

**Наставно-научном већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду**

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета у Универзитета у Београду, донетом на 315. седници која је одржана 20.06.2014. године, именовани смо у комисију за преглед и оцену рукописа „**Конвејева нотација у теорији чворова и њена примена у методама за одређивање растојања чворова**“ који је предат као докторска дисертација **Ане Зековић**, дипломираног математичара. Комисија је предати рукопис пажљиво прочитала и након консултација подноси следећи

## **Извештај**

### **1. Биографија кандидата**

Ана Зековић је рођена 11.03.1982. у Београду. Завршила је Математичку гимназију у истом граду, а затим дипломирала 2007. на Математичком факултету Универзитета у Београду, на Катедри за рачунарство и информатику. Након тога је уписала мастер студије организоване у сарадњи Економског факултета Универзитета у Београду и НЕС Paris и одбранила мастер рад француске школе школске 2008/2009 године. Исте године уписује докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду.

Ана Зековић је радила као сарадник у настави у Вишој електротехничкој школи у Београду школске 2003/2004, као сарадник у настави на Математичком факултету Универзитета у Београду школске 2007/2008 и 2008/2009, а од школске 2010/2011 ангажована је као хонорарни професор Математичке гимназије у Београду. Од јануара 2011. до новембра 2014. била је запослена на Математичком факултету у Београду као истраживач приправник – сарадник на пројекту Геометрија, образовање и визуелизација са применама. Од новембра 2014. ради као асистент на Технолошко-Металуршком факултету у Београду, на Катедри за математичке науке.

Након уписа докторских студија на Математичком факултету у Београду, положила је све испите предвиђене планом и програмом докторских студија са просечном оценом 10,00.

### **2. Проблем и садржај тезе**

Главни садржај овог рада је конструкција нових метода за одређивање различитих типова дистанци чворова – Гордијевих дистанци чворова и дистанци чворова насталих заравњивањем. Применом ових метода, добијени су нови резултати који се претежно односе на чворове чија је дистанца 1 и који представљају основу за одређивање свих осталих дистанци чворова. Одговарајући резултати представљени су у новим таблицама дистанци.

Уводно поглавље рукописа садржи кратак опис појмова из основа теорије чворова неопходних за разумевање садржаја који следи. Детаљније су описане различите нотације чворова, а посебан акценат је постављен на Конвејеву нотацију и њена тополошка својства.

У другом поглављу представљени су различити начини приказивања чворова, а посебно модел огледалских кривих. Приказана је примена овог модела, кодирање чворова у њему, уведен метод за одређивање чвора представљеног овим моделом и изведени сви чворови који могу бити смештени у мреже димензија  $p \times q$  ( $p \leq 4$ ,  $q \leq 4$ ).

У трећем поглављу разматрана су, поред Гордијевих растојања (растојања чворова добијених променом пресека), растојања чворова настала заравњивањем и нови начини за њихово одређивање. У постојећим таблицама Гордијевих растојања, за чворове који садрже највише 10 пресека, презентоване су конкретне вредности удаљености за неке чворове, док је за остале наведен интервал у којем се очекује вредност дистанце. У досадашњим таблицама је изостављен велики број чворова који нису рационални, јер су се сви постојећи алгоритми заснивали на алгебри верижних разломака примењивој само на рационалне чворове. У овом поглављу описани су методи чија је основа одређивање нових дистанци једнаких 1. Ови методи заснивају се на неминималним презентацијама чворова, генерисању алгоритама базираних на геометријским својствима Конвејеве нотације и претрази тежинског графа растојања. На тај начин, потврђена је већина досадашњих прорачуна за конкретне вредности, указано је на неопходне модификације већ постојећих резултата, презентована су нова растојања и интервали. Описан је и метод за проширивање резултата на фамилије чворова који пружа могућност за касније проширивање таблица (на чворове са већим бројем пресека) предложеним алгоритмима. Упореджена је промена на чворовима, која се испитује у овом поглављу, са акцијама ензима топоизомераза на ланцима ДНК. Показано је да се резултати наведени у овом поглављу могу користити за изучавање акција ових ензима на ланцима ДНК.

У четвртном поглављу разматрани су:  $s$ -број одвезивости (број одвезивости заравњивањем пресека) и  $s$ -растојања (растојања чворова настала заравњивањем). Абе и Каненобу су презентовали таблице чворова до 9 пресека који имају  $s$ -број одвезивости једнак 1 и објавили таблице дистанци чворова насталих заравњивањем за чворове до 7 пресека. У овом поглављу представљени су нови методи за одређивање  $s$ -растојања који се заснивају на уоченој релацији између Гордијевих бројева и  $s$ -бројева одвезивости. Резултати су упоређени са досадашњим и представљени у проширеним таблицама чворова до 11 пресека. Поред тога, таблице  $s$ -растојања су, применом наведених метода, проширене са чворова који имају највише 7 пресека на чворове са највише 9 пресека. Рекомбиназе су протеини који пресецају ланац ДНК на два места и узрокују промене као што су брисање/уметање, инверзија, транслокације и касетна размена. Описан је начин моделовања оваквих промена заравњивањем пресека чвора и изложен начин за изучавање акција рекомбиназа помоћу дистанци насталих заравњивањем пресека.

Сви методи, који представљају допринос овог рада, заснивају се на својствима Конвејеве нотације. Због тога је у петом поглављу предложен метод извођења нових чворова у Конвејевој нотацији проширивањем  $S$ -линкова. Због недостатка адекватног обрасца у формирању досадашњих таблица чворова, у њима не постоји уређење засновано на тополошким својствима чворова, него само уређење које почива на минималности  $DT$  кодова. У овом поглављу описан је метод за класификацију чворова у таблицама заснован на Конвејевој нотацији. Генерисане су таблице свих чворова са 13 пресека и алтернирајућих чворова са 14 пресека. Други циљ остварен у петом поглављу јесте генерисање концизних таблица чворова. На крају овог поглавља предложен је нови метод за минимизацију чворова (једног од главних проблема теорије чворова) заснован на примени локалних и глобалних минимизација.

У шестом поглављу разматрани су чворови који, након једне промене пресека, не мењају свој минимални број пресека. Уочене су три класе оваквих чворова које су назване по ауторима: Кауфманови чворови, Зековић чворови и Танијамини чворови. Најинтересантнија појава везана за Зековић чворове је да су сви до сада изведени Перкови чворови (за  $n \leq 13$  пресека) истовремено и Зековић чворови.

У седмом поглављу дефинисан је појам *максималан број одвезивости* чвора, израчунате његове вредности за чворове до 9 пресека и линкове до 8 пресека и упоређени разни минимални и максимални бројеви одвезивости.

У последњем поглављу је дат кратак преглед нових резултата, правци могућих даљих истраживања и научни допринос овог рада.

### **3. Полазне претпоставке**

Полазне претпоставке за успешан рад у овој области су добро познавање области теорије чворова и софтверских алата који се користе за изучавање ове области. Поред овога, неопходно је продубљење знања из web технологија у циљу дистрибуције резултата. Ангажманом на пројекту *Геометрија, образовање и визуелизација са применама* и полагањем одговарајућих испита, кандидат је задовољио ове претпоставке. Подобласт, за коју се определио кандидат, односи се на промене над пресецима у свим врстама чворова (без ограничења на рационалне), новодобијене дистанце и потенцијалне примене.

### **4. Научни методи који су коришћени у раду на тези**

У раду је представљен метод за одређивање растојања међу чворовима коришћењем симболичких, граф-теоријских и геометријских својстава Конвејеве нотације, као и употребом *Mathematica* софтверског пакета *LinKnot*. Такође, презентовани су алгоритми који добијене резултате проширују на нове класе и фамилије чворова. За имплементацију сложенијих функција коришћени су језици C и C#, а за њихову интеграцију са *Mathematica* функцијама симболички интерфејс високог нивоа *MathLink*.

### **5. Остварени научни допринос истраживања**

Анализа досадашњих резултата у таблицама Гордијевих растојања чворова и преглед коришћених метода.

Анализа досадашњих резултата у таблицама s-растојања чворова и преглед коришћених метода.

Креирање метода за рачунање Гордијевих растојања чворова коришћењем симболичких и геометријских својстава Конвејеве нотације

Креирање метода за рачунање s-растојања чворова коришћењем симболичких и геометријских својстава Конвејеве нотације

Проширивање таблица чворова са бројем одвезивости заравњивањем једнаким 1.

Проширивање таблица за дистанце оба типа.

Излагање метода који се могу применити за даље проширивање таблица.

Проширивање таблица чворова презентованих Конвејевом нотацијом и увођење метода за класификацију чворова у таблицама.

Предлог метода за минимизацију чворова.

Дефинисање класе чворова (Зековић чворови) која садржи познате Перкове чворове и тиме омогућава успостављање покушаја дефинисања специфичних својстава Перкових чворова по којима се разликују од осталих чворова.

Дефинисање максималног броја одвезивости чвора и генерисање таблица максималних бројева одвезивости

## 6. Референце које су генерисане у току рада на тези

Један део ових резултата је већ објављен у часописима са СЦИ листе, као и у часописима од националног значаја, док је други део у припреми за објављивање.

Кандидат има три публикована рада (од којих два у часописима са SCI листе):

Ana Zekovic, *Computation of Gordian Distances and H2-Gordian Distances of Knots*, Yugoslav Journal of Operations Research, 2014 OnLine-First (00):44-44, ISSN: 2334-6043, DOI: 10.2298/YJOR131210044Z, **M51**

Jablan, S., Radovic, Lj., Sazdanovic, R., Zekovic, A., *Mirror-curves and knot mosaics*, Computers and Mathematics with Applications, Vol 64, Issue 4, (2012) 527-543, ISSN:0898-1221, DOI: 10.1016/j.camwa.2011.12.042, **M21**, IF:2.069 (петогодишњи IF:1.894)

Slavik Jablan, Ljiljana Radović, Radmila Sazdanović and Ana Zeković, *Knots in Art*, Symmetry 2012, 4(2), 302-328; ISSN 2073-8994, DOI:10.3390/sym4020302, **M22**, IF:0.918 (петогодишњи IF:1.207)

Учестовала је на четири конференције:

Ana Zeković and Dušan Tošić, *Representation of computations in Knot theory by using XML technologies*, 13th Serbian Mathematical Congress, Vrnjačka Banja, May 22-25, 2014

Ana Zeković and Slavik Jablan, *Smoothing Distances of Knots*, IEEE 11th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, September 26-28, 2013, ISBN: 978-1-4799-0303-0, pp.33-38, DOI: 10.1109/SISY.2013.6662598

Ana Zeković and Slavik Jablan, *Algorithms for Computation of Unknotting Numbers and Knot Distances*, Proc. 57th Conference ETRAN, 3-6. jun 2013, pp. VI1.9.1-4

I Koncar, A Robaldo, A Zekovic, L Davidovic, D Palombo. *Penetrating aortic ulcer database: The way to know more*. Interactive Cardiovascular and Thoracic Surgery, Vol 12, Suppl 1. S42 (2011). European Society for CardioVascular and Endovascular Surgery (ESCVS) - *Young vascular surgeon prize for Scientific and Clinical success in 2011*, (creation and initial results of the website database for the Penetrating Aortic Ulcers).

Има рад у припреми:

Jablan, S., Kauffman, L.H., Stošić, M., Zeković, A. (2014): *Unknotting numbers and maximum unknotting numbers*

## 7. Закључак

У рукопису: „**Конвејева нотација у теорији чворова и њена примена у методима за одређивање растојања чворова**“ кандидат Ана Зековић је на нов и оригиналан начин темељно обрадила проблематику одређивања растојања чворова и показала да је применом Конвејеве нотације могуће доћи до нових резултата у разним подобластима теорије чворова. Значај овог рада је и у томе што је он прва докторска теза на српском језику из области теорије чворова. Ана Зековић је описала нову класу чворова који нису били раније познати у теорији чворова. С обзиром на изложено, може се констатовати да су испуњени главни циљеви наведени приликом предлагања теме. Сматрамо да научно истраживање приказано у овом раду даје значајан допринос проблему одређивања растојања чворова. Стога, са великим задовољством предлагемо Наставно-научном већу да поменути рукопис прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за јавну одбрану.

Београд, јануар 2015.

Чланови комисије:

др Душан Тошић  
редовни професор  
Математички факултет у Београду

др Зоран Ракић  
редовни професор  
Математички факултет у Београду

др Славик Јаблан  
професор  
Висока школа струковних студија за  
информационе и комуникационе  
технологије у Београду

др Владимир Филиповић  
ванредни професор  
Математички факултет у Београду

др Владимир Грујић  
доцент  
Математички факултет у Београду

