

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Никола В. Момчиловић

**МОДЕЛИРАЊЕ ЧВРСТОЋЕ
ОРТОТРОПНИХ ПАНЕЛА БРОДСКЕ
КОНСТРУКЦИЈЕ ЕКВИВАЛЕНТНИМ
НЕОРЕБРЕНИМ ПЛОЧАМА**

докторска дисертација

Београд, 2014.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Nikola V. Momčilović

**STRENGTH MODELLING OF
ORTHOTROPIC SHIP STRUCTURE
PANELS BY EQUIVALENT
UNSTIFFENED PLATES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2014.

Комисија за преглед, оцену и одбрану:

Ментор: Проф. др Ташко Манески, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови Комисије: Проф. др Милорад Моток, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

Проф. др Дејан Радојчић, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

Проф. др Весна Милошевић – Митић, редовни
професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

Проф. др Милан Хофман, редовни професор у
пензији Универзитет у Београду, Машински
факултет

Датум одбране:

Предговор

Овај рад је настао као резултат вишегодишњег истраживања из области понашања структуре оребрених плоча (панела) бродских конструкција. Гломазне нумеричке анализе данас су неизостван део иоле озбиљнијих прорачуна чврстоће бродова, али и других конструкција. Већина класификационих друштава препоручује, али и захтева, за одређене типове бродова, анализу чврстоће трупа директним прорачунима, пре свега коришћењем методе коначних елемената. Нумерички модели са огромним бројем елемената и чворова захтевају време потребно не само за саму анализу, већ и за процес моделелирања, како геометрије тако и мреже елемената. Управо одавде проистекла је идеја о развоју процедуре којом би се дефинисали параметри еластичности неоребрене плоче чије би структурно понашање одговарало оном у оребреној плочи. Овим би се допринело да се оребрене плоче у нумеричким моделима трупа брода моделирају као неоребрене - еквивалентне, без укрућења, са мањим бројем елемената и чворова, а тиме и степени слободе. Тако би и нумерички модел (еквивалентни модел) трупа брода био неупоредиво једноставнији од истог, моделираног конвенционалним коначним елементима.

Овај рад свакако не би био потпун без несебичне подршке професора Милорада Мотока и професора Ташка Манеског. Искрену захвалност за подршку приликом израде докторске дисертације дугујем свим члановима Катедре за бродоградњу, али и Катедри за отпорност конструкција Машинског факултета у Београду.

Београд, 2014.

Никола Момчиловић, дипл. маш инж.

Моделирање чврстоће ортотропних панела бродске конструкције еквивалентним неоребреним плочама

Резиме

Проблеми понашања оребрених плоча (панела), као основних јединица бродских конструкција представљају једну од најзначајнијих истраживачких тема из области чврстоће бродских конструкција.

У овом раду оребрене плоче моделиране су неоребреним плочама, са циљем да се одзиви и једне и друге у што већој мери подударају. У ту сврху развијена је процедура (метода еквиваленције) којом се за сваку оребрену плочу могу прорачунати параметри еластичности неоребрене плоче, тако да максимални угиби и напони, у обе плоче, буду једнаки. Ово подразумева и дефинисање еквивалентног коначног елемента плоче који у својој матрици крутости, хомогенизује особине плоче и укрућења. Развијени математички алгоритам узима у обзир употребу теорије ортотропних плоча и методе коначних елемената.

С обзиром да је труп брода састављен од великог броја оребрених плоча, сврха моделирања чврстоће еквивалентним плочама свакако је формирање нумеричког модела бродске конструкције са редукованим бројем елемената и степени слободе. Овај модел, за разлику од конвенционалног, не поседује укрућења, само еквивалентне неоребрене плоче. Поређењем конкретног нумеричког модела трупа брода састављеног од конвенционалних коначних елемената и оног од нових, еквивалентних елемената, добијена је јаснија слика о примени, предностима и манама развијене методе. Циљ рада је да се употребом методе еквиваленције, поједностави структурно моделирање великих нумеричких модела бродске конструкције, без значајнијих губитака у квалитету анализе, односно одређеним померањима и напонима у конструкцији.

Такође је урађена и серија мерења на конкретним моделима оребрених плоча да би се утврдила генерална разлика у одзивима реалне консктрукције у односу на одзив добијен применом методе коначних елемената, имајући у виду да се ова нумеричка метода користи у оквиру методе еквиваленције.

Кључне речи:

оробрена плоча, ортотропна плоча, метода коначних елемената, еквивалентна неоробрена плоча, чврстоћа брода, еквивалентни коначни елемент, ортотропни елемент плоче, глобални модел, одзив бродске консктрукције, метода еквиваленције

Научна област:

Машинство

Ужа научна област:

Бродоградња

UDK 629.5:539.4(043.3)

Strength Modelling of Orthotropic Ship Structure Panels by Equivalent Unstiffened Plates

Abstract

One of the most important research topic in the field of ship strength analysis is the problem of structural behavior of stiffened plates (panels), as the basic units of ship structures.

In this paper, stiffened plates are modeled as unstiffened ones, with the purpose to achieve the compliance in their structural response, as much as possible. Therefore, the procedure (equivalence method) is developed in order to obtain elasticity parameters of unstiffened plates so that maximum displacements and stresses would be the same in both plates. Furthermore, an equivalent finite element is defined. This element has stiffness matrix that homogenize the mechanical properties of both plate and stiffener. Developed mathematical algorithm takes into account application of orthotropic plate theory and finite element method.

Considering that ship hull consists of large number of stiffened plates, the goal of equivalent plate strength modeling is to form a numerical model of ship structure with a reduced number of elements and degrees of freedom. This model, apart from conventional one, does not have stiffeners, just equivalent unstiffened plates. Comparing the specific numerical model of ship structure that consists of conventional finite elements and one that consists of new, equivalent elements, one can get more clear view on application, advantages and disadvantages of developed method. The goal of this thesis is to simplify structural modelling of large numerical models of ship structures, without any significant loss in quality of the analysis, namely resulting displacements and stresses.

Furthermore, a series of measurements is performed on specific models of stiffened plates in order to achieve general comparison of the structural response of real structure

as opposed to numerically modeled one, especially having in mind that finite element method is incorporated in equivalence method.

Key words: stiffened plate, orthotropic plate, finite element method, equivalent unstiffened plate, ship strength, equivalent finite element, orthotropic plate element, global model, ship structure response, equivalence method

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Naval Architecture

UDK 629.5:539.4(043.3)

Садржај

1 Увод	1
1.1 Кратак преглед садржаја рада.....	3
2 Оребрене плоче	5
2.1 Стандардни приступ чврстоћи бродских конструкција.....	8
2.2 Понашање структуре бродских оребрених плоча	14
3 Прорачуни чврстоће оребрених плоча	19
3.1 Аналитичка формулација савијања оребрених плоча.....	20
3.2 Теорија ортотропних плоча	22
3.2.1 Приближне формуле за одређивање крутости оребрених плоча	33
3.2.2 Примена теорије ортотропних плоча у анализи бродских конструкција	36
3.3 Метода коначних елемената	38
3.3.1 Метода коначних елемената у бродским конструкцијама	41
3.4 Моделирање оребрених плоча еквивалентним неоребреним плочама	44
3.5 Остале методе прорачуна чврстоће оребрених плоча.....	51
4 Идеја рада	55
5 Метода еквиваленције	67
5.1 Репрезентативна оребрена плоча	68
5.2 Мембрански модел	76
5.2.1 Мембрански параметри еластичности	76
5.2.2 Мембранска матрица еластичности и мембранска матрица крутости ...	87
5.2.3 Пример еквиваленције померања	91
5.2.4 Коригована мембранска матрица еластичности и мембранска матрица крутости (еквиваленција напона)	99
5.2.5 Пример еквиваленције померања и напона	109
5.3 Савојни модел	114

5.3.1	Савојни параметри еластичности	114
5.3.2	Савојна матрица еластичности и савојна матрица крутости	128
5.3.3	Моделирање еквиваленције угиба у итерацијама.....	129
5.3.4	Пример еквиваленције угиба	135
5.3.5	Кориговане савојна матрица еластичности и савојна матрица крутости (еквиваленција напона).....	140
5.3.6	Моделирање еквиваленције напона у итерацијама.....	147
5.3.7	Пример еквиваленције угиба и напона	150
5.4	О коначном моделу еквивалентне плоче.....	154
5.5	Примери еквивалентних модела.....	161
6	Еквивалентни 3Д модел бродске конструкције	171
6.1	Еквивалентни 3Д модел	182
6.2	Еквивалентни 3Д модел са редукованим бројем степени слободе.....	192
6.4	Одступања померања и напона	196
6.4	Нормални напони.....	197
7	Мерење одзива оребрених плоча	201
7.1	Циљ мерења.....	201
7.2	Процедура мерења	202
7.2.1	Мерни модели.....	202
7.2.2	Мерна инсталација	208
7.2.3	Инструменти за мерење угиба	211
7.2.4	Инструмент за мерење раванских померања тачака.....	213
7.2.5	Бесконтактно оптичко мерење	216
7.3	Резултати екперимента.....	221
7.4	Резултати нумеричког прорачуна мерних модела.....	227
7.5	О резултатима мерења и нумеричког прорачуна.....	239
8	Закључне напомене и смернице за будућа истраживања	248
8.1	Закључне напомене.....	248
8.2.	Смернице за будућа истраживања	251

Литература.....253

**ПРИЛОГ 1 - Резултати прорачуна конвенционалног и еквивалентних
нумеричких модела трупа брода262**

ПРИЛОГ 2 - Резултати мерења.....285

Номенклатура

a	дужина плоче
a_1	растојање између укрућења која се пружају у правцу 1
$A_{s,x}, A_{s,y}$	површина попречног пресека једног укрућења који се пружа у правцу x , односно y
A_x, A_y	површина попречног пресека оребрене плоче управног на правац x , односно y
$A_x^{pl}, A_y^{pl}, A_x^{EKV}, A_y^{EKV}$	површина попречног пресека оребрене и еквивалентне плоче, управног на правац x , односно y
b	ширина плоче
b_1	растојање између укрућења која се пружају у правцу 2
B	ширина брода
C_s	торзиона крутост једног укрућења
D, D^s	крутост плоче на савијање, крутост еквивалентне плоче на савијање
D_x	крутост плоче услед савијања у правцу x
D_x^s, D_y^s	крутост еквивалентне плоче на савијање у правцу x , односно y
D'_{xy}	торзиона крутост плоче
$D_x^{OR}, D_y^{OR}, D_x^{IZ}, D_y^{IZ}$	крутост на савијање оребрене и изотропне плоче у правцу x , односно y
E	модул еластичности материјала
E'	модул еластичности материјала укрућења
E_1, E_2	модули еластичности у правцу 1, односно 2
$E_1^m, E_2^m, E_1^s, E_2^s$	модули еластичности мембранског и савојног модела еквивалентне плоче, у правцу 1, односно 2
$E_x^m, E_y^m, E_x^s, E_y^s$	модули еластичности мембранског и савојног модела

F	еквивалентне плоче, у правцу x , односно y експериментално задата сила
F_x, F_y	сила у правцу x , односно y
F_x^+, F_y^+	површине попречних пресека укрућења у правцу x , односно y
F_{TER}	укупна сила од терета
F_K, F_P	трасверзална сила на крменом, односно прамчаном пресеку брода
G_{12}	модул клизања материјала
$G_{12}^m, G_{12}^s, G_{xy}^m, G_{xy}^s$	модул клизања мембранског и савојног модела еквивалентне плоче за раван 1 – 2, односно $x - y$
H	висина брода
I	момент инерције попречног пресека, момент инерције укрућења са придодатим лимом
I'	момент инерције укрућења за средњу раван плоче
I'_1, I'_2	момент инерције укрућења који се пружа правцем 1, односно 2, за средњу раван плоче
I_{xe}	момент инерције провезе дна са придодатим лимовима
$I'_{s,x}, I'_{s,y}$	момент инерције укрућења који се пружа правцем x , односно y , за средњу раван плоче
J_x^+, J_y^+	моменти инерције попречних пресека укрућења у правцу x односно y
k	константа опруге
k^m	однос попречног и подужног мембранског оптерећења
L	дужина брода
l_1, l_2	растојање између тачака на мерном месту
M	вертикални момент савијања
M_K, M_P	вертикални момент на крменом, односно прамчаном пресеку брода
M_x, M_y	моменти по јединици дужине пресека плоче управног на правац x , односно y

M_{xy}	торзиони момент по јединици дужине пресека плоче управног на правац x
N_{xy}	трансверзална сила у правцу y по јединици дужине пресека плоче управног на правац x
n_x, n_y	број укућења у оребреној плочи који се пружају у правцу x , односно y
p	притисак
P_{TER}, P_{UZG}	притисак од терета, односно узгона
q	оптерећење по јединици дужине
s_x, s_y	растојање између укућења који се пружају у правцу x , односно y
$S_{x,db}$	ширина панела дводна
S_x, S_y	статички моменти укућења у правцу x и y
T	газ брода
t	дебљина плоче
t^m, t^s	дебљина мембранског и савојног модела еквивалентне плоче
t_{kor}^m, t_{kor}^s	коригована дебљина мембранског и савојног модела еквивалентне плоче
u	подужно померање у равни плоче
U	укупна вертикална сила од узгона
$u_{max}^{OR}, u_{max}^{EKV}$	максимално подужно померање оребрене, односно еквивалентне плоче
$u_{max}^{OR,x}, u_{max}^{EKV,x}$	максимално померање у оребреној, односно еквивалентној плочи, у правцу x , услед оптерећења које делује у правцу x
$u_{max}^{OR,y}, u_{max}^{EKV,y}$	максимално померање у оребреној, односно еквивалентној плочи, у правцу y , услед оптерећења које делује у правцу y
v	попречно померање у равни плоче
$v_{max}^{OR}, v_{max}^{EKV}$	максимално попречно померање оребрене, односно

$v_{\max}^{OR,x}, v_{\max}^{EKV,x}$	еквивалентне плоче максимално померање у оребреној, односно еквивалентној плочи, у правцу y , услед оптерећења које делује у правцу x
$v_{\max}^{OR,y}, v_{\max}^{EKV,y}$	максимално померање у оребреној, односно еквивалентној плочи, у правцу y , услед оптерећења које делује у правцу y
w	вертикално померање у односу на раван плоче (угиб)
w_{KOM}, w_{IND}	угиб измерен компаратером, односно индуктивним сензором
$w_{\max}^{OR}, w_{\max}^{EKV}$	максимални угиб оребрене, односно еквивалентне плоче
$w_x^{OR}, w_y^{OR}, w_x^{IZ}, w_y^{IZ}$	угиб услед цилиндричног савијања око осе y , односно x , за оребрену и изотропну плочу
x, y, z	подужни, попречни и вертикална оса (правац) координатног система
Z	отпорни момент попречног пресека
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	угао клизања у равни $x - y$, $x - z$, $y - z$
ε	измерена деформација
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	деформација у правцу x , y , z
μ	поасонов коефицијент материјала
μ_{12}, μ_{21}	поасонов коефицијенти материјала ортотропне плоче
$\mu_{12}^m, \mu_{21}^m, \mu_{12}^s, \mu_{21}^s$	поасонов коефицијенти мембранског и савојног модела еквивалентне плоче, за раван 1 - 2
$\mu_{xy}^m, \mu_{yx}^m, \mu_{xy}^s, \mu_{yx}^s$	поасонов коефицијенти мембранског и савојног модела еквивалентне плоче, за раван $x - y$
$\mu_{xy}^{EKV,pp}, \mu_{xy}^{EKV,pp}$	претпостављени поасонов коефицијенти материјала еквивалентне плоче, за раван $x - y$
$\mu_{xy}^{OR}, \mu_{xy}^{OR}, \mu_{xy}^{EKV}, \mu_{xy}^{EKV}$	конструктивни поасонов коефицијенти оребрене и еквивалентне плоче, за раван $x - y$
$\sigma_{VM}, \sigma_{VM}^{EKV}$	фон Мисесов напон у оребреној, односно еквивалентној

$\sigma_{VM,max}^{OR}, \sigma_{VM,max}^{EKV}$	плочи максимални фон Мисесов напон у оребреној, односно еквивалентној плочи
$\sigma_{VM,max}^{OR,m}, \sigma_{VM,max}^{EKV,m}$	максимални фон Мисесов напон у оребреној, односно еквивалентној плочи при мембранском оптерећењу
$\sigma_{VM,max}^{OR,s}, \sigma_{VM,max}^{EKV,s}$	максимални фон Мисесов напон у оребреној, односно еквивалентној плочи при савојном оптерећењу
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	нормални напон у правцу x, y, z
σ_x', σ_x''	нормални напон у правцу x , услед примарног, односно секундарног одзива трупа брода
$\overrightarrow{\sigma_x^{EKV,m}}, \overrightarrow{\sigma_x^{EKV,s}}$	вектор мембранске и савојне компоненте нормалног напона еквивалентне плоче, у правцу x
$\overrightarrow{\sigma_y^{EKV,m}}, \overrightarrow{\sigma_y^{EKV,s}}$	вектор мембранске и савојне компоненте нормалног напона еквивалентне плоче, у правцу y
$\overrightarrow{\tau_{xy}^{EKV,m}}, \overrightarrow{\tau_{xy}^{EKV,s}}$	вектор мембранске и савојне компоненте смичућег напона еквивалентне плоче
$\overrightarrow{\sigma_x^{EKV}}, \overrightarrow{\sigma_y^{EKV}}$	вектор укупне компоненте нормалног напона еквивалентне плоче, у правцу x , односно y
$\sigma_x^{OR,m}, \sigma_y^{OR,m}, \sigma_x^{EKV,m}, \sigma_y^{EKV,m}$	мембранске компоненте нормалних напона у оребреној и еквивалентној плочи, у правцу x , односно y
σ_x^s, σ_y^s	савојне компоненте нормалних напона у еквивалентној плочи, у правцу x , односно y
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	напон смицања у равни $x-y, x-z, y-z$
$\tau_{xy}^{OR,m}, \tau_{xy}^{EKV,m}, \tau_{xy}^{OR,s}, \tau_{xy}^{EKV,s}$	компонента смичућег напона у оребреној и еквивалентној плочи услед мембранског, односно савојног оптерећења
$\Delta\sigma$	одступање фон Мисесовог напона
Δl	промена растојања две тачке на мерном месту
Δw	укупно одступање угиба
$\Delta w_x, \Delta w_y$	удео одступања угиба
[A]	мембранска матрица крутости плоче

$[A^m]$	матрица крутости мембранског модела еквивалентне плоче
$[B]$	матрица спреге савојног и мембранског одзива плоче
$[C]$	матрица еластичности
$[C^m], [C^s]$	матрица еластичности мембранског, односно савојног модела еквивалентне плоче
$[D]$	савојна матрица крутости плоче
$[D^s]$	матрица крутости савојног модела еквивалентне плоче
$\{F\}$	матрица оптерећења
$[k]$	матрица савојних деформација
$[k]_e$	матрица крутости коначног елемента
$[K]$	глобална матрица крутости коначних елемената
$[L]$	матрица линеарних оператора
$[N]$	матрица функције облика
$\{u\}$	матрица померања
$\{\sigma\}$	матрица напона
$[\varepsilon]$	матрица укупних деформација
1Д	једнодимензионо
2Д	дводимензионо
3Д	тродимензионо
ДИЦ	дигитална оптичка метода
ИСУМ	идеализована структурна јединица
МКЕ	метода коначних елемената

1 Увод

Понашање структуре оребрених плоча, описано је парцијалном диференцијалном једначином осмог реда која нема практично употребљиво решење. Стога, анализа иоле компликованије конструкције сачињене од великог броја оребрених панела аналитички је немогућа. Постоје одређене методе којима је могуће одредити угиб услед савијања, али са великом дозом ограничења и мана. Зато се у ту сврху користе нумеричке методе, пре свега метода коначних елемената (МКЕ), којом је могуће описати понашање и најсложенијих конструкција. Међутим, и овакав приступ, иако опште прихваћен, има својих ограничења. Тако дефинисани модели великих конструкција као што је брод, пре свега су изузетно захтевни за геометријско моделирање, имају огроман број коначних елемената и степени слободе. Стога, неопходно је велико време за формирање, а тиме и за саму анализу оваквих модела.

Истраживање описано у дисертацији бави се одређивањем параметара еквивалентне неоробрене плоче, чије би понашање, у структурном смислу, одговарало понашању оребрене плоче истих габарита. Оваква еквивалентна плоча имала би директну примену у гломазним нумеричким моделима, у анализи чврстоће трупа брода. Метода еквиваленције понашања структуре оребрене и неоробрене плоче (у даљем тексту: метода еквиваленције) описана у дисертацији имала би универзалан карактер и омогућавала кориснику да било коју оребрену

плочу или оребрен панел замени еквивалентном неоребреном плочом, и тиме у нумеричком моделу смањи број елемената и степени слободе. Највећа пажња биће посвећена математичком моделирању чврстоће еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента. Под овим се подразумевају процедуре за добијање параметара еластичности и крутости еквивалентне плоче. Дефинисањем ових процедура олакшана је рачунарска аутоматизација развијене методе, па ће иста постати пременљивија инжењерској пракси.

У конструкцијама које се састоје од једне или две оребрене плоче нема практичног смисла користити методу еквиваленције, иако се очекује да ће дати задовољавајуће резултате по питању максималних вредности угиба и напона. Наиме, софтверима базираним на методи коначних елемената, данас, моделирање и анализа чврстоће оребрених плоча постала је релативно једноставан процес, тако да би само примене методе замене оребрене са еквивалентном плочом тражило непотребно губљење времена. Међутим, код великих конструкција као што је бродска, метода еквиваленције итекако има смисла, где применом процедуре замене оребрене плоче еквивалентном, у ствари, упрошћавамо неколико стотина истих оребрених плоча. Овакав модел био би неупоредиво једноставнији за формирање самом чињеницом да нове плоче немају укрућења.

Код анализе бродских конструкција, под глобалним МКЕ моделом подразумева се модел целог брода, модел складишта брода или модел неког већег дела конструкције. Овакви модели се најчешће користе у раним фазама пројектовања брода, у сврху оптимизације конструкције, а често су и захтевани Правилима класификационих друштава за градњу брода. Глобални модели имају функцију да покажу глобалну слику напона и померања, и да идентификују критичне делове конструкције, са становишта чврстоће. Обично је и сама бродска конструкција састављена од свега неколико типова оребрених плоча чија се конструкција понавља по дужини и ширини брода: оребрена плоча дна, унутрашњег дна, бока, унутрашњег бока, палубе, доње палубе итд. У многим случајевима концепција градње је иста, па дно и унутрашње дно поседују оребрену плочу истих или сличних димензија (исто може важити и за бок и унутрашњи бок, палубе). У

практичном смислу, ово значи да је, за анализу глобалног модела, потребно моделирати свега неколико еквивалентних неоробрених плоча које би замениле скоро све оробрене у бродској конструкцији. Развијена метода имала би универзалан карактер, и могла би се применити и на друге типове конструкција, не само бродске.

1.1 Кратак преглед садржаја рада

Пре објашњења саме методе еквиваленције биће описан карактер понашања оробрених плоча са посебним акцентом на оробрене плоче у оквиру бродских конструкција (Поглавље 2). Овде је приказан стандардни приступ оцени чврстоће бродских конструкција и описане су специфичности одзива бродских оробрених плоча, с обзиром на карактеристична оптерећења која делују на труп брода. Постојеће методе и пресек најновијих истраживања из области чврстоће оробрених плоча (и могућностима примене еквивалентних плоча) дати су у Поглављу 3. Овде треба посебну пажњу обратити на теорију оротропних плоча (Поглавље 3.2) и методу коначних елемената (Поглавље 3.3), јер је истраживање у овој дисертацији директно везано за примену ове две методе. Теоријска основа одређивања и схватања крутости еквивалентних плоча управо лежи у теорији оротропних плоча. Идеја дисертације детаљније је описана у Поглављу 4. Примена развијене методе еквиваленције подразумева добијање еластичних параметара еквивалентне плоче (и еквивалентног коначног елемента), чије би понашање, у структурном смислу одговарало понашању оробрене плоче исте дужине и ширине. Еквивалентни коначни елемент био би коришћен уместо конвенционалних коначних елемената плоче и греде, у нумеричким анализама оробрених плоча. Детаљан опис прорачунавања параметара еквивалентних плоча, односно метода еквиваленције, описан у Поглављу 5. Ово поглавље чини суштину докторске дисертације, јер је у њему приказан математички алгоритам којим се за

димензије било које оребрене плоче могу добити еластични коефицијенти еквивалентне плоче, а тиме и „новог“ коначног елемента. Главни корак алгоритма је изједачавање максималних вредности померања и напона оребрене и следствене еквивалентне плоче, одакле се изводе параметри еластичности еквивалентне неоробрене плоче. У Поглављу 6 приказана је директна примена методе еквиваленције на нумеричком модела трупа брода. Конвекционални модел брода је састављен од великог броја оребрених плоча и моделиран је стандардним плочастим и гредним коначним елементима. Урађен је други, еквивалентни модел, који се састоји само од „нових“ – еквивалентних плоча, односно од еквивалентних плочастих коначних елемената. У еквивалентном моделу нема више гредних елемената, и број степени слободе је мањи. Поређењем поља померања и напона ова два модела добијена је прецизнија слика могућности примене методе еквиваленције, као и назнаке и њеним предностима и манама.

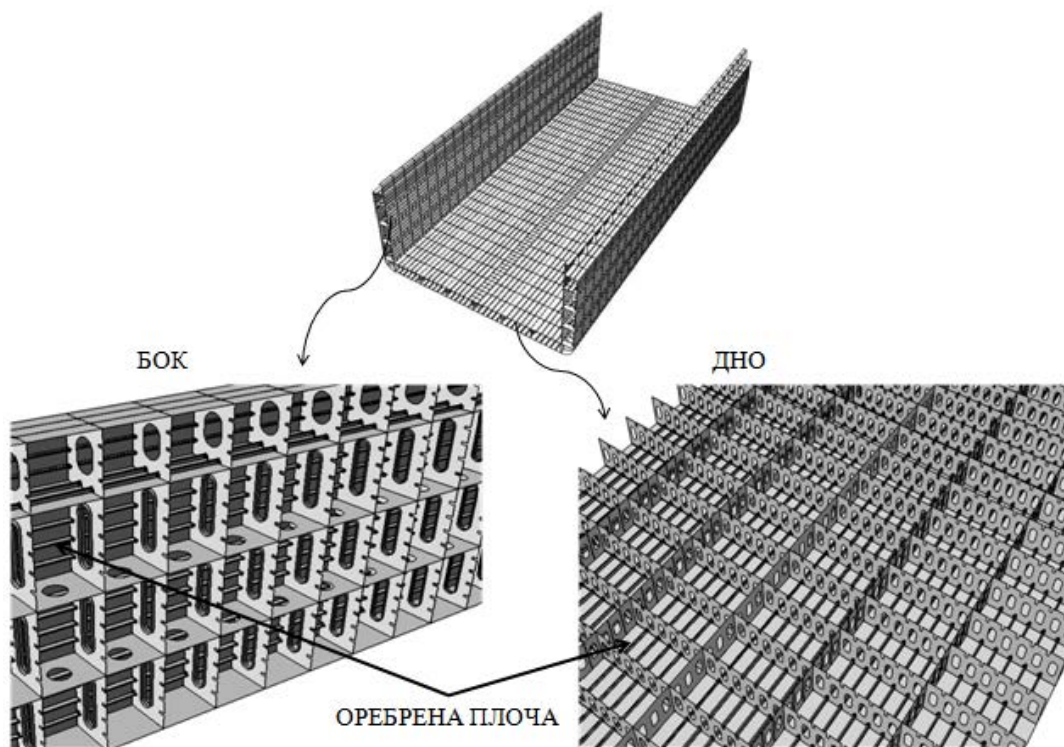
У сврху валидације нумеричке анализе која је представљала значајан део истраживања урађена су лабораторијска мерења, описана у Поглављу 7. Мерени су угиби и напони у конкретним оребреним плочама и поређени са резултатима анализе истих модела применом методе коначних елемената. Ово је изузетно важно с обзиром да МКЕ коришћена за прорачун неких улазних величина у развијеној методи. Закључци рада и смернице за даља истраживања у области еквиваленције оребрених плоча са неоробреним, изнети су у Поглављу 8.

2 Оребрене плоче

У бродским, ваздухопловним, железничким или другим конструкцијама великих габарита оребрена плоча (панел) представља једну од најбитнијих структурних целина. Под оребреном плочом или панелом подразумева се плоча која поседује укрућења, у једном или оба међусобно управна правца. Стога, уобичајено је да се у димензионо великим конструкцијама као што је бродска, оребрена плоча сматра као конструктивна целина коју чине плоча и укрућења оивичени примарним елементима конструкције. Панел дна, у ширем смислу, је и део дна брода и који се састоји од великог броја мањих оребрених плоча. Оваква конструкција се, поред секундарних укрућења у једном правцу, састоји и од примарних носача у супротном, управном правцу. Оребрене плоче бока и дна типичне конструкције контејнерског брода се виде на слици 2.1, где је илустрован део дна брода између попречних преграда који се састоји из лимова дна и бока и свих припадајућих укрућења.

С обзиром да оребрена плоча поседује укрућења, њено понашање је у општем случају анизотропно, тј. у различитим правцима овај део конструкције показује различите одзиве. Стога, може се рећи да оребрена плоча поседује конструктивну анизотропију. У општем случају материјал не мора бити изотропан. Често је материјал конструкције анизотропан, и чине га разне врсте композита (стаклопластика, карбон – епокси, сендвич конструкција, дрво итд.). Стога, код

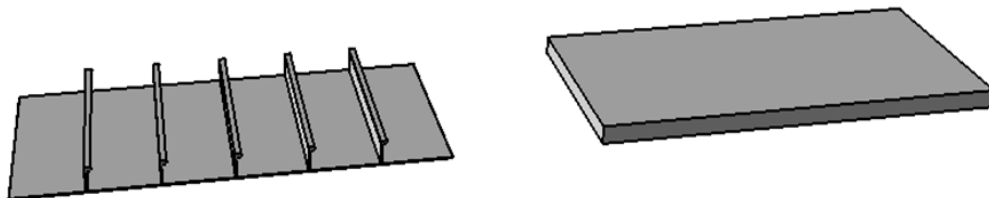
оребрених плоча анизотропан њиховог одзива може бити последица не само конструктивне, већ и материјалне анизоторије.



Слика 2.1. Оребрене плоче плоче бока и дна брода

Када се каже да се понашање оребрене плоче сматра анизотропним углавном се мисли да је оно ортотропно, тј. тродимензиони (3Д) проблем, у општем случају, своди се на дводимензиони (2Д) проблем. У бродским конструкцијама чест је случај оребрене плоче са укрућењима само у једном правцу: дно брода уздужне градње ојачано секундарном структуром – густо распоређеним уздужницама, оивичено примарним уздужним и попречним елементима конструкције. На мембранско напрезање оребрене плоче у правцу управном на правац пружања укрућења утиче само попречни пресек плоче, као да је у питању неоребрена плоча. Када би исту плочу оптеретили на савијање и ослонили по ивицама паралелним са правцем пружања секундарних укрућења, она би се практично понашала као и неоребрена плоча истих димензија. Дакле, и у случају мембранског и савојног оптерећења у правцу супротном од пружања укрућења оваква оребрена плоча се, у структурном смислу, понаша као неоребрена.

Оребрена плоча, као интегрални део већине конструкција великих димензија, последица је пре свега захтева у погледу чврстоће, смањења тежине, технологије израде. Труп брода састављен је од оребрених плоча, па се може посматрати као просторно оребрена љуска. Избор плоче са укрућењима уместо плоче велике дебљине без укрућења, у конструктивном смислу, дакле, не предстаља дилему. Објашњење фаворизовања оваквог концепта лежи у чињеници да би еквивалентна неоребрена плоча исте чврстоће као и оребрена имала много већу дебљину, била би значајно тежа, а технолошки и врло тешка за обраду. Оптимизацијом карактеристика плоче, растојања и јачине укрућења могуће је добити што лакшу, а чвршћу конструкцију.



Слика 2.2. Оребрена плоча и неоребрена плоча еквивалентне чврстоће

Иако је истраживање описано у овом раду је везано за одзив оребрене плоче, чија је примена универзалног карактера у конструкцијама, главни значај посветиће се њеном понашању у оквиру бродских конструкција. За разумевање одзива оребрених плоча у оваквом окружењу, неопходно је направити осврт на стандардни приступ оцени чврстоће бродских конструкција, а касније и на понашање структуре самих оребрених плоча.

2.1 Стандардни приступ чврстоћи бродских конструкција

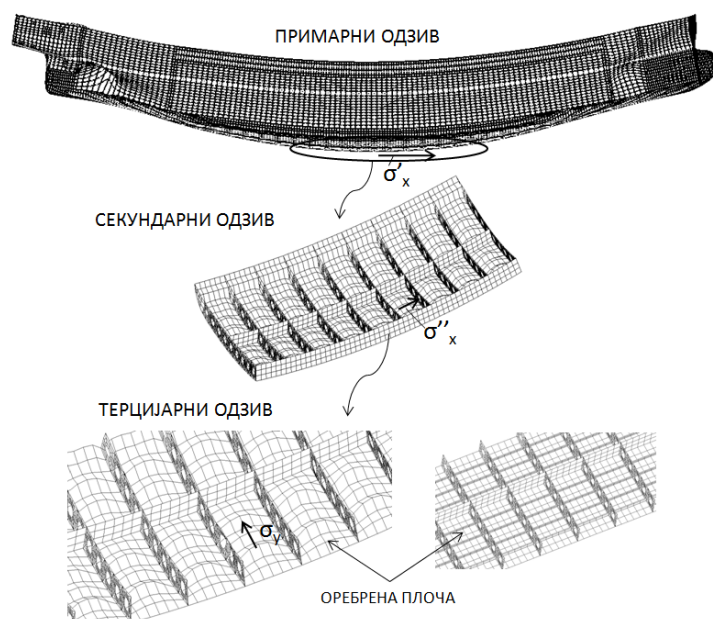
Генерално се разликују три типа одзива бродске конструкције: примарни, секундарни и терцијарни (слика 2.3). Примарни одзив је последица савијања брода као еквивалентног носача – греде, према једначини (2.1). Секундарни посматра савијање оребреног панела између примарних елемената конструкције, а терцијарни анализира савијање саме неоребрене плоче између секундарних укрућења. С обзиром да је одзив брода као еквивалентног носача је базиран на теорији греда, онда су и структурни елементи који улазе у прорачун примарних напона они који се протежу целом или већим делом дужине брода.

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M(x) \quad (2.1)$$

У овом случају најдоминантнији су нормални подужни напони у дну и палуби брода, као најудаљенијим деловима конструкције од неутралне осе савијања попречног пресека трупа [1, 2]. Примарни одзив бродске конструкције одређује се прорачуном уздужне чврстоће. Прорачун је експлицитно захтеван од стране правила класификационих друштава за бродове изнад 60 - 65 метара [3]. Поред класичних статичких прорачуна уздужне чврстоће, могуће је прорачуном узети у обзир и динамичке ефекте као што су инерцијалне силе услед убрзања, као последица деловања таласа. Све ово води до изузетно компликованог динамичког прорачуна. Међутим, за потребе прорачуна уздужне чврстоће, најчешће се користе формуле класификационих друштава за добијање расподеле моментата савијања и трасверзалне силе од таласа. Суперпозицијом статичких и динамичких момента може се добити приближна слика јачине примарног одзива, у виду следственог нормалног напона. За прецизније вредности и илустровање самог поља промене напона, које указује на концентracије које се овом анализом не виде,

ипак се користе софистицираније нумеричке методе, као што је метода коначних елемената.

Секундарни одзив представља савијање конструкције између две попречне преграде. У дводну, последица секундарног одзива су напони услед савијања ових кутијастих пресека, а у једноструком дну напони услед савијања оребреног панела. Додатна компонента напону представља она која је проузрокована савијањем укрућења [2]. За разлику од примарног одзива када се брод третирао као еквивалентна греда, и где се напон (и угиб) мења само дуж брода (1Д проблем), код секундарног одзива напон се мења у два правца у равни (2Д проблем) оребреног панела. Секундарни напон варира дуж оребреног панела индукујући напон услед савијања већег панела између две преграде или настаје као последица савијања оребрене плоче између јакних носача (ребреница, оквирних ребара, оквирних споња). Терцијарни одзив настаје услед савијања неорребреног дела плоче између укрућења (примарних, секундарних) и директна је последица дејства латералног притиска флуида (притисак воде, притисак течности из танкова итд.) на плочу. На пример, у оребреној плочи трупа уздужне градње терцијарни одзив се рефлектује кроз деформацију неорребреног дела (ћелије) плоче између уздужница.



Слика 2.3. Одзиви бродске конструкције

Максимални комбиновани напон у оребреној плочи би се, теоријски, могао се добити суперпонирањем примарног, секундарног и терцијарног напона. Међутим, приликом суперпозиције треба бити опрезан: оптерећења и процедуре коришћене за добијање ових компоненти напона нису исте поузданости и карактера. Оптерећења примарног одзива упрошћава брод са хидродинамичког аспекта (оптерећење од таласа) и користећи теорију греда што даје добру предикцију главних напона дна и палубе, али изузима локалне ефекте концентрације напона. Такође, све три компоненте напона се не догађају истовремено, нити су оријентисане у истим правцима. Максимални момент од таласа (примарни напон) обично није у фази са максималним локалним притиском на панел дна (секундарни напон) или са делом плоче између укрућења (терцијарни напон). Ако се за пример узме дно уздужне градње: примарни напон σ_x ће се поклапати са подужним правцем брода и може се прорачунати према (2.2) као однос момента савијања $M(x)$ и отпорног момента попречног пресека трупа брода за дно или палубу Z .

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{Z} \quad (2.2)$$

Вредност примарног напона је приближно иста и у плочи и у укрућењима, и скоро константна дуж панела који се налази на средњем делу брода. У овом случају, постоји мала попречна компонента напона и напон смицања. Компонента напона као последица секундарног одзива обично је већа у фланшама укрућења него у самој плочи услед позиције неутралне осе, која је ближе плочи. Попречна компонента напона услед терцијарног одзива директно зависи од растојања између уздужница и најчешће се јавља на средини распона неоробреног дела плоче између укрућења.

Тежња за упрошћенијим приступом анализи бродских конструкција доводи и до традиционалне поделе чврстоће брода на уздужну, попречну и локалну. У уздужној чврстоћи, као што је већ наведено, понашање трупа брода описујемо теоријом греда. Брод може бити подвргнут савијању у вертикалној равни или

торзији око подужне осе. Попречни напони који се јављају у бродским конструкцијама су последица дисторзије попречног пресека брода. Елементи конструкције попречне чврстоће у вези су са уздужним елементима преносећи оптерећења међусобом. Попречни пресеци брода, представљају се одговарајућим рамовима, и опет анализирају теоријом греда. Прорачуном локалне чврстоће узимају се у обзир локална оптерећења (концентрисане тежине од опреме и разних уређаја) док се контурни услови узимају из глобалног модела брода [1]. Такође, притискајући напони из прорачуна уздужној чврстоће узимају се у обзир при анализи извијања појединих оребрених плоча. Најсвеобухватнија метода којом је могуће све описане ефекте у једном моделу узети у обзир свакако је метода коначних елемената и о њој ће нешто више речи бити касније.

Анализом чврстоће се испитује способност бродске конструкције да не попусти по дејством оптерећења којима је подвргнута у својој експлоатацији. Одзив бродске конструкције, а тиме и оребрених плоча, оцењује се, најчешће, критеријумом дозвољеног напона. Критеријум дозвољеног угиба ређе се користи, иако није занемарљив. Елементи бродске конструкције могу попустити на више начина: појавом пластичних деформација где напони у конструкцији прелазе границу течења материјала, губитком стабилности (извијање), појавом лома (кидање услед напона већих од затезне чврстоће материјала), појавом прслина услед замора, кртим ломом при ниским температурама итд. Губитком носивости углавном се сматра појава да напон у конструкцији доведе до течења материјала [1]. Губитак стабилности или извијање конструкције је веома подмукла појава јер може да се деси изненада. Стабилност конструкције зависи од геометрије, укрућења, материјала и притиска ком је подвргнут и последица је појаве угиба услед дејства аксијалних сила. Услед притискајућих напона у палуби и дну брода долази до извијања лимова између укрућења. Извијање може бити систематско и обухватити веће зоне брода. Губитак стабилности плоча, не мора увек значити и губитак носивости. Постоје процедуре којима је могуће срачунати дозвољени напон који панел може да издржи, а да не дође до извијања или губитка стабилности [1]. Ова појава се посебно третира у анализама чврстоће бродских конструкција [2]. Нека од истраживања у вези прорачуна извијања оребрених

панела дата су у [4, 5]. У последњих неколико година велики део истраживања, нумеричких, а све више и експерименталних [6, 7], везаних за чврстоћу оребрених панела бродске конструкције управо је посвећено проблему извијања. За разлику од извијања, с друге стране, замор је један кумулативни феномен који се дешава као последица понављања оптерећења кроз одређен временски период, док се лом конструкције често дешава услед појаве прслине и њеног ширења кроз конструкцију.

У последње време полако се прелази са традиционалног приступа дозвољене чврстоће (*allowable state design*) на критеријуме граничне чврстоће (*limit state design*) [1, 8, 9, 10]. У првом приступу, тежња је да напони у конструкцији буду мањи од дозвољених који су обично прописани правилима класификационих друштава. У приступу граничне чврстоће анализира се сваки случај у коме конструкција не успева да изврши своју функцију. Разликују се четири типа граничних случајева [1, 3, 8]: граница неометане службе (*serviceability limit state - SLS*), крајња граница чврстоће (*ultimate limit state – ULS*), граница замора (*fatigue limit state – FLS*) и инцидентна стања (*accidental limit state - ALS*).

Граница неометане службе представља критеријум немогућности да се извршавају уобичајене активности и операције на делу конструкције услед локалних деформација конструкције, превеликих вибрација или буке, угиба који уз уобичајену оперативност појединих система може и да наруши естетику конструкције [2, 8]. Критеријум се највише ослања на праксу. Максимални дозволени угиб укрућења на палубама не би требао да буде већи од $l/200$, при чему је l распон укрућења. Овај критеријум је преузет из прописа [11] који су уобичајени у другим индустријама као што је грађевинска. Генерално се узима да су максимални дозволени угиби по критеријуму неометане службе у интервалу $l/200 - l/600$. У бродској конструкцији, ова појава се најчешће везује за еластичну стабилност или неки други вид оптерећења који такође резултира великим деформацијама [8]. Превелики угиб панела може угрозити ефикасност и оперативност структурног елемента (или дела опреме, система итд.) иако елемент није доживео губитак носивости или течење материјала [1]. Критеријум крајње

границе чврстоће подразумева колапс конструкције услед губитка чврстоће, пластичног колапса материјала, може бити последица превртања брода, течења материјала, губитка стабилности конструкције, великих деформација, лома услед ширења прслине узорокване замором. Дозвољени напон може бити фон Мисесов (*Von Mises*) или највећи главни напон. У бродским али и у другим конструкцијама које су сачињене од жилавих материјала, уобичајено је коришћење критеријума по хипотези Хенки – Хубер - Мисес [12]. У овом случају фон Мисесов напон (еквивалентни напон) пореди се са дозвољеним еквивалентним напоном вредности границе течења материјала, пластичног колапса или са одређеним степеном сигурности у односу на напон течења материјала.

Критеријум границе замора приписује се слому конструктивног детаља услед појаве ширења прслине и високих концентрација напона. Критеријум инцидентних стања узима у обзир лом конструкције као последицу већег акцидента (судар, насукање, експлозија, пожар) који може проузроковати сигурност конструкције, људства, еколошку катастрофу. Сваки од ових критеријума има своје дозвољене границе, које предстаљају различите степене угрожености брода а онда и степене сигурности, које су описане у литератури [1, 8, 11, 13].

Што се тиче правила класификационих друштава, у погледу чврстоће, генерални концепт базиран је на полуемпиријским формулама којима су експлицитно дефинисане дебљине оплате лимова и минимални отпорни момент попречних пресека укрућења. Правила управо и служе за димензионисање оребрених панела бродске конструкције. Овако дефинисани елементи углавном задовољавају захтеве локалне и попречне чврстоће. Ако је брод изнад одређене дужине, правила захтевају прорачун уздужне чврстоће. У зависности од брода, правила траже и проверу стабилности појединих детаља конструкције, или проверу чврстоће директним прорачунима као што је прорачун чврстоће методом коначних елемената. На пример, бродовима за расути терет дужине веће од 150 метара прописи чак и захтевају директан прорачун делова конструкције методом

коначних елемената [3]. Прорачуни замора детаља конструкције нису обавезни, али се траже у специјалним случајевима [2]. Критеријуми оцене чврстоће димензионисане конструкције, у правилима, обично су базирани на граници напона течења материјала, уз одређен степен сигурности, коју брод у свом одзиву не сме да пређе. Такође, уз овај критеријум додају се провере стабилности појединих елемената: укрупњења плоче, дела плоче између укрупњења. Овај приступ показао се прилично добрим за неоштећен брод подвргнут његовим реалним и свакодневним оптерећењима. Нешто је мања примењивост оваквог приступа анализи бродова у оштећеном стању, у инцидентним стањима судара или преоптерећења [8]. Преглед и процедуре оцене граничне чврстоће бродских конструкција кроз постојеће методе, правила класификационих друштава, нумеричке анализе дате су у литератури [9, 10, 14].

Претходно описани приступи у анализи бродских конструкција директно важе у анализи понашања оребрених плоча, као структурној целини бродске конструкције. Стога, у наставку, биће више речи о оптерећењима којима је подвргнута сама оребрена плоча трупа брода и специфичностима њеног одзива.

2.2 Понашање структуре бродских оребрених плоча

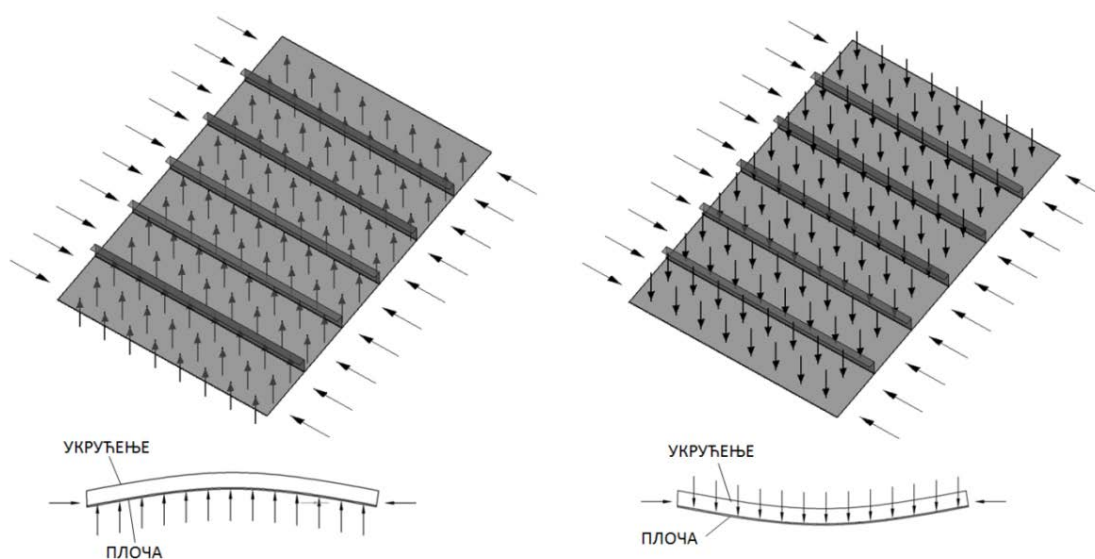
Оптерећење оребрене плоче трупа брода дели се на оно које делује у равни плоче (мембранско оптерећење) и оно које делује управно на њену раван (савојно оптерећење). Оптерећење које делује управно на раван плоче, може бити последица деловања флуида на оплату брода, флуида у танковима, тежине расутог терета, сопствене тежине итд. Раванско оптерећење је углавном последица савијања брода као еквивалентног носача, и овом типу оптерећења највише су изложени дно и палуба брода као најудаљеније тачке од неутралне осе попречног пресека трупа. Тип савијања при коме се истежу влакна плоче, а влакна на

врховима укрућења доживљавају притисак, назива се „негативно” савијање (слика 2.4). Типичан пример за овај случај је оребрена плоча подвргнута притиску од течности у танковима. Ток структурног колапса би у овом случају изгледао на следећи начин: у плочи нема опасности од извијања (јер се истеже), а пошто је неутрална оса ближа плочи него врху укрућења прво долази до пластичне деформације укрућења. Стога, када се момент савијања повећава, пластична деформација се шири укрућењима до саме плоче. Панел доживљава колапс при критичном моменту. Овде постоји опасност од извијања укрућења јер су она притиснута.

У случају да у том делу конструкције поред „негативног” савијања постоји и напон услед притиска у равни, он директно делује као притисак на укрућење, али и смањује истезање плоче. Због тога пластични колапс, услед аксијалног притиска, почиње прво у укрућењу, а онда каније можда и у плочи. Укрућење се деформише, попречни пресек губи на моменту инерције па само плоча почиње да „носи” овај део конструкције. Укрућење се, услед немогућности самосталног скраћења, деформише изван своје подужне осе, у страну, и не може више да носи аксијално оптерећење. Најчешћи узрок деформације укрућења је пластична деформација услед напона течења, а постоји могућност и од губитка стабилности. Губитак стабилности укрућења је још један начин колапса оребрене плоче. У бродским конструкцијама извијање је најчешће нееластично. Пошто ће пре нееластичног извијања прво доћи до пластичне деформације укрућења услед напона течења материјала, укрућење се, у контексту стабилности, до пластичног колапса понаша еластично па се тако у прорачунима и третира [8].

Код „позитивног” савијања (слика 2.4), коме би одговарао случај хидростатичког притиска воде на дно брода, плоча панела је притиснута, а влакна на врховима укрућења се истежу. С обзиром на положај неутралне осе, плоча неће имати велики напон тек до већег притиска воде на панел, до када ће укрућење, услед истезања, већ одавно премашити напон течења материјала. Наравно, с обзиром да су влакна плоче под притиском, постоји опасност од њеног извијања [15].

У комбинацији оптерећења услед притиска у равни и „позитивног“ савијања постоји опасност од два типа губитка носивости: извијања плоче и пластичне деформације укрућења услед истезања. Ово прво може се десити и при малим латералним притисцима, док други случај се обично приписује великим вредностима притисака на раван плоче [15]. Укрућење се пластично деформише па се и неутрална оса помера ка плочи. Овим укрућење преноси своје истезање којем је подвргнуто на плочу и смањује притисак под којом се она већ налази. Постоји опасност и од симултане пластичне деформације укрућења и извијања плоче. Померање неутралне осе услед пластичне деформације укрућења или плоче узрокује ексцентричност деловања оптерећења, а оно итекако може утицати на тип колапса оребрене плоче. Неретко се за анализу ове појаве користи модел укрућења са придодатим лимом, у коме се укрућење третира као еквивалентна греда оптерећена аксијалним и латералним притиском.



Слика 2.4. „Позитивно“ савијање (лево) и „негативно“ савијање (десно) оребрене плоче, комбиновано са аксијалним притиском

Услед корозије или замора дебљина плоче се временом смањује. Губитак чврстоће може бити и последица смањења крутости плоче. Стога, неутрална оса попречног пресека се удаљава од саме плоче, чинећи да евентуална притискајућа сила проузрокује додатни момент за крак који се, у међувремену, створио.

У оребреним плочама постоји интеракција између мембранских и савојних оптерећења. Извијање укрућења са придодатим лимом је компликованије ако поред аксијалне силе постоји и латерални притисак. Мембранска оптерећења су обично последица глобалног одзива брода проузрокована савијањем трупа у вертикалној равни, па се због свог фундаменталног карактера посебно анализирају [15].

Што се тиче извијања или губитка стабилности у оребреној плочи, овај проблем се посебно третира у анализама, пре свега због своје изненадне природе. С обзиром да им је критични напон извијања углавном већи од напона течења, може се рећи да оребрене плоче у том смислу поседују довољну чврстоћу, и се овај део конструкције највероватније неће извити у еластичном подручју. Генерално, и овде се разликује неколико врста глобалног колапса оребрених плоча (панела): колапс оребрене плоче између примарних попречних елемената конструкције брода и колапс целог панела са уздужним и попречним укрућењима. Оребрени панели се обично пројектују тако да и у случају да дође до колапса, прво се деси колапс панела између попречних примарних елемената. Други тип колапса био би катастрофалнијих размера (укључивао би велики део конструкције). Такође, критични напон целог панела, рецимо панела дна, је због сложености конструкције изузетно тешко прорачунати са довољном тачношћу. Стога, потребно је оптимизовати конструкцију на такав начин да критични напон извијања дела конструкције дна буде већи од оног у оребреној плочи између примарних попречних елемената, а опет да су оба напона много већа од напона течења материјала. У пракси, димензије елемената добијене правилима класификационих друштава дефинишу елементе конструкције довољне чврстоће да задовоље ове захтеве, иако је неопходно и захтевано проверавање стабилности панела.

Већина модела оребрених панела у бродским конструкцијама третирају се као слободно ослоњени. Иако је могуће да оребрена плоча (или цео панел), ослоњен на јаке елементе конструкције, има одређен степен спречености ротације, чак и овакво стварно стање контурних услова далеко је од укљештења. С обзиром да је

крајње непрактично третирати у анализама делове конкструкције сваки пут различитим констурним условима, слободни ослонци остају најреалније решење, поготово имајући у виду мале деформације и угибе, у еластичној области материјала, а услед латералног притиска. Спреченост ротације је већа при већим деформацијама, који прелазе границу течења материјала, и тиме применљивије граничној анализи чврстоће панела, иако и у тим анализама често се у обзир узимају слободни ослонци [1, 15].

3 Прорачуни чврстоће оребрених плоча

Неоребрени део плоче бродског панела је плоча између укрућења. Пре формулације понашања оребрених плоча треба споменути диференцијалну једначину савијања [16] изотропне неоребрене плоче, која гласи:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (3.1)$$

Ако су познати одговарајући контурни услови, могуће је из ове диференцијалне једначине извести угиб и напоне неоребрене плоче. Решење за угиб, за слободно ослоњену плочу оптерећену равномерним притиском онда постаје:

$$w = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2} \quad (3.2)$$

Када је угиб велики у односу на дебљину плоче, $w_{\max} > 0.7t$, терцијарни напони се повећавају па теорија малих померања и једначина савијања изотропне плоче

више нису поуздане. За такав случај тачнија постаје фон Карманова једначина за велике угибе танких плоча, описана у [16]. Ова једначина је после модификована, а укључује ефекте ортотропије, и решење је представљено у [17] у облику серије дијаграма.

Укрућење, у засебним анализама обично се репрезентује теоријом греда. Постојеће процедуре анализа савијања укрућења заједно са плочом описане су у наставку. Код оребрених плоча, диференцијална једначина се усложњава узимајући у обзир ортотропан карактер понашања конструкције.

3.1 Аналитичка формулација савијања оребрених плоча

Теорија оребрених плоча знатно је компликованија од теорије неоребрених плоча или теорије греда. Разлика се илуструје не само у сложености једначина, већ и у њиховим решењима. За греду је познато решење у општем облику, док за неоребрену плочу постоје решења за одређену комбинацију контурних услова и оптерећења. Понашање (савијање) оребрене плоче описано је парцијалном диференцијалном једначином осмог реда. Једначина савијања оребрене плоче се добија из три спрегнуте парцијалне диференцијалне једначине за померања u, v, w тачке средње равни плоче. Ове једначине су добијене из услова равнотеже елементарног делића плоче са укрућењима у два управна правца:

$$F_x \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{t}{2(1-\mu)} \frac{d^2 v}{dx dy} + \frac{t}{2(1+\mu)} \frac{d^2 u}{dy^2} - S_x \frac{d^3 w}{dx^3} = 0$$

$$F_y \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{t}{2(1-\mu)} \frac{d^2 u}{dxdy} + \frac{t}{2(1+\mu)} \frac{d^2 v}{dx^2} - S_y \frac{d^3 w}{dy^3} = 0 \quad (3.3)$$

$$J_x \frac{d^4 w}{dx^4} + 2J_T \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + J_y \frac{d^4 w}{dy^4} - S_x \frac{d^3 u}{dx^3} - S_y \frac{d^3 v}{dy^3} = 0$$

Елиминисањем хоризонталних померања u, v из једначине (3.3) добија се парцијална диференцијална једначина за угиб [18]:

$$\alpha_1 \frac{d^8 w}{dx^8} + \alpha_2 \frac{d^8 w}{dx^6 dy^2} + \alpha_3 \frac{d^8 w}{dx^4 dy^4} + \alpha_4 \frac{d^8 w}{dx^2 dy^6} + \alpha_5 \frac{d^8 w}{dy^8} = 0 \quad (3.4)$$

Коефицијенти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ зависе од геометријских карактеристика попречног пресека и поасоновог коефицијента.

$$\alpha_1 = tF_x J_x - tS_x^2$$

$$\alpha_2 = 2(1+\mu) F_x F_y - \frac{\mu t^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} J_x + 2tF_x J_T - 2(1+\mu) F_y S_x^2$$

$$\alpha_3 = tF_y J_x + 4(1+\mu) F_x F_y - \frac{\mu t^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} J_T + tF_x J_y - 2\frac{1+\mu}{1-\mu} tS_x S_y \quad (3.5)$$

$$\alpha_4 = 2(1+\mu) F_x F_y - \frac{\mu t^2}{(1-\mu)(1-\mu^2)} J_y + 2tF_y J_T - 2(1+\mu) F_x S_y^2$$

$$\alpha_5 = tF_y J_y - tS_y^2$$

Овде важи да је:

$$F_x = \frac{t}{1-\mu^2} + F_x^+$$

$$F_y = \frac{t}{1-\mu^2} + F_y^+$$

$$J_x = \frac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_x^+ \quad (3.6)$$

$$J_y = \frac{t^3}{12(1-\mu^2)} + J_y^+$$

$$J_T = \frac{t^3}{12(1-\mu^2)}$$

Површине попречних пресека укрућења у правцу x и y репрезентоване су величинама F_x^+ , F_y^+ . Момент инерције попречних пресека укрућења у правцу x и y су означени са J_x^+ , J_y^+ , док S_x , S_y представљају статичке моменте укрућења.

Зависност померања u и v од w дата је следећим једначинама:

$$\frac{d^5 u}{dx^5} = \frac{1}{K} \left[b_1 \frac{d^6 w}{dy^6} + b_2 \frac{d^6 w}{dx^2 dy^4} + b_3 \frac{d^6 w}{dx^4 dy^2} + b_4 \frac{d^6 w}{dx^6} \right] \quad (3.7)$$

$$\frac{d^5 v}{dy^5} = \frac{1}{K} \left[b_1' \frac{d^6 w}{dy^6} + b_2' \frac{d^6 w}{dx^2 dy^4} + b_3' \frac{d^6 w}{dx^4 dy^2} + b_4' \frac{d^6 w}{dx^6} \right] \quad (3.8)$$

Коefицијенти $K, b_1, b_2, b_3, b_4, b_1', b_2', b_3', b_4'$ су сложеније формулације па неће бити приказане. За оребрену плочу практично не постоји аналитичко решење у општем облику нити применљива решења једначине савијања. То значи да је аналитички немогуће анализирати савијање оребрене плоче. Уплив аналитике у анализи оребрених плоча, уз велику обазривост код моделирања контурних услова и уз крајње грубо упрошћење стварног понашања, био би могућ код савијања дела плоче између укрућења.

3.2 Теорија ортотропних плоча

Основе теорије ортотропних плоча произилазе из теорије еластичности. Моделирање оребрених плоча еквивалентним, неоробреним плочама, као главна

тема овог истраживања директно је ослоњена на теорију ортотропних плоча. Стога, овој тематици посвећена је посебна пажња.

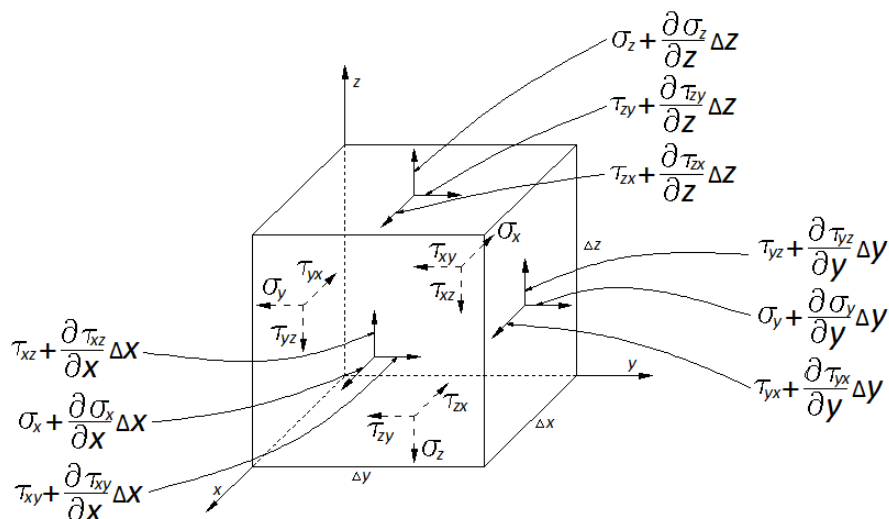
Теорија ортотропних плоча претпоставља да оребрена плоча има различите крутости у управним правцима [1, 8, 19]. Такође, подразумева се да су укрућења по дужини и ширини плоче равномерно распоређена. Користи се код плоча и материјалне и конструктивне ортотропије.

Угиб и напони се изводе из диференцијалне једначине четвртог реда савијања ортотропне плоче [16]:

$$D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + 2H \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + D_{22} \frac{d^4 w}{dy^4} = p(x, y) \quad (3.9)$$

У овој једначини важи једнакост $H = D_{12} + 2D_{33}$. D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) су коефицијенти савојне матрице крутости плоче. Индекси 1, 2, 3 представљају међусобно управне правце координатног система, при чему су, у овом случају једнаки правцима x , y , z . Теорија ортотропних плоча и експерименти се најбоље поклапају код укрућења истих јачина, а малог размака. У случају несиметричних укрућења у односу на раван плоче, решења диференцијалне једначине (3.9) имају мању тачност у односу на измерене вредности угиба. Решења за различите случајеве оптерећења и контурних услова представљене су у [19, 20, 21].

Теорију анизотропних плоча првенствено развио је, у апроксимативном облику, Хубер [22]. Једначина савијања ортотропних плоча је специјалан случај опште једначине која описује понашање анизотропних плоча. Већина композитних плоча, чији материјал се третира као анизотропан, поседује ортотропно понашање. Прецизније, материјално или конструктивно ортотропне плоче су по свом понашању, у ствари, специјално ортотропне плоче. Овим се уводи још једно упрошћење: претпоставља се да истезање и увијање оваквих плоча није спрегнуто [23]. На слици 3.1 приказани су напони који делују на један елементарни делић материјала. Три једначине сачињавају услове равнотеже овог елементарног делића и описане су у [24].



Слика 3.1. Напони у елементарном делићу анизотропног материјала

Да би се објаснило понашање специјално ортотропних плоча, под којим се, у овом истраживању, подразумевају и оребрене плоче, треба кренути од везе напона и деформације опште једначине анизотропних материјала, које директно произилазе из теорије еластичности [25, 26]. Матрична веза напон – деформација је у ствари Хуков закон у општем облику (3.10).

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (3.10)$$

Ова једначина најчешће се пише у матричном облику:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

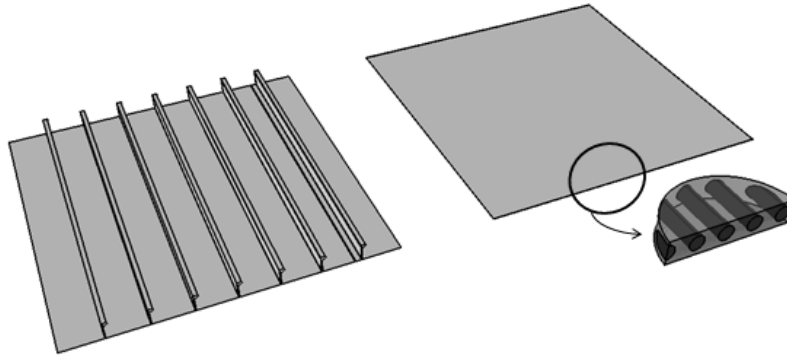
Коефицијенти C_{ij} представљају матрицу еластичности $[C]$ материјалног делића и постоје само у случају када нема равни симетрије карактеристика материјала. Понашање елементарног делића дефинисано са 36 константи матрице еластичности зове се генерално анизотропним структурним одзивом. Међутим, с

обзиром да важи $C_{ij} = C_{ji}$ то значи да генерално анизотропан материјал у ствари има 21 независну константу матрице еластичности. Увођењем равни симетрије смањује се број независних константи, тако да ако у елементарном делићу постоје две међусобно управне равни симетрије карактеристика материјала (симетрија ће постојати релативно и у односу на трећу равну управну на ове две), онда се такав материјал зове ортотропан. Веза напона и деформације ортотропног материјала постаје:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Као што се види у једначини (3.12), не постоји веза између нормалних напона и деформација смицања, па су коефицијенти матрице крутости који репрезентују ту везу једнаки нули. Одваде следи претпоставка да код ортотропних материјала смичући напони не могу да проузрокују подужну деформацију, и обрнуто. Ортотропан материјал има 11 независних константи. Ако би у свакој тачки постојале три међусобно управне равни симетрије материјала онда би тај материјал био изотропан.

Пошто се већина инжењерских конструкција састоји од оребрених или неоребрених плоча чије су две димензије много веће од оне треће, једначина (3.12) се преводи у проблем ортотропних плочи. Теорија ортотропних плоча је базирана на класичној теорији ламина. Суштина упрошћења је у свођењу проблема еластичности 3Д тела на 2Д плочу, низом претпоставки, а да при томе тачност анализе не буде угрожена.



Слика 3.2. Ортоотропне плоче: конструктивно ортоотропне плоче (лево), материјално ортоотропне плоче (десно)

Приликом савијања замишљена линија управна на средњу површ плоче остаје управна и у деформисаном стању. Средња раван плоче остаје недеформисана. Дебљина плоче се налази у границама $1/8 - 1/100$ од дужине краће стране плоче, док угиб не би требало да пређе границу од $0.5 - 0.7$ од дебљине плоче. У том случају важе претпоставке: $\sigma_z = 0, \tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = 0$. Детаљније о упрошћењима ортоотропне теорије плоча налази се у [2, 23, 25, 26, 27].

Деформације танке плоче изводе се из померања:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

Деформације у равни плоче једнаке су:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Деформације проузроковане савијањима средње равни плоче (закривљења услед ротације) одређују се према:

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Једначина (3.12) постаје (3.16), па је однос напона и деформације ортотропне плоче одређена матрицом $[C]$.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Коефицијенти матрице $[C]$ дефинисани су следећим везама:

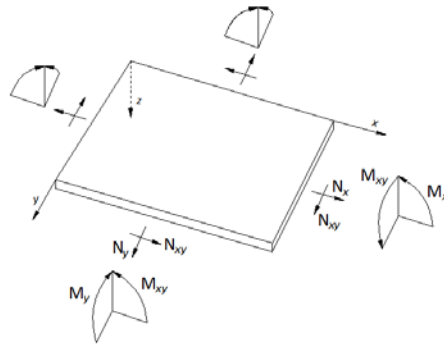
$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{\mu_{21}E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = \frac{\mu_{12}E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \\ C_{22} &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \\ C_{66} = G_{12} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Код ортотропних плоча увек важи једнакост:

$$E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12} \quad (3.18)$$

Стога, веза напона и деформације ортотропне плоче дефинисана је преко четири параметра материјала: модулом еластичности у правцу 1 – E_1 , модулом

еластичности у правцу 2 – E_2 , поасоновим коефицијентом услед истезања у правцу 1 и скраћења у правцу 2 – μ_{12} , поасоновим коефицијентом услед истезања у правцу 2 и скраћења у правцу 1 – μ_{21} .



Слика 3.3. Силе и моменти у плочи

Силе и моменти који делују на ортотропну плочу дефинисани су следећим интегралима:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.20)$$

Из (3.16), (3.19) и (3.20) следи и физичка интерпретација понашања танких ортотропних плоча:

$$\begin{aligned}
 & \text{спрега смицања и истезања} && \text{спрега савијања и истезања} \\
 \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \\
 & \text{спрега савијања и истезања} && \text{спрега савијања и увијања}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Једначина (3.21) може се написати и у облику (3.22) и (3.23):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

Код ортотропних плоча, услед претходно описаних претпоставки, матрична једначина (3.22) своди се на (3.23):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

Једначина (3.23) описује понашање структуре ортотропне плоче чије су особине симетричне у односу на три међусобно управне равни од којих је једна паралелна са правцем укрућења. Под понашањем структуре подразумева се одзив плоче под

дејством оптерећења у равни (мембранска) и оптерећења управних на њену раван (савојна оптерећења).

Моделирање оребрених плоча неоребреним, у оквиру истраживања описаног у овој дисертацији, почиње увођењем претпоставке да не постоји спрега између савијања и истезања. Може се са довољном тачношћу претпоставити да савијање у оребреној плочи не доводи до њеног истезања. Овакво понашање онда се, може моделирати једначином (3.23). Реалност је да до ове спреге ипак долази, с обзиром пре свега на несиметричност позиције укрућења у односу на раван плоче. Међутим, ова појава је незнатна посебно у анализама великих конструкција, као што је брод. Стога, коефицијенти ове спреге B_{ij} , који се налазе у подматрицама $[B]$ једнаки су нули.

Аналогно претходном, могу се увести још две претпоставке: смицање не доводи до истезања, нити савијање проузрокује увијање. Важи и обрнуто, у оба случаја. То значи да су коефицијенти ових спрега, а према (3.23), једнаки нули. Матрица крутости ортотропне плоче се упрошћава и остају по четири независна коефицијента и по мембранском и по савојном напрезању понаособ. $[A]$ представља матрицу крутости која везује напоне и деформације ортотропне плоче подвргнуте мембранским оптерећењима, а $[D]$ дефинише крутост услед деловања савојних оптерећења. У линеарној теорији еластичности, која се и користи у истраживању описаном у овој дисертацији, ове две матрице нису спрегнуте. Прецизније, једначина (3.22) представља понашање ортотропне плоче, а једначина (3.23) понашање специјално ортотропне плоче. Иако се ређе користи израз специјално ортотропна плоча, он је у ствари коректнији и представља подгрупу ортотропних плоча.

Ортотропне плоче (конструктивне или материјалне ортотропије) су специјално ортотропне у случају симетрије укрућења у односу на раван плоче или ако је у питању композитна плоча са симетричним ламинама. Оребрена плоче о којима ће овде бити речи су укрућене са једне стране и нису симетричне у односу на било коју раван која би пролазила кроз попречни пресек оребрене плоче. Ово би

имплицирало спрегу савијања и истезања, смицања и истезања, савијања и увијања. Међутим, у оребреним плочама великих конструкција, претпоставља се минималан утицај ових спрега, у односу доминантна оптерећења у конструкцији. Стога, утицај поменутих спрега на слику померања, деформација и напона оребрене плоче је мали, па се у овом истраживању занемарује. Увођењем поменутих претпоставки значајно се упрошћава анализа ортотропних плоча.

Код мембранског напрезања матрица крутости [A] добија се множењем матрице еластичности са дебелином плоче. Дакле, коефицијенти матрице крутости за мембранско напрезање гласе:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= C_{11}t \\
 A_{12} &= A_{21} = C_{12}t \\
 A_{22} &= C_{22}t \\
 A_{66} &= G_{12}t
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

Решења за угиб и напоне услед савијања, а за одређене случајеве оптерећења и контурних услова, постоје у аналитичком облику и добијају из диференцијалне једначине савијања ортотропне плоче (3.9). Оребрене плоче у бродској конструкцији обично су оивичене јаким носачима (примарни елементи), преградама, лимом бока итд. Овакви реални контурни услови се најчешће моделирају слободним ослоњцима. Слободно ослоњена ортотропна плоча подвргнута притиску управном на њену равну је најближи модел реалном стању оребрене плоче у бродској конструкцији. Аналитичка формулација угиба за овакав случај дефинисана је једначином:

$$w = \frac{16p}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2H \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]}
 \tag{3.25}$$

Једначина (3.25) представља решење са двоструким тригонометријским редом које је добијено коришћењем Навијеовог [16] приступа у случају изотропних

плоча. Напони услед савијања у ортотропној плочи могу се извести према једначинама (3.13) и (3.16). Угибе и напоне, аналитичким путем, могуће је одредити и за неке од других типова ослонаца. Истраживање описано у овом раду посебно ће се ослањати на неке случајеве аналитичких решења савијања из ортотропне теорије плоча, па ће ти случајеви бити и посебно обрађени.

Код ортотропије проузроковане присуством укрућења одређивање крутости постаје фундаменталан задатак у анализи савијања. Иако у литератури постоје одређене формулације за одређивање крутости оребрене плоче у правцима, а потом и угиба, такви приступи дају лоша решења за оребрене плоче чија укрућења нису симетрична. Такође, и код симетричних укрућења ређег распореда или јачих попречних пресека ове једначине су непрактичне. Крутости услед дејства савојног оптерећења, из једначине (3.23), одговарају следећим једнакостима:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= C_{11} \frac{t^3}{12} \\
 D_{12} &= D_{21} = C_{12} \frac{t^3}{12} \\
 D_{22} &= C_{22} \frac{t^3}{12} \\
 H &= D_{12} + 2D_{66} \\
 D_{66} &= G_{12} \frac{t^3}{12}
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Дакле, за добијање матрице крутости савијања, испред матрице еластичности (3.26) налази се коефицијент $t^3/12$. Дебљина плоче утиче на њено савијање са трећим степеном, док код мембранског напрезања веза дебљине и раванских померања је линеарног карактера. Ово ће, касније, бити врло користан податак приликом развоја методе еквиваленције.

3.2.1 Приближне формуле за одређивање крутости ребрених плоча

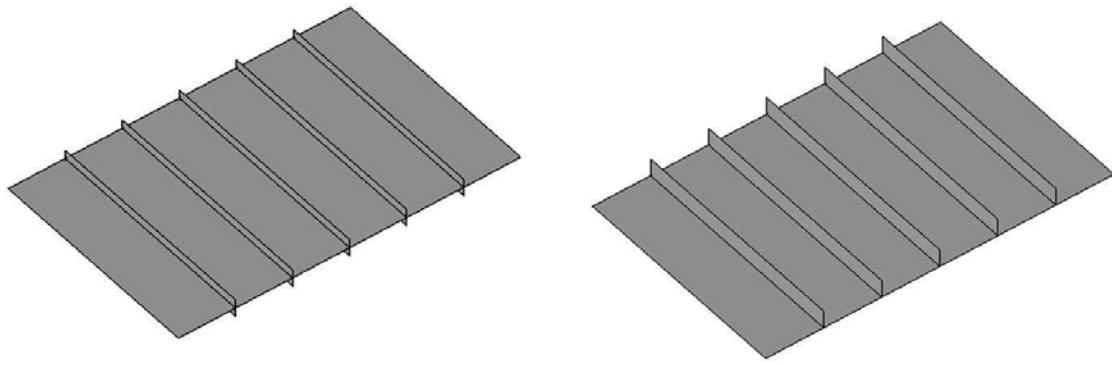
Апроксимативне формуле за крутост ортоторпне плоче у одређеним правцима дате су у [16], и односе се на разне случајеве плоча од композитних материјала, бетонских конструкција, коругованих лимова. Што се тиче ребрених плоча укрућених у једном правцу еквилистантним укрућењима која су симетрична у односу на раван плоче, крутости се могу израчунати према формулама:

$$D_{11} = H = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (3.27)$$
$$D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E'I'}{a_1}$$

E и μ су еластичне константе материјала ребрене плоче, a_1 је растојање између укрућења, док су E' и I' модул еластичности, односно момент инерције укрућења у односу на средњу раван плоче. Код плоче ребрене симетричним укрућењима у оба управна правца крутости се одређују апроксимативним формулама [16, 28]:

$$D_{11} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E'I'_1}{b_1}$$
$$D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E'I'_2}{a_1} \quad (3.28)$$
$$H = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$$

I'_1 , b_1 су момент инерције размак између укрућења која се пружају правцем 1, док су I'_2 , a_1 момент инерције и размак између укрућења која се пружају правцем 2.



Слика 3.4. Плоча оребрена са обе стране - симетрично (лево) и плоча оребрена само са једне стране (десно)

У случају оребрене плоче са укрућењима завареним са једне стране плоче постоји груба апроксимација крутости:

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{Ea_1t^3}{12(a_1 - t + \alpha^3t)} \\
 D_{22} &= \frac{EI'}{a_1} \\
 D_{12} &= D_{12}' + \frac{C_s}{2a_1}.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

При чему је $\alpha = t/H$, а D_{12}' представља торзиону крутост плоче. C_s представља торзиону крутост једног укрућења.

Наведене приближне формуле првенствено су развијене у теорији композитних материјала. Ортотропном плочом се пре свега подразумева композитна плоча састављена од одређеног броја ламина које се састоје из влакана поређаних у једном правцу. Између ових влакана, која могу бити стаклена, карбонска или друга, налази се испуна. Хомогеност и густ рапоред ових влакана чине да се плоча униформно понаша у једном правцу. Аналогно је и са оребреним плочама, чија јачина у неком правцу није последица ортотропности материјала, већ присуства оребрења. Густо распоређена ребра дају јачину плочи за коју су заварена.

Наведене апроксимативне формуле могу се применити у решавању савијања оребрене плоче. Међутим, ове апроксимације су изузетно грубе и не поклапају се довољно добро са експерименталним резултатима. Реална оребрена плоча у бродским конструкцијама обично нема толико густа укрућења па је претпоставка о хомогености крајње упитна. Такође, јачина укрућења итекако утиче на резултате. Што су укрућења јача, прорачунати угиб је непозданији, јер плоча се све мање савија заједно са укрућењима, а напонско стање и еластична површ постају сложенији.

Стога, за сада не постоји универзално прихваћено аналитичко решење за одређивање крутости и угиба оребрених плоча. Метода коначних елемената остаје једини алат који може да да решење за померања и напоне по компонентама, за било какав случај конструктивне ортотропије. Као што је већ поменуто, често се користи аналогија композитних плоча са оребреним, у аналитичком моделирању крутости. Плоча оребрена са једне стране слична би била, по природи понашања, композитној плочи несиметрично поређаних ламина. Обе конструкције имале би различите крутости у међусобно управним правцима, при чему би у општем случају, и једна и друга поседовале спрегу савијање – истезање. Ова веза представља велики проблем у диференцијалној једначини понашања анизотропне плоче. Њено елиминисање има смисла код оребрених плоча у бродским конструкцијама, па су и коефицијенти крутости који дефинишу ову спрегу тада једнаки нули. Иако занемарена, ова спрега у ствари има тенденцију да смањи ефективну крутост ортотропне плоче. У литератури постоје апроксимације за несиметричне композитне плоче у којима се њихово савијање моделира без спреге савијање – истезање, али зато са коришћењем „редуковане крутости” на савијање. Иако оребрену плочу често можемо математички моделирати као материјално ортотропну плочу, принцип редуковане крутости описан у [23] није практично применљив у конструктивној ортотропији. Више о теорији анизотропних плоча налази се у литератури [16, 23, 24, 25, 27, 28, 29].

3.2.2 Примена теорије ортотропних плоча у анализи бродских конструкција

Наведене апроксимативне формуле користе се и за анализу оребрених плоча у бродским конструкцијама. Најпоузданији резултати прорачуна у поређењу са реалним (експерименталним) се постижу када се оребрена плоча заиста и понаша конструктивно ортотропно. У случају густих и не толико јаких укрућења може се користити теорија ортотропна плоча. Тада се сматра да су укрућења „утопљена” у крутост плоче за коју су заварена, чинећи јединствену конструкцију еквивалентне плоче [15].

Теорија ортотропних плоча може се посматрати кроз три теорије: линеарна теорија малих померања [21, 30], коригована теорија малих померања [31, 32, 33], теорија великих угиба [34, 35, 36]. Теорију ортотропних плоча први је на бродској конструкцији применио Шаде [19, 20]. Тачност приступа зависила је од тога колико оребрени панел „личи” на ортотропан, по свом понашању. Ова теорија дуго се користила у анализи оребрених плоча, али у бродским конструкцијама најчешћу примену нашла је код већих панела као што је дводно где је угиб најчешће много мањи од дебљине целог панела (висине дводна) па теорија малих померања постаје најсмисленија. Одступање у максималном напону, код панела дводна, није било веће од око 15% у поређењу са експерименталним резултатима приказаним у [37]. За већину оребрених панела утицај смицања је мали у односу на угиб па се оно може занемарити [15]. Ортотропна теорија базирана на линеарној теорији малих померања такође прорачунава и угиб услед смицања. Код структура као што је дводно, треба имати у виду да смицање узрокује додатни вертикални угиб. Ово је кумулативни резултат деформације смицања услед додатног савијања или закривљења панела. Такође, смицање узрокује дисторзију укрућења што смањује и торзиону крутост панела, што опет доводи до већег угиба [15]. У случају да крутост конструкције узима у обзир смицање, велика вредност торзионе у односу на остале крутости оребреног панела итекако може да утиче на савијање. Код панела дводна утицај смицања генерално је већи него код мањих оребрених плоча јер висина дводна практично представља еквивалентну дебљину ове конструкције. Овај утицај се смањује преко редукције торзионе

крутости на трећину од своје вредности или узима на основу екперименталних резултата, ако постоје [15]. Торзиону крутост могуће је одредити и на посредан начин – дијаграмима приказаним у [20], где се на основу односа димензија плоче добија коефицијент који узима овај ефекат у обзир кроз однос торзије у савијању дводна. Међутим ниједно од ових решења није универзалног карактера, чак и за типове конструкција као што су дводно или двобок, за које су првенствено и изведене. Посебна пажња смицању биће посвећена приликом објашњења предложене методе еквиваленције оребрених плоча која је предмет истраживања у дисертацији. Срачунавање савојне крутости у подужном, правцу x панела дводна [15], аналогно теорији изотропних плоча, гласи:

$$D_x = \frac{EI_{xe}}{(1-\mu^2)s_{x,db}} \quad (3.30)$$

У том случају крутост би директно зависила од момента инерције провеза дна са придодатим лимовима (I_{xe}) и од ширине панела дводна ($s_{x,db}$).

Теорија ортотропних плоча такође се користи и у анализи стабилности оребрених плоча, тј. извијању плоча са својим укрућењима. Панел може бити идеализован еквивалентном неоребреном плочом различитих крутости у међусобно управним правцима. Као код примене исте теорије у савијању, и овде је пожељније имати густо распоређена укрућења по оребреној плочи. При извођењу креће се од познате диференцијалне једначине четвртог степена која дефинише понанашање ортотропне плоче. Дефинишу се виртуелни односи страница и крутости. Развијено је више формула које покривају разне типове ослањања панела. Критични напон извијања добијен преко теорије ортотропних плоча је обично вечи него стварни критични напон, па је грешка на страни сигурности при прорачуну [15].

3.3 Метода коначних елемената

Метода коначних елемената (МКЕ) је нумеричка метода којом је могуће решавати понашање било које конструкције. Применљивост методе не зависи од типа конструкције, распореда укрућења или јачине оребрених плоча, или неких других ограничења својственим осталим методама. Резултати прорачуна методом коначних елемената могу се користити у анализи чврстоће: носивости, замора, стабилности конструкције итд.

У структурној анализи конструкција метода коначних елемената се користи још од шездесетих година прошлог века, али је и дан данас жива материја која се стално допуњава и проверава. Поред чврстоће нашла је примену и у електромагнетизму, анализи вибрација итд. Убрзаним развојем рачунара ова метода је постала уобичајен, и незаменљив алат у анализи чврстоће бродских конструкција.

МКЕ представља средство за решавање разних проблема и у другим дисциплинама сем чврстоће: хидродинамике, преношења топлоте, електромагнетних таласа итд. Математичке основе МКЕ могу наћи у литератури [38, 39]. Сама чињеница да за решавање понашања греда користимо диференцијалну једначину другог, неоробрене плоче четвртог, а ообрене осмог реда уводи нас у компликован математички апарат, практичној неупотребљив у анализи чврстоће великих конструкција. МКЕ управо одбацује инфинитезимални рачун, и дискретизује систем на коначне елементе чије решавање је иако гломазно, много једноставније и налази се у алгебарском облику.

Математичка формулација методе [40, 41, 42, 43] је већ одавно постављена и заснива се на одређивању матрице крутости $[K]$ која поПоред ових метовезује сва оптерећења са једне стране $\{F\}$ и сва могућа померања коначних елемената са

друге стране $\{u\}$, а према (3.31). Стога ће, у овом истраживању, бити врло важно одређивање матрице крутости еквивалентног коначног елемента, односно елемента који ће својим особинама хомогенизовати крутост плоче и укрућења. Матрица крутости једног коначног елемента $[k]_e$ је подматрица глобалне матрице МКЕ модела, сачињеног од већег броја коначних елемената.

$$\{F\} = [K]\{u\} \quad (3.31)$$

Матрица крутости коначног елемента се изводи варијационим методама [41, 42, 43] и њена формулација за било који коначни елемент, дефинисана општом једначином:

$$[k]_e = \int_V [B]^T [C][B] dV \quad (3.32)$$

При чему важе везе напон – деформација према једначини (3.10), док је однос деформације и померања коначног елемента одређен са:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\} \quad (3.33)$$

Па из (3.31) и (3.33), при чему је $[B] = [L][N]$ следи зависност напона од померања:

$$\{\sigma\} = [C][B]\{u\} \quad (3.34)$$

$[L]$ је матрица линеарних оператора, а $[N]$ је функција облика која повезује померања било које тачке коначног елемента са чворним померањима. Предмет истраживања у дисертацији је управо матрица еластичности еквивалентног коначног елемента $[C]$, а тиме и његова крутости. Циљ моделирања ових матрица, у оквиру дисертације, је еквиваленција одзива МКЕ модела оребрене плоче са МКЕ моделом неоребрене плоче.

С обзиром на математичку подлогу методе која се суштински своди на решавање гломазних матрица крутости развој МКЕ је директно био условљен развојем

рачунара. Стога је МКЕ анализа бродских конструкција ,за чије описивање обично потребан велики број коначних елемената, постала стандард у оценама чврстоће. Велики број коначних елемената значи и веће време потребно за анализу. Иако модерни софтвери и рачунари данас су у могућности да се лакше изобре са гломазним анализама, време потребно за саму анализу је и даље вредан ресурс. Где год је то могуће, тенденција је да се геометријско моделирање конструкције упрошћава. Такав је случај и са моделирањем мреже коначних елемената. Матрица крутости једног простог, гредног елемента са два чвора је 12×12 . Његово понашање би дефинисало 12 једначина које везују оптерећење и померања. Дакле, сложени МКЕ модел бродских консктрукција од рецимо $n = 400000$ чворова, са 6 степени слободе по чвору, формирао би систем од $6n$ односно 2400000 једначина. Елиминисање већег броја чворова, односно степени слободе, без значајног губитка по квалитет анализе и потенцијалних закључака значајно би смањило време потребно за прорачун. У зонама конструкције где се очекују велики скокови напона, гушћа мрежа се не би редуцирала. Упрошћавање процедуре моделирања и анализе консктрукција методом коначних елемената и даље је предмет истраживања [44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52].

У МКЕ анализи, напон течења материјала, уз одређени фактор сигурности, обично представља границу до које се дозвољава пораст напона у конструкцији . У ту сврху најчеће се користи критеријум максималног фон Мисесовог напона. Упркос чињеници да већина челичних бродских конструкција може да издржи овај ниво напона, али и његов пораст због прерасподеле напона услед жилавости челика, овај критеријум остаје доминантан [3, 8]. Ова граница, обично је и знатно нижа узимајући у обзир непоузданост идеализације задатих оптерећења конструкције, контурних услова итд. У циљу реалнијих анализа саме оребрене плоче често се претпостављају и почетне импедекције плоче. Оне су честа појава и последица су почетног савијања, резидуалних напона, корозије итд. Корозија се у МКЕ анализама узима у обзир кроз смањење дебљине кородираног дела панела [8].

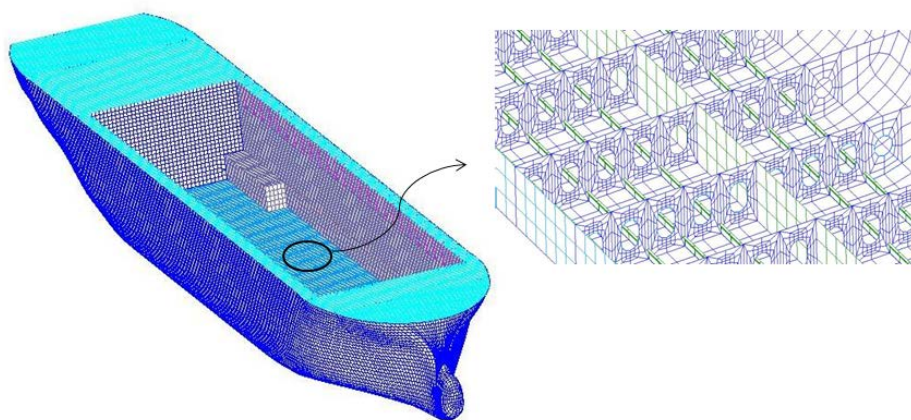
3.3.1 Метода коначних елемената у бродским конструкцијама

Процедура анализе глобалног одзива брода методом коначних елемената подразумева геометријски 3Д модел целог трупа. Овде се препознавају се критични делови брода у структурном смислу, којима је потребно посветити посебну пажњу финијим моделирањем детаља конструкције. Финији модели имаће контурне услове добијене МКЕ анализом глобалног модела.

Глобални МКЕ модел брода подразумева све елементе примарне конструкције и све елементе секундарне структуре који могу утицати на глобални одзив. Технолошки отвори и отвори за пролазе се генерално изостављају у моделирању трупа. [1, 53]. С обзиром да глобалнији МКЕ модел има велики број елемената па време за његову анализу може бити велико, често се прибегава анализи половине брода у односу на равну симетрију. Ово је могуће урадити ако су конструкција, оптерећења и контурни услови симетрични. Оплата и струкови примарних носача моделирају се плочастим елементима, док се секундарна структура и појасеве носача третирају гредема. Конструктивни елементи који не утичу на глобални одзив као што су колена и разни други детаљи се не моделирају. Струкови примарних носача се деле на минимум три коначна елемента по висини. Димензије елемената не смеју да буду веће од размака секундарне структуре [1, 53]. Следећи могући модел је модел складишта. Складиште се обично репрезентује нешто гућом мрежом него код глобалног модела. Овде треба водити рачуна о контурним условима на крајевима овог модела који се преузимају из глобалног модела или из прорачуна уздужне чврстоће. Модел складишта укључује цело складиште и бар по половину дужине суседних складишта са обе стране. Модел оквирног ребра има још финију мрежу коначних елемената, а довољну да препозна скокове напона да појединим местима. Овде се моделира структура која припада оквирном ребру, односно још по половина растојања до суседног оквирног ребра са обе стране. Овај модел такође може бити део интегралног модела складишта, у коме је могуће препознати порасте напона без улажења у овај модел. Модел локалне структуре може бити било који детаљ конструкције где се очекује значајан пораст напона (разни спојеви укрућења међу собом, углови гротала итд.). Модел концентracије

напона, као крајњи и најфинији модел, анализира стварну слику напона у детаљу конструкторије и обично се користе при оценама замора. Контурни услови се преузимају из „већих“ модела. У овом случају дименизије елемента се спуштају и до саме дебљине детаља.

Препоруке класификационих друштава [3, 54, 55, 56, 57] о моделирању коначних елемената сагласне су са претходом поделом модела. Уобичајено је да буде један елемент између уздужних секундарних укрућења, тако да његова дужина не буде већа од два размака између уздужница. Такође пожељан је један елемент између вертикалних укрућења на попречним преградама, као и између обичних ребара. Најмање три елемента треба моделирати по висини ребреница и провеза, оквирних ребара, стрингера. Троугластих елемената треба да буде што мање. Однос страница правоугаоних плочастих елемената не би требало да буде већи од 3:1, а тамо где се очекује скок напона овај однос треба држати око 1:1. МКЕ модел може се моделирати за случај деловања мембранског оптерећења: плоче - мембранским елементима, а укрућења - штаповима. Такође, за анализу савијања глобалног модела неопходно је плоче моделирати савојним коначним елементима, а укрућења гредама. Због типа оптерећења ком су подвргнути могуће је користити, на пример, само мембранске елементе при моделовању празнице балкеријера и контејнерских бродова. Гушћа мрежа је неопходна у моделима где је потребно препознати значајне терцијарне напоне. У глобалним моделима, због њихове робусности, ово постаје сложеније.



Слика 3.5. Глобални МКЕ модел трупа брода и детаљ оребрене плоче дна

Суштинска примена МКЕ у прорачуну бродских конструкција сагледава се кроз чињеницу да методу у огромном броју случајева користе и сама класификациона друштва у формирању својих формула, поред наравно богатог емпиријског и аналитичког искуства. Такође, МКЕ се изузетно пуно користи у пројектовању брода и бродске конструкције. Класификациона друштва [3, 54, 55, 56, 57] препоручују, али све чешће и експлицитно захтевају у деловима својих правила проверу чврстоће брода коришћењем МКЕ анализе (танкери изнад 190 метара, бродови за расути терет изнад 150 метара дужине, детаљи елемената бродских конструкција). Често се директни прорачуни користе за оптимизацију конструкције, нумерички доказујући оправданост смањења димензија делова конструкције у односу на оне усвојене Правилима. Тенденција је да у будућности захтеви класификационих друштава за анализом чврстоће бродске конструкције применом МКЕ буду много већи. Идеја примене МКЕ може се сагледати у „*design by analysis*” приступу анализи бродске конструкције, која представља свеобухватну структурну анализу различитих стања оптерећења интегрисањем статичких али и динамичких ефеката. Случајеви оптерећења брода у структурној анализи подразумевају различите типове крцања терета, баласта и распореда других оптерећења. Динамички ефекти у последње време кроз такозвани „*Dynamic Load Approach*“ приступ [1, 58] подразумевају комплетну анализу чврстоће брода методом коначних елемената интегрисану са анализом кретања брода. Овим приступом могуће је применити спектралну анализу ради добијања екстремних вредности таласа, а које би водиле ка еквивалентном систему таласа као оптерећењу. Линеарно еластична анализа коначним елементима би у овом случају била оправдана, с обзиром да би одзив бродске конструкције увек био у оквирима еластичних граница материјала. Динамичка оптерећења могу бити вертикални момент савијања (*sagging, hogging*), вертикална латерална убрзања на прамцу брода, момент торзије (за контејнерске бродове) итд. Динамичко оптерећење се у овим случајевима узима као оно максимално које ће задесити конструкцију брода у његовој двадесетогодишњој експлоатацији. Оптерећење еквивалентним таласом је процедура којом се резултати спектралне анализе представљају у детерминистичком формату, згоднијем за коришћење у МКЕ анализама. Оптерећења брода од таласа углавном се узимају као

оптерећењима малих фреквенција која не индукују велике динамичке скокове напона у конструкцији. Ова динамичка оптерећења се, у структурној МКЕ анализи, третирају квазистатички. То су углавном оптерећења од таласа која индукују промену водне линије, а тиме и другачију расподелу узгона, и инерцијалне силе које су последица убрзања услед кретања брода по узбурканом мору. Динамичка оптерећења високе фреквенције понављања представљају се динамичким моделима и ту спадају вибрације и нека оптерећења од таласа (*springing* - резонанца осциловања трупа брода са таласима).

У литератури постоји доста истраживања које се баве анализом чврстоће оребрених плоча методом коначних елемената. Углавном се ове анализе базирају на великим серијама нумеричких модела где су прорачунавани максимални угиби или напони и поређени са већ постојећим методама као што су ортотропна теорије плоча, метода решетке. У [59] су приказане неке од таквих анализа и дискутовани разни нивои тачности нумеричких симулација у односу на постојеће апроксимативне методе. МКЕ анализа је, у моделима из [59], дала велики дијапазон тачности (10 - 40%) добијаног угиба у односу на исти угиб добијен неком од поменутих метода. У наставку, нешто више простора биће посвећено нумеричком моделирању оребрених плоча еквивалентним неоребреним плочама, у оквиру бродских конструкција.

3.4 Моделирање оребрених плоча еквивалентним неоребреним плочама

Иако под моделирањем оребрених плоча еквивалентним, у принципу, подразумевају се сви прорачуни чврстоће у којима је било речи у раду, у овом Поглављу, посебна пажња биће посвећена конкретним примерима из литературе која се директно ослањају на идеју дисертације.

Једноставнији нумерички модели главни су узрок потраге за новим типовима коначних елемената. Моделирање оребрених плоча неоробреном, у нумеричким прорачунима, везано је за специјалне коначне елементе. Ови елементи често се у литератури називају и суперелементима. Као и у случају ортотропне теорије плоча где се оребрена плоча замењује неоробреном покушавајући да задржи структурне карактеристике ове прве, тако се и коначни елементи који би репрезентовали плочу и укрућење замењују новим, еквивалентним коначним елементом. Еквивалентни елемент се обично репрезентује правоугаоним коначним елементом са четири чвора. Овај елемент би имао своје коефицијенте матрице крутости, тако да се и овде проблем своди на одређивање различитих крутости у правцима [15]. Еквивалентни елемент оребреног панела (*Stiffened Panel Element*) је тип коначног елемента (суперелемента) који у нумеричким анализама репрезентује понашање елемената оребрене плоче. Дакле, његова матрица крутости, узима у обзир крутости укрућења и крутост придодатог лима. Еквивалентни елемент чија је функција преношење само мембранских непрезања обрађиван је у [44, 45]. Коришћење нових еквивалентних елемената иде у прилог све чешћој „*design oriented*“ анализи конструкција, која укључује моделирање нових типова елемената који одговарају специфичностима одређеног дела конструкције. Еквивалентни елементи најшешће се и користе при моделирању конструкције која се понавља. Пример оребрених плоча, ребара или колена [15] у бродској конструкцији је типичан за ову врсту анализе. Неопходан корак при успостављању еквиваленције суперелемента са конвенционалним елементима је анализа понашања структуре под одређеним оптерећењима. Тако добијене информације се инкорпорирају у нову матрицу крутости суперелемента.

Методe репрезентовања оребрене плоче неоробреном, углавном су изникле на основама ортотропне теорије плоча, док су највећу примену нашле у нумеричким анализама. Понашање коначног елемента плоче одговарало би понашању коначних елемената плоча – греда. Нови, еквивалентни коначни елемент плоче би имао карактеристике еластичности (и крутости) које репрезентују ортотропност понашања коначних елемената модела оребрене плоче.

Једна од најсавременијих метода моделирања оребрених плоча еквивалентним структурним јединицама је Метода идеализоване структурне јединице – ИСУМ (*Idealized Structural Unit – ISUM*). Метода користи комбинације структурних јединица које служе за моделовање делова конструкције. Јединице идеализују понашање конструкција које замењују. Метод су развили Уеда и Рашид [60], док је Паик [61] развио рачунарски програм АЛПС/ИСУМ (*ALPS/ISUM*) [8] за анализу граничне чврстоће бродова (и оребрених и неоребрених плоча) базирану на ИСУМ методи. Ова метода омогућава моделирање бродских конструкција са мањим бројем коначних елемената. Да би се у што већој мери одстранила одступања у тачности у односу на конвенционални МКЕ модел прорачуна конструкције, развијене су серије специјалних коначних елемената које репрезентују структурне јединице. Структурне јединице, међу којима и коначни елемент (еквивалентни модел) плоче, могу се у, специјализованим софтверима, подвргнути разним оптерећењима: мембранско, савојно, судар, извијање. Пример примене ИСУМ методе у предикцији граничног момента савијања трупа брода дат је у [8]. Метода такође даје могућност анализирања чврстоће оребрених плоча са иницијалним имперфекцијама. ИСУМ је пре свега развијен за описивање нелинеарног понашања челичних конструкција. Метода омогућава и да се реална деформисана конструкција (греда, плоча итд.) услед губитка стабилности или течења материјала, а у анализи граничне чврстоће, моделује еквивалентном недеформисаном јединицом која би имала редуковану крутост (аксијалну - ако је у питању стабилност, савојну - ако је у питању латерални притисак). Коришћењем идеализованих структурних јединица нови модел имао би знатно мањи број елемената и степени слободе у односу на класичан МКЕ модел који се користи у постојећим софтверима.

ИСУМ је првенствено намењен анализи чврстоће челичних оребрених панела у бродским конструкцијама [62]. Оребрене плоче могу се моделирати ИСУМ структурним јединицама идеализованим различитим начинима. Јединице које репрезентују разна укрућења, носаче обично се моделују ИСУМ гредним елементом са два крајња чвора. ИСУМ јединице које репрезентују неоребрене и оребрене плоче моделирају се коначним елементом плоче са четири чвора.

Конструкција се може репрезентовати моделом укрућења са придодатим лимом. Овај модел није погодан код панела где је укрућење, по крутости, сувише слабо или сувише јако у односу на плочу на којој се налази. Код панела са „слабим“ укрућењима, често се користе два ИСУМ елемента: елемент плоче и елемент укрућења. Један елемент плоче је у могућности да замени већи број конвенционалних коначних елемената плоче између укрућења и да пренесе оптерећења у глобалном смислу. Један елемент укрућења замењује више елемената греде у МКЕ моделу. Цела оребрена плоча може се третирати као једна ИСУМ јединица, и то опет са много мање коначних елемената него што је то случај у конвенционалној промени МКЕ. Еквивалентни коначни елемент неоребрене плоче, у овом случају, замењује елементе оребреног панела. Дакле, у целом моделу трупа брода постоји више различитих структурно идеализованих јединица које замењују конвенционалне МКЕ моделе конструкције. Свака од идеализованих јединица моделирана је у складу са контурним условима и оптерећењима којима је подвргнута.

Процедура добијања ИСУМ јединица [63, 64, 65] састоји се у избору дела конструкције који треба идеализовати. Конструктивни део подвргава се различитим потенцијалним оптерећењима и контурним условима с обзиром на његову позицију у глобалној конструкцији и његов одзив се анализира постојећим аналитичким, нумеричким и експерименталним процедурама и подацима. На основу ових резултата ствара се идеализована ИСУМ јединица која репрезентује одзив стварног дела конструкције у задатим условима. Овај одзив се формализује у матричном облику кроз новодефинисани коначни елемент. Нелинеарно понашање конструктивног дела је идеализовано и представљено у форми сета функција граничне чврстоће које се имплементирају у нови ИСУМ елемент. Ове функције репрезентују нелинеарну везу чворних оптерећења и померања до стања граничне чврстоће. Пример линеарне и нелинеарне анализе великог пловног објекта, помоћу ИСУМ јединица, презентован је у [66].

Нешто другачија процедура за одређивање еластичних коефицијената еквивалентне плоче дата је у [47] на примеру конструкције зида парног котла. Прорачунавање еластичних коефицијената које дефинишу мембранско и савојно понашање еквивалентне плоче понаособ настало је као последица изједначавања раванских померања и угиба зида котла и еквивалентне плоче. Раванска померања и угиб зида котла добијени су аналитичким путем коришћењем чињенице да је први извод енергије деформације по сили даје померање у правцу те силе. Изведене су аналитичке формулације за зид парног котла, код кога су укрућења (прстенасти попречни пресек) симетрична у односу на раван плоче, на малом су међусобном растојању и поседују много већу крутост од плоче. Код мембрански оптерећене конструкције ова процедура своди се на примену Хуковог закона. Добијање савојног модула еластичности у једном правцу урађено је тако што је зид котла оптерећен континуалним оптерећењем и уклештен по ивици управној на правац чији се модул еластичности тражи. Модул смицања еквивалентне плоче добијен је апроксимативном формулом из теорије ортотропних плоча.

У [48] и [62] описан је сличан поступак добијања еластичних параметара еквивалентне (ортотропне) плоче, такође на примеру оребрене конструкције зида котла. У овим случајевима, изједначавање раванских померања и угиба оребреног панела и еквивалентне плоче изведено је нумеричким путем. Моделирани су МКЕ модели оребре и еквивалентни плоче подвргнуте истим контурним условима и оптерећењима. И у овим радовима, као и у [47] распрегнут је мембрански и савојни одзив панела. Савијање је моделирано слободним ослонцима по ивицама панела и равномерно распоређеним латералним притиском на плочу. Из односа померања две конструкције добијена је информација колико поједине модуле еластичности еквивалентне плоче треба повећати или смањити да би се померања (маскимална померања у два управна правца у равни и маскимални угиб) два панела поклопила. Даље, у МКЕ моделима еквивалентне плоче варирана је дебљина док се не добије поклапање вредности маскималних фон Мисесових напона у две поређене конструкције. Локација маскималних напона не мора нужно да буде на истом месту. Модул смицања еквивалентне плоче је, овде, исти као и код изотропног материјала. Описана процедура састојала се од одређеног

броја итерација, које подразумевају моделирање (варирање) еластичних параметара док се одзиви у две констуркције не поклопе.

У истраживању описаном у овом раду развијен је сличан поступак. Сличност са радовима [47, 48, 62] се пре свега базира на идеји добијања еластичних параметара еквивалентне плоче из услова једнакости маскималних померања (раванских, у два управна правца и угиба) оребрене и еквивалентне неоребрене плоче. Такође, додатни услов, као у [48] и [62], је једнакост маскималних фон Мисесових напона у две плоче. Дакле, резултат предложене процедуре је не само једнакост маскималних померања, већ и маскималних фон Мисесових напона у оребреној и неоребреној плочи. Мембрански и савојни одзив су такође распрегнути, како би се омогућило засебно моделирање еластичних параметара. Мембрански параметри еластичности „нове“ плоче добијени су директном применом Хуковог закона на равномерно издужење плоче, док су савојни параметри моделирани применом формула за угиб и за компоненталне напоне (а тиме и фон Мисесов напон) из теорије ортотропних плоча за случај слободно ослоњених ивица и равномерно распоређеног латералног притиска на плочу. У процедуре је вођено рачуна и о моделирању крутости у два управна правца, тј. да модул еластичности еквивалентне плоче у једном правцу заиста репрезентује „јачину“ тог правца у случају савијања или раванског оптерећења. Коришћењем аналитичких формулација и код мембранских и код савојних параметара еквивалентне плоче, омогућена је аутоматизација целе процедуре, која је сада сведена на, у већини случајева до 2 итерације за мембранске и савојне еластичне параметре. Треба напоменути, да су у описаној процедури изведени обрасци за добијање параметара еластичности (крутости) еквивалентне плоче: два модула еластичности, два поасовнова коефицијента, модула клизања и дебљине „нове“ плоче. За оребрену плочу било којих димензија и јачина укрућења (у једном или оба међусобно управна правца) могуће је добити следствену еквивалентну плочу. Једини уплив нумерике, у овој процедури је на самом почетку, када се маскимални угиб и маскимални фон Мисесов напон добијају применом МКЕ. За разлику од примера описаних у [47, 48, 62], бродске оребрене плоче имају укрућења заварена на једној страни плоче, и уз њихово релативно велико

међусобно растојање, немогуће је применити неку аналитичку методу за добијање угиба и напона. Нумеричким одређивањем ових величина добија се на универзалности методе. Такође, у односу на претходно описане радове, велика пажња је посвећена моделирању утицаја смицања на моделиране параметре еластичности. Детаљније о алгоритму методе налази се у Поглављима 5 и 6.

Третирање нумеричког модела оребрене плоче новим, „хибридним“ коначним елементима истраживано је и у [49]. Предложен је приступ формирању „здруженог“ коначног елемента који би се сачињавао од елемента плоче од осам чворова и греде од три чвора. „Здружени“ коначни елемент би имао сопствену матрицу крутости. Дакле, на овај начин формиран коначни елемент, имао би, у једном елементу здужене елементе греде и плоче. Коначни елемент греде би се простирао преко елемента плоче, а не кроз њене ободне чворове као што је случај у класичном моделирању мреже елемената. Ово би, према [49] омогућило нов начин моделирања великог броја греда, било каквог правца, кроз сам плочасти елемент, при чему би, у том случају, постојао међучвор на самом плочастом елементу.

У [50] описана је слична идеја коначног елемента чија би матрица крутости репрезентовала крутост плоче и укрућења. Слично истраживање презентовано је и у [68]. Еквивалентни коначни елемент плоче развијан је конкретно за анализу глобалних модела брода описан је у [51]. У овом случају директни циљ процедуре је смањење броја степени слободе у коначном, глобалном моделу трупа брода. У [52] предложене су процедуре прорачуна крутости ортотропне плоче у управним правцима, с обзром на ексцентичност положаја неутралне осе. Овде је узета у обзир спрега савојног и мембранског одзива оребрен плоче. Прораунате крутости представљају директне улазне величине за нумерички модел. Највећи проблем истраживања везаних за „хибридни“ коначни елемент греда - плоча је у ствари математичка формулација стварне крутости конструкције.

Велики простор у проблематици дефинисања нових типова коначних елемената, у литератури, дат је у случају нумеричке анализе извијања. Разлике између тзв. суперелемената и конвенционалних коначних елемената у нумеричком третирању

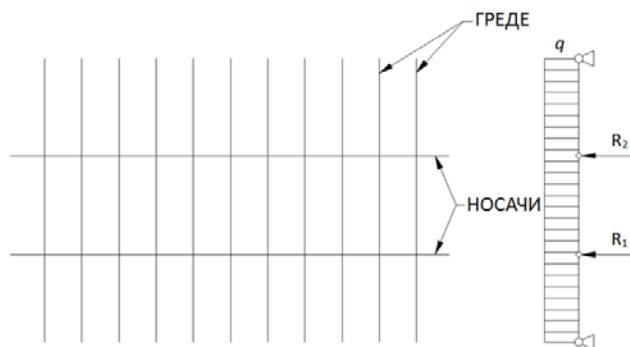
извијања дате су у [69]. Поред извијања, суперелементи коришћени су и у анализи вибрација ортоторпних плочи [70].

3.5 Остале методе прорачуна чврстоће оребрених плоча

Постоји неколико теорија и метода за анализу савијања оребрених плоча, које нуде решења прихватљиве тачности за одређене случајеве. Неке од тих метода су: метода решетке, метода греде на еластичним ослонцима, модел укрућења са придодатим лимом, приближне корелационе формуле итд.

Метода решетке (метода Бубнова) третира оребрену плочу или панел као систем од две управне серије укрућења. У суштини самог прорачуна је теорија греда. Претпоставља се да су греде густо распоређене у једном правцу, а носачи, које представљају профили јачег попречног пресека, су ређе распоређени у другом, управном правцу. Ово заиста и јесте случај у бродској конструкцији: густа укрућења мањег размака представљају елементе секундарне структуре, док ређе распоређена, а на већем размаку, укрућења или носачи су примарни елементи бродске конструкције. Метода решетке подразумева да су све греде истог попречног пресека, еквидистантне, истог оптерећења и начина ослањања. Прорачунавају се оптерећења (силе) које делују на носаче, а постављају се у пресечним тачкама две управне серије укрућења. Следи систем једначина који описује решетку, и угиб као њено решење [2, 15]. Иако се притисак са лимова преноси на греде и носаче, у овој методи се претпоставља да само греде примају оптерећење. Оптерећења се свде на специфична оптерећења по јединици дужине греда.

Иако ова метода губи на популарности појавом рачунарских програма и методе коначних елемената, и даље је могуће релативно брзо добити решења за одређене нивое једноставности модела, без коришћења, некада, гломазнијег нумеричког апарата. Могућности оптимизације панела методом решетке описана су у [71].



Слика 3.6. Метода решетке

Метода греде на еластичним ослоњцима такође је згоднија за прорачун савијања оребреног панела са укрућењима малог размака у једном правцу и укрућењима великог размака у другом правцу. Укрућења великог међусобног размака могу се третирати као греде ослоњена на еластичним ослоњцима у тачкама пресека са укрућењима другог правца. Делећи силу по јединици угиба једног од густо распоређених укрућења са њиховим размаком добија се осредњени модул еластичности или константа опруге по јединици дужине. Ова константа у ствари служи да густо распоређена укрућења представи као еластичне ослоње распоређене по дужини ретко распоређених укрућења. Угиб греде на еластичним ослоњцима дат је диференцијалном једначином:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + kw = q(x) \quad (3.35)$$

Поред угиба (w), момента инерције подужног укрућења са придодатим лимом (I) и оптерећења по јединици дужине подужног укрућења (q) у диференцијалној једначини (3.36) утицај еластичних ослонаца је представљен преко осредњене константе опруге по јединици дужине густих попречних укрућења (κ). Микелсен и Нилсен [72] су развили решење ове једначине за разне случајеве оптерећења и

контурне услове, а Денис [73] је описао ово решење инкорпорирано у софтверу за структурну анализу средњег дела брода [1].

Модел укрућења са придодатим лимом као алата за решавање савијања оребрене плоче има смисла ако укрућења имају велику крутост у поређењу са крутошћу плоче. У случају да је крутост укрућења мала у односу на крутост плоче, укрућења ће имати тенденцију да се савијају заједно са плочом, и онда је пожељнија теорија ортотропних плоча [8]. Код укрућења који имају широк појас придодатог лима, додељивање укрућењу дела лима половине размака до првог суседног укрућења са једне и са друге стране није најкоректније, па постоји опасност да се само укрућење поддимензионише. Стога је, у таквим случајевима, срачунавање носеће ширине појаса прве врсте од великог значаја [2].

Приближне корелационе формуле могу имати практични значај у прелиминарним фазама пројектовања и оптимизације оребрених плоча, када гломазан апарат базиран на методи коначних елемената није неопходан. Корелационе формуле обично се формирају на основу анализе великог броја конкретних случајева оребрених плоча нумеричким методама (метода коначних елемената) за одређено оптерећење и контурне услове. Применом статистичких метода на формираним базама модела формирају се одговарајући полиноми. На основу главних димензија оребрене плоче, размака и димензија укрућења, формулама добија се максимални угиб и напон у оребреној плочи, што може бити од велике практичне користи при оптимизацији конструкције. Корелационе формуле описане у [74] користиле су моделе правоугаоне плоче оребрене у једном правцу, слободно ослоњене по ивицама и оптерећене притиском управним на раван плоче. Оребрење је представљено профилима правоугаоног попречног пресека. У [74] коришћена је регресиона анализа као алат за добијање полинома и дати су дијаграми за проналажење максималног угиба и фон Мисесовог напона у зависности од геометријских карактеристика оребрене плоче.

Моделирање понашања оребрених панела под дејством савојних и мембранских оптерећења истраживали су Паик и Фуцикубо у [46, 75, 76]. Паик је користећи

мерења и нумеричке резултате одређивао формулације за граничну чврстоћу различитих панела мењајући контурне услове, и узимајући у обзир иницијалне импрерфекције. Фуцикубо је користио методу коначних елемената за исту сврху. Анализа постојећих метода за оцену граничне чврстоће челичних оребрених панела под утицајем аксијалног и латералног оптерећења налазе се у [77].

Нека истраживања у вези нових формулација базираних на серијама резултата базираних на нумеричким прорачунима понашања оребрених панела у бродограђи дате су у [78, 79]. Формулације дају предикцију граничне чврстоће и самог одзива оребреног панела за случајеве извијања и латерални притисак. Једна од најновијих студија базираних на нумеричким и пре свега експерименталним резултатима мерења на реалним оребреним панелима оптерећеним на савијање и извијање приказана је у [80]. Утицај контурних услова на оребреним плочама подвргнутим извијању и латералном притиску анализиран је нумеричким прорачунима описаним у [81]. Често се у новијим истраживањима у оквиру развоја метода за прорачун чврстоће оребрених плоча моделира утицај иницијалних имперфекција [82].

4 Идеја рада

Основна идеја рада је развој методе (процедуре) за добијање карактеристика еквивалентне неореврне плоче која би, у нумеричким анализама, заменила модел оребрне плоче (панела). У том случају, еквивалентна плоча би се понашала као и оребрена, а модел би био знатно једноставнији, због чињенице да у „новој” плочи не постоје укрућења.

Шта се подразумева под еквивалентним понашањем неореврне плоче? У овом истраживању, под еквивалентним понашањем неореврне плоче подразумева се да еквивалентна плоча има исти максимални угиб и максимални напон као и оребрена плоча коју замењује. Процедура дефинише такве карактеристике (параметре еластичности) „нове” неореврне плоче да њен максимални угиб и максимални фон Мисесов напон буде, под истим условима оптерећења и ослонаца, исти као и одговарајуће вредности ових величина у реалној, оребреној плочи. Иако се еквиваленција своди на две величине, видеће се да ће она бити и много ширег карактера и препознаваће зоне промене угиба и фон Мисесовог напона, а не само критичне вредности. Добијање еквивалентне неореврне плоче пре свега значило би и дефинисање новог типа коначног елемента чије би еластичне карактеристике репрезентовале понашање еквивалентне плоче. Еквивалентни коначни елемент би се користио у дискретизацији модела оребрених плоча у МКЕ прорачунима. Овај плочасти правоугаони коначни

елемент био би ортотропног карактера, а имао би такве особине да репрезентује понашање плочастих и гредних елемената оребрене плоче у МКЕ моделу.

У примерима рађеним у овом истраживању пажња је посвећена моделу оребрене плоче слободно ослоњене дуж својих ивица и оптерећене једноликим притиском управним на раван плоче, сматрајући да је управо овај случај најсличнији понашању оребрених плоча бродских и других великих конструкција. Међутим, сам поступак добијања карактеристика еквивалентне плоче, универзалног је карактера и може се применити и на други сет оптерећења и контурних услова. Детаљнија дискусија о оваквом избору контурних услова и оптерећења биће објашњена у наредном поглављу. Претпостављено је да се еквивалентна неоребрена плоча понаша ортотропно, тј. различито у два управна правца. Ово би подразумевало проналажење карактеристика еластичности и крутости плоче у два, управна, правца. Метода која ће бити презентована у овом раду показује на који начин се за било коју оребрену плочу могу срачунати параметри „глатке” плоче да понашање исте одговара понашању оребрене плоче.

Суштина развијене методе је у моделирању коефицијената матрице крутости, која везује напоне и деформације претпостављене еквивалентне неоребрене плоче. Из матричне једначине (3.22) следи:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Наведени израз је једначина која повезује силе и моменете са деформацијама и одговара ортотропном карактеру понашања еквивалентне плоче. Као што је већ напоменуто, претпоставка да нема спреге савијања и истезања умногоме поједностављује посао. Коефицијенти подматрице $[B]$ су једнаки нули. Подматрица $[A]$ представља крутост плоче на оптерећења у равни, док подматрица $[D]$ представља савојну крутост. Идеја методе је да се обе матрице добијају из једнакости одговарајућих померања. Матрица крутости еквивалентне плоче као последице мембранских оптерећења добила би се из једнакости раванских померања еквивалентне и оребрене плоче, док би се, аналогно томе,

матрица крутости као последица деловања оптерећења савојног типа добила из једнакости угиба две плоче. Следи да је потребно понаособ срачунати коефицијенте матрице крутости за мембранско и за савојно напрезање. Добијена еквивалентна неоребрена плоча имала би исти максимални угиб као и оребена, међутим не и максимални фон Мисесов напон. Да би се и овај други захтев испунио потребно је урадити додатне итерације овог поступка, уз претпоставке о којима ће касније бити дискусије.

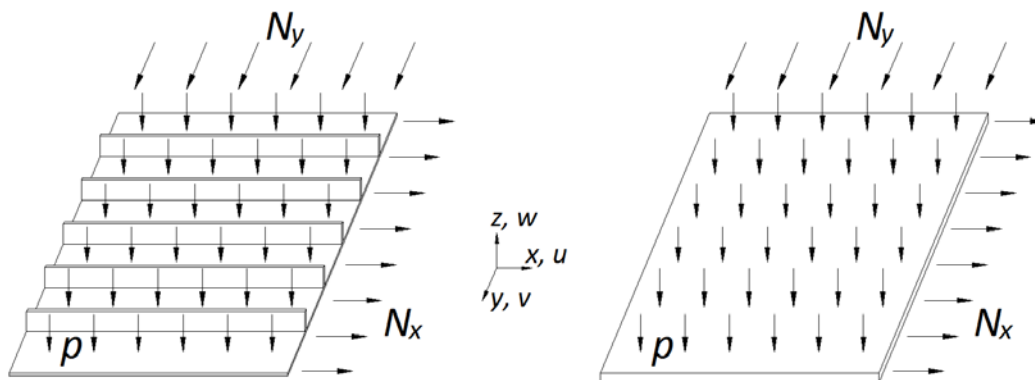
Пре процедуре прорачунавања еквивалентне неоребрене плоче, потребно је изабрати репрезентативну оребрену плочу или оребрени панел који треба заменити. У бродским конструкцијама ово може бити оребрена плоча са секундарним укрућењима, која се налази између јаким примарних елемената конструкције, или део оребреног панела дна који поседује слабија густо распоређена укрућења у једном, и јаке носаче веће растојања у другом правцу или чак део кутијастог панела дводна. Нивои упрошћења диктирају осетљивост крајњих резултата. Наравно да, уколико се део дводна или оребрени панел већег дела дна узме у обзир, нова плоча неће препознати понашање провеза дна или ребреница јер ови елементи у новом моделу и не постоје. Следствено овоме, еквивалентна плоча ни у једном случају неће бити у могућности да препозна напоне у укрућењима секундарне структуре, јер укрућења у новом моделу не постоје, али глобална слика понашања конструкције свакако ће бити „ухваћена”.

Модел репрезентативне оребрене плоче је одређен геометријом плоче и укрућењима, чиме је већ дефинисана и површина и моменти инерције попречних пресека. Ово је веома битно пошто је површина попречног пресека најбитнији параметар у моделирању чврстоће оребрене плоче подвргнуте мембранском оптерећењу, а моменти инерције (отпорни моменти) су најбитније карактеристике потребне за анализу савојног напрезања. С обзиром да се у предложеној методи посебно рачунају параметри одговорни за мембрански и савојни одзив еквивалентне плоче (претпоставка да нема спреге мембранског и савојног напрезања), могу се разликовати два модела еквивалентне плоче: мембрански модел еквивалентне плоче и савојни модел еквивалентне плоче. Применом

предложене методе на „мембрански модел” добијају се параметри крутости плоче подвргуте мембранском оптерећењу, док се применом методе на „савојни модел” исти параметри добијају за случај савојног оптерећења.

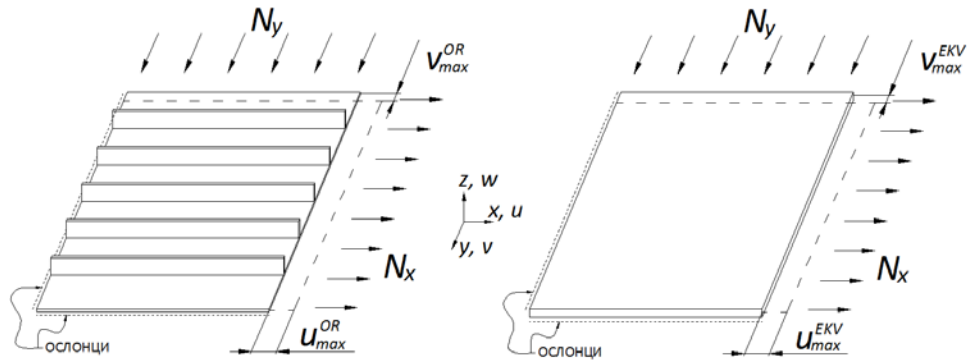
Репрезентативну плочу потребно је дефинисати не само геометријски него и препознати оптерећења и контурне услове којима је подвргнута у условима експлоатације, а тиме и у глобалном нумеричком моделу. Таква оптерећења и контурне услове треба применити у самој методи за добијање еквивалентне плоче или еквивалентног коначног елемента. У бродским конструкцијама, оребен панел је најчешће подвргнут равномерном латералном притиску, услед деловања спољње воде, течности у танковима или терета. Ослођен је слободно дуж ивица које у реланости представљају елементе примарне конструкције (јаки насачи). Овако моделирано понашање оребрене плоче би било третирано у „савојном моделу“ еквивалентне плоче. У мембранском смислу силе које делују у равни панела су последица глобалног одзива брода и њима су највише изложени дно и палуба услед највећег растојања од неутралне осе попречног пресека. Из овога следи да је компонента мембранског напрезања у правцу дужине брода свакако доминатнија од попречене раванске компоненте па је и та информација веома битна у каснијем креирању „мембранског модела“ еквивалентне плоче.

На слици 4.1 илустрован је општи случај оптерећења оребрене и њене еквивалентне неорребрене плоче. Приказана су оптерећења у равни (N_x , N_y) и оптерећења која изазивају савијање (p).

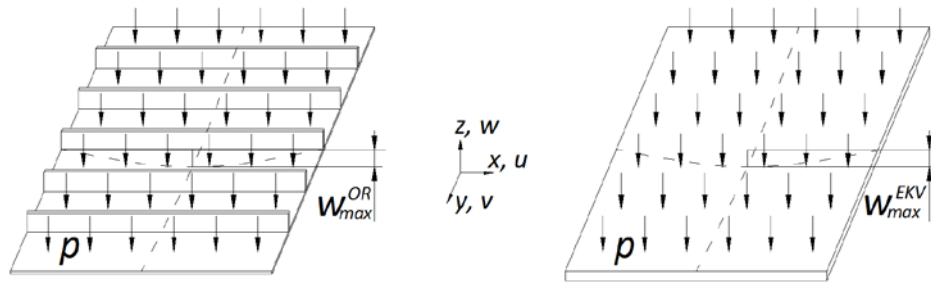


Слика 4.1. Оребрена (лево) и еквивалентна (десно) плоча под утицајем мембранских и савојних оптерећења

С обзиром на уведену претпоставку да не постоји спрега раванског и савојног одзива, може се раздвојити сложено оптерећење ових конструкција на случај мембранског и случај савојног понаособ (слика 4.2 и 4.3). Овај поступак омогућава засебну анализу понашања конструкције, а тиме и засебно срачунавање коефицијената крутости за нову еквивалентну плочу с обзиром на тип оптерећења којем је подвргнута.



Слика 4.2. Оребрена (лево) и еквивалентна (десно) плоча под утицајем мембранских оптерећења



Слика 4.3. Оребрена (лево) и еквивалентна (десно) плоча под утицајем савојних оптерећења

Из основне претпоставке (која је уједно и циљ методе) да су максимална померања оребрене и еквивалентне плоче једнака, изводе се параметри матрице $[A]$ и матрице $[D]$ у једначини 4.1. Величине u, v, w представљају померања тачака плоче према координатама x, y, z . Дакле, из једнакости:

$$\begin{aligned} u_{\max}^{OR} &= u_{\max}^{EKV} \\ v_{\max}^{OR} &= v_{\max}^{EKV} \end{aligned} \tag{4.2}$$

а за задати случај мембранског оптерећења следе параметри еквивалентне плоче који улазе у мембранску матрицу еластичности и мембранску матрицу крутости:

$$E_1^m, E_2^m, \mu_{12}^m, \mu_{21}^m, G_{12}^m, t^m.$$

У случају савијања, из једнакости максималних угиба оребрене и еквивалентне плоче:

$$w_{\max}^{OR} = w_{\max}^{EKV} \quad (4.3)$$

а за задати случај савојног типа оптерећења следе параметри еквивалентне плоче који улазе у савојну матрицу еластичности и савојну матрицу крутости:

$$E_1^s, E_2^s, \mu_{12}^s, \mu_{21}^s, G_{12}^s, t^s.$$

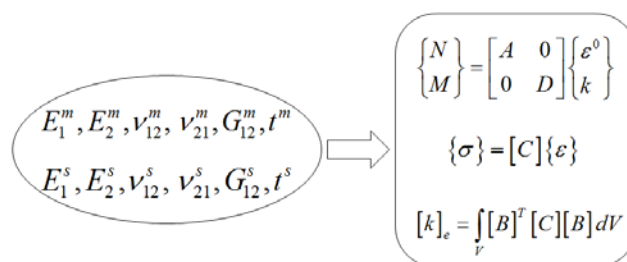
Леве стране једнакости (4.2) и (4.3) су улазни подаци за саму методу добијања еквивалентне плоче. Најлакше се могу добити нумерички - методом коначних елемената. Улазни подаци се могу добити и коришћењем неке од постојећих метода које прорачунавају коректне вредности померања (корелационе формуле, метода решетке итд). Ово се односи на угиб. Десна страна ових једначина су вредности које ће се добити итеративним поступком: нумерички или коришћењем постојеће ортоторпне теорије плоча уз увођење одређених претпоставки и корекција. Суштина ових поступака (развијене процедуре) је у варирању (моделирању) параметара еквивалентне плоче $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}, G_{12}, t$ с обзиром да ли се ради о мембранском или савојном одзиву. Поред еластичних коефицијената „нове“ плоче, важан параметар је и дебљина. Она ће бити различита с обзиром на врсту оптерећења, јер крутост еквивалентне плоче на мембранско оптерећење и крутост на савојно оптерећење неће бити исто.

После поступка еквиваленције померања, следећи корак методе је еквиваленција максималног фон Мисесовог напона оребрене и еквивалентне плоче:

$$\sigma_{VM, \max}^{OR} = \sigma_{VM, \max}^{EKV} \quad (4.4)$$

И овде се лева страна једначине (4.4) може добити применом МКЕ. Да би се испунила једнакост (4.4) потребно је варирање параметара еластичности и одређен број итерација док се не постигне једнакост и померања и напона. Могуће је прорачунати велики број комбинација параметара еластичности да наведене једнакости буду задовољене. На први поглед, ово представља решив нумерички проблем са пуно итерација које врло лако могу довести до тачних вредности максималних угиба и напона у еквивалентној плочи, али са крајње нереалним параметрима, који не одговарају суштинској природи понашања оребрене плоче. Једна од тежњи овог истраживања, о којој ће више бити речи касније, је да се избегне овај проблем.

Добијени параметри мембранског и савојног одзива еквивалентне плоче улазе у прорачун веза оптерећења и деформација, напона и деформација еквивалентне плоче, а тиме и крутости еквивалентног коначног елемента који би се користио у нумеричким анализама (слика 4.4).



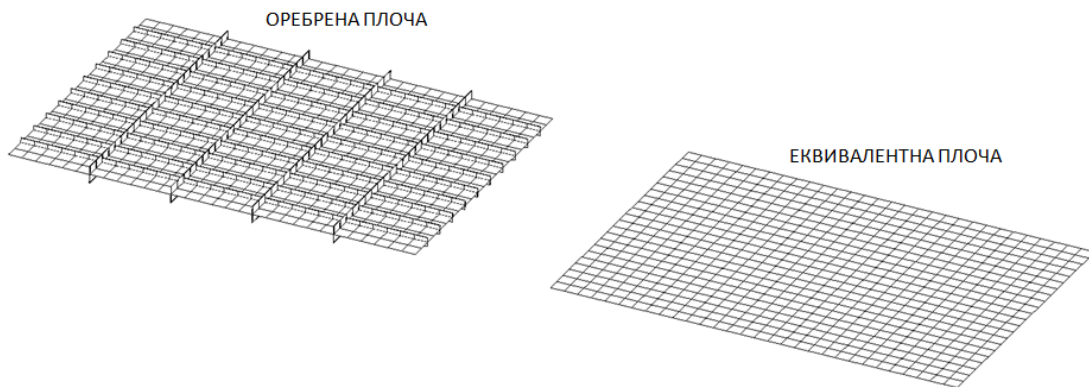
Слика 4.4. Параметри крутости еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента

Мембрански параметри еквивалентне плоче дефинишу матрицу крутости $[A]$ и матрицу еластичности $[C]$ за равански одзив. Мембранска еквивалентна дебљина улази у формулу крутости еквивалентног коначног елемента преко dV . Аналогно, савојни параметри еквивалентне плоче дефинишу матрицу крутости $[D]$ и матрицу еластичности $[C]$ за савојни одзив. Савојна еквивалентна дебљина утиче на крутост коначног елемента подвргнутог савијању у оквиру dV .

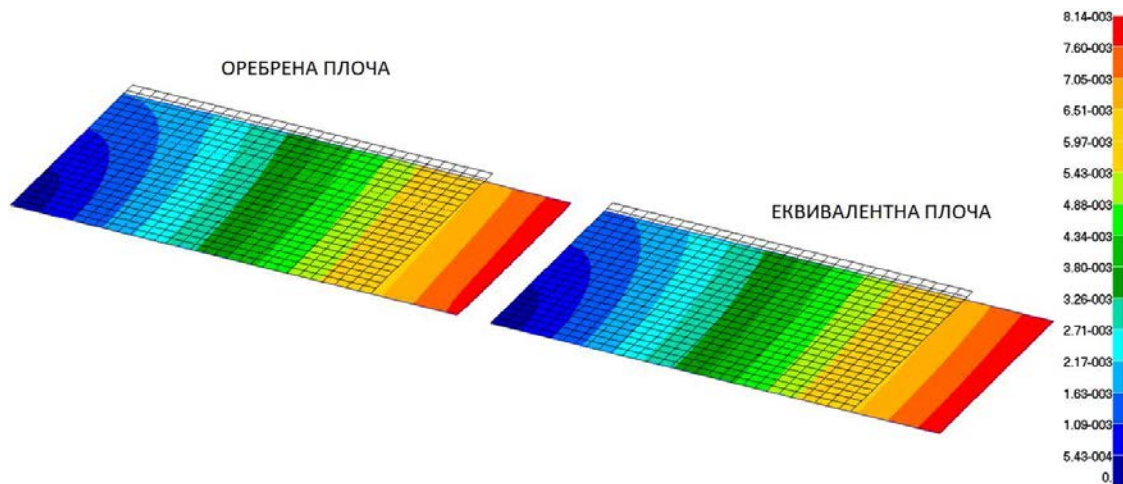
Дакле, метода се своди на налажење укупно 12 параметара који потпуно дефинишу везу напон – деформација еквивалентне плоче: шест за мембрански, и шест савојни одзив. Међутим, треба напоменути да ових 12 параметара нису међусобно независни. Разлог лежи у томе што сваки понаособ суштиниски репрезентује неку карактеристику чврстоће еквивалентне плоче (па и самог оребреног панела који је замењен). Њихова међусобна зависност је позната у теорији ортотропних плоча и биће поменута кроз само објашњене методе. Стога, проблем који на почетку можда изгледа компликовано због броја променљивих упростиће се на мањи број независних параметара.

На следећим сликама (слике. 4.5 – 4.9) илустрован је циљ идеје овог рада. Конкретно, у питању су поља померања и фон Мисесовог напона оребрене и њене одговарајуће еквивалентне неоребрене плоче чије је понашање моделирано предложном процедуром. Пример чини класичан оребрен панел великих димензија (9 x 6.6 m). Састоји се од густо распоређених укрућења у једном правцу (подужни правац) и ређе распоређених јаких носача у другом, управном (попречном) правцу. Пошто је случај илустративан за методу, укрућења су моделирана као симетрична у односу на раван плоче. Модел може бити типичан репрезент дела бродске констуркције (дно, унутрашње дно, бок итд) који садржи секундарне и примарне елементе. Намерно је изабран због раличитих крутости као последице постојања оребрења у оба управна правца, иако сваки мањи део констуркције између четири јака носача може бити засебна репрезентативна оребрена плоча. Мембрански модел коришћен у анализи представља случај оптерећења у подужном правцу које изазива равномерно истезање и оптерећење 100 пута мањег интензитета у попречном правцу, које изазива скраћење плоче. Ово би одговарало реалној ситуацији у оквиру глобалног модела бродске констуркције, где је у мембранском смислу брод доминантно оптерећен у подужном правцу. Савојни модел предстаљају оребрена и еквивалентна плоча слободно ослоњене по својим ивицама и оптерећене притиском управним на њихову раван. Модел оребрене плоче се састоји од конвенционалних коначних елемената плоче и греде, док се у моделу еквивалентне плоче налазе еквивалентни коначни елементи (слика 4.5).

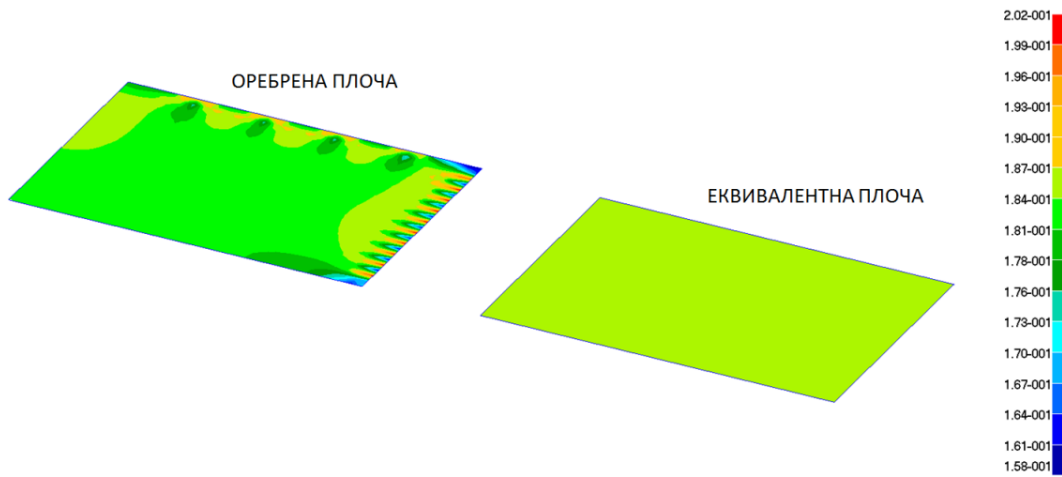
На свим сликама на којима су приказани резултати нумеричких анализа померања су дата у mm , док су напони у N/mm^2 . Када се каже напон, у даљем тексту, мислиће се на фон Мисесов напон. Треба напоменути да је у нумеричким прорачунима у овом истраживању коришћена метода коначних елемената и програм Комипс [83].



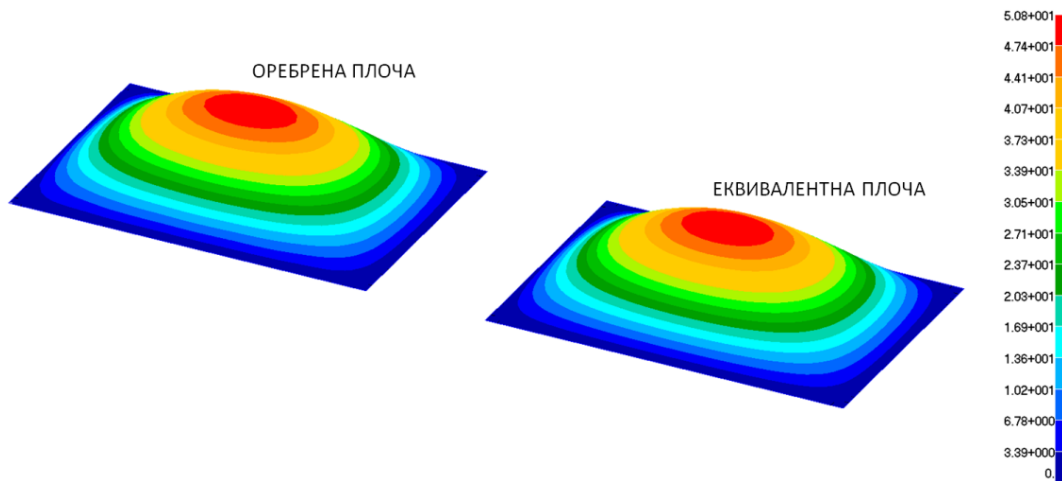
Слика 4.5. Модел оребрене плоче и еквивалентне неорребрене плоче



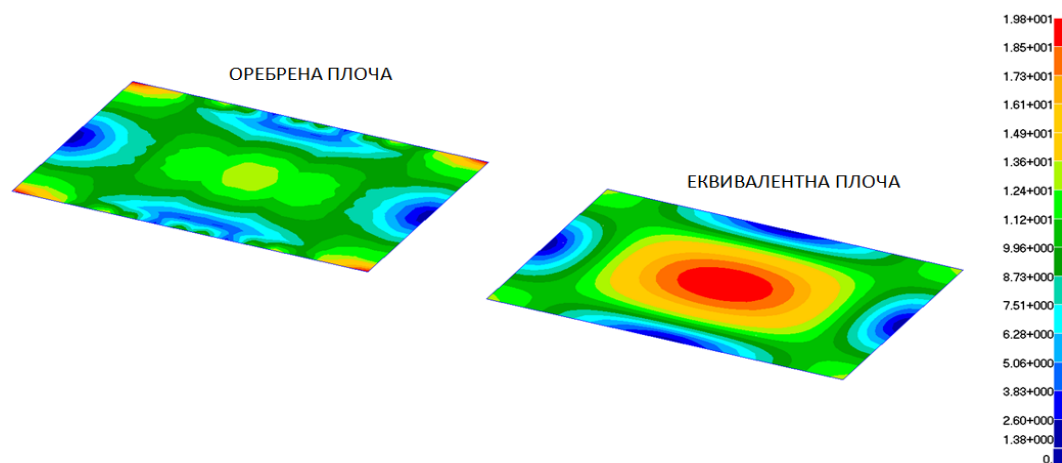
Слика 4.6. Резултујуће раванско померање у оребреној и еквивалентној плочи



Слика 4.7. Фон Мисесов напон при раванском оптерећењу, у оребреној и еквивалентној плочи



Слика 4.8. Угиб, у оребреној и еквивалентној плочи

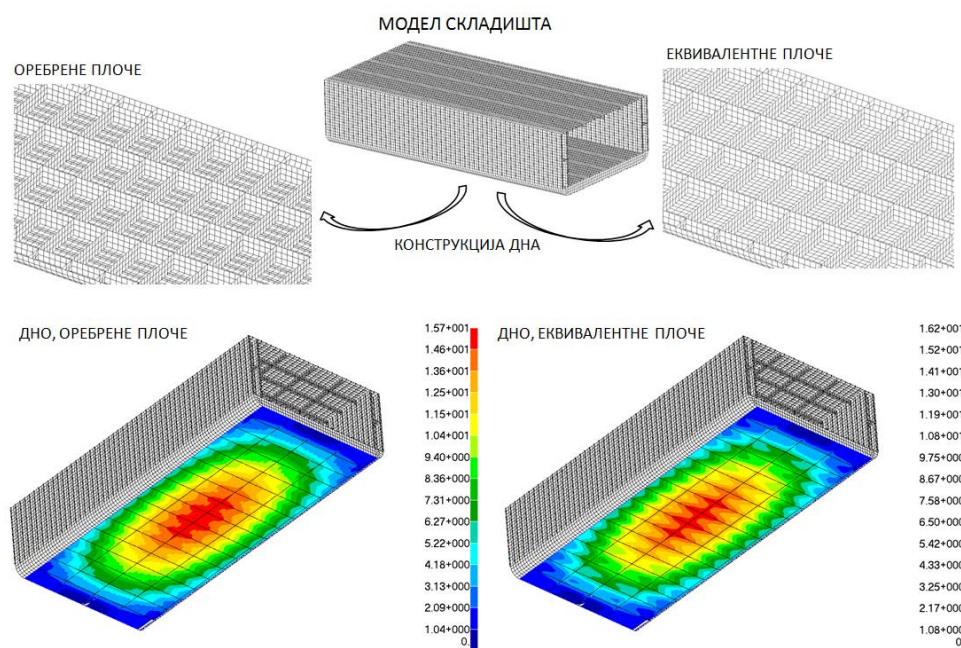


Слика 4.9. Фон Мисесов напон при савојном напрезању, у оребреној и еквивалентној плочи

Максималне вредности померања и фон Мисесовог напона у оребреном панелу и еквивалентној плочи су готово идентични. Поље померања и при мембранском и при савојном напрезању је врло слично, што је био један од циљева ове методе, док у случају фон Мисесовог напона то, неретко, није тако. Шта више, ни место максималног напона не мора, као што је овде и случај, бити на истој позицији. Ово је последица веома сложеног стања напона у оребреној плочи које је, као такво, немогуће представити еквивалентном плочом. Главни разлог је недостатак укрућења које суштински ремети саме компоненте напона у „новој” плочи. Циљ методе је свакако да се добије еквиваленција максималних напона, по цени да они не буду на истом месту. Мембрански напон у еквивалентној плочи је осредњен по њеној површини и једнак је максималном напону у пољу оребреног панела. Концентрације напона које се јављају на местима деловања оптерећења овде нису узете у обзир као релевантне јер се неће јавити у глобалном моделу и нису последица одзива панела већ локалне чврстоће и разлике у крутостима плоче и укрућења. Код савојног напрезања у оребреној плочи максимални фон Мисесов напон је у угловима плоче док је код еквивалентне у средини. Посебна пажња о разлозима овакве еквиваленције биће посвећена у наредном поглављу.

Наредни, финални корак у имплементацији методе еквиваленције је моделирање глобалног модела конструкције која би се састојала од великог броја еквивалентних неоребрених плоча односно еквивалентних коначних елемената. Овај модел би, у нумеричким прорачунима, заменио исти онај састављен од реалних оребрених панела. Вредности померања и напона, поља промене ових величина у моделу еквивалентних плоча, са великом прецизношћу би репрезентовали нумерички модел какав се до сада употребљавао у свакодневним прорачунима. Међутим, „нови” модел био би далеко једноставнији у геометријском смислу, имао би неупоредиво мање коначних елемената чиме би време за анализу било веома мање. На слици 4.10 илустровано је успостављање еквиваленције поља вертикалних померања лима дна брода, а у оквиру глобалног модела складишта. Разлика максималних угиба, у овом случају је свега неколико процената. Ово је пример еквиваленције која је уједно и циљ предложене методе. У овом примеру, поређен је модел складишта који се састоји од конвенционалних

коначних елемената и модел од еквивалентних коначних елемената. Део складишта дужине 41 метар моделиран је конвенционалним коначним елементима плоче и греде, и састоји се од укупно 204 оребрене плоче. Структурна јединица оребрене плоче је, у овом случају узета као део конструкције између примарних елемената. Предложеном методом замењена је класична оребрена плоча еквивалентном. Нови, еквивалентни модел складишта састоји се од једне исте еквивалентне плоче (нема укрућења) која заузима место оребреној. Еквиваленција померања и промене поља померања од велике је важности у оваквим глобалним нумеричким моделима. Метода ће показати да је до извесне границе то могуће урадити и са напонском сликом, што напонску анализу овим начином чини применљивом и веродостојном у прорачунима чврстоће.

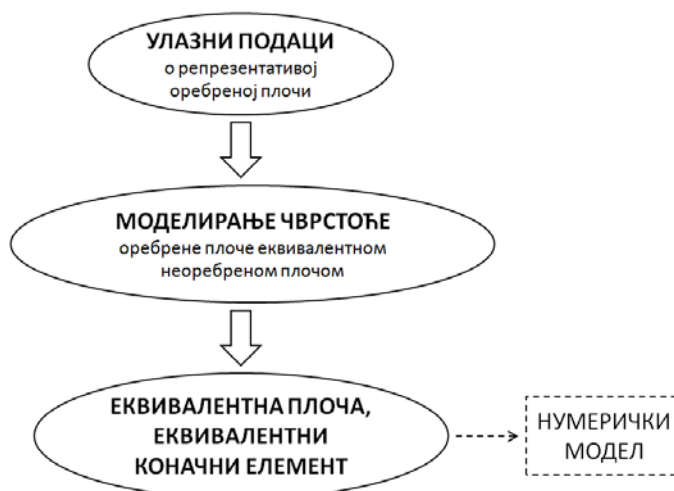


Слика 4.10. Поље вертикалних померања дна у МКЕ моделу складишта: модел од конвенционалних и еквивалентних коначних елемената

Овде су, у најосновнијим цртама и само илустративно, дати идеја и циљ предложене методе, наговештене смернице прорачуна који стоји у основи, истакнете неке предности и мане. У наредном поглављу, а кроз конкретан пример у бродској конструкцији, цео алгоритам методе ће бити детаљно објашњен.

5 Метода еквиваленције

Теоријске основе методе за добијање еквивалентне плоче чије би понашање структуре одговарало понашању оребрене плоче истих габарита, леже у теорији ортотропних плоча (Поглавље 3.2). Теорија ортотропних плоча се, у ствари, директно ослања на теорију еластичности чије су везе напон – деформација – померање коришћени у математичкој формулацији предложене методе, али и у основи методе коначних елемената. Стога, иако испреплетане, у методи коришћене су претпоставке и теоријске основе из: теорије еластичности, теорије остотропних плоча и методе коначних елемената. Упрошћени след поступака методе дат је на слици 5.1.



Слика 5.1. Упрошћени алогритам методе

Улазни подаци за прорачун параметара еквивалентне плоче везани су за избор „репрезентативне” оребрене плоче (панела). Под овим се подразумевају геометријске карактеристике оребрене плоче и њен одзив у оквиру дефинисаних услова (померања, напони). Према подацима о репрезентативној оребреној плочи, у следећем кораку, метода „моделира” параметре еластичности односно крутости одговарајуће нове, неоребрене плоче док се не постигне еквиваленција понашања еквивалентне и оребрене плоче. Еквивалентна плоча и еквивалентни коначни елемент резултат а су алгоритма, што су и улазни подаци за крајњи циљ ове методе – поједностављени глобални нумерички модел конструкције.

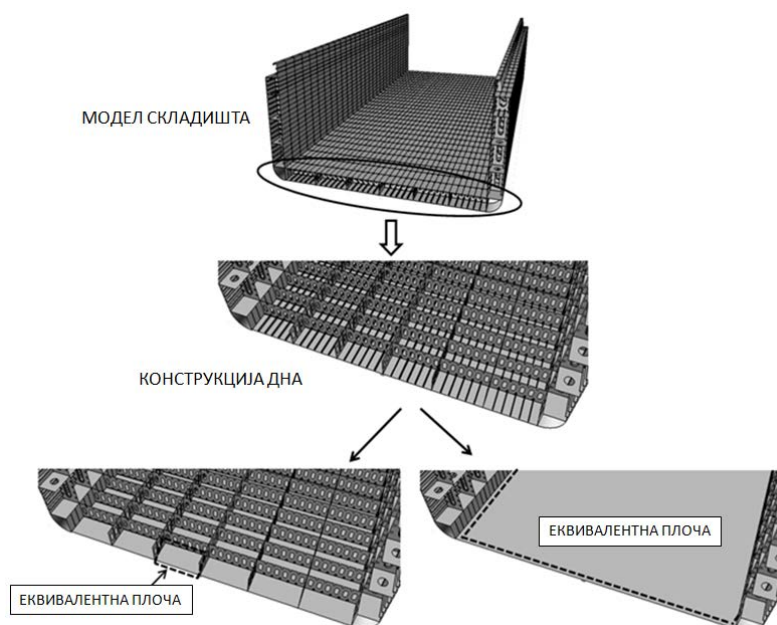
5.1 Репрезентативна оребрена плоча

Избор репрезентативне оребрене плоче (панела) је први и битан корак целе процедуре. Потребно је изабрати део из реалне, глобалне конструкције који би требало заменити еквивалентном плочом, водећи рачуна о начину ослањања, оптерећењима и вези са остатком конструкције. У овом делу, биће презентоване смернице за избор оребрене плоче.

Треба напоменути да је за коректан избор репрезентативне плоче неопходно одређено знање о чврстоћи и понашању конструкције која се анализира, што се иначе подразумева узимајући у обзир ниво нумеричке анализе за којој је резултат ове методе посвећен.

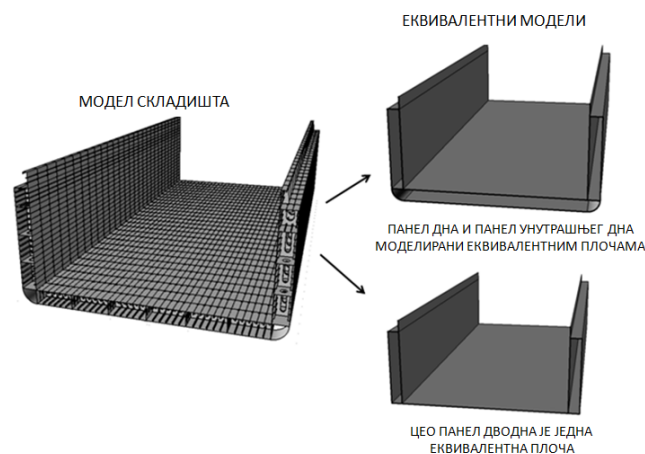
Примена развијене методе у конструкцијама које се састоје од једне или неколико оребрених плоча не би имало смисла, иако би резултати били коректни. Данас не треба пуно времена за моделирање „мањих” конструкција, па би прорачун параметара еквивалентне плоче био додатни посао. Код великих конструкција, као

што је бродска, метода еквиваленције може се искористити, а ниво упрошћења и осетљивости резултата „новог” модела директно зависи од избора репрезентативне плоче. Репрезентативна оребрена плоча може имати укрућења у једном правцу, какав би био део бродске конструкције између примарних елемената. Репрезентативна оребрена плоча може бити део конструкције између две попречне преграде, који обухвата и јаке примарне носаче у једном правцу и густо распоређене секундарне елементе у другом, управном правцу. Глобални модел брода из кога препознајемо и „извлачимо” делове који се понављају, тј. репрезентативне делове конструкције, може бити толико гломазан да осетљивост понашања локалних делова конструкције није од примарног значаја за анализу, већ само примарни одзив трупа. У таквим случајевима, могуће је моделирати и велики део дводна једном еквивалентном плочом. Сложено поље померања и напона овог кутијастог профила који укључује одзиве провеза дна и ребреница не би било могуће препознати у новој плочи, али би еквивалентни нумерички модел био неупоредиво једноставнији. Пример два различита нивоа упрошћења конструкције дна теретног брода илустровани су на слици 5.2: еквивалентна плоча као део дна између примарних елемената конструкције и еквивалентна плоча која замењује целу конструкцију дна.



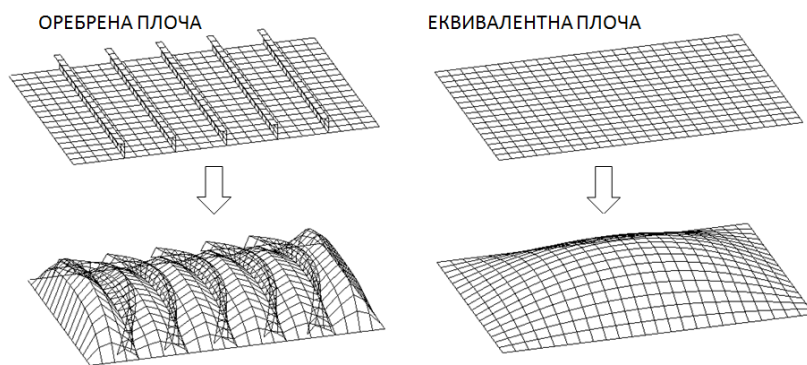
Слика 5.2. Нивои упрошћења бродске конструкције еквивалентним неоребреним плочама

Моделирање целог кутијастог пресека конструкције дводна еквивалентним плочама била би можда најрадикалнија примена методе еквиваленције (слика 5.3). Класичан еквивалентни, нумерички 3Д модел брода који елиминише постојање секундарне структуре у бродској конструкцији је, у овом истраживању, предложен као најпрактичнији. Већина битних закључака потенцијалне анализе оваквог модела у поређењу са оним реалним не би били превиђени, а конструкција би и даље била довољно упрошћена. Разлози за већим упрошћењем појединих делова бродске конструкције леже у самом размевању њихове врстоће. У случају да смо сигурни да неки део конструкције неће имати критично понашање по питању напона или померања већ је ту само да пренесе оптерећење, значајније повећење упрошћења је могуће. У том случају губици на препознавању локалних напрезања у делу конструкције који је више упрошћен не би утицали на онај део конструкције за који очекујемо повећане напоне.



Слика 5.3. Нивои упрошћења бродске конструкције еквивалентним неоребреним плочама

У случају када је део конструкције између примарних елемената замењен еквивалентном плочом (репрезентативна плоча), нови модел, наравно, неће препознавати савијање између укрућења јер их не поседује, већ ће хомогенизовати понашање реалног панела једним полуталасом у правцу (слика 5.4). Такође, сви локални феномени услед присуства укрућења (концентрација напона, терцијарни одзив) ће бити занемарени у новом моделу. Исти нивои упрошћења важе и при замени већих оребрених панела еквивалентним плочама.



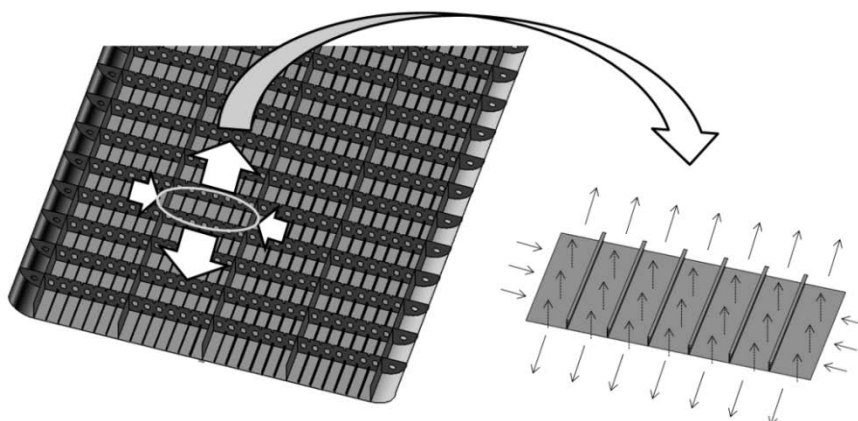
Слика 5.4. Савијање оребрене и еквивалентне неорребрене плоче

Каква год оребрена плоча да се изабере као репрезентативна, она ће бити оивичена јаким носачима или лимовима који се управно пружају у односу на раван панела. Типичан пример за ово друго су попречне преграде у бродској конструкцији. Међутим, исти принцип важи и за већину осталих конструкција. Задатак који се сада поставља је: како моделовати реално ослањање панела и реално оптерећење? Која су то „репрезентативна“ оптерећења и који су то „репрезентативни“ контурни услови који делују на изабрану оребрену плочу, а веродостојно приказују услове под којима је оребрена плоча подвргнута у експлоатацији и глобалном нумеричком моделу?

Пре одговора на ово питање треба се подсетити врло битне чињенице објашњене у Поглављу 3.2 о претпоставци непостојања спреге мембранског и савојног оптерећења: мембранско оптерећење не узоркује савијање, и обрнуто, савијање не може да проузрокује мембрански одзив панела. Иако ово није баш најкоректније с обзиром на несиметричност укрућења у односу на раван плоче за коју су заварени, за потребе анализе глобалног одзива великих конструкција може се уважити. Непостојање ове спреге омогућава да се панел (и еквивалентна плоча) у методи третирају засебно у односу на тип оптерећења којима су подвргнути. Ако се препознају два основна типа оптерећења с обзиром на њихов правац деловања, мембранско и савојно, следи да се панели анализирају кроз два модела: мембрански модел и савојни модел панела и еквивалентне плоче. Један исти изабрани репрезентативни модел оптерећује се мембрански у циљу добијања параметара крутости еквивалентне плоче (мембранска матрица крутости [4]) и

савојно у циљу добијања параметара крутости нове еквивалентне плоче (савојна матрица крутости $[D]$).

Као што се може видети, цела дискусија око избора репрезентативне плоче највише се односи на избор савојне репрезентативне плоче, с обзиром на, генерално, сложеније понашање плоче услед савијања него услед дејства мембранских оптерећења. Мембранска репрезентативна плоча није толико осетљива на избор њених димензија или граница. Оптерећење у глобалном моделу ће се равномерно распоредити по равни оребрене плоче, преносећи се кроз гломазну бродску конструкцију, на саму структурну јединицу. Стога, и мембранској плочи би одговарало да је оивичена примарним елементима јер њихова крутост доприноси равномерности распореда аксијалних оптерећења на оребрену плочу.



Слика 5.5. Типично оптерећење оребрене плоче дна брода

Што се тиче контурних услова, мембрански модел је најпогодније слободно ослонити по ивицама где у су реалној конструкцији иначе и заварени јачи профили, и омогућити померање панела у правцима пружања ових носача. Ивица која је изложена раванском оптерећењу није ослоњена. Мембрански модел није толико сензитиван на промену оптерећења. Напрезање у моделу услед силе која проузрокује истезање или притисак не зависи од попречних укрућења (што би опет били неки ослонци). Проблем се јавља у савојном моделу. Савојни модел је изузетно сложен и осетљив по питању ослонаца. Носачи који су заварени за ивице

панела и у реалној констуркцији представљају нешто између уклештења и слободних ослонаца. Разлика у моделовању ова два типа ослањања је у спреченој ротацији. Вредности поља угиба и напона су другачији. Слободно ослоњена плоча, услед непостојања момента на крајевима, не проурокује концентрацију напона на тој локацији. Максимални напон је обично на средини плоче. Код уклештења је случај нешто другачији па се поред повећаног напона на средини плоче јављају и значајни напони у самим ослонцима. Ови други напони су последица спречене ротације на ивицама контуре плоче. Реални ослонци у конструкцији приближнији су слободним него уклештењу. Што су носачи који су заварени за ивице јачи, то је и степен спречености ротације ивице плоче при савијању – већи. Бројни аутори на различите начине третирају ослонце оребрене плоче, али ипак их, у већини случајева, моделирају као слободне ослонце [1, 15].

Дакле, и у овој методи контурни услови оребрене плоче при савијању моделирани су као слобони ослонци, док је репрезентативно оптерећење при савијању оребреног панела представљено равномерним притиском управним на раван плоче. У глобалним моделима поента није у препознавању локалних концентрација напона већ глобалног одзива конструкције па се и оптерећења која могу изазвати локални одзив избегавају. Оптерећења проузрокована хидростатичким притиском, притиском баласта, горива (течности у танковима), терета моделирају се углавном равномерним притиском, па ова претпоставка има утемељење. Други облик савојног оптерећења који се може јавити у глобалним моделима најчешће је линеарно првоменљиви (хидростатички) притисак на оплату брода услед промене узгона по висини.

Треба напоменути да се увођење појмова „мембрански” и „савојни” модел највише односи на еквиваленцију максималног фон Мисесовог напона оребрене и еквивалентне плоче. На избору корисника је, а на основу познавање чврстоће констукције коју анализира, да процени критеријум према коме прави „мембрански модел” оребрене плоче за еквиваленцију напона.

Као мембрански критеријум за изједначавање фон Мисесовог напона, у нумеричкој анализи чврстоће глобалног модела брода, узет је случај истезања

оребрене и еквивалентне плоче у правцу дужине брода. Труп брода доминантно трпи компоненту напона у правцу његове дужине, што уједно, уз мала одступања, представља и фон Мисесов напон. На мембранско понашање бродске конструкције, у попречном правцу, утиче и хидростатички притисак од околне воде на оплату бока брода узрокујућу притисак у равни панела. Овај притисак је далеко мањи од истезања панела услед доминантне компоненте напона у правцу дужине брода, па се може занемарити. У овом раду, ипак, урађено је илустрације ради, и неколико примера где се тај утицај попречног притиска на панеле конструкције брода узима као ред или два реда величине мањи него утицај подужног мембранског оптерећења. Овим се коначни фон Мисесов напон у еквивалентној плочи донекле (у свега неколико процената) смањује у односу на случај када је једини критеријум оптерећење у правцу дужине брода.

Тиме се добијају еластични параметри „нове“ плоче који, самој примени методе еквиваленције, дају нешто боље подударње вредности фон Мисесовог напона у еквивалентној и оребреној плочи. Појачавањем утицаја попречног притиска на панел конструкције утиче се пре свега на дебљину еквивалентне плоче, а тиме и на остале параметре еластичности (модул еластичности у попречном правцу). Механизам промене параметара еластичности услед промене дебљине еквивалентне плоче детаљније ће бити објашњен у наредном поглављу.

Разлике у коначним резултатима мембранског одзива МКЕ модела трупа брода састављеног еквивалентних плоча, у зависности од поменутих два критеријума (критеријум подужног напона, и критеријум подужног и попречног мембранског напона), су минималне и износе свега неколико процената. Ово важи у случају када је задато попречно оптерећење на панел ред или два реда величине мање од оптерећења у подужном правцу. Имајући ово у виду, у примени методе еквиваленције на бродским оребреним плочама препоручује се коришћење компоненте напона у правцу дужине брода као критеријума за изједначавање фон Мисесових напона оребрене и еквивалентне плоче.

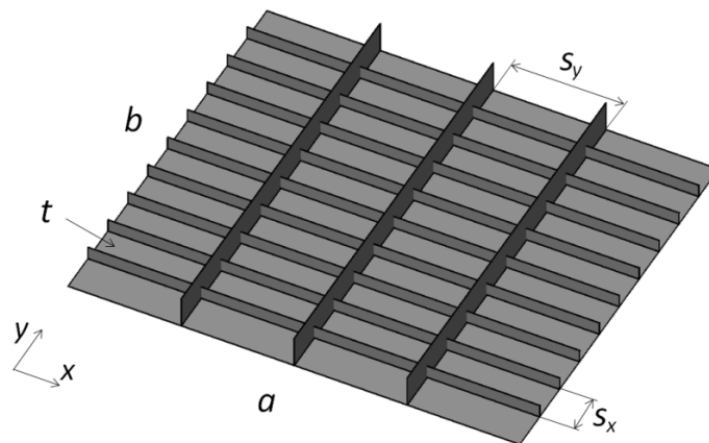
Флескибилност дефинисања мембранског критеријума за добијање еластичних параметра еквивалентне плоче аутоматизована је у методи еквиваленције. Ово је урађено из разлога да корисник методе може, у случају да не ради о бродској већ о оребреној плочи друге намене која би у конструкцији била доминантно подвргнута у попречном правцу (на пример, супротном од правца пружања укрућења), сам да зада мембрански критеријум фон Мисесовог напона. Вредности оптерећења задају се једнично, јер крајњи резултати не зависе од њих, па по линеарној теорији односи оптерећења и померања имају линеарну зависност.

Код савијања ситуација је у том смислу једноставнија, јер је много лакше препознати модел савијања оребрене плоче, на пример, у конструкцији дна брода. Као што је већ поменуто изабрани модел оптерећења у виду равномерног притиска воде на оплату дна брода и слободни ослонци дуж ивица оребрене плоче као репрезенти јаких заварених носача представљају репрезентативан савојни модел за еквиваленцију угиба и фон Мисесовог напона. Еквиваленција „нове“ (неоребрена) плоче по питању мембранског понашања ради се са мембранским моделом оребрене плоче, а еквиваленција „нове“ плоче по питању савојних оптерећења са савојним моделом оребрене плоче. Дефинисање репрезентативне плоче представља главни улазни податак за методу. Геометријски, оребрена плоча се дефинише са параметрима плоче и укрућења. На основу познатих карактеристика оребрене плоче прави се нумерички модел. Циљ овог модела је да се прорачунају максимални угиб и фон Мисесов напон оребрене плоче. Управо ове податке „јуримо“ еквивалентном плочом и они представљају улазну величину за методу еквиваленције. Коначним елементима оребрену плочу треба моделирати истом мрежом као што би користили у глобалном моделу, а у циљу избегавања грешака које се променом исте могу догодити. У глобалном нумеричком моделу бродске конструкције обично се захтева грубља мрежа односно да најмање један елемент буде између секундарних укрућења. У наставку, објашњен је поступак моделирања еквивалентне плоче у зависности на тип оптерећења којем је подвргнута.

5.2 Мембрански модел

5.2.1 Мембрански параметри еластичности

Параметри оребрене плоче за коју је потребно моделирати мембранску еквивалентну плочу дати су на слици 5.6. Оребрена плоча, у општем случају, може поседовати укрућења у оба управна правца, различитих јачина попречних пресека и броја.



Слика 5.6. Оребрена плоча (панел)

Да би се описало мембранско понашање оребрене плоче (панела) потребно је познавање следећих параметара:

a - дужина плоче;

b - ширина плоче;

t - дебљина плоче;

n_x - број укрућења у правцу x ;

$A_{s,x}$ - површина попречног пресека једног укрућења који се пружа у правцу x ;

s_x - растојање између укрућења која се пружају у правцу x ;

n_y – број укрућења у правцу y ;

$A_{s,y}$ - површина попречног пресека једног укрућења који се пружа у правцу y ;

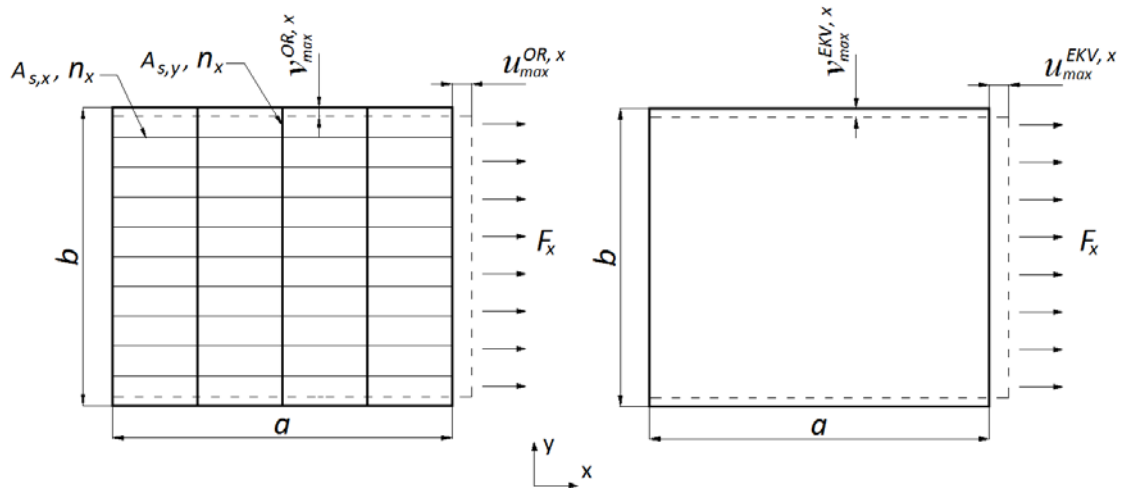
s_y - растојање између укрућења која се пружају у правцу x ;

E – модул еластичности материјала;

ν – поасонов коефицијент материјала.

Ових једанаест параметара нису независно променљиве. Претпоставка је да се укрућења у оба правца налазе на еквидистантним растојањима. Параметри s_x и s_y су већ дефинисани чињеницом да су број укрућења и дужина и ширина плоче познати. Укрућење је дефинисано и још једним параметром који овде није наведен: тежиштем попречног пресека по висини. У случају да се оребрена плоча понаша мембрански, а с обзиром на претпоставку да нема спреге мембранског и савојног одзива, тежиште укрућења по висини такође није независна променљива, јер од ове величине не зависи раванско понашање конструкције, па за раванску еквиваленцију неће бити разматран.

У случају да је познат материјал конструкције (модул еластичности и поасонов коефицијент), ових једанаест параметара своди се на 7 независно променљивих, са којима је могуће описати мембранско понашање оребреног панела, а то су: a , b , t , n_x , $A_{s,x}$, n_y , $A_{s,y}$. Ако оребрена плоча нема укрућења у једном од правца, рецимо у попречном правцу, онда би се ових седам параметара svelo на пет: a , b , t , n_x , $A_{s,x}$. Ово је врло чест случај у бродским конструкцијама: дно, бок или палуба само са секундарном структуром, између примарних елемената конструкције.



Слика 5.7. Мембрански одзив услед дејства оптерећења у правцу x оребрене (лево) и еквивалентне плоче (десно)

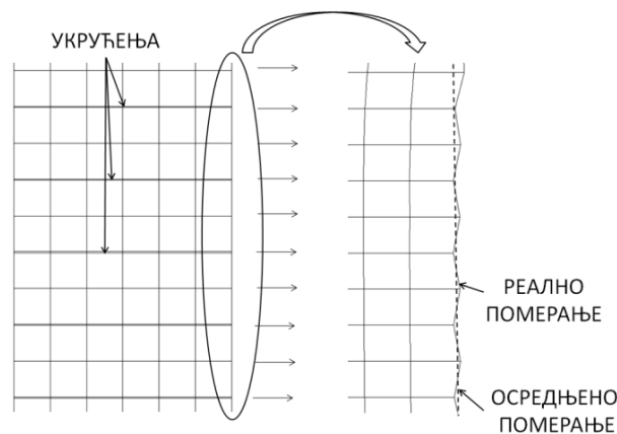
Изједначавање понашања оребрене и еквивалентне плоче спроводи се у два корака. У првом биће извршено изједначавање максималних померања, а у другом, крајњем, и изједначавање максималних фон Мисесових напона у два модела. Налажење мембранских коефицијената еластичности произилази из једнакости померања оребрене плоче и еквивалентне плоче, а услед дејства мембранског оптерећења истог правца и интензитета (слика 5.7). Модул еластичности еквивалентне плоче у працу x последица је једнакости издужења оба модела услед мембранског оптерећења у правцу x . Према Хуковом закону, а за максимално померање оребрене плоче у правцу x , може се написати:

$$u_{\max}^{OR,x} = \frac{F_x a}{EA_x} = \frac{F_x a}{E(bt + n_x A_{s,x})} \quad (5.1)$$

При чему је $u_{\max}^{OR,x}$ издужење оребреног панела у његовој равни, у правцу x , услед дејства оптерећења F_x . A_x је укупна површина попречног пресека плоче са укрућењима у правцу x , па важи $A_x = n_x A_{s,x}$.

Примена Хуковог закона на модел оребрене плоче представља упрошћење реалног стања пре свега због чињенице да се оребрена плоча заиста савија услед дејства мембранског оптерећења. Ово је последица присуства несиметрично постављених укрућења у односу на раван плоче. Међутим, у случају претпоставке

о непостојању спреге савојног и мембранског одзива, какав је случај овде, примена Хуковог закона има смисла. Оребрена плоча је део веће конструкторске (као што је конструкторске брода) па глобална мембранска оптерећења заиста равномерно једнако истежу или скраћују панел у његовој равни. Раванска померања тачака попречног пресека панела у правцу издужења или скраћења нису равномерна. Тачке на плочи и на самим укрућењима различито се супротстављају сили истезања због чињенице да крутост тих делова оребрене плоче није иста. Део оребрене плоче између укрућења се са различитом крутошћу опире истезању од самог укрућења. Следи да ће тачке на укрућењима имати мање вредности померања него тачке на плочи, што је илустровано на слици 5.8. Што је укрућење јаче у односу на плочу, односно што је однос њихових крутости већи, онда ће и разлике у померањима ових тачака бити веће. У оквиру саме методе еквиваленције претпоставља се да су ова померања осредњена, односно идеално хомогена. Ово значи да се тачке попречног пресека оребрене плоче у правцу x равномерно (са истим вредностима) померају у том правцу, било да је у питању издужење или скраћење оребрене плоче. Такође, све тачке попречног пресека оребрене плоче у правцу y равномерно се померају у правцу y , било да је у питању издужење или скраћење оребрене плоче.



Слика 5.8. Раванско померање: осредњено и реално

С тим у вези, могуће је и израчунати конструктивни поасонов коефицијент плоче:

$$\mu_{xy}^{OR} = \frac{v_{\max}^{OR,x}}{u_{\max}^{OR,x}} = \frac{A_x^{pl}}{A_y} \mu = \frac{bt}{at + n_y A_{s,y}} \mu \quad (5.2)$$

Конструктивни поасонов коефицијент оребрене плоче μ_{xy}^{OR} , није последица особина материјала, већ конструктивне отротропије услед присуства укрућења, и представља однос издужења и скраћења под дејством мембранског оптерећења у правцу x , умножен поасоновим коефицијентом материјала. Издужење плоче зависи од површине попречног пресека плоче у правцу x (A_x^{pl}), у чијој равни делује мембранско оптерећење. Скраћење у попречном правцу зависи од укупне површине попречног пресека панела који се скраћује (и плоче и укрућења који се пружају правцем y). Из формула (5.1) и (5.2) следи да је скраћење плоче:

$$v_{\max}^{OR,x} = \mu_{xy}^{OR} u_{\max}^{OR,x} = \frac{F_x a b t \mu}{E(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \quad (5.3)$$

Аналогно оребреној, иста процедура важи и за еквивалентну плочу. Издужење еквивалентне плоче, $u_{\max}^{EKV,x}$, услед дејства мембранског оптерећења у правцу x је:

$$u_{\max}^{EKV,x} = \frac{F_x a}{E_x^m A_x^{EKV}} = \frac{F_x a}{E_x^m b t^m} \quad (5.4)$$

A_x^{EKV} је површина попречног пресека еквивалентне плоче у x правцу, док је t^m њена дебљина. Овде се уводи појам модула еласичности еквивалентне плоче у правцу x (E_x^m) за случај мембранског напрезања. Конструктивни поасонов коефицијент еквивалентне плоче једнак је односу њеног скраћења у попречном правцу и издужења у подужном правцу тј. односу површина попречних пресека еквивалентне плоче у подужном (A_x^{EKV}) и попречном правцу (A_y^{EKV}) умножена за претпостављени („фиктивни“) поасонов коефицијент материјала еквивалентне плоче ($\mu_{xy}^{EKV,pp}$).

$$\mu_{xy}^{EKV} = \frac{v_{\max}^{EKV,x}}{u_{\max}^{EKV,x}} = \frac{A_x^{EKV}}{A_y^{EKV}} \mu_{xy}^{EKV,pp} \quad (5.5)$$

Сада се уводи још један услов еквиваленције. Конструктивни поасонов коефицијент еквивалентне плоче треба да буде једнак конструктивном

поасономом коефицијенту у оребреној плочи, тј. односи издужења и скраћења у обе плоче су једнаки:

$$\mu_{xy}^{EKV} = \mu_{xy}^{OR} \quad (5.6)$$

Следи да је:

$$\frac{A_x^{EKV}}{A_y^{EKV}} \mu_{xy}^{EKV,pp} = \frac{bt}{at + n_y A_{s,y}} \mu \quad (5.7)$$

Дакле, претпостављени поасоном коефицијент материјала еквивалентне плоче је једнак:

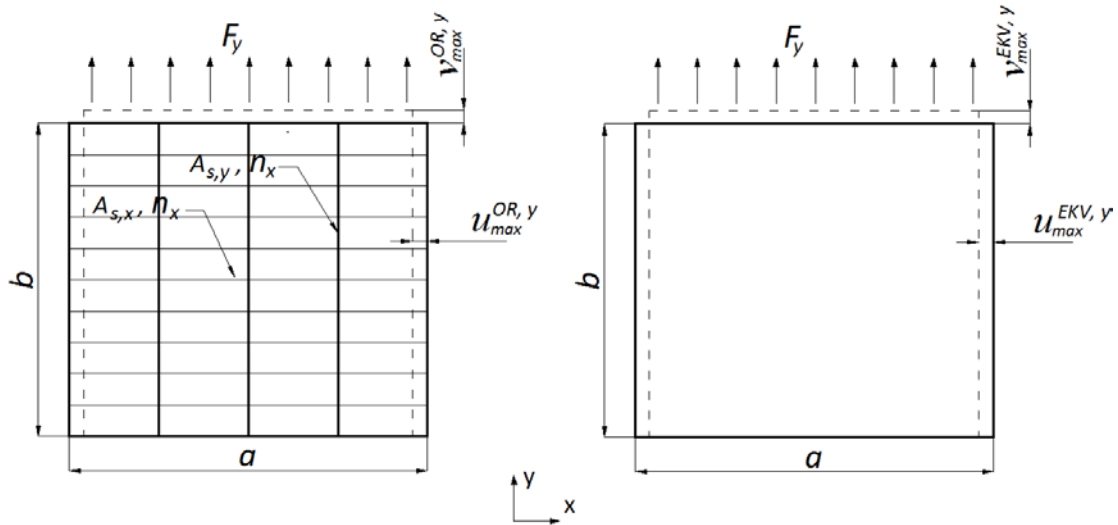
$$\mu_{xy}^{EKV,pp} = \mu_{xy}^{OR} \frac{A_y^{EKV}}{A_x^{EKV}} = \left(\frac{bt}{at + n_y A_{s,y}} \mu \right) \left(\frac{at^m}{bt^m} \right) = \frac{at}{at + n_y A_{s,y}} \mu \quad (5.8)$$

Из једначине (5.4), (5.5) и (5.8) померање еквивалентне плоче у правцу у постаје:

$$v_{\max}^{EKV,x} = \mu_{xy}^{EKV} u_{\max}^{EKV,x} = \frac{F_x at \mu}{E_x^m t^m (at + n_y A_{s,y})} \quad (5.9)$$

Аналогно претходном, могуће је извести померања еквивалентне плоче и у правцу у.

Претпоставља се да су модели оребрене и еквивалентне плоче оптерећени мембранском силом у правцу у, која проузрокује издужење у истом и скраћење у управном правцу.



Слика 5.9. Мембрански одзив услед дејства оптерећења у правцу y , оребрене (лево) и еквивалентне плоче (десно)

Једнакошћу издужења оребрене и еквивалентне плоче добија се модул еластичности еквивалентне плоче у правцу y . Према Хуковом закону рачуна се издужење оребрене плоче у попречном (y) правцу, а услед оптерећења у истом правцу:

$$v_{\max}^{OR,y} = \frac{F_y b}{EA_y} = \frac{F_y b}{E(at + n_y A_{s,y})} \quad (5.10)$$

Овде је попречни пресек оребрене плоче управан на правац y једнак $A_y = n_y A_{s,y}$. Конструктивни поасонов коефицијент оребрене плоче μ_{yx}^{OR} , узрокован је односом скраћења и издужења панела услед дејства мембранског оптерећења у правцу y , умноженим поасоновим коефицијентом материјала.

$$\mu_{yx}^{OR} = \frac{u_{\max}^{OR,y}}{v_{\max}^{OR,y}} = \frac{A_y^{pl}}{A_x} \mu = \frac{at}{bt + n_x A_{s,x}} \mu \quad (5.11)$$

A_y^{pl} представља површину попречног пресека који се супротставља издужењу у правцу y , тј. површину попречног пресека плоче у том правцу. Из (5.10) и (5.11) следи да је скраћење оребрене плоче једнако:

$$u_{\max}^{OR,y} = \mu_{yx}^{OR} v_{\max}^{OR,y} = \frac{F_y abt \mu}{E(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \quad (5.12)$$

Издужење еквивалентне плоче, у случају оптерећења у правцу y , је:

$$u_{\max}^{EKV,y} = \frac{F_y b}{E_y^m A_y^{EKV}} = \frac{F_y b}{E_y^m at^m} \quad (5.13)$$

E_y^m је модул еласичности еквивалентне плоче у правцу y , за случај мембранског напрезања. Конструктивни поасонов коефицијент еквивалентне ортотропне плоче, као последица оптерећења у правцу y , представља однос површина попречних пресека еквивалентне плоче у попречном (A_y^{EKV}) и подужном правцу (A_x^{EKV}) умножен за претпостављен („фиктивни“) поасонов коефицијент ($\mu_{yx}^{EKV,pp}$) материјала исте плоче, и гласи:

$$\mu_{yx}^{EKV} = \frac{u_{\max}^{EKV,y}}{v_{\max}^{EKV,y}} = \frac{A_y^{EKV}}{A_x^{EKV}} \mu_{yx}^{EKV,pp} \quad (5.14)$$

И овде се уводи се услов еквиваленције, односно конструктивни поасонов коефицијент еквивалентне плоче требао би да буде једнак конструктивном поасоновом коефицијенту у оребреној плочи, тј. односи издужења и скраћења у обе плоче треба да су једнаки:

$$\mu_{yx}^{EKV} = \mu_{yx}^{OR} \quad (5.15)$$

Из (5.11), (5.12) и (5.15) следи да важи:

$$\frac{A_y^{EKV}}{A_x^{EKV}} \mu_{yx}^{EKV,pp} = \frac{at}{bt + n_x A_{s,x}} \mu \quad (5.16)$$

Стога, претпостављени поасонов коефицијент материјала еквивалентне плоче, према (5.11), (5.14), (5.15) и (5.16) је једнак:

$$\mu_{yx}^{EKV,pp} = \mu_{yx}^{OR} \frac{A_x^{EKV}}{A_y^{EKV}} = \left(\frac{at}{bt + n_x A_{s,x}} \mu \right) \left(\frac{bt^m}{at^m} \right) = \frac{bt}{bt + n_x A_{s,x}} \mu \quad (5.17)$$

Из једначина (5.13), (5.14) и (5.15) померање еквивалентне плоче у правцу y постаје:

$$u_{max}^{EKV,y} = \mu_{yx}^{EKV} v_{max}^{EKV,y} = \frac{F_y abt \mu}{E_y^m at^m (bt + n_x A_{s,x})} \quad (5.18)$$

Коначно, модул еластичности у правцу x еквивалентне плоче произилази из једнакости услова да је померање оребрене и еквивалентне плоче под дејством оптерећења истог интензитета једнако:

$$u_{max}^{OR,x} = u_{max}^{EKV,x} \quad (5.19)$$

односно

$$\frac{F_x a}{E(bt + n_x A_{s,x})} = \frac{F_x a}{E_x^m bt^m} \quad (5.20)$$

Модул еластичности у правцу x у еквивалентној плочи, за случај раванског напрезања, је:

$$E_x^m = E \frac{bt + n_x A_{s,x}}{bt^m} \quad (5.21)$$

Из услова једнакости померања у попречном правцу

$$v_{max}^{OR,y} = v_{max}^{EKV,y} \quad (5.22)$$

односно

$$\frac{F_y b}{E(at + n_y A_{s,y})} = \frac{F_y b}{E_y^m at^m} \quad (5.23)$$

Стога, следи модул еластичности еквивалентне плоче у правцу у:

$$E_y^m = E \frac{at + n_y A_{s,y}}{at^m} \quad (5.24)$$

Мембрански поасонов коефицијент материјала еквивалентне плоче μ_{xy}^m је једнак оном претпостављеном из (5.8):

$$\mu_{xy}^m = \mu_{xy}^{EKV,pp} = \frac{at}{at + n_y A_{s,y}} \mu \quad (5.25)$$

Поасонов коефицијент еквивалентне плоче μ_{yx}^m прорачунава се из једнакости односа модула еластичности и поасонових коефицијента код ортотропних плоча:

$$\frac{E_y^m}{E_x^m} = \frac{\mu_{yx}^m}{\mu_{xy}^m} \quad (5.26)$$

Следи да је:

$$\mu_{yx}^m = \mu_{xy}^m \frac{E_y^m}{E_x^m} = \frac{bt}{bt + n_x A_{s,x}} \mu \quad (5.27)$$

Однос модула еластичности у међусобно управним правцима еквивалентне плоче, фактички, репрезентује однос јачина тих праваца у стању мембранског оптерећења:

$$\frac{E_y^m}{E_x^m} = \left(\frac{b}{a} \right) \left(\frac{at + n_y A_{s,y}}{bt + n_x A_{s,x}} \right) \quad (5.28)$$

Модул клизања еквивалентне плоче је остављен исти као и код материјала оребрене плоче:

$$G_{xy}^m = G_{12} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (5.29)$$

Нешто више о увођењу ове претпоставке и утицају смицања на мембрански одзив описан у овом истраживаљу биће речи у наредном поглављу.

Са два модула еластичности, два поасонова коефицијента и модулом клизања дефинисана је матрица еластичности мембранске везе напон – деформација. Додатни параметар који је наопходан у дефинисању матрице крутости еквивалентне плоче је њена дебљина, чиме би се и веза оптерећење – деформација у потпуности одредила. Пошто еластичне карактеристике зависе од дебљине еквивалентне плоче, за почетак претпоставиће се да је ова дебљина једнака дебљини оребрене плоче. Ако означимо подужни и попречни правац x и y са 1 и 2 онда коначни параметри еластичности и крутости еквивалентне плоче гласе:

$$\begin{aligned} E_1^m &= E \frac{bt + n_x A_{s,x}}{bt^m} \\ E_2^m &= E \frac{at + n_y A_{s,y}}{at^m} \\ \mu_{12}^m &= \frac{at}{at + n_y A_{s,y}} \mu \\ \mu_{21}^m &= \frac{bt}{bt + n_x A_{s,x}} \mu \\ G_{12}^m &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \\ t^m &= t \end{aligned} \quad (5.30)$$

Дакле, сада су познате карактеристике мембранског модела еквивалентне неоребрене плоче за прорачун мембранске матрице еластичности и мембранске матрице крутости:

E_1^m – модул еластичности мембранског модела еквивалентне плоче у подужном правцу (правац 1);

E_2^m – модул еластичности мембранског модела еквивалентне плоче у попречном правцу (правац 2);

μ_{12}^m – поасонов коефицијент мембранског модела еквивалентне плоче;

μ_{21}^m – поасонов коефицијент мембранског модела еквивалентне плоче;

G_{12}^m – модул клизања мембранског модела еквивалентне плоче;

t^m – дебљина мембранског модела еквивалентне плоче.

5.2.2 Мембранска матрица еластичности и мембранска матрица крутости

Сада је могуће одредити коефицијенте мембранске матрице еластичности и крутости еквивалентне плоче, тј. матрице $[C]=[C^m]$ и $[A]=[A^m]$. Ако се остане при означавању управних праваца са 1 и 2, а коефицијентима матрице еластичности додамо у горњем индексу ознаку за мембрану, ови коефицијенти, користећи формулације (3.17) постају:

$$C_{11}^m = \frac{E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{E(bt + n_x A_{s,x})}{bt^m \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)} \quad (5.31)$$

$$C_{12}^m = C_{21}^m = \frac{\mu_{21}^m E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{\mu_{12}^m E_2^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{Et\mu}{t^m \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)}$$

$$C_{22}^m = \frac{E_2^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{E(at + n_y A_{s,y})}{at^m \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)}$$

$$C_{66}^m = G_{12} = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Модул еластичности и поасонов коефицијент који су искоришћени за дефинисање коефицијента C_{66}^m представљају карактеристике оребрене плоче. Као што се може видети коефицијент еластичности који везује напон смицања са углом клизања једнак је модулу клизања оребрене плоче, што је у ствари модул клизања материјала. Приликом мембранског напрезања претпоставља се да смицање има исти утицај на раванска померања оребрене плоче као и на раванска померања еквивалентне плоче. У оквиру процедуре методе еквиваленције, сматраће се се да је овај утицај мали, или мањи него што је утицај осталих коефицијената матрице еластичности. Приликом равномерних мембранских оптерећења, која су најчешће у правцу пружања укрућења или у правцу супротном од њега, долази до малих промена у угловима клизања тачака оребрене или еквивалентне плоче. С обзиром на доминантност наведених праваца оптерећења, коефицијенти који се директно супротстављају оваквим раванским напрезањима су пре свега модули еластичности у правцима, а касније и поасонов конструктивни коефицијенти. Па чак и ако се деси да су коефицијенти $C_{11}^m, C_{12}^m, C_{21}^m, C_{22}^m$ мањи него што је C_{66}^m , и тиме појачавајући утицај смицања у матричној једначини и у самом понашању плоче, треба напоменути да при раванском напрезању, неће постојати оптерећење које може да „искористи“ ову чињеницу. Ово је случај, наравно, када на плочу делују равномерна раванска оптерећења у два управна правца. Стога, пошто C_{66}^m и не утиче толико, неће се ни мењати у овој методи, већ ће остати исти као што је и у материјалу оребрене плоче. Ово посебно одговара методи еквивенције, јер је смицање генерално проблем за моделирања оваквог типа.

Коефицијенти матрице крутости, за разлику коефицијената матрице еластичности, уводе параметар дебљине. У случају мембранских напрезања, према формулама (3.16) и (3.24) следи:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = t^m \begin{bmatrix} C_{11}^m & C_{12}^m & 0 \\ C_{21}^m & C_{22}^m & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^m & A_{12}^m & 0 \\ A_{21}^m & A_{22}^m & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

па у случају еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента, коефицијенти матрице крутости $[A^m]$ гласе:

$$A_{11}^m = C_{11}^m t^m = \frac{E(bt + n_x A_{s,x})}{b \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)}$$

$$A_{12}^m = A_{21}^m = C_{12}^m t^m = \frac{Et\mu}{\left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)} \quad (5.33)$$

$$A_{22}^m = C_{22}^m t^m = \frac{E(at + n_y A_{s,y})}{a \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)}$$

$$A_{66}^m = G_{12} t^m = t^m \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Једначинама (5.31) и (5.33) дефинисано је мембранско понашање структуре еквивалентне плоче, преко дефинисаних матрица еластичности и крутости. Такође, овим је дефинисано и мембранско понашање еквивалентног коначног елемента. Треба напоменути да матрица крутости коначног елемента није исте математичке формулације као и матрица крутости еквивалентне плоче изведена применом теорије еластичности. Наведеним једначинама могуће је моделовати понашање еквивалентне плоче знајући параметре оребрене плоче од које се полази.

Матрица крутости коначног елемента (3.32) повезује мембранска оптерећења са једне стране и следствена померања са друге стране и представља улазни податак у анализама применом методе коначних елемената. Оно што је крајњи циљ моделирања је дефинисање понашања коначног елемента, преко матрица $[k]_e$ (3.32). У методи еквиваленције, моделирање матрице $[k]_e$ ће се урадити на посредан начин, преко матрице еластичности $[C^m]$ и дебљине еквивалентне плоче t^m . Матрица крутости плочастог мембранског правоугаоног коначног елемента константне дебљине следи из (3.32):

$$[k]_e = \int_A [B]^T [C^m] [B] t dA = t^m \int_A [B]^T [C^m] [B] dA \quad (5.34)$$

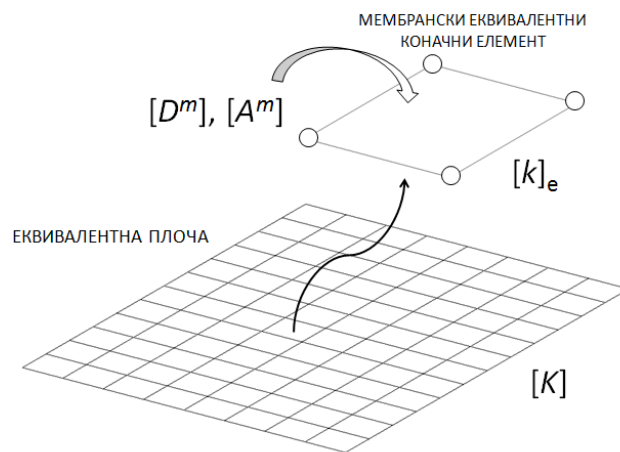
$[k]_e$ је интеграл по површини плочастог коначног елемента A . Матрица $[B]$ остаје непромењена и није предмет моделирања у овом истраживању. Ова матрица, повезује матрицу линеарних оператора $[L]$ и матрицу функција облика $[N]$, као што је већ напоменуто. Матрица $[B]$ је део математичке формулације саме нумеричке методе (методе коначних елемената) и грешке у апроксимацијама које се испољавају у њеном формирању и условљене су избором функције облика, програмском формулисању веза деформација – померање итд. Стога, у примени методе еквиваленције плоча матрица $[B]$ остаје дефинисана као и у литератури [40, 41, 42, 43].

Пошто је мембранска матрица крутости плоче $[A^m]$ исто што и мембранска матрица крутости еквивалентног коначног елемента: матрица еластичности коначног елемента умножена његовом дебљином, онда следи да такође важи:

$$[k]_e = \int_A [B]^T [A^m] [B] dA \quad (5.35)$$

Од овог тренутка, грешке у прорачуну које су последица саме методе коначних елемената рефлектују се и на еквивалентни коначни елемент (грешка апроксимације, мрежа елемената) и неће бити тема овог истраживања. Пошто

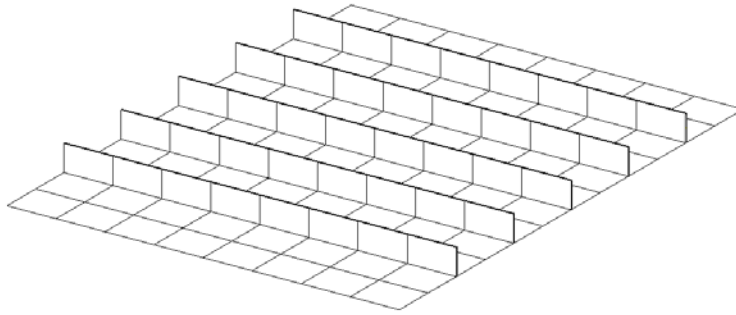
мембрански одзив највише зависи од површине попречног пресека који се опире раванском оптерећењу, густина мреже еквивалентних елемената неће имати велику утицај на нумеричке резултате. Ово значи да је код преноса мембранских оптерећења могуће поставити еквивалентни коначни елемент већих димензија него што је у конвенционалном МКЕ моделу, ако то не ремети геометрију консктрукције. У конвенционалним МКЕ моделима, често је густина мреже диктирана и присуством укрућења. Сада то није случај па мрежа може бити и ређа. Ово директно резултира могућност за мањим бројем елемената и, степени слободне у моделу а тиме и краће време потребно за спровођење анализе глобланог МКЕ модела консктрукције.



Слика 5.10. МКЕ модел еквивалентне плоче и еквивалентни коначни елемент

5.2.3 Пример еквиваленције померања

Пример еквиваленције дат је оребреном плочом димнзија $3 \times 3.9 \text{ m}$ и дебљине 10 mm . Плоча је у једном правцу укрућена са пет еквилистантних профила правоугаоног попречног пресека $200 \times 10 \text{ mm}$. МКЕ модел конвенционалних плочатих и гредних елемената да те на слици 5.11.



Слика 5.11. МКЕ модел оребрене плоче

Ово је карактеристична густина мреже која би се користила у глобалном нумеричком моделу сачињеном од великог броја оваквих плоча. Матрица еластичности изотропног материјала оребрене плоче гласи:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} & \frac{\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{\mu E}{1-\mu^2} & \frac{E}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} N/mm^2 \quad (5.36)$$

$$= \begin{bmatrix} 2.31 \cdot 10^5 & 6.92 \cdot 10^4 & 0 \\ 6.92 \cdot 10^4 & 2.31 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 8.08 \cdot 10^4 \end{bmatrix} N/mm^2$$

Задати модули еластичности и поасонов коефицијент за челик су: $E = 210000 N/mm^2$ и $\mu = 0.3$. Ово је уједно и матрица еластичности конвенционалног плочастог коначног елемента у моделу оребрене плоче $[C]$. Матрица крутости саме плоче је:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{tE}{1-\mu^2} & \frac{t\mu E}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{t\mu E}{1-\mu^2} & \frac{tE}{1-\mu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{tE}{2(1+\mu)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.31 \cdot 10^6 & 6.92 \cdot 10^5 & 0 \\ 6.92 \cdot 10^5 & 2.31 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 8.08 \cdot 10^5 \end{bmatrix} N/mm \quad (5.37)$$

Наравно, оваква „глатка плоча“ не би се ни приближно, у структурном смислу, понашала као и иста плоча са укрућењима. Користећи описану процедуру еквиваленције добијају се параметри ортотропности еквивалентне плоче (и коначног елемента):

$$\begin{aligned} E_1^m &= 2.64 \cdot 10^5 N/mm^2 \\ E_2^m &= 2.10 \cdot 10^5 N/mm^2 \\ \mu_{12}^m &= 0.3 \\ \mu_{21}^m &= 0.239 \\ G_{12}^m &= 8.08 \cdot 10^4 N/mm^2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Однос два модула еластичности износи $E_1^m / E_2^m = 1.26$. Модул еластичности у правцу 1 је 1.26 већи од модула еластичности у правцу 2. Ово у ствари представља однос јачина два правца са аспекта мембранског одзива. Укрућења (површина попречног пресека) чине правац 1 јачим од правца 2. Модул смицања је остављен исти као код изотропног материјала оребрене плоче. Ово је урађено, као што је објашњено у процедури методе, из разлога што у случајевима мембранског напрезања који се овде разматрају смицање има веома мали утицај. Стога, моделира се мембранска еквивалентна неоробрена плоча, формулацијом еластичности према (5.31):

$$[C^m] = \begin{bmatrix} C_{11}^m & C_{12}^m & 0 \\ C_{21}^m & C_{22}^m & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.84 \cdot 10^5 & 6.79 \cdot 10^4 & 0 \\ 6.79 \cdot 10^4 & 2.26 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 8.08 \cdot 10^5 \end{bmatrix} N/mm^2 \quad (5.39)$$

Ово је уједно и матрица еластичности еквивалентног коначног елемента мембранског карактера. Матрица крутости еквивалентне плоче исте дебљине је према (5.33):

$$[A^m] = t^m [C^m] = \begin{bmatrix} A_{11}^m & A_{12}^m & 0 \\ A_{21}^m & A_{22}^m & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.84 \cdot 10^6 & 6.79 \cdot 10^5 & 0 \\ 6.79 \cdot 10^5 & 2.26 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 8.08 \cdot 10^6 \end{bmatrix} N/mm \quad (5.40)$$

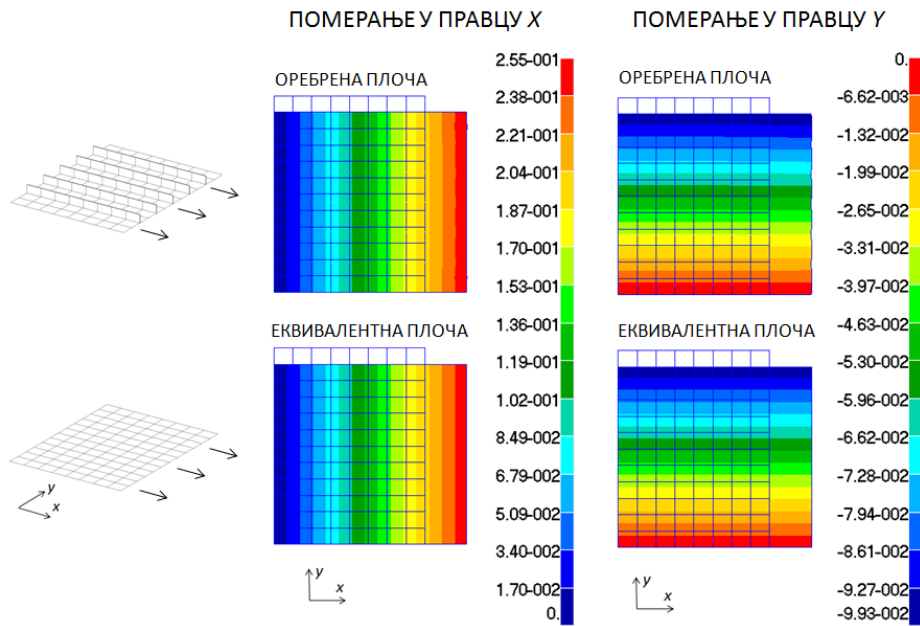
Матрица еластичности $[C^m]$, односно матрица крутости $[A^m]$, дефинишу мембранско понашање мембранске еквивалентне ороторпне плоче и еквивалентног коначног елемента.

Овим је извршена еквиваленција раванских померања, тј. оребрена и еквивалентна плоча имају једнака максимална раванска померања за исто оптерећење. Међутим, напон у два плочама није исти.

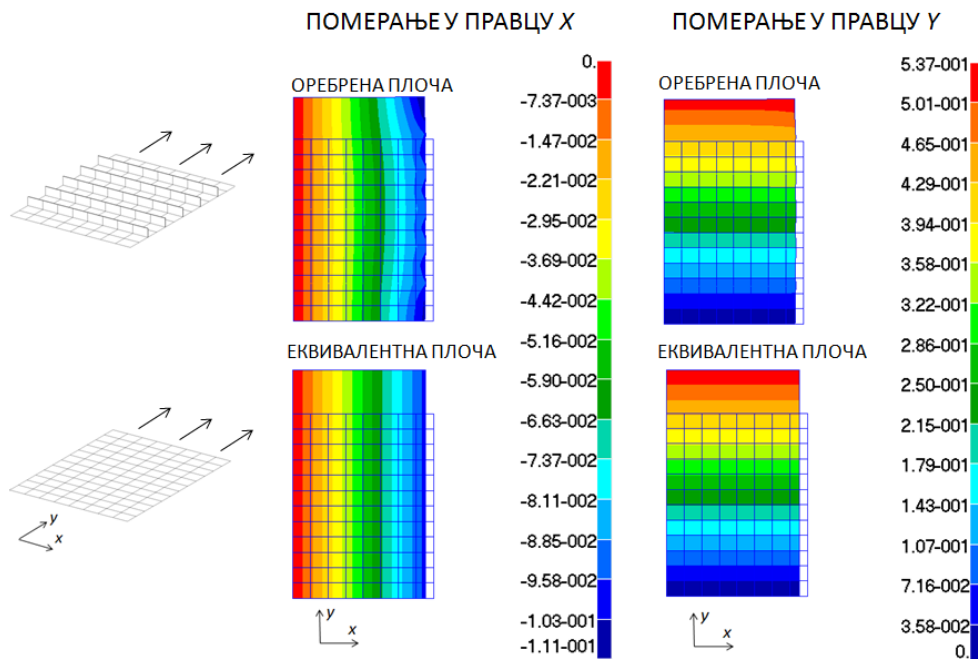
У наставку, дати су резултати раванских померања оребрена и еквивалентне плоче. Еквивалентна плоча је исте дебљине као и оребрена. Обе плоче имају исту густину мреже и оптерећене су аксијалним оптерећењем равномерно распоређеним по ивици, једнаког интензитета $F_x = 8.66 \cdot 10^5 N$. Плоче су ослоњене слободно по две управне ивице, допуштајући издужење ивице паралелне правцу пружања оптерећења и скраћење ивице управне на тај правац. Карактеристике еквивалентне плоче, а тиме и еквивалентног коначног елемента плоче моделоване су по процедури описаној у Поглављу 5.2.1 и 5.2.2. Матрица еластичности и матрица крутости „нове“ плоче дате су у (5.39) и (5.40). Слика 5.12 приказује мембрански одзив оребрена и еквивалентне плоче услед аксијалног оптерећења у правцу x . Максимално померање обе плоче је идентично и износи $0.255 mm$, што је и логично с обзиром да је еквиваленција урађена према претпоставци о једнакости раванских померања. Иста вредност скраћења обе плоче у правцу y , поред једнакости раванских померања, је последица и еквиваленције конструктивних поасонових коефицијената оребрена и еквивалентне плоче. Слика 5.13 илуструје раванска померања оребрена и еквивалентне плоче услед дејства аксијалне силе истезања истог интензитета у

правцу y . Обе плоче имају идентичну вредност максималног померања и при оваквом оптерећењу. Као што је већ речено, оребрена плоча оптерећена аксијално у правцу управном од пружања њених укрућења понаша се као неоребрена. И овде је то случај, иако на први поглед се може учинити да није тако с обзиром на вредности коефицијента еластичности C_{22} у оба модела. Овај коефицијент директно утиче на одзив у правцу y и код оребрене плоче износи $2.31 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, док је код еквивалентне $2.26 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$. Ова мала разлика последица је моделирања конструктивних поасонових коефицијента. Да су поасоновии коефицијенти нове плоче остали исти као у оребреној (само један, поасонов коефицијент материјала), онда би и ова два коефицијента остала иста. Међутим, ово би учинило да скраћење еквивалентне плоче (и еквивалентног коначног елемента) у правцу управном од деловања мембранског оптерећења не буде исто као у оребреној плочи. Скраћење у правцу x је по вредностима у обе плоче приближно исто, али поља се мало разликују. Управо на овом примеру види се суштинска разлика два модела. Еквивалентна плоча нема укрућења, па је њено поље хомогено (слика 5.13). Оребрена плоча, у резултатима која су очигледно последица постојања укрућења поседује нехомогеније поље вредности. Услед различитих крутости плоче и укрућења вредности скраћења у појединим чворовима ивице оребрене плоче није исто, али варира око вредности која одговара оној код еквивалентне плоче. Треба напоменути да нехомогено поље није постојало на слици 5.12 иако је у том случају аксијална сила истезања делује директно на плочу и на укрућења која су различитих крутости. То се није десило јер је задато оптерећење распоређено на такав начин по ивици плоче узрокује исте вредности максималног истезања свих чворова пресека. Ово је у ствари симулација реалног оптерећења у глобалном нумеричком моделу, у коме ће се неравномерност истезања у оребреној плочи изгубити услед великог броја међуелемената који преносе оптерећења. Померање две плоче биће еквалентно и ако је смер оптерећења обрнут у односу на претходне случајеве. Овако изолован приказ две управне равanske компоненте померања говори да ће и резултујуће померање услед дејства равномерно распоређених раванских оптерећења у оба правца, бити еквивалентно. Реално је очекивати да би у глобалним нумеричким моделима аксијално оптерећење у једном правцу било много доминантније него

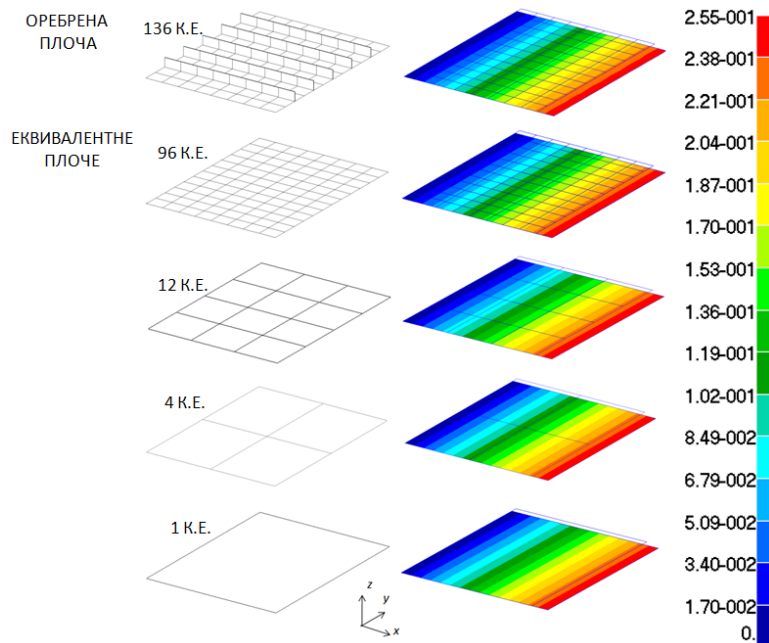
оно у другом правцу. На овим примерима може се видети поклапање и поља промене померања у оребреној и еквивалентној плочи.



Слика 5.12. Раванско померање у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу x



Слика 5.13. Раванско померање у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу y



Слика 5.14. Подужно померање: оребрена и еквивалентне плоче различитог броја коначних елемената (К.Е.)

Пошто аксијално напрезање конструкције зависи од попречног пресека који му се супротствља, следи да ни густина мреже у еквивалентној плочи не би требало да утиче на коначне вредности померања.

Ако се упореде померања оребрене плоче и еквивалентних плочеа различите густине мреже оптерећене аксијалним оптерећењем на истезање (слика 5.14) добиће се скоро идентичне вредности. Разлике у вредностима приказаних величина су свега неколико процената и последица су нумеричких грешака (апроксимације услед различите густине мреже). На пример, максимална разлика подужних померања у два крајња еквивалентна модела (модел од 96 и модел од 1 коначног елемента) је испод 1%.

Ово само потврђује да при мембранском напрезању густина мреже не игра улогу у анализи. Чак је и у случају оребрене плоче изабрана мрежа условљена постојањем укрућења и чињеницом да је за савојни одзив потребна гушћа подела између укрућења. У случају панела оребреног у два правца мрежа ће бити дискретизованија с обзиром на уношење додатне геометрије у модел. У овом

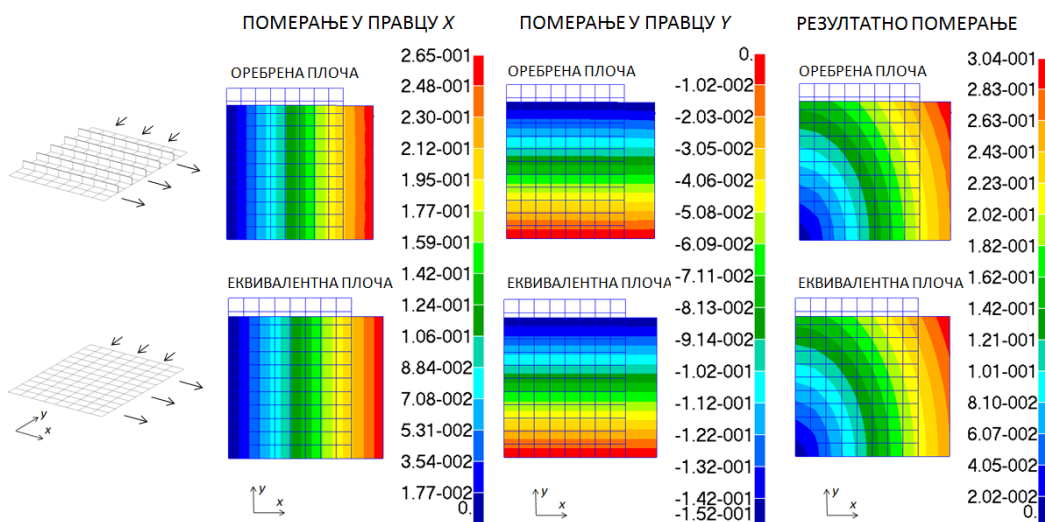
конкретном примеру, модел оребрена плоче је имао 136 коначних елемената, 96 плочастих и 40 гредних. Еквивалентна плоча исте густине мреже има 96 еквивалентних плочастих коначних елемената. Дакле, разлика густини мреже се налази у броју елемента укрућења, чинећи 42% разлике у укупном броју елемената две плоче, без икаквог смањења основне густине мреже плоче. Последњи модел од једног коначног елемента има 136 пута мање елемента од полазне оребрена плоче. Оребрена плоча има 117 чворова са по 2 мембранска степена слободе, што чини укупно 234 степена слободе у конвенционалном моделу. Еквивалентни модел сачињен од само једног коначног елемента и има четири чвора и осам мембранских степени слободе. Разлика у степенима слободе оребрена плоче и најједноставниг еквивалентног модела је скоро 30 пута. Слика 5.14 показује да је у глобалним нумеричким моделима, на местима где се очекује доминантно мембранско оптерећење, оправдано коришћење еквивалентног модела неоребрена плоче са минамалним бројем елемената, па чак и са једним јединим елементом. С обзиром да метода није намењена прорачунима чврстоће појединачних оребрених плоча већ великих нумеричких модела, може се претпоставити колико би смањење броја елемената, степени слободе, али и времена потребног за процесорску анализу било могуће увођењем еквивалентних конструктивних јединица. Наравно, у глобалним МКЕ моделима нису сви панели оптерећени само мембрански, па о већем упрошћавању еквивалентних плоча са аспекта густине мреже треба размишљати узимајући у обзир и савојни одзив модела. О еквиваленцији савојног одзива оребрена и еквивалентне плоче биће речи у Поглављу 5.3.

У Поглављима 5.2.1 , 5.2.2 и 5.2.3 описана је еквиваленција раванских померања. То значи да иако су померања оребрена и еквивалентне плоче скоро идентична, код напона то није случај. Тема Поглавља 5.2.4 биће упостављање еквиваленције две плоче по питању напона.

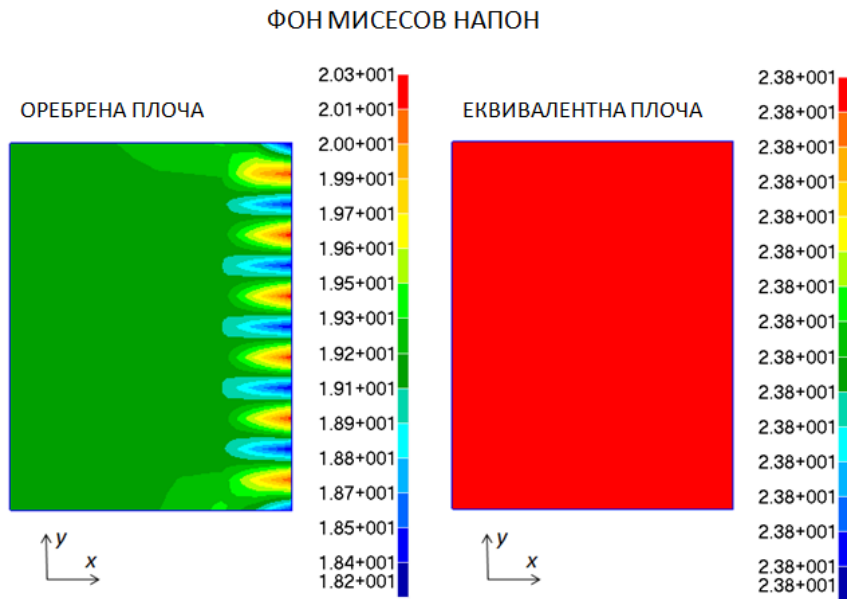
5.2.4 Коригована мембранска матрица еластичности и мембранска матрица крутости (еквиваленција напона)

Исти пример оребрене плоче из претходног поглавља приказан је и у следећој анализи. У овом случају оребрена и еквивалентна плоча оптерећене су равномерно распоређеном силом од $F_x = 8.66 \cdot 10^5 N$ у правцу x на истезање, и силом 10 пута мањом у правцу y , такође равномерно распоређеном, али на притисак. Оба оптерећења делују по дужини ивице плоче. Еквиваленција раванских померања дата је на слици 5.15, док су резултати напонске анализе приказани на слици 5.16.

Фон Мисесови напони у оребреној и еквивалентној плочи се, ни по вредностима, ни по пољу не подударају. У еквивалентној плочи фон Мисесов напон је $23.8 N/mm^2$. Ова вредност је иста по целој површини плоче. У оребреној плочи максимални фон Мисесов напон износи $20.3 N/mm^2$. Међутим, ова вредност је последица локалне концентрације напона. Исти напон у самој плочи је око $19.3 N/mm^2$.



Слика 5.15. Раванско померање у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу x и y



Слика 5.16. Фон Мисесови напони у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу x и y

У овом случају, као што се види, није задовољена еквиваленција напона. Напонско стање је, генерално, сложеније од померања. Критеријум фон Мисесовог напона [12] о попуштању материјала најчешће је коришћен критеријум у анализама чврстоће конструкција, попут бродских [1]. Овај критеријум је највише експериментално и потврђиван критеријум, посебно код челичних конструкција и често се у литератури назива и еквивалентним напоном, и тај израз не треба мешати са термином који се у овом истраживању везује за „еквиваленцију“ плоча. Ако се оцени као поузданији у неком типу конструкције, с обзиром на оптерећења, као критеријум се може узети и критеријум главних напона, или неког од компоненталних. У принципу, за саму методу, није ни битно који критеријум напона се користи. Процедуре дефинисане у дисертацији су универзалног карактера па се математичка формулација једног критеријума може заменити другом. На пример, у случају да је оребрена плоча направљена од композитног материјала, корисник методе би могао у оквиру саме процедуре еквиваленције напона испрограмирати критеријум Цаи – Ву [84], јер је овај критеријум један од најпоузданијих у оцени чврстоће анизотропних материјала. Најбољи одговор на ово питање даће нузмричка анализа глобалног модела. Какав критеријум напона је предвиђен или оцењен као најпоузданији за такву

анализу, исти такав круитеријум треба користити и при самој еквиваленцији напона оребрене и еквивалентне плоче.

Фон Мисесов напон је дефинисан у тродимензионалном структурном делићу, са слике 3.1, следећом релацијом:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \quad (5.41)$$

Пошто, у случају плоче код које је оса z управна на њену равну, претпостављамо да су напони смицања $\tau_{zy} = \tau_{zx}$ и нормални напон σ_z једнаки нули. Следи да је фон Мисесов напон за плочу једнак:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2}{2}} + 3\tau_{xy}^2 \quad (5.42)$$

Фон Мисесов напон се може приказати и као функција главних напона. Ипак, формулација (5.41) биће коришћена у овом истраживању. Еквиваленција максималног фон Мисесовог напона оребрене ($\sigma_{VM,max}^{OR,m}$) и еквивалентне плоче ($\sigma_{VM,max}^{EKV,m}$) оптерећене мембрански, гласи:

$$\sigma_{VM,max}^{OR,m} = \sigma_{VM,max}^{EKV,m} \quad (5.43)$$

ОДНОСНО:

$$\sqrt{\frac{(\sigma_x^{OR,m} - \sigma_y^{OR,m})^2 + (\sigma_y^{OR,m})^2 + (\sigma_x^{OR,m})^2}{2}} + 3(\tau_{xy}^{OR,m})^2 = \sqrt{\frac{(\sigma_x^{EKV,m} - \sigma_y^{EKV,m})^2 + (\sigma_y^{EKV,m})^2 + (\sigma_x^{EKV,m})^2}{2}} + 3(\tau_{xy}^{EKV,m})^2 \quad (5.44)$$

Лева страна једначине неће бити предмет истраживања у овој дисертацији. Она приказује компоненте напона у оребреној плочи. Цела једначина (5.44) сачињена

је од компоненти напона на месту максималног фон Мисесовог напона у оребреној или еквивалентној плочи.

Напон је тензор и дефинисан је са девет вектора напона. Одређивање ових вектора, а тиме и прецизног напонског стања у оребреној плочи је изузетно сложено и аналитички немогуће. Различите методе којима је апроксимативно могуће доћи до одређених вектора напона описане су у Поглављу 3. Фон Мисесов напон је, у ствари, скалар који треба да репрезентује све компоненте напона у једној тачки конструкције. Ако се узме у обзир да је одређивање појединачних вектора напона сложено и апроксимативно, онда је и прорачунавање фон Мисесовог напона још непрецизније. Једина метода која је у могућности да прорачуна комплетно напонско стање у конструкцији је метода коначних елемената. Стога, нумерички прорачун, односно метода коначних елемената, остаје једини поуздан начин за добијање леве стране једначине (5.44). Међутим, узимајући у обзир намену оребрене и еквивалентне плоче у оквиру глобалних нумеричких модела, добијање напона у оваквим конструкцијама ће се поједноставити. Циљ следећих поједностављења је избегавање примене методе коначних елемената и већа програмибилност саме методе еквиваленције. Наиме, може се претпоставити да је оребрена плоча у глобалним моделима неће имати кликовано напонско поље услед дејства мембранских оптерећења. Мембранска оптерећења се равномерно преносе по површини попречног пресека оребрене плоче изазивајући концентрације напона само на местима деловања задатих оптерећења, тј. на ивици плоче (слика 5.16, оребрена плоча). Ове концентрације напона евидентно су последица различитих крутости плоче и укрућења и као таква нису интересантна за глобалну напонску анализу поготово узимајући у обзир величину глобалних модела конструкције. Дакле, ако се занемаре концентрације, може се претпоставити да је напонско стање у оребреној плочи прилично једноставно. Раванско оптерећење у оребреној плочи у правцу x и y , услед своје равномерности проузрокује нормалне напоне оребрене $\sigma_x^{OR,m}$ и $\sigma_y^{OR,m}$ који зависе само од истог оптерећења и попречног пресека који се супротствања изудужењу или скраћењу. То значи да важи:

$$\sigma_x^{OR,m} = \frac{F_x}{A_x} \quad (5.45)$$

$$\sigma_y^{OR,m} = \frac{F_y}{A_y}$$

Даље, претпоставља се и да је однос оптерећења у правцу x и y познат:

$$F_y = k^m F_x \quad (5.46)$$

Следи појашњење овог корака. Наиме, када би се радило о оребреној плочи подвргнутој сложенијем мембранском оптерећењу ово би свакако била груба апроксимација. Међутим, имајући у виду да корисник ове методе познаје тип глобалних нумеричких оптерећења којима је подвргнута оребрена плоча у оквиру веће конструкције, ова претпоставка може послужити анализи. Познато је да је један правац мембранског оптерећења доминантнији од овог другог, управног. Код модела трупа брода то би свакако био подужни правац. У том случају, може се претпоставити чак и да напрезања у попречном, у правцу y , и не постоје, или су занемарљиво мала. Онда би важило $k^m = 0$. Параметар k^m бира корисник ове методе узимајући у обзир неопходно знање о глобалном понашању конструкције којој је еквиваленција намењена. Свакако је, бар код бродских конструкција, подужно аксијално оптерећење једино у моделу, или постоји и притискајуће попречно оптерећење које је бар за ред величина мање од подужног. Попречно напрезање би било, на пример, последица деловања притиска воде на бок брода рефлектујући се као мембранско скраћење на панел дна или унутрашњег дна трупа брода. У свим овим случајевима крајњи фон Мисесов напон неће се значајно разликовати. У анализи чврстоће глобалног модела трупа брода фон Мисесов напон би, у оребреној плочи, био једнак компоненти напона у правцу дужине брода ($k^m = 0$). Недетерминистичност мембранског критеријума је, у методи еквиваленције, остављена ради универзалности њене примене. У случају да се не ради о бродској конструкцији већ о типу конструкције у којем су позната оптерећења и њихови правци деловања (и нису карактера као у моделу трупа брода), корисник методе може сам променити овај мембрански критеријум на начин који жели.

Једино што је остало недефинисано на левој страни једначине (5.44) је напон смицања. Уводи се претпоставка да је напон смицања τ_{xy} једнак нули. Ово умногоме упрошћава израчунавање фон Мисесовог напона. У глобалном моделу је, скоро увек мембранско оптерећење у једном правцу много доминантније него оно у другом, управном правцу. У моделу трупа брода доминантни мембрански правац био би подужни правац. Практично, других мембранских оптерећења и нема. Ова која постоје, равномерно су распоређена у два управна правца. У таквим случајевима долази до минималне промене угла клизања, односно до минималног напона смицања. Вредност напона смицања је много мања од компоненти напона у правцу x и y , па се, у оваквим случајевима, може и занемарити. Стога, фон Мисесов напон у оребреној плочи може се израчунати према поједностављеној верзији једначине (5.42):

$$\sigma_{VM,max}^{OR,m} = \sqrt{\frac{(\sigma_x^{OR,m} - \sigma_y^{OR,m})^2 + (\sigma_y^{OR,m})^2 + (\sigma_x^{OR,m})^2}{2}} \quad (5.47)$$

Узимајући у обзир (5.45) и (5.46) следи:

$$\sigma_{VM,max}^{OR,m} = F_x \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{A_x} - \frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_x}\right)^2}{2}} \quad (5.48)$$

Дакле, фон Мисесов напон у оребреној плочи при мембранском оптерећењу распоређеном у две управне осе може се апроксимативно прорачунати према (5.48).

Десна страна једначине (5.44) решава се аналогно левој. Мембранска оптерећења су, наравно, истоветно репрезентована у еквивалентној плочи као и у оребреној. Такође, претпоставиће се и да је напон смицања, при истим условима, и у еквивалентној плочи једнак нули. Према томе следи:

$$\sigma_x^{EKV,m} = \frac{F_x}{A_x^{EKV}} \quad (5.49)$$

$$\sigma_y^{EKV,m} = \frac{F_y}{A_y^{EKV}}$$

Па је фон Мисесов напон у еквивалентној плочи једнак:

$$\sigma_{VM,max}^{EKV,m} = \sqrt{\frac{(\sigma_x^m - \sigma_y^m)^2 + (\sigma_y^m)^2 + (\sigma_x^m)^2}{2}} \quad (5.50)$$

Односно:

$$\sigma_{VM,max}^{EKV,m} = F_x \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{A_x^{EKV}} - \frac{k^m}{A_y^{EKV}}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_y^{EKV}}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_x^{EKV}}\right)^2}{2}} \quad (5.51)$$

Ако се узме у једнакост напона према (5.44) и елиминише оптерећење F_x онда следи:

$$\left(\frac{1}{A_x} - \frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_x}\right)^2 = \left(\frac{1}{A_x^{EKV}} - \frac{k^m}{A_y^{EKV}}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_y^{EKV}}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_x^{EKV}}\right)^2 \quad (5.52)$$

Циљ овог корака је одредити дебљину еквивалентне плоче тако да максимални фон Мисесов напон у оребреној и еквивалентној плочи буде идентичан по вредности. Нова дебљина еквивалентне плоче названа је коригованом t_{kor}^m јер се разликује од претходно одређене дебљина t^m , када је једини услов био еквиваленција померања. Лева страна једначине (5.44) је позната, а десна страна се може написати и овако:

$$\left(\frac{1}{A_{s,x}} - \frac{k^m}{A_{s,y}}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_{s,y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_{s,x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{bt_{kor}^m} - \frac{k^m}{at_{kor}^m}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{at_{kor}^m}\right)^2 + \left(\frac{1}{bt_{kor}^m}\right)^2 \quad (5.53)$$

Следи:

$$\left(\frac{1}{A_x} - \frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_x}\right)^2 = \frac{1}{t_{kor}^{m^2}} \left[\left(\frac{1}{b} - \frac{k^m}{a}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 \right] \quad (5.54)$$

Коригована дебљина еквивалентне плоче при којој су максимална мембранска померања и максимални мембрански фон Мисесов напон у оребреној и еквивалентној плочи идентични по вредностима може се добити из једначине (5.54).

$$t_{kor}^m = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{k^m}{a}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{A_x} - \frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_x}\right)^2}} \quad (5.55)$$

При еквиваленцији померања, када је усвојена дебљина „нове“ плоче иста као и дебљина оребрене, напон није био идентичан. У том случају корисник методе могао је усвојити произвољну дебљину еквивалентне плоче, а коефицијенти еластичности (крутости) би били одређени тако да задовоље једнакост померања. Узимајући ознаке за подужни и попречни правац оребрене и еквивалентне плоче - 1 и 2, коначне једначине које дефинишу параметре еластичности неоребрене плоче еквивалентних мембранских померања и мембранског фон Мисесовог напона као и код оребрене плоче исте дужине и ширине гласе:

$$E_1^m = E \frac{bt + n_x A_{s,x}}{bt_{kor}^m} \quad (5.56)$$

$$E_2^m = E \frac{at + n_y A_{s,y}}{at_{kor}^m}$$

$$\mu_{12}^m = \frac{at}{at + n_y A_{s,y}} \mu$$

$$\mu_{21}^m = \frac{bt}{bt + n_x A_{s,x}} \mu$$

$$G_{12}^m = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$t_{kor}^m = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{b} - \frac{k^m}{a}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}{\left(\frac{1}{A_x} - \frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{k^m}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{A_x}\right)^2}}$$

Коефицијенти матрица еластичности $[C^m]$, односно крутости $[D^m]$ сада постају:

$$C_{11}^m = \frac{E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{E(bt + n_x A_{s,x})}{bt_{kor}^m \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})}\right)}$$

$$C_{12}^m = C_{21}^m = \frac{\mu_{21}^m E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{\mu_{12}^m E_2^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{Et\mu}{t_{kor}^m \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})}\right)} \quad (5.57)$$

$$C_{22}^m = \frac{E_2^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{E(at + n_y A_{s,y})}{at_{kor}^m \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})}\right)}$$

$$C_{66}^m = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Матрица крутости која дефинише везу оптерећење – деформација еквивалентне плоче при мембранском напрезању је:

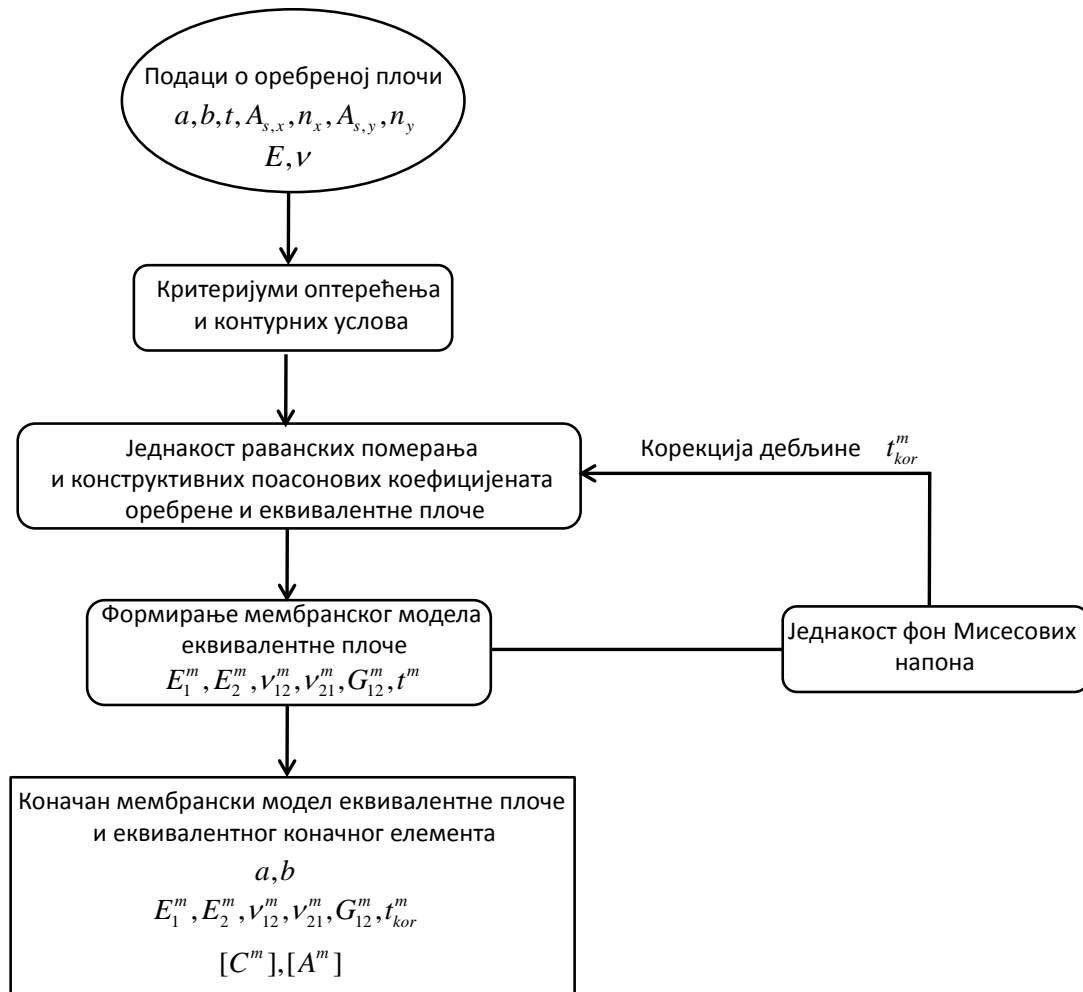
$$\begin{aligned}
A_{11}^m &= C_{11}^m t_{kor}^m = \frac{E(bt + n_x A_{s,x})}{b \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)} \\
A_{12}^m &= A_{21}^m = C_{12}^m t_{kor}^m = \frac{Et\mu}{\left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)} \\
A_{22}^m &= C_{22}^m t_{kor}^m = \frac{E(at + n_y A_{s,y})}{a \left(1 - \frac{abt^2 \mu^2}{(at + n_y A_{s,y})(bt + n_x A_{s,x})} \right)} \\
A_{66}^m &= t_{kor}^m \frac{E}{2(1 + \mu)}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Претходно објашњена процедура за мембранску еквиваленцију може се сумирати у две итерације:

- Итерација 1 – Еквиваленција раванских померања;
- Итерација 2 – Еквиваленција раванског фон Мисесовог напона.

У првој итерацији урађена је еквиваленција померања у оба управна правца, док је у другој итерацији постигнута једнакост напона у еквивалентној и оребреној плочи.

На слици 5.17 дат је шематски приказ упрошћеног алгоритма формирања мембранског модела еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента, а према процедури и једначинама описаним у Поглављима 5.2.1 - 5.2.4. Грана на десној страни алгорита представља корекцију дебљине плоче ради постизања еквиваленције напона. Крајњи резултат је еквивалентна плоча исте дужине и ширине као и оребрена, али нових параметара еластичности.



Слика 5.17. Шема формирања мембранског модела еквивалентне плоче

5.2.5 Пример еквиваленције померања и напона

За пример оребрене плоче описан у овом поглављу могу се израчунати нови параметри еластичности мембранског модела еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента. Као што је наведено раније, у овом примеру користиће се претпоставка да је однос подужног и попречног оптерећења једнак 10, при чему подужно оптерећење изазива издужење, а попречно изазива скраћење панела. У том случају $k^m = -0.1$. А према формули из (5.56) прорачунава се коригована дебљина еквивалентне плоче (коначног елемента) и једанка је:

$$t_{kor}^m = 12.33 \text{ mm} \quad (5.59)$$

При овој дебљини очекује се еквиваленција померања и напона у обе плоче. Користећи једначине (5.56) добијени су нови параметри еластичности еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента:

$$\begin{aligned} E_1^m &= 2.14 \cdot 10^5 \text{ N / mm}^2 \\ E_2^m &= 1.7 \cdot 10^5 \text{ N / mm}^2 \\ \mu_{12}^m &= 0.3 \\ \mu_{21}^m &= 0.239 \\ G_{12}^m &= 8.08 \cdot 10^4 \text{ N / mm}^2 \end{aligned} \quad (5.60)$$

Модул смицања, као што је и раније објашњено, остаје исти као и код материјала оребрене плоче. Однос два модула еластичности је остао исти као и при еквиваленцији померања, у првом кораку: $E_1^m / E_2^m = 1.26$.

Иако им је однос истао исти, модули еластичности у два управна правца су се променили, док су поасоновни коефицијенти остали на истим вредностима у поређењу са онима из (5.38). Матрица еластичности моделирана по описаној процедури, еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента, према (5.57) гласи:

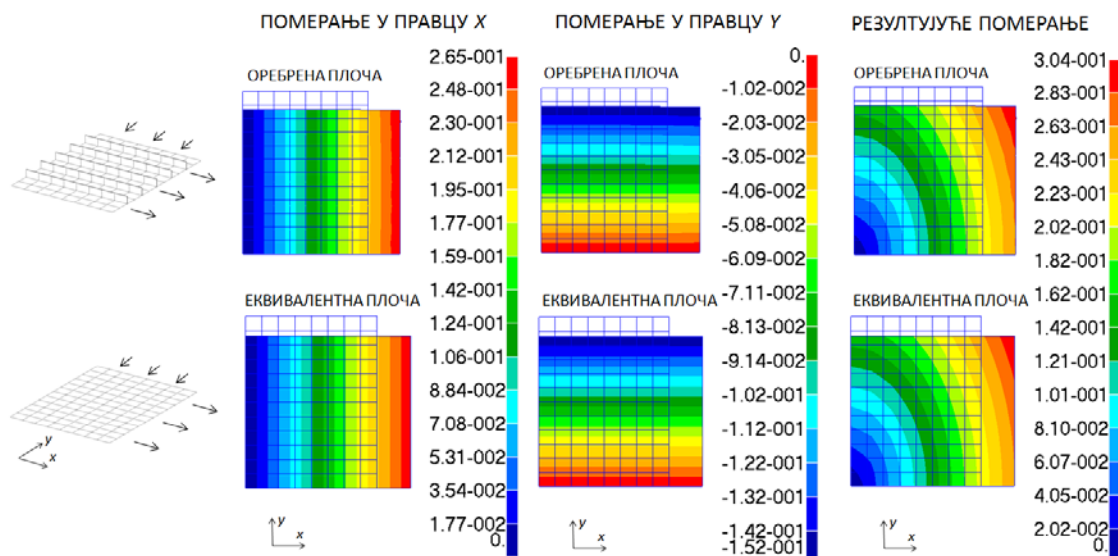
$$[C^m] = \begin{bmatrix} C_{11}^m & C_{12}^m & 0 \\ C_{21}^m & C_{22}^m & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 \cdot 10^5 & 5.5 \cdot 10^4 & 0 \\ 5.5 \cdot 10^4 & 1.83 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 8.08 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \text{ N / mm}^2 \quad (5.61)$$

Нова матрица крутости еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента дефинисана једначинама (5.58) је:

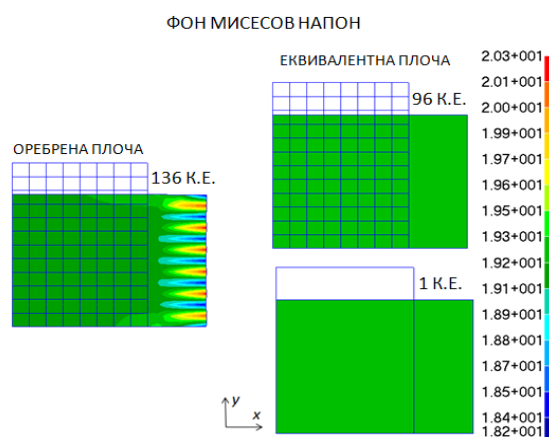
$$[A^m] = t^m [C^m] = \begin{bmatrix} A_{11}^m & A_{12}^m & 0 \\ A_{21}^m & A_{22}^m & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.84 \cdot 10^6 & 6.79 \cdot 10^5 & 0 \\ 6.79 \cdot 10^5 & 2.26 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 9.82 \cdot 10^6 \end{bmatrix} \text{ N / mm} \quad (5.62)$$

Као што се може видети, нови модули еластичности еквивалентне плоче су нешто нижих вредности, при чему је њихов однос остао исти. Ниже вредности су последица повећања дебљине еквивалентне плоче са 10 mm на 12.33 mm , односно за око 23%. Већа дебљина плоче узрокује већу крутост плоче и смањење модула еластичности у оба правца да би се задржала једнакост померања. Међутим, смањење ове дебљине директно утиче на напон, повећавајући га на вредност еквивалентну као у оребреној плочи. Матрица крутости се у односу на први корак када је урађена само еквиваленција померања, није променила осим код коефицијента везаног за смицање. Разлог лежи у томе што сви коефицијенти осим A_{66} , нису у функцији од кориговане дебљине. Ако се дебљина еквивалентне плоче промени, морају и модули еластичности, да би се задржала једнакост померања. Дебљина и модул еластичности су обрнуто пропорционални померању у еквивалентној плочи. Док померања остају иста, напон ће се линеарно повећати или смањити само услед промене дебљине, без обзира на вредности у модулима еластичности. Користећи (5.48) и (5.51) може се израчунати фон Мисесов напон у оребреној и еквивалентној плочи, који је изједначен и износи 19.29 N/mm^2 .

Слике. 5.18 и 5.19 илуструју постигнуту еквиваленцију померања и напона у оребреној и еквивалентној плочи. Вредности и поља померања су готово идентични, док је једнакост напона постигнута при задатом односу мембранских оптерећења. Скале на овим сликама су заокружене вредности величина. Очитана нумеричка вредност фон Мисесовог напона у еквивалентној плочи је 19.28 N/mm^2 . Разлика у односу на апроксимативно прорачунат напон преко (5.51) је минимална што потврђује валидност методе, бар што се тиче претпостављеног начина задавања оптерећења.



Слика 5.18. Раванско померање у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу x и y



Слика 5.19. Фон Мисесови напони у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу x и y

Компонентални напони, по (5.45) и (5.49) у обе плоче у том случају су:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{OR,m} &= 17.67 \text{ N / mm}^2 \\
 \sigma_y^{OR,m} &= -2.9 \text{ N / mm}^2 \\
 \sigma_x^{EKV,m} &= 18.01 \text{ N / mm}^2 \\
 \sigma_y^{EKV,m} &= -2.34 \text{ N / mm}^2
 \end{aligned}
 \tag{5.63}$$

Разлике истих компоненти у односу на нумерички модел су испод 1%. На овом примеру се може видети да подударање у вредностима фон Мисесовог напона у две поређене плоче не мора бити слично и у случају компоненталних напона. Шта више, то није ни могуће, с обзиром да еквиваленција није ни рађена по компонентама. Да је успостављена еквиваленција неке од компоненти, онда исто не би било могуће са фон Мисесовим напоном.

Слика 5.19 приказује још једну битну карактеристику дефинисаног мембранског коначног елемента. Наиме, ни код напона, густина мреже не игра улогу у коначним резултатима. Еквивалентна плоча од 96 и једног коначног елемента дала је идентичне резултате. Ово говори да је могуће еквивалентну плочу моделирати ређом мрежом и у случају анализе померања и у случају напонске анализе чврстоће.

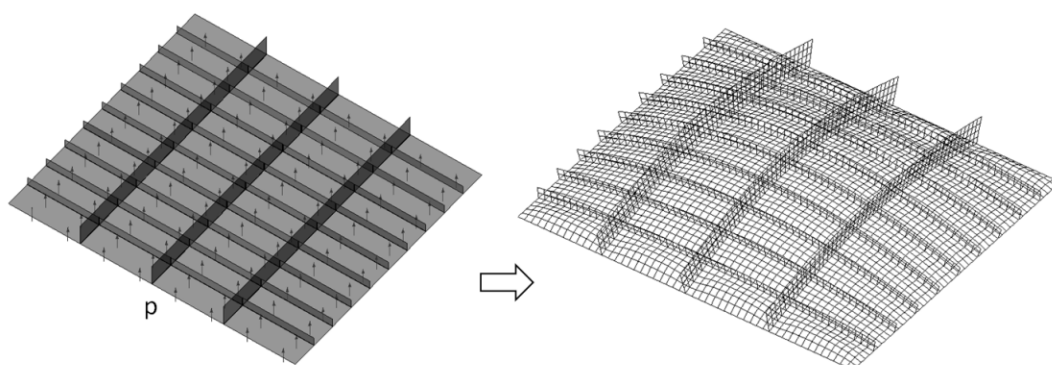
У овом и претходна два поглавља описан је алгоритам мембранског моделирања параметара еластичности еквивалентне плоче. Овај алгоритам је програмибилан и у ту сврху је и направљен софтвер који омогућава кориснику да за сваку оребрену плочу добије параметре еквивалентне, тако да понашање две плоче буде еквивалентно. При моделирању треба водити рачуна о упрашћењима која су описана, и о крајњој примени еквивалентне плоче – нумеричком моделу. Мембрански коначни елемент се може користити и без дефинисања савојних карактеристика. Овакав елемент свакако има примену у моделима где су оптерећења у равни доминантна. Један од таквих случајева су МКЕ модели бродске конструкције намењени прорачунавању притискујућих напона у структури дна или палубе брода. Ови напони користе се у анализи извијања и преносе се са глобалног нумеричког модела на модел оребрене плоче ради анализе њене стабилности. Мембрански коначни елемент би ту свакако био

коришћен у глобалном моделу, где би служио да пренесе и прорачуна аксијална оптерећења која би касније била употребљена у таквим анализама. Међутим, ради употпуњавања анализа чврстоће, ипак је корисније имати елемент који је у стању да се избори и са савојним оптерећењима. У ту сврху у нареденом делу биће објашњена процедура еквиваленције савојног понашања оребрених плоча.

5.3 Савојни модел

5.3.1 Савојни параметри еластичности

Избор репрезентативне оребрене плоче директно утиче на њен тип савијања, много више него код равних напрезања. Ово је детаљније објашњено у Поглављу 5.1. У складу с тим у овом истраживању фаворизовано је савијање оребреног панела оптерећеног равномерно распоређеним притиском управним на раван плоче и слободно ослоњеног по ивицама модела (ивицама су спречене translације, али не и ротације). Оваква плоча, илустрована на слици 5.6, оптерећена је на савијање притиском p (слика 5.20).



Слика 5.20. Оребрена плоча оптерећена на савијање

У овом кораку уводе се нова четири параметра оребрене плоче:

$I'_{s,x}$ – момент инерције укрућења које се пружа правцем x , за средњу раван плоче;

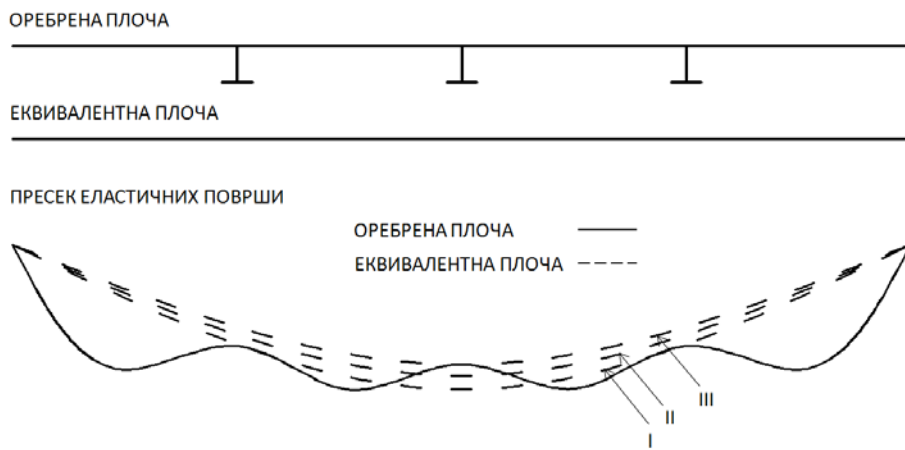
$I'_{s,y}$ – момент инерције укрућења које се пружа правцем y , за средњу раван плоче;

w_{\max}^{OR} – максимални угиб оребрене плоче услед дејства притиска p ;

$\sigma_{VM,\max}^{OR,s}$ – максимални фон Мисесов напон оребрене плоче услед дејства притиска p .

Максимални угиб и максимални фон Мисесов напон оребрене плоче оптерећене на савијање су управо два податка чије се вредности траже у еквивалентној плочи, моделирањем њеног понашања. Могуће је програмирати у саму методу еквиваленције, неку од већ описаних метода за прорачун чврстоће оребрених плоча. Међутим корисник методе еквиваленције треба да је итекако свестан ограничења ових процедура. Код мембранског модела ово није био случај. Раванска померања су се могла одредити применом Хуковог закона, па је њихова зависност од параметара оребрене плоче позната. Код савијања није тако. Колико год претпоставки или поједностављења да се уведе, савијање узрокује знатно сложеније стање угиба и напона. Аналитички, добијање ових параметара је, као што је речено, немогуће. Диференцијална једначина осмог реда је исувише компликована, али ни апроксимативне методе, у општем случају, нису поуздане. Стога, једино је могуће да се оба параметра прорачунавају нумеричким путем, применом методе коначних елемената. Метода коначних елемената једина ће, у општем случају, дати реалну слику поља угиба и напона. Примена МКЕ за добијање угиба и напона свакако представља додатни напор корисника методе. Неопходно је моделирати МКЕ модел оребрене плоче. Међутим, овај корак је неопходан из претходно описаних разлога. Треба напоменути да је исте параметре могуће добити и експерименталним путем, ако за то постоје услови. Дакле корисник методе еквиваленције је слободан да прорачуна (или измери) угиб и напон на који год начин жели, водећи рачуна о поузданости ових вредности и коришћене методе.

Ако се моделира угиб савојне еквивалентне плоче, поставља се питање према ком угибу се ради еквиваленција? Да ли према максималном угибу у плочи или укрућењу? Или нечему између? Овде треба бити опрезан и водити рачуна, као и код раванских померања, у очекиваном одзиву конкструкције у глобланом МКЕ моделу.



Слика 5.21. Пресеци еластичних површи

На слици 5.21 приказан је карактеристични пресек еластичних површи. На упоредном примеру еластичних површи види се и суштинска разлика у моделираном понашању еквивалентне плоче у односу на оребрену. Угиб еквивалентне плоче је највећи на средини, што је у складу са теоријом ортоторпних плоча. С обзиром да еквивалентна плоча не поседује укрућења она, наравно, не може „ухватити“ реални карактер еластичне површи као што је случај код оребрене плоче па је њен савојни облик неупоредиво једноставнији. Еквивалентна плоча нема укрућења, па не може ни имати терцијарни одзив услед савијања дела плоче између укрућења. Еквиваленција померања је, код савијања, неупоредиво грубља него што је то било у случају деловања мембранских оптерећења када је и поље било врло слично. Овде то неће бити случај.

Угиб оребрене плоче не мора имати највећу вредност у средини. Ако је тежња да се буде на страни сигурности онда се угиб еквивалентне плоче може моделирати према максималном угибу у оребреној плочи, где год он био. Таквом приступу одговарао би пресек I са слике 5.21. Пресек II би одговарао

максималном осредњеном угибу оребрене плоче. Ова вредност представља осредњен угиб између максималних угиба у плочи и у укрућењу. Еластична линија II еквивалентне плоче можда боље претпоставља хомогенизацију плоче са укрућењима у њеном структурном одзиву. Еластична линија III представља случај у коме би се угиб еквивалентне плоче могао моделирати према максималном угибу реалне плоче. И овај случај може имати смисла с обзиром да у глобалном МКЕ моделу конструкције брода првенствено идентификујемо зоне великих угиба или напона, пре свега у плочи. У опису процедуре примене ове методе биће фаворизован случај I. Дакле, претпоставља се да еквивалентна плоча има исти максимални угиб као и оребрена, независно од локације. Ово ће бити прва еквиваленција оребрене и еквивалентне плоче. Дакле, треба да важи:

$$w_{\max}^{OR} = w_{\max}^{EKV} \quad (5.64)$$

Када се постигне ова једнакост, следећи поступак је еквиваленција напона (фон Мисес). За почетак процедуре, неопходно је одредити крутости оребрене плоче. Не постоје прецизне једначине за њихово одређивање. Крутости саме плоче на савијање у својим управним правцима једноставно је одредити применом (3.26) за изотропни материјал. У том случају оба модула еластичности и посаонова коефицијента су међусобно једнака. Крутост греде на савијање као репрезента укрућења такође је позната. Крутост система плоча – укрућења по правцима могуће је апроксимативно претпоставити користећи формуле (3.28):

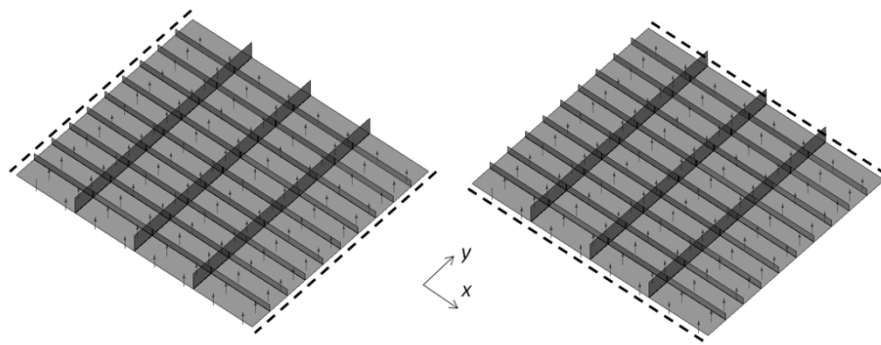
$$D_x^{OR} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI'_{s,x}}{s_x} \quad (5.65)$$

$$D_y^{OR} = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI'_{s,y}}{s_y}$$

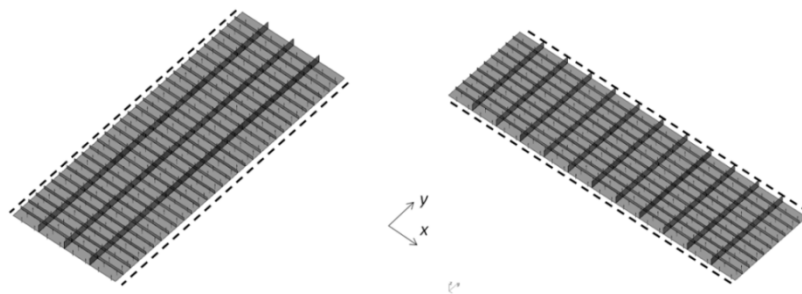
Ове апроксимативне формуле више одговарају случају плоче оребрене симетрично постављеним укрућењима у односу њену раван. Утицај крутости укрућења која се налазе само са једне стране плоче не може се поуздано одредити. Горње формуле не могу у општем случају код било које оребрене плоче дати најпоузданију вредност савојних крутости, али могу проценити коректне односе јачина праваца по савијању. Ово ће бити од користи у примени саме методе. D_x^{OR}

и D_y^{OR} представљају крутости оребрене плоче на савијање у правцу x и y . Први чланови формула (5.65) односе се на крутост саме плоче, док други члан описује крутост укрућења.

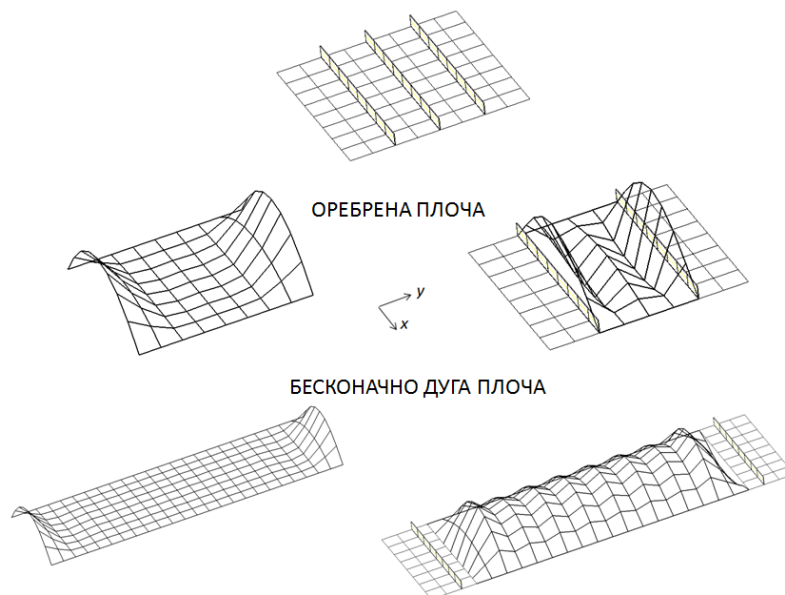
Следећи корак је прорачунавање угиба оребрене плоче слободно ослоњене на две паралелне ивице. Иако је ово могуће одредити применом МКЕ, овде то неће бити случај. Наиме, МКЕ метода за овако моделирану плочу (слика 5.22) дала би резултате који би били неупотребљиви за саму методу еквиваленције. У оквиру развијене методе, претпоставља се да се оребрена плоча цилиндрично савија са својим укрућењима. Ово је веома битна претпоставка која суштински мења карактер савијања конкретне оребрене плоче. Наиме, када би се конкретна оребрена плоча оптеретила равномерним притиском на савијање и ослонила као на слици 5.22, њена еластична површ била би изузетно сложена, математички немогућа за описивање или илустрацију. Највећи проблем чиниле би неослоњене ивице плоче које би се, у том случају, извитопериле. Можда би и делови плоча – укрућење на средини и показивали хомогеност у њиховом одзиву међутим утицај крајева је толико велики да би то пореметило и стање у средини оребрене плоче. Овакав случај не би достојно репрезентовао конструктивну ороторпност оребрене плоче. Укрућења се не би савијала са плочом мада у неким случајевима то не би био проблем, рецимо када су у питању густо распоређена укрућења, са једне и са друге стране плоче, релативно мале јачине. Генерално, метода коначних елеманата у овом случају не помаже. Тачније, помагала би у случају савијања у правцу x (слика 5.22) када би, рецимо, измоделивали исту плочу тако што би је продужили у правцу y понављајући консктрукцију (слика 5.23). Овакав модел зваћемо бесконачно дуга оребрена плоча, или дуга плоча. Под овим термином обично се назива плоча којој је однос дужина њених ивица већи од 3:1. Дакле, када би моделе са слике 5.22 представили са моделима са слике 5.23 онда би метода коначних елемената била у стању да боље „ухвати“ хомогенизованост одзива укрућења и плоче (слика 5.24). Ова разлика је најприсутнија у плочама са малим бројем укрућења (слика 5.24). Дакле, суштина овог корака је како изоловати савијање у два управна правца.



Слика 5.22. Оребрена плоча ослоњена по паралелним ивицама: савијање у правцу x (лево), савијање у правцу y (десно)



Слика 5.23. Бесконечно дуга оребрена плоча ослоњена по паралелним ивицама: савијање у правцу x (лево), савијање у правцу y (десно)



Слика 5.24. Хомогенизованост савијања у правцу x плоче са укрућењима на примеру реалне оребрене плоче и бесконачно дуге плоче

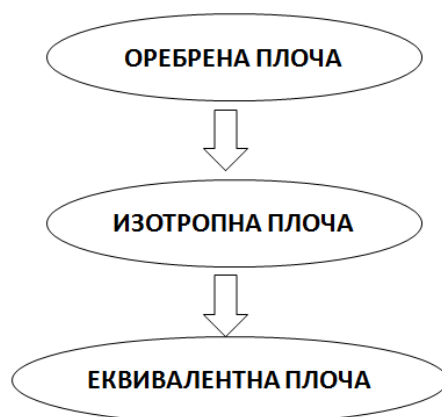
За прорачунавање угиба оребрених плоча оптерећених притиском и ослоњених на паралелним ивицама, користиће се теорија цилиндричног савијања код бесконачно дугих плоча. Угиби оребрене плоче слободно ослоњене по ивицама паралелним правцу x , односно y , рачунао би се према (5.66). У питању су максимални угиби на средини плоче.

$$w_x^{OR} = \frac{5pa^4}{384D_x^{OR}} \quad (5.66)$$

$$w_y^{OR} = \frac{5pb^4}{384D_y^{OR}}$$

Овде је за угиб у оребреној плочи искоришћена једначина која важи за неоребрену плочу. Стога, уведена је претпоставка да се оребрена плоча хомогено савија на исти начин као и неоребрена плоча, цилиндрично на такав начин да су им угиби у средини исти. Разлика је у томе што је у формулама (5.66) искоришћена крутост на савијање у оба правца која узима у обзир конструктивну анизотропност (ортотропност) оребрене плоче. Иако ово на први поглед може изгледати као превише грубо упрошћење, оно што треба имати у виду је да су за саму методу еквиваленције битнији односи ових угиба него саме њихове вредности. Управо из ових односа, касније, изоловаће се односи крутости еквивалентне плоче, а касније и модули еластичности у два управна правца. Више о претпоставкама за извођење и самом извођењу једначина (5.66) може се видети у литератури [23, 28].

Следећи корак је увођење изотропне плоче истих димензија као и оребрена плоча. Ово се може назвати међукораком између оребрене и еквивалентне плоче. За разлику од савијања, код мембранске еквиваленције параметри еквивалентне плоче добијени су директно, без било каквих међукорака. Претпоставља се да изотропна плоча има модул еластичности матријала оребрене плоче, али два различита поасонова коефицијента, намерно нарушавајући једнакост теорије ортотропних плоча: $E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}$. Ово је врло важан корак, и у наставку ће се обелоданити његова улога у методи еквиваленције при савијању.



Слика 5.25. Упрошћен приказ процедуре добијања параметара еквивалентне плоче оптерећене на савијање

Следећи корак је рачунање угиба изотропне неоребрене плоче истих димензија оптерећене истим притиском и ослоњене такође на паралелним ивицама. Циљ овог корака је упоређивање одзива оребрене и неоребрене плоче исте дебљине од истог материјала. Из овога видеће се пре свега разлика у еластичности (крутости) две плоче, тј. колико је неоребрена плоча „еластичнија“ од оребрене при истим условима оптерећења и ослањања. Прво треба срачунати савојне крутости у међусобно управним правцима (подужном и попречном) неоребрене изотропне плоче:

$$D_x^{IZ} = \frac{Et^3}{12(1 - \mu_{xy}^s)^2} \quad (5.67)$$

$$D_y^{IZ} = \frac{Et^3}{12(1 - \mu_{yx}^s)^2}$$

Као што се види из ове две једначине изотропна плоча има два поасонова коефицијента. Ови параметри биће познате величине, и за почетак може се узети да су поасонови коефицијенти једнаки оним добијеним у мембранском моделу:

$$\mu_{xy}^s = \mu_{xy}^m \quad (5.68)$$

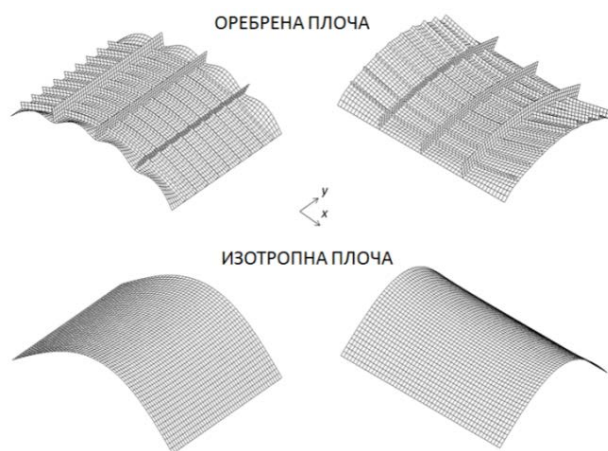
$$\mu_{yx}^s = \mu_{yx}^m$$

Наиме, еквивалентни савојни модел није могуће добити једном итерацијом. Стога, у саму процедуру потребно је ући са неким поасоновим коефицијентима неоребрене ортотропне плоче и диференцирати их у овом кораку. У принципу, ова два коефицијента могу да буду једнака, и да износе рецимо 0.3 као и код челика. Међутим, они ће касније сигурно бити различитих вредности, које ће се итерацијама мењати. Стога, иако није битно са којим поасоновим коефицијентима улазимо у прорачун, овде су изабрани исти они који су већ познати и прорачунати код мебранског модела еквивалентне плоче. Препорука методе еквиваленције је да се ограничи вредност поасонових коефицијената на 0.5. Овим се смањује број итерација потребних за еквиваленцију плоча, држећи израз $1 - \mu_{xy}^s \mu_{yx}^s$ близу 1, и тиме појачавајући утицај модула еластичности у матрицама еластичности и крутости. Логика оваквог приступа је да модули еластичности заиста репрезентују јачине праваца у много већој мери него што то раде поасонове коефицијенти.

И код изотропне плоче примениће се теорија дугих плоча, па максимални угиби услед цилиндричног савијања на средини неоребрене плоче биће једнак:

$$w_x^{IZ} = \frac{5pa^4}{384D_x^{IZ}} \quad (5.69)$$

$$w_y^{IZ} = \frac{5pb^4}{384D_y^{IZ}}$$



Слика 5.26. Цилиндрично савијање

Изотропна неоребрена плоча имаће много већи угиб него она оребрена. Значи потребно је некако повећати крутост (еластичност) неоребрене изотропне плоче тако да се угиби у изотропној и оребреној плочи изједначе. Савојне крутости плоче су линеарне функције модула еластичности, према (3.17) и (3.26). Стога, у првој итерацији израчунаће се модули еластичности у два управна правца еквивалентне плоче у функцији односа угиба изотропне и оребрене плоче:

$$E_x^s = E \frac{w_x^{IZ}}{w_x^{OR}}$$

$$E_y^s = E \frac{w_y^{IZ}}{w_y^{OR}}$$
(5.70)

Дакле, једнакостима (5.70) повећава се крутост неоребрене плоче (изотропног материјала) кроз модуле еластичности, правећи од изотропне – ортотропну плочу. Из ових једначина, после замене за угибе из (5.66) и (5.69), следи:

$$E_x^s = E \frac{D_x^{OR}}{D_x^{IZ}}$$

$$E_y^s = E \frac{D_y^{OR}}{D_y^{IZ}}$$
(5.71)

Дакле, модули еластичности директно зависе од односа крутости изотропне и оребрене плоче у правцима, умножени за модул еластичности неоребрене изотропне плоче. Спрежући ове изразе са једначинама за крутост (5.65) и (5.67) добија се:

$$E_x^s = E \frac{\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI'_{s,x}}{s_x}}{\frac{Et^{s^3}}{12(1-\mu_{xy}^{s^2})}} = E \left(\frac{(1-\mu_{xy}^{s^2})t^3}{(1-\mu^2)t^{s^3}} + \frac{12(1-\mu_{xy}^{s^2})I'_{s,x}}{s_x t^{s^3}} \right)$$
(5.72)

$$E_y^s = E \frac{\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI'_{s,y}}{s_y}}{\frac{Et^{s^3}}{12(1-\mu_{yx}^s)}} = E \left(\frac{(1-\mu_{yx}^s)t^3}{(1-\mu^2)t^{s^3}} + \frac{12(1-\mu_{yx}^s)I'_{s,x}}{s_y t^{s^3}} \right)$$

У случају да постоје укрућења у датом правцу, онда је први сабирак у горњим једначинама за ред или два реда величине мањи од другог сабирка. Удео крутости плоче је мањи од удела крутости укрућења у ортотропној плочи, па се може занемарити уз минималну разлику у крајњим резултатима модула еластичности. Дакле, код плоче оребрене у працу x , односно y , модули еластичности се могу рачунати према приближним формулама:

$$E_x^s \approx E \frac{12(1-\mu_{xy}^s)I'_{s,x}}{s_x t^{s^3}} \quad (5.73)$$

$$E_y^s \approx E \frac{12(1-\mu_{yx}^s)I'_{s,y}}{s_y t^{s^3}}$$

Ако у неком од правца нема укрућења, онда је други сабирак једначина (5.72) једнак нули, па ове једначине гласе:

$$E_x^s = E \frac{(1-\mu_{xy}^s)t^3}{(1-\mu^2)t^{s^3}} \quad (5.74)$$

$$E_y^s = E \frac{(1-\mu_{yx}^s)t^3}{(1-\mu^2)t^{s^3}}$$

Што се тиче поасонових коефицијената који улазе у матрицу савојне еластичности, од почетка ће се претпоставити да је први савојни поасонов коефицијент једнак оном мембранском, док се други добија из једнакости $E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12}$:

$$\mu_{xy}^s = \mu_{xy}^m$$

$$\mu_{yx}^s = \mu_{xy}^s \frac{E_x^s}{E_y^s} \quad (5.75)$$

Овде треба водити рачуна да и μ_{yx}^s није једнак оној вредности од које се кренуло у прорачун параметара савијања код еквивалентне плоче. Крутост у правцу у израчуната је коришћењем произвољног поасоновог коефицијента, у овом случају оног који је већ био дефинисан у мембранском моделу: μ_{yx}^m . Да је остало да је вредност $\mu_{yx}^s = \mu_{yx}^m$ онда не би била задовољена једнакост за ортотропне плоче према (3.18). Дакле, овде ће се, користећи нову вредност μ_{yx}^s из (5.75), искористити једначине (5.67) и (5.71) за поновно прорачунавање крутости и модула еластичности у попречном правцу. Из овога следи нови поасонов коефицијент μ_{yx}^s који ће сада бити знатно ближи оном коришћеном у прорачуну крутости модула еластичности у попречном правцу. Ова процедура се може понављати све док се не добију приближне вредности поасновог коефицијента μ_{yx}^s . Пошто коефицијент μ_{yx}^s много мање утиче на угиб и напон само код подужно оребрених плоча, довољно је после једне или евентуално две итерације завршити прорачун параметара еластичности.

Модул клизања савојног модела еквивалентне плоче је узет као петина већег од два коефицијента еластичности C_{11}^s и C_{22}^s :

$$G_{xy}^s = \frac{\max(C_{11}^s, C_{22}^s)}{5} \quad (5.76)$$

Код савојног одзива еквивалентне плоче претпостављено је да да је модул клизања G_{xy}^s једнак петини максималне вредности ова два параметра. Смицање утиче много више код савојних него код раванских напрезања. Да је вредност G_{xy}^s остала иста као и код изотропног материјала оребрене плоче, то би представљало проблем у примени методе еквиваленције. Код неких оребрених плоча утицај смицања може итекако да поремети целу процедуру која је пре свега базирана на одређивању крутости на савијање у правцима, а не на одређивању крутости на смицање. У општем случају може се десити да моделирани модули еластичности еквивалентне плоче буду много мањи од модула клизања изотропног материјала,

чинећи утицај смицања већи него утицај крутости у правцима. Везивање зависности коефицијента G_{xy}^s за вредности моделираних коефицијената еластичности, а тиме директно и модула еластичности, спречава овај проблем. Дакле, колики год буде утицај параметара еластичности у правцима, утицај смицања требао би бити неколико пута мањи, баш као и код изотропног материјала оребрене плоче. Анализом утицаја вредности смицања у примени развијене методе дошло се до апроксимативног односа коефицијената матрице еластичности и модула смицања еквивалентне плоче, према једначини (5.76). У методи еквиваленције препоручује се да тај однос буде једнак 5.

У случају да је тај однос мањи од 5, утицај смицања у одзиву конструкције се повећава и потребан је много већи број итерација за добијање еластичних параметара еквивалентне плоче. Утицај смицања је већи, што значи да је утицај моделираних параметара еластичности мањи. С обзиром да је метода базирана на моделирању параметара еластичности, а не на моделирању утицаја смицања, прецизност методе еквиваленције се смањује, тј. максимални угиб и фон Мисесов напон у еквивалентној плочи сада више одступа од истих величина у оребреној плочи. Такође, потребан је већи број итерација за прорачунавање еквивалентне дебљине.

У случају да је претпостављено да је однос коефицијената матрице еластичности и модула смицања еквивалентне плоче (5.76) већи од 5, утицај смицања у одзиву конструкције се смањује, али то значајно не утиче на укупан број итерација и прецизност методе еквиваленције. Наравно, метода еквиваленције би функционисала и ако би се претпоставило да је $G_{xy}^s = 0$, али у реалној конструкцији то није случај, и смицање услед савијања увек постоји.

Дебљина еквивалентног савојног модела може бити било која, али за почетак узеће се да је једнака вредности као и у оребреној плочи: $t^s = t$.

Ако означимо подужни и попречни правац x и y са 1 и 2 онда коначни параметри еластичности и крутости еквивалентне плоче гласе:

$$E_1^s = E \left(\frac{(1 - \mu_{xy}^s)^2 t^3}{(1 - \mu^2) t^{s^3}} + \frac{12(1 - \mu_{xy}^s)^2 I'_{s,x}}{s_x t^{s^3}} \right)$$

$$E_2^s = E \left(\frac{(1 - \mu_{yx}^s)^2 t^3}{(1 - \mu^2) t^{s^3}} + \frac{12(1 - \mu_{yx}^s)^2 I'_{s,x}}{s_y t^{s^3}} \right) \quad (5.77)$$

$$\mu_{12}^s = \mu_{xy}^m$$

$$\mu_{21}^s = \mu_{12}^s \frac{E_1^s}{E_2^s}$$

$$G_{12}^s = \frac{\max(C_{11}^s, C_{22}^s)}{5}$$

$$t^s = t$$

Аналогно претходном, у случају да се ради о плочи оребреној у правцу 2 или поседује „јача“ укрућења у овом правцу, њена еквивалентна плоча имаће такође модуле еластичности према (5.77). Поасонов коефицијент μ_{21}^s се не би морао мењати у односу на онај већ добијен мембранском еквиваленцијом, док би се μ_{12}^s , у том случају, добио из (3.18) па, у том случају, важи:

$$\mu_{21}^s = \mu_{yx}^m$$

$$\mu_{12}^s = \mu_{12}^s \frac{E_2^s}{E_1^s} \quad (5.78)$$

У принципу, треба водити рачуна о доминантном правцу у примени ових једнакости. Логика оваквог приступа је да корекције треба радити на оном правцу који највише „ремети“ хомогенизовано савијање плоче и укрућења.

Дакле, сада су познате карактеристике савојног модела еквивалентне неоробрене плоче за прорачун савојне матрице еластичности и савојне матрице крутости:

E_1^s – модул еластичности савојног модела еквивалентне плоче у подужном правцу (правац 1);

E_2^s – модул еластичности савојног модела еквивалентне плоче у попречном правцу (правац 2);

μ_{12}^s – поасонов коефицијент савојног модела еквивалентне плоче;

μ_{21}^s – поасонов коефицијент савојног модела еквивалентне плоче;

G_{12}^s – модул клизања савојног модела еквивалентне плоче;

t^s – дебљина савојног модела еквивалентне плоче.

5.3.2 Савојна матрица еластичности и савојна матрица крутости

Са овако дефинисаним параметрима еластичности улази се у прву итерацију изједначавања угиба у две плоче. Коефицијенти савојне матрице еластичности $[C] = [C^s]$ и савојне матрице крутости $[D] = [D^s]$ могу се одредити према (3.17) и (3.26), а за два међусобно управна правца 1 и 2.

$$\begin{aligned} C_{11}^s &= \frac{E_1^s}{1 - \mu_{12}^s \mu_{21}^s} \\ C_{12}^s = C_{21}^s &= \frac{\mu_{21}^s E_1^s}{1 - \mu_{12}^s \mu_{21}^s} = \frac{\mu_{12}^s E_2^s}{1 - \mu_{12}^s \mu_{21}^s} \\ C_{22}^s &= \frac{E_2^s}{1 - \mu_{12}^s \mu_{21}^s} \\ C_{66}^m = G_{12}^s &= \frac{\max(C_{11}^s, C_{22}^s)}{5} \end{aligned} \quad (5.79)$$

Коефицијент C_{66}^m остаје везан за максималну вредност једног од модула еластичности преко (5.78) умањујући утицај смицања у матрици еластичности. Коефицијенти матрице крутости еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента $[D^s]$ следе из односа момената и деформација у моделу:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{t^{s3}}{12} \begin{bmatrix} C_{11}^s & C_{12}^s & 0 \\ C_{21}^s & C_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.80)$$

Па гласе:

$$\begin{aligned}D_{11}^s &= C_{11}^s \frac{t^{s3}}{12} \\D_{12}^s &= C_{12}^s \frac{t^{s3}}{12} \\D_{22}^s &= C_{22}^s \frac{t^{s3}}{12} \\D_{66}^s &= C_{66}^s \frac{t^{s3}}{12} \\H^s &= D_{12}^s + 2D_{66}^s\end{aligned}\tag{5.81}$$

Крутост ортотропне плоче код савојних напрезања много више зависи од дебљине него што је то случај код мембранског одзива. Код савојних она је функција дебљине на трећи степен, што значи да малом променом дебљине у моделирању коефицијената може се доста утицати на одзив еквивалентне плоче при савијању. Такође из једначина (5.77) види се да момент инерције укрућења директно утиче на еластичност па тиме и на крутост плоче.

Што се тиче густине мреже и овде је ситуација другачија него код мембранског одзива. Густину мреже је могуће смањити у односу на ону која би била у МКЕ моделу оребрене плоче. Ово је пре свега везано за чињеницу да у новом моделу нема укрућења, па потреба за дискретизацијом на местима где би се простирали профили више не постоји. Међутим нова плоча ипак треба да има довољну поделу да ухвати суштину савијања: поуздан угиб и напон у средини плоче.

5.3.3 Моделирање еквиваленције угиба у итерацијама

Прва итерација поступка еквиваленције вертикалног померања завршава се прорачуном његове вредности коришћењем једначине (3.25) за моделиране параметре крутости. Угиб еквивалентне плоче на средини је највећи. Узимајући

да је $x = a/2$ и $y = b/2$, за равномерно распоређен притисак на плочу, угиб се прорачунава преко једначине (5.82):

$$w_{\max}^{EKV} = \frac{16p}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left[D_{11}^s \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2H^s \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_{22}^s \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]} \quad (5.82)$$

Угиб, у једначини (5.82), прорачунат је узимајући у обзир по 4 члана реда за обе суме. Вредност овог угиба треба да буде једнака вредности угиба оребрене плоче, за исто оптерећење: $w_{\max}^{EKV} \approx w_{\max}^{OR}$. Међутим ово вероватно неће бити задовољено. Једначина (5.82) претпоставља угиб при „хомогенизованим“ крутостима. Еквивалентни модел је добијен упрошћеном процедуром прорачунавања крутости у правцима. Утицај смицања је грубо претпостављен и минимизован. Еластична површ реалне оребрене плоче услед савијања је много сложенија него што претпостављена два полуталаса неоробрене плоче то могу да репрезентују. Код плоча оребрених и са једне и са друге стране, густо распоређених укрућења реалтивно мале крутости једнакост угиба има велике шансе и да буде задовољена. Међутим у општем случају оребрених плоча, какве су бродске, ово неће бити тачно. Стога, пре уласка у другу итерацију издвојиће се одступање два угиба:

$$\Delta w = \frac{w_{\max}^{EKV}}{w_{\max}^{OR}} \quad (5.83)$$

У случају да је одступање у угибима оребрене и еквивалентне плоче незадовољавајуће, што може бити ако је вредност одступања већа од рецимо 5%, онда се може урадити и друга итерација.

Значи, потребно је мењати (моделирати) вредности параметара еластичности (5.77). Ове величине су добијене прорачунавањем крутости у правцима које су опет прорачунате крајње упрошћено, преко односа угиба оребрене и изотропне плоче ослоњене на паралелним ивицама. С тим у вези може се претпоставити да ће се највероватније прецизнија крутост добити у правцу који је неукрућен, или у

случају да је плоча оребрена у два правца – по правцу који поседује слабија укрућења. У том случају, укрућења би се хомогеније савијала са плочом него у случају јачих укрућења другог правца. Стога следи претпоставка да је боље мењати крутост правца еквивалентне плоче који је по савијању јачи. Тај правац има и већу вредност модула еластичности, а тиме и пропорционалног поасоновог коефицијента. У случају да је плоча оребрена само у подужном правцу то би били онда параметри μ_{12}^s и E_1^s . Дакле, логика је да ако већ треба мењати коефицијенте, нека то буду они који највише ремете хомогенизованост структуре. Заиста и јесте тако, правац који поседује јака укрућења при савијању у истом правцу даће сложену еластичну површ, математички немогућу за анализу. Стога, у овом кораку, одступање угиба из (5.82) ће се расподелити на онај поасонов коефицијент који је директно сразмеран јачем, модулу еластичности μ_{xy}^s или μ_{yx}^s :

$$\mu_{xy}^{s'} = \mu_{xy}^s + \Delta w \cdot \mu_{xy}^s \quad (5.84)$$

$$\mu_{yx}^{s'} = \mu_{yx}^s + \Delta w \cdot \mu_{yx}^s \quad (5.85)$$

$\mu_{xy}^{s'}$ и $\mu_{yx}^{s'}$ су поасонов коефицијенти који се користе за другу итерацију еквиваленције угиба. У случају да плоча поседује прорачунату крутост већу у подужном правцу онда се $\mu_{xy}^{s'}$ прорачунава према (5.84) док и $\mu_{yx}^{s'}$ остаје исто као у првој итерацији - μ_{yx}^s . У случају да је попречни правац јачи онда $\mu_{xy}^{s'}$ остаје исте вредности као и у првој итерацији ($\mu_{xy}^{s'} = \mu_{xy}^s$) док се $\mu_{yx}^{s'}$ прорачунава према (5.85). У случају да је дошло до промене $\mu_{xy}^{s'}$ онда би се и модул еластичности $E_x^{s'}$ променио према једначини $E_x^{s'} = E_y^s \mu_{xy}^{s'} / \mu_{yx}^s$, док би остала два параметра E_y^s и μ_{yx}^s и остала иста као и у претходној итерацији. Аналогно овоме важило би и у случају да је дошло до промене $\mu_{yx}^{s'}$: модул еластичности $E_y^{s'}$ мењао би се према $E_y^{s'} = E_x^s \mu_{yx}^{s'} / \mu_{xy}^s$, док би други поасонов коефицијенти и модул еластичности остали идентични онима из претходне итерације. Пошто је у оребреним плочама један од правца по савијању знатно доминантнији од другог процедура описана у претходном ће се користити у примени методе еквиваленције угиба.

Међутим, у случају да су крутости оба правца оребрене плоче на савијање приближна, такође је могуће радити моделовање коефицијента на овај начин имајући у виду да ће један од правца бити „неправедно“ погођен овом исправком. Наиме, утицај једног правца на савијање у еквивалентној плочи ће бити повећан или смањен па његов нови однос са другим правцем неће бити као у оребреној плочи. Угиб ће после тога свакако бити задовољен. Овакав начин еквиваленције покушаће да се избегне. Поента је да нова еквивалентна плоча што веродостојније репрезентује понашање оребрене плоче у оба правца. С тим у вези, у случајевима оребрених плоча приближних крутости у оба правца, могуће је поделити вредност из (5.83) на два одступања ($\Delta w_x, \Delta w_y$), која ће се, касније, расподелити на крутости у два правца еквивалентне плоче тако да важи:

$$\frac{w_y^{OR}}{w_x^{OR}} = \frac{\Delta w_x}{\Delta w_y} \quad (5.86)$$

При чему је онда:

$$\Delta w = \Delta w_x + \Delta w_y \quad (5.87)$$

Дакле, утицаји појединачних одступања у правцима савијања x и y директно су пропорционални односима цилиндричног угиба у оребреној плочи. Из овога следи да је тај однос зависи и од односа крутости оребрене плоче у два управна правца: D_x^{OR}, D_y^{OR} . Дакле, онај правац који даје мањи цилиндрични угиб поседује већу крутост на савијање у том правцу, односно и већи одговарајући модул еластичности. Еластична површ услед савијања у том правцу је сложенија, нехомогенизована услед присуства јаких укрућења. Стога претпоставља се да тај правац највише „доприноси“ одступању после прве итерације. Када би и тај правац показивао идеално хомогенизовано савијање претпоставља се да би еквиваленција угиба била постигнута из првог пута. То значи да ће се овом процедуром већи део удела у одступању (Δw_x или Δw_y) придодати баш том правцу, који показује највећу нехомогеност у савијању, односно правцу са највећом крутошћу и најмањим цилиндричним угибом.

У том случају, на почетку друге итерације угиба раде се корекције модула еластичности:

$$E_x^{s'} = E_x^s + \frac{\Delta w_x}{\Delta w} \cdot E_x^s$$

$$E_y^{s'} = E_y^s + \frac{\Delta w_y}{\Delta w} \cdot E_y^s$$
(5.88)

Поасонови коефицијенти, у случају да је правац у јачи од правца x , би у том случају гласили:

$$\mu_{xy}^{s'} = \mu_{xy}^s \frac{E_y^{s'}}{E_x^{s'}}$$

$$\mu_{yx}^{s'} = \mu_{yx}^s$$
(5.89)

Ако би јачина правца била обрнута, онда би коефицијент $\mu_{xy}^{s'}$ остао исти као и у претходној итерацији, док би се $\mu_{yx}^{s'}$ рачунао према једнакости $\mu_{yx}^{s'} = \mu_{xy}^s E_y^{s'} / E_x^{s'}$. Исту процедуру је могуће спровести и када је попречни правац јачи од подужног. У том случају $E_y^{s'}$ би се рачунао сходно односу из (3.18) док би $E_x^{s'}$ остао као и у првој итерацији: $E_x^{s'} = E_x^s$. И овде је могуће урадити слично као и у случају поасонових коефицијента. С обзиром да из (5.89) постоје односи ова два поасонова коефицијента, зна се да они морају бити једнаки односу два модула еластичности. Дакле, могуће је одступање рапсоделити на модуле еластичности на такав начин да њихов однос остане исти као и однос нових поасонових коефицијената. Модули еластичности би тада имали промењене вредности у односу на прву итерацију. Међутим, у овом раду, због једноставности, претпоставиће се да је слабији модул еластичности остао исте вредности као и у првој итерацији, док се онај други мења према једначини (3.18).

Промене параметара еластичности и крутости директно утичу на угиб еквивалентне плоче. Код плоче укрупњене само у подужном правцу, члан $D_x(m/a)^4$ у једначини (5.82) је обично за ред величина већи од осталих чланова у

имениоцу. Нови коефицијент μ_{xy}^s значио би моделирање новог E_x^s који сада директно утиче на подужну крутост D_x , а тиме и на угиб еквивалентне плоче. Ово би, у математичком смислу, било идеално у случају када би се занемарила остала два члана у имениоцу једначине (5.82). Међутим понашање структуре ортотропне плоче је сложеније тј. и други чланови те једначине утичу на коначан угиб: крутост у једном правцу ортотропне плоче утиче и на крутост у другом правцу приликом савијања, и обратно преко коефицијента D_{xy} . Не треба заборавити ни коефицијент D_{66}^s који директно показује утицај смицања на угиб. Смицање и даље ремети процедуру еквиваленције иако његов утицај смањен увођењем претпоставке за C_{66}^s из (5.79). Смицање је, при равномерно распоређеном притиску на савијање и слободно ослоњеним ивицама, највеће у угловима плоче. Смицање у угловима плоче може доста да поремети вредности и угиба и напона на средини еквивалентне плоче, па треба водити рачуна и о његовом моделовању. У случају оребрене плоче сличних крутости у оба међусобно управна правца чланови у имениоцу који садрже крутости и по подужном и по попречном правцу ће се променити условљавајући да угиб еквивалентне плоче по (5.82) буде, у овој итерацији, приближнији оном у оребреној плочи.

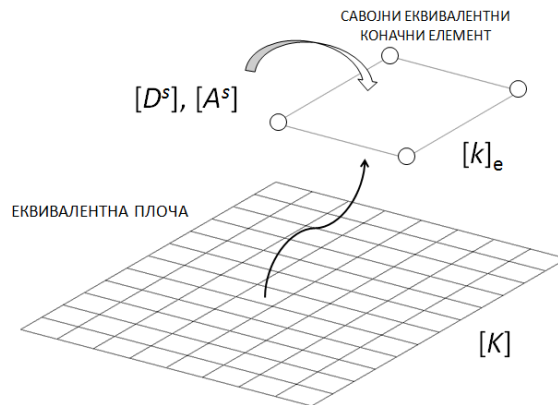
Дакле, са новим еластичним параметрима добијеним у (5.88) и (5.89) понавља се исти поступак као и на почетку моделирања параметара, тј. рачунају се матрица еластичности (5.79) и матрица крутости (5.81) еквивалентне плоче. На основу ових вредности прорачунава се коначан угиб еквивалентне плоче према (5.82). У случају класичних бродских оребрених плоча после ове две итерације разлика угиба у еквивалентној и оребреној плочи је обично испод 1%. Код оребрених плоча слабије јачине укрућења која се налазе на релативно малом расотојању чак и у првој итерацији је могуће добити задовољавајуће резултате угиба и успоставити еквиваленцију плоче по савијању.

Досадашњом процедуром дефинисано је понашање савојног модела еквивалентне плоче, а тиме и савојног модела еквивалентног коначног елемента. Матрица

крутости коначног елемента правоугаоне плоче оптерећене на савијање произилази из (3.32) и гласи:

$$[k]_e = \int_A [B]^T [D^s] [B] t dA = \frac{t^s}{12} \int_A [B]^T [C^s] [B] dA \quad (5.90)$$

Као и код мембранског модела матрица $[B]$ није предмет анализе у овом истраживању. Матрица крутости повезује оптерећења која узоркују савијање са следственим померањима, што чине угиби и закривљења у тачки конкструкције.



Слика 5.27. МКЕ модел еквивалентне плоче и еквивалентни савојни коначни елемент

5.3.4 Пример еквиваленције угиба

Еквиваленција угиба биће приказана примером коришћеним и код мембранске еквиваленције (слика 5.6), где би се коефицијенти матрице еластичности у случају савијања одређивали према (5.79), а коефицијенти матрице крутости као у (5.81). Параметри еквивалентне плоче (и еквивалентног коначног елемента) добијени при еквиваленцији угиба две плоче за дебљину од 10 mm, према претходно описаној процедури, а после две итерације су следећи:

$$E_1^s = 6.17 \cdot 10^7 \text{ N / mm}^2$$

$$\begin{aligned}
E_2^s &= 2.31 \cdot 10^5 \text{ N / mm}^2 \\
\mu_{12}^s &= 0.182 \\
\mu_{21}^s &= 6.82 \cdot 10^{-4} \\
G_{12}^s &= 1.23 \cdot 10^7 \text{ N / mm}^2
\end{aligned}
\tag{5.91}$$

Однос два модула еластичности износи: $E_1^s / E_2^s = 267.3$. Правац 1 је 267.3 пута јачи од правца 2, по савијању. Модули еластичности су много већих вредности од оних добијених моделирањем мембранских параметара. Матрица еластичности коначног елемента је:

$$[C^s] = \begin{bmatrix} C_{11}^s & C_{12}^s & 0 \\ C_{21}^s & C_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.17 \cdot 10^7 & 4.21 \cdot 10^4 & 0 \\ 4.21 \cdot 10^4 & 2.31 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.23 \cdot 10^7 \end{bmatrix} \text{ N / mm}^2 \tag{5.92}$$

Крутост плоче на савијање, у односу на крутост при мембрасном оптерећењу, је другачијег карактера. За исту дебљину модули еластичности еквивалентне плоче оптерећене на савијање су и за неколико редова величина већих вредности од истих величина у случају мембранског напрезања. Савијање зависи од момента инерције, односно отпорног момента пресека који се савија, док код мембранског напрезања само се попречни пресек својом површином супротставља аксијалним силама. Матрица крутости еквивалентне плоче исте дебљине гласи:

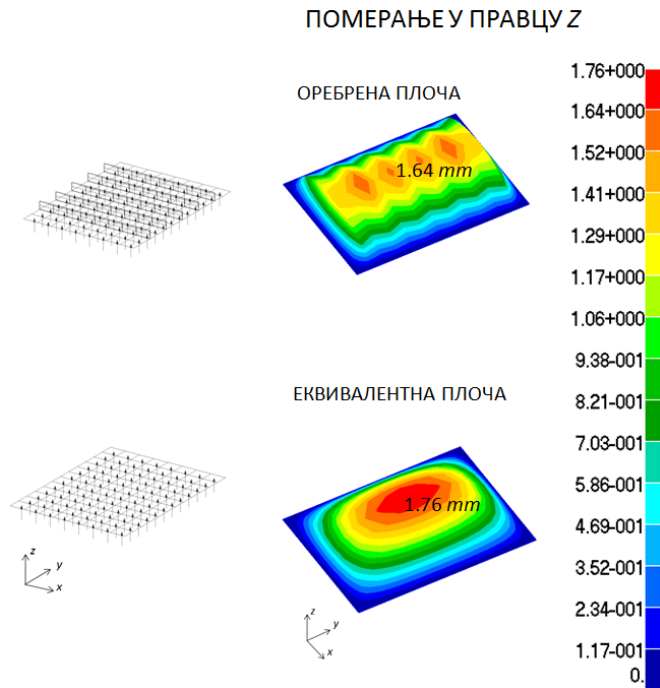
$$[D^s] = \frac{t^{s3}}{12} [C^s] = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.14 \cdot 10^9 & 3.51 \cdot 10^6 & 0 \\ 3.51 \cdot 10^6 & 1.92 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.03 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \text{ Nmm} \tag{5.93}$$

Матрица еластичности $[C^s]$, односно матрица крутости $[D^s]$, дефинишу савојно понашање еквивалентне ортоторпне плоче и еквивалентног коначног елемента. Овим је урађена еквиваленција максималног угиба у оребреној и еквивалентној плочи. Напон, наравно, у двама плочама није исти.

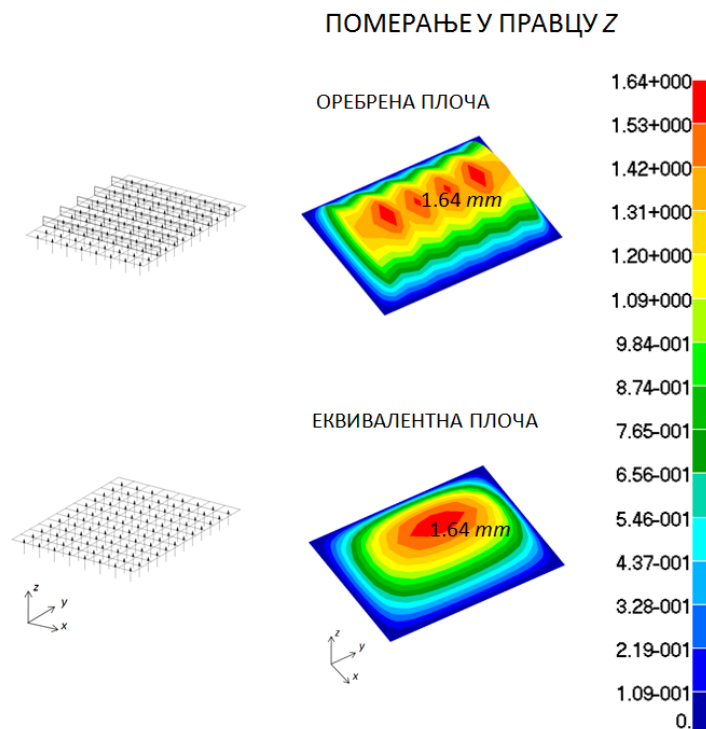
На слици 5.28 илустровано је поље вертикалних померања у оребреној и еквивалентној плочи после успостаљања еквиваленције угиба. Притисак је

равномерно распоређен по површини плоче и износи 0.01 N/mm^2 . Ивице су слободно ослоњене. Иако после друге итерације угиб у еквивалентној плочи одступа од оног задатог у оребреној за мање од 1%, такав случај није у нумеричком прорачуну. Маскимальни угиб у МКЕ моделу оребрене плоче је 1.64 mm. Максимални угиб у МКЕ моделу еквивалентне плоче је 1.76 mm, иако је према формули (5.82) добијен исти као и код оребрене плоче. Нумеричко одступање маскимальних угиба две плоче је 9.3% и последица је разлике између нумеричког прорачуна вертикалних померања и оног према теорији плоча. У зависности од модела оребрених плоча (јачине укрућења) ова разлика је у највећем броју случајева око неколико процената, а може ићи и до 20% у екстремнијим случајевима. Овакво одступање може се избећи ако би се после сваке итерације нумерички проверавао маскимальни угиб еквивалентне плоче. Тада би у (5.64) улазио угиб који се заиста нумерички „јури“. После пар итерација угиби у две плоче постају скоро идентични. Наредне слике управо то и показују. Слика 5.28 илуструје еквиваленцију угиба коришћењем (5.82) за прорачун w_{\max}^{EKV} , док слика 5.29 показује поља угиба после коришћењем МКЕ модела оребрене плоче за добијање w_{\max}^{EKV} после прве итерације.

На сликама 5.28 и 5.29 види се суштинска разлика одзива две плоче. Еквивалентна неоребрена плоча не може да прикаже ефекте терцијарног одзива између укрућења, где је угиб у оребреној плочи и највећи. Поље вертикалних померања у еквивалентној плочи је хомогенизовано, са маскимальним вредностима у средини плоче. Код еквивалентне плоче увек ће бити такав случај. Код оребрене не нужно, као и у овом примеру. Дакле, одмах се прави неминовна грешка: позиција маскимальног угиба у две плоче није иста. Гледајући оребрену и еквивалентну плочу засебно, то може засметати. Гледајући две плоче у оквиру глобалног нумеричког модела састављеног од неколико дестина или стотина оребрених плоча оваква упрошћења имају смисла.

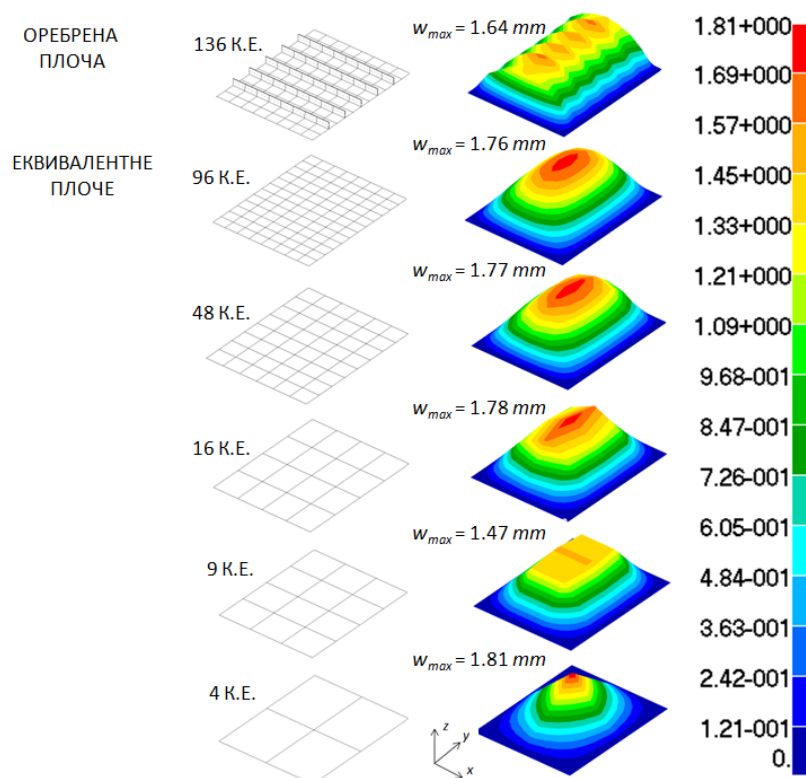


Слика 5.28. Вертикално померање (угиб) у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу z (теоријски поређен угиб)



Слика 5.29. Вертикално померање (угиб) у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед оптерећења у правцу z (нумерички поређен угиб)

Густина мреже утиче на вредност угиба у нумеричким прорачунима. Генерално важи да што модел има гушћу мрежу, то угиб има већу вредност, па при неком броју коначних елемената конвергира. Могућност смањења броја коначних елемената у моделу еквивалентне плоче директно је везан за методу коначних елемената. На слици 5.30 дат је илустративан приказ како угиб зависи од густине мреже. Модели са 48 и 16 коначних елемената и даље дају прихватљив угиб у односу на модел оребрене плоче који се састоји од 136 елемената. Дакле, генерално треба бити опрезан што се тиче густине мреже у случају савијања. Може се смањивати густина мреже, али треба имати у виду да се не занемари физикалност саме појаве савијања. А управо тако нешто се види на моделу са 4 коначна елемената. Иако овај модел даје „добар угиб“ јасно је да 4 коначна елемента приказују изузетно грубу слику савијања. Један чвор плочастог савојног елемента поседује 3 степена слободе: угиб и две ротације. Модел оребрене плоче има 136 коначних елемената и 117 чворова, што даје 351 степен слободе. Савојни модел еквивалентне плоче исте густине мреже поседује такође 351 степен слободе. Овај модел не поседује гредне елементе. Разлика у степенима слободе би се свакако читовала у чињеници да су укрућења оребрене плоче моделирана плочастим елементима. Међутим, еквивалентна плоча састављена од 96 и 16 коначних елемената поседује редом: 63 и 25 степени слободе. Могућности смањења степени слободе у моделу свакако нису исте као и код мембранске плоче, мада нису ни занемарљиве. Редуковање броја степени слободе је пре свега оријентисано на чињеницу да не постоје укрућења, па елементи који су постојали у таквом моделу сада више нису потребни.



Слика 5.30. Вертикално померање: оребрена и еквивалентне плоче различитог броја коначних елемената (К.Е.)

5.3.5 Кориговане савојна матрица еластичности и савојна матрица крутости (еквиваленција напона)

Исти пример узет је и у анализи еквиваленције напона. За почетак треба погледати тренутно стање напона (слика 5.31) оребрене и еквивалентне плоче истих дебљина. За сада је урађена само еквиваленција угиба. Максимални фон Мисесов напон у оребреној плочи је 14 N/mm^2 и налази се у угловима плоче. Овај напон је много већи од оног у средини који је око 1.4 N/mm^2 . Последица савијања плоче су максимални напони у њеној средини. Пошто укрућења повећавају крутост саме плоче, ови напони су много мањи него у угловима. Концентрације напона у угловима су последица напона смицања (али и присуства укрућења), који је на тој локацији и највећи. У еквивалентној плочи поље напона је другачије.

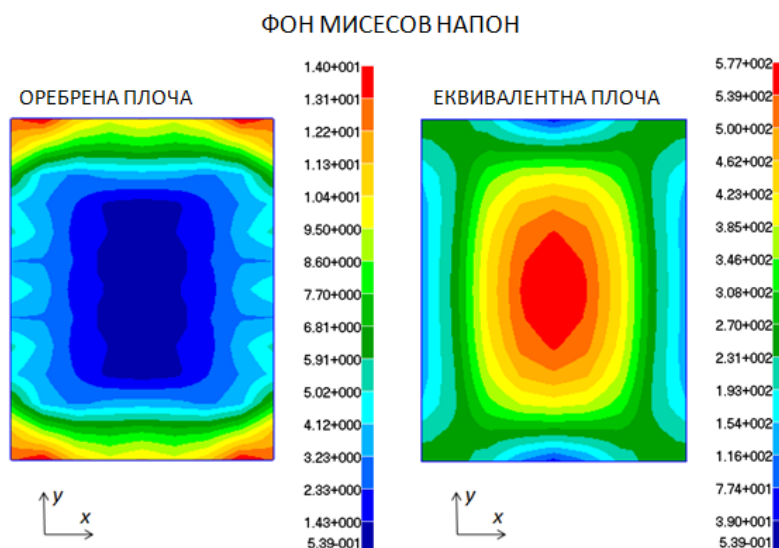
Напон савијања (фон Мисесов) је највећи у средини плоче, док је у угловима скоро два пута мањи.

Поставља се питање како направити еквиваленцију напона у две плоче, јер у општем случају, њихови максимуми неће се налазити на истој локацији? Могуће је направити еквиваленцију максималних напона и једне и друге плоче где год се они налазили и каквог год карактера били, или урадити еквиваленцију максималног напона на истим локацијама у плочи.

Ако максимални фон Мисесов напон у еквивалентној плочи одговара максималном у оребреној, али на другој позицији, онда такав карактер поклапања напона биће добијен и у глобалном нумеричком моделу. Када би се поредила појединачна оребрена и еквивалентна плоча лима дна у оквиру глобалних модела трупа брода, максимални напони у ове две плоче би били сличних вредности, али на различитим позицијама. Међутим, посматрајући цело дно брода, поље промене напона у два модела одговарало би једно другом, са уједначеним максималним вредностима, али разликама у позицијама локалних максимумима појединачних плоча (оребрених, еквивалентних). Овај начин еквиваленције урађен је у овом раду и, у оквиру методе еквиваленције, препоручен за анализу глобалних модела трупа брода.

У случају да се напон на средини еквивалентне плоче моделира према локалним максимумима фон Мисесових напона на средини оребрене плоче, овакав карактер поклапања треба очекивати и у глобалном моделу. Предност овог приступа што се напон услед савијања у оребреној плочи, као последица секундарног одзива, заиста пресликава у еквивалентној. Мана овог приступа је што стварни максимални напони у ивицама оребрене плоче (чест случај) неће бити репрезентовани у еквивалентном плочи, а тиме ни у еквивалентном глобалном моделу. Ово може довести до велике разлике између максималних напона у глобалном моделу (посматрајући нпр. цело дно) састављеном од оребрених и еквивалентних плоча, па ће се овај приступ, у методи еквиваленције, избегавати.

Ради објашњења методе еквиваленције, у овом примеру урадиће се еквиваленција максималног напона у оребреној плочи са максималним у еквивалентној, без обзира на позицију. Дакле, моделирају се нови коефицијенти еластичности тако да напон у средини еквивалентне плоче буде једнак вредности 14 N/mm^2 .



Слика 5.31. Фон Мисесови напони у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед савојног оптерећења

Напон у еквивалентној плочи моделира се променом њене дебљине. У том случају, односи крутости у правцима добијени у процедури описаној у Поглављу 5.3.1 остају исти, чиме се условљава задржавање једнакости угиба оребрене и еквивалентне плоче.

Поставља се питање: колико би требало повећати дебљину еквивалентне плоче тако да њен напон се смањи са 577 N/mm^2 на 14 N/mm^2 ? Ако се повећа дебљина, онда се и еластични коефицијенти мењају. Треба их променити тако да угиб остане исти, а само да напон промени вредност.

Фон Мисесов напон у оребреној плочи рачуна се према (5.94) с тим што су сада, компонентални напони последица савијања: две управне хоризонталне компоненте и напон смицања.

$$\sigma_{VM}^{EKV,s} = \sqrt{\frac{(\sigma_x^s - \sigma_y^s)^2 + (\sigma_y^s)^2 + (\sigma_x^s)^2}{2} + 3(\tau_{xy}^s)^2} \quad (5.94)$$

Компонентални напони у еквивалентној плочи се могу извести према (3.16), па онда следи:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^s \\ \sigma_y^s \\ \sigma_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^s & C_{12}^s & 0 \\ C_{21}^s & C_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.95)$$

Из (5.95) после сређивања, изводе се компонентални напони услед савијања:

$$\begin{aligned} \sigma_x^s &= \frac{16pt^s}{2\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mnD^s} \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a} \right)^2 + C_{12}^s \left(\frac{n}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \\ \sigma_y^s &= \frac{16pt^s}{2\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mnD^s} \left[C_{12}^s \left(\frac{m}{a} \right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right] \\ \tau_{xy}^s &= \frac{16pt^s}{2\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mnD^s} \left[2C_{33}^s \left(\frac{mn}{ab} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \right] \end{aligned} \quad (5.96)$$

И у једначинама за напон (5.96), као и код угиба, по 4 члана реда су коришћена за обе суме у изразу. Крутост D^s рачуна се према следећем изразу:

$$D^s = D_x^s \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2H^s \left(\frac{mn}{ab} \right)^2 + D_y^s \left(\frac{n}{b} \right)^4 \quad (5.97)$$

Сада се може прорачунати напон у ортотропној плочи. Максимални напон по компонентама σ_x^s и σ_y^s је на средини плоче (за $x = a/2$ и $y = b/2$). Максимални тангенцијални напон налази се у угловима плоче. Због упрошћења процедуре, еквиваленција рађена директним моделирањем модула еластичности, а не модула

клизања. Један од компоненталних напона увек ће бити доминантнији од напона смицања управо због упрошћења према (5.77). Стога, очекује се да и максимални фон Мисесов напон буде у центру еквивалентне плоче.

Пошто се тражи дебљина еквивалентне плоче при којој би напони у обе били идентични треба прво уочити зависност фон Мисесовог напона у плочи у функцији дебљине. Ако се узме у обзир чињеница да је крутост функција дебљине на трећи степен, следи да компонентални напони, а тиме и фон Мисесов напон, зависе обрнуто пропорционално квадрату дебљине плоче.

$$\sigma_{VM}^{EKV,s} = f(\sigma_x^s, \sigma_y^s, \tau_{xy}^s) = f\left(\frac{1}{t^{s2}}\right) \quad (5.98)$$

Ово се добија ако се формула за један од компоненталних напона, рецимо σ_x^s (5.96) напише на следећи начин:

$$\sigma_x^s = \frac{16pt^s}{2\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^2 + C_{12}^s \left(\frac{n}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[D_x^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2H^s \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + D_y^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]} \quad (5.99)$$

Када се смене једначине за крутост из (5,81) добија се:

$$\sigma_x^s = \frac{16pt^s}{2\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^2 + C_{12}^s \left(\frac{n}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{t^{s3}}{12}\right) \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(C_{12}^s + C_{33}^s) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]} \quad (5.100)$$

Коначно, σ_x^s постаје:

$$\sigma_x^s = \frac{96p}{\pi^4 t^{s2}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^2 + C_{12}^s \left(\frac{n}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(C_{12}^s + C_{33}^s) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]} = \frac{1}{t^{s2}} f_x(x, y) \quad (5.101)$$

Аналогно претходном, следе и остале компоненте напона:

$$\sigma_y^s = \frac{96p}{\pi^4 t^{s2}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{C_{12}^s \left(\frac{m}{a}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(C_{12}^s + C_{33}^s) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]} = \frac{1}{t^{s2}} f_y(x, y) \quad (5.102)$$

$$\tau_{xy}^s = \frac{96p}{\pi^4 t^{s2}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2C_{33}^s \left(\frac{mn}{ab}\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(C_{12}^s + C_{33}^s) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]} = \frac{1}{t^{s2}} f_{xy}(x, y) \quad (5.103)$$

При чему ће, ради лакшег писања, делови у једначинама за компоненталне напоне се заменити следећим функцијама:

$$f_x(x, y) = \frac{96p}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^2 + C_{12}^s \left(\frac{n}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(C_{12}^s + C_{33}^s) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]}$$

$$f_y(x, y) = \frac{96p}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{C_{12}^s \left(\frac{m}{a}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(C_{12}^s + C_{33}^s) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]} \quad (5.104)$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{96p}{\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2C_{33}^s \left(\frac{mn}{ab}\right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[C_{11}^s \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(C_{12}^s + C_{33}^s) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + C_{22}^s \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right]}$$

Из претходних једначина следи фон Мисесов напон у облику:

$$\sigma_{VM}^{EKV,s} = \frac{1}{t^{s,2}} \sqrt{\frac{(f_x - f_y)^2 + (f_y)^2 + (f_x)^2}{2} + 3(f_{xy})^2} \quad (5.105)$$

Ради једноставности, увешће се функција $F(x,y)$:

$$F(x, y) = \sqrt{\frac{(f_x - f_y)^2 + (f_y)^2 + (f_x)^2}{2} + 3(f_{xy})^2} \quad (5.106)$$

Па следи:

$$\sigma_{VM}^{EKV,s} = \frac{1}{t^{s,2}} F(x, y) \quad (5.107)$$

Дакле, фон Мисесов напон зависи од дебљине еквивалентне плоче преко $1/t^{s,2}$. Сада се уводи услов једнакости напона оребрене и еквивалентне плоче услед савојног оптерећења: $\sigma_{VM,max}^{OR,s} = \sigma_{VM,max}^{EKV,s}$. Лева страна ове једнакости је позната и представља улазни податак у примени ове методе. Узимајући у обзир и (5.107), дебљина еквивалентне плоче гласи:

$$t_{kor}^s = \sqrt{\frac{F(x, y)}{\sigma_{VM}^{OR,s}}} \quad (5.108)$$

Формула (5.108) представља једначину кориговане дебљине при којој би фон Мисесов напон у еквивалентној плочи одговарао оном задатом, у оребреној плочи. Дакле, овим је могуће успоставити једнакост напона, какве год да је вредности и локације напон из оребрене плоче који се „јури“. Наравно, са овом корекцијом треба ући у итерацију за добијање нових параметара еластичности (крутости) еквивалентне плоче, а према процедури описаној до сада, у Поглављу 5.3. Ово је прва итерација за добијање еквиваленције напона, али трећа за добијање еквиваленције и угиба и напона. Са „коригованом“ дебљином, опет користећи (5.108), прорачунава се фон Мисесов напон сада нове еквивалентне плоче дебљине t_{kor}^s . Иако постоји могућност да се већ у овој итерацији постигне задовољавајућа једнакост напона, у општем случају то неће бити тако.

5.3.6 Моделирање еквиваленције напона у итерацијама

Одступање добијеног напона може се прорачунати слично као и у случају одступања угиба:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{VM,max}^{EKV,s} - \sigma_{VM,max}^{OR,s}}{\sigma_{VM,max}^{OR,s}} \quad (5.109)$$

Описане итерације за еквиваленцију савојања могу се сумирати следећим редоследом:

- Итерација 1 – Еквиваленција угиба;
- Итерација 2 – Корекција еквиваленције угиба;
- Итерација 3 – Еквиваленција напона;
- Итерација 4 – Корекција еквиваленције напона.

И еквиваленција угиба и еквиваленција напона се, у принципу, састоје од две итерације понаособ. У случају да је одступање на крају прве итерације напона (укупно треће итерације у методи) нешто веће, потребно је још једном урадити еквиваленцију и одредити нову дебљину еквивалентне плоче. Дакле, уколико се претходно добио мањи напон у еквивалентној него у оребреној плочи требало би смањити крутост еквивалентне плоче тако што ће се повећати њена дебљина. Важи и обратно, у случају да се добије већи напон у еквивалентној него у оребреној плочи. Треба напоменути да функција $F(x,y)$ није независна од дебљине еквивалентне плоче. Наиме, параметри еластичности се добијају на основу дебљине плоче, из претходне итерације тј. друге итерације код угиба. Ово значи да се у функцији $F(x,y)$ већ налази t^s . То је она дебљина са којом се иде у прву итерацију еквиваленције напона, односно трећу итерацију целокупне еквиваленције две плоче (и угиба и напона), тј. треће итерације у методи. Аналогно важи и за четврту итерацију: ова итерација користи, у оквиру $F(x,y)$, дебљину добијену из претходне. Ово значи да дебљину еквивалентне плоче коришћене из еквиваленције угиба треба мењати (моделирати) тако да се повећа или смањи крутост у еквивалентној плочи.

Однос крутости еквивалентне и оребрене плоче зависи од односа квадрата њихових дебљина па важи:

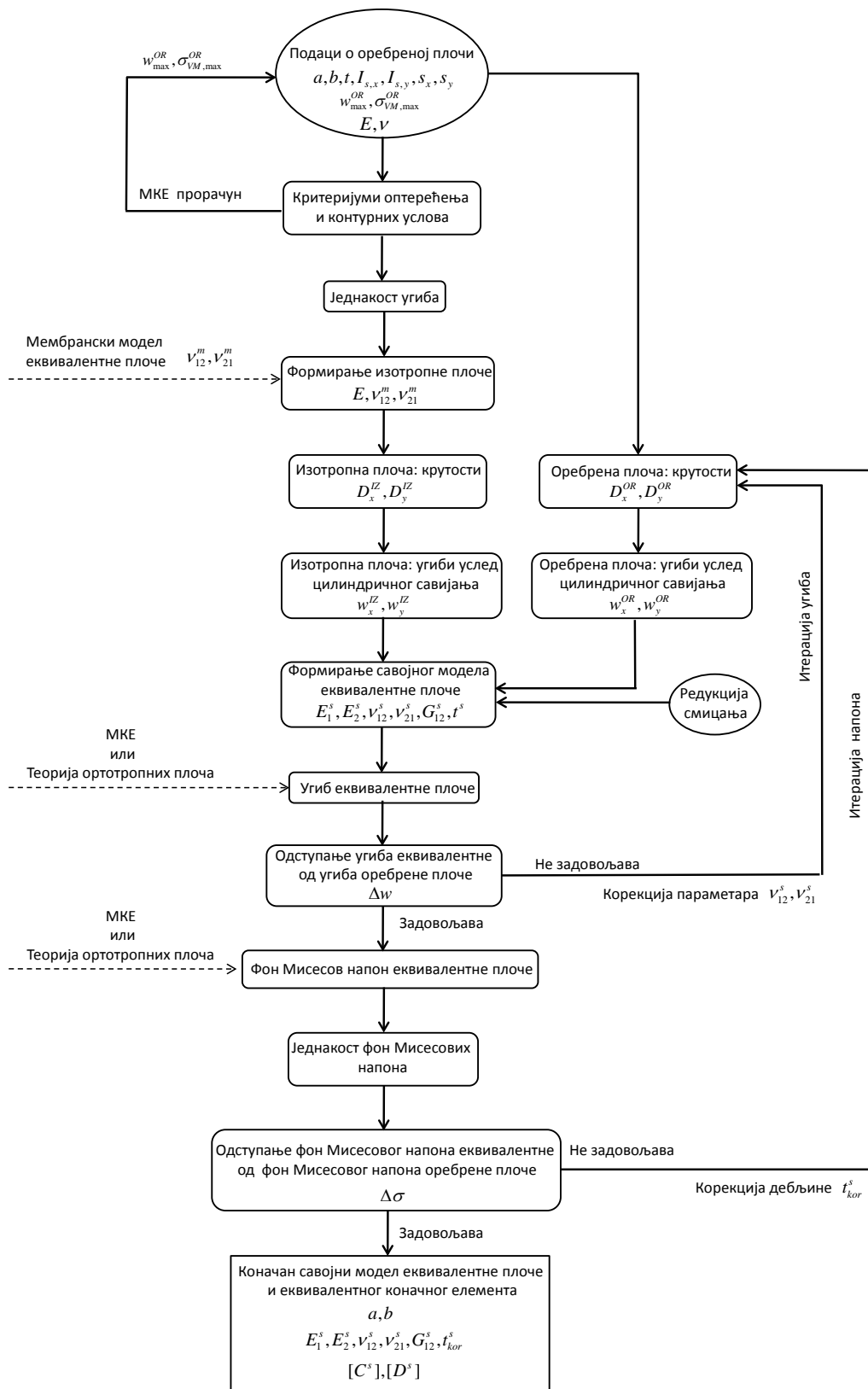
$$\frac{t_{kor}^{s2}}{t^{s2}} = \frac{\sigma_{VM,max}^{EKV,s}}{\sigma_{VM,max}^{OR,s}} \quad (5.110)$$

Из (5.110) може се добити коригована дебљина еквивалентне плоче услед савијања:

$$t_{kor}^s = t^s \sqrt{\frac{\sigma_{VM,max}^{EKV,s}}{\sigma_{VM,max}^{OR,s}}} \quad (5.111)$$

Једначине (5.108) и (5.111) су исти изрази написани на другачији начин. Овим је и поступак еквиваленције напона завршен тј. еквивалентна плоча ће имати максимални угиб и максимални фон Мисесов напон једнак оном у оребреној плочи од које се и кренуло. Коначне матрице еластичности (5.79) и крутости (5.81) поново се срачунавају по истој процедури, сада за нову, кориговану дебљину еквивалентне плоче.

Шематски приказ упрошћеног алгоритма формирања савојног модела еквивалентне плоче и еквивалентног коначног елемента, а према процедури и једначинама описаним у Поглављу 5.3, приказан је на слици 5.32. Две гране на десној страни алгорита представљају по две итерације угиба, односно напона. Крајњи резултат је неоребрена плоча истих габарита као и оребрена, али нових параметара еластичности.



Слика 5.32. Шема формирања савојног модела еквивалентне плоче

5.3.7 Пример еквиваленције угиба и напона

Моделирање параметара савојне еквивалентне плоче је урађено према примеру са слике 5.6. У првом кораку, при еквиваленцији угиба „нова“ плоча је имала много већи напон од оребрене. Дебљина еквивалентне плоче била је 10 mm . Еквиваленцијом напона, и коришћењем формуле (5.111) добија се коригована дебљина еквивалентне плоче подвргнуте савијању:

$$t_{kor}^s = 61.81 \text{ mm} \quad (5.112)$$

Нови, кориговани параметри еластичности сада су:

$$\begin{aligned} E_1^s &= 2.61 \cdot 10^5 \text{ N / mm}^2 \\ E_2^s &= 9.77 \cdot 10^2 \text{ N / mm}^2 \\ \mu_{12}^s &= 0.182 \\ \mu_{21}^s &= 6.82 \cdot 10^{-4} \text{ N / mm}^2 \\ G_{12}^s &= 5.23 \cdot 10^4 \text{ N / mm}^2 \end{aligned} \quad (5.113)$$

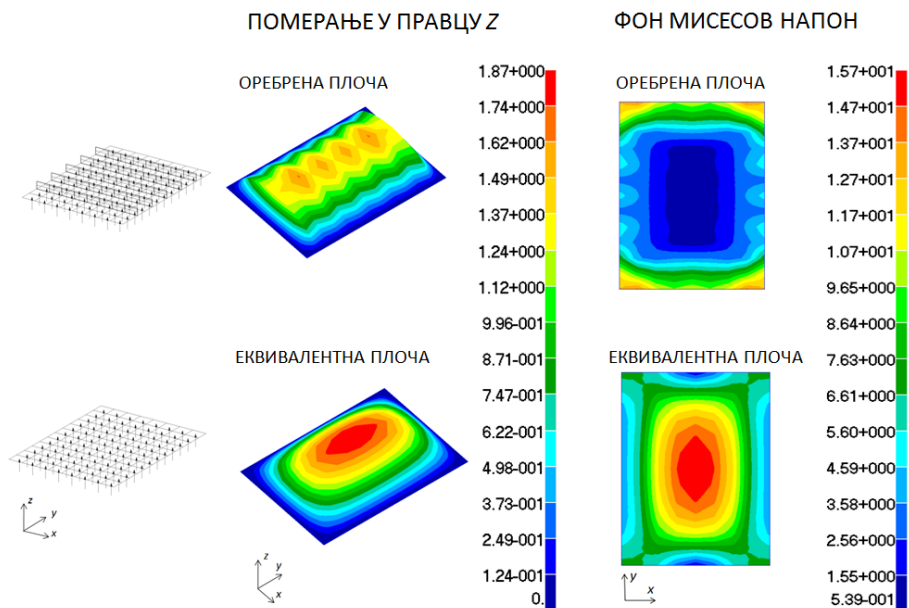
Односи модула еластичности остали су исти као и претходном кораку, при еквиваленцији угиба, што је и био циљ методе. Њихове вредности су сада смањене, поредећи их са (5.91). Разлог овоме лежи у новој дебљини еквивалентне плоче, која је сада 61.81 mm уместо претходних 10 mm . Овде је повећање дебљине еквивалентне плоче у односу на оребрену било много значајније него у случају мембранске еквиваленције. Узрок је пре свега већа зависности крутости плоче од дебљине (крутост је пропорционална трећем степену дебљине плоче). Матрица еластичности сада гласи:

$$[C^s] = \begin{bmatrix} C_{11}^s & C_{12}^s & 0 \\ C_{21}^s & C_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.61 \cdot 10^5 & 1.78 \cdot 10^2 & 0 \\ 1.78 \cdot 10^2 & 9.78 \cdot 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 5.23 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \text{ N / mm}^2 \quad (5.114)$$

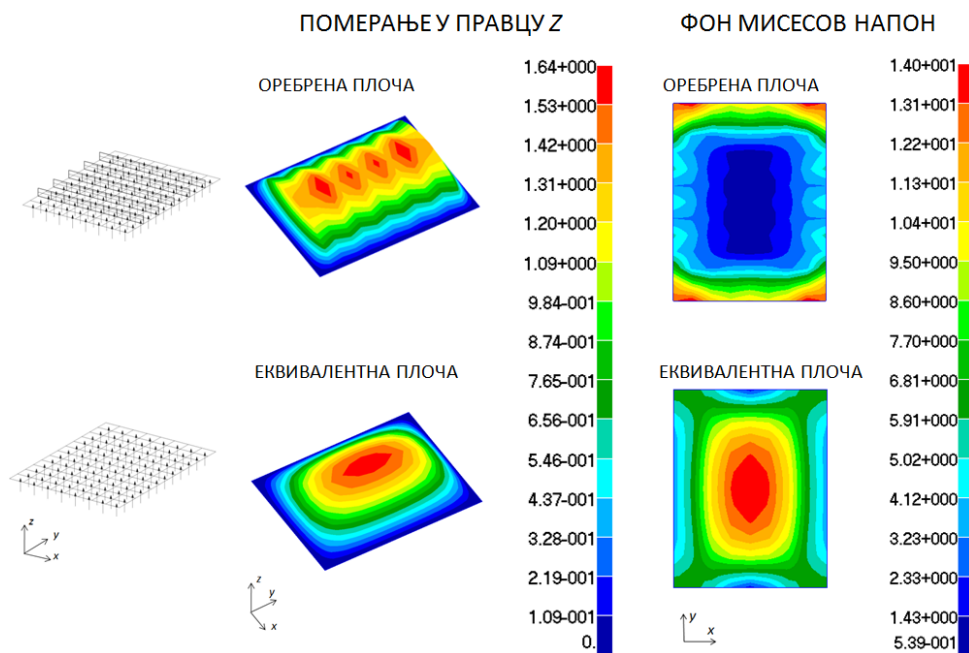
Нова матрица крутости је:

$$[D^s] = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{21}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.14 \cdot 10^9 & 3.51 \cdot 10^6 & 0 \\ 3.51 \cdot 10^6 & 1.92 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.03 \cdot 10^9 \end{bmatrix} N/mm \quad (5.115)$$

Резултати МКЕ анализе угиба и напона дати су на слици 5.33. Максимални угиб у еквивалентној плочи је 1.87 mm , што је за око 12% веће него у оребреној плочи (1.64 mm). Максимални фон Мисесов напон еквивалентне плоче је сада 15.7 N/mm^2 . Одступање овог напона од оног у оребреној плочи је око 10.8 %. Максимални напон је смањен са 577 N/mm^2 , колико је био при дебљини од 10 mm , на 15.7 N/mm^2 . Приметно је да се у односу на претходни корак погоршало поклапање вредности угиба са 9.3% на 10.8%. Ово је последица моделирања параметара еластичности према максималном напону, и односа њихових јачина у матрици еластичности. Овоме треба додати и промењени коефицијент који одређује утицај смицања у савијању. Угиб сада мало више одступа, али је постигнута релативна једнакост напона. Треба напоменути да је у случају примера са слике 5.33, за срачунавање w_{\max}^{EKV} и $\sigma_{VM,\max}^{EKV}$ коришћена теорија ортотропних плоча, односно једначине (5.82) и (5.94). Вредности ових величина одступају у односу на вредности добијене применом методе коначних елемената. Вредност угиба еквивалентне плоче добијеног преко (5.82) износи 1.64 mm и идентичан је оном у оребреној плочи. Максимални фон Мисесов напон у еквивалентној плочи је на средини и износи 14 N/mm^2 према (5.94). Дакле, поређећи теоријски прорачунате вредности оребрене и еквивалентне плоче, максимални угиби и напони су готово идентични. Разлоге одступања са слике 5.33 треба тражити у прецизности две методе: теорија плоча и МКЕ.

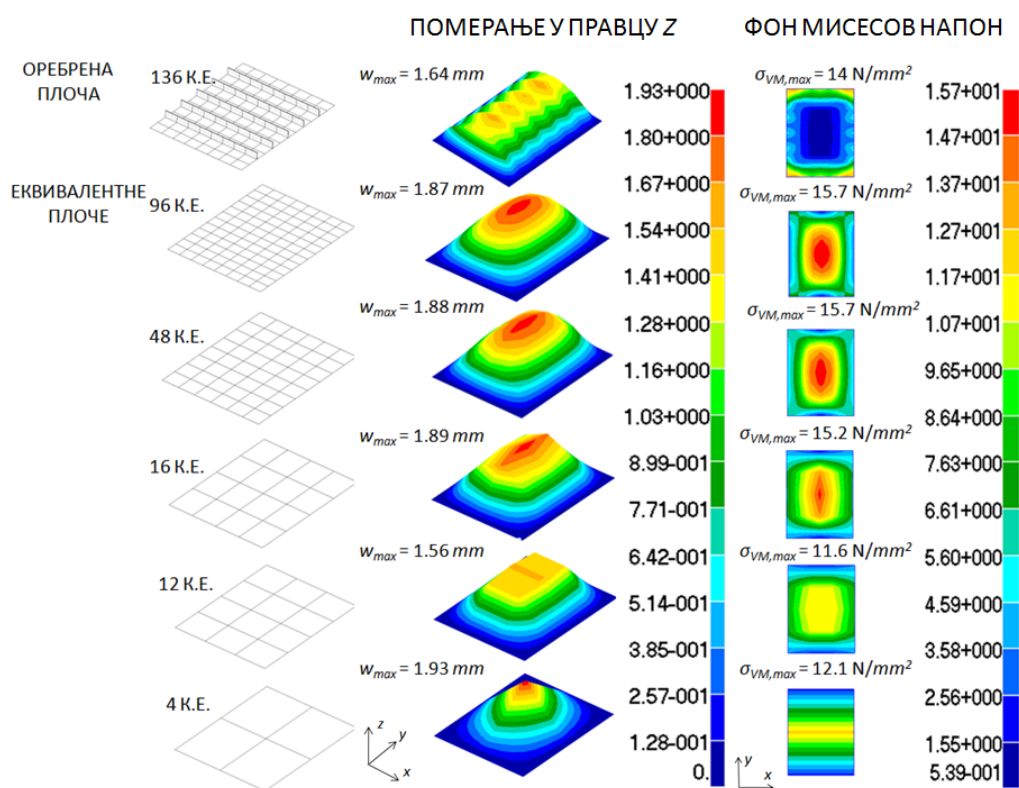


Слика 5.33. Угиб и фон Мисесови напони у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед савојног оптерећења (теоријски поређен угиб и напон)



Слика 5.34. Угиб и фон Мисесови напони у МКЕ моделима оребрене и еквивалентне плоче услед савојног оптерећења (нумерички поређен угиб и напон)

Предност нумерички добијеног угиба и напон после треће итерације (прве у савијању) је свакако боље поклапање ових величина у еквивалентној плочи у поређењу са оребреном (слика 5.34). Мана овог приступа је прекидање аутоматизације целе методе. Метода се може програмирати до одређеног тренутка, када је потребно у случају савијања, а после прве итерације срачунати угиб и напон који се „јури“. У том случају користи се метода коначних елемента и прави се нумерички модел. Ово опет не мора бити компликовано и обично и није али ремети процедуру. Предност приступа рачунању угиба и напона еквивалентне плоче применом теорије ортотропне плоча је у њеној програмибилности. Цела метода постаје аутоматизован алгоритам. С друге стране, могућности за одступања ових вредности од оних у нумеричком моделу постоје, чиме и еквивалентна плоча касније неће постићи идеалну еквиваленцију са оребреном плочом од које се кренуло. Утицај броја елемената на максимални фон Мисесов напон у еквивалентној плочи дат је на слици 5.35.



Слика 5.35. Вертикално померање и напон: оребрена и еквивалентне плоче различитог броја коначних елемената (К.Е.)

Што се тиче зависности угиба од броја коначних елемената ситуација је практично иста као и код модела приказаног на слици 5.30. Модел са 16 или 48 коначних елемената и даље даје угиб сличан оном као у еквивалентној плочи састављеној од 96 коначних елемената. Савојни модел еквивалентне плоче са малим бројем коначних елемената нема смисла ни по питању резултата напона ни по питању поља промене напона (модели са 4, 12 и 16 коначних елемената). Модел еквивалентне плоче са 48 коначних елемената би, и по питању и угиба и напона, имао вредности које одговарају онима у истом моделу, али са много гушћом мрежом (модел од 96 коначних елемената). Дакле, постоји могућност смањења нумеричког модела, који би у овом примеру са 136 елемената свео се на 48 . Број степени слободе би се смањило са 351 (117 чворова) на 189 (63 чвора), што је скоро за 2 пута. Као што се види, код савијања је много мања могућност упрошћавања МКЕ модела еквивалентне плоче него што је то код равански оптерећене плоче. Плоча подвргнута савијању захтева одређен број подела како би се што веродостојније „ухватио“ карактер и вредности резултата услед деловања савојног оптерећења.

5.4 О коначном моделу еквивалентне плоче

У Поглављима 5.2 и 5.3 описана је процедура добијања мембранског и савојног модела еквивалентне плоче. Коначни модел сада поседује дефинисано и мембранско и савојно понашање, у односу на претпостављени карактер оптерећења и контурне услове. Коначни елемент има 5 степени слободе: 3 translације и 2 ротације које обједињавају равански и савојни структурни одзив. Веза напон – деформација коначног модела еквивалентне плоче и коначног елемента дефинисана је преко матрице еластичности која, према (3.23), гласи:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^m \\ \sigma_y^m \\ \tau_{xy}^m \\ \sigma_x^s \\ \sigma_y^s \\ \tau_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^m & C_{12}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^m & C_{22}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}^s & C_{12}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{12}^s & C_{55}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ zk_x \\ zk_y \\ zk_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.116)$$

Конечна матрица еластичности састоји се од мембранских коефицијената и савојних коефицијента. Конечна матрица крутости која везује оптерећења и деформације је:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^m & A_{12}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12}^m & A_{22}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66}^m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12}^s & D_{55}^s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.117)$$

Конечне матрица еластичности и матрица крутости еквивалене плоче и еквивалентног плочастог коначног елемента, примера из Поглавља 5.2. и 5.3 сада гласе:

$$[C] = \begin{bmatrix} 2.3 \cdot 10^5 & 5.5 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.5 \cdot 10^4 & 1.83 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.08 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.61 \cdot 10^5 & 1.78 \cdot 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.78 \cdot 10^2 & 9.78 \cdot 10^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.23 \cdot 10^4 \end{bmatrix} N/mm^2 \quad (5.118)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 2.84 \cdot 10^6 & 6.79 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.79 \cdot 10^5 & 2.26 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9.82 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.14 \cdot 10^9 & 3.51 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.51 \cdot 10^6 & 1.92 \cdot 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.03 \cdot 10^9 \end{bmatrix} N/mm \quad (5.119)$$

Коефицијенти мембранске матрице крутости добијају се из (5.58), док се коефицијенти савојне матрице крутости рачунају се према (5.79) и (5.81). Коначна матрица еластичности (5.119) улази у формулацију матрице крутости еквивалентног коначног елемента (3.32), а тиме и у глоблану матрицу крутости нумеричког модела. Компонентални напони су последица мембранског и савојног одзива плоче. Напон σ_x рачуна се алгебарски, преко вектора компоненте напона у правцу x , који је последица мембранског и савојног одзива. Исто важи и за остале компоненте напона. Стога, укупне компоненте напона еквивалентне плоче добијају се на следећи начин:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma}_x^{EKV} &= \overline{\sigma}_x^{EKV,m} + \overline{\sigma}_x^{EKV,s} \\ \overline{\sigma}_y^{EKV} &= \overline{\sigma}_y^{EKV,m} + \overline{\sigma}_y^{EKV,s} \\ \overline{\tau}_{xy}^{EKV} &= \overline{\tau}_{xy}^{EKV,m} + \overline{\tau}_{xy}^{EKV,s} \end{aligned} \quad (5.120)$$

Мембрански и савојни компонентални напони добијају се из (5.116). Коначни фон Мисесов напон у моделу еквивалентне плоче добија се коришћењем формуле (5.121) за компоненталне напоне израчунате према (5.120):

$$\sigma_{VM}^{EKV} = \sqrt{\frac{(\overline{\sigma}_x^{EKV} - \overline{\sigma}_y^{EKV})^2 + (\overline{\sigma}_y^{EKV})^2 + (\overline{\sigma}_x^{EKV})^2}{2} + 3(\overline{\tau}_{xy}^{EKV})^2} \quad (5.121)$$

Израз (5.121) представља коначан фон Мисесов напон еквивалентне плоче услед мембранских и савојних оптерећења. Треба имати у виду да се еквиваленција напона у Поглављима 5.2 и 5.3 базирала на фон Мисесовом напону израчунатом посебно за мембрански, а посебно за савојни тип одзива модела. Ово уводи

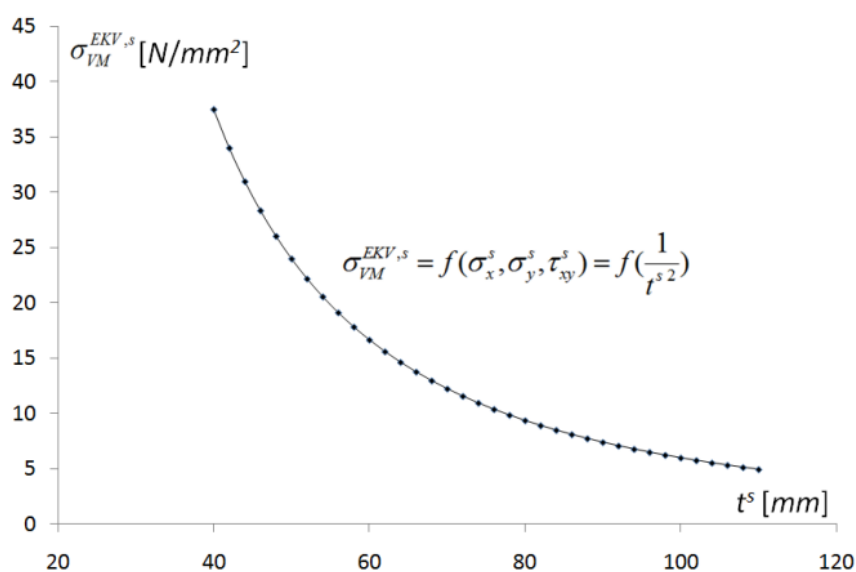
додатну нетачност у методи еквиваленције. Наиме, у случају када би оптерећења на глобални модел конструkcије сачињен од оребреих плоча била доминантно мембранска или савојна, онда овакав приступ не би уносио забуну приликом еквиваленције. Често је у бродским конструkcијама ово заиста случај: аксијална оптерећења на дно или палубу брода су доминантнија од оних које исти елементи трпе услед савијања узрокованог притиском воде на оплату. Приступ описан у дисертацији омогућава раздвајање анализе мембранског и савојног понашања конструkcије. Ово значи да корисник може бити у могућности да уради две анализе: једну са мембранским параметрима, другу само са савојним параметрима. Међутим, с обзиром на сложеност и број компоненти напона није било могуће урадити потпуну еквиваленцију напона са оним у (5.121) који би свеобухватно узимао у обзир и мембранско и савојно понашање конструkcије. Поузданост добијања напона из (5.121) посебно је упитна с обзиром да еквиваленција б компоненталних напона никада није ни урађена, већ само два фон Мисесова напона. Сваки од фон Мисесових напона обједињава по 3 компоненте напона, с тим да оне никада нису једнаке у еквивалентној и оребреној плочи. Међутим, олакшавајућа околност је да најчешће доминантна компонента напона у еквивалентној плочи по вредности максимума прилично добро одговара оној у оребреној, иако је можда другачијег карактера. Дакле, комбинација компоненталних напона који дају фон Мисесов је поуздана, али саме компоненте нису. Ово је једна од мана методе и последица је чињенице да је фон Мисесов напон скалар базиран на, у овом случају, 3 компоненте односно вектора. Компоненте напона у оребреној плочи често су и суштински другачијег карактера од истих компоненти у еквивалентној плочи, јер ова еквивалентна плоча не поседује укрућења. Међутим, еквиваленција напона која је урађена посебно за мембрански а посебно за савојни одзив ипак, неће значајно нарушити максимални фон Мисесов напон у еквивалентној плочи подвргнутој, симултано, и мембранском и савојном оптерећењу. Разлог овоме лежи у чињеници да су мембранске компоненте напона прилично поуздано добијене и заиста репрезентују раванско понашање конструkcије. Ове компоненте зависе од површине попречног пресека који им се опире приликом издужења или сакраћења. О овоме је вођено рачуна у Поглављу 5.2. Мембрански одзив у конструkcијама као што је бродска је

најчешће много доминантнији у једном правцу него што је у другом, чинећи напон, рецимо у правцу x далеко већим од осталих компоненти. Типичан пример за ово су бродови којима се правилима захтева прорачун глобалног нумеричког модела. То су бродови великих дужина и, по правилу, уздужног типа градње. Стога подужни равански напон онда чини највећи удео у фон Мисесовом напону. Применом методе еквиваленције на мембрански модел оптерећења добија се поуздана доминантна компонента напона. Дакле, у укупном фон Мисесовом напону у општем случају оптерећења (мембранско и савојно) ипак може показивати коректне резултате, који еквивалентни онима у оребреној плочи, по вредностима максимума. Грешке у компонентама напона које су свакако постојале у савојном моделу, остају и сада. Оне се сабирају са онима из мембранског модела, чије су грешке много мање, па су компонентални напони и много тачније срачунати. Стога, може се очекивати је да коначан напон из (5.121) буде поуздан, односно да грешке у еквиваленцији појединачних фон Мисесових напона озбиљно не наруше његову маскималну вредност.

У случају еквиваленције померања ови проблеми не постоје. Наиме раванкса померања као последице мембранских оптерећења се не преплићу са угибом услед савијања. Зато се у моделу очекује много већа тачност еквивалентних померања него напона. Ово има смисла с обзиром да су померања реални репрезент одзива неке консктрукције. Напон се рачуна на основу померања.

Једна од најбитнијих претпоставки у методи је редуковање тангенцијалних напона при савијању еквивалентне плоче, према (5.79). Овим је омогућено прорачунавање кориговане дебљине еквивалентне плоче при савијању, из (5.98). Наиме, у случају да се ниједан параметар осим дебљине не мења, веза фон Мисесовог напона и еквивалентне дебљине облика је према слици 5.36. Фон Мисесов напон је обрнуто пропорционалан квадрату дебљине. Међутим, приликом моделирања понашања еквивалентне плоче, сви њени параметри се мењају. Променом дебљине, а у „потрази“ за одговарајућим напоном, параметри еластичности нису више исти па крива са слике 5.36 нема више зависност као из (5.98). Ово умногоме онемогућава добијање кориговане дебљине савојног модела

еквивалентне плоче користећи формулу (5.111) јер квадратна зависност више не постоји. Кориговану дебљину је и даље могуће добити, али уз много већи број итерација и уз мању прецизност. У методи еквиваленције, овај проблем је избегнут редукцијом утицаја смицања у еквивалентној плочи, чиме је омогућено да при било којој промени дебљине плоче однос параметара еластичности (модули еластичности и поасоновни коефицијенти) остане исти, иако се њихове вредности драстично мењају. У том случају крива са слике 5.36 заиста прати односн напона и дебљине, и кориговану дебљину је могуће наћи после једне или две итерације.



Слика 5.36. Зависност фон Мисесовог напона од дебљине у савојном моделу еквивалентне плоче (пример Модела 1 из следећег поглавља)

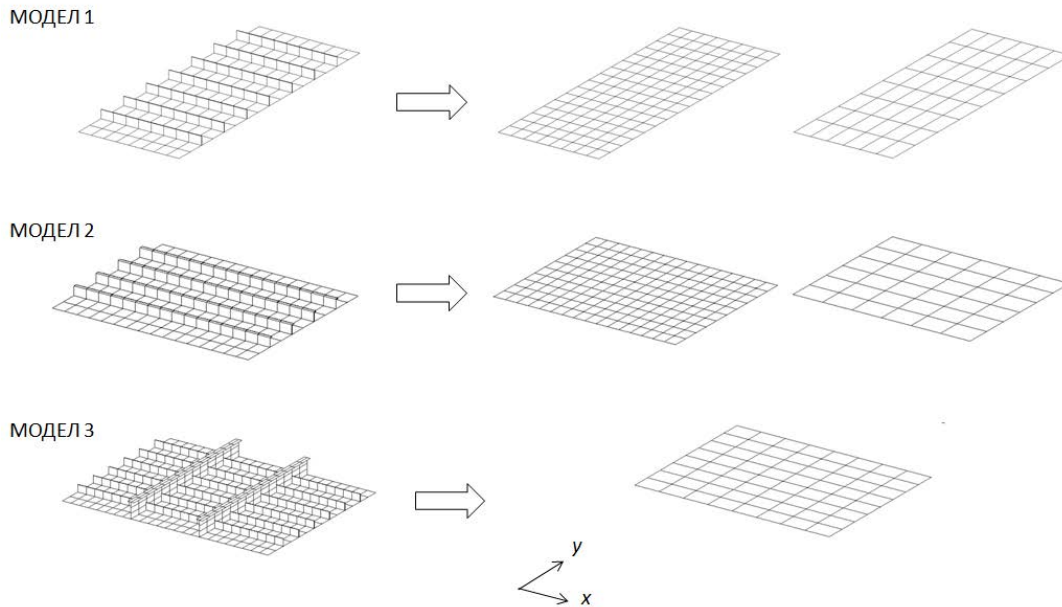
Што се тиче деформација, мембранском еквиваленцијом и максималне деформације у „новој“ плочи одговарају онима у оребреној плочи. С обзиром да су релативна померања у обе плоче иста у правцима, онда су и следствене деформације исте. Утицај клизања у коришћеном критеријуму мембранских оптерећења је реалтивно мали па ова компонента деформације, иако непрецизна минимално утиче на укупну деформацију у моделу. Код савојних оптерећења ситуација је другачија по питању деформација. Наиме, иако је постигнута еквиваленција маскималног угиба и максималног фон Мисесовог напона, не следи одговарајућа еквиваленција маскималне деформације или неке од компоненти деформације. Деформација узима у обзир закривљења тачке услед

савијања и тешко да може бити узета у обзир у еквивалентној плочи. У оребреној плочи ова закривљења су увелико под утицајем присуства укрућења. Такође, позиција максималне деформације у оребреној плочи није на месту максималног напона или угиба. Дакле, треба нагласити да еквиваленција деформације услед савојних оптерећења није постигнута применом методе описане у овој дисертацији.

5.5 Примери еквивалентних модела

Описани поступак еквиваленције померања и напона спроведен је за неколико примера оребрених плоча. На слици 5.37 илустровани су МКЕ модели оребрених плоча и њихових еквивалентних неоребрених плоча. У табели 5.1 налазе се подаци о свакој оребреној плочи понаособ. Модел 1 је карактеристичан у бродским конструкцијама и може представљати дно или унутрашње дно уздужног система градње. Правоугаони попречни пресек укрућења овог модела по питању површине и отпорног момента је најближи стандардном холанд профилу НР 160 x 8. Критеријум за еквиваленцију мембранског напона је плоча оптерећена само у подужном правцу, на истезање. Оребрена плоча је оптерећена силом у правцу x од $1.06 \cdot 10^6 N$, док притисак на савијање износи $0.01 N/mm^2$. Други модел (Модел 2) представља такође оребрена плоча са укрућењима у подужном правцу. Овде су укрућења моделирана L профилем карактеристика пресека сличних холанд профилу НР 140 x 7. Критеријум мембранског напона овог модела је плоча оптерећена у подужном правцу на истезање силом од од $7.6 \cdot 10^6 N$, и у попречном правцу, на притисак, силом 100 пута мањег интензитета од оне у подужном правцу. Трећи модел (Модел 3) је плоча оребрена у оба, међусобно управна правца. Густо распоређене уздужнице простиру се правцем x , док се два носача пружају управним правцем y . Попречни пресек уздужница је правоугаони профил истих димензија као код Модела 1. Укрућења правца x су, у бродским конструкцијама, елементи секундарне, а носачи су елементи примарне структуре. Критеријум напона у овом моделу је исти као у Моделу 2, при чему подужна сила износи од $1.08 \cdot 10^6 N$. Савојни притисак у Моделима 2 и 3 оребрене и еквивалентне плоче је такође $0.01 N/mm^2$.

У табелама 5.2 и 5.3 налазе се прорачунати параметри еластичности еквивалентних плоча, добијени на основу процедуре описане у Поглављима 5.2 и 5.3.



Слика 5.37. Модели оребрених и еквивалентних плоча

Табела 5.1. Подаци о оребреним плочама

	a [mm]	b [mm]	t [mm]	Укрупњења у правцу x	Укрупњења у правцу y
МОДЕЛ 1	2400	6400	10	200 x 10 mm (7 ком)	-
МОДЕЛ 2	3600	3000	8	L 160 x 60 x 8 mm (4 ком)	-
МОДЕЛ 3	5400	4200	10	180 x 10 mm (6 ком)	T (400x10)x(160x10) (2 ком)

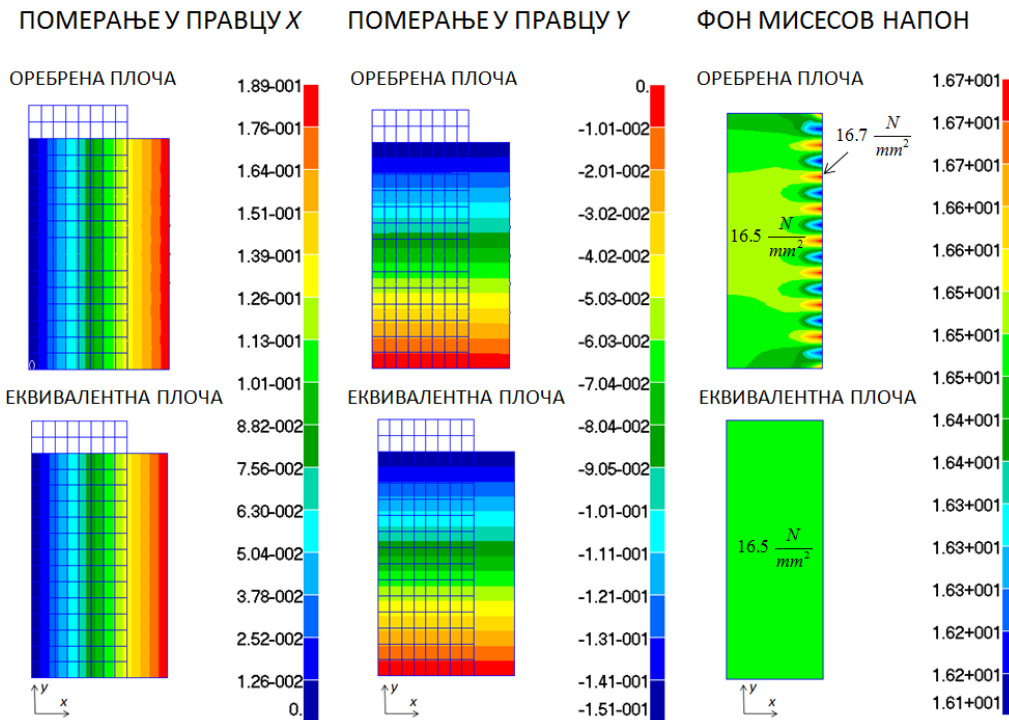
Табела 5.2. Параметри мембранског модела еквивалентне плоче

	a [mm]	b [mm]	t_{kor}^m [mm]	E_1^m [N/mm ²]	E_2^m [N/mm ²]	ν_{12}^m -	ν_{21}^m -	G_{12}^m [N/mm ²]
МОДЕЛ 1	2400	6400	12.19	2.10E+05	1.72E+05	3.000E-01	2.462E-01	8.08E+04
МОДЕЛ 2	3600	3000	10.25	2.10E+05	1.64E+05	3.000E-01	2.339E-01	8.08E+04
МОДЕЛ 3	5400	4200	12.57	2.10E+05	2.02E+05	2.48E-01	2.39E-01	8.08E+04

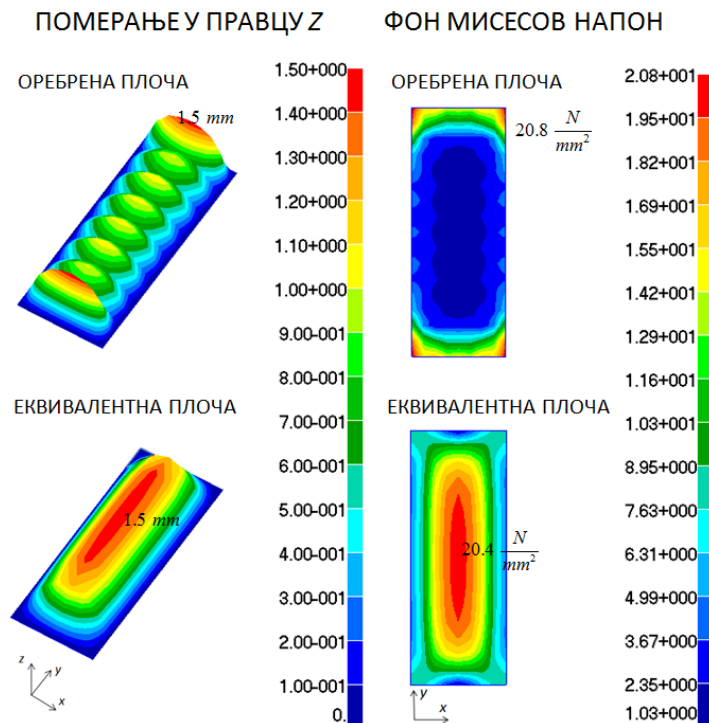
Табела 5.3. Параметри савојног модела еквивалентне плоче

	a	b	t_{kor}^s	E_1^s	E_2^s	ν_{12}^s	ν_{21}^s	G_{12}^s
	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	-	-	[N/mm ²]
МОДЕЛ 1	2400	6400	45.15	3.69E+05	2.51E+03	1.45E-01	9.87E-04	7.38E+04
МОДЕЛ 2	3600	3000	40.47	2.43E+05	1.78E+03	7.10E-02	5.20E-04	4.86E+04
МОДЕЛ 3	5400	4200	56.6	3.86E+05	2.06E+06	9.35E-02	5.00E-01	8.09E+04

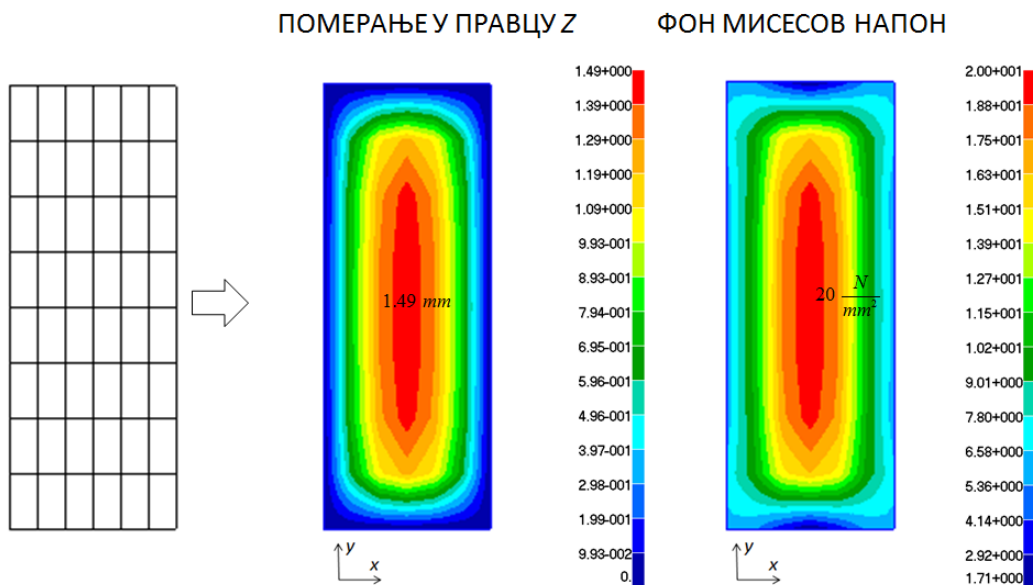
Раванска померања (слика 5.38) у два управна правца Модела 1 оребрене плоче и њене одговарајуће еквивалентне плоче су идентична. Такође, еквиваленција фон Мисесових напона је успостављена, с тим да треба водити рачуна да је максимални напон у еквивалентној плочи истог интензитета по целој површини плоче и износи такође 16.5 N/mm^2 . Изузимајући концентрацију напона проузроковану задавањем оптерећења и разлике у крутостима укрућења и плоче, фон Мисесов напон у оребреној плочи је такође око 16.5 N/mm^2 . Треба напоменути да је, у овом случају, еквивалентна плоча измоделирана са истим бројем плочастих коначних елемената као и оребрена плоча. Резултати се не би променили ни да је у питању еквивалентна плоча са значајно редуковим бројем коначних елемената, као што је описано у Поглављу 5.2. Ово важи, наравно и за остале моделе оребрених и еквивалентних плоча при раванским оптерећењима. Слика 5.39 приказује савојни одзив оребрене и еквивалентне плоче. Угиб обе плоче је готово идентичан, док је разлика у максималним фон Мисесовим напонима испод 2% (слика 5.39). Максимални напони нису на истој локацији. Добро поклапање угиба и напона у овом случају пре свега лежи у чињеници да једначине (5.82) и (5.121) прорачунавају угиб и фон Мисесов напон у неоребреној плочи са врло малим одступањем него што то ради метода коначних елемената. Код неоребрених плоча где то није такав случај, појавиће се и веће разлике у еквиваленци савојних одзива. Савојни одзив еквивалентне плоче са редукованим бројем коначних елемената приказан је на слици 5.39. Оребрена плоча поседује 153 чвора и 184 коначна елемента, од чега су 128 плочасти, а 56 гредни елементи. Еквивалентне плоча са „ређом“ мрежом има 48 елемената и 63 чвора. Дакле, број елемената је смањен за скоро 4 и број чворова за око 2.5 пута, а разлика у угибу (испод 1%) и напону (4%) оребрене и еквивалентне плоче је минимална.



Слика 5.38. Померања и фон Мисесов напон услед мембранског оптерећења у оребреној (Модел 1) и еквивалентној плочи



Слика 5.39. Угиб и фон Мисесов напон услед савојног оптерећења у оребреној (Модел 1) и еквивалентној плочи

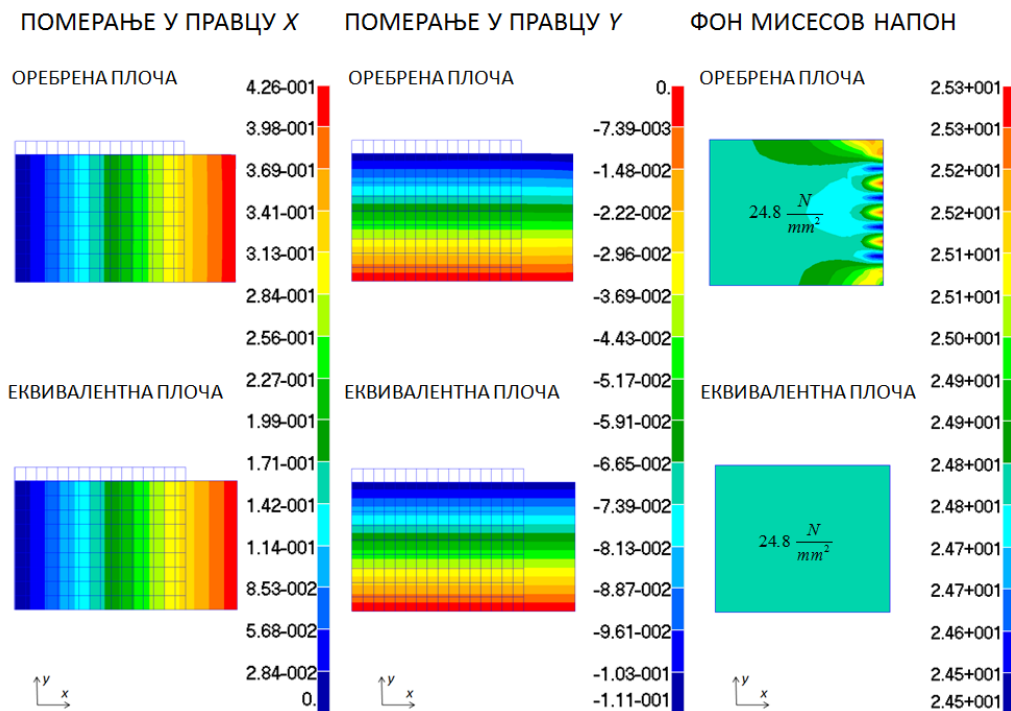


Слика 5.40. Угиб и фон Мисесов напон услед савојног оптерећења еквивалентне плоче редукованог броја коначних елемената

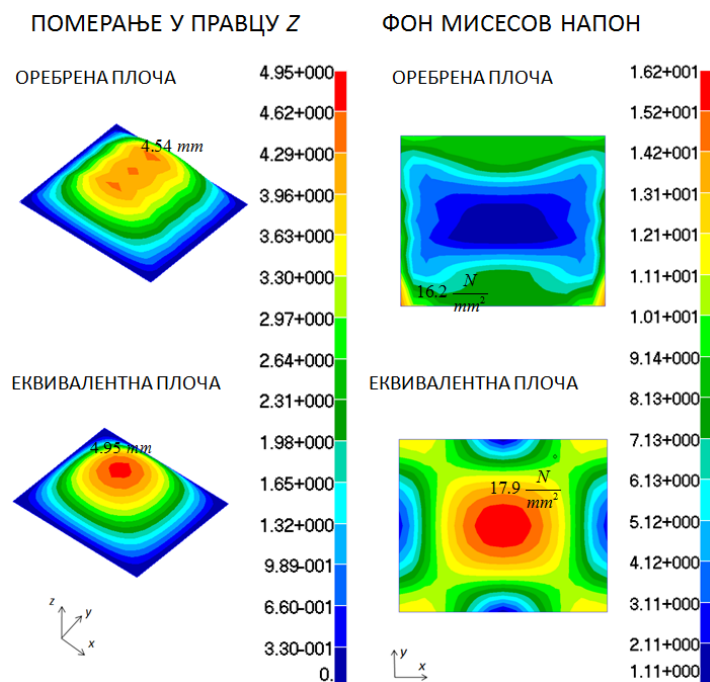
Симулација истовременог деловања и мембранских и савојних оптерећења не може се верно представити на оваквом моделу, као што би то био случај у глобалном моделу конструкције. Разлог лежи у томе што би, за случај савојног оптерећења, било потребно спречити вертикална померања свим ивичним чворовима у моделима оребрене и еквивалентне плоче, што би заједно са „мембранским“ ослонцима изазвало концентрације напона међу којима се не би могло распознати стварно мембранско и стварно савојно понашање ових модела.

Други пример такође представља оребрена плоча са укрућењима само у једном правцу, али нешто другачијег односа главних димензија. Као и у претходном примеру, параметри еластичности дефинисани у табели 5.2 дали су идентичне максималне вредности померања и фон Мисесовог напона оребрене и еквивалентне плоче (слика 5.41). Равански одзив обе плоче, по максималним вредностима готово је идентичан. И овде, приликом поређења слика напона, треба водити рачуна о концентрацијама напона у оребреној плочи као последице различитих крутости плоче и укрућења. Угиб еквивалентне плоче у односу на оребрену одступа за око 8.8%, док маскимални фон Мисесов напон одступа око

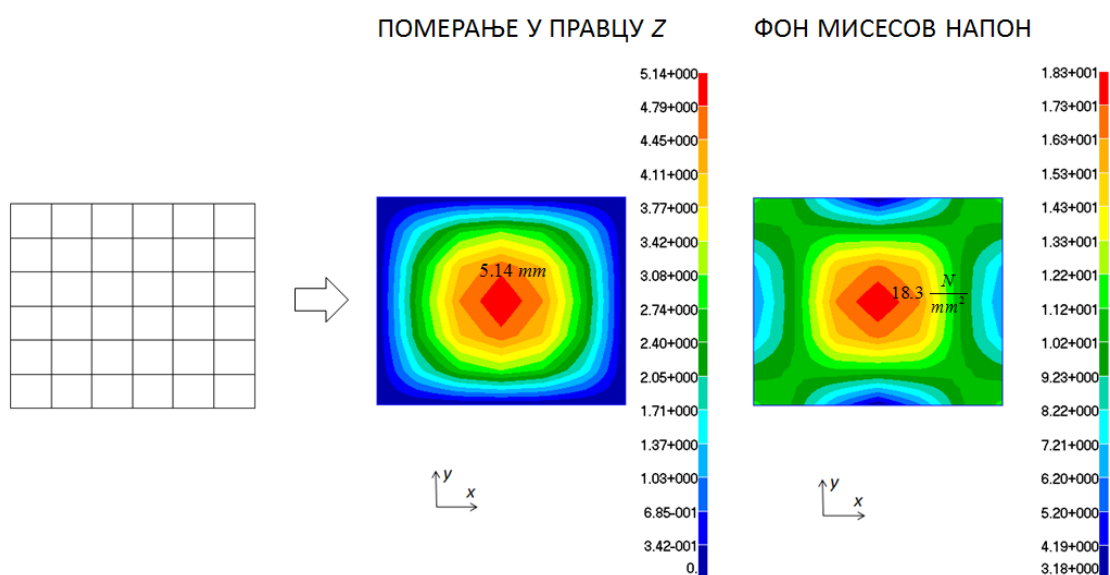
9.5% (слика 5.42). На слици 5.43 илустровано је поље вертикалног померања и фон Мисесовог напона у еквивалентној плочи редукованог броја коначних елемената. Оребрена плоча поседује 224 коначна елемента, од чега су 160 плочасти, а 64 гредни коначни елементи. Укупан број чворова је 187. Модел еквивалентне плоче са слике 5.42 састоји се од 36 еквивалентних коначних елемената и 49 чворова. Дакле, „новој“ еквивалентној плочи број елемената је смањен за више од 6 пута, а број чворова, ондосно степени слободне, за око 3.8 пута. Ово је условило нешто повећаним одступањима у односу на основни модел. Угиб еквивалентне плоче је већи од оног у оребреној за око 11.7%, док маскимални напон одступа за око 11.5%. И у овом случају позиције максимума фон Мисесовог напона у две плоче нису исте.



Слика 5.41. Померања и фон Мисесов напон услед мембранског оптерећења у оребреној (Модел 2) и еквивалентној плочи



Слика 5.42. Угиб и фон Мисесов напон услед савојног оптерећења у оребреној (Модел 2) и еквивалентној плочи



Слика 5.43. Угиб и фон Мисесов напон услед савојног оптерећења еквивалентне плоче редукованог броја коначних елемената

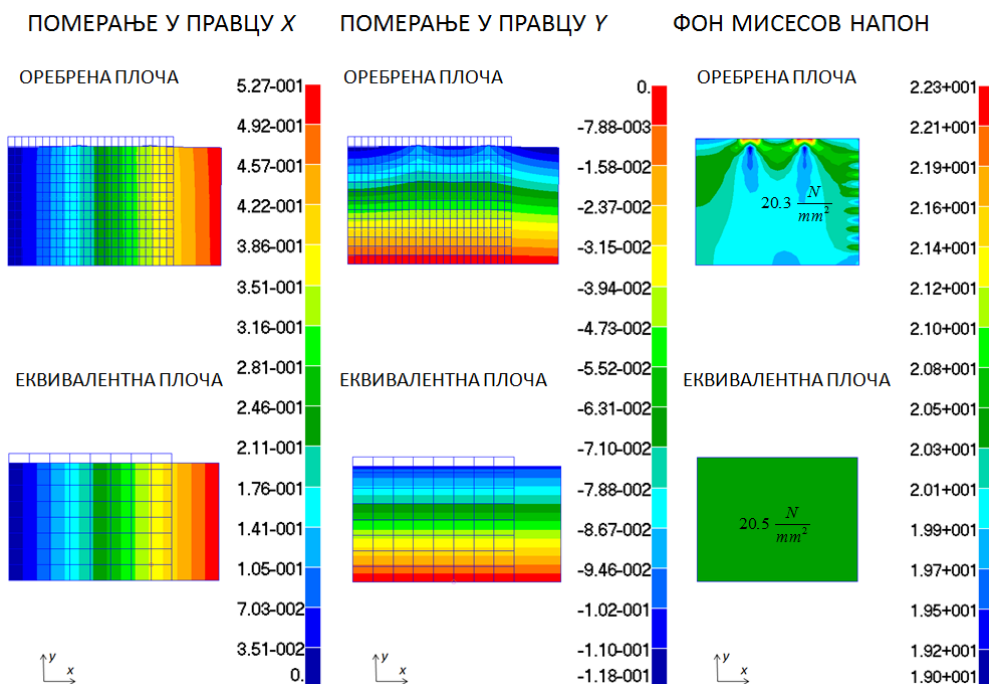
Трећи случај је плоча која поседује укрућења у оба, међусобно управна правца (слика 5.44). Поље померања и напони равнаског одзива су нешто нехомогенизованији. Ово је последица присуства јаким носача који се пружају

правцем u . Средње вредности максималних изудужења и скраћења по ивицама обе плоче су исте. Мембрански фон Мисесов напон у еквивалентној плочи се минимално разликује у односу на онај у оребреној плочи при истом оптерећењу. Што се тиче савојног одзива еквивалентне плоче, угиб је мањи за око 7.4%, а фон Мисесов напон већи за око 2.4%, односу на исте величине у оребреној плочи. Треба поменути да су ови резултати еквиваленције Модела 3 оребрене плоче урађени за еквивалентну плочу редукованог броја коначних елемената. Наиме, број елемената оребре плоче је 620, а број чворова 525. Број елемената еквивалентне плоче коришћене у овој анализи је 64, а број чворова 81. Ови, као и претходни резултати, добијени су процедуром описаном у претходним поглављима, ондосно коришћењем аналитичких једначина за угиб и напон ортотропне плоче. У овом примеру даће се параметри еластичности еквивалентне плоче у случају да су угиб и фон Мисесов напон између итерација рачунати методом коначних елемената. Дакле, у том случају мембрански параметри остају исти, док се само савојни мењају, па они параметри из табеле 5.3 сада имају следеће вредности као у табели 5.4. Поређење угиба и напона оребрене и еквивалентне плоче промењених параметра, према табели 5.4, илустровано је на слици 5.45. Максималне вредности су идентичне у обе плоче.

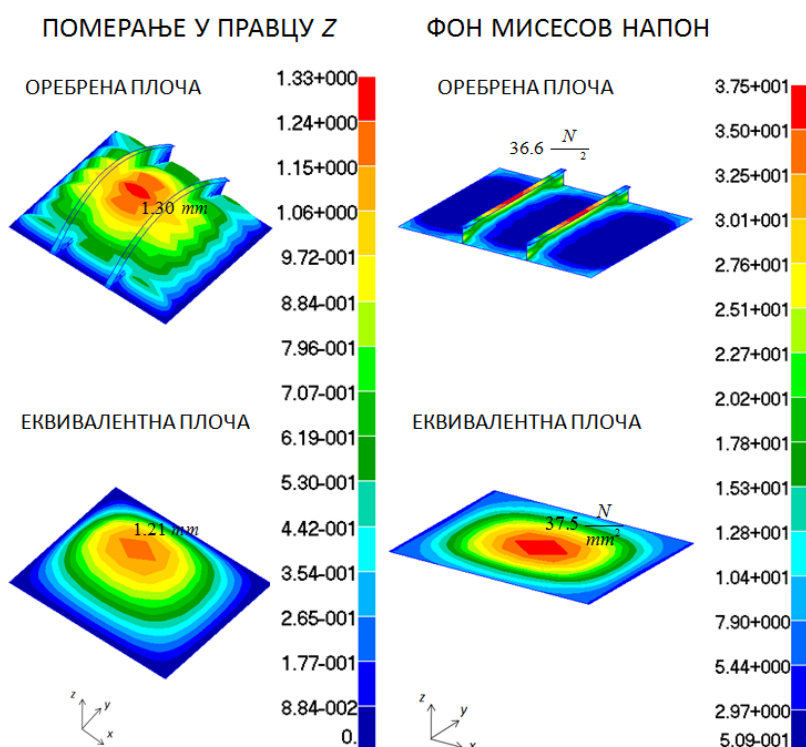
Ово су били неки примери еквиваленција мембранског и савојног одзива оребрене и еквивалентне неоробрене плоче исте дужине и ширине. У следећем поглављу биће приказано понашање еквивалентних плоча у оквиру 3Д нумеричког модела глобалне конструкције.

Табела 5.4. Параметри савојног модела еквивалентне плоче

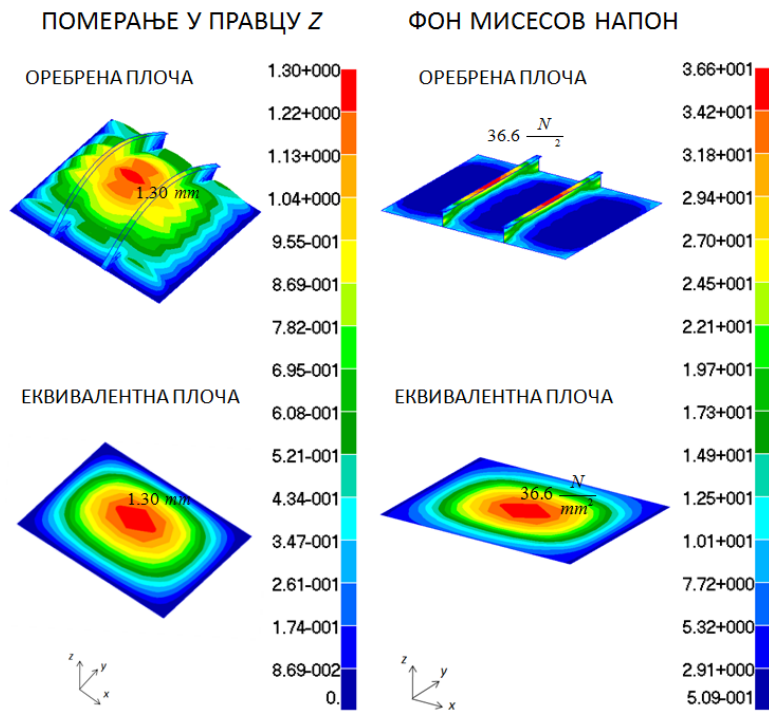
	t_{kor}^s [mm]	E_1^s [N/mm ²]	E_2^s [N/mm ²]	ν_{12}^s -	ν_{21}^s -	G_{12}^s [N/mm ²]
МОДЕЛ 3	56.7	3.83E+05	1.79E+06	1.07E-01	5.00E-01	8.10E+04



Слика 5.44. Померања и фон Мисесов напон услед мембранског оптерећења у оребреној (Модел 3) и еквивалентној плочи



Слика 5.45. Угиб и фон Мисесов напон услед савојног оптерећења у оребреној (Модел 3) и еквивалентној плочи



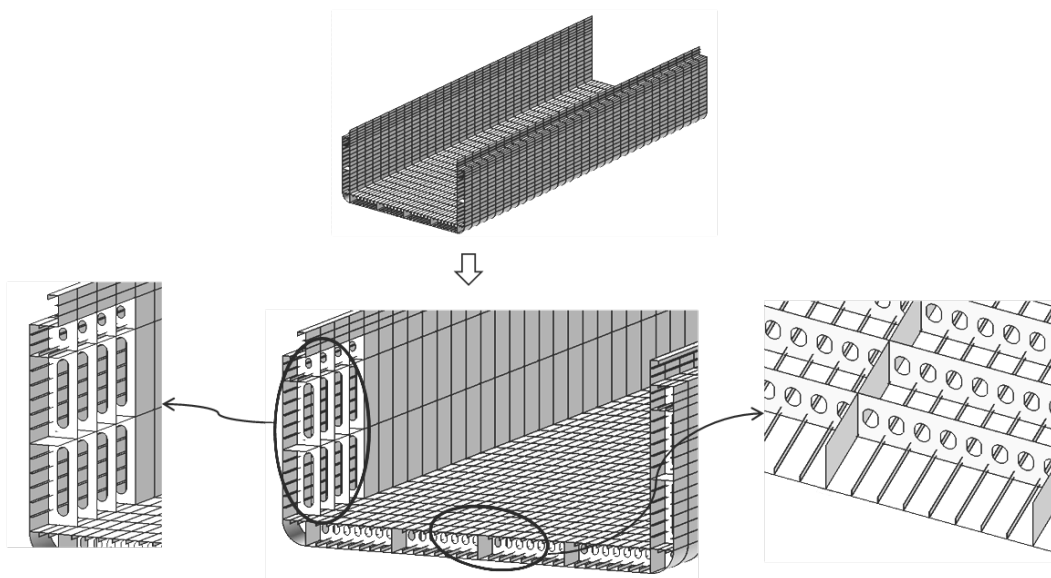
Слика 5.46. Угиб и фон Мисесов напон услед савојног оптерећења у оребреној (Модел 3) и еквивалентној плочи (параметри еластичности према табели 5.4)

6 Еквивалентни 3Д модел бродске конструкције

У овом Поглављу приказана је нумеричка анализа тродимензионалног модела бродске конструкције моделиране конвенционалним и еквивалентним коначним елементима. Циљ ове анализе је поређење померања и напона у ова два модела конструкције.

Изабрана бродска конструкција припада типичном броду за превоз генералног терета. Моделиран је део складишта дужине 65.1 m , односно његов паралелни средњак. Ширина брода је $B = 25.4\text{ m}$, а висина $H = 11.15\text{ m}$. Висина дводна и ширина двобока су 1.5 m . Висина пражнице и торзионе кутије су, такође, 1.5 m . Брод је уздужне градње. Структура дна састоји се, поред централне, од по две бочне провезе дна које су међусобно удаљене 5.6 m . Пуне ребренице се налазе на растојању од 2.1 m . Уздужнице дна и унутрашњег дна су правоугаони профили димензија $210 \times 10\text{ mm}$, међусобног растојања од 700 mm . Овај профил је, иако нешто јачи, најприближнији стандардном холанд профилу НР 180 x 10, ако се узме у обзир момент инерције са придодатим лимом и површина попречног пресека. Дебљина лима дна и унутрашњег дна је 12 mm . Дебљина провеза дна и ребреница је 10 mm . Дебљина лима узвоја је 14 mm . Лим бока, унутрашњег бока, торзионе кутије и палубе је по 12 mm . Провеза бока је удаљена је по 4.2 m од

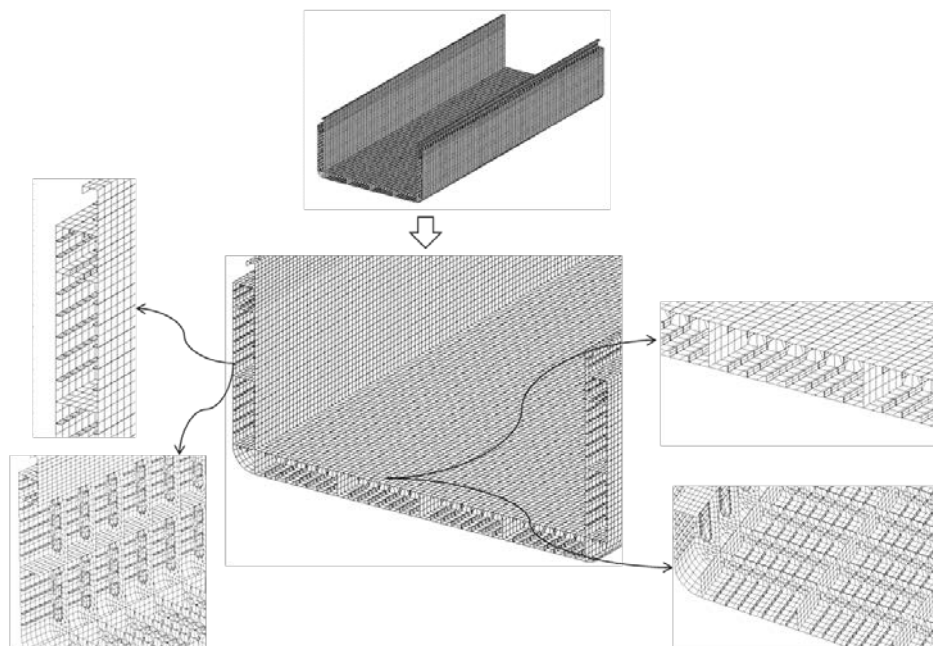
унутрашњег дна и од доњег лима торзионе кутије. Дебљина провезе бока је 15 *mm*. Оквирна ребра двобока се налазе на међусобном растојању од 2.1 *m*. У питању су грађени Т профили димензија (450 x 15) x (200 x 17). Уздужнице бока и унутрашњег бока су правоугаони профили димензија 180 x 9 *mm*, на међусобном растојању од по 700 *mm*. Најближи холанд профил овом попречном пресеку је НР 160 x 9. Уздужнице торзионе кутије се налазе на међусобном растојању од по 500 *mm*, и у питању су профили 150 x 8 *mm*. Најближи стандардни холанд профил чије карактеристике попречног пресека одговарају карактеристикаа моделираних уздужница торзионе кутије је НР 140 x 8. На сваких 2.1 *m* у попречној равни торзионе кутије налази се оквирни пресек, са стандардним отвором 600/400. Исти отвори налазе се и у ребреницама. Пражница је дебљине 17 *mm* и поседује две уздужна укрућења на растојању од по 500 *mm* истих димензија као и уздужнице бока. Пражница је на свом врху укрућена јаким профилем 550 x 250 x 20 *mm*.



Слика 6.1. 3Д модел бродске консктрукције

Конвенционални модел коначних елемената ове конструкције састоји се од 116380 коначних елемената, од којих су 25200 гредни елементи. Укупан број чворова у моделу је 86411. МКЕ модел је рађен према генералним препорукама за моделирање складишта [1, 3, 53, 54, 55, 56]. Сви лимови и елементи примарне структуре моделирани су плочастим елементима, док су елементи секундарне структуре и фланше примарних елемената моделирани као гредни елементи. Подела између секундарне структуре је извршена са два плочаста елемента.

Примарна структура је подељена на минимум 3 или 4 коначна елемента по висини. Просечне димензије плочастог коначног елемента су 350 x 350 mm.



Слика 6.2. Конвенционални МКЕ модел бродске конструкције

Као што је објашњено у Поглављу 5.1 први корак у моделирању еквивалентног модела складишта је избор репрезентативних ребрених плоча. У овом случају изабране су ребрене плоче са секундарном структуром у једном правцу, оивичене примарним структурним елементима (слика 6.2). Једна репрезентативна плоча је представник конструкције дна и унутрашњег дна (Модел 1), друга чини део конструкције бока и унутрашњег бока (Модел 2). Трећа ребрена плоча представља део конструкције унутрашњег дна који се налази између унутрашњег бока и бока брода (Модел 3). Четврти модел је део конструкције од којег је сачињена торзиона кутија и палуба (Модел 4). Последња ребрена плоча чини део конструкције пражнице (Модел 5). Подаци о репрезентативним ребреним плочама и њиховим еквивалентним неребреним плочама дати су у табелама 6.1 – 6.3. Сви изабрани модели поседују само секундарну структуру у подужном правцу (правац x). Критеријум за еквиваленцију фон Мисесовог напона при мембранском оптерећењу, код модела 1 и 2 је плоча оптерећена на истезање у подужном правцу, и оптерећена на притисак 100 пута мањом силом у попречном правцу. Код Модела 3, 4 и 5 као критеријум мембранског оптерећења за напон

изабран је случај оптерећења плоче на истезање у подужном правцу, и на скраћење 10 пута мањом силом у попречном правцу. Критеријум за савојање је исти у свим моделима: плоча слободно ослоњена по ивицама и оптерећена равномерним притиском на савијање. Параметри еквивалентних плоча добијени су применом процедуре описане у Поглављу 5. Односи максималних угиба и фон Мисесових напона услед савијања у моделима оребрених и еквивалентних плоча, дати су табели 6.4, док су исти резултати два модела илустровани сликом 6.3. Ови резултати представљају одзив модела при идеалним контурним условима и оптерећењима, који су сачињени од слободних ослонаца на свим ивицама и равномерног притиска на савијање. Код Модела 1 и 2 разлика ових вредности није већа од неколико процената, док је код преосталих модела она нешто већа (до 11%). Ово је директна последица разлике у начину прорачунавања угиба и напона при коришћењу теорије ортотропних плоча на супрот методи коначних елемената. Поређење померања и напона услед мембранских оптерећења ових модела нису дати јер, како је показано и у претходним примерима из Поглавља 5, разлике у вредностима максималних величина нису веће од неколико процената.

Табела 6.1. Подаци о оребреним плочама

	a [mm]	b [mm]	t [mm]	Укрућења у правцу x	Укрућења у правцу y
МОДЕЛ 1	2100	5600	12	210 x 10 mm (7 ком.)	-
МОДЕЛ 2	2100	4200	12	180 x 9 mm (5 ком.)	-
МОДЕЛ 3	2100	1500	12	180 x 9 mm (5 ком.)	-
МОДЕЛ 4	2100	1500	12	150 x 8 mm (3 ком.)	-
МОДЕЛ 5	2100	1500	17	180 x 9 mm (3 ком.)	-

Табела 6.2. Параметри мембранског модела еквивалентне плоче

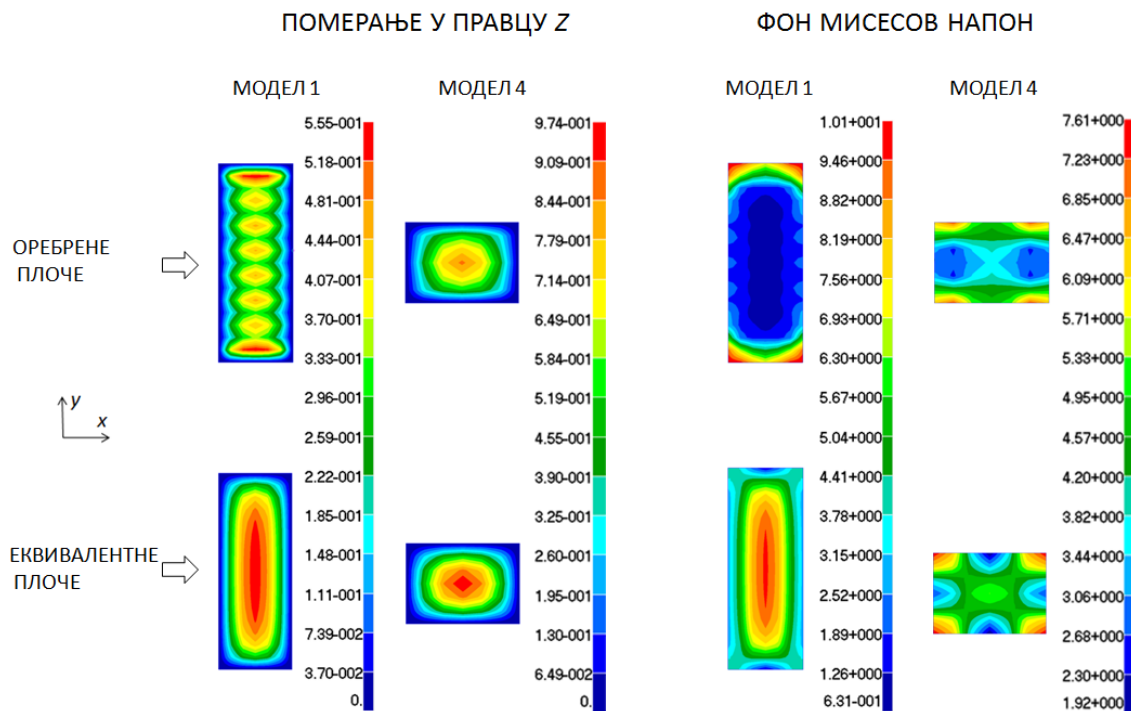
	a [mm]	b [mm]	$t_{кор}^m$ [mm]	E_1^m [N/mm ²]	E_2^m [N/mm ²]	ν_{12}^m -	ν_{21}^m -	G_{12}^m [N/mm ²]
МОДЕЛ 1	2100	5600	14.58	2.11E+05	1.73E+05	3.00E-01	2.46E-01	8.08E+04
МОДЕЛ 2	2100	4200	13.91	2.10E+05	1.81E+05	3.00E-01	2.58E-01	8.08E+04
МОДЕЛ 3	2100	1500	14.67	2.12E+05	1.72E+05	3.00E-01	2.43E-01	8.08E+04
МОДЕЛ 4	2100	1500	13.53	2.11E+05	1.86E+05	3.00E-01	2.65E-01	8.08E+04
МОДЕЛ 5	2100	1500	19.07	2.11E+05	1.87E+05	3.00E-01	2.66E-01	8.08E+04

Табела 6.3. Параметри савојног модела еквивалентне плоче

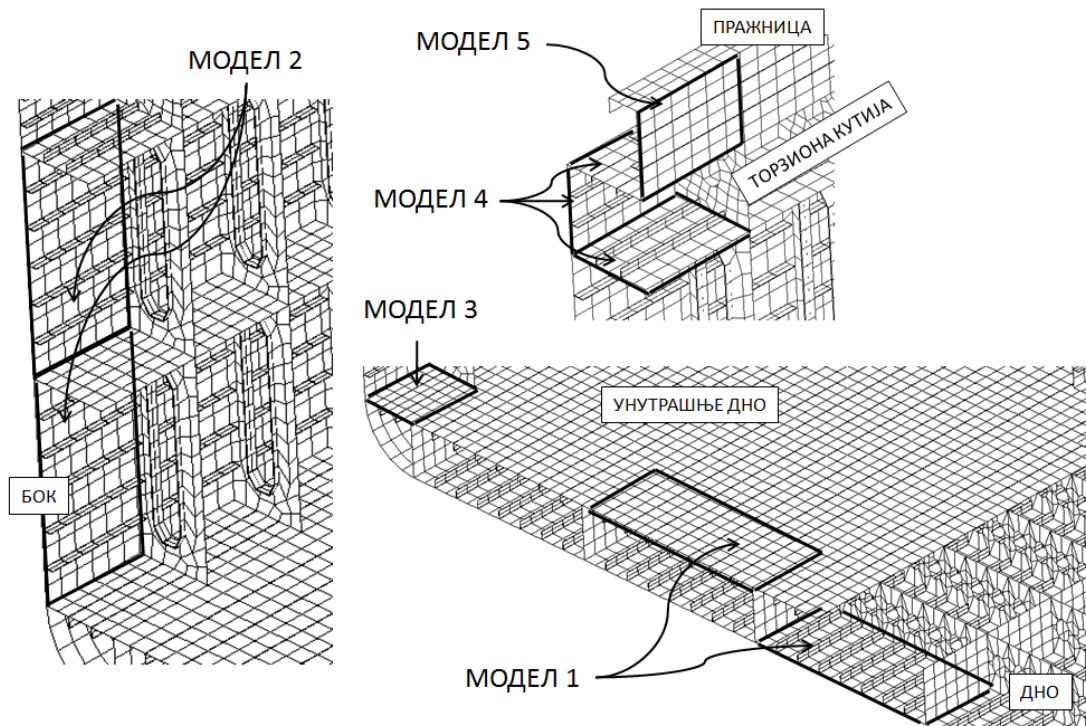
	a	b	$t_{\text{кож}}^s$	E_1^s	E_2^s	ν_{12}^s	ν_{21}^s	G_{12}^s
	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	-	-	[N/mm ²]
МОДЕЛ 1	2100	5600	56.52	2.93E+05	2.21E+03	5.00E-01	3.77E-03	5.96E+04
МОДЕЛ 2	2100	4200	54.13	2.59E+05	2.51E+03	2.14E-01	2.07E-03	5.19E+04
МОДЕЛ 3	2100	1500	53.10	3.61E+05	3.01E+03	5.00E-01	4.17E-03	7.28E+04
МОДЕЛ 4	2100	1500	46.07	1.72E+05	4.53E+03	5.00E-01	1.32E-02	3.54E+04
МОДЕЛ 5	2100	1500	57.85	1.50E+05	5.85E+03	5.00E-01	1.95E-02	3.11E+04

Табела 6.4. Максимални угиби и фон Мисесови напони модела оребрене и еквивалентне плоче за савојни притисак $p = 0.01 \text{ N/mm}^2$

	w_{max}^{OR}	$\sigma_{VM,\text{max}}^{OR,s}$	w_{max}^{EKV}	$\sigma_{VM,\text{max}}^{EKV,s}$
	[mm]	[N/mm ²]	[mm]	[N/mm ²]
МОДЕЛ 1	0.555	10.11	0.549	9.68
МОДЕЛ 2	0.696	10.6	0.701	10.41
МОДЕЛ 3	0.292	5.73	0.316	6.27
МОДЕЛ 4	0.866	7.24	0.974	7.61
МОДЕЛ 5	0.434	4.17	0.459	4.24



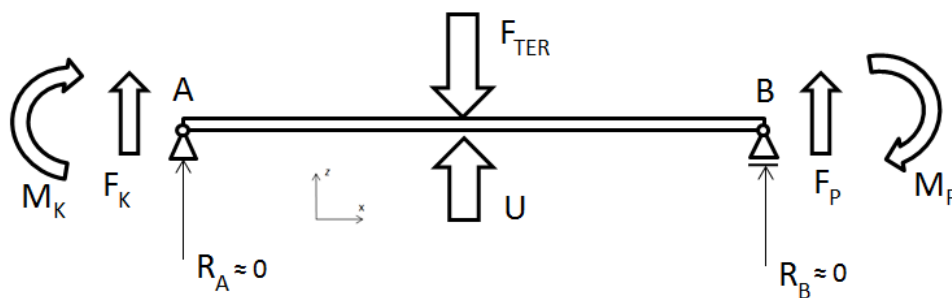
Слика 6.3. Угиб и фон Мисесов напон услед савојног оптерећења у оребреној и еквивалентној плочи (Модел 1 и Модел 4) услед притиска $p = 0.01 \text{ N/mm}^2$



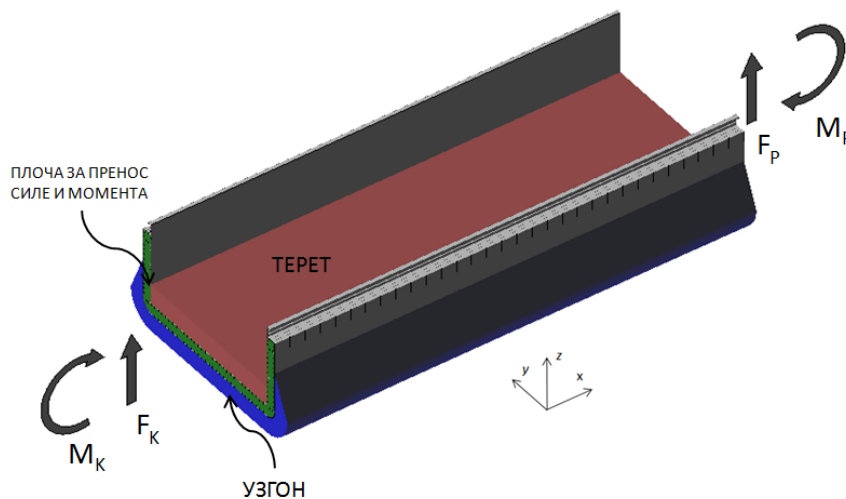
Слика 6.4. Оребрене плоче бродске конструкције

3Д модел бордске констуркције подвргнут је сету типичних оптерећења која сачињавају узгон, терет, силе и моменти од преосталог дела констуркције (слика 6.5 и слика 6.6). Узгон је последица хидростатичког притиска воде на оплату брода при газу од $T = 7.1 m$. Максимална вредност овог притиска је $p_{uzg} = 0.0714 N/mm^2$. Укупна сила узгона у вертикалном правцу која делује на конструкцију брода је $U = 1.17 \cdot 10^8 N$. За сврху ове анализе претпоставља се да је терет равномерно распоређен по површини унутршњег дна брода притиском од $p_{uzg} = 0.094 N/mm^2$, односно укупном силом од $F_{TER} = 1.37 \cdot 10^8 N$. Крајњем крменом и прамчаном пресеку 3Д модела брода додате су плоче велике дебљине ($500 mm$). Једини циљ ових плоча је да обезбеде довољну крутост да пренесу трансверзалне силе и вертикалне моменте преосталог дела брода на анализирани део конскрукције. Типична сила и момент који репрезентује утицај крменог дела конскрукције на модел брода узети су преко вредности $F_L = 7000 kN$ и $M_L = 120000 kNm$. Силе и моменти који узимају у обзир утицај прамчаног дела брода на 3Д модел су добијени преко чињенице да све силе и моменти у систему морају да буду уравнотежени, као и да, стога, реакција ослонаца у вертикалном

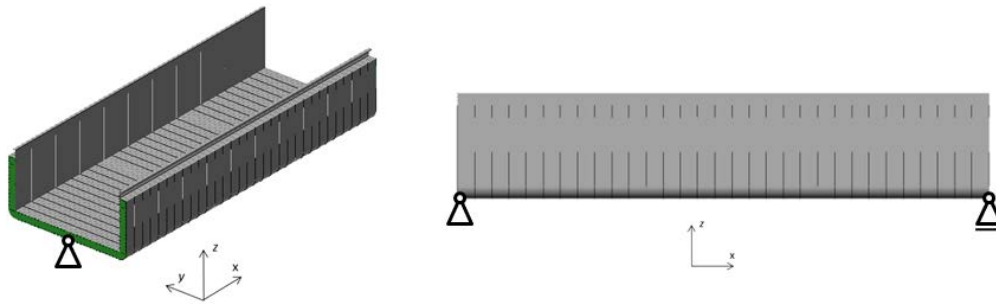
правцу мора да буде једнака нули. Следи да су силе и моменти од преосталог, прамчаног, дела консктрукције једнаки вредностима: $F_D = 12670 \text{ kN}$ и $M_D = 64707 \text{ kNm}$. Овакав однос сила и момената од крменог и прамчаног преосталог дела консктрукције је изабран намерно. Наиме, овакав однос фаворизује један од два крајња пресека 3Д модела брода. Трансверзална сила на прамчаном пресеку складишта је скоро два пута већа од оне на крменом делу. Вертикални момент крменог дела је два пута већи од оног на прамчаном делу. Дакле, у самом моделу постоје велике разлике у оптерећењима, које ће изазвати различите деформације на крајевима. Једно од питања примене еквивалентних плоча је како ће се оне понашати приликом преношења ових, по јачини доста различитих сила и момената, на анализирани део конструкције.



Слика 6.5. Оптерећења и контурни услови модела бродске конструкције



Слика 6.6. Оптерећења модела бродске конструкције



Слика 6.7. Контурни услови модела бродске конструкције

Еквивалентни модел складишта (слика 6.8), тј. конструкције састављене од еквивалентних плоча не поседује секундарну структуру. 3Д модел је знатно једноставнији, у њему сада не постоје гредни елементи, осим оних који чине фланше оквирних ребара. Еквивалентни модел складишта сада има 93688 елемената и исти број чворова као и конвенционални модел конструкције. Конструкцију дна, унутрашњег дна, бока, унутрашњег бока палубе, торзионе кутије и пражнице сада чине само еквивалентни коначни елементи са новим параметрима еластичности. Дакле, новим моделом елиминисано је 56 уздужница дна и унутрашњег дна, 40 уздужница бока и унутрашњег бока, 16 уздужница торзионе кутије и палубе и 4 уздужнице пражнице, све на дужини од 65.1 m.

Укупан број замењених оребрених плоча еквивалентним у 3Д моделу је 868. У табели 6.5 дат је приказ броја замењених оребрених плоча по деловима конструкције. Оребрене плоче су, у овом случају, оне оивичене примарном конструкцијом.

Табела 6.5. Број замењених оребрених плоча у 3Д моделу

ДНО	124
УНУТРАШЊЕ ДНО	124
ДЕО УНУТР. ДНА	62
БОК	124
УНУТРАШЊИ БОК	124
ТОРЗИОНА КУТИЈА	186
ПАЛУБА	62
ПРАЖНИЦА	62
УКУПНО	868

Табела 6.6. Поређење броја коначних елемената и степени слободе оребрене плоче и еквивалентних плоча дна (Модел 1)

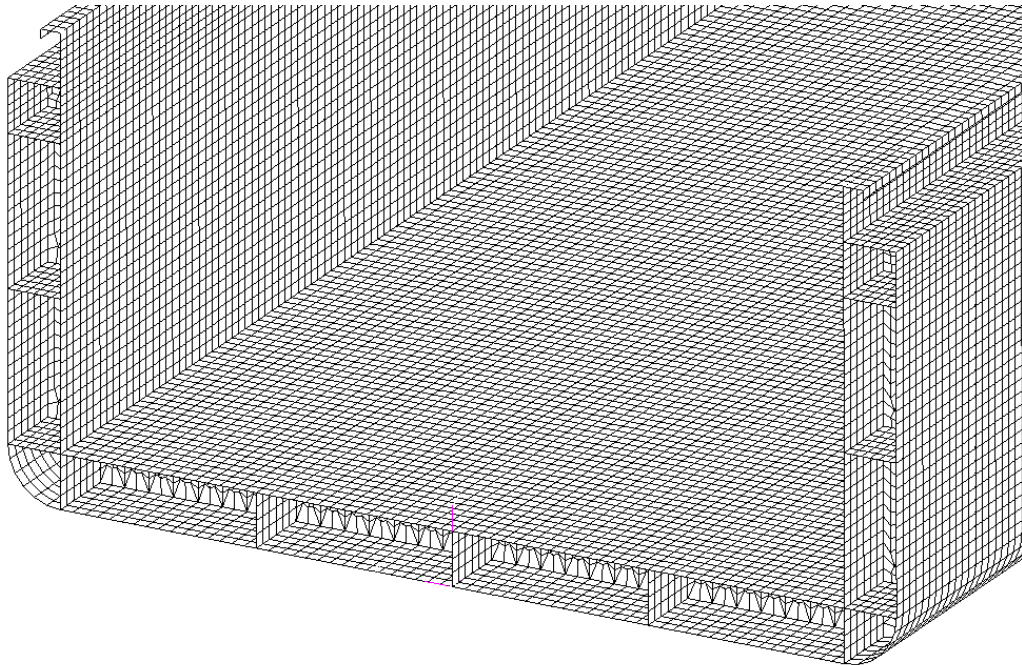
	ОРЕБРЕНА ПЛОЧА ДНА	ЕКВИВАЛЕНТНА ПЛОЧА ДНА	ЕКВИВАЛЕНТНА ПЛОЧА ДНА СА РЕДУКОВАНИМ БР. СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ
БР. КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	135	96	32
БР. ЧВОРОВА	117	117	45

Табела 6.7. Поређење броја коначних елемената и степени слободе конвенционалних 3Д модела брода

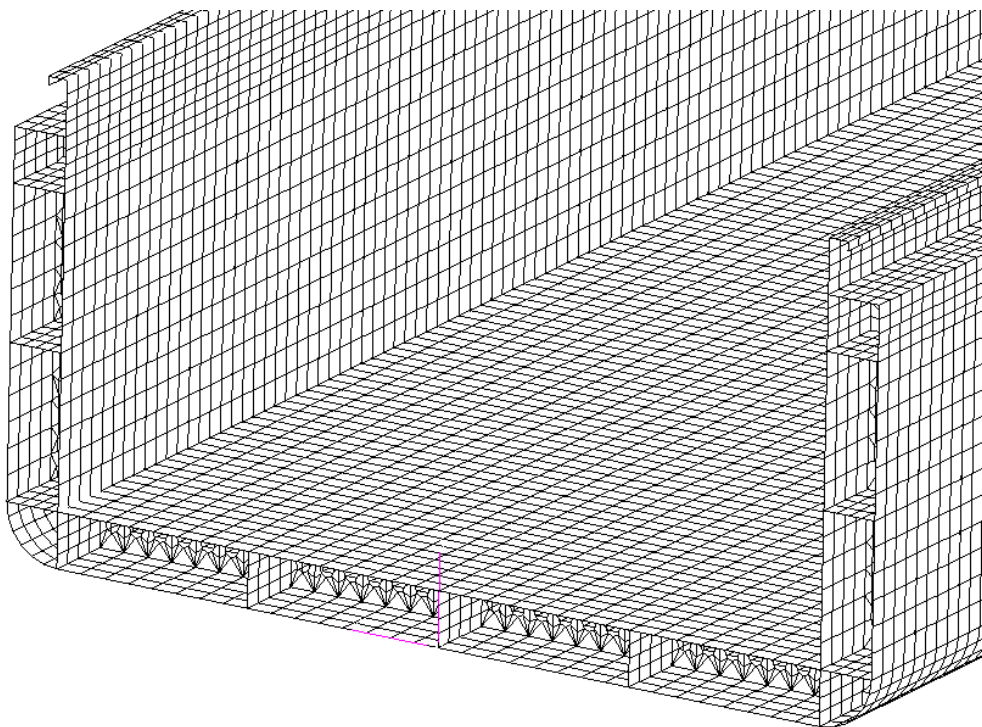
	КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ	ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ	ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ СА РЕДУКОВАНИМ БР. СТЕПЕНИ СЛОБОДЕ
БР. КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА	116380	93688	56724
БР. ЧВОРОВА	86411	86411	47306

Поред овог еквивалентног модела, урађен је још један – са редукованим бројем степени слободе. Наиме, репрезентативни еквивалентни модел сада има много мање еквивалентних плочастих елемената него претходни 3Д модел. Дакле, не само да су елиминисани гредни елементи него је и сама мрежа ређа (слика 6.9). У претходном примеру, лим дна је имао 96 плочастих елемената (42 гредна елемента) и 117 чворова и у једном и удругом 3Д моделу. У овом случају број еквивалентних плочастих елемената је 32, а број чворова је 45 (табела 6.6). Дакле, редукован еквивалентни модел репрезентативне плоче дна сада има три пута мање коначних елемената и 2.6 пута мање чворова. Сличан однос је и код репрезентативних плоча бока и унутрашег бока. Нешто мањи однос броја елемената и чворова постигнут је код делова конструкције торзионе кутије, палубе и пражнице. Ове оребрене плоче поседују свега по 2 уздужнице па ту и није било простора за већу редукацију елемената и чворова. Пренесено на цео 3Д нумерички модел то значи – 56724 елемента и 47306 чворова. Број елемената у „новом“ моделу је смањен за око 2 пута, а број чворова за око 1.8 пута (табела 6.7). Густина мреже коначних елемената примарних елемената је остала иста.

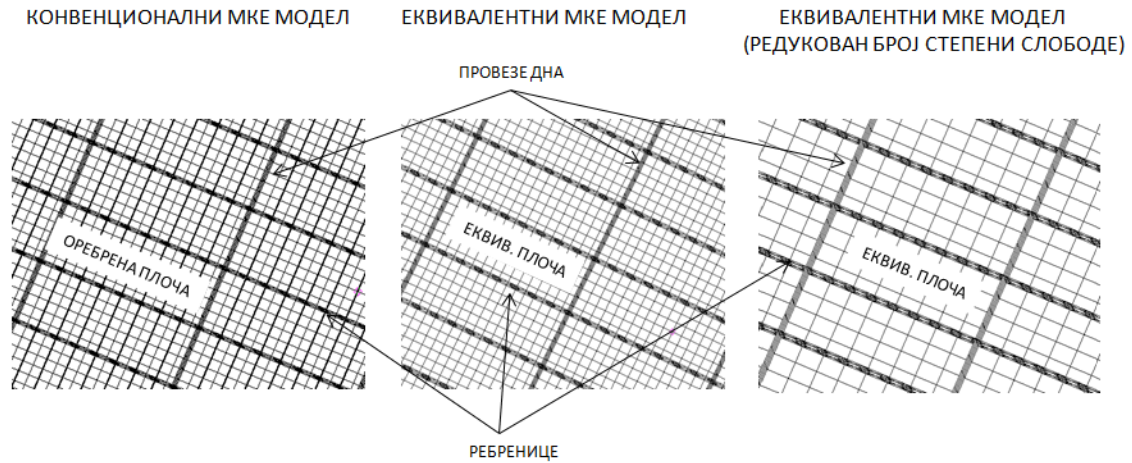
Модел је сада знатно једноставнији. Оптерећења и контурни услови су остали исти као и у претходном случају.



Слика 6.8. Еквивалентни модел складишта



Слика 6.9. Еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе



Слика 6.10. Оребрена плоча и еквивалентне плоче

Табела 6.8. Померања и фон Мисесови напони у 3Д моделима

	ОРЕБРЕНА ПЛОЧА				ЕКВИВАЛЕНТНА ПЛОЧА (ИСТИ БРОЈ ПЛОЧАСТИХ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА)				ЕКВИВАЛЕНТНА ПЛОЧА (РЕДУКОВАН БР. ПЛОЧАСТИХ КОН. ЕЛ.)			
	u^{OR}	v^{OR}	w^{OR}	$\sigma_{FM,max}^{EKV}$	u^{EKV}	v^{EKV}	w^{EKV}	$\sigma_{FM,max}^{EKV}$	u^{EKV}	v^{EKV}	w^{EKV}	$\sigma_{FM,max}^{EKV}$
	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]	[mm]	[mm]	[mm]	[N/mm ²]
ДНО	2.52	2.57	39.1	77.6	2.4	2.55	37.4	66.4	2.33	2.52	37.7	62.4
УНУТРАШЊЕ ДНО	1.65	3.57	9.69	83.1	1.56	3.54	10.5	84.5	1.47	3.51	9.49	75.6
РЕБРЕНИЦЕ	-	-	-	124	-	-	-	125	-	-	-	126
БОК	6.46	43.7	13.6	48.8/35.2	6.33	42.9	14.2	47.4/31.1	6.34	42.1	13.6	48.4/30.1
УНУТРАШЊИ БОК	5.28	43.8	10.4	76.4/5.56	5.2	43	10.9	68.5/4.76	4.58	42.2	8.02	63.6/5.39
ТОРЗИОНА КУТИЈА	7.24	50.6	9.87/8.36	62.2	6.96	49.7	10.1/6.85	60.2	6.76	48.8	9.73/7.7	60.5
ПАЛУБА	7.24	50.6	9.87/8.29	62.2	6.9	49.7	9.89/6.78	60.1	7.1	48.8	9.73/7.62	60.5
ПРАЖНИЦА	6.78	50.6	15.3/15.1	54.1	6.55	50	13.1/11.2	53.8	6.52	49.3	44.9/18.1	56.6

Табела 6.9. Одступања померања и фон Мисесових напона еквивалених модела од конвенционалног нумеричког модела

	ЕКВИВАЛЕНТНА ПЛОЧА (ИСТИ БРОЈ ПЛОЧАСТИХ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА)				ЕКВИВАЛЕНТНА ПЛОЧА (РЕДУКОВАН БРОЈ ПЛОЧАСТИХ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА)			
	$\%u^{OR}$	$\%v^{OR}$	$\%w^{OR}$	$\%\sigma_{FM,max}^{EKV}$	$\%u^{OR}$	$\%v^{OR}$	$\%w^{OR}$	$\%\sigma_{FM,max}^{EKV}$
ДНО	-4.76%	-0.78%	-4.35%	-14.43%	-7.54%	-1.95%	-3.58%	-19.59%
УНУТРАШЊЕ ДНО	-5.45%	-0.84%	8.36%	1.68%	-10.91%	-1.68%	-2.06%	-9.03%
РЕБРЕНИЦЕ	-	-	-	0.81%	-	-	-	1.61%
БОК	-2.01%	-1.83%	4.41%	-2.02%/-11.64%	-1.86%	-3.66%	0.00%	-0.82%/-14.49%
УНУТРАШЊИ БОК	-1.52%	-1.83%	4.81%	-10.34%/-14.39%	-13.26%	-3.65%	-22.88%	-16.75%/-3.06%
ТОРЗИОНА КУТИЈА	-3.87%	-1.78%	2.33%/-18.06%	-3.22%	-6.63%	-3.56%	-1.41%/-7.89%	-2.73%
ПАЛУБА	-4.70%	-1.78%	2.02%/-18.21%	-3.38%	-1.93%	-3.56%	-1.41%/-8.08%	-2.73%
ПРАЖНИЦА	-3.39%	-1.19%	-14.38%/-25.83%	-0.55%	-3.83%	-2.57%	193%/19.87%	4.62%

Поређење поља померања и фон Мисесових напона у два модела (конвенционалном и еквивалентном) дато је у наредним поглављима, за случај еквивалентног модела са истим бројем (Поглавље 6.1) и редукованим бројем степени слободе (Поглавље 6.2). Максималне вредности одзива по деловима конструкције дате су у табели 6.8, док се њихова процентуална одступања налазе у табели 6.9.

Циљ поређења конвенционалног нумеричког модела са еквивалентним исте густине мреже је да се уочи генерална разлика у резултатима избацавањем гредних елемената из модела. Иако је број елемената смањен, то није случај са бројем степени слободе. Управо оваква анализа даће директно поређење два модела и проценити валидност саме методе еквиваленције. На резултате у еквивалентном моделу сада не утичу грешке у густини мреже, јер је она иста у оба модела.

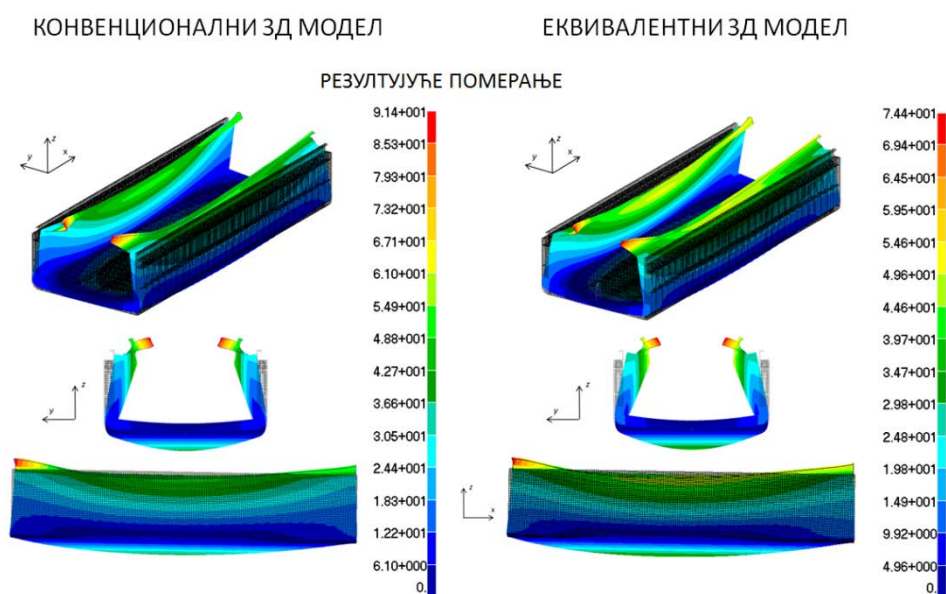
Касније, биће поређен конвенционални модел са еквивалентним моделом редуковане мреже коначних елемената. Циљ ове анализе је да се оцени могућност већег смањења броја елемената, али и степени слободе у моделу.

На сликама у наставку, а за делове конструкције конвенционалног и еквивалентног модела, дата су поља померања у три управна правца, као и поље фон Мисесових напона. Остали резултати одзива делова конструкције еквивалентних и конвенционалног 3Д модела дати су у Прилогу 1.

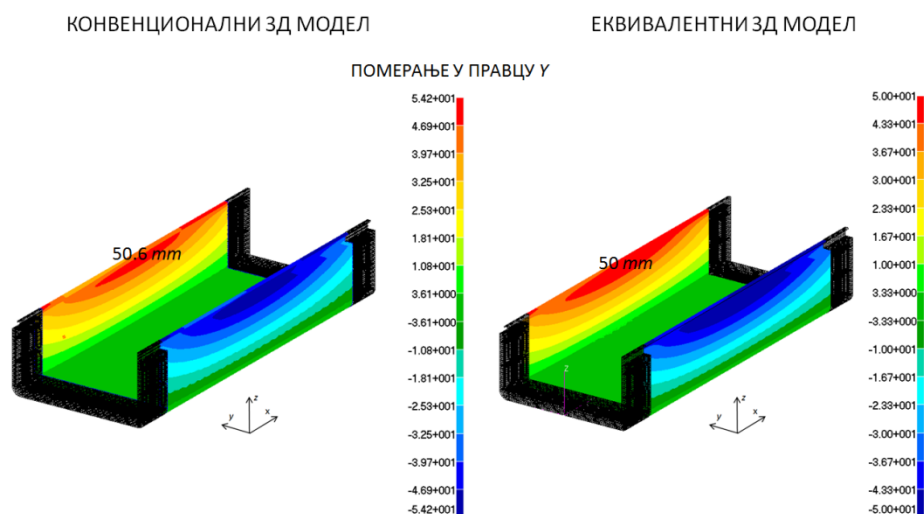
6.1 Еквивалентни 3Д модел

На слици 6.11 илустрован је примарни одзив конвенционалног и еквивалентног модела складишта са истим бројем степени слободе. Брод доживљава угиб

(*sagging*) услед притиска терета и дејства момената на крајњим пресецима модела. Треба напоменути да ова слика не даје реално стање укупних померања већ поглед на глобалне деформације у моделу. Наиме, услед концентрисаног деловања сила и моментата на крајњим пресецима, у нумеричком моделу, у тој зони јавиће се повећана померања и напони који иначе нису реални у консктрукцији. Стога, на свим сликама у наставку дата су померања и напони за консктрукцију која не обухвата зону уз саме крајње пресеке (три рамака оквирних ребара).



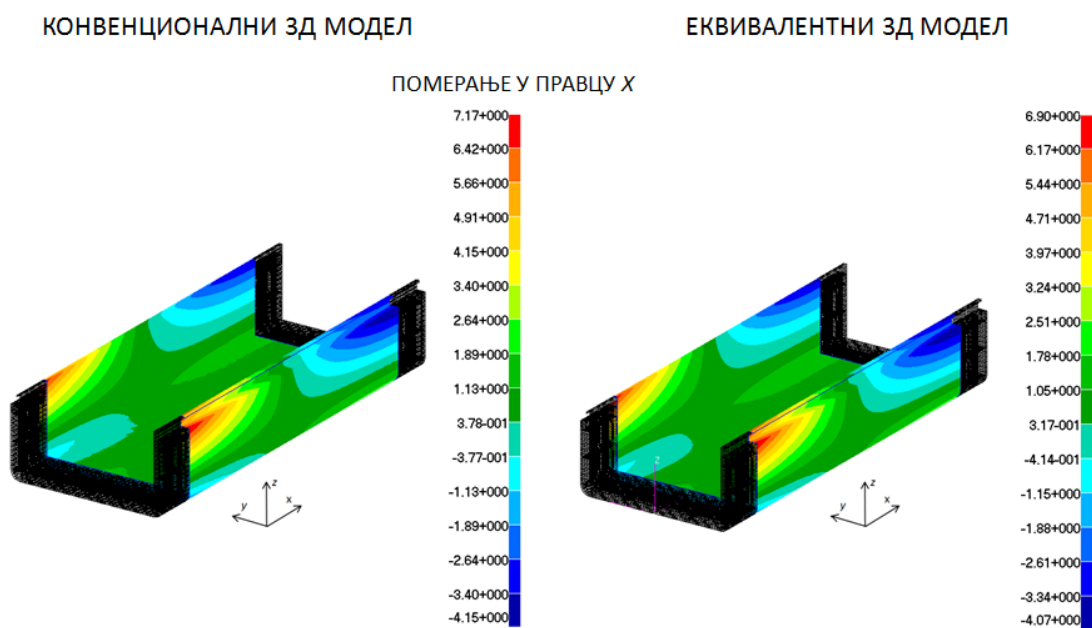
Слика 6.11. Примарни одзив 3D модела складишта



Слика 6.12. Померање 3D модела, у правцу у

Максимална резултујућа померања у моделима се налазе у зони палубе, празнице и торзионе кутије, попречног су правца у односу на осу дуж брода и последица су попречних дисторзија пресека брода услед притиска воде на оплату бока брода (слика 6.12). Разлика максималних попречних померања у два модела је око 1%.

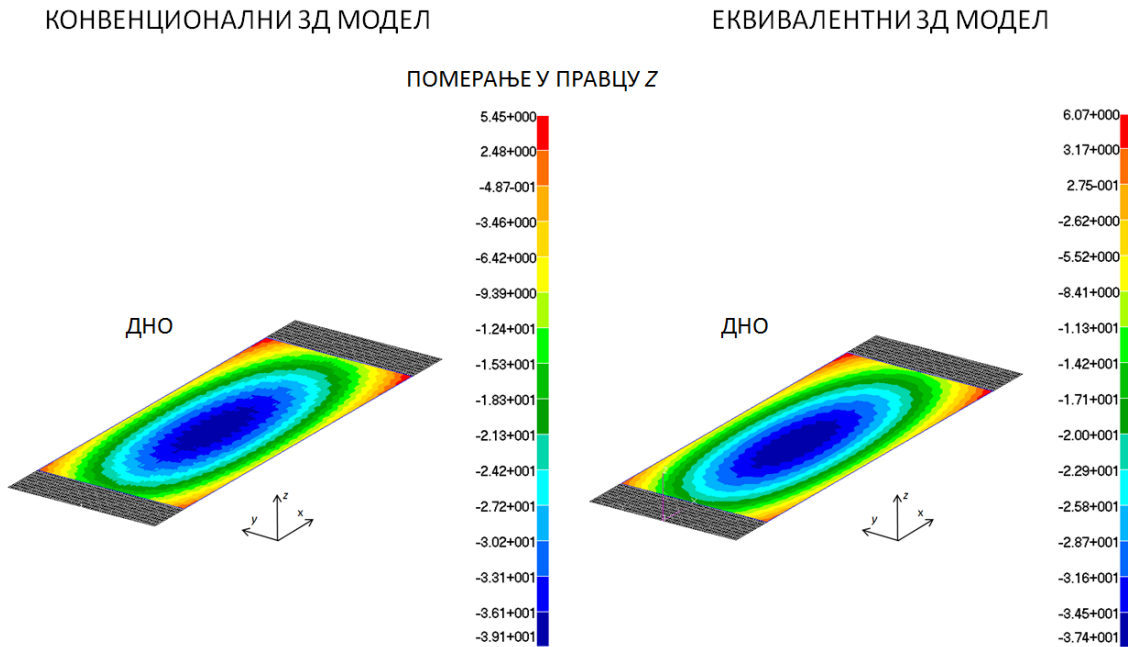
Вертикални моменати савијања на крајњим пресецима највише утичу на подужна померања конструкције, што се може видети и по распореду ових померања на појединим деловима конструкције (слика 6.13). Поља подужних и попречних померања у еквивалентном моделу се добро поклапају са онима у конвенционалном моделу. Ово је директна последица доброг поклапања ових поља и у појединачним ребреним и еквивалентним плочама приликом коришћења методе еквиваленције.



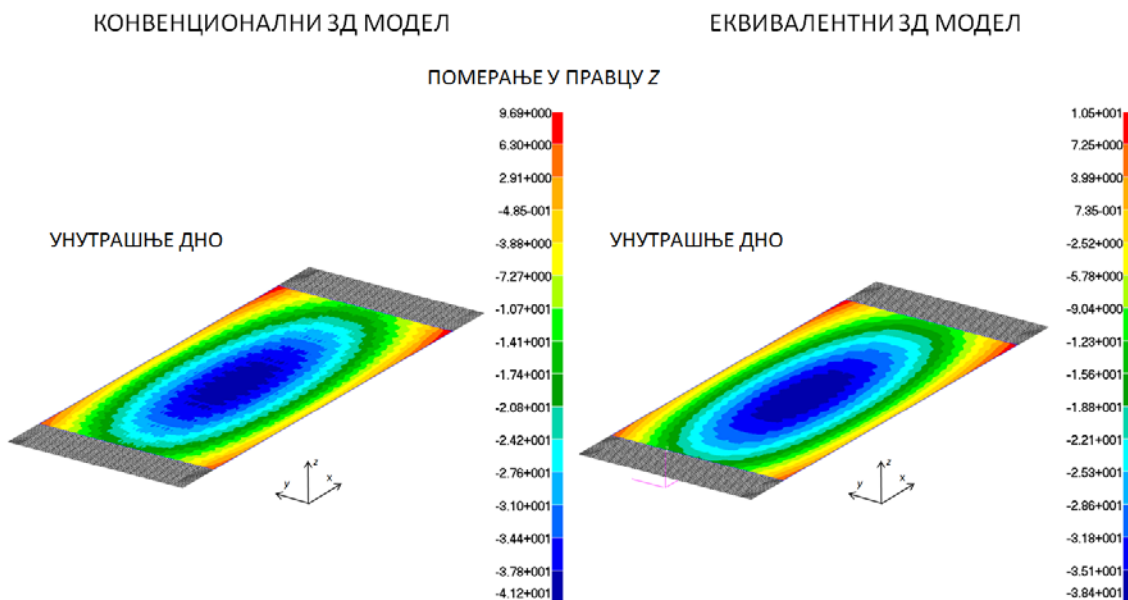
Слика 6.13. Померање 3Д модела, у правцу x

Мембрански одзив еквивалентних плоча много се боље слаже са истим одзивом у ребреним плочама. Разлике постоје због присуства укрућења у једном од модела па промена ових поља постаје мање „глатка“. Вертикална померања настају од латералних притисака воде и терета, као и утицаја момената и сила на крајњим

пресецима. Разлика у максималним вертикалним померањима дна и унутрашњег дна два модела је испод 5% (слике 6.14, 6.15).



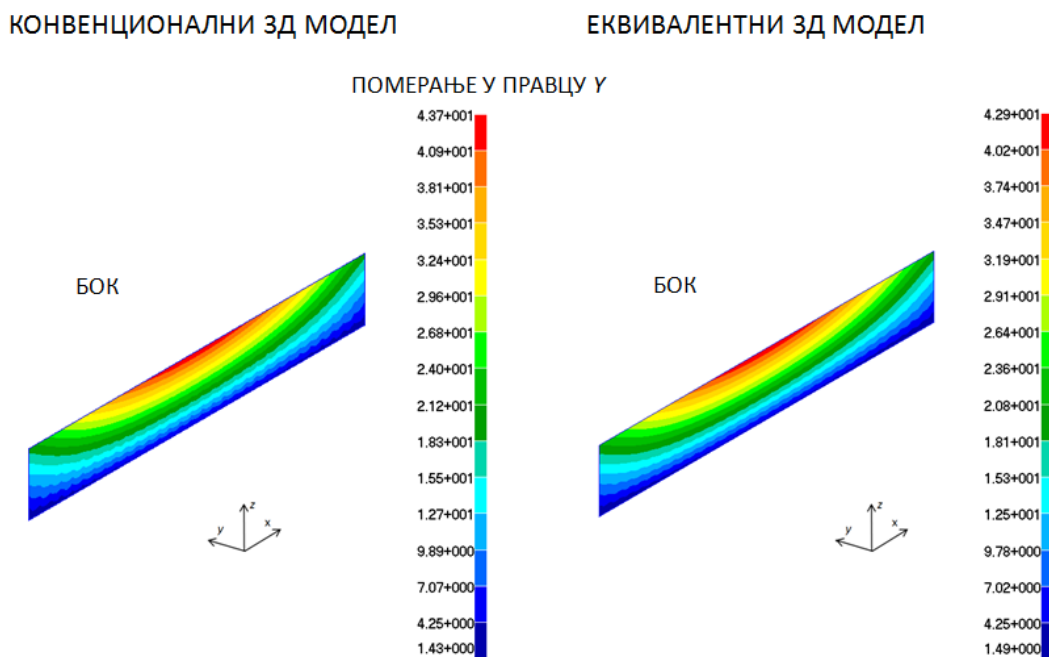
Слика 6.14. Померање дна, у правцу z



Слика 6.15. Померање унутрашњег дна, у правцу z

Поље вертикалних померања такође се добро прати у ова два модела. Ово је изузетно важно јер је лим дна и унутрашњег дна директно подвргнут савијању,

где се, како је објашено у претходним поглављима, очекује и највећа грешка у коришћењу методе еквиваленције. Доминантна померања бока (слика 6.16) и унутрашег бока (Прилог 1) су врло сличног карактера, попречног су правца у односу на подужну осу брода, а условљена су пре свега деловањем притиска воде на бок и крајњим моментима и силама.

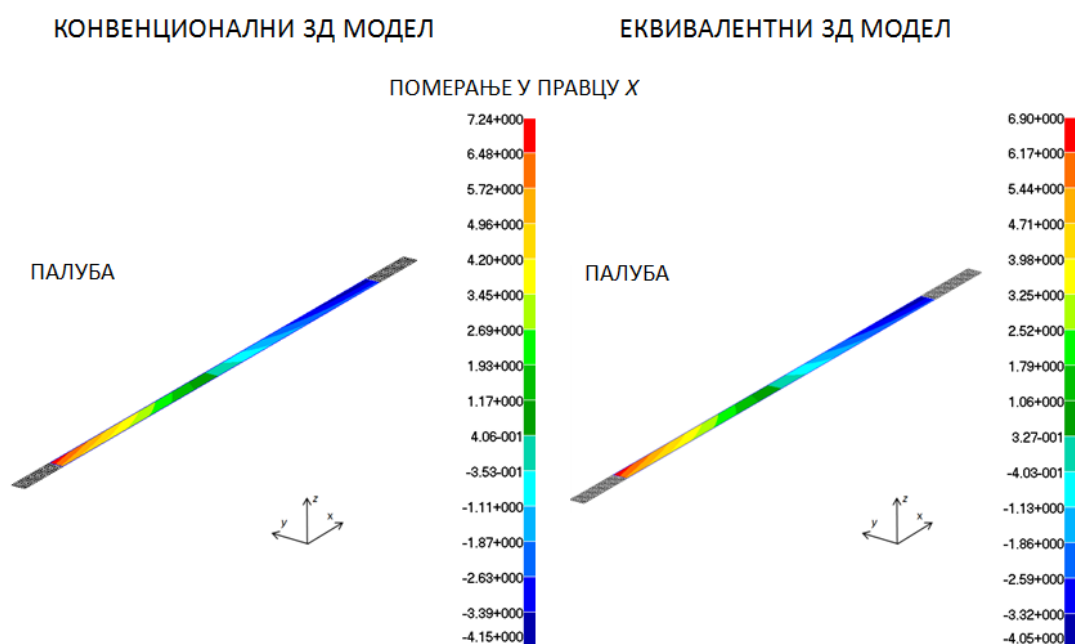


Слика 6.16. Померање бока, у правцу y

Треба напоменути да еквиваленција оребрених плоча бока и унутрашег бока није урађена на сасвим коректан начин. Наиме, критеријум савојног оптерећења приликом моделирања параметара еластичности еквивалентне плоче био је равномерно распоређен латерални притисак. У нумеричком моделу то није случај. На оребрену плочу делује променљив притисак трапезоидне расподеле (узгон). И поред оваквог упрошћења померања и напони бока и унутрашег бока у два модела одступају у неколико процената, при чему се и поља промена ових вредности добро поклапају. Ово је последица начина моделирања еластичних коефицијената који је током целог поступка „фаворизован“ у самом дефинисању методе еквиваленције. Еластични коефицијенти су тако моделирани да њихови модули еластичности заиста репрезентују крутост оребрене плоче у одређеном правцу,

тако да чак, и ако контурни услови и оптерећења не „прате“ оне идеалне (изабрани критеријум) одступања у коначним резултатима не буду значајна.

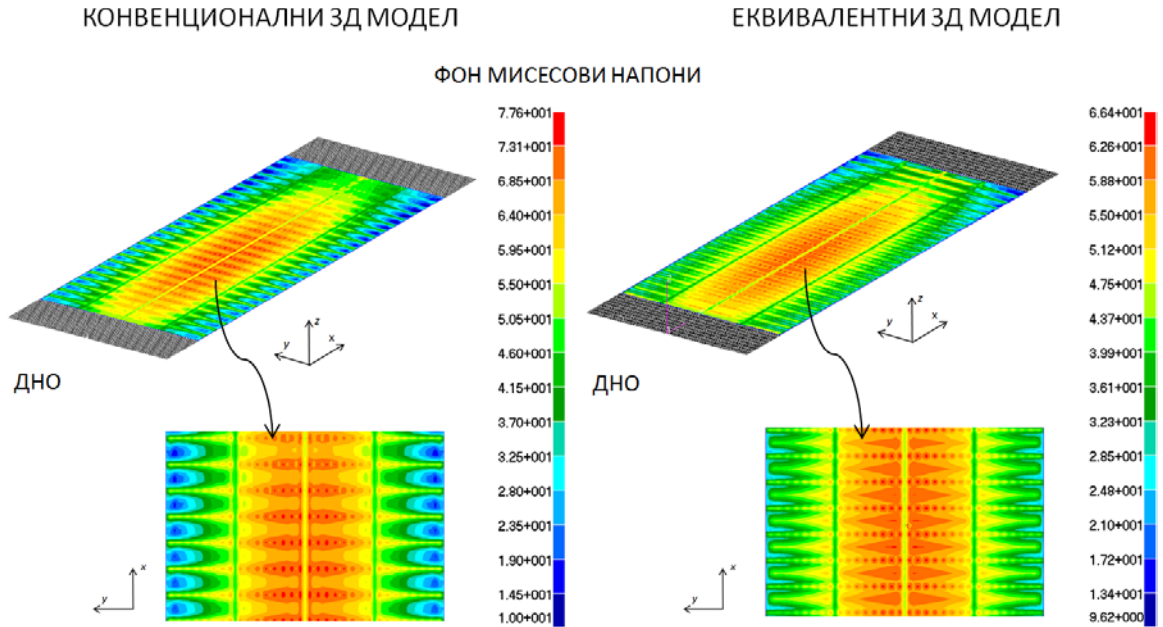
На торзиону кутију, палубу (слика 6.17) и пражницу не делују директна оптерећења, већ се на ову конструкцију највећим делом преносе крајњи моменти и силе. Стога, мембрански одзив овде постаје доминантан.



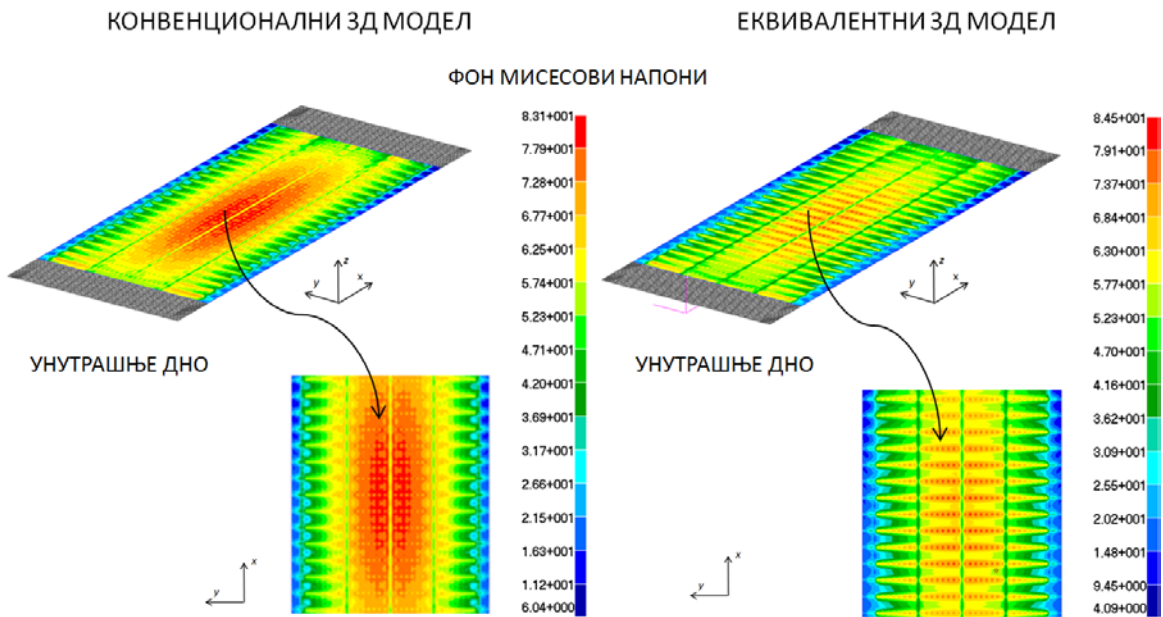
Слика 6.17. Померање палубе, у правцу x

Што се тиче фон Мисесових напона, њихове вредности у еквивалентном моделу доста зависе од карактера одзива појединачног дела конструкције. У случају да је део конструкције доминантно подвргнут савијању, одступања у напонима у поређењу са конвенционалним моделом су већа него у случају када је доминантно оптерећење мембранског карактера. Ово не само да се може видети у вредностима напона већ највише у њиховим променама дуж плоче. Дно брода је директно оптерећено на савијање услед деловања узгона, али и на мембранско оптерећење од вертикалних момената на крајњим пресецима. Напон у оба модела је, у лиму дна, највећи на средини конструкције. Поље промене напона еквивалентног и конвенционалног модела се добро прати, иако није истог квалитета као што је то било код померања. Разлог свакако треба тражити у самој еквиваленцији напона у

појединачној еквивалентној плочи: максимални напони у еквивалентној плочи нису на истој позицији као у оребреној плочи. Тенденција промене напона је слична у оба модела. Разлика максималних фон Мисерових напона у лиму дна је око 17% (слика 6.18).



Слика 6.18. Фон Мисерови напони у дну



Слика 6.19. Фон Мисерови напони у унутрашњем дну

Сличан карактер промене напона је и код унутрашег дна (слика 6.18). Одступање максималних фон Мисесових напона у два 3Д модела је око 2% , што је много мање него што је то случај у идеализованој еквиваленцији појединачне оребрене и еквивалентне плоче. Разлог овоме је и непредвидивости стварних контурних услова у нумеричком моделу (утицај примарних елемената које оивичавају оребрену и еквивалентну плочу), који некада могу погоршати, а некад побољшати поклапања у напонима. Међутим, поље промене фон Мисесових напона је најгоре репрезентовано еквиваленим унутрашњим дном у односу на конвенционално моделирано унутрашње дно, у поређењу са остатком трупа брода. Максималне вредности напона у појединачним плочама еквивалентног модела нису на истим местима као и у конвенционалном моделу. Начин промене (опадања) вредности напона је другачији. Оно што јесте слично је генерална позиција максималних напона у лиму унутрашег дна, и њихова промена. Треба ипак напоменути да је еквивалентни модел успео да препозна зоне максималних вредности напона. Унутрашње дно је најдоминантније оптерећено савојним притиском од терета. Вертикални моменти од крајева модела највише се преносе преко дна и палубе (торзиона кутија, празница) и ту изазивају мембрански одзив. Унутрашње дно је близу неутралне осе попречног пресека па врло мало преноси ове моменте, што доводи да је примарни одзив овог дела конструкције заправо секундарни: савијање лима између примарних елемената конструкције. Када је овакав случај, долазиће увек до највећих одступања фон Мисесових напона у лиму еквивалентног и конвенционалног дела конструкције. У унутрашњем дну су уједно и највећи фон Мисесови напони у 3Д моделу (и конвенционалном и еквивалентном).

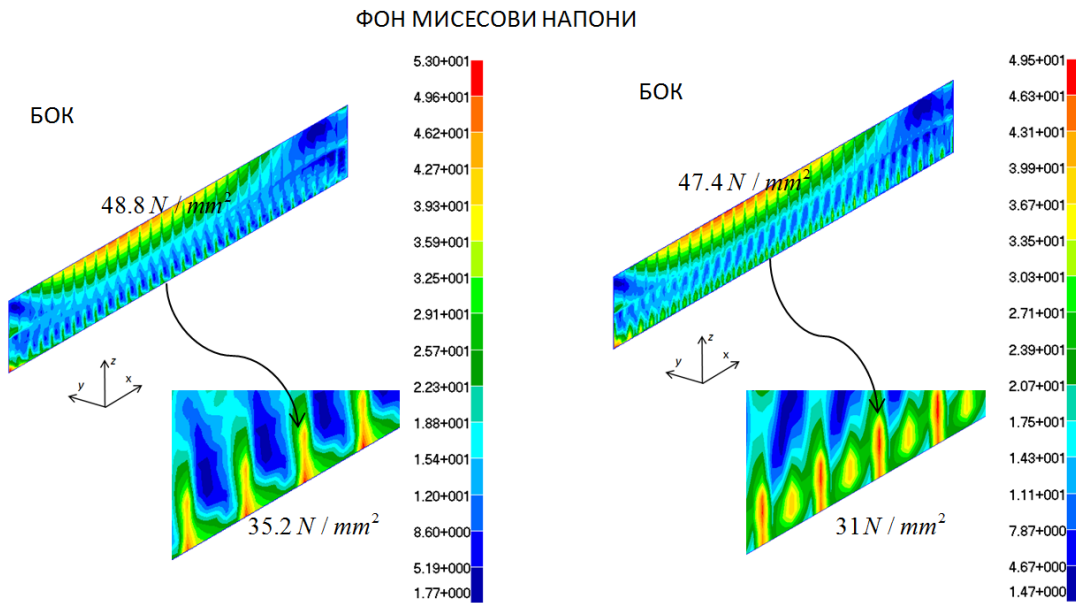
Бок доживљава концентрације напона на својим крајевима (спој са унутрашњим дном и палубом). Поља промене напона у боку два поређена модела се релативно коректно прате. На бок делује, комбиновано, савојно и мембранско оптерећење. Доминантни узрочник фон Мисесових напона у лиму унутрашег бока су моменти и силе на крајњим пресецима модела (Прилог 1).

Што се тиче торзионе кутије, палубе (слика 6.21) и празнице, фон Мисесов напон ових делова конструкције је последица мембранског одзива услед деловања

момената и сила на крајевима модела. Поља промене напона се добро поклапају у оба модела (конвенционални и еквивалентни). Повишени напон на споју палубе и бока у еквивалентном моделу разликује се за 3.3% у односу на исти у конвенционалном моделу, док је у случају празнице то одступање мање од 1% (Прилог 1).

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

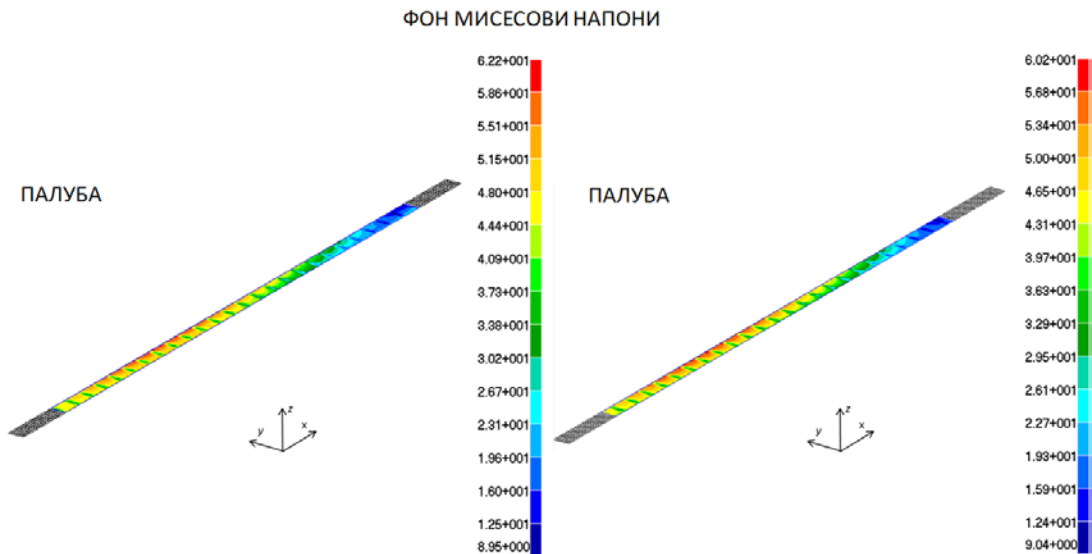
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика 6.20. Фон Мисесови напони у боку

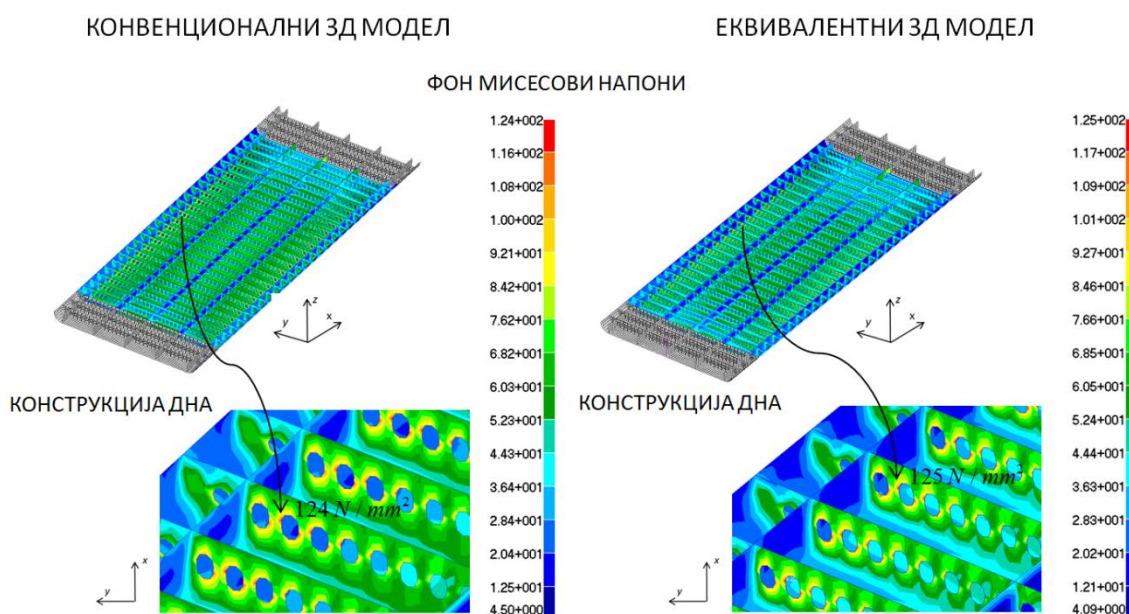
КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика 6.21. Фон Мисесови напони у палуби

Максимални фон Мисесови напони у оба 3Д модела налазе се у отворима на ребреницама (слика 6.22). Овај део конструкторске није моделиран еквивалентним плочама јер се ради о примарној стурктури. Максимални напон у ребреницама конвенционалног модела је 124 N/mm^2 , док је код еквивалентног модела, на истој позицији, једнак 125 N/mm^2 . Ово говори у прилог томе да еквивалентне плоче добро преносе оптерећења на део конструкторске који није моделиран еквивалентним плочама. Ово је последица начина моделирања еластичних коефицијената еквивалентне плоче, којима је еластичност (крутост) сваког правца репрезентована одговарајућим моделима еластичности и дебљинама. Максимални фон Мисесови напони у делу конструкторске који је моделиран еквивалентним плочама је 83.1 N/mm^2 у унутрашнем дну конвенционалног и 84.5 N/mm^2 у унутрашнем дну еквивалентног модела.



Слика 6.22. Фон Мисесови напони у конструкцији дна

Фон Мисесови напони и померања у конвенционалном моделу су генерално већих вредности него они у еквивалентном моделу. Ово није правило, и зависи од нивоа еквиваленције појединачних модела ребрена плоча – еквивалентна плоча и разлике идеализованих (приликом моделирања коефицијената еластичности) и стварних контурних услова у нумеричком 3Д моделу.

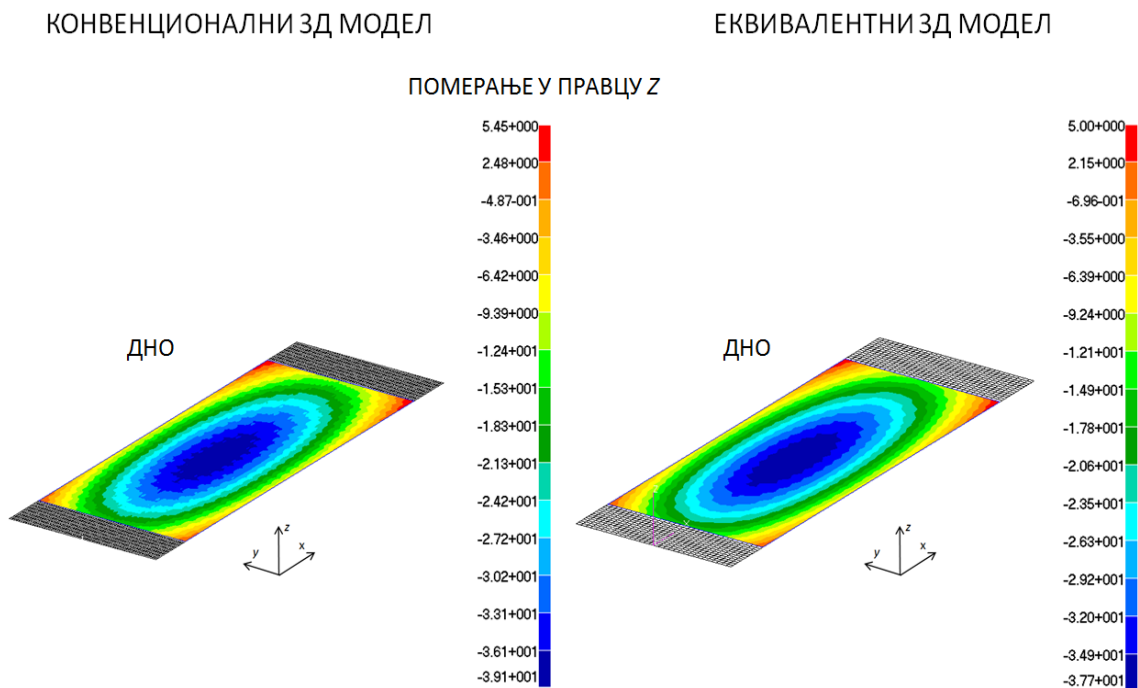
Уочљиво је да се најбоља поклапања у одзиву два 3Д модела дешавају при доминантно мембранским оптерећењима. Одступања два модела (табела 6.9) у померањима по x и y правцу су испод 5% у скоро свим деловима конструкије. Одступања померања у правцу z варирају од неколико процената (дно, унутрашње дно) до 18.21% (палуба) и 25.83% (пражница). Вредности фон Мисесових напона еквивалентног модела у односу на конвенционални разликују се у границама од неколико до 15%.

6.2 Еквивалентни 3Д модел са редукованим бројем степени слободе

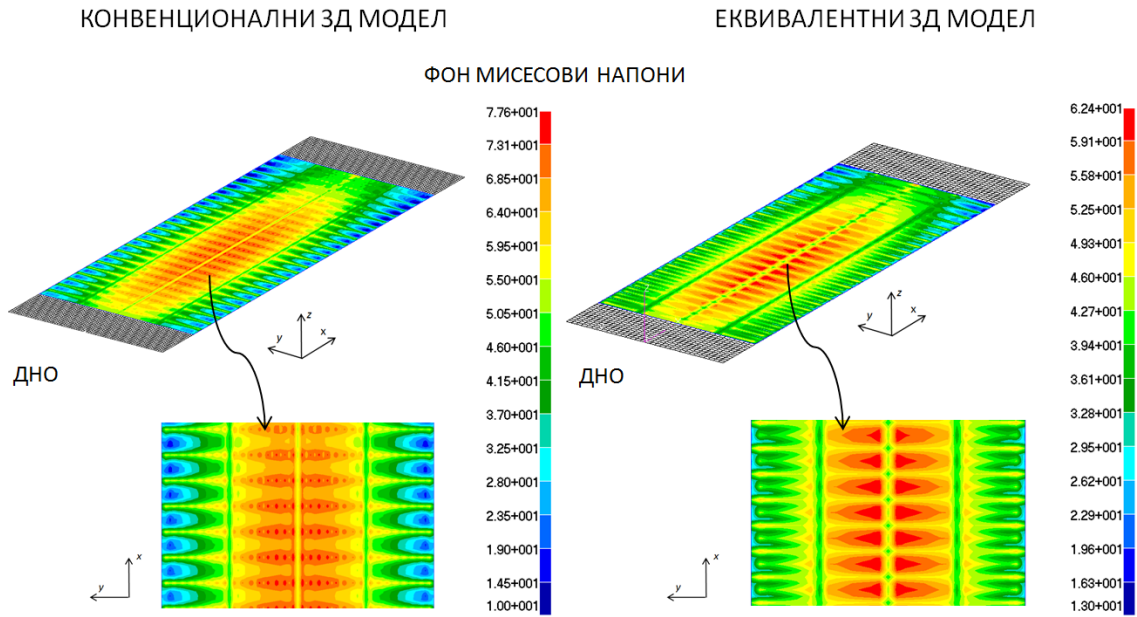
Генерално сви закључци који су важили у претходној анализи важе и у овој и по питању карактера одзива, промене поља напона и померања (табела 6.6 и 6.7). Препознате зоне максиманих померања и напона остају исте и у новом моделу. Максималне вредности се нешто мало разликују. Мембранска померања еквивалентног модела одступају и даље у свега неколико процената, у односу на конвенционални модел. Максимална разлика у померањима је испод 23%, и код унутрашњег бока. Разлике у максималним фон Мисесовим напонима су до 15%. Илустрација поља вредности угиба и фон Мисесових напона за овај случај еквивалентног модела приказана је на сликама 6.23 – 5.27, и у Прилогу 1.

Приказани резултати оправдавају употребу еквивалентног модела са мањим бројем степени слободе. Разлике у крајњим максималним вредностима померања неће бити значајне. Добра поклапања у максималним вредностима померања и фон Мисесових напона не значе да је иста тенденција задржана у самим репрезентативним оребреним плочама. Поредићи конкретне оребрене плоче са

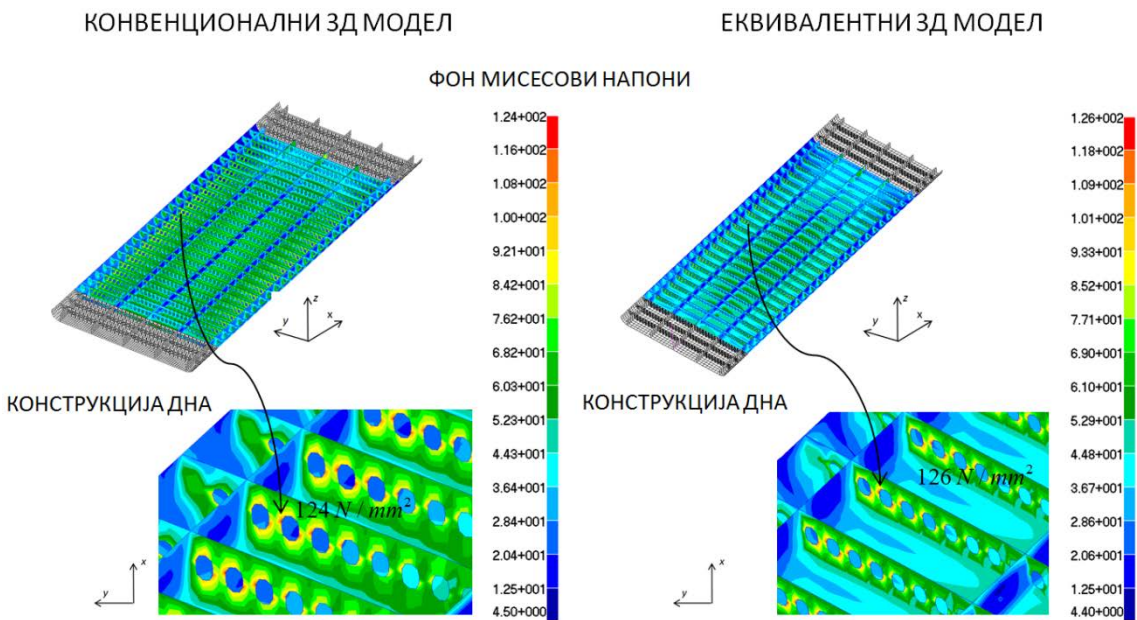
њиховим еквивалентним плочама у 3Д моделима разлике у одзивима постоје и крећу се од неколико процената и до 40% и у еквивалентном моделу са истим и редукованим бројем степени слободе. Важно је напоменути да су највеће разлике управо тамо где још досеже утицај момената и сила од крајњих пресека. То су делови конструкције уз саме крајње пресеке. Тамо где је одзив консктрукције највећи, ту су и разлике у еквивалентном и конвенционалном моделу најмање. Максимални фон Мисесов напон у целој конструкцији је исти као и у конвенционалном моделу. Вредност овог напона је сада 126 N/mm^2 (124 N/mm^2 у конвенционалном моделу) и налази се такође на истој локацији, на контури отвора у ребреницама (слика 6.25).



Слика 6.23. Померање дна, у правцу z



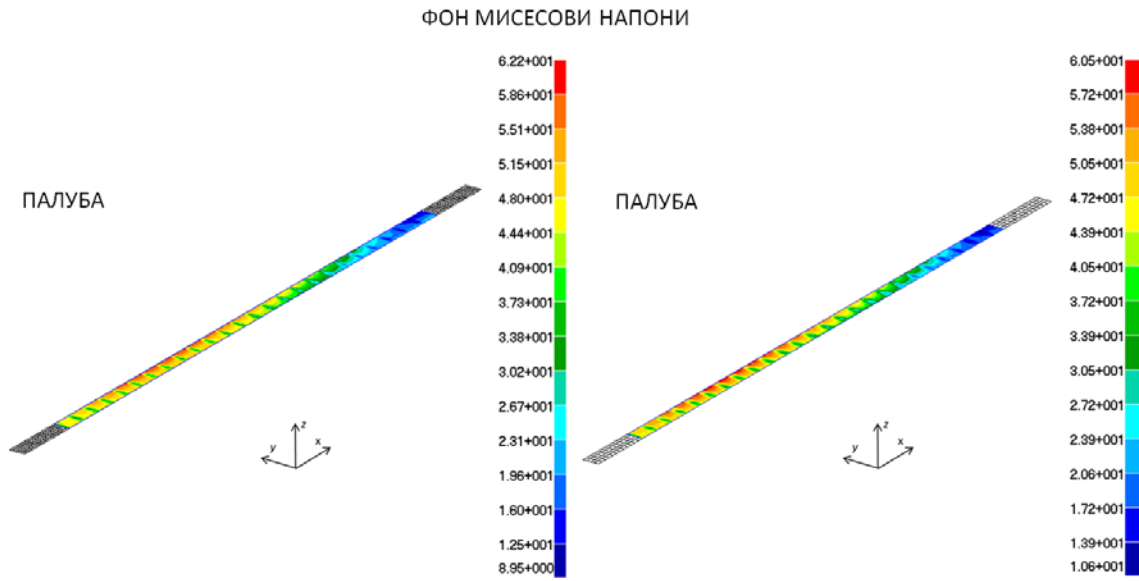
Слика 6.24. Фон Мисесови напони у дну



Слика 6.25. Фон Мисесови напони у конструкцији дна

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

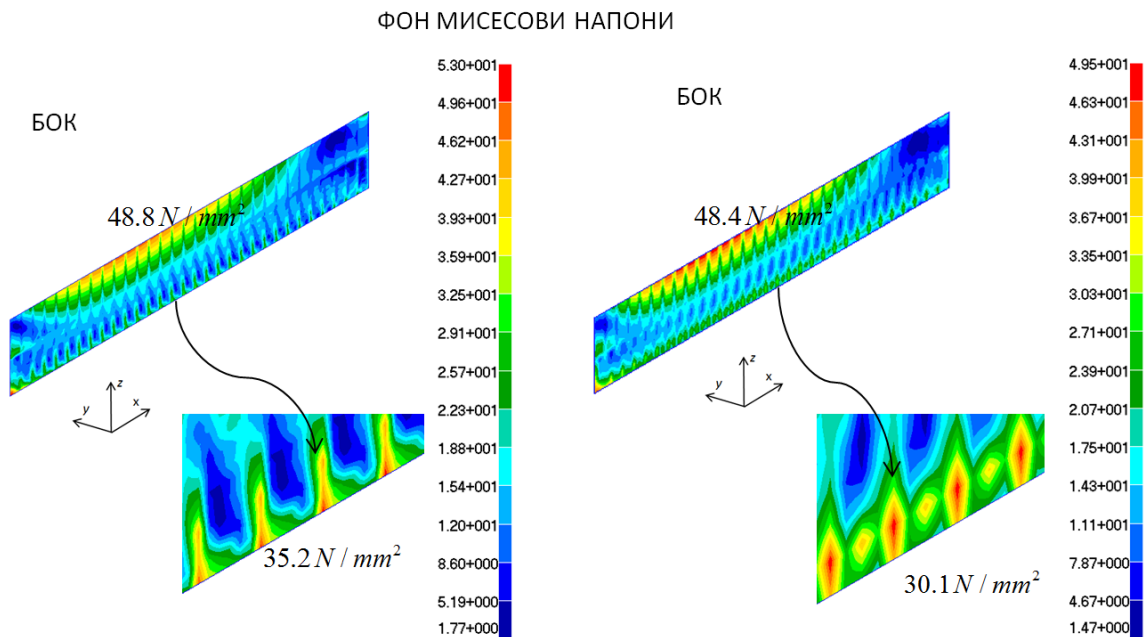
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика 6.26. Фон Мисесови напони у палуби

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика 6.27. Фон Мисесови напони у боку

6.4 Одступања померања и напона

Као што се може приметити еквиваленција померања је боља од еквиваленције напона у нумеричком моделу бродске конструкције. Тим пре је ово битније кад се узме у обзир да је еквиваленција урађена за 3 управне компоненте померања. Код напона то није био случај, па еквиваленција фон Мисесовог напона не значи еквиваленцију компоненталних напона. Померања у два модела, у односу на фон Мисесове напоне, се не подударају боље само по максималним вредностима, већ и по пољима промене ових величина. Ово је могуће приметити код свих примера еквиваленције урађеним у овом раду. Код савијања се, донекле, ремети ова слика. У еквивалентној плочи подвргутој латералном притиску, максимални угиб је на средини и његова вредност се смањује ка ивицама. Насупрот овоме, оребрена плоча може имати више максимума, који су последица савијања плоче између укрућења. Стога, што је удео мембранског у укупном одзиву конструкције већи (а савојног мањи), промена вертикалног померања (угиба) тачака на еквивалентној плочи више се подудара са истим померањима тачака у оребреној плочи.

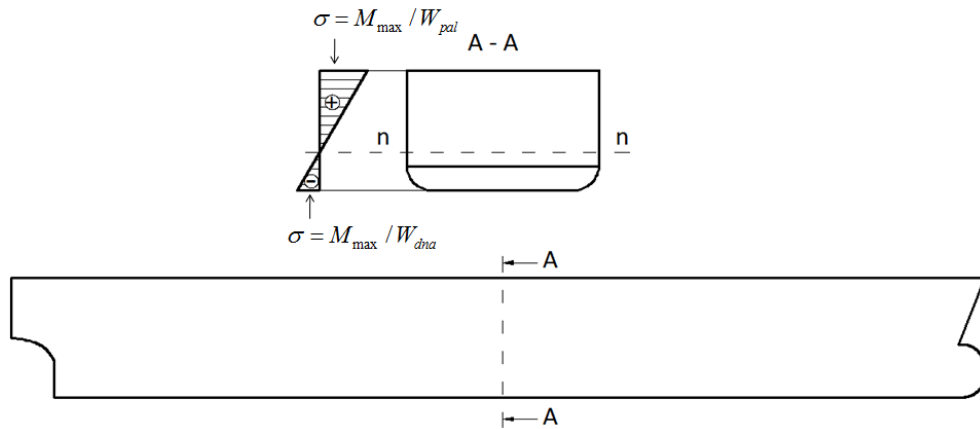
Добро поклапање померања у конвенционалном и еквивалентном моделу је чињеница која се може користити у и у анализи напона укрућења која нису моделирана еквивалентним моделом. У овом случају то су уздужнице, тј. секундарна структура. У конвенционалном моделу максимални напони у гредама су савојни, у гредама које репрезентују уздужнице унутрашњег дна и износе $197 N / mm^2$. Ови напони последица су савијања греда услед притиска терета и испољавају се као концентрације напона на спојевима са попречним ребреницама. У реалној конструкцији ове концентрације напона имају мање вредности јер се конкретан спој уздужнице са ребреницом не моделира у глобалном нумеричком моделу. Напони у гредама се не могу предвидети еквивалентним моделом. Еквивалентни модел претпоставља да су укрућења, у структурном смислу, хомогенизована са плочом. За оно што може послужити еквивалентни модел и коректна репрезентација померања у поређењу са конвенционалним моделом

свакако су контурни услови. С обзиром на „добра“ померања у еквивалентном моделу, иста је могуће пренети на нумерички моделирану оребрену плочу и тиме наћи напоне у гредама. Оребрена плоча дна или унутрашњег дна је сада јединствен модел коначних елемената, на који делује узгон или терет, а контурни услови по ивицама плоче су иста она померања који се на том месту налазе у еквивалентном моделу. Будући да се померања еквивалентног и конвенционалног модела добро слажу, са задовољавајућом прецизношћу могуће је наћи и контурне услове за појединачну анализу чврстоће плоче са укрућењима. У примеру 3Д модела из овог Поглавља, максимални напон у уздужницама оребрене плоче унутрашег дна је $175 N / mm^2$. Максимални напон у уздужницама исте оребрене плоче оптерећене теретом (као и у 3Д моделу) и контурним условима (3 транслације и 3 ротације), који су пренешени из еквивалентног 3Д модела трупа брода, је $186 N / mm^2$. Одступање максималних напона у два модела је око 6%. Ово је директна последица доброг подударња померања, и то у сва 3 управна правца, у оба модела.

6.4 Нормални напони

Један од циљева анализе чврстоће трупа брода применом МКЕ је и проналажење нормалних (притискујућих) напона који могу изазвати извијање оребрених плоча. У случају трупа брода, највећи нормални напони обично се налазе на крајњим деловима попречног пресека. Имајући у виду положај неутралне осе попречног пресека трупа брода, који је, код оваквих попречних пресека, обично нешто изнад линије унутрашњег дна, максимални равански напони су подужног карактера и најзаступљенији су у подручју палубе, празнице, дна брода. У случају да брод доживљава угиб (*sagging*), односно да је његова еластична линија одговара оној из примера из овог поглавља: палуба и празница доживљавају притисак, а дно

истезање. Ово значи да су оребрене плоче палубе и празнице најизложеније потенцијалном извијању. У случају да труп брода доживљава прогиб (*hogging*) дно је најизложеније већим притискајућим напонима, док се палуба и празница истежу.



Слика 6.28. Расподела нормалних напона у попречном пресеку трупа брода

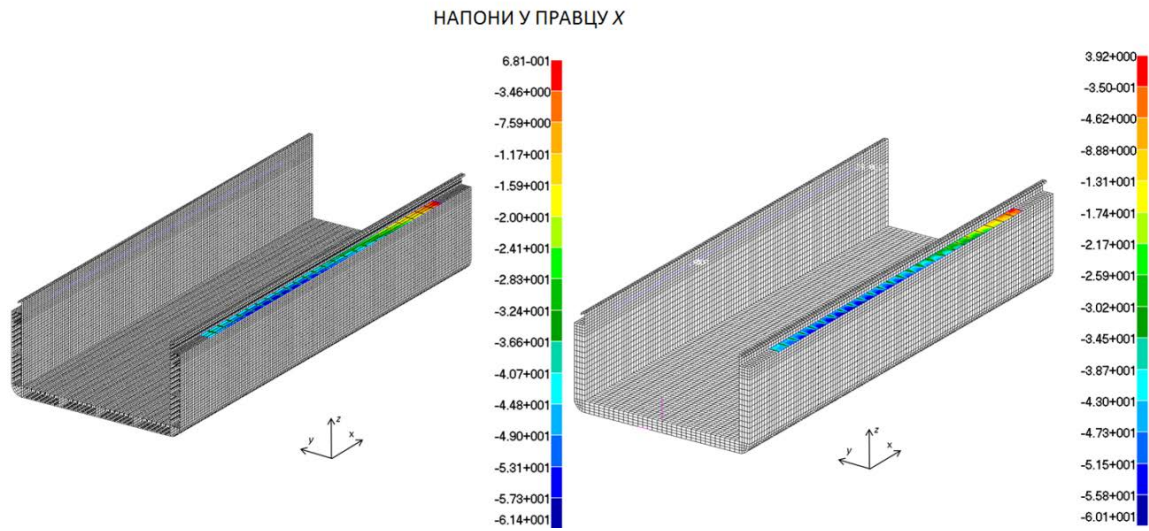
У самој методи еквиваленције критеријуми напона за моделирање мембранских параметара еквивалентне плоче фаворизовали су подужни напон (у правцу подужне осе брода). Ово је, наравно, рађено јер је заиста мембранска подужна компонента напона доминантнија од оне попречне, пре свега због утицаја вертикалног момента. Ова чињеница свакако помаже у прецизнијем идентификовању притискајућих напона који делују на оребрену плочу бродске конструкције, коришћењем еквивалентних коначних елемената. На слици 6.29 и 6.30 приказано је поље подужне компоненте напона σ_x за палубу и дно брода. Поређен је 3Д нумерички модел састављен од конвенционалних коначних елемената и еквивалентни модел трупа са редукованим бројем коначних елемената (исти редукован модел коришћен је у претходној анализи). Палуба брода у овом случају доживљава притисак, а дно истезање. Разлика у максималним притискајућим напонима у палуби између два нумеричка модела је око 2%, односно $61.4 N / mm^2$ код конвенционалног МКЕ модела, а $60.1 N / mm^2$ код еквивалентног МКЕ модела. Поља промене овог напона, у два модела, прате се са сличном корелацијом. Дакле, подужни напони из еквивалентног модела свакако се могу искористити у анализи извијања оребрених плоча палубе.

Иако је дно у истезању дати су подужни напони овог дела конструкције (слика 6.30). Пошто је у питању линеарно еластична анализа, у случају да је дно у притиску, ниво поклапања подужних компоненти напона био би сличан као и у случају истезања. Подужни напони овде не доводе, дакле, до извијања дна, али ради поређења, треба их напоменути. Максимални подужни напон у конвенционалном моделу је $50.2 N / mm^2$, док је у еквивалентном моделу једнак $60.2 N / mm^2$. Ралика од 16.6% је много већа него у случају палубе. Разлог овоме је свакако чињеница да у подужној компоненти напона поред мембранске компоненте напона у правцу x , постоји и савојна компонента напона у правцу x . Ове две компоненте се сабирају или одузимају у зависности од правца њихових вектора. Пошто је лим дна поред мембранског подвргнут директно и савојном напрезању од притиска воде на оплату, утицај ове друге компоненте је свакако значајан. У опису методе еквиваленције објашњени су разлози веће „нетачности“ моделирања савојних параметара еквивалентне плоче. Стога је одступање подужне компоненте напона еквивалентног модела последица је пре свега ротације чворова у подужном правцу као компоненте савијања.

Дакле, за добијање подужних напона у циљу прорачуна извијања оребрених плоча могуће је користити напоне добијене у нумеричком моделу састављеном од еквивалентних плоча. У случају да је део конструкције доминантно мембрански оптерећен, онда се добијени напони у еквивалентном моделу врло мало разликују од вредности у конвенционалном моделу са много више коначних елемената. Већа одступања настају када је посматрани део конструкције оптерећен на савијање. За разлику од мембранског критеријума фон Мисесовог напона где је највећи удео била подужна компонента, код савијања је знатно сложенија ситуација, па савојне компоненте напона у оребреној плочи не „прате“ оне у еквивалентној плочи.

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

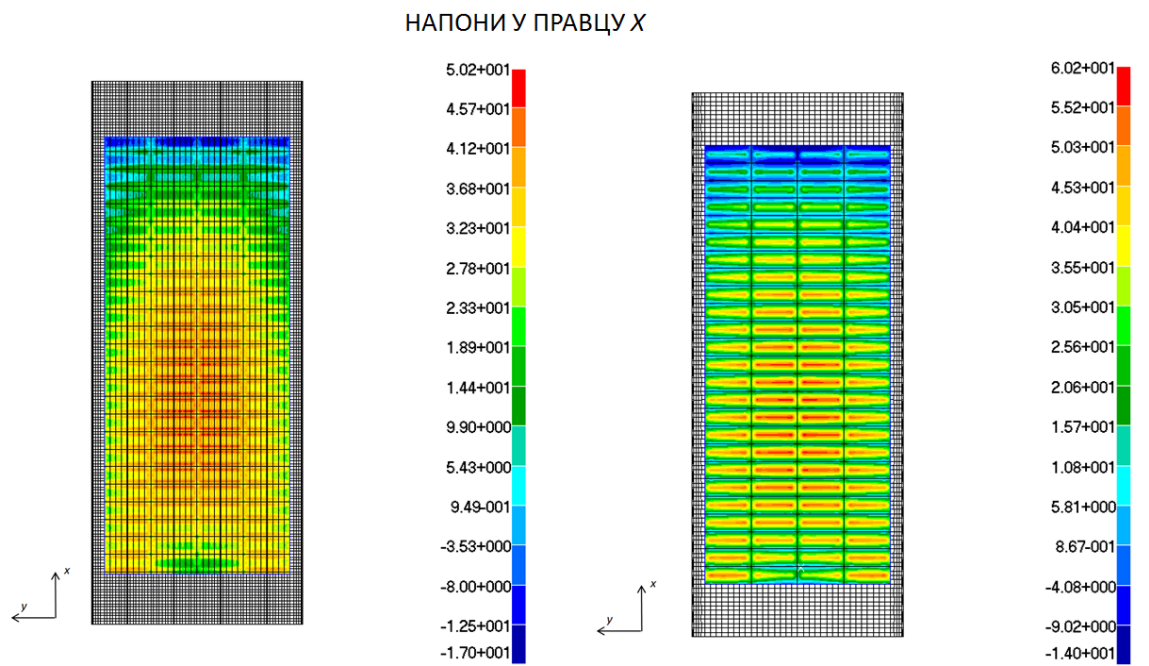
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика 6.29. Палуба - напони у правцу x

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика 6.30. Дно - напони у правцу x

7 Мерење одзива оребрених плоча

7.1 Циљ мерења

С обзиром на сложеност проблема савијања оребрених плоча, мерење њеног стварног понашања представља изузетно значајну информацију. Конкретно, за добијање ортотропних карактеристика еквивалентне плоче подаци о максималном угибу и максималном напону оребрене плоче су неопходни, и представљају једине непознате улазне величине у примени методе еквиваленције. Стога, верификација и оцена поузданости нумерички добијених величина (угиби, напони) екпериментом, директан је циљ спроведеног мерења.

Угиб, деформације и напони у било којој оребреној плочи, тешко се увек са прихватљивом тачношћу могу прорачунати коришћењем једне од постојећих ненумеричких метода прорачуна. Идеализације геометрије, завареног споја, материјала, моделирање геометријских дисконтинуитета, нетачност нумерике (утицај густине мреже коначних елемената, нетачност методе) често не узимају у

обзир реално понашање конструкције и утичу на резултате нумеричког прорачуна. Експерименталном верификацијом нумеричког (МКЕ) модела добија се одговор о поузданости методе. Експеримент би требало да покаже стварне вредности угиба и напона у моделу.

Задатак мерења био је да се што реалније симулира карактеристично оптерећење којем је током своје експлоатације, подвргнута једна структурна бродска јединица конструкције трупа брода – оребрена плоча. У ту сврху извршена су мерења одзива три карактеристична модела слободно ослоњених оребрених плоча подвргнутих савијању услед латералног притиска равномерно распоређеног по површини плоче. Модели симулирају одзив дела бродске конструкције оивичене јаким носачима, а услед дејства равномерног притиска који може бити последица хидростатичког притиска околне воде, притиска течности у танковима, притиска терета итд. Јаки носачи у реалној конструкцији репрезентовани су рамом на који се модели ослањају по својим ивицама, симулирајући услове слободних ослонаца. Мерења су померања (вертикални угиб и раванска померања тачака), а потом израчунате одговарајуће деформације и напони.

7.2 Процедура мерења

7.2.1 Мерни модели

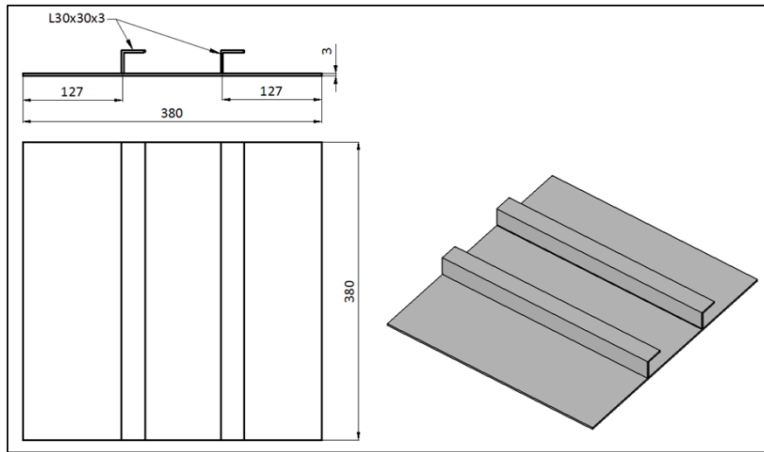
Мерни модели представљени су са 3 челичне оребрене плоче, димензијама прилагођеним постојећој испитној инсталацији. Димензије плоче свих испитних модела су $400 \times 400 \text{ mm}$. Дебљина плоча је 3 mm . Материјал плоче и укрућења је челик. Карактеристике материјала су: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N / mm}^2$ и $\nu = 0.3$.

Модел 1 (слика 7.1) представља плочу оребрену са два укрућења у једном правцу. Укрућења су „L“ профили димензија $30 \times 30 \times 3 \text{ mm}$. Модел 2 (слика 7.2) је плоча оребрена са три укрућења које представљају „L“ профили димензија $30 \times 30 \times 3 \text{ mm}$. Оба модела немају укрућења у другом управном правцу. Модел 3 (слика 7.3) је плоча оребрена са такође три укрућења („L“ профили $30 \times 30 \times 3 \text{ mm}$) у једном правцу и два савијена „L“ профила диманзија $70 \times 25 \times 3 \text{ mm}$, која се пружају супротним, управним, правцем. У свим моделима укрућења су еквидистантна.

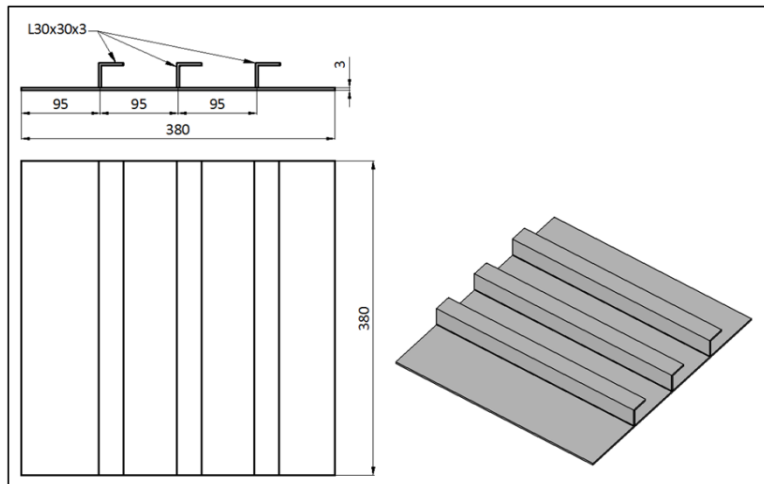
Прва два модела су оребрене плоче ојачане у само једном правцу укрућењима која представљају секундарну структуру на броду. Модели би, у том случају, били оивичение примарним елементима. Пример овакве конструкције може бити дно брода уздужне градње, које се простире између ребреница и провеза дна, или било који део панела оивичен примарним носачима (део танка, палубе, торзионе кутије). Модел 3 представља део панела који се састоји од примарних и секундарних елемената конструкције. Јаки носачи, ређе распоређени се простиру у једном правцу, док се укрућења слабијег попречног пресека простиру у другом, управном правцу, пролазећи кроз носаче у карактеристичним отворима (слика 7.3) који су направљени у овом моделу.

Иако направљени као модели малих димензија, али и не толико уобичајено малог броја укрућења у једном правцу, испитни модели оребрених плоча задржавају карактер одзива који би био и када би се уместо њих налазили модели много веће реалне конструкције панела. Укрућења су довољно мала у односу на плочу, однос њихових међусобних растојања и висине одговара карактеристичним односима у бродоградњи, дебљине плоче и укрућења су исте, односи момената инерције, отпорних момената, површина попречног пресека у односу на исте геометријске карактеристике плоче су задржани као у реалном панелу. С обзиром да се, у габритном смислу, ради о малим моделима, па би количина заварених спојева по површини модела ипак била нешто већа него код реалнијих бродских конструкција што би могло утицати на крутост плоче, заваривање је сведено на минимум. Коришћењем “CO₂” апарата направљени су варови од свега неколико

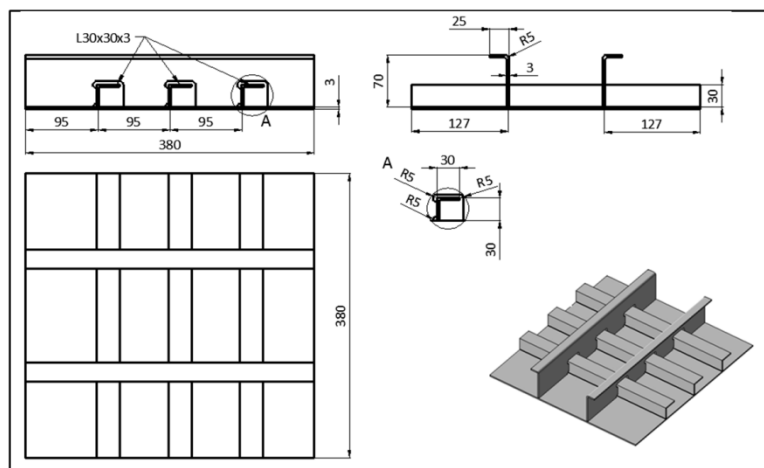
милиметара. И поред овога, треба имати у виду повећану количину варова по површини плоче при тумечењу резултата. Укрућења која представљају секундарну структуру су заварена цик – цак поступком, док су у јаки насачи у Моделу 3 заварени потпуно, са једне и са друге стране. Овај начин заваривања се користи у бродоградњи, па су оребрене плоче и у том смислу прихватљиво репрезентоване. „L“ профили су изабрани не само због приступачности, већ и зато што заиста од свих понуђених профила најдостојније репрезентују уобичајене попречне пресеке елемената секундарне структуре који се појављују у бродоградњи (холанд профили, „L“ профили). „L“ профили се најчешће и користе уместо холанд профила у моделовању бродских констрикција нумеричким методама. Такође, као што се види, сви мерни модели имају по 2 или 3 укрућења која репрезентују секундарну структуру („L“ профили у моделима). Оребрене плоче у конструкцији великих бродова углавном имају већи број секундарних укрућења (од 2 до 10 комада у једном правцу). Димензије мерних модела, условљене су димензијама лабораторијске инсталације, и директно су диктирале број укрућења у правцима. Такође, за оребрене плоче са мањим бројем укрућења у правцу (2 или 3) може се рећи да се понашају „неправилније” од оних са великим бројем укрућења. Наиме, оребреним плочама са великим бројем укрућења по ширини или дужини плоче могуће је прецизније одредити одзив постојећим прорачунским методама, пре свега ненумеричким. Овакве плоче имају хомогенији одзив, и сама укрућења се „хомогеније“ утапају у крутост плоче. Стога, лакше је и препознати крутости оребрене плоче у два правца. Плоче са мањим бројем укрућења по некој од својих страница, имају нехомогенију расподелу угиба по својој површини, исто се односи и на расподелу напона. Одређивање крутости у правцу простирања укрућења, по коме се налазе два или три укрућења, не може се одредити са прецизношћу са којом би се могла одредити иста крутост код плоче великог броја рапоревених укрућења. Стога, ове плоче теже се могу идентификовати са густо оребреном плочом која се најчешће користи у конструкцијама, па експериментално одређивање угиба, деформација и напона може бити интересантније.



Слика 7.1. Модел 1



Слика 7.2. Модел 2

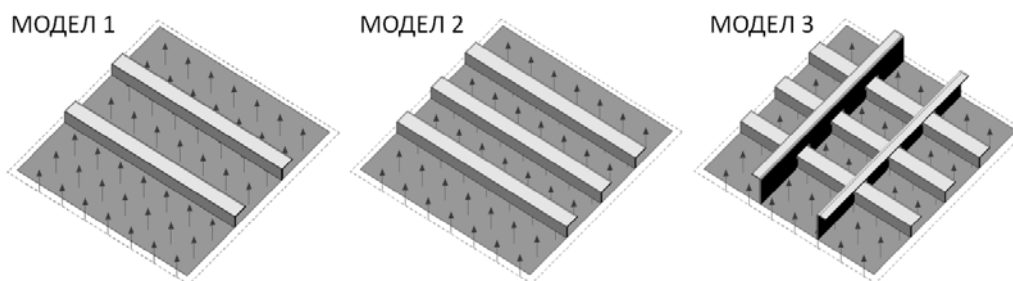


Слика 7.3. Модел 3



Слика 7.4. Мерни модели оребрених плоча

Мерни модели су слободно ослоњени по својим ивицама и оптерећени равномерним притиском по површини плоче (слика 7.5).

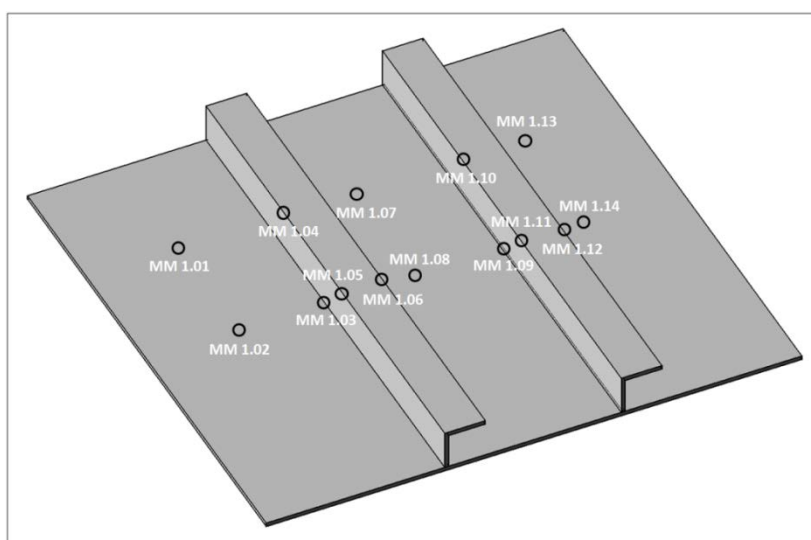


Слика 7.5. Оптерећења и контурни услови мерних модела

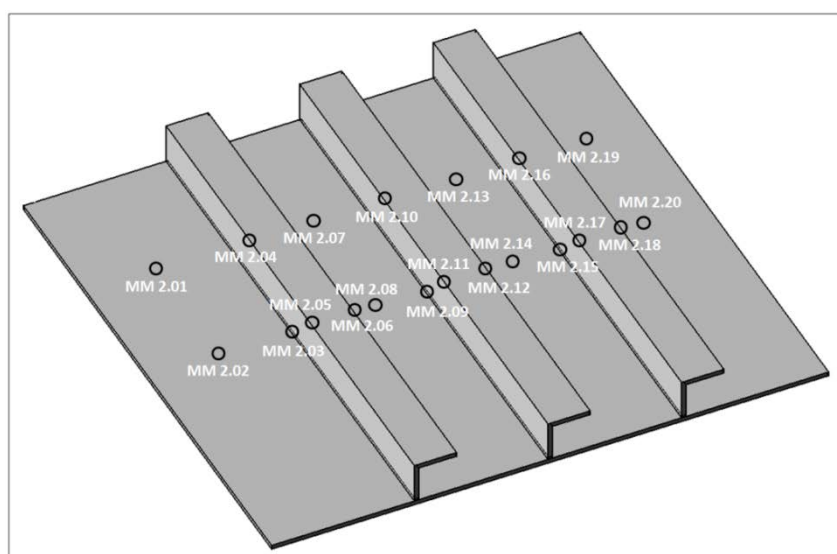
На моделима извршено је више мерења, а према очекиваном карактеристичном понашању конструкције на основу нумеричких анализа. Средина оребрених плоча и делови плоче између укрућења су места са очекиваним максималним угибима. Позиције на средини распона укрућења су очекивана места концентрације напона. Угиби су мерени комапаратером, индуктивним сензором померања и оптичком методом. Напони су добијени, поред коришћења оптичке методе, и мерењем промене растојања две изабране тачке на конструкцији, а применом бесконтактног (*Eddy – Current*) сензора са магнетима позиционираним на мерне тачке конструкције. Почетно растојање између мерних тачака, тј. самих магнета је 26 mm и представља довољно малу дужину да се „ухвати“ концентрација напона на моделима оребрених плоча.

Треба напоменути да мерне оребрене плоче имају почетне деформације изазване заваривањем. Такође, елементи (плоче) који служе да се равномерно пренесе оптерећење од хидрауличког цилиндра на површину модела траже нешто јачу

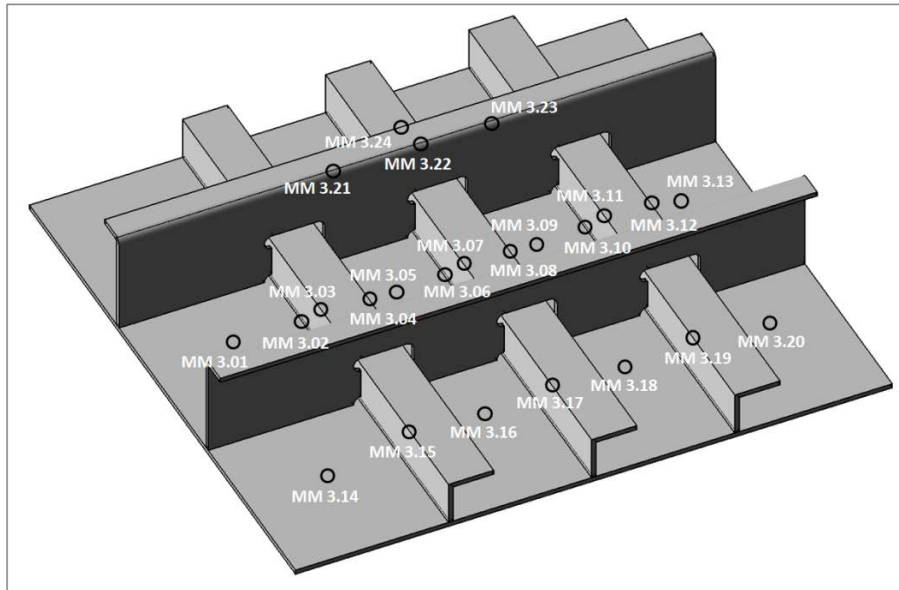
силу да би се попунили зазори између њихових налегања, тј. „боље“ пренела сила. Стога, мерни модели су преднапрегнути пре мерења, а у циљу исправљања деформисаних модела, и коректнијег преноса силе од хидрауличког цилиндра до плоче. Преднапрегнуто стање сваког модела је проглашено за нулто, тј. оно од ког се почиње мерење. Ово стање је различито по моделима и добијено је серијом пред – експеримената, којима је утврђено да је минимална сила преднапрезања Модела 1 око 15 kN , Модела 2 око 20 kN и Модела 3 око 30 kN . Сва мерења су извршена у линеарно – еластичној области понашања материјала конструкције.



Слика 7.6. Позиције мерних места у Моделу 1



Слика 7.7. Позиције мерних места у Моделу 2



Слика 7.8. Позиције мених места у Моделу 3

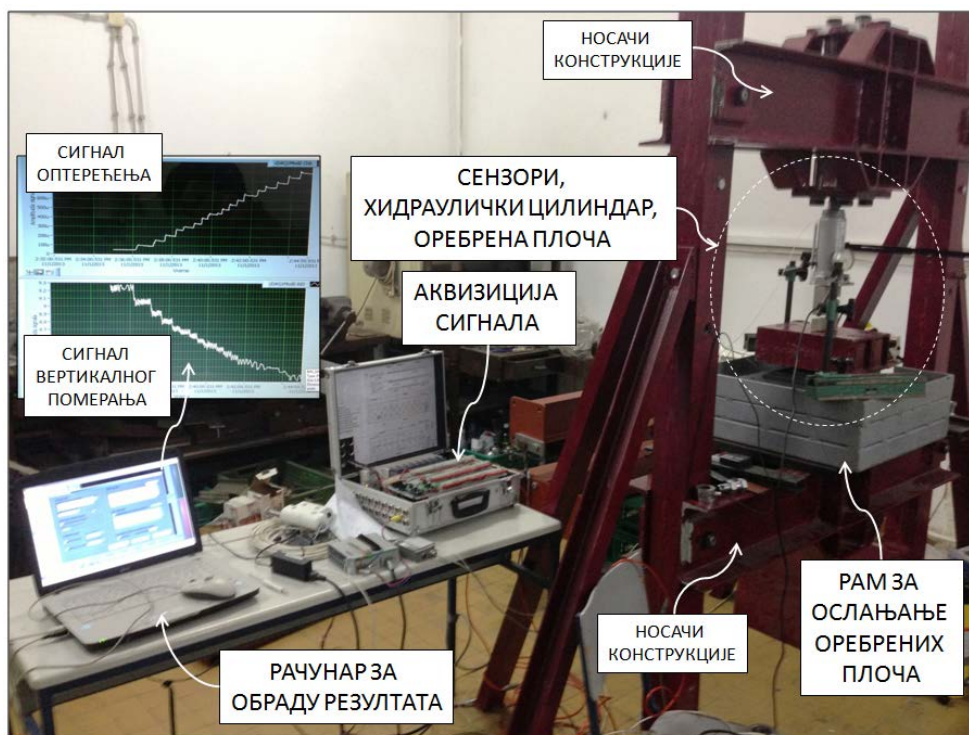
7.2.2 Мерна инсталација

Мерење је извршено у лабораторији за Отпорност конструкција, Машинског факултета у Београду. У циљу поузданије аквизиције података мерена су вертикална (управна на раван плоче) и раванска померања (у равни плоче) модела оребрене плоче. Вертикално померање (угиб) мерено је комапаратером [85], индуктивним сензором померања [86] и оптичким мерним системом [87]. Раванска померања тачака плоче мерена су бесконтактним сензором (*Eddy – Current*) [88] и оптичким мерним системом [87]. Деформације и напони у правцима су прорачунати преко измерених раванских померања тачака.

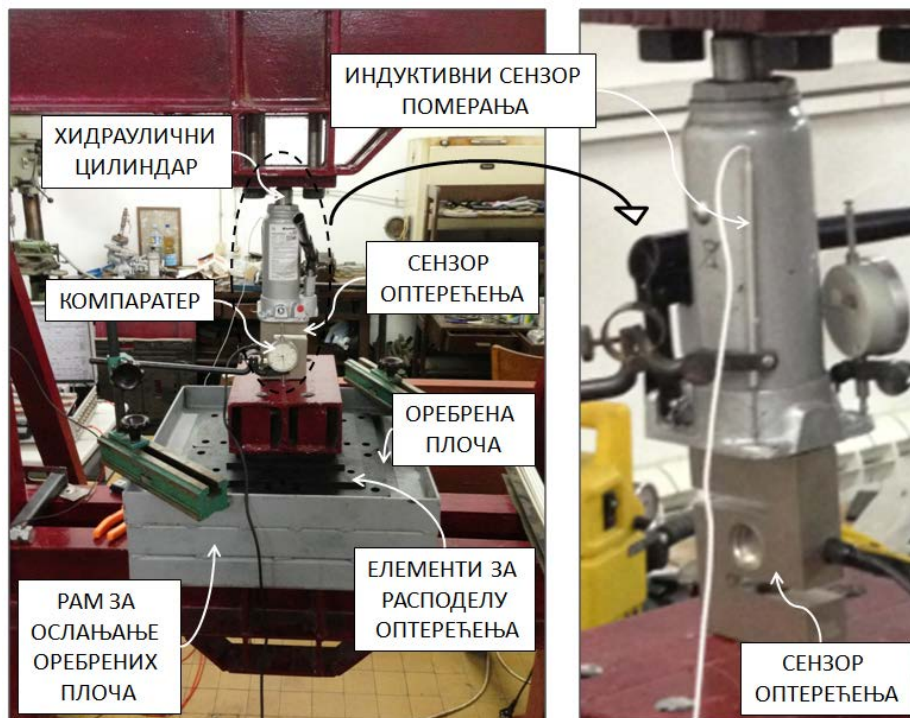
Мерна инсталација (слика 7.9 – 7.11) састоји се од хидрауличног цилиндра [89], сензора силе [90], елемената за расподелу оптерећења, мерних модела оребрених плоча, рама, носача конструкције (о који је цела инсталација ослоњена) и уређаја за аквизицију [91] и обраду резултата. Технички подаци о мерним уређајима налазе се у табелама 7.1 и 7.2. Обрада резултата је урађена у софтверском пакету Лабвју (*LabView*) [92]. Измерени сигнали мерних инструмената се преко

аквизиционе кутије детектују и обрађују рачунаром, где се сигнал претвара у конкретне вредности померања, деформације и напона. Измерена су и вертикална померања носача конструкције о које је сама мерна инсталација ослоњена, па су иста урачуната приликом обраде резултата мерења модела оребрених плоча. Хидраулични цилиндар генерише оптерећење које преноси преко елемената за пренос оптерећења. Између хидрауличног цилиндра и елемената за пренос оптерећења налази се сензор оптерећења.

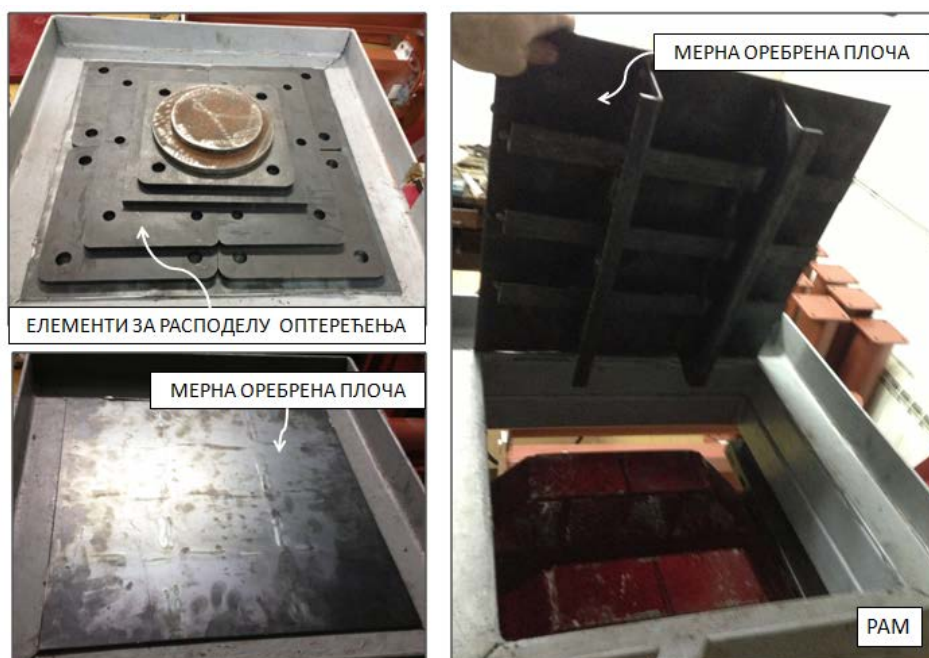
Елементи за пренос оптерећења представљени су крутим носачем и серијом челичних плоча дебљине 10 mm (слика 7.11). Задатак ових елемената је да што боље преведу концентрисано оптерећење хидрауличног цилиндра на равномерни притисак плоче. Стога, на површини мерног модела постављена је серија квадратних плоча, чија се налегајућа површина мења постепено. Овакав начин представљања равномерног притиска свакако није идеалан и уноси одређен ниво неравномерности приликом расподеле оптерећења. Мерна оребрена плоча је дуж својих ивица ослоњена о челични рам. Рам представља слободне ослоње ивицама плоче (слика 7.11).



Слика 7.9. Мерна инсталација (глобални приказ)



Слика 7.10. Мерна инсталација (мерни инструменти)



Слика 7.11. Мерна инсталација (елементи за пренос оптерећења и рам за ослањање мерних модела оребрене плоче)

Табела 7.1. Неки технички подаци хидрауличног цилиндра [89]

Назив уређаја	Хидраулични цилиндар <i>HM 52</i>
Максимално оптерећење	50 kN
Грешка мерења	50 kg
Ход цилиндра	70 mm

Табела 7.2. Неки технички подаци сензора оптерећења [90]

Назив уређаја	Сензор оптерећења <i>CZL – 312</i>
Максимално оптерећење	5 kN
Грешка мерења	150 kg
Податак баждарења	$200\text{ }\mu\epsilon = 10\text{ kN}$

7.2.3 Инструменти за мерење угиба

Угиби оребрених плоча мерени су индуктивним сензором померања [85] и компаратером [86]. Индуктивни сензором померања мерен је угиб мерних плоча на средини, док су компаратером обухваћена и остала карактеристична мерна места оребрених плоча. Индуктивни сензор мери промену електричног сигнала, условљену померањем иглице сензора (слика 7.12). Угиб плоче на средини конструкције у овом случају прати ход цилиндра па су и уређаји постављени уз хидраулични цилиндар. Циљ оба уређаја је да мере угиб на средини плоче пратећи ход хидрауличног цилиндра. Због сложеног просторног распореда мерне инсталације било је немогуће поставити индуктивни сензор померања директно на плочу, па је претходно описана локација била, за овај уређај, једина могућа. Комапаратер је директно позициониран на мерно место (слика 7.12, 7.13), па је коришћен за мерење угиба делова плоче између два суседна укрућења, између укрућења и ивице плоче и на самом врху укрућења.

Табела 7.3. Неки технички подаци индуктивног сензора померања [86]

Назив уређаја	MSC 710
Опсег	0 – 36 mm
Грешка мерења	0.2 (0.3) mm
Податак баждарења	0.22 V = 1 mm

Табела 7.4. Неки технички подаци компаратера [85]

Назив уређаја	Компаратер - DDR TGL 7682-1, Kinex
Опсег	0 – 25 mm
Грешка мерења	0.01 mm



Слика 7.12. Инструменти за мерење угиба



Слика 7.13. Позиција компаратера директно на плочи између укрућења

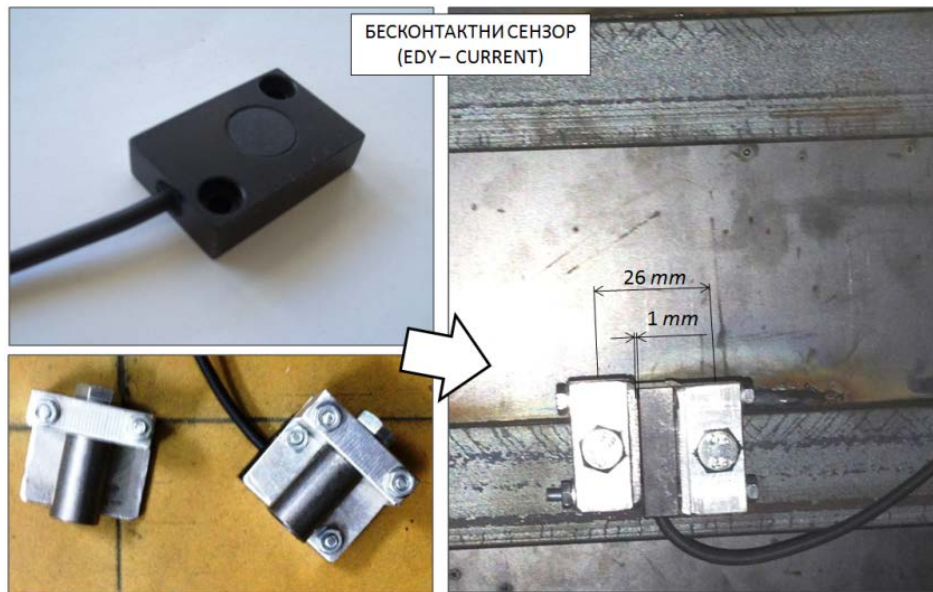
7.2.4 Инструмент за мерење раванских померања тачака

Бесконтактни сензор (*Eddy – Current*) [88] мери промену растојања између две тачке на конструкцији, на бази промене магнетног поља између сензора и објекта. Стога, сензор (слика 7.14) је причвршћен за магнете који су постављени на карактеристичне мерне локације. Мењањем оптерећења мења се и растојање тачака на којима се налазе магнети. Односом релативног померања две тачке и њиховог почетног растојања добија се деформација по задатој дужини, а потом и прорачунава напон у истом правцу.

Магнети, који се налазе на растојању од 26 *mm*, су коришћени у циљу лакшег позиционирања сензора на конструкцији. Почетно растојање сензора од металне препреке је 1 *mm*. То значи да су резултати деформације и напона у мереном правцу осредњени по дужини од 26 *mm*. Дакле, деформација по линији између тачака на конструкцији на којој су позиционирани магнети се рачуна према (7.1).

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \quad (7.1)$$

Ново растојање између посматраних тачака после дејства оптерећења је l_2 , док је почетно растојање $l_1 = 26 \text{ mm}$. Напон, у истом правцу, рачуна се множењем деформације са модулом еластичности материјала.



Слика 7.14. Бесконтактни сензор (*Eddy – Current*), са магнетима за позиционирање

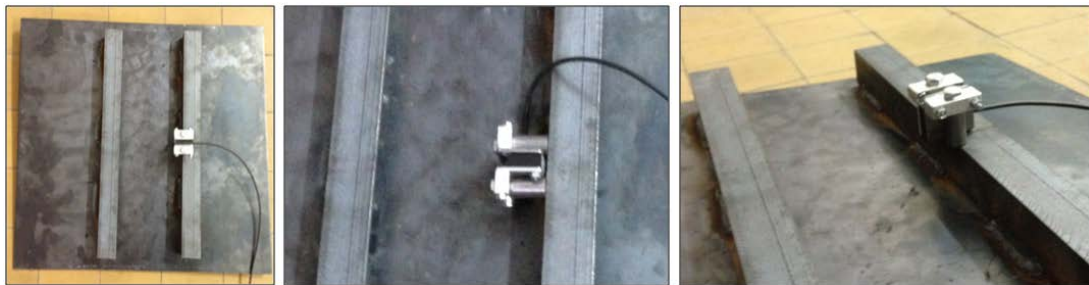
Табела 7.5. Неки технички подаци бесконтактни (*Eddy – Current*) сензора [88]

Назив уређаја	Сензор померања (<i>Eddy – Current</i>), WSD F2/10F
Опсег	0.5 – 2 mm
Грешка мерења	0.002 mm (око 15 N/mm ² прорачунато за челичну конструкцију)

Мерење померања тачака (деформације) на самом врху укрућења, тј. прелаза између струка и појаса где је градијент промене најзначајнији треба узети са резервом пре свега због чињенице да је позиционирање магнета на овим локацијама веома тешко. Наиме, магнети заузимају већу површину налегања

(пречник основице магнета је 12 mm) него што су димензије радијуса укрућења на којем се (или близу којег се) налазе. На пример, када је оса магнета позиционирана на самом врху укрућења, сензор не детектује промену растојања између две тачке на врху укрућења, већ између две групације тачака које (свака понаособ) покрива полукруг радијуса 6 mm .

Позиције овог инструмента (слике 7.15, 7.16, 7.17) укључују мерна места са очекиваним повишеним вредностима напона, па је сходно томе сензор са магнетима тако и усмерен (део плоче између укрућења, врх укрућења).



Слика 7.15. Бесконтактни сензор (*Eddy – Current*), на Моделу 1



Слика 7.16. Бесконтактни сензор (*Eddy – Current*), на Моделу 2



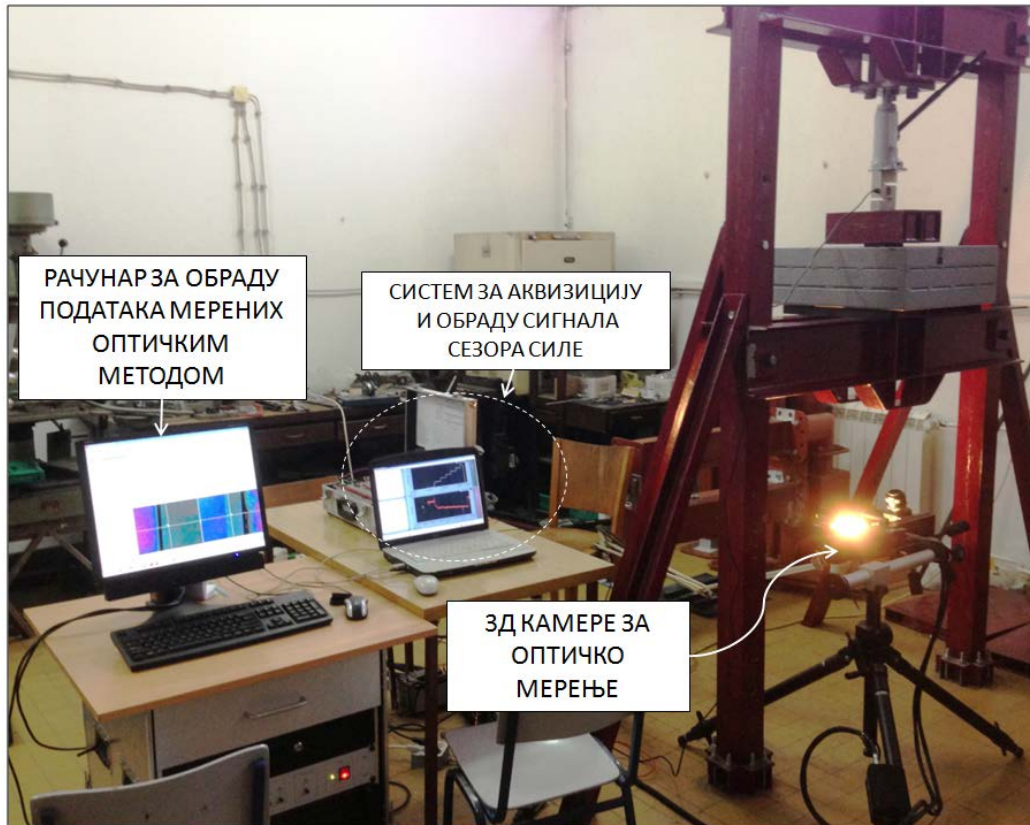
Слика 7.17. Бесконтактни сензор (*Eddy – Current*), на Моделу 3

7.2.5 Бесконтактно оптичко мерење

За разлику од претходно наведених мерних инструмената који мере померање тачке или промену растојања две конкретне тачке на конструкцији, оптичко мерење камерама омогућава добијање поља померања, деформација и напона на конкретној мерној површини. Овом методом може се добити понашање дела конструкције, уз илустрацију градијента промене напона и конкретних вредности напона у критичним зонама (места високе концентрације напона) [93, 94, 95, 96]. Ово је посебно битно за места наглих геометријских промена, где је најчешће повећан напон и из тог разлога интересантан за мерење (прелаз са струка на појас профила). На таквим прелазима напон је скоро немогуће добити класичним контактним мерним инструментима, пре свега због чињенице да је тешко прићи самој локацији, која је обично много мања од самог сензора. Највећи очекивани напони су обично на самим врховима укрућења, на средини распона и прелазу струк – појас укрућења. Овај прелаз је обично репрезентован малим радијусима који могу довести до веће концентрације напона, али и већег градијента њихове промене, који се испољава кроз нагли скок напона, у свега пар милиметара, од критичне вредности до мале, немерљиве вредности. Истраживање описано у [96] показало је ни да се и екстремне вредности фактора концентрације напона и њихов

градијент, са приличном поузданошћу, могу ухватити оптичком методом која је примењена у овом експерименту.

Одзив констуркције мерен је оптичком методом – *Digital Image Correlation Method* (ДИЦ). ДИЦ је модерна бесконтактна метода [97, 98, 99] која мери (снима) промене померања тачака на делу конструкције у простору, помоћу пара 3Д камера. ДИЦ метода, односно 3Д камере снимају референтну (почетну) мерну површ у неоптерећеном стању и исту површ у оптерећеном стању. Поређењем промене у координатама тачака површине, у неоптерећеном и оптерећеном стању, добија се поље померања, деформација, напона. Дакле, камере „прате“ тачке кроз промене њихових померања. Референтна слика, тј. снимљена мерна површ у неоптерећеном стању, а у односу на коју се мери одзив консктрукције, састоји се од великог броја тачака, тј. група пиксела квадратног облика [98, 100]. Тачке се састоје од пиксела, а пиксели из још мањих једница – фазета. Мање фазете могу „ухватити“ локалне ефекте боље од већих фазета и користе се где је потребно измерити локализовану концентрацију напона. ДИЦ метода, праћењем сетова пиксела кроз разне нивое оптерећења, „чита“ промену фазета, и добија слику промене померања у конструкцији. Снимљене дигиталне слике се процесуирају алгоритмом за дигиталну корелацију слике [97], праћењем промена распореда сетова пиксела на мерној површини [101]. Арамис софтвер [101] базиран је на алгоритму дигиталне корелације и ДИЦ методи. Арамис систем (слика 7.18, 7.19) је инсталација за оптичко мерење и састоји се од камера за 3Д дигитализацију слика и рачунарске јединице.

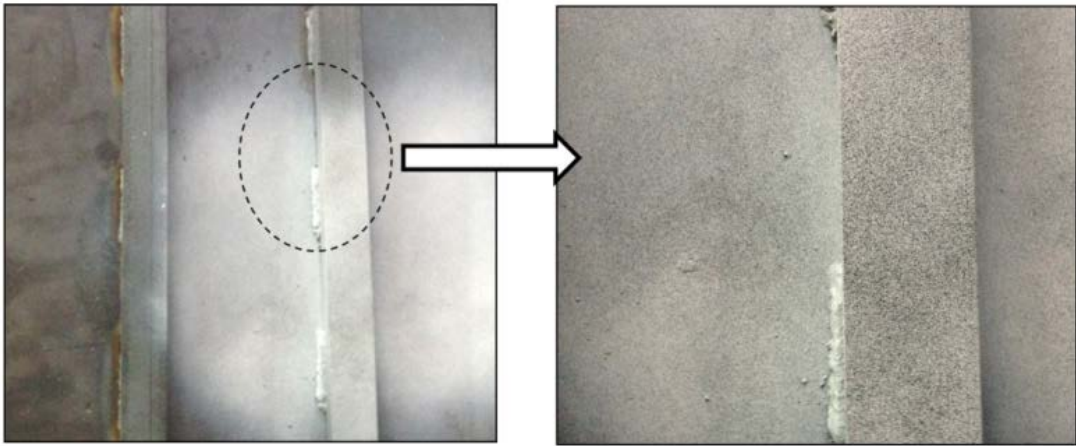


Слика 7.18. Мерна инсталација за оптичко мерење

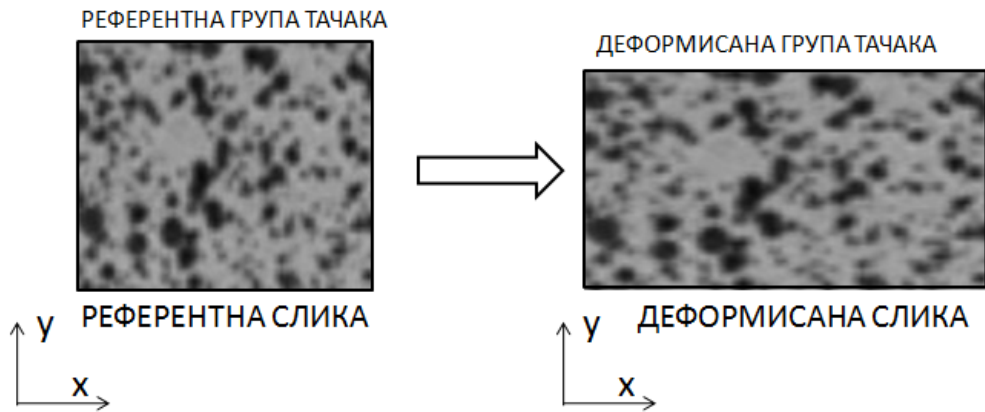


Слика 7.19. 3Д камере

ДИЦ метода препознаје сетове пиксела, чије померање мери, преко контраста који стварају црне тачкице на мерној површини (слика 7.20, 7.21, 7.22). У циљу лакшег препознавања тачака које систем треба да „прати“ на мерне површине се прво нанесе густ слој беле боје, а потом и дисперзован слој црних тачкица. Овим се ствара контраст који чине црне тачкице на белој површини олакшавајући камерама и ДИЦ методи да препознају сетове пиксела чије промене у померању треба да прате током екперимента.



Слика 7.20. Мерна површина са тачкицама

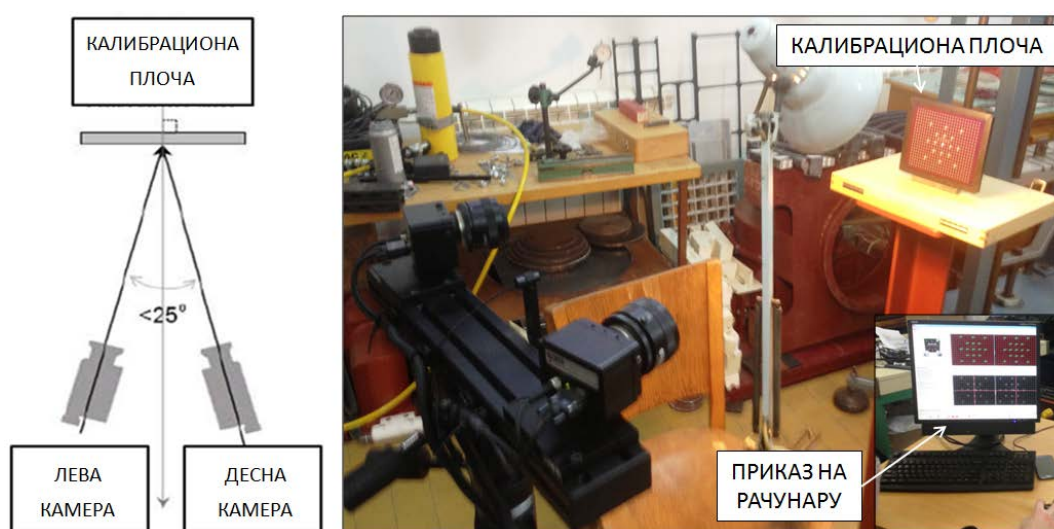


Слика 7.21. Референтна слика групе тачака на мерној површини, пре и после деформације



Слика 7.22. Припремљена мерна површина за оптичко мерење

Калибрација система је један од најосетљивијих поступака у примени ДИЦ методе. Овај поступак подразумева снимање серије слика на већ претходно калибрасаној плочи. Процедура дефинише мерну запремину (3Д простор) у оквиру кога се мерна површина мора налазити у свим стањима оптерећења. Поред овога, приликом калибрације дефинишу се и разни други параметри као што су угао камера у односу на осу симетрије, удаљеност камера/сензора од мерног објекта, ниво осветљења итд. Успешност калибрације директно утиче на резултате мерења.



Слика 7.23. Калибрација

Табела 7.6. Неке техничке карактеристике 3Д камера [101]

Назив уређаја	Арамис систем
Мерна запремина	100 x 75 x 75 cm
Растојање сензора од мерне површине	80 cm
Угао камера	22.8 °
Минимална деформација	0.01%
Грешка мерења (деформација)	0.01 % (око 20 N/mm ² прорачунато за челичну конструкцију)

Цео систем је изузетно осетљив па и минимална померања камера, сензора, сочива, промене осветљења, нивоа контраста на мерној површини, успешност калибрације, ниво резолуције камера у односу на мерну површину, квалитет диспезије контраста (тамних тачкица на белој површини) па и грешке саме методе корелације могу пореметити процес мерења [101, 102, 103]. Током мерења модела оребрених плоча у овом истраживању сви параметри потенцијалних грешака су у дозвољеним границама па се резултати могу тумачити са грешком од 0.01% за вредности добијене деформације, што предавља варијацију напона од око 20 N/mm^2 за челик модула еластичности од $E = 200000 \text{ N/mm}^2$.

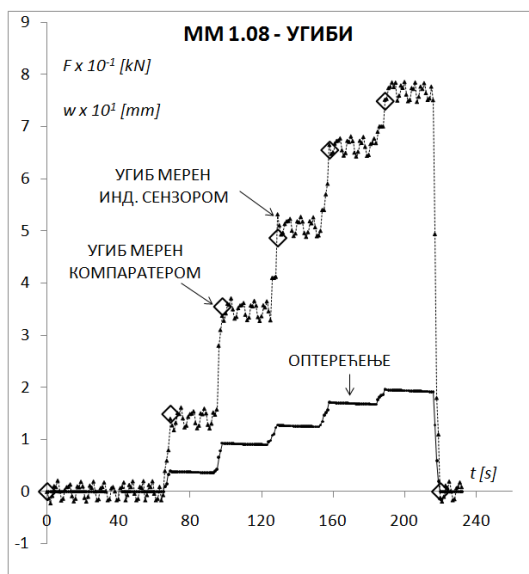
7.3 Резултати екперимента

Сви резултати тока мерења, осим оптичког, дати су табеларно и дијаграмима, и то у функцији времена (t) или у функцији оптерећења (F). Неки од резултата мерења илустровани су у наставку. Остали резултати (дијаграми и табеле), за сва три модела, налазе се у Прилогу 2.

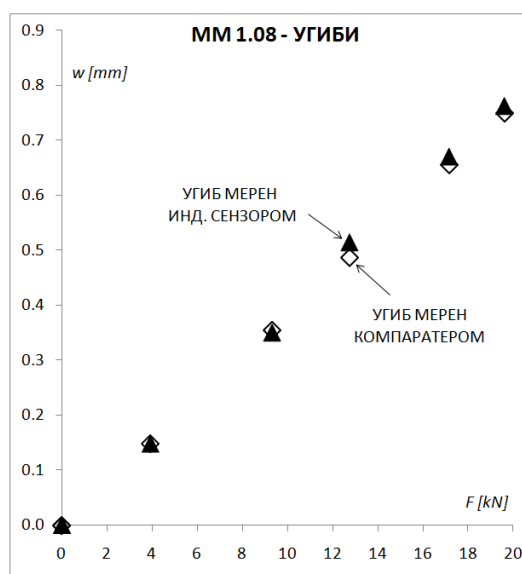
Мерења су извршена према мерним местима сва три модела (слика 7.6 – 7.8). Угиби су измерени компаратером ($w_{\text{КОМ}}$) и индуктивним сензором померања ($w_{\text{ИНД}}$). Индуктивним сензором померања измерен је угиб само у центру модела (ММ 1.08, ММ 2.11, ММ 3.07). Угиби на свим приказаним мерним местима измерени су компаратером. Бесконтактним (*Eddy - Current*) сензором измерена су померања (промена растојања Δl) две тачке на мерном месту. На основу овога прорачунати су компонентална деформација ε и компонентални напон σ у правцу промене растојања тачака што је илустровано дијаграмима. Конкретне вредности резултата које се налазе у табелама осредњене су с обзиром на флукуације мерења, а која се могу уочити на дијаграмима. На пример, у табели 7.6 су осредњене вредности са дијаграма на слици 7.24 који приказује ток мерења (по

времену) тј. вредност сигнала оптерећења, вредност угиба мереног компаратером и угиба мереног индуктивним сензором померања, а за мерно место 1.08. Слика 7.25 даје угибе у функцији оптерећења, као сређени приказ мерења са слике 7.24. Измерена промена растојања две тачке на мерном месту 1.05 (слика 7.26), и следствено прорачунатих деформација и напона (слика 7.27) дата је и табеларно (табела 7.7). Збирни приказ промене растојања две тачке на мерном месту, проистеклих деформација и компоненталних напона у функцији оптерећења илустровано је сликом 7.28. Оптичким мерењем добијени су графички прикази поља вертикалних померања и компоненталног напона на карактеристичним мерним местима, а за дато оптерећење (слика 7.29, 7.30). Овакав начин представљања резултата практикован је и на осталим мерним местима (и у Прилогу 1).

Табеле и дијаграми угиба и напона показују линеарност понашања конструкције, која ни у једном тренутку мерења није ушла у област пластичних деформација. Пошто се ради о линеарно еластичном подручју материјала, а ради лакшег поређења збирни резултати мерења (табеле 7.8 – 7.10) сведени су на оптерећење од 9.81 kN (1 тона). Ово оптерећење одговара притиску од 0.0638 N/mm^2 идеално равномерно распоређеном по површини плоче. Мерења угиба компаратером на неким од мерних места која се налазе у табели нису дата дијаграмима јер су добијена за само једну вредност оптерећења. Сви резултати у збирним табелама, добијени су свођењем вредности добијеног угиба или напона са максималног на оптерећење од 9.81 kN . Овакав начин свођења резултата ради поређења истих изабран је због осетљивости мерних инструмената. Наиме, тачност сигнала мерних инструмената (сензора силе, померања, оптичког система) је већа што је исти сигнал јачи. Такође, и флукуација сигнала (осетљивост) око одређене вредности мање утиче на коначан резултат што је апсолутна вредност угиба или напона већа. Могућност добијања резултата мерења на мерном месту директно је зависила од приступа конструкцији мерним инструментом.



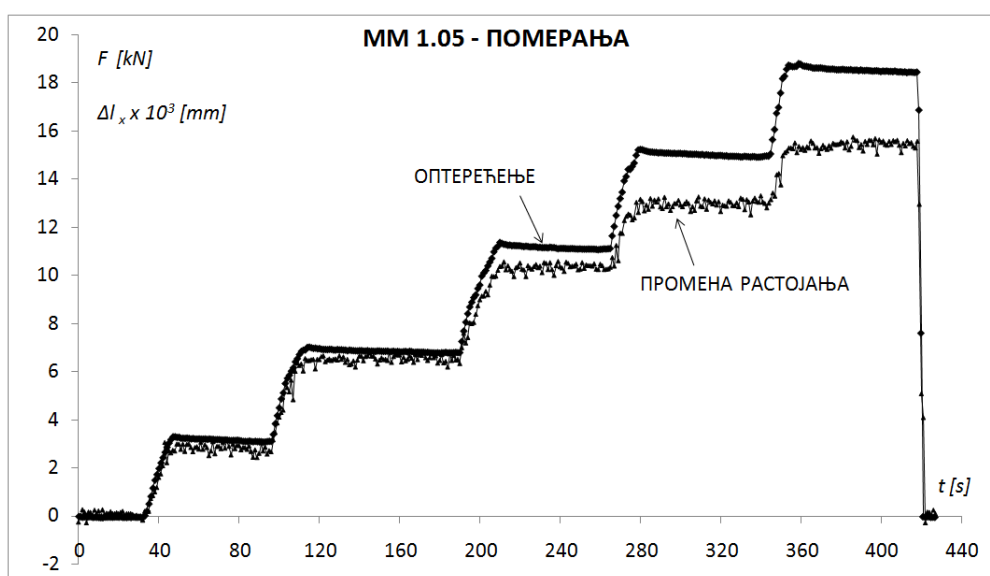
Слика 7.24. MM 1.08 – мерење угиба



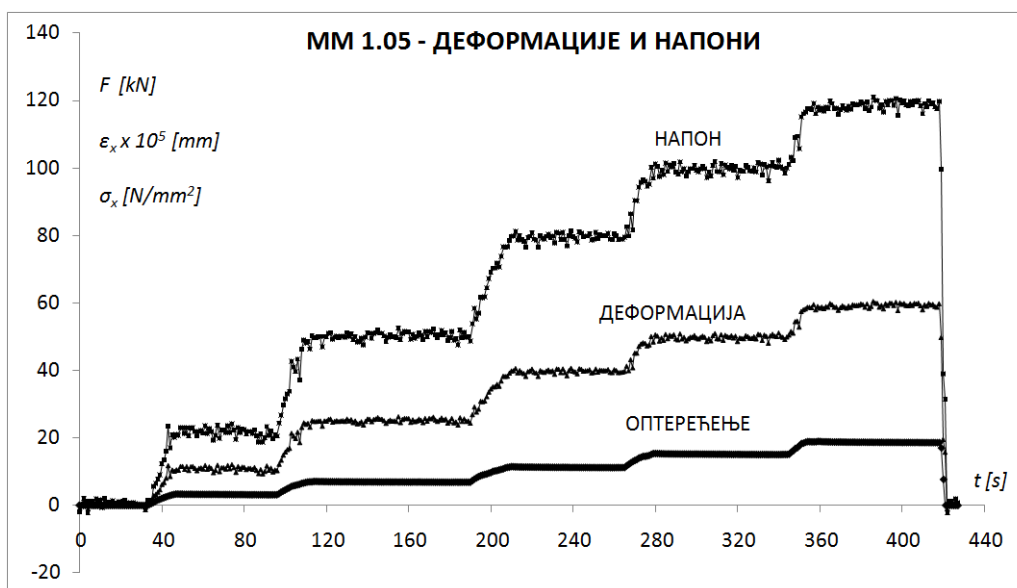
Слика 7.25. MM 1.08 – угиб у функцији оптерећења

Табела 7.6. MM 1.08 - угиби

$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$	$w_{ИНД} [mm]$
0	0	0
3.92	0.149	0.148
9.32	0.355	0.350
12.75	0.487	0.514
17.17	0.656	0.670
19.62	0.750	0.762
0	0	0



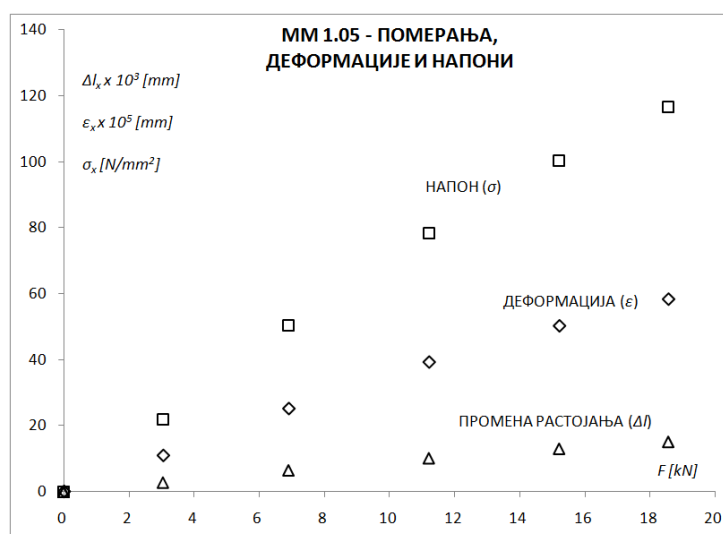
Слика 7.26. MM 1.05 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



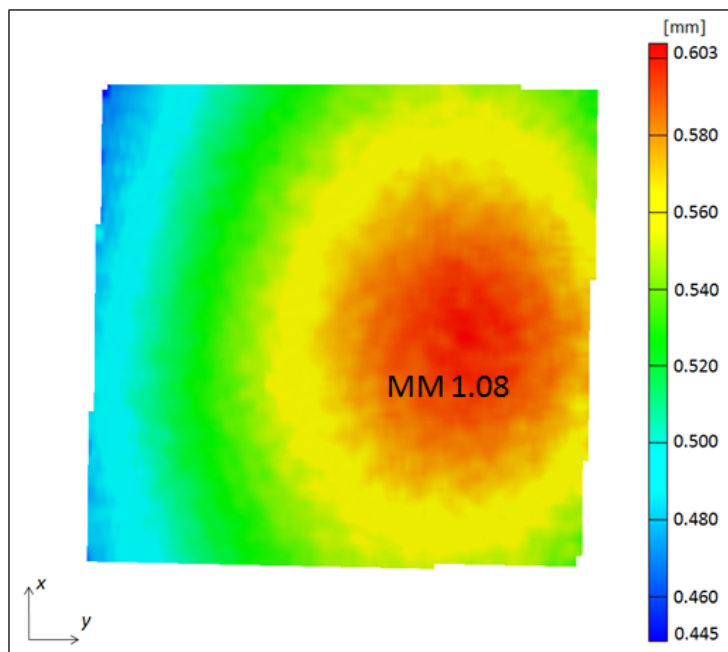
Слика 7.27. MM 1.05 – деформације и напони у правцу x

Табела 7.7. MM 1.05 - промена растојања, деформације и напони у x правцу

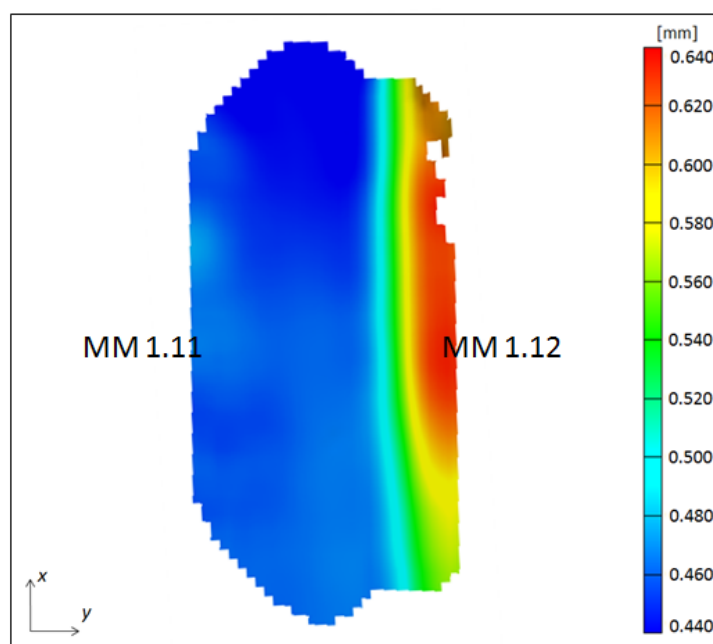
F [kN]	Δl_x [mm]	ϵ_x [μ]	σ_x [N/mm ²]
0	0	0	0
3.05	2.84E-03	1.09E-04	21.85
6.90	6.54E-03	2.51E-04	50.27
11.21	1.02E-02	3.92E-04	78.46
15.21	1.31E-02	5.02E-04	100.44
18.56	1.52E-02	5.83E-04	116.62
0	0	0	0



Слика 7.28. MM 1.05 – померања, деформације и напони у правцу x



Слика 7.29. ММ 1.08 – угиб



Слика 7.30. ММ 1.11 – угиб

Табела 7.8. Коначни резултати мерења на Моделу 1, за оптерећење од 9.81 kN

	КОМПАРАТЕР	ИНД. СЕНЗОР ПОМЕРАЊА	ИНД. СЕНЗ. СА МАГНЕТИМА	ОПТИЧКО МЕРЕЊЕ	
	w [mm]	w [mm]	σ_x [N/mm ²]	w [mm]	σ_x [N/mm ²]
MM 1.01	0.250				
MM 1.02	0.286				
MM 1.03	0.283				
MM 1.04	0.222				
MM 1.05	0.283		61.6		68.3
MM 1.06	0.360				
MM 1.07	0.300				
MM 1.08	0.375	0.381		0.402	
MM 1.09	0.292				
MM 1.10	0.235				
MM 1.11	0.290		66.5		73.1
MM 1.12	0.383			0.360	
MM 1.13	0.277				
MM 1.14	0.343				

Табела 7.9. Коначни резултати мерења на Моделу 2, за оптерећење од 9.81 kN

	КОМПАРАТЕР	ИНД. СЕНЗОР ПОМЕРАЊА	ИНД. СЕНЗ. СА МАГНЕТИМА	ОПТИЧКО МЕРЕЊЕ	
	w [mm]	w [mm]	σ_x [N/mm ²]	w [mm]	σ_x [N/mm ²]
MM 2.01	0.130				
MM 2.02	0.167				
MM 2.03	0.170				
MM 2.04	0.124				
MM 2.05	0.170		40.4		
MM 2.06	0.230				
MM 2.07	0.140				
MM 2.08	0.200				
MM 2.09	0.191				
MM 2.10	0.160				
MM 2.11	0.189	0.197	43.9		47.4
MM 2.12	0.267			0.270	
MM 2.13	0.140				
MM 2.14	0.200				
MM 2.15	0.193				
MM 2.16	0.122				
MM 2.17	0.195		48.23		48.1
MM 2.18	0.267			0.253	
MM 2.19	0.137				
MM 2.20	0.200				

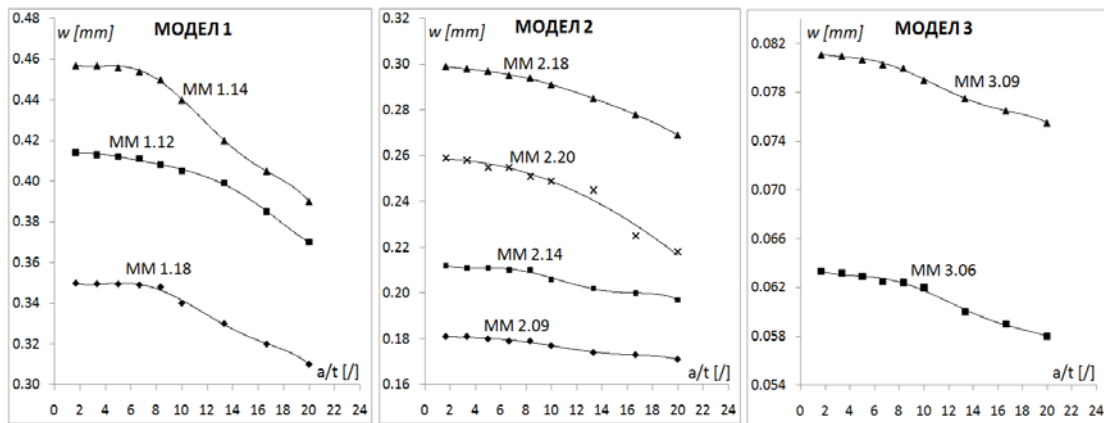
Табела 7.10. Коначни резултати мерења на Моделу 3, за оптерећење од 9.81 kN

	КОМПАРАТЕР	ИНД.СЕНЗОР ПОМЕРАЊА	ИНД. СЕНЗ. СА МАГНЕТИМА	ОПТИЧКО МЕРЕЊЕ	
	w [mm]	w [mm]	σ_x [N/mm ²]	w [mm]	σ_x [N/mm ²]
ММ 3.01	0.040				
ММ 3.02	0.041				
ММ 3.03	0.041				
ММ 3.04	0.050				
ММ 3.05	0.071				
ММ 3.06	0.065				
ММ 3.07	0.065	0.067	16.94		18.90
ММ 3.08	0.077			0.0733	
ММ 3.09	0.072				
ММ 3.10	0.046				
ММ 3.11	0.046		14.24		
ММ 3.12	0.051				
ММ 3.13	0.047				
ММ 3.14	0.042				
ММ 3.15	0.021				
ММ 3.16	0.040				
ММ 3.17	0.028				
ММ 3.18	0.041				
ММ 3.19	0.020				
ММ 3.20	0.038				
ММ 3.21	0.038		26.06		27.66
ММ 3.22	0.0462		23.86		
ММ 3.23	0.042				
ММ 3.24	0.054				

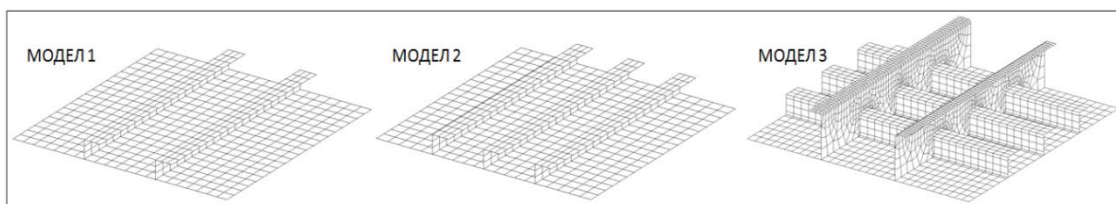
7.4 Резултати нумеричког прорачуна мерних модела

Анализом зависности резултата нумеричког прорачуна (МКЕ) мерних модела од величине употребљеног коначног елемента добијена је оптимална густина мреже при којој резултати конвергирају. Модели су слободно ослоњени по ивицама плоча и оптерећени равномерним притиском на плочу. Утврђено је да је оптимални однос дужине странице (a) и дебљине коначног елемента (t) при коме вредности угиба конвергирају између 6.67 и 10. Пошто је дебљина плоче, тиме и правоугаоног коначног елемента 3 mm, изабрана дужина и ширина ивице би у том

случају била од 20 до 30 *mm*. Оваква мрежа елемената је довољно густа достојно репрезентује геометрију модела, а довољно ретка да прикаже промену поља померања и напона и конвергенцију резултата угиба независно од даљег уситањавања мреже. Мрежа односа $a/t = 10$ даје нумерички модел чији су угиби мањи до 2% у односу на модел изузетно уситњене мреже ($a/t = 1.67$) чији однос страница излази изван оквира теорије плоча. Ређа мрежа од изабране одразила би се и на вредности напона: недовољан број коначних елемената (подела) између два суседна укрућења не би, са одговарајућом поузданошћу, препознао терцијарни напон у плочи. Мрежа коначних елемената модела за нумерички прарачун приказана је на слици 7.32.



Слика 7.31. Зависност угиба од величине коначног елемента



Слика 7.32. Мрежа коначних елемената модела

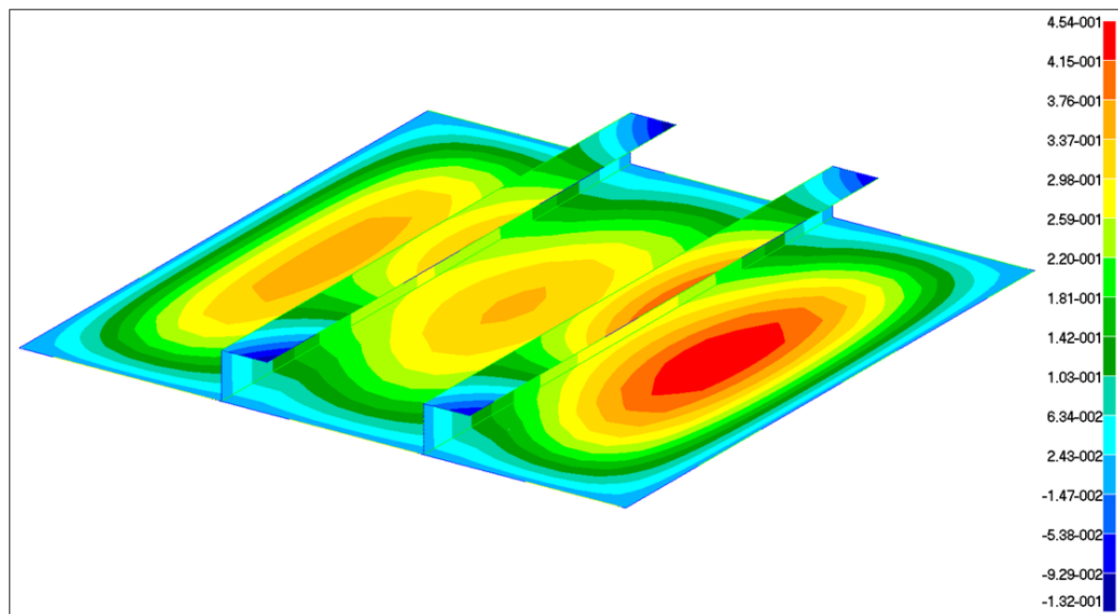
У наставку, приказани су нумерички резултати померања три мерна модела оребрених плоча. Сви нумерички резултати дати су за равномерни притисак на плочу вредности $p = 0.0638 \text{ N/mm}^2$ што одговара укупној сили од 9.81 *kN*, odnosno 1 *t*.

Слика 7.33 илуструје ветикално померање (угиб) Модела 1. Максимани угиб се налази на средини распона дела плоча између укрућења и ислонаца. Такође, пикови вертикалног померања налазе се између укрућења. По изгледу еластичне површи (слика 7.34) Модела 1, препознају се ови максимуми угиба, али и уочава да се ова оребрена плоча, по нумеричком прорачуну, не понаша идеално. Еластична површ није глатка, као код неоробрених плоча, и њен глобални одзив није онакав као да је у питању плоча са великим бројем густо распоређених укрућења. Укрућења не прате савијање плоче, већ сама представљају ослонце за савијање између њих. Максимални фон Мисесов напон у овом моделу је 80.5 N/mm^2 и налази се на врху укрућења, и на средини његовог распона (слика 7.35). Максимални напон је последица чињенице да се врх укрућења налази на највећем растојању од неутралне осе пресека оребрене плоче. Овај напон је директна последица савијања у равни струка профила (слика 7.36). Маскимални напони у плочи (53.7 N/mm^2) налази се између укрућења и попречног су правца у односу на правац пружања укрућења (терцијарни одзив конструкције). Вредности угиба (w), фон Мисесовог напона (σ_{VM}), и компоненталних напона (σ_x, σ_y), у равни за сва три модела дати су у табелама 7.11-7.13. Ове табеле приказују конкретне резултате нумеричког прорачуна модела, а према мерним местима, као на слици 7.6 - 7.8.

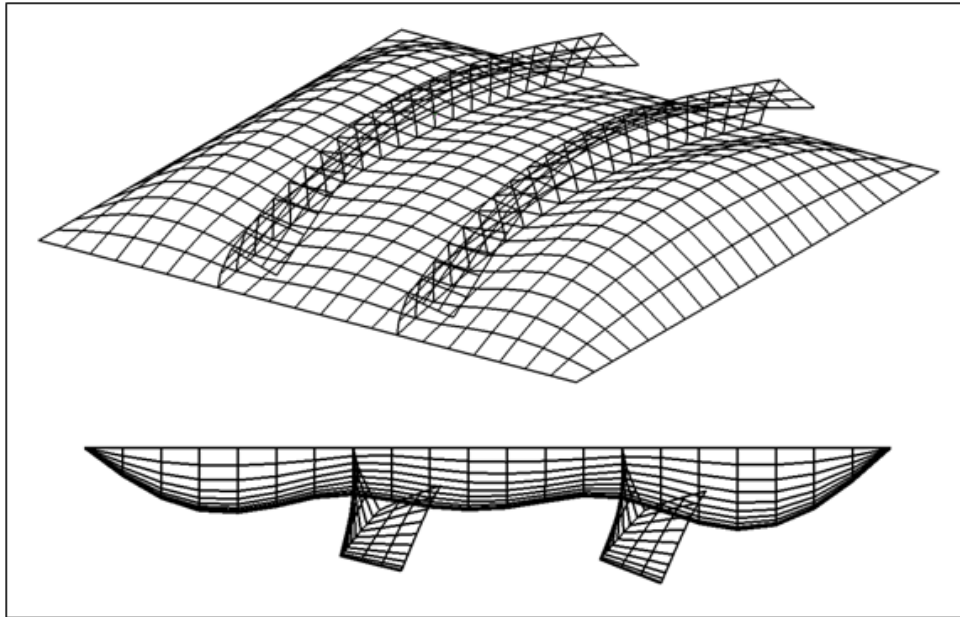
Максимална вертикална померања Модела 2 налазе се на средини дела плоче између укрућења и на врху самог укрућења, тј. струку профила (0.295 mm). Слика 7.27 показује поље угиба у овом моделу. Еластична површ (слика 7.38) илуструје пикове угиба у плочи, као последице терцијарног одзива конструкције. Максимални напон је на врху укрућења и износи 53.7 N/mm^2 и последица је савијања у правцу пружања укрућења (слика 7.39, 7.40).

Максимална вертикална померања у Моделу 3 налазе се на средини оребрене плоче, тј. на делу плоче између укрућења (три L профила) и носача (два хладно савијена L профила). Максимална вредност угиба је 0.0787 mm (слика 7.41) налази се на средини дела плоче између укрућења и на врху самог укрућења, тј. струку профила (0.295 mm). Максимални напон у моделу је локалног карактера и

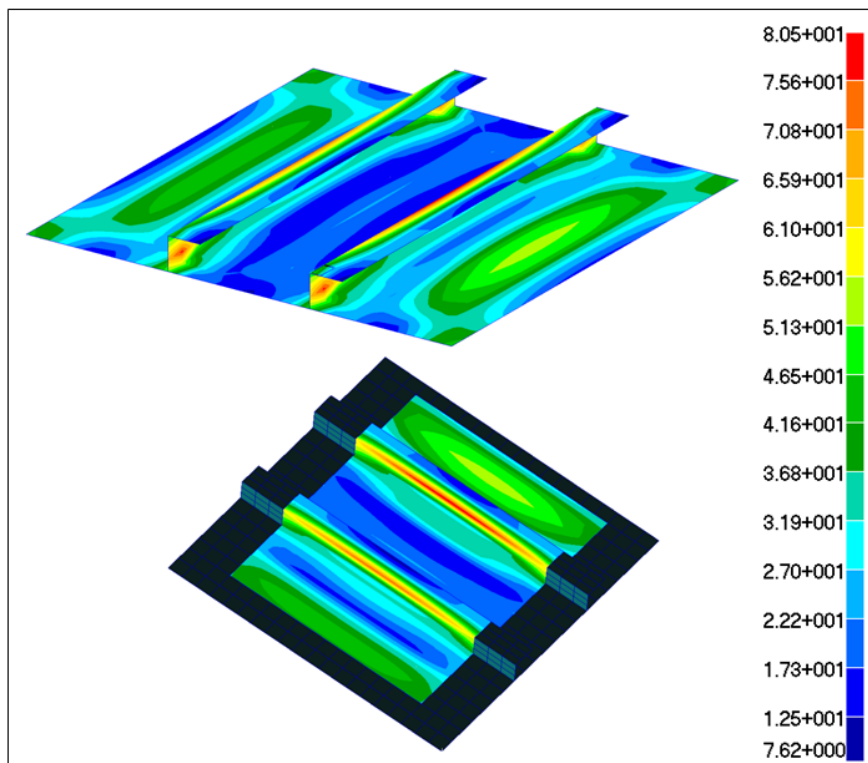
налази се на радијусу пролаза уздужнице кроз носач (слика 7.44). Вредност овог напона је $53.3 N / mm^2$. Највећи напони у плочи се налазе на деловима плоче између укрућења, носача и ивица плоче $\sigma_{VM} = 19.8 N / mm^2$. Повишени напони између укрућења и носача, последица су сличних вредности оба раванска компонентална напона. Максимални напон укрућења налази се на њиховом врху. И у овом случају доминантан је компонентални напон у правцу простирања укрућења (слика 7.45). Највећи напон у носачу је $29.7 N / mm^2$ (слика 7.44). Не рачунајући локалне ефекте (концентрација напона код проласка уздужнице кроз носач), и узимајући у обзир глоблани одзив Модела 3 максимални напон у овој конструкцији, као последица савијања равномерним притиском, налази се на врху носача.



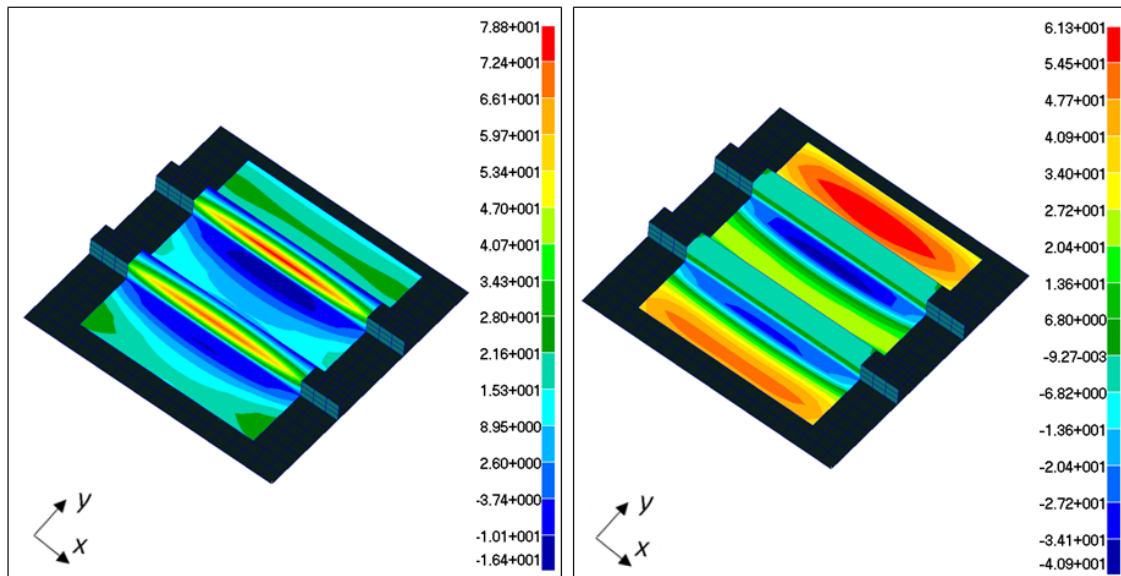
Слика 7.33. Угиб, у Моделу 1



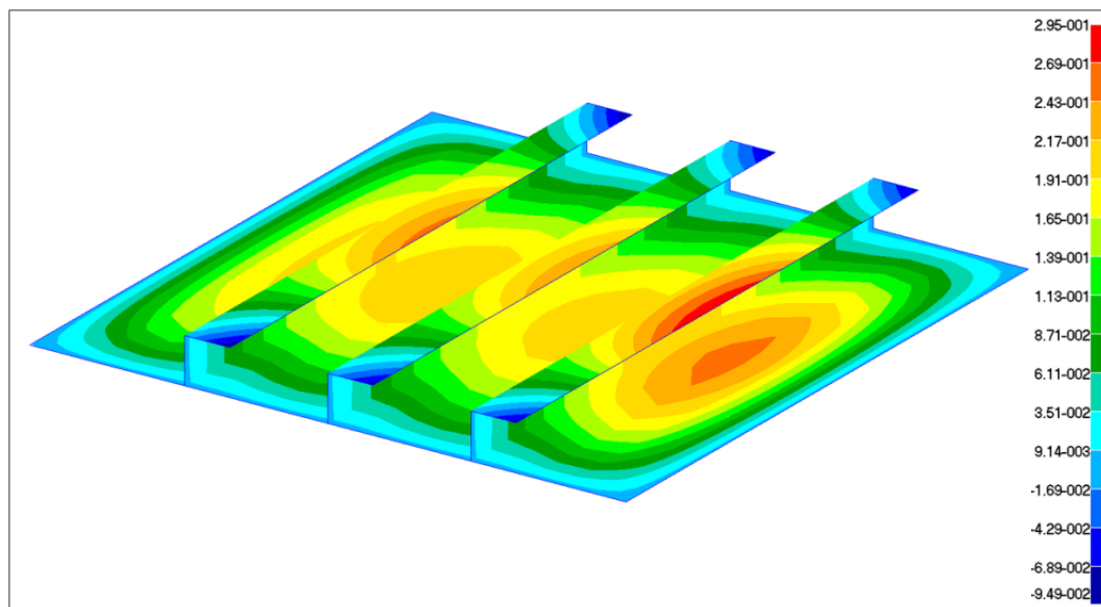
Слика 7.34. Еластична површ, у Моделу 1



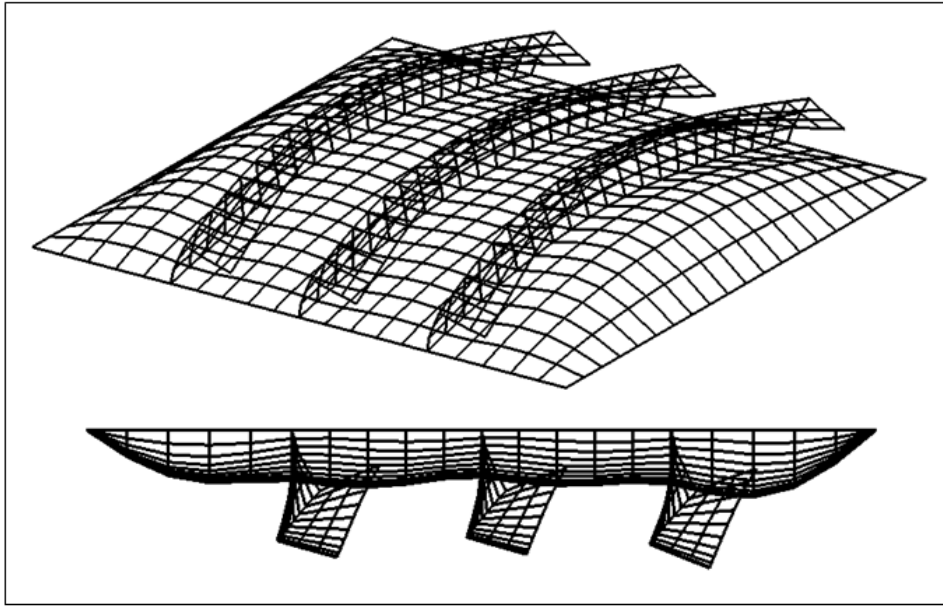
Слика 7.35. Фон Мисесов напон, у Моделу 1



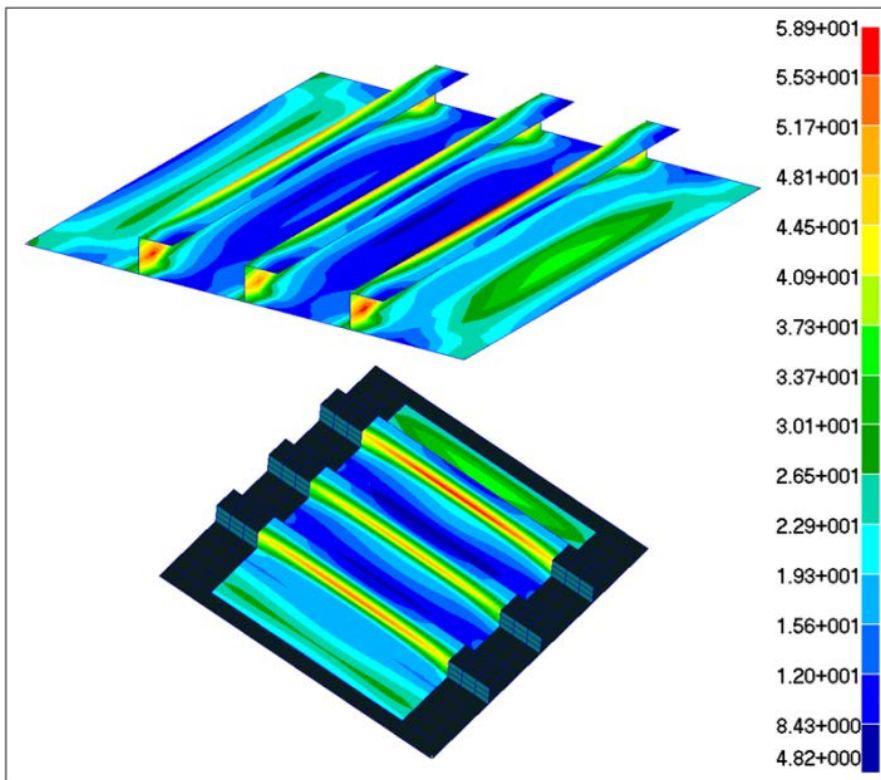
Слика 7.36. Напон у правцу x (лево) и у правцу y (десно), у Моделу 1



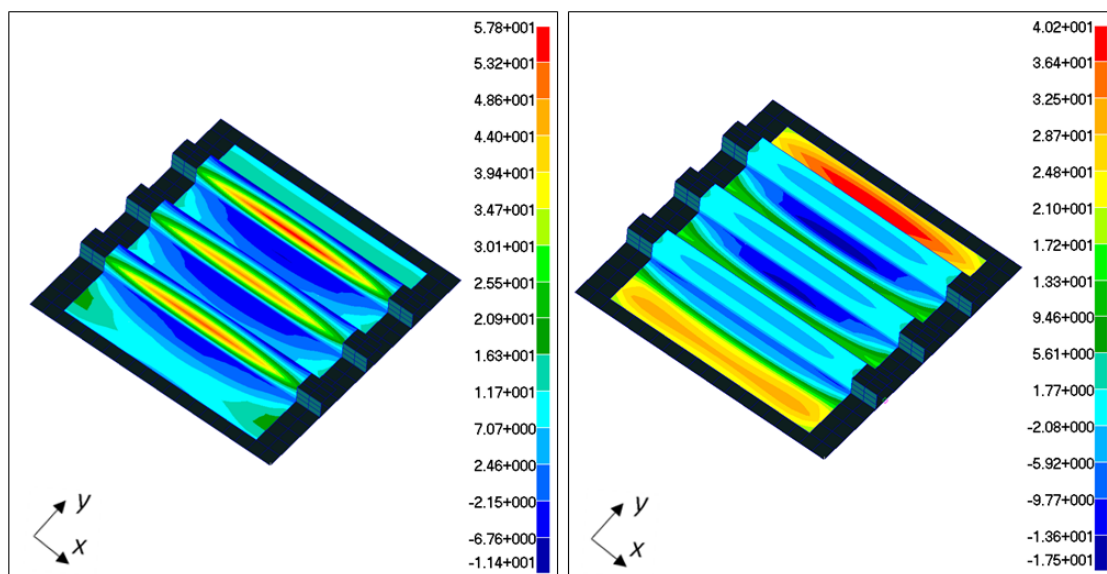
Слика 7.37. Угиб, у Моделу 2



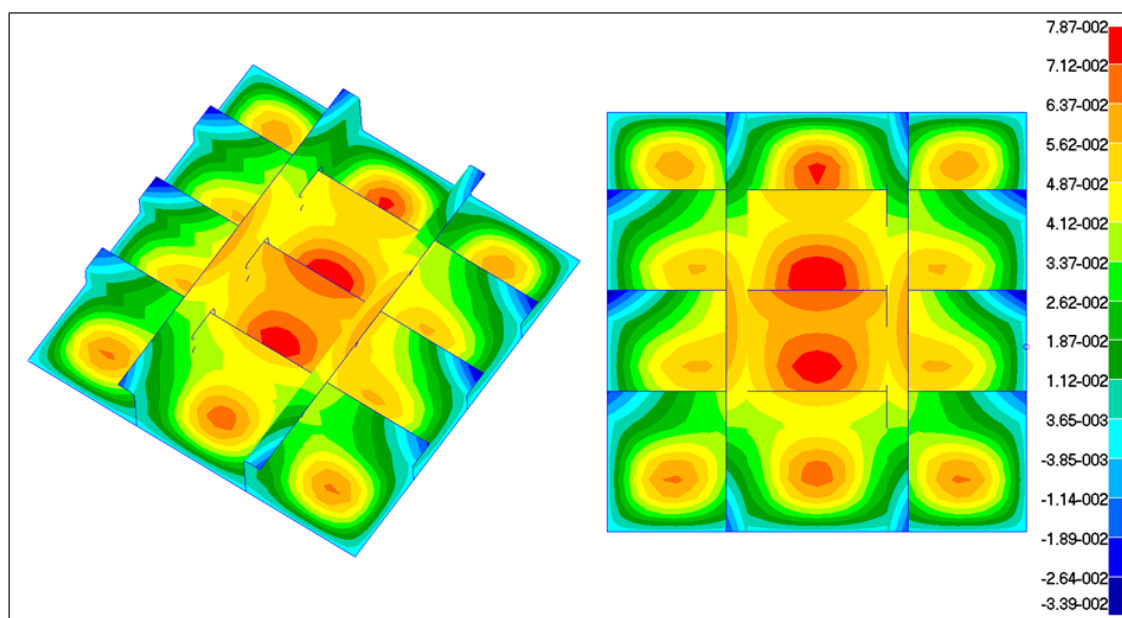
Слика 7.38. Еластична површ, у Моделу 2



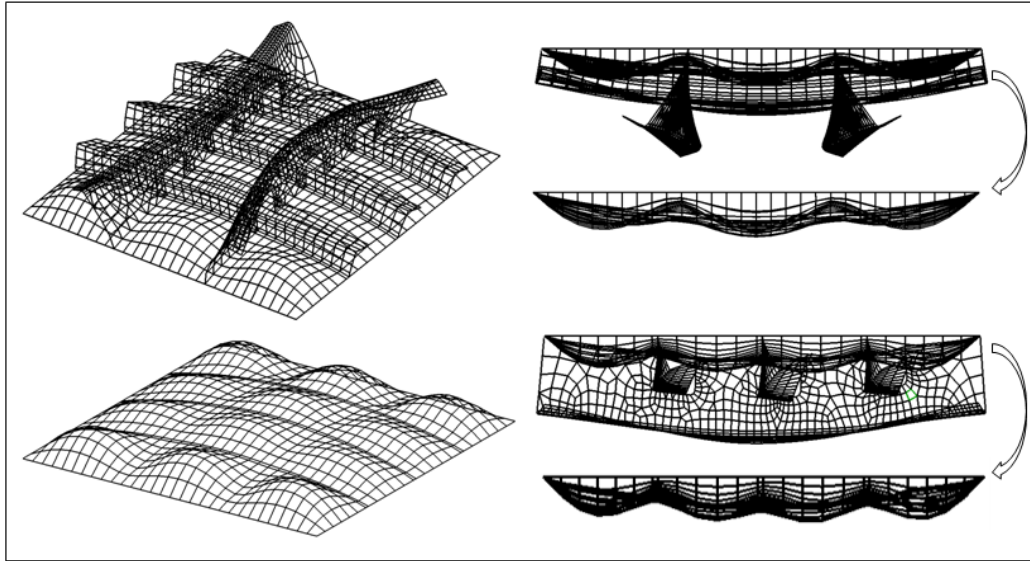
Слика 7.39. Фон Мисесов напон, у Моделу 2



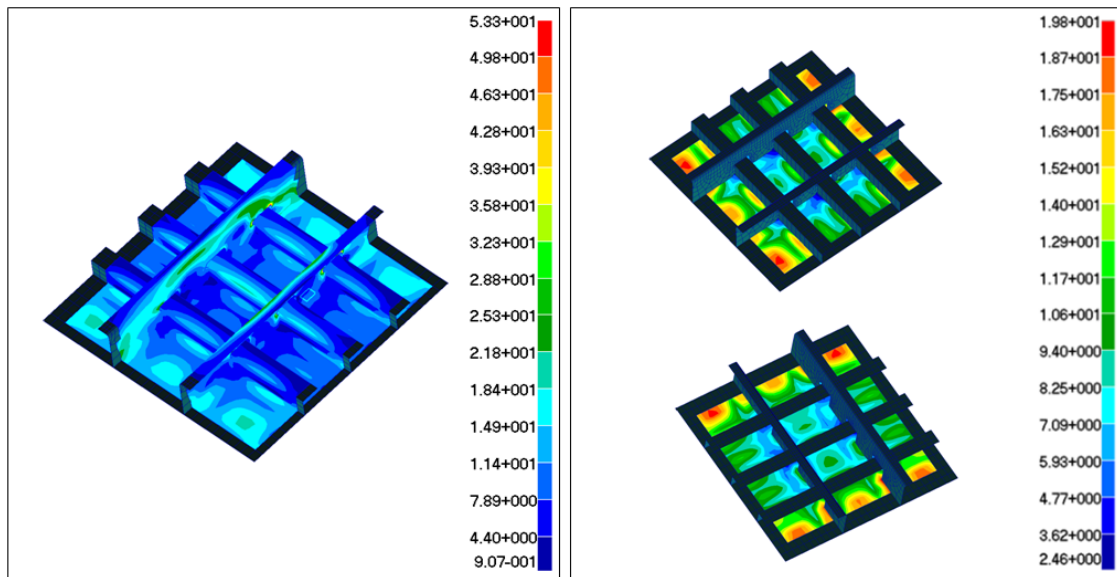
Слика 7.40. Напон у правцу x (лево) и у правцу y (десно) , у Моделу 2



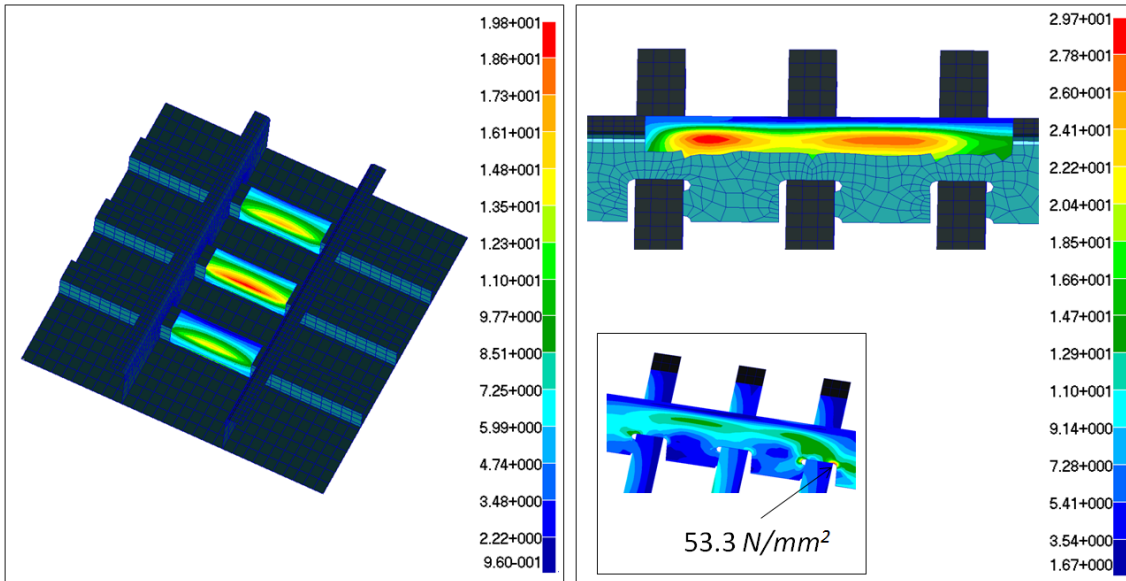
Слика 7.41. Угиб, у Моделу 3



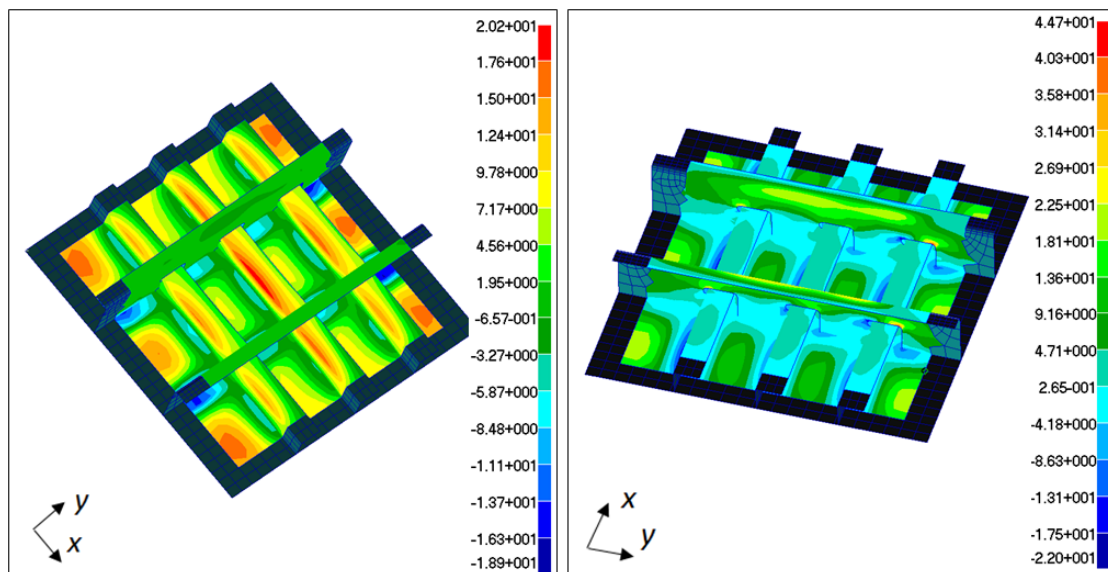
Слика 7.42. Еластична површ, у Моделу 3



Слика 7.43. Фон Мисесов напон, у Моделу 3



Слика 7.44. Фон Мисесов напон, у Моделу 3



Слика 7.45. Напон у правцу x (лево) и у правцу y (десно), у Моделу 3

Табела 7.11. Угиби и напони

	w [mm]	σ_{VM} [N/mm ²]	σ_x [N/mm ²]	σ_y [N/mm ²]
MM 1.01	0.311	44	50.3	22
MM 1.02	0.360	44.5	50.4	16
MM 1.03	0.260	33	23.5	4
MM 1.04	0.198			
MM 1.05	0.261	74	73	2
MM 1.06	0.342			
MM 1.07	0.268	21	20	10
MM 1.08	0.353	23	26	9.4
MM 1.09	0.278	36	27	0.5
MM 1.10	0.214			
MM 1.11	0.279	80.5	78.8	0.7
MM 1.12	0.410			
MM 1.13	0.380	50	57	23.3
MM 1.14	0.454	53.7	61.3	22.4

Табела 7.12. Угиби и напони

	w [mm]	σ_{VM} [N/mm ²]	σ_x [N/mm ²]	σ_y [N/mm ²]
MM 2.01	0.160	28	31	14
MM 2.02	0.200	28	31.2	9.43
MM 2.03	0.180	16	7.5	3
MM 2.04	0.140			
MM 2.05	0.180	54.5	53.6	1.6
MM 2.06	0.250			
MM 2.07	0.150	11	12.1	6
MM 2.08	0.217	13.5	15.2	4.5
MM 2.09	0.180	19	10.8	4.3
MM 2.10	0.140			
MM 2.11	0.180	50.7	50	1.42
MM 2.12	0.240			
MM 2.13	0.160	10.2	11.4	5.9
MM 2.14	0.210	11.5	12.7	3.15
MM 2.15	0.206	20.5	9.6	4
MM 2.16	0.147			
MM 2.17	0.206	59	58	1.9
MM 2.18	0.295			
MM 2.19	0.170	31.5	35.5	13.9
MM 2.20	0.255	35.4	40.2	13.7

Табела 7.13. Угиби и напони

	w [mm]	σ_{VM} [N/mm ²]	σ_x [N/mm ²]	σ_y [N/mm ²]
MM 3.01	0.0680	17.20	15.10	18.10
MM 3.02	0.0432	14.50	6.20	14.00
MM 3.03	0.0428	15.20	15.60	0.50
MM 3.04	0.0543			
MM 3.05	0.0765	9.91	7.72	11.10
MM 3.06	0.0604	11.60	5.40	10.80
MM 3.07	0.0603	19.80	20.20	0.46
MM 3.08	0.0700			
MM 3.09	0.0787	9.94	8.20	10.90
MM 3.10	0.0500	13.00	5.70	12.70
MM 3.11	0.0500	17.00	17.20	0.36
MM 3.12	0.0563			
MM 3.13	0.0734	17.80	16.40	19.00
MM 3.14	0.0654	19.20	16.70	20.90
MM 3.15	0.0250	13.30	13.70	0.60
MM 3.16	0.0579	11.90	9.80	13.40
MM 3.17	0.0330	16.00	16.40	0.50
MM 3.18	0.0569	11.40	0.40	0.50
MM 3.19	0.0270	14.30	14.70	0.39
MM 3.20	0.0625	18.30	15.80	20.10
MM 3.21	0.0427	29.70	30.30	0.98
MM 3.22	0.0510	24.30	25.10	1.10
MM 3.23	0.0490	27.60	28.10	1.10
MM 3.24	0.0640			

7.5 О резултатима мерења и нумеричког прорачуна

Одступања експерименталних од нумеричких резултата за све мерне моделе дата у су табелама 7.14 – 7.16, на наредним страницама. Еластична линију модела добијена нумеричким прорачуном, насупрот еластичне линије реконструисане на основу експерименталних мерења компаратером, илустрована је на слици 7.46. Еластичне линије су вишеструко скалиране ради илустративнијег поређења и не би се, суштински, промениле и у случају истог начина репрезентовања угиба добијених и другим уређајима. Одступања свих мерних инструмената дати су у процентима у односу на нумерички прорачун, а за оптерећење од 9.81 *kN*.

Табела 7.14. Поређење експерименталних и нумеричких резултата Модела 1

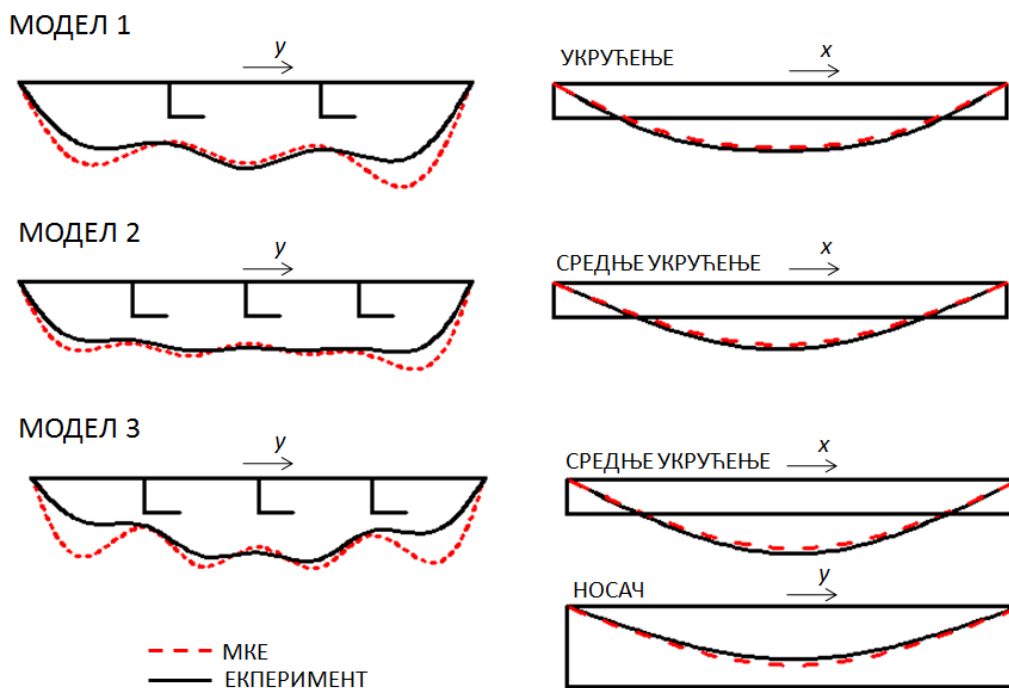
	НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ				ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ РЕЗУЛТАТИ									
	МЕТОДА КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА				КОМПАРАТЕР		ИНД. СЕНЗОР ПОМЕРАЊА		ИНД. СЕНЗОР СА МАГНЕТИМА		ОПТИЧКО МЕРЕЊЕ			
	w [mm]	σ_x [N/mm ²]	σ_y [N/mm ²]	σ_z [N/mm ²]	w [mm]	%	w [mm]	%	σ_x [N/mm ²]	%	w [mm]	%	σ_x [N/mm ²]	%
MM 1.01	0.311	50.3	22		0.250	19.61%								
MM 1.02	0.360	50.4	16		0.286	20.50%								
MM 1.03	0.260	23.5	4		0.283	-8.85%								
MM 1.04	0.198				0.222	-12.12%								
MM 1.05	0.261	73	2		0.283	-8.43%			61.6	15.62%			68.3	6.44%
MM 1.06	0.342				0.360	-5.26%								
MM 1.07	0.268	20	10		0.300	-11.94%								
MM 1.08	0.353	26	9.4		0.375	-6.23%	0.381	-7.93%			0.402	-13.88%		
MM 1.09	0.278	27	0.5		0.292	-5.04%								
MM 1.10	0.214				0.235	-9.81%								
MM 1.11	0.279	78.8	0.7		0.290	-3.94%			66.5	15.61%			73.1	7.23%
MM 1.12	0.410				0.383	6.59%					0.360	12.20%		
MM 1.13	0.380	57	23.3		0.277	27.11%								
MM 1.14	0.454	61.3	22.4		0.343	24.45%								

Табела 7.15. Поређење експерименталних и нумеричких резултата Модела 2

	НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ				ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ РЕЗУЛТАТИ												
	МЕТОДА КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА				КОМПАРАТЕР				ИНД. СЕНЗОР ПОМЕРАЊА				ИНД. СЕНЗОР СА МАГНЕТИМА				
	w [mm]	σ_x [N/mm ²]	σ_y [N/mm ²]	σ_z [N/mm ²]	w [mm]	%	w [mm]	%	w [mm]	%	σ_x [N/mm ²]	%	w [mm]	%	σ_x [N/mm ²]	%	
ММ 2.01	0.160	31	14		0.130	18.75%											
ММ 2.02	0.200	31.2	9.43		0.167	16.50%											
ММ 2.03	0.180	7.5	3		0.170	5.56%											
ММ 2.04	0.140				0.124	11.43%											
ММ 2.05	0.180	53.6	1.6		0.170	5.56%				40.4	24.63%						
ММ 2.06	0.250				0.230	8.00%											
ММ 2.07	0.150	12.1	6		0.140	6.67%											
ММ 2.08	0.217	15.2	4.5		0.200	7.83%											
ММ 2.09	0.180	10.8	4.3		0.191	-6.11%											
ММ 2.10	0.140				0.160	-14.29%											
ММ 2.11	0.180	50	1.42		0.189	-5.00%		0.197	-9.44%		43.9	12.20%					
ММ 2.12	0.240				0.267	-11.25%							0.270	-12.50%		47.4	5.20%
ММ 2.13	0.160	11.4	5.9		0.140	12.50%											
ММ 2.14	0.210	12.7	3.15		0.200	4.76%											
ММ 2.15	0.206	9.6	4		0.193	6.31%											
ММ 2.16	0.147				0.122	17.01%											
ММ 2.17	0.206	58	1.9		0.195	5.34%					48.23	16.84%				48.1	17.07%
ММ 2.18	0.295				0.267	9.49%											
ММ 2.19	0.170	35.5	13.9		0.137	19.41%							0.253	14.24%			
ММ 2.20	0.255	40.2	13.7		0.200	21.57%											

Табела 7.16. Поређење експерименталних и нумеричких резултата Модела 3

	НУМЕРИЧКИ РЕЗУЛТАТИ				ЕКСПЕРИМЕНТАЛНИ РЕЗУЛТАТИ									
	МЕТОДА КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА				КОМПАРАТЕР		ИНД. СЕНЗОР ПОМЕРАЊА		ИНД. СЕНЗОР СА МАГНЕТИМА		ОПТИЧКО МЕРЕЊЕ			
	w [mm]	σ_x [N/mm ²]	σ_y [N/mm ²]	%	w [mm]	%	w [mm]	%	σ_x [N/mm ²]	%	w [mm]	%	σ_x [N/mm ²]	%
MM 3.01	0.0680	15.10	18.10	41.62%	0.040	41.62%								
MM 3.02	0.0432	6.20	14.00	4.17%	0.041	4.17%								
MM 3.03	0.0428	15.60	0.50	3.27%	0.041	3.27%								
MM 3.04	0.0543			7.92%	0.050	7.92%								
MM 3.05	0.0765	7.72	11.10	7.19%	0.071	7.19%								
MM 3.06	0.0604	5.40	10.80	-7.62%	0.065	-7.62%								
MM 3.07	0.0603	20.20	0.46	-7.79%	0.065	-7.79%	0.067	-11.11%	16.94	16.14%			18.90	6.44%
MM 3.08	0.0700			-10.00%	0.077	-10.00%					0.0733	-4.71%		
MM 3.09	0.0787	8.20	10.90	8.51%	0.072	8.51%								
MM 3.10	0.0500	5.70	12.70	8.00%	0.046	8.00%								
MM 3.11	0.0500	17.20	0.36	8.00%	0.046	8.00%			14.24	17.21%				
MM 3.12	0.0563			9.41%	0.051	9.41%								
MM 3.13	0.0734	16.40	19.00	35.97%	0.047	35.97%								
MM 3.14	0.0654	16.70	20.90	35.78%	0.042	35.78%								
MM 3.15	0.0250	13.70	0.60	16.00%	0.021	16.00%								
MM 3.16	0.0579	9.80	13.40	30.92%	0.040	30.92%								
MM 3.17	0.0330	16.40	0.50	15.15%	0.028	15.15%								
MM 3.18	0.0569	0.40	0.50	27.94%	0.041	27.94%								
MM 3.19	0.0270	14.70	0.39	25.93%	0.020	25.93%								
MM 3.20	0.0625	15.80	20.10	39.20%	0.038	39.20%								
MM 3.21	0.0427	30.30	0.98	11.01%	0.038	11.01%			26.06	13.99%			27.66	8.71%
MM 3.22	0.0510	25.10	1.10	9.41%	0.0462	9.41%			23.86	4.94%				
MM 3.23	0.0490	28.10	1.10	14.29%	0.042	14.29%								
MM 3.24	0.0640			15.63%	0.054	15.63%								



Слика 7.46. Поређење еластичних линија добијених експериментално и нумерички

Измерена вертикална померања у средини модела, која чине централни део плоче и два укрућења, карактерно прате нумеричке вредности. Угиб у центру плоче измерен компаратером и индуктивним сензором померања је 6-8% већи од оног добијеног нумеричком методом. Максимални угиб у Моделу 1, добијен методом коначних елемената се налази на мерном месту 1.14, између укрућења и ивице плоче. Ту су разлике између мерења и нумерике највеће (25%). Угиби измерени компаратером и индуктивним сензором померања на укрућењима Модела 1 су 3 - 8% већи него они добијени методом коначних елемената. Оптичко мерење угиба даје нешто већа одступања: 12 - 14%. Највећи напони у нумеричком моделу се налазе на врху средине распона укрућења (ММ 1.11, ММ 1.05) и подужног су правца (x правац). Бесконтактни (*Eddy - Current*) сензор са позиционираним магнетима даје 15-16%, док оптичко мерење даје 6-7% мање вредности ове компоненте напона у односу на нумерички прорачунату вредност. Тенденција одсупања мерења и нумеричког прорачуна угиба у Моделу 2 је слична као и у претходном случају. Највећа подударња експеримента (компаратер и индуктивни сензор померања) и нумерике су у централном делу ове оребрене плоче и на укрућењима: 5-11%. Оптичка метода и у овом случају даје нешто већа одступања

вредности вертикалних померања (12-14%) у односу на нумерички прорачун. Маскимальни угиб прорачунат методом коначних елемената налази се на врху укрућења (ММ 2.18). Измерене вредности на овом мерном месту одступају од нумерички добијене за 9.5% код компаратера и 14.2% код оптичке методе. И у Моделу 2 измерене вредности су много мање у односу на нумеричку до 27%. Највећи напони у моделу су они у правцу x , на врховима средине распона укрућења. Оптички систем је ухватио зону ове концентracије напона са одступањем 5-17% у односу на нумеричке резултате. Подужни напон добијен бесконтактним (*Eddy – Current*) сензором са магнетима је 15.6% мањи од напона у нумеричком моделу. Модел 3 приказује највећа подударача нумеричких и експерименталних резултата на укрућењима и носачу где су уједно угиби и највећи: 3-14%. Измерени угиби на делу плоче између укрућења и ивице веома одступају од нумерички добијених угиба и престају да прате карактер еластичне површи. Највећи напони препознати у МКЕ моделу ($44.7 N/mm^2$ за оптерећење од $9.81 kN$) су последица концентracије напона на радијусу контуре пролаза укрућења кроз носач и није их било могуће измерити коришћеним мерним инструментима. Максимални напони у моделу као последица савијања, а не локалне концентracије напона, налазе се на прелазу појас – струк укрућења и носача. Оптичка метода даје 9%, док бесконтактни (*Eddy - Current*) сензор даје 14% нижи максимални напон у правцу x , него нумеричка метода.

Угиб у средини добијен експерименталним путем је у свим моделима већи него угиб добијен нумеричким прорачуном. На овој позицији разлике мерења и прорачуна су и најмање. Идући ка крајевима модела (по y оси) измерени угиб постаје све мањи у односу на нумерички, где настају и највећа одступања. Резултати близу ослонаца плоче показују већа одступања мерења од нумеричких резултата. Генерално, најбоља поклапања у угибима добијају се на укрућењима, док у плочама модела близу ивица није такав случај.

Компаратер даје најприближније вредности угиба у поређењу са нумеричким прорачуном. Угиб измерен индуктивним сензором померања коришћен у мерењу угиба на средини модела незнатно се разликује од оног који је добијен компаратером. Оптички систем даје угибе на Моделу 1 и 2 12-15% веће него у

нумеричком прорачуну. Зоне максималног напона препознате нумеричком анализом су измерене на врховима укрућења (и носача) и измерене оптичком методом и бесконтактним (*Eddy – Current*) сензором са позиционираним магнетима. Бесконтактни (*Eddy - Current*) сензор, са магнетима, даје нешто ниже вредности напона од оптичке методе. Објашњење се може тражити у чињеници да је магнете скоро немогуће позиционирати на самом прелазу струк – појас, него пар милиметара од те локације где је и напон мањи од максималног. Основица магнета је круг пречника 6 mm па је и релативна промена растојања измерена овим уређајем проузрокована померањем групе тачака на међусобној удаљености од 26 mm. Оптички систем је у могућности да препозна концентracију напона, чак и са тако великим градијентом. Места са великом концентрацијом напона могу се „ухватити“ чак и на местима огромних градијената, што је описано и показано у [96]. Компонентални напон, проузрокован савијањем укрућења или носача у правцу x има највећу вредност на прелазу струк – појас укрућења и после свега пар милиметара нагло опада. Арамис систем препознао је поља напона и померања на оребрењима модела, али и максималне вредности са одступањима до 9% на свим мерним местима осим једног (ММ 2.17 – 17%) у односу на резултате нумеричке анализе. При анализи резултата мерења треба имати у виду грешке методе (описане у 7.3, 7.4 и 7.5).

Облик еластичне површи и односа угиба у плочи и укрућењима реконструисане на основу измерених вредности вертикалног померања ипак говоре да експериментално спроведено оптерећење није идално равномерно распоређено по површини плоче модела. Експериментални резултати су поређени са оним добијеним нумеричком анализом при идеално распоређеном притиску на плоче модела. У експерименту није било тако, иако је тенденција била да се такво стање симулира. Непрепознавање јачине терцијарног одзива констуркције, додуше само у делу неоробрен плоче ка ивицама, говори у прилог чињеници да притисак није довољно добро распоређен на овом делу плоче. Нешто већи измерени угиби на средини него исти добијени нумеричким путем могу назначити да се сила са хидроцилиндра „више“ распоредила ка средини него ка крајевима. Да се претпоставити да је апсолутна вредност притиска задатог експерименталним

путем већа од оних 0.0638 N/mm^2 који би чинио идеално равномеран у случају МКЕ. Вредност притиска идући ка крајевима је, може се претпоставити, мања. Такође, важан утицај на експерименталне резултате има и начин преношења оптерећења. Добра поклапања вредности угиба на укрућењима и носачу могла би назначити и да се сила са хидроцилиндра „најбоље“ пренела на оребрења. Овоме свакако доприноси крутост елемената (система плоча) за пренос оптерећења са цилиндра на моделе. Стога, експериментално изазивање терцијарног одзива конструкције је представљало проблем.

И поред овога треба имати у виду да и у случају реалног репрезентовања равномерно распоређеног притиска на плочу резултати измерених напона и угиба свакако били приближнији оним нумеричким. У таквом експерименту, очекивани угиби на средини били би нешто мањи, док би они у плочи били већи. Максимални напони на врховима укрућења. Експеримент је добро симулирао ово савијање пре свега због чињенице да се ради о савијању укрућења у подужном правцу као доминантном, а може се рећи, и једином узорчнику максималног напона у моделима. Прелаз струк – појас профила налази се на највећем растојању од неутралне осе па његова влакна постају подложна високим напонима истезања.

Експериментални резултати се, у принципу, добро поклапају са нумеричким. На мерним местима где то није био случај, ово је директна последица несавршености експерименталне процедуре тј. неидеалног представљања равномерног притиска на плоче. У случајевима где су напон или угиб били последица чистог глобалног савијања оребрене плоче, резултати нумеричке анализе и експеримента су имали добро поклапање. У случају понашања дела неоробрене плоче између два оребрења, такав одзив није било могуће испратити на најбољи начин. У пракси, али и у прорачуну, овакви модели плоче нису толико стандардни. Као што се да видети њихово понашање не прати стандардно понашање типичне оребрена плоче са 5-10 укрућења. Стандардне оребрене плоче имају гушћи распоред оребрења у односу на експерименталне моделе. Укрућења, на изабраним моделима, се не савијају са плочама па је аналитички, нумерички и експериментално њихова анализа увек била проблематична. Реално је за очекивати да је терцијарни одзив код стандардно (многоструко) укрућених оребрених плоча мање доминантан него

што је то био случај у мерним моделима. Код уобичајених модела са већим бројем укрућења плоча се хомогеније савија са укрућењима. Доминатни део одзива оваквих оребрених плоча је заиста последица савијања модела у оба правца, односно секундарни озив конструкције. Тиме је и могућност предикције глобалног понашања оваквих конструкција једноставнија, а и експериментална верификација лакша.

Мрежа коначних елемената у нумеричком моделу у предложеној методи је свакако ређа у односу на ону коришћену у овом екперименту. Може се очекивати да и тако добијени угиби буду нешто мањих вредности од оних добијених гужћом мрежом. Међутим, као што је већ речено, у глобалним моделима великих консктруцкија (брод) мрежа која чини поделу на два елемента између секундарних укрућења је уобичајена и има смисла с обзиром на карактер одзива оваквих модела. Поента коначне анализе је што верније репрезентовати глобално понашање конструкције. Тиме грешке у виду непрепознавања концентрација напона, терцијарног одзива између суседних секундарних укрућења постају неизбежне.

Резултати екперимента су, уз нека одступања, показали веродостојност нумеричких прорачуна модела оребрених плоча. Угиб и фон Мисесов напон оребрених плоча су једини подаци који ремете аутоматизацију методе еквиваленције, па је стога, ова потврда, веома битна за развијену методу.

8 Закључне напомене и смернице за будућа истраживања

8.1 Закључне напомене

Докторске дисертација је проистекла као резултат вишегодишњег истраживања из области чврстоће бродских консткрукције, а пре свега оребрених плоча. Рад је подељен у осам поглавља, од којих прва три представљају преглед постојећих истраживања из области прорачуна оребрених плоча. У општем случају, проблем чврстоће оребрених плоча аналитички је нерешив за практичну примену. Стога, примена методе коначних елемената остаје једини свеобухватни алат за анализу понашања ових констуркција.

У раду је објашњена процедура за добијање еластичних параметара неоребрене плоче, чији би одзив по померањима и напону одговарао одзиву оребрене плоче. У петом поглављу објашњена је цела процедура моделирања еквиваленте плоче, док је у шетом, кроз конкретан пример структурне анализе трупа брода, илустрована примена методе еквиваленције.

Примена методе састоји се у упрошћавању моделирања глобалних нумеричких модела бродске конструкције. Еквивалентни модел трупа брода је састављен од еквивалентних плоча. Овај модел је знатно једноставнији, поседује мањи број коначних елемената и чворова, и састоји се углавном само од неоребрених плоча измењених карактеристика. Неоребрене плоче моделоване су еквивалентним плочастим елементима који по свом понашању хомогенизују крутост плоче и крућења. Оваквим приступом обезбедиће се поуздан и ефикасан метод анализе чврстоће бродских конструкција у прелиминарној фази анализе чврстоће брода када да се ради нумерички прорачун глобалног модела. Развијена метода упростиће анализу чврстоће бродских конструкција у раним фазама пројектовања.

У теоријском смислу, суштина примене развијене методе еквиваленције је распрезање мембранског и савојног одзива оребрених плоча. Ово је омогућило засебно моделирање мембранских и савојних карактеристика еквивалентне плоче. Моделирање мембранских еластичних параметара следи из услова једнакости максималних раванских померања и максималног фон Мисесовог напона у две плоче. Аналогно је и са савојним параметрима: једнакост максималног угиба и максималног фон Мисерсовог напона у две плоче мора бити задовољена. Моделирање савојних еластичних параметара је сложеније, и садржи одређена одступања, чак и при идеалним контурним условима, а поготово узимајући у обзир измерене вредности угиба и напона на реалним примерима оребрених плоча (Поглавље 7). Ова чињеница се одражава и на резултате анализе глобалног нумеричког модела. На деловима конструкције где је савијање доминантно могу се очекивати и највећа одступања у резултатима и пољима промене померања и напона еквивалентног у односу на конвенционални модел трупа брода. Модули еластичности су моделирани тако да заиста репрезентују крутост оребрене плоче у правцима. Стога, еквивалентни модели у односу на конвенционалне показују добро понашање чак и када се контурни услови и оптерећења разликују од оних идеалних, претпостављени у методи еквиваленције.

Дакле, резултати истраживања описани у овој докторској дисертацији могу се сумирати у следећем:

- дефинисан је нови тип коначног елемента танке правоугаоне плоче чији би одзив одговарао одзиву реалне оребрене (конструктивно ортотропне) плоче;
- развијен је математички модел за извођење/моделирање коефицијената матрице еластичности (и матрице крутости) тог новог типа коначног елемента.

Развијена метода може имати примену при пројектовању брода и анализи његове чврстоће. Анализирани панели имају опште - машинску примену па се процедура може користити и у другим подручјима машинства у којима постоји проблем чврстоће оребрених панела.

Највећа мана методе еквиваленције, поред нумеричког прорачунавања угиба и напона оребрене плоче услед савијања, односи се на поклапање напона у две плоче. Наиме, максимални фон Мисесов напон, у случају савијања, није на истој позицији у еквивалентној као у оребреној плочи. Одавде следи да ни промена напона по плочи неће бити иста. Међутим, гледајући целу конструкцију састављену од великог броја оребрених плоча, може се уочити да је генерална промена поља фон Мисесових напона између самих оребрених плоча релативно слична као у случају када је исти модел састављен од оребрених плоча. Позиције локалних максимума неће бити на истом месту у две плоче. Проблем еквиваленције напона свакако представља критеријум фон Мисесовог напона. Односно, вредносно поклапање ових напона, као скалара, никако не значи поклапање компоненти напона. Стога, у случају сложенијих комбинација оптерећења на оребреној плочи корисник методе треба да буде обазрив са избором критеријума за еквиваленцију (напона, контурних услова итд.). Ово свакако може имати утицај у случајевима када је смицање доминантног удела у фон Мисесовом напону.

Арбитрарност у избору критеријума еквиваленције, у оквиру алгоритма методе, остављена је због универзалности примене поступка. Ако се ради о конструкцији у којој су познати правци и јачине деловања оптерећења, и контурни услови, корисник сам може уграмирарати ове промене у алгоритам методе. Код анализе чврстоће брода као глобалног модела, као у Поглављу 6, критеријуми су

прилично детерминисани: критеријум мембранског напрезања је доминантно (или једино) оптерећења панела у працу дужине брода, док је критеријум за савојно напрезање равномеран латерални притисак на слободно ослоњену плочу.

У методи еквиваленције, није извршено поклапање напона смицања у две плоче. Утицај смицања, код савијања, је намерно релативизован стварањем зависности ове величине од еластичних коефицијената. Овим је онемогућено да смицање икада буде доминантна компонента напона у еквивалентној плочи, али да се њен значај не изгуби, већ остане у сличним односима као и у оребреној плочи. Такође, корисник методе треба да има у виду да је еквиваленција неће имати примену у случајевима када на плочу делују концентрисана оптерећења, с обзиром да је равномерност оптерећења битна претпоставка методе еквиваленције.

Описана процедура омогућава аутоматизацију и програмибилност методе. Једини корак који ремети директно добијање еластичних параметара еквивалентне плоче на основу димензија оребрене плоче су максимални угиб и фон Мисесов напон при савијању. Ово је, наравно, последица чињенице да не постоји универзална метода, осим методе коначних елемената, која би са довољном прецизношћу могла прорачунати угиб и напон у оребреној плочи. За сада, корисник ипак мора сам да, нумеричким путем, израчуна ове вредности улазне величине, за употребу методе. Наравно, у методи еквиваленције могуће је укључити неке од постојећих метода за прорачун угиба и напона оребрене плоче (метода решекте, корелационе формуле итд.), али треба бити обазрив на тачност и примену ових метода.

8.2. Смернице за будућа истраживања

Истраживање описано у докторској дисертацији отворило је доста питања, већ начетих у оквиру закључних напомена, а проистеклих из мањкавости методе, а

пре свега везаних за начин еквиваленције оребрене и неоробрене плоче. Овоме треба додати и још неке начине моделирања смицања у еквивалентној плочи, истраживања проблема еквиваленције напона, али и моделирања спреге савијања и мембранског одзива.

Ове мане могу бити смернице за даља истраживања и могу се сумирати у следећем:

- аутоматизација нумеричког прорачуна угиба и напона оребрене плоче у развијену методу еквиваленције (корелационе формуле, база података максималних угиба и напона у оребреним плочама);
- боље репрезентовање утицаја смицања на понашање структуре еквивалентних плоча;
- боље поклапање поља промена напона у оребреној и еквивалентној плочи;
- истраживање утицаја других контурних услова и оптерећења у моделирању еквивалентних плоча;
- истраживања утицаја спреге савојног и мембранског одзива на структурно понашање оребрене, односно еквивалентне плоче;
- истраживање могућности еквиваленције понашања структуре оребрених и еквивалентних плоча у области нелинеаног понашања материјала.

Литература

- [1] Mansour A., Donald L., *Strength of ships and ocean structures (The Principles of Naval Architecture Series)*, SNAME, Jersey City - N.Y., 2008.
- [2] Моток М., *Чврстоћа брода: одабрана поглавља статичке анализе*, Машински факултет, Београд, 2005.
- [3] **** , *Classification of Ships, Rules and Regulations*, Lloyd`s Register, London, 2013.
- [4] Ruocco E., Mallardo V., *Buckling analysis of levy - type orthotropic stiffened plate and shell based on different strain - displacement models*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 50, 40 – 47, 2013.
- [5] Kim S.E., Thai H.T., Lee J., *Buckling analysis of plates using the two variable refined plate theory*, Thin-Walled Structures, Vol. 47, No. 4, 455–462, 2009.
- [6] Ghavamia K., Khedmati M.R., *Numerical and experimental investigations on the compression behavior of stiffened plates*, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 62, No.11, 1087–1100, 2006.
- [7] Ming Cai Xu M.S., Soares C.G., *Numerical assessment of experiments on the ultimate strength of stiffened panels*, Engineering Structures, Vol. 45, 460–471, 2012.
- [8] Paik J.K., Thayamballi A.K., *Ultimate limit state design of steel- plated structures*, John Wiley & Sons, 2003.
- [9] Paik J.K., Kim B.J., Seo J.K., *Methods for ultimate limit state assessment of ships and ship-shaped offshore structures: Part II stiffened panels*, Ocean Engineering, Vol. 35, No. 2, 271-280, 2008.
- [10] Paik J.K., Kim B.J., Seo J.K., *Methods for ultimate limit state assessment of ships and ship-shaped offshore structures: Part III hull girders*, Ocean Engineering, Vol. 35, No. 2, 281–286, 2008.
- [11] ****, *Eurocode 3: Design of steel structures*, European Standard, 2006.

- [12] Von Mises R., *Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch - Physikalische Klasse, Vol. 1, 582–592, 1913.
- [13] ***, *ISO 2394-1998: General principles on reliability for structures*, International Standard, 1998.
- [14] Brubak L., Hellesland J., *Strength criteria in semi-analytical, large deflection analysis of stiffened plates in local and global bending*, Thin-Walled Structures, Vol. 46, No. 2., 1382– 1390, 2008.
- [15] Hughes O., *Ship Structural Design*, John Wiley & Sons, 1983.
- [16] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of plates and shells*, McGraw–Hill, New York, 1959.
- [17] Mansour A., *Charts for buckling and post-buckling analyses of stiffened plates under combined loading*, SNAME, New York, 1976.
- [18] Trenks K., *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten*, Der Bauingenieur, vol. 29, 1954.
- [19] Schade H.A., *Bending theory of ship bottom structure*, Transactions, SNAME, Vol. 46, 176 – 205, 1938.
- [20] Schade H.A., *The orthogonally stiffened plate under uniform lateral load*, Journal Applied Mechanics, Vol. 7, No. 4, 1940.
- [21] Schade H.A., *Design curves for cross - stiffened plating*, Transactions, SNAME, Vol. 49, 154 – 182, 1941.
- [22] Huber M.T., *Theory of plates*, L’vov, 1921.
- [23] Ashton J.E., Whitney M.J., *Theory of laminated plates*, Technomic, 1970.
- [24] Vinson J.R., Sierakowski R.L., *The behavior of structures composed of composite materials*, Springer, 2007.
- [25] Jones M.J., *Mechanics of composite materials*, CRC Press, 1998.
- [26] Timoshenko S., *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [27] Reddy J.N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and Analysis*, CRC Press, 2004.
- [28] Lekhnitskii S.G., *Anisotropic plates*, Second Edition, Gordon and Breach, New York, 1984.
- [29] Kollár L.P.,_Springer G.S., *Mechanic of composite structures*, Cambridge

- University Press, 2003.
- [30] Marguerre K., Woerle T., *Elastic plates and shells*, Blaisdell Publishing Co., Toronto -London, 1969.
- [31] Mansour A., *Ship bottom structure under uniform lateral and in - plane loads*, Schiff and Hafen, Vol. 5., 323-339, 1967.
- [32] Falconer B.H., Champan J.C., *Compressive buckling of stiffened plates*, The Engineer, Vol. 195, 789 - 791 and 822 -825, 1953,
- [33] Champman J.C., Slatfor J .E., *Design of stiffened plating in compression*, The Engineer, Vol. 207, 292-294, 1959.
- [34] Schultz H. G., *Zur Tragfahigkeit druckbeanspruchter orthotreckling platen*, Stahlbau, Vol. 33, No. 4., 123 – 126, 1964.
- [35] Mansour A., *Charts for Buckling and postbuckling analyses of stiffened plates under combined loading*, SNAME T&R Bull, 2-22, 1976.
- [36] Aalami B.,Chapman J.C., *Large deflection behaviour of rectangular orthotropic plates under transverse and in - plane loads*, Proc. Inst. Civ. Eng., Vol. 42, No. 3., 347 - 382, 1969.
- [37] Williams D. G., Champam J.C., *Test on one eight scale model of the double bottom structure*, Trans. RINA, 329-345, 1974.
- [38] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The finite element method: Basic formulation and linear problems*, Mcgraw-Hill, New York,1987.
- [39] Bathe K.J., Wilson E.L., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, 1976.
- [40] Манески Т., *Компјутерско моделирање и прорачун структура*, 1998, Машински факултет, Београд, 1998.
- [41] Reddy J.N., *An introduction to finite element method*, Mcgraw - Hill, New York, 2005.
- [42] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Butterworth - Heinemann, 2013.
- [43] Hutton D., *Fundamentals of finite element analysis*, McGraw-Hill Education (India), 2005.
- [44] Tingleff A., *Method for simulating concentrated forces and local reinforcement in stress computation*, Mathematics of Finite Elements and Applications,

- Academic Press, 463-470, 1973.
- [45] Colville J., Abbassi J., *Plane stress reinforced concrete finite elements*, J. Struct. Div., ASCE, Vol. 100, 1067-1083, 1974.
- [46] Paik. J.K., Seo J.K., *Nonlinear finite element method models for ultimate strength analysis of steel pane structures under combined biaxial compression and lateral pressure actions Part II: Stiffened panels*, Thin Walled Structures, Vol. 47, No. 8, 998 – 1007, 2009.
- [47] Sertic J., Gelo I., Kozak D., Damjanovic D., Konjatic P., *Theoretical determination of elasticity constants for steam boiler membrane wall as the structurally orthotropic plate*, Technical Gazette, Vol. 20., No. 4., 697 – 703, 2013.
- [48] Milošević-Mitić, V., Gaćeša, B., Anđelić, N., Maneski, T., *Numerical calculation of the water - tube boiler using finite element of the orthotropic plate*, Structural Integrity and Life, Vol. 12, No. 3, 185-190, 2012.
- [49] Ojedaa R., Prustyb B.G., Lawrencea N., Thomasa G., *A new approach for the large deflection finite element analysis of isotropic and composite plates with arbitrary orientated stiffeners*, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 43, No. 13, 989 – 1002, 2007.
- [50] Kumar Y.V.S., Mukhopadhyaya M., *A new triangular stiffened plate element for laminate analysis*, Composites Science and Technology, Vol. 60, No. 6, 935 - 943, 2000.
- [51] Kumar Y.V.S., Mukhopadhyaya M., *Finite element analysis of ship structures using a new stiffened plate element*, Applied Ocean Research, Vol. 22, No. 6, 361 - 374, 2000.
- [52] Kok A.W.M., Blaauwendraad J., *Shape-orthotropic stressing–bending plate model*
Engineering Structures, Vol. 30, No. 10, 2884–2892, 2008.
- [53] ***, *Ship Design and Construction – Vol. I*, SNAME, 2003.
- [54] ***, *Guidelines for Global Strength Analysis of Container Ships*, Germanischer Lloyd, 2011.
- [55] ***, *Guidance notes on Safehull finite elements analysis of hull structures*, American Bureau of Shipping, 2014.

- [56] ***, *Structural design of offshore ships*, Det Norske Veritas, 2011.
- [57] ***, *Rules for the Classification of Steel Ships*, Bureau Veritas, 2014.
- [58] Liu D., Spencer J. Itoh T., Kawachi S., Shigematsu K., *Dynamic load approach in tanker design*, SNAME Transactions, Vol. 100., 1992.
- [59] Banai L., Pedatzur O., *An evaluation and comparison of models for maximum deflection of stiffened plates using finite element method*, Marine Technology, Vol. 44, No. 4, 2007.
- [60] Ueda Y., Rashed S.M.H., *An ultimate transverse strength analysis of ship structures*, Journal of Society of Naval Architects of Japan, Vol. 136, 1975.
- [61] Paik J. K., *ALPS/ISUM: A computer program for nonlinear analysis of large plated structures using the idealized structural unit method*, Pusan National University, Pusan (South Korea), 1993.
- [62] Enrong Q., Weicheng C., Zhengquan W., *Comparative study of ultimate hull girder strength of large double hull tankers*, Marine Structures, Vol. 18., 227 – 249, 2005.
- [63] Paik J. K., Thayamballi A.K., Pedersen P.T., Park Y. I., *Ultimate strength of ship hulls under torsion*, Ocean Engineering, Vol. 28, 1097-1133, 2001.
- [64] Paik J. K., Thayamballi A.K., Che J.S., *Ultimate strength of ship hulls under combined vertical bending, horizontal bending and shearing forces*, SNAME Transactions 104: 31-59, 1996.
- [65] Fujikubo M., Kaeding P., *New simplified approach to collapse analysis of stiffened plates*, Marine Structures , Vol. 15, 251–283, 2002.
- [66] Fujikubo M., *Structural analysis for the design of VLFS*, Marine Structures, Vol. 18., 201–226, 2005.
- [67] Гаћеша Б., *Нумеричко – експериментална анализа чврстоће котловских конструкција* , докторска дисертација, Машински факултет, Београд, 2011.
- [68] Penga L.X., Kitipornchaia S., Liew K.M., *Analysis of rectangular stiffened plates under uniform lateral load based on FSDT and element-free Galerkin method*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 47, 251–276, 2005.
- [69] Hamedani S.J., Ranji A.R., *Buckling analysis of stiffened plates subjected to*

- non-uniform biaxial compressive loads using conventional and super finite elements*, Thin-Walled Structures, Thin-Walled Structures, Vol. 64, 41–49, 2013.
- [70] Ahmadian M.T., Zangeneh M.S., *Vibration analysis of orthotropic rectangular plates using superelements*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 191, 2069–2075, 2002.
- [71] Motok M.D., Jovovic J., *A procedure for optimizing laterally loaded stiffened panels (the “Bubnov in Monte Carlo” algorithm)*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 76, No. 3, 706 – 714, 2012.
- [72] Michelsen F.,C., Nielsen R., *Grillage structure analysis through use of the Laplace integral transform*, SNAME Transactions, Vol. 73, 216 – 240, 1965.
- [73] St. Denis M., *A guide for the synthesis of ship structures Part One: The midship hold of a transversely-framed dry cargo ship*, Ship Structures Committee Report SSc-215, 1970.
- [74] Родић Т., *Одређивање корелационих формула за анализу чврстоће оребрених плоча бродске конструкције*, магистарски рад, Машински факултет, Београд, 2002.
- [75] Paik J. K., Kim B.J., *Ultimate strength formulations for stiffened panels under combined axial load, in-plane bending and lateral pressure: a benchmark study*, Thin Walled Structures, Vol. 40, No. 1, 2001.
- [76] Fujikubo M., Harada M., Yao T., Khedmati M.R., Yanagihara D., *Estimation of ultimate strength of continuous stiffened panel under combined transverse thrust and lateral pressure Part 2 : Continuous stiffened panel*, Marine structures, Vol. 18, No. 5, 2005.
- [77] Paik J.K., Seo J.K., *Nonlinear finite element method models for ultimate strength analysis of steel stiffened-plate structures under combined biaxial compression and lateral pressure actions - PartII: Stiffened panels*, Thin-Walled Structures, Vol. 47, No. 8&9, 998–1007, 2009.
- [78] Khedmati M.R., Zareei M.R., Rigo P., *Empirical formulations for estimation of ultimate strength of continuous stiffened aluminum plates under combined in-plane compression and lateral pressure*, Thin-Walled Structures, Vol. 48, No. 3, 274–289, 2010.

- [79] Fujikubo M., Haradab M., Yaoc T., Khedmati M.R., Yanagihara D., *Estimation of ultimate strength of continuous stiffened panel under combined transverse thrust and lateral pressure Part 2: Continuous stiffened panel*, Marine Structures, Vol. 18, No. 5, 411–427, 2005.
- [80] Shanmugam N.E., Dongqi Z., Choo Y.S., Arockiaswamy M., *Experimental studies on stiffened plates under in-plane load and lateral pressure*, Thin-Walled Structures, Vol. 80, 22–31, 2014.
- [81] Xu M.C., Yanagihara D., Fujikubo M., Soares C.G., *Influence of boundary conditions on the collapse behaviour of stiffened panels under combined loads*, Marine Structures, Vol. 34, 205–225, 2013.
- [82] Araghi S.N., Shanmugam N.E., *Strength of biaxially loaded orthotropic plates*, Thin-Walled Structures, Vol. 53, 40–47, 2012.
- [83] Манески Т., *Компс (компјутерско моделирање и прорачун структура)*, софтверски пакет за прорачун структура, Машински факултет, Београд, 1997. – 1999.
- [84] Tsai S. W., Wu, E. M., *A general theory of strength for anisotropic materials*, Journal of Composite Materials. Vol. 5, 58–80, 1971.
- [85] ***, *DDR TGL 7682-1*, компаратер, Кинех, Чешка Република.
- [86] ***, *MSC 710*, индуктивни сензор померања, Micro – Epsilon, <http://www.micro-epsilon.com/download/manuals/man--MSC710--en.pdf>.
- [87] ***, *Aramis – 3D Deformation Analysis*, систем за оптичко мерење, GOM, Немачка, <http://www.gom.com/metrology-systems/system-overview/aramis.html>.
- [88] ***, *WSD F2/10F*, сензор померања, Unidor, http://www.unidor.info/gb-uk/downloads/wsd_s210f_eng.pdf.
- [89] ***, *HM52*, хидраулични цилиндар, Einhell, Немачка.
- [90] ***, *CZL – 312*, сензор оптерећења, HLH, Кина.
- [91] ***, *Аквизицијска кутија*, National Instruments, <http://serbia.ni.com>.
- [92] ***, *LabView*, софтверски пакет за обраду мерних података, National instruments.
- [93] Ghafoori E., Motovalli M., *Analytical calculation of stress intensity factor of*

- cracked steel of I - beams with experimental analysis and 3D image correlation measurements*, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 78, No. 18, 3226- 3242, 2011.
- [94] Yu J.H., Dehmer P., *Dynamic impact deformation analysis using high speed cameras and Aramis photogrammetry software*, Army Research Laboratory – Report, USA, 2010.
- [95] Eriksen R., Berggren C., Boyd S.W., Dulieu - Barton J.M., *Toward high velocity deformation characterization of metals and composites using digital image correlation*, ICEM 14 - 14th International Conference on Experimental Mechanics, 6, pp8, 2010.
- [96] Momcilovic N., Motok M., Maneski T., *Stress concentration on the contour of a plate opening: analytical, numerical and experimental approach* , J. Theor. Appl. Mech., Vol. 51, No. 4, 1003-1012, 2013.
- [97] Sutton M., *Digital image correlation for shape and deformation measurements*, Handbook of experimental solid mechanics, Springer, 565-600, 2008.
- [98] Hild F., Roux S., *Digital Image Correlation: from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties – a Review*, Strain, Vo. 42, No. 2, 69-80, 2006.
- [99] Lecompte, D., A. Smits, S. Bossuyt, H. Sol, J. Vantomme, D. Van Hemelrijck, A. M. Habraken., *Quality Assessment of Speckle Patterns for Digital Image Correlation*, Optics and Lasers in Engineering, Vol. 44 , No. 11, 1132–1145, 2006.
- [100] Stoilov G., Kavardzhikov V., Pashkouleva D., *A comparative study of random patterns for digital image correlation*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 42, No. 2, 55-66, 2012.
- [101] ***, *Aramis v6.1 User Manual*, GOM mbH, Germany, 2009.
- [102] Fazzini M., Mistou S., Dalverny O., Robert L., 2010, *Study of image characteristics on digital image correlation error assessment*, Optics and Lasers in Engineering, Vol. 48, 335-339

- [103] Schreier, H.W., Braasch, J.R., Sutton, M.A., *Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation*, Optical Engineering, Vol. 39, No. 11, 2915-2921, 2006.

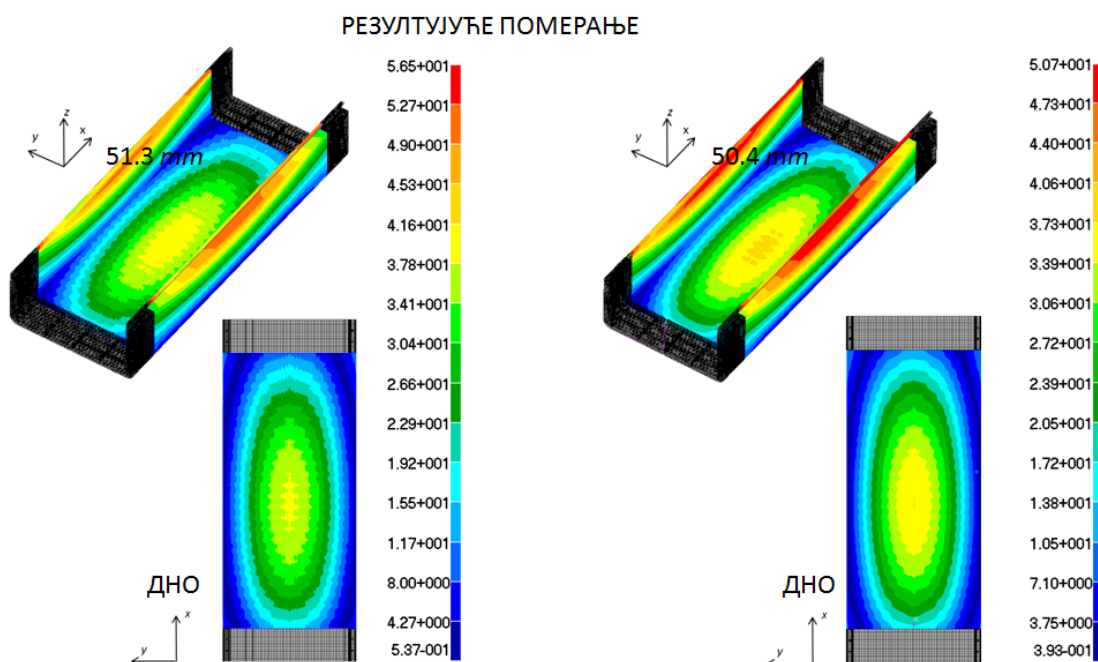
ПРИЛОГ 1 - Резултати прорачуна конвенционалног и еквивалентних нумеричких модела трупа брода

Напомена:

- Еквивалентни нумерички модели трупа брода су са истим (слике П.1.1 – П.1.26) и са редукованим бројем степени слободе (слике П.1.27 – П.1.43);
- Све вредности померања су дате у *mm*. Вредности фон Мисесових напона су у N / mm^2 .

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

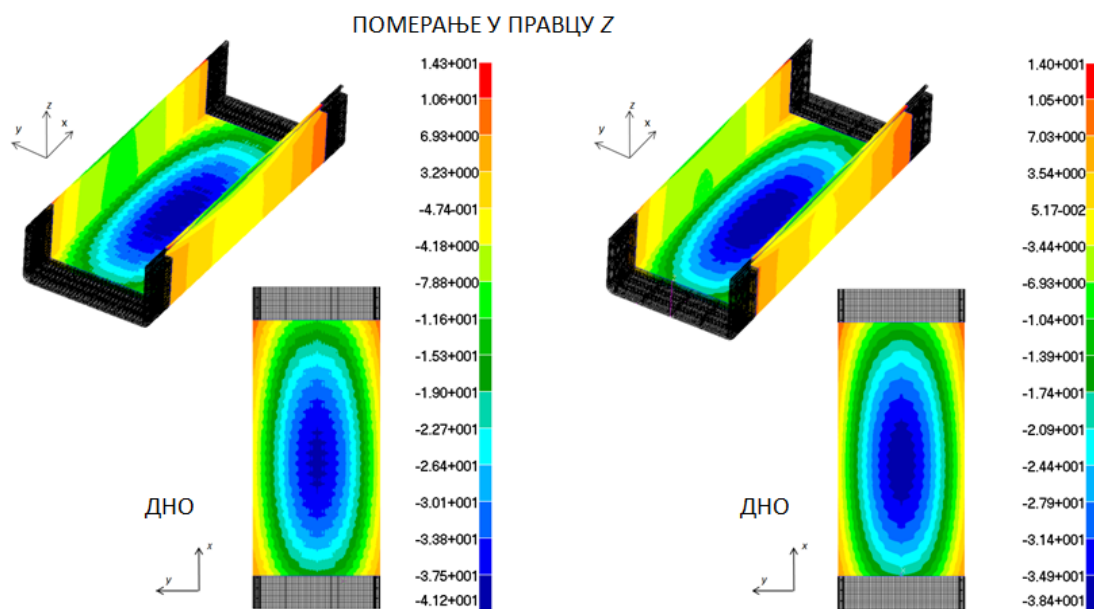
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.1. Резултујуће померање ЗД модела (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

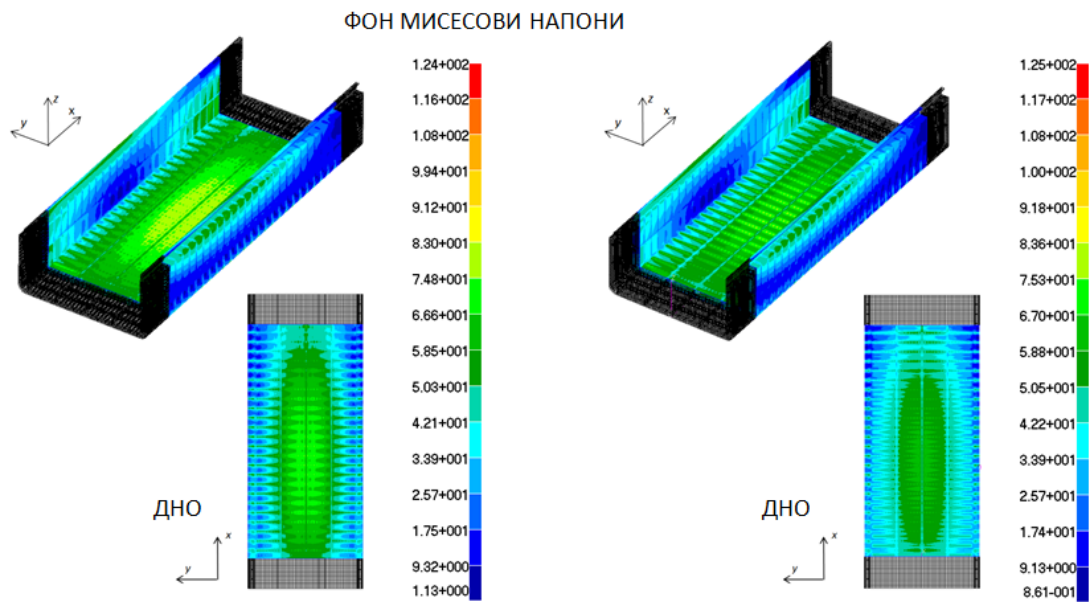
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.2. Вертикално померање ЗД модела (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

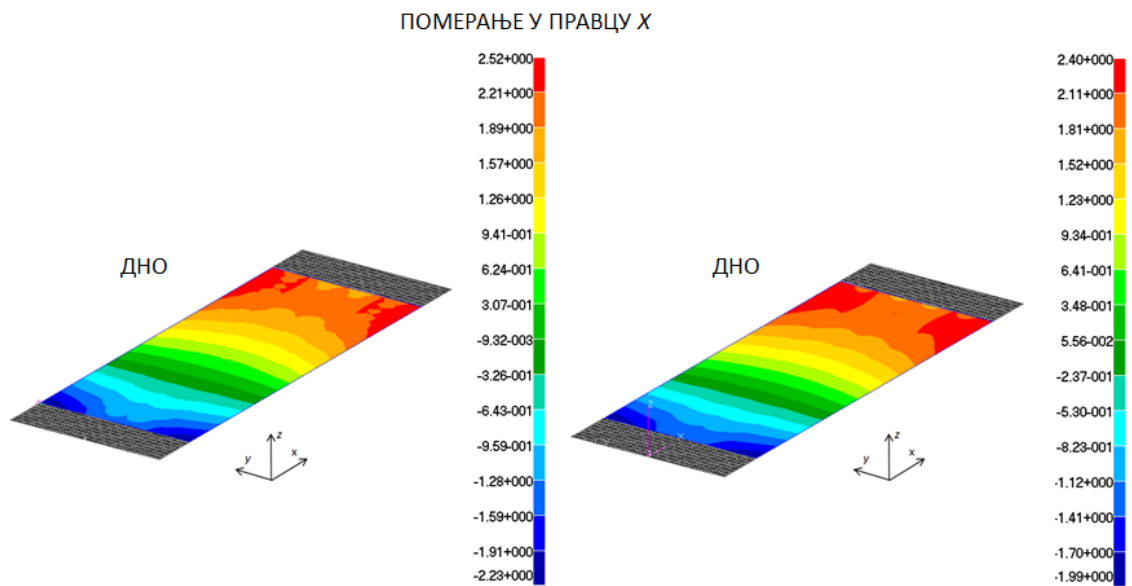
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.3. Фон Мисесови напони у ЗД моделу (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

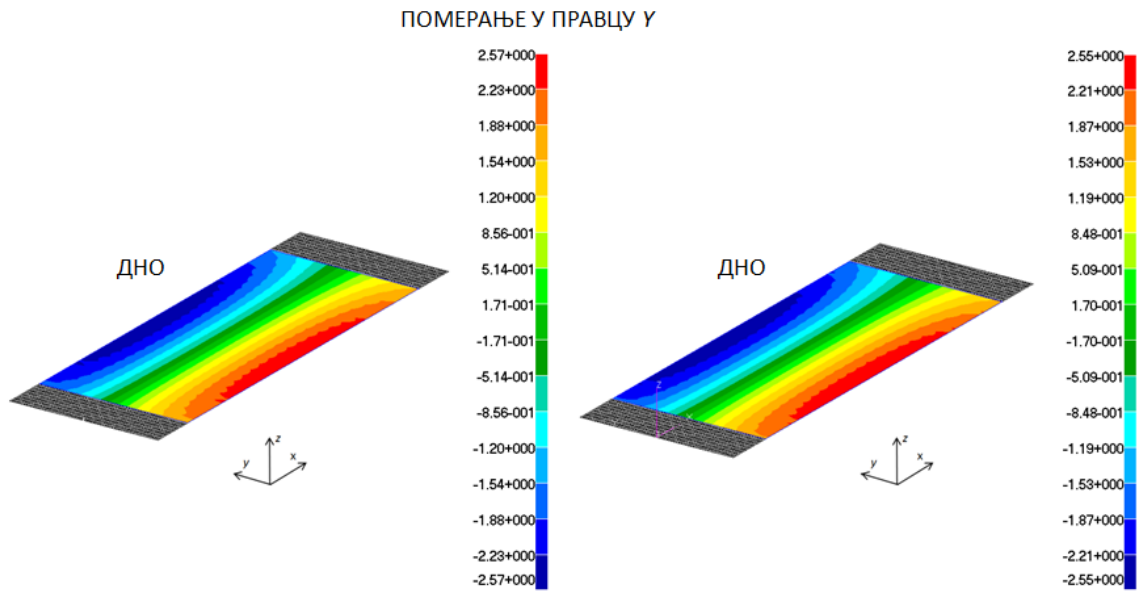
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.4. Померање дна, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

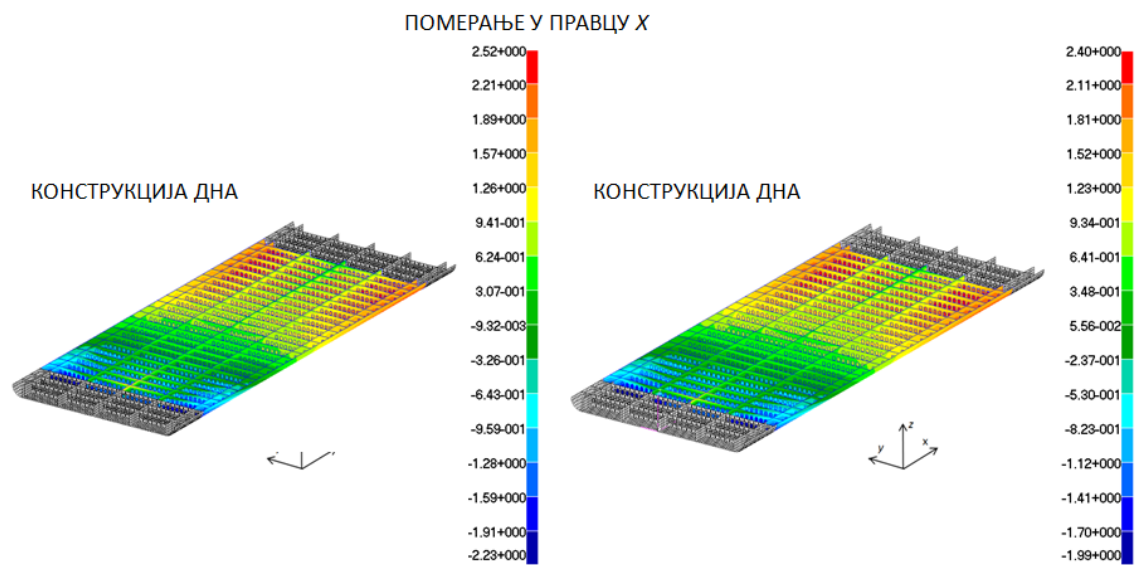
ЭКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



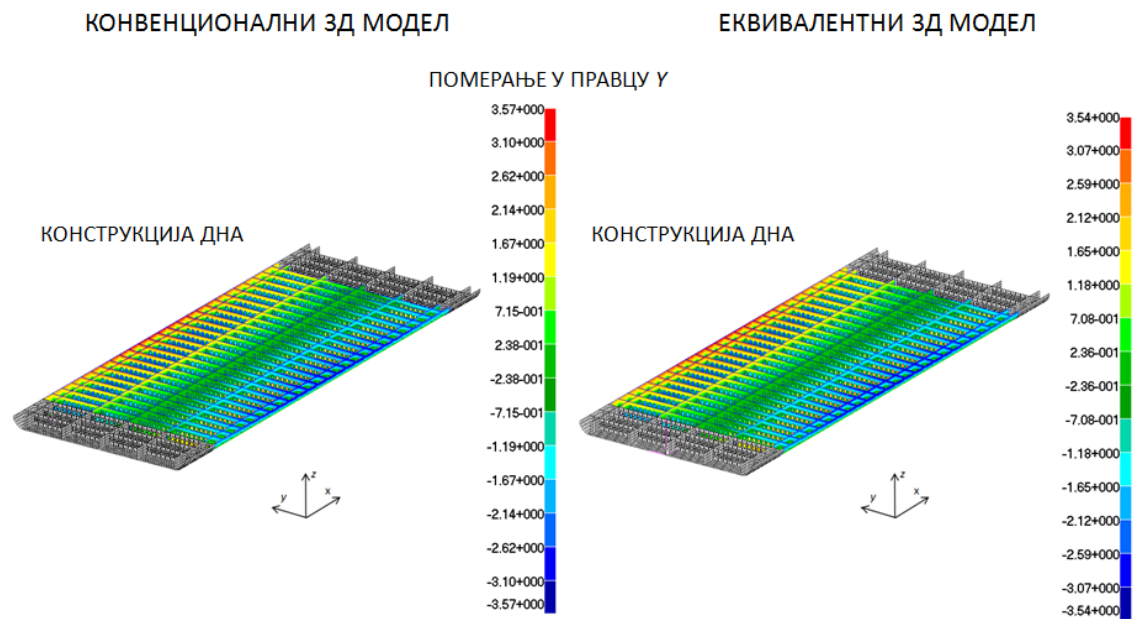
Слика П1.5. Померање дна, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

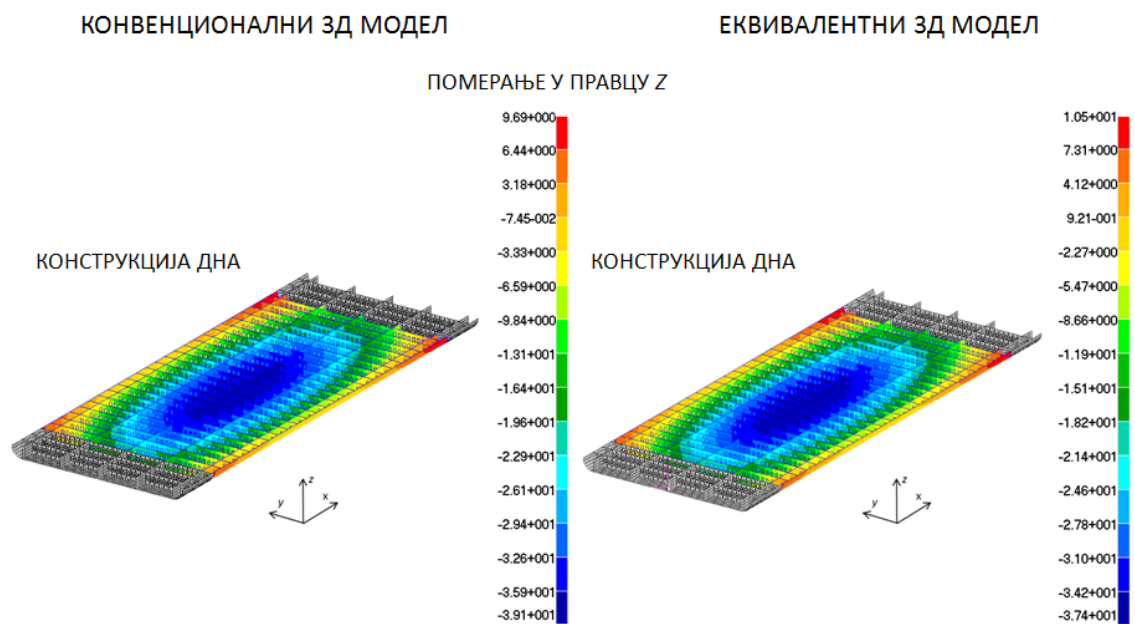
ЭКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



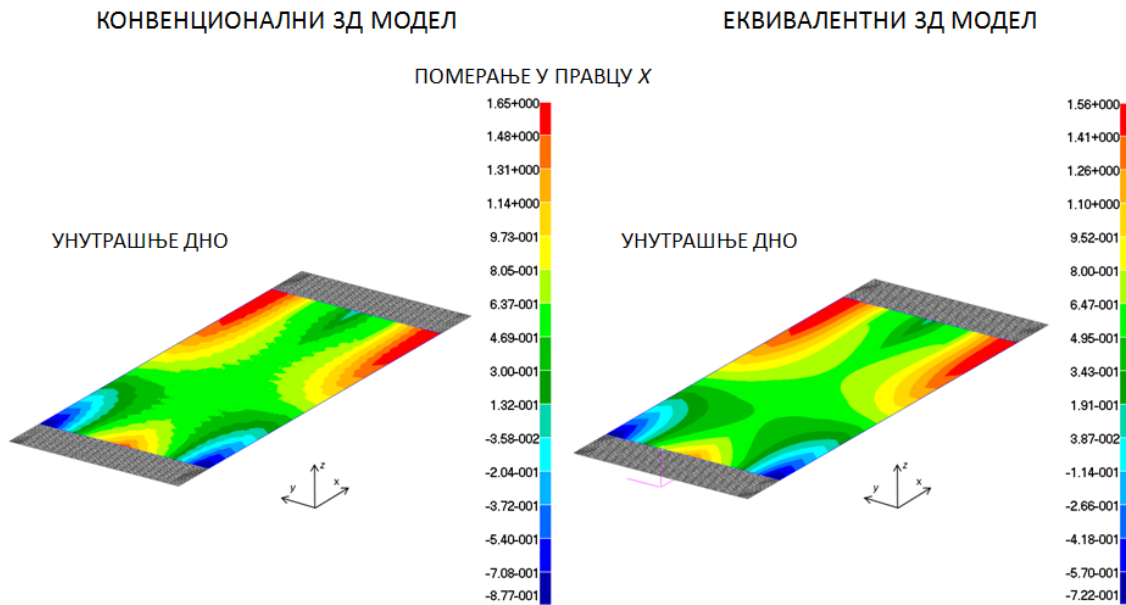
Слика П1.6. Померање у конструкцији дна, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)



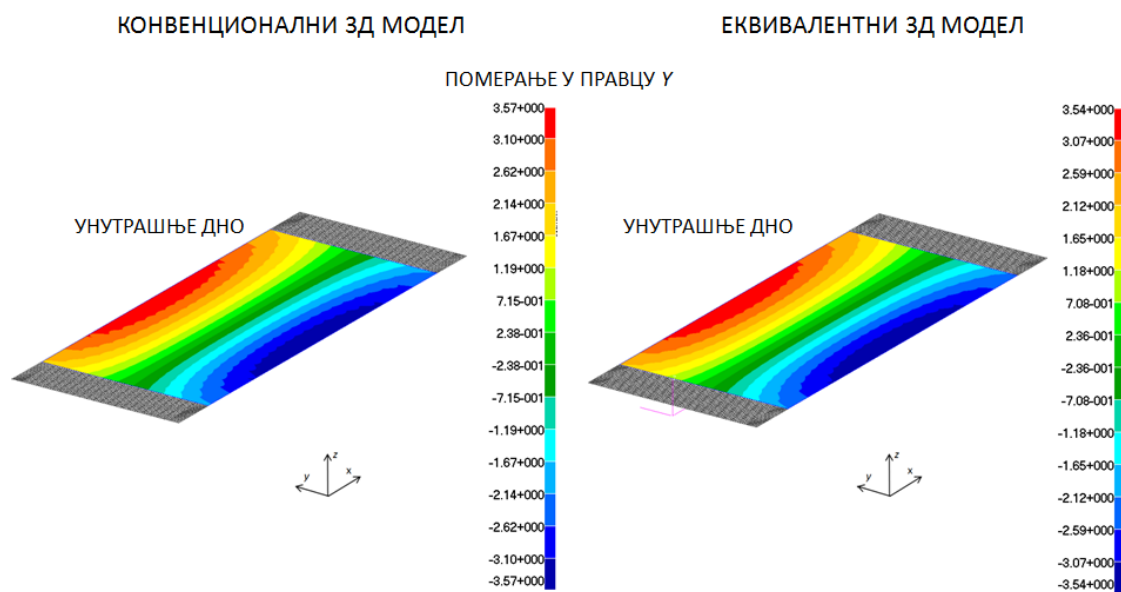
Слика П1.7. Померање у конструкцији дна, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)



Слика П1.8. Померање у конструкцији дна, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)



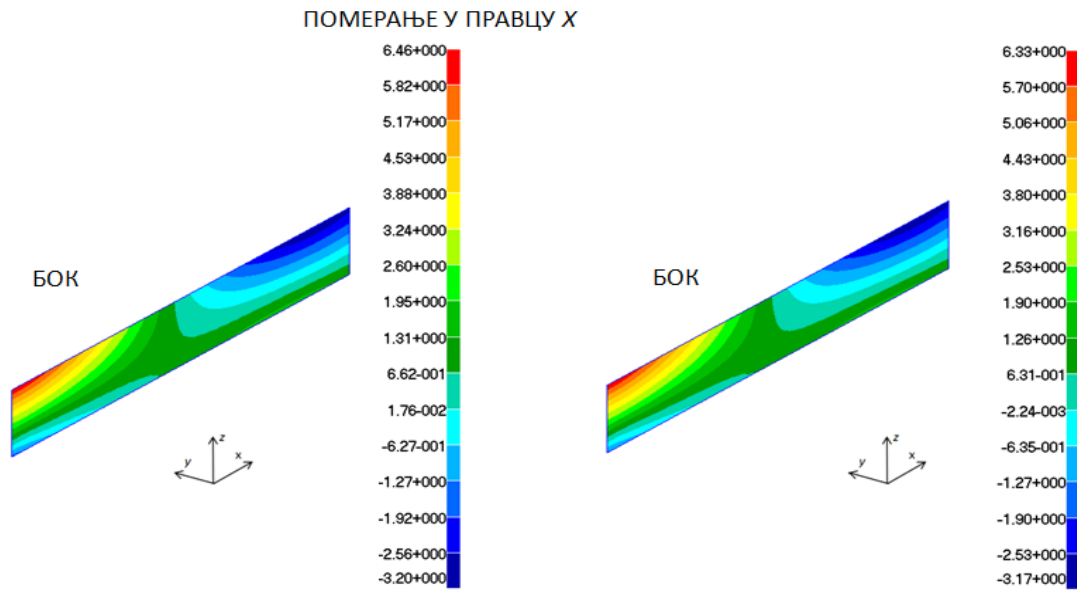
Слика П1.9. Померање унутрашњег дна, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)



Слика П1.10. Померање унутрашњег дна, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

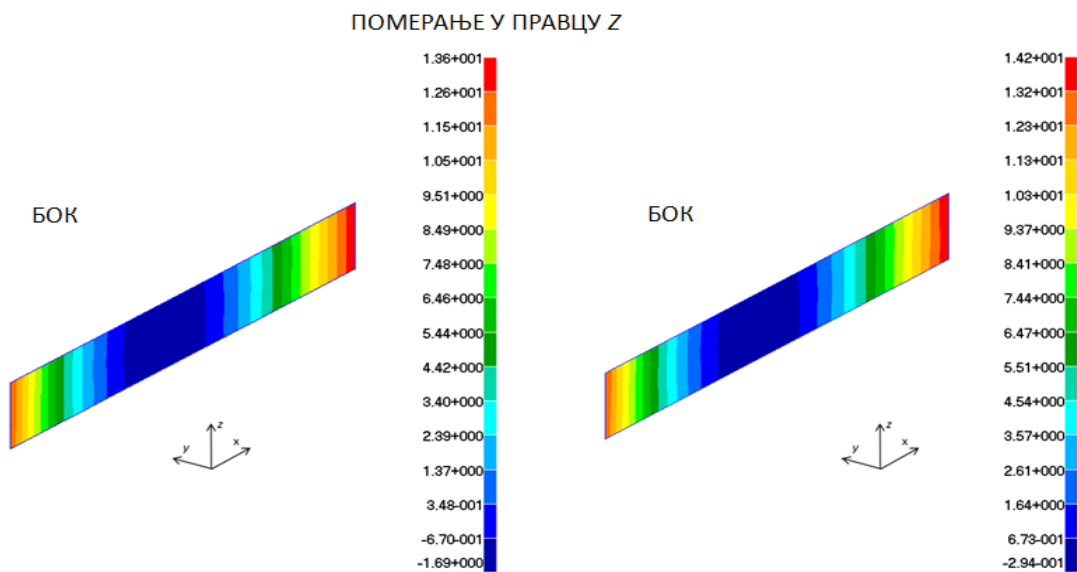
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.11. Померање бока, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

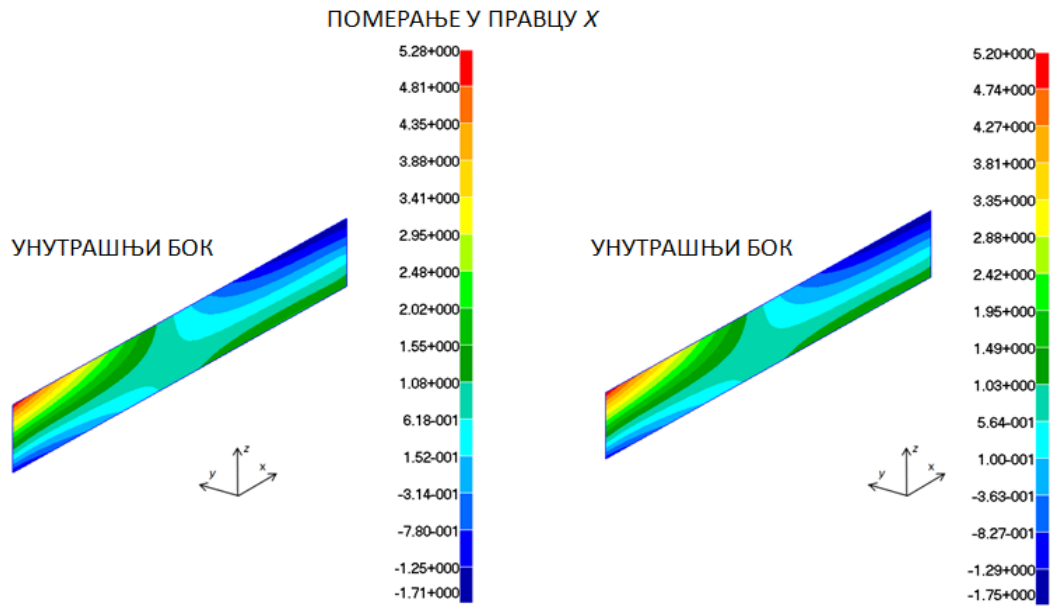
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.12. Померање бока, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

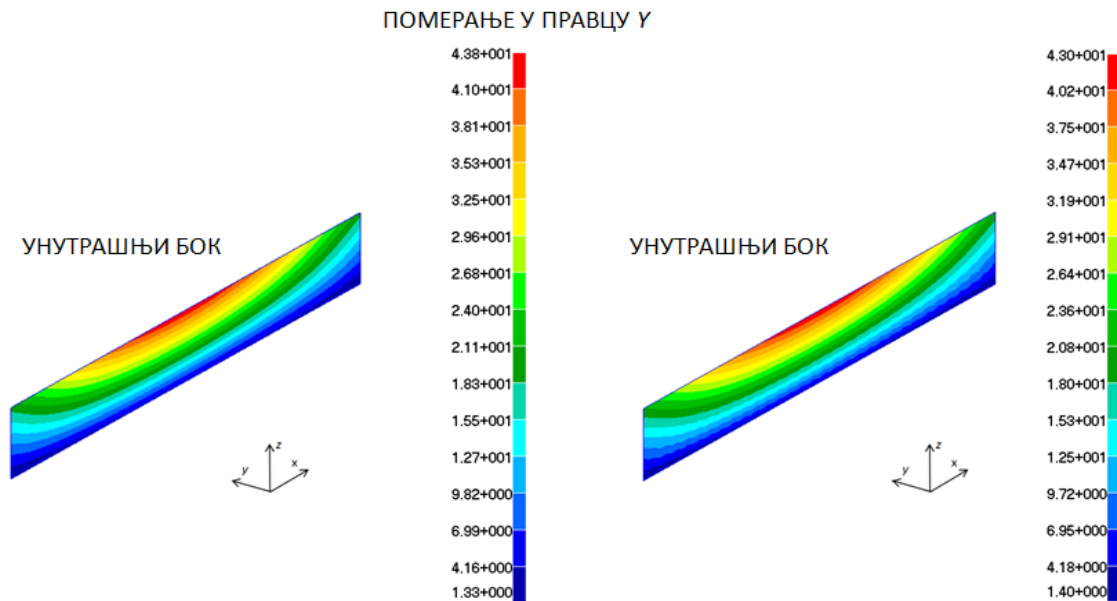
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.13. Померање унутрашњег бока, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

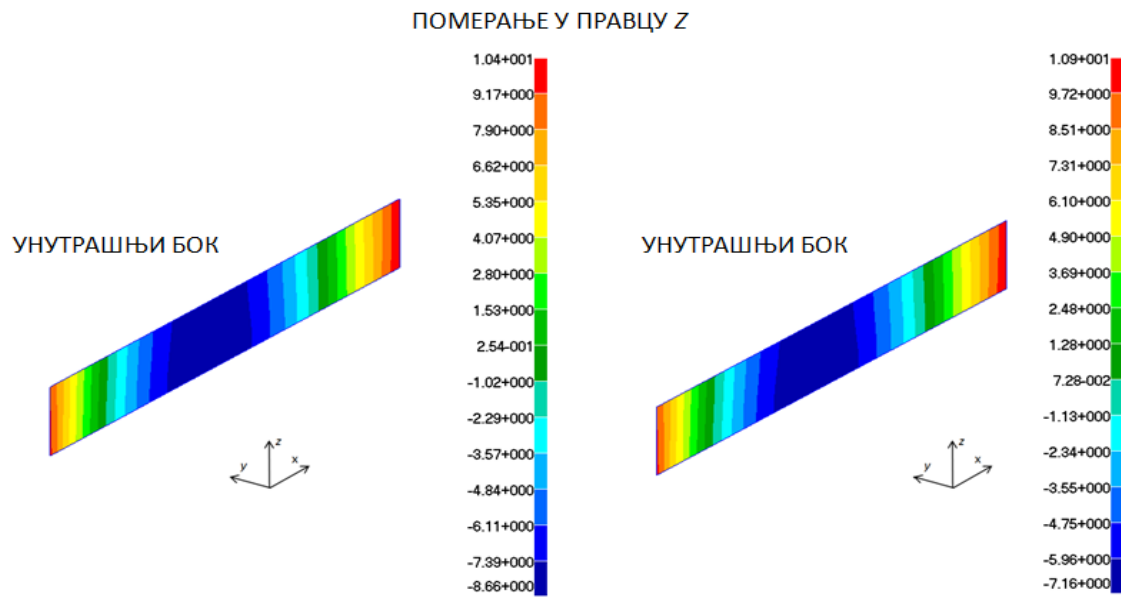
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.14. Померање унутрашњег бока, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

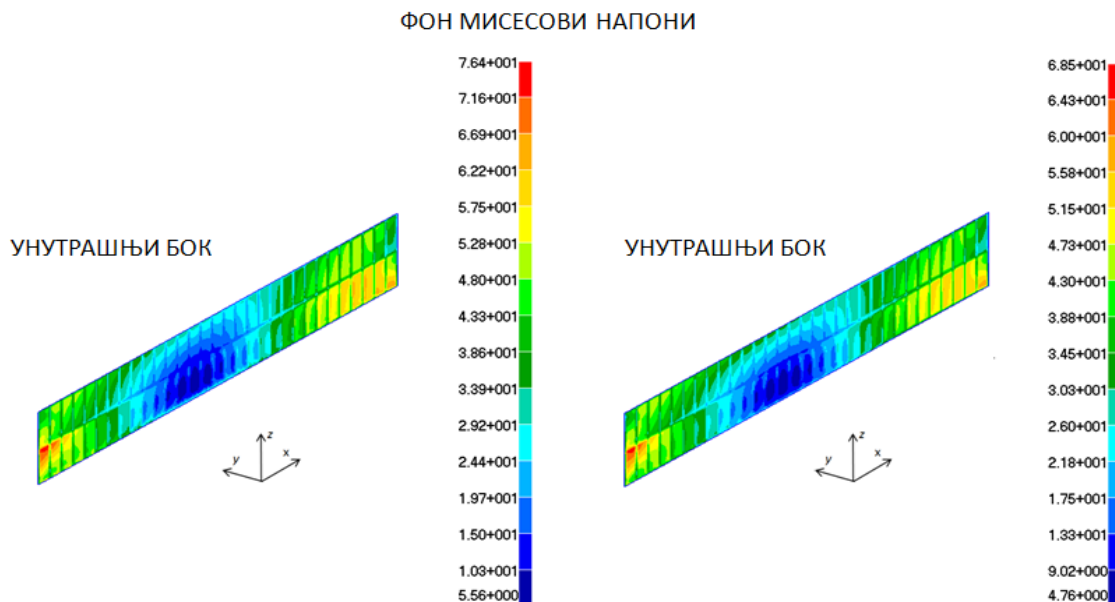
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.15. Померање унутрашњег бока, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

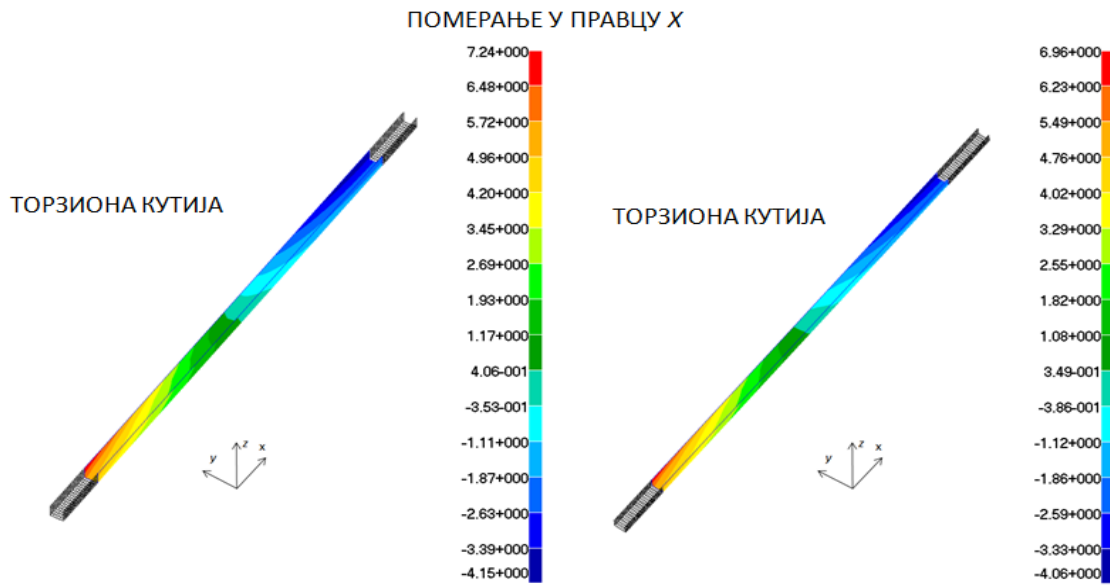
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.16. Фон Мисесови напони у унутрашњем боку (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

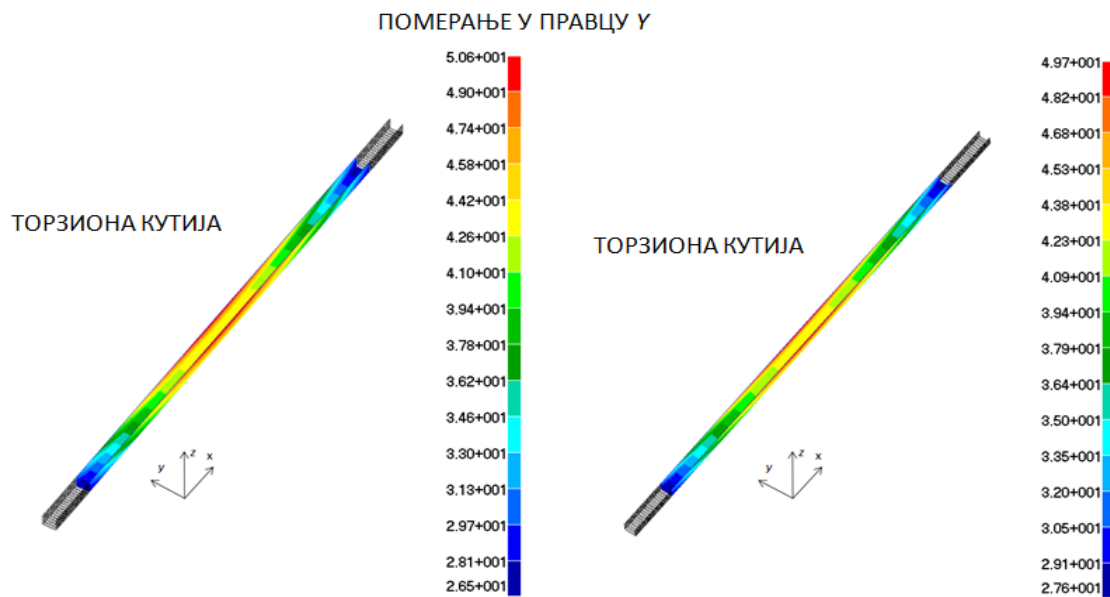
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.17. Померање у торзионој кутији, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

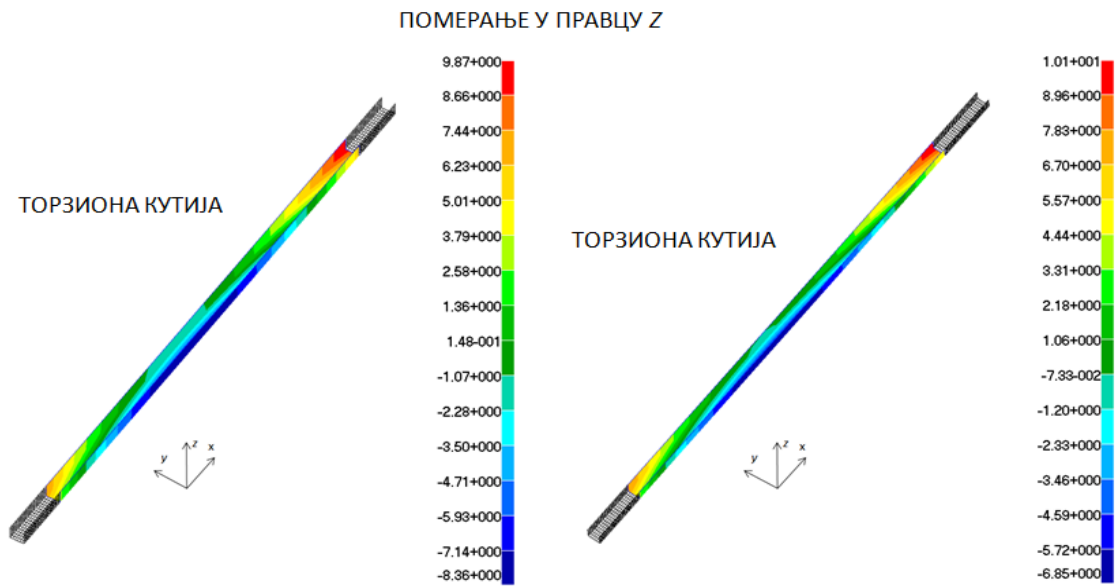
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.18. Померање у торзионој кутији, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

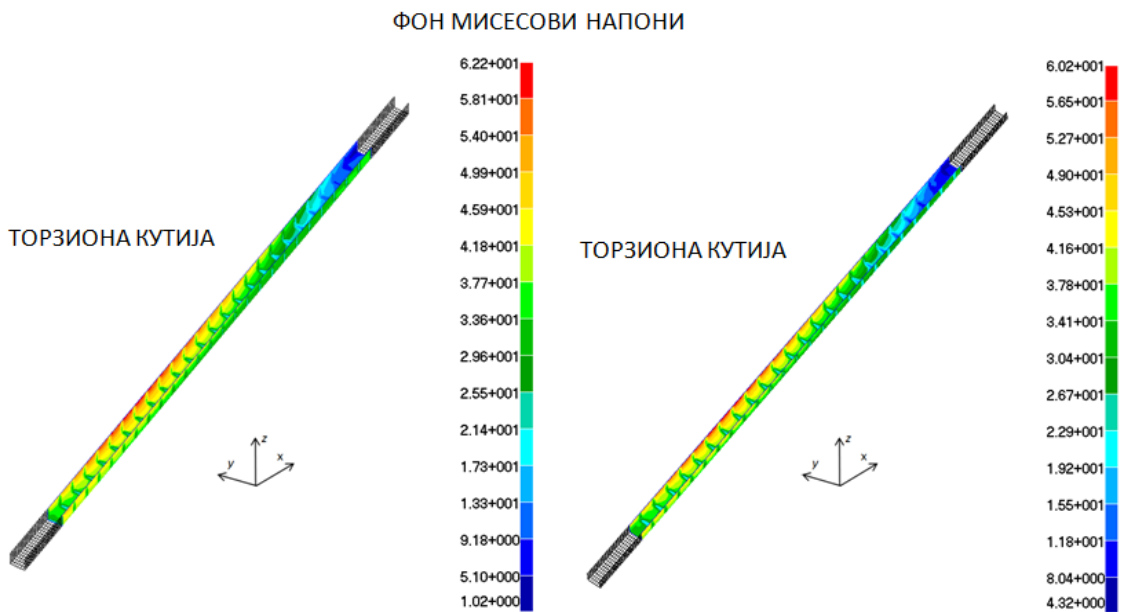
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.19. Померање у торзионој кутији, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

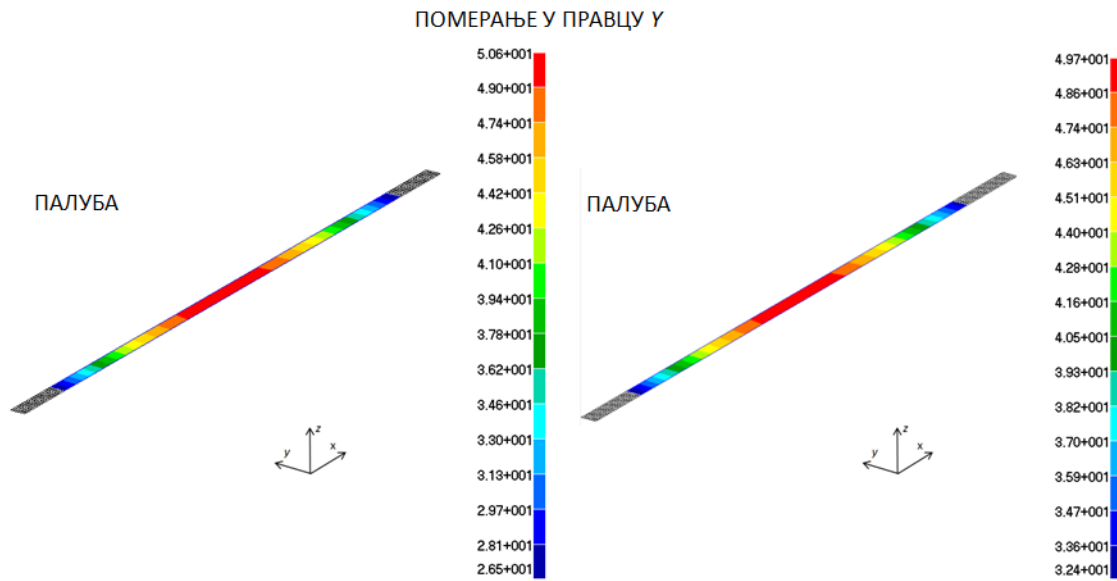
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.20. Фон Мисесови напони у торзионој кутији (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

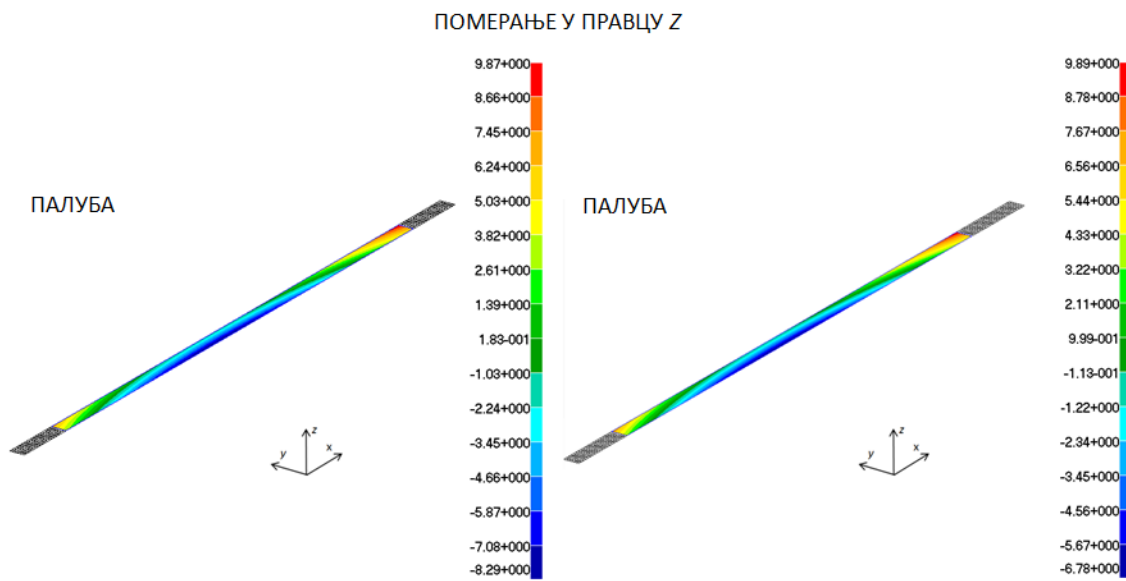
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.21. Померање палубе, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

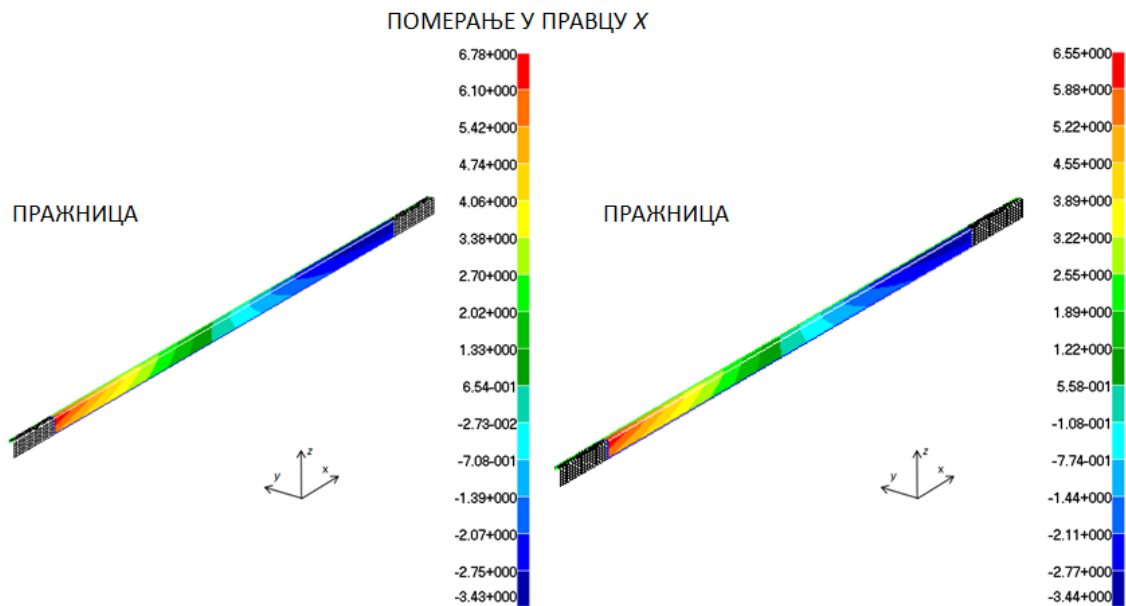
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.22. Померање палубе, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

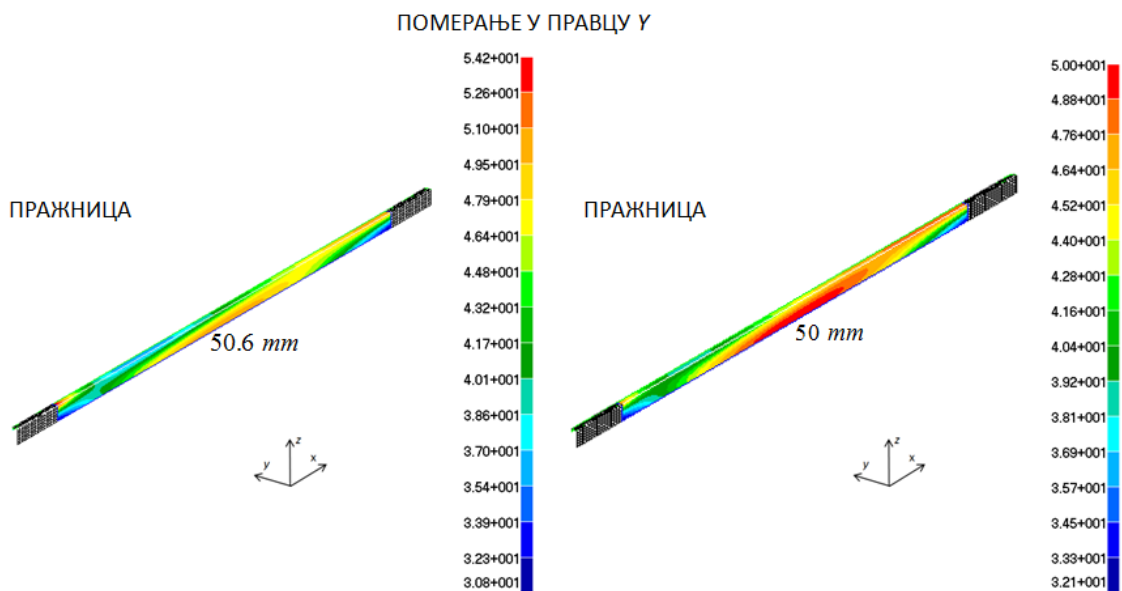
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.23. Померање пражнице, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

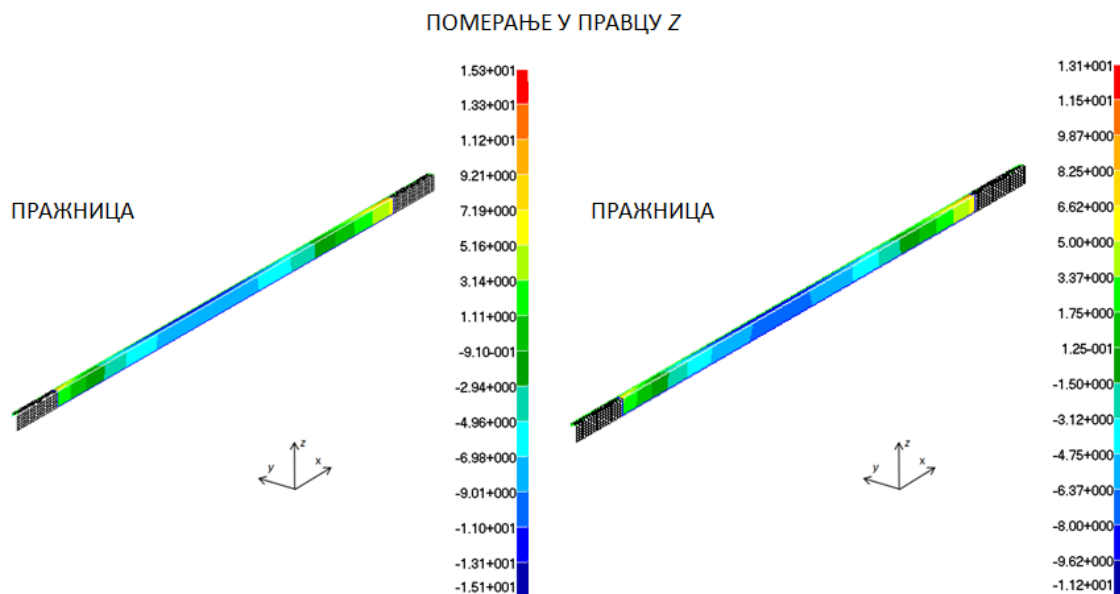
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.24. Померање пражнице, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

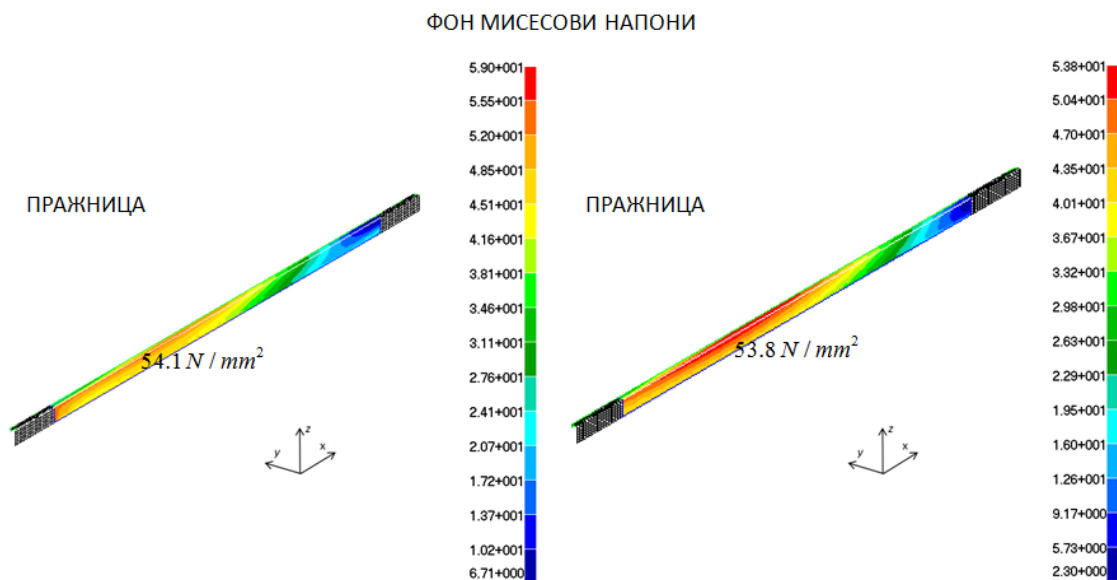
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.25. Померање пражнице, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ

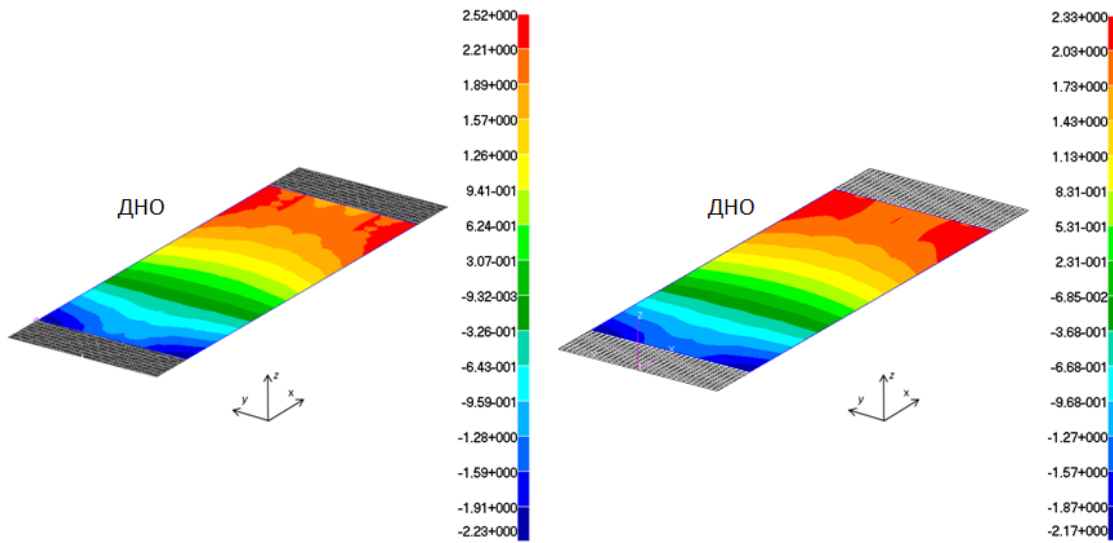


Слика П1.26. Фон Мисесови напони у пражници (конвенционални модел и еквивалентни модел са истим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ

ПОМЕРАЊЕ У ПРАВЦУ X

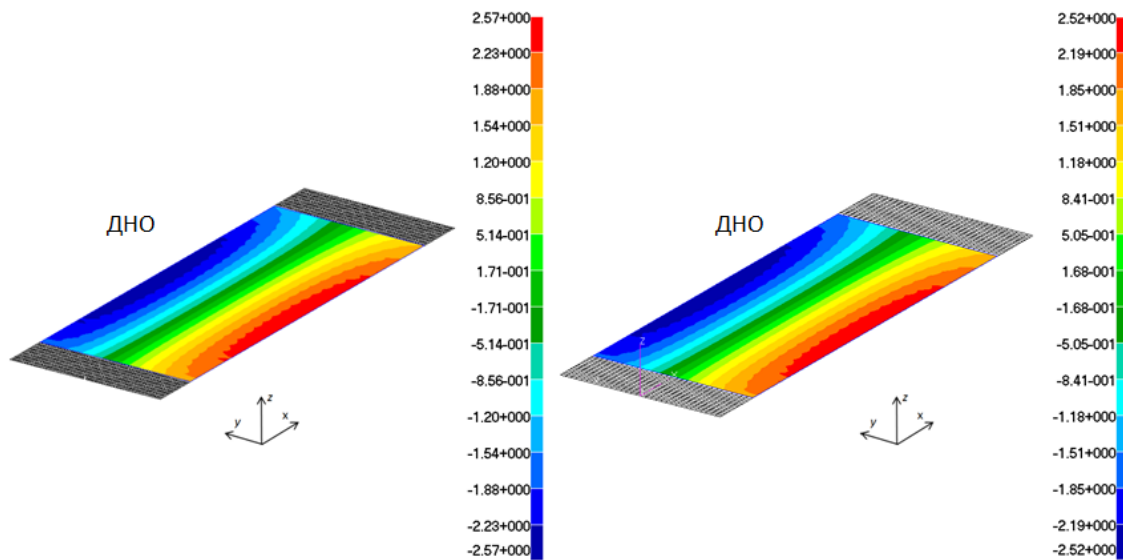


Слика П1.27. Померање дна, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)

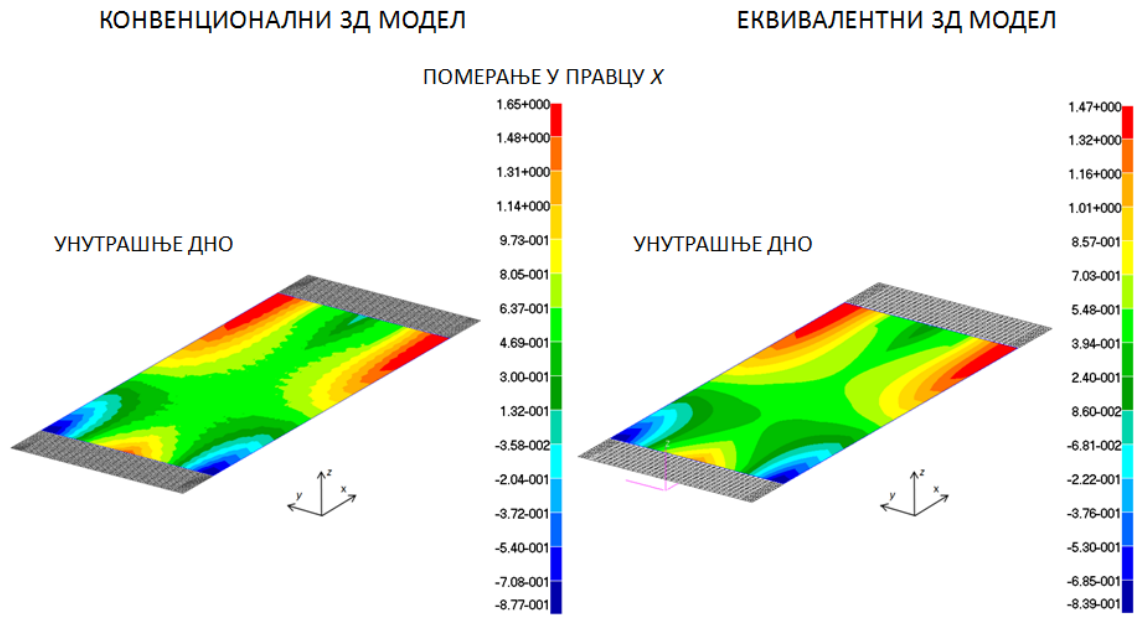
КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ

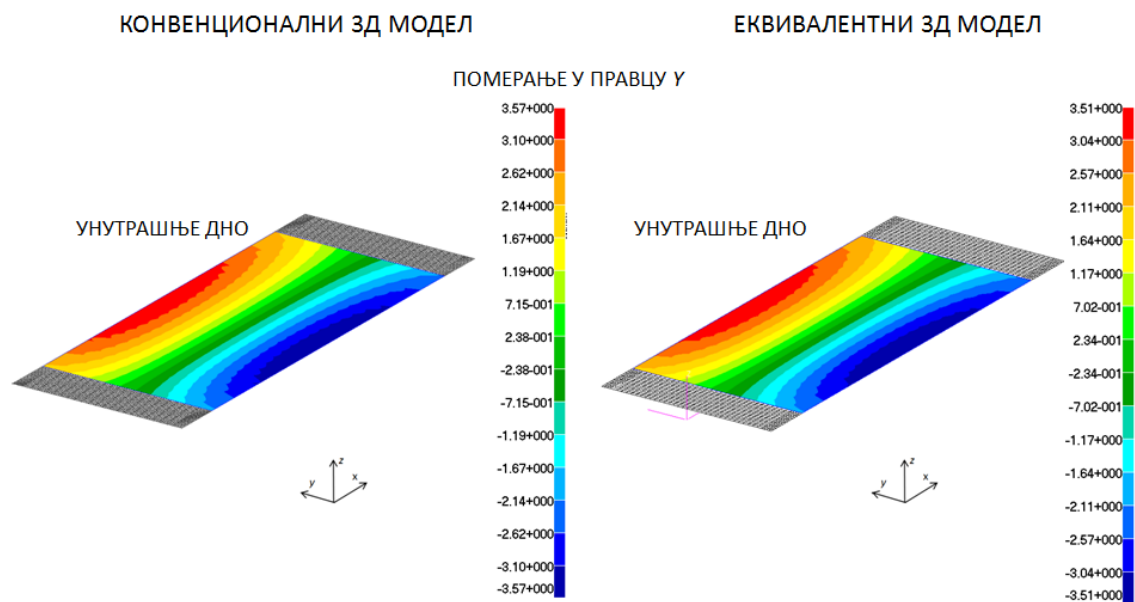
ПОМЕРАЊЕ У ПРАВЦУ Y



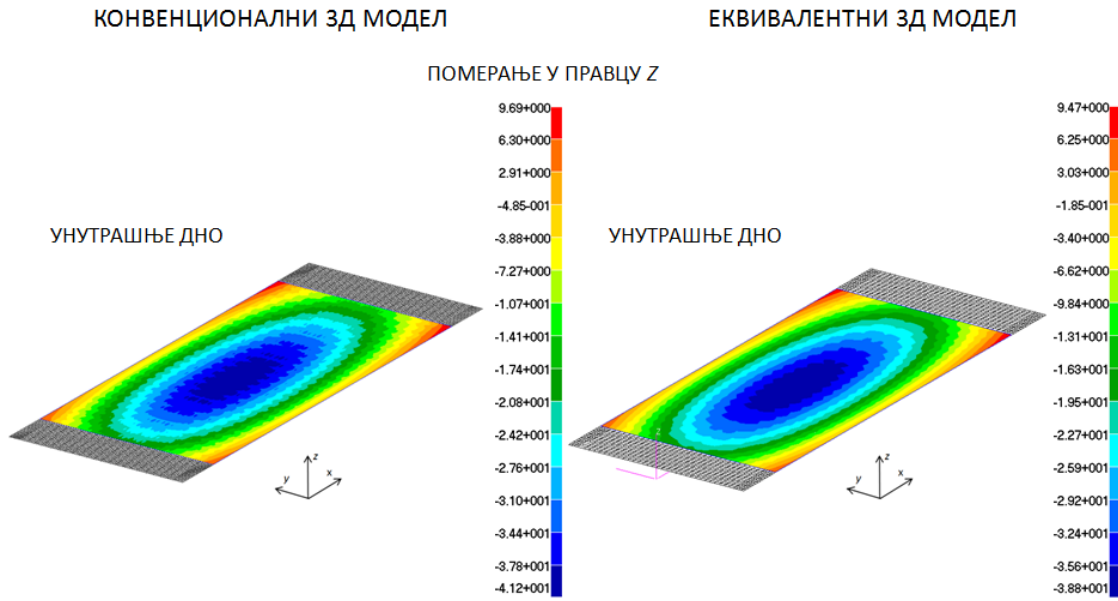
Слика П1.28. Померање дна, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)



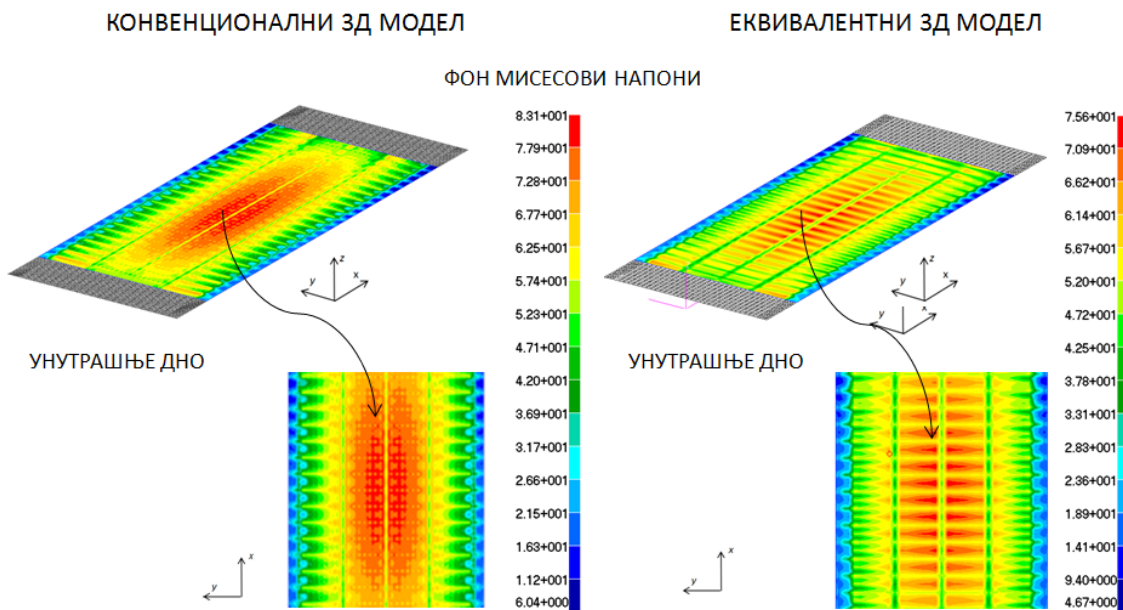
Слика П1.29. Померање унутрашњег дна, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)



Слика П1.30. Померање унутрашњег дна, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)



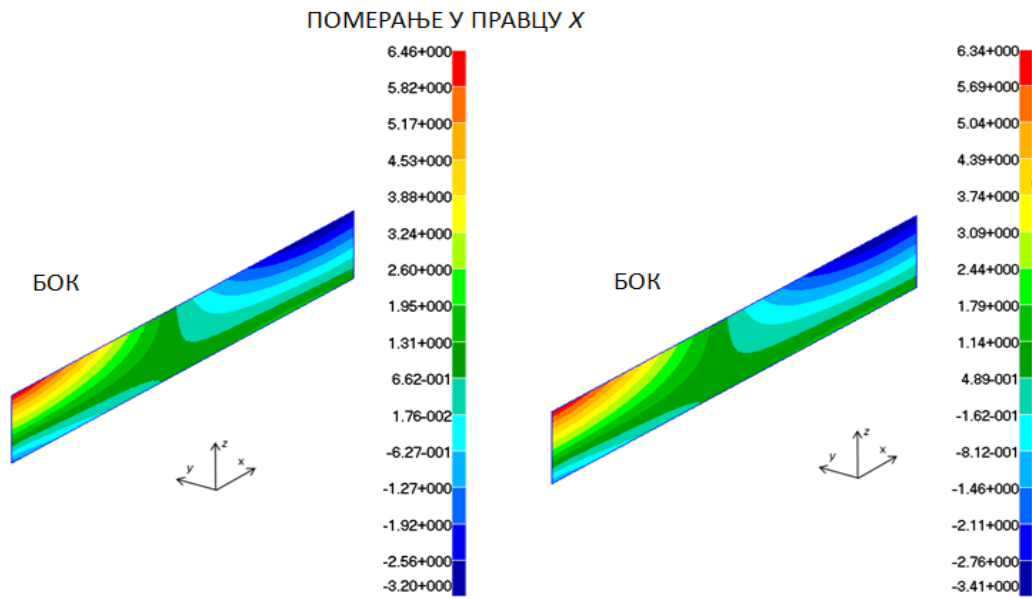
Слика П1.31. Померање унутрашњег дна, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе)



Слика П1.32. Фон Мисесови напони у унутрашњем дну (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

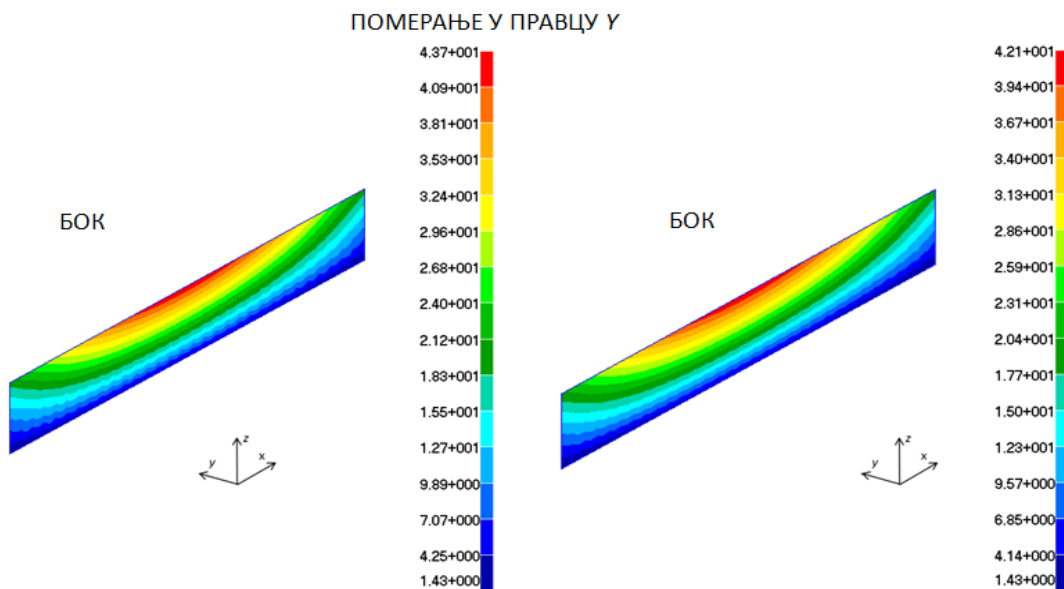
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.33. Померање бока, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

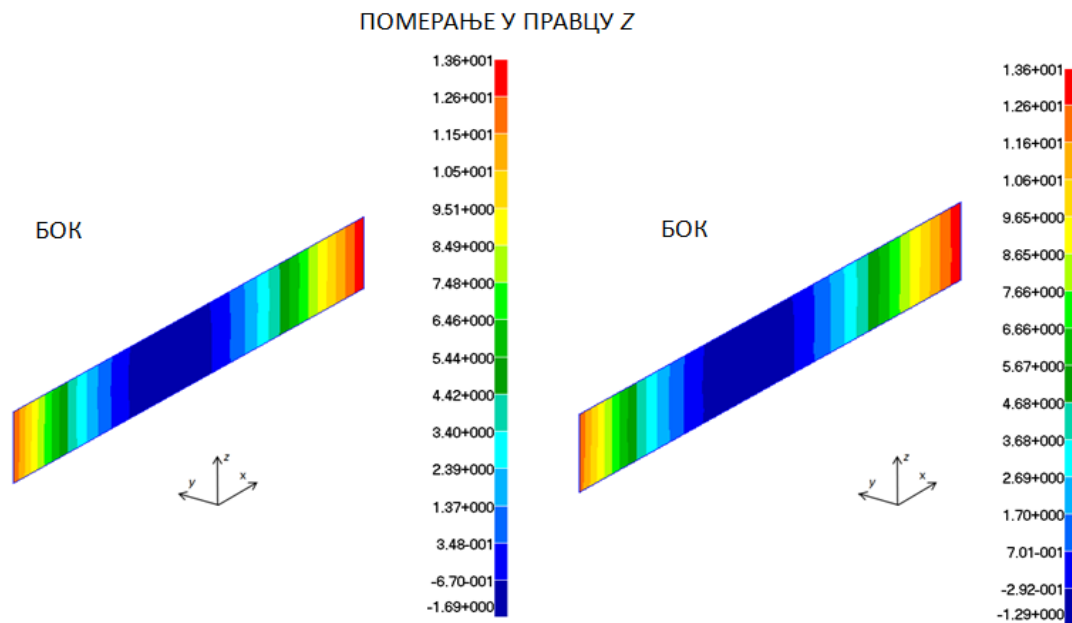
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.34. Померање бока, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

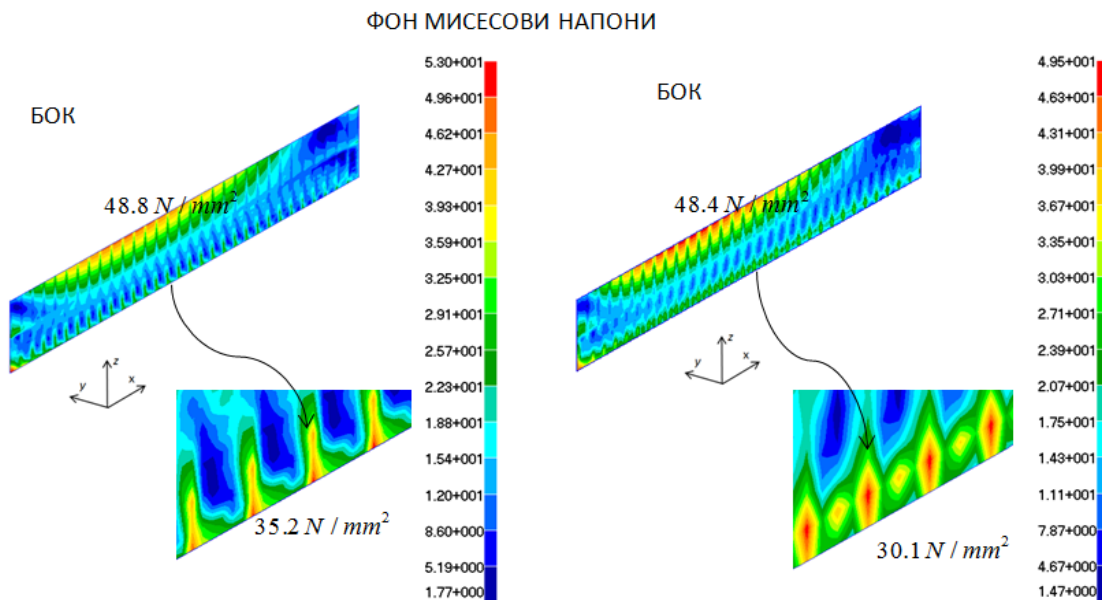
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.35. Померање бока, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

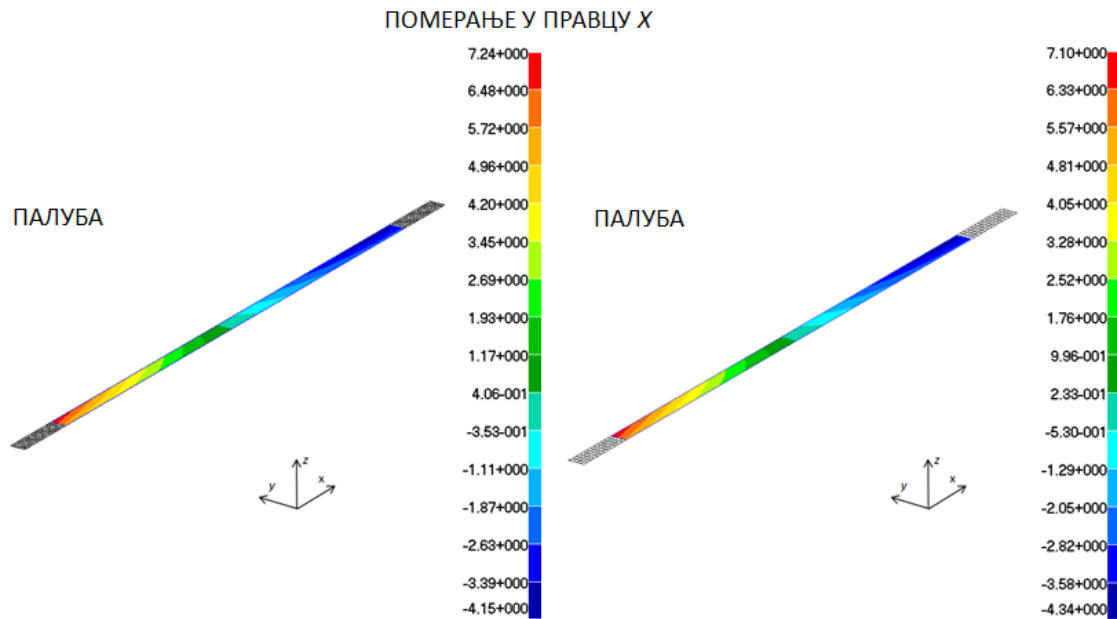
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.36. Фон Мисесови напони у боку (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

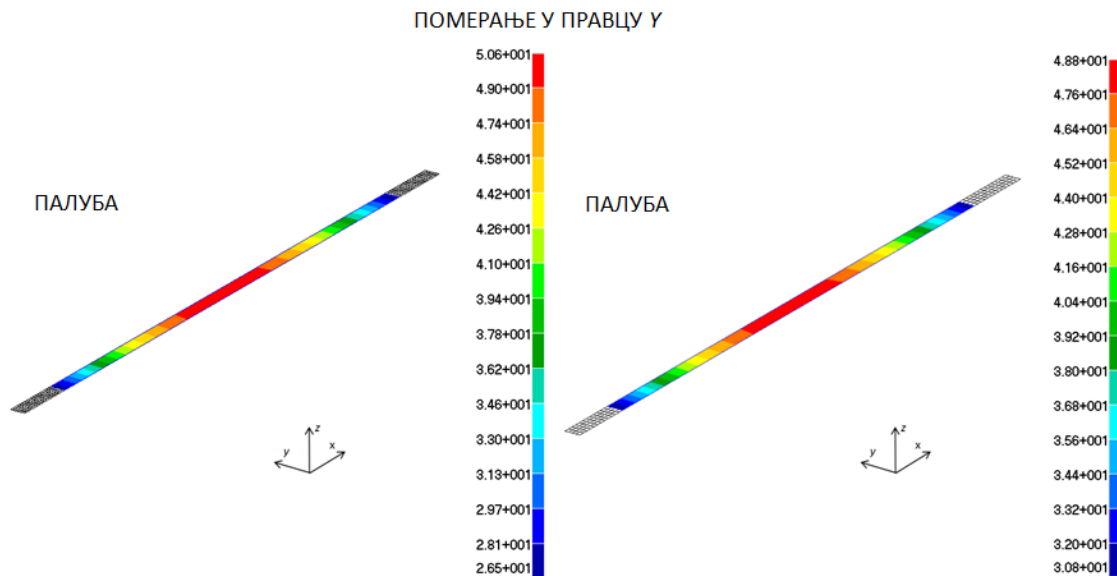
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.37. Померање палубе, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

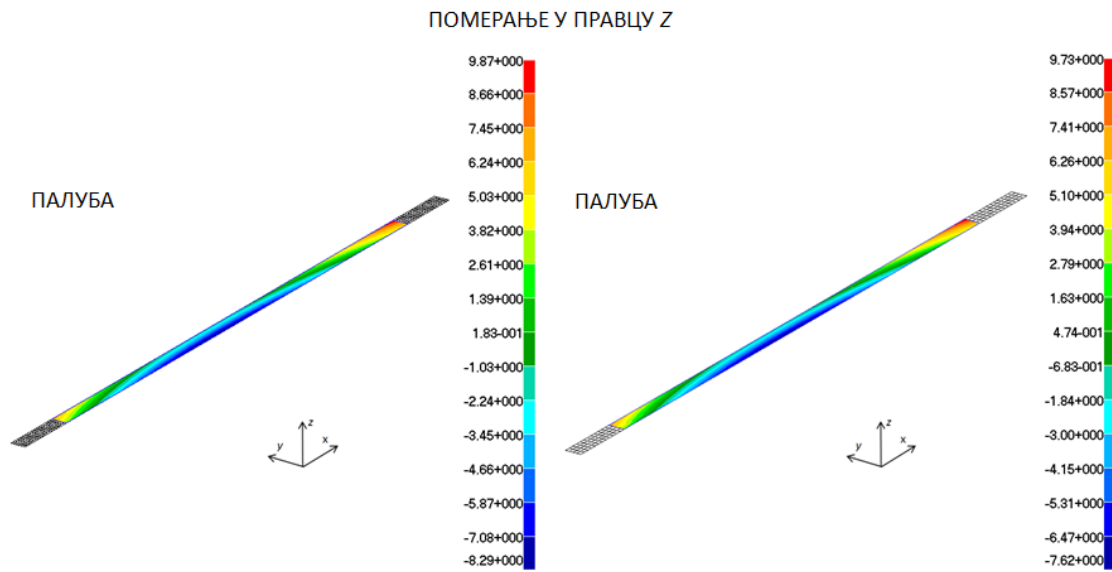
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.38. Померање палубе, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

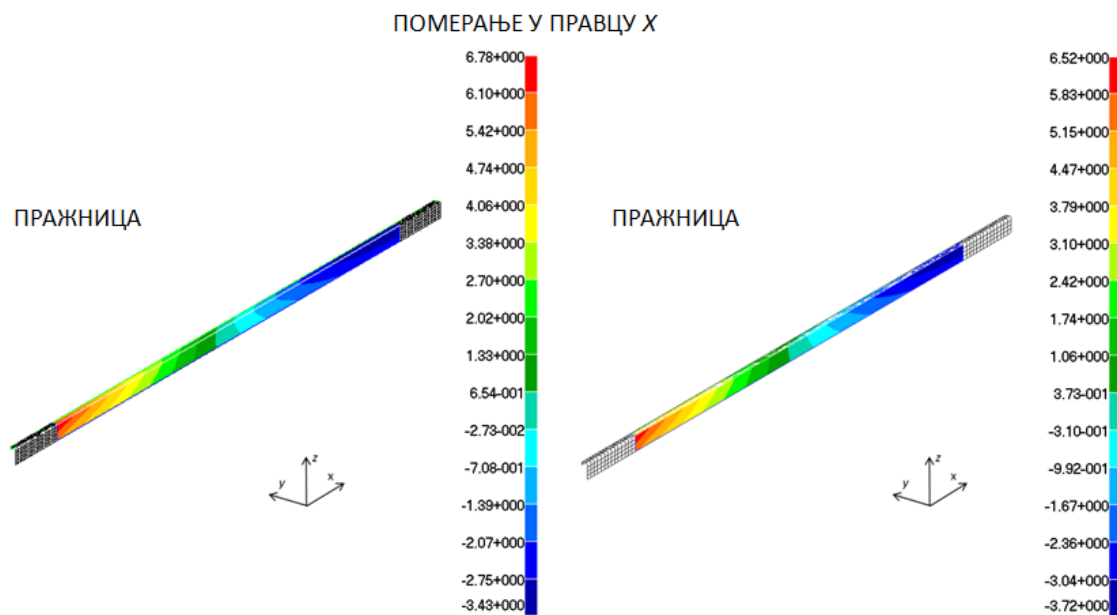
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.39. Померање палубе, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

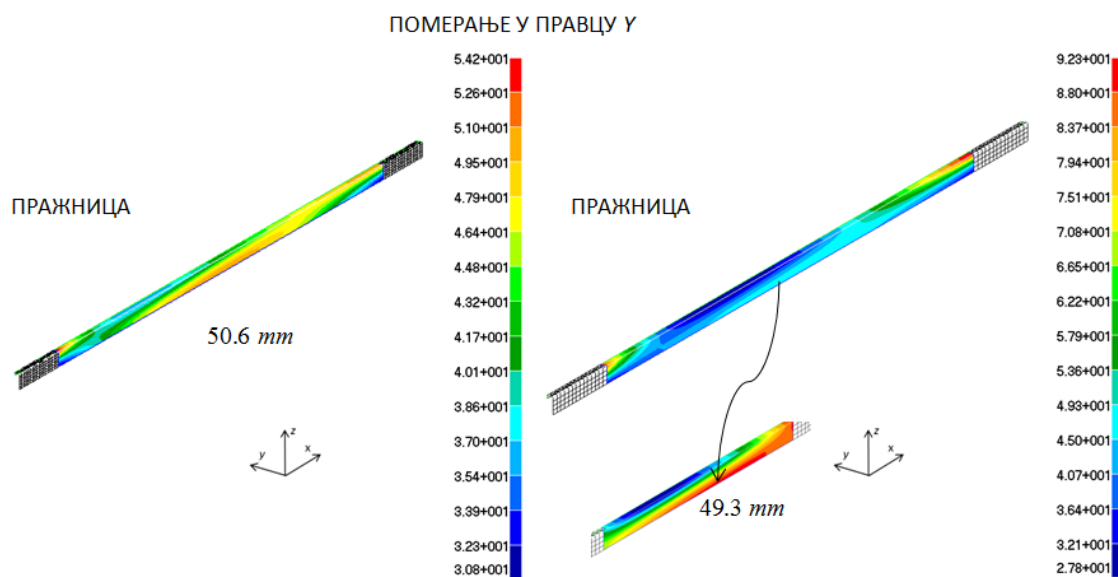
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.40. Померање пражнице, у правцу x (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

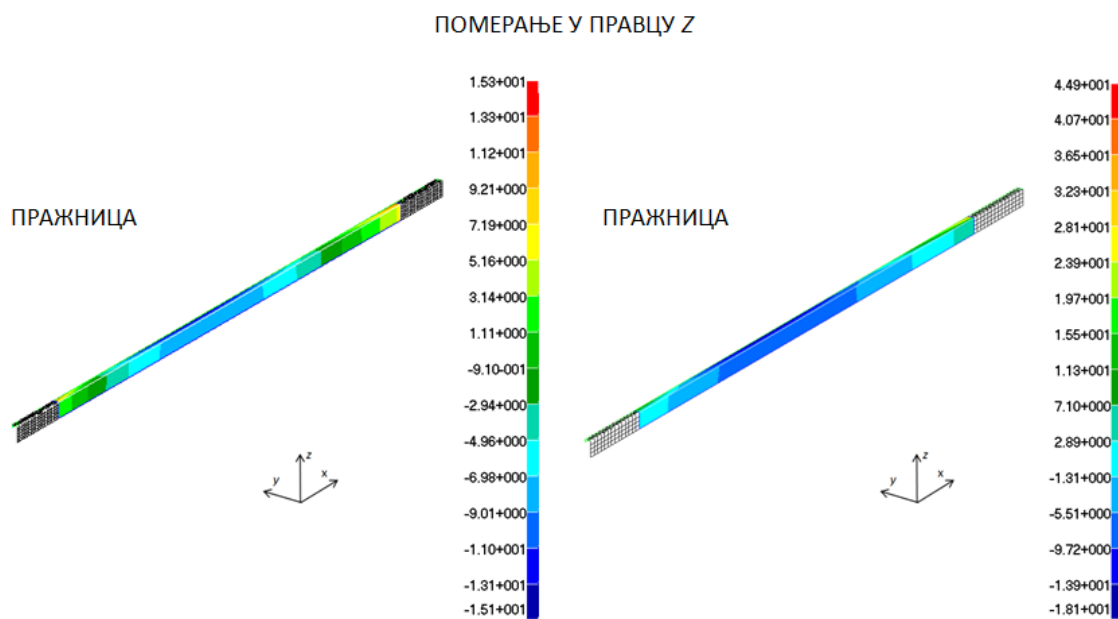
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.41. Померање пражнице, у правцу y (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

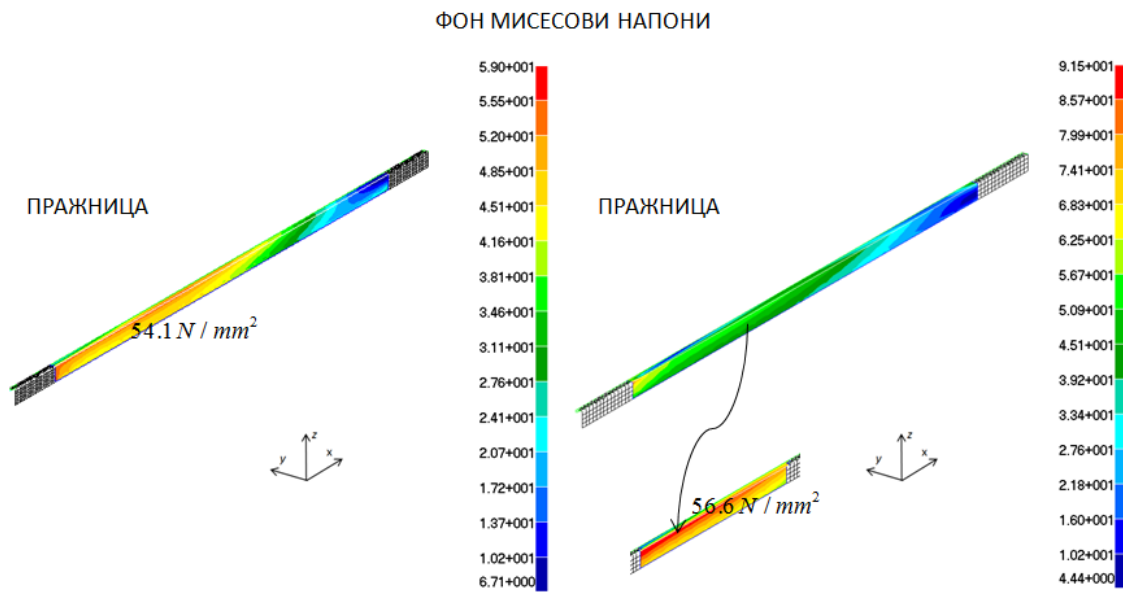
ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ



Слика П1.42. Померање пражнице, у правцу z (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободe)

КОНВЕНЦИОНАЛНИ ЗД МОДЕЛ

ЕКВИВАЛЕНТНИ ЗД МОДЕЛ

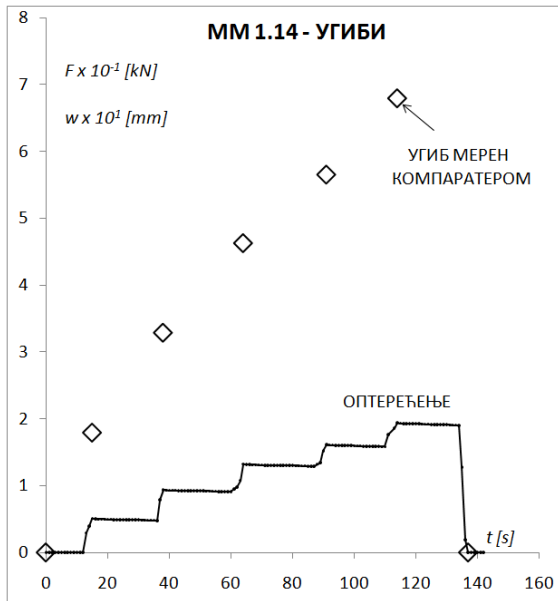


Слика П1.43. Фон Мисесови напони у пражници (конвенционални модел и еквивалентни модел са редукованим бројем степени слободе)

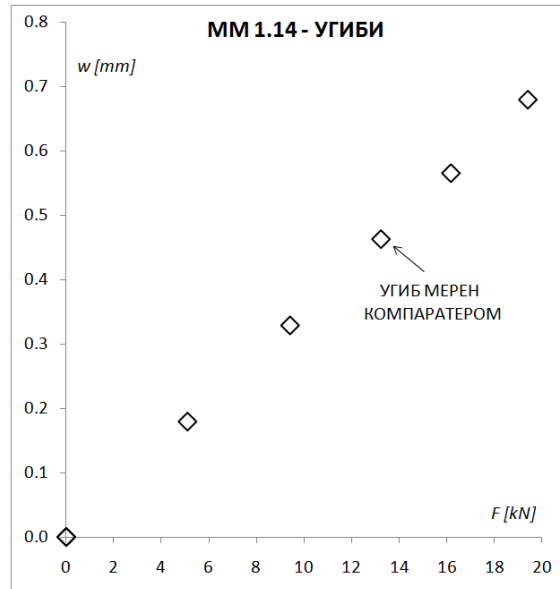
ПРИЛОГ 2 - Резултати мерења

Напомена:

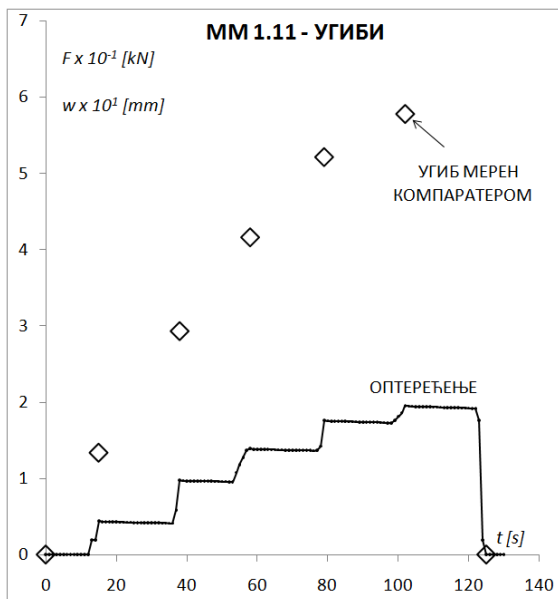
- Дијаграми, табеле и слике дати су по мерним местима (ММ);
- Резултати мерења одзива Модела 1 се налазе на сликама П2.1 – П2.12 и табелама П2.1 – П2.4;
- Резултати мерења одзива Модела 2 се налазе на сликама П2.13 – П2.39 и табелама П2.5 – П2.14;
- Резултати мерења одзива Модела 3 се налазе на сликама П2.40 – П2.64 и табелама П2.15 – П2.23;
- Резултати мерења угиба коришћењем компаратера налазе се на сликама П2.1 – П2.6, П2.13 – П2.26, П2.40 – П2.49 и табелама П2.1-2.3, П2.5 – 2.11, П2.15 – 2.19;
- Резултати мерења угиба коришћењем индуктивног сензора померања налазе се на сликама П2.15, П2.42 и табелама П2.6, П2.16;
- Резултати мерења деформација бесконтактним (*Eddy – Current*) сензором померања тачака налазе се на сликама П2.7 – П2.9, П2.27 – П2.35, П2.50 – П2.61 и табелама П2.4, П2.12 – П2.14, П2.20 – П2.23;
- Резултати оптичког мерења налазе се на сликама П2.10 - П2. 12, П2.36 – П2.39, П2.62 – П2.64;
- Све вредности угиба су дате у mm . Вредности напона су у N / mm^2 .



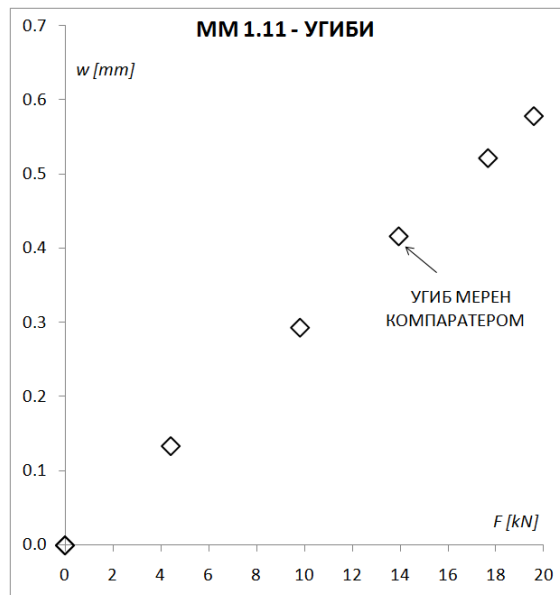
Слика П2.1. ММ 1.14 – мерење угиба



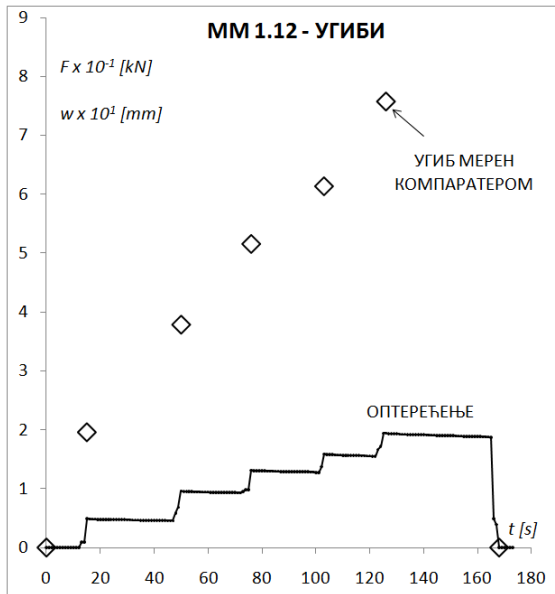
Слика П2.2. ММ 1.14 – угиб у функцији оптерећења



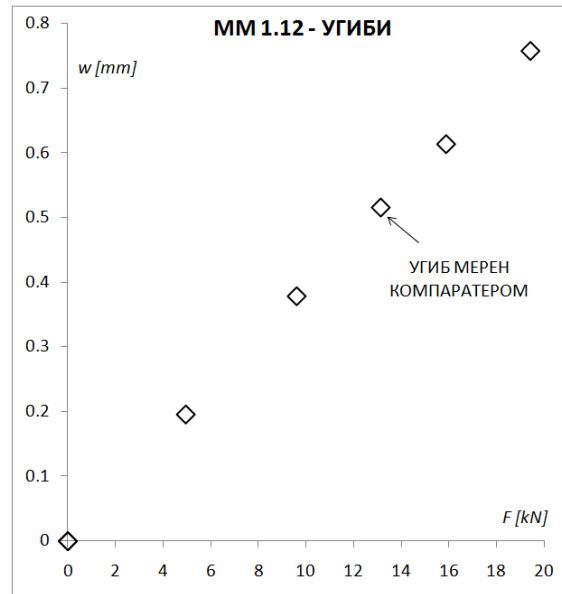
Слика П2.3. ММ 1.11 – мерење угиба



Слика П2.4. ММ 1.11 – угиб у функцији оптерећења



Слика П2.5. ММ 1.12 – мерење угиба



Слика П2.6. ММ 1.12 – угиб у функцији оптерећења

Табела П2.1. ММ 1.14 - угиби

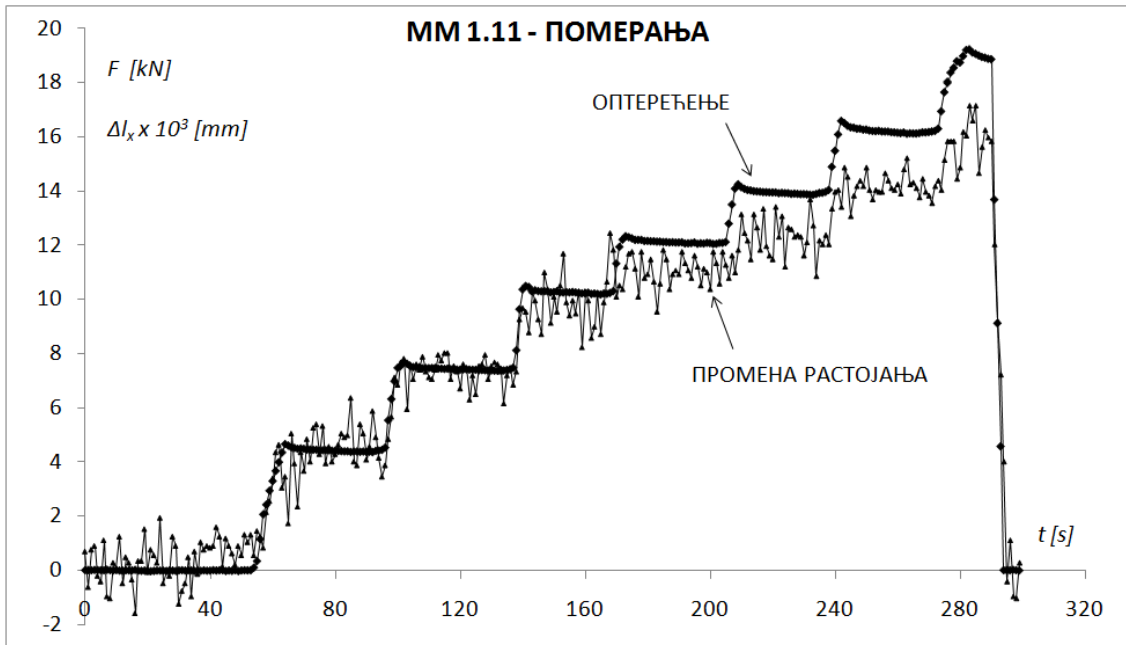
$F [kN]$	$w_{\text{КОМ}} [mm]$
0	0
5.10	0.179
9.42	0.329
13.24	0.463
16.19	0.566
19.42	0.680
0	0

Табела П2.2. ММ 1.11 - угиби

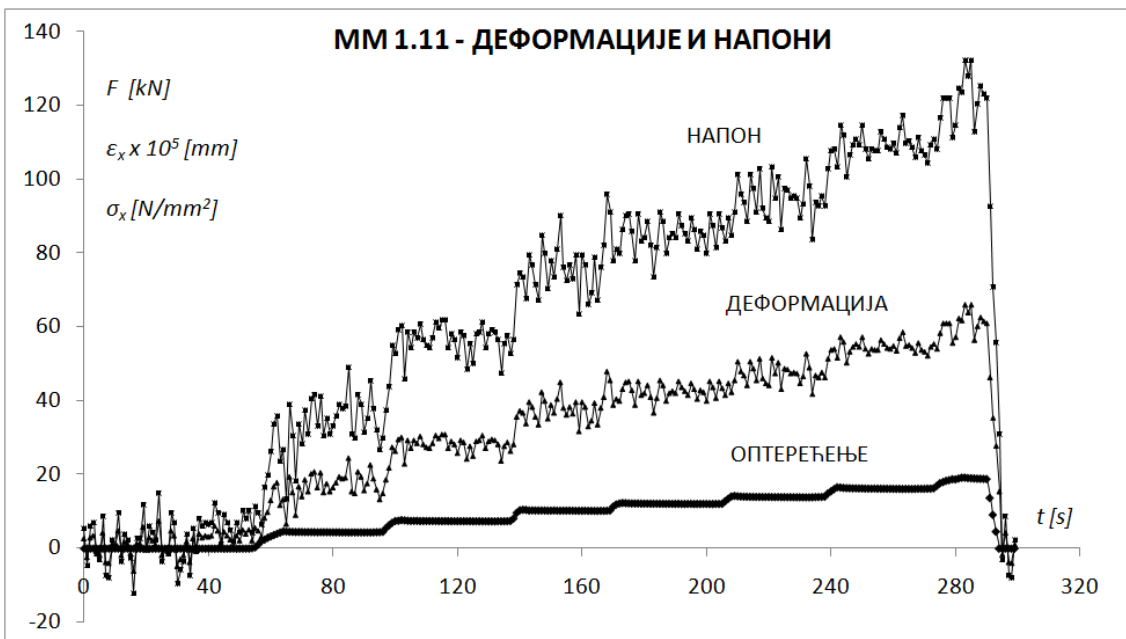
$F [kN]$	$w_{\text{КОМ}} [mm]$
0	0
4.41	0.134
9.81	0.293
13.93	0.416
17.66	0.521
19.57	0.578
0	0

Табела П2.3. ММ 1.12 - угиби

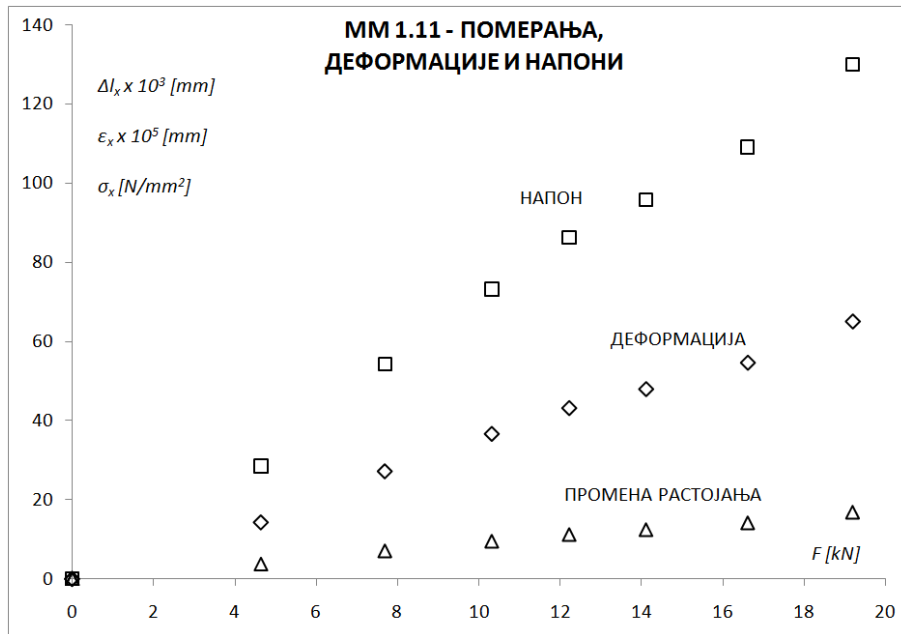
$F [kN]$	$w_{\text{КОМ}} [mm]$
0	0
4.95	0.196
9.61	0.379
13.15	0.516
15.89	0.614
19.43	0.758
0	0



Слика П2.7. ММ 1.11 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



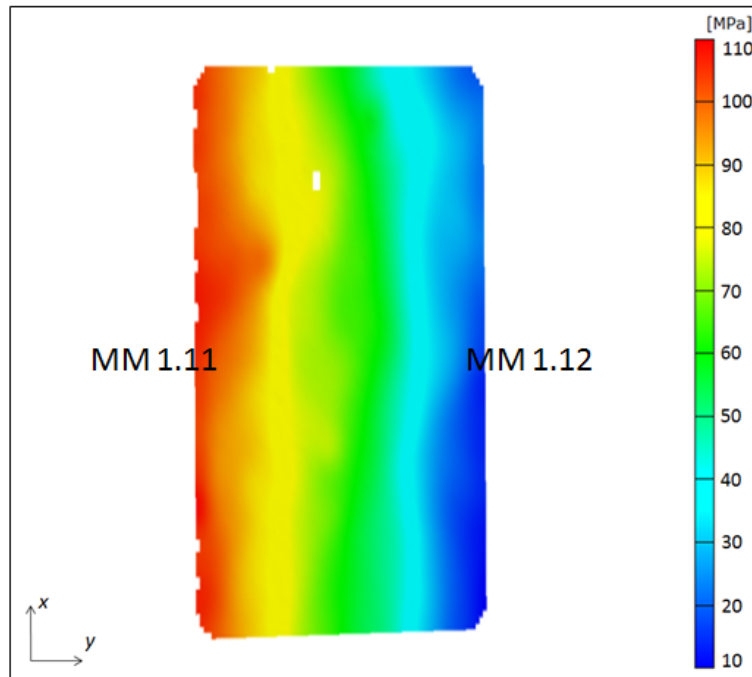
Слика П2.8. ММ 1.11 – деформације и напони у правцу x



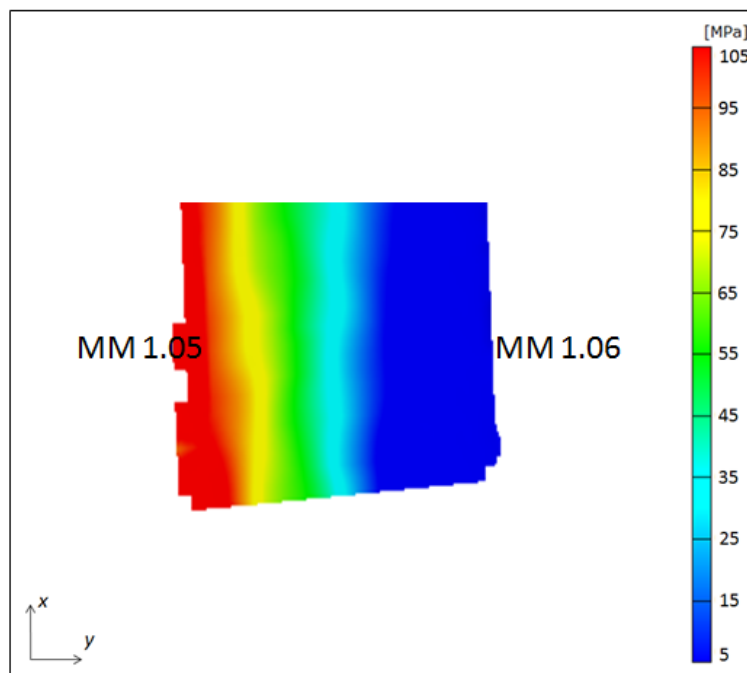
Слика П2.9. ММ 1.11 – померања, деформације и напони у правцу x

Табела П2.4. ММ 1.11 - промена растојања, деформације и напони у правцу x

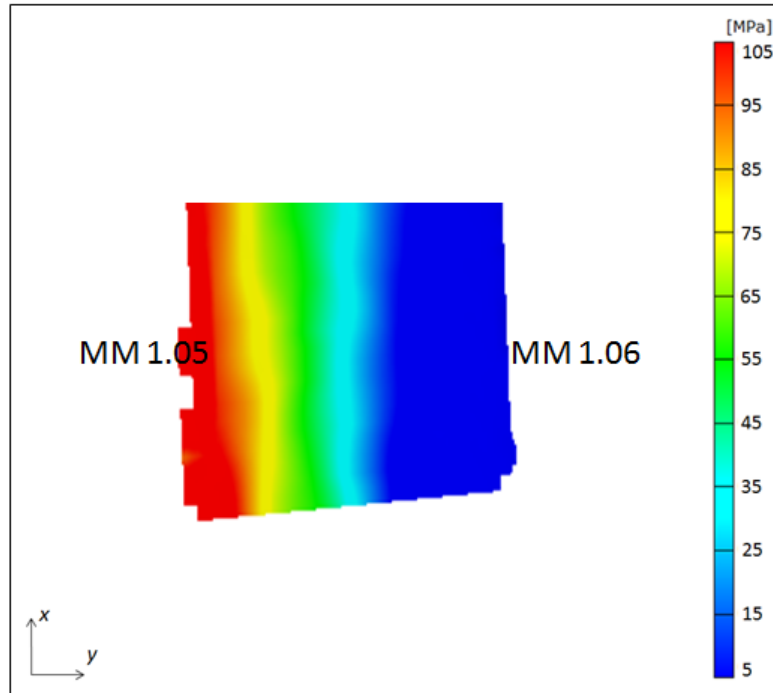
F [kN]	Δl_x [mm]	ε_x [1/]	σ_x [N/mm ²]
0	0	0	0
4.64	3.71E-03	1.43E-04	28.54
7.69	7.06E-03	2.72E-04	54.32
10.32	9.52E-03	3.66E-04	73.23
12.22	1.12E-02	4.31E-04	86.26
14.11	1.25E-02	4.79E-04	95.85
16.61	1.42E-02	5.46E-04	109.18
19.19	1.69E-02	6.50E-04	130.00
0	0	0	0



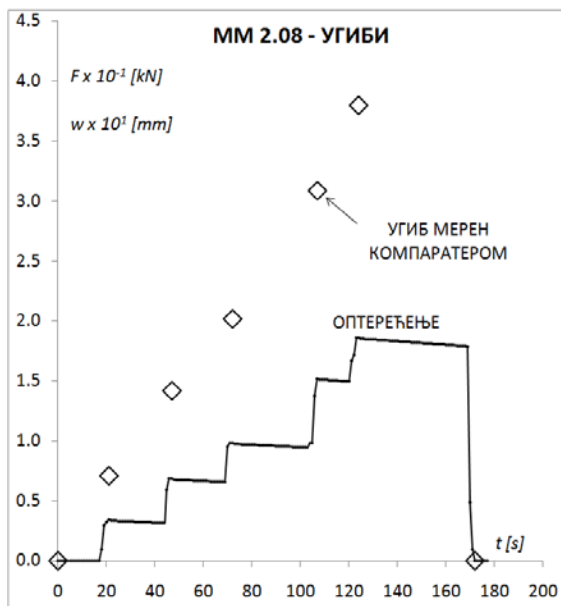
Слика П2.10. ММ 1.11 – напон у правцу x (оптерећење 14.76 kN)



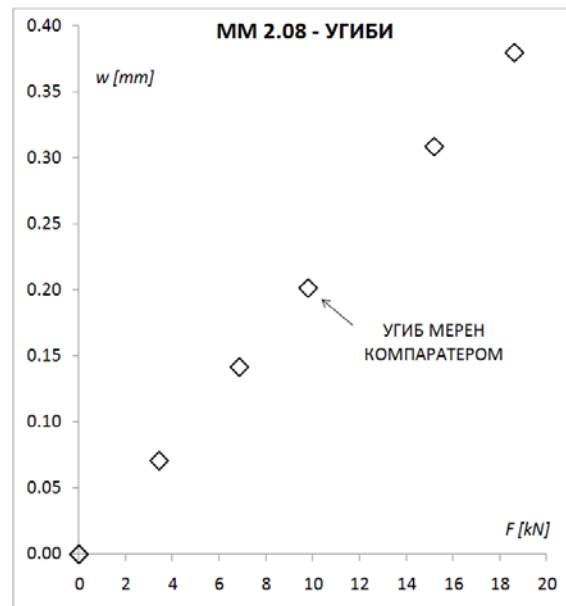
Слика П2.11. ММ 1.05 – напон у правцу x (оптерећење 15.08 kN)



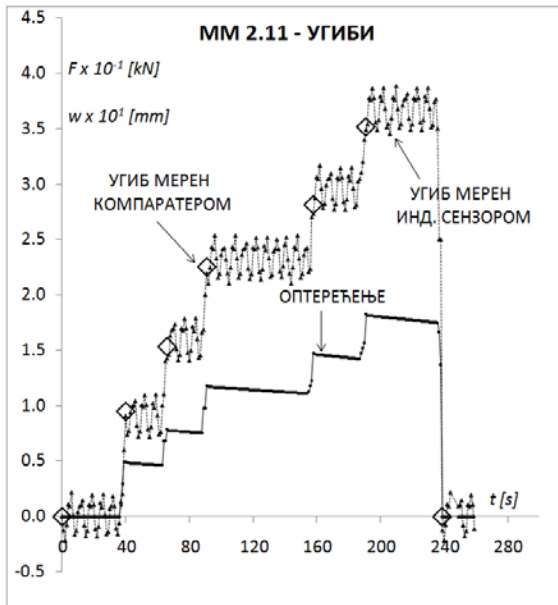
Слика П2.12. ММ 1.05 – напон у правцу x (мерење за 15.08 kN)



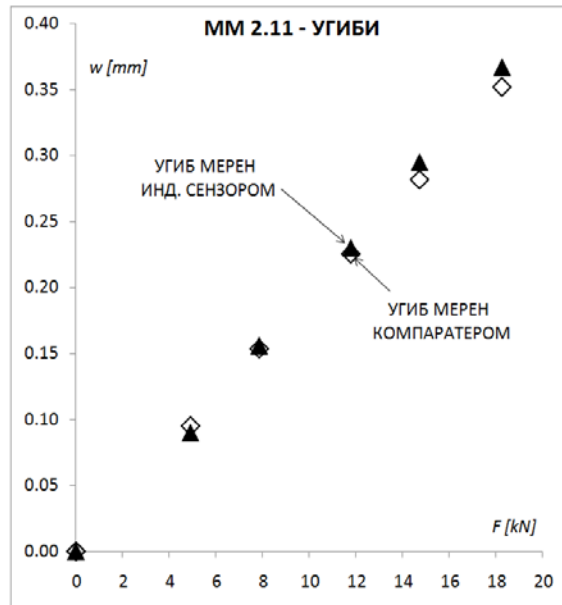
Слика П2.13. ММ 2.08 – мерење угиба



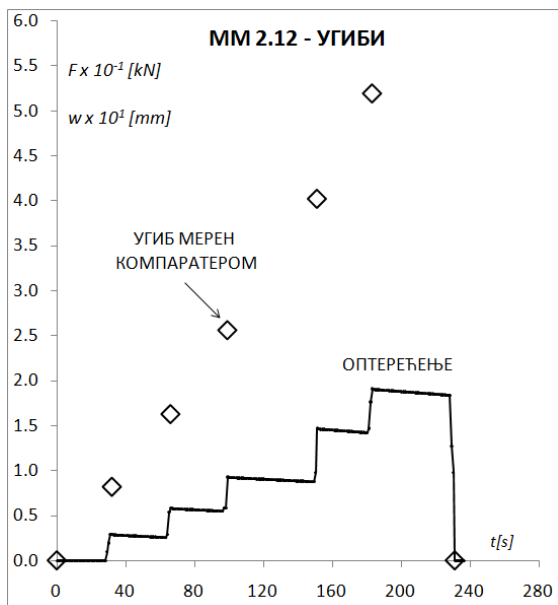
Слика П2.14. ММ 2.08 – угиб у функцији оптерећења



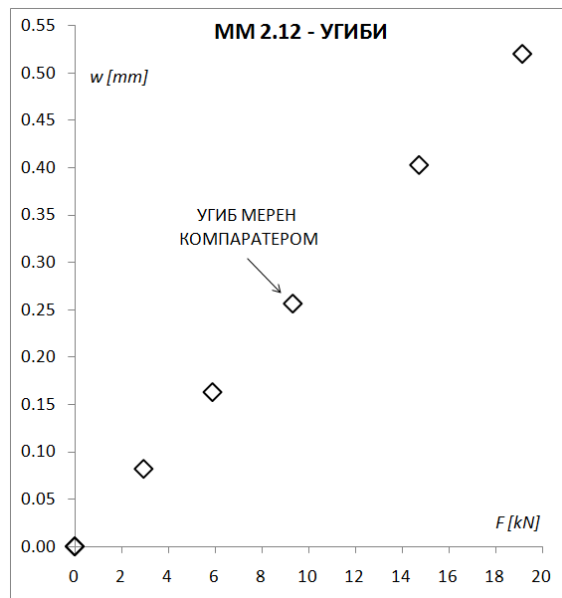
Слика П2.15. MM 2.11 – мерење угиба



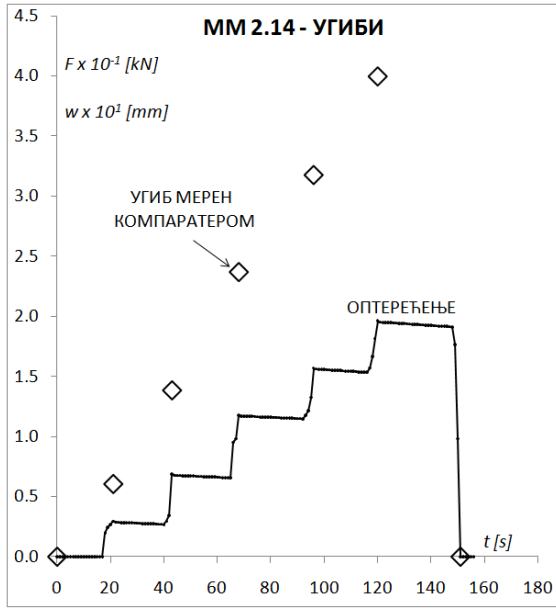
Слика П2.16. MM 2.11 – угиб у функцији оптерећења



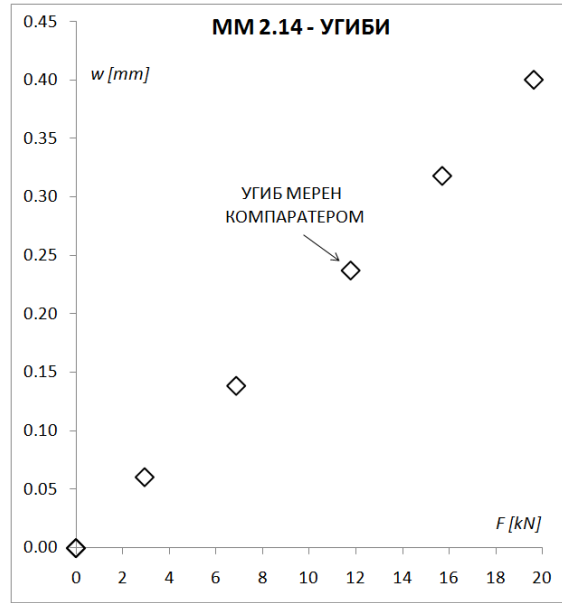
Слика П2.17. MM 2.12 – мерење угиба



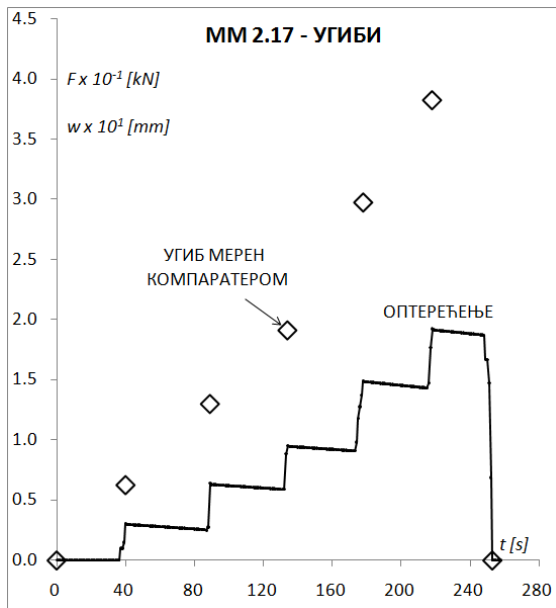
Слика П2.18. MM 2.12 – угиб у функцији оптерећења



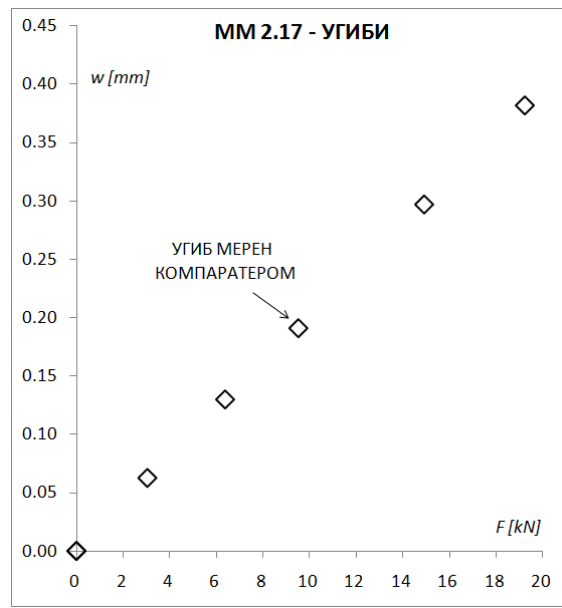
Слика П2.19. ММ 2.14 – мерење угиба



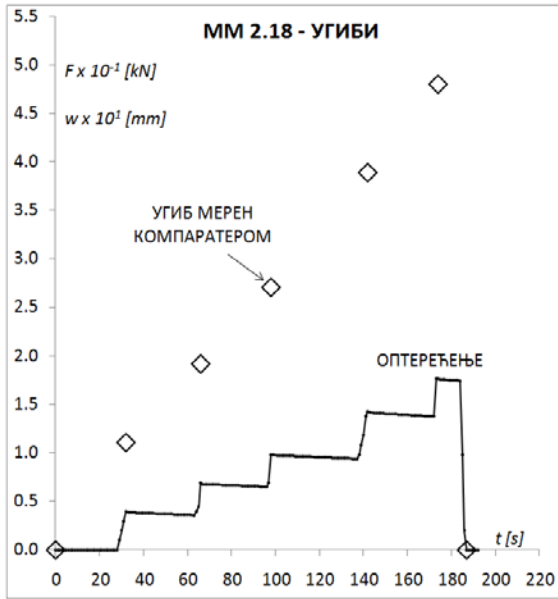
Слика П2.20. ММ 2.14 – угиб у функцији оптерећења



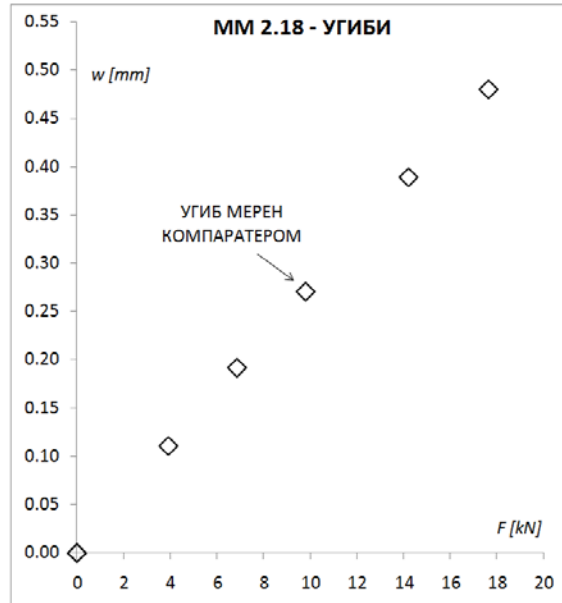
Слика П2.21. ММ 2.17 – мерење угиба



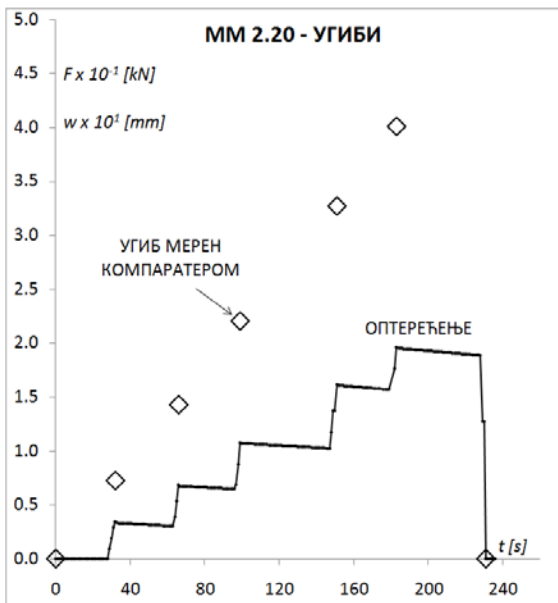
Слика П2.22. ММ 2.17 – угиб у функцији оптерећења



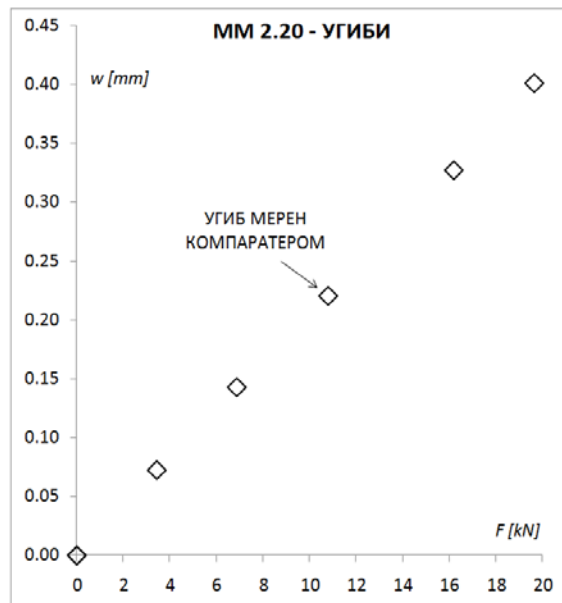
Слика П2.23. ММ 2.18 – мерење угиба



Слика П2.24. ММ 2.18 – угиб у функцији оптерећења



Слика П2.25. ММ 2.20 – мерење угиба



Слика П2.26. ММ 2.20 – угиб у функцији оптерећења

Табела П2.5. ММ 2.08 - угиби

$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
3.43	0.071
6.87	0.142
9.81	0.202
15.21	0.309
18.64	0.380
0	0

Табела П2.6. ММ 2.11 - угиби

$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$	$w_{IND} [mm]$
0	0	0
4.91	0.095	0.090
7.85	0.154	0.156
11.77	0.226	0.230
14.72	0.282	0.295
18.25	0.352	0.367
0	0	0

Табела П2.7. ММ 2.12- угиби

$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
2.94	0.082
5.89	0.163
9.32	0.256
14.72	0.403
19.13	0.520
0	0

Табела П2.8. ММ 2.14 - угиби

$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
2.94	0.061
6.87	0.139
11.77	0.237
15.70	0.318
19.62	0.400
0	0

Табела П2.9. ММ 2.17 - угиби

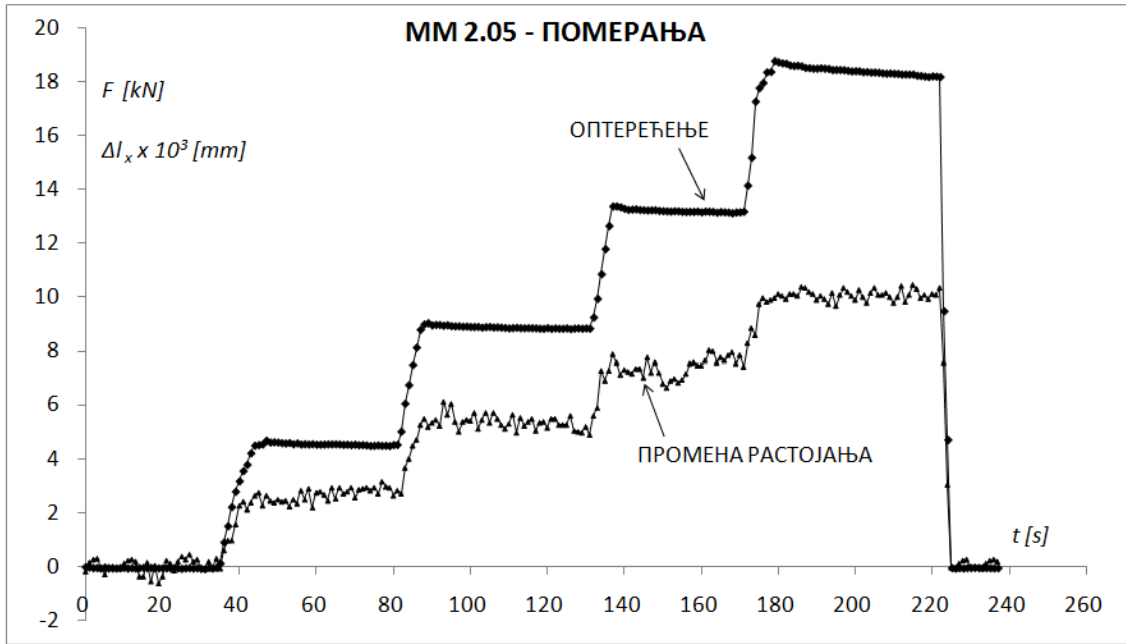
$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
3.04	0.063
6.38	0.130
9.52	0.191
14.91	0.297
19.23	0.382
0	0

Табела П2.10. ММ 2.18 – угиби

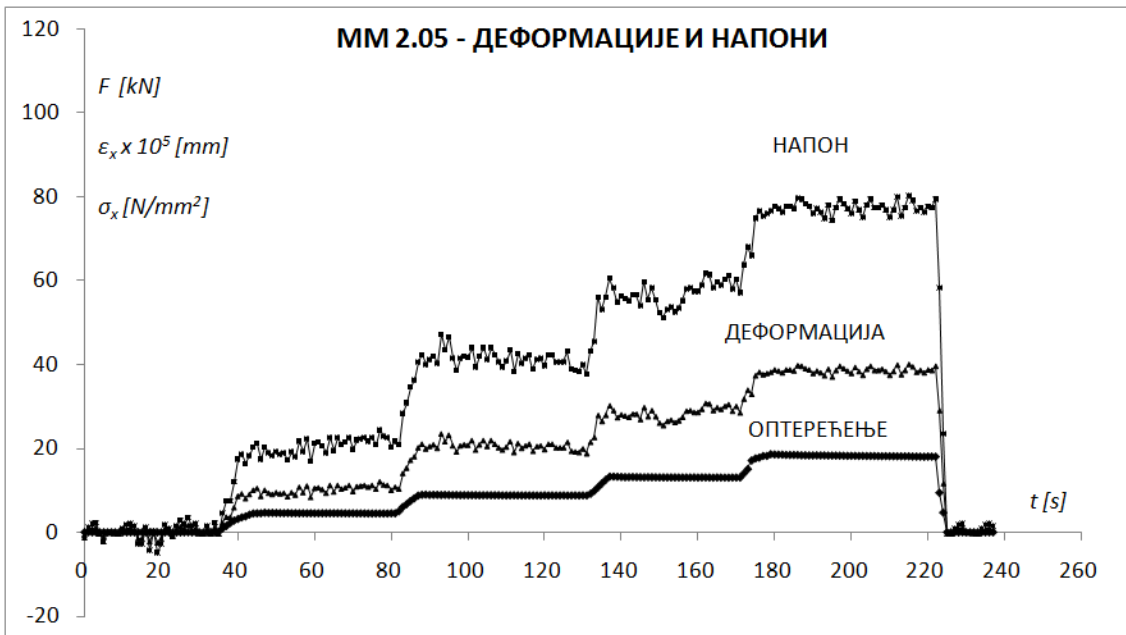
$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
3.92	0.111
6.87	0.192
9.81	0.271
14.22	0.389
17.66	0.480
0	0

Табела П2.11. ММ 2.20 - угиби

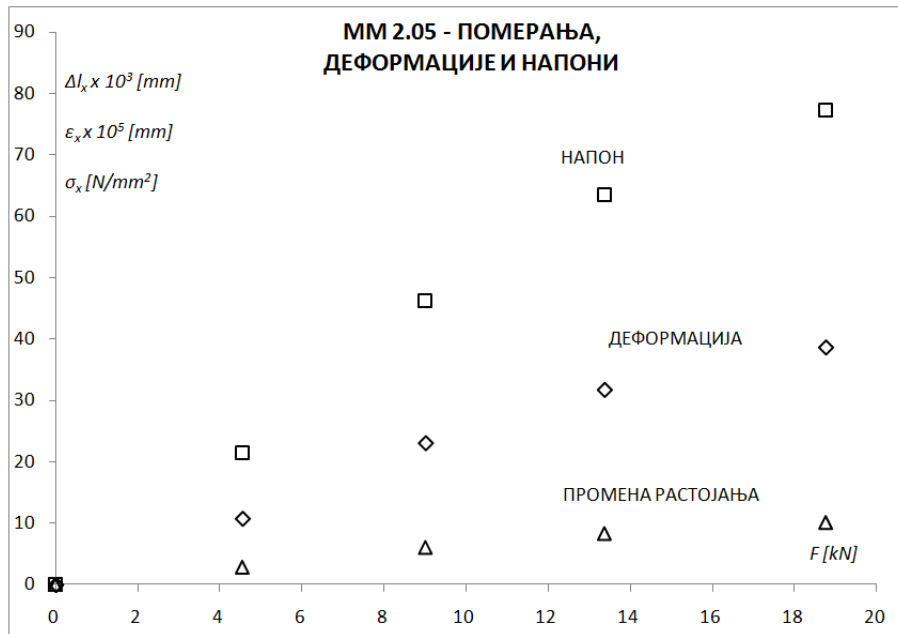
$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
3.43	0.072
6.87	0.143
10.79	0.220
16.19	0.327
19.64	0.401
0	0



Слика П2.27. ММ 2.05 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



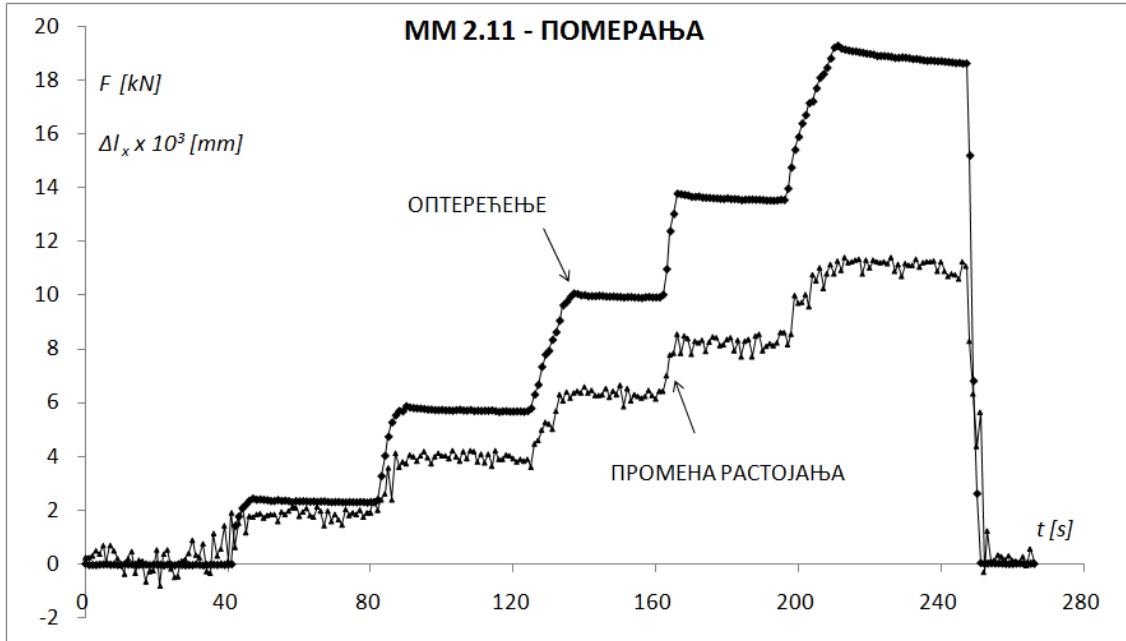
Слика П2.28. ММ 2.05 – деформације и напони у правцу x



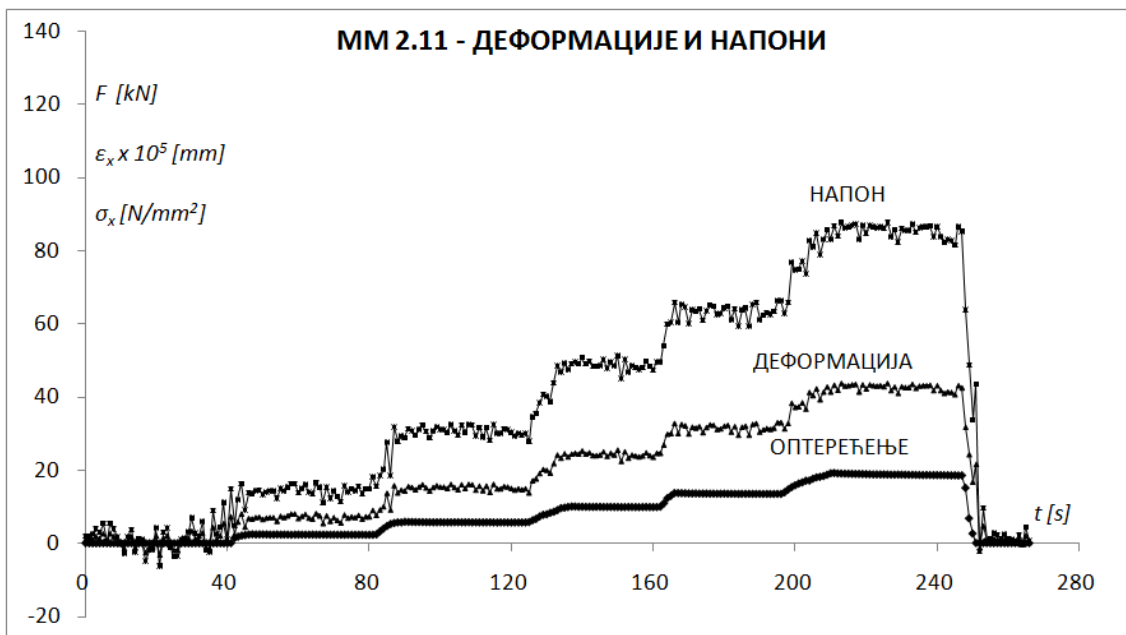
Слика П2.29. ММ 2.05 –померања, деформације и напони у правцу правцу x

Табела П2.12. ММ 2.05 - промена растојања, деформације и напони у правцу x

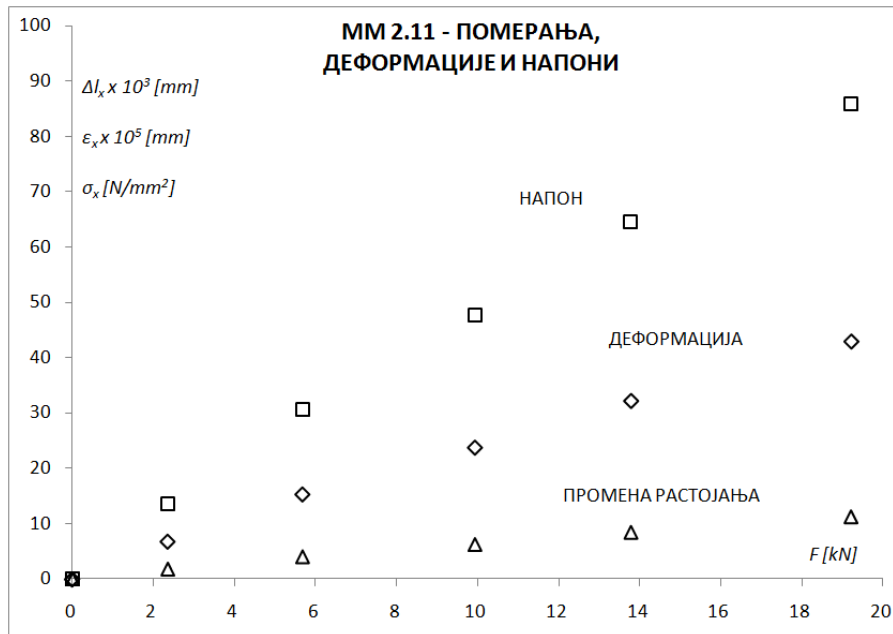
F [kN]	Δl_x [mm]	ϵ_x [1]	σ_x [N/mm ²]
0	0	0	0
4.55	2.80E-03	1.08E-04	21.54
9.01	6.00E-03	2.31E-04	46.15
13.37	8.25E-03	3.17E-04	63.49
18.76	1.01E-02	3.87E-04	77.31
0	0	0	0



Слика П2.30. ММ 2.11 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



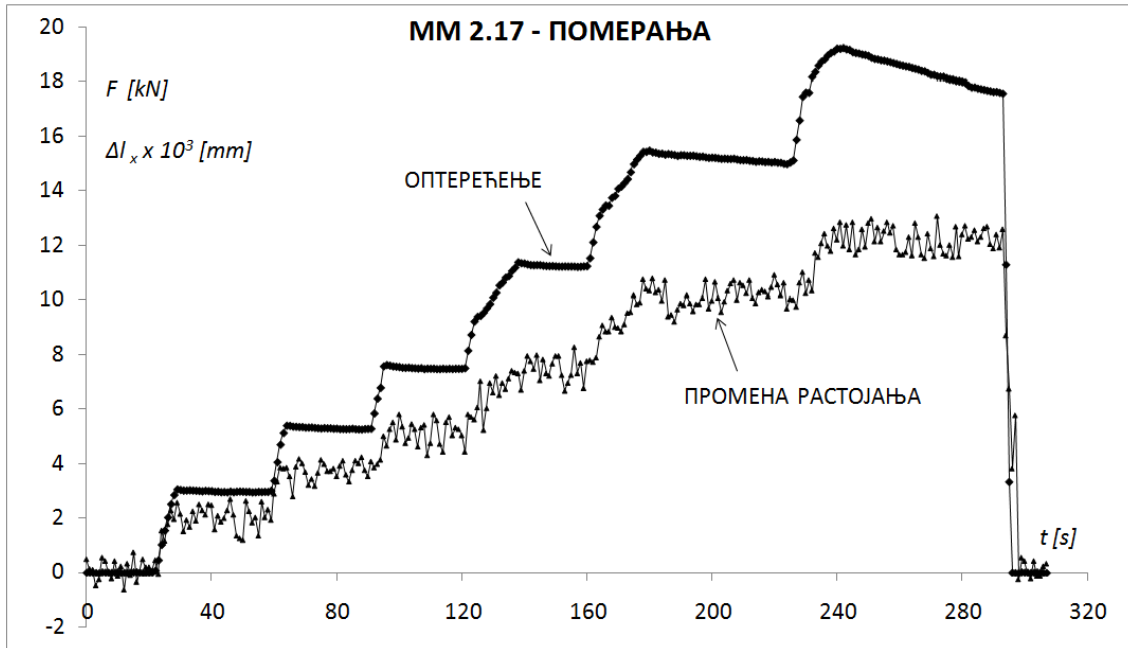
Слика П2.31. ММ 2.11 – деформације и напони у правцу x



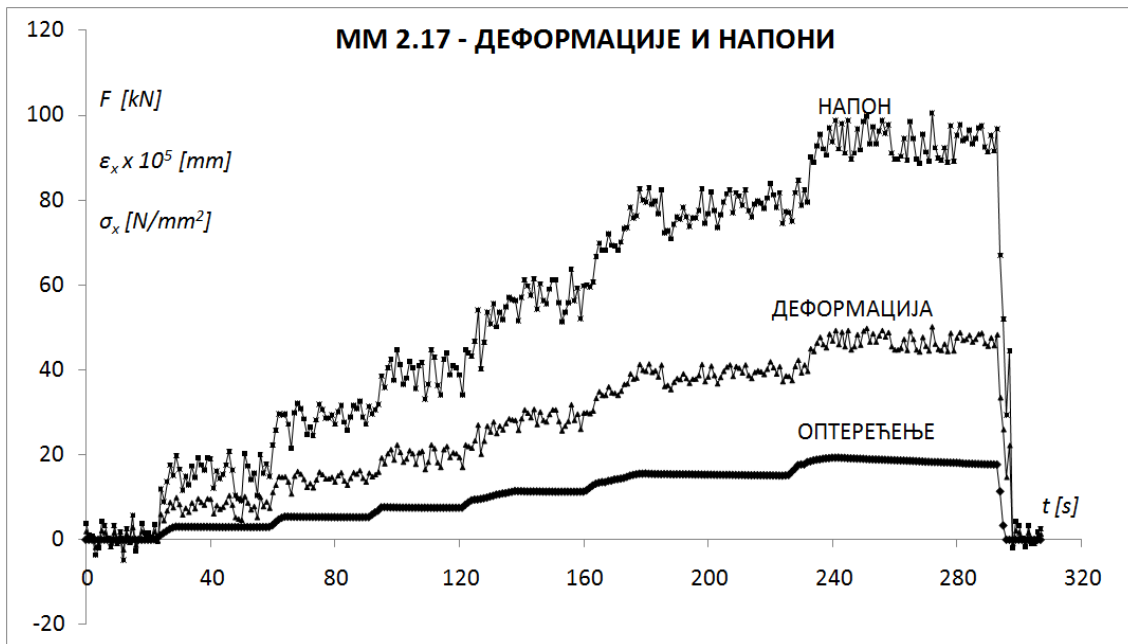
Слика П2.32. ММ 2.11 –померања, деформације и напони у правцу x

Табела П2.13. ММ 2.11 - промена растојања, деформације и напони у правцу x

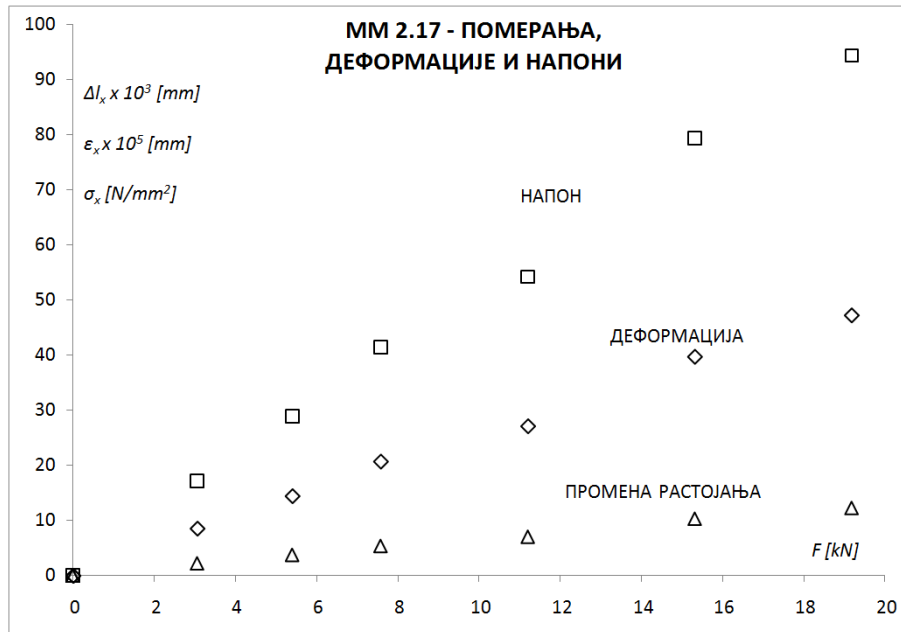
F [kN]	Δl_x [mm]	ε_x [']	σ_x [N/mm ²]
0	0	0	0
2.35	1.77E-03	6.81E-05	13.62
5.68	3.99E-03	1.53E-04	30.69
9.93	6.19E-03	2.38E-04	47.59
13.78	8.38E-03	3.22E-04	64.47
19.21	1.12E-02	4.30E-04	85.95
0	0	0	0



Слика П2.33. ММ 2.17 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



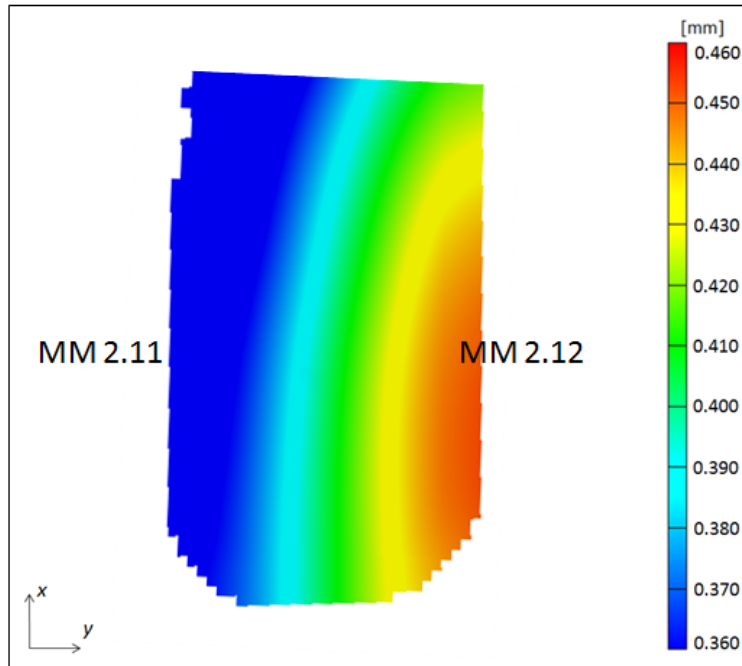
Слика П2.34. ММ 2.17 – деформације и напони у правцу x



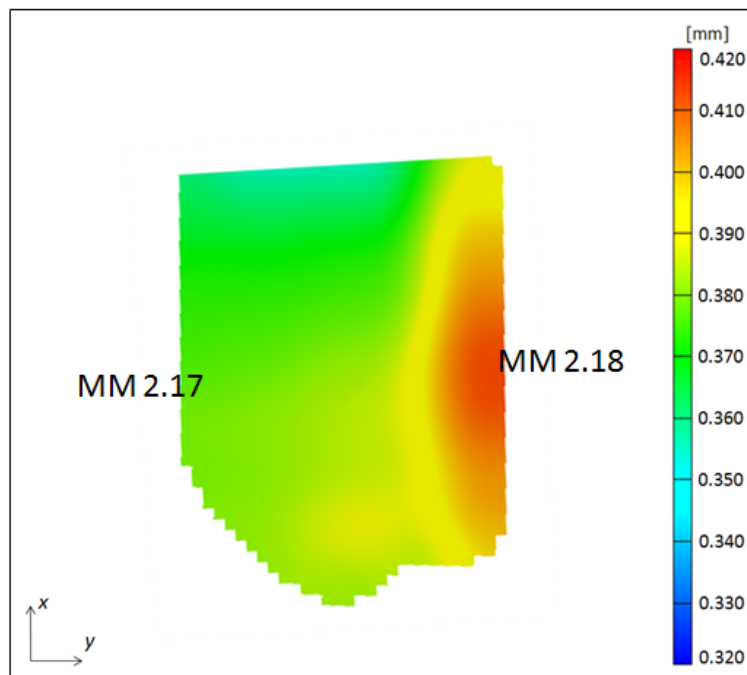
Слика П2.35. ММ 2.17 – померања, деформације и напони у правцу x

Табела П2.14. ММ 2.17 - промена растојања, деформације и напони у правцу x

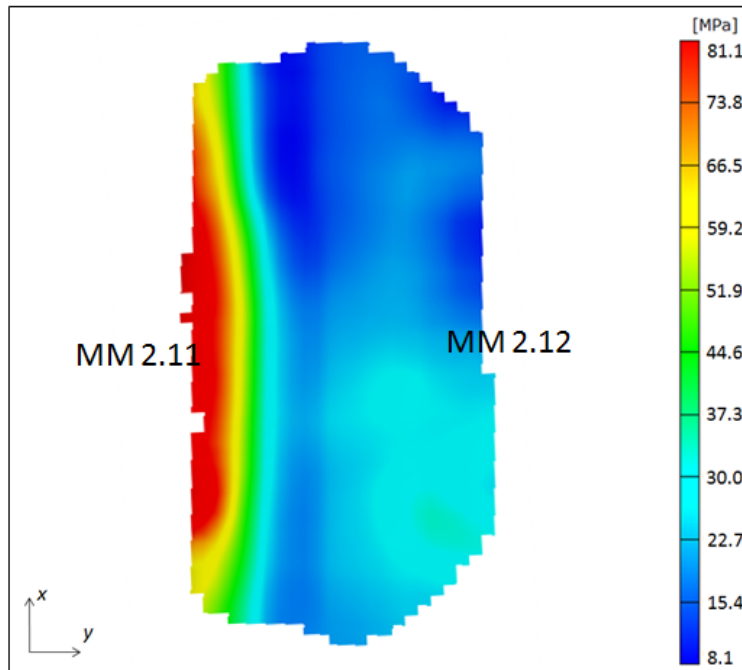
$F [kN]$	$\Delta l_x [mm]$	$\epsilon_x [/]$	$\sigma_x [N/mm^2]$
0	0	0	0
3.06	2.22E-03	8.54E-05	17.08
5.40	3.75E-03	1.44E-04	28.85
7.58	5.38E-03	2.07E-04	41.36
11.21	7.04E-03	2.71E-04	54.15
15.32	1.03E-02	3.97E-04	79.31
19.18	1.23E-02	4.72E-04	94.31
0	0	0	0



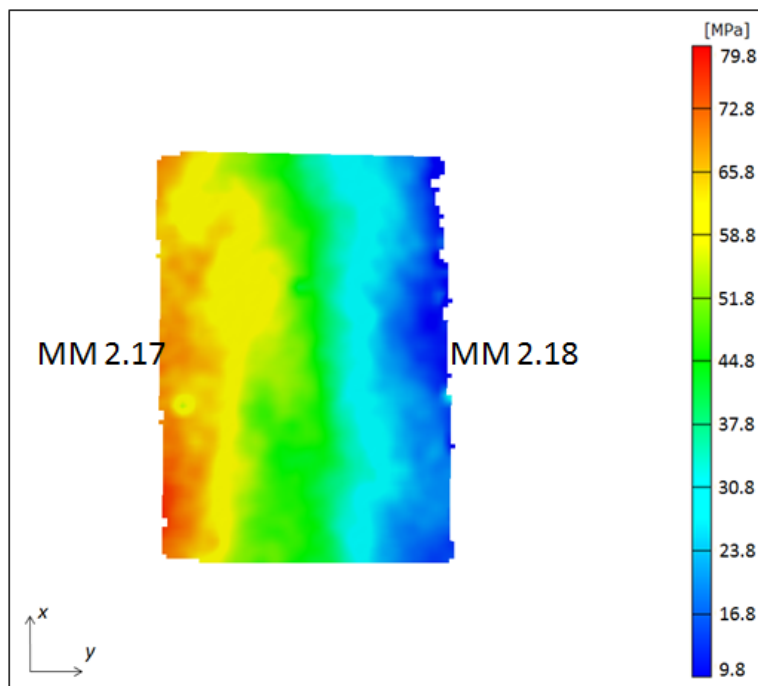
Слика П2.36. MM 2.11 – угиб
(оптерећење 16.78 kN)



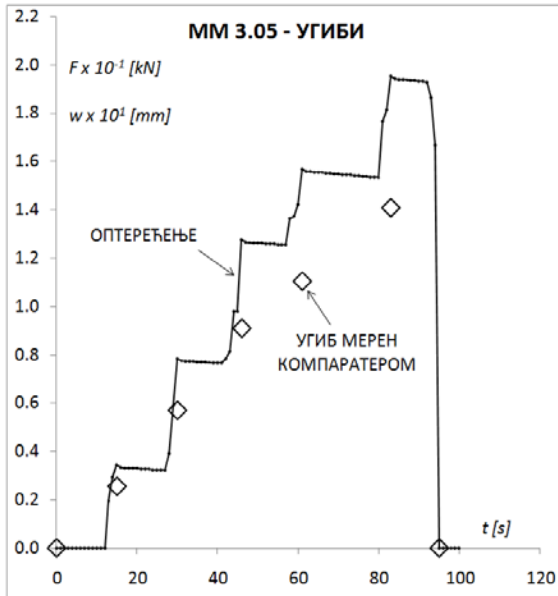
Слика П2.37. MM 2.17 – угиб (оптерећење 16.28 kN)



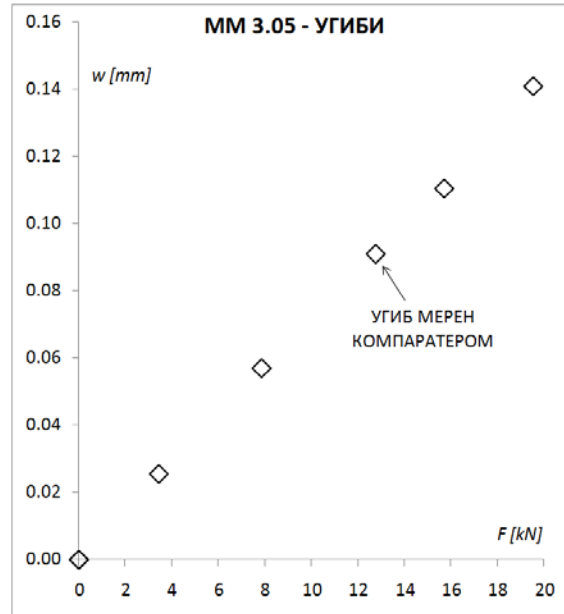
Слика П2.38. MM 2.12 – напон у правцу x (оптерећење 16.78 kN)



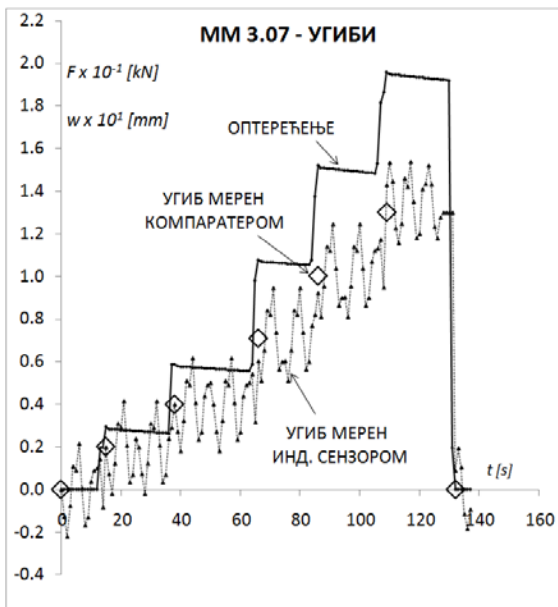
Слика П2.39. MM 2.17 – напон у правцу x (оптерећење 16.28 kN)



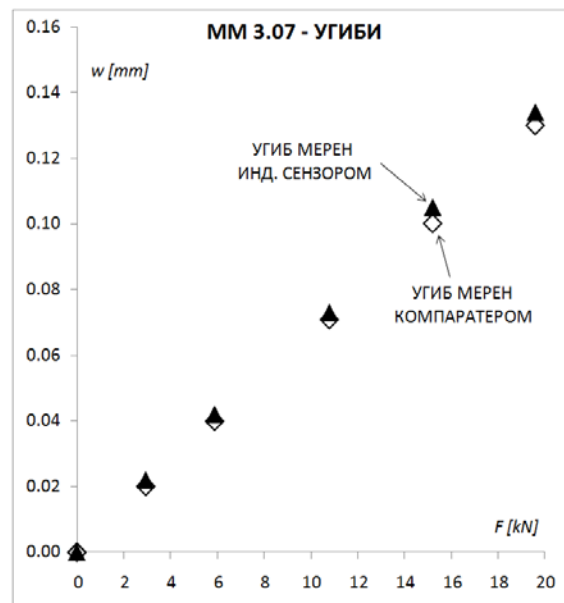
Слика П2.40. ММ 3.05 – мерење угиба



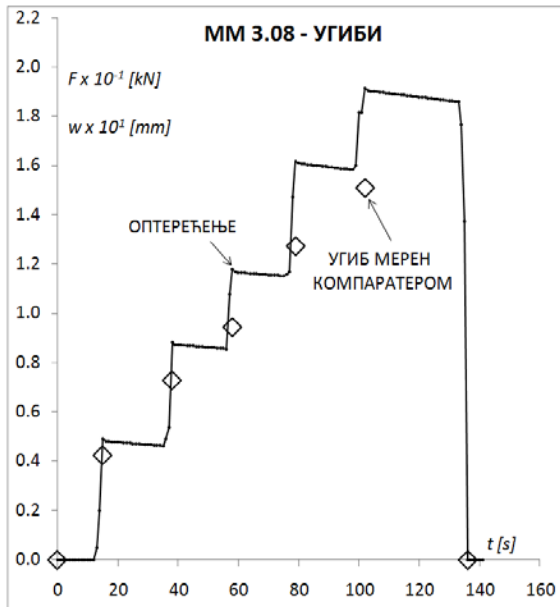
Слика П2.41. ММ 3.05 – угиб у функцији оптерећења



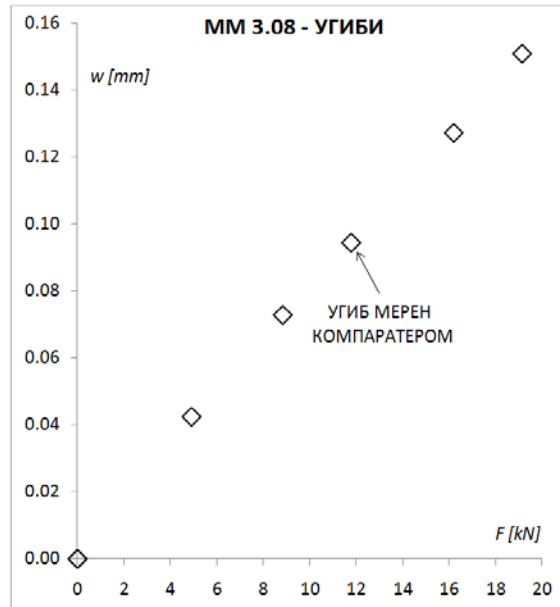
Слика П2.42. ММ 3.07 – мерење угиба



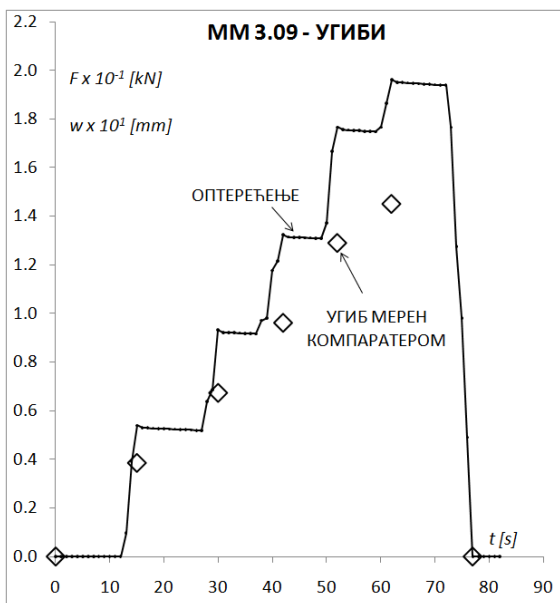
Слика П2.43. ММ 3.07 – угиб у функцији оптерећења



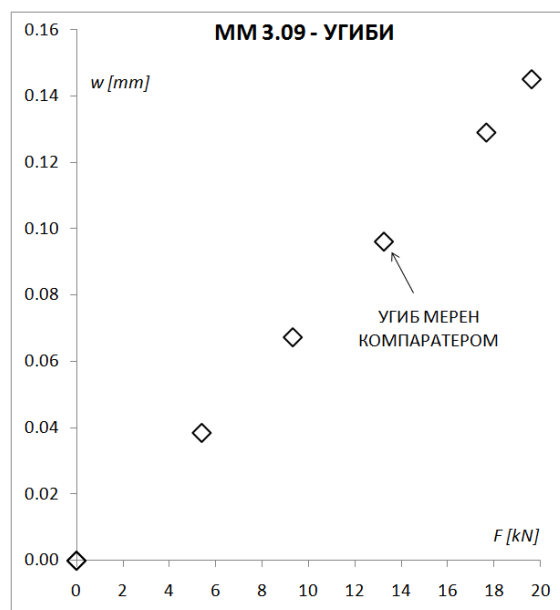
Слика П2.44. ММ 3.08 – мерење угиба



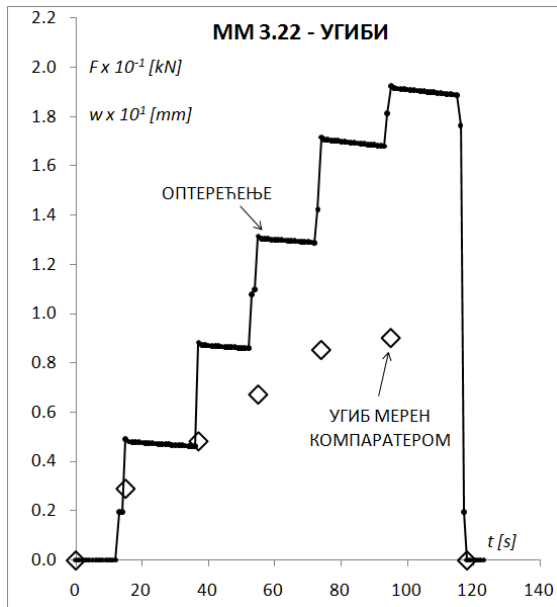
Слика П2.45. ММ 3.08 – угиб у функцији оптерећења



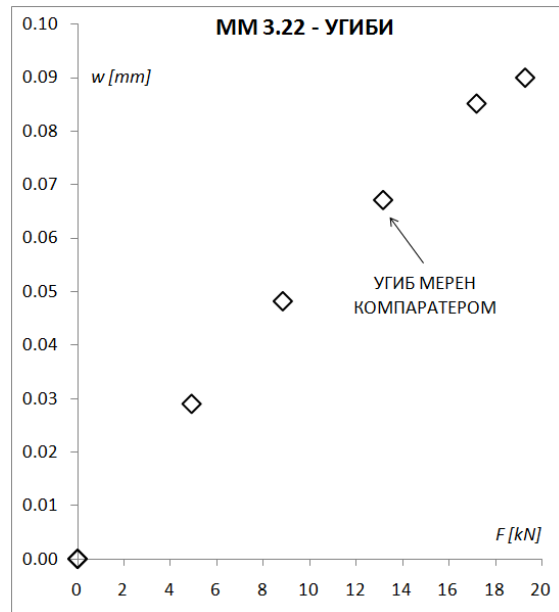
Слика П2.46. ММ 3.09 – мерење угиба



Слика П2.47. ММ 3.09 – угиб у функцији оптерећења



Слика П2.48. ММ 3.22 – мерење угиба



Слика П2.49. ММ 3.22 – угиб у функцији оптерећења

Табела П2.15. ММ 3.05 - угиби

$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
3.43	0.026
7.85	0.057
12.75	0.091
15.70	0.111
19.52	0.141
0	0

Табела П2.16. ММ 3.07- угиби

$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$	$w_{ИНД} [mm]$
0	0	0
2.94	0.020	0.022
5.89	0.040	0.042
10.79	0.071	0.073
15.21	0.100	0.105
19.59	0.130	0.134
0	0	0

Табела П2.17. ММ 3.08- угиби

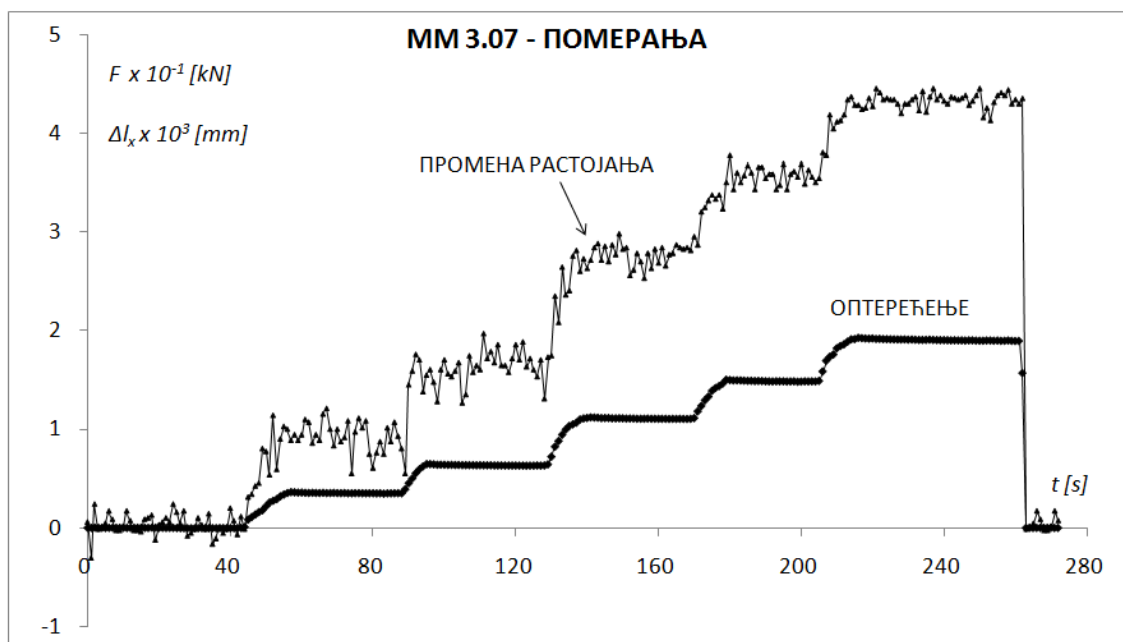
$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
4.91	0.043
8.83	0.073
11.77	0.095
16.19	0.127
19.13	0.151
0	0

Табела П2.18. ММ 3.09 - угиби

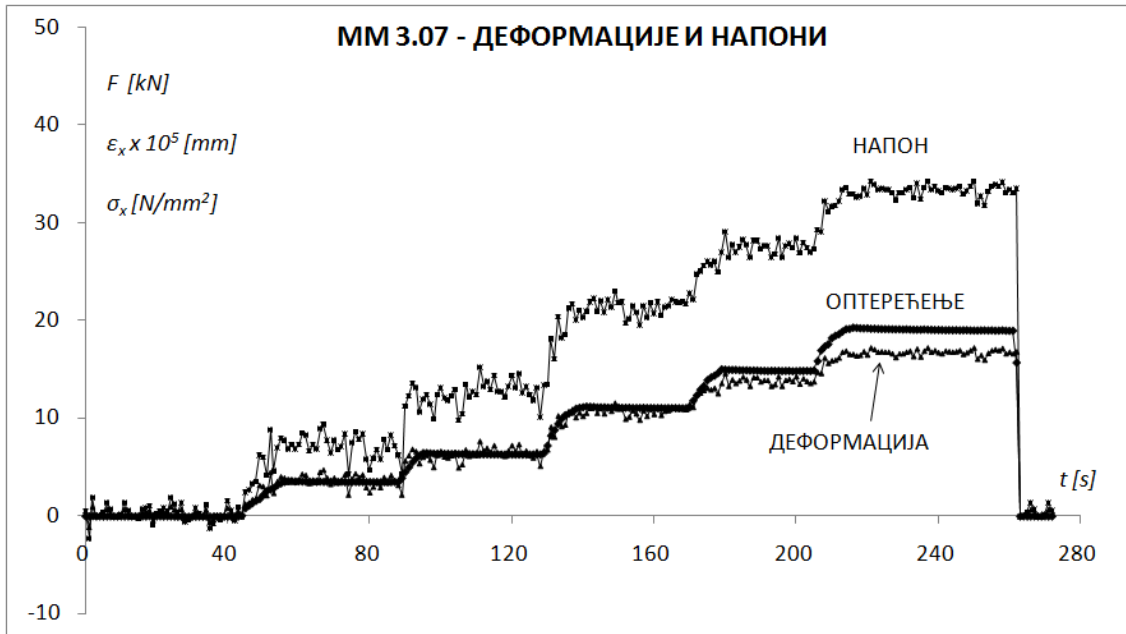
$F [kN]$	$w_{КОМ} [mm]$
0	0
5.40	0.039
9.32	0.067
13.24	0.096
17.66	0.129
19.61	0.145
0	0

Табела П2.19. ММ 3.22 – угиби

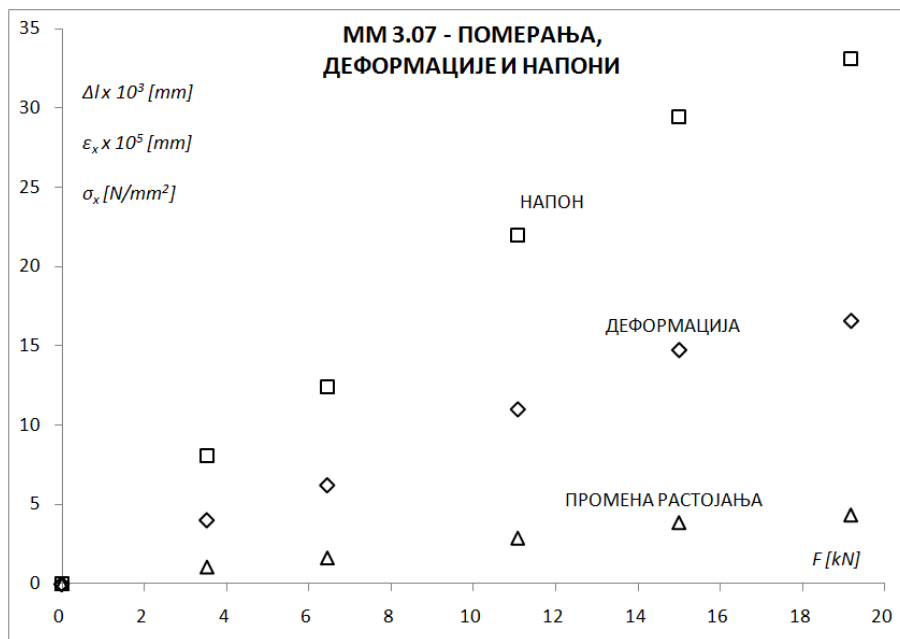
F [kN]	$w_{\text{КОМ}}$ [mm]
0	0
4.91	0.029
8.83	0.048
13.15	0.067
17.17	0.085
19.26	0.090
0	0



Слика П2.50. ММ 3.07 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



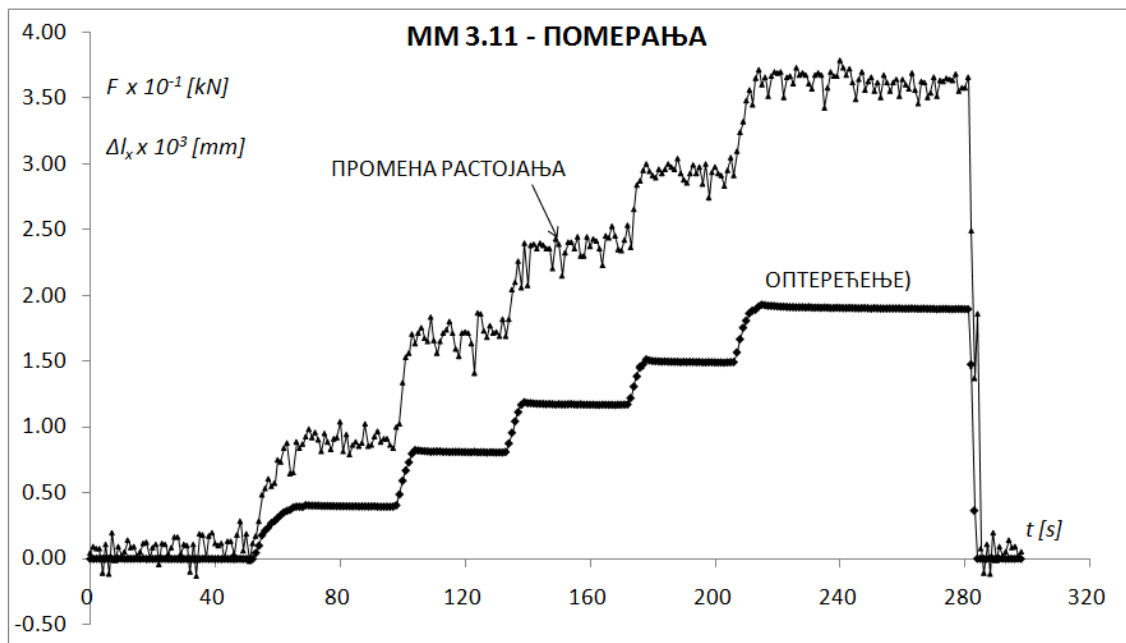
Слика П2.51. ММ 3.07 – деформације и напони у правцу x



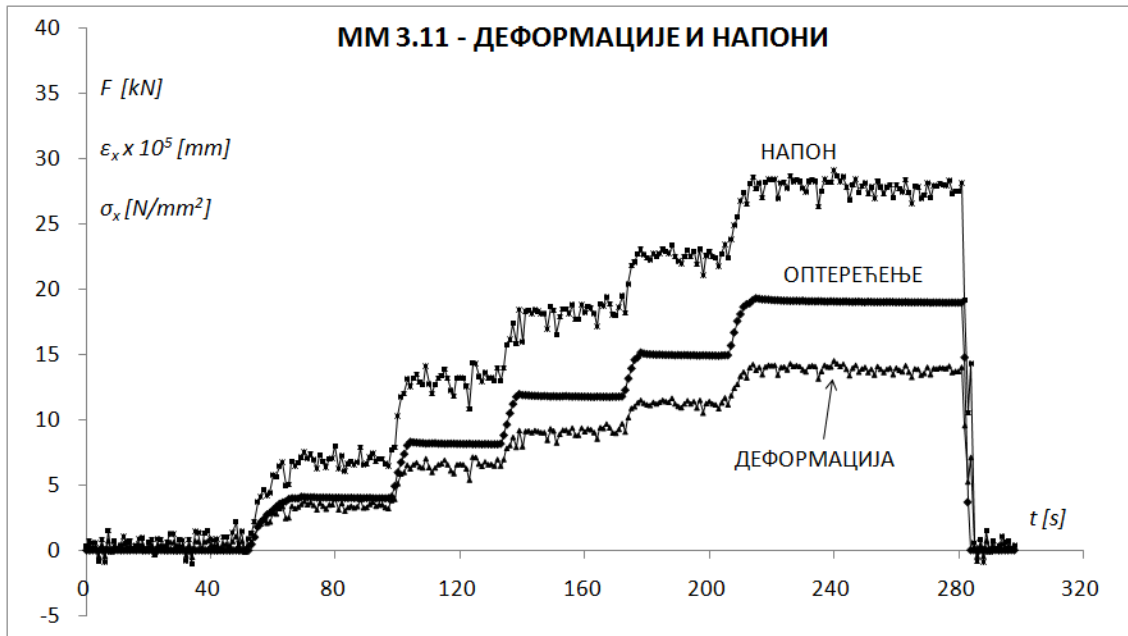
Слика П2.52. ММ 3.07 – померања, деформације и напони у правцу x

Табела П2.20. ММ 3.07 - промена растојања, деформације и напони у правцу x

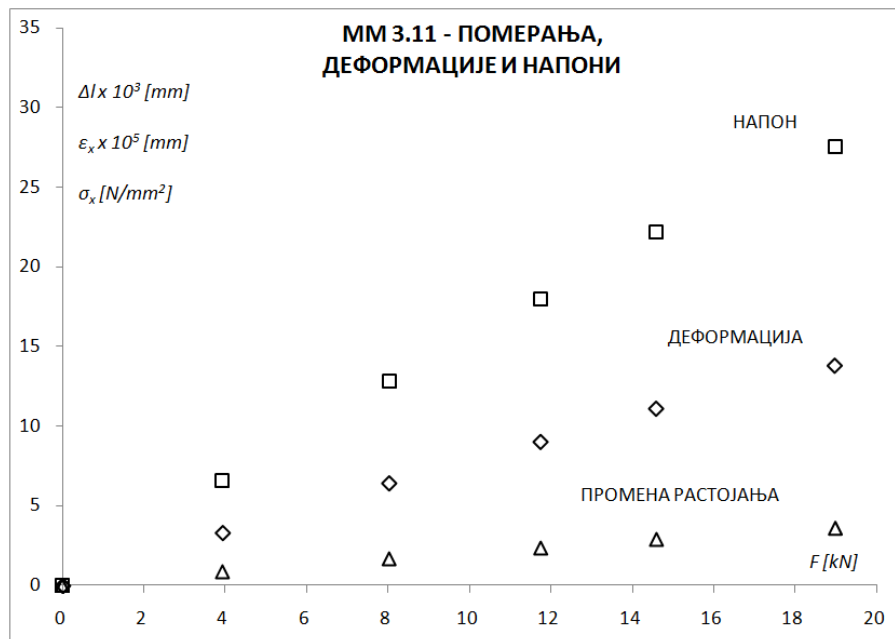
F [kN]	Δl_x [mm]	ε_x [']	σ_x [N/mm ²]
0	0	0	0
3.53	1.05E-03	4.02E-05	8.05
6.45	1.62E-03	6.22E-05	12.45
11.08	2.86E-03	1.10E-04	22.00
15.00	3.83E-03	1.47E-04	29.46
19.18	4.31E-03	1.66E-04	33.13
0	0	0	0



Слика П2.53. ММ 3.11 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



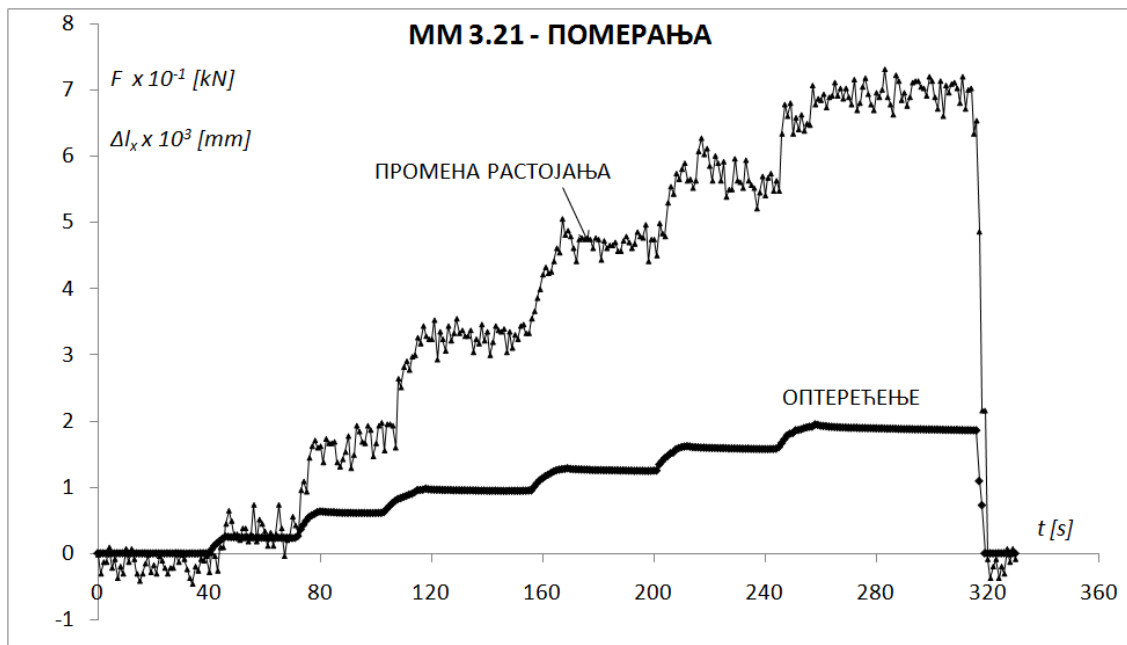
Слика П2.54. ММ 3.11 – деформације и напони у правцу x



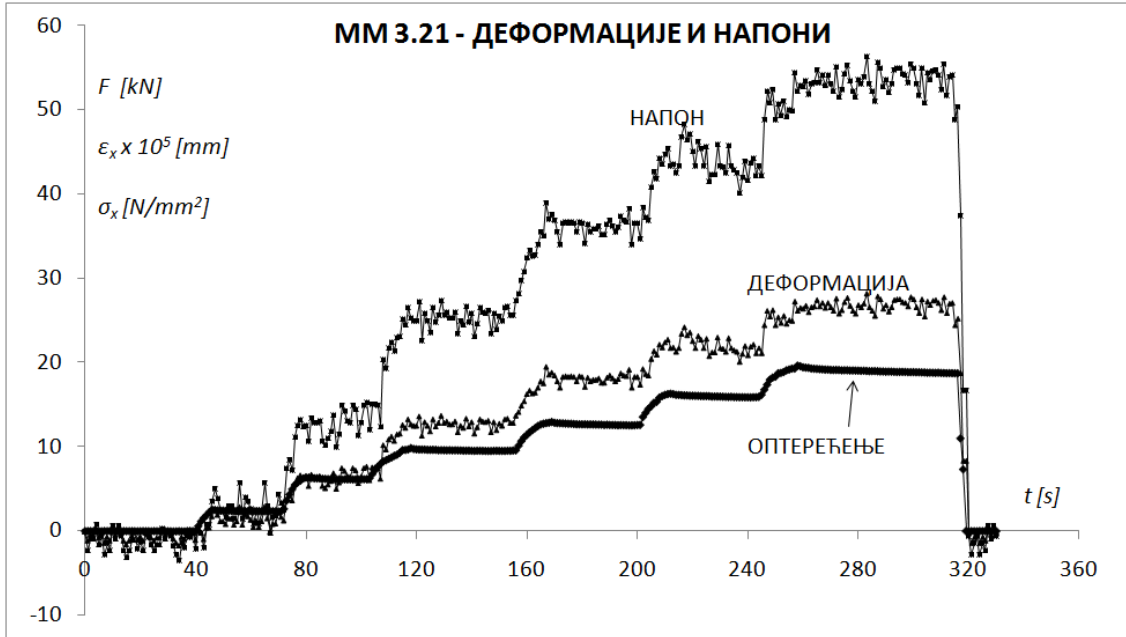
Слика П2.55. ММ 3.11 – померања, деформације и напони у правцу x

Табела П2.21. ММ 3.11- промена растојања, деформације и напони у правцу x

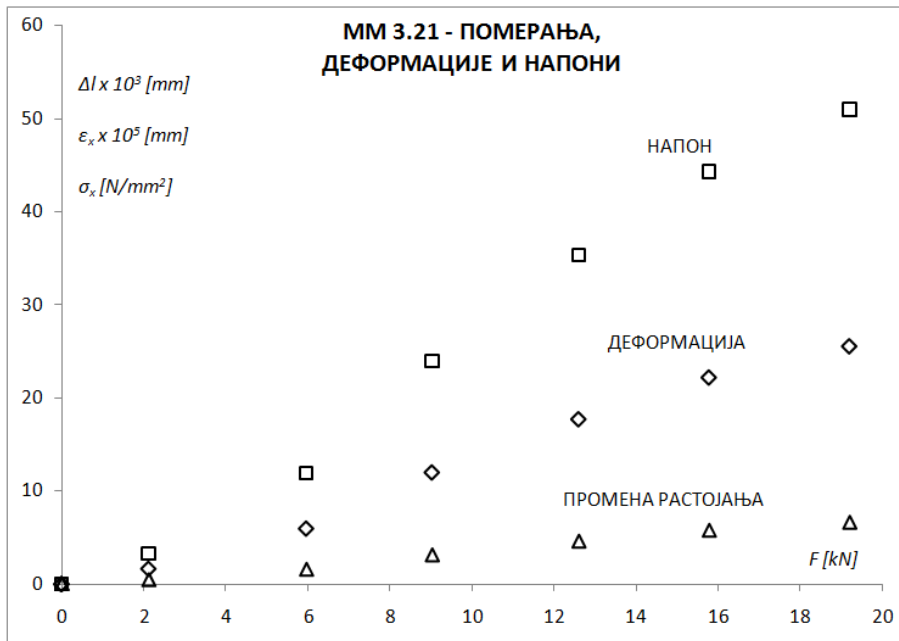
F [kN]	Δl_x [mm]	ε_x [']	σ_x [N/mm ²]
0	0	0	0
3.93	8.59E-04	3.30E-05	6.61
8.02	1.67E-03	6.41E-05	12.82
11.74	2.34E-03	9.00E-05	18.00
14.58	2.88E-03	1.11E-04	22.15
18.97	3.58E-03	1.38E-04	27.54
0	0	0	0



Слика П2.56. ММ 3.21 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



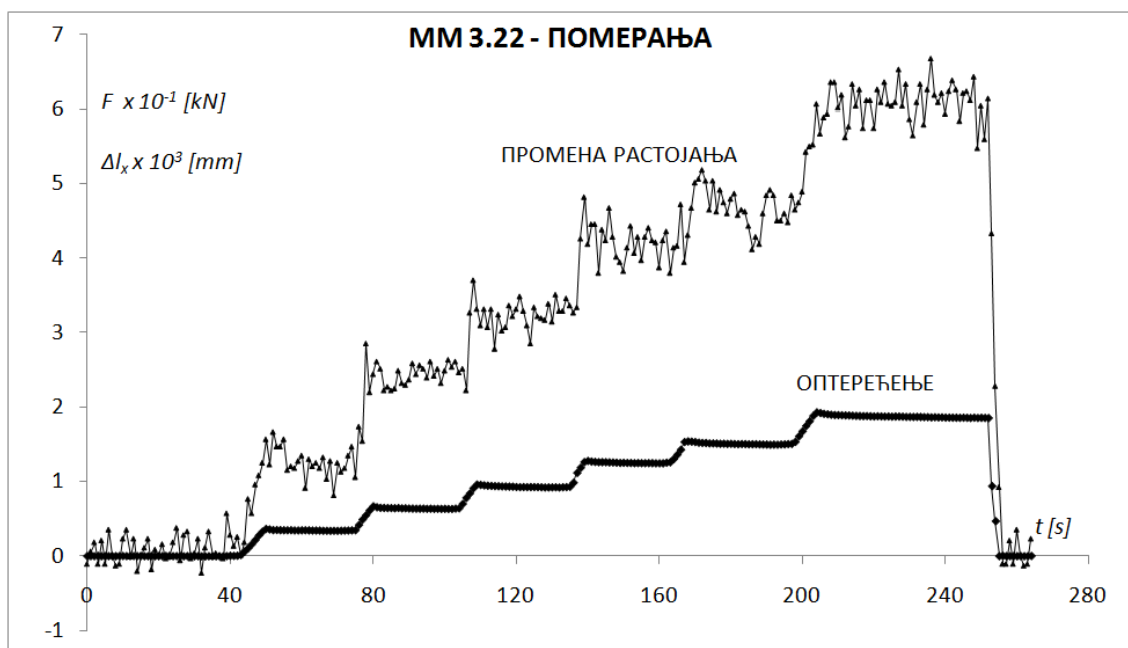
Слика П2.57. ММ 3.21 – деформације и напони у правцу x



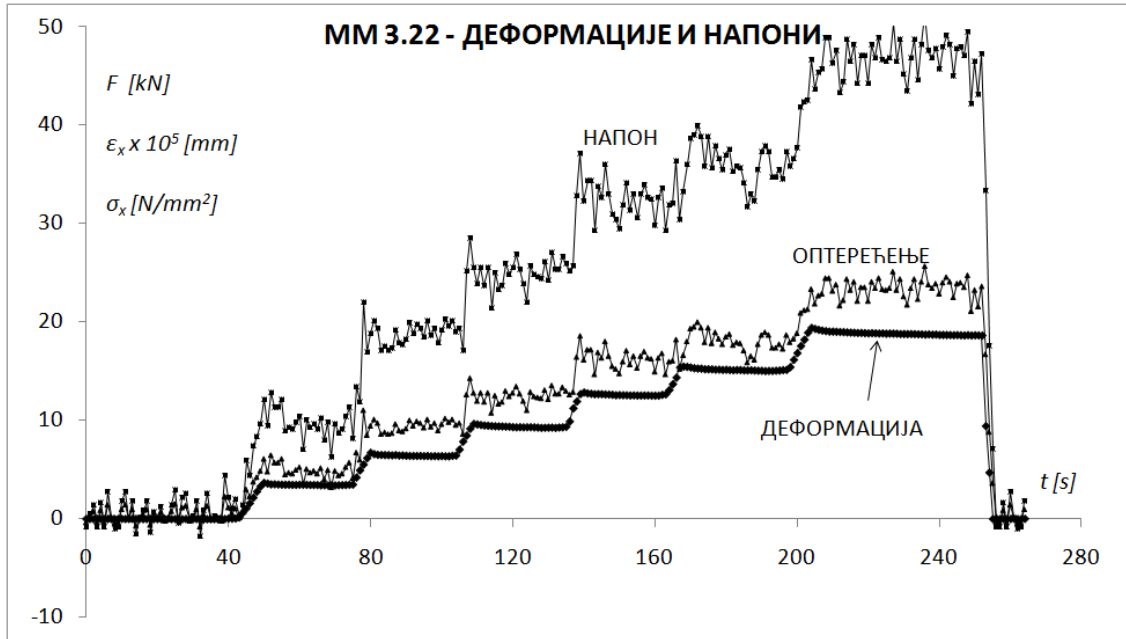
Слика П2.58. ММ 3.21 – померања, деформације и напони у правцу x

Табела П2.22. ММ 3.21 - промена растојања, деформације и напони у правцу x

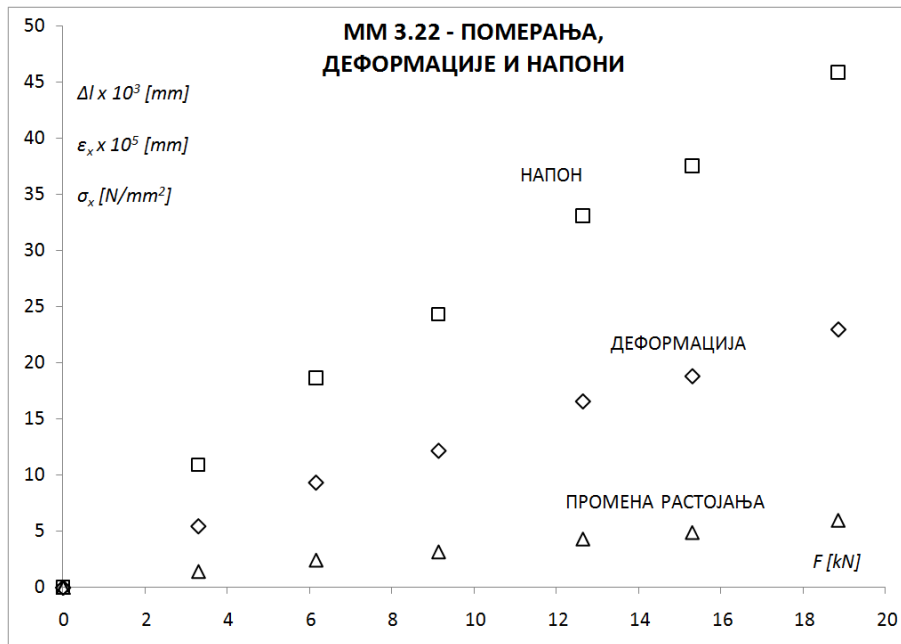
F [kN]	Δl_x [mm]	ϵ_x [/]	σ_x [N/mm ²]
0	0	0	0
2.12	4.28E-04	1.65E-05	3.29
5.96	1.55E-03	5.96E-05	11.92
9.03	3.12E-03	1.20E-04	23.97
12.60	4.60E-03	1.77E-04	35.36
15.78	5.76E-03	2.22E-04	44.32
19.2	6.63E-03	2.55E-04	51.01
0	0	0	0



Слика П2.59. ММ 3.22 – мерење промене растојања две тачке у правцу x



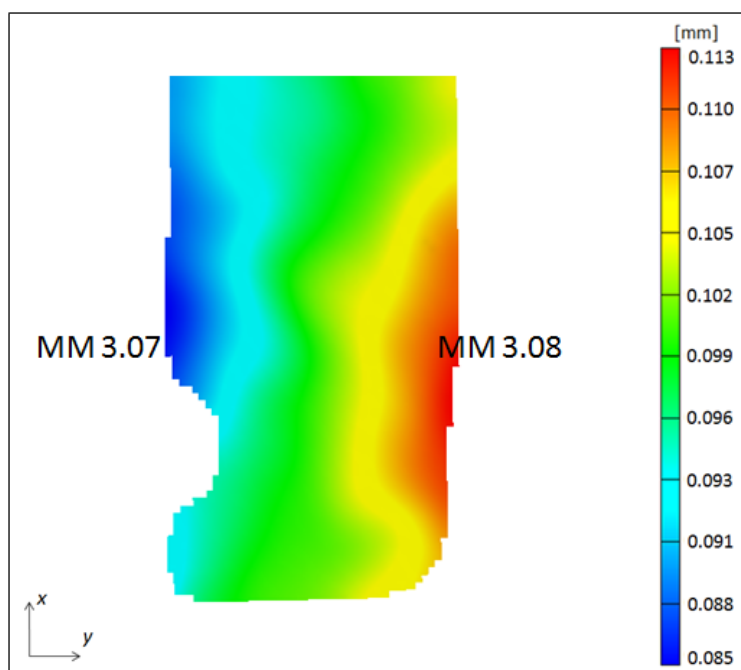
Слика П2.60. ММ 3.22 – деформације и напони у правцу x



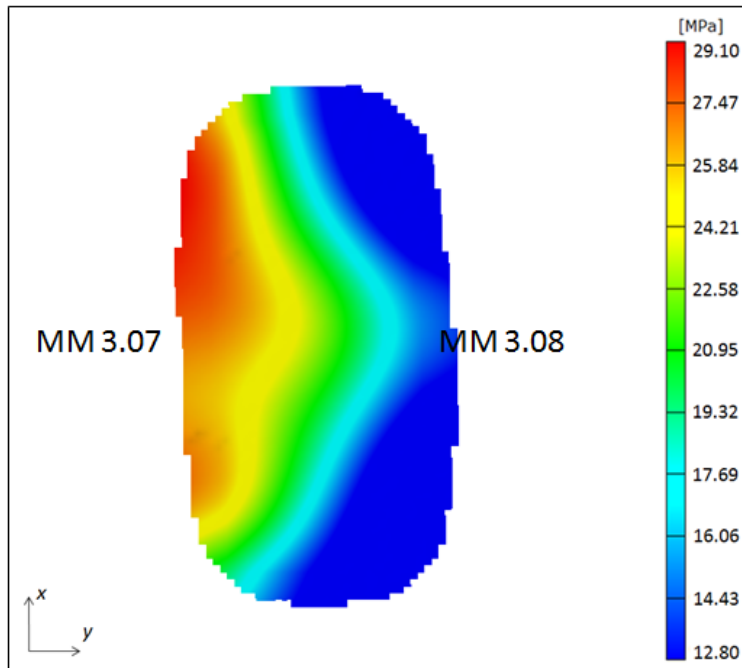
Слика П2.61. ММ 3.22 – померања, деформације и напони у правцу x

Табела П2.23. ММ 3.22- промена растојања, деформације и напони у правцу x

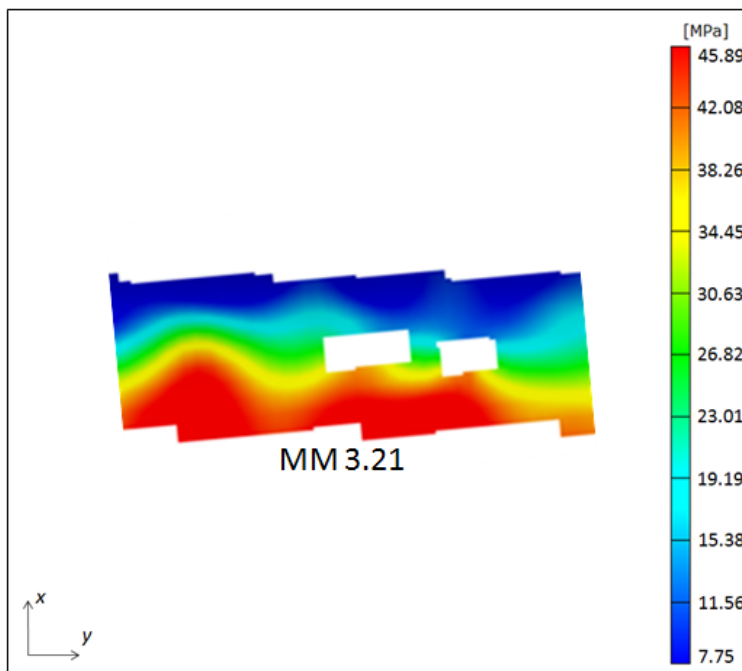
$F [kN]$	$\Delta l_x [mm]$	$\varepsilon_x [/\]$	$\sigma_x [N/mm^2]$
0	0	0	0
3.29	1.42E-03	5.45E-05	10.90
6.15	2.43E-03	9.33E-05	18.65
9.13	3.16E-03	1.22E-04	24.31
12.64	4.30E-03	1.65E-04	33.07
15.30	4.88E-03	1.88E-04	37.54
18.85	5.96E-03	2.29E-04	45.85
0	0	0	0



Слика П2.62. ММ 3.08 – мерење угиба (оптерећење 15.1 kN)



Слика П2.63. ММ 3.07 – мерење напона у правцу x (оптерећење 15.1 kN)



Слика П2.64. ММ 3.21 – мерење напона правцу y (оптерећење 16.28 kN)

Биографски подаци о кандидату

Никола Момчиловић је рођен 24.07.1981. године у Котору. Основну школу завршио у Тивту, а гимназију у Котору. Дипломирао је 19.06.2007. године на Машинском факултету у Београду на Смеру за бродоградњу са просечном оценом 8.51 и оценом 10 на дипломском раду. Тема дипломског рада била је: Прорачун бродских конструкција методом коначних елемената. Уписао је докторске студије школске 2007/08 године, и ангажован као сарадник у Иновационом центру Машинског факултета у Београду на пројектима Катедре за бродоградњу: ТР 6317А (Развој нове генерације речних теретних бродова – завршен 2008) и ТР 14012 (Развој сигурних, ефикасних, еколошких (СЕ-ЕКО) бродова – завршен 2010). Тренутно учествује на пројекту ТР 35009 (Развој нове генерације сигурних, ефикасних, еколошких (СЕ-ЕКО) бродова – започео 2011.).

Кандидат је 2007/2008. године уписао докторске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду. Током докторских студија и рада као истраживач - сарадник на пројектима Министарства науке и технолошког развоја, Никола Момчиловић је учествовао и у извођењу наставе на Смеру за бродоградњу Машинског факултета. Држао је вежбе из предмета Чврстоћа брода 2. Такође је обављао преглед колоквијума, радова, учествовао у припреми и прегледу дипломских радова из овог предмета. Од маја 2011. године је запослен на Машинском факултету као асистент за групу предмета из области бродоградње: Бродске конструкције 1, Бродске конструкције 2, Чврстоћа брода 1 и Чврстоћа брода 2.

Током докторских студија и рада на пројектима Технолошког развоја, Никола Момчиловић бавио се са неколико различитих тема из области бродоградње: бродским конструкцијама, чврстоћом брода, методом коначних елемената. Прикључио се истраживачкој групи која је проучавала чврстоћу бродских конструкција, коришћење композитних материјала и сендвич конструкција у циљу смањења тежине брода. Аутор је једног техничког решења везаног за анализу торзије брода.

Никола Момчиловић је одржао и предавање на скуповима Друштва бродограђевних инжењера и техничара ДБИТ на тему: „Примена сендвич панел система (СПС) у бродоградњи“.

Током докторских студија 2008. године Никола Момчиловић је боравио два месеца у Бечу (Аустрија) на усавршавању у компанији „Via Donau“ где је радио на проучавању могућности смањења тежине трупа речних бродова у циљу повећања количине укрцаног терета коришћењем нових материјала. 2010. године био је учесник Летње школе за Механику, Међународног центра за Механику, у Удинама (Италија). Тема летње школе била је моделирање и симулација система методом коначних елемената. Такође, током докторских студија радио је на великом броју експеримената у оквиру Лабораторије за Отпорност конструкција Машинског факултета коју води професор Ташко Манески.

Никола Момчиловић је био коаутор неколико радова објављених у домаћим, међународним часописима и међународним конференцијама. Кандидат је објавио и два рада у часописима са СЦИ листе.

Никола Момчиловић је члан британског Краљевског удружења бродоградитеља RINA (The Royal Institution of Naval Architects) и Друштва бродограђевних инжењера и техничара Србије (ДБИТ).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Никола Момчиловић

број индекса Д21/07

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Моделирање чврстоће ортотропних панела бродске конструкције еквивалентим неоребреним плочама

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, октобар 2014.



Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Никола Момчиловић

Број индекса Д21/07

Студијски програм Докторске студије

Наслов рада Моделирање чврстоће ортотропних панела бродске конструкције еквивалентим неоребреним плочама

Ментор Проф. др Ташко Манески

Потписани/а Никола Момчиловић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, октобар 2014.

Никола Момчиловић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Моделирање чврстоће ортотропних панела бродске конструкције еквивалентим неоребреним плочама

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, октобар 2014.



1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.