



Univerzitet u Novom Sadu  
Prirodno-matematički fakultet  
Departman za matematiku i  
informatiku



Mirjana Brdar

# Dvoparametarski singularno perturbovani konturni problemi na mrežama različitog tipa

Doktorska disertacija

Novi Sad, 2016.



|  |            |
|--|------------|
| <b>Predgovor</b>   | <b>iii</b> |
| <b>1 Uvod</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2 Postupci konačnih elemenata</b>                             | <b>7</b>   |
| 2.1 Prostori funkcija . . . . .                                  | 7          |
| 2.1.1 Prostori integrabilnih funkcija . . . . .                  | 7          |
| 2.1.2 Prostori Soboljeva . . . . .                               | 8          |
| 2.2 Postupak konačnih elemenata . . . . .                        | 11         |
| 2.3 Konačni elementi . . . . .                                   | 16         |
| 2.4 Lagranžov interpolant . . . . .                              | 22         |
| 2.5 Klemanov kvazi-interpolant . . . . .                         | 23         |
| <b>3 Jednodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije</b> | <b>27</b>  |
| 3.1 Slaba formulacija problema . . . . .                         | 29         |
| 3.2 Galerkinov metod konačnih elemenata . . . . .                | 30         |
| 3.3 Dekompozicija rešenja . . . . .                              | 32         |
| 3.4 Slojno-adaptivne mreže . . . . .                             | 35         |
| 3.4.1 Šiškinova mreža . . . . .                                  | 35         |
| 3.4.2 Bahvalovljeva mreža . . . . .                              | 35         |
| 3.4.3 Duran-Šiškinova mreža . . . . .                            | 43         |
| 3.4.4 Duranova mreža . . . . .                                   | 45         |
| 3.5 Ocena greške na Šiškinovoj mreži . . . . .                   | 48         |
| 3.6 Ocena greške na Bahvalovljevoj mreži . . . . .               | 48         |

---

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.6.1    | Greška interpolacije . . . . .                               | 49         |
| 3.6.2    | Konvergencija u energetskej normi . . . . .                  | 53         |
| 3.7      | Ocena greške na Duran-Šiškinovoj mreži . . . . .             | 55         |
| 3.7.1    | Greška interpolacije . . . . .                               | 55         |
| 3.7.2    | Konvergencija u energetskej normi . . . . .                  | 61         |
| 3.8      | Ocena greške na Duranovoj mreži . . . . .                    | 62         |
| 3.8.1    | Greška interpolacije . . . . .                               | 63         |
| 3.8.2    | Konvergencija u energetskej normi . . . . .                  | 63         |
| 3.9      | Numerički eksperimenti . . . . .                             | 64         |
| <b>4</b> | <b>Dvodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije</b> | <b>81</b>  |
| 4.1      | Slaba formulacija problema . . . . .                         | 84         |
| 4.2      | Galerkinov metod konačnih elemenata . . . . .                | 85         |
| 4.2.1    | Bilinearna aproksimacija na četvorouglovima . . . . .        | 85         |
| 4.2.2    | Linearna aproksimacija na trouglovima . . . . .              | 88         |
| 4.3      | Dekompozicija rešenja . . . . .                              | 90         |
| 4.4      | Slojno-adaptivne mreže . . . . .                             | 92         |
| 4.5      | Ocena greške na Duran-Šiškinovoj mreži . . . . .             | 98         |
| 4.5.1    | Greška interpolacije . . . . .                               | 100        |
| 4.5.2    | Konvergencija u energetskej normi . . . . .                  | 107        |
| 4.6      | Ocena greške na Duranovoj mreži . . . . .                    | 111        |
| 4.6.1    | Greška interpolacije . . . . .                               | 112        |
| 4.6.2    | Konvergencija u energetskej normi . . . . .                  | 115        |
| 4.7      | Numerički eksperimenti . . . . .                             | 116        |
| <b>5</b> | <b>Zaključak i dalji pravci istraživanja</b>                 | <b>123</b> |
|          | <b>Spisak oznaka</b>   | <b>129</b> |
|          | <b>Literatura</b>  | <b>135</b> |
|          | <b>Biografija</b>  | <b>147</b> |
|          | <b>Ključna dokumentacijska informacija</b>                   | <b>149</b> |
|          | <b>Key words documentation</b>                               | <b>153</b> |

Dvoparametarski singularno perturbovani problemi predstavljaju matematičke modele nekih prirodnih pojava, kao što su razni procesi u teoriji hemijskih reaktora [61], kao i fenomeni koji nastaju prilikom usisavanja nekih fluida [79]. Uopšte, singularno perturbovani problemi predstavljaju parametarski zavisne diferencijalne jednačine čije rešenje se naglo menja kada perturbacioni parametri teže nekoj graničnoj vrednosti (najčešće nuli), što se ispoljava pojavom slojeva. Slojevi su uske podoblasti polaznog domena u kojima se dešavaju nagle promene rešenja kao i njegovih izvoda, i oni se mogu nalaziti u okolini granice ili u unutrašnjosti domena. Rešavanje ovakvih problema standardnim numeričkim postupcima je uglavnom neefikasno. Stoga je razvijanje tzv. parametarski-uniformnih numeričkih metoda za rešavanje singularno perturbovanih problema, od velikog praktičnog interesa.

Konkretne probleme u tezi ćemo rešavati postupkom konačnih elemenata, čiji koreni datiraju još iz XVII veka. Ovi postupci su podjednako razvijeni i popularni i kod matematičara i kod inženjera, naročito jer uspešno rešavaju kako apstraktne probleme, tako i probleme iz realnog života. Postupci konačnih elemenata [4, 5, 9, 18, 36, 48, 55, 58, 75, 76, 92] se baziraju na slaboj formulaciji diferencijalne jednačine. Stoga se, pored klasičnih, razmatraju i slaba rešenja koja se češće pojavljuju. Polazni domen se razlaže na elemente, gde se onda rešenje problema aproksimira po delovima polinomnom funkcijom. Tako se globalna analiza ovog postupka svodi na lokalnu analizu na elementima. Glavna prednost ovog postupka nad ostalim postupcima za rešavanje kompleksnih problema je da se mogu primeniti na probleme sa domenom proizvoljnog oblika, uz proizvoljno razlaganje i stepen polinoma, a da pri tome ne gube na efikasnosti i robustnosti. Kao i kod metoda konačnih razlika, korišćenjem metoda konačnih elemenata, dobija se diskretizacija diferencijalne jednačine, ali se rešenje, koje je deo po deo polinomna funkcija,

zna na celom domenu, a ne samo na određenom skupu tačaka.

Za razliku od singularno perturbovanih problema sa jednim parametrom, o problemima sa dva parametra ima mnogo manje rezultata. U prvom delu teze predstavljen je dvoparametarski jednodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije koji je rešavan metodom konačnih elemenata na Bahvalovljevoj, Duranovoj i Duran-Šiškinovoj mreži. Problem je detaljno analiziran na sve tri mreže, dokazana je uniformna konvergencija pomenutog numeričkog postupka u energetskej normi i prikazani su numerički rezultati koji potvrđuju dobijene teorijske ocene. Originalni rezultati ovog dela teze već su publikovani u [6], [7] i [8].

U drugom delu teze posmatran je dvoparametarski problem konvekcije-reakcije-difuzije u dve dimenzije. Ovaj problem je slabije proučavan od jednodimenzionalnog prvenstveno zbog složenosti, a stoga i zahtevnosti koja se traži u analizi greške numeričkog postupka. Problem je takođe rešavan metodom konačnih elemenata na Duranovoj i Duran-Šiškinovoj mreži. U svim razmatranim slučajevima dokazana je uniformna konvergencija u energetskej normi. Takođe, dati su primeri kojima su ilustrovani teorijski rezultati.

Stoga je ova teza skroman doprinos teoriji konačnih elemenata za numeričko rešavanje dvoparametarskih singularno perturbovanih problema.

\*  
\*                      \*

Najveći deo rezultata ove teze dobijen je u saradnji sa mojim mentorom, dr Helenom Zarin, redovnim profesorom Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koja je dala ideje za istraživanja dvoparametarskih problema u jednoj dimenziji. Njoj dugujem zahvalnost za strpljenje tokom dobijanja svih rezultata i nesebičnu pomoć koju mi uvek pruža. Na njen predlog prisustvovala sam na dva poslednja *Annual Workshop on Numerical methods for problems with layer phenomena*, gde sam upoznala istaknute naučnike iz oblasti kojom se bavi teza i uočila dalje pravce istraživanja.

Takođe se zahvaljujem mom drugom mentoru, dr Ljiljani Teofanov, vanrednom profesoru Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, na velikoj pomoći oko programiranja u Matlab-u i savetima datim tokom izrade teze, pogotovo dela o dvodimenzionalnom problemu. Hvala i na organizovanju mini seminara iz oblasti singularno perturbovanih problema sa kog su proistekle mnoge ideje za ovu disertaciju.

Dr Dragoslav Hercegu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, kao i dr Zorici Uzelac, redovnom profesoru Fakulteta

tehničkih nauka u Novom Sadu, se zahvaljujem na saradnji i savetima pre i tokom izrade disertacije.

Dr Marku Nedeljkovu, direktoru Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu veliko hvala za podršku i interesantne ispite iz parcijalnih diferencijalnih jednačina na doktorskim studijama.

Zahvalna sam i mojim kolegama sa posla, dr Tatjani Došenović, dr Aleksandru Takačiju i dr Dušanu Rakiću, za podršku i savete.

Najvažnije, želim da se zahvalim mojoj porodici, roditeljima koji su me uvek podržavali i ohrabivali, ćerki i sinu, po kojima „mama uvek nešto piše i uči” i suprugu koji je uvek verovao u mene.

Novi Sad,  
8. februar 2016.

*Mirjana Brdar*





Singularno perturbovani problemi pripadaju savremenenoj oblasti numeričke matematike i predstavljaju veoma aktuelnu oblast istraživanja. Poznate su primene ovih problema u aerodinamici, modelovanju procesa zagađenja životne sredine, prenosu toplote, hemijskoj kinetici, finansijskoj matematici, kao i mehanici fluida, i one se mogu naći u mnogobrojnoj literaturi [18, 27, 30, 35, 36, 54, 56–58, 60–62, 101].

Tema doktorske disertacije su dvoparametarski singularno perturbovani problemi. U tezi će biti izloženi rezultati u vezi sa analizom i numeričkim rešavanjem ovih problema u jednoj i dve dimenzije. Ova vrsta konturnih problema predstavlja matematičke modele koji se javljaju u hemijskim reaktorima [11, 61], kao i procesima prilikom usisavanja ili isisavanja nekih fluida [79].

U sledećoj definiciji je formalno opisano šta su singularno perturbovani problemi.

**Definicija 1.0.1.** [48] *Neka je  $B$  prostor funkcija sa normom  $\|\cdot\|_B$  i neka je  $D \subset \mathbb{R}^d$  domen parametara. Neprekidna funkcija  $u : D \rightarrow B, \varepsilon \mapsto u(\varepsilon)$  je regularna za  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* \in \partial D$  ako postoji funkcija  $u^* \in B$  takva da je*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} \|u(\varepsilon) - u^*\|_B = 0,$$

*inače je  $u(\varepsilon)$  singularna za  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$ .*

*Neka je  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  problem čije je rešenje  $u(\varepsilon) \in B$  za svako  $\varepsilon \in D$ . Kažemo da je*

$(\mathcal{P}_\varepsilon)$  singularno perturbovan problem za  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* \in \partial D$  u normi  $\|\cdot\|_B$  ako je  $u(\varepsilon)$  singularna za  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$ .

**Napomena 1.0.1.** Prethodna definicija je zavisna od norme. Na primer, problem

$$-\varepsilon u''(x) - u'(x) = 1 \text{ za } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

je singularno perturbovan u  $C^0$  i  $L^\infty$  normi jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = 1 \neq 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x, \varepsilon).$$

Međutim, u  $L^2$  normi ovaj problem nije singularno perturbovan jer postoji funkcija  $u^* : x \mapsto 1 - x$  za koju je

$$\|u(\varepsilon) - u^*\|_{L^2(0,1)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}).$$

□

**Napomena 1.0.2.** Granični uslovi takođe imaju važnu ulogu. Posmatrajmo problem

$$-\varepsilon u''(x) - u'(x) = 1 \text{ za } x \in (0, 1), \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

Ovaj problem je singularno perturbovan u  $C^1$  normi, ali nije perturbovan u  $C^0$  normi. □

Glavni cilj pri konstrukciji numeričkih metoda za rešavanje singularno perturbovanih problema je postizanje uniformne konvergencije u odnosu na perturbacione parametre. Usvajamo sledeću definiciju parametarski-uniformne konvergencije za slučaj problema sa dva mala parametra  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ .

**Definicija 1.0.2.** [48] Neka je  $u$  rešenje singularno perturbovanog problema i neka je  $u^N$  aproksimacija za  $u$  koja je dobijena numeričkim postupkom sa parametrom diskretizacije  $N$ . Za numerički postupak se kaže da je  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -uniformno konvergentan ili robustan u normi  $\|\cdot\|$ , ako je

$$\|u - u^N\| \leq \vartheta(N) \text{ za } N \geq N_0,$$

gde su funkcija  $\vartheta$  i  $N_0 > 0$  nezavisni od  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  i

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta(N) = 0.$$

U konstrukciji parametarski-uniformnih metoda u principu postoje dva pristupa. Prvi se zasniva na zameni standardnih operatora fitovanim operatorima koji opisuju singularno perturbovanu prirodu problema i koristi mreže čiji su čvorovi proizvoljno raspoređeni. Nedostatak ovog pristupa je što se teško uopštava za probleme u više dimenzija. Drugi pristup koristi mreže koje su prilagođene da obezbede parametarski-uniformnu konvergenciju. Takve mreže se nazivaju slojno-adaptivne mreže i one zahtevaju određene informacije o ponašanju rešenja. Ocene izvoda rešenja su potrebne kako za konstrukciju mreže, tako i za analizu greške. Pri numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema za aproksimaciju rešenja van slojeva<sup>1</sup> dovoljno je da se koristi gruba mreža, dok je u slojnim delovima domena poželjno da mreža bude dovoljno gusta kako bi dobili numeričko rešenje sa prihvatljivom tačnošću. Stoga je potrebno pažljivo izvršiti diskretizaciju domena. Ovaj drugi pristup je danas veoma rasprostranjen i koristi se u kombinaciji sa raznim numeričkim metodama kao što su „upwinding”, metod konačnih elemenata, „streamline-diffusion”, metod konačnih zapremina . . .

U radu će se koristiti metod konačnih elemenata. Postupcima konačnih elemenata se aproksimiraju, ne samo klasična, nego i neklasična rešenja diferencijalnih jednačina, što predstavlja jednu od glavnih prednosti ovih postupaka nad ostalim numeričkim postupcima. Problem se postavlja u Banahovom<sup>2</sup> prostoru slabo diferencijabilnih funkcija, to jest u prostoru Soboljeva<sup>3</sup> i polazi se od slabe formulacije diferencijalne jednačine. Domen se razlaže na konačnu uniju disjunktih poddomena. Potom se nad svakim poddomenom (elementom) tačno rešenje aproksimira polinomom i na taj način se formira globalno diskretno rešenje u obliku po delovima polinomne funkcije koja pripada određenom konačnodimenzionalnom prostoru, tj. prostoru konačnih elemenata. U zavisnosti od razlaganja domena, baza prostora konačnih elemenata se bira tako da njene funkcije imaju male nosače. Posledica toga je da formirani diskretni problem i njemu odgovarajući sistem linearnih jednačina imaju retku matricu, te je njihovo računanje olakšano.

U tezi će biti proučavani kako jednodimenzionalni tako i dvodimenzionalni singularno perturbovani problemi sa dva mala parametra i graničnim slojevima. Međusobni odnos perturbacionih parametara prvenstveno utiče na širinu slojeva, a u krajnjim situacijama obuhvata slučajevne reakcije-difuzije

---

<sup>1</sup>Pojam graničnog sloja je uveo Ludwig Prandtl (1875-1953, nemački inženjer) 1904. na 3. internacionalnom Kongresu matematičara u Hajdelbergu, Nemačka.

<sup>2</sup>Stefan Banach (1892-1945), poljski matematičar

<sup>3</sup>Sergei Sobolev (1908-1989), ruski matematičar

i konvekcije-difuzije, kada rešenje zavisi samo od jednog parametra. Kod jednodimenzionalnih problema mogu da se pojave regularni slojevi na krajevima domena koji su eksponencijalne prirode i različite širine, kao i unutrašnji slojevi. Pored regularnih slojeva, dvodimenzionalni problemi mogu da imaju parabolične i ugaone slojeve, te je analiza ovih problema u mnogome otežana. Kod paraboličnih graničnih slojeva dominantni deo rešenja u blizini nekih graničnih tačaka zadovoljava paraboličnu diferencijalnu jednačinu i do njihove pojave dolazi u slučajevima kada su tangente karakteristika redukovano rešenja paralelne sa tangentama granice u nekom delu ruba domena. Iako su parabolični slojevi širi od regularnih, nestabilnost numeričkog rešenja uzrokovana njihovom pojavom je manja od one koju izazivaju regularni slojevi. Bitna karakteristika regularnih slojeva je da su oni po svojoj prirodi jednodimenzionalni, dok se parabolični slojevi mogu pojaviti samo u rešenju parcijalne diferencijalne jednačine. Ugaoni granični slojevi se javljaju kada postoji značajna razlika između originalnog i redukovano rešenja problema u blizini nekog ugla domena.

Postojeća literatura za jednodimenzionalne i dvodimenzionalne dvoparametarske singularno perturbovane probleme uglavnom je bazirana na numeričkim metodama sprovedenim najvećim delom na Šiškinovoj<sup>4</sup> mreži. Dobijeni rezultati o uniformnim ocenama grešaka neizostavno uključuju logaritamski faktor koji efektivno smanjuje red konvergencije, a posledica je izbora tranzicionih tačaka. Osim toga, važno je napomenuti da su dvodimenzionalni problemi sa dva mala parametra proučavani samo u nekolicini radova.

Naučni doprinos ove doktorske disertacije ogleda se u poboljšanju reda konvergencije postupaka konačnih elemenata primenjenim na posmatrane probleme, što se postiže numeričkom analizom na slojno-adaptivnoj Bahvalovljevoj<sup>5</sup>, Duranovoj<sup>6</sup> i Duran-Šiškinovoj mreži u jednoj i dve dimenzije.

Prvo će biti posmatran jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije-reakcije

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 u''(x) + \varepsilon_2 b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{za } x \in (0, 1) \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

gde su  $b(x) \geq b_0 > 0$ ,  $c(x) \geq c_0 > 0$  i  $c(x) - \varepsilon_2 b'(x)/2 \geq \gamma > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ . Pretpostavljamo da su  $b, c$  i  $f$  glatke funkcije na  $[0, 1]$ ,  $b_0, c_0, \gamma$  konstante i

<sup>4</sup>Grigorii Ivanovich Shishkin (1939-), ruski matematičar

<sup>5</sup>Nikolai Sergeevich Bakhvalov (1934-2005) ruski matematičar

<sup>6</sup>Ricardo Guillermo Durán (1954-), argentinski matematičar

$0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$  perturbacioni parametri. Ovaj problem karakteriše pojava eksponencijalnih slojeva u okolini  $x = 0$  i  $x = 1$ .

Pored jednodimenzionalnog biće posmatran i dvodimenzionalni singularno perturbovani problem sa dva mala parametra o kojem nema mnogo rezultata, a javlja se u teoriji hemijskih reaktora i nastaje prilikom usisavanja nekih fluida. Na jediničnom kvadratu  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  dat je problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 b(x) u_x + c(x) u &= f(x, y) \quad \text{u } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gde su  $b(x) \geq b_0 > 0$ ,  $c(x) \geq c_0 > 0$  i  $c(x) - \varepsilon_2 b'(x)/2 \geq \gamma > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ . Pretpostavka je da su  $b, c$  i  $f$  glatke funkcije na  $[0, 1]$ ,  $b_0, c_0, \gamma$  konstante i  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$  perturbacioni parametri. Pored ovog, pretpostavljamo i da funkcija  $f$  zadovoljava uslove kompatibilnosti  $f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 0) = f(1, 1) = 0$ . Ovaj problem karakteriše pojava eksponencijalnih slojeva u okolini  $x = 0$  i  $x = 1$ , paraboličnih slojeva u okolini  $y = 0$  i  $y = 1$ , i ugaonih slojeva u okolini sva četiri ugla domena  $\bar{\Omega}$ .

Teza je organizovana na sledeći način.

U Glavi 2 je data opšta teorija o prostorima Soboljeva i postupku konačnih elemenata, koji je predstavljen na linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačini drugog reda sa homogenim Dirihleovim<sup>7</sup> konturnim uslovima. Date su Laks<sup>8</sup>-Milgramova<sup>9</sup> teorema i lema Cea<sup>10</sup>, kao glavna tvrđenja teorije konačnih elemenata. Definisani su konačni elementi, prostor konačnih elemenata i dati su njihovi primeri. Takođe je predstavljen Lagranžov<sup>11</sup> interpolant i Klemanov<sup>12</sup> kvazi-interpolant.

Glava 3 se bavi numeričkim rešavanjem jednodimenzionalnog problema konvekcije-difuzije-reakcije. U ovoj glavi data je slaba formulacija problema, opisan Galerkinov<sup>13</sup> metod konačnih elemenata i prikazana dekompozicija rešenja na kojoj se zasniva analiza greške pomenutog postupka. Predstavljene su slojno-adaptivne mreže, specijalno konstruisane za dati problem: Bahvalovljeva, Duran-Šiškinova i Duranova mreža i pokazane njihove osobine. Na Bahvalovljevoj mreži pokazana je uniformna konvergencija u energetskoj normi

<sup>7</sup>Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nemački matematičar

<sup>8</sup>Peter David Lax (1926-), mađarski matematičar

<sup>9</sup>Arthur Norton Milgram (1912-1961), američki matematičar

<sup>10</sup>Jean Céa (1932-), alžirski matematičar

<sup>11</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), francuski matematičar

<sup>12</sup>Philippe P. J. E. Clément (1951-), švajcarski matematičar

<sup>13</sup>Boris Grigoryevich Galerkin (1871-1945), ruski matematičar

Galerkinovog metoda konačnih elemenata sa deo po deo linearnim funkcijama. U tu svrhu je uveden interpolacioni operator Klemanovog tipa, koji zbog svoje stabilnosti omogućava izvođenje greške interpolacije, a posledično i samu ocenu greške. Dati problem je dalje analiziran na slojno-adaptivnoj Duranovoj i Duran-Šiškinovoj mreži, i takođe je pokazana uniformna konvergencija metoda konačnih elemenata u energetskej normi uz primenu teorije interpolacionih funkcija. U dosadašnjoj literaturi nisu poznati rezultati o numeričkoj analizi problema (1.1) na pomenutim mrežama. Teorijski rezultati su potvrđeni numeričkim eksperimentima na dva test problema, u programskom paketu Mathematica 8<sup>14</sup>.

Dvodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije je predstavljen u Glavi 4. Data je slaba formulacija problema, opisan Galerkinov metod konačnih elemenata i predstavljena dekompozicija rešenja za dati problem. Konstruisane su Duran-Šiškinova i Duranova mreža za posmatrani problem i pokazane njihove osobine. Na tim mrežama je rešavan problem (1.2) metodom konačnih elemenata sa deo po deo bilinearnim funkcijama i pokazana je uniformna konvergencija ovog metoda u energetskej normi. Date su teoreme o greškama interpolacije i diskretizacije. Koristeći programski paket MATLAB R12<sup>15</sup> numerički je rešen test problem kojim su potvrđena dobijena teorijska tvrđenja.

Na kraju je dat spisak oznaka sa literaturom.

---

<sup>14</sup>Wolfram Research, Mathematica 8

<sup>15</sup>MathWorks, MATLAB R12

## Glava 2

# Postupci konačnih elemenata

Ovaj deo je posvećen pregledu osnovnih pojmova i nekih teorijskih rezultata iz polja funkcionalne analize koje ćemo koristiti u daljem radu, [103]. Opisaćemo postupak konačnih elemenata na primeru parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda. Navedene su teoreme o egzistenciji slabog rešenja i oceni greške. Objasñjen je pojam konačnog elementa i dati su neki primeri. Predstavljen je Lagranžov interpolant i Klemanov kvazi-interpolant.

## 2.1 Prostori funkcija

Neka  $\Omega$  označava otvoren podskup prostora  $\mathbb{R}^n$  i neka je  $k \in \mathbb{N}$ . Ovde ćemo uvesti posebne klase realnih funkcija koje su defnisane na skupu  $\Omega$ .

### 2.1.1 Prostori integrabilnih funkcija

Sa  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , označimo skup merljivih funkcija  $u$  za koje je

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty.$$

Za dve funkcije  $u, v \in L^p(\Omega)$  kažemo da su jednake ako je  $u(x) = v(x)$  za

$x \in \Omega$ , osim na skupu mere nula.  $L^p(\Omega)$  su Banahovi prostori sa normom

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

gde je  $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| := \inf_{M \subset \Omega} \sup_{x \in \Omega \setminus M} |u(x)|$ , a  $M$  je proizvoljan skup mere nula.

Od posebnog značaja je slučaj  $p = 2$ , pošto je prostor  $L^2(\Omega)$  Hilbertov<sup>1</sup> prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

Jasno je da važi  $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (u, u)$ .

**Lema 2.1.1.** [92] (*Helderova<sup>2</sup> nejednakost*) Za svake dve funkcije  $u \in L^p(\Omega)$  i  $v \in L^q(\Omega)$ , za koje je  $1/p + 1/q = 1$  i  $1 \leq p, q \leq \infty$ ,  $uv \in L^1(\Omega)$  i važi

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Helderova nejednakost u slučaju  $p = q = 2$  je poznata pod imenom Koši<sup>3</sup>-Švarcova<sup>4</sup> nejednakost.

**Lema 2.1.2.** [92] (*Nejednakost Minkovskog<sup>5</sup>*) Za  $1 \leq p \leq \infty$  i  $u, v \in L^p(\Omega)$  važi

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

## 2.1.2 Prostori Soboljeva

U ovom odeljku ćemo dati definiciju i neke osobine prostora Soboljeva, koji su značajni za analizu numeričkih metoda prilikom rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina. Više o prostorima Soboljeva se može naći u [1].

<sup>1</sup>David Hilbert (1862-1943), nemački matematičar

<sup>2</sup>Otto Ludwig Hölder (1859-1937), nemački matematičar

<sup>3</sup>Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

<sup>4</sup>Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), nemački matematičar

<sup>5</sup>Hermann Minkowski (1864-1909), nemački matematičar



Neka je  $\mathbb{N}_0$  skup prirodnih brojeva sa nulom. Multi-indeks  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  je uređena  $n$ -torka elemenata iz skupa  $\mathbb{N}_0$ . Broj  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  je dužina multi-indeksa  $\alpha$ . Uvodimo i oznaku

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Sa  $C^k(\Omega)$  označavamo skup svih realnih neprekidnih funkcija  $u$  definisanih na  $\Omega$  sa osobinom da su izvodi  $D^\alpha u$  neprekidni na  $\Omega$  za svako  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , gde je  $|\alpha| \leq k$ .

Neka je  $u$  glatka funkcija i neka je  $v$  proizvoljna funkcija kompaktnog nosača u  $\Omega$  sa neprekidnim izvodima proizvoljnog reda, tj.  $u \in C^k(\Omega)$  i  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Parcijalnom integracijom se dobija

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x)v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha v(x) dx, \quad |\alpha| \leq k.$$

Pretpostavimo da je  $u$  lokalno integrabilna funkcija definisana na  $\Omega$ , tj.  $u \in L^1(\tilde{\Omega})$  za svaki ograničen otvoren skup  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ , i da postoji lokalno integrabilna funkcija  $w_\alpha$  na  $\Omega$  tako da važi

$$\int_{\Omega} w_\alpha(x)v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha v(x) dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Funkcija  $w_\alpha$  je izvod funkcije  $u$  reda  $|\alpha|$  u slabom smislu, u oznaci  $w_\alpha = D^\alpha u$ . Slabi izvod lokalno integrabilne funkcije je, ako postoji, jedinstven. Ako je  $u$  dovoljno glatka funkcija, onda se njeni izvodi u slabom smislu poklapaju sa odgovarajućim izvodima u klasičnom tačkastom smislu.

**Definicija 2.1.1.** [92] *Neka je dat ceo broj  $k \geq 0$  i neka je  $p \in [1, \infty]$ . Soboljev prostor reda  $k$  je definisan sa*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Na njemu su definisani norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{za } p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{za } p = \infty, \end{cases}$$

i seminorma

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{za } p \in [1, \infty), \\ \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{za } p = \infty. \end{cases}$$

Za  $p = 2$  umesto  $W^{k,2}(\Omega)$  koristi se oznaka  $H^k(\Omega)$  u čast Davida Hilberta.

**Teorema 2.1.1.** [92] *Prostor Soboljeva  $W^{k,p}(\Omega)$  je Banahov prostor.*

Prostor  $H^k(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^k(\Omega).$$

Pošto u radu koristimo prostor

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), j = 1, \dots, n \right\},$$

onda navodimo odgovarajuću normu i seminormu za taj prostor

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2},$$

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Veoma važan prostor Soboljeva je  $H_0^k(\Omega)$  definisan kao kompletiranje prostora  $C_0^\infty(\Omega)$  u odnosu na normu  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ . Prostor  $H_0^k(\Omega)$  je Hilbertov sa skalarnim proizvodom  $(\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)}$  i normom  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ . U slučaju kada je  $\Omega$  otvoren, ograničen i povezan skup sa Lipsčic<sup>6</sup>-neprekidnim (regularnim) rubom  $\partial\Omega$ , prostor  $H_0^1(\Omega)$  je dat sa

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u(x) = 0, x \in \partial\Omega\}.$$

<sup>6</sup>Rudolf Lipschitz (1832-1903), nemački matematičar

**Lema 2.1.3.** [92] (*Fridrih<sup>7</sup>-Poenkareova<sup>8</sup> nejednakost*) Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  povezan i otvoren skup i neka je  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Tada postoji konstanta  $\tilde{c}(\Omega)$ , nezavisna od  $u$ , takva da je

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq \tilde{c} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx.$$

Neprekidne funkcije u jednodimenzionalnom slučaju su  $H^1$ -funkcije, a u dvodimenzionalnom slučaju su  $H^2$ -funkcije.

## 2.2 Postupak konačnih elemenata

Metod konačnih elemenata se zasniva na aproksimaciji tačnog rešenja deo po deo polinomnim funkcijama. Koreni ovog postupka potiču iz XVII veka. Prvi matematički doprinos teoriji konačnih elemenata dao je Kuran<sup>9</sup> 1943. godine u [14], ali važnost tog rada nije prepoznata i ideja je bila zaboravljena do ranih pedesetih godina prošlog veka, kada značaj ovog postupka otkrivaju inženjeri. Naziv „postupci konačnih elemenata” se prvi put pojavio 1960. godine u [13], a prvi značajan matematički rezultat vezan za ovaj postupak dao je Zlamal<sup>10</sup> 1968. godine u [107] i od tada, pogotovo sa razvojem računara, dolazi do ekspanzije u primeni metoda konačnih elemenata kako u industriji tako i u nauci.

Danas se ovaj metod koristi u svim oblastima koje se bave modelovanjem prirodnih pojava pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina, jer se njime mogu rešavati problemi na veoma složenim domenima proizvoljnog oblika, kao i problemi sa graničnim uslovima koji sadrže izvode. Iz mnogobrojne literature posvećene metodu konačnih elemenata navodimo samo neke, kao što su [4, 5, 9, 16, 92, 97]. Ovaj postupak je veoma značajan i u rešavanju singularno perturbovanih problema [23, 48, 55, 56, 75, 93, 104].

Postupci konačnih elemenata se mogu klasifikovati u dve grupe:

- konformni postupci konačnih elemenata su oni postupci čiji prostor konačnih elemenata leži u prostoru u kome se traži rešenje polaznog problema. Tu spadaju standardni postupak Galerkina i postupak Petrov-Galerkina.

<sup>7</sup>Kurt Otto Friedrichs (1901-1982), nemačko-američki matematičar

<sup>8</sup>Jules Henri Poincare (1854-1912), francuski matematičar

<sup>9</sup>Richard Courant (1888-1972), nemački matematičar

<sup>10</sup>Miloš Zlámal (1924-), češki matematičar

- nekonformni postupci konačnih elemenata obuhvataju sva ostala odstupanja, npr. pojava prekida kod susednih elemenata (diskontinualni Galerkinov postupak), krivolinijski oblik domena (izoparametarski postupak). Mnogo veća grupa nekonformnih postupaka uključuje razna uopštenja poznata kao "variational crimes" [9].

Pored ovih postoje i druge vrste postupka konačnih elemenata. Mešoviti i hibridni postupak konačnih elemenata polaze od opštijeg oblika varijacionog problema.

Nadalje ćemo koristiti samo konformni postupak konačnih elemenata.

Linearna parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda sa homogenim Dirihleovim konturnim uslovima na otvorenom i ograničenom domenu  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  će nam poslužiti kao model za predstavljanje postupka konačnih elemenata,

$$-\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad \text{u } \Omega \quad (2.1)$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega \quad (2.2)$$

gde  $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $b_i, c, f \in C(\bar{\Omega})$  i

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_* \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad \text{za svako } (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N, x \in \bar{\Omega}, \quad (2.3)$$

a  $c_*$  je konstanta nezavisna od  $x$  i  $\xi_i$ .

**Napomena 2.2.1.** *Slučaj nehomogenih konturnih uslova se analizira uvođenjem odgovarajuće transformacije date u [92].*  $\square$

**Definicija 2.2.1.** [92] *Klasično rešenje problema (2.1)-(2.2) je svaka funkcija  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (2.1) i konturni uslov (2.2).*

Generalno, egzistencija klasičnog rešenja nije uvek garantovana jer zavisi od glatkosti  $\partial\Omega$  i funkcija u (2.1). Da bi se savladali nedostaci klasične teorije i da bismo mogli da se bavimo parcijalnim diferencijalnim jednačinama sa nedovoljno glatkim podacima potrebno je da se generalizuje pojam klasičnog rešenja. Uopštenje pojma klasičnog rešenja je slabo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine.

**Definicija 2.2.2.** [92] *Neka  $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$  i  $f \in L^2(\Omega)$ . Funkcija  $u \in H_0^1(\Omega)$  je slabo rešenje problema (2.1)-(2.2) ako važi*

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} cuv dx = \int_{\Omega} fv dx \quad (2.4)$$

za svako  $v \in H_0^1(\Omega)$ .

Jednačina (2.4) se naziva slaba formulacija problema (2.1)-(2.2) i dobijena je množenjem jednačine (2.1) test funkcijom  $v \in H_0^1(\Omega)$  i primenom parcijalne integracije. Ako uvedemo oznake

$$a(w, v) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} cuv dx, \quad (2.5)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} fv dx,$$

onda se problem (2.4) može formulisati kao

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v) \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (2.6)$$

U nastavku navodimo neke osobine koje mogu da karakterišu bilinearnu formu  $a$  i linearnu funkcionalu  $l$ .

**Definicija 2.2.3.** [5] *Neka je  $(V, \|\cdot\|)$  realan normiran prostor. Bilinearna forma  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  je*

- *neprekidna (ograničena) ako postoji konstanta  $M_a > 0$  tako da je*

$$|a(w, v)| \leq M_a \|w\| \|v\| \text{ za svako } w, v \in V,$$

- *koercitivna ( $V$ -eliptična) ako postoji konstanta  $\alpha > 0$  tako da je*

$$a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2 \text{ za svako } w \in V.$$

*Linearna funkcionala  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  je ograničena ako postoji konstanta  $M_l > 0$  tako da je*

$$|l(v)| \leq M_l \|v\| \text{ za svako } v \in V.$$

Teorema koja govori o postojanju rešenja problema (2.6) je Laks-Milgramova teorema [5, 9].

**Teorema 2.2.1.** [5] (*Laks-Milgramova teorema*) *Neka je  $(V, \|\cdot\|)$  realan Hilbertov prostor. Za neprekidnu, koercitivnu bilinearnu formu  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  i ograničenu linearnu funkcionalu  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$ , apstraktni varijacioni problem*

$$\begin{cases} \text{traži se } u \in V \text{ tako da je} \\ a(u, v) = l(v) \text{ za svako } v \in V, \end{cases} \quad (2.7)$$

*ima jedinstveno rešenje.*

Funkcija  $a$  iz (2.5) je bilinearna i neprekidna u odnosu na  $H^1(\Omega)$ -normu, dok uslov

$$c - \frac{1}{2} \operatorname{div} b = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial b_i}{\partial x_i} \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2.8)$$

obežbeđuje koercitivnost bilinearne forme  $a$ , gde  $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$ .

Pošto su ispunjeni svi uslovi Laks-Milgramove teoreme sledi da postoji slabo rešenje  $u$  problema (2.1)-(2.2) i za njega važi

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Napomena 2.2.2.** *Uslov  $b_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$  iz (2.8) se može oslabiti tako da se koristi  $b_i \in L^\infty(\Omega)$ . Tada se sa novom pretpostavkom*

$$c - \frac{2}{c_*} \sum_{i=1}^N \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \geq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

*može pokazati koercitivnost bilinearne forme, gde je  $c_*$  konstanta iz (2.3).  $\square$*

Pri konstrukciji približnog rešenja varijacionog problema (2.7) polazi se od konačnodimenzionalnog potprostora  $V^N \subset V$ , te diskretni problem kojim se predstavlja Galerkinov postupak konačnih elemenata glasi:

$$\begin{cases} \text{traži se } u^N \in V^N \text{ tako da je} \\ a(u^N, v^N) = l(v^N) \text{ za svako } v^N \in V^N. \end{cases} \quad (2.9)$$

Primena Laks-Milgramove teoreme na prostor  $V^N$  daje da postoji jedinstveno rešenje  $u^N \in V^N$  problema (2.9). Inače, problem (2.9) se može prikazati kao sistem linearnih jednačina. Ako je  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$  baza prostora  $V^N$ , onda se diskretno rešenje  $u^N$  može izraziti u obliku

$$u^N = \sum_{i=1}^N u_i^N \varphi_i.$$

Problem (2.9) sada može da se zapiše kao

$$\begin{cases} \text{traži se } [u_1^N, u_2^N, \dots, u_N^N]^T \in \mathbb{R}^N \text{ tako da je} \\ \sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_i^N = l(\varphi_j), j = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Matrica  $A$  ovog sistema, tzv. „stiffness” matrica, čiji su elementi  $a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ , je regularna jer je  $a$  koercitivna bilinearna forma. Ovo ćemo i dokazati.

Pretpostavimo suprotno, to jest da je  $A$  singularna matrica. Tada postoji  $0 \neq y \in \mathbb{R}^N$  tako da je  $Ay = 0$ , pa je  $y^T Ay = 0$ . Međutim, to je nemoguće jer je  $A$  pozitivno definitna matrica. Naime, neka je  $y = [y_1, \dots, y_N]^T \neq 0$  i  $w = \sum_{i=1}^N y_i \varphi_i$ . Tada je zbog koercitivnosti bilinearne forme  $a$

$$\begin{aligned} y^T Ay &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i a_{ji} y_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i a(\varphi_i, \varphi_j) y_j \\ &= a\left(\sum_{i=1}^N y_i \varphi_i, \sum_{j=1}^N y_j \varphi_j\right) = a(w, w) \geq \alpha \|w\|^2 > 0, \end{aligned}$$

što nam potvrđuje da je „stiffness” matrica pozitivno definitna. Vektor

$$[l(\varphi_1), l(\varphi_2), \dots, l(\varphi_N)]^T$$

se naziva „load” vektor. Izbor baze  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$  direktno utiče na osobine „stiffness” matrice. Prilikom izbora baze vodi se računa o sledećem: da bazne funkcije imaju što manje nosače u domenu problema i da je broj baznih funkcija čiji nosači imaju neprazan presek što manji. Ovi zahtevi dovode do toga da „stiffness” matrica bude retka, te je rešavanje diskretnog problema dosta olakšano.

Treba napomenuti da i izbor konačnodimenzionalnog prostora  $V^N$  ima velikog uticaja na ocenu greške o čemu govori lema Cea.

**Lema 2.2.1.** [5] (*Lema Cea*) Neka su pretpostavke Laks-Milgramove teoreme ispunjene i neka je  $V^N \subset V$  konačnodimenzionalni linearni prostor. Ako su  $u$  i  $u^N$  rešenja varijacionog i diskretnog problema redom, tada važi

$$\|u - u^N\| \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{v^N \in V^N} \|u - v^N\|.$$

**Napomena 2.2.3.** U dokazu Cea leme koristi se osobina

$$a(u - u^N, v^N) = 0 \text{ za svako } v^N \in V^N,$$

koja je poznata pod nazivom „osobina Galerkinove ortogonalnosti”.  $\square$

## 2.3 Konačni elementi

Prvi korak u konstrukciji prostora  $V^N$  je dekompozicija (triangulacija) domena na jednostavne podskupove, uglavnom poliedre. Funkcije iz  $V^N$  su na svakom podskupu triangulacije polinomi određenog stepena. Da bi  $V^N$  bio potprostor od  $H^1(\Omega)$  potrebno je da su funkcije iz  $V^N$  neprekidne, a za  $V^N \subset H^2(\Omega)$  je potrebno i da prvi izvodi budu neprekidne funkcije, kao i da je domen odgovarajuće dimenzije. Neprekidnost se postiže izborom stepena slobode za koje se uzimaju vrednosti funkcija.

Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  domen posmatranog problema koji je otvoren i ograničen.

**Definicija 2.3.1.** [5] *Triangulacija (mreža) je razlaganje  $\mathcal{T} = \{\kappa\}$  domena  $\Omega$  u konačan broj podskupova  $\kappa$ , koje zovemo elementi, tako da su zadovoljene sledeće osobine*

i) svaki element  $\kappa \in \mathcal{T}$  je zatvoren i povezan skup čija je unutrašnjost  $\overset{\circ}{\kappa}$  neprazna, a rub  $\partial\kappa$  je Lipšic-neprekidan,

ii)  $\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}} \kappa$ ,

iii) za svaka dva različita elementa  $\kappa_i, \kappa_j \in \mathcal{T}$  važi  $\overset{\circ}{\kappa}_i \cap \overset{\circ}{\kappa}_j = \emptyset$ .

Za jednodimenzionalne probleme elementi su intervali, dok su za dvodimenzionalne probleme elementi mreže uglavnom trouglovi ili četvorouglovi.

**Definicija 2.3.2.** [5] *Za mrežu  $\mathcal{T} = \{\kappa\}$  domena  $\Omega$  se kaže da je*

i) *dopustiva (regularna) ako za svaka dva različita elementa  $\kappa_i, \kappa_j \in \mathcal{T}$  je  $\kappa_i \cap \kappa_j$  ili prazan skup, ili zajednički čvor ili zajednička stranica (ivica, dužina intervala),*



ii) regularna po obliku ako postoji konstanta  $\varrho > 0$  takva da za svaki element  $\kappa \in \mathcal{T}$  prečnika  $h_\kappa$  i njegovu upisanu kružnicu prečnika  $\rho_\kappa$  važi

$$\frac{h_\kappa}{\rho_\kappa} \leq \varrho.$$

Mreže koje su neregularne po obliku se nazivaju i anizotropnim mrežama. One se prepoznaju po elementima koji imaju velik odnos dimenzija ivica. Anizotropne mreže imaju veliku primenu u teoriji singularno perturbovanih problema.

**Definicija 2.3.3.** [5] *Konačni element je uređena trojka  $(K, P_K, \Sigma_K)$  sa sledećim osobinama:*

- i)  $K \subset \mathbb{R}^2$  je zatvoren skup čija je unutrašnjost neprazna i rub Lipsčic-neprekidan,
- ii)  $P_K$  je potprostor  $C(K)$  konačne dimenzije  $s$  (njegove bazne funkcije se zovu „shape” funkcije),
- iii)  $\Sigma_K$  je skup  $s$  linearno nezavisnih funkcionala definisanih na  $P_K$ , gde je svako  $p \in P_K$  na jedinstven način definisano preko  $s$  funkcionala iz  $\Sigma_K$ .

**Napomena 2.3.1.** *Ako sa  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s\}$  označimo skup  $s$  linearno nezavisnih funkcionala iz  $\Sigma_K$ , tada postoji  $s$  „shape” funkcija  $p_i \in P_K$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , koje zadovoljavaju*

$$\varphi_j(p_i) = \delta_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

gde je  $\delta_{ij}$  Kronekerov<sup>11</sup> simbol, i pri tome važi

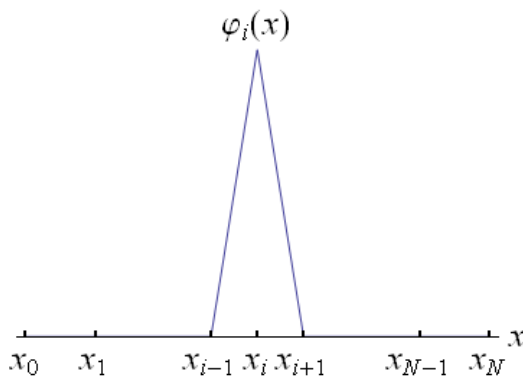
$$p = \sum_{i=1}^s \varphi_i(p) p_i \quad \text{za svako } p \in P_K.$$

Linearne funkcionele  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , se zovu stepeni slobode konačnog elementa. □

U daljem tekstu navodimo primere nekih konačnih elemenata, sa posebnim osvrtom na one koje ćemo koristiti u radu.

Za jednodimenzionalan problem domen je  $\Omega = (a, b)$ , dok je  $\mathcal{T}$  mreža sa elementima  $\kappa_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_N = b$ . Linearni Lagranžov konačni

<sup>11</sup>Leopold Kronecker (1823-1891), nemački matematičar



Slika 2.1: Bazna „hat” funkcija za linearne konačne elemente

element  $(\kappa_i, P_{\kappa_i}, \Sigma_{\kappa_i})$  je definisan sa

$$P_{\kappa_i} = \mathbb{P}_1(\kappa_i),$$

$$\Sigma_{\kappa_i} = \{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad \varphi_1(p) = p(x_{i-1}), \quad \varphi_2(p) = p(x_i), \quad p \in P_{\kappa_i}.$$

„Shape” funkcije prostora  $P_{\kappa_i}$  su date sa

$$p_{\kappa_i,1}(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}, \quad p_{\kappa_i,2}(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

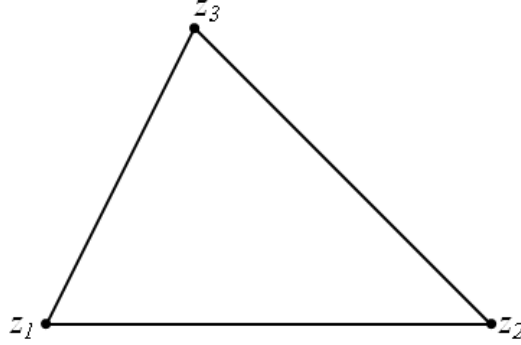
a odgovarajući prostor konačnih elemenata se sastoji od po delovima linearnih neprekidnih funkcija  $v^N$ . Globalno se svaka funkcija  $v^N \in V^N$  može prikazati kao linearna kombinacija „hat” funkcija  $\varphi_i : [x_0, x_N] \rightarrow [0, 1]$ , prikazanih na Slici 2.1, koje su date sa

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} p_{\kappa_i,2}(x), & x \in \kappa_i, \\ p_{\kappa_{i+1},1}(x), & x \in \kappa_{i+1}, \\ 0, & x \notin \kappa_i \cup \kappa_{i+1}, \end{cases} \quad (2.10)$$

za  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , i

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} p_{\kappa_1,1}(x), & x \in \kappa_1, \\ 0, & x \notin \kappa_1, \end{cases} \quad \varphi_N(x) = \begin{cases} p_{\kappa_N,2}(x), & x \in \kappa_N, \\ 0, & x \notin \kappa_N. \end{cases} \quad (2.11)$$

Neka je sada  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  i  $K \subset \Omega$  trougao. Označimo sa  $\mathbb{P}_k(K)$  skup svih polinoma stepena manjeg ili jednakog sa  $k$  definisanih na  $K$ .



Slika 2.2: Linearni Lagranžov trougao

Linearni Lagranžov konačni element (Slika 2.2) je trojka  $(K, \mathbb{P}_1(K), \Sigma_K)$  sa

$$\Sigma_K = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}, \quad \varphi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_K,$$

gde  $z_i$  predstavljaju temena trougla  $K$ . Skup  $K$  se zove linearni Lagranžov trougao ili Kuranov trougao.

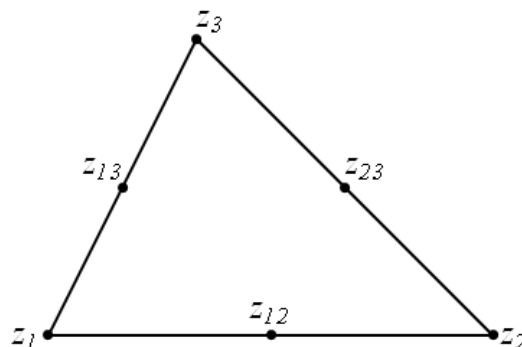
Kvadratni Lagranžov konačni element (Slika 2.3) je  $(K, \mathbb{P}_2(K), \Sigma_K)$  sa

$$\begin{aligned} \Sigma_K &= \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}\}, \\ \varphi_i(p) &= p(z_i), \quad \varphi_{ij}(p) = p(z_{ij}), \quad p \in P_K. \end{aligned}$$

Tačke  $z_1, z_2, z_3$  su temena u  $K$ , a  $z_{ij} = (z_i + z_j)/2$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$  predstavljaju sredine stranica trougla  $K$ . Skup  $K$  se zove kvadratni Lagranžov trougao.

Za proizvoljni stepen polinoma  $k$  analogno se konstruišu trougaoni Lagranžovi konačni elementi  $(K, \mathbb{P}_k(K), \Sigma_K)$ . Tada je  $\dim(\mathbb{P}_k(K)) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ .

Postoje i drugi tipovi trougaonih konačnih elemenata i oni se međusobno razlikuju po izabranim stepenima slobode i „shape” funkcijama, npr. Hermi-



Slika 2.3: Kvadratni Lagranžov trougao



Slika 2.4: Bilinearni Lagranžov pravougaonik

to<sup>12</sup>, Cienkievičev<sup>13</sup>, Argirisov<sup>14</sup>, Belov<sup>15</sup> i Ksi<sup>16</sup>-Klaf<sup>17</sup>-Toherov<sup>18</sup> trougao.

Ako je  $K$  pravougaoni element onda se u literaturi često koristi linearni prostor  $\mathbb{Q}_k(K)$  koga čine funkcije

$$p(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq k} c_{ij} x^i y^j$$

<sup>12</sup>Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar

<sup>13</sup>Olgierd Cecil Zienkiewicz (1921-2009), poljski matematičar

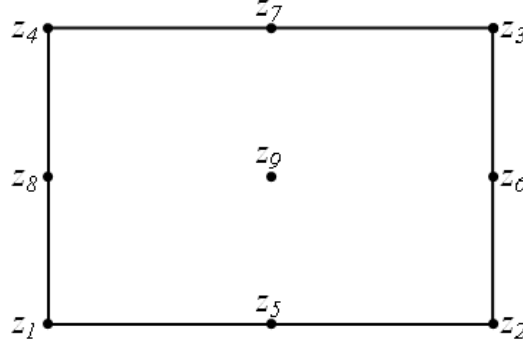
<sup>14</sup>Chris Argyris (1923-2013), grčko-američki matematičar

<sup>15</sup>Steven R. Bell (1954-), američki matematičar

<sup>16</sup>Hui-Kuang Hsieh (1944-), američki matematičar

<sup>17</sup>Ray William Clough (1920-), američki matematičar

<sup>18</sup>Keith Douglas Tocher (1921-1981), engleski matematičar



Slika 2.5: Bikvadratni Lagranžov pravougaonik

definisane na  $K$ . Dimenzija ovog prostora je  $(k+1)^2$  i važi  $\mathbb{P}_k(K) \subset \mathbb{Q}_k(K) \subset \mathbb{P}_{2k}(K)$ .

Za  $k = 1$  je  $(K, P_K, \Sigma_K)$  bilinearni Lagranžov konačni element sa

$$P_K = \mathbb{Q}_1(K), \quad \Sigma_K = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}, \quad \varphi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_K.$$

Tačke  $z_1, z_2, z_3, z_4$  predstavljaju temena pravougaonika  $K$  datog na Slici 2.4.

Za  $k = 2$  se dobija bikvadratni Lagranžov konačni element, gde je

$$P_K = \mathbb{Q}_2(K), \quad \Sigma_K = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_9\}, \quad \varphi_i(p) = p(z_i), \quad p \in P_K.$$

Ovde su  $z_1, z_2, z_3, z_4$  temena pravougaonika  $K$ ,  $z_5, z_6, z_7, z_8$  sredine stranica tog pravougaonika, dok je  $z_9$  sredina dijagonale pravougaonika  $K$ , kao što je prikazano na Slici 2.5.

Postoje i drugi konačni elementi kao što su bikubni Lagranžov, redukovani bikvadratni, „serendipity”... [9].

Kada se formira triangulacija domena treba izabrati odgovarajući konačnodimenzionalni prostor  $V^N$ .

**Definicija 2.3.4.** *Prostor konačnih elemenata je dat sa*

$$V^N = \{v^N : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v^N|_{\kappa} \in P_{\kappa}, \text{ za svako } \kappa \in \mathcal{T}\}.$$

Izbori konačnih elemenata imaju direktnog uticaja na osobine funkcija iz prostora  $V^N$ . Za linearni i kvadratni Lagranžov trougao, kubni Hermitov trougao, bilinearni i bikvadratni Lagranžov pravougaonik važi da je

$$V^N \subset C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega).$$

Za prostore konačnih elemenata koji sadrže i diferencijabilne funkcije, na primer prostori koji koriste Argirisov ili Belov trougao, je  $V^N \subset C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$ .

**Definicija 2.3.5.** [5] *Familija prostora konačnih elemenata  $V^N$  sa triangulacijama  $\mathcal{T}^N$  je afina familija, ako postoji konačni element  $(\hat{\kappa}, P_{\hat{\kappa}}, \Sigma_{\hat{\kappa}})$  sa osobinama*

*i) za svako  $\kappa \in \mathcal{T}^N$  postoji afino preslikavanje  $F_{\kappa} : \hat{\kappa} \rightarrow \kappa$  takvo da za svako  $v^N \in V^N$  važi*

$$v^N|_{\kappa} = p_{\hat{\kappa}}(F_{\kappa}^{-1}) \text{ za neko } p_{\hat{\kappa}} \in P_{\hat{\kappa}},$$

*ii) za svako  $\kappa \in \mathcal{T}^N$ , svaka funkcionala  $\varphi \in \Sigma_{\kappa}$  se može izraziti u obliku*

$$\varphi(p) = \varphi_{\hat{\kappa}}(p \circ F_{\kappa}), \quad p \in P_{\kappa},$$

*za neko  $\varphi_{\hat{\kappa}} \in \Sigma_{\hat{\kappa}}$ .*

Konačni element iz ove definicije se zove referentni element. U jednodimenzionalnom slučaju je uglavnom  $\hat{\kappa} = [0, 1]$  ili  $\hat{\kappa} = [-1, 1]$ . Kada je  $\kappa \in \mathcal{T}$  trougao onda je

$$\hat{\kappa} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}$$

jedinični trougao, a kada je  $\kappa$  pravougaoni element onda se najčeće koriste  $\hat{\kappa} = [0, 1]^2$  ili  $\hat{\kappa} = [-1, 1]^2$ .

Za prostor konačnih elemenata iz afine familije, najveći deo izračunavanja koeficijenata matrice sistema se obavlja na referentnom elementu. Sve ocene greške interpolacije se prvo izvode na  $\hat{\kappa}$ , a onda se transformišu tako da važe na celom domenu. Stoga, ocene greške u mnogome zavise i od izbora konačnih elemenata.

## 2.4 Lagranžov interpolant

Po formiranju prostora konačnih elemenata sledi analiza greške aproksimacije u kojoj mogu da se koriste razni operatori. Sa stanovišta metoda konačnih elemenata korisno je uvesti i druge aproksimacione operatore od kojih su naročito značajni  $L^2$ - i  $H^1$ -ortogonalni projekcioni operatori koji imaju smisla za aproksimaciju funkcija koje nisu nužno neprekidne.

Ovde ćemo posmatrati samo Lagranžove konačne elemente kod kojih stepeni slobode koriste vrednosti u određenim tačkama elementa, a u analizi greške ćemo koristiti interpolacionu funkciju.

Interpolaciona funkcija (interpolant)  $u^I \in V^N$  se definiše po delovima koristeći mrežu  $\mathcal{T}$  na sledeći način:

**Definicija 2.4.1.** [30] *Lagranžov interpolant funkcije  $u$  je*

$$u^I|_{\kappa} = u_{\kappa}^I, \quad \kappa \in \mathcal{T},$$

gde je za konačni element  $(\kappa, P_{\kappa}, \Sigma_{\kappa})$ , lokalni interpolant  $u_{\kappa}^I$  dat sa

$$u_{\kappa}^I(x) = \sum_{i=1}^s \varphi_i(u) p_i(x), \quad x \in \kappa.$$

Jasno je da važi  $\varphi_i(u_{\kappa}^I) = \varphi_i(u)$ ,  $i = 1, \dots, s$  i  $p_{\kappa}^I = p$  za svako  $p \in P_{\kappa}$ .

**Lema 2.4.1.** [30] *Ako  $u \in H^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , tada postoji konstanta  $C$  nezavisna od koraka mreže  $h_i = x_i - x_{i-1}$ , tako da važi*

$$\|u - u^I\|_{L^2(I_i)} \leq Ch_i^2 \|u''\|_{L^2(I_i)} \quad \text{i} \quad \|(u - u^I)'\|_{L^2(I_i)} \leq Ch_i \|u''\|_{L^2(I_i)},$$

na intervalu  $I_i = [x_{i-1}, x_i] \subset \bar{\Omega}$ .

**Lema 2.4.2.** [30] *Postoji konstanta  $C$  nezavisna od koraka mreže  $h_i$  takva da za svako  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , na intervalu  $I_i = [x_{i-1}, x_i] \subset \bar{\Omega}$  važi*

$$\|u - u^I\|_{L^2(I_i)} \leq Ch_i \|u'\|_{L^2(I_i)}.$$

## 2.5 Klemanov kvazi-interpolant

U tezi ćemo u Odeljku 3.6 koristiti kvazi-interpolant dat u [12]. Ovaj kvazi-interpolant se često koristi u aposteriornoj analizi greške u kojoj se javljaju interpolanti definisani za  $H^1$  funkcije, a ne samo za neprekidne funkcije. Potreba za ovim interpolantom se javila zbog osobine stabilnosti koju on poseduje.

Prvo ćemo opisati konstrukciju Klemanovog kvazi-interpolanta.

Za svaki čvor mreže  $x_i$  označimo sa  $\Delta_i$  makroelement  $(x_{i-1}, x_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , dok je  $\Delta_0 = (x_0, x_1)$  i  $\Delta_N = (x_{N-1}, x_N)$ . Neka  $\mathbb{P}_1(\Delta_i)$  označava

prostor linearnih polinoma na  $\Delta_i$ . Za datu funkciju  $v \in L^1(\Omega)$  definišemo lokalnu  $L^2$ -projekciju  $p_i \in \mathbb{P}_1(\Delta_i)$  sa

$$\int_{\Delta_i} p_i s \, dx = \int_{\Delta_i} v s \, dx \quad \text{za svako } s \in \mathbb{P}_1(\Delta_i).$$

**Napomena 2.5.1.** Lokalna  $L^2$ -projekcija  $p_i(x) = a_i x + b_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , se može lako odrediti. Za  $s = 1$  i  $s = x$  dobija se sledeći sistem jednačina koji se jednostavno rešava:

$$\begin{aligned} \text{na } \Delta_0 & \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1} p_0 \, dx = \int_{x_0}^{x_1} (a_0 x + b_0) \, dx = \int_{x_0}^{x_1} v \, dx, \\ \int_{x_0}^{x_1} p_0 x \, dx = \int_{x_0}^{x_1} (a_0 x^2 + b_0 x) \, dx = \int_{x_0}^{x_1} v x \, dx, \end{cases} \\ \text{na } \Delta_1 & \begin{cases} \int_{x_0}^{x_2} p_1 \, dx = \int_{x_0}^{x_2} (a_1 x + b_1) \, dx = \int_{x_0}^{x_2} v \, dx, \\ \int_{x_0}^{x_2} p_1 x \, dx = \int_{x_0}^{x_2} (a_1 x^2 + b_1 x) \, dx = \int_{x_0}^{x_2} v x \, dx, \end{cases} \\ \text{na } \Delta_2 & \begin{cases} \int_{x_1}^{x_3} p_2 \, dx = \int_{x_1}^{x_3} (a_2 x + b_2) \, dx = \int_{x_1}^{x_3} v \, dx, \\ \int_{x_1}^{x_3} p_2 x \, dx = \int_{x_1}^{x_3} (a_2 x^2 + b_2 x) \, dx = \int_{x_1}^{x_3} v x \, dx, \end{cases} \\ & \vdots \end{aligned}$$

□

Neka je  $V^N$  prostor neprekidnih, deo po deo linearnih funkcija sa standardnom bazom (2.10), (2.11). Definišemo projekcioni operator, to jest kvazi-interpolant  $v^\pi \in V^N$  za funkciju  $v \in L^1(\Omega)$  sa

$$v^\pi(x) = \sum_{i=0}^N p_i(x_i) \varphi_i(x).$$

Označimo sa  $I_i$  element, to jest neki interval  $(x_{i-1}, x_i)$ , a sa  $\Delta$  uniju dva odgovarajuća makroelementa  $\Delta_{i-1}$  i  $\Delta_i$ , i neka je  $H$  prečnik od  $\Delta$ . Tako



konstruisan kvazi-interpolant ima, za razliku od klasičnog interpolacionog operatora, osobinu stabilnosti [16, 67]

$$\|v^\pi\|_{L^p(I_i)} \leq C\|v\|_{L^p(\Delta)} \quad \text{za } 1 \leq p \leq \infty. \quad (2.12)$$

Generalno je  $v^\pi(x_i) \neq v(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

Koristićemo i ocenu koja je data u [16]:

$$\|v - v^\pi\|_{L^p(I_i)} \leq CH^k \|D^k v\|_{L^p(\Delta)} \quad \text{za } 1 \leq p \leq \infty, \quad k = 1, 2, \quad (2.13)$$

kao i sledeće nejednakosti iz [16]

$$|v - v^\pi|_{H^1(I_i)} \leq CH|v|_{H^2(\Delta)}, \quad (2.14)$$

$$|v^\pi|_{H^1(I_i)} \leq C|v|_{H^1(\Delta)}, \quad (2.15)$$

koje važe samo na onim delovima gde mreža nije anizotropna.

Više o kvazi-interpolantima, kako Klemanovog, tako i Skot<sup>19</sup>-Zangovog<sup>20</sup> tipa može se naći u [16, 81].

---

<sup>19</sup>L. Ridgway Scoot, američki matematičar

<sup>20</sup>Shangyou Zhang, američki matematičar



## Glava 3

### Jednodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije

U ovom delu će numerički biti rešavan linearni jednodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 u''(x) + \varepsilon_2 b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{za } x \in (0, 1) \\ u(0) = 0, \quad u(1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gde su  $b, c$  i  $f$  glatke funkcije na  $[0, 1]$ , takve da je  $b(x) \geq b_0 > 0$ ,  $c(x) \geq c_0 > 0$ , a  $b_0, c_0$  su konstante i  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$  perturbacioni parametri.

Pod ovim pretpostavkama, postoji jedinstveno rešenje problema (3.1), [49, 63, 78].

U tezi pretpostavljamo da je zadovoljen uslov

$$c(x) - \frac{\varepsilon_2}{2} b'(x) \geq \gamma > 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.2)$$

gde je  $\gamma$  konstanta.

**Napomena 3.0.1.** *Kao i kod problema konvekcije-difuzije [48], iz pretpostavke  $b(x) \geq b_0 > 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , za problem (3.1) nejednakost (3.2) može biti zadovoljena uz pomoć transformacije  $u(x) = e^{\theta x} v(x)$ , gde konstantu  $\theta$  biramo na sledeći način  $\theta := \frac{\varepsilon_2 b_0}{2\varepsilon_1}$ .  $\square$*

U slučaju  $\varepsilon_2 = 0$ , problem (3.1)-(3.2) pripada klasi diferencijalnih jednačina reakcije-difuzije čije rešenje ima dva granična sloja u okolini  $x = 0$

i  $x = 1$ , širine  $\mathcal{O}(\varepsilon_1^{1/2} |\ln \varepsilon_1^{1/2}|)$ . Za  $\varepsilon_2 = 1$  polazni problem (3.1)-(3.2) je jednačina konvekcije-difuzije čije rešenje ima sloj u  $x = 1$ , širine  $\mathcal{O}(\varepsilon_1 |\ln \varepsilon_1|)$ .

Za jednodimenzionalni problem (3.1)-(3.2), autori u [28, 49, 59, 63, 91] razmatraju različite robustne diferencne šeme na deo po deo uniformnoj Šiškinovoj mreži. U radu [46] je data analiza jednostavne „upwind” šeme na proizvoljnim mrežama za jednodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije, dok je u [78] pokazan skoro drugi red konvergencije u maksimum normi za „streamline-diffusion” metod konačnih elemenata, a u [47] je data aposteriorna ocena greške u maksimum normi. U [102] je za problem konvekcije-reakcije-difuzije predstavljen robustni adaptivni metod.

U radu [99] je posmatran opštiji slučaj kvazilinearnog problema sa dva mala parametra nego u [100]. U oba pomenuta rada je korišćena diferencna šema trećeg reda i dat je naglasak na prednosti Šiškinove mreže u odnosu na Bahvalovljevu ako se koriste šeme višeg reda. Na Bahvalovljevoj mreži je u [32] predstavljena konačna diferencna šema četvrtog reda tačnosti za specijalnu klasu singularno perturbovanih problema sa dva perturbaciona parametra.

Radova koji se bave dvoparametarskim problemima je mnogo manje nego radova u kojima su razmatrani jednoparametarski problemi, kao na primer [38, 43, 45, 48, 69, 76]. U [68] predstavljen je siže istraživanja robustnih numeričkih postupaka za singularno perturbovane probleme u periodu od 2008. do 2012. godine. Ovde ćemo navesti radove koji se bave jednoparametarskim problemima, ali su bili veoma bitni za stvaranje teze. Prvi optimalan<sup>1</sup> rezultat konvergencije u energetske normi, ali za jednodimenzionalni problem konvekcije-difuzije na Bahvalovljevoj mreži je predstavljen u radu [67]. Iz tog rada je proistekla ideja za upotrebu kvazi-interpolanta u Odeljku 3.6. U radovima [19] i [20] je predstavljena slojno-adaptivna rekurzivno zadata mreža koju ćemo u tezi nazivati Duranovom mrežom. U [73] autori daju poređenje metoda konačnih elemenata za problem konvekcije-difuzije na Šiškinovoj i Gartlandovoj<sup>2</sup> mreži, dok je u [77] analiziran metod konačnih elemenata na Bahvalov-Šiškinovoj, Duran-Šiškinovoj i Gartland-Šiškinovoj mreži.

Deo rezultata dobijen na Bahvalovljevoj mreži iz ove teze je publikovan u radovima [6] i [7]. Dvoparametarski problem do sada nije razmatran na

<sup>1</sup>Termin „optimalan red konvergencije” podrazumeva da je greška postupka u Soboljevov normi ograničena sa  $CN^{-p}$ , gde je  $C$  konstanta nezavisna od perturbacionih parametara problema i broja čvorova mreže  $N$ , dok  $p$  označava stepen polinoma kojima se vrši aproksimacija rešenja problema (videti u [65]).

<sup>2</sup>Eugene C. Gartland (1948-), američki matematičar

Duranovoj i Duran-Šiškinovoj mreži, a rezultati dobijeni na njima iz ove teze biće publikovani u [8].

### 3.1 Slaba formulacija problema

Za problem (3.1)-(3.2), gde je  $\Omega = (0, 1)$ , standardna slaba formulacija glasi:

$$\begin{cases} \text{naći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a(u, v) = (f, v) \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (3.3)$$

gde je  $(\cdot, \cdot)$  skalarni proizvod u  $L^2(\Omega)$ , a  $a(\cdot, \cdot)$  je bilinearna forma data sa

$$a(w, v) := \varepsilon_1(w', v') + (\varepsilon_2 b w', v) + (c w, v), \quad w, v \in H_0^1(\Omega).$$

**Definicija 3.1.1.**  $\varepsilon_1$ -težinska  $H_0^1(\Omega)$  norma (energetska norma) je data sa

$$\|v\|_E^2 := \varepsilon_1(v', v') + (v, v), \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.4)$$

**Lema 3.1.1.** Za svako  $v \in H_0^1(\Omega)$  važi  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_E^2$ , tj. bilinearna forma  $a$  je koercitivna.

**Dokaz:** Želimo da ograničimo bilinearnu formu

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \varepsilon_1(v', v') + \varepsilon_2(bv', v) + (cv, v) \\ &= \varepsilon_1(v', v') + \varepsilon_2 \int_{\Omega} b v' v \, dx + (cv, v), \end{aligned}$$

od dole. Koristeći da je  $v'v = \frac{1}{2}(v^2)'$  i uslov (3.2) dobijamo da je

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \varepsilon_1(v', v') + \frac{\varepsilon_2}{2} \int_{\Omega} b (v^2)' \, dx + (cv, v) \\ &= \varepsilon_1(v', v') + \frac{\varepsilon_2}{2} \left( v^2 b \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} v^2 b' \, dx \right) + (cv, v) \\ &= \varepsilon_1(v', v') + \left( \left( c - \frac{\varepsilon_2}{2} b' \right) v, v \right) \\ &\geq \min\{1, \gamma\} (\varepsilon_1(v', v') + (v, v)) = \alpha \|v\|_E^2, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. ■

Kako je bilinearna forma  $a$  neprekidna, onda Lema 3.1.1 zajedno sa Laks-Milgramovom teoremom daje jedinstvenost rešenja problema (3.3).

U narednoj lemi dajemo apriornu ocenu rešenja problema (3.1)-(3.2).

**Lema 3.1.2.** *Pretpostavimo da za  $x \in \Omega$  važi*

$$c - \frac{\varepsilon_2}{2}b' \geq \gamma > 0. \quad (3.5)$$

*Tada za rešenje problema (3.1) važi ocena*

$$\|u\|_E \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Dokaz:** Jednačinu (3.1) pomnožimo sa  $u$ , primenimo parcijalnu integraciju i iskoristimo činjenicu da je  $u|_{\partial\Omega} = 0$  i da je  $u'u = \frac{1}{2}(u^2)'$ , pa dobijamo

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(u', u') + \frac{\varepsilon_2}{2}(bu', u) + (cu, u) &= (f, u), \\ \varepsilon_1(u', u') - \frac{\varepsilon_2}{2}(b'u, u) + (cu, u) &= (f, u), \\ \varepsilon_1(u', u') + \left( (c - \frac{\varepsilon_2}{2}b')u, u \right) &= (f, u). \end{aligned}$$

Iskoristimo uslov (3.5), definiciju energetske norme i Helderovu nejednakost, i dobijamo

$$\min\{1, \gamma\}\|u\|_E^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Kako iz (3.4) sledi da je  $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_E$ , onda dobijamo tvrđenje leme. ■

## 3.2 Galerkinov metod konačnih elemenata

Polazimo od slabe formulacije (3.3) problema (3.1)-(3.2) i postavljamo postupak konačnih elemenata na opštoj mreži

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1,$$

sa korakom mreže  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Neka je

$$\bar{h}_i = (h_i + h_{i+1})/2, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

i  $V^N \subset H_0^1(\Omega)$  prostor neprekidnih linearnih konačnih elemenata sa baznim funkcijama (2.10), (2.11).

Galerkinov postupak konačnih elemenata glasi:

$$\begin{cases} \text{naći } u^N \in V^N \text{ tako da je} \\ a(u^N, v^N) = (f, v^N) \text{ za svako } v^N \in V^N. \end{cases} \quad (3.6)$$

Na osnovu Laks-Milgramove teoreme sledi da postoji jedinstveno diskretno rešenje problema (3.6).

Diskretno rešenje  $u^N$  se može predstaviti u obliku

$$u^N(x) = \sum_{i=0}^N u_i^N \varphi_i(x),$$

gde  $u_i^N \in \mathbb{R}$ , i važi

$$u^N(x_j) = \sum_{i=0}^N u_i^N \varphi_i(x_j) = \sum_{i=0}^N u_i^N \delta_{ij} = u_j^N, \quad j = 0, \dots, N.$$

Diskretni problem (3.6) se može transformisati u sistem linearnih jednačina oblika

$$\begin{cases} \text{naći } [u_0^N, u_1^N, \dots, u_N^N]^T \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tako da je} \\ \sum_{i=0}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_i^N = (f, \varphi_j), \quad j = 0, \dots, N. \end{cases}$$

Na taj način se dobija diferencna šema

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 \frac{D^+ u_i - D^- u_i}{\bar{h}_i} + \varepsilon_2 \left( \beta_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{\bar{h}_i} - \beta_{i-1} \frac{u_i - u_{i-1}}{\bar{h}_i} \right) \\ + \gamma_{i-1} u_{i-1} + \gamma_i u_i + \gamma_{i+1} u_{i+1} = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \varphi_i dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

gde su  $D^+$  i  $D^-$  diferencni operatori definisani sa

$$D^+ u_i := \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} \quad \text{i} \quad D^- u_i := \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i},$$

dok je

$$\beta_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} b\varphi'_{i-1}\varphi_i < 0, \quad \beta_{i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b\varphi'_{i+1}\varphi_i > 0,$$

$$\gamma_{i-1} = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} c\varphi_{i-1}\varphi_i dx, \quad \gamma_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} c\varphi_i\varphi_i dx, \quad \gamma_{i+1} = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} c\varphi_{i+1}\varphi_i dx.$$

Kada je  $c$  konstanta, onda je  $\gamma_{i-1} = \frac{ch_i}{6\bar{h}_i}$ ,  $\gamma_i = \frac{2c}{3}$ ,  $\gamma_{i+1} = \frac{ch_{i+1}}{6\bar{h}_i}$ .

### 3.3 Dekompozicija rešenja

Od suštinskog značaja za numeričko rešavanje singularno perturbovanih problema je poznavanje ponašanja rešenja i njegovih izvoda. Ocene izvoda rešenja su potrebne kako za konstrukciju mreže tako i za analizu greške.

Da bismo opisali slojeve koji se javljaju u rešenju problema (3.1) uvodimo karakterističnu jednačinu ovog problema

$$-\varepsilon_1 r^2(x) + \varepsilon_2 b(x)r(x) + c(x) = 0,$$

koja ima dva realna rešenja  $r_0(x) < 0$  i  $r_1(x) > 0$ . Kako je  $|r_0| < r_1$ , sloj u  $x = 1$  je jači od sloja u  $x = 0$ . Neka je

$$\mu_0 = -\max_{x \in [0,1]} r_0(x), \quad \mu_1 = \min_{x \in [0,1]} r_1(x),$$

to jest

$$\mu_{0,1} = \min_{x \in [0,1]} \frac{\mp \varepsilon_2 b(x) + \sqrt{\varepsilon_2^2 b^2(x) + 4\varepsilon_1 c(x)}}{2\varepsilon_1}.$$

Zapravo je

$$\mu_0 = \frac{-\varepsilon_2 B + \sqrt{\varepsilon_2^2 B^2 + 4\varepsilon_1 c_0}}{2\varepsilon_1}, \quad \mu_1 = \frac{\varepsilon_2 b_0 + \sqrt{\varepsilon_2^2 b_0^2 + 4\varepsilon_1 c_0}}{2\varepsilon_1}, \quad (3.7)$$

gde je  $B = \max_{x \in [0,1]} b(x)$ , a  $c_0$  konstanta takva da je  $c(x) \geq c_0 > 0$ . Za  $\mu_0$  i  $\mu_1$



važe sledeće nejednakosti, [93],

$$\mu_0^{-1} \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2}), \quad \varepsilon_1 \mu_1 \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2}), \quad (3.8)$$

$$\mu_1 \geq \mu_0 \geq \frac{c_0}{\varepsilon_2 \|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \sqrt{\varepsilon_1 \|c\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}}} \geq \frac{c_0}{\|b\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \sqrt{\|c\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}}}, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_2 \mu_0 \leq b_0^{-1} c_0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2}} \leq C \varepsilon_2^{1/2}. \quad (3.11)$$

U tezi ćemo posmatrati sve odnose perturbacionih parametara između dve krajnje situacije, navedene u [48, 78]:

(i)  $\varepsilon_2^2 \ll \varepsilon_1$  što implicira  $\mu_0 \approx \mu_1 = \mathcal{O}(\varepsilon_1^{-1/2})$  i slojevi su slični slojevima koji se pojavljuju kod problema reakcije-difuzije (videti Sliku 3.10 i Sliku 3.12).

(ii)  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2^2$  što implicira  $\mu_0 = \mathcal{O}(\varepsilon_2^{-1})$  i  $\mu_1 = \mathcal{O}(\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})$ . Kako je  $\mu_1$  mnogo veće nego  $\mu_0$ , onda je i granični sloj u okolini  $x = 1$  jači nego granični sloj u okolini  $x = 0$  (videti Sliku 3.9 i Sliku 3.11).

Kada ne važi ni (i), ni (ii), vrednosti za  $\mu_0$  i  $\mu_1$  se kreću između vrednosti datih sa (i) i (ii).

Razmotrićemo za koje vrednosti parametara  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  važi da je  $\mu_0 > 1$ . Kako na osnovu (3.7) važi

$$\mu_0 = \frac{2c_0}{\varepsilon_2 B + \sqrt{\varepsilon_2^2 B^2 + 4\varepsilon_1 c_0}},$$

razdvojićemo dva slučaja:

1. Kada je  $\varepsilon_2^2 \leq \varepsilon_1$ , imamo

$$\mu_0 \geq \frac{2c_0}{\sqrt{\varepsilon_1}(B + \sqrt{B^2 + 4c_0})},$$

tako da za

$$\varepsilon_1 < \frac{4c_0^2}{(B + \sqrt{B^2 + 4c_0})^2}$$

važi  $\mu_0 > 1$ .

2. Kada je  $\varepsilon_2^2 \geq \varepsilon_1$ , analognim razmatranjem dobijamo da za

$$\varepsilon_2^2 < \frac{4c_0^2}{(B + \sqrt{B^2 + 4c_0})^2}$$

važi  $\mu_0 > 1$ .

Iz gore navedenih slučajeva sledi da za

$$\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2^2\} < \frac{4c_0^2}{(B + \sqrt{B^2 + 4c_0})^2} \quad \text{važi} \quad \mu_0 > 1. \quad (3.12)$$

U daljem radu ćemo smatrati da je (3.12) ispunjeno.

**Teorema 3.3.1.** [49] *Neka  $b, c, f \in C^q[0, 1]$  za neko  $q \geq 1$  i neka je  $p, \kappa \in (0, 1)$  proizvoljno. Pretpostavimo da je zadovoljeno*

$$q \|b'\|_{L^\infty[0,1]} \varepsilon_2 \leq \kappa(1 - p).$$

Tada važi

$$|u^{(k)}(x)| \leq C(1 + \mu_0^k e^{-p\mu_0 x} + \mu_1^k e^{-p\mu_1(1-x)}), \quad x \in (0, 1),$$

za  $0 \leq k \leq q$ .

Sada, iz [44] sledi, da se rešenje  $u$  problema (3.1)-(3.2) može predstaviti kao suma regularne i dve slojne komponente  $u = S + E_0 + E_1$ , gde je

$$|S^{(k)}(x)| \leq C \quad \text{za} \quad 0 \leq k \leq q, \quad (3.13)$$

$$|E_0^{(k)}(x)| \leq C \mu_0^k e^{-p\mu_0 x} \quad \text{za} \quad 0 \leq k \leq q, \quad (3.14)$$

$$|E_1^{(k)}(x)| \leq C \mu_1^k e^{-p\mu_1(1-x)} \quad \text{za} \quad 0 \leq k \leq q, \quad (3.15)$$

dok su  $p$  i  $q$  parametri iz prethodne teoreme.

Regularna komponenta je ona komponenta koja je zajedno sa svojim izvodima ograničena nezavisno od perturbacionih parametara. Slojne komponente su funkcije koje imaju male vrednosti u odnosu na perturbacione parametre na skoro celom domenu, osim u okolini jedne određene tačke.

## 3.4 Slojno-adaptivne mreže

Pri numeričkom rešavanju singularno perturbovanih problema, za aproksimaciju rešenja van slojeva dovoljno je da se koristi gruba mreža, dok je u slojnim delovima domena poželjno da mreža bude dovoljno gusta kako bi dobili numeričko rešenje sa prihvatljivom tačnošću. Stoga je potrebno pažljivo izvršiti diskretizaciju domena. Baš iz tog razloga se konstruišu slojno-adaptivne mreže. Tranzicione tačke su tačke domena u kojima mreža prelazi iz fine u grubu mrežu ili obrnuto. Kako rešenje posmatranog problema ima dva sloja, to onda zahteva da i mreža odgovara datom problemu, to jest da u slojevima bude gušća. Više o konstrukciji mreža za singularno perturbovane probleme može se naći u [48, 98].

### 3.4.1 Šiškinova mreža

Prvo ćemo predstaviti Šiškinovu mrežu, najčešće korišćenu od svih slojno-adaptivnih mreža. Ova mreža je predložena 1988. u radovima [82, 83], dok je prva analiza metoda konačnih elemenata na toj mreži urađena u radu [87]. Više detalja o Šiškinovoj mreži, kao i njenoj upotrebi može se naći u [37, 48, 55, 76].

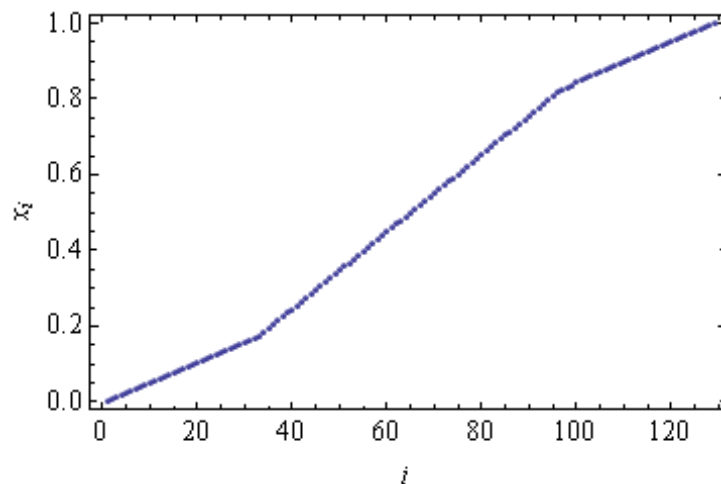
Deo po deo ekvidistantna Šiškinova mreža za dvoparametarski singularno perturbovani problem se konstruiše pomoću tri različite uniformne mreže koje dele tranzicione tačke  $\lambda_0$  i  $1 - \lambda_1$ , što je opisano u [49, 63, 78]. Svaki od podintervala  $[0, \lambda_0]$  i  $[1 - \lambda_1, 1]$  se deli na  $N/4$  jednakih delova, a  $[\lambda_0, 1 - \lambda_1]$  na  $N/2$  jednakih delova, gde je  $N$  prirodni broj deljiv sa 4, a tačke  $\lambda_0$  i  $\lambda_1$  su definisane sa

$$\lambda_i = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\tau}{p \mu_i} \ln N \right\}, \quad i = 0, 1, \quad (3.16)$$

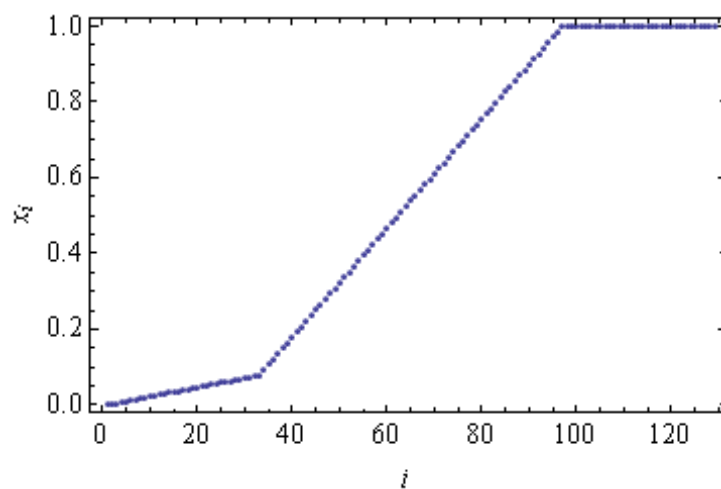
gde su  $\mu_0, \mu_1$  dati sa (3.7),  $p$  je parametar iz Teoreme 3.3.1, a  $\tau$  je parametar koji se bira tako da bude jednak formalnom redu postupka koji se primenjuje (videti [51]). Primeri ove mreže su dati na Slikama 3.1 i 3.2.

### 3.4.2 Bahvalovljeva mreža

Bahvalov je 1969. godine, koristeći jedan eksplicitni metod za konstrukciju mreže pri rešavanju singularno perturbovanog problema, došao do odgovarajuće funkcije koja generiše mrežu, a sastoji se iz tri dela. Prva od tih



Slika 3.1: Šiškinova mreža za  $N = 128$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ ,  $\tau = 4$ ,  $B = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  i  $p = 0.5$ .



Slika 3.2: Šiškinova mreža za  $N = 128$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau = 4$ ,  $B = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  i  $p = 0.5$ .

funkcija je odgovarajuća logaritamska funkcija i može se koristiti kod svih problema sa slojem eksponencijalnog tipa. Proučavajući mnoge radove u kojima je data mreža Bahvalovljevog tipa, mi ovde uvodimo jedan njen oblik prilagođen problemu sa dva mala parametra.

Neka je broj čvorova mreže  $N \in \mathbb{N}$  deljiv sa 4,  $N \geq 8$  i neka su  $\sigma_0$  i  $1 - \sigma_1$  tranzicione tačke date sa

$$\sigma_j = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\tau}{p \mu_j} \ln \mu_j \right\}, \quad j = 0, 1, \quad (3.17)$$

gde je  $\tau \geq 1$  parametar mreže, a  $p \in (0, 1)$  parametar iz Teoreme 3.3.1. Pretpostavka u tezi je da važi

$$\sigma_j < \frac{1}{4}, \quad j = 0, 1. \quad (3.18)$$

Pretpostavićemo da je

$$\mu_1^{-1} \leq \mu_0^{-1} \leq CN^{-\theta} \quad \text{za neko } 0 < \theta \leq 1, \quad (3.19)$$

što ne predstavlja restrikciju u praktičnim primenama.

Konstruišemo mrežu tako da je ekvidistantna na  $\bar{\Omega}_c$  i postepeno izdeljena na  $\bar{\Omega}_0$  i  $\bar{\Omega}_1$ , gde je

$$\Omega_0 = (0, \sigma_0), \quad \Omega_c = (\sigma_0, 1 - \sigma_1), \quad \Omega_1 = (1 - \sigma_1, 1).$$

Tranzicione tačke biramo tako da je

$$x_{\frac{N}{4}} = \sigma_0, \quad x_{\frac{3N}{4}} = 1 - \sigma_1,$$

kako bismo imali

$$e^{-p \mu_0 x_{N/4}} = \mu_0^{-\tau} \quad \text{i} \quad e^{-p \mu_1 (1 - x_{3N/4})} = \mu_1^{-\tau}.$$

Zbog postojanja dva sloja potrebno je da se koriste dve generativne funkcije mreže  $\phi_0$  i  $\phi_1$ .

**Definicija 3.4.1.** *Strogo monotona funkcija  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  koja preslikava uniformnu mrežu po  $t$  u slojno-adaptivnu mrežu po  $x$  sa  $x = \phi(t)$  se naziva generativna funkcija mreže.*

Funkcije  $\phi_0$  i  $\phi_1$  su obe neprekidne, po delovima neprekidno diferencijabilne i imaju osobine

$$\begin{aligned}\phi_0(0) &= 0, & \phi_0(1/4) &= \ln \mu_0, \\ \phi_1(3/4) &= \ln \mu_1, & \phi_1(1) &= 0.\end{aligned}$$

Tačke mreže  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , su date sa

$$x_i = \begin{cases} \frac{\tau}{p\mu_0}\phi_0(t_i), & i = 0, 1, \dots, N/4, \\ \sigma_0 + 2\left(t_i - \frac{1}{4}\right)(1 - \sigma_0 - \sigma_1), & i = N/4, N/4 + 1, \dots, 3N/4, \\ 1 - \frac{\tau}{p\mu_1}\phi_1(t_i), & i = 3N/4, 3N/4 + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (3.20)$$

gde je  $t_i = i/N$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  i

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= -\ln\left(1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t\right) \\ \phi_1(t) &= -\ln\left(1 - 4(1 - \mu_1^{-1})(1 - t)\right).\end{aligned}$$

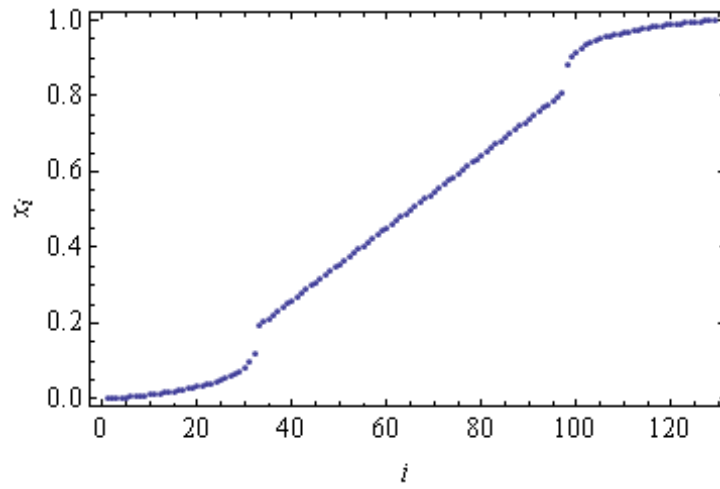
Na Slikama 3.3 i 3.4 su prikazane Bahvalovljeve mreže za različite izbore perturbacionih parametara.

**Napomena 3.4.1.** *Postoji granična vrednost  $\mu_{\min} = \mu_{\min}(\tau, p)$  tako da je (3.18) zadovoljeno kada je  $\mu_1 \geq \mu_0 \geq \mu_{\min} > 1$ . Na primer, kada je  $p = 0.5$  i  $\tau = 1, 2, 3, 4, 5$ , dobijamo  $\mu_{\min} \approx 27, 68, 114, 164, 215$ , respektivno. Nejednakost (3.18) nije ograničavajući uslov. Ipak, numerički rezultati pokazuju da uslov (3.18) utiče na dopustivi opseg perturbacionih parametara za koji je diskretizaciona mreža slojno-adaptivna. Na primer, za prvi test problem iz Odeljka 3.9 uzimamo  $\varepsilon_1 \leq 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 \leq 10^{-3}$ , dok u drugom test problemu imamo  $\varepsilon_1 \leq 10^{-6}$ ,  $\varepsilon_2 \leq 10^{-3}$ .  $\square$*

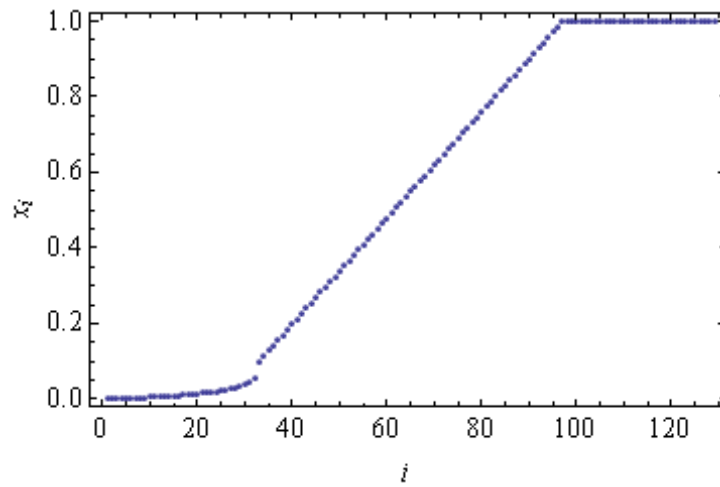
U ostatku ovog odeljka dokazaćemo neke osobine koje važe za čvorove i korake Bahvalovljeve mreže, a koje ćemo koristiti u analizi greške postupka konačnih elemenata.

**Lema 3.4.1.** *Za tačke Bahvalovljeve mreže (3.20) lokalni korak mreže  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , ima osobinu*

$$h_i \leq \begin{cases} C\mu_0^{-1}, & i = 1, 2, \dots, N/4 - 1 \\ CN^{-1}, & i = N/4, \dots, 3N/4 + 1 \\ C\mu_1^{-1}, & i = 3N/4 + 2, \dots, N. \end{cases}$$



Slika 3.3: Bahvalovljeva mreža za  $N = 128$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ ,  $\tau = 4$ ,  $B = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  i  $p = 0.5$ .



Slika 3.4: Bahvalovljeva mreža za  $N = 128$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau = 4$ ,  $B = 1$ ,  $b = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  i  $p = 0.5$ .

**Dokaz:** Funkcije  $\phi_0$  i  $\phi'_0$  su strogo rastuće na  $[0, 1/4]$ . Za  $i = 1, 2, \dots, N/4 - 1$ , na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti postoji  $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$  tako da je

$$h_i = \frac{\tau}{p\mu_0} N^{-1} \phi'_0(\xi_i) < \frac{\tau}{p\mu_0} N^{-1} \phi'_0(t_{\frac{N}{4}-1}) < \frac{\tau}{p\mu_0} N^{-1} \frac{4}{1 - 4t_{\frac{N}{4}-1}} = C\mu_0^{-1}.$$

Za  $i = N/4$  i  $\xi_i \in (t_{\frac{N}{4}-1}, t_{\frac{N}{4}})$  je

$$h_{\frac{N}{4}} = \frac{\tau}{p\mu_0} N^{-1} \phi'_0(\xi_i) \leq \frac{\tau}{p\mu_0} N^{-1} \frac{4(1 - \mu_0^{-1})}{1 - 4(1 - \mu_0^{-1})^{\frac{1}{4}}} \leq CN^{-1}.$$

Trivijalno važi

$$h_i = 2N^{-1}(1 - \sigma_0 - \sigma_1) \leq CN^{-1}, \quad i = N/4 + 1, \dots, 3N/4.$$

Koraci mreže na  $\bar{\Omega}_1$  se analogno ocenjuju. ■

**Lema 3.4.2.** *Za korake mreže (3.20) važe sledeće nejednakosti*

$$\begin{aligned} e^{\mu_0 h_i} &\leq C, \quad i = 1, \dots, N/4 - 1, \\ e^{\mu_1 h_i} &\leq C, \quad i = 3N/4 + 2, \dots, N. \end{aligned}$$

**Dokaz:** U dokazu prethodne leme smo pokazali da je za  $i = 1, \dots, N/4 - 1$ ,  $h_i \leq C/\mu_0$ . Stoga je

$$e^{\mu_0 h_i} \leq e^{\mu_0 \frac{C}{\mu_0}} \leq C.$$

Za  $i = 3N/4 + 2, \dots, N$  je  $h_i \leq C/\mu_1$ , pa je

$$e^{\mu_1 h_i} \leq e^{\mu_1 \frac{C}{\mu_1}} \leq C,$$

čime je dokaz završen. ■

**Posledica 3.4.1.** *Za tačke Bahvalovljeve mreže (3.20) važi*

$$\begin{aligned} e^{-\mu_0 x_{i-2}} &\leq C e^{-\mu_0 x_i} \quad \text{za } i = 2, \dots, N/4, \\ e^{-\mu_1 x_{i-2}} &\leq C e^{-\mu_1 x_i} \quad \text{za } i = 3N/4 + 3, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.21}$$



**Dokaz:** Na osnovu prethodne leme je

$$e^{\mu_0 x_i - \mu_0 x_{i-1}} \leq C \text{ i } e^{\mu_0 x_{i-1} - \mu_0 x_{i-2}} \leq C,$$

a na osnovu toga je

$$e^{-\mu_0 x_{i-2}} \leq C e^{-\mu_0 x_{i-1}} \leq C e^{-\mu_0 x_i}.$$

Analogno se pokazuje i (3.21). ■

Mreža (3.20) je gušća u slojevima i lako se pokazuje da je

$$\begin{aligned} h_i &> h_{i-1} & \text{ za } & i = 2, 3, \dots, N/4, \\ h_{i-1} &> h_i & \text{ za } & i = 3N/4 + 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Važno je primetiti da iz (3.22) sledi

$$h_{N/4} > h_{N/4-1} = \frac{\tau}{p \mu_0} \ln \left( 1 + \frac{4N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})}{1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_{N/4-1}} \right) \geq C \mu_0^{-1} N^{-1/2}.$$

Slično se dobija  $h_i \geq C \mu_1^{-1} N^{-1/2}$  za  $i = 3N/4 + 1, 3N/4 + 2$ . Takođe je  $h_i \geq CN^{-1}$  za  $i = N/4 + 1, \dots, 3N/4$ .

O odnosu uzastopnih koraka mreže govori sledeća lema.

**Lema 3.4.3.** *Za Bahvalovljevu mrežu (3.20), gde su  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , koraci mreže, važe sledeće nejednakosti*

$$\begin{aligned} \frac{h_{i+1}}{h_i} &\leq C, & i &= 1, 2, \dots, N/4 - 2, \\ \frac{h_{i-1}}{h_i} &\leq C, & i &= 3N/4 + 3, \dots, N. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Za svako  $i = 1, 2, \dots, N/4 - 2$  postoji  $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$  tako da je

$$h_i = \frac{\tau}{p \mu_0} N^{-1} \phi'_0(\xi_i).$$

Sada je

$$\begin{aligned} \frac{h_{i+1}}{h_i} &= \frac{1 - 4(1 - \mu_0^{-1})\xi_i}{1 - 4(1 - \mu_0^{-1})\xi_{i+1}} \leq 1 + \frac{8N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})}{1 - 4(1 - \mu_0^{-1})\xi_{i+1}} \\ &\leq 1 + \frac{8N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})}{\mu_0^{-1} + 4N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})} \leq C. \end{aligned}$$

Druga nejednakost se dokazuje analogno. ■

U analizi greške biće nam značajne nejednakosti iz sledeće leme.

**Lema 3.4.4.** *Na Bahvalovljevoj mreži (3.20), za  $\tau \geq \alpha/2$ ,  $\alpha > 0$ , važi*

$$\begin{aligned} \min\{h_{i+1}\mu_0, 1\}e^{-\frac{2}{\alpha}p\mu_0 x_i} &\leq CN^{-1}, & i = 1, 2, \dots, N/4 - 1, \\ \min\{h_i\mu_1, 1\}e^{-\frac{2}{\alpha}p\mu_1(1-x_i)} &\leq CN^{-1}, & i = 3N/4 + 1, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Ideja za dokaz je slična dokazu iz [38] i [67]. Prvo, za  $i = 1, 2, \dots, N/4 - 1$  imamo

$$\begin{aligned} \min\{h_{i+1}\mu_0, 1\}e^{-\frac{2}{\alpha}p\mu_0 x_i} \\ = \min\left\{\frac{4\tau N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})}{p(1 - 4(1 - \mu_0^{-1})\xi_{i+1})}, 1\right\} (1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_i)^{\frac{2\tau}{\alpha}} \end{aligned}$$

za neko  $\xi_{i+1} \in (t_i, t_{i+1})$ . Ako pretpostavimo da je  $\tau \geq \alpha/2$ , dobijamo

$$\begin{aligned} \min\{h_{i+1}\mu_0, 1\}e^{-\frac{2}{\alpha}p\mu_0 x_i} \\ \leq \min\left\{\frac{4\tau N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})}{p(1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_{i+1})}, 1\right\} (1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_i) \\ = \min\left\{\frac{4\tau N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})}{p(1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_{i+1})}, 1\right\} (1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_{i+1} + 4N^{-1}(1 - \mu_0^{-1})). \end{aligned}$$

Poslednji izraz može da se zapiše kao

$$\min\left\{\frac{\tau\omega_1}{p\omega_2}, 1\right\} (\omega_1 + \omega_2), \tag{3.23}$$

gde su

$$\omega_1 = 4N^{-1}(1 - \mu_0^{-1}) \leq CN^{-1}, \quad \omega_2 = 1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_{i+1}.$$

Ako je u (3.23) minimum jednak 1, tada je

$$\min\left\{\frac{\tau\omega_1}{p\omega_2}, 1\right\} (\omega_1 + \omega_2) = \omega_1 + \omega_2 \leq \omega_1 + \frac{\tau\omega_1}{p} \leq CN^{-1},$$

inače je

$$\min\left\{\frac{\tau\omega_1}{p\omega_2}, 1\right\} (\omega_1 + \omega_2) = \frac{\tau\omega_1}{p} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + 1\right) \leq CN^{-1}.$$

Analiza za druge vrednosti indeksa  $i$  se izvodi slično. ■

### 3.4.3 Duran-Šiškinova mreža

U ovom odeljku predstavljena je Duran-Šiškinova mreža, koja je prvi put opisana u [77], a ovde prilagođena dvoparametarskom problemu. Ova mreža je rekursivno zadata u slojevima, a ekvidistantna između njih. Tranzicione tačke mreže Šiškinovog tipa igraju značajnu ulogu u njenoj konstrukciji.

Neka je  $N$  prirodan broj. Za dati parametar  $h$ , gde je  $0 < h < 1$  uvodimo podelu intervala  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  na sledeći način:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 = h\mu_0^{-1}, \\ x_i = x_{i-1} + hx_{i-1} = h\mu_0^{-1}(1+h)^{i-1}, & i = 2, \dots, M_0, \\ x_{M_0+i} = x_{M_0} + 2iN^{-1}(1-h\mu_1^{-1}(1+h)^{M_1-1} - x_{M_0}), & i = 1, \dots, N/2, \\ x_{M_0+N/2+M_1-i+1} = 1 - h\mu_1^{-1}(1+h)^{i-2}, & i = M_1, \dots, 2, \\ x_{M_0+M_1+N/2} = 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Tačke  $x_{M_0}$  i  $x_{M_0+N/2}$  predstavljaju tranzicione tačke. Broj  $M_0$  se bira tako da je to najmanji prirodan broj takav da je zadovoljeno

$$x_{M_0} = h\mu_0^{-1}(1+h)^{M_0-1} \geq \tilde{\lambda}_0,$$

a  $M_1$  tako da je to najmanji prirodan broj za koji važi

$$1 - x_{M_0+N/2} = h\mu_1^{-1}(1+h)^{M_1-1} \geq \tilde{\lambda}_1,$$

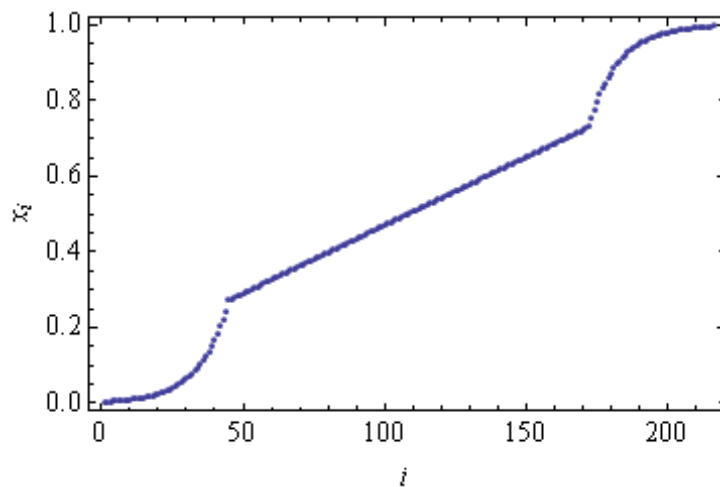
gde su

$$\tilde{\lambda}_i = \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{\tau_i}{\mu_i} \ln N \right\}, \quad i = 0, 1,$$

tranzicione tačke Šiškinovog tipa. Razlika između  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1$ , iz (3.16) i  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $i = 0, 1$ , je minimalna, a suštinski neznatna. Naime, parametri  $\tau$  i  $p$  učestvuju u izrazu za  $\lambda_i$ ,  $i = 0, 1$ , dok se u  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $i = 0, 1$ , koristi samo  $\tau_i$ ,  $i = 0, 1$ , respektivno. Broj tačaka u ekvidistantnom delu mreže je  $N/2$  i on se zadaje unapred, dok se broj tačaka mreže,  $M_0$  i  $M_1$ , u delovima domena u kojima se javljaju slojevi, dobija iz pomenutih uslova.

Pretpostavka u radu je da su zadovoljeni uslovi  $\tilde{\lambda}_i \leq 1/4$ ,  $i = 0, 1$ , što je tipičan slučaj za singularno perturbovane probleme. Perturbacioni parametri su tada dovoljno mali, npr.  $\varepsilon_1 \leq 10^{-3}$  i  $\varepsilon_2 \leq 10^{-2}$ .

Navodimo lemu o koracima Duran-Šiškinove mreže.



Slika 3.5: Duran-Šiškinova mreža za  $h = 0.1$ ,  $N = 256$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ ,  $M_0 = 44$  i  $M_1 = 44$ .

**Lema 3.4.5.** Koraci  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, M_0 + M_1 + N/2$ , mreže (3.24) su

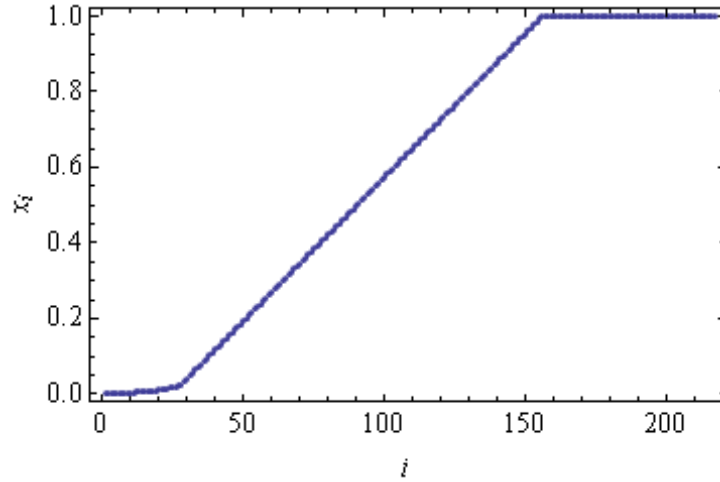
$$\left\{ \begin{array}{ll} h_1 = h\mu_0^{-1}, & \\ h_i = h^2\mu_0^{-1}(1+h)^{i-2}, & i = 2, \dots, M_0, \\ h_i = 2N^{-1}(1 - h\mu_1^{-1}(1+h)^{M_1-1} - h\mu_0^{-1}(1+h)^{M_0-1}), & i = M_0 + 1, \dots, M_0 + N/2, \\ h_{M_0+N/2+M_1-i+1} = h^2\mu_1^{-1}(1+h)^{i-2}, & i = M_1, \dots, 2, \\ h_{M_0+N/2+M_1} = h\mu_1^{-1}, & \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$i$  imaju sledeće osobine:

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_i \leq hx, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], & i = 2, \dots, M_0, \\ h_{M_0+i} \leq CN^{-1}, & i = 1, \dots, N/2, \\ h_i \leq hx, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], & i = M_0 + N/2 + 1, \dots, M_0 + N/2 + M_1 - 1. \end{array} \right.$$

**Dokaz:** Trivijalno se pokazuje (3.25). Dalje, za  $i = 2, \dots, M_0$  važi  $h_i = x_i - x_{i-1} = hx_{i-1} \leq hx$  za  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . Analogno se dobija ista ocena za  $i = M_0 + N/2 + 1, \dots, M_0 + N/2 + M_1 - 1$ . Za  $i = M_0 + 1, \dots, M_0 + N/2$  je

$$h_i = 2N^{-1}(1 - h\mu_0^{-1}(1+h)^{M_0-1} - h\mu_1^{-1}(1+h)^{M_1-1}) \leq 2N^{-1} = CN^{-1},$$



Slika 3.6: Duran-Šiškinova mreža za  $h = 0.1$ ,  $N = 256$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ ,  $M_0 = 28$  i  $M_1 = 61$ .

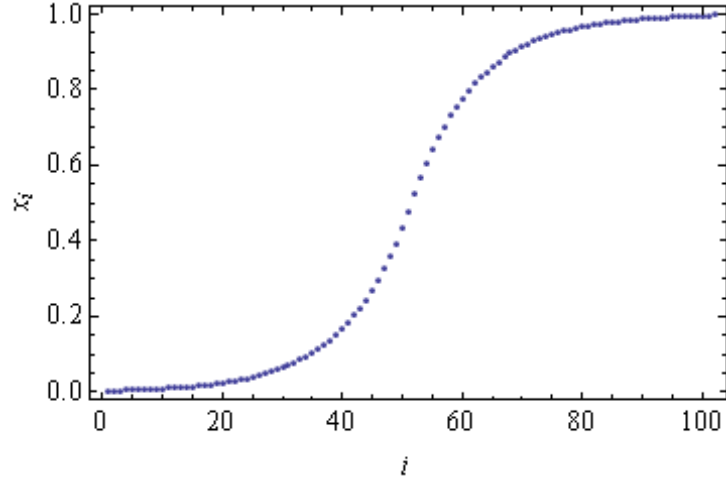
čime je dokaz završen. ■

Neki primeri ove mreže su prikazani na Slikama 3.5 i 3.6. Primetimo da je za  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2^2 \ll 1$ , granični sloj u  $x = 1$  jači od graničnog sloja u  $x = 0$  jer je  $\mu_1 = \mathcal{O}(\varepsilon_2 \varepsilon_1^{-1})$  mnogo veće od  $\mu_0 = \mathcal{O}(\varepsilon_2^{-1})$ . Slika 3.6 ilustruje slučaj kada Duran-Šiškinova mreža generiše veći broj tačaka mreže u desnom slojnom regionu. Druga ekstremna situacija je za  $\varepsilon_2^2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$ , kada se  $\mu_0$  i  $\mu_1$  ponašaju kao  $\varepsilon_1^{-1/2}$  i kada su slojevi slični slojevima koji se pojavljuju u slučaju reakcije-difuzije.

### 3.4.4 Duranova mreža

Mreža Duranovog tipa, koja je prvi put predstavljena u [19], ovde je takođe prilagođena dvoparametarskom problemu. Ova mreža je rekursivno zadata u intervalu  $[0, 1/2]$ , kao i u  $[1/2, 1]$ .

Za dati parametar  $h$ , gde je  $0 < h < 1$  uvodi se podela intervala  $\bar{\Omega} = [0, 1]$



Slika 3.7: Duranova mreža za  $h = 0.1$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ ,  $M_0 = 51$  i  $M_1 = 51$ .

na sledeći način:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_i = x_{i-1} + hx_{i-1} = h\mu_0^{-1}(1+h)^{i-1}, & i = 1, \dots, M_0 - 1, \\ x_{M_0} = 1/2, \\ x_{M_0+M_1-i} = 1 - h\mu_1^{-1}(1+h)^{i-1}, & i = M_1 - 1, \dots, 1, \\ x_{M_0+M_1} = 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

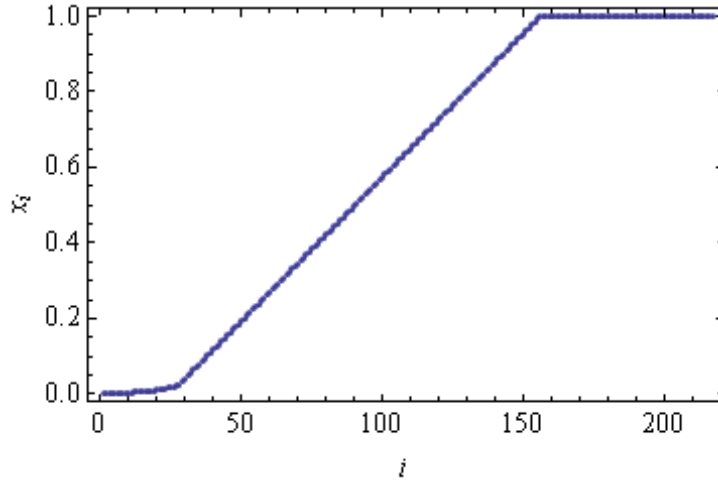
Broj čvorova ove mreže,  $N = M_0 + M_1$ , dobija se iz uslova

$$\begin{aligned} h\mu_0^{-1}(1+h)^{M_0-2} < 1/2, & \quad h\mu_0^{-1}(1+h)^{M_0-1} \geq 1/2, \\ h\mu_1^{-1}(1+h)^{M_1-2} < 1/2, & \quad h\mu_1^{-1}(1+h)^{M_1-1} \geq 1/2. \end{aligned}$$

Koraci ove mreže se jednostavno dobijaju, što je i dato u sledećoj lemi.

**Lema 3.4.6.** *Koraci  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , mreže (3.26) su*

$$\begin{cases} h_1 = h\mu_0^{-1}, \\ h_i = h^2\mu_0^{-1}(1+h)^{i-2}, & i = 2, \dots, M_0 - 1, \\ h_{M_0} = 1/2 - h\mu_0^{-1}(1+h)^{M_0-2}, \\ h_{M_0+1} = 1/2 - h\mu_1^{-1}(1+h)^{M_1-2}, \\ h_{M_0+M_1-i+1} = h^2\mu_1^{-1}(1+h)^{i-2}, & i = M_1 - 1, \dots, 2, \\ h_{M_0+M_1} = h\mu_1^{-1}, \end{cases} \quad (3.27)$$



Slika 3.8: Duranova mreža za  $h = 0.1$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $M_0 = 84$  i  $M_1 = 139$ .

$i$  imaju sledeće osobine:

$$\begin{cases} h_i \leq h, & i = 1, \dots, N, \\ h_i \leq hx, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], & i = 2, \dots, M_0, \\ h_i \leq hx, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], & i = M_0 + 1, \dots, M_0 + M_1 - 1. \end{cases}$$

**Dokaz:** Za  $i = 2, \dots, M_0 - 1$  važi  $h_i = x_i - x_{i-1} = hx_{i-1} \leq hx$  za  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ .  
Za  $i = M_0$  važi sledeće

$$\begin{aligned} h_{M_0} &= \frac{1}{2} - \frac{h}{\mu_0} (1+h)^{M_0-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+h} \cdot \frac{h}{\mu_0} (1+h)^{M_0-1} \\ &\leq \frac{1}{2} - \frac{1}{1+h} \cdot \frac{1}{2} = \frac{h}{2(1+h)}. \end{aligned}$$

Iz  $x \in [x_{M_0-1}, x_{M_0}]$  sledi  $(1+h)x \geq (1+h)x_{M_0-1}$ , što dalje daje

$$\begin{aligned} (1+h)x &\geq (1+h)x_{M_0-1} = (1+h) \frac{h}{\mu_0} (1+h)^{M_0-2} \\ &= \frac{h}{\mu_0} (1+h)^{M_0-1} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Sada je

$$x \geq \frac{1}{2(1+h)},$$

to jest

$$hx \geq \frac{h}{2(1+h)} \geq h_{M_0}.$$

Analogno se dokazuje tvrđenje za  $h_i$ ,  $i = M_0 + 1, \dots, M_0 + M_1 - 1$ . Sada sledi  $h_i \leq hx \leq h$  za  $i = 2, \dots, M_0 + M_1 - 1$ . Kako je

$$h_1 = \frac{h}{\mu_0} < h, \quad h_{M_0+M_1} = \frac{h}{\mu_1} < h,$$

onda sledi da je  $h_i \leq h$  za  $i = 1, \dots, M_0 + M_1$ . ■

Na Slikama 3.7 i 3.8 prikazana je Duranova mreža za fiksirano  $h$  i različite vrednosti perturbacionih parametara.

### 3.5 Ocena greške na Šiškinovoj mreži

U ovom delu navodimo poznate rezultate o oceni greške jednodimenzionalnog problema reakcije-difuzije, konvekcije-difuzije i konvekcije-reakcije-difuzije koji su dobijeni na Šiškinovoj mreži metodom konačnih elemenata.

U slučaju reakcije-difuzije,  $u^N$  kao aproksimacija rešenja dobijena Galerkinovim metodom sa linearnim konačnim elementima, na Šiškinovoj mreži zadovoljava, [68],

$$\|u - u^N\|_E \leq C\varepsilon_1^{1/4} N^{-1} \ln N + CN^{-2},$$

dok je za problem konvekcije-difuzije u [48] pokazano

$$\|u - u^N\|_E \leq CN^{-1} \ln N.$$

Za problem (3.1) „streamline diffusion” metodom, u radu [78], pokazan je sledeći rezultat

$$\|u - u^N\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(N^{-1} \ln N)^2.$$

### 3.6 Ocena greške na Bahvalovljevoj mreži

Želimo da ispitamo konvergenciju standardnog postupka Galerkina (3.6) na mreži (3.20) za problem (3.1)-(3.2) u odnosu na energetska normu datu sa



(3.4). Analizu greške ćemo započeti analizom greške interpolacije. U dokazu polazimo od dekompozicije date u Teoremi 3.3.1 i uzimamo da je

$$u - u^N = \eta + \chi,$$

gde je  $u^N = S^N + E_0^N + E_1^N$ ,  $\eta = \eta_S + \eta_0 + \eta_1$ ,  $\chi = \chi_S + \chi_0 + \chi_1$  i

$$\eta_S = S - S^I, \quad \chi_S = S^I - S^N, \quad (3.28)$$

$$\eta_j = E_j - E_j^\pi + \kappa_j^N, \quad \chi_j = E_j^\pi - E_j^N - \kappa_j^N, \quad j = 0, 1. \quad (3.29)$$

Ovde je  $S^I \in V^N$  standardni Lagranžov interpolant regularne komponente rešenja  $S$ , dok su  $E_j^\pi \in V^N$ ,  $j = 0, 1$ , kvazi-interpolanti slojnih komponenti  $E_j$  uvedeni u Odeljku 2.5. Kako kvazi-interpolant generalno ne zadovoljava granične uslove, uvodimo korekzione funkcije  $\kappa_j^N \in V^N$ ,  $j = 0, 1$ ,

$$\kappa_j^N(x_i) = \begin{cases} (E_j^\pi - E_j)(x_i), & i = 0, N, \\ 0, & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (3.30)$$

### 3.6.1 Greška interpolacije

**Lema 3.6.1.** *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 3.3.1 i neka je  $\tau \geq \max\{5/2, 2\theta^{-1}\}$ . Tada na Bahvalovljevoj mreži (3.20) važi*

$$\|\eta_j\|_{L^2(\Omega)} \leq C\mu_j^{-1/2}N^{-2}, \quad j = 0, 1.$$

**Dokaz:** Počecemo sa ocenom greške interpolacije slojne komponente  $E_0$ . Neka je  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 2, 3, \dots, N/4 - 1$ , neki podinterval mreže i  $\Delta = (x_{i-2}, x_{i+1}) \subset [0, \sigma_0]$  odgovarajući makroelement. Nejednakost trougla, ocena stabilnosti (2.12) i ocena (3.14) za  $E_0$  zajedno daju

$$\begin{aligned} \|E_0 - E_0^\pi\|_{L^2(I_i)}^2 &\leq 2(\|E_0\|_{L^2(I_i)}^2 + \|E_0^\pi\|_{L^2(I_i)}^2) \\ &\leq C(\|E_0\|_{L^2(I_i)}^2 + \|E_0\|_{L^2(\Delta)}^2) \leq C \int_{\Delta} e^{-2p\mu_0 x} dx \\ &= \frac{C}{\mu_0} \left( -e^{-2p\mu_0 x_{i+1}} + e^{-2p\mu_0 x_{i-2}} \right) \leq \frac{C}{\mu_0} e^{-2p\mu_0 x_{i-2}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

S druge strane, ako koristimo (2.13) i (3.22), dobijamo

$$\begin{aligned} \|E_0 - E_0^\pi\|_{L^2(I_i)}^2 &\leq CH^4 \|E_0''\|_{L^2(\Delta)}^2 \leq Ch_{i+1}^4 \mu_0^4 \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} e^{-2p\mu_0 x} dx \\ &\leq Ch_{i+1}^5 \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x_{i-2}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

gde  $H$  predstavlja prečnik od  $\Delta$ , koji je unija dva makroelementa  $\Delta_{i-1} = (x_{i-2}, x_i)$  i  $\Delta_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$ . Kombinujući ocene (3.31) i (3.32) sa Posledicom 3.4.1, imamo

$$\|E_0 - E_0^\pi\|_{L^2(I_i)}^2 \leq C\mu_0^{-1} \left[ \min\{h_{i+1}\mu_0, 1\} e^{-\frac{2}{5}p\mu_0 x_i} \right]^5 \leq C\mu_0^{-1} N^{-5}. \quad (3.33)$$

Poslednja nejednakost sledi iz Leme 3.4.4 za  $\alpha = 5$ .

Kada je  $i = 1$ , to jest  $I_1 = (x_0, x_1)$ , analogni argumenti daju (3.33). Takođe je

$$\begin{aligned} \|\kappa_0^N\|_{L^2(x_0, x_1)} &\leq Ch_1^{1/2} |E_0(x_0) - E_0^\pi(x_0)| \leq Ch_1^{1/2} \|E_0 - E_0^\pi\|_{L^\infty(x_0, x_1)} \\ &\leq Ch_1^{1/2} (h_1 + h_2)^2 \|E_0''\|_{L^\infty(x_0, x_2)} \leq Ch_1^{5/2} \mu_0^2 \\ &\leq C\mu_0^{-1/2} N^{-5/2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

jer je  $h_1 \leq C\mu_0^{-1} N^{-1}$ . Sada je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\frac{N}{4}-1} \|\eta_0\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)}^2 &\leq C \sum_{i=1}^{\frac{N}{4}-1} \|E_0 - E_0^\pi\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)}^2 + C \|\kappa_0^N\|_{L^2(x_0, x_1)}^2 \\ &\leq C\mu_0^{-1} N^{-4}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Za  $i \geq N/4$ , ponovo koristeći nejednakost trougla, (2.12), (3.14) i (3.19) dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=\frac{N}{4}}^N \|E_0 - E_0^\pi\|_{L^2(x_{i-1}, x_i)}^2 &\leq C \sum_{i=\frac{N}{4}}^{N-1} \|E_0\|_{L^2(x_{i-2}, x_{i+1})}^2 + C \|E_0\|_{L^2(x_{N-2}, x_N)}^2 \\ &\leq C \int_{x_{\frac{N}{4}-2}}^{x_N} e^{-2p\mu_0 x} dx \leq C\mu_0^{-1} e^{-2p\mu_0 x_{\frac{N}{4}-2}} \\ &= C\mu_0^{-1} \left(1 - 4(1 - \mu_0^{-1})t_{\frac{N}{4}-2}\right)^{2\tau} \leq C\mu_0^{-1} (\mu_0^{-1} + N^{-1})^{2\tau} \\ &\leq C\mu_0^{-1} N^{-2\theta\tau}. \end{aligned}$$

Kako je  $\kappa_0^N$  eksponencijalno malo na  $(x_{N-1}, x_N)$ , poslednja nejednakost zajedno sa (3.35) i  $-\theta\tau \leq -2$  konačno implicira

$$\|\eta_0\|_{L^2(\Omega)} \leq C\mu_0^{-1/2} N^{-2}.$$

Sličnim argumentima se dobija ocena greške interpolacije  $\eta_1$ . ■

**Lema 3.6.2.** *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 3.3.1 i neka je  $\tau \geq 2\theta^{-1}$ . Tada na Bahvalovljevoj mreži (3.20) važi*

$$|\eta_j|_{H^1(\Omega)} \leq C\mu_j^{1/2}N^{-1}, \quad j = 0, 1.$$

**Dokaz:** Kao u prethodnoj lemi, prvo ćemo razmatrati komponentu rešenja  $E_0$ . Neka je  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ , za  $i = 2, 3, \dots, N/4 - 2$ . Analogno sa (3.31) izvodimo ocenu

$$|E_0 - E_0^\pi|_{H^1(I_i)}^2 \leq C\mu_0 e^{-2p\mu_0 x_{i-2}},$$

gde koristimo (2.15). Ako primenimo (2.14), tada dobijamo

$$|E_0 - E_0^\pi|_{H^1(I_i)}^2 \leq Ch_{i+1}^3 \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x_{i-2}}$$

i

$$|E_0 - E_0^\pi|_{H^1(I_i)}^2 \leq C\mu_0 \left[ \min\{h_{i+1}\mu_0, 1\} e^{-\frac{2}{3}p\mu_0 x_i} \right]^3 \leq C\mu_0 N^{-3},$$

što sledi iz Leme 3.4.4 za  $\alpha = 3$ . Ista ocena se dobija za element  $I_1 = (x_0, x_1)$ . Sumirajući po  $i = 1, 2, \dots, N/4 - 2$  dobijamo

$$\sum_{i=1}^{\frac{N}{4}-2} |E_0 - E_0^\pi|_{H^1(x_{i-1}, x_i)}^2 \leq C\mu_0 N^{-2}.$$

Korekciona funkcija se može ograničiti koristeći inverznu nejednakost i (3.34), te važi

$$|\kappa_0^N|_{H^1(x_0, x_1)} \leq \frac{C}{h_1} \|\kappa_0^N\|_{L^2(x_0, x_1)} \leq Ch_1^{3/2} \mu_0^2 \leq C\mu_0^{1/2} N^{-3/2},$$

kao i

$$\sum_{i=1}^{\frac{N}{4}-2} |\eta_0|_{H^1(x_{i-1}, x_i)}^2 \leq C\mu_0 N^{-2}.$$

Za  $i = N/4 - 1, \dots, 3N/4$ , nejednakost trougla, inverzna nejednakost i ocena stabilnosti (2.12) daju

$$|E_0 - E_0^\pi|_{H^1(I_i)} \leq |E_0|_{H^1(I_i)} + \frac{1}{h_i} \|E_0^\pi\|_{L^2(I_i)} \leq |E_0|_{H^1(I_i)} + \frac{C}{h_i} \|E_0\|_{L^2(\Delta)}.$$

Na osnovu (3.14), Posledice 3.4.1, donjeg ograničenja za  $h_i$ , (3.8) i (3.19) imamo

$$\sum_{i=\frac{N}{4}-1}^{\frac{3N}{4}} |E_0 - E_0^\pi|_{H^1(x_{i-1}, x_i)}^2 \leq C(\mu_0 + \mu_0^{-1}N^2)(\mu_0^{-1} + N^{-1})^{2\tau} \leq C\mu_0 N^{2(1-\theta\tau)}.$$

Za  $i > 3N/4$ , dovoljno je koristiti veličinu komponente  $E_0$  i korekcionu funkciju  $\kappa_0^N$  na  $\Omega_1$  u okolini tranzicione tačke. Najzad je

$$|\eta_0|_{H^1(\Omega)} \leq C\mu_0^{1/2}N^{-1} + C\mu_0^{1/2}N^{1-\theta\tau} \leq C\mu_0^{1/2}N^{-1},$$

jer je  $1 - \theta\tau \leq -1$ .

Ocena za  $|\eta_1|_{H^1(\Omega)}$  se slično izvodi. ■

Sledeće tvrđenje predstavlja ocenu greške interpolacije.

**Teorema 3.6.1.** *Neka važe pretpostavke Teoreme 3.3.1. Na Bahvalovljevoj mreži (3.20) sa  $\tau \geq \max\{5/2, 2\theta^{-1}\}$ , funkcije  $\eta_S = S - S^I$  i  $\eta_j = E_j - E_j^\pi + \kappa_j^N$  mogu se oceniti sa*

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_E &\leq C\varepsilon_1^{1/2}N^{-1} + CN^{-2}, \\ \|\eta_j\|_E &\leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}N^{-1}, \quad j = 0, 1, \end{aligned}$$

gde je  $S^I \in V^N$  standardni interpolant od  $S$ ,  $E_j^\pi$  su kvazi-interpolanti od  $E_j$ ,  $j = 0, 1$  i  $\kappa_j^N$ ,  $j = 0, 1$  su funkcije date sa (3.30).

**Dokaz:** Ograničenja za  $\|\eta_j\|_E$  su direktna posledica prethodne dve leme i (3.8), što daje

$$\|\eta_j\|_E \leq C(\varepsilon_1\mu_1)^{1/2}N^{-1} + C\mu_0^{-1/2}N^{-2}, \quad j = 0, 1.$$

Ocena u energetskej normi za  $\eta_S = S - S^I$  je već poznata, [48], i sledi iz

$$\|\eta_S\|_{L^2(\Omega)} \leq CN^{-2} \quad \text{i} \quad |\eta_S|_{H^1(\Omega)} \leq CN^{-1},$$

čime je dokaz ove teoreme završen. ■

### 3.6.2 Konvergencija u energetskej normi

**Teorema 3.6.2.** *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 3.3.1 i Teoreme 3.6.1. Greška diskretizacije za problem (3.1)-(3.2) na Bahvalovljevoj mreži (3.20) može da se oceni sa*

$$\|\chi\|_E \leq C\varepsilon_2^{1/2}N^{-1} + CN^{-2},$$

gde je  $\chi$  dato sa (3.28) i (3.29).

**Dokaz:** Prema Lemi 3.1.1 bilinearna forma  $a(\cdot, \cdot)$  je koercitivna u odnosu na energetske normu. Neka je  $\alpha = \min\{1, \gamma\}$ . Koercitivnost i Galerkinova ortogonalnost impliciraju

$$\alpha\|\chi\|_E^2 \leq a(\chi, \chi) = -a(\eta, \chi) \leq |a(\eta, \chi)| = \varepsilon_1(\eta', \chi') + \varepsilon_2(b\eta', \chi) + (c\eta, \chi). \quad (3.36)$$

Za prvi sabirak važi

$$\varepsilon_1(\eta', \chi') = \varepsilon_1 \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta' \chi' dx = \varepsilon_1 \sum_{k=1}^N \left( \eta \chi' \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \eta \chi'' dx \right) = 0, \quad (3.37)$$

jer je  $\eta(x_{k-1}) = \eta(x_k) = 0$  i  $\chi'' = 0$ .

Poslednji član u (3.36) može se direktno oceniti primenom Koši-Švarcove nejednakosti, Leme 3.6.1 i ograničenja u  $L^2$  normi za  $\eta_S$  iz dokaza Teoreme 3.6.1. Zato je

$$\begin{aligned} |(c\eta, \chi)| &\leq C\|\eta\|_{L^2(\Omega)}\|\chi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(N^{-2} + \mu_0^{-1/2}N^{-2})\|\chi\|_E \leq CN^{-2}\|\chi\|_E. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Preostali član iz (3.36) analiziramo uvodeći razlaganje  $\eta = (\eta_S + \eta_0) + \eta_1$ . Prvo imamo

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b(\eta'_S + \eta'_0), \chi)| &\leq C\varepsilon_2(|\eta_S|_{H^1(\Omega)} + |\eta_0|_{H^1(\Omega)})\|\chi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\varepsilon_2(N^{-1} + \mu_0^{1/2}N^{-1})\|\chi\|_E \leq C\varepsilon_2^{1/2}N^{-1}\|\chi\|_E. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ovde smo koristili Koši-Švarcovu nejednakost, Lemu 3.6.1 i ograničenje u  $H^1$  seminormi za  $\eta_S$  iz dokaza Teoreme 3.6.1. Ovi argumenti nisu dovoljni

za ocenu izraza sa  $\eta_1$ . Primenimo li parcijalnu integraciju i činjenicu da  $\eta_1$  zadovoljava granične uslove, dobijamo

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\eta'_1, \chi)| &= \varepsilon_2 |(\eta_1, b'\chi + b\chi')| \\ &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_1\|_{L^2(\Omega)} (\|\chi\|_{L^2(\Omega)} + |\chi|_{H^1(\Omega)}) \\ &\leq C\varepsilon_2 \mu_1^{-1/2} N^{-2} (1 + \varepsilon_1^{-1/2}) \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Kako je  $\varepsilon_2(\varepsilon_1\mu_1)^{-1/2} \leq C\varepsilon_2^{1/2}$  iz (3.11), imamo

$$|\varepsilon_2(b\eta'_1, \chi)| \leq C\varepsilon_2^{1/2} N^{-2} \|\chi\|_E. \quad (3.40)$$

Zamenimo (3.37)-(3.40) u (3.36) i deleći dobijenu nejednakost sa  $\|\chi\|_E$ , dobijamo ocenu iz tvrđenja.  $\blacksquare$

Kao posledica prethodne dve teoreme dobija se sledeća teorema, koja predstavlja glavni rezultat ovog odeljka.

**Teorema 3.6.3.** *Neka je  $u^N$  Galerkinova aproksimacija rešenja u problema (3.1)-(3.2) na Bahvalovljevoj mreži (3.20). Ako su pretpostavke Teoreme 3.6.2 zadovoljene, tada je*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} N^{-1} + CN^{-2}. \quad (3.41)$$

**Napomena 3.6.1.** *Teorema 3.6.3 je generalizacija rezultata*

$$\|u - u^N\|_E \leq CN^{-1}$$

*koji je dobijen na Bahvalovljevoj mreži u radu [67], pošto za  $\varepsilon_2 = 1$  koristimo uniformnu mrežu na  $[0, 1 - \sigma_1]$  i  $\mu_1^{-1} \leq C\varepsilon_1 \leq CN^{-1}$ .  $\square$*

**Napomena 3.6.2.** *Ocena greške (3.41) i u slučaju reakcije-difuzije, tj. rezultata iz [68], ostaje validna, iako se Teorema 3.6.3 ne može primeniti u tom slučaju. Obratimo pažnju i na rezultat iz [95] za dvodimenzionalni dvoparametarski singularno perturbovani problem dobijen Galerkinovim metodom konačnih elemenata na Šiškinovoj mreži, gde je ocena greške u energetskej normi slična (3.41), to jest*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} N^{-1} \ln N + CN^{-2},$$

*s tim da logaritamski faktor potiče od izbora tranzicione tačke.  $\square$*

### 3.7 Ocena greške na Duran-Šiškinovoj mreži

U ovom odeljku, kao i u prethodnom, želimo da ispitamo konvergenciju standardnog postupka Galerkin na mreži (3.24) za problem (3.1)-(3.2) u odnosu na energetska normu datu sa (3.4). U dokazu polazimo od dekompozicije date u Teoremi 3.3.1 i uzimamo da je

$$u - u^N = \eta + \chi, \quad (3.42)$$

gde je  $u^N = S^N + E_0^N + E_1^N$ ,  $\eta = \eta_S + \eta_0 + \eta_1$ ,  $\chi = \chi_S + \chi_0 + \chi_1$  i

$$\eta_S = S - S^I, \quad \chi_S = S^I - S^N, \quad (3.43)$$

$$\eta_j = E_j - E_j^I, \quad \chi_j = E_j^I - E_j^N, \quad j = 0, 1. \quad (3.44)$$

Ovde je  $S^I \in V^N$  Lagranžov interpolant regularne komponente rešenja  $S$ , dok su  $E_j^I \in V^N$ ,  $j = 0, 1$ , Lagranžovi interpolanti slojnih komponenti  $E_j$ ,  $j = 0, 1$ .

#### 3.7.1 Greška interpolacije

U dokazima će biti korišćena standardna greška interpolacije iz Leme 2.4.1 i Leme 2.4.2. Za intervale na kojima važi  $h_i \leq hx$  za  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ , korišćićemo ocene

$$\|g - g^I\|_{L^2(I_i)} \leq Ch^2 \|x^2 g''\|_{L^2(I_i)}, \quad \|(g - g^I)'\|_{L^2(I_i)} \leq Ch \|xg''\|_{L^2(I_i)}. \quad (3.45)$$

Posebno ćemo dati ocenu za grešku interpolacije regularne komponente, a posebno slojnih komponenti rešenja konturnog problema.

Neka je  $\bar{\Omega}_1 = [0, x_{M_0}]$ ,  $\bar{\Omega}_2 = [x_{M_0}, x_{M_0+N/2}]$  i  $\bar{\Omega}_3 = [x_{M_0+N/2}, 1]$ . U sledećoj lemi predstavljamo ocenu greške interpolacije u  $L^2$  normi.

**Lema 3.7.1.** *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 3.3.1. Tada na Duran-Šiškinovoj mreži (3.24), uz pretpostavku  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$ , važi*

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 + CN^{-2}, \\ \|\eta_j\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2 \mu_j^{-1/2} + CN^{-2}, \quad j = 0, 1, \end{aligned}$$

gde je  $\eta_S$  dato sa (3.43), a  $\eta_j$  sa (3.44).

**Dokaz:** Neka je  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, M_0 + M_1 + N/2$ . Za ocenu greške interpolacije slojne komponente  $E_0$  na osnovu Leme 3.4.5 važi da je

$$\begin{aligned} \|E_0 - E_0^I\|_{L^2(I_1)}^2 &\leq Ch_1^4 \|E_0''\|_{L^2(I_1)}^2 \leq Ch_1^4 \int_{x_0}^{x_1} \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x} dx \\ &\leq C \frac{h^4}{\mu_0^4} \mu_0^4 \frac{e^{-2p\mu_0 x}}{-2p\mu_0} \Big|_{x_0}^{x_1} \leq C \frac{h^4}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Za  $I_i \subset \Omega_1 \setminus I_1$  je  $\|E_0 - E_0^I\|_{L^2(I_i)}^2 \leq h^4 \|x^2 E_0''\|_{L^2(I_i)}^2$ , a kako se za  $s = \mu_0 x$  parcijalnom integracijom dobija

$$\int_{\Omega_1} (x^2 E_0'')^2 dx \leq C \int_0^{x_{M_0}} x^4 \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x} dx \leq \frac{C}{\mu_0} \int_0^\infty s^4 e^{-2ps} ds \leq \frac{C}{\mu_0},$$

onda je

$$\int_{x_1}^{x_{M_0}} (x^2 E_0'')^2 dx \leq \int_0^{x_{M_0}} (x^2 E_0'')^2 dx \leq \frac{C}{\mu_0}.$$

Zato je

$$\|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega_1 \setminus I_1)}^2 \leq Ch^4 \mu_0^{-1}. \quad (3.47)$$

Na osnovu (3.46) i (3.47) je

$$\|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^2 \mu_0^{-1/2}. \quad (3.48)$$

Na ekvidistantnom delu, to jest na  $\Omega_2$  koristi se veza između  $L^2$  norme i norme beskonačno, kao i Lema 3.4.5. Naime, za  $I_i \subset \Omega_2$  je

$$\begin{aligned} \|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega_2)}^2 &= \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} \|E_0 - E_0^I\|_{L^2(I_i)}^2 \\ &\leq \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} h_i \|E_0 - E_0^I\|_{L^\infty(I_i)}^2 \leq CN^{-1} \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} \|E_0 - E_0^I\|_{L^\infty(I_i)}^2 \\ &\leq CN^{-1} \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} \|E_0\|_{L^\infty(I_i)}^2 \leq C \|E_0\|_{L^\infty(\Omega_2)}^2 \\ &\leq Ce^{-2p\mu_0 x_{M_0}} \leq Ce^{-2p\mu_0 \bar{\lambda}_0} = CN^{-2p\tau_0}. \end{aligned} \quad (3.49)$$



Na  $\Omega_3$  važi

$$\int_{x_{M_0+N/2}}^1 (x^2 E_0'')^2 dx \leq C \int_{x_{M_0+N/2}}^1 x^4 \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x} dx = \frac{C}{\mu_0} \int_{x^*}^{\infty} s^4 e^{-2ps} ds,$$

gde je  $x^* = \mu_0 x_{M_0+N/2}$ . Parcijalnom integracijom se dobija

$$\begin{aligned} \int_{x_{M_0+N/2}}^1 (x^2 E_0'')^2 dx &\leq \frac{C}{\mu_0} \left[ \frac{(x^*)^4 e^{-2px^*}}{2p} + \frac{(x^*)^3 e^{-2px^*}}{p^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3(x^*)^2 e^{-2px^*}}{2p^3} + \frac{3x^* e^{-2px^*}}{2p^4} + \frac{3e^{-2px^*}}{4p^5} \right] \leq \frac{C}{\mu_0}, \end{aligned}$$

jer je  $0 < x^k e^{-2px} < 1$  za  $x \in [0.5, \infty)$  i  $0 \leq k \leq 4$ . Tada je

$$\int_{x_{M_0+N/2}}^{x_{M_0+M_1+N/2-1}} (x^2 E_0'')^2 dx \leq \int_{x_{M_0+N/2}}^1 (x^2 E_0'')^2 dx \leq \frac{C}{\mu_0},$$

odakle proističe sledeća ocena

$$\|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega_3 \setminus I_{M_0+M_1+N/2})}^2 \leq Ch^4 \int_{x_{M_0+N/2}}^{x_{M_0+M_1+N/2-1}} (x^2 E_0'')^2 dx \leq C \frac{h^4}{\mu_0}. \quad (3.50)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \|E_0 - E_0^I\|_{L^2(I_{M_0+M_1+N/2})}^2 &\leq Ch_{M_0+M_1+N/2}^4 \|E_0''\|_{L^2(I_{M_0+M_1+N/2})}^2 \\ &\leq Ch_{M_0+M_1+N/2}^4 \int_{x_{M_0+M_1+N/2-1}}^{x_{M_0+M_1+N/2}} \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x} dx \\ &\leq C \frac{h^4 \mu_0^3}{\mu_1^4} e^{-2p\mu_0(1-h/\mu_1)} \leq C \frac{h^4}{\mu_0}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

jer je  $\mu_1 > \mu_0$  i funkcija  $e^{-2p\mu_0(1-h/\mu_1)}$  je ograničena na  $I_{M_0+M_1+N/2}$ , onda je na osnovu (3.50) i (3.51)

$$\|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega_3)}^2 \leq Ch^4 \mu_0^{-1}. \quad (3.52)$$

Sada se iz (3.48), (3.49) i (3.52), za  $p\tau_0 \geq 2$  dobija

$$\|\eta_0\|_{L^2(\Omega)} = \|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\mu_0^{-1/2} + CN^{-2}.$$

Za slojnu komponentu  $E_1$  važi

$$\|E_1 - E_1^I\|_{L^2(I_1)}^2 \leq Ch_1^4 \|E_1''\|_{L^2(I_1)}^2 \leq Ch^4 \mu_0^{-4} \mu_1^3 e^{-2p\mu_1(1-h/\mu_0)} \leq Ch^4 \mu_1^{-1},$$

jer je  $1 - h/\mu_0 \geq h/\mu_0$ . Ocene na drugim delovima domena se izvode slično kao za  $E_0$ , uz korišćenje (3.15).

Za regularni deo, na osnovu (3.13), važi

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|S - S^I\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{M_0+M_1+N/2} \|S - S^I\|_{L^2(I_i)}^2 \\ &\leq C \sum_{i=1}^{M_0} h_i^4 \|S''\|_{L^2(I_i)}^2 + C \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} h_i^4 \|S''\|_{L^2(I_i)}^2 + C \sum_{i=M_0+N/2+1}^{M_0+N/2+M_1} h_i^4 \|S''\|_{L^2(I_i)}^2 \\ &\leq Ch^4 + CN^{-4}, \end{aligned}$$

jer je  $h_i \leq h$  na  $\Omega_1 \cup \Omega_3$  i  $h_i \leq CN^{-1}$  na  $\Omega_2$ , te sledi tvrđenje leme.  $\blacksquare$

Naredna lema govori o oceni greške interpolacije u  $H^1$  seminormi.

**Lema 3.7.2.** *Neka su zadovoljene pretpostavke Teoreme 3.3.1. Tada na Duran-Šiškinovoj mreži (3.24), uz pretpostavku  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$ , važi*

$$\begin{aligned} |\eta_S|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch + CN^{-1}, \\ |\eta_j|_{H^1(\Omega)} &\leq C(h + N^{-2})\mu_j^{1/2} + CN^{-1}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Koristeći Lemu 2.4.1 dobija se

$$\begin{aligned} |E_0 - E_0^I|_{H^1(I_1)}^2 &\leq Ch_1^2 \|E_0''\|_{L^2(I_1)}^2 \leq Ch_1^2 \int_{x_0}^{x_1} \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x} dx \\ &= \frac{Ch^2}{\mu_0^2} \mu_0^4 \frac{e^{-2p\mu_0 x}}{-2p\mu_0} \Big|_{x_0}^{x_1} \leq Ch^2 \mu_0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Za  $i = 2, \dots, M_0$  važi  $|E_0 - E_0^I|_{H^1(I_i)}^2 \leq Ch_i^2 \|E_0''\|_{L^2(I_i)}^2 \leq Ch^2 \|xE_0''\|_{L^2(I_i)}^2$ .

Kako je  $\|xE_0''\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^1 x^2 \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x} dx \leq C\mu_0$ , onda je

$$|E_0 - E_0^I|_{H^1(\Omega_1 \setminus I_1)}^2 \leq C\mu_0 h^2, \quad (3.54)$$

pa je na osnovu (3.53) i (3.54)

$$|E_0 - E_0^I|_{H^1(\Omega_1)}^2 \leq C\mu_0 h^2. \quad (3.55)$$

Na  $\Omega_2$ , koristeći nejednakost trougla i inverznu nejednakost dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} |E_0 - E_0^I|_{H^1(I_i)} &\leq |E_0|_{H^1(I_i)} + |E_0^I|_{H^1(I_i)} \\ &\leq |E_0|_{H^1(I_i)} + \frac{1}{h_i} \|E_0^I\|_{L^2(I_i)} \leq \|E_0'\|_{L^2(I_i)} + CN \|E_0^I\|_{L^2(I_i)}, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} |E_0 - E_0^I|_{H^1(\Omega_2)}^2 &= \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} |E_0 - E_0^I|_{H^1(I_i)}^2 \\ &\leq C \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} \left( \|E_0'\|_{L^2(I_i)}^2 + N^2 \|E_0^I\|_{L^2(I_i)}^2 \right) \\ &\leq C \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_0^2 e^{-2p\mu_0 x} dx + N^2 h_i \|E_0^I\|_{L^\infty(I_i)}^2 \right) \\ &\leq C \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} \left( \mu_0 \frac{e^{-2p\mu_0 x}}{-2p} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + N^2 h_i \|E_0\|_{L^\infty(I_i)}^2 \right) \\ &\leq C \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} (\mu_0 e^{-2p\mu_0 x_{i-1}} - \mu_0 e^{-2p\mu_0 x_i}) + C N^2 \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} h_i \|E_0\|_{L^\infty(I_i)}^2 \\ &\leq C(\mu_0 e^{-2p\mu_0 x_{M_0}} - \mu_0 e^{-2p\mu_0 x_{M_0+N/2}}) + C N^2 \|E_0\|_{L^\infty(\Omega_2)}^2 \\ &\leq C\mu_0 e^{-2p\mu_0 x_{M_0}} + C N^2 e^{-2p\mu_0 x_{M_0}} = C e^{-2p\mu_0 x_{M_0}} (\mu_0 + N^2) \\ &\leq C e^{-2p\mu_0 \tilde{\lambda}_0} (\mu_0 + N^2) = C N^{-2p\tau_0} (\mu_0 + N^2). \end{aligned}$$

Znači,

$$|E_0 - E_0^I|_{H^1(\Omega_2)} \leq C(N^{-p\tau_0} \sqrt{\mu_0} + N^{-p\tau_0+1}). \quad (3.56)$$

Na  $\Omega_3$  je

$$\int_{x_{M_0+1}}^{x_{M_0+M_1+N/2-1}} x^2 (E_0'')^2 dx \leq \int_0^1 x^2 (E_0'')^2 dx \leq C\mu_0,$$

pa je onda

$$|E_0 - E_0^I|_{H^1(\Omega_3 \setminus I_{M_0+M_1+N/2})} \leq C\mu_0 h^2. \quad (3.57)$$

Kako je i

$$\begin{aligned} |E_0 - E_0^I|_{H^1(I_{M_0+M_1+N/2})} &\leq Ch_{M_0+M_1+N/2}^2 \|E_0''\|_{L^2(I_{M_0+M_1+N/2})}^2 \\ &\leq Ch_{M_0+M_1+N/2}^2 \int_{x_{M_0+M_1+N/2-1}}^{x_{M_0+M_1+N/2}} \mu_0^4 e^{-2p\mu_0 x} dx \\ &\leq C \frac{h^2}{\mu_1^2} \mu_0^4 \frac{e^{-2p\mu_0 x}}{-2p\mu_0} \Big|_{1-h/\mu_1}^1 \leq Ch^2 \mu_0, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onda je na osnovu (3.57) i (3.58)

$$|E_0 - E_0^I|_{H^1(\Omega_3)} \leq Ch^2 \mu_0. \quad (3.59)$$

Sada iz (3.55), (3.56) i (3.59), za  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$ , sledi da je

$$|E_0 - E_0^I|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\sqrt{\mu_0} + CN^{-2}\sqrt{\mu_0} + CN^{-1}.$$

Kako je

$$|E_1 - E_1^I|_{H^1(I_1)} \leq Ch_1^2 \|E_1''\|_{L^2(I_1)}^2 \leq Ch^2 \mu_0^{-2} \mu_1^3 e^{-2p\mu_1(1-h/\mu_0)} \leq Ch^2 \mu_1,$$

onda se analognim razmatranjem kao i za  $E_0$  dobija

$$|E_1 - E_1^I|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\sqrt{\mu_1} + CN^{-2}\sqrt{\mu_1} + CN^{-1}.$$

Slično prethodnoj lemi, za regularni deo je

$$\begin{aligned} |S - S^I|_{H^1(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^{M_0+M_1+N/2} |S - S^I|_{H^1(I_i)}^2 \\ &\leq C \sum_{i=1}^{M_0} h_i^2 \|S''\|_{L^2(I_i)}^2 + C \sum_{i=M_0+1}^{M_0+N/2} h_i^2 \|S''\|_{L^2(I_i)}^2 + C \sum_{i=M_0+N/2+1}^{M_0+N/2+M_1} h_i^2 \|S''\|_{L^2(I_i)}^2 \\ &\leq Ch^2 + CN^{-2}, \end{aligned}$$

pa važi tvrđenje leme. ■

Kao posledica Leme 3.7.1 i Leme 3.7.2 sledi tvrđenje o oceni greške interpolacije u energetskej normi.

**Teorema 3.7.1.** *Za problem (3.1)-(3.2), rešavan na Duran-Šiškinovoj mreži (3.24) Galerkinovim metodom konačnih elemenata, pod pretpostavkama Teoreme 3.3.1 i uz uslov  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$ , važe sledeće ocene u energetskej normi*

$$\begin{aligned}\|\eta_S\|_E &\leq C\varepsilon_1^{1/2}(h + N^{-1}) + C(h^2 + N^{-2}), \\ \|\eta_j\|_E &\leq C(\varepsilon_1\mu_1)^{1/2}(h + N^{-2}) + Ch^2\mu_j^{-1/2} + C(\varepsilon_1^{1/2} + N^{-1})N^{-1}, \quad j = 0, 1.\end{aligned}$$

### 3.7.2 Konvergencija u energetskej normi

U ovom delu ocenjujemo grešku diskretizacije sa ciljem da izvedemo ocenu greške postupka u energetskej normi.

**Teorema 3.7.2.** *Greška diskretizacije problema (3.1)-(3.2), na Duran-Šiškinovoj mreži (3.24), pod pretpostavkama Teoreme 3.3.1 i uz uslove da je  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$ , može da se oceni sa*

$$\|\chi\|_E \leq C(h^2 + N^{-2} + \varepsilon_2^{1/2}h + \varepsilon_2N^{-1}),$$

gde je  $\chi_S$  dato sa (3.43), a  $\chi_j$  sa (3.44).

**Dokaz:** Za ocenu  $\chi$  koristi se koercitivnost bilinearne forme  $a$  u odnosu na energetske normu koja je pokazana u Lemi 3.1.1.

Neka je  $\alpha = \min\{1, \gamma\}$ . Tada je

$$\alpha\|\chi\|_E^2 \leq a(\chi, \chi) = -a(\eta, \chi) \leq |a(\eta, \chi)| = \varepsilon_1(\eta', \chi') + \varepsilon_2(b\eta', \chi) + (c\eta, \chi).$$

Za prvi sabirak važi (3.37), a za treći sabirak na osnovu Leme 3.7.1 važi

$$|(c\eta, \chi)| \leq C\|\eta\|_{L^2(\Omega)}\|\chi\|_{L^2(\Omega)} \leq C(h^2 + N^{-2})\|\chi\|_E. \quad (3.60)$$

Za konvektivni član  $\varepsilon_2|(b(\eta'_S + \eta'_0), \chi)|$ , na osnovu (3.10) i Leme 3.7.2 imamo da je

$$\begin{aligned}\varepsilon_2|(b(\eta'_S + \eta'_0), \chi)| &\leq C\varepsilon_2(|\eta_S|_{H^1(\Omega)} + |\eta_0|_{H^1(\Omega)})\|\chi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C\left(\varepsilon_2N^{-1} + \varepsilon_2^{1/2}(h + N^{-2})\right)\|\chi\|_E,\end{aligned}$$

dok za  $\varepsilon_2(b\eta'_1, \chi)$  prvo primenimo parcijalnu integraciju. Kako se  $\varepsilon_2(b'\eta_1, \chi)$  može oceniti sa (3.60), onda ćemo u nastavku odvojeno analizirati  $\varepsilon_2(b\eta_1, \chi')$

na  $\Omega_2$  i  $\Omega \setminus \Omega_2$ . Na grubom delu mreže, inverzna nejednakost i  $\|\eta_1\|_{L^2(\Omega_2)} \leq CN^{-2}$  daju

$$\varepsilon_2 |(b\eta_1, \chi')_{\Omega_2}| \leq C\varepsilon_2 \|\eta_1\|_{L^2(\Omega_2)} N \|\chi\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C\varepsilon_2 N^{-1} \|\chi\|_E.$$

Na ostatku domena koristimo  $\|\eta_1\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_2)} \leq Ch^2 \mu_1^{-1/2}$  i (3.11) u cilju dobitanja

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 |(b\eta_1, \chi')_{\Omega \setminus \Omega_2}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_1\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_2)} |\chi|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_2)} \\ &\leq C\varepsilon_2 h^2 \mu_1^{-1/2} \varepsilon_1^{-1/2} \|\chi\|_E \leq C\varepsilon_2^{1/2} h^2 \|\chi\|_E, \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. ■

Glavni rezultat analize greške Galerkinovog metoda na Duran-Šiškinovoj mreži sledi iz Teoreme 3.7.1, Teoreme 3.7.2 i ocena (3.10) i (3.11).

**Teorema 3.7.3.** *Neka je  $u^N$  Galerkinova aproksimacija rešenja u problema (3.1)-(3.2) na Duran-Šiškinovoj mreži (3.24). Ako su zadovoljene pretpostavke Teoreme 3.3.1 i uslovi  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$  tada važi*

$$\|u - u^N\|_E \leq C \left( h^2 + N^{-2} + (\varepsilon_1^{1/2} + \varepsilon_2)^{1/2} h + (\varepsilon_1^{1/2} + \varepsilon_2)^{1/2} N^{-1} \right).$$

**Napomena 3.7.1.** *Ako se u prethodnoj teoremi uvede pretpostavka  $h \leq CN^{-1}$ , onda se ocena greške iz Teoreme 3.7.3 svodi na*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_1^{1/2} + \varepsilon_2)^{1/2} N^{-1} + CN^{-2}.$$

*Analogna ocena greške je dobijena u Teoremi 3.6.3 na Bahvalovljevoj mreži. Ova ocena je slična rezultatu za Galerkinov metod konačnih elemenata na Šiškinovoj mreži iz [95], gde se (tipično za Šiškinovu mrežu) pojavljuje faktor  $N^{-1} \ln N$ . Iako ocena greške nema logaritamski faktor, ipak treba napomenuti da parametar  $h$  Duran-Šiškinove mreže slabo logaritamski zavisi od ukupnog broja čvorova mreže. □*

### 3.8 Ocena greške na Duranovoj mreži

Ovaj odeljak je sličan prethodnom jer analiziramo grešku interpolacije i grešku diskretizacije, samo na Duranovoj mreži. Takođe, razliku između tačnog i približnog rešenja predstavljamo sa (3.42). U dokazima ćemo koristiti tvrđenje Leme 2.4.1 o oceni greške Lagranžove interpolacije.

### 3.8.1 Greška interpolacije

**Lema 3.8.1.** *Ako su zadovoljene pretpostavke Teoreme 3.3.1, tada na Duranovoj mreži (3.26) važi*

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2, & |\eta_S|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch, \\ \|\eta_j\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch^2\mu_j^{-1/2}, & |\eta_j|_{H^1(\Omega)} &\leq Ch\mu_j^{1/2}, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Neka je  $N = M_0 + M_1$ . Za  $i = 2, \dots, N-1$  koristimo ocenu (3.45) i činjenicu  $\|x^2 E_0''\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\mu_0^{-1}$  i dobijamo

$$\begin{aligned} \|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega \setminus (I_1 \cup I_N))}^2 &= \sum_{i=2}^{N-1} \|E_0 - E_0^I\|_{L^2(I_i)}^2 \leq C \sum_{i=2}^{N-1} h^4 \|x^2 E_0''\|_{L^2(I_i)}^2 \\ &\leq Ch^4 \|x^2 E_0''\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq Ch^4 \mu_0^{-1}. \end{aligned}$$

Na prvom i poslednjem intervalu mreže grešku ocenjujemo kao u (3.46). Stoga je

$$\|E_0 - E_0^I\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \mu_0^{-1/2}.$$

Preostala analiza u  $L^2$ -normi i  $H^1$ -seminormi može da se izvede kao u Lemi 3.7.1 i Lemi 3.7.2. ■

Stoga se greška interpolacije na Duranovoj mreži (3.26) može oceniti sa

$$\|\eta_S\|_E \leq C\varepsilon_1^{1/2}h + Ch^2, \quad \|\eta_j\|_E \leq C(\varepsilon_1\mu_j)^{1/2}h + Ch^2\mu_j^{-1/2}, \quad j = 0, 1.$$

### 3.8.2 Konvergencija u energetske norme

Za dokaz greške diskretizacije na Duranovoj mreži (3.26) koristimo argumente kao u Teoremi 3.7.2 i dobijamo

$$\|\chi\|_E \leq C\varepsilon_1^{1/2}h + Ch^2.$$

Na kraju, u narednoj teoremi zaključujemo kako izgleda ocena greške Galerkinovog metoda konačnih elemenata na Duranovoj mreži za dvoparametarski singularno perturbovani problem.

**Teorema 3.8.1.** *Neka je  $u^N$  Galerkinova aproksimacija rešenja u problema (3.1)-(3.2) na Duranovoj mreži (3.26). Ako su pretpostavke Teoreme 3.3.1 zadovoljene, tada je*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_1^{1/2} + \varepsilon_2)^{1/2}h + Ch^2.$$

**Napomena 3.8.1.** *Pretpostavimo li da je  $h \leq CN^{-1}$ , onda je ocena Teoreme 3.8.1 analogna kao i u Teoremi 3.6.3.*  $\square$

**Napomena 3.8.2.** *Generalizacija postupka konačnih elemenata polinomima višeg stepena i na Duran-Šiškinovoj (videti [77], gde umesto parametra mreže  $h$  figuriše  $N^{-1}$ ) i na Duranovoj mreži trebala bi da je moguća. Zbog logaritamske zavisnosti parametra  $h$  od ukupnog broja čvorova mreže, prilikom primene Duran-Šiškinove mreže pogoršava se red konvergencije postupka kako stepen polinoma raste.*  $\square$

### 3.9 Numerički eksperimenti

U ovom odeljku eksperimentalno se proveravaju tvrđenja Teorema 3.6.3, 3.7.3 i 3.8.1. Sva računanja su izvedena u programu Mathematica 8. U svim primerima uzimali smo  $p = 1/2$ , kako bi uslov za  $\varepsilon_2$  iz Teoreme 3.3.1 bio zadovoljen. Takođe je ispunjen i uslov (3.12) i on u našim test problemima ne utiče na izbor perturbacionih parametara. Svi integrali su računati korišćenjem Gaus<sup>3</sup>-Ležandrovih<sup>4</sup> kvadraturnih formula reda 4.

Prvo ćemo posmatrati problem iz [78]

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 u'' + \varepsilon_2 u' + u &= \cos \pi x, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) &= 0, \end{aligned} \tag{3.61}$$

koji je rešavan primenom diferencne šeme iz Odeljka 3.2. Tačno rešenje  $u$  problema (3.61) je dato sa

$$u(x) = a \cos \pi x + b \sin \pi x + Ae^{\mu_0 x} + Be^{-\mu_1 (1-x)},$$

gde je

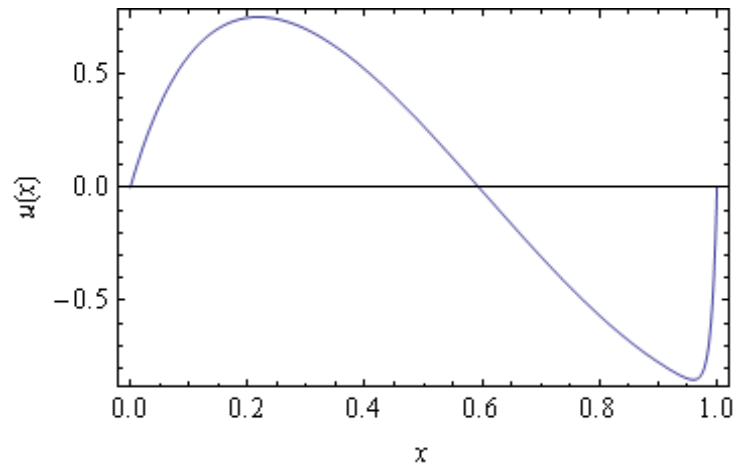
$$\begin{aligned} a &= \frac{\varepsilon_1 \pi^2 + 1}{\varepsilon_2^2 \pi^2 + (\varepsilon_1 \pi^2 + 1)^2}, \quad b = \frac{\varepsilon_2 \pi}{\varepsilon_2^2 \pi^2 + (\varepsilon_1 \pi^2 + 1)^2}, \\ A &= -a \frac{1 + e^{-\mu_1}}{1 - e^{\mu_0 - \mu_1}}, \quad B = a \frac{1 + e^{\mu_0}}{1 - e^{\mu_0 - \mu_1}}, \quad \mu_{0,1} = \frac{\varepsilon_2 \mp \sqrt{\varepsilon_2^2 + 4\varepsilon_1}}{2\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

Za različite vrednosti perturbacionih parametara, grafici tačnog rešenja ovog problema su prikazani na Slikama 3.9-3.12.

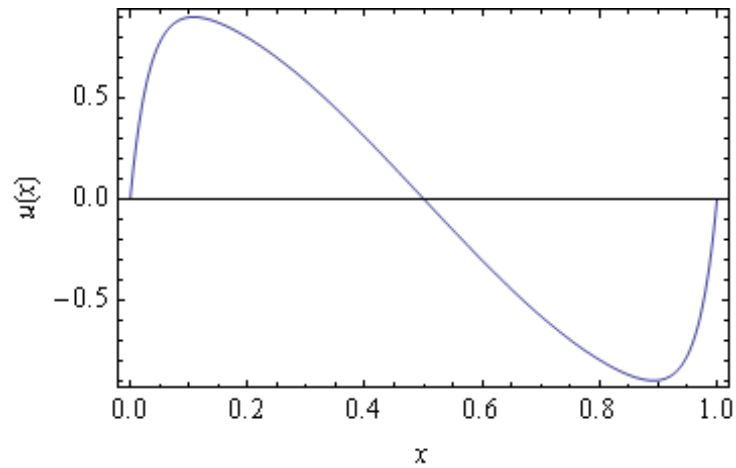
<sup>3</sup>Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nemački matematičar

<sup>4</sup>Adrien-Marie Legendre (1752-1833), francuski matematičar

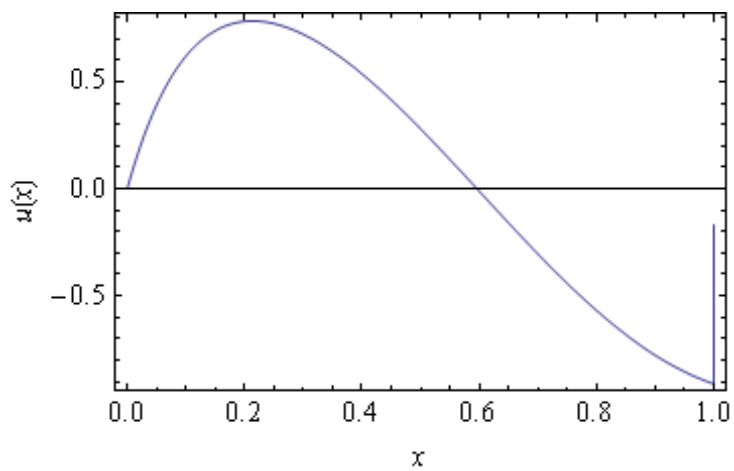




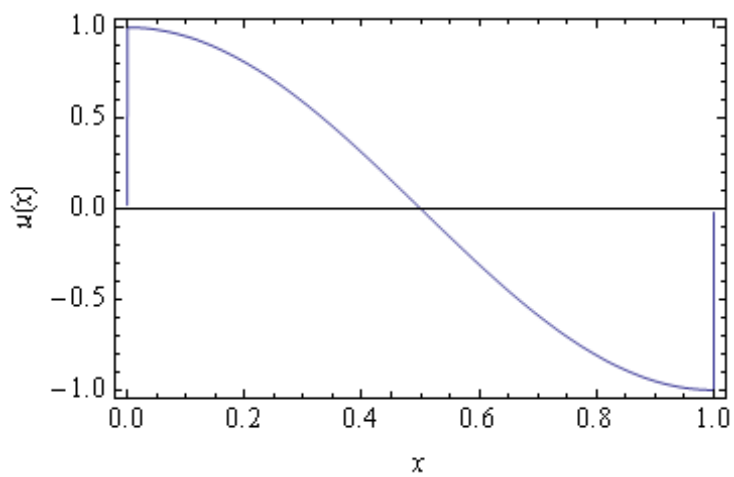
Slika 3.9: Tačno rešenje problema (3.61) za  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-1}$ .



Slika 3.10: Tačno rešenje problema (3.61) za  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ .



Slika 3.11: Tačno rešenje problema (3.61) za  $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-1}$ .



Slika 3.12: Tačno rešenje problema (3.61) za  $\varepsilon_1 = 10^{-12}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-12}$ .

Tabela 3.1: Greška u energetskej normi i red konvergencije na Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61)

| $N$      | $e_{\mathcal{R}}^N$ | $p_{\mathcal{R}}^N$ | $e^N$     | $p^N$ |
|----------|---------------------|---------------------|-----------|-------|
| $2^4$    | 3.591(-2)           | 1.027               | 2.229(-1) | 0.468 |
| $2^5$    | 1.763(-2)           | 1.004               | 1.612(-1) | 0.745 |
| $2^6$    | 8.790(-3)           | 1.000               | 9.618(-2) | 0.916 |
| $2^7$    | 4.396(-3)           | 1.001               | 5.096(-2) | 0.977 |
| $2^8$    | 2.197(-3)           | 1.003               | 2.588(-2) | 0.994 |
| $2^9$    | 1.096(-3)           | 1.003               | 1.299(-2) | 0.999 |
| $2^{10}$ | 5.469(-4)           | 1.002               | 6.503(-3) | 1.000 |
| $2^{11}$ | 2.730(-4)           | 1.001               | 3.252(-3) | 1.000 |
| $2^{12}$ | 1.364(-4)           | —                   | 1.626(-3) | —     |

Pri korišćenju Bahvalovljeve mreže, numerička računanja ćemo vršiti na skupu  $\mathcal{R}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  perturbacionih parametara za koje je uslov (3.18) ispunjen, kao i na skupu gde perturbacioni parametri uzimaju sledeće vrednosti

$$\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : 0 < \varepsilon_1 \leq 1, 0 < \varepsilon_2 \leq 1\}.$$

Za ovaj skup parametara rešenje polaznog problema prelazi od glatkog za  $\varepsilon_1 = 1$  do rešenja sa slojevima za  $\varepsilon_1 \ll 1$ . Kada je  $\sigma_j \geq 1/4$ , uzimamo da je mreža uniformna u odgovarajućim delovima domena. U ovim eksperimentima pokriveni su slučajevi od reakcije-difuzije do konvekcije-difuzije. Za parametre mreže koji određuju tranzicionu tačku biramo  $p = 0.5$  i  $\tau = 4$ , kako je  $\theta = 1/2$ .

Kao što je navedeno u Napomeni 3.4.1, za ovaj problem dopustivi skup perturbacionih parametara je

$$\mathcal{R}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : 0 < \varepsilon_1 \leq 10^{-5}, 0 < \varepsilon_2 \leq 10^{-3}\}.$$

Za fiksirane  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $N$ , računamo grešku u energetskej normi

$$e_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^N = \|u - u^N\|_E,$$

gde je  $u$  tačno rešenje problema (3.61), dok  $u^N$  predstavlja njegovu numeričku aproksimaciju. U Tabeli 3.1 su predstavljani rezultati za

$$e_{\mathcal{R}}^N = \max_{\substack{\varepsilon_1=10^{-5}, \dots, 10^{-12} \\ \varepsilon_2=10^{-3}, \dots, 10^{-12}}} e_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^N,$$

gde perturbacioni parametri uzimaju vrednosti iz  $\mathcal{R}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Odgovarajući red konvergencije

$$p_{\mathcal{R}}^N = \frac{\ln e_{\mathcal{R}}^N - \ln e_{\mathcal{R}}^{2N}}{\ln 2},$$

dat u trećoj koloni Tabele 3.1, potvrđuje prvi red konvergencije Galerkinovog metoda konačnih elemenata kada se primeni na Bahvalovljevoj mreži (3.20). Poslednje dve kolone Tabele 3.1 pokazuju vrednosti za

$$e^N = \max_{\substack{\varepsilon_1=1,10^{-1},\dots,10^{-12} \\ \varepsilon_2=1,10^{-1},\dots,10^{-12}}} e_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}^N$$

i odgovarajući red konvergencije

$$p^N = \frac{\ln e^N - \ln e^{2N}}{\ln 2},$$

koji je u saglasnosti sa tvrđenjem Teoreme 3.6.3.

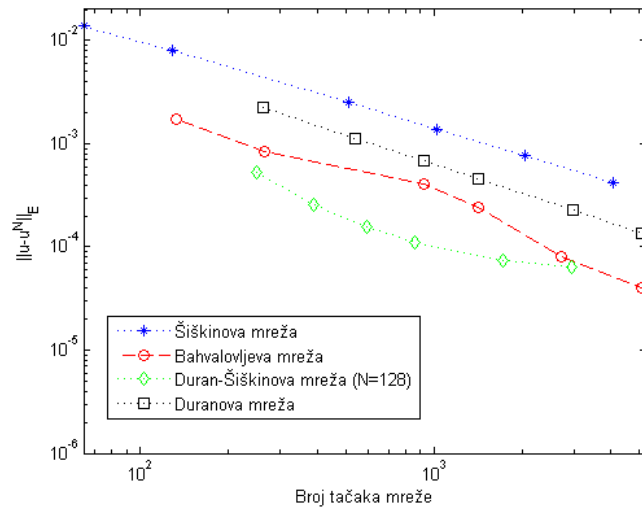
Pri numeričkim eksperimentima na Duranovoj i Duran-Šiškinovoj mreži koristi se parametar  $h$  koji utiče na broj tačaka tih mreža. Kako se parametar smanjuje, broj tačaka mreže se povećava. Za  $h$  su uzimane sledeće vrednosti: 0.1, 0.05, 0.03, 0.02, 0.01 i 0.006.

Za različite vrednosti perturbacionih parametara, u Tabelama 3.2-3.9, predstavljena je greška u energetske norme  $e_{\text{DS}}^N$  i  $e_D^N$ , za Galerkinov metod konačnih elemenata na Duran-Šiškinovoj i Duranovoj mreži, respektivno. U cilju poređenja rezultata dobijenih na različitim mrežama, računali smo i grešku postupka u energetske norme  $e_B^N$  i  $e_{\text{S}}^N$  na Bahvalovljevoj i Šiškinovoj mreži, redom. Broj čvorova  $N_B$  i  $N_{\text{S}}$  Bahvalovljeve i Šiškinove mreže smo birali tako da bude skoro jednak broju čvorova rekurzivno zadatih mreža i svakako deljiv sa 4.

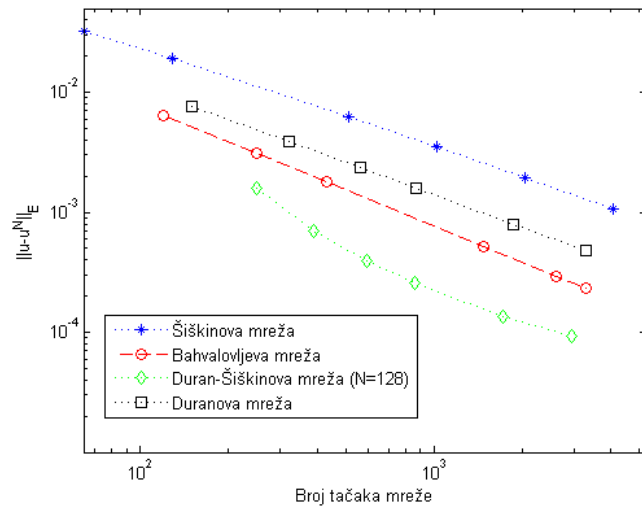
Dobijeni rezultati, grafički predstavljeni na Slikama 3.13 i 3.14, jasno ukazuju na prvi red konvergencije.

Rezultati iz Tabela 3.2-3.9 ukazuju na prednosti korišćenja Duran-Šiškinove i Duranove mreže nad Šiškinovom, pa čak i Bahvalovljevom mrežom, jer daju veću tačnost za određeni izbor parametara, a pri matematičkoj analizi su jednostavne kao i najčešće korišćena Šiškinova mreža.

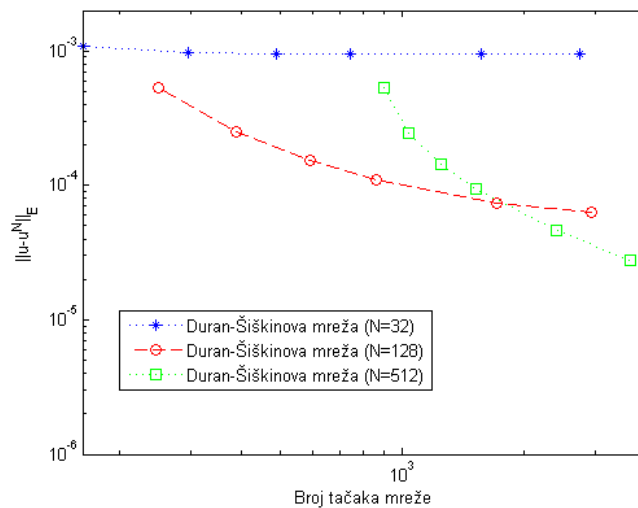
Na Slikama 3.15 i 3.16 je ukazana potreba za uzimanjem dovoljnog broja čvorova mreže u grubom delu Duran-Šiškinove mreže u cilju dobijanja rezultata koji su bliski ili čak bolji od rezultata koji su dobijeni na Bahvalovljevoj



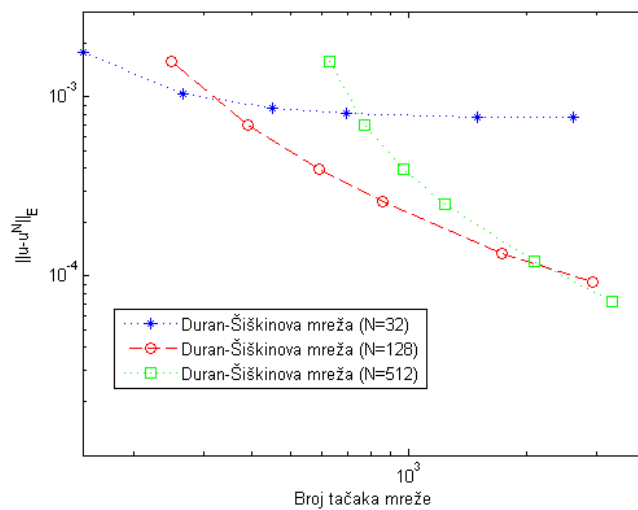
Slika 3.13: Poređenje postupaka na problemu (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .



Slika 3.14: Poređenje postupaka na problemu (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .



Slika 3.15: Poređenje postupaka na Duran-Šiškinovoj mreži na problemu (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .



Slika 3.16: Poređenje postupaka na Duran-Šiškinovoj mreži na problemu (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .

Tabela 3.2: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 32$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{D\check{S}}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|--------------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 53    | 61    | 1.09(-3)           | 132                  | 1.10(-2)          | 1.75(-3) |
| 0.05  | 117   | 131   | 9.79(-4)           | 264                  | 9.79(-3)          | 8.51(-4) |
| 0.03  | 209   | 233   | 9.57(-4)           | 460                  | 9.57(-3)          | 4.85(-4) |
| 0.02  | 332   | 367   | 9.49(-4)           | 716                  | 2.01(-3)          | 3.10(-4) |
| 0.01  | 729   | 799   | 9.44(-4)           | 1544                 | 9.99(-4)          | 1.43(-4) |
| 0.006 | 1296  | 1412  | 9.43(-4)           | 2724                 | 6.04(-4)          | 8.11(-5) |

Tabela 3.3: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 128$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{D\check{S}}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|--------------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 57    | 64    | 5.35(-4)           | 184                  | 1.93(-3)          | 7.91(-4) |
| 0.05  | 124   | 138   | 2.53(-4)           | 324                  | 1.18(-3)          | 4.47(-4) |
| 0.03  | 220   | 244   | 1.54(-4)           | 528                  | 7.75(-4)          | 2.73(-4) |
| 0.02  | 349   | 384   | 1.09(-4)           | 796                  | 5.45(-4)          | 1.80(-4) |
| 0.01  | 762   | 832   | 7.33(-5)           | 1660                 | 2.89(-4)          | 7.76(-5) |
| 0.006 | 1352  | 1468  | 6.31(-5)           | 2884                 | 1.78(-4)          | 1.74(-5) |

Tabela 3.4: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 512$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{D\check{S}}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|--------------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 59    | 67    | 5.32(-4)           | 380                  | 3.72(-3)          | 5.88(-4) |
| 0.05  | 129   | 143   | 2.46(-4)           | 528                  | 2.69(-3)          | 4.22(-4) |
| 0.03  | 229   | 252   | 1.43(-4)           | 736                  | 1.96(-3)          | 3.02(-4) |
| 0.02  | 362   | 397   | 9.42(-5)           | 1016                 | 1.46(-3)          | 2.18(-4) |
| 0.01  | 788   | 857   | 4.64(-5)           | 1900                 | 8.31(-4)          | 1.16(-4) |
| 0.006 | 1395  | 1510  | 2.78(-5)           | 3160                 | 5.29(-4)          | 6.99(-5) |

Tabela 3.5: Greška u energetskeoj normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 32$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 4$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{\text{DŠ}}^N$ | $N_{\text{Š}}(N_B)$ | $e_{\text{Š}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|-------------------|---------------------|------------------|----------|
| 0.1   | 53    | 53    | 1.77(-3)          | 120                 | 2.84(-2)         | 6.46(-3) |
| 0.05  | 117   | 117   | 1.04(-3)          | 248                 | 1.62(-2)         | 3.12(-3) |
| 0.03  | 209   | 209   | 8.65(-4)          | 432                 | 1.03(-2)         | 1.79(-3) |
| 0.02  | 332   | 332   | 8.08(-4)          | 680                 | 7.03(-3)         | 1.13(-3) |
| 0.01  | 729   | 729   | 7.75(-4)          | 1472                | 3.49(-3)         | 5.22(-4) |
| 0.006 | 1296  | 1296  | 7.69(-4)          | 2608                | 1.97(-3)         | 2.94(-4) |

Tabela 3.6: Greška u energetskeoj normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 128$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 4$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{\text{DŠ}}^N$ | $N_{\text{Š}}(N_B)$ | $e_{\text{Š}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|-------------------|---------------------|------------------|----------|
| 0.1   | 57    | 57    | 1.58(-3)          | 180                 | 6.61(-3)         | 2.74(-3) |
| 0.05  | 124   | 124   | 7.01(-4)          | 312                 | 4.22(-3)         | 1.58(-3) |
| 0.03  | 220   | 220   | 3.97(-4)          | 504                 | 2.83(-3)         | 9.71(-4) |
| 0.02  | 349   | 349   | 2.59(-4)          | 764                 | 1.99(-3)         | 6.21(-4) |
| 0.01  | 762   | 762   | 1.34(-4)          | 1588                | 1.06(-3)         | 1.86(-4) |
| 0.006 | 1352  | 1352  | 9.23(-5)          | 2768                | 6.57(-4)         | 7.56(-5) |

Tabela 3.7: Greška u energetskeoj normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 512$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 4$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{\text{DŠ}}^N$ | $N_{\text{Š}}(N_B)$ | $e_{\text{Š}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|-------------------|---------------------|------------------|----------|
| 0.1   | 59    | 59    | 1.58(-3)          | 372                 | 1.16(-2)         | 2.07(-3) |
| 0.05  | 129   | 129   | 6.99(-4)          | 512                 | 8.92(-3)         | 1.51(-3) |
| 0.03  | 229   | 229   | 3.93(-4)          | 712                 | 6.77(-3)         | 1.08(-3) |
| 0.02  | 362   | 362   | 2.52(-4)          | 980                 | 5.16(-3)         | 7.85(-4) |
| 0.01  | 788   | 788   | 1.21(-4)          | 1832                | 2.80(-3)         | 4.19(-4) |
| 0.006 | 1395  | 1395  | 7.17(-5)          | 3044                | 1.69(-3)         | 2.52(-4) |



Tabela 3.8: Greška u energetskej normi na Duranovoj, Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_D^N$  | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|----------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 76    | 187   | 2.23(-3) | 264                  | 5.40(-3)          | 8.51(-4) |
| 0.05  | 162   | 379   | 1.12(-3) | 540                  | 2.63(-3)          | 4.12(-4) |
| 0.03  | 283   | 642   | 6.77(-4) | 924                  | 1.59(-3)          | 2.40(-4) |
| 0.02  | 443   | 978   | 4.53(-4) | 1420                 | 1.08(-3)          | 1.56(-4) |
| 0.01  | 956   | 2015  | 2.27(-4) | 2972                 | 5.59(-4)          | 7.44(-5) |
| 0.006 | 1664  | 3435  | 1.36(-4) | 5100                 | 3.47(-4)          | 4.33(-5) |

Tabela 3.9: Greška u energetskej normi na Duranovoj, Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.61) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_D^N$  | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|----------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 75    | 75    | 7.55(-3) | 148                  | 2.43(-2)          | 5.23(-3) |
| 0.05  | 160   | 160   | 3.89(-3) | 320                  | 1.32(-2)          | 2.41(-3) |
| 0.03  | 280   | 280   | 2.36(-3) | 560                  | 8.28(-3)          | 1.37(-3) |
| 0.02  | 437   | 437   | 1.59(-3) | 872                  | 5.70(-3)          | 8.82(-4) |
| 0.01  | 938   | 938   | 7.98(-4) | 1876                 | 2.74(-3)          | 4.09(-4) |
| 0.006 | 1645  | 1645  | 4.80(-4) | 3292                 | 1.56(-3)          | 2.33(-4) |

i Šiškinovoj mreži. Jasno je da  $N = 32$  nije zadovoljavajući broj, jer postupak očigledno stagnira, i da treba uzeti veći broj čvorova u tom delu mreže.

Da bismo potvrdili teorijske rezultate, posmatračemo i test problem kod koga funkcija  $b$  iz (3.1) nije konstanta,

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 u''(x) + \varepsilon_2(3 - 2x^2)u'(x) + u(x) &= (1 + x)^2, \quad x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

a čije tačno rešenje nije poznato. Da bismo dobili grešku u energetskej normi koristimo princip duple mreže iz [21].

Za fiksirane vrednosti parametara  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $N$ , neka je  $\tilde{u}^{2N}$  diskretno rešenje dobijeno na novoj mreži koja se sastoji od čvorova mreže (3.20) i njenih međučvorova  $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ .

U Tabeli 3.10 su prikazani rezultati postupka konačnih elemenata dobijeni

Tabela 3.10: Greška u energetskej normi i red konvergencije za test problem (3.62) na Bahvalovljevoj mreži

| $N$      | $d_{\mathcal{R}}^N$ | $r_{\mathcal{R}}^N$ | $d^N$     | $r^N$ |
|----------|---------------------|---------------------|-----------|-------|
| $2^4$    | 6.045(-2)           | 0.987               | 8.845(-1) | 0.539 |
| $2^5$    | 3.049(-2)           | 0.997               | 6.089(-1) | 0.830 |
| $2^6$    | 1.527(-2)           | 0.999               | 3.424(-1) | 0.953 |
| $2^7$    | 7.640(-3)           | 1.000               | 1.768(-1) | 0.988 |
| $2^8$    | 3.820(-3)           | 1.000               | 8.915(-2) | 0.997 |
| $2^9$    | 1.910(-3)           | 1.000               | 4.467(-2) | 0.999 |
| $2^{10}$ | 9.550(-4)           | 1.000               | 2.235(-2) | 1.000 |
| $2^{11}$ | 4.775(-4)           | 1.000               | 1.117(-2) | 1.000 |
| $2^{12}$ | 2.388(-4)           | —                   | 5.587(-3) | —     |

na Bahvalovljevoj mreži. Dopustivi skup parametara je

$$\mathcal{R}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : 0 < \varepsilon_1 \leq 10^{-6}, 0 < \varepsilon_2 \leq 10^{-3}\}.$$

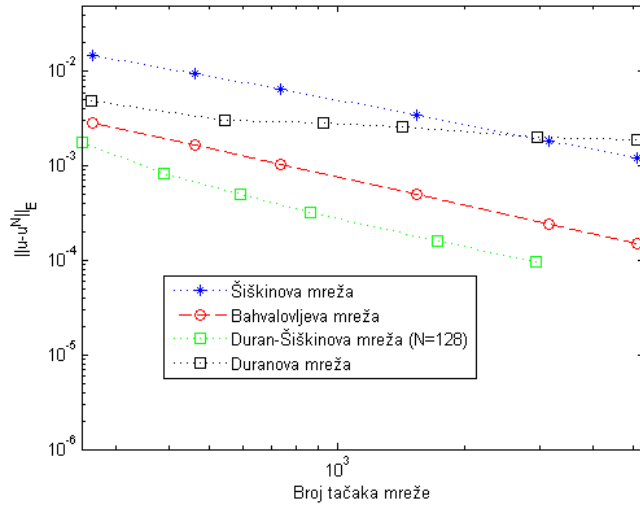
Sa  $d_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^N$  je označena greška u energetskej normi  $\|u^N - \tilde{u}^{2N}\|_E$ . Rezultati za

$$d_{\mathcal{R}}^N = \max_{\substack{\varepsilon_1=10^{-6}, \dots, 10^{-12} \\ \varepsilon_2=10^{-3}, \dots, 10^{-12}}} d_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^N \quad \text{i} \quad d^N = \max_{\substack{\varepsilon_1=1, 10^{-1}, \dots, 10^{-12} \\ \varepsilon_2=1, 10^{-1}, \dots, 10^{-12}}} d_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}^N,$$

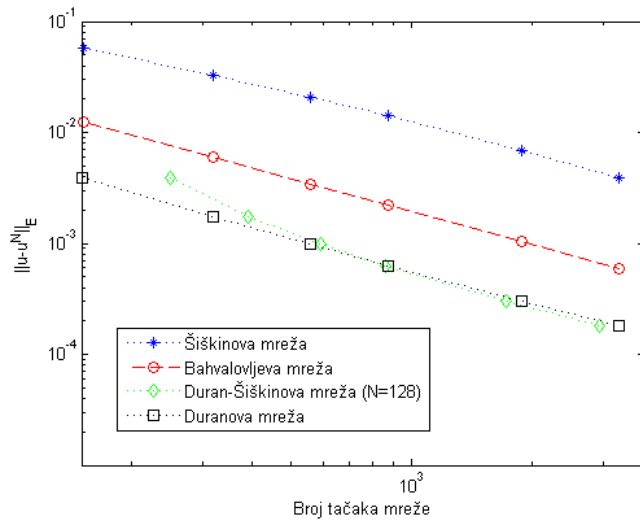
zajedno sa odgovarajućim redom konvergencije  $r_{\mathcal{R}}^N$  i  $r^N$  su predstavljeni u Tabeli 3.10 i jasno pokazuju uniformnu konvergenciju prvog reda u energetskej normi numeričkog postupka, i za  $d_{\mathcal{R}}^N$  i za  $d^N$ .

Prilikom numeričkog rešavanja problema (3.62) na Duran-Šiškinovoj i Duranovoj mreži računa se  $\{\tilde{u}_i^{2N}\}_{i=0}^{2N}$ , što predstavlja diskretno rešenje za fiksirane vrednosti  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  i  $M_0, M_1, N$ , dobijene na mrežama čije čvorove čine tačke Duran-Šiškinove i Duranove mreže i tačke date sa  $x_{i+1/2} = (x_{i+1} + x_i)/2$ ,  $i = 0, \dots, M_0 + M_1 + N/2 - 1$ , odnosno  $i = 0, \dots, M_0 + M_1 - 1$ , redom.

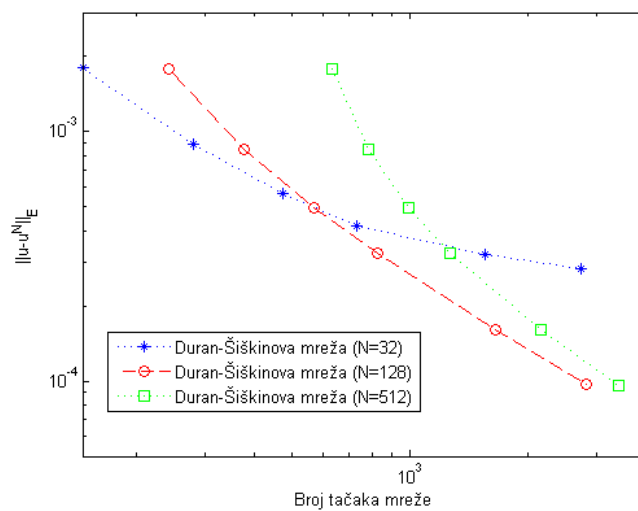
Iako izračunavanje reda konvergencije standardnom formulom nije tako jednostavno, jer ne dolazi do dupliranja tačaka mreže iz iteracije u iteraciju, na Slikama 3.17 i 3.18 se vidi prvi red konvergencije primenjenog numeričkog postupka u energetskej normi. Rezultate Teorema 3.6.3, 3.7.3 i 3.8.1 potvrđuju dobijeni rezultati u Tabelama 3.11-3.18. Primećeno je i za ovaj drugi test problem da je prilikom korišćenja Duran-Šiškinove mreže potrebno uzeti dovoljan broj čvorova mreže u njenom grubom delu kako bi se dobili zadovoljavajući rezultati (Slika 3.19 i Slika 3.20).



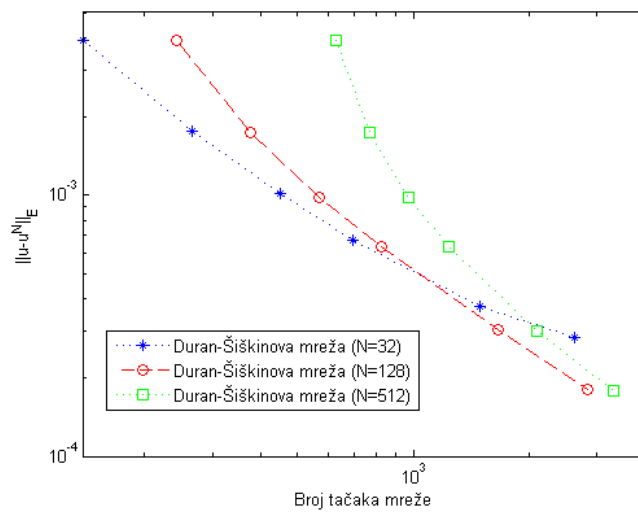
Slika 3.17: Poređenje postupaka na problemu (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .



Slika 3.18: Poređenje postupaka na problemu (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .



Slika 3.19: Poređenje postupaka na problemu (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .



Slika 3.20: Poređenje postupaka na problemu (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .

Tabela 3.11: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 32$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{D\check{S}}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|--------------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 53    | 61    | 1.80(-3)           | 132                  | 2.59(-2)          | 5.79(-3) |
| 0.05  | 117   | 131   | 8.85(-4)           | 264                  | 1.50(-2)          | 2.90(-3) |
| 0.03  | 209   | 233   | 5.62(-4)           | 460                  | 9.50(-3)          | 1.66(-3) |
| 0.02  | 332   | 367   | 4.20(-4)           | 716                  | 6.56(-3)          | 1.07(-3) |
| 0.01  | 729   | 799   | 3.11(-4)           | 1544                 | 3.40(-3)          | 4.95(-4) |
| 0.006 | 1296  | 1412  | 2.83(-4)           | 2724                 | 2.08(-3)          | 2.81(-4) |

Tabela 3.12: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 128$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{D\check{S}}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|--------------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 57    | 57    | 1.78(-3)           | 180                  | 2.04(-2)          | 4.25(-3) |
| 0.05  | 124   | 124   | 8.44(-4)           | 312                  | 1.31(-2)          | 2.45(-3) |
| 0.03  | 220   | 220   | 4.94(-4)           | 504                  | 8.81(-3)          | 1.52(-3) |
| 0.02  | 349   | 349   | 3.25(-4)           | 764                  | 6.21(-3)          | 1.00(-3) |
| 0.01  | 762   | 762   | 1.61(-4)           | 1588                 | 3.32(-3)          | 4.81(-4) |
| 0.006 | 1352  | 1352  | 9.69(-5)           | 2768                 | 2.05(-3)          | 2.76(-4) |

Tabela 3.13: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 512$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{D\check{S}}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|--------------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 59    | 67    | 1.78(-3)           | 380                  | 1.10(-2)          | 1.99(-3) |
| 0.05  | 129   | 143   | 8.44(-4)           | 528                  | 8.47(-3)          | 1.45(-3) |
| 0.03  | 229   | 252   | 4.94(-4)           | 736                  | 6.40(-3)          | 1.04(-3) |
| 0.02  | 362   | 397   | 3.25(-4)           | 1016                 | 4.87(-3)          | 7.52(-4) |
| 0.01  | 788   | 857   | 1.60(-4)           | 1900                 | 2.84(-3)          | 4.02(-4) |
| 0.006 | 1395  | 1510  | 9.56(-5)           | 3160                 | 1.82(-3)          | 2.42(-4) |

Tabela 3.14: Greška u energetskeoj normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 32$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 4$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{\text{DŠ}}^N$ | $N_{\text{Š}}(N_B)$ | $e_{\text{Š}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|-------------------|---------------------|------------------|----------|
| 0.1   | 53    | 53    | 3.93(-3)          | 120                 | 6.95(-2)         | 1.59(-2) |
| 0.05  | 117   | 117   | 1.76(-3)          | 248                 | 3.97(-2)         | 7.73(-3) |
| 0.03  | 209   | 209   | 1.01(-3)          | 432                 | 2.54(-2)         | 4.45(-3) |
| 0.02  | 332   | 332   | 6.69(-4)          | 680                 | 1.74(-3)         | 2.83(-3) |
| 0.01  | 729   | 729   | 3.75(-4)          | 1472                | 8.69(-4)         | 1.31(-3) |
| 0.006 | 1296  | 1296  | 2.84(-4)          | 2608                | 4.94(-4)         | 7.41(-4) |

Tabela 3.15: Greška u energetskeoj normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 128$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 4$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{\text{DŠ}}^N$ | $N_{\text{Š}}(N_B)$ | $e_{\text{Š}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|-------------------|---------------------|------------------|----------|
| 0.1   | 57    | 57    | 3.92(-3)          | 180                 | 5.11(-2)         | 1.06(-2) |
| 0.05  | 124   | 124   | 1.74(-3)          | 312                 | 3.31(-2)         | 6.16(-3) |
| 0.03  | 220   | 220   | 9.83(-4)          | 504                 | 2.24(-2)         | 3.82(-3) |
| 0.02  | 349   | 349   | 6.32(-4)          | 764                 | 1.58(-2)         | 2.52(-3) |
| 0.01  | 762   | 762   | 3.04(-4)          | 1588                | 8.08(-3)         | 1.22(-3) |
| 0.006 | 1352  | 1352  | 1.80(-4)          | 2768                | 4.65(-3)         | 6.98(-4) |

Tabela 3.16: Greška u energetskeoj normi na Duran-Šiškinovoj za  $N = 512$ , Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 4$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_{\text{DŠ}}^N$ | $N_{\text{Š}}(N_B)$ | $e_{\text{Š}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|-------------------|---------------------|------------------|----------|
| 0.1   | 59    | 59    | 3.92(-3)          | 372                 | 2.84(-2)         | 5.11(-3) |
| 0.05  | 129   | 129   | 1.74(-3)          | 512                 | 2.19(-2)         | 3.73(-3) |
| 0.03  | 229   | 229   | 9.83(-4)          | 712                 | 1.67(-2)         | 2.69(-3) |
| 0.02  | 362   | 362   | 6.32(-4)          | 980                 | 1.28(-2)         | 1.97(-3) |
| 0.01  | 788   | 788   | 3.03(-4)          | 1832                | 7.01(-3)         | 1.05(-3) |
| 0.006 | 1395  | 1395  | 1.79(-4)          | 3044                | 4.23(-3)         | 6.34(-4) |

Tabela 3.17: Greška u energetskej normi na Duranovoj, Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_D^N$  | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|----------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 76    | 187   | 4.88(-3) | 264                  | 1.50(-2)          | 2.89(-3) |
| 0.05  | 162   | 379   | 3.07(-3) | 540                  | 8.31(-3)          | 1.42(-3) |
| 0.03  | 283   | 642   | 2.82(-3) | 924                  | 5.28(-3)          | 8.27(-4) |
| 0.02  | 443   | 978   | 2.58(-3) | 1420                 | 3.65(-3)          | 5.38(-4) |
| 0.01  | 956   | 2015  | 2.04(-3) | 2972                 | 1.92(-3)          | 2.57(-4) |
| 0.006 | 1664  | 3435  | 1.92(-3) | 5100                 | 1.20(-3)          | 1.50(-4) |

Tabela 3.18: Greška u energetskej normi na Duranovoj, Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži za problem (3.62) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .

| $h$   | $M_0$ | $M_1$ | $e_D^N$  | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|-------|-------|-------|----------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.1   | 75    | 75    | 3.93(-3) | 148                  | 5.82(-2)          | 1.26(-2) |
| 0.05  | 160   | 160   | 1.74(-3) | 320                  | 3.24(-2)          | 6.00(-3) |
| 0.03  | 280   | 280   | 9.83(-4) | 560                  | 2.05(-2)          | 3.44(-3) |
| 0.02  | 437   | 437   | 6.32(-4) | 872                  | 1.41(-2)          | 2.20(-3) |
| 0.01  | 938   | 938   | 3.03(-4) | 1876                 | 6.85(-3)          | 1.03(-3) |
| 0.006 | 1645  | 1645  | 1.79(-4) | 3292                 | 3.92(-3)          | 5.87(-4) |

Teoreme 3.7.3 i 3.8.1, pod pretpostavkom  $h \leq CN^{-1}$ , daju istu ocenu greške postupka konačnih elemenata u energetskej normi kao i Teorema 3.6.3, gde možemo da računamo red konvergencije primenom standardnog postupka. Računanjem je primećeno da je odnos broja tačaka mreže za  $h = 2^{-k}$  i  $h = 2^{-k-1}$  skoro 2, što nam omogućava korišćenje standardne formule za izračunavanje reda konvergencije. Stoga je u Tabelama 3.19-3.20 birano da je  $h = 2^{-k}$ ,  $k = 1, \dots, 7$  i računata je ocena greške za sve vrednosti perturbacionih parametara iz skupa  $\{10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-12}\}$  kao i red konvergencije. Oznaka  $N_{D\check{S}}$  u Tabeli 3.19 predstavlja broj čvorova Duran-Šiškinove mreže u slojevima, dok  $N_D$  u Tabeli 3.20 označava ukupan broj čvorova Duranove mreže. Dobijeni rezultati pokazuju prvi red konvergencije.

Analiza greške, kao i numerički eksperimenti jasno pokazuju da su Duranova, a onda i Duran-Šiškinova mreža jednostavne za korišćenje, pogotovo u odnosu na Bahvalovljevu mrežu. Ove mreže dozvoljavaju upotrebu La-

Tabela 3.19: Greška u energetskej normi i red konvergencije na Duran-Šiškinovoj mreži za  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{10^{-1}, \dots, 10^{-12}\}$  i  $N = 512$ .

| $h$      | $N_{D\dot{S}}$ | problem (3.61)   |       | problem (3.62)   |       |
|----------|----------------|------------------|-------|------------------|-------|
|          |                | $e_{D\dot{S}}^N$ | $p^N$ | $e_{D\dot{S}}^N$ | $p^N$ |
| $2^{-1}$ | 18             | 1.30(-2)         | 1.176 | 3.18(-2)         | 1.155 |
| $2^{-2}$ | 37             | 5.76(-3)         | 1.201 | 1.43(-2)         | 1.181 |
| $2^{-3}$ | 80             | 2.51(-3)         | 1.116 | 6.31(-3)         | 1.154 |
| $2^{-4}$ | 176            | 1.16(-3)         | 1.175 | 2.84(-3)         | 1.107 |
| $2^{-5}$ | 389            | 5.13(-4)         | 1.067 | 1.32(-3)         | 1.063 |
| $2^{-6}$ | 858            | 2.45(-4)         | 1.020 | 6.30(-4)         | 1.025 |
| $2^{-7}$ | 1884           | 1.21(-4)         | —     | 3.09(-4)         | —     |

Tabela 3.20: Greška u energetskej normi i red konvergencije na Duranovoj mreži za  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{10^{-1}, \dots, 10^{-12}\}$ .

| $h$      | $N_D$ | problem (3.61) |       | problem (3.62) |       |
|----------|-------|----------------|-------|----------------|-------|
|          |       | $e_D^N$        | $p^N$ | $e_D^N$        | $p^N$ |
| $2^{-1}$ | 36    | 2.99(-1)       | 1.065 | 5.05(-2)       | 1.198 |
| $2^{-2}$ | 70    | 1.43(-1)       | 1.148 | 2.20(-2)       | 1.292 |
| $2^{-3}$ | 140   | 6.46(-2)       | 1.088 | 8.97(-3)       | 1.210 |
| $2^{-4}$ | 292   | 3.04(-2)       | 1.052 | 3.88(-3)       | 1.068 |
| $2^{-5}$ | 620   | 1.46(-2)       | 1.037 | 1.85(-3)       | 1.049 |
| $2^{-6}$ | 1304  | 7.14(-3)       | 1.011 | 8.94(-4)       | 1.021 |
| $2^{-7}$ | 2800  | 3.54(-3)       | —     | 4.40(-4)       | —     |

granžovog interpolanta za analizu greške, za razliku od Bahvalovljeve mreže gdje je potrebno uzeti kvazi-interpolant. Rezultati dobijeni na Duranovoj mreži su veće tačnosti od rezultata na Šiškinovoj mreži za takozvane velike vrednosti perturbacionih parametara, na primer  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 10^{-1}$ , što se može videti u [19, 20]. Osim toga, ocena greške u energetskej normi za rekurzivno zadate mreže ne sadrži logaritamski faktor karakterističan za Šiškinovu mrežu (Napomena 3.6.2).



## Glava 4

### Dvodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije

U ovom poglavlju ćemo metodom konačnih elemenata na jediničnom kvadratu  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  rešavati singularno perturbovani eliptični dvoparametarski problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 \Delta u(x, y) + \varepsilon_2 b(x) u_x(x, y) + c(x) u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= 0, \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.1)$$

gde su  $b, c$  i  $f$  dovoljno glatke funkcije, takve da je  $b(x) \geq b_0 > 0$ ,  $c(x) \geq c_0 > 0$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $b_0, c_0$  su konstante,  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$  su mali perturbacioni parametri i  $f$  zadovoljava uslov kompatibilnosti

$$f(0, 0) = f(0, 1) = f(1, 0) = f(1, 1) = 0. \quad (4.2)$$

Pod ovim pretpostavkama postoji klasično rešenje  $u$  problema (4.1) tako da je  $u \in C^{3,\alpha}(\bar{\Omega})$  za  $\alpha \in (0, 1]$ , [31]. Pretpostavljamo da važi

$$c(x) - \frac{\varepsilon_2}{2} b'(x) \geq \gamma > 0, \quad x \in (0, 1), \quad (4.3)$$

za neku konstantu  $\gamma$ .

Kada je  $\varepsilon_2$  veoma malo, uslov  $b(x) > 0$  bi se možda mogao i oslabiti, ali bi to onda zahtevalo dodatnu analizu u vezi sa dekompozicijom rešenja. Zbog jednostavnosti ipak ćemo pretpostavljati  $b(x) > 0$ , kao i u [95].

**Napomena 4.0.1.** *Opštiji slučaj od (4.1), na jediničnom kvadratu je*

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 \Delta u + \varepsilon_2 \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu &= f, & (x, y) \in \Omega, \\ u &= 0, & \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{4.4}$$

gde je  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ , s tim da je  $b_1(\cdot, \cdot) \geq \beta_1 > 0$ ,  $b_2(\cdot, \cdot) \geq \beta_2 > 0$  i  $c(\cdot, \cdot) \geq 0$  na  $\Omega$ . Ovde  $\beta_1$  i  $\beta_2$  predstavljaju pozitivne konstante.

Iz pretpostavke  $\mathbf{b} > 0$ , za problem (4.4) nejednakost (4.3) može biti zadovoljena uz pomoć transformacije  $u(x, y) = e^{\theta(x+y)}v(x, y)$ , sa odgovarajuće izabranom konstantom  $\theta$  (uporediti sa [25, 56, 104]).  $\square$

Značajna osobina koju poseduju problemi (4.1) i (4.4) za male vrednosti perturbacionih parametara jeste egzistencija slojeva. Poznato je iz [93], da problem (4.1) karakterišu eksponencijalni slojevi u okolini  $x = 0$  i  $x = 1$ , parabolični slojevi u okolini  $y = 0$  i  $y = 1$  i ugaoni slojevi u okolini uglova jediničnog kvadrata. U opštem slučaju, slojevi se mogu nalaziti u različitim delovima domena  $\Omega$ . Njihov položaj uglavnom zavisi od funkcije  $\mathbf{b}$ , glatkosti ruba domena i konturnih uslova. U literaturi se sreće sledeća klasifikacija slojeva, [45, 55], gde je sa  $\nu(x, y)$  predstavljen jedinstveni spoljašnji jedinični normalni vektor u svakoj tački ruba domena  $\Omega$ :

- Regularni granični slojevi se javljaju u okolini izlaznog ruba  $\{(x, y) \in \partial\Omega : \mathbf{b}(x, y) \cdot \nu(x, y) > 0\}$ . Nazivaju se i eksponencijalnim graničnim slojevima.

- Parabolični granični slojevi se pojavljuju u okolini karakterističnog ruba  $\{(x, y) \in \partial\Omega : \mathbf{b}(x, y) \cdot \nu(x, y) = 0\}$ , gde je rub paralelan sa karakteristikama funkcije  $\mathbf{b}$ .

- Unutrašnji slojevi se javljaju ako su, na primer, konturni uslovi na ulaznom rubu  $\{(x, y) \in \partial\Omega : \mathbf{b}(x, y) \cdot \nu(x, y) < 0\}$ , prekidni. Ti slojevi su smešteni u okolini karakteristika funkcije  $\mathbf{b}$ . Po prirodi su slični paraboličnim slojevima.

Širina eksponencijalnih slojeva rešenja problema (4.1) zavisi od odnosa između parametara  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . U specijalnom slučaju, za  $\varepsilon_2 = 0$  problem (4.1) je problem reakcije-difuzije, dok je za  $\varepsilon_2 = 1$  problem konvekcije-difuzije.

Problem (4.1) je detaljno analiziran u [93–95], gde je rešavan metodom konačnih elemenata na Šiškinovoj mreži. U pomenutim radovima data je

dekompozicija rešenja problema (4.1), kao i ocena greške u energetskej normi

$$\|u - u^N\|_E \leq C(N^{-2} + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} N^{-1} \ln N).$$

Sličan problem sa (4.1) je rešavan Galerkinovim metodom u [39]. Asimptotska struktura rešenja problema sličnog problemu (4.1)-(4.2) je razmatrana u [10] i tu je utvrđeno da, kada je  $\varepsilon_2$  reda veličine  $\varepsilon_1^{1/2}$  ili manje, onda se pojavljuju slojevi čija se struktura približava strukturi slojeva koji se pojavljuju kod problema reakcije-difuzije. Pored asimptotske strukture, u [31] su razmatrane osobine rešenja i njegovih izvoda za dvodimenzionalni problem reakcije-difuzije.

Za  $\varepsilon_2 = 1$  imamo problem konvekcije-difuzije čije rešenje ima eksponencijalni sloj u blizini izlazne granice, parabolične slojeve u blizini karakterističnih granica i ugaone slojeve u blizini preseka graničnih slojeva. Ovakva vrsta problema je razmatrana u [21, 34, 50, 66, 75]. Metod konačnih elemenata za problem konvekcije-difuzije na Šiškinovoj mreži je analiziran u [105], sa naglaskom na superkonvergenciju<sup>1</sup>, dok je u [96] predstavljen rezultat superkonvergencije na pomenutoj mreži za problem (4.1)-(4.3).

U radovima [64, 84-86] autori analiziraju različite tipove eliptičnih jednačina konvekcije-reakcije-difuzije sa dva parametra metodom konačnih razlika.

Navešćemo neke poznate rezultate u energetskej normi datoj u Definiciji 4.1.1, jer se teza bavi tom tematikom. Konvergencija sa (bi)linearnim elementima metodom konačnih elemenata na Šiškinovoj mreži za problem konvekcije-difuzije prvi put je razmatrana u [87], a kasnije u [17], gde je i za linearne i bilinearne elemente pokazano

$$\|u - u^N\|_E \leq CN^{-1} \ln N.$$

Problem reakcije-difuzije je u [40] razmatran na specijalnoj mreži sačinjenoj od pravougaonika, koja je različita od Šiškinove, i dobijena je uniformna konvergencija drugog reda u  $L^2$  normi za bilinearne pravougaone konačne elemente, dok je u [41], koristeći asimptotsko proširenje, dokazan skoro drugi red uniformne konvergencije u  $L^2$  normi na Šiškinovoj mreži.

Generalno, rezultati dobijeni pomoću mreža Šiškinovog tipa su lošiji od rezultata dobijenih korišćenjem Bahvalovljevih mreža. U radu [70] je za standardni problem konvekcije-difuzije u dve dimenzije pokazan optimalan red

<sup>1</sup>Superkonvergencija je osobina da numeričko rešenje konvergira ka tačnom rešenju sa redom koji je veći od reda optimalne ocene greške.

konvergenције za postupak konačnih elemenata na Bahvalovljevoj mreži, to jest

$$\|u - u^N\|_E \leq CN^{-1}Q(\varepsilon, N),$$

gde je izraz  $Q(\varepsilon, N)$  praktično ograničen. Zbog složenosti analize na Bahvalovljevoj mreži, u tezi nije razmatran dvoparametarski singularno perturbovani problem u dve dimenzije, što i predstavlja otvoren problem za dalja istraživanja.

Na Duranovoj mreži, i to za problem konvekcije-difuzije, u [19] dokazan je sledeći rezultat

$$\|u - u^N\|_E \leq CN^{-1}(\ln(1/\varepsilon))^2.$$

Za dvodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije u tezi će biti ocenjena greška Galerkinovog postupka konačnih elemenata u energetske normi na Duran-Šiškinovoj i Duranovoj mreži.

## 4.1 Slaba formulacija problema

Neka je  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . Za problem (4.1), standardna slaba formulacija glasi:

$$\begin{cases} \text{naći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a(u, v) = (f, v) \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (4.5)$$

gde je bilinearna forma data sa

$$a(w, v) := \varepsilon_1(\nabla w, \nabla v) + (\varepsilon_2 b w_x, v) + (c w, v), \quad w, v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

**Definicija 4.1.1.**  $\varepsilon_1$ -težinska  $H_0^1(\Omega)$  norma (energetska norma) je data sa

$$\|v\|_E^2 := \varepsilon_1(\nabla v, \nabla v) + (v, v), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

**Lema 4.1.1.** [93] Za svako  $v \in H_0^1(\Omega)$  važi  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_E^2$ , tj. bilinearna forma  $a$  je koercitivna.

Bilinearna forma (4.6) je neprekidna, pa Lema 4.1.1 zajedno sa Lax-Milgramovom teoremom daje jedinstvenost slabog rešenja problema (4.1). U narednoj lemi dajemo apriornu ocenu rešenja problema (4.1).

**Lema 4.1.2.** [93] Pretpostavimo da za  $x \in (0, 1)$  važi uslov (4.3). Tada za rešenje problema (4.1) važi ocena

$$\|u\|_E \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

## 4.2 Galerkinov metod konačnih elemenata

Polazimo od slabe formulacije problema (4.5) i postavljamo problem na opštoj mreži  $\mathcal{T}$  koja predstavlja tenzorski proizvod  $\mathcal{T} = \Omega_x^N \times \Omega_y^M$ , gde je  $\Omega_x^N$  mreža konstruisana u  $x$ -pravcu sa  $N + 1$  čvorova, a  $\Omega_y^M$  mreža konstruisana u  $y$ -pravcu sa  $M + 1$  čvorova. Mreža je sačinjena od pravougaonika

$$R_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Problem (4.1) ćemo posmatrati na konačno-dimenzionalnom prostoru

$$V_B^N = \{v \in C(\Omega) : v|_{R_{ij}} \in \mathbb{Q}_1(R_{ij}), 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M\} \cap H_0^1(\Omega),$$

tako da je prostor funkcija kome pripadaju približno rešenje  $u^N$  i test funkcije  $v^N$ , prostor deo po deo bilinearnih funkcija koje su neprekidne i jednake nuli na  $\partial\Omega$ . Tada je aproksimacija rešenja problema (4.5) rešenje problema

$$\begin{cases} \text{naći } u^N \in V_B^N \text{ tako da je} \\ a(u^N, v^N) = (f, v^N) \text{ za svako } v^N \in V_B^N, \end{cases} \quad (4.7)$$

čime je predstavljen Galerkinov postupak konačnih elemenata za pomenuti problem. Bilinearna forma je definisana sa (4.6), a može se koristiti i oblik dobijen parcijalnom integracijom

$$a(w, v) = \varepsilon_1(\nabla w, \nabla v) - (\varepsilon_2 b w, v_x) + ((c - \varepsilon_2 b')w, v), \quad w, v \in V_B^N.$$

U naredna dva pododeljka dajemo opis postupka konačnih elemenata na trouglovima i četvorouglovima, [56].

### 4.2.1 Bilinearna aproksimacija na četvorouglovima

Svaki pravougaonik  $R_{ij}$  mreže može se preslikati u kanonički kvadrat (jedinični kvadrat u prvom kvadrantu) pomoću transformacije globalnih koordinata  $r \equiv (x, y)$  u lokalne koordinate  $(\xi, \zeta)$ . Označimo sa  $r_l \equiv (x_l, y_l)$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ , čvorove proizvoljnih pravougaonika mreže koji treba da se preslikaju u  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  i  $(0, 1)$  redom, u lokalnom koordinatnom sistemu. Preslikavanje je definisano sa

$$r(\xi, \zeta) = \sum_{l=1}^4 N_l(\xi, \zeta) r_l, \quad (4.8)$$

gde je

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)(1 - \zeta), & N_2(\xi, \zeta) &= \xi(1 - \zeta), \\ N_3(\xi, \zeta) &= \xi\zeta, & N_4(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)\zeta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Jakobijan ove bilinearne transformacije je

$$\begin{aligned} J^B &= \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \zeta)} \\ &= \begin{bmatrix} (x_3 - x_4)\zeta + (x_2 - x_1)(1 - \zeta) & (y_3 - y_4)\zeta + (y_2 - y_1)(1 - \zeta) \\ (x_3 - x_2)\xi + (x_4 - x_1)(1 - \xi) & (y_3 - y_2)\xi + (y_4 - y_1)(1 - \xi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{x, R_{ij}} & 0 \\ 0 & h_{y, R_{ij}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gde je  $h_{x, R_{ij}}$  dužina koraka mreže u  $x$  pravcu na pravougaoniku  $R_{ij}$ , a  $h_{y, R_{ij}}$  dužina koraka mreže u  $y$  pravcu na pravougaoniku  $R_{ij}$ . Determinanta ovog Jakobijana jednaka je površini četvorougla  $r_1 r_2 r_3 r_4$ . Duž svake ivice kanoničkog kvadrata, preslikavanje (4.8) lokalnog pravougaonika u globalni je linearno. Globalne vrednosti u čvorovima  $v_{ij}^N = v^N(x_i, y_j)$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ ,  $j = 1, \dots, M - 1$  se koriste za parametrizaciju  $v^N \in V_B^N$  i to obezbeđuje neprekidnost aproksimacije koja je bilinearna na svakom elementu i u lokalnim koordinatama. Na primer

$$v^N(x(\xi, \zeta), y(\xi, \zeta)) = \sum_{l=1}^4 N_l(\xi, \zeta) v_l^N,$$

gde su bazne funkcije na elementu date sa (4.9), a globalno

$$v^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \varphi_{ij}^B(x, y) v_{ij}^N, \quad \forall v^N \in V_B^N,$$

gde je globalna bazna funkcija  $\varphi_{ij}^B$  definisana tako da je bilinearna na svakom pravougaoniku i tako da važi  $\varphi_{ij}^B(x_i, y_i) = \delta_{ij}$ . Sada Galerkinova aproksimacija

$$u^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \varphi_{ij}^B(x, y) u_{ij}^N,$$

zadovoljava

$$a(u^N, \varphi_{ij}^B) = (f, \varphi_{ij}^B), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1.$$

Ako svakom čvoru  $(x_i, y_j)$  dodelimo indeks  $s$  onda se elementi „stiffness” matrice (matrice sistema) definišu sa  $A_{sr} := a(\varphi_r^B, \varphi_s^B)$ ,  $s, r = 1, \dots, (N-1) \cdot (M-1)$ , te se problem (4.7) može zapisati u obliku

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^N = \mathbf{f},$$

gde je  $\mathbf{u}^N = (u_1^N, \dots, u_{(N-1) \cdot (M-1)}^N)^\top$  i  $\mathbf{f} = (f, \varphi_s^B)$ . Pri formiranju ovih jednačina prvo izračunavamo „stiffness” matrice za svaki četvorougao. To su matrice formata  $4 \times 4$  definisane sa

$$A_{lk}^{R_{ij}} = a(N_l, N_k), \quad l, k = 1, 2, 3, 4,$$

za čije izračunavanje je potrebna veza

$$J^B \begin{bmatrix} \partial v^N / \partial x \\ \partial v^N / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial v^N / \partial \xi \\ \partial v^N / \partial \zeta \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Sada se za svaki četvorougao, koji nema nijednu ivicu na granici  $\partial\Omega$ , primenjuje transformacija koordinata (4.9) i veza (4.10), te se dobija

$$A_{lk}^{R_{ij}} = \int_{R_{ij}} \left[ \left( \varepsilon_1 (J^B)^{-1} \begin{bmatrix} \partial_\xi N_k \\ \partial_\zeta N_k \end{bmatrix} - \varepsilon_2 \begin{bmatrix} b(x) \\ 0 \end{bmatrix} N_k \right)^\top (J^B)^{-1} \begin{bmatrix} \partial_\xi N_l \\ \partial_\zeta N_l \end{bmatrix} + (c(x) - \varepsilon_2 b'(x)) N_i N_j \right] (det J^B) d\xi d\zeta,$$

dok su odgovarajuće komponente vektora na desnoj strani date sa

$$f_l^{R_{ij}} = \int_{R_{ij}} f N_l (det J^B) d\xi d\zeta.$$

Ako su funkcije  $b$  i  $c$  u (4.1) konstantne, onda se dobija da je

$$A^{R_{ij}} = \varepsilon_1 A_2 - \varepsilon_2 b A_1 + c A_0,$$

gde su

$$A_2 = \frac{1}{6h_{x,R_{ij}}h_{y,R_{ij}}} \begin{bmatrix} s & t \\ t & s \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 2h_{x,R_{ij}}^2 + 2h_{y,R_{ij}}^2 & h_{x,R_{ij}}^2 - 2h_{y,R_{ij}}^2 \\ h_{x,R_{ij}}^2 - 2h_{y,R_{ij}}^2 & 2h_{x,R_{ij}}^2 + 2h_{y,R_{ij}}^2 \end{bmatrix},$$

$$t = \begin{bmatrix} -h_{x,R_{ij}}^2 - h_{y,R_{ij}}^2 & -2h_{x,R_{ij}}^2 + h_{y,R_{ij}}^2 \\ -2h_{x,R_{ij}}^2 + h_{y,R_{ij}}^2 & -h_{x,R_{ij}}^2 - h_{y,R_{ij}}^2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \frac{h_{y,R_{ij}}}{12} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \frac{h_{x,R_{ij}} h_{y,R_{ij}}}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matrica sistema  $\mathbf{A}$  (globalna „stiffness” matrica) i vektor  $\mathbf{f}$  se sada računaju postupkom koji se zove „assembly” proces. Svakom čvoru u svakom četvorouglu dodeljuje se odgovarajući broj čvora iz globalne numeracije čvorova mreže. Ako za svaki element  $R_{ij}$  ova veza daje  $l \rightarrow i$ ,  $k \rightarrow j$ , onda se komponenta  $A_{lk}^{R_{ij}}$  dodaje komponenti  $A_{ij}$  globalne matrice, a  $f_l^{R_{ij}}$  se dodaje  $f_i$ . Odlična osobina postupka konačnih elemenata, koja je bitna za efikasnost izračunavanja, je ta što je izbor baze uvek takav da je rezultujuća matrica sistema retka.

## 4.2.2 Linearna aproksimacija na trouglovima

Mreža sa trouglovima se dobija od mreže sa četvorouglovima povlačenjem dijagonala koje idu od  $(x_i, y_{j+1})$  do  $(x_{i+1}, y_j)$ . Svaki trougao te mreže se preslika u kanonički trougao sa koordinatama  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$ , pomoću transformacije globalnih koordinata  $r \equiv (x, y)$  u lokalne koordinate  $(\xi, \zeta)$ . Ako su  $r_l \equiv (x_l, y_l)$ ,  $l = 1, 2, 3$ , čvorovi proizvoljnog trougla mreže koji treba da se preslikaju u  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$ , redom, u lokalnom koordinatnom sistemu, onda je preslikavanje dato sa

$$r(\xi, \zeta) = \sum_{l=1}^3 N_l(\xi, \zeta) r_l,$$

gde je

$$N_1(\xi, \zeta) = 1 - \xi - \zeta, \quad N_2(\xi, \zeta) = \xi, \quad N_3(\xi, \zeta) = \zeta. \quad (4.11)$$

Jakobijan ove transformacije je

$$J^L = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \zeta)} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{x,R_{ij}} & 0 \\ 0 & h_{y,R_{ij}} \end{bmatrix},$$

i  $\det J^L$  je jednaka dvostrukoju površini trougla  $r_1 r_2 r_3$ .



U slučaju linearne aproksimacije na trouglovima koristimo konačno-dimenzionalan prostor deo po deo linearnih funkcija  $V_L^N$  koje su jednake nuli na  $\partial\Omega$ . Tom potprostoru pripadaju i približno rešenje  $u^N$  i test funkcije  $v^N$ . Tada je aproksimacija rešenja problema (4.1) rešenje problema

$$\begin{cases} \text{naći } u^N \in V_L^N \text{ tako da je} \\ a(u^N, v^N) = (f, v^N) \text{ za svako } v^N \in V_L^N. \end{cases} \quad (4.12)$$

Na svakom trouglu,  $v^N$  je linearna funkcija u lokalnim koordinatama  $(\xi, \zeta)$  i može se predstaviti pomoću baznih funkcija na elementu, tako da na svakom trouglu imamo

$$v^N(x(\xi, \zeta), y(\xi, \zeta)) = \sum_{l=1}^3 N_l(\xi, \zeta) v_l^N,$$

gde su bazne funkcije na elementu date sa (4.11), a globalno

$$v^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \varphi_{ij}^L(x, y) v_{ij}^N, \quad \forall v^N \in V_L^N,$$

gde je sada globalna bazna funkcija  $\varphi_{ij}^L$  definisana tako da je linearna na svakom trouglu i tako da važi  $\varphi_{ij}^L(x_i, y_i) = \delta_{ij}$ . Galerkinova aproksimacija

$$u^N(x, y) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \varphi_{ij}^L(x, y) u_{ij}^N,$$

je data sa

$$a(u^N, \varphi_{ij}^L) = (f, \varphi_{ij}^L), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1,$$

dok su elementi matrice sistema  $A_{sr} = a(\varphi_r^L, \varphi_s^L)$ ,  $s, r = 1, \dots, (N-1) \cdot (M-1)$ , te se problem (4.12) može zapisati u obliku

$$\mathbf{A} \mathbf{u}^N = \mathbf{f},$$

gde je  $\mathbf{u}^N = (u_1^N, \dots, u_{(N-1) \cdot (M-1)}^N)^\top$  i  $\mathbf{f} = (f, \varphi_s^L)$ . Pri formiranju ovih jednačina prvo izračunavamo „stiffness“ matrice za svaki trougao. To su matrice formata  $3 \times 3$  definisane sa

$$A_{lk}^{R_{ij}} = a(N_l, N_k), \quad l, k = 1, 2, 3,$$

za čije izračunavanje je potrebna veza

$$J^L \begin{bmatrix} \partial v^N / \partial x \\ \partial v^N / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial v^N / \partial \xi \\ \partial v^N / \partial \zeta \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Sada se za svaki trougao, koji nema nijednu ivicu na granici  $\partial\Omega$ , primenjuje transformacija koordinata (4.11) i veza (4.13), te se dobija

$$A_{lk}^{R_{ij}} = \int_{R_{ij}} \left[ \left( \varepsilon_1 (J^L)^{-1} \begin{bmatrix} \partial_\xi N_k \\ \partial_\zeta N_k \end{bmatrix} - \varepsilon_2 \begin{bmatrix} b(x) \\ 0 \end{bmatrix} N_k \right)^\top (J^L)^{-1} \begin{bmatrix} \partial_\xi N_l \\ \partial_\zeta N_l \end{bmatrix} + (c(x) - \varepsilon_2 b'(x)) N_i N_j \right] (\det J^L) d\xi d\zeta,$$

dok su odgovarajuće komponente vektora na desnoj strani date sa

$$f_l^{R_{ij}} = \int_{R_{ij}} f N_l (\det J^L) d\xi d\zeta.$$

Ako su funkcije  $b$  i  $c$  u (4.1) konstantne, onda se dobija da je

$$A^{R_{ij}} = \varepsilon_1 A_2 - \varepsilon_2 b A_1 + c A_0,$$

gde su

$$A_2 = \frac{1}{2h_{x,R_{ij}}h_{y,R_{ij}}} \begin{bmatrix} h_{x,R_{ij}}^2 + h_{y,R_{ij}}^2 & -h_{y,R_{ij}}^2 & -h_{x,R_{ij}}^2 \\ -h_{y,R_{ij}}^2 & h_{y,R_{ij}}^2 & 0 \\ -h_{x,R_{ij}}^2 & 0 & h_{x,R_{ij}}^2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \frac{h_{y,R_{ij}}}{6} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \frac{h_{x,R_{ij}}h_{y,R_{ij}}}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

### 4.3 Dekompozicija rešenja

Eksponencijalni (regularni) slojevi imaju iste osobine kao i u jednodimenzionalnom slučaju, što je opisano u Odeljku 3.3. O komponentama rešenja problema (4.1) i njihovim izvodima više u sledećoj teoremi.

**Teorema 4.3.1.** [93] *Neka je zadat eliptični problem (4.1) na jediničnom kvadratu  $\bar{\Omega}$  takav da su funkcije  $b, c$  dovoljno glatke na  $(0, 1)$ ,  $f$  dovoljno glatka na  $\bar{\Omega}$  i zadovoljavaju uslove (4.2)-(4.3), i neka su  $p \in (0, 1)$  i  $k \in (0, 1/2)$  proizvoljni brojevi. Pretpostavimo da važi*

$$2\|b'\|_{L^\infty[0,1]}\varepsilon_2 \leq k(1-p)\gamma.$$

*Dalje, neka je  $\delta$  pozitivna konstanta koja zadovoljava uslov*

$$\delta^2 \leq \frac{(1-p)\gamma}{2}.$$

*Tada se rešenje u konturnog problema (4.1) može rastaviti na sledeći način*

$$u = S + E_{10} + E_{11} + E_{20} + E_{21} + E_{31} + E_{32} + E_{33} + E_{34},$$

*gde za svako  $(x, y) \in \bar{\Omega}$  i  $0 \leq i + j \leq 2$ , regularni deo  $S$  zadovoljava*

$$\left| \frac{\partial^{i+j} S}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C, \quad (4.14)$$

*eksponencijalne i parabolične slojne komponente zadovoljavaju*

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_{10}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\mu_0^i e^{-p\mu_0 x}, \quad \left| \frac{\partial^{i+j} E_{11}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\mu_1^i e^{-p\mu_1(1-x)}, \quad (4.15)$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_{20}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\varepsilon_1^{-j/2} e^{-\delta y/\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad \left| \frac{\partial^{i+j} E_{21}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\varepsilon_1^{-j/2} e^{-\delta(1-y)/\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad (4.16)$$

*dok ugaone slojne komponente zadovoljavaju sledeće ocene*

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_{31}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\varepsilon_1^{-j/2} \mu_0^i e^{-p\mu_0 x} e^{-\delta y/\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad (4.17)$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_{34}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\varepsilon_1^{-j/2} \mu_0^i e^{-p\mu_0 x} e^{-\delta(1-y)/\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad (4.18)$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_{32}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\varepsilon_1^{-j/2} \mu_1^i e^{-p\mu_1(1-x)} e^{-\delta y/\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad (4.19)$$

$$\left| \frac{\partial^{i+j} E_{33}}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq C\varepsilon_1^{-j/2} \mu_1^i e^{-p\mu_1(1-x)} e^{-\delta(1-y)/\sqrt{\varepsilon_1}}. \quad (4.20)$$

**Napomena 4.3.1.** [93] *Teorema 4.3.1 važi i u slučaju kada su funkcije  $b$  i  $c$  iz (4.1) funkcije dve promenljive.  $\square$*

## 4.4 Slojno-adaptivne mreže

Mreža za problem u dve dimenzije mora da se prilagodi slojevima koji se pojavljuju u rešenju problema, kao što je prikazano u jednodimenzionalnom slučaju. Kako su eksponencijalni slojevi problema (4.1) iste širine kao i za problem (3.1), čvorove mreže duž  $x$ -ose biramo kao što je dato u (3.24) za slučaj Duran-Šiškinove mreže ili kao u (3.26) u slučaju Duranove mreže. Duž  $y$ -ose mreža mora da bude prilagođena paraboličnim slojevima koji se pojavljuju u tom regionu. Stoga, u slučaju Duran-Šiškinove mreže, za dati parametar  $0 < h < 1$ , duž  $y$ -ose čvorove mreže definišemo sa

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = h\sqrt{\varepsilon_1}, \\ y_i = y_{i-1} + hy_{i-1} = h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-1}, & i = 2, \dots, M_y, \\ y_{M_y+i} = y_{M_y} + 2iN^{-1}(1-2y_{M_y}), & i = 1, \dots, N/2, \\ y_{2M_y+N/2-i+1} = 1 - h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-2}, & i = M_y, \dots, 2, \\ y_{2M_y+N/2} = 1, \end{cases} \quad (4.21)$$

gde su  $y_{M_y}$  i  $y_{M_y+N/2} = 1 - y_{M_y}$  tranzicione tačke. Biramo najmanje  $M_y$ , tako da je

$$y_{M_y} = h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{M_y-1} \geq \tilde{\lambda}_y = \frac{\tau_y}{\delta}\sqrt{\varepsilon_1} \ln N,$$

gde su parametri  $\tau_y$  i  $\delta$  unapred zadati.

Na Slikama 4.1-4.4 je prikazana Duran-Šiškinova mreža u dvodimenzionalnom slučaju za razne izbore perturbacionih parametara.

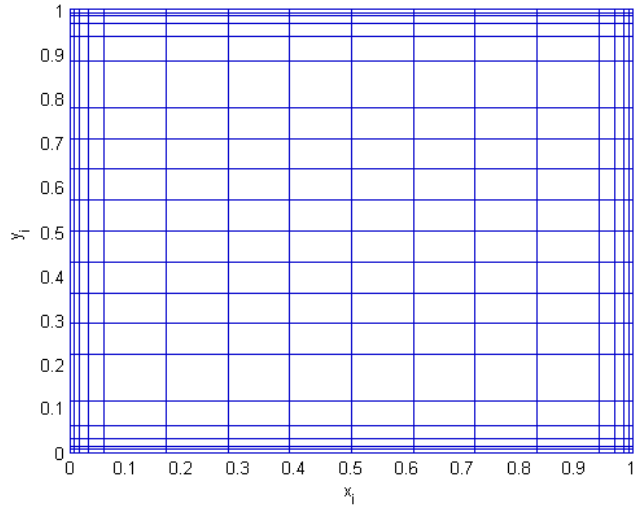
Pretpostavka u tezi je da važi

$$\tilde{\lambda}_0 < 1/4, \quad \tilde{\lambda}_1 < 1/4, \quad \tilde{\lambda}_y < 1/4, \quad (4.22)$$

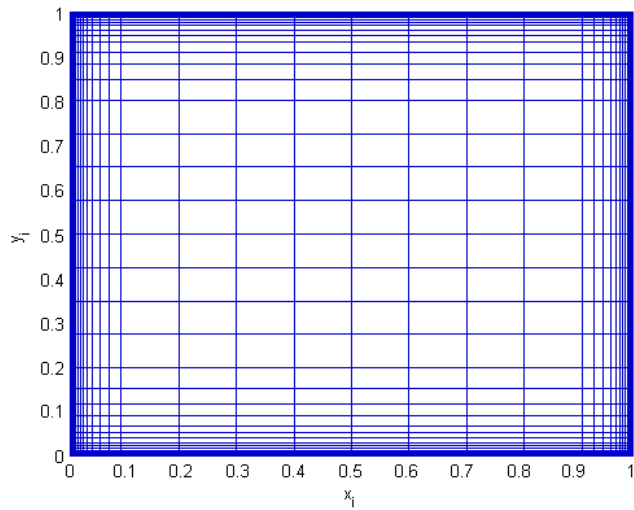
što je tipičan slučaj kod singularno perturbovanih problema. Vrednosti perturbacionih parametara zavise od konkretnog problema koji se rešava.

Koraci mreže u  $x$  pravcu,  $h_{x,i} = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, M_0 + M_1 + N/2$ , su dati sa (3.25), te važi tvrđenje Leme 3.4.5, dok su u  $y$  pravcu koraci mreže,  $h_{y,i} = y_i - y_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, 2M_y + N/2$ , dati sa

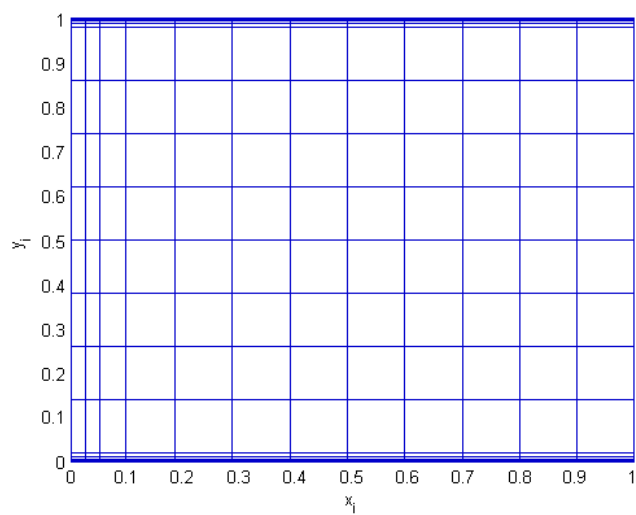
$$\begin{cases} h_{y,1} = h\sqrt{\varepsilon_1}, \\ h_{y,i} = h^2\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-2}, & i = 2, \dots, M_y, \\ h_{y,i} = 2N^{-1}(1-2y_{M_y}), & i = M_y + 1, \dots, M_y + N/2, \\ h_{y,2M_y+N/2-i+1} = h^2\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-2}, & i = M_y, \dots, 2, \\ h_{y,2M_y+N/2} = h\sqrt{\varepsilon_1}, \end{cases}$$



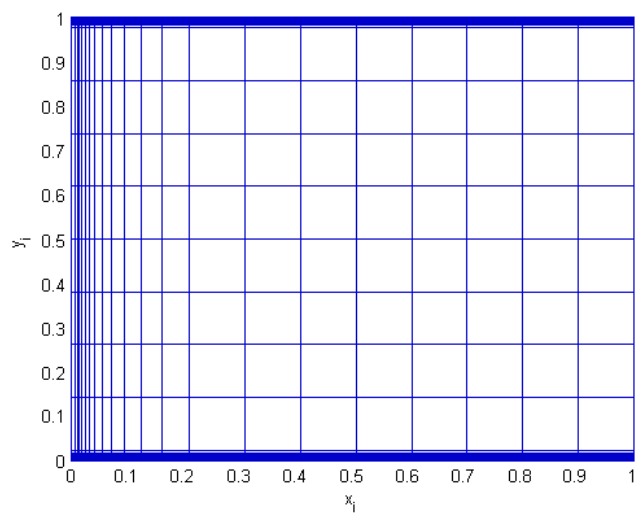
Slika 4.1: Duran-Šiškinova mreža za  $N = 16$ ,  $h = 0.9$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ .



Slika 4.2: Duran-Šiškinova mreža za  $N = 16$ ,  $h = 0.3$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ .



Slika 4.3: Duran-Šiškinova mreža za  $N = 16$ ,  $h = 0.9$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-6}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ .



Slika 4.4: Duran-Šiškinova mreža za  $N = 16$ ,  $h = 0.3$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-6}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ .

i imaju osobine

$$\left\{ \begin{array}{ll} h_{y,i} = hy_{i-1} \leq hy < h, & y \in [y_{i-1}, y_i], \quad i = 2, \dots, M_y, \\ h_{y,i} \leq CN^{-1}, & i = M_y + 1, \dots, M_y + N/2, \\ h_{y,i} = h(1 - y_i) \leq h(1 - y) \leq hy < h, & y \in [y_{i-1}, y_i], \\ & i = M_y + N/2 + 1, \dots, 2M_y + N/2 - 1. \end{array} \right.$$

koje se lako dokazuju.

Slično konstruišemo Duranovu mrežu za problem u dve dimenzije. Čvorovi mreže u  $x$  pravcu su dati sa (3.26), a u  $y$  pravcu sa

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = 0, \\ y_i = y_{i-1} + hy_{i-1} = h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-1}, \quad i = 1, \dots, M_y - 1, \\ y_{M_y} = 1/2, \\ y_{2M_y-i} = 1 - h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-1}, \quad i = M_y - 1, \dots, 1, \\ y_{2M_y} = 1, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

gde je  $M_y$  izabrano tako da je zadovoljena sledeća nejednakost

$$h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{M_y-2} < \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{M_y-1} \geq \frac{1}{2}.$$

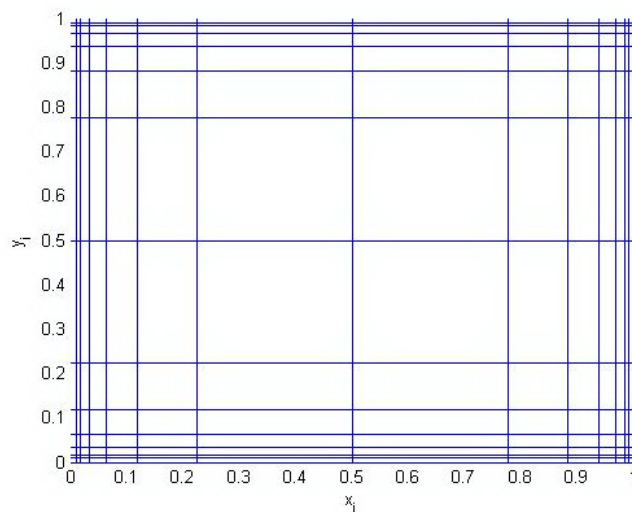
Na Slikama 4.5-4.8 su prikazane Duranove mreže u dvodimenzionalnom slučaju za razne izbore perturbacionih parametara.

Koraci mreže  $h_{x,i} = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, M_0 + M_1$ , su dati sa (3.27) i važi tvrđenje Leme 3.4.6. Za korake mreže  $h_{y,i} = y_i - y_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, 2M_y$ , važi

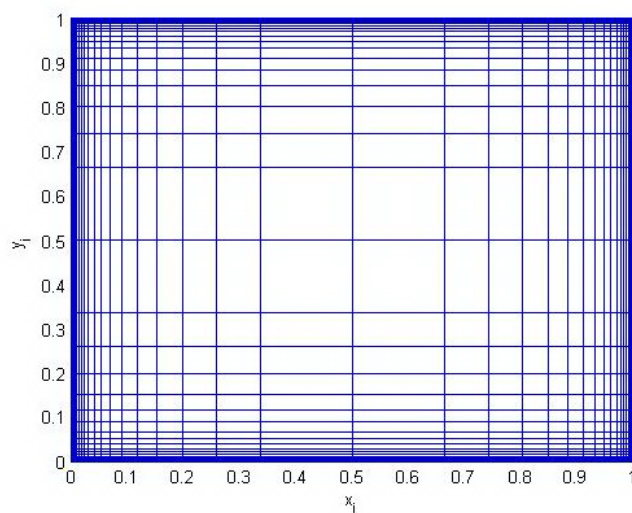
$$\left\{ \begin{array}{ll} h_{y,1} = h\sqrt{\varepsilon_1}, \\ h_{y,i} = h^2\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-2}, & i = 2, \dots, M_y - 1, \\ h_{y,M_y} = 1/2 - h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{M_y-2}, \\ h_{y,M_y+1} = 1/2 - h\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{M_y-2}, \\ h_{y,2M_y-i} = h^2\sqrt{\varepsilon_1}(1+h)^{i-1}, & i = M_y - 2, \dots, 1, \\ h_{y,2M_y} = h\sqrt{\varepsilon_1}, \end{array} \right.$$

kao i

$$h_{y,i} \leq hy, \quad y \in [y_{i-1}, y_i], \quad i = 2, \dots, 2M_y - 1.$$

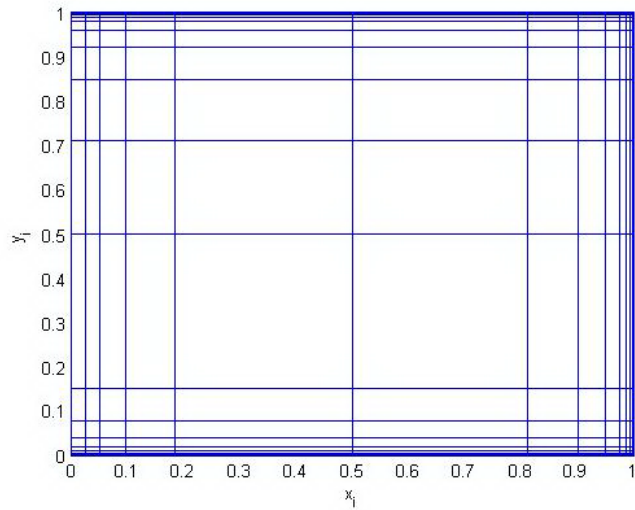


Slika 4.5: Duranova mreža za  $h = 0.9$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ .

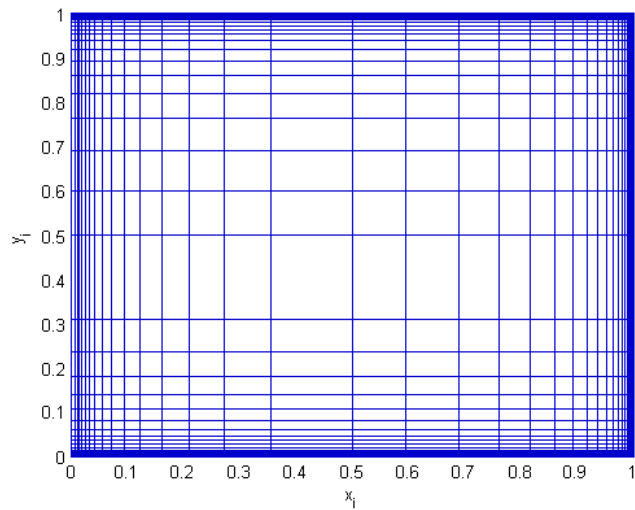


Slika 4.6: Duranova mreža za  $h = 0.3$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ .





Slika 4.7: Duranova mreža za  $h = 0.9$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ .



Slika 4.8: Duranova mreža za  $h = 0.3$ ,  $\tau_0 = \tau_1 = 4$ ,  $\tau_y = 8$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ .

## 4.5 Ocena greške na Duran-Šiškinovoj mreži

U ovom delu ćemo predstaviti lemu o standardnoj oceni greške interpolacije, kao i inverzne ocene, na koje ćemo se često pozivati prilikom razmatranja greške na Duran-Šiškinovoj mreži. Daćemo ocenu greške interpolacije, greške diskretizacije, kao i ocenu postupka u energetske normi.

**Lema 4.5.1.** [3] *Neka je  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  proizvoljan pravougaonik mreže  $\mathcal{T}$  i pretpostavimo da važi  $u \in H^2(R_{ij})$ . Neka  $u^I$  označava bilinearnu funkciju koja interpolira  $u$  u čvorovima od  $R_{ij}$ . Tada važi*

$$\|u - u^I\|_{L^2(R_{ij})} \leq C(h_{x,R_{ij}}^2 \|u_{xx}\|_{L^2(R_{ij})} + h_{x,R_{ij}} h_{y,R_{ij}} \|u_{xy}\|_{L^2(R_{ij})} + h_{y,R_{ij}}^2 \|u_{yy}\|_{L^2(R_{ij})}), \quad (4.24)$$

$$\|(u - u^I)_x\|_{L^2(R_{ij})} \leq C(h_{x,R_{ij}} \|u_{xx}\|_{L^2(R_{ij})} + h_{y,R_{ij}} \|u_{xy}\|_{L^2(R_{ij})}), \quad (4.25)$$

$$\|(u - u^I)_y\|_{L^2(R_{ij})} \leq C(h_{y,R_{ij}} \|u_{yy}\|_{L^2(R_{ij})} + h_{x,R_{ij}} \|u_{yx}\|_{L^2(R_{ij})}), \quad (4.26)$$

gde je  $h_{x,R_{ij}} = x_i - x_{i-1}$  i  $h_{y,R_{ij}} = y_i - y_{i-1}$ .

**Napomena 4.5.1.** [93] *Lema 4.5.1 važi i kada je  $u^I$  linearna funkcija koja interpolira funkciju  $u$  u čvorovima elementa  $K$ , gde je  $K$  trougao dobijen iz elementa  $R_{ij}$  dijagonalnim presecanjem, s tim da su  $h_{x,K}$  i  $h_{y,K}$  osnova i visina trougla  $K$ .  $\square$*

Ako na elementu  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  važi  $h_{x,R_{ij}} \leq hx$  i  $h_{y,R_{ij}} \leq hy$ , onda ćemo koristiti sledeće ocene, koje direktno slede iz (4.24)-(4.26)

$$\|u - u^I\|_{L^2(R_{ij})} \leq Ch^2(\|x^2 u_{xx}\|_{L^2(R_{ij})} + \|xy u_{xy}\|_{L^2(R_{ij})} + \|y^2 u_{yy}\|_{L^2(R_{ij})}), \quad (4.27)$$

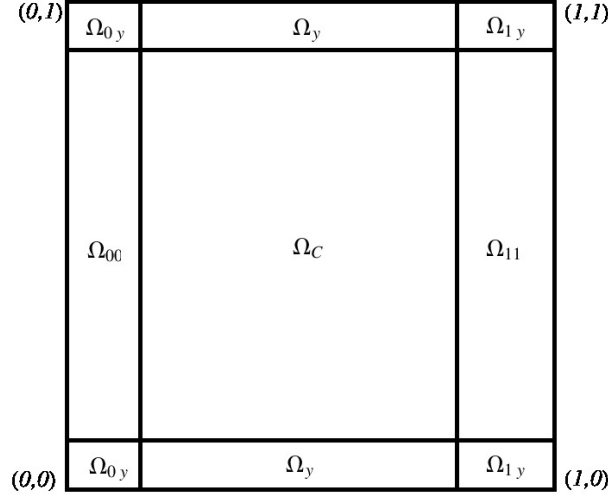
$$\|(u - u^I)_x\|_{L^2(R_{ij})} \leq Ch(\|x u_{xx}\|_{L^2(R_{ij})} + \|y u_{xy}\|_{L^2(R_{ij})}), \quad (4.28)$$

$$\|(u - u^I)_y\|_{L^2(R_{ij})} \leq Ch(\|x u_{yx}\|_{L^2(R_{ij})} + \|y u_{yy}\|_{L^2(R_{ij})}). \quad (4.29)$$

Takođe ćemo na  $R_{ij}$  koristiti sledeće ocene iz [23],

$$\|(u - u^I)_x\|_{L^2(R_{ij})} \leq \sqrt{\text{meas}(R_{ij})} \|u - u^I\|_{L^\infty(R_{ij})}, \quad (4.30)$$

$$\|(u - u^I)_x\|_{L^\infty(R_{ij})} \leq \|u_x\|_{L^\infty(R_{ij})} + \|u_x^I\|_{L^\infty(R_{ij})} \leq 2\|u_x\|_{L^\infty(R_{ij})}. \quad (4.31)$$



Slika 4.9: Podela domena pri analizi postupka konačnih elemenata na Duran-Šiškinovoj mreži

Sledeće inverzne ocene važe na Duran-Šiškinovoj i Duranovoj mreži u dve dimenzije, [29],

$$\begin{aligned} \|v_x\|_{L^2(R_{ij})} &\leq Ch_{x,R_{ij}}^{-1} \|v\|_{L^2(R_{ij})} \quad \text{za sve } v \in V^N, \\ \|v_y\|_{L^2(R_{ij})} &\leq Ch_{y,R_{ij}}^{-1} \|v\|_{L^2(R_{ij})} \quad \text{za sve } v \in V^N. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Prilikom analize greške postupka konačnih elemenata, domen  $\bar{\Omega}$  će biti podeljen na poddomene

$$\begin{aligned} \Omega_{0y} &= [0, x_{M_0}] \times [0, y_{M_y}] \cup [0, x_{M_0}] \times [y_{M_y+N/2}, 1], \\ \Omega_{00} &= [0, x_{M_0}] \times [y_{M_y}, y_{M_y+N/2}], \\ \Omega_y &= [x_{M_0}, x_{M_0+N/2}] \times [0, y_{M_y}] \cup [x_{M_0}, x_{M_0+N/2}] \times [y_{M_y+N/2}, 1], \\ \Omega_C &= [x_{M_0}, x_{M_0+N/2}] \times [y_{M_y}, y_{M_y+N/2}], \\ \Omega_{1y} &= [x_{M_0+N/2}, 1] \times [0, y_{M_y}] \cup [x_{M_0+N/2}, 1] \times [y_{M_y+N/2}, 1], \\ \Omega_{11} &= [x_{M_0+N/2}, 1] \times [y_{M_y}, y_{M_y+N/2}], \end{aligned}$$

prikazane na Slici 4.9.

Uvodimo i oznake  $\Omega_0 = \Omega_{00} \cup \Omega_{0y}$  i  $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{1y}$ .

### 4.5.1 Greška interpolacije

U ovom odeljku koristimo dekompoziciju datu u Teoremi 4.3.1 i uzimamo da je

$$u - u^N = \eta + \chi,$$

gde je  $u^N$  Galerkinova aproksimacija rešenja  $u$  problema (4.1) data sa

$$u^N = S^N + E_{10}^N + E_{11}^N + E_{20}^N + E_{21}^N + E_{31}^N + E_{32}^N + E_{33}^N + E_{34}^N,$$

$$\eta = \eta_S + \eta_{10} + \eta_{11} + \eta_{20} + \eta_{21} + \eta_{31} + \eta_{32} + \eta_{33} + \eta_{34},$$

$$\chi = \chi_S + \chi_{10} + \chi_{11} + \chi_{20} + \chi_{21} + \chi_{31} + \chi_{32} + \chi_{33} + \chi_{34},$$

gde su

$$\begin{aligned} \eta_S &= S - S^I, & \chi_S &= S^I - S^N, \\ \eta_j &= E_j - E_j^I, & \chi_j &= E_j^I - E_j^N, \end{aligned}$$

za  $j = 10, 11, 20, 21, 31, 32, 33, 34$ . Koristićemo i sledeće oznake

$$E_2 = E_{20} + E_{21}, \quad E_3^0 = E_{31} + E_{34}, \quad E_3^1 = E_{32} + E_{33}, \quad E_3 = E_3^0 + E_3^1,$$

a shodno tome i

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \eta_{20} + \eta_{21}, & \eta_3^0 &= \eta_{31} + \eta_{34}, \\ \eta_3^1 &= \eta_{32} + \eta_{33}, & \eta_3 &= \eta_3^0 + \eta_3^1. \end{aligned}$$

**Lema 4.5.2.** *Neka rešenje  $u$  problema (4.1)-(4.3) zadovoljava pretpostavke Teoreme 4.3.1 i neka  $u^I$  označava deo po deo bilinearnu funkciju koja interpolira  $u$  u čvorovima Duran-Šiškinove mreže (3.24), (4.21). Ako je  $p\tau_j \geq 2$  za  $j = 0, 1$  i  $\tau_y \geq 2$  tada važe sledeće ocene greške interpolacije*

$$\begin{aligned} \|u - u^I\|_{L^2(\Omega_C)} &\leq CN^{-2}, \\ \|u - u^I\|_{L^2(\Omega \setminus \Omega_C)} &\leq C(N^{-2} + N^{-1}h + h^2). \end{aligned}$$

**Dokaz:** Za regularni deo  $\eta_S$  na  $\Omega_C$ , koristeći (4.24) i (4.14), dobijamo

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_{L^2(\Omega_C)} &\leq C(N^{-2}\|S_{xx}\|_{L^2(\Omega_C)} + N^{-2}\|S_{xy}\|_{L^2(\Omega_C)} \\ &\quad + N^{-2}\|S_{yy}\|_{L^2(\Omega_C)}) \leq CN^{-2}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Grešku interpolacije  $\eta_{10}$  slojne komponente  $E_{10}$  ocenjujemo koristeći Teoremu 4.3.1, te je

$$\|\eta_{10}\|_{L^2(\Omega_C)} \leq 2\|E_{10}\|_{L^\infty(\Omega_C)} \leq Ce^{-p\mu_0 x_{M_0}} \leq Ce^{-p\mu_0 \tilde{\lambda}_0} = CN^{-p\tau_0}. \quad (4.34)$$

Slično ocenjujemo interpolacione greške ostalih slojnih komponenti i dobijamo

$$\|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_C)} \leq 2\|E_{11}\|_{L^\infty(\Omega_C)} \leq Ce^{-p\mu_1(1-x_{M_0+N/2})} \leq CN^{-p\tau_1}, \quad (4.35)$$

$$\|\eta_2\|_{L^2(\Omega_C)} \leq 2\|E_2\|_{L^\infty(\Omega_C)} \leq Ce^{-\delta y_{M_y}/\sqrt{\varepsilon_1}} \leq CN^{-\tau_y}, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \|\eta_3^0\|_{L^2(\Omega_C)} &\leq 2\|E_3^0\|_{L^\infty(\Omega_C)} = 2\|E_{31} + E_{34}\|_{L^\infty(\Omega_C)} \\ &\leq Ce^{-p\mu_0 x_{M_0}} e^{-\delta y_{M_y}/\sqrt{\varepsilon_1}} \leq CN^{-p\tau_0 - \tau_y}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_C)} \leq 2\|E_3^1\|_{L^\infty(\Omega_C)} \leq CN^{-p\tau_1 - \tau_y}. \quad (4.38)$$

Sada, ako pretpostavimo da je  $p\tau_0 \geq 2$ ,  $p\tau_1 \geq 2$  i  $\tau_y \geq 2$ , tada iz (4.33)-(4.38) sledi

$$\|u - u^I\|_{L^2(\Omega_C)} \leq CN^{-2}. \quad (4.39)$$

Na  $\Omega_0$  koristimo (4.14), (4.24) i (4.27) i dobijamo

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 &\leq C(h^4\|x^2 S_{xx}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 + h^4\|xy S_{xy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 \\ &\quad + h^4\|y^2 S_{yy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2) \leq Ch^4 x_{M_0} \leq Ch^4, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_{L^2(\Omega_{00})}^2 &\leq C(h^4\|x^2 S_{xx}\|_{L^2(\Omega_{00})}^2 + h^2 N^{-2}\|x S_{xy}\|_{L^2(\Omega_{00})}^2 \\ &\quad + N^{-4}\|S_{yy}\|_{L^2(\Omega_{00})}^2) \leq C(h^4 + h^2 N^{-2} + N^{-4}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Greške interpolacije  $\eta_{10}$  i  $\eta_{11}$  takođe ocenjujemo kombinujući (4.24) i (4.27) sa (4.15):

$$\|\eta_{10}\|_{L^2(\Omega_{00})}^2 \leq C\mu_0^{-1}(h^4 + h^2 N^{-2} + N^{-4}), \quad \|\eta_{10}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 \leq Ch^4 \mu_0^{-1}, \quad (4.42)$$

$$\|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_{00})}^2 \leq C\mu_1^{-1}(h^4 + h^2 N^{-2} + N^{-4}), \quad \|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 \leq Ch^4 \mu_1^{-1}. \quad (4.43)$$

Dalje, iz (4.16) imamo

$$\begin{aligned} \|\eta_2\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 &\leq C(h^4\|x^2(E_2)_{xx}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 + h^4\|xy(E_2)_{xy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 \\ &\quad + h^4\|y^2(E_2)_{yy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2) \leq Ch^4 \sqrt{\varepsilon_1} x_{M_0} \leq Ch^4 \varepsilon_1^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\|\eta_2\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C\|E_2\|_{L^\infty(\Omega_{00})} \leq CN^{-\tau_y}, \quad (4.45)$$

s tim da u drugoj nejednakosti koristimo postupak dat u (4.34). Koristeći pomenute tehnike i (4.17)-(4.20) dobijamo

$$\begin{aligned} \|\eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 &\leq C(h^4\|x^2(E_3^0)_{xx}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 + h^4\|xy(E_3^0)_{xy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 \\ &\quad + h^4\|y^2(E_3^0)_{yy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2) \leq Ch^4\mu_0^{-1}\sqrt{\varepsilon_1}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\|\eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C\|E_3^0\|_{L^\infty(\Omega_{00})} \leq CN^{-\tau_y}, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 &\leq C(h^4\|x^2(E_3^1)_{xx}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 + h^4\|xy(E_3^1)_{xy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2 \\ &\quad + h^4\|y^2(E_3^1)_{yy}\|_{L^2(\Omega_{0y})}^2) \leq Ch^4\mu_1^{-1}\sqrt{\varepsilon_1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C\|E_3^1\|_{L^\infty(\Omega_{00})} \leq CN^{-p\tau_1-\tau_y}. \quad (4.49)$$

Iz (4.40)-(4.49), uz pretpostavku da je  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$  i  $\tau_y \geq 2$ , sledi da je

$$\begin{aligned} \|u - u^I\|_{L^2(\Omega_0)} &\leq C(N^{-2} + hN^{-1} + h^2)(1 + \mu_0^{-1/2}) \\ &\leq C(N^{-2} + hN^{-1} + h^2). \end{aligned}$$

Slično se i na  $\Omega_1$  dobija

$$\begin{aligned} \|u - u^I\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C(N^{-2} + hN^{-1} + h^2)(1 + \mu_0^{-1/2}) \\ &\leq C(N^{-2} + hN^{-1} + h^2). \end{aligned}$$

Na  $\Omega_y$  važi  $\text{meas}(\Omega_y) \leq y_{M_y}$ . Za ocenu greške interpolacije  $\eta_S$  i  $\eta_2$  koristimo ocene (4.24), (4.27), (4.14) i (4.16):

$$\begin{aligned} \|\eta_S\|_{L^2(\Omega_y)}^2 &\leq C(N^{-4}\|S_{xx}\|_{L^2(\Omega_y)}^2 + N^{-2}h^2\|yS_{xy}\|_{L^2(\Omega_y)}^2 \\ &\quad + h^4\|y^2S_{yy}\|_{L^2(\Omega_y)}^2) \leq C(N^{-4} + h^2N^{-2} + h^4), \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \|\eta_2\|_{L^2(\Omega_y)}^2 &\leq C(N^{-4}\|(E_2)_{xx}\|_{L^2(\Omega_y)}^2 + N^{-2}h^2\|y(E_2)_{xy}\|_{L^2(\Omega_y)}^2 \\ &\quad + h^4\|y^2(E_2)_{yy}\|_{L^2(\Omega_y)}^2) \leq C\sqrt{\varepsilon_1}(N^{-4} + h^2N^{-2} + h^4). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ocene za komponente  $\eta_{10}$ ,  $\eta_{11}$ ,  $\eta_3$  dobijamo koristeći (4.15), (4.17)-(4.20) i argumente kao u (4.34):

$$\|\eta_{10}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\|E_{10}\|_{L^\infty(\Omega_y)}\sqrt{y_{M_y}} \leq CN^{-p\tau_0}, \quad (4.52)$$

$$\|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\|E_{11}\|_{L^\infty(\Omega_y)}\sqrt{y_{M_y}} \leq CN^{-p\tau_0}, \quad (4.53)$$

$$\|\eta_3\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\|E_3\|_{L^\infty(\Omega_y)}\sqrt{y_{M_y}} \leq CN^{-p\tau_0-\tau_y}. \quad (4.54)$$

Sada, iz (4.50)-(4.54), uz pretpostavku da je  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$  i  $\tau_y \geq 2$ , dobijamo

$$\|u - u^I\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C(N^{-2} + hN^{-1} + h^2), \quad (4.55)$$

te je dokaz kompletiran. ■

**Lema 4.5.3.** *Neka su zadovoljene pretpostavke Leme 4.5.2. Tada se gradijent greške interpolacije može oceniti sa*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{1/2} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega_C)} &\leq C(\varepsilon_1^{1/2} N^{-1} + (\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} N^{-2}), \\ \varepsilon_1^{1/2} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega_0 \cup \Omega_1)} &\leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} (N^{-1} + h), \\ \varepsilon_1^{1/2} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega_y)} &\leq CN^{-2} + C\varepsilon_1^{1/4} (N^{-1} + h), \\ \varepsilon_1^{1/2} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} (N^{-1} + h) + CN^{-2}. \end{aligned}$$

**Dokaz:** Za regularni deo greške interpolacije, koristeći Lemu 4.5.1, dobijamo

$$\begin{aligned} \|\partial_x \eta_S\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \sum_{R_{ij} \subseteq \Omega} (h_{x,R_{ij}} \|S_{xx}\|_{L^2(R_{ij})} + h_{y,R_{ij}} \|S_{xy}\|_{L^2(R_{ij})}) \\ &\leq C(h + N^{-1}), \\ \|\partial_y \eta_S\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \sum_{R_{ij} \subseteq \Omega} (h_{y,R_{ij}} \|S_{yy}\|_{L^2(R_{ij})} + h_{x,R_{ij}} \|S_{xy}\|_{L^2(R_{ij})}) \\ &\leq C(h + N^{-1}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Na  $\Omega_C$  koristimo ocene prvih izvoda date u Teoremi 4.3.1 i inverzne ocene (4.32) iz čega sledi

$$\begin{aligned} \|\partial_x \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_C)} &\leq \|\partial_x E_{10}\|_{L^2(\Omega_C)} + \|\partial_x (E_{10})^I\|_{L^2(\Omega_C)} \\ &\leq C\sqrt{\mu_0} N^{-p\tau_0} + CN^{-1}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\|\partial_y \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_C)} \leq C\mu_0^{-1/2} N^{-p\tau_0} + CN^{1-p\tau_0}. \quad (4.58)$$

Koristeći slične argumente kao malopre i  $\tau_y \geq 2$ ,  $p\tau_j \geq 2$  za  $j = 0, 1$ , dobi-

jamo sledeće ocene

$$\begin{aligned} \|\partial_x \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_C)} &\leq \|\partial_x E_{11}\|_{L^2(\Omega_C)} + \|\partial_x (E_{11})^I\|_{L^2(\Omega_C)} \\ &\leq C\sqrt{\mu_1}N^{-p\tau_1} + CN^{1-p\tau_1} \leq C\sqrt{\mu_1}N^{-2} + CN^{-1}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \|\partial_y \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_C)} &\leq \|\partial_y E_{11}\|_{L^2(\Omega_C)} + \|\partial_y (E_{11})^I\|_{L^2(\Omega_C)} \\ &\leq C\mu_1^{-1/2}N^{-p\tau_1} + CN^{1-p\tau_1} \leq CN^{-1}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_C)} \leq C\varepsilon_1^{1/4}N^{-\tau_y} + CN^{1-\tau_y} \leq C\varepsilon_1^{1/4}N^{-2} + CN^{-1}, \quad (4.61)$$

$$\|\partial_y \eta_2\|_{L^2(\Omega_C)} \leq C\varepsilon_1^{-1/4}N^{-\tau_y} + CN^{1-\tau_y} \leq C\varepsilon_1^{-1/4}N^{-2} + CN^{-1}, \quad (4.62)$$

$$\|\partial_x \eta_3\|_{L^2(\Omega_C)} \leq C(\sqrt{\mu_0} + \sqrt{\mu_1})\varepsilon_1^{1/4}N^{-4} + CN^{-3}, \quad (4.63)$$

$$\|\partial_y \eta_3\|_{L^2(\Omega_C)} \leq C(\mu_0^{-1/2} + \mu_1^{-1/2})\varepsilon_1^{-1/4}N^{-4} + CN^{-3}. \quad (4.64)$$

Sumirajući sve ocene (4.56)-(4.64), pomnožene sa  $\varepsilon_1^{1/2}$  i koristeći (3.9), dobijamo

$$\sqrt{\varepsilon_1}\|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega_C)} \leq C(\varepsilon_1^{1/2}N^{-1} + (\varepsilon_1\mu_1)^{1/2}N^{-2}). \quad (4.65)$$

Treba napomenuti da se (4.65) posmatra na  $\Omega_C$ , te da se tada u oceni (4.56) ne pojavljuje  $h + N^{-1}$ , već samo  $N^{-1}$ .

Koristeći ocene (4.25), (4.26), (4.28), (4.29) sa (4.15) za  $\nabla\eta_{10}$  na  $\Omega_0$  dobijamo

$$\|\partial_x \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C\mu_0^{1/2}(N^{-1} + h), \quad \|\partial_y \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C\mu_0^{-1/2}(N^{-1} + h), \quad (4.66)$$

dok za  $\nabla\eta_3^0$  na  $\Omega_{0y}$  iz (4.17), (4.18) dobijamo

$$\|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq C\mu_0^{1/2}\varepsilon_1^{1/4}h, \quad \|\partial_y \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq C\mu_0^{-1/2}\varepsilon_1^{-1/4}h. \quad (4.67)$$

Slično imamo da je

$$\|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq Ch\varepsilon_1^{1/4}, \quad (4.68)$$

kao i

$$\|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq CN^{-\tau_y}(h + \varepsilon_1^{-1/4}N^{-1}). \quad (4.69)$$



Da bismo ocenili preostale parcijalne izvode komponenti greške interpolacije koristimo inverzne ocene (4.32), te dobijamo

$$\|\partial_y \eta_2\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C \varepsilon_1^{-1/4} N^{-\tau_y} + C N^{1-\tau_y}, \quad (4.70)$$

$$\|\partial_y \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C \mu_1^{-1/2} N^{-p\tau_1} + C N^{1-p\tau_1}, \quad (4.71)$$

$$\|\partial_y \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C \mu_0^{-1/2} \varepsilon_1^{-1/4} N^{-\tau_y} + C N^{1-p\tau_0-\tau_y}, \quad (4.72)$$

$$\|\partial_y \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C \mu_1^{-1/2} \varepsilon_1^{-1/4} N^{-\tau_y} + C N^{1-p\tau_1-\tau_y}. \quad (4.73)$$

Dalje, iz (4.25), (4.26), kao i (4.28), (4.29), dobijamo

$$\|\partial_y \eta_2\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq Ch \varepsilon_1^{-1/4}, \quad (4.74)$$

a onda slično i sledeće nejednakosti

$$\|\partial_x \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C \mu_1^{1/2} (h + N^{-1}), \quad (4.75)$$

$$\|\partial_x \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq C \varepsilon_1^{1/4} \mu_1^{1/2} h, \quad (4.76)$$

$$\|\partial_y \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq C \varepsilon_1^{-1/4} \mu_1^{-1/2} h, \quad (4.77)$$

$$\|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C \mu_0^{1/2} N^{-\tau_y} (\varepsilon_1^{1/4} h + \varepsilon_1^{-1/4} N^{-1}), \quad (4.78)$$

$$\|\partial_x \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C \mu_1^{1/2} N^{-\tau_y} (\varepsilon_1^{1/4} h + \varepsilon_1^{-1/4} N^{-1}). \quad (4.79)$$

Množeći (4.56) i (4.66)-(4.79) sa  $\sqrt{\varepsilon_1}$  i koristeći (3.8), kao i pretpostavke da je  $p\tau_j \geq 2$  za  $j = 0, 1$  i  $\tau_y \geq 2$ , na  $\Omega_0$  dobijamo

$$\sqrt{\varepsilon_1} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} (h + N^{-1}).$$

Na  $\Omega_1$  koristeći (4.25), (4.26), (4.28), (4.29) sa (4.15) dobijamo

$$\|\partial_x \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C \mu_1^{1/2} (N^{-1} + h), \quad \|\partial_y \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C \mu_1^{-1/2} (N^{-1} + h), \quad (4.80)$$

dok iz (4.17), (4.18) sledi

$$\|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C \mu_0^{1/2} \varepsilon_1^{1/4} h N^{-p\tau_0}, \quad (4.81)$$

$$\|\partial_y \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C \mu_0^{-1/2} \varepsilon_1^{-1/4} h N^{-p\tau_0}, \quad (4.82)$$

a iz (4.19), (4.20)

$$\|\partial_x \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C \mu_1^{1/2} \varepsilon_1^{1/4} h, \quad \|\partial_y \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C \mu_1^{-1/2} \varepsilon_1^{-1/4} h. \quad (4.83)$$

Slično se dobija

$$\|\partial_x \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\mu_0^{1/2} N^{-p\tau_0} (h + N^{-1}), \quad (4.84)$$

$$\|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch\varepsilon_1^{1/4} + CN^{-1}\varepsilon_1^{-1/4}, \quad (4.85)$$

$$\|\partial_y \eta_2\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C\varepsilon_1^{-1/4} h N^{-\tau_y}, \quad (4.86)$$

$$\|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\varepsilon_1^{1/4} \mu_0^{1/2} h N^{-\tau_y} + C\varepsilon_1^{-1/4} \mu_0^{1/2} N^{-1-\tau_y}, \quad (4.87)$$

$$\|\partial_x \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\varepsilon_1^{1/4} \mu_1^{1/2} h N^{-\tau_y} + C\varepsilon_1^{-1/4} \mu_1^{1/2} N^{-1-\tau_y}, \quad (4.88)$$

$$\|\partial_y \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C\mu_0^{-1/2} h. \quad (4.89)$$

Koristeći inverzne ocene (4.32), dobijamo

$$\|\partial_y \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\mu_0^{-1/2} N^{-p\tau_0} + CN^{1-p\tau_0}, \quad (4.90)$$

$$\|\partial_y \eta_2\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\varepsilon_1^{-1/4} N^{-\tau_y} + CN^{1-\tau_y}, \quad (4.91)$$

$$\|\partial_y \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\varepsilon_1^{-1/4} \mu_0^{-1/2} N^{-p\tau_0-\tau_y} + CN^{1-p\tau_0-\tau_y}, \quad (4.92)$$

$$\|\partial_y \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\varepsilon_1^{-1/4} \mu_1^{-1/2} N^{-\tau_y} + CN^{1-\tau_y}. \quad (4.93)$$

Množeći (4.56) i (4.80)-(4.93) sa  $\sqrt{\varepsilon_1}$  i koristeći (3.8), kao i pretpostavke  $\tau_y \geq 2$ ,  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$ , na  $\Omega_1$  imamo sledeću ocenu

$$\sqrt{\varepsilon_1} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} (h + N^{-1}).$$

Na  $\Omega_y$ , koristeći ocene (4.25), (4.26), (4.28), (4.29) u kombinaciji sa ocenama iz Teoreme 4.3.1, važi

$$\|\partial_y \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\mu_0^{1/2} N^{-1-p\tau_0} + C\mu_0^{-1/2} h N^{-p\tau_0}, \quad (4.94)$$

$$\|\partial_y \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\mu_1^{1/2} N^{-1-p\tau_1} + C\mu_1^{-1/2} h N^{-p\tau_1}, \quad (4.95)$$

$$\|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_1^{1/4} (h + N^{-1}), \quad (4.96)$$

$$\|\partial_y \eta_2\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_1^{-1/4} (h + N^{-1}), \quad (4.97)$$

dok nam inverzne ocene daju sledeće

$$\|\partial_x \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\mu_0^{1/2} N^{-p\tau_0} + CN^{1-p\tau_0}, \quad (4.98)$$

$$\|\partial_x \eta_{11}\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\mu_1^{1/2} N^{-p\tau_1} + CN^{1-p\tau_1}, \quad (4.99)$$

$$\|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\mu_0^{1/2} \varepsilon_1^{1/4} N^{-p\tau_0} + CN^{1-p\tau_0}, \quad (4.100)$$

$$\|\partial_x \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\mu_1^{1/2} \varepsilon_1^{1/4} N^{-p\tau_1} + CN^{1-p\tau_1}. \quad (4.101)$$

Na osnovu (4.30) i (4.31) važi

$$\|\partial_y \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_y)} \leq 2\sqrt{\text{meas}(\Omega_y)} \|(E_3^0)_y\|_{L^\infty(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_1^{-1/2} N^{-p\tau_0}, \quad (4.102)$$

$$\|\partial_y \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_y)} \leq 2\sqrt{\text{meas}(\Omega_y)} \|(E_3^1)_y\|_{L^\infty(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_1^{-1/2} N^{-p\tau_1}, \quad (4.103)$$

te iz (4.56), (4.94)-(4.103) i pretpostavki teoreme sledi ocena

$$\sqrt{\varepsilon_1} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega_y)} \leq CN^{-2} + C\varepsilon_1^{1/4}(N^{-1} + h),$$

što je i trebalo dokazati. ■

Direktna posledica Lema 4.5.2 i 4.5.3 je sledeće tvrđenje.

**Teorema 4.5.1.** *Ako su pretpostavke Teoreme 4.3.1 zadovoljene, onda na Duran-Šiškinovoj mreži (3.24), (4.21) za problem (4.1)-(4.3), pod pretpostavkama  $p\tau_j \geq 2$ ,  $j = 0, 1$ ,  $\tau_y \geq 2$ , greška interpolacije zadovoljava*

$$\|u - u^I\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}(N^{-1} + h) + C(N^{-2} + N^{-1}h + h^2).$$

## 4.5.2 Konvergencija u energetskej normi

**Teorema 4.5.2.** *Neka su pretpostavke Leme 4.5.2 zadovoljene. Tada se greška diskretizacije može oceniti sa*

$$\|\chi\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}(N^{-1} + h) + C(N^{-2} + N^{-1}h + h^2).$$

**Dokaz:** Neka je  $\chi = u^I - u^N$ . Koercitivnost bilinearne forme  $a(\cdot, \cdot)$  i Galerkinova ortogonalnost daju

$$\begin{aligned} \alpha \|\chi\|_E^2 &\leq a(\chi, \chi) = -a(\eta, \chi) \\ &= -\varepsilon_1(\nabla\eta, \nabla\chi) + \varepsilon_2(b\eta, \chi_x) + (\tilde{c}\eta, \chi), \end{aligned}$$

gde je  $\tilde{c} = \varepsilon_2 b' - c$ . Difuzioni i reakcioni deo mogu da se ocene sa Koši-Švarcovom nejednakošću

$$\begin{aligned} &|-\varepsilon_1(\nabla\eta, \nabla\chi) + (\tilde{c}\eta, \chi)| \\ &\leq \varepsilon_1 \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\chi\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\eta\|_{L^2(\Omega)} \|\chi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\{1, \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\Omega)}\} \|\eta\|_E \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Konvektivni deo na  $\Omega_C$  ocenjujemo koristeći Koši-Švarcovu nejednakost u kombinaciji sa inverznom nejednakošću i (4.39) i dobijamo

$$|\varepsilon_2(b\eta, \chi_x)_{\Omega_C}| \leq C\varepsilon_2 \|\eta\|_{L^2(\Omega_C)} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_C)} \leq C\varepsilon_2 N^{-1} \|\chi\|_E,$$

dok na  $\Omega_y$  iz sledećih ocena

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\partial_x\eta_S, \chi)_{\Omega_y}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x\eta_S\|_{L^2(\Omega_y)} \|\chi\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_2(h + N^{-1}) \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x\eta_2, \chi)_{\Omega_y}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x\eta_2\|_{L^2(\Omega_y)} \|\chi\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_2\varepsilon_1^{1/4}(h + N^{-1}) \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\eta_{10}, \chi_x)_{\Omega_y}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_{10}\|_{L^2(\Omega_y)} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_2 N^{1-p\tau_0} \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\eta_{11}, \chi_x)_{\Omega_y}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_y)} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_2 N^{1-p\tau_0} \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\eta_3, \chi_x)_{\Omega_y}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_3\|_{L^2(\Omega_y)} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_y)} \leq C\varepsilon_2 N^{1-p\tau_0-\tau_y} \|\chi\|_E, \end{aligned}$$

dobijamo

$$|\varepsilon_2(b\eta, \chi_x)_{\Omega_y}| \leq C\varepsilon_2(h + N^{-1}) \|\chi\|_E.$$

Na  $\Omega_0$ , na osnovu (4.66) važi

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\partial_x\eta_{10}, \chi)_{\Omega_0}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x\eta_{10}\|_{L^2(\Omega_0)} \|\chi\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C\varepsilon_2\mu_0^{1/2}(N^{-1} + h) \|\chi\|_E \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon_2}(N^{-1} + h) \|\chi\|_E, \end{aligned}$$

dok iz (4.56), (4.67), (4.68) i (4.69) sledi

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\partial_x\eta_S, \chi)_{\Omega_0}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x\eta_S\|_{L^2(\Omega_0)} \|\chi\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C\varepsilon_2(h + N^{-1}) \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x\eta_3^0, \chi)_{\Omega_{0y}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x\eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{0y})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq C\varepsilon_1^{1/4}\sqrt{\varepsilon_2}h \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x\eta_2, \chi)_{\Omega_{0y}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x\eta_2\|_{L^2(\Omega_{0y})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq C\varepsilon_1^{1/4}\varepsilon_2h \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x\eta_2, \chi)_{\Omega_{00}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x\eta_2\|_{L^2(\Omega_{00})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C\varepsilon_2 N^{-1} \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Zatim, na osnovu (3.11), (4.43) i (4.48), imamo

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\eta_{11}, \chi_x)_{\Omega_0}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_0)} \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq C\varepsilon_2\varepsilon_1^{-1/2}\mu_1^{-1/2}(h^2 + hN^{-1} + N^{-2}) \|\chi\|_E \\ &\leq C\sqrt{\varepsilon_2}(h^2 + hN^{-1} + N^{-2}) \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\eta_3^1, \chi_x)_{\Omega_{0y}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{0y})} \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_{0y})} \leq C\sqrt{\varepsilon_2}h^2 \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Iz (4.30) i (4.31) sledi da je

$$\|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq C\mu_0 N^{-\tau_y}, \quad \|\partial_x \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{00})} \leq CN^{-\tau_y},$$

te iz (3.10) dobijamo sledeće ocene

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_3^0, \chi)_{\Omega_{00}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{00})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{00})} \\ &\leq C\varepsilon_2 \mu_0 N^{-\tau_y} \|\chi\|_E \leq CN^{-\tau_y} \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_3^1, \chi)_{\Omega_{00}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{00})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{00})} \\ &\leq C\varepsilon_2 N^{-\tau_y} \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Analiza sprovedena na  $\Omega_0$ , uz pretpostavke  $\tau_y \geq 2$  i  $p\tau_1 \geq 2$  daje

$$|\varepsilon_2(b\eta_x, \chi)_{\Omega_0}| \leq C(\sqrt{\varepsilon_2}(N^{-1} + h) + N^{-2}) \|\chi\|_E.$$

Na  $\Omega_1$  na osnovu (4.56), (4.81), (4.84), kao i (3.10) dobijamo

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_S, \chi)_{\Omega_1}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_S\|_{L^2(\Omega_1)} \|\chi\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\varepsilon_2(h + N^{-1}) \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_3^0, \chi)_{\Omega_{1y}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{1y})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C\varepsilon_1^{1/4} \sqrt{\varepsilon_2} h N^{-p\tau_0} \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_{10}, \chi)_{\Omega_1}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_1)} \|\chi\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\sqrt{\varepsilon_2} N^{-p\tau_0} (h + N^{-1}) \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Kako iz (4.24) i (4.27) sledi da je  $\|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\mu_1^{-1/2}(h^2 + hN^{-1} + N^{-2})$ ,  $\|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C\varepsilon_1^{1/4} \mu_1^{-1/2} h^2$ , a iz (4.28)  $\|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C\varepsilon_1^{1/4} h$ , onda važe sledeće ocene

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\eta_{11}, \chi_x)_{\Omega_1}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_1)} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\sqrt{\varepsilon_2}(h^2 + hN^{-1} + N^{-2}) \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\eta_3^1, \chi_x)_{\Omega_{1y}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{1y})} \|\chi_x\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C\sqrt{\varepsilon_2} h^2 \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_2, \chi)_{\Omega_{1y}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_{1y})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{1y})} \leq C\varepsilon_1^{1/4} \varepsilon_2 h \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Na osnovu (4.30) i (4.31) je

$$\|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\mu_0 N^{-p\tau_0 - \tau_y}, \quad \|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq CN^{-\tau_y},$$

pa iz (3.10) sledi

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_3^0, \chi)_{\Omega_{11}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_{11})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq CN^{-p\tau_0 - \tau_y} \|\chi\|_E, \\ |\varepsilon_2(b\partial_x \eta_2, \chi)_{\Omega_{11}}| &\leq C\varepsilon_2 \|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_{11})} \|\chi\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\varepsilon_2 N^{-\tau_y} \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Mera skupa  $\Omega_{11}$  se svodi samo na ocenu njegove dužine (dimenzije po  $x$ -osi). Zbog izbora vrednosti za  $M_1$ , važi da je  $x_{M_0+N/2} \leq 1 - \tilde{\lambda}_1 < x_{M_0+N/2+1}$ , pa se dužina intervala  $[x_{M_0+N/2}, 1]$  može oceniti sa

$$\begin{aligned} |[x_{M_0+N/2}, 1]| &= |[x_{M_0+N/2}, x_{M_0+N/2+1}]| + |[x_{M_0+N/2+1}, 1]| \\ &\leq |[x_{M_0+N/2}, x_{M_0+N/2+1}]| + |[1 - \tilde{\lambda}_1, 1]| = h_{x, M_0+N/2+1} + \tilde{\lambda}_1. \end{aligned}$$

Kako je  $h_{x, i+1} \leq h(1-x)$ , za svako  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = M_0 + N/2, \dots, M_0 + M_1 + N/2 - 2$ , tada se za  $x = 1 - \tilde{\lambda}_1$  dobija

$$h_{x, i+1} \leq h\tilde{\lambda}_1 < \tilde{\lambda}_1.$$

Dakle

$$\text{meas}(\Omega_{11}) \leq |[x_{M_0+N/2}, 1]| \leq 2\tilde{\lambda}_1 = C\mu_1^{-1} \ln N.$$

Kako je  $\|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq 2\sqrt{\text{meas}(\Omega_{11})}\|E_3^1\|_{L^\infty(\Omega_{11})} \leq C(\mu_1^{-1} \ln N)^{1/2}N^{-\tau_y}$ , na osnovu (3.11) dobijamo

$$|\varepsilon_2(b\eta_3^1, \chi_x)_{\Omega_{11}}| \leq C\varepsilon_2\|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_{11})} \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\|\chi_x\|_{L^2(\Omega_{11})} \leq C\sqrt{\varepsilon_2}(\ln N)^{1/2}N^{-\tau_y}\|\chi\|_E.$$

Pretpostavljajući da je  $\tau_y \geq 2$ , sledi  $(\ln N)^{1/2}N^{-\tau_y} < N^{-1}$  za  $N \geq 2$ .

Na osnovu prethodne analize za  $\tau_y \geq 2$  i  $p\tau_0 \geq 2$ , na  $\Omega_1$  važi ocena

$$|\varepsilon_2(b\eta_x, \chi)_{\Omega_1}| \leq C(\sqrt{\varepsilon_2}(N^{-1} + h) + N^{-2})\|\chi\|_E.$$

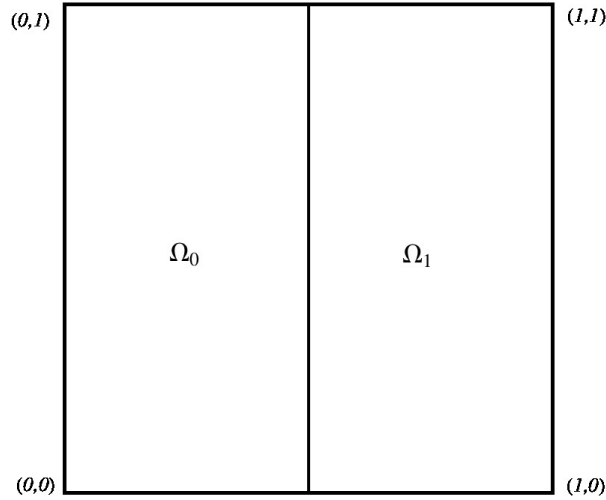
Sada je

$$\begin{aligned} \alpha\|\chi\|_E &\leq \max\{1, \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\Omega)}\}\|u - u^I\|_E + C\varepsilon_2N^{-1} \\ &\quad + C\varepsilon_2(N^{-1} + h) + C\sqrt{\varepsilon_2}(N^{-1} + h) \\ &\leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}(N^{-1} + h) + C(N^{-2} + N^{-1}h + h^2), \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. ■

**Teorema 4.5.3.** *Neka je  $u^N$  Galerkinova aproksimacija rešenja u problema (4.1)-(4.3) dobijena korišćenjem bilinearnih elemenata na Duran-Šiškinovoj mreži (3.24), (4.21). Ako su pretpostavke Teoreme 4.3.1 zadovoljene i važi  $p\tau_j \geq 2$  za  $j = 0, 1$  i  $\tau_y \geq 2$ , tada je*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}(N^{-1} + h) + C(N^{-2} + N^{-1}h + h^2).$$



Slika 4.10: Podela domena pri analizi postupka konačnih elemenata na Duranovoj mreži

**Napomena 4.5.2.** *Ako se u prethodnoj teoremi uvede pretpostavka  $h \leq CN^{-1}$  onda dobijamo sledeću ocenu greške*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} N^{-1} + CN^{-2},$$

*analognu oceni koja je dobijena u jednodimenzionalnom slučaju konvekcije-reakcije-difuzije u Teoremi 3.6.3, a istu sa ocenama koje slede iz Teorema 3.7.3 i 3.8.1 za tako izabrano  $h$ .*

## 4.6 Ocena greške na Duranovoj mreži

Prilikom analize greške, domen  $\bar{\Omega}$  ćemo podeliti na dva poddomena, prikazana na Slici 4.10

$$\Omega_0 = [0, 1/2] \times [0, 1], \quad \Omega_1 = [1/2, 1] \times [0, 1].$$

Ovde ćemo, kao i u prethodnom odeljku, dati tvrđenja o grešci interpolacije, diskretizacije, kao i grešci Galerkinovog postupka u energetskej normi.

Kao posledica Teoreme 4.3.1 dobijaju se sledeće ocene, koje ćemo koristiti u daljoj analizi.

**Lema 4.6.1.** *Postoji konstanta  $C$  takva da su zadovoljene sledeće apriorne ocene*

$$\begin{aligned}
\|u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq C\mu_0^3, & \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq C\mu_1^3, \\
\|u_{yy}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\varepsilon_1^{-3/2}, & \|x u_{xy}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\varepsilon_1^{-1/2}, \\
\|x u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq C\mu_0, & \|x u_{xx}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq C\mu_1, \\
\|x^2 u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C, & \|y^2 u_{yy}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C, \\
\|y u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq C\mu_0, & \|y u_{xy}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq C\mu_1, \\
\|u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 &\leq C\varepsilon_1^{-1/2}\mu_0, & \|u_{xy}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq C\varepsilon_1^{-1/2}\mu_1, \\
\|x y u_{xy}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C, & \|y u_{yy}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\varepsilon_1^{-1/2}.
\end{aligned}$$

#### 4.6.1 Greška interpolacije

Prilikom analiziranja postupka konačnih elemenata na Duranovoj mreži na elementu  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ ,  $i = 1, \dots, M_0 + M_1$ ,  $j = 1, \dots, 2M_y$ , korišćemo standardne ocene greške interpolacije date sa (4.24)-(4.26), kao i (4.27)-(4.29).

**Teorema 4.6.1.** *Ako su pretpostavke Teoreme 4.3.1 zadovoljene, tada na Duranovoj mreži (3.26), (4.23) važi sledeća ocena greške interpolacije*

$$\|u - u^I\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}h + Ch^2.$$

**Dokaz:** Na  $\Omega_0$ , koristeći (4.24), (4.27), ocene iz Leme 4.6.1 i definiciju mreže (3.26), (4.23) dobijamo

$$\begin{aligned}
\|u - u^I\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 &\leq Ch^4 \left( \mu_0^{-4} \|u_{xx}\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 \right. \\
&\quad \left. + \mu_0^{-2} \varepsilon_1 \|u_{xy}\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 + \varepsilon_1^2 \|u_{yy}\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 \right) \\
&\leq Ch^4 (\mu_0^{-1} + \mu_0^{-1} \sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_1}), \tag{4.104}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{2M_y-1} \|u - u^I\|_{L^2(R_{1j})}^2 &\leq Ch^4 \left( \mu_0^{-4} \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \mu_0^{-2} \|y u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|y^2 u_{yy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \leq Ch^4 (\mu_0^{-1} + C), \tag{4.105}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{M_0} \|u - u^I\|_{L^2(R_{i1} \cup R_{i,2M_y})}^2 &\leq Ch^4 \left( \|x^2 u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \varepsilon_1 \|x u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1^2 \|u_{yy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \leq Ch^4 (C + \sqrt{\varepsilon_1}), \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{M_0} \sum_{j=2}^{2M_y-1} \|u - u^I\|_{L^2(R_{ij})}^2 &\leq Ch^4 \left( \|x^2 u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|x y u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|y^2 u_{yy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \leq Ch^4. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Dalje, ocene (4.104)-(4.107) zajedno daju

$$\|u - u^I\|_{L^2(\Omega_0)} \leq Ch^2.$$

Na  $\Omega_1$ , sličnim razmatranjem, dobijamo

$$\|u - u^I\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^2.$$

Parcijalne izvode greške na  $\Omega_0$ , na osnovu (4.25)-(4.26), (4.28)-(4.29) i pomoću ocena iz Leme 4.6.1, ocenjujemo sa

$$\begin{aligned} \|(u - u^I)_x\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 &\leq Ch^2 \left( \mu_0^{-2} \|u_{xx}\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \|u_{xy}\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 \right) \leq Ch^2 \mu_0, \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{2M_y-1} \|(u - u^I)_x\|_{L^2(R_{1j})}^2 &\leq Ch^2 \left( \mu_0^{-2} \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|y u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \\ &\leq Ch^2 \mu_0, \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{M_0} \|(u - u^I)_x\|_{L^2(R_{i1} \cup R_{i,2M_y})}^2 &\leq Ch^2 \left( \|x u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \varepsilon_1 \|u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \\ &\leq Ch^2 \mu_0, \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{M_0} \sum_{j=2}^{2M_y-1} \|(u - u^I)_x\|_{L^2(R_{ij})}^2 &\leq Ch^2 \left( \|x u_{xx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|y u_{xy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \\ &\leq Ch^2 \mu_0, \end{aligned} \quad (4.111)$$

tako da iz (4.108)-(4.111) sledi

$$\|(u - u^I)_x\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq Ch^2 \mu_0. \quad (4.112)$$

Analogno dobijamo

$$\|(u - u^I)_x\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq Ch^2 \mu_1. \quad (4.113)$$

Ocenu parcijalnog izvoda po drugoj promenljivoj greške interpolacije na  $\Omega_0$  dobijamo koristeći iste ocene kao i pri izvođenju ocena parcijalnog izvoda po prvoj promenljivoj. Naime, važi

$$\begin{aligned} \|(u - u^I)_y\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 &\leq Ch^2 \left( \mu_0^{-2} \|u_{yx}\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_1 \|u_{yy}\|_{L^2(R_{11} \cup R_{1,2M_y})}^2 \right) \leq Ch^2 \varepsilon_1^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{2M_y-1} \|(u - u^I)_y\|_{L^2(R_{1j})}^2 &\leq Ch^2 \left( \mu_0^{-2} \|u_{yx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|yu_{yy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \\ &\leq Ch^2 \varepsilon_1^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.115)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{M_0} \|(u - u^I)_y\|_{L^2(R_{i1} \cup R_{i,2M_y})}^2 &\leq Ch^2 \left( \|xu_{yx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \varepsilon_1 \|u_{yy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \\ &\leq Ch^2 \varepsilon_1^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{M_0} \sum_{j=2}^{2M_y-1} \|(u - u^I)_y\|_{L^2(R_{ij})}^2 &\leq Ch^2 \left( \|xu_{yx}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \|yu_{yy}\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \right) \\ &\leq Ch^2 \varepsilon_1^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.117)$$

tako da iz (4.114)-(4.117) sledi

$$\|(u - u^I)_y\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \leq Ch^2 \varepsilon_1^{-1/2}. \quad (4.118)$$

Analogno se dobija

$$\|(u - u^I)_y\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \leq Ch^2 \varepsilon_1^{-1/2}. \quad (4.119)$$

Dalje, množeći (4.112), (4.113), (4.118), (4.119) sa  $\varepsilon_1$ , sumirajući, a potom korenujući, dobijamo

$$\sqrt{\varepsilon_1} \|\nabla(u - u^I)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} h,$$

čime je dokaz završen. ■

## 4.6.2 Konvergencija u energetskej normi

**Teorema 4.6.2.** *Ako su pretpostavke Teoreme 4.3.1 zadovoljene, tada na Duranovoj mreži (3.26), (4.23) greška diskretizacije zadovoljava*

$$\|u^I - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} h + Ch^2.$$

**Dokaz:** Neka je  $\chi = u^I - u^N$ . Difuzioni i reakcioni deo ocenjujemo na isti način kao u dokazu Teoreme 4.5.2.

Konvektivni deo na  $\Omega_0$  ocenjujemo koristeći Koši-Švarcovu nejednakost, Teoremu 4.6.1 i (3.10), te dobijamo

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(b\eta_x, \chi)_{\Omega_0}| &\leq C\varepsilon_2 \|\eta_x\|_{L^2(\Omega_0)} \|\chi\|_{L^2(\Omega_0)} \\ &\leq C\varepsilon_2 h^2 \mu_0 \|\chi\|_{L^2(\Omega_0)} \leq Ch^2 \|\chi\|_E. \end{aligned}$$

Da bismo ocenili konvektivni deo na  $\Omega_1$  koristimo sledeće ocene,

$$\begin{aligned} \|\partial_x \eta_S\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq Ch^2, & \|\partial_x \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq Ch^2, \\ \|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq Ch^2 \sqrt{\varepsilon_1}, & \|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &\leq Ch^2 \sqrt{\varepsilon_1}, \end{aligned}$$

dobijene iz (4.25)-(4.26) i (4.28)-(4.29). Na osnovu njih je

$$\begin{aligned} &|\varepsilon_2(b(\partial_x \eta_S + \partial_x \eta_{10} + \partial_x \eta_2 + \partial_x \eta_3^0), \chi)_{\Omega_1}| \\ &\leq C\varepsilon_2 \left( \|\partial_x \eta_S\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\partial_x \eta_{10}\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\partial_x \eta_2\|_{L^2(\Omega_1)} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_x \eta_3^0\|_{L^2(\Omega_1)} \right) \|\chi\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C\varepsilon_2 h^2 \|\chi\|_E. \end{aligned} \quad (4.120)$$

Parcijalnom integracijom dobijamo  $|\varepsilon_2(b\eta_x, \chi)_{\Omega}| = |\varepsilon_2(b\eta, \chi_x)_{\Omega}|$ . Kako je na osnovu (4.24) i (4.27)

$$\|\eta_{11}\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^2 \mu_1^{-1/2}, \quad \|\eta_3^1\|_{L^2(\Omega_1)} \leq Ch^2 \mu_1^{-1/2} \varepsilon_1^{1/4},$$

dobijamo

$$|\varepsilon_2(b(\eta_{11} + \eta_3^1, \chi_x)_{\Omega_1})| \leq C\varepsilon_2\mu_1^{-1/2}h^2\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}}\|\chi_x\|_{\Omega_1} \leq C\sqrt{\varepsilon_2}h^2\|\chi\|_E, \quad (4.121)$$

na osnovu (3.11). Iz (4.120) i (4.121) sledi ocena konvektivnog dela na  $\Omega_1$ , čime je dokaz završen.  $\blacksquare$

Kao direktnu posledicu Teoreme 4.6.1 i Teoreme 4.6.2 dobijamo sledeće tvrđenje.

**Teorema 4.6.3.** *Neka je  $u^N$  Galerkinova aproksimacija rešenja u problema (4.1)-(4.3) dobijena korišćenjem bilinearnih elemenata na Duranovoj mreži (3.26), (4.23). Ako su pretpostavke Teoreme 4.3.1 zadovoljene, tada je*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}h + Ch^2.$$

**Napomena 4.6.1.** *Pretpostavimo li da je  $h \leq CN^{-1}$ , onda važi ocena*

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2}N^{-1} + CN^{-2},$$

koju smo dobili i prilikom numeričkog rešavanja problema (4.1) Galerkinovim postupkom konačnih elemenata na Duran-Šiškinovoj mreži.  $\square$

**Napomena 4.6.2.** *Ocene iz Teorema 4.5.3 i 4.6.3 važe kako za bilinearne tako i za linearne elemente.  $\square$*

## 4.7 Numerički eksperimenti

U ovom delu eksperimentalno potvrđujemo teorijske rezultate dobijene u Glavi 4. Sva računanja su sprovedena korišćenjem programskog paketa MATLAB R12. Pri programiranju korišćeni su rezultati rada [2]. Diskretni problem je rešavan MATLAB-ovom biCGStab rutinom, [65]. Za parametre mreže smo uzimali  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$  i  $\tau_y = 4$ ,  $p = 0.5$ ,  $\delta = 0.5$ , kao i  $\gamma = 0.5$ . Uslovi (3.12), (4.22) i pretpostavke Teoreme 4.3.1 su zadovoljeni za sve izbore singularnih parametara  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$ . Svi integrali su računati korišćenjem  $3 \times 3$  Gaus-Ležandrovih kvadrature formula.

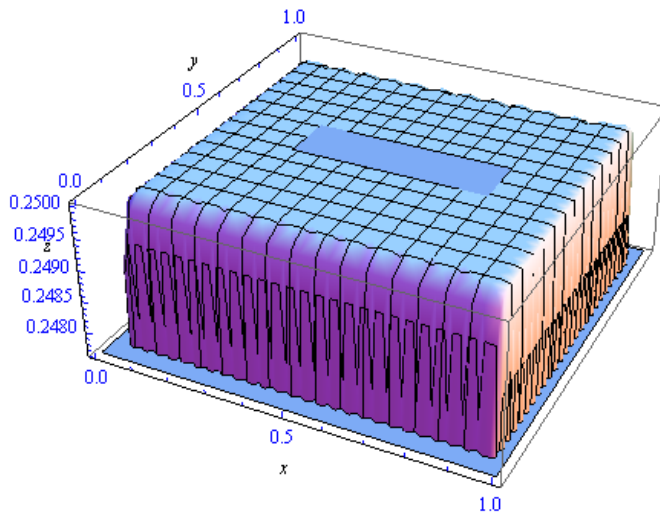
Konkretan problem koji ćemo ovde razmatrati je preuzet iz rada [95], i glasi

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1\Delta u + \varepsilon_2(3-x)u_x + u &= f(x,y) \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{na } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (4.122)$$

gde je funkcija  $f(x, y)$  birana tako da je

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(1 - e^{-\varepsilon_2 k_1 x / (2\varepsilon_1)})(1 - e^{-\varepsilon_2 k_2 (1-x) / (2\varepsilon_1)})(1 - e^{-y/\sqrt{\varepsilon_1}})(1 - e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon_1}}) \quad (4.123)$$

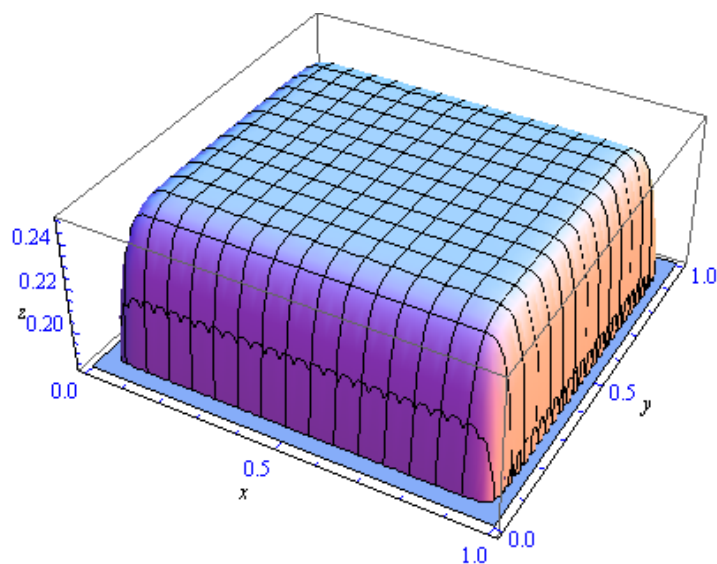
tačno rešenje i  $k_{1,2} = \mp 1 + \sqrt{1 + 16\varepsilon_1/\varepsilon_2^2}$ . Primeri rešenja za određene vrednosti perturbacionih parametara, gde se slojevi jasno vide, prikazani su na Slikama 4.11-4.13.



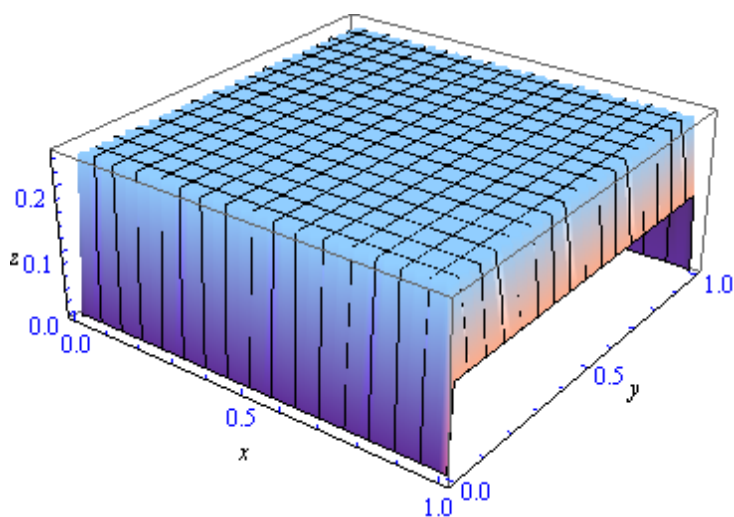
Slika 4.11: Tačno rešenje problema (4.122) za  $\varepsilon_1 = 10^{-4}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-2}$ .

Sa  $e_{bil}^N$  označavamo grešku u energetskej normi koja je dobijena prilikom računanja aproksimativnog rešenja polaznog problema sa bilinearnim elementima, a sa  $e_{lin}^N$  grešku dobijenu računanjem sa linearnim elementima, i to ili na Duran-Šiškinovoj ili Duranovoj mreži. U tabelama,  $N_{\xi}$  i  $N_B$  označavaju ukupan broj čvorova Šiškinove i Bahvalovljeve mreže za dvodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije, dok  $e_{\xi}^N$  i  $e_B^N$  predstavljaju grešku postupka u energetskej normi koja je dobijena korišćenjem bilinearnih elemenata.

Šiškinova mreža je konstruisana kao u [93], dok je Bahvalovljeva u  $x$  pravcu data sa (3.20), a u  $y$  pravcu je konstruisana na isti način kao i u  $x$  pravcu s tim da su tranzicione tačke  $\tau_y/\delta\sqrt{\varepsilon_1} \ln \mu_0$  i  $1 - \tau_y/\delta\sqrt{\varepsilon_1} \ln \mu_1$ . Prilikom numeričkog izračunavanja rešenja problema (4.122) na Duran-Šiškinovoj



Slika 4.12: Tačno rešenje problema (4.122) za  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-8}$ .



Slika 4.13: Tačno rešenje problema (4.122) za  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$  i  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .

mreži koristili smo parametar mreže  $h$  iz intervala  $(0, 1)$  i  $N = 32$ . Nismo uzimali u obzir veći broj čvorova u grubom delu mreže zbog obimnog

Tabela 4.1: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj mreži za (4.122) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ ,  $\tau_y = 4$  i  $N = 32$ .

| $h$  | $M_0$ | $M_1$ | $M_y$ | $e_{bil}^N$ | $e_{lin}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|------|-------|-------|-------|-------------|-------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.8  | 6     | 8     | 8     | 4.89(-4)    | 5.41(-4)    | 960                  | 3.12(-4)          | 1.88(-4) |
| 0.4  | 12    | 14    | 14    | 1.21(-4)    | 1.98(-4)    | 1260                 | 1.97(-4)          | 1.01(-4) |
| 0.2  | 25    | 29    | 29    | 2.75(-5)    | 4.12(-5)    | 3150                 | 6.32(-5)          | 3.83(-5) |
| 0.1  | 53    | 61    | 61    | 8.64(-6)    | 9.87(-6)    | 10010                | 2.61(-5)          | 9.69(-6) |
| 0.07 | 80    | 90    | 90    | 3.76(-6)    | 4.91(-6)    | 21576                | 9.85(-6)          | 4.63(-6) |
| 0.05 | 117   | 131   | 131   | 1.69(-6)    | 2.69(-6)    | 36960                | 5.41(-6)          | 2.12(-6) |

Tabela 4.2: Greška u energetskej normi na Duran-Šiškinovoj mreži za (4.122) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ ,  $\tau_0 = 4$ ,  $\tau_1 = 8$ ,  $\tau_y = 4$  i  $N = 32$ .

| $h$  | $M_0$ | $M_1$ | $M_y$ | $e_{bil}^N$ | $e_{lin}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|------|-------|-------|-------|-------------|-------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.8  | 6     | 6     | 8     | 5.74(-4)    | 8.06(-4)    | 888                  | 3.22(-4)          | 1.72(-4) |
| 0.4  | 12    | 12    | 14    | 1.19(-4)    | 2.35(-4)    | 1204                 | 1.83(-4)          | 9.93(-5) |
| 0.2  | 25    | 25    | 29    | 2.51(-5)    | 4.77(-5)    | 3084                 | 6.14(-5)          | 3.54(-5) |
| 0.1  | 53    | 53    | 61    | 7.70(-6)    | 1.23(-5)    | 9980                 | 2.43(-5)          | 9.63(-6) |
| 0.07 | 80    | 80    | 90    | 3.13(-6)    | 5.27(-6)    | 21526                | 9.62(-6)          | 4.92(-6) |
| 0.05 | 117   | 117   | 233   | 2.14(-6)    | 2.36(-6)    | 36900                | 5.35(-6)          | 2.15(-6) |

računanja potrebnog za dobijanje numeričkog rešenja. Pretpostavka je da i u dvodimenzionalnom slučaju postoji potreba za uzimanjem dovoljnog broja čvorova mreže u grubom delu Duran-Šiškinove mreže u cilju dobijanja rezultata koji su bliski ili čak bolji od rezultata koji su dobijeni na Bahvalovljevoj i Šiškinovoj mreži. Numerički rezultati su pokazali da je u dvodimenzionalnom slučaju i za  $N = 32$  to već zadovoljeno (Slike 4.14 i 4.15). Za parametre problema (4.122) smo koristili  $b_0 = 2$ ,  $c_0 = 1$ , a za konstantu  $B$  iz (3.7) smo uzeli  $B = 3$ .

Iz Tabela 4.1, 4.2, 4.3 i 4.4 jasno se vidi da su rezultati dobijeni korišćenjem bilinearnih elemenata bolji od rezultata dobijenih sa linearnim elementima. Data su i poređenja sa rezultatima dobijenim na Šiškinovoj i Bahvalovljevoj mreži. Kao i kod jednodimenzionalnih problema, i ovde se uočava da

Tabela 4.3: Greška u energetskej normi na Duranovoj mreži za (4.122) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .

| $h$  | $M_0$ | $M_1$ | $M_y$ | $e_{bil}^N$ | $e_{lin}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|------|-------|-------|-------|-------------|-------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.8  | 11    | 28    | 20    | 5.09(-5)    | 5.57(-5)    | 1980                 | 9.12(-5)          | 9.02(-5) |
| 0.4  | 21    | 50    | 36    | 1.64(-5)    | 2.61(-5)    | 4524                 | 5.27(-5)          | 5.10(-5) |
| 0.2  | 41    | 95    | 70    | 4.43(-6)    | 4.73(-6)    | 16112                | 6.42(-6)          | 6.17(-6) |
| 0.1  | 84    | 187   | 139   | 9.57(-7)    | 9.75(-7)    | 45400                | 1.01(-6)          | 9.87(-7) |
| 0.07 | 122   | 269   | 201   | 5.30(-7)    | 5.30(-7)    | 68208                | 6.18(-7)          | 5.96(-7) |
| 0.05 | 176   | 379   | 285   | 3.84(-7)    | 2.48(-7)    | 82024                | 2.72(-7)          | 2.50(-7) |

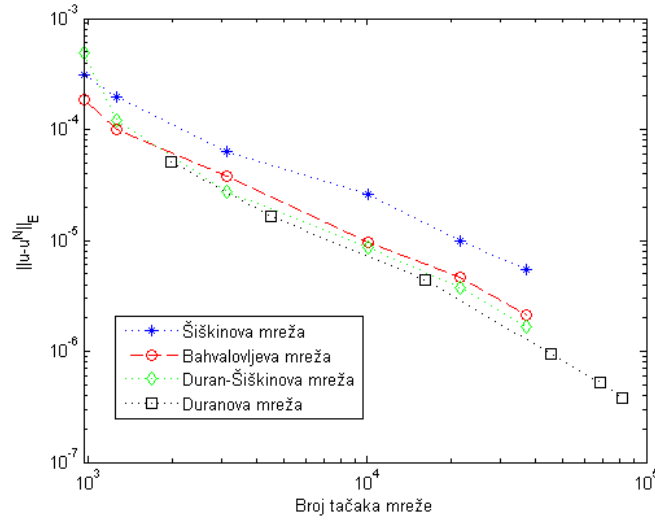
Tabela 4.4: Greška u energetskej normi na Duranovoj mreži za (4.122) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .

| $h$  | $M_0$ | $M_1$ | $M_y$ | $e_{bil}^N$ | $e_{lin}^N$ | $N_{\check{S}}(N_B)$ | $e_{\check{S}}^N$ | $e_B^N$  |
|------|-------|-------|-------|-------------|-------------|----------------------|-------------------|----------|
| 0.8  | 10    | 10    | 10    | 5.52(-4)    | 5.78(-4)    | 576                  | 5.60(-4)          | 5.68(-4) |
| 0.4  | 18    | 18    | 19    | 4.89(-5)    | 5.01(-5)    | 1820                 | 1.03(-4)          | 9.43(-5) |
| 0.2  | 36    | 36    | 38    | 1.21(-5)    | 1.34(-5)    | 4752                 | 3.02(-5)          | 1.98(-5) |
| 0.1  | 75    | 75    | 79    | 6.51(-6)    | 6.77(-6)    | 8760                 | 1.75(-5)          | 1.02(-5) |
| 0.07 | 111   | 111   | 116   | 2.07(-6)    | 2.31(-6)    | 27608                | 6.13(-6)          | 3.02(-6) |
| 0.05 | 160   | 160   | 167   | 9.75(-7)    | 9.98(-7)    | 56612                | 2.99(-6)          | 9.82(-7) |

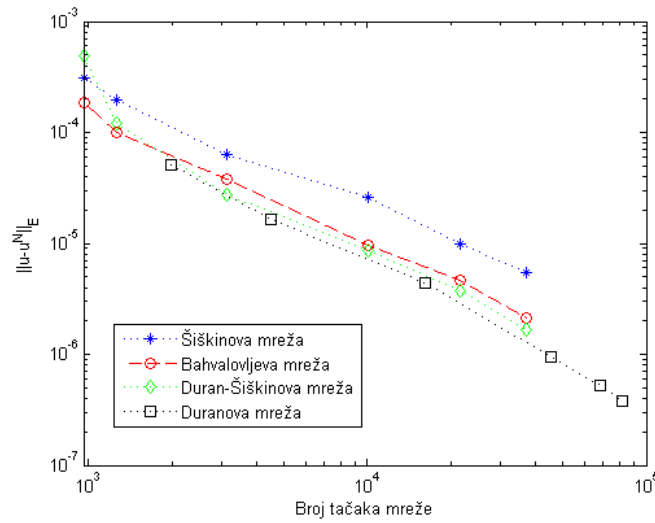
su rezultati dobijeni na Duranovoj i Duran-Šiškinovoj mreži bolji od rezultata na Šiškinovoj mreži i uporedivi sa rezultatima na Bahvalovljevoj mreži. Red konvergencije, pri korišćenju rekurzivno zadatih mreža, kao što su Duranova i Duran-Šiškinova, u dvodimenzionalnom slučaju ne može se računati primenom standardne formule, jer se broj čvorova mreže ne udvostručuje iz iteracije u iteraciju.

Dobijeni rezultati sa bilinearnim konačnim elementima, grafički predstavljeni na Slikama 4.14 i 4.15, jasno pokazuju prvi red konvergencije i potvrđuju dobijene teorijske rezultate.





Slika 4.14: Poređenje postupaka na problemu (4.122) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-10}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-3}$ .



Slika 4.15: Poređenje postupaka na problemu (4.122) sa  $\varepsilon_1 = 10^{-5}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-10}$ .



U ovoj doktorskoj disertaciji predstavljene su Bahvalovljeva, Duran-Šiškinova i Duranova mreža za jednodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije, kao i Duran-Šiškinova i Duranova mreža za dvodimenzionalni problem konvekcije-reakcije-difuzije. Dati problemi rešavani su Galerkinovim metodom konačnih elemenata na pomenutim slojno-adaptivnim mrežama. Prilikom analize greške numeričkog postupka dokazan je prvi red konvergencije u energetske normi.

Za singularno perturbovane probleme može se desiti da standardni postupak Galerkina produkuje oscilatorna numerička rešenja, čak i u slučaju korišćenja adaptivnih mreža. Stoga, pretpostavljamo da bi se dobijeni red konvergencije mogao poboljšati primenom „streamline-diffusion” postupka [23, 24, 33, 52, 88–90] konačnih elemenata. Postoje različite varijante ovog postupka [22, 53], a ono što ih karakteriše jeste da su stabilniji u odnosu na standardni Galerkinov postupak konačnih elemenata.

Kao primer navodimo „streamline-diffusion” postupak korišćen u [78] za jednodimenzionalni dvoparametarski singularno perturbovani problem. Kretnimo od standardne slabe formulacije problema (3.1)-(3.2) koja glasi:

$$\begin{cases} \text{naći } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tako da je} \\ a_G(u, v) := (\varepsilon_1 u', v') + (\varepsilon_2 b u' + c u, v) = (f, v) \text{ za svako } v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.1)$$

Za „streamline diffusion” metod konačnih elemenata potrebno je modifikovati Galerkinov bilinearni operator  $a_G$  uvodeći „lumping” za član  $(cu, v)$  u

(5.1):

$$a_{GL}(u, v) := \varepsilon_1(u', v') + \varepsilon_2(b u', v) + \sum_{k=1}^{N-1} \bar{h}_k c_k u_k v_k,$$

gde je  $c_k = c(x_k)$ ,  $u_k = u(x_k)$ ,  $v_k = v(x_k)$ ,  $\bar{h}_i = (h_i + h_{i+1})/2$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

Uvodimo  $a(u, v) = a_{GL}(u, v) + a_{ST}(u, v)$ , gde je

$$a_{ST}(u, v) := \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k (-\varepsilon_1 u'' + \varepsilon_2 b u' + c u) v' dx,$$

za parametar  $\delta_k$  koji ćemo kasnije odrediti, i biramo da je  $V^N$  prostor deo po deo linearnih elemenata na datoj mreži, te definišemo „streamline diffusion” metod na sledeći način:

$$\begin{cases} \text{naći } u^N \in V^N \text{ tako da je} \\ a(u^N, v^N) = f^N(v^N) \text{ za svako } v^N \in V^N, \end{cases}$$

gde je

$$f^N(v^N) := (f, v^N) + \sum_{k=1}^N \int_{x_{k-1}}^{x_k} \delta_k f(v^N)' dx.$$

Ovaj metod generiše diferencnu šemu

$$-\varepsilon_1(D^+ u_i - D^- u_i) + \alpha_i D^+ u_i + \beta_i D^- u_i + \gamma_i u_i = f^N(\varphi_i), \quad (5.2)$$

gde je

$$\begin{aligned} \alpha_i &= h_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varepsilon_2 b \varphi'_{i+1} \varphi_i + \delta_{i+1} \varepsilon_2 b \varphi'_{i+1} \varphi'_i + \delta_{i+1} c \varphi_{i+1} \varphi'_i) dx, \\ \beta_i &= h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varepsilon_2 b \varphi'_i \varphi_i + \delta_i \varepsilon_2 b \varphi'_i \varphi'_i + \delta_i c \varphi_{i-1} \varphi'_{i-1}) dx, \\ \gamma_i &= \bar{h}_i c_i + \delta_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} c \varphi'_i dx + \delta_{i+1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} c \varphi'_i dx, \end{aligned}$$

za  $i = 1, \dots, N-1$ .

Izbor parametra  $\delta_i$  je određen strukturom matrice sistema (5.2). Naime, zahtevamo da matrica sistema bude M-matrica. Ako je korak mreže dovoljno mali, Galerkinov postupak može da se primeni, to jest moguć je izbor  $\delta_i = 0$ , što sledi iz uslova

$$\alpha_{i-1}|_{\delta_i=0} \leq \varepsilon_1, \quad \text{tj.} \quad \varepsilon_2 h_i \hat{b}_i \leq \varepsilon_1,$$

gde je  $\hat{b}_i = (1/h_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} b \varphi_{i-1} dx$ . Inače, biramo  $\delta_i$  iz uslova  $\alpha_{i-1} = 0$ . Sa oznakama

$$\hat{c}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} c \varphi_i dx, \quad \tilde{b}_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} b dx,$$

ovaj uslov je ekvivalentan sa

$$\delta_i \left( \frac{\varepsilon_2 \tilde{b}_i}{h_i} + \hat{c}_i \right) = \varepsilon_2 \hat{b}_i.$$

Konačno, dobijamo

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \varepsilon_2 h_i \hat{b}_i \leq \varepsilon_1, \\ \frac{\varepsilon_2 \hat{b}_i h_i}{\varepsilon_2 \tilde{b}_i + \hat{c}_i h_i}, & \text{inače.} \end{cases}$$

U radu [78] autori su dokazali skoro drugi red konvergencije u maksimum normi za „streamline-diffusion” postupak sa linearnim elementima na Šiškinovoj mreži. Ako bi se goreopisani „streamline-diffusion” postupak primenio na mrežama razmatranim u tezi, očekujemo da bi analiza na Duranovoj i Duran-Šiškinovoj mreži bila vrlo slična sa analizom u radu [78], dok bi analiza na Bahvalovljevoj mreži zahtevala neku drugu tehniku.

Pored analize raznih stabilizacionih postupaka konačnih elemenata, bila bi zanimljiva analiza i na drugim mrežama, na primer datim u [20, 73].

Dobijeni red konvergencije može se poboljšati uvođenjem polinomnih funkcija višeg stepena kojima vršimo aproksimaciju rešenja posmatranih problema, kao u [15, 24]. Stoga, uvedimo prostor konačnih elemenata

$$V^{N,r} = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_{(x_{i-1}, x_i)} \in \mathbb{P}_r(x_{i-1}, x_i), i = 1, 2, \dots, N\}$$

koga čine deo po deo polinomi stepena  $r$ , gde je  $r \geq 1$ .

Generalizacija polinomima višeg reda na Bahvalovljevoj mreži (3.20) zahteva aproksimacione operatore koji imaju osobine (2.12)-(2.15), kao i dovoljno veliko  $\tau$  u (3.17) (tj.  $\tau \geq r + 1$ , gde je  $r$  stepen polinoma). Numerički

Tabela 5.1: Greška u energetskej normi i red konvergencije na mreži Bahvalovljevoj tipa za problem (3.61)

| $N$      | $r = 2$             |                     |           |       | $r = 3$             |                     |           |       |
|----------|---------------------|---------------------|-----------|-------|---------------------|---------------------|-----------|-------|
|          | $e_{\mathcal{R}}^N$ | $p_{\mathcal{R}}^N$ | $e^N$     | $p^N$ | $e_{\mathcal{R}}^N$ | $p_{\mathcal{R}}^N$ | $e^N$     | $p^N$ |
| $2^4$    | 7.310(-3)           | 1.959               | 1.242(-1) | 1.080 | 2.227(-3)           | 2.891               | 5.490(-2) | 1.827 |
| $2^5$    | 1.880(-3)           | 1.990               | 5.874(-2) | 1.564 | 3.001(-4)           | 2.972               | 1.548(-2) | 2.236 |
| $2^6$    | 4.734(-4)           | 1.997               | 1.987(-2) | 1.852 | 3.824(-5)           | 2.992               | 3.285(-3) | 2.662 |
| $2^7$    | 1.186(-4)           | 1.999               | 5.504(-3) | 1.959 | 4.808(-6)           | 2.991               | 5.192(-4) | 2.898 |
| $2^8$    | 2.967(-5)           | 1.999               | 1.416(-3) | 1.989 | 6.047(-7)           | 2.980               | 6.966(-5) | 2.973 |
| $2^9$    | 7.423(-6)           | 1.999               | 3.565(-4) | 1.997 | 7.665(-8)           | 2.971               | 8.872(-6) | 2.993 |
| $2^{10}$ | 1.857(-6)           | 2.000               | 8.929(-5) | 1.999 | 9.778(-9)           | 2.977               | 1.114(-6) | 2.998 |
| $2^{11}$ | 4.643(-7)           | 2.000               | 2.233(-5) | 2.000 | 1.242(-9)           | 2.989               | 1.395(-7) | 3.000 |
| $2^{12}$ | 1.161(-7)           | —                   | 5.584(-6) | —     | 1.565(-10)          | —                   | 1.743(-8) | —     |

testovi u Tabeli 5.1 pokazuju uniformnu konvergenciju za Galerkinov metod konačnih elemenata na predloženoj mreži sa redom  $\mathcal{O}(N^{-r})$ .

Za aproksimaciju rešenja konačnim elementima  $u^N \in V^{N,r} \cap H_0^1(\Omega)$  očekujemo sledeću ocenu greške

$$\|u - u^N\|_E \leq C(\varepsilon_2 + \varepsilon_1^{1/2})^{1/2} N^{-r} + CN^{-(r+1)}.$$

U [15] je dato da se aproksimacioni operator sa osobinama stabilnosti može konstruisati kao preslikavanje iz  $L^p(\Omega)$  na prostor splajn funkcija reda  $r + 1$ . Ako za element  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$  definišemo  $\Delta = (x_{i-r-1}, x_{i+r})$ , tada se ocene tipa (2.12) i (2.13) mogu koristiti sa  $k \leq r + 1$  (videti [15, Poglavlje 5, Teorema 4.4 i Teorema 4.5]). Šta više, ako je  $\Delta \subset [0, x_{N/4-1}] \cup [x_{3N/4+1}, 1]$ , tada iz [15, Poglavlje 7, Teorema 7.4] imamo  $H^1$ -stabilnost kao ocenu koja odgovara (2.14) i (2.15), ponovo za  $k \leq r + 1$ . Ovi argumenti bi trebalo da budu dovoljni da se dokaže analogon Teoreme 3.6.3 o grešci interpolacije. U analizi greške diskretizacije nenula član  $\varepsilon_1(\eta', \chi')$  u (3.36) se može oceniti korišćenjem Koši-Švarcove nejednakosti.

Pretpostavljamo da bi analiza na Duran-Šiškinovoj i Duranovoj mreži bila jednostavnija od analize na Bahvalovljevoj mreži, jer nisu potrebne dodatne pretpostavke o stabilnosti interpolanta, to jest mogao bi se koristiti Lagranžov interpolant.

Poslednjih godina prilikom istraživanja singularno perturbovanih problema postavlja se pitanje koja je prava norma za merenje ocene greške postupka konačnih elemenata. Neuravnotežena priroda standardne energetske

norme implicitno je pokazana u [106], gde je diskretna energetska norma za jednodimenzionalni problem reakcije-difuzije ograničena sa

$$C(\varepsilon^{1/2}(N^{-1} \ln N)^{p+1} + N^{-(p+1)}),$$

a za problem konvekcije-difuzije sa

$$C((N^{-1} \ln N)^{p+1} + N^{-p}),$$

gde je  $p$  stepen slobode konačnog elementa. Faktor  $\varepsilon^{1/2}$  nije prisutan u oceni za problem konvekcije-difuzije jer se  $\varepsilon$ -težinska  $H^1$  i  $L^2$  komponenta rešenja ponašaju kao  $\mathcal{O}(1)$ , što znači da je, za razliku od problema reakcije-difuzije, standardna energetska norma balansirana za problem konvekcije-difuzije.

Termin balansirana norma, koja je inače slabija od standardne  $\varepsilon_1$ -težinske norme, javlja se u [26, 42, 71, 72, 80]. Naime, ocena greške za postupak konačnih elemenata je prirodno uglavnom računata u odgovarajućoj energetskoj normi, ali u slučaju singularno perturbovanih problema ova norma nije uvek adekvatna. Kako slojne komponente rešenja (3.1) imaju sledeće osobine

$$\max\{\|e^{-p\mu_0 x}\|_E, \|e^{-p\mu_1(1-x)}\|_E\} \leq \begin{cases} C\varepsilon_1^{1/4}, & \varepsilon_2^2 \leq C\varepsilon_1, \\ C\varepsilon_2^{1/4}, & \varepsilon_1 \leq C\varepsilon_2^2, \end{cases}$$

potrebno je dodatno ispitati oštrinu ocene greške u Teoremama 3.6.3, 3.7.3 i 3.8.1. Za problem (3.1) balansirana norma bi bila

$$\|v\|_b := \mu_1^{-1}(v', v') + (v, v).$$

Za dvodimenzionalni problem reakcije-difuzije rešavan na Šiškinovoj mreži Galerkinovim metodom konačnih elemenata sa linearnim i bilinearnim elementima u [72] pokazana je sledeća ocena

$$\|u - u^N\|_{RD} \leq CN^{-1}(\ln N)^{3/2},$$

dok je za  $\mathbb{Q}_k$  elemente sa  $k > 1$  dokazan i analogni rezultat

$$\|u - u^N\|_{RD} \leq CN^{-p}(\ln N)^{p+1/2},$$

u balansiranoj normi  $\|v\|_{RD} = \varepsilon^{1/2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}$ .

Iako je  $\varepsilon$ -težinska norma prirodna norma za singularno perturbovane probleme konvekcije-difuzije sa eksponencijalnim slojevima, ona je ipak slaba

za opisivanje karakteristika ovih slojeva. Stoga je potrebno pomenute probleme posmatrati i u balansiranoj normi. Premda je analiza greške u balansiranoj normi za problem konvekcije-difuzije mnogo zahtevnija, u [26] je za „streamline-diffusion” postupak sa bilinearnim konačnim elementima dokazan sledeći rezultat

$$|||u - u^N|||_{CD} \leq CN^{-1}(\ln N)^{3/2},$$

u balansiranoj normi  $|||v|||_{CD} = \varepsilon^{1/2}\|v_x\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{1/4}\|v_y\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}$ .

Predložena poboljšanja implementirana kako za jednodimenzionalni, tako i za dvodimenzionalni problem razmatran u tezi, predstavljaju otvorene probleme za moguće dalje pravce istraživanja. U radu [74] mogu se naći još neka otvorena pitanja za singularno perturbovane probleme.



### Skupovi, prostori, norme

|  |   |
|--|---|
| $\mathbb{N}$                                     | skup prirodnih brojeva  |
| $\mathbb{R}$                                     | skup realnih brojeva  |
| $\mathbb{R}^N$                                   | vektorski prostor uređenih $N$ -torki nad poljem $\mathbb{R}$   |
| $\Omega, \bar{\Omega}$                           | otvoren i ograničen skup u $\mathbb{R}^N$ i njegovo zatvaranje  |
| $\partial\Omega$                                 | rub oblasti $\Omega$  |
| $C^k(\bar{\Omega})$                              | prostor realnih i $k$ -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na $\bar{\Omega}$   |
| $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$                     | prostor realnih i $k$ -puta $\alpha$ -Helder-neprekidno diferencijabilnih funkcija na $\bar{\Omega}$  |
| $C_0^\infty(\Omega)$                             | prostor realnih beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u $\Omega$  |
| $L^p(\Omega), \ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$           | prostor merljivih funkcija definisanih na $\Omega$ čiji je $p$ -ti stepen integrabilna funkcija, $p \in [1, \infty)$ , i odgovarajuća norma |
| $L^\infty(\Omega), \ \cdot\ _{L^\infty(\Omega)}$ | prostor merljivih i esencijalno ograničenih funkcija na $\Omega$ i odgovarajuća norma   |
| $L_{loc}^p(\Omega)$                              | prostor $p$ -lokalno integrabilnih funkcija na $\Omega$ , $p \in [1, \infty)$   |
| $W^{k,p}(\Omega)$                                | prostor Soboljeva funkcija definisanih na $\Omega$ sa izvodima najvišeg stepena $k$ u $L^p(\Omega)$ , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$         |

|  |   |
|--|---|
| $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$                           | skalarni proizvod na $L^2(\Omega)$  |
| $\ \cdot\ _{W^{k,p}(\Omega)},  \cdot _{W^{k,p}(\Omega)}$ | norma i seminorma na $W^{k,p}(\Omega)$  |
| $\ \cdot\ _E$  | energetska norma  |
| $H_0^k(\Omega)$  | kompletiranje prostora $C_0^\infty(\Omega)$ u odnosu na normu $\ \cdot\ _{H^k(\Omega)}$ |
| $H^k(\Omega)$  | prostor Soboljeva $W^{k,2}(\Omega)$   |
| $H_0^1(\Omega)$  | prostor Soboljeva funkcija iz $H^1(\Omega)$ sa $u(x) = 0$ , $x \in \partial\Omega$      |
| $\mathbb{P}_k(K)$  | prostor polinoma najvišeg stepena $k$ definisanih na skupu $K$                          |
| $\mathbb{Q}_k(K)$  | prostor polinoma definisan na strani 20   |
| $V^N$  | prostor konačnih elemenata  |
| $\mathcal{R}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$              | dopustivi skup perturbacionih parametara  |

### Operatori

|   |   |
|---|---|
| $\Delta, \nabla$  | Laplasov operator, gradijent  |
| $D^\alpha$  | uopšteni izvod funkcije reda $\alpha$   |
| $u_x, u_y, \partial_x u, \partial_y u$                                      | parcijalni izvod prvog reda funkcije $u$  |
| $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \partial_{xx} u, \partial_{xy} u, \partial_{yy} u$ | parcijalni izvod drugog reda funkcije $u$   |
| $u _\kappa$   | restrikcija funkcije $u$ na skup $\kappa$   |
| $\text{esssup}_{x \in \Omega}  u(x) $                                       | esencijalni supremum za $ u $ na $\Omega$ , tj. infimum konstanti $M$ za koje je $ u(x)  \leq M$ , $x \in \Omega$ , osim na skupu mere nula |
| $D^+, D^-$  | diferencni operator prvog reda  |
| $A$   | „stiffness” matrica   |
| $A_{ij}$  | element matrice $A$   |

### Funkcije

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $u$                          | rešenje konturnog problema                    |
| $b, \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ | koeficijent konvekcije                        |
| $c$                          | koeficijent reakcije                          |
| $f$                          | desna strana (izvor) diferencijalne jednačine |

|                   |  |
|-------------------|--|
| $l$               | linearna funkcionala   |
| $S$               | regularna komponente rešenja                                   |
| $E_j$             | slojna komponente rešenja u 1D                                 |
| $E_{ij}$          | slojna komponente rešenja u 2D                                 |
| $\kappa_j^N$      | korekciona funkcija definisana na strani 48                    |
| $a(\cdot, \cdot)$ | bilinearna forma   |
| $\nu(x)$          | spoljašnji jedinični normalni vektor za $x \in \partial\Omega$ |
| $\phi_0, \phi_1$  | generativne funkcije Bahvalovljeve mreže                       |

### Parametri i funkcije diskretizacije

|  |   |
|--|---|
| $\mathcal{T}$  | triangulacija (mreža) domena $\Omega$                         |
| $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_y, \Omega_C, \Omega_{0y}, \Omega_{1y}, \Omega_{00}, \Omega_{11}$ | poddomeni domena $\Omega$                                     |
| $\kappa, \kappa_i$   | elementi triangulacije  |
| $\text{meas}(\kappa)$  | Lebegova mera elementa $\kappa$                               |
| $\text{diam}(\kappa)$  | dijametar elementa $\kappa$                                   |
| $(K, P_K, \Sigma_K)$   | konačni element   |
| $u^N$  | numeričko rešenje za $u$                                      |
| $u^I$  | interpolaciona funkcija za $u$                                |
| $v^\pi$  | kvazi-interpolant funkcije $v$                                |
| $\eta$   | greška interpolacije  |
| $\chi$   | razlika između $u^I$ i $u^N$                                  |
| $e^N, d^N$   | greška u energetskej normi                                    |
| $e_{\mathcal{R}}^N, d_{\mathcal{R}}^N$   | greška u energetskej normi na dopustivom skupu $\mathcal{R}$  |
| $e_S^N$  | greška u energetskej normi dobijena na Šiškinovoj mreži       |
| $e_B^N$  | greška u energetskej normi dobijena na Bahvalovljevoj mreži   |
| $e_{D\check{S}}^N$   | greška u energetskej normi dobijena na Duran-Šiškinovoj mreži |
| $e_D^N$  | greška u energetskej normi dobijena na Duranovoj mreži        |

|   |  |
|---|--|
| $e_{bil}^N$   | greška u energetskej normi dobijena bilinearnim elementima                                   |
| $e_{lin}^N$   | greška u energetskej normi dobijena linearnim elementima                                     |
| $\varphi_i$   | bazne funkcije konačnodimenzionalnog prostora $V^N$ ( $i = 0, \dots, N$ )                    |
| $N_i$   | bazne funkcije na elementu   |
| $\varphi_{ij}^B, \varphi_{ij}^L$  | bilinearna i linearna globalna bazna funkcija  |
| $J^B, J^L$  | Jakobijan bilinearne i linearne transformacije   |
| $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  | singularno perturbovani parametri  |
| $N$   | ukupan broj čvorova mreže  |
| $N_B$   | broj čvorova Bahvalovljeve mreže   |
| $N_{\tilde{S}}$   | broj čvorova Šiškinove mreže   |
| $N_D$   | broj čvorova Duranove mreže  |
| $M_0, M_1$  | broj čvorova Duran-Šiškinove i Duranove mreže u slojevima uz $x = 0$ i $x = 1$ , respektivno |
| $\mu_0, \mu_1$  | rešenja karakteristične jednačine posmatranih problema                                       |
| $h_i$   | koraci mreže   |
| $h_{x,R_{ij}}, h_{y,R_{ij}}$  | koraci mreže u $x$ ( $y$ ) pravcu pravougaonika $R_{ij}$                                     |
| $\Delta_i$  | makroelement   |
| $H$   | prečnik unije dva susedna makroelementa  |
| $R_{ij}$  | pravougaonik mreže   |
| $h$   | parametar Duranove i Duran-Šiškinove mreže   |
| $\lambda_0, \lambda_1, \tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_y$ | tranzicione tačke mreže Šiškinovog tipa  |
| $\sigma_0, \sigma_1$  | tranzicione tačke mreže Bahvalovljevog tipa  |
| $p, \tau, \tau_0, \tau_1, \tau_y$   | parametri tranzicionih tačaka mreže  |
| $\delta_k$  | parametar „streamline-diffusion” metoda konačnih elemenata                                   |

### Konstante, parametri i ostale oznake

$\alpha$  konstanta koercitivnosti bilinearne forme  $a$

---

|                     |   |
|---------------------|---|
| $M_a$               | konstanta neprekidnosti bilinearne forme $a$                                  |
| $M_l$               | konstanta neprekidnosti linearne funkcionele $l$                              |
| $\delta_{ij}$       | Kronekerov simbol   |
| $p^N$               | red konvergencije   |
| $p_{\mathcal{R}}^N$ | red konvergencije na dopustivom skupu   |
| $p_{\text{DŠ}}^N$   | red konvergencije na Duran-Šiškinovoj mreži                                   |
| $p_D^N$             | red konvergencije na Duranovoj mreži  |
| $b_0, c_0, \gamma$  | pozitivne konstante   |
| $c_*$               | konstanta nezavisna od $x$ i $\xi_i$  |
| $C$                 | konstanta nezavisna od singularno perturbovanih parametara i parametara mreže |
| $\delta$            | pozitivna konstanta iz Teoreme 3.3.1  |
| $(x, y)$            | globalne koordinate   |
| $(\xi, \zeta)$      | lokalne koordinate  |
| $\mathcal{O}$       | Landauov simbol   |
| □                   | kraj napomene i primera   |
| ■                   | kraj dokaza   |



- [1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev spaces, Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] J. Albery, C. Carstensen, S. Funken, Remarks around 50 lines of Matlab: Short finite element implementation, Numerical Algorithms, 20 (1999) 117-137.
- [3] T. Apel, M. Dobrowolski, Anisotropic interpolation with applications to the finite element method, Computing, 47 (1992) 277-293.
- [4] O. Axelsson, V. A. Barker, Finite element solution of boundary value problems, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
- [5] D. Braess, Finite Elements, Cambridge University Press, 1997.
- [6] M. Brdar, H. Zarin, Convection-diffusion-reaction problems on a B-type mesh, PAMM, 13 (2013) 423-424.
- [7] M. Brdar, H. Zarin, A singularly perturbed problem with two parameters on a Bakhvalov-type mesh, Journal of Computational and Applied Mathematics, 292 (2016) 307-319.
- [8] M. Brdar, H. Zarin, On graded meshes for a two-parameter singularly perturbed problem, accepted for publication in Applied Mathematics and Computation.

- 
- [9] S. C. Brenner, L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag New York, 2002.
- [10] V. F. Butuzov, A singularly perturbed elliptic equation with two small parameters, *Differential Equations*, 12 (1976) 1261-1269.
- [11] J. Chen, R. E. O'Malley Jr, On asymptotic solution of a two-parameter boundary value problem of chemical reactor theory, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 26 (1974) 717-729.
- [12] P. Clément, Approximation by finite element functions using local regularization, *RAIRO Analyse Numerique*, R-2 (1975) 77-84.
- [13] R. W. Clough, The finite element method in plane stress analysis, *Proceedings of Second ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pennsylvania, 8 (1960) 345-378.
- [14] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49 (1943) 1-23.
- [15] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
- [16] M. Dobrowolski, *Finite Elemente*, University Textbook of Würzburg, 1998.
- [17] M. Dobrowolski, H.-G. Roos, A priori estimates for the solution of convection-diffusion problems and interpolation on Shishkin meshes, *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 16(4) (1997) 1001-1012.
- [18] J. Donea, A. Huerta, *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley and Sons, 2003.
- [19] R. G. Durán, A. Lombardi, Finite Element Approximation of Convection Diffusion Problems using Graded Meshes, *Applied Numerical Mathematics*, 56 (2006) 1314-1325.
- [20] R. G. Durán, A. L. Lombardi, M. I. Prieto, Superconvergence for finite element approximation of a convection-diffusion equation using graded meshes, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 32 (2012) 511-533.



- 
- [21] P. A. Farrell, A. F. Hegarty, J. J. H. Miller, E. O’Riordan, G. I. Shishkin, Robust Computational Techniques for Boundary Layers, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, FL, 2000.
- [22] L. P. Franca, G. Hauke, A. Masud, Revisiting stabilized finite element methods for the advective-diffusive equation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(13-16) (2006) 1560-1572.
- [23] S. Franz, Singularly perturbed problems with characteristic layers, PhD Thesis, TU Dresden, 2008.
- [24] S. Franz, SDFEM with non-standard higher-order finite elements for a convection-diffusion problem with characteristic boundary layers, *BIT Numerical Mathematics*, 51(3) (2011) 631-651.
- [25] S. Franz, Uniform Error Estimation for Convection-Diffusion Problems, Habilitationsschrift, 2014.
- [26] S. Franz, H.-G. Roos, Error estimation in a balanced norm for a convection-diffusion problem with two different boundary layers, *Calcolo*, 51(3) (2014) 423-440.
- [27] R. Glowinski, Numerical Methods for Fluids (Part 3), P. G. Ciarlet, J. L. Lions, Editors, Handbook of Numerical Analysis, Volume IX, Elsevier Science B. V, 2003.
- [28] J. L. Gracia, E. O’Riordan, M. L. Pickett, A parameter robust higher order numerical method for a singularly perturbed two-parameter problem, *Applied Numerical Mathematics*, 56 (2006) 962-980.
- [29] I. G. Graham, W. Hackbusch, S. A. Sauter, Finite Elements on Degenerate Meshes: Inverse-type Inequalities and Applications, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25(2) (2005) 379-407.
- [30] C. Grossmann, H.-G. Roos, M. Stynes, Numerical Treatment of Partial Differential Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [31] H. Han, R. B. Kellogg, Differentiability properties of solution of the equation  $-\varepsilon^2 \Delta u + ru = f(x, y)$  in a square, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 21(2) (1990) 394-408.

- 
- [32] Đ. Herceg, Fourth-order finite-difference method for boundary value problems with two small parameters, *Applied Mathematics and Computation*, 218(2) (2011) 616-627.
- [33] T. J. R. Hughes, A. Brooks, A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. In: T. J. R. Hughes (ed.) *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, pp. 19-35. AMD. Vol. 34, ASME, New York (1979).
- [34] R. B. Kellogg, M. Stynes, Corner singularities and boundary layers in a simple convection-diffusion problem, *Journal of Differential Equations*, 213 (2005) 81-120.
- [35] J. Kevorkian, J. D. Cole, *Perturbation methods in applied mathematics*, Springer-Verlag, New-York, 1981.
- [36] P. Knabner, L. Angermann, *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York, 2003.
- [37] N. V. Kopteva, E. O'Riordan, Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 7(3) (2010) 393-415.
- [38] N. V. Kopteva, M. Stynes, Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem, *Applied Numerical Mathematics*, 39 (2001) 47-60.
- [39] J. Li, A robust finite element method for a singularly perturbed elliptic problem with two small parameters, *Computers and Mathematics with Applications*, 36(7) (1998) 91-110.
- [40] J. Li, Convergence and superconvergence analysis of finite element methods on highly nonuniform anisotropic meshes for singularly perturbed reaction-diffusion problems, *Applied Numerical Mathematics*, 36 (2001) 129-154.
- [41] J. Li, I. M. Navon, Uniformly convergent finite element methods for singularly perturbed elliptic boundary value problems I: reaction-diffusion type, *Computers and Mathematics with Applications*, 35 (1998) 57-70.

- 
- [42] R. Lin, M. Stynes, A Balanced Finite Element Method for Singularly Perturbed Reaction–Diffusion Problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(5) (2012) 2729-2743.
- [43] T. Linß, Analysis of a Galerkin finite element method on a Bakhvalov-Shishkin mesh for a linear convection-diffusion problem, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 20 (2000) 621-632.
- [44] T. Linß, The necessity of Shishkin decompositions, *Applied Mathematics Letters*, 14 (2001) 891-896.
- [45] T. Linß, Layer-adapted meshes for convection-diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (2003) 1061-1105.
- [46] T. Linß, Layer-adapted meshes for one-dimensional reaction-convection-diffusion problems, *Journal of Numerical Mathematics*, 12(3) (2004) 193-205.
- [47] T. Linß, A Posteriori Error Estimation for a Singularly Perturbed Problem with Two Small Parameters, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 7(3) (2010) 491-506.
- [48] T. Linß, *Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [49] T. Linß, H.-G. Roos, Analysis of a finite-difference scheme for a singularly perturbed problem with two small parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 289 (2004) 355-366.
- [50] T. Linß, M. Stynes, Asymptotic analysis and Shishkin-type decomposition for an elliptic convection-diffusion problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 261 (2001) 604-632.
- [51] T. Linß, M. Stynes, Numerical methods on Shishkin meshes for linear convection-diffusion problems, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 190(28) (2001) 3527-3542.
- [52] T. Linß, M. Stynes, The SDFEM on Shishkin meshes for linear convection-diffusion problems, *Numerische Mathematik*, 87 (2001) 457-484.

- 
- [53] G. Lube, Stabilized fem for incompressible flow, critical review and new trends, European Conference on Computational Fluid Dynamics, P. Wesseling, E. Onate, J. Periaux, Eds. TU Delft, Dordrecht, The Netherlands, (2006) 1-20.
- [54] J. J. H. Miller, Singular Perturbation Problems in Chemical Physics, Analytic and Computational Methods, John Wiley and Sons, 1997.
- [55] J. J. H. Miller, E. O'Riordan, G. I. Shishkin, Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. World Scientific, Singapore, 1996.
- [56] K. W. Morton, Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems, Applied Mathematics and Mathematical Computation, Vol. 12, Chapman and Hall, 1996.
- [57] K. W. Morton, D. Mayers, Numerical Solution of Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 2005.
- [58] P. Nadukandi, E. Oñate, J. García-Espinosa, Stabilized Finite Element Methods for Convection-Diffusion-Reaction, Helmholtz and Stokes Problems, International Center for Numerical Methods in Engineering, 2012.
- [59] S. Natesan, J. L. Gracia, C. Clavero, Singularly perturbed boundary-value problems with two small parameters-a defect correction approach, Proceedings of the International Conference on Boundary and Interior Layers-Computational and Asymptotic Methods (BAIL 2004, ONERA-Centre de Toulouse, France) 1-6.
- [60] A. H. Nayfeh, Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1993.
- [61] R. E. O'Malley, Introduction to singular perturbations, Academic Press, New York-London, 1974.
- [62] R. E. O'Malley Jr, Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, p. viii+225, Springer, New York, NY, USA, 1991.

- 
- [63] E. O’Riordan, M. L. Pickett, G. I. Shishkin, Singularly perturbed problems modelling reaction-convection-diffusion process, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 3 (2003) 424-442.
- [64] E. O’Riordan, M. L. Pickett, G. I. Shishkin, Numerical methods for singularly perturbed elliptic problems containing two perturbation parameters, *Mathematical Modelling and Analysis, The Baltic Journal of Mathematical Applications, Numerical Analysis and Differential Equations*, 11(2) (2006) 199-212.
- [65] A. Quarteroni, A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [66] H.-G. Roos, Optimal convergence of basic schemes for elliptic boundary problems with strong parabolic layers, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 267 (2002) 194-208.
- [67] H.-G. Roos, Error estimates for linear finite elements on Bakhvalov-type meshes, *Applications of Mathematics*, 1 (2006) 63-72.
- [68] H.-G. Roos, Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: a survey covering 2008-2012, *ISRN Applied Mathematics*, 2012 (2012) 30 pages.
- [69] H.-G. Roos, T. Linß, Gradient recovery for singularly perturbed boundary value problems I: One-dimensional convection-diffusion, *Computing*, 66 (2001) 163-178.
- [70] H.-G. Roos, M. Schopf, Analysis of finite element methods on Bakhvalov-type meshes for linear convection-diffusion problems in 2D, *Applications of Mathematics*, 57 (2012) 97-108.
- [71] H.-G. Roos, M. Schopf, Error estimation in energy norms: Is it necessary to fit the mesh to boundary layers, in: *Numerical Analysis and Its Applications*, in: *Lecture Notes in Computer Science Volume*, 8236 (2013) 95-109.
- [72] H.-G. Roos, M. Schopf, Convergence and stability in balanced norms of finite element methods on Shishkin meshes for reaction-diffusion problems, *ZAMM*, (2015) 551-565.

- 
- [73] H.-G. Roos, T. Skalický, A comparison of the finite element method on Shishkin and Gartland-type meshes for convection-diffusion problems, *CWI Quarterly*, 10(3-4) (1997) 277-300.
- [74] H.-G. Roos, M. Stynes, Some Open Questions in the Numerical Analysis of Singularly Perturbed Differential Equations, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 15(4) (2015) 531-550.
- [75] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations Convection-Diffusion and Flow Problems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [76] H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin 2008.
- [77] H.-G. Roos, Lj. Teofanov, Z. Uzelac, Graded meshes for higher order FEM, *Journal of Computational Mathematics*, 33(1) (2015) 1-16.
- [78] H.-G. Roos, Z. Uzelac, The SDFEM for a convection–diffusion problem with two small parameters, *Computational Methods in Applied Mathematics*, 3 (2003) 443-458.
- [79] H. Schlichting, *Boundary layer theory*, 7th ed. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [80] M. Schopf, Error analysis of the Galerkin FEM in  $L^2$ -based norms for problems with layers, PhD Thesis, Technische Universität Dresden, 2014.
- [81] L. R. Scoot, S. Zhang, Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions, *Mathematics of Computation*, 54 (1990) 483-493.
- [82] G. I. Shishkin, A difference scheme for a singularly perturbed equation of parabolic type with a discontinuous initial condition, *Doklady Akademii nauk SSSR*, 300 (1988) 1066-1070 (in Russian); translation in *Soviet mathematics Doklady*, 37 (1988) 792-796.
- [83] G. I. Shishkin, A difference scheme for a singularly perturbed equation of parabolic type with a discontinuous boundary condition, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 28 (1988) 1649-1662 (in

- Russian); translation in USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 28 (1988) 32-41.
- [84] G. I. Shishkin, Grid approximation of elliptic convection-diffusion equations in an unbounded domain with various types of boundary layers, Doklady Akademii nauk, 392(4) (2003) 452-456.
- [85] G. I. Shishkin, Grid approximation of a singularly perturbed elliptic equation with convective terms in the presence of different types of boundary layers, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 45(1) (2005) 104-119.
- [86] G. I. Shishkin, Grid approximation of a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equation in an unbounded domain, Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 21(1) (2006) 67-94.
- [87] M. Stynes, E. O'Riordan, A uniformly convergent Galerkin method on a Shishkin mesh for a convection-diffusion problem, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 214(1) (1997) 36-54.
- [88] M. Stynes, L. Tobiska, The SDFEM for a convection-diffusion problem with a boundary layer: optimal error analysis and enhancement of accuracy, SIAM Journal on Numerical Analysis, 41(5) (2003) 1620-1642.
- [89] M. Stynes, L. Tobiska, Error estimates and numerical experiments for streamline-diffusion-type methods on arbitrary and Shishkin meshes, CWI Quarterly, 10(3-4) (1997) 337-352.
- [90] M. Stynes, L. Tobiska, Analysis of the streamline diffusion finite element method on a piecewise uniform mesh for a convection-diffusion problem with exponential layers, East-West Journal of Numerical Mathematics, 9(1) (2001) 59-76.
- [91] K. Surla, Z. Uzelac, Lj. Teofanov, The discrete minimum principle for quadratic spline discretization of a singularly perturbed problem, Mathematics and Computers in Simulation, 79 (2009) 2490-2505.
- [92] E. Süli, Finite element methods for partial differential equations, Lecture notes, Oxford University Computing Laboratory, 2002.

- 
- [93] Lj. Teofanov, Singularno perturbovani problemi sa dva mala parametra, doktorska disertacija, PMF, Novi Sad, 2008.
- [94] Lj. Teofanov, H.-G. Roos, An elliptic singularly perturbed problem with two parameters I: solution decomposition, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206 (2007) 1082-1097.
- [95] Lj. Teofanov, H.-G. Roos, An elliptic singularly perturbed problem with two parameters II: robust finite element solution, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 212 (2008) 374-389.
- [96] Lj. Teofanov, H. Zarin, Superconvergence analysis of a finite element method for a two-parameter singularly perturbed problem, *BIT Numerical Mathematics*, 49 (2009) 743765.
- [97] V. Thomée, From finite differences to finite elements. A short history of numerical analysis of partial differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128 (2001) 1-54.
- [98] R. Vulcanović, Mesh construction for discretization of singularly perturbed boundary value problems, Doctoral dissertation, University of Novi Sad, 1986.
- [99] R. Vulcanović, A higher-order scheme for quasilinear boundary value problems with two small parameters, *Computing*, 67 (2001) 287-303.
- [100] R. Vulcanović, Special meshes and higher-order schemes for singularly perturbed boundary value problems, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 31(1) (2001) 1-7.
- [101] L. G. Vulkov, J. J. H. Miller, G. I. Shishkin, *Analytical and Numerical Methods for Convection-Dominated and Singularly Perturbed Problems*, Nova Science Publishers, Inc. N. Y, 2000.
- [102] Y. Wu, N. Zhang, J. Yuan, A robust adaptive method for singularly perturbed convection-diffusion problem with two small parameters, *Computers and Mathematics with Applications*, 66 (2013) 996-1009.
- [103] K. Yosida, *Functional Analysis, Sixth Edition of A Series of Comprehensive Studeis in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.



- 
- [104] H. Zarin, Postupci konačnih elemenata za singularno perturbovane probleme i prekidi, doktorska disertacija, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, 2003.
- [105] Z. Zhang, Finite element superconvergence on Shishkin mesh for 2-D convection-diffusion problems, *Mathematics of Computation*, 72 (2003) 1147-1177.
- [106] Z. Zhang, Finite element superconvergence approximation for one-dimensional singularly perturbed problems, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 18 (2002) 374-395.
- [107] M. Zlámal, On the finite element method, *Numerische Mathematik*, 12 (1968) 394-402.



Mirjana Brdar je rođena 13. marta 1979. godine u Somboru. Osnovnu školu „Petar Kočić” je završila u Riđici, a gimnaziju „Veljko Petrović”, prirodni smer, u Somboru, obe kao đak generacije. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer diplomirani matematičar je upisala 1998, a završila 2002. godine, sa prosečnom ocenom 9.21. Iste godine upisala je posle-diplomske studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Numerička matematika. Godine 2010. upisuje doktorske studije na PMF-u u Novom Sadu, studijski program matematika i ostvaruje uspeh 9.33. Od decembra 2002. godine zaposlena je na Tehnološkom fakultetu u Novom Sadu, prvo kao saradnik u nastavi, potom, od 2004. do 2013. kao asistent-pripravnik, a sada i kao asistent.

Koautor je 14 naučnih radova, udata je i majka dvoje dece.



Novi Sad, 8. februar 2016.

Mirjana Brdar



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

**Redni broj:**

**RBR**

**Identifikacioni broj:**

**IBR**

**Tip dokumentacije:** Monografska dokumentacija

**TD**

**Tip zapisa:** Tekstualni štampani materijal

**TZ**

**Vrsta rada:** Doktorska disertacija

**VR**

**Autor:** Mirjana Brdar

**AU**

**Mentor:** dr Helena Zarin, dr Ljiljana Teofanov

**MN**

**Naslov rada:** Dvoparametarski singularno perturbovani konturni problemi  
na mrežama različitog tipa

**NR**

**Jezik publikacije:** Srpski (latinica)

**JP**

**Jezik izvoda:** Srpski/engleski

**JI**

**Zemlja publikovanja:** Srbija

**ZP**

**Uže geografsko područje:** Vojvodina

**UGP**

**Godina:** 2016.

**GO**

**Izdavač:** Autorski reprint

**IZ**

**Mesto i adresa:** Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4

**MA**

**Fizički opis rada:** 5/160/107/25/6/35/0  
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

**FO**

**Naučna oblast:** Matematika

**NO**

**Naučna disciplina:** Numerička matematika

**ND**

**Ključne reči:** Singularno perturbovani problemi, dva mala parametra, Bahvalovljeva, Duranova i Duran-Šiškinova mreža, postupak konačnih elemenata, uniformna konvergencija.

**PO**

**UDK:**

**Čuva se:** Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad  
**ČU**

**Važna napomena:**

**VN**

**Izvod:**

**IZ**

U tezi se istražuje uniformna konvergencija Galerkinovog postupka konačnih elemenata na mrežama različitog tipa za dvoparametarske singularno perturbovane probleme.

Uvedene su slojno-adaptivne mreže za probleme konvekcije-reakcije-difuzije: Bahvalovljeva, Duran-Šiškinova i Duranova za jednodimenzionalni i Duran-Šiškinova i Duranova mreža za dvodimenzionalni problem. Za pomenute probleme na svim ovim mrežama analizirane su greške interpolacije, diskretizacije i greška u energetskej normi i dokazana je uniformna konvergencija Galerkinovog postupka konačnih elemenata. Sva teorijska tvrđenja su potvrđena numeričkim eksperimentima.

**Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:** 28. april 2015.

**DP**

**Datum odbrane:**

**DO**

**Članovi komisije:**

**KO**

Predsednik: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,

Mentor: dr Helena Zarin, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu,

Mentor: dr Ljiljana Teofanov, vanredni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu,

Član: dr Zorica Uzelac, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu.





UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
KEY WORDS DOCUMENTATION

**Accession number:**

ANO

**Identification number:**

INO

**Document type:** Monographic type

DT

**Type of record:** Printed text

TR

**Contents code:** Doctoral thesis

CC

**Author:** Mirjana Brdar

AU

**Advisor:** Dr. Helena Zarin, Dr. Ljiljana Teofanov

MN

**Title:** Singularly perturbed boundary value problems with two parameters  
on various meshes

**Language of text:** Serbian (latin)

LT

**Language of abstract:** Serbian/English

LA

**Country of publication:** Serbia

CP

**Locality of publication:** Vojvodina

LP

**Publication year:** 2016.

PY

**Publisher:** Author's reprint

PU

**Publ.place:** Novi Sad, Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4  
**PP**

**Physical description:** 5/160/107/25/6/35/0  
(no. of chapters/pages/bib. refs/tables/figures/graphs/appendices)  
**PD**

**Scientific field:** Mathematics  
**SF**

**Scientific discipline:** Numerical mathematics  
**SD**

**Subject / Key words:** Singularly perturbed problems, two small parameters, Bakhvalov, Duran and Duran-Shishkin meshes, finite element method, uniform convergence.

**SKW**

**UC:**

**Holding data:** Library, Department of Mathematics and Informatics,  
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

**HD**

**Note:**

**N**

**Abstract:**

**AB**

The thesis explores the uniform convergence for Galerkin finite element method on various meshes for two parameter singularly perturbed problems.

Layer-adapted meshes are introduced for convection-reaction-diffusion problems: Bakhvalov, Duran-Shishkin and Duran meshes for a one dimensional and Duran-Shishkin and Duran meshes for a two dimensional problem. We analyze the errors of interpolation, discretization and error in the energy norm and prove the parameter uniform convergence for Galerkin finite element method on mentioned meshes. Numerical experiments support theoretical findings.

**Accepted by Scientific Board on:** April 28, 2015.

**ASB**

**Defended:**

**DE**

**Thesis defend board:**

**DB**

President: Dr. Dragoslav Herceg, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Advisor: Dr. Helena Zarin, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad,

Advisor: Dr. Ljiljana Teofanov, Associate Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad,

Member: Dr. Zorica Uzelac, Full Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad.

