza i što je veoma važno pri ispitivanju nema razaranja materijala. Eksperimentalna modalna analiza (EMA) podrazumijeva eksperimentalno određivanje modalnih parametara linearnog, vremenski invarijantnog sistema koji predstavljaju osnovu za izradu modela dinamičkog ponašanja.

Eksperimentalna modalna analiza podrazumijeva istovremeno analizu signala pobude i odziva u vremenskom ili frekventnom domenu, ili anлізу samo signala odziva, što se naziva operaciona modalna analiza (OMA). Izvodi se uz pretpostavku da je odziv konstrukcije proporcionalan pobudi, te da odgovor na spoljašnju dinamičku pobudu sadrži karakteristike fizičkog sistema.

U ovom poglavlju prikazano je određivanje modalnih parametara primjenom EMA na primjeru jednostavnog fizičkog modela, slobodno oslonjene grede konstantnog, kružnog poprečnog presjeka. Svrha provedenih ispitivanja je poređenje rezultata sa rezultatima modalne analize dobijenim analitički i numerički, primjenom metoda konačnih elemenata, odnosno verifikacija analitičkih i numeričkih modela.

U narednim poglavljima, modalni parametri horihzontalnog obradnog centra FM38 najprije su određeni numerički, a potom je primjenom EMA izvršena verifikacija razvijenih modela.

Ojler – Bernulijeva teorija greda predstavlja matematički model za analizu poprečnih vibracija, gdje je elastična linija savijanja nosača prostorno-vremenska funkcija oblika $w = w(x, t)$, pri čemu se svaki element grede kreće samo u pravcu w , upravnom na pravac x , dok parameter t predstavlja vrijeme. Glavni nedostatak Ojler – Bernulijeve teorije je što ne uzima u obzir uticaj smičuće sile. Kako bi se popravila ova ograničenja, ukrajinski mehaničar Stjepan Timošenko je predložio napredniju teoriju, gdje greda predstavlja složeniji strukturni model u odnosu na Ojler – Bernulijev, kod kojega se u obzir uzimaju i smičuće sile i zakretanje masa oko vertikalne ose.

Opravdanost primjene Ojler – Bernulijeve teorije u ovom slučaju je u tome što se u radu vrši analiza analitičkim putem dijelova tipa vratila (vitki dijelovi) kod kojih je odnos dužine i prečnika najmanje 10:1, te se uticaj tangencijalnih napona može zanemariti. Ukoliko bi se vršila analiza dijelova oblika diska, gdje je učešće tangencijalnih napona u ekvivalentnom naponu značajno veće u odnosu na dijelove tipa vratila, tada bi se analitički model trebao razviti na osnovu Timošenkove teorije greda.

Metodologija prikazana u okviru ovog poglavlja na relativno jednostavnom fizičkom modelu – slobodno oslonjenoj gredi kružnog poprečnog presjeka, primjenjena je u nastavku istraživanja u cilju identifikacije modalnih parametara sljedećih elemenata eksperimentalnog modela [80]: slobodno oslonjenog glavnog vretena, slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena, slobodno oslonjenog sistema glavnog vreteno – držač alata - alat, i na posljertku na modelu noseće strukture horizontalnog obradnog centra FM 38.

S obzirom na to da se rezultati eksperimentalnih mjerenja mogu smatrati tačnim, njihovo poređenje sa analitički i numerički dobijenim rezultatima predstavlja verifikaciju ovih modela.

3.2 SISTEMATIZACIJA METODA IDENTIFIKACIJE DINAMIČKIH KARAKTERISTIKA SISTEMA

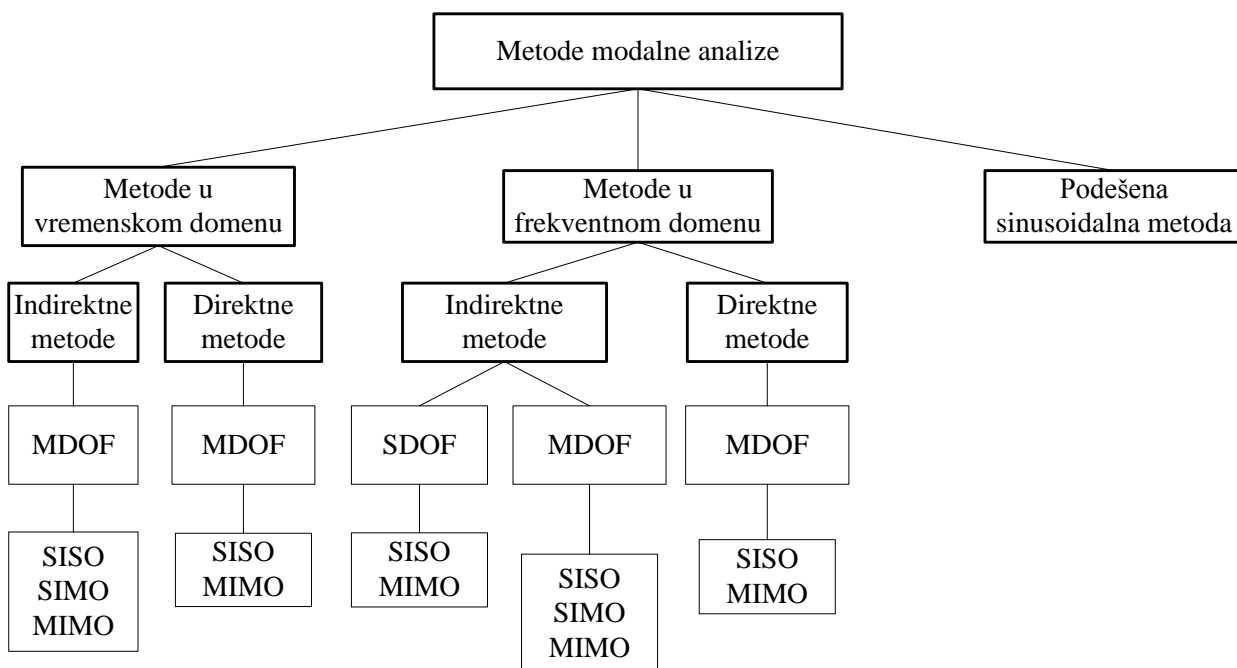
Osnovna podjela metoda identifikacije dinamičkih karakteristika je na metode u vremenskom i metode u frekventnom domenu, Slika 3.1. Obje grupe metoda, vremenske i frekventne, dalje se dijele na indirektno i direktne metode. Pod indirektnim metodama podrazumijeva se identifikacija funkcije frekventnog odziva na osnovu modalnih parametara, sopstvenih frekvencija i koeficijenata prigušenja. Direktne metode podrazumijevaju identifikaciju baziranu na diferencijalnim jednačinama kretanja. Nadalje podjela se može izvesti i na osnovu broja modova (broju stepeni slobode) koji će se analizirati, pa se tako mogu vršiti analize sistema sa jednim stepenom slobode (*SDOF, Single degree of freedom*) i analize sistema sa više stepeni slobode (*MDOF, Multy degree of freedom*).

U vremenskom domenu primjenjuju se jedino analize sistema sa više stepeni slobode, dok se u frekventnom domenu primjenjuju analize sistema sa jednim i više stepeni slobode u indirektnim metodama, dok se u direktnim metodama primjenjuju samo sistemi sa više stepeni slobode.

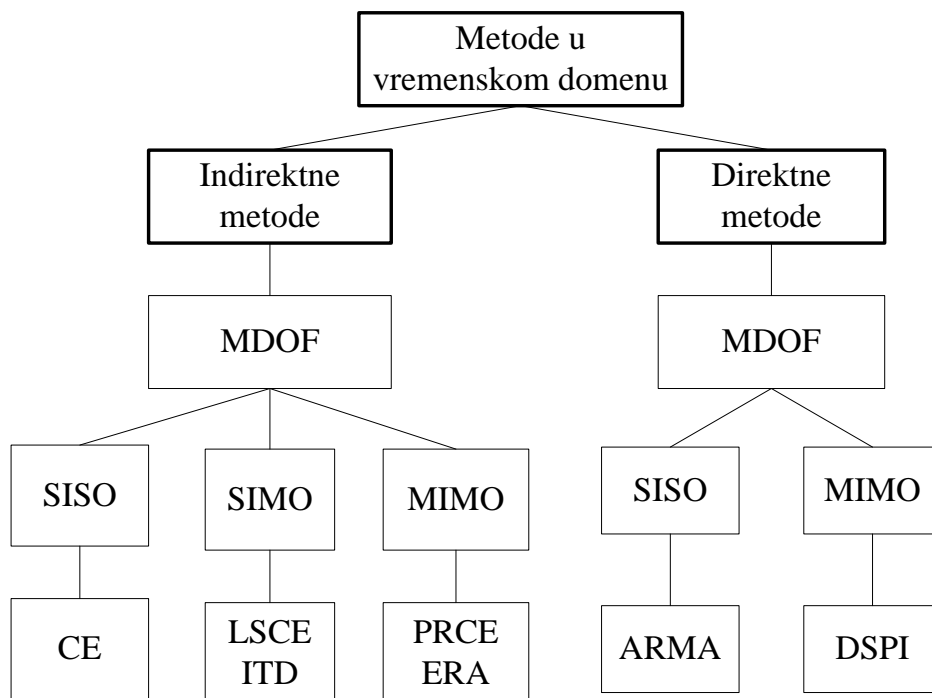
Po složenosti sistema koji se identifikuje metode se dijele na metode za identifikaciju sistema sa jednim ulazom (SISO, single input single output), identifikaciju sistema sa jednim

ulazom i više izlaza (SIMO, single input multiple output), sistema sa više ulaza i jednim izlazom (MISO, multiple input single output) i sistema sa više ulaza i izlaza (MIMO, multiple input multiple output).

Na slikama 3.1 - 3.3 prikazana je podjela metoda modalne analize, a u nastavku dat detaljan uvid u dvije metode primjenjene za potrebe ovog istraživanja: metoda modalne analize u **frekventnom domenu** „selektovanje vrhova“, te metoda frekventne analize u **vremenskom domenu** primjenom autoregresionog modela sa spoljašnjim ulazom ARX.



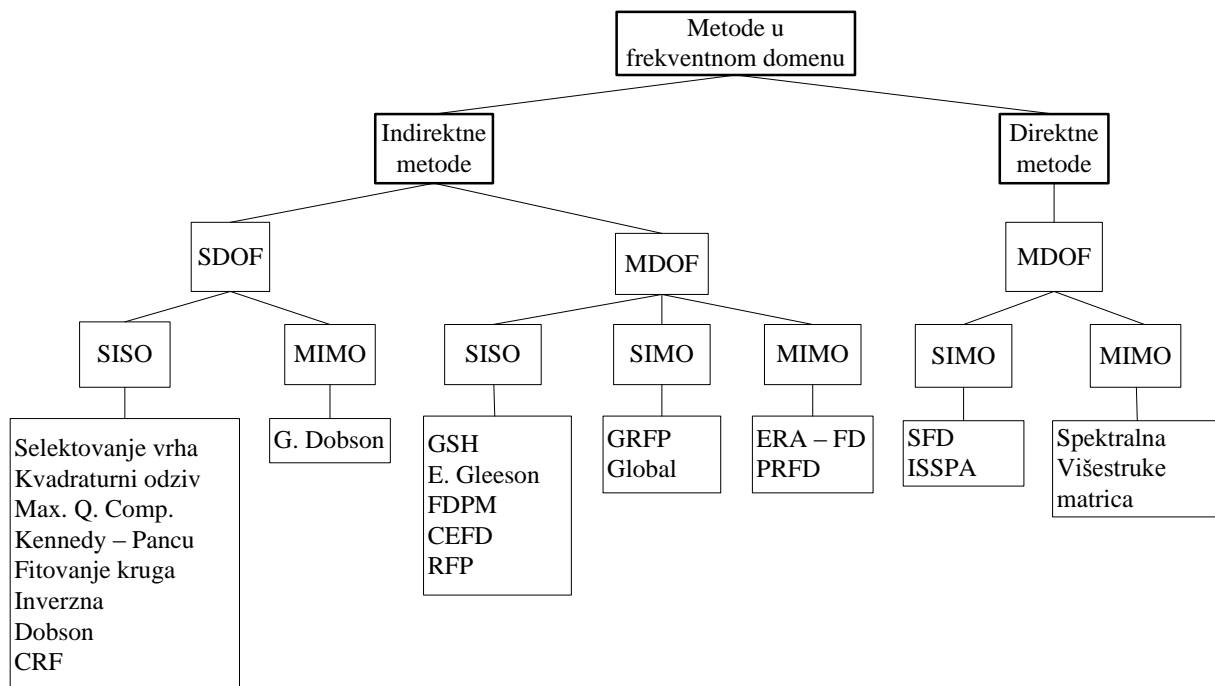
Slika 3.1 Sistematizacija metoda modalne analize [50]



Slika 3.2 Sistematizacija metoda modalne analize u vremenskom domenu [50]

U ovom poglavlju prikazana je primjena dvije metode identifikacije modalnih parametara, ARX model u vremenskom, te metoda selektovanja vrha u frekventnom domenu.

Prikazana su i dva načina određivanja prenosne funkcije, i to na osnovu podataka dobijenih mjerenjem, odnosno analitički.



Slika 3.3 Sistematizacija metoda modalne analize u frekventnom domenu [50]

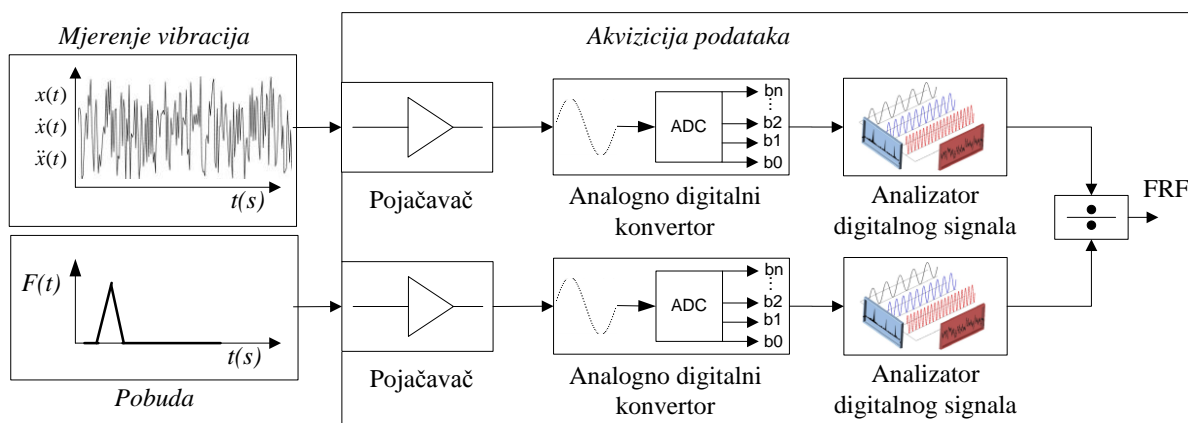
3.3 MJERNI SISTEM ZA EKSPERIMENTALNO IDENTIFIKOVANJE MODALNIH PARAMETARA

Za izvođenje eksperimentalne modalne analize potreban je adekvatan sistem za mjerenje vibracija koji se sastoji od hardvera i softvera.

Hardver se sastoji od senzora za mjerenje parametara vibracija, dijela za akviziciju podataka i pobuđivača za kontrolisano nanošenje poznate sile na konstrukciju, Slika 3.4. Uređaj za prikazivanje i pohranjivanje podataka predstavlja personalni računar.

Za mjerenje vibracija mogu se koristiti senzori ubrzanja (akcelerometri), senzori brzine (velocimetri) i senzori pomjeranja (pomaka). Za potrebe ovog istraživanja korišteni su piezo-električni senzori ubrzanja, frekventnog opsega do 10 kHz i širokog raspona amplituda, do 500 g. Nemogućnost mjerenja frekvencija bliskih nuli, kao ograničavajućeg faktora pri primjeni piezo-električnih davača ubrzanja, u ovom slučaju ne predstavlja smetnju, budući da je frekvencijski opseg od interesa za ovo istraživanje približno 50 - 5000 Hz.

Sistem za akviziciju podataka se sastoji od pojačivača, analogno digitalnog konvertora (ADC – *Analog Digital Converter*) i analizatora digitalnog signala. Za prelaz u frekventno područje koriste se Fourierove transformacije čijom se analizom dobijaju podaci o sopstvenim frekvencijama oscilovanja, prigušenju i obliku oscilovanja. Rezultat diskretne Furijeove transformacije vremenskog sigala je prenosna funkcija koja se najčešće prikazuje u obliku „realni – imaginarni dio“ ili „magnituda – faza“. Funkcija frekvencijskog odziva opisuje ulazno – izlaznu vezu između dvije tačke na konstrukciji kao funkciju frekvencije, odnosno odziv konstrukcije na jednom mjestu kao posljedicu djelovanja pobude na drugom.



Slika 3.4 Šema sistema za akviziciju podataka

Pobuda je uglavnom sinusna, konstantne frekvencije ili impulsna. Pod uticajem pobude javljaju se inercijalne sile, pomjeranja i deformacije, koji su vremenski zavisni. U okviru ovog istraživanja korišten je impulsni čekić koji ima ugrađen senzor sile. Trajanje i amplituda impulsa zavisi od tipa vrha izmjenjive glave čekića. Čekić također posjeduje i dodatnu masu koja se dodaje po potrebi. Opseg frekvencija koje se pobuđuju impulsnim čekićem zavise od mase i tipa vrha čekića: opseg frekvencija se smanjuje ako se poveća masa čekića, a povećava korištenjem tvrdog vrha glave čekića. Važan preduslov za dobijanje pouzdanih rezultata pri izvođenju eksperimentalne modalne analize predstavlja pravilan

izbor načina i mjesta nanošenja pobudne sile, što je analizirano u narednim poglavljima. Na slici 3.5 dat je prikaz i specifikacija korištene mjerne opreme.

LabView softver je korišten isključivo za potrebe mjerenja, odnosno pri akviziciji podataka. Izmjereni signali pobude i odziva u vremenskom domenu su potom eksportovani u Matlab, u kom su izvršene sve preostale analize.



Slika 3.5 Oprema korištena pri izvođenju eksperimentalne modalne analize

3.4 IDENTIFIKACIJA MODALNIH PARAMETARA U FREKVENTNOM DOMENU PRIMJENOM METODA SELEKTOVANJA VRHOVA (*peak picking*)

U nastavku je prikazana metodologija identifikovanja modalnih parametara, modalne mase, modalne krutosti i modalnog prigušenja na osnovu eksperimentalno dobijene prenosne funkcije. Metodologija zahtjeva hardver i softver kojim se može utvrditi odziv sistema na spoljašnju pobudu, te prikaz prenosne funkcije u frekventnom domenu u obliku „realni i imaginarni dio prenosne funkcije“. Osnove tehnike su demonstrirane na primjeru

slobodno oslonjene grede, Slika 3.6. U narednim poglavljima rada ova tehnika je primjenjena za određivanje modalnih parametara komponenti horizontalnog obradnog centra.

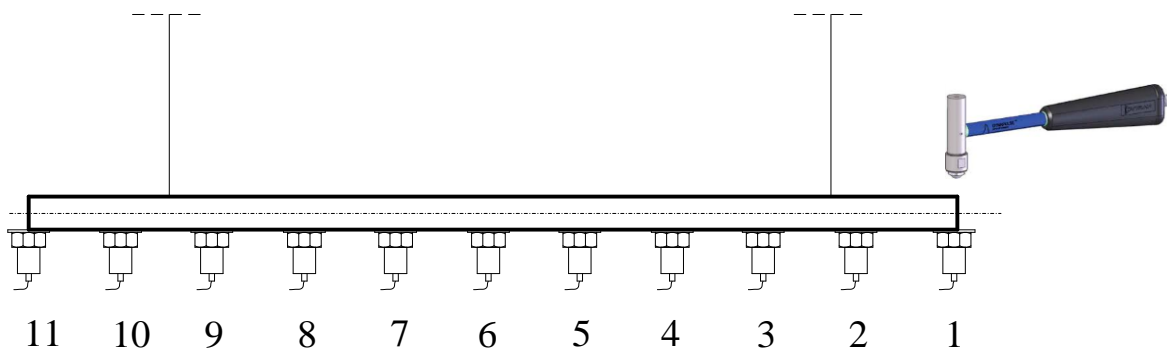
Kako bi se mjerenjem dobili korektni rezultati važno je, u slučaju graničnih uslova koji se razmataju u ovom primjeru osloniti gredu na način da što je moguće vjerodostojnije oponaša uslove slobodno oslonjenih krajeva. To podrazumijeva oslanjanje na podlogu kao što je spužva ili pjena, ili oslanjanje na viseće oslonce koji trebaju biti što je moguće elastičniji.

Za eksperimentalno identifikovanje modalnih parametara koristi se aparatura opisana u poglavlju 3.3, Slika 3.6. Pri akviziciji podataka korišten je softver LabView, odnosno Matlab za određivanje prenosne funkcije.



Slika 3.6 Eksperimentalno identifikovanje modalnih parametara slobodno oslonjene grede

S obzirom da je pri izvođenju eksperimenta korišten samo jedan davač ubrzanja, za određivanje oblika oscilovavnja grede, mjerenje je potrebno ponoviti više puta. Pri izvođenju mjerenja akcelerometar se pomjera, tako da rastojanje između dvije susjedne tačke mjerenja iznosi 100 mm, dok se impulsna pobuda uvijek nanosi u tačku 1, Slika 3.7. Isti rezultati se mogu dobiti i pri pomjeranju mjesta nanošenja pobude, uz konstantnu poziciju akcelerometra.



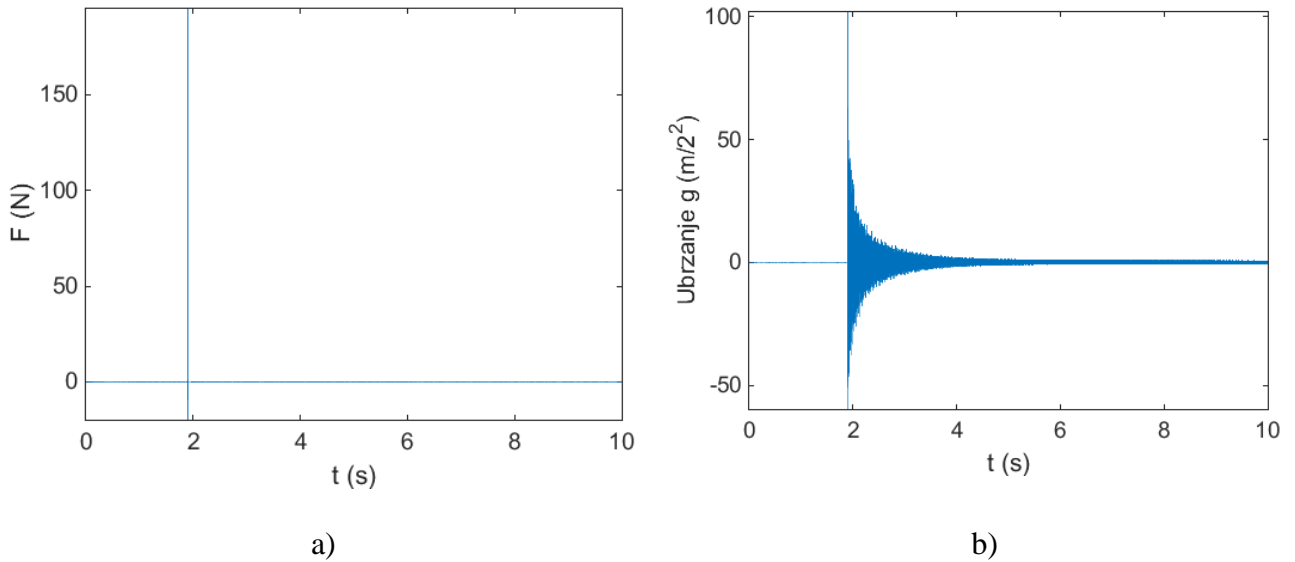
Slika 3.7 Mjerenje direktne funkcije frekventnog odziva u tački 1 i „unakrsne“ funkcije frekventnog odziva u tačkama 2-11

Korištena je frekvencija odabiranja 10kHz, što je ujedno i gornja granica osjetljivosti akcelerometra. Na osnovu modalnih analiza izvedenih analitički i primjenom metoda konačnih elemenata, može se vidjeti da je peta sopstvena frekvencija oscilovanja približno 1,5 kHz. Dakle, maksimalna frekvenija od 5 kHz, koja se na osnovu Šenonove teoreme može izmjeriti ukoliko je frekvencija odabiranja 10 kHz, sasvim je dovoljna da bi se identifikovale vibracije od 1,5 kHz, odnosno peta sopstvena frekvencija oscilovanja.

S obzirom da akcelerometar mjeri ubrzanje, potrebno je dvostrukim integraljenjem dobijeni odziv svesti na pomjeranje. Imajući u vidu da vektor pomjeranja fazno zaostaje za

vektorom ubrzanja za π rad, dok je amplituda vektora pomjeranja za ω^2 manja od amplitude vektora ubrzanja, odnos odziv pomjeranja - pobude i odziv ubrzanja - pobuda može se iskazati relacijom (3.1), dok su izmjerene vrijednosti pobude i odziva u vremenskom domenu prikazane na slici 3.8.

$$\frac{X}{F} = -\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{A}{F} \quad (3.1)$$



Slika 3.8 Pobuda (a) i odziv (b) u vremenskom domenu

Na slici 3.9 prikazana je prenosna funkcija dobijena mjerenjem za samo jedan mod oscilovanja, u obliku „realni dio“ i „imaginarni dio“. Kako bi se na osnovu prenosne funkcije odredila vrijednost modalnog prigušenja ovog moda, važno je uočiti da maksimalna vrijednost amplitude ne nastupa kod $\omega / \omega_n = 1$ već pri nešto nižim vrijednostima, a da prigušena sopstvena frekvencija ω_d ima vrijednost $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. Međutim, za male vrijednosti ζ ovaj izraz se može napisati i kao $\omega_d = \omega_n (1 - \zeta)$. Analogno vrijedi i za minimalnu vrijednost prenosne funkcije $\omega_d = \omega_n (1 + \zeta)$, pa je na osnovu slike 3.9

$$\omega_3 - \omega_2 = \omega_n (1 + \zeta_q) - \omega_n (1 - \zeta_q) = 2\omega_n \zeta_q \quad (3.2)$$

odnosno

$$\zeta_q = \frac{\omega_3 - \omega_2}{2\omega_n} \quad (3.3)$$

Budući da se imaginarni dio prenosne funkcije može napisati u obliku

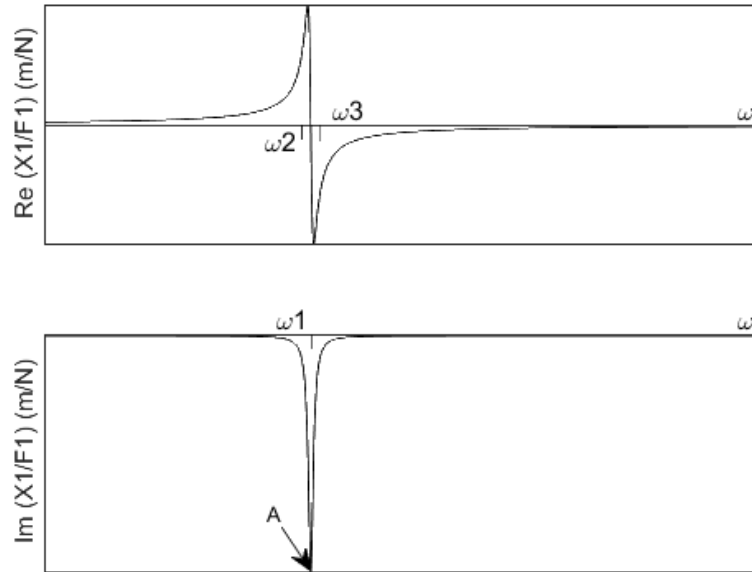
$$\text{Im}(G(r)) = \frac{1}{k} \left(\frac{-2\zeta r}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right) \quad (3.4)$$

gdje je $r = \omega / \omega_n$, u trenutku kada nastupi rezonanca, tj. pri $\omega = \omega_n$, imaginarni dio prenosne funkcije ima vrijednost $A = -1 / 2\zeta_q k_q$, odnosno

$$k_q = \frac{-1}{2A\zeta_q} \quad (3.5)$$

S obzirom da je sopstvena frekvencija $\omega_n^2 = k_q / m_q$, modalna masa m_q može se izraziti kao

$$m_q = \frac{k_q}{\omega_n^2} \quad (3.6)$$



Slika 3.9 Realni i imaginarni dio prenosne funkcije sistema sa jednim stepenom slobode

Modalno (viskozno) prigušenje jednako je

$$c_q = 2\zeta_q \sqrt{m_q k_q} \quad (3.7)$$

Na osnovu identifikovanih modalnih parametara dobija se direktna funkcija frekventnog odziva, 3.8, gdje Q_1 / R_1 predstavlja zbir realnog i imaginarnog dijela prvog moda, Q_2 / R_2 drugog moda, odnosno

$$\frac{X_1}{F_1} = \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \quad (3.8)$$

gdje su

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{k_{q1}} \left(\frac{(1-r_1^2) - i(2\zeta_{q1}r_1)}{(1-r_1^2)^2 + (2\zeta_{q1}r_1)^2} \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{Q_2}{R_2} = \frac{1}{k_{q2}} \left(\frac{(1-r_2^2) - i(2\zeta_{q2}r_2)}{(1-r_2^2)^2 + (2\zeta_{q2}r_2)^2} \right) \quad (3.10)$$

Međutim, da bi se dobila unakrsna funkcija frekventnog odziva, izrazi (3.9) i (3.10) se moraju skalirati elementima modalne matrice, odnosno

$$\frac{X_2}{F_1} = p_1 \frac{Q_1}{R_1} + p_2 \frac{Q_2}{R_2} \quad (3.11)$$

Kolone modalne matrice, odnosno glavni oblici oscilovanja se normalizuju na različite načine:

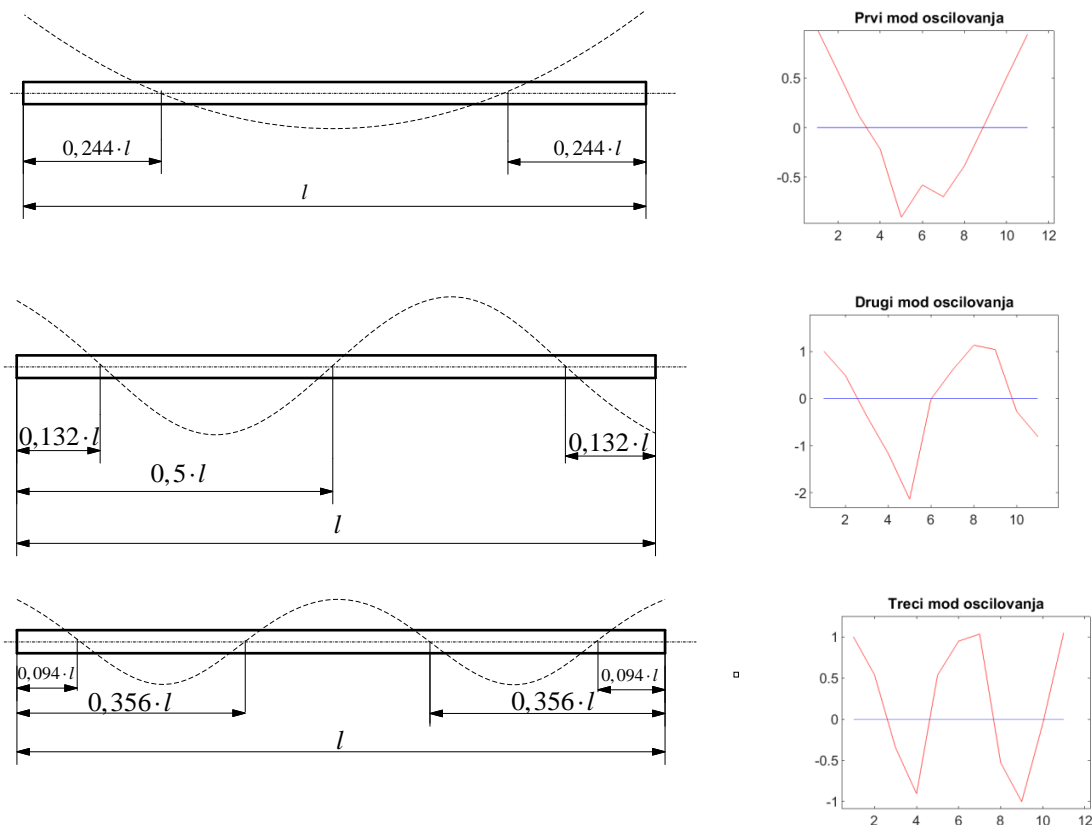
- U odnosu na izabrani element vektora (npr. element koji odgovara pomjeranju izabranog čvora)
- U odnosu na najveći element (usvoji se vrijednost najvećeg elementa jednako 1, dok se ostali elementi dobijaju dijeljenjem tim elementom)
- U odnosu na matricu mase

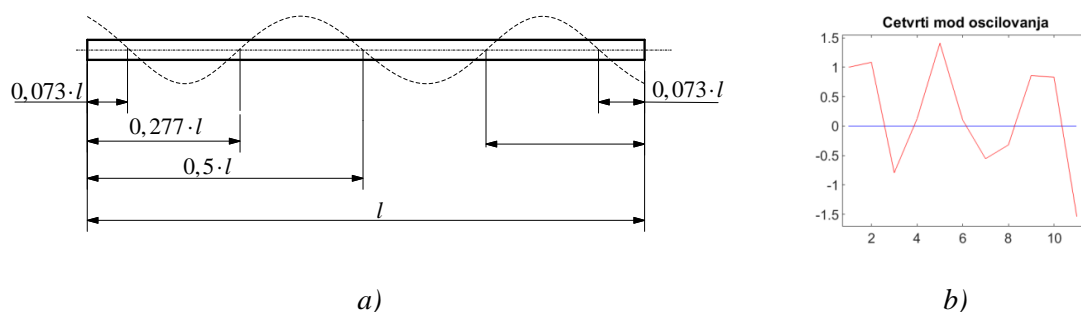
Elementi modalne matrice (3.12) koji predstavljaju odnose amplituda imaginarnog dijala prenosne funkcije pojedinačnih modova također se određuju eksperimentalnim putem.

$$[P] = [\psi_1 \quad \psi_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

3.4.1 Eksperimentalno određivanje glavnih oblika oscilovanja

Analizom prenosne funkcije odođene eksperimentalnim putem, odnosno mjerenjem pobude i odziva, moguće je utvrditi oblike oscilovanja konstrukcije. U literaturi se, osim termina oblik oscilovanja susreću i termin mod, ali i eigenvector (*eigen* – sopstveni, njemački). Analizirajući oblike oscilovanja slobodno oslonjene grede može se uočiti da prva dva moda predstavljaju dva specifična oblika pomjeranja koja se nazivaju **translatorno i rotaciono pomjeranje krutog tijela**, sl. 2.5 mod 1 i mod 2. Ovakvo pomjeranje tijela je posljedica djelovanja pobudne sile nulte frekvencije u centru mase, odnosno na kraju tijela, i pri tim pomjeranjima nema oscilovanja elemenata strukture.





Slika 3.10 Prva četiri moda oscilovanja slobodno oslonjene grede određena analitički (a) i eksperimentalno (b)

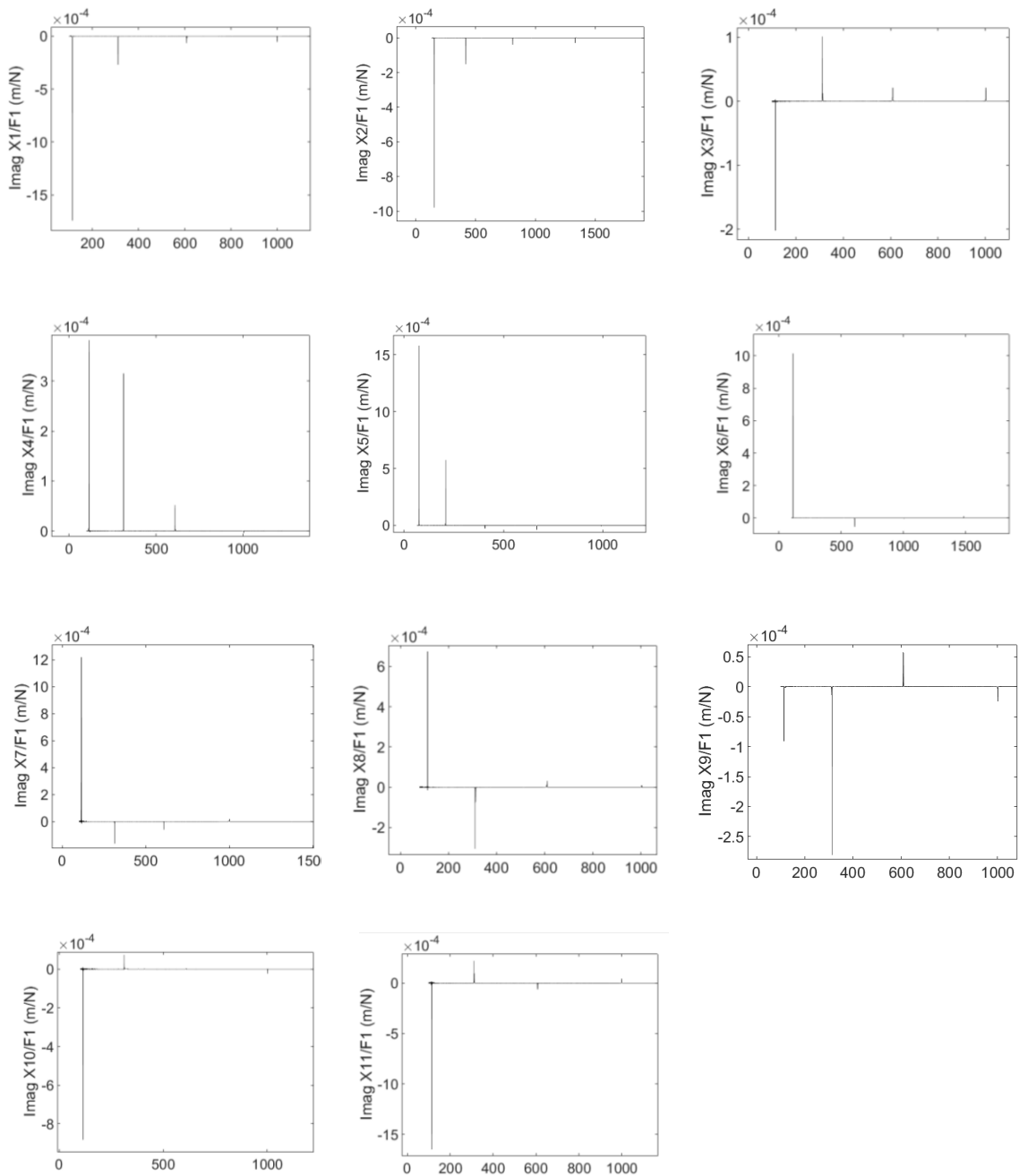
Na slici 3.10 lijevo prikazana su prva četiri moda savojnih vibracija slobodno oslonjene grede. Tačke u kojima je odziv jednak nuli na određenoj sopstvenoj frekvenciji nazivaju se čvorovi. Vrijednost odziva jednaka je nuli bez obzira na magnitudu pobude. Ove tačke su određene analitički za odgovarajuće granične uslove, [28]. Broj čvorova jednak je $i+1$, gdje je i broj moda. Dakle, za prvi mod oscilovanja postoje dva čvora, za drugi tri, itd. Ukupni odziv, odnosno pomjeranje grede izložene dejstvu spoljašnje pobudne sile predstavlja superpoziciju pojedinačnih pomjeranja, pri čemu su amplitude pomjeranja najveće za prvi mod i opadaju sa porastom broja moda.

Važno je uočiti da ukoliko se pri mjerenju davač nađe na poziciji čvora, ili se pobuda nanese na poziciji čvora, tada će odziv na tom mjestu imati magnitudu blisku nuli za određeni oblik oscilovanja. Pošto je pozicije čvorova teško predvidjeti, primjena metode konačnih elemenata u cilju orjentacionog određivanja pozicija čvorova može da bude rješenje. Također, veći broj eksperimentalnih mjerenja povećava tačnost dobijenih oblika oscilovanja.

Na slici 3.10 desno dati su oblici oscilovanja prva četiri moda savojnih vibracija dobijena eksperimentalnim putem, na osnovu mjerenjem identifikovanog imaginarnog dijela direktne i unakrsne prenosne funkcije, Slika 3.11.

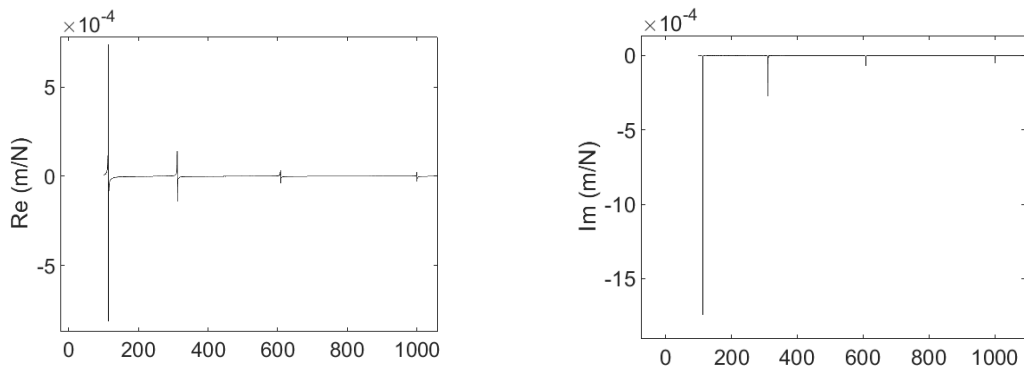
Međutim, ukoliko se eksperimentalnim putem formira modalna matrica, koja mora biti kvadratna, tada je broj lokacija na kojima se vrši mjerenje, a samim tim i broj prenosnih funkcija, jednak broju stepeni slobode. Normalizacija modalne matrice se obično vrši u odnosu na element vektora koji odgovara pomjeranju izabranog čvora, tako da elementi matrice ne predstavljaju magnitudu pomjeranja, nego relativne odnose. U ovom slučaju modalna matrica (3.11) se formira mjerenjem amplitude imaginarnog dijela prenosne funkcije izvršenih na mjestima 1, 3, 9 i 11, budući da ni jedna od ovih tačaka ne predstavlja čvor. Ovako formiran sistem ima četiri stepena slobode.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.12 & -0.38 & -0.32 & -0.41 \\ 0.052 & 1.04 & -0.85 & 0.48 \\ 0.95 & -0.81 & 0.98 & -0.80 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

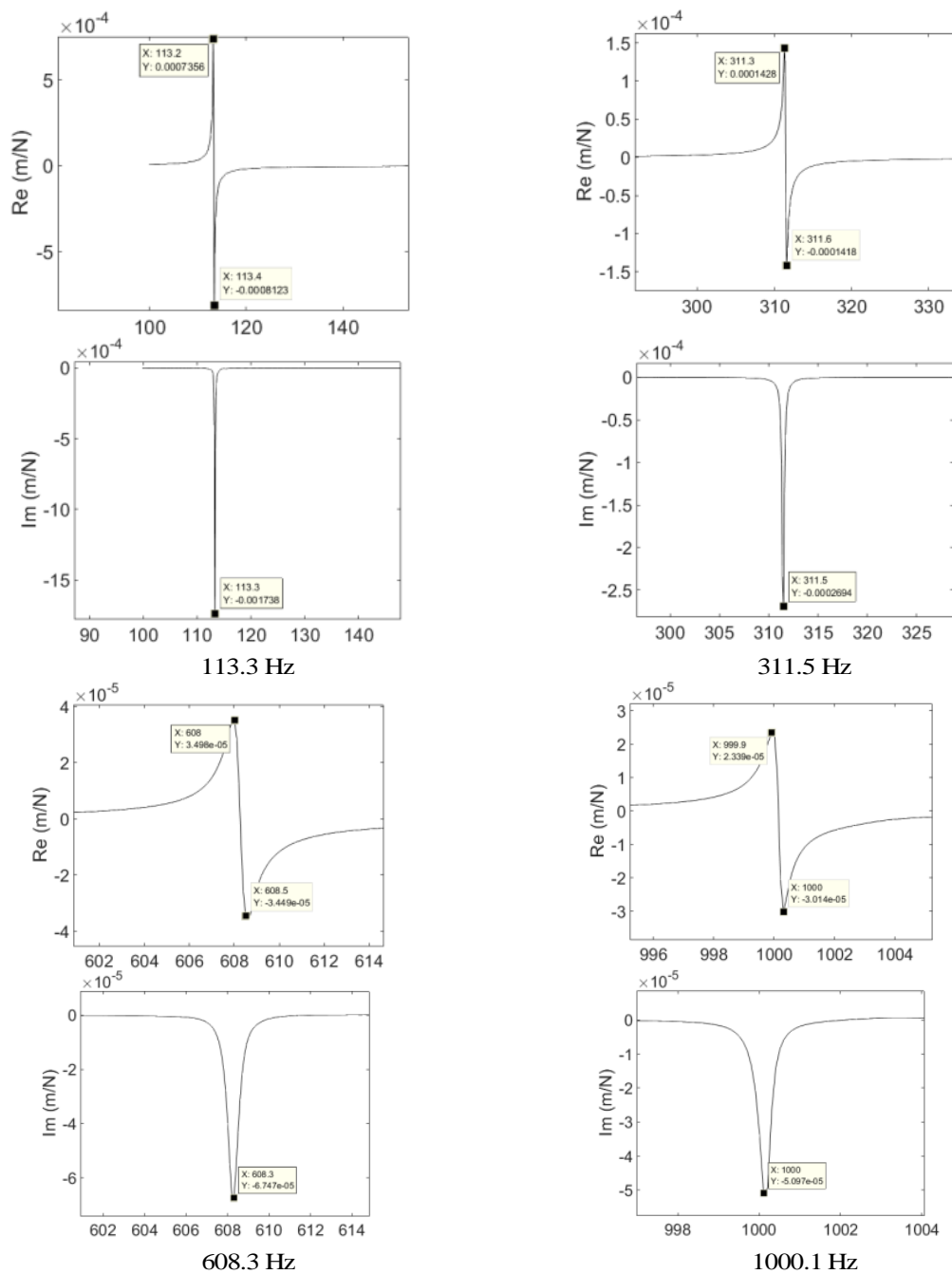


Slika 3.11 Imaginarni dio direktno funkcije frekventnog odziva ($X1/F1$) i unakrsne funkcije frekventnog odziva ($X2/F1 - X11/F1$)

Na slici 3.12 dati su realni i imaginarni dio direktno prenosne funkcije. S obzirom na veliki amplitudni raspon između prvog i ostalih modova, kako bi se utvrdili modalni parametri metodom selektovanja vrha, potrebno je svaki od prvih četiri moda prikazati uvećano, Slika 3.13.



Slika 3.12 Realni i imaginarni dio direktne funkcije frekventnog odziva



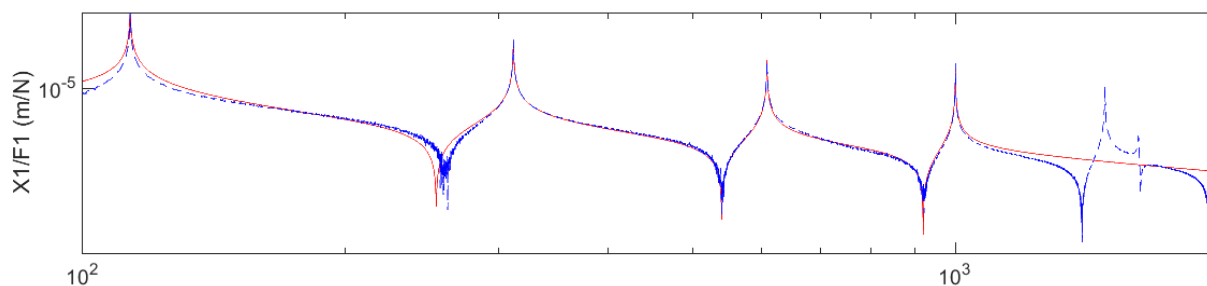
Slika 3.12 Realni i imaginarni dio FRF sa slike 3.12 (sa uvećanjem svakog moda)

Na osnovu obrazaca 3.3-3.7 određuju se modalni parametri direktne prenosne funkcije, tabela 3-1.

Tabela 3.1 Modalni parametri određeni metodom selektovanja vrha („Peack – Picking“)

Mod	$f_1(\text{Hz})$	$f_2(\text{Hz})$	$f_3(\text{Hz})$	FRF Im (m/N)	A	ζ	$k_q(\text{N/m})$	$m_q(\text{kg})$	$c_q(\text{Ns/m})$
1	113,3	113,2	113,4	-0,001738		0,001	287687	22,41	5,07
2	311,5	311,3	311,6	-0,0002694		0,00048	3866617,17	39,97	11,92
3	608,3	608	608,5	$-6,747 \cdot 10^{-5}$		0,00041	18074880,6	48,86	24,36
4	1000,1	999,9	1000,3	$-5,097 \cdot 10^{-5}$		0,0002	49048459,8	49,03	19,61

Nakon što su određeni modalni parametri, prenosna funkcija se formira kao zbir doprinosa pojedinih modova, 3.8. S obzirom da se radi o direktnoj prenosnoj funkciji, doprinosi pojedinih modova () se ne skaliraju elementima modalne matrice. Na slici 3.14 prikazana je direktna FRF dobijena mjerenjem (plava linija), te FRF dobijena pomoću (3.8), na osnovu modalnih parametara identifikovanih eksperimentalnim putem. Može se uočiti dosta dobro poklapanje AF karakteristika za sva četiri moda.



Slika 3.13 Direktna FRF slobodno oslonjene grede

3.5 IDENTIFIKACIJA MODALNIH PARAMETARA U VREMENSKOM DOMENU PRIMJENOM ARX MODELA

Jedan od načina identifikacije modalnih parametara, odnosno određivanje prenosne funkcije je i obradom signala pobude i signala odziva u vremenskom domenu, tzv. ARX model (AutoRegresioni model sa eXtra ulazima).

Ponašanje linearnog sistema kome je ulaz $f(t)$, a izlaz $y(t)$ može se opisati diferencijalnom jednačinom 3.12.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \quad (3.9)$$

S obzirom da se akvizicija podataka vrši odabiranjem, dakle prikupljeni signali su u digitalnoj formi, sistem opisan jednačinom 3.12 prikazuje se u diskretnom vremenu, pri čemu se podrazumijeva da je vrijeme odabiranja jedna vremenska jedinica

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 f(t-1) + \dots + b_m f(t-m) \quad (3.10)$$

Prethodna jednačina se može napisati u obliku

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 f(t-1) + \dots + b_m f(t-m) \quad (3.11)$$

a zatim i u matičnom obliku

$$\theta = [a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_m]^T \quad (3.12)$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \dots -y(t-n) \quad f(t-1) \dots f(t-m)]^T \quad (3.13)$$

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta \quad (3.14)$$

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t)\theta$$

Za posmatrani sistem vrijednost vektora θ nije poznata, ali jesu vrijednost ulaza i izlaza u intervalu $1 \leq t \leq N$, koje se mogu prikazati u obliku

$$z^N = \{f(1), y(1), \dots, f(N), y(N)\} \quad (3.15)$$

Potrebno je proizvoljno odabrati vrijednosti θ a na osnovu jednačine 3.17 aproksimira se mjerena izlazna veličine metodom najmanjih kvadrata, odnosno

$$\min_{\theta} V_N(\theta, Z^N), \quad (3.16)$$

pri čemu je

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t|\theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \varphi^T(t)\theta)^2 \quad (3.17)$$

Vrijednost θ koja zadovoljava jednačinu 3.19 označiće se sa

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, Z^N) \quad (3.18)$$

Minimalna vrijednost može se naći izjednačavajući izvod 3.21 sa nulom

$$0 = \frac{d}{d\theta} V_N(\theta, Z^N) = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)(y(t) - \varphi^T(t)\theta) \quad (3.19)$$

$$\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) = \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \theta \quad (3.20)$$

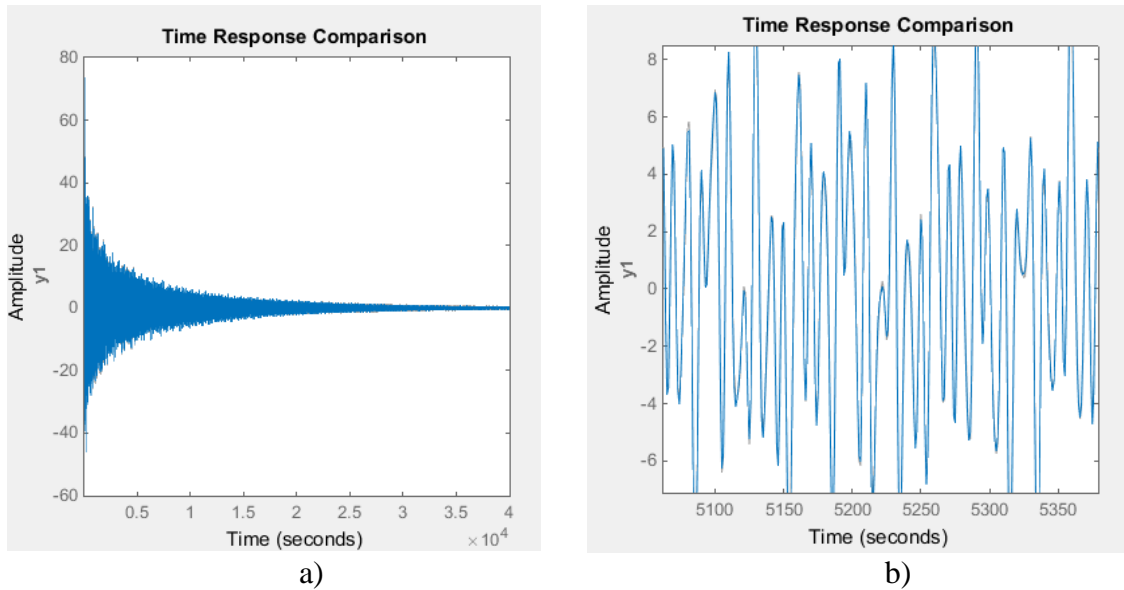
$$\hat{\theta}_N = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \quad (3.21)$$

Matlab posjeduje ugrađenu ARX metodu kao funkciju, pri čijem korištenju je potrebno definisati skup podataka koji predstavljaju mjerenu veličinu, red polinoma n i m , (3.13 i 3.14) i kašnjenje.

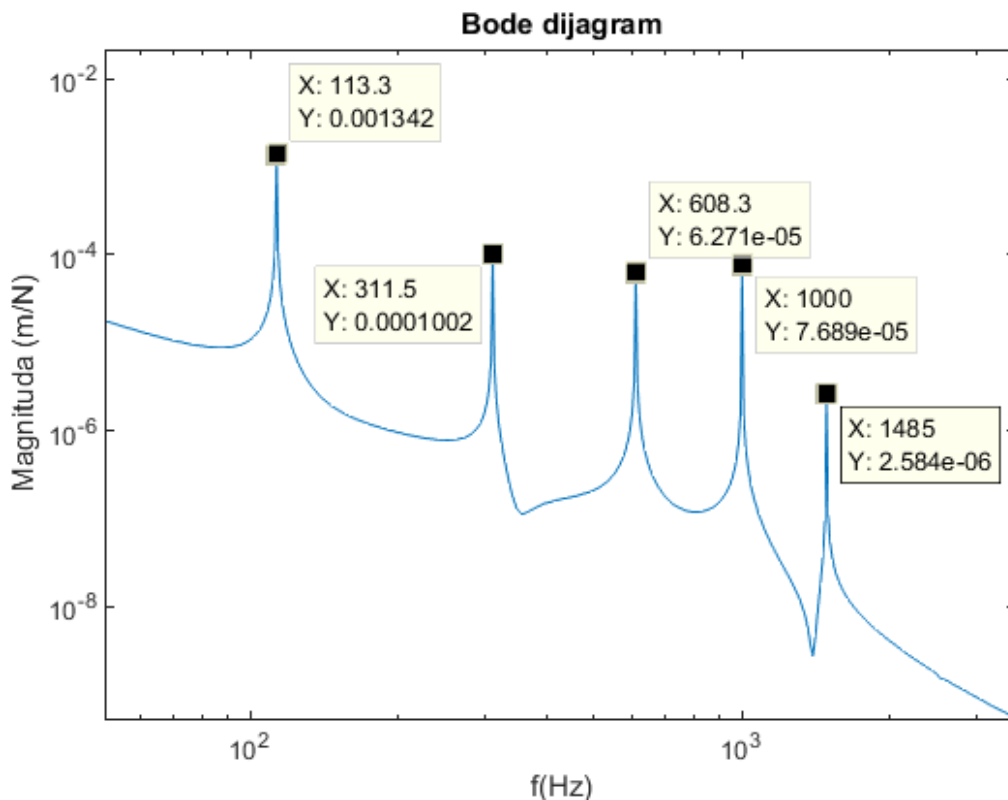
Formirani polinomski model se može redukovati u prostoru stanja i to nakon što se stanja rangiraju. U ovom primjeru stanja su redukovana primjenom balansiranih redukcija, nakon čega su neželjena stanja eliminisana opcijom *del* metode *modred*.

Na slici 3.15 prikazano je poređenje signala ubrzanja dobijenog mjerenjem i ARX modelom. Na slici 3.15 b) može se vidjeti da i nakon zumiranja signala, gotovo da je nemoguće uočiti odstupanje dobijenog u odnosu na mjereni signal. Poređenjem signala utvrđeno je preklapanje 94,07%.

Na slici 3.16 prikazana je AF karakteristika prenosne funkcija dobijene primjenom ARX modela. Poredeći vrijednosti frekvencija sa frekvencijama dobijenim eksperimentalnim putem, tabela 3.1, može se vidjeti da su rezultati potpuno identični, dok su vrijednosti amplituda nešto manje u odnosu na amplitude dobijene eksperimentalno.



Slika 3.14 Poređenje signala dobijenog mjerenjem i primjenom ARX modela (a) i uvećan prikaz oba signala (b)



Slika 3.15 AF karakteristika (Bodev dijagram) prenosne funkcije dobijene primjenom ARX modela

3.6 POREĐENJE FRF PRENOSNIH FUNKCIJA ODREĐENIH ANALITIČKI I EKSPERIMENTALNIM PUTEM PRI POPREČNIM VIBRACIJAMA GREDE

U ovom poglavlju prikazana je metodologija eksperimentalnog identifikovanja sopstvenih frekvencija i glavnih oblika oscilovanja.

Dobijeni rezultati u nastavku se porede sa modalnim parametrima određenim analitički na osnovu modela vibracija kontinualnih sistema.

Matematički model vibracija prostog mehaničkog sistema, kakav je slobodno oslonjena greda kružnog poprečnog presjeka, definisan je diferencijalnim jednačinama i skupom početnih i graničnih uslova. Diferencijalne jednačine koje opisuju vibracije su parcijalne diferencijalne jednačine, za koje je rješenje u zatvorenom obliku moguće odrediti samo za kontinualne sisteme jednostavnog geometrijskog oblika i graničnih uslova. Naravno, za realni fizički sistem kakav se susreće u praksi, geometrijski oblik i granični uslovi ne bi mogli biti pojednostavljeni do te mjere da bi se mogli riješiti analitičkim metodama, pa se u takvim slučajevima prisutpa njihovom približnom rješavanju drugim metodama, od kojih je najpoznatija metoda konačnih elementa.

S obzirom da se elastično tijelo sastoji od beskonačno mnogo djelića, pri čemu svaki od njih vibrira zasebno, problemi vibracija elastičnih tijela imaju beskonačno mnogo stepeni slobode. Pri razmatranju vibracija kontinualnih sistema pretpostaviće se da je materijal homogen, konstantnog poprečnog presjeka, izotropan i da se ponaša prema Hukovom zakonu. Pretpostavlja se također da su poprečne dimenzije grede male u odnosu na njenu dužinu, poprečna pomjeranja mala u odnosu na dužinu grede, te da svaka tačka na elastičnoj liniji ima pomjeranje samo u poprečnom pravcu.

Na osnovu poznate diferencijalne jednačine elastične linije grede pri savijanju

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M \quad (3.22)$$

gdje je I aksijalni moment inercije kružnog poprečnog presjeka $I = d_4 \cdot \pi / 64$, dobija se diferencijalna jednačina slobodnih nepriugušenih poprečnih vibracija

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2} = 0 \quad (3.23)$$

gdje je sa c^2 obilježen kvadrat brzine prostiranja talasa.

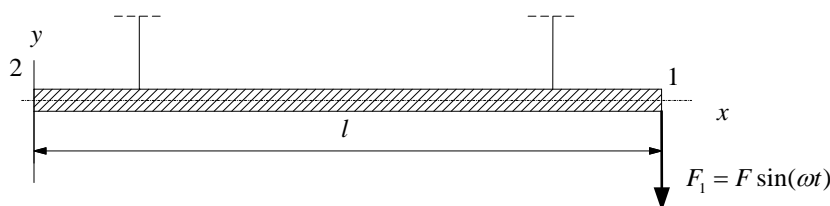
$$c^2 = \frac{EI}{\rho A} \quad (3.24)$$

Rješenje diferencijalne jednačine poprečnih vibracija grede je

$$Y(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) + C \cosh(\lambda x) + D \sinh(\lambda x) \quad (3.25)$$

pri čemu se koeficijenti A, B, C i D određuju primjenjujući odgovarajuće granične uslove, nakon čega se može odrediti i funkcija frekventnog odziva (FRF).

Slobodno oslonjena greda je prikazana na slici 3.17.



Slika 3.16 Slobodno oslonjena greda kružnog poprečnog presjeka opterećena silom F na mjestu 1

Direktna funkcija frekventnog odziva FRF desnog kraja grede (1) određuje se uzimajući da je $x=l$, te da je greda na mjestu 1 izložena djelovanju sile $F_1 = F \sin(\omega t)$. Pri određivanju funkcije frekventnog odziva na mjestu 2, u jednačinu 3.28 uvrštava se $x=0$. Pri tome granični uslovi na desnom kraju grede su:

$$\left. \frac{M}{EI} \right|_{x=l} = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0 \quad (3.26)$$

$$\left. \frac{V}{EI} \right|_{x=l} = \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=l} = -\frac{F}{EI} \sin(\omega t) \quad (3.27)$$

Na lijevom kraju, koji je također slobodan, greda može slobodno da rotira, tako da je i tu moment savijanja jednak nuli, ali za razliku od desnog kraja grede nema transverzalne sile.

$$\left. \frac{M}{EI} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{V}{EI} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.29)$$

U jednačinama 3.30 i 3.32 V je transverzalna sila na gredi zavisna od pozicije x . Na osnovu jednačine 3.28, uvrštavajući $x=0$ dobija se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0) = -\lambda^2 A \cos(0) - \lambda^2 B \sin(0) + \lambda^2 C \cosh(0) + \lambda^2 D \sinh(0) = \lambda^2(-A + C) = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0) = \lambda^3 A \sin(0) - \lambda^3 B \cos(0) + \lambda^2 C \sinh(0) + \lambda^2 D \cosh(0) = \lambda^3(-B + D) = 0 \quad (3.31)$$

Na osnovu jednačina 3.33 i 3.34 može se vidjeti da je $A = C$ i $B = D$. Ukoliko se ponovo primjene granični uslovi uzimajući pri tome da je $x=l$ dobija se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l) = \lambda^2(-A \cos(\lambda l) - B \sin(\lambda l) + C \cosh(\lambda l) + D \sinh(\lambda l)) = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l) = \lambda^3(A \sin(\lambda l) - B \cos(\lambda l) + C \sinh(\lambda l) + D \cosh(\lambda l)) = -\frac{F}{EI} \sin(\omega t) \quad (3.33)$$

Ukoliko se u jednačinama 3.35 i 3.36 koeficijenti A i B zamjene koeficijentima C i D , one postaju

$$-C \cos(\lambda l) - D \sin(\lambda l) + C \cosh(\lambda l) + D \sinh(\lambda l) = 0 \quad (3.34)$$

$$C \sin(\lambda l) - D \cos(\lambda l) + C \sinh(\lambda l) + D \cosh(\lambda l) = -\frac{F}{\lambda^3 EI} \sin(\omega t) \quad (3.35)$$

Jednačine 3.37 i 3.38 mogu se, nadalje, izraziti u matricnom obliku

$$\begin{bmatrix} -\cos(\lambda l) + \cosh(\lambda l) & -\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l) \\ \sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l) & -\cos(\lambda l) + \cosh(\lambda l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{F}{\lambda^3 EI} \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Rješavajući matričnu jednačinu 3.39 određuju se C i D

$$C = \frac{F(-\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l))}{2\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} \sin(\omega t) \quad (3.37)$$

$$D = \frac{F(\cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l))}{2\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} \sin(\omega t) \quad (3.38)$$

Jednačina 3.28 se može napisati kao

$$Y(x) = C \cos(\lambda x) + D \sin(\lambda x) + C \cosh(\lambda x) + D \sinh(\lambda x) \quad (3.39)$$

$$Y(x) = C(\cos(\lambda x) + \cosh(\lambda x)) + (\sin(\lambda x) + D \sinh(\lambda x))$$

Uvrštavajući izraze 3.40 i 3.41 u jednačinu 3.42 dobija se

$$Y(x) = \frac{F(-\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l))}{2\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} \sin(\omega t)(\cos(\lambda x) + \cosh(\lambda x)) + \frac{F(\cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l))}{2\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} \sin(\omega t)(\sin(\lambda x) + \sinh(\lambda x)) \quad (3.40)$$

Jednačina 3.43 se može drugačije napisati kao

$$Y(x) = \frac{\cos(\lambda l)\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda l)\cosh(\lambda x)}{2\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} F \sin(\omega t) \quad (3.41)$$

Funkcija frekventnog odziva na mjestu 1 (direktna funkcija frekventnog odziva), na osnovu 3.44 može se izraziti kao

$$\frac{Y_1}{F_1} = \frac{\cos(\lambda l)\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda l)\cosh(\lambda x)}{2\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} \quad (3.42)$$

U slučaju kada se odziv posmatra u različitoj tački u odnosu na tačku na kojoj djeluje pobuda, u konkretnom slučaju ukoliko se odziv posmatra u tački 2, a pobuda djeluje u tački 1, Slika 3.17, tada se govori o „unakrsnoj funkciji frekventnog odziva“ (engleski *cross FRF*). U tom slučaju jednačina 3.28 postaje

$$Y_2 = A \cos(0) + B \sin(0) + C \cosh(0) + D \sinh(0) = A + C \quad (3.43)$$

S obzirom da je $A = C$, slijedi da je $Y_2 = 2C$, odnosno

$$Y_2 = \frac{F(-\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l))}{\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} \sin(\omega t) \quad (3.44)$$

Ukoliko je $x = 0$ funkcija frekventnog odziva Y_2 / F_1 ima vrijednost

$$\frac{Y_2}{F_1} = \frac{(-\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l))}{\lambda^3 EI(1 - \cos(\lambda l)\cosh(\lambda l))} \sin(\omega t) \quad (3.45)$$

Utjecaj ugaonih stepeni slobodne na funkciju frekventnog odziva razmatra se u narednom poglavlju.

3.7 MODELOVANJE PRIGUŠENJA

Prigušenje predstavlja proces trošenja energije sistema. U prethodnom poglavlju navedeno je da se pri modelovanju fizičkih sistema uglavnom koriste tri tipa prigušenja:

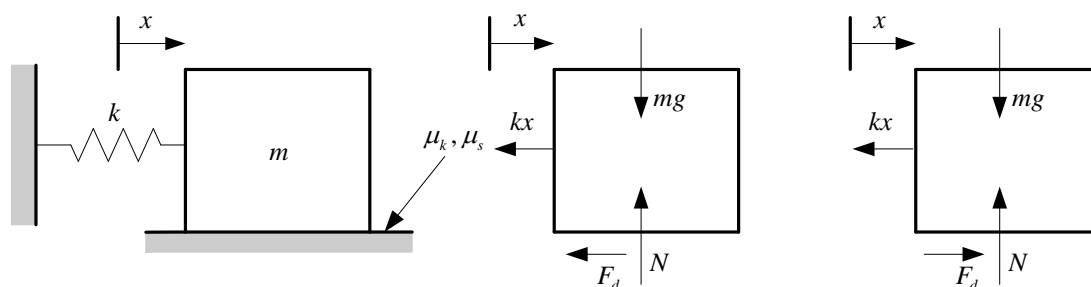
- Viskozno prigušenje,
- Kulonovo prigušenje (*Coulomb*),
- Strukturno prigušenje u materijalu.

Viskozno prigušenje je proporcionalno brzini kretanja, odnosno $f = c\dot{x}$ i najčešće se koristi pri analizi vibracija. U prethodnom poglavlju razmatrano je proporcionalno prigušenje kao oblik viskoznog prigušenja, gdje se može vidjeti da je ovo prigušenje veoma lako izraziti u pogodnoj matematičkoj formi, odnosno matričnom obliku.

Važan slučaj otpornih sila jesu sile **suvo** ili **Kulonovog trenja**. Diferencijalna jednačina kretanja materijalnog sistema sa jednim stepenom slobode pod uticajem restitucione sile može se napisati u obliku

$$m\ddot{x} + kx = \mu_k N \text{sign}\dot{x} \quad (3.46)$$

gdje je μ_k kinematski koeficijent trenja klizanja, a N normalna reakcija tijela na podlogu, koja je u slučaju sistema prikazanog na slici 3-2 jednaka $N = mg$. Kada tijelo miruje koeficijent trenja je μ_s (statički koeficijent trenja klizanja) i ima nešto veće vrijednosti od kinematskog koeficijenta trenja klizanja μ_k . Sila trenja ima isti pravac a suprotan smjer od brzine, odnosno izraz $\text{sign}\dot{x}$ (od latinskog izraza signum, tj. znak) ima pozitivnu vrijednost pri kretanju u desno, odnosno negativnu pri kretanju u lijevo.



Slika 3.17 Kulonova sila trenja

Ovdje se posebno razmatra **strukturno prigušenje u materijalu**. Kada se materijal u ciklično napreže, dolazi do akumulacije energije unutar samog materijala. Razlog je pojava unutrašnjeg trenja do kog dolazi zbog klizanja čestica materijala tokom deformisanja. Unutrašnje prigušenje se naziva i **histerezisno prigušenje**, ili **konstruktivno prigušenje**. U diferencijalnu jednačinu prinudnih vibracija uključen je bezdimenzioni faktor strukturnog prigušenja η

$$m\ddot{x} + k(1 + i\eta)x = Fe^{i\omega t} \quad (3.47)$$

Faktor strukturnog prigušenja η se uključuje i u modul elastičnosti koji postaje

$$E_s = E(1+i\eta) \quad (3.48)$$

Da bi se uspostavila veza između bezdimenzionog faktora strukturnog prigušenja η i bezdimenzionog faktora viskoznog prigušenja ζ potrebno je pretpostaviti rješenje diferencijalne jednačine 3.50 u obliku $x(t) = Xe^{i\omega t}$, nakon čega se jednačina može napisati u obliku

$$(-m\omega^2 + k(1+i\eta))Xe^{i\omega t} = Fe^{i\omega t} \quad (3.49)$$

odnosno

$$\frac{X}{F}(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + ik\eta} \quad (3.50)$$

Pri rezonanci $\omega = \omega_n$ izraz 3.53 postaje

$$\frac{X}{F}(\omega) = \frac{1}{k - m\frac{k}{m} + ik\eta} = \frac{1}{ik\eta} \quad (3.51)$$

Ukoliko se posmatra diferencijalna jednačina prinudnih prigušenih vibracija sa viskoznim prigušenjem

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{i\omega t} \quad (3.52)$$

te rješenje jednačine pretpostavi u obliku $x(t) = Xe^{i\omega t}$ i uvedu smjene $\zeta = c/c_c$ i $c_c = 2\sqrt{km}$ jednačina 3.55 postaje

$$\frac{X}{F}(\omega) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + i2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \right) \quad (3.53)$$

Pri rezonanci $\omega = \omega_n$ izraz 3.53 postaje

$$\frac{X}{F}(\omega) = \frac{1}{i2k\zeta} \quad (3.54)$$

Na osnovu jednačine 3.54 i 3.56 slijedi da je odnos bezdimenzionog faktora strukturnog prigušenja η i bezdimenzionog faktora viskoznog prigušenja ζ

$$\zeta = \frac{\eta}{2} \quad (3.55)$$

Prema [47], [62] tipična vrijednost bezdimenzionog faktora strukturnog prigušenja za čelike se kreće između 0,001 – 0,002 (tabela 3.2), pa se, prema tome, vrijednosti bezdimenzionog faktora viskoznog prigušenja kreću između 0,0005-0,001.

Tabela 3.2 Vrijednost bezdimenzionog faktora strukturnog prigušenja [47]

Materijal	Koeficijent prigušenja
Čelik	0,001-0,002

Sivi liv GG-25	0,002-0,004
Polimer beton	0,02-0,03
Zavareni spojevi	0,004-0,08
Postolja mašina alatki	0,04-0,08

Osim eksperimentalno dobijenih vrijednosti bezdimenzionog faktora viskoznog prigušenja materijala koji se najčešće koriste pri proizvodnji mašina alatki (čelici, sivi liv, polimer beton, zavarne strukture, postolja mašina alatki...), Maglie [47] daje pregled i koeficijentata prigušenja komponenti mašina alatki kojima se realizuju spojevi, kao što su klizači, vođice i ležajevi različitih nazivnih prečnika, tabela 3.3-3.4.

Tabela 3.3 Prigušenja kotrljajnih ležajeva [47]

Kotrljajni ležajevi	Prigušenje
Unutrašnji prečnik 55 mm	2000-9000 Ns/m
Unutrašnji prečnik 90 mm	5500-12000 Ns/m
Unutrašnji prečnik 120 mm	50000-550000 Ns/m
Unutrašnji prečnik 160 mm	200000-1000000 Ns/m

Tabela 3.4 Prigušenja linearnih vođica [47]

Komponente	Prigušenje
Linearne vođice – vođenje na principu kugličnog lanca Širina klizača vođice 35 mm	4000-10000 Ns/m
Linearne vođice – vođenje na principu lanca valjčića Širina klizača vođice 35 mm	3500-14500 Ns/m
Linearne vođice – vođenje na principu kugličnog lanca Širina klizača vođice 45 mm	4000-14000 Ns/m
Linearne vođice – vođenje na principu lanca valjčića Širina klizača vođice 45 mm	6500-10500 Ns/m

Iz prethodno navedenog se može vidjeti da su vrijednosti bezdimenzionih faktora prigušenja male, što potvrđuje pretpostavku da je prigušenje u mašinskim sklopovima dominantno koncentrisano u spojevima, te da prigušenje elemenata strukture ima značajno manje vrijednosti.

3.8 UPOREDNI PRIKAZ DIREKTNE I UNAKRSNE FRF DOBIJENE ANALITIČKI I IZVOĐENJEM EMA

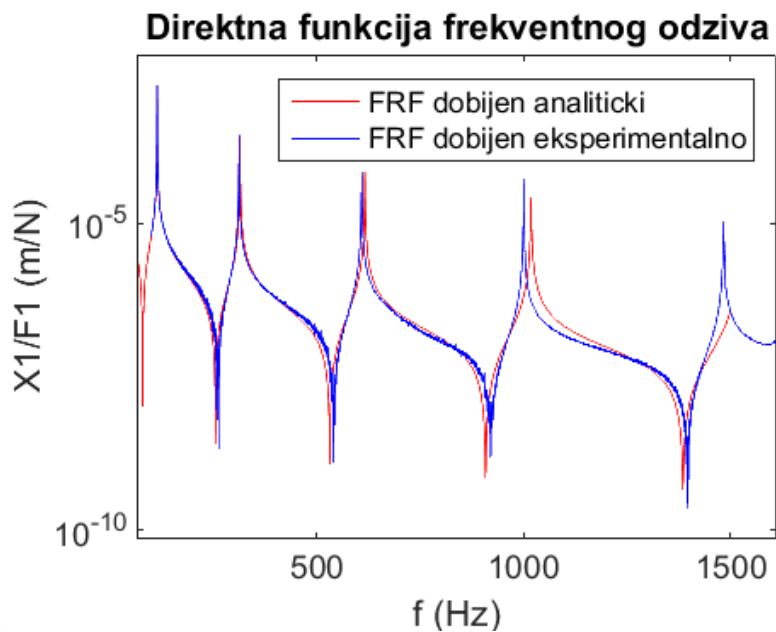
Uparedni prikaz dvije funkcije frekventnog odziva, utvrđene na primjeru slobodno oslonjene grede kružnog poprečnog presjeka, Slika 3.17 dat je na slikama 3.19 i 3.20. Pri tome crvene linije predstavljaju FRF dobijenu analitički, dok plave linije predstavljaju FRF dobijenu primjenom EMA. Oblik funkcije frekventnog odziva zavisi od graničnih uslova, odnosno načina oslanjanja. S obzirom da je dužina grede, koja u konkretnom slučaju iznosi 1005 mm, značajno veća u odnosu na prečnik (10 mm), može se pri analitičkom određivanju FRF primjeniti Ojler – Bernulijeva teorije grede.

Slika 3.19 predstavlja direktnu FRF, s obzirom da se u istoj tački, koja se u ovom slučaju nalazi na desnom kraju grede, mjeri odziv i definiše pobuda. Na slici 3.20, prikazana je „unakrsna FRF“, dobijena definisanjem pobude na desnom, a odziva na lijevom kraju grede.

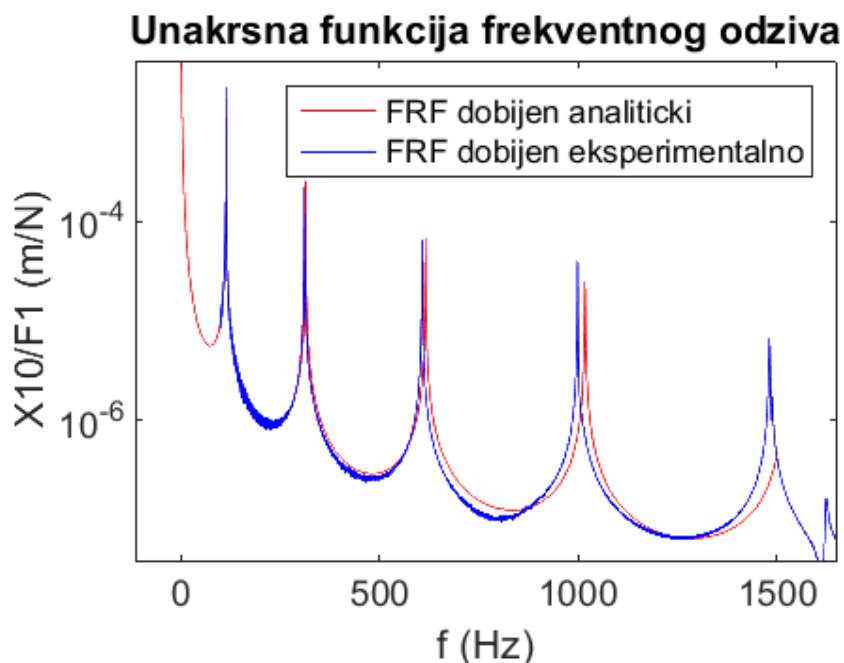
Pri izradi analitičkog modela koristi se bezdimenzioni faktor strukturnog prigušenja η tako što se umjesto modula elastičnosti E upotrebljava korigovana vrijednost modula

elastičnosti E_s (obrazac 3.51) pri čemu faktor strukturnog prigušenja ima preporučenu vrijednost $\eta = 0.001$, tabela 3.2.

S obzirom da veličina amplitude pri analitičkom određivanju FRF direktno zavisi od koeficijenta strukturnog prigušenja, te na osnovu dosta dobrog poklapanja rezultata dobijenih analitički i primjenom EMA, može se zaključiti da je $\eta = 0.001$ korektno usvojena vrijednost



Slika 3.18 Direktna FRF za slobodno oslonjenu gredu sa slike 3.17



Slika 3.19 Unakrsna FRF za slobodno oslonjenu gredu sa slike 3.17

4 POZICIONO SPREZANJE

4.1 UVODNA RAZMATRANJA

U ovom poglavlju razmatraju se različiti načini određivanja prenosne funkcije sistema na osnovu prenosnih funkcija podsistema, određenih matematički, numerički ili eksperimentalnim ispitivanjem. Pod pojmom sistem, u ovom slučaju, podrazumijeva se sklop ili geometrijsko tijelo složenog oblika, koje će se dalje, u cilju dobijanja prenosne funkcije posmatrati kao skup međusobno povezanih tijela jednostavnijeg oblika, odnosno podsistema.

Pri tome će se prenosna funkcija sistema ili podsistema smatrati **direktnom**, ukoliko se koordinate tačke na kojoj djeluje opterećenje i koordinate tačke čije se pomjeranje posmatra poklapaju, odnosno **unaksnom** (ukrštenom) ukoliko su ove koordinate različite.

Drugim riječima razmatraju se mogućnosti određivanja direktne i ukrštene prenosne funkcije sistema sprežanjem direktnih i ukrštenih prenosnih funkcija podsistema.

Prenosne funkcije podsistema se sprežu za različite granične uslove, pod čime se podrazumijeva uslov ravnoteže i uslov kompatibilnosti na ivici tijela. Tako se razlikuju kruto spregnuti podsistemi, odnosno podsistemi čiji spojevi se posmatraju kao kruta veza (engl. *rigid coupling*), zatim elastično spregnuti podsistemi (engl. *flexible coupling*), te podsistemi čiji spojevi imaju karakteristike viskoznog prigušenja (engl. *flexible-damped coupling*).

U ovom poglavlju izložen je koncept pozicionog sprežanja, koje je potom verifikovan na prostom primjenu: određivanjem prenosne funkcije geometrijskog tijela kružnog poprečnog presjeka sa ukupno tri prelaza (promjene prečnika). Pri tome prenosna funkcija je određena na tri načina:

- Matematički, na osnovu Ojler – Bernulijeve teorije greda, posebno za svaki od segmenata konstantnog poprečnog presjeka, te potom sprežanjem dobijenih prenosnih funkcija,
- Numerički, primjenom metoda konačnih elementa,
- Eksperimentalnim ispitivanjem, odnosno primjenom EMA

U narednom poglavlju isti koncept je primjenjen u cilju određivanja prenosne funkcije elemenata sklopa glavnog vretena mašine alatke (glavno vreteno, distanciona čaura, sklop glavnog vretena...) za različite granične uslove.

4.2 ODREĐIVANJE PRENOSNE FUNKCIJE SISTEMA SPREZANJEM PRENOSNIH FUNKCIJA PODSISTEMA

Kao praktičan primjer razmatraće se određivanje prenosne funkcije sistema koga čine tri međusobno povezana tijela, odnosno tri podsistema, Slika 4.1. Pri tome se analiziraju tri slučaja u zavisnosti od načina realizacije mjesta spoja:

- Prvi slučaj - spojevi se smatraju apsolutno krutim,
- Drugi slučaj - spojevi se smatraju elastični,
- Treći slučaj – spojevi posjeduju karakteristike elastičnosti i viskoznog prigušenja.

Ovdje je potrebno napomenuti da je moguće izvršiti međusobno sprezanje tri ili više tijela pri čemu su spojevi kombinacija nekog od gore navedenih slučajeva (npr. kruto spregnuta tijela I i II i elastično spregnuto tijelo II i III i sl).

U sva tri slučaja biće prikazano određivanje direktne prenosne funkcije $H_{11} = X_1/F_1$.

4.2.1 Sprezanje elemenata krutim vezama

Najprije se analizira prvi slučaj, odnosno sprezanje tri tijela krutim vezama. Pri tome se prenosne funkcije elemenata određuje samo u tačkama u kojima će, u narednim razmatranjima, biti određena prenosna funkcija sklopa. Kako bi se uvela razlika pri označavanju koordinata sklopa i elemenata biće korištena notacija pri kojoj se velikim slovima onačavaju koordinate sklopa, a malim slovima koordinate podsklopova.

Potrebno je predvidjeti ponašanje sklopa datog na slici 4.1. A na koordinati X_1 , izloženog harmonijskoj pobudnoj sili na istoj koordinati. Pri tome bitno je uočiti da koordinata X_1 ne predstavlja mjesto spoja, odnosno da su koordinate mjesta spojeva tijela x_{2a} , x_{2b} , x_{3a} , x_{3b} . Prema slici 4.1 A prenosne funkcije podsklopova su:

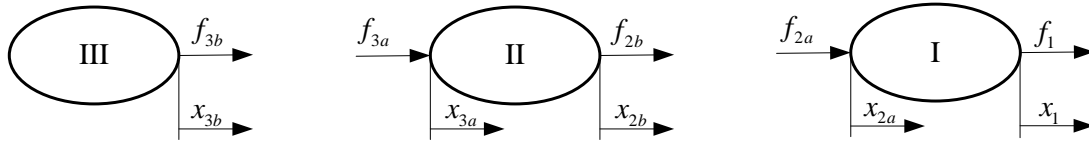
$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{x_1}{f_1}, \quad h_{12a} = \frac{x_1}{f_{2a}}, \quad h_{2a1} = \frac{x_{2a}}{f_1}, \quad h_{2a2a} = \frac{x_{2a}}{f_{2a}} \\ h_{2b2b} &= \frac{x_{2b}}{f_{2b}}, \quad h_{2b3a} = \frac{x_{2b}}{f_{3a}}, \quad h_{3a2b} = \frac{x_{3a}}{f_{2b}}, \quad h_{3a3a} = \frac{x_{3a}}{f_{3a}} \\ h_{3b3b} &= \frac{x_{3b}}{f_{3b}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

dok su uslovi kompatibilnosti i ravnoteže

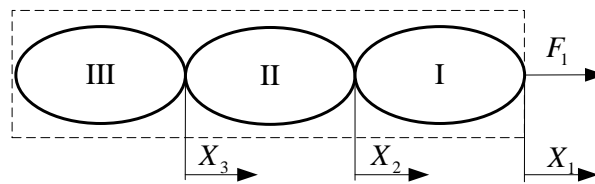
$$\begin{aligned} x_{2b} - x_{2a} &= 0, \text{ odnosno } x_{2b} = x_{2a} = X_2 & f_{2b} + f_{2a} &= 0, \text{ odnosno } f_{2b} = -f_{2a} \\ x_{3b} - x_{3a} &= 0, \text{ odnosno } x_{3b} = x_{3a} = X_3 & f_{3b} + f_{3a} &= 0, \text{ odnosno } f_{3b} = -f_{3a} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Na podsisteme I i II djeluju opterećenja f_1 i f_{2a} , odnosno f_{2b} i f_{3a} , dok na podsistem III djeluje opterećenje f_{3b} , pa se na osnovu 4.1 može napisati

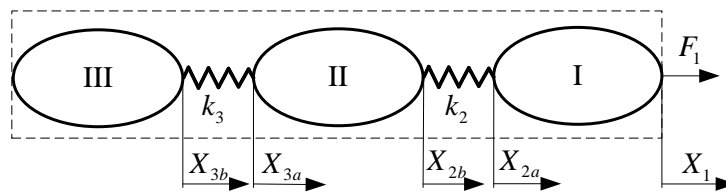
$$\begin{aligned}
 x_1 &= h_{11}f_1 + h_{12a}f_{2a} \\
 x_{2a} &= h_{2a1}f_1 + h_{2a2a}f_{2a} \\
 x_{2b} &= h_{2b2b}f_{2b} + h_{2b3a}f_{3a} \\
 x_{3a} &= h_{3a2b}f_{2b} + h_{3a3a}f_{3a} \\
 x_{3b} &= h_{3b3b}f_{3b}
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$



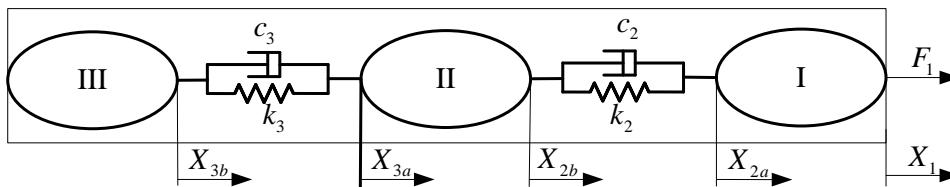
A. Podsystemi I, II i III za koje se određuje prenosne funkcije, koji se nadalje sprežu u prenosnu funkciju sistema



B. Sprezanje elemenata krutim vezama



C. Sprezanje elemenata elastičnim vezama



D. Sprezanje elemenata spojevima koji posjeduju karakteristike viskoznog prigušenja

Slika 4.1 Model sprezanja tri tijela (fleksibilno - elastično)

Zamjenom 4.3 u 4.2 dobija se

$$\begin{aligned}
 f_{3b} (h_{3b3b} + h_{3a3a}) &= h_{3a2b} f_{2b} \\
 f_{3b} &= (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b} f_{2b} \\
 h_{2b2b} f_{2b} + h_{2b3a} f_{3a} - h_{2a1} f_1 - h_{2a2a} f_{2a} &= 0 \\
 h_{2b2b} f_{2b} - h_{2b3a} (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b} f_{2b} - h_{2a1} f_1 - h_{2a2a} f_{2a} &= 0 \\
 h_{2b2b} f_{2b} - h_{2b3a} (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b} f_{2b} - h_{2a1} f_1 + h_{2a2a} f_{2a} &= 0 \\
 f_{2b} (h_{2b2b} - h_{2b3a} (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b} + h_{2a2a}) &= h_{2a1} f_1 \\
 f_{2b} &= (h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b})^{-1} h_{2a1} f_1 \\
 x_1 &= h_{11} f_1 - h_{12a} f_{2b} \\
 x_1 &= h_{11} f_1 - h_{12a} (h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b})^{-1} h_{2a1} f_1 \\
 X_1 &= F_1 \left[h_{11} - h_{12a} (h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b})^{-1} h_{2a1} \right]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

U narednom poglavlju određuje se prenosna funkcije glavnog vretena, čiji se uprošteni model može predstaviti pomoću više segmenata različitih geometrijskih karakteristika (prečnika, dužine i površine poprečnog presjeka), međusobno spregnutih krutim vezama. Stoga su date prenosne funkcije sistema dobijenih sprežanjem krutim vezama tri, četiri, pet i šest segmenata, čije izvođenje, s obzirom na obim materije nije dio poglavlja (izrazi 4.5-4.8).

$$H_{11} = \left[h_{11} - h_{12a} (h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} (h_{3b3b} + h_{3a3a})^{-1} h_{3a2b})^{-1} h_{2a1} \right] \tag{4.5}$$

$$H_{11} = h_{11} - \left(h_{12a} \left(h_{2b2b} + h_{2a2a} - \left(h_{2b3a} \left(\left(h_{3b3b} + h_{3a3a} - \left(h_{3b4a} (h_{4b4b} + h_{4a4a})^{-1} \right) h_{4a3b} \right)^{-1} \right) h_{3a2b} \right)^{-1} \right) h_{2a1} \right) \tag{4.6}$$

$$H_{11} = h_{11} - \left(h_{12a} \left(h_{2b2b} + h_{2a2a} - \left(h_{2b3a} \left(\left(h_{3b3b} + h_{3a3a} - \left(h_{3b4a} \left(\left(h_{4b4b} + h_{4a4a} - \left(h_{4b5a} (h_{5b5b} + h_{5a5a})^{-1} \right) h_{5a4b} \right)^{-1} \right) h_{4a3b} \right)^{-1} \right) h_{3a2b} \right)^{-1} \right) h_{2a1} \right) \right) \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= h_{11} - \\
 &\left(h_{12a} \left(h_{2b2b} + h_{2a2a} - \left(h_{2b3a} \left(\left(h_{3b3b} + h_{3a3a} - \left(h_{3b4a} \left(\left(h_{4b4b} + h_{4a4a} - \left(h_{4b5a} \left(\left(h_{5b5b} + h_{5a5a} - \left(h_{5b6a} (h_{6b6b} + h_{6a6a})^{-1} \right) h_{6a5b} \right)^{-1} \right) h_{5a4b} \right)^{-1} \right) h_{4a3b} \right)^{-1} \right) h_{3a2b} \right)^{-1} \right) h_{2a1} \right) \right) \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

4.2.2 Sprezanje elemenata elastičnim vezama

Posmatra se sklop dat na slici 4.1 C, gdje međusobna veza elemenata I i II ima mogućnost elastične deformacije, što je simbolički prikazano oprugom krutosti k_2 . Na isti način elastična veza elementa II i elementa III prikazana je oprugom krutosti k_3 . Uslovi ravnoteže su kompatibilni uslovima za kruto tijelo (4.2), dok se uslovi kompatibilnosti uspostavljaju na osnovu Hukovog zakona (4.9)

$$\begin{aligned} k_2(x_{2b} - x_{2a}) &= -f_{2b} & f_1 &= F_1 \\ k_3(x_{3b} - x_{3a}) &= -f_{3b} & f_{2b} + f_{2a} &= 0, \text{odnosno } f_{2b} = -f_{2a} \\ & & f_{3b} + f_{3a} &= 0, \text{odnosno } f_{3b} = -f_{3a} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na osnovu prenosnih funkcija podsklopora (4.1) slijedi

$$\begin{aligned} k_3(h_{3b3b}f_{3b} - h_{3a2b}f_{2b} - h_{3a3a}f_{3a}) &= -f_{3b} \\ h_{3b3b}f_{3b} - h_{3a2b}f_{2b} - h_{3a3a}f_{3a} &= \frac{-f_{3b}}{k_3} \\ h_{3b3b}f_{3b} + h_{3a3a}f_{3b} + \frac{f_{3b}}{k_3} &= h_{3a2b}f_{2b} \\ f_{3b} \left[h_{3b3b} + h_{3a3a} + \frac{1}{k_3} \right] &= h_{3a2b}f_{2b} \\ f_{3b} &= \left[h_{3b3b} + h_{3a3a} + \frac{1}{k_3} \right]^{-1} h_{3a2b}f_{2b} \\ h_{2b2b}f_{2b} + h_{2b3a}f_{3a} - h_{2a1}f_1 + h_{2a2a}f_{2b} &= \frac{-f_{2b}}{k_2} \\ f_{2b} \left\{ h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} \left[h_{3b3b} + h_{3a3a} + \frac{1}{k_3} \right]^{-1} h_{3a2b} + \frac{1}{k_2} \right\} &= h_{2a1}f_1 \\ f_{2b} &= \left\{ h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} \left[h_{3b3b} + h_{3a3a} + \frac{1}{k_3} \right]^{-1} h_{3a2b} + \frac{1}{k_2} \right\}^{-1} h_{2a1}f_1 \\ X_1 &= h_{11}F_1 - h_{12a} \left\{ h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} \left[h_{3b3b} + h_{3a3a} + \frac{1}{k_3} \right]^{-1} h_{3a2b} + \frac{1}{k_2} \right\}^{-1} h_{2a1}F_1 \\ H_{11} &= h_{11} - h_{12a} \left\{ h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} \left[h_{3b3b} + h_{3a3a} + \frac{1}{k_3} \right]^{-1} h_{3a2b} + \frac{1}{k_2} \right\}^{-1} h_{2a1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.3 Sprezanje elemenata čiji spojevi imaju karakteristike elastičnosti i viskoznog prigušenja

Sprezanje elemenata čiji spojevi posjeduju karakteristike viskoznog prigušenja prikazano je na slici 4.1. D. Uslov kompatibilnosti u ovom slučaju je

$$k(x_{2b} - x_{2a})i\omega c(x_{2b} - x_{2a}) = -f_{2b} \quad (4.11)$$

Jednačina 4.11 se može napisati i kao

$$(k + i\omega c)(x_{2b} - x_{2a}) = -f_{2b} \quad (4.12)$$

Ukoliko se uvede smjena $k' = (k + i\omega c)$ tada prenosna funkcija H_{11} ima isti oblik kao u jednačini 4.10, pri čemu je $k'_3 = (k_3 + i\omega c_3)$, odnosno $k'_2 = (k_2 + i\omega c_2)$.

$$H_{11} = h_{11} - h_{12a} \left\{ h_{2b2b} + h_{2a2a} - h_{2b3a} \left[h_{3b3b} + h_{3a3a} + \frac{1}{k'_3} \right]^{-1} h_{3a2b} + \frac{1}{k'_2} \right\}^{-1} h_{2a1} \quad (4.13)$$

4.3 ODREĐIVANJE PRENOSNE FUNKCIJE SA UTICAJEM ROTACIONIH STEPENI SLOBODE

U prethodnom poglavlju razmatrana su **poprečna** pomjeranja x_i elementa i pomjeranja sklopa X pri djelovanju unutrašnjih sila f_i i spoljašnje sile F. Drugim riječima, određena je direktna prenosna funkcija na osnovu poznatog odziva (u ovom slučaju ugib) i opterećenja (sila). Određene su prenosne funkcije elemenata sa krutim vezama, elastičnim vezama i elemenata čiji spojevi imaju karakteristike elastičnosti i viskoznog prigušenja.

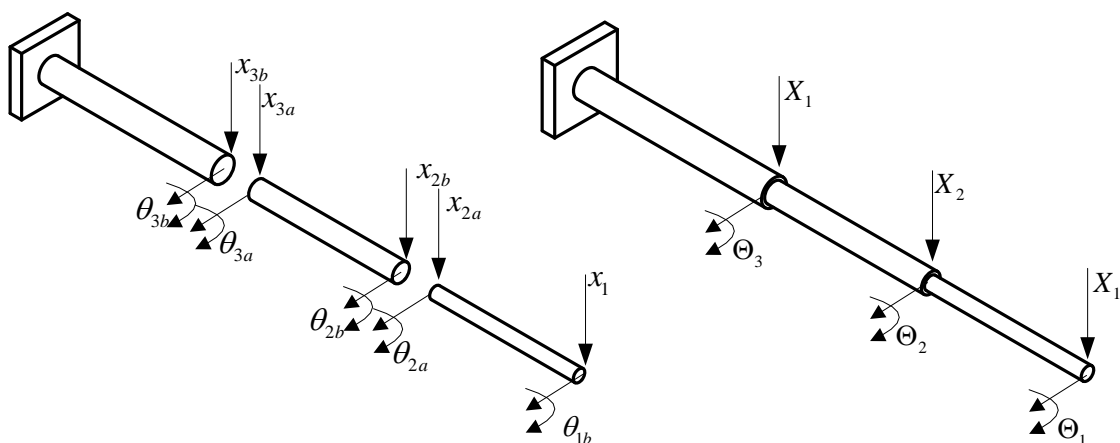
Međutim, sama poprečna pomjeranja nisu dovoljna, budući da je, da bi se potpuno odredilo transverzalno dinamičko ponašanje grede, potrebno u razmatranje uzeti i rotacione stepene slobode. Drugim riječima, pri određivanju prenosne funkcije sklopa, trebaju se uključiti sljedeći odzivi (koji se još nazivaju pozicioni odzivi): ugib/sila ($h_{ij} = x_i / f_j$), ugib/moment ($l_{ij} = x_i / m_j$), nagib/sila ($n_{ij} = \mathcal{G}_i / f_j$) i nagib/moment ($p_{ij} = \mathcal{G}_i / m_j$).

Način određivanja prenosne funkcije koji uključuje sva četiri poziciona odziva prikazan je na primjerju tri elementa kružnog poprečnog presjeka različitih prečnika, datih na slikama 4.2 i 4.3. Pri tome se, kod određivanja pojedinačnih prenosnih funkcija, dva segmenta posmatraju kao slobodno oslonjeni, dok je treći segment konzola.

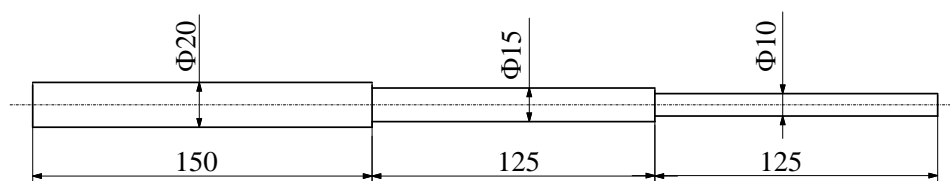
Prenosne funkcije, u konkretnom slučaju tri elementa oblika grede kružnog poprečnog presjeka, određene su na dva načina, analitički, na osnovu Ojler – Bernulijeve teorije greda i numerički, primjenom metoda konačnih elemenata. Prenosna funkcija sklopa određuje se na osnovu ugiba, odnosno nagiba elemenata, na način predstavljen u prethodnom poglavlju i to za slučaj sprezanja elemenata krutim vezama.

Verifikacija analitičkog i numeričkog modela vrši se izvođenjem eksperimentalne modalne analize na realnom fizičkom modelu geometrijskih karakteristika kao slikama 4.2 i 4.3 i sljedećih mehaničkih karakteristika: Modul elastičnosti $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, gustina materijala $\rho = 7,850 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^3$, Puasonov koeficijent $\mu = 0,3$.

Eksperimentalno određivanje prenosne funkcije je primjenjeno za sklop, ali ne i za pojedinačne elemente.



Slika 4.2 Određivanje prenosnih funkcija i sistem tri elementa spregnuta krutim vezama



Slika 4.3 Geometrijske karakteristike sistema tri elementa spregnuta krutim vezama

Direktna prenosna funkcija elementa 1 1 određuje se na mjestu koordinate 1 na sljedeći način:

$$h_{11} = \frac{x_1}{f_1} \quad l_{11} = \frac{x_1}{m_1} \quad n_{11} = \frac{g_1}{f_1} \quad p_{11} = \frac{g_1}{m_1} \quad (4.14)$$

Unakrsna prenosna funkcija pri kojoj opterećenje djeluje na mjestu x_{2a} dok se pomjeranje analizira na mjestu x_1 određuje se na osnovu sljedećih odziva:

$$h_{12a} = \frac{x_1}{f_{2a}} \quad l_{12a} = \frac{x_1}{m_{2a}} \quad n_{12a} = \frac{g_1}{f_{2a}} \quad p_{12a} = \frac{g_1}{m_{2a}} \quad (4.15)$$

Ukoliko opterećenje djeluje na mjestu x_{2a} , a na istoj koordinati se vrši analiza i pomjeranja, direktna prenosna funkcija se dobija na osnovu sljedećih odziva:

$$h_{2a2a} = \frac{x_{2a}}{f_{2a}} \quad l_{2a2a} = \frac{x_{2a}}{m_{2a}} \quad n_{2a2a} = \frac{g_{2a}}{f_{2a}} \quad p_{2a2a} = \frac{g_{2a}}{m_{2a}} \quad (4.16)$$

Unakrsna prenosna funkcija na mjestu 2 elementa 1 određuje se na osnovu odziva

$$h_{2a1} = \frac{x_{2a}}{f_1} \quad l_{2a1} = \frac{x_{2a}}{m_1} \quad n_{2a1} = \frac{g_{2a}}{f_1} \quad p_{2a1} = \frac{g_{2a}}{m_1} \quad (4.17)$$

Direktna i unakrsna prenosna funkcija na mjestu 2 elementa 2 određuju se na osnovu

$$h_{2b2b} = \frac{x_{2b}}{f_{2b}} \quad l_{2b2b} = \frac{x_{2b}}{m_{2b}} \quad n_{2b2b} = \frac{g_{2b}}{f_{2b}} \quad p_{2b2b} = \frac{g_{2b}}{m_{2b}} \quad (4.18)$$

$$h_{2b3a} = \frac{x_{2b}}{f_{3a}} \quad l_{2b3a} = \frac{x_{2b}}{m_{3a}} \quad n_{2b3a} = \frac{g_{2b}}{f_{3a}} \quad p_{2b3a} = \frac{g_{2b}}{m_{3a}} \quad (4.19)$$

Direktna i unakrsna prenosna funkcija na mjestu 3 elementa 2 određuju se na osnovu

$$h_{3a3a} = \frac{x_{3a}}{f_{3a}} \quad l_{3a3a} = \frac{x_{3a}}{m_{3a}} \quad n_{3a3a} = \frac{q_{3a}}{f_{3a}} \quad p_{3a3a} = \frac{q_{3a}}{m_{3a}} \quad (4.20)$$

$$h_{3a2b} = \frac{x_{3a}}{f_{2b}} \quad l_{3a2b} = \frac{x_{3a}}{m_{2b}} \quad n_{3a2b} = \frac{q_{3a}}{f_{2b}} \quad p_{3a2b} = \frac{q_{3a}}{m_{2b}} \quad (4.21)$$

Direktna prenosna funkcija na mjestu 3 elementa 3 određuje se na osnovu

$$h_{3b3b} = \frac{x_{3b}}{f_{3b}} \quad l_{3b3b} = \frac{x_{3b}}{m_{3b}} \quad n_{3b3b} = \frac{q_{3b}}{f_{3b}} \quad p_{3b3b} = \frac{q_{3b}}{m_{3b}} \quad (4.22)$$

Jednačine 4.14-4.22 mogu se izraziti i u matricnom obliku

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & l_{11} \\ n_{11} & p_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_1\} = [R_{11}] \{q_1\} \quad (4.23)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{12a} & l_{12a} \\ n_{12a} & p_{12a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_1\} = [R_{12a}] \{q_{2a}\} \quad (4.24)$$

$$\begin{Bmatrix} x_{2a} \\ \theta_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{2a2a} & l_{2a2a} \\ n_{2a2a} & p_{2a2a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{2a} \\ m_{2a} \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_{2a}\} = [R_{2a2a}] \{q_{2a}\} \quad (4.25)$$

$$\begin{Bmatrix} x_{2a} \\ \theta_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{2a1} & l_{2a1} \\ n_{2a1} & p_{2a1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_{2a}\} = [R_{2a1}] \{q_1\} \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} x_{2b} \\ \theta_{2b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{2b2b} & l_{2b2b} \\ n_{2b2b} & p_{2b2b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{2b} \\ m_{2b} \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_{2b}\} = [R_{2b2b}] \{q_{2b}\} \quad (4.27)$$

$$\begin{Bmatrix} x_{2b} \\ \theta_{2b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{2b3a} & l_{2b3a} \\ n_{2b3a} & p_{2b3a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{3a} \\ m_{3a} \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_{2b}\} = [R_{2b3a}] \{q_{3a}\} \quad (4.28)$$

$$\begin{Bmatrix} x_{3a} \\ \theta_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{3a3a} & l_{3a3a} \\ n_{3a3a} & p_{3a3a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{3a} \\ m_{3a} \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_{3a}\} = [R_{3a3a}] \{q_{3a}\} \quad (4.29)$$

$$\begin{Bmatrix} x_{3a} \\ \theta_{3a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{3a2b} & l_{3a2b} \\ n_{3a2b} & p_{3a2b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{2b} \\ m_{2b} \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_{3a}\} = [R_{3a2b}] \{q_{2b}\} \quad (4.30)$$

$$\begin{Bmatrix} x_{3b} \\ \theta_{3b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{3b3b} & l_{3b3b} \\ n_{3b3b} & p_{3b3b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{3b} \\ m_{3b} \end{Bmatrix}, \text{ odnosno } \{u_{3b}\} = [R_{3b3b}] \{q_{3b}\} \quad (4.31)$$

U jednačinama 4.23-4.31 R_{ij} je generalisana poziciona matrica koja sadrži translatorska i rotaciona pomjeranja elemenata, u_{ij} je generalisani vektor ugiba/nagiba, a q_{ij} generalisani vektor sile/momenta. Također, može se napisati da su matrice koje opisuju dinamičko ponašanje elemenata jednake: za prvi element $u_1 = [R_{11}]\{q_1\} + [R_{12a}]\{q_{2a}\}$, odnosno $u_{2a} = [R_{2a2a}]\{q_{2a}\} + [R_{2a1}]\{q_1\}$, za drugi element $u_{2b} = [R_{2b2b}]\{q_{2b}\} + [R_{2b3a}]\{q_{3a}\}$, odnosno $u_{3a} = [R_{3a3a}]\{q_{3a}\} + [R_{3a2b}]\{q_{2b}\}$, te za treći element $u_{3b} = [R_{3b3b}]\{q_{3b}\}$.

Pozicioni odziv sklopa može se izraziti u matričnom obliku kao

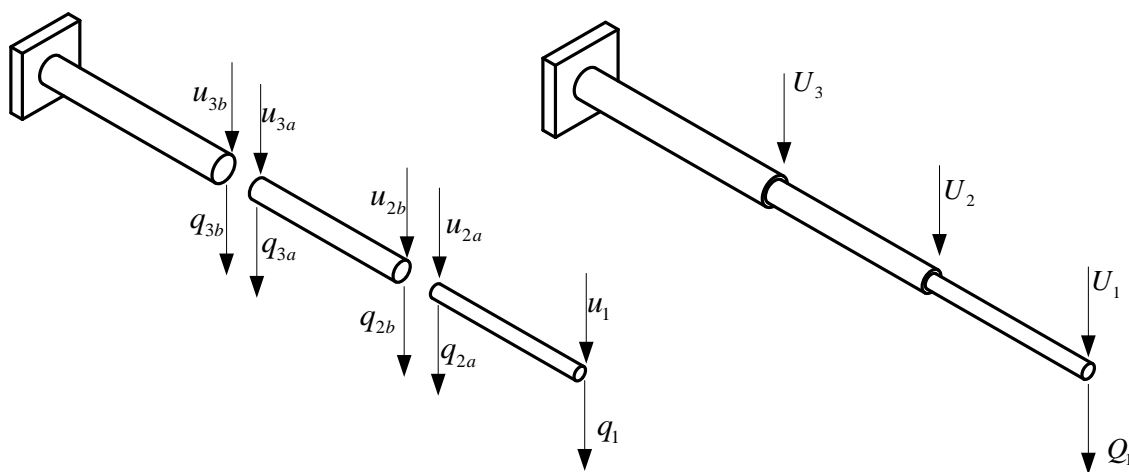
$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

gdje su

$$U_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} H_{ij} & L_{ij} \\ N_{ij} & P_{ij} \end{bmatrix}, \quad \text{te } Q_{ij} = \begin{Bmatrix} F_j \\ M_j \end{Bmatrix}.$$

Ako se posmatra sistem od tri elementa spregnuta krutim vezama, uz uslove kompatibilnosti i ravnoteže $u_{2b} - u_{2a} = 0$, $u_{3b} - u_{3a} = 0$, $u_1 = U_1$ koji odgovaraju direktnoj prenosnoj funkciji, pri čemu je U_1 koordinata sile / momenta, odnosno ugiba / nagiba, Slika 4.4, može se uočiti sličnost sa sistemom prikazanim na slici 4.2 čije je prenosna funkcija jednačina 4.4. Iako vektori u_i i U_i na slici 4.4 predstavljaju pomjeranja, oni uključuju i uticaj rotacionih stepeni slobode, te se zapravo radi o transverzalnim i rotacionim pomjeranjima. Na osnovu toga slijedi da prenosna funkcija sistema prikazanog na slici 4.4. ima sljedeći oblik

$$G_{11} = \left[R_{11} - R_{12a} \left(R_{2b2b} + R_{2a2a} - R_{2b3a} \left(R_{3b3b} + R_{3a3a} \right)^{-1} R_{3a2b} \right)^{-1} R_{2a1} \right] = \begin{bmatrix} H_{11} & L_{11} \\ N_{11} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$



Slika 4.4 Funkcija prenosna sistema koja uključuje uticaj transverzalnih pomjeranja i rotacionih stepeni slobode

Prenosna funkcija sistema koji uključuje uticaj rotacionih stepeni slobode, pri čemu su spojevi elastični spregnuti data je izrazom 4.10, s tim da se umjesto skalarne vrijednosti krutosti uzima matricni izraz za krutost

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xf} & k_{\theta f} \\ k_{xm} & k_{\theta m} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Ukoliko spojevi imaju karakteristike elastičnosti i viskoznog prigušenja, tada je prenosna funkcija sistema data izrazom 4.13, s tim da se umjesto kompleksnog broja $k' = (k + i\omega c)$ uzima matrica krutosti u sljedećem obliku

$$[k'] = \begin{bmatrix} k_{xf} + i\omega c_{xf} & k_{\theta f} + i\omega c_{\theta f} \\ k_{xm} + i\omega c_{xm} & k_{\theta m} + i\omega c_{\theta m} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

4.4 ODREĐIVANJE PRENOSNE FUNKCIJE PRI TRANSVERZALNIM VIBRACIJAMA KONTINUALNIH SISTEMA

Ako se poče od diferencijalne jednačine slobodnih neprigušenih vibracija grede

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^2} \quad (4.36)$$

te uvede smjena

$$c^2 = \frac{EI_x}{\rho A} \quad (4.37)$$

gdje je sa c^2 obilježen kvadrat brzine prostiranja talasa kod transverzalnih (poprečnih) vibracija grede, jednačina 4.36 postaje

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2} \quad (4.38)$$

Modul elastičnosti E iz izraza 4.37 uključuje faktor strukturnog prigušenja η , odnosno $E_s = E(1 + i\eta)$, što je dato u prethodnom poglavlju, izraz 3.51.

Opšti integral jednačine 4.38 jednak je zbiru svih partikularnih integrala kojih ima beskonačno mnogo. Ako se pretpostavi opšti oblik rješenja diferencijalne jednačine 4.38 u obliku

$$y(x, t) = Y(x) \sin(\omega t) \quad (4.39)$$

tada se uvrštavajući parcijalne izvode jednačine 4.35. po x i po t u diferencijalnu jednačinu 4.38 može eliminisati vrijeme.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y(x)(-\omega^2) \sin(\omega t) \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \sin(\omega t) \quad (4.41)$$

$$\left(Y(-\omega^2) + c^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} \right) \sin(\omega t) = 0 \quad (4.42)$$

Jednačina 4.42 se može drugačije napisati u obliku

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - \frac{\omega^2}{c^2} Y = 0 \quad (4.43)$$

odnosno, uvođenjem smjene $k_n^4 = \frac{\omega^2}{c^2}$ jednačina 4.43 postaje

$$\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - k_n^4 Y = 0 \quad (4.44)$$

Da bi se izvršilo integraljenje jednačine 4.44 potrebno je odrediti njene karakteristične korijene. Očigledno je da će karakteristični korijeni jednačine 4.44 biti $\lambda_{1/2} = \pm k_n$, odnosno $\lambda_{3/4} = \pm i k_n$ pa je opšti integral diferencijalne jednačine

$$Y(x) = D_1 e^{k_n x} + D_2 e^{-k_n x} + D_3 e^{i k_n x} + D_4 e^{-i k_n x} \quad (4.45)$$

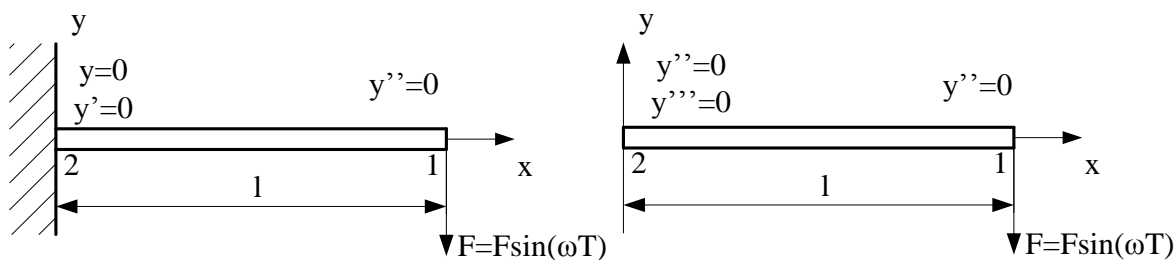
S obzirom da je $e^{\pm k_n x} = \cosh k_n x \pm \sinh k_n x$, odnosno $e^{\pm i k_n x} = \cos k_n x \pm i \sin k_n x$, izraz 4.45 postaje

$$\begin{aligned} Y(x) &= D_1 (\cosh k_n x + \sinh k_n x) + D_2 (\cosh k_n x - \sinh k_n x) \\ &+ D_3 (\cos k_n x + i \sin k_n x) + D_4 (\cos k_n x - i \sin k_n x) = \\ &\cosh k_n x (D_1 + D_2) + \sinh k_n x (D_1 - D_2) + \\ &\cos k_n x (D_3 + D_4) + i \sin k_n x (D_3 - D_4) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Uvodeći smjene $A = D_3 + D_4$, $B = i(D_3 - D_4)$, $C = D_1 + D_2$, $D = D_1 - D_2$ partikularni integral 4.45 postaje

$$Y(x) = A \cos(k_n x) + B \sin(k_n x) + C \cosh(k_n x) + D \sinh(k_n x) \quad (4.47)$$

Kako bi se odredili koeficijenti A, B, C i D potrebno je primjeniti granične uslove. Način određivanja koeficijenata biće pokazan na primjeru konzole i slobodno oslonjene grede, datih na slici 4.5. U prvom slučaju granični uslovi su: na mjestu uklještenja (tačka 2), ugib i nagib jednaki su nuli, odnosno $y = 0$, $y' = 0$. Na mjestu slobodnog kraja, tačka 1, napadni moment M jednaki je nuli, odnosno $y'' = 0$, dok je transversalna sila F_t jednaka sili $F_t = F \sin(k_n t)$. Granični uslovi tačke 2 slobodno oslonjene grede su: napadni moment M i transversalna sila F_t jednaki su nuli ($y'' = 0$, $y''' = 0$), dok su u tački 1 isti granični uslovi kao i u tački 1 konzole, dakle napadni moment M jednaki je nuli, odnosno $y'' = 0$, dok je transversalna sila F_t jednaka sili $F_t = F \sin(k_n t)$.



A. Konzola

B. Slobodno oslonjena greda

Slika 4.5 Model konzole (A) i slobodno oslonjene grede (B) opterećene harmonijskom silom F na mjestu l

4.4.1 Prenosna funkcija konzole pri transverzalnim vibracijama

Uvrštavajući $x=0$ u jednačinu 4.47 uz granične uslove date izrazom 4.48

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad y|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=l} = -\frac{F}{EI} \sin(\omega t) \quad (4.48)$$

dobija se

$$Y(0) = A \cos(0) + B \sin(0) + C \cosh(0) + D \sinh(0) = A + C = 0 \quad (4.49)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = k_n (-A \sin(0) + B \cos(0) + C \sinh(0) + D \cosh(0)) = k_n (B + D) = 0 \quad (4.50)$$

Uvrštavajući $x=l$ u jednačinu 4.47 dobija se

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=l} = k_n^2 (-A \cos(k_n l) - B \sin(k_n l) + C \cosh(k_n l) + D \sinh(k_n l)) = 0 \quad (4.51)$$

$$\left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=l} = k_n^3 (A \sin(k_n l) - B \cos(k_n l) + C \sinh(k_n l) + D \cosh(k_n l)) = -\frac{F}{EI} \sin(\omega t) \quad (4.52)$$

Na osnovu jednačina 4.49 i 4.50 slijedi da je $A = -C$ i $B = -D$, te jednačine 4.51 i 4.52 postaju:

$$C \cos(k_n l) + D \sin(k_n l) + C \cosh(k_n l) + D \sinh(k_n l) = 0 \quad (4.53)$$

$$-C \sin(k_n l) + D \cos(k_n l) + C \sinh(k_n l) + D \cosh(k_n l) = -\frac{F}{k_n^3 EI} \sin(\omega t) \quad (4.54)$$

odnosno

$$C (\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) + D (\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) = 0 \quad (4.55)$$

$$C (-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) + D (\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) = -\frac{F}{k_n^3 EI} \sin(\omega t) \quad (4.56)$$

Jednačine 4.55 i 4.56 mogu se prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \cos(k_n l) + \cosh(k_n l) & \sin(k_n l) + \sinh(k_n l) \\ -\sin(k_n l) + \sinh(k_n l) & \cos(k_n l) + \cosh(k_n l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{F}{k_n^3 EI} \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

Rješavajući matričnu jednačinu 4.57 određeni su koeficijenti C i D

$$C = \frac{F (\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^3 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.58)$$

$$D = -\frac{F (\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n^3 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.59)$$

Uvrštavajući u jednačinu 4.47 $x=l$, zatim $A = -C$ i $B = -D$, a potom i koeficijente C i D iz jednačine 4.58 i 4.59 dobija se

$$Y_1 = -C \cos(k_n l) - D \sin(k_n l) + C \cosh(k_n l) + D \sinh(k_n l) \quad (4.60)$$

$$Y_1 = C (-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) + D (-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) \quad (4.61)$$

$$Y_1 = \frac{F (\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^3 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) (-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) + \frac{F (\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n^3 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) (-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) \quad (4.62)$$

Izraz 4.62 nakon sređivanja postaje

$$Y_1 = \frac{2(\sin(k_n l) \cosh(k_n l) - \cos(k_n l) \sinh(k_n l))}{2k_n^3 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} F \sin(\omega t) \quad (4.63)$$

Dijeljenjem 4.63 sa $F \sin(\omega t)$ dobija se direktna prenosna funkcija na slobodnom kraju grede

$$\frac{Y_1}{F_1} = \frac{\sin(k_n l) \cosh(k_n l) - \cos(k_n l) \sinh(k_n l)}{k_n^3 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.64)$$

Unakrsna prenosna funkcija na koordinati 2 Y_2/F_1 jednaka je nuli budući da je pomjeranje kraja 2 jednako nuli.

4.4.2 Prenosna funkcija slobodno oslonjene grede pri transverzalnim vibracijama

Slobodno oslonjena greda prikzana je na slici 4.5. B. Kako bi se odredila direktna prenosna funkcija na mjestu 1 ($x=l$), djeluje se na istoj koordinati silom $F_1 = F \sin(\omega t)$. Granični uslovi na desnom kraju grede (tačka 1):

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=l} = -\frac{F}{EI} \sin(\omega t), \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=0} = 0 \quad (4.65)$$

Uvrštavajući $x=0$ u jednačinu 4.47 dobija se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0) = k_n^2 (-A \cos(0) - B \sin(0) + C \cosh(0) + D \sinh(0)) = k_n^2 (-A + C) = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0) = k_n^3 (A \sin(0) - B \cos(0) + C \sinh(0) + D \cosh(0)) = k_n^3 (-B + D) = 0 \quad (4.67)$$

Uvrštavajući $x=l$ u jednačinu 4.47 dobija se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l) = k_n^2 (-A \cos(k_n l) - B \sin(k_n l) + C \cosh(k_n l) + D \sinh(k_n l)) = 0 \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l) = k_n^3 (A \sin(k_n l) - B \cos(k_n l) + C \sinh(k_n l) + D \cosh(k_n l)) = -\frac{F}{EI} \sin(\omega t) \quad (4.69)$$

Na osnovu 4.66 i 4.67 slijedi da je $A = C$ i $B = D$, te jednačine 4.68 i 4.69 postaju:

$$-C \cos(k_n l) - D \sin(k_n l) + C \cosh(k_n l) + D \sinh(k_n l) = 0 \quad (4.70)$$

$$C \sin(k_n l) - D \cos(k_n l) + C \sinh(k_n l) + D \cosh(k_n l) = -\frac{F}{k_n^3 EI} \sin(\omega t) \quad (4.71)$$

odnosno

$$C(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) + D(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) = 0 \quad (4.72)$$

$$C(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) + D(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) = -\frac{F}{k_n^3 EI} \sin(\omega t) \quad (4.73)$$

Jednačine 4.72 i 4.73 mogu se prikazati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} -\cos(k_n l) + \cosh(k_n l) & -\sin(k_n l) + \sinh(k_n l) \\ \sin(k_n l) + \sinh(k_n l) & -\cos(k_n l) + \cosh(k_n l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{F}{k_n^3 EI} \sin(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

Rješavajući matričnu jednačinu 4.74 određeni su koeficijenti C i D

$$C = \frac{F(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^3 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.75)$$

$$D = \frac{F(\cos(k_n l) - \cosh(k_n l))}{2k_n^3 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.76)$$

Uvrštavajući u jednačinu 4.47 $x=l$, zatim $A = C$ i $B = D$, a potom i koeficijente C i D iz jednačine 4.75 i 4.76 dobija se

$$Y_1 = C \cos(k_n l) + D \sin(k_n l) + C \cosh(k_n l) + D \sinh(k_n l) \quad (4.77)$$

$$Y_1 = C(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) + D(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) \quad (4.78)$$

$$Y_1 = \frac{F(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^3 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) (\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) + \frac{F(\cos(k_n l) - \cosh(k_n l))}{2k_n^3 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) (\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) \quad (4.79)$$

Izraz 4.79 nakon sređivanja postaje

$$Y_1 = \frac{\cos(k_n l) \sinh(k_n l) - \sin(k_n l) \cosh(k_n l)}{k_n^3 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} F \sin(\omega t) \quad (4.80)$$

Dijeljenjem izraza 4.80 sa $F \sin(\omega t)$ dobija se direktna prenosna funkcija na slobodnom kraju grede

$$\frac{Y_1}{F_1} = \frac{Y_2}{F_2} = \frac{\cos(k_n l) \sinh(k_n l) - \sin(k_n l) \cosh(k_n l)}{k_n^3 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.81)$$

Ukoliko je pobuda u tački 1, a odziv posmatra u tački 2, dobija se unakrsna prenosna funkcija Y_2 / F_1 . Za $x = 0$ jednačina 4.47 postaje

$$Y_2 = A \cos(0) + B \sin(0) + C \cosh(0) + D \sinh(0) = A + C \quad (4.82)$$

S obzirom da je na osnovu 4.66 i 4.67 $A = C$ i $B = D$, iz izraza 4.82 slijedi da je $Y_2 = 2C$, odnosno

$$Y_2 = \frac{(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{k_n^3 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} F \sin(\omega t) \quad (4.83)$$

Unakrsna prenosna funkcija slobodno oslonjene grede

$$\frac{Y_2}{F_1} = \frac{Y_1}{F_2} = \frac{(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{k_n^3 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.84)$$

4.4.3 Ugaona FRF konzole

Ugaona funkcija frekventnog odziva konzole Θ_1 / F_1 određena je na osnovu izraza 4.47 i početnih uslova datih u 4.48. Zamjenom $A = -C$ i $B = -D$ u izraz 4.47 dobije se

$$Y(x) = C(-\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) + D(-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) \quad (4.85)$$

Rotacija, odnosno nagib se dobija diferenciranjem 4.85 po x ($\Theta = dY / dx$), uvrštavanjem u dobijeni izraz (4.86) $x = l$, te C i D određenih prema 4.58 i 4.59.

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Ck_n (\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) + Dk_n (-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \frac{(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} F \sin(\omega t) \\ &- \frac{(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} F \sin(\omega t) \\ &= \frac{\sin^2(k_n l) + 2 \sinh(k_n l) \sin(k_n l) + \sinh^2(k_n l) + \cos^2(k_n l) - \cosh^2(k_n l)}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} F \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (4.87)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sin(k_n l) \sinh(k_n l)}{k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} F \sin(\omega t) \\ \frac{\Theta_1}{F_1} &= \frac{\sin(k_n l) \sinh(k_n l)}{k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))}\end{aligned}\quad (4.88)$$

Do sada određene prenosne funkcije predstavljaju odzive (transverzalno pomjeranje i rotaciju) u odnosu na harmonijsku silu. Potrebno je također, odrediti prenosne funkcije koje predstavljaju odzive (transverzalno pomjeranja i rotaciju), ali za harmonijski moment $M_1 = M \sin(\omega t)$, dakle Y_1 / M_1 i Θ_1 / M_1 . S obzirom da se razmatra konzola, na osnovu graničnih uslova ranije je utvrđeno da je $A = -C$ $B = -D$ (4.48, 4.49, 4.50). U tački 1 gdje je $x = l$ biće

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = C(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) + D(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) = \frac{M}{k_n^2 EI} \sin(\omega t) \quad (4.89)$$

Transverzalna sila u tački 1 jednaka je nuli, pa slijedi

$$\frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} = C(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) + D(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) = 0 \quad (4.90)$$

Izrazi 89 i 90 mogu se napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \cos(k_n l) + \cosh(k_n l) & \sin(k_n l) + \sinh(k_n l) \\ -\sin(k_n l) + \sinh(k_n l) & \cos(k_n l) + \cosh(k_n l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M}{k_n^2 EI} \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

Rješavanjem matrične jednačine 4.91 određuju se koeficijenti C i D

$$C = \frac{M(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.92)$$

$$D = -\frac{M(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.93)$$

Zamjenom u 4.47 dobija se

$$Y_1 = \frac{(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))(-\cos(k_n x) + \cosh(k_n x))}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} M \sin(\omega t) +$$

$$- \frac{(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))(-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x))}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} M \sin(\omega t) \quad (4.94)$$

$$\frac{Y_1}{M_1} = \frac{-\cos^2(k_n l) + \cosh^2(k_n l) - \sin^2(k_n l) + 2 \sinh(k_n l) \sinh(k_n x) - \sinh^2(k_n x)}{2k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.95)$$

$$\frac{Y_1}{M_1} = \frac{\sinh(k_n l) \sinh(k_n x)}{k_n^2 EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.96)$$

Kako bi se odredila funkcija frekventnog odziva Θ_1 / M_1 potrebno je u izraz 4.97 uvrstiti koeficijente C i D (4.92 i 4.93).

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Ck_n (\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)) + Dk_n (-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l)) \quad (4.97)$$

$$\Theta_1 = \frac{(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} M \sin(\omega t)$$

$$- \frac{(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} M \sin(\omega t) \quad (4.98)$$

$$\Theta_1 = \frac{(\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} M \sin(\omega t)$$

$$- \frac{(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} M \sin(\omega t) \quad (4.99)$$

$$\frac{\Theta_1}{M_1} = \frac{\sin(k_n l) \cosh(k_n l) + \cos(k_n l) \sinh(k_n l)}{k_n EI (1 + \cos(k_n l) \cosh(k_n l))}$$

gdje je $M_1 = M \sin(\omega t)$.

4.4.4 Ugaona FRF slobodno oslonjene grede

U cilju određivanja funkcije frekventnog odziva Θ_1 / F_1 potrebno je u izraz 4.47 uvrstiti $A = C$ i $B = D$ nakon čega 4.47 postaje

$$Y(x) = C \cos(k_n x) + D \sin(k_n x) + C \cosh(k_n x) + D \sinh(k_n x) \quad (4.100)$$

$$Y(x) = C (\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) + D (\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) \quad (4.101)$$

Diferenciranjem izraza 4.101 po x i uvrštavanjem koeficijenata C i D (4.75 i 4.76), 4.101 postaje

$$\theta_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_{x=l} = k_n \left[C(-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) + D(\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) \right]$$

$$\theta_1 = k_n \left[\frac{F(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^3 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t)(-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) + \frac{F(\cos(k_n l) - \cosh(k_n l))}{2k_n^3 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t)(\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) \right] \quad (4.102)$$

$$\frac{\theta_1}{F_1} = \frac{(-\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))(-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x))}{2k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))}$$

$$\frac{(\cos(k_n l) - \cosh(k_n l))(\cos(k_n x) + \cosh(k_n x))}{2k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))}$$

$$\frac{\theta_1}{F_1} = \frac{-\sin(k_n l) \sinh(k_n l)}{k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.103)$$

Prenosna funkcija θ_2 / F_2 data je izrazom

$$\frac{\theta_2}{F_2} = \frac{\sin(k_n l) \sinh(k_n l)}{k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.104)$$

Da bi se odredila prenosna funkcija Y_1 / M_1 potrebno je prvo na osnovu izraza 4.100 i 4.101, te graničnih uslova odrediti koeficijente C i D. Granični uslovi na mjestu koordinate 1 ($x=l$) su $\partial^2 y / \partial x^2 = (M / EI) \sin(\omega t)$ i $\partial^3 y / \partial x^3 = 0$ dok su granični uslovi na mjestu koordinate 2 ($x=0$) $\partial^2 y / \partial x^2 = 0$ i $\partial^3 y / \partial x^3 = 0$.

Diferenciranjem izraza 4.101 po x dva, odnosno tri puta dobija se

$$M_1 = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = k_n^2 \left[C(-\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) + D(-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) \right] = \frac{M \sin(\omega t)}{EI} \quad (4.105)$$

$$V_1 = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = k_n^3 \left[C(\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) + D(-\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) \right] = 0$$

Što se u matricnom obliku može napisati kao

$$\begin{bmatrix} -\cos(k_n l) + \cosh(k_n l) & -\sin(k_n l) + \sinh(k_n l) \\ \sin(k_n l) + \sinh(k_n l) & -\cos(k_n l) + \cosh(k_n l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{M}{k_n^2 EI} \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.106)$$

Rješavanjem matricne jednačine 4.106 određeni su koeficijenti C i D

$$C = \frac{M(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.107)$$

$$D = -\frac{M(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.108)$$

Uvrštavanjem 4.106i 4.107 u 4.101, te dijeljenjem sa $M \sin(\omega t)$ dobija se

$$Y(x) = \frac{M(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} (\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) \sin(\omega t) - \quad (4.109)$$

$$\frac{M(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} (\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) \sin(\omega t)$$

$$\frac{Y_1}{M_1} = \frac{-\sin(k_n l)\sinh(k_n l)}{k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} \quad (4.110)$$

Prenosna funkcija Y_2 / M_2 data je izrazom

$$\frac{Y_2}{M_2} = \frac{\sin(k_n l)\sinh(k_n l)}{k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} \quad (4.111)$$

Prenosna funkcija θ_1 / M_1 određuje se tako što se u izraz 4.102 uvrste koeficijenti C i D, izrazi 4.107 i 4.108

$$\frac{\theta_1}{M_1} = \frac{(-\cos(k_n l) + \cosh(k_n l))}{2k_n EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} (-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) - \quad (4.112)$$

$$\frac{(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} (\cos(k_n x) + \cosh(k_n x)) = 0$$

$$\frac{\theta_1}{M_1} = \frac{\theta_2}{M_2} = \frac{-\sin(k_n l)\cosh(k_n l) - \cos(k_n l)\sinh(k_n l)}{k_n EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} \quad (4.113)$$

Prenosna funkcija θ_2 / M_1 određuje se tako što se na osnovu izraza 4.102 odredi θ_2 za slučaj kada je $x=0$, odnosno na mjestu koordinate 2.

$$\theta_2 = \left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_{x=0} = k_n [C(-\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) + D(\cos(k_n x) + \cosh(k_n x))] \quad (4.114)$$

$$\theta_2 = 2k_n D \quad (4.115)$$

$$\theta_2 = -\frac{2k_n M(\sin(k_n l) + \sinh(k_n l))}{2k_n^2 EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.116)$$

$$\frac{\theta_2}{M_1} = -\frac{\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)}{k_n EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))}$$

$$\frac{\theta_2}{M_1} = \frac{\theta_1}{M_2} = -\frac{\sin(k_n l) + \sinh(k_n l)}{k_n EI(1 - \cos(k_n l)\cosh(k_n l))} \quad (4.117)$$

Prenosna funkcija θ_2 / F_1 određuje se tako što se u izraz 4.114 uvrsti koeficijent D iz izraza 4.76

$$\theta_2 = \frac{2k_n F (\cos(k_n l) - \cosh(k_n l))}{2k_n^3 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \sin(\omega t) \quad (4.118)$$

$$\frac{\theta_2}{F_1} = \frac{\cos(k_n l) - \cosh(k_n l)}{k_n^2 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.119)$$

Prenosna funkcija θ_1 / F_2 data je sljedećim izrazom

$$\frac{\theta_1}{F_2} = -\frac{\cos(k_n l) - \cosh(k_n l)}{k_n^2 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.120)$$

Prenosna funkcija Y_2 / M_1 određuje se na osnovu izraza 4.101 i graničnog uslova $x=0$, pri čemu izraz 4.101 postaje

$$Y(0) = 2C \quad (4.121)$$

Uvrštavanjem koeficijenta C iz izraza 4.107 dobija se prenosna funkcija

$$\frac{Y_2}{M_1} = -\frac{\cos(k_n l) - \cosh(k_n l)}{k_n^2 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.122)$$

Prenosna funkcija Y_1 / M_2 data je izrazom

$$\frac{Y_2}{M_1} = \frac{\cos(k_n l) - \cosh(k_n l)}{k_n^2 EI (1 - \cos(k_n l) \cosh(k_n l))} \quad (4.123)$$

4.5 ANALITIČKO ODREĐIVANJE FUNKCIJE FREKVENTNOG ODZIVA GREDE

U poglavlju 4.4 date su teorijske osnove analitičke metode određivanja prenosne funkcije primjenom metode pozicionog sprežanja (engleski *receptace coupling*).

U ovom dijelu, za konzolno oslonjenu gredu datu na slici 4.2 analitički je određena prenosna funkcija, primjenom razmatrane metoda pozicionog sprežanja, dok je u narednom poglavlju izvršena verifikacija dobijenih rezultata na dva načina: numerički, primjenom metoda konačnih elemenata, te izvođenjem EMA.

Kako bi se primjenila metoda pozicionog sprežanja, model je neophodno posmatrati kao sistem sastavljen od n segmenta, svaki konstantne površine poprečnog presjeka. U konkretnom slučaju, analizom modela prikazanog na slici 4.2 može se uočiti da se mogu izdvojiti tri segmenta konstantnog poprečnog presjeka i to $\Phi 20 \times 150$, $\Phi 15 \times 125$ i $\Phi 10 \times 125$. Ukoliko se ovi segmenti međusobno spoje krutim vezama dobija se model dat na slici 4.2.

Svaki od ova tri segmenta, potrebno je zasebno analizirati, te potom odrediti prenosne funkcije, pri sljedećim graničnim uslovima: segment $\Phi 20 \times 150$ se posmatra kao konzolno oslonjena greda, a segmenti $\Phi 15 \times 125$ i $\Phi 10 \times 125$ kao slobodno oslonjene grede (*free-free*).

Prenosne funkcije segmenata grede h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} , koje obuhvataju i rotacione stepene slobode, određuju se na oba kraja slobodno oslonjenih segmenta, odnosno slobodnom kraju konzolno oslonjenog segmeta, na dva načina.

Prvi podrazumijeva analitičko određivanje prenosnih funkcija h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} na osnovu izraza 4.64, 4.81, 4.84, 4.88, 4.96, 4.99, 4.103, 4.104, 4.110, 4.111, 4.113, 4.117, 4.119, 4.120, 4.122 i 4.123. Prenosne funkcije segmenata označene slovima h , l , n i p definisane su izrazom 4.124

$$h_{jk} = \frac{x_j}{f_k}, \quad l_{jk} = \frac{x_j}{m_k}, \quad n_{jk} = \frac{\vartheta_j}{f_k}, \quad p_{jk} = \frac{\vartheta_j}{m_k} \quad (4.124)$$

pri čemu su slovima x i θ označeni ugib i nagib, dok sa F i M označeni sila i moment u određenoj tački.

Drugi način podrazumijeva numeričko određivanje prenosnih funkcija h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} primenom metoda konačnih elemenata razvijenih na osnovu Timošenkove teorije gređa. Konkretno, prenosne funkcije h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} su određene primjenom ANSYS APDL softvera, tako što je za svaki segmenat izvedena harmonijska analiza, za sve moguće odnose pomjeranja (translatorna x_i , odnosno ugaona ϑ_i) i opterećenja (sila f_i i moment m_i). Harmonijska analiza je izvedena u sljedećim tačkama prikazanim na slici 4.2: tačke 1 i 2a slobodno oslonjenog segmenta 1, tačke 2b i 3a slobodno oslonjenog segmenta 2, odnosno tačka 3b konzolno oslonjenog segmenta 3, izraz 4.125. Inkrement pri kom je izvedena analiza je 1Hz. S obzirom da se u obzir uzima i uticaj ugaonih stepeni slobode, potrebno je koristiti konačni element tipa gređe koji posjeduje ugaone stepene slobode, u konkretnom slučaju koristi se konačni element BEAM188.

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{x_1}{f_1}, l_{11} = \frac{x_1}{m_1}, n_{11} = \frac{\vartheta_1}{f_1}, p_{11} = \frac{\vartheta_1}{m_1} \\ h_{12} &= \frac{x_1}{f_2}, l_{11} = \frac{x_1}{m_2}, n_{11} = \frac{\vartheta_1}{f_2}, p_{11} = \frac{\vartheta_1}{m_2} \\ h_{21} &= \frac{x_2}{f_1}, l_{21} = \frac{x_2}{m_1}, n_{21} = \frac{\vartheta_2}{f_1}, p_{21} = \frac{\vartheta_2}{m_1} \\ h_{22} &= \frac{x_2}{f_2}, l_{21} = \frac{x_2}{m_2}, n_{22} = \frac{\vartheta_2}{f_2}, p_{22} = \frac{\vartheta_2}{m_2} \end{aligned} \quad (4.125)$$

Nakon što se odrede prenosne funkcije h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} (analitički i numerički), formiraju se odgovarajuće matrice pomjeranja krajnjih tačaka sva tri segmenta. Na primjer, za tačku 1, Slika 4.2, matrica pomjeranja ima oblik

$$R_{11} = \begin{bmatrix} h_{11} & l_{11} \\ n_{11} & p_{11} \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Generalisana matrica pomjeranja sistema tri tijela spregnuta krutim vezama, pri čemu se opterećenje i pomjeranje posmatraju u tački 1, formira se na osnovu jednačine $G11=R11-R12a/(R2b2b-(R2b3a/(R3a3a+R3b3b))*R3a2b+R2a2a)*R2a1$ te prikazuje u matričnom obliku

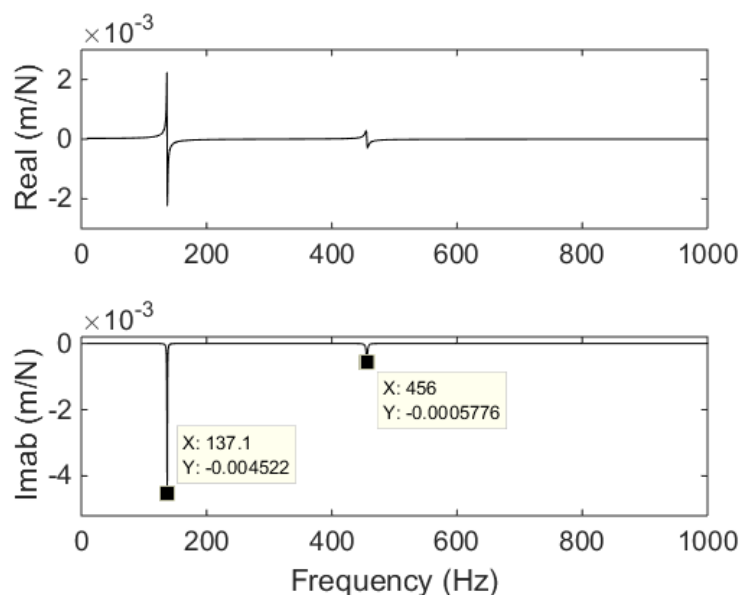
$$[G_{11}] = \begin{bmatrix} H_{11} & L_{11} \\ N_{11} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Na slikama 4.6 i 4.7 prikazane su prenosne funkcije dobijene sprežanjem prenosnih funkcija h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} za gređu datu na slici 4.2. Pri tome je na slici 4.6 data prenosna

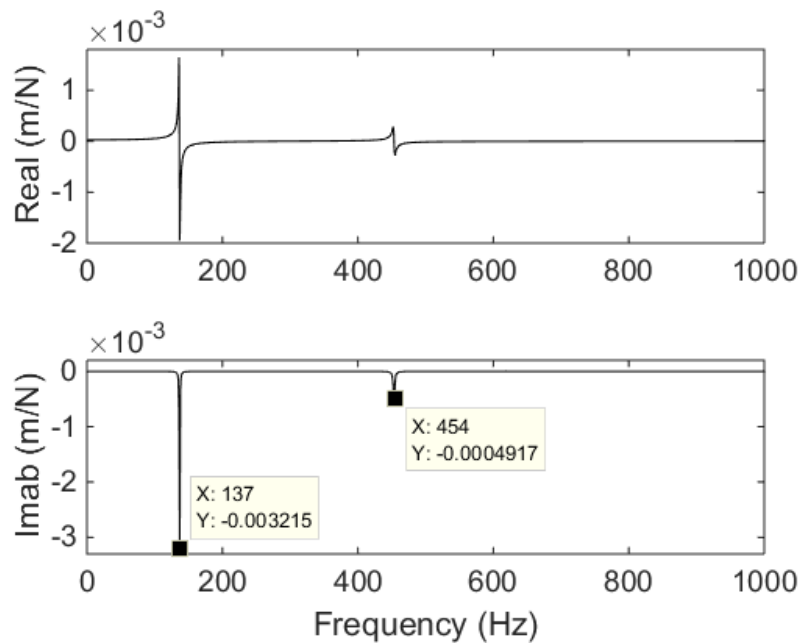
funkcija modela gdje su h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} određene analitički, dok Slika 4.7. prikazuje prenosnu funkciju gdje su h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} određene numerički.

Poredeći dobijene rezultate, može se uočiti da odstupanje prve sopstvene frekvencije oscilovanja dobijene pri numričkom određivanju prenosnih funkcija h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} iznosi 0,07% u odnosu na vrijednost dobijene analitički, dok odstupanje druge sopstvene frekvencije iznosi 0,44%.

Rezultati za prvu i drugu sopstvenu frekvenciju oscilovanja pokazuju dobru usaglašenost rezultata i relativno mala međusobna odstupanja. To je u ovom slučaju i bilo očekivano, budući da se razmatrana greda i segmenti koji je sačinjavaju, s obzirom na odnos prečnika i dužine, mogu smatrati vitkim. Polazeći od saznanja da je pri analizi vitkih dijelova uticaj tangentialnih napona zanemarivo mali, rezultati dobijeni primjenom Ojler-Bernulijeve teorije greda ne odstupaju značajno u odnosu na rezultate dobijene primjenom Timošenkovke teorije greda.



Slika 4.6 Prenosna funkcija grede pri čemu su h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} određene analitički



Slika 4.7 Prenosna funkcija grede pri čemu su h_{jk} , l_{jk} , n_{jk} i p_{jk} određene numerčki

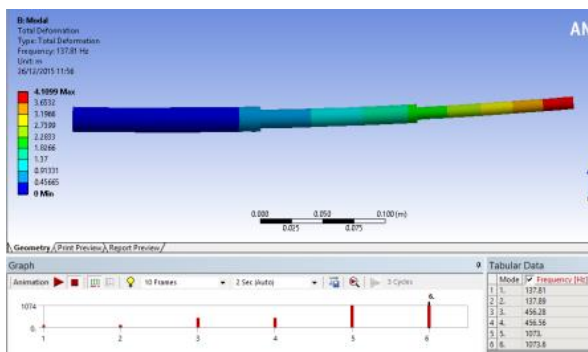
4.6 VERIFIKACIJA ANALITIČKI ODREĐENIH PRENOSNIH FUNKCIJA

Verifikacija analitički određenih prenosnih funkcija izvršena je poređenjem prve dvije sopstvene frekvencije oscilovanja sa rezultatom dobijenim primjenom metoda konačkih elemenata, te sa rezultatima eksperimentalne modalne analize.

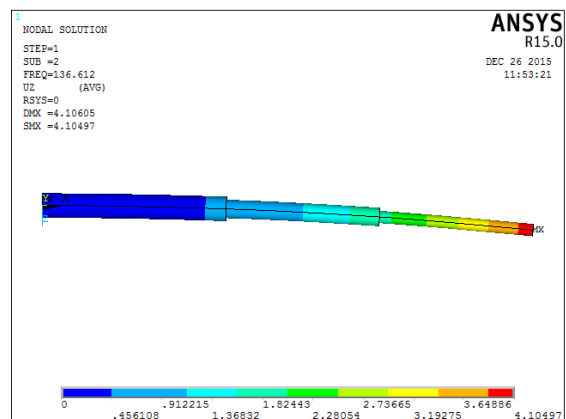
Pri numeričkom određivanju sopstvenih frekvencija oscilovanja korišteni su Ansys APDL i Ansys Workbench softveri, te tipovi konačnih elementata SOLID186 i BEAM188. Sopstvene frekvencije oscilovanja grede date na slici 4.2 određene su

- Primjenom Workbench softvera, Slika 4.8
- Primjenom ANSYS APDL, konačni element SOLID186, Slika 4.9
- Primjenom ANSYS APDL, konačni element BEAM188, Slika 4.10

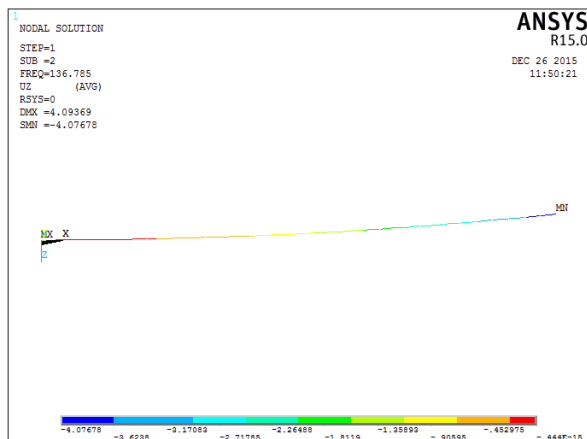
dok eksperimentalni način određivanja sopstvenih frekvencija podrazumijeva ispitivanje fizičkog modela impulsnom pobudom. Na slici 4.11 prikazana je prenosna funkcija slobodno oslonjene grede dobijena primjenom eksperimentane modalne analize.



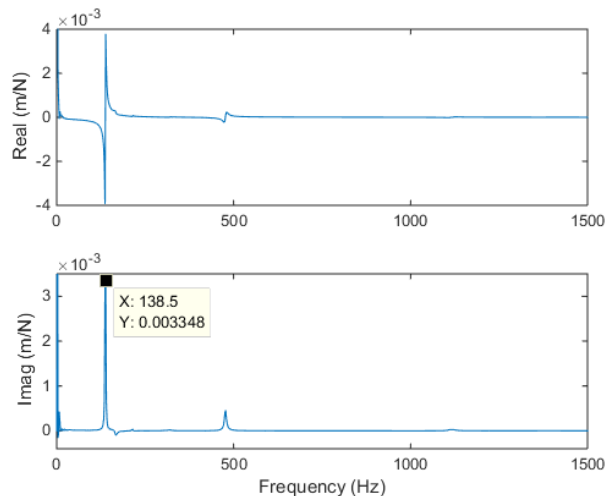
Slika 4.8 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (Workbench) 137,81 Hz



Slika 4.9 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (APDL – Solid 186) 136,612 Hz



Slika 4.10 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (APDL – Beam 188) 136,785 Hz



Slika 4.11 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja (EMA) 138,5 Hz

4.7 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

U okviru poglavlja je pokazano da se primjenom matematičkog modela zasnovanog na metodi spreznja prenosnih funkcija segmenata mogu odrediti modalni parametri i prenosna funkcija sklopa za definisane granične uslove.

U tabeli 4.1 uporedno su prikazani rezultati modalne analize za prethodno prikazanih šest načina modalne analize.

Tabela 4.1 Prva i druga sopstvena frekvencija oscilovanja dobijene analitički, numerički i primjenom EMA (Hz)

	Prenosne funkcije segmenata određene analitički	Prenosne funkcije segmenata određene numerički	MKE - Workbench	MKE – APDL Solid 186	MKE – APDL Beam188	EMA
Prva sopstvena frekvencija oscilovanja	137,1 Hz	137 Hz	137,81 Hz	136,6 Hz	136,78 Hz	138,5 Hz
Druga sopstvena frekvencija oscilovanja	456 Hz	454 Hz	456,28	452,03 Hz	453,45 Hz	477,3 Hz

Također je prikazano i određivanja prenosnih funkcija elemenata strukture zasnovano na Ojler – Bernulijevoj i Timošenkovoj teoriji greda. Može se uočiti da se rezultati dobijeni primjenom ovih metoda međusobno neznatno razlikuju. Na osnovu prethodnog konstatuje se da je pri analizi vitkih djelova moguća i opravdana primjena Ojler – Bernulijeve teorije greda, uz zadovoljavajuću tačnost rezultata. Navedeno ima opravdanje pre svega u fazi projektovanja koncepcije mašine alatke.

Poređenjem rezultata dobijenih primjenom matematičkih modela sa rezultatima eksperimentalne modalne analize, koji se mogu smatrati i najtačnijim, kao i sa rezultatima dobijenim numerički, može se nadalje zaključiti da su rezultati dobijeni matematički

dovoljno pouzdani i tačni, te će u narednom poglavlju prezentovani model biti primjenjen za određivanje prenosne funkcije sklopa glavnog vretena mašine alatke.

S obzirom da glavno vreteno ima složeniju geometriju u odnosu na analiziranu u ovom poglavlju, definisani su matematički modeli za sprezanje četiri, pet i šest segmenata.

5 ANALIZA DINAMIČKOG PONAŠANJA SKLOPA GLAVNOG VRETENA MAŠINE ALATKE

5.1 UVOD

U procesu rezanja mogu se javiti tri tipa vibracija koje najčešće nastaju usljed nedovoljne dinamičke krutosti jednog ili više elemenata sistema mašina alatke - glavno vreteno – držač alata – alat – obradak: slobodne (prirodne), prinudne i samoizazvane vibracije.

Slobodne vibracije nastaju kada se mehaničkom sistemu, izvedenom iz ravnotežnog položaja, omogući slobodno oscilovanje bez spoljašnjih uticaja. Na primjer, u procesu rezanja ovaj tip vibracija nastaje usljed neadekvatno definisane putanje alata, odnosno usljed kolizije između alata i obradka.

Prinudne vibracije nastaju usljed spoljašnje periodične pobude. Primer ovog tipa vibracija je struganje prekinutih površina, npr. ožljebljenog vratila pri kome alat naizmenično ulazi i izlazi iz zahvata obrade. Slobodne i prinudne vibracije se, ukoliko je poznat njihov izvor, mogu efikasno izbeći, redukovati ili ukloniti iz procesa obrade.

Samoizazvane vibracije predstavljaju najnepovoljniji tip vibracija. Razvijeno je više teorija nastanka samoizazvanih vibracija, usljed promjenjivog trenja po grudnoj i leđnoj površini alata, nedovoljne krutosti sistema glavno vreteno – držač alata – alat, te variranja poprečnog presjeka strugotine tokom obrade, tj. pojava faznog pomaka između dva uzastopna traga vrha sječiva alata na površini obradka, odnosno regenerativnog efekta. Samoizazvane vibracije dovode do nestabilnog rada mašine alatke, tzv. podrhtavanja (eng. *Chatter*), a za posledicu imaju smanjenje kvaliteta obrađene površine, pojavu buke, ubrzano trošenje reznog alata i elemenata mašine alatke [41]. Imajući u vidu činjenicu da se u uslovima eksploatacije mašina alatki pojavljuju razne kombinacije režima rezanja, u cilju izbjegavanja onih režima koji dovode do pojave samoizazvanih vibracija najjednostavnije je koristiti kartu stabilnosti mašine alatke.

Karta stabilnosti definiše stabilno i nestabilno područje rada alatne mašine u zavisnosti od dubine rezanja, broja obrtaja glavnog vretena i pomaka. Uslov za konstruisanje karte stabilnosti sklopa glavno vreteno – držača alata – alat je poznavanje prenosne funkcije tačke dodira (pomjeranja), odnosno postojanje modela ponašanja vrha glavnog vretena. Karta stabilnosti mašine alatke se može definisati na dva načina, analitički ili eksperimentalno, s tim da je moguće i kombinovati ova dva načina.

Eksperimentalni način određivanja karte stabilnosti podrazumijeva izvođenje niza eksperimenata kako bi se dobila zavisnost između granične dubine rezanja i broja obrtaja glavnog vretena.

Analitički metod se zasniva na teorijskim osnovama koje su sredinom prošlog vijeka postavili Tobias [72] i Tlusty [71], istražujući pojavu regenerativnog efekta pri ortogonalnom rezanju i vremenski nezavisnim faktorima procesa kao što su smjer sile rezanja i debljina strugotine. Altintas [5] prezentuje analitički način određivanja karte stabilnosti pri obradi glodanjem primjenom Floquet-ove teoreme, te predstavljanjem Furijeovim redom vremenski zavisnih direkcionijskih koeficijenata.

Za definisanje karte stabilnosti ovim metodom potrebno je odrediti prenosnu funkciju vrha alata, odnosno realni dio njegove prenosne funkcije, preko koga je moguće povezati širinu rezanja, direktno zavisnu od dubine rezanja i broj obrtaja glavnog vretena, odnosno:

$$b = \frac{-1}{2k_s G_r} \quad (5.1)$$

gdje je:

b-širina reznog sloja,

k_s -specifična sila rezanja,

G_r -realni dio prenosne funkcije u tački dodira alata i obratka.

U ovom poglavlju prikazane su analitička i analitičko-eksperimentalna metoda određivanja prenosne funkcije vrha alata, kao osnova za određivanje karte stabilnosti.

Prema prvoj metodi, glavno vreteno, alat i držač alata se posmatraju kao slobodno oslonjena greda, kojima se na slobodnim krajevima određuju funkcije prenosa koristeći pri tome Ojler – Bernulijevu teoriju greda. Glavno vreteno i držač alata se modeliraju iz segmenata, uključujući i mjesta oslonaca (ležajeva). Prenosna funkcija vrha alata se određuje metodom sprežanja prenosnih funkcija segmenata – držača alata i alata za određene granične uslove, kao što su krutosti i prigušenja mjesta spoja, oslonaca (ležajeva) i sl.

Prema drugoj metodi, prenosna funkcija glavnog vretena, odnosno glavnog vretena i držača alata se određuju eksperimentalno a prenosna funkcija alata analitički, nakon čega se vrši sprežanje za određene granične uslove. Na ovaj način može se uštediti vrijeme potrebno za izvođenje eksperimentalnog dijela ispitivanja u uslovima kada se jedino mijenja geometrija, odnosno prečnik i slobodna dužina alata.

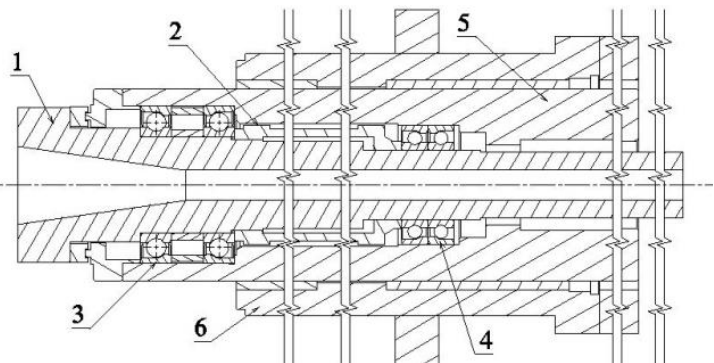
Verifikacija matematičkih modela izvršena je numerički, primjenom metoda konačnih elementata, kao i eksperimentalno. Pri tome eksperimentalni način određivanja prenosne funkcije podrazumijeva izvođenje eksperimentalne modalne analize, te potom određivanje prenosne funkcije analizom spektra dobijenog signala.

U okviru ovog poglavlja analizira se dinamičko ponašanje sklopa glavnog vretena eksperimentalnog modela, za koji je prvo određen matematički model dinamičkog ponašanja, a potom ispitivanjem fizičkog modela izvršena verifikacija određenih modalnih parametara i amplitudno – frekvencijske karakteristike.

Eksperimentalni model prikazan na slici 5.1 razvijen je za potrebe ranijih istraživanja [80]. Model se sastoji od sklopa glavnog vretena uležištenog u aksijalno pokretnoj čauri (pinoli), a potom zajedno montiranih u noseću čauru, Slika 5.2. Osim navedenih elemenata eksperimentalni model sačinjavaju još postolje, pogonski elektromotor, prenosnik za glavno i pomoćno kretanje.

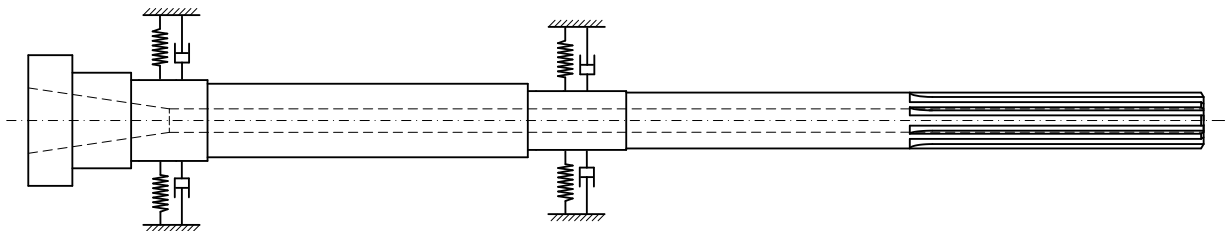


Slika 5.1 Izgled eksperimentalnog modela – 1 glavno vreteno, 2 aksijalno pokretna čaura – pinola, noseća čaura, postolje, pogonski elektromotor, prenosnik glavnog kretanja

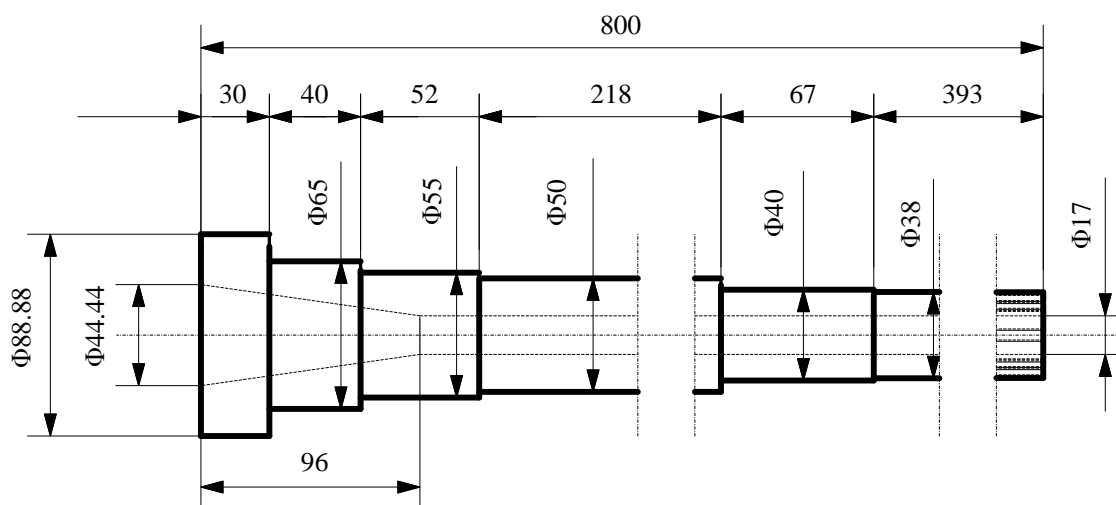


Slika 5.2 Sklop glavnog vretena 1. glavno vreteno, 2. distantna čaura, 3. prednje uležištenje, 4. zadnje uležištenje, 5. pinola 6. čaura pinole

Kao što se može vidjeti sa slika 5.1 i 5.2 eksperimentalni model se sastoji od većeg broja elemenata i podsklopova, različitog nivoa složenosti. Za pojednostavljenu analizu razmatra se dinamički model sklopa glavnog vretena uležišten na odgovarajući način, što je šematski prikazano na slici 5.3, dok su dimenzije glavnog vretena date na slici 5.4.



Slika 5.3 Model glavnog vretena



Slika 5.4 Dimenzije glavnog vretena

Glavno vreteno je uležišteno na dva oslonca. Prednji oslonac sklopa glavnog vretena sačinjavaju u osnovnom izvođenju tri ležišta u „Tandem-0“ rasporedu (FAG B7011C.TPA.P4.K5.UL) i zadnji dva ležišta u „O“ rasporedu (FAG B7008C.TPA.P4.K5.UL) [80]. Kako je variranje parametara eksperimentalnog modela povezano sa velikim troškovima, to je u konkretnom slučaju isto urađeno variranjem broja i rasporeda ležišta u prednjem osloncu. Na taj način su pored osnovne varijante dobijene nove četiri varijante, sa po dva ležišta u osloncu, ali pri različitim načinima ugradnje. U ovim slučajevima su korišćena prva dva ležišta, a treći je bio van upotrebe. Varijanta „O“ je dobijena postavljanjem dvije čaure iste širine iza drugog ležišta, pri čemu je došlo do povećanja rastojanja između oslonaca.

Krutosti uležištenja u zavisnosti od prednaprezanja date su u tabeli 5.1. Zbog potrebe aksijalnog pomeranja pinole pri pomoćnom kretanju sklop glavnog vretena ima specifično konstrukciono rješenje, sa slobodnim krajem vretena relativno velike dužine. Zbog toga je posebno interesantno razmotriti pomjeranje slobodnog kraja glavnog vretena, kao i vrha glavnog vretena.

Tabela 5.1 Krutost uležištenja u zavisnosti od prednaprezanja [80]

	Prednaprezanja					
	Malo		Srednje		Veliko	
	Pred. osl.	Zad. osl.	Pred. osl.	Zad. osl.	Pred. osl.	Zad. osl.
Radijalna krutost N/ μ m	400	280	560	387	690	475
Aksijalna krutost N/ μ m	69	48	115	82	170	120

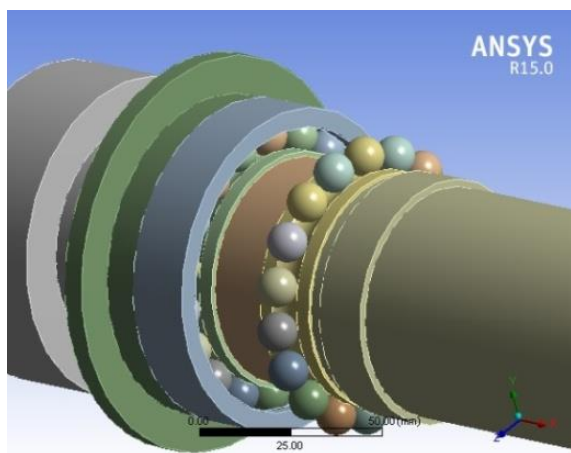
Na dinamičko ponašanje mašine alatke, kao celine, u eksploataciji veliki uticaj ima ponašanje sklopa glavnog vretena. Zbog toga se ovdje posebna pažnja poklanja izvođenju

modalne analize glavnog vretena koja predstavlja proces kojim se određuju osnovni dinamički parametri (sopstvene frekvencije oscilovanja, prigušenje i oblici oscilovanja).

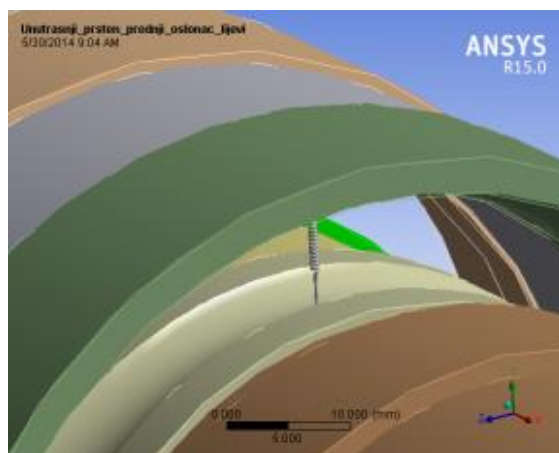
Modalni parametri se identifikuju za sljedeće uslove: slobodno oslonjeno glavno vreteno, te uležišteno glavno vreteno. Za oba slučaja prvo se analitički određuje prenosna funkcija vrha glavnog vretena. Navedeno podrazumijeva da se glavno vreteno posmatra kao greda promjenjivog poprečnog presjeka postavljena na elastične oslonce, odnosno da se izvrši podjela vretena na određen broj segmenata konstantnog poprečnog presjeka. Određuju se prenosne funkcije segmenata, koje se potom sprežu tako da se dobije prenosna funkcija glavnog vretena, podrazumijevajući pri tom da su segmenti međusobno vezani krutim vezama. Verifikacija analitički dobijenih rezultata (modalnih parametara, amplitudno – frekvencijske karakteristike) izvršena je numerički i izvođenjem eksperimentalne modalne analize.

U prvom slučaju, modelovanjem glavnog vretena pri čemu se koriste dva tipa konačnih elemenata – BEAM188 (konačni element tipa grede), te izoparametarski konačni element SOLID186. Pri numeričkoj analizi uležištenja, oslonci su modelovani konačnim elementima koji posjeduju svojstva krutosti i prigušenja COMBIN14. Linearne opruge (konačni element COMBIN14) su postavljene po obimu glavnog vretena, Slika 6.5, pri čemu ukupna krutost ovih elemenata u svakoj ravni odgovara krutosti oslonca. Obzirom da prigušenje nema značajan uticaj na veličinu sopstvenih frekvencija poprečnih vibracija, ono je pri ovoj analizi zanemareno.

Verifikacija analitički dobijenih rezultata primjenom eksperimentalne modalne analize izvršena je samo za slučaj slobodno oslonjeno glavnog vretena.



Slika 5.5 Model sklopa glavnog vretena



Slika 5.6 Modelovanje oslonaca primjenom konačnog elementa COMBIN 14

Pri numeričkoj i analizi primenom razvijenog matematičkog modela glavnog vretena korištene su sljedeće vrijednosti: Jangov modul elastičnosti $2,15e11 \text{ N/m}^2$, Puasonov koeficijent 0,3, gustina materijala 7850 kg/m^3 .

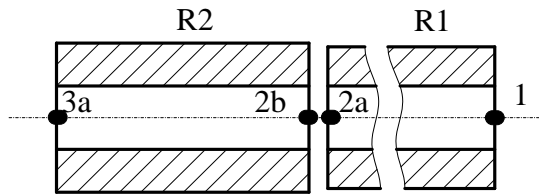
5.2 DINAMIČKO PONAŠANJE SLOBODNO OSLONJENOG GLAVNOG VRETENA

5.2.1 Analitičko određivanje dinamičkih karakteristika slobodno oslonjenog glavnog vretena

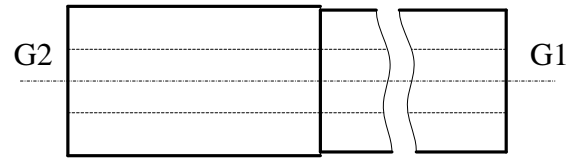
Ukoliko se posmatraju dva krajnja desna segmenta slobodno oslonjenog glavnog vretena, prikazana na slici 5.6, matrice pomjeranja pri krutoj vezi između segmenata imaju sljedeći oblik:

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12a} \\ R_{2a1} & R_{2a2a} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} R_{2b2b} & R_{2b3a} \\ R_{3a2b} & R_{3a3a} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$



Slika 5.7 Slobodno oslonjeni segmenti glavnog vretena (dva krajnja desna segmenta)



Slika 5.8 Slobodno oslonjeni segmenti glavnog vretena nakon spreznjanja

Pri tome svaka podmatrica u izrazima 5.2. i 5.3 uključuje prenosne funkcije krajeva koje u obzir uzimaju ugib i nagib u tački, kao i silu i moment, 5.4, 5.5:

$$R_{11} = \begin{bmatrix} h_{11} & l_{12a} \\ n_{2a1} & p_{2a2a} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$h_{11} = \frac{x_1}{f_1}, l_{11} = \frac{x_1}{m_1}, n_{11} = \frac{\mathcal{G}_1}{f_1}, p_{11} = \frac{\mathcal{G}_1}{m_1} \quad (5.5)$$

Nakon što se odrede prenosne funkcije obje komponente, primjenom uslova kompatibilnosti i ravnoteže (poglavlje 4) prenosna funkcija spregnutih segmenata datih na slici 5.7 može se izraziti kao

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Pri tome su

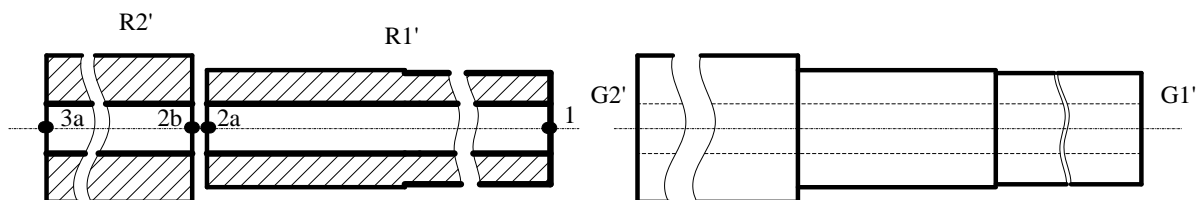
$$G_{11} = R_{11} - R_{12a} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2a1} \quad (6.7)$$

$$G_{12} = R_{12a} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2b3a} \quad (6.8)$$

$$G_{21} = R_{3a2b} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2a1} \quad (6.9)$$

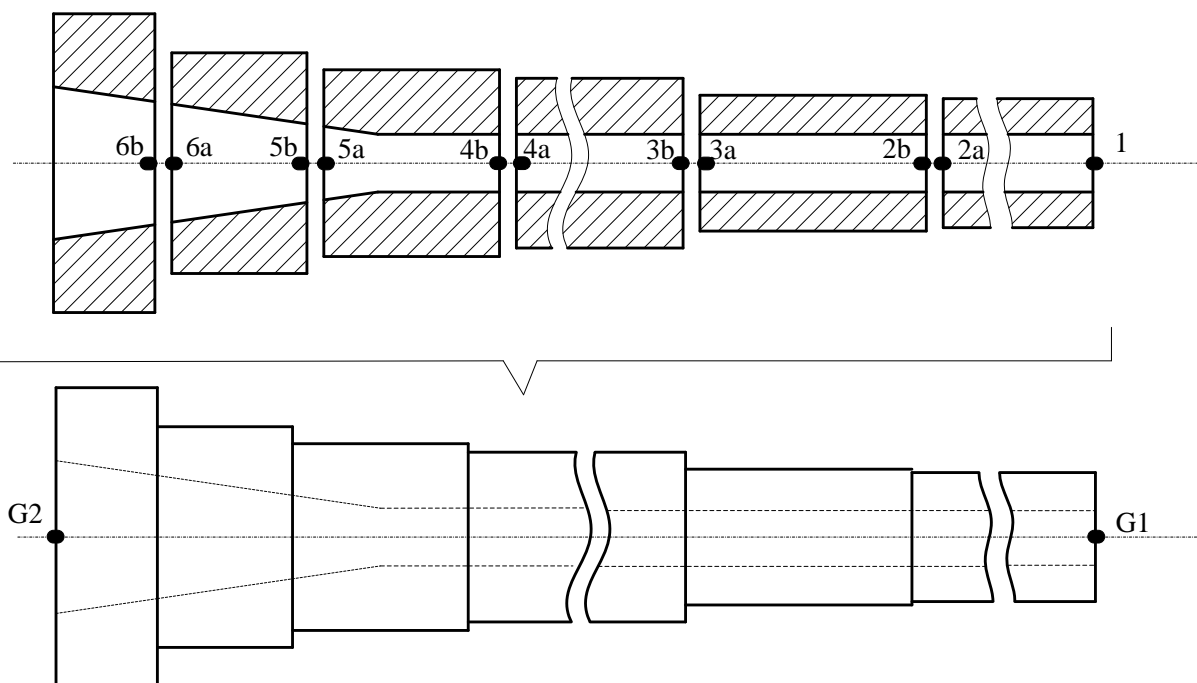
$$G_{22} = R_{3a3a} - R_{3a2b} (R_{2a2a} + R_{2b2b})^{-1} R_{2b3a} \quad (6.10)$$

Na isti način može se izvršiti sprezanje sljedećeg segmenta: dva prethodno spregnuta segmenta se sada postatruju kao jedan, kom se dodaje (sa lijeve strane) sljedeći segment, te ponavlja postupak opisan matričnim jednačinama 5.4-5.10, Slika 5.8. Pri tome je broj ponavljanja jednak broju segmenata koji se sprežu.



Slika 5.9 Sprezanje trećeg segmenta sa prethodno spregnutim segmentima

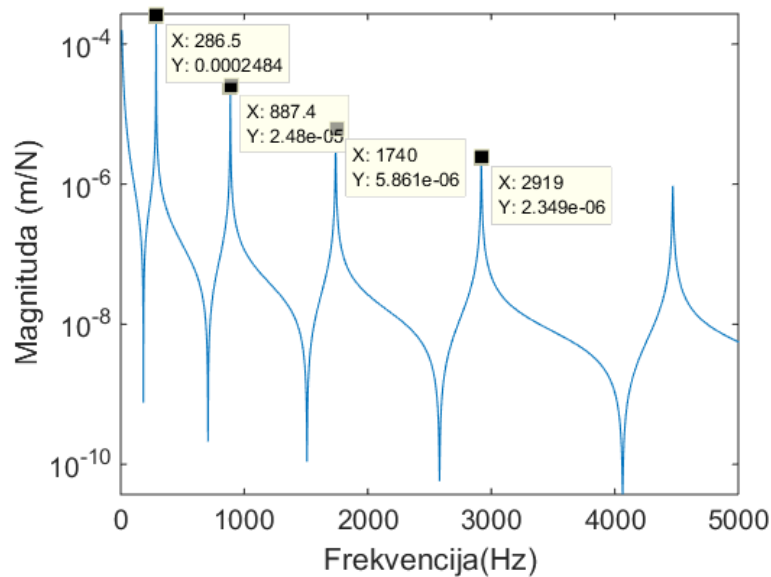
Sprezanje više od dva segmenta može se izvesti i „direktno“, izvođenjem jednačina sprezanje više segmenata za određene granične uslove. Jednačina sprezanja šest segmenata, koliko glavno vreteno sadrži u ovom slučaju, Slika 5.9, glasi:



Slika 5.10 Glavno vreteno jedinice pinole podijeljeno na šest segmenata, nakon sprezanja

$$G_{11} = R_{11} - \left(\begin{array}{c} R_{12} \\ \left(\begin{array}{c} R_{2_{11}} + R_{12} - \left(\begin{array}{c} R_{2_{12}} \left(\begin{array}{c} R_{3_{11}} + R_{2_{22}} - \\ R_{3_{12}} \left(\begin{array}{c} R_{4_{11}} + R_{3_{22}} - \\ R_{4_{12}} \left(\begin{array}{c} R_{5_{11}} + R_{4_{22}} - \\ R_{5_{12}} (R_{6_{11}} + R_{5_{22}})^{-1} R_{5_{21}} \end{array} \right)^{-1} R_{4_{21}} \end{array} \right)^{-1} R_{3_{21}} \end{array} \right)^{-1} R_{2_{21}} \end{array} \right)^{-1} R_{1_{21}} \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (5.11)$$

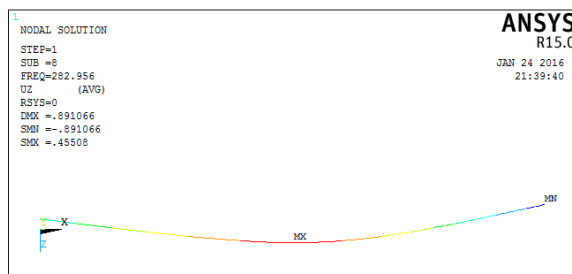
Na slici 5.10. data je prenosna funkcija slobodno oslonjog glavnog vretena, modelovanog sprezanjem šest segmenata prikazanih na slici 5.9, pri čemu se uzima da je veza između svakog od segmenata kruta.



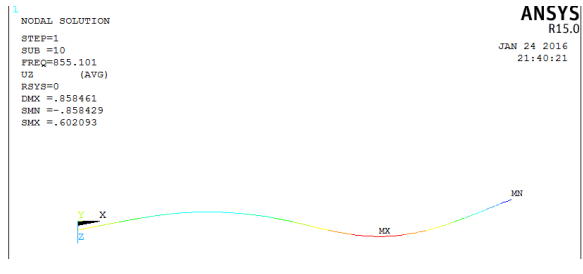
Slika 5.11 Prenosna funkcija slobodno oslonjenog glavnog vretena

5.2.2 Numeričko određivanje dinamičkih karakteristika slobodno oslonjenog glavnog vretena

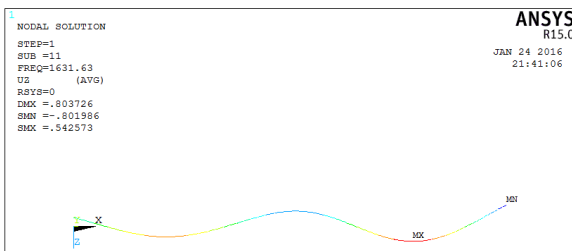
Na slikama 5.11-5.18. prikazani su rezultati modalne analize slobodno oslonjenog glavnog vretena. Prikazana su prva četiri oblika oscilovanja, odnosno prve četiri sopstvene frekvencije oscilovanja dobijene u APDL okruženju i to primjenom konačnog elementa tipa grede BEAM188, Slika 5.11-5.14, odnosno konačnog elementa SOLID186, Slika 5.15-5.18.



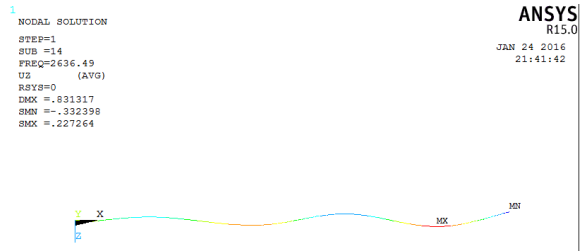
Slika 5.12 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja 282,95 Hz, konačni element BEAM188



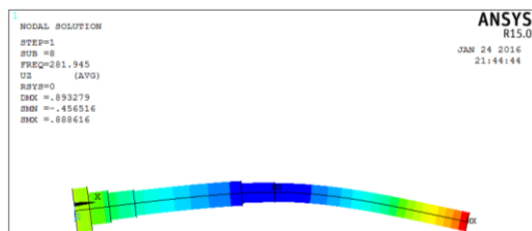
Slika 5.13 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja 855,1 Hz, konačni element BEAM188



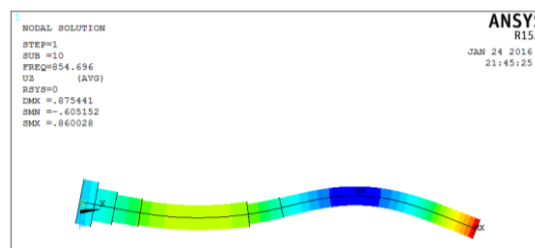
Slika 5.14 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja 1631,63 Hz, konačni element BEAM188



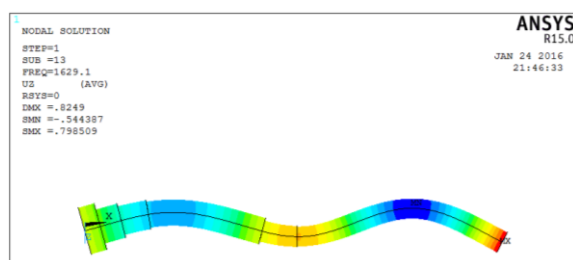
Slika 5.15 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja 2636,49 Hz, konačni element BEAM188



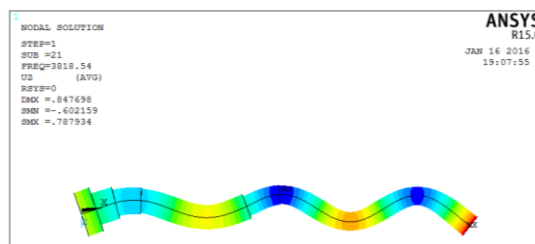
Slika 5.16 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja 281,94 Hz, konačni element SOLID186



Slika 5.17 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja 854,63 Hz, konačni element SOLID186

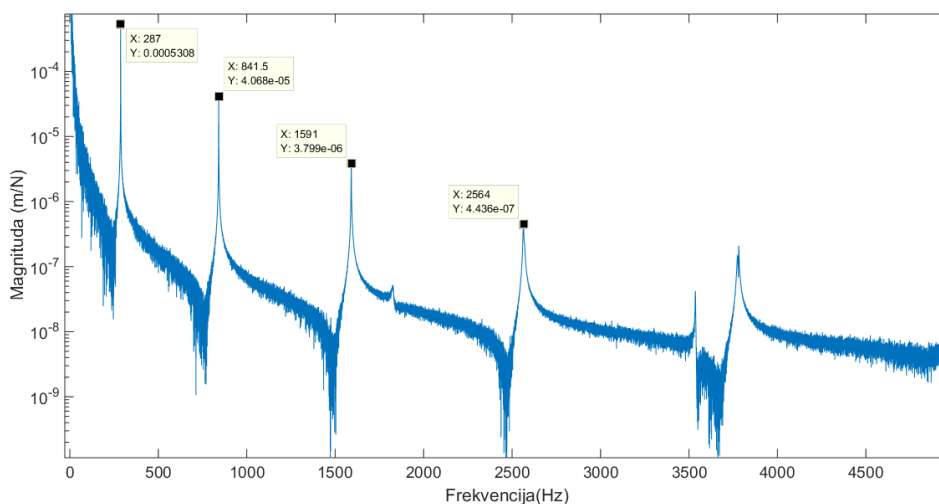


Slika 5.18 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja 1629,1 Hz, konačni element SOLID186



Slika 5.19 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja 3818,54 Hz, konačni element SOLID186

Amplitudno – frekvencijska karakteristika prenosne funkcije slobodno oslonjenog glavnog vretena dobijena izvođenjem eksperimentalne modalne analize prikazana je na slici 5.20.



Slika 5.20 Amplitudno – frekvencijska karakteristika prenosne funkcije slobodno oslonjenog glavnog vretena dobijena izvođenjem EMA

5.2.3 Poređenje rezultata modalne analize slobodno oslonjenog glavnog vretena

Uporedni prikaz dobijenih rezultata (sopstvenih frekvencija oscilovanja) sa odstupanjem u procentima u odnosu na eksperimentalno dobijene rezultate dat je u tabeli 5.2. Može se zaključiti da je na prvoj sopstvenoj frekvenciji oscilovanja dosta dobra

usaglašenost dobijenih rezultata i relativno malo odstupanje za svaku izvršenu analizu, naime rezultati dobijeni analitički odstupaju 0,34%, a rezultati dobijeni primjenom metoda konačnih elemenata 1,7%, odnosno 1,4% zavisno od tipa primjenjenog konačnog elementa. Međutim, na višim sopstvenim frekvencijama može se uočiti veće odstupanje analitički dobijenih rezultata, dok su odstupanja numerički dobijenih rezultata zadovoljavajuće mala.

Do povećanja odstupanja pri višim sopstvenim frekvencijama dobijenim primjenom analitičke metode zasnovane na Ojler – Bernulijeva teorija greda dolazi budući da ova metoda ne uzima u obzir uticaj tangentialnih napona [25]. Sa druge strane primjena Ojler – Bernulijeve teorije daje sasvim zadovoljavajuće rezultate na nižim sopstvenim frekvencijama.

Bolji rezultati pri višim sopstvenim frekvencijama mogu se dobiti primjenom Timošenkove umjesto Ojler – Bernulijeve teorije greda pri analitičkom određivanju prenosne funkcije.

Tabela 5.2 Usporedne vrijednosti rezultata modalne analize slobodno oslonjenog glavnog vretena

	Mod 1 (Hz)	Mod 2 (Hz)	Mod 3 (Hz)	Mod 4 (Hz)
APDL BEAM188	282,956 (1,4%)	855,101 (1,6%)	1631,634 (2,55%)	2636,49 (2,8%)
APDL SOLID 186	281,944 (1,74%)	854,696 (1,6%)	1629,101 (2,45%)	2629,332 (2,45%)
Sprezanjem prenosnih funkcija	286,5 (0,34%)	887,4 (5,5%)	1740 (9,3%)	2919 (13,8 %)
Ekperimentalno određene sopstvene frekvencije	287	841,5	1591	2564

5.2.4 Analitičko određivanje dinamičkih karakteristika slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena

Sklop glavnog vretena, dat na slici 5.2, čini glavno vreteno, ležajevi koji se nalaze na mjestima segmenata R2 i R4, te čaura R7, Slika 5.20. S obzirom da u sklopu između segmenta R3 i R7 postoji zazor, čaura može se smatrati „paralelno spregnutim segmentom“ u odnosu na segment R3, za razliku od segmenata R1-R6 koji se mogu smatrati „redno spregnutim segmentima“.

Ležajevi se pri analitičkom modelovanju slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena neće uzimati u razmatranje, budući da bi značajno usložnili model, a pri tome se njihov uticaj na sopstvenu frekvenciju slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena može zanemariti zbog relativno male mase u odnosu na masu glavnog vretena sa čaurom. Pri definisanju matematičkog modela, prvo se posmatraju segmenti R3 i R7 koji se sprežu paralelno, a potom se pravi redna veza svih segmenata na ranije opisan način.

Pri tome je

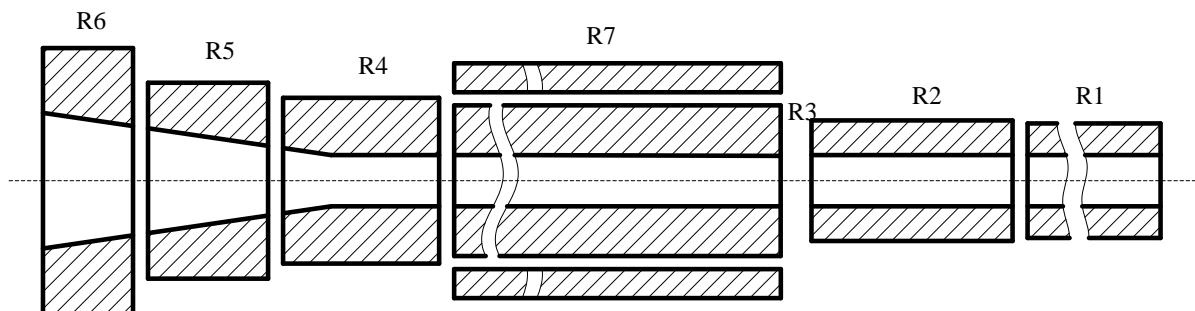
$$h_{37_{11}} = \frac{h_{3_{11}} * h_{7_{11}}}{h_{3_{11}} + h_{7_{11}}}, l_{37_{11}} = \frac{l_{3_{11}} * l_{7_{11}}}{l_{3_{11}} + l_{7_{11}}}, n_{37_{11}} = \frac{n_{3_{11}} * n_{7_{11}}}{n_{3_{11}} + n_{7_{11}}}, p_{37_{11}} = \frac{p_{3_{11}} * p_{7_{11}}}{p_{3_{11}} + p_{7_{11}}} \quad (5.12)$$

$$h_{37_{22}} = \frac{h_{3_{22}} * h_{7_{22}}}{h_{3_{22}} + h_{7_{22}}}, l_{37_{22}} = \frac{l_{3_{22}} * l_{7_{22}}}{l_{3_{22}} + l_{7_{22}}}, n_{37_{22}} = \frac{n_{3_{22}} * n_{7_{22}}}{n_{3_{22}} + n_{7_{22}}}, p_{37_{22}} = \frac{p_{3_{22}} * p_{7_{22}}}{p_{3_{22}} + p_{7_{22}}} \quad (5.13)$$

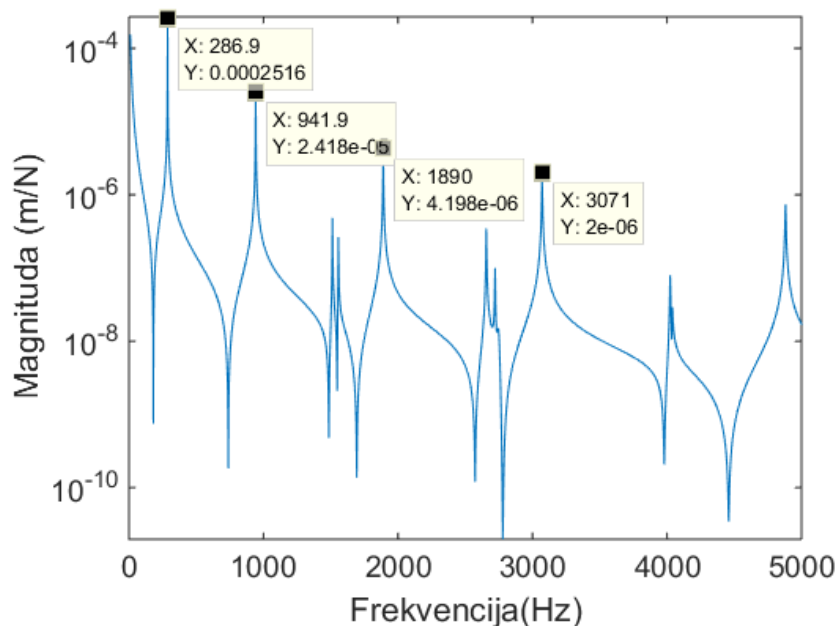
$$h37_{12} = \frac{h3_{12} * h7_{12}}{h3_{12} + h7_{12}}, l37_{12} = \frac{l3_{12} * l7_{12}}{l3_{12} + l7_{12}}, n37_{12} = \frac{n3_{12} * n7_{12}}{n3_{12} + n7_{12}}, p37_{12} = \frac{p3_{12} * p7_{12}}{p3_{12} + p7_{12}} \quad (5.14)$$

$$h37_{21} = \frac{h3_{21} * h7_{21}}{h3_{21} + h7_{21}}, l37_{21} = \frac{l3_{21} * l7_{21}}{l3_{21} + l7_{21}}, n37_{21} = \frac{n3_{21} * n7_{21}}{n3_{21} + n7_{21}}, p37_{21} = \frac{p3_{21} * p7_{21}}{p3_{21} + p7_{21}} \quad (5.15)$$

Na slici 5.21. prikazana je amplitudno – frekvencijska karakteristika prenosne funkcije slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena. U ovom slučaju prenosna funkcija je određena primjenom razvijenih matematičkih modela, na osnovu prenosnih funkcija segmenata R1-R7, međusobno spregnutih krutim vezama, Slika 5.20.



Slika 5.21 Model sklopa glavnog vretena dobijen sprežanjem segmenata konstantnog poprečnog presjeka



Slika 5.22 Amplitudno frekvencijska karakteristika prenosne funkcije slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena

U tabeli 5.3 date su uporedne vrijednosti rezultata modalne analize sklopa glavnog vretena dobijene razvijenim matematičkim modelom i eksperimentalnim ispitivanjem. I u ovom, kao i u prethodnom slučaju, rezultati dobijeni analitički imaju dobra poklapanja sa eksperimentalno određenim rezultatima na prvoj sopstvenoj frekvenciji, ali odstupanje raste sa porastom frekvencije.

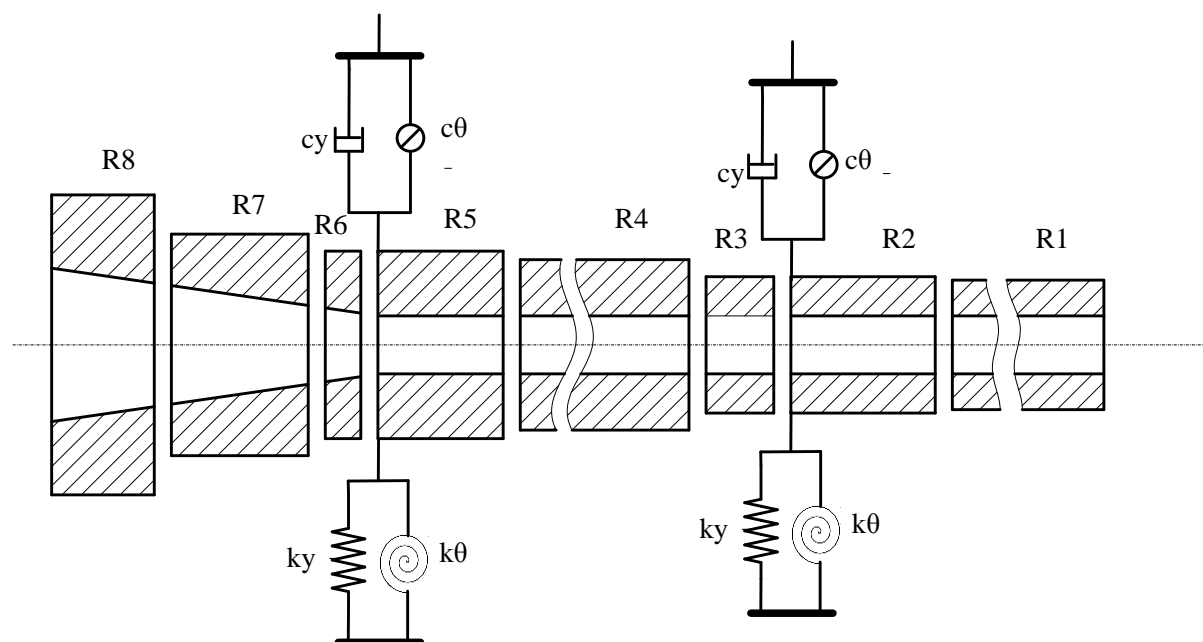
Tabela 5.3 Uporedne vrijednosti rezultata modalne analize sklopa glavnog vretena

	Mod 1 (Hz)	Mod 2 (Hz)	Mod 3 (Hz)	Mod 4 (Hz)
Analitički, sprezanjem prenosnih funkcija dobijenih primjenom Ojler – Bernulijeve teorije greda	286,9 (4,6%)	941,9 (9,1%)	1890 (29%)	3071 (25,1%)
Eksperimentalno	283,53	940,2	-	-
Izvođenjem EMA	274,2	863,5	1465	2453

5.3 DINAMIČKO PONAŠANJE ULEŽIŠTENOG GLAVNOG VRETENA

5.3.1 Analitičko određivanje dinamičkih karakteristika uležištenog glavnog vretena

U prethodnim razmatranjima određena je prenosna funkcija glavnog vretena sprezanjem prenosnih funkcija segmenata koji su posmatrani kao slobodno oslonjeni (*free – free*). Međutim, tokom eksploatacije glavno vreteno mašine alatke je oslonjeno, pa je stoga potrebno napraviti adekvatan model dinamičkog ponašanja glavnog vretena, odnosno model oslonaca koji posjeduju karakteristike krutosti i prigušenja.



Slika 5.23 Model oslonjenog glavnog vretena

S tim u vezi potrebno je izvršiti novu podjelu modela glavnog vretena na segmente, pri čemu je potrebno voditi računa da se mjesto oslonca, odnosno ležaj, uvijek nalazi na kraju određenog segmenta. Ovo podrazumijeva drugačiju podjelu glavnog vretena na segmenta u odnosu na model prikazana na slici 5.9 i 5.20, tj. veći broj segmenata, u konkretnom slučaju osam segmenata. Na slici 5.23 prikazan je model oslonjenog glavnog vretena, gdje se može vidjeti da se prvo vrši sprezanje segmenata R1 i R2, na čijem se lijevom kraju potom dodaju krutost i prigušenje koji odgovaraju krutosti i prigušenju desnog (zadnjeg) oslonca, potom se dobijena struktura spreže se segmenom R3 itd. Krutost i prigušenje oslonaca (ležajeva) se u dinamički model glavnog vretena uključuju primjenjujući strukturalnu modifikacionu metodu [55]. Prema ovoj metodi, matrica

pomjeranja modifikovanog sistema (glavnog vretena sa ležajevima), se dobija na osnovu matrice pomjeranja nemodifikovanog sistema, uključivanjem u matricu vrijednosti krutosti i prigušenja ležaja.

U konkretnom slučaju, prvo se određuje matrica pomjeranja segmenata R1 i R2 međusobno spregnutih krutim vezama, koja ima oblik

$$G = \begin{bmatrix} H_{11} & L_{11} & H_{12} & L_{12} \\ N_{11} & P_{11} & N_{12} & P_{12} \\ H_{21} & L_{21} & H_{22} & L_{22} \\ N_{21} & P_{21} & N_{22} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Modifikovana matrica pomjeranja 5.17 se dobije ukoliko se izvrše elementarne transformacije nad redovima i kolonama matrice 5.16

$$\alpha G = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & L_{11} & L_{12} \\ H_{21} & H_{22} & L_{21} & L_{22} \\ N_{11} & N_{12} & P_{11} & P_{12} \\ N_{21} & N_{22} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Nadalje neka je D dinamička strukturalna modifikaciona matrica koja uključuje translacione i rotacione krutosti i prigušenja oslonca.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

pri čemu izrazi 5.19 i 5.20 predstavljaju kompleksne vrijednosti krutosti i prigušenja ležajeva.

$$K_y = k_y + i\omega c_y \quad (5.19)$$

$$K_\theta = k_\theta + i\omega c_\theta \quad (5.20)$$

Matrica pomjeranja modifikovanog sistema može se, prema [55] izraziti kao

$$\alpha G' = \left[[I] + [\alpha G][D] \right]^{-1} [\alpha G] \quad (5.21)$$

Što se u vidu pojedinačnih matrica može napisati u obliku

$$[\alpha_{G'}^{11}] = \left[[I] + [\alpha_G^{11}][D^{11}] \right]^{-1} [\alpha_G^{11}] \quad (5.22)$$

$$[\alpha_{G'}^{12}]^T = [\alpha_{G'}^{21}] = [\alpha_G^{21}][[I] - [D^{11}]] [\alpha_G^{11}] \quad (5.23)$$

$$[\alpha_{G'}^{22}] = [\alpha_G^{22}] - [\alpha_G^{21}][D^{11}][\alpha_G^{12}] \quad (5.24)$$

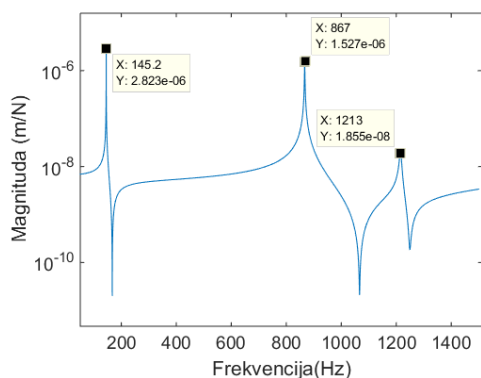
U izrazima 5.22-5.24 $[I]$ je jedinična matrica, a $[D^{11}]$ podmatrica strukturalne modifikacione matrice $[D]$

$$[D^{11}] = \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

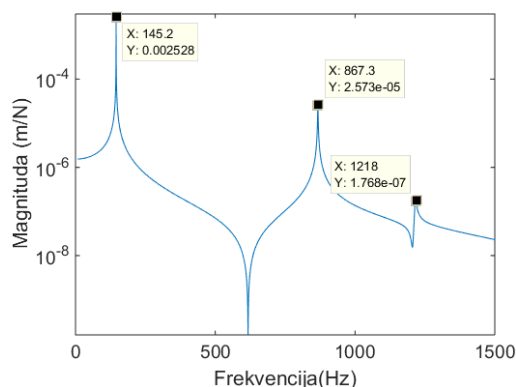
koja se dobije primjenom elementarnih transformacija nad redovima i kolonama matrica D.

$$D = \begin{bmatrix} K_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

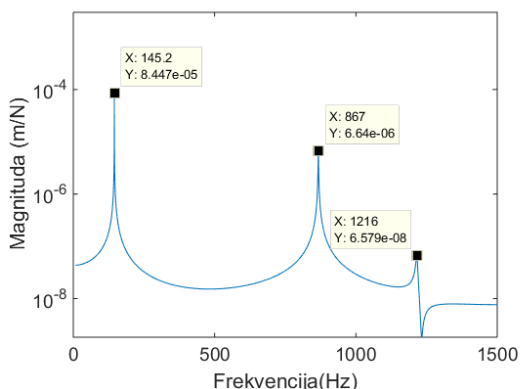
Nakon što se modeluje zadnji oslonac, nastavlja se procedura sprežanja segmenta R3, R4 i R5, nakon čega se ponovo dodaje ležaj na prethodno opisan način, a zatim i preostali segmenti R6, R7 i R8, Slika 5.22. Amplitudno frekventne karakteristike prenosne funkcije H_{ij} (direktna i unakrsna) oslonjenog glavnog vretena date su na slikama 5.23-5.26. Na osnovu slike 5.23. i 5.24. može se uočiti da je amplituda pomjeranja slobodnog kraja glavnog vretena značajno veća u odnosu na vrha glavnog vretena, što je i očekivano.



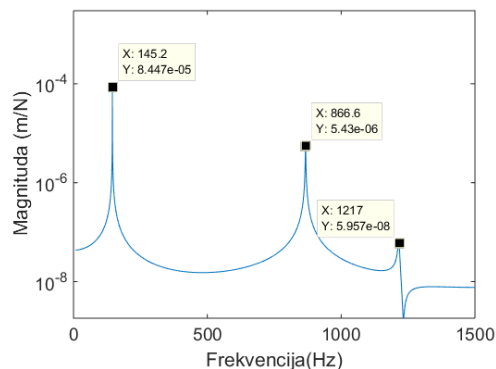
Slika 5.24 AF karakteristika direktne prenosne funkcije H11 – vrh glavnog vretena



Slika 5.25 AF karakteristika direktne prenosne funkcije H22 – zadnji kraj glavnog vretena



Slika 5.26 AF karakteristika unakrsne prenosne funkcije H12

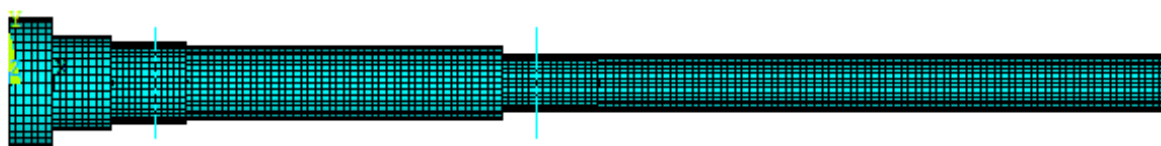


Slika 5.27 AF karakteristika unakrsne prenosne funkcije H21

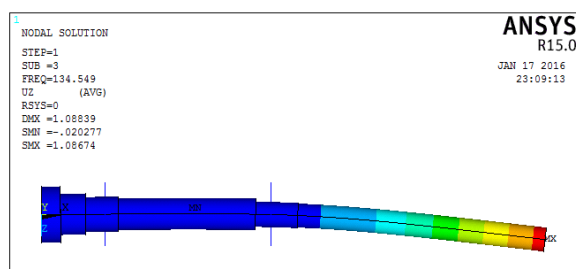
5.3.2 Numeričko određivanje dinamičkih karakteristika uležištenog glavnog vretena

Na slici 5.28. prikazano je glavno vreteno sa osloncima modelovano u Ansys APDL.

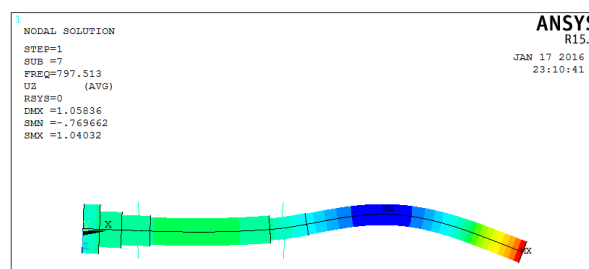
Model je diskretizovan 3D konačnim elementima SOLID 186 (ukupno 17167 konačnih elementa), dok je modelovanje krutosti oslonaca izvedeno konačnim elementima COMBIN 14. Prve četiri sopstvene frekvencije na ovaj način modelovanog uležištenog glavnog vretena su prikazani na Sl. 5.29-5.32. Sopstvene frekvencije i glavni oblici oscilovanja sklopa glavnog vretena modelovanog konačnim elementima BEAM 188 prikazani su na Sl. 5.32-5.36.



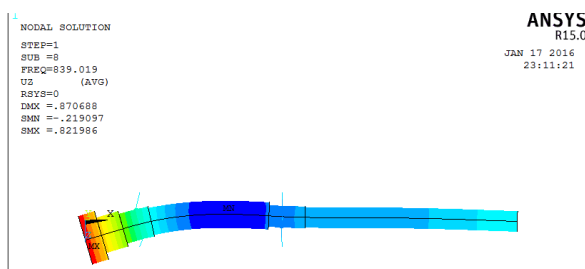
Slika 5.28 Ansys APDL model glavnog vretena konačni element SOLID 186



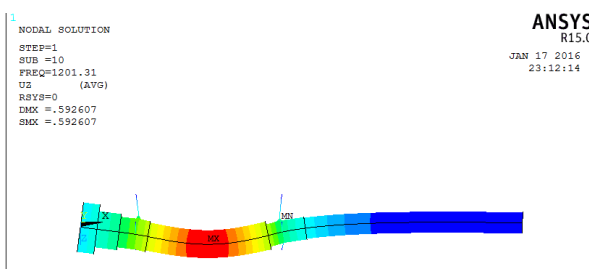
Slika 5.29 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186



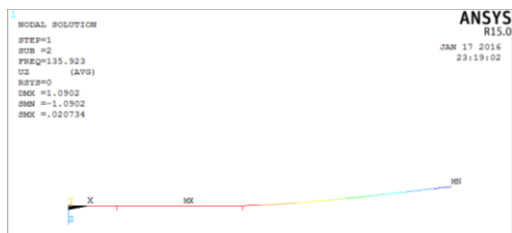
Slika 5.30 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186



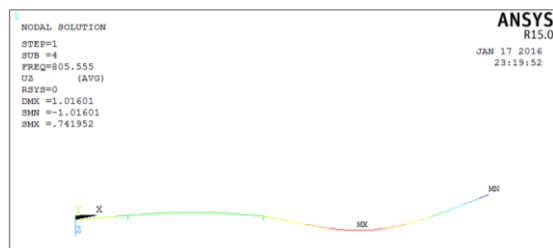
Slika 5.31 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186



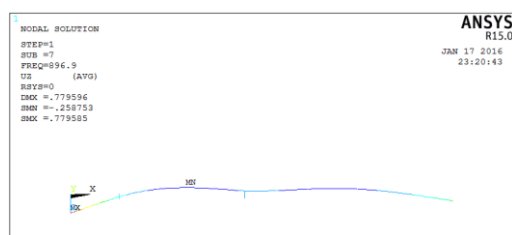
Slika 5.32 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element SOLID 186



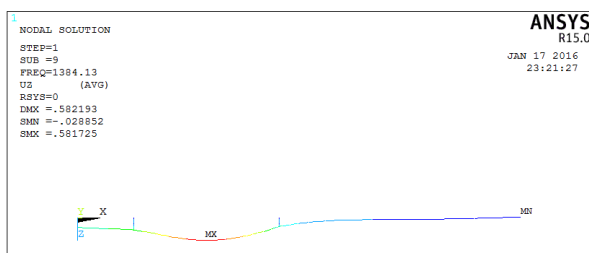
Slika 5.33 Prva sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188



Slika 5.34 Druga sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188



Slika 5.35 Treća sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188



Slika 5.36 Četvrta sopstvena frekvencija oscilovanja, APDL, konačni element BEAM 188

5.3.3 Poređenje rezultata modalne analize uležištenog glavnog vretena

Poređenjem frekvencija oscilovanja određenih primjenom razvijenog matematičkog modela sa frekvencijama oscilovanja dobijenim numerički primjenom konačnih elementa BEAM188 i SOLID186, prikazanih u tabeli 6.4, može se konstatovati sljedeće: prva sopstvena frekvencija oscilovanja određena primjenom konačnog elementa BEAM188 odstupa 6,7% u odnosu na sopstvenu frekvenciju određenu razvijenim matematičkim modelom, treća sopstvena frekvencija oscilovanja -3,4 %, četvrta sopstvena frekvencija -12,3%, dok druga sopstvena frekvencija oscilovanja dobijena numerički (805,5 Hz) nije određena analitičkim putem. Primjenom konačnog elementa SOLID186 određeni su približno isti rezultati za prvu sopstvenu frekvenciju oscilovanja, odstupanja na trećoj sopstvenoj frekvenciji oscilovanja su 3,2 %, a na četvrtoj 0,1%.

Poredeći rezultate određene numerički i analitički može se konstatovati da prezentovani matematički model daje zadovoljavajuće rezultate, s tim da postoji prostor za unapređenje razvijenih algoritama, prije svega primjenom Timošenkove teorije greda.

Tabela 5.4 Uporedne vrijednosti rezultata modalne analize uležištenog glavnog vretena određene primjenom metoda konačnih elemenata i analitički

	Mod 1 (Hz)	Mod 2 (Hz)	Mod 3 (Hz)	Mod 4 (Hz)
APDL BEAM188	135,923	805,555	896,9	1384,13
APDL SOLID 186	134,549	797,513	839,019	1201,31
Analitički	145,2	-	867	1216

6 MODALNA ANALIZA HORIZONTALNOG OBRADNOG CENTRA

Dinamičke karakteristike mašina alatki, posebno modalni parametri, imaju značajan uticaj na proces obrade i tačnost izradaka. U ovom poglavlju prikazano je istraživanje dinamičkog ponašanja i određivanje modalnih parametara horizontalnog obradnog centra. Kreiran je 3D CAD model horizontalnog obradnog centra primenom programskog sistema CATIA, a modalna analiza (sopstvene frekvencije i glavni oblici oscilovanja strukture mašine alatke) je realizovana primjenom programskog sistema ANSYS Workbench. Validacija dobijenih rezultata je izvršena eksperimentalnim ispitivanjem impulsnom pobudnom silom. Modalni parametri identifikovanih eksperimentalnim ispitivanjem i MKE modalnom analizom su poređeni, a dobijeni rezultati pokazuju zadovoljavajuće podudaranje.

6.1 UVODNA RAZMATRANJA

Mašina alatka predstavlja složeni oscilatorni sistem čije je ponašanje uslovljeno nizom poremećajnih faktora, kao što su statičke deformacije, dinamička nestabilnost, toplotne deformacije, buka, habanje...

Predikcija ponašanja mehaničkog sistema mašine alatke u fazi projektovanja predstavlja važan korak pri razvoju istih. Posebno značajno mjesto, pri tome, zauzima identifikacija dinamičkog ponašanja noseće strukture, koja je uslovljena ponašanjem pojedinih elemenata podsistema i uticajem veza (spojeva) među elementima. Jedan od načina identifikacije dinamičkog ponašanja mašine alatke je modalna analiza.

Sopstvena frekvencija oscilovanja je frekvencija na kojoj bilo koja dinamička pobuda dovodi do značajnog odgovora strukture. Ovo je važno jer i pobuda nastala u procesu rezanja, u slučaju kada je frekvencija rezanja bliska ili jednaka sopstvenoj frekvenciji, dovodi do pojave samopobudnih vibracija.

Očigledno je da je uticaj vibracija na proces obrade značajan i da se još kroz fazu projektovanja koncepcije mašina alatki treba vršiti poboljšanje dinamičkih karakteristika iste. Pri tom se posebno interesantne najniže frekvencije oscilovanja elemenata strukture, kao i same strukture (prva sopstvena frekvencija oscilovanja kao najdominantnija s obzirom na njen uticaj na pojavu rezonance).

Budući da je matematički opis dinamičkog ponašanja moguće dobiti samo za jednostavne i idealizovane slučajeve, te uzimajući u obzir da elementi mašine alatke uglavnom imaju nepravilne geometrijske oblike, najčešći način izvođenja modalne analize

je primjena metoda konačnih elemenata. Osim primjene metoda konačnih elemenata, identifikacija sopstvenih frekvencija i oblika oscilovanja može se izvesti i primjenom eksperimentalne modalne analize. Eksperimentalna modalna analiza podrazumijeva ispitivanje fizičkog objekta, obično na način da se objekat pobuđuje sinusnom ili impulsnom pobudom. Eksperimentalno ispitivanje impulsnom pobudom je prostije budući da se ispitivanje može sprovesti u kratkom vremenskom periodu, a od instrumentacije je potreban samo pobuđivač - impulsni čekić. Tokom ispitivanja impulsnom pobudom ne vrše se nikakva kretanja obratka ili alata, odnosno glavno vreteno miruje. Odziv sistema, koji može biti pomjeranje, brzina ili ubrzanje se snima u vremenskom domenu. Za prelaz u frekventni domen, gdje se vrši dalja analiza koriste se Furijeove transformacije.

Eksperimentalno - numeričke metode imaju široku primjenu u identifikaciji dinamičkih karakteristika strukture mašina alatki. Pedrammehr [60] određuje sopstvene frekvencije oscilovanja noseće strukture glodalice FP4M, a Pakzad [59] brusilice za ravno brušenje primjenom metoda konačnih elemenata, a potom rezultate modalne analize porede sa rezultatima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem. CAD modeli obje mašine alatke su kreirani primenom programskog sistema CATIA, a MKE analiza je izvršena upotrebom ANSYS Workbench programa. Pri eksperimentalnom određivanju sopstvenih frekvencija vibracije noseće strukture su izazvane primjenom impulsne pobudne sile, korištenjem B&K 8202 impulsnog čekića. Primjenjena je tehnika tzv. „pomjerajućeg“ akcelerometra (*roving accelerometer*). U konkretnom slučaju, pri analizi glodalice [60], sila je generisana u pravcu „z“ ose, na vrhu glavnog vretena, a odziv mjereno u 14 tačaka. Frekvencije oscilovanja su određene primjenom Furijeovih transformacija, pri čemu je korišten softver PULSE Labshop. Sopstvene frekvencije su određene u opsegu od 0 - 2000 Hz. Poređenje rezultata numeričke modalne analize sa podacima dobijenim eksperimentalnim ispitivanjem pokazuje odstupanja do 8 [%]. Na sličan način, korištenjem iste opreme i softvera, izvedeno je i eksperimentalno određivanje sopstvenih frekvencija brusilice [59], gdje se rezultati modalne analize razlikuju od rezultata dobijenih eksperimentalnim ispitivanjem maksimalno 3 [%].

Swami [70] prikazuje mogućnosti optimizacije strukture mašine alatke na primjeru redukcije mase postolja sa klizačem modula linearnog kretanja u pravcu „y“ ose vertikalnog obradnog centra za glodanje. Smanjenje mase kompenzuje se dodavanjem rebara, tako da je krutost sistema konstantna. Za izradu modela korišten je programski sistem CATIA, predprocesiranje, odnosno generisanje mreže HYPERMESH, a za MKE analizu i optimizaciju ANSYS Design Optimization i OptiStruct softveri.

Patwari [58] primjenjuje numeričko - eksperimentalnu metodu za identifikovanje modalnih parametara alata za obradu glodanjem, provodeće pri tome klasičnu eksperimentalnu modalnu analizu, ali i operacionu modalnu analizu pri kojoj se umjesto impulsne pobude struktura pobuđuje u radnim uslovima. Za generisanje modela koristi softver CATIA, a za numeričke simulacije softver ABAQUS.

U okviru prezentovanog istraživanja prikazano je određivanje sopstvenih frekvencija i glavnih oblika oscilovanja noseće strukture i određenih podsistema horizontalnog obradnog centra za glodanje FM38. Obradni centar je instalisan u Laboratoriji za mašine alatke na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Model obradnog centra je kreiran primjenom programskog sistema CATIA. CAD modeli su, potom, primjenom ANSYS SpaceClaim Direct Modeler (ANSYS SCDM) uvezeni u Ansys Workbench softver, u kom je urađena modalna analiza. S obzirom da je geometrija numeričkog modela razvijena na bazi geometrije realnog fizičkog modela obradnog centra, moguće je eksperimentalnu

verifikacija dobijenih rezultata izvršiti ispitivanjem impulsnom pobudnom silom, te na taj način doći do zaključka o pouzdanosti razvijenih numeričkih modela.

6.2 NUMERIČKO - EKSPERIMENTALNA MODALNA ANALIZA

6.2.1 Oprema korišćena pri izvođenju eksperimentalne modalne analize

Jedna od eksperimentalnih metoda identifikovanja dinamičkih parametara konstrukcije je modalna analiza. Postupak se zasniva na analizi funkcije pobude i funkcije vibracija strukture kao odgovora i to u vremenskom i frekventnom domenu. Modalni parametri zavise od geometrije, karakteristika materijala i graničnih uslova.

Kontrolisano nanošenje poznate sile na ispitivanu konstrukciju vrši se pobuđivačem. U okviru ovog istraživanja primjenjeno je pobuđivanje impulsnom pobudom, odnosno impulsnim čekićem PCB Piezotronics model 086D50 i impulsnim čekićem Brüel & Kjær 8206. Suština je u tome da se čekić koristi za nanošenje impulsne pobude kako bi se konstrukcija pobudila sa dovoljnim opsegom frekvencija. Trajanje impulsa koji se čekićem nanosi na ispitivanu konstrukciju određen je masom i krutošću samog čekića. Krutost čekića može se povećavati ili smanjivati različitim vrhovima izmjenjive glave čekića (aluminijaska, plastična, gumena). Opseg frekvencija kojim se pobuđuje konstrukcija se smanjuje ako se povećava masa čekića, a povećava ako se koristi tvrđi vrh glave čekića. Ova tehnika nanošenja funkcije pobude vrlo je pogodna zbog relativno jednostavne opreme i kratkog vremena mjerenja.

Za prikupljanje podataka mogu se koristiti različite vrste senzora. Za potrebe ovog istraživanja korišćeni su piezo-električni senzori (akcelerometri) različitih masa i karakteristika, u zavisnosti od toga na kom dijelu konstrukcije je vršeno ispitivanje i to METRIX Instruments SA6200A 100mV/g, opseg mjerenja do 10 kHz i 50 g, pri mjerenju vibracija strukture mašine i troosni akcelerometar male mase Dytran 3023 AIT 8417 10mV/g pri mjerenju vibracija alata.

Za akviziciju podataka koristi se National Instruments mjerna oprema NI cDAQ 9172 sa analognom četverokanalnom karticom NI 9233.

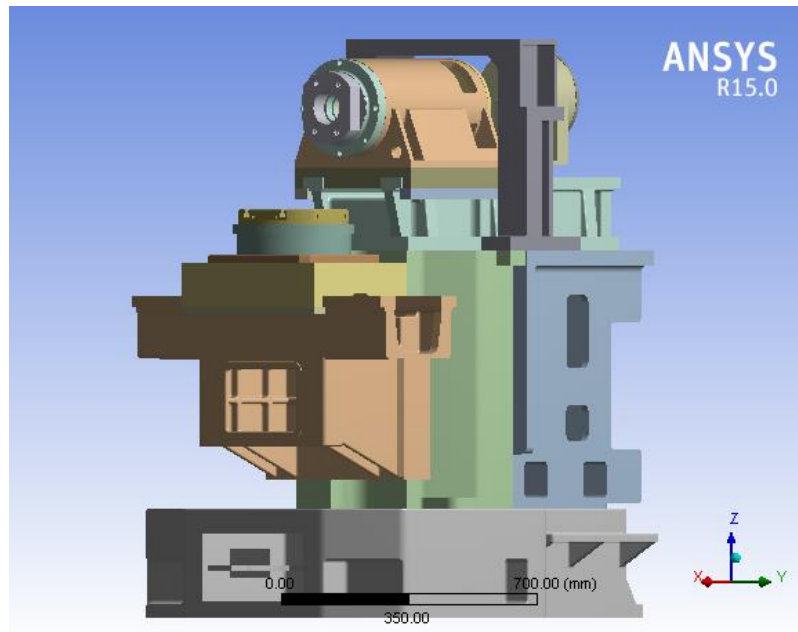
6.2.2 Numeričko određivanje i eksperimentalna verifikacija modalnih parametara strukture obradnog centra

Struktura modela obradnog centra analizira se za dva položaja modula ose „Z“ i to: modul „Z“ ose pomjeren maksimalno naprijed, Slika 6.1 i pomjeren 250 [mm] u nazad, Slika 6.2.

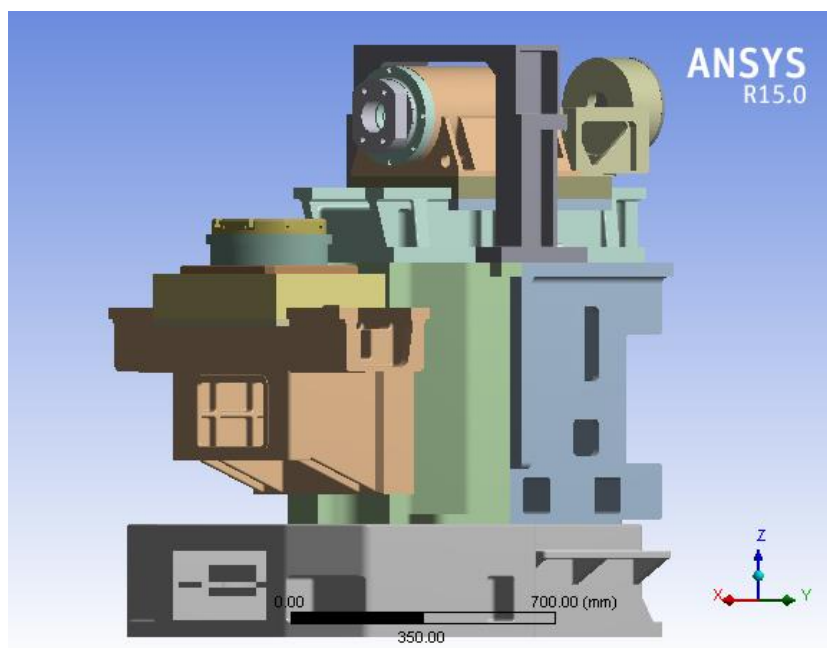
Mreža konačnih elementa generiše se automatski, a podešavanja gustine mreže odnosno broj čvorova i broj konačnih elemenata vrše se promjenom opcija *Sizing - Relevance center (Coarse, Medium, Fine)*, odnosno *Sizing - Smoothing*.

Karakteristike računara na kom se vrši analiza metodom konačnih elemenata su 6 GB RAM memorije, i5 procesor sa četiri jezgra, takt procesora 2,5 GHz. Broj konačnih elemenata, čvorova, te vrijeme analize za navedene uslove dati su u tabeli 1. Međutim, promijenom opcije *Sizing – Smoothing* sa *Medium* na *High*, broj čvorova i broj konačnih elemenata značajno raste, a tako i vrijeme potrebno za simulaciju. Iako se za ovu simulaciju koristi hardver boljih performansi od prethodnog (računar sa 32 GB RAM memorije, takt 1600 MHz, DDR3, osmo jezgri procesor, takt procesora 4 GHz, SSD HDD, te dvije grafičke karte *Gainward GeForce GTX570 CUDA*, *GPU clock speed 732 MHz*, memorija

jedne grafičke karte 1280 MB, GDDR5 (320 bits) povezane u SLI), vrijeme potrebno za simulaciju iznosi približno 12 sati. Ovo znači da simulacija, pod određenim početnim uslovima, može biti veoma zahtjevna.



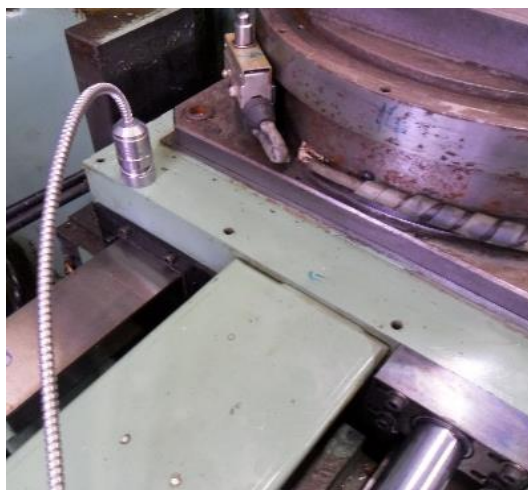
Slika 6.1 Modul „Z“ ose u prednjem položaju



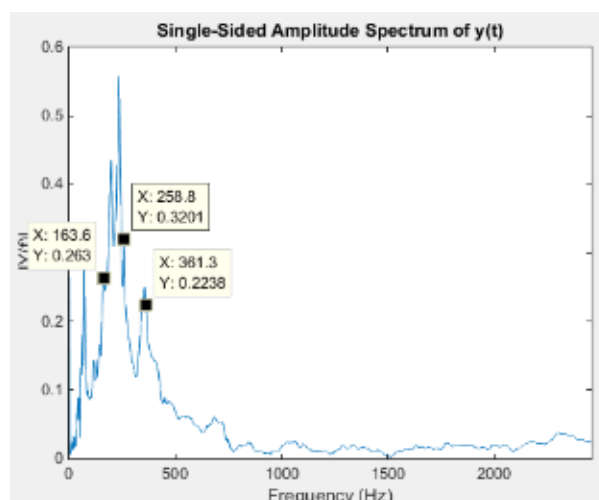
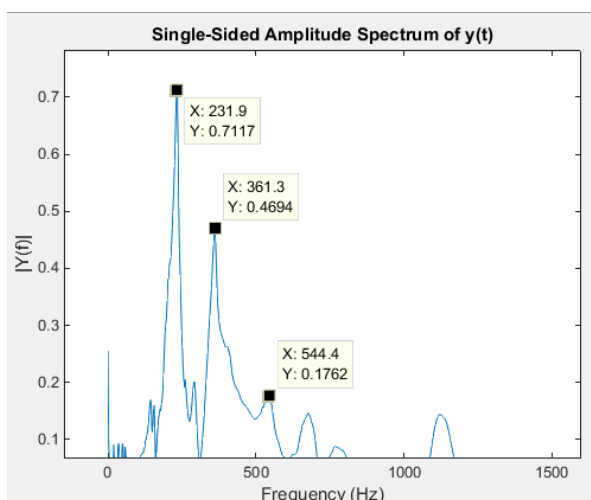
Slika 6.2 Modul „Z“ ose u zadnjem položaju

Uporedni prikaz prvih dvadeset sopstvenih frekvencija dobijenih numeričkom analizom za dva položaja klizača modula „Z“ ose i pri različitim veličinama konačnih elementa dat je u tabeli 6.1 i tabeli 6.2. Kao tip kontakta između elemenata u spoju korišten je Bonded, osim u slučaju mjesta spoja (klizač i klizna vođica, postolja i temelj, zavojno vreteno i navrtka i vratila i kotrljajni ležajvi). Način modelovanja spojeva detaljno je prikazan u narednom poglavlju.

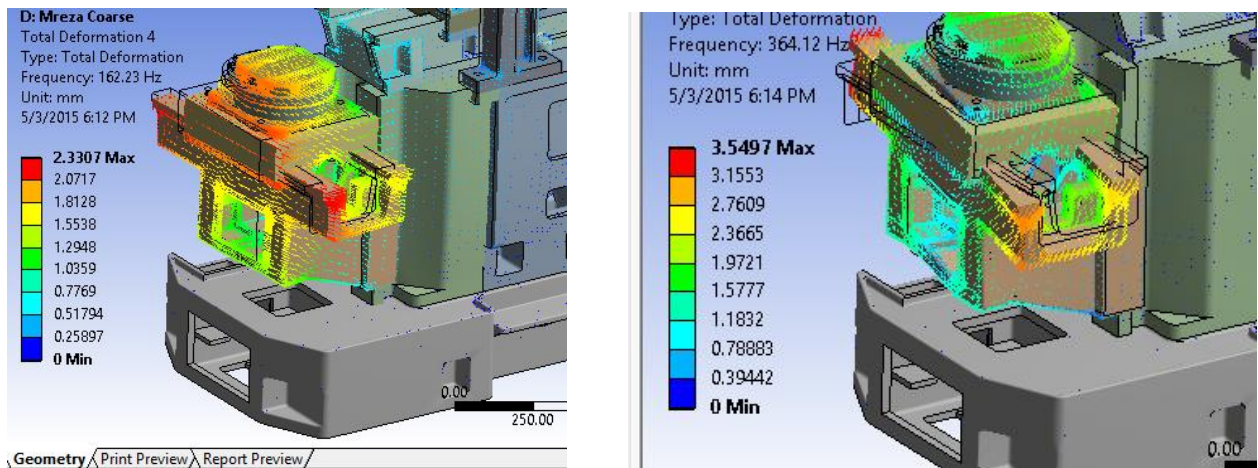
Ekperimentalno određivanje sopstvenih frekvencija izvršeno je nanošenjem impulsne pobudne sile na vrh glavnog vretena i mjerenjem ubrzanja. Mjerenje odziva vršeno je na glavnom vretenu, vođicama, obrtnom stolu i elementima noseće strukture obradnog centra. Na slici 7.3 prikazano je podešavanje eksperimenta za mjerenje vibracija na klizaču i vođicama horizontalnog modula linearnog pomoćnog kretanja pri čemu se akcelerometar postavlja na postolje na klizač, a vibracije snimaju u pravcu „Y“ i „Z“ ose. Također, dat je FFT signala odziva te grafički prikaz frekvencija i oblika oscilovanja mehaničke stukture obradnog centra, pri čemu se može uočiti da prikazane frekvencije imaju vrijednosti veoma bliske frekvencijama određenim eksperimentalnim ispitivanjem. Ako se, uz uvažavanje svih netačnosti koje prate eksperimentalna ispitivanja, usvoji da su rezultati određeni eksperimentalnim ispitivanjem tačniji od numeričkih, razlika sopstvenih frekvencija oscilovanja dobijenih eksperimentalnim i numeričkim putem konkretno iznosi 0,83 % (za frekvenciju 163,6 Hz) i 0,78 % (za frekvenciju 361,3 Hz), što se može smatrati vrlo zadovoljavajućim.



Slika 6.3 Podešavanje eksperimenta pri eksperimentalnom identifikovanju AF karakteristike klizača X ose



Slika 6.4 AF karakteristika prenosne funkcije klizača X ose određena brzom Furijeovom transformacijom odziva, Slika 6.3



Slika 6.5 Frekvencije oscilovanja stola obradnog centra 162,23 Hz i 364,12 Hz identifikovane primjenom MKE

U tabeli 6.1. su pored vrijednosti frekvencija dobijenih primjenom metoda konačnih elementata navedena i procentualna odstupanja dobijenih rezultata u odnosu na eksperimentalne rezultate. Može se zapaziti da se odstupanja rezultata nalaze u granicama - 3,98% do 5,93%, kao i da rezultati dobijeni različitom finoćom mreže konačnih elementa imaju međusobno relativno mala odstupanja. Analizirajući rezultate prikazane u tabeli 7.1 i tabeli 7.2. može se zaključiti da povećanjem gustine mreže konačnih elemenata, odnosno broja čvorova i broja konačnih elemenata, rezultati dobijeni primjenom MKE imaju vrijednosti nešto bliže vrijednostima dobijenim eksperimentalnim putem, ali da se radi o malim razlikama koje nemaju velik značaj.

Tabela 6.1 Uporedni prikaz prvih dvadeset vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja modula Z ose za različita podešavanja gustine mreže konačnih elementa

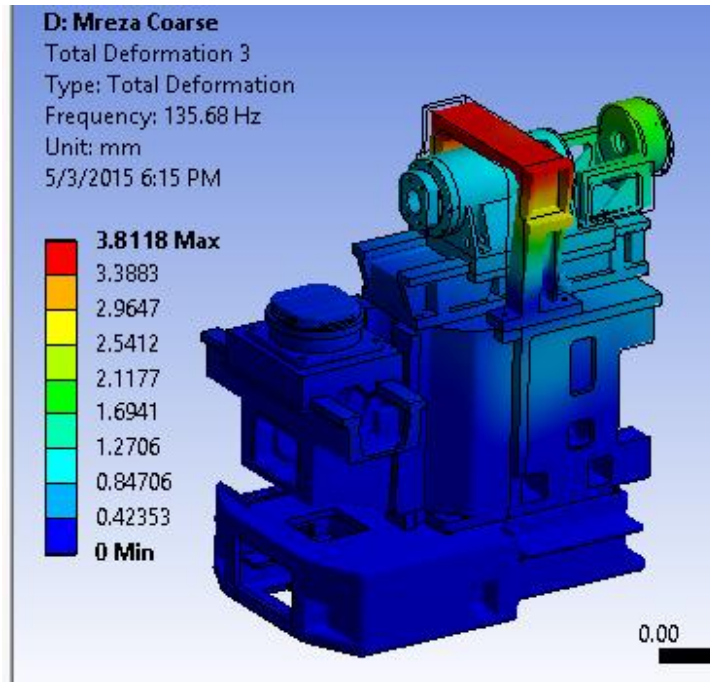
		Modul „Z“ ose povučen unazad 250 [mm]			Modul „Z“ ose naprijed		
		<i>Sizing - Smoothing</i>					
		<i>Medium</i>					
		<i>Size relevance center</i>					
		<i>Coarse</i>	<i>Medium</i>	<i>Fine</i>	<i>Coarse</i>	<i>Medium</i>	<i>Fine</i>
<i>Eksperimentalno dobijeni rezultati za modul „Z“ ose u zadnjem položaju</i>	Broj čvorova						
		263628	372732	400585	266796	376405	404917
	Broj elemenata						
		144135	201058	217313	145901	202719	219912
		Vrijeme procesiranja [min]					
		20,45	42,8	53,23	19,7	43	54
<i>Mod.</i>	<i>Hz</i>	<i>Hz</i>	<i>Hz</i>	<i>Hz</i>	<i>Hz</i>	<i>Hz</i>	<i>Hz</i>
1.	100.1	103. (2.90%)	101.76 (1.66%)	101.45 (1.35%)	105.81	104.36	104.17
2.	109.9	110.23 (0.3%)	109.13 (-0.70%)	109.03(-0.79%)	110.14	109.02	109.14
3.		135.68	132.14	131.97	137.80	134.53	134.43
4.	163.6	162.23 (-0.84%)	160.25 (-2.05%)	160.43 (-1.94%)	163.42	161.32	161.83

5.		179.58	174.23	175.21	178.83	175.25	177.05
6.	186,8	183.67 (-1.68%)	182.08 (-2.53%)	181.8 (-2.68%)	183.22	181.69	181.58
7.	224.6	223.06 (-0.69%)	215.66 (-3.98%)	216.52 (-3.60%)	219.92	213.97	215.55
8.	231.9	230.23 (-0.72%)	226.23 (-2.45%)	226.01 (-2.54%)	229.95	226.36	226.43
9.	261.2	265.42 (1.62%)	263.15 (0.75%)	262.73 (0.59%)	261.62	259.23	260.22
10.	305.2	307.2 (0.66%)	303.28 (-0.63%)	302.5 (-0.88%)	276.09	273.08	272.81
11.	361,3	364.12 (0.78%)	359.98 (-0.37%)	360.06 (-0.34%)	363.87	361.35	363.88
12.	361,3	365.41 (1.14%)	361.36 (0.02%)	360.41 (-0.25%)	391.2	386.35	385.84
13.		416.07	410.18	409.66	415.84	410.04	409.25
14.	454.1	460.12 (1.33%)	452.93 (-0.26%)	453.26 (-0.18%)	458.81	452.77	453.63
15.		467.81	460.42	453.43	471.95	460.61	457.19
16.		472.58	461.67	464.32	483.89	476.15	474.9
17.	473	501.03 (5.93%)	486.77 (2.91%)	480.65 (1.62%)	498.99	487.47	485.04
18.		532.5	516.84	510.2	537.1	519.88	512.4
19.	546	547.82 (0.33%)	536.62 (-1.72%)	537.72 (-1.52%)	557.61	551.56	551.94
20.	554,2	585.99 (5.74%)	580.32 (4.71%)	580.84 (4.81%)	562.54	558.43	560.23

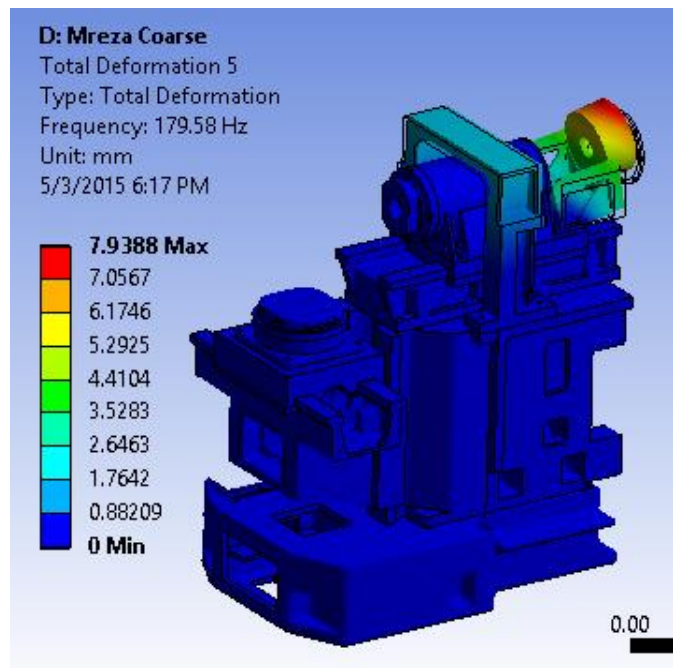
Tabela 6.2 Uporedni prikaz prvih dvadeset vrijednosti sopstvenih frekvencija oscilovanja modula Z ose za različita podešavanja gustine mreže konačnih elementa - nastavak

Modul „Z“ ose povučen unazad 250 [mm]										
Sizing – Smoothing - High										
Size relevance center - Fine										
Broj čvorova 1992651										
Broj elemenata 1179362										
Vrijeme procesiranja 11 h 54 min										
Mod	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eksperiment	100.1	109.9		163.6		186,8	224.6	231.9	261.2	305.2
MKE	100,6	107,8	130,8	153,4	173,9	180,3	224,3	-	258	297,7
%	0,5%	-1,9%	-	-6,23	-	-3,47	-0,13 %	-	-1,2%	-2,45
Mod	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Eksperiment	361,3	361,3		454.1			473		546	554,2
MKE	356,7	356,7	408,2	430,1	441,2	446,4	472,7	498,9	527,5	565,7
%	-1,4 %	-1,3 %	-	-5,3%	-	-	-0,06%	-	-3,4%	2,07%

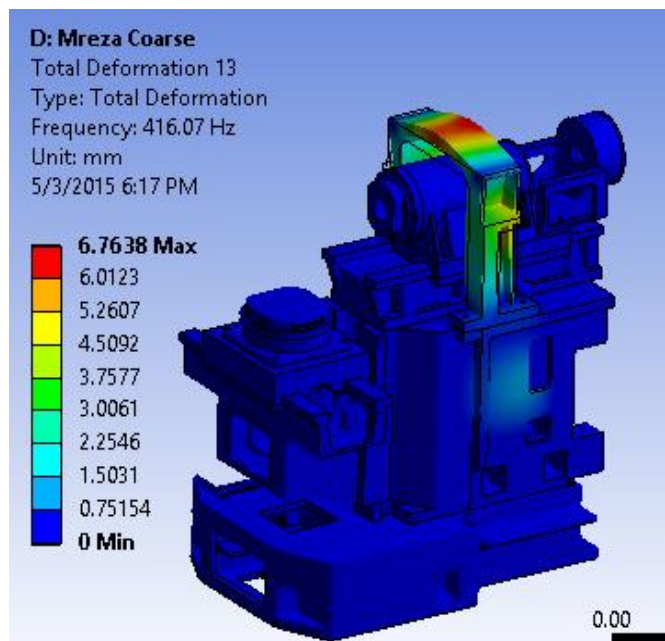
Kod modova oscilovanja 3,5,13,15,16 i 18 za rezultate dobijene primjenom metoda konačnih elemenata prikazane u tabeli 6.1. i tabeli 6.2. nema odgovarajućih rezultata određenih eksperimentalnim putem. Razlog za ovo je što se radi o sopstvenim frekvencijama oscilovanja pogonskog sistema za koji nisu izvršena mjerenja, Slika 6.4-6.6.



Slika 6.6 Frekvencija oscilovanja pogonskog sistema horizontalnog obradnog centra 135,68 Hz



Slika 6.7 Frekvencija oscilovanja pogonskog sistema horizontalnog obradnog centra 179,58 Hz

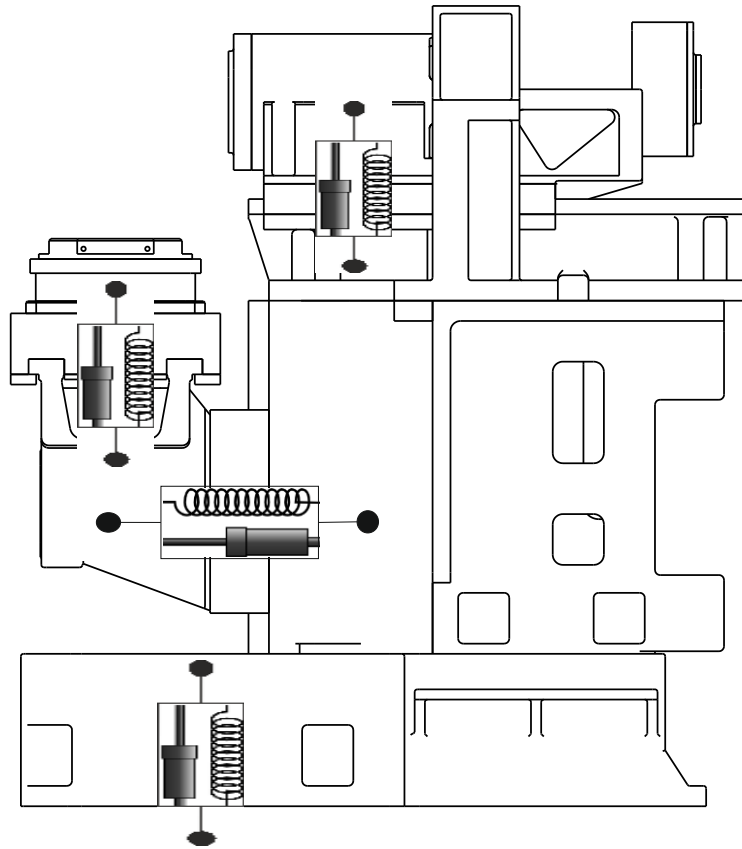


Slika 6.8 Frekvencija oscilovanja pogonskog sistema horizontalnog obradnog centra 416,07 Hz

6.2.3 Modelovanje mjesta spojeva primjenom metoda konačnih elemenata

Savremene metode za simulaciju mogu se grubo podijeliti na analizu primjenom metoda konačnih elemenata MKE (engl. Finite Element Method, FEM) i simulacije krutog tijela (RBS, engl. Rigid Body Simulation). Simulacija krutog tijela polazi od pretpostavke da su strukturalni dijelovi konstrukcije apsolutno kruti, te da je popustljivost koncentrisana samo u mjestima spojeva, Slika 7.5. Ovakav pristup može da ima uporište pri analizi konvencionalnih mašina alatki kod kojih dijelovi strukture imaju značajno veću krutost od mjesta spojeva. Međutim, kod savremenih mašina alatki, posebno mašina na bazi paralelne kinematike, kod kojih pokretni elementi moraju imati što manju masu kako bi postigla što veća ubrzanja (tzv. „*light weight*“, odnosno dizajn za lake konstrukcije) ovakav pristup pri izvođenju simulacija ne bi bio dovoljno tačan i može se koristiti samo za analize u fazi definisanja koncepcije.

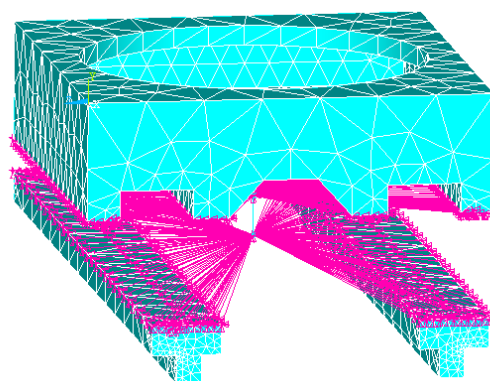
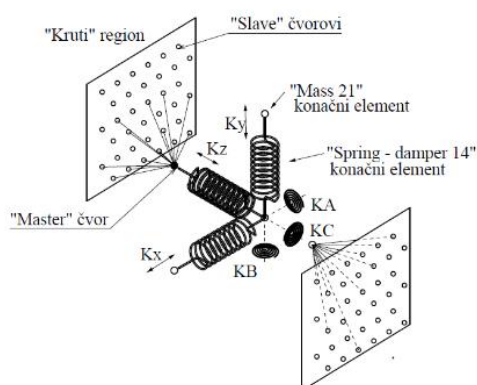
Pri analizi metodom konačnih elemenata, mjesta spoja također trebaju biti pažljivo analizirana i modelovana. Ovdje se razmatra način modelovanja mjesta spojeva horizontalnog obradnog centra pri analizi metodom konačnih elemenata. Kod mašina alatki spojevi se mogu klasifikovati u četiri grupe: sistemi linearnih vođica, kotrljajni ležajevi, zavojno vreteno sa navrtkom sa recirkulacijom kuglica i elementi za spajanje postolja mašine alatke sa temeljom.



Slika 6.9 RBS model horizontalnog obradnog centra

Modelovanje spojeva najprije podrazumijeva identifikovanje elemenata između kojih postoji kontakt, odnosno mjesta kojima se pri daljoj analizi dodijeljuju parametri krutosti i prigušenja, primjenog odgovarajućeg tipa konačnog elementa. Nakon toga u centru mase svakog od elemenata u spoju, u ovom slučaju klizača i vođica, generiše se čvor, koji se diskretizuje konačnim elementom tipa MASS21. Svaki od kreiranih konačnih elemenata se povezuje sa svim čvorovima koji se nalaze na površinama koje su u spoju (vođice i klizača), kreirajući pri tom tzv. „kruti region“ dok se između sebe čvorovi povezuju konačnim elementom COMBIN14.

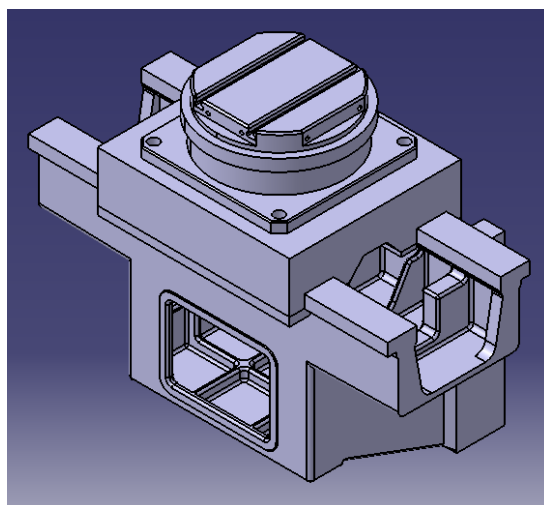
Na bazi izvršenih eksperimentalnih istraživanja Maglie [47] zaključuje da se pri izradi numeričkog modela linearnih vođica najbolji rezultati dobijaju ukoliko se oba elementa koji čine spoj posmatraju kao elastični sa standardnom vrijednosti modula elastičnosti, pri čemu širina „krutog regiona“ koji se kreira naredbom CERIG i čije ponašanje kontroliše master čvor kreiran u centru mase elementa, treba da bude jednaka dužina klizača. Sa druge strane pri modelovanju kotrljajnih ležajeva najbolji rezultati postižu definisanjem regiona primjenom ograničenja RBE3.



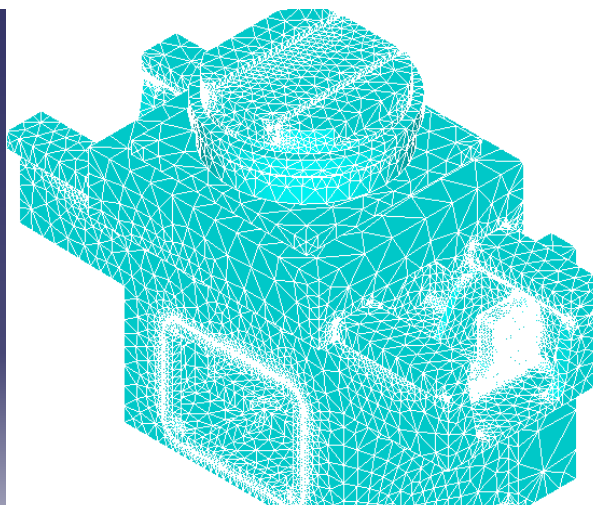
Slika 6.10 Simbolički prikaz implementacije spoja

Slika 6.11 Spoj između klizne vođice i klizača „X“ ose

Nadalje, geometrijski model mašine alatke dobijen primjenom CAD programskog sistema se „pojednostavljuje“, na način da se eliminišu svi dijelovi unutar sklopa koji nemaju značaj pri modalnoj analizi. Prema Maglie [37], čak 90% dijelova koji su sastavni dio modula kretanja X ose mogu se smatrati dijelovima koji nisu bitni za modalnu analizu i kao takvi mogu se zanemariti. Također, eliminišu se nepotrebne rupe i otvore, zaobljenja, radijusi, džepovi, druge složene površina i elementi za koje projektant smatra da nisu bitni za dalju analizu.



Slika 6.12 3D CAD model modula kretanja po „X“ osi



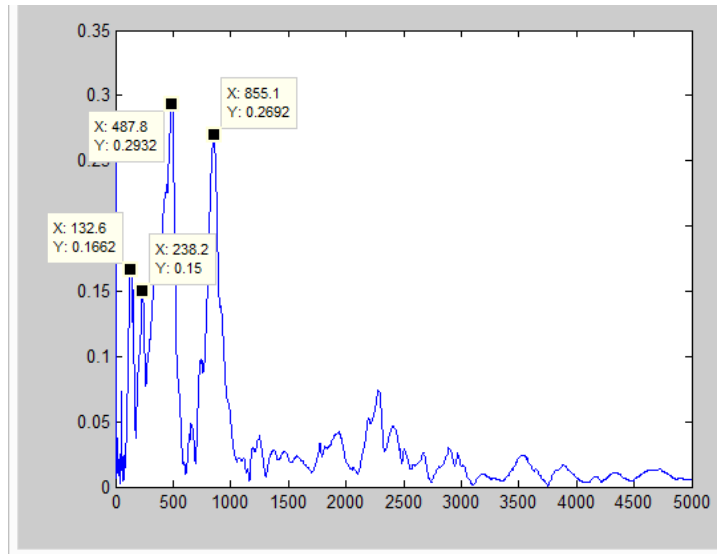
Slika 6.13 Diskretizovan „pojednostavljen“ modul kretanja po „X“ osi

6.2.4 Određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja sklopa glavnog vretena

Frekvencija oscilovanja sklopa glavnog vretena, je samo eksperimentalno određena. Na slici 6.10. prikazan je detalj ispitivanja glavnog vretena, a FFT prikazan na slici 6.11. U pravcu „X“ ose (u horizontalnom pravcu) mogu se uočiti sljedeće frekvencije koje odgovaraju sopstvenim frekvencijama sklopa glavnog vretena: 132,6 Hz, 238,2 Hz, 487,8 Hz, 855,1 Hz.



Slika 6.14 Mjerenje vibracija glavnog vretena



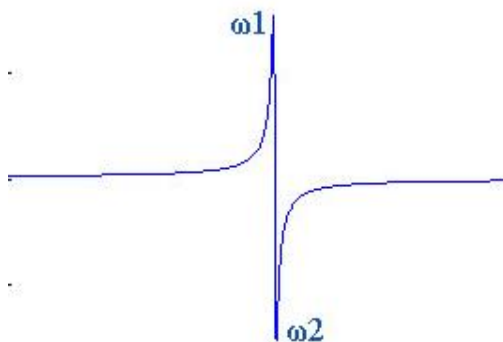
Slika 6.15 FFT odziva glavnog vretena

6.2.5 Određivanje sopstvenih frekvencija oscilovanja i prenosne funkcije alata

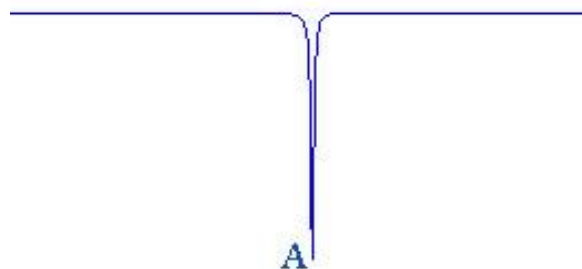
Modalni parametri alata određeni su eksperimentalnim putem, primjenom „*peak-picking*“ metode. Postupak određivanja modalnih parametara ovom metodom sastoji se u sljedećem: impulsna pobuda se nanese na objekat koji se ispituje i snimi realni i imaginarni dio prenosne funkcije. Za potrebe ovog istraživanja korišten je LabView 2013 softver. Vrijednost bezdimenzionog koeficijenta prigušenja ζ određuje se po obrazcu

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \cdot \omega_n} \quad (6.1)$$

gdje su ω_2 i ω_1 maksimum, odnosno minimum realnog dijela prenosne funkcije, slika 6.12, dok minimalna vrijednost imaginarnog dijela prenosne funkcije određuje sopstvenu frekvenciju oscilovanja ω_n , Slika 6.13.



Slika 6.16 Realni dio prenosne funkcije



Slika 6.17 Imaginarni dio prenosne funkcije

Modalna krutost se određuje kao

$$k = \frac{-1}{2 \cdot \zeta \cdot A} \quad (6.2)$$

pri čemu je A minimum imaginarnog dijela prenosne funkcije, slika 6.17.

Modalna masa se određuje prema obrazcu

$$m = \sqrt{\frac{k}{\omega_n^2}} \quad (6.3)$$

Pri određivanju prenosne funkcije treba imati u vidu da akcelerometar mjeri ubrzanje, a ne pomjeranje, te se za dobijanje FRF pomjeranja koristi sljedeća relacija:

$$\frac{X}{F} = -\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{A}{F} \quad (6.4)$$

Nakon što su određeni modalni parametri, realni, odnosno imaginarni dio prenosne funkcije se određuju primjenom obrazaca:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{X}{F}\right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2} \right) \quad (6.5)$$

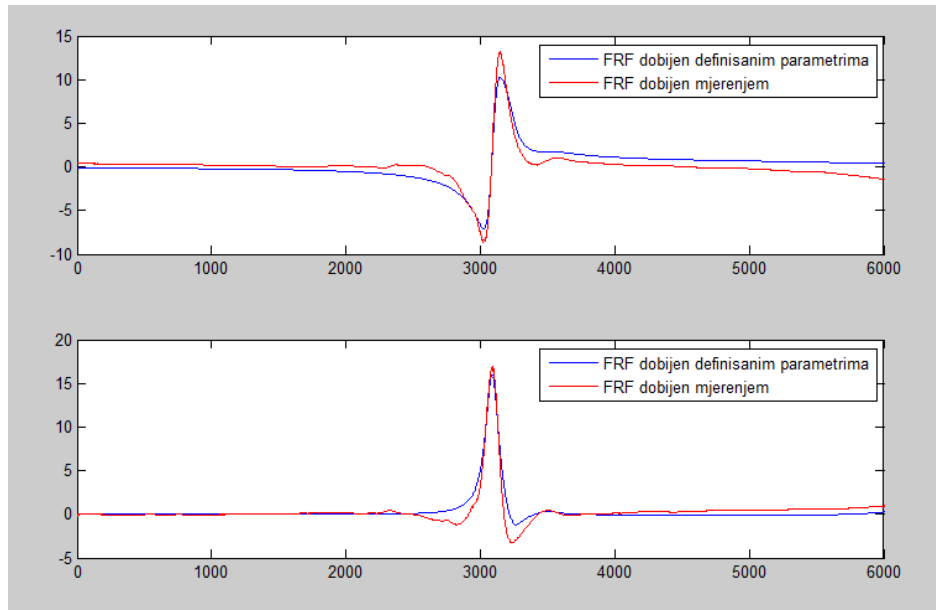
$$\operatorname{Im}\left(\frac{X}{F}\right) = \frac{1}{k} \left(\frac{-2 \cdot \zeta \cdot r}{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2} \right) \quad (6.6)$$

gdje je $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

Na slici 6.14. prikazan je detalj ispitivanja impulsnom pobudom alata (vretenasto glodalo $\Phi 10$) na mašini. Na slici 6.15. prikazan je realni i imaginarni dio prenosne funkcije dobijeni mjerenjem (signal crvene boje). Sopstvena frekvencija oscilovanja u ovom slučaju iznosi $\omega_n = 3089$ Hz, dok je bezdimenzioni koeficijent prigušenja $\zeta = 0,02$. Na osnovu identifikovanih modalnih parametara određena je prenosna funkcija, a mjereni signal rekonstuisan i prikazan je na slici 6.15 (plava boja).



Slika 6.18 Eksperimentalno određivanje modalnih parametara glodala $\Phi 10$



Slika 6.19 Prenosna funkcija određena eksperimentalno i na osnovu utvđenih modalnih parametara

U ovom poglavlju prikazano je korištenje numeričkih i eksperimentalnih metoda u cilju utvrđivanja sopstvenih frekvencija i oblika oscilovanja, kao i modalnih parametara (modalne mase, modalne krutosti i modalnog prigušenja) različitih komponenti horizontalnog obradnog centra za glodanje FM38. Obradni centar je modelovan u CATIA programskom sistemu, a MKE analiza izvršena u ANSYS-u. Sopstvene frekvencije dobijene MKE metodom i eksperimentalnim putem pokazuju zadovoljavajuće podudaranje. Također, prikazana je „*peak peaking*“ metodologija određivanja modalnih parametara na primjeru alata za glodanje. Na ovaj način određeni su modalni parametri komponenti čije vibracije dovode do pojave podrhtavanja (chater).

7 ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

U okviru disertacije prikazani su savremeni pristupi u projektovanju mašina alatki koji podrazumijevaju integrisanje različitih analiza u koncept koji se naziva virtualna mašina alatka. Primjena virtualnih mašina alatki u procesu projektovanja predstavlja put ka poboljšanju kvaliteta i skraćivanju vremena potrebnog za razvoj, uz istovremeno smanjenje troškova projektovanja. Predmet disertacije je modelovanje i evaluacija virtualnih prototipova mašina alatki i komponenata mehaničke strukture tokom različitih faza projektovanja. Virtualni prototip mašine alatke je računarski (digitalni) model na kome se izvode različite simulacije, testiranja, verifikacija, čime se skraćuje vrijeme razvoja mašine te istovremeno smanjuje broj realnih, fizičkih prototipova za eksperimentalno ispitivanje na samo jedan.

Istraživanja tokom izrade disertacije usmjerena su ka analizi postojećih metoda i procedura evaluacije virtualnih mašina alatki u računarskom projektantskom okruženju, analizi dinamičkog ponašanja mašina alatki sa posebnim osvrtom na sklop glavnog vretena, izradi virtualnog prototipa mašine alatke i verifikaciji tačnosti na izabranom primjeru glavnog vretena i horizontalnog obradnog centra za glodanje.

Jedan od ciljeva disertacije je transver digitalnog (računarskog) modela mašine alatke kroz različite faze procesa projektovanja, testiranja i optimizacije u računarskom okruženju. Ovakav koncept simulacije zahtjeva korištenje različitih softverskih alata kako bi se obuhvatile karakteristike svih komponenti, od „klasičnih“ CAD sistema, zatim alata za analizu metodom konačnih elemenata, MATLAB-a, softvera za akviziciju podataka...

Dio istraživanja prikazanih u okviru drugog poglavlja usmjeren je ka tehnicima redukcije reda modela. Naime, matematički model dobijen primjenom metoda konačnih elemenata može sadržavati veliki broj stepeni slobode čije vrijeme procesiranja ali i memorijski zahtjevi mogu predstavljati značajan problem, posebno u ranim fazama procesa projektovanja kada su česte izmjene projektovane strukture. U okviru ovog istraživanja prikazane su mogućnosti zamjene modela konačnih elemenata manje složenim modelom, odnosno modelom sa manjim brojem stepeni slobode, koji se naziva redukovani model, dok se sam postupak transformacije naziva redukcija reda modela (*Model Order Reduction*). Dobijeni redukovani model zadržava sve karakteristike originalog modela, prije svega dinamičko ponašanje. Nadalje, izvršeno je rangiranje uticaja svakog pojedinačnog oblika oscilovanja na osnovu jednog od kriterijuma: pojačanja na nultoj frekvenciji, odnosno pojačanja u maksimumu, ili kriterijuma osmotrivosti i upravljivosti, nakon čega su „suvišni“ oblici oscilovanja odbačeni, a najuticajniji zadržani. Na ovaj način dobijen je model u

prostoru stanja, manji od originalnog MKE modela, uz očuvanje njegovih dinamičkih karakteristika. Dobijen model može se dalje u Matlab okruženju koristiti za različita testiranja ili kao dio složenijih simulacionih modela.

Vibraciono ponašanje neke strukture može se osim analitički i numerički – primjenom metoda konačnih elemenata utvrditi i eksperimentalnim putem, odnosno izvođenjem eksperimentalne modalne analize koja može biti klasična eksperimentalna modalna analiza EMA ili operaciona modalna analiza OMA.

Osnove izvođenja eksperimentalne modalne analize prikazane su u trećem poglavlju. Tokom istraživanja prikazanih u disertaciji izvedeno je niz eksperimentalnih ispitivanja u cilju utvrđivanja modalnih parametara, koja su uglavnom služila za provjeru tačnosti razvijenih matematičkih i numeričkih modela. Eksperimentalna modalna analiza provodi se uz pretpostavku da se konstrukcija ponaša linarno, da je odziv konstrukcije proporcionalan nanesej pobudi, odnosno da su modalni parametri konstantni u vremenu. Primjenom eksperimentalne modalne analize određeni su modalni parametri različitih modela: grede konstantnog kružnog poprečnog presjeka, grede kružnog poprečnog presjeka sa prelazima, glavnog vretena jedinice pinole, te glavnog vretena i noseće strukture horizontalnog obradnog centra FM38.

U poglavljim 4 i 5. prikazan je analitički način određivanja modalnih parametara, odnosno prenosne funkcije primjenom Ojler – Bernulijeve teorije greda, uz uvažavanje činjenice da je za isto mogla biti primjenjena i Timošenkova teorija greda, koja uzima u obzir i uticaj tangenčnih napona.

S obzirom da su tokom istraživanja analizirani „vitki“ dijelovi kod kojih je uticaj tangenčnih napona mali, Ojler – Bernulijeva teorija greda daje, pogotovo na nižim sopstvenim frekvencijama, sasvim zadovoljavajuće rezultate. S tim u vezi se primjena Ojler – Bernulijeve teorije greda može smatrati opravdanom. Analitičkim određivanjem funkcije frekventnog odziva utvrđuju se osnovni dinamički parametri posmatrane konstrukcije, odnosno modalni parametri. Funkcija frekventnog odziva predstavlja odnos pomjeranja, brzine ili ubrzanja po jedinici ulazne veličine. Funkcija frekventnog odziva u okviru predstavljenih istraživanja određuje se analitički, te eksperimentalno mjerenjem sile pobude i odziva konstrukcije. U zavisnosti od izlazne varijable, odnosno od toga koja se veličina mjeri na izlazu, funkcija frekventnog odziva može imati oblik popustljivosti ili pomjeranja (prikazuje odnos pomjeranja i sile), oblik pokretljivosti (prikazuje odnos brzine i sile) i oblik inertnosti (prikazuje odnos ubrzanja i sile). U ovom istraživanju analitički određene funkcije frekventnog odziva imaju oblik popustljivosti (pomjeranja). Pri analitičkom određivanju modalnih parametara, sistem se posmatra kao više međusobno spregnutih podsistema konstantnog poprečnog presjeka. Veza između ovih podsistema može se smatrati krutom, fleksibilnom ili fleksibilnom sa viskoznim prigušenjem, što utiče na prenosnu funkciju. Ukupan odziv sistema određuje se kombinovanjem dobijenih odziva podsistema, primjenom metode pozicionog sprežanja. Ovaj prilaz uzima u obzir translatorna pomjeranja pri djelovanju transverzalnih sila, translatorna pomjeranja pri djelovanju momenta, ali i ugaona pomjeranja pri djelovanju transverzalne sile i momenta.

U okviru šestog poglavlja rezultati modalne analize dobijene numerički su eksperimentalno provjereni na primjeru horizontalnog obradnog centra za glodanje FM38. Pri tome su analizirani različiti načini modlovanja mjesta spojeva na modalne parametre.

Modalni parametri dobijeni primenom analitičkih, numeričkih i eksperimentalnih metoda pokazali su dobro slaganje modalnih parametara.

LITERATURA

- [1] Abele E., Altintas Y., Brecher C.: Machine tool spindle units, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59, 781–802, 2010.
- [2] Abele, E., Fredler, V.: Creating stability lobe diagrams during milling, *CIRP Annals-Manufacturing Technology* Vol 53, Issue 1, ISSN: 0007-8506, 2004, Pages 309-312.
- [3] Ast A., Braun S., Eberhard P., Heisel U.: Adaptronic Vibration Damping for Machine Tools, *Annals of the CIRP* Vol. 56/1, 379-382, 2007.
- [4] Altintas Y, Brecher C, Weck M, Witt S.: Virtual machine tool, *CIRP Annals-Manufacturing Technology* 54/2, 115-138, 2005.
- [5] Altintas, Y., Budak, E., Analytical prediction of stability lobes in milling, *Annals of the CIRP* 44 (1995), 357-362
- [6] Altintas, Y, Cao Y, Virtual Design and Optimization of Machine Tool Spindles, *Annals of the CIRP*, 54/1, 2005.
- [7] Altintas Y., Verl A., Brecher C., Uriarte L., Pritschow G.: Machine tool feed drives, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 60, 779–796, 2011.
- [8] Assefa, M.: Modal Analysis of Machine Tool Column Using Finite Element Method, *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial and Mechatronics Engineering*, Vol:7, No:4, 2013.
- [9] Bamberg E.: Principles of Rapid Machine Design, Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [10] Biermann D., Kersting P., Surmann T.: A general approach to simulating workpiece vibrations during five-axis milling of turbine blades, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59, 125–128, 2010.
- [11] Bossoni S.: Geometric and Dynamic Evaluation and Optimization of Machining Centers, Diss. ETH No. 18382, ETH ZURICH, 2009.
- [12] Brecher C., Esser, M., Witt S.: Interaction of manufacturing process and machine tool, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 58, 588–607, 2009.

- [13] Brecher C., Spachtholz G., Paepenmüller F.: Developments for High Performance Machine Tool Spindles, *Annals of the CIRP Vol. 56/1*, 395-399, 2007.
- [14] Bringmann B.: Improving Geometric Calibration Methods for Multi-Axis Machining Centers by Examining Error Interdependencies Effects, Diss. ETH No. 17266, ETH ZURICH, 2007.
- [15] Budak E., Tunc L.T, Alan S, Özgüven H. N: Prediction of workpiece dynamics and its effects on chatter stability in milling, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 61, 339–342, 2012.
- [16] Budak E., Ozturk E., Tunc L.T.: Modeling and simulation of 5-axis milling processes, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 58, 347–350, 2009.
- [17] Budak E., Ozturk E.: Dynamics and stability of parallel turning operations, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 60, 383–386, 2011.
- [18] Budak E., Tunc L.T.: Identification and modeling of process damping in turning and milling using a new approach, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59, 403–408, 2010.
- [19] Budak E., Ozlu E.: Analytical Modeling of Chatter Stability in Turning and Boring Operations: A Multi-Dimensional Approach, *Annals of the CIRP Vol. 56/1*, 401-404, 2007.
- [20] Cheng K: *Machining Dynamics, Fundamentals, Applications and Practices*, Springer, 2009.
- [21] Čiča Đ.: Modeliranje dinamičkog ponašanja sistema glavno vreteno - držač alata - alat, Doktorska disertacija, Univerzitet u Banja Luci, Mašinski fakultet Banja Luka, 2009.
- [22] Doleček V., Voloder A., Isić S.: *Vibracije*, Mašinski fakultet, Sarajevo, 2009.
- [23] Dölen M.: Modeling and estimation by structured neural networks for CNC machine tools, Dissertation, University of Wisconsin - Madison, 2000.
- [24] Eppel A., Enikov E. T., Insperger T., Gabor S.: Feasibility study of optical detection of chatter vibration during milling, *International Journal of Optomechatronics*, 4: 195–214, 2010.
- [25] Ertürk, A., Özgüven, H.N, Budak, E.: Analytical modeling of spindle – tool dynamics on machine tools using Timoshenok beam model and receptance coupling for the prediction of tool point FRF, *International Journal of Machine Tools & Manufacturing* 46 (2006) 1901-1912
- [26] Gatalo R, Navalusić S, Zeljković M, Milojević Z, Megađa I, Košarac A.: Virtualna realnost - novi prilaz u projektovanju i proizvodnji, *Infoteh - Jahorina*, Vol. 5, Ref.. C-6, p.184-188, 2006.
- [27] Ghiotti A., Regazzo P., Bruschi S., Bariani P.F.: Reduction of vibrations in blanking by MR dampers, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59 275–278, 2010.
- [28] Harris, C.,M., Piersol, A.,G., *Harris' Shock and Vibration Handbook*, Fifth Edition, McGraw-Hill, 2002.

- [29] Hendriks F.B.J.W.M.: Chatter detection in high-speed milling, TUE opleiding Werktuigbouwkunde, Reportnr. DCT 2005.62, Eindhoven, 2005.
- [30] Hesselbach J., Hoffmeister H.-W., Schuller B.-C., Loeis K.: Development of an active clamping system for noise and vibration reduction, CIRP Annals - Manufacturing Technology 59, 395–398, 2010.
- [31] Huang, D. T., Lee, J. J.: On obtaining machine tool stiffness by CAE techniques, International Journal of Machine Tools & Manufacturing 41, 1149-1163, 2001.
- [32] Kakinuma Y., Sudo Y., Aoyama T.: Detection of chatter vibration in end milling applying disturbance observer, CIRP Annals - Manufacturing Technology 60, Vol. 29/1, Pages 109–112, 2011.
- [33] Kamalzadeh A., Erkorkmaz K.: Compensation of Axial Vibrations in Ball Screw Drives, Annals of the CIRP Vol. 56/1, 373-378, 2007.
- [34] Košarac A.: Automatizacija projektovanja i vizuelizacija rada fleksibilnih tehnoloških struktura, magistarski rad, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka Novi Sad, 2010.
- [35] Košarac, A., Zeljković, M., Mladenović, C., Živković, A.: Numerical-experimental identification of a working unit module dynamic characteristics, VIII International Conference „Heavy Machinery-HM 2014“, Zlatibor, 25-28 June 2014.
- [36] Košarac, A., Zeljković, M., Mladenović, C., Živković, A.: Određivanje frekvencijskih karakteristika sklopa glavnog vretena mašine alatke primjenom Ojler – Bernulijeve teorije greda i pozicionog sprežanja, INFOTEH-JAHORINA Vol. 15, Mart 2016.
- [37] Košarac A., Zeljković M., Mladenović, C. Živković, A., Prodanović S.: State space modeling from FEM model using balanced reduction, V International Conference Industrial Engineering and Environmental Protection 2015 (IIZS 2015), October 15 th -16th, 2015, Zrenjanin, Serbia
- [38] Košarac, A., Zeljković M., Mladenović, C., Živković, A.: Create SISO state space model of main spindle from ANSYS model, 12th International Scientific Conference, Novi Sad, Serbia, September 25-26, 2015, p.p.37-41
- [39] Košarac A., Zeljković, M., Mladenović, C., Živković, A.: Modal analysis of a horizontal machining center, 12. Međunarodna konferencija o dostignućima elektrotehnike, mašinstva i inforamtike, DEMI 2015.
- [40] Košarac A., Mladenović C., Živković A., Eksperimentalno - analitički metod za definisanje karte stabilnosti pri obradi struganjem, INFOTEH-JAHORINA Vol. 13, p. 589-594, March 2014.
- [41] Košarac A., Zeljković M., Mladenović C., Živković A., Identifikacija samoizvanih vibracija pri obradi struganjem primenom savremene dijagnostičke opreme, IMK-14 – Istraživanje i razvoj u teškoj mašinogradnji, 19(2013)4, UDC 621 ISSN 0354-6829
- [42] Kucharski T., Kalinski K.: An experimental detection and suppression of chatter vibration in modern milling machines, Technical University of Gdansk, Department of Mechanical Engineering, Narutowicza, 80-952 Gdansk, Poland, 2012.

- [43] Law, M.: Position - dependent dynamics and stability of machine tools, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy, The University of British Columbia, 2013.
- [44] Law, M., Ihlenfeldt, S.: A frequency - based substructuring approach to efficiently model position - dependent dynamics in machine tools, Journal of Multy - body dynamics, 2014.
- [45] López de Lacalle L.N., Lamikiz A.: Machine Tools for High Performance Machining, Springer, 2009.
- [46] Luo H., Liu Y., Wang H., Zhou W.: Nonlinear Vibration Analysis of Machine-Tool Guideway System with Clearance, Advanced Engineering Forum Vols. 2-3, pp 661-666, 2012.
- [47] Maglie P.: Parallelization of Design and Simulation: Virtual Machine Tools in Real Product Development, Dissertation ETH No. 19801, 2012.
- [48] Maglie P., Carbini R., Weikert S., Wegener K.: Efficient evaluation of machine concepts under hysteresis and inertia influences, Proceedings of the euspen International Conference – Delft , 2010.
- [49] Malleswara S, B., Sunil Ratna K, K.(2012): Design and structural analysis of CNC vertical milling machine bed, Swaami et al, International Journal of Advanced Engineering Tehnology, IJAET/Vol.III/Issue IV/Oct-Dec., 2012/97-100.
- [50] Maia, Silva, He,Lieven, Lin, Skingle, To, Urgueira:Teoretical and Experimental Modal Analysis, Research Studies Press LTD, 1997.
- [51] Milojević, Z.: Sisetm za vizuelizaciju radnog prostora mašina alatki u realnom vremenu, Doktorska disertacije, Univerzitet u Novom sadu, Fakultet tehničkih nauak, Novi Sad, 2008.
- [52] Mladenović, C., Zeljković, M., Košarac, A., Živković, A.:ANALITIČKO DEFINISANJE KARTE STABILNOSTI OBRADNIH SISTEMA, Journal of Production Engineering, JPE(2015) Vol.18(1), pp. 47-50.
- [53] Möhring H.-C., Litwinski, K.M., Gümmer O.: Process monitoring with sensory machine tool components, CIRP Annals - Manufacturing Technology 59 383–386, 2010.
- [54] Oertli T.: Strukturmechanische Berechnung und Regelungssimulation von Werkzeugmaschinen mit elektromechanischen Vorschubantrieben, Diss., München, Techn. Univ, 2008.
- [55] Özgüven, H.N.: Structural modification using frequency response functions, Mechanical Systems and Signal Processing 4 (1) (1990) 53-63
- [56] Palpandian P, Prabhu Raja V, Satish Babu S.: Stability Lobe Diagram for High Speed Machining Processes: Comparison of Experimental and Analytical Methods – A Review, International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, Vol. 2, Issue 3, 2013.

- [57] Park S.S., Rahnama R.: Robust chatter stability in micro-milling operations, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59, 391–394, 2010.
- [58] Patwari, A.U., Faris, W.F., Nurul Amin, A.K.M., Loh, S.K. (2009): Dynamic modal analysis of vertical machining centre components, Hindawe Publishing Corporation *Advances in Acoustics and Vibration*, Article ID 508076, Volume 2009.
- [59] Pakzad, S., Khani Sheykh Rajab, A., Mahboubkhah, M., Etefagh, M.M., Masoudi, O. (2012): Modal analysis of the surface grinding machine structure through FEM and experimental test, *Advanced Materials Research Vols. 566*, pp. 353-356.
- [60] Pedrammehr, S., Farrokhi, H., Khani Sheykh Rajab, A., Pakzad, S., Mahboubkhah, M., Etefagh, M.M., Sadeghi, M.H. (2012): Modal analysis of the milling machine structure through fem and experimental test, *Advanced Materials Research Vols. 383-390*, pp. 6717-672.
- [61] Schmitz T.L., I Smith K. S.: *Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity*, Springer, 2009.
- [62] Schmitz, T., Smith, K., S., *Mechanical Vibrations Modeling and Measurement*, Springer, 2012
- [63] Siedl D.: *Simulation des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen während Verfahrbewegungen*, Diss., München, Techn. Univ., 2008.
- [64] Shamoto E., Fujimaki S., Sencer B., Suzuki N., Kato T., Hino R.: A novel tool path/posture optimization concept to avoid chatter vibration in machining – Proposed concept and its verification in turning, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 61, 331–334, 2012.
- [65] Shamoto E., Akazawa K.: Analytical prediction of chatter stability in ball end milling with tool inclination, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 58 351–354, 2009.
- [66] Shimana K., Kondo E., Karashima H., Kawagoishi N.: Fast Detection of Chatter in End-Milling Using Pseudo Auto-Correlation Function, *Int. J. of Automation Technology* Vol.6, 2012.
- [67] Stepan G., Dombovari Z., Muñoa J.: Identification of cutting force characteristics based on chatter experiments, *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 60, 113–116, 2011.
- [68] Siddhpura M., Paurobally R.: *Experimental Investigation of Chatter Vibrations in Facing and Turning Processes*, World Academy of Science, Engineering and Technology 78, 2013.
- [69] Smirnova T.: *Analysis, Modeling and Simulation of Machine Tool Parts Dynamics for Active Control of Tool Vibration*, Blekinge Institute of Technology Sweden, Doctoral Dissertation Series No. 2010:08
- [70] Swami, B., M, Kumar, K.S.R.: Design and structural analysis of CNC vertical milling machine bed, *International Journal of Advanced Engineerign Technology, IJAET/Vol.III/Issue IV/Oct.-Dec., 2012/97-100*

- [71] Tlustý, J., Poláček, M.: The stability of machine tools against self excited vibrations in machining, in: Proceedings of the International Research in Production Engineering Conference, Pittsburgh, PA, ASME, New York, 1963, pp. 465–474.
- [72] Tobias, S.A., Fishwick, W.: The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions, Transactions of ASME 80 (1958) 1079–1088.
- [73] Vandendorpe A.: Model Reduction of Linear Systems, an Interpolation point of View; Université Catholique De Louvain; Faculté des sciences appliquées; Département d'ingénierie mathématique Center for Systems Engineering and Applied Mechanics, 2004.
- [74] Vesely, J., Sulitka, M.: Machine Tool Virtual Model, MM Science Journal, December 2009, 146-151.
- [75] Xia Y.: Experimental implementation of artificial neural network-based active vibration control & chatter suppression, Theses and dissertations, Ryerson University, 2010.
- [76] Weikert S.: Beitrag zur analyse des dynamischen verhaltens von werkzeugmaschinen, diss. eth nr. 13596, Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, 2000.
- [77] Zaeh M., Siedl D.: A New Method for Simulation of Machining Performance by Integrating Finite Element and Multi-body Simulation for Machine Tools, Annals of the CIRP Vol. 56/1, 383-386, 2007.
- [78] Zaeh M., Oertli Th.: Finite Element Modelling of Ball Screw Feed Drive Systems, Annals of the CIRP, 53/1: 289-292, 2004.
- [79] Zhang, G.P., Huang, Y. M., Shi, W. H., Fu, W. P.: Predicting dynamic behaviour of a whole machine tool structure based on computer-aided engineering, International Journal of Machine Tools & Manufacture 43, 699-706, 2003.
- [80] Zeljković M.: Sistem za automatizovano projektovanje i predikciju ponašanja sklopa glavnog vretena mašina alatki, Doktorska disertacija, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1996.
- [81] Zeljković M., Borojev Lj., Gatalo R., Rekecki J.: Experimental identification of the high-speed machine tool spindle static and dynamic behavior under thermal influence, DMC 98-2nd International conference on development of metal cutting, Proceedings, ISBN 80-7099-35209, Košice, Pages ANX 17-ANX 24, 1998.
- [82] Zeljković M., Gatalo, R.: Experimental and computer aided analysis of high-speed spindle assembly behavior, CIRP Annals - Manufacturing Technology, ISSN: 0007-8506 Vol. 48/1, Pages 325–328, 1999.
- [83] Zeljković M., Živković A., Borojev Lj., Navalusić S.: The application of CAE for high speed main spindle assembly analysis, Proceedings, The 5th international conference of advanced manufacturing technologies - ICMaT 2007, Rumunija, pp.: 77- 84, ISBN: 1843-3162, 2007.
- [84] Zeljković M., Živković A., Borojev Lj.: Thermal-elastic behaviour numerical analysis of the high speed main spindle assembly, Proceedings, The Sixth Triennial

- International Conference, Heavy machinery HM 2008, Kraljevo, 2008, Pages E57-E62, ISBN: 978-86-82631-45-3.
- [85] Zeljković M., Živković A., Borojev Lj., Gatalo R.: Modeliranje toplotnog ponašanja sklopa glavnog vretena primenom metode konačnih elemeneta, Zbornik radova, Naučno-stručni simpozijum Informacione Tehnologije, Jahorina, 2005., str.134-138, ISBN 99938-624-2-8
- [86] Živanović S.: Konfigurisanje novih mašina alatki, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet, 2010.
- [87] Živković A.: Računarska i eksperimentalna analiza ponašanja kugličnih ležaja za specijalne namene, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, 2013.
- [88] Živković A.: Eksperimentalna i računarska analiza toplotno elastičnog ponašanja sklopa visokobrzinskog glavnog vretena mašina alatki, Magistarska teza, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2007.
- [89] Živković A., Zeljković M., Borojev Lj.: Uticaj toplotnog prednaprežanja ležišta na krutost sklopa glavnog vretena, Zbornik radova, 32. Savetovanja proizvodnog mašinstva Srbije sa međunarodnim učešćem, Novi Sad, 2008., str. 409-412, ISBN 978-86-7892-131-5
- [90] Živković A., Zeljković M., Borojev Lj.: Eksperimentalno ispitivanje toplotno-elastičnog ponašanja sklopa visokobrzinskog glavnog vretena, Zbornik radova - CD ROM, 34. JUPITER konferencija, 30. simpozijum NU-ROBOTI-FTS, Beograd, 2008, str. 3.13-3.18, ISBN 978-86-7083-628-0.

PRILOZI

Zasebnu cjelinu predstavljaju prilozi i nalaze se u Laboratoriji za mašine alatke, fleksibilne tehnološke sisteme i automatizaciju postupaka projektovnja, Departmana za proizvodno mašinstvo, Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu. Prilozi su podijeljeni u tri dijela.

Prvi dio čine eksperimentalna mjerenja (LabView fajlovi) pri utvrđivanju modalnih parametara:

- Grede konstantnog poprečnog presjeka,
- Grede promjenjivog poprečnog presjeka,
- Slobodno oslonjenog glavnog vretena jedinice pinole,
- Slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena jedinice pinole,
- Jedinice pinole (sa montiranim glavnim vretenom),
- Eksperimentalna mjerenja izvedena pri utvrđivanju modalnih parametara horizontalnog obradnog centra FM38 (noseće strukture, glavnog vretena sa alatom, glavnog vretena sa nosačem alata i glavnog vretena bez nosača alata).

Drugi dio čine rezultati numeričke analize (primjenom različitih tipova konačnih elemenata):

- Grede konstantnog poprečnog presjeka,
 - Grede promjenjivog poprečnog presjeka,
 - Slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena,
 - Slobodno oslonjenog glavnog vretena jednice pinole,
 - Oslonjenog glavnog vretena jedinice pinole,
 - Numeričke analize horizontalnog obradnog centra FM38.
-

Treći dio čini lista skripti napisanih u Matalabu za utvrđivanje modalnih parametara na osnovu izvedenih eksperimenata:

- Grede konstantnog poprečnog presjeka,
- Grede promjenjivog poprečnog presjeka,
- Slobodno oslonjenog glavnog vretena jedinice pinole,
- Slobodno oslonjenog sklopa glavnog vretena jedinice pinole,
- Jedinice pinole (sa montiranim glavnim vretenom),
- Noseće strukture FM38 horizontalnog obradnog centra,
- Glavnog vretena (sa i bez alata u drzaču alata) FM38 obadnog centra,
- Skripte za određivanje prenosne funkcije primjenom Ojler – Bernulijeve teorije greda i metode pozicionog sprežanja grede konstantnog poprečnog presjeka, grede promjenjivog poprečnog presjeka, slobodno oslonjenog glavnog vretena i sklopa glavnog vretena jedinice pinole.
- Skripte za redukciju reda modela – poglavlje 2 – kriterijum pojačanja na nultoj frekvenciji i pojačanja u maksimumu, kriterijum balansirane redukcija

**CURRICULUM VITAE
ALEKSANDAR KOŠARAC**

Adresa stanovanja:

Dabrobosanska 22/18
71123 Istočno Sarajevo
GSM ++ 387 65 626 549
e-mail: akosarac@gmail.com

LIČNI PODACI

Datum rođenja: 01/10/75
Državljanstvo: BiH
Mjesto rođenja: Sarajevo
Pol: M
Bračni status: Oženjen, dvoje djece

OBRAZOVANJE:

- 1989 – 1994. Srednja elektrotehnička škola
- 1994-2000. Univerzitet Srpsko Sarajevo / Mašinski fakultet
- 2010. god. Magistrirao na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu

RADNO ISKUSTVO

- Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Mašinski fakultet
Istočno Sarajevo, Viši asistent Decembar 2010 -
- NN d.o.o Konjic, Rukovodilac operativne
pripreme, planiranja i izrade alata na CNC mašinima Januar 2016 -
- Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Mašinski fakultet
Istočno Sarajevo, Stručni saradnik Mart 2009-Decembar 2010
- Univerzitet u Istočnom Sarajevu, Mašinski fakultet
Istočno Sarajevo, Sistem inženjer Novembar 2008-Mart 2009
- Ministarstvo bezbjednosti BiH, Šef odsjeka za razvoj i
održavanje mreža, mrežne opreme i
telekomunikacije April 2005-Novembar 2008
- Ministarstvo bezbjednosti BiH, Šef odsjeka za
koordinaciju i razvoj informatičkih sistema, Jun2004 – april 2005
- Direkcija za evropske integracije BiH, Stručni savjetnik
u Sektoru za koordnaciju pomoći, Decembar 2003-jun 2004

- Ministarstvo za evropske integracije BiH Šef odsjeka za koordinaciju programa pomoći u obrazovanju, Septembar 2002-decembar 2003
- Ministarstvo za evropske integracije BiH Stručni savjetnik u Kabinetu ministra Februar 2002 – septembar 2002
- Mašinski fakultet Srpsko Sarajevo, asistent Oktobar 2000-2004. god.

STRUČNO USAVRŠAVANJE – OBLAST INFORMATIKA I PROGRAMIRANJE

- United States Department of Justice – International Criminal Investigate Training Assistance Program (ICITAP) – Basic Network Administration Course (LPIC1) in accordance with the standards and procedures defined by the Linux Professional Institute, BiH, 2004.
- US Department of Justice – International Criminal Investigate Training Assistance Program (ICITAP) – Introduction to Oracle Administration, BiH, 2004.
- i2 iBase&iBridge Developer Course, BiH, 2005.
- Introduction to Oracle: SQL and PL/SQL, Oracle University Course, BiH, 2005.
- Oracle9i: Forms & Reports Developer Workshop, Oracle University Course, BiH, 2005.
- Operation and Maintenance NERA Radio/Link systems, CityLink, BiH, 2006.
- United States Department of Justice – International Criminal Investigate Training Assistance Program (ICITAP) – SPIN network administrations training, BiH, 2007.
- Upravljanje sigurnošću elektronskih informacija i informacionih sistema, Agencija za državnu službu BiH – CEDES.ba, 2007.
- Public Key Infrastructure, Design and Implementation, ADS BiH– CEDES.ba, 2008.
- Implementacija sistema bezbednosti informacija (ISO 27001) u poslovne i IT sisteme, BSi Management System, 2008.
- CNC Programming Sinumerik 840D / Fanuc21, Certificate EMCO Training, 2012

Učešće na projektima:

- Improvement of product development studies in Serbia and Bosnia and Herzegovina 530577-TEMPUS-1-2012-1-RS-TEMPUS-JPCR
- Training courses for public services in sustainable infrastructure development in Western Balkan, 543898-TEMPUS-1-2013-1-ES-TEMPUS-JPHES
- Program in Higher Education, Research and Development (HERD) 2010-2013
- Quality Improvement of Master programs in Sustainable Energy and Environment QIMSEE

ZNANJE JEZIKA

Engleski	Pisanje: Tečno	Komunikacija: Tečno
----------	-------------------	------------------------