



UNIVERZITET U NIŠU  
GRAĐEVINSKO-ARHITEKTONSKI FAKULTET



**Dragana T. Turnić**

**NELINEARNO PONAŠANJE I GRANIČNA  
NOSIVOST LIMENIH NOSAČA  
OPTEREĆENIH LOKALIZOVANIM  
OPTEREĆENJEM**

doktorska disertacija

Niš, 2015

---

Članovi komisije:

**akademik, dr Gradimir V. Milovanović,**

matematički institut SANU (u penziji)

**docent, dr Nenad G. Marković,**

Građevinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

**redovni profesor, dr Vlastimir Nikolić,**

Mašinski fakultet, Univerzitet u Nišu

**redovni profesor, dr Slavko Zdravković,**

Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu

**docent, dr Todor Vacev,**

Građevinsko-arhitektonski fakultet, Univerzitet u Nišu

## NELINEARNO PONAŠANJE I GRANIČNA NOSIVOST LIMENIH NOSAČA OPTEREĆENIH LOKALIZOVANIM OPTEREĆENJEM

**Rezime:** Predmet rada je analiza ponašanja limenih nosača (zavarenih čeličnih I nosača) pod uticajem lokalizovanog opterećenja. Ispitivani su nosači bez podužnog ukrućenja i nosači sa podužnim ukrućenjem u blizini opterećenog pojasa. Analiziran je uticaj dužine prostiranja jednakopodeljenog opterećenja na opterećenom pojasu, a u ravni rebra, poznatim pod nazivom *patch loading* i ponašanje nosača u nelinearnoj oblasti, kao i granična nosivost koja se manifestuje pojavom izbočavanja u zoni unošenja opterećenja.

Prilikom montaže mostova, postupkom navlačenja mosta do konačnog položaja preko privremenih ili stalnih oslonaca, uticaji koji se javljaju mogu prevazići nosivost konstrukcije u pojedinim delovima zbog dejstva lokalizovanog opterećenja. Zbog svoje izuzetne složenosti, do sada nije pronađeno kompletno teorijsko rešenje ovog problema.

Put dolaženja do njegovog rešenja, zahteva kombinaciju eksperimentalnih istraživanja i numeričke analize. Zbog važnosti koju ima numerička analiza ponašanja nosača, u radu je posvećena posebna pažnja teorijskim osnovama i rešenjima koji bi doprineli poboljšanju efikasnosti programskih paketa u delovima pojava tačaka sa singularitetima pri samoj simulaciji.

Razvijeni softverski paketi zasnovani su pre svega na primeni metode konačnih elemenata MKE i metodi graničnih elemenata MGE. U ovim postupcima često se javljaju problemi sa singularitetima algebarskog i/ili logaritamskog tipa a jedan od ciljeva bio je i doprinos efikasnijem rešavanju tih problema.

U istraživanjima su primenjeni numerički postupci sa korišćenjem MKE primenom najsavremenijih softverskih programskih paketa kao i razna poboljšanja korišćenjem analitičkih metoda koja se odnose na probleme sa singularitetima

Teorijske osnove i rešenja koja su ovde izvedena, uključuju i eventualnu pojavu singulariteta i time doprinose poboljšanju efikasnosti programskih paketa, tj. bržem, a tačnijem, rešavanju problema. Ovde je izvedena specijalna klasa kvadrturnih formula, koja obezbeđuje poboljšana rešenja složenih problema sa singularitetima algebarskog i/ili logaritamskog tipa.

Alternativni pristup sa Gauss-ovim kvadraturama za Müntz-ove sisteme, koji su razvili Milovanović i Cvetković (SIAM J. Sci. Comput. (2005)) je takođe prikazan [23]. U postojećoj literaturi do sada ovoj oblasti nije bila posvećena dovoljna pažnja.

Uz ta rešenja i teorijske priloge od opšteg značaja, daju se direktni odgovori na probleme *patch loading*-a, tako što je razvijen odgovarajući numerički model u programskom paketu ANSYS Workbench 15, po uzoru na eksperimentalna ispitivanja.

Veliki deo rezultata eksperimenata, u okviru istraživanja koja su sprovedena na Građevinskom fakultetu u Beogradu pod rukovodstvom N. Markovića [70], poslužilo je kao osnova za istraživanja i kreiranje odgovarajućeg modela u kompjuterskoj simulaciji. Cilj numeričke simulacije, bio je određivanje granične nosivosti i praćenje razvoja deformacija i naprezanja. Na modelima za numeričku simulaciju uračunate su početne deformacije-imperfekcije na osnovu stvarnog modela nosača. Pri numeričkim simulacijama modela oblik, karakter i tok odvijanja deformacija i način izbočavanja istovetni kao i u slučaju eksperimenata i to za svaki konkretni uzorak.

Sprovedena je numerička simulacija i određene su vrednosti graničnog opterećenja nosača za 6 različitih materijalnih modela i izvršena je kvalitativna analiza tih rezultata. Kriva ponašanja koja odgovara multilinearnoj krivoj prema EN1993-1-5 [28] dala je veoma dobru približnu vrednost graničnog opterećenja.

Zbog aktuelnosti oblasti ovde je dat pregled stanja stvari, kao i glavni tok istraživanja u ovoj oblasti. Radi verifikacije rezultata su korišćeni postojeći eksperimentalni rezultati i standardne, uobičajene u ovoj problematici, statističke metode pri verifikaciji rezultata i savremene metode numeričke aproksimacije.

Primena rezultata ovog istraživanja je u proračunu konstrukcija, posebno kod proračuna čeličnih mostova koji se izvode postupkom navlačenja preko privremenih ili stalnih oslonaca i u novim verzijama nacionalnih propisa za proračun čeličnih konstrukcija.

Obuhvaćen je uticaj geometrijskih imperfekcija rebra nosača (bez imperfekcija pojaseva i ukrućenja) i izvršeno je upoređenje sa nosačima bez imperfekcija u okviru numeričke simulacije,

u cilju praćenja razvoja naprezanja. Slučajevi istraživanja uticaja realnih imperfekcija na veličinu graničnog opterećenja, u literaturi su zastupljeni u manjem broju.

Ovaj rad doprinosi realnijem modeliranju nosača, što pruža mogućnosti novih testiranja ovakvih ili drugačijih modela nosača putem numeričke simulacije. Testovi koji se na taj način sprovode, omogućavaju da se izvrše analize nosača koje bi indirektno doprinele dobijanju novih teorijskih rešenja.

**Ključne reči:** granična nosivost, lokalizovano opterećenje, lokalno izbočavanje, singulariteti, kvadraturene formule, numerička simulacija.

**Uža naučna oblast:** Građevinarstvo, hidraulika, priobalna tehnologija, mehanika tla

**UDK:** T220

## NON-LINEAR BEHAVIOR AND ULTIMATE LOAD OF PLATE GIRDERS UNDER THE ACTION OF PATCH LOADING

**Abstract:** The subject of the thesis is the analysis of steel girders behavior (welded steel I beam) under the influence of the localized load. The girders without longitudinal stiffeners were tested, as well as the girders with the longitudinal stiffeners in the vicinity of the loaded area. The influence of the length of uniform distributed load on the loaded flange, in the plane of the web, known as *patch loading* was analyzed as well as the behavior of the girder in the non-linear area, as well as the ultimate load which is manifested by buckling in the load application zone.

During the bridge assembly procedures, when the bridge is being launched to its definite position over the temporary and permanent supports, the influences which occur may exceed the load of the structure in certain points due to the *patch loading*. Because of its extreme complexity, a complete theoretical solution for the problem has not been found yet.

The solution procedure requires the combination of experiments and numerical analysis. Because of the importance of the numerical simulation of the girders, in this thesis, a special attention was paid to the theoretical foundations and solutions which would contribute to the improvements of efficiency of software packages concerning the onset of singularity points during the simulation.

The developed software packages are based primarily on the application of Finite Element Method (FEM) and Boundary Element Method (BEM). In these procedures, algebraic and/or logarithmic problems with singularities often occur, and one of the goals was to give a contribution towards a more efficient solution of these problems.

The research comprised application of numerical procedures where FEM was implemented using most up-to-date software packages; many improvements were made using the analytical methods referring to the singularity problems.

Theoretical basis and solutions elaborated here can include an occurrence of singularities, so that it contributes to improving the efficiency of software packages, i.e., it gives a faster and more accurate solution of the problem. A special class of Gaussian quadrature formulas is

derived and it provides improved solutions of certain more complex problems with algebraic and/or logarithmic singularities. An alternative approach with Gaussian quadratures for Müntz systems, developed by Milovanović and Cvetković (SIAM J. Sci. Comput. (2005)) is also mentioned. In the existing literature up to now this area has not been paid due attention.

In addition to these solutions and the general theoretical fundamentals, direct answers to the problems of *patch loading* are provided by presenting the compatible developed numerical model in the software package ANSYS Workbench 15, after the experimental research performed.

A large number of the results of the experiments, performed during research, conducted at the Faculty of Civil Engineering in Belgrade under the direction of N. Marković [70], served as a basis for the research and creation of the compatible model in the computer simulation. The goal numerical simulation was to determine the ultimate load and monitor development of deformations and stresses. The actual models for numerical simulation of girder behavior allow inclusion of initial deformations-imperfections into the calculation on the basis of the actual girder model. In the numerical simulations of the model, the form, character and course of deformation process as well as the buckling were identical as in the experiments with actual models, for each concrete sample.

Numerical simulations tested the girder model behavior, and the values of the ultimate load of the girder was determined for six material models, and the quantitative analysis of those results was performed. The behavior curve corresponding to the multi linear curve according to EN1993-1-5 [28] gave a very good approximate value of the ultimate load.

Because of the topicality of this field, a review of the state-of-affairs is provided, as well as the main course of research in this field. The existing experimental results and standard statistical method, common for these issues were used, for the purpose of result verification, as well as contemporary methods of numerical approximation.

The results of the research are applied for the structural design, particularly for the design of steel bridges constructed by launching over the temporary or permanent supports, and in the new versions of the national codes for steel structures design.

The impact of actual imperfections of the beam web plate was included, and a comparison with the beams without imperfections was performed within the numerical simulation, for the purpose of observing the stress development. The cases of research of impact of actual imperfections on the magnitude of the limit load are present in the literature to some small extent.

This thesis contributes to a more realistic modeling of the girders, which provides opportunities for new behavior tests of such or different girder models using numerical simulation. The tests carried out in this way, facilitate beam analyses which would indirectly contribute to the adoption of correct approaches in obtaining the theoretical results.

**Key words:** ultimate load, *patch loading*, local buckling, singularities, quadrature formulas, numerical simulation.

**Scientific area:** Civil engineering, hydraulic engineering, offshore technology, soil mechanics

**UDK:** T220



## OBELEŽAVANJE

$a$  - dužina ploče

$a_1$  - rastojanje vertikalnih ukrućenja iznad oslonaca

$b$  - širina ploče

$b_1$  - položaj podužnog ukrućenja

$b_{eff}$  - efektivna širina ploče

$b_f$  - dužina pojasa (flanše)

$b_{st}$  - dužina ukrućenja

$c$  - dužina prostiranja opterećenja

$D$  - krutost ploče na savijanje

$E$  - modul elastičnosti

$f(s)$  - faktor pojačanja

$F_{cr}$  - otpornost graničnog izvijanja

$F_{Ed}$  - proračunska vrednost opterećenja (metod redukovanog napona)

$F_{Rd}$  - proračunska nosivost na izbočavanje (metod redukovanog napona)

$F_u$  - predviđeno granično opterećenje

$F_{ui}$  - granična nosivost za nosače sa podužnim ukrućenjem prema faktoru pojačanja

$f_y$  - napon tečenja (napon na granici razvlačenja)

$F_y$  - otpornost na granici tečenja

$f_{yf}$  - napon tečenja pojasa

$f_{yw}$  - napon tečenja rebra

$G$  - modul klizanja

$h$  - debljina ploče

$h_w$  - visina rebra

$I_{st}$  - moment inercije ukrućenja

$k$  - koeficijent koji zavisi od dimenzija ploče u izrazu  $P_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{\lambda^2}$

$k_F$  - koeficijent izbočavanja na deformisanom rebru

$k_{m,kr}$  - koeficijent izbočavanja pri opterećenju

$k_{s1}$  - koeficijent izbočavanja koji uzima u obzir uticaj podužnog ukrućenja

$k_\sigma$  - koeficijent izvijanja koji odgovara odnosu napona  $\psi = \sigma_{min}/\sigma_{max}$

$l_y$  - dužina rasprostiranja opterećenja u rebru.

$M_{pf}$  - moment plastičnosti pojasa

$M_{pw}$  - moment plastičnosti rebra za jedinicu dužine

$M_x, M_y$  - napadni momenti

$M_{xy}$  - torzioni momenti

$N_x$  - normalna sila po jedinici dužine preseka u pravcu  $x$ , ( $N_x = \sigma_x h$ )

$N_{xy}$  - transverzalna sila po jedinici dužine preseka ( $N_{xy} = \tau_{xy} h$ )

$N_y$  - normalna sila po jedinici dužine preseka u pravcu  $y$

$P$  – koncentrisana sila koja deluje na ploču

$p$  - opterećenje pritiska po jedinici dužine stranice

$q(x,y)$  – opterećenje ploče

$s$  - standardna devijacija

$t$  - debljina ploče

$t_f$  - debljina pojasa (flanše)

$t_{st}$  - debljina ukrućenja

$t_w$  - debljina rebra

$w$  - pomeranje upravno na ravan ploče

$\alpha$  - položaj linije tečenja na rebu u odnosu na opterećeni pojas

$\alpha_{ult,k}$  - minimalni koeficijent uvećanja opterećenja kojim se dostiže karakteristična vrednost otpornosti bez pojave nestabilnosti ploče van ravni

$\gamma_{M1}$  - parcijalni koeficijent sigurnosti u okviru metode redukovano napona

$\gamma_{M1}$  - parcijalni koeficijent sigurnosti u okviru metode redukovano napona

$\gamma_{st}$  - relativna krutost na savijanje od podužnog ukrućenja

$\gamma_{xy}$  - klizanje

$\epsilon_x, \epsilon_y$  - dilatacija u pravcima  $x$  i  $y$  redosledno

$\eta$  - dužina rebra, ispod opterećenja na središnjem delu dužine  $c$  između dva srednja plastična zgloba

$\lambda$  - parametar vitkosti ploče

$\nu$  - Poisson-ov koeficijent

$\rho$  - koeficijent redukcije izvijanja ploče koji zavisi od vitkosti  $\bar{\lambda}_p$  uz izvijanje van ravni

$\sigma_{kr}$  - kritični napon

$\sigma_{RD}$  - proračunska vrednost napona u metodi redukovano napona

$\chi$  - redukcionni faktor

$\chi_F$  - redukcionni faktor, *patch loading*

$L_{eff} = \chi_F l_y$  - efektivna dužina za nosivost na poprečne sile

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  - Laplace-ov diferencijalni operator

$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}}$  - relativna (bezdimezionalna) vitkost ploče pri izbočavanju

$\lambda_F = \sqrt{F_y / F_{cr}}$  - parametar vitkosti ploče pri lokalizovanom opterećenju

# SADRŽAJ

<b>1</b>	<b>UVOD .....</b>	<b>1</b>
1.1	CILJ I DELOKRUG RADA .....	3
1.2	PRIKAZ STRUKTURE RADA .....	4
<b>2</b>	<b>PRIKAZ METODA ZA REŠAVANJE PROBLEMA U TEORIJI PLOČA I PRIMENA INTEGRALNIH JEDNAČINA U PROBLEMIMA U KOJIMA SE JAVLJAJU SINGULARITETI .....</b>	<b>6</b>
2.1	SPECIJALNE METODE U REŠAVANJU PROBLEMA PLOČA.....	6
2.2	MKE I MGE U REŠAVANJU PROBLEMA MEHANIKE.....	20
2.3	SINGULARITETI (ALGEBARSKI I LOGARITAMSKI) I PRIMENA INTEGRALNIH JEDNAČINA ....	22
2.3.1	Slučaj singulariteta kod pravougaone ploče.....	22
2.3.2	Uticajna polja kod površinskih nosača .....	25
2.4	METOD INTEGRALNIH JEDNAČINA SA GREEN-OVOM FUNKCIJOM .....	27
2.5	OPŠTI POJMOVI O GAUSS-OVIM KVADRATURNIM FORMULAMA .....	30
2.5.1	Gauss-ova formula sa težinom.....	32
2.5.2	Neke napomene o Gauss-ovim kvadraturnim formulama za Müntz-ove sisteme.....	37
<b>3</b>	<b>GENERALISANE KVADRATURNE FORMULE GAUSS-OVOG TIPA ZA FUNKCIJE SA SINGULARITETIMA I MOGUĆE PRIMENE .....</b>	<b>39</b>
3.1	UOPŠTENA KVADRATurna PRAVILA GAUSS-OVOG TIPA ZA NUMERIČKO IZRAČUNAVANJE SINGULARNIH INTEGRALA KOJI SE JAVLJAJU U MGE .....	39
3.2	UOPŠTENE GAUSS-OVE FORMULE ZA FUNKCIJE SA LOGARITAMSKIM SINGULARITETOM...	43
3.3	KONSTRUKCIJA UOPŠTENIH GAUSS-OVIH FORMULA.....	46
3.4	SPECIJALNI SLUČAJEVI UOPŠTENIH GAUSS-OVIH FORMULA .....	53
3.5	NUMERIČKI PRIMERI.....	55
<b>4</b>	<b>PONAŠANJE PLOČASTIH ČELIČNIH KONSTRUKCIJA PRI STATIČKOM OPTEREĆENJU I LOKALIZOVANOM OPTEREĆENJU .....</b>	<b>65</b>
4.1	OPŠTE NAPOMENE .....	65
4.2	IZVOD IZ TEORIJE IZBOČAVANJA PLOČA .....	67
4.2.1	Savijanje ploče usled poprečnog opterećenja složenog sa silama u srednjoj ravni ploče.....	68
4.2.2	Slobodno oslonjena ploča pod jednakopodeljenim opterećenjem .....	73
4.3	METODE PRORAČUNA .....	75
4.3.1	Teorija elastične stabilnosti.....	75
4.3.2	Preporuke za proračun prema EN 1993-1-5:2006.....	76
4.3.2.1	Metod efektivne širine .....	76
4.3.2.2	Metod redukovano napona.....	79
4.4	NAJNOVIJA DOSTIGNUĆA U ISTRAŽIVANJIMA GRANIČNE NOSIVOSTI PRI „PATCH LOADING“-U.....	79
4.4.1	Opšte o fenomenu „patch loading“-a.....	79
4.4.2	Nosači bez podužnih ukrućenja.....	80
4.4.3	Nosači sa podužnim ukrućenjem.....	85
4.5	POČETNE IMPERFEKCIJE NOSAČA .....	90

4.5.1	Geometrijske imperfekcije nosača .....	90
4.5.1.1	Realne imperfekcije .....	91
4.5.1.2	Imperfekcije prema sopstvenim modovima .....	92
4.5.1.3	Ekvivalentne geometrijske imperfekcije .....	94
4.5.2	Strukturne imperfekcije.....	95
<b>5</b>	<b>EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA PREUZETA IZ LITERATURE I PRIPREMA MODELA ZA TEORIJSKU STUDIJU .....</b>	<b>97</b>
5.1	IZBOR KARAKTERISTIKA NOSAČA I PLANIRANJE EKSPERIMENTA.....	97
5.2	PRIPREMA ZA ISPITIVANJE.....	99
5.2.1	Merenje početnih deformacija.....	100
5.3	POSTAVKA EKSPERIMENTA I MERENJE DEFORMACIJA REBRA .....	100
5.4	OPIS TOKA EKSPERIMENTA.....	101
5.5	PONAŠANJE NOSAČA TOKOM ISPITIVANJA.....	103
<b>6</b>	<b>MODELIRANJE NOSAČA I TEORIJSKO-NUMERIČKA ANALIZA .....</b>	<b>106</b>
6.1	OPŠTE NAPOMENE .....	106
6.2	MODELIRANJE NOSAČA.....	107
6.2.1	Karakteristike materijala.....	107
6.2.2	Materijalni modeli u okviru nelinearne analize .....	110
6.2.3	Geometrijske karakteristike nosača.....	114
6.2.3.1	<i>Nosači bez imperfekcija</i> .....	114
6.2.3.2	<i>Nosači sa imperfekcijama</i> .....	115
6.2.4	Numerički model nosača.....	117
6.2.4.1	<i>Granični uslovi i opterećenje</i> .....	117
6.2.4.2	<i>Diskretizacija modela mrežom konačnih elemenata</i> .....	118
6.2.4.3	<i>Parametri analize</i> .....	120
<b>7</b>	<b>NELINEARNO PONAŠANJE I GRANIČNA NOSIVOST NOSAČA DOBIJENA NUMERIČKOM SIMULACIJOM UZ POREĐENJE SA EKSPERIMENTALNIM REZULTATIMA .....</b>	<b>121</b>
7.1	ANALIZA GRANIČNE NOSIVOSTI.....	121
7.1.1	Granična nosivost nosača A1.....	121
7.1.2	Granična nosivost nosača A2.....	124
7.1.3	Granična nosivost nosača A3.....	126
7.1.4	Granična nosivost nosača A7.....	129
7.2	ANALIZA REZULTATA GRANIČNE NOSIVOSTI NOSAČA.....	131
7.3	RAZVOJ DEFORMACIJA I PRIKAZ STANJA NAPONA .....	135
7.3.1	Numerička simulacija nosača tipa A1.....	139
7.3.2	Numerička simulacija nosača tipa A2.....	143
7.3.3	Numerička simulacija nosača tipa A3.....	148
7.3.4	Numerička simulacija nosača tipa A7.....	152
<b>8</b>	<b>ZAKLJUČCI I PREPORUKE ZA BUDUĆI RAD.....</b>	<b>156</b>
	LITERATURA.....	159

## UVOD

Analiza limenih nosača opterećenih lokalizovanim opterećenjem (koncentrisanim ili opterećenjem raspodeljenim po maloj dužini na pojasu limenog nosača ispod koga se nalazi rebro) je od značaja u oblasti primene tankozidnih nosača u tehnici, a posebno u građevinarstvu. Prilikom montaže mostova, primenom postupka navlačenja mosta do konačnog položaja preko privremenih ili stalnih oslonaca, nastaje problem tako što uticaji koji se javljaju pri montaži mogu prevazići nosivost konstrukcije u pojedinim delovima. Zbog svoje izuzetne složenosti, do sada nije bilo moguće pronaći kompletno teorijsko rešenje ovog problema nazvanog *patch loading*-om.

Put dolaženja do njegovog rešenja, zbog kompleksnosti, kombinuje eksperimente na stvarnim modelima i numeričku simulaciju ponašanja modela konstrukcija. Kompletna teorijska rešenja ovog problema u celini ne postoje i, kao što će se u poglavlju 4, koje daje glavne pravce razvoja ove oblasti kroz značajne rezultate istraživanja od kojih je jedan broj uvršćen i u propise EN1993-1-5, videti [28], od značaja je nastavak kompletiranja teorijskih rešenja.

Poseban značaj u okviru ovog problema ima modeliranje konstrukcije i numerička simulacija nosača. U poglavlju 3 je posvećena pažnja teorijskim osnovama i rešenjima koji mogu doprineti poboljšanju efikasnosti programskih paketa u slučajevima pojave oblasti sa singularitetima. Pored tih rešenja i teorijskih priloga od opšteg značaja, analizirani su problemi *patch loading*-a, tako što je razvijen odgovarajući numerički model u programskom paketu ANSYS Workbench 15 u cilju rešavanja numeričke simulacije ponašanja nosača. Obuhvaćene su i početne geometrijske imperfekcije rebra nosača na osnovu stvarnog modela nosača. Deo ovog rada je povezan i oslanja se na eksperimentalna istraživanja Markovića iz 2003. godine, sa Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu (videti [70]).

Eksperimenti na realnim modelima mogu da obuhvate manji broj parametara, a pokazuje se potreba za određivanjem uticaja većeg broja parametara radi dobijanja celovitijih rešenja. Zato je od značaja numerička simulacija ponašanja nosača, kao i skraćivanje vremena njenog izvršavanja. Broj parametara je i uvećan jer su u poslednje dve decenije data nova alternativna rešenja za probleme lokalizovanog opterećenja. Ona uzimaju u obzir podužna ukrućenja, povećanje dužine prostiranja opterećenja i dr.

Poslednjih decenija je korišćenje programskih paketa i specijalizovanih softvera doživelo pravu ekspanziju u primenama u tehnici, pa tako i u građevinarstvu. Danas je nezamislivo projektovanje, izvođenje i eksperimentalno istraživanje bez upotrebe inženjerskih kompjuterskih programa. Eksperimentalna istraživanja predstavljaju veoma važan segment istraživanja u svim oblastima a posebno u tehnici. Međutim, izvođenje eksperimenata predstavlja veoma složen i skup proces. U svetu se eksperimenti vrše na najsavremenijim uređajima pomoću kojih se postiže velika preciznost rezultata. Korišćenjem programskih paketa, moguće je simuliranje eksperimenata na ogromnom broju numeričkih modela sa variranjem i praćenjem većeg broja parametara što predstavlja veliku uštedu. Kompjuterska simulacija eksperimenata u odgovarajućim programima uglavnom se bazira na Metodi konačnih elemenata (MKE) i Metodi graničnih elemenata (MGE). U novije vreme, algoritmi inženjerskih programa se stalno usavršavaju. Jedan od problema je i pojava oblasti sa singularitetima. Motivacija je da se u tom delu daju rešenja koja bi uticala na poboljšanje rezultata.

U građevinarstvu već duže vreme limene konstrukcije nalaze široku primenu kao što su tankozidni nosači. Tokom svog eksploatacionog veka ove konstrukcije podvrgnute su različitim tipovima opterećenja, od izgradnje do završne faze, što često izaziva kompleksna stanja napona u delovima nosača. U primenama u građevinarstvu, veoma je čest slučaj delovanja jednakopodeljenog opterećenja na maloj dužini na pojasu tankozidnih nosača ispod kojih se nalazi rebro – *patch loading* (lokalizovano opterećenje). Primeri iz inženjerske prakse su brojni, a pored primera kranskih staza, platformi, brodskih konstrukcija, jedan od karakterističnih slučajeva je slučaj montaže mostovskih konstrukcija preko privremenih ili stalnih oslonaca do definitivnog položaja. Kako je reč o veoma složenom problemu, do danas nisu pronađena adekvatna analitička rešenja koja bi u obzir uzela sve moguće parametre. Kada su u pitanju pločasti I nosači, poznata su istraživanja većeg broja parametara, koji se odnose na dimenzije nosača, vitkost rebra, postojanje i položaje horizontalnih i vertikalnih ukrćenja, uticaj dužine prostiranja opterećenja, imperfekcije i dr. Standardi za projektovanje čeličnih konstrukcija, Evrokod 3: Projektovanje čeličnih konstrukcija deo 1-5 puni limeni elementi, EN 1993-1-5 [28] obuhvataju veći deo ove problematike. Jedan od nedovoljno istraženih parametara jesu i početne geometrijske imperfekcije. Kako u literaturi nema dovoljno podataka o tome, što se konstatuje i u samom standardu, u ovom radu će ova problematika biti detaljnije istražena. U ovom radu, u okviru modeliranja nosača, zadavane su realne početne geometrijske imperfekcije.

Posebna pažnja posvećena je i materijalnim modelima u okviru numeričke simulacije zbog mogućnosti praktične primene. Motivacija je da se uporede granične nosivosti dobijene za različite materijalne modele.

## 1.1 Cilj i delokrug rada

U radu će u kratkim crtama biti izložene teorijske osnove i metode vezane za površinske nosače-ploče u okviru teorije elastičnosti i teorije plastičnosti i dati geneza važnijih pojmova koji su prisutni u Evropskim normama EN1993-1-5 [28]. Iako su u ovoj oblasti do sada postignuta značajna dostignuća još uvek postoje neistražena područja u kojima se vrši unapređivanje. Jedan od primera je i usavršavanje programskih paketa baziranih na MKE i MGE koji služe za rešavanje problema u ovoj oblasti (Ansys, Abakus, Nastran i dr.).

U radu se daje poseban tretman kvadraturnim formulama koje obezbeđuju rešenja složenih problema sa singularitetima algebarskog i/ili logaritamskog tipa. U tom smislu, cilj je da se u poglavlju 3 da prilog koji bi po implementiranju u programske pakete koji se baziraju na MKE i MGE doprineo izvesnim poboljšanjima u pogledu brzine, konvergentnosti i tačnosti. Može se reći da u postojećoj literaturi ovoj oblasti nije do sada bila posvećena dovoljna pažnja.

Izvršena je, takođe, nelinearna analiza stabilnosti limenih I nosača pod odabranim kombinacijama opterećenja, za nosače bez podužnog ukrućenja i sa podužnim ukrućenjem, uzimajući u obzir i početne imperfekcije. Analizirani su zavareni čelični I nosači sa izraženim početnim geometrijskim imperfekcijama. Dostizanje granične nosivosti se manifestuje izbočavanjem rebra u zoni unošenja opterećenja. Razmatrana je geometrijska i materijalna nelinearnost nosača bez i sa podužnim ukrućenjem na kojima su ranije izvršeni eksperimenti. Veći deo rezultata eksperimenata, koji su sprovedeni na Građevinskom fakultetu u Beogradu pod rukovodstvom N. Markovića, poslužiće kao osnova za istraživanja na odgovarajućem modelu u kompjuterskoj simulaciji u cilju poređenja sa postojećim eksperimentalnim rezultatima. Na modelima se zadaju opterećenja istog tipa i intenziteta kao i u eksperimentu sa ciljem da ako se ustanovi međusobno slaganje ponašanja, numerički model može da posluži i za druge vrste istraživanja. Takođe, jedan deo rezultata dobijenih eksperimentalnim putem je ovde po prvi put obuhvaćen i analiziran u kontekstu naponske analize. Numerička simulacija modela vršena je u kompjuterskom programu ANSYS Workbench 15. Ovaj rad se fokusira i na praćenje razvoja

deformacija i napona sa porastom opterećenja, kao i na početak pojave plastičnog ponašanja rebra.

U okviru istraživanja uticaja lokalizovanog opterećenja na numeričkim modelima pretpostavljeno je šest uprošćenih materijalnih modela koji opisuju nelinearno ponašanje materijala, od kojih su tri po preporuci EN1993-1-5 [28] i jedan po preporuci BSK07 [12]. Izvršeno je njihovo poređenje i analiza, a dobijeni rezultati mogu biti od značaja za praktičnu primenu.

## 1.2 Prikaz strukture rada

U **Poglavlju 1** dat je uvod u problematiku kojom se bavi ovaj rad, aktuelnost problema i ciljevi koji se nastoje postići. Prikazana je ukratko i struktura rada.

U **Poglavlju 2** se kroz istorijski pregled prikazuju neki od problema u teoriji površinskih nosača. U okviru toga date su specijalne metode koje su od teorijskog značaja u rešavanju problema ploča. Posebno je dat osvrt na MKE i MGE koje se baziraju na numeričkoj analizi i čija primena je i danas veoma aktuelna kroz programske pakete koji se baziraju na njima.

Prikazani su neki karakteristični primeri singulariteta i uticajnih polja kod nosača. Ukratko je prikazan metod integralnih jednačina sa Green-ovom funkcijom i dati su opšti pojmovi o Gauss-ovim kvadraturnim formulama kroz nekoliko primera.

U **Poglavlju 3** se razvija efikasan metod za konstrukciju univerzalnih (direktnih) kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa koje obuhvataju i neprekidne-glatke funkcije i funkcije sa logaritamskim singularitetom. One se efikasno mogu primeniti za direktnu integraciju kao i rešavanje integralnih jednačina. Ovde dobijene kvadrature formule su univerzalne jer imaju mogućnost primene integraljenja i na neprekidne (glatke) funkcije i na funkcije sa singularitetom. Kvadrature formule igraju važnu ulogu u numeričkoj implementaciji MGE i kao i MKE i ovde su predstavljene kroz nekoliko primera gde je data njihova primena u nekim specijalnim slučajevima.

**Poglavlje 4** daje opšti prikaz ponašanja pločastih čeličnih konstrukcija. Prikazane su teorijske osnove problema ploča pri statičkom opterećenju i metode proračuna u elastičnoj i plastičnoj oblasti. Takođe, prikazane su preporuke za proračun prema EN1993-1-5 [28], kao i najnovija dostignuća u istraživanju granične nosivosti kada je u pitanju opterećenje



lokalizovanim opterećenjem nosača bez i sa podužnim ukrućenjem. U ovom poglavlju prikazani su tipovi geometrijskih i strukturnih (materijalnih) imperfekcija nosača u skladu sa važećim Evropskim propisima.

**Poglavlje 5** daje prikaz eksperimentalnih istraživanja limenih nosača bez i sa podužnim ukrućenjem, opterećenih *patch loading*-om, preuzetih iz literature. Ovi eksperimentalni podaci poslužili su za upoređivanje sa podacima dobijenim numeričkom simulacijom i prikazani su u narednim poglavljima.

**Poglavlje 6** odnosi se na modeliranje nosača i teorijsko numeričku analizu. Modeli nosača, njihova geometrija, granični uslovi i karakteristike materijala, usvojeni su prema uzoru na modele nosača iz eksperimenata opisanih u prethodnom poglavlju. Posebna pažnja posvećena je karakteristikama materijala pri čemu su prikazani rezultati ispitivanja epruveta uzetih iz modela ispitanih nosača i dobijene krive su poslužile kao baza za formiranje nelinearnih materijalnih modela. Materijalni modeli su odabrani u skladu sa važećim propisima i to prema EN1993-1-5 (multilinearna kriva i dve bilinearne krive), prema Švedskom standardu BSK07 multilinearna kriva i još dve bilinearne krive u cilju dodatne analize. Detaljno je opisano modeliranje nosača koje je izvršeno u programskom paketu ANSYS Workbench 15. U okviru numeričke analize, izvršena je kontaktna analiza nosača sa osloncem i prikazana je mreža konačnih elemenata korišćena u okviru pomenutog programa.

U **Poglavlju 7** prikazani su rezultati dobijeni numeričkom simulacijom i izvršeno je njihovo poređenje sa eksperimentalnim rezultatima iz poglavlja 5. Određena je granična nosivost nosača za šest različitih materijalnih modela i prikazani su dijagrami deformacija i napona sa porastom sile do dostizanja graničnog opterećenja. Posebno je izvršena analiza u cilju praćenja porasta graničnog opterećenja za nosače bez podužnog ukrućenja i sa postojanjem podužnog ukrućenja na rebu nosača, kao i za povećanje dužine prostiranja opterećenja sa 50 mm na 150 mm. Prikazane su karakteristične vrednosti deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile, za različite materijalne modele, za svaki od četiri različita tipa nosača. Takođe, karakteristične vrednosti napona su analizirane za nosače sa i bez imperfekcija. Ove vrednosti su upoređene sa eksperimentalnim podacima.

**Poglavlje 8** prikazuje zaključke na osnovu istraživanja prikazanih u prethodnim poglavljima, a, takođe, daju se i preporuke za buduća istraživanja.

## 2. PRIKAZ METODA ZA REŠAVANJE PROBLEMA U TEORIJI PLOČA I PRIMENA INTEGRALNIH JEDNAČINA U PROBLEMIMA U KOJIMA SE JAVLJAJU SINGULARITETI

### 2.1 Specijalne metode u rešavanju problema ploča

**Primena dvostrukih trigonometrijskih redova u predlogu Navier-a.** Problem savijanja ploče svodi se na rešavanje parcijalne diferencijalne jednačine četvrtog reda

$$\Delta\Delta w = q/D, \quad (2.1)$$

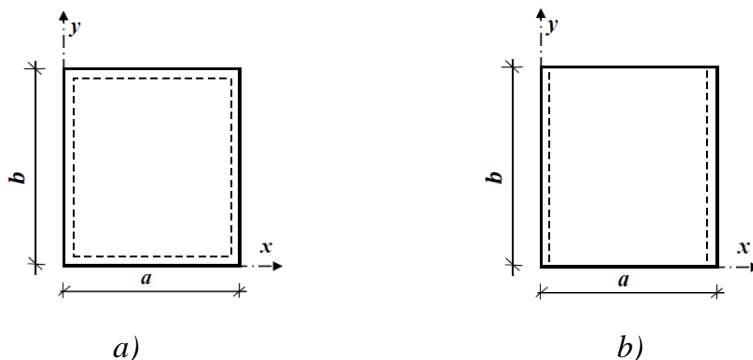
uz odgovarajuće konturne uslove. Rešenje diferencijalne jednačine problema savijanja pravougaone ploče za slučaj proizvoljnog opterećenja  $q(x,y)$  dao je Navier 1823. godine i važi samo za slobodno oslonjenu ploču po celoj konturi (Sl.2.1a), a ne i za druge uslove. U tom slučaju konturni uslovi su

$$\begin{aligned} \text{za } x=0 \text{ i } x=a: w=0; \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \\ \text{za } y=0 \text{ i } y=b: w=0; \partial^2 w / \partial y^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Rešenje jednačine (2.1) je pretpostavljeno u obliku dvostrukog Fourier-ovog reda u obliku

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.3)$$

gde je  $a$  strana ploče paralelna koordinatnoj osi  $x$ , a  $b$  paralelna koordinatnoj osi  $y$ , a  $A_{mn}$  su nepoznati koeficijenti koje treba odrediti.



Sl.2.1: a) Pravougaona ploča slobodno oslonjena na svim konturama; b) Pravougaona ploča slobodno oslonjena na dve međusobno paralelne strane

Rešenje (2.3) zadovoljava granične uslove (2.2), a može se napisati i u obliku

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn},$$

pri čemu je

$$w_{mn} = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.4)$$

Da bi rešenje (2.3) zadovoljilo jednačinu (2.1), nalaženjem parcijalnih izvoda funkcije  $w_{mn}$  iz (2.4) imamo

$$\frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4} = \pi^4 A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Ako sastavimo sada dvostruki Fourier-ov red i unesemo u (2.1), dobijamo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^4 A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (2.5)$$

Da bismo odredili koeficijente  $A_{mn}$ , prikazaćemo i desnu stranu jednačine (2.5), tj.  $q(x, y)$  u obliku dvostrukog Fourier-ovog reda

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.6)$$

Nakon određenih transformacija (videti [48]) i integraljenja leve i desne strane od 0 do  $a$  po promenljivoj  $x$  i od 0 do  $b$  po promenljivoj  $y$ , dobijamo koeficijente

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (2.7)$$

Kada unesemo izraz (2.6) u (2.5), upoređivanjem koeficijenata uz iste članove reda sa leve i desne strane, dobijamo koeficijente

$$A_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 D},$$

a posle zamene  $q_{mn}$  iz (2.7) biće

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{D \pi^4 ab \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (2.8)$$

Kada uvrstimo (2.8) u (2.3), konačno rešenje je (2.9) (videti [48] str. 23)

$$w(x, y) = \frac{4}{D\pi^4 ab} \sum_m \sum_n \frac{\int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.9)$$

Napomenimo da su se ovakvi problemi najčešće rešavali, a i sada se rešavaju, metodom konačnih razlika.

Predlog M. Levy-a (1889. god.) obuhvata slučaj savijanja pravougaone ploče, slobodno oslonjene na dve međusobno paralelne strane, dok ostale dve strane imaju proizvoljne konturne uslove (videti Sl.2.1b). Funkcija ugiba  $w$  se traži u obliku

$$w = w_0 + w_1, \quad (2.10)$$

gde je  $w_0$  je partikularni integral jednačine (2.1) i zadovoljava granične uslove na stranama ploče  $x=0$  i  $x=a$ , a  $w_1$  predstavlja rešenje homogene diferencijalne jednačine

$$\Delta \Delta w_1 = 0, \quad (2.11)$$

koje u kombinaciji sa  $w_0$  mora da zadovolji sve granične uslove ploče. Rešenje  $w_1$  diferencijalne jednačine (2.11) traži se u obliku jednostrukog trigonometrijskog reda

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (2.12)$$

gde je  $Y_m$  funkcija od  $y$ . Kada uvrstimo (2.12) u diferencijalnu jednačinu (2.11), ona postaje

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left( Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0, \quad (2.13)$$

odakle mora biti

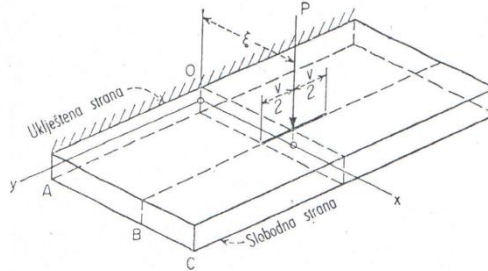
$$Y_m^{IV} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m'' + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = 0 \quad (2.14)$$

da bi jednačina (2.13) bila zadovoljena za svaku vrednost  $x$ . Opšte rešenje jednačine (2.14) može se uzeti u obliku

$$Y_m = \frac{qa^4}{D} \left( A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right). \quad (2.15)$$

**Primena beskonačnih integrala; transformacija Fourier-ovim integralima.** Za slučaj beskonačne ili polubeskonačne trake gde dve paralelne strane imaju proizvoljne konturne uslove

ako primenimo metodu M. Lévy-a, Fourier-ovi redovi se moraju zameniti beskonačnim integralima. Posmatramo slučaj beskonačno široke konzole koja je opterećena koncentrisanom silom  $P$ . Obeležimo:  $w_1$ - ugib dela konzole  $AB$ ;  $w_2$ - ugib dela  $BC$  konzolne ploče;  $AC=a$  - dužina ploče. Teret  $P$  je jednoliko raspodeljen na dužini  $v$  (videti Sl.2.2).



Sl.2.2: Beskonačno široka konzola opterećena koncentrisanim teretom  $P$  (preuzeto iz [102])

Konturni uslovi na paralelnim stranama su:

$$\begin{aligned} \text{za } x=0: \quad w_1 &= 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \\ \text{za } x=a: \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} &= 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Uslovi kompatibilnosti deformacija (neprekidnosti):

$$\text{za } x=\xi: \quad w_1=w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad \Delta w_1 = \Delta w_2. \quad (2.17)$$

Ako predstavimo parnu funkciju od  $y$  u obliku Fourier-ovog integrala

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \alpha y \, d\alpha \int_0^{\infty} f(\eta) \cos \alpha \eta \, d\eta \quad (2.18)$$

i uzimajući intenzitet opterećenja  $f(\eta) = \frac{P}{v}$  različit od nule samo na intervalu  $-v/2 < \eta < v/2$ ,

dobija se

$$f(y) = \frac{2P}{\pi v} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\alpha v}{2} \cos \alpha y}{\alpha} \, d\alpha. \quad (2.19)$$

Iz uslova da je  $f(y)$  jednaka razlici transverzalnih sila sa jedne i sa druge strane preseka  $x=\xi$ , tj

$$f(y) = D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_1 - D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w_2, \text{ za } x=\xi,$$

na osnovu jednačine (2.19) ugibi  $w_1$  i  $w_2$  se predstavljaju kao

$$w_i = \int_0^{\infty} X_i(x, \alpha) \cos \alpha y \, da, \quad i=1,2. \quad (2.20)$$

Funkcija  $X_i(x, a)$  je

$$X_i(x, a) = (A_i + B_i x) \cosh ax + (C_i + D_i x) \sinh ax$$

i istog je oblika kao  $Y_m$  iz jednačine (2.15) prema predlogu M. Lévy-a. Koeficijenti  $A_i, B_i, C_i$  i  $D_i$  za  $i=1,2$ , određuju se unošenjem izraza (2.20) u (2.16), (2.17) i (2.18).

**Metoda kompleksne promenljive.** Ako se za nezavisno promenljive veličine uzmu kompleksni brojevi  $z = x + iy$  i  $\bar{z} = x - iy$ , diferencijalna jednačina savijene ploče  $\Delta \Delta w = q/D$  dobija oblik

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{1}{16D} q(z, \bar{z}). \quad (2.21)$$

Rešenje za  $w$  se dobija kao zbir  $w_1$  opšteg integrala homogenog dela jednačine (2.21), odnosno  $\partial^4 w / \partial z^2 \partial \bar{z}^2 = 0$  i  $w_0$ , partikularnog integrala jednačine (2.21) (videti [102]). Rešenje  $w_1$  biće  $w_1 = R[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$ , gde je  $R$  realni deo rešenja, a funkcije  $\varphi$  i  $\chi$  su analitičke funkcije u posmatranoj oblasti. U slučaju jednakopodeljenog opterećenja, pogodno je uzeti rešenje u obliku  $w_0 = qz^2 \bar{z}^2 / 64D$ .

Korišćenjem ove metode moguće je prikazati Green-ovu funkciju u zatvorenom obliku za kružnu ploču sa različitim konturnim uslovima. Za uklještenu kvadratnu ploču i druge slučajeve, neophodno je približno određivanje Green-ovih funkcija.

Deformacija ploče, kada je moguće da bude izražena dvostrukim trigonometrijskim redom, može se jednostavnije predstaviti korišćenjem dvostruke periodičnosti eliptičnih funkcija. Takav oblik je pogodan za izraz  $\Delta w$  koji zadovoljava jednačinu potencijala  $\Delta(\Delta w) = 0$  iz razloga povezanosti Green-ove funkcije za  $\Delta w$  i funkcije preslikavanja oblasti posmatrane ploče u jedinični krug (videti [102] str 270).

**Kombinovana metoda.** Posmatramo pravougaonu ploču slobodno oslonjenu na svim stranama i pod dejstvom opterećenja  $q$ . Njena diferencijalna jednačina je  $\Delta \Delta w = q/D$ . Rad  $\delta V$  koji vrši opterećenje  $q$  na mogućem pomeranju koje dozvoljava oslanjanje ploče (virtuelno pomeranje)  $\delta w$ , može se izračunati neposredno preko integrala

$$(\delta V)_1 = \iint q \delta w \, dx \, dy, \quad (2.22)$$

ili posrednim putem pomoću izraza

$$(\delta V)_2 = \iint D\Delta\Delta w \delta w dx dy. \quad (2.23)$$

Približno rešenje za ugib  $w$ , pretpostavimo u obliku reda

$$w = a_1\varphi_1(x, y) + a_2\varphi_2(x, y) + \dots + a_n\varphi_n(x, y),$$

gde su funkcije  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  tako uzete da budu pogodne za predstavljanje elastične površine  $w$  i da zadovoljavaju konturne uslove. Izjednačimo izraze za radove pri virtuelnim ugibima pojedinih članova reda, tj.

$$\delta w_1 = \varphi_1 \delta a_1, \delta w_2 = \varphi_2 \delta a_2, \dots, \delta w_n = \varphi_n \delta a_n. \quad (2.24)$$

Izjednačujući desne strane jednačina (2.22) i (2.23), dobijamo

$$\iint q \delta w dx dy = \iint D\Delta\Delta w \delta w dx dy. \quad (2.25)$$

Ako se uvrste izrazi (2.24) u (2.25), dobija se sistem jednačina koje kasnije dovode do rešenja.

Kombinovanom metodom koju je dao L. V. Kantorovič, za prethodni postupak može se uzeti ograničenje na samo jednu promenljivu, na primer,  $y$ . Za promenljivu  $x$  se na taj način dobija obična diferencijalna jednačina.

**Obratna metoda.** Ako pretpostavimo izvestan izraz za ugib ploče  $w$ , kao rešenje koje sigurno zadovoljava samo konturne uslove te ploče, diferencijalnu jednačinu takvog problema  $\Delta\Delta w = q/D$  koristimo za određivanje opterećenja  $\bar{q}$  kao nepoznate, pri čemu je

$$\bar{q} = D\Delta\Delta w.$$

Ovde je  $w$  poznata veličina koju smo prethodno pretpostavili. Birajući oblik rešenja za  $w$  tako da sadrži parametre  $a_1, a_2, \dots$ , te parametre ćemo birati tako da prosečne vrednosti funkcija  $q$  i  $\bar{q}$  budu izjednačene na izvesnim delovima površine ploče.

Na primeru pravougaone ploče koja je dvoosno simetrična u pogledu opterećenja i u pogledu konturnih uslova, posmatraćemo samo jednu četvrtinu ploče koju ćemo podeliti na četiri jednake površine  $A_1, A_2, A_3$  i  $A_4$ . Izraz za ugib može se predstaviti kao

$$w = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4. \quad (2.26)$$

Kada opterećenja  $q$  i  $\bar{q}$  zadovoljavaju u svakom delu površine uslov  $\iint_{A_n} (q - \bar{q}) dx dy = 0$ ,

za  $n=1,2,3,4$ , dobijaju se četiri linearne jednačine po parametrima  $a_n, n=1,2,3,4$ . Njihovim rešenjem po  $a_n$  dobija se konačan izraz za funkciju ugiba  $w$  u izrazu (2.26).

**Metoda aproksimacije za konturne uslove.** Ova metoda se sastoji u tome da ukoliko se može odrediti rešenje koje zadovoljava diferencijalnu jednačinu ploče  $\Delta\Delta w = q/D$  i samo jedan od konturnih uslova, pristupa se zadovoljenju drugog konturnog uslova određivanjem pogodno izabranih parametara. Tako je primenom ove metode proučavan slučaj pravougaone ploče sa uklještenim stranama, opterećene jednakopodeljenim opterećenjem. Pošlo se od određivanja funkcije ugiba  $w$  te ploče ali kao slobodno oslonjene na svojim stranama. Zatim je tom ugibu dodat ugib te slobodno oslonjene ploče sa opterećenjem koje karakterišu samo „momenti“ raspodeljeni duž njenih strana, tako izabranim da zadovoljavaju konturni uslov za uklještenu ploču  $\partial w/\partial n = 0$  (gde je  $n$  normala na konturu). Nagib  $\partial w/\partial n$  je razvijen u Fourier-ov red duž konture, a parametri koji su iz konturnog uslova za uklještenu gredu određeni, bili su koeficijenti dva trigonometrijska reda i predstavljali su varijaciju momenata na konturi ploče (videti [102]). Sama ova metoda može obuhvatiti slučaj kada se koristi rešenje koje zadovoljava samo diferencijalnu jednačinu problema i konturne uslove u određenim tačkama konture ploče i slučaj kada je samo u određenom broju tačaka u unutrašnjosti ploče, kao i na samoj konturi, tačno zadovoljena diferencijalna jednačina  $\Delta\Delta w = q/D$ . Nakon toga se vrši zadovoljenje određenog broja parametara.

**Metoda Weinstein-a.** Za slučaj ploče sa uklještenim stranama najpre se traži rešenje njene diferencijalne jednačine  $\Delta\Delta w_1 = q/D$  za dato opterećenje  $q$  i, umesto stvarnih, za konturne uslove  $w_1=0, \Delta w_1=0$ . Rešenje stvarnog problema se određuje u obliku

$$w = w_1 + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k ,$$

gde su  $a_k$  izvesni koeficijenti, a  $\varphi_k$  funkcije od  $x$  i  $y$ . Funkcije  $\varphi_k$  su jednake nuli na konturama ploče i zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu  $\Delta\Delta\varphi_k = 0$ . Konturni uslov  $\partial w/\partial n = 0$  (gde je  $n$  normala na konturu) se primenom Green-ove teoreme transformiše i svodi na sledeći sistem od  $n$  linearnih jednačina za određivanje parametara

$$\iint \frac{q\varphi_1}{D} dx dy + \sum_{k=1}^n a_k \iint \Delta\varphi_1 \Delta\varphi_k dx dy = 0,$$

$$\iint \frac{q\varphi_2}{D} dx dy + \sum_{k=1}^n a_k \iint \Delta\varphi_2 \Delta\varphi_k dx dy = 0,$$

... ..



Integraljenje se vrši po površini cele ploče.

**Hankel-ova transformacija.** Posmatrajmo kružnu ploču poluprečnika  $a$  pod dejstvom rotaciono simetričnog opterećenja  $q(r)$  i pomnožimo njenu diferencijalnu jednačinu  $\Delta\Delta w = q/D$  izrazom  $rJ_0(\lambda r)dr$ , gde je  $J_0$  Bessel-ova funkcija nultog reda. Posle integraljenja polarne koordinate  $r$  u granicama od 0 do  $\infty$  i, imajući u vidu, da je  $w=0$  za  $r > a$ , dobija se

$$\lambda^4 \int_0^{\infty} w(r)rJ_0(\lambda r)dr = (C_1 + \lambda^2 C_2)J_0(\lambda a) + (\lambda C_2 + \lambda^3 C_4)J_1(\lambda a) + \frac{1}{D} \int_0^a q(\rho)\rho J_0(\lambda \rho)d\rho, \quad (2.27)$$

gde je  $J_1$  Bessel-ova funkcija prvog reda, a  $C_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) konstante. Hankel-ovom transformacijom primenom inverzne teoreme na jednačinu (2.27), dobijamo izraz za ugib

$$w = \int_0^{\infty} g(\lambda) \frac{1}{\lambda^3} J_0(\lambda r) d\lambda,$$

gde je sa  $g(\lambda)$  označena desna strana jednačine (2.27).

**Sinusne transformacije.** Za slučaj pravougaone ploče može se koristiti rešenje za funkciju ugiba u obliku

$$w(x, y) = \sum Y(y, \alpha) \sin \alpha x$$

a, takođe, sinusna transformacija koristi se i za slučaj ploča u obliku sektora. Konačne sinusne transformacije funkcije  $w$  uzete u odnosu na promenljivu  $x$ , koje su uvedene zajedno sa transformisanim izvodima od  $w$  i transformisanom diferencijalnom jednačinom ploče, veoma su korisne za određivanje konstanti funkcija  $Y$  zadovoljavajući date konturne uslove ploče [102].

**Mellin-ova transformacija.** Posmatrajmo primer ploče u obliku klina-kružnog isečka. Jedna strana je uklještena (gde je polarna koordinata  $\theta=0$ ), a druga strana ( $\theta=\alpha$ ) je slobodna i na njoj deluje upravno na ploču, naniže, koncentrisana sila  $P$  sa koordinatom  $r=r_0$ . Opšte rešenje homogenog dela diferencijalne jednačine ploče, tj.  $\Delta\Delta w = 0$ , u polarnim koordinatama je

$$w(s) = \Theta(\theta, s) / r^s, \text{ gde je}$$

$$\Theta(\theta, s) = A(s)\cos s\theta + B(s)\sin s\theta + C(s)\cos(s+2)\theta + D(s)\sin(s+2)\theta,$$

a  $s$  je parametar. Konturni uslovi na uklještenoj strani ploče su:

$$[w(s)]_{\theta=0} = 0 \text{ i } \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]_{\theta=0} = 0. \quad (2.28)$$

Napadni moment  $M_t$  na slobodnoj strani biće nula ako je

$$\left[ \nu \frac{\partial^2 w(s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(s)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(s)}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\alpha} = 0. \quad (2.29)$$

Koristeći Mellin-ovu transformaciju, funkcija  $f(r)$  dobija oblik

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} r^{-s} ds \int_0^{\infty} \rho^{s-1} f(\rho) d\rho,$$

gde je  $\sigma$  realna konstanta. Funkcija  $f(r)$  će za slučaj koncentrisane sile  $P$  koja dejstvuje upravno na ploču u tački sa koordinatama ( $\theta=\alpha$ ;  $r=r_0$ ) biti

$$f(r) = \frac{P}{2\pi i r_0} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-(s+3)} ds, \quad (2.30)$$

tako da funkcija ugiba ploče dobije oblik

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} r^{-s} \Theta(\theta, s) ds. \quad (2.31)$$

Izraz (2.30) se koristi da se pored tri postojeća konturna uslova (2.28) i (2.29) dobije i četvrta jednačina potrebna za određivanje četiri koeficijenta  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $C(s)$  i  $D(s)$ , a zatim odredi i funkcija ugiba (2.31). U upotrebi su i Rayleigh-Ritz-ova metoda [104], Laplace-ove transformacije u teoriji ploča [105] i dr.

**Eksperimentalne metode.** Istorijski gledano, navešćemo kratak pregled metoda koje su od značaja za proučavanje savijanja tankih ploča. Neke od njih pokazale su se efikasnijim od analitičkih u složenijim slučajevima kada ploča predstavlja višestruko povezanu oblast, promenljive je debljine ili je složenog oblika konture.

Kod primene **metode fotoelastičnosti** se koristi činjenica da se efekat koji izaziva zrak polarizovane svetlosti iz zone zatezanja poništava zbog suprotnog efekta u zoni pritiska, u slučaju savijanja tanke ploče. To je iz razloga što su normalni naponi, za dva vlakna koja su simetrična u odnosu na srednju ravan ploče po veličini, jednaki ali su suprotnog znaka.

Jedna od metoda se sastoji u tome da se izvrši spajanje slojeva fotoelastičnog materijala sa reflektivnom površinom ploče od stvarnog elastičnog materijala. Koristeći zrak polarizovane svetlosti, ti slojevi fotoelastičnog materijala pružaju podatke o informaciji u krajnjim vlaknima ploče. Ova metoda potiče od A. Mesnager-a [102].

**Metoda odbijene svetlosti.** Refleksivna površina ploče koja je napregnuta utiče na pravce dva susedna zraka svetlosti i to se koristi za određivanje krivina površina, a preko njih i

momenata savijanja i torzionih momenata. Posebno su od značaja rezultati kod ploča na elastičnoj podlozi jer zbog veće tačnosti imaju prednost nad analitičkim metodama zbog nemogućnosti tačnijeg određivanja njihovih mehaničkih osobina.

**Analogija između ravnog naprezanja i savijanja ploče.** U slučaju savijanja ploče, koja je opterećena samo silama na konturi, diferencijalna jednačina je  $\Delta\Delta w = 0$ . Između tog slučaja i slučaja ravnog naprezanja, kod koga Airy-eva funkcija napona  $F(x,y)$  (iz 1862. god) zadovoljava diferencijalnu jednačinu  $\Delta\Delta F = 0$ , postoji međusobna analogija.

**Metod konačnih razlika.** Ovaj metod predstavlja približni metod numeričke analize za rešavanje graničnih zadataka. Diferencijalna jednačina ili sistem diferencijalnih jednačina se ovim metodom zadovoljavaju u određenom, konačnom broju tačaka oblasti  $\Omega$  i u određenom, konačnom broju tačaka konture  $\Gamma$  te oblasti. Uzimajući približno izraze u obliku konačnih razlika-diferencija, za diferencijalne operatore tretiranih diferencijalnih jednačina i graničnih uslova, problem se svodi na rešavanje linearnih algebarskih jednačina. Tako se određuju vrednosti traženih funkcija u određenom, unapred odabranom broju tačaka, kako oblasti  $\Omega$ , tako i na konturi  $\Gamma$ .

**Metode rešavanja ravanskih, visokih nosača u pravougloj jednostrukopovezanoj oblasti.** Da bi se odredila biharmonijska funkcija napona  $F(x,y)$ , koja je neprekidna funkcija koordinata  $x$  i  $y$  u srednjoj ravni ploče, uz zadovoljavanje graničnih uslova konture ploče ovde će biti razmotrena primena polinoma i trigonometrijskih redova.

**Rešenje korišćenjem polinoma.** Za rešavanje različitih ravanskih zadataka može se primeniti obratna metoda uzimajući funkciju napona  $F(x,y)$  tako da ona bude biharmonijska funkcija koja zadovoljava biharmonijsku jednačinu  $\Delta\Delta w = 0$  ili u razvijenom obliku

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0,$$

a zatim se vrši ispitivanje koje granične uslove, odnosno koja opterećenja na konturi zadovoljava. U narednom ćemo izložiti slučajeve da biharmonijska funkcija bude u obliku polinoma različitih stepena.

*Polinomi prvog stepena.* Ovi polinomi ne mogu da se primene kao funkcije napona jer su njihovi drugi izvodi jednaki nuli, što znači da bi naponi sračunati pomoću ovog polinoma bili jednaki nuli.

*Polinomi drugog stepena.* Analogno [1], polinom ćemo uzeti u obliku

$$F_2(x, y) = \frac{a_1}{2} x^2 + a_2 xy + \frac{a_3}{2} y^2. \quad (2.32)$$

Četvrti izvodi ove funkcije po promenljivima  $x$  i  $y$  su jednaki nuli, tj.

$$\frac{\partial^4 F_2}{\partial x^4} = 0, \quad \frac{\partial^4 F_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 F_2}{\partial y^4} = 0,$$

tako da je i biharmonijska jednačina  $\Delta\Delta F = 0$  zadovoljena, odnosno

$$\frac{\partial^4 F_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F_2}{\partial y^4} = 0.$$

Zbog toga polinom drugog stepena  $F_2(x, y)$  može biti primenjen kao funkcija napona.

*Polinom trećeg stepena.* Ako za funkciju napona  $F(x, y)$  uzmemo polinom trećeg stepena

$$F_3(x, y) = \frac{b_1}{6} x^3 + \frac{b_2}{3} x^2 y + \frac{b_3}{2} xy^2 + \frac{b_4}{6} y^3,$$

biharmonijska jednačina  $\Delta\Delta F = 0$  će biti identički zadovoljena. Zato je ovaj polinom biharmonijska funkcija i može se primeniti za rešavanje raznih ravanskih zadataka. Koeficijenti  $b_i$  ( $i=1, \dots, 4$ ) mogu biti uzeti međusobno nezavisno.

*Polinom četvrtog stepena.* Uzmimo polinom četvrtog stepena oblika

$$F_4(x, y) = \frac{c_1}{12} x^4 + \frac{c_2}{6} x^3 y + \frac{c_3}{4} x^2 y^2 + \frac{c_4}{6} xy^3 + \frac{c_5}{12} y^4. \quad (2.33)$$

Diferenciranjem funkcije  $F_4(x, y)$  i zamenom njenih odgovarajućih četvrtih izvoda u biharmonijskoj jednačini  $\Delta\Delta F = 0$ , dobijamo  $c_1 + c_3 + c_5 = 0$ . Iz prethodnog sledi da koeficijenti  $c_1$ ,  $c_3$  i  $c_5$  nisu međusobno nezavisni. Ako pretpostavimo da su  $c_1$  i  $c_3$  nezavisni, koeficijent  $c_5$  se može izraziti preko njih, tj

$$c_5 = -(c_1 + c_3). \quad (2.34)$$

Na taj način su koeficijenti  $c_1, \dots, c_4$  nezavisni, dok je  $c_5$  zavisan prema (2.34). Zamenom (2.34) u (2.33), polinom  $F_4(x, y)$  dobija oblik sa kojim može da bude biharmonijska funkcija tj.

$$F_4(x, y) = \frac{c_1}{12} (x^4 - y^4) + \frac{c_2}{6} x^3 y + \frac{c_3}{4} \left( x^2 y^2 - \frac{y^4}{3} \right) + \frac{c_4}{6} xy^3.$$

*Polinom petog stepena.* Pretpostavimo polinom petog stepena oblika

$$F_5(x, y) = \frac{d_1}{20} x^5 + \frac{d_2}{12} x^4 y + \frac{d_3}{6} x^3 y^2 + \frac{d_4}{6} x^2 y^3 + \frac{d_5}{12} xy^4 + \frac{d_6}{20} y^5, \quad (2.35)$$

za funkciju napona  $F(x,y)$ . Ako njene izvode  $\frac{\partial^4 F_5}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^4 F_5}{\partial x^2 \partial y^2}$  i  $\frac{\partial^4 F_5}{\partial y^4}$  uvrstimo u biharmonijsku

jednačinu  $\Delta\Delta F = 0$ , dobijamo

$$(6d_1 + 4d_3 + 2d_5)x + (2d_2 + 4d_4 + 6d_6)y = 0. \quad (2.36)$$

Jednačina (2.36) će biti zadovoljena za bilo koje vrednosti promenljivih  $x$  i  $y$  ako je

$$6d_1 + 4d_3 + 2d_5 = 0 \text{ i } 2d_2 + 4d_4 + 6d_6 = 0. \quad (2.37)$$

Kako postoje dva uslova (2.37), broj nezavisnih koeficijenata će biti četiri umesto šest. Pretpostavimo da su  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  i  $d_4$  nezavisni, a  $d_5$  i  $d_6$  zavisni koeficijenti koji se pomoću (2.37) mogu izraziti preko nezavisnih koeficijenata, tj

$$d_5 = -3d_1 - 2d_3 \text{ i } d_6 = -\frac{1}{3}d_2 - \frac{2}{3}d_4. \quad (2.38)$$

Kada  $d_5$  i  $d_6$  iz (2.38) uvrstimo u (2.35) dobija se

$$F_5(x, y) = \frac{d_1}{20}(x^5 - 5xy^4) + \frac{d_2}{12}\left(x^4y - \frac{1}{5}y^5\right) + \frac{d_3}{6}(x^3y^2 - xy^4) + \frac{d_4}{6}\left(x^2y^3 - \frac{1}{5}y^5\right). \quad (2.39)$$

Polinom  $F_5(x,y)$  u obliku (2.39) predstavlja biharmonijsku funkciju napona i može se koristiti za rešavanje zadataka ravnog problema ploče.

**Primer 2.1.** Razmotriti granične uslove, odnosno, opterećenje pravougaone ploče koji odgovaraju funkciji napona uzetoj u obliku polinoma drugog stepena, ako su zapreminske sile jednake nuli.

Uzmimo polinom drugog stepena kao biharmonijsku funkciju oblika (2.32). Komponentalni naponi su

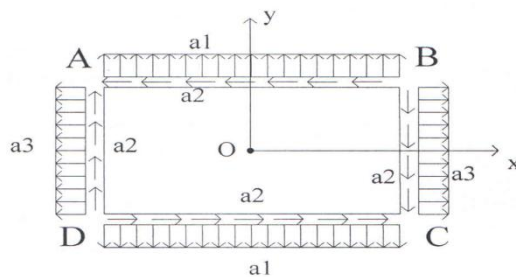
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = a_3, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = a_1, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = -a_2. \quad (2.40)$$

Granični uslovi su:

$$\begin{aligned} p_{n_0x} &= a_3 \cos \alpha_0 - a_2 \cos \beta_0, \\ p_{n_0y} &= -a_2 \cos \alpha_0 + a_1 \cos \beta_0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

gde je  $n_0$  normala na konturi ploče, a  $\alpha_0$  i  $\beta_0$  su uglovi koje ona gradi sa osama  $x$  i  $y$  respektivno.

Na osnovu izraza (2.40) komponentalni naponi su konstantni, a iz (2.41) proizilazi da je intenzitet opterećenja na konturama ploče, takođe, konstantan. Odredićemo opterećenja koja deluju na konturama pravougaone ploče Sl.2.3



Sl.2.3: Pravougaona ploča opterećena na konturama

Granični uslovi će na osnovu (2.41) i kosinusa uglova normale biti:

$$\text{za stranu ploče } AB: p_{yx} = a_3 \cos \frac{\pi}{2} - a_2 \cos 0 = -a_2, \quad p_{yy} = -a_2 \cos \frac{\pi}{2} + a_1 \cos 0 = a_1;$$

$$\text{za stranu ploče } BC: p_{xx} = a_3 \cos 0 - a_2 \cos \frac{\pi}{2} = a_3, \quad p_{xy} = -a_2 \cos 0 + a_1 \cos \frac{\pi}{2} = -a_2;$$

$$\text{za stranu ploče } CD: p_{-yx} = a_3 \cos \frac{\pi}{2} - a_2 \cos \pi = a_2, \quad p_{-yy} = -a_2 \cos \frac{\pi}{2} + a_1 \cos \pi = -a_1;$$

$$\text{za stranu ploče } AD: p_{-xx} = a_3 \cos \pi - a_2 \cos \frac{\pi}{2} = -a_3, \quad p_{-xy} = -a_2 \cos \pi + a_1 \cos \frac{\pi}{2} = a_2.$$

Na osnovu ovog primera mogu se dobiti i neki posebni slučajevi koji se javljaju u praktičnim problemima (videti [1]).

**Rešenje korišćenjem redova.** Za funkciju napona  $F(x,y)$  mogu da se primene trigonometrijski redovi po sinusu ili kosinusu. Posmatrajmo funkciju oblika

$$F(x, y) = U(y) \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad (2.42)$$

gde je:  $U(y)$ - funkcija koja zavisi samo od promenljive  $y$ ;

$n$ - bilo koji ceo broj;

$l$ - dužina pravougaone ploče u pravcu  $x$ .

Diferenciranjem funkcije  $F(x,y)$ , dobijamo sledeće izvode koji se javljaju u biharmonijskoj jednačini  $\Delta\Delta F = 0$ :

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 U \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 U'' \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = U^{IV} \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (2.43)$$

Kada uvrstimo izraze (2.43) u  $\Delta\Delta F = 0$ , dobijamo jednačinu

$$\left( U^{IV} - 2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 U'' + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 U \right) \cos \frac{n\pi}{l} x = 0.$$

Ako funkcija  $U(y)$  zadovoljava jednačinu

$$U^{IV} - 2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 U'' + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 U = 0, \quad (2.44)$$

za bilo koju vrednost  $x$ , biharmonijska jednačina  $\Delta\Delta F = 0$  će biti zadovoljena. Rešenje diferencijalne jednačine (2.44) je

$$U(y) = A_n \cosh \frac{n\pi}{l} y + B_n y \cosh \frac{n\pi}{l} y + C_n \sinh \frac{n\pi}{l} y + D_n y \sinh \frac{n\pi}{l} y. \quad (2.45)$$

Kada (2.45) uvrstimo u (2.42), funkcija napona  $F(x,y)$  dobija sledeći oblik

$$F(x, y) = \left( A_n \cosh \frac{n\pi}{l} y + B_n y \cosh \frac{n\pi}{l} y + C_n \sinh \frac{n\pi}{l} y + D_n y \sinh \frac{n\pi}{l} y \right) \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

Za različite vrednosti celobrojne  $n$  dobijaju se različite, nove vrednosti funkcije  $F(x,y)$  koje se međusobno razlikuju po vrednostima konstanti  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  i  $D_n$  i parametara  $n\pi/l$ . Opšte rešenje biharmonijske jednačine  $\Delta\Delta F = 0$  možemo predstaviti u obliku beskonačnog reda u čijim članovima su sadržana sva moguća partikularna rešenja, tj.

$$F_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cosh \frac{n\pi}{l} y + B_n y \cosh \frac{n\pi}{l} y + C_n \sinh \frac{n\pi}{l} y + D_n y \sinh \frac{n\pi}{l} y \right) \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (2.46)$$

Analognim postupkom može se pokazati i rešenje za funkciju napona u obliku trigonometrijskog reda po sinusu

$$F_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A'_n \cosh \frac{n\pi}{l} y + B'_n y \cosh \frac{n\pi}{l} y + C'_n \sinh \frac{n\pi}{l} y + D'_n y \sinh \frac{n\pi}{l} y \right) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (2.47)$$

gde su  $A'_n$ ,  $B'_n$ ,  $C'_n$  i  $D'_n$  konstante. Funkcija napona može da se predstavi kao zbir izraza (2.46) i (2.47),

$$F_S = F_1 + F_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( A'_n \cosh \frac{n\pi}{l} y + B'_n y \cosh \frac{n\pi}{l} y + C'_n \sinh \frac{n\pi}{l} y + D'_n y \sinh \frac{n\pi}{l} y \right) \sin \frac{n\pi}{l} x + \left( A_n \cosh \frac{n\pi}{l} y + B_n y \cosh \frac{n\pi}{l} y + C_n \sinh \frac{n\pi}{l} y + D_n y \sinh \frac{n\pi}{l} y \right) \cos \frac{n\pi}{l} x \right].$$

Opterećenje koje deluje na konturama ploče treba da bude izraženo u vidu trigonometrijskog reda po sinusu ili kosinusu, tako da se konstante  $A_n, A'_n, \dots, D_n, D'_n$  mogu odrediti preko konturnih uslova. U slučajevima rešavanja ravanskih problema, koji to zahtevaju, funkciju napona možemo predstaviti i kao zbir trigonometrijskih funkcija i određenih polinoma.

## 2.2 MKE i MGE u rešavanju problema mehanike

Nagli razvoj računarske tehnike, zbog gotovo revolucionarnog tehnološkog napretka elektronskih računara, doprineo je da se oblasti mehanike, teorije konstrukcija sa dinamikom konstrukcija, analizama i modelovanjem konstrukcija, na poseban način, u računarskom smislu, tretiraju. U domenima gde su analitička izračunavanja veoma komplikovana, a jednačine, npr. tipa parcijalnih diferencijalnih i integralnih, definišu realne i potrebne probleme, može se diskretizacijom oblasti doći do rešenja sa dovoljnom tačnošću.

Najmoćniji metodi u računarskoj tehnici postaju metod konačnih elemenata (MKE) i metod graničnih elemenata (MGE). MKE i MGE su u poslednjim decenijama vrlo popularni i nalaze primenu ne samo u inženjerstvu već i šire. Njihova primena je u mehanici loma, mehanici oštećenja, problemima protoka fluida, elektromagnetici, problemima prenosa toplote, difrakciji i dr. U MGE problem granične vrednosti se numerički modelira koristeći diskretizaciju, najčešće granice oblasti, čime se dolazi do sistema linearnih algebarskih jednačina koji vrši aproksimaciju rešenja originalnog problema. U većini slučajeva kod problema se zahteva veoma tačna numerička integracija jednostrukih ili višestrukih integrala koji su opterećeni singularitetima tako što poseduju singularna jezgra ili imaju singularne bazisne funkcije, a javljaju se i slučajevi da integrali budu i sa singularnim jezgrima i sa singularnim bazisnim funkcijama (videti [62]).

U MGE se javljaju koeficijenti uticaja koji sadrže integrale duž granice. Za njihovo rešavanje neophodno je numeričko rešavanje jer i u manjem broju slučajeva, gde se rešenje može dobiti analitički, ta rešenja su obično data složenim izrazima tako da su veoma komplikovana i potpuno nepraktična. Složenost problema ogleda se i u tome što se granični elementi aproksimiraju kao konstantni, linearni, parabolični ili drugačijih oblika, a granična veličina duž tih elemenata se aproksimira polinomom istog ili drugačijeg stepena u odnosu na granični element. Do komplikacija dolazi u prelomnim tačkama granice ili u tačkama gde granični uslovi menjaju tip.

Za dobijanje vandijagonalnih elemenata matrice sistema linearnih algebarskih jednačina, koja se javlja pri ovoj numeričkoj analizi, izvor (tj. koncentrisana sila) koji se nalazi u oblasti površine integracije je izvan graničnog elementa. Nasuprot tome, za dijagonalne elemente izvor leži u čvoru samog graničnog elementa zbog čega dolazi do pojave singulariteta. Na primer, u slučaju da su granični elementi konstantni, u okviru rešavanja integralne jednačine kod MGE



linijski integrali za elemente matrice van glavne dijagonale su regularni. Za dijagonalne elemente se referentna tačka  $P_i(x_i, y_i)$  nalazi na graničnom elementu duž koga se vrši integraljenje. Rastojanje  $r = |q - P_i|$  je jednako nuli u slučaju kada je  $P_i \equiv q$  ( $q$  je tačka za integraciju duž graničnog elementa). Tada linijski integral postaje singularan. Pored singulariteta algebarskog tipa ovde se javljaju i singulariteti logaritamskog tipa koji se mogu prikazati u obliku

$$I = \int_0^1 f(x) \log x dx.$$

Za njihovo numeričko rešavanje se razvija i primenjuje postupak Gauss-ovih kvadratura. Isto tako, u određenim praktičnim slučajevima, postoje delovi gde granica nije glatka kriva i javljaju se prelomne tačke, što dovodi do singulariteta, takođe.

Iz ovih razloga, postoji potreba za dobijanjem novih rezultata primenom numeričke analize radi poboljšavanja, tačnosti i efikasnosti ovih metoda.

Iako je još 1900. god. Fredholm [30] primenio metod za rešavanje integralnih jednačina, prevođenjem jednačine po oblasti u analognu jednačinu po granici, njegova praktična primena kroz MGE je otpočela tek šezdesetih godina dvadesetog veka. Jaswon i Ponter [58] su 1963. godine razvili tehniku numeričkog rešavanja Saint-Venant-ovog problema ograničene torzije štapa proizvoljnog poprečnog preseka koja uključuje i deplanaciju samog preseka. Katsikadelis i Sapountzakis [61] su 1985. i Katsikadelis [60] razvili tehniku rešavanja integralnih jednačina u kojima su nepoznate granične veličine. Dobijena su značajna rešenja za različite oblike kompozitnih poprečnih preseka pri uticaju torzije. Tako je za rešenje ograničene torzije štapa elipsastog poprečnog preseka bolje uzeti gušći raspored graničnih elemenata (manje dužine elemenata) na delovima gde su veće krivine granice, a na ostalim mestima proporcionalno duže elemente čime se postiže bolja tačnost (za detalje videti [58]). Obuhvaćeni su i slučajevi anizotropnih tela. Za rešavanje površinskih integrala po oblasti površine  $\Omega$  (čija je granica  $\Gamma$ ) potrebni su u određenim slučajevima i složeniji postupci integracije. Tako, oblast  $\Omega$  se može podeliti na podoblasti različitih oblika npr. trouglova, i preko njih se vrši numerička integracija. I ovde se javlja u integralu po oblasti  $\Omega$  singularitet logaritamskog tipa za koji se vrši numeričko izračunavanje primenom kvadrturnih formula (videti, na primer, Galager [31] i Hamer [51]).

Interesantno je da su, zbog otežanosti nalaženja funkcije  $F$  koja predstavlja partikularno rešenje Poisson-ove jednačine  $\Delta^2 F = f$ , a da bi se dobilo rešenje za funkciju  $F$  i  $\partial F / \partial n$  (gde je  $n$

normala na granicu  $\Gamma$ ) usled izvora definisanog funkcijom rasporeda  $f(x, y)$ , Nardini i Brebia [89] dali Metod dualnog reciprociteta 1982. godine. Cilj im je bio rešavanje dinamičkih problema preko MGE i fundamentalnog rešenja statičkog problema. Oni su na ovaj način dali metod koji je pogodan za rešavanje različitih nelinearnih problema.

## 2.3 Singulariteti (algebarski i logaritamski) i primena integralnih jednačina

U ovom delu daće se kratak prikaz nekih od problema koji se javljaju u teoriji konstrukcija i primenjenoj mehanici u kojima se javljaju singulariteti. Kroz ovaj selektivni prikaz problema navodi se izvestan broj karakterističnih slučajeva koji se javljaju u ovoj oblasti. Biće prikazan primer pojave singulariteta kod pravougaone ploče kao i primer uticajnih polja kod površinskih nosača, preuzeti iz literature.

### 2.3.1 Slučaj singulariteta kod pravougaone ploče

Kada govorimo o singularitetima koji se odnose na naprezanje ploče koja je savijena, ako neki od komponentalnih napona dostiže beskonačnu vrednost u nekoj tački  $O(x_0, y_0)$ , kažemo da u toj tački postoji singularitet. Pojava singulariteta nastaje u tačkama ploče na koje dejstvuju koncentrisane sile, odnosno sile spregova, tako da se singulariteti mogu javiti u uglovima ploča kod otpora, bez obzira od opterećenja koje deluje na tu ploču. Navešćemo slučaj koncentrisane sile u blizini uklještene strane u skladu sa [102]. U slučaju beskonačno širokog konzolnog nosača (videti Sl.2.4) koji je u tački  $(\zeta, \eta)$  opterećen koncentrisanom silom  $P$ , izraz za ugib  $w$  je

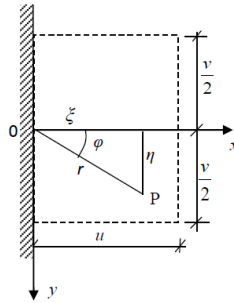
$$w = -\frac{P}{16\pi D} \left[ 4x\xi - r^2 \log \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{r_1^2} \right], \quad (2.48)$$

gde je  $r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$ ,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} - \text{krutost ploče na savijanje.}$$

Moment uklještenja u tački  $O(x=y=0)$ , korišćenjem izraza (2.48), ima vrednost  $M_x = -(P/\pi)\cos^2 \varphi$ , ako  $\zeta$  i  $\eta$  ne dobijaju vrednosti nula u isto vreme. U slučaju da su obe

vrednosti  $\zeta$  i  $\eta$  jednake nuli, moment  $M_x$  će biti jednak nuli, tako da je u samom početku funkcija  $M_x(\zeta, \eta)$  prekidna.

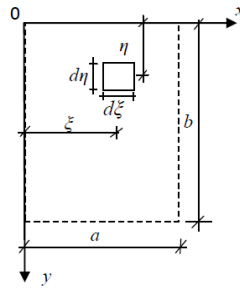


*Sl.2.4 Pravougaona ploča opterećena u tački P [102]*

Napomenimo da će koncentrisana sila, odnosno koncentrisano opterećenje koje deluje u blizini strane ploče koja je kruto ili elastično uklještena, imati sličan uticaj nezavisno od uslova oslanjanja ostalih strana te ploče i to će se odraziti tako da se javi karakteristični oblik uticajnih površina za momente koji su na toj konturi sa krutim ili elastičnim uklještenjem.

**Uticajne funkcije i sopstvene vrednosti.** Izraz za ugib slobodno oslonjene pravougaone ploče stranica  $a$  i  $b$  (Sl.2.5) usled dejstva koncentrisane jedinične sile  $P=1$  je (videti [102])

$$w = K(x, y, \zeta, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\zeta}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} . \quad (2.49)$$



*Sl.2.5 Dejstvo koncentrisanog opterećenja na pravougaonu ploču [102]*

U slučaju da smatramo da su promenljive veličine  $\zeta$  i  $\eta$ , jednačina (2.49) predstavlja uticajnu površinu za ugib ploče u tački sa koordinatama  $x=\zeta, y=\eta$  kada je pokretno jedinično opterećenje  $P=1$  u tački sa koordinatama  $\zeta$  i  $\eta$ . U slučaju datog raspodeljenog opterećenja intenziteta  $f(\zeta, \eta)$  koje deluje na površini  $A$  i uz uvažavanje principa superpozicije, dobijamo ugib u nekoj tački kao

$$w = \iint_A f(\xi, \eta) K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.50)$$

gde se integraljenje sprovodi po opterećenoj površini  $A$ . Uzet je elementarni teret  $f(\xi, \eta)d\xi d\eta$  u okolini tačke sa koordinatama  $x=\xi$ ,  $y=\eta$ . Funkcija  $K(x, y, \xi, \eta)$  predstavlja Green-ovu funkciju ploče i u ovom slučaju je zbog rešenja (2.49) povezana sa konturnim uslovima slobodno oslonjene pravougaone ploče.

Interesantna je povezanost Green-ove funkcije pravougaone ploče pri savijanju i problema njenih slobodnih poprečnih vibracija. Slobodne poprečne vibracije određuju se preko diferencijalne jednačine

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 W = -\frac{\mu}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2},$$

gde su

$W(x, y, t)$ -ugib,

$\mu$ -masa jedinice površine ploče,

$t$ -vreme.

Ako izrazimo ugib kao  $W=w(x, y) \cos pt$ , dobijamo jednačinu

$$D\Delta\Delta w - \lambda w = 0, \quad (2.51)$$

gde je  $\lambda = p^2 \mu$ .

Za izvesne konturne uslove postoje rešenja jednačine (2.51) i to za određene vrednosti parametra  $\lambda$ . Te vrednosti  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots$  su sopstvene vrednosti ovog problema. Na osnovu njih se dobijaju sopstvene funkcije  $w_1(x, y), \dots, w_k(x, y), \dots$  za koje važi ortogonalnost, tj.

$$\iint_A w_i(x, y) w_k(x, y) dx dy = 0 \quad (i \neq k).$$

S obzirom da su sopstvene funkcije  $w_k$  određene do na konstantan množilac, taj množilac biramo tako da se zadovolji uslov

$$\iint_A w_k^2(x, y) dx dy = a^2 b^2, \quad (2.52)$$

gde je uzeto da su  $a$  i  $b$  stranice pravougaone ploče. Tada izraz (videti [102])

$$K(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{a^2 b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k(x, y) w_k(\xi, \eta)}{\lambda_k}, \quad (2.53)$$

predstavlja uticajnu funkciju za pravougaonu ploču čije konturne uslove zadovoljavaju sopstvene funkcije  $w_k$ . Primenjujući princip superpozicije za grupu od  $n$  koncentricanih sila  $P_i$  u tačkama  $(\xi_i, \eta_i)$  možemo naći ukupan ugib u nekoj fiksiranoj tački  $(x, y)$  za slučaj pravougaone ploče a na osnovu izraza (2.49) za slučaj jedinične koncentrisane sile

$$w = \sum_{i=1}^n P_i K(x, y, \xi, \eta). \quad (2.54)$$

Na osnovu jednačina (2.50), (2.53) i (2.54) možemo konstatovati da se ugib ploče može prikazati linearnom kombinacijom sopstvenih funkcija te ploče.

U [102] se može videti primer slobodno oslonjene pravougaone ploče čije su strane  $a$  i  $b$ . Zadovoljavajući konturne uslove ploče ( $w=\Delta w=0$ ), jednačinu (2.51) i uz normalizovanje sopstvenih funkcija prema uslovu (2.52) određene su sopstvene vrednosti

$$\lambda_k = \pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.55)$$

i odgovarajuće sopstvene funkcije

$$w_k = 2\sqrt{ab} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.56)$$

( $m$  i  $n$  su dva proizvoljno data cela broja). Ako se uvrsti rezultat  $\lambda_k$  iz (2.55) i  $w_k$  iz (2.56) uz razvijanje izraza (2.53), dobija se rezultat (2.49).

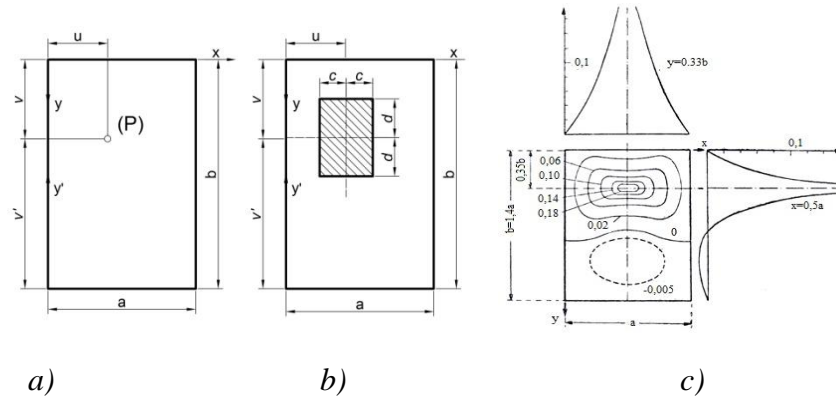
### 2.3.2 Uticajna polja kod površinskih nosača

Za slučajeve ravnih površinskih nosača pojavila se potreba za određivanjem dvodimenzionalnih uticajnih polja. Prve publikacije iz ove oblasti pojavile su se četrdesetih godina dvadesetog veka, kada su započeta sistematičnija sakupljanja rezultata, tablica i planova. Kod površinskih nosača su se uz pomoć uticajnih polja određivali najnepovoljniji položaji tereta koji su raspodeljeni na veoma male površine, tako da u teorijskom smislu predstavljaju koncentrisane sile koje deluju na pojedine tačke ploče.

Među prvima su E. Bittner i A. Pucher proračunavali uticajna polja, a u monografiji o površinskim nosačima Karl Girkmann-a [36] prikazana su detaljnija rešenja iz ove oblasti.

Navedimo dva slučaja gde se javljaju singulariteti.

U prvom je Bittner [9] za pravougaonu ploču koja je slobodno oslonjena na svojim stranama  $a$  i  $b$  (videti Sl.2.6), proračunavao uticajna polja.



Sl.2.6 Pravougaona ploča slobodno oslonjena; a) ploča opterećena u tački konc. silom  $P$ , b) ploča sa raspodeljenim opterećenjem po pravougaoniku, c) uticajno polje  $[m_y]$  za tačku  $u, v$  [36]

Dobijeno je uticajno polje  $[m_y]$  za moment  $m_y$  u tački sa koordinatama  $u, v$  oblika [36]

$$[m_y] = \sum_n \sin \alpha_n u \sin \alpha_n x \frac{\sinh \alpha_n v' \sinh \alpha_n y}{\alpha_n a \sinh \alpha_n b} (1 + \alpha_n v' \coth \alpha_n v' + \alpha_n y \coth \alpha_n y - \alpha_n b \coth \alpha_n b)$$

za  $0 \leq y \leq v$ , gde su:  $\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$ ,  $v' = b - v$  i  $\coth x = \cosh x / \sinh x$ .

Na Sl.2.6.c) je prikazan slučaj uticajnog polja  $[m_y]$  za tačku  $(u, v)$  na kojoj dejstvuje koncentrisani teret  $P$  (Sl.2.6.a)). Da bi se prevazišao singularitet i dobilo rešenje, pribegnuto je integraljenju mimo tačke singulariteta (videti Sl.2.6.b)). Tako je vrednost momenta

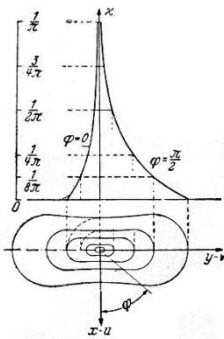
$$m_y = p \int_{u-c}^{u+c} dx \int_{v-d}^{v+d} [m_y] dy.$$

Problem se svodi na određivanje zapremine koju ograničava površina  $[m_y]$  u okolini tačke  $(u, v)$  i čiji se volumen, zbog singularnog dela proteže do beskonačnosti. Za slučajeve dejstva opterećenja na veoma male površine, uzima se veliki broj članova trigonometrijskog reda preko koga je rešenje numerički određeno, čime su dobijeni dovoljno tačni rezultati.

Singularni udeo rešenja uz uticajno polje  $[m_x]$  može se prikazati kao

$$[m_x]_0 = -K \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial u^2} = -\frac{1}{8\pi} \left( 2 \log \frac{r}{r_0} + 2 \cos^2 \varphi + 1 \right). \quad (2.57)$$

Na Sl.2.7. prikazan je jedan deo singulariteta rešenja za uticajno polje  $m_x$  u polarnim koordinatama  $r, \varphi$ .



Sl.2.7 Jedan deo singularnog rešenja za uticajno polje  $[m_x]$ [36]

Za moment savijanja svake ravni, kroz tačku  $(u,v)$ , koja je upravna na srednju ravan ploče, važi jednačina (2.57). Ugao  $\varphi$  se odnosi na normalu ravni preseka.

## 2.4 Metod integralnih jednačina sa Green-ovom funkcijom

Rešavanje integralnih jednačina ima svoj značaj u skoro svim naučnim oblastima, a posebno u tehnici. Numerička integracija je tačniji proces od numeričkog diferenciranja koje je implicitno uključeno u metodu konačnih razlika (za analizu grešaka videti [5]).

Jedan od metoda za rešavanje graničnih problema koji se javljaju u teoriji konstrukcija, predstavio je N. Hajdin u svom radu [47]. Suština ovog metoda je da diferencijalnu jednačinu ili sistem diferencijalnih jednačina datog problema svede, zajedno sa graničnim uslovima, na integralnu ili sistem integralnih jednačina. Jezgro koje množi nepoznatu funkciju u odgovarajućem integralnom operatoru je Green-ova funkcija, koja uglavnom predstavlja uticajnu funkciju, odnosno, uticajnu liniju zavisno od problema koji se tretira. Primenom ovog metoda kod složene geometrije u praktičnim problemima moguće je povoljnije i lakše uzimanje komplikovanih graničnih uslova.

Po vremenu nastanka, metod je nastao pre Metoda graničnih elemenata, a po svojoj filozofiji i načinu rešavanja problema, svođenjem na problem graničnih vrednosti (konturni problem), može se smatrati kao njegova preteča, tj. da je doprineo samom razvoju Metoda graničnih elemenata.

Kod numeričkog rešavanja broj linearnih algebarskih jednačina u numeričkom postupku može se smanjiti, pa je postupak rešavanja stabilniji. Ovaj metod našao je svoju primenu u problemima površinskih i prostornih složenih konstrukcija (brane, ljuske i dr.), problemima dinamike, stabilnosti, itd.

Rešenje problema graničnih vrednosti (Boundary Value Problem BVP) za obične diferencijalne jednačine predstavili su još 1972. godine Hajdin i Krajčinović [49]. Ovaj metod je razvijen konstrukcijom jednostavne polinomske Green-ove funkcije i daje veoma dobru tačnost. Autori su razmatrali potpuno nehomogen sistem (BVP)

$$Lu = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

sa graničnim uslovima u  $x=a$  i  $x=b$ , koji su dati kao  $B_1(u)=\alpha$  i  $B_2(u)=\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ), gde je  $L$  linearni diferencijalni operator  $n$ -tog reda,  $f(x)$  je proizvoljna funkcija od  $x$ , a  $B_1$  i  $B_2$  su izvesne linearne kombinacije funkcije  $u(x)$  i njenih izvoda do reda  $n-1$ . Konstrukcijom Green-ove funkcije  $G(x,y)$ , diferencijalni problem graničnih vrednosti svodi se na Fredholm-ovu integralnu jednačinu druge vrste

$$u(x) + \int_a^b G(x,y)u(y)dy = g(x), \quad a < x < b, \quad (2.58)$$

gde je  $g(x)$  poznata funkcija, pri čemu su zatim koristili dva načina za rešavanje integralne jednačine (2.58):

- kvadraturno pravilo i pogodno odabrane kolokacione tačke za svođenje jednačine (2.58) na sistem linearnih algebarskih jednačina i

- aproksimaciju  $u(x)$  pomoću splajn funkcije datog reda.

Sa pojavom MKE i moderne računarske tehnologije ne smanjuje se primena ovog metoda jer se za rešavanje praktičnih problema u građevinarstvu i šire, primenom MKE kao i MGE, javlja potreba za rešavanjem problema kod kojih se odgovarajući integrali javljaju sa singularitetima i zahtevaju specijalni numerički tretman.

Tipične su dve vrste singulariteta: algebarski i logaritamski singulariteti. Funkcije sa takvim svojstvima su Müntz-ovi i Müntz-logaritamski polinomi i oni se mogu koristiti za dobijanje efikasnih metoda za integraciju. Na kraju ovog poglavlja biće pomenut jedan drugačiji pristup putem koga je omogućeno dobijanje Gauss-ovih kvadratura za Müntz-ove sisteme (videti Milovanović [77] i [84] i Milovanović i Cvetković [81]).



Napomenimo da je, takođe, veoma značajno tačno izračunavanje jednostrukih i višestrukih integrala sa kvazi-singularitetima (kvazi-singularni integrali), tj. kada je putanja integracije u blizini singulariteta. Vratimo se sada na problem rešavanja Fredholm-ove integralne jednačine druge vrste (FK2) koje se mogu predstaviti u obliku

$$u(x) + \mu \int_A K(x, y)u(y)w(y)dy = g(x), \quad x \in A \subset \mathbb{R}, \quad (2.59)$$

gde su:  $K(x, y)$  – jezgro integralne jednačine,

$w$  - data težinska funkcija,

$g$  - poznata funkcija,

$\mu \in \mathbb{R}$  - parametar,

$u$  - nepoznata funkcija.

U literaturi danas ima mnogo numeričkih metoda za rešavanje integralnih jednačina (videti, na primer, [3], [63]). U većini slučajeva one su razvijene za specifične tipove jezgara. Ovakva vrsta integralnih jednačina (FK2) se može numeričkim metodima svesti na sistem linearnih algebarskih jednačina. Međutim, ti sistemi su vrlo često loše uslovljeni.

Rešenje integralne jednačine može biti dato u obliku polinoma, splajn funkcije, funkcije koja je deo-po-deo polinom, itd. Za neke novije i veoma efikasne metode videti [26], [75], [76]. Metode za svođenje integralne jednačine (2.59) na sistem linearnih jednačina zahtevaju kvalitetne kvadraturene formule za aproksimaciju težinskog integrala u (2.59). Zato ćemo ovde razviti i predložiti metod za konstrukciju nekih težinskih Gauss-ovih kvadraturenih formula za integrale sa algebarskim i/ili logaritamskim singularitetima. Naglasimo da su ovakve kvadrature Gauss-ovog tipa veoma prikladne kod metoda za rešavanje integralnih jednačina tipa (2.59). U narednom, razmotrićemo neke tipične slučajeve koji mogu igrati vrlo važnu ulogu u numeričkoj implementaciji MGE, pogotovo za granične elemente višeg reda (videti [60], Poglavlja 4 i 5).

Za integrale sa logaritamskim singularitetom i/ili nekom vrstom algebarskih singulariteta, konvergencija kvadraturenih procesa je veoma spora, tako da je neophodno konstruisati tzv. težinske kvadraturene formule. U takvim slučajevima težinske funkcije odgovarajućih Gauss-ovih kvadratura uključuju one „teške delove“ integranda koji sadrže singularitete. Pre nego što razmotrimo nekoliko slučajeva takvih kvadratura na standardnom intervalu  $[0,1]$ , daćemo neke opšte napomene o Gauss-ovim kvadraturama. Generalisane kvadraturene formule Gauss-ovog tipa biće tretirane u posebnom poglavlju.

## 2.5 Opšti pojmovi o Gauss-ovim kvadraturnim formulama

Gauss-ove formule su, verovatno, najveće otkriće u numeričkoj analizi u IX veku. Numerička implementacija zapravo počinje sa Newton-ovom idejom iz 1676 godine, gde on traži koeficijente  $A_1, A_2, \dots, A_n$  u tzv.  $n$ -tačkastoj kvadraturnoj formuli (formula u  $n$  tačaka)

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \cong Q_n(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n), \quad (2.60)$$

za dati niz od  $n$  tačaka (čvorova)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (najčešće uzetih ekvidistantno), tako da je ova formula tačna za sve algebarske polinome stepena najviše reda  $n-1$ , tj. za svako  $f \in P_{n-1}$ , gde sa  $P_k$  označavamo skup svih polinoma ne višeg stepena od  $k$ . U modernoj terminologiji to znači da Newton konstruiše interpolacioni polinom  $P \in P_{n-1}$  koji u čvorovima  $x_k$  uzima vrednost  $f(x_k)$ , te se koeficijenti  $A_k$  mogu odrediti pomoću jednostavne formule

$$A_k = \frac{1}{w'(x_k)} \int_a^b \frac{w(x)}{x - x_k} dx, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

gde je  $w(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ . Dakle, ova Newton-ova formula (2.60) ima stepen algebarske tačnosti  $n-1$ .

Polazeći od ove ideje, Gauss je 1814. godine postavio pitanje da li je moguće povećati stepen tačnosti uzimajući da su čvorovi  $x_k$  slobodni u formuli (2.60), tj. da li ih je moguće odrediti tako da formula (2.60) ima stepen tačnosti  $2n-1$ , što bi bilo maksimalno moguće. Naime, u formuli (2.60) postoji ukupno  $2n$  parametara:  $x_1, x_2, \dots, x_n; A_1, A_2, \dots, A_n$ , i pitanje je da li je moguće ostvariti da je  $I(f) = Q_n(f)$  za svako  $f \in P_{2n-1}$ . Ovo vodi ka sistemu od  $2n$  nelinearnih jednačina

$$\begin{aligned} A_1 &+ A_2 &+ \dots + A_n &= I(1), \\ A_1 x_1 &+ A_2 x_2 &+ \dots + A_n x_n &= I(x), \\ A_1 x_1^2 &+ A_2 x_2^2 &+ \dots + A_n x_n^2 &= I(x^2), \\ &&&\vdots \\ A_1 x_1^{2n-1} &+ A_2 x_2^{2n-1} &+ \dots + A_n x_n^{2n-1} &= I(x^{2n-1}). \end{aligned}$$

Interesantno je da je Gauss dokazao da je to moguće i rešio ovaj sistem za svako  $n \leq 7$ , čak sa 16 značajnih decimalnih cifara. Dakle, Gauss-ove kvadraturne formule sa maksimalnim stepenom tačnosti  $2n-1$ , umnogome poboljšavaju Newton-ove formule.

U modernoj terminologiji, pomoću teorije ortogonalnosti, Gauss-ova teorija se može formulisati na sledeći način. Naime, posmatrajmo težinske kvadrature formule u  $n$ -tačaka

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \quad (2.61)$$

gde je težinska funkcija  $w(x)$  takva da svi njeni momenti postoje,

$$\mu_k = \int_a^b x^k w(x)dx < +\infty, \quad k=0,1,\dots, \quad \text{i da je } \mu_0 > 0.$$

Kvadraturno pravilo (2.61) je poznato kao interpolaciono ako je ono tačno za sve polinome stepena najmanje  $n-1$ , odnosno, ako je ostatak  $R_n(f)$  jednak nuli za svako  $f \in P_{n-1}$ . Međutim, ako su čvorovi  $x_k$  i težine  $A_k$  u (2.61) tako odabrani da je  $R_n(f) = 0$  za svako  $f \in P_{2n-1}$ , pravilo (2.61) je Gauss-ova kvadratura formula maksimalnog stepena tačnosti. U tom slučaju, čvorovi  $x_k$  su nule moničnih ortogonalnih polinoma  $\pi_n(w;x)$  i  $A_k$  odgovarajuće težine (Christoffel-ovi brojevi), koji se mogu izraziti preko takozvanih Christoffel-ovih funkcija  $\lambda_n(w;x)$  (videti [81, Poglavlja 2 i 5]) u obliku  $A_k = \lambda_n(w;x_k) > 0$ ,  $k=1,\dots,n$ . Za konvergenciju kvadrature formula vrlo je značajna pozitivnost Christoffel-ovih brojeva.

U specijalnom slučaju  $w(x)=1$  na  $[-1,1]$ , čvorovi  $x_k$  su nule Legendre-ovih polinoma  $P_n(x)$ . Poznato je da monični polinomi  $\pi_n(w;x)$  ortogonalni u odnosu na težinsku funkciju  $w(x)$  na intervalu  $[a, b]$  zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju (videti [74], poglavlje 2)

$$\begin{aligned} \pi_{k+1}(t) &= (t - \alpha_k) \pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k=0, 1, 2, \dots, \\ \pi_0(t) &= 1, \quad \pi_{-1}(t) = 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

gde su  $(\alpha_k) = (\alpha_k(w))$  i  $(\beta_k) = (\beta_k(w))$  nizovi rekurzivnih koeficijenata.

Koeficijent  $\beta_0$  koji se množi sa  $\pi_{-1}(x) = 0$  u rekurentnoj relaciji (2.62) može biti proizvoljan, ali je pogodno da se on definiše kao  $\beta_0 = \mu_0 = \int_a^b w(x)dx$ . Za detalje videti monografiju [74].

Postoje numeričke metode za generisanje Gauss-ovih kvadrature pravila, koje su u numeričkom smislu mnogo efikasnije i tačnije nego izračunavanje čvorova preko rešavanja sistema nelinearnih jednačina, onako kako je to učinio Gauss, a zatim direktna primena klasičnih Christoffel-ovih izraza za izračunavanje težina (videti, na primer, Davis i Rabinowitz [25]). Moderni metodi za generisanje Gauss-ovih kvadratura, zasnovani su na problemu sopstvenih vrednosti za tzv. Jacobi-ovu matricu.

$$J_n(w) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Od tih metoda je, svakako, najpopularnija procedura Golub-a i Welsch-a [37], koja je zasnovana na određivanju sopstvenih vrednosti i prvih komponenta sopstvenih vektora simetrične tridijagonalne Jacobi-eve matrice (2.63). Čvorovi  $x_k$  u Gauss-ovoj kvadraturnoj formuli (2.60) u odnosu na težinsku funkciju  $w(x)$  na  $[a, b]$ , su sopstvene vrednosti Jacobi-eve matrice (2.63)  $n$ -tog reda. Težine  $A_k$  su date kao

$$A_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, \dots, n,$$

gde je  $\beta_0 = \mu_0 = \int_a^b w(x) dx$  i  $v_{k,1}$  je prva komponenta normalizovanog sopstvenog vektora  $v_k$  koji odgovara sopstvenoj vrednosti  $x_k$ ,

$$J_n(w)v_k = x_k v_k, \quad v_k^T v_k = 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ako se standardni QR algoritam pojednostavi tako da se računaju samo prve komponente sopstvenih vektora, Golub i Welsch [37] su dali efikasan postupak za konstrukciju Gauss-ovih kvadraturnih formula. Taj postupak je uvršćen u više programskih paketa, uključujući paket "OrthogonalPolynomials" koji je realizovan u programskom sistemu Mathematica (videti [23]).

U skladu sa tim, potrebni su rekursivni koeficijenti  $\alpha_k$  i  $\beta_k$ ,  $k \leq N-1$ , za monične polinome  $\pi_n(w; \cdot)$ , kako bi se konstruisale Gauss-Christoffel-ove kvadraturene formule u  $n$  tačaka, u odnosu na težinu  $w(x)$ , za svako  $n \leq N$ . Ovi koeficijenti su poznati eksplicitno samo za klasične ortogonalne polinome i neke njima bliske klase polinoma (videti [74], poglavlje 2). U drugim slučajevima, potrebna je dodatna numerička konstrukcija rekursivnih koeficijenata korišćenjem metoda momenata ili tzv. diskretizovanog Stieltjes-ovog postupka (videti [81], § 2.4.8).

### 2.5.1 Gauss-ova formula sa težinom $w(x) = (1-x)^\alpha x^\beta \log(1/x)$

U ovom odeljku posmatraćemo težinsku kvadraturnu formulu u  $n$ -tačaka

$$\int_0^1 f(x)(1-x)^\alpha x^\beta \log \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \quad (2.64)$$

$\alpha, \beta > -1$  su parametri u težinskoj funkciji  $w(x) = (1-x)^\alpha x^\beta \log(1/x)$ . Piessens i Branders [90] su razmatrali slučajeve kada su  $\alpha = 0$  i  $\beta = 0, \pm 1/2, \pm 1/3, -1/4, -1/5$  (videti, takođe, Gautschi [33] i [35]). Posebno je interesantan slučaj kada je težinska funkcija samo  $\log(1/x)$ , tj. kada je  $\alpha = \beta = 0$ . Za takvu kvadraturu koja se primenjuje u MGE, kvadraturni parametri za  $n \leq 8$  su dati kod Katsikadelisa ([60], str. 297–298).

Koristeći simboličku integraciju u opštem slučaju nalazimo momente  $\mu_k = \mu_k(\alpha, \beta)$  preko gama funkcije i harmonijskih brojeva u obliku,

$$\begin{aligned} \mu_k(\alpha, \beta) &= \int_0^1 x^k w(x) dx = \int_0^1 (1-x)^\alpha x^{k+\beta} \log \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)} [H(\alpha+\beta+k+1) - H(\beta+k)]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Na primer, za  $\alpha = \beta = 0$  moment se redukuje na  $\mu_k(0, 0) = 1/(k+1)^2$ ,  $k \geq 0$ .

Standardno značenje  $k$ -tog harmonijskog broja  $H_k$  je zbir recipročnih vrednosti prvih  $k$  prirodnih brojeva, odnosno,

$$H_k = H(k) = \sum_{v=1}^k \frac{1}{v},$$

što je Euler predstavio u obliku

$$H(k) = \int_0^1 \frac{1-t^k}{1-t} dt = \sum_{v=1}^k (-1)^{v-1} \frac{1}{v} \binom{k}{v-1}.$$

Korišćenje Mathematica programskog paketa `OrthogonalPolynomials` [23] i prvih  $2N$  momenata  $\mu_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2N-1$ , datih preko (2.65), dobijamo prvih  $N$  koeficijenata  $\alpha_k$  i  $\beta_k$ , za  $k = 0, 1, \dots, 2N-1$ , u rekurentnoj relaciji (2.62). To nam omogućava da dobijemo kvadrature parametre u (2.64) za svako  $n \leq N$  (videti [55]).

**Napomena 2.1** U cilju savladavanja striktno loše numeričke uslovljenosti pri dobijanju rekurzivnih koeficijenata sa zadovoljavajućom tačnošću, može se koristiti aritmetika višestruke preciznosti. Na primer, u najjednostavnijem slučaju  $\alpha = \beta = 0$ , radeći sa aritmetikom sa 55 decimalnih cifara, dobijamo prvih  $N = 50$  rekurzivnih koeficijenata sa oko 20 tačnih decimalnih cifara.

Sledeći kôd u Mathematica programskom paketu `OrthogonalPolynomials` [23] generiše rekurzivne koeficijente za  $k \leq 2N-1 = 99$  i kvadraturene parametre (čvorove i težine) sa 20 tačnih decimalnih cifara za  $n = 10$  (10) 50:

```
In[1]:= <<orthogonalPolynomials`
In[2]:= w[t_,a_,b_] := (1-t)^a t^b Log[1/t]
In[3]:= m=Integrate[t^k w[t,0,0],{t,0,1}]; moments=Table[m,{k,0,99}];
In[4]:= {alpha,beta}=aChebyshevAlgorithm[moments,
WorkingPrecision->55];
In[5]:= param=Table[aGaussianNodesWeights[n,alpha,beta,Precision->20,
WorkingPrecision->20],{n,10,50,10}];
```

Na primer, dobijeni čvorovi i težine za  $n = 10$  dati su na sledećem listingu:

```
In[6]:= param[[1]]
Out[6]=
{{0.0090426309621996506369, 0.053971266222500629504,
0.13531182463925077487, 0.24705241628715982422,
0.38021253960933233397, 0.52379231797184320116,
0.66577520551642459722, 0.79419041601196621736,
0.89816109121900353817, 0.96884798871863353939}, {0.12095513195457051499,
0.18636354256407187033,
0.19566087327775998271, 0.17357714218290692084, 0.13569567299548420167,
0.093646758538110525987, 0.055787727351415874076, 0.027159810899233331146,
0.0095151826028485149993, 0.0016381576335982632549}}
```

**Primer 2.2** Kao ilustraciju razmotrimo integral

$$I = \int_0^1 \frac{(1-x)^{-1/2} x^{-1/2} \log(1/x)}{\sqrt{1+x}} dx, \quad (2.66)$$

čija je vrednost (videti [35])

$$I = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4.1187183749268720... .$$

Linearnom transformacijom  $2x - 1 = t$ , ovaj integral se svodi na

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{2}{3+t}} \log \frac{2}{1+t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Primena standardne Gauss-Legendre-ove kvadrature daje veoma sporu konvergenciju. Realivne greške  $r_n(\text{GL})$  za  $n = 10$  (10) 100 prikazane su u Tabeli 2.1. Brojevi u zagradama označavaju decimalne eksponente. Nešto bolji rezultati mogu se dobiti pomoću Gauss-

Čebiševljevih kvadratura u odnosu na težinsku funkciju  $w(t)=(1-t^2)^{-1/2}$ . Odgovarajuće relativne greške  $r_n$  (GC), takođe, su prikazane u istoj tabeli [55].

Međutim, možemo direktno primeniti kvadraturnu formulu (2.64) na integral (2.66). Neka su

$$Q_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad \text{i} \quad r_n^{(\alpha,\beta)} = |(Q_n^{(\alpha,\beta)} - I)/I|. \quad (2.67)$$

Uzimajući kvadraturnu formulu sa logaritamskom težinom  $w(x)=\log(1/x)$ , odgovarajuća funkcija u (2.66) je  $f(x)=1/\sqrt{x(1-x^2)}$ . Konvergencija ove formule je opet spora. Relativne greške  $r_n^{(0,0)}$  su date u Tabeli 2.1.

**Tabela 2.1.a)** Relativne greške kvadraturnih suma za  $n=10(10)100$  i Gauss-ovih aproksimacija u odnosu na logaritamsku težinu [55].

$n$	$r_n(GL)$	$r_n(GC)$	$r_n^{(0,0)}$
10	1.84(-1)	5.29(-2)	1.42(-1)
20	1.08(-1)	2.64(-2)	8.69(-2)
30	7.80(-2)	1.76(-2)	6.41(-2)
40	6.17(-2)	1.32(-2)	5.14(-2)
50	6.17(-2)	1.06(-2)	4.31(-2)
60	5.14(-2)	8.81(-3)	3.73(-2)
70	4.41(-2)	7.55(-3)	3.30(-2)
80	3.88(-2)	6.61(-3)	2.96(-2)
90	3.47(-2)	5.87(-3)	2.69(-2)
100	2.87(-2)	5.29(-3)	2.47(-2)

**Tabela 2.1.b)** odgovarajuće greške Gauss-ovih aproksimacija za  $n=1(1)10$

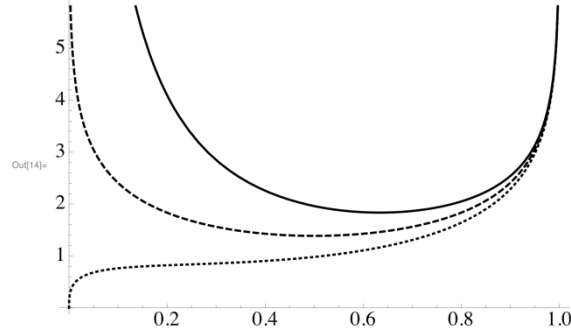
$n$	$Q_n^{(-1/2,-1/2)}$	$r_n^{(-1/2,-1/2)}$
1	4.0801983843688532	9.35(-3)
2	4.1179039770237825	1.98(-4)
3	4.1186986430715864	4.79(-6)
4	4.1187178694526636	1.23(-7)
5	4.1187183615750484	3.24(-9)
6	4.1187183745672496	8.73(-11)
7	4.1187183749170540	2.38(-12)
8	4.1187183749266013	6.57(-14)
9	4.1187183749268644	1.83(-15)
10	4.1187183749268718	5.10(-17)

Ali, ako uključimo, takođe, algebarske singularitete u težinu, tj. ako uzmemo  $w(x)=(1-x)^{-1/2}x^{-1/2}\log(1/x)$  ( $\alpha=\beta=-1/2$ ), konvergencija postaje veoma brza. Gauss-ove aproksimacije  $Q_n^{(-1/2,-1/2)}$  i odgovarajuće relativne greške su date u drugom delu Tabele 2.1 za male vrednosti  $n \leq 10$ . Netačne decimalne cifre su podvučene. Kao što možemo videti, 17 tačnih decimalnih cifara je dobijeno korišćenjem Gauss-ovog pravila sa samo  $n=10$  čvorova.

Isti metod omogućuje nam da uključimo i logaritamski singularitet pri  $x = 1$ . Tako možemo razmatrati težinsku funkciju

$$w(x) = w^{(\alpha, \beta)}(x) = (1-x)^\alpha x^\beta \log \frac{1}{x(1-x)}, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Na slici 2.8 predstavljena je ta težinska funkcija za  $\alpha = 0$  za tri odabrane vrednosti parametra  $\beta$ .



**Slika 2.8.** Grafici težinskih funkcija  $w(x)$  za  $\alpha = 0$  i  $\beta = -1/2$  (puna linija),  $\beta = 0$  (isprekidana linija) i  $\beta = 1/2$  (tačkasta linija)

Slično prethodnom, nalazimo odgovarajuće momente

$$\mu_k(\alpha, \beta) = \int_0^1 (1-x)^\alpha x^{k+\beta} \log \frac{1}{x(1-x)} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+k+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+k+2)} [2H(\alpha+\beta+k+1) - H(\beta+k) - H(\alpha)]$$

**Primer 2.3** Za  $\alpha = -1/4$  i  $\beta = -1/2$  izračunaćemo

$$I_k = \int_{-1}^1 f_k(x) w^{(\alpha, \beta)}(x) dx \approx Q_n^{(\alpha, \beta)}(f_k), \quad k = 1, 2,$$

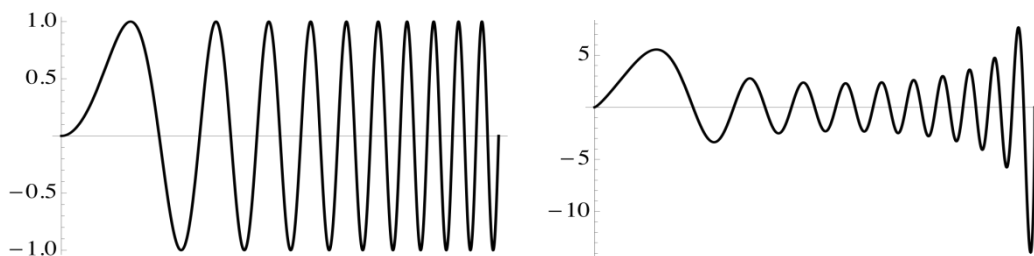
gde su  $f_1(t) = \sin(10\pi x)$  i  $f_2(t) = \sin(20\pi x^2)$ .

Kao i u prethodnom slučaju, koristeći paket `OrthogonalPolynomials` [23], pisan u programskom sistemu Mathematica, dobijamo rekurzivne koeficijente i parametre Gauss-ovih formula za težinsku funkciju  $w^{(-1/4, -1/2)}(x)$ , a zatim ih primenjujemo na zadate integrale.

U prvom slučaju dobijamo rezultate prikazane u Tabeli 2.2, uključujući i odgovarajuće relativne greške. Netačne decimalne cifre su podvučene.

Grafici funkcije  $f_2(t)$  i integranda  $F_2(x) = f_2(x) w^{(-1/4, -1/2)}(x)$  su prikazani na Slici 2.9. Zbog oscilatornog integranda, zahtevamo više čvorova pri integraciji i zato polazimo sa  $n = 30$  tačaka. Rezultati su dati u istoj tabeli.





**Slika 2.9.** Grafici funkcija  $f_2(x) = \sin(20\pi x^2)$  (levo) i  $F_2(x) = f_2(x)w^{(-1/4,-1/2)}(x)$  (desno)

**Tabela 2.2.** Gauss-ova kvadratura suma  $Q_n^{(-1/4,-1/2)}(f_k)$  sa odgovarajućim relativnim greškama  $r_n(f_k)$ ,  $k=1,2$  [55]

$n$	$Q_n^{(-1/4,-1/2)}(f_1)$	$r_n(f_1)$	$Q_n^{(-1/4,-1/2)}(f_2)$	$r_n(f_2)$
10	0.5022466846173798	5.53 (-2)		
20	0.5316431444014815	3.32 (-13)		
30	0.5316431444016578	2.88 (-29)	0.44665240303668106222	6.99 (-5)
40			0.44662120169680683776	3.43 (-11)
50			0.44662120168147791272	1.14 (-19)
60			0.44662120168147791267	2.06 (-29)

### 2.5.2 Neke napomene o Gauss-ovim kvadraturnim formulama za Müntz-ove sisteme

Gauss-ova integracija može se proširiti na prirodan način na nepolinomske funkcije, uzimajući sistem linearno nezavisnih funkcija

$$\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots\} \quad (x \in [a, b]), \quad (2.68)$$

izabranih tako da sistem bude kompletan u nekom pogodnom prostoru funkcija. Ako je  $w(x)$  data nenegativna težina na  $[a, b]$  i ako je kvadratura pravilo

$$\int_a^b f(x)w(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f) \quad (2.69)$$

takvo da se integrali prvih  $2n$  funkcija iz (2.68) tačno izračunavaju, tada kažemo da je kvadratura formula (2.69) Gauss-ova u odnosu na sistem funkcija (2.68). Takve uopštene Gauss-ove kvadrature formule (2.69) u odnosu na sistem (2.68), postoje jedinstveno ako prvih  $2n$  funkcija tog sistema čine tzv. Čebiševljevi sistem funkcija na  $[a, b]$ . Tada su sve težine  $A_1, \dots, A_n$  iz (2.69) pozitivne.

Uopštene Gauss-ove kvadrature za Müntz-ov sistem vode poreklo još od Stieltjes-a iz 1884. godine (videti [99]). Uzimajući  $P_k(x) = x^{\lambda_k}$  na  $[a, b] = [0, 1]$ , gde su  $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ , Stieltjes je dokazao postojanje Gauss-ovih formula koristeći čisto mehaničke argumente.

Ma, Rokhlin i Wandzura [67] su 1996. godine razvili jedan numerički postupak za konstrukciju uopštenih Gauss-ovih kvadratura, ali je njihov algoritam loše uslovljen. Nedavno, Milovanović i Cvetković [81], su izložili jedan alternativni numerički metod za konstrukciju generalizovane Gauss-ove kvadrature (2.69) za Müntz-ove polinome, koji je tačan za svaku linearnu kombinaciju prvih  $2n$  Müntz-ovih monoma, tj. za svaku funkciju oblika

$$f(x) = c_0 x^{\lambda_0} + c_1 x^{\lambda_1} + \dots + c_{2n-1} x^{\lambda_{2n-1}},$$

gde su  $c_0, c_1, \dots, c_{2n-1}$  proizvoljne konstante.

Metod je stabilan i znatno jednostavniji od prethodnog jer se temelji na konstrukciji i stabilnom računanju ortogonalnih Müntz-ovih polinoma, prethodno razvijenih u radu [77]. Da bi se dobili parametri Gauss-ovih kvadratura za  $n \leq 40$ , dovoljno je sprovesti izračunavanja u aritmetici dvostruke preciznosti (D-aritmetika, sa oko 16 dekadnih cifara), da bi se dobili rezultati iste takve preciznosti (za detalje videti [81] i [84]). Napomenimo da su u radu [67], za generisanje Gauss-ovih kvadratura do reda  $n \leq 20$ , autori koristili Q-aritmetiku (približno 34 dekadne cifre) da bi dobili rezultate dvostruke preciznosti (sa 16 dekadnih cifara). Međutim, za generisanje kvadratura višeg reda ( $n \leq 40$ ), sa istom tačnošću, oni su bili prinuđeni da koriste aritmetiku sa čak 120 (dekadnih) cifara jer je njihov slabouslovljeni algoritam u stanju da “pojede” više od 100 cifara!

Primene kvadratura iz rada [81] u numeričkoj inverziji Laplace-ove transformacije date su u [82]. Neke metode transformacije za integrale sa Müntz-ovim polinomima mogu se naći u radovima [80] i [65].

### **3. GENERALISANE KVADRATURNE FORMULE GAUSS-OVOG TIPA ZA FUNKCIJE SA SINGULARITETIMA I MOGUĆE PRIMENE**

#### **3.1 Uopštena kvadratura pravila Gauss-ovog tipa za numeričko izračunavanje singularnih integrala koji se javljaju u MGE**

Pored metoda konačnih elemenata MKE, metoda graničnih elemenata, MGE je veoma popularna u poslednje vreme u mnogim kompjuterskim aplikacijama u inženjerstvu, na primer, u mehanici loma, mehanici oštećenja, problemima prenosa toplote, problemima protoka fluida, problemima elektromagnetike i dr. Problem granične vrednosti, opisan diferencijalnom jednačinom i odgovarajućim graničnim uslovima može se numerički modelirati putem MGE koristeći diskretizaciju koja dovodi do sistema linearnih algebarskih jednačina tako da taj sistem aproksimira rešenje originalnog problema.

Tačnost ove aproksimacije i efikasnost MGE zavisi od tehnike diskretizacije granice (tj. tipa izabranih elementata), kao i od kvadrature metode korišćene pri integraciji funkcija jezgra nad elementima. Sistematsko izvođenje različitih formulacija integralnih jednačina za rešenje problema graničnih vrednosti u teoriji potencijala sa kontinualno promenljivim karakteristikama materijala je dobijeno u [97].

Opšta klasifikacija graničnih elemenata kao i teorija i primena MGE može se naći u knjigama iz ove oblasti: Katsikadelis [60], Beer, Smith i Duenser [4], i Sauter i Schwab [95] (vidi takođe [91] za MKE). U implementaciji Garlekin-ovog metoda za granične integralne jednačine veoma važan zadatak je aproksimacija koeficijenata matrice sistema linearnih jednačina i vektora na desnoj strani sistema. Takva vrsta problema je razmatrana u [102, poglavlje 5], uključujući numeričku integraciju u jednodimenzionalnim i u višedimenzionalnim kvadraturama koristeći takozvane tenzor-Gauss kvadrature. Uopšteno, kvadrature formule igraju veoma važnu ulogu u numeričkoj implementaciji u MGE, specijalno za elemente višeg reda. (videti [64, Poglavlja 4 & 5] i [5, poglavlje 6]). Za izračunavanje integrala odgovarajućih uticajnih koeficijenata (za van-dijagonalne elemente i dijagonalne elemente), kvadrature Gauss-ovog tipa su veoma prikladne. Za dovoljno glatke funkcije na konačnom intervalu mogu se uspešno primeniti Gauss-Legendre-ove kvadrature formule. Međutim, za integrale sa

logaritamskim singularitetom konvergencija odgovarajućeg kvadrurnog procesa je veoma spora, tako da su preporučene težinske kvadrature Gauss-ovog tipa, na primer,

$$\int_0^1 f(x) \log x dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k), \quad (3.1)$$

što je specijalan slučaj formula razmatranih u odeljku 3.3.

Parametri (čvorovi  $x_k$  i težinski koeficijenti  $w_k$ ,  $k=1, \dots, n$ ) u poslednjoj formuli mogu se naći u mnogim knjigama (videti, na primer, [64, Appendix B, pp. 289–308] gde su navedeni kvadrurni parametri za  $n=2(1)8$ ). Kao što je ranije navedeno, ove težinske Gauss-ove kvadrature su takve da njihove težinske funkcije uključuju “komplikovane delove (sa singularitetima)” integranda (podintegralne funkcije).

U ovom poglavlju razmatramo jedan drugačiji tip kvadratura maksimalnog stepena tačnosti (Gauss-ovog tipa) koje tačno integrale i klasu nepolinomskih funkcija, slično onim formulama za Münzove polinome (videti odeljak 3.4). U našem slučaju te nepolinomijalne funkcije biće kombinacija polinoma i logaritamske funkcije. Dakle, bilo bi veoma korisno razviti neku vrstu kvadrurnih pravila prikladnih za integrande sa i bez logaritamskih singulariteta. Drugim rečima, takve univerzalne (direktne) kvadrurne formule treba da budu u stanju da izračunavaju integrale sa dovoljnom tačnošću, bez obzira da li njihovi integrandi sadrže logaritamski singularitet ili ne. Ovim bi se moglo izbeći razdvajanje singularnog i nesingularnog dela integranda, kao i dodatnu integraciju takvog singularnog dela koristeći neku od kvadratura sa singularnim težinskim funkcijama koje su razmatrane ranije u odeljku 3.3.

Jedan pristup za konstrukciju univerzalne kvadrurne formule koja obuhvata obe vrste funkcija, glatkih i onih sa logaritamskim singularitetom, posmatran je od strane Nahlik, Bialecki [88]. Pod pretpostavkom da se integrand ponaša kao logaritam u okolini  $x=0$ , tj. kada je

$$f(x) = C_1 \log |x| + C_2 + C_3 x + C_4 x^2 + \dots \quad (C_k \text{ su konstante}),$$

autori su razmatrali kvadrurnu formulu u obliku

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \quad (3.2)$$

koju su zatim primenjivali za izračunavanje singularnih integrala koji se pojavljuju u dvodimenzionalnom metodu graničnih elemenata (2D-MGE).

Korišćenjem Gram–Schmidt-ovog postupka ortogonalizacije u odnosu na unutrašnji proizvod

$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ , oni su pošli od sistema funkcija  $\{\log|x|, 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$  i dobili

ortogonalni sistem funkcija  $\{g_v\}_{v=1}^8$ . U cilju konstruisanja kvadratura od  $2m$  tačaka, za  $m=2, 3$  i  $4$ , oni su birali nule dobijenih ortogonalnih funkcija:

$$g_4(x) = -\frac{2}{9}\log|x| - \frac{5}{9} + x^2, \quad g_6(x) = \frac{12}{175}\log|x| + \frac{37}{175} - \frac{36}{35}x^2 + x^4,$$

i

$$g_8(x) = -\frac{10}{539}\log|x| - \frac{69}{1078} + \frac{45}{77}x^2 - \frac{225}{154}x^4 + x^6,$$

kao čvorove u formuli (3.2), respektivno. Ove nule su realne, različite i simetrično raspodeljene u intervalu  $(-1,1)$ . Težinski koeficijenti su određeni iz odgovarajućeg sistema linearnih jednačina. Dobijene kvadrature na ovaj način nisu Gauss-ovog tipa.

Drugi pristup za slabije singularne logaritamske integrale, koji se javljaju u dvodimenzionalnim MGE problemima, su bili razmatrani od strane Smith-a [98]. On je razmatrao izvesna direktna Gauss-ova pravila za logaritamske singularitete na izoparametrijskim (kvadratnim i kubnim) elementima. Ove direktne kvadrature su bolje od uobičajenih. Njihovim ugrađivanjem u odgovarajuće softverske pakete za MGE i primenom, smanjuje se obim kompjuterskog programa i vreme izvršenja, a mogu se koristiti takođe za konstantne i linearne elemente (videti [98]). U daljem tekstu, razmatraćemo direktna Gauss-ova pravila za logaritamske singularitete koja su uopštenja onih iz [88] i [98], a bazirana su na radu [85]. Naime, razmatraćemo simetrična kvadratura pravila (3.2) Gauss-ovog tipa sa parnim brojem čvorova  $n=2m$ . Parametri ovih formula, čvorovi i težine, zadovoljavaju relacije

$$x_{n+k} = -x_k, \quad A_{n+k} = A_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.3)$$

Međutim, ne gubeći opštost razmatranja, pretpostavljamo da formula (3.2) može biti predstavljena u obliku

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k (f(x_k) + f(-x_k)) + R_n(f) \quad (3.4)$$

uz  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$ . Odgovarajući ostatak u (3.2) je označen sa  $R_n(f)$ . Očigledno je  $R_n(f) = 0$  za sve neparne funkcije.

U cilju da se dobiju Gauss-ove kvadraturene formule za funkcije sa logaritamskim singularitetom u  $x=0$ , izložit ćemo sledeći koncept.

Neka je  $P_k[-1,1]$  linearni prostor svih algebarskih polinoma najvišeg stepena  $k$  definisan na  $[-1,1]$ . Vrlo često mi pišemo samo  $P_{2n-1}$  umesto  $P_{2n-1}[-1,1]$ .

Poznata Gauss–Legendre-ova kvadratura formula u  $n$ -tačkaka oblika (3.1) je tačna za svako  $f \in P_{2n-1}[-1,1]$ , tj. njihov algebarski stepen preciznosti je jednak  $2n - 1$  (videti [34], [74]). U analizi rada [85] koristi se dimenzija takozvanog *prostora algebarske tačnosti*, umesto algebarskog stepena preciznosti, tj.  $d(A)=\dim P_{2n-1}[-1,1]=2n$ .

Ako želimo da kvadraturno pravilo (3.1) bude tačno za funkciju  $x \mapsto \log|x|$  (takođe, i za neparnu funkciju  $x \mapsto x \log|x|$ ), tada se njihov algebarski stepen preciznosti treba redukovati za dva, tako da je  $d(A) = 2n - 2$ .

Za linearni prostor (logaritamskih) funkcija  $\Lambda_{2\ell-1}[-1,1]$  koji predstavlja linearnu kombinaciju funkcija  $x^k \log|x|$ , za  $k = 0,1,\dots,2\ell - 1$ , sa  $d(L)$  označavamo njegovu dimenziju koja je, u ovom slučaju,  $d(L) = 2\ell$ .

Cilj u radu [85] je bio da se dobije familija uopštenih kvadraturenih pravila (3.1), tj. (3.3), Gauss-ovog tipa, koja su tačna na prostoru

$$M_{2n-2\ell,2\ell}[-1,1] = P_{2n-2\ell-1}[-1,1] \oplus \Lambda_{2\ell-1}[-1,1],$$

sa dimenzijom

$$\dim M_{2n-2\ell,2\ell}[-1,1] = \dim P_{2n-2\ell-1}[-1,1] + \dim \Lambda_{2\ell-1}[-1,1] = (2n - 2\ell) + 2\ell = 2n.$$

Tako, za fiksirano  $n$  i bilo koje  $\ell \in \{0,1,\dots,n\}$ , odgovarajući prostori  $M_{2n-2\ell,2\ell}[-1,1]$  (skraćeno  $M_{2n-2\ell,2\ell}$ ) imaju istu dimenziju  $2n$ . Na primer, u slučaju  $M_{10,6}$ , formula je tačna za sve linearne kombinacije funkcija  $\{1, x, x^2, \dots, x^9, \log|x|, x \log|x|, x^2 \log|x|, \dots, x^5 \log|x|\}$ . U граниčnim slučajevima  $\ell = 0$  i  $\ell = n$ , imamo  $M_{2n,0}[-1,1] = P_{2n-1}[-1,1]$  (čisto algebarski prostor) i  $M_{0,2n}[-1,1] = \Lambda_{2n-1}[-1,1]$  (čisto logaritamski prostor).

Budući da postoji direktna veza ovih kvadratura u  $2m$ -tačkaka sa kvadraturama Gauss-ovog tipa u  $m$ -tačkaka u odnosu na težinsku funkciju  $t \mapsto t^{-1/2}$  na  $(0,1)$ , metod konstruisanja može biti značajno pojednostavljen. Gauss-ove kvadrature na  $(0,1)$  postoje i tačne su za

$t \mapsto p(t) + q(t) \log t$ , gde su  $p$  i  $q$  algebarski polinomi stepena najviše  $2m - \ell - 1$  i  $\ell - 1$  ( $1 \leq \ell \leq 2m$ ), respektivno. Drugim rečima, linearna kombinacija funkcija obrazuje prostor

$$\{1, t, \dots, t^{2m-\ell-1}, \log t, t \log t, \dots, t^{\ell-1} \log t\} \quad (3.5)$$

i on može biti označen sa  $M_{2m-\ell, \ell} [0,1]$ .

Uopštena Gauss-ova formula za funkcije sa logaritamskim singularitetom na prostoru  $M_{2n-2\ell, \ell} [-1,1]$ , kao i njihova veza sa kvadraturama Gauss-ovog tipa u odnosu na težinsku funkciju  $t \mapsto t^{-1/2}$  u  $(0,1)$  date su u delu 3.2. Metod za konstruisanje generalizovane Gauss-ove formule baziran na rešavanju sistema nelinearnih jednačina je predstavljen u delu 3.3. Specijalni slučajevi uopštenih Gauss-ovih formula su razmatrani u delu 3.4, a numerički primeri dati su u delu 3.5.

### 3.2 Uopštene Gauss-ove formule za funkcije sa logaritamskim singularitetom

Za konstrukciju (težinskih) Gauss-ovih kvadratura postoji veoma poznat algoritam Golub-a i Welsch-a [37] (videti monografiju [74] koji je zasnovan na određivanju sopstvenih vrednosti i prvih komponenti odgovarajućih normalizovanih sopstvenih vektora simetrične tridijagonalne Jacobi-jeve matrice. Kao što je dato u 3.2, te veličine su direktno povezane sa čvorovima i težinama Gauss-ovih kvadratura. Simetrična Jacobi-jeva matrica se konstruiše od koeficijenata tročlane rekurentne formule za odgovarajuće ortogonalne polinome. Dakle, ortogonalni polinomi igraju jednu veoma značajnu ulogu u ovoj konstrukciji.

Konstrukcija Gauss-ove kvadrature (u posmatranom slučaju Gauss-Legendre-ova kvadratura) za proizvoljno  $n \in \mathbb{N}$  može se lako ostvariti pomoću programskog paketa `OrthogonalPolynomials`, napisanog u sistemu Mathematica (videti Milovanović i Cvetković [23] i [83]). Alternativno, za ovu namenu postoji, takođe, Gautschi-jev paket SOPQ napisan u MATLAB-u (videti [78]). Ovi paketi obezbeđuju mogućnosti za mnoge druge proračune i transformacije sa raznim klasama ortogonalnih polinoma i odgovarajućih kvadrturnih pravila (videti [54] i [53]).

Nažalost, tako elegantna oruđa ne postoje za sisteme nepolinomijalnih funkcija koje su povezane sa Gauss-ovim kvadraturama. Međutim, postojanje i jedinstvenost Gauss-ovih kvadrturnih formula (čak i u odnosu na proizvoljnu meru) za nepolinomijalne sisteme je uvek

garantovano ako prvih  $2n$  funkcija u sistemu predstavljaju Čebiševljevi sistem na intervalu integracije. U takvom slučaju, svi težinski koeficijenti u generalizovanim Gauss-ovim kvadraturama su pozitivni. Za neke dodatne detalje o uopštenim Gauss-ovim kvadraturama videti Gautschi [32], Harris i Evans [52], Ma, Rokhlin i Wandzura [67]. U ovom delu posmatramo konstrukciju generalisanih Gauss-ovih kvadraturnih formula (3.1) u  $n$ -tačkama koje su tačne u prostoru  $M_{2n-2\ell, 2\ell}[-1, 1]$ . U našem razmatranju koristimo ortonormalan sistem funkcija

$$\{\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2n}(x)\} \quad (3.6)$$

dobijen nekim ortogonalizacionim procesom, na primer, Gram–Schmidt-ovim postupkom, polazeći od sledećeg sistema linearno nezavisnih funkcija

$$\{1, x, \dots, x^{2n-2\ell-1}, \log|x|, x \log|x|, \dots, x^{2\ell-1} \log|x|\},$$

tako da je za odgovarajući skalarni proizvod,

$$(\psi_\nu, \psi_\mu) = \int_{-1}^1 \psi_\nu(x) \psi_\mu(x) dx = 0 \quad (\nu \neq \mu), \quad \|\psi_\nu\|^2 = (\psi_\nu, \psi_\nu) = 1.$$

Napomenimo da su prvih  $2n - 2\ell$  funkcija iz (3.6) algebarski polinomi; u stvari, oni su ortonormalni Legendre-ovi polinomi  $\{P_\nu\}_{\nu=0}^{2n-2\ell-1}$ . Takođe, napominjemo da su  $\{\psi_{2\nu-1}\}_{\nu=1}^n$  parne, a  $\{\psi_{2\nu}\}_{\nu=1}^n$  neparne funkcije.

Dakle, mi posmatramo simetrične kvadrature formule oblika (3.3), koje su tačne za sve neparne funkcije, tj. za  $\{\psi_{2\nu}\}_{\nu=1}^n$ . Saglasno (3.2) i uzimajući bazu od samo parnih funkcija  $\{\psi_{2\nu-1}\}_{\nu=1}^n$  iz (3.6) možemo dobiti sledeći sistem od  $2m (= n)$  nelinearnih jednačina za određivanje parametara kvadrature,

$$\sum_{k=1}^m A_k \psi_{2\nu-1}(x_k) = \int_0^1 \psi_{2\nu-1}(x) dx, \quad \nu = 1, \dots, 2m. \quad (3.7)$$

Za dalji rad neophodan nam je pomoćni rezultat za niz parnih funkcija  $\{\psi_{2\nu-1}\}_{\nu=1}^n$  iz (3.6) gde je  $n=2m$ . Ovaj rezultat nam omogućava dobijanje jednostavnije metode za konstrukciju generalizovanih Gauss-ovih kvadratura u pomenutoj formi.



Naime, neka je  $\{\psi_{2v-1}\}_{v=1}^n$  sistem samo parnih funkcija ortogonalnih u odnosu na unutrašnji proizvod  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ . Tada su funkcije  $\varphi_v(t) = \psi_{2v-1}(\sqrt{t})$ ,  $v = 1, \dots, 2m$ , ortogonalne na  $(0, 1)$  tj.

$$\langle \varphi_\nu, \varphi_\mu \rangle = \int_0^1 \varphi_\nu(t)\varphi_\mu(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = 0 \quad (\nu \neq \mu) \quad (3.8)$$

Dokaz ovog rezultata je dat u [85].

Koristeći ovu činjenicu, konstrukcija uopštene Gauss-ove formule (3.3), može se značajno pojednostaviti. Naime, niz parnih funkcija  $\{\psi_{2v-1}\}_{v=1}^n$  iz (3.6) koji se pojavljuje u (3.7) može se transformisati u jedan drugi ortogonalni sistem  $\varphi_\nu(t) = \psi_{2v-1}(\sqrt{t})$ ,  $\nu = 1, \dots, 2m$ , tako da sistem jednačina (3.7) postaje

$$\sum_{k=1}^m A_k \varphi_\nu(x_k^2) = \int_0^1 \varphi_\nu(x^2) dx = \int_0^1 \varphi_\nu(t) \frac{dt}{2\sqrt{t}}, \quad \nu = 1, \dots, 2m. \quad (3.9)$$

Sledeći rezultat daje vezu između uopštenih kvadratura (3.4) i mnogo jednostavnije kvadrature sa težinskom funkcijom  $1/\sqrt{t}$  na  $(0, 1)$ .

### **Teorema 3.1**

*Neka je (3.4) generalizovana kvadratura Gauss-ovog tipa, sa čvorovima  $\pm x_k$  i težinama  $A_k$ ,  $k=1, \dots, m$ , koja je tačna na  $M_{4m-2\ell, \ell}[-1, 1]$ , i neka je*

$$\int_0^1 g(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sum_{k=1}^m B_k g(\tau_k) + R_m(g) \quad (3.10)$$

*druga generalizovana Gauss-ova kvadratura, koja je tačno na prostoru  $M_{2m-\ell, \ell}[0, 1]$  ( $1 \leq \ell \leq 2m$ ). Tada čvorovi i težine ove dve generalizovane kvadrature zadovoljavaju relaciju*

$$x_k^2 = \tau_k, \quad 2A_k = B_k > 0, \quad k=1, \dots, m. \quad (3.11)$$

Dokaz ovog rezultata se može naći u [85].

Na osnovu Teoreme 3.1 parametri kvadrature formule (3.2) u  $2m$  tačaka mogu biti izraženi preko parametara  $m$ -tačkaste kvadrature (3.10). Uzimajući  $g(t) = \varphi_\nu(t)$  u (3.10) sukcesivno za  $\nu=1, \dots, 2m$ , dobija se sledeći sistem jednačina

$$\sum_{k=1}^m B_k \varphi_v(\tau_k) = \int_0^1 \varphi_v(t) \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad v = 1, \dots, 2m. \quad (3.12)$$

Pozitivni čvorovi  $x_k$  i težine  $A_k$  u kvadrurnoj formuli (3.4) mogu se dobiti kao

$$x_k = \sqrt{\tau_k}, \quad A_k = \frac{1}{2} B_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.13)$$

Prema tome, konstrukcija generalisane  $n$ -tačkaste ( $n=2m$ ) kvadrature formule Gauss-ovog tipa na prostoru  $M_{2n-2\ell, 2\ell}[-1, 1]$  se svodi na mnogo jednostavniju konstrukciju generalisanih Gauss-ovih kvadratura oblika (3.10) sa  $m=n/2$  čvorova koja je tačna na prostoru

$$M_{2m-\ell, \ell}[0, 1] = P_{2m-\ell-1}[0, 1] \oplus \Lambda_{\ell-1}[0, 1].$$

U graničnim slučajevima imamo  $M_{2m, 0}[0, 1] = P_{2m-1}[0, 1]$  i  $M_{0, 2m}[0, 1] = \Lambda_{2m-1}[0, 1]$ .

Naš sledeći zadatak je konstrukcija kvadrature formule (3.10) na osnovu sistema nelinearnih jednačina (3.12) sa ortogonalnim funkcijama  $\varphi_v(t) = \psi_{2v-1}(\sqrt{t})$ ,  $v = 1, \dots, 2m$ . Korišćenje ortogonalnog sistema  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2m}\}$ , obezbeđuje dobru uslovljenost matrica tokom konstruktivnog postupka.

**Napomena 3.1** Za numeričke primene u metodima konačnih elemenata, J.A. Crow [22] je prezentovao sličnu kvadrurnu formulu

$$\int_0^1 g(t) dt = \sum_{k=1}^m w_k g(x_k) + R_m(g),$$

koja je tačna za integrande oblika  $t \rightarrow p(t) + q(t) \log t$ , gde su  $p$  i  $q$  polinomi stepena ne višeg od  $m-1$ . Njegova konstrukcija kvadrurnih formula bila je nestabilna.

### 3.3 Konstrukcija uopštenih Gauss-ovih formula

U ovom odeljku se daje metod za konstrukciju kvadrurnih formula oblika (3.10), koje se baziraju na rešavanju sistema nelinearnih jednačina (3.12) primenom standardnog Newton-Kantorovičevog metoda koji ima kvadratnu konvergenciju. Sistem jednačina (3.12), tj.

$$\begin{aligned}
f_1(\mathbf{B}, \mathbf{t}) &= B_1 \varphi_1(\tau_1) + B_2 \varphi_1(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_1(\tau_m) = c_1, \\
f_2(\mathbf{B}, \mathbf{t}) &= B_1 \varphi_2(\tau_1) + B_2 \varphi_2(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_2(\tau_m) = c_2, \\
&\vdots \\
f_m(\mathbf{B}, \mathbf{t}) &= B_1 \varphi_m(\tau_1) + B_2 \varphi_m(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_m(\tau_m) = c_m, \\
f_{m+1}(\mathbf{B}, \mathbf{t}) &= B_1 \varphi_{m+1}(\tau_1) + B_2 \varphi_{m+1}(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_{m+1}(\tau_m) = c_{m+1}, \\
&\vdots \\
f_{2m}(\mathbf{B}, \mathbf{t}) &= B_1 \varphi_{2m}(\tau_1) + B_2 \varphi_{2m}(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_{2m}(\tau_m) = c_{2m},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

gde su  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{t}$   $m$ -dimenzionalni vektori  $\mathbf{B}=[B_1 \dots B_m]^T$ ,  $\mathbf{t}=[\tau_1 \dots \tau_m]^T$ , i

$$c_v = \int_0^1 \varphi_v(t) \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad v = 1, \dots, 2m. \tag{3.15}$$

Prethodni sistem jednačina se može predstaviti u specijalnom matričnom obliku. Takođe, predstavljamo i vektore  $\mathbf{c}$  i  $\mathbf{d}$  istih dimenzija  $m$  kao  $\mathbf{c} = [c_1 \dots c_m]^T$  i  $\mathbf{d} = [d_1 \dots d_m]^T$ , gde su

$$d_v = c_{m+v}, \quad v = 1, \dots, m.$$

Sistem jednačina (3.14) se može predstaviti na sledeći način

$$\Phi_{2m}(\mathbf{t}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{t}, \mathbf{B}) - c_1 \\ f_2(\mathbf{t}, \mathbf{B}) - c_2 \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{t}, \mathbf{B}) - c_m \\ f_{m+1}(\mathbf{t}, \mathbf{B}) - d_1 \\ \vdots \\ f_{2m}(\mathbf{t}, \mathbf{B}) - d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \varphi_1(\tau_1) + B_2 \varphi_1(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_1(\tau_m) - c_1 \\ B_1 \varphi_2(\tau_1) + B_2 \varphi_2(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_2(\tau_m) - c_2 \\ \vdots \\ B_1 \varphi_m(\tau_1) + B_2 \varphi_m(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_m(\tau_m) - c_m \\ B_1 \varphi_{m+1}(\tau_1) + B_2 \varphi_{m+1}(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_{m+1}(\tau_m) - d_1 \\ \vdots \\ B_1 \varphi_{2m}(\tau_1) + B_2 \varphi_{2m}(\tau_2) + \dots + B_m \varphi_{2m}(\tau_m) - d_m \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{0}},$$

tj.

$$\Phi_{2m}(\mathbf{t}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} U_m(\mathbf{t})\mathbf{B} - \mathbf{c} \\ V_m(\mathbf{t})\mathbf{B} - \mathbf{d} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{3.16}$$

gde smo uveli matrice  $U_m$  i  $V_m$  na sledeći način

$$U_m = U_m(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\tau_1) & \varphi_1(\tau_2) & \dots & \varphi_1(\tau_m) \\ \varphi_2(\tau_1) & \varphi_2(\tau_2) & & \varphi_2(\tau_m) \\ \vdots & & & \\ \varphi_m(\tau_1) & \varphi_m(\tau_2) & & \varphi_m(\tau_m) \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

i

$$V_m = V_m(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \varphi_{m+1}(\tau_1) & \varphi_{m+1}(\tau_2) & \cdots & \varphi_{m+1}(\tau_m) \\ \varphi_{m+2}(\tau_1) & \varphi_{m+2}(\tau_2) & & \varphi_{m+2}(\tau_m) \\ \vdots & & & \\ \varphi_{2m}(\tau_1) & \varphi_{2m}(\tau_2) & & \varphi_{2m}(\tau_m) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Kada eksplicitno želimo da naglasimo da je konstrukcija Gauss-ovih formula na prostoru  $M_{2m-\ell, \ell}[0,1]$  uvodimo gornji indeks  $\ell$ , tako da umesto  $\Phi_{2m}$  pišemo  $\Phi_{2m}^{(\ell)}$ .

Za konstrukciju Newton-Kantorovičevog metoda za ovaj specijalni oblik jednačina sledićemo postupak opisan u radu Milovanovića i Cvetkovića [81].

Primenom Taylor-ove formule

$$\Phi_{2m}(\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}, \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}) = \Phi_{2m}(\mathbf{t}, \mathbf{B}) - \mathbf{W}(\mathbf{t}, \mathbf{B}) \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{B} \\ \Delta\mathbf{t} \end{bmatrix} + \text{članovi višeg reda},$$

gde smo stavili

$$\Delta\mathbf{B} = \mathbf{B} - \hat{\mathbf{B}} \quad \text{i} \quad \Delta\mathbf{t} = \mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}},$$

i gde su  $\hat{\mathbf{B}}$  i  $\hat{\mathbf{t}}$  jedinstvena rešenja nelinearnog sistema jednačina (3.12), tj. (3.16), možemo formulirati Newton-Kantorovičev metod za sistem jednačina (3.16) koristeći sledeći linearizovani sistem jednačina dobijen zanemarivanjem viših članova Taylor-ovog razvoja u tački  $(\mathbf{B}, \mathbf{t})$ . Dakle, imamo

$$\mathbf{W}(\mathbf{t}, \mathbf{B}) \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{B} \\ \Delta\mathbf{t} \end{bmatrix} = \Phi_{2m}(\mathbf{t}, \mathbf{B}), \quad (3.19)$$

tj.

$$U_m \Delta\mathbf{B} + Y_m \Delta\mathbf{t} = U_m \mathbf{B} - \mathbf{c},$$

$$V_m \Delta\mathbf{B} + Z_m \Delta\mathbf{t} = V_m \mathbf{B} - \mathbf{d}.$$

Ovde je sa  $W_m$  označena Jacobian matrica

$$W_m = \begin{bmatrix} U_m & Y_m \\ V_m & Z_m \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

gde su  $U_m$  i  $V_m$  prethodno definisane u (3.16) i (3.17), respektivno, a  $Y_m$  i  $Z_m$  su date sa

$$Y_m = Y_m(\mathbf{t}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} B_1\varphi_1(\tau_1) & B_2\varphi_1(\tau_2) & \dots & B_m\varphi_1(\tau_m) \\ B_1\varphi_2(\tau_1) & B_2\varphi_2(\tau_2) & & B_m\varphi_2(\tau_m) \\ \vdots & & & \\ B_1\varphi_m(\tau_1) & B_2\varphi_m(\tau_2) & & B_m\varphi_m(\tau_m) \end{bmatrix}$$

i

$$Z_m = Z_m(\mathbf{t}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} B_1\varphi_{m+1}(\tau_1) & B_2\varphi_{m+1}(\tau_2) & \dots & B_m\varphi_{m+1}(\tau_m) \\ B_1\varphi_{m+2}(\tau_1) & B_2\varphi_{m+2}(\tau_2) & & B_m\varphi_{m+2}(\tau_m) \\ \vdots & & & \\ B_1\varphi_{2m}(\tau_1) & B_2\varphi_{2m}(\tau_2) & & B_m\varphi_{2m}(\tau_m) \end{bmatrix}.$$

Najzad, ako rešenje  $(\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{t}})$  sistema (3.19) uzmemo kao početnu vrednost za sledeću aproksimaciju, naš iterativni proces postaje

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{t} - \left[ V_m U_m^{-1} Y_m - Z_m \right]^{-1} (\mathbf{d} - V_m U_m^{-1} \mathbf{c}) \\ \hat{\mathbf{B}} = U_m^{-1} \left[ Y_m (\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}) + \mathbf{c} \right]. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Sličan iterativni metod je korišćen u [81] za nalaženje čvorova i težina u Gauss-ovim formulama za Müntz-ove sisteme.

Može se dokazati da je prethodni oblik Newton-Kantorovičevog metoda (3.21) kvadratno konvergentan, ako se obezbede dovoljno dobre startne vrednosti nepoznatih parametara.

**Napomena 3.2** Za sisteme nelinearnih jednačina, postoji mnogo načina za modifikaciju Newton-Kantorovičevog metoda, koji su obično poznati kao kvazi-Newton-ovi metodi. Ove modifikacije koriste ideju o aproksimaciji odgovarajuće inverzne Jacobian matrice. Njihova konvergencija je nešto sporija u poređenju sa osnovnim Newton-Kantorovičevim metodom. U našoj konstrukciji, koristimo standardni Newton-Kantorovičev metod iz dva razloga:

- 1) ima kvadratnu konvergenciju;
- 2) elementi matrice mogu se predstaviti u analitičkom obliku.

Glavni problem sa Newton-Kantorovičevim metodom je kako obezbediti dovoljno dobre početne vrednosti. Naša strategija u konstrukciji Gauss-ovih formula (3.10) je bazirana na metodi neprekidnosti, polazeći od standardne Gauss-ove formule dobijene za  $\ell = 0$  (čisto algebarski slučaj). Dakle, za dato  $n=2m$ , polazeći od poznatog rešenja za  $\ell = 0$ , čime dobijamo, sukcesivno, kvadraturene formule za  $\ell = 1, 2, \dots, 2m$ .

U cilju da konstruišemo odgovarajuće kvadrature u prostoru  $M_{2m-\ell, \ell}[0,1]$ , prvo određujemo odgovarajući ortonormalni sistem funkcija  $\{\varphi_{2v}\}_{v=1}^{2m}$  u odnosu na skalarni proizvod  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dat pomoću (3.8), polazeći od sistema funkcija  $\{1, t, \dots, t^{2m-\ell-1}, \log t, t \log t, \dots, t^{\ell-1} \log t\}$ .

Na primer, za  $n=2, m=8$  i  $\ell = 1$ , koristeći sledeći kôd u softveru Mathematica

```
pol[n_, t_] := If[n==-1, {}, Table[t^k, {k, 0, n-1}]];
ortfun[n_, L_, t_] := Join[pol[n-L, t], pol[L, t] Log[t]];
phi[n_, L_, x_] := (Orthogonalize[ortfun[n, L, t],
  Integrate[Times[##]/Sqrt[t], {t, 0, 1}]&]//Simplify) /. {t->x}
phi[8, 1, t]
```

dobija se sledeći ortonormalni sistem:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}(3t-1), \frac{3}{8\sqrt{2}}(35t^2-30t+3), \frac{1}{16} \sqrt{\frac{13}{2}}(231t^3-315t^2+105t-5), \right. \\ \frac{1}{128} \sqrt{\frac{17}{2}}(6435t^4-12012t^3+6930t^2-1260t+35), \\ \frac{1}{256} \sqrt{\frac{21}{2}}(46189t^5-109395t^4+90090t^3-30030t^2+3465t-63), \\ \frac{5}{1024\sqrt{2}}(676039t^6-1939938t^5+2078505t^4-1021020t^3+225225t^2-18018t+231), \\ \left. \frac{1}{122880\sqrt{2}}(169009750t^6-535422888t^5+654729075t^4-387987600t^3+114864750t^2 \right. \\ \left. -16216200t+1145993+180180\log(t)) \right\}$$

Može se primetiti da je, za svako  $\ell < 2m = 8$ , funkcija  $\varphi_1(t) = \psi_1(\sqrt{t}) = p_0(\sqrt{t}) = 1/\sqrt{2}$  konstanta.

U tom slučaju, zbog ortogonalnosti, desna strana u (3.12), tj. (3.14) postaje jednostavna,

$$c_1 = \sqrt{2}, \quad c_v = 0, \quad v = 2, \dots, m \quad \text{i} \quad d_v = 0, \quad v = 1, \dots, m.$$

**Napomena 3.3** Poslednji slučaj kada je  $\ell = 2m$  (tj.  $d(A)=0$ ) je mnogo teži. U našem konkretnom primeru za  $\ell = 2m = 8$ , imamo

$$\left\{ \frac{1}{4} \log t, \frac{5}{8} \sqrt{\frac{5}{151}}(27t-1) \log t, \frac{27}{32\sqrt{130234779886}}(6474125t^2-2558250t+42957) \log t, \dots \right\}.$$

Srećom, tada postoji alternativni i veoma stabilni način za numeričku konstrukciju kvadrature parametara. To se može rešiti veoma jednostavno koristeći standardnu teoriju Gauss-ovih

kvadratura (videti [74]). Naime, tada možemo staviti  $f(x)=g(x)\log|x|$  u (3.2) i posmatrati algebarske kvadrature sa logaritamskom težinom na  $(-1,1)$ , tj.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x)\log|x|dx = \sum_{k=1}^{2m} w_k g(x_k) + R_{2m}(g; \log|\cdot|), \quad (3.22)$$

gde su  $x_k$  nule parnog polinoma  $\pi_{2m}(x)$ , koji je ortogonalan na  $(-1,1)$ , u odnosu na logaritamsku težinu  $\log|x|$ , a  $w_k$  su odgovarajući Cristoffel-ovi brojevi. Poređenjem ove činjenice sa (3.2) dobijamo težinske koeficijente u (3.2) kao  $A_k = w_k/\log|x_k|$ ,  $k=1, \dots, m$ , dok čvorovi  $x_k$  u (3.22) i (3.2) ostaju isti.

Pretpostavimo sada da nam je za neko  $n=2m$  i neku vrednost  $\ell(1 \leq \ell \leq 2m)$  poznato rešenje problema  $\Phi_{2m}^{(\ell-1)}(\mathbf{B}, \mathbf{t}) = 0$ , tj. da znamo težine i čvorove

$$\mathbf{B}^{(\ell-1)} = [\mathbf{B}_1^{(\ell-1)} \dots \mathbf{B}_m^{(\ell-1)}]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{t}^{(\ell-1)} = [\tau_1^{(\ell-1)} \dots \tau_m^{(\ell-1)}]^T \quad (3.23)$$

za uopštenu Gauss-ovu kvadraturu u  $m$  tačaka u prostoru  $M_{2m-\ell+1, \ell-1}[0,1]$ . Tada za rešenje problema

$$\Phi_{2m}^{(\ell)}(\mathbf{B}, \mathbf{t}) = 0 \quad (3.24)$$

uvodimo jedno-parametarsku familiju problema

$$\Psi(\mathbf{B}, \mathbf{t}, \lambda) = \lambda \Phi_{2m}^{(\ell)}(\mathbf{B}, \mathbf{t}) + (1-\lambda) \Phi_{2m}^{(\ell-1)}(\mathbf{B}, \mathbf{t}) = 0, \quad (3.25)$$

gde je parameter  $\lambda$  u intervalu  $[0, 1]$ . Za  $\lambda=1$ , problem (3.25) se svodi na originalni problem (3.24), dok se za  $\lambda=0$  on svodi na problem sa poznatim rešenjem (3.23).

Pretpostavljamo da rešenje (3.25) odgovara nekoj kvadraturi Gauss-ovog tipa sa težinskim koeficijentima  $B_k(\lambda)$  i čvorovima  $\tau_k(\lambda)$ ,  $k=1, \dots, m$ , dok je odgovarajući sistem bazičnih funkcija  $\{\phi_{2v}\}_{v=1}^{2m}$  gde je

$$\phi_v(t) = \phi_v(t; \lambda) = \phi_v(t; \lambda, \ell) = \lambda \varphi_v^{(\ell)}(t) + (1-\lambda) \varphi_v^{(\ell-1)}(t). \quad (3.26)$$

Za primenu metoda neprekidnosti neophodan uslov su preslikavanja  $B_k := B_k(\lambda)$  i  $\tau_k := \tau_k(\lambda)$ ,  $k=1, \dots, m$ , definisana sistemom nelinearnih jednačina (3.25), tj. sa

$$\sum_{k=1}^m B_k \phi_v(\tau_k) = \lambda c_v^{(\ell)} + (1-\lambda) c_v^{(\ell-1)}, \quad v=1, \dots, 2m, \quad (3.27)$$

neprekidne funkcije (videti [85] str. 314-315).

Sada, polazeći od vrednosti  $\mathbf{B}(0) = \mathbf{B}^{(\ell-1)}$  i  $\mathbf{t}(0) = \mathbf{t}^{(\ell-1)}$ , datih u (3.23), koristimo Newton-Kantorovičev metod za rešavanje problema (3.25). Kako su funkcije

$$\mathbf{B}(\lambda) = [B_1(\lambda) \dots B_m(\lambda)]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{t}(\lambda) = [\tau_1(\lambda) \dots \tau_m(\lambda)]^T$$

neprekidne, možemo uvećati  $\lambda$  za malu vrednost  $\lambda_1$  i tada određujemo  $\mathbf{B}(\lambda_1)$  i  $\mathbf{t}(\lambda_1)$ , uzimajući  $\mathbf{B}(0)$  i  $\mathbf{t}(0)$  kao početne vrednosti.

U opštem slučaju mi biramo tačke  $\lambda_\nu$ ,  $\nu=0,1,\dots, s$ , u intervalu  $[0,1]$ ,

$$0=\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_s=1 \quad (3.28)$$

i tada rešavamo svaki od sistema jednačina  $(\Psi(\mathbf{B}, \mathbf{t}, \lambda)=0, \nu=0,1,\dots,s)$ , prethodno pomenutim Newton-Kantorovičevim metodom (3.21), uzimajući rešenje na  $\nu$ -tom koraku kao početnu vrednost za dobijanje rešenja na  $(\nu+1)$ -om koraku. Taj postupak rešava problem konvergencije jer zbog neprekidnosti možemo da obezbedimo dovoljno dobre startne vrednosti za Newton-Kantorovičev metod.

Kako je jednačina (3.16) zamenjena sa (3.25), tj.

$$\Psi(\mathbf{t}, \mathbf{B}, \lambda_\nu) = \begin{bmatrix} \lambda_\nu U_m^{(\ell)} + (1 - \lambda_\nu) U_m^{(\ell-1)} \mathbf{B} - \lambda_\nu \mathbf{c}^{(\ell)} + (1 - \lambda_\nu) \mathbf{c}^{(\ell-1)} \\ \lambda_\nu V_m^{(\ell)} + (1 - \lambda_\nu) V_m^{(\ell-1)} \mathbf{B} - \lambda_\nu \mathbf{d}^{(\ell)} + (1 - \lambda_\nu) \mathbf{d}^{(\ell-1)} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

u ovom slučaju, odgovarajuće izmene za  $U_m$ ,  $V_m$ ,  $Y_m$ ,  $Z_m$ ,  $\mathbf{c}$  i  $\mathbf{d}$  u Newton-Kantorovičevom metodu (3.21) treba izvršiti. Na primer, matricu  $U_m$  treba zameniti sa  $\lambda_\nu U_m^{(\ell)} + (1 - \lambda_\nu) U_m^{(\ell-1)}$ , itd.

Pomenimo ovde i neke činjenice koje su vezane za stabilnost numeričkog postupka. Za kondicioni broj  $\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$  koji karakteriše uslovljenost matrice (npr., videti [79]), koristimo Frobenius-ovu normu

$$\|A\| = \|A\|_F = \left\| \left[ a_{i,j} \right]_{i,j=1}^n \right\| = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Kao što možemo videti iz (3.21), bitnu ulogu igra kondicioni broj matrice  $U_m$ . Naime, pretpostavljajući da su nam svi čvorovi  $\mathbf{t} = [\tau_1 \dots \tau_m]^T$  poznati egzaktno, tada možemo izačunati težinske koeficijente  $\mathbf{B} = [B_1 \dots B_m]^T$  iz sistema jednačina  $U_m \mathbf{B} = \mathbf{c}$  kao  $\mathbf{B} = U_m^{-1} \mathbf{c}$  i njihova tačnost evidentno zavisi od uslovljenosti matrice  $U_m$ . Zato, tokom iterativnog postupka, treba kontrolisati uslovljenost ove matrice, tj.  $\text{cond}(U_m)$ , kao i kondicioni broj  $\text{cond}(V_m U_m^{-1} Y_m - Z_m)$ . Kao što ćemo videti u sledećem delu, korišćenje ortogonalnih sistema kao bazisnih funkcija obezbeđuje dobru uslovljenost matrica u numeričkoj proceduri.



### 3.4 Specijalni slučajevi uopštenih Gauss-ovih formula

Kao ilustraciju za dato  $n=2m$  i  $\ell \leq n$ , u ovom odeljku dajemo parametre generalisanih Gauss-ovih formula (3.2) koje su tačne na prostoru  $M_{2n-2\ell, \ell}[-1, 1]$ . U cilju nalaženja ovih formula, potrebne su nam Gauss-ove kvadrature (3.10) na prostoru  $M_{2m, 0}[0, 1]$ . Na primer, da bismo dobili početne vrednosti za slučaj  $n=4$  sa  $\ell=1$ , odnosno, za konstrukciju Gauss-ove formule koja je tačna na prostoru  $M_{6, 2}[-1, 1]$ , polazimo od Gauss-Legendre-ove kvadrature u četiri tačke na  $(-1, 1)$ . Dakle, koristeći sledeći kôd u Mathematica paketu `OrthogonalPolynomials` (videti [23], [83]),

```
<< orthogonalPolynomials`
{node4, weight4}=aGaussianNodesWeights[4, {aLegendre}];
tp={node[[3]], node[[4]]}^2;
bp=2{weight[[3]], weight[[4]]};
```

dobijamo startne vrednosti  $tp$  i  $bp$  za iterativni process (3.21),

$\{0.1155871099968291, 0.741555747145806\}$  i  $\{1.304290309725415, 0.6957096902749172\}$ .

U metodi neprekidnosti, obično uzimamo nekoliko koraka  $s$  u (3.29). Na primer, ovde za  $\ell=1$ , uzimamo  $\lambda_1=1/2$ ,  $\lambda_2=3/4$ ,  $\lambda_3=1$ , sa šest iteracija u svakom od koraka. Kao ilustraciju pomenimo sledeći sistem od četiri nelinearne jednačine, dobijene iz (3.12),

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= 2, \\ (3\tau_1 - 1)B_1 + (3\tau_2 - 1)B_2 &= 0, \\ (35\tau_1^2 - 30\tau_1 + 3)B_1 + (35\tau_2^2 - 30\tau_2 + 3)B_2 &= 0, \\ [\lambda u(\tau_1) + (1 - \lambda)v(\tau_1)]B_1 + [\lambda u(\tau_2) + (1 - \lambda)v(\tau_2)]B_2 &= 0, \end{aligned}$$

gde su

$$u(t) = 315t^2 - 420t + 137 + 30 \log t, \quad v(t) = 2\sqrt{13}(231t^3 - 315t^2 + 105t - 5).$$

Dobijena rešenja za  $\lambda=1/2$ ,  $3/4$  i  $1$  su data u Tabeli 3.1, samo sa 13 decimala u cilju uštede prostora. Za rešenja iz poslednjeg reda u Tabeli 3.1, odgovarajuće vrednosti kondicionog broja u ovom koraku za  $\ell=1$  su data u Tabeli 3.2

**Tabela 3.1** Sukcesivna rešenja u metodi neprekidnosti ( $m=2, \ell=1$ )

$\lambda$	$\tau_1$	$\tau_2$	$B_1$	$B_2$
1 / 2	0.08536456639144	0.6918014177825	1.182210756576	0.8177892434244
3 / 4	0.05441209758248	0.6520214699666	1.066543301896	0.9334566981040
1	0.02697261367327	0.6234778694459	0.9728146845471	1.0271853154529

**Tabela 3.2** Kondicioni brojevi u metodi neprekidnosti ( $m=2, \ell=1$ )

Kondicioni brojevi	$\lambda=1/2$	$\lambda=3/4$	$\lambda=1$
$\text{cond}(U_2)$	2.034	2.004	2.001
$\text{cond}(V_2 U_2^{-1} Y_2 - Z_2)$	2.580	2.493	3.254

Pomoću rešenja iz poslednje vrste u Tabeli 3.1 ( $\lambda=1$ ) dobijamo odgovarajuće parametre  $x_k = \pm\sqrt{\tau_k}$  i  $A_k=B_k/2$  za kvadraturnu formulu (3.4). Odgovarajući parametri za  $n=4,6,8$  i  $10$ , i svako  $\ell=1(1)n$  su predstavljeni u tabelama u radu [85], dok su ovde dati samo za  $n=4$  i  $n=6$  (videti Tabele 3.3 i 3.4.).

Poslednje vrste u Tabelama 3.3 i 3.4 daju parametre kvadratura za  $n=2m$  čvorova, kada je  $\ell=n$ . Kao što je ranije pomenuto u Napomeni 3.3, njihovi parametri se mogu dobiti i pomoću Golub-Welsch-ovog algoritma [37] i paketa `OrthogonalPolynomials`, (videti [23] i [83]).

**Tabela 3.3** Kvadrturni parametri u (3.4) za  $n=4$  i  $\ell=1(1)4$

$m$	$\ell$	$x_k$	$A_k$
2	1	$\pm 0.16423341217080958$	$0.48640734227356275$
		$\pm 0.78960614830808050$	$0.51359265772643725$
2	2	$\pm 0.13455607454878773$	$0.41207937938634762$
		$\pm 0.74449966717825955$	$0.58792062061365238$
2	3	$\pm 0.22165238135228435$	$0.58276918444433467$
		$\pm 0.74651381797367725$	$0.41723081555566534$
2	4	$\pm 0.21304150473893422$	$0.55934645744452245$
		$\pm 0.72929609383105129$	$0.42797218488911637$

**Tabela 3.4** Kvadraturni parametri za  $n=6$  i  $\ell=1(1)6$

$m$	$\ell$	$x_k$	$A_k$
3	1	$\pm 0.10519535022685311$	0.31519742185544770
		$\pm 0.55426520775972543$	0.45433527044404787
		$\pm 0.90861394041112394$	0.23046730770050443
3	2	$\pm 0.07412301056538206$	0.23165078336824006
		$\pm 0.46915700779712717$	0.47672055911229095
		$\pm 0.88251597107409251$	0.29162865751946899
3	3	$\pm 0.06722304120314940$	0.21161309284720757
		$\pm 0.44185506329862697$	0.47075746444480766
		$\pm 0.87009876131956773$	0.31762944270798476
3	4	$\pm 0.08451361225837759$	0.26133749369400446
		$\pm 0.50561343828077945$	0.47655466185392766
		$\pm 0.89432406384522312$	0.26210784445206788
3	5	$\pm 0.15493260021964956$	0.39681015997085157
		$\pm 0.54351277309839153$	0.36350670316943171
		$\pm 0.85192277411427122$	0.23968313685971672
3	6	$\pm 0.15842277342698578$	0.40606254761859986
		$\pm 0.55266107341525372$	0.36412981109511077
		$\pm 0.85720271593567820$	0.23300667331553449

U tom slučaju, potrebni su nam momenti za logaritamsku težinsku funkciju  $x \mapsto \log|x|$  na intervalu  $(-1, 1)$ , koji se mogu odrediti veoma lako u analitičkom obliku,

$$\mu_k = \int_{-1}^1 x^k \log|x| dx = \begin{cases} -\frac{2}{(k+1)^2}, & k \text{ je parno} \\ 0, & k \text{ je neparno.} \end{cases}$$

Kao što smo ranije spomenuli, kontrola kondicionog broja matrica  $U_m^{(\ell)}$  i  $Q_m^{(\ell)} = V_m^{(\ell)}(U_m^{(\ell)})^{-1}Y_m^{(\ell)} - Z_m^{(\ell)}$ , tokom iterativnog procesa je važna. Kondicioni brojevi ovih matrica u rešenju ( $\lambda=1$ ) su prikazani u Tabeli 3.7 za  $m=2(1)5$  i  $\ell=1, \dots, 2m-1$ , u obliku  $(\text{cond}(U_m^{(\ell)}), \text{cond}(Q_m^{(\ell)}))$ .

Kao što možemo videti, ove matrice su dobro uslovljene. Njihovi kondicioni brojevi su manji od 15 i 72, respektivno, što znači da može biti gubitak od najviše jedne do dve decimalne cifre u konačnom rezultatu. Tako dobra uslovljenost matrica je posledica korišćenja ortogonalnih bazisnih funkcija u našem metodu konstrukcije.

**Tabela 3.7** Kondicioni brojevi ( $\text{cond}(U_m^{(\ell)})$ ,  $\text{cond}(Q_m^{(\ell)})$ ) za  $m=2,3,4,5$  i  $\ell=1,\dots,2m-1$

$\ell$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
1	(2.001,3.254)	(3.117,6.076)	(4.303,9.347)	(5.538,13.04)
2	(2.039,3.660)	(3.290,8.884)	(4.683,15.68)	(6.173,23.53)
2	(2.271,8.468)	(3.466,10.00)	(5.651,20.73)	(8.591,34.41)
4		(3.276,16.06)	(6.246,22.50)	(12.34,42.28)
5		(3.292,12.68)	(4.346,33.21)	(14.29,45.17)
6			(5.447,37.10)	(5.544,60.01)
7			(4.940,32.53)	(6.184,71.71)
8				(7.566,58.20)
9				(6.644,26.80)

### 3.5 Numerički primeri

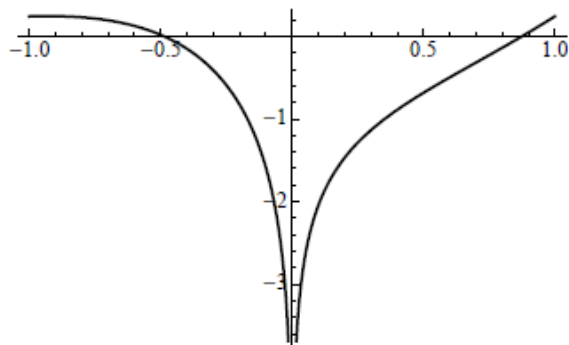
U ovom odeljku daće se dva primera u cilju ilustracije efikasnosti predloženih kvadratura.

#### Primer 3.1

Neka je funkcija definisna kao (vidi Sliku 3.1)

$$f(x) = \frac{e^x \log x^2 + \cos x}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad (3.29)$$

sa logaritamskim singularitetom u  $x=0$ .



**Slika 3.1.** Funkcija  $f(x) = (\cos x + e^x \log(x^2)) / \sqrt{4 + x^2}$  na  $[-1, 1]$

U cilju izračunavanja relativnih grešaka za tačnu vrednost integrala može se uzeti

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx = -1.26933670828296\dots$$

Primenjujući kvadraturno pravilo (1.4) na ovaj integral, dobijamo aproksimacije sa relativnim greškama predstavljenim u Tabeli 3.8. Brojevi u zagradama su decimalni eksponenti, na primer  $7.12(-3) = 7.12 \cdot 10^{-3}$ .

**Tabela 3.8** Relativne greške u kvadraturnim aproksimacijama za  $I(f)$  sa  $n$  čvorova i  $\ell = 0, 1, \dots, n$

$\ell$	$n=4$	$n=6$	$n=8$	$n=10$	$n=12$	$n=24$	$n=2 \times 12$
<b>0</b>	3.80(-1)	2.64(-1)	2.02(-1)	1.63(-1)	1.37(-1)	7.00(-2)	6.37(-3)
<b>1</b>	7.12(-3)	1.57(-3)	5.95(-8)	2.88(-4)			
<b>2</b>	<u>1.41(-3)</u>	6.10(-6)	5.75(-8)	3.30(-8)			
<b>3</b>	2.97(-2)	<u>6.65(-6)</u>	2.01(-7)	7.12(-9)			
<b>4</b>	2.29(-2)	1.07(-4)	<u>1.89(-8)</u>	2.54(-9)			
<b>5</b>		1.73(-2)	5.40(-7)	<u>7.11(-10)</u>			
<b>6</b>		1.92(-2)	3.06(-5)	4.22(-9)			
<b>7</b>			1.13(-2)	5.98(-8)			
<b>8</b>			1.60(-2)	1.30(-5)			
$Q_n^C$	7.27(-3)	3.04(-4)	1.38(-5)	6.68(-7)			

U prvoj vrsti ( $\ell = 0$ ), dajemo relativne greške za Gauss-Legendre-ove kvadrature za  $n=4, 6, 8, 10, 12$  i  $24$  čvorova.

Ako primenimo 12-tačkastu Gauss-Legendre-ovu formulu na dva integrala na  $[-1,0]$  i  $[0,1]$  (prethodno transformisanih na  $[-1,1]$ ), ili što je ekvivalentno primeni ove formule na integral,

$$I(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ f\left(\frac{1+x}{2}\right) + f\left(-\frac{1+x}{2}\right) \right] dx,$$

odgovarajuća relativna greška je data u poslednjoj koloni prve vrste. Kao što možemo videti, u takvom pristupu (koristeći kompozitno pravilo) relativna greška sa istim brojem funkcionalnih

izračunavanja je manja nego u slučaju kada koristimo originalnu Gauss-Legendre-ovu formula sa 24 čvora.

Evidentno je da, među ovim formulama za dato  $n(=4, 6, 8 \text{ i } 10)$ , sa  $1 \leq \ell \leq n$ , minimalna relativna greška se dostiže kada je  $\ell = n/4$  (podvučene vrednosti u Tabeli 3.8) tj., sa kvadraturama koje su tačne za funkcije u prostoru  $M_{n,n}[-1, 1]$ . Ovde je, naravno, minimalna greška ( $7.11 \times 10^{-10}$ ) dostignuta 10-tačkastom kvadraturom sa  $\ell = 5$ , koja je tačna za funkcije u prostoru  $M_{10,10}[-1, 1]$ .

Primenjujući  $n$ -tačkastu kvadraturnu formulu dobijenu u radu Nahlik-Bialecki [88] na  $I(f)$ , dobijamo aproksimativne vrednosti sa relativnim greškama 1.44(-2), 1.29(-3) i 3.95(-4) za  $n=4$ ,  $n=6$  i  $n=8$ , respektivno. Primena naših kvadratura u primerima predstavljenim u [88] (videti takođe [8]), pokazuje znatno bolju tačnost.

Integral  $I(f)$  može biti takođe izračunat ako se razdvoji podintegralna funkcija (3.29) na dva dela,

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx + 4 \int_0^1 \frac{\cosh x}{\sqrt{x^2 + 4}} \log x dx.$$

Primenimo dva pravila:  $n$ -tačkastu Gauss-Legendre-ovu formulu na prvi deo i  $n$ -tačkastu Gauss-ovu formulu u odnosu na logaritamsku težinu (3.1), na drugi deo. Tako imamo

$$I(f) \approx Q_{2m}^C(f) = \sum_{k=1}^m A_k^{GL} f_1(x_k^{GL}) + 4 \sum_{k=1}^m \omega_k^L f_2(x_k^L); \quad (3.30)$$

gde su  $f_1(x) = \cos x / \sqrt{x^2 + 4}$  i  $f_2(x) = \cosh x / \sqrt{x^2 + 4}$ . Parametri Gauss-Legendre-ove formule ( $A_k^{GL}, x_k^{GL}, k=1, \dots, m$ ) kao i parametri u formuli (3.1) mogu se dobiti preko paketa `OrthogonalPolynomials`. Odgovarajuće relativne greške  $|(Q_n(f) - I(f))/I(f)|$  su prikazane u poslednjoj vrsti u Tabeli 3.8 za  $n=4(2)10$ . Kao što možemo videti, naša  $n$ -tačkasta generalizovana (direktna) Gauss-ova formula daje bolje rezultate nego  $n$ -tačkasta kombinovana formula (3.30). Posebno, to je izraženo za  $\ell = n/2$  (videti podvučene vrednosti).

### Primer 3.2

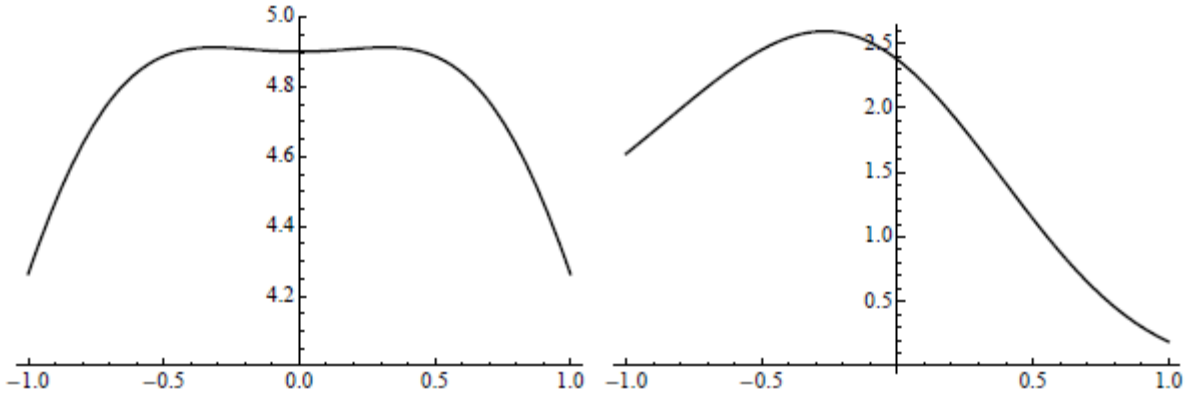
U drugom primeru posmatramo jednu integralnu jednačinu Fredholm-ovog tipa prve vrste

$$\int_{-1}^1 k(x,t)f(x)dx = g(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (3.31)$$

sa jednostavnim diferencnim jezgrom  $k(x,t)$  koje je dato pomoću

$$k(x,t) = \frac{1}{(x-t)^2 + 1}. \quad (3.32)$$

Kao funkcija  $g$  na desnoj strani u (3.31), u radu [85] su razmatrana dva slučaja specijalnih funkcija čiji su grafici prikazani na sl.3.2 (za analitičke izraze videti jednačine na str. 321 [85]).



**Slika 3.2.** Funkcija  $g(t)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , u Jednačini (5.3) za Slučaj 1° (levo) i Slučaj 2° (desno)

Za ova dva slučaja poznata su tačna rešenja integralne jednačine (3.31) i ona su:  $f(x) = \cosh \pi x$  (Slučaj 1°) i  $f(x) = (4x-2)\log|x| - x(3x+1)$  (Slučaj 2°), tako da ih možemo uporediti sa numeričkim rezultatima dobijenim primenom nekih kvadrature formula, uključujući i naše generalizovane Gauss-ove kvadrature  $Q_{n,\ell}^{GG}$  ( $1 \leq \ell \leq n$ ).

Tri simetrične kvadrature formule

$$Q_{2m}(f) = \sum_{j=1}^{2m} A_j f(x_j), \quad (3.33)$$

sa parnim brojem čvorova, su korišćene za numeričko rešavanje integralne jednačine (3.31):

a) Kompozitna trapezoidna formula  $Q_{2m}(f) = T_{2m}(f): x_j = x_j^{CT} \quad A_j = A_j^{CT}, j=1, \dots, 2m,$

$$x_j^{CT} = \frac{2(j-m)-1}{2m-1}, j=1, \dots, 2m; \quad 2A_1^{CT} = A_2^{CT} = \dots = A_{2m-1}^{CT} = 2A_{2m}^{CT} = \frac{1}{2m-1};$$

b) Gauss-Legendre-ova formula  $Q_{2m}(f) = Q_{2m}^{GL}(f): x_j = x_j^{GL} \quad A_j = A_j^{GL}, j=1, \dots, 2m,$

c) Generalisana Gauss-ova formula  $Q_{2m}(f) = Q_{2m,\ell}^{GG}(f): x_j = x_j^{GG} \quad A_j = A_j^{GG}, j=1, \dots, 2m$   
( $1 \leq \ell \leq 2m$ ).

Primetimo da je  $Q_{2m}^{GL} \equiv Q_{2m,0}^{GG}$ .

Najpre, definišimo integralni operator

$$(Kf)(t) := \int_{-1}^1 k(x,t)f(x)dx, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

gde je jezgro dato sa (3.32), tako da integralna jednačina (3.31) može biti prikazana u operatorskoj formi  $Kf=g$ . Za ovaj operator možemo posmatrati niz operatora  $\{K_m\}_m$ ,

$$(K_m f)(t) := \sum_{j=1}^{2m} A_j k(x_j, t) f(x_j), \quad m=1,2,\dots,$$

koji se dobija primenom kvadrature formule (3.33) na  $(Kf)(t)$ .

U cilju rešavanja jednačina

$$(K_m f_m)(t) = g(t), \quad m=1,2,\dots,$$

koristimo kolokacione tačke  $t_i = x_i$ ,  $i=1, \dots, 2m$ , tako da dobijamo linearne sisteme jednačina

$$\sum_{j=1}^{2m} A_j k(x_j, x_i) f_m(x_j) = g(x_i), \quad i=1, \dots, 2m; m=1,2,\dots,$$

čiji je matrični oblik

$$\begin{bmatrix} A_1 k(x_1, x_1) & A_2 k(x_2, x_1) & \cdots & A_{2m} k(x_{2m}, x_1) \\ A_1 k(x_1, x_2) & A_2 k(x_2, x_2) & \cdots & A_{2m} k(x_{2m}, x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1 k(x_1, x_{2m}) & A_2 k(x_2, x_{2m}) & \cdots & A_{2m} k(x_{2m}, x_{2m}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_m(x_1) \\ f_m(x_2) \\ \vdots \\ f_m(x_{2m}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_{2m}) \end{bmatrix}, \quad m \geq 1. \quad (3.34)$$

Obično, ovi sistemi jednačina su slabo uslovljeni kada je  $m$  dovoljno veliko. Kondicioni brojevi za  $m=1(1)5$ , u slučaju kompozitne trapezne formule  $T_{2m}$ , Gauss-Lagrendre-ove kvadrature formule  $Q_{2m}^{GL}$  i dve od generalisanih kvadrature formula  $Q_{2m,m}^{GG}$  i  $Q_{2m,1}^{GG}$  prikazanih u Tabeli 3.9.

**Tabela 3.9** Kondicioni brojevi matrice u (3.34), u slučaju kvadrature pravila  $T_{2m}$ ,  $Q_{2m}^{GL}$ ,  $Q_{2m,m}^{GG}$

i  $Q_{2m,1}^{GG}$  za  $m=1(1)5$

$Q_{2m}$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$T_{2m}$	2.167	2.312(1)	3.276(2)	5.660(3)	1.054(5)
$Q_{2m}^{GL}$	2.900	3.446(1)	4.718(2)	7.120(3)	1.163(5)
$Q_{2m,m}^{GG}$	4.908	1.360(2)	6.188(3)	3.510(5)	2.282(7)
$Q_{2m,1}^{GG}$	4.908	7.559(1)	1.005(3)	1.195(4)	1.369(5)



Rešenja sistema jednačina (3.34) daju diskretne aproksimacije tačnog rešenja  $f(x)$  za integralnu jednačinu (3.31). Odgovarajuća relativna greška  $r(x) = |f_m(x) - f(x)|/|f(x)|$  može biti sračunata samo u čvorovima kvadrature formule (3.33) tj, u tačkama  $x=x_k, k=1, \dots, 2m$ . Budući da koristimo nekoliko različitih kvadrature formula, čiji čvorovi se razlikuju međusobno, tačno numeričko poređenje tačnosti između njih nije moguće. Zato mi dajemo odgovarajuće grafike, sa odgovarajućim aproksimativnim vrednostima  $f_m(x_k), k=1, \dots, 2m$ .

Relativne greške u aproksimacijama  $f_5(x_k), k=1, \dots, 10$  dobijenim sa 10-tačkastim kvadrature formulama  $T_{10}, Q_{10}^{GL}, Q_{10,5}^{GG}$  i  $Q_{10,1}^{GG}$ , za oba slučaja ( $1^\circ$  i  $2^\circ$ ), prikazani su u Tabeli 3.10. Gubitak od sedam decimalnih cifara u double precision arithmetic (zbog velikog kondicionog broja  $\approx 10^7$ ), ne ugrožava tačnost dobijenih aproksimacija u ovim slučajevima.

**Tabela 3.10** Relativne greške u aproksimacijama  $f_5(x_k), k=1, \dots, 10$  dobijenim sa pravilima  $T_{10}$ ,

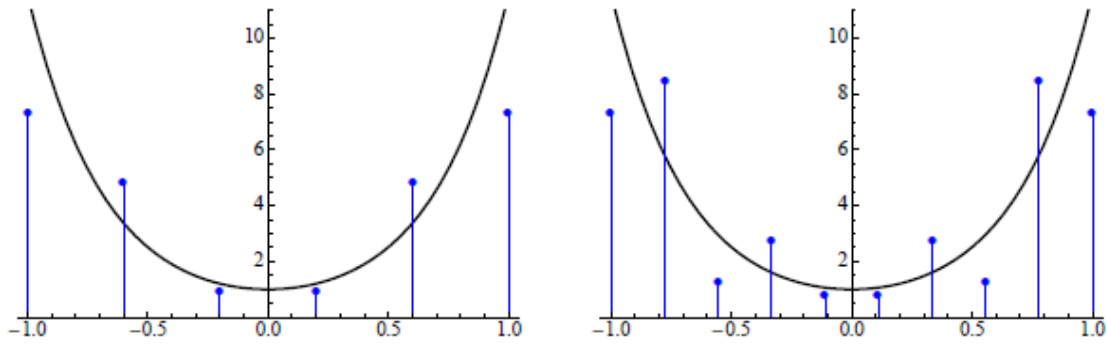
$$Q_{10}^{GL}, Q_{10,5}^{GG} \text{ i } Q_{10,1}^{GG}$$

$T_{10}$	$x_1^{CT}$	$x_2^{CT}$	$x_3^{CT}$	$x_4^{CT}$	$x_5^{CT}$	$x_6^{CT}$	$x_7^{CT}$	$x_8^{CT}$	$x_9^{CT}$	$x_{10}^{CT}$
<b>Slučaj <math>1^\circ</math></b>	3.76(-1)	4.44(-1)	5.94(-1)	6.52(-1)	3.52(-1)	3.25(-1)	6.52(-1)	5.94(-1)	4.44(-1)	3.76(-1)
<b>Slučaj <math>2^\circ</math></b>	4.72(-1)	1.90(0)	1.80(-1)	1.07(-1)	1.38(-1)	3.93(-1)	1.29(+1)	5.38(-1)	3.56(-1)	3.27(-1)
$Q_{10}^{GL}$	$x_1^{GL}$	$x_2^{GL}$	$x_3^{GL}$	$x_4^{GL}$	$x_5^{GL}$	$x_6^{GL}$	$x_7^{GL}$	$x_8^{GL}$	$x_9^{GL}$	$x_{10}^{GL}$
<b>Slučaj <math>1^\circ</math></b>	1.38(-4)	1.80(-4)	1.82(-4)	1.62(-4)	8.19(-5)	8.19(-5)	1.62(-4)	1.82(-4)	1.80(-4)	1.38(-4)
<b>Slučaj <math>2^\circ</math></b>	4.07(-1)	1.27(0)	5.34(-1)	1.80(-1)	1.74(-1)	4.60(-1)	8.51(-1)	3.06(-1)	2.68(-1)	2.15(-1)
$Q_{10,5}^{GG}$	$x_1^{GG}$	$x_2^{GG}$	$x_3^{GG}$	$x_4^{GG}$	$x_5^{GG}$	$x_6^{GG}$	$x_7^{GG}$	$x_8^{GG}$	$x_9^{GG}$	$x_{10}^{GG}$
<b>Slučaj <math>1^\circ</math></b>	1.38(-3)	3.12(-3)	9.65(-3)	4.25(-2)	9.18(-2)	9.18(-2)	4.25(-2)	9.65(-3)	3.12(-3)	1.38(-3)
<b>Slučaj <math>2^\circ</math></b>	1.74(-2)	6.29(-2)	1.46(-2)	7.67(-3)	1.30(-1)	2.04(-1)	1.01(-1)	3.84(-2)	6.02(-3)	2.54(-3)
$Q_{10,1}^{GG}$	$x_1^{GG}$	$x_2^{GG}$	$x_3^{GG}$	$x_4^{GG}$	$x_5^{GG}$	$x_6^{GG}$	$x_7^{GG}$	$x_8^{GG}$	$x_9^{GG}$	$x_{10}^{GG}$
<b>Slučaj <math>1^\circ</math></b>	7.87(-5)	1.09(-4)	1.34(-4)	1.95(-4)	2.22(-4)	2.22(-4)	1.95(-4)	1.34(-4)	1.09(-4)	7.87(-5)
<b>Slučaj <math>2^\circ</math></b>	2.72(-2)	1.49(-1)	2.37(-2)	9.39(-3)	7.63(-2)	1.55(-1)	4.72(0)	7.64(-2)	5.13(-2)	3.86(-2)

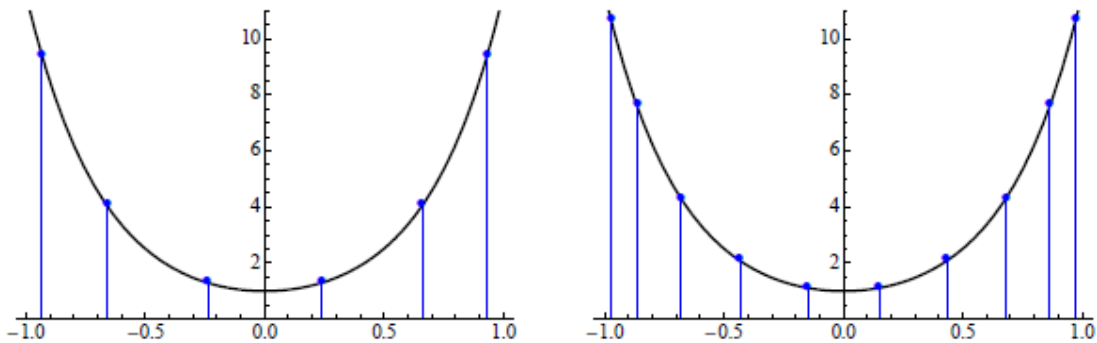
Kao što možemo videti u *Slučaju  $1^\circ$* , kada rešenje integralne jednačine (3.31) je glatka funkcija, primena svih kvadrature formula, izuzev kompozitnog trapeznog pravila, daje zadovoljavajuće rezultate. Međutim, u *Slučaju  $2^\circ$* , sa singularnim rešenjem, generalisane Gauss-ove formule daju znatno bolje rezultate. Primetimo da se velika relativna greška u aproksimaciji

u čvoru  $x_7^{GG}$  (Slučaj 2° sa  $Q_{10,1}^{GG}$ ) javlja zbog vrednosti tačnog rešenja u tački koja je blizu nule.

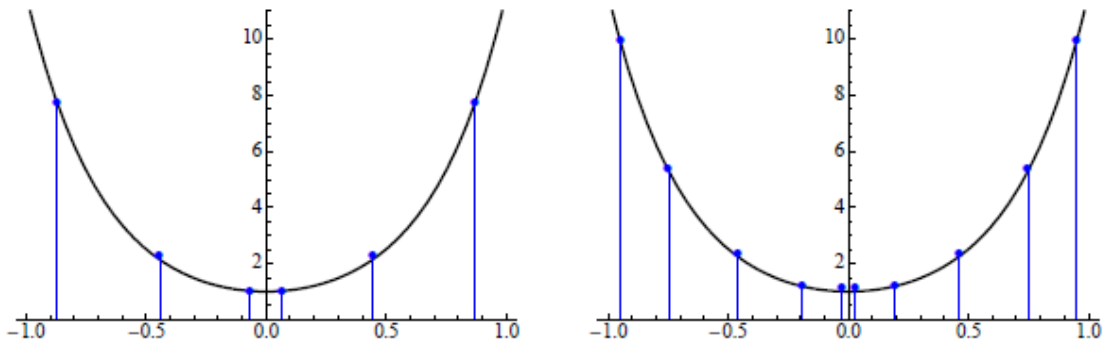
Tačno rešenje integralne jednačine (3.32) i odgovarajuće aproksimacije  $f_m(x)$ ,  $k=1, \dots, 2m$  ( $m=3$  i  $m=5$ ) za tri različita kvadratura pravila, su prikazane na slikama 3.3, 3.4, 3.5 (Slučaj 1°) i na slikama 3.6, 3.7, 3.8 (Slučaj 2°).



Slika 3.3. Slučaj 1°: Primena kompozitne trapezne formule  $T_{2m}$  sa  $2m=6$  (levo) i  $2m=10$  čvorova (desno)

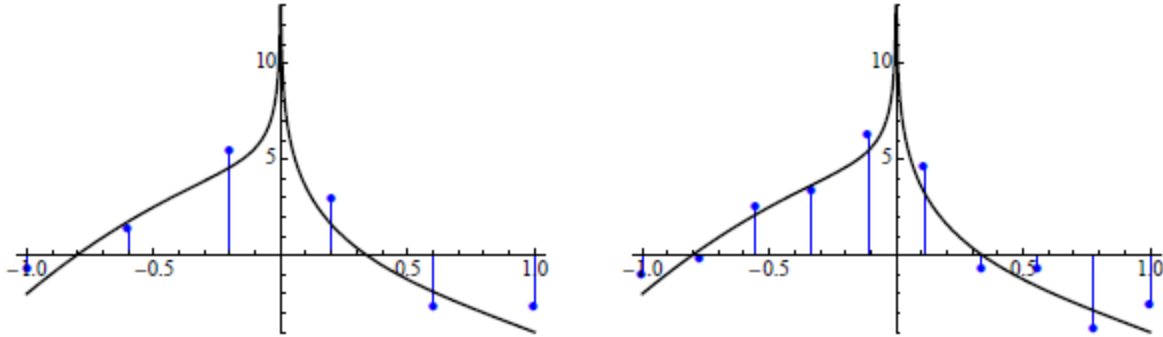


Slika 3.4. Slučaj 1°: Primena Gauss-Legendre-ove kvadrature formule  $Q_{2m}^{GL}$  sa  $2m=6$  (levo) i  $2m=10$  čvorova (desno)

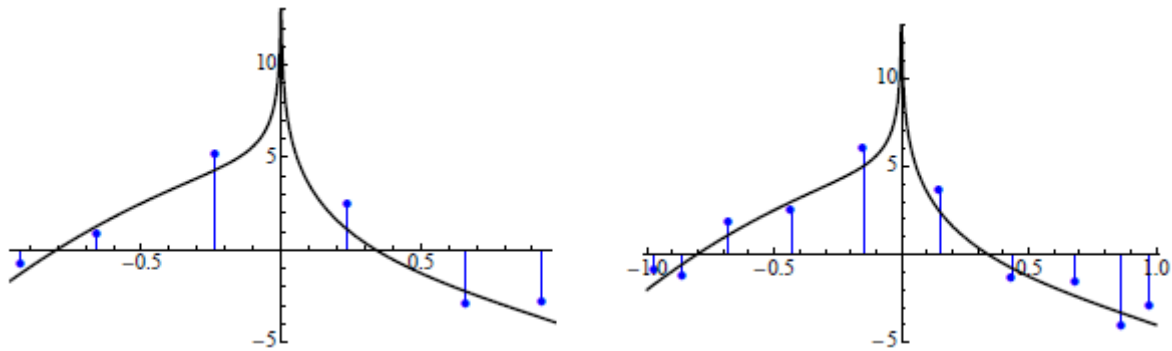


Slika 3.5. Slučaj 1°: Primena generalisane Gauss-ove kvadrature formule  $Q_{2m,m}^{GG}$  sa  $2m=6$  (levo) i  $2m=10$  čvorova (desno)

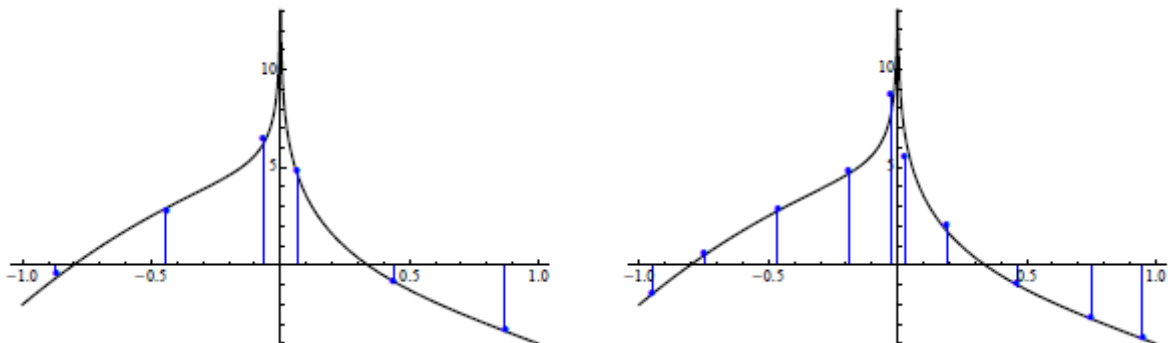
Primena generalizovane Gauss-ove kvadrature formule  $Q_{10,1}^{GG}$  daje aproksimaciju rešenja integralne jednačine (3.31), što je prikazano na Slici 3.9.



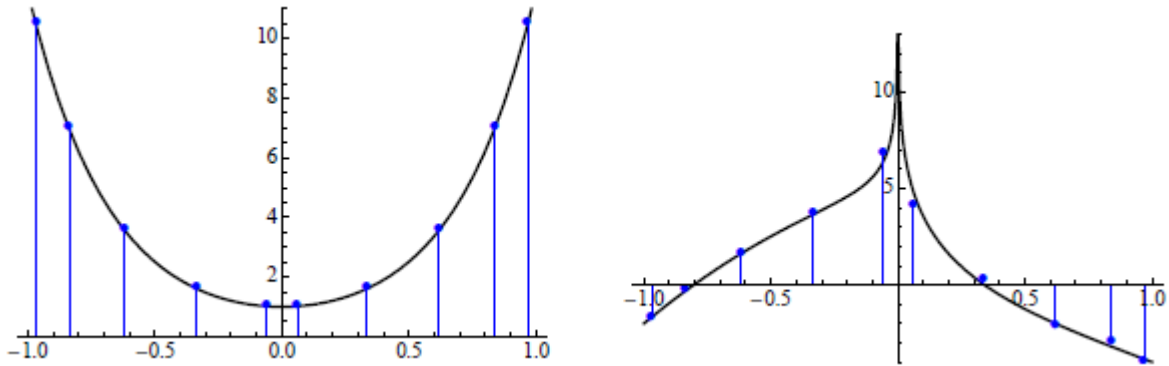
*Slika 3.6. Slučaj 2°: Primena kompozitne trapezne formule  $T_{2m}$  sa  $2m=6$  (levo) i  $2m=10$  čvorova (desno)*



*Slika 3.7. Slučaj 2°: Primena Gauss-Legendre-ove kvadrature formule  $Q_{2m}^{GL}$  sa  $2m=6$  (levo) i  $2m=10$  čvorova (desno)*



*Slika 3.8. Slučaj 2°: Primena generalisane Gauss-ove kvadrature formule  $Q_{2m,m}^{GG}$  sa  $2m=6$  (levo) i  $2m=10$  čvorova (desno)*



*Slika 3.9.: Primena generalisane Gauss-ove kvadrature formule  $Q_{10}^{GG}$  u slučaju 1° (levo) i slučaju 2° (desno)*

**Napomena 3.4** Važan slučaj integralnih jednačina prve vrste

$$\int_{-1}^1 \omega(x)k(x,t)f(x)dx = g(t), \quad -1 \leq t \leq 1,$$

sa singularnim jezgrom u obliku  $k(x,t) = A(x,t)\log|x-t| + B(x,t)$ , gde  $A$ ,  $B$  i  $g$  su regularne funkcije na  $[-1,1]$ , se susreće u širokoj klasi problema u raznim oblastima nauke i tehnike. Takve jednačine sa Čebiševljevom težinskom funkcijom prve vrste  $\omega(x) = (1-x^2)^{-1/2}$  razmatrane su od strane više autora (videti [56], [19], [86]).

Zaključujući ovo poglavlje možemo naglasiti da dobijene univerzalne (direktne) kvadrature formule jednako dobro integrale neprekidne funkcije i funkcije sa logaritamskim singularitetom. One se efikasno mogu primeniti za direktnu integraciju, ali i za efikasnu primenu u rešavanju integralnih jednačina. Formule se mogu uspešno implementirati u odgovarajuće softverske pakete kojim se realizuju metod graničnih elemenata (MGE) i metod konačnih elemenata (MKE), što bi dovelo do jednostavnijih programskih rešenja, povećanje njihove brzine izvršenja, ali i dobijanje tačnijih krajnjih rezultata.

Pomenuta programska implementacija zahteva rad eksperata u programiranju i poznavanju ovog problema da bi se na adekvatan način dobijene nove kvadrature formule mogle implementirati i maksimalno iskoristiti njihova superiornost u odnosu na postojeće standardne kvadrature formule koje se sada koriste.

## 4. PONAŠANJE PLOČASTIH ČELIČNIH KONSTRUKCIJA PRI STATIČKOM OPTEREĆENJU I LOKALIZOVANOM OPTEREĆENJU

### 4.1 Opšte napomene

U ovom delu rada analiziraće se nelinearno ponašanje i granična nosivost čeličnih zavarenih limenih nosača I preseka kao i problem izbočavanja rebra pod lokalizovanim opterećenjem po pojasi u ravni rebra. Kod ovako složenih problema na ponašanje nosača istovremeno utiču: dimenzije pojedinih konstruktivnih delova, tj. geometrija nosača, mehaničke karakteristike materijala, karakteristike opterećenja i drugi parametri. U cilju preciznijeg određivanja ponašanja, istraživači se uglavnom odlučuju na analiziranje dejstva određenog broja parametara. Razmotrićemo osnovne probleme i moguće slučajeve i uticaje koji su do sada uočeni. Postoje tri osnovna problema koji se mogu razmatrati u cilju što optimalnijeg rešenja i to: naponsko stanje, problem granične nosivosti i problem stabilnosti.

- a) **Problem naprezanja.** Ovo je veoma složen problem jer je potrebno uzeti u obzir sadejstvo ploča koje čine rebro i pojasevi, pri uticaju brojnih parametara koji utiču na problem naprezanja. Kako je veoma komplikovano teorijski odrediti polje napona, koriste se numerički postupci i primena MKE.
- b) **Problem granične nosivosti.** Ovaj problem može se posmatrati sa više aspekata. Generalno, moguće su: prekomerne deformacije, prelazak konstrukcije ili njenog dela u mehanizam (a time i gubitak nosivosti), lom poprečnog preseka, gubitak stabilnosti konstrukcije ili njenog dela i dr. Takođe, može nastati i usled lokalnog izbočavanja. Ova problematika je i danas veoma aktuelna jer za problem *patch loading*-a ne postoji tačno teorijsko rešenje u analitičkom obliku. Zato se putem numeričkih, približnih postupaka dolazi do rešenja čak i u slučajevima gde postoje nelinearne diferencijalne jednačine ovog problema kojima se ne mogu odrediti tačna rešenja, pogotovo kada se uzima uticaj većeg broja parametara. Istaknimo da je problem granične nosivosti osnova postojećih Evropskih propisa [28].
- c) **Problem stabilnosti.** U okviru ovog problema bitno je određivanje kritične sile koja prouzrokuje gubitak stabilnosti konstrukcije. Ona se može odrediti u funkciji različitih

parametara. Ovaj problem je karakterističan za pritisnute elemente, a javlja se i kod lokalnog opterećenja rebra.

Kako su navedeni problemi veoma složeni, istraživanja su pokazala da je od važnosti što preciznije dimenzionisanje nosača. U preporukama za proračun „Evrokod 3: Projektovanje čeličnih konstrukcija“, ovim problemima je posvećena posebna pažnja u delu 1-5 pod nazivom „EN 1993-1-5: Projektovanje čeličnih konstrukcija - Puni limeni elementi“ [21]. Uz prikaz osnovnih elemenata nosača, napomenućemo i njihove najvažnije karakteristike koje se moraju uzeti u obzir pri istraživanju.

**Tipovi nosača.** U zavisnosti od tipa poprečnog preseka, uglavnom je u dosadašnjim istraživanjima razmatran slučaj I-nosača i slučaj sandučastih nosača. Iz razloga što je problematika ista, uglavnom su razmatrani I-nosači u dosadašnjim ispitivanjima. Međutim, rešenja koja su dobijena za I nosače nisu uvek primenljiva i na tip nosača sa sandučastim poprečnim presekom. Pokazalo se da su potrebna dodatna ispitivanja, zbog specifičnosti preseka sandučastih nosača kao tankozidnih nosača zatvorenog profila. U ovom radu su tretirani I-nosači.

**Slučaj valjanih i zavarenih nosača.** Način izrade nosača ima veliku ulogu u analizi njihovih karakteristika. Postoje znatne razlike u načinu izrade, obrade, uticaja zavarenih spojeva i dr. Uglavnom se valjani profili koriste kod manjih raspona i obično u visokogradnji, dok se zavareni profili koriste kod mostovskih konstrukcija i konstrukcija hala većih raspona. Razlika se, pre svega, ogleda i u vitkosti rebra.

Slučaj različitih vitkosti rebra nosača je bitan faktor jer različite vitkosti rebra uslovljavaju različito ponašanje u pogledu njihove stabilnosti. Od značaja je i određivanje granice vitkosti koja se odnosi na ponašanje nosača u pogledu stabilnosti.

**Uticaj vertikalnih (poprečnih) i horizontalnih (podužnih) ukrućenja.** Vertikalna ukrućenja utiču na nosivost višestruko. Ona pružaju oslonac pojasu, a takođe, ograničavaju oblast izbočavanja i smanjuju mogućnost deformacija rebra. Služe i kao oslonac za postojeća podužna ukrućenja (koja se vezuju za poprečna ukrućenja). Podužna ukrućenja se postavljaju na pritisnutom delu rebra. Od njihovog položaja zavisi početak plastičnog tečenja rebra a takođe i početak izbočavanja rebra. Ukrućenja koja su tipa zatvorenog tankozidnog profila, pružaju veću otpornost na lokalno izbočavanje i utiču na povećanje nosivosti.

Početne imperfekcije mogu imati određeni uticaj na ponašanje nosača što će u ovom radu biti proučavano.

**Vrsta i karakteristike opterećenja.** Na nosivost konstrukcije znatno utiče dužina u pravcu rebra nosača na koju se nanosi opterećenje. To se manifestuje dužinom površine naleganja opterećenja duž nosača. U ovom radu će biti razmatrano jednakopodeljeno opterećenje koje deluje na kratkim dužinama - lokalizovano opterećenje, poznato pod nazivom *patch loading* o čemu će biti više reči u daljem tekstu.

Položaj opterećenja, tj. njegove rezultante, u odnosu na nosač je takođe od značaja. Do sada su u literaturi razmatrani slučajevi opterećenja na jednom ili na oba pojasa nosača, a takođe detaljno je ispitavan uticaj ekscentriciteta opterećenja u odnosu na srednju ravan rebra. U ovom radu tretiraće se opterećenje po jednom pojasu, a u pravcu srednje ravni rebra, bez uticaja ekscentriciteta.

Po svom uticaju na konstrukciju, veoma se razlikuje i karakter opterećenja, tj. da li je ono statičko ili dinamičko, a u slučaju dinamičkog opterećenja, važna je i vrsta dinamičkog opterećenja. Rešavanje navedenih problema može biti sprovedeno na različite načine. Najčešće su to: teorijsko-analitički, eksperimentalni, numerički postupci i primena MKE i MGE i slični (metod konačnih razlika itd.).

## **4.2 Izvod iz teorije izbočavanja ploča**

Ploče su ravni površinski elementi koje zbog svoje funkcionalnosti nalaze primenu u raznim oblastima inženjerstva, a posebno su rasprostranjene u građevinarstvu. Javljuju se kao posebni elementi konstrukcija, ali i kao delovi konstruktivnih elemenata. U ovom radu će biti tretirane kao pojasevi i rebra limenih I nosača.

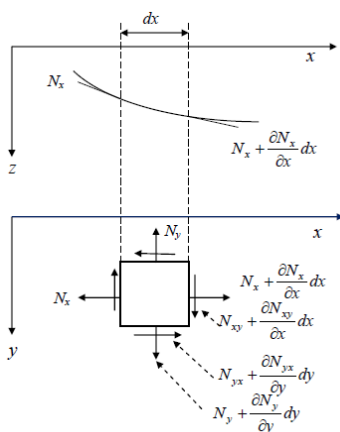
Problem stabilnosti kod površinskih, pločastih elemenata konstrukcije u slučaju limenih nosača manifestuje se izvijanjem čitavog elementa ili dela površinskog nosača kao lokalna pojava gubitka stabilnosti. Do naprezanja tih elemenata koji gube svoju stabilnost u celoj oblasti ili samo lokalno, dolazi usled normalne sile pritiska, momenta savijanja, transverzalne sile ili njihovih kombinovanih dejstava. Tanke ploče, o kojima će ovde biti reči, izložene su opterećenjima koja izazivaju normalne napone pritiska i/ili smičuće napone u ravni ploče. Pri dostizanju kritičnih vrednosti napona, dolazi do velikih deformacija ploče što predstavlja gubitak stabilnosti ovih elemenata. U zavisnosti od veličine i načina dejstva opterećenja izbočavanje

može biti globalnog ili lokalnog karaktera. Lokalno izbočavanje nosača ima za posledicu gubitak kapaciteta nosivosti što se takođe mora obuhvatiti pri proračunu elemenata ploče.

Teorijski gledano, ploča u izvesnim slučajevima posle izbočavanja može da nosi opterećenje veće od kritičnog bez loma konstrukcije. Zato je bitno određivanje tog krajnjeg graničnog opterećenja. Stabilnost ploče, u početku se vezivala isključivo za elastičnu oblast. Međutim, uticaj neelastičnog ponašanja ploče ima veliki značaj i utiče na pojavu nestabilnosti, što će u ovom radu biti razmatrano.

#### 4.2.1 Savijanje ploče usled poprečnog opterećenja složenog sa silama u srednjoj ravni ploče

**Diferencijalna jednačina elastične površine.** Ako na ploču, osim poprečnog opterećenja  $q$ , deluju i sile u srednjoj ravni ploče, njihov uticaj može biti znatan na savijanje ploče, tako da se one moraju uzeti u obzir pri izvođenju diferencijalne jednačine elastične površine ploče. Posmatrajmo ravnotežu malog elementa isečenog iz ploče sa dva para ravni, jednog paralelnih  $xz$ -ravni i drugog paralelnih  $yz$ -koordinatnoj ravni (Sl.1) [102].



Sl.4.1 Ravnoteža elementa ploče [102]

Pored poprečnog opterećenja, u srednjoj ravni ploče deluju normalne sile  $N_x$  i  $N_y$ , i transverzalne sile  $N_{xy}$  sa dimenzijama- sila po jedinici dužine. Saberimo njihove projekcije na  $z$ -osu, uz zanemarivanje malih veličina višeg reda (detaljnije videti [102]). Dobijamo izraz

$$\left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (4.1)$$



Na drugoj strani, iz uslova ravnoteže projekcije svih sila na  $z$ -osu elementa ploče pod dejstvom opterećenja intenziteta  $q$ , tj tereta  $qdx dy$  koji deluje po gonjoj površini ploče upravno na srednju ravan ploče  $xy$ , dobija se poznata jednačina ravnoteže u obliku

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q, \quad (4.2)$$

gde su  $M_x$  i  $M_y$  napadni momenti a  $M_{xy}$  torzioni momenti. Ako teretu  $qdx dy$  dodamo izraz (4.1) deleći ga sa  $dx dy$ , dobijamo

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (4.3)$$

Ako uvrstimo poznate izraze za momente

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

u jednačinu (4.3), dobijamo

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (4.4)$$

Za opštiji slučaj, kada u srednjoj ravni ploče postoje zapreminske sile ili tangencijalne sile raspoređene po površini ploče, gde su  $X$  i  $Y$  komponente tih zapreminskih i tangencijalnih sila za jedinicu površine srednje ravni ploče, onda se njihov uticaj dodaje jednačini (4.4) i dobija se sledeća (kompletna) diferencijalna jednačina njene elastične površine

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - X \frac{\partial w}{\partial x} - Y \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (4.5)$$

Iz jednačina (4.4) i (4.5), kompletiranim sa odgovarajućim konturnim uslovima, se određuje ugib ploče koja je istovremeno pod dejstvom poprečnog opterećenja i napregnuta silama u svojoj srednjoj ravni. Jednačinu (4.5) je izveo Saint Venant 1883. godine u okviru svog prevoda knjige Clebsh-a „Théorie de l'élasticité des corps solides“.

Za slučaj da postoji samo poprečno opterećenje  $q$ , jednačina (4.5) se svodi na poznatu diferencijalnu jednačinu elastične površine ploče

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (4.6)$$

ili u simboličkom obliku  $\Delta\Delta w = \frac{q}{D}$ , gde je  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , Laplace-ov diferencijalni operator.

Jednačinu (4.6) je dobio Lagrange 1811 godine na osnovu jednačine koju je Francuskoj akademiji nauka prethodno podnela Sophie Germain.

**Savijanje ploče sa malom početnom krivinom u slučaju malih ugiba ploča.** Pretpostavljamo da ploča ima izvesnu, malu početnu krivinu (tj. početnu imperfekciju). Tada će u nekoj tački ploče postojati početni ugib  $w_0$ , koji ćemo smatrati da je mali u poređenju sa debljinom ploče. Zbog toga možemo smatrati da je taj ugib  $w_0$  izazvan uticajem fiktivnog poprečnog opterećenja koje je dato izrazom (4.1), s tim da je u njemu ugib  $w$  zamenjen početnim ugibom  $w_0$ . Ukoliko na ploču deluje neko poprečno opterećenje intenziteta  $q$ , ono će izazvati dodatni ugib  $w_1$  tako da će ukupni ugib biti  $w_u = w_0 + w_1$ . Zbog toga što pretpostavljamo da su ugibi mali, može se primeniti princip superpozicije jer je veličina ugiba proporcionalna teretu, dok kod velikih ugiba ploča to nije slučaj i ne važi princip superpozicije. Ako u srednjoj ravni ploče postoje sile tada će njihov uticaj zavisiti od ugiba  $w_0$  i od ugiba  $w_1$ . Međutim, što se tiče napadnih momenata  $M_x$  i  $M_y$  na njih utiče promena krivine ploče, a ne utiče ugib  $w_0$ . Zbog toga će u jednačini (4.4) na levoj strani, umesto  $w$  biti ugib  $w_1$  a na desnoj, umesto ugiba  $w$  biti ugib  $w_0 + w_1$ , tako da imamo

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( q + N_x \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} \right).$$

Ovu jednačinu je izveo S. Timošenko [102], gde je intenzitet fiktivnog poprečnog opterećenja koje „izaziva“ početni ugib  $w_0$  jednak  $N_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$ , videti (4.1) i Sl.4.1.

**Jednačine za slučaj velikih ugiba ploča.** U okviru ovog slučaja biće korišćena i diferencijalna jednačina (4.5) dobijena iz uslova ravnoteže sila koje dejstvuju na element ploče, a odnosi se na pravac ose  $z$  upravne na srednju ravan ploče. Pretpostavljajući da nema zapreminskih sila i da opterećenje deluje upravno na ploču, dobijaju se dve jednačine ravnoteže elementa ploče u  $xy$ -ravni oblika

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0. \quad (4.7)$$

Pored ove dve jednačine, iz deformacije elementa ploče pri savijanju doćićemo do još jedne jednačine koja nam je potrebna za određivanje sila u preseku ploče,  $N_x$ ,  $N_y$  i  $N_{xy}$ . Usled poprečnog opterećenja dolazi do savijanja ploče što dovodi do naknadnih deformacija u srednjoj ravni ploče koje u ovom slučaju ne zanemarujemo. Pored poznatih izraza za komponentalne deformacije usled komponentalnih pomeranja  $u$  i  $v$  u pravcima  $x$  i  $y$  respektivno, u ravni ploče, uzimamo i uticaj komponentalnog pomeranja  $w$  u pravcu  $z$  upravnom na srednju ravan ploče. Na taj način su odgovarajuće komponentalne deformacije dva linearna elementa koji polaze iz iste tačke, jedan u pravcu  $x$ , drugi u pravcu  $y$  u horizontalnoj ravni, posle deformacije [102]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (4.8)$$

Iz prethodnih jednačina (4.8) se dobija jednačina

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.9)$$

Ako veličine  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$  na osnovu Hooke-ovog zakona zamenimo izrazima

$$\varepsilon_x = \frac{1}{hE} (N_x - \nu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{hE} (N_y - \nu N_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{hG} N_{xy}, \quad (4.10)$$

dobijamo još jednu, treću jednačinu po nepoznatim  $N_x$ ,  $N_y$  i  $N_{xy}$ . Da bi se pojednostavilo rešavanje jednačina ravnoteže (4.7) i treće jednačine dobijene iz deformacije srednje ravni ploče usled savijanja, koju dobijamo zamenom jednačina (4.10) u (4.9) uvodimo Airy-ovu funkciju napona  $F(x,y)$  takvu da je

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (4.11)$$

tako da su jednačine ravnoteže (4.7) identički zadovoljene. Unošenjem sila u presecima,  $N_x$ ,  $N_y$  i  $N_{xy}$  iz (4.11) u (4.10), dobijamo

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \quad \gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (4.12)$$

Sa izrazima dobijenim u (4.12), jednačina (4.9) postaje

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.13)$$

Ako izraze iz (4.13) za  $N_x$ ,  $N_y$  i  $N_{xy}$  uvrstimo u jednačinu (4.5) (jednačina Saint Venant-a), imamo još jednu jednačinu po nepoznatom ugibu ploče  $w$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{h}{D} \left( \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \quad (4.14)$$

Pridruživanjem konturnih uslova jednačinama (4.13) i (4.14) možemo odrediti nepoznate funkcije  $F$  i  $w$ . Jednačine (4.13) i (4.14) je izveo Th. Von Kármán 1910. godine. Znajući funkciju napona  $F$ , pomoću jednačine (4.13) možemo odrediti napone u srednjoj ravni ploče. Iz funkcije ugiba  $w$  (4.14), možemo odrediti napone od savijanja i smicanja koristeći iste obrasce kao u slučaju ploče sa malim ugibima tako što najpe odredimo momenta prema izrazima

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -M_{yx} - D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Za proučavanje velikih ugiba ploče najznačajnije je rešavanje Kármán-ove dve nelinearne diferencijalne jednačine (4.13) i (4.14). Njihovo opšte rešenje nije poznato, a izvesna približna rešenja mogu se videti u [102].

**Slučaj veoma tankih ploča.** Za slučaj ploča kod kojih je ugib nekoliko puta veći od same debljine ploče možemo zanemariti otpornost ploče na savijanje i uzeti da je njena krutost na savijanje  $D=0$ . Na taj način se problem tanke ploče svodi na problem ugiba gipke membrane. Tako je A. Föppl dobio od jednačina (4.13) i (4.14) sledeće jednačine [102]

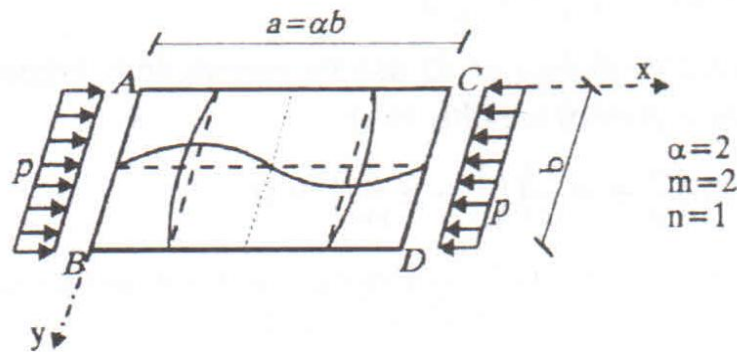
$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left( \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{q}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

**Kritično izvijanje ploče.** U slučaju dejstva sila koje se nalaze u srednjoj ravni ploče, od značaja su one kritične vrednosti pri kojima ravan, ravnotežni oblik ploče nije više stabilan, tako da dolazi do izvijanja ploče [101]. Pretpostavljajući da ploča ima izvesnu početnu krivinu ili izvesno poprečno opterećenje, tada za vrednosti sila u srednjoj ravni za koje ugibi teže beskonačnosti dobijaju se kritične vrednosti nestabilnosti ploče. Ako se pretpostavi da se pod dejstvom sila u srednjoj ravni ploče ploča neznatno izvija i da se tada sračunaju sile koje je održavaju u takvom izvijenom položaju, tada će diferencijalna jednačina elastične površine (4.4), uz zanemarivanje zapreminskih sila i pretpostavke da je poprečno opterećenje  $q$  jednako nuli, dobiti oblik [101]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (4.15)$$

#### 4.2.2 Slobodno oslonjena ploča pod jednakopodeljenim opterećenjem

U slučaju kada je moguće tačno rešenje jednačine (4.15), uz date granične uslove, granica stabilnosti se može tačno odrediti. Rešenje ove jednačine postoji samo za određene vrednosti opterećenja. Najmanja vrednost od kritičnih vrednosti opterećenja određuje granicu stabilnosti. Posmatrajmo ploču na Sl.4.2, čije su stranice dužine  $a$  i širine  $b$ , opterećenu u svojoj ravni jednakopodeljenim opterećenjem pritiska  $p$  po jedinici dužine stranice  $b$  (za detalje videti [36], [110] i [109]). Opterećenje duž opterećenih stranica je  $N_x = -p$ , a ostalo opterećenje je jednako nuli, tj.  $N_y = N_{xy} = 0$ .



Sl 4.2 Slobodno oslonjena pravougaona ploča pod jednakopodeljenim opterećenjem duž dve ivice [110]

U tom slučaju, diferencijalna jednačina (4.15) glasi

$$D\Delta\Delta w = -p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.16)$$

Granični uslovi posmatrane ploče koja je slobodno oslonjena po svim stranama su

$$w=0, \quad \Delta w=0. \quad (4.17)$$

Rešenje jednačine (4.16) tražićemo u obliku dvostrukog trigonometrijskog reda

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \text{gde je } c_{mn} = \text{const.} \quad (4.18)$$

Izborom oblika funkcije  $w$  zadovoljeni su granični uslovi (4.17). Iz jednačine (4.18) sledi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \Delta \Delta w &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Ako unesemo izraze (4.19) u diferencijalnu jednačinu ploče (4.16) dobijamo

$$c_{mn} \left\{ \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{p}{D} \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right\} = 0 \quad (4.20)$$

Netrivijalno rešenje jednačine stabilnosti dobijamo za  $c_{mn} \neq 0$

$$\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{p_{kr}}{D} \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{m}{a} \right)^2 = 0, \text{ odakle je}$$

$$p_{kr} = \frac{D\pi^2}{b^2} \left( m \frac{b}{a} + \frac{n^2}{m} \frac{a}{b} \right)^2. \quad (4.21)$$

Ako uvedemo oznake:

$$\alpha = \frac{a}{b}; \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 D}{b^2 t}; \quad \sigma_{kr} = \frac{p_{kr}}{t}$$

kritični napon  $\sigma_{kr}$  izražen preko Ojlerovog napona  $\sigma_E$  biće

$$\sigma_{kr} = \sigma_E \left( \frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{n^2}{m} \right)^2,$$

odnosno, ako izraz kojim množimo  $\sigma_E$  označimo sa  $k_{mn,kr}$  imamo:

$$\sigma_{kr} = k_{mn,kr} \sigma_E; \quad k_{mn,kr} = \left( \frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{n^2}{m} \right)^2. \quad (4.22)$$

Minimalno kritično naprezanje dobija se iz uslova minimalnih vrednosti  $k_{mn,kr}$  za  $n=1$  (što znači jedan polutalas u pravcu  $y$ , videti Sl.4.3)

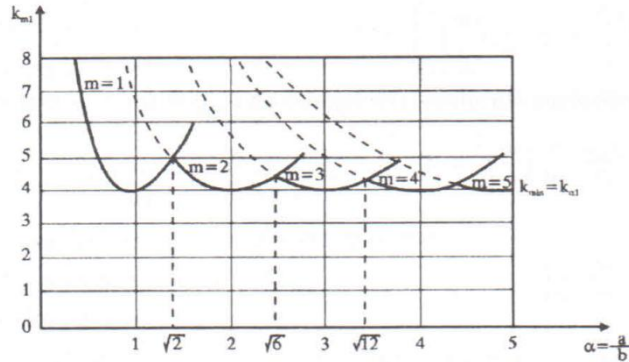
$$\frac{\partial k_{m1,kr}}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial k_{m1,kr}}{\partial m} = 2 \left( \frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{1}{m} \right) \left( \frac{1}{\alpha} - \alpha \frac{1}{m^2} \right) = 0. \quad (4.23)$$

Iz (4.23) imamo,  $\left( \frac{1}{\alpha} - \alpha \frac{1}{m^2} \right) = 0$ , pri čemu je realno rešenje ove jednačine

$$\alpha = m = 2; \quad k_{m1,kr} = \left( \frac{m}{\alpha} + \alpha \frac{1}{m} \right)^2 = 4,$$

što znači da je u ovom slučaju, kada je  $n=1$

$$\sigma_{kr} = k_{mn,kr} \sigma_E = k_{\sigma} \sigma_E = 4 \sigma_E \quad (4.24)$$



*Sl.4.3 Koeficijent izbočavanja za slučaj slobodno oslonjene tanke ploče [110]*

Na Sl.4.3 prikazane su zavisnosti  $k_{m1}$  i  $\alpha$  za pojedine vrednosti  $m$ , za detalje videti [110].

## 4.3 Metode proračuna

### 4.3.1 Teorija elastične stabilnosti

Teorija elastične stabilnosti se odnosi na slučaj izvijanja u elastičnoj oblasti. Ona pretpostavlja idealan materijal u pogledu njegovog ponašanja po linearnoj teoriji, a, takođe, i geometrijsku perfekciju, što znači da nema početnih zakrivljenosti, niti rezidualnih napona. Takođe, pretpostavka je da opterećenje deluje u srednjoj ravni ploče i da su deformacije ploče upravno na srednju ravan male. Iako te pretpostavke odstupaju od realnog modela, kritično opterećenje pri elastičnom izvijanju može se matematički odrediti putem analitičkih izraza. Ploča se može posmatrati kao da je sastavljena od traka jedinične širine koje su opterećene u svojoj ravni na krajnjim ivicama.

U literaturi su najčešće za ovo rešenje korišćeni granični uslovi slobodno oslonjene ploče. Međutim, napredni softverski paketi koji se koriste u proračunu kritičnog opterećenja izvijanja ploča i nosača, omogućavaju veoma veliki izbor, kako geometrije nosača, tako i ograničenja ivičnih graničnih uslova i slučajevne različitih krutosti.

Određivanje granične otpornosti izvijanja može se definisati i preko parametra vitkosti na sledeći način

$$\lambda = \sqrt{\frac{F_y}{F_{cr}}},$$

gde je:

$F_y$ -otpornost na granici tečenja (dimenzija, npr. N/mm<sup>2</sup>),

$F_{cr}$ -otpornost graničnog izvijanja (dimenzija, npr. N/mm<sup>2</sup>),

$\lambda$  -parametar vitkosti.

### 4.3.2 Preporuke za proračun prema EN 1993-1-5:2006

U okviru ovog dela izložićemo osnovne karakteristike dve glavne metode koje EN 1993-1-5:2006 [28] pruža kao preporuku za proračun: metod efektivne širine i metod redukovanog napona. U pomenutim preporukama je, takođe, posebno omogućeno i metodološko proveravanje zasnovano na metodi konačnih elemenata (MKE). Na ovaj način moguće je obuhvatiti veliki broj različitih parametara u cilju što preciznijeg definisanja modela realne konstrukcije. Praktična tumačenja i izvesni primeri za proračun graničnih stanja iz ove oblasti mogu se videti u [73].

#### 4.3.2.1 Metod efektivne širine

Metod efektivne širine je veoma efikasan metod za nosače standardnog oblika. Ovo je vodeći metod proračuna nosivosti kod izbočavanja čeličnih konstrukcija opterećenim normalnim naponima pritiska. U delu 2 EN-1993-1-5 [28], detaljno je obrađen proračun nosivosti na izbočavanje ovim metodom. Metod je zasnovan na smanjenju širine  $b$  na efektivnu širinu površinskog nosača  $b_{eff}$  (u ovom slučaju rebra nosača) pri čemu je kritični napon nosača sa efektivnom širinom jednak naponu na granici razvlačenja  $f_y$ .

Teorija koja je zasnovana na elastičnoj analizi, sa uvedenim pretpostavkama iz kojih proističu konstitutivne jednačine za slučaj idealno elastičnog materijala, nije pogodna iz razloga realnog uticaja imperfekcija i zbog nemogućnosti da se odredi granična otpornost konstrukcije. Zato su razvijeni nelinearni modeli u okviru kojih su istraživači pokazali da granično opterećenje ploče usled dejstva opterećenja pritiska prevazilazi vrednost kritičnog opterećenja izbočavanja



ploče, posebno kod vitkih, odnosno, tankih ploča. Poznato je da se ovo ne odnosi na debele ploče, kod kojih je otpornost na plastično tečenje manja od kritičnog opterećenja izbočavanja. Kompleksnost ponašanja ploče kada dolazi do izbočavanja, odnosno, ponašanje pri velikim deformacijama u post-kritičnoj oblasti sastoji se i u tome da dolazi do preraspodele napona i opterećenja, što u elastičnoj analizi nije obuhvaćeno. Th. von Karman je još 1910 godine uočio tu pojavu i izložio jednačine koje opisuju takvo stanje. Pristup koji pruža metod efektivne širine, baziran na jednačinama Th. von Karman-a, je inženjerski prihvatljiv za određivanje granične nosivosti ploča pod pritiskom [107].

**Rešenje Theodor von Karman-a.** Th. von Karman je prvi istraživač koji je predložio faktor kojim se smanjuje širina ploče i umesto date širine  $b$  uzima se efektivna širina  $b_{eff}$ . Rešenje Th. von Karmana pokazalo se tačnim samo za veće vrednosti odnosa širine ploče  $b$  i njene debljine  $t$ , a takođe, ovo rešenje nije obuhvatilo početne imperfekcije ploče. Zbog lokalnog izbočavanja u srednjem delu ploče smanjuje se njena sposobnost nošenja opterećenja. Raspored napona u realnoj konstrukciji ploče je kompleksan, ali konceptom Th. von Karmana vrši se aproksimacija kojom dve trake ploče izvan sredine, dalje preuzimaju prenos opterećenja samo preko efektivne širine ploče  $b_{eff}$ , videti sl.4.4. Pretpostavka koja se uvodi je  $\sigma_{kr,eff}(b_{eff}) = f_y$ , tj. da će pravougaona ploča sa širinom  $b_{eff}$  imati kritični napon jednak naponu tečenja  $f_y$  (dimenzija

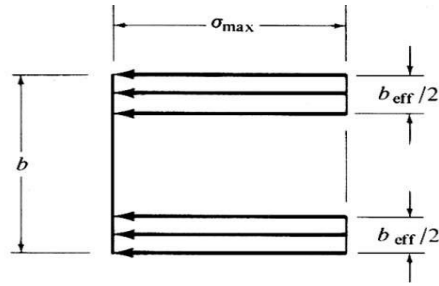
napona npr. N/mm<sup>2</sup>). Na taj način, na osnovu formule  $\sigma_{kr} = k_{mn,kr} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$  za  $b=b_{eff}$ , napon tečenja biće

$$f_y = k_{mn,kr} \frac{E \cdot \pi^2}{12 \cdot (1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b_{eff}}\right)^2,$$

$$\sigma_{kr,eff} = k_{mn,kr} \frac{E \cdot \pi^2}{12 \cdot (1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \left(\frac{b}{b_{eff}}\right)^2 = \sigma_{kr} \left(\frac{b}{b_{eff}}\right)^2 = f_y \quad (4.25)$$

iz jednačine (4.25), dobijamo Th. von Karmanovu formulu

$$b_{eff} = b \sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{f_y}}. \quad (4.26)$$



Sl.4.4 Th. von Karman-ova pretpostavka efektivne širine,[20].

Uvodimo relativnu vitkost ploče kao uopštavanje parametra vitkosti kod izbočavanja

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} \quad (4.27)$$

Iz (4.26) i (4.27) dobijamo odnos

$$\frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} = \rho, \quad (\lambda_p \geq 1),$$

pri čemu je  $\rho$  - koeficijent redukcije izvijanja ploče.

**Winter-ova funkcija.** Svakako je među najpoznatijim i najrasprostranjenijim predlozima za proračun ploča prema metodu efektivne širine predlog Winter-a iz 1947. godine [108]. On je baziran na velikom broju eksperimenata na hladno oblikovanim profilima. Winter je obuhvatio i neelastično ponašanje čelika kao i geometrijske i strukturne imperfekcije. Funkcija Winter-a je data u obliku

$$\frac{b_{eff}}{b} = \frac{1}{\bar{\lambda}_p} \left( 1 - \frac{0.22}{\bar{\lambda}_p} \right) \quad (\bar{\lambda}_p \geq 0.673).$$

Ovaj predlog se koristi i danas u okviru Evropskih normi EN 1993-1-5 [28] i pored predloga brojnih istraživača koji su bili bazirani na izmenama Th. von Karmanove jednačine. Relativna vitkost ploče iz jednačine (4.27) u EN 1993-1-5 [28] je data u obliku

$$\bar{\lambda}_p = \sqrt{\frac{f_y}{\sigma_{cr}}} = \frac{b/t}{28.4\varepsilon\sqrt{k_\sigma}}$$

gde je  $k_\sigma$  koeficijent izbočavanja koji odgovara odnosu napona  $\psi = \sigma_{min}/\sigma_{max}$

$\psi$  -faktor koji predstavlja odnos napona, a  $\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y [N/mm^2]}}$ .

### 4.3.2.2 Metod redukovanog napona

Ovaj metod koristi se za određivanje graničnih napona tečenja i analogan je metodi efektivne širine (videti prethodni odeljak). Metod redukovanog napona zasniva se na redukciji napona tečenja  $f_y$ , pri čemu je  $\sigma_{Rd} < f_y$  i ima konstantnu vrednost po širini ploče  $b$ . Proračun je obuhvaćen kako za ploče bez horizontalnih ukrućenja tako i za ploče sa jednim ili više horizontalnih ukrućenja. Proračunska vrednost opterećenja  $F_{Ed}$  se dobija preko traženog faktora uvećanja  $\alpha_u = \rho \alpha_{ult,k}$  pri čemu se dostiže proračunska vrednost nosivosti na izbočavanje

$$\frac{F_{Ed}}{F_{Rd}} = \frac{F_{Ed}}{\rho \frac{\alpha_{ult,k} F_{Ed}}{\gamma_{M1}}} \leq 1, [21]$$

gde su:

$\sigma_{RD}$ -proračunska vrednost napona;

$F_{Ed}$ -proračunska vrednost opterećenja;

$F_{Rd}$ -proračunska nosivost na izbočavanje;

$\alpha_{ult,k}$ -minimalni koeficijent uvećanja opterećenja  $F_{Ed}$  kojim se dostiže karakteristična vrednost nosivosti kritične tačke elementa bez uticaja izbočavanja;

$\rho$ -koeficijent redukcije izvijanja ploče koji zavisi od vitkosti  $\lambda_p$  uz izvijanje van ravni;

$\gamma_{M1}$ -je parcijalni koeficijent sigurnosti u okviru ove metode.

## 4.4 Najnovija dostignuća u istraživanjima granične nosivosti pri „patch loading-u“

### 4.4.1 Opšte o fenomenu „patch loading-a“

Slučaj raspedeljenog opterećenja na maloj dužini, na pojasu tankozidnih nosača ispod kojih se nalazi rebro naziva se *patch loading*. Ovaj naziv je u našem jeziku usvojen za lokalno ili lokalizovano opterećenje. U ovom radu, kao što je napomenuto u prethodnom poglavlju, razmatraće se slučaj *patch loading*-a koji deluje upravno na pojas nosača a u ravni rebra. Slučaj ovog opterećenja se veoma često sreće u praksi. Kod mostovskih nosača, prilikom montaže mosta preko privremenih ili stalnih oslonaca, dolazi do ovakvog slučaja opterećenja. U tom slučaju, reakcije oslonaca predstavljaju slučaj lokalizovanog opterećenja kome je nosač izložen.

Za pojedine položaje opterećenja, reakcije mogu imati veliki uticaj na pojedine preseke koji nakon montaže neće biti opterećeni na taj način. Da bi se sprečile moguće havarije, upravo slučaj montaže postaje merodavan za dimenzionisanje [70].

Povećanje granične nosivosti može se, svakako, postići povećanjem debljine rebra. Međutim, radi uštede materijala, čelične konstrukcije se prave što je moguće vitkije. Otpornost nosača bi se mogla povećati i postavljanjem većeg broja vertikalnih ukrućenja. Kada se primenjuju nosači manjeg raspona i sa manjom visinom rebra, preporučuje se povećanje debljine rebra, dok je u ostalim slučajevima poželjna upotreba vertikalnih ukrućenja. Proučavanjem granične nosivosti, ustanovljeno je da se ona može povećati i pravilnim postavljanjem podužnih ukrućenja na rebro nosača i to na mestima gde je moguće izbočavanje.

U najnovije vreme, mnogi istraživači su se bavili otpornošću na *patch loading*, kako kod nosača bez podužnih ukrućenja, tako i kod nosača sa podužnim ukrućenjima i njihovim međusobnim poređenjima. Problemima vezanim za nosače bez podužnih ukrućenja bavili su se u svojim istraživanjima: Bergfelt (1970-1979) [6], [7], Dubas i Gehri (1986) [27], Roberts i Rocky (1979) [93], Roberts (1981) [92], Marković (1989-2013) [69], [70], [71], [68], [72], Janus i Skaloud (1988) [57], Ungerman (1990) [106], Müller (2003) [87] i drugi.

Predlog Lagerqvist-a (1995) [59] i (1996) [64] je ušao u predlog proračuna prema EN 1993-1-5, a Gozzi (2007) [38] i Clarin (2007) [20] su usavršili predloge u okviru ove problematike. Nosače sa podužnim ukrućenjima istraživali su Graciano (2002-2014) [39], [40], [41], [42], [43], [44], čiji je predlog sadržan u EN 1993-1-5. Zatim, Seitz (2005) [96], Cevik (2007) [13], (2010) [14] koji je razvio model preko genetskog programiranja (GP), Davaine (2005) [24] čija su istraživanja dala značajna poboljšanja u predviđanju modela loma, Chacon (2009-2014) [15], [16], [17], [18], Braun (2010) [10] i dr.

U iscrpnim istraživanjima, sprovedenim u proteklim decenijama, izvršen je veliki broj eksperimenata na nosačima opterećenim *patch loading*-om, uz variranje različitog broja parametara. Prikazaćemo pregled nekih od najznačajnijih istraživanja u poslednjim decenijama.

#### **4.4.2 Nosači bez podužnih ukrućenja**

Granična nosivost, u ovom slučaju, direktno zavisi od kritičnog opterećenja izbočavanja, a što zapravo predstavlja maksimalno opterećenje nosača. Poznato je da elastično kritično

opterećenje nije dovoljno za određivanje granične nosivosti, već da se koristi za određivanje vitkosti rebra nosača u cilju izračunavanja redukcionog faktora.

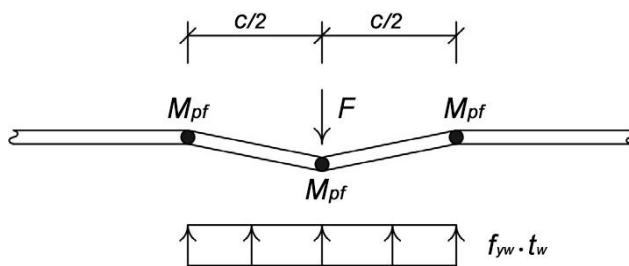
**Bergfelt** je u svojim istraživanjima uočio da uticaj na graničnu nosivost, osim debljine rebra, imaju i drugi faktori (kao na primer debljina pojasa  $t_f$ ). U svom radu [6], Bergfelt koristi analogiju sa gredom na elastičnoj podlozi radi utvrđivanja oblasti uticaja napona tečenja u rebru usled koga dolazi do loma nosača. Ovaj model poznat je pod nazivom „trozglobni model“ na pojasi i predstavlja rezultat Bergfelt-ovih istraživanja. On predlaže jednačinu za određivanje granične nosivosti koja važi za  $t_f / t_w \geq 2$  u obliku:

$$F_u = t_w^2 \sqrt{E f_{yw}}, \quad E \text{ i } f_{yw} \text{ su u } [N/mm^2], t_w \text{ u } [mm] \text{ a } F_u \text{ u } [N]. \quad (4.28)$$

Usavršen trozglobni model, (videti sl.4.5.), Bergfelt je izložio u svom radu 1979. god. [7]. On razmatra uticaj *patch loading*-a i polazeći od Th. von Karman-ove jednačine, razvija jednačinu za određivanje granične nosivosti u obliku:

$$F_u = 0.8 t_w^2 \sqrt{E f_{yw}} \sqrt{t_f / t_w} f(c, h_w, \dots); \quad t_f / t_w \geq 2, \quad (4.29)$$

gde je  $f(c, h_w, \dots) = f(c) \cdot f(h_w) \cdot f(f_{yw}) \cdot f(f_z) \cdot f(\delta) \cdot f(s_l) \cdot f(s_v)$  korekcionni koeficijent koji se odnosi na različite parametre kao što su: dužina opterećenja  $c$ , visina rebra  $h_w$ , napon tečenja rebra  $f_{yw}$ , naponi usled savijanja  $f_z$ , korekcija greške pri deformaciji  $\delta$ , uticaj podužnih ukrućenja  $s_l$ , uticaj vertikalnih ukrućenja  $s_v$ , a u obzir se mogu uzeti i drugi parametri.



Sl.4.5 Model trozglobnog pojasa prema Bergfelt-u [7]

**Dubas i Gehri** [27] su istraživali limene I nosače sa većom vitkošću i polazeći od Th. von Karmanove formule, izložili formulu za izračunavanje granične nosivosti u obliku

$$F_u = 0.5 t_w^2 \sqrt{E f_{yw}} \sqrt{t_f / t_w}, \quad (4.30)$$

$t_w$  – debljina rebra [mm],

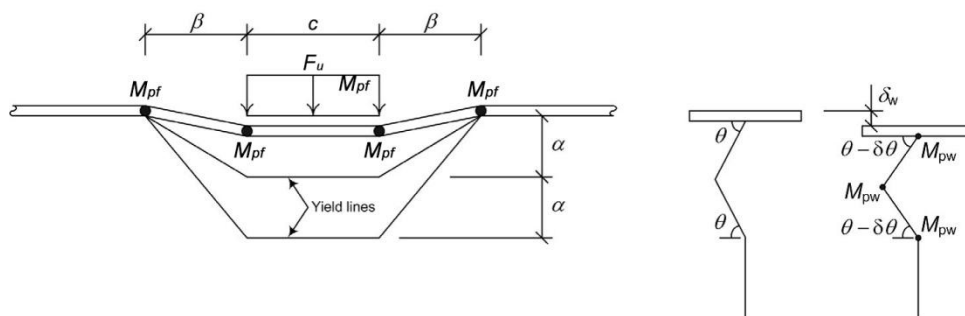
$t_f$  – debljina pojasa [mm],

$f_{yw}$  – napon tečenja rebra [ $N/mm^2$ ],

$E$  – modul elastičnosti [ $N/mm^2$ ].

### Četvorozglobni modeli

**Roberts i Rocky** su u okviru istraživanja u Engleskoj (Cardif), u svom radu iz 1979. god. [93], prikazali metod zasnovan na teoremi gornje granične vrednosti u teoriji plastičnosti. Svoju metodu su zasnovali na četvorozglobnom mehanizmu loma kod koga su formirana četiri plastična zgloba u pojasu praćenih linijama tečenja u rebro prema sl.4.6.



Sl.4.6 Mehanizam loma i položaj četiri plastična zgloba u opterećenom pojasu i linije tečenja u rebro prema Roberts-u i Rocky-ju [93]

Na sl.4.6 je prikazan mehanizam pri kome je otpornost nosača u opadanju sa povećanjem deformacije. Upoređivanjem sa podacima ispitivanja autori su dali predviđenu vrednost granične nosivosti pri *patch loading*-u u obliku

$$F_u = \frac{4M_{pf}}{\beta} + \frac{4\beta M_{pw}}{\alpha \cos \theta} + \frac{2cM_{pw}}{\alpha \cos \theta} - \frac{2\eta M_{pw}}{\alpha \cos \theta}, \quad (4.31)$$

pri čemu su:

$$M_{pf} = \frac{b_f t_f^2}{4} f_{yf}$$

$$M_{pw} = \frac{t_w^2}{4} f_{yw}$$

$$\beta^2 = \frac{M_{pf} \alpha \cos \theta}{M_{pw}}$$

$M_{pf}$  - moment plastičnosti pojasa [ $Nmm$ ],

$M_{pw}$  - moment plastičnosti rebra za jedinicu dužine [ $Nmm/mm$ ],

$f_{yf}, f_{yw}$  - napon tečenja pojasa, napon tečenja rebra, respektivno [ $N/mm^2$ ],

$\alpha$  – položaj linije tečenja na rebu u odnosu na opterećeni pojas [mm],

$\eta$  – dužina rebra, ispod opterećenja na središnjem delu dužine  $c$  između dva srednja plastična zgloba, za koju se pretpostavlja da je u stanju tečenja usled membranskih napona pritiska. Ovaj deo rebra ne nudi nikakvu otpornost na savijanje i oduzima se od direktno nanete dužine opterećenja  $c$  ( $\eta < c$ ) [mm].

**Roberts** je 1981. godine, usavršavajući gore navedeno rešenje, u svom radu [92], predstavio poboljšano rešenje jednačine (4.31). Ova jednačina Roberts-a nalazi se i u propisima ENV 1993-1-1 [29], kao formula za određivanje granične nosivosti. U istraživanjima, N. Markovića (videti [50]), je iz upoređenja jednačina za proračun granične nosivosti datih od strane više autora, istaknuto da je formula Roberts-a (4.32) dala najbolje rešenje. Jednačina je oblika

$$F_u = 0.5t_w^2 \sqrt{\frac{E f_{yw} t_f}{t_w}} \left[ 1 + \frac{3c}{h_w} \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^{1.5} \right]. \quad (4.32)$$

Dimenzije veličina  $E$  i  $f_{yw}$  se mogu uzeti kao [ $N/mm^2$ ],  $M_{pf}$  [ $Nmm$ ],  $f_{yf}, f_{yw}$  [ $N/mm^2$ ],  $F_u$  [ $N$ ] a  $t_w, t_f, h_w$  i  $c$  u [mm]. Preporuka je da odnos  $c/h_w \leq 0.2$  i da je odnos  $t_f/t_w$  najviše jednak 3.

Roberts je izjednačavajući spoljašnji i unutrašnji rad iz uslova minimuma izraza za graničnu nosivost  $F_u$ , dobio jednačinu,

$$F_u = f_{yw} t_w c + 4 \sqrt{M_{pf} f_{yw} t_w}. \quad (4.33)$$

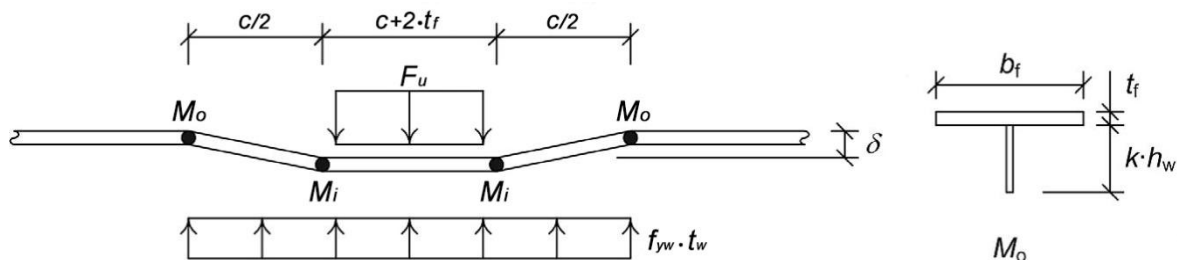
Koristeći izraz za moment plastičnosti

$$M_{pf} = \frac{f_{yf} b_f t_f^2}{4}, \quad (4.34)$$

iz prethodnih jednačina (4.33) i (4.34) je dobijen izraz za predviđanje granične nosivosti

$$F_u = f_{yw} t_w \left( c + 2t_f \sqrt{\frac{f_{yf} b_f}{f_{yw} t_w}} \right). \quad (4.35)$$

**Lagerqvist** je u svojim radovima [59][64], izložio predlog modela proračuna koji se odnosi na nosače opterećene *patch loading*-om, a koji su se bazirali na eksperimentalnim podacima i numeričkoj simulaciji. Predlog Lagerqvista bazira se na Th. von Karman-ovom pristupu [107].



Sl. 4.7 Mehanički četvorozglobni model prema Lagerqvist-u

Na Sl.4.7 prikazan je mehanički model od strane Lagerqvist-a koji je sličan modelu Roberts-a (Sl.4.6), ali sa vitkijim rebrima. Na osnovu eksperimentalnih istraživanja, Lagerqvist je zaključio da deformisani deo opterećenog pojasa raste sa povećanjem vitkosti rebra. U predlogu Roberts-a on ostaje isti pri varijacijama vitkosti rebra, tako da ovo ponašanje nije bilo obuhvaćeno.

Koristeći oblik jednačine za dobijanje granične nosivosti  $F_u$  [N], koja zavisi od parametra vitkosti ploče (videti [106])

$$F_u = \chi_F (\lambda_F) F_y, \quad (4.36)$$

pri čemu je  $\chi_F$  - redukcionni faktor pri *patch loading*-u koji zavisi od parametra vitkosti  $\lambda_F$ , i izjednačavanjem Roberts-ove jednačine za graničnu nosivost (4.35) sa opterećenjem  $F_y$  [N], opterećena dužina ostaje ista za različite vitkosti rebra  $\lambda_F$ .

Prema predlogu Lagerqvist-a dolazi do povećanja otpornosti na savijanje najudaljenijih plastičnih zglobova, tako što se uzima i uticaj dela rebra. Na taj način se formira fiktivni T-presek, videti Sl.4.7. Korišćenjem fiktivnog T-preseka kod spoljašnjih zglobova, Lagerqvist je uspostavio relaciju zavisnosti između vitkosti rebra i dužine delovanja opterećenja. Zaključak je da sa porastom visine rebra  $h_w$  raste i dužina delovanja krajnjih momenata  $M_o$ , a time i dužina delovanja opterećenja. Izjednačujući spoljašnji i unutrašnji rad dobija se jednačina

$$F_u = f_{yw} t_w l_y. \quad (4.37)$$

Kako je

$$l_y = c + 2t_f \left(1 + \sqrt{m_1 + m_2}\right), \quad (4.38)$$

$$m_1 = \frac{f_{yf} b_f}{f_{yw} t_w}, \quad m_2 = k^2 \left(\frac{h_w}{t_f}\right)^2, \quad (4.39)$$



upoređivanjem rezultata ispitivanja, Lagerqvist je predložio da bude  $k^2=0.02$ , pa konačan izraz za granično opterećenje ima oblik

$$F_u = f_{yw}t_w \left( c + 2t_f + 2t_f \sqrt{\frac{f_{yf}b_f}{f_{yw}t_w} + 0.02 \left( \frac{h_w}{t_f} \right)^2} \right). \quad (4.40)$$

Ovo rešenje se našlo u predlozima za proračun u okviru EN-1993-1-5, uz odgovarajuće ograničenje vitkosti rebra (za detalje videti [28]).

#### 4.4.3 Nosači sa podužnim ukrućenjem

U dosadašnjim istraživanjima nosača sa jednim podužnim ukrućenjem, proračun granične nosivosti pri uticaju *patch loading*-a usko je povezan sa graničnom nosivošću neukrućenih nosača. Jedan od pristupa je da se sračunata granična nosivost pri uticaju *patch loading*-a neukrućenog nosača pomnoži faktorom pojačanja kako bi se dobila granična nosivost ukrućenog nosača, poznat kao metoda faktora pojačanja. Drugi pristup je metoda redukovano faktora. U literaturi se sreću i drugi predlozi bazirani na različitim metodama.

##### *Metod faktora pojačanja*

Osnovni oblik faktora pojačanja može se prikazati u obliku

$$F_{ui} = F_u f(s_1), \quad (4.41)$$

pri čemu je:

$F_u$  - predviđeno granično opterećenje,

$F_{ui}$  - predviđeno granično opterećenje nosača sa podužnim ukrućenjem prema faktoru pojačanja,

$s_1$  - standardna devijacija,

$f(s_1)$  - funkcija faktora pojačanja.

Određivanje faktora pojačanja zasniva se na eksperimentalnim istraživanjima nosača. Ispitivanjem su upoređivani nosači istih geometrijskih karakteristika, graničnih uslova i načina opterećivanja, a jedina razlika je prisustvo podužnog ukrućenja. Razlika u graničnoj nosivosti je izražena preko empirijski određene funkcije.

**Marković i Hajdin** [68] su u svojim istraživanjima, problema *patch loading*-a, koja su obuhvatala sopstvene eksperimentalne rezultate i podatke uzete iz literature, i to 133 podužno ukrućenih i 318 neukrućenih nosača, dali preporuku za faktor pojačanja u obliku

$$f(s_1) = 1.28 - 0.7 \frac{b_1}{h_w}, \text{ za } 0.1 < \frac{b_1}{h_w} < 0.4, \text{ odnosno } 1.0 < f(s_1) < 1.21 \quad (4.42)$$

Koristeći jednačinu (4.42) autori su upoređivali različite jednačine za predviđanje granične nosivosti  $F_u$  za neukrućene nosače i tražili najbolji model za korišćenje proračuna granične nosivosti za podužno ukrućene nosače prema jednačini (4.41). Nakon detaljne analize, prema autorima, najbolju jednačinu za predviđanje granične nosivosti neukrućenih nosača, ako je smanjen uticaj dužine opterećenja, je dao Roberts, jednačina (4.32). U radu [68] detaljno je objašnjen postupak dobijanja jednačine (4.42), kao i kriterijumi koji su korišćeni za određivanje najpovoljnije formule za predviđanje granične nosivosti. Ova jednačina je, svojevremeno, prihvaćena u britanskim standardima za proračun čeličnih konstrukcija [11], a sada se nalazi u komentarima EN-1993-1-5 [21].

**Graciano** je u svojoj doktorskoj tezi (2002) [39] istraživao graničnu nosivost čeličnih nosača sa podužnim ukrućenjem. U radu Graciano-a [44], model mehanizma loma baziran je na modelu Roberts-a (videti sl.4.6). U svom radu [43], Graciano je analizirao odnose  $b_1/h_w$ ,  $t_f/t_w$  i  $f_{yf}/f_{yw}$  kao parametre u funkciji faktora pojačanja. Bazirajući se na formuli Lagerqvista (4.40) za graničnu nosivost neukrućenih nosača, on predlaže funkciju faktora pojačanja u vidu

$$f(s_1) = 0.556 - 0.277 \ln \left( \frac{b_1}{h_w} \left( \frac{f_{yf}/f_{yw}}{t_f/t_w} \right) \right). \quad (4.43)$$

Upoređujući granične vrednosti faktora pojačanja  $f(s_1)$  kod predloga Marković Hajdin (4.42), u predlogu Graciano-a (4.43) se za izraz logaritamske funkcije dobijaju sledeće (podvučene) vrednosti  $f(s_1) = 0.556 - 0.277 \ln 0.2019 = 1$  i  $f(s_1) = 0.556 - 0.277 \ln 0.0943 = 1.21$ .

### ***Metodi faktora smanjenja i kritično opterećenje u elastičnoj oblasti***

Do sada je pokazano da ograničavanje kritičnog opterećenja na elastičnu oblast nije dovoljno za određivanje granične nosivosti. Međutim, da bi se odredila vitkost ploče prema principu Th. von Karmana, videti jednačinu (4.27), neophodno je poznavanje kritičnog opterećenja u elastičnoj oblasti. Kod većine modela, od velikog značaja je način određivanja kritičnog opterećenja u elastičnoj oblasti, kako za određivanje redukcionog faktora  $\chi$  u pogledu

izbočavanja ploča, tako i za određivanje što preciznijeg odnosa između proračunske i stvarne granične nosivosti utvrđene eksperimentom.

Za jednostavnije slučajeve i za potrebe projektovanja, kritično opterećenje se za slučaj *patch loading*-a može odrediti prema sledećoj formuli datoj u [21],

$$F_{cr} = k_F \frac{\pi^2 E t_w^3}{12(1-\nu^2) h_w}, \quad (4.44)$$

pri čemu je  $k_F$  – koeficijent izbočavanja koji zavisi od tipa opterećenja i geometrije (za detalje videti [21], poglavlje 6.2.2).

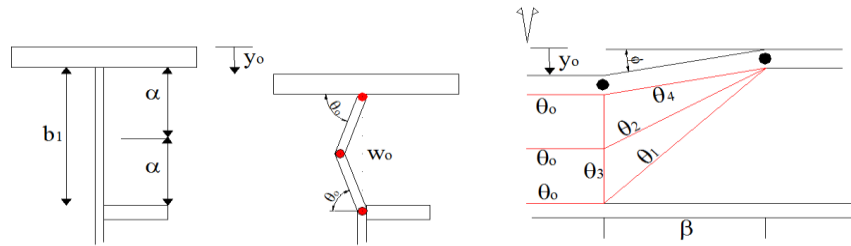
U nastavku će biti navedena novija istraživanja u pogledu procene kritičnog opterećenja u elastičnoj oblasti za podužno ukrućeno rebro podvrgnuto *patch loading*-u.

**Graciano** je u svom radu [41] ispitivao uticaj kritičnog opterećenja u ravni rebra, u elastičnoj oblasti, polazeći od slobodno oslonjene ploče sa i bez podužnog ukrućenja i rezultate je upoređivao sa rezultatima preuzetim iz literature. Ispitivanja su bila zasnovana na numeričkoj simulaciji, koristeći metod konačnih elemenata u programskom paketu ABAQUS. Numerički model je usavršen dodavanjem pojasa i ukrućenja, a parametarska analiza obuhvatila je i njihov uticaj. Takođe, uzet je u obzir i uticaj torziona krutosti podužnog ukrućenja. Predlog Graciano-a je modifikacija koeficijenta izbočavanja  $k_F$  u jednačini (4.44) (za detalje videti [41]).

Određivanja koeficijenta izbočavanja za podužno ukrućeno rebro opterećeno *patch loading*-om, Graciano je nazvao „Model III: pristup post-kritičnoj otpornosti“. Ovaj Model III pokazao je dobro slaganje sa eksperimentalnim ispitivanjima i nalazi se u EN 1993-1-5 [28], kao preporučeni metod za korišćenje predviđanja granične nosivosti. U svom radu [42], Graciano je ispitivao izbočavanje nosača za različite slučajeve položaja podužnog ukrućenja.

**Davaine** je u njenoj doktorskoj disertaciji iz 2005. godine [24] predložila jedan od novijih modela loma. Ispitivanja su vršena numeričkom studijom na nosačima sa jednim podužnim ukrućenjem, opterećenih *patch loading*-om čiji su parametri bili varirani. Predloženi mehanički model loma baziran je na graničnoj analizi prema teoriji drugog reda, pri čemu su u obzir uzimane sve promenljive, koje se odnose na mehaniku problema, i istraživanje je trebalo da pokaže od kakvog je značaja njihov uticaj. Granična nosivost podužno ukrućenih nosača je dobijena sledeći prilično složena matematička izvođenja. Davaine je predložila dva različita modela nosača sa podužno ukrućenim rebrom, opterećenih *patch loading*-om. Na sl.4.8

predstavljen je mehanizam loma. On predstavlja adaptirani mehanizam loma za neukruženi nosač prema Roberts-u (videti Sl.4.6).



Sl.4.8 Model loma predložen od strane Davaine [24]

Mehanizam loma pojasa definišu četiri plastična zgloba (na sl.4.8 prikazana je polovina pojasa), dok mehanizam loma rebra predstavljaju tri linije loma u podužnom smislu i dve vertikalne linije loma.

U svojoj doktorskoj disertaciji Davaine, takođe, predlaže način sračunavanja kritičnog opterećenja. Naime, ideja da se modifikuje kritično opterećenje je u kombinaciji dva sopstvena moda nestabilnosti koji se javljaju kod datog nosača. Relacija njihove interakcije je oblika

$$\frac{1}{F_{cr}} = \frac{1}{F_{cr1}} + \frac{1}{F_{cr2}}. \quad (4.45)$$

Kritično opterećenje je prikazano u jednačini (4.44), pri čemu se u jednačini (4.45) za data kritična opterećenja  $F_{cr}$ ,  $F_{cr1}$  i  $F_{cr2}$ , razlikuju koeficijenti izbočavanja  $k_F$  (za detalje videti [24]). Rezultati istraživanja Davain su ušli u EN 1993-1-5 [28].

**Evropske norme EN 1993-1-5** predlažu u preporukama za proračun [28], graničnu nosivost rebra  $F_u$  pri uticaju *patch loading*-a kada opterećenje deluje preko jednog pojasa u ravni rebra (u propisima je označeno kao tip *a*, poglavlje 6 iz [28]). Granična nosivost je data kao

$$F_u = \frac{f_{yw} t_w L_{eff}}{\gamma_{M1}}, \quad (4.46)$$

$t_w$  – debljina rebra,

$f_{yw}$  – napon tečenja rebra,

$\gamma_{M1}$  - parcijalni koeficijent sigurnosti u okviru metode redukovano napona,

$L_{eff}$  – efektivna dužina za nosivost na poprečne sile, koja se određuje kao

$$L_{eff} = \chi_F l_y$$

$l_y$  – efektivna opterećena dužina,

$\chi_F$  – redukcionni faktor izbočavanja usled poprečne sile (pri *patch loading*-u).

Kritično opterećenje se određuje prema jednačini (4.44), a koeficijent izbočavanja za rebro sa podužnim ukrućenjem  $k_{F1}$  (bezdimenzionalna veličina) (tip  $a$ ) je

$$k_{F1} = 6 + 2\left(\frac{h_w}{a}\right)^2 + \left(5.44\frac{b_1}{a} - 0.21\right)\sqrt{\gamma_{st}}. \quad (4.47)$$

Koeficijent relativne krutosti na savijanje podužnog ukrućenja  $\gamma_{st}$  (bezdimenzionalna veličina) koji je važeći za  $b_1/h_w \leq 0.3$  je

$$\gamma_{st} = 10.9 \frac{I_{st}}{h_w t_w^3} \leq 13 \left(\frac{a}{h_w}\right)^3 + 210 \left(0.3 - \frac{b_1}{a}\right) \text{ za } 0.05 \leq b_1/a \leq 0.3, \quad (4.48)$$

$a$  - širina rebra [mm],

$h_w$  - visina rebra [mm],

$b_1$  - rastojanje od donje ivice opterećenog pojasa do podužnog ukrućenja [mm],

$I_{st}$  - moment inercije ukrućenja [mm<sup>4</sup>].

**Braun** je u okviru doktorske disertacije iz 2010 godine [10] analizirao ponašanje stabilnosti čeličnih ploča pod izabranim kombinacijama opterećenja i predložio poboljšanja pravila za proračun u sledećim slučajevima:

- ploča pri biaksijalnom pritisku primenom metode redukovano napona bazirane na vitkosti ploče;
- ploča rebra I nosača pod transverzalnim *patch loading*-om, sa momentom savijanja i smičućom silom (F-M-V) primenom metode efektivne širine.

Na osnovu eksperimentalnih studija, razvijen je numerički model u kojima su ključni parametri varirani. Ovde će se istaći deo koji se tiče nosača opterećenih na *patch loading*. Eksperimentalnim rezultatima je potvrđeno da interakcija između transverzalnog *patch loading*-a i sile smicanja nije zanemarljiva. Pokazano je da je dužina nanošenja opterećenja najuticajniji faktor za ponašanje nosača pri interakciji, tako da se predlaže i modifikacija kriterijuma interakcije u propisima. Takođe je provereno ponašanje nosača sa podužnim ukrućenjem i ustanovljeno je da njihovo ponašanje može biti opisano preko nosača bez podužnih ukrućenja (što je ranije dokazano). Prema Braun-u, upotreba kriterijuma interakcije je moguća samo ako su sve relevantne unutrašnje sile uzete u obzir, kao i transverzalno opterećenje, sila smicanja i moment savijanja. U tom smislu, kriterijum interakcije F-M-V je predložen u cilju da zameni kriterijum interakcije F-M u delu 7.2 iz EN 1993-1-5.

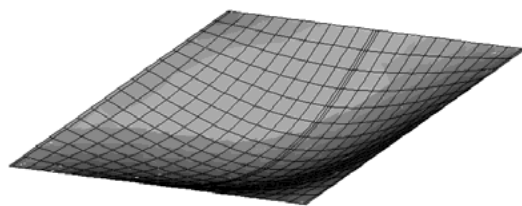
## 4.5 Početne imperfekcije nosača

Pri analiziranju ponašanja pločastih čeličnih nosača, prvobitni modeli bili su sastavljeni od idealno ravnih ploča. Jasno je da realne konstrukcije nisu idealno ravne, već da pre nanošenja opterećenja imaju početne imperfekcije. Ove nepravilnosti postale su nezaobilazan deo analize i pokazano je da u nekim slučajevima njihov uticaj nije zanemarljiv. Geometrijske imperfekcije uglavnom nastaju pri izradi i eksploataciji konstrukcije [110]. U globalu, imperfekcije se dele na geometrijske imperfekcije, tj. imperfekcije koje se tiču geometrije nosača i strukturne imperfekcije, tj. imperfekcije koje se odnose na imperfekcije materijala. Pri određivanju granične nosivosti čeličnih pločastih konstrukcija numeričkom analizom, u slučaju da se ne uzima redukcionni faktor, početne imperfekcije se moraju obuhvatiti. Ipak, ma koliko se imperfekcije precizno definišu, one predstavljaju samo zamenu stvarnih imperfekcija nosača. U skladu sa tim, jasno je da postoje određena odstupanja u rezultatima pri numeričkim simulacijama u odnosu na rezultate dobijene eksperimentalnim istraživanjima. U tom pogledu, nemoguće je precizno definisati nehomogenost materijala, dejstvo opterećenja ili definisanje graničnih uslova, već se moraju naći odgovarajuće zamene istih pri formiranju numeričkog modela.

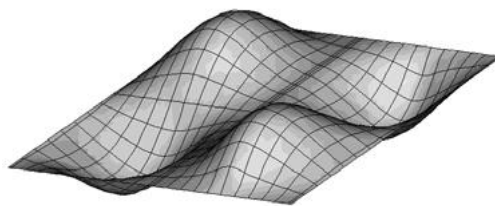
U okviru ovog istraživanja, u narednim poglavljima ispitićće se uticaj početnih imperfekcija kod nosača sa i bez podužnih ukrućenja, opterećenih *patch loading*-om. Istraživanja početnih imperfekcija u poslednje vreme su veoma aktuelna. Takođe, u EN1993-1-5 Anex C, date su preporuke za način zadavanja početnih imperfekcija, o čemu će, takođe, nadalje biti reči.

### 4.5.1 Geometrijske imperfekcije nosača

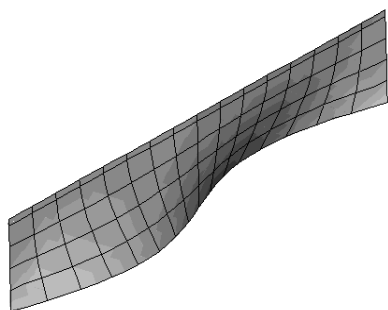
Početne deformacije se predviđaju tako da obuhvate odgovarajuće nesavršenosti modela, pri kojima se dobija najmanja otpornost na izbočavanje. Imperfekcije se mogu podeliti i na lokalne imperfekcije u okviru kojih se analiziraju pojedinačni elementi i globalne imperfekcije koje se odnose na celu konstrukciju. Lokalne imperfekcije mogu biti, na primer geometrijske nepravilnosti delova nosača, uvijanje pojaseva ili ukrućenja a globalne se, pored ostalog, mogu predstaviti i lučnim oblikom deformacije nosača. Na sl.4.10, preuzetoj iz [21], prikazani su oblici globalnih i lokalnih početnih geometrijskih imperfekcija ukrućenog nosača kroz odgovarajuće oblike deformacija.



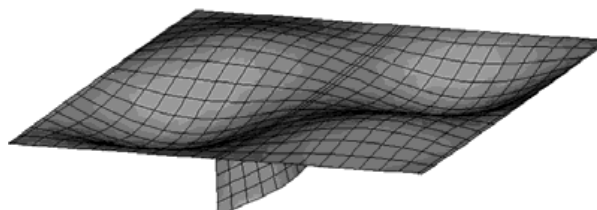
a) globalne početne deformacije ukrucenja



b) lokalne početne deformacije ploče



c) lokalne deformacije ukrucenja



d) ukupne početne deformacije

Sl.4.10 Početne deformacije podužno ukrucenih nosača (preuzeto iz [21])

Analizirajući podatke iz literature, početne geometrijske imperfekcije mogu se podeliti po načinu zadavanja na realne imperfekcije, imperfekcije prema sopstvenim modovima, ekvivalentne geometrijske imperfekcije i imperfekcije prema obliku loma.

#### 4.5.1.1 Realne imperfekcije

Ovaj tip imperfekcija treba da, što je moguće tačnije, odgovara realnim imperfekcijama nosača. Zadavanje imperfekcija na ovaj način koristi se u ispitivanju konkretnih nosača ili prilikom serijske proizvodnje. Kod numeričkog modeliranja realnih konstrukcija ova vrsta imperfekcija se najčešće zamenjuje nekim drugim imperfekcijama, jednostavnijim za modeliranje. U ovom radu, u narednom istraživanju će biti zadavane realne imperfekcije na numeričkim modelima. Definisane početnog oblika nosača bazira se na preciznoj geometriji ispitivanog modela, tako što se uz pomoć odgovarajućih uređaja precizna geometrija nosača unosi u neki od specijalizovanih kompjuterskih programa koji služe za simulaciju eksperimenta, ili se prethodnim merenjem početnih deformacija nosača u određenom nizu tačaka modeliraju geometrijski oblici nosača na kojima će se vršiti simulacija eksperimenta. U literaturi nema mnogo podataka o sistematičkim merenjima početnih deformacija, odnosno, realnim imperfekcijama korišćenim u eksperimentima, što je autoru ovog rada bila dodatna stimulacija za

istraživanje. Takođe, u komentarima propisa EN 1993-1-5 [21], navodi se da su poželjna dodatna istraživanja u ovoj oblasti u cilju poboljšanja preporuka za proračun.

Jedan od istraživača koji je na svojim numeričkim modelima za ispitivanje zadavao realne početne imperfekcije bio je Chacon. U već pomenutoj njegovoj doktorskoj disertaciji [16], pri modeliranju nosača u programskom paketu ABAQUS, korišćen je oblik realnih imperfekcija. Oblik precizne geometrije nosača dobijen je pomoću 3D mernog uređaja. Izmerena geometrija rebra je prenesena na model za numeričku analizu, dok je izmerena geometrija pojasa, tj. njegove imperfekcije, procenjene kao zanemarljive, pa su pojasevi modela uzeti kao idealno ravni. Mreža konačnih elemenata se bazirala na shell-elementima koji su uklopljeni za precizniji oblik imperfekcija nosača i nakon toga su korišćeni za nelinearnu analizu. Zaključeno je da rezultati nosača sa zadatim realnim imperfekcijama dovode do zadovoljavajućeg graničnog opterećenja u poređenju sa eksperimentalnim rezultatima. Kod nekih modela, pri ispitivanju nosača, nailazilo se na numeričke teškoće pri analizi. Potrebno je naglasiti da su za sve nosače pored realnih imperfekcija bile uključene i strukturne imperfekcije nosača, a napomenimo i to da su bili razmatrani hibridni nosači od čelika (videti [16]).

#### **4.5.1.2 Imperfekcije prema sopstvenim modovima**

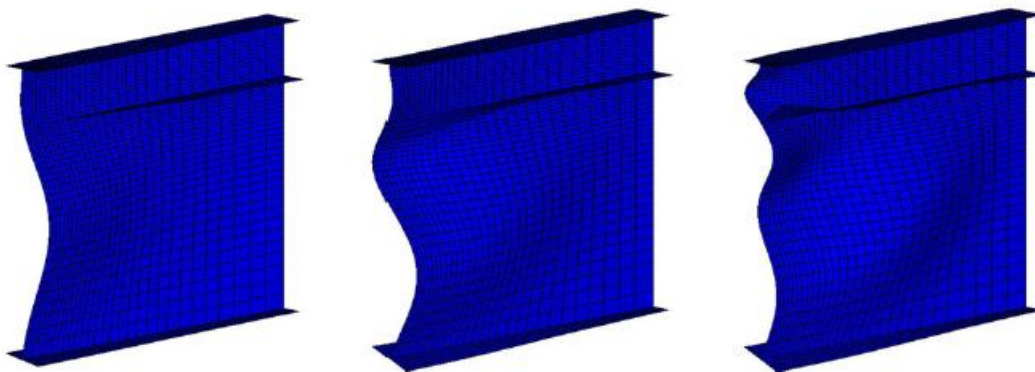
Ovaj tip imperfekcija definiše se na matematičko-numeričkoj osnovi, tako što se analizira izvijanje nosača pri sopstvenim vrednostima. Nakon određivanja sopstvenih modova nosača, upotrebljava se metod kojim se vrši zadavanje oblika sopstvenih modova na modelima nosača u cilju numeričke analize i na taj način se narušava njihova početna geometrija. Takvu geometriju nosača treba posmatrati kao početnu geometriju uz odgovarajuće granične uslove.

Jedan od prvih istraživača koji je u svojim istraživanjima nosača opterećenih *patch loading*-om uključio uticaj početnih imperfekcija je Bergfelt 1979. god. [7]. On zaključuje da ako je oblik početne imperfekcije nosača sličan obliku sopstvenog moda izvijanja, tada je granična nosivost manja nego ako to nije slučaj. Zaključeno je da pri analiziranju početnih imperfekcija prema sopstvenim modovima, treba uzeti u obzir amplitudu, oblik sopstvenog moda, vitkost elementa i kakvo je ukrućenje rebra za pojas.

U radu Graciano-a [40] izvršena je analiza nosača opterećenih *patch loading*-om sa zadavanjem početne geometrije na osnovu izvijanja prema sopstvenim modovima. Analiza je



izvršena korišćenjem MKE u programskom paketu ANSYS. Korišćeni su modeli koji su prethodno eksperimentalno ispitivani od strane Dubas i Tschamper-a [103]. Ispitivani su slučajevi za prva tri osnovna moda izvijanja nosača kod kojih je jedna strana uklještena (videti Sl.4.11), kao i za slučaj sume prva tri moda izvijanja.



Sl.4.11 Prva tri tona izvijanja redosledno (preuzeto iz [40])

Materijal nosača je pretpostavljen kao idealno elastoplastičan ( $E=210\text{GPa}$ ,  $\nu=0.3$ ). U radu je predstavljena parametarska analiza koja uzima u razmatranje efekat položaja ukrućenja, amplitude i oblika imperfekcija. Takođe je sprovedena analiza osetljivosti za različite položaje ukrućenja, pri čemu je najveće smanjenje otpornosti postignuto na rastojanju od  $b_1/h_w=0.25$ . Analiziranjem rezultata, u većini slučajeva su nosači sa početnim imperfekcijama zadatim prema obliku izvijanja trećeg moda pokazali najnižu otpornost i to za različite položaje podužnog ukrućenja. Međutim, zaključak njihovog istraživanja je da se oblik početnih imperfekcija koji rezultira najmanjoj otpornosti nosača ipak razlikuje za svaku veličinu imperfekcije i položaja ukrućenja. Takođe se ističe da početne imperfekcije za nosače pod *patch loading*-om mogu biti modelirane koristeći oblik nalik na prvi sopstveni mod ili sinusni talas u cilju dobijanja zadovoljavajućih rezultata.

U doktorskoj disertaciji Chacon-a [16] nosači su, pored zadavanja realnih imperfekcija, takođe, ispitivani sa zadatim početnim imperfekcijama prema sopstvenim modovima. Geometrija nosača, bazirana na sopstvenim modovima je zadata u skladu sa propisima EN1993-1-5, sa amplitudom  $w=80\%$  od fabričke tolerancije. Posmatrana su prva tri sopstvena moda (dva simetrična i jedan antimetričan), dok se četvrti mod odnosio na izvijanje pri smicanju u susjednoj ploči. Prvi mod vodi do početnog oblika slova C, dok drugi dovodi do oblika slova S (za slobodno oslonjenu ploču). U svim nosačima su, takođe, uzimane i strukturne početne imperfekcije. Ispitivane su četiri vrste nosača sa različitim početnim geometrijama (varirana je

dužina nosača  $a$ ). Zaključeno je da su prema prva dva sopstvena moda dobijeni zadovoljavajući rezultati, dok zadavanje oblika viših sopstvenih modova ne daje manje otpornosti kako je predviđeno u EN 1993-1-5.

U komentarima za proračun EN 1993-1-5 Anex C [28], predlaže se zadavanje imperfekcija prema sopstvenim modovima amplitudom datom u Nacionalnom Anex-u, kao i da se preporučuje 80% tolerancije od geometrijskih fabričkih imperfekcija. U slučaju većih udaljenosti poprečnih ukrućenja, kod globalnih imperfekcija za podužna ukrućenja sopstveni modovi se sastoje od dva ili više polutalasa. Zato treba voditi računa da pretpostavljene imperfekcije imaju određen broj polutalasa, jer relevantan oblik imperfekcije je onaj koji daje najmanje granično opterećenje.

#### **4.5.1.3 Ekvivalentne geometrijske imperfekcije**

Početne geometrijske imperfekcije nosača koje prate oblik realnih geometrijskih imperfekcija, a predstavljene su u obliku neke matematičke funkcije, na primer sinusne funkcije, zovu se ekvivalentne imperfekcije. U EN 1993-1-5 Anex C [28] i EN 1993-1-1 [29] data su pravila za početno zadavanje geometrijskih imperfekcija. U delu C.5 koji se tiče zadavanja imperfekcija, navodi se da se mogu koristiti ekvivalentne imperfekcije, osim ako se ne sprovodi preciznija analiza. Smer imperfekcija treba biti takav da se dobije najniža otpornost, a, takođe, je data tabela sa preporučenim vrednostima amplituda i oblika imperfekcija u odnosu na širinu i dužinu nosača, kao i oblici imperfekcija za pojedine komponente (rebro, subpanel, podužno ukrućenje itd.). Takođe je napomenuto da se ekvivalentne geometrijske imperfekcije mogu zameniti odgovarajućim fiktivnim silama (za detalje videti [29] i [28]).

U svojim istraživanjima pri ispitivanju nosača, Granath [45], [46] je dobio zadovoljavajuće rezultate, slične rezultatima Graciano-a [40], zadavanjem ekvivalentnih imperfekcija na neukrućene nosače. On je zadavao imperfekcije nosača u obliku sinusne funkcije, tj. slične obliku prvog moda izvijanja, u obliku slova C, sa maksimalnim izmerenim amplitudama.

Benjamin Braun [10] je u okviru svoje doktorske disertacije, pri eksperimentalnom ispitivanju nosača izmerio geometrijska odstupanja odgovarajućim mernim uređajem. Nakon toga, uočio je oblik početnih imperfekcija po visini nosača i to: za jedan nosač je uočen oblik

slova C, a za drugi slova S. Izmerene vrednosti su bile znatno manje od dozvoljenih tolerancija prema BSK07 [12]. Kao početna geometrija numeričkih modela u parametarskoj studiji, korišćen je funkcionalni opis geometrijskih imperfekcija rebra u vidu sinusnih funkcija, prethodno sračunat u matematičkom softveru MathCAD. U radu je napomenuto da oblik imperfekcija, uzet na ovaj način, svakako, ne predstavlja „najnepovoljniji slučaj“ u smislu predviđanja najmanje otpornosti, ali da se ovakvim pristupom mogu dobiti zadovoljavajuće vrednosti. Kako su u radu ispitivane kvadratne i pravougaone ploče, Braun je napravio komparaciju sa sledećim zaključkom: oblik imperfekcija postaje relevantan samo za nekvadratne ploče, dok za kvadratne ploče razlika u imperfekcijama prema sopstvenom modu i ekvivalentnim imperfekcijama u vidu sinusne funkcije, postaje zanemarljiva. Kod pravougaonih ploča, zaključak je da oblik imperfekcija koji dovodi do najmanje otpornosti zavisi od broja polutalasa i odgovarajućeg pravca opterećenja.

#### **4.5.2 Strukturne imperfekcije**

Strukturne (materijalne) imperfekcije nosača odnose se u većini slučajeva na imperfekcije materijala do kojih je došlo tokom fabričke izrade ili iz drugih razloga. Može se reći da su strukturne imperfekcije, ustvari, rezidualni (zaostali) naponi u materijalu, pa se kao takvi moraju uvrstiti u početno stanje nosača. Prema komentarima preporuka za proračun EN1993-1-5 Anex C [21] navodi se da rezidualni naponi nastaju pri zavarivanju nosača, čime se njihova nosivost smanjuje, a poznato je da promene u strukturi materijala zavise od unešene količine toplote i veličine šava. Strukturne imperfekcije moraju biti uzete tako da izazovu najnepovoljniji slučaj izvijanja ploče, kako je predloženo u propisima, što se danas postiže uključivanjem rezidualnih napona u model pomoću savremenih kodova prema MKE. U EN 1993-1-5 [28] ističe se upotreba kombinacije strukturnih imperfekcija sa nekom od geometrijskih imperfekcija. Rezidualni naponi se ponekad mogu uzeti u obzir kao fiktivne, dodatne početne deformacije (videti [28]).

U disertaciji Chacon-a [16], navodi se da je svaki rezidualni napon netipičan i da svaki konkretan slučaj može izazvati različite implikacije. U svojim ispitivanjima, Chacon je pretpostavio tipičan idealizovani obrazac za rezidualne napone sa konstantnim vrednostima za pločasti nosač prema European Convention for Constructional Steelwork Recommendations (ECCS 1990). U radu se navodi da su rezidualni naponi jednaki naponima tečenja unutar jedne

male širine ploče u zoni uticaja toplote i da su to pre svega naponi zatezanja, dok su naponi pritiska generisani u ostalim delovima prema ravnotežnom stanju. Korišćene su pojednostavljene jednačine koje uzimaju u obzir sečenje plamenom, zavarivanje u spojevima, oblik šavova kao i sam proces zavarivanja, na osnovu čega proizilazi da su rezidualni naponi zavisni od veličine poprečnog preseka (videti [16]). Rezidualni naponi su uključeni kod nosača na kojima su zadavane početne imperfekcije prema sopstvenim modovima. U zaključku je izloženo da uvođenje obrazaca za rezidualne napone na prethodno opisan način daje nešto preciznije rezultate, ali da njihov uticaj ne igra odlučujuću ulogu i rečeno je da su i u drugim studijama nađene slične primedbe.

U radovima Clarin-a [20] i Gozzi-ja [38] korišćeni su pojednostavljeni obrasci za rezidualne napone, predloženi od strane Švedskih propisa za čelične nosače BSK1999.

Napomenimo da se prisustvo geometrijske i materijalne nelinearnosti mora posmatrati simultano.

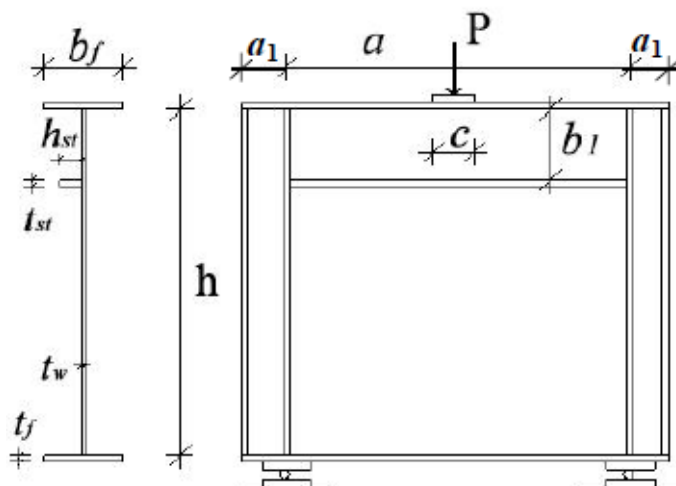
## **5. EKSPERIMENTALNA ISTRAŽIVANJA PREUZETA IZ LITERATURE I PRIPREMA MODELA ZA TEORIJSKU STUDIJU**

U ovom odeljku biće predstavljena eksperimentalna istraživanja koja je 2003. godine obavio Nenad Marković i koja su bila predmet njegovog rada (doktorska disertacija iz 2003. godine [70]). Eksperiment će biti detaljno opisan, jer su neki od eksperimentalnih podataka koji tada nisu bili razmatrani, u ovom radu poslužili za detaljniju studiju (videti poglavlje 7). Takođe, ovi eksperimentalni podaci poslužiće za poređenje i analizu sa podacima dobijenim numeričkom simulacijom eksperimenta u programu ANSYS (videti naredno poglavlje 6). Cilj ovih eksperimentalnih istraživanja je ispitivanje uticaja dužine raspodeljenog opterećenja na graničnu nosivost koja se manifestuje pojavom izbočavanja dela rebra u zoni unošenja opterećenja i to u slučajevima kada nema podužnih ukrućenja i u slučajevima kada postoje podužna ukrućenja.

Ova eksperimentalna istraživanja su nastavak opsežnih istraživanja koja se tiču uticaja podužnih ukrućenja na graničnu nosivost, sprovedenih u Pragu od strane Miroslava Škalouda i njegovih saradnika u periodu između 1978. i 1988. godine [57]. U okviru istraživanja u Pragu, razmatrani su uticaji promena sledećih parametara: debljina rebra, debljina pojasa, položaj ukrućenja i karakteristike ukrućenja na granično opterećenje. Detaljnim razmatranjem došlo se do zaključka da u daljoj parametarskoj analizi u toku eksperimentalnih istraživanja treba varirati dužinu opterećenja, u određenim granicama, jer su za detaljnija teorijska razmatranja ovog problema bili potrebni i ovi dodatni eksperimentalni rezultati. U dogovoru sa Škaloudom, izabrane su dimenzije i karakteristike nosača kako bi se rezultati eksperimenata mogli uklopiti u prethodna istraživanja.

### **5.1 Izbor karakteristika nosača i planiranje eksperimenta**

U istraživanju je predviđeno ispitivanje nosača serije A - raspona 500 mm bez podužnih ukrućenja i sa podužnim ukrućenjima na istom rastojanju od gornjeg pojasa nosača. Opterećenje je zadavano po celoj širini gornjeg pojasa, preko ploča za nanošenje opterećenja, na različitim dužinama (od 25 do 150 mm). U ovoj doktorskoj disertaciji biće korišćeni nosači bez i sa podužnim ukrućenja sa dužinama nanošenja opterećenja od 50 mm i 150 mm. Na sl.5.1 prikazan je nosač serije A sa oznakama karakterističnih dimenzija (videti [70]).



Sl.5.1 Osnovne oznake nosača-skica

Dimenzije nosača odabrane su na sledeći način (videti Sl.5.1):

$h_w$  - usvojena visina rebra je 500 mm; visina nije varirana i ista je kao i u ispitivanjima u Pragu;

$a$  - dužina rebra za sve uzorke ispitivanja iznosi 500 mm, što se podudaralo sa vrednostima raspona u 85% slučajeva testiranja u Pragu;

$a_1$  - rastojanje vertikalnih ukrućenja i iznosi 55 mm, a nalaze se iznad oslonaca;

$t_w$  - debljina rebra; kako u istraživanjima u Pragu varira između 2 i 6 mm, u ispitivanjima Markovića je kao reprezentativna vrednost izabrana vrednost debljine rebra 4 mm;

$b_f$  - širina pojasa je usvojena 120 mm;

$t_f$  - debljina pojasa usvojena je 8 mm; razlog je isti kao i kod izbora širine pojasa, da bi, pri tome, odnos debljine pojasa i debljine rebra, kao jedna od relevantnih karakteristika, imala vrednost 2;

$b_1$  - rastojanje od donje ivice gornjeg pojasa do podužnog ukrućenja; izbor položaja podužnih ukrućenja je odabran kao jedna petina visine rebra. Na njegov položaj mogu da utiču i drugi faktori sem lokalizovanog opterećenja, o čemu je vođeno računa.

$t_{st}$  - debljina podužnog ukrućenja je 8 mm;

$h_{st}$  - širina podužnog ukrućenja je 30 mm; ova dimenzija je izabrana kao racionalna i to na osnovu prethodnih istraživanja. Odabrana dimenzija je dovoljna da dovede do porasta nosivosti, a njenim daljim povećanjem ne bi se bitno uticalo na vrednost granične nosivosti.

$c$  - dužina delovanja opterećenja. U istraživanjima sprovedenim u Pragu ova dimenzija je bila stalna i iznosila je 50 mm, a u istraživanjima N. Markovića ona je varirana između 25 mm i 150 mm sa inkrementom od 25 mm. Daljim povećanjem dužine unošenja opterećenja, preko 150

mm, na ponašanje nosača utiču i drugi parametri (na primer vertikalna ukrućenja), što je u ovom istraživanju isključeno.

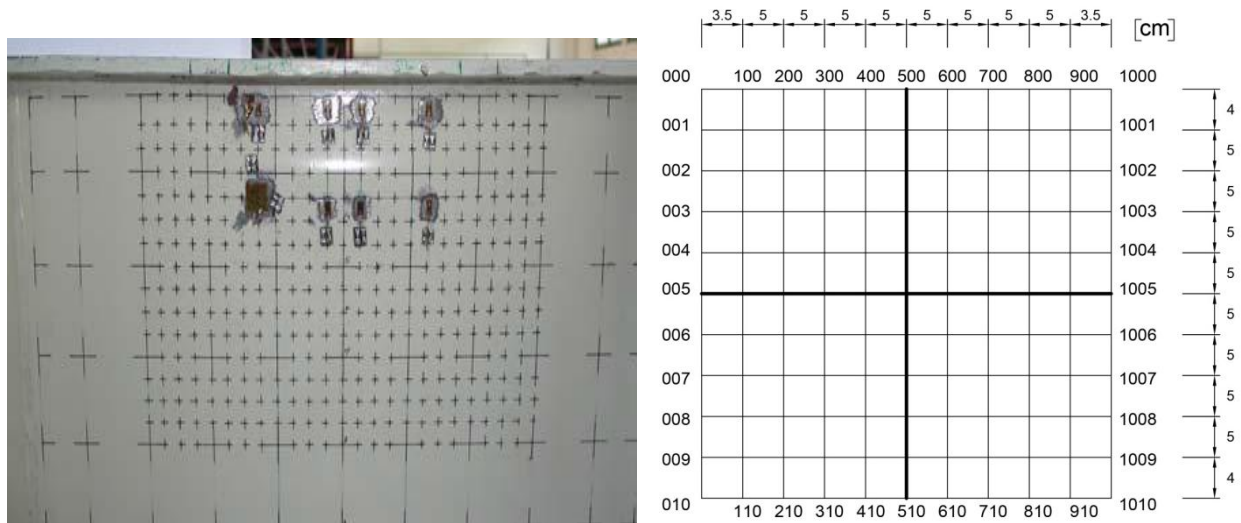
Za materijal je izabran čelik S275 koji ima slične nominalne karakteristike kao i upotrebljeni čelik u istraživanjima izvršenim u Pragu.

Predmet našeg rada biće ispitivanje i međusobno upoređivanje nosača sa dužinom delovanja opterećenja od 50 mm i 150 mm, tako da ćemo se u daljem izlaganju ograničiti samo na ove rezultate.

## **5.2 Priprema za ispitivanje**

Izrada nosača je izvršena u građevinskom preduzeću “Mostogradnja” u Beogradu. Uz izradjene nosače priložen je i Elaborat tehničke kontrole br 1950 (87) u kome se u izveštaju službe tehničke kontrole konstatuje: “Pre ulaza materijala u fazu sečenja izvršena je ulazna kontrola materijala. Utvrđeno je da izabrani materijal odgovara zahtevima iz projekta i JUS-a C.B0.500. Izvršen je pregled veznog materijala po zahtevima iz opštih propisa, materijala za zavarivanje i JUS-u C.H3.011. U toku izrade vršena je kontrola zavarivačkih radova. Mernom kontrolom je utvrđeno da zavareni spojevi imaju odgovarajuću debljinu. Vizuelnom kontrolom je utvrđeno da su zavari kontinualni i bez grešaka na licu šava. Na osnovu mernog i vizuelnog pregleda službe tehničke kontrole zaključeno je da je konstrukcija izradjena po tehničkoj dokumentaciji i opštim tehničkim propisima za ovu vrstu proizvoda” (pasus preuzet u originalu iz [70]).

Priprema nosača za ispitivanje obuhvatala je obeležavanje nosača, merenje početnih deformacija i ispitivanje karakteristika materijala. Obeležavanje nosača je vršeno na sledeći način. Na nosačima je iscrtana pravilna mreža 11×11 tačaka (Sl.5.2). U prvom i poslednjem redu, vertikalno rastojanje između tačaka iznosi 40 mm, a u prvoj i poslednjoj koloni 35 mm. To je učinjeno zbog postojanja šavova i omogućavanja pristupa elektronskog ugibomera. Sva ostala rastojanja između tačaka su 50 mm u oba pravca (videti Sl.5.2). U zoni u kojoj se očekuje lokalno izbočavanje, obeležena je gušća mreža dobijena deljenjem polja na četiri dela i međusobno rastojanje tih tačaka je 12.5 mm u oba pravca, osim u prvom redu (uz gornji pojas) gde je rastojanje 10 mm.



Sl.5.2 Obeležavanje mreže na nosaču (videti [70])

### 5.2.1 Merenje početnih deformacija

Kako bi se što preciznije pratile deformacije nosača u toku zadavanja opterećenja, što adekvatnije očitale rezidualne deformacije nosača i pratio sam tok eksperimenta, bilo je potrebno dobiti što bolji uvid u početne deformacije. Merenja početnih deformacija izvršena su uz pomoć specijalno konstruisanog rama i geodetskim putem.

Ram za ispitivanje su činile dve horizontalne vođice po kojima se klizanjem kretao nosač elektronskog ugibomera i to po idealnoj vertikalnoj ravni.

Dobijeni rezultati početnih deformacija su upoređeni sa rezultatima dobijenim geodetskim merenjem sa prihvatljivim odstupanjem. Pored toga, izmerene su početne deformacije i u dodatnom broju tačaka u zoni izraženog deformisanja rebra, što je zavisilo od konkretnog oblika deformacije.

### 5.3 Postavka eksperimenta i merenje deformacija rebra

Nosači su ispitivani u specijalno konstruisanom zatvorenom ramu. Opterećenje je nanošeno preko prese povezane sa hidrauličkom pumpom. U početku je sila povećavana sa većim, a kasnije sa manjim inkrementima opterećenja. U toku ispitivanja, registrovano je bočno pomeranje u karakterističnoj tački rebra i ugibi u sredini gornjeg i donjeg pojasa. Pomoću mernih



traka, izmerene su dilatacije u nizu odabranih tačaka na rebro i pojasu nakon svake promene opterećenja.

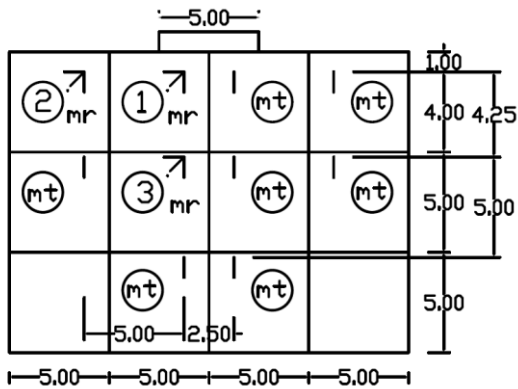
Opterećenje je povećavano sve do dostizanja njegove granične vrednosti. Granična nosivost se manifestovala u progresivnom povećanju registrovanih deformacija pojasa i rebra, kao i dilatacija, bez daljeg povećavanja sile. Pri tome je uočena pojava vidljivog izbočavanja dela rebra ispod zone unošenja opterećenja. Nakon izvesnog održavanja graničnog opterećenja (različitog u pojedinim opitima) nosači su rasterećivani i merene su rezidualne deformacije rebra i opterećenog pojasa. Za rebro su merene deformacije van ravni rebra u istom broju tačaka na kojima su prethodno merene i početne deformacije. Takođe, i rezidualne deformacije pojasa su registrovane u istim tačkama u kojima su vršena merenja i tokom opterećivanja.

#### **5.4 Opis toka eksperimenta**

Eksperimenti su obavljani u Laboratoriji za ispitivanje konstrukcija i materijala na Građevinskom fakultetu u Podgorici. U istoj laboratoriji su prethodno izvršena i obimna istraživanja D. Lučića iz 1999. god. (videti [66]) i B. Šćepanovićeve iz 2003. god. [100], pri čemu su ispitivani centrično i ekscentrično napregnuti I nosači opterećeni *patch loading*-om.

Za ispitivanje nosača korišćen je zatvoreni ram. Opterećenje je nanošeno, u sredini dužine pojasa, presama maksimalnog kapaciteta 800 kN povezanim sa hidrauličkom pumpom. Prenošnje opterećenja vršeno je preko blokova širine 120mm (što odgovara širini pojasa), debljine 40-50 mm i promenljive dužine od 25-150 mm.

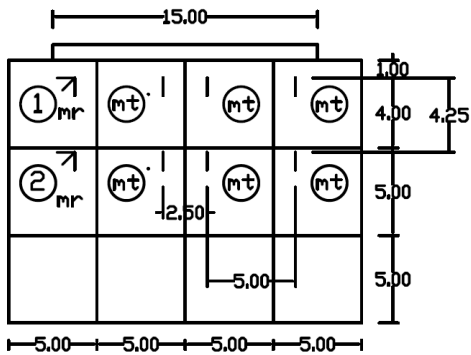
Merenje ugiba vršilo se ugibomerima. U toku testiranja praćeni su rezultati: veličina sile, veličina pomeranja rebra van ravni rebra u izabranim tačkama i veličina pomeranja sredine opterećenog pojasa. Merenje dilatacija vršeno je uz pomoć pojedinačnih mernih traka i određenim brojem rozeta pod uglom od 45°. Raspored mernih traka i rozeta na rebrima nosača (A1, A2, A3 i A7), ispitanih eksperimentalno prikazani su na fotografijama Sl.5.3b), Sl.5.4b) i Sl.5.5b). Na skicama Sl.5.3a), Sl.5.4a) i Sl.5.5a) prikazana su merna mesta, na kojima su bile postavljene rozete.



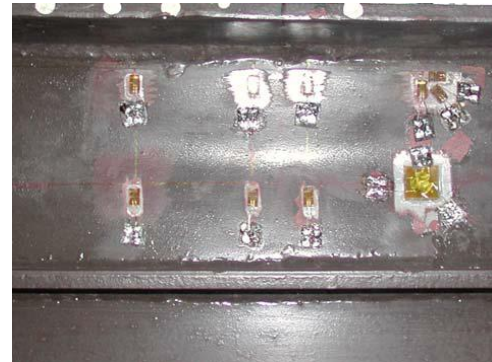
Sl.5.3 a) nosači A1 i A3 sa prednje strane sa rozetama (mr) i mernim trakama (mt)



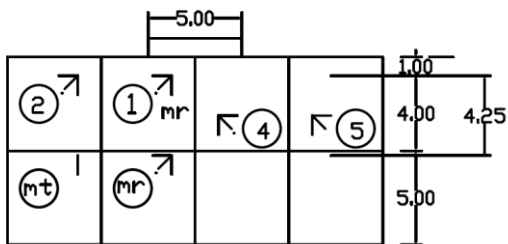
Sl.5.3 b) nosač A3 sa zadnje strane [70] sa rozetama (mr) i mernim trakama (mt)



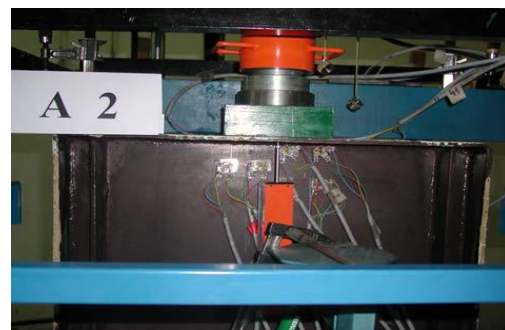
Sl. 5.4 a) nosač A7 sa prednje strane sa rozetama (mr) i mernim trakama (mt)



Sl.5.4 b) nosač A7 sa zadnje strane [70] sa rozetama (mr) i mernim trakama (mt)



Sl. 5.5a) nosač A2 sa prednje strane sa rozetama (mr) i mernim trakama (mt)



Sl.5.5 b) nosač A2 sa zadnje strane [70] sa rozetama (mr) i mernim trakama (mt)

Postavljeni su ugibomeri od kojih je jedan bio fiksiran na sredini raspona donjeg pojasa, drugi za praćenje ugiba gornjeg pojasa, bio je pričvršćen sa zadnje strane za specijalni ram i treći ugibomer, koji je merio pomeranje rebra van njegove ravni, bio je pričvršćen za drugi specijalni

ram sa prednje strane i merio ugibe u prethodno obeleženim pojedinačnim tačkama, krećući se vertikalno i horizontalno.

U samom toku eksperimenta, pre početka nanošenja opterećenja, odnosno, pre svakog inkrementa opterećenja, ugibomeri se postavljaju u predviđene tačke. Kako su merač sile, ugibomeri i merne trake, povezani sa mernim mostom, vrši se automatsko očitavanje svih povezanih elemenata. Posle prvog nanošenja sile, najpre se izvrši automatsko očitavanje svih povezanih mernih uređaja u sistem. Nakon toga se pri konstantnoj sili vrše očitavanja pomeranja u obeleženim tačkama rebra i pojasa.

U početku je inkrement unošenja opterećenja bio 20 kN do dostizanja vrednosti sile od 100 kN, nakon toga inkrement je smanjen na 10 kN a približavanjem graničnom opterećenju (što se manifestovalo izraženim deformacijama), smanjen je na 5 kN do dostizanja granične vrednosti sile. Izmerene su sledeće veličine:

- u pripremnoj fazi su merene početne deformacije (imperfekcije) na dva načina: nivelmanom i ugibomerom uz pomoć specijalnog rama;
- u toku eksperimenta, očitavano je bočno pomeranje karakteristične tačke u srednjem profilu rebra (na 50 mm ispod opterećenog pojasa), vertikalno pomeranje tačke na sredini raspona na ivici gornjeg i na sredini donjeg pojasa, a kod nosača sa mernim trakama očitane su i dilatacije. Nakon toga izmerena su i bočna pomeranja srednjeg profila rebra i deformacije gornjeg pojasa;
- po završetku eksperimenta izmerene su rezidualne deformacije opterećenog pojasa i rebra i to u tačkama po sredini pojasa na celom rasponu i u tačkama u kojima je mereno vertikalno pomeranje.

## **5.5 Ponašanje nosača tokom ispitivanja**

Pri manjim opterećenjima, posmatranjem apsolutnih pomeranja tačaka u funkciji sile, uočavaju se razne nepravilnosti. Izmerene su početne deformacije nosača, odnosno početne geometrijske imperfekcije. Pri povećavanju sile, deformacije rebra se postepeno povećavaju, a, u manjem obimu, i deformacije pojasa. Tek pri približavanju graničnoj vrednosti sile dolazi do izražene nelinearnosti.

Deformacija rebra u vertikalnim presecima prati se, počev od 50 mm ispod opterećenog pojasa, a deformacija srednjeg poprečnog preseka rebra u 14 tačaka za sve zadate vrednosti sile. Promena pomeranja je linearna do dostizanja 90% od granične vrednosti sile. Od tog trenutka se vidno uočavaju nelinearnosti i povećanje deformacija u zoni unošenja opterećenja. Do pojave izbočavanja dolazi tek po dostizanju granične sile i to naglo, tj. veoma brzo.

Kod nosača koji su relevantni za naš rad, dodatno bočno pomeranje iz početne deformacije je manje od polovine početne deformacije, osim na mestu izbočavanja. Veličina izbočavanja zavisi od toga koliko se održava granična sila.

Uočena je razlika ponašanja kod nosača bez podužnih ukrućenja i sa podužnim ukrućenjem u toku eksperimentalnih ispitivanja. Kod nosača bez ukrućenja je izraženija deformacija rebra u zoni ispod unošenja opterećenja. Pri dostizanju granične nosivosti, javlja se naglo izbočavanje u gornjem panelu, tj. između opterećenog pojasa i podužnog ukrućenja. Deformacija u donjem panelu, pre dostizanja granične vrednosti, je veća od rezidualne deformacije na istom delu.

Ispitivani uzorci nosača su imali različite oblike izbočavanja u toku eksperimenata.

Kao što smo već napomenuli, ovde ćemo se ograničiti na opis ponašanja nosača iz serije A koji će biti predmet naših istraživanja u narednim poglavljima.

Nosač A1 (bez ukrućenja i dužine unošenja opterećenja  $c=50$  mm) je imao početnu deformaciju oblika slova C, što se zadržalo do kraja ispitivanja, a izbočavanje se javilo u gornjoj četvrtini visine.

Nosač A2 (bez ukrućenja i dužine unošenja opterećenja  $c=150$  mm) je, takođe, imao početnu deformaciju oblika slova C sve do kraja ispitivanja, a izbočavanje se javilo u nešto nižem delu u odnosu na izbočavanje kod nosača A1.

Nosač A3 (sa podužnim ukrućenjem i dužine unošenja opterećenja  $c=50$  mm) je imao oblik izvijanja u obliku slova S.

Nosač A7 (sa podužnim ukrućenjem i dužine unošenja opterećenja  $c=150$  mm) je imao početnu deformaciju oblika trećeg moda izvijanja, ali je ovaj oblik brzo prešao u slovo S i takav ostao do kraja.

Analizom deformacije rebra u horizontalnim presecima uočeno je povećanje dužine angažovane zone rebra sa povećanjem dužine opterećenja.

Deformacije pojasa su male, ali izmerene rezidualne deformacije pojasa neposredno iznad rebra ukazuju na porast angažovane dužine pojasa sa povećanjem dužine preko koje se nanosi opterećenje (čak do samih vertikalnih ukrućenja za  $c=150$  mm).

### ***Granična nosivost***

Analizirajući posmatrane nosače, dolazi se do zaključka da se sa porastom dužine preko koje se nanosi opterećenje povećava i granična nosivost. Takođe, granična nosivost se povećava i sa postojanjem podužnih ukrućenja. Ipak, na veličinu granične nosivosti, više utiče povećanje dužine unošenja opterećenja.

U zoni unošenja opterećenja, u rebru dolazi do plastifikacije znatno pre dostizanja granične nosivosti, što je eksperimentom i dokazano. Tek pri dostizanju 90% od granične vrednosti vidno se uočavaju geometrijske nelinearnosti, a pri dostizanju 50-60% granične vrednosti već dolazi do plastifikacije, usled materijalne nelinearnosti, u pojedinim tačkama.

Neki od rezultata ovog eksperimentalnog ispitivanja biće prikazani u poglavlju 7 i poslužiće za upoređivanje sa rezultatima dobijenim kompjuterskom simulacijom eksperimenta vršenim na nosačima modeliranim po uzoru na nosače opisane u ovom eksperimentu.

## 6. MODELIRANJE NOSAČA I TEORIJSKO-NUMERIČKA ANALIZA

### 6.1 Opšte napomene

Poznato je da su eksperimentalna istraživanja veoma važna kao osnova teorijskog rada u svim oblastima, a naročito u tehnici. Međutim, njihovo sprovođenje zahteva odgovarajuće laboratorijske uslove sa adekvatnom opremom, veliki broj uzoraka kao i znatna finansijska sredstva. Iz tih razloga nije ih moguće jednostavno sprovesti. Sa razvojem specijalizovanih programskih paketa, primenom numeričkih metoda, posebno MKE i MGE moguće je izvršiti simulaciju eksperimenta u odgovarajućem programskom paketu. Mora se napomenuti da je ovaj način ispitivanja samo neka vrsta zamene za eksperimentalno ispitivanje, tj. da nije često moguće precizno opisati granične uslove, način nanošenja opterećenja i adekvatan način ponašanja materijala pri opterećivanju. Takođe, osnovna ideja MKE jeste da se aproksimira konstrukcija deo po deo, putem konačnih elemenata, tako da je i rešenje dobijeno na ovakav način, ustvari aproksimacija stvarnog ponašanja.

U ovom istraživanju primenjena je Metoda konačnih elemenata (MKE) u okviru programskog paketa ANSYS Workbench 15.0 [2]. U nastavku će biti objašnjen način modeliranja nosača u pogledu izbora karakteristika materijala, geometrije, graničnih uslova i uslova oslanjanja, načina zadavanja opterećenja, izbora tipa konačnog elementa, izbora mreže konačnih elemenata i obrade rezultata.

U okviru naših istraživanja biće tretirani nosači sa imperfekcijama i to realnim, koje odgovaraju modelima u eksperimentima, a koji će biti modelirani u okviru kompjuterskih simulacija eksperimenata, zatim nosači sa ekvivalentnim imperfekcijama, kao i odgovarajući nosači bez imperfekcija.

Za upoređivanje rezultata korišćeni su eksperimentalni rezultati preuzeti iz literature koji su detaljno opisani u prethodnom poglavlju. Pretpostavljamo da je Metod konačnih elemenata poznat i, u skladu sa tim, neće u ovom radu biti posebno razmatran, a za detalje videti [94], [2].

Simulacija eksperimenata će se izvršiti u navedenom programu ANSYS Workbench 15.0, uz uključenje geometrijske i materijalne nelinearnosti. Ujedno će se izvršiti komparacija dobijenih rezultata za pojedine, različite, idealizovane dijagrame napon-dilatacija materijala prema Evrokodu EN-1993-1-5, Švedskim propisima BSK07 [12] i karakteristikama materijala

dobijenih ispitivanjem obavljenim 2013. godine. Pored osnovnog cilja, poređenja rezultata dobijenih numeričkom analizom i eksperimentalnih rezultata, analiziraće se i rezultati dobijeni poređenjem uticaja različitih karakteristika materijala kao i uticaja imperfekcija.

## 6.2 Modeliranje nosača

### 6.2.1 Karakteristike materijala

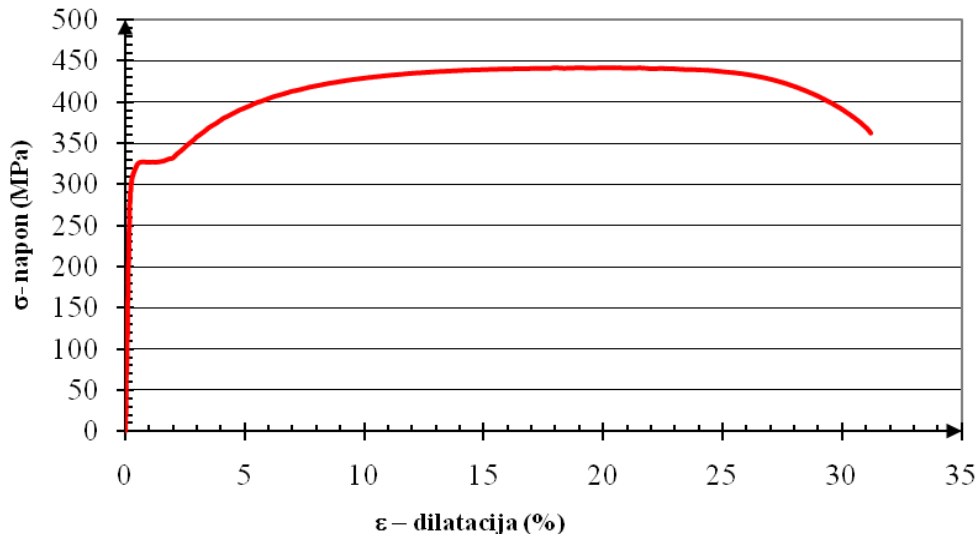
Za dobijanje relevantnih podataka, od velike je važnosti predstavljanje ponašanja materijala na pravi način. Kako je u pitanju čelični nosač, njegove mehaničke osobine određuju se na osnovu modula elastičnosti, Poisson-ovog koeficijenta i otpornosti na pritisak i zatezanje. Pretpostavlja se izotropni materijal sa identičnim vrednostima mehaničkih osobina u svim pravcima.

U cilju dobijanja što preciznijih podataka, ispitivani su uzorci limova uzetih iz rebara nosača. Mora se napomenuti da su uzorci limova ispitivanih nosača uzeti iz delova rebara koji nisu pretrpeli trajne deformacije. Ispitivanje je obavljeno u Inovacionom centru Tehnološko-metalurškog fakulteta u Beogradu 2013. godine, sa ciljem određivanja mehaničkih svojstava čeličnih limova prema standardu SRPS EN ISO 6892-1:2012.

Ispitivane su epruvete širine 12.5 mm, ispitne dužine 65 mm. Brzina porasta napona tokom ispitivanja je bila 10 MPa/s. Rezultate ispitivanja prikazaćemo tabelarno i grafički. Ispitivanjem je konstatovano da materijal odgovara čeliku S275, a u Tabeli 6.1 prikazane su karakteristike ispitanog materijala uzetog iz uzoraka limova, pri čemu su:  $t$  - početna debljina epruvete,  $a_e$  - početna širina epruvete,  $A$  - površina početnog poprečnog preseka,  $R_{eh}$  - gornji napon tečenja,  $R_{el}$  - donji napon tečenja,  $R_m$  - zatezna čvrstoća i  $A_t = \frac{l_k - l_0}{l_0} \cdot 100 (\%)$  - ukupno izduženje pri prekidu ( $l_k$  - dužina epruvete pri kidanju;  $l_0$  - početna dužina epruvete).

U Tabeli 6.1 dati su podaci o uzorcima limova debljine 4 mm, koji odgovaraju rebrima ispitivanih nosača, a na Sl.6.1 prikazan je dijagram  $\sigma$ - $\varepsilon$  karakteristika materijala za epruvetu 30. Dijagrami  $\sigma$ - $\varepsilon$  ostalih epruveta su istog oblika.

### kriva $\sigma$ - $\varepsilon$ dobijena ispitivanjem



Sl.6.1 Dijagram karakteristike materijala za epruvetu 30 (čelik S275)

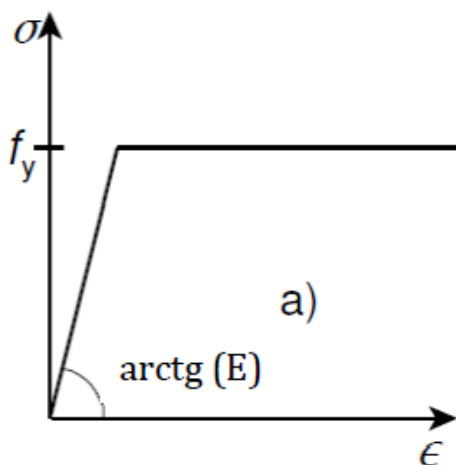
Tabela 6.1. Čelik S275-podaci ispitivanja

oznaka epruvete	$t$	$a_e$	$A$	$F_{max}$	$f_y=R_{eh}$	$R_{eL}$	$f_u=R_m$	$l_0$	$At$
	mm	mm	mm <sup>2</sup>	N	MPa	MPa	MPa	mm	%
20	4.01	12.60	50.5260	22673	316	315	449	50	33.11
21	4.01	12.60	50.5260	22288	346	332	441	50	26.79
30	4.01	12.60	50.5260	22306	327	327	441	50	31.20
31	4.01	12.52	50.2052	21783	323	321	434	50	32.36
40	4.01	12.55	50.3255	22604	349	325	449	50	29.00
41	4.01	12.47	50.0047	21713	317	316	434	50	23.45
50	4.01	12.49	50.0849	22165	333	331	443	50	30.07
51	4.01	12.49	50.0849	22175	324	324	443	50	31.71
60	4.01	12.52	50.2052	22623	359	345	451	50	24.05
61	4.01	12.63	50.6463	22153	319	319	437	50	31.90
70	4.01	12.63	50.6463	21816	318	315	431	50	29.04
71	4.01	12.63	50.6463	22131	321	321	437	50	26.09
<b>Sr. vredn.</b>					<b>329.33</b>	<b>324.25</b>	<b>440.83</b>		

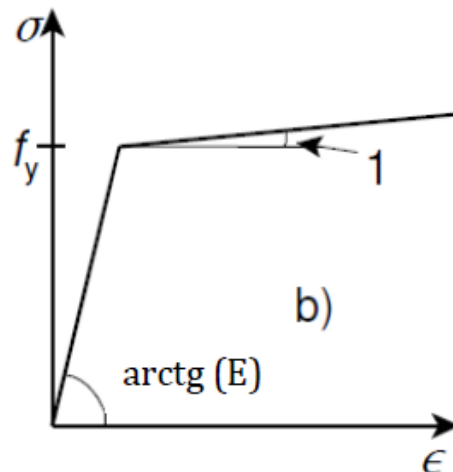


Preporuke za proračun EN-1993-1-5 Anex C, takođe se odnose i na preporuke koje se tiču karakteristika materijala. Ponašanje konstrukcijskih čelika je elasto-plastično. Po dostizanju granice tečenja  $f_y$  materijal se više ne ponaša linearno-elastično, već dolazi do plastifikacije i ojačanja materijala, odnosno, do materijalne nelinearnosti. Predlaže se, u zavisnosti od tačnosti i dostupnosti podataka, korišćenje sledećih materijalnih modela: bilinearna kriva napon-deformacija, u slučajevima gde nisu dostupni podaci materijala, tečenje se pretpostavlja teoretski kao horizontalna linija ili se definiše nagib sa vrednošću  $E/10000$ . Drugi slučaj je aproksimacija krive sa nagibom  $E/100$  gde se razmatra i ojačanje materijala i, u slučaju što realnijeg prikaza moguće je aproksimirati realnu krivu na takav način da se dobije multilinearna kriva koja će na najbolji način prikazati karakteristike materijala ukoliko su ti podaci dostupni. Dijagrami krivih napon-deformacija za navedene slučajeve prema EN 1993-1-5 Anex C, prikazani su na Sl.6.2. Prema BSK07, Švedskim propisima, preporučuje se multilinearna kriva koja se dobija sračunavanjem prikazanim u okviru Sl.6.3. U ovom radu biće korišćene bilinearne krive sa tangentim modulom  $E_t=E/10000$ ,  $E_t=E/1000$ ,  $E_t=E/100$  i  $E_t=E/12.5$  kao i multilinearne krive preporučene od strane EN1993-1-5 i BSK07, a u skladu sa podacima dobijenim u gore pomenutom laboratorijskom istraživanju u pogledu karakterističnih vrednosti napona i dilatacija.

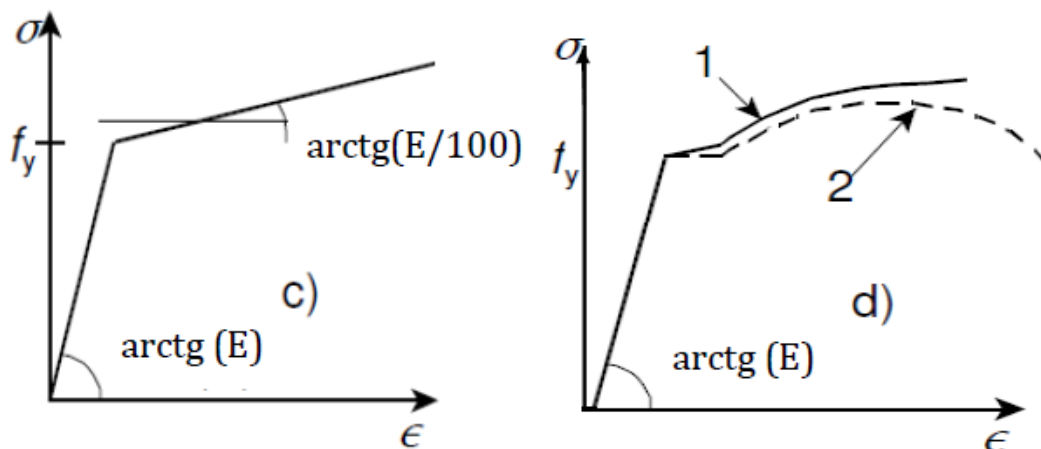
Modul elastičnosti materijala je 210 MPa, odnos Poisson-ovog koeficijenta je  $\nu=0,3$ . Korišćeni materijalni modeli su bazirani na izotropnom pravilu baziranom na teoriji Von-Mises-ove plastičnosti.



a) bilinearna kriva  $\sigma/\epsilon$  bez ojačanja  
bez tangentnog modula



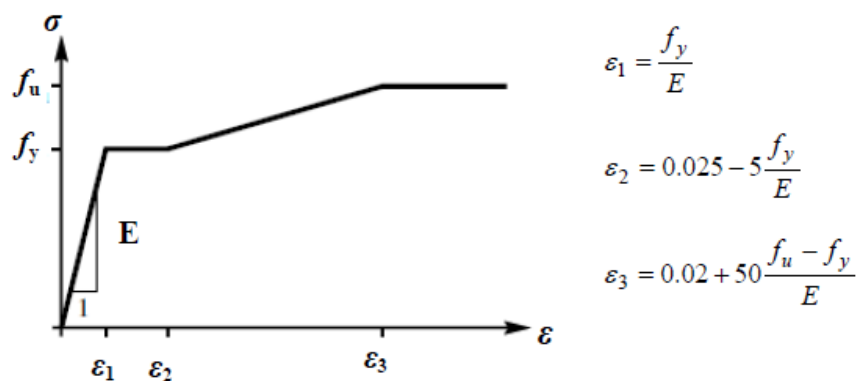
b) bilinearna kriva  $\sigma/\epsilon$  bez ojačanja  
sa tangentnim modulom  $E/10000$



c) bilinearna kriva  $\sigma/\epsilon$  sa ojačanjem sa tangentnim modulom  $E/100$

d) kriva  $\sigma-\epsilon$  kao osnova za multilinearu krivu: 1-stvarna kriva, 2-kriva dobijena ispitivanjem

Sl.6.2: Karakteristike materijala za krivu napon-deformacija preporučene prema EN1993-1-5 Anex C (preuzeto iz [73])



Sl.6.3: Multilinearni materijalni model prema standardu BSK 07 (preuzeto iz [10])

## 6.2.2 Materijalni modeli u okviru nelinearne analize

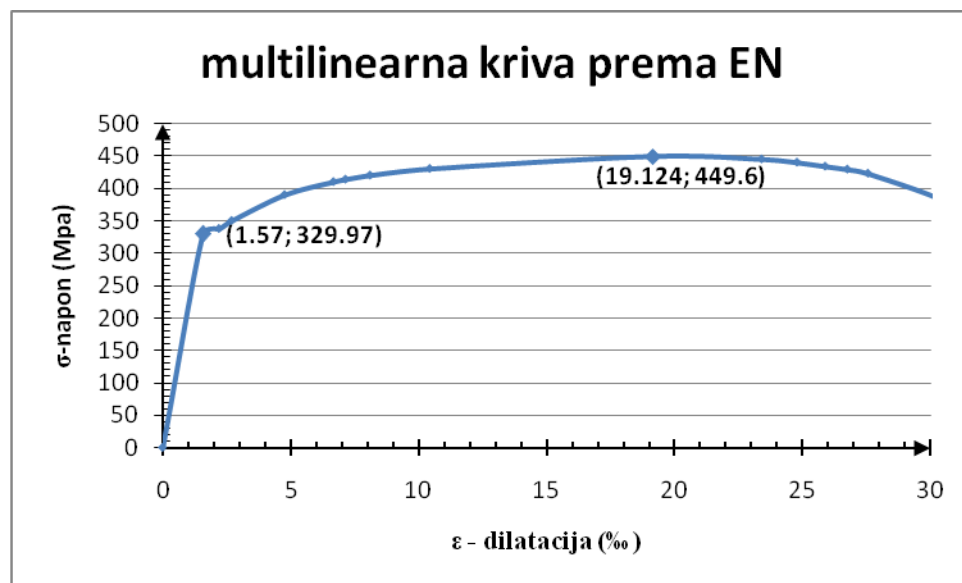
U okviru nelinearne analize, sračunate su veličine napona i deformacija na osnovu različitih materijalnih modela u elasto-plastičnoj oblasti. To znači da je, na primer, za model A3 za isti nosač izvršena numerička simulacija za pet različitih načina ponašanja istog materijala tokom opterećivanja do loma, prema sledećem:

- EN1993-1-5- multilinearna kriva koja odgovara realnoj krivoj (Sl.6.4a);

- BSK07 (Švedski standard)-multilinearna kriva prema Sl 6.3, a za konkretne modele prikazana je na Sl.6.4b;
- EN1993-1-5-bilinearna kriva sa tangentsnim modulom  $E_t=E/10000$  (Sl.6.4c);
- Bilinearna kriva sa tangentsnim modulom  $E_t=E/1000$  (Sl.6.4d);
- EN1993-1-5-bilinearna kriva sa tangentsnim modulom  $E_t=E/100$  (Sl.6.4e);
- Bilinearna kriva sa tangentsnim modulom  $E_t=E/12.5$  (Sl.6.4f).

Modul elastičnosti iznosi za sve nosače 210GPa.

Za multilinearnu krivu na Sl.6.4a, izvršena je aproksimacija realne krive  $\sigma$ - $\varepsilon$  za epruvetu 30, prikazanoj na Sl.6.1, u nekoliko tačaka, a vrednosti su uvećane prema  $\sigma_{true} = \sigma(1 + \varepsilon)$  i  $\varepsilon_{true} = \ln(1 + \varepsilon)$  u skladu sa Evropskim propisima EN1993-1-5. Na taj način dobijaju se vrednosti  $f_y=329.97$  MPa i  $f_u=449.6$  MPa.



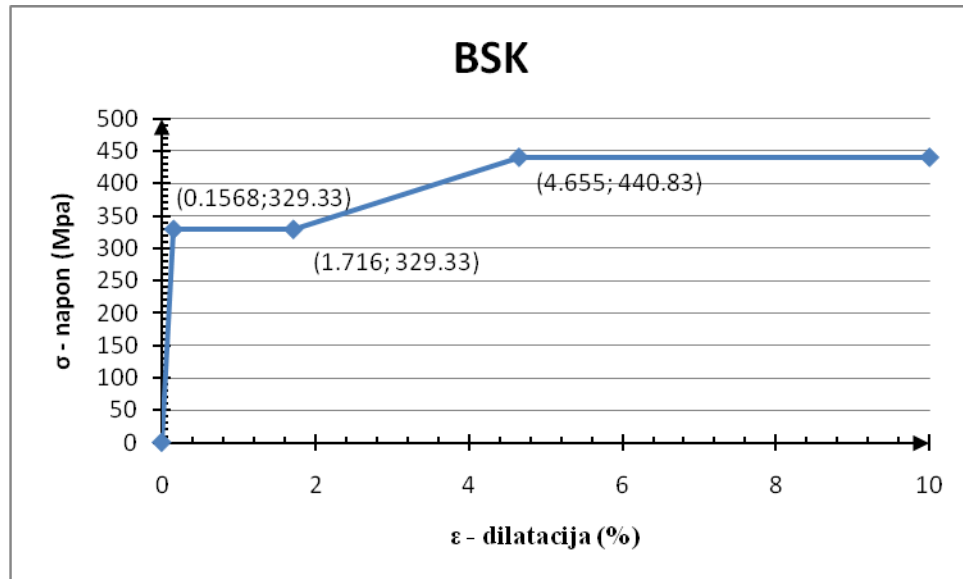
Sl.6.4a: EN1993-1-5- multilinearna kriva koja odgovara realnoj krivoj materijala prema Sl.6.2.d

Multilinearna kriva prema BSK07, Švedskom standardu, pokazala je zadovoljavajuće rezultate u doktoratu (Braun, B. [10]). Za naša istraživanja je uzeta prema formulama prikazanim u okviru slike Sl.6.2, pri čemu su za karakteristične vrednosti napona uzete srednje vrednosti odgovarajućih kolona iz Tabele 6.1, tj.  $f_y=329,33$  MPa i  $f_u=440,83$  MPa.

$$\varepsilon_1 = \frac{f_y}{E} = 0.001568$$

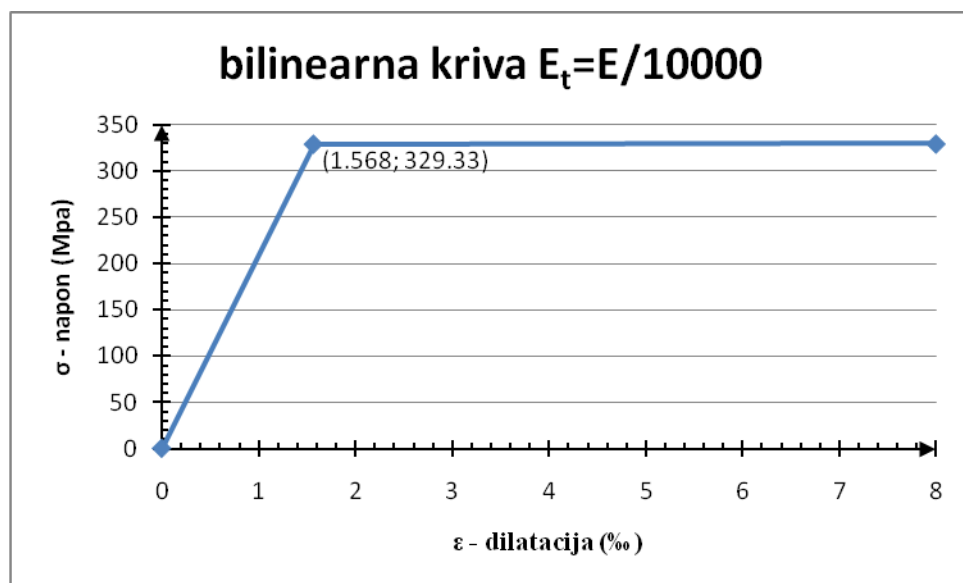
$$\varepsilon_2 = 0.025 - 5 \frac{f_y}{E} = 0.01716$$

$$\varepsilon_3 = 0.02 + 50 \frac{f_u - f_y}{E} = 0.04655$$

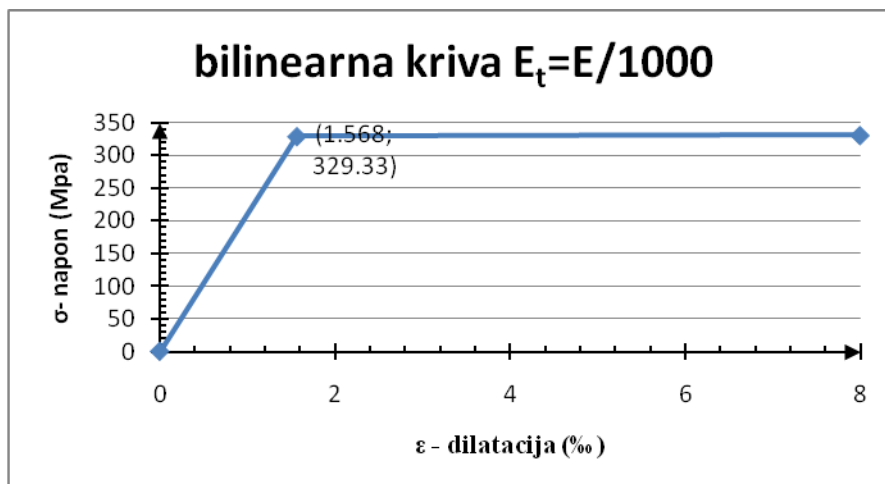


Sl.6.4b: BSK07 (Švedski standard)-multilinerana kriva

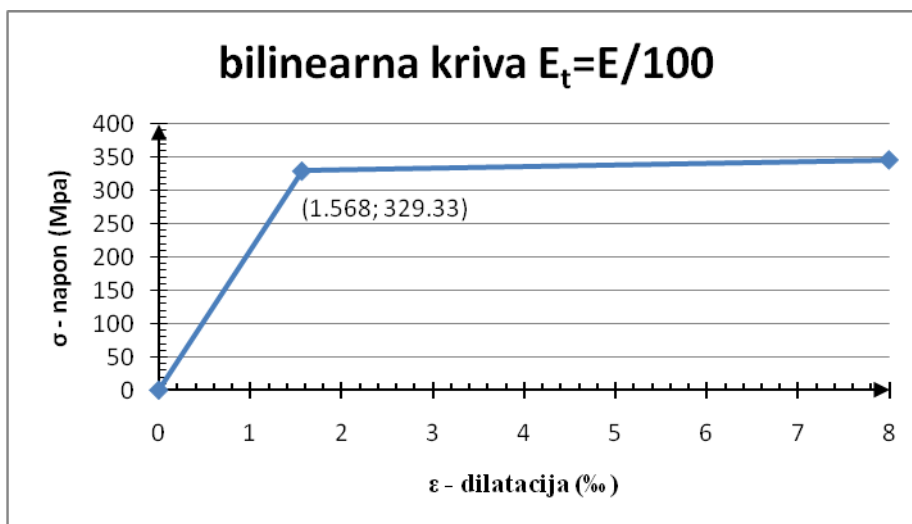
Za bilinearne krive u nastavku uzeta je vrednost napona tečenja iz Tabele 6.1,  $f_y=329,33$  MPa.



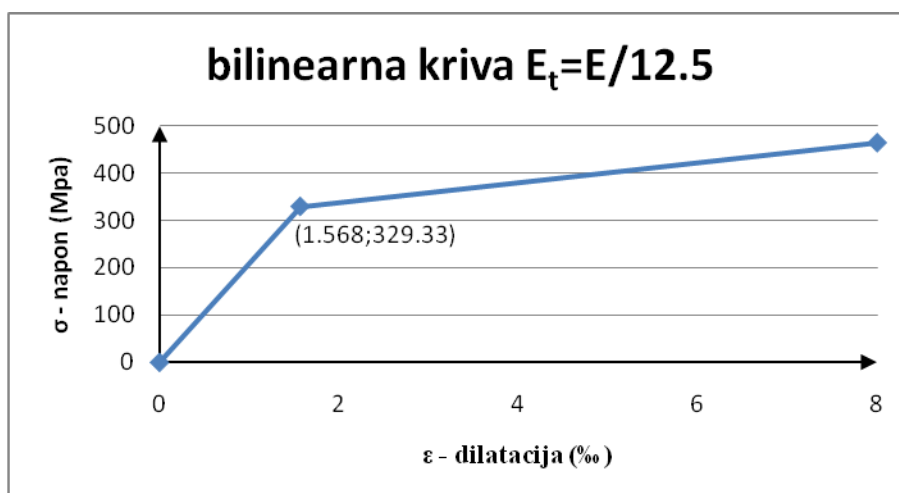
Sl.6.4c: EN1993-1-5-bilinerana kriva sa tangentsnim modulom  $E_t=E/10000$



Sl.6.4d: Bilinearna kriva sa tangentnim modulom  $E_t = E/1000$



Sl.6.4e: EN1993-1-5-bilinearna kriva sa tangentnim modulom  $E_t = E/100$



Sl.6.4f: Bilinearna kriva sa tangentnim modulom  $E_t = E/12.5$

U poglavlju 7 prikazani su rezultati deformacija i napona za različite načine zadavanja ponašanja materijala. Takođe, izvršena je i analiza veličine graničnog opterećenja u zavisnosti od materijalnih modela i ovi podaci su upoređeni sa eksperimentalnim podacima. Pored materijalnih modela koji su predloženi u aktuelnim Evropskim propisima, uzeti su u obzir i bilinearna kriva sa tangentnim modulom  $E_t=E/1000$  zbog dodatnog istraživanja, i bilinearna kriva sa tangentnim modulom  $E_t=E/12.5$  jer je dala zadovoljavajuće rezultate u analizi u doktorskoj disertaciji Živkovića iz 2015 godine [111].

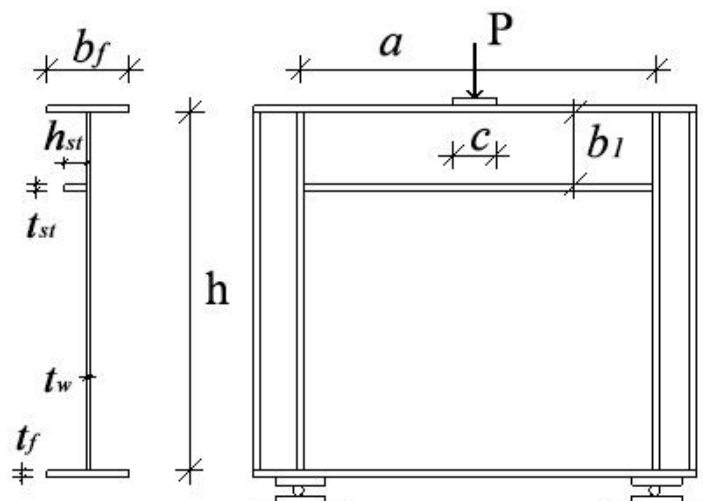
### **6.2.3 Geometrijske karakteristike nosača**

#### **6.2.3.1 Nosači bez imperfekcija**

Geometrija nosača je odabrana na osnovu prethodno opisanih eksperimenata u poglavlju 5. Numerički model nosača je istih dimenzija kao i model korišćen u eksperimentalnim ispitivanjima preuzetim iz literature [70]. Geometrija modela nosača sa svim dimenzijama prikazana je na Sl.6.5. Ispitivana su četiri nosača istih dimenzija od kojih su dva bez podužnog ukrućenja, a dva sa podužnim ukrućenjem. Dimenzije nosača prikazane su u Tabeli 6.2.

Cilj ovog istraživanja je, pored ostalog, i ispitivanje uticaja realnih imperfekcija rebra nosača, na stanje napona i deformacija nosača kao i veličinu graničnog opterećenja, tako da su modeli nosača za kompjuterske simulacije eksperimenata uzeti kao nosači bez i nosači sa imperfekcijama.

U prvom delu istraživanja korišće se numerički modeli sa realnim geometrijskim imperfekcijama, merenim pri eksperimentalnom istraživanju, kako bi se uporedili relevantni rezultati testova kompjuterskih simulacija sa eksperimentalnim modelima preuzetim iz literature, prikazanim u poglavlju 5. Nakon usvajanja odgovarajućih numeričkih modela, koji budu pokazali zadovoljavajuće rezultate u pogledu slaganja sa stvarnim eksperimentalnim modelima, pružaju se mogućnosti za dodatne kompjuterske simulacije u okviru koncipiranih parametarskih analiza.



Sl.6.5 Model nosača

Tabela 6.2 Osnovne geometrijske karakteristike modela nosača

Oznaka nosača	$a$	$h_w$	$t_w$	$b_f$	$t_f$	$c$	$h_{st}$	$t_{st}$	$b_1$
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
A1	500	500	4	120	8	50	0	0	0
A2	500	500	4	120	8	150	0	0	0
A3	500	500	4	120	8	50	30	8	100
A7	500	500	4	120	8	150	30	8	100

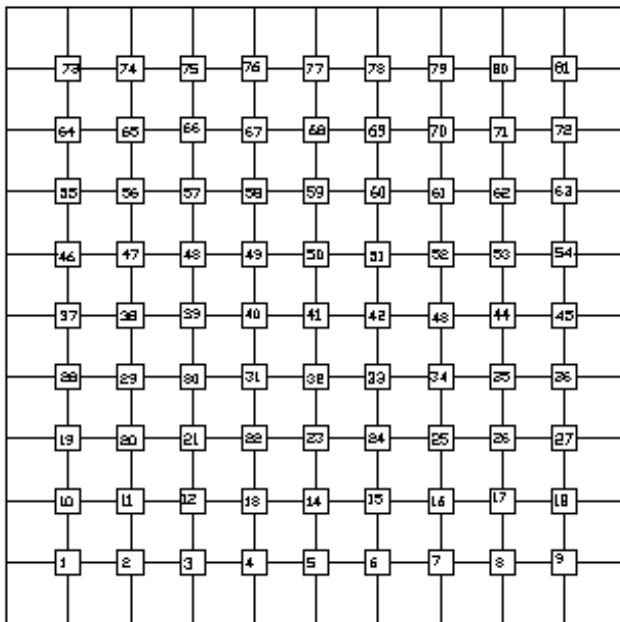
### 6.2.3.2 Nosači sa imperfekcijama

Kako su pri izvođenju eksperimenta Markovića (videti poglavlje 5) izmerene početne geometrijske imperfekcije rebra nosača, koje smo verodostojno preuzeli od autora tokom naših istraživanja, modelirana su rebra nosača na način opisan u daljem tekstu.

Svi elementi nosača, osim rebra i stranice podužnog ukrućenja koja je u kontaktu sa rebrom, uzeti su kao idealno ravni, odnosno, bez imperfekcija, a to su: pojasevi, poprečna ukrućenja, ploča za unošenje opterećenja i oslonci. Najpre je formirana geometrija modela nosača u programu SolidWorks 2013, a zatim je dalja priprema, modeliranje, numerička simulacija testova i analiza sprovedena u programu ANSYS Workbench15.0.

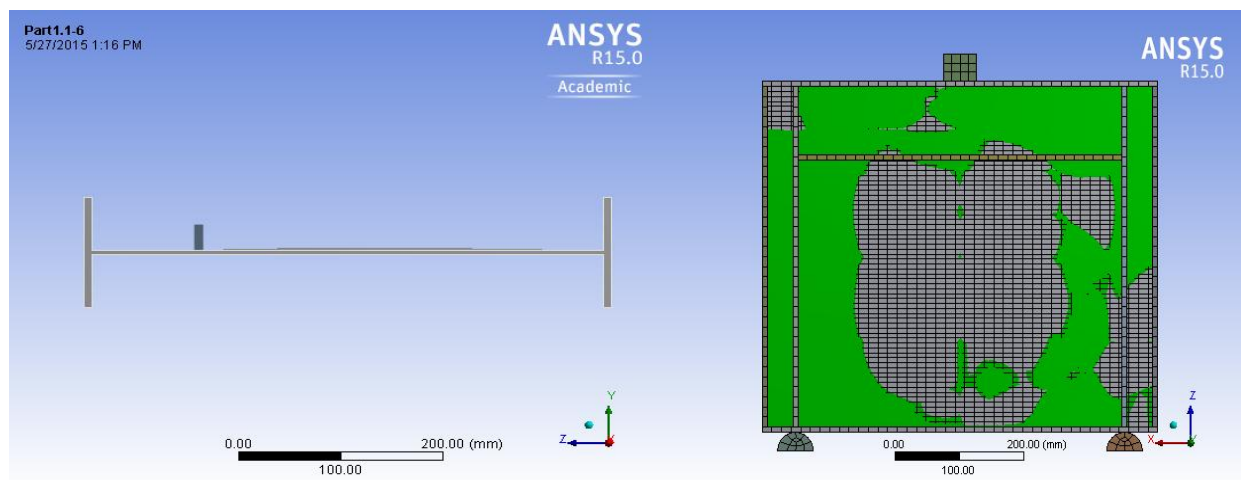
Rebra nosača su modelirana kao ploče sa realnim početnim imperfekcijama prema verodostojnim podacima iz eksperimenta (videti poglavlje 5). Za mrežu od  $11 \times 11$  tačaka,

prikazanu u prethodnom poglavlju na Sl.5.2, početne imperfekcije su zadane za 81. tačku na rebru, dok su ostale tačke na ivicama ploče unete bez početnih imperfekcija. Razmak između tačaka na rebru iznosi 50 mm a njihov raspored prikazan je na Sl.6.6.



Sl.6.6. Mreža tačaka u kojima su zadavane početne imperfekcije rebra nosača

Na bazi tih tačaka, u okviru programa je formirana površina rebra nosača sa početnim imperfekcijama. Debljina rebra je u svim tačkama površine jednaka, i usvojeno je da iznosi 4 mm. Pored rebra, konstruisani su i ostali elementi nosača, čime je formirana kompletna geometrija modela.



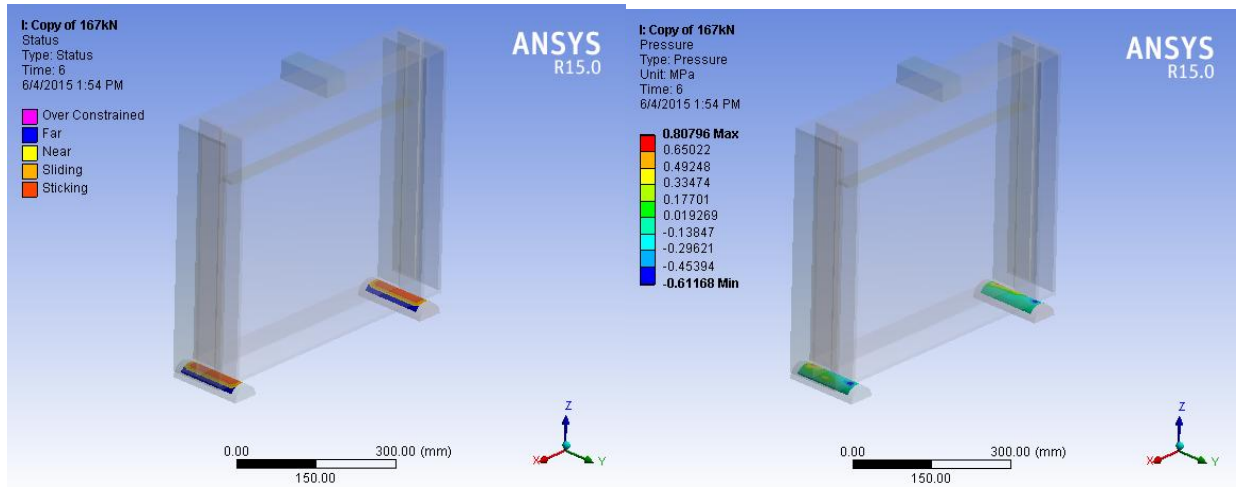
Sl.6.7 Prikaz početne geometrije rebra nosača sa početnim imperfekcijama (nosač A3)



## 6.2.4 Numerički model nosača

### 6.2.4.1 Granični uslovi i opterećenje

Granični uslovi nosača definisani su na sledeći način. Oslonci nosača definisani su, po uzoru na eksperiment, kao poluvaljci, koji su upravni na ravan rebra nosača i čiji je kontakt sa donjom stranicom donjeg pojasa u jednoj duži širine pojasa. Oslonci su, kao i ostali delovi nosača, modelirani konačnim elementima tipa SOLID186, pa su i na mestima oslanjanja konačni elementi istog tipa. Kontakt oslonaca i nosača je definisan kao *bonded* (povezana tela), i ostvaren je preko kontaktnih elemenata tipa CONTA174 (za detalje videti [2]). Na Sl.6.8 prikazani su rezultati kontaktne analize za nosač A3 prema multilinearnoj krivoj sa Sl.6.4a, za silu od 167 kN. Na Sl.6.8 levo su prikazani uticaj kontakta (status), pri čemu su u legendi označeni redom odozgo na dole: prekoračenje, udaljenost, blizina, klizanje i prianjanje. Na Sl.6.8 desno, prikazane su vrednosti pritiska izraženi u MPa.



Sl.6.8 Kontaktni elementi oslonaca i donjeg pojasa nosača A3 za silu pritiska od 167kN

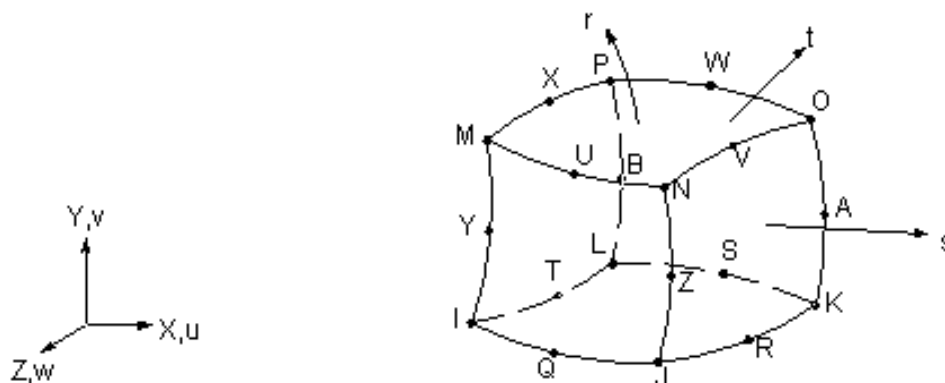
Oslonci su sa donje strane fiksirani, tj. sprečeno je pomeranje i obrtanje u svim pravcima. Pri eksperimentalnom ispitivanju nosača model se nalazio u specijalno dizajniranom ramu i bio je opterećivan preko ploče za nanošenje opterećenja, upravno na nosač bez mogućnosti bočno torzionog izvijanja. Zbog toga je sprečeno pomeranje gornje stranice ploče za nanošenje opterećenja u svim pravcima, osim po vertikali, u pravcu nanošenja opterećenja. Na taj način je izbegnuta rotacija pojasa i ploče za nanošenje opterećenja. Mora se napomenuti da je kod realnih

konstrukcija bočno torziono izvijanje pojasa izvesno, a da je ovo ograničenje prisutno kako bi se na adekvatan način prikazao eksperimentalni model.

Opterećenje nosača zadavano je kao površinsko, jednakopodeljeno opterećenje po čitavoj širini pojasa, a na određenim dužinama na gornjem pojasu. Opterećenje je aplicirano preko odgovarajuće ploče širine jednake širini pojasa  $b_f=120$  mm i debljine 40 mm i različitih dužina zavisno od tipa modela. Dužina unošenja opterećenja je za dva nosača iznosila 50 mm (nosači A1 i A3) a za druga dva 150 mm (nosači A2 i A7).

#### 6.2.4.2 Diskretizacija modela mrežom konačnih elemenata

Na osnovu geometrije nosača, izvršena je diskretizacija numeričkog modela nosača deljenjem na mrežu konačnih elemenata odabranog tipa. Odabrani su elementi iz baze elemenata programskog paketa ANSYS Workbench 15, i to elementi tipa SOLID186. Ovaj tip konačnog elementa je zapreminski i predstavlja parabolični 3-D element. Element je definisan sa 20 čvorova, sa tri stepena slobode po svakom čvoru, i to pomeranja u pravcima x, y i z osa. Podržava plastičnost, elastičnost, puženje materijala, velike ugibe, velike deformacije i dr., pa je veoma pogodan za nelinearnu analizu (za detalje videti [2]). Na Sl.6.9 je prikazan konačni element SOLID186.



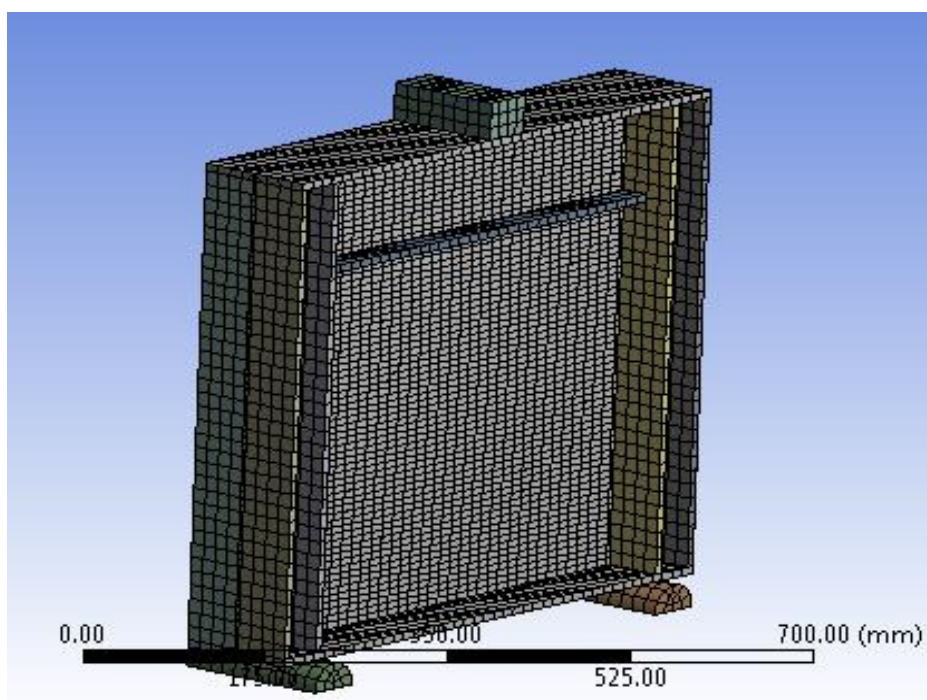
Sl.6.9 Prikaz konačnog elementa SOLID186 (preuzeto iz [2])

U tabeli 6.3 prikazan je broj čvorova i broj konačnih elemenata za svaki od četiri nosača.

*Tabela 6.3 Broj čvorova i broj konačnih elemenata tipa SOLID186*

nosač	Broj čvorova	Broj KE tipa SOLID186
A1	37323	5239
A2	38109	5383
A3	37940	5266
A7	38810	5492

Izvršena je konvergencija mreže konačnih elemenata tako što je varirana, odnosno smanjivana veličina konačnog elementa (pri čemu se povećava gustina mreže). Za te varirane veličine konačnih elemenata, a pri istoj veličini spoljašnjeg opterećenja, sračunati su naponi i deformacije. Gustina mreže bila je zadovoljavajuća u trenutku kada su vrednosti napona (MPa) i deformacija (mm) dostigli razliku ne veću od 10%. Na taj način je usvojena veličina konačnog elementa od 15 mm, videti sl.6.10.



*Sl.6.10 Mreža konačnih elemenata za nosač sa podužnim ukrućenjem*

### 6.2.4.3 Parametri analize

Opterećivanje nosača je vršeno u šest koraka korišćenjem funkcije *Step controls*. Kako je modeliranje nosača bazirano na eksperimentalno dobijenim rezultatima poznata je i vrednost očekivanog graničnog opterećenja za svaki od nosača. Zbog toga je u prvom koraku zadato opterećenje od 100 kN, a u narednim koracima su inkrementi manji u zavisnosti od nosača (za svaki nosač očekuje se različito granično opterećenje, a način dobijanja graničnog opterećenja opisan je u delu 8.2). U okviru toga izabrana je funkcija *Auto time stepping*, koja služi sa optimizaciju vremena dobijanja rešenja, podešavanjem veličine nanošenja zadanog opterećenja u jedinici vremena, koja je naročito korisna za nelinearne probleme. Ova opcija pruža dodatnu prednost da ukoliko nije dobijena konvergencija rešenja usvaja se prethodno dobijena vrednost traženog rešenja (videti [2]). Inkrement opterećenja u okviru jednog koraka je kontrolisan ovom funkcijom unutar granica opterećenja koje su prethodno postavljene za taj korak. Postoji mogućnost određivanja maksimuma, minimuma i početnog inkrementa opterećenja. Rešavanje će početi sa „početnim“ inkrementom ali onda automatskom procedurom može varirati dalje u koracima u rasponu propisane minimalne i maksimalne vrednosti. Alternativno, zato što korak uvek ima vremenski period (početno i krajnje vreme) možemo takođe ekvivalentno odrediti početne, minimalne i maksimalne veličine vremenskog koraka komandom *time step*. Ovde pojam "vremena" zapravo ne predstavlja stvarno vreme (mereno časovnikom), već uslovnu kategoriju koja služi za unošenje koraka opterećenja. Samo u dinamičkoj analizi bi ovo zaista predstavljalo vreme.

Mora se napomenuti da u nekim slučajevima nije korisna upotreba ove funkcije, kao što su seizmičko opterećenje, dinamička opterećenja i slično (za detalje videti [2]).

### ***Rezultati analize***

Za sve nosače sračunata je totalna deformacija, deformacija u  $y$  - pravcu, deformacija na polovini dužine rebra - srednjeg profila rebra, (koji je pretrpeo najveću deformaciju), Von-Mises-ovi naponi i naponi  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  u tačkama na rebru na kojima su bile postavljene merne trake pri eksperimentu (videti Sl.6.3-6.5).

Detaljniji prikaz rezultata i njihova analiza mogu se videti u narednom poglavlju 7.

## **7 NELINEARNO PONAŠANJE I GRANIČNA NOSIVOST NOSAČA DOBIJENA NUMERIČKOM SIMULACIJOM UZ POREĐENJE SA EKSPERIMENTALNIM REZULTATIMA**

Korišćenjem programskog paketa ANSYS Workbench 15, modelirani su nosači tipa A1, A2, A3 i A7 (videti Sl.6.5 i Tabelu 6.2). Numerička simulacija je prethodno opisana u Poglavlju 6, i u okviru nje su geometrija nosača, opterećenje i granični uslovi isti kao i na modelima iz eksperimenata opisanih u poglavlju 5.

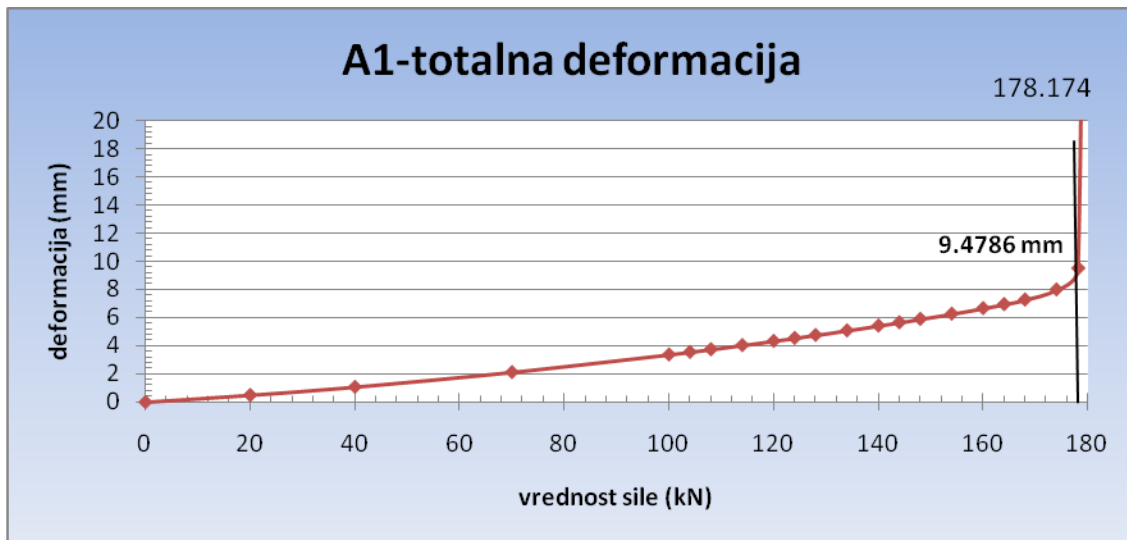
Numerička simulacija se odnosi na modele nosača bez imperfekcija i modele nosača sa realnim početnim imperfekcijama. U cilju analize, sračunate su sve relevantne vrednosti vezane za stanja napona i deformacija ispitivanih modela u karakterističnim tačkama.

### **7.1 Analiza granične nosivosti**

Jedan od glavnih ciljeva ovog modeliranja jeste određivanje granične nosivosti nosača. Sa postepenim povećanjem sile praćen je razvoj rezultatne deformacije (total deformation) i Von-Mises-ovih napona. Rezultati su prikazani na odgovarajućim dijagramima i slikama i odnose se na nosače sa materijalnim modelom prema multilinearnoj krivoj (videti Sl.6.4a). U numeričkoj analizi kriterijum za graničnu nosivost je opterećenje pri kome rešenje počne da divergira a u nosaču javlja naglo povećanje deformacije. Na isti način dobijene su granične nosivosti i za ostale tipove materijalnih modela (videti Sl.6.4b-f).

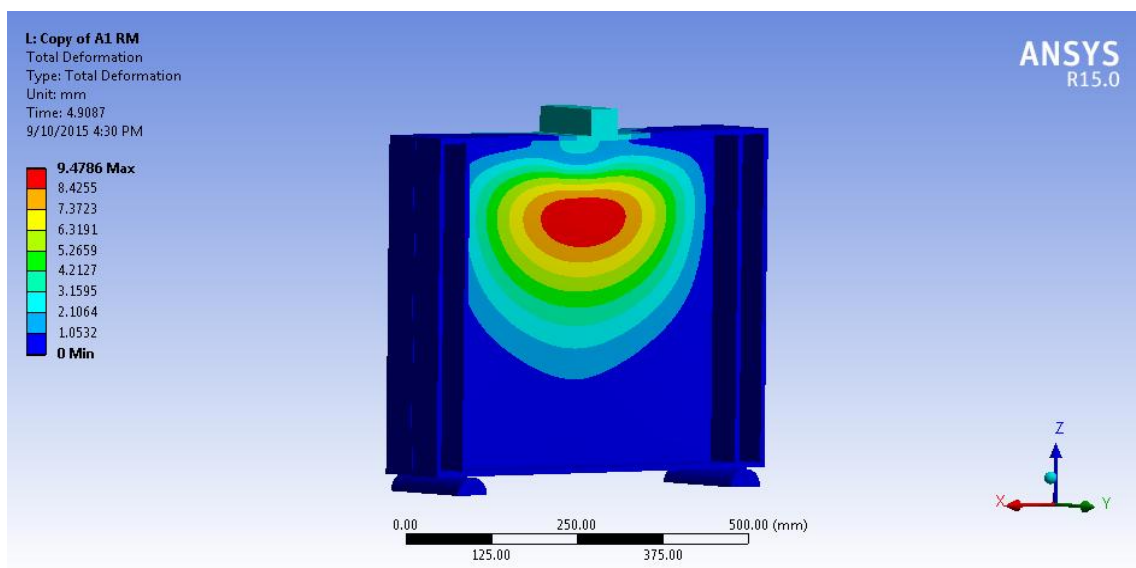
#### **7.1.1 Granična nosivost nosača A1**

Granično opterećenje iz eksperimentalnih rezultata iznosilo je 165 kN. Opterećenje je zadato u 6 koraka sa sledećim vrednostima: 1-100 kN; 2-120 kN; 3-140 kN; 4-160 kN; 5-180 kN i 6-190 kN. Rešenje konvergira sve do deformacije od 9.4786 mm što odgovara opterećenju od 178.174 kN. Nakon toga rešenje divergira i dolazi do naglog porasta deformacija i do pada vrednosti napona, a uspostavljanje ravnoteže nosača više nije moguće. Na dijagramu (videti Sl.7.1) je prikazan razvoj deformacija (totalne deformacije) sa porastom sile, do dostizanja graničnog opterećenja za nosač sa materijalnim modelom prema multilinearnoj krivoj.



Sl.7.1 Dijagram razvoja totalne deformacije sa porastom sile za nosač A1

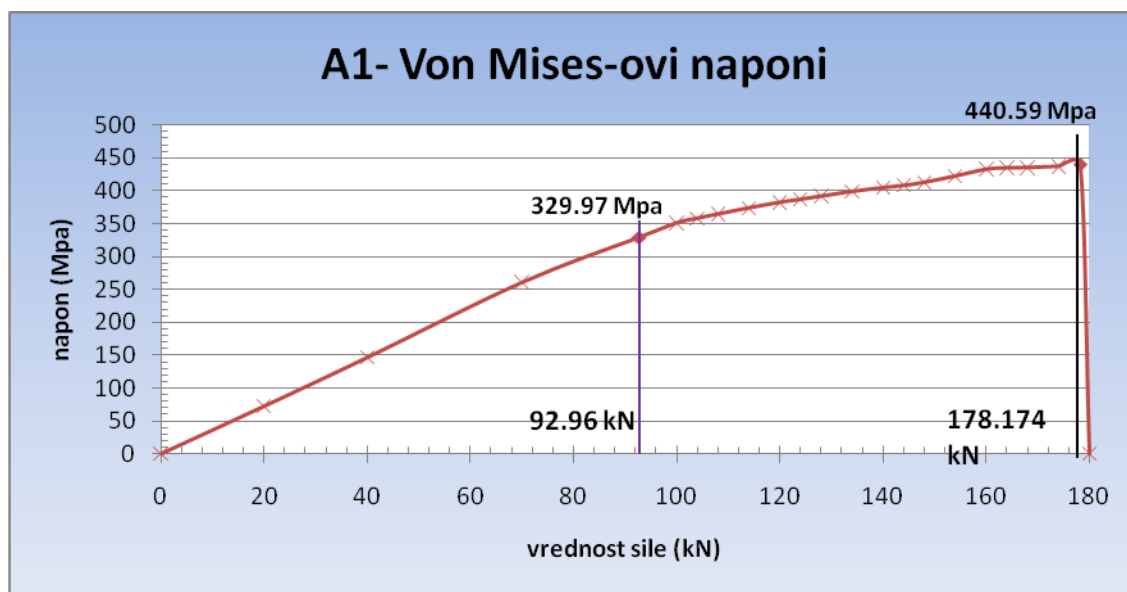
Na sledećoj slici (videti Sl.7.2), prikazana je totalna deformacija nosača A1 za vrednost sile od 178,174 kN, što je određeno za granično opterećenje.



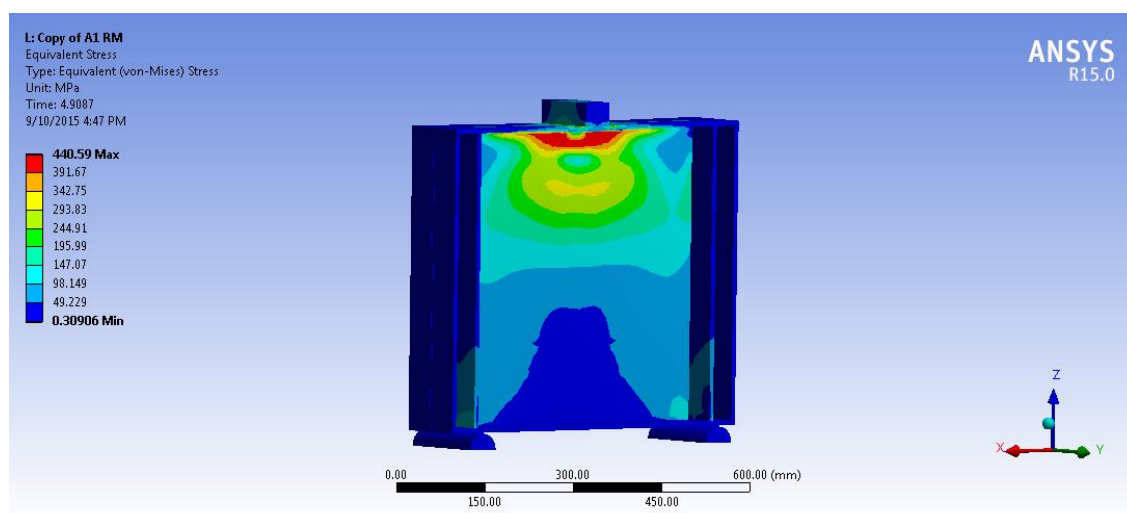
Sl 7.2 Totalna deformacija nosača A1 za vrednost graničnog opterećenja od 178.174 kN

Na Sl.7.3 je prikazan dijagram Von-Mises-ovih napona za vrednost graničnog opterećenja. Pri toj vrednosti sile (178.174), dostiže se najveća vrednost napona od 440.59 MPa, dok zatezna čvrstoća čelika iznosi  $f_u=449.6$  MPa. Sa slike Sl.7.3 se vidi da pri vrednosti sile od

92.96 kN (52.17% od granične vrednosti sile) u pojedinim tačkama su dostignuti naponi tečenja ( $f_y=329.97$  MPa). Za dobijenu vrednost graničnog opterećenja i Von-Mises-ov napon dostiže maksimalnu vrednost, a nakon toga naglo opada. Prikaz stanja napona dat je na Sl.7.4.



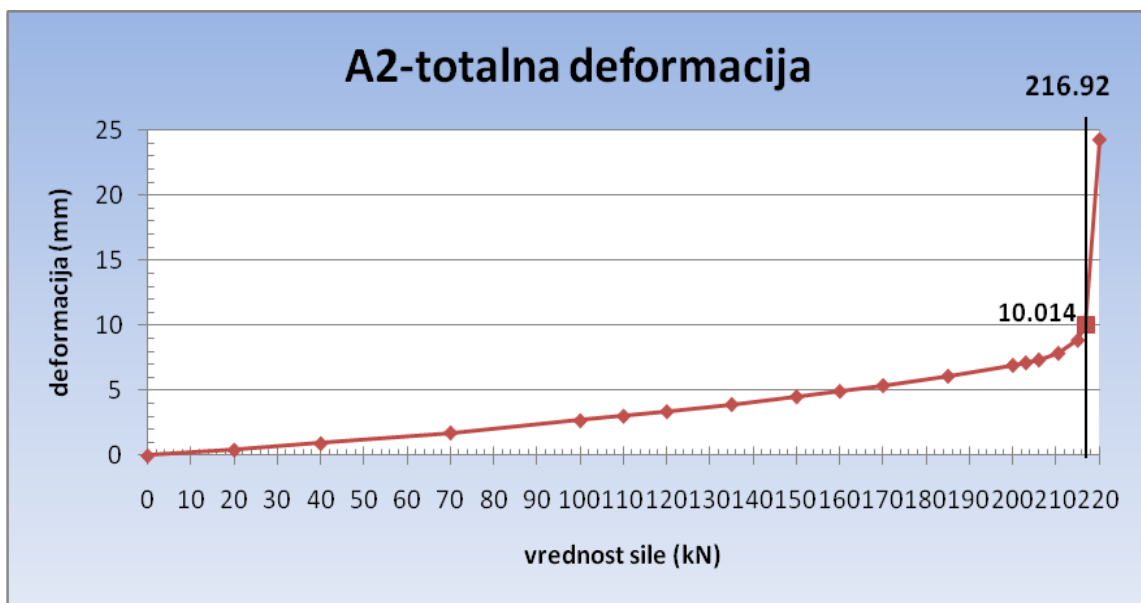
Sl.7.3 Dijagram Von-Mises-ovih napona sa porastom sile za nosač A1



Sl.7.4 Prikaz stanja Von-Mises-ovih napona nosača A1 za silu od 178.174 kN

### 7.1.2 Granična nosivost nosača A2

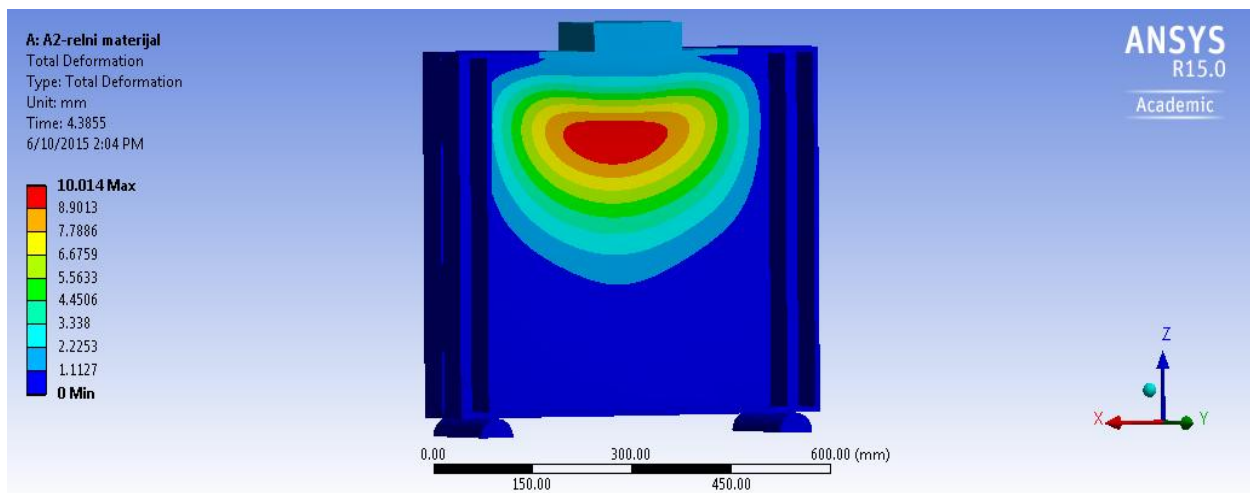
Očekivano opterećenje za nosač A2 prema eksperimentalnim rezultatima iznosi 215 kN. Numeričkom simulacijom nosača A2, sa materijalnim modelom prema multilinearnoj krivoj, opterećenje je zadavano u sledećim koracima: 1-100 kN; 2-150 kN; 3-200 kN; 4-215 kN; 5-220 kN i 6-230 kN. Dobijena je divergencija rešenja pri deformaciji od 10.014 mm kojoj odgovara granično opterećenje od 216.9275 kN. Nakon dostizanja ove vrednosti deformacije su sa malim porastom sile počele da rastu velikom brzinom i konvergencija rešenja nije dobijena. Na Sl.7.5 je prikazan dijagram razvoja deformacija (totalne deformacije) sa porastom sile do dostizanja graničnog opterećenja od 216.9275 kN i nagli porast deformacija nakon dostizanja graničnog opterećenja do sile od 220 kN.



Sl.7.5 Dijagram razvoja totalne deformacije sa porastom sile za nosač A2

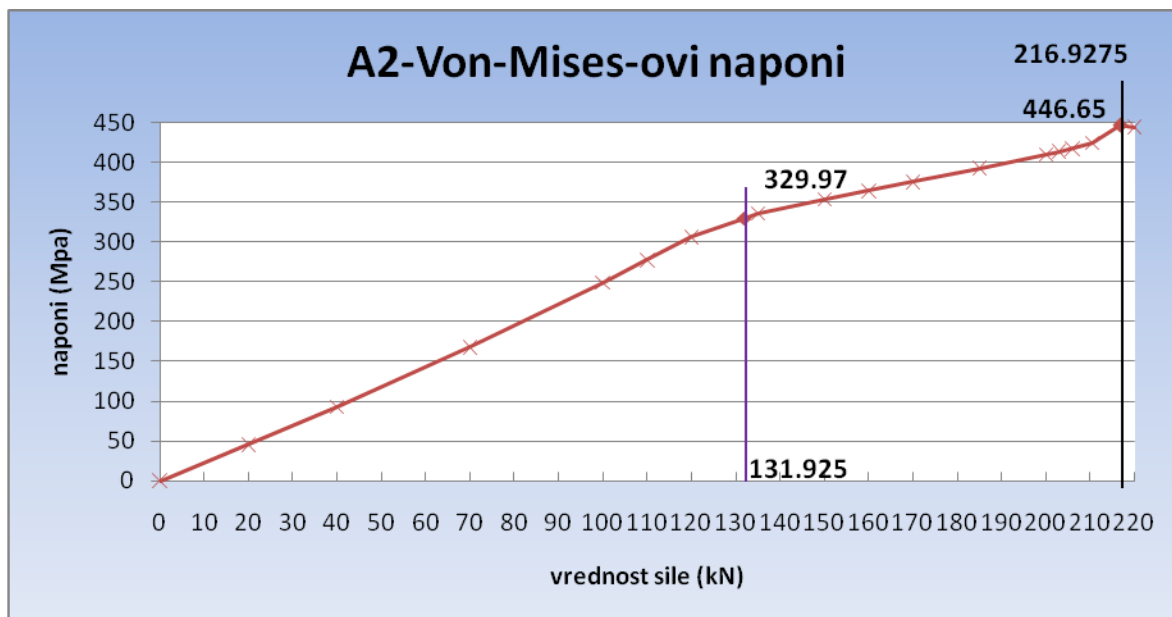
Na sledećoj slici, Sl.7.6, prikazana je totalna deformacija nosača A2 za vrednost sile od 216.9275 kN, što predstavlja granično opterećenje.



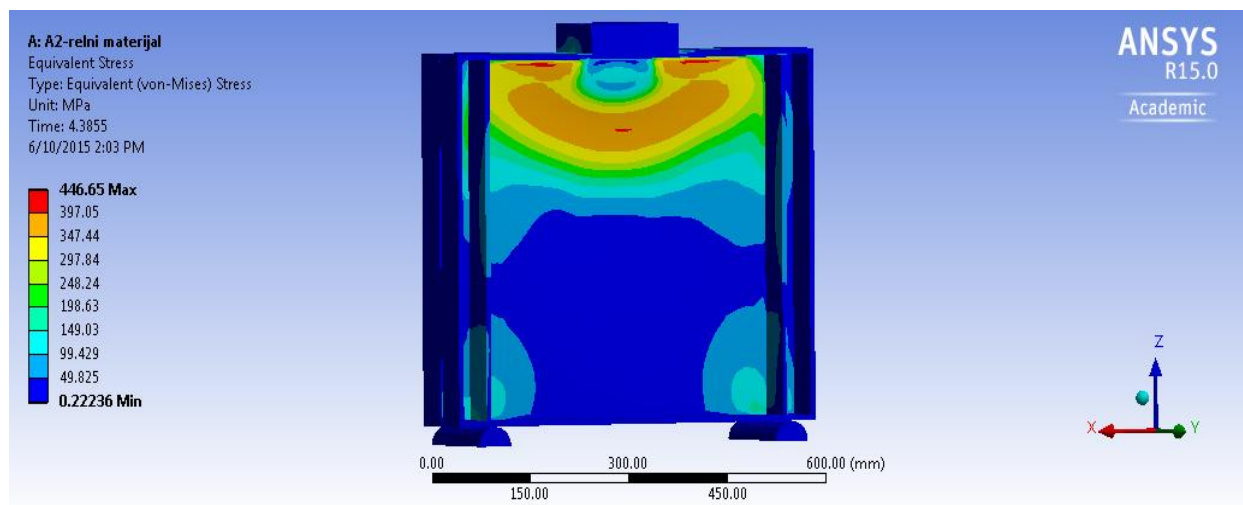


Sl.7.6 Totalna deformacija nosača A2 za vrednost graničnog opterećenja od 216.9275kN

Stanje napona prikazano je na Sl.7.7 i Sl.7.8. Pri sili od 131.9 kN (60.8% od graničnog opterećenja) dostignut je napon tečenja u pojedinim tačkama, a najveća vrednost Von-Mises-ovog napona od 446.65 MPa (zatezna čvrstoća  $f_u=449.6$  MPa), dostignuta je pri graničnom opterećenju od 216.92 kN (videti Sl.7.7).



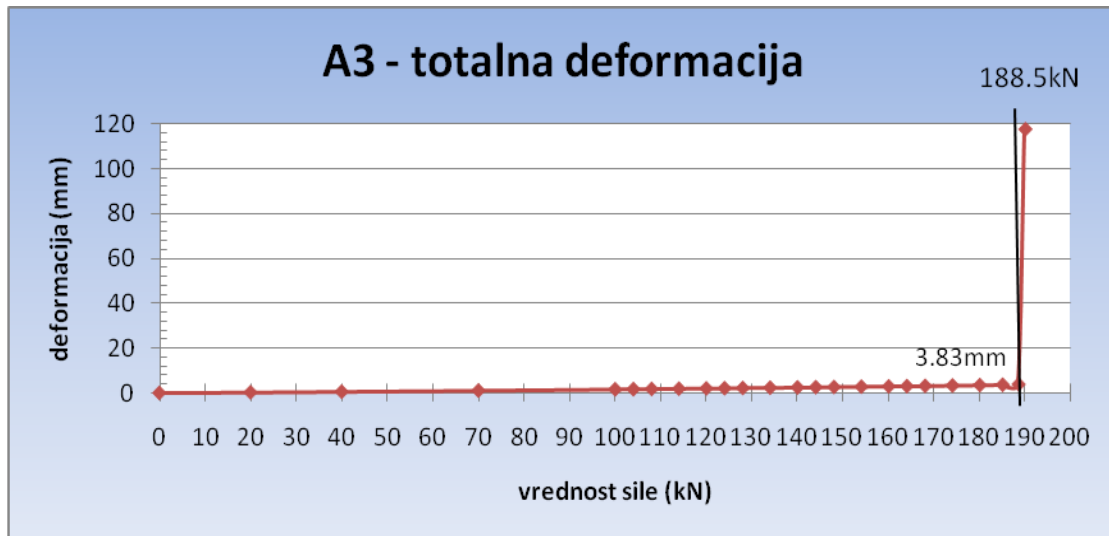
Sl.7.7 Dijagram Von-Mises-ovih napona sa porastom sile za nosač A2



*Sl.7.8 Prikaz stanja Von-Mises-ovih napona nosača A2 za silu od 216.9275 kN*

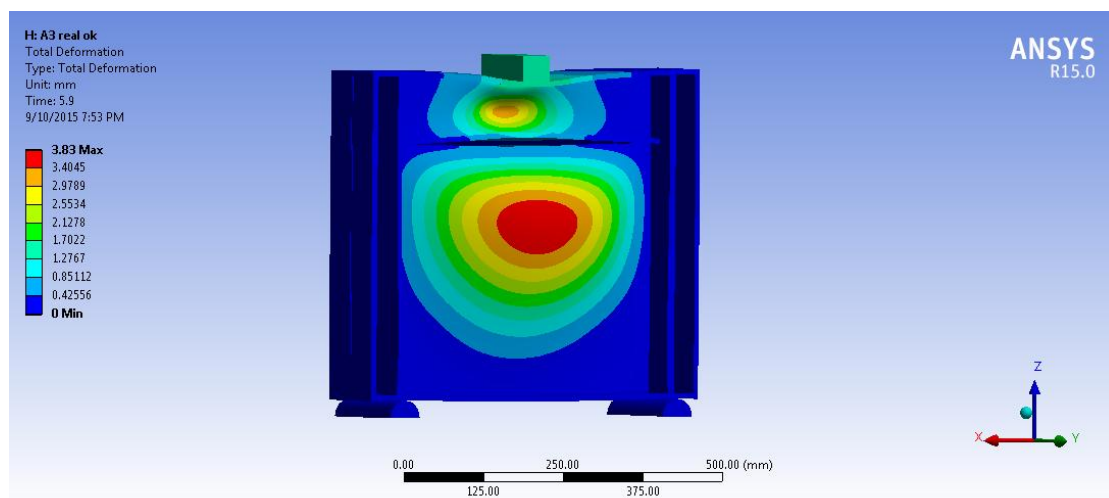
### 7.1.3 Granična nosivost nosača A3

Na Sl.7.9 je prikazan dijagram sila-deformacija za nosač A3 sa materijalnim modelom prema multilinearnoj krivoj. Eksperimentalno dobijeno granično opterećenje iznosi 183 kN. Numeričkom simulacijom nosača A3, sa materijalnim modelom prema multilinearnoj krivoj opterećenje je zadavano u sledećim koracima: 1-100 kN; 2-120 kN; 3-140 kN; 4-160 kN; 5-180 kN i 6-190 kN. Dobijena je divergencija rešenja pri deformaciji od 3.83 mm kojoj odgovara granično opterećenje od 188.5 kN. Prikazan je postepen razvoj deformacija do graničnog opterećenja i nagli porast deformacija nakon dostizanja graničnog opterećenja pri čemu nije postignuta konvergencija rešenja a nakon dostizanja ove vrednosti deformacije sa malim porastom sile naglo rastu. Na Sl.7.10 je prikazana totalna deformacija nosača A3 za vrednost graničnog opterećenja.



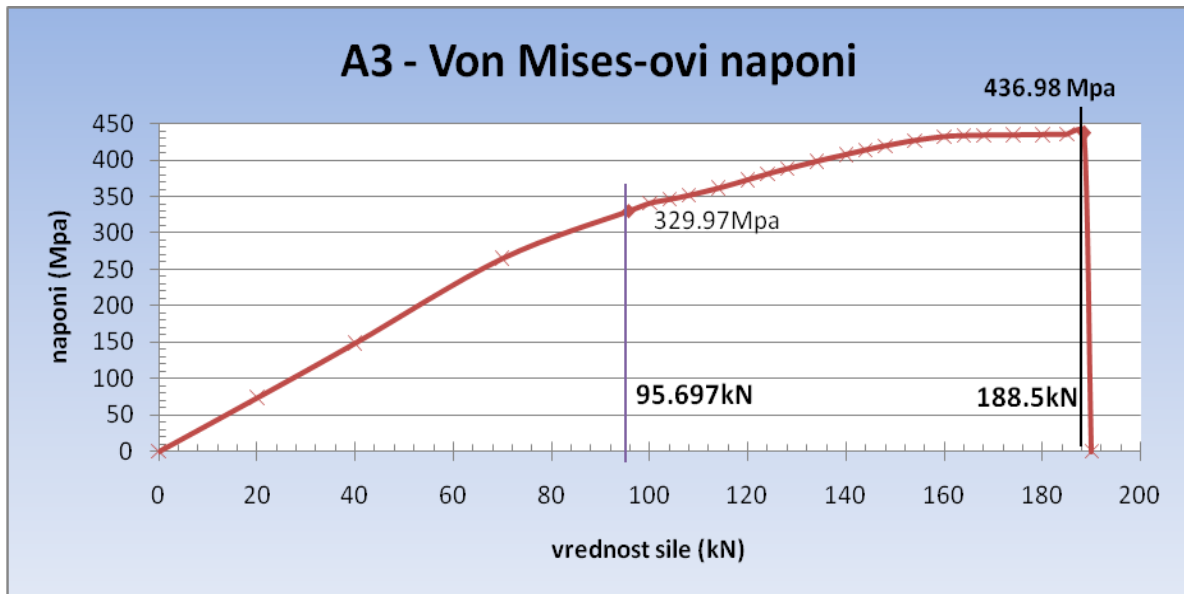
Sl.7.9 Dijagram razvoja totalne deformacije sa porastom sile za nosač A3

Na sledećoj slici, Sl.7.10, prikazana je totalna deformacija nosača A3 za vrednost sile od 188.5 kN, što je usvojeno za granično opterećenje.



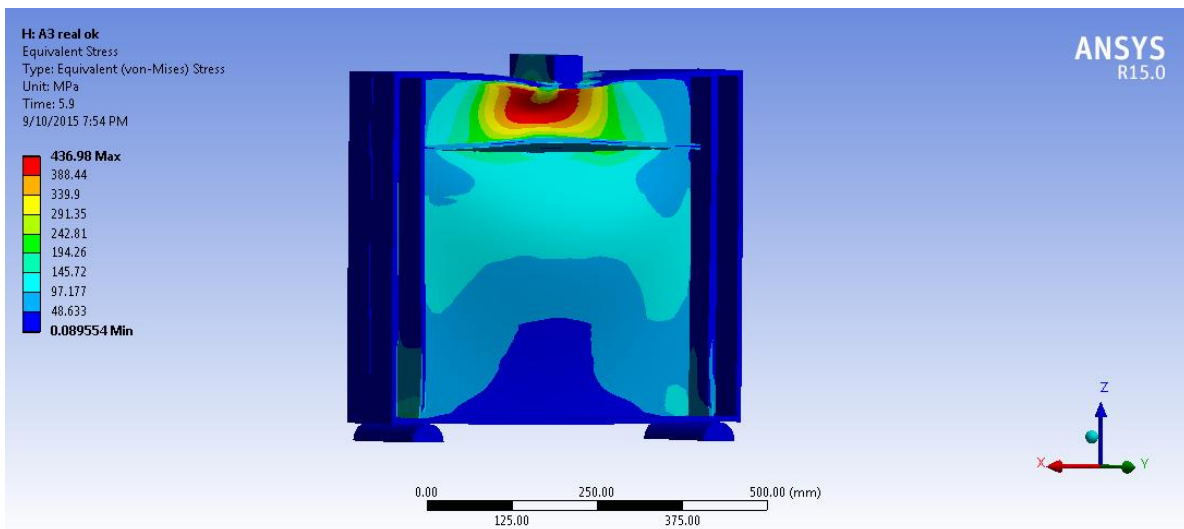
Sl.7.10 Totalna deformacija nosača A3 za vrednost graničnog opterećenja od 188.5 kN

Razvoj naprezanja (Von-Mises-ovih napona), prikazan je na sledećim slikama. Kao i u prethodnim slučajevima po dostizanju graničnog opterećenja (188.5 kN) i vrednost napona je najveća i iznosi 436.98 MPa (zatezna čvrstoća  $f_u=449.6$  MPa), a pri vrednosti sile od 95.697 kN (50.77% od graničnog opterećenja) dostiže se napon tečenja u pojedinim tačkama (videti Sl.7.11).



Sl.7.11 Dijagram Von-Mises-ovih napona sa porastom sile za nosač A3

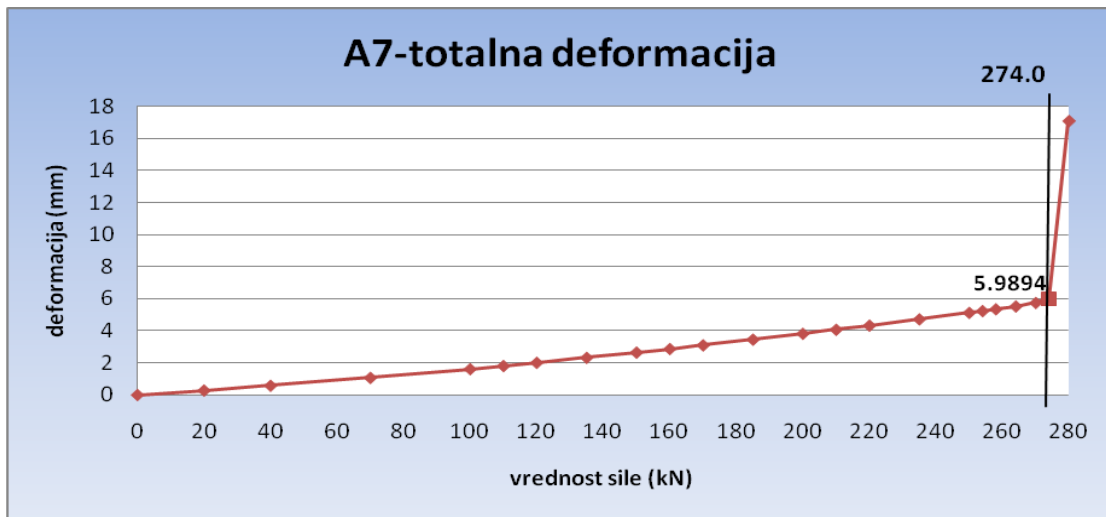
Na Sl.7.12 je prikazano stanje Von-Mises-ovih napona za vrednost graničnog opterećenja od 188.5 kN.



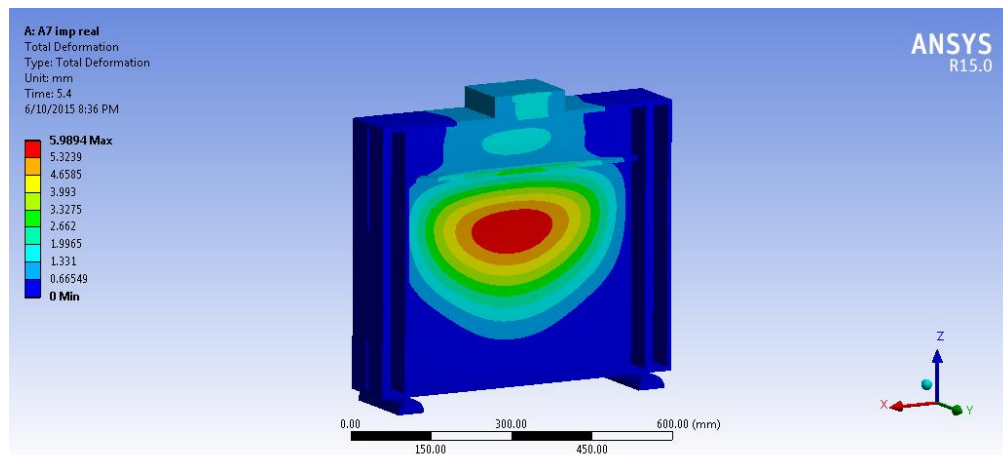
Sl.7.12 Prikaz stanja Von-Mises-ovih napona nosača A3 za silu od 188.5 kN

### 7.1.4 Granična nosivost nosača A7

Granična nosivost je određena kao i u prethodnim slučajevima. Očekivano granično opterećenje je iznosilo 255 kN. Opterećenje je zadavano u sledećim koracima: 1-100 kN; 2-150 kN; 3-200 kN; 4-250 kN; 5-270 kN i 6-280 kN. Dobijena je divergencija rešenja pri deformaciji od 5.9894 mm kojoj odgovara granično opterećenje od 274 kN. Na Sl.7.13 prikazan je porast deformacije sa porastom opterećenja do dostizanja graničnog opterećenja od 274 kN nakon čega nastupa nagli porast deformacija. Za dostignutu vrednost graničnog opterećenja prikazana je totalna deformacija nosača (videti Sl.7.14)

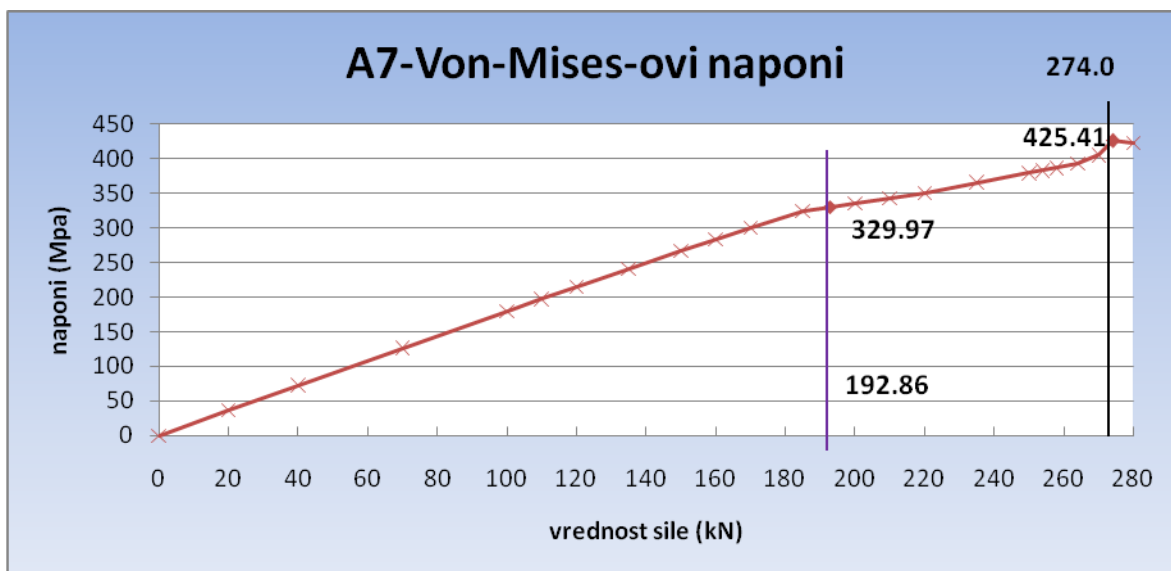


Sl.7.13 Dijagram razvoja totalne deformacije sa porastom sile za nosač A7

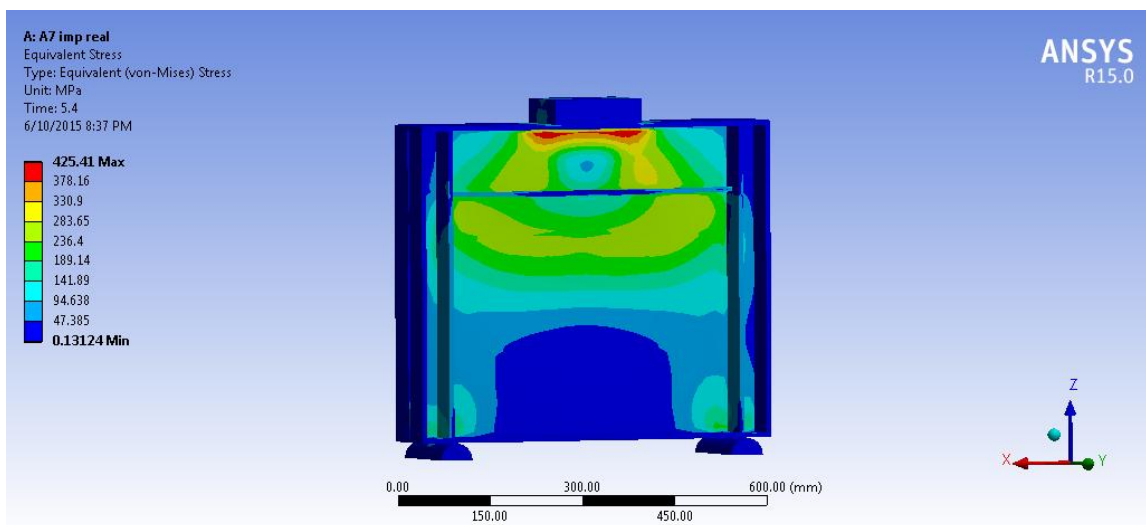


Sl.7.14 Totalna deformacija nosača A7 za vrednost graničnog opterećenja od 274 kN

Na sledećim slikama prikazani su Von-Mises-ovi naponi. Plastifikacija je postignuta u pojedinim tačkama pri vrednosti opterećenja od 192.86 kN kada je dostignut napon tečenja, što iznosi 70.39% od vrednosti graničnog opterećenja. Po dostizanju graničnog opterećenja od 274 kN, postiže se najveća vrednost napona od 425.41 MPa dok je zatezna čvrstoća  $f_u=449.6$  MPa.



Sl.7.15 Dijagram Von-Mises-ovih napona sa porastom sile za nosač A7



Sl.7.16 Prikaz stanja Von-Mises-ovih napona nosača A7 za silu od 274 kN

## 7.2 Analiza rezultata granične nosivosti nosača

Dobijene vrednosti su upoređivane sa graničnim opterećenjem dobijenim eksperimentalnim putem. U Tabeli 7.1 prikazane su vrednosti graničnog opterećenja u kN za sva četiri tipa nosača (nosač A1, A2, A3 i A7) i to dobijenog eksperimentalnim putem (eksperiment), kao i dobijenog numeričkom simulacijom (način dobijanja graničnog opterećenja opisan u prethodnom delu 7.1), i to za prikazane materijalne modele, što je detaljnije opisano u prethodnom poglavlju 6.

Brojevima je prikazana vrednost graničnog opterećenja izražena u kN, a procentima je prikazana razlika graničnog opterećenja u odnosu na granično opterećenje dobijeno eksperimentalnim putem. U poslednjoj koloni prikazana je srednja vrednost odstupanja izraženog u procentima za svaki od zadatih materijalnih modela.

*Tabela 7.1: Vrednosti graničnog opterećenja za sve tipove nosača u kN*

<b>Materijalni modeli</b>	<b>A1</b>	<b>A2</b>	<b>A3</b>	<b>A7</b>	<b>%</b>
<b>Eksperiment (100%)</b>	<b>165</b>	<b>215</b>	<b>183</b>	<b>255</b>	
<b>realna kriva</b>	178.174	216.9275	188.5	274	
<b>Δ%</b>	7.98%	0.90%	3.01%	7.45%	4.84%
<b>BSK</b>	162	196.297	164.472	262	
<b>Δ%</b>	-1.82%	-8.70%	-10.12%	2.75%	5.85%
<b>E/10000</b>	172	235.406	176.962	299.407	
<b>Δ%</b>	4.24%	9.49%	-3.30%	17.41%	8.61%
<b>E/1000</b>	174	235.642	177.396	302.591	
<b>Δ%</b>	5.45%	9.60%	-3.06%	18.66%	9.19%
<b>E/100</b>	180.5	238.637	185.5	302.438	
<b>Δ%</b>	9.39%	10.99%	1.37%	18.60%	10.09%
<b>E/12.5</b>	216	261.906	252	338.524	
<b>Δ%</b>	30.91%	21.82%	37.70%	32.75%	30.80%

Analiziranjem dobijenih podataka došlo se do zaključka da su sve krive ponašanja materijala dale zadovoljavajuće rezultate, osim krive sa tangentnim modulom  $E_t=E/12.5$ . Najbolje slaganje sa eksperimentalnim rezultatima pokazao je materijalni model koji odgovara multilinearnoj krivoj realnog materijala i to odstupanje u proseku za sve tipove nosača iznosi **4.84%**. Materijalni model koji odgovara bilinearnoj krivoj sa tangentnim modulom  $E_t=E/12.5$  odstupa sa procentom 30.80%, pa se može zaključiti da on nije pogodan u ovom tipu analize i u nastavku se neće razmatrati. Pri analizi rezultata moraju se uzeti u obzir i sledeće činjenice: pretpostavljene su geometrijske početne imperfekcije samo na rebu, nisu uzete u obzir materijalne imperfekcije tj. rezidualni naponi, karakteristike materijala za realnu krivu, kao i napon tečenja  $f_y$  i čvrstoća na zatezanje  $f_u$  su uzeti kao srednja vrednost za ispitane epruvete (videti Tabelu 6.1), uzete su iste karakteristike materijala za pojas i za rebro (što u eksperimentu nije bio slučaj), zanemaren je uticaj šavova kao i početnih geometrijskih imperfekcija pojaseva i ukrućenja, nemoguće je precizno zadati granične uslove i dr.

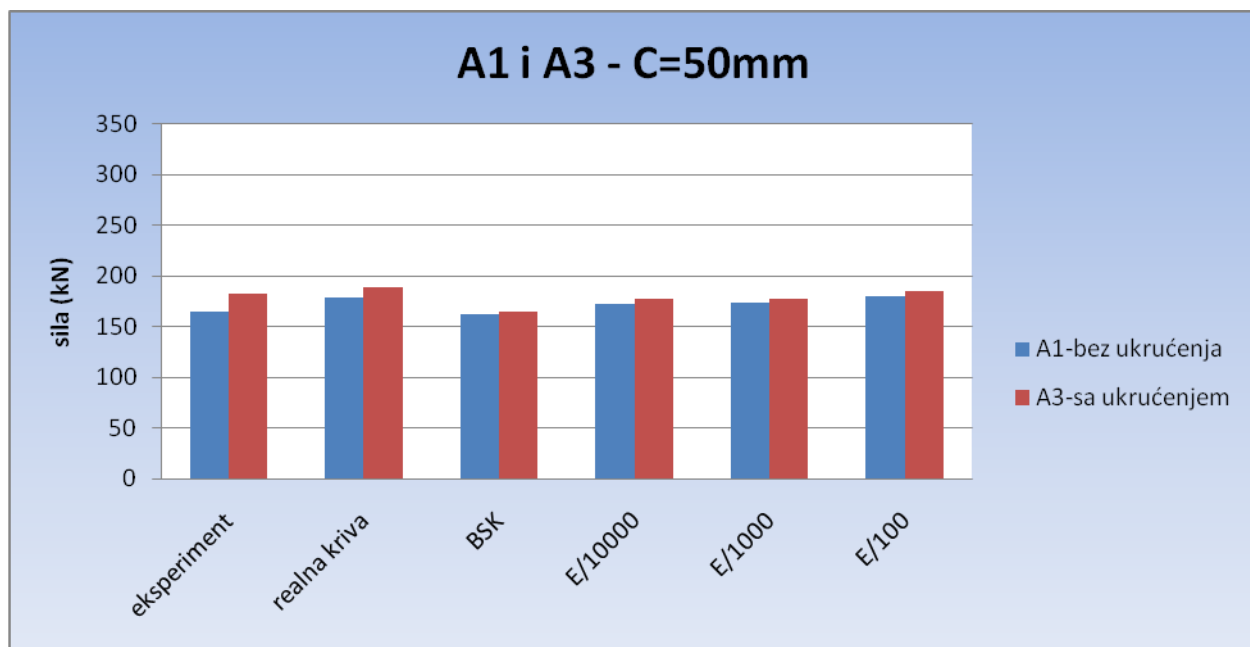
Ponašanje pločastih nosača pod dejstvom *patch loading*-a je veoma složeno i zavisi od različitih parametara. Pojava plastifikacije nastaje već nakon 58.5% od krajnjeg opterećenja (u proseku za sve nosače). Kao što je prikazano, deformacije koje se tada javljaju ne moraju biti značajne. Plastifikacija se razvija na najopterećenijem delu rebra, prvo, samo na površini i zatim se širi po debljini rebra.

U radu [72] je analiziran uticaj dužine rasprostiranja opterećenja na ponašanje nosača i njegovu nosivost gde je prikazan razvoj plastifikacije posebno u pogledu postizanja graničnog opterećenja. Relativno mali porast dužine opterećenja može značajno povećati krajnje opterećenje. Analizirani su eksperimentalni rezultati merenja mernim trakama koje daju uvid u stanje naprezanja u rebu tokom opterećivanja. Dobijeni naponi su upoređeni za različitu dužinu opterećenja za podužno ukrućene i neukrućene nosače.

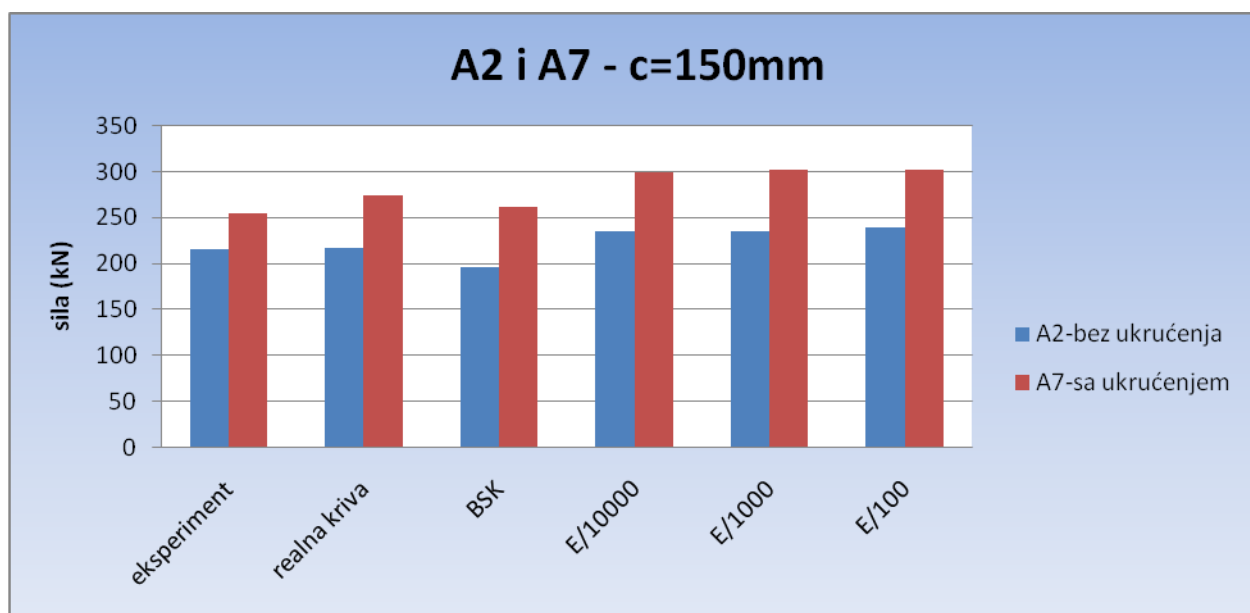
Na osnovu dobijenih podataka analiziran je uticaj delovanja podužnog ukrućenja na povećanje granične nosivosti.

Na Sl.7.17 prikazan je uticaj podužnog ukrućenja za nosače A1 i A3 sa dužinom *patch loading*-a  $c=50$ , a na Sl.7.18 za nosače sa dužinom *patch loading*  $c=150$  mm (nosači A2 i A7), za rezultate dobijene eksperimentalno i za rezultate dobijene numeričkom simulacijom za šest različitih materijalnih modela.



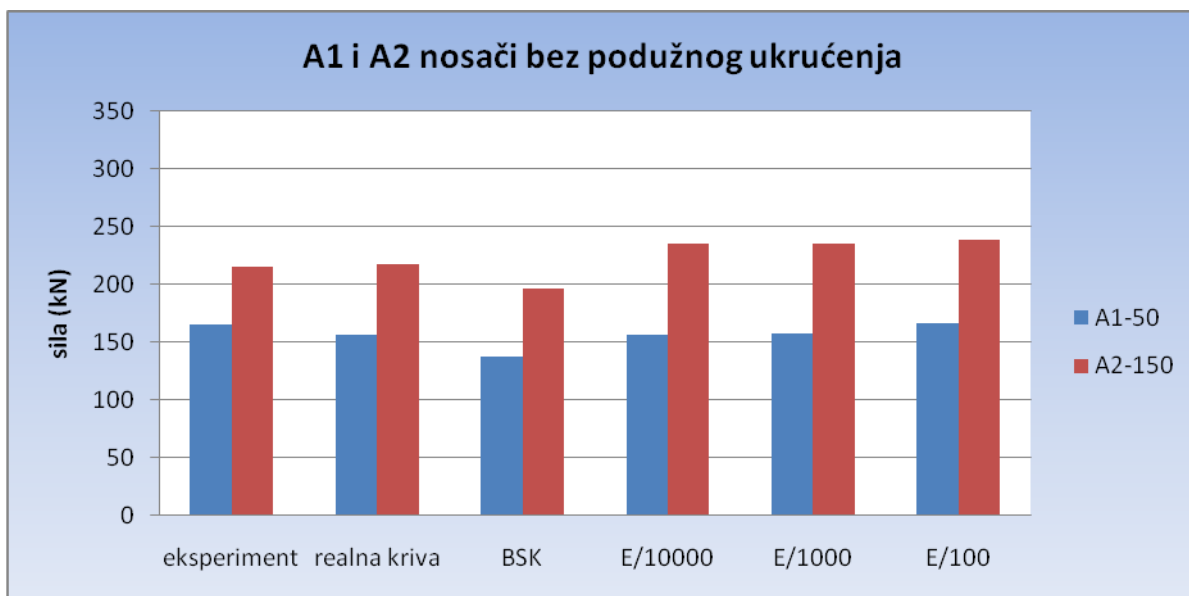


Sl.7.17: Uticaj podužnog ukrućenja na graničnu nosivost za  $c=50$

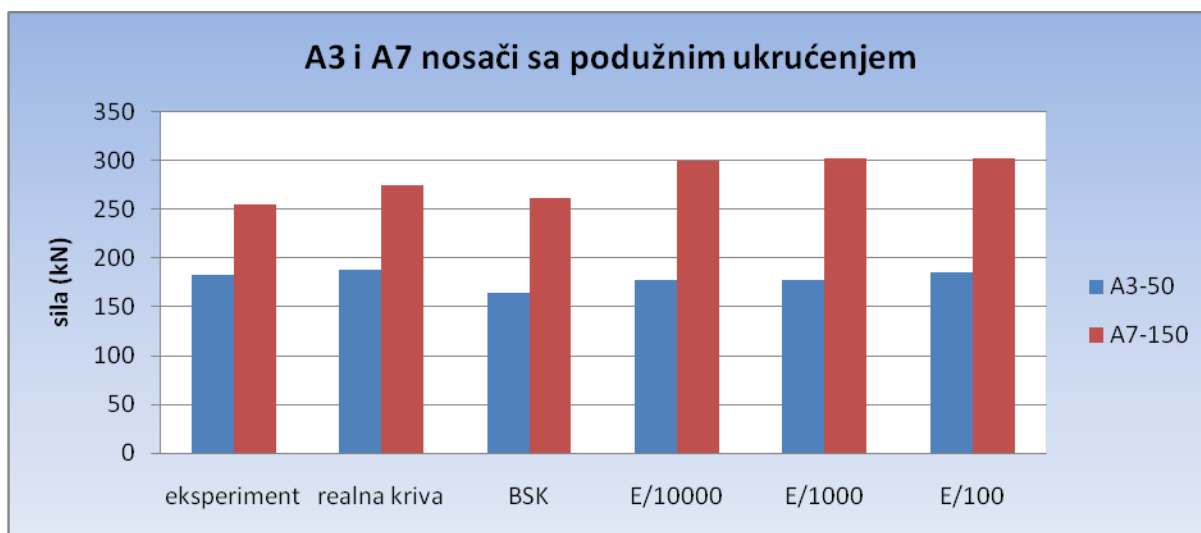


Sl.7.18: Uticaj podužnog ukrućenja na graničnu nosivost za  $c=150$

Na Sl.7.19 prikazan je uticaj dužine delovanja opterećenja kada se poveća sa  $c=50$  mm na  $c=150$  mm za nosače bez podužnog ukrućenja (A1 i A2), a na Sl.7.20 analizirani su uticaji za nosače sa podužnim ukrućenjem (A3 i A7).



Sl.7.19: Uticaj dužine delovanja opterećenja na graničnu nosivost za nosače bez podužnog ukrućenja



Sl.7.20: Uticaj dužine delovanja opterećenja na graničnu nosivost za nosače sa podužnim ukrućenjem

U Tabeli 7.2 prikazane su vrednosti povećanja granične nosivosti izražene u procentima. U prvom delu prikazano je povećanje granične nosivosti sa pojavom ukrućenja, pri čemu su upoređivane vrednosti dobijene za nosače A1 i A3 (nosači sa dužinom prostiranja opterećenja od  $c=50$  mm) i za nosače A2 i A7 (dužina prostiranja opterećenja  $c=150$  mm). U drugom delu u procentima je izraženo povećanje granične nosivosti kada se poveća dužina prostiranja

opterećenja sa  $c=50$  mm na  $c=150$  mm, i to za nosače bez ukrućenja (A1 i A2) i nosače sa ukrućenjem (A3 i A7).

*Tabela 7.2 Povećanje granične nosivosti nosača sa pojavom podužnog ukrućenja i sa povećanjem dužine prostiranja opterećenja izraženo u procentima*

Materijalni modeli	Povećanje granične nosivosti sa pojavom podužnog ukrućenja (%)		Povećanje granične nosivosti sa povećanjem dužine prostiranja opterećenja sa $c=50$ na $c=150$ (%)	
	<i>C=50 mm</i>	<i>C=150 mm</i>	<i>Bez ukrućenja</i>	<i>Sa ukrućenjem</i>
	<b>A1 i A3</b>	<b>A2 i A7</b>	<b>A1 i A2</b>	<b>A3 i A7</b>
<b>Eksperiment</b>	9.84	15.69	23.26	31.20
<b>realna kriva</b>	5.8	20.83	17.86	59.66
<b>BSK</b>	1.53	25.08	17.47	37.22
<b>E/10000</b>	2.88	21.38	26.93	40.90
<b>E/1000</b>	1.95	22.13	26.16	41.37
<b>E/100</b>	2.77	21.10	24.36	38.67
<b>Srednja vrednost</b>	2.99	22.10	22.56	43.56

Analiziranjem rezultata može se zaključiti da povećanje dužine delovanja opterećenja na povećanje granične nosivosti utiče u većem procentu u odnosu na pojavu podužnih ukrućenja.

Prisustvo podužnih ukrućenja povećava deformaciju i ograničava razvoj konačnog izbočavanja u prostoru između opterećenog pojasa i ukrućenja i povećava graničnu nosivost. Sa povećanjem dužine delovanja opterećenja povećava se i granična nosivost. Treba napomenuti da je brzina nanošenja opterećenja kod svih modela ista.

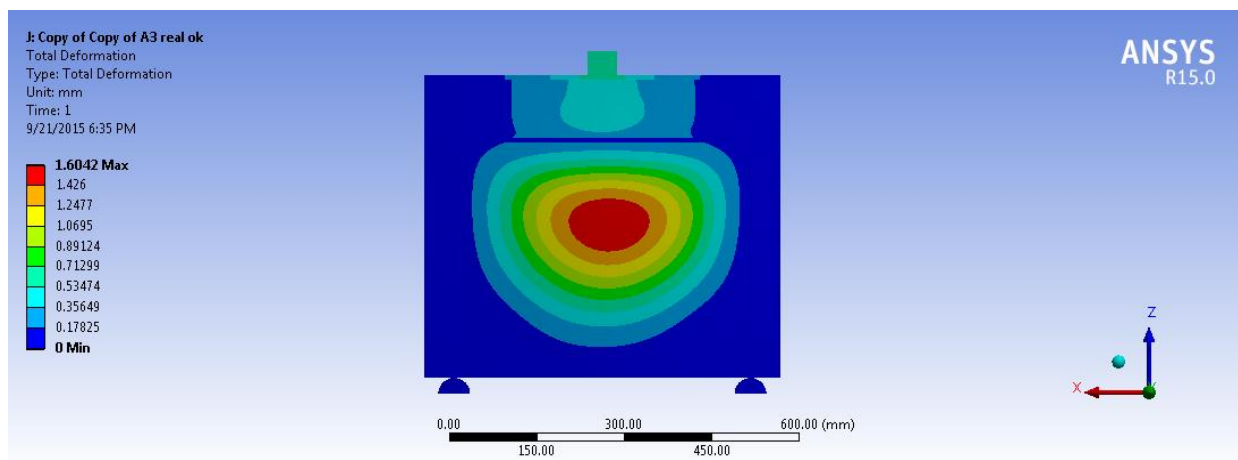
### **7.3 Razvoj deformacija i prikaz stanja napona**

U okviru ovog dela biće prikazani rezultati numeričke simulacije nosača tipa A1, A2, A3 i A7. Njihove geometrijske karakteristike su prikazane u Tabeli 6.2. Ovde će biti dati rezultati deformacija i napona kao i karakteristični podaci eksperimenata na realnim modelima istog tipa radi poređenja.

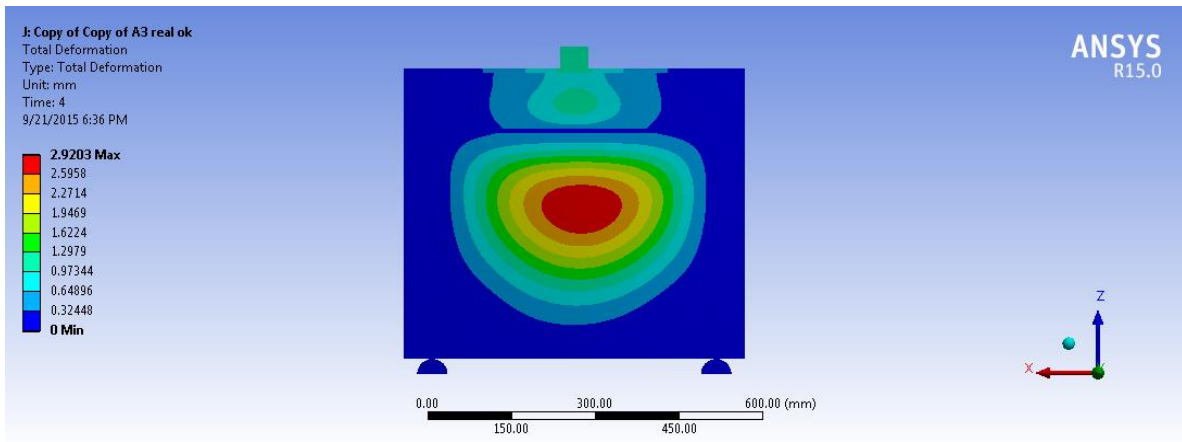
U cilju poređenja rezultata numeričke simulacije sa eksperimentalnim rezultatima, praćen je razvoj deformacije nosača. Na sledećim slikama prikazuje se postepen razvoj deformacije nosača sa porastom sile koji u potpunosti odgovara ponašanju nosača pri eksperimentu. Kao primer navešćemo numerički model nosača tipa A3. Tokom opterećivanja nosača, od samog početka nastaju deformacije na rebu pri čemu je izraženija deformacija u donjem delu rebra ispod podužnog ukrućenja što je prikazano za silu od 100 kN na Sl.7.21a.

Sa daljim porastom sile i približavanju graničnog opterećenja, nastavlja se povećanje deformacije na gornjem delu rebra između opterećenog pojasa i podužnog ukrućenja, što je prikazano pri sili od 160 kN na Sl.7.21b. Približavajući se graničnom opterećenju, izbočavanje u gornjem delu rebra postaje sve izraženije, da bi pri dostizanju graničnog opterećenja bilo dominantno, videti Sl.7.21c, tako da sa malim inkrementima porasta sile to izbočavanje raste nepredvidljivo i na tom delu nastupa lom nosača. Pri rasterećenju nosača zadržavaju se rezidualne deformacije koje su najizraženije u gornjem delu rebra što se može videti na Sl.7.21d a na Sl.7.21e prikazane su rezidualne deformacije nosača u eksperimentu Markovića.

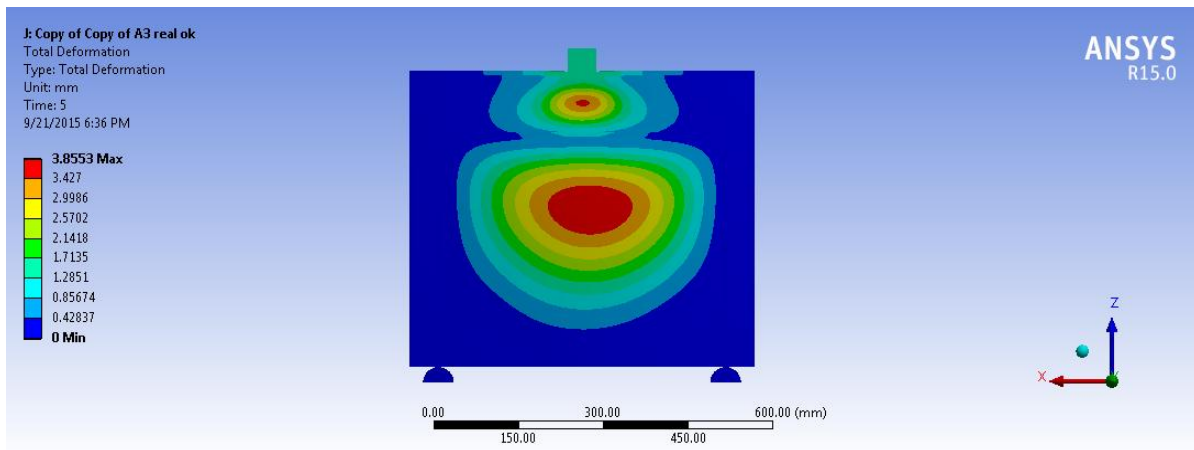
Način deformisanja i tok izbočavanja, kako pri porastu sile do graničnog opterećenja, tako i pri rasterećivanju, u potpunosti odgovara deformisanju i načinu i redosledu izbočavanja realnog modela u eksperimentima Markovića.



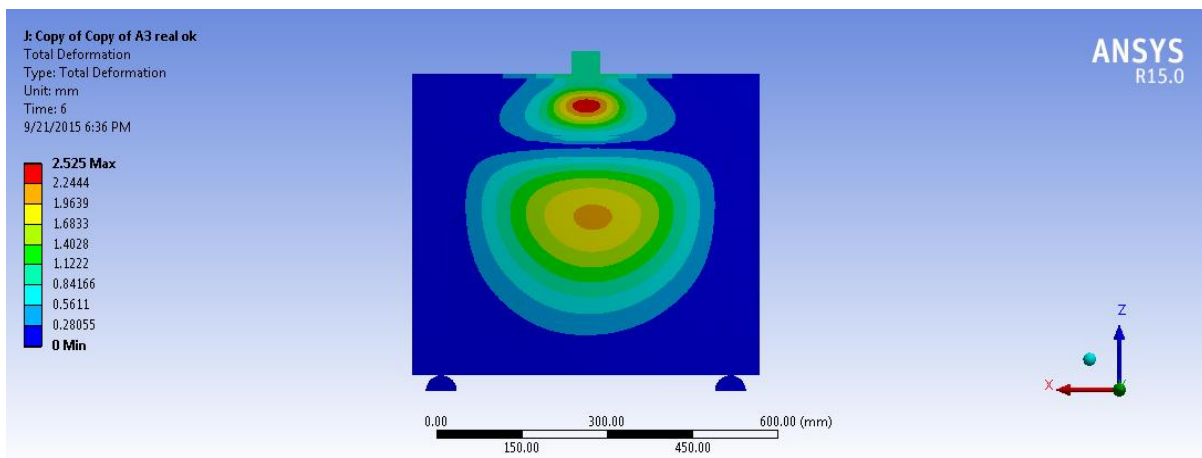
*Sl.7.21a: Maksimalna vrednost totalne deformacija pri sili od 100 kN, izraženija u donjem delu rebra, ispod podužnog ukrućenja za nosač A3*



Sl.7.21b: Maksimalna vrednost totalne deformacije pri sili od 160 kN, za nosač A3 (rast deformacije u gornjem delu rebra sa daljim povećanjem sile u odnosu na prethodnu sliku)



Sl.7.21c: Maksimalna vrednost totalne deformacije pri sili od 188.5 kN za nosač A3



Sl.7.21d: Rezidualne deformacije nosača A3

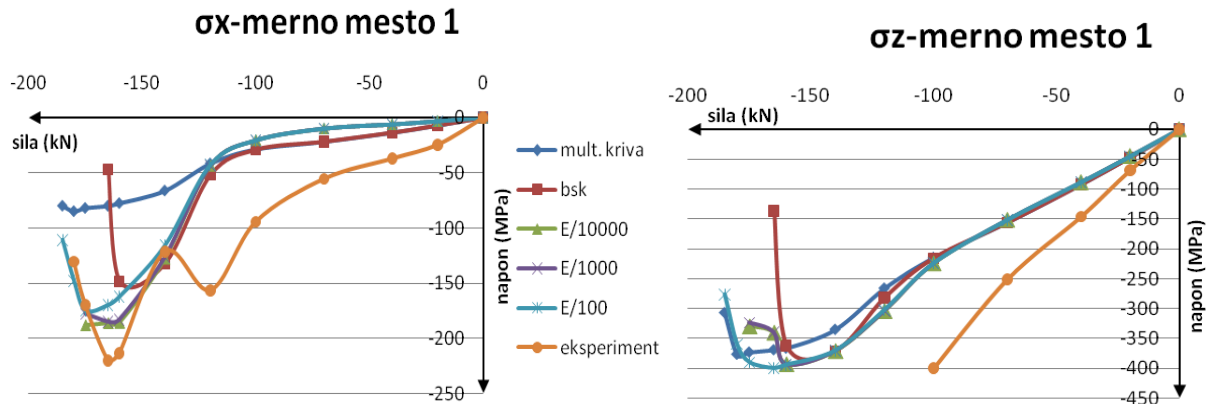


*Sl.7.21e: Rezidualne deformacije nosača A3 iz eksperimenta Markovića (preuzeto iz [70])*

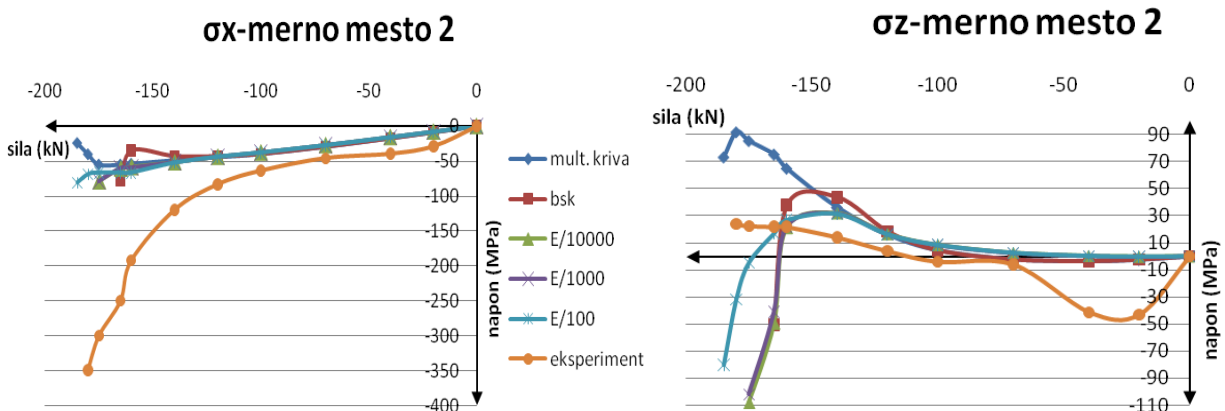
Na sličan način razvija se i deformacija ostalih tipova nosača, a oblik deformacije je isti kao na odgovarajućim tipovima nosača ispitivanih eksperimentalno. U nastavku ćemo prikazati deformaciju po visini rebra na profilu na polovini dužine rebra svih tipova nosača, koja najtačnije prikazuje ponašanje nosača pri numeričkoj simulaciji. Na svim dijagramima, deformacije prate oblik i smer početnih geometrijskih imperfekcija.

U toku nelinearne numeričke simulacije eksperimenata sračunati su naponi u karakterističnim tačkama za sve tipove nosača i to na mestima gde su bile postavljene merne trake u prethodno opisanom eksperimentu (videti Sl.6.3 do Sl.6.5). Merne trake su postavljene sa prednje i zadnje strane nosača i na osnovu dobijenih vrednosti dilatacija sračunate su vrednosti napona u  $x$  i  $z$  pravcu (pravci odgovaraju nosaču pri numeričkoj simulaciji). Numeričkom analizom dobijeni su naponi u tačkama blizu površine nosača, pa izvesna odstupanja u vrednostima mogu biti uzrok tome.

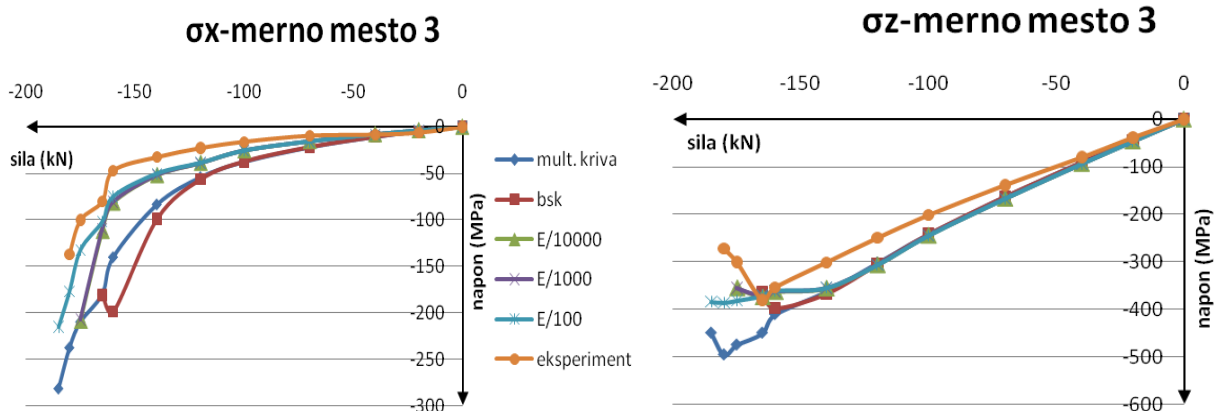
Vrednosti napona upoređivane su za različite materijalne modele, za pojedina merna mesta, i u okviru svakog od tih dijagrama prikazan je, radi analize, i dijagram koji odgovara eksperimentalnom rezultatu označen kao „eksperiment“. Na sledećim dijagramima, Sl.7.22, ove vrednosti prikazaćemo za nosač tipa A3 (granično opterećenje prema eksperimentu iznosi  $P=183\text{kN}$ , a za ostale materijalne modele prikazani su u Tabeli 7.1). Naponi koji prelaze vrednost zatezne čvrstoće ( $f_u=449.6\text{ MPa}$ ) nisu ucrtani u dijagrame.



a) Naponi  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  za merno mesto 1



b) Naponi  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  za merno mesto 2



c) Naponi  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  za merno mesto 3

Sl.7.22 a), b) i c): Vrednost napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernim mestima 1,2 i 3 (videti Sl.5.3a) za nosač A3 za različite materialne modele (videti Sl.6.4) i eksperimentalnih rezultata

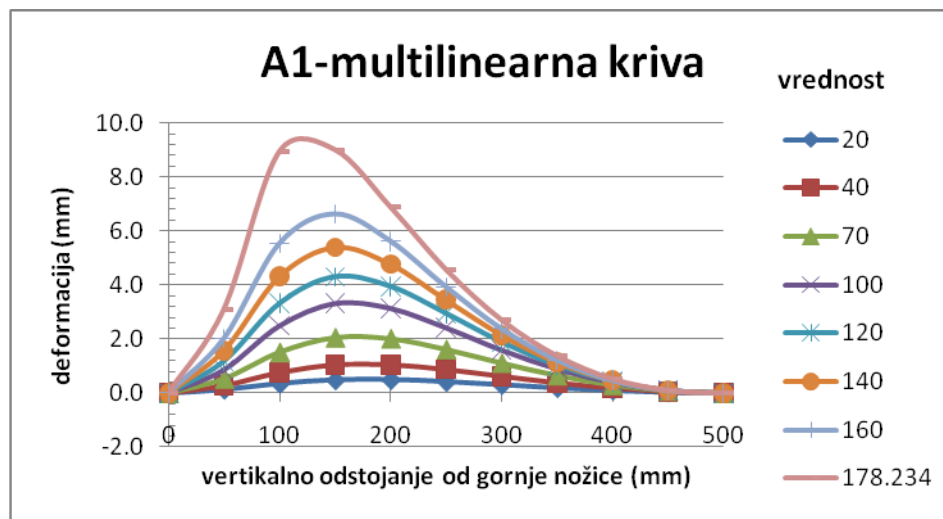
Analizom vrednosti na dijagramima možemo primetiti zadovoljavajuće slaganje vrednosti napona za različite načine ponašanja materijala u pogledu praćenja napreznja.

### 7.3.1 Numerička simulacija nosača tipa A1

Tip nosača A1 je bez podužnog ukrućenja i sa dužinom prostiranja opterećenja 50 mm. Numerički model je formiran po uzoru na nosač A1 u eksperimentu Markovića. Praćen je razvoj deformacija i napona sa porastom sile do graničnog opterećenja za različite materijalne modele, prethodno opisane, što će u daljem biti prikazano na odgovarajućim dijagramima i slikama.

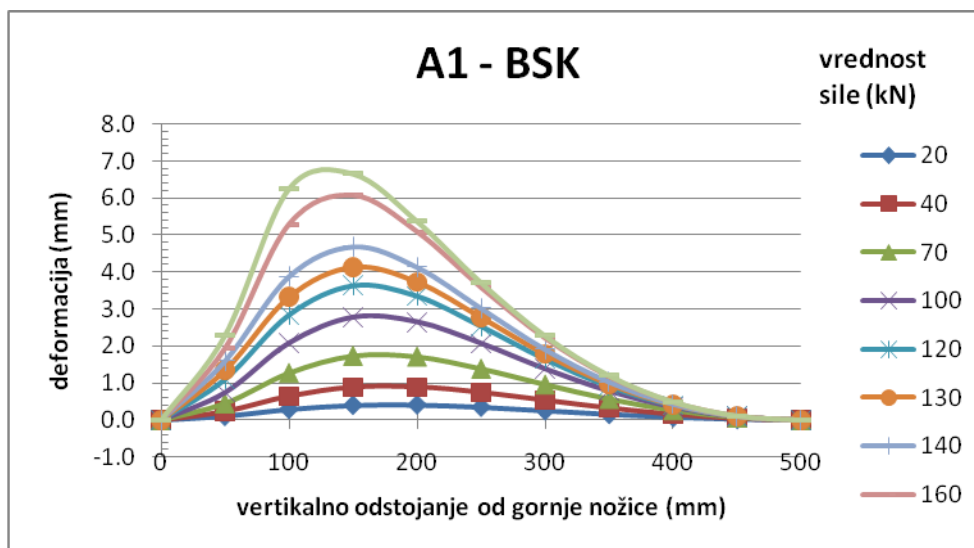
#### *Deformacija nosača A1*

Na sledećim dijagramima biće prikazana deformacija u karakterističnim tačkama po visini rebra na profilu na polovini dužine rebra sa porastom sile u y pravcu. Tačke su zadavane na površini nosača (uračunata je početna geometrijska imperfekcija tačke u y pravcu). Posmatrani su nosači sa realnim imperfekcijama, posebno za svaki materijalni model pri opterećivanju. Na sledećim dijagramima prikazana je deformacija nosača u mm, bez vrednosti početne imperfekcije.

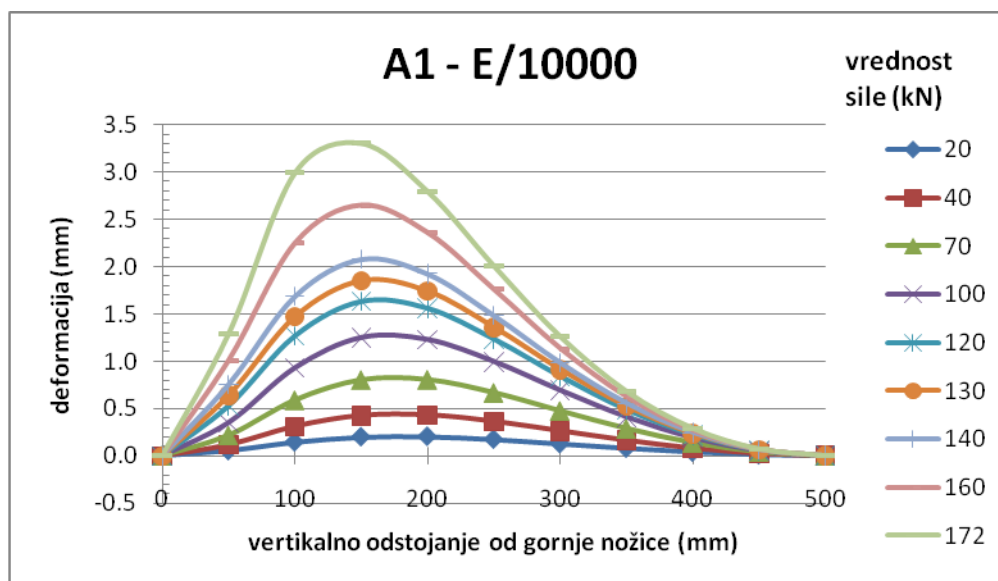


Sl.7.23a: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-multilinearna kriva

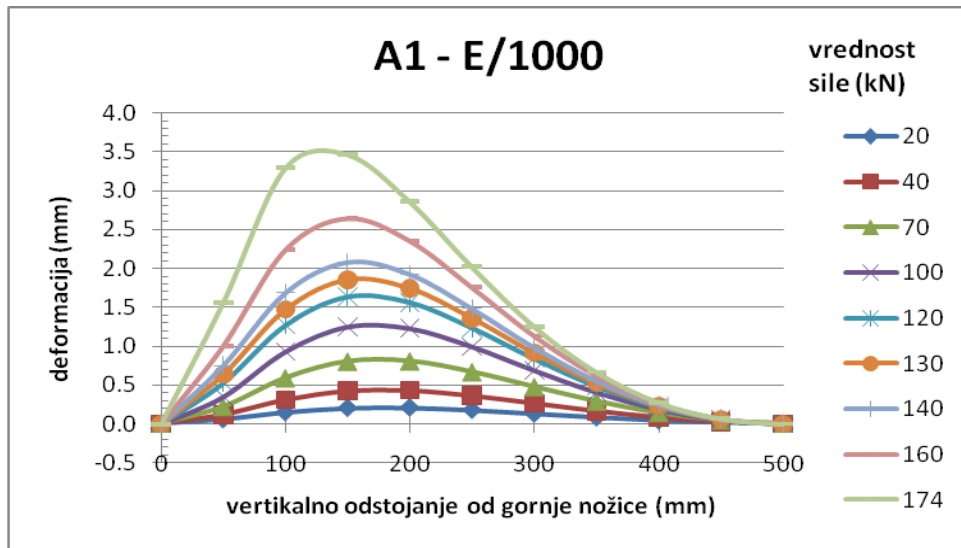




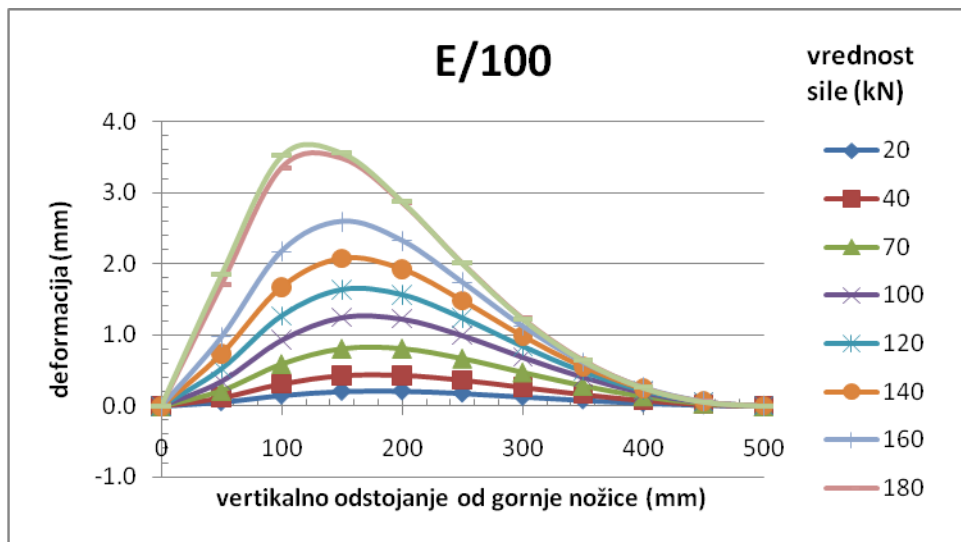
Sl.7.23b: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema BSK07 standardu



Sl.7.23c: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_t = E/10000$



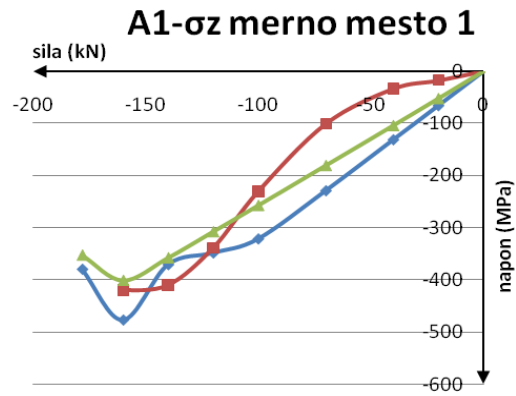
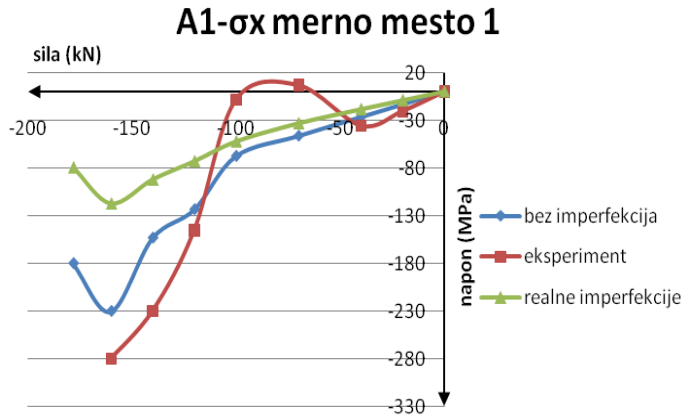
Sl.7.23d: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema bilinearnoj krivoj sa tangentnim modulom  $E_t = E/1000$



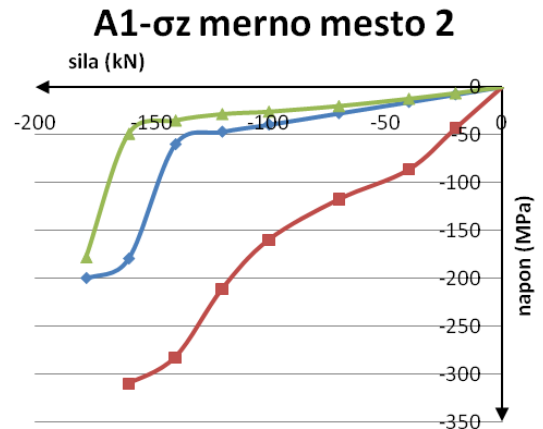
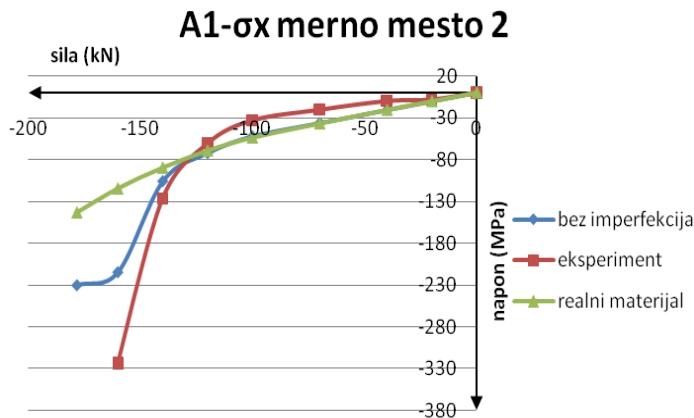
Sl.7.23e: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_t = E/100$

### Naponi u karakterističnim tačkama i poređenje sa eksperimentalnim rezultatima

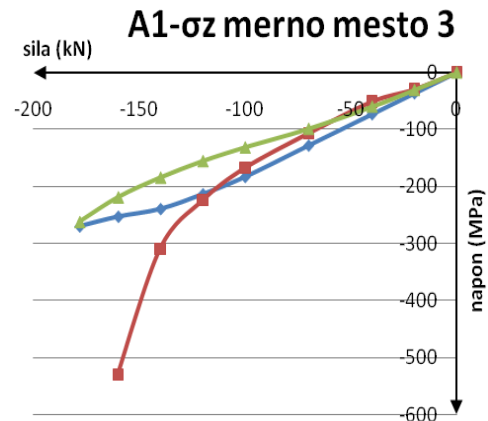
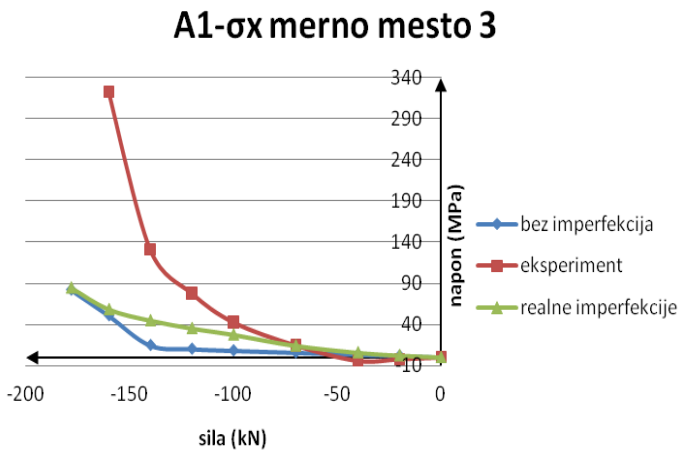
Na sledećim dijagramima biće prikazane vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  u karakterističnim tačkama u kojima su bile postavljene merne trake pri vršenju eksperimenta Markovića. Naponi  $\sigma_y$  takođe postoje ali su im vrednosti male pa neće biti prikazane. Upoređeni su rezultati za nosače bez imperfekcija i sa početnim geometrijskim imperfekcijama (vrednost graničnog opterećenja iznosi 178.174kN) i eksperimentalni rezultati (granično opterećenja je 165kN).



Sl.7.24a: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 1 (videti Sl.5.3a) za nosač A1 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno



Sl.7.24b: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 2 (videti Sl.5.3a) za nosač A1 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno

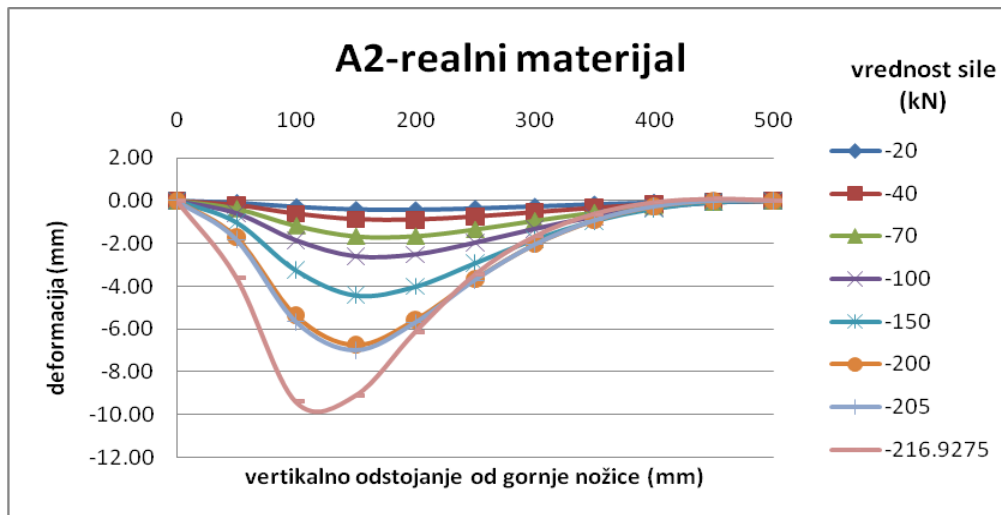


Sl.7.24c: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 3 (videti Sl.5.3a) za nosač A1 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno

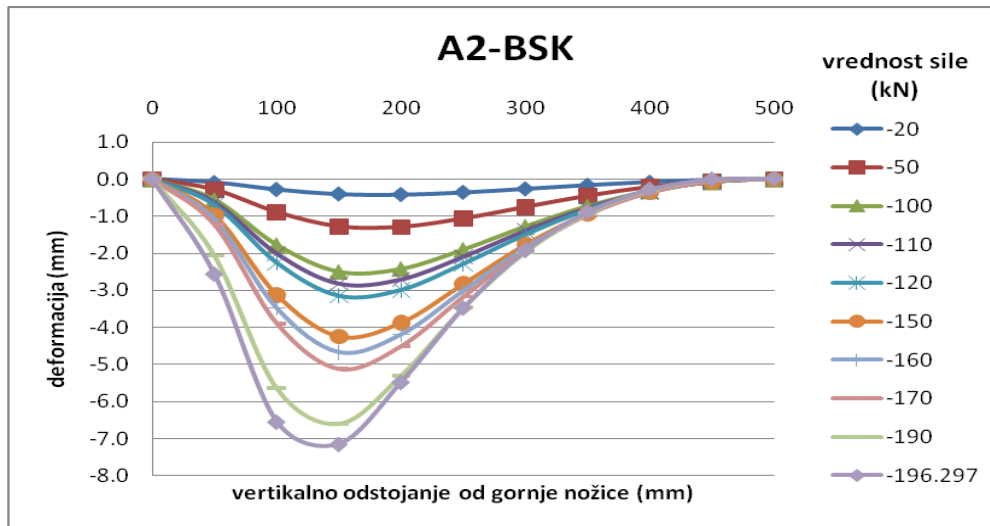
### 7.3.2 Numerička simulacija nosača tipa A2

#### *Deformacija nosača*

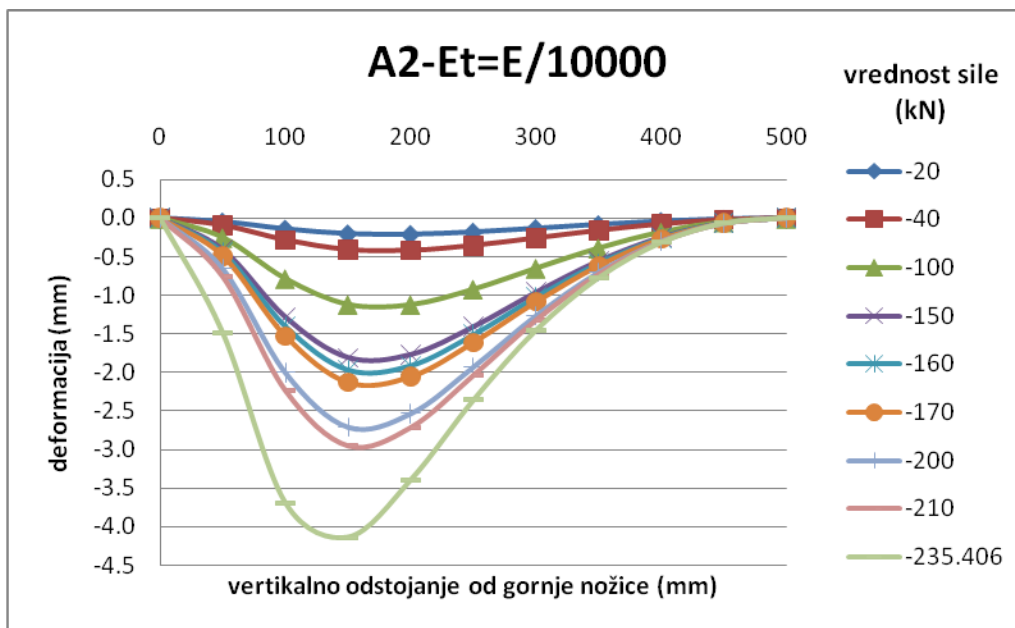
Kao i kod nosača A1, na dijagramima (videti Sl.7.25) je prikazana deformacija u karakterističnim tačkama po vertikali na profilu na polovini dužine rebra sa porastom sile za nosač sa realnim imperfekcijama. Deformacija je izražena u mm, dok je srednji profil rebra prikazan u cm. Deformacija je u obliku slova C i on ostaje isti sa porastom sile do graničnog opterećenja. Vrednosti deformacije na dijagramima su bez početne geometrijske imperfekcije.



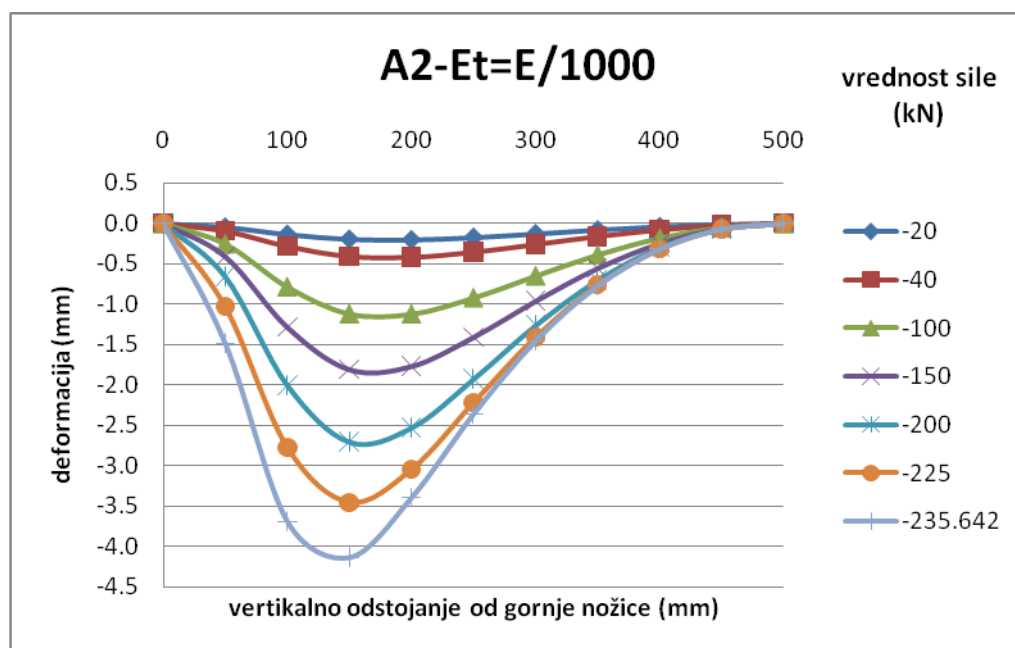
Sl.7.25a: Dijagram deklinacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-multilinearna kriva



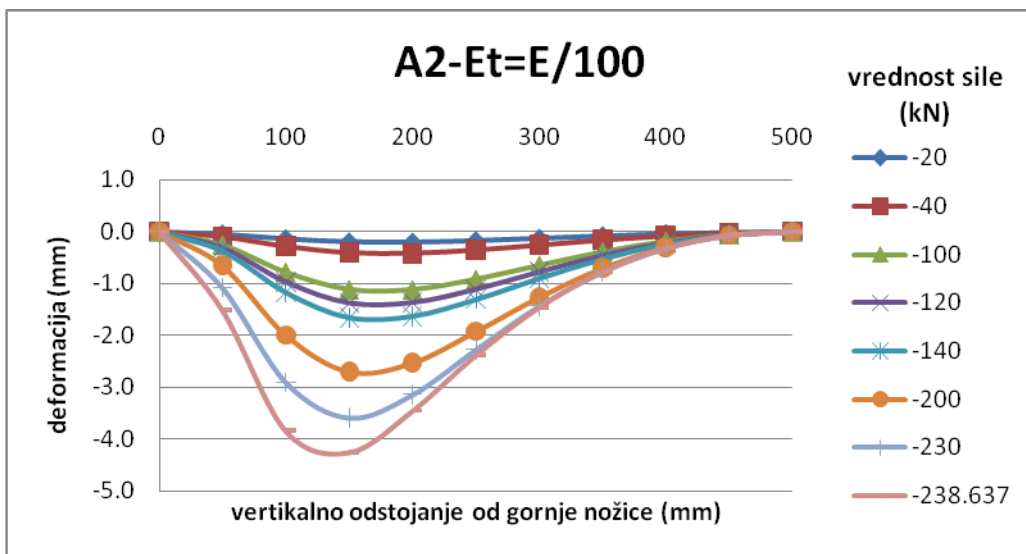
Sl.7.25b: Dijagram deklinacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema BSK07 propisu



Sl.7.25c: Dijagram vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_t=E/10000$



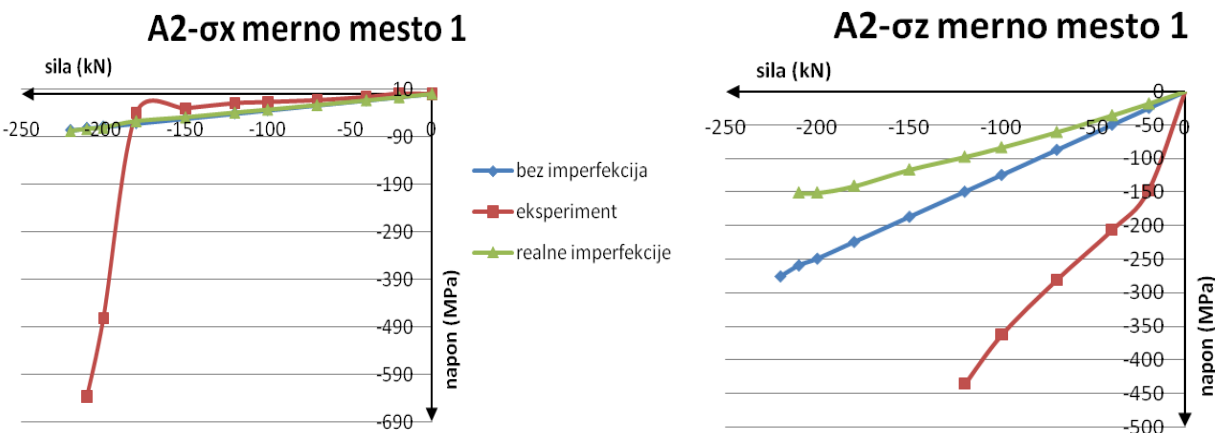
Sl.7.25d: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema bilinearnoj krivoj sa tangentsnim modulom  $E_t=E/1000$



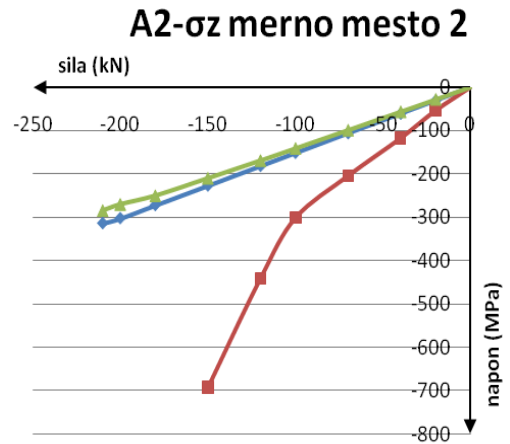
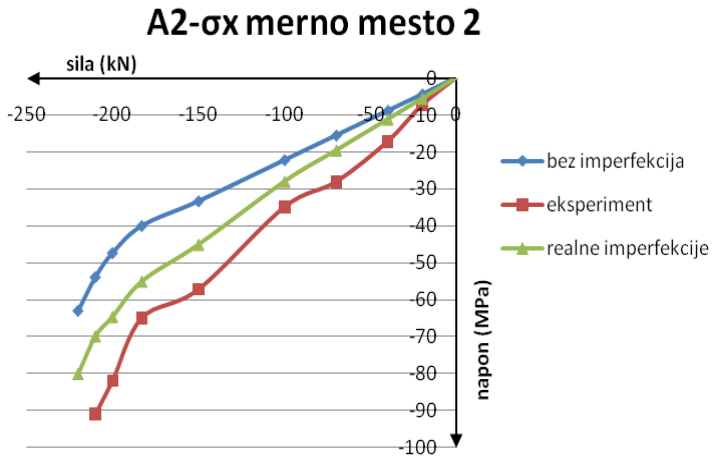
Sl.7.25e: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_t=E/100$

#### Naponi u karakterističnim tačkama i poređenje sa eksperimentalnim rezultatima

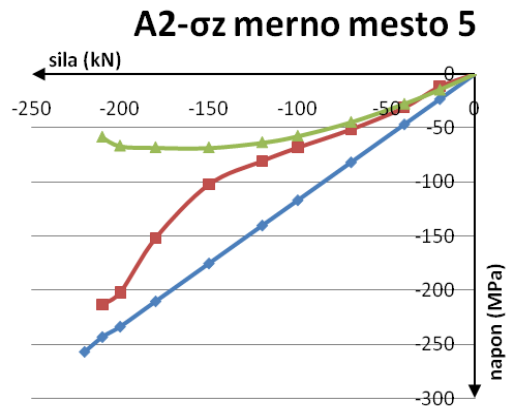
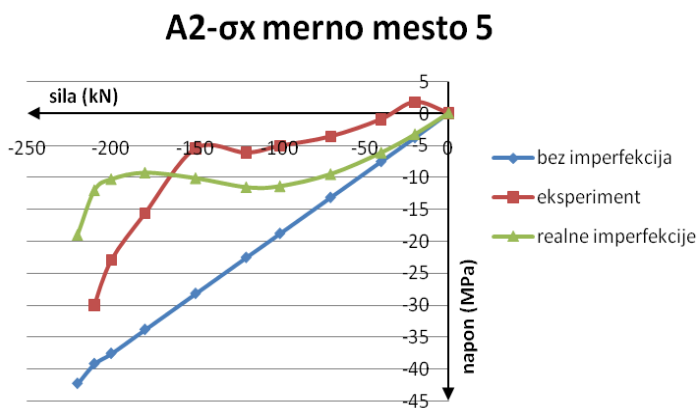
Prikazani su naponi u x i z pravcu (naponi u y pravcu su mali) na karakterističnim mernim mestima. Granična nosivost za nosač A2 sa imperfekcijama iznosi 215 kN prema eksperimentu, a 216.9275 kN preko numeričke simulacije.



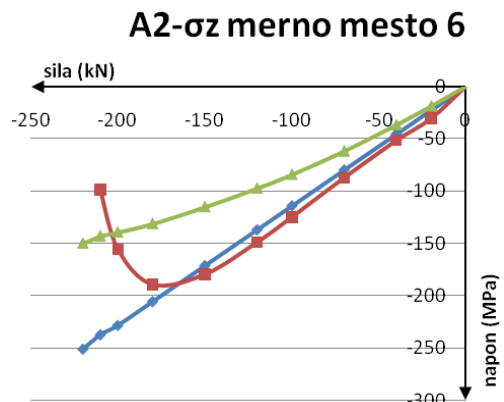
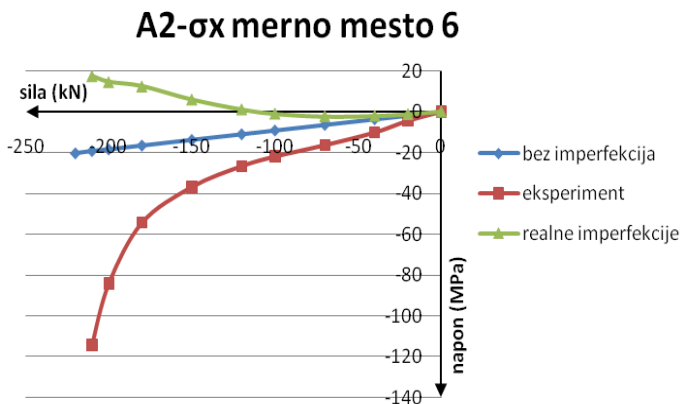
Sl.7.26a: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 1 (videti Sl.5.5a) za nosač A2 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno



Sl.7.26b: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 2 (videti Sl.5.5a) za nosač A2 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno



Sl.7.26c: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 5 (videti Sl.5.5a) za nosač A2 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno



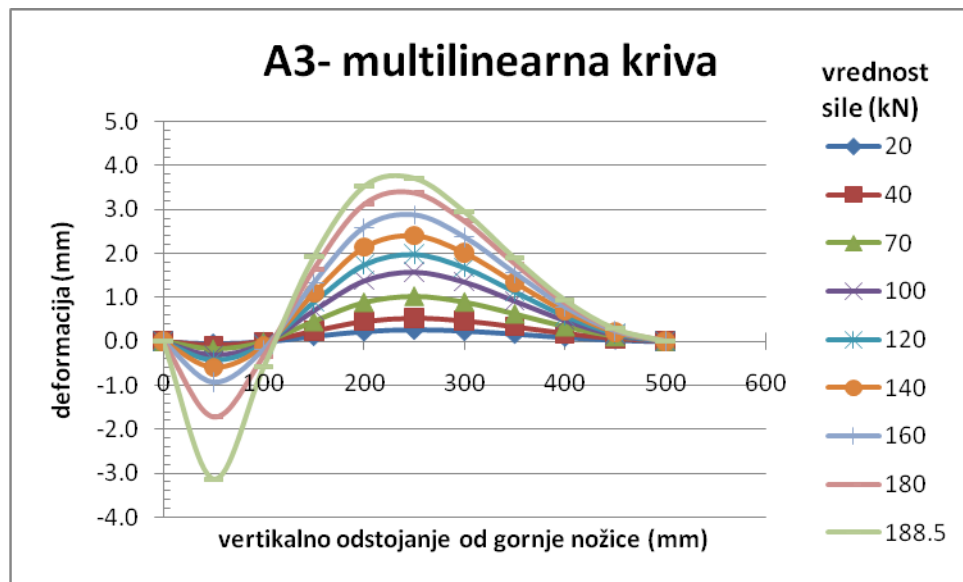
Sl.7.26d: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 6 (videti Sl.5.5a) za nosač A2 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno

### 7.3.3 Numerička simulacija nosača tipa A3

#### *Deformacija nosača*

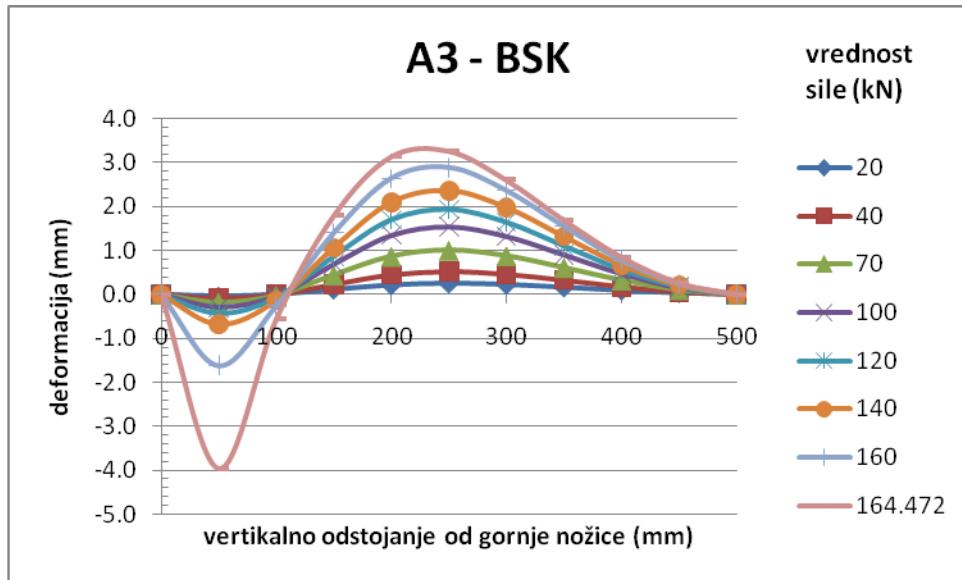
Deformacija nosača prikazana je u karakterističnim tačkama po vertikali na profilu na polovini dužine rebra sa porastom sile. Posmatrani su nosači sa početnim realnim geometrijskim imperfekcijama, posebno za svaki dijagram koji karakteriše način ponašanja materijala pri opterećivanju.

Na sledećim dijagramima biće prikazana deformacija vertikalnog profila na sredini rebra (srednjeg profila rebra) u karakterističnim tačkama. Na srednjem profilu rebra smo prethodno obeležili jedanaest tačaka na ekvidistantnom rastojanju od 5cm u cilju praćenja najvećih deformacija sa porastom sile. Svaki od dijagrama prikazuje deformaciju sa porastom sile za tačno određen način ponašanja materijala koje smo definisali u delu 6.2.2. U okviru tih dijagrama na Sl.7.27a do Sl.7.27f, na desnoj strani slika prikazane su i vrednosti zadavanja opterećenja, izraženog u kN, do graničnog opterećenja. Vrednosti deformacije su prikazane bez vrednosti početne imperfekcije.

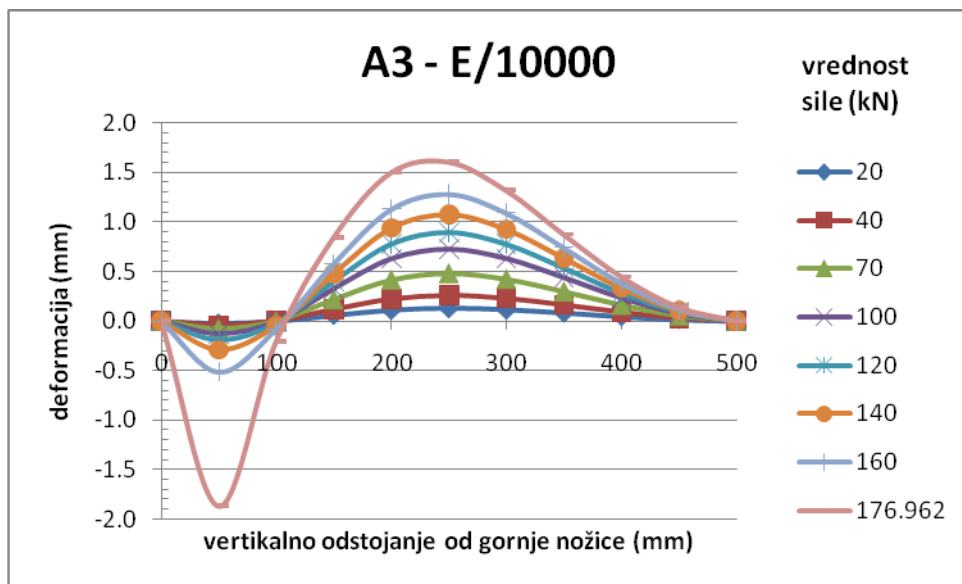


Sl.7.27a: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-multilinearne krive

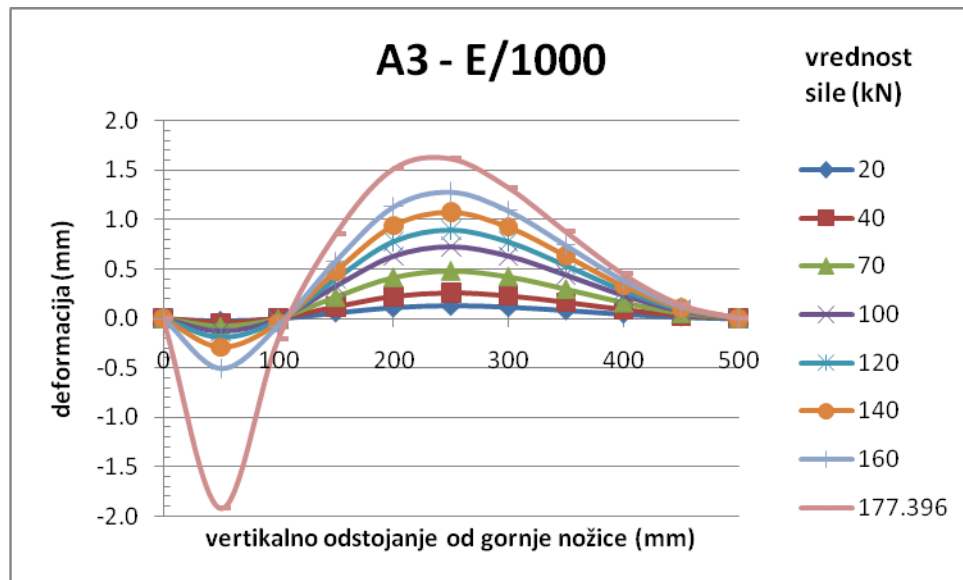




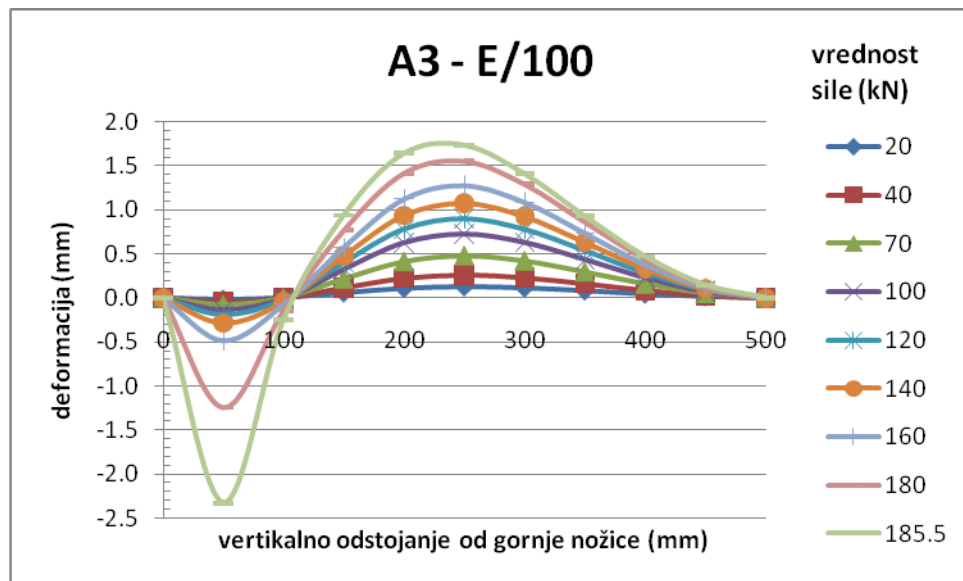
Sl.7.27b: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema BSK07 propisu



Sl.7.27c.: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_t = E/10000$



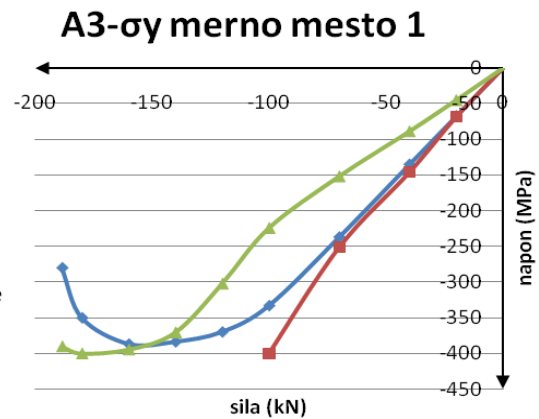
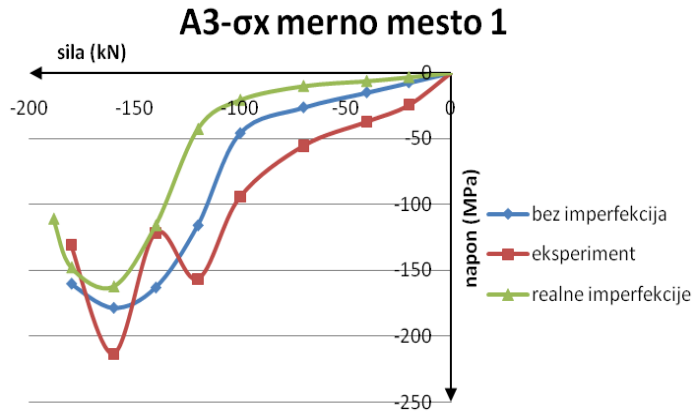
Sl.7.27d: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema bilinearnoj krivoj sa tangentnim modulom  $E_t = E/1000$



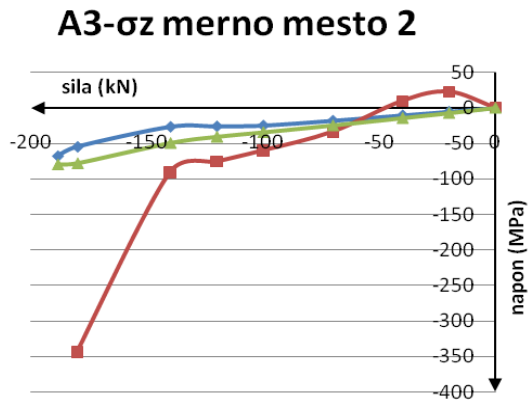
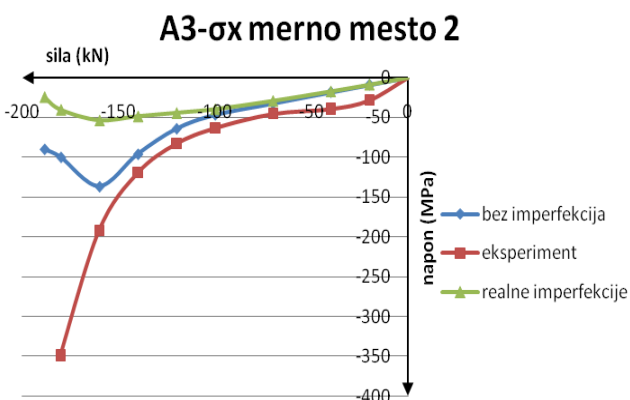
Sl.7.27e: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_t = E/100$

### ***Naponi u karakterističnim tačkama i poređenje sa eksperimentalnim rezultatima***

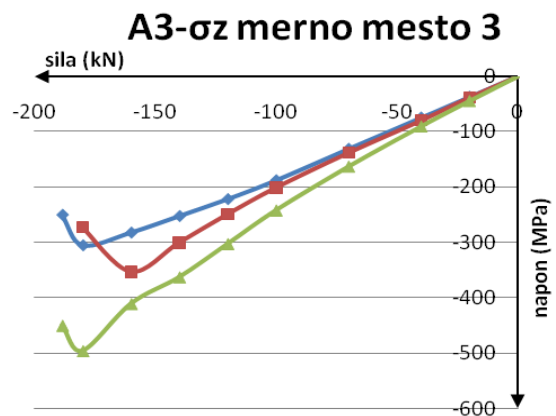
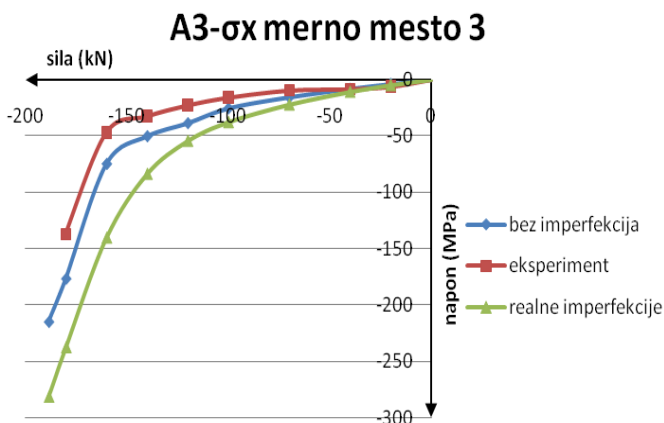
Za nosač A3 prikazane su vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  sa porastom sile. Granična nosivost pri numeričkoj simulaciji iznosi 188.5 kN a eksperimentalnim putem 183 kN. Vrednosti napona pri eksperimentu dobijene su računskim putem pomoću izmerenih dilatacija. Vrednosti napona koje prelaze vrednosti zatezne čvrstoće ( $f_u = 449.6$  Mpa) pa nisu ucrtane u dijagrame.



Sl.7.28a: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 1 (videti Sl.5.3a) za nosač A3 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno



Sl.7.28b: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 2 (videti Sl.5.3a) za nosač A3 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno

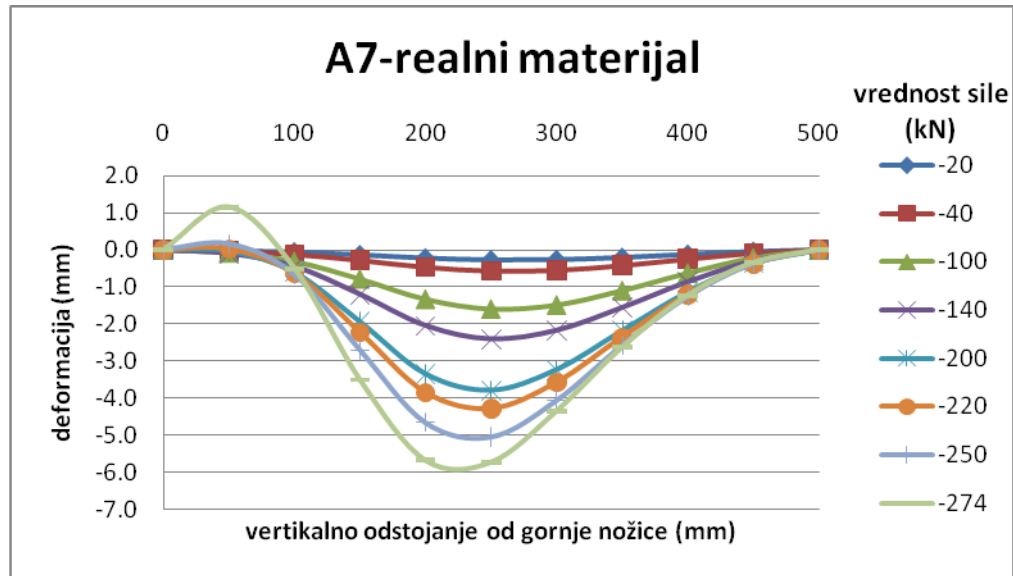


Sl.7.28c: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 3 (videti Sl.5.3a) za nosač A3 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno

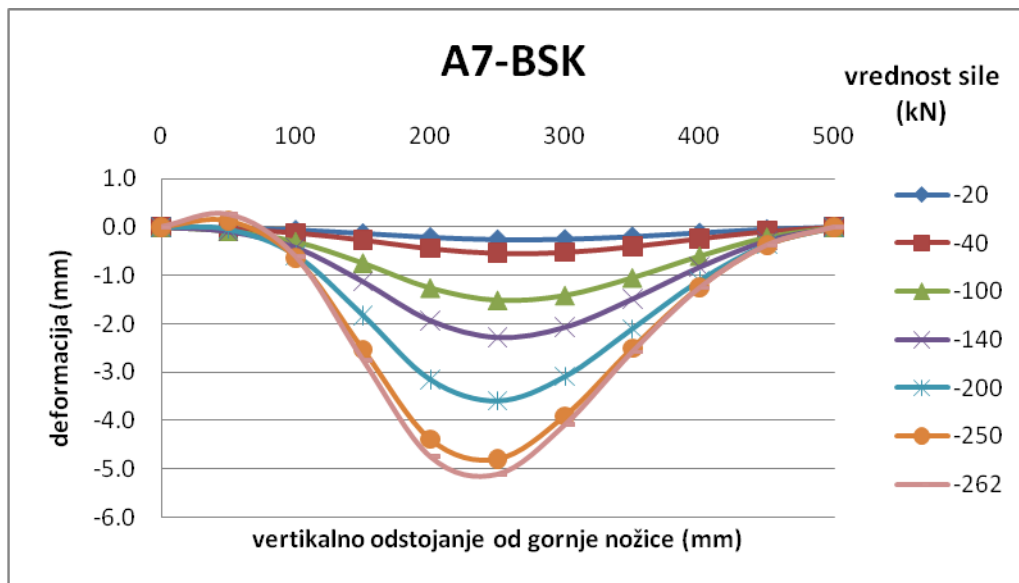
### 7.3.4 Numerička simulacija nosača tipa A7

#### Deformacija nosača

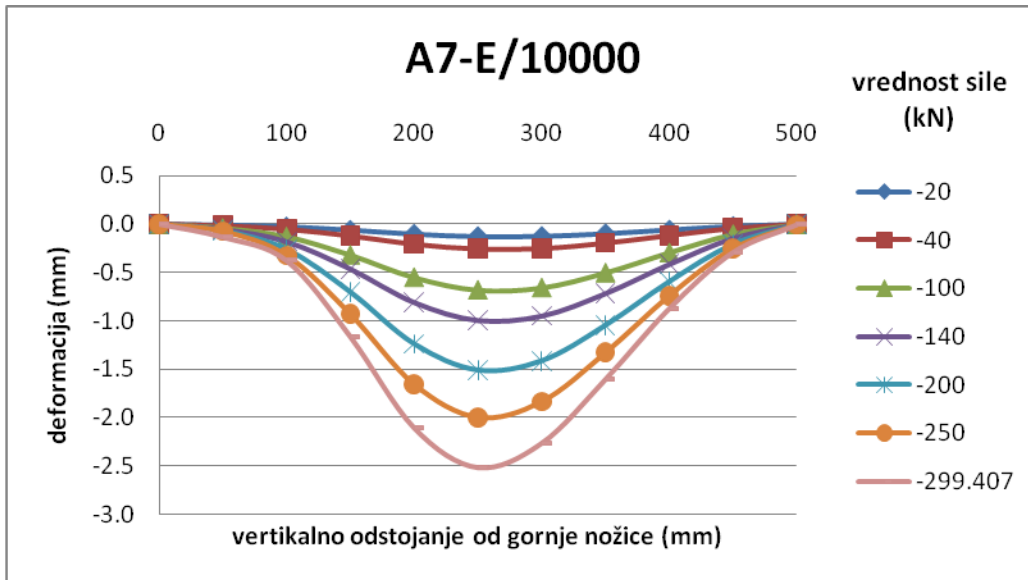
Na dijagramima je prikazana deformacija u mm, srednjeg profila rebra, sa porastom sile. Vrednost deformacije je bez vrednosti početne imperfekcije. Svaki od dijagrama prikazuje različite materijalne modele.



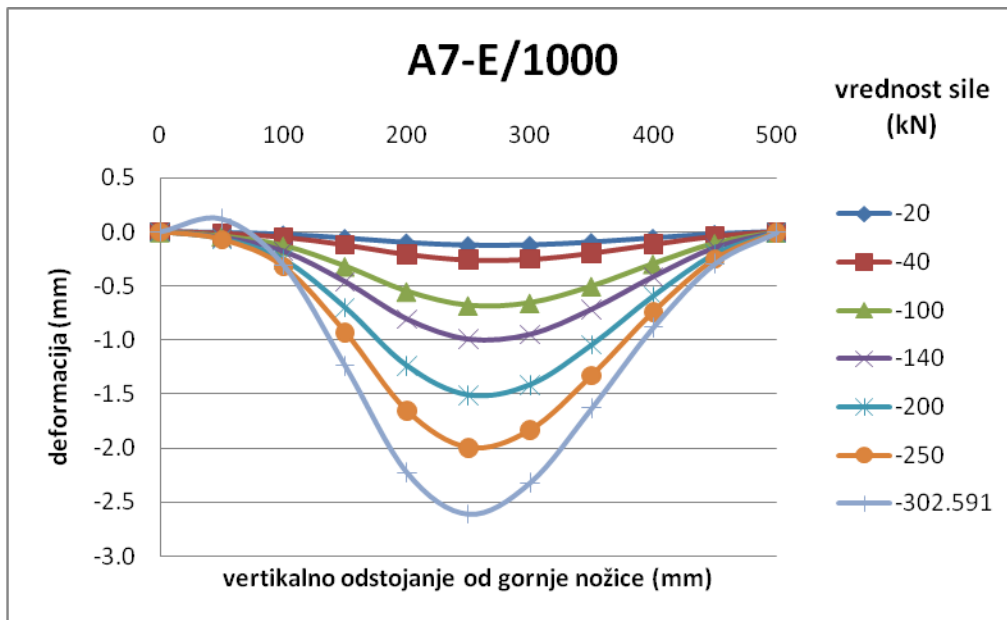
Sl.7.29a: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-multilinearna kriva



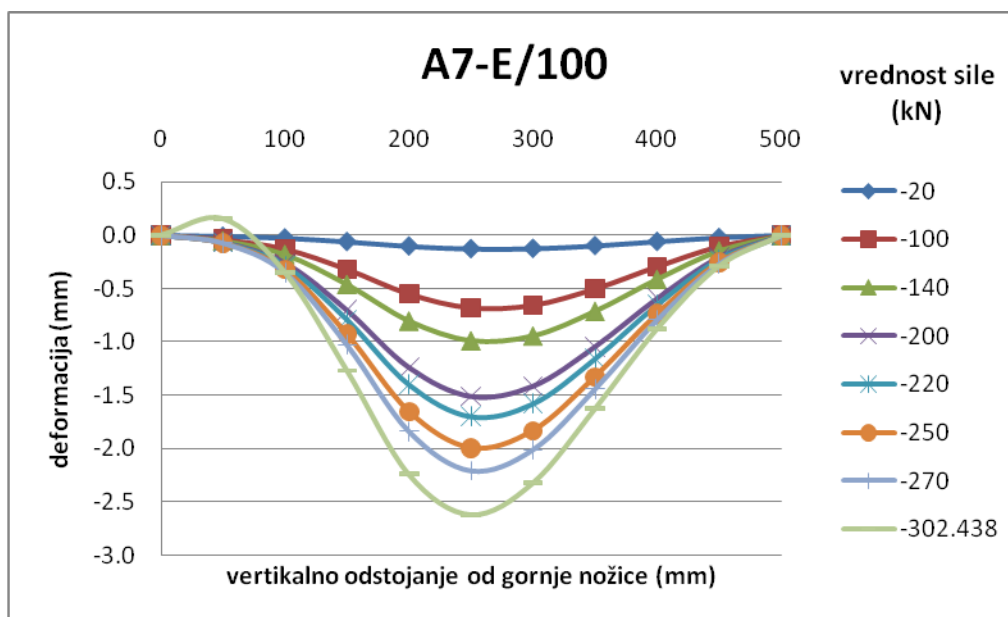
Sl.7.29b: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema BSK07 propisu



Sl.7.29c: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_t=E/10000$



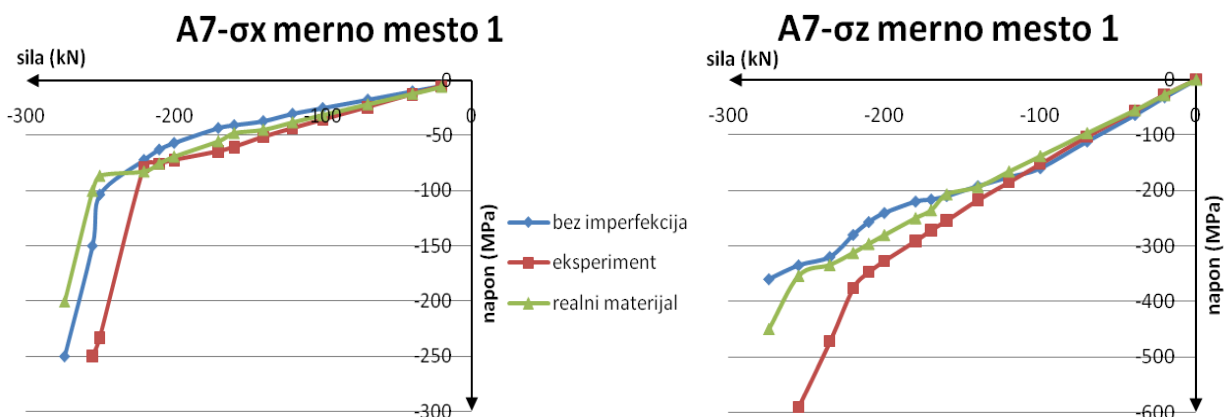
Sl.7.29d: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema bilinearnoj krivoj sa tangentsnim modulom  $E_t=E/1000$



7.29e: Dijagram deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine sa porastom sile za materijalni model prema EN1993-1-5-bilinearna kriva  $E_1=E/100$

### Naponi u karakterističnim tačkama i poređenje sa eksperimentalnim rezultatima

Na Sl.7.30 prikazani su dijagrami napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  za nosač A7. Granična nosivost za nosače sa i bez imperfekcija iznosi 274 kN za materijalni model prema multilinearnoj krivi. U eksperimentu je dobijena granična nosivost od 255kN.



Sl.7.30: Vrednosti napona  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$  na mernom mestu 1 (videti Sl.5.4a) za nosač A7 bez imperfekcija, sa realnim imperfekcijama i dobijeni eksperimentalno

U okviru ovog poglavlja izvršena je numerička simulacija za modele sa realnim geometrijskim imperfekcijama po uzoru na eksperiment Markovića opisan u delu 5. Za sve

tipove nosača su sračunate relevantne vrednosti iz stanja naponona i deformacija u karakterističnim tačkama. Za svaki model posebno je određena granična nosivost što je prikazano u delu 7.1. za svaki od tipova nosača (A1, A2, A3 i A7) su određeni dijagrami razvoja deformacija vertikalnog preseka rebra na polovini dužine pri porastu sile sve do granične vrednosti. Takođe su za svaki od nosača određeni dijagrami napona u karakterističnim tačkama. Pri tome su granične vrednosti i dijagrami napona i deformacija kod svakog od četiri tipa nosača određeni za šest materijalnih modela: multilinearne kriva (model prema EN1993-1-5), BSK07, bilinearne kriva  $E_t=E/10000$  (model prema EN1993-1-5), bilinearne kriva  $E_t=E/1000$ , bilinearne kriva  $E_t=E/100$  (model prema EN1993-1-5) i bilinearne kriva  $E_t=E/12.5$  (samo za određivanje graničnih nosivosti). Dobijeni rezultati pri numeričkim simulacijama modela nosača upoređeni su sa rezultatima odgovarajućih modela iz eksperimenata. Za modele bez početnih geometrijskih imperfekcija sračunate su vrednosti napona i upoređene sa modelima sa imperfekcijama i eksperimentalnim modelom.

## 8. ZAKLJUČCI I PREPORUKE ZA BUDUĆI RAD

- Zbog svoje složenosti i nepostojanja celovitih rešenja, problem *patch loading*-a nije zatvoreno područje. O njegovoj aktuelnosti svedoči sve veći broj radova, doktorskih teza, skorašnja izmena Evropskih propisa i predlozi za njihovu dopunu. Zbog toga je ovde dat pregled stanja stvari, u ovoj oblasti u cilju smernica za dalji razvoj u rešavanju ovih problema. Izloženi su, značajni radovi i rezultati istraživanja, uključujući i one iz poslednjih nekoliko godina. Sve ovo je u cilju sagledavanja mogućnosti usavršavanja standarda u ovoj oblasti.
- U programskom paketu ANSYS Workbench 15 razvijeni su odgovarajući modeli za numeričku simulaciju ponašanja modela nosača, i rezultati ovih simulacija su upoređeni sa odgovarajućim eksperimentalnim modelima [70]. U ovom radu su sprovedeni testovi ponašanja modela nosača numeričkim simulacijama i određene su vrednosti graničnog opterećenja za različite materijalne modele. Izvršena je analiza dobijenih rezultata upoređivanjem sa graničnim nosivostima dobijenim eksperimentalno. Analizom dobijenih rezultata došlo se do zaključka da su sve krive materijalnih modela dale zadovoljavajuće rezultate osim materijalnog modela koji odgovara bilinearnoj krivoj sa tangentnim modulom  $E_t=E/12.5$ . Njegovo odstupanje u proseku za sve tipove nosača iznosi 30.80%, pa se može zaključiti da on nije pogodan za ovaj tip nosača.

Kriva materijalnog modela (multilinearna kriva) koja odgovara realnom materijalu dala je veoma dobru približnu vrednost graničnog opterećenja. Njeno odstupanje od odgovarajuće vrednosti iz eksperimenta iznosi 4.84% u proseku za sve tipove nosača i zaključak je da veoma dobro opisuje eksperimentalni model. Ostali materijalni modeli odstupaju sa sledećim vrednostima: BSK07 (multilinearna kriva) odstupa za 5.85%, bilinearni materijalni model sa tangentnim modulom  $E_t=E/10000$  odstupa za 8.61%,  $E_t=E/1000$  odstupa za 9.19% i  $E_t=E/100$  odstupa za 10.9%. Takođe, primećeno je, u proseku, bolje slaganje ponašanja nosača bez ukrućenja sa eksperimentom nego nosača sa ukrućenjem.

U okviru numeričkih modela, iz razloga pojednostavljenja modeliranja, nisu uzeti u obzir:

- uticaji imperfekcija pojaseva i ukrućenja,



- uticaji šavova između pojaseva i rebra i između ukrućenja i rebra,
- moguća odstupanja u definisanju graničnih uslova u odnosu na eksperimentalni model,

Uzevši sve ovo u obzir, rezultati su sasvim zadovoljavajući. Pri numeričkim simulacijama modela, oblik, karakter i tok odvijanja deformacija i razvoj izbočavanja su istovetni kao i u slučaju eksperimenta i to za svaki uzorak sa kojim je vršeno poređenje.

- U radu su razmatrani i rezultati uticaja povećanja dužine prostiranja opterećenja kao i uticaji postojanja podužnog ukrućenja. Povećanjem dužine prostiranja opterećenja od 50 mm na 150 mm, u proseku za sve materijalne modele, vrednost graničnog opterećenja je uvećana za nosače bez ukrućenja (A1 i A2) za 22.10% i za nosače sa ukrućenjem (A3 i A7) za 43.56%, pri numeričkoj simulaciji. Sa pojavom ukrućenja, granična nosivost raste za nosače sa dužinom prostiranja opterećenja  $c=50$  mm (A1 i A3) za 2.99%, a za nosače sa dužinom prostiranja opterećenja  $c=150$  mm (A2 i A7) za 22.10%. Zaključak je da se sa povećanjem dužine prostiranja opterećenja granična nosivost povećava mnogo više nego sa dodatkom podužnog ukrućenja, što je posledica rasprostiranja opterećenja na većoj površini ispitivanog nosača. Ovaj zaključak može imati i praktičnu primenu. Kod montaže mostova primenom postupka navlačenja mosta do konačnog položaja preko privremenih ili stalnih oslonaca, povećanjem kontaktne površine oslonca povećava se i granična nosivost nosača. To može biti od značaja jer uticaji koji se javljaju pri montaži mogu prevazići nosivost konstrukcije u pojedinim delovima.
- Analizom dobijenih rezultata došlo se do zaključka da početak pojave plastifikacije nastaje već nakon 58.5% od graničnog opterećenja (u proseku za sve nosače). Kao što je prikazano, deformacije koje se tada javljaju ne moraju biti značajne. Ovo ukazuje da kod svake konstrukcije treba analizirati dve kombinacije: 1) nosač izrađen od čelika višeg kvaliteta, odnosno sa višom granicom razvlačenja, a sa vitkijim rebrom; 2) nosač izrađen od čelika nižeg kvaliteta, a sa debljim rebrom. Prikazane MKE analize ovo omogućavaju sa visokom pouzdanošću i ukazuju na put do ekonomičnije konstrukcije.
- U okviru ovog rada dat je tretman kvadrurnim formulama koje obezbeđuju poboljšana rešenja složenih problema sa singularitetima algebarskog i/ili logaritamskog tipa. Kod površinskih nosača-ploča u integralnim jednačinama potrebnim za numeričku analizu u MKE i MGE javljaju se funkcije sa singularitetima. Dobijene su univerzalne (direktne) kvadrurne

formule koje dobro integrale i neprekidne (glatke) funkcije i funkcije sa algebarskim i/ili logaritamskim singularitetom. One se efikasno mogu primeniti za direktnu integraciju, kao i za rešavanje integralnih jednačina. Ove formule se mogu uspešno implementirati u odgovarajuće softverske pakete koji su zasnovani na metodu graničnih elemenata (MGE) i u konačnih elemenata (MKE), što bi dovelo do jednostavnijih programskih rešenja, povećanje njihove brzine izvršenja, ali i dobijanje tačnijih krajnjih rezultata. U tom slučaju, ne bi se moralo voditi računa da li se u problemu javlja ili ne javlja singularitet, već bi koncepcija programa bila takva da automatski uključuje rešavanje problema sa singularitetom, ukoliko on postoji. U tom smislu, neophodan je rad eksperata u programiranju i poznavanju ovog problema da bi se ovako dobijene nove kvadrature formule na adekvatan način implementirale i maksimalno iskoristila njihova prednost u odnosu na postojeće standardne kvadrature fomule koje se sada koriste. Može se reći da u postojećoj literaturi ovoj oblasti nije bila posvećena dovoljna pažnja.

- Evropski propisi EN1993-1-5 u Aneksu C [28], kao i ENV 1993-1-1 [29], daju osnovne smernice uzimanja uticaja geometrijskih imperfekcija nosača. U radu su obuhvaćene realne geometrijske imperfekcije rebra nosača i izvršeno je upoređenje sa nosačima bez imperfekcija u okviru numeričke simulacije, u cilju praćenja razvoja naprezanja. Može se zaključiti da ne postoji značajno odstupanje u dobijenim rezultatima ali za detaljniju analizu potrebna su dodatna istraživanja koja bi obuhvatala i drugačije tipove geometrijskih imperfekcija (ekvivalentne, prema sopstvenim modovima i dr.). Napomenimo da su slučajevi istraživanja uticaja realnih imperfekcija na veličinu graničnog opterećenja, u literaturi zastupljeni u manjem broju.
- Iz prethodno navedenog zaključuje se da postoji zadovoljavajuće slaganje odgovarajućih numeričkih modela sa eksperimentalnim modelima. To pruža mogućnosti novih testiranja ponašanja ovakvih ili drugačijih modela nosača putem numeričke simulacije. Testovi koji se na taj način sprovode, omogućavaju da se izvrše analize nosača koje bi indirektno doprinele usvajanju ispravnih pristupa za dobijanje teorijskih rezultata, na primer, u cilju analize mehanizama loma u neelastičnoj oblasti. Takođe, pružaju se mogućnosti za dalje analize mnogih parametara, promene geometrije nosača, ispitivanja nosača sa otvorima na rebu, nosača sa profilisanim rebrom, kao i primenu novih materijala u celini ili delu nosača.

## LITERATURA

- [1] **Angelov A**, (1987), *Teorija na površinskite nosači*, Univerzitet Kiril i Metodij, Skoplje.
- [2] **ANSYS 15**, LS-DYNA Keyword user`s manual, Vol I, II, III, February 2013, Version R7.0, Livermore Software Technology Corporation.
- [3] **Atkinson K. E**, (1997), *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press: Cambridge, (1997).
- [4] **Beer G, Smith I, Duenser Ch**, (2008), *The Boundary Element Method with Programming-For Engineers and Scientists*, Springer, Wien-New York, 2008.
- [5] **Belford G.G**, (1973), *On an integration method for solving boundary value problem*, Internat. J. Numer. Methods Engrg. 4, pp. 566–568, (1973).
- [6] **Bergfelt A**, (1971), *Studies and tests on slender plate girders without intermediate stiffeners*, Proceedings of IABSE Colloquium, London, 1971. pp. 67-83.
- [7] **Bergfelt A**, (1979), *Patch Loading on a Slender Web - Influence of Horizontal and Vertical Web Stiffeners on the Load Carrying Capacity*, Publication S 79:1, Department of Structural Engineering, Division of Steel and Timber Structures, Chalmers University of Technology, Göteborg.
- [8] **Bialecki R, Nowak A. J**, (1981), *Boundary value problems in heat conduction with nonlinear material and nonlinear boundary conditions*, Appl. Math. Modelling 5 (1981), No. 6, 417–421.
- [9] **Bittner E**, (1938), *Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten*, Wien: Springer, 1938.
- [10] **Braun Benjamin**, (2010), *Stability of steel plates under combined loading*, Doctoral Thesis, Nr 2010-3, Institut für Konstruktion und Entwurf Stahl-Holz- und Verbundbau, Universität Stuttgart, Germany.
- [11] **BS 5400-3**: 2000, Steel, concrete and composite bridges, Part 3 Code of practice for design of steel bridges.
- [12] **BSK07**, (2007), Boverkets handbok om stålkonstruktioner BSK 07, ISSN: 1400-1012 (na Švedskom).

- [13] **Cevik A**, (2007), *A new formulation for longitudinally stiffened webs subjected to patch loading*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 63. pp. 1328-1340.
- [14] **Cevik A, Tolga Gogus M, Guzelbey I, Filiz H**, (2010) *A new formulation for longitudinally stiffened webs subjected to patch loading using stepwise regression method*, Advances in Engineering Software, Vol 41. pp 611-618.
- [15] **Chacon R**, (2014), *Mechanical Behavior of the Shear-Patch Loading Interaction on Transversally Stiffened Steel Plate Girders*, Latin American Journal of Solids and Structures, Vol 11, No 10, pp. 1721-1743.
- [16] **Chacon R, Bock M, Real E**, (2011), *Longitudinally stiffened hybrid steel plate girders subjected to patch loading*, Journal of Constructional Steel Research , Vol 67, pp 1310-1324.
- [17] **Chacon R., Mirambell E., Real E.** (2014), *Influence of flange strength on transversally stiffened girders subjected to patch loading*, Journal of Constructional Steel Research 97 (2014), pp.39-47.
- [18] **Chacón Rolando Flores**, (2009), *Resistance of Transversally Stiffened Hybrid Steel Plate Girders to Concentrated Loads*, Doctoral Thesis, Universitat Politècnica de Catalunya Departament d'Enginyeria de la Construcció, Barcelona, Spain.
- [19] **Chrysakis A. C, Tsamasphyros G**, (1992), *Numerical solution of integral equations with a logarithmic kernel by the method of arbitrary collocation points*, Internat. J. Numer. Meth. Engineering 33 (1992), 143-148.
- [20] **Clarín M**, (2007), *Plate Buckling Resistance - Patch Loading of Longitudinally Stiffened Webs and Local Buckling*, PhD thesis, No. 2007:31, Luleå University of Technology, Department of Civil, Mining and Environmental Engineering, Division of Structural Engineering - Steel Structures, 2007.
- [21] **Comentary and worked examples to EN 1993-1-5**, (2007) *Plated structural elements*, JRT Scientific and Technical Reports, B. Johansson, R. Maquoi, G. Sedlacek, C. Müller, D. Beg.
- [22] **Crow J. A**, (1993), *Quadrature of integrands with a logarithmic singularity*, Math. Comp. 60 (1993), 297-301.
- [23] **Cvetković A. S, Milovanović G.V**, (2004), *The Mathematica Package "Orthogonal Polynomials"*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **19**, pp. 17–36, (2004).

- [24] **Davaine, L.** (2005), “*Formulations de la résistance au lancement d’une âme métallique de pont raide longitudinalement*”, Doctoral Thesis D05-05, INSA de Rennes, France. (In French).
- [25] **Davis P. J., Rabinowitz P.** (1984), *Methods of Numerical Integration* (2<sup>nd</sup> edn.), Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press Inc., Orlando, FL. (1984).
- [26] **De Bonis M. C., Mastroianni G.** (2006), *Projection methods and condition numbers in uniform norm for Fredholm and Cauchy singular integral equations*, SIAM J. Numer. Anal. **44**. pp. 1351–1374, (2006).
- [27] **Dubas, P., Gehri, E.** (1986), *Behaviour and Design of Steel Plated Structures*, ECCS - Technical committee 8 - Structural stability, Technical working group 8.3 – Plated Structures, ECCS printing No. 44, 1st edition. Swiss Federal Institute of Technology, Zürich, Switzerland.
- [28] **EN 1993-1-5: 2006 Eurocode 3:** Design of steel structures, Part 1-3: Plated structural elements, November 2006, ISBN 0 580 49667 8.
- [29] **ENV 1993-1-1: 2005 Eurocode 3:** Design of steel structures, Part 1-1:General rules for buildings
- [30] **Fredholm I.** (1900), *Ofversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps – Akademiens Forhandlingar*, Vol.57, pp. 39-46, 1900.
- [31] **Gallagher R. H.** (1975), *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [32] **Gautschi W.** (1981), *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, in E. B. Christoffel. The Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences, P. L. Butzer and F. Feher, eds., Birkhauser, Basel, 1981, pp. 72–147.
- [33] **Gautschi W.** (1990), *Computational aspects of orthogonal polynomials*, Orthogonal Polynomials (Columbus, OH, 1989), P. Nevai (Ed.), pp. 181–216, NATO Adv. Sci. Ins. Ser. C: Math. Phys. Sci., 294, Kluwer, Dordrecht (1990).
- [34] **Gautschi W.** (2004), *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Clarendon Press, Oxford 2004.
- [35] **Gautschi W.** (2010), *Gauss quadrature routines for two classes of logarithmic weight functions*, Numer. Algorithms **55**, pp. 265 – 277, (2010).

- [36] **Girkmann K**, (1965), *Površinski sistemi nosača-uvod u elastostatiku pločastih nosača, ploča i poliedarskih sistema*, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
- [37] **Golub G. H, Welsch J. H**, (1969), *Calculation of Gauss quadrature rules*, Mathematics of Computation, **23**, pp. 221–230, (1969).
- [38] **Gozzi J**, (2007), *Patch loading resistance of plated girders - Ultimate and serviceability limit state*, Doctoral Thesis 2007:30, Division of Structural Engineering – Steel Structures, Luleå University of Technology, Luleå. (ISRN: LTU-DT--07/30--SE).
- [39] **Graciano C**, (2002), *Patch Loading: Resistance of longitudinally stiffened steel girder webs*, Doctoral thesis 2002:18, Lulea University of Technology, Sweden. ISRN: LTU-DT-02/18-SE, 2002.
- [40] **Graciano C, Casanova E, Martínez J**, (2011), *Imperfection sensitivity of plate girder webs subjected to patch loading*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 67, pp. 1128–1133.
- [41] **Graciano C, Lagerqvist O**, (2003), *Critical buckling of longitudinally stiffened web subjected to compressive edge loads*, Journal of Constructional Steel Research 59, No 9, 2003, pp.1119-1146.
- [42] **Graciano C, Mendes J**, (2014), *Elastic buckling of longitudinally stiffened patch loaded girders using factorial design*, Journal of Constructional Steel Research 100 (2014), pp. 229-236.
- [43] **Graciano C. A, Edlund B**, (2003), *Failure mechanism of slender girder webs with a longitudinal stiffener under patch loading*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 59. pp. 27-45.
- [44] **Graciano C.A**, (2003), *Ultimate resistance of longitudinally stiffened webs subjected to patch loading*, Thin-Walled Structures 41 (2003) 529–541.
- [45] **Granath P**, (1997), *Behavior of Slender Plate Girders Subjected to Patch Loading*, J. Construct. Steel Res., No 1, pp 1-19.
- [46] **Granath P, Lagerqvist O**, (1999), *Behaviour of girder webs subjected to patch loading*, Journal of Constructional Steel Research No.50., pp. 49–69.
- [47] **Hajdin N**, (1958), *Jedan postupak za numeričko rešavanje graničnih zadataka i njegova primena na neke problem teorije elastičnosti (A method for numerical solution of boundary value problems and its application to certain problems of the theory of elasticity)*,

- Zbornik Građevinskog fakulteta br. 4, str. 1–57, (1958).
- [48] **Hajdin N**, (1989), *Teorija površinskih nosača-ploče napregnute na savijanje, ploče napregnute u svojoj ravni*, Naučna knjiga Beograd.
- [49] **Hajdin N, Krajčinović D**, (1973), *Integral equation method for solution of boundary value problems of structural mechanics*, Part I. Ordinary differential equations, Internat. J. Numer. Methods Engrg. **7**, pp. 509–522, (1973).
- [50] **Hajdin N, Marković N**, (1991), *Uticaj dužine raspodeljenog opterećenja na graničnu nosivost čeličnih I nosača* (Influence of the length of patch load on the ultimate load of plate girders), Zbornik radova IX kongres Saveza društava građevinskih konstruktora Jugoslavije, Cavtat, april 1991.
- [51] **Hammer P.C, Marlowe O. J, Stroud A. H**, (1956), *Numerical Integration over Simplexes and Cones*, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, Vol.X, pp. 130-137, 1956.
- [52] **Harris C. G, Evans W. A. B**, (1977), *Extension of numerical quadrature formulae to cater for end point singular behaviours over finite intervals*, Internat. J. Comput. Math., **6** (1977), pp. 219–227.
- [53] <http://www.cs.purdue.edu/archives/2002/wxg/codes/>,
- [54] <http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/>,
- [55] **Igić T, Milovanović G, Turnić D**, (2013), *Kvadraturne formule za razvoj metoda u mehanici*, Zbornik u čast Nikole Hajdina povodom devedesetog rođendana, Beograd 2013. Izdavač: Helicon publishing, str. 43-57, ISBN 978-86-84963-58-3.
- [56] **Ioakimidis N**, (1981), *Methods for the numerical solution of singular integral equations with logarithmic singularities*, Internat. J. Comput. Math., **9** (1981), 363-372.
- [57] **Januš K, Kárníková I, Škaloud M**, (1988), *Experimental Investigation into the Ultimate Load Behaviour of Longitudinally Stiffened Steel Webs Under Partial Edge Loading*, Acta Technica ČSAV, No 2., pp158-194.
- [58] **Jaswon M. A, Ponter A.R**, (1963), *An Integral Equation Solution of the Torsion Problem*, Proceeding of the Royal Society, London, Vol.275 (A), pp. 237-246, 1963.
- [59] **Johansson B, Lagerqvist O**, (1995), *Resistance of Plate Edges to Concentrated Forces*, J.Construct. Steel Research, **32**, 1995, 69-105.
- [60] **Katsikadelis J. T**, (2002), *Boundary Elements: Theory and Applications*, Elsevier,

Amsterdam, 2002.

- [61] **Katsikadelis T. J, Sapountzakis I. E**, (1985), Torsion of Composite Bars by the Boundary Element Method, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol.111, pp. 1197-1210, 1985.
- [62] **Katsikadelis T. John**, (2014), *The Boundary Element Method for Plate Analysis*, Published by Elsevier, (ISBN–13: 978-0-12-416739-1).
- [63] **Kythe P. K, Puri P**, (2002), *Computational Methods for Linear Integral Equations*, Birkhäuser: Boston-Basel-Berlin, (2002).
- [64] **Lagerqvist O, Johansson B**, (1996), *Resistance of I- girders to Concentrated Loads*, J.Construct. Steel Research, Vol. 39, No.2, 1996, 87-119.
- [65] **Lombardi G**, (2009), *Design of quadrature rules for Müntz and Müntz-logarithmic polynomials using monomial transformation*, Internat. J. Numer. Meth. Engineering **80**, pp. 1687 – 1717, (2009).
- [66] **Lučić D**, (1999), *Prilog analizi stabilnosti tankozidnih nosača*, doktorska disertacija, Beograd, 1999, s.151.
- [67] **Ma J, Rokhlin V, Wandzura S**, (1996), *Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 33, pp. 971–996, (1996).
- [68] **Markovic N, Hajdin N**, (1992), *A Contribution to the Analysis of the Behaviour of Plate Girders subjected to Patch Loading*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 21. pp. 163-173.
- [69] **Marković N**, (1989), *Prilog analizi plastičnog ponašanja tankozidnih nosača*, Magistarski rad (mentor N.Hajdin) , Građevinski fakultet u Beogradu, 1989. godine.
- [70] **Marković N**, (2003), *Izbočavanje limenih nosača pod dejstvom lokalnog opterećenja*, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet u Beogradu, (mentori: N. Hajdin i B. Ćorić).
- [71] **Marković N**, (2013), *Izbočavanje limenih nosača pod dejstvom lokalnog opterećenja – „Patch loading“*, Zbornik u čast Nikole Hajdina povodom devedesetog rođendana, Beograd 2013, ISBN 978-86-84963-58-3, str. 115-136.
- [72] **Marković N, Turnić D, Igić T**, (2013), *Elasto-Plastic Behaviour and Ultimate Load of Plate Girders Subjected to Patch Loading*, Fourth Serbian (29<sup>th</sup> Yu) Congress on



- Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjačka Banja, Serbia, 4-7 June 2013., D-31, pp. 741-746, ISBN 978-86-909973-5-0.
- [73] **Marković Zlatko**, (2014), *Granična stanja čeličnih konstrukcija prema Evrokodu*, Akademska misao, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, ISBN 978-86-7466-510-7.
- [74] **Mastroianni G, Milovanović G. V**, (2008), *Interpolation Processes-Basic: Theory and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (2008).
- [75] **Mastroianni G, Milovanović G. V**, (2009), *Some numerical methods for second kind Fredholm integral equations on the real semiaxis*, IMA J. Numer. Anal 29, pp. 1046–1066, (2009).
- [76] **Mastroianni G, Milovanović G. V**, (2009), *Well-conditioned matrices for numerical treatment of Fredholm integral equations of the second kind*, Numer. Linear Algebra Appl. 16, pp. 995–1011, (2009).
- [77] **Milovanović G. V**, (1999), *Müntz orthogonal polynomials and their numerical evaluation*, In: Applications and Computation of Orthogonal Polynomials (W. Gautschi, G.H. Golub, G. Opfer, eds.), pp. 179–202, ISNM, Vol. 131, Birkhäuser, Basel, (1999).
- [78] **Milovanović G. V**, (2014), Chapter 23: *Computer algorithms and software packages*, In: Walter Gautschi: Selected Works and Commentaries, Volume 3 (C. Brezinski, A. Sameh, eds.), pp. 9–10, Birkhauser, Basel, 2014.
- [79] **Milovanović G. V**, (2014), *Numerička analiza i teorija aproksimacija-uvod u numeričke procese i rešavanje jednačina*, Zavod za udžbenike Beograd, Srbija.
- [80] **Milovanović G. V, Cvetković A. S**, (2002), *Numerical integration of functions with logarithmic end point singularity*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 17, pp. 57–74, (2002).
- [81] **Milovanović G. V, Cvetković A. S**, (2005), *Gaussian type quadrature rules for Müntz systems*, SIAM J. Sci. Comput. 27, pp. 893 – 913, (2005).
- [82] **Milovanović G. V, Cvetković A. S**, (2005), *Numerical inversion of the Laplace transformation*, Facta Univ. Ser. Elec. Energ. 18, pp. 515–530 (2005).
- [83] **Milovanović G. V, Cvetković A. S**, (2012), *Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type*, Math. Balkanica 26 (2012), 169–184.

- [84] **Milovanović G. V, Igić T**, (2011), *Gaussian rules for Müntz systems in the boundary element method*, 4<sup>th</sup> Serbian-Greek Symposium, Recent Advanced in Mechanics, Vlasina, pp. 45–46, (2011).
- [85] **Milovanović G. V, Igić T, Turnić D**, (2014), *Generalized quadrature rules of Gaussian type for numerical evaluation of singular integrals*, Journal of Computational and Applied Mathematics, (2014) ISSN 0377-0427.
- [86] **Monegato G, Sloan I. H**, (1997), *Numerical solution of the generalized airfoil equation for an airfoil with a flap*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), 2288-2305.
- [87] **Müller C**, (2003), *Zum Nachweis ebener Tragwerke aus Stahl gegen seitliches Ausweichen*, Dissertation D82, RWTH Aachen, 2003.
- [88] **Nahlik R, Bialecki R**, (1983), *A new method of numerical evaluation of singular integrals occurring in two-dimensional BIEM*, Appl.Math.Modelling 7 (1983), no. 3, 169–172.
- [89] **Nardini D, Brebia C. A**, (1982), *New Approach to Vibration Analysis Using Boundary Elements*, in: Boundary Element Methods in Engineering, Computational Mechanics Publications and Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [90] **Piessens R, Branders M**, (1975), *Tables of Gaussian Quadrature Formulas*, University of Leuven, Leuven, (1975).
- [91] **Reddy J. N**, (1993), *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill International Editions, New York, 1993.
- [92] **Roberts T. M**, (1981), *Slender plate girders subject to edge loading*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2 Vol. 71 September 1981, pp805-819.
- [93] **Roberts T. M, Rockey K. C**, (1979), *A mechanism solution for predicting the collapse loads of slender plate girders when subjected to in-plane patch loading*, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, 67. pp. 155-175.
- [94] **Saeed Moaveni**, (1999), *Finite Element Analysis-Theory and Application with ANSYS*, Minnesota State University, Mankato, ISBN 0-13-785098-0.
- [95] **Sauter S. A, Schwab C**, (2011), *Boundary Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics 39, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [96] **Seitz M**, (2005), *Tragverhalten längsversteifter Blechträger unter quergerichteter Krafteinleitung*, Doctoral Thesis Nr. 2005-2, Institute of Structural Design, Universität Stuttgart, Germany. (ISSN: 1439-3751). (In German).

- [97] **Sladek V, Sladek J.** (2010), *From the BEM to mesh-free implementations of integral equations*, In: Recent Developments in Boundary Element Methods – A volume to honour John T. Katsikadelis (E. J. Sapountzakis, ed.), pp. 227–241, WIT Press, Southampton, 2010.
- [98] **Smith R. N. I.** (2000), *Direct Gauss quadrature formulae for logarithmic singularities on isoparametric elements*, Engineering Analysis with Boundary Elements 24 (2000), 161-167.
- [99] **Stieltjes T. J.** (1884), *Sur une generalization de la theory des quadratures mécaniques*, *Comptes Rendus Mathématique*, Académie des Sciences, Paris, 99, pp. 850–851, (1884).
- [100] **Šćepanović B.** (2003), *Ekscentrično lokalno opterećeni I nosači-eksperimentalno-teorijska analiza*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2003, 120str.
- [101] **Timošenko S.** (1952), *Teorija elastične stabilnosti*, Građevinska knjiga, Beograd.
- [102] **Timošenko S, Vojnovski-Kriger S.** (1962), *Teorija ploča i ljuski*, Građevinska knjiga, Beograd.
- [103] **Tschamper H, Dubas P.** (1990), *Stabilité des âmes soumises a une charge concentrée et a une flexion globale*. Revue Construction Métallique. CTICM. Saint-Remyless-Chevreuse. vol. 2. p. 25–9.
- [104] **Turnic D, Stojić D, Zdravkovic S, Mladenović B.** (2014), *Application of Variation Methods in Structural Dynamics*, 14<sup>th</sup> INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE VSU'2014, SOFIA, pp. 56-61.
- [105] **Turnić D, Stanojev M, Zdravković S, Bonić Z, Zlatkov D.** (2013), *Application of Laplace transformation in determination of free transverzal vibration of rectangular plates*, VSU'13, Sofia, (ISSN:1314-071 X), pp. I-200-205.
- [106] **Ungermann D.** (1990), *Bemessungsverfahren für volland- undkastenträger unter besonderer berücksichtigung des stegverhaltens*, Heft 17, Lehrstuhl für Stahlbau, RWTH Aachen. (ISSN: 0722-1037). (In German).
- [107] **Von Kármán T, Sechler E. E, Donnell L. H.** (1932), *The Strength of Thin Plates in Compression*, Transactions ASME 1932, Applied Mechanics, APM-54-5.
- [108] **Winter G.** (1947). *Strength of Thin Steel Compression Flanges*, Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 112. pp. 527-554.
- [109] **Zdravković S.** (2015), *Teorija površinskih nosača-Ploče i ljuske*, AGM Knjiga

- [110] **Zdravković S**, (2013), *Statika i stabilnost konstrukcija*, Univerzitet u Nišu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, (ISBN: 978-86-86363-41-1).
- [111] **Živković S**, (2015), *Doprinos proračunu direktno zavarenih veza elemenata rešetkastih nosača od šupljih čeličnih profila pravougaonog i kvadratnog poprečnog preseka*, Doktorska disertacija, Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu (mentor D. Stojić).