УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИПТИНИ
УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ У ЛЕПОСАВИЋУ

Мр Снежана Ивковић

РЕАЛИЗАЦИЈА САДРЖАЈА ИЗ ОБЛАСТИ ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА ПУТЕМ ПРОБЛЕМСКЕ НАСТАВЕ

Докторска дисертација

Ментор
Проф. др Алија Мандак

Косовска Митровица
2011.године

ИНДЕТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА
ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор
Име и презиме: Снежана Ивковић
Датум и место рођења: 23. новембар 1952, Пирот
Садашње запослење: Предавач, Висока школа струковних студија за образовање васпитача у Пироту
II. Докторска дисертација
Наслов: Реализација садржаја из области природних бројева путем проблемске наставе
Број страница: 243
Број слика: 85
Број библиографских података: 230
Установа и место где је рад израђен: Учитељски факултет у Лепосавићу
Научна област (УДК):
Ментор: Проф. др Алија Мандак
III. Оцена и обрана
Датум пријаве теме:
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: Број 08-2/203, датум: 09. 10. 2008. године
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: 1. др Алија Мандак, 2. др Крстивоје Шпијуновић и др Радивоје Кулић
Комисија за оцену докторске дисертације:
Комисија за одбрану докторске дисертације:
Датум одбране дисертације:

С А Д Р Ж А Ј

УВОД
ЗНАЧАЈ И АКТУЕЛНОСТ ПРОБЛЕМА ИСТРАЖИВАЊА

ЗНАЧАЈ И АКТУЕЛНОСТ ПРОБЛЕМА ИСТРАЖИВАЊА

Да би нација преживела, потребно је да свака индивидуа стваралачки мисли.

Тејлор

Развој научне мисли и друштвене потребе одређеног временског тренутка намећу потребу конципирања програмских садржаја и захтева, као и начина реализовања истих у оквиру наставних предмета који су заступљени у основној школи. Утврђивање ефикасности остваривања постављених захтева и ефикасности путева, начина (метода) у настави, велики је изазов за истраживања.

Наиме, досадашња истраживања код нас (Хавелка 1990, студија УНИЦЕФа „Свеобухватна анализа система основног образовања у СРЈ“, и друга) показала су да сви механизми образовног система који су од утицаја на методе наставе и учења фаворизују тзв. традиционалне методе, тј, трансмисивне и предавачке методе, оне методе у којима је кључно шта наставници раде. Реч је о методама наставе, али не и о методама учења, па се учење третира скоро као узгредни исход наставе. Те методе су усмерене на наставника а не на ученика. Оне су готово увек вербалне, предавачке, методе које ученика нужно стављају у улогу слушаоца.

Неколико је фактора у систему образовања који то показују.

1. Обука садашњих наставника за примену наставних метода на већини наставничких факултета јесте обука за примену традиционалних метода. (Као доказ ове тврдње дајемо у прилогу оригиналне оперативне планове рада једне основне школе из Ниша у којима се ни у једном сегменту не појављује проблемска метода).
2. Веома обимно градиво у школским програмима и релативно мало часова намећу предавачке методе, јер се тако најбрже може „реализовати“ програм, то јест пренети садржај.

3. Систем рада школске инспекције, то јест, оцењивања наставника, апсолутно је концетрисан на „реализацију“ програма. Надзорници најпре и углавном проверавају да ли је наставник испредавао све дефинисане наставне садржаје. Врло ретко се проверава каква су знања стекли ученици.
4. Такав начин оцењивања наставника рефлектује се на оцењивање знања ученика. Оцењује се успешност репродуковања неколико последњих наставних јединица, а не трајна знања из целине предмета за одређени разред. Такође, готово никада се не оцењује ни како ученици повезују знање које су стекли у оквиру различитих , и често сродних предмета.

Следствено наведеном, доминантни облици наставе (предавачки тип) и начин оцењивања успеха ученика (провера степена усвојености програмских садржаја) фаворизују механичко памћење, и то често без разумевања. Три најчешће коришћене методе наставе/учења јесу:

(1) механичко учење напамет,
(2) смислено вербално учење и
(3) практично учење. Најређе се користе: учење путем решавања проблема, стваралачко учење и кооперативно учење.

Историјска опсервација показује да идеја о проблемској настави као новој настави потиче још од француског филозофа, педагога и теоретичара Ж. Ж. Русоа (1712–1778). Касније, крајем 19. века, педагози-теоретичари ову методу осмишљавају за примену. Забележено је да је руски педагог С. И. Шохор-Троцкиј тада обелоданио *нову методу* учења згодну управо за учење аритметике. Свој зачетак проблемска настава засигурно има у првој половини 20. века у америчкој *пројект-методи и проблем-методи* чије су теоријске и практичне проблеме поставили Џ. Дјуј и В. Килпатрик. Прави почетак и одмах експанзиону примену, ипак, има 1965. године, када је о њој у Њујорку одржан први научни симпозијум, а код нас “Први југословенски симпозијум о проблемској настави” 1984. године у Бањи Ковиљачи. Од тада се она често примењује са мање или више успеха.

О продуктивној или стваралачкој методи говори и С. Прва-новић, у свом приручнику за наставнике, констатујући да је примена те методе у основној школи немогућа, али да „та немогућност није апсолутна. Не може све, али нешто ипак може. И то нешто креће се у широким границама, што зависи опет до умешности учитеља“ (Прванович, 1952, стр. 19). На истом месту С. Прванович констатује да је то још увек метода будућности јер „продуктивна метода не може да се спроведе данас потпуно ни када би се она прилагодила дечјем узрасту (што је изводљиво). Не може зато што за њену потпуну целисходност није довољно да он буде њен ’ватрени присталица’. Потребно је, уз тај услов, још и то да је и сам наставник васпитан и образован у духу те методе и помоћу ње“.

Нажалост та констатација и данас, после више од пола века од њеног изрицања, још увек важи за нашу педагошку праксу. До неких промена је додуше дошло, али оне нису драстичне. Узроке таквом стању треба тражити баш у чињеници да се још и данас наставници, не васпитавају у духу те методе и помоћу ње. Један од доказа да је то заиста тако је да се ова метода уопште не помиње, већ се као „методе које наставници највише користе у пракси“ (Петровић и други, 1983, стр. 28) помињу: 1. монолошка, 2. дијалошка, 3. метода рада са текстом, 4. метода илустрације, 5. метода демонстрације, 6. метода самосталних радова.

Из области наставе математике код нас је до сада урађено истраживање у Институту за педагошка истраживања у Београду под руководством Р. Ничковића "Утицај учења путем решавања проблема на успех у настави математике - експериментална провера на примеру наставног програма математике у првом и другом разреду основне школе“ (1976). Затим двадесет година касније Мирко Дејић је реализовао истраживање за потребе докторске дисертације под називом „Методичка трансформација и осавремењивање наставе нумеричке математике“ (1996). Постоје и мањи радови који се односе на примену учења путем решавања проблема у обради појединих наставних јединица, нарочито у старијим разредима основне школе (V до VIII разреда), али готово да нема оних која су се бавила

проблемима реализације наставе математике до IV разреда основне школе. Због тога је наш проблем актуелан и има:

- педагошки (научни),
- практични и
- друштвени значај.

Педагошки значај се заснива на потреби широке и свеобухватне примене проблемске наставе која би довела до квалитетнијег, савременијег образовања.

Практични значај се огледа у организацији проблемске наставе која на најефикаснији начин може довести до реализације жељених циљева наставе.

Друштвени значај произилази из чињенице да ефикасније образовање утиче на развијање и формирање ученикове личности, личности која је у стању да самостално процењује и решава проблеме у различитим животним ситуацијама и околностима.

Прво поглавље првог дела рада има пет целина/делова. У њему се разматрају теоријски садржаји и појмови који су непосредно у вези са проблемом истраживања и врши се анализа наставних тема: сабирање, одузимање множење и дељење у наставном програму математике за основну школу. Први део садржи ближа објашњења вредновања успеха ученика у наставном предмету математика, али и објашњење проблемске наставе као врсте наставе, појма проблема и проблемске ситуације. Други део односи се на могућности примене проблемске наставе при обради програмских садржаја у основној школи. Трећи део садржи преглед неких досадашњих истраживања и радова. Четврто поглавље посвећено је елементарним појмовима о природним бројевима, као и рачунским операцијама са њима. Последњи, пети део, односи се на природне бројеве у почетној настави математике.

У другом поглављу првог дела, под насловом *Методологија рада*, објашњени су: 1. избор предмета рада, 2. циљ и задаци истраживања, 3. значај истраживања, 4. хипотетички оквир истраживања, 5. методе, технике и инструменти истраживања,

6. узорак истраживања, 7. време истраживања и 8. организација и ток истраживања.

У *првом поглављу другог дела* рада, које носи назив *Иницијално испитивање,* изнета су и обрађена постигнућа ученика на тесту интелигенције, као и успех ученика на, специјално за ову прилику конструисаном, иницијалном тесту знања (ИТ).

У *другом поглављу другог дела* рада изнет је општи успех ученика на завршном тестирању, такође специјално за ово тестирање конструисаног теста за проверу знања - ЗТ. Дате су и корелационе матрице за податке добијене на завршном тесту. У њима се види корелација између задатака решаваних у ЗТ.

Прво поглавље у трећем делу садржи закључно разматрање, *друго* предлог за даље истраживање, *треће* литературу, а *четврто* експериментални програм који је спроведен у четвртом разреду основне школе.

Поједини резултати ове дисертације саопштени су на следећим научним скуповима:

Симпозијум *Васпитач за 21. век* (“Формирање појма броја пет у средњој узрасној групи”. Алексинац, *Наше стварање,* број 7, 2007).

12. *конгрес математичара Србије* (“Формирање појма броја пет путем проблемске наставе”. Нови Сад, 2008. Књига апстраката, стр. 88).

Округли сто *Школа у природи као фактор социјализације и могућности сузбијања насиља у школи* (“Јединице мере у условима школе у природи”., Врање, Учитељски факултет, 2009).

Симпозијум 3. *Васпитач за 21. век* (“Кључ за решење недоумица из области развоја математичких појмова”**.** *Наше стварање*, Алексинац, број 9, 2010. стр. 276-278).

Такође неки резултати су у радовима који су објављени у научним часописима:

“Формирање појма броја пет путем проблемске наставе” (са А. Мандаком). *Методичка пракса*, Београд, број 4, 2009. (стр. 47-54)

“Историјски осврт на развој природног броја и бројевних система”. *Огледи и искуства*, Висока школа струковних студија за образовање васпитача, Пирот, број 10, 2011. (63-79)

“Један пример припреме за реализацију садржаја из области почетне наставе математике применом проблемске методе”. *Методичка пракса*, Београд, број 3, 2010. (стр. 445-452)

****

Аутор захваљује ментору, проф. др Алији Мандаку, на корисним саветима који су побољшали квалитет овога рада. Члану комисије, проф. др К. Шпијуновићу захваљује на инспирацији за цитирање мисли великих људи на почетку појединих поглавља рада. Те мисли су извучене из ниске бисера мудрости која је стварана вековима да надахњује будућа покољења и својим сјајем осветљава тежак и мукотрпан пут долажења до научних открића. Посебну захвалност аутор дугује члану комисије, проф. др Р. Кулићу, који је препознао ауторову жељу да свом преданом раду на путу математичког образовања генерација младих дода и овај писани рад, докторску дисертацију, и на тај начин омогућио да се формира и затвори једна од најсавршенијих форми у математици – круг, којим се тај ауторов пут наставља увек изнова не препознавајући почетак ни крај. На крају, аутор захваљује породици, а посебно супругу, на разумевању и свесрдној помоћи.

ПРВИ ДЕО

ТЕОРИЈСКО-МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР РАДА

I. ТЕОРИЈСКО УТЕМЕЉЕЊЕ ПРОБЛЕМСКЕ НАСТАВЕ

Наш циљ није да дамо, да прилепимо сазнања, него да учинимо да размишљају, да ставимо децу у ситуације у којима ће се вежбати у решавању проблема

Лекије-Громер

1. Учење и вредновање рада и успеха ученика

Учење (learning; opprentisage; Lernen; учение) је психички процес (по некима функција) који се може дефинисати на разне начине. Наводимо неколико психолошких дефиниција.

- Учење је релативно трајно мењање понашања субјекта који учи под деловањем свога искуства. (Тиме се од ефеката учења одвајају промене понашања које настају због других чинилаца – адаптације, сазревања, итд).

Како је појам искуства вишезначан, неки психолози га избегавају, па кажу:

- Учење је мењање понашања изазвано вежбањем, праксом, тренингом. Или:
- Учење је усвајање нових реакција или одговора под утицајем праксе.

У психолошким дефиницијама наглашава се сам процес учења. У педагошким је нагласак на резултатима учења. Тако:

- Учење је усвајање знања и развијање вештина и навика.

Шира педагошка дефиниција гласи:

- Учење је овладавање достигнућима претходних генерација, дакле усвајање генерацијског искуства.

Као резултат процеса учења јавља се знање.

Учење (сазнавање) у настави је један од три вида сазнавања уопште, а они су: 1. свакодневно (природно, лаичко, случајно) сазнање, 2. сазнање у настави и 3. научно сазнање.

Сазнање у настави се остварује у посебним условима чија је сврха да се тај процес убрза и учини ефикаснијим. Сазнајни процес и школско учења не могу се поистовећивати. школско учење, поред сазнајне (когнитивне) компоненте, обухвата и чулну, емоционалну и вољну (конативну) компоненту.

Важан циљ укупне активности наставника и ученика је да ученици савладају одређене садржаје, то јест, да овладају чињеницама и сагледају односе међу њима. На тај начин се развијају мисаоне способности и подстиче ментални развој ученика, што је један од најважнијих задатака школе. Знања се стичу у сазнајном процесу који посредује између постављеног образовног задатка и оствареног резултата. Та посредничка улога је важна, па је, због тога, веома битно да наставник добро упозна суштину процеса сазнавања, да сагледа пут којим се долази до знања. Сагледавање те психолошке основе сазнавања омогућује наставнику да наставу организује тако да најкраћим и најсигурнијим путем дође до резултата.

Стални пратилац и саставни део васпитно-образовног рада је *оцењивање и праћење рада и успеха ученика.*

Оцену треба схватити као резултат упознавања, праћења развоја и вредновања знања (укључујући умења и навике), залагања и активности ученика.

Оцена има троструку функцију:

(1) *информациону* - да благовремено обавести ученике, родитеље и школу о успеху појединих ученика и наставника о резултатима свога рада, а друштвену заједницу - о остваривању програмских задатака наставе;

(2) *мотивациону* - да подстиче ученике на веће ангажовање и за систематско учење;

(3) *орјентациону* - да буде основа за утврђивање узрока застоја и тешкоћа у напредовању ученика и за предузимање одговарајућих педагошких и других мера ради постизања бољег успеха и бржег развоја ученика, да на крају основне школе буде један од усмеравајућих фактора за даље школовање.

Да би оцена испунила све своје функције, мора се избећи једностраност и упрошћеност у оцењивању. Рад сваког ученика треба стално и систематски пратити и контролисати, јер нередовно оцењивање знања ученика доприноси њиховом несистематском раду и неуспеху, што је нарочито карактеристично за математику.

Оцена успеха ученика у учењу математике (на крају школске године, као и на крају делова програма у току школске године) треба да буде у складу са постављеним циљем, општим и оперативним задацима наставе математике, као и основним захтевима у погледу математичког знања и имења ученика.

Приликом оцењивања знања ученика узимају се у обзир две компоненте:

(1) обим (квантитет) и

(2) ниво (квалитет) знања.

(1) При вредновању обима знања оценом се исказује количина знања у доста широком распону: од извесног обавезног минимума елементарних знања (без којих ученици не могу успешно пратити наставу и учити нове садржаје), преко фундаменталних знања (која чине целовит систем), до неког дозвољеног максимума у оквиру плана и програма.

При вредновањау (процењивању *квалитета (нивоа) знања* оценом се исказује трајност, коректност, свесност и употребљивост знања (његова функционалност) на разним ступњевима, односно нивоима. У погледу квалитета има неколико нивоа знања:

1. *Ниво препознавања* - најнижи ниво, када ученик није у стању да самостално искаже тражени податак, правило и слично; али га се може сетити уз извесну помоћ наставника, или га може препознати у низу понуђених одговора (на пример, у тесту са вишеструким избором одговора).
2. *Ниво репродукције* - мало квалитетније али неопходно знање, када ученик може самостално да репродукује научени садржај у погледу познавања чињеница, термина, правила, класификација, поступака и тако даље.

3. *Ниво разумевања* - квалитетније знање у односу на претходне нивое, када ученик стварно схвата и разуме научени садржај и у стању је да га логички образложи, то јест, градиво излаже логично и с разумевањем. Ученик је у стању не само да препозна и репродукује научено, већ да врши мисаону прераду знања - да разуме и објасни чињенице, појмове правила, дефиниције, да издвоји битно од небитног, повезује чињенице и изводи закључке. Ученик који је научио градиво на овом нивоу може вербално исказани задатак да „преведе“ на математички језик (језик симбола), и обрнуто, са више апстрактног (математичког) језика може да „преведе“ на мање апстракти (обичан) језик.
4. *Ниво примене* - врло квалитетно знање, када је ученик у стању да научене садржаје (правила, алгоритме, методе и слично) самостално примењује у решавању разних теоријских или практичних задатака сличних онима који су већ решавани, то јест, ученик уме стечено знање да примењује при учењу новог градива, у животу и пракси.
5. *Ниво креативности или стваралачког решавања проблема* - најквалитетније знање, када је ученик, сагласно свом узрасту, у стању да стечено знање и познате методе примењује у сасвим новим ситуацијама, на пример, у решавању задатака сасвим нове врсте, да самостално издваја битне идеје и чињенице и проналази одговарајуће поступке за решавање појединих проблема, да самостално и стваралачки реорганизује градиво које излаже, критички анализира и процењујеизнете тврдње.

Квалитет и квантитет, као и изведени нивои знања, међусобно су повезани и условљени; сваки виши ниво подразумева претходни ниво и одређени обим знања. Нарочито су повезани нивои разумевање и примене знања. Тежиште у задацима наставе математике јесте да што већи број ученика постигне трећи и четврти ниво знања. За одличну оцену (5) може се поставити услов да ученик донекле постиже и ниво 5 (креативност) бар у извесним деловима програма.

2. Програм почетне наставе математике

2.1. Циљ и задаци почетне наставе математике

Циљ наставе математике (“Службени гласник РС – Просветни гласник”, број 10/04) у основној школи јесте да ученици усвоје елементарна математичка знања која су потребна за схватање појава и зависности у животу и друштву, да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе, за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; као и да допринесе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика.

Задаци почетне наставе математике јесу:

– да ученици стичу знања неопходна за разумевање квантитативних и просторних односа и законитости у разним појавама у природи, друштву и свакодневном животу;

– да ученици стичу основну математичку културу потребну за откривање и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање), за успешно настављање образовања и укључивање у рад;

– да развија ученикову способност посматрања, опажања и логичког, критичког, стваралачког и апстрактног мишљења;

– да развија културне, радне, етичке и естетске навике ученика, као и математичку радозналост у посматрању и изучавању природних појава;

– да ученици стичу способност изражавања математичким језиком, јасност и прецизност изражавања у писменом и усменом облику;

– да ученици усвоје основне чињенице о скуповима, релацијама и пресликавањима;

– да ученици савладају основне операције, с природним, целим, рационалним и реалним бројевима, као основне законе тих операција;

– да ученици упознају најважније равне и просторне геометријске фигуре и њихове узајамне односе;

– да оспособи ученике за прецизност у мерењу, цртењу и геометријским конструкцијама;

– да ученицима омогући разумевање одговарајућих садржаја природних наука и допринесе радном и политехничком васпитању и образовању;

– да изграђује позитивне особине ученикове личности, као што су: истинољубивост, упорност, систематичност, уредност, тачност, одговорност, смисао за самостални рад;

– да интерпретацијом мтематичког садржаја и упознавањем основних математичких метода допринесе формирању правилног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика;

– да ученици стичу навику и обучавају се у коришћењу разноврсних извора знања.

Први разред

Оперативни задаци

Ученици треба да (“Службени гласник РС – Просветни гласник”, број 10/04):

– препознају, разликују и исправно именују облике предмета, површи и линија;

– посматрањем и цртањем упознају тачку и дуж и стекну умешност у руковању лењиром;

– на једноставнијим, конкретним примерима из своје околине уочавају односе између предмета по облику, боји и величини;

– успешно одређују положај предмета према себи и предмета према предмету;

– уочавају разне примере скупова, припадање елемената скупу и користе речи: “скуп” и “елемент”, усвајајући значење везивањем за примере из природног окружења детета;

– науче да броје, читају, записују и упоређују бројеве до 100, као и да исправно употребљавају знаке једнакости и неједнакости;

– савладају сабирање и одузимање до 100 (без прелаза преко десетице), разумеју поступке на којима се заснивају ове операције, схвате појам нуле и уочавају њено својство у сабирању и одузимању,

упознају термине и знаке сабирања и одузимања, науче да правилно користе изразе “за толико већи” и “за толико мањи”;

– упознају (на примерима) комутативност и асоцијативност сабирања (без употребе ових назива);

– савладају таблицу сабирања и да до нивоа аутоматизације усвоје технику усменог сабирања једноцифрених бројева и одговарајуће случајеве одузимања;

– одређују непознати број у одговарајућим једнакостима искључиво путем “погађања”;

– успешно решавају текстуалне задатке (с једном и две операције) у оквиру сабирања и одузимања до 100 (помоћу састављања израза, као и обратно, да на основу датог израза умеју да састављају одговарајуће задатке);

– упознају метар, динар и пару.

САДРЖАЈИ ПРОГРАМА

Предмети у простору и односи међу њима

Посматрање предмета: положај и величина предмета.Релације међу предметима; већи, мањи, лево, десно; испред, иза; испод, изнад; горе, доле, итд.

Предмети облика круга, правоугаоника и квадрата.

Линија и област

Крива и права линија. Затворена и отворена линија. Унутрашњост и спољашњост, речи у, на и ван. Спајање тачака правим и кривим линијама. Дуж. Употреба лењира.

Класификација предмета према својствима

Упоређивање предмета по дужини и боји.

Природни бројеви до 100

(Десетица, бројеви 11-20, бројеви 21-100)

Опис скупа навођењем чланова или својстава. Члан скупа. Приказивање скупова. Бројање унапред и уназад и са прескоком. Скупови са различитим и скупови са истим бројем елемената.

Цифре, писање и читање бројева. Приказивање бројева помоћу тачака на бројевној правој. Упоређивање бројева. Знаци: <, >, =. Редни бројеви.

Сабирање и одузимање природних бројева: у првој десетици, у оквиру 20 (са преласком преко десетице) и од 20 до 100 (без преласка преко десетице); знаци + и -; речи: сабирак, збир, умањеник, умањилац, разлика, већи за, мањи за. Својства сабирања. Нула као сабирак и резултат одузимања.

Одузимање непознатог броја у најпростијим једнакостима у вези са сабирањем и одузимањем погађањем.

Простији задаци са применом сабирања и одузимања.

Мерење и мере

Динар и пара. Метар.

Други разред

Оперативни задаци

Ученици треба да:

– савладају сабирање и одузимање до 100;

– схвате множење као сабирање једнаких сабирака, упознају и користе термине и знак множења;

– Упознају операцију дељења, користе термине и знак дељења;

– упознају (на примерима) комутативност и асоцијативност рачунских операција (без употребе ових назива);

– уочавају својства нуле као сабирка, чиниоца и дељеника, а јединице као чиниоца и делиоца;

– савладају таблицу множења једноцифрених бројева и одговарајуће случајеве дељења (до аутоматизма);

– савладају множење и дељење у оквиру 100, упознају функцију заграде и редослед извођења рачунских операција;

– умеју да прочитају и запишу помоћу слова збир, разлику, производ и количник, као и да знају да одреде вредност израза са две операције;

– упознају употребу слова као ознаку за непознати број (односно, као замену за неки број) у најједноставнијим примерима сабирања и одузимања;

– умеју да решавају текстуалне задатке са једном и две рачунске операције, као и једначине с једном операцијом (на основу веза између компонената операције);

– схвате појам половине;

– уочавају и стичу одређену спремност у цртању праве и дужи као и разних кривих и изломљених линија;

– уочавају и цртају правоугаоник и квадрат на квадратној мрежи;

– упознају и примењују мере за дужину (m, dm, cm) и време (час, минут, дан, седмица, месец).

САДРЖАЈИ ПРОГРАМА

Природни бројеви до 100

Сабирање и одузимање природних бројева до 100 (с прелазом преко десетице). Комутативност и асоцијативност сабирања.

Множење и дељења природних бројева; знаци за множење и дељење (· , :); речи: чиниоци, производ, дељеник, делилац, количник. Нула и јединица као чиниоци; нула као дељеник. Комутативност и асоцијативност множења.

Изрази (две операције); заграде, редослед рачунских операција.

Слово као замена за неки број.

Одређивање непознатог броја у једнакостима типа: $x + 5 = 9$; $7 \cdot x = 35$; $x : 5 = 3$; $12 : x = 4$.

Појам половине.

Решавање једноставнијих задатака (највише две операције).

Геометријски облици

Предмети облика лопте, ваљка, квадрата и коцке. Упоређивање предмета по облику, ширини, висини и дебљини.

Дуж, полуправа и права. Цртање разних кривих и изломљених линија. Отворена и затворена изломљена линија. Уочавање и цртање правоугаоника и квадрата на квадратној мрежи.

Мерење и мере

Мерење дужи помоћу метра, дециметра и центриметра. Мере за време: час, минут, дан, седмица – недеља, месец.

Однос између јединица упознатих мера.

НАЧИНИ ОСТВАРИВАЊА ПРОГРАМА

Због лакшег планирања наставе даје се орјентациони предлог часова по темама по моделу (укупно часова за тему, часова за обраду, часова за понављање и увежбавање).

Први разред

Предмети у простору и односи међу њима (10; 4 + 6)

Линија и област (14; 5 + 9)

Класификација предмета према својствима (6; 2 + 4)

Природни бројеви до 100 (144; 57 + 87)

Мерење и мере (6; 2 + 4)

Други разред

Природни бројеви до 100 (145; 55 + 90)

Геометријска тела и фигуре (25; 8 + 17)

Мерење и мере (10; 3 + 7)\

Главна одлика програма математике за млађе разреде јесте што су акцентовани опажајни појмови, који се стварају кроз добро планирану активност.

Бројеви. – Програм математике у разредној настави предвиђа да ученици поступно упознају бројеве природног низа и број нулу како би на крају IV разреда у потпуности савладали систем природних бројева и његова својства.

Издвајањем, по природи елемената и њиховом распореду, различитих колекција објеката врши се пребројавање (ослоњено на способност детета да механички ређа имена бројева фиксираним редом) и записивање бројева цифрама (до 10). Тиме се учи “аритметичка азбука” и истиче независност броја од природе елемената који се броје и њиховог распореда.

При бројању ученици упознају идеју пресликавања; узастопно бројање наводи их на откривање законитости формирања низа природ-

них бројева. Већ приликом изучавања бројева прве десетице открива се како се формира сваки број.

Операције са бројевима, у духу овог програма, треба схватити по следећем плану: издвојити погодне природне и дидактички припремљене ситуације које дају значење операцијама и бројевима уз истицање непроменљивости резултата.

У вези са почетним блоковима бројева (I и II други разред) треба имати у виду неколико методолошких и методичких напомена. На том нивоу бројеви се везују за реалне групе објеката за које се везују и речи из природног језика (стадо, јато, гомила итд.), а паралелно се асимилује значење универзалније речи “скуп” и релацијског односа “члана скупа”. Излагање те теме разбија се на дидактичке блокове. Бројеви у оквиру блока до 10 пишу се једно цифром (осим 10). Ту су значајне вежбе руке за правино писање тих симбола. Овде се уводе и осмишљавају операције сабирања и одузимања, као и релацијски знакови =, >, <. Из педагошких разлога у почетку се препоручује блок бројева до 5, који се збировима са компонентама до 5 и вредностима преко 5 шири на бројеве 6 до 10. Вредност збирова у том најмањем блоку одмах се види, па је акценат на вежбама правилног записивања израза и релација које се ту јављају. Блок бројева до 20 је природна целина затворена за збирове једноцифрених бројева. Акценат се ставља на методу прелаза преко 10 при сабирању и одузимању, а циљ је спонтано запамћивање таблица сабирања и одузимања.

Блок бројева до 100 формира се као збирови десетица и јединица. После обраде операција сабирања и одузимања, уводе се оперције множења и дељења. Овај блок је такође природна целина затворена за множење једноцифрених бројева. Закони размене чинилаца, множења збира и разлике бројем, утемењују се и користе за изградњу таблица множења с циљем њеног спонтаног запамћивања.

Програм предвиђа прво упознавање својстава операција, а затим, на тој основи, објашњавање начина рачунања. Тиме се повећава ефикасност наставе и ученицима знатно олакшава усвајање таблица сабирања и множења, као и формирање других рачунских умења. Исто

тако, благовремено изучавање својстава операција и веза између њих подиже теоријски ниво целог рада из математике и потпуније открива смисао операције. Усвајање сваког својства операције пролази кроз неколико етапа: припремна вежбања, одговарајуће операције на одабраним примерима, формулисање својстава, примена својстава у одређивању вредности израза и начину рачунања, запис својства помоћу слова. Посебно је важно да се утврди како промене компонената рачунских операција утичу на резултат, као и да се укаже на значај ових чињеница у пректичном рачунању. Тако, на пример, Није довољно да ученици само знају да производ двају бројева не мења вредност ако се један од њих помножи неким бројем, а други подели тим истим бројем, већ то треба да умеју да примене на конкретним примерима.

У I и II разреду оперције се врше усмено, уз записивање одговарајућих израза и једнакости.

При изучавању операција треба предвидети довољан број вежбања чијим ће обављањем ученици изграђивати сигурност и спретност усменог и писменог рачунања. Међутим, сама та техника није довољна. Тек разумевањем шта која рачунска операција представља у конкретним задацима, односно свесно одлучивање а не нагађање када коју операцију треба применити, претвара технику у стварно а не формално знање.

Бројевне изразе треба упоређивати упоредо са увежбавањем рачунских операција. Треба инсистирати на томе да ученици текстуалне записане задатке приказују бројевним изразима и да речима исказују бројевне изразе, односно да их читају. Оваквим начином обрађивања бројевних израза ученици се сигурно сналазе у редоследу рачунских операција и лако схватају значај заграда у задацима.

Текстуални задаци. - Текстуални задаци користе се као садржаји разних вежбања, при чему ученици у разним животним ситуацијама уочавају одговарајуће математичке операције, и обратно – математичке апстракције примењују у одговарајућим животним односима: они представљају средство повезивања наставе математике

са животом. У процесу решавања задатака ученици изграђују практична умења и навике које су им неопходне у животу и упознају нашу друштвену стварност. Сам процес решавања тектуалних задатака на најбољи начин доприноси математичком и општем развитку ученика. Треба настојати да се у процесу решавања потпуно искористе све могућности које постоје у задацима.

При разматрању сваке нове операције прво се уводе прости задаци који су усмерени на откривање смисла те операције (задаци за одређивање збира, разлике, производа количника), а затим се уводе задаци при чијем се решавању открива нови смисао операција (задаци повезани са појмовима разлике и количника); на крају се разматрају прости задаци који се односе на откривање узајамних веза директних и обратних операција (задаци за одређивање непознате компоненте). Сложене задатке треба решавати поступно, према њиховој компликованости: прво задатке с две, па затим с три и, на крају, са више операција.

При решавању текстуалних задатака корисно је већ у првом разреду навикавати ученике да решавање записују у виду бријевног израза, с тим што се изоставља именовање података (то даје могућност да се према једном истом изразу састављају задаци различитог конкретног садржаја и да тако ученици увиђају да се различити задаци решавају једном истом операцијом). У II разреду решавају се задаци са словним подацима, што још више помаже ученицима да схвате да се једном истом операцијом могу решити sадаци с различитим конкретним садржајем.

Употреба израза предвиђа се и при решавању сложених задатака. При решавању задатака с претходним састављањем израза пажња се усредсређује на анализу услова задатака и састављање плана његовог решења. У структури израза приказује се цео ток решења задатака: операције које треба обавити, бројеви над којима се обављају операције и редослед којим се извршавају те операције.

Састављање израза представља добру припрему за састављање најпростијих једначина према услову задатка. У свакој конкретној ситуацији задатке треба решавати најрационалнијим начином, уз

употребу дијаграма, схема и других средстава приказивања. Неопходно је такође да ученик претходно процењује резултат и да проверава тачност самог резилтата. Провери треба посвећивати велику пажњу; указати ученицима на њену неопходност, на разне начине проверавања и навикавати их да самостално врше проверу резултата. Ни један задатак не треба сматрати завршеним док није извршена провера. При рачунању, које се мора обављати тачно, треба развијати брзину, с тим да она никада не иде на штету тачности која је ипак главна.

ОСНОВНИ ЗАХТЕВИ У ПОГЛЕДУ МАТЕМАТИЧКИХ ЗНАЊА И УМЕЊА УЧЕНИКА

Циљ и општи задаци наставе математике конкретизовани су оперативним задацима за сваки разред. Полазећи од њих и програмских садржаја математике у основној школи. Као основни захтеви утврђују се следећа знања (чињенице, дефиниције, правила, докази) и умења (математичко-логичка, радно-техничка) којима ученици треба да владају на крају сваког појединог разреда у основној школи и то на нивоу препознавања репродукције (обавезно), разумевања (већим делом) или применом (изузетно), што је посебно наглашено у сваком конкретном случају.

Први разред

Знати:

– низ бројева од 1 до 100 и место броја 0;

– таблицу сабирања једноцифрених бројева и одговарајуће случајева одузимања;

– мерне јединице: метар, динар и пару.

Умети:

– уочавати разне примере скупова;

– читати, записивати и упоређивати бројеве од 0 до 100;

– користити таблицу сабирања једноцифрених бројева (до аутоматизма) – за сабирање и одузимање;

– одређивати збир и разлику бројева у оквиру 20;

– решавати најпростије задатке сабирања и одузимања;

– уочавати положај предмета у непосредној околини;

– разликовати предмете по облику и величини;

– уочавати, именовати и цртати линију, тачку и дуж;

– користити уџбеник.

Други разред

Знати:

– таблицу множења једноцифрених бројева и одговарајуће случајеве дељења;

– јединице: дециметар, центиметар, час, минут, дан, седмица, месец;

– основна својства рачунских операција.

Умети:

– користити таблицу множења једноцифрених бројева (до аутоматизма);

– вршити четири основне рачунске операције у оквиру прве стотине;

– вршити проверу обављене рачунске операције;

– израчунати вредност бројевног израза са две операције;

– решавати једначине (наведене у програму) на основу зависности између резултата и компонената операције;

– решавати једноставније задатке са 1-2 операције;

– мерити дуж у центиметрима, дециметрима и метрима;

– цртати изломљену линију, правоугаоник и квадрат на квадратној мрежи;

– одредити половину датог броја;

– користити уџбеник.

Трећи разред

Оперативни задаци

Ученици треба да (Математика, 2005, стр. 39):

– савладају читање, писање и упоређивање природних бројева до 1000;

– упознају римске цифре (I, V, X, L, C, D, M) и принцип читања и писања бројева помоћу њих;

– успешно обављају све четири рачунске операције до 1000;

– упозната својства операција користе за рационалније (лакше) рачунање;

– упознају зависност резултата од компонената операције;

– знају да израчунају вредност бројевног израза са највише три операције;

– умеју да прочитају и запишу помоћу слова својства рачунских операција;

– знају да одреде вредност израза са словима из дате вредности слова;

– знају да решавају једноставније једначине у скупу бројева до 1000;

– упознају и правилно записују разломке чији је бројилац 1, а именилац мањи или једнак 10;

– успешно решавају текстуалне задатке;

– формирају представе о правој и полуправој;

– уочавају и умеју да цртају прав, оштар и туп угао;

– знају да цртају паралелне и нормалне праве, квадрат, правоугаоник, троугао и кружницу (помоћу лењира, троугаоника и шестара);

– стичу представе о подударности фигура (преко модела и цртања);

– знају да одреде обим правоугаоника, квадрата и троугла;

– упознају мере масе тела и запремине течности, као и нове јединице за време (година, век).

САДРЖАЈИ ПРОГРАМА

Блок бројева до 1000

Декадно записивање и читање бројева до 1000. Упоређивање бројева према њиховим декадним записима. Писање бројева римским цифрама.

Сабирање и одузимање бројева у блоку до 1000. Дељење са остатком у блоку бројева до 100 (укључујући и усмене вежбе). Множење и дељење троцифреног броја једноцифреним.

Изрази. Коришћење заграда и њихово изостављање. Својства рачунских операција и њихова примена на трансформисање израза и за рачунске олакшице.

Употреба знакова за скуп и припадност скупу: { }, ∈.

Једначине облика попут: $x \pm 13 = 25$, $125 - x = 25$, $5 \cdot x = 225$. Неједначине облика попут: $x > 15$, $x < 245$. Скуп решења неједначине.

Текстуални задаци.

Разломци облика $1/a$ ($a \leq 10$).

Геометријски објекти и њихови међусобни односи

Кружница (кружна линија) и круг. Цртање помоћу шестара. Угао. Врсте углова – оштар, прав, туп. Паралелне и нормалне праве и њихово цртање помоћу обичног и троугаоног лењира.

Правоугаоник и квадрат. Троугао. Цртање ових фигура помоћу лењира и шестара.

Поређење и графичко надовезивање дужи. Обим правоугаоника, квадрата и троугла.

Мерење и мере

Милиметар и километар. Килограм. Литар. Година и век. Односи између мањих и већих јединица који остају у оквиру блока бројева до 1000.

НАЧИНИ ОСТВАРИВАЊА ПРОГРАМА

Због лакшег планирања наставе даје се орјентациони предлог часова по темама по моделу (укупно часова за тему, часова за обраду, часова за понављање и увежбавање).

Блок бројева до 1000 (138; 54 + 84)

Геометријске фигуре и њихови међусобни односи (32; 12 + 20)

Мерење и мере (10; 4 +6)

Главна одлика програма математике за млађе разреде јесте што су акцентовани опажајни програми, који се стварају кроз добро планирану активност.

Бројеви. Програм математике у разредној настави предвиђа да ученици поступно упознају бројеве природног низа и број нулу како би на крају IV разреда у потпуности савладали систем природних бројева и његова својства.

Операције с бројевима, у духу овог програма, треба схватити по слледећем плану: издвајати погодне природне и дидактички припрем-љенеситуације које дају значење операцијама и бројевима уз истицање непроменљивости резултата.

Дељење једноцифреним бројем, са и без остатака, заокружује минимум садржаја обавезних за усмено рачунање и тако чине усмени фонд за алгоритме рачунања са бројевима у декадном запису.

Програм предвиђа прво упознавање својства операција, а затим, на тој основи, објашњавање начина рачунања. Тиме се повећава ефикаснот наставе и ученицима знатно олакшава усвајање таблица сабирања и множења, као и формирање других рачунских умења. Исто тако, благовремено изучавање својстава операција и веза између њих подиже теоријски ниво целог рада из математике и потпуније открива смисао операције. Усвајање сваког својства операције пролази кроз неколико етапа: припремна вежбања, одговарајуће операције на одабраним примерима, формирање својства, примена својства у одређивању вредности израза и начину рачунања.

Поред писменог рачунања, у III разреду треба и даље поклањати пажњу усменом рачунању, јер оно често брже и једноставније доводи до резултата и има вредност у практичном животу кад се рачуна с малим бројевима. Тако, на пример, уместо да ученици писмено израчунавају 8 x 39, много је брже и једноставније да усмено израчунају 8 x 40. За овакав рад неопходно је да ученици добро схвате својства рачунских операција. Ово ће бити остварено тек када

ученицима постане потпуно јасна зависност између компонената рачунских операција.

При изучавању операција, треба предвидети довољан број вежбања чијим ће обављањем ученици изграђивати сигурност и спретност усменог и писменог рачунања. Међутим, сама та техника није довољна. Тек разумевањем шта која рачунска операција представља у конкретним задацима, односно свесно одлучивање, а не нагађање, када коју операцију треба применити, претвара ту технику у стварно, а не формално знање.

Бројевне изразе треба обрађивати упоредо са увежбавањем рачунских операција. Треба инсистирати на томе да ученици текстуално записане задатке приказују бројевним изразима и да речима исказују бројевне изразе, односно да их читају. Оваквим начином обрађивања бројевних израза, ученици се сигурно сналазе у редоследу рачунских операција и лако схватају значај заграда у задацима.

Текстуални задаци. Текстуални задаци користе се као садржаји разних вежбања, при чему ученици у разним животним ситуацијама уочавају одговарајуће математичке релације, и обратно – математичке апстракције примењују у одговарајућим животним односима: они представљају средство повезивања наставе математике са животом. У процесу решавања задатака ученици изграђују практична умења и навике које су им неопходне у животу и упознају нашу друштвену стварност. Сам процес решавања текстуалних задатака на најбољи начин доприноси математичком и општем развитку ученика. Треба настојати да се у процесу решавања потпуно искористе све могућности које постоје у задацима.

При разматрању сваке нове операције, прво се уводе прости задаци који су усмерени на откривање смисла те операције (задаци за одређивање збира, разлике, производа, количника), а затим се уводе задаци при чијем се решавању открива нови смисао операција (задаци повезани са појмовима разлике и количника); на крају се разматрају прости задаци који се односе на откривање узајамних веза између директних и обратних операција (задаци за одређивање непознате

компоненте). Сложене задатке треба решавати поступно према њиховој, компликованости: прво задатке са две, а затим и са три операције.

Употреба израза предвиђа се и при решавања сложених задатака. При решавању задатака са претходним састављањем израза, пажња се усредсређује на анализу услова задатака и састављања плана његовог решења. У структури израза приказује се ток решења задатака: операције које треба обавити, бројеви на којима се обављају операције и редослед којим се извршавају те операције.

Састављање израза представља добру припрему за састављање најпростијих једначина према услову задатка. У свакој конкретној ситуацији задатке треба решавати најрационалнијим начином, уз употребу дијаграма, схема и других средства приказивања. Неопходно је, такође, да ученик претходно процењује резултат и да проверава тачност самог резултата. Провери треба посвећивати велику пажњу; указати ученицима на њену неопходност, на разне начине проверавања и навикавати их да самостално врше проверу резултата. Ни један задатак не треба сматрати завршеним док није извршена провера. При рачунању, које се мора обављати тачно, треба развијати брзину, с тим да она никада не иде на штету тачности.

ОСНОВНИ ЗАХТЕВИ У ПОГЛЕДУ МАТЕМАТИЧКИХ ЗНАЊА И УМЕЊА УЧЕНИКА

Знати:

– низ бројева до 1000;

– табличне случајеве операција (напамет); таблицу сабирања једноцифрених бројева и одговарајуће случајева одузимања, таблицу множења једноцифрених бројева и одговарајуће случајеве дељења;

– јединице за дужину, масу и запремину течности;

– својства рачунских операција.

Умети:

– читати, записивати и упуређивати бројеве прве хиљаде;

– вршити четири основне рачунске операције у оквиру прве хиљаде;

– користити при обављању рачунских операција упозната својства операција, као и специјалне случајеве операција (са нулом и јединицом);

– израчунати вредност бројевног израза са највише три операције;

– користити знаке за скуп и припадност елемената скупу;

– решавати једначине (наведене у програму) на основу зависности између резултата и компонената операција;

– решавати неједначине (наведене у програму) методом пробања;

– решавати једноставније задатке са највише три операције;

– записивати разломке (наведене у програму);

– цртати углове (прав, оштар и туп); паралелне и нормалне праве, правоугаоник и квадрат, троугао и круг (помоћу одговарајућег геометријског прибора);

– израчунати обим правоугаоника, квадрата и троугла;

– користити уџбеник.

Четврти разред

Оперативни задаци

Ученици треба да (Службени гласник РС – Просветни гласник, број 3/06):

– успешно савладају читање и писање природних бројева у декадном бројевном систему;

– упознају скуп природних бројева;

– науче да природне бројеве приказују тачкама бројевне полуправе;

– умеју да читају и записују помоћу слова основна својства рачунских операција;

– упознају и уочавају зависнот између резултата и компонената операције (на примерима);

– примењују упозната својства рачунских операција при трансформисању израза и у случају рачунских олакшица;

– знају да читају, састављају и израчунавају вредност израза са више операција;

– знају да решавају једноставније једначине и неједначине (упознатих облика) у скупу природних бројева;

– успешно речавају задатке дате у текстуалној форми;

– упознају разломке (наведене у програму). њихово читање, писање и значење, уз коришћење одговарајућих термина;

– знају да цртају мреже и праве моделе коцке и квадра;

– упознају јединице за површину и примењују их при израчунавању површине квадрата, правоугаоника, квадра и коцке.

САДРЖАЈИ ПРОГРАМА

Скуп природних бројева

Писање и читање природних бројева у декадном систему.

Бројевна полуправа.

Разломци облика a/b $(a < b$ и $b \leq 10)$.

Рачунске операције у скупу природних бројева и њихова основна својства (изражена формулом).

Зависност збира, разлике и производа од чланова.

Изрази са више операција.

Једначине и неједначине раније упознатих облика.

Решавање текстуалних задатака.

Мерење и мере

Мере за површину.

Површина

Површина правоугаоника и квадрата. Површина коцке и квадра.

Напомена:Обавезна су четири једночасовна школска писмена задатка са једночасовним исправкама (8 часова).

НАЧИНИ ОСТВАРИВАЊА ПРОГРАМА

Због лакшег планирања наставе даје се оријентациони предлог часова по темама по моделу (укупно часова за тему, часова за обраду, часова за понављање и увежбавање).

Скуп природних бројева (132; 50 + 82)

Мерење и мере (10; 4 + 6)

Површина (30; 12 + 18)

Главна одлика програма математике за млађе разреде јесте што су акцентовани опажајни програми, који се стварају кроз добро планирану активност.

Бројеви. – Програм математике предвиђа да ученици поступно упознају бројеве природног низа и број нулу, како би на крају IV разреда у потпуности савладали систем природних бројева и његова својства.

Операције с бројевима, у духу овог програма, треба схватити по следећем плану: издвојити погодне природне и дидактички припремљене ситуације које дају значење операцијама и бројевима уз истицање непроменљивости резултата.

Програм предвиђа прво упознавање својстава операција, а затим, на тој основи, објашњавање начина рачунања. Тиме се повећава ефикасност наставе и ученицима знатно олакшава усвајање таблица сабирања и множења, као и формирање других рачунских умења. Исто тако, благовремено изучавање свостава операција и веза између њих подиже теоријски ниво целог рада из математике и потпуније открива смисао операције. Усвајање сваког својства операције пролази кроз неколико етапа: припремна вежбања, одговарајуће операције на одабраним примерима, формирање својства, примена својства у одређивању вредности израза и начину рачунања.

Поред писменог рачунања и даље треба поклањати пажњу усменом рачунању, јер оно често брже и једноставније доводи до резултата и има вредност у практичном животу кад се рачуна с малим бројевима. Тако, на пример, уместо да ученици писмено израчунавају 8 x 39, много је брже и једноставније да усмено израчунају 8 x 40. За овакав рад неопходно је да ученици добро схвате својства рачунских операција. Ово ће бити остварено тек када ученицима постане потпуно јасна зависност између компонената рачунских операција.

При изучавању операција, треба предвидети довољан број вежбања чијим ће обављањем ученици изграђивати сигурност и

спретност усменог и писменог рачунања. Међутим, сама та техника није довољна. Тек разумевањем шта која рачунска операција представља у конкретним задацима, односно свесно одлучивање, а не нагађање, када коју операцију треба применити, претвара ту технику у стварно, а не формално знање.

Бројевне изразе треба обрађивати упоредо са увежбавањем рачунских операција. Треба инсистирати на томе да ученици текстуално записане задатке приказују бројевним изразима и да речима исказују бројевне изразе, односно да их читају. Оваквим начином обрађивања бројевних израза, ученици се сигурно сналазе у редоследу рачунских операција и лако схватају значај заграда у задацима.

Текстуални задаци. – Текстуални задаци користе се као садржаји разних вежбања, при чему ученици у разним животним ситуацијама уочавају одговарајуће математичке релације, и обратно – математичке апстракције примењују у одговарајућим животним односима: они представљају средство повезивања наставе математике са животом. У процесу решавања задатака ученици изграђују практична умења и навике које су им неопходне у животу и упознају нашу друштвену стварност. Сам процес решавања текстуалних задатака на најбољи начин доприноси математичком и општем развитку ученика. Треба настојати да се у процесу решавања потпуно искористе све могућности које постоје у задацима.

Разматрају се једноставни задаци који се односе на откривање узајамних веза између директних и обратних операција (задаци за одређивање непознате компоненте). Сложене задатке треба решавати поступно, према њиховој, компликованости: прво задатке са две, а затим и са три операције.

Употреба израза предвиђа се и при решавања сложених задатака. При решавању задатака са претходним састављањем израза, пажња се усредсређује на анализу услова задатака и састављања плана његовог решења. У структури израза приказује се ток решења задатака: операције које треба обавити, бројеви на којима се обављају операције и редослед којим се извршавају те операције.

Састављање израза представља добру припрему за састављање најпростијих једначина према услову задатка. У свакој конкретној ситуацији задатке треба решавати најрационалнијим начином, уз употребу дијаграма, схема и других средства приказивања. Неопходно је, такође, да ученик претходно процењује резултат и да проверава тачност самог резултата. Провери треба посвећивати велику пажњу; указати ученицима на њену неопходност, на разне начине проверавања и навикавати их да самостално врше проверу резултата. Ни један задатак не треба сматрати завршеним док није извршена провера. При рачунању, које се мора обављати тачно, треба развијати брзину, с тим да она никада не иде на штету тачности која је ипак главна.

ОСНОВНИ ЗАХТЕВИ У ПОГЛЕДУ МАТЕМАТИЧКИХ ЗНАЊА И УМЕЊА УЧЕНИКА

Знати:

– низ природних бројева;

– својства рачунских операција;

– понашање нуле при сабирању и множењу и јединице при множењу;

– јединице за површину;

– формуле за површину квадрата, правоугаоника, коцке и квадра.

Умети:

– читати, записивати и упоређивати природне бројеве;

– придруживати природним бројевима тачке бројевне полуправе;

– читати и састављати изразе са више операција и израчунавати њихову вредност;

– вршити четири основне рачунске операције у скупу природних бројева;

– користити при обављању рачунских операција упозната својства тих операција ради лакшег и бржег рачунања;

– уочити зависност између резултата и компонената рачунских операција;

– читати и писати разломке (наведене у програму);

– решавати једначине и неједначине упознаих облика;

– самостално проверавати тачност извршене рачунске операције, као и решење једначине или решење неједначине;

– решавати текстуалне задатке (састављањем израза, односно помоћу једначине);

– израчунати површину квадрата, правоугаоника, коцке и квадра;

– коректно записивати решење задатка (у свесци или на табли);

– користити уџбеник.

2.3. Образовни стандарди из области *Бројеви и операције са њима*

(Образовни стандарди за крај обавезног образовања, РС Министрство просвете и Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, 2009.)

Основни ниво

Бројеви и операције са њима

У области *бројеви и операције са њима* ученик/ученица уме да:

- прочита и запише различите врсте бројева (природне, целе, рационалне)
- преведе децимални запис броја у разломак и обрнуто
- упореди по величини бројеве истог записа, помажући се сликом кад је то потребно
- изврши једну основну рачунску операцију са бројевима истог записа, помажући се сликом кад је то потребно (у случају сабирања и одузимања разломака само са истим имениоцем); рачуна, на пример 1/5 од n, где је n дати природни број
- дели са остатком једноцифреним бројем и зна када је један број дељив другим
- користи целе бројеве и једноставне изразе са њима помажући се визуелним представама

Средњи ниво
Бројеви и операције са њима

У области *бројеви и операције са њима* ученик/ученица уме да:

- упореди по величини бројеве записане у различитим облицима
- одреди супротан број, реципрочну вредност и апсолутну вредност бројева; израчуна вредност једноставнијег израза са више рачунских операцијаразличитог приоритета, укључујући ослобађање од заграда, са бројевима истог записа
- примени основна правила дељивости са 2, 3, 5, 9 и декадним јединицама
- користи бројеве и бројевне изразе у једноставним реалним ситуацијама

Напредни ниво
Бројеви и операције са њима

У области *бројеви и операције са њима* ученик/ученица уме да:

- одреди вредност сложенијег бројевног израза
- оперише са појмом дељивости у проблемским ситуацијама
- користи бројеве и бројевне изразе у реалним ситуацијама

3. Врсте наставе

Циљеви и задаци почетне наставе математике остварају се наставом која је заснована на наставним принципима. Они су:

- "принцип научне усмерености;
- принцип очигледности;
- принцип појмовног схватања и расуђивања;
- принцип активности и индивидуализације;
- принцип поступности и систематичности;
- принцип економичности и рационалности, и
- принцип трајности знања, умења и навика."

Притом се користе наставне методе (Малиновић, Т. и Н. Малиновић-Јовановић, 2002, стр. 58-59):

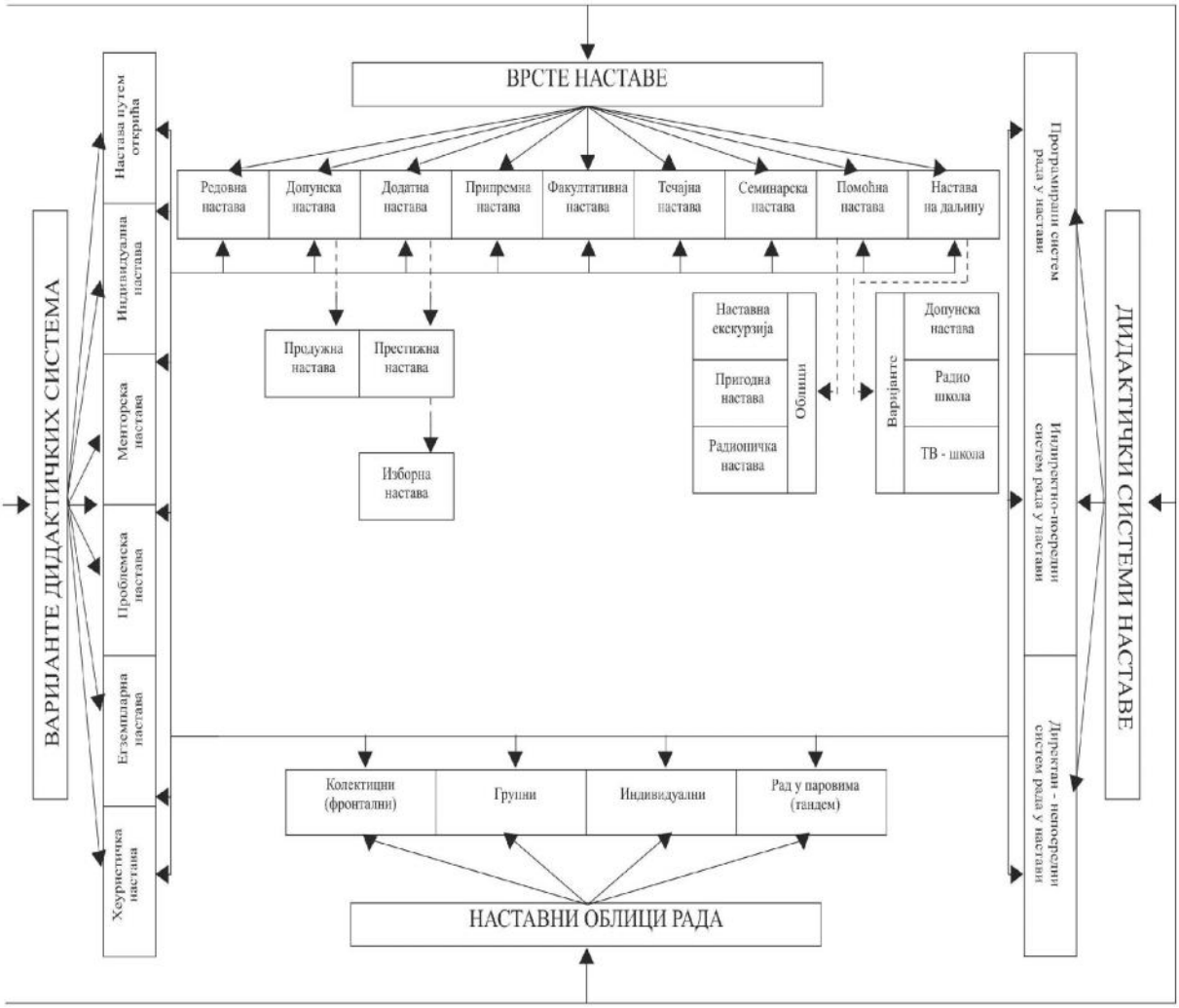
1. "Репродуктивне
- монолошка,

– демонстративна,
– илустративна.

2. Продуктивне

– развојна,
– откривајућа,
– метода проблема” (Малиновић, Т. и Н. Малиновић-Јовановић, 2002, стр. 58-59)

Када је реч о врстама наставе нема слагања међу дидактичарима у класификацији врста наставе, што делимице проистиче из разлога што се узимају различити критеријуми поделе. Дајемо пример једне класификације врста настава.



Круљ, Р., С. Качапор и Р. Кулић, 2003, стр. 279.

4. Проблемска настава – појмовно одређење

Извештај о образовању у Србији, припремљен 2001. године у оквиру Центра за сарадњу са земљама нечланицама (CCNM) ОЕБС-а, као део програма сарадње са Пактом за стабилност за Југоисточну Европу, у одељку „Приступ настави и учењу“, констатује да као и у многим другим земљама из нашег региона, методе наставе и учења заостају за текућим европским трендовима и развојним програмима и не одражавају ни једно од великих развојних достигнућа која су током протеклих 10 година остварена у земљама ОЕБС-а или у неким бившим земљама у транзицији. Оне су застареле, а преовлађују методе наставе орјентисане на наставника (*ex catedra* стил наставе).

Ученици се не подстичу да искажу своје мишљење; дебате, истраживање, решавање проблема, интерактивна настава, групни рад, индивидуални или групни пројекти, су реткост. Много наставника жели промене, али им недостаје неопходна припрема за вођење ученика ка стицању знања према сопственом интересу и ритму. Резултат је такав да ученици не показују иницијативу за самостално учење и развој "школске културе“.

Проблемска настава се одређује као *посебан наставни систем рада*. То је наравно тачно и прихватљиво, иако је врло широко и недовољно за дефинисање проблемске наставе. Међутим, по свим осталим питањима и проблемима који су у вези са проблемском наставом, па и при одређењу, међу теоретичарима нема сагласности.

Најпре, нема сагласности око термина којим се покрива појам *проблемска настава*.

У нашем језику и теорији наставе употребљава се термин *проблемска настава*, али се равноправно употребљава и назив *учење путем решавања проблема у настави.* Може се, у ствари, говорити о краћем и дужем именовању термина. Међутим, терминологија је и компликованија. Наиме, употребљавају се и називи *проблемско-развојна настава,* али и *учење увиђањем.*

У руском језику и у њиховој теорији наставе такође се употребљавају разноврсни, слични или мање слични, називи. Углавном се говори о *проблемској настави*, али и о *проблемско-*

развојној настави и о *проблемско-хеуристичкој методи* (Металскиј, 1989). Свакако да употреба термина "метода“ додатно компликује проблем. Реч је, ипак, о погрешном изједначавању система и метода.

Такве употребе има и у енглеском и у немачком језику и њиховим теоријама наставе. Додуше преовлађујуће се употребљава назив *решавање проблема у настави*, али се употребљавају и називи *проблемска метода*, или *метода решавања проблема*, или *учење откривањем* (Дејић, 1996).

Следствено наведеном, у нашем раду употребљаваћемо назив *учење путем рашавање проблема у настави*, али и синтагму (име) *проблемска настава*, као равноправне. Притом полазимо од сазнања да они и по обиму и по садражају означавају исти појам.

Пре ближег и операционалног одређења проблемске наставе, кратко објашњење *учења путем решавања проблема.* “Учење путем решавања проблема је збирни назив за свеколико учење које се може појавити у ситуацији решавања проблема. Оно није посебан облик учења. Решавање проблема се може користити и користи се у настави у намери да се ученицима створе услови за учење путем открића. У оваквом случају учење путем решавања проблема (у настави) подврста је у*чења путем открића* (у настави)” (Ковач-Церовић, 1989, стр. 462).

> *Проблемска настава је посебан наставни систем рада који се састоји у стварању проблемске ситуације и решавању проблема.*

Проблемска настава има неколико посебних појмова, или речником дидактике, неколико основних дидактичких категорија. Ти појмови су:

1. проблем,
2. проблемска ситуација,
3. решавање проблема, и
4. структура часа проблемске наставе.

Објашњење ових појмова је на страницама које следе. Претходно о појму *учење.* У синтагми „учење путем решавања проблема у настави“ *учење* је употребљено у педагошко-психолошком смислу, за разлику од психолошког, или педагошког, или неког другог. Тако,

учење је трајно усвајање знања и релативно трајно мењање јединке под његовим утицајем.

5. Проблем и проблемска ситуација

Ми никада не постајемо математичари, чак иако научимо напамет све туђе доказе, ако наш ум није оспособљен да самостално решава проблеме

Декарт

1. Шта је *проблем* и у чему је његова суштина?

Најпре о речи/термину *проблем.* Познато је да је грчког порекла и да се на наш језик може превести као: питање, задатак, спорно питање, питање које се тешко решава. По Т. Малиновићу, проблем је *агенс*, покретачка снага мисаоног рада. Он изазива и ставља у дејство раније формиране сродне појмове, ранија слична расуђивања, познате чињенице. Другим речима, све оно што има неке везе са циљем коме се тежи. дакле, термин *проблем* означава све оно што је у стању да покрене ученикову мисаону активност. Са те тачке гледишта нема битне разлике између проблема којима се ученик уводи у нове наставне садржаје и проблема у класичном смислу. Шта више у почетној настави математике нема ни формалне разлике, јер се ученик најчешће уводи у нови садржај баш конкретним проблемом, проблемом узетим из животне стварности. Проблем у класичном смислу често се назива *проблемски задатак или проблем у ужем смислу*. У принципу, не може бити битне разлике у методичком третману *проблема* уопште и проблема у ужем смислу (Малиновић, Т и Малиновић-Јовановић, Н. 2002).

Основна обележја проблема су:

– *спорност* при решавању задатака, и

– *тешкоћа* решавања задатака.

Свакако треба скренути пажњу на то да *проблем и задатак* нису исто, да нису синоними. „Задаци који се решавају применом познатих поступака и готових формула и односе се на менталне активности које не укључују тешкоће и нове ситуације нису проблеми.“ (Дејић, 1996,

стр. 80). Зато је битно нагласити да је за проблемске задатке карактеристично да се не могу решавати по унапред утврђеној шеми.

Нема сагласности у одговору на питање шта је проблем.Често се за *проблем* каже да је „субјективни доживљај неке супротности (протурјечности, конфликта, контроверзије, и сл.) између субјекта и објекта...“ (Пољак, 1989, стр. 255) Та супротност исказује се као биполарност између:

– познатога и непознатога,
– датога и задатога,
– откривенога и неоткривенога,
– постигнутога и непостугнутога,
– експлицитнога и имплицитнога,
– извеснога и неизвеснога, и слично.

Противречност између субјекта и објекта, пак, исказује се на штету субјекта, „као недостатак, прикраћеност, празнина, запрека, негативност,“ што код субјекта изазива психичко узбуђење (Пољак, 1989, стр. 255). Такво психичко стање је сазнајно и емоционално, својеврсни духовни немир и жеља субјекта да ту супротност реши у своју корист и на тај начин доживи духовну смиреност.

Неоспорно је да се проблем увек јавља као проблем за некога, за одређену личност/појединца. Појединцу се, пак, јавља проблем онда када наиђе на извесну тешкоћу, препреку, у задовољавању својих жеља. Додатно, циљ који субјект има не може се остварити на основу познатих и важећих начина, већ треба пронаћи пут којим ће се до њега доћи. Претходно знање и искуство примењује се на нове услове и на другачији, неконвенционалан начин, што доводи до интелектуалних операција и процеса.

Следствено наведеном чини се да је прикладно и сасвим прихватљиво оно одређење *проблема* по коме је „*проблем тешкоћа теоријског или практичног карактера која изазива истраживачки став субјекта и доводи га до обогаћивања знања које субјекат до тада није имао*“ (Купусијевич, 1976, стр. 81).

У том правцу је, такође прихватљива, операционална дефиниција по којој је „*проблем задатак у коме постоји озбиљна препрека*

(тешкоћа) и који је немогућно решити раније коришћеним рутинским поступцима него треба наћи нови пут за решавање уочавањем података који нису изричито дати.“ (Вилотијевић, 1998, стр. 99)

За потребе нашег рада употребљаваћемо наведена одређења појма *проблем* - схваћена као шире и операционално.

У проблемској настави ученици до циља могу да стигну и стижу свако својим посебно одабраним путем. То зато што није проблем, или проблема нема када се до циља долази увежбаним, утврђеним путем. Проблем се јавља само у новим ситуацијама, у ситуацијама које раније нису доживљене. Ипак,постоје методе које олакшавају, донекле, решавање проблемског задатка. Оне су:

(1) директно решавање проблема, и

(2) индиректно решавање проблема.

(1) За директно решавање проблема (оригинала) користе се следеће методе:

- аналитичка,
- синтетичка, и
- аналитичко-синтетичка.

Аналитичка метода је научна метода која код ученика развија способност логичког закључивања: шта треба знати да би се израчунало оно што се тражи у задатку.

Синтетичка метода је приступачнија ученицима него аналитичка јер је праћена конкретним израчунавањима „корак по корак“. Нажалост она не доводи увек до тачних резултата јер ученици понекад учине погрешан "корак“ и зато не реше успешно задатак.

Аналитичко-синтетичка метода се најчешће употребљава код решавања задатака јер се он растављa на више лакших задатака који се решавају синтетичком методом и на крају се дође до траженог резултата.

(2) Индиректно решавање проблема имамо у ситауацијама када се проблемски задатак не може да реши директно. Тада се приступа изради модела. У даљем процесу модел постаје предмет испитивања и решавања. Изучавање оригинала преко модела је сложен процес. “Основне фазе математичко-кибернетичког моделовања јесу:

1) одређивање оригинала,
2) анализа оригинала,
3) одлука о увођењу модела,
4) изградња информационе базе за моделовање,
5) дефиниција модела,
6) испитивања на моделу,
7) пренос информација са модела на оригинал,
8) верификација добијених информација на оригиналу,
9) модификација модела.” (Пинтер, 1997, стр. 12)

Издвајамо две врсте модела:

1. материјални модели, и

2. апстрактни модели.

Материјални модели су материјално-технички аналогани, а апстрактни модели су логичко-математички аналогани објективних система.

У почетној настави математике упознајемо се са математичко-кибернетичким моделима, који су подврста апстрактних модела. Наводимо, без посебног објашњења на овом месту, само неке моделе да би смо их касније, у обради наставних јединица, применили и објаснили:

А. “Геометријски модели

- метода дужи
- метода правоугаоника
- метода Веновог дијаграма
- метода фокусног дијаграма.

В. Логичко-апстрактни модели

- метода инверзије
- метода лажне претпоставке
- метода логике”(Малиновић, Т. и Малиновић-Јовановић, Н., 2002, стр. 317-332)

2. Шта је проблемска ситуација?

Полазна тачка за проблем јесте *проблемска ситуација.* Она ученика ставља у положај који има тешкоће, она код ученика изазива осећај тешкоће и жељу да се она превазиђе.

Иако постоје разноврсна, па и различита одређења, сасвим је релевантна дефиниција по којој је "проблемска ситуација почетно психичко стање изненађења, упитности, велике заинтересованости и високе умне и емоционалне напрегнутости појединца који треба да реши задати проблем “(Вилотијевић, 1998, стр. 77).

Овако схваћена проблемска ситуација има своју психолошку структуру. Могуће је, тако, разликовати бар три структурална елемента проблемске ситуације:

1. сазнајну потребу која побуђује појединца на сазнајну делатност,
2. непознато знање које се жели усвојити, и
3. интелектуалне могућносто појединца, које укључују његове стваралачке способности и претходно искуство.

Поставља се и питање смисла проблемске ситуације. Основни смисао стварања проблемске ситуације је:

– “да ученици осете проблем,
– да сазнају његову унутрашњу противречност,
– да се код њих изазове психичка потреба да приступе његовом решавању,” (Пољак, 1977, стр. 123) и тако даље.

3. Прецизнија анализа води ка закључку да проблем и проблемска ситуација нису истоветни, да међу њима постоји разлика. Поједностављено, проблем је означен тешкоћом и спорношћу, извесном новом ситуацијом, а проблемска ситуација носи ознаку мотивације за решавање проблема.

6. Решавање проблема и етапе у решавању проблема

Детету, које запитано стоји пред загонеткама света, не треба готовим одговорима кварити радост одгонетања.

А. Марјановић

1. Психолози и дидактичари су сагласни да се решавање проблема не може посматрати одвојено од мишљења и учења, али и да их не треба изједначавати.

За решавање проблема потребно је:

– “интензивно размишљање о прикупљеним подацима и њиховој комбинаторици,
– снага конструктивне маште,
– динамична емоционална узбуђеност, и
– техника интелектуалног рада” (Пољак, 1977, стр. 255).

Проблем се решава тако што се полази од онога што је дато, познато, извесно, експлицитно, и уз помоћ проучавања извора прелази на оно што је непознато, задато, неизвесно, неоткривено, имлицитно. Отуда и значај проблемске наставе за оспособљавање ученика за самостални истраживачки рад стваралачког карактера. Зато се по некима (Пољак, 1977, стр. 255) структура проблемске наставе приближава структури научно-истраживачког рада.

2. Решавање проблема је низ сложених интелектуалних операција које се могу рашчланити на неколико фаза или етапа. Како међу теоретичарима проблемске наставе постоје само мале терминолошке разлике, може рећи да је утврђено да постоје четири такве етапе (Вилотијевић, 1998; Ђорђевић, 1981; Пољак, 1989).

1. *Упознавање проблема.* Фаза у којој ученик постаје свестан постојања проблема као тешкоће коју треба решити. Реч је о упознавању елемената проблема и настојању да се проникне у њихове међусобне везе и односе.
2. *Сужавање - реформулација проблема.* Даља фаза разјашњавања и специфичнијег сагледавања проблема. На основу анализе датих података и онога што је задато, појединац увиђа шта недостаје у чему је празнина коју треба попунити. Тиме сужава и конкретизује проблем, локализује тешкоћу и тражи решење.
3. *Постављање хипотезе.* Следећа фаза у којој ученици постављају хипотезе. Посредством хипотеза ученици настоје да дођу до резултата који произилазе из постављених хипотеза. У овој фази нарочито долазе до изражаја креативне способности ученика какве су нове конструкције, и реализација идеја, или и једно и друго.

4. *Проверавање хипотезе.* У овој, последњој, фази врши се верификовање хипотеза, па се и неке као неодговарајуће одбацују, а друге прихватају и образлажу. Посебно је важно проверавати резултате мишљења у пракси.

Ове фазе представљају логичку анализу редоследа при решавању проблема. Оне свакако нису опис психичког понашања ученика који проблем решавају, али јесу психички процес.

7. Час проблемске наставе

Када је о називу/синтагми реч говори се о *структури часа проблемске наставе*, али и о *артикулацији часа проблемске наставе*. Суштинског, пак, разликовања нема.

Слично је и са етапама часа проблемске наставе: различити аутори наводе различит број етапа - најмање три највише шест. Када се наводе три, онда су оне (Пољак, 1989, стр. 255):

1. “стварање проблемске ситуације,
2. пројектовање, антиципирање и решавање проблема, и
3. контролисање и проверавање”.

Када се наводе четири, друга се разрађује на већи број подетапа. Основне четири су (Вилотијевић, 1998, стр. 80-82):

1. “стварање проблемске ситуације,
2. решавање проблема,
3. вежбање и утврђивање, и
4. домаћи задатак”.

Већина ипак мисли да таквих етапа има шест. Међу њима су и математичари који су екпериментисали са проблемском наставом у настави математике. Наводимо шест етапа проблемске наставе по схватању једног од њих (Дејић, 1996, стр. 88).

1. “стварање проблемске ситуације и формулисање проблема,
2. формирање хипотеза,
3. декомпозиција проблема,
4. решавање проблема,
5. анализа резултата, извођење закључака и генерализација, и

6. практична примена нових знања при решавању специјално одабраних задатака”.

На часовима обраде новог садржаја, нарочито, упутно је примењивати шест етапа проблемске наставе.

1. *Стварање проблемске ситуације и формулисање проблема*.- То је од изузетног значаја за „загревање“ ученика за нове садржаје. Пажљиво одабраним и интересантним примером наставник почиње час тако да самом „причом“ заинтересује сваког ученика да се „прикључи“ и узме учешћа, најпре у пажљивом слушању, а надаље и у формулисању и решавању проблема који проистиче из проблемске ситуације.

2. *Формулисање хипотеза.* - Друга етапа у извођењу часа проблемске наставе је формулисање или постављање хипотеза. У њој главну реч имају ученици. Ако су од наставника добро упућени у проблемску ситуацију и упознати са подацима, они успостављају везе између датих података и претпостављају одговоре на формулисан проблем.

3. *Декомпозиција и решавање проблема*.- Код решавања проблема ученици користе један од начина директног или индиректног решавања проблема. Требало би то да буде индивидуални начин рада, дакле, да свако на свој начин решава проблем. Међутим, ако наставник после увида у ток решавања проблема закључи да већина ученика није на правом путу да реши проблем, онда он, заједно са учеником који је на правом путу да реши проблем, врши декомпозицију и решавање проблема.

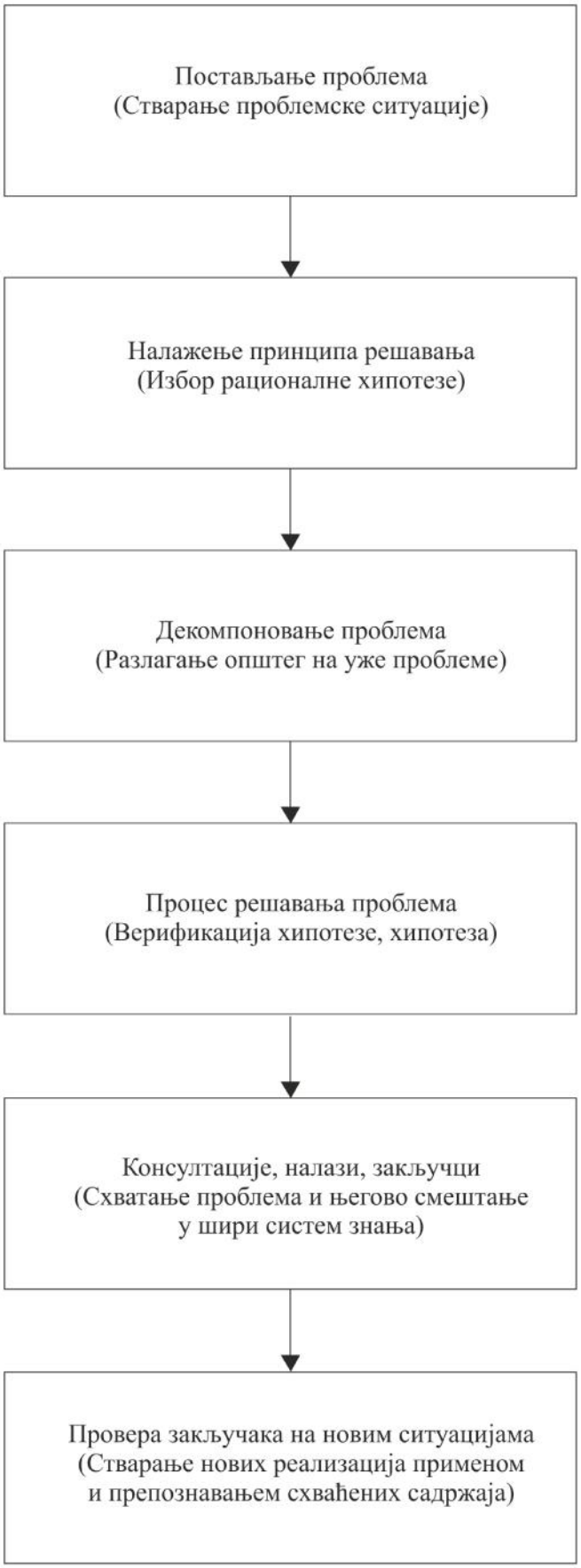
4. *Анализа резултата и извођење закључака.* - После решавања проблема свакако треба приступити анализи резултата, провери да ли добијени резултати одговрају условима задатка и извођењу закључака који се односе на везе између података датих у конкретном задатку (проблему).

5. *Генерализација*.- Етапа коју је пожељно да изведу сами ученици, или ученици уз помоћ наставника. То тако што ће знања стечена решавајући неколико проблема генерализовати

(непотпуном индукцијом) и изразити закључак општим бројевима.

6. *Примена знања у новим ситуацијама*.- Ако ученик успешно савлада све претходне ситуације велика је вероватноћа да је стекао врло квалитетно знање из области која је обрађена проблемском наставом. То знање је свакако на нивоу примене, када је ученик у стању да научена правила, алгоритме, самостално примењује у решавању разних теоријских и практичних задатака, сличних онима који су већ решавани. То јест, ученик уме стечено знање да примењује у животу, у пракси. Или најквалитетније знање које ученик том приликом стиче је знање на нивоу стваралачког решавања проблема, када је ученик у стању да стечено знање примењује у сасвим новим ситуацијама.

У истраживању које смо спровели, у експерименталној групи, користили смо на часовима обраде нових садржаја форму часа са шест структуралних елемената.


Постављање проблема
(Стварање проблемске ситуације)
Налажење принципа решавања
(Избор рационалне хипотезе)
Декомпоновање проблема
(Разлагање општег на уже проблеме)
Процес решавања проблема
(Верификација хипотезе, хипотеза)
Консултације, налази, закључци
(Схватање проблема и његово смештање
у шири систем знања)
Провера закључака на новим ситуацијама
(Стварање нових реализација применом
и препознавањем схваћених садржаја)

8. Извођење проблемске наставе

Проблемска настава је велики изазов и за ученике и за наставнике. За ове друге и врло одговоран посао. Управо зато је потребно знање и сензибилност за његово организовање и извођење. Стечено искуство, али и теоријски налази казују да је могуће издвојити неколико упутстава којих се наставник треба да придржава да би у овоме успео (Дејић, 1996).

- Ток наставног часа треба да се одвија по фазама које су напред наведене. При том не треба бити крут и шаблонизован, што значи да неке фазе могу да се обогате садржајем, изоставе или скрате.
- Проблемске тешкоће треба постепено повећавати.
- Атрактивна и привлачна проблемска ситуација је неопходност. Она се ствара на почетку часа и треба да мотивише ученике на размишљање и активност.
- Одмереност према узрасту и способностима ученика свега што је релеватно у проблемској настави је императив. Под способностима ученика подразумевати степен психичког развоја, претходно знање, мотивисаност за решавање проблема, и друго.
- Тежина проблема не треба код ученика да остави утисак нерешивости. Али, проблем не треба да буде и без тешкоће, исувише лак. Најбоље је ако је тежина проблема нешто изнад способности и могућности ученика. То их, између осталог, одвлачи од рутинираног решавања проблема.
- Водити рачуна о времену. За обраду једне наставне јединице путем проблемске наставе потребно је више времена у поређењу са другим начинима рада. И сам ток часа је нешто спорији.
- У току наставе подстицати ученике на истрајност и упорност које су неопходне у оваквој настави. При том је неопходно да

ученици увиде неопходне везе међу чињеницама. Али и да изналазе нове и различите путеве за решење.

- Одмерити неопходан број и врсте чињеница које ће се ученицима понудити. Не уносити небитне, или сувише небитних чињеница.
- Имати у виду да је проблемску наставу могуће комбиновати са другим начинима рада, како у систему часова тако и на једном часу.
- Наставник треба да истрајава у намери да ученици буду активни у свим фазама проблемске наставе. У неким фазама могу се користити и неке испробане врсте наставе каква је хеуристичка настава.

Свакако да и ова упутства не треба схватити као шаблоне и круто их се придржавати. Флексибилност и осећај за примену и наставника и ученика су неопходни.

9. Значај проблемске наставе

Досадашња теоријска и емпиријска истраживања показала су да проблемска настава има вишеструко велики значај (Ничковић, 1974). Структурално посматрано тај значај је у следећем:

1. развијање мотивације и интересовање ученика за учење,
2. васпитање личних особина какве су:
   - упорност,
   - истрајност,
   - систематичност,
   - иницијативност,
   - дисциплинованост,
   - сналажљивост, и друге.
3. развијање навика и техника самосталног учења,
4. вежбање мишљења и особина мишљења:
   - апстрактно и теоријско,
   - стваралачко,

- критичко,
- способност инвентивног и оригиналног у решавању проблема,
- способност изналажења нових могућности у решавању проблема,
- способност преструктурисања претходног знања,

5. развијање логичких операција:
   - анализа и синтеза,
   - компарација,
   - диференцијација,
   - идентификација,
   - апстракција, и
   - генерализација.

6. Проблемска настава ефикасније утиче:
- да ученици стичу основну математичку културу потребну за откривањеулоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање), за успешно настављање образовања и укључивање у рад;
- да развија ученикову способност посматрања, опажања и логичког, критичког, стваралачког и апстрактног мишљења;
- да ученици стичу способност изражавања математичким језиком, јасност и прецизност изражавања у писменом и усменом облику;
- да изграђује позитивне особине ученикове личности, као што су: истинољубивост, упорност, систематичност, уредност, тачност, одговорност, смисао за самостални рад;
- да оспособи ученике за прецизност у мерењу, цртању и геометријским конструкцијама;
- да ученицима омогући разумевање одговарајућих садржаја природних наука и допринесе радном и политехничком васпитању и образовању;
- да интерпретацијом математичких садржаја и упознавањем основних математичких метода допринесе формирању

правилног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика;

– да ученици стичу навику и обучавају се у коришћењу разноврсних извора знања.

Посебан значај проблемска настава има за кориговање наставног процеса и отклањање слабости у њему. То треба да ради наставник

II. ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ

Природне бројеве је створио Бог, све остало у математици створио је човек.

Кронекер

1. Историјски осврт на развој природних бројева

Видим како расте пирамида коју ви нисте започели, нити ћете је довршити! Но, зар ће последњи радник, који ће се поносно поставити на њен врх, бити већи од онога, који је поставио први камен? Већи од архитекте, који је читаву грађевину замислио и израдио јој план?

Шопенхауер

Још у праисторијској епохи – неолиту јављају се прве представе о броју, упоредо са јављањем потребе за комуникацијом међу саплеменицима и вербалним изражавањем нумеричких величина и њихових односа.

Може се уочити веза термина за одређену бројност и имена објеката чија бројност је тиме изражена. То представља једно пресликавање између скупа имена бројева и скупа објеката, Термин "један" изведен је из речи: ја, месец, и др. У другој фази се развијају појмови броја 1, 2, 3, 4.

О овим фазама развоја појма природног броја може се закључити на основу проучавања говора примитивних племена Нове Гвинеје, Папуе и Аустралије, који су и данас на врло ниском ступњу цивилизацијског развоја. На пример, на језику једног племена на реци Мурej термини за бројеве су:

- енеа (један),
- петчевал (два),
- петчевал - енеа (три),
- петчевал - петчевал (четири).

Камиларон: 1 - мал, 2 - булан, 3 - гулиба, 4 - булан-булан, 5 - булан-гулиба,
6 - гулиба-гулиба.

Све остало је за њих *много* као коса на глави.

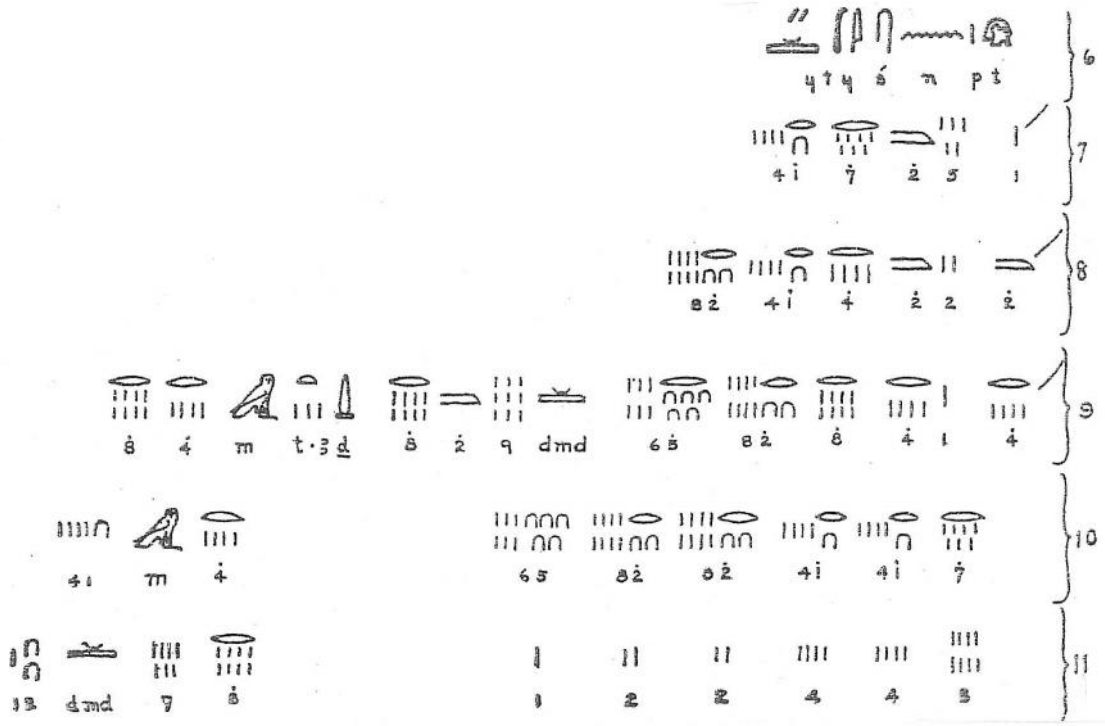
Интересантан је и начин бројања који се до скора примењивао, (ако се не примењује и сада) у најзабаченијим пределима где се стока "бројала" тако што се вршило придруживање "1 - 1" пресликавање између скупа каменчића у торбици чобана и скупа животиња у стаду истог чобана.

Саме ознаке за бројеве, онакве какве их сада користимо, настале су релативно скоро, пролазећи дуг пут трансформације. Први написани симболи за бројеве нађени су у храмовима Сумераца урезани у глиненим плочицама.

15 знак за одузимање 20 - 1 = 19 18

Извори великог броја обавештења о египатској математици су Рајндов папирус и такозвани, Московски папирус.

Рајндов папирус је откривен 1858. године, а написан је око 1650. године пре нове ере и садржи 85 задатака прикупљаних из дугог дотадашњег периода.



Једна страница великог "Рајндовог папируса"

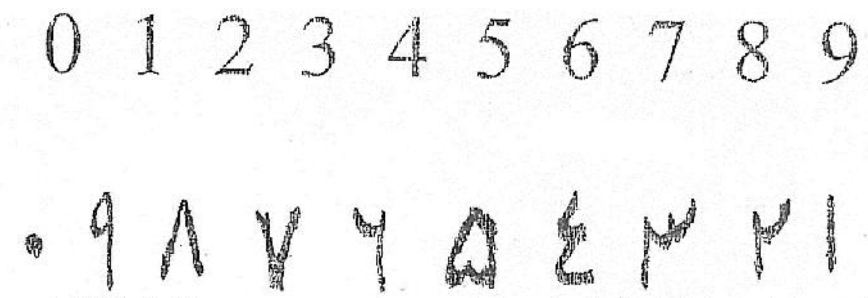
Московски папирус, који је два века старији, садржи 25 задатака.

Писани материјали који се односе на индијску и кинеску математику потичу из периода нове ере (узрок пропасти оних ранијих је вероватно зато што су рађени на неотпорном материјалу - бамбусова кора и папир у Кини). Најтрајније су глинене плоче из Месопотамије и папируси из Египта. У другој половини 19. века у Египту је откривен папирус који потиче из доба око хиљаду година пре Христа под називом "*Инструкције за упознавање свих тајних ствари*" . Папирус се, по свом творцу свештенику Ахмесу, назива Ахмесов папирус и налази се у Британском музеју у Лондону као део колекције *Рхинд*.

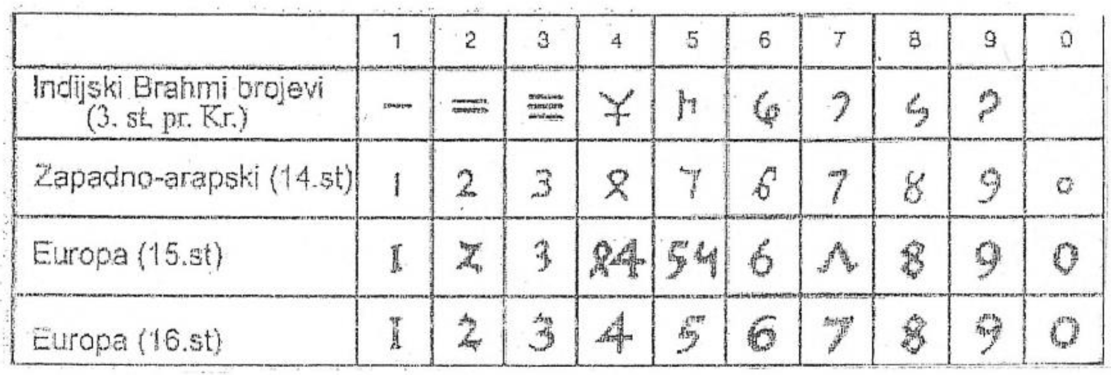
Садржај папируса чине проблеми из аритметике и геометрије са одговорима и без указивања на начине како се до њих долази. Апстрактна идеја броја код Египћана обухватала је и разломке, који су изражавани као n-ти делови или суме таквих делова.

Арапске цифре, које ми данас користимо за означавање бројева, пореклом су из Индије одакле се преносе у Европу посредством

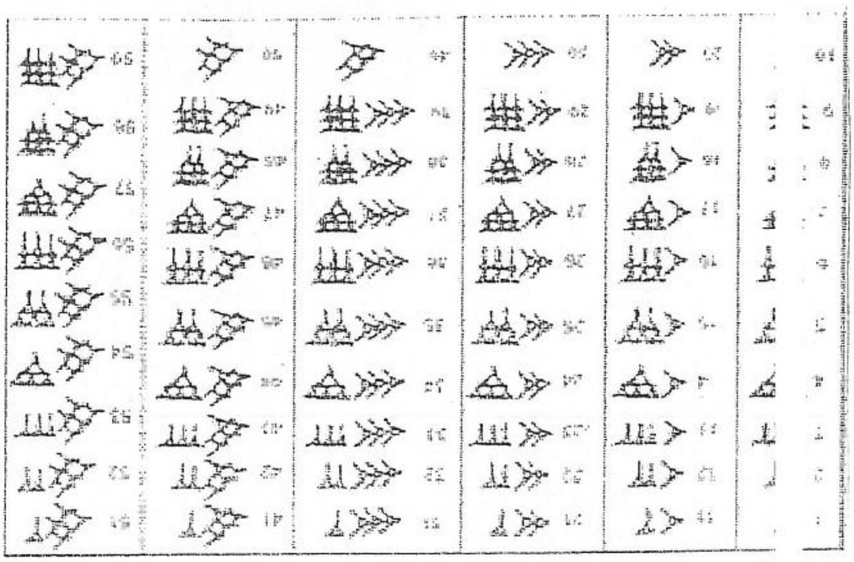
арапских математичара. Дуг је пут током којег су се оне трансформисале и добиле данашњи облик.



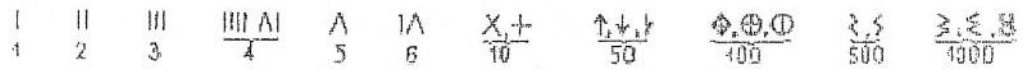
Арапски бројеви (650. г.н.е.) источна група



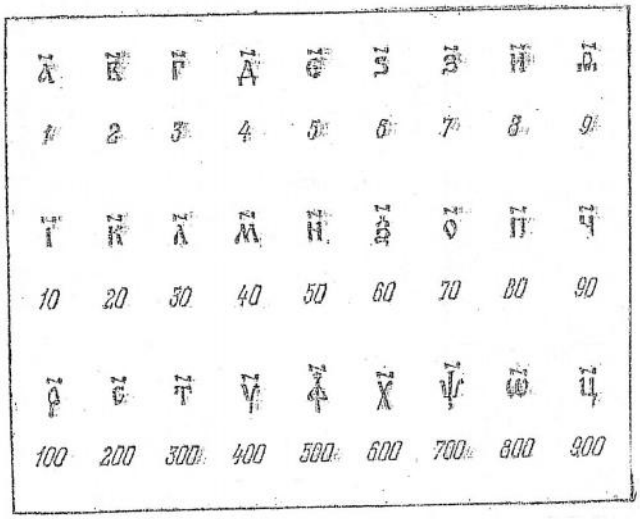
Арапски бројеви – западна група и данашњи бројеви



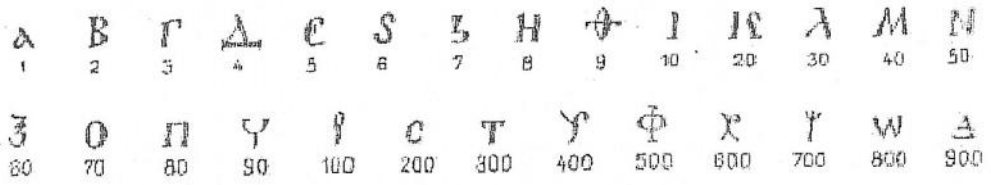
Вавилонски бројеви



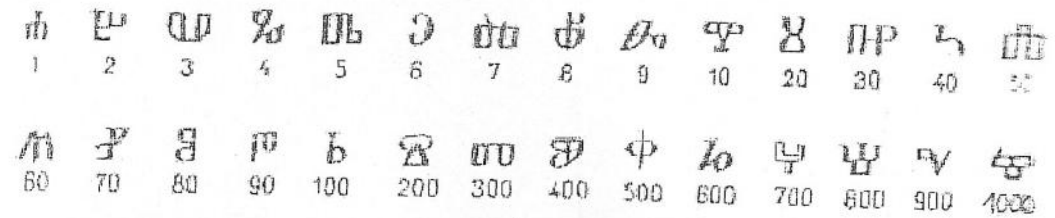
Етрурски бројеви



Словенски бројеви



Начинзаписивања у црквенословенској ћирилици



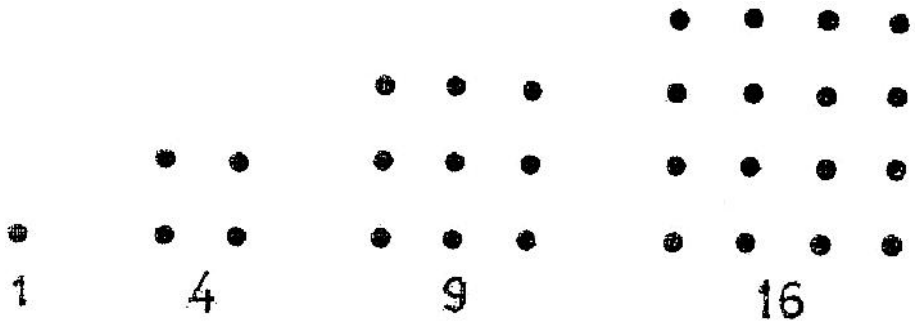
Начин писања бројева у глагољици

Нула је означавана празнином између два симбола (што је често доводило до забуне). Данашњи знак за нулу појавио се тек у 13. веку наше ере.

Кинеска математика, у поређењу са египатском и вавилонском, је у повлашћеном положају, јер се у њој види континуитет од почетака до данашњих дана. И индијска математика је у сличном положају. Међутим, тек је, због нових погледа на свет који су карактерисали цивилизацију старих Грка, математика достигла ниво праве науке.

Око 430. године пре нове ере Атина је постала центар нове цивилизације - центар златног доба Грчке. Почео је процват градова као што су Атина, Кротон, па Тарент (у Италији), Сиракуза (на Сицилији). Одсуство јасно одређене религије довело је многе становнике тих градова до мистицизма. Истовремено је допринело развоју рационализма и научног прилажења проблемима. Савремена математика, у атмосфери јонског рационализма, почела је да поставља питање *зашто*?, поред питања које су постављали источњачки математичари – *како*?

Питагорејци су бројеве делили на класе: парне, непарне, парно-парне, непарно-непарне, просте и сложене, савршене, пријатељске, троугаоне, четвороугаоне, петоугаоне, итд. Најинтересантније резултате су постигли у проучавању "троугаоних" бројева који су повезивали аритметику и геометрију.



Ови бројеви и њихове геометријске интерпретације и данас имају примену. На пример, троугао за билијарски сто у који се стављају лоптице; начин ређања неке робе (кутије) у излогу или на рафовима продавница, итд. Уопште сваки троугаони број се може приказати у облику:

$$Tn = 1 + 2 + 3 + ... + n.$$

Наш термин "квадратни бројеви" потиче од питагорејских конструкција. То су квадрати природних бројева.

$$1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16.$$

Помоћу ових шема се може унапред израчунати колико ће, на пример, једном трговцу јабука требати да направи "пирамиду" од три нивоа у чијој ће основи бити. на пример. 9 јабука.

Пријатељски бојеви. Каже се за природни број *к* да "је пријатељ" природног броја *т* ако је збир прави делилаца за *к* једнак *т* и збир правих делилаца за *т* једнак *к*.

Ако је *к* "пријатељ" за *т*, онда је, очигледно, *т* "цријатељ" за *к*. Стога се говори о пару пријатељских бројева (*к*,*т*). Такви су парови ретки. Наводимо пар (1 184, 1 210).

Питагорејци су ишли тако далеко да су тврдили да „је све број“, те да се сви односи могу да сведу на нумеричке односе. (Они су се бавили проучавањем и других области математике, али за потребе нашег рада ограничили смо се на део о бројевима.)

На извесном степену друштвеног развитка, поред записивања бројевима почело је настајати и рачунање на прстима, то јест, рачун петицама и десетицама. Тако је настао примитиван тип аритметике. На пример, 12 је изражавано као 10 + 2 или 13-1. Множење је настало када се 20 није изражавало као 10+10, него као 2x10. Такве операције примењиване су током више хиљада година и представљале су неку средину између сабирања и множења. Посебно су коришћене у Египту и у доаријској култури Мохенџо-Даро на Инду.

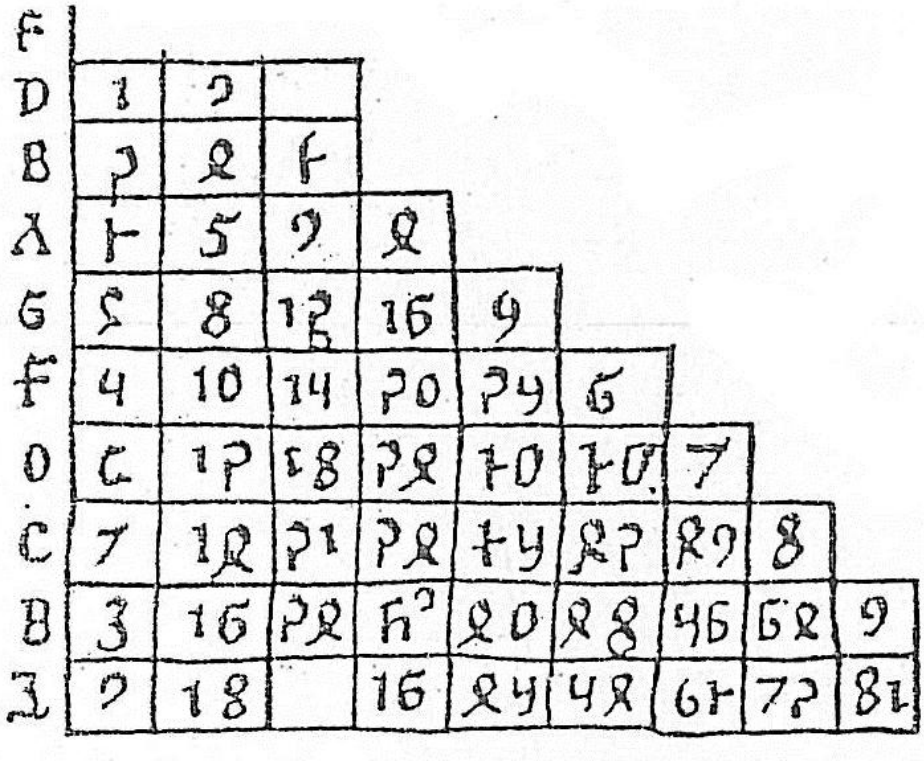
Дељење је настало тако што се 10 почело изражавати као "половина тела".

Итересантна је чињеница да су се људи у та давна времена одушевљавали веома великим бројевима. Сматра се да је то повезано са тежњом да се преувелича величина стада или број убијених непријатеља. Остаци таквих преувеличавања могу се наћи у Библији и другим религиозним књигама.

Када је реч о рачунању, и ту се кроз историју прибегавало разним начинима и покушајима „олакшавања“ пута долажења до резултата. Зато су прављене ручне таблице, посебно када је реч о множењу. Ево вам неколико примера таквих таблица:

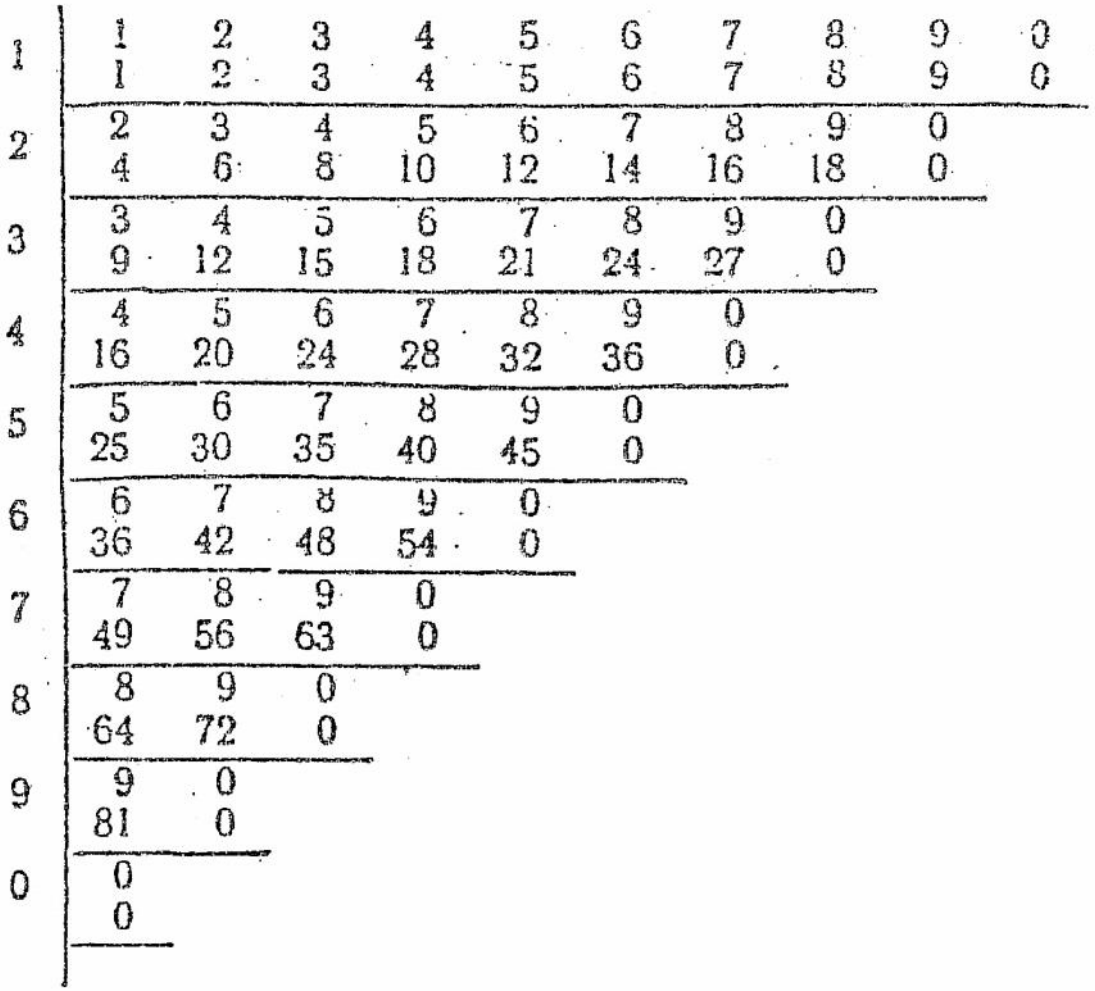
Почетком 9. века арапски математичар Мухамед Ибн Муса ал-Кваризми из Киве, написао је дело из аритметике са децималним позиционим системом записивања бројева и правилима рачунања чији оригинал није сачуван, али постоји латински превод "Algorithni de

Numero Indorum" из 12. века. Од "ал-каризми" варијацијом се дошло до речи алгоритам - правило рачунања.



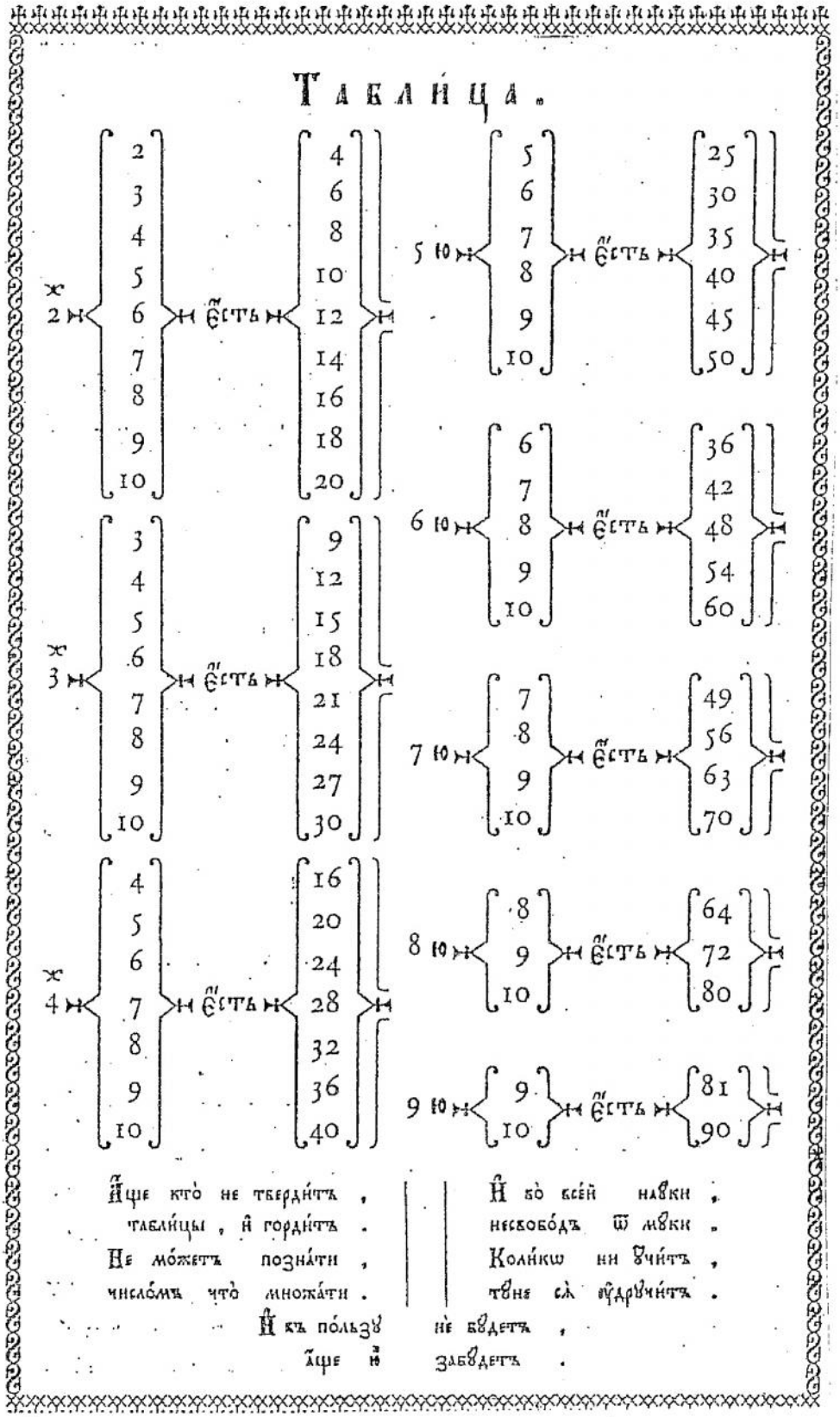
Ал-Хваризмијева таблица множења из 9. века

Ево још неколико примера таквих таблица из разних временских периода:

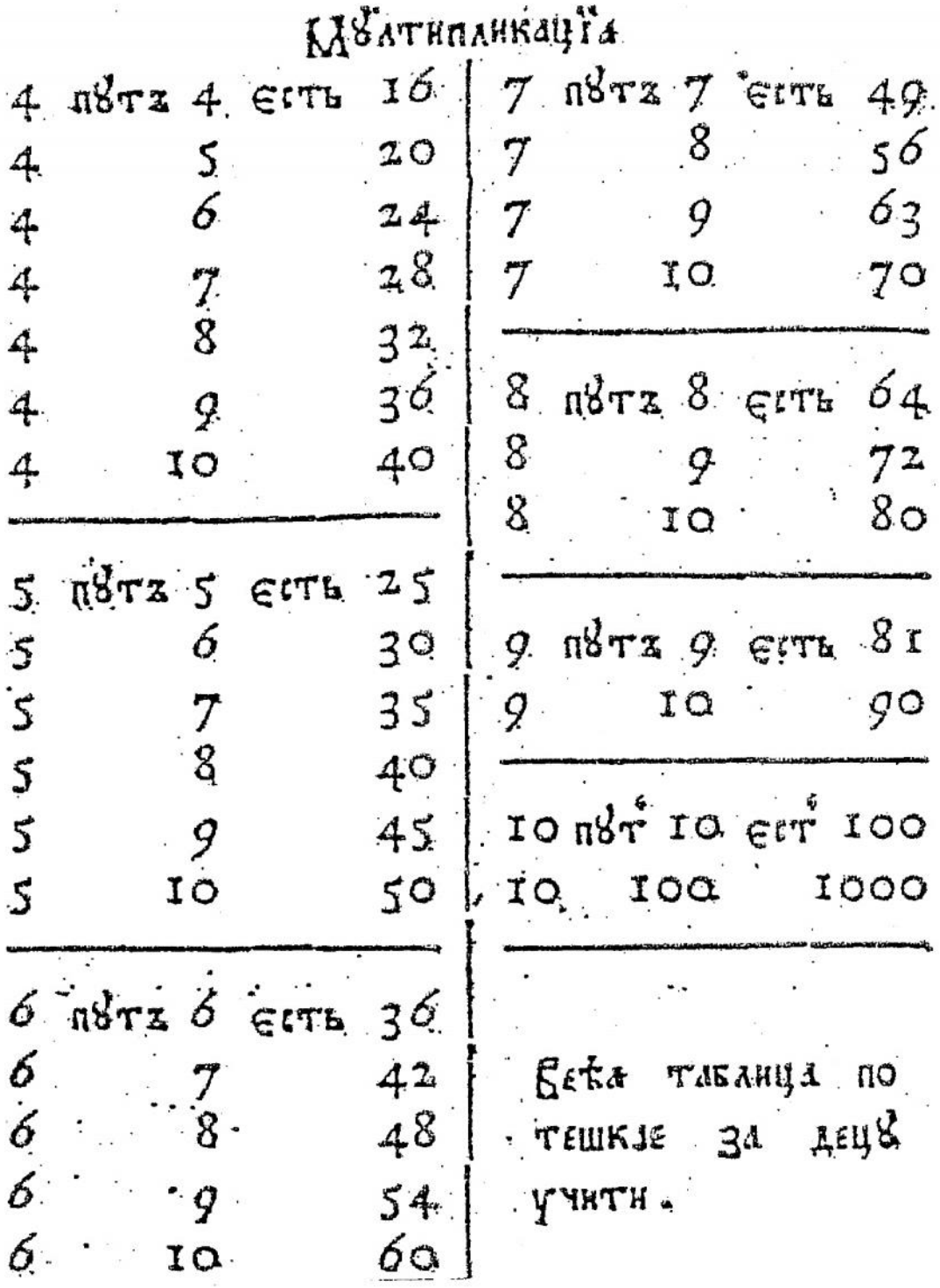


1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	4	6	8	10	12	14	16	18	0	
3	3	4	5	6	7	8	9	0		
	9	12	15	18	21	24	27	0		
4	4	5	6	7	8	9	0			
	16	20	24	28	32	36	0			
5	5	6	7	8	9	0				
	25	30	35	40	45	0				
6	6	7	8	9	0					
	36	42	48	54	0					
7	7	8	9	0						
	49	56	63	0						
8	8	9	0							
	64	72	0							
9	9	0								
	81	0								
0	0									
	0									

Шикеова таблица множења из 1484. године.

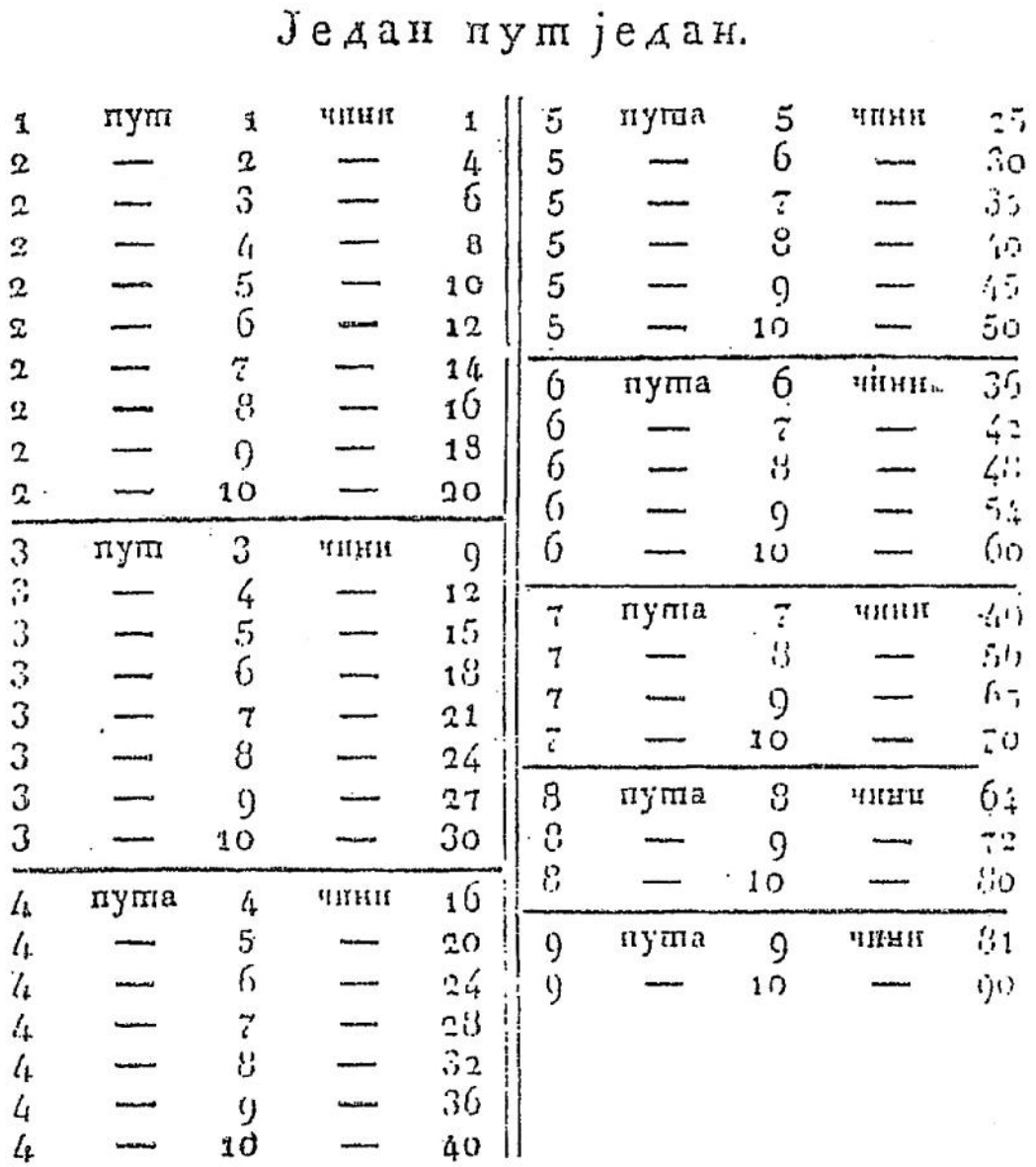


Руска таблица множења из 1703. године


Мултипликација

4	пут	4	ест	16	7	пут	7	ест	49
4		5		20	7		8		56
4		6		24	7		9		63
4		7		28	7		10		70
4		8		32					
4		9		36	8	пут	8	ест	64
4		10		40	8		9		72
					8		10		80
5	пут	5	ест	25					
5		6		30	9	пут	9	ест	81
5		7		35	9		10		90
5		8		40					
5		9		45	10	пут	10	ест	100
5		10		50	10		100		1000
6	пут	6	ест	36					
6		7		42	Ова таблица по				
6		8		48	тешкје за децу				
6		9		54	учити.				
6		10		60					

Таблица множења Василија Дамјановића из 1767. године



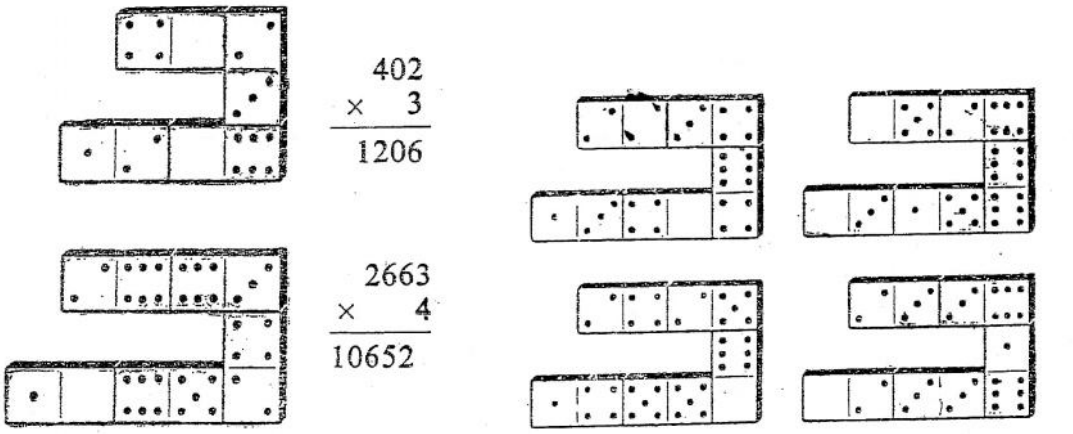
Један пут један.

1	пут	1	чини	1
2	—	2	—	4
2	—	3	—	6
2	—	4	—	8
2	—	5	—	10
2	—	6	—	12
2	—	7	—	14
2	—	8	—	16
2	—	9	—	18
2	—	10	—	20
3	пут	3	чини	9
3	—	4	—	12
3	—	5	—	15
3	—	6	—	18
3	—	7	—	21
3	—	8	—	24
3	—	9	—	27
3	—	10	—	30
4	пута	4	чини	16
4	—	5	—	20
4	—	6	—	24
4	—	7	—	28
4	—	8	—	32
4	—	9	—	36
4	—	10	—	40
5	пута	5	чини	25
5	—	6	—	30
5	—	7	—	35
5	—	8	—	40
5	—	9	—	45
5	—	10	—	50
6	пута	6	чини	36
6	—	7	—	42
6	—	8	—	48
6	—	9	—	54
6	—	10	—	60
7	пута	7	чини	49
7	—	8	—	56
7	—	9	—	63
7	—	10	—	70
8	пута	8	чини	64
8	—	9	—	72
8	—	10	—	80
9	пута	9	чини	81
9	—	10	—	90

Таблица множења у Буквару Вука Караџића из 1827. године

Ради лакшег рачунања са великим бројевима потребно је знати напамет таблице множења и сабирања првих десет природних бројева, па се у ту сврху данас користе следеће таблице:

Да би се рачун што више приближио људима, а нарочито деци, проналазе се многе занимљиве "олакшице". Ево једног таквог примера множења помоћу домина:



Данас у свету постоји много различитих језика, али језик математике је универзалан и арапске цифре су општепознате и општеприхваћене. Победа арапског бројевног система је извојевана оног момента када су се алгоритмици изборили за свој систем рачунања помоћу бројева, за разлику од абациста, који су рачунали без записивања бројева и користили механичке направе (абакус, суипан, рачунаљку и др).

1.1. Бројевни системи

Кад је о *бројевним системима* реч они представљају математички систем помоћу којег се приказују бројеви и представљају скуп симбола и статистичких правила преко којих је могуће приказати сваки природан број и нулу. Представљајући начин кодирања бројева помоћу цифара, бројевни системи се деле на непозиционе и позиционе бројевне системе.

Непозициони бројевни системи (називају се још и *адитивни*) су они у којима позиција цифре која описује број не одређује својство те цифре, што значи да позиција цифре није у вези са њеном месном вредношћу. Овај систем је заснован на одређеним знацима којима су додељене одређене вредности. Цифре оваквих система представљају исту вредност без обзира где се налазе, а коначна вредност броја се добија сабирањем или одузимањем свих цифара.

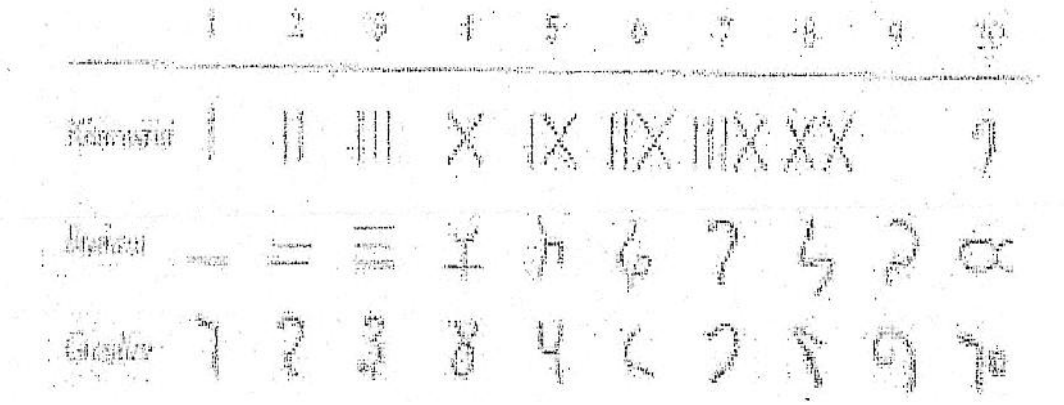
Непозициони бројевни системи су погодни за представљање бројева, али се нису развили због комликованог извођења аритметичких операција.

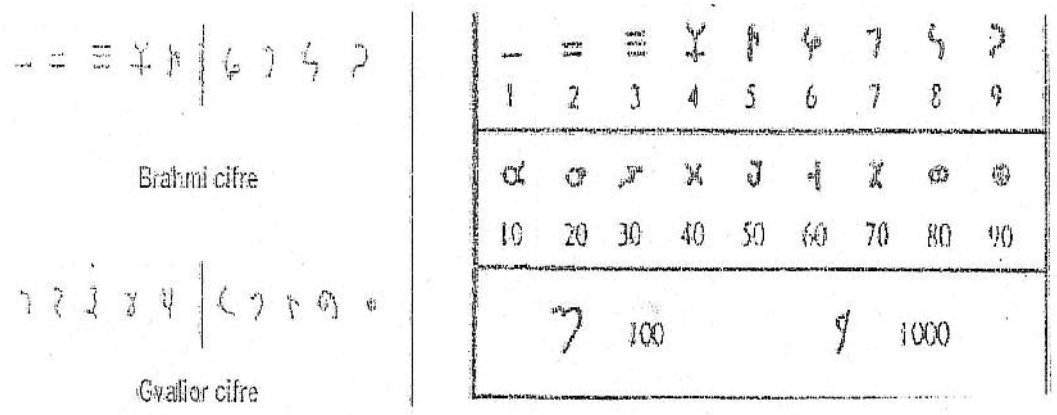
Позициони бројевни системи (називају се још и *тежински*) су они у којима се "тежина" цифре односи на њен удео у целокупној вредности броја, одређује на основу њене позиције у броју. Што је већа позиција цифре (гледајући с лева на десно), то је већи и удео у вредности броја. Свака цифра има своју вредност. Вредност позиције представља степен основе, број се добија сабирањем производа вредности цифре и вредности позиције на којој се цифра налази.

Данас је најчешће у употреби, а у почетној настави математике једино, позициони бројевни систем са основом 10, тзв. декадни или десетични бројевни систем. По многим мишљењима он је прихваћен због анатомије људске руке јер на рукама имамо десет прстију које често користимо при рачунању.

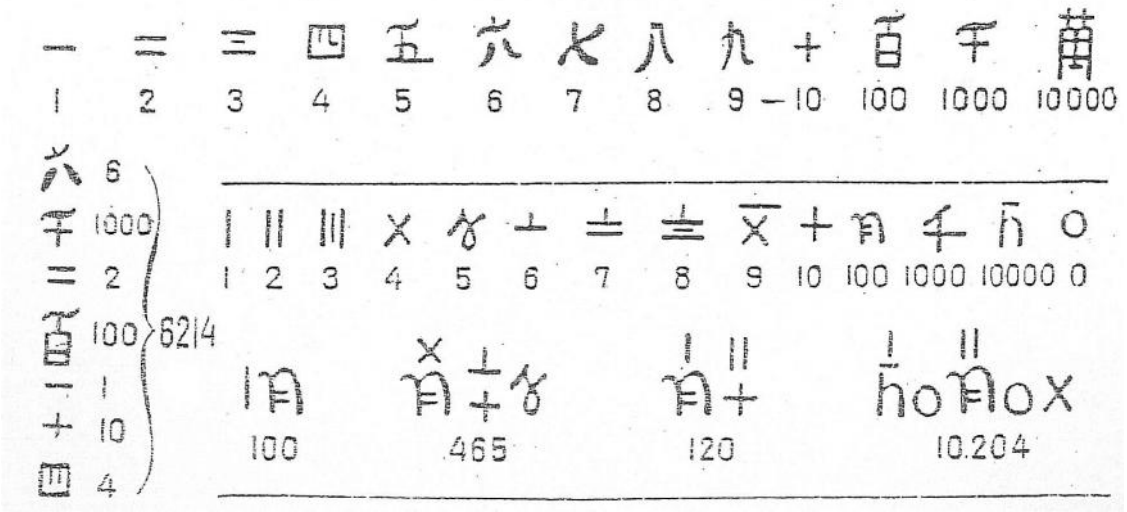
Математика која је на папирусима изложена заснива се на десетичном бројевном систему са специјалним знацима за сваку десетичну јединицу вишег реда.

Стари Индијци су користили десетични бројевни запис, али без позиционог принципа. Такав систем чинили су такозвани бројеви Брахми, где су постојали посебни знаци за сваки од бројева. Ти симболи потичу из епохе краља Ашока (300 година пре нове ере).



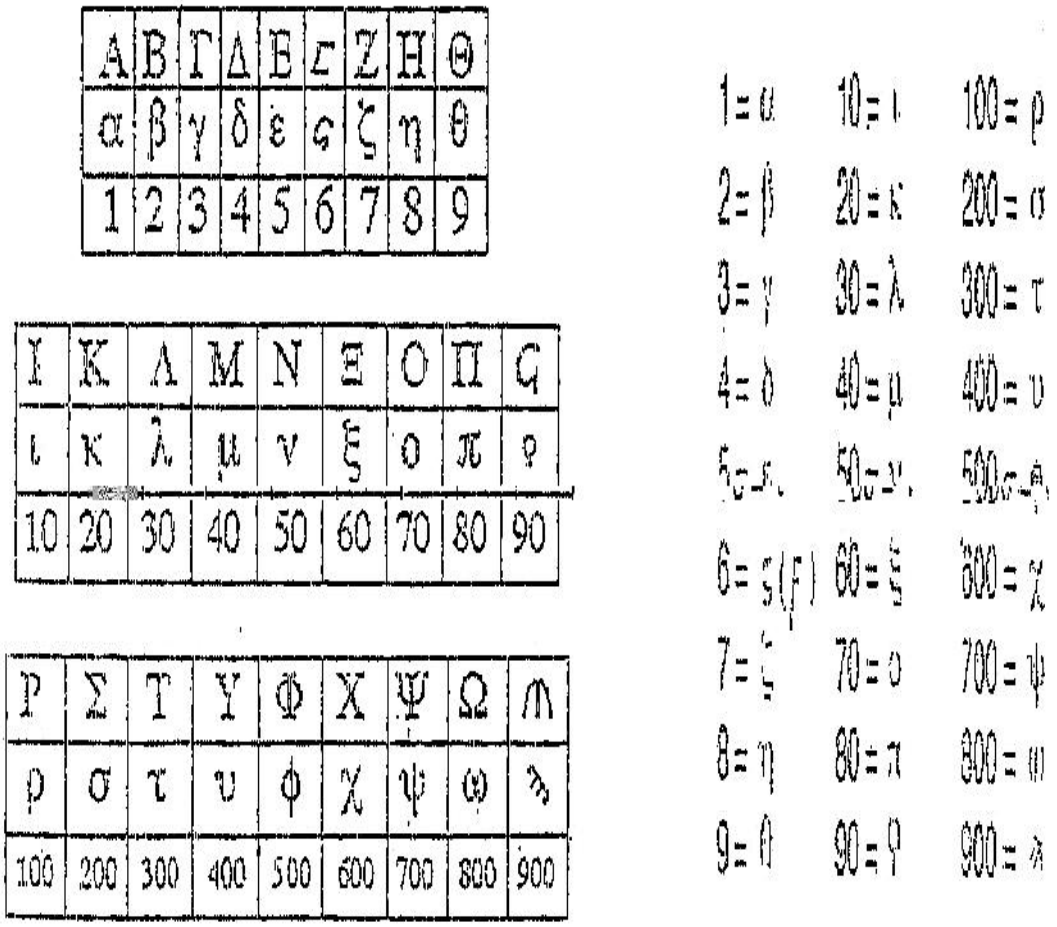


У Кини су бројевни системи увек били десетични. Још у другом миленијуму пре нове ере они су бројеве записивали у позиционом систему помоћу девет симбола који су представљани помоћу бамбусових штапића, распоређених на разне начине.



Кинески начин писања бројева

Стари Грци (900 г. п. н. е-200 г. н. е) су такође имали више система. Први је био заснован на словима имена бројева (сл.7), а други су сачињавала сва слова грчког алфабета и три из јонског, са основом 10. Користили су 27 симбола и то словима алфабета су означавали месне вредности цифара стотина, десетица и јединица, а остала 3 симбола су носила називе: *digama* (6), *kopa* (90) и *sampi* (900) (сл.8). Да би се разликовала слова од бројева, писане су црте изнад сваког броја.



Систем нумерације заснован на словима имена бројева

Систем са основом 60 постојао је код Месопотамаца (од тога води порекло подела часа на 60 минута, итд).

Код првобитних америчких народа које је проучавао Илс, од 307 бројевних система 146 су били десетични, 106 петични, петично-десетични, двадесетични и петично-двадесетични.

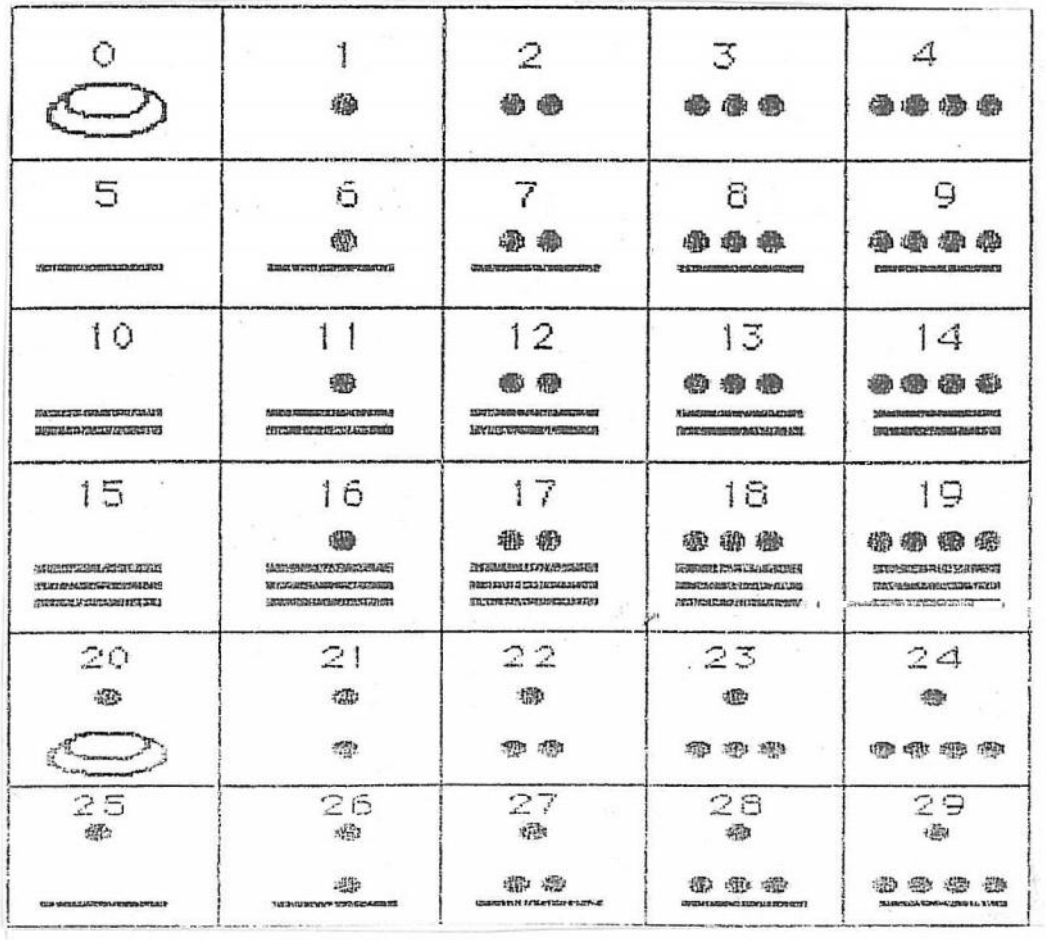
arapski broj	oznaka	značenje
1		štapić
10		potkova
100		uže
1000		lotosov cvijet
10 000		prst
100 000		gušterica, punoglavac
1000 000		božanstvo

Бројевни систем старих Египћана

Постојали су и постоје различити бројевни системи.

Системи са основом: 2, 5, 10. 12, 20, 60.

Систем са основом 20 (што асоцира на број свих прстију на рукама и ногама). Сусреће се код Келта и Маја.



Бројевни систем код Маја

У одељку *Историјски осврт на развој природних бројева* указали смо на веома дуг временски период као и на мене кроз које се пролазоло да би се дошло до данањег начина записивања цифара и бројева. У овом одељку бисмо се задржали на савременим дефиницијама и облицима писања бројева.

Бројевни системи представљају математички систем помоћу којег се приказују бројеви и представљају скуп симбола и статистичких правила преко којих је могуће приказати сваки природан

број и нулу. Представљајући начин кодирања бројева помоћу цифара, бројевни системи се деле на *непозиционе* и *позиционе* бројевне системе.

Непозициони бројевни системи (називају се још и адитивни) су они у којима позиција цифре која описује број не одређује својство те цифре, што значи да позиција цифре није у вези са њеном месном вредношћу. Овај систем је заснован на одређеним знацима којима су додељене одређене вредности. Цифре оваквих система представљају исту вредност без обзира где се налазе, а коначна вредност броја се добија сабирањем или одузимањем свих цифара.

Непозициони бројевни системи су погодни за представљање бројева, али се нису развили због комликованог извођења аритметичких операција.

Позициони бројевни системи (називају се још и тежински) су они у којима се „тежина" цифре односи на њен удео у целокупној вредности броја, одређује на основу њене позиције у броју. Што је већа позиција цифре (гледајући с лева на десно) то је већи и удео у вредности броја. Свака цифра има своју вредност. Вредност позиције представља степен основе, број се добија сабирањем производа вредности цифре и вредности позиције на којој се цифра налази.

Данас је најчешће у употреби, а у почетној настави математике једино позициони бројевни систем са основом 10, тзв. *декадни* или десетични бројевни систем.

Бројевни систем са основом 2, тзв. *бинарни* бројевни систем, користи се најчешће код рачунара. У том систему сваки број се може напиати само помоћу две цифре 0 – нула и 1 – један.

Неки природни број се из декадног преводи у бинарни систем тако што се дати број дели са степеном 2^n броја 2, где је изложилац n највећи такав да је 2^n мањи од датаг броја. Ако је остатак при овом дељењу различит од 0 или 1 исто се поступа са тим остатком све док се у неком дељењу не добије остатак 0 или 1.

И само рачунање у овом систему је најједноставније.

Основа једнозначног записивања природних бројева може бити било који природан број $b > 1$.

Теорема. Нека је $b > 1$ дати природан број. Сваки природан се може написати у виду

$$a = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0 = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)b,$$

$$0 \le a_i < b,\ i = 0,1, \ldots, n-1, 1 \le a_n < b.$$

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по a. За $a + 1$ теорема је тачна (за $n = 0$, $a_0 = 1$). Нека је теорема тачна за $a = k$, тј. нека је $k = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$. Број $k + 1$ има један од облика

$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + a_1 b^1 + (a_0 + 1)$ $(1 + a_0 < b)$;

$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_1 + 1)$ $(1 + a_0 = b, 1 + a_1 < b)$;

$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + ... + (a_2 + 1)$ $(1 + a_0 = 1 + a_1 = b, 1 + a_2 < b)$;

•

•

$(1 + a_n)\, b^n$ $(1 + a_0 = 1 + a_1 = \ldots 1 + a_{n-1} = b, 1 + a_n = b)$;

b^{n+1} $(1 + a_0 = 1 + a_1 = \ldots 1 + a_{n-1} = 1 + a_n = b)$.

Дакле, теорема је тачна за $a = k + 1$ и на основу математичке индукције следи да је тачна за све природне бројеве.

Симболи (знаци) $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ зову се *цифре*. Ако се број a пише у виду

$$a = (a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0)b$$

онда се каже да је то попзиционо писање природног броја. У оваквом записивању природних бројева свака цифра има двојну вредност: месну и позицијску. За $b = 10$ добија се *десетични* или *декадни бројни систем*. У овом систему сваки природни број може се записати у виду

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = (a_n\, a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}.$$

Бројевни систем са основом 2, тзв. бинарни бројевни систем, данас се користи најчешће код рачунара. У том систему сваки број се може написати само помоћу две цифре 0 - нула и 1 - један.

Неки природни број се из декадног преводи у бинарни систем тако што се дати број дели са степеном 2^n броја 2, где је изложилац п највећи такав да је 2^n мањи од датаг броја. Ако је остатак при овом дељењу различит од 0 или 1, исто се поступа са тим остатком све док се у неком дељењу не добије остатак 0 или 1.

И само рачунање у овом систему је најједноставније.

Основа једнозначног записивања природних бројева може бити било који природан број b>1. У записивању бројева у неком бројевном систему употребљава се онолико цифара колика је основа система. Такође се може сваки број "превести" из једног система у други.

За крај ево табеле упоредног записа бројева у систему основа 10, 2 и 8 за декадне бројеве од 0 до 31.

Декадни	Бинарни	Октални
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	10
9	1001	11
10	1010	12
11	1011	13
12	1100	14
13	1101	15
14	1110	16
15	1111	17
16	10000	20
17	10001	21
18	10010	22
19	10011	23
20	10100	24
21	10101	25
22	10110	26
23	10111	27
24	11000	30
25	11001	31
26	11010	32
27	11011	33
28	11100	34
29	11101	35
30	11110	36
31	11111	37

2. Савремена интерпретација појма природног броја

Број је један од фундаменталних појмова у математици. Пошто овај појам примењујемо у свакодневном животу, чини нам се да је он врло једноставан, готово тривијалан. Због тога огроман број људи није свестан сложености тог појма, нити схвата његову суштину. Хинчин (Александар Јаковлевич Хинчин) каже да је давање одговора на питање шта је број један од најтежих задатака филозофије, од ћијег смо потпуног решења још далеко. Број је несумњиво однос извесних величина реалног света у нашој свести, али који су то у суштини односи, који односи су само количински, врло су тешка питања која филозофија и математика хиљадама година настоје да разјасне.

У савременој математици до појма броја долази се на следеће начине.

а) Појам броја изведен је из искуства. Пашо (Pasch Mority) појам броја изводи из следећих осам појмова: ентитет, објекат искуства, догађај, ознака ентитета, колективно име, ранији или каснији догађај, догађај непосредног следа и ланац догађаја.

б) Појам броја изведен је из логичких појмова. Фреге (Frege Gottlob) а потом Расел (Russel Bertrand, 1903) на тај начин долазе до појма броја. Раселова дефиниција броја гласи: «Број неке класе је одређена класа свих оних класа које су јој сличне.» Ово је скуповни приступ где је природни број заједничка особина класе еквивалентних скупова.

в) Број је уведен као недефинисани ентитет, као симбол и емплицитно је дефинисан аксиомима. Пеано (Peano Giuseppe, 1891) дефинише број са пет аксиома и једном основном релацијом “бити следбеник”. Ово је аксиоматски (аритметички) приступ.

2.1. Дефиниција. Скуп природних бројева је непразан скуп N са релацијом „следећи“ за чије елементе важе следеће аксиоме:

A1. Један (1) је природан број, то јест, $(\exists 1 \in N)$,

A2. Сваки природни број има свог следбеника, то јест, $(\forall a \in N)(\exists b \in N)\left(b = a^{'}\right)$,

A3. Број један (1) није следбеник ни за један природни број тј. $(\forall a \in N)\left(1 \neq a^{'}\right)$,

A4. Два природна броја су једнака ако су једнаки њихови следећи следбеници, тј.

$$(\forall a, b \in N)\left(a^{'} = b^{'} \Rightarrow a = b\right),$$

A5. Ако подскуп $M \subseteq N$ има следећасвојства :

$1 \subseteq$ M,

$(\forall k \in N)\left(k \in M \Rightarrow k^{'} \in M\right)$,

тадаје M = N.

Ове аксиоме познате су под именом **Пеанове аксиоме**.

Због своје важности у доказима теорема које у својој формулацији садрже природан број n издваја се A5. која се зове **аксиома математичке индукције**.

Посматрамо колекцију F свих коначних скупова. У F уводимо релацију „једнакобројност“ („еквивалентност“) у ознаци „ ~ “ на следећи начин: За два коначна скупа A и B кажемо да су еквивалентни, и пишемо A ~ B , ако постоји пресликавање f : A → B које је 1 - 1 и на. Ова релација има својство рефлексивности (идентично пресликавање и: A → A је 1 - 1 и на), симетричности (ако је f: A → B бијекција онда је f^{-1} :B →A је 1 - 1 и на) и транзитивности (кад су f: A → B и g: B → C 1-1 и на, такво је и пресликавање g · f : A→C). Скуп F се помоћу релације „ ~ “ разбија на класе еквивалентних (једнакобројних) скупова тако да свака класа представља бесконачну фамилију свих коначних скупова еквивалентних међу собом. Уочимо једну класу K_A. Мисаоном операцијом апстракције занемарујемо све могуће незајединичке особине скупова уочене класе (природу елемената, распоред елемената, удаљеност елемената, облик елемената, ...) и издвајамо једну једину особину заједничку за све скупове уочене класе, а то је да имају једнак број елемената. Генерализацијом, ту заједничку особину уопштавамо на све скупове класе K_A.

Сви скупови исте класе K_A имају дакле заједничку особину, једнак број елемената и тај број има своје име које се може записати као реч или цифра (Мандак., 2005).

У почетној настави математике се на овај начин свакако не може увести појам природног броја. Због тога излажемо формирање природних бројева од 1 до 10

Број је висока апстракција и производ дуге историје људске, културе. Приступајући проблематици изграђивања појма броја треба имати у виду да је број, и поред све своје апстрактности, настао као израз материјалних односа објективне реалности и високе способности човековог ума да те односе открива, уопштава, изрази и доказује.

Садржаје о природним бројевима у почетној настави математике изучавамо по систему концентричног распореда, па сходно томе рашчлањујемо их на следеће садржајне целине:

– Природни бројеви до десет;

– Природни бројеви до сто;

– Природни бројеви до хиљаду;

– Скуп природних бројева.

У свакој наредној целини проучавају се нова питања и уједно примењују, проширују и продубљују сазнања из претходних.

У почетној настави математике постоје различити приступи међу којима разликујемо два основна:

– Скуповни

– Бројевни

Оба приступа, без обзира што полазе од различитих садржаја и користећи се различитим активностима, тј. крећући се различитим путевима, они теже истом циљу:

– појмовима природних бројева,

– појмовима релација међу бројевима и

– појмовима операција с тим бројевима.

Изграђивање појмова природних бројева започиње у предпојмовној фази *формирањем неких основних скуповних појмова као* што су:

– придруживање елемената једног елементима другог скупа;

– упоређивање скупова и изграђивање скуповних релација: "подједнако" ("једнакобројност скупова"), "мање" и "више";

– класификација скупова, у односу на релацију једнакобројности;
– серијација скупова у односу на релације: "мање", "више".

Значајан корак у изграђивању појмова природног броја је класификација скупова у односу на релацију „једнакобројност скупова“. Како је ово релација еквиваленције, то се за сваку класу бира *представник* класе, а од ученика се захтева да наводе или састављају скупове јаднакобројне скупу који је узет за представника класе. Представници класа бирају се произвољно, али су то најчешће скупови који су блиски ученицима и који се, по могућству, могу приказивати графички. Такође, представници класа могу се формирати сукцесивним додавањем претходном представнику по један нови елемент.

На описани начин формирају се класе једнакобројних скупова које су основа за увођење појмова природних бројева до пет, односно до десет. Имајући у виду начин формирања ових класа, ученици ће без тешкоће извести следеће две особине:

1. Скупови једне исте класе имају подједнако елемената (једнакобројни су);

2. Не постоје скупови различитих класа који имају подједнако елемената.

Дакле, једнакобројност је једна од заједничких особина скупова једне исте класе и узима се за карактеристично својство при увођењу појма броја. Значи, *природни број је заједничка особина скупова који припадају једној истој класи.* Како сви скупови једне класе имају подједнако елемената, *а број особина која карактерише једнакобројне скупове,* то природан број даје одговор на питање: колико елемената има ма који скуп једне класе? Према томе, једнакобројним скуповима одговара исти број, док скуповима који нису једнакобројни, тј. не припадају истој класи одговарају различити бројеви. Стога, за сваку класу треба увести термин и ознаку (симбол) за број који јој одговара.

Скуповни приступ сазнајном процесу појмовима природног броја, исти *усклађује с општим дидактичко-методичким принципом изграђивања математичких појмова:* прво се изгради појам, потом

усвоји одговарајући *термин* (вербални симбол, назив) и на крају одреди *ознака* (графички симбол). Дакле, симбол не сме доћи пре појма, јер упротивном завлада формализам у настави математике.

Бројевни приступ се заснива на схватању да низ изговорених речи: - један, два, три, ..., десет, ... при бројању, одређује неке количинске односе предмета и радњи иза којих стоје појмови бројева. Дакле, број ће бити одговор на питење: колико нечега има?

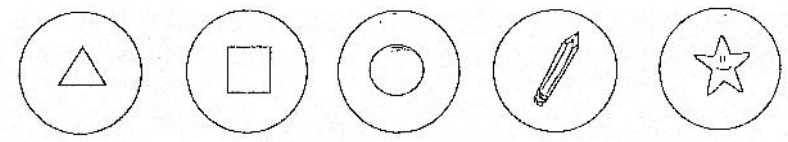
Појам броја један, овим приступом, изграђује се навођењем примера јединици: један наставник у одељењу, једна глава на телу, један нос на глави и сл.

Остали природни бројеви формирају се полазећи од броја један и искуства које је стечено у процесу бројања. Тако, број два формира се полазећи од броја један додавањем још једне јединке. Дакле, један и још један је два, два и још један је три, три и још један је четири итд. На тај начин добија се *природни низ бројева:*

1, 2, 3, 4, 10, ..., 20, 21,... у коме сваки број има потпуно одређено место.

Имајући у виду све оно што је речено о скуповном и бројевном приступу сазнајном процесу о појму природног броја и његовој еволуцији, природно је и са гледишта поимања оправдано да се појмови првих пет природних бројева изграде скуповно, а остали формирају бројевно.

Наставник црта на табли скуп коме је нпр. једини елемент троугао и њега узима за представника класе једнакобројних скупова. Од ученика тражи да набрајају скупове који су једнакобројни са нацртаним скупом. На пример, ученици набрајају следеће скупове: скуп коме је једини елемент квадрат, скуп коме је једини елемент оловка, скуп коме је једини елемент клупа итд. Наставник, затим црта неколико скупова водећи рачуна о могућности цртања тих скупова од стране ученика. Тако, на пример, црта следеће скупове:



Ученици ће наведени графички приказ описивали овако: нацртани скупови имају различите елементе (троугао, квадрат, круг, звезда, оловка), али сви они имају *подједнако* елемената (једнакобројни су).

Дакле, природни број је заједничко својство једнакобројних скупова које се односи на бројност елемената у скупу.

Природан број који придружујемо досад наведеним и нацртаним једнакобројним скуповима називамо *један* и симболички означавамо знаком, 1. Значи, број један придружујемо скупу коме је једини елемент троугао, скупу коме је једини елемент табла и сваком другом скупу који је једнакобројан са тим скуповима.

Након тога, ученици наводе скупове којима се придружује број један. То су, на пример: скуп наставника у разреду, скуп врата, скуп пећи у учионици итд.

Наставник, затим саопштава: за скупове којима придружујемо број један кажемо да садрже *један елемент*, односно да су *једночлани*. На пример, једночлани су: скуп троугла, скуп квадрата, скуп круга, скуп звездице, скуп оловке. Скуп јабука, скуп крушака и скуп јагода које смо графички приказали нису једночлани, јер им се не може придружити број један (нису једнакобројни са скуповима којима смо придружили број један).

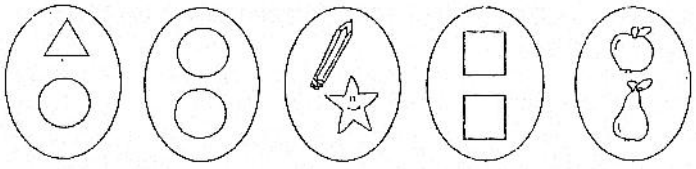
Након тога, ученици наводе скупове који садрже један елемент, а наставник инстистира на вербалном изражавању од стране ученика тражећи да изговарају реч један: скуп од *једног* наставника или у разреду је један наставник; скуп од *једне* табле или у учионици је једна табла и сл.

Након оваквог навођења примера и вежбања у изговарању броја један, од ученика се захтева да вежбају записивање броја један.

Слично се поступа и у случају изграђивања појма броја *два*. Дакле, на фланелограф наставник поставља апликацију која илуструје скуп који се састоји, на пример, од зеке и шаргарепе. Ученици затим набрајају скупове једнакобројне датим, а наставник поставља још неколико апликација скупова који имају подједнако елемената. Овде је потребно напоменути да је при овој демонстрацији потребно

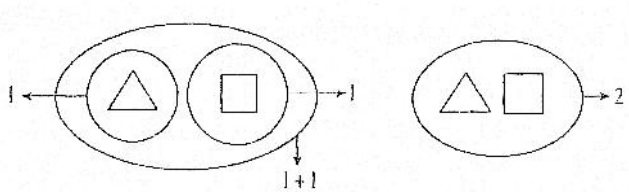
примењивати и скупове састављене од различитих објеката (крушке и јабуке; оловке и троугла; столице и клупе и си.). То је неопходно, јер ученици треба да открију *заједничко својство* скупова, а то је да *садрже подједнако елемената.*

Након демонстрације наставник на табли црта неколико таквих скупова, а за представника класе узима скуп који се добија додавањем претходном представнику један нови елемент, на пример, круг. На табли црта скупове (или поставља цртеж):



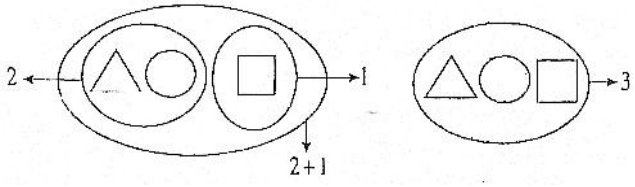
Ученици перцептивно закључују да дати скупови имају подједнако елемената, односно да су једнакобројни. Наставник наглашава ту једнакобројност и саопштава да се тим скуповима с обзиром да имају подједнако елемената придружује исти број, број *два,* а за сваки од тих скупова кажемо да има *два елемента,* односно да је *двочлан.* Ученици затим набрајају скупове којима придружују број два, а потом наставник саопштава начин записивања броја два, то јест, ознаку за број два, 2.

Након тога, ученицима се показује начин на који може настати двочлани скуп. То им се приказује *здруживањем* два једночлана скупа, прво на фланелографу, а потом и помоћу цртежа. Ево једног приказа цртежом (сл. а)).

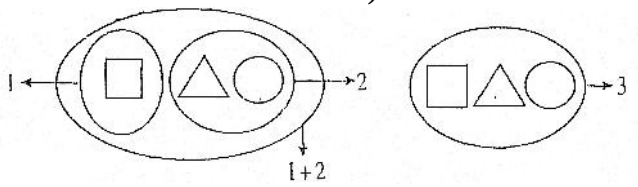


слика а) слика б)

Трочлани скуп може настати *здруживањем* двочланог и једночланог, односно једночланог и двочланог скупа. Даје се одговарајући графички приказ (сл. а) и б)):

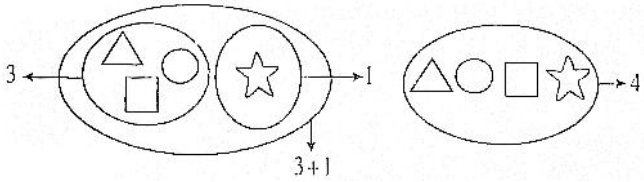


слика а)

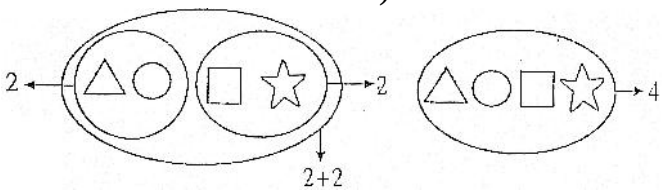


слика б)

Четверочлани скуп може настати *здруживањем* трочланог и једночланог или два двочлана скупа, а одговарајућа графичка илустрација би могла бити:

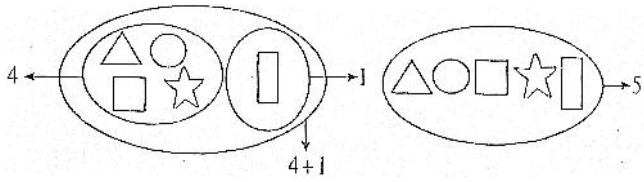


слика а)

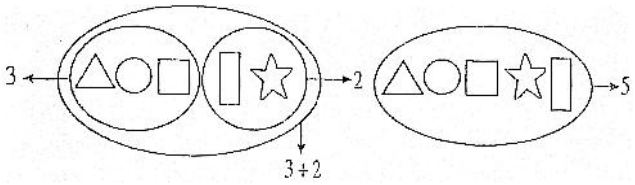


слика б)

Петочлани скуп може настати *здруживањем* четворочланог и једночланог или трочланог и двочланог скупа. Ученици цртају одговарајуће цртеже:



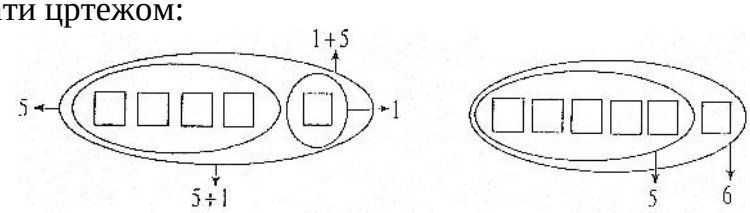
слика а)



слика б)

Бројеви од шест до девет формирају се поступком здруживања скупова и процесом добројавања датом броју број један.

Тако, број *шест* можемо формирати здруживањем скупа од пет елемената са скупом од једног елемента, односно добројавањем броју пет број један. Те поступке треба вербално објаснили и графички илустровати цртежом:



Наставник потом саопштава: скупу, који смо добили здруживањем петочланог и једночланог скупа, придружујемо број који називамо *шест* и означавамо, 6. Затим, ученици, наводе скупове којима се придружује број шест, а потом начине на које може настати шесточлани скуп. Неке начине треба графички илустровати да би помоћу њих ученици могли да уоче структуру броја 6, тј. од којих бројева се може добити број 6. Након тога приступа се бројању у скупу бројева до 6 са посебним освртом на добројавање које резултира бројем 6.

Значи, сада је битно да се уоче и објасне начини којима се може добити број 6 добројавањем броју број. Полази се од случаја којим је формиран број 6, а затим набрајају и остали случајеви. То се чини уз вербално изражавање и симболичко записивање.

Дакле, број 6 се може добити добројавањем:

- *броју пет број један (шест),* 5 + 1 = 6;
- *броју четири број два (пет, шест),* 4 + 2 = 6;
- *броју три број три (четири, пет, шест),* 3 + 3 = 6;
- *броју два број четири (три, четири, пет, шест),* 2 + 4 = 6;

– *броју један број пет (два, три, четири, пет, шест),* 1 + 5 = 6.

Ово значи да постепено напуштамо скуповни приступ и прелазимо на бројевни. То је и неопходно јер рад са скуповима конкретних објеката је само средство за постизање коначног циља, а то је оспособљавање ученика за рад с бројевима.

Аналогно формирамо и бројеве седам, осам, девет и десет.

Операције са природним бројевима у математици уведене су аксиоматским и скуповним приступом. Јасно је да ни један од наведених приступа не можемо непосредно имплементирати у почетној разредној настави математике, имајући у виду тежину схватања тих појмова, као и још увек недовољно развијене интелектуалне способности ученика тог узраста.

Ипак дајемо неколико дефиниција и теорема (Мандак., 2005) из теме *Сабирање природних бројева* које би требало да сваки наставник добро познаје.

2.2. Теорема: Ако је тврђење T(n) које у својој формулацији садржи природни број n тачно за n = 1 и ако из претпоставке даје тачно за n = k следи да је тачно и за n = k + 1, онда је то тврђење тачно за све природне бројеве.

Доказ. Нека је M скуп природних бројева за које је тврдјење T(n) тачно. Очигледно, M $\supseteq$ N. По услову теореме M има следећа својства:

$1 \in M$;

$(\forall k \in M)\, k \in M \Rightarrow k' = k + 1 \in M$.

Из аксиоме индукције следи M = N. Дакле, тврдјење T(n) је тачно за све природне бројеве и теорема је доказана.

Доказ методом математичке индукције састоји се из три корака:

Први корак: проверава се тачност за n = 1.

Други корак: претпоставља се тачност за n = k (индуктивна претпоставка).

Трећи корак: користећи индуктивну претпоставку доказује се тачност за n = k+1.

2.3. Дефиниција. Збир два природна броја a и b је број елемената уније A $\cup$ B два коначни дисјунктна скупа A и B, где је број елемената скупа A једнак a, а број елерпената скупа B једнак b:

a + b = k(A $\cup$ B), a = k(A),b = k(B), A $\cap$ B = $\varnothing$.

2.4. Теорема (егзистенција и јединственост збира). За било које a, b N збир a + b постоји и једнозначно је одређен природни број.

Доказ. Доказујемо егзистенцију. Нека су a и b произвољна два природна броја. Постоје коначни скупови A и B тако да је број елемената скупа A једнак a, а скупа B једнак b. Унија $A \cup B$ ова два скупа је такође коначан скуп и по дефиницији збира број елемената скупа $A \cup B$ једнак је збиру a + b. Остаје да се докаже једнозначност збира. Нека је $k(A) = k(A_1) = a$, $k(B) = k(B_1) = b$, $A \cap B = \varnothing$, $A_1 \cap B_1 = \varnothing$. Како скупови A и A_1 односно B и B_1 имају, респективно једнак број елемената то су они еквивалентни. Дакле, постоје бијекције φ: $A \to A_1$ и ψ: $B \to B_1$. Користећи ове две бијекције дефинишемо пресликавање τ: A B → A1 B_1 наследећи начин:

τ (x) = (φ(x) ako x A, τ (x) = ψ (x) ako x ∈ B.

Пресликавање τ је бијекција. Заиста, из $x \in A_1 \cup B_1$ следи $x \in A_1$ или $x \in B_1$. Ако $x \in A_1$ онда φ је сурјекција повлачи да постоји $a \in A$ тако да је φ(a) = τ(a) = x. Ако $x \in B_1$ онда ψ је сурјекција повлачи да постоји $b \in B$ тако да је ψ(b) = τ(b) = x. Отуда, τ је сурјекција. Инјективност пресликавања x следи из инјективности пресликавања φ и ψ и услова $A_l \cap B_l = \varnothing$. Дакле, скупови $A \cup B$ и $A_1 \cup B_1$ су еквивалентни па имају једнак број елемената, тј. $k(A \cup B) = k(A_1 \cup B_1) = a + b$.Тимеје теорема доказана.

2.4'. Дефиниција. Сабирање природних бројева је пресликавање τ: N× N→ N (то јест, правило или договор помоћу којег се сваком уређеном пару (a, b) ∈N × N природних бројева придружује јединствен природни број c = τ((a, b)) са следећим особинама:

Sl) $(\forall a \in N), ² (a,1) = a'$;

S2) $(\forall a,b \in N), ² (a,b) = (² (a,b))$;

Уместо τ(a, b) пише се a + b па имамо:

S1') $(\forall a \in N), a+1 = a'$;

S2') $(\forall a,b \in N), a+(b+1) = (a+b)+1$.

Тако, на пример, операцијом сабирање уређен пар (2, 3) ∈N×N пресликава се

у τ(2, 3) = 2 + 3 = 2 + 2' = (2 + 2)' = (2 + 1')' = (2 + 1)')' = ((2')')' = (3')' = 4'= 5.

2.4'. Теорема (егзистенција и јединственост операције сабирање). Операција сабирање постоји и јединствена је.

Доказ. За произвољан $a \in N$ нека је M скуп свих $b \in N$ за које a + b постоји и јединствен је природни број. За b = 1, a + b = a + 1 = a' постоји и јединствен је по S1), што значи да $1 \in M$. Претпоставимо да $k \in M$, т0 јест, да a + k постоји и да је јединствен. За b = k + 1 имамо a + b = a + (k + 1) = (a + k) + 1. По индуктивној претпоставци постоји и јединствен је a + k и по S2) постоји и јединствен је a + b = (a + k) + 1 што значи да $k + 1 \in M$. По A5 је M = N и теорема је доказана.

Због ове особине каже се да је операција сабирање потпуно дефинисана, односно, затворена у скупу N.

2.5.Теорема (асоцијативност сабирања). За свака три природна броја $a,b,c \in N$ важи:

a + (b + c) = (a + b) + c.

Доказ. Први доказ изводимо помоћу скупова, а други методом математичке индукције.

I начин: Нека $k(A)=a$, $k(B)=b$, $k(C)=c$, $A \cap B=B \cap C=A \cap C=\varnothing$. Користимо да је $A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cup C)=\varnothing$, $(A \cup B) \cap C=\varnothing$ (јер су скупови A, B, C по паровима дисјунктни) и имамо $a+(b+c)=k(A)+k(B \cap C)=k[A \cap (B \cap C)]=k[(A \cap B) \cap C)]=(a+b)+c$. Први доказ је завршен.

II начин: Други доказ се изводи индукцијом по c. Нека су $a,b \in N$ два произвољна природна броја и $M = \{c \in N | (a + b) + c = a + (b + c)\}$. За c = 1, по S1', је a + (b + c) = a + (b + 1) = (a + b) + 1 = (a +b) + c што значи да $1 \in M$. Претпоставимо да $k \in M$ тј. да је a + (b + k) = (a...+ b) + k. За c = k + 1 је a + (b + c) = a+[b + (k+l)] = a + [(b + k) + 1 = [a + (b + k)] + 1 = [(a + b) + k] + 1 = (a + b) + (k + 1) = (a + b) + c, што значи да $k + 1 \in M$. По A5 је M = N и теорема је доказана.

За доказ комутативности сабирања потребна је следећа лема:

2.6. Лема. За сваки природни број $a \in N$ важи: a + 1 = 1 + a.

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по a. За a=ljea+1 = 1 + 1 = 1 + a и лема је тачна. Претпоставимо тачност за a = k, тј. нека је k + 1 = 1 + k. За a = k + 1 имамо a + 1 = (k + 1) + 1 = (1 + k) + 1 = 1 + (k + 1) = 1 + a. Користили смо индуктивну претпоставку и асоцијативност сабирања. Лема је доказана.

2.7. Теорема (комутативност сабирања). За било која два природна броја a, $b \in N$ важи:

a + b = b + a.

Доказ. Као и у доказу теореме о асоцијативности сабирања и овде дајемо два доказа.

I начин: Прво доказујемо помоћу скупова. Нека су A i B два коначна скупа и нека је k(A) = a, k(B) = b, $A \cap B = \varnothing$. Користимо комутативност уније $A \cup B = B \cup A$ и имамо a + b = k($A \cup B$) = k($B \cup A$) = b + a. Тиме је завршен први доказ.

II начин: Други доказ се изводи индукцијом по b. Нека је a произвољан природан број и M = {c∈ N|a + b = b + a}. За b = 1по претходној леми је a + b = a + l = l + a = b + a што значи да l∈ M. Претпоставимо да k∈ M тј. нека важи a + k = k + a. За b = k +1 имамо a + b = a + (k + 1) = (a + k) + 1 = (k + a) + 1 = k + (a + 1) = k + (1+ a) = (k + 1) + a = b + a, што значи да k + 1∈ M. По A5 је M = N и теорема је доказана.

2.8. Теорема (закон скраћивања за сабирање или **регуларност сабирања).** За свака три природна броја a, b, c ∈ N важи:

(a + c = b + c) ⇒ (a = b) (десни закон скраћивања за сабирање);

(c + a = c + b) ⇒ (a = b) (леви закон скраћивања за сабирање).

Доказ. Доказујемо само леви закон јер се десни доказује слично.

Нека су c, b ∈ N два произвољна природна броја. Доказ изводимо индукцијом по a. Прво доказујемо тачност за a = 1 тј. да (c + 1 = c + b) ⇒b = 1. Претпоставка b≠l даје b = r + 1, r∈ N и имамо c + 1 = c + b = (c + 1) + r што није могуће. Дакле теорема је тачна за a = 1. Претпоставимо тачност за a = n, то јест, да (c + n = c + b) ⇒ n = b. За a = n + 1 је [c + (n + 1) = c + b]. Претпоставка b = 1 доводи до (c + 1) + n = c + 1 што није могуће. Дакле b ≠l и отуда b = r + 1, r∈ N. Сада је [c + (n + 1) = c + (r + 1)] tj. [(c + n) + 1 = (c + r) + 1]. Из треће Пеанове аксиоме и индуктивне претпоставке следи c + n = c + r односно n = r. Даље је n + l = r + 1, то јест, a = b. Теорема је доказана.

Из теореме 2.4 и 2.4’ следи да је операција сабирање затворена, то јест, потпуно дефинисана у скупу N свих природних бројева. Из теореме 2.5 и 2.7 следи даје сабирање асцијативна и комутативна операција. Овим разматрањем доказали смо следећу Теорему:

2.9. Теорема. Структура (N, +) скупа N природних бројева са операцијом сабирање је комутативан и асоцијативан групоид без неутрала, тј. комутативна полугрупа без неутрала.

За (N, +) се каже да је **адитивни групоид,** односно, **адитивна полугрупа** скупа природних бројева.

Појам операције множење уводимо као скраћено сабирање, и то на два начина: користећи Декартов птоизвод два коначна скупа и аксиоматски.

2.10. Дефиниција. Нека су a, b ∈ N произвољна два природна броја. Тада

$a \cdot b = \underbrace{a + a + a ... + a}_{b-nyma}$, ако је a >1; a · b = a, ako je a = 1.

Егзистенција и јединственост производа следи из теореме 2.2 о егзистенцији и јединствености збира.

2.10'. Дефиниција. Производ два природна броја a, b∈ N једнак је броју елемената Декартовог производа A x B два коначна скупа A и B где је број елемената скупа A једнак a, а скупа B једнак b:

$a \cdot b = k(A \times B)$, ако је k(A) = a, k(B) = b.

2.11. Теорема (јединственост производа). Производ a·b два природна броја a и b је једнозначно одређен природни број.

Доказ. Нека a,b∈ N, и нека су A, A_1, B, B_1 коначни скупови такви да је a = k(A) = k(A_1), b = k(B) = k(B_1). Треба доказати да је k(A×B) = k(A_1×B_1). Како скупови A и A_1 односно B и B_1 имају једнак број елемената, следи да су они еквивалентни па постоје бијекције φ: A→A_1, ψ: B→B_1. Помоћу ових бијекција дефинишемо пресликавање τ: A×B→A_1×B_1 на следећи начин: нека (x, y) ∈ A×B **,** x∈ A, y∈ B и нека је φ(x) = x_1, ψ(y) = y_1, x_1∈ A_1, y_1∈ B_1. Тада је τ(x, y)=(x_1, y_1). Докажимо да је τ бијекција. Нека је (x, y) ≠ (x', y') тада је x ≠ x' или y ≠ y'. Ако је x≠x' онда φ(x)≠φ(x') јер је φ инјекција, па је (φ(x), ψ(y)≠ (φ(x'), ψ(y'). Ако је y≠y' онда ψ(y)≠ψ(y') јер је ψ инјекција па је (φ(x), ψ(y))≠(φ(x), φ(y)). Дакле, τ је инјекција и остаје да се докаже да је τ сурјекција. Нека (x_1, y_1) ∈ A_1×B_1. Како су φ и ψ сурјекције следи да постоје x∈ A и y∈ B тако да је φ(x)=x_1, ψ(y) = y_1. Дакле, постоји (x,y) ∈ A×B тако да је τ((x, y))=(φ(x), ψ(x)) = (x_1, y_1) и τ је сурјекција. Пошто је τ: A ×B → A_1×B_1 бијекција ови скупови су еквивалентни, то јест, имају једнак број елемената: k(A×B) = k(A_1×B_1). Ово је и требало доказати.

2.11''. Дефиниција. Множење природних бројева је пресликавање p: N ×N (то јест, правило или пропис помоћу којег се сваком уређеном пару (x, y)∈ N × N природних бројева придружује једнозначно одређен природни број c = p(x, y) ∈ N са особинама:

P1) $(\forall a \in N), p(a,1) = a$

P2) $(\forall a,b\in N), p(a,b+1)=p(a,b)+a$.

уместо $p(a,b)$ пише се $a\cdot b$ тако да имамо:

P1') $(\forall a\in N), a\cdot 1=a$

P2') $(\forall a,b\in N), a\cdot(b+1)=a\cdot b+a$.

2.12. Теорема (егзистенција и јединственост операције множења).

Операција множења постоји и јединствена је.

Доказ. За произвољан $a\in N$ означимо са M скуп свих природних бројева $b\in N$ за које производ $a\cdot b$ постоји и јединствен је природни број. Из P1 следи да производ $a\cdot 1 = a$ постоји и јединстевн је, па $1\in M$. Претпоставимо да $k\in M$, то јест, да производ $a\cdot k$ постоји и једнозначно је одређен природни број. За $b = k + 1$ је $a\cdot b = a\cdot(k + 1) = a\cdot k + a$ (користили смо P2). По индуктивној претпоставци производ $a\cdot k$ постоји и једнозначно је одређен из теореме о егзистенцији и једнозначности збира следи да $a\cdot k + 1$ постоји и једнозначно је одређен. Дакле $k + 1\in M$ и теорема је доказана.

Због ове особине, као и за сабирање, за операцију множење каже се да је затворена, тј. потпуно дефинисана операција у скупу N природних бројева.

2.13. Теорема (**леви дистрибутивни закон множења према сабирању).** За свака три природна броја a, b, $c\in N$ важи:

$a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

Доказ. Дајемо три доказа користећи дефиниције 2.10, 2.10' 2.11''.

I. По дефницији 3.1 имамо $a\cdot b=\underbrace{(a+a+...+a)}_{b-пута}$, $a\cdot c=\underbrace{(a+a+...+a)}_{c-пута}$

$$a\cdot b+a\cdot c=\underbrace{(a+a+...+a)+(a+a+...+a)}_{(b+c)-пута}=\underbrace{(a+a+...+a)}_{(b+c)-пута}=a\cdot(b+c)$$

II. Користимо Дефиницију 2.10'. Нека су A, B, C три коначна скупа таква да је $k(A) = a$, $k(B) = b$, $k(C) = c$, $B \cap C = 0$. По дефиницији збира и производа имамо $a\cdot(b + c) = k[A \times (B \cup C)] = k[(A \times B) \cup (A \times C)] = k(A \times B) + k(A \times C) = a\cdot b + a\cdot c$.

III. На крају, користећи дефиницију 2.11.'' доказ изводимо индукцијом по c. Нека су $a,b \in N$ два произвољна природна броја. За $c=1$ је $a\cdot(b + c) = a\cdot(b + 1) = a\cdot b + a = a\cdot b + a\cdot 1 = a\cdot b + a\cdot c$. (користили смо P1 и P2). Дакле, теорема је тачна за $c = 1$.

Претпоставимо тачност за c = k, тј. нека је a · (b +k) = a · b + a · k. Доказујемо тачност за b= к + 1. Имамо

a · (b + c) = a · [b + (k + 1)] = a · [(b + k) + 1)] = a · (b + k) + (a · b + a · k) + a = a · b + (a · k + a) = a · b + a · (k + 1) = a · b + a · c. Теорема је доказана.

2.14. Теорема (асоцијатлвност множења). За свака три природна броја a, b, c ∈ N важи:

a (b c) = (a b) c.

I. Доказујемо теорему користећи дефиницију 2.11'. Нека су A, B, C три коначна скупа таква да је k(A) = a, k(B) = b, k(C) = c. Скупови A x (B x C) и (A x B) x C су еквивалентни тј. имају једнак број елемената. Нека читалац као вежбу докаже да је пресликавање τ: A x (B x C) → (A x B) x C дефинисано са τ[(x, (y, z)] = ((x, y), z) бијекција. Даље је a(bc) = k[A x (B x C)] = k[(AxB) x C] = (а б) c.

II. Користећи дефиницију 2.11'' доказ изводимо индукцијом по c. Нека су a, b ∈ N два произвољна природна броја. За c = 1 је a (b c) = a (b 1) = a b = (a b) 1 = (a b) c. Дакле, теорема је тачна за c = 1. Претпоставимо тачност за c = k, то јест, нека је a (b k) = (a b) k. За c = k + 1 имамо

a (b c) = a [б b (к + 1)] = a (b k + b) = a (b k) + a b = (a b) k + a b = (a b) (k + 1) = (a b) c (користили смо редом дефиницију сабирања и множења и леви дистрибутивни закон). Теорема је доказана.

2.15. **Теорема** (комутативност множења). За било која два природна број a a, b ∈ N важи: a b = b a.

I. Доказујемо теорему користећи Дефиницију 2.10'. Нека су A и B два коначна скупа таква да је k(A) = a, k(B) = b. Докажимо да су скупови A x B и B x A еквивалентни, тј. да имају једнак број елемената. Пресликавање τ: Ax B → B x A дефинисано са τ ((x, y)) = (y, x) је бијекција (нека ово читалац докаже сам као вежбу). Сада имамо a b = k (A x B) = k (B x A) = b a.

II. Користећи Дефиницију 2.11'' доказ изводимо индукцијом по b. Нека је a, ∈ N произвољан природан број. За b = 1 је a b = a l = a = l a = b a і теорема је тачна. Претпоставимо тачност за b = k, то јест, нека је a k = k a. За b = k + 1 имамо a b = a (k + l) = a k + a = k a + a = (k + l) a = ba. Теорема је доказана.

Из левог закона дистрибутивности множења према сабирању и комутативности множења следи десни закон дистрибутивности

множења према сабирању који гласи: За свака три природна броја a, b, c ∈ N важи (b + c) a = b a + c a.

Из дефиниције множења следи да је број 1 неутрал за операцију множење пошто важи l a = a l = a $(\forall a \in N)$.Операција множење је затворена у скупу N свих природних бројева и важе закони комутативности и асоцијацијативности. Овим разматрањем доказана је следећа теорема.

2.16. Теорема. Стрaктура (N, ·) скупа N свих природних бројева са операцијом множење је комутативан и асоцијативан групоид са јединицом, тј. комутативна полуграпа са јединицом.

За (N,·) се каже да је мултипликативни групоид, односно мултипликативна полугрупа скупа природних бројева.

Из теме *Уређење скупа природних бројева* наставници би требало да знају неколико следећих дефиниција и теорема (Мандак,, 2005).

2.17. Дефиниција. Нека су a, b∈ N два произвољна природна броја. Ако постоји природан број c тако да је b = a + c, онда се каже да је **а мање** од b и пише a < b или b веће од a и пише b > a.

2.18. Теорема. Релација „ < “, („бити- мањи“) у скупу N има следећа својства:

a <’ a $(\forall a \in N)$ (антирефлексивност) (<’ - није мање);

(a < b i b < c) ⇒ a < c (транзитивност).

Доказ. Прво тврђење је очигледно па доказујемо ii). Из (a < b) ⇒ $(\exists k \in N)$ тако да b = a + k. Из (b < c) ⇒ $(\exists r \in N)$ тако да је c = b + r. Отуда, c = b + r=(a + k) + r = a + (k + r) што по дефиницији релације „ < “ значи a < c.

Помоћу релације „<“ (бити мањи) дефинише се релација „ ≤ “ (бити мањи или једнак) на следећи начин:

a ≤ b ⇔ a < b или a = b.

2.19. Теорема. Релација „ ≤ “ (бити мањи или једнак) има следећа својства:

a ≤ a $(\forall a \in N)$ (рефлексивност);

(a ≤ b i b ≤ a) ⇒ a = b (антисиметрлчност);

(a ≤ b i b ≤ c) ⇒ a ≤ c (транзитивност).

Дакле из ове теореме следи да је релација „ ≤ “ (бити мањи или једнак) релација поретка у скупу N природних бријева.

2.20. Теорема. За било која два природна броја a, b∈ N важи један и само један од следећа три услова: a < b, a = b, b < a.

Због ове особине каже се да су било која два природна броја a, b∈ N упоредива помоћу релације „ ≤ “ (бити мањи или једнак). Скуп N са релацијом „ ≤ “ је **тотално уређен** (Мандак., 2005, стр. 111-112).

Из теме *Одузимање природних бројева* пожељно је да се знају следеће дефиниције и теореме.

2.21. Дефиниција. Разлика a - b два природна броја a, b∈ N таква да је a > b је број c такав да је c + b = a

a - b = c ⇔ c + b = a.

2.22’. Дефиниција. Разлика a - b два природна броја a, b∈ N таква да је a > b је број елемената скупа A \ B, где је k(A) = a, k(B) = b i B⊇A.

2.23. Теорема (потребан и довољан услов егзистенције разлике). Разлика a - b два природна броја a, b∈ N је природни број ако и само ако је a > b.

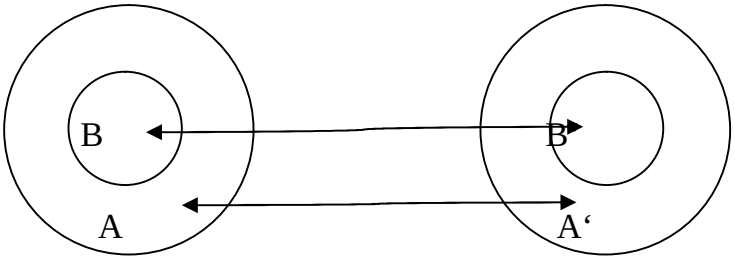
Доказ. Ако је a > b онда из 4.1 следи да постоји c ∈ N такав да је a = b + c ⇔ c= a - b j e природни број. Обратно, нека је разлика c = a - b природан број. По дефиницији разлике је a=b+c и из 2.17 следи a > b.

Због ове особине каже се да одузимање није затворена тј. није потпуно дефинисана у скупу N свих природних бројева. Често се каже да је одузимање делимично операција у скупу N.

2.24. Теорема (једнозначност разлике). Нека су a и b два природна броја таква да је a>b. Тада је разила a-b једнозначно одређен природни број.

Доказ. Нека су коначни скупови A, B, и A‘, B‘ такви да је k(A) = K (A‘) = a, k(B) = k (B‘) = b, B ⊆ A и B‘ ⊆ A‘. Из услова теореме следи да је A \ B≠ ∅ и A‘ \ B‘≠ ∅ и да постоји бијекција т: B→B‘, то јест, B ~ B‘. Нека је A \ B ={x_1,x_2, …, x_n}, дефинишемо пресликавање φ: A \ B → A‘ \ B‘на следећи начин φ(x_1)=y_1, где је y_1 произвољан елемент скупа A‘ \ B‘. Такав елемент постоји јер је A‘ \ B‘≠ ∅. Даље, φ(x_2)=y_2 где је y_2 произвољни елемент скупа A‘ \ B‘ различит од y_1. Ако елемент y_2 не постоји онда B‘ ∪{y_1} = A‘. Из услова A ~ A‘ и B ∪{x_1} ~ B‘ ∪{y_1} следи A ~ B ∪{x_1} што није могуће јер коначан скуп не може бити еквивалентан са својим правим подскупом. Дакле, ако постоји y_1 = φ (x_1) онда постоји y_2 ≠ y_1 и φ (x_2) = y_2. Исто се тако доказује да ако постоји y_{k-1} = φ (x_{k-1}) онда постоји y_k ≠ y_{k-1} и φ (x_k) = y_k, k ≤ n. Овај поступак настављамо све док се не исцрпе сви елементи скупа A \ B. По овој конструкцији φ је инјекција. Докажимо да је сурјекција. Када

се исцрпе сви елементи скупа A \ B, онда се исцрпе и сви елементи скупа A‘ \ B‘; у супротном, ако би остао бар један елемент y ∈ A‘ \ B‘онда је A ~ A‘ \{y} и како је A ~ A‘ следи A‘ ~ A‘ \ {y} што није могуће због коначности скупа A‘ (коначан скуп не може бити еквивалентан свом правом подскупу). Дакле, φ је бијекција, то јест, A \ B ~ A‘ \ B‘ и теорема је доказана.



Слика 1.

Операција одузимање у скупу N природних бројева није комутативна тј. a - b ≠ b - a. Заиста, ако разлика a - b постоји онда је a > b. и разлика b - a чак и не постоји. Операција одузимање у скупу N природних бројева није асоцијативна, то јест, (a - b) - c ≠ a - (b - c)

Из теме *Дељење природних бројева* пожељно је да се знају следеће дефиниције и теореме (Мандак, 2005).

2.26. Дефиниција. Количник a : b два природна броја a, b ∈ N је број c ∈ N (ако постоји) такав да је a = b · c

a : b = c ⇔ a = b · c

Нека је a ∈ N; Посматрамо коначан скуп A, k(A) = a. Ако се скуп A може представити као унија b коначних скупова A_1, A_2, ... , A_b који имају једнак број елемената c и који су по паровима дисјунктни, онда се број елемената сваког од ових скупова зове количник бројева a и b. У овом случају се каже да је a дељив са b или да b дели a и пише b|a. Операција којом смо одредили количник зове се дељење. Пише се a : b = c.

Ако се уместо скупа A посматра други скуп A‘ који је еквивалентан са A, онда се и скуп A‘ може разбити на b скупова, тј. важи следећа теорема.

2.27. Теорема (добра дефинисаност дељења). Ако је $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b$ $A_i \cap A_j = \emptyset$, i ≠ j, i, j = 1, 2, …, b, k (A_i) = c, онда за било који скуп A ~ A‘ постоје скупови A_1‘, A_2‘, ..., A_b‘, тако да је A‘= A_1‘ ∪ A_2‘ ∪... ∪A_b‘, $A_i \cap A_j = \emptyset$, i ≠ j, i, j = 1, 2, …, b, k(A_i‘) = c.

Доказ. Из A~A‘ следи да постоји бијекција φ: $A \to A'$ скупа A на скуп A‘. Скупови A_i' =φ(A_i) испуњавају услове теореме. Пошто је φ бијекција следи k(A_i) = k(A‘) = c. Докажимо да су скупови A_i', i = 1, 2, …, b, по паровима дисјунктни. Ако $y \in A_i' \cap A_j'$ онда $y \in A_i'$ и $y \in A_j'$ па постоји $x \in A_i \cap A_j$ такав да је y = φ(x) што није могуће. Очигледно је A‘ = A1‘ ∪A2‘ ∪ … Ab‘и теорема је доказана.

Очигледно је да за било која два природна броја a, $b \in N$ не мора да постоји разбијање скупа A које задовољава услове дефиниције количника. На пример, скуп A који има 7 елемената не може се представити као унија 3 скупа који су по паровима дисјуктни и имају једнак број елемената. Због овога, (исто као за операцију одузимање) кажемо да је дељење делимично дефинисана операција у скупу N свих природних бројева. Каже се такође да дељење није затворена, тј. потпуно дефинисана операција у скупу N.

2.28. Теорема. За операцију дељење важи следећа особина: Ако су природни бројеви a и b дељиви природним бројем c, онда је и збир дељив са c и важи

(a + b) : c = a : c + b : c (леви дистрибутивни закон сабирања према дељењу).

Операција дељење у скупу N природних бројева није комутативна то јест, a : b ≠ b : a.

Операција дељење у скупу N природних бројева није асоцијативна то јест, (a : b) : c≠ a : (b: c).

Како је по P1 a · 1 = a из Дефиниције 2.26. следи да је a : 1 = a $(\forall a \in N)$.

Ако a|b и b|a, онда је a = b. Заиста, из a|b и b|a $\Rightarrow$ a = a· (c · d) $\Rightarrow$c · d = 1. Не може бити c > 1 јер је тада c · d > 1. Такође, не може бити d > 1. Следи c = d = 1 $\Rightarrow$ a = b.

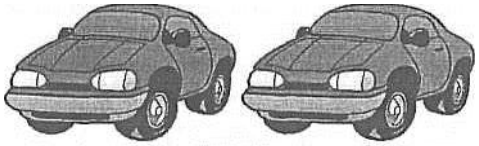
За произвољне a, $b \in$ N или постоји c$\in$ N такав да је a = b · c или постоје c и r$\in$ N, r < b, такви да је a = b . c + r. Број c је **делимични количник**, a r се зове остатак при дељењу a са b.

Појмове операција са природним бројевима у почетној настави математике ученици усвајају комбинацијом скуповног и аритметишког приступа при чему властита активност ученика има одлучујућу улогу, а улога наставника је да подстиче на активност и усмерава процес учења.

Већ смо дали методички приступ формирања бројева од 1 до 10, а овде ћемо описати формирање операција сабирања, одузимања, множења и дељења са бројевима у почетној настави математике. Појмове сабирања и одузимања формирамо на тај начин што се сабирање представља као *добројавање* а одузимање као *одбројавање.* Сабирање ученици треба да схвате као рачунску операцију којом се од два дата броја добија нови број.

Упознавање са сабирањем може да почне тако што поставимо пред децу слику једног аутомомила, а затим слику када је дошао још један аутомобил. Уз прву слику записујемо број 1, а уз другу 1 + 1, читајући 1 више 1 или 1 плус 1. Том приликом се инсистира на томе да деца уоче да је знак за сабирање " + ".

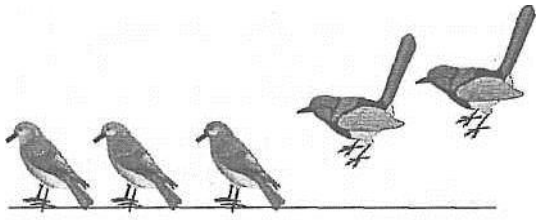
1



1 + 1

Сабирање можемо илустровати погодно и посматрајући слику неколико птица на жици, а затим посматрајући слику где се тим птицама придружило још неколико птица:

3



3 + 2

На крају констатујемо да је 3 **први сабирак**, 2 **други сабирак**, а 3+2 **збир.** Дакле појам сабирања се формира додавањем датом броју одговарајући број јединица бројећи по један све док се не дође до броја који садржи толико јединица колико их имају оба сабирка заједно.

Пишемо: 3 + 2 = 5

3 је **први сабирак**, 2 је **други сабирак**, 5 је **збир**.

Дакле, записујемо: ако су *a* и *b* било која два природна броја онда је

***a* + *b* = c где је *a* први сабирак, *b* други сабирак а *c* њихов збир, такође природни број а „+“ је знак за сабирање**.

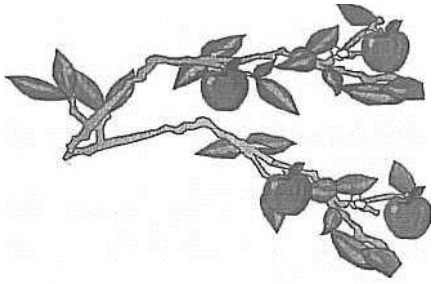
Решавање проблемских ситуација. Наставник саопштава проблемску ситуацију: Никола је имао 3 јабуке па је добио још 2 јабуке. Шта можеш да рачунаш? Ученици рачунају: 3 + 2 = 5. Никола сада има 5 јабука.

За формирање појма **одузимање** можемо користити сличне слике аутомобила.

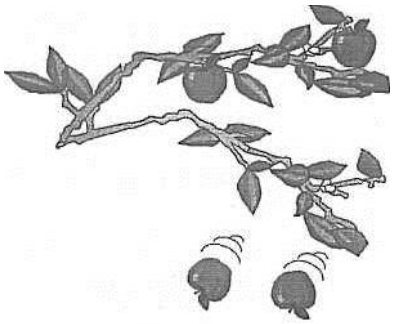
2

2 – 1

Испод слике са два аутомобила пишемо број 2, а испод слике са једним аутомобилом пишемо 2 – 1, читајући два мање један, или два минус један. Том приликом се инсистира на томе да деца уоче да је знак за одузимање “–”. Затим се одузимање илуструје сликама гране са неколико јабука и гране са које је отпало неколико јабука.



4



4 – 2

На крају констатујемо да је 4 **умањеник**, 2 **умањилац**, а 4 – 2 **разлика**. Дакле, **појам одузимања** се формира бројањем уназад одбројавајући толико јединица, бројећи по један, колико их садржи број који се одузима. Наставник наводи ученике на закључак да се може одузети мањи број од већег броја.

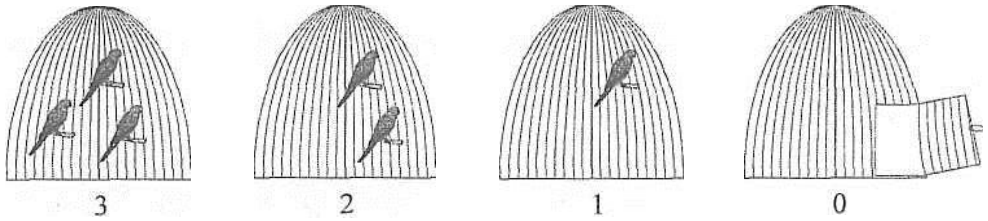
Дакле, ако су *a, b и c* природни бројеви онда је *c – b = a, c* **умањеник**, *b* **умањилац**, *a* **разлика**.

Решавање проблемских ситуација. Младен је имао четири јабуке, па је појео две. Шта можеш да рачунаш? Ученици рачунају: 4 – 2 = 2. Младен сада има две јабуке.

Број 0

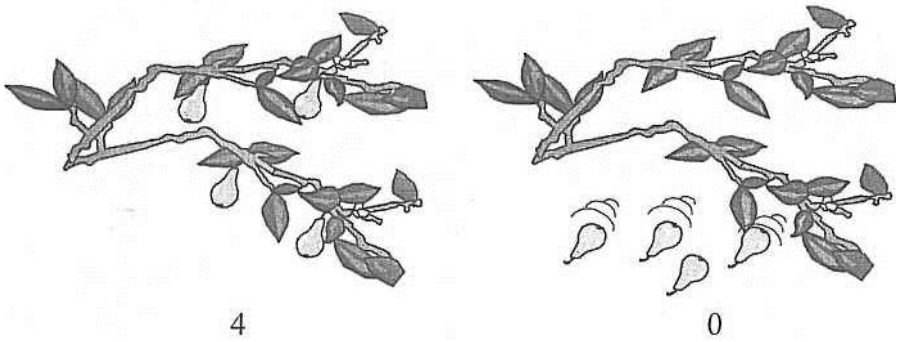
Нулу ученици тешко усвајају као број. Иначе, нула је прошла мукотрпан пут док су је и многи математичари признали за број. Због тога треба врло систематично прићи формирању овога појма.

Учитељ може да припреми слике кавеза са три, две, једном и ниједном птицом, а ове слике материјализују појмове бројева 3, 2,1, а празан кавез број нулу.



Дакле, ученици треба да уоче да празном скупу придружујемо број нулу.

Сада можемо нулу увести и као разлику два једнака броја. Користимо слике, где број испод слике представља број крушака на грани.



(Пинтер 2002.)

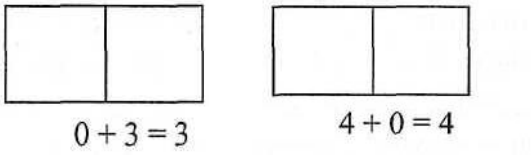
Коментаришемо слике.

На грани су биле 4 крушке. Дунуо је ветар, отпале су све четири крушке, па је на грани остало нула крушака, а то записујемо 4 - 4 = 0.

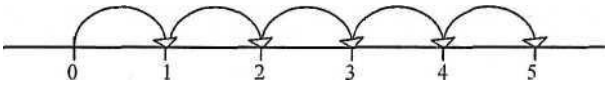
Нулу ***као*** *сабирак* можемо увести помоћу илустрација:

Проблемска ситуација

Нацртај елементе скупа да би то одговарало једнакости



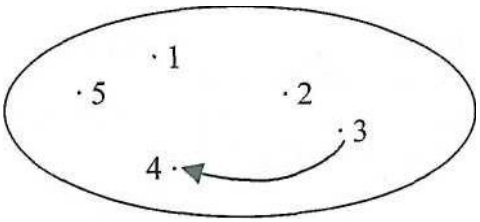
За извођење појмова ***претходник*** и ***следбеник*** користимо бројевну праву:



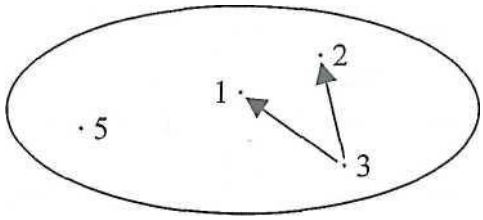
Уочавамо да су, нпр., бројеви 2 и 3 испред броја 4, а 4 и 5 су иза броја 3. Кажемо, 2 и 3 су претходници броју 4 у уређеном низу бројева, а 3 је први (непосредни) претходник броја 4. Бројеви 4 и 5 су след-беници броја 3, а 4 је први (непосредни) следбеник броја 3. Дакле, претходници су бројеви мањи од датог, а први претходник је број за 1 мањи од датог броја ($2 < 4$, $3 < 4$). Следбеници су бројеви већн од датог броја, а први следбеник је за 1 већи од датог броја ($4 > 3$, $5 > 3$).

Проблемска ситуација

а) Повежи стрелицама бројеве тако да је број на почетку стрелице први претходник броја на крају стрелице:



б) Повежи стрелицама бројеве тако да је број на почетку стрелице следбеник броја на крају стрелице:



Сабирање и одузимање у скупу N

Понављамо појам сабирања и одузимања, елементе ових операција и везу између њих. Записујемо:

Ако је	c – b = a,
онда је	a + b = c.

Операције сабирања и одузимања су узајамно инверзне (супротне). Тачност извршене једне операције проверавамо другом.

Изводљивост сабирања, односно одузимања у скупу N

Посматрајмо скуп бројева прве десетице:

$$A=\{1,2,3,...,9,10\}$$

Ако било ком пару бројева из овог скупа придружимо њихов збир, уочавамо да код неких парова збир не припада скупу A. На пример:

$$(2,3)); \xrightarrow{+} 5,\ 5 \notin A;$$
$$(4,7)); \xrightarrow{+} 11,\ 11 \notin A$$
$$(8,5)); \xrightarrow{+} 13,\ 13 \notin A$$

Дакле, $4 \in A$ и $7 \in A$, али $4 + 7 = 11 \notin A$. Исто важи и за пар (8, 5): $8 \notin A$ и $5 \notin A$, али $8 + 5 = 13 \notin A$. Кажемо да сабирање није изводљиво у скупу A, односно у скупу бројева прве десетице.

Посматрајмо операцију сабирања у скупу природних бројева. Ако су a и b било који природни бројеви, онда уређеном пару (a, b) одговара њихов збир a + b, који је такође природан број. То значи да је сабирање неограничено изводљиво у скупу N. На основу више примера:

$$15 + 49 \in N;$$
$$397 + 1423 \in N;$$
$$549071 + 27483 \in N.$$

користећи непотпуну индукцију, закључујемо:

Операција сабирања је изводљива (неограничено)

у скупу N, јер за било која два броја a,b ∈ N и a+b ∈ N.

Посматрајмо операцију одузимања у N. Узимамо произвољно уређене двојке и проверавамо:

(9,7) $\Rightarrow$ 2, 9 ∈ N, 7 ∈ N, 9-7=2 ∈ N;

(24,24) $\Rightarrow$ 0, 24 ∈ N, 24-24 =0 ∉ N;

(76, 321) $\Rightarrow$ 76 - 321, 76 ∈ N, 321 ∈ N, 76- 21 ∈ N.

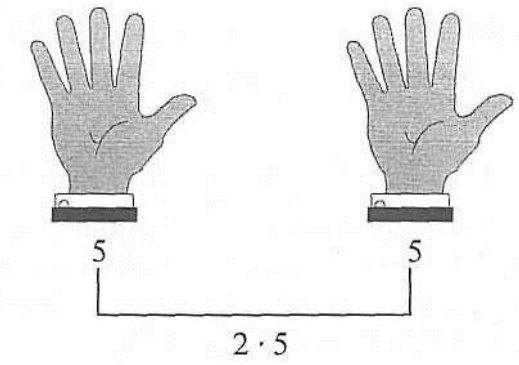
На претходним примерима за a, b ∈ N уочили смо три случаја:

1. кад је прва копонента већа од друге (a > b), тада разлика (a - b) ∈ N;
2. када је a = b, тада је a - b = 0, 0 ∉ N;
3. када је a < b, тада (a - b) ∉ N.

Операција одузимања није изводљива у скупу N,

јер за a, b e N, постоји разлика (a-b) која није у N.

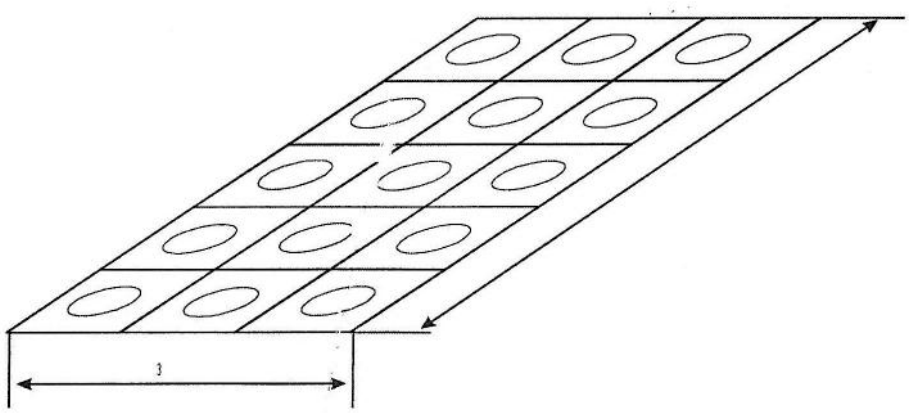
Појам **множење** формира се преко узастопног вишеструког сабирања истог броја. У ту сврху могу за почетак да нам послуже прсти на раукама. На једној руци има 5 прстију, на другој још 5. Укупно је два пута по пет и то записујемо: 5 + 5, или 2 · 5. Знак " · " чита се **пута** и означава рачунску операцију множење. Затим можемо ученицима да покажемо апликације.



(Пинтер 2002.)

Или:

„Ученици припреме по 15 куглица а наставник захтева да ученици распореде све куглице у редове тако да сваки ред има по три куглице (Сл.1.). Ученици сами откривају да постоји пет редова са по три куглице у сваком од њих. Исто тако није тешко да ученици сами открију да у истој ситуацији постоје три ступца са по пет куглица. Ово записујемо овако:



Слика 1.

3+3+3+3+3=5+5+5=15, или краће 3·5=5·3=15.

Наставник објашњава и упоредо записује на табли следеће:

5 · 3 = 15

први чинилац, други чинилац — чиниоци; производ бројева 5 и 3 — множење,

(Мандак, 2005.стр. 104,105)

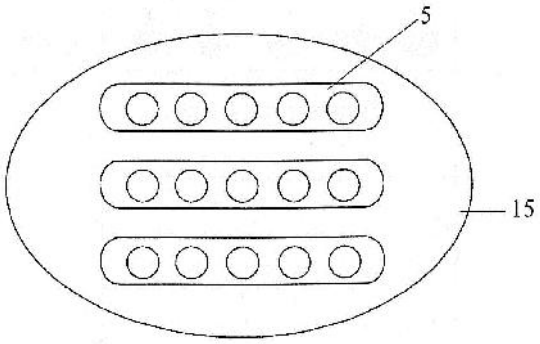
Дакле, **ако су *a* и *b* два природна броја онда је збир од *a* једнаких сабирака од којих је сваки једнак *b* називамо производом бројева *a* и *b* и означавамо са** $a \cdot b$, а „· “ је знак за множење.

Решавање проблемских ситуација. У једном блатњавом дворишту су 2 коња. Ако се они помере шта иза њих остаје?

Ученици рачунају: $2 \cdot 4 = 8$. Иза коња остају 8 трагова њихових ногу.

Дељење се као рачунска операција у почетној настави математике може да обрађује као растављање датог скупа на једнакобројне подскупове, при чему је број подскупова унапред познат, или дељењем неке целине (предмета) на одређени број једнаких делова.

Пред ученике постављамо 15 куглица и постављамо задатак да тај скуп куглица поделе 3 друга тако да сваки добије подједнак број куглица. То ученици са конкретним предеметима врло лако реше, а онда на пано стављамо слику: и пишемо $15 : 3 = 5$.



Знак " : " читамо **подељено** а рачунска операција која се обележава тим знаком назива се **дељење.** Број 15 се зове **дељеник**, број 3 се зове **делилац**, а $15 : 3$ се назива **количник,** то јест, број 5 се такође назива количник.

Дакле, **поделити број *a* бројем *b* значи израчунати такав број *x* који при множењу бројем *b* даје број *a*.** Пишемо:

$a : b = x$, то јест, $x \cdot b = a$

Решавање проблемских ситуација. Никола и Младен су добили укупно 14 бомбона и желе да их поделе тако да и један и други имају исти број бомбона. Шта можеш да рачунаш?

$14 : 2 = 7$

Сваки од њих ће имати по 7 бомбона.

Тачност дељења можемо проверавати помоћу рачунске операције множење на следећи начин: $2 \cdot 7 = 14$.

Множење и дељење у N

Збир од a једнаких сабирака, од којих је сваки једнак b, називамо производом бројева a и b и означавамо a · b.

Поделити број a бројем b значи израчунати такав број x који при множењу бројем b даје број a. Пишемо:

$$a : b = x, \text{ то јест, } x \cdot b = a$$

Улога 0 и 1 у операцијама множења и дељења:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 =; 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

$$a : 1 = a; \quad a : a = 1; \quad 0 : a = 0.$$

Наглашавамо да се нулом не дели. Ако бисмо делили, на пример, 12 са 0, то би требало наћи такав број x који помножен нулом даје 12, а такав број не постоји јер $0 \cdot x$ је 0, а не 12.

На основу више урађених примера множења природног броја неком декадном јединицом, непотпуном индукцијом, закључујемо:

Природни број се множи неком декадном јединицом тако што му се с десне стране допише онолико нула колико их има та декадна јединица.

Аналогно се закључује за дељење декадном јединицом:

Број који се завршава нулама, дели се неком декадном јединицом тако што му се с десна изостави онолико нула колико нула има та декадна јединица, под условом да дељеник нема мање нула од делиоца.

III. ПРИРОДНИ БРОЈЕВИ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

1. Бројеви у наставним програмима основне школе у Србији - историјски преглед

1. Преглед развоја школства у Србији, па и неког његовог сегмента, уобичајено полази од Првог српског устанка и времена стварања српске државе. Података, пак, за квалитетан историјски приступ проблему наставе математике скоро да и нема. Ваља свакако забележити да је 1805. године направљен нацрт за *Правителствујушчи совјет* у коме је међу шест попечитељстава било и *попечитељство просвештенија*, нешто што би се савременом терминологијом могло назвати министарством просвете. До реализације овог нацрта дошло је 1811. године када је за првог попечитеља изабран Доситеј Обрадовић.

У том периоду отвара се велики број основних школа. Све оне по правилу нису имале своју зграду, али нису имале ни план и програм, већ је сваки учитељ радио према свом знању и умењу, ограничавајући се на елементарну писменост: читање и писање, (ређе) *рачунање* и црквено певање (Ћунковић, 1970-71) Управо зато се не може знати који садржај математике је обрађиван.

Тако је било све до 1830. године када је донесен *Хатишериф* којим је Србија добила аутономију и када је легализован њен рад просвети. То је омогућило да се 1833. године донесе први закон о школама под називом *Устав народни школа у књажевству Србије* (Ћунковић, 1970-71). Нажалост овај Закон је регулисао проблем наставног плана и програма на најједноставнији начин - набрајањем у назнакама шта ће се учити у *малим, редовним и великој* школи. Зато се у њему не може експлицитно видети садржај математике.

Школски систем и мрежа школа први пут је законски регулисана 22. августа 1836. када је донесен *План за школе које имају постојати* (Ћунковић, 1970-71) по коме у Србији треба да постоје, између осталих, 22 нормалне школе (основне). Поред њих могу постојати и млађе нормалне школе у осталим местима, које издржавају

општине. Две године касније, 11. августа 1838, донесен је први наставни план и програм за основне школе под називом: *Назначење учебни предмета који се у школама нормалним за прво и друго течење школско предавати имају*. Том приликом је прописано и прво упутство за учитеље - *Наставленије учитељима правителствени и обшествени школа у Књажевству Србији* (Ћунковић, 1970-71, стр. 25).

Наставни план и наставни програми нису били одвојени. Био је то један документ. Ипак, из њега се може видети да је за *другу годину млађе нормалне класе* предвиђено:

„- написавање веши чисала и њиово точно произношенијe с прва два вида численија, и то првог школског течења".

А у *другој години старије нормалне класе* обрађивали би се и разломци:

„ - из численице вообште о разбијенијама и онда сва четири вида разбијенија и правило тројно просто" (Ћунковић, 1970-71, стр. 25).

Упоређено са садашњом основном школом, ученици у тадашњој Србији први пут су се сусретали са *разломцима* у четвртој години школовања, односно, у четвртом разреду.

Значајније промене у школству Србије, посебно у основној школи, урађене су законом из 1844. године (*Устројење јавног училишног наставленија, од 23. септембра 1844).* Полазећи од њега направљен је наставни план и програм за основну школу (*Наставленије за учитеље основих училишта, од 24. октобра 1844)* који је на јединствен начин прописао шта ће се радити у четири разреда основне школе. Тако, математика је садржајно заступљена:

(1) у другом полугодишту првог разреда у коме се учило „Познавање и писање бројева (чисала) с лаким наизустним рачунима";

(2) у другом полугодишту другог разреда у коме се учило „Из рачунице: покрај наизустног рачуна, о нареченим бројевима";

(3) - у првом полугодишту трећег разреда у коме се учило „Из рачунице: поред наизустног рачуна, повториће се четри вида с ненареченим и нареченим бројевима“;

- у другом полугодишту трећег разреда у коме се учило „Из рачунице о разломцима, најпре наизустно, потом с бројевима“;

(4) - у првом полугодишту четвртог разреда у коме се учило „Из рачунице: правило тројно“;

- у другом полугодишту четвртог разреда у коме се учило „Из рачунице: правило тројно (продуженије)“ (Ћунковић, 1970-71, стр. 33).

За разлику од претходног плана и програма, по коме се разломци обрадјују у четвртом разреду основне школе, разломци се по новом наставном плану и програму такође уче само у једном разреду основне школе - али у трећем.

На измене наставног плана и програма се није дуго чекало. Већ 1850. године донесен је нов наставни план и програм под називом *Расположење предмета који се у основним училиштима предају по разредима и полугодијама*. Нажалост, из необјашњених разлога, из програма су изостављени садржаји о разломцима (Ћунковић, 1970-71, стр. 42-43).

Разломци су враћени у наставни план и програм 1871. године када је донесен нов наставни план и програм под називом *Распоред предмета за мушке и женске основне школе и упутство како ће се предавати*. По њему у летњем течају четвртог разреда основне школе учи се:

„Рачун: оно што и првог течаја и рачунање с простим разломцима у сва четири вида, усмено и писмено“ (Ћунковић, 1970-71, стр. 90).

Деценију касније, 31. децембра 1882. године, донесен је *Закон о основним школама* који је условио да се убзо донесе и *Наставни план и програм за ниже, више и продужене основне школе* (26. марта 1883). Први пут су наставни план и наставни програм одвојени и надаље ће се тако поступати. Значајно је запазити да је *Рачун* као наставни

предмет био заступљен у свим разредима, али са неједнаким бројем часова - од 2 до 4.

2. Историјски преглед наставе о бројевима свакако треба да обухвати и период развоја школства који је код нас назван *Велика школска реформа.* Десила се она средином 20. века, или прецизније, на крају његове шесте деценије. Наиме, 1958. године донесен је *Општи закон о школству* ("Југославија - преглед развоја просвете и школства", 1989, стр. 356-358) којим је направљена законска основа за реформу школства. школска реформа, пак, донела је основну школу која је:

– јединствена,
– траје 8 година,
– обавезна и бесплатна,
– основа за свако даље школовање и избор професије.

Током 1959. године у Србији, као и у осталим републикама, донесен је настаставни план и програм за основну школу (8. јула 1959). Његова (блага) редакција извршена је у 1962. години (усвојена је 27. јуна 1962).

По том *Наставном плану и програму* (Наставни план и програм за основну школу у С Р Србији, 1963) математика као наставни предмет учи се у свих осам разреда основне школе, с тим што је у млађим разредима (прва 4 разреда) заступљена са по 6 часова недељно. У ствари, час математике постојао је сваког радног дана (радна недеља трајала 6 дана).

Такође, по том *Наставном плану и програму*, у одељку *Математика Разломци* (Наставни план и програм за основну школу у С Р Србији, 1963) се обрађују у I, II и IV разреду основне школе. Садржај о *Разломцима* конципиран је по спиралном начину програмирања па су узети следећи његови елемнти:

– у I разреду = „Појам половине и четвртине.“
– у II разреду = „Разломци. - У вези са мерама упознају се разломци; половина, четвртина, десетина, стоти део - без записивања.“

– у IV разреду = „Појам разломка. - Основни разломци: 1/2, 1/4, 1/8, 1/3, 1/6, 1/9, 1/5, 1/10, 1/14, 1/60, 1/100, 1/1000.“

У *Објашњењима*, која су дата иза наставног програма, учитељи се упозоравају да у II разреду:

„У вези са мерама и непосредно помоћу њих ученици упознају разломке: половина, четвртина, десетина, стоти део и израчунавају ове делове од дате величине без записивања. Ученици треба да схвате разломак као део величине. Стога је потребно разломке - као делове - што очигледније представљати, деобом дате величине (модела) на једнаке делове“ (Наставни план и програм за основну школу у С Р Србији, 1963).

А у IVразреду:

„Из упоређивања множине и величине ученик треба да схвати основну карактеристику величине - њену неограничену дељивост, за разлику од множине која се може раставити само до својих јединки. Зато се из множине изводе цели бројеви, а дељењем величине добијају разломци. Пошто стекну појам једнаких делова јединице, ученике треба упознати са разломцима наведеним у програму. У овом моменту није потребно уводити термине бројилац, именилац и разломак.“ (Наставни план и програм за основну школу у С Р Србији, 1963, стр. 180-181)

Зашто нема разломака у III разреду и зашто је изостало упутство о обради разломака у I разреду у *Објашњењима* није речено.

Историјски преглед о бројевима као садржају наставног предмета *Математика* у млађим разредима осноне школе у Србији завршићемо освртом на наставни план и програм који је донесен средином девете деценије 20. века (*Заједнички план и програм васпитно-образовног рада у основној школи...,* 1985). Пре доношења овог наставног плана и програма, 1983. године је урађено „Заједничко програмско језгро математике за основно васпитање и образовање у СФРЈ“. Из овог плана и програма најпре податак да је *Математика* као наставни предмет била заступљена у млађим разредима основне школе са по пет часова недељно, колико је било и радних дана у седмици.

У дидактичко-методичком упутству које је штампано уз наставни план и програм разломци су сврстани у онај садржај математике који треба *умети.* Претходно је наведено да се основни захтеви наставе математике могу свести на 1. *знања* (чињенице, дефиниције, правила, докази) и 2. *умења* (математичко-логичка и радно-техничка) (*Заједнички план и програм васпитно-образовног рада у основној школи...*, 1985, стр. 89-95).

Какав је садржај програмске теме *Рачунске операције ускупу природних бројева* по наставном плану и програму за нашу основну школу навели смо у претходном одељку овога дела рада. Као што је наведено, тај план и програм је донесен 1995. године, а измењен је два пута: 1996. и 2001. године. Упоређен са садржајем програмских тема о којима је реч које смо навели у историјском пресеку, запажа се да битних разлика нема. Последњи план и програм из 2003. године обухвата исте теме, само су захтеви у погледу метода, облика и средтва рада пооштрени у циљу што ефикасније реализације садржаја. Као илустрацију наводимо чињеницу да су у школској 2007/08. години од стране Министарства просвете Р. Србије одобрени за употребу десет комплета уџбеника за четврти разред основне школе (приближно је исти број и за остале разреде.

2. Програмски садржај и планска заснованост тема о скупу природних бројева у оквиру експерименталног програма

Експериментални програм спроведен је у 12 одељења IV (четвртог) разреда основних школа Нишавског округа. Експеименални део истраживања урађен је у току школске 2010/11. године. Учитељи експерименталне групе су добијали у писаној форми конспекте припрема са детаљно разрађеним деловима часа проблемске наставе или без детаљно обрађених и наглашених делова. Углавном, експериментална група је увек користила проблемску наставу, док је контролна група радила уобичајено. Следе припреме из области природних бројева које су реализоване путем проблемске наставе у току једне школске године у четвртом разреду.

1. Читање и писање бројева до милион само помоћу хиљада

(1) Постављање проблема (Стварање проблемске ситуације)

Никола је за рођендан добио новчаницу на којој је био број 5000. Остао је збуњен, јер је у трећем разреду учио бројеве само до 1000.

(2) Налажење принципа решавања (Избор рационалне хипотезе)

Колико је новаца добио Никола за рођендан?

(3) Декомпоновање проблема (Разлагање општег на уже проблеме)

Никола је отишао у продавницу и затражио да му продавац раситни добијену новчаницу. Продавац му је дао 5 новчаница од по 1000 динара. Никола се обрадовао. Значи, добио је $5 \cdot 1000 = 5000$.

(4) Процес решавања проблема (Верификација хипотезе хипотеза)

Никола је добио 5000 динара.

(5) Консултације, налази, закључци (Схватање проблема и његово смештање у шири систем знања)

Бројеве преко 1000 пишемо и читамо тако што кажемо колико хиљада садрже.

Декадне јединице до милион, изражене помоћу степена броја 10, читају се на овај начин:

$10=10^1$- десетица је први степен броја 10, или "десет на први"
$100=10^2$ - стотина је други степен броја 10, или "десет на други"
$1000=10^3$ - хиљада је трећи степен броја 10, или "десет на трећи"
$10\,000=10^4$ - десетица хиљада је четврти степен броја 10, или "десет на четврти"
$100\,000=10^5$ - стотина хиљада је пети степен броја 10, или "десет на пети"
$1\,000\,000=10^6$ - милион је шести степен броја 10, или "десет на шести"

(6) Провера закључка на новим ситуацијама (Стварање нових реализација применом и препознавањем схваћених садржаја).

а) запиши цифрама број: сто деведест девет хиљада.(199 000)

б) запиши речима број: 315 000.(триста петнаест хиљада).

2. Читање и писање бројева до милион

(1) Постављање проблема (Стварање проблемске ситуације)

Мама се вратила из продавнице и ставила на сто рачун на коме је писало 6375. Намирнице је одложила у фрижидер.

(2) Налажење принципа решавања (Избор рационалне хипотезе)

Колико је мама платила? Питао се Младен.

(3) Декомпоновање проблема (Разлагање општег на уже проблеме)

У трећем разреду је Младен научио да чита троцифрене бројеве тако да зна да прочита 375 (триста седамдесет пет). У броју 6375, поред 375 јединица има и 6 хиљада, па се овај број чита шест хиљада триста седамдест и пет.

(4) Процес решавања проблема (Верификација хипотезе хипотеза)

Мама је платила шест хиљада триста седамдесет и пет динара.

(5) Консултације, налази, закључци (Схватање проблема и његово смештање у шири систем знања)

Значи, увек прво кажемо колико хиљада има неки број, па онда и колико јединица има тај број.

(6) Провера закључка на новим ситуацијама (Стварање нових реализација применом и препознавањем схваћених садржаја).

У табелу упиши речима растојање између Париза и других метропола (растојање је дато у километрима).

	Цифре	Речи
Њујорк	5838	
Рио де Жанеиро	9177	
Токио	9723	

3. Записивање бројева у облику збира и производа

(1) Постављање проблема (Стварање проблемске ситуације)

Мама је дала Милошу 4 новчанице:

једну од 5000 динара

једну од 500 динара

једну од 50 динара

једну од 2 динара,

и послала га у банку да му дају исту количину пара, али у апоенима (новчаницама) од по 1000, 100 и 10 динара.

(2) Налажење принципа решавања (Избор рационалне хипотезе)

Колико новчаница ће добити Милош?

(3) Декомпоновање проблема (Разлагање општег на уже проблеме)

а) Милош рачуна: 5000 + 500 + 50 + 2 = 5552. Значи, Милош има 5552 динара.

б) У банци су му дали 5 новчаница од по 1000 динара, 5 новчаница од по 100 динара, 5 новчаница од по 50 динара и 2 новчанице од по 1 динар.

(4) Процес решавања проблема (Верификација хипотезе хипотеза)

Вредности израза а) и б) су једнаке.

$5000 + 500 + 50 + 2 = 5 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 1$

Милош ће добити 17 новчаница је је 5 + 5 +5 + 2 = 17

(5) Консултације, налази, закључци (Схватање проблема и његово смештање у шири систем знања)

Значи, сваки број можемо раставити користећи декадне јединице. Наш број се састоји од 5 хиљада, 5 стотина, 5 десетица и 2 јединице.

Декадни записи формирају се низањем цифара 0, 1,..., 9, а место цифре (посматрајући с десна налево) одређује степен броја 10. Тако, ако a_i , i = 0,1,..., n означава цифру, тада декадни запис a_n, $a_{n-1}...a_1,a_0$ означава израз:

$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1}... a_1 \cdot 10 + a_0$

(6) Провера закључка на новим ситуацијама (Стварање нових реализација применом и препознавањем схваћених садржаја).

а) Запиши једним бројем следећи израз: 600 108.

б) запиши број регистарске таблице са аутомобила, а затим напиши највећи број који се може написати користећи све цифре са таблице и представити га у облику збира и производа.

4. Месна вредност цифре

(1) Постављање проблема (Стварање проблемске ситуације)

Научили смо да број 246027 напишемо као збир производа једноцифреног броја и декадне јединице. Како ћемо тај исти број да упишемо у следећу таблицу?

Хиљаде			Јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј

(2) Налажење принципа решавања (Избор рационалне хипотезе)

а) 246027 = 2 · 100000 + 4 · 10000 + 6 · 1000 + 0 · 100 + 2 · 10 + 7 · 1

b)

Хиљаде			Јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј
2	4	6	0	2	7

(3) Декомпоновање проблема (Разлагање општег на уже проблеме)

Број 246027 је представљен на два начина: а) и б).

(4) Процес решавања проблема (Верификација хипотезе хипотеза)

Начинима а) и б) представљен је један исти број 246027.

(5) Консултације, налази, закључци (Схватање проблема и његово смештање у шири систем знања)

Цифра 2 у броју 246027 нема исту вредност када се налази на првом месту у броју и на петом месту у броју. Цифра 2 у броју 246027 има месну вредност стотина хиљада и стотина. Вредност сваке цифре у броју зависи од места на коме се она налазии и назива се **месна вредност цифре.**

(6) Провера закључка на новим ситуацијама (Стварање нових реализација применом и препознавањем схваћених садржаја).

Колико различитих месних вредности може имати цифра у шестоцуфреном броју? Размишљамо: цифре су 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Дакле, 0 у шестоцифреном броју не може бити на првом месту, па

може имати само 5 различитих месних вредности, док свака друга цифра може имати 6 различитих месних вредности.

5. Читање и писање бројева већих од милион

(1) Постављање проблема (Стварање проблемске ситуације)

Милица је посматрала звездано небо једне лепе летње ноћи. Почела је да броји: 1, 2, ... 1000000, ... али има их још и још .... Колико ли су удаљене једна од друге? Чула је да се то мери милијардама километара.

(2) Налажење принципа решавања (Избор рационалне хипотезе)

Колико је то милијарда?

(3) Декомпоновање проблема (Разлагање општег на уже проблеме)

Милица је чула да у Србији живи седам милиона четрсто деведест осам хиљада становника.

(4) Процес решавања проблема (Верификација хипотезе хипотеза)

То је записала овако:

$7 \cdot 1000000 + 4 \cdot 100000 + 9 \cdot 10000 + 8 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 1$

(5) Консултације, налази, закључци (Схватање проблема и његово смештање у шири систем знања)

Дакле, бројеви већи од милион се читају тако што се прво прочита класа милиона у броју, затим класа хиљада и на крају класа јединица. Од десет милиона настаје десетица милиона, од десет десетица милиона настаје стотина милиона, а од десет стотина милиона настаје хиљада милиона, тј. милијарда.

Значи, веће декадне јединице од милиона су:

$10\,000\,000 = 10^7$ (десет милиона),
$100\,000\,000 = l0^8$ (сто милиона),
$1000\,000\,000 = 10^9$.(милијарда - хиљаду милиона).

Веће декадне јединице од милијарде су:

10 000 000 000 = 10^{10} (десет милијарди),
100 000 000 000 = 10^{11} (сто милијарди),
1 000 000 000 000 = 10^{12} (билион - хиљаду милијарди).

МИЛИЈАРДЕ			МИЛИОНИ			ХИЉАДЕ			ЈЕДИНИЦЕ		
С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј
10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1
		7	0	3	2	5	4	0	0	9	8
3	4	1	7	0	3	0	2	5	0	0	6
8	0	3	0	0	0	4	7	0	0	0	0

Први број читамо: 7 милијарди 32 милиона 540 хиљада 98. (За класу јединица назив се изоставља.)

Други број из таблице читамо: 341 милијарда 703 милиона 25 хиљада 6.

Трећи број читамо: 803 милијарде 470 хиљада. (Назив класе милиона не изговарамо јер су све три цифре нуле.)

(6) Провера закључка на новим ситуацијама (Стварање нових реализација применом и препознавањем схваћених садржаја).

Упиши у таблицу број 53 605 496 235

Милијарде			Милиони			Хиљаде			Јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј
	5	3	6	0	5	4	9	6	2	3	5

6. Упоређивање бројева већих од милион

(1) Постављање проблема (Стварање проблемске ситуације)

У Србији живи 7 498 000 становника, а у Америци 298 246 000 становника.

(2) Налажење принципа решавања (Избор рационалне хипотезе)

Где живи више становника?

(3) Декомпоновање проблема (Разлагање општег на уже проблеме)

Милиони			Хиљаде			Јединице		
С	Д	Ј	С	Д	Ј	С	Д	Ј
		7	4	9	8	0	0	0
2	9	8	2	4	6	0	0	0

(4) Процес решавања проблема (Верификација хипотезе хипотеза)

Број становника Америке је већи од броја становника Србије, па пишемо: 298 246 000 > 7 498 000.

(5) Консултације, налази, закључци (Схватање проблема и његово смештање у шири систем знања)

На основу таблице закључујемо да је број становника Америке већи од броја становника Србије, јер је број у највећој класи за Америку (298) већи од броја у истој класи за Србију (7). Дакле, можемо закључити:

- Ако је највећа класа два броја иста, онда упоређујемо бројеве тих клса.
- Већи је број који садржи класу милијарди од броја који садржи класу милиона.
- Ако два броја имају исти број једне класе, упоређује се број прве мање класе.

(6) Провера закључка на новим ситуацијама (Стварање нових реализација применом и препознавањем схваћених садржаја).

Између бројева 264 314 672 067 и 264 912 088 512 ставља се знак < или > тако да неједнакост буде тачна. Размишљамо: класа 264 је иста у оба броја, па зато упоређујемо бројеве наредне ниже класе:

како је 314 < од 912 то је 264314672067 < 264912088512.

7. Скуп природних бројева

(1) Постављање проблема (Стварање проблемске ситуације)

Никола се игра на плажи правећи воз од каменчића. Један камен је локомотива, затим следе вагони: 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . 100, . . . 9 999, . . . 1 000 000 001, . . . Кад му се досади прође му Младен и дода још један вагон (каменчић), па још један, па још један.

(2) Налажење принципа решавања (Избор рационалне хипотезе)

а) Како се назива овај низ?

б) Који је први члан овог низа и који му број одговара?

в) Да ли има чланова пре локомотиве? Који је највећи број овог низа?

г) Има ли вагона између 12. и 13. 3256 и 3257. . . .

(3) Декомпоновање проблема (Разлагање општег на уже проблеме)

а) Ово је једна копозиција.

б) Најмањи број овог низа је 1.

в) Кад год Никола стане са настављањем композиције Младен дода још један вагон, па још један, . . . , то јест, још један број у низу који је за један већи од претходног. Три тачкице на крају низа значе да се овај низ продужава све док има бројева који су већи од последњег написаног у низу

г) Пре локомотиве нема чланова композиције.

д) Младен би да “угура” вагон између 12. и 13. каменчића (вагона). Међутим, то је немогуће јер су 12. и 13. вагон чврсто повезани.

(4) Процес решавања проблема (Верификација хипотезе хипотеза) и

(5) Консултације, налази, закључци (Схватање проблема и његово смештање у шири систем знања)

а) Низ бројева који одговарају композицији, то јест, 1, 2, . . . 10 . . . 1000 000 001 . . . се назива **низ природних бројева,** а скуп свих каменчића којима одговарају бројеви 1, 2, . . . то јест, скуп ових бројева се назива **скуп природних бројева** и означава се великим латинским словом N, а записује се: N = ш1, 2, 3, · · · ћ

б) Први и најмањи број у овом низу је број 1.

в) Пре локомотиве нема каменчића, или можемо рећи, «има 0 каменчића». Дакле, 0 **није природан број.** Међутим, како често имамо потребу да «убацимо» и тај број, баш да бусмо означили да нечег нема онда и скупу N и нулу па тако настали скуп обележавамо:

N○ = {0, 1, 2, 3. . . .}.

г) Ако између два природна броја нема других природних бројева, онда за таква два броја кажемо да су **узаступни природни бројеви.** Први од два узастопна природна броја је за један мањи од свог «суседа» и назива се његов **претходник**, а други број се назива **следбеник.** Дакле, 12 је претходник броја 13, а 13 је следбеник броја 12. Тако, претходник било ког броја n је за 1 мањи од њега и то је број $n-1$, а следбеник је за 1 већи од броја n, и то је број $n+1$

(6) Провера закључка на новим ситуацијама (Стварање нових реализација применом и препознавањем схваћених садржаја).

1) Кенгур “по бројевној полуправој” може да доскочи само у тачке које су означене природним бројевима. Креће из Мелбурна, који је представљен тачком 998 и скаче ка Сиднеју, који је представљен тачком 0. У првом скоку прескочи растојање 4, у другом растојање 3, у трећем растојање 4, у четвртом растојање 3 и наставља овако да скаче. Да ли ће кенгур да доскочи у тачку којом је представљен Сиднеј и ако хоће, у колико скокова?

а) не б) да, у 143 скока в) да, у 284 скока г) да, 285 скокова

(Заокружи тачан одговор) г)

2) Ако је Аделаида означена у тачки 759, да ли ће кенгур на путу за Сиднеј скочити у тачку у којој је представљен овај град? Ако хоће, колико ће скокова направити до Аделаиде?

а) не б) да, 34 скока в) да, 68 скокова

(Заокружи тачан одговор) в)

За било која два различита природна броја a и b увек важи један од односа:

$$a > b \quad \text{или} \quad a < b.$$

Због ове особине елемената скупа природних бројева кажемо да је *скуп природиих бројева уређен скуп*.

8. Бројевна права

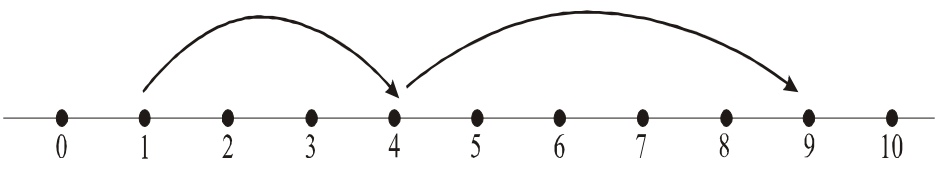
Цртамо праву линију и на њој уочавамо тачку којој придружујемо број нула. а потом десно од ње тачку којој придружујемо број један.

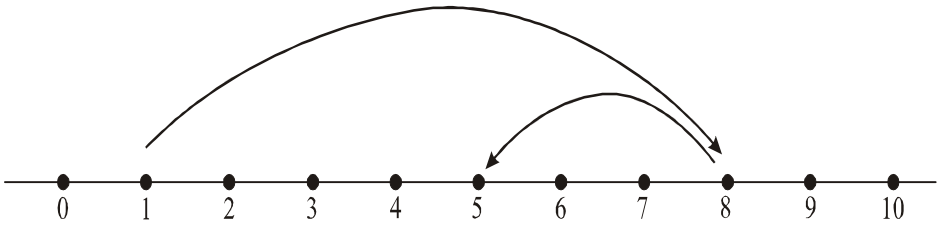
Дуж одређену тим двема тачкама узимамо за јединицу мере бројности и она нам одређује једну јединицу или број један. Положај тачке која одговара броју два одређен је чињеницом да број два садржи две јединице. Аналогно се одређују тачке које одговарају осталим бројевима.

Праву на којој смо поменутим начином одредили тачке које одговарају бројевима називамо **бројевна права.**

Бројевна права има значаја при усвајању рачунских радњи с бројевима у оквиру прве десетице и у процесу проширивања појмова природног броја. Наиме, с обзиром да су усвојене битне ознаке у садржају појмова природан број, релације и операције с тим бројевима постепено треба напустати скуповни, а примењивати бројевни приступ. То је неопходно, јер рад са скуповима конкретних објеката је средство за постизање конкретног циља, а то је оспособљавање ученика за рад са бројевима. Ослонцем на бројевну праву, прелаз са скупног ка бројевном приступу је знатно лакши и ефикаснији.

Тако, на пример, ако ученик треба да израчуна $4 + 5$ и $8 - 3$, онда се до резултата тих операција може доћи приказивањем датих израза на бројевној правој на следећи начин:





Са бројевне праве ученик лако уочава да је $4 + 5 = 9$ и да је $8 – 3 = 5$.

9. Писмено сабирање и одузимање

Упознавањем вишецифрених бројева смањује се могућност усменог рачунања са њима. Зато на примеру једног задатка, који усмено и писмено решавамо, ученици уочавају олакшицу при писменом рачунању. Зато вишецифрене бројеве, углавном, писмено сабирамо и одузимамо.

На пример**:** *На аутобуској станици је пре подне продато 3 824 карте, а поподне 1 947 карата. Колико је карата продато тог дана?*

Усменим путем прво сабирамо хиљаде, па стотине, затим десетице и на крају јединице.

Рачунамо усмено: $3\,824 + 1\,947 = (3\,824 + 1000) + 947$

$= (4824 + 900) + 47$

$= (5724 + 40) + 7$

$= 5764 + 7$

$= 5771.$

Писменим путем прво сабирамо јединице, па десетице, затим стотине итд, то јест, полазимо од јединица прве класе, затим друге, па треће, итд.

Сабирке потписујемо један испод другог водећи рачуна да цифре исте месне вредности буду у истој колони.

Писмено рачунамо:

X	C	Д	J
3 1 1	8 9	2 4 1	4 7
5	7	1	1

Писмено сабирање вршимо и када су сабирци написани у реду и то захтева посебну пажњу ученика при одређивању цифара исте месне вредности.

Код писменог одузимања одузимају се вредности цифара исте месне вредности. Зато се пре извођења операције одузимања правилно потпише умањилац испод умањеника и почињемо одузимање јединица умањиоца од јединица умањеника.

На пример:

X	C	Д	J
7 3	5 8	0 2	7 4
3	6	8	3

Говоримо: 4 од 7 је 3,2 од 10 је 8, 8 од 14 је 6, 3 од 6 је 3.

10. Писмено сабирање и одузимање природних бројева преко 1000

За бројеве преко 1000 смањена је могућност усменог сабирања и одузимања. Зато се упознајмо са писменим (писаним) начином сабирања и одузимања вишецифрених бројева.

1. Милица је желела да купи панталоне од 3824 динара и ципеле од 1947 динара. Колико јој је новаца потребно? Како се то може израчунати?

Може се израчунати на два начина:

а) усменим путем

б) писменим путем.

Усменим путем прво сабирамо хиљаде, па стотине, затим десетице и на крају јединице.

Пример**:** *На железничкој станици је једног дана продато 3 824 карте, а другог дана 1 947 карата. Колико је карата продато а?*

Рачунамо усмено: 3 824 + 1 947 = (3 824 + 1000) + 947

= (4824 + 900) + 47

= (5724 + 40) +7

= 5764 + 7

= 5771.

Писменим путем прво сабирамо јединице, па десетице, затим стотине итд., то јест, полазимо од јединица прве класе, затим друге, па треће итд.

Сабирке потписујемо један испод другог водећи рачуна да цифре исте месне вредности буду у истој колони.

Писмено рачунамо:

Х	С	Д	Ј
3 1 1	8 9	2 4 1	4 7
5	7	1	1

Писмено сабирање вршимо и када су сабирци написани у реду и то захтева посебну пажњу ученика при одређивању цифара исте месне вредности.

Код писменог одузимања одузимају се вредности цифара исте месне вредности. Зато се пре извођења операције одузимања правилно потпише умањилац испод умањеника и почињемо одузимање јединица умањиоца од јединица умањеника.

На пример**:**

Х	С	Д	Ј
7 3	5 8	0 2	7 4
3	6	8	3

Говоримо: 4 од 7 је 3,2 од 10 је 8, 8 од 14 је 6, 3 од 6 је 3

Дакле, код вишецифрених бројева се сабирају прво јединице, па десетице, па стотине, па хиљаде и тд

2. Користећи сваку од цифара 7, 0, 2, 8 и 3 тачно један пут напиши највећи и најмањи петоцифрени број. Шта можеш све рачунати? Рачунај!

11. Непроменљивост разлике

1. Младен је планирао да од својих 11568 динара брату за рођендан поклони 4500 динара, а за остатак да купи панталне које коштају тачно колико износи тај остатак. Међутим, наишла је његова другарица и замолила га да јој позајми 68 динара. Младен је то прихватио, али се мало сневеселио, јер је желео да купи панталоне. Шта можеш рачунати и саветовати Младену, како би имао довољно новаца за панталоне?

Колико Младен, после сусрета са другарицом, треба да поклони брату, да би му остала тачна количина новаца за пнаталоне?

Младен треба да поклони брату 68 динара мање од планираних 4500 да би јој остала тачна количина новаца за хаљину.

После одређеног времена датог ученицима за размишљање, они могу расуђивати на следећи начин:

а) Колико кошта панталоне?

б) Колико је Младен поклонио брату за рођендан?

в) Колико му је на крају остало за панталоне?

Уколико се ученик определи за индуктивно решавање увођењем модела, могућ је геометријски модел уз примену методе дужи. Графичка илустрација задатка била би:

а) 11568 – 4500 = 7068 паналоне коштају 7068 динара.

б) 4500 – 68 = 4432 Младен је поклонио брату 4432 динара.

в) (11568) – (4500-68) = 7068

(11568-68) - (4500-68) = 7068
= 11568 - 4432 = 7068

Какве су бројевне вредности израза а) и в)? Једнаке су (ученици). Дакле, можемо написати:

11568 - 4500 = (11568 - 68) - (4500 - 68) = 7068

Закључујемо да се разлика није променила ако се одузме од умањеника и умањиоца број 68.

(По могућству изводе ученици)

Разлика се неће променити ако умањиоцу и умањенику додамо или одузмено исти број.

Записујемо:

Нека су а, б било који природни бројеви, и a - b = r њихова разлика. Ако умањенику и умањицу додамо или одузмемо исти природни број n , при чему мора бити a > b, a > n, b > n разлика се неће променити.

(a + n) - (б + n) = r; (a - n) - (b - n) = r

Непроменљивост разлике се примењује за лакше израчунавање разлике неких бројева.

3. Умањеник разлике неких природних бројева смањен је за 28358. Како би требало променити умањилац да би разлика остала не промењена?

И умањилац треба смањити за 28358. (Одговор)

4. Одреди r и x из једнакости, ако је a = 456213, b = 97178

а) a - b = r

б) (a - 3957) - (b - x) = r

в) (a + x) - (b + 43152) = r

Одговор:

а) r = 359035

б) x = 3957

в) x = 43152

12. Једначине са сабирањем и одузимањем

Научили смо да се непознати **сабирак** одређује тако што се од збира одузме познати сабирак и то смо радили са бројевима мањим од 1000. Научили смо и то да се непознати **умањеник** рачуна тако што се саберу умањеник и разлика, а непознати **умањилац** рачуна тако што се од умањеника одузме разлика.

$a + x = b$ $x - a = b$ $a - x = b$

$x = b - a$; $x = a + b$; $x = b - a$

Научили смо и то како се сабирају и одузимају бројеви већи од 1000. Дакле, можемо да решимо следеће једначине:

1. *а*) x + 25340 = 81290 Шта можеш приметити?

б) x – 12650 = 61015

в) 93615 – x = 39516 . Шта можеш приметити? Шта је заједничко за сва три примера?

Решење:

а) x = 81290 – 25340

x = 55950

Провера:

55950 + 25340 = 81290

*Сабирак увек мора бити мањи од збира када рачунамо у скупу N.

б) x = 12650 + 61015

x = 73665

Провера:

73665 - 12650 = 61015

в) x = 93615 - 39516

x = 54099

*Умањилац увек мора бити мањи од умањеника када рачунамо у скупу N.

Провера:

93615 – 54099 = 39516

*За сва три примера је заједничко то да се непознати број x налази у изразу на левој страни знака једнакости.

А како се решавају једначине у којима је непозната на десној страни знака једнакости?

37659 = x + 3174

Ништа се не мења ако заменимо места левој и десној страни.

x + 3174 = 37659

Затим рачунамо x као у првом примеру а)

x = 37659 – 3174

x = 34485

Провера:

34485 + 3174 = 37659

2. Милош је купио телефон који је платио 12200 динара. Од остатка новца купио је радио који је платио 4721 динар. После куповине остало му је 2412 динара. Шта можеш да рачунаш? Рачунај!

а) За телефон и радио платио је: 12200 + 4721 = 16921 динара.

б) Ако је имао x динара то ћемо сазнати решењем једначине:

x – 16921 = 2412

x = 16921 + 2412

x = 19333

Милош је имао 19333 динара

13. Неједначине са сабирањем и одузимањем

1. Младен је имао 25400 динара. Купио је панталоне и сада има мање од 12280 динара. Колико су панталоне коштале?

Рачунамо:

Ако са x обележимо цену панталона, постављамо **неједначину:**

25400 – x < 12280

Знамо да се разлика смањује ако се повећава умањилац.

Дакле, ако Младен сада има мање од 12280, то значи да цена панталона мора бити већа од 25400 – 12280 то јест: x > 25400 – 12280,

односно x > 13120

Како је скуп N○ непознати умањилац не може бити већи од умањеника то закључујемо да би панталоне могле да коштају више од 13120 динара, а мање од 25400 динара, то јест, x є ш13121, 13122, . . . 25400ћ.

*Значи, ако су *а* и *б* познати природни бројеви, *а* *х* непознати број, следеће неједначине се решавају овако:

збир се смањује ако се смањује сабирак, а повећава ако се сабирак повећава.

а) $x + a < b$ $x + a > b$

$x < b - a$ $x > b + a$

b) разлика се смањује ако се смањује умањеник.

$x - a < b$

$x < a + b$

а повећава ако се повећава умањеник.

$x - a > b$

$x - b - a$

b) Разлика се смањује ако се повећава умањилац

$a - x < b$

$x > a - b$

а повећава ако се смањује умањилац

$a - x > b$

$a < a - b$

2. Никола је замислио неки број. Када је од њега одузео збир бројева 2406 и 10842 добио је број који је мањи од 13260. Који је број Никола могао да замисли?

Рачунамо:

x – (2406 + 10842) < 13260

x – 13248 < 13260

x < 13260 + 13248

x < 26508

Никола је могао да замисли бројеве мање од 26508, али веће од 13248, то јест, рачунамо у скупу N○.

хє > 13248 . . . 26507.

14. Замена места сабирака

1. Удаљеност Земље од Месеца је 379000 км, а удаљеност Земље од Сунца је за 149621 км већа. шта можемо рачунати?

У задатку можемо рачунати:

а) удаљеност Земље од Сунца

б) удаљеност Месеца од Сунца

в) удаљеност Сунца од Земље.

а) Један ученик рачуна на основу графичког задатка

З 379000 км М 146621ооо км С

о_____о_____о

Удаљеност Земље од Сунца је 37900 + 149621000 = 150 000 000 км.

б) Други ученик, на основу графичког записа, уочава да је удаљеност Месеца од Сунца 149621000 км.

в) Трећи ученик рачуна

149 621 000 + 379 000 = 150 000 000 км и закључује да је

149 621 000 + 379 000 = 370 000 + 149 621 000

То јест, да је удаљеност Земље од Сунца једнака удаљености Сунца од Земље.

Дакле, можемо закључити: за било која два природна броја a и b збир a + b једнак је збиру b + a, то јест,

a + b = b + a

Ова особина сабирања зове се **замена места сабирака** (записује се наслов на табли) и најчешће се употребљава за проверу тачности израчунатог збира или као "олакшица" за израчунавање у сложенијим изразима.

2. Одреди збир највећег петоцифреног и највећег троцифреног броја. Провери тачност добијеног резултата.

Решење:

Један ученик рачуна 99999 + 999 = 100 998.

Други проверава: 999 + 99999 = 100998 и закључује да је
99999 + 999 = 999 + 99999.

15. Здруживање сабирака

1. Уочи Нове године Милица је решила да обрише три полице за књиге. Решила је да прво обрише највишу полицу, а како није била сигурна колико књига има на њој, бројала је, остављајући их на средњој полици. Укупно је избројале 173 књиге, па је обрисала полицу и отишла на ручак.

Други део посла требало је да уради Милош. Он је са најниже полице стављао на средњу и успут такође бројао књиге. Избројао је 217 књига. Заинтересовало га је колико укупно има књига. Мама му је рекла да на средњој полици има 235 књига, али како је Милица била одсутна нису знали колико има књига на највишој полици. Ипак, Милош је решио да срачуна, не чекајући Милицу, колико има књига на прве две, па кад је Милица дошла, само је добивеном броју додао Миличин број књига.

Милица је рачунала другачије. Она је броју Милошевих књига додала збир књига са средње полице и своје књиге.

Како су они рачунали? Какви су резултати њихових рачунања?

Један ученик рачуна - Милош је рачунао:

(217 + 235) + 173 = 452 + 173 = 625

На све три полице има укупно 625 књига.

Други ученик рачуна - Милица је рачунала:

217 + (235 + 173) = 217 + 408 = 625

На све три полице има укупно 625 књига.

* Дакле, можемо закључити:

(217 + 235) + 173 = 217 + (235 + 173)

и уопштити:

* За било која три природна броја a, b, c, збир

(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c

то јест, важи закон здруживања сабирака.

2. Брат и сестра имају заједно 1840 динара. Они треба да поделе ту суму тако да брат добије 40 динара више од сестре.

Шта можеш израчунати?

После извесног времена датог за самостални рад и после контроле од стране наставника, један ученик излази на таблу и ради:

Ако са x означимо суму новца коју добије сестра, онда је сума новца коју добије брат x + 40, па је

x 40

брат ,_____,_____, x + (x+40) = (x = x) + 40; 2x + 40 = 1840

x

сестра ,_____, 2x + 40 - 40 = 1840 - 40

2x = 1800

x = 1800 : 2

x = 900.

Дакле, сестра ће добити 900 динара, брат 900 + 40 = 940

3. Израчунај на најлакши начин:

а) 5890000 + 756420 + 12010000 +200580 =

= (5890000 +12010000) + (756420 + 200580) = 179 00000 +957000 = 18857000

б) 23000300 + 4800600 + 1050400 + 7000700=

23000300 + (4800600 + 1050400) + 7000700 =

= (23000300 +7000700) + (4800600 + 1050400) =

= 30001000 + 5851000 = 35852000

16. Нула и један код сабирања и одузимања

1. Неша воли да кити своју собу балонима и због тога је отишао код баке и од њених купљених балона узео неколико и ставио у џеп. Када је дошао кући извадио их је из џепа и избројао - било је 18 балона. За сваки случај проверио је и други џеп, али у њему није било балона.

Како можемо да прикажемо бројним изразом колико је Неша имао балона у оба џепа? После краћег самосталног рада, један ученик пише на табли:

$18 + 0 = 18$

Након тога ученици закључују: нула сабрана са неким бројем не мења тај број.

Дакле, $a + 0 = 0 + a = a$.

2. Мила има 121 балон да окити салу за дочек Нове године. Ана јој потражи неколико балона, али јој Мила, уз извињење, не даде ниједан балон. Затим је наишла Нада и објаснила Мили да мора да носи све балоне, јер ће дочек Нове године бити у другој сали. Мила јој даде све балоне.

Представите обе ситуације бројним изразом и израчунајте њихову вредност.

а) $121 - 0 = 121$

б) $121 - 121 = 0$ јер је $0 + 121 = 121$.

Дакле можемо уопштити:

У скупу N○ исправне су следеће тврдње за било који природан број a.

$a - 0 = a$ јер је $a + 0 = a$

$a - a = 0$ јер је $0 + a = a$.

3. Ако броју 17 додамо број 1 добијамо број 18 који се зове *следбеник* броја 17. Како ћеш означити с*ледбеник* природног броја a?

$a + 1$

Ако се од броја 17 одузме број 1 добија се број 16 који се зове *претходник* броја 17.

Како ћеш означити претходник броја a?

$a - 1$

Да ли сваки природни број има следбеник? (Да! Јер је сабирање изводљиво у скупу N, па је $a \in N$ и $a + 1 \in N$).

Да ли сваки природни број има претходник? (Да! Не!) Број 1 нема петходника,

јер је $1 - 1 = 0$, $0 \notin N$

17. Зависност збира од промене сабирака

1. У Нишу је филм "Зона Замфирова" гледало 91200 гледалаца, а у Алексинцу 5630. У Београду је филм гледало 128200 гледалаца више него у Нишу и Алексинцу заједно. Израчунати на три начина број гледалаца у Београду!

После неколико минута самосталног рада један ученик ради на табли.

Решење:

Први ученик ради:

а) (91200 + 5630) + 128200 = 96830 + 128200 = 225030

Други ученик ради:

б) (91200 + 128200) + 5630 = 219400 + 5630 = 225030

Трећи ученик ради:

в) 91200 + (5630 + 128200) = 133830 + 91200 = 225030

Дакле, закључујемо:

Нека су a, b, c било који природни бројеви и z = a + b. Ако тада једном од сабирака a или b додамо природни број c, збир се повећава за тај број.

z + c = (a + c) + b = a + (b + c)

2. У Војводини је једне године било 898450 посетилаца на биоскопским представама домаћих филмовима, а у Црној Гори је било 349890 посетилаца. На Косову и Метохији је било 367450 посетилаца мање него у Војводини и Црној Гори заједно. На колико начина можеш израчунати колико је те године било посетилаца на Косову и Метохији (на један, на два, на три).

Решење:

а) (898450 + 349890) – 367450 = 1248349 – 367450 = 880890

б) 898450 – 367450) + 349890 = 880890

На Косову и Метохији је било 880890 посетилаца. То може да се израчуна на два начина.

Ако је збир два броја a + b треба одузети број c. То можемо урадити на три начина само ако је :

а) a + b = z, z > c, z – c = (a + b) – c

б) ако је $a + b = z$ и $a > c$ онда је $z – c = (a – c) + b$

ц) ако је $a + b = z$ и $b > c$ онда је $z – c = a + (b – c)$

3. Израчунај z и x:

а) $785370 + 14630 = z$

$(785370 – 75469) + 14630 = z – x$

б) $57870 + 2130 = z$

$(57870 – x) + 2130 = z – 4889$

18. Непроменљивост збира

1. Израчунај:

$357 + 426$ па одреди x

а) $(357 + x) + 426 = 789$

б) $357 + (426 - x) = 770.$

Решење: $357 + 426 = 783$

а) $(357 + x) + 426 = (357 + 426) + x$; $783 + x = 789$

$x = 789 - 783 = 6$; провера: $(357 + 6) + 426 = 363 + 426 = 789$

б) $x = 783 - 770 = 13$; провера: $357 + (426 - 13) = 357 + 413 = 770.$

Значи, у у случају под а) збир се повећао за 6, тачно за колико се повећао и први сабирак. У скучају под б) збир се смањио за 13, тачно за колико се смањио и други сабирак. Шта шта ће се десити са збиром $357 + 426$ ако се први сабирак повећа за 6, а други смањи за 6? (повећаће се, смањиће се, остаће исти).

Да проверимо:

$357 + 426 = 783$

$(357 + 6) + (426 - 6) = 363 + 420 = 783$

Дакле, били су у праву они који су рекли да ће збир остати исти.

Шта, дакле, можемо закључити о непроменљивости збира?

* Закључак: ако један од сабирака повећамо за неки број c, а други умањимо за исти број, збир се неће променити,

то јест,

$$a + b = c, \quad (a + c) + (б - c) = c$$

Ово својство се користи за брже рачунање у неким случајевима. На пример, збир 495 + 325 можемо и усмено да израчунамо на следећи начин:

495 + 325 = (495 + 5) + (325 - 5 = 500 + 320 = 820.

1. Одреди збир датих бројева тако да један од сабирака заокружиш на најближу стотину.

а) 8689 + 319 б) 29356 + 645

Решење:

а) 8689 + 319 = (8689 + 11) + (319 – 11) = 8700 + 308 = 9008

б) 29356 + 645 = (29356 + 44) + (645 – 44) = 29400 + 601 = 30001

2. Ученици трећег и четвртог разреда су пошли на екскурзију у два аутобуса. Сваки аутобус је, поред седишта за возача, имао још по 54 места. Сва она су према списку требало да се попуне. Међутим, три ученика трећег разреда нису дошли због болести. Да би се попунили кпацитети аутобуса неколико родитеља ученика трећег разреда се понудило да крене на екскурзију. Шта се може израчунати?

3. Збир два броја је 10001. Ако први сабирак повећамо за 901, како треба променити други сабирак да би збир остао непромењен. Напиши израз и одговор. Проверавање тачности израза се врши на основу резултата истакнутих на табли.

19. Зависност разлике од промене умањеника или умањиоца

1. Никола је добио од маме 5897 динара да купи себи неку играчку за Нову годину. Играчка је коштала 1489 динара. Никола се обрадовао јер је схватио да ће му остати нешто новаца у каси. У том тренутку наишла је његова сестра и додала му још 76 динара. Никола се још више обрадовао. шта се све може израчунати из датих података?

Ученици самостално раде неко време, уз надгледање учитеља и његових евентуалних упутстава.

Може се рачунати:

а) Колико ће Николи остати у касици од пара које му је дала мама?

б) Колико је имао Никола укупно пара које су му дале мама и сестра и колико ће му остати у касици од тих пара?

в) Да ли је Николи остало више пара у случају под б (јесте, није)?

Рачунамо:

а) 5897 – 1489 = 4408

Николи ће остати 4408 динара од пра које му је дала мама.

б) (5897 + 76) – 1489 = 5973 – 1489 = 4484

Никола је имао укупно 5973 динара, а у касици му је остало 4484 динара.

в) 4484 – 4408 = 76

Николи је остало тачно за онолико више динара колико је добио од сестре.

Дакле, можемо закључити:

Ако се умањеник повећа за неки број и разлика се повећа за исти број.

И пишемо: нека су a, b, c било који природни бројеви, и

$a - b = r$ њихова разлика

$(a + c) - б = r + c.$

2. На једном камиону шумског газдинства налазило се 1234 јелки с кореном 2 дана пре Нове године. Првог дана је продато 489 јелки, другог још 326. шта се све може израчунати из датих података?

Ученици самостално раде.

Може се израчунати:

а) Колико је јелки остало на камиону после првог дана?

б) Колико је јелки остало на камиону после после другог дана? На колико начина то можемо израчунати? Колико је јелки остало после другог дана и за колико је тај број мањи од броја јелки после првог дана?

Рачунамо:

а) 1234 – 489 = 745 Остало је 745 јелки.

б) Можемо израчунати на два начина:

1) (1234 – 489) – 326 = 745 – 326 = 419

2) 1234 – (489 + 326) = 1234 – 515 = 419

в) 745 – 419 = 326

После другог дана на камиону је остало 419 јелки, што је од 745 мање за 326, тачно онолико колико је продато другог дана. Дакле, можемо закључити:

Нека су a, b било који природни бројеви и a – б = r њихова разлика. Ако од умањеника одузмемо, или умањиоцу додајемо додамо исти број c, при чему мора бити a > б и a > c, разлика се смањује за број c; и пишемо:

a – b = r

(a – c) – b = r – c

a – (b + c) = r – c.

3. У једном одељењу IV разреда је скупљено 66230 динара за прославу Нове године. Од тог новца је купљен сок за 3110 динара, а остатак је остављен за пакетиће. Међутим, учитељ се досетио да би и сам требало да допринесе и да нешто новаца, па је купијући сок додао својих 185 динара.

Шта можеш рачунати?

Ученици самостално раде неко време, уз надгледање учитеља и његових евентуалних упутстава.

Може се израчунати:

а) Колико је новаца остало за пакетиће после куповине сока?

б) Колико је новаца остало за пакетиће после куповине бомбона?

в) Колико је новаца остало за пакетиће после додавања 185 учитељевих динара? Да ли више? (да, не)? И за колико?

Рачунамо:

а) 6230 – 3110 = 3120

За пакетиће је остало 3120 динара.

б) 6230 – (3110 –185) = 6230 – 2925 = 3305

После куповине бомбона од стране учитеља остало је 3305 динара за пакетиће.

в) 3305 – 3120 = 185

Остало је 3305 динара што је више за 185 динара од 3120 динара, тачно за онолико колико је додао учитељ. Дакле, можемо закључити:

Ако од умањеника одузмемо неки број, разлика ће се повећати за тај исти број; и пишемо:

а – б = р

а – (б – с) = r + с, при чему је a > b и b > c.

4. При сабирању неколико бројева у;еник је направио следеће гршке: у једном сабирку цифру јединице 2 заменио је са 9, цифру десетице 4 са 7 и цифру стотина 3 са 8. Како и за колико је променио тачан збир?

Решење:

Тачан збир је повећан за 537 јер је цифру стотина повећао за 5, цифру десетице за 3, а цифру јединица за 7.

(5 · 100 + 3 ·10 + 7 · 1 = 537)

20. Множење и дељење збира и разлике бројем

1. Једна породица је отишла на летовање. На летовању су провели 9 дана. За струју су плаћали 100 динара дневно, а за боравишну таксу 30 динара дневно. Колико је пара та породица морала укупно да издвоји за струју и таксу?

Размишљамо овако, то можемо да израчунамо на два начина:

(1) За струју и таксу породица издвоји дневно

100 + 30 = 130 динара

за 9 дана то је: (100 + 30) · 9 = 1170.

(2) А можемо размишљати и овако: Можемо израчунати колико је породица платила укупно за струју, а то је $100 \cdot 9 = 900$, и за таксу , а то је $30 \cdot 9 = 270$, па добијене бројеве саберемо, то јест,

$100 + 30 \cdot 9 = 900 + 270 = 1170.$

Дакле, породица је морала да издвоји за струју и таксу 1170 динара.

Рачунајући на оба начина добили смо исти број, то јест:

$$\mathbf{(100 + 30) \cdot 9 = 100 \cdot 9 + 30 \cdot 9}$$

Ово важи за све природне бројеве a, b, c.

$$\mathbf{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$$

2. У пет кутија је по 90 свезака од који су по 40 свезака са црвеним корицама. Колико је укупно свезака које немају црвене корице?

То можемо да израчунамо на два начина:

(1) Можемо рачунати овако:

У једној кутији имамо $90 – 40 = 50$ свезака које немају црвене корице. Укупно их је у 5 кутија $(90 – 40) \cdot 5 = 50 \cdot 5 = 250$.

Закључујемо:

$$\mathbf{(90 – 40) \cdot 5 = 90 \cdot 5 - 40 \cdot 5}$$

Ово важи за све природне бројеве a, b, c.

$$\mathbf{(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c}$$

(2) Рачунамо колико је укупно свезака

$$90 \cdot 5 = 450$$

Од тога је $40 \cdot 5 = 200$ са црврним корицама. Дакле, број свезака које немају црвене корице је:

$$90 \cdot 5 - 40 \cdot 5 = 450 - 200 = 250$$

3. Мама је ставила у касицу 500, а тата 400 динара. По колико ће добити свако од њихово двоје деце?

(1) Можемо рачунати овако:

$$(500 + 400) : 2 = 900 : 2 = 450$$

Свако ће добити по 450 динара.

(2) Или можемо рачунати и овако:

$$500 : 2 + 400 : 2 = 250 + 200 = 450$$

Добили смо исти резултат.

Дакле, **(500 + 400) : 2 = 500 : 2 + 400 : 2**

Ово важи за све природне бројеве *a, b, c*

(a + b) : c = a : c + b : c

4. Никола је имао 630 динара, па је купио књигу за 330 динара. Остатак новца је поделио са братом и сестром. По колико динара је добио свако од њих?

(1) Можемо рачунати овако:

(630 – 330) : 3 = 300 : 3 = 100

Свако је добио по 100 динара.

(2) Или можемо рачунати овако:

Пре куповине књиге свако би добио по:

630 : 3 = 210 динара.

Због куповине књиге свакоме је умањена сума новца за

330 : 3 = 110 динара, те је свако добио по 210 – 110 = 100 динара, то јест, 630 : 3 - 330 : 3

Закључујемо:

(630 – 330) : 3 = 630 : 3 - 330 : 3

Правило дељења разлике такође важи за све природне бројеве

(a - b) : c = a : c - b : c

5. Израчунај на најлакши начин:

а) 5 · 316 + 5 · 225 – 5· 41

б) 480 : 6 + 246 : 6 – 60 : 6

Рачунамо:

а) 5 · 316 + 5 · 225 – 5· 41 = 5 · (316 + 225 – 41) = 5 · (541 - 41) = = 5 · 500 = 2500

б) 480 : 6 + 246 : 6 – 60 : 6 = (460 + 246 – 60) : 6 = 666 : 6 = 111

21. Множење и дељење вишецифрених бројева декадним јединицама

У прва три разреда основне школе учило се све о природним бројевима до 1000. Тако је јасно да множење неког броја са 10 постају десетице (1 · 10 = 10), десетице постају стотине (10 · 10 = 100), стотине постају хиљаде (100 · 10 = 1000).

Множењем неког броја са 100 јединице постају стотине ($1 \cdot 00 = 100$). Исто важи и за множење декадним јединицама 1000, 10000, и тако даље.

1. Између два града је растојање 456 km. Колико то растојање износи изражено у метрима?

Знамо: 1 km = 1000 m

Рачунамо: $456 \cdot 1000 = (400 + 50 + 6) \cdot 1000 = 400 \cdot 1000 + 50 \cdot 1000 + 6 \cdot 1000 = 4 \cdot 100 \cdot 1000 + 5 \cdot 10 \cdot 1000 + 6 \cdot 1000 = 4 \cdot 100000 + 5 \cdot 10000 + 6000 = 400000 + 50000 + 6000 = 456000.$

Растојање између та два града је 456000 m.

Ако би смо проблем поставили обрнуто: растојање између та два града износи 456000 m. Колико је то растојање изражено у километрима?

Очигледно да је 456 km. Дакле, $456000 : 1000 = 456$.

Можемо да закључимо да се том броју са десне стране допише онолико нула колико их садржи та декадна јединица којом се множи.

За дељење важи правило да се количник неког броја и декадне јединице са десне стране изоставља онолико нула колико их садржи та декадна јединица којом се дели, уз услов да се дељеник завршава са истим бројем, или више нула него што их има декадна јединица којом делимо.

2. Израчунај колико би била тежина пшенице од 4100000 зрна, ако се зна да 1000 зрна тежи 1 kg.

Рачунамо: $4100000 : 1000 \cdot 1 = 4100$ пшеница би била тешка 4100.

22. Множење и дељење вишецифрених бројева једноцифреним бројем

1. Три друга су одлучили да оду на излет. За аутобуску карту су морали да плате по 321 динар, а за остале трошкове тога дана по 2321 динар. Колико су платили укупно за тај излет?

Рачунамо онако како смо до сада научили у прва три разреда:

а) $321 \cdot 3 = (300 + 21) \cdot 3 = 300 \cdot 3 + 21 \cdot 3 = 900 + 63 = 963$

б) или краће $\underline{321 \cdot 3}$ 963

Сада се исти поступци примењују и на вишецифрене бројеве чији је број цифара већи од 3.

а) 2321 · 3 = (2000 + 321) · 3 = 2000 · 3 + 321 · 3 = 6000 + 963 = 6963

б) или краће $\underline{2321 \cdot 3}$ 6963

Укупно су сва три друга платила 963 + 6963, а то је 7926 динара.

Закључујемо да су резултати множења на начин а) и б) једнаки, а како је начин б) краћи тако ће се надаље рачунати. Дакле, вишецифрени број се множи једноцифреним бројем тако што се множе прво јединице, потом десетице, па стотине, па хиљаде . . . Пажљиво се потписују јединице испод јединица, десетице испод десетица.

2. Човеково срце за годину дана направи 40 000 000 откуцаја. Колико је откуцаја направило срце детета од 9 година?

Рачунамо: $\underline{40\,000\,000 \cdot 9}$ 360 000 000

Срце детета од 9 година направило је 360 000 000

3. Четири горана су добила задатак да засаде укупно 828 садница. За храну и пиће су добили укупно 4828 динара. По колико су садница засадили и по колико је новаца добио свако од њих за храну и пиће?

Рачунамо онако како смо до сада научили у прва три разреда.

а) 828 : 4 = (800 + 28) : 4 = 800 : 4 + 28 : 4 = 200 + 7 = 207

б) или краће: 828 : 4 = 207

$$\begin{array}{r} \underline{-\ 8} \\ 02 \\ \underline{-\ 0} \\ 28 \\ \underline{-\ 28} \\ 0 \end{array}$$

Сада исте поступке примењујемо и на вишецифрене бројеве чији је број цифара већи од 3.

а) 4828 : 4 = (4000 + 800 + 28) : 4 = 4000 : 4 + 800 : 4 + 28 : 4 = 1000 + 200 + 7 = 1207.

б) или краће: 4828 : 4 = 1207

- 4
08
- 8
02
- 0
28
- 28
0

Свако је засадио по 207 садница, а добили су по 1207 динара. Закључујемо да су резултати дељења и на начи а) и на начин б) једнаки, али се обично надаље рачуна на начин б). Дакле, **вишецифрени број се дели једноцифреним бројем** тако што се деле прво јединице највишег реда (хиљаде) па онда јединице нижих редова (стотине, десетице, јединице).

4. Никола и Младен живе у истој згради. Никола на осмом, а Младен на седмом спрату. Полазећи у школу Никола најпре мора да пређе 144 степеника. Колико степеника пређе Младен за 9 дана одлазећи у школу?

Рачунамо:

а) 144 : 8 = 18 Сваки спрат садржи 18 степеника.

- 8
64
- 64
0

18 · 7 Младен дневно прелази 126 степеника.

126

126 · 9 Младен пређе 1134 степеника

1134

б) или, (144 : 8) · 7 · 9 = 18 · 7 · 9 = 126 · 9 = 1134

23. Замена места и здруживање чиниоца

1. Сања је у својој касици имала 2 папирне новчанице од по 50 динара, а Марко у својој 50 менталних новчаница од по 2 динара. Ко је имао више новаца, Сања или Марко?

Рачунамо:

Сања: $2 \cdot 50 = 100$

Марко: $50 \cdot 2 = 100$

Закључујемо да су Сања и Марко имали исту количину новаца јер је $2 \cdot 50 = 50 \cdot 2$.

Значи, **производ два броја се не мења ако чиниоци замене места, то јест, за свака два природна броја *а* и *б* важи: а · б = б · а.**

2. *а*) У једној књижари су се нашле нераспаковане 3 кутије са по 2 књиге. Колико ће укупно платити купац те књиге, ако се зна да свака књига кошта 500 динара?

б) У истој књижари су се нашле 3 кутије са по 2 слагалице од којих свака кошта по 500 динара.

Купац је размишљао да ли да купи књиге или или слагалице. Купио би оно што је јефтиније, или све, ако кошта исто. Помогнимо му да се реши дилеме.

а) $(3 \cdot 2) \cdot 500 = 6 \cdot 500 = 3000$

6 књига коштају укупно 3000 динара.

б) $3 \cdot (2 \cdot 500) = 3 \cdot 1000 = 3000$

Како свака кутија слагалица кошта 1000 динара, 3 кутије коштају 3000 динара. Дакле, 6 књига и 3 кутије са по 2 слагалице коштају исто, па ће купац купити све.

Закључујемо: $(3 \cdot 2) \cdot 500 = 3 \cdot (2 \cdot 500)$, то јест, **за свака три природна броја a, b, c важи: (a · b) · c = a · (b · c).**

3. Израчунај производ на лакши начин: $4 \cdot 444 \cdot 2500$

Мењамо места чиниоцима и здружујемо их на следећи начин

$4 \cdot 444 \cdot 2500 = (4 \cdot 2500) \cdot 444 = 10000 \cdot 444 = 4 \cdot 440\,000.$

24. Дељење са остатком

1. На излет је пошло укупно 205 ученика четвртог разреда. Да ли могу да се распореде у 4 аутобуса тако да у сваком буде једнак број ученика?

Рачунамо:

205
- 20
05
- 4
1

Не могу да се распореде тако да у сваком буде једнак број ученика. У 3 аутобуса ће бити по 51 ученик, а у четвртом ученик више, то јест, 52. Тај број 1 се, као што знамо од раније, назива **остатак и он мора увек бити мањи од делиоца.**

2. Никола је поставио Младену задатак:

Замислио сам један број. Када сам га поделио са 8 добио сам број 539 и остатак 7. Који сам број замислио?

Младен рачуна овако:

Замишљени број мора бити за 7 већи од производа бројева 539 и 8.

Дакле, замишљени број је: $539 \cdot 8 + 7 = 4319$, јер је:

4319 : 8 = 539
- 40
31
- 24
79
- 72
7

25. Множење и дељење вишеструким декадним јединицама

1. Један курс пливања траје 28 часова. Сваки час пливања траје по 30 минута.

а) Колико минута траје читав курс?

$28 \cdot 30 = 28 \cdot (3 \cdot 10) = (28 \cdot 3) \cdot 10 = 84 \cdot 10 = 840$

б) Један минут траје 60 секунди.

Дакле, $30 \cdot 60 = 3 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10 = (3 \cdot 6 \cdot 10) \cdot 10 = 180 \cdot 10 = 1800$

Или, $30 \cdot 60 = (3 \cdot 10) \cdot (6 \cdot 10) = (3 \cdot 6) \cdot (10 \cdot 10) = 18 \cdot 100 = 1800$, па цео курс траје:

$28 \cdot 30 \cdot 60 = 28 \cdot (30 \cdot 60) = 28 \cdot 1800 = 50400$ секунди.

Дакле: вичеструким декадним јединицама множимо неки број тако што тај број помножимо бројем декадних јединица, а онда производу допишемо онолико нула колико их има декадна јединица којом множимо.

2. У каси једног одељења четвртог разреда налази се 279 динара, а у каси другог одељења 27900 динара.

а) Ако сваки од ученика добије по 9 динара из прве касе, колико је ученика у одељењу?

б) Колико је ученика у другом одељењу, ако сваки из класе добије по 900 динара?

Радимо:

а) $279 : 9 = 31$. У одељењу је 31 ученик јер је $991 = 749$

б) $27900 : 900 = 31$ јер је $900 \cdot 31 = 27900$

Закључујемо:

Вишеструком декадном јединицом делимо тако што у дељенику и делиоцу прво прецртамо онолико нула колико има делилац, а онда делимо на начин како смо научили да делимо једноцифреним бројем.

3. Милошеви родитељи су решили да поставе плочице у кухињи чија је ширина 4m, а дужина 5m. Колико им плочица треба ако је дужина и ширина плочице 20cm?

Рачунамо: 1m = 10dm = 100cm, 1dm = 10cm. Површина пода кухиње је $400 \cdot 500 = 200000$ cm².

Једна плочица има површину $20 \cdot 20 = 400$ cm².

Број плочица се добија када се површина пода подели са површином једне плочице: $200000 : 400 = 2000 : 4 = 500$.

Значи, треба им 500 плочица, јер је $500 \cdot 400 = 200000$.

26. Множење вишецифреним бројевима

1. Путнички авион “боинг 747” лети просечном брзином 742 километара на сат. Колики је пут прешао за нешто више од 10 година, то јест, тачно за 91 843 сата?

Рачунамо:

а) *Прво множимо стотинама, па десетицама и на крају јединицама:*

$91843 \cdot 742 = 91843 \cdot (700 + 40 + 2)$

$= 91843 \cdot 700 + 91843 \cdot 40 + 91843 \cdot 2$

$= 64290100 + 3673720 + 183685$

Краће записујемо: $\underline{91843 \cdot 742}$

642901 (S)

367372 (D)

183686 (J)

68147506

b) *Прво множимо јединицама, па десетицама, а онда стотинама:*

$\underline{91843 \cdot 742}$

183686 (J)

367372 (D)

642901 (S)

68147506

Најчешће се употрбљава начин множења *b*. Посебно треба водити рачуна о правилном потписивању цифара исте месне вредности.

2. За опремање једног хотела било је потребно 125 постељина и 238 пешкира. Колико је новаца било потребно за ту куповину, ако је цена једне постељине 1960 динара, а цена једног пешкира 185 динара. Рачунамо користећи олакшицу.

За куповину постељине је потребно:

$\underline{125 \cdot 196} = 245000$

750

1125

125

24500

За куповину пешкира је потребно:

$\underline{238 \cdot 185} = 44030$

1190

1904

238

44030

Укупно је потребно: 245000 + 44030 = 289030

3.

836 · 4300 Ако су неке последње цифре другог чиниоца
2508 нуле, изостављамо производе њима, па у
3344 добијеном производу здесна допишемо толико
3594800 нула.

4.

467 · 308 Ако су се у другом чиниоцу појавиле нуле између
3736 цифара различитих од нуле, изостављамо
1401 производе за још толико места колико има нула
143836 (поред сталног померања за једно место).

5.

357000 · 2500 Ако се оба чиниоца завршавају нулама,
1785 извршимо само множење цифрама различитих
714 од тих нула, па на крају допишемо онолико
892500000 нула са колико се завршавају и први и други
чинилац заједно.

Приликом откривања ових олакшица најпре задатак решавамо без олакшица, па тек после уз олакшице.

27. Дељење вишецифреним бројевима

1. За 105 ученика једне школе ручак на излету је плаћен у укупном износу од 66185 динара. Колико би сваки од ученика морао да плати свој ручак?

Рачунамо :

66185 : 305 = 217
- 610
518
- 305
2135
- 2135
0

Говоримо: 6 десетица хиљада не можемо поделити са 305, зато их преводимо у јединице хиљаде.

66 јединица хиљада није дељиво са 305 и јединице хиљаде преводимо у стотине.

661 стотина подељено са 305 су 2 стотине и неки остатак. Пишемо у количнику 2 стотине. 2С · 305 су 610 С, потписујемо испод 661 С и одузимамо. Разлику од 51 С претварамо у 510 Д и још 8 Д из дељеника дају 518 Д.

518 Д : 305 је 1 Д. Пишемо у количнику на месту десетица 1. 1 Д пута 305 су 305 Д, потписујемо испод 518 Д и одређујемо разлику од 213 Д. Њих преводимо у 2 130 J и још 5 J из дељеника дају 2 135 J.

2 135 J подељено са 305 су 7 J и у количнику на месту јединица пишемо 7. 7 J пута 305 су 2 135 J. Дакле, немамо остатак.

Дакле, сваки од ученика би морао да плати по 217 динара.

Објашњавања дељења се у каснијем раду изостављају и поступак се скраћује и механизује. Ако се при дељењу јави остатак, провера се врши тако што се одреди производ делиоца и количника и том производу се дода остатак

2. И Никола и Младен знају добро да деле. Мама им је дала да поделе један исти број: Никола са 168, а Младен са 195. Никола је добио резултат 231 и остатак 21. Који је резултат добио Младен?

Рачунамо:

x – непознати број добијамо тако што делилац (168) помножимо са количником (231) и додамо остатак.

168 · 231 = 38808
168
504
336
38808

Тражени бро је: x = 38808 + 21 = 38829

Младен је добио: 38829 : 195 = 199

- 195 Резултат 199
1932 Остатак 24
- 1755
1779
- 1755
24

Провера: 199 · 195 = 38805 x = 38805 + 24 = 38829

995
1791
+199
38805

Тражени број је 38829.

28. Зависност производа од чинилаца

1. Милош је имао 120 новчаница од по 10 динара, а Милица 120 новчаница од по 20 динара Шта можеш да рачунаш?

а) Рачунамо колико је новаца имао Милош.

б) Колико је новаца имала Милица.

в) Ко је имао више и колико пута више.

с) Милош је имао 120 · 10 = 1200 динара

b) Милица је имала 120 · 20 = 120 · (10 · 2) = (120 · 10) · 2 = =1200 · 2 = 2400

b) Милица је имала 2 пута више новаца.

Закључујемо на основу рачунања у горњем примеру:

Ако су *a, b, c, x* природни бројеви, и ако је $a \cdot b = c$ онда је

$(a \cdot x) \cdot b = c \cdot x$

$a \cdot (b \cdot x) = c \cdot x$

Производ се повећава онолико пута колико пута се повећава један од чинилаца.

2. Ако је $a \cdot b = 8$ израчунај $(a \cdot 3) \cdot (b \cdot 4)$. Шта можеш да закључиш?

Рачунамо примењујући замену места и здруживање чинилаца.

(a · 3) · (b · 4) = (a · b) · (3 · 4) = 8 · 12 = 96 Производ се увећава 12 пута. Закључујемо:

Производ се увећава онолико пута колико пута се повећавају један и други чинилац.

3. Милош је ушао у банку са 300 новчаница од по 10 динара. Желео је да добије новчанице од по 50 динара. Са колико новчаница ће Милош изаћи из банке?

Рачунамо:

300 · 10 = 3000

Милош је имао 3000 динара.

3000 : 50 = 60

Милош ће изаћи са 60 новчаница што је 5 пута мање од 300.

Дакле, ако се вредност новчанице повећала 5 пута број новчаница се смањио 5 пута. Закључујемо:

Ако су a, b, c, x природни бројеви, при чему су a и б дељиви са x, важи: ако је

a · b = c

онда је

(a : x) · b = c : x

a · (b : x) = c : x

Производ се смањује онолико пута колико пута се смањи један чинилац.

4. Ако је a · b = 2000 израчунај:

а) (a : 2) · б =

б) a · (b : 2) =

в) (a : 2) · (b : 2) =

Рачунамо:

а) (*a* : 2) · б = (*a* · b) : 2000 : 2 = 1000

б) a · (b : 2) = (a · b) : 2 = 2000 : 2 = 1000

в) (a : 2) · (b : 2) = (a · b) : 2 : 2 = 2000 : 2 : 2 = 1000 : 2 = 500

Дакле, **ако се и један и други чунилац смање по 2 пута производ ће се смањити 4 пута.**

5. Допуни реченицу

а) Ако се један чинилац увећа 4 пута, а други 2 пута производ ће се _____пута.

б) Ако се један чинилац смањи 3 пута, а други 5 пута, производ ће се _____пута.

Решење:

а) Увећати 8 пута.

б) Смањити 15 пута.

29. Непроменљивост производа

1. Странице једног правоугаоника су 10cm и 1000cm. Постоје ли правоугаоници исте површине као што је површина датог правоугаоника, али да су им димензије другачије?

Рачунамо:

Површина датог правоугаоника је 10000 cm^2 јер је

$10 \cdot 1000 = 10000$

а) Како је $10000 = 50 \cdot 200$ то други правоугаоник може да има странице 200cm и 50cm.

б) $10000 = 40 \cdot 250$ па су странице трећег правоугаоника 40cm и 250cm.

в) $10000 = 20 \cdot 50$ Четврти правоугаоник има странице 20cm и 500cm.

г) $10000 = 1 \cdot 10000$ Пети правоугаоник може да има странице 1cm и 10000 cm.

Закључујемо: **производ се не мења ако се један чинилац смањи неки број пута, а други чинилац повећа исти толики број пута, то јест, ако су a, b, x природни бројеви, при чему су *a* и *б* дељиви са *x*, онда важи:**

$(a \cdot x) \cdot (b : x) = a \cdot b$

$(a \cdot x) \cdot (b \cdot x) = a \cdot b$

2. Користећи "непроменљивост производа" израчунај на лакши начин:

а) $25 \cdot 88$

б) $266 \cdot 50$

в) 2500 · 416

Рачунамо:

а) 25 · 88 = (25 · 4) · (88 : 4) = 100 · 22 = 2200

б) 266 · 50 = (266 : 2) · (50 · 2) = 133 · 100 = 13300

в) 2500 · 416 = (2500 · 4) · (416 : 4) = 10000 · 14 = 14000

30. Зависност количника од дељеника и делиоца

1. Цена неке робе је износила 2400 динара у фабрици. Док је стигла у продавницу она се, због разних трошкова, повећала два пута. По колико динара би дао сваки ученик једног одељења од 40 ученика четвртог разреда: *а)* када би робу купио у фабрици; *б)* када би робу купио у продавници? Шта уочавамо?

Рачунамо: *а)* 2400 : 40 = 60. Сваки ученик би дао по 60 динара. *б)* (2400 · 2) : 40 = 4800 : 40 = 120. Сваки ученик би дао по 120 динара.

Уочавамо да се дељеник увећао два пута, па се и количник увећао 2 пута.

2. При печењу месо "калира", губи од своје тежине, због испаравања воде, тако да се тежина смањи 3 пута. По колико ће грама печења добити сваки од 200 гостију на једном свечаном ручку ако је домаћин припремио за ту сврху 240 kg свежег меса?

Шта примећујемо?

Рачунамо: 240 kg = 240000 g.

240000 : 200 = 1200

За сваког госта домаћин је припремио 1200 g свежег меса.

(240000 : 3) : 200 = 80000 : 200 = 400

Сваки гост ће добити 400 g печења.

Примећујемо да се дељеник смањио 3 пута, па се и количник смањио 3 пута.

Уопште: **Ако су *a, b, c, x* природни бројеви, при чему је *a* број дељив са *x*, имамо:**

a : b = c

(a · x) : b = c · x

(a : x) : b = c : x.

3. Користећи једнакост 150000 : 25 = 6000 израчунај:

а) 30000 : 25

б) 50000 : 25

в) 1500000 : 25

г) 15000 : 25

Рачунамо:

а) 30000 : 25 = (150000 : 5) : 25 = (150000 : 5 = 60000 : 5 = 120

б) 50000 : 25 = (150000 : 3) : 25 = (150000 : 25) : 3 = 6000 : 3 = 2000

в) 1500000 : 25 = (150000 · 10) : 25 = (150000 : 25) · 10 = 60000

г) 15000 : 25 = (150000 : 10) : 25 = (150000 :25) : 10 = 6000 : 10 = 600.

4. У једној штампарији је штампано 1600 књига које је требало распоредити у кутије, тако да у свакој кутији буде по 40 књига.

а) Колико кутија је употребљено да би се ставиле све књиге?

б) Када кутије стигну у књижару, продавац их препакује тако да у свакој кутији буде 2 пута већи број књига. Колико је кутија сада било потребно?

в) Продаја књига је на крају извршена тако што је укупан број од 1600 књига препакован тако да се у свакој кутији број књига смањио 8 пута. Колико је кутија тада било потребно? Шта запажамо?

Рачунамо:

а) 1600 : 40 = 40

Употребљено је 40 кутија.

б) Број књига у кутији сада износи 40 · 2, па је број кутија

1600 : (40 · 2) = 1600 : 80 = 20.

Сада је потребно 20 кутија.

в) Број књига у кутији је 40 : 8

Број кутија је 1600 : (40 : 8) = 1600 : 5 = 320.

Тада је било потребно 320 кутија.

Запажамо да ако се делилац повећава неки број пута количник се смањује толики број пута. Када се делилац смањи неки број пута, количник се повећа толики број пута.

Уопште: **ако су *a, b, c, x,* природни бројеви и *a : b = c.* Онда важи:**

$$a : (b \cdot x) = c : x$$

a : (b : x) = c · x

5. Упиши потребан број тако да добијеш тачну једнакост:

а) 1800 : (300 : 2) = (1800 : 300) ·

б) 240000 : (400 · 4) = (240000 : 400) :

в) 72000 : (800 : 8) = (_____ : 800) · 8

г) 420000 : (600 · 3) = (420000 : _____) : 3

Одговор: *а*) 2; *б*) 4; *в*) 72000; *г*) 600.

31. Непроменљивост количника

1. У једној фабрици ради у првој смени 60 радника, а у другој 2 пута више. Ако број радних сати радника прве смене у току једне седмице износи 2400:

а) По колико радних сати ради радник прве смене?

б) Колико укупно радних сати имају радници друге смене, ако сваки радник друге смене ради исто као и радник прве смене?

в) Шта примећујемо?

Рачунамо:

а) 2400 : 60 = 40

Сваки радник ради 40 сати седмично.

б) Број радника друге смене је 2 · 60 = 120.

120 · 40 = 4800. Укупан број радних сати радника друге смене је 4800.

в) Примећујемо да је 4800 = 2400 · 2 и

2400 : 60 = (2400 · 2) : (60 · 2) = 40,

то јест, да се количник није променио када смо дељеник и делилац повећали два пута.

Уопште: **ако су *a*, b, c, x природни бројеви онда важи**

(a · x) : (b · x) = a : b

да се количник не мења када се и дељеник и делилац повећа исти број пута.

2. Награду од 150000 динара треба поделити ученицима једног одељења четвртог разреда. У одељењу је 30 ученика:

а) По колико динара ће добити сваки ученик?

б) Ако бисмо награду смањили 10 пута, па поделили само на прва три ученика, по колико би свко од њих добио?

в) Шта примећујемо?

Рачунамо:

а) 150000 : 30 = 50000

Сваки ученик би добио по 5000 динара.

б) Ако бисмо награду смањили 10 пута она би износила

150000 : 10 = 15000

Прва три ученика би добила по: 15000 : 3 = 5000 динара.

в) Примећујемо да је 3 = 30 : 10, то јест, да су резултати дељења *а*) и б), то јест,

150000 : 30 = (150000 : 10) : (30 : 10) = 5000

в) Примећујемо да се количник није променио када смо и дељеник и делилац смањили 10 пута. Уопште, **ако су a, b, c, x природни бројеви онда важи: (a : x) : (b :x) = a : b, то јест, да се количник не мења када се и дељеник и делилац смање исти број пута.**

3. Израчунај на лакши начин:

а) 206000 : 50

б) 600000 : 2500

в) 390000 : 330

Рачунамо користећи “непроменљивост производа”.

а) 206000 : 50 = (206000 · 2) : (50 · 2) = 412000 : 100 = 4120

б) 600000 : 2500 = (600000 · 4) : (2500 · 4) = 2400000 : 10000 = 240

в) 390000 : 300 = (390000 :3) : (300 : 3) = 130000 : 100 = 1300.

32. Једначине са множењем и дељењем

1. Када Јагода помножи број својих година са 670 добије број 20100. Колико Јагода има година?

Решавамо исто као и задатке са непознатим чиниоцем до 1000, само што су сада неки бројеви већи од 1000. Број Јагодиних година означимо са x.

$x \cdot 670 = 20100$

$x = 20100 : 670$

$x = 30$

Провера: $30 \cdot 670 = 20100$. Јагода има 30 година.

Дакле, непознати чинилац x се рачуна тако што се производ подели непознатим чиниоцем.

2. Ната је имала 1268 динара. Од тате је добила шестину његове плате и сада има 3121 динар. Колика је татина плата?

Рачунамо: Татина плата износи x динара, а шестина $x : 6$ динара.

Дакле, $1268 + \mathbf{x : 6} = 3121$

$\mathbf{x : 6 =} 3121 - 1268$

$x : 6 = 1853$

$x = 1853 \cdot 6$

$x = 11118$

Татина плата је 11118 динара. Провера:

$1268 + 11118 : 6 = 1268 + 1853 = 3121$.

Непознати дељеник се рачуна тако што се количник помножи познатим делиоцем.

3. Реши једначине:

а) $3 \cdot x + 8 \cdot x = 5797$

б) $(x : 52) : 42 = 3$

в) $(x \cdot 35) : 29 = 140$

г) $(5216 – x) \cdot 211 = 1899$

Решавамо:

а) $3 \cdot x + 8 \cdot x = 5797$. Приметимо: $3 \cdot x + 8 \cdot x$ значи на 3 места по x и на осам места по x то је на 11 места по x.

Значи, $3 \cdot x + 8 \cdot x = 11 \cdot x$

$11 \cdot x = 5797$

$x = 5797 : 11$

$x = 527$

Провера: $3 \cdot 527 + 8 \cdot 527 = 1581 + 4216 = 5797$

б) $(x : 52) : 42 = 3$

x : 52 = 3 · 42

x : 52 = 126

x = 126 · 52

x = 6552

Провера: (6552 : 52) : 42 = 126 : 42 = 3

в) (x · 35) : 29 = 140

x · 35 = 140 · 29

x · 35 = 4060

x = 116

Провера: (116 · 35) : 29 = 4060 : 29 = 140

г) (5216 – x) · 211 = 1899

5216 – x = 1899 : 211

5216 – x = 9

x = 5216 – 9

x = 5207

Провера: (5216 – 5207) · 211 = 9 · 211 = 1899

33. Неједначине са множењем и дељењем

1. Никола је за рођендан добио од 3 ујака исти број динара. Када је купио књигу која кошта 783 динара остало му је мање од 1653 динара. Колико је новаца Никола могао да добије од једног ујака?

Рачунамо овако:

x – сума новаца коју је Никола добио од једног ујака.

3 · **x –** 783 < 1653**.**

3 · x је непознати умањеник.

Знамо да се разлика смањује ако се умањеник смањује. Дакле,

3 **·** **x** < 1653 – 783

3 · x < 870

x је непознати чинилац. Производ се смањује када се смањује чинилац, па је

x < 870 : 3

x < 290

Никола је могао да добије од сваког ујака по мање од 290 динара. Али како је имао да купи књигу која кошта 783 динара он је морао да добије од сваког ујака бар по 783 : 3 = 261 динара.

Дакле, Никола је могао да добије од сваког ујака

x є {261, 262, . . . 289}

Уопште: ако су a, b, x, природни бројеви онда важи

a **· x < 8**

x < 8 : ***a***

2. Младен је замислио један број. Затим је замишљени број помножио разликом бројева 234 и 2193 и добио производ који је већи од 2501. Који је број замислио Младен?

Рачунамо:

x - број који је замислио Младен.

x · (2234 – 2193**) >** 2501 Овде је x непознати чинилац.

x · 41 > 2501

x > 2501 : 41 Производ се повећава ако се повећава чинилац.

x > 61

x є {62, 63, . . . }

Уопште: Ако су a, b, x, природни бројеви, важи:

a **· x > b**

x > b : ***a***

3. Нацртај бројевну праву и на њој тамном бојом означи решење неједначине:

а) (x + 123) · 21 > 2625

б) 55 · (624 – x) > 16555

в) (2136 – 2121) · x <2549 + 961

г) (315 : 15) · x < 126 · 9

а) Најпре решимо неједначину, а онда решење неједначине представимо на бројевној правој.

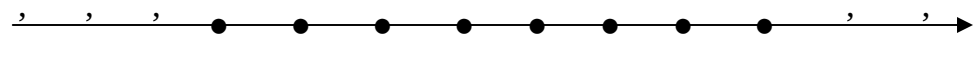
(x + 123) · 21 Z 2625

x + 123 > 2625 : 21 x є {3,4,5, . . .}

x + 123 > 125

x >125 – 123

x > 2



0 1 2 **3** **4** **5** **6** **7** **8**

б) 55 · (624 – x) > 16555

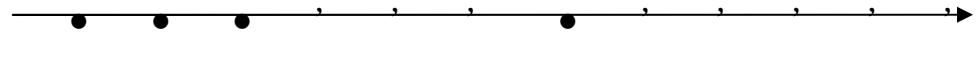
624 – x > 16555 : 55

624 – x > 301 x је непознати умањилац, па је

x < 624 – 301

x < 323

x є {1, 2, 3, . . . 322}

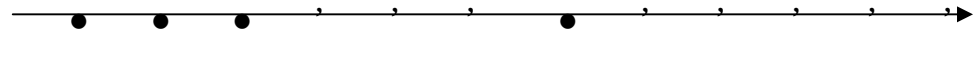


0 **1** **2** **3** **322** 323 324

в) (2136 – 2121) · x < 2549 + 961

15 · x < 3510

x < 234



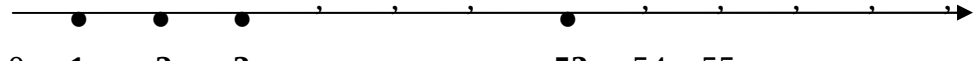
0 **1** **2** **3** **233** 234 235

г) (315 : 15) · x < 126 · 9

21 · x < 1134

x < 1134 : 21

x < 54



0 **1** **2** **3** **53** 54 55

34. Математички изрази

1. Мила је пошла у продавницу да купи 56 комплета салвета и тањирића за рођендан. Понела је од куће 2200 динара, али је успут сусрела мама и додала јој још 3400 динара. Ако би купила само један

комплет и још бомбона и чоколада за 560 динара, платила би зато 660 динара. Састави израз тако да добијеш тачну једнакост, и сазнаш колико кошта један комплет салвета и тањирића.

$$(2200 + 3400) : 56 + 560 = 660$$
$$5600 : 56 + 560 = 660$$
$$100 + 560 = 660$$
$$660 = 660$$

Сазнали смо да један комплет кошта 100 динара и још да се, ако постоје заграде у изразу израчуна прво оно што је у заградама, а ако их нема, прво се множи и дели, па затим сабира и одузима.

2. Стави заграде тако да једнакости буду тачне.

а) $625 : 25 : 100 – 75 = 1$

б) $112 \cdot 36 + 18 – 285 = 5763$

в) $100 + 1787 : 111 + 119 + 10 \cdot 36 = 496$

Одговор:

а) $(625 : 25) : (100 – 75) = 1$

б) $(112 \cdot (36 + 18) – 285 = 5763$

в) $(100 + 1787) : 111 + 119 + 10 \cdot 36 = 496$

35. Проблемски задаци

Није сваки задатак проблемски задатак. Задатак који је већ решаван, али су у њему промењени бројевни задаци, није проблемски задатак. Или задатак код кога се на основу датих података и уз примену већ научених правила одмах долази до резултата такође није проблемски задатак. То је задатак за вежбање.

Проблемски задатак је онај задатак код кога се не може праволинијски и без тешкоћа доћи до решења. Он садржи баријеру коју није лако савладати. Да би се дошло до решења морају се дати подаци добро проучити, преуредити, упоредити, повезати на нов начин у нове целине, па тек онда решавати проблем, користећи неки од метода (о којимо смо говорили у овом раду).

Дакле, решавање проблемских задатака је добрим делом стваралачки умни чин ученика који тече спонтано, уколико је ученик

мотивисан да реши проблем. Али, решавање проблемских задатака се и учи. Наставников задатак је да научи ученике како да решавају проблемске задатке, комбинујући већ научено и примењујући у новонасталој ситуацији. Он мора да укаже ученицима да најпре треба да више пута прочитају задатак, у целини и део по део, и да га *разумеју.* Затим да израде *план* за решавање задатка и да спроведу свој план и, на крају, да *провере* добијено решење.

Проблемских задатака има разних врста и тежина. Ми ћемо дати неколико примера оних задатака који су предвиђени програмом за четврти разред основне школе.

На почетку ћемо испричати причу о Карлу Фридриху Гаусу (1777-1853) који је још као дечак показивао даровитост за математику.

Када је једном приликом Гаусов учитељ хтео да запосли читаво одељење, желећи мало времена да сам нешто уради, дао је ученицима да израчунају овај збир бројева:

81 297 + 81 495 + 81 693 + 81 891 + ... + 100 503 + 100 701 + 100 899

Био је не само изненађен већ и затечен и потпуно збуњен када му је Гаус само после неколико минута донео написан тачан резултат

9 109 800. Свима је било јасно, а учитељу више од других, да се ради о генијалном дечаку. Хајде да видимо како је то Гаус тако брзо израчунао. Јасно је да није сабирао број по број. Дакле, претпоставља се да је увидео три ствари.

Прво је приметио да је разлика свака два узастопна сабирка 198, то јест, да је:

81495	**81693**	**81891**	**. . .**	**100701**	**100899**
- 81297	**- 81495**	**- 81693**		**- 100503**	**- 100701**
198	**198**	**198**		**198**	**198**

Друго, израчунао је да има 100 сабирака, јер је:

81 297 + 99 · 198 = 81 297 + (100 · 198 -198) = 100 899

И треће, приметио је да је збир првог и последњег сабирка једнак збиру другог и претпоследњег, а то једнако збиру трећег сабирка од напред и трећег сабирака отпозади...

81 297 + 100899 = 81 495 + 100 701 = 81 693 + 100 503 =... = 182 196

Сада му је било лако да израчуна да је тражени збир једнак:

182 196 · 50 =9 109 800

1. Израчунај збир првих 100 природних бројева. Пишемо:

1 + 2 + 3 + . . . + 98 + 99 + 100 и уочавамо да је збир првог и последњег броја 101, другог и претпоследњег такође 101, трећег пара такође 101 . . . Оваквих парова има 50 па је тражени збир:

(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + . . + (49 + 52) + (50 + 51) = 50 · 101 = =5050

2. Производ три броја је 390000. Који су то бројеви ако се зна да је производ првог и дугог броја 3200, а другог и трећег броја 3000?

x · y · z = 390000

x · y = 3250 z = 390000 : 3250 = 120

3250 · z = 390000

x · y · z = 390000

y · z = 3000

x · 3000 = 390000

x = 390000 : 3000 = 130

x · y = 3250

130 · y = 3250

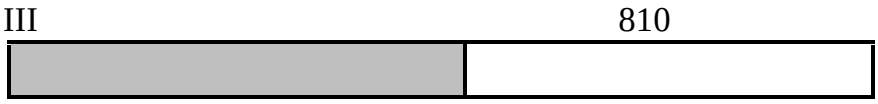
y = 3250 : 130 = 25

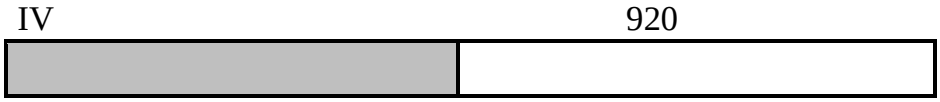
Провера:

120 · 130 · 25 = 390000

3. Четири друга имала су укупно 5830 динара Решили су да саставе новац и купе комплет дискова са снимцима кошаркашких утакмица њиховог омиљеног тима и 4 карте за кошаркашку утакмицу. Када је први дечак за дискове дао 650 динара, други 730, а трећи 810, а четврти дечак 920 динара, остале су им потребне суме новца да могу да купе карту за узакмицу. Колико је новаца пре куповине дискова сваки од ових дечака имао? Одговор:

5830





$4 \cdot x + 650 + 730 + 810 + 920 = 5830$

$4 \cdot x + 3110 = 5830$

$4 \cdot x = 5830 - 3110$

$4 \cdot x = 2720$

$x = 2720 : Z$

$x = 680$

I дечак је имао $680 + 650 = 1330$

II дечак је имао $680 + 730 = 1410$

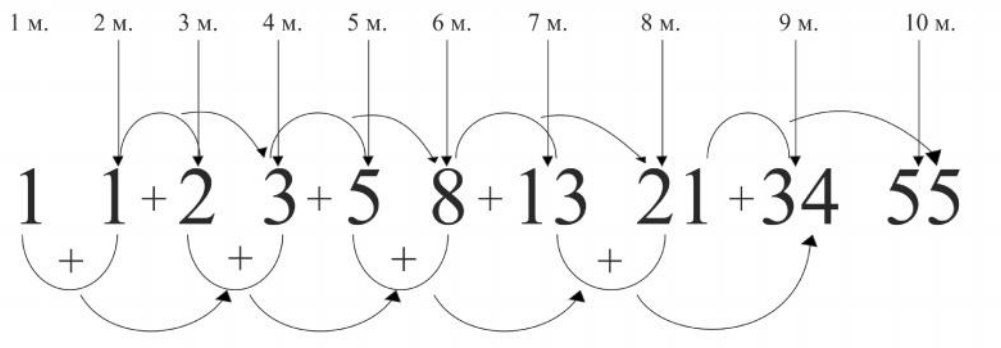
III дечак је имао $680 + 810 = 1490$

IV дечак је имао $680 + 920 = 1600$

Један од познатих математичара који је живео пре 800 година био је Леонардо из Пизе, познатији као Фибоначи. У једној од својих књига поставио је следећи задатак.

Неки човек је ставио пар зечева на место које је са свих страна ограђено зидовима. Сваки пар зечева може да донесе нови пар после два месеца од дана рођења. Колико ће парова зечева бити рођено на том месту после годину дана (у 12. месецу)?

Решавамо посматрајући низ.



На основу овога низа можемо закључити да ће у 11. месецу бити рођено 34 + 55 = 89 парова, а у 12. месецу 55 + 89 = 144 парова.

Бројеви овога низа називају се Фибоначијеви бројеви.

Сваки низ у коме се сваки члан израчунава тако што се саберу претходна два члана назива се Фибоначијев низ.

5. На једној журци је једног тренутка оглашена игра “занимљива питања”. Победник је онај ко постави најзанимљивије питање, а награду дели са другим који на то питање одговори.

Милош је задао два броја, 19 и 30, и затражио да се одреде друга два броја који би са задата два броја чинили Фибоначијев низ, али тако да 36 буде задњи у низу.

Размишљамо:

a b

●, ●, 19, 36

b + 19 = 36

b = 36 – 19

b = 17

a + b = 19

a + 17 = 19

a = 19 – 17

a = 2

IV. МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ ПРОБЛЕМСКЕ НАСТАВЕ И ПРЕГЛЕД НЕКИХ ДОСАДАШЊИХ ИСТРАЖИВАЊА

Не треба тражити од људи више него што могу дати, али зато од њих треба захтевати да дају све што могу дати

Ганди

Проблемска настава као дидактички и методички проблем на теоријском плану је заокупљала пажњу наших теоретичара наставе. Међутим, емпиријских истраживања није било у довољном броју. На основу прегледа онога што је до сада урађено могуће је разликовати две врсте радова и истраживања, или два њихова нивоа, а они су:

(1) дидактички ниво - радови (и истраживања) о проблемској настави у целини, или општи радови о проблемској настави, и

(2) методички ниво - радови (и истраживања) о проблемској настави у појединачној настави, у настави посебних наставних предмета какви су математика, физика, матерњи језик, и други.

Доста исцрпан преглед радова о проблемској настави, који смо направили за потребе овог истраживања показује да преовлађују радови из прве групе, дакле, дидактички ниво радова.

Први радови ове врсте на нашем простору појавили су се шесдесетих година20.века. Педагог Р. Ничковић међу првима, , објављује (и данас актуелан) чланак „Ефекат трансфера у учењу помоћу решавања проблема“ (1966), потом и одредницу „Проблемска настава“ (1967), а психолог Р. Квашчев чланак „Настава и учење у виду решавања проблема“ (1968).[1] Исте године Р. Ничковић је објавио и студију *Учење путем решавања проблема у настави* (1968), а неколико година касније и студију *Настава путем решавања*

[1] Библиографски подаци о истраживањима и радовима који се наводе могу се видети у посебном делу дисертације “Литература“.

проблема (1974). Седамдесетих година појавила су се још неки радови, а међу њима и: „Проблемска настава“ Р. Теодосића (1970), „Проблемска настава - једна концепција совјетских дидактичара“ Ј. Пивца (1974) и „Решавање проблема у експерименталним условима и проблемска настава“ С. Крклуша (1977).

С обзиром на значај и актуелност проблемске наставе , у деветој деценији 20. века објављен је релативно мали број радова - петнаестак. Ж. Аврамовић је на почетку деценије објавио рад „Учење путем решавање проблема“ (1982), а средином деценије појавили су се и радови: „Проблемска настава као комплексни дидактички систем" (1984) Р. Ничковића, "Границе проблемске наставе“ (1984) Ј. Пленковића, „Однос когнитивно - афективно у проблемском приступу настави“ (1984) Б. Ракића, „Проблемска настава“ (1985) В. Пољака и „Неке могућности примјене проблемског учења у разредној настави“ (1986) В. Башић. До 1990. године појавили су се и радови: „Образовни ефекти путем решавања проблема у настави“ (1987) М. Весковића, „Могућности учења путем решавања проблема“ (1987) К. Вујића, „Васпитно-образовни рад путем решавања проблема у функцији интелектуалног развоја“ (1987) Д. Митровић, „Проблемска настава као дидактички принцип“ (1987) О. Поповића, „Образовни ефекти учења путем решавања проблема у настави“ (1987) З. Родића и М Весковића, „Нека искуства увођења учења путем решавања проблема у четртом разреду основне школе“ (1987) М. Тодосијевић и Б. Инђић, „Један час проблемске наставе“ (1988) Б. Цветковића, „Неке могућности примене учења путем решавања проблема у настави основне школе“ (1988) К. Воскресенског, „Учење путем решавања проблема“ (1989) Т. Ковач-Церовић и „Учење помоћу решавања проблема (проблемска настава)“ (1989) Б. Милићевића.

До краја 20. века и од тада до наших дана објављен је приближно исти број радова и расправа као у претходном периоду: М. Арсић „Активна позиција ученика и проблемска настава“ (1990), С. Крклуш и М. Ђукић, „Дидактичке трансформације научних и наставних метода у систему проблемске наставе“ (1990), С. Голубовић „Проблемска настава као дидактички систем“ (1991), К. Ђокић

„Проблемско развојна настава“ (1991), Е. Каменов и Ј. Рацков, „Проблемска настава као подстицај интелектуалног развоја“ (1994), С. Симић „Активно учење кроз примену проблемског и истраживачког интердисциплинарног приступа у настави“ (1995), М. Ђукић „Прилози проблемској настави (Индивидуализација-проблем задатака)“ (1995), Д. Андрић „Примена проблемског учења у разредној настави“ (1995), М. Дејић „Кратак осврт на проблемску наставу“ (1998), Н. Мијановић „Проблемска настава у функцији ефикасног индивидуалног развитка личности“ (1998) и Д. Бранковић, „Кооперативно-интерактивно учење у проблемској настави“ (2000).

Свакако да то није све. Наиме скоро у свакој дидактици, у делу о врстама наставе, разрађеније или површније, обрађена је и проблемска настава. Такав је случај и у радовима који су издвојено посвећени настави. Илустрације ради наводимо две такве дидактике и три рада. Као прву дидактику наводиму ону коју је написао М. Вилотијевић - *Дидактика 1-3* (1999) , а друга је коуторско дело групе дидактичара са С. Јукићем на челу - *Дидактика* (1998). Од радова који су целовито посвећени врастама наставеи у којима је обрађена и проблемска настава, свакако да најпре треба навести студију П. Шимлеше *Сувремена настава* (1969), затим студију Ј.Ђорђевића под називом *Савремена настава* (1981), а онда и М. Вилотијевићеву студију *Врсте наставе* (1998).

Радова и расправа из друге групе, које смо означили као методичке радове о проблемској настави, далеко је мање.

Хронолошки посматрано прво треба навеси студију *Учење путем решавања проблема у настави - Теорија, пракса и експериментална провера на примеру елементарне физике* (1970). Она је, у ствари, извештај урађен у Институту за педагошка истраживања у Београду поводом реализације петогодишњег пројекта. А онда студију, која је изузетно важна за проблемску наству у настави математике, Р. Ничковића *Учење путем решавање проблема у елементарној настави математике (Експериментална провера на примеру наставног програма математике у I и II разреду основне школе)* (1976). Објављена је средином осамдесетих година, а у њојој је

аутор изнео резултате експерименталних истраживања проблемске наставе. Потом монографију Д. Росандића *Проблемска, стваралачка и изборна настава књижевности* (1980). Затим је М. Стевановић објавио књигу о проблемској настави у настави књижевности под насловом *Учење путем решавања проблема у настави књижевности* (1985). Потом је Т. Петровић објавио монографију *Проблемско-развојна настава физике* (1988). После скоро једне деценије изашла је студија М. Дејића *Методичка трансформација одабраних садржаја нумеричке математике* (1996). Она представља делове ауторове докторске дисертације *Методичка трансформација и осавремењивање наставе нумеричке математике* (1996).

Има мањих радова (чланака) који су преовлађујуће из наставе математике. Средином последње деценије20. века Н. Петровић и М. Дејић су написали и сопштили заједнички рад „Могућности проблемске наставе у нумеричкој математици“ (1994). У исто време М. Дејић је објавио чланак „Множење (дељење) приближних бројева - Настава путем решавања проблема на примеру једне наставне јединице“ (1994), а нешто касније у коауторству са Н. Петровићем и чланак „Један модел примене проблемске наставе у математици“ (1995). На крају, наводимо само два рада који су посвећени некој другој настави - настави историје и настави природе и друштва: „Проблемска настава повијести и флексибилна диференцијација ученика“ (1984) И. Рендић-Миочевић, и „Самостални стваралачки рад ученика у проблемској настави природе и друштва (теоријски приступ)“ (2001) Г. Мишчевић..

Мало је емпиријских истраживања и још мање симпозијума и научно-стручних скупова било на тему учења путем проблемске наставе.

Најпре треба навести истраживање урађено у Институту за педагошка истраживања у Београду у периоду од 1961. до 1965. године *Учење путем решавања проблема у настави - Теорија, пракса и експериментална провера на примеру елементарне физике* (1970). Потом истраживање које је, такође, изведено у истом Институту под руководством др Радисава Ничковића *Утицај учења путем решавања*

проблема на успех у настави математике - Експериментална провера на примеру наставног програма математике у 2. и 3. раздеру основне школе (1976). Затим, двадесетак година касније Мирко Дејић је урадио истраживање за потребе докторске дисертације под називом *Методичка трансформација и осавремењивање наставе нумеричке математике* (1996).

Р. Ничковић је резултате експерименталног истраживања саопштио у студији коју само напред навели - *Учење путем решавање проблема у елементарној настави математике (Експериментална провера на примеру наставног програма математике у1. и 2. разреду основне школе)*. Студија је објављена средином осамдесетих година (1976), и у њој су изнесени резултати експерименталног истраживања утицаја учења путем решавања проблема на успех у настави математике у I и II разреду основне школе. Р. Ничковић извештава да је експеримент потврдио хипотезу да учење путем решавања проблема представља веома ефикасан облик ученичке активности када се ради о применљивости стечених знања, посебно оних која се заснивају на позитивном трансферу као и оних која потичу са часова у којима је „проблемска" организација учења била доминантна. Такође је постигнут значајан успех и погледу трајности стечених знања, посебно оних која се односе на битније садржаје (разумевање природних законитости, откривање унутрашњих релација у појавама, и друго), и у чему је проблемска настава, иначе, дала боље резултате. Проблемска настава међутим, према резултатима експеримента није у задовољавајућој мери утицала на повишење исхода потпросечне деце, особито оне код којих су у анализи понашања током учења примећене извесне васпитне тешкоће, појаве ригидности и функционалне фиксације. Најзад, укупан резултат овог истраживања, на теоријском плану, може се сматрати новом потврдом познатог става савремене педагогије и психологије о узајамном утицају наставе и развоја. На крају, Р. Ничковић са групом са којом је извео експеримент, препоручује проблемску наставу као веома продуктиван облик наставног рада свима онима који трагају за мало познатим и неистраженим иновацијама.Проблемска настава је ту, она не захтева

скупа наставна средства. Потребни су стваралачки жар и воља да се покуша у пракси с оним што је истраживањем верификовано.

Међу симпозијумима пажњу заслужује управо онај који је био први - *Југословенски симпозијум о проблемској настави* (1983). Претходно, двадесетак година раније, у Њујорку је одржан и први научни скуп у свету - *Симпозјум о проблемској настави* (1965). Његов утицај је био огроман и заправо с њим и започиње експанзија проблемске наставе.

Скроман допринос испитивању значаја проблемске наставе и могућности њене примене чак и на предшколском узрасту је и рад *Формирање појма броја 5 путем проблемске наставе* који су написали А. Мандак и С. Ивковић (2009, стр. 47-54)

У циљу проверавања и утврђивања ефикасности проблемске наставе примењене у припремном, првом и петом разреду основне школе извршено је мало акционо истраживање у Основној школи „Душан Радовић“ у Нишу.

У складу са одредницама и карактером малих акционих истраживања, истраживачи су проблемску наставу примењивали у по једном одељењу поменутих разреда, с тим што су касније проверили резултате стечених знања и упоредили их са резултатима оних одељења у којима је примењиван класичан начин обраде садржаја (монолошка метода и фронтални облик рада).

Конкретан *циљ истраживања* је био да се код деце формира појам броја пет као једина заједничка особина свих еквипотентних (једнакобројних) скупова.

Ради постизања циља постављени су *задаци истраживања*. Задаци су се донекле разликовали, зависно од узраста ученика.

У припремној предшколској групи тражило се од деце да се скупу конкретних предмета који садржи четири елемента (са којим су се раније упознали) придода још један елемент. Наредни задатак је био да се придруживањем елемената закључи да новонастали скуп има више елемената (И то за један) од скупа који садржи четири елемента. Експеримент се понавља више пута са скуповима који садрже различите предмете. Новонастали скуп увек има један елемент више

од скупа који садржи четири елемента. Без обзира што можемо да констатујемо незајединичке особине елемената, оно што је заједничко је особина која повезује све те скупове, а то је *пет.*

У припремном разреду, дакле, изостају апстракција и генерализација, али се може деци показати и донекле увежбати графички симбол 5.

У првом разреду се захтеви повећавају па учитељ тражи од ученика да поред уочених скупова именују још неке скупове који имају по пет елемената (развија се мисаона операција апстракција). Сви ученици увежбавају писање симбола 5.

У петом разреду ученици, уз помоћ наставника, појам броја *пет* генерализују као заједничку особину свих могућих скупова који имају исти број елемената са посматраним скуповима. Скуп од пет елемената графички представљају Веновим дијаграмом где је сваки елемент представљен по једном тачком.

Након три часа (обрада, утврђивање, вежбање) и обиља дидактичког материјала И проблемских ситуација *хипотеза истраживања* да ће резултати провере стеченог знања о појму броја пет проблемском наставом бити бољи у одељењима у којима се радило на овакав начин, потврђена је. Приликом провере постављени су следећи задаци (у свим узрасним групама):

1. Од материјала који је испред тебе састави неколико скупова који имају једнак број елемената као скуп представљен на табли;
2. Уочи (састави, именуј) скуп од пет елемената;
3. Именуј неколико скупова који имају једнак број елемената као уочени скуп;
4. Наведи неколико незајединичких особина посматраних скупова;
5. Сви ови посматрани скупови имају једну заједничку особину. Наведи ту заједничку особину;
6. Наведи број елемената посматраних скупова;
7. Како се записује заједничка особина *пет?*

8. Ови скупови нису једини који имају уочену особину (једнак број елемената као представљени скуп на табли). Колико још таквих скупова има?

Статистичком обрадом података у експерименталној и контролној групи долази се до следеће табеле (M – аритметичка средина; σ - стандарна девијација; V – коефицијент варијације; % - проценат освојених бодова од укупног броја бодова):

Контролна група:

	%zad1	%zad2	%zad3	%zad4	%zad5	%zad6	%zad7	%zad8
M	95,763	94,643	87,500	88,393	85,866	89,143	64,433	28,423
φ	20,230	22,618	33,221	32,175	34,382	30,236	40,901	33,004
V	21,125	23,898	37,966	36,400	40,041	33,918	63,478	116,120
σM	1,862	2,137	3,139	3,040	3,249	2,857	3,865	3,119

Експериментална група:

	%zad1	%zad2	%zad3	%zad4	%zad5	%zad6	%zad7	%zad8
M	95,763	95,763	91,102	89,831	90,678	89,407	74,258	48,681
φ	20,230	20,230	28,217	30,354	29,198	30,559	33,664	30,234
V	21,125	21,125	30,973	33,790	32,200	34,179	45,333	62,107
σM	1,862	1,862	2,598	2,794	2,688	2,813	3,099	2,783

V. МЕТОДОЛОГИЈА РАДА

1. Проблем и предмет рада

Опште је познато, а и нека истраживања спроведена код нас су показала (Хавелка, 1990) да је средња оцена из математике готово увек нижа од средње оцене из других наставних области. Резултати тих истраживања, као и закључци базирани на индиректном приступу, при чему су коришћене посредне анализе, изнети су у студији УНИЦЕФ-а *Свеобухватна анализа система основног образовања у СР Југославиј* (Свеобухватна анализа система основног образованаау у СРЈ, 2001).

Основни налаз је да сви механизми образовног система који су од утицаја на методе наставе и учења фаворизују тзв. традиционалне методе, тј, трансмисивне и предавачке методе, методе у којима је кључно шта наставници раде. реч је о методама наставе, али не и о методама учења, које се третира скоро као узгредни исход наставе. Отуд су то методе усмерене на наставника а не на ученика. То су готово увек вербалне, предавачке, методе које ученика нужно стављају у улогу слушаоца.

Неколико је фактора у систему образовања који утичу на примену вербалне, предавачке методе. Најпре, обука садашњих наставника за примену наставних метода на већини наставничких факултета јесте обука за примену традиционалних метода. Затим, веома обимно градиво у школским програмима и релативно мало часова намећу предавачке методе, јер се тако најбрже може "реализовати" програм, то јест пренети садржај. Потом, систем рада школске инспекције, то јест, оцењивања наставника апсолутно је концетрисан на "реализацију програма. Надзорници најпре и углавном проверавају да ли је наставник испредавао све дефинисане наставне садржаје. Врло ретко се проверава каква су знања стекли ученици. На крају, такав начин оцењивања наставника рефлектује се на оцењивање знања ученика. Тако, оцењује се успешност репродуковања неколико последњих наставних јединица, а не трајна знања из целине предмета за одређени разред. Такође, готово никада се не оцењује ни како

ученици повезују знање које су стекли у оквиру различитих , и често сродних предмета.

Следствено наведеном, доминантни облици наставе (предавачки тип) и начин оцењивања успеха ученика (провера степена усвојености програмских садржаја) фаворизују механичко памћење, и то често без разумевања. Три најчешће коришћене методе наставе/учења јесу: механичко учење напамет, смислено вербално учење и практично учење. Најређе се користе: учење путем открића, стваралачко учење и кооперативно учење.

Зато у основи процеса наставе постоје заначајни проблеми. Један од њих је фаворизовање традиционалне методе наставе. Управо ове методе су најмање ефикасне са становишта усвајања стабилних, трајних и употребљивих знања. Систем обуке учитеља који воде наставу у прва четри разреда основне школе, где се примењује разредна настава, више је усредсређен на дидактику и децу. Учитељи чешће од наставника примењују приступе окренуте детету.

Како је проблемска настава нарочито погодна за примену код учења математичких саджаја, поставља се питање: *да ли је она и ефикаснији облик наставе у млађим разредима основне школе?*

То је проблем који се поставља пред нас и који ћемо покушати да решимо емпиријски, утврђујући ефекте проблемске наставе.

Дакле, предмет истраживања је реализација садржаја из области природних бројева путем проблемске наставе.

Истраживање је екпериментално, али експеримент нема за циљ само да доказује предност проблемске наставе у односу на класичну, већ и да да конкретан допринос пракси кроз приложене припреме за рад у експерименталној групи из тема *Рачунске операције у скупу природних бројева.*

Истраживањем утицаја проблемске наставе жели се допринети истраживању васпитно-образовне ефикасности проблемске наставе

2. Циљ и задаци истраживања

Циљ истраживања проистиче из предмета истраживања и он је у овом случају:

Експериментално утврдити ефекте утицаја проблемске наставе на успех ученика у савлађивању садржаја из области природних бројева.

Будући да су *задаци истраживања* операционализација циља, као основни издвојени су:

1. утврдити образовни учинак (укупан скор на тесту знања) проблемске наставе на садржајима из области природних бројева,
2. утврдити утицај висине интелигенције ученика (IQ) на успешност проблемске наставе у учењу математике,
3. утврдити степен успешности проблемске наставе у зависности од пола ученика,
4. утврдити у којој мери садржаји који су погоднији за примену проблемске наставе утичу на успех ученика.

3. Значај истраживања

Покаже ли се да смо експериментом потврдили познату чињеницу да је проблемска настава ефикаснија од традиционалне можемо рећи да је наш дидактички математички материјал дат у виду припрема за часове у знатној мери допринео том потврђивању, те да се, уз евентуалну каснију дораду, може препоручити учитељима за рад у школи. На тај начин би се повећала ефикасност наставе и подигао ниво знања код ученика.

4. Хипотетички оквир истраживања

Основна хипотеза је:

Проблемска настава у значајној мери утиче на повећање успеха ученика из математике у млађим разредима основне школе.

Потхипотезе су:

1. степен усвојености *знања о скупу природних бројева и рачунским операцијама у њему* већи је код оних ученика који су знања о томе стицали учењем путем проблемске наставе него код оних који су учили на класичан начин,
2. висина интелигенције ученика (IQ) у корелацији је са учењем путем проблемске наставе: што је интелигенција ученика већа учење путем проблемске наставе је ефикасније,
3. пол ученика не утиче битно на ефикасност учења проблемском наставом; ипак очекује се да су девојчице на овом узрасту успешније,
4. претпоставља се да је успех ученика експерименталне групе који се односи на садржаје о множењу и дељењу знатно већи у односу на садржаје о сабирању и одузимању, због веће погодности у примени проблемске наставе.

5. Методе, технике и инструменти истраживања

Предмет, циљ и задаци истраживања условили су да се у истраживању употреби више метода са одговарајућим техникама и инструментима.

5.1. Методе истраживања

(1) *Експериментална метода.* - Као основна употребљена је експериментална метода с пропратним техникама и инструментима. Реч је о елементарном моделу педагошког експеримента који се састоји у утврђивању иницијалног (почетног) стања, затим у уношењу експерименталног фактора (учење путем решавања проблема) и утврђивању завршног стања. Употребљен је експеримент са паралелним групама, од којих је једна експериментална, а друга контролна.

(2) *Статистичка метода.* – Употребљена је као помоћна, али неопходна метода. Прикупљени подаци приказују се табеларно и графички, а садрже следеће показатеље:

– N - број ученика

– M - аритметичка средина
– σ - стандардна девијација представља збир квадрата одступања од средње вредности
– V - коефицијент варијације
– % - проценат освојених бодова од укупног броја бодова
– M - стандардна грешка аритметичке средине
– dM - разлика аритметичких средина, dM = M1 – M2
– σdM - стандардна грешка разлике аритметичких средина
– t - t-однос показује колико је пута разлика аритметичких средина већа од своје погрешке.

За графичко приказивање коришћени су:
– полигон фреквенција,
– дијаграм стубаца,
– кружни дијаграм,
– дијаграм полуга, и
– просторни дијаграм.

(3) *Метода анализе садржаја.* – Истраживање дидактичко-методичког типа, какво је наше, не може се обавити без анализе садржаја. Анализа садржаја је неопходна посебно у фази теоријског заснивања, а онда и у фази проучавања прикупљене грађе – тестова, упитника и литературе. Поступајући тако, уз табеле и хистограме дата је детаљна анализа података и закључци до којих се на основу те анализе дошло, а који се односе на то:

1. да ли је потребно шире знање из програмског садржаја о рачунским операцијама у скупу природних бројева у почетној настави математике и које садржаје би требало проширити – питање програма,
2. како реализовати наставне садржаје – питање методике,
3. како постићи боље наставне ефекте при изучавању наставних садржаја – питање осавремењивања наставе почетне математике.

(4) *Дескриптивна метода.* – Дескриптивна метода је употребљена за опис неких важних појава, дефинисање појмова,

упоређивање, генерализацију и закључивање. Коришћена су оба њена модалитета: (а) теоријска анализа и (б) сервеј анализа.

5.2. Технике и инструменти истраживања

(1) *Равенове прогресивне матрице.* – Да би се обезбедили услови за примену паралелних уједначених група извршено је тестирање општих интелигенцијских способности тестом *Равенове прогресивне матрице*. То је стандардизовани тест за мерење опште интелигенције невербалног серијског типа. Уобичајено има 60 задатака (5 серија са по 12 задатака) поређаних од најлакшег до најтежег (отуда назив "прогресивне"). Сваки задатак се оцењује са једним бодом. Тест нема временског ограничења и даје се особама од 8 година до 65 година. Хомоген, скоро искључиво испитује општу интелигенцију (г фактор), и претендује да буде независан од културе. Осетљивост му је највећа за узрасте од 10 – 14 година. За млађе је тежак, а за старије често лак. Код нас је факторску анализу Равенових прогресивних матрица извршио В. Ахтик (Ковач-Церовић, 1989, стр. 292-293).

По Равеновом упутству, а на подлози В. Ахтикове факторске анализе (Ковач-Церовић, 1989, стр. 293). која је применљива за наше подручје, сви испитаници, с обзиром на остварени број бодова, могу да се сврстају у пет група, а онда II у две подгрупе, III у три подгрупе и IV у две подгрупе.

Група	*Категорија интелигенције*	*Тотални скор бодова*
I	Крајње висока интелигенција	58 – 60
II+	Високо изнадпросечна интелигенција	44 – 57
II	Надпросечна интелигенција	
III+	Интелигенција на нивоу бољег просека	31- 43
III	Просечна интелигенција	
III-	Интелигенција на нивоу слабијег просека	
IV	Испод просецна интелигенција	17 – 30
IV-	Гранични степен нормалне интелигенције	
V	Интелектуално дефектан	0 – 16

(2) *Иницијални писмени нестандардизовани тест знања* – ИТ. – Иницијални писмени нестандардизовани тест знања - ИТ, је коришћен за утврђивање претходног знања о природним бројевима, оног знања које је стечено у I, II и III. То је било потребно урадити ради сагледавања степена наученост код ученика из група – експерименталне и контролне. Тест је имао 12 задатака различитог типа и различите тежине. Носио је 10 бодова. (Тест у Прилогу*: Прилог 1*).

(3) *Завршни писмени нестандардизовани тест знања* – ЗТ. – Завршни писмени нестандардизовани тест знања – ЗТ, коришћен је за утврђивање *знања* стеченог током трајања експеримента. Тест је садржавао 15 задатака различите врсте и тежине. С озиром да су задаци различите тежине, они су различито и бодовани – од 1 до 3 бода. Тест је носио 24 бода. (У Прилогу: *Прилог 3*)

6. Узорак истраживања

С обзиром да истраживање у својој предметности има ефекте учења путем проблемске наставе на програмским садржајима из математике који се – када је о разредној настави реч – у најразвијенијој форми обрађују у 4. разреду основне школе, као и с обзиром на основну методу која је употребљена – педагошки експеримент, узорак је узорак скупина формиран од ученика 4. разреда. Узорак је хотимичан и репрезетативан.

Узорак обухвата 24 одељења IV разреда основне школе. Подељен је у две групе: експерименталну – 12 одељења, и контролну – 12 одељења. Одељења су из четири основне школе у Нишу и 2 основне школе у Алексинцу: „Вожд Карађорђе“, „Мирослав Антић“, „Ћеле Кула“, “Душан Радовић”, „Аца Милојевић“ и „Љупче Николић“. У узораку је, при планирању експеримента, било 615 ученика. Иначе, популацију чине сви ученици IV разреда основних школа Нишавског округа: укупно 4327 ученика.

Иницијалним тестом (ИТ) обухваћен је укупно 601 ученик:

- у експерименталној групи - 301 ученик,
- у контролној групи - 300 ученика.

Завршним тестовима (ЗТ) тестиран је 581 ученик:

- у експерименталној групи – 295 ученика,
- у контролној групи – 286 ученика.

По обухвату ученика тестирањем групе су сасвим уједначене, што је иначе пожељно при оваквом истраживању - експериментисању. Полазећи од тога да неки ученици, због изостајања из школе, нису тестирани или иницијалним, или финалним, или и иницијалним и финалним тестом, изостављени су из анализе резултата. Даљом обрадом падатака и анализом резултата обухваћен је 561 ученик, управо онај број ученика који су радили оба теста:

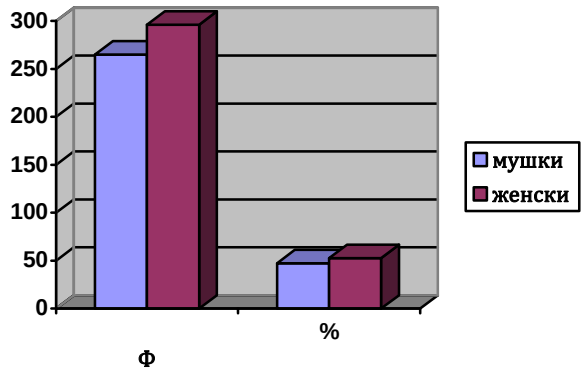
- у експерименталној групи - 295,
- у контролној групи - 266 ученика.

С обзиром на коедукативни тип наше основне школе у узорак су ушле и девојчице и дечаци (табела 1). Имајући у виду, пак, врсту узорка, на његову уједначеност по заступљености полова није се могло утицати.

Табела 1. *Полна структура узорка*

Пол	Фреквенција	Проценат
мушки	265	47,23
женски	296	52,77%
Укупно:	561	100%

У целини узев, у узорку су у нешто већем броју заступљене девојчице, што је, претпостављамо, од значаја за успех експеримента, али њихова статитички значајна доминација није утврђена.



Дијаграм 1. *Заступљеност дечака и девојчица у узорку*

Посматрамо ли заступљеност полова у испитиваним групама евидентно је да су у обе групе нешто заступљеније девојчице. Ипак, није утврђено постојање статистички значајних разлика у доминацији једног од полова како између група, тако и у оквиру група, што указује на његову неопходну методолошу валидност.

ДРУГИ ДЕО

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА - АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА

I ИНИЦИЈАЛНО ИСПИТИВАЊЕ

1. Постигнуће ученика на тесту интелигенције

Као што је већ наведено при објашњавању метода, техника и инструмената истраживања, за мерење интелигенције употребљене су *Равенове прогресивне матрице*. Да подсетимо, нивои интелигенције изгледају овако:

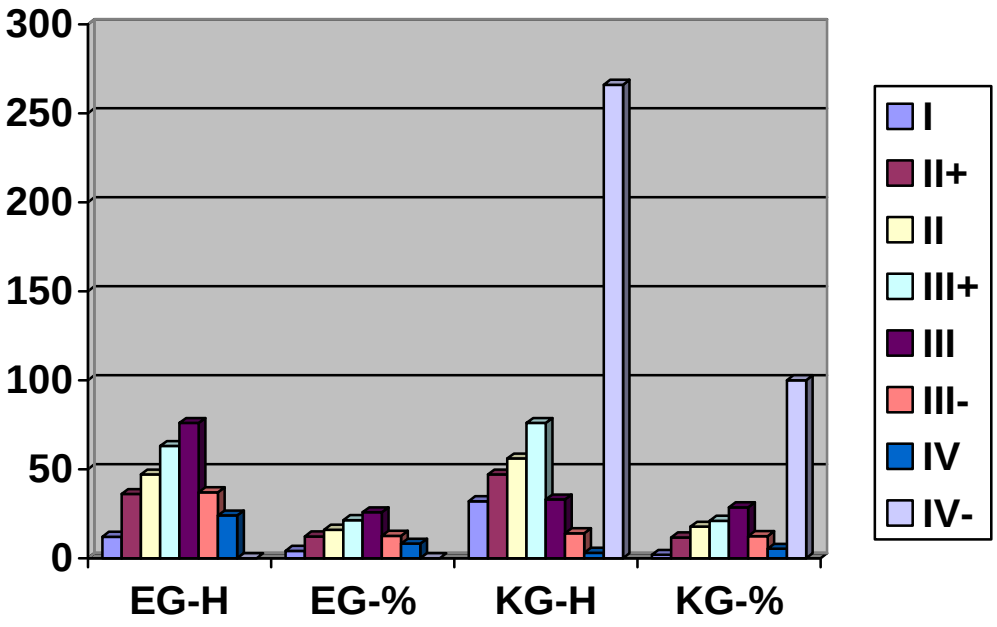
Табела 1. *Нивои интелигенције*

Група	*Категорија интелигенције*	*Тотални скор бодова*
I	Крајње висока интелигенција	58 - 60
II+ II	Високо изнадпросечна интелигенција Надпросечна интелигенција	44 - 57
III+ III III-	Интелигенција на нивоу бољег просека Просечна интелигенција Интелигенција на нивоу слабијег просека	31- 43
IV IV-	Испод просецна интелигенција Гранични степен нормалне интелигенције	17 - 30
V	Интелектуално дефектан	0 - 16

1. Ниво интелигенције ученика у нашем истраживању је независна варијабла и помоћни параметар, па нема потребе да се дубље анализује. Зато наводимо неколико основних налаза који ће се користити при анализи успеха на тестовима знања.

Табела 2. *Постигнуће ученика укупног узорка на тесту интелигенције*

	Експерим. група		Контролна група		Укупно	
	f	%	f	%	f	%
I	12	4,06	5	1,88	17	3.03
II+	36	12,20	32	11,65	68	12,12
II	47	15,94	47	17,67	94	16,76
III+	63	21,36	56	21,05	119	21,21
III	76	25,76	76	28,57	152	27,09
III-	37	12,54	33	12,40	70	12,48
IV	24	8,14	14	5,26	38	6,77
IV-	0	0,00	3	1,52	3	0,54
Укупно:	295	100	266	1000	561	100



Дијаграм 1. *Постигнуће ученика из узорка на тесту интелигенције*

Подаци изнесени у Табели 1. и приказани на Дијаграму 1. показују да је у узорку највише ученика са просечном интелигенцијом, (....%) што се и очекивало. Оних са надпросечном интелигенцијом је знатно, чак за половину, мање (.....%). У очекиваном броју су ученици са врло високом интелигенцијом – укупно ... (....%). Мало је ученика са интелигенцијом из IV групе – само 8....%), а није било ни једнога из V – дефектне интелигенције, што је такође очекивано.

За наше истраживање је значајно стање интелектуалних способности (IQ) из контролне и експерименталне групе

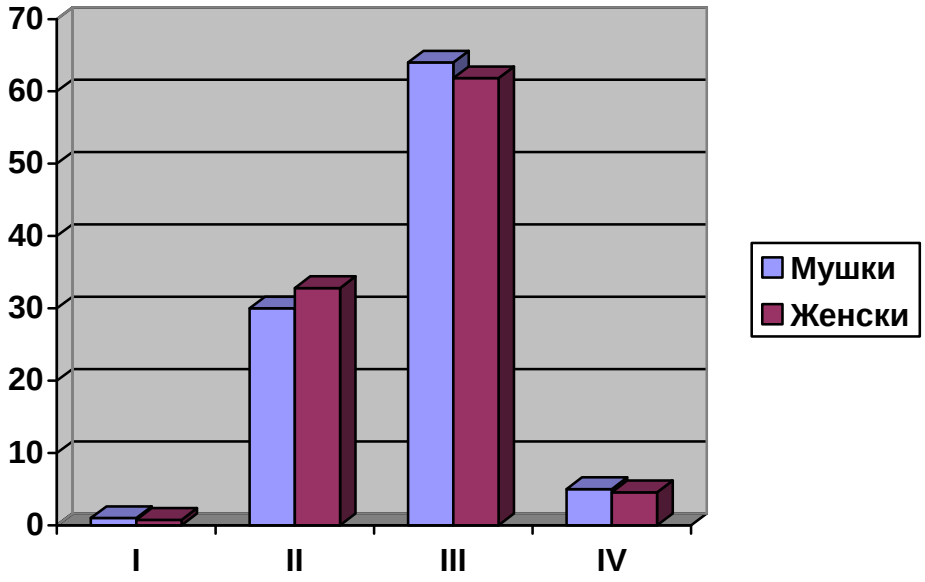
појединачно/одвојено. Када се упореде добијени нивои интелигенције ученика из експерименталне и контролне групе запажа се да је дистрибуција ученика уравнотежена. Наиме, групе су скоро уједначене по интелектуалним способностима: са просечном инелигенцијом - 63,59% у експерименталној и 65,76% у контролној групи; са надпросечном интелигенцијом - 28,04% у експерименталној и 29,73% у контролној групи. Имамо у виду да су се и ученици са крајње високом интелигенцијом у неједнаком броју нашла у две различите групе – 4,06% у експерименталној, а 1,88% у контролној. Слична дистрибуција се десила и са ученицима са интелигенцијом из групе испод просека - у експерименталној их је 8,14%, а у контролној 5,26%, што је "допринело" уједначености група.

Овакве интелектуалне способности ученика омогућиле су релевантно поуздано упоређивање успеха ученика из експерименталне са упехом ученика из контролне групе.

2. У свим деловима истраживања занимало нас је да ли има разлика у успеху између девојчица и дечака. Наводимо најпре резултате са тестирања интелектуалних способности (IQ).

Табела 3. *Пол ученика и ниво интелигенције* (у %)

	Мушки %	Женски %
I	1,00	0,76
II	30,01	32,82
III	63,97	61,83
IV	5,02	4,58
Укупно:	100%	100%



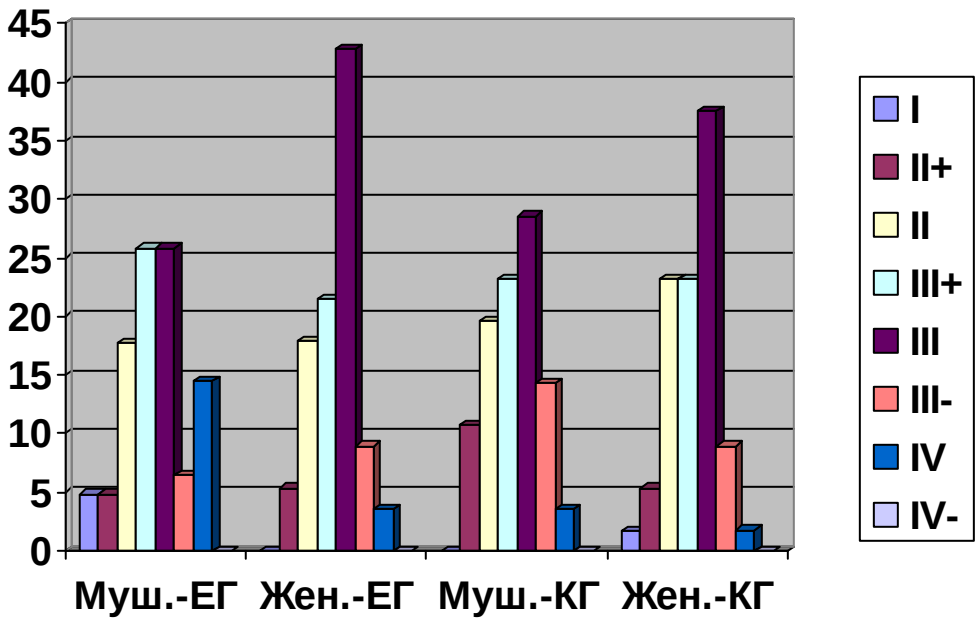
Дијаграм 2. *Пол ученика и ниво интелигенције*

Посматрајући узорак у целини из података у Табели 3. види се да нема значајнијих разлика у интелектуалним способностима (IQ) између девојчица и дечака. Пажљивија, пак, анализа показује да је нешто више девојчица са надпросечном интелигенцијом - за 2,82%, а нешто више дечака са просечном интелигенцијом - за 2,17%. Остале разлике су занемарљиве. У ствари, девојчице и дечаци из узорка су уједначени по степену интелигенције, што је такође од значаја за наше истраживање, а што се посебно види на Дијаграму 2.

3. Посматрано по групама - експериментална и контролна, има разлике у нивоу интелигенције између дечака и девојчица, али само у експерименталној групи.

Табела 4. *Успех ученика укупног узорка на тесту интелигенције*

	Експерим. група		Контролна група		Укупно	
	f	%	f	%	f	%
I	12	4,06	5	1,88	17	3.03
II+	36	12,20	32	11,65	68	12,12
II	47	15,94	47	17,67	94	16,76
III+	63	21,36	56	21,05	119	21,21
III	76	25,76	76	28,57	152	27,09
III-	37	12,54	33	12,40	70	12,48
IV	24	8,14	14	5,26	38	6,77
IV-	0	0,00	3	1,52	3	0,54
Укупно:	295	100	266	1000	561	100

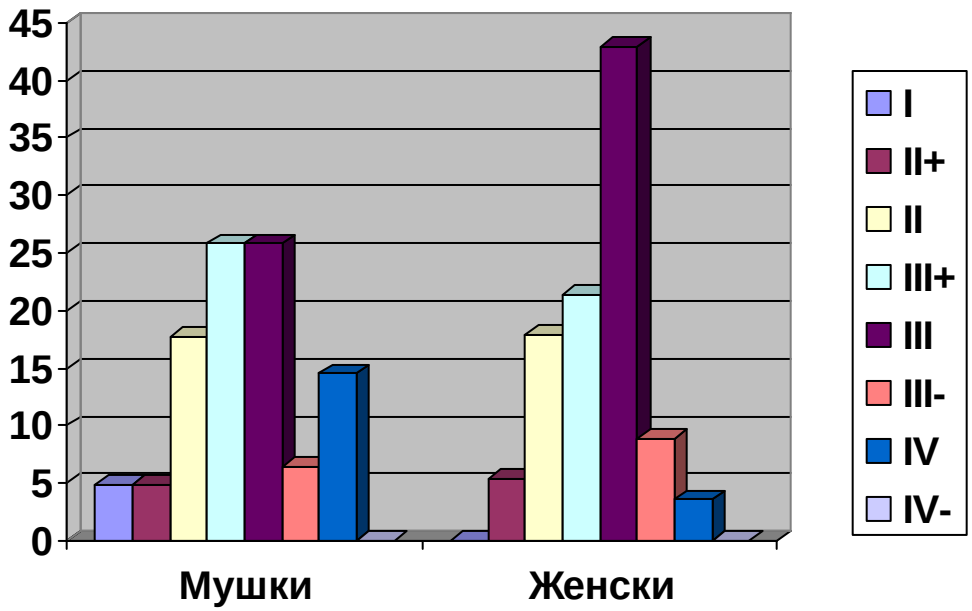


Дијаграм 3. *Пол ученика контролне и експерименталне групе и ниво интелигенције*

У експерименталној групи статистички значајно је више дечака са интелигенцијим (IQ) дефинисаном као III - просечна ($p<0,05$), док су у контролној групи нивои интелигенције слични процентуално заступљени код оба пола - дакле, уједначени.

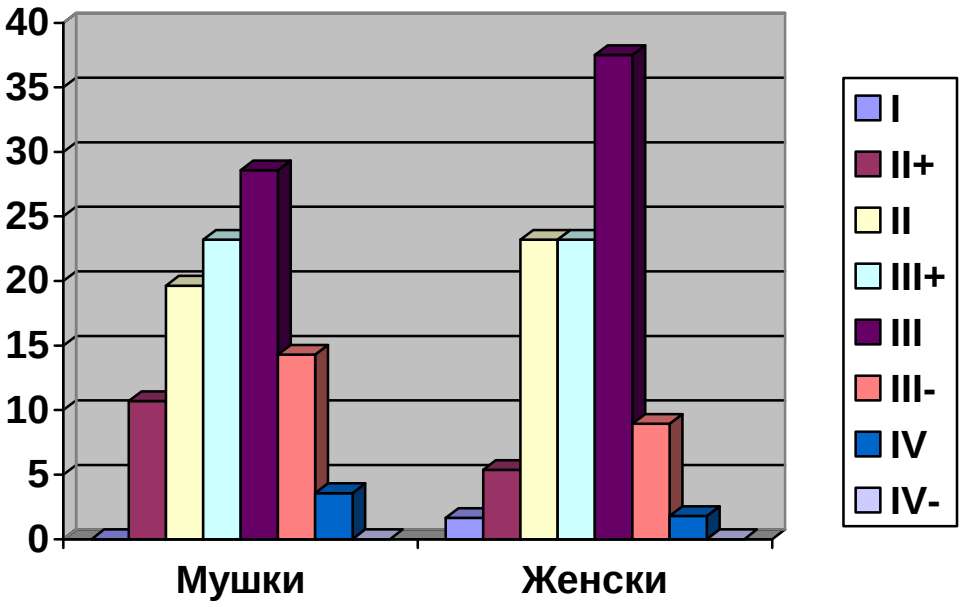
Између истих полова а у различитим групама - експерименталној и контролној, нема статистички значајних разлика. Управо и по томе групе су уједначене.

4. Повезаност и однос две независне варијабле - пол и интелигенција ученика, посматрали смо и скупно и издвојено по групама – експериментална и контролна.



Дијаграм 4. *Пол ученика експерименталне групе и ниво интелигенције*

У експерименталној групи, како се види из *Дијаграма 5*, процентуално је више девојчица са интелигенцијом изнад просека и са интелигенцијом високо изнадпросечном. Њих је више и у групи ученика са бољом просечном интелигенцијом, као и у групи са просечном интелигенцијом. Међутим, дечака је знатно више са интелигенцијом на нивоу слабијег просека



Дијаграм 5. *Пол ученика контролне групе и ниво интелигенције*

У контролној групи, што се јасно види на *Дијаграму полуга 2*, статистички значајне разлике у интелигенцији између девојчица и дечака нема. Међутим, пажљивија аналаиза показује да је нешто више дечака са изнадпросечном интелигенцијом, а нешто више девојчица са интелигенцијом на нивоу бољег просека.

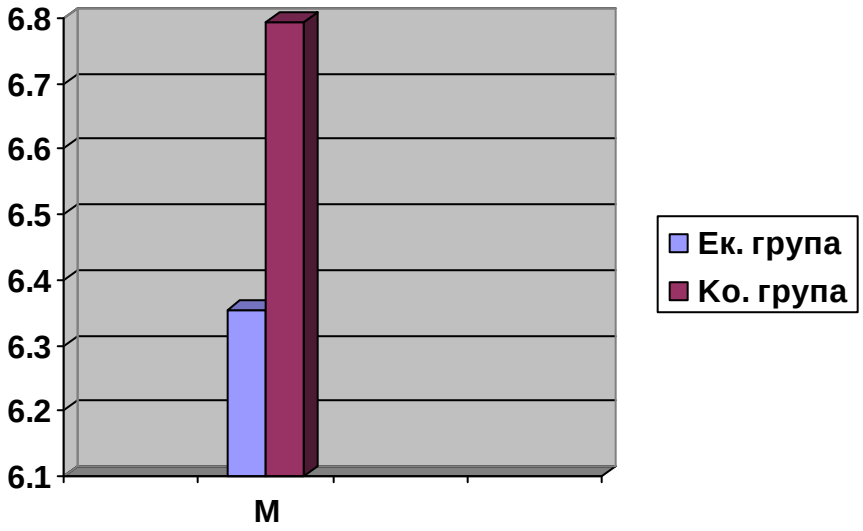
2. Успех ученика на иницијалном тестирању

Иницијални тест знања (ИТ), као што је напред већ речено, коришћен је за утврђивање претходног знања, оног знања које је стечено у другом и трећем разреду, односно у првом, другом и трећем расзреду. Утврђивање нивоа овог знања било је потребно због сагледавања стања по групама - екпериментално и контролној. Број задатака је 12 и максималних 10 бодова.

Општи успех ученика из узорка у целини постигнут на иницијалном тесту знања је на доњој граници позитивног, то јест, у оквирима добре оцене.

Табела 5. *Просечни резултати успех ученика на иницијалном тесту знања – ИТ*

	Експериментална група	Контролна група
M	6,354	6,794
N	295	266
σ	2,131	2,049
V	33,533	30,151
σ M	0,138	0,137
dM	0,440	
t	2,258	
p	0,0244	



Дијаграм 6. *Просечни резултати успех ученика на иницијалном тесту знања – ИТ*

На основу средњих вредности остварених бодова на иницијалном тестирању ученици из узорка (561 ученик), од максималних 10 бодова остварили су просечни резултат 6,574 бодова (Табела 5. *и* Дијаграм 6). Оцењујући овај успех петочланом скалом оцена - недовољан, довољан, добар, врло добар и одличан, ученици су постигли добар успех, који је, додуше, на самој доњој граници доброг успеха.

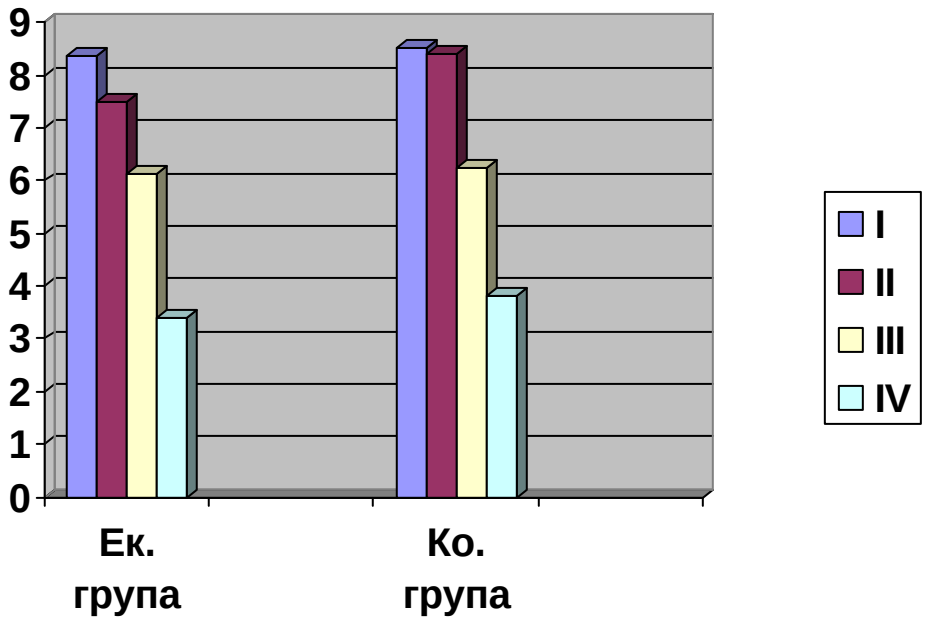
Успех уеника на иницијалном тесту знања (ИТ), како смо видели, у оквирима је доње границе добре оцене. Ипак, за наше истраживање

занимљивији и релевантнији је податак о успеху ученика из група - експерименталне и контролне. Ученици из експерименталне и контролне групе постигли су приближне резултате, резултате који нису статистички значајно различити, иако су близу саме границе значајности. Резултати истраживања, пак, казују да је он прилично уједначен. Интересантно је запазити - за наше истраживање и од значаја, да су бољи успех постигли ученици из контролне групе: средња вредност бодова ученика из експерименталне групе је 6,354, а ученика из контролне групе 6,7941.

Успех ученика на иницијалном тесту знања у корелацији је са нивоима њихове интелигенције – како оних из експерименталне, тако и оних из контролне групе.

Табела 6. *Просечни резултати успеха ученика из експерименталне и контролне grupe на иницијалном тесту - ИТ, према нивоу интелигенције*

	Експериментална група				**Контролна група**			
	I	**II**	**III**	**IV**	**I**	**II**	**III**	**IV**
M	8,367	7,510	6,125	3,409	8,516	8,414	6,256	3,833
N	12	83	176	24	5	79	165	17
σ	0,551	1,915	1,629	0,761	-	1,397	1.666	0,764
V	6,583	25,498	26,597	22,324	-	16,607	26,640	19,924
σ M	0,318	0,369	0,186	0,229	-	0,243	0,191	0,441
Poređene grupe	I i II	I i III	I i IV	II i III		II i III	II i IV	III i IV
t	1,584	5,191	10,828	3,303		6,894	7,713	4,225
p	0,1245	0,0000	0,0000	0,0013		0,0000	0,0000	0,0001



Дијаграм 7. *Успех ученика из експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту - ИТ, према нивоу интелигенције*

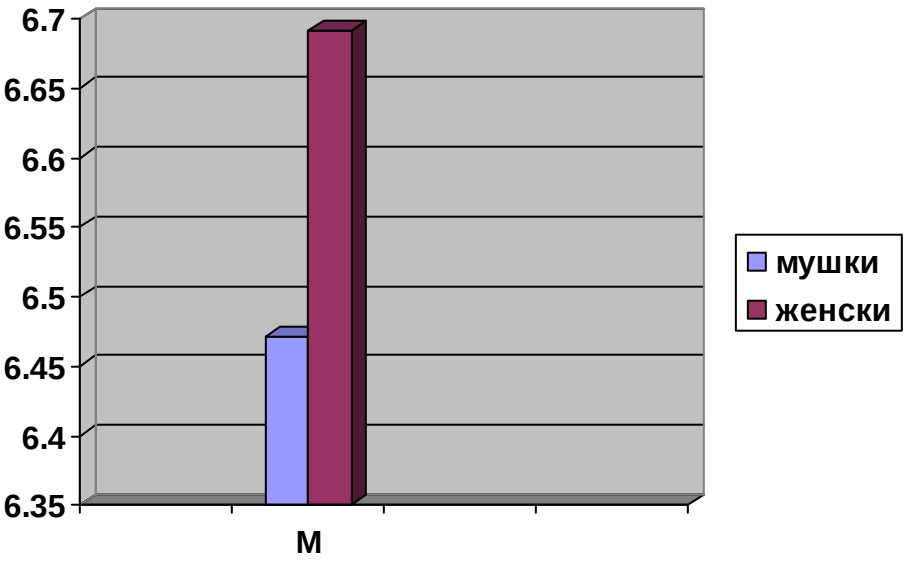
Према резултатима о успех ученика из експерименталне групе на иницијалном тесту знања према нивоима интелигенције ученика који су изнесении у Табели 6. и Дијаграму 7, постоји статистички значајна разлика у успеху код ученика из експерименталне групе. Разлика у успеху утврђена је између ученика са IQ II и III групе ($p<0,05$), али и између I и III, I и IV, II и IV, и II и IVгрупе ($p<0,001$). Ученици са крајње високом интелигенцијом урадили су боље, али не и статистички значајно боље, иницијални тест знања у односу на ученике са интелигенцијом изнад просека, док су у односу на просечно и испод просечно интелигентне ученике урадили статистички значајно боље. У односу на последње две поменуте групе испитаника статистички значајно бољи успех постигли су и испитаници са интелигенцијом изнад просека, а такође су сигнификатно успешније урадили просечни у односу на испод просечне ученике. Највећа разлика, према очекивању, утврђена је између ученика са интелигенцијом изнад просека у односу на ученике са интелигенцијом која је мања од просечне.

Успех ученика из контролне групе на иницијалном тесту знања а према нивоу интелигенције, је очекиван. Наиме, очекивано су ученици са надпросечном интелигенцијом постигли најбољи резулат, статистички значајно бољи од ученика просечне или интелигенције испод просека. На иницијалном тесту знања код ученика из контролне групе је утврђена статистички значајна разлика између II и III, II и IV, као и између III и IV групе ($p<0,001$).

У постигнутом успеху ученика на иницијалном тесту знања (ИТ), посмтраном као успех девојчица и успеха дечака, нема значајнијих разлика.

Табела 7. *Просечни резултати успех ученика на иницијалном тесту знања – ИТ, према полу*

	Мушки	Женски
M	6,471	6,691
N	265	296
σ	2,362	2,147
V	36,409	32,078
σ M	0,236	0,188
dM	0,205	
t	0,677	
p	0,4991	

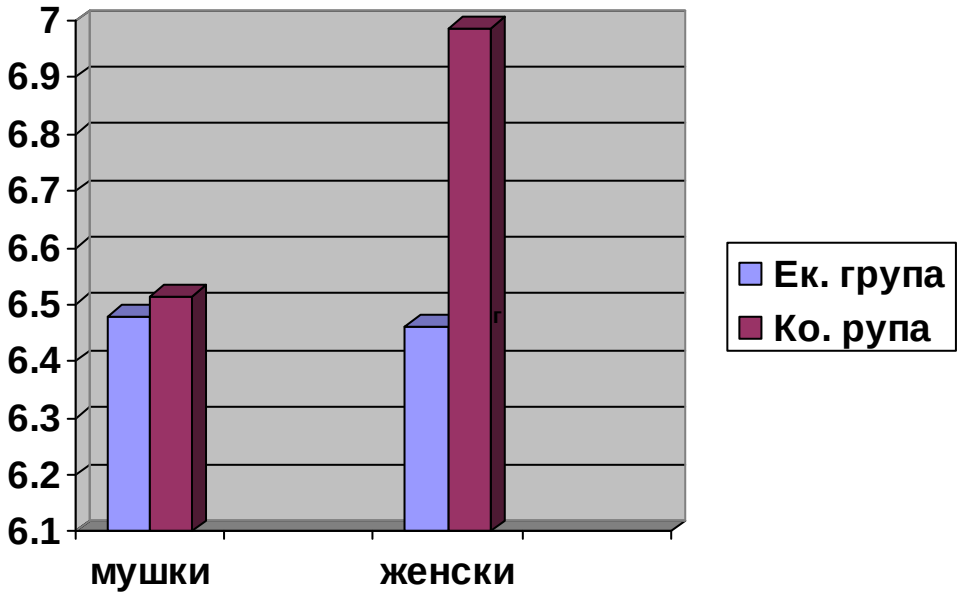


Дијаграм 8. *Успех ученика на иницијалном тесту – ИТ, према полу*

Упоређене средње вредности успеха девојчица и дечака на иницијалном тесту знања (ИТ) показују да међу њима нема статистички значајне разлике. Ипак, из Табеле 7. и Дијаграма 8. види се да групе нису постигле сасвим једнак резултат и да постоји евидентна разлика и то у корист девојчица - оне су постигле нешто бољи успех на ИТ (+ 0,205).

Табела 8. *Просечни резултати успех ученика на иницијалном тесту знања – ИТ, према полу у експерименталној и контролној групи*

	Експериментална група		Контролна група	
	Мушки	Женски	Мушки	Женски
M	6,480	6,462	6,515	6,987
N	137	158	128	138
σ	2,332	2,272	2,416	1,976
V	36,048	35,206	37,147	28,368
σ M	0,327	0,272	0,345	0,253
dM	0,017		0,642	
t	0,040		1,069	
p	0,9689		0,2873	



Дијаграм 9. *Успех ученика експерименталне и контролне групе на иницијалном тесту знања - ИТ, према полу*

Најпре, ни у једној од испитиваних група није утврђена статистички значајна разлика у средњим вредностима на иницијалном тесту знања између девојчица и дечака. Затим, није утврчена ни значајна разлика у знању змеђу група - експерименталне и контролне, за исти пол.

Значајнијих разлика нема, али разлика ипак има. Девојчице из контролне групе постигле су бољи успех на иницијалном тесту знања од дечака (+ 0,462). Обрунуто је у експерименталној групи - дечаци имају нешто бољи успех (+ 0,018).

II. ЗАВРШНО ИСПИТИВАЊЕ ЗНАЊА

1. Успех ученика на завршном тестирању

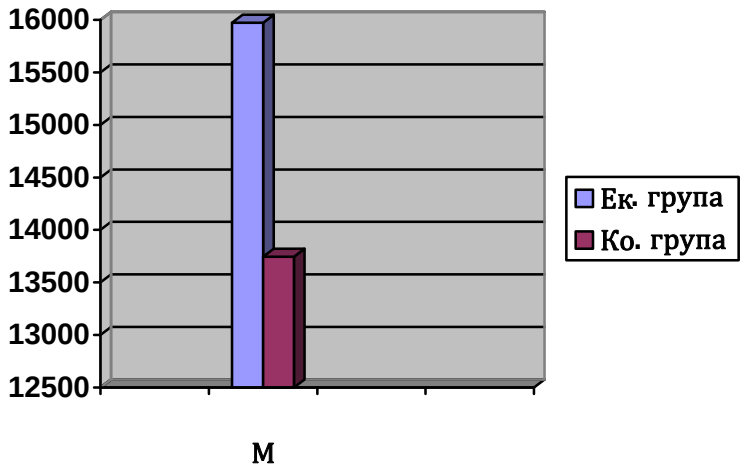
1.1. Оно што треба запазити и истаћи јесте: ученици из екпериментале групе постигли су значајно бољи успех на завршном тестирању (ЗТ).

Табела 9. *Успех ученика на завршном тесту знања – ЗТ, (по групама)*

	Експериментална	Контролна
M	15,971	13,745
N	295	266
σ	4,400	3,679
V	27,552	26,766
σ M	0,285	0,247
dM	2,545	
t	5,895	
p	0,000	

На финалнимм тестовима ученици из експерименталне групе постигли су статистички значајно бољи успех у односу на ученике из контролне групе: 15,971 бод према 13,745 ($p<0,001$). На тај начин је потврђена наша полазна хипотеза:

> учење путем решавања проблема у значајној мери утиче на повећање успеха ученика из математике у млађим разредима основне школе.



Дијаграм 10. *Успех ученика на завршном тесту знања - ЗТ*

Подаци који су представљени на *Дијаграму 10*, јасно показују да су ученици из експерименталне групе на завршном тесту знања постигли средњу вредност бодова 15,333, а ученици из контролне групе 13,404. Такав резултат ученика из експерименталне групе је статистички значајно виши - $p<0,01$. На тај начин је потврђена наша прва потхипотеза:

> степен усвојености *знања о скупу природних бројева* већи је код оних ученика који су знања о томе стицали учењем путем решавања проблема/проблемском наставом него код оних који су учили на класичан начин.

Проблемска настава је, дакле, била је ефикасна при обрађивању садржаја о природним бројевима. И додатно, видели смо: она је била врло ефикасна при учењу тог програмског садржаја. Ако се има у виду, а мора се имати, да су ученици из контроле групе имали бољи успех на иницијалном тесту знања (ИТ), онда је ефикасност учења путем решавања проблема и значајно већа.

1.2. Општи успех ученика на завршним тестовима знања (ЗТ), посматран по групама и доведен у везу са интелигенцијом ученика, је такав да оправдава учење путем решавања проблема.

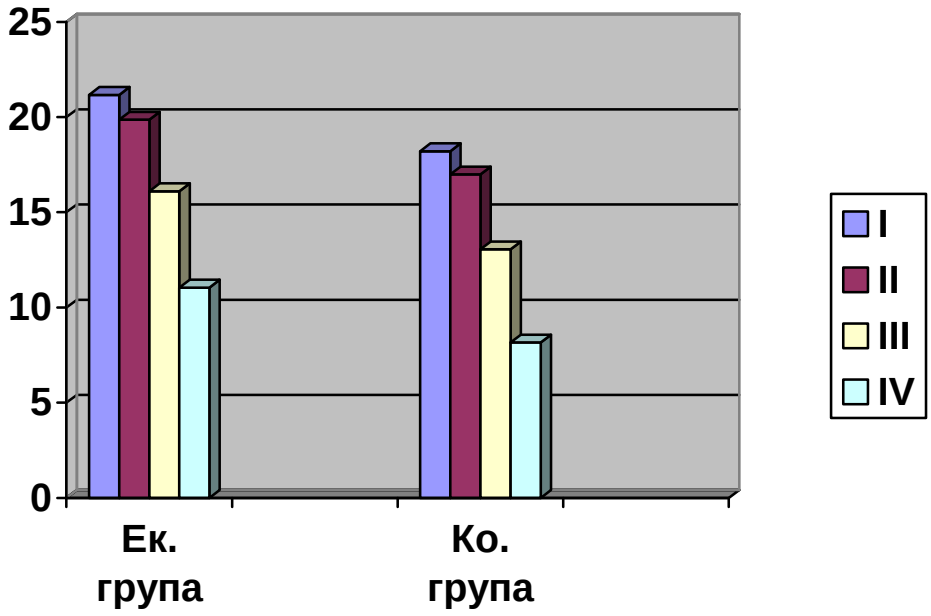
Табела 10. *Просечни резултати успеха ученика из експерименталне и контролне групе на завршном тесту знања – ЗТ, према нивоу интелигенције*

	Експериментална група				**Контролна група**			
	I	**II**	**III**	**IV**	**I**	**II**	**III**	**IV**
M	21,167	19,870	16,107	11,045	18,210	16,990	13,050	8,167
N	12	83	176	24	5	79	165	17
σ	2,255	2,186	2,681	2,612		1,399	2,289	2,363
V	10,652	11,004	16,642	23,648		8,235	17,539	28,934
σ M	1,302	0,421	0,305	0,788		0,244	0,263	1,364
Poređg rupe	I i II	I i III	I i IV	II i III		II i III	II i IV	III i IV
t	0,785	3,116	5,637	7,132		10.884	5,224	2,887
p	0,4389	0,0026	0,0001	0,0000		0,0000	0,0000	0,0050

У оба случаја, како се види у Табели 10, код ученика из експерименталне групе висина интелигенције утицала је на успех на завршном тестирању знања. Наиме, ученици са вишим коефицијентима интелигенције постизали су боље резултате. Овога пута разлике су статистички значајно више у односу на успех на иницијалном тесту знања (ИТ).

Ученици из експерименталне групе (Табела 10) са надпросечном интелигенцијом (II) постигли су значајно бољи успех од ученика са просечном (III) и ученика са интелигенцијом испод просека (IV). Али су и ученици са просечном интелигенцијом (III) постигли значајно бољи резултат од ученика са интелигенцијом испод просека. Разлике су на и нивоу следећих значајности: између ученика са надпросечном интелигенцијом (II) и ученика са просечном интелигенцијом (III) $p<0,001$, а између ученика са надпросечном интелигенцијом (IV) и ученика са интелигенцијом испод просека (IV) $p<0,001$; између ученика са просечно интелигенцијом (III) и оних испод просека (IV) $p<0,01$. Следствено наведеном, ефикасност учења путем решавања проблема у корелацији је са висином интелигенције. Ефикасност се повећава са порастом нивоа интелигенције.

Код ученика из контролне групе на завршном тестирању знања (ЗТ), као и на иницијалном тесту знања (ИТ), поновиле су се разлике у успеху између ученика са различитим нивоима интелигенције



Дијаграм 11. *Успех ученика из експерименталне и контролне групе на завршном тесту знања – ЗТ, према нивоу интелигенције*

Као што се из наведене Табеле 10. види, али и из приказа на Дијаграму 11, утврђена је статистички значајна разлика између II и III као и између II и IV групе ($p<0,001$). Између ученика са просечном интелигенцијом и ученика са интелигенцијом испод просека опет није утврђена статистички значајна разлика успеха на тесту. Такође, као и на иницијалном тесту, опет се примећује већа разлика између II и IV групе (изражена је у нижој вредности $p<0,01$).

Упоређујући успех ученика експерименталне и контролне групе на завршном тесту знања (ЗТ) с обзиром на ниво интелигенције ученика лако је запазити налаз који додатно потврђује нашу потхипотезу:

> ученици из екпериментalне групе су успешнији у рачунским операција у оквиру природних бројева од ученика из контролне групе скоро на свим нивоима интелигенције.

Закључни налаз је*: учење математике путем решавања проблема ефикасније је код ученика на свим нивоима интелигенције***.**

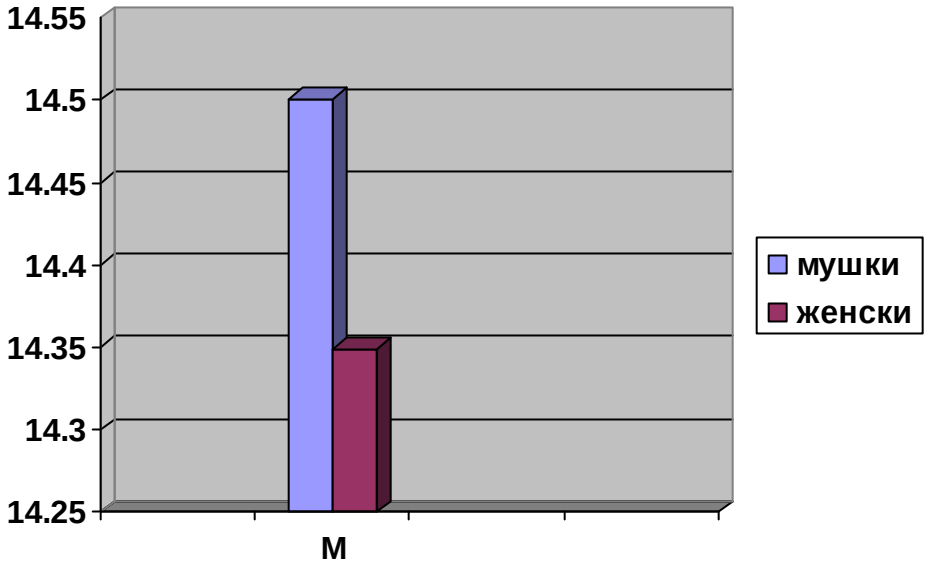
Тиме је потврђена и наша потхипотеза:

висина интелигенције ученика (IQ) у корелацији са учењем путем решавања проблема - што је интелигенција ученика већа учење путем решавања проблема је ефикасније.

1.3. Успех ученика на завршном тесту знања (ЗТ), упоређен између успеха дечака и успеха девојчица, показује да пол ученика није од утицаја на ефикасност учења путем решавања проблема.

Табела 11. *Успех ученика на завршном тесту знања - ЗТ, према полу*

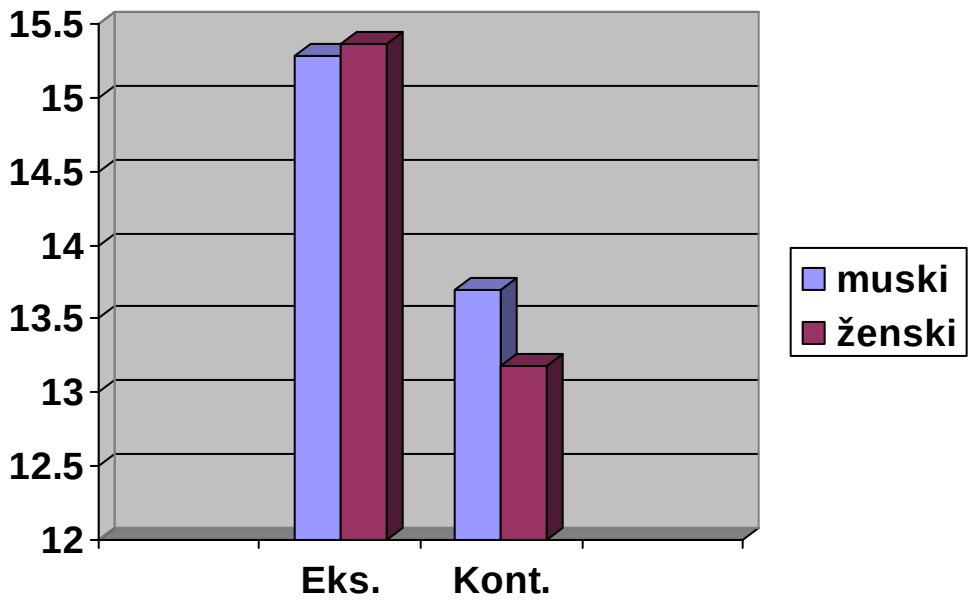
	Мушки	Женски
M	14,501	14,349
N	265	296
σ́	4,849	4,780
V	33,439	33,314
σ́ M	0,485	0,418
dM	0,152	
t	0,237	
p	0,8130	



Дијаграм 12. *Успех ученика на завршном тесту – ЗТ, знања према полу*

Из Табеле 11. и Дијаграма 12. јасно се види да нема статистички значајне разлике у средњим вредностима бодова на завршном тестирању (ЗТ) између дечака и девојчица. Ваља, ипак, запазити да су дечаци нешто успешнији - средње вредности успеха су 14,501 према 14,349 бодова у њихову корист. Девојчице су успешније у израдинеких појединачних задатака, што се у овој глобалној табели не види.

Ипак, више нас је занимало има ли разлике у успеху с обзиром на пол ученика из експерименталне групе, имајући у виду да смо претпоставили да пол ученика не утиче битно на ефикасност учења путем решавања проблема или учења проблемском наставом, али да очекујемо да су девојчице успешније.



Дијаграм 13. *Средње вредности успеха на завршном тесту знања - ЗТ, ученика експерименталне и контролне групе према полу*

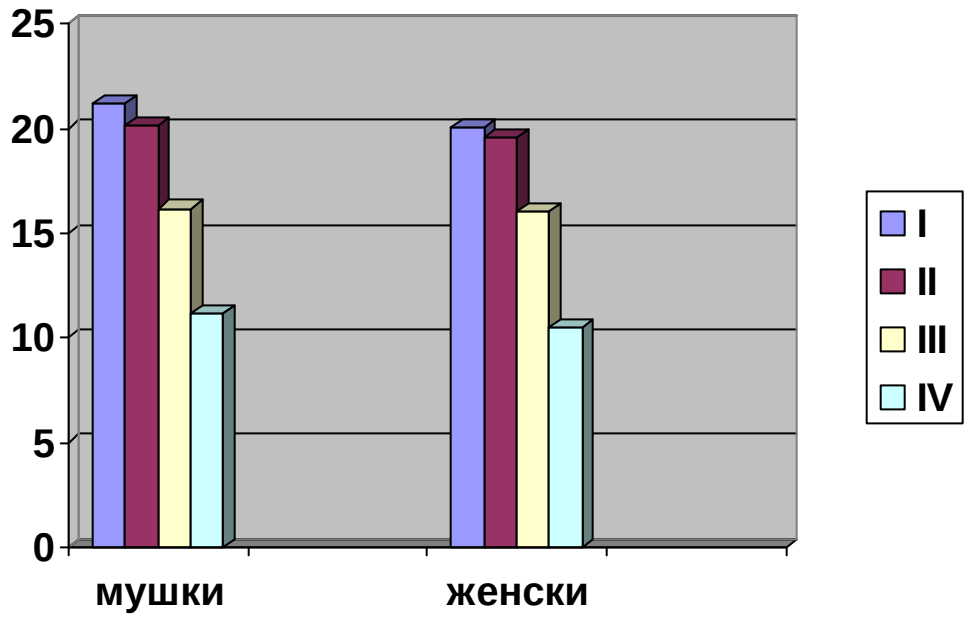
Најпре, ни у једној од испитиваних група нема статистички значајне разлике средњих вредности на завршном тесту знања (ЗТ) између дечака и девојчица. Ипак, према подацима из Дијаграма 13, девојчице из експерименталне групе нешто успешније од дечака из исте групе - 15,37 према 15,28 бодова. Иако разлика у средњим вредностима није статисички значајна, она делимице добија на значају

ако се има у виду податак да је у контролној групи на ЗТ обрнуто - дечаци (13,69) су били успешнији од девојчица (13,18).

Свакако треба запазити да је поређењем наведених величина између група у оба случаја утврђен статистички значајно бољи просечан успех девојчица из експерименталне групе у односу на девојчице из контролне групе ($p<0,01$). С обзиром, пак, на укупни успех и дечаци из експерименталне групе су такође показали бољи успех на завршном тесту знања (ЗТ) у односу на своје парњаке из контролне групе, али не и статистички значајно бољи.

Из наведеног произилази да је потврђена и наша потхипотеза: девојчице су нешто успешније од дечака када се програмски садржаји о о природним бројевима обрађују учењем путем решавања проблема.

1.4. Занимљив, али и неочекиван, резултат је добијен када су укрштени: успех на завршном тесту знања, ниво интелигенције и пол ученика, све на нивоу узорка у целини.



Дијаграм 14. *Средња вредност успеха ученика на завршном тесту знања – ЗТ, по нивоима интелигенције у односу на пол*

Према подацима који су приказани на Дијаграму 13. дечаци из узорка у целини на сва четири нивоа интелигенције постигли су бољи успех на завршном тесту знања (ЗТ) од девојчица истих нивоа интелигенције. У даљи коментар не улазимо с обзиром да та врста података није од посебног интереса и значаја за наше истраживање.

Предмет нашег интересовања и истраживања у вези са овим је, како се из посебне хипотезе види, успешност девојчица и дечака из експерименталне групе на завршном тесту знања. У оквиру тога и њихов успех с обзиром на пол и ниво интелигенције.

Табела 12. *Успех ученика из експерименталне групе на завршном тесту знања (ЗТ) по нивоима интелигенције у односу на пол*

		I	II	III	IV
Мушки пол	M	22,000	18,071	14,473	6,167
	σ		3,149	5,440	5,421
	N	7	39	87	10
	V		17,427	37,588	87,911
	σM		0,842	0,933	3,833
Женски пол	M		17,561	14,569	7,333
	σ		3,126	4,888	3,753
	N	5	44	89	14
	V		17,799	33,548	51,174
	σM		0,613	0,763	2,167
	т		0,491	0,081	0,292
	p		0,6259	0,9361	0,7895

У експерименталној групи, према подацима из Табеле 12. а коришћењем *студентовог т-теста*, нисмо утврдили значајне разлике средњих вредности на завршном тесту знања (ЗТ) између полова за исте нивое интелигенције. Ипак, нешто бољи успех имају девојчице са просечном (III) и исподпросечном (IV) интелигенцијом, а дечаци са надпросечном интелигенцијом (II).

Слични резултати су добијени и у контролној групи, па их табеларно не наводимо. Коришћењем *студентовог т-теста*, нису установљене значајне разлике средњих вредности на завршном тесту знања (ЗТ) између полова за исте нивое интелигенције. Углавном

нешто бољи успех имају дечаци са надпросечном (II), просечном (III) и исподпросечном (IV) интелигенцијом, а девојчице са крајње високом интелигенцијом.

2. Збирни резултати успеха ученика у решавању појединачних задатака на завршном тестирању - ЗТ

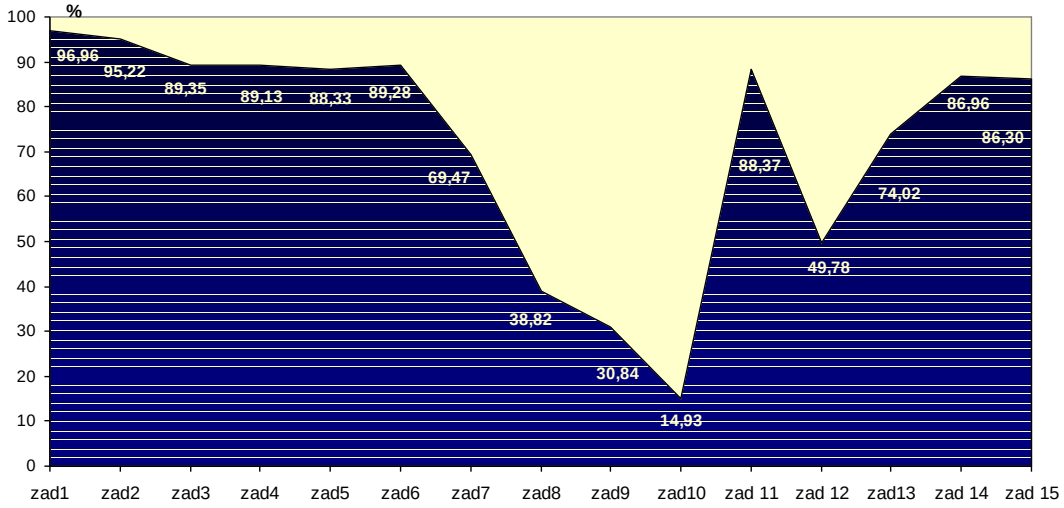
Колико је учење путем решавања проблема - као експериментални фактор, поспешило ефикасније учење садржаја из скупа природних бројева, као и квалитетније знање уеника из оваог важнога програмског садржаја, може се сагледати и преко успеха ученика на сваком од 15 задатака из завршног теста знања - ЗТ.

Придржавајући се методолошких уптстава за писање извештаја о истраживању, најпре дајемо резултате истраживања користећи табеле, полигон фрекфенције и дијаграм. А затим, статистичком терминологијом речено, *матрице опажених корелација* (корелационе матрице) успеха ученика на сваком задатку.

Табела 13. *Успех ученика укупног узорка на сваком од задатака завршног тестирања - ЗТ (% укупног броја бодова)*

Укупно	%зад1	%зад2	%зад3	%зад4	%зад5	%зад6	%зад7	%зад8
M	96,957	95,217	89,348	89,130	88,335	89,278	69,474	38,816
	17,216	21,386	30,741	31,194	31,849	30,336	37,605	33,136
N	230	230	230	230	230	230	230	230
V	17,756	22,461	34,406	34,998	36,055	33,979	54,128	85,367
σM	1,135	1,410	2,027	2,057	2,100	2,000	2,480	2,185
Укупно	%зад9	%зад10	%зад11	%зад12	%зад13	%зад14	%зад15	
M	30,842	14,928	88,370	49,783	74,022	86,957	86,304	
	30,856	28,878	28,768	8,739	38,128	32,432	34,296	
N	230	230	230	230	230	230	230	
V	100,046	193,454	32,554	17,555	51,509	37,297	39,739	
σM	2,035	1,904	1,897	0,576	2,514	2,139	2,261	

Полигон фрекфенције 1. *Успех ученика из укупног узорка на сваком од задатака завршног тестирања - ЗТ (у %)*

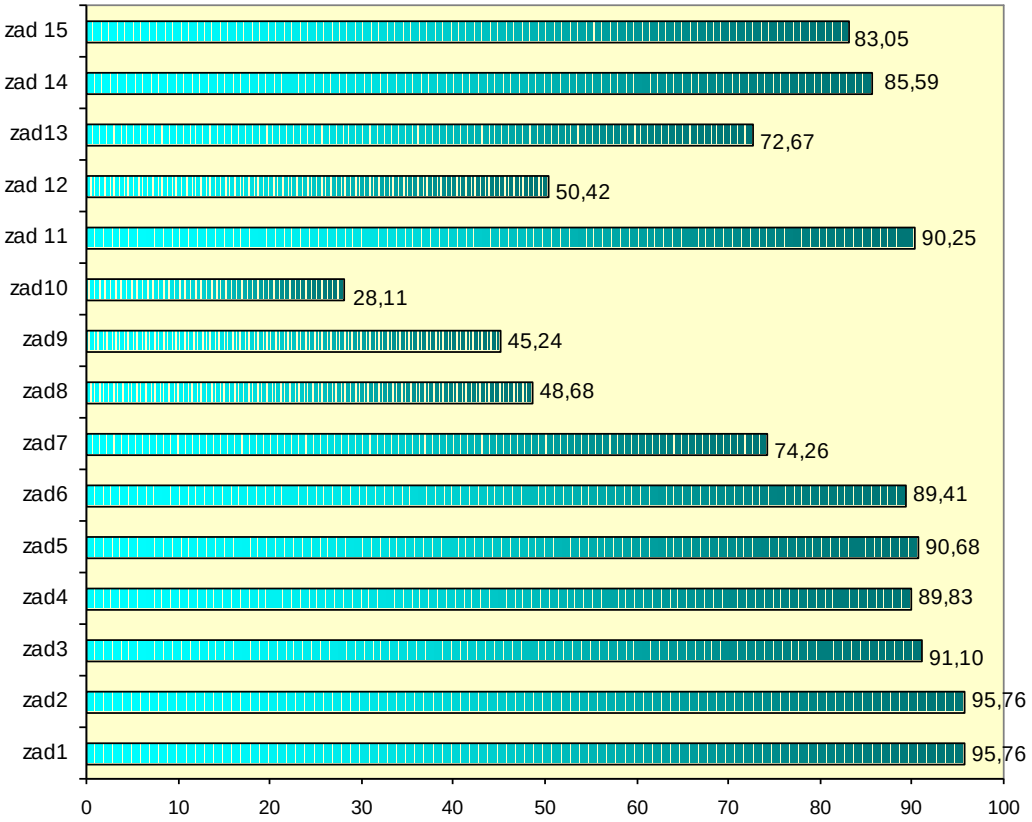


Из података изнесених у Табели 27. и на Полигону фрекфенције 1. може се утврдити да су ученици из узорка највећу процентуалну успешност на завршном тестирању знања - ЗТ, постигли за задатак 1, а најмању за задатак 10. Највећи број задатака, укупно 11 од могућих 15, је решен са приближно 70% успешности.

Табела 14. *Успех ученика из експерименталне групе на сваком од задатака завршног тестирања – ЗТ (% укупног броја бодова)*

	%зад1	%зад2	%зад3	%зад4	%зад5	%зад6	%зад7	%зад8
M	95,763	95,763	91,102	89,831	90,678	89,407	74,258	48,681
	20,230	20,230	28,217	30,354	29,198	30,559	33,664	30,234
N	118	118	118	118	118	118	118	118
V	21,125	21,125	30,973	33,790	32,200	34,179	45,333	62,107
σM	1,862	1,862	2,598	2,794	2,688	2,813	3,099	2,783
	%зад9	%зад10	%зад11	%зад12	%зад13	%зад14	%зад15	
M	45,243	28,107	90,254	50,424	72,669	85,593	83,051	
	28,728	35,048	24,467	10,327	34,897	34,032	37,679	
N	118	118	118	118	118	118	118	
V	63,497	124,695	27,109	20,481	48,022	39,760	45,368	
σM	2,645	3,226	2,252	0,951	3,213	3,133	3,469	

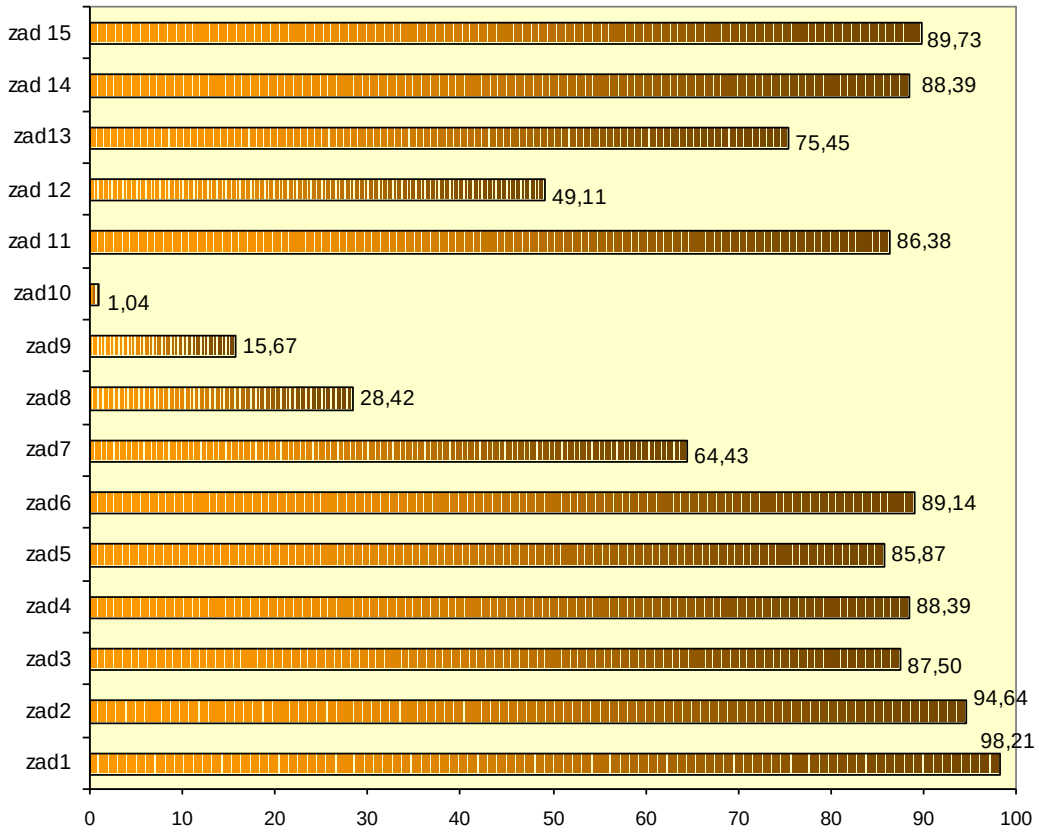
Дијаграм 15. *Процентуална успешност ученика из експерименталне групе на сваком од задатака завршног тестира - ЗТ*



Ученици из експерименталне групе најуспешније су решили 1. и 2. задатак - 95,763%, а најнеуспешнији су били у решавању 10. задатка - 28,107% (Табела 28. *и* Дијаграм 5*)*. Могуће објашњење зашто је то тако како јесте урадићемо при анализи успешности ученика у решавању ових задатака уз помоћ корелационе матрице.

Табела 15. *Успех ученика из контролне групе на сваком од задатака завршног тестирања – ЗТ (% укупног броја бодова)*

	%зад1	%зад2	%зад3	%зад4	%зад5	%зад6	%зад7	%зад8
M	98,214	94,643	87,500	88,393	85,866	89,143	64,433	28,423
	13,303	22,618	33,221	32,175	34,382	30,236	40,901	33,004
H	112	112	112	112	112	112	112	112
B	13,545	23,898	37,966	36,400	40,041	33,918	63,478	116,120
σM	1,257	2,137	3,139	3,040	3,249	2,857	3,865	3,119
	%зад9	%зад10	%зад11	%зад12	%зад13	%зад14	%зад15	
M	15,670	1,042	86,384	49,107	75,446	88,393	89,732	
	25,330	6,816	32,689	6,651	41,370	30,743	30,119	
H	112	112	112	112	112	112	112	
B	161,647	654,300	37,841	13,545	54,834	34,780	33,565	
σM	2,393	0,644	3,089	0,628	3,909	2,905	2,846	

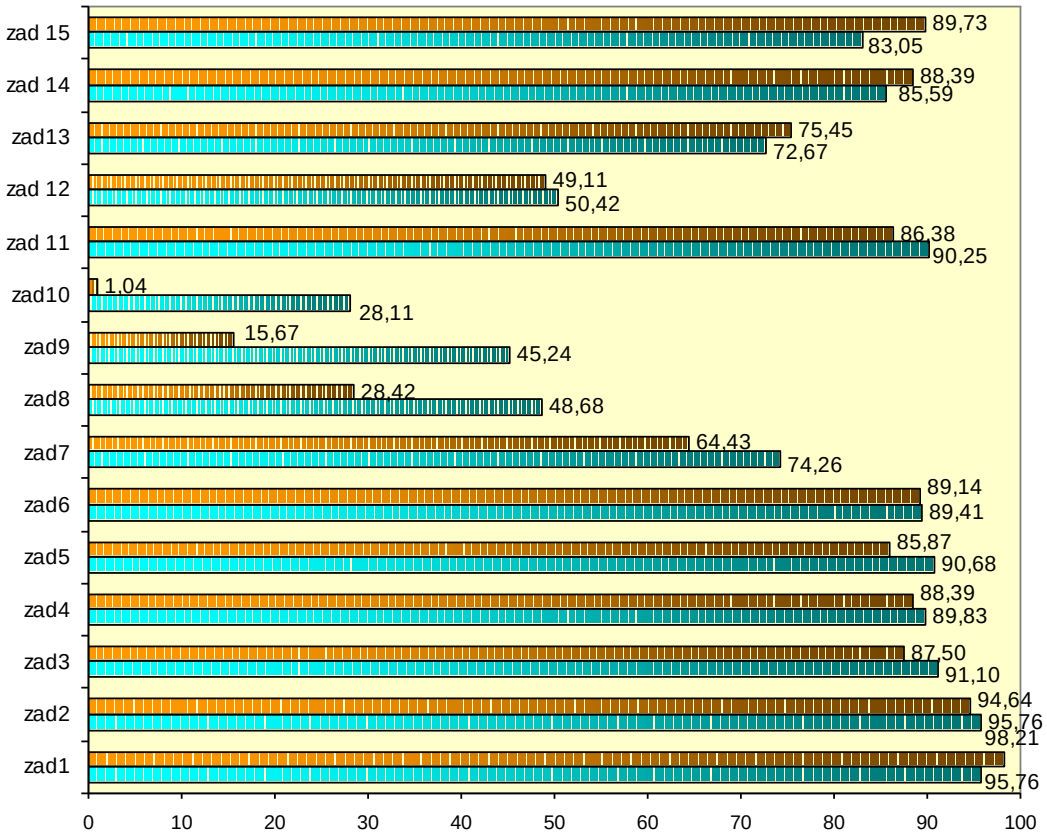


Дијаграм 16. *Процентуална успешност ученика из контролне групе на сваком од задатака завршног тесирања - ЗТ*

На основу података из Табеле 29. и Дијаграма 6. може се утврдити да су ученици из контролне групе највећу успешност постигли у решавању 1. задатка (98,214%). Сасвим неуспешни су били у решавању 10. задатка - само један ученик из контролне групе је решио овај задатак - 1,042%. У оквирима недовољног је и успех који су ученици из ове групе постигли решавајући 9. задатак (15,670%) и 8. задатак (28,423%)

3. Рекапитулација успеха ученика експерименталне и контролне групе у решавању појединачних задатака на завршном тестирању - ЗТ

Графичка рекапитулација успеха ученика на сваком од задатака завршног теста знања из програмског садржаја о сабирању и одузимању показује занимљив налаз. Најпре графички приказ - дијаграм.



Дијаграм 17. *Графичка рекапитулација: процентуална успешност ученика из експерименталне и контролне групе на завршном тестирању - ЗТ*

1. Ученици из експерименталне групе од 15 задатака на завршном тесту знања из садржаја о природним бројевима (ФТ) успешније су решили 11 задатака. Они су статистички значајно успешнији у решавању следећих задатака: 7, 8, 9. и 10. (од $p<0,05$ до $p<0,001$). Боље, али не и статистички значајно, решили су: 2, 3, 5, 11. и 12. задатак. Незнатно бољи успех од ученика из контролне гупе постигли су у решавању 4. и 6. задатка.
2. Ученици из контролне групе статистички значјно успешније су решили само13. задатак. Нешто бољи су били у решавању 1. и 15. задатка, а приближно исто, са малом предношћу у односу на ученике из експерименталне групе, урадили су 14. задатак.
3. Ученици из експерименталне групе и највећу процентуалну успешност имали су у решавању 1. и 2. задатка (95,763%), а најмању у решавању 10. задатка (28,107%)

4. Ученици из контролне групе највећу успешност имали су у решавању 1. задатка (98,214), а најмању у решавању 10. задатка (1,042%). Њега је решио само један ученик.
5. Задатак 10. је најнеуспешније решаван. Њега је решио један ученик из контролне групе. Из експерименталне групе решили су га приближно једна трећина ученика. За наше истраживање то је индикативан резултат. Ученици из експерименталне групе садржај о природним бројевима су учили путем проблемске наставе па су ипостигли највиши ниво знања - ниво креативности.
6. Кад год је у решавању задатка требало напросто применити научено правило (шаблон) ученици из контролне групе су били успешни, па и успешнији од ученика из експерименталне групе. Али, кад код би се у задатку створила нова ситуација, која је захтевала сложену анализу и решавање проблема у неколико корака, ученици из експерименталне групе су били успешнији.

4. Корелациона матрица успеха ученика на завршном тестирању знања о природним бројевима - ЗТ

Корелациона матрица 1. *Успешност решавања задатака на завршном тесту знања о природним бројевима - ЗТ.*

	зад1	зад2	зад3	зад4	зад5	зад6	зад7	зад8	зад9	зад10	зад11	зад12	зад13	зад14	зад15
зад1	1,000	,062	,009	,082	,443***	,009	,159*	,054	,061	-,039	,084	,119	-,068	-,005	-,009
зад2	,062	1,000	,480***	,472***	,003	,042	,067	,195**	-,020	,031	,054	,094	-,033	,023	,018
зад3	,009	,480***	1,000	,643***	,062	,181**	,005	,204**	,035	,119	-,027	,058	-,080	-,060	,017
зад4	,082	,472***	,643***	1,000	,122	,086	,036	,195**	,044	,025	-,053	-,017	-,084	-,104	-,066
зад5	,443***	,003	,062	,122	1,000	,149*	,344***	,146*	,092	,115	-,062	-,017	-,081	-,092	,023
зад6	,009	,042	,181**	,086	,149*	1,000	,191**	,027	-,102	,040	-,052	,135*	,061	-,019	,138*
зад7	,159*	,067	,005	,036	,344***	,191**	1,000	,402***	,298***	,176**	,037	,031	,160*	-,028	,290***
зад8	,054	,195**	,204**	,195**	,146*	,027	,402***	1,000	,577***	,405***	,185**	,054	,208**	,072	,166*
зад9	,061	-,020	,035	,044	,092	-,102	,298***	,577***	1,000	,509***	,203**	,021	,187**	-,014	,139*
зад10	-,039	,031	,119	,025	,115	,040	,176**	,405***	,509***	1,000	,139*	-,057	,175**	,143*	,043
зад11	,084	,054	-,027	-,053	-,062	-,052	,037	,185**	,203**	,139*	1,000	,061	,308***	,204**	,229***
зад12	,119	,094	,058	-,017	-,017	,135*	,031	,054	,021	-,057	,061	1,000	,151*	,052	-,019
зад13	-,068	-,033	-,080	-,084	-,081	,061	,160*	,208**	,187**	,175**	,308***	,151*	1,000	,322***	,325***
зад14	-,005	,023	-,060	-,104	-,092	-,019	-,028	,072	-,014	,143*	,204**	,052	,322***	1,000	,330***
зад15	-,009	,018	,017	-,066	,023	,138*	,290***	,166*	,139*	,043	,229***	-,019	,325***	,330***	1,000

* p<0,05, ** p<0,01, *** p<0,001

1. Најснажнија стварно значајна корелација забележена је између задатака:

– 4 и 3 (p=0,643, п<0,001),

– 8 и 9 (p=0,577, п<0,001),

– 8 и 10 (p=0,509, п<0,001),

– 2 и 3 (p=0,480, п<0,001),

– 2 и 4 (p=0,472, п<0,001),

– 1 и 5 (p=0,443, п<0,001),

– 8 и 10 (p=0,405, п<0,001)

– 8 и 7 (p=0,402, п<0,001).

2. Из овога се може утврдити међусобна повезаност и задатака 2, 3 и 4, као и повезаност задатака 7, 9. и 10. са задатком 8. Задатак 8. је и иначе са највећим бројем статистички значајних корелација међу задацима.

3. Задатак 12 има најмањи број статистички значајних корелација (2), које су уједно и незнатне.

4. Треба запазити и међусобне статистчки значајне, мада лагане корелације задатака 13, 14. и 15. задатка.

5. У целини, и између осталих задатака на завршном тестирању, такође постоје статистички значајне и лагане корелације.

ТРЕЋИ ДЕО

ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА, МЕТОДИЧКЕ ИМЛИКАЦИЈЕ И ПРАВЦИ МОГУЋИХ ИСТРАЖИВАЊА

I. ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Проблемска настава се на нашим просторима, као тема дидактичко-методичких радова, јавља шесдесетих година 20. века.

Дидактички радови говоре о проблемској настави као врсти наставе у целини, док се методички радиви односе на наставу појединачних наставних предмета: математике, физике и осталих. И једна и друга врста радова, као и досадашња истраживања сагласни су у закључцима да проблемска настава, значајније него било која друга врста или метода рада, утиче на развијање апстратног, стваралачког и критичког мишљења, на способност инвентивног и оригиналног у решавању проблема, на способност преструктуирања претходног знања, на развијање логичких операција (анализа, синтеза, апстракција, генерализација, диференцијација, конзервација и других). На крају, проблемска настава има велики значај и у формирању позитивних особина какве су: упорност, истрајност, систематичност, иницијативност, сналажљивост. Ове особине доприносе формирању позитивне личности што је врхунски циљ процеса васпитања и образовања.

Наше истраживање је дало конкретне резултате и показатеље да су ученици из експерименталне групе постигли значајно бољи успех на завршном тесту. На тај начин је потврђена наша хипотеза да је степен усвојености знања о скупу природних бројева и рачунских операција у њему већи код оних ученика који су знања о томе стицали путем проблемске наставе.

Ефикасност проблемске наставе је у корелацији са нивоом интелигенције – потврђује истраживање. На тај начин је потврђена и наша друга хипотеза.

И трећа хипотеза је у основи потврђена, мада не постоји статистички значајна разлика између ефикасности учења путем проблемске наставе између девојчица и дечака.

Што су математички садржаји богатији то је и већа могућност за примену проблемске наставе, па је и њена ефикасност при обраду

садржаја из множења и дељења већа него код сабирања и одузимања – потврђена четврта хипотеза.

Истраживање је показало да је проблемска настава примењива у предшколским и млађим разредима основне школе. Услов је да се васпитачи и учитељи посебно припреме за ову врсту наставе (у истраживању је ту врсту припреме обављао истраживач тако што је презентовао начин рада васпитачима и учитељима пре сваког часа).

И то показује да је проблемска настава велики изазов за васпитаче, учитеље и за саме ученике. Управо зато је требало знање и сензибилитет за њено организовање и извођење. Како је један од главних циљева наставе математике да оспособи ученика за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе, а један од главних задатака наставе математике да ученици стичу знања неопходна за разумевање квантитативних и просторбих односа и законитости у разним појавама у природи, друштву и свакодневном животу и да стичу основну математичку културу потребну за откривање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање) то, на основу резултата истраживања, можемо устврдити да учење путем решавања проблема врло успешно одговара том задатку и ефикасно доводи до циља наставе математике.

II. МЕТОДИЧКЕ ИМЛИКАЦИЈЕ И ПРАВЦИ МОГУЋИХ ИСТРАЖИВАЊА

Резултати спроведеног истраживања указују на шињеницу да су наставни програми математике рађени према савременим тенденцијама, али да у методишком смислу и у начину процењивања резултата рада постоје мањкавости.

Све активности су примерене “просечном” ученику који као такавегзистира, малте не, само у статистици. Наиме, сведоци смо да сваки ученик у процесу наставе напредује према својим способностима и до нивоа сложености коме је дорастао. Зато је неопходно да се наставни програм осавремени тако што би омогућавао процес индивидуализације наставе. Велики допринос таквом процесу дала би проблемска настава као врста наставе која најефикасније разоткрива индивидуалне способности ученика.

Да би проблемска настава у пракси била у што већој употреби требало би извршити даља и нова истраживања у правцу одређивања подесности садржаја програма математике у млађим разредима основне школе за примену исте. На основу резултата таквих истраживања те садржаје математике би требало проблемски обрадити и у уџбеницима да би постали путоказ учитељима и ученицима како треба примењивати проблемску наставу. Таквим истраживањима би се смањила несразмера између теоријских (којих је много мање) и емпиријских истраживања, а која много ефикасније утичу на развијање мотивације и интересовања ученика за учење. Све то би неминовно доводило до бољег успеха и повећања ефикасности учења, што је превасходни циљ и задатак сваког образовања, па и математичког.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdelnoor, J. R. E. (1983) *Matematički rečnik.* Beograd: "Vuk Karadžić".
2. Abe, E. (1977) *Hopf algebras*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
3. Андрић, Д. (1995) "Примена проблемског учења у разредној настави", *Учитељ,* 47-50.
4. Антонијевић, Р. (2001) "Развој биолошких појмова у основношколској настави", *Настава и васпитање,* Београд, број 1.
5. Арсић, М. (1990) "Активна позиција ученика и проблемска настава", *Иновације у настави,* Београд, број 2.
6. Арсић, М. (1990) "Решавање проблема у настави - припрема за живот", *Учитељ,* Београд, број 37-38.
7. Аврамовић, Ж. (1982) "Учење путем решавање проблема", *Зборник радова,* Врање, Педагошка академија.
8. Бајић, Б. и Исаиловић, М.. (1995) *Математика на једноставан начин. За ученике II, III iIV разред основне школе.* Шабац: ИКП ЗАСЛОН.
9. Банђур, В. и Поткоњак, Н. (1996) *Педагошка истраживања у школи.* Београд: Учитељски факултет.
10. Банђур, В. и Круљ, Р. (1996) *Статистика у педагошким истраживањима.* Приштина: Филозофски факултет.
11. Банђур, В. (1998) "Теорије о предмету проучавања методике", *Методика - научна и наставна дисциплина,* Јагодина, Учитељски факултет.
12. Башић, В. (1986) "Неке могућности примјене проблемског учења у разредној настави", *Зборник 20,* Београд, Институт за педагошка истраживања.
13. Блажић, С. и Гњатовић, С. (2002) "Провера знања ученика основне школе применом тестова са вишеструким избором", *Републички семинар 2002: о настави математике и рачунарства,* Нови сад.
14. Бранковић, Д. (2000) "Кооперативно-интерактивно учење у проблемској настави", *Настава и васпитање,* Београд, број 1-2.
15. Бирманчевић, Ј. (2008) *Крцкова математика.* Земун: Публик Практикум.

16. Весковић, М. (1987) "Образовни ефекти путем решавања проблема у настави", *Педагошка стварност,* Нови Сад, број 7.
17. Виготски, Л. С. (1977) *Мишљење и говор.* Београд: Нолит.
18. Вилотијевић, М. (1996) *Системско-теоријске основе наставног процеса.* Београд: Учитељски факултет.
19. Вилотијевић, М. (1998) *Врсте наставе.* Београд: Учитељски факултет.
20. Вилотијевић, М. (1999а) *Дидактика 1 - предмет дидактике.* Београд: Научна књига и Учитељски факултет.
21. Вилотијевић, М. (1999б) *Дидактика 3 - организација наставе.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства и Учитељски факултет.
22. Вилотијевић, М. (1999в) *Од традиционалне ка информационој дидактици*. Београд: Педагошко друштво Србије.
23. Влаховић, Б. и Вујисић-Живковић, Н. (2005) *Наставник – изазови професионализације.* Београд: Едука.
24. Воскресенски, К. (1988) "Неке могућности примене учења путем решавања проблема у настави основне школе", *Педагошка стварност,* Нови Сад, број 1.
25. Вујић, К. (1987) "Могућности учења путем решавања проблема", *Учитељ,* Београд, број 23.
26. Вуловић, Н. и други (2008) *Игра облика и бројева 4. Математика за 4. разред основне школе – 1. део.* Београд: Klett.
27. Вуловић, Н. и други (2008) *Игра облика и бројева 4. Математика за 4. разред основне школе – 2. део.* Београд: Klett.
28. Wittman, E. (1997) "10 Jahre Projekt 'mathe 2000', *UniReport,* (Berichte aus der Forschung der Univerzitat), Dortmund, No 25.
29. Гојков, А. и Стојановић, А. (2000) "Манифестовање и идентификација даровитости на раном узрасту", *Настава и васпитање*, Београд, број 5.
30. Гојков, Г, Круљ, Р. и Кундачина, М. (2002) *Лексикон педагошке методологије.* Вршац: Виша школа за образовање васпитача.
31. Голубовић, С. (1991) "Проблемска настава као дидактички систем", *Учитељ*, Београд, број 35-36.
32. Дамјановић, А. (2000) *У математичком сазвежђу IV разреда основне школе.* Београд: Клуб НТ.
33. Дејић, М. (1994) "Множење (дељење) приближних бројева - Настава путем рећавања проблема на примеру једне наставне

јединице, *Просветни преглед - Педагошка пракса*, Београд, број 251 (5-7).

34. Дејић, М. и Петровић, Н. (1995) "Један модел примене проблемске наставе у математици", *Норма*, Сомбор, број 1.
35. Дејић, М. (1996) *Методичка трансформација одабраних садржаја нумеричке математике.* Вршац: Виђа школа за образовање васпитача.
36. Дејић, М. (1997) "Час проблемске наставе математике", *Иновације у настави*, Београд, број 1.
37. Дејић, М. (1998) "Кратак осврт на проблемску наставу", *Наша школа*, Бања Лука, број 1-2.
38. Дејић, М. (2001) "Аритметички задаци у разредној настави", *Настава и васпитање*, Београд, број 1.
39. Дејић, М. (2002) "Повезаност методике наставе математике са другим наукама", *Педагогија*, Београд, број 1-2.
40. Дејић, М. (2000) *Методика наставе математике.* Јагодина: Учитељски факултет.
41. * * (1998) "Десет година пројекта 'Матиш 2000', *Актуелности у образовању*, Београд, број 1.
42. * * (2001) *Десет година реформи обавезног образовања (1984-1994) у неким европским земљама.* Београд: Министарство просвете и спорта Републике Србије.
43. Добрић, Н. (1979) *Развијање почетних математичких појмова у предшколским установам*а. Београд: Педагошка академија за образовање васпитача предшколских установа.
44. Дубљанин, С.(2000)"Природа апстраховања и уопштавања у настави у млађим разредима основне школе", *Настава и васпитање*, Београд,бр. 5.
45. Ђокић, К. (1991) "Проблемско развојна настава", *Учитељ*, Београд, број 35-26.
46. Ђорђевић, Ж. (1958) *Историја васпитања у Срба.* Београд: Научна књига.
47. Ђорђевић, Ј. (1981) *Савремена настава.* Београд: Научна књига.
48. Ђорђевић, Ј. (2002) *Својства наставника и процењивање њиховог рада.* Вршац: Виша школа за образовање васпитача.
49. Ђукић, М. (1995) "Прилози проблемској настави (Индивидуализација-проблем задатака)", *Педагоћка стварност*, Нови Сад, број 7-8.

50. Егерић, М. (1999) "Проблемска настава у почетној настави математике", *Настава и васпитање,* Београд, број 5.
51. Егерић, М. (2000) *Практикум методике математике разредне наставе.* Јагодина: Учитељски факултет.
52. Егерић, М. (2001) "Мотивација у настави математике", *Настава и васпитање,* Београд, број 1.
53. Егерић, М. (2002) "Учење путем решавања проблема у настави математике", *Методичка пракса,* Учитељски факултет, Београд.
54. * * (1963) *Енциклопедијски рјечник педагодије.* Загреб: Матица хрватска.
55. * * (1985) *Заједнички план и програм васпитно-образовног рада у основној школи - Српски језик и Математика од I до IV разреда основне школе са дидактиwко-методичким упутствима.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
56. Игњатовић, М. М. (1986) *Математика за младе математичаре од 9 ди 11 година.* Горњи Милановац: Дечје Новине.
57. Игњатовић, М. М. (1994) *Математика за четврти разред основне школе.* Београд: Наука.
58. Игњатовић, М. М. (2008) *Математика за трећи разред основне школе*. Београд: "Драганић".
59. Игњатовић, М. М. (2008) *Радни листови за математику за трећи разред основне школе.* Београд: "Драганић".
60. * * "Измене и допуне Плана и програма основног образовања и васпитања у Републици Србији", *Службени гласник Републике Србије - Просветни Гласник,* 1996, број 6.
61. * * "Измене и допуне Програма за основну школу (предмет Математика)", *Службени гласник РС - Просветни гласник,* Београд, 2001, број 4.
62. Илић, М. (2000) *Респонсибилна настава.* Бања Лука: Универзитет у Бања Луци.
63. Ивичковић, Р. (1969) "Дејство учења путем решавања проблема на повећање образовних достигнућа у елементарној настави математике", *Педагошка стварност,* Нови Сад, број 9.
64. Ивковић, С. (1995) "Додатна настава математике у четвртом разреду основне школе", *Учитељ*, Београд, број 47-50. (с.352-355).
65. Ивковић, С. (2001) "Обрада наставне јединице 'Разломци - графичко решавање проблема' у четвртом разреду основне школе", *XVI сабор учитеља Србије,* Ниш.

66. Ивковић, С. (2001) "Графичко приказивање разломака (утврђивање и вежбање)", *Учитељ,* Београд-Ниш, XIX број 73. (с.54-55).
67. Ивковић, С. (2001) "Графичко приказивање разломака у IV разреду", *Унапређивање васпитања и образовања,* Ниш, број 7.
68. Ивковић, С. (2008) *Математика – методички приручник за обраду одабраних поглавља.* Пирот: Висока школа струковних студија ...
69. Јанковић, А. (2007) *Математика: кроз игру до знања.* Земун: Публик Практикум.
70. Јоксимовић, С. (2008) *Математика 2а. Уџбеник за други разред основне школе.* Београд: "Ëduka".
71. Јоксимовић, С. (2008) *Математика 2б. Уџбеник за други разред основне школе.* Београд: "Ëduka".
72. Јовановић, С. (2001) "Разломци у почетној настави математике", *Методичка пракса,* Београд, број 3-4.
73. * * (1989) "Југославија – преглед развоја просвете и школства", *Педагошка енциклопедија,* Београд и други, Завод за уџбенике и наставна средстваи други, стр. 356-358.
74. Јукић, С. и други (1998) *Дидактика.* Јагодина: Учитељски факултет.
75. Кадијевић, Ж. (2001) "Може ли јапанско искуство да унапреди наше математичко образовање?", *Настава и васпитање,* Београд, број 1.
76. Каменов, Е. и Рацков, Ј. (1994) "Проблемска настава као подстицај интелектуалног развоја", *Настава и васпитање,* Београд, број 4.
77. Каменов, Е. (2005) *Математишке активности, игровни листови.* Нови Сад: Драгон.
78. Каменов, Е. (2005) *Предшколска математика, игровни листови.* Нови Сад: Драгон.
79. Какашић, С. (2000) *Методика математике (Уџбеник за студенте виших школа за образовање васпитача).* Сремска Митровица: Аутор.
80. Кнежевић, В. (1986) *Структурне теорије наставе.* Београд: Просвета.
81. Ковач-Церовић, Т. (1989) "Учење путем решавања проблема", *Педагошка енциклопедија,* Београд и други, Завод за уџбенике и наставна средства и други.

82. Ковач-Церовић, Т. (1989) "Равенове прогресивне матрице", *Педагошка енциклопедија,* Беогард и други, Завод за уџбенике и наставна средства и други.

83. Коцић, Љ. (1981) *Педагошки експеримент.* Београд: Просвета

84. Копрински, С. и Топалов, Q. (1985) *Задачи по елементарна математика.* Софија: "Народна просвета".

85. Krantz, S. G. (1999) *How to Teach Mathemattics.* Rhode Island: American Mathematical Society.

86. Кркљуш, С. (1977) "Решавање проблема у експерименталним условима и проблемска настава", *Педагошка стварност,* Нови Сад, број 6.

87. Кркљуш, С. и Ђукић, М. (1990) "Дидактичке трансформације научних и наставних метода у систему проблемске наставе", *Зборник 8,* Београд, Институт за педагошка истраживања.

88. Крчмар, М. (1966) "Обрада разломака у основној школи", *Педагошки рад,* Нови Сад, број 1-2.

89. Квашчев, Р. (1968) "Настава и учење у виду решавања проблема", *Педагогија,* Београд, број 4.

90. Kupusiewich, Cz. (1976) *O efektywnosci nauszania problemowego.* Warsava.

91. Латковић, М. (1999) *Радни листови из математике за први разред основне школе.* Београд: Завод за уџенике и наставна средства.

92. Латковић, М. (1999) *Радни листови из математике за други разред основне школе*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

93. Lagemann, Condliffe Ellen (2000) *An Elusive Science: The Troubling History of Education Research*. Chicago: University of Chicago Press.

94. Лекић, Ж. (1980) *Методологија педагошког истраживања и стваралаштва.* Београд: Завод за издавање уџбеника.

95. Лекић, Ж. (1993) *Методика разредне наставе.* Београд: Нова просвета.

96. Лековић, К. (1985) "Разломци у почетној настави математике", *Васпитање и образовање,* Титоград, број 1.

97. Лернер, И. J. (1984) "Облици проблемског излагања", *Иновације у настави,* Крушевац, број 2.

98. Lester, K. Frank and Njiliam, Dylan (2000) ”The Evidential Basis for Knonjledge Claims in Mathematics Education Research", *Journal ror Research in Mathematics Education,* March.

99. Липовац, Д. (1999) *Методички приручник за математику.* Нови Сад: ИП "Бистричак".

100. Лучић, Б. (2001) "Проблемска настава - час проблемске наставе математике", *Учитељ*, Београд, број 74.

101. Махмутов, М. И. (1977) *Проблемное обучение. Основние вопрпси теории.* Москва.

102. Малиновић, Т. (1998) *Основе наставе математике.* Врање: Учитељски факултет.

103. Малиновић, Т. (1998) "О појмовима природног броја у почетној настави математике", *Методичка пракса*, Београд, број 3-4.

104. Малиновић, Т. и други (1999) *Збирка проблемских задатака из математике за основну школу.* Врање: Учитељски факултет.

105. Малиновић, Т. и Јовановић-Малиновић, Н. (2002) *Методика наставе математике.* Врање, Учитељски факултет.

106. Малиновић-Јовановић, Н. (1999) Програмски захтеви садржаја о разломцима у II и III разреду основне шћколе", *Зборник радова Учитељског факултета*, Врање, број 6.

107. Малиновић-Јовановић, Н. (2002)"Теоријски оквир разјашњења појма природног броја", *Зборник радова Учитељског факултета*, Врање, бр. 9.

108. Максић, С. (1998) *Даровито дете у школи.* Београд: Институт за педагошка истраживања.

109. Максић, С. (2000) "Ефекти основног и средњег образовања", *Настава и васпитање*, Београд, број 5.

110. Мандак, А. (2005) *Основи наставе математике са збирком задатака.* Лепосавић: Ушитељски факултет у Призрену-Лепосавићу.

111. Мандак, А. и С. Ивковић (2009) "Формирање појма броја пет путем проблемске наставе", *Методичка пракса*, Београд, број 4, 2009.

112. Манчић, Р. (2005) *До математике кроз игру:дидактички материјал за припремање предшколске деце за* полазак у основну школу. Ниш: Графика.

113. Маринковић, Б. (1990) *Упуство за примену тестова из математике у основној школи.* Београд: Архимедес.

114. Марјановић, М., Латковић, М. и Димитријевић, Д. (1999) *Математика за први разред основне школе.* Београд: Завод за уџбенике и нставна средства.

115. Марјановић, М., Латковић, М. и Димитријевић, Д. (1999) *Математика за други разред основне школе.* Београд: Завод за уџбенике и нставна средства.

116. Марјановић, М., Латковић, М. и Димитријевић, Д. (1999) *Математика за четврти разред основне школе.* Београд: Завод за уџбенике и нставна средства.

117. Marjanović, M. M. (1998) "Schematic learning of the addition and multiplitacion tables - sticks as concrete manipulatives", *The teaching of mathematics,* Belgrade, The mathematical society of Serbia.

118. Marjanović, M. M. (1999) "A broader njay through themas of elementary school mathematics, II", *The teaching of mathematics,* Belgrade, The mathematical society of Serbia.

119. Марјановић, М. (2004) *Приручник за уџбеник математике (за I разред основне школе).* Београд: Завод за уџбеник и наставна средства.

120. Маринковић, С. и Марковић, С. (2006) *Мала математика.* Броград: Креативни центар.

121. Мартић, J. (1986) "Васпитни циљ наставе математике у основној школи", *Унапређивање наставе математике,* Београд, Просветни преглед.

122. Матејевић, М. (1994) *Наставни програм као фактор оптерећености ученика основне школе.* Београд: Институт за педагогију и андрагогију.

123. Матјушкин, М. А. (1972) *Проблемние ситуации в мићлинии и обучении.* Москва.

124. Мерзон, А. Е. и други (1998) *Посебие по математике длА факултетов началних классов.* Москва: Институт практическои психологии.

125. Металскиј, Н. В. (1989) *Пути совершенстбобанија обученија математике. Минск*

126. Мијановић, Н. (1998) "Проблемска настава у функцији ефикасног индивидуалног развитка личности", *Иновације у настави,* Крушевац, број 1.

127. Милановић-Наход, С. (1988) *Когнитивне теорије и настава.* Београд: Институт за педагошка истраживања.

128. Милићевић, Б. (1989) "Учење помоћу решавања проблема (проблемска настава)", *Наша школа,* Сарајево, број 1-2.

129. Милојевић, Л. (1983) "Један пример проблемске настев математике", *Иновације у настави,* Крушевац број 2.

130. Милоћевић, Д. и Бојанић, М. (1988) "Проблемска настава у настави математике", *Иновације у настави, Крушевац, број 4.*

131. Мићић, В. и Каделбург, З. (1989) *Увод у теорију бројева*. Београд: Друштво математичара СР Србије.

132. Мирков, С. 2000 "Ставови ученика основне школе према биологији и математици", *Настава и васпитање*, Београд, број 5.

133. Мишчевић, Г. (2001) "Самостални стваралачки рад ученика у проблемској настави природе и друштва (теоријски приступ)", *Настава и васпитање"*, Београд, број 3-4.

134. Митић, В. (1999) *Иновације и настава.* Нови Сад: Будућност.

135. Митровић, Д. (1987) "Васпитно-образовни рад путем решавања проблема у функцији интелектуалног развоја", *Настава и васпитање*, Београд, број 1-2.

136. Мужић, В. (1973) *Методологија педагошког истраживања.* Сарајево: Завод за издавање уџбеника.

137. * * (1963) *Наставни план и програм за основну школу у С Р Србији.* Београд: Савремена школа.

138. * *(1996) *Наставни програм математике за основну школу Републици Србији.* Београд: Архимедес.

139. Николић, М. М. (1967) *Уводне теме у методику математичког образовања.* Београд: Младо покољење.

140. Николић, М. М. (1969) *Васпитање у настави математике у основној школи.* Београд: Научна књига.

141. Николић, Н. (1999) "Нула као сабирак, умањилац и разлика". *Методичка пракса,* Београд: број 1-2.

142. Ничковић, Р. (1966) "Ефекат трансфера у учењу помоћу решавања проблема", *Педагогија,* Београд, број 3-4.

143. Ничковић, Р. (1967) "Проблемска настава", *Педагошки речник (том 2),* Београд, Завод за издавање уџбеника.

144. Ничковић, Р. (1967) "Проблем-задатак", *Педагошки речник* (том 2), Београд, Завод за издавање уджбеника.

145. Ничковић, Р. и (1968) *Учење путем решавања проблема у настави:* Београд: Завод за издавање уџбеника

146. Ничковић, Р. (1969) "Дејство учења путем решавања проблема на образовна достигнућа у елементарној настави математике", *Зборник Института за педагошка истраживања,* Београд, број 2.

147. Ничковић, Р. (1974) *Настава путем решавања проблема.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

148. Ничковић, Р. (1975) *Рационализација наставе и учења*. Нови Сад: Раднички универзитет "Радивој Ћипранов".

149. Ничковић, Р. (1976) *Учење путем решавања проблема у елементарној настави математике. (Експериментална провере на примеру наставног програма математике у I и II разреду одновне школе).* Београд: Научна књига.

150. Ничковић, Р. (1984) "Проблемска настава као комплексни дидактички систем", *Учитељ,* Београд, број 7.

151. Обрадовић, М. И Пофук, Љ. (2007) "Проблемска настава", *Настава математике*, Београд, број LII, 4.

152. Окон, В. (1983) *Основи проблемного обучениа.* Москва.

153. * * (1989) *Педагошка енциклопедија.* Београд и други: Завод за уџбенике и наставна средства и други.

154. Пенавин, В. (1966) *Структура и класификација метода у настави аритметике и алгебре.* Београд: Завод за издавање уџбеника СР Србије.

155. Петровић, С. и други (1983) *Дидактичко-методички приручник.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

156. Петровић, Н. и Дејић, М. (1994) "Могућности проблемске наставе у нумеричкој математици", *Југословенски конгрес ПРИМ*, Будва.

157. Петровић, Н. и Дејић, М. (1995) "Један модел примене проблемске наставе у математици", *Норма*, Сомбор.

158. Петровић, Н. (2001) *Математички проблеми у причама.* Сомбор: Аутор.

159. Петровић, Н. (2002) "Постављање и решавање математичких проблема уз диференцирана упутства" *Републички семинар 2002: о настави математике и рачунарства*, Нови сад.

160. Петровић, С. (2002) *Желим, хоћу, могу. Збирка задатака из математике за 4. разред основне школе.* Нови Сад: школска књига.

161. Петровић, Т. (1988) *Проблемска развојна настава физике.* Београд: Просвета.

162. Пијаже, Ж. (1990) "Учење и развој", *Когнитивни развој детета*, Београд, Савез друштава психолога Србије.

163. Пинтер, Ј. и други (1996) *Општа методика наставе математике.* Сомбор: Учитељски факултет.

164. Пинтер, J. (1997) *Математичко моделовање у почетној настави математике.* Сомбор: Учитељски факултет.

165. Пинтер, J. (2002) "Нивои математичких знања ученика", *Републички семинар 2002: о настави математике и рачунарства*, Нови сад.

166. Пинтер, J, Крекић, В. и Ђетковић, А. (2002) *Методички приручник из математике - за разредну наставу.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

167. Пивац, J. ((1974) "Проблемска настава - једна концепција совјетских дидактичара", *Педагогија,* Београд, број 3.

168. * * (1995) "План и програм основног образовања и васпитања у Републици Србији", *Службени гласник Републике Србије - Просветни Гласник,* број 5.

169. * * (1996) *Наставни програм математике за основну школу у Републици Србији.* Београд: Архимедес.

170. Пленковић, J. (1984) "Границе проблемске наставе", *Иновације у настави*, Крушевац, број 2.

171. Полачек, А. (1992) *Математика IV. Решени задаци за IV разред основне школе.* Београд: Друштво математичара Србије.

172. Пољак, В. (1975) *Обрада наставних садржаја и стјецање знања.* Загреб: Педагошко-књижевни збор

173. Пољак, В. (1977) *Наставни системи.* Загреб: Педагошко-књижевни збор.

174. Пољак, В. (1980) *Дидактичко обликовање уџбеника и приручника*. Загреб: Школска књига.

175. Пољак, В. (1985) *Дидактика.* Загреб: Школска књига.

176. Пољак, В. (1989) "Настава", *Педагошка енциклопедија,* Београд и други, Завод за уџбенике и наставна средства и други.

177. Пољак, В. (1985) "Проблемска настава", *Педагошка енциклопедија*, Београд и други, Завод за уџбенике и наставна средства и други.

178. Поповић, О. (1987) "Проблемска настава као дидактички принцип", *Учитељ,* Београд, број 21.

179. Прентовић, Р. (1999) "Припреме деце за успешно учење математике у млађим разредима основне школе", *Норма,* Сомбор, број 3.

180. Прентовић, Р. и Сотировић, В. (1998) *Методика развоја почетних математичких појмова*. Нови Сад: Дидакта.

181. Прешић, С. Б. (1975) *Савремени приступ настави математике – књига I.* Београд: Научна књига.

182. Првановић, С. (1970) *Методика савременог математичког образовања у основној школи.* Београд: Завод за издавање уџбеника СР Србије.

183. Првановић, С. (1974) *Методика наставе математике. Београд.*

184. Продановић, Т. и Ничковић, Р. (1974) *Дидактика*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

185. Радојевић, П. и Радојевић, В. (1984 или 87) *Методика наставе математике. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства*

186. Радосављевић, К. (2009) "Бројевни системи кроз историју", *Методичка пракса,* Београд, број 4.

187. Рајшп, М. и други (2006) *Игра бројева и облика1, 1. део, математика за 1. разред основне школе.* Београд: Klett.

188. Рајшп, М. и други (2006) *Игра бројева и облика1, 2. део, математика за 1. разред основне школе.* Београд: Klett.

189. Ракић, Б. (1984) "Однос когнитивно - афективно у проблемском приступу настави", *Иновације у настави,* Крушевац, број 4.

190. Рендић-Миочевић, И. (1984) "Проблемска настава повијести и флексибилна диференцијација ученика", *Иновације у настави,* Крушевац, број 2.

191. Родић, З. и Весковић, М. (1987) "Образовни ефекти учења путем рећавања проблема у настави", *Педагошка стварност,* Нови Сад, број 7.

192. Росандић, Д. (1980) *Проблемска, стваралачка и изборна настава књижевности.* Сарајево: ИКРО Свјетлост.

193. Фурлан, И. (1970) Упознавање, испитивање и оцењивање ученика. Загреб: Педагошко-књижевни збор.

194. Симић, С. (1995) "Активно учење кроз примену проблемског и истраживачког интердисциплинарног приступа у настави", *Настава и васпитање,* Београд, број 4-5.

195. Simon, A. Martin, Tzur Ron, Heinz Karen, Kinzel Margaret and Smith Schnjan (2000) "Characterizing a Perspective Underlying the Practice of Mathematics Teachers in Transition", *Journal ror Research in Mathematics Education,* November.

196. Сотировић, В. (2006) *Математика за предшколце, радни листови за децу од 5 до 7 година.* Нови Сад: Дидакта.

197. Станимировић, Б. и Дедић, ж. (1998) *Васпитање на прагу трећег миленијума.* Врање: Учитељски факултет.

198. Стевановић, М. (1985) *Учење путем решавања проблема у настави књижевности. Београд.*

199. Стевановић, М. (1986) *Креативност наставника и ученика.* Пула: Истарска наклада.

200. Стојановић, Д. (1995) *Математичке мозгалице за IV основне школе.* Београд: ВИДЕС.

201. Стројк, Д. (1991) *Кратак преглед историје математике.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

202. * * (2001) *Свеобухватна анализа система основног образовања у СРЈ.* Београд: УНИЦЕФ

203. Талузина, Н.Ф. (1975) Управление процессом усвоениа знании. Москва: МГУ.

204. Tanaka, S. & NJong, N-Y. (2000) "Primary Japanese Mathematcs in the First Decade of the 21, st. Century - the Course of Study", *EduMath*, No 10.

205. Теодосић, Р. (1970) "Проблемска настава", *Настава и васпитање*, Београд, број 3.

206. Тодосијевић, М. и Инђић, Б. (1987) "Нека искуства увођења учења путем решавања проблема у четвртом разреду основне школе", *Настава и васпитање*, Београд, број 1-2.

207. Тошић, Р. и Вукославчевић, В. (1995) *Елементи теорије бројева.* Нови Сад: Алеф.

208. Тошић, Р. (2002) "Математика и математичко образовање у савременом свету", *Републички семинар 2002: о настави математике и рачунарства*, Нови сад.

209. Трнавац, Н. и Ђорђевић, Ј. (1995) *Педагогија.* Београд: Научна књига.

210. Трифуновић, Д. (1994) “Математика за учитеље 3”, *Настава математике*, Београд, број 1-2, XL.

211. Ћебић, М. и Батановић-Лаловић (2007) *Школа за предшколце – Матиш.* Београд: Sil books.

212. Ћунковић, С. (1970-71) *Школство и просвета у Србији у XIX веку.* Београд: Педагошки музеј

213. * * (1970)*Учење путем решавања проблема у настави - Теорија, пракса, и експериментална провера на примеру елементарне*

физике. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства РС Србије

214. * * (1986) *Унапређивање наставе математике*. Беград: Просветни преглед
215. * * (1998) *Упоредна анализа основне школе*. Београд: Република Србија - Министарство просвете.
216. Фурлан, И. (1966) *Модерна настава и интензивније учење*. Загреб: школска књига.
217. Halmos, Paul R (1960) *Naive set Theory*. New Yourk: D. Van Nostrand company
218. http://www.wikipedia.org.rs
219. http://www.liljanapetkovic.com
220. Цветковић, Б. (1988) "Један час проблемске наставе", *Иновације у настави,* Крушевац, број 2.
221. Цветковић, Ж. (1966) "Експериментални прилог успешној организацији прозеса усвајања математичког градива на примеру разломака", *Педагогија*, београд, број 3-4.
222. Цветковић, Ж. (1980) *Усвајање појмова у настави*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.
223. Шамић, Н. (1974) *Како настаје научно дело*. Сарајево: Веселин Маслеша.
224. Шевченко, И. Н. (1967) *Методика наставе обичних разломака*. Београд: Савремена школа, 1967.
225. Шимић, Г. (1998) Методика развијања математичких појмова. шабац: Виђа школа за образовање васпитача.
226. Шимлеша, П. (1969) *Сувремена настава*. Загреб: Педагошко-књижевни збор.
227. Шпијуновић, К. (1994) *Такмичење из математике и развијање стваралачког мишљења ученика*. Београд: Институт за педагогију и андрагогију филозофског факултета
228. Шпијуновић, К. (1998) *Организација рада у комбинованом одељењу*. Београд: Институт за педагогију и андрагогију Филозофског факултета у Београду.
229. Шпијуновић, К. (2000) "Развијање оригиналности у процесу математичког образовања ученика I-IV разреда основне школе", Настава и васпитање, Београд, број 4.
230. Шпијуновић, К. (2002) "Развијање елаборације у процесу математичког образовања ученика I-IV разреда основне школе", *Зборник радова Учитељског факултета у Ужицу*, Ужице, 2002, број 3.

ПРИЛОЗИ

Прилог 1. Иницијални тест са решењима - ИТ
Прилог 2. Завршни тест са решењима - ЗТ

ИТ
Име и презиме_____

Школа_____ , Разред_____, Одељење_____.

УПУТСТВО

Циљ овог теста је да се провери колико сте упамтили од оног што сте о бројевима, сабирању, одузимању, множењу и дељењу већ учили у претходним разредима.

Сваки задатак прочитајте пажљиво, па онда приступите израчунавању и одговору. Уколико неки задатак не можете да решите одмах, не задржавајте се на њему. Најпре решавајте оне задатке који су вам јасни, а ако остане времена вратите се и на оне које одмах нисте могли да решите.

Тест се ради 90 минута (два часа).

Срећно!

ПИТАЊА И ЗАДАЦИ

1. Напиши: а) Најмањи и највећи непарни број осме стотине _____.

б) Најмањи и највећи парни број пете стотине _____.

2. Одредите вредност слова **а** тако да се добије тачна једнакост:

а) 378 + 216 = а

216 и 378 зову се _____.

а се зове _____.

\+ је ознака за рачунску операцију _____.

б) 569 - 346 = а

569 се зове _____.

346 се зове
_____.

а се зове
_____.

- је ознака за рачунску операцију
_____.

3. Попуни таблице:

а)

Умањеник	29400		37000
Умањилац	5800	3800	
Разлика		5900	17800

б)

Сабирак	4800	29000	
Сабирак	3700		6400
Збир		59000	33600

4. Израчунај на најлакши начин: 119 + 23 + 1 =
_____.

5. Разлику бројева 340 и 275 увећај 5 пута.

_____.

6. Ако је а . б = 240, израчунај:
а) (а · 3) · б =
_____.

Први чинилац је повећан 3 пута. Како се променио производ?

_____.

7. Производ бројева 18 и 4 најпре увећај за 12 а затим умањи 6 пута.

_____.

8. Милан је набрао 60 шљива. Његов брат је набрао 10 пута мање. Шта можеш да рачунаш? Рачунај!

9. Израчунај:
а) (972 : 6) : 3 =
_____.

б) 894 – 738 : 9 =

_____.

в) 750 : 6 + 214 =

_____.

10. Никола је имао 730 динара. Купио је једну књигу за 84 динара и другу, која је 2 пута скупља од прве. Затим је купио 3 оловке које су 4 пута јефтиније од прве књиге. Шта можеш да рачунаш? Рачунај!

11. а) Који број треба помножити са 6 да би се добило 750?

_____.

b) Којим бројем треба поделити 469 да би се добило 7?_____.

12. Реши једначину $405 : x = 3 \cdot 15$

_____.

Решења – Иницијални тест

1. а) 701, 799
   б) 402, 500

2. а) $a = 594$
   ... сабирци
   ... збир
   ... сабирање

   б) $a = 223$
   ... умањеник
   ... умањилац
   ... разлика

3. а)

		9700	
			19200
	23600		

б)

			40000
		30000	
	8500		

4. 119 + 23 + 1 = (119 + 1) + 23 = 120 + 23 = 143

5. (34o - 275) · 5 = 65 · 5 = 325

6. а) (*a* · 3) · *b* = (*a* · *b*) · 3 = 240 · 3 = 720
   b) производ се повећао три пута

7. (18 · 4 + 12) : 6 = (72 + 12) : 6 = 84 : 6 = 14

8. 60 : 10 = 6 Миланов брат је набрао 6 шљива
   60 + 6 = 66 Милан и његов брат су заједно набрали 66 шљива
   60 - 6 = 54 Милан је набрао 54 шљива више него његов брат

9. а) (972 : 6) : 3 = 162 : 3 = 54
   б) 894 - 738 : 9 = 894 - 82 = 812
   в) 750 : 6 + 214 = 125 + 214 = 339

10. K1 = 84
    1) K2 = 84 · 2 = 168
       Друга књига кошта 168 динара
       3 оловке које је платио 4 пута мање него прву књигу
    2) 84 : 4 = 21
       3 оловке је Никола платио 21 динар
    3) 84 + 168 21 273
       Никола је потрошио 273 динара
    1) 730 - 273 = 457
       Николи је остало 457 динара
    2) 730 - (84 + 84 · 2 + 21) =
       730 - 273 = 457

11. x · 6 = 750
    x = 750 : 6
    x = 125
    To je broj 125

12. 405 : x = 45
    x = 405 : 45
    x = 9

ЗТ

Име и презиме _____

школа_____, Разред_____, Одељење_____

УПУТСТВО

Већина задатака захтева извесна израчунавања за које је предвиђено место за рад. На том месту треба урадити све рачунске операције које задатак захтева. Без тог рада нећете добити поене за тај задатак. Добијене резултате упишите на место које је предвиђено за одговоре.

Не губите време око задатка који не можете рећити одмах, већ пређите на рећавање наредних задатака. На крају, ако буде времена, вратите се на задатак који нисте могли да рећите. За време рада не сме бити разговора, договарања и преписивања.

Тест се ради 60 минута.

Срећно!

ПИТАЊА И ЗАДАЦИ

1. Операција одузимања..... изводљива у скупу природних бројева _____, јер .....

   Пример:

2. Сабери бројеве растављајући их на вишеструке декадне јединице
   783501 + 412323 =

3. Користећи "олакшицу" да се разлика не мења ако се умањенику и умањиоцу дода или одузме неки број, израчунај на два начина:
   5600 - 3200 =

4. а) Следбеник броја 38231 је _____ уопште, следбеник броја *a* у означи *a*’ =
   б) претходник броја *a* је број _____.

5. Пера је добио за рођендан 3500 динара, његова сестра је добила 1278 динара мање од Пере, а брат 583 динара мање од сестре. Рачунај све што можеш од ових података.

6. Младен је пошао у радњу и понео 1300 динара с намером да купи играчку која кошта 1120 динара, а остатак да задржи у касици. Успут га сусретне деда и дода му 200 динара. Младен се јако обрадовао. Ушавши у радњу закључио је да је играчка поскупела за 200 динара. Мало се сневеселио, али размисливши боље, повратио је расположење. Рачунај шта можеш на основу ових података.

7. Један од сабирака је повећан за 350. Како треба променити други сабирак:

а) да би се збир повећао за 150

б) да би се збир смањио за 50?

(32568 - 899) - (2340 - x) = p

8. Који је број 3 пута мањи од броја 96 009?
(Заокружи слово испред тачног одговора)
а) 323 б) 32 003 в) 3 203 г) 96 006

9. Допуни тако да добијеш тачне једнакости:

(5 400 · 1 000) · _____ = 5 400 · (1 000 · 6 800)

10. Заокружи слово испред тачног решења једначине:

1) $m \cdot 100 = 2\,000\,000$

а) $m = 2\,000$ б) $m = 20\,000$ в) $m = 200\,000$ г) 200 000 000

2) x : 2 = 20 222

а) x = 4 444 б) x = 10 111 в) x = 1 111 г) x = 40 444

11. Заокружи слово испред тачне вредности дељеника ако је делилац 100, количник 8, остатак 4:

а) 804 б) 4 008 в) 408 г) 8 004

12. Допуни тако да добијеш тачне једнакости:

а) *а* ·б = 1 000 б) *а* : б = 5 000

(*а* · -----) · *б* = 3 000 (*а* : -----) : *б* = 1 000

а · (*б* : -------) = 500 *а* : (*б* : -------) = 10 000

(*а* · 40) · (б : ---------) = 1 000 (*а* · 43) : (б · ---------) = 5 000

13. Заокружи слово испред вредности *a, b и c* за које је дата једнакост тачна:

$$a \cdot b \cdot c = 1\,020$$

а) $a = 133$ $b = 84$ c = 96

б) $a = 101$ $b = 9$ $c = 205$

в) $a = 2$ $b = 102$ $c = 5$

14. Заокружи слово испред тачног одговора:

1) Како се мења производ ако један чинилац смањимо 8 пута, а други остане непромењен?

а) Повећаће се 8 пута. б) Смањиће се за 8.

в) Неће се променити. г) Смањиће се 8 пута.

2) Како се мења количник ако и дељеник и делилац повећамо 4 пута?

а) Повећаће се 4 пута. б) Повећаће се 16 пута.

в) Неће се променити г) Смањиће се 4 пута.

15. Заокружи слово испред израза чијим решавањем се добија решење задатка:

У једном магацину је 2 130 свезака, а у другом магацину четири пута више свезака него у првом, а у трећем магацину 1 030 свезака. Колико је свезака било укупно у ова три магацина?

а) $2\,130 + 2\,130 \cdot 4 + 1\,030$

б) $2\,130 \cdot 4 + 1\,030$

в) $(2\,130 + 2130) \cdot 4 + 1\,030$

Решења – Завршни тест

1. Није; Н; постоје бројеви из скупа Н чија разлика није природан број $5 - 8 \in \notin$ Н
2. 783501 + 412323 = **7** • 100000 + 8 • 10000 + 3 • 1000 + 5 • 100 + 1 + 4 • 100000 + 1 • 10000 + 2 • 1000 + 3 • 100 + 2 • 10 + 3 = 11 • 100000 + 9 • 10000 + 5 • 1000 + 8 • 100 + 2 • 10 + 4 = 1195824
3. а) 5600 – 3200 = (5600 + 400) – (3200 + 400) = 6000 – 3600 = 2400

   б) 5600 – 3200 = (5600 – 600) - (3200 – 600) = 5000 – 2600 = 2400
4. 99999 + 999 = 100998

999 + 99999 = 100998

5. 12348 – 0 = 12348 јер је 12348 + 0 = 12348
6. а) 38232; a’ = a + 1

   б) a – 1
7. 16129; 22996
8. б)
9. 6 800
10. 1) б) 2) г)
11. а)
12. а) 3, 2, 72 б) 5,2,43
13. в)
14. 1) г)
15. а)