



Univerzitet u Novom Sadu  
Prirodno-matematički fakultet  
Departman za matematiku i informatiku



Goran Radojev

# **Kolokacioni postupci za rešavanje singularno perturbovanih problema**

Doktorska disertacija

Novi Sad, 2015.

# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>iii</b>
<b>Zahvalnost</b>	<b>v</b>
<b>Oznake</b>	<b>vii</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Pregled osnovnih definicija i teorema</b>	<b>7</b>
2.1 Interpolacija . . . . .	7
2.2 Ležandrovi polinomi . . . . .	8
2.3 Matrice . . . . .	10
2.4 Granični slojevi i adaptivne mreže . . . . .	10
<b>3 Polinomni splajnovi</b>	<b>13</b>
3.1 B-splajnovi . . . . .	13
3.1.1 Kvadratni splajn . . . . .	15
3.1.2 Kubni splajn . . . . .	17
3.1.3 Splajn stepena četiri . . . . .	19
3.2 "Bubble" funkcije . . . . .	21
3.3 Kvadratna splajn interpolacija . . . . .	23
3.3.1 $\mathcal{S}_2^0$ - interpolacija . . . . .	24
3.3.2 $\mathcal{S}_2^1$ - interpolacija . . . . .	26
<b>4 Adaptivne mreže</b>	<b>29</b>
4.1 Mreže tipa Šiškina . . . . .	29
4.1.1 Šiškinova mreža . . . . .	29
4.1.2 Modifikovana Šiškinova mreža . . . . .	30
4.2 Mreže tipa Bahvalova . . . . .	32
4.2.1 Mreža Bahvalova . . . . .	32
4.2.2 Vulanovićeve mreže . . . . .	32
4.3 Rekurzivno generisana mreža . . . . .	33
<b>5 Splajn kolokacioni postupci za SPP</b>	<b>39</b>
5.1 Ograničenja izvoda tačnog rešenja . . . . .	39
5.2 Grinova funkcija . . . . .	39
5.3 Kolokacioni postupak sa kvadratnim $C^1$ -splajnom . . . . .	40

5.3.1	Greška interpolacije . . . . .	40
5.3.2	Kolokacioni postupak . . . . .	51
5.3.3	Apriorna ocena greške . . . . .	54
5.3.4	Aposteriorna ocena greške . . . . .	56
5.3.5	Adaptivni algoritam . . . . .	59
5.3.6	Numerički rezultati . . . . .	61
5.4	Kolokacioni postupci sa $C^1$ -splajnovima proizvoljnog stepena . . . . .	71
5.4.1	Kolokacioni postupak . . . . .	71
5.4.2	Apriorna ocena greške . . . . .	72
5.4.3	Aposteriorna ocena greške . . . . .	73
5.4.4	Numerički rezultati . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Kolokacioni postupak za 2D problem reakcije-difuzije</b>	<b>85</b>
6.1	Kolokacioni postupak . . . . .	85
6.2	Grinova funkcija . . . . .	87
6.3	Aposteriorna ocena greške . . . . .	88
6.4	Numerički rezultati . . . . .	95
<b>Prilog A</b>		<b>101</b>
A.1	Baza za $C^1$ -kvadratne splajnove . . . . .	101
A.2	Baza za kubne splajnove . . . . .	102
A.3	Baza za splajnove stepena četiri . . . . .	104
<b>Prilog B</b>		<b>107</b>
B.1	Test primer 1 . . . . .	107
B.2	Test primer 2 . . . . .	111
<b>Kratka biografija</b>		<b>121</b>
<b>Ključna dokumentacijska informacija</b>		<b>123</b>
<b>Key Words Documentation</b>		<b>125</b>

# PREDGOVOR

Singularno perturbovani problemi (SPP) se sistematski proučavaju od ranih 70-ih godina prošlog veka. Danas se istraživanja temelje na najvažnijim postupcima za rešavanje SPP koji su uglavnom razvijani od 1996. godine. Parcijalne diferencijalne jednačine hidrodinamike, koje se date u [52] predstavljaju primere singularno perturbovanih problema. One su bile glavni pokretački motiv za izučavanje SPP.

SPP često predstavljaju matematičke modele procesa u aerodinamici, hemijskim reakcijama i biologiji [49, 56, 74], a neretko se pojavljuju i u primenjenim problemima u tehnologiji, tehnici i finansijskoj matematici.

U disertaciji razmatramo specijalnu klasu SPP-a - probleme reakcije-difuzije u jednoj i dve dimenzije. Većina naučnih radova koristi diferencne šeme i različite tipove FEM-a za rešavanje ovog tipa problema, dok se u samo nekoliko radova koriste kolokacioni postupci. To je bio glavni podsticaj i motiv da u ovoj disertaciji dalje proučavamo splajn kolokacione postupke na adaptivnim mrežama.

Disertacija je podeljena u sledećih šest glava:

1. Uvod
2. Pregled osnovnih definicija i tvrđenja
3. Polinomni splajnovi
4. Adaptivne mreže
5. Splajn kolokacioni postupci za SPP
6. Kolokacioni postupci za 2D problem reakcije-difuzije

Kratak pregled poznatih rezultata dat je u prvoj glavi. Druga glava sadrži neke osnovne definicije i teoreme koje koristimo u daljem radu. Pojam splajn funkcija uvodimo u narednoj glavi. U ovom delu disertacije, konstruisana je i baza za  $C^1$ -splajnovne proizvoljnog stepena. Neka ograničenja za greške interpolacije, takođe, su data u istoj glavi. U četvrtoj glavi analiziramo nekoliko tipova adaptivnih mreža, čije važne osobine i dokazujemo.

Sledeće dve glave sadrže originalne rezultate. U petoj glavi primenjujemo  $C^1$ -splajn kolokacione postupke da bismo numerički rešili problem reakcije-difuzije u jednoj dimenziji. Za tačke kolokacije koristimo nule Ležandrovih polinoma. Takođe, izvodimo i apriorne i aposteriorne ocene grešaka postupaka u supremum normi. Za kolokacije sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom izvodimo apriorne ocene na dve različite adaptivne mreže (modifikovanoj Šiškinovoj i rekurzivno generisanoj mreži), dok za kolokacije sa  $C^1$ -splajnovima proizvoljnog stepena dobijamo aposteriornu ocenu greške postupka na proizvoljno izabranom mreži diksterizacije. U poslednjoj glavi posmatramo dvodimenzionalni pro-



blem reakcije-difuzije koji diskretizujemo pomoću kolokacionog postupka sa  $C^1$ -bikvadratnim splajnom. Takođe, dobili smo i aposteriornu ocenu greške ovog postupka na proizvoljnoj mreži. Numerički rezultati, dobijeni u programskim paketima *Mathematica* i *Matlab*, potvrđuju sve izvedene teorijske rezultate u ovoj disertaciji.

# ZAHVALNOST

Reč zahvalnosti, iskreno i srdačno upućujem svom mentoru prof. dr Dragoslavu Hercegu za njegovo izvanredno mentorstvo, podsticaj, brigu i strpljenje. Njegovo znanje, doslednost i stremljenje ka najvišim ciljevima u nauci, dodatno su me inspirisali i motivisali.

Posebnu zahvalnost dugujem prof. dr Heleni Zarin, koja mi je svojim zalaganjem pružila izvanrednu priliku da uradim značajna matematička istraživanja na Tehničkom univerzitetu u Drezdenu. Takođe, hvala joj i na dobronamernim i konstruktivnim kritikama i sugestijama, koji su mi pomogli u završnom oblikovanju disertacije.

Veliku zahvalnost izražavam i prof. dr Torstenu Linsu, koji je nesebično prenosio i delio svoje znanje i matematičko iskustvo sa mnom. Najveći deo originalnih rezultata u disertaciji je dobijen upravo zahvaljujući saradnji sa njim.

Zahvalnost dugujem i prof. dr Ljiljani Teofanov na njenim korisnim savetima, značajnim komentarima i sugestijama.

Takođe, zahvaljujem: Sonji Perić, Tatjani Legans, Ani Džabasan, Slobodanu Mitroviću i Miroslavu Nikoliću za nesebičnu filološku pomoć prilikom pisanja verzije disertacije na engleskom jeziku.

Za značajnu stručnu filološku pomoć, pri pisanju srpske verzije disertacije, iskreno se zahvaljujem lektoru Vesni Bašić.

Na kraju, ali podjednako važno, hvala mojoj porodici na podršci, razumevanju i trudu, безусловnoj ljubavi i strpljenju, kao i beskrajnom poverenju u mene tokom istraživanja i konačnog uobličavanja rezultata i izrade disertacije.



# OZNAKE

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{N}_0$	skup nenegativnih celih brojeva
$\Delta$	mreža diskretizacije
$N$	broj intervala mreže $\Delta$
$[x]$	najmanji ceo broj veći ili jednak sa $x$
$h_i$	korak mreže
$J_i$	interval $[x_{i-1}, x_i]$
$\Omega$	oblast $(0, 1) \times (0, 1)$
$\partial\Omega$	rub oblasti $\Omega$
$\Omega_{i,j}$	pravougaonik $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$
$f _A$	restrikcija funkcije $f$ na skup $A$
$\Pi_n$	vektorski prostor polinoma stepena manjeg ili jednakog sa $n$
$\Delta$	Laplasov operator
$C(D)$ ili $C^0(D)$	skup neprekidnih funkcija na domenu $D$
$C^k(D), k \in \mathbb{N}$	skup $k$ -puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na domenu $D$
$S_\ell^m$	prostor $C^m$ -splajnova stepena $\ell, m < \ell$
$\varepsilon$	mali pozitivni parametar, tj. $0 < \varepsilon \ll 1$
$C$	pozitivna konstanta nezavisna od $\varepsilon$ i $N$
$\mathcal{L}$	diferencijalni operator
$\mathbf{L}$	diskretni operator
$D^+, D^-, D^0$	diferencni količnici
$u$	rešenje singularno perturbovanog problema
$u_\Delta$	aproksimacija rešenja $u$ na mreži $\Delta$
$\ \cdot\ _1$	$L_1$ norma
$\ \cdot\ _\infty$	supremum norma
$\delta$	Dirak delta funkcija
$\mathcal{G}, \Gamma$	Grinova funkcija



## UVOD

U prvom delu disertacije, razmatraćemo jednu klasu SPP-a – linearni problem reakcije-difuzije u jednoj dimenziji, koji glasi: Naći  $u \in C^0[0, 1] \cap C^2(0, 1)$  tako da je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &:= -\varepsilon^2 u''(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= g_0, \quad u(1) = g_1, \end{aligned} \tag{1.1}$$

gde je  $\varepsilon \in (0, 1]$  mali parametar. Rešenje ovog problema se u opštem slučaju naglo menja u okolinama tačaka  $x = 0$  i  $x = 1$ , odnosno kada rešenje redukovanog problema (za  $\varepsilon = 0$ ) ne zadovoljava granične uslove.

U ovoj glavi ćemo ukazati na neke poznate postupke koji su razvijani za numeričko rešavanje problema (1.1). Uporedo, navešćemo i šta je originalni doprinos u ovoj disertaciji uz napomenu u kojem delu disertacije se ti rezultati nalaze.

Klasični metodi na ekvidistantnim mrežama ne daju dobre numeričke rezultate za problem (1.1). Štaviše, ti metodi su neefikasni i neprecizni, čak i kada posmatramo problem u samo jednoj dimenziji, a kada perturbovani parametar  $\varepsilon$  uzima malu vrednost. Zbog toga je neophodno konstruisati postupke koji će davati dobre aproksimacije rešenja problema (1.1), bez obzira na to koliko malu vrednost uzimao  $\varepsilon$ .

Kažemo da je postupak  $\varepsilon$ -uniformno konvergentan, u normi  $\|\cdot\|$  sa redom konvergencije  $r$ , ako važi

$$\|u - u_N\| \leq CN^{-r},$$

gde je  $u$  tačno rešenje problema (1.1), a  $u_N$  aproksimacija rešenja  $u$  na mreži sa  $N + 1$  čvorova. Sa  $C$  označavamo pozitivnu konstantu nezavisnu od  $\varepsilon$  i  $N$ .

Dakle, osnovni cilj numeričkih postupaka za rešavanje SPP-a je  $\varepsilon$ -uniformna konvergencija. U literaturi su prisutna dva generalna pristupa u konstrukciji uniformno konvergentnih metoda.

- Postupci fitovanih operatora predstavljaju prvi takav pristup. Ovi metodi podrazumevaju zamenu klasičnog diskretnog operatora specijalno kreiranim operatorom koji odražava prirodu SPP-a. Odgovarajući numerički metod se tada dobija primenom fitovanog diskretnog operatora na ekvidistantnoj mreži. Prva uspešna analiza ovog metoda izvedena je u [27]. Posle toga ova tehnika je dalje razvijana. Neke od uniformno konvergentnih metoda fitovanih operatora možemo naći u [49] i u [56]. Eksponecijalne splajn diferencne šeme, koje su uniformno konvergentne, razvijane su u [62, 66, 69, 71, 72]. Ipak, ovi metodi imaju svoja ograničenja, pogotovo u više dimenzija, što sprečava njihovu širu upotrebu.
- Drugi pristup koji omogućuje kreiranje  $\varepsilon$ -uniformno konvergentnih metoda, podrazumeva kon-

strukciju specijalnih mreža, koje su prilagođene SPP-u, tj. zgusnute su u graničnom sloju. Odgovarajući numerički metod se tada dobija primenom standardnog diferencnog operatora na tako konstruisanoj mreži. Ovakav tip mreže je prvi put konstruisao Bahvalov u [3]. Nakon toga veliki broj fitovanih (adaptivnih) mreža je konstruisan i analiziran, videti [17, 45, 61, 79].

Veliki broj autora koristi različite tipove diskretizacija na adaptivnim mrežama, ali je mali broj matematičara izučavao kolokacione metode. Samo u malom broju radova ova tehnika je dalje razvijana. Kolokacije sa kvadratnim  $C^1$ -splajnom za problem (1.1) na adaptivnim mrežama izučavali su Surla i Uzelac u [69]. Pri tome, splajn po promenljivoj  $x$  predstavljaju na svakom intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  kao linearnu kombinaciju funkcija iz skupa  $\{1, (x - x_{i-1}), (x - x_{i-1})^2\}$ . Ovaj postupak su analizirali na Šiškinovoj mreži koristeći stabilnost i grešku konzistencije. Greška ovog postupka je uniformno ograničena sa  $CN^{-2} \ln^2 N$  u diskretnoj maksimum normi.

Kvadratni  $C^1$ -splajn kolokacioni metod za semilinearni problem reakcije-difuzije je analiziran u [70]. Autori su pokazali da je ovaj postupak konvergentan takođe sa redom konvergencije skoro dva u maksimum normi.

Kubna splajn diferencna šema (CS) se prvi put pominje u radu [64] i dobijena je pomoću kolokacionog postupka sa kubnim  $C^2$ -splajnom. Ova šema na proizvoljnoj mreži  $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  sa koracima mreže  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ima sledeći oblik

$$\begin{aligned} \left( \frac{-3\varepsilon^2}{h_i \bar{h}_i} + \frac{h_i}{2\bar{h}_i} r_{i-1} \right) U_{i-1} + \left( \frac{6\varepsilon^2}{h_i h_{i+1}} + 2r_i \right) U_i + \left( \frac{-3\varepsilon^2}{h_{i+1} \bar{h}_i} + \frac{h_{i+1}}{2\bar{h}_i} r_{i+1} \right) U_{i+1} \\ = \frac{h_i}{2\bar{h}_i} f_{i-1} + 2f_i + \frac{h_{i+1}}{2\bar{h}_i} f_{i+1}, \end{aligned} \quad (\text{CS})$$

uz granične uslove  $U_0 = g_0$  i  $U_N = g_1$ , gde je  $\bar{h} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ ,  $r_i = r(x_i)$  i  $f_i = f(x_i)$ . Sa  $U_i$  je označena aproksimacija rešenja  $u$  u tačkama  $x_i$ , za  $i = 0, 1, \dots, N$ . Uniformna konvergencija sa redom konvergencije skoro dva u čvornim tačkama Šiškinove mreže je dobijena u [64]. Ričardsonova ekstrapolacija za CS metod je predložena u [53], kako bi se dobila bolja aproksimacija.

Kolokacije sa kubnim  $C^2$ -splajnom za semilinearni problem reakcije-difuzije, na mreži Bahvalova, su posmatrali Herceg, Surla i Rapajić u [24]. Dokazano je da je ovaj metod uniformno konvergentan u čvorovima mreže sa redom konvergencije dva. U radu [68], Surla, Teofanov i Uzelac koriste kolokacioni postupak sa kvadratnim  $C^1$ -splajnom, ali za kolokacione tačke uzimaju nestandardne vrednosti koje omogućuju da odgovarajuća šema zadovoljava diskretni princip maksimuma. I ovde je dokazana konvergencija sa skoro drugim redom tačnosti u čvorovima Šiškinove mreže. Kolokacije sa kubnim  $C^1$ -splajnovima predložene su u [73], ali bez teorijskih rezultata.

Kombinacija metoda fitovanih operatora i kolokacionog postupka sa kubnim  $C^2$ -splajnovima razmatrana je u [65]. Pokazano je da na Šiškinovoj mreži ovaj metod konvergira uniformno sa redom konvergencije skoro dva u čvorovima mreže diskretizacije.

U Glavi 5 ove disertacije smo najpre analizirali kolokacije sa kvadratnim  $C^1$ -splajnom kako bi numerički rešili problem (1.1), [44]. De Bur i Švarc su u [13] razvili opštu teoriju za splajn kolokacione postupke primenjene na klasične, ali ne i na singularno perturbovane, konturne probleme. Direktna primena ovog metoda na problem (1.1) rezultira sa ograničenjem koje sadrži "konstantu" koja teži beskonačnosti, kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Kvadratni  $C^1$ -splajn, koji predstavlja aproksimaciju rešenja problema (1.1), predstavljamo kao linearnu kombinaciju B-splajnova, a sam problem diskretizujemo na

modifikovanoj Šiškinovoj mreži. Naša analiza greške postupka se, shodno tome, u potpunosti razlikuje u odnosu na analizu iz rada [69]. Pokazali smo da je naš postupak uniformno konvergentan u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$  sa redom konvergencije skoro dva u supremum normi, za razliku od rada [69] koji daje ocenu greške samo u tačkama mreže. Štaviše, dobili smo i aposteriornu ocenu greške ovog kolokacionog metoda na proizvoljnoj mreži. Ovu aposteriornu ocenu smo iskoristili za kreiranje adaptivnog algoritma, koji generiše adaptivnu mrežu za proizvoljan broj čvorova.

U ovoj glavi smo, takođe, razmatrali isti metod na rekurzivno generisanoj mreži. Kolokacioni postupak na ovoj mreži je konvergentan sa redom konvergencije dva u supremum normi, uniformno do na logaritamski faktor, u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$ , [54]. Dobijeni numerički rezultati su značajno bolji nego oni koje dobijamo na modifikovanoj Šiškinovoj mreži.

Jedan od glavnih ciljeva istraživanja je takođe prezentovan u Glavi 5. U drugom delu te glave razvili smo opšti kolokacioni postupak sa splajnovima proizvoljnog stepena na proizvoljnoj mreži [43]. Problem (1.1) smo diskretizovali pomoću  $C^1$ -splajna stepena  $k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , koji zadovoljava granične uslove i diferencijalnu jednačinu (1.1) u nulama Ležandrovih polinoma. Kao glavni rezultat dobili smo aposteriornu ocenu greške postupka na proizvoljno izabranoj mreži. Generalno, aposteriorne ocene greške nam omogućuju da bolje procenimo kvalitet dobijene aproksimacije, nakon što je ta aproksimacija izračunata. Nasuprot apriornim ocenama, ove ocene ne zahtevaju poznavanje ograničenja tačnog rešenja i njegovih izvoda. Na kraju Glave 5, prikazali smo i kako se aposteriorna ocena može iskoristiti za generisanje mreža pomoću takozvanog adaptivnog algoritma, koji automatski prilagođava mrežu strukturi tačnog rešenja.

Sledeća tehnika diskretizacije, koja se često susreće u literaturi, je metoda konačnih razlika, koja diferencijalne jednačine zamenjuje diferencnim jednačinama u kojima se sa diferencnim količnicima aproksimiraju izvodi u SPP-u. Ova tehnika za rešavanje problema (1.1) je korišćena u mnogobrojnim naučnim radovima.

Jedna od često izučavanih diskretizacija, koja koristi ovaj pristup, daje nam takozvanu standardnu diferencnu šemu (SD) koja ima sledeću formu

$$-\varepsilon^2 \left( \frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \right) + \tilde{h}_i r_i U_i = \tilde{h}_i f_i, \quad \text{za } i = 1, \dots, N - 1, \quad (\text{SD})$$

uz granične uslove  $U_0 = g_0$  i  $U_N = g_1$ . Pokazano je da ovaj metod uniformno konvergira sa skoro drugim redom konvergencije na Šiškinovoj mreži, videti [56]. Vulcanović i Teofanov su razmatrali istu šemu u [82], ali na jednom tipu modifikovane Šiškinove mreže. Modifikacija mreže podrazumeva nešto drugačiji izbor tranzicione tačke, koja predstavlja prelaz između "finog" i "grubog" dela ove mreže. Ova promena ne utiče na red konvergencije približnog rešenja, a daje bolje numeričke rezultate.

Problem (1.1) je diskretizovan sa SD na proizvoljnoj mreži u radu Kopteve [31]. Ona je dobila aposteriornu ocenu koja je uniformno konvergentna na adaptivnim mrežama, a u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$ .

Standardna diferencna šema je korišćena i na mreži Bahvalova, a za rešavanje semilinearnog problema reakcije-difuzije sa povratnom tačkom, videti [83]. U literaturi nalazimo, naravno, i postupke konačnih razlika sa višim redom konvergencije. Herceg [20] je razvio metod zasnovan na Hermiteovim aproksimacijama drugog izvoda (videti takođe i [23]) na Vulcanovićevoj mreži. Dokazano je da ovaj postupak konvergira uniformno sa redom konvergencije četiri. Problem (1.1) je diskretizo-



van i pomoću kompaktne diferencne šeme, reda četiri, u radu [41]. Ova diskretizacija nije inverzno monotona, ali je pokazana konvergencija ovog postupka na Šiškinovoj mreži sa redom konvergencije skoro četiri.

Vulanović [76] je konstruisao hibridnu šemu za klasu semilinearnih singularno perturbovanih problema reakcije-difuzije. Petotačkasta šema reda šest je korišćena u većini tačaka unutar graničnih slojeva, dok je trotačkasta šema nižeg reda korišćena na ostatku mreže. Pod određenim uslovima ova kombinovana šema konvergira na Šiškinovoj mreži sa redom konvergencije skoro šest u maksimum normi.

Uporedna analiza različitih metoda na raznim mrežama data je u [22, 26, 67].

Sledeća široko rasprostranjena tehnika diskretizacije je metod konačnih elemenata (FEM – "Finite Element Method"). Različiti tipovi FEM-a su primenjivani pri rešavanju problema (1.1), videti [39, 56]. Lins [42] razmatra jedan tip FEM-a za rešavanje problema (1.1) na proizvoljnoj mreži. Diskretizacija sa linearnim konačnim elementima je analizirana i pokazano je da je ekvivalentna standardnoj diferencnoj šemi SD i naravno skoro drugi red konvergencije je postignut na Šiškinovoj mreži. Ista diskretizacija je posmatrana i u radu Rosa i Zarin [58], ali za problem reakcije-difuzije sa prekidom.

Takođe, Lins [40] razmatra i nemonotonu FEM diskretizaciju

$$\begin{aligned} \frac{-\varepsilon^2}{\bar{h}_i} \left( \frac{U_{i+1} - U_i}{h_{i+1}} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h_i} \right) + \frac{h_i}{\bar{h}_i} \frac{r_{i-1}}{6} U_{i-1} + \frac{2r_i}{3} U_i + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i} \frac{r_{i+1}}{6} U_{i+1} \\ = \frac{h_i}{\bar{h}_i} \frac{f_{i-1}}{6} + \frac{2}{3} f_i + \frac{h_{i+1}}{\bar{h}_i} \frac{f_{i+1}}{6}, \end{aligned} \quad (\text{FEM})$$

za  $i = 1, \dots, N-1$ , uz granične uslove  $U_0 = g_0$  i  $U_N = g_1$ . Pokazano je da je ovaj postupak stabilan u supremum normi, sa redom tačnosti dva. I apriorna i aposteriorna ocena greške ovog postupka u supremum normi se mogu naći u [40].

Aposteriorna ocena za jedan tip FEM-a u energetske norme data je u radu Kunerta [36]. Nažalost, energetska norma ne opisuje dobro svojstva slojeva. Zato Lins i razmatra FEM diskretizaciju proizvoljnog reda, u radu [38], tako da dobija aposteriornu ocenu greške postupka na proizvoljnoj mreži u supremum normi.

U Glavi 5, u nameri da ispitamo efikasnost našeg kolokacionog postupka sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom (QS), uporedili smo ga sa tri pomenuta postupka – CS, SD i FEM.

U Glavi 6 ove disertacije razmatramo dvodimenzionalni problem reakcije-difuzije, koji glasi: Naći  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  takvo da je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u := -\varepsilon^2 \Delta u(x, y) + r(x, y)u(x, y) = f(x, y) \text{ na } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.2)$$

gde je  $\varepsilon \in (0, 1]$  i  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  je Laplasov operator. Ovaj problem ima rešenje u kojem se pojavljuju oštri slojevi duž ruba domena.

Značajan broj metoda je razvijan u cilju numeričkog rešavanja problema (1.2). U većini radova se koristi metod konačnih elemenata za diskretizaciju problema (1.2). Uglavnom su ocene grešaka date u energetske norme čiji je izbor prirodna posledica analize FEM-a. Ali u slučaju da rešavamo SPP, ova norma je suviše slaba da adekvatno oceni grešku dobijene aproksimacije. Iz ovih razloga, u radu [37] je uvedena balansirana norma.

---

U [46] autori razmatraju Galerkinov FEM sa bilinearnim test funkcijama. Tačnost ovog postupka u energetske norme je  $O(N^{-2} + \varepsilon^{1/2}N^{-1} \ln N)$ .

Ros i Šof [55] su analizirali Galerkinov FEM na Šiškinovoj mreži i dokazali da je ovaj postupak tačnosti  $O(N^{-1} \ln N^{3/2})$  u balansiranoj normi. Takođe, oni uvode i novi metod, koji poboljšava osobinu stabilnosti, a u poređenju sa Galerkinovim FEM-om.

U svega nekoliko radova možemo naći ocenu grešaka postupaka u maksimum normi. Centralna diferencna šema je konstruisana za problem (1.2) u [7] i posmatrana je na Šiškinovoj mreži. Dobijena aproksimacija konvergira uniformno sa redom konvergencije skoro dva u maksimum normi. U radu [18] je definisana kompaktna diferencna šema pozitivnog tipa. Ova šema ima red tačnosti tri u maksimum normi, kada je perturbovani parametar  $\varepsilon$  mali.

Kopteva [32] razmatra semilinearni problem reakcije-difuzije sa višestrukim rešenjem na dvodimenzionalnom domenu i konstruiše šemu koja je uniformno konvergentna na mrežama tipa Bahvalova i Šiškinovog tipa sa redom konvergencije dva, odnosno skoro dva u maksimum normi, za  $\varepsilon < CN^{-1}$ .

Konačno, Kopteva [30] dobija i aposteriornu ocenu u supremum normi, koristeći standardnu petočakastu diferencnu šemu za problem (1.2).

U Glavi 6 razvijamo kolokacioni postupak za rešavanje problema (1.2). Približno rešenje tražimo u obliku  $C^1$ -bikvadratnog splajna koji zadovoljava diferencijalnu jednačinu (1.2) u sredinama pravougaonika, koji su generisani proizvoljnom mrežom. Ovaj postupak kao aproksimaciju daje funkciju koja je klase  $C^1$ , dok ostali pomenuti metodi ocenu greške daju ili u diskretnoj maksimum normi ili je aproksimacija tačnog rešenja data kao  $C^0$ -funkcija. U istoj glavi, izveli smo i aposteriornu ocenu greške u supremum normi. Štaviše, pored naše ocene, jedino rad Kopteve [30] daje aposteriornu ocenu u supremum normi. Numerički rezultati pokazuju da kolokacije sa bikvadratnim  $C^1$ -splajnom daju bolje numeričke rezultate nego što se dobijaju primenom šeme iz [30].



## PREGLED OSNOVNIH DEFINICIJA I TEOREMA

Pregled osnovnih definicija i tvrđenja, koje ćemo koristiti u nastavku, dat je u ovom delu disertacije.

Za vektor  $x \in \mathbb{R}^{N+1}$ ,  $x = [x_0, x_1, \dots, x_N]$ , diskretnu maksimum normu definišemo sa

$$\|x\|_\infty := \max_{0 \leq i \leq N} |x_i|,$$

dok je za matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N+1, N+1}$ ,  $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$ , indukovana matrična norma data sa

$$\|A\|_\infty := \max_{0 \leq i \leq N} \sum_{j=0}^N |a_{ij}|.$$

Neka je  $D$  ograničena oblast. Za datu funkciju  $f \in C^0(D)$ , supremum norma je definisana sa

$$\|f\|_{\infty, D} := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Kada je jasno i bez navođenja na kom skupu  $D$  realizujemo ovu normu, onda umesto  $\|f\|_{\infty, D}$  pišemo samo  $\|f\|_\infty$ .

### 2.1 Interpolacija

U ovom poglavlju ćemo navesti definiciju i osnovne osobine polinomne interpolacije, a koja ima značajnu ulogu u disertaciji.

**Definicija 2.1.** [21] *Neka je  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  skup koji sadrži  $n + 1$  različitu tačku i neka je data funkcija  $f \in C^0[a, b]$ . Kažemo da je  $I_n f \in \Pi_n$ , za koje važi*

$$I_n f(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

*interpolacioni polinom funkcije  $f$ , za čvorne tačke  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .*

Interpolacioni polinom iz prethodne definicije je jedinstveno određen, [21, 63]. Da bismo ocenili preciznost ove aproksimacije funkcije  $f$ , neophodno je oceniti i grešku interpolacije  $e_n$  koja predstavlja razliku funkcije  $f$  i njenog interpolacionog polinoma  $e_n(f, x) = f(x) - I_n f(x)$ . Sledeću ocenu ove greške možemo naći u [21].

**Teorema 2.2.** Neka je  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  skup različitih tačaka i neka je  $f \in C^{n+1}[a, b]$ . Tada, za svako  $x \in [a, b]$  postoji  $\alpha \in \text{conv}\{x, x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  takvo da je

$$e_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Kao posledicu prethodne teoreme, dobijamo sledeće ograničenje

$$|e_n(f, x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n |x - x_j|, \quad (2.1)$$

gde je  $M_{n+1} = \max_{x \in (a,b)} |f^{(n+1)}(x)|$ . U disertaciji ćemo uglavnom koristiti Lagranžov oblik interpolacionog polinoma.

**Definicija 2.3.** [21] *Lagranžov oblik interpolacionog polinoma*  $I_n f$ , koji interpolira funkciju  $f$  u tačkama  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dat je sa

$$I_n f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

**Definicija 2.4.** [63] Neka su date tačke  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i neka je data funkcija  $f$ . Tada,

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \sum_{j=0}^n f(x_j) \left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i) \right)^{-1}, \quad n \geq 2,$$

nazivamo *podeljenom razlikom  $n$ -tog reda funkcije  $f$* .

Ako definišemo i razlike nultog reda kao vrednosti funkcije  $f$  u datim tačkama, tj.  $[x_i]f = f(x_i)$ , lako dobijamo sledeću rekurentnu vezu

$$[x_0, x_1, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n]f - [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0} \quad (2.2)$$

koja nam omogućuje lako izračunavanje podeljenih razlika proizvoljnog reda. Takođe, podeljene razlike zadovoljavaju i sledeće pravilo.

**Teorema 2.5.** (Lajbnicovo pravilo, [63]) Za date funkcije  $f$  i  $g$ , važi

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \dots, x_n](f \cdot g) = & [x_0]f \cdot [x_0, x_1, \dots, x_n]g + [x_0, x_1]f \cdot [x_1, x_2, \dots, x_n]g + \dots \\ & \dots + [x_0, x_1, \dots, x_n]f \cdot [x_n]g. \end{aligned}$$

## 2.2 Ležandrovi polinomi

Za kolokacione tačke u Glavi 5 uzimaćemo nule Ležandrovih polinoma. Da bismo ih definisali, prvo ćemo posmatrati sledeću (Ležandrovu) jednačinu

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.3)$$

uz uslov  $y(1) = 1$ . Rešenja, koja su neprekidno diferencijabilna za svako  $x \in [-1, 1]$ , nazivamo Ležandrovim polinomima. Označimo ove polinome sa  $P_n$ , gde je  $n$  stepen polinoma  $P_n$ . Napokon,  $P_n$  (videti [1]) možemo izraziti na sledeći način

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (2.4)$$

Prva dva Ležandrova polinoma su  $P_0(x) = 1$  i  $P_1(x) = x$ . Rekurentna veza koju možemo naći u [1] i koja je data sa

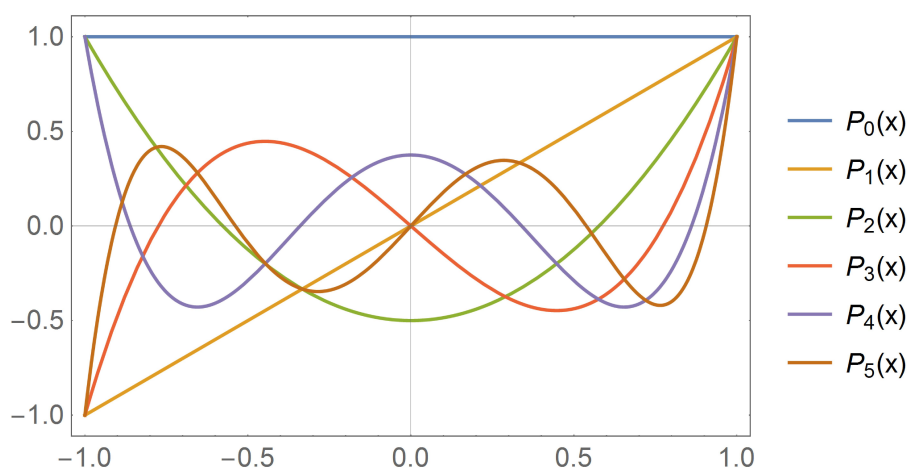
$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

omogućuje nam da dobijemo eksplicitnu reprezentaciju Ležandrovih polinoma proizvoljnog stepena (videti Tabelu 2.1).

Tabela 2.1: Ležandrovi polinomi

$n$	$P_n(x)$
0	1
1	$x$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
...	...

Prvih šest Ležandrovih polinoma je prikazano na Slici 2.1.



Slika 2.1: Ležandrovi polinomi na intervalu  $[-1, 1]$

Naredne tri osobine Ležandrovih polinoma su dobro poznate [29].

- Između svake dve uzastopne nule polinoma  $P_{n+1}$  nalazi se tačno jedna nula polinoma  $P_n$ .

- Između svake dve uzastopne nule polinoma  $P_n$ , nalazi se nula polinoma  $P_{n+1}$ . Između najmanje nule polinoma  $P_n$  i tačke  $-1$  nalazi se tačno jedna nula polinoma  $P_{n+1}$ . Između najveće nule polinoma  $P_n$  i tačke  $+1$  nalazi se nula polinoma  $P_{n+1}$ .
- Svih  $n$  nula polinoma  $P_n$  se nalazi u intervalu  $(-1, 1)$ .

Sledeća osobina Ležandrovih polinoma je izuzetno značajna za analizu greške postupka u Glavi 5.

**Teorema 2.6.** [1] *Neka su  $P_m$  i  $P_n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}_0$ , dva Ležandrova polinoma. Tada je*

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn},$$

gde je sa  $\delta_{mn}$  označena Kroneker delta funkcija, definisana sa

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{ako } m = n, \\ 0 & \text{ako } m \neq n. \end{cases}$$

Direktno iz prethodne teoreme sledi da su za svako  $m, n \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \neq n$ , Ležandrovi polinomi  $P_m$  i  $P_n$  ortogonalni, tj. važi

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \quad (2.5)$$

## 2.3 Matrice

U ovom poglavlju ćemo dati pregled osnovnih osobina matrica, koje ćemo koristiti u apriornoj analizi u Glavi 5.

**Definicija 2.7.** [25] *Matricu  $A = [a_{ij}] \in R^{N,N}$  nazivamo  $L$  - matricom, ako i samo ako je*

$$a_{ii} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad i \quad a_{ij} \leq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

**Definicija 2.8.** [25] *Regularnu matricu  $A = [a_{ij}] \in R^{N,N}$  nazivamo inverzno monotonom, ako i samo ako važi*

$$A^{-1} \geq 0.$$

**Definicija 2.9.** [25] *Inverzno monotonu  $L$  - matricu nazivamo  $M$  - matricom.*

**Teorema 2.10.** ( $M$ -kriterijum) [39], [51] *Neka je  $A \in R^{N,N}$  data  $L$  - matrica. Tada je matrica  $A$   $M$ -matrica ako i samo ako postoji vektor  $v \in R^N$ , gde je  $v > 0$  i  $Av > 0$ . Štaviše, važi i sledeće ograničenje*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\|v\|_{\infty}}{\min_{i=1, \dots, N} |(Av)_i|}.$$

## 2.4 Granični slojevi i adaptivne mreže

Singularno perturbovani problem (SPP) možemo opisati na način kako je to učinjeno u [56]. Diferencijalna jednačina koja zavisi od malog pozitivnog parametra  $\varepsilon$  i čije rešenje (ili njegovi izvodi)

teže beskonačnosti, kada parametar  $\varepsilon$  teži nuli, nazivaju se singularno perturbovanim, gde je  $\varepsilon$  perturbovani parametar. U [39] možemo naći i formalnu definiciju SPP-a.

**Definicija 2.11.** *Neka je  $D$  vektorski prostor funkcija, u kojem je definisana norma  $\|\cdot\|_D$  i neka je  $B \subset \mathbb{R}^d$ . Kažemo da je neprekidna funkcija  $u : B \rightarrow D$ ,  $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$  regularna za  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* \in \partial B$  ako postoji funkcija  $u^* \in D$  takva da važi*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*} \|u_\varepsilon - u^*\|_D = 0,$$

dok u suprotnom kažemo da je  $u$  singularna, kada  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$ .

Neka je  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  problem čije je rešenje  $u_\varepsilon \in D$ , za svako  $\varepsilon \in B$ . Kažemo da je problem  $(\mathcal{P}_\varepsilon)$  singularno perturbovan, kada  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^* \in \partial B$  u normi  $\|\cdot\|_D$  ako je  $u$  singularna funkcija, kada  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^*$ .

**Napomena 1.** *Definicija singularno perturbovanog problema očigledno zavisi od norme koju koristimo.*

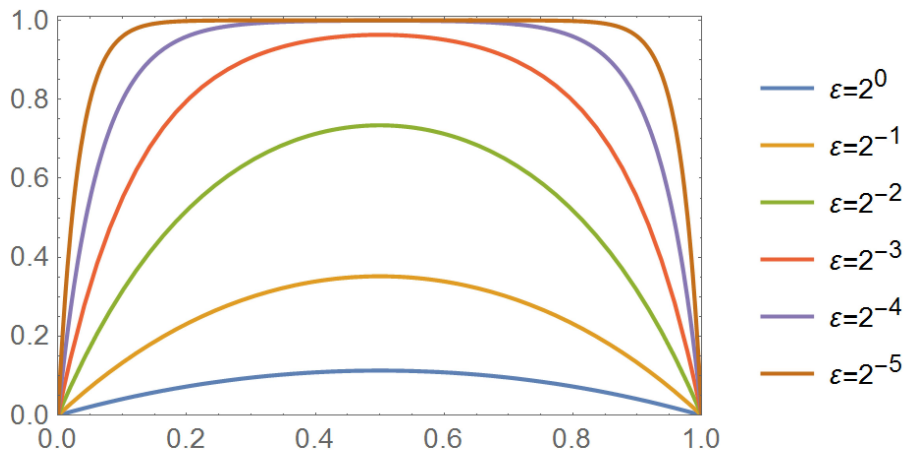
Da bismo preciznije objasnili svojstva rešenja SPP-a, razmotrićemo sledeći problem reakcije-difuzije:

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u''(x) + u(x) &= 1, & \text{za } x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Jedinstveno rešenje ovog problema je

$$u(x) = 1 - \frac{e^{-x/\varepsilon} + e^{-(1-x)/\varepsilon}}{1 + e^{-1/\varepsilon}}.$$

Ovo rešenje očigledno zavisi od eksponencijalnih funkcija  $e^{-x/\varepsilon}$  i  $e^{-(1-x)/\varepsilon}$ , pa se funkcija  $u$  (kao i njeni izvodi) naglo menja u blizini tačaka  $x = 0$  i  $x = 1$  za male vrednosti  $\varepsilon$ , videti Sliku 2.2. Oblasti gde se funkcija naglo menja nazivamo graničnim slojevima. Sam pojam graničnog sloja preuzet je iz fizike [49].



Slika 2.2: Rešenje  $u$  problema (2.6) za različite vrednosti parametra  $\varepsilon$ .

**Definicija 2.12.** [79] *Konačan skup  $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , sa osobinom*

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1,$$



nazivamo mrežom  $[0, 1]$  sa čvorovima  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Korake mreže definišemo sa  $h_i := x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Poznato je da standardni numerički metodi daju loše numeričke rezultate, kada se primenjuju na ekvidistantnim mrežama, a prilikom numeričkog rešavanja singularno perturbovanih problema. Da bismo dobili dobru aproksimaciju, jedna od mogućnosti je da umesto ekvidistantnih koristimo neekvidistantne mreže koje su "guste" u slojevima. Takve mreže nazivamo adaptivnim mrežama. Važan pojam za konstrukciju adaptivnih mreža dat je u sledećoj definiciji.

**Definicija 2.13.** [39] *Strogo rastuću neprekidnu funkciju  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  koja preslikava uniformnu mrežu  $t_i = i/N$ ,  $i = 0, \dots, N$ , na adaptivnu mrežu sa čvorovima  $x_i = \varphi(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , nazivamo funkcijom za generisanje mreže.*

Pri numeričkom rešavanju SPP-a, glavni cilj je konstrukcija uniformno konvergentnih (robustnih) numeričkih postupaka u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$ .

**Definicija 2.14.** [39] *Neka je  $u$  rešenje singularno perturbovanog problema i neka je  $u_\Delta$  aproksimacija za  $u$  koja je dobijena numeričkim postupkom na mreži  $\Delta$ . Za numerički postupak se kaže da je  $\varepsilon$ -uniformno konvergentan (robustan) u normi  $\|\cdot\|$  ako je*

$$\|u - u_\Delta\| \leq \nu(N),$$

za svako  $N > N_0$  gde su  $\nu(N)$  i  $N_0$  nezavisni od  $\varepsilon$  i važi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \nu(N) = 0.$$

Specijalno, ako je

$$\nu(N) = CN^{-r},$$

gde je  $r > 0$ , kažemo da aproksimacija  $u_\Delta$  konvergira ka  $u$  sa redom konvergencije  $r$ .

## POLINOMNI SPLAJNOVI

U matematici se splajn definiše kao deo po deo polinomna funkcija, koja poseduje određen "stepen glatkosti" u krajnjim tačkama intervala na kojima su ovi polinomi definisani. Reč *splajn* prvi put u ovom kontekstu je upotrebio Šenberg 1946. godine u svom radu [59]. Ali nema sumnje da se pojam splajna pojavljuje i ranije, videti Favardov rad iz 1939. godine [16]. Sa druge strane, Šenberg je pominjao da je za pojam splajna znao čak i Laplas. Ipak, on prvi uvodi pojam "bazičnih splajnova stepena  $k$ ".

Sama ideja o konstrukciji i upotrebi splajna potiče iz avio-industrije i brodogradnje. Tokom Drugog svetskog rata, britanska avio-industrija je koristila tehniku splajnova, pri konstrukciji borbenih aviona.

Splajnovi od 1960. godine imaju značajnu ulogu i u automobilskoj industriji – Citroen (Kasteljan), Reno (Bezijer) i Dženeral motors (Garabedian, Birkof i de Bur [4]), prilikom konstrukcije karoserije automobila. De Burov rad u Dženeral motorsu je rezultirao i publikovanjem značajnog broja naučnih radova, koji uključuju i rezultate vezane za B-splajnovne.

Navedimo i formalnu definiciju splajna.

**Definicija 3.1.** Funkciju  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo splajnom stepena  $k$  na mreži  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ , ako i samo ako:

1.  $s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \Pi_k, \quad i = 1, 2, \dots, N,$
2.  $s \in C^p[a, b],$

gde je  $p \in \mathbb{N}$  i  $p < k$ .

Specijalno, splajnovne stepena dva nazivamo kvadratnim (paraboličnim), dok splajnovne stepena tri nazivamo kubnim splajnovima.

### 3.1 B-splajnovi

Definiciju i neke od osobina B-splajnova možemo naći u [9, 12, 60, 63].

**Definicija 3.2.** Neka je  $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}$  niz neopadajućih brojeva. Za date prirodne brojeve  $i$  i  $n$ ,

$$B_{n,i}(x) = (x_i - x_{i-n-1})[x_{i-n-1}, \dots, x_i]_y (y - x)_+^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

gde su  $[x_{i-n-1}, \dots, x_i]_y (y - x)_+^n$  podeljenje razlike reda  $n + 1$  za funkciju  $(y - x)_+$  po promenljivoj  $y$  i  $(y - x)_+ = \max\{0, y - x\}$ , nazivamo (normalizovanim) B-splajnom reda  $n + 1$  (odnosno stepena  $n$ ) sa čvorovima  $\mathbf{x}$ .

Za  $n = 0$ , B-splajn sa čvorovima  $x_{i-1} < x_i$  je deo po deo konstantna funkcija, data sa

$$B_{0,i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

što direktno sledi iz (3.1). B-splajnovi  $B_{n,i}$  su linearno nezavisni i generišu vektorski prostor, pa predstavljaju bazu tog prostora (videti [9] i [12]). Zato se proizvoljan splajn stepena  $n$  sa čvorovima  $\mathbf{x}$  može predstaviti kao linearna kombinacija B-splajnova stepena  $n$ . Neka je  $\mathbf{x} := (x_i)_{-\infty}^{\infty}$  niz neopadajućih realnih brojeva. Definišimo  $x_{-\infty}$  i  $x_{\infty}$  sa:

$$x_{-\infty} := \inf x_i, \quad x_{\infty} := \sup x_i.$$

**Teorema 3.3.** [8] *Ako je niz  $\mathbf{x} := (x_i)_{-\infty}^{\infty}$  neopadajuć i važi  $x_i < x_{i+k}$  i  $d_i := \text{card}\{j : x_j = x_i\}$ , za sve  $i$ , onda odgovarajući niz B-splajnova  $(B_{n,i})_{-\infty}^{\infty}$  predstavlja bazu vektorskog prostora  $\mathcal{S}_k(\mathbf{x})$  svih funkcija  $f$  definisanih na  $\mathbb{R}$  koje su identički jednake nuli izvan intervala  $(x_{-\infty}, x_{\infty})$ , dok na  $(x_{-\infty}, x_{\infty})$  važi*

$$f|_{(x_{i-1}, x_i)} \in \Pi_k|_{(x_{i-1}, x_i)},$$

*i funkcija  $f$  je  $r$ -puta neprekidno diferencijabilna, gde je  $r < k - d_i$ , u svakoj tački  $x_i$ , za sve  $i$ .*

Ako je  $x_{i-1} < x_i = x_{i+1} = \dots = x_{i+j-1} < x_{i+j}$ ,  $1 \leq j \leq N - 1$ , tada kažemo da je čvor  $x_i$  višestrukosti  $j$ . Ako pretpostavimo da je svaki čvor  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$  neke mreže  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N$  višestrukosti  $j$ , onda splajn stepena  $n$  je  $n - j - 1$  puta diferencijabilna funkcija u svim čvornim tačkama.

Osnovne osobine B-splajnova su date u narednoj lemi (videti [12] i [63]).

**Lema 3.4.** *Neka su  $\{B_{n,i}\}_{i=1}^d$  B-splajnovi stepena  $n$ . Tada važi:*

$$B_{n,i}(x) > 0, \quad \text{za } x_{i-n} < x < x_i, \quad (3.2a)$$

$$B_{n,i}(x) = 0, \quad \text{za } x \leq x_{i-n} \text{ ili } x \geq x_i, \quad (3.2b)$$

$$\sum_{i=1}^d B_{n,i}(x) = 1. \quad (3.2c)$$

Koristeći Lajbnicovo pravilo (videti Teoremu 2.5) i osobinu  $(y-x)_+^n = (y-x)(y-x)_+^{n-1}$  dobijamo

$$[x_{k-n-1}, \dots, x_k]_y (y-x)_+^n = \sum_{r=k-n-1}^k [x_{k-n-1}, \dots, x_r]_y (y-x) \cdot [x_r, \dots, x_k]_y (y-x)_+^{n-1}.$$

Lako se dobija

$$[x_{k-n-1}]_y (y-x) = (x_{k-n-1} - x) \quad \text{i} \quad [x_{k-n-1}, x_{k-n}]_y (y-x) = 1.$$

Posledica poslednje jednakosti i (2.2) je

$$[x_{k-n-1}, x_{k-n}, \dots, x_{k-n+j}]_y(y-x) = 0, \quad \text{za } j \geq 1,$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} [x_{k-n-1}, \dots, x_k]_y(y-x)_+^n &= (x_{k-n-1} - x)[x_{k-n-1}, \dots, x_k]_y(y-x)_+^{n-1} \\ &\quad + [x_{k-n}, \dots, x_k]_y(y-x)_+^{n-1} \\ &= \frac{x_{k-n-1} - x}{x_k - x_{k-n-1}} [x_{k-n-1}, \dots, x_{k-1}]_y(y-x)_+^{n-1} \\ &\quad + \left( \frac{x_{k-n-1} - x}{x_k - x_{k-n-1}} + 1 \right) [x_{k-n}, \dots, x_k]_y(y-x)_+^{n-1}, \end{aligned}$$

kada (2.2) primenimo na  $[x_{k-n-1}, \dots, x_k]_y(y-x)_+^{n-1}$ . Konačno, dobijamo i rekurentnu vezu

$$B_{n,k}(x) = \frac{x - x_{k-n-1}}{x_{k-1} - x_{k-n-1}} B_{n-1,k}(x) + \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-n}} B_{n-1,k+1}(x) \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad (3.3)$$

koja nam omogućuje kreiranje jednostavnog algoritma pomoću kojeg možemo izračunati B-splajnovu proizvoljnog stepena, [11].

Označimo, dalje, intervale mreže  $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$  sa  $J_i := [x_{i-1}, x_i]$ . U nastavku rada ćemo za  $m, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $m < \ell$ , koristiti sledeće vektorske prostore:

$$\mathcal{S}_\ell^m(\Delta) := \left\{ s \in C^m[0, 1] : s|_{J_i} \in \Pi_\ell, \quad \text{za } i = 1, \dots, N \right\}$$

i

$$\mathcal{S}_{\ell,0}^m(\Delta) := \left\{ s \in \mathcal{S}_\ell^m(\Delta) : s(0) = s(1) = 0 \right\}.$$

### 3.1.1 Kvadratni splajn

Najpre posmatrajmo B-splajnovu stepena dva, odnosno bazu vektorskog prostora  $\mathcal{S}_{2,0}^1(\Delta)$ , tj. prostora kvadratnih  $C^1$ -splajnova. Pomoću rekurentne formule (3.3) lako dolazimo do sledeće baze:

$$B_{2,0}(x) = \begin{cases} \frac{(x_1 - x)^2}{h_1^2} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B_{2,1}(x) = \begin{cases} \frac{h_1^2 - (x_1 - x)^2}{h_1^2} - \frac{(x - x_0)^2}{(h_1 + h_2)h_1} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ \frac{(x_2 - x)^2}{(h_1 + h_2)h_2} & \text{ako } x \in [x_1, x_2], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N - 1$ :

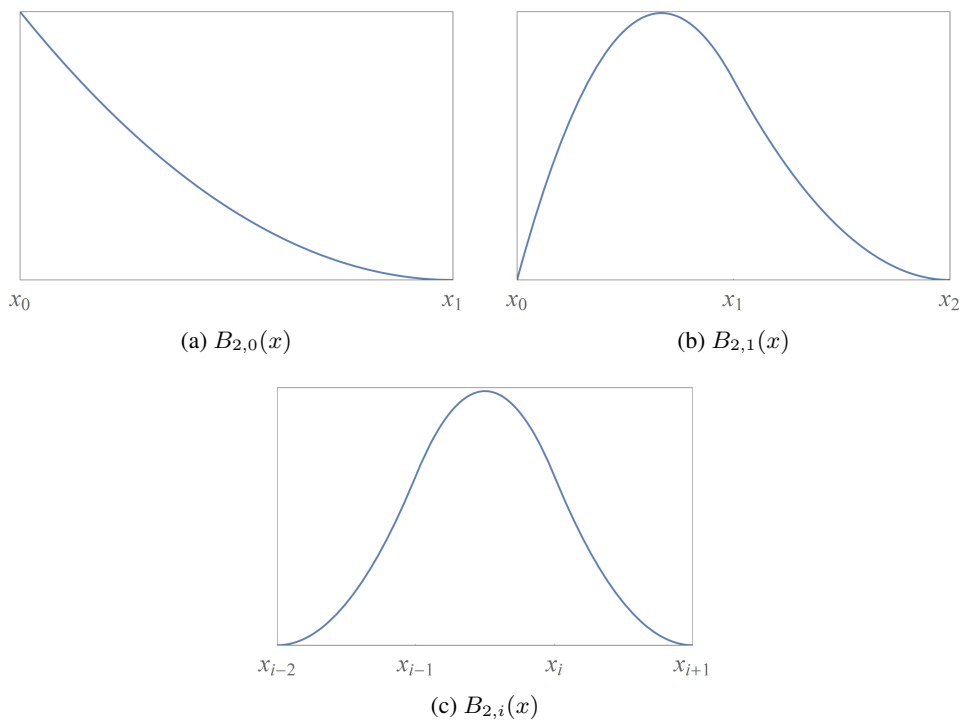
$$B_{2,i}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-2})^2}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}} & \text{ako } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{(x - x_{i-2})(x_i - x)}{(h_{i-1} + h_i)h_i} + \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_{i-1})}{(h_i + h_{i+1})h_i} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{(x_{i+1} - x)^2}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}} & \text{ako } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

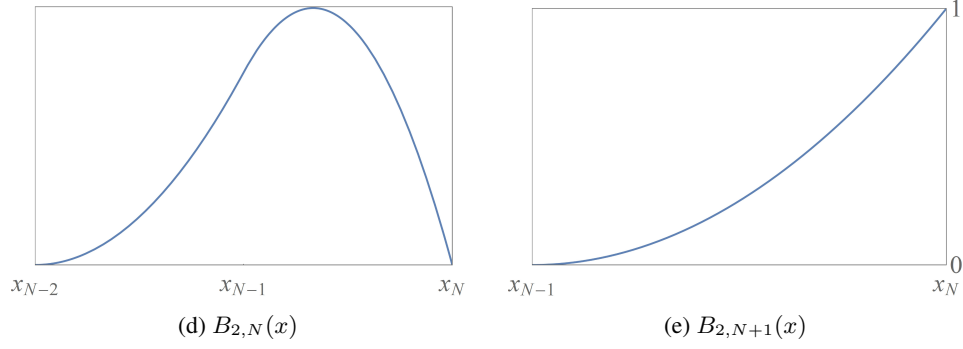
$$B_{2,N}(x) = \begin{cases} \frac{(x_{N-2} - x)^2}{(h_{N-1} + h_N)h_{N-1}} & \text{ako } x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ \frac{h_N^2 - (x_{N-1} - x)^2}{h_N^2} - \frac{(x - x_N)^2}{(h_N + h_{N-1})h_N} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

i

$$B_{2,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{(x_{N-1} - x)^2}{h_N^2} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Jasno je da bilo koji kvadratni splajn  $s \in \mathcal{S}_{2,0}^1(\Delta)$  možemo zapisati kao  $s(x) = \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i B_{2,i}(x)$ , za određene vrednosti  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Slika 3.1 prikazuje kvadratne B-splajnovne.




 Slika 3.1:  $C^1$ -kvadratni B-splajnovi.

### 3.1.2 Kubni splajn

Ponovo pomoću rekurentne formule (3.3), lako dolazimo i do B-splajn funkcija koji generišu prostor kubnih splajnova. Formalno, definišimo  $x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0 = 0$  i  $x_{N+1} = x_{N+2} = x_{N+3} = x_N = 1$ . Tada kubne B-splajnovne možemo prikazati u sledećoj kompaktnoj formi (videti A.2):

$$B_{3,i}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-3})^3}{(x_i - x_{i-3})(x_{i-1} - x_{i-3})(x_{i-2} - x_{i-3})} & \text{ako } x \in J_{i-2}, \\ \frac{(x - x_{i-3})^2(x_{i-1} - x)}{P_i} + \frac{(x - x_{i-3})T_i}{Q_i} + \frac{(x_{i+1} - x)(x - x_{i-2})^2}{R_i} & \text{ako } x \in J_{i-1}, \\ \frac{(x - x_{i-3})(x_i - x)^2}{S_i} + \frac{(x_{i+1} - x)T_i}{P_{i+1}} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_{i-1})}{Q_{i+1}} & \text{ako } x \in J_i, \\ \frac{(x_{i+1} - x)^3}{(x_{i+1} - x_{i-2})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} & \text{ako } x \in J_{i+1}, \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 0, 1, \dots, N + 2$ , gde su  $T_i = (x_i - x)(x - x_{i-2})$  i

$$\begin{aligned} P_i &= (x_i - x_{i-3})(x_{i-1} - x_{i-3})(x_{i-1} - x_{i-2}), & Q_i &= (x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})(x_{i-1} - x_{i-2}), \\ R_i &= (x_{i+1} - x_{i-2})(x_i - x_{i-2})(x_{i-1} - x_{i-2}), & S_i &= (x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Funkcije  $B_{3,i}$  generišu prostor  $\mathcal{S}_{3,0}^2(\Delta)$ . Međutim, naša analiza u Glavi 5 zahteva  $C^1$ -splajnovne. Zato ćemo multiplicirati čvorove mreže. Neka je

$$x_{i-2} = x_{i-1} \quad \text{i} \quad x_i = x_{i+1},$$

na svakom intervalu  $[x_{i-3}, x_{i+1}]$ ,  $i = 3, 4, \dots, N - 1$ . Tada, u skladu sa Teoremom 3.3, dobijamo bazu za  $\mathcal{S}_{3,0}^1(\Delta)$ . Funkcije  $\varphi_i(x)$  i  $\psi_i(x)$  čije definicije slede, generišu  $\mathcal{S}_{3,0}^1(\Delta)$ :

$$\varphi_{3,1}(x) = \begin{cases} \frac{3(x_1 - x)^2(x - x_0)}{h_1^3} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

$$\varphi_{3,i}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-2})^3}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^2} & \text{ako } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{(x - x_{i-2})(x_i - x)^2}{(h_{i-1} + h_i)h_i^2} + \frac{2(x_i - x)^2(x - x_{i-1})}{h_i^3} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\varphi_{3,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{N-1})^3}{h_N^3} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

i

$$\psi_{3,1}(x) = \begin{cases} \frac{(x_1 - x)^3}{h_1^3} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

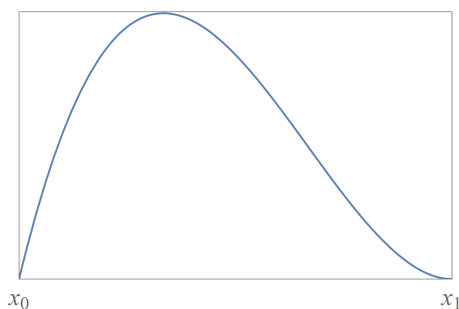
$$\psi_{3,i}(x) = \begin{cases} \frac{2(x - x_{i-2})^2(x_{i-1} - x)}{h_{i-1}^3} + \frac{(x_i - x)(x - x_{i-2})^2}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^2} & \text{ako } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{(x_i - x)^3}{(h_{i-1} + h_i)h_i^2} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\psi_{3,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{3(x - x_{N-1})^2(x_N - x)}{h_N^3} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

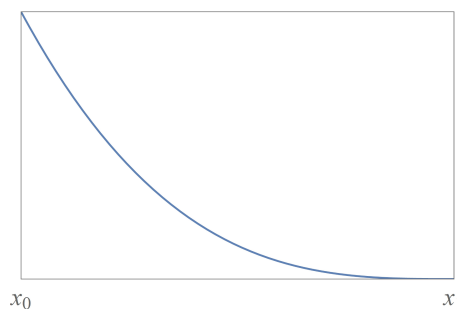
Proizvoljni kubni splajn  $s \in \mathcal{S}_{3,0}^1(\Delta)$  možemo izraziti kao

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N+1} (\alpha_i \varphi_{3,i}(x) + \beta_i \psi_{3,i}(x)),$$

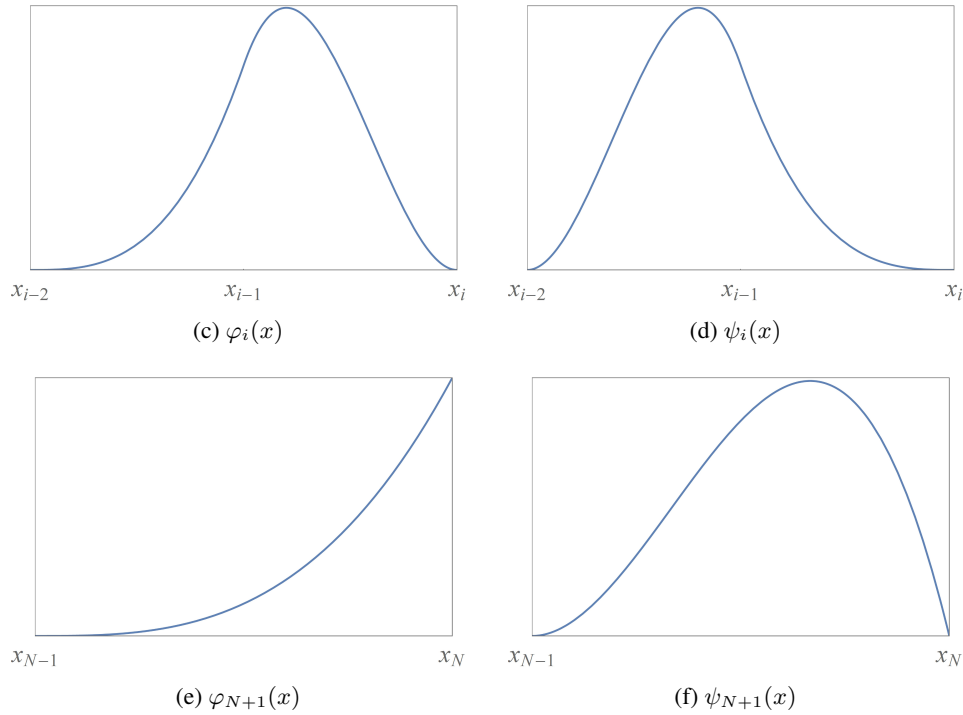
za neke  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ .



(a)  $\varphi_1(x)$



(b)  $\psi_1(x)$

Slika 3.2:  $C^1$ -kubni B-splajnovi.

Na Slici 3.2 je prikazana baza vektorskog prostora  $\mathcal{S}_{3,0}^1(\Delta)$ .

### 3.1.3 Splajn stepena četiri

Rekurentna formula (3.3) daje i B-splajn funkcije koje generišu  $\mathcal{S}_{4,0}^3(\Delta)$ . Ponovo, multiplicirajući čvorove mreže  $\Delta$  i to na sledeći način:

$$x_{i+1} = x_{i+2} = x_{i+3} \quad \mathbf{i} \quad x_{i+4} = x_{i+5} = x_{i+6},$$

na svakom intervalu  $[x_i, x_{i+7}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-7$ , dobijamo bazu prostora  $\mathcal{S}_{4,0}^1(\Delta)$ :

$$\varphi_{4,1}(x) = \begin{cases} \frac{4(x_1 - x)^3(x - x_0)}{h_1^4} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

$$\varphi_{4,i}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-2})^4}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^3} & \text{ako } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{(x - x_{i-2})(x_i - x)^3}{(h_{i-1} + h_i)h_i^3} + \frac{3(x_i - x)^3(x - x_{i-1})}{h_i^4} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$



$$\varphi_{4,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{N-1})^4}{h_N^4} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

i

za  $i = 1, \dots, N$ :

$$\eta_{4,i}(x) = \begin{cases} \frac{6(x - x_{i-1})^2(x_i - x)^2}{h_i^4} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

i

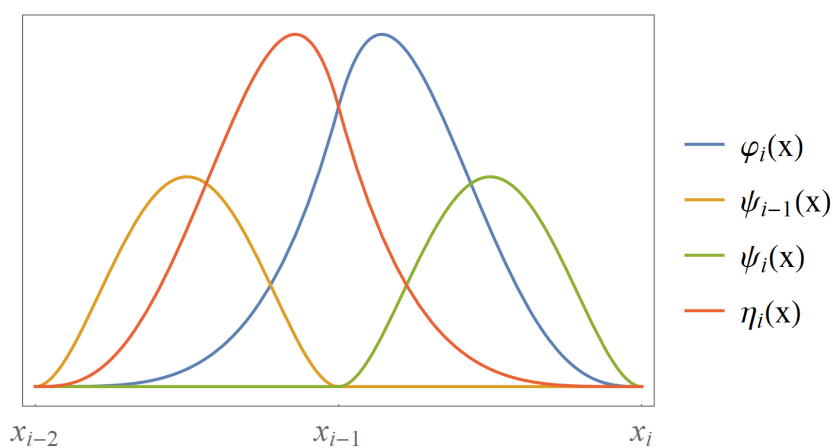
$$\psi_{4,1}(x) = \begin{cases} \frac{(x_1 - x)^4}{h_1^4} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

$$\psi_{4,i}(x) = \begin{cases} \frac{3(x - x_{i-2})^3(x_{i-1} - x)}{h_{i-1}^4} + \frac{(x_i - x)(x - x_{i-2})^3}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^3} & \text{ako } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{(x_i - x)^4}{(h_{i-1} + h_i)h_i^3} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\psi_{4,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{4(x - x_{N-1})^3(x_N - x)}{h_N^4} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

$C^1$ -splajnovi stepena četiri na  $[x_{i-2}, x_i]$  prikazani su na Slici 3.3.



Slika 3.3:  $C^1$ -splajnovi stepena četiri.

Očigledno, svaki splajn  $s \in \mathcal{S}_{4,0}^1(\Delta)$  možemo prikazati kao sledeću linearnu kombinaciju

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N+1} (\alpha_i \varphi_{4,i}(x) + \beta_i \psi_{4,i}(x)) + \sum_{i=1}^N \gamma_i \eta_{4,i}(x),$$

za neke  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ .

### 3.2 "Bubble" funkcije

U ovom poglavlju kreiraćemo još jednu bazu za  $C^1$ -splajnove proizvoljnog stepena. Tako kreirana baza će nam omogućiti konstrukciju  $C^1$ -splajnova proizvoljnog stepena, jednostavnije nego što je to slučaj pri konstrukciji pomoću B-splajnova.

Prvo ćemo posmatrati Hermiteove splajnove na  $[-1, 1]$ , a potom ćemo uz odgovarajuću transformaciju te splajnove sa  $[-1, 1]$  preslikati na proizvoljan interval  $[a, b]$ ,  $b > a$ .

Neka je dat proizvoljan polinom  $p \in \Pi_3$  klase  $C^1$  na intervalu  $[-1, 1]$ . Taj polinom možemo zapisati kao linearnu kombinaciju polinoma  $H_{-1}, H_1, \bar{H}_{-1}, \bar{H}_1 \in \Pi_3$

$$p(x) = p(-1)H_{-1}(x) + p(1)H_1(x) + p'(-1)\bar{H}_{-1}(x) + p'(1)\bar{H}_1(x),$$

koji zadovoljavaju sledeće uslove:

$$\begin{aligned} H_{-1}(-1) &= 1, & H_{-1}(1) &= 0, & H'_{-1}(-1) &= 0, & H'_{-1}(1) &= 0, \\ H_1(-1) &= 0, & H_1(1) &= 1, & H'_1(-1) &= 0, & H'_1(1) &= 0, \\ \bar{H}_{-1}(-1) &= 0, & \bar{H}_{-1}(1) &= 0, & \bar{H}'_{-1}(-1) &= 1, & \bar{H}'_{-1}(1) &= 0, \\ \bar{H}_1(-1) &= 0, & \bar{H}_1(1) &= 0, & \bar{H}'_1(-1) &= 0, & \bar{H}'_1(1) &= 1. \end{aligned}$$

Iz ovih uslova možemo naći i eksplicitni oblik Hermiteovih funkcija. Polinomi:

$$L_{-1}(x) = \frac{1-x}{2} \quad \text{i} \quad L_1(x) = \frac{1+x}{2}$$

predstavljaju bazu za prostor linearnih funkcija na  $[-1, 1]$ . Za ove polinome važi da je  $L_i(j) = \delta_{ij}$ , za  $i, j \in \{-1, 1\}$ . Takođe, za  $i \neq j$  važi:  $L_i^2(j) = 0$  i  $(L_i^2(j))' = 0$ . Očigledno,

$$H_i(x) = r_i(x)L_i^2(x) \quad \text{i} \quad \bar{H}_i(x) = s_i(x)L_i^2(x), \quad \text{za } i \in \{-1, 1\},$$

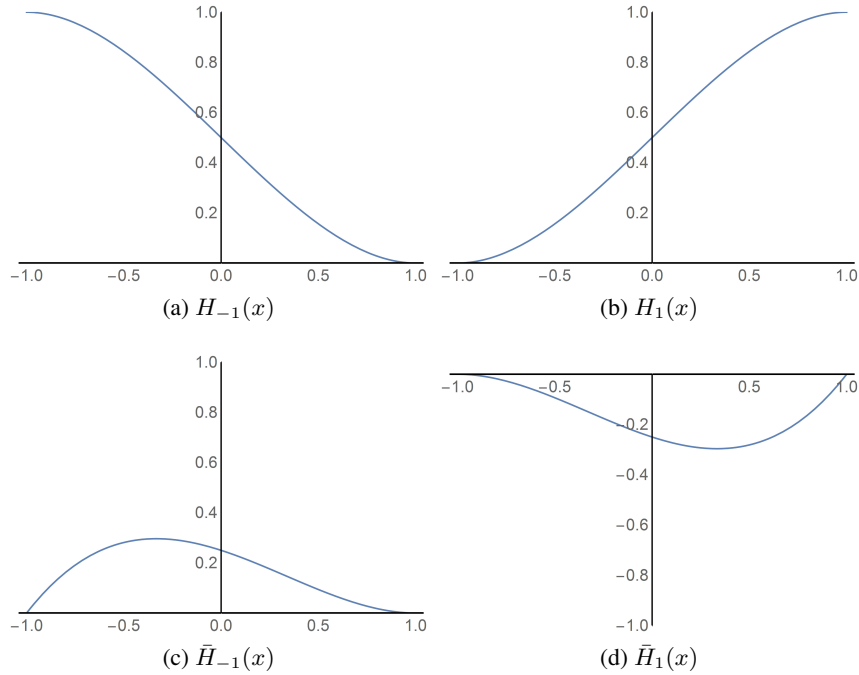
za neke linearne funkcije  $r_i$  i  $s_i$ . Lako se dobija da je  $r_{-1}(x) = 2+x$ ,  $r_1(x) = 2-x$ ,  $s_{-1}(x) = x+1$  i  $s_1(x) = x-1$ . Odatle je

$$H_{-1}(x) = (2+x) \left( \frac{1-x}{2} \right)^2, \quad H_1(x) = (2-x) \left( \frac{1+x}{2} \right)^2$$

i

$$\bar{H}_{-1}(x) = (x+1) \left( \frac{1-x}{2} \right)^2, \quad \bar{H}_1(x) = (x-1) \left( \frac{1+x}{2} \right)^2.$$

Na Slici 3.4 su prikazani Hermiteovi splajnovi.


 Slika 3.4: Hermiteovi splajnovi na  $[-1, 1]$ .

Sada ćemo, pomoću Hermiteovih splajnova, konstruisati bazu za prostor  $C^1$ -splajnova proizvoljnog stepena. Posmatraćemo "bubble" funkcije  $\psi_l \in \Pi_l$ , gde je  $l \geq 4$  prirodan broj, koje su definisane sa

$$\psi_l(x) = \begin{cases} (L_{-1}(x))^m (L_1(x))^m & \text{za } l = 2m, \\ x(L_{-1}(x))^m (L_1(x))^m & \text{za } l = 2m + 1, \end{cases}$$

gde je  $m \geq 2$  prirodan broj. Lako se pokazuje da za ovako definisane "bubble" funkcije važi

$$\psi_l(-1) = \psi_l(1) = \psi_l'(-1) = \psi_l'(1) = 0.$$

Kako su  $H_{-1}, H_1, \bar{H}_{-1}, \bar{H}_1$  i  $\psi_l, l = 4, 5, \dots, p$ , očigledno linearno nezavisne funkcije, one predstavljaju i bazu vektorskog prostora  $\Pi_p$  na intervalu  $[-1, 1]$ . Preostaje nam još da preslikamo ovako dobijenu bazu na proizvoljan interval  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ . Neka je  $\hat{\varphi} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  bilo koja funkcija iz baze prostora  $\Pi_p$  na intervalu  $[-1, 1]$ . Definišimo afinu transformaciju  $\xi_i : J_i \rightarrow [-1, 1]$  takvu da je

$$\xi_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \frac{x - x_i}{h_i}.$$

Dalje, transformišimo funkciju  $\hat{\varphi}$  na  $J_i$ , sa

$$\varphi_i(x) := \hat{\varphi}(\xi_i(x)).$$

Izvodi funkcije  $\varphi_i$  se lako dobijaju. Važi:

$$\varphi_i'(x) = \hat{\varphi}'(\xi_i(x)) \xi_i'(x) = \frac{2}{h_i} \hat{\varphi}'(\xi_i(x))$$

i

$$\varphi_i''(x) = \frac{2}{h_i} (\hat{\varphi}'(\xi_i(x)))' = \frac{2}{h_i} \hat{\varphi}''(\xi_i(x)) \xi_i'(x) = \frac{4}{h_i^2} \hat{\varphi}''(\xi_i(x)). \quad (3.4)$$

Konačno, proizvoljan  $C^1$ -splajn na  $[0, 1]$  ćemo predstaviti preko Hermiteovih splajnova i "bubble" funkcija. Posmatrajmo  $\mathcal{S}_p^1(\Delta)$  – prostor  $C^1$ -splajnova na mreži  $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ . Neka je  $s \in \mathcal{S}_p^1(\Delta)$ ,  $p > 3$  i  $s_i = s(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Elementi baze  $\chi_i \in \mathcal{S}_3^1(\Delta)$  treba da zadovoljavaju sledeće osobine:

$$\chi_i(x_k) = \delta_{ik} \quad \text{i} \quad \chi_i'(x_k) = 0, \quad \text{za } i, k = 0, 1, \dots, N.$$

Funkcije  $\chi_i$  se mogu eksplicitno izraziti u obliku

$$\chi_i(x) = \begin{cases} H_{-1}(\xi_{i+1}(x)) & \text{ako } x \in J_{i+1}, \\ H_1(\xi_i(x)) & \text{ako } x \in J_i, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je  $s'_i = s'(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Tada, funkcije  $\bar{\chi}_i \in \mathcal{S}_3^1(\Delta)$  treba da zadovoljavaju:

$$\bar{\chi}_i(x_k) = 0 \quad \text{i} \quad \bar{\chi}_i'(x_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = 0, 1, \dots, N.$$

Funkcije  $\bar{\chi}_i$  se mogu izraziti na sledeći način

$$\bar{\chi}_i(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} h_{i+1} \bar{H}_{-1}(\xi_{i+1}(x)) & \text{ako } x \in J_{i+1}, \\ h_i \bar{H}_1(\xi_i(x)) & \text{ako } x \in J_i, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Napokon,  $\beta_{i,l}$ , za  $l = 4, 5, \dots, p$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , možemo definisati sa

$$\beta_{i,l}(x) = \begin{cases} \psi_l(\xi_i(x)) & \text{ako } x \in J_i. \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada je jasno, da svaki splajn  $s \in \mathcal{S}_p^1(\Delta)$  možemo prikazati kao sledeću linearnu kombinaciju

$$s(x) = s_{i-1} \chi_{i-1}(x) + s_i \chi_i(x) + s'_{i-1} \bar{\chi}_{i-1}(x) + s'_i \bar{\chi}_i(x) + \sum_{l=4}^p \mu_{i,l} \beta_{i,l}(x), \quad x \in J_i, \quad (3.5)$$

gde su  $\mu_{i,l} \in \mathbb{R}$ .

### 3.3 Kvadratna splajn interpolacija

U ovom poglavlju ćemo analizirati dve klase kvadratnih splajn interpolacija. Ocene grešaka ovih interpolacija su od velikog značaja za izvođenje apriorne ocene u Glavi 5.

### 3.3.1 $\mathcal{S}_2^0$ - interpolacija

Za proizvoljnu funkciju  $g \in C^0[0, 1]$ , uvodimo interpolaciju  $I_2^0 g \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$  definisanu sa

$$(I_2^0 g)_i = g_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{i} \quad (I_2^0 g)_{i-1/2} = g_{i-1/2}, \quad i = 1, \dots, N,$$

uz oznake  $d_i = d(x_i)$  i  $d_{i-1/2} = d(x_{i-1/2})$ , gde je  $d \in C^0[0, 1]$ , a koje ćemo dalje koristiti. Naredna teorema daje ocene greške ove interpolacije.

**Teorema 3.5.** *Neka je  $g \in C^4[0, 1]$ . Tada važi:*

$$\|g - I_2^0 g\|_{\infty, J_i} \leq \frac{9}{4} \|g\|_{\infty, J_i} \quad \text{i} \quad |(g - I_2^0 g)''_{i-1/2}| \leq 2 \|g''\|_{\infty, J_i} \quad (3.6a)$$

i

$$\|g - I_2^0 g\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|g'''\|_{\infty, J_i} \quad \text{i} \quad |(g - I_2^0 g)''_{i-1/2}| \leq \frac{h_i^2}{48} \|g^{(4)}\|_{\infty, J_i}. \quad (3.6b)$$

*Dokaz.* Koristeći Lagranžov oblik interpolacionog polinoma, dobijamo da je

$$I_2^0 g(x) = 2g_{i-1} \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{h_i^2} - 4g_{i-1/2} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_i^2} + 2g_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{h_i^2}, \quad (3.7)$$

na svakom intervalu  $J_i$ .

Ako  $\xi \in (x_{i-1}, x_{i-1/2})$ , onda je

$$\begin{aligned} I_2^0 g(\xi) - g(\xi) = & g(\vartheta) \left( 2 \frac{(\xi - x_{i-1/2})(\xi - x_i)}{h_i^2} - 4 \frac{(\xi - x_{i-1})(\xi - x_i)}{h_i^2} \right) \\ & + g(\nu) \left( 2 \frac{(\xi - x_{i-1})(\xi - x_{i-1/2})}{h_i^2} - 1 \right), \end{aligned}$$

gde  $\vartheta, \nu \in J_i$ . Odavde je

$$|I_2^0 g(\xi) - g(\xi)| \leq \frac{9}{8} |g(\vartheta)| + \frac{9}{8} |g(\nu)| \leq \frac{9}{4} \|g\|_{J_i}.$$

Slično,  $|I_2^0 g(\xi) - g(\xi)| \leq \frac{9}{4} \|g\|_{J_i}$ , za  $\xi \in (x_{i-1/2}, x_i)$ , pa sledi

$$\|g - I_2^0 g\|_{\infty, J_i} \leq \frac{9}{4} \|g\|_{\infty, J_i}.$$

Ograničenje

$$\|g - I_2^0 g\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|g'''\|_{\infty, J_i}$$

sledi direktno iz (2.1) za ekvidistante čvorove  $\{x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i\}$ .

Dalje, drugi izvod interpolacione funkcije  $I_2^0 g$  je

$$(I_2^0 g)''(x) = 4g_{i-1} \frac{1}{h_i^2} - 8g_{i-1/2} \frac{1}{h_i^2} + 4g_i \frac{1}{h_i^2}.$$

Tejlorov razvoj funkcije  $g$  u tački  $x_{i-1/2}$  do stepena 2, daje

$$(I_2^0 g)''(x) = \frac{g''(\vartheta_{i,1})}{2} + \frac{g''(\vartheta_{i,2})}{2},$$

gde  $\vartheta_{i,1}, \vartheta_{i,2} \in J_i$ . Odavde je

$$\left| (g - I_2^0 g)''_{i-1/2} \right| = \left| \frac{g''(\vartheta_{i,1})}{2} + \frac{g''(\vartheta_{i,2})}{2} - g''_{i-1/2} \right| \leq 2 \|g''\|_{\infty, J_i}.$$

Razvijajući  $g_{i-1}$  i  $g_i$  u Tejlorov red u tački  $x_{i-1/2}$ , dobijamo iz (3.7) da važi

$$(I_2^0 g)''(x) = g''_{i-1/2} + \frac{h_i^2}{96} \left( g^{(4)}(\bar{\vartheta}_{i,1}) + g^{(4)}(\bar{\vartheta}_{i,2}) \right),$$

gde  $\bar{\vartheta}_{i,1}, \bar{\vartheta}_{i,2} \in J_i$ , pa je

$$\left| (g - I_2^0 g)''_{i-1/2} \right| = \left| \frac{h_i^2}{96} \left( g^{(4)}(\bar{\vartheta}_{i,1}) + g^{(4)}(\bar{\vartheta}_{i,2}) \right) \right| \leq \frac{h_i^2}{48} \|g^{(4)}\|_{\infty, J_i}.$$

□

Sledeća lema daje korisna ograničenja za kvadratni  $C^0$ -splajn i njegov drugi izvod na proizvoljnom intervalu  $J_i$ .

**Lema 3.6.** *Neka je  $s \in \mathcal{S}_2^0(\Delta)$  i neka važi  $s_{i-1/2} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Tada je*

$$\|s\|_{\infty, J_i} \leq \max\{|s_{i-1}|, |s_i|\} \quad i \quad \|s''\|_{\infty, J_i} \leq \frac{8}{h_i^2} \max\{|s_{i-1}|, |s_i|\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

*Dokaz.* Koristeći Lagranžov oblik interpolacionog polinoma i  $s_{i-1/2} = 0$ , dobijamo

$$s(x) = 2s_{i-1} \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{h_i^2} + 2s_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{h_i^2},$$

za  $x \in J_i$ , pa je

$$s(x) = 2 \frac{x - x_{i-1/2}}{h_i^2} \left[ s_{i-1}(x - x_i) + s_i(x - x_{i-1}) \right], \quad x \in J_i,$$

odakle sledi

$$|s(x)| \leq 2 \frac{|x - x_{i-1/2}|}{h_i^2} \max\{|s_{i-1}|, |s_i|\} h_i \leq \max\{|s_{i-1}|, |s_i|\}.$$

Kako je

$$s''(x) = \frac{4}{h_i^2} (s_{i-1} + s_i) \quad i \quad |s_{i-1} + s_i| \leq 2 \max\{|s_{i-1}|, |s_i|\},$$

to dobijamo da je i druga nejednakost u ovoj lemi zadovoljena, tj. da važi

$$\|s''\|_{\infty, J_i} \leq \frac{8}{h_i^2} \max\{|s_{i-1}|, |s_i|\}.$$

□

### 3.3.2 $\mathcal{S}_2^1$ - interpolacija

Za proizvoljnu funkciju  $g \in C^0[0, 1]$ , uvešćemo i interpolaciju  $I_2^1 g \in \mathcal{S}_2^1(\Delta)$  definisanu sa

$$(I_2^1 g)_0 = g_0, \quad (I_2^1 g)_{i-1/2} = g_{i-1/2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (I_2^1 g)_N = g_N.$$

Ova vrsta interpolacije je razmatrana u [28, 47, 48].

Kvadratni splajn  $s \in \mathcal{S}_2^1$  možemo prikazati na  $J_i$  u sledećem obliku

$$s(x) = 2s_{i-1} \frac{(x - x_{i-1/2})(x - x_i)}{h_i^2} - 4s_{i-1/2} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_i^2} + 2s_i \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{h_i^2},$$

gde je  $s_{i-1/2} = g_{i-1/2}$ . Sada je

$$s'(x) = \frac{2}{h_i^2} (s_{i-1}(2x - (x_{i-1/2} + x_i)) - 2s_{i-1/2}(2x - (x_{i-1} + x_i)) + s_i(2x - (x_{i-1} + x_{i-1/2}))).$$

Pošto  $s \in C^1[0, 1]$ , onda je  $s'(x_i^+) = s'(x_i^-)$ , tj.

$$\frac{s_{i-1} - 4s_{i-1/2} + 3s_i}{h_i} = \frac{-3s_i + 4s_{i+1/2} - s_{i+1}}{h_{i+1}},$$

odakle dobijamo

$$a_i s_{i-1} + 3s_i + c_i s_{i+1} = 4a_i s_{i-1/2} + 4c_i s_{i+1/2},$$

gde je  $a_i := \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$  i  $c_i := 1 - a_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$ .

Uvedimo, sada, sledeću oznaku

$$[Mg]_i := a_i g_{i-1} + 3g_i + c_i g_{i+1}, \tag{3.8}$$

za proizvoljnu funkciju  $g \in C^0[0, 1]$ .

**Lema 3.7.** Za svaki vektor  $s \in \mathbb{R}^{N+1}$  za koji je  $s_0 = s_N = 0$ , važi

$$\max_{i=1, \dots, N-1} |s_i| \leq \max_{i=1, \dots, N-1} \frac{1}{2} |[Ms]_i|.$$

*Dokaz.* Neka je  $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$  onaj član za koga je

$$|s_k| = \max_{i=1, 2, \dots, N-1} |s_i|.$$

Iz (3.8) imamo da je

$$3s_k = [Ms]_k - a_k s_{k-1} - c_k s_{k+1}.$$

Dalje, iz nejednakosti trougla dobijamo

$$3|s_k| \leq |[Ms]_k| + (a_k + c_k)|s_k| = |[Ms]_k| + |s_k|,$$

odakle sledi tvrđenje leme. □

**Teorema 3.8.** *Neka je  $g \in C^4[0, 1]$ . Tada greška interpolacije funkcije  $g$  zadovoljava sledeća ograničenja:*

$$|[M(g - I_2^1 g)]_i| \leq 8\|g\|_{\infty, [x_{i-1}, x_{i+1}]} \quad (3.9a)$$

$i$

$$|[M(g - I_2^1 g)]_i| \leq \frac{1}{12} h_i h_{i+1} |h_{i+1} - h_i| |g_i'''| + \frac{5}{96} h_i^4 \|g^{(4)}\|_{\infty, J_i} + \frac{5}{96} h_{i+1}^4 \|g^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}}, \quad (3.9b)$$

za  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $i$  gde je  $[Mg]_i$  definisano sa (3.8).

*Dokaz.* Za proizvoljnu funkciju  $g \in C^4[0, 1]$ , važi

$$(g - I_2^1 g)_0 = (g - I_2^1 g)_N = 0$$

kao i

$$[M(g - I_2^1 g)]_i = a_i g_{i-1} + 3g_i + c_i g_{i+1} - 4a_i (I_2^1 g)_{i-1/2} - 4c_i (I_2^1 g)_{i+1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Kako je  $(I_2^1 g)_{i-1/2} = g_{i-1/2}$ , za svako  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , to je

$$[M(g - I_2^1 g)]_i = a_i g_{i-1} + 3g_i + c_i g_{i+1} - 4a_i g_{i-1/2} - 4c_i g_{i+1/2} := \tau_{g,i}. \quad (3.10)$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} |\tau_{g,i}| &= |a_i(g_{i-1} - 4g_{i-1/2}) + c_i(g_{i+1} - 4g_{i+1/2}) + 3g_i| \\ &\leq a_i |g_{i-1} - 4g_{i-1/2}| + c_i |g_{i+1} - 4g_{i+1/2}| + 3|g_i| \\ &\leq 5a_i \|g\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}} + 5c_i \|g\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}} + 3\|g\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}}, \end{aligned}$$

tj.  $|\tau_{g,i}| \leq 8\|g\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}}$ , jer je  $a_i + c_i = 1$ . Prvi deo teoreme je ovim dokazan.

Dokažimo sada i drugo ograničenje. Tajlorov razvoj u tački  $x_i$  do stepena 4, daje sledeću jednakost

$$\begin{aligned} \tau_{g,i} &= \frac{1}{12} h_i h_{i+1} (h_{i+1} - h_i) g_i''' \\ &\quad + \frac{h_{i+1} h_i^4 (4g^{(4)}(\vartheta_{i,1}) - g^{(4)}(\vartheta_{i,2}))}{96(h_i + h_{i+1})} + \frac{h_i h_{i+1}^4 (4g^{(4)}(\vartheta_{i,3}) - g^{(4)}(\vartheta_{i,4}))}{96(h_i + h_{i+1})}, \end{aligned}$$

gde su  $\vartheta_{i,1} \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $\vartheta_{i,2} \in [x_{i-1/2}, x_i]$ ,  $\vartheta_{i,3} \in [x_i, x_{i+1}]$  i  $\vartheta_{i,4} \in [x_i, x_{i+1/2}]$ . Odavde, jasno sledi



da je

$$|\tau_{g,i}| \leq \frac{1}{12} h_i h_{i+1} |h_{i+1} - h_i| |g_i''| + \frac{5}{96} h_i^4 \|g^{(4)}\|_{\infty, J_i} + \frac{5}{96} h_{i+1}^4 \|g^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}},$$

čime je dokaz kompletiran.

□

## ADAPTIVNE MREŽE

Prvu adaptivnu mrežu konstruisao je Bahvalov još 1969. godine u svome radu [3]. Mreža koju je predložio je kreirana za problem konvekcije-difuzije. Posle toga, veliki broj autora je razmatrao razne adaptivne mreže za singularno perturbovane probleme – Lisejkin [45], Vulcanović [79–81], Gartland [17], Šiškin [61]. Najviše su istraživane eksponencijalno gradirane mreže tipa Bahvalova [3] i deo po deo uniformne mreže koje je uveo Šiškin [49, 61]. Mreže tipa Bahvalova daju bolje aproksimacije, dok su mreže tipa Šiškina generalno jednostavnije za analizu.

Sve mreže konstruisane za problem (1.1), označavaćemo sa  $\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ .

### 4.1 Mreže tipa Šiškina

Mreže tipa Šiškina karakteriše takozvana "Šiškinova"- tranziciona tačka  $\tau$  i uniformna raspodela čvorova te mreže na intervalima  $[0, \tau]$  i  $[1 - \tau, 1]$ . Neka su  $\sigma, \varrho > 0$  i  $q \in (0, 1/2)$  tri data parametra. Tranzicionu tačku  $\tau$  definišemo sa

$$\tau = \min \left\{ \frac{\sigma \varepsilon}{\varrho} \ln N, q \right\}. \quad (4.1)$$

Tačka  $\tau$  se bira na ovaj način kako bi funkcije koje opisuju slojeve  $e^{-x/\varepsilon}$  i  $e^{-(1-x)/\varepsilon}$  bile manje od  $N^{-\sigma}$  na  $[\tau, 1 - \tau]$ , videti [34, 39]. Parametar  $\sigma$  se uglavnom bira tako da bude jednak redu konvergencije posmatranog metoda ili da bude dovoljno velik kako bi zadovoljavao teorijske uslove u analizi greške postupka koji se razmatra.

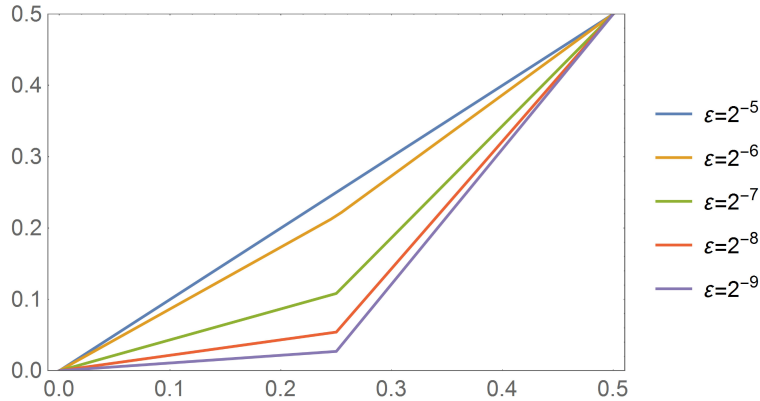
#### 4.1.1 Šiškinova mreža

Standardna Šiškinova mreža  $\Delta$  je određena čvorovima  $x_i = \varphi_S(i/N)$  gde je  $\varphi_S$  funkcija koja je generiše i definisana je sa

$$\varphi_S(t) = \begin{cases} \frac{\tau}{q} t & t \in [0, q], \\ \tau + \frac{1 - 2\tau}{1 - 2q} (t - q) & t \in [q, 1/2], \\ 1 - \varphi_S(1 - t) & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

Uglavnom se u literaturi bira  $q = 1/4$ , pa je tada Šiškinova mreža ekvidistantna na intervalima  $[0, \tau]$  i  $[1 - \tau, 1]$  sa po  $N/4$  podintervala iste dužine. Takođe, ova mreža je ekvidistantna i na intervalu  $[\tau, 1 - \tau]$  koji je podeljen na  $N/2$  intervala iste dužine. Jasno je da je funkcija  $\varphi_S \in C^0[0, 1]$ .

Na Slici 4.1 je prikazana funkcija  $\varphi_S$  za različite vrednosti perturbovanog parametra  $\varepsilon$ . Iz definicije  $\varphi_S$  je očigledno da ova funkcija nije diferencijabilna u tranzicionoj tački  $\tau$ , a što se lako može uočiti i na ovoj slici.



Slika 4.1: Funkcija  $\varphi_S$  na  $[0, 0.5]$ , za fiksno  $N = 2^5$ ,  $\sigma = 4$ ,  $\varrho = 1$ ,  $q = 1/4$  i različite vrednosti perturbovanog parametra  $\varepsilon$ .

#### 4.1.2 Modifikovana Šiškinova mreža

Iz teorijskih razloga ćemo u narednoj glavi zahtevati da mreža koju posmatramo zadovoljava uslov

$$|h_{i+1} - h_i| \leq CN^{-2}, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

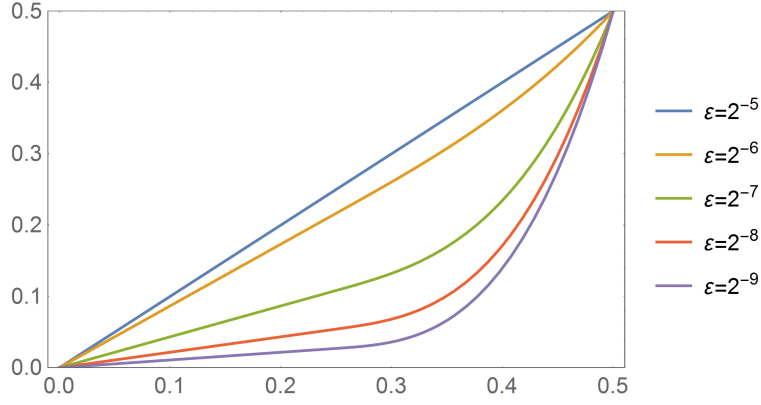
koji nije ispunjen za standardnu Šiškinovu mrežu. Zbog toga razmatramo i jednu njenu modifikaciju, za koju je pomenuti uslov ispunjen.

Modifikaciju koju ćemo posmatrati, uveo je Vulanović u [75] za singularno perturbovan problem sa dva mala parametra. Čvorovi ovako modifikovane Šiškinove mreže, za problem reakcije-difuzije, generisani su sa  $x_i = \varphi_{sS}(i/N)$ , gde je funkcija  $\varphi_{sS}$  definisana sa

$$\varphi_{sS}(t) := \begin{cases} \frac{\tau}{q}t & t \in [0, q], \\ p(t - q)^3 + \frac{\tau}{q}t & t \in [q, 1/2], \\ 1 - \varphi_{sS}(1 - t) & t \in [1/2, 1], \end{cases} \quad (4.2)$$

i gde je  $p$  izabrano tako da važi  $\varphi_{sS}(1/2) = 1/2$ , odakle sledi da je  $p = \frac{1}{2}(1 - \frac{\tau}{q})(\frac{1}{2} - q)^{-3}$ . Jasno je da je  $\varphi_{sS} \in C^1[0, 1]$ . Slika 4.2 prikazuje funkciju  $\varphi_{sS}$  na  $[0, 0.5]$  za različite vrednosti  $\varepsilon$ .

Zbog pojednostavljenja dokaza, koji slede u narednoj glavi, dalje ćemo pretpostavljati da je  $\tau = \sigma\varepsilon\varrho^{-1} \ln N$ . U suprotnom, kolokacioni metod, koji ćemo uvesti u narednoj glavi, daje dobru aproksimaciju tačnog rešenja i na ekvidistantnoj mreži. Takođe, pretpostavićemo i da je  $qN$  prirodan broj. Ovo se lako postiže, na primer – za  $q = 1/4$  uzimamo isključivo prirodne brojeve  $N$  deljive sa 4.



Slika 4.2: Funkcija  $\varphi_{sS}(x)$  na  $[0, 0.5]$ , za fiksno  $N = 2^5$ ,  $\sigma = 4$ ,  $\rho = 1$ ,  $q = 1/4$  i različite vrednosti perturbovanog parametra  $\varepsilon$ .

Ključne osobine, koje ćemo koristiti u Glavi 5, date su u sledećoj lemi.

**Lema 4.1.** *Za datu modifikovanu Šiškinovu mrežu, takvu da je  $qN + 1 < N/2$ , koraci  $h_i$  zadovoljavaju sledeće osobine:*

$$h_i \leq CN^{-1}, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3a)$$

$$h_i \leq C\varepsilon N^{-1} \ln N, \quad \text{za } i \leq qN \text{ ili } i \geq (1 - q)N, \quad (4.3b)$$

$$|h_{i+1} - h_i| \leq CN^{-2}, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (4.3c)$$

$$\frac{\varepsilon}{h_i} \leq \frac{q\rho}{\sigma} \frac{N}{\ln N}, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3d)$$

*Dokaz.* Prvo, jasno je da je

$$h_i = \int_{(i-1)/N}^{i/N} \varphi'_{sS}(t) dt \leq CN^{-1},$$

za sve  $i \leq N$ . Specijalno, ako je  $i \leq qN$  ili  $i \geq (1 - q)N$  onda važi

$$h_i = \varphi_{sS}\left(\frac{i}{N}\right) - \varphi_{sS}\left(\frac{i-1}{N}\right) = \frac{\tau}{qN} = \frac{\sigma}{q\rho} \varepsilon N^{-1} \ln N.$$

Dokaz ograničenja (4.3c), razlažemo na tri slučaja na intervalu  $[0, 1/2]$ .

Prvo, ako je  $i \leq qN$ , tada direktno iz definicije mreže sledi da je  $h_i - h_{i-1} = 0$ . Za  $i = qN + 1$ , važi

$$h_{qN+1} - h_{qN} = \frac{p}{N^3} \leq CN^{-2},$$

dok je za  $qN + 1 < i \leq N/2$ ,

$$h_i - h_{i-1} = \frac{6p(i - Nq - 1)}{N^3} \leq CN^{-2}.$$

Ovim je dokazano da osobina (4.3c) važi na  $[0, 1/2]$ . Na sličan način, isto tvrđenje dobijamo i na intervalu  $[1/2, 1]$ . Konačno, za  $i = 1, 2, \dots, N$ , iz teoreme o srednjoj vrednosti sledi

$$x_i - x_{i-1} = \varphi_{sS}\left(\frac{i}{N}\right) - \varphi_{sS}\left(\frac{i-1}{N}\right) = \varphi'_{sS}(\vartheta) \frac{1}{N}, \quad \vartheta \in (0, 1),$$

tj.

$$h_i \geq N^{-1} \min_{t \in [0,1]} |\varphi'_{sS}(t)| = \frac{\tau}{qN} = \frac{\sigma\varepsilon \ln N}{q\rho N},$$

odakle je

$$\frac{\varepsilon}{h_i} \leq \frac{q\rho}{\sigma} \frac{N}{\ln N}.$$

□

## 4.2 Mreže tipa Bahvalova

### 4.2.1 Mreža Bahvalova

Mreža Bahvalova je generisana funkcijom  $\varphi_B$  [39], koja je definisana na sledeći način

$$\varphi_B(t) = \begin{cases} \chi(t) := -\frac{\sigma\varepsilon}{\rho} \log\left(1 - \frac{t}{\bar{q}}\right) & t \in [0, \tau], \\ \pi(t) := \chi(\tau) + \chi'(\tau)(t - \tau) & t \in [\tau, 0.5], \\ 1 - \varphi_B(1 - t) & t \in [0.5, 1], \end{cases}$$

gde su  $\bar{q} \in (0, 1/2)$  i  $\sigma \in (0, \bar{q}\rho/\varepsilon)$  dati parametri. Tranzicionu tačku  $\tau$  nalazimo iz sledećeg uslova

$$\chi'(\tau) = \frac{0.5 - \chi(\tau)}{0.5 - \tau}.$$

Geometrijski, ovaj uslov znači da je tačka  $(\tau, \chi(\tau))$  tačka dodira tangente  $\pi$  na krivu  $\chi$ , a koja sadrži tačku  $(0.5, 0.5)$ . Tranzicionu tačku  $\tau$  nije moguće izračunati tačno, a algoritam koji efikasno računa  $\tau$ , sa velikom preciznošću, dat je u [3].

### 4.2.2 Vulcanovićeva mreža

Mreža koju je Vulcanović konstruisao u [78] je modifikacija mreže Bahvalova i generisana je sa sledećom funkcijom

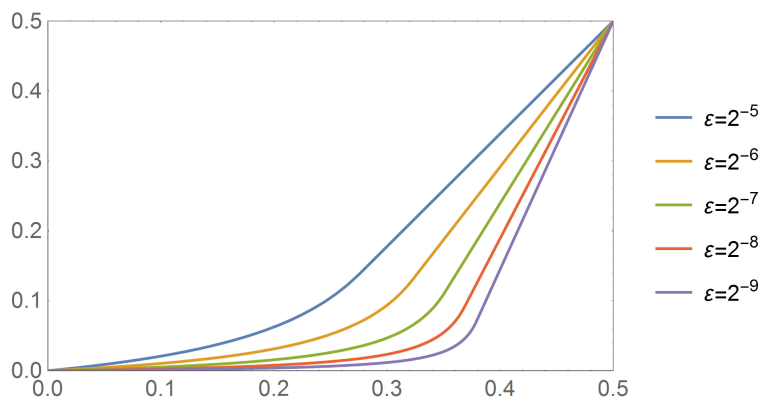
$$\varphi_R(t) = \begin{cases} \chi(t) := \frac{a\varepsilon t}{\bar{q} - t} & t \in [0, \tau], \\ \pi(t) := \chi'(\tau)(t - \tau) + \chi(\tau) & t \in [\tau, 1/2], \\ 1 - \varphi_R(1 - t) & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

gde su  $a > 0$  i  $\bar{q} \in (0, 1/2)$  parametri zadati tako da važi  $a\varepsilon < \bar{q}$ . Poslednji uslov implicira postojanje tačke  $\tau \in (0, \bar{q})$  koja je rešenje jednačine  $\pi(1/2) = 1/2$ . Tranzicionu tačku  $\tau$  možemo tačno izračunati. Lako dobijamo da je

$$\tau = \frac{\bar{q} - \sqrt{a\varepsilon\bar{q}(1 - 2\bar{q} + 2a\varepsilon)}}{1 + 2a\varepsilon}.$$

Očigledno je  $\varphi_R \in C^1[0, 1]$ . Jasno, funkcija  $\chi$  definisana u [3] je logaritamska funkcija, koja predstavlja inverznu funkciju za eksponencijalnu funkciju iz sloja. Racionalna funkcija  $\chi$  koja je uvedena u radu [81], iako je samo aproksimacija logaritamske funkcije definisane u mreži Bahvalova, pokazuje se kao efikasna, a pri tome vrednost  $\tau$  možemo tačno izračunati, za razliku od tranzicione tačke definisane u standardnoj mreži Bahvalova.

Funkcija  $\varphi_R$  je prikazana na Slici 4.3 za razne vrednosti perturbovanog parametra  $\varepsilon$ .



Slika 4.3: Funkcija  $\varphi_R$  na  $[0, 1/2]$ , za  $a = 2$ ,  $\bar{q} = 0.4$  i različite vrednosti  $\varepsilon$ .

Ovaj tip mreže ćemo skraćeno obeležavati sa R-mreža.

**Napomena 2.** Nasuprot mrežama tipa Šiškina, mreže generisane sa  $\varphi_B$  i  $\varphi_R$  su nezavisne od diskretizacionog parametra  $N$ .

### 4.3 Rekurzivno generisana mreža

Rekurzivno generisane mreže, predložene prvi put u radu [17], su interesantna alternativa mrežama tipa Šiškina. Ovaj tip adaptivnih mreža korišćen je u radu [15] za problem reakcije-difuzije i u radovima [14, 57] za jednodimenzionalne i dvodimenzionalne probleme konvekcije-difuzije.

Za dati parametar  $h > 0$ , definisaćemo sledeću mrežu:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_i = ih\varepsilon & \text{za } 1 \leq i < \frac{1}{h} + 1, \\ x_i = x_{i-1} + hx_{i-1} & \text{za } \frac{1}{h} + 1 \leq i \leq M - 1, \\ x_M = \frac{1}{2}, \\ x_i = 1 - x_{2M-i} & \text{za } M + 1 \leq i \leq 2M, \end{cases} \quad (4.4)$$

gde je  $M \in \mathbb{N}$  izabrano tako da je  $x_{M-1} < \frac{1}{2}$  i  $x_{M-1} + hx_{M-1} \geq \frac{1}{2}$ . Uvedimo i sledeće oznake:  $N = 2M$  i  $M_1 = \left\lceil \frac{1}{h} \right\rceil$ .

**Napomena 3.** Izbor prvog koraka, tj. tačke  $x_1 = h\varepsilon$  je motivisan uslovom  $h_1 = o(\varepsilon)$ , koji adaptivne mreže konstruisane za rešavanje SPP-a treba da ispunjavaju [56, 57].

Iz definicije mreže (4.4), za  $i = M + 1, M + 2, \dots, N - M_1 - 1$ , dobijamo

$$x_i = 1 - x_{N-i} = 1 - (x_{N-i-1} + hx_{N-i-1}) = x_{i+1} - h(1 - x_{i+1}),$$

jer važi  $M_1 + 1 \leq N - i \leq M - 1$ . Odavde je

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{1+h}(1 - x_i) \quad \text{i} \quad h_{i+1} = h(1 - x_{i+1}), \quad \text{za } M + 1 \leq i \leq N - M_1 - 1.$$

Iz teorijskih razloga ćemo pretpostaviti da je

$$\frac{1}{2} = x_M = x_{M-1} + hx_{M-1}. \quad (4.5)$$

Zato, dokažimo da za svako  $M \geq M_0 \in \mathbb{N}$ , možemo izabrati takvo  $h$  da je uslov (4.5) ispunjen. Posmatrajmo proizvoljnu vrednost  $M_1 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Jasno je da je  $M_1 h \geq 1$  i  $(M_1 - 1)h < 1$ , što je posledica definicije funkcije  $\lceil \cdot \rceil$ . Štaviše,  $M_1$  zadovoljava pomenute uslove za proizvoljnu vrednost  $h \in \left[ \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1 - 1} \right)$ . Dalje, iz (4.4) dobijamo da je

$$x_{M-1} = (1+h)^{M-M_1-1} x_{M_1} = (1+h)^{M-M_1-1} M_1 h \varepsilon,$$

pa je (4.5) sada ekvivalentno sa

$$\frac{1}{2} = x_M = (1+h)^{M-M_1} M_1 h \varepsilon,$$

a odatle je

$$M = \frac{\ln \frac{1}{2M_1 \varepsilon} + \ln \frac{1}{h}}{\ln(1+h)} + M_1.$$

Da bismo našli takvo  $h \in \left[ \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1 - 1} \right)$  za koje je  $M$  prirodan broj, analiziraćemo funkciju koja je definisana sa

$$f_{M_1}(h) = \frac{\ln \frac{1}{2M_1 \varepsilon} + \ln \frac{1}{h}}{\ln(1+h)} + M_1, \quad h \in \left[ \frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_1 - 1} \right).$$

Prvi izvod funkcije  $f_{M_1}$  se lako dobija

$$f'_{M_1}(h) = -\frac{\frac{\ln(1+h)}{h} + \frac{\ln(2hM_1\varepsilon)^{-1}}{1+h}}{\ln^2(1+h)} < -\frac{\frac{\ln(1+h)}{h} + \frac{\ln(4\varepsilon)^{-1}}{1+h}}{\ln^2(1+h)} < 0, \quad \text{za } \varepsilon \leq \frac{1}{4},$$

jer je  $M_1 h < 1 + h \leq 2$ . Očigledno, funkcija  $f_{M_1}$  je neprekidna i opadajuća na posmatranom domenu, pa uzima sve vrednosti iz intervala  $\left( f_{M_1} \left( \frac{1}{M_1 - 1} \right), f_{M_1} \left( \frac{1}{M_1} \right) \right]$ .

Dalje, posmatrajmo funkciju

$$f_{M_1+1}(h) = \frac{\ln \frac{1}{2(M_1+1)\varepsilon} + \ln \frac{1}{h}}{\ln(1+h)} + M_1 + 1, \quad h \in \left[ \frac{1}{M_1+1}, \frac{1}{M_1} \right).$$

Jasno je da je i  $f_{M_1+1}$  neprekidna i opadajuća na posmatranom domenu, pa uzima sve vrednosti iz intervala  $\left( f_{M_1+1} \left( \frac{1}{M_1} \right), f_{M_1+1} \left( \frac{1}{M_1+1} \right) \right]$ . Štaviše,

$$\lim_{h \rightarrow 1/M_1 - 0} f_{M_1+1}(h) = \frac{\ln \frac{1}{2(M_1+1)\varepsilon} + \ln M_1}{\ln \left( 1 + \frac{1}{M_1} \right)} + M_1 + 1,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 1/M_1 - 0} f_{M_1+1}(h) &= \frac{\ln \frac{1}{2(M_1+1)\varepsilon} + \ln \left( 1 + \frac{1}{M_1} \right) + \ln M_1}{\ln \left( 1 + \frac{1}{M_1} \right)} + M_1 \\ &= \frac{\ln \frac{M_1+1}{2M_1(M_1+1)\varepsilon} + \ln M_1}{\ln \left( 1 + \frac{1}{M_1} \right)} + M_1 = f_{M_1} \left( \frac{1}{M_1} \right). \end{aligned}$$

Zbog toga je jasno da funkcija  $f$  uzima sve vrednosti iz skupa

$$S = \bigcup_{M_1=2}^{\infty} \left( f \left( \frac{1}{M_1-1} \right), f \left( \frac{1}{M_1} \right) \right] = (f(1), \infty),$$

gde je  $f$  definisano sa

$$f := \bigcup_{M_1=2}^{\infty} f_{M_1}.$$

Dakle, uvek možemo birati takvo  $0 < h \leq 1$  da je uslov (4.5) ispunjen za svaku celobrojnu vrednost  $M > f(1) = f_2(1) = \frac{-\ln(4\varepsilon)}{\ln 2} + 2$ . Jasno, najmanji prirodan broj  $M$  za koji se može definisati mreža (4.4)-(4.5) je  $M_0 = \left\lceil \frac{-\ln(4\varepsilon)}{\ln 2} + 2 \right\rceil$ , gde je  $\varepsilon \leq \frac{1}{4}$ . Tabela 4.1 prikazuje neke vrednosti  $h$  (sa preciznošću ne manjom od  $10^{-6}$ ) tako da važi (4.5), za fiksnu vrednost perturbovanog parametra  $\varepsilon$ .

Tabela 4.1: Neke vrednosti parametra  $h$  koje generišu mrežu (4.4)-(4.5);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$M_1$	$h$	$M$
20	0.0505278	286
20	0.0503479	287
20	0.0501693	288
21	0.0499920	289
21	0.0498155	290
21	0.0496402	291



U daljem radu ćemo pretpostavljati da rekurzivno generisana mreža (4.4) zadovoljava (4.5). Jasno, tada važi

$$h_i = \begin{cases} h\varepsilon & \text{za } i \leq M_1 \text{ i } i \geq N - M_1 + 1, \\ hx_{i-1} & \text{za } M_1 < i \leq M, \\ h(1 - x_i) & \text{za } M + 1 \leq i < N - M_1 + 1, \end{cases} \quad (4.6)$$

Razliku dva susedna koraka mreže možemo jednostavno izraziti.

**Lema 4.2.** *Neka je data mreža (4.4)-(4.5). Tada je*

$$|h_i - h_{i-1}| = \begin{cases} 0 & \text{za } i \leq M_1, \text{ i } i = M + 1 \text{ i } i > N - M_1 + 1, \\ hh_{i-1} & \text{za } M_1 + 1 < i \leq M, \\ hh_i & \text{za } M + 1 < i \leq N - M_1, \end{cases}$$

odnosno  $|h_i - h_{i-1}| \leq h^2\varepsilon$ , za  $i = M_1 + 1$  i  $i = N - M_1 + 1$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo prvo da je  $i \leq M + 1$ . U dokazu koristimo da su koraci  $h_i$ ,  $i \leq M$  neopadajući, što sledi iz definicije mreže.

Ako je  $i \leq M_1$ , onda  $h_i - h_{i-1} = 0$ .

Ako je  $i = M_1 + 1$ , onda  $h_i - h_{i-1} = h\varepsilon(M_1h - 1) < h\varepsilon \left( \left( \frac{1}{h} + 1 \right) h - 1 \right) = h^2\varepsilon$ .

Kada je  $M_1 + 1 < i \leq M$ , dobijamo  $h_i - h_{i-1} = hx_{i-1} - hx_{i-2} = hh_{i-1}$ .

Pretpostavka  $i = M + 1$  implicira  $h_{M+1} - h_M = 0$ .

Kako su čvorovi mreže (4.4) simetrični u odnosu na tačku  $1/2$ , to se tvrđenje leme analogno pokazuje i za  $i > M + 1$ . □

**Napomena 4.** *Iako iz teorijskih razloga pretpostavljamo da važi (4.5) u mreži (4.4), numerička testiranja u Glavi 5 ćemo obaviti bez tog zahteva na mreži (4.4). Numerički rezultati dobijeni na mreži (4.4) uz uslov (4.5) se neznatno razlikuju od prikazanih.*

Apriornu ocenu greške treba izraziti u funkciji od  $N$ . Zato je bitno da nađemo i odnos između parametara  $h$  i  $N$ .

**Lema 4.3.** *Ako je rekurzivno generisana mreža definisana sa (4.4) i  $h \leq 1$ , onda je*

$$h < 4N^{-1} \ln \frac{e^2}{2\varepsilon}.$$

*Dokaz.* Posmatraćemo, prvo, mrežu na intervalu  $[x_{M_1+1}, x_{M-1}]$ . Uz pretpostavku da je  $h \leq 1$ , dobijamo

$$M - M_1 - 2 = \sum_{i=M_1+1}^{M-2} \frac{1}{h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \sum_{i=M_1+1}^{M-2} \frac{1}{hx_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \leq \sum_{i=M_1+1}^{M-2} \frac{2}{hx_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx,$$

jer je  $x_{i+1} = x_i + hx_i \leq 2x_i$ , za  $i = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, M - 2$ .

Takođe, jasno je da je  $\frac{1}{x_{i+1}} \leq \frac{1}{x}$ , za sve  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  a odatle je

$$M - M_1 - 2 \leq \sum_{i=M_1+1}^{M-2} \frac{2}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{x} dx \leq \frac{2}{h} \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{1}{x} dx \leq \frac{2}{h} \ln \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Kako je  $M = (M_1 + 1) + (M - M_1 - 2) + 1$ , dobijamo da je

$$\frac{N}{2} = M < \frac{1}{h} + 2 + \frac{2}{h} \ln \frac{1}{2\varepsilon} + 1.$$

Napokon,  $1 \leq \frac{1}{h}$  implicira

$$\frac{N}{2} < \frac{4}{h} + \frac{2}{h} \ln \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{2}{h} \left( 2 + \ln \frac{1}{2\varepsilon} \right),$$

tj. da je

$$N < \frac{4}{h} \ln \frac{e^2}{2\varepsilon}.$$

Odavde, tvrđenje ove leme direktno sledi. □



## SPLAJN KOLOKACIONI POSTUPCI ZA SPP

U ovoj glavi ćemo posmatrati jednodimenzionalni linearni problem reakcije-difuzije koji glasi: Naći  $u \in C^2(0, 1) \cap C[0, 1]$  tako da je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &:= -\varepsilon^2 u''(x) + r(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= g_0, \quad u(1) = g_1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

gde su  $g_0, g_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$  i  $r \geq \varrho^2$  na  $[0, 1]$  za neku konstantu  $\varrho > 0$ . Ovo je složen problem, jer standardni numerički postupci daju loše aproksimacije u slojevima, koji se javljaju u okolinama tačaka  $x = 0$  i  $x = 1$ , gde se rešenje problema (5.1) naglo menja kada perturbovani parametar  $\varepsilon$  teži nuli.

### 5.1 Ograničenja izvoda tačnog rešenja

Bilo koja apriorna analiza postupka diskretizacije zahteva ograničenja izvoda tačnog rešenja  $u$  problema (5.1), videti [39] i [49].

**Lema 5.1.** *Neka su  $r, f \in C^4[0, 1]$ . Tada važi*

$$|u^{(k)}(x)| \leq C \left\{ 1 + \varepsilon^{-k} e^{-\varrho x/\varepsilon} + \varepsilon^{-k} e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon} \right\}, \quad \text{za } x \in (0, 1), \quad k = 0, \dots, 4.$$

Štaviše, tačno rešenje  $u$  se može zapisati u obliku  $u = v + w_0 + w_1$ . Za  $k = 0, \dots, 4$ , regularna komponenta  $v$  zadovoljava  $\|v^{(k)}\|_\infty \leq C$ , dok za slojne komponente  $w_0$  i  $w_1$  važi:

$$|w_0^{(k)}(x)| \leq C \varepsilon^{-k} e^{-\varrho x/\varepsilon}, \quad |w_1^{(k)}(x)| \leq C \varepsilon^{-k} e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}, \quad x \in [0, 1].$$

### 5.2 Grinova funkcija

Sada ćemo uvesti Grinovu funkciju [19] za operator  $\mathcal{L}u$  koja za svako  $\xi \in (0, 1)$  zadovoljava

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathcal{G}(x, \xi) &= -\varepsilon^2 \mathcal{G}_{xx}(x, \xi) + r(x)\mathcal{G}(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad x \in (0, 1), \\ \mathcal{G}(0, \xi) &= \mathcal{G}(1, \xi) = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

gde je  $\delta(\cdot)$  Dirak  $\delta$ -distribucija. Štaviše, svaka funkcija  $v \in W^{1, \infty}(0, 1)$  za koju je  $v(0) = v(1) = 0$ , može se predstaviti kao

$$v(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi) (\mathcal{L}v)(\xi) d\xi. \quad (5.3)$$

Kako je  $\mathcal{L}$  samoadjungovani operator, to  $\mathcal{G}$  rešava, za fiksno  $x \in (0, 1)$ , sledeći problem

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \mathcal{G}_{\xi\xi}(x, \xi) + r(\xi)\mathcal{G}(x, \xi) &= \delta(\xi - x), \quad \xi \in (0, 1), \\ \mathcal{G}(x, 0) &= \mathcal{G}(x, 1) = 0. \end{aligned}$$

Sledeća lema nam za funkciju  $\mathcal{G}$  i njegov izvod daje ograničenja u  $L_1$ -normi [39, Th. 3.31].

**Lema 5.2.** *Grinova funkcija  $\mathcal{G}$  koja zadovoljava (5.2), zadovoljava i sledeća ograničenja:*

$$\max_{x \in (0,1)} \|r\mathcal{G}(x, \cdot)\|_1 \leq 1, \quad (5.4a)$$

$$\max_{x \in (0,1)} \|\mathcal{G}_\xi(x, \cdot)\|_1 \leq \frac{1}{\varrho\varepsilon}, \quad (5.4b)$$

gde je  $\|v\|_1 := \int_0^1 |v(x)|dx$ .

### 5.3 Kolokacioni postupak sa kvadratnim $C^1$ -splajnom

U ovom poglavlju ćemo analizirati kolokacije sa kvadratnim  $C^1$ -splajnom. Naš glavni zadatak je oceniti grešku ovog postupka apriorinom i aposteriornom ocenom. Ali prvo, moramo naći odgovarajuće ocene za granice greške kvadratnih  $C^0$  i  $C^1$ -interpolacionih splajnova za rešenje  $u$  i njegov drugi izvod.

#### 5.3.1 Greška interpolacije

U ovom delu disertacije, razmatramo  $S_2^0$  i  $S_2^1$ -interpolaciju, na dve mreže – na modifikovanoj Šiškinovoj i na rekurzivno generisanoj mreži. Nažalost, standardne Šiškinova mreža i mreža Bahvalova ne zadovoljavaju sva ograničenja koja ćemo prezentovati.

##### 5.3.1.1 $S_2^0$ -interpolacija

Prvo, razmotrimo grešku interpolacije  $I_2^0 u - u$ . Granice ove greške na modifikovanoj Šiškinovoj mreži date su u sledećoj teoremi.

**Teorema 5.3.** *Neka su  $r, f \in C^4[0, 1]$ . Tada greška interpolacije  $I_2^0 u - u$  za rešenje problema (5.1) na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, koja je generisana sa funkcijom (4.2) i gde je  $\sigma \geq 3$ , zadovoljava sledeća ograničenja:*

$$\|u - I_2^0 u\|_\infty \leq CN^{-3} \ln^3 N \quad (5.5a)$$

*i*

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, \dots, N} \left| (u - I_2^0 u)''_{i-1/2} \right| \leq CN^{-2} \ln^2 N. \quad (5.5b)$$

*Dokaz.* Slično dekompoziciji datoj u Lemi 5.1, grešku interpolacije možemo prikazati kao

$$u - I_2^0 u = (v - I_2^0 v) + (w_0 - I_2^0 w_0) + (w_1 - I_2^0 w_1), \quad (5.6)$$

zbog linearnosti  $I_2^0$ . Dalje ćemo svaki sabirak sa desne strane poslednje jednakosti razmatrati pojedinačno.

Prvo, dokažimo (5.5a). Za regularnu komponentu  $v$ , ograničenje (3.6b) i Lema 5.1 daju

$$\|v - I_2^0 v\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|v'''\|_{\infty, J_i} \leq CN^{-3}, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N,$$

zbog  $h_i \leq CN^{-1}$ , koje sledi iz (4.3a), pa je i

$$\|v - I_2^0 v\|_{\infty} \leq CN^{-3}.$$

Za slojnu komponentu  $w_0$ , razmatramo dva slučaja. Ako je  $J_i \subset [0, \tau]$ , onda su zbog (4.3b) koraci te mreže  $h_i \leq C\varepsilon N^{-1} \ln N$ , pa je

$$\|w_0 - I_2^0 w_0\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|w_0'''\|_{\infty, J_i} \leq C (\varepsilon N^{-1} \ln N)^3 \varepsilon^{-3} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq CN^{-3} \ln^3 N,$$

zbog (3.6b) i Leme 5.1. Odatle je i

$$\|w_0 - I_2^0 w_0\|_{\infty, [0, \tau]} \leq CN^{-3} \ln^3 N.$$

Neka je  $J_i \subset [\tau, 1]$ . Tada dobijamo

$$\|w_0 - I_2^0 w_0\|_{\infty, J_i} \leq \frac{9}{4} \|w_0\|_{\infty, J_i} \leq Ce^{-\varrho\tau/\varepsilon} = Ce^{-\sigma \ln N} \leq CN^{-\sigma} \leq CN^{-3},$$

iz (3.6a), Leme 5.1, monotonosti eksponencijalne funkcije  $w_0$  i zbog  $\sigma \geq 3$  (što je ovde neophodan uslov). Jasno, odavde sledi da je

$$\|w_0 - I_2^0 w_0\|_{\infty, [\tau, 1]} \leq CN^{-3}.$$

Sličnu ocenu možemo dobiti i za  $w_1 - I_2^0 w_1$ . Ako je  $J_i \subset [0, 1 - \tau]$ , onda imamo

$$\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, J_i} \leq \frac{9}{4} \|w_1\|_{\infty, J_i} \leq Ce^{-\varrho(1-(1-\tau))/\varepsilon} = Ce^{-\sigma \ln N} \leq CN^{-\sigma} \leq CN^{-3},$$

opet iz (3.6a), Leme 5.1 i monotonosti eksponencijalne funkcije  $w_1$ . Dalje dobijamo da je

$$\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, [0, 1-\tau]} \leq CN^{-3}.$$

Na kraju, neka je  $J_i \subset [1 - \tau, 1]$ . Tada važi

$$\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|w_1'''\|_{\infty, J_i} \leq C (\varepsilon N^{-1} \ln N)^3 \varepsilon^{-3} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq CN^{-3} \ln^3 N,$$

jer važe (3.6b), (4.3b) i Lema 5.1. Dakle, važi i

$$\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, [1-\tau, 1]} \leq CN^{-3} \ln^3 N.$$

Napokon, nejednakost trougla daje (5.5a), tj.

$$\begin{aligned} \|u - I_2^0 u\|_\infty &= \|v - I_2^0 v\|_\infty + \|w_0 - I_2^0 w_0\|_\infty + \|w_1 - I_2^0 w_1\|_\infty \leq CN^{-3} + CN^{-3} \ln^3 N \\ &\leq CN^{-3} \ln^3 N. \end{aligned}$$

Sličnom tehnikom dokazujemo i (5.5b). Regularna komponenta zadovoljava

$$\left| (v - I_2^0 v)''_{i-1/2} \right| \leq \frac{h_i^2}{48} \|v^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq CN^{-2}, \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, N,$$

zbog (3.6b), (4.3a) i Leme 5.1. Shodno tome,

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, \dots, N} \left| (v - I_2^0 v)''_{i-1/2} \right| \leq CN^{-2}.$$

Ponovo, ocenu greške interpolacije za slojnu komponentu  $w_0$  delimo na dva slučaja. Ako je  $i \leq qN$ , onda je  $J_i \subset [0, \tau]$ . Tada važi

$$\varepsilon^2 \left| (w_0 - I_2^0 w_0)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \frac{h_i^2}{48} \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq C\varepsilon^2 (\varepsilon N^{-1} \ln N)^2 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq CN^{-2} \ln^2 N,$$

zbog (3.6b), (4.3b) i Leme 5.1, pa je

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, \dots, qN} \left| (w_0 - I_2^0 w_0)''_{i-1/2} \right| \leq CN^{-2} \ln^2 N.$$

Neka je, sada,  $i > qN$ . Tada je  $J_i \subset [\tau, 1]$  i

$$\varepsilon^2 \left| (w_0 - I_2^0 w_0)''_{i-1/2} \right| \leq 2\varepsilon^2 \|w_0''\|_{\infty, J_i} \leq C e^{-\varrho\tau/\varepsilon} = C e^{-\sigma \ln N} \leq CN^{-\sigma} \leq CN^{-2},$$

zbog (3.6a), Leme 5.1, monotonosti eksponencijalne funkcije  $w_0$  i zbog  $\sigma \geq 3 > 2$ . Odatle je

$$\varepsilon^2 \max_{i=qN+1, \dots, N} \left| (w_0 - I_2^0 w_0)''_{i-1/2} \right| \leq CN^{-2}.$$

Slično, analizu za slojnu komponentnu  $w_1$  delimo u dva različita slučaja. Ako je  $i \leq N(1 - q)$ , onda  $J_i \subset [0, 1 - \tau]$ , pa je

$$\varepsilon^2 \left| (w_1 - I_2^0 w_1)''_{i-1/2} \right| \leq 2\varepsilon^2 \|w_1''\|_{\infty, J_i} = C e^{-\varrho(1-(1-\tau))/\varepsilon} \leq CN^{-\sigma} \leq CN^{-2},$$

ponovo zbog (3.6a), Leme 5.1, monotonosti eksponencijalne funkcije  $w_1$  i zbog  $\sigma \geq 3 > 2$ . Odavde sledi

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, \dots, N(1-q)} \left| (w_1 - I_2^0 w_1)''_{i-1/2} \right| \leq CN^{-2}.$$

I na kraju, neka je  $i > N(1 - q)$ . Tada  $J_i \subset [1 - \tau, 1]$  i

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left| (w_1 - I_2^0 w_1)''_{i-1/2} \right| &\leq \varepsilon^2 \frac{h_i^2}{48} \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq C\varepsilon^2 (\varepsilon N^{-1} \ln N)^2 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \\ &\leq CN^{-2} \ln^2 N, \end{aligned}$$

zbog (3.6b), (4.3b) i Leme 5.1, pa je i

$$\varepsilon^2 \max_{i=N(1-q)+1, \dots, N} \left| (w_1 - I_2^0 w_1)''_{i-1/2} \right| \leq CN^{-2} \ln^2 N.$$

Ponovo, dokaz za ograničenje (5.5b) završavamo primenom nejednakosti trougla.  $\square$

Pre nego što damo i ocene greške interpolacije na rekurzivno generisanoj mreži, pokažimo prvo osobine iz naredne leme.

**Lema 5.4.** *Komponente  $w_0$  i  $w_1$  tačnog rešenja u zadovoljavaju ograničenja:*

$$\varepsilon^l \left\| x^k \frac{d^{l+k} w_0}{dx^{l+k}} \right\|_{\infty, J_i} \leq C \quad (5.7a)$$

i

$$\varepsilon^l \left\| (1-x)^k \frac{d^{l+k} w_1}{dx^{l+k}} \right\|_{\infty, J_i} \leq C, \quad (5.7b)$$

gde su  $l, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $l+k \leq 4$  i  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ .

*Dokaz.* Lema 5.1 nam daje

$$\varepsilon^l \left\| x^k \frac{d^{l+k} w_0}{dx^{l+k}} \right\|_{\infty, J_i} \leq C \|\varepsilon^{-k} x^k e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i}.$$

Ako je  $k = 0$ , onda prvi deo tvrđenja ove leme sledi direktno.

Neka je  $k > 0$ . Označimo sa  $s_0(x) = \varepsilon^{-k} x^k e^{-\varrho x/\varepsilon}$ . Da bismo našli maksimum ove funkcije, neophodno je da prvo nađemo njen prvi izvod. Lako se dobija da je

$$s'_0(x) = \varepsilon^{-k-1} x^{k-1} e^{-\varrho x/\varepsilon} (k\varepsilon - x\varrho),$$

pa sledi da funkcija  $s_0$  ima maksimum u tački  $x = k\varepsilon/\varrho$ . Zbog toga je

$$\|\varepsilon^{-k} x^k e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq s_0\left(\frac{k\varepsilon}{\varrho}\right) = \varepsilon^{-k} \left(\frac{k\varepsilon}{\varrho}\right)^k e^{-k} \leq C,$$

odakle sledi (5.7a).

Analizirajmo sada i (5.7b). Iz Leme 5.1 dobijamo

$$\varepsilon^l \left\| (1-x)^k \frac{d^{l+k} w_1}{dx^{l+k}} \right\|_{\infty, J_i} \leq C \|\varepsilon^{-k} (1-x)^k e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i}.$$

Neka je  $s_1(x) = \varepsilon^{-k} (1-x)^k e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}$ . Očigledno je

$$s'_1(x) = \varepsilon^{-k-1} (1-x)^{k-1} e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon} (k\varepsilon + \varrho(1-x)),$$



a potom i da funkcija  $s_1$  dostiže svoju maksimalnu vrednost u tački  $x = 1 - k\varepsilon/\varrho$ . Zbog toga je

$$\|\varepsilon^{-k}(1-x)^k e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq s_1 \left(1 - \frac{k\varepsilon}{\varrho}\right) \leq C.$$

□

Takođe, lako se pokazuje da je

$$f_i(\varepsilon) = \varepsilon^{-i} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq f_i \left(\frac{\varrho}{2i}\right) \leq C, \quad \text{za } \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (5.8)$$

što je ograničenje koje ćemo koristiti u analizi greške interpolacije na rekurzivno generisanoj mreži.

**Teorema 5.5.** *Neka je  $r, f \in C^4[0, 1]$ . Tada greška interpolacije  $I_2^0 u - u$  za rešenje problema (5.1) na rekurzivno generisanoj mreži (4.4)-(4.5) zadovoljava ograničenja:*

$$\|u - I_2^0 u\|_{\infty} \leq Ch^3 \quad (5.9a)$$

*i*

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, \dots, N} \left| (u - I_2^0 u)''_{i-1/2} \right| \leq Ch^2. \quad (5.9b)$$

*Dokaz.* Kao i u prethodnom tvrđenju iskoristićemo dekompoziciju tačnog rešenja  $u$ , dato sa (5.6).

Regularna komponentna  $v$  zadovoljava

$$\|v - I_2^0 v\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|v'''\|_{\infty, J_i} \leq Ch_i^3 \leq Ch^3,$$

zbog (3.6b), (4.6) i Leme 5.1.

Podelimo dokaz za komponentu  $w_0$  u tri slučaja. Prvo, ako je  $J_i \subset [0, x_{M_1}]$ , tada je  $h_i = h\varepsilon$  i

$$\|w_0 - I_2^0 w_0\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|w_0'''\|_{\infty, J_i} \leq C(h\varepsilon)^3 \varepsilon^{-3} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3,$$

što sledi iz (3.6b) i Leme 5.1. Dalje, neka je  $J_i \subset [x_{M_1}, x_M]$ . Tada, iz (4.6) imamo  $h_i = hx_{i-1} \leq hx$ , za  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . Odatle i iz (3.6b) dobijamo i ograničenje

$$\|w_0 - I_2^0 w_0\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h^3 x_{i-1}^3}{72\sqrt{3}} \|w_0'''\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3 \|x^3 w_0'''\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3,$$

zbog (5.7a). Na kraju, neka je  $J_i \subset [x_M, x_N]$ . Tada je

$$\|w_0 - I_2^0 w_0\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|w_0'''\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3 \|\varepsilon^{-3} e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3 \varepsilon^{-3} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq Ch^3,$$

zbog (4.6), Leme 5.1 i (5.8).

Sličnu ocenu dobijamo i za  $\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, J_i}$ . Neka je  $J_i \subset [0, x_M]$ . Tada, (4.6), Lema 5.1 i (5.8) daju

$$\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h_i^3}{72\sqrt{3}} \|w_1'''\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3 \varepsilon^{-3} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3 \varepsilon^{-3} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq Ch^3.$$

Ako je  $J_i \subset [x_M, x_{N-M_1}]$ , onda je

$$\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, J_i} \leq \frac{h^3(1-x_i)^3}{72\sqrt{3}} \|w_1'''\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3 \|(1-x)^3 w_1'''\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3,$$

što sledi iz (4.6), Leme 5.1 i (5.7b).

Pretpostavimo dalje da je  $J_i \subset [x_{N-M_1}, 1]$ . U ovom slučaju važi  $h_i = h\varepsilon$ , pa dobijamo

$$\|w_1 - I_2^0 w_1\|_{\infty, J_i} \leq C(h\varepsilon)^3 \varepsilon^{-3} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^3,$$

opet zbog (3.6b) i Leme 5.1.

Dokaz za (5.9a), sledi sada iz nejednakosti trougla i prethodnih ograničenja.

Dokažimo i (5.9b). Regularna komponentna  $v$  tačnog rešenja zadovoljava

$$\varepsilon^2 \left| (v - I_2^0 v)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \frac{h_i^2}{48} \|v^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq Ch_i^2 \leq Ch^2,$$

zbog (3.6b), (4.6) i Leme 5.1.

Posmatrajmo, sada, slojnu komponentu  $w_0$ . Na svakom intervalu  $J_i \subset [0, x_{M_1}]$  dobijamo

$$\varepsilon^2 \left| (w_0 - I_2^0 w_0)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \frac{h_i^2}{48} \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq C\varepsilon^2 h_i^2 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq C\varepsilon^2 (\varepsilon h)^2 \varepsilon^{-4} \leq Ch^2,$$

što opet sledi iz (3.6b), (4.6) i Leme 5.1.

Neka je  $J_i \subset [x_{M_1}, 1/2]$ . Tada je  $h_i = hx_{i-1} \leq hx$ , za  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  i

$$\varepsilon^2 \left| (w_0 - I_2^0 w_0)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \frac{h_i^2}{48} \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^2 \varepsilon^2 \|x^2 w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^2,$$

zbog (3.6b), Leme 5.1 i (5.7a). Ako je  $J_i \subset [1/2, 1]$ , tada je

$$\varepsilon^2 \left| (w_0 - I_2^0 w_0)''_{i-1/2} \right| \leq C\varepsilon^2 h_i^2 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq Ch_i^2 \varepsilon^{-2} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq Ch^2,$$

zbog (3.6b), (4.6), Leme 5.1 i (5.8).

Za slojnu komponentu  $w_1$  na svakom  $J_i \subset [0, 1/2]$ , iz (3.6b), (4.6), Leme 5.1 i (5.8) dobijamo sledeće ograničenje

$$\varepsilon^2 \left| (w_1 - I_2^0 w_1)''_{i-1/2} \right| \leq C\varepsilon^2 h_i^2 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq Ch_i^2 \varepsilon^{-2} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq Ch^2.$$

Neka je  $J_i \subset [1/2, 1 - x_{M_1}]$ . Tada, iz (4.6) dobijamo  $h_i = h(1-x_i) \leq h(1-x)$ , za  $x \in J_i$  i

$$\varepsilon^2 \left| (w_1 - I_2^0 w_1)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \frac{h^2(1-x_i)^2}{48} \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^2 \varepsilon^2 \|(1-x)^2 w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^2,$$

zbog (3.6b), Leme 5.1 i (5.7b). Poslednja mogućnost je  $J_i \subset [1 - x_{M_1}, 1]$ . U ovom slučaju je  $h_i = h\varepsilon$ , pa važi

$$\varepsilon^2 \left| (w_1 - I_2^0 w_1)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \frac{h_i^2}{48} \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} \leq C\varepsilon^2 (h\varepsilon)^2 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} \leq Ch^2,$$

zbog (3.6b), (4.6) i Leme 5.1. Primenom nejednakosti trougla, lako dalje dobijamo (5.9b).  $\square$

### 5.3.1.2 $\mathcal{S}_2^1$ -interpolacija

U ovom delu disertacije analiziraćemo grešku interpolacije  $I_2^1 u - u$  na modifikovanoj Šiškinovoj mreži i rekurzivno generisanoj mreži.

**Teorema 5.6.** *Neka je  $r, f \in C^4[0, 1]$ . Tada greška interpolacije za rešenje  $u$  problema (5.1) na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, koja je generisana sa funkcijom (4.2) i gde je  $\sigma \geq 4$ , zadovoljava:*

$$\max_{i=0, \dots, N} |(u - I_2^1 u)_i| \leq CN^{-4} \ln^4 N, \quad (5.10a)$$

$$\|u - I_2^1 u\|_\infty \leq CN^{-3} \ln^3 N, \quad (5.10b)$$

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, \dots, N} |(u - I_2^1 u)''_{i-1/2}| \leq CN^{-2} \ln^2 N. \quad (5.10c)$$

*Dokaz.* (a) Grešku interpolacije opet možemo zapisati u obliku

$$u - I_2^1 u = (v - I_2^1 v) + (w_0 - I_2^1 w_0) + (w_1 - I_2^1 w_1). \quad (5.11)$$

Sva tri sabirka ćemo analizirati pojedinačno. Iz (3.9b) i (3.10) sledi

$$|\tau_{g,i}| \leq Ch_i h_{i+1} |h_{i+1} - h_i| |g_i''''| + C \max\{h_i^4, h_{i+1}^4\} \|g^{(4)}\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}}, \quad (5.12)$$

za svako  $g \in C^4[0, 1]$ . Ograničenja (4.3a), (4.3c) i Lema 5.1 daju  $|\tau_{v,i}| \leq CN^{-4}$ , za  $i = 1, \dots, N-1$ , pa iz Leme 3.7 i  $(v - I_2^1 v)_0 = (v - I_2^1 v)_N = 0$  sledi

$$|(v - I_2^1 v)_i| \leq CN^{-4}, \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, N.$$

Za slojnu komponentu  $w_0$ , dokaz opet delimo po slučajevima. Prvo, neka je  $i < qN$ , tj.  $h_i = h_{i+1} \leq C\varepsilon N^{-1} \ln N$ , odakle sledi

$$\begin{aligned} |\tau_{w_0,i}| &\leq C \max\{h_i^4, h_{i+1}^4\} \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}} \leq C(\varepsilon N^{-1} \ln N)^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}} \\ &\leq CN^{-4} \ln^4 N, \end{aligned}$$

zbog (5.12) i Leme 5.1.

Za  $i \geq qN$ , iz (3.9a) i monotonosti eksponencijalne funkcije  $w_0$  imamo

$$|\tau_{w_0,i}| \leq 8 \|w_0\|_{J_i \cup J_{i+1}} \leq C e^{-\varrho x_{qN-1}/\varepsilon} \leq e^{-\varrho(\tau - h_{qN})/\varepsilon} \leq CN^{-\sigma} N^{\sigma/(qN)} \leq CN^{-4}.$$

Ovaj slučaj pokazuje da uslov  $\sigma \geq 4$  ne može biti slabiji.

Dalje je  $|\tau_{w_0,i}| \leq CN^{-4} \ln^4 N$ , za  $i = 1, 2, \dots, N-1$ . Sada,  $(w_0 - I_2^1 w_0)_0 = (w_0 - I_2^1 w_0)_N = 0$  i Lema 3.7 impliciraju

$$|(w_0 - I_2^1 w_0)_i| \leq CN^{-4} \ln^4 N, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Posmatrajmo sada  $|(w_1 - I_2^1 w_1)_i|$ . Prvo, neka je  $i \leq N(1 - q)$ . Odavde je

$$\begin{aligned} |\tau_{w_1, i}| &\leq 8 \|w_1\|_{J_i \cup J_{i+1}} \leq C e^{-\varrho(1-x_{N(1-q)+1})/\varepsilon} \leq C e^{-\varrho(\tau-h_{N(1-q)+1})/\varepsilon} \leq C N^{-\sigma} N^{\sigma/(qN)} \\ &\leq C N^{-4}, \end{aligned}$$

zbog (3.9a), Leme 5.1 i monotonosti eksponencijalne funkcije  $w_1$ . Za  $i > N(1 - q)$ , znamo da je  $h_i = h_{i+1} \leq C \varepsilon N^{-1} \ln N$ , pa je

$$\begin{aligned} |\tau_{w_1, i}| &\leq C \max\{h_i^4, h_{i+1}^4\} \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}} \leq C (\varepsilon N^{-1} \ln N)^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i \cup J_{i+1}} \\ &\leq C N^{-4} \ln^4 N, \end{aligned}$$

zbog Leme 5.1. Direktna posledica ovoga je  $|\tau_{w_1, i}| \leq C N^{-4} \ln^4 N$ , za  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ . Iz Leme 3.7 i  $(w_1 - I_2^1 w_1)_0 = (w_1 - I_2^1 w_1)_N = 0$  sledi

$$|(w_1 - I_2^1 w_1)_i| \leq C N^{-4} \ln^4 N, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Konačno, koristeći dekompoziciju (5.11) i nejednakost trougla, dobijamo (5.10a).

(b) Nejednakost trougla nam daje

$$\|u - I_2^1 u\|_{\infty} \leq \|u - I_2^0 u\|_{\infty} + \|I_2^0 u - I_2^1 u\|_{\infty} \leq \|u - I_2^0 u\|_{\infty} + \max_{i=0, \dots, N} |(I_2^0 u - I_2^1 u)_i|,$$

zbog Leme 3.6. Dalje, iz  $(I_2^0 u)_i = u_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , dobijamo

$$\begin{aligned} \|u - I_2^1 u\|_{\infty} &\leq C N^{-3} \ln^3 N + \max_{i=0, \dots, N} |(u - I_2^1 u)_i| \leq C N^{-3} \ln^3 N + C N^{-4} \ln^4 N \\ &\leq C N^{-3} \ln^3 N, \end{aligned}$$

zbog (5.5a) i (5.10a).

(c) Polazeći opet od nejednakosti trougla, dobijamo

$$\varepsilon^2 \left| (u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \left| (u - I_2^0 u)''_{i-1/2} \right| + \varepsilon^2 \left| (I_2^0 u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right|. \quad (5.13)$$

Kako je  $(I_2^0 u - I_2^1 u)_{i-1/2} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , i  $(I_2^0 u)_i = u_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , iz Leme 3.6 sledi

$$\varepsilon^2 \left| (I_2^0 u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right| \leq \frac{8\varepsilon^2}{h_i^2} \max \left\{ |(u - I_2^1 u)_{i-1}|, |(u - I_2^1 u)_i| \right\},$$

pa dobijamo

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \max_{i=1, 2, \dots, N} \left| (I_2^0 u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right| &\leq \max_{i=1, 2, \dots, N} \frac{8\varepsilon^2}{h_i^2} |(u - I_2^1 u)_i| \leq C \frac{q^2 \varrho^2 N^2}{\sigma^2 \ln^2 N} N^{-4} \ln^4 N \\ &\leq C N^{-2} \ln^2 N, \end{aligned}$$

zbog (4.3d) i (5.10a).

Kombinacijom (5.5b) i (5.13), dobijamo

$$\varepsilon^2 \max_{i=1,2,\dots,N} \left| (u - I_2^0 u)''_{i-1/2} \right| \leq CN^{-2} \ln^2 N.$$

□

Sada, posmatrajmo grešku interpolacije  $u - I_2^1 u$  i na rekurzivno generisanoj mreži.

**Teorema 5.7.** *Neka je  $r, f \in C^4[0, 1]$ . Tada greška interpolacije za rešenje  $u$  problema (5.1) na rekurzivno generisanoj mreži (4.4)-(4.5), zadovoljava:*

$$\max_{i=0,\dots,N} |(u - I_2^1 u)_i| \leq Ch^4, \quad (5.14a)$$

$$\|u - I_2^1 u\|_\infty \leq Ch^3, \quad (5.14b)$$

$$\varepsilon^2 \max_{i=1,\dots,N} \left| (u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right| \leq Ch^2. \quad (5.14c)$$

*Dokaz.* (a) Kao i u prethodnim dokazima, polazimo od dekompozicije greške interpolacije (5.11).

Za regularnu komponentu  $v$  tačnog rešenja  $u$ , dobijamo

$$|\tau_{v,i}| \leq \frac{1}{12} h_i h_{i+1} |h_{i+1} - h_i| |v_i''''| + \frac{5}{96} h_i^4 \|v^{(4)}\|_{\infty, J_i} + \frac{5}{96} h_{i+1}^4 \|v^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \leq Ch^4,$$

zbog (3.9b), (4.6), Leme 4.2 i Leme 5.1. Analizu interpolacione greške za  $w_0$  razdvajamo u sedam slučajeva.

(i) Neka je  $i < M_1$ . Tada, iz Leme 5.1 dobijamo

$$\begin{aligned} |\tau_{w_0,i}| &\leq \frac{1}{12} h_i h_{i+1} |h_{i+1} - h_i| |w_{0,i}''''| + \frac{5}{96} h_i^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} + \frac{5}{96} h_{i+1}^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq C(\varepsilon h)^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} + C(\varepsilon h)^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_{i+1}} \leq Ch^4, \end{aligned}$$

jer važi  $h_{i+1} - h_i = 0$  i (4.6).

(ii) Neka je  $i = M_1$ . Tada je  $|h_{i+1} - h_i| = |h_{M_1+1} - h_{M_1}| \leq h^2 \varepsilon$ , zbog Leme 4.2. Takođe je  $h_i \leq h_{i+1} = hx_i \leq hx$ , za  $x \in J_{i+1}$ , pa je

$$\begin{aligned} |\tau_{w_0,i}| &\leq Ch_i h_{i+1} h^2 \varepsilon |w_{0,i}''''| + C(\varepsilon h)^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} + Ch^4 x_i^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq Ch^4 \varepsilon \|x^2 w_0''''\|_{\infty, J_{i+1}} + Ch^4 + Ch^4 \|x^4 w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \leq Ch^4, \end{aligned}$$

zbog (3.9b), (5.7a) i Leme 5.1.

(iii) Neka je  $M_1 < i \leq M - 1$ . Tada iz (4.6) i (5.7a) dobijamo

$$\begin{aligned} |\tau_{w_0,i}| &\leq Ch_i h_{i+1} h |w_{0,i}''''| + Ch^4 x_{i-1}^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch^4 x_i^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq Ch_{i+1}^3 h \|w_0''''\|_{\infty, J_{i+1}} + Ch^4 (\|x^4 w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} + \|x^4 w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}}) \\ &\leq Ch^4 \|x^3 w_0''''\|_{\infty, J_{i+1}} + Ch^4 \leq Ch^4, \end{aligned}$$

zbog  $h_{i+1} = hx_i \leq hx$ , za  $x \in J_{i+1}$ .

(iv) Neka je  $i = M$ . Kako je  $h_{i+1} - h_i = 0$ , tj.  $h_{M+1} = h_M = hx_{M-1}$ , to je

$$\begin{aligned} |\tau_{w_0, M}| &\leq Ch_M^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_M} + Ch_{M+1}^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{M+1}} \leq Ch^4 x_{M-1}^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_M \cup J_{M+1}} \\ &\leq Ch^4 \|x^4 w_0^{(4)}\|_{\infty, J_M \cup J_{M+1}} \leq Ch^4, \end{aligned}$$

zbog  $x_{M-1} \leq x$ , za sve  $x \in J_M \cup J_{M+1}$  i zbog (5.7a).

(v) Sledeća mogućnost je  $M < i < N - M_1$ . Tada je  $x > 1/2$ , pa iz (4.6) i (5.8) sledi

$$\begin{aligned} |\tau_{w_0, i}| &\leq Ch_i h_{i+1} h h_{i+1} \varepsilon^{-3} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} + Ch_i^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch_{i+1}^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq Ch^4 \varepsilon^{-3} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} + Ch^4 \varepsilon^{-4} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq Ch^4. \end{aligned}$$

(vi) Neka je  $i = N - M_1$ . Tada je  $|h_{i+1} - h_i| \leq h^2 \varepsilon$  i  $h_{i+1} = h\varepsilon$  pa opet zbog (4.6) i (5.8) važi

$$\begin{aligned} |\tau_{w_0, i}| &\leq Ch_i h_{i+1} (h^2 \varepsilon) \varepsilon^{-3} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} + Ch_i^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch_{i+1}^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq Ch^4 \varepsilon^{-1} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} + Ch^4 \varepsilon^{-4} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} + Ch^4 \leq Ch^4. \end{aligned}$$

(vii) Poslednji slučaj je  $i > N - M_1$ . Tada je  $h_{i+1} = h_i = h\varepsilon$ , pa lako dobijamo

$$|\tau_{w_0, i}| \leq Ch_i^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch_{i+1}^4 \|w_0^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \leq Ch^4.$$

Sledi  $|\tau_{w_0, i}| \leq Ch^4$ , za sve  $i = 1, 2, \dots, N-1$ . Sličnim razmatranjem dolazimo i do ocene za  $|\tau_{w_1, i}|$ .

(i) Neka je  $i < M_1$ . Kako je  $h_{i+1} = h_i = h\varepsilon$ , to se lako dobija

$$|\tau_{w_1, i}| \leq Ch_i^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch_{i+1}^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \leq Ch^4.$$

(ii) Ako je  $i = M_1$ , onda je  $|h_{i+1} - h_i| \leq h^2 \varepsilon$ , pa nam (4.6) i (5.8) daju

$$|\tau_{w_1, i}| \leq Ch^4 \varepsilon^{-1} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} + Ch^4 \varepsilon^{-4} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq Ch^4.$$

(iii) Pretpostavimo, dalje, da je  $M_1 < i < M$ . Tada, opet iz (4.6) i (5.8), sledi

$$|\tau_{w_1, i}| \leq Ch^4 \varepsilon^{-3} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} + Ch^4 \varepsilon^{-4} e^{-\varrho/(2\varepsilon)} \leq Ch^4.$$

(iv) Neka je  $i = M$ . Tada je  $h_i = h_{i+1}$ , tj.  $h_M = h_{M+1}$  i

$$\begin{aligned} |\tau_{w_1, M}| &\leq Ch_{M+1}^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_M} + Ch_{M+1}^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_{M+1}} \leq Ch^4 (1 - x_{M+1})^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_M \cup J_{M+1}} \\ &\leq Ch^4 \|(1-x)^4 w_1^{(4)}\|_{\infty, J_M \cup J_{M+1}} \leq Ch^4, \end{aligned}$$

zbog  $x \leq x_{M+1}$  za sve  $x \in J_M \cup J_{M+1}$  i (5.7b).

(v) Neka je  $M+1 \leq i < N - M_1$ . Tada je  $h_{i+1} < h_i$  i

$$\begin{aligned} |\tau_{w_1, i}| &\leq Ch_i h_{i+1} h h_{i+1} |w_1'''| + Ch^4 (1 - x_i)^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch^4 (1 - x_{i+1})^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq Ch_i^3 h \|w_1'''\|_{\infty, J_i} + Ch^4 (\|(1-x)^4 w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} + \|(1-x)^4 w_1^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}}) \\ &\leq Ch^4 \|(1-x)^3 w_1'''\|_{\infty, J_i} + Ch^4 \leq Ch^4, \end{aligned}$$

opet zbog (4.6) i Leme 5.4.

(vi) Pretpostavimo da je  $i = N - M_1$ . Tada je  $|h_{i+1} - h_i| \leq h^2\varepsilon$  i  $h_{i+1} \leq h_i = h(1 - x_i) \leq h(1 - x)$ , za  $x \in J_i$ , pa je

$$\begin{aligned} |\tau_{w_1,i}| &\leq Ch_i h_{i+1} h^2 \varepsilon |w_{1,i}''''| + Ch^4 (1 - x_i)^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} + C\varepsilon^4 h^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho x/\varepsilon}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq Ch^4 \varepsilon^2 \|(1 - x)w_1''''\|_{\infty, J_i} + Ch^4 \|(1 - x)^4 w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch^4 \leq Ch^4, \end{aligned}$$

zbog Leme 5.4 i (5.8).

(vii) Poslednja mogućnost je  $i > N - M_1$ . Tada je  $h_{i+1} - h_i = 0$  i

$$\begin{aligned} |\tau_{w_1,i}| &\leq Ch_i^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_i} + Ch_{i+1}^4 \|w_1^{(4)}\|_{\infty, J_{i+1}} \\ &\leq C\varepsilon^4 h^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_i} + C\varepsilon^4 h^4 \varepsilon^{-4} \|e^{-\varrho(1-x)/\varepsilon}\|_{\infty, J_{i+1}} \leq Ch^4, \end{aligned}$$

zbog (4.6).

Iz prethodnih ograničenja, Leme 3.7 i nejednakosti trougla dobijamo (5.14a).

(b) Sada ćemo pokazati tvrđenje (5.14b), slično dokazu prethodne teoreme. Jasno je da važi

$$\begin{aligned} \|u - I_2^1 u\|_{\infty} &\leq \|u - I_2^0 u\|_{\infty} + \|I_2^0 u - I_2^1 u\|_{\infty} \leq \|u - I_2^0 u\|_{\infty} + \max_{i=0, \dots, N} |(u - I_2^1 u)_i| \\ &\leq Ch^3 + Ch^4 \leq Ch^3, \end{aligned}$$

zbog Leme 3.6, (5.14a) i (5.9a).

(c) Na kraju, dokažimo da važi i (5.14c). Ponovo je

$$\varepsilon^2 \left| (u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right| \leq \varepsilon^2 \left| (u - I_2^0 u)''_{i-1/2} \right| + \varepsilon^2 \left| (I_2^0 u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right|, \quad (5.15)$$

pa iz Leme 3.6 dobijamo

$$\varepsilon^2 \left| (I_2^0 u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right| \leq \frac{8\varepsilon^2}{h_i^2} \max \left\{ \left| (u - I_2^1 u)_{i-1} \right|, \left| (u - I_2^1 u)_i \right| \right\}.$$

Ako je  $i \leq M_1$  ili  $i \geq N - M_1 + 1$  onda je  $h_i = h\varepsilon$ . U suprotnom,  $h_{N-i+1} = h_i = hx_i \geq h\varepsilon$ , za  $i = M_1 + 1, M_1 + 2, \dots, M$ . Dakle, dobijamo da je

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, 2, \dots, N} \left| (I_2^0 u - I_2^1 u)''_{i-1/2} \right| \leq \max_{i=1, 2, \dots, N} \frac{8\varepsilon^2}{h_i^2} \left| (u - I_2^1 u)_i \right| \leq Ch^2,$$

jer važi (5.14a). Kombinacijom (5.9b) i (5.15) dobijamo

$$\varepsilon^2 \max_{i=1, 2, \dots, N} \left| (u - I_2^0 u)''_{i-1/2} \right| \leq Ch^2,$$

čime je dokaz teoreme završen. □

### 5.3.2 Kolokacioni postupak

Problem (5.1) ćemo diskretizovati pomoću splajna iz prostora  $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$  koji zadovoljava granične uslove ovog problema i diferencijalnu jednačinu (5.1) u određenim tačkama. Poznato je da su sredine intervala  $J_i$ , tj. tačke  $x_{i-1/2}$ , najbolji izbor za tačke kolokacije, kada numeričko rešenje klasičnog problema, tj. problema (5.1) za  $\varepsilon = 1$ , tražimo u obliku  $C^1$ -kvadratnog splajna, videti [13]. Zato ćemo i kod singularno perturbovanih problema, za tačke kolokacije uzimati sredine svakog intervala mreže diskretizacije.

Neka je  $\Delta$  proizvoljno zadata mreža na  $[0, 1]$ . Naš pridruženi diskretizovani problem glasi: Naći  $u_\Delta \in \mathcal{S}_2^1(\Delta)$  tako da je

$$u_{\Delta,0} = g_0, \quad (\mathcal{L}u_\Delta)_{i-1/2} = f_{i-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad u_{\Delta,N} = g_1. \quad (5.16)$$

Neka je  $\{B_{2,i}\}_{i=0}^{N+1}$  baza B-splajnova u  $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ , videti Glavu 3. Tada aproksimaciju  $u_\Delta$  možemo predstaviti na sledeći način

$$u_\Delta(x) := \sum_{i=0}^{N+1} \alpha_i B_{2,i}(x),$$

gde su  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  određeni kolokacionim jednačinama. Dakle, na svakom intervalu  $J_i$ , aproksimaciju  $u_\Delta$  možemo zapisati kao

$$u_\Delta(x) = \alpha_{i-1} B_{2,i-1}(x) + \alpha_i B_{2,i}(x) + \alpha_{i+1} B_{2,i+1}(x), \quad x \in J_i, \quad (5.17)$$

za sve  $i = 1, 2, \dots, N$ . Dalje je

$$\begin{aligned} B_{2,i-1}(x_{i-1/2}) &= \frac{(x_i - x_{i-1/2})^2}{(h_{i-1} + h_i)h_i} = \frac{h_i}{4(h_{i-1} + h_i)}, & B_{2,i-1}''(x_{i-1/2}) &= \frac{2}{(h_{i-1} + h_i)h_i}, \\ B_{2,i+1}(x_{i-1/2}) &= \frac{(x_{i-1/2} - x_{i-1})^2}{(h_i + h_{i+1})h_i} = \frac{h_i}{4(h_i + h_{i+1})}, & B_{2,i+1}''(x_{i-1/2}) &= \frac{2}{(h_i + h_{i+1})h_i}, \end{aligned}$$

gde formalno zapisujemo  $h_0 = 0$ . Takođe je

$$B_{2,i}(x_{i-1/2}) = 1 - \frac{1}{4(h_{i-1} + h_i)} - \frac{1}{4(h_i + h_{i+1})},$$

zbog  $\sum_{i=0}^{N+1} B_{2,i}(x) = 1$ , kao i

$$B_{2,i}''(x_{i-1/2}) = -\frac{2}{(h_{i-1} + h_i)h_i} - \frac{2}{(h_i + h_{i+1})h_i},$$

videti Prilog A.1 za drugi izvod funkcije  $B_{2,i}$ .

Očigledno je (5.16) ekvivalentno sa

$$\alpha_0 = g_0, \quad [\mathbf{L}\boldsymbol{\alpha}]_{i-1/2} = f_{i-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \alpha_{N+1} = g_1, \quad (5.18)$$



gde je  $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_{N+1})^T \in \mathbb{R}^{N+2}$  i

$$[\mathbf{L}\alpha]_{i-1/2} := -\varepsilon^2 \left[ \frac{2(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{h_i(h_i + h_{i+1})} - \frac{2(\alpha_i - \alpha_{i-1})}{h_i(h_{i-1} + h_i)} \right] \\ + r_{i-1/2} [q_i^+ \alpha_{i+1} + (1 - q_i^+ - q_i^-) \alpha_i + q_i^- \alpha_{i-1}], \quad i = 1, \dots, N$$

uz sledeću notaciju

$$q_i^+ := \frac{h_i}{4(h_i + h_{i+1})} \quad \text{i} \quad q_i^- := \frac{h_i}{4(h_i + h_{i-1})},$$

i formalni zapis  $h_0 = h_{N+1} = 0$ .

Da bi pokazali da je kolokacioni postupak sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom uniformno konvergentan, prvo treba pokazati da je operator  $\mathbf{L}$  stabilan, što ćemo i učiniti u nastavku.

### 5.3.2.1 Stabilnost

Operator  $\mathbf{L}$  nije inverzno monoton, ali ćemo ipak dokazati da je stabilan u maksimum normi.

**Teorema 5.8.** *Ako postoji konstanta  $\kappa > 0$  takva da je*

$$\max\{h_{i+1}, h_{i-1}\} \geq \kappa h_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad h_1 \geq \kappa h_2 \quad \text{i} \quad h_N \geq \kappa h_{N-1}, \quad (5.19)$$

onda je operator  $\mathbf{L}$  stabilan u maksimum normi. Štaviše, važi i

$$\|\gamma\|_\infty := \max_{i=1, \dots, N} |\gamma_i| \leq \frac{2(1+\kappa)}{\kappa} \max_{i=1, \dots, N} \left| \frac{[\mathbf{L}\gamma]_{i-1/2}}{r_{i-1/2}} \right| \leq \frac{2(1+\kappa)}{\kappa \varrho^2} \|\mathbf{L}\gamma\|_\infty \quad \text{za sve } \gamma \in \mathbb{R}_0^{N+2},$$

gde je  $\mathbb{R}_0^{N+2} := \{v \in \mathbb{R}^{N+2} : v_0 = v_{N+1} = 0\}$ .

*Dokaz.* Za proizvoljan vektor  $\gamma \in \mathbb{R}_0^{N+2}$ , definišimo prvo operator  $\mathbf{\Lambda}$  na sledeći način

$$[\mathbf{\Lambda}\gamma]_{i-1/2} = \frac{[\mathbf{L}\gamma]_{i-1/2} - r_{i-1/2} (q_i^+ \gamma_{i+1} + q_i^- \gamma_{i-1})}{m_{i-1/2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.20)$$

gde je  $m_{i-1/2} := r_{i-1/2}(1 - q_i^+ - q_i^-)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Jasno je da je  $q_i^+, q_i^- \in (0, 1/4)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , a odatle je  $m_{i-1/2} > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Dalje je

$$[\mathbf{\Lambda}\gamma]_{i-1/2} = -\frac{\varepsilon^2}{m_{i-1/2}} \left( \frac{2(\gamma_{i+1} - \gamma_i)}{h_i(h_i + h_{i+1})} - \frac{2(\gamma_i - \gamma_{i-1})}{h_i(h_{i-1} + h_i)} \right) + \gamma_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

tj.

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\gamma}]_{i-1/2} = & -\frac{\varepsilon^2}{m_{i-1/2}} \frac{2}{h_i(h_{i-1} + h_i)} \gamma_{i-1} \\ & + \left( \frac{\varepsilon^2}{m_{i-1/2}} \left( \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} + \frac{2}{h_i(h_{i-1} + h_i)} \right) + 1 \right) \gamma_i \\ & - \frac{\varepsilon^2}{m_{i-1/2}} \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})} \gamma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

Nakon eliminacije  $\gamma_0$  i  $\gamma_{N+1}$  koji su jednaki nuli,  $\mathbf{\Lambda}$  postaje kvadratna matrica čiji su elementi van dijagonale nenegativne vrednosti, dok su elementi na dijagonali pozitivni brojevi, odnosno posmatrana matrica je  $L$ -matrica. Neka je  $v = [1, 1, \dots, 1]^T$ , tada je

$$\mathbf{\Lambda}v = [1, 1, \dots, 1]^T > 0.$$

Ako sada primenimo  $M$ -kriterijum, iz Teoreme 2.10 dobijamo

$$\|\mathbf{\Lambda}^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\|v\|_{\infty}}{\min_{i=1, \dots, N} |(\mathbf{\Lambda}v)_i|} \leq 1.$$

Odavde je

$$\|\boldsymbol{\gamma}\|_{\infty} = \|\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\gamma}\|_{\infty} \leq \|\mathbf{\Lambda}^{-1}\|_{\infty} \|\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\gamma}\|_{\infty} = \|\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\gamma}\|_{\infty}.$$

Sada, iz (5.20) dobijamo

$$\|\boldsymbol{\gamma}\|_{\infty} \leq \max_{i=1, \dots, N} \left| \frac{[\mathbf{L}\boldsymbol{\gamma}]_{i-1/2}}{m_{i-1/2}} \right| + \max_{i=1, \dots, N} \frac{r_{i-1/2}(q_i^+ + q_i^-)}{m_{i-1/2}} \|\boldsymbol{\gamma}\|_{\infty}, \quad (5.21)$$

gde je

$$\frac{r_{i-1/2}(q_i^+ + q_i^-)}{m_{i-1/2}} = \frac{q_i^- + q_i^+}{1 - q_i^- - q_i^+} = -1 + \frac{1}{1 - q_i^- - q_i^+}. \quad (5.22)$$

Pretpostavimo, bez uticaja na opštost, da je  $\max\{h_{i-1}, h_{i+1}\} = h_{i+1}$ . Lako se dobija

$$\begin{aligned} 1 - q_i^- - q_i^+ &= 1 - \frac{h_i}{4(h_i + h_{i-1})} - \frac{h_i}{4(h_i + h_{i+1})} = \frac{1}{2} + \frac{h_{i-1}}{4(h_i + h_{i-1})} + \frac{h_{i+1}}{4(h_i + h_{i+1})} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{h_{i+1}}{4(h_{i+1} + h_{i+1}/\kappa)}, \end{aligned}$$

zbog  $h_{i+1} \geq \kappa h_i$ , pa je

$$1 - q_i^- - q_i^+ \geq \frac{2 + 3\kappa}{4(1 + \kappa)}. \quad (5.23)$$

Iz (5.22) i (5.23) sledi

$$\max_{i=1, \dots, N} \frac{r_{i-1/2}(q_i^+ + q_i^-)}{m_{i-1/2}} \leq \frac{2 + \kappa}{2 + 3\kappa}. \quad (5.24)$$

Jasno je da je

$$\frac{r_{i-1/2}}{m_{i-1/2}} = \frac{1}{1 - q_i^- - q_i^+},$$

pa odatle i iz (5.23) dobijamo

$$\frac{1}{m_{i-1/2}} \leq \frac{4(1 + \kappa)}{r_{i-1/2}(2 + 3\kappa)} \quad \text{za } i = 1, \dots, N. \quad (5.25)$$

Iz nejednakosti (5.21), (5.24) i (5.25) sledi

$$\|\gamma\|_\infty \leq \frac{4(1 + \kappa)}{2 + 3\kappa} \max_{i=1, \dots, N} \left| \frac{[\mathbf{L}\gamma]_{i-1/2}}{r_{i-1/2}} \right| + \frac{2 + \kappa}{2 + 3\kappa} \|\gamma\|_\infty.$$

Konačno, poslednja nejednakost nam daje

$$\|\gamma\|_\infty \leq \frac{2(1 + \kappa)}{\kappa} \max_{i=1, \dots, N} \left| \frac{[\mathbf{L}\gamma]_{i-1/2}}{r_{i-1/2}} \right|.$$

□

**Napomena 5.** Obe mreže, i modifikovana Šiškinova i rekurzivno generisana mreža (4.4)-(4.5), zadovoljavaju (5.19) za  $\kappa = 1$ .

### 5.3.3 Apriorna ocena greške

**Teorema 5.9.** Neka je  $u$  tačno rešenje problema (5.1) i  $u_\Delta$  njegova aproksimacija dobijena kolokacionim postupkom sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, koja je generisana sa funkcijom (4.2) i gde je  $\sigma \geq 4$ . Tada važi

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq CN^{-2} \ln^2 N.$$

*Dokaz.* Primenom nejednakosti trougla dobijamo

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq \|u - I_2^1 u\|_\infty + \|I_2^1 u - u_\Delta\|_\infty. \quad (5.26)$$

Kako interpolaciona funkcija  $I_2^1 u$  pripada vektorskom prostoru  $\mathcal{S}_2^1(\Delta)$ , to se može predstaviti kao linearna kombinacija  $C^1$ -kvadratnih B-splajnova, tj.  $I_2^1 u = \sum_{i=0}^{N+1} \beta_i B_{2,i}$ . Sada je

$$\|I_2^1 u - u_\Delta\|_\infty \leq \left\| \sum_{i=0}^{N+1} (\alpha_i - \beta_i) B_{2,i} \right\|_\infty,$$

odnosno

$$\|I_2^1 u - u_\Delta\|_\infty \leq \|\alpha - \beta\|_\infty \sum_{i=0}^{N+1} B_{2,i} = \|\alpha - \beta\|_\infty, \quad (5.27)$$

zbog (3.2a) i (3.2c). Teorema 5.8 nam daje

$$\|\alpha - \beta\|_\infty \leq C \|\mathbf{L}(\alpha - \beta)\|_\infty. \quad (5.28)$$

Očigledno važi  $\alpha - \beta \in \mathbb{R}_0^{N+2}$ , zbog

$$\alpha_0 B_{2,0}(0) = u_\Delta(0) = g_0 = (I_1^2 u)(0) = \beta_0 B_{2,0}(0)$$

i

$$\alpha_{N+1} B_{2,N+1}(1) = u_\Delta(1) = g_1 = (I_1^2 u)(1) = \beta_{N+1} B_{2,N+1}(1).$$

Štaviše, važi

$$[\mathbf{L}(\alpha - \beta)]_{i-1/2} = \mathcal{L}(u_\Delta - I_2^1 u)_{i-1/2} = \mathcal{L}(u - I_2^1 u)_{i-1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

zbog  $\mathcal{L}u_{\Delta,i-1/2} = \mathcal{L}u_{i-1/2} = f_{i-1/2}$ . Sada, iz osobine  $u_{i-1/2} = (I_2^1 u)_{i-1/2}$  dobijamo

$$[\mathbf{L}(\alpha - \beta)]_{i-1/2} = \varepsilon^2 (I_2^1 u - u)''_{i-1/2}. \quad (5.29)$$

Iz Teoreme 5.6, (5.27), (5.28) i (5.29) sledi

$$\|I_2^1 u - u_\Delta\|_\infty \leq CN^{-2} \ln^2 N.$$

Napokon, poslednja nejednakost, (5.10b) i (5.26) daju

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq CN^{-2} \ln^2 N.$$

□

Na rekurzivno generisanoj mreži, koristeći istu tehniku kao u Teoremi 5.9, samo menjajući svuda  $N^{-1} \ln N$  sa  $h$ , dobijamo sledeći rezultat.

**Teorema 5.10.** *Neka je  $u$  tačno rešenje problema (5.1),  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$  i  $u_\Delta$  njegova aproksimacija dobijena kolokacionim postupkom sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom na rekurzivno generisanoj mreži (4.4)-(4.5). Tada je*

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq Ch^2.$$

Iz Leme 4.3 i Teoreme 5.10 dobijamo sledeću apriornu ocenu na rekurzivno generisanoj mreži.

**Teorema 5.11.** *Neka je  $u$  tačno rešenje problema (5.1),  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{4}$  i  $u_\Delta$  njegova aproksimacija dobijena kolokacionim postupkom sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom na rekurzivno generisanoj mreži (4.4)-(4.5). Tada je*

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq C \frac{\ln^2(1/\varepsilon)}{N^2}.$$

Dakle, na rekurzivno generisanoj mreži dobija se drugi red konvergencije u supremum normi. Primećimo da je uniformnost ovog postupka slabo zavisna od logaritamskog faktora.

### 5.3.4 Aposteriorna ocena greške

Za fiksno  $x \in (0, 1)$ , greška našeg postupka je

$$(u - u_\Delta)(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi) (\mathcal{L}(u - u_\Delta))(\xi) d\xi = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi) (f - \mathcal{L}u_\Delta)(\xi) d\xi, \quad (5.30)$$

zbog (5.3). Kako važi (5.16), to dobijamo da je

$$\sum_{i=1}^N (f - \mathcal{L}u_\Delta)_{i-1/2} \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) d\xi = 0.$$

Ako od (5.30) oduzmemo poslednju jednakost dobijamo

$$(u - u_\Delta)(x) = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} (f(\xi) + \varepsilon^2 u''_\Delta(\xi) - r(\xi)u_\Delta(\xi) - f_{i-1/2} - \varepsilon^2 u''_{\Delta, i-1/2} + r_{i-1/2}u_{\Delta, i-1/2}) \mathcal{G}(x, \xi) d\xi.$$

Kako je  $u''_\Delta \equiv u''_{\Delta, i-1/2}$  na  $J_i$ , jer je  $u_\Delta$  deo po deo kvadratna funkcija, to je

$$(u - u_\Delta)(x) = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) [q_{i-1/2} - q(\xi)] d\xi, \quad (5.31)$$

gde je  $q := ru_\Delta - f$ . Dalje ćemo izvesti dve aposteriorne ocene greške kolokacionog postupka sa kvadratnim splajnom.

**Teorema 5.12.** *Neka je  $u$  tačno rešenje problema (5.1) i  $u_\Delta$  njegova aproksimacija dobijena kolokacionim postupkom sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom na proizvoljnoj mreži  $\Delta$ . Tada je*

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\varrho^2} \max_{i=1, \dots, N} \left\{ h_i \|q'\|_{\infty, J_i} \min \left\{ 1, \frac{h_i \varrho}{2\varepsilon} \right\} \right\} =: \bar{\eta}(q, \Delta)$$

gde je  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ .

*Dokaz.* Koristeći Tejlorov razvoj u tački  $x_{i-1/2}$ , dobijamo

$$q(\xi) = q(x_{i-1/2}) + q'(\zeta)(\xi - x_{i-1/2}), \quad \zeta \in [x_{i-1}, x_i],$$

a odatle i

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathcal{G}(x, \xi) (q(x_{i-1/2}) - q(\xi)) d\xi = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q'(\zeta)(\xi - x_{i-1/2}) \mathcal{G}(x, \xi) d\xi. \quad (5.32)$$

Fiksirajmo  $x \in (0, 1)$ . Tada je

$$\mathcal{G}(x, \xi) = \mathcal{G}(x, x_{i-1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} \mathcal{G}_\xi(x, s) ds$$

i

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\xi - x_{i-1/2}) d\xi = 0.$$

Dalje dobijamo

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathcal{G}(x, \xi) (q(x_{i-1/2}) - q(\xi)) d\xi = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} q'(\zeta) (\xi - x_{i-1/2}) \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} \mathcal{G}_\xi(x, s) ds d\xi, \quad \zeta \in J_i.$$

Štaviše, važi

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathcal{G}(x, \xi) (q(x_{i-1/2}) - q(\xi)) d\xi \right| \leq \frac{h_i^2}{4} \|q'\|_{\infty, J_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\mathcal{G}_\xi(x, s)| ds,$$

tj.

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathcal{G}(x, \xi) (q(x_{i-1/2}) - q(\xi)) d\xi \right| \leq \frac{h_i^2}{4\rho^2 \varepsilon} \|q'\|_{\infty, J_i} \left( \varepsilon \rho \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\mathcal{G}_\xi(x, \xi)| d\xi \right). \quad (5.33)$$

Iz (5.32) sledi

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathcal{G}(x, \xi) (q(x_{i-1/2}) - q(\xi)) d\xi \right| \leq \frac{h_i}{2\rho^2} \|q'\|_{\infty, J_i} \left( \rho^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\mathcal{G}(x, \xi)| d\xi \right). \quad (5.34)$$

Sada, kombinacijom (5.33) i (5.34), dobijamo

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\rho^2} \max_{i=1, \dots, N} \left\{ h_i \|q'\|_{\infty, J_i} \min \left\{ 1, \frac{h_i \rho}{2\varepsilon} \right\} \right\}.$$

□

Da bismo dobili ovu aposteriornu ocenu moramo naći i prvi izvod funkcije  $q$ . Međutim, možemo dobiti i nešto drugačiju aposteriornu ocenu koja u sebi ne sadrži izvode. Sledeća teorema nam daje upravo taj rezultat, videti [44].

**Teorema 5.13.** *Neka je  $u$  tačno rešenje problema (5.1) i  $u_\Delta$  njegova aproksimacija dobijena kolokacionim postupkom sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom na proizvoljnoj mreži  $\Delta$ . Tada je*

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq \eta(r u_\Delta - f, \Delta)$$

gde je  $\eta(q, \Delta) = \eta^I(q, \Delta) + \eta^3(q, \Delta) + \eta^4(q, \Delta)$ ,

$$\eta^I(q, \Delta) := \left\| \frac{I_2^0 q - q}{r} \right\|_\infty,$$

$$\eta^3(q, \Delta) := \frac{2}{\rho^2} \max_{i=1, \dots, N} \left[ \max \{ |q_i - q_{i-1/2}|, |q_{i-1/2} - q_{i-1}| \} \min \left\{ 1, \frac{h_i \rho}{4\varepsilon} \right\} \right]$$

$i$

$$\eta^4(q, \Delta) := \max_{i=1, \dots, N} \frac{|q_{i-1} - 2q_{i-1/2} + q_i|}{4\rho^2}.$$

**Napomena 6.** U skladu sa (5.18), jasno je da je  $q \approx \varepsilon^2 u''_{\Delta}$ . Dakle,  $\eta^3$  i  $\eta^4$  indukuju diferencne količnike od  $u_{\Delta}$  reda tri i četiri.

**Napomena 7.** Aposteriorne ocene kod centralne diferencne šeme i kod  $P_1$ -FEM dobijene su u [31] i [40], redom. Nasuprot Teoremi 5.13, ova ograničenja indukuju samo diferencne količnike reda tri (za centralnu diferencnu šemu) i reda dva (za FEM).

*Dokaz Teoreme 5.13.* Iz (5.31) sledi

$$(u - u_{\Delta})(x) = \int_0^1 (I_2^0 q - q)(\xi) \mathcal{G}(x, \xi) d\xi + \sum_{i=1}^N \int_{J_i} [q_{i-1/2} - (I_2^0 q)(\xi)] \mathcal{G}(x, \xi) d\xi. \quad (5.35)$$

Lagranžov oblik za  $I_2^0 q(\xi)$  ima sledeću formu

$$I_2^0 q(\xi) = 2q_{i-1} \frac{(\xi - x_{i-1/2})(\xi - x_i)}{h_i^2} - 4q_{i-1/2} \frac{(\xi - x_{i-1})(\xi - x_i)}{h_i^2} + 2q_i \frac{(\xi - x_{i-1})(\xi - x_{i-1/2})}{h_i^2}.$$

Ako  $x_{i-1}$  i  $x_i$  zamenimo sa  $x_{i-1/2} - \frac{h_i}{2}$  i  $x_{i-1/2} + \frac{h_i}{2}$ , redom, dobijamo

$$(I_2^0 q)(\xi) - q_{i-1/2} = (\xi - x_{i-1/2}) R_i(\xi), \quad \xi \in J_i,$$

gde je

$$R_i(\xi) = \frac{q_i - q_{i-1}}{h_i} + 2(\xi - x_{i-1/2}) \frac{q_{i-1} - 2q_{i-1/2} + q_i}{h_i^2}.$$

Koristeći (5.35), (5.4a) i nejednakost trougla, dobijamo

$$|(u - u_{\Delta})(x)| \leq \left\| \frac{I_2^0 q - q}{r} \right\|_{\infty} + \sum_{i=1}^N \left| \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) (\xi - x_{i-1/2}) R_i(\xi) d\xi \right|. \quad (5.36)$$

Sada ćemo izvesti dva ograničenja za integral u (5.36). Prvo, iz Holderove nejednakosti sledi

$$\left| \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) (\xi - x_{i-1/2}) R_i(\xi) d\xi \right| \leq \frac{h_i}{2} \|R_i\|_{\infty, J_i} \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) d\xi. \quad (5.37)$$

Primetimo da je

$$\xi - x_{i-1/2} = \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} - \frac{h_i^2}{8} \right].$$

Parcijalna integracija nam daje

$$\int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) (\xi - x_{i-1/2}) R_i(\xi) d\xi = \int_{J_i} \left[ \frac{h_i^2}{8} - \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} \right] \left( \mathcal{G}_{\xi}(x, \xi) R_i(\xi) + \mathcal{G}(x, \xi) R_i'(\xi) \right) d\xi.$$

Opet koristeći Holderovu nejednakost, dobijamo i drugo ograničenje

$$\left| \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi)(\xi - x_{i-1/2})R_i(\xi) d\xi \right| \leq \frac{h_i^2}{8} \left( \|R_i\|_{\infty, J_i} \int_{J_i} |\mathcal{G}_\xi(x, \xi)| d\xi + \|R_i'\|_{\infty, J_i} \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) d\xi \right). \quad (5.38)$$

Iz (5.37) i (5.38) sledi

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi)(\xi - x_{i-1/2})R_i(\xi) d\xi \right| &\leq \frac{h_i}{2} \|R_i\|_{\infty, J_i} \min \left\{ 1, \frac{h_i \varrho}{4\varepsilon} \right\} \left( \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{\varrho} \int_{J_i} |\mathcal{G}_\xi(x, \xi)| d\xi \right) + \frac{h_i^2}{8\varrho^2} \|R_i'\|_{\infty, J_i} \varrho^2 \int_{J_i} \mathcal{G}(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Sumirajući ove integrale za  $i = 1, 2, \dots, N$ , uz (5.35) i Lemu 5.2 dobijamo

$$\begin{aligned} |(u - u_\Delta)(x)| &\leq \left\| \frac{I_2^0 q - q}{r} \right\|_{\infty} + \frac{2}{\varrho^2} \max_{i=1, \dots, N} \frac{h_i}{2} \|R_i\|_{\infty, J_i} \min \left\{ 1, \frac{h_i \varrho}{4\varepsilon} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{\varrho^2} \max_{i=1, \dots, N} \frac{h_i^2}{8} \|R_i'\|_{\infty, J_i}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Očigledno je:

$$R_i' \equiv 2 \frac{q_{i-1} - 2q_{i-1/2} + q_i}{h_i^2} \quad \text{i} \quad \|R_i\|_{\infty, J_i} = \frac{2}{h_i} \max \{ |q_i - q_{i-1/2}|, |q_{i-1/2} - q_{i-1}| \},$$

odakle, uz (5.39), sledi tvrđenje ove teoreme. □

### 5.3.5 Adaptivni algoritam

Aposteriorna ocena nam, dalje, omogućuje i kreiranje adaptivnog algoritma [33, 84], zasnovanog na radu iz 1973. godine [10]. Osnovni zadatak ovog algoritma je kreiranje adaptivne mreže za koju su lokalne aposteriorne ocene  $\mu_i(u_\Delta, \Delta)$  definisane na intervalu  $[x_{i-1}, x_i]$  (videti (5.42) i (5.65)), jednake na svakom intervalu, tj. važi  $\mu_{i-1}(u_\Delta, \Delta) = \mu_i(u_\Delta, \Delta)$ , za  $i = 1, 2, \dots, N$ . Ovo je ekvivalentno sa

$$Q_i(u_\Delta, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Q_j(u_\Delta, \Delta), \quad Q_i(u_\Delta, \Delta) := \mu_i(u_\Delta, \Delta)^{1/k^*}, \quad (5.40)$$

gde je  $k^*$  red konvergencije. De Burov algoritam, koji ćemo opisati, postaje numerički nestabilan kada se ekvidistributivni princip (5.40) strogo primenjuje. Umesto te stroge primene, mi ćemo algoritam zaustavljati kako je predloženo u [5, 35], odnosno kada je

$$Q_i(u_\Delta, \Delta) \leq \frac{\gamma}{N} \sum_{j=1}^N Q_j(u_\Delta, \Delta),$$

za neko  $\gamma > 1$ . Sam opis de Burovog algoritma sledi u nastavku.



### Algoritam

1. Fiksirati  $N$  i konstantu  $\gamma > 1$ . Početna mreža je  $\Delta^{[0]}$  - ekvidistantna mreža sa korakom  $1/N$ .
2. Neka je za  $k = 0, 1, \dots$ , data mreža  $\Delta^{[k]}$ . Izračunati diskretno rešenje  $u_{\Delta^{[k]}}^{[k]}$  na ovoj mreži pomoću kolokacionog postupka. Neka je  $h_i^{[k]} = x_i^{[k]} - x_{i-1}^{[k]}$ , za svako  $i$ . Izračunati deo po deo konstantnu monitoring funkciju  $M^{[k]}$  definisanu sa

$$M^{[k]}(x) := \frac{Q_i^{[k]}}{h_i^{[k]}} := \frac{Q_i(u_{\Delta^{[k]}}, \Delta^{[k]})}{h_i^{[k]}}, \quad \text{za } x \in (x_{i-1}^{[k]}, x_i^{[k]}).$$

Definišimo

$$I^{[k]} := \sum_{j=1}^N Q_j^{[k]}.$$

3. Test: Ako je

$$Q_j^{[k]} \leq \gamma I^{[k]} N^{-1} \quad \text{za sve } j = 1, \dots, N,$$

onda idi na korak 5. U suprotnom, pređi na korak 4.

4. Generiši novu mrežu pomoću monitoring funkcije  $M^{[k]}$ , tj. izaberi takvu mrežu  $\Delta^{[k+1]}$  koja zadovoljava jednakost

$$\int_{x_{i-1}^{[k+1]}}^{x_i^{[k+1]}} M^{[k]}(t) dt = \frac{I^{[k]}}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Čvorne tačke  $x_i^{[k+1]}$  možemo odrediti sa

$$\begin{aligned} x_0^{[k+1]} &= 0 \\ x_i^{[k+1]} &= x_{i-1}^{[k]} + (S_i^{[k]} - I_{i-1}^{[k]}) \frac{x_i^{[k]} - x_{i-1}^{[k]}}{I_i^{[k]} - I_{i-1}^{[k]}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

gde je

$$S_i^{[k]} = \frac{i}{N} I^{[k]}, \quad I_{l-1}^{[k]} = \sum_{j=0}^{l-1} Q_j^{[k]}$$

i  $l$  najmanji prirodan broj takav da je  $I_l^{[k]} > S_i^{[k]}$ .

Vrati se na korak 2.

5. Dodeli  $\Delta = \Delta^{[k]}$  i  $u_{\Delta} = u_{\Delta^{[k]}}^{[k]}$  i izađi iz algoritma.

### 5.3.6 Numerički rezultati

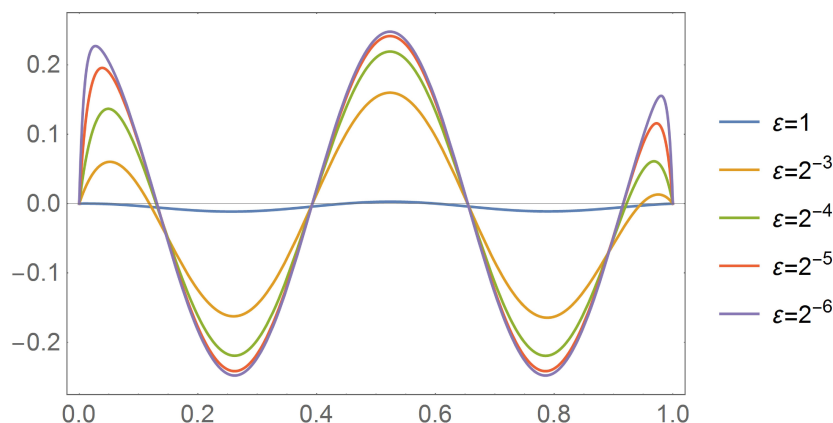
Teorijske rezultate iz ovog poglavlja potvrdićemo na odgovarajućim test primerima. Prvi test primer je

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u''(x) + 4u(x) &= \cos 12x, & x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Tačno rešenje ovog problema je

$$u(x) = \frac{e^{2(2-x)/\varepsilon} - e^{2x/\varepsilon} + (e^{2(1+x)/\varepsilon} - e^{2(1-x)/\varepsilon}) \cos 12x + (1 - e^{4/\varepsilon}) \cos 12x}{4(e^{4/\varepsilon} - 1)(1 + 36\varepsilon^2)}.$$

Funkcija  $u$  je prikazana na Slici 5.1 za različite vrednosti  $\varepsilon$ .



Slika 5.1: Tačno rešenje  $u$  test primera (5.41), za različite vrednosti parametra  $\varepsilon$ .

Iako je tačno rešenje problema (5.41) poznato, grešku postupka u supremum normi ne možemo tačno odrediti. Zbog toga ćemo grešku postupka računati u tačkama mreže i u nekoliko dodatnih tačaka na svakom intervalu mreže. Dakle, grešku postupka u supremum normi ćemo aproksimirati sa

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \approx \chi_N := \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ m=0, \dots, \bar{k}}} |(u - u_\Delta)(x_{i-1} + m\bar{k}^{-1}h_i)|.$$

U našim eksperimentima, biraćemo  $\bar{k} = 7$ . Veći broj tačaka, u kojima bismo računali grešku postupka, davao bi naravno i veću preciznost za  $\chi_N$ . Međutim, razlika između takvog i našeg računa je beznačajno mala.

Tabela 5.1 sadrži numeričke rezultate kolokacionog postupka primenjenog na test primer (5.41). Pored modifikovane Šiškinove i rekursivno generisane mreže, radi poređenja, posmatraćemo i rezultate dobijene na mreži Bahvalova, R-mreži i ekvidistantnoj mreži. U ovoj tabeli, takođe, možemo naći i odgovarajuće redove konvergencije, koje računamo pomoću sledećih formula:

$$\begin{aligned} s_N &:= \frac{\ln \chi_N - \ln \chi_{2N}}{\ln 2 + \ln \ln N - \ln \ln 2N} && \text{za mreže Šiškinovog tipa,} \\ p_N &:= \frac{\ln \chi_N - \ln \chi_{2N}}{\ln 2} && \text{za ostale tipove mreža.} \end{aligned}$$

Druga formula je standardna, dok prva predstavlja takozvani "Šiškinov red" konvergencije. Motivacija za analizu ovog reda konvergencije leži u teorijskoj oceni  $\chi_N \sim (N^{-1} \ln N)^p$ , koja se do-

bija na mrežama tipa Šiškina. Numerički rezultati dobijeni na modifikovanoj Šiškinovoj mreži (sa parametrima  $q = 1/4$ ,  $\varrho = 2$  i  $\sigma = 4$ ) potvrđuju teorijske rezultate dobijene u Teoremi 5.9, kao i teorijske rezultate iz Teoreme 5.10 na rekurzivno generisanoj mreži. Za parametre kod mreže Bahvalova biramo  $\bar{q} = 1/4$  i  $\sigma = 4$ , dok za R-mrežu biramo  $\bar{q} = 0.4$  i  $a = 2$ .

Tabela 5.1: Greške kolokacionog postupka (5.16) na adaptivnim mrežama, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	modifikovana Šiškinova mreža		rekurzivno generisana mreža		mreža Bahvalova		Vulanovićeve mreža		ekvidistantna mreža	
	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$
$2^5$	3.853e-03	3.59	1.676e-01	2.57	1.019e-03	3.32	2.893e-02	3.60	1.574e-01	0.00
$2^6$	3.198e-03	1.93	2.827e-02	3.11	1.023e-04	3.07	2.381e-03	3.34	1.574e-01	0.00
$2^7$	8.375e-04	1.69	3.265e-03	2.94	1.221e-05	3.02	2.346e-04	3.22	1.575e-01	0.00
$2^8$	2.588e-04	1.73	4.234e-04	3.18	1.507e-06	3.00	2.526e-05	3.13	1.575e-01	0.00
$2^9$	7.800e-05	1.74	4.659e-05	3.06	1.878e-07	3.00	2.884e-06	3.01	1.574e-01	0.00
$2^{10}$	2.335e-05	1.75	5.570e-06	2.04	2.346e-08	3.00	3.584e-07	2.46	1.574e-01	0.00
$2^{11}$	6.940e-06	1.76	1.351e-06	2.02	2.932e-09	3.00	6.513e-08	2.00	1.574e-01	0.00
$2^{12}$	2.046e-06	1.78	3.326e-07	2.01	3.665e-10	3.00	1.624e-08	2.00	1.574e-01	0.00
$2^{13}$	5.971e-07	1.79	8.252e-08	2.01	4.581e-11	3.00	4.056e-09	2.00	1.574e-01	0.00
$2^{14}$	1.726e-07	1.80	2.055e-08	2.00	5.727e-12	3.00	1.013e-09	2.00	1.575e-01	0.00
$2^{15}$	4.947e-08	1.81	5.128e-09	2.00	7.158e-13	3.00	2.533e-10	2.00	1.575e-01	0.00
$2^{16}$	1.406e-08	—	1.285e-09	—	8.948e-14	—	6.332e-11	—	1.574e-01	—

**Napomena 8.** *Rekurzivno generisana mreža je određena parametrom  $h$ . Za dato  $N$ , parametar  $h$  računamo približno, jednostavnim numeričkim postupkom.*

Kao što je i očekivano, mreže tipa Bahvalova daju bolje numeričke rezultate nego modifikovana Šiškinova mreža jer njihova konvergencija ne zavisi od logaritamskog faktora koji se pojavljuje kod ocena grešaka na mrežama tipa Šiškina. Međutim, greške na mreži Bahvalova ponašaju se kao  $\mathcal{O}(N^{-3})$  na test primeru (5.41) za  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Numerički rezultati pokazuju isti red konvergencije i za manje vrednosti  $\varepsilon$ . Ipak, drugi test primer pokazuje da se greške postupka na mreži Bahvalova ponašaju kao  $\mathcal{O}(N^{-2})$ , što je i očekivano – videti Tabelu 5.11.

Kolokacije sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom na rekurzivno generisanoj mreži daju značajno bolje numeričke rezultate nego na modifikovanoj Šiškinovoj mreži. Na ekvidistantnoj mreži, kolokacioni postupak očekivano daje loše numeričke rezultate.

U Tabeli 5.2 poredimo numeričke rezultate dobijene na rekurzivno generisanoj mreži (4.4) i na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, za izabrano  $h$ , nasuprot Tabeli 5.1 gde smo prvo birali  $N$ . U ovoj tabeli, biramo takvo  $h$  da je  $N$  deljivo sa 4, jer uzimamo  $q = 1/4$  na modifikovanoj Šiškinovoj mreži. Sa  $\chi_N^S$  i  $\chi_N^G$  označićemo greške postupka na modifikovanoj Šiškinovoj mreži i rekurzivno generisanoj mreži, redom. Vidimo da sa povećanjem broja  $N$ , kolokacioni postupak na rekurzivno generisanoj mreži daje značajno bolje numeričke rezultate nego na modifikovanoj Šiškinovoj mreži. Teoretski, za dovoljno malo  $\varepsilon$ , greška postupka na modifikovanoj Šiškinovoj mreži može biti manja nego na rekurzivno generisanoj mreži. Međutim, ovo se u praksi ne događa za razuman izbor vrednosti perturbovanog parametra  $\varepsilon$ .

Aposteriorna ocena, dobijena u Teoremi 5.13, na modifikovanoj Šiškinovoj mreži prikazana je u tabelama 5.3 i 5.4.

Tabela 5.2: Uporedna analiza rezultata na modifikovanoj Šiškinovoj i rekurzivno generisanoj mreži (4.4), test primer (5.41);  $\sigma = 4, q = 1/4$ .

$\varepsilon = 10^{-2}$				$\varepsilon = 10^{-4}$			
$h$	$N$	$\chi_N^S$	$\chi_N^G$	$h$	$N$	$\chi_N^S$	$\chi_N^G$
0.1	104	1.215e-03	2.269e-04	0.1	200	3.980e-04	2.750e-04
0.05	390	2.475e-05	6.384e-05	0.03	644	5.236e-05	6.414e-06
0.02	496	8.207e-05	3.118e-06	0.01	1912	7.830e-06	6.969e-07
0.01	988	2.475e-05	6.943e-07	0.008	2388	5.300e-06	4.450e-07
0.004	2460	5.010e-06	1.103e-07	0.005	3816	2.319e-06	1.732e-07
0.001	9828	4.299e-07	6.872e-09	0.0025	7624	6.788e-07	4.319e-08

U Tabeli 5.3, u prvoj koloni su date vrednosti za  $N$ . Grešku  $\chi_N$  možemo pronaći u drugoj koloni, a red konvergencije u trećoj i četvrtoj. Sledeća kolona nam daje aposterionu ocenu  $\eta$ . Naredne tri kolone nam prikazuju pojedinačne sabirke iz aposteriorne ocene dobijene u Teoremi 5.13, dok poslednja kolona prikazuje efikasnost aposteriorne ocene. Tabela 5.3 prikazuje numeričke rezultate za fiksno  $\varepsilon$  i različite vrednosti  $N$ . Primetimo da se  $\eta^I$  ponaša kao  $\mathcal{O}(N^{-3})$ . Inače,  $\eta^I$  aproksimiramo na isti način kao što smo aproksimirali i  $\chi_N$ . Dakle,

$$\eta^I = \max_{i=1,\dots,N} \left\| \frac{I_2^0 q - q}{r} \right\|_{\infty, J_i} \approx \max_{\substack{i=1,\dots,N \\ m=0,\dots,\bar{k}}} \left| \frac{(I_2^0 q - q)(x_{i-1} + m\bar{k}^{-1}h_i)}{r(x_{i-1} + m\bar{k}^{-1}h_i)} \right|.$$

Takođe, u test primerima uzimamo da je  $\bar{k} = 7$ . Ovaj deo ocene, tj.  $\eta^I$  ima najmanji uticaj na celokupnu aposterionu ocenu. Nasuprot tome,  $\eta^3$  i  $\eta^4$  su u strogoj korelaciji sa  $\chi_N$  i ponašaju se kao  $\mathcal{O}(N^{-2} \ln^2 N)$ . U ovom eksperimentu aposteriorna ocena je približno 40 puta veća nego što je stvarna greška postupka.

 Tabela 5.3: Aposteriorne ocene na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta$	$\eta^I$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	3.853e-02	3.59	5.30	1.589e-01	1.326e-02	1.260e-01	1.962e-02	2.425e-01
$2^6$	3.198e-03	1.93	2.62	6.468e-02	1.661e-03	5.302e-02	1.000e-02	4.944e-02
$2^7$	8.375e-04	1.69	2.18	2.437e-02	2.190e-04	1.991e-02	4.238e-03	3.437e-02
$2^8$	2.588e-04	1.73	2.14	8.510e-03	2.730e-05	6.905e-03	1.578e-03	3.042e-02
$2^9$	7.800e-05	1.74	2.10	2.807e-03	3.401e-06	2.265e-03	5.386e-04	2.779e-02
$2^{10}$	2.335e-05	1.75	2.06	8.878e-04	4.246e-07	7.138e-04	1.736e-04	2.630e-02
$2^{11}$	6.940e-06	1.76	2.04	2.724e-04	5.301e-08	2.185e-04	5.381e-05	2.548e-02
$2^{12}$	2.046e-06	1.78	2.03	8.168e-05	6.623e-09	6.545e-05	1.623e-05	2.504e-02
$2^{13}$	5.971e-07	1.79	2.02	2.407e-05	8.277e-10	1.927e-05	4.797e-06	2.481e-02
$2^{14}$	1.726e-07	1.80	2.02	6.996e-06	1.034e-10	5.600e-06	1.397e-06	2.468e-02
$2^{15}$	4.947e-08	1.81	2.01	2.011e-06	1.293e-11	1.609e-06	4.017e-07	2.461e-02
$2^{16}$	1.406e-08	—	—	5.723e-07	1.616e-12	4.579e-07	1.144e-07	2.457e-02

Tabela 5.4 potvrđuje da je kolokacioni postupak uniformno konvergentan u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$ . Za fiksirano  $N$  i različite vrednosti  $\varepsilon$  prikazani su numerički rezultati na modifikovanoj Šiškinovoj mreži. Slični rezultati se, kada je reč o uniformnosti postupka, dobijaju i na ostalim mrežama tipa Šiškina i tipa Bahvalova.

Tabela 5.5 prikazuje numeričke rezultate dobijene na ekvidistantnoj mreži. Opet se  $\eta^I$  ponaša kao  $\mathcal{O}(N^{-3})$ , dok su  $\eta^3$  i  $\eta^4$  dominantni u aposterirnoj oceni greške postupka. Odnos  $\eta$  i  $\chi_N$  je veći na

ekvidistantnoj, nego na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, a aposteriorna ocena je veća od greške  $\chi_N$  samo 3.5 puta.

Takođe, uporedićemo i aposteriorne ocene  $\bar{\eta}$  i  $\eta$  (videti teoreme 5.12 i 5.13). U Tabeli 5.6 vidimo da je aposteriorna ocena  $\eta$  bolja od  $\bar{\eta}$  na test primeru (5.41), i to oko tri puta.

Tabela 5.4: Aposteriorne ocene na modifikovanoj Šiškinovoj mreži – uniformnost postupka, test primer (5.41); za  $N = 2^{14}$ .

$\varepsilon$	$\chi_N$	$\eta$	$\eta^I$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\chi_N/\eta$
1	2.509e-10	1.361e-08	7.159e-13	5.451e-09	8.160e-09	1.844e-02
$10^{-1}$	1.719e-07	8.335e-08	7.159e-13	6.846e-08	1.489e-08	2.062e-02
$10^{-2}$	1.720e-07	6.971e-06	3.587e-12	5.580e-06	1.392e-06	2.468e-02
$10^{-3}$	1.726e-07	6.996e-06	8.304e-11	5.600e-06	1.397e-06	2.468e-02
$10^{-4}$	1.726e-07	6.996e-06	1.013e-10	5.600e-06	1.397e-06	2.468e-02
$10^{-5}$	1.726e-07	6.996e-06	1.032e-10	5.600e-06	1.397e-06	2.468e-02
$10^{-6}$	1.726e-07	6.996e-06	1.034e-10	5.600e-06	1.397e-06	2.468e-02
$10^{-7}$	1.726e-07	6.996e-06	1.035e-10	5.600e-06	1.397e-06	2.468e-02
$10^{-8}$	1.726e-07	6.996e-06	1.035e-10	5.600e-06	1.397e-06	2.468e-02

Tabela 5.5: Aposteriorne ocene postupka na ekvidistantnoj mreži, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$\eta$	$\eta^I$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	1.574e-01	5.519e-01	9.529e-05	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^6$	1.574e-01	5.518e-01	1.201e-05	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^7$	1.574e-01	5.518e-01	1.501e-06	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^8$	1.574e-01	5.518e-01	1.877e-07	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^9$	1.574e-01	5.518e-01	2.346e-08	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^{10}$	1.574e-01	5.518e-01	2.932e-09	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^{11}$	1.574e-01	5.518e-01	3.666e-10	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^{12}$	1.574e-01	5.518e-01	4.582e-11	5.000e-01	5.178e-02	2.853e-01
$2^{13}$	1.574e-01	5.517e-01	5.727e-12	5.000e-01	5.177e-02	2.854e-01
$2^{14}$	1.574e-01	5.517e-01	7.159e-13	4.999e-01	5.176e-02	2.854e-01
$2^{15}$	1.574e-01	5.513e-01	8.949e-14	4.996e-01	5.170e-02	2.857e-01
$2^{16}$	1.574e-01	5.497e-01	1.119e-14	4.982e-01	5.146e-02	2.813e-01

Tabela 5.6: Uporedna analiza aposteriornih ocena  $\eta$  i  $\bar{\eta}$  na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, test primer (5.41);  $\sigma = 4$ ,  $q = 1/4$ .

$N$	$\chi_N$	$\eta$	$\chi_N/\eta$	$\bar{\eta}$	$\chi_N/\bar{\eta}$	$\bar{\eta}/\eta$
$2^5$	3.853e-02	1.589e-01	2.425e-01	6.401e-01	6.020e-02	4.028
$2^6$	3.198e-03	6.468e-02	4.944e-02	2.537e-01	1.261e-02	3.922
$2^7$	8.375e-04	2.437e-02	3.437e-02	8.992e-02	9.314e-03	3.690
$2^8$	2.588e-04	8.510e-03	3.042e-02	2.981e-02	8.684e-03	3.503
$2^9$	7.800e-05	2.807e-03	2.779e-02	9.479e-03	8.229e-03	3.377
$2^{10}$	2.335e-05	8.878e-04	2.630e-02	2.930e-03	7.968e-03	3.301
$2^{11}$	6.940e-06	2.724e-04	2.548e-02	8.869e-04	7.826e-03	3.256
$2^{12}$	2.046e-06	8.168e-05	2.504e-02	2.639e-04	7.752e-03	3.231
$2^{13}$	5.971e-07	2.407e-05	2.481e-02	7.743e-05	7.712e-03	3.217
$2^{14}$	1.726e-07	6.996e-06	2.468e-02	2.245e-05	7.690e-03	3.209
$2^{15}$	4.947e-08	2.011e-06	2.461e-02	6.443e-06	7.678e-03	3.205
$2^{16}$	1.406e-08	5.723e-07	2.457e-02	1.833e-06	7.671e-03	3.203

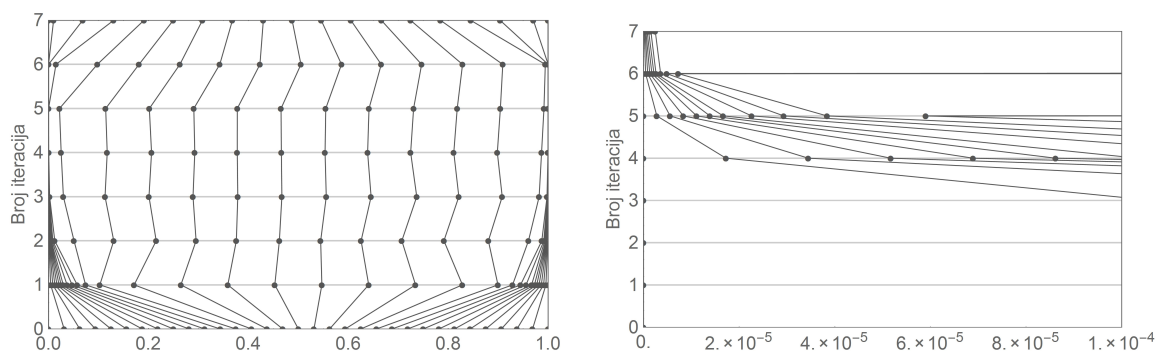
Napokon, testiraćemo kolokacioni postupak i na mreži koja se dobija primenom adaptivnog algoritma datog u Potpoglavlju 5.3.5, uz lokalnu aposteriornu ocenu

$$\mu_i(u_\Delta, \Delta) := \left\| \frac{I_2^0 q - q}{r} \right\|_{\infty, J_i} + \frac{|q_{i-1} - 2q_{i-1/2} + q_i|}{4\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \left[ \max \{ |q_i - q_{i-1/2}|, |q_{i-1/2} - q_{i-1}| \} \min \left\{ 1, \frac{h_i \rho}{4\varepsilon} \right\} \right], \quad (5.42)$$

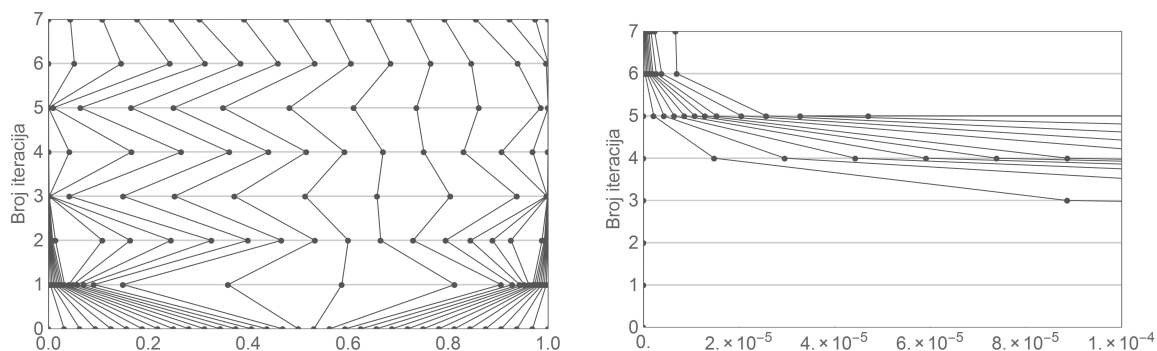
gde je  $q = ru_\Delta - f$ . Takođe, modifikovaćemo  $Q_i$  iz (5.40) na sledeći način

$$\tilde{Q}_i(u_\Delta, \Delta) := (h_i^2 + \mu_i(u_\Delta, \Delta))^{1/2}.$$

Ova modifikacija sprečava da tokom iteracija pojedini koraci mreže budu suviše veliki, videti [5] i slike 5.2 i 5.3.



Slika 5.2: Adaptivna mreža dobijena De Burovim algoritmom sa lokalnom ocenom  $\tilde{Q}_i$  (desno je prikazana slika uvećana u graničnom sloju), test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ;  $N = 32$ .



Slika 5.3: Adaptivna mreža dobijena De Burovim algoritmom sa lokalnom ocenom  $Q_i$  (desno je prikazana slika uvećana u graničnom sloju), test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ;  $N = 32$ .

Tabela 5.7 sadrži numeričke rezultate kolokacionog postupka na adaptivnim mrežama dobijenim De Burovim algoritmom. Poslednja kolona ove tabele daje broj iteracija neophodnih da bi se adaptivni algoritam zaustavio za izabrano  $\gamma = 2$ , dok poslednja vrsta prikazuje prosečan red konvergencije za ocenu koja se nalazi u datoj koloni.

Adaptivni algoritam se pokazuje kao uspešan pri generisanju adaptivne mreže, iako promene  $\chi_N$  imaju veće oscilacije, u smislu reda konvergencije, nego što to imaju apriorno izabrane adaptivne

mreže. Sabirak  $\eta^3$  u aposteriornoj oceni ima najveći uticaj na celokupnu aposteriornu ocenu.

Tabela 5.7: Adaptivni algoritam, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^1$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\eta$	$\chi_N/\eta$	#iter
$2^5$	2.011e-03	1.98	9.068e-04	9.377e-03	1.518e-03	1.180e-02	1.704e-01	7
$2^6$	5.104e-04	2.61	1.064e-04	1.603e-03	3.435e-04	2.053e-03	2.486e-01	5
$2^7$	8.365e-05	2.53	1.406e-05	5.177e-04	7.462e-05	6.064e-04	1.379e-01	4
$2^8$	1.453e-05	1.21	1.682e-06	1.053e-04	1.486e-05	1.219e-04	1.192e-01	8
$2^9$	6.284e-06	1.05	2.155e-07	2.610e-05	3.778e-06	3.009e-05	2.088e-01	3
$2^{10}$	3.030e-06	2.66	2.602e-08	9.422e-06	9.474e-07	1.040e-05	2.915e-01	3
$2^{11}$	4.795e-07	2.33	3.277e-09	3.332e-06	3.869e-07	3.722e-06	1.288e-01	8
$2^{12}$	9.530e-08	1.19	4.410e-10	3.215e-07	6.553e-08	3.875e-07	2.459e-01	2
$2^{13}$	4.186e-08	2.26	5.204e-11	1.305e-07	1.468e-08	1.452e-07	2.883e-01	2
$2^{14}$	8.725e-09	3.12	6.404e-12	2.725e-08	3.609e-09	3.087e-08	2.827e-01	2
$2^{15}$	1.001e-09	—	7.975e-13	5.425e-09	8.503e-10	6.276e-09	1.595e-01	2
pros. red	2.09		3.01	2.07	2.08	2.08		

Na test primeru (5.41), uporedićemo postupak QS (kolokacioni postupak sa kvadratnim  $C^1$ -splajnom) sa postupcima CS, SD, i FEM, koji takođe imaju red konvergencije skoro dva na Šiškinovoj mreži, videti Glavu 1. Numerički rezultati za sve pomenute postupke dati su u Tabeli 5.8.

Takođe, izvršićemo i poređenje svih pomenutih postupaka na R-mreži, videti Tabelu 5.9. Na obe pomenute mreže, postupak QS daje bolje numeričke rezultate nego ostali izabrani postupci sa istim redom konverencije.

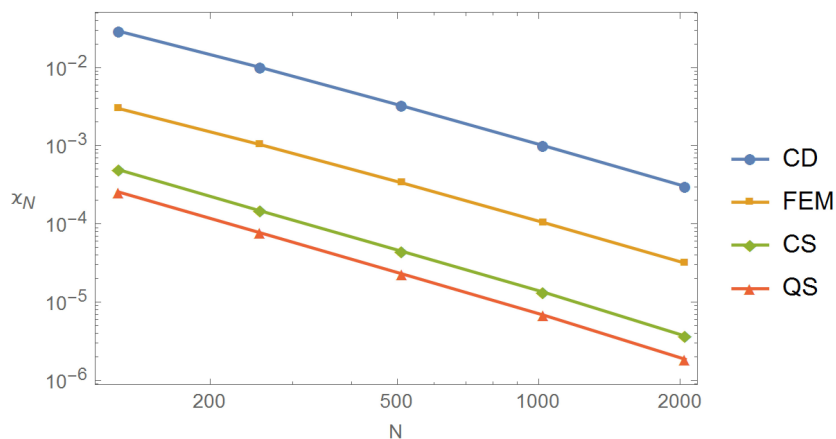
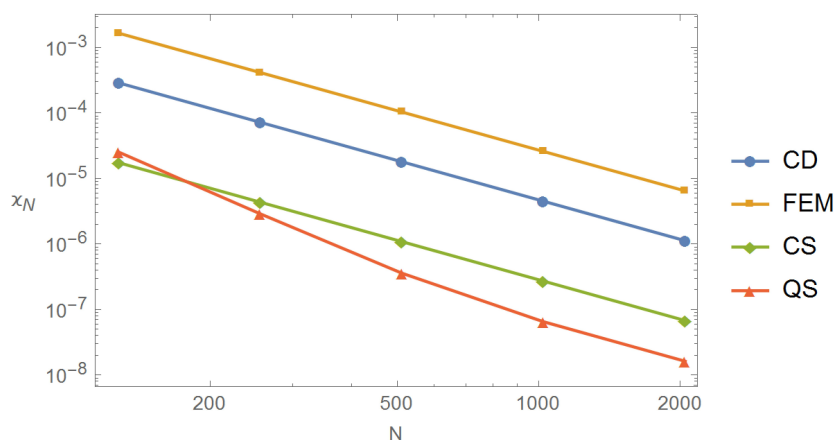
Slike 5.4 i 5.5 prikazuju greške pomenutih postupaka na Šiškinovoj i R-mreži, redom.

Tabela 5.8: Uporedna analiza različitih postupaka na Šiškinovoj mreži, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
<i>SD</i>	9.044e-03	3.259e-03	1.089e-03	3.463e-04	1.065e-04	2.959e-05
<i>FEM</i>	7.937e-03	2.992e-03	1.034e-03	3.360e-04	1.047e-04	3.167e-05
<i>CS</i>	1.777e-03	4.936e-04	1.474e-04	4.486e-05	1.351e-05	3.711e-06
<i>QS</i>	8.300e-04	2.565e-04	7.731e-05	2.314e-05	6.878e-06	1.875e-06

Tabela 5.9: Uporedna analiza različitih postupaka na R-mreži, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
<i>SD</i>	1.151e-03	2.878e-04	7.198e-05	1.800e-05	4.499e-06	1.125e-06
<i>FEM</i>	6.584e-03	1.652e-03	4.136e-04	1.034e-04	2.586e-05	6.464e-06
<i>CS</i>	7.020e-05	1.742e-05	4.348e-06	1.086e-06	2.716e-07	6.789e-08
<i>QS</i>	2.346e-04	2.526e-05	2.884e-06	3.584e-07	6.513e-08	1.624e-08


 Slika 5.4: Greške različitih postupaka na Šiškinovoj mreži, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

 Slika 5.5: Greške različitih postupaka na R-mreži, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

U Tabeli 5.10, poredimo aposteriorne ocene za postupke FEM (videti [40], Teorema 2.3.) i QS na Šiškinovoj mreži, gde možemo videti da se te dve ocene neznatno razlikuju.

 Tabela 5.10: Uporedna analiza aposteriornih ocena na Šiškinovoj mreži, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
<i>FEM</i>	2.407e-02	7.776e-03	2.443e-03	7.499e-04	2.260e-04	6.703e-05
<i>QS</i>	2.394e-02	8.409e-03	2.779e-03	8.796e-04	2.700e-04	7.492e-05

Sada ćemo postupak razvijen u prethodnom poglavlju testirati i na sledećem test primeru

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon^2 u''(x) + (1 + x^2)u(x) &= e^x, & x \in (0, 1), \\
 u(0) = u(1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.43}$$

Tačno rešenje ovog problema ne možemo naći. Zato ćemo grešku postupka aproksimirati takozvanim principom "duple mreže". Za datu mrežu  $\Delta_N = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ , konstruisaćemo finiju mrežu dodavanjem središnjih tačaka svakog intervala početne mreže u  $\Delta_N$ , te tako dobijamo novu mrežu

$$\Delta_{2N}^* := \Delta_N \cup \left\{ x_{i-1/2} : i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$



Sada je  $\|u - u_{\Delta_N}\|_{\infty} \approx \|u_{\Delta_{2N}^*} - u_{\Delta_N}\|_{\infty}$ .

Naša kasnija izračunavanja u narednom poglavlju će zahtevati i nalaženje maksimuma polinoma višeg stepena, što takođe nije moguće učiniti tačno. Zato ćemo grešku u supremum normi aproksimirati sa

$$\|u - u_{\Delta_N}\|_{\infty} \approx \|u_{\Delta_{2N}^*} - u_{\Delta_N}\|_{\infty} \approx \chi_N := \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ m=0, \dots, \bar{k}}} \left| (u_{\Delta_{2N}^*} - u_{\Delta_N})(x_{i-1} + m\bar{k}^{-1}h_i) \right|.$$

Tabela 5.11 prikazuje greške našeg postupka na različitim mrežama za test primer (5.43). Red konvergencije na modifikovanoj Šiškinovoj mreži je skoro dva. Na rekurzivno generisanoj mreži i na mrežama tipa Bahvalova, greške se ponašaju kao  $\mathcal{O}(N^{-2})$ , a drugi tip mreže daje bolje numeričke rezultate nego prvi pomenuti. Parametre mreža biramo na isti način, kao i za test primer (5.41).

U eksperimentima ćemo uzimati  $\bar{k} = 7$ .

Tabela 5.11: Greške kolokacionog postupka (5.16) u supremum normi na adaptivnim mrežama, test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	modifikovana Šiškinova mreža		rekurzivno generisana mreža		mreža Bahvalova		Vulanovićeve mreža		ekvidistantna mreža	
	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$
$2^5$	7.323e-02	1.52	4.315e-02	2.81	3.770e-03	2.46	1.741e-03	2.13	5.469e-01	0.00
$2^6$	2.552e-02	1.66	6.157e-03	2.80	6.860e-04	2.30	3.970e-04	2.07	5.469e-01	0.00
$2^7$	8.050e-03	1.81	8.821e-04	2.43	1.391e-04	2.18	9.457e-05	2.04	5.469e-01	0.00
$2^8$	2.290e-03	1.78	1.635e-04	2.24	3.066e-05	2.10	2.306e-05	2.02	5.469e-01	0.00
$2^9$	6.647e-04	1.76	3.472e-05	2.13	7.152e-06	2.05	5.693e-06	2.01	5.469e-01	0.00
$2^{10}$	1.964e-04	1.77	7.917e-06	2.04	1.725e-06	2.03	1.414e-06	2.00	5.469e-01	0.00
$2^{11}$	5.769e-05	1.77	1.920e-06	2.00	4.233e-07	2.01	3.524e-07	2.00	5.469e-01	0.00
$2^{12}$	1.686e-05	1.78	4.795e-07	2.00	1.048e-07	2.01	8.796e-08	2.00	5.468e-01	0.00
$2^{13}$	4.899e-06	1.79	1.198e-07	2.00	2.608e-08	2.00	2.197e-08	2.00	5.467e-01	0.00
$2^{14}$	1.412e-06	1.81	2.995e-08	2.00	6.506e-09	2.00	5.491e-09	2.00	5.464e-01	0.00
$2^{15}$	4.041e-07	—	7.487e-09	—	1.625e-09	—	1.372e-09	—	5.448e-01	—

Tabele 5.11 i 5.12 pokazuju da su numerički rezultati dobijeni na rekurzivno generisanoj mreži značajno bolji nego oni koji su dobijeni na modifikovanoj Šiškinovoj mreži.

Dok Tabela 5.11 poredi ove dve mreže za zadate vrednosti  $N$ , Tabela 5.12 ih poredi u zavisnosti od izabranog parametra  $h$  (nakon čega računamo i  $N$ ).

Tabela 5.12: Poređenje rezultata na modifikovanoj Šiškinovoj i rekurzivno generisanoj mreži (4.4), test primer (5.43).

$\varepsilon = 10^{-2}$				$\varepsilon = 10^{-4}$			
$h$	$N$	$\chi_S$	$\chi_G$	$h$	$N$	$\chi_S$	$\chi_G$
0.1	104	1.117e-02	1.186e-04	0.1	200	3.444e-03	1.118e-04
0.06	168	4.832e-03	3.943e-05	0.03	644	4.460e-04	9.138e-06
0.02	496	7.087e-04	4.005e-06	0.01	1912	6.519e-05	9.985e-07
0.01	988	1.724e-04	9.982e-07	0.008	2388	4.394e-05	6.402e-07
0.004	2460	2.677e-05	1.606e-07	0.005	3816	1.913e-05	2.508e-07
0.001	9828	1.643e-06	1.006e-08	0.0025	7624	5.570e-06	6.284e-08

Aposteriorne ocene na modifikovanoj Šiškinovoj mreži su prikazane u Tabeli 5.13.

Tabela 5.13: Aposteriorne ocene na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^I$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\eta$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	7.323e-02	1.52	2.24	9.939e-05	1.657e+00	3.026e-01	1.959e+00	3.737e-02
$2^6$	2.552e-02	1.66	2.26	1.519e-05	7.398e-01	1.750e-01	9.149e-01	2.790e-02
$2^7$	8.050e-03	1.81	2.33	2.073e-06	2.891e-01	8.116e-02	3.702e-01	2.174e-02
$2^8$	2.290e-03	1.78	2.21	2.691e-07	1.027e-01	3.192e-02	1.346e-01	1.701e-02
$2^9$	6.647e-04	1.76	2.12	3.422e-08	3.416e-02	1.125e-02	4.541e-02	1.464e-02
$2^{10}$	1.964e-04	1.77	2.08	4.312e-09	1.086e-02	3.692e-03	1.455e-02	1.350e-02
$2^{11}$	5.769e-05	1.77	2.06	5.412e-10	3.340e-03	1.156e-03	4.496e-03	1.283e-02
$2^{12}$	1.686e-05	1.78	2.04	6.778e-11	1.003e-03	3.506e-04	1.354e-03	1.246e-02
$2^{13}$	4.899e-06	1.79	2.03	8.480e-12	2.958e-04	1.039e-04	3.998e-04	1.225e-02
$2^{14}$	1.412e-06	1.81	2.02	1.060e-12	8.602e-05	3.031e-05	1.163e-04	1.214e-02
$2^{15}$	4.041e-07	—	—	1.326e-13	2.473e-05	8.726e-06	3.345e-05	1.208e-02

Adaptivni algoritam za test primer (5.43), generiše mrežu koja daje očekivani prosečan red konvergencije, videti Tabelu 5.14.

Tabela 5.14: Adaptivni algoritam, test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^I$	$\eta^3$	$\eta^4$	$\eta$	$\chi_N/\eta$	#iter
$2^5$	6.138e-03	1.46	6.678e-05	5.837e-02	5.269e-03	6.371e-02	9.634e-02	22
$2^6$	2.238e-03	3.81	7.113e-06	1.169e-02	3.089e-03	1.479e-02	1.514e-01	8
$2^7$	1.596e-04	1.74	8.610e-07	2.332e-03	2.380e-04	2.570e-03	6.210e-02	4
$2^8$	4.789e-05	0.98	1.283e-07	6.898e-04	8.254e-05	7.725e-04	6.200e-02	3
$2^9$	2.424e-05	3.10	1.431e-08	1.149e-04	1.454e-05	1.295e-04	1.873e-01	3
$2^{10}$	2.823e-06	2.32	1.747e-09	2.814e-05	3.844e-06	3.199e-05	8.827e-02	3
$2^{11}$	5.658e-07	1.90	2.635e-10	6.508e-06	1.481e-06	7.989e-06	7.082e-02	2
$2^{12}$	1.511e-07	2.27	2.906e-11	1.602e-06	2.446e-07	1.847e-06	8.182e-02	2
$2^{13}$	3.124e-08	1.19	3.490e-12	2.750e-07	5.887e-08	3.338e-07	9.357e-02	2
$2^{14}$	1.374e-08	—	4.316e-13	1.125e-07	1.414e-08	1.266e-07	1.085e-01	2
pros. red	2.02		3.03	2.05	2.11	2.10		

Napokon, uporedićemo kolokacioni postupak QS sa postupcima CS, SD, i FEM na Šiškinovoj mreži i na test primeru (5.43). Uporedna analiza dobijenih numeričkih rezultata za sve postupke data je u Tabeli 5.15.

Tabela 5.15: Greške različitih postupaka na Šiškinovoj mreži, test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

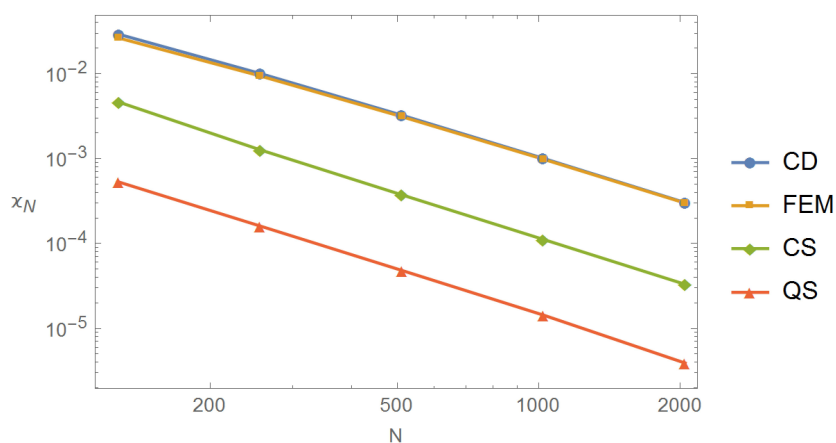
$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$SD$	7.598e-02	2.909e-02	1.003e-02	3.239e-03	1.004e-03	3.027e-04
$FEM$	6.641e-02	2.628e-02	9.380e-03	3.111e-03	9.811e-04	2.988e-04
$CS$	6.790e-02	4.625e-03	1.265e-03	3.737e-04	1.115e-04	3.305e-05
$QS$	1.731e-03	5.295e-04	1.603e-04	4.815e-05	1.433e-05	3.909e-06

Takođe, sve pomenute postupke poredimo i na R-mreži, videti Tabelu 5.16.

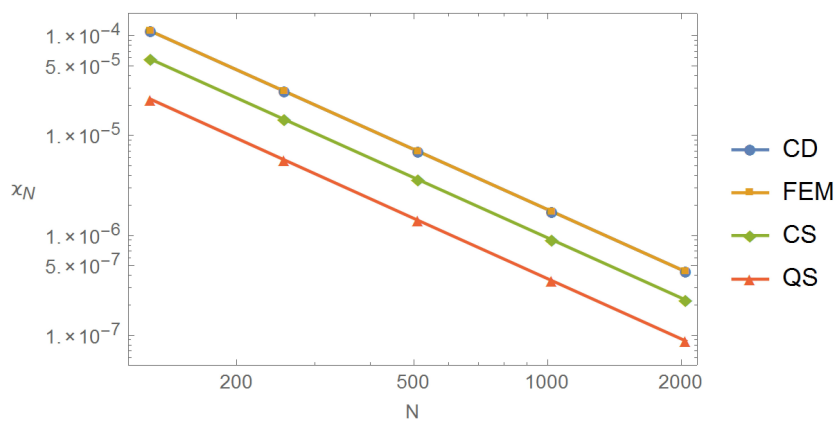
Tabela 5.16: Greške različitih postupaka na R-mreži, test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$
$SD$	4.413e-04	1.107e-04	2.772e-05	6.937e-06	1.735e-06	4.339e-07
$FEM$	4.427e-04	1.109e-04	2.775e-05	6.940e-06	1.736e-06	4.339e-07
$CS$	2.343e-04	5.804e-05	1.448e-05	3.618e-06	9.043e-07	2.261e-07
$QS$	9.457e-05	2.306e-05	5.693e-06	1.414e-06	3.524e-07	8.796e-08

Slike 5.6 i 5.7 prikazuju prednost našeg postupka u odnosu na ostale posmatrane postupke i na Šiškinovoj i na R-mreži.



Slika 5.6: Greške različitih postupaka na Šiškinovoj mreži, test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .



Slika 5.7: Greške različitih postupaka na R-mreži, test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Primitimo, takođe, da naš QS postupak kao aproksimaciju daje funkciju klase  $C^1$ , dok postupci FEM i SD kao aproksimaciju imaju funkciju klase  $C^0$  na intervalu  $[0, 1]$ . Postupak CS kao približno rešenje problema (5.1) daje funkciju klase  $C^2$  na  $[0, 1]$ .

## 5.4 Kolokacioni postupci sa $C^1$ -splajnovima proizvoljnog stepena

### 5.4.1 Kolokacioni postupak

Fiksirajmo  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . Problem (5.1) ćemo diskretizovati pomoću splajnova iz prostora  $\mathcal{S}_{k+1}^1(\Delta)$  tako da zadovoljavaju granične uslove i diferencijalnu jednačinu (5.1) u određenim tačkama. Za probleme koji nisu singularno perturbovani, poznato je da nule Ležandrovih polinoma predstavljaju najbolji izbor za tačke kolokacije, videti [13].

Nule Ležandrovih polinoma na intervalu  $[-1, 1]$ , sa preciznošću ne manjom od  $10^{-6}$ , date su u Tabeli 5.17.

Tabela 5.17: Nule Ležandrovih polinoma.

$k$	$t_j$				
1	0				
2	$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		
3	$-\sqrt{3/5}$		0	$\sqrt{3/5}$	
4	-0.861136	-0.774597	0.774597	0.861136	
5	-0.906180	-0.538469	0	0.538469	0.906180
...	...				

Ovako dobijene nule ćemo preslikati sa intervala  $[-1, 1]$  na interval  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  i označavaćemo ih sa  $\zeta_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Tačke  $\zeta_{i,j}$  su nule polinoma

$$M_{k,i}(x) := \frac{d^k}{dx^k} \left( (x - x_{i-1})^k (x - x_i)^k \right)$$

i lako se mogu izraziti kao

$$\zeta_{i,j} = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} + \frac{h_i}{2} t_j,$$

gde su  $t_j \in [-1, 1]$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , nule Ležandrovih polinoma stepena  $k$  na intervalu  $[-1, 1]$ . Sada problemu (5.1) pridružujemo sledeći diskretizovani problem: Naći  $u_\Delta \in \mathcal{S}_{k+1}^1(\Delta)$  tako da važi:

$$u_{\Delta,0} = g_0, \quad (\mathcal{L}u_\Delta)(\zeta_{i,j}) = f(\zeta_{i,j}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, k, \quad u_{\Delta,N} = g_1. \quad (5.44)$$

$C^1$ -splajnove proizvoljnog stepena možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju B-splajnova, koje smo definisali u Glavi 3, pa  $u_\Delta$  možemo prikazati na sledeći način

$$u_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{N+1} (\alpha_i \varphi_{3,i}(x) + \beta_i \psi_{3,i}(x)),$$

za kubne  $C^1$ -splajnove, gde su  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$  određeni sa (5.44) i sa

$$u_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{N+1} (\alpha_i \varphi_{4,i}(x) + \beta_i \psi_{4,i}(x)) + \sum_{i=1}^N \gamma_i \eta_{4,i}(x),$$

za  $C^1$ -splajnovne stepena četiri, gde su  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$  opet determinisani sa (5.44).

Drugi izvodi splajnova trećeg i četvrtog stepena dati su u Prilogu A. Za svako  $k$ , neophodno je prvo konstruisati odgovarajuće B-splajnovne, i tek potom možemo odrediti (5.44).

S druge strane, možemo konstruisati i bazu koja bi nam omogućila lako uopštenje (5.44), za  $C^1$ -splajn proizvoljnog stepena  $k$ . Zato smo u Glavi 3 i uveli pojam "bubble" funkcija. Koeficijenti  $s_i, s'_i$  i  $\mu_{i,l}$  u reprezentaciji (3.5) određeni su sa  $kn$  kolokacionih jednačina:

$$-\varepsilon^2 s''(\zeta_{i,j}) + r(\zeta_{i,j})s(\zeta_{i,j}) = f(\zeta_{i,j}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

i dva granična uslova. Funkcija  $s$ , u stvari, predstavlja samo drugačiju reprezentaciju aproksimacije  $u_\Delta$  problema (5.1). Za funkciju  $s$  važi

$$s(\zeta_{i,j}) = s_{i-1}H_{-1}(t_j) + s_i H_1(t_j) + s'_{i-1} \frac{h_i}{2} \bar{H}_{-1}(t_j) + s'_i \frac{h_i}{2} \bar{H}_1(t_j) + \sum_{l=4}^{k+1} \mu_{i,l} \psi_l(t_j),$$

zbog (3.5) i

$$s''(\zeta_{i,j}) = \frac{4}{h_i^2} \left( s_{i-1} H''_{-1}(t_j) + s_i H''_1(t_j) + s'_{i-1} \frac{h_i}{2} \bar{H}''_{-1}(t_j) + s'_i \frac{h_i}{2} \bar{H}''_1(t_j) + \sum_{l=4}^{k+1} \mu_{i,l} \psi''_l(t_j) \right),$$

zbog (3.4). Da bismo formirali linearni sistem (5.44) po promenljivama  $s_i, s'_i$  i  $\mu_{i,l}$ , dovoljno je naći elemente ove baze sa svojim izvodima, samo na intervalu  $[-1, 1]$ , videti Poglavlje 3.2.

## 5.4.2 Apriorna ocena greške

Za klasične probleme, tj. probleme kod kojih je  $\varepsilon = 1$ , dobro su poznate sledeće ocene na ekvidistantnoj mreži sa korakom  $h$ :

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq Ch^{k^*}, \quad \text{gde je } \begin{cases} k^* = 2 & \text{za } k = 1, \\ k^* = k + 2 & \text{za } k > 1, \end{cases}$$

videti [13]. Uzimajući u obzir ove ocene i numerička testiranja kao i rezultate za ostale tehnike diskretizacije [39, 56] očekujemo da za singularno perturbovani problem (5.1) i kolokacioni postupak (5.44) važe ocene:

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq \begin{cases} CN^{-k^*} & \text{na mrežama tipa Bahvalova,} \\ C(N^{-1} \ln N)^{k^*} & \text{na mrežama tipa Šiškina.} \end{cases}$$

Za sada su odgovarajuće apriorne ocene postignute samo za kolokacije sa  $C^1$ -kvadratnim splajnom na modifikovanoj Šiškinovoj mreži i rekurzivno generisanoj mreži.

### 5.4.3 Aposteriorna ocena greške

Uvedimo dve interpolacione funkcije:

$I_{k+1}^0 : \varphi \mapsto I_{k+1}^0 \varphi \in \mathcal{S}_{k+1}^0(\Delta)$  definisanu sa:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_{i-1}) &= (I_{k+1}^0 \varphi)(x_{i-1}), & \varphi(x_i) &= (I_{k+1}^0 \varphi)(x_i), \\ \varphi(\zeta_{i,j}) &= (I_{k+1}^0 \varphi)(\zeta_{i,j}), & j &= 1, \dots, k, \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, N,$$

kao i

$I_{k-1}^{-1} : \varphi \mapsto I_{k-1}^{-1} \varphi \in \mathcal{S}_{k-1}^{-1}(\Delta)$  definisanu sa:

$$\varphi(\zeta_{i,j}) = (I_{k-1}^{-1} \varphi)(\zeta_{i,j}), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.45)$$

gde je  $\mathcal{S}_{k-1}^{-1}$  prostor funkcija, koje mogu imati prekide samo u čvornim tačkama  $x_i$ . Za fiksno  $x \in (0, 1)$ , iz (5.30) sledi

$$(u - u_\Delta)(x) = \int_0^1 \Gamma(\xi)(f - \mathcal{L}u_\Delta)(\xi) d\xi, \quad (5.46)$$

gde je  $\Gamma := \mathcal{G}(x, \cdot)$ . Iz (5.44) i (5.45) znamo da su polinomi  $I_{k-1}^{-1}(f - \mathcal{L}u_\Delta)$  stepena  $k-1$  sa  $k$  nula  $\zeta_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , na svakom intervalu  $J_i$ . Zato je  $I_{k-1}^{-1}(f - \mathcal{L}u_\Delta) \equiv 0$  pa odatle sledi

$$\sum_{i=1}^N \int_{J_i} \Gamma(\xi) I_{k-1}^{-1}(f - \mathcal{L}u_\Delta)(\xi) d\xi = 0. \quad (5.47)$$

U sledećoj teoremi data je aposteriorna ocena za kolokacioni postupak sa  $C^1$ -splajnom proizvoljnog stepena na proizvoljno izabranoj mreži, što je i glavni rezultat ovog poglavlja.

**Teorema 5.14.** *Neka je  $u$  tačno rešenje problema (5.1) i  $u_\Delta \in \mathcal{S}_{k+1}^1(\Delta)$ ,  $k > 1$ , njegova aproksimacija dobijena primenom kolokacionog postupka (5.44) na proizvoljnoj mreži  $\Delta$ . Tada je*

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \leq \eta^k(f - ru_\Delta, \Delta),$$

gde je  $\eta^k(q, \Delta) = \eta^{k,I}(q, \Delta) + \eta^{k,D}(q, \Delta)$ ,

$$\eta^{k,I}(q, \Delta) := \left\| \frac{I_{k+1}^0 q - q}{r} \right\|_\infty,$$

$$\eta^{k,D}(q, \Delta) := \frac{3}{2\varrho^2} \max_{i=1, \dots, N} \left[ Q_{k,i}^{\max} \min \left\{ 2, \frac{h_i^2 \varrho^2}{4\varepsilon^2} \right\} + Q_{k,i}^d \min \left\{ 1, \frac{h_i \varrho}{2\varepsilon} \right\} \right]$$

uz sledeću notaciju

$$Q_{k,i}^- := q_{i-1} - (I_{k-1}^{-1} q)(x_{i-1} + 0), \quad Q_{k,i}^+ := q_i - (I_{k-1}^{-1} q)(x_i - 0),$$

$i$

$$Q_{k,i}^{\max} := \max \left\{ |Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+| \right\}, \quad Q_{k,i}^d := |Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-|,$$

gde je  $q := f - ru_\Delta$ .

**Napomena 9.** Iz uslova kolokacije (5.44) imamo da je  $q \approx \varepsilon^2 u''_\Delta$ . Shodno tome,  $\eta^{k,D}$  indukuje diferencne količnike funkcije u reda  $k + 2$  i  $k + 3$ .

*Dokaz Teoreme 5.14.* Ako oduzmemo (5.47) od (5.46), onda dobijamo

$$(u - u_\Delta)(x) = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} \Gamma(\xi) \left[ (q(\xi) - (I_{k-1}^{-1}q)(\xi)) + \varepsilon^2 (u''_\Delta(\xi) - I_{k-1}^{-1}u''_\Delta(\xi)) \right] d\xi,$$

gde je  $q := f - ru_\Delta$ . Kako je  $u_\Delta$  polinom stepena  $k+1$ , to je polinom  $u''_\Delta - I_{k-1}^{-1}u''_\Delta$  stepena  $k-1$  sa  $k$  nula  $\zeta_{i,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , na svakom intervalu  $J_i$ . Jasno je da odavde sledi da je  $u''_\Delta - I_{k-1}^{-1}u''_\Delta \equiv 0$ , tj.  $u''_\Delta \equiv I_{k-1}^{-1}u''_\Delta$ , na svakom intervalu  $J_i$ . Dalje je

$$(u - u_\Delta)(x) = \sum_{i=1}^N \int_{J_i} \Gamma(\xi) (q - I_{k-1}^{-1}q)(\xi) d\xi,$$

pa dobijamo

$$(u - u_\Delta)(x) = \int_0^1 (q - I_{k+1}^0 q)(\xi) \Gamma(\xi) d\xi + \int_0^1 (I_{k+1}^0 q - I_{k-1}^{-1} q)(\xi) \Gamma(\xi) d\xi,$$

tj.

$$(u - u_\Delta)(x) = \int_0^1 (q - I_{k+1}^0 q)(\xi) \Gamma(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^N \Psi_{k,i}, \quad (5.48)$$

gde je

$$\Psi_{k,i} := \int_{J_i} \Gamma(\xi) (I_{k+1}^0 q - I_{k-1}^{-1} q)(\xi) d\xi. \quad (5.49)$$

Primetimo da je  $(I_{k+1}^0 q - I_{k-1}^{-1} q)(\zeta_{i,j}) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Sada je

$$(I_{k+1}^0 q - I_{k-1}^{-1} q)(\xi) = M_{k,i}(\xi) p_i(\xi), \quad (5.50)$$

gde je

$$M_{k,i}(\xi) = (\xi - \zeta_{i,1})(\xi - \zeta_{i,2}) \dots (\xi - \zeta_{i,k})$$

i  $p_i$  je linearna funkcija koja zadovoljava sledeća dva uslova:

$$M_{k,i}(x_{i-1}) p_i(x_{i-1}) = q_{i-1} - (I_{k-1}^{-1} q)(x_{i-1}) =: Q_{k,i}^+$$

i

$$M_{k,i}(x_i)p_i(x_i) = q_i - (I_{k-1}^{-1}q)(x_i) =: Q_{k,i}^-.$$

Iz ova dva uslova lako možemo dobiti  $p_i$  u sledećoj formi

$$p_i(\xi) = \frac{Q_{k,i}^+}{M_{k,i}(x_i)} \frac{\xi - x_{i-1}}{h_i} - \frac{Q_{k,i}^-}{M_{k,i}(x_{i-1})} \frac{\xi - x_i}{h_i}. \quad (5.51)$$

Ekstremi funkcije  $p_i$  se nalaze na krajevima intervala  $J_i$ , pa je

$$\|p_i\|_{\infty, J_i} = \max \left\{ \frac{|Q_{k,i}^+|}{|M_{k,i}(x_i)|}, \frac{|Q_{k,i}^-|}{|M_{k,i}(x_{i-1})|} \right\}. \quad (5.52)$$

Kako važi i

$$\|M_{k,i}\|_{\infty, J_i} = M_{k,i}(x_i) = (-1)^k M_{k,i}(x_{i-1}), \quad (5.53)$$

to iz (5.50), (5.52) i (5.53), dobijamo

$$\|I_{k+1}^0 q - I_{k-1}^{-1} q\|_{\infty, J_i} \leq \|p_i\|_{\infty, J_i} \|M_{k,i}\|_{\infty, J_i} \leq \max \left\{ |Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+| \right\}. \quad (5.54)$$

Lako se pokazuje da važi

$$\|p_i'\|_{\infty, J_i} = \frac{1}{h_i} \left| \frac{Q_{k,i}^+}{M_{k,i}(x_i)} - \frac{Q_{k,i}^-}{M_{k,i}(x_{i-1})} \right| = \frac{1}{h_i} \frac{|Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-|}{|M_{k,i}(x_i)|}, \quad (5.55)$$

zbog (5.51) i (5.53), pa je

$$\|p_i'\|_{\infty, J_i} \|M_{k,i}\|_{\infty, J_i} = \frac{|Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-|}{h_i}.$$

Kombinacijom (5.49) i (5.54), dobijamo

$$|\Psi_{k,i}| \leq \max \left\{ |Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+| \right\} \int_{J_i} \Gamma(\xi) d\xi. \quad (5.56)$$

Kako je  $M_{k,i} = CP_{k,i}$ , gde je  $P_{k,i}$  Ležandrov polinom stepena  $k$  na intervalu  $J_i$ , to je  $M_{k,i}$  ortogonalno na sve Ležandrove polinome stepena ne većeg od  $k-1$  u standardnom  $L_2(J_i)$  skalarnom proizvodu, tj. važi

$$\int_{J_i} (\Gamma p_i)(x_{i-1/2}) M_{k,i}(\xi) d\xi = 0, \quad (5.57)$$

kao i

$$\int_{J_i} (\xi - x_{i-1/2}) (\Gamma p_i)'(x_{i-1/2}) M_{k,i}(\xi) d\xi = 0. \quad (5.58)$$

Iz (5.50) i (5.57) dobijamo sledeću jednakost



$$\Psi_{k,i} = \int_{J_i} \left[ (\Gamma p_i)(\xi) - (\Gamma p_i)(x_{i-1/2}) \right] M_{k,i}(\xi) d\xi, \quad (5.59)$$

a iz Tejlorove formule sledi

$$(\Gamma p_i)(\xi) - (\Gamma p_i)(x_{i-1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} (\Gamma p_i)'(\sigma) d\sigma. \quad (5.60)$$

Dalje, iz (5.59) i (5.60) dobijamo

$$\begin{aligned} \Psi_{k,i} &= \int_{J_i} \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} (\Gamma(\sigma)p_i(\sigma))' M_{k,i}(\xi) d\sigma d\xi \\ &= \int_{J_i} \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} (\Gamma'(\sigma)p_i(\sigma) + \Gamma(\sigma)p_i'(\sigma)) M_{k,i}(\xi) d\sigma d\xi. \end{aligned}$$

Holderova nejednakost, (5.52) i (5.55) daju

$$|\Psi_{k,i}| \leq \frac{|Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-|}{2} \int_{J_i} \Gamma(\xi) d\xi + \frac{h_i}{2} \max \{ |Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+| \} \int_{J_i} |\Gamma'(\xi)| d\xi. \quad (5.61)$$

Iz (5.57) i (5.58) dobijamo

$$\Psi_{k,i} = \int_{J_i} \left[ (\Gamma p_i)(\xi) - (\Gamma p_i)(x_{i-1/2}) - (\xi - x_{i-1/2}) (\Gamma p_i)'(x_{i-1/2}) \right] M_{k,i}(\xi) d\xi,$$

dok Tejlorov razvoj funkcije  $\Gamma p_i$  u tački  $x_{i-1/2}$  daje

$$(\Gamma p_i)(\xi) = (\Gamma p_i)(x_{i-1/2}) + (\xi - x_{i-1/2})(\Gamma p_i)'(x_{i-1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} \int_{x_{i-1/2}}^{\tau} (\Gamma p_i)''(\sigma) d\sigma d\tau.$$

Iz poslednje dve jednakosti sledi

$$\Psi_{k,i} = \int_{J_i} \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} \int_{x_{i-1/2}}^{\tau} (\Gamma p_i)''(\sigma) M_{k,i}(\xi) d\sigma d\tau d\xi,$$

a potom i

$$\begin{aligned} |\Psi_{k,i}| &\leq \|M_{k,i}\|_{\infty, J_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{\xi}^{x_{i-1/2}} \int_{\tau}^{x_{i-1/2}} |(\Gamma p_i)''(\sigma)| d\sigma d\tau d\xi \\ &\leq \|M_{k,i}\|_{\infty, J_i} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1/2}} \int_{\xi}^{x_{i-1/2}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1/2}} |(\Gamma p_i)''(\sigma)| d\sigma d\tau d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{\xi} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} |(\Gamma p_i)''(\sigma)| d\sigma d\tau d\xi \right\} \\ &\leq \|M_{k,i}\|_{\infty, J_i} \left\{ \frac{h_i^2}{8} \int_{x_{i-1}}^{x_{i-1/2}} |(\Gamma p_i)''(\sigma)| d\sigma + \frac{h_i^2}{8} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} |(\Gamma p_i)''(\sigma)| d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} |\Psi_{k,i}| &\leq \|M_{k,i}\|_{\infty, J_i} \frac{h_i^2}{8} \int_{J_i} |(\Gamma p_i)''(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \frac{h_i}{4} |Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-| \int_{J_i} |\Gamma'(\xi)| \, d\xi + \frac{h_i^2}{8} \max\{|Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+|\} \int_{J_i} |\Gamma''(\xi)| \, d\xi, \end{aligned}$$

što sledi iz Holderove nejednakosti, (5.52), (5.55) i zbog  $p'' \equiv 0$ . Dalje, iz (5.2) znamo da je

$$-\varepsilon^2 \Gamma''(\xi) + r(\xi)\Gamma(\xi) = \delta(\xi - x),$$

i odatle je

$$\varepsilon^2 \int_{J_i} |\Gamma''(\xi)| \, d\xi = \int_{J_i} |r(\xi)\Gamma(\xi) - \delta(\xi - x)| \, d\xi \leq \int_{J_i} r(\xi)\Gamma(\xi) \, d\xi + \int_{J_i} \delta(\xi - x) \, d\xi.$$

Dakle, važi

$$\begin{aligned} |\Psi_{k,i}| &\leq \frac{h_i}{4\varepsilon\varrho} |Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-| \left( \varepsilon\varrho \int_{J_i} |\Gamma'(\xi)| \, d\xi \right) \\ &\quad + \frac{h_i^2}{8\varepsilon^2} \max\{|Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+|\} \left( \int_{J_i} r(\xi)\Gamma(\xi) \, d\xi + \int_{J_i} \delta(\xi - x) \, d\xi \right), \end{aligned}$$

tj.

$$|\Psi_{k,i}| \leq \frac{h_i \Phi_i}{\varepsilon\varrho} \left\{ \frac{1}{4} |Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-| + \frac{h_i\varrho}{8\varepsilon} \max\{|Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+|\} \right\}, \quad (5.62)$$

gde je

$$\Phi_i := \varrho\varepsilon \int_{J_i} |\Gamma'(\xi)| \, d\xi + \int_{J_i} r(\xi)\Gamma(\xi) \, d\xi + \int_{J_i} \delta(x - \xi) \, d\xi.$$

Ocena (5.61) implicira

$$|\Psi_{k,i}| \leq \frac{|Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-|}{2\varrho^2} \int_{J_i} r(\xi)\Gamma(\xi) \, d\xi + \frac{h_i}{2\varrho\varepsilon} \max\{|Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+|\} \varrho\varepsilon \int_{J_i} |\Gamma'(\xi)| \, d\xi,$$

odakle sledi

$$|\Psi_{k,i}| \leq \frac{\Phi_i}{2\varrho^2} \left\{ |Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-| + \frac{h_i\varrho}{\varepsilon} \max\{|Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+|\} \right\}. \quad (5.63)$$

Iz (5.56) dobijamo sledeće ograničenje

$$|\Psi_{k,i}| \leq \frac{\Phi_i}{\varrho^2} \max\{|Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+|\}. \quad (5.64)$$

Kombinacija (5.62), (5.63) i (5.64) nam daje

$$|\Psi_{k,i}| \leq \frac{\Phi_i}{2\varrho^2} \left( \min\left\{1, \frac{h_i\varrho}{2\varepsilon}\right\} |Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-| + \min\left\{2, \frac{h_i\varrho}{\varepsilon}, \frac{h_i^2\varrho^2}{4\varepsilon^2}\right\} \max\{|Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+|\} \right).$$

Sumiranjem prethodne nejednakosti dobijamo

$$\sum_{i=1}^N \int_{J_i} |\Psi_{k,i}| \leq \sum_{i=1}^N \int_{J_i} \frac{\Phi_i}{2\varrho^2} \left[ \min \left\{ 1, \frac{h_i \varrho}{2\varepsilon} \right\} |Q_{k,i}^+ - (-1)^k Q_{k,i}^-| \right. \\ \left. + \min \left\{ 2, \frac{h_i \varrho}{\varepsilon}, \frac{h_i^2 \varrho^2}{4\varepsilon^2} \right\} \max \left\{ |Q_{k,i}^-|, |Q_{k,i}^+| \right\} \right] d\xi.$$

Kako je  $\sum_{i=1}^N \Phi_i \leq 3$ , zbog (5.2), (5.4a), (5.4b), (5.48) i

$$\min \left\{ 2, \frac{h_i \varrho}{\varepsilon}, \frac{h_i^2 \varrho^2}{4\varepsilon^2} \right\} = \min \left\{ 2, \frac{h_i^2 \varrho^2}{4\varepsilon^2} \right\},$$

dokaz Teoreme 5.14 je kompletiran. □

#### 5.4.4 Numerički rezultati

Teorijske rezultate iz ovog poglavlja potvrdićemo numerički na test primerima (5.41) i (5.43). Prvo ćemo analizirati numeričke rezultate dobijene na test primeru (5.41).

Tabela 5.18 prikazuje rezultate kolokacija sa  $C^1$ -kubnim splajnom na mreži Bahvalova. Kolone ove tabele sadrže redom discretizacioni parametar  $N$ , aproksimaciju greške postupka  $\chi_N$ , red konvergencije, te dve komponente  $\eta^{2,I}$  i  $\eta^{2,D}$  aposteriorne ocene, i samu aposteriornu ocenu  $\eta^2$ . U poslednjoj koloni dat je odnos  $\chi_N$  i aposteriorne ocene  $\eta^2$ , tj. ocenjena je efikasnost aposteriorne ocene  $\eta^2$ .

Tabela 5.18: Kubni splajn – aposteriorne ocene na mreži Bahvalova, test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 4$ ,  $\bar{q} = 0.4$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{2,I}$	$\eta^{2,D}$	$\eta^2$	$\chi_N/\eta^2$
$2^5$	2.978e-03	3.68	2.370e-03	1.055e-02	1.292e-02	2.305e-01
$2^6$	2.320e-04	3.88	1.513e-04	7.317e-04	8.831e-04	2.627e-01
$2^7$	1.574e-05	3.97	9.601e-06	4.343e-05	5.304e-05	2.968e-01
$2^8$	1.005e-06	3.99	6.015e-07	2.901e-06	3.503e-06	2.868e-01
$2^9$	6.312e-08	4.00	3.762e-08	2.142e-07	2.518e-07	2.507e-01
$2^{10}$	3.951e-09	4.00	2.352e-09	1.297e-08	1.533e-08	2.578e-01
$2^{11}$	2.470e-10	4.00	1.470e-10	7.272e-10	8.742e-10	2.825e-01
$2^{12}$	1.544e-11	4.00	9.187e-12	4.855e-11	5.773e-11	2.674e-01
$2^{13}$	9.649e-13	4.00	5.742e-13	3.300e-12	3.874e-12	2.491e-01
$2^{14}$	6.031e-14	—	3.589e-14	1.975e-13	2.334e-13	2.584e-01

Kao što je i očekivano, kolokacioni postupak na mreži Bahvalova konvergira sa redom konvergencije četiri. Štaviše, vidimo da je indeks efikasnosti aposteriorne ocene, tj.  $\chi_N/\eta^2$  nezavisan od diskretizacionog parametra  $N$ . Takođe, vidimo da je aposteriorna ocena približno 4 puta veća od  $\chi_N$ .

Tabela 5.19 prikazuje numeričke rezultate dobijene i na drugim adaptivnim mrežama – Šiškinovoj, rekursivno generisanoj i R-mreži. Vidimo da kolokacioni postupak sa  $C^1$ -kubnim splajnom na Šiškinovoj mreži konvergira sa redom konvergencije skoro četiri. Red konvergencije na rekursivno generisanoj mreži je četiri. Ovaj tip mreže predstavlja bolji izbor od Šiškinove mreže, pogotovo za splajnovu većeg stepena, videti Tabelu 5.21. Kao što je i očekivano, kolokacioni postupak daje značajno

jno bolje numeričke rezultate na mrežama tipa Bahvalova nego na dvema pomenutim mrežama – Šiškinovoj i rekurzivno generisanoj mreži. Aposteriorna ocena je veća približno 21, 4 i 3.5 puta od  $\chi_N$  na Šiškinovoj mreži, na rekurzivno generisanoj mreži i na R-mreži, redom.

 Tabela 5.19: Aposteriorne ocene, kubni splajn,  $k = 2$ , test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^2$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^2$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^2$
$2^5$	3.068e-03	2.93	4.32	6.495e-02	7.097e-03	1.95	2.699e-01	2.897e-03	3.69	1.256e-02
$2^6$	4.028e-04	2.74	3.72	1.054e-02	1.841e-03	3.29	1.545e-02	2.243e-04	3.88	8.546e-04
$2^7$	6.025e-05	3.02	3.88	1.412e-03	1.889e-04	2.37	7.822e-04	1.525e-05	3.97	5.136e-05
$2^8$	7.449e-06	3.20	3.96	1.652e-04	3.641e-05	3.74	1.372e-04	9.727e-07	3.99	3.169e-06
$2^9$	8.114e-07	3.32	4.00	1.749e-05	2.720e-06	3.69	9.309e-06	6.115e-08	4.00	2.273e-07
$2^{10}$	8.106e-08	3.41	4.02	1.721e-06	2.109e-07	3.95	6.878e-07	3.827e-09	4.00	1.408e-08
$2^{11}$	7.616e-09	3.48	4.03	1.604e-07	1.368e-08	3.92	4.817e-08	2.393e-10	4.00	8.196e-10
$2^{12}$	6.842e-10	3.53	4.03	1.434e-08	9.017e-10	3.97	2.979e-09	1.496e-11	4.00	5.356e-11
$2^{13}$	5.937e-11	3.57	4.03	1.242e-09	5.758e-11	3.98	2.323e-10	9.348e-13	4.00	3.167e-12
$2^{14}$	5.013e-12	—	—	1.047e-10	3.641e-12	—	1.229e-11	5.842e-14	—	2.011e-13

Razmotrimo sada kolokacione postupke višeg reda na mreži Bahvalova, ali i na drugim adaptivnim mrežama, videti tabele 5.20 i 5.21. Red konvergencije kolokacionog postupka sa  $C^1$ -splajnom stepena 8 na mreži Bahvalova je devet. Sabirak  $\eta^{7,D}$  iz aposteriorne ocene  $\eta^7$  je dominantan u  $\eta^7$ . U Tabeli 5.21 vidimo da su aposteriorne ocene približno 41, 8.5 i 30 puta veće od  $\chi_N$  na Šiškinovoj mreži, na rekurzivno generisanoj mreži i na R-mreži, redom.

 Tabela 5.20: Splajn  $k = 7$  – aposteriorne ocene na mreži Bahvalova, test primer (5.41)  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 9$ ,  $\bar{q} = 0.4$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{7,I}$	$\eta^{7,D}$	$\eta^7$	$\chi_N/\eta^7$
$2^5$	3.528e-09	8.96	3.443e-09	3.167e-09	6.610e-09	5.337e-01
$2^6$	7.085e-12	9.00	6.997e-12	4.368e-12	1.136e-11	6.235e-01
$2^7$	1.385e-14	9.00	1.380e-14	6.284e-15	2.009e-14	6.895e-01
$2^8$	2.701e-17	9.00	2.699e-17	9.740e-18	3.673e-17	7.355e-01
$2^9$	5.273e-20	9.00	5.272e-20	7.555e-21	6.028e-20	8.748e-01
$2^{10}$	1.030e-22	9.00	1.030e-22	2.237e-23	1.254e-22	8.216e-01
$2^{11}$	2.012e-25	9.00	2.012e-25	5.321e-26	2.544e-25	7.908e-01
$2^{12}$	3.929e-28	—	3.929e-28	1.021e-28	4.950e-28	7.938e-01

 Tabela 5.21: Aposteriorne ocene,  $k = 7$ , test primer (5.41);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^7$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^7$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^7$
$2^5$	5.636e-07	5.61	8.27	1.436e-04	2.485e-07	4.97	1.807e-05	3.319e-09	8.97	3.832e-08
$2^6$	1.155e-08	6.34	8.61	5.043e-06	7.904e-09	8.63	1.629e-07	6.617e-12	9.00	1.953e-10
$2^7$	1.421e-10	6.87	8.83	6.105e-08	2.001e-11	7.56	4.419e-10	1.290e-14	9.00	3.879e-13
$2^8$	1.215e-12	7.24	8.96	5.110e-10	1.058e-13	8.99	9.404e-13	2.517e-17	9.00	7.355e-16
$2^9$	8.057e-15	7.50	9.03	3.348e-12	2.075e-16	8.99	2.855e-15	4.908e-20	9.00	1.410e-18
$2^{10}$	4.457e-17	7.69	9.06	1.840e-14	4.068e-19	8.99	3.410e-18	9.594e-23	9.00	2.727e-21
$2^{11}$	2.163e-19	7.83	9.08	8.902e-17	7.983e-22	9.00	6.663e-21	1.874e-25	9.00	5.302e-24
$2^{12}$	9.519e-22	—	—	3.910e-19	1.559e-24	—	1.299e-23	3.660e-28	—	1.033e-26

Sada ćemo predstaviti i numeričke rezultate dobijene primenom kolokacionih postupaka na test primeru (5.43).

Tabela 5.22 prikazuje numeričke rezultate dobijene na mreži Bahvalova za različite vrednosti  $N$ . U Tabeli 5.23, fiksiramo diskretizacioni parametar  $N = 2^{10}$ , dok menjamo vrednosti perturbovanog parametra  $\varepsilon$ . Vidimo da su i greška  $\chi_N$  i aposteriorna ocena  $\eta^5$ , nezavisni od perturbovanog parametra  $\varepsilon$ . Ovo potvrđuje uniformnost kolokacionog postupka i aposteriorne ocene u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$ .

Tabela 5.22: Aposteriorne ocene na mreži Bahvalova,  $k = 5$ , test primer (5.43);  $\bar{q} = 0.4, \sigma = 7, \varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\eta^5$	$\chi_N/\eta^5$
$2^5$	1.377e-08	6.94	3.556e-10	3.837e-06	3.838e-06	3.588e-03
$2^6$	1.120e-10	6.97	2.867e-12	3.099e-08	3.099e-08	3.612e-03
$2^7$	8.939e-13	6.98	2.247e-14	2.462e-10	2.463e-10	3.630e-03
$2^8$	7.073e-15	6.99	1.880e-16	1.940e-12	1.941e-12	3.645e-03
$2^9$	5.561e-17	7.00	1.618e-18	1.522e-14	1.523e-14	3.652e-03
$2^{10}$	4.358e-19	7.00	1.281e-20	1.192e-16	1.192e-16	3.656e-03
$2^{11}$	3.410e-21	7.00	1.008e-22	9.323e-19	9.324e-19	3.657e-03
$2^{12}$	2.666e-23	—	7.950e-25	7.287e-21	7.288e-21	3.658e-03

Tabela 5.23: Aposteriorne ocene na mreži Bahvalova,  $k = 5$ , test primer (5.43); za  $N = 2^{10}$ .

$\varepsilon$	$\chi_N$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\eta^5$	$\chi_N/\eta^5$
$10^{-2}$	4.631e-19	1.609e-20	1.276e-16	1.276e-16	3.629e-03
$10^{-3}$	4.385e-19	5.483e-21	1.200e-16	1.200e-16	3.653e-03
$10^{-4}$	4.361e-19	1.133e-20	1.193e-16	1.193e-16	3.655e-03
$10^{-5}$	4.358e-19	1.264e-20	1.192e-16	1.192e-16	3.656e-03
$10^{-6}$	4.358e-19	1.281e-20	1.192e-16	1.192e-16	3.656e-03
$10^{-7}$	4.358e-19	1.283e-20	1.192e-16	1.192e-16	3.656e-03
$10^{-8}$	4.358e-19	1.284e-20	1.192e-16	1.192e-16	3.656e-03

Tabela 5.24 prikazuje numeričke rezultate dobijene na ekvidistantnoj mreži. Vidimo da je red konvergencije približno jednak nuli, što je očekivano, jer ekvidistantna mreža nije adaptirana u slojevima problema (5.1). Što je još važnije, u kontekstu ove disertacije, aposteriorna ocena na ekvidistantnoj mreži ne opada sa povećanjem  $N$ . Ovo takođe potvrđuje našu procenu da ekvidistantne mreže nisu pogodne za upotrebu prilikom primene kolokacionih postupaka za problem (5.1).

Tabela 5.24: Aposteriorne ocene na ekvidistantnoj mreži,  $k = 5$ , test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$\eta^5$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\chi_N/\eta^5$
$2^5$	6.734e-01	1.217e+01	2.508e-03	1.217e+01	5.533e-02
$2^6$	6.734e-01	1.217e+01	1.248e-03	1.217e+01	5.534e-02
$2^7$	6.734e-01	1.217e+01	6.227e-04	1.217e+01	5.534e-02
$2^8$	6.734e-01	1.217e+01	3.110e-04	1.217e+01	5.535e-02
$2^9$	6.734e-01	1.217e+01	1.554e-04	1.217e+01	5.535e-02
$2^{10}$	6.728e-01	1.216e+01	7.765e-05	1.216e+01	5.534e-02
$2^{11}$	6.716e-01	1.215e+01	3.879e-05	1.215e+01	5.525e-02
$2^{12}$	6.660e-01	1.212e+01	1.933e-05	1.212e+01	5.496e-02

Tabela 5.25 prikazuje numeričke rezultate na tri tipa mreže, za splajn stepena 6. Ovi numerički rezultati su očekivani – red konvergencije je sedam na rekurzivno generisanoj mreži i na R-mreži, dok se greške na Šiškinovoj mreži ponašaju kao  $\mathcal{O}(N^{-7} \ln^7 N)$ .

Tabela 5.25: Aposteriorne ocene,  $k = 5$ , test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^5$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^5$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^5$
$2^5$	3.548e-04	4.07	6.01	9.752e-02	2.491e-05	6.66	3.702e-03	4.851e-07	6.62	5.194e-05
$2^6$	2.108e-05	4.74	6.44	6.344e-03	2.455e-07	7.09	7.375e-05	4.925e-09	6.94	1.101e-06
$2^7$	7.870e-07	5.23	6.73	2.241e-04	1.799e-09	7.01	5.125e-07	4.024e-11	7.02	1.052e-08
$2^8$	2.091e-08	5.57	6.90	5.836e-06	1.399e-11	7.04	3.899e-09	3.109e-13	7.02	7.907e-11
$2^9$	4.408e-10	5.80	6.98	1.222e-07	1.062e-13	7.01	2.940e-11	2.389e-15	7.01	6.015e-13
$2^{10}$	7.927e-12	5.95	7.02	2.191e-09	8.247e-16	7.00	2.271e-13	1.848e-17	7.00	4.628e-15
$2^{11}$	1.279e-13	6.07	7.04	3.516e-11	6.462e-18	7.00	1.773e-15	1.441e-19	7.00	3.589e-17
$2^{12}$	1.898e-15	—	—	5.203e-13	5.049e-20	—	1.382e-17	1.125e-21	—	2.793e-19

Testiraćemo, sada, i adaptivni algoritam za kolokacione postupke sa splajnovima višeg stepena. Lokalna aposteriorna ocena data je sa

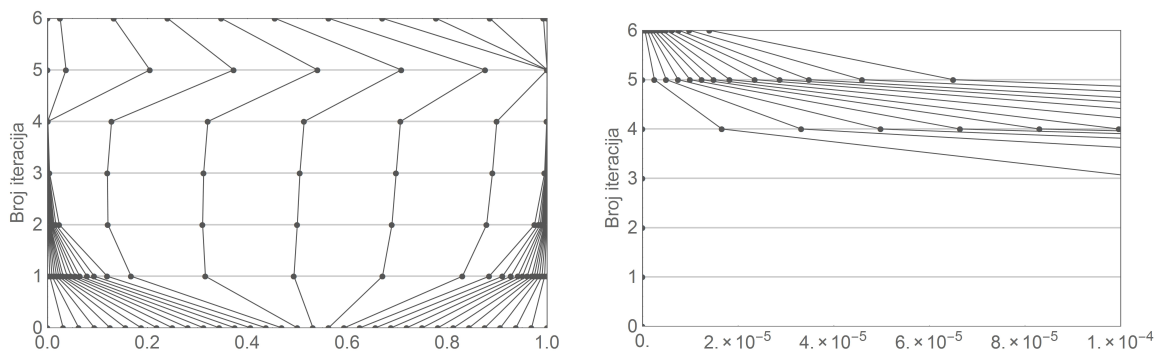
$$\mu_i(u_\Delta, \Delta) := \left\| \frac{I_{k+1}^0 q - q}{r} \right\|_{\infty, J_i} + \frac{3}{2\rho^2} \left[ Q_{k,i}^{\max} \min \left\{ 2, \frac{h_i^2 \rho^2}{4\varepsilon^2} \right\} + Q_{k,i}^d \min \left\{ 1, \frac{h_i \rho}{2\varepsilon} \right\} \right], \quad (5.65)$$

gde je  $q = f - ru_\Delta$ . Opet ćemo modifikovati  $Q_i$  u (5.40) na sledeći način

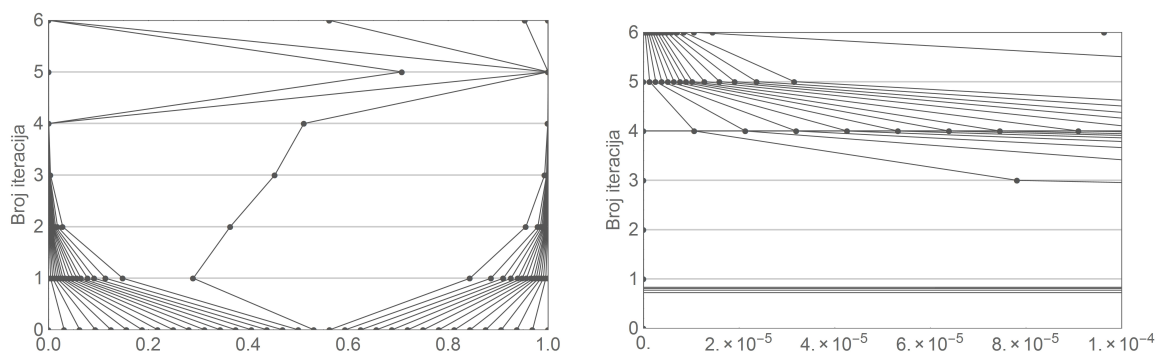
$$\tilde{Q}_i(u_\Delta, \Delta) := \left( h_i^{k^*} + \mu_i(u_\Delta, \Delta) \right)^{1/k^*},$$

gde je  $k^* = k + 2$  očekivani red konvergencije.

Na slikama 5.8 i 5.9 se jasno vidi razlog za uvođenje ove modifikacije. Ako koristimo lokalnu aposteriornu ocenu  $Q_i$ , onda van slojeva može ostati suviše mali broj čvorova mreže, što se u konkretnom primeru i događa.



Slika 5.8: Adaptivna mreža dobijena De Burovim algoritmom sa lokalnom aposteriornom ocenom  $\tilde{Q}_i$  (desno je prikazana slika uvećana u graničnom sloju),  $k = 5$ , test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ;  $N = 32$ .



Slika 5.9: Adaptivna mreža dobijena De Burovim algoritmom sa lokalnom aposteriornom ocenom  $Q_i$  (desno je prikazana slika uvećana u graničnom sloju),  $k = 5$ , test primer (5.43);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ;  $N = 32$ .

Adaptivni algoritam generiše mrežu na kojima kolokacioni postupak za  $k = 5$  konvergira sa prosečnim redom konvergencije sedam, videti Tabelu 5.26.

Tabela 5.26: Adaptivni algoritam, test primer (5.43),  $k = 5$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\eta^5$	$\chi_N/\eta^5$	#iter
$2^5$	2.389e-08	8.18	7.120e-11	3.716e-06	3.716e-06	6.429e-03	6
$2^6$	8.230e-11	9.04	5.735e-13	4.475e-09	4.476e-09	1.839e-02	5
$2^7$	1.560e-13	5.06	5.061e-15	3.514e-11	3.514e-11	4.439e-03	4
$2^8$	4.678e-15	8.57	4.719e-17	5.567e-13	5.568e-13	8.403e-03	3
$2^9$	1.230e-17	3.63	3.399e-19	2.131e-15	2.132e-15	5.769e-03	3
$2^{10}$	9.958e-19	9.97	1.706e-21	2.724e-16	2.724e-16	3.656e-03	2
$2^{11}$	9.942e-22	—	2.245e-23	2.306e-19	2.306e-19	4.311e-03	2

Na kraju, testiraćemo kolokacione postupke i na test primeru koji je modifikacija problema (5.43), odnosno na sledećem problemu

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon^2 u''(x) + (1 + x^2)u(x) &= x^{3/2} + e^x, & x \in (0, 1), \\
 u(0) = u(1) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.66}$$

Ni za ovaj problem tačno rešenje nije poznato. Kako se na desnoj strani diferencijalne jednačine nalazi i sabirak  $x^{3/2}$ , znamo da redukovani problem ima singularitet u  $x = 0$ .

Na ovom primeru vidimo da su klasične apriorno definisane adaptivne mreže ograničene, kada singularno perturbovani problem ima i singularitet. Tada mreže koje su prilagođene slojevima, ali ne i singularitetu, daju nezadovoljavajuće aproksimacije, videti tabele 5.27 i 5.29. S druge strane, mreža koja je generisana adaptivnim algoritmom očuvava red konvergencije kolokacionih postupaka, videti tabele 5.28 i 5.30. Ovo pokazuje upravo značaj upotrebe adaptivnog algoritma. Iako za sada postoji mali broj radova koji nam daju teorijske rezultate, numerički rezultati deluju ohrabrujuće za dalja istraživanja mreža generisanih ovim algoritmom.

Tabela 5.27:  $C^1$ -splajn, za  $k = 3$  na R-mreži, test primer (5.66);  $\bar{q} = 0.4$ ,  $a = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{3,I}$	$\eta^{3,D}$	$\eta^3$	$\chi_N/\eta^3$
$2^5$	2.054e-05	0.14	1.678e-05	1.481e-03	1.497e-03	1.371e-02
$2^6$	1.861e-05	0.37	1.616e-05	5.354e-05	6.970e-05	2.670e-01
$2^7$	1.444e-05	2.19	1.261e-05	1.050e-05	2.312e-05	6.247e-01
$2^8$	3.159e-06	3.19	2.771e-06	2.533e-06	5.304e-06	5.955e-01
$2^9$	3.452e-07	2.42	3.058e-07	3.138e-07	6.196e-07	5.571e-01
$2^{10}$	6.433e-08	3.73	5.653e-08	6.299e-08	1.195e-07	5.382e-01
$2^{11}$	4.848e-09	4.82	4.259e-09	5.052e-09	9.311e-09	5.207e-01
$2^{12}$	1.714e-10	—	1.532e-10	1.728e-10	3.260e-10	5.257e-01

 Tabela 5.28:  $C^1$ -splajn, za  $k = 3$ , na mreži generisanoj adaptivnim algoritmom, test primer (5.66),  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{3,I}$	$\eta^{3,D}$	$\eta^3$	$\chi_N/\eta^3$	#iter
$2^5$	3.571e-05	4.47	3.110e-05	6.778e-04	7.089e-04	5.037e-02	6
$2^6$	1.607e-06	4.50	1.434e-06	3.825e-06	5.258e-06	3.055e-01	5
$2^7$	7.086e-08	4.84	6.302e-08	1.021e-07	1.651e-07	4.291e-01	4
$2^8$	2.473e-09	5.21	2.230e-09	5.765e-09	7.996e-09	3.093e-01	3
$2^9$	6.681e-11	4.93	6.225e-11	1.014e-10	1.636e-10	4.084e-01	3
$2^{10}$	2.199e-12	4.60	2.089e-12	2.156e-11	2.365e-11	9.296e-02	3
$2^{11}$	9.098e-14	5.15	8.779e-14	1.530e-13	2.408e-13	3.778e-01	2
$2^{12}$	2.561e-15	—	2.501e-15	3.270e-15	5.772e-15	4.438e-01	2
pros. red	4.81		4.79	5.37	5.26		

 Tabela 5.29:  $C^1$ -splajn, za  $k = 5$ , na R-mreži, test primer (5.66);  $\bar{q} = 0.4$ ,  $a = 2$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\eta^5$	$\chi_N/\eta^5$
$2^5$	5.708e-06	0.13	4.700e-06	5.262e-05	5.732e-05	9.959e-02
$2^6$	5.236e-06	0.74	4.347e-06	1.959e-06	6.306e-06	8.303e-01
$2^7$	3.141e-06	2.58	2.689e-06	1.045e-06	3.734e-06	8.411e-01
$2^8$	5.256e-07	3.99	4.609e-07	2.106e-07	6.714e-07	7.828e-01
$2^9$	3.316e-08	3.87	3.003e-08	1.883e-08	4.886e-08	6.788e-01
$2^{10}$	2.268e-09	5.04	2.078e-09	1.526e-09	3.604e-09	6.293e-01
$2^{11}$	6.917e-11	—	6.498e-11	5.853e-11	1.235e-10	5.601e-01

 Tabela 5.30:  $C^1$ -splajn, za  $k = 5$  na mreži generisanoj adaptivnim algoritmom, test primer (5.66),  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\eta^5$	$\chi_N/\eta^5$	#iter
$2^5$	1.100e-06	7.99	9.722e-07	1.219e-05	1.316e-05	8.354e-02	6
$2^6$	4.317e-09	6.37	4.118e-09	9.278e-09	1.340e-08	3.223e-01	5
$2^7$	5.205e-11	6.32	5.100e-11	6.789e-11	1.189e-10	4.378e-01	4
$2^8$	6.511e-13	7.69	6.388e-13	1.051e-12	1.689e-12	3.854e-01	3
$2^9$	3.158e-15	7.09	6.369e-15	4.420e-15	1.079e-14	2.927e-01	3
$2^{10}$	2.311e-17	6.94	1.335e-15	7.696e-17	1.412e-15	1.637e-02	3
$2^{11}$	1.882e-19	—	1.159e-17	5.350e-18	1.694e-17	1.111e-02	5
pros. red	7.07		6.05	6.84	6.58		

Da bismo uporedili rezultate iz rada [38] (u oznaci FEM- $k$ ) na mreži Bahvalova sa našim kolokacionim postupkom (u oznaci Collocation- $k$ ), iskoristićemo test problem dat upravo u radu [38].

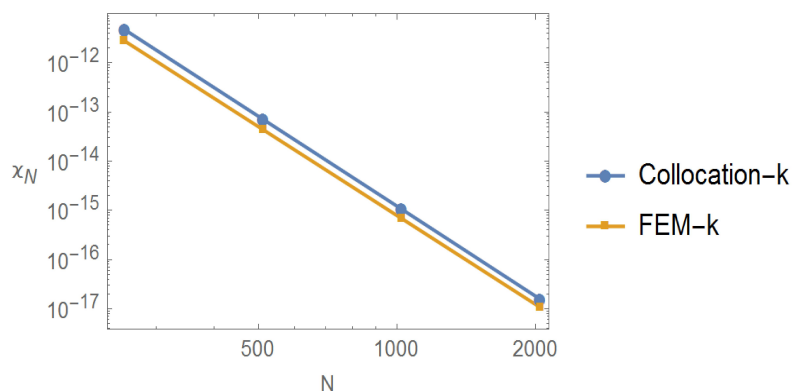


Poređićemo ova dva različita postupka za  $k = 4$ . Tada je red konvergencije oba pomenuta postupka šest. Tabela 5.31 pokazuje da oba postupka daju sličnu grešku  $\chi_N$ , dok FEM- $k$  daje bolju aposteriornu ocenu  $\eta$  u poređenju sa kolokacionim postupkom istog stepena. Napokon, glavna prednost našeg kolokacionog postupka je to što je dobijena aproksimacija  $u_\Delta$  funkcija klase  $C^1$ , dok je aproksimacija dobijena u [38] funkcija klase  $C^0$  na  $[0, 1]$ .

Tabela 5.31: Uporedna analiza dva postupka, za  $k = 4$ ;  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

$N$	FEM- $k$			Collocation- $k$		
	$\chi_N$	$p_N$	$\eta$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta$
$2^8$	2.753e-12	5.99	1.104e-11	4.688e-12	6.06	1.250e-10
$2^9$	4.344e-14	6.00	8.824e-14	7.047e-14	6.06	1.953e-12
$2^{10}$	6.820e-16	6.00	1.375e-15	1.055e-15	6.07	3.052e-14
$2^{11}$	1.068e-17	—	2.144e-17	1.570e-17	—	4.769e-16

Slika 5.10 pokazuje da je razlika između grešaka  $\chi_N$ , koje se dobijaju primenom pomenuta dva postupka, beznačajno mala.



Slika 5.10: Uporedna analiza postupaka FEM- $k$  i Collocation- $k$ .

## KOLOKACIONI POSTUPAK ZA 2D PROBLEM REAKCIJE-DIFUZIJE

U ovoj glavi ćemo posmatrati dvodimenzionalni problem reakcije-difuzije, koji glasi: Naći  $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  tako da važi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x, y) &:= -\varepsilon^2 \Delta u(x, y) + r(x, y)u(x, y) = f(x, y) \text{ na } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (6.1)$$

gde je  $\varepsilon \in (0, 1]$ ,  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  je Laplasov operator,  $f \in C(\Omega)$  i  $0 \leq \beta < r(x, y)$ . Pod ovim uslovima, problem (6.1) ima jedinstveno rešenje [46]. Ako je  $\varepsilon$  mali parametar, onda naš problem postaje singularno perturbovan, a rešenje ima oštre slojeve širine  $O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$  uz granicu  $\partial\Omega$ , videti [7].

Da bismo rešili približno problem (6.1), diskretizovaćemo ga pomoću kolokacija sa bikvadratnim  $C^1$ -splajnom. Potom ćemo dati i aposteriornu ocenu u supremum normi – normi koja je dovoljno dobra da kvalitetno oceni grešku u slojevima i najprikladnija je za singularno perturbovane probleme.

### 6.1 Kolokacioni postupak

Sada ćemo kolokacioni postupak (5.16) uopštiti i u dve dimenzije. Analiziraćemo ga na oblasti  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  koju ćemo diskretizovati na mreži  $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ , gde su

$$\begin{aligned} \Delta_x &: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \\ \Delta_y &: 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_M = 1, \end{aligned}$$

dve podele skupa  $[0, 1]$  sa koracima  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$  i  $k_j = y_j - y_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, M$ , redom.

Aproksimaciju  $u_\Delta$  tačnog rešenja  $u$  problema (6.1) tražićemo u obliku  $C^1$ -bikvadratnog splajna takvog da zadovoljava (6.1) u sredinama svakog pravougaonika, koji je određen mrežom  $\Delta$ , videti [6] za klasičan problem, tj. problem bez slojeva – kada je  $\varepsilon = 1$ . Baza  $C^1$ -bikvadratnih splajnova na  $\bar{\Omega}$  može se dobiti kao direktan proizvod elemenata baze  $S_{2,0}^1(\Delta_x)$  i baznih elemenata prostora  $S_{2,0}^1(\Delta_y)$ . Bazu za prostor  $S_{2,0}^1(\Delta_x)$  smo konstruisali u Glavi 3. Baza  $\{\bar{B}_{2,j}\}_{j=0}^{M+1}$  za prostor  $S_{2,0}^1(\Delta_y)$  se konstruiše na isti način.

Dakle, aproksimaciju  $u_\Delta$  rešenja  $u$  problema (6.1) možemo zapisati kao

$$u_\Delta(x, y) := \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{M+1} \alpha_{i,j} B_{2,i}(x) \bar{B}_{2,j}(y),$$

gde su  $\alpha_{i,j}$  određeni uslovom da aproksimacija  $u_\Delta$  zadovoljava diferencijalnu jednačinu (6.1) u tačkama  $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$ , tj. da je

$$-\varepsilon^2 \Delta u_{\Delta, i-1/2, j-1/2} + r_{i-1/2, j-1/2} u_{\Delta, i-1/2, j-1/2} = f_{i-1/2, j-1/2}, \quad (6.2)$$

za  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Takođe, zahtevamo da  $u_\Delta$  zadovoljava granične uslove u četiri temena oblasti  $\bar{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} u_\Delta(0, 0) &= g(0, 0), & u_\Delta(0, 1) &= g(0, 1), \\ u_\Delta(1, 0) &= g(1, 0), & u_\Delta(1, 1) &= g(1, 1), \end{aligned}$$

i u sredinama intervala određenih tačkama mreže  $\Delta$  na  $\partial\Omega$ , tj.

$$\begin{aligned} u_\Delta(x_{i-1/2}, 0) &= g(x_{i-1/2}, 0), & u_\Delta(x_{i-1/2}, 1) &= g(x_{i-1/2}, 1), & \text{za } i &= 1, 2, \dots, N, \\ u_\Delta(0, y_{j-1/2}) &= g(0, y_{j-1/2}), & u_\Delta(1, y_{j-1/2}) &= g(1, y_{j-1/2}), & \text{za } j &= 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Iz (6.2) dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{i_1=i-1}^{i+1} \sum_{j_1=j-1}^{j+1} \alpha_{i_1, j_1} (-\varepsilon^2 (\varphi_{i_1}''(x_{i-1/2}) \psi_{j_1}(y_{j-1/2}) + \varphi_{i_1}(x_{i-1/2}) \psi_{j_1}''(y_{j-1/2})) \\ + r(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}) \varphi_{i_1}(x_{i-1/2}) \psi_{j_1}(y_{j-1/2})) = f(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}). \end{aligned}$$

Uvedimo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} \eta_i^- &= \frac{h_i}{4(h_{i-1} + h_i)}, & \eta_i^+ &= \frac{h_i}{4(h_i + h_{i+1})}, \\ \tau_j^- &= \frac{k_j}{4(k_{j-1} + k_j)}, & \tau_j^+ &= \frac{k_j}{4(k_j + k_{j+1})}, \end{aligned}$$

i formalno zapišimo  $h_0 = h_{N+1} = k_0 = k_{M+1} = 0$ . Tada dobijamo sledeći sistem  $A\alpha = \mathbf{b}$ , gde je  $\alpha = [\alpha_{i,j}]_{(N+2)(M+2) \times 1}$ ,  $\mathbf{b} = [b_i]_{(N+2)(M+2) \times 1}$  i  $A = [a_{i,j}]_{(M+2)(N+2) \times (M+2)(N+2)}$ . Elementi  $a_{i,j}$ , za  $i = 1, 2, \dots, N$  i  $j = 1, 2, \dots, M$  su definisani sa:

$$\begin{aligned} a_{k, k-N-3} &= -\varepsilon^2 \left( \frac{8}{h_i^2} + \frac{8}{k_j^2} \right) \eta_i^- \tau_j^- + r_{i-1/2, j-1/2} \tau_j^- \eta_i^-, \\ a_{k, k-N-2} &= -\varepsilon^2 \left( \frac{8}{h_i^2} (1 - \tau_j^- - \tau_j^+) - \frac{8}{k_j^2} (\tau_j^- + \tau_j^+) \right) \eta_i^- + r_{i-1/2, j-1/2} (1 - \tau_j^- - \tau_j^+) \eta_i^-, \\ a_{k, k-N-1} &= -\varepsilon^2 \left( \frac{8}{h_i^2} + \frac{8}{k_j^2} \right) \eta_i^- \tau_j^+ + r_{i-1/2, j-1/2} \tau_j^+ \eta_i^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{k,k-1} &= -\varepsilon^2 \left( -\frac{8}{h_i^2}(\eta_i^- + \eta_i^+) + \frac{8}{k_j^2}(1 - \eta_i^- - \eta_i^+) \right) \tau_j^- + r_{i-1/2,j-1/2} \tau_j^- (1 - \eta_i^- - \eta_i^+), \\
 a_{k,k} &= -\varepsilon^2 \left( -\frac{8}{h_i^2}(\eta_i^- + \eta_i^+)(1 - \tau_j^- - \tau_j^+) - \frac{8}{k_j^2}(\tau_j^- + \tau_j^+)(1 - \eta_i^- - \eta_i^+) \right) \\
 &\quad + r_{i-1/2,j-1/2}(1 - \tau_j^- - \tau_j^+)(1 - \eta_i^- - \eta_i^+), \\
 a_{k,k+1} &= -\varepsilon^2 \left( -\frac{8}{h_i^2}(\eta_i^- + \eta_i^+) + \frac{8}{k_j^2}(1 - \eta_i^- - \eta_i^+) \right) \tau_j^+ + r_{i-1/2,j-1/2} \tau_j^+ (1 - \eta_i^- - \eta_i^+), \\
 a_{k,k+N+1} &= -\varepsilon^2 \left( \frac{8}{h_i^2} + \frac{8}{k_j^2} \right) \eta_i^+ \tau_j^- + r_{i-1/2,j-1/2} \tau_j^- \eta_i^+, \\
 a_{k,k+N+2} &= -\varepsilon^2 \left( \frac{8}{h_i^2}(1 - \tau_j^- - \tau_j^+) - \frac{8}{k_j^2}(\tau_j^- + \tau_j^+) \right) \eta_i^+ + r_{i-1/2,j-1/2}(1 - \tau_j^- - \tau_j^+) \eta_i^+, \\
 a_{k,k+N+3} &= -\varepsilon^2 \left( \frac{8}{h_i^2} + \frac{8}{k_j^2} \right) \eta_i^+ \tau_j^+ + r_{i-1/2,j-1/2} \tau_j^+ \eta_i^+,
 \end{aligned}$$

gde je  $k = j(N + 2) + i + 1$ .

Iz (6.3), u sredinama intervala na donjem rubu oblasti  $\Omega$ , dobijamo:

$$a_{i+1,i} = \eta_i^-, \quad a_{i+1,i+1} = 1 - \eta_i^- - \eta_i^+, \quad a_{i+1,i+2} = \eta_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

dok na gornjem rubu od  $\Omega$  imamo:

$$a_{l,l-1} = \eta_i^-, \quad a_{l,l} = 1 - \eta_i^- - \eta_i^+, \quad a_{l,l+1} = \eta_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

gde je  $l = (M + 1)(N + 2) + i + 1$ .

Dalje, granični uslovi u sredinama levog ruba oblasti  $\Omega$  daju:

$$a_{k,k-N-2} = \tau_j^-, \quad a_{k,k} = 1 - \tau_j^- - \tau_j^+, \quad a_{k,k+N+2} = \tau_j^+, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

gde je  $k = j(N + 2) + 1$ , dok na desnom rubu oblasti  $\Omega$  treba da važi:

$$a_{l,l-N-2} = \tau_j^-, \quad a_{l,l} = 1 - \tau_j^- - \tau_j^+, \quad a_{l,l+N+2} = \tau_j^+, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

gde je  $l = (j + 1)(N + 2)$ .

Granični uslovi u četiri temena pravougaonika  $\bar{\Omega}$  daju poslednja četiri uslova:

$$a_{1,1} = a_{N+2,N+2} = a_{(M+1)(N+2)+1,(M+1)(N+2)+1} = a_{(M+2)(N+2),(M+2)(N+2)} = 1.$$

## 6.2 Grinova funkcija

Uvedimo sada i Grinovu funkciju  $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$  operatora  $\mathcal{L}$ , tako da za svako  $(x, y) \in \Omega$  važi

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = -\varepsilon^2 (\mathcal{G}_{\xi\xi}(x, y; \xi, \eta) + \mathcal{G}_{\eta\eta}(x, y; \xi, \eta)) + r(\xi, \eta)\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta), \quad (6.4)$$

gde je  $\delta(\cdot)$  Dirak delta funkcija,  $(\xi, \eta) \in \Omega$  i

$$\mathcal{G}(x, y, \xi, \eta) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \partial\Omega. \quad (6.5)$$

Kako je  $(u - u_\Delta)(x, y) = 0$  na  $\partial\Omega$ , to za fiksno  $(x, y) \in \Omega$  važi

$$(u - u_\Delta)(x, y) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(u - u_\Delta)(\xi, \eta) \mathcal{G}(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (6.6)$$

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, tako su nam i ovde pri aposteriornoj analizi potrebna odgovarajuća ograničenja za Grinovu funkciju i njene (parcijalne) izvode.

**Teorema 6.1.** [30] Grinova funkcija  $\mathcal{G}(x, y; \xi, \eta)$  definisana sa (6.4)-(6.5) zadovoljava:

$$\|\mathcal{G}(x, y; \cdot)\|_{1, \Omega} \leq C_1 \quad i \quad |\mathcal{G}(x, y; \cdot)|_{1, 1, \Omega} \leq C_2 \varepsilon^{-1},$$

gde je:

$$|v|_{1, 1, \Omega} := \|v_x\|_{1, \Omega} + \|v_y\|_{1, \Omega} \quad i \quad \|v\|_{1, \Omega} := \int_0^1 \int_0^1 |v(\xi, \eta)| d\xi d\eta,$$

a  $C_1$  i  $C_2$  su konstante nezavisne od perturbovanog parametra  $\varepsilon$ .

### 6.3 Aposteriorna ocena greške

Optimalne adaptivne mreže za rešavanje dvodimenzionalnih singularno perturbovanih problema imaju ekstremno veliki odnos između najvećeg i najmanjeg koraka mreže [30] (obično  $O(\varepsilon^{-1})$ , gde je  $\varepsilon$  širina sloja), koji nam omogućava da pokažemo uniformnu konvergenciju pri apriornoj analizi određenog numeričkog postupka. Nasuprot tome aposteriorna ocena greške, koja bi trebalo da omogući i aposteriornu konstrukciju adaptivne mreže, postiže se na proizvoljnoj mreži [2, 50]. Glavni zadatak ovog poglavlja je izvođenje aposteriorne ocene greške kolokacionog postupka sa  $C^1$ -bikvadratnim splajnom za problem (6.1) na proizvoljnoj mreži.

Iz (6.6) i  $\mathcal{L}u = f$  sledi

$$(u - u_\Delta)(x, y) = \int_{\Omega} (f - \mathcal{L}u_\Delta)(\xi, \eta) \Gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

gde je  $\Gamma := \mathcal{G}(x, y; \cdot, \cdot)$ . Uvedimo sledeću oznaku

$$q(x, y) := r(x, y)u_\Delta(x, y) - f(x, y) - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\Delta(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_\Delta(x, y) \right).$$

Definišimo, sada, bikvadratni splajn  $I^{bq}q$  koji interpolira funkciju  $q \in C^0(\Omega)$  u devet datih tačaka:

$$\begin{aligned} (I^{bq}q)_{i-1, j-1} &= q_{i-1, j-1}, & (I^{bq}q)_{i-1, j-1/2} &= q_{i-1, j-1/2}, & (I^{bq}q)_{i-1, j} &= q_{i-1, j}, \\ (I^{bq}q)_{i-1/2, j-1} &= q_{i-1/2, j-1}, & (I^{bq}q)_{i-1/2, j-1/2} &= q_{i-1/2, j-1/2}, & (I^{bq}q)_{i-1/2, j} &= q_{i-1/2, j}, \\ (I^{bq}q)_{i, j-1} &= q_{i, j-1}, & (I^{bq}q)_{i, j-1/2} &= q_{i, j-1/2}, & (I^{bq}q)_{i, j} &= q_{i, j}, \end{aligned}$$

na svakom  $\Omega_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ . Jasno je da  $I^{bq}q$  na  $\Omega_{i,j}$  možemo izraziti na sledeći način

$$I^{bq}q(x, y) = \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^2 q_{i-k/2, j-l/2} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^2 \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq l}}^2 \frac{x - x_{i-m/2}}{x_{i-k/2} - x_{i-m/2}} \frac{y - y_{j-n/2}}{y_{j-l/2} - y_{j-n/2}}. \quad (6.7)$$

Grešku postupka (6.2) u tački  $(x, y)$  sada možemo izraziti kao

$$(u - u_{\Delta})(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[ \left( I^{bq}q(\xi, \eta) - q(\xi, \eta) \right) - I^{bq}q(\xi, \eta) \right] \Gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (6.8)$$

Ako uvedemo sledeće oznake:

$$I_{i,j}^{int} = \int_{\Omega_{i,j}} (I^{bq}q(\xi, \eta) - q(\xi, \eta)) \Gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$I_{i,j}^{bq} = \int_{\Omega_{i,j}} I^{bq}q(\xi, \eta) \Gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

onda je

$$(u - u_{\Delta})(x, y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left( I_{i,j}^{int} - I_{i,j}^{bq} \right). \quad (6.9)$$

U narednoj teoremi, korišćemo standardne definicije diferencnih količnika prvog reda za proizvoljnu funkciju  $v$ :

$$D_x^- v_{i-1/2, \cdot} = \frac{v_{i-1/2, \cdot} - v_{i-1, \cdot}}{h_i/2}, \quad D_x^+ v_{i-1/2, \cdot} = \frac{v_{i, \cdot} - v_{i-1/2, \cdot}}{h_i/2},$$

$$D_y^- v_{\cdot, j-1/2} = \frac{v_{\cdot, j-1/2} - v_{\cdot, j-1}}{k_j/2}, \quad D_y^+ v_{\cdot, j-1/2} = \frac{v_{\cdot, j} - v_{\cdot, j-1/2}}{k_j/2},$$

$$D_x^0 = \frac{D_x^+ + D_x^-}{2}, \quad D_y^0 = \frac{D_y^+ + D_y^-}{2},$$

kao i diferencne količnike drugog reda koji su dati sa:

$$\delta_{xx} = \frac{D_x^+ - D_x^-}{h_i/2}, \quad \delta_{yy} = \frac{D_y^+ - D_y^-}{k_j/2}.$$

Sada ćemo izvesti aposteriornu ocenu kolokacionog postupka (6.2), što je i glavni rezultat ovog poglavlja.

**Teorema 6.2.** *Neka je  $u$  tačno rešenje problema (6.1) i  $u_{\Delta}$  njegova aproksimacija dobijena kolokacionim postupkom (6.2) sa  $C^1$ -bikvadratnim splajnom na proizvoljnoj mreži  $\Delta$ . Tada je*

$$\|u - u_{\Delta}\|_{\infty} \leq C\eta(q, \Delta), \quad (6.10)$$

gde je  $q(x, y) := r(x, y)u_{\Delta}(x, y) - f(x, y) - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{\Delta}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{\Delta}(x, y) \right)$

$i$

$$\eta(q, \Delta) = \eta^I(q, \Delta) + \sum_{i=1}^3 (\eta_{ix}(q, \Delta) + \eta_{iy}(q, \Delta)) + \eta_4(q, \Delta) + \eta_5(q, \Delta),$$

uz sledeće oznake:

$$\begin{aligned} \eta^I(q, \Delta) &= \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \left\| I^{bq} q - q \right\|_{\infty, \Omega_{i,j}}, \\ \eta_{1x}(q, \Delta) &= \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \frac{h_i^2}{16} |\delta_{xx} q_{i-1/2, j-1/2}|, & \eta_{1y}(q, \Delta) &= \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \frac{k_j^2}{16} |\delta_{yy} q_{i-1/2, j-1/2}|, \\ \eta_{2x}(q, \Delta) &= \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \max\{|D_x^+ q_{i-1/2, j-1/2}|, |D_x^- q_{i-1/2, j-1/2}|\} \min\left\{h_i, \frac{h_i^2}{4\varepsilon}\right\}, \\ \eta_{2y}(q, \Delta) &= \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \max\{|D_y^+ q_{i-1/2, j-1/2}|, |D_y^- q_{i-1/2, j-1/2}|\} \min\left\{k_j, \frac{k_j^2}{4\varepsilon}\right\}, \\ \eta_{3x}(q, \Delta) &= \frac{1}{16} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} h_i^2 k_j |D_y^0 \delta_{xx} q_{i-1/2, j-1/2}|, \\ \eta_{3y}(q, \Delta) &= \frac{1}{16} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} h_i k_j^2 |D_x^0 \delta_{yy} q_{i-1/2, j-1/2}|, \\ \eta_4(q, \Delta) &= \frac{1}{64} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} h_i^2 k_j^2 |\delta_{yy} \delta_{xx} q_{i-1/2, j-1/2}|, \\ \eta_5(q, \Delta) &= \frac{1}{2} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \min\left\{h_i k_j, \frac{h_i^2 k_j}{4\varepsilon}, \frac{h_i k_j^2}{4\varepsilon}\right\} |D_y^0 D_x^0 q_{i-1/2, j-1/2}|. \end{aligned}$$

*Dokaz.* Zamenom  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $y_{j-1}$  i  $y_j$  sa  $x_{i-1/2} - h_i/2$ ,  $x_{i-1/2} + h_i/2$ ,  $y_{j-1/2} - k_j/2$  i  $y_{j-1/2} + k_j/2$ , redom u (6.7), dobijamo da je

$$\begin{aligned} I^{bq} q(\xi, \eta) &= q_{i-1/2, j-1/2} \\ &+ (\xi - x_{i-1/2}) \left( \frac{q_{i,j-1/2} - q_{i-1,j-1/2}}{h_i} + 2(\xi - x_{i-1/2}) \frac{q_{i-1,j-1/2} - 2q_{i-1/2,j-1/2} + q_{i,j-1/2}}{h_i^2} \right) \\ &+ (\eta - y_{j-1/2}) \left( \frac{q_{i-1/2,j} - q_{i-1/2,j-1}}{k_j} + 2(\eta - y_{j-1/2}) \frac{q_{i-1/2,j-1} - 2q_{i-1/2,j-1/2} + q_{i-1/2,j}}{k_j^2} \right) \\ &+ 2(\xi - x_{i-1/2})^2 (\eta - y_{j-1/2}) \frac{-q_{i-1,j-1} + q_{i-1,j} + 2q_{i-1/2,j-1} - 2q_{i-1/2,j} - q_{i,j-1} + q_{i,j}}{h_i^2 k_j} \\ &+ 2(\xi - x_{i-1/2}) (\eta - y_{j-1/2})^2 \frac{-q_{i-1,j-1} + 2q_{i-1,j-1/2} - q_{i-1,j} + q_{i,j-1} - 2q_{i,j-1/2} + q_{i,j}}{h_i k_j^2} \\ &+ 4(\xi - x_{i-1/2})^2 (\eta - y_{j-1/2})^2 \left( \frac{q_{i-1,j-1} - 2q_{i-1,j-1/2} + q_{i-1,j}}{h_i^2 k_j^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-2q_{i-1/2,j-1} + 4q_{i-1/2,j-1/2} - 2q_{i-1/2,j} + q_{i,j-1} - 2q_{i,j-1/2} + q_{i,j}}{h_i^2 k_j^2} \right) \\ &+ (\xi - x_{i-1/2}) (\eta - y_{j-1/2}) \frac{q_{i-1,j-1} - q_{i-1,j} - q_{i,j-1} + q_{i,j}}{h_i k_j}. \end{aligned}$$

Pošto iz (6.2) sledi da je  $q_{i-1/2,j-1/2} = 0$ , onda je

$$\begin{aligned}
 I_{i,j}^{bq} = \int_{\Omega_{i,j}} & \left[ (\xi - x_{i-1/2})R_{i,j}^x(\xi) + (\eta - y_{j-1/2})R_{i,j}^y(\eta) \right. \\
 & + \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2(\eta - y_{j-1/2})}{2} D_y^0 \delta_{xx} q_{i-1/2,j-1/2} \\
 & + \frac{(\xi - x_{i-1/2})(\eta - y_{j-1/2})^2}{2} D_x^0 \delta_{yy} q_{i-1/2,j-1/2} \\
 & + \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2(\eta - y_{j-1/2})^2}{4} \delta_{xx} \delta_{yy} q_{i-1/2,j-1/2} \\
 & \left. + (\xi - x_{i-1/2})(\eta - y_{j-1/2}) D_x^0 D_y^0 q_{i-1/2,j-1/2} \right] \Gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta,
 \end{aligned}$$

gde je

$$R_{i,j}^x(\xi) = \frac{q_{i,j-1/2} - q_{i-1,j-1/2}}{h_i} + 2(\xi - x_{i-1/2}) \frac{q_{i-1,j-1/2} - 2q_{i-1/2,j-1/2} + q_{i,j-1/2}}{h_i^2}$$

i takođe

$$R_{i,j}^y(\eta) = \frac{q_{i-1/2,j} - q_{i-1/2,j-1}}{k_j} + 2(\eta - y_{j-1/2}) \frac{q_{i-1/2,j-1} - 2q_{i-1/2,j-1/2} + q_{i-1/2,j}}{k_j^2}.$$

Analiziraćemo sada svaki sabirak u  $I_{i,j}^{bq}$  zasebno.

Kako je

$$\xi - x_{i-1/2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} - \frac{h_i^2}{8} \right],$$

onda parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned}
 I_{1,i,j} &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\xi - x_{i-1/2}) \Gamma(\xi, \eta) R_{i,j}^x(\xi) d\xi d\eta \\
 &= \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \left( \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} - \frac{h_i^2}{8} \right) \Gamma(\xi, \eta) R_{i,j}^x(\xi) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left( \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} - \frac{h_i^2}{8} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} (\Gamma(\xi, \eta) R_{i,j}^x(\xi)) d\xi \right) d\eta \\
 &= - \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} - \frac{h_i^2}{8} \right] \left( \Gamma_\xi(\xi, \eta) R_{i,j}^x(\xi) + \Gamma(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}^x(\xi) \right) d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Dalje je

$$|I_{1,i,j}| \leq \frac{h_i^2}{8} \left( \|R_{i,j}^x\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma_\xi(\xi, \eta)| d\xi d\eta + \left\| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}^x \right\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right). \quad (6.11)$$



Takođe, važi i sledeće ograničenje

$$|I_{1,i,j}| = \left| \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\xi - x_{i-1/2}) \Gamma(\xi, \eta) R_{i,j}^x(\xi) d\xi d\eta \right| \leq \frac{h_i}{2} \|R_{i,j}^x\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (6.12)$$

Kombinacijom (6.11) i (6.12) dobijamo

$$\begin{aligned} |I_{1,i,j}| \leq \frac{h_i}{2} \|R_{i,j}^x\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \min \left\{ C_1, \frac{C_2 h_i}{4\varepsilon} \right\} & \left( \frac{1}{C_1} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon}{C_2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma_\xi(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right) \\ & + \frac{h_i^2}{8} \left\| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}^x \right\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \|R_{i,j}^x\|_{\infty, \Omega_{i,j}} &= \max\{|R_{i,j}^x(x_{i-1})|, |R_{i,j}^x(x_i)|\} \\ &= \max \left\{ \frac{|q_{i,j-1/2} - q_{i-1/2,j-1/2}|}{h_i/2}, \frac{|q_{i-1/2,j-1/2} - q_{i-1,j-1/2}|}{h_i/2} \right\} \end{aligned}$$

i važi

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}^x \right\|_{\infty, \Omega_{i,j}} = 2 \frac{|q_{i-1,j-1/2} - 2q_{i-1/2,j-1/2} + q_{i,j-1/2}|}{h_i^2},$$

sumiranjem za  $i = 1, 2, \dots, N$  i  $j = 1, 2, \dots, M$ , dobijamo sledeće ograničenje

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{h_i^2}{8} \left\| \frac{\partial}{\partial \xi} R_{i,j}^x \right\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma(\xi, \eta)| d\xi d\eta \\ \leq C \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \frac{h_i^2}{16} |\delta_{xx} q_{i-1/2,j-1/2}| := C\eta_{1x}(q, \Delta), \end{aligned}$$

kao i

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{h_i}{2} \|R_{i,j}^x\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \min \left\{ C_1, \frac{C_2 h_i}{4\varepsilon} \right\} & \left( \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{C_1} |\Gamma(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon}{C_2} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\Gamma_\xi(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right) \\ \leq C \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \max\{|D_x^+ q_{i-1/2,j-1/2}|, |D_x^- q_{i-1/2,j-1/2}|\} & \min \left\{ h_i, \frac{h_i^2}{4\varepsilon} \right\} := C\eta_{2x}(q, \Delta). \end{aligned}$$

Iz poslednje dve nejednakosti sledi

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{1,i,j}| \leq C(\eta_{1x}(q, \Delta) + \eta_{2x}(q, \Delta)). \quad (6.13)$$

Slično, za

$$I_{2,i,j} = \int_{\Omega_{i,j}} (\eta - y_{j-1/2}) R_{i,j}^y(\eta) \Gamma(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

dobijamo ograničenje

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{2,i,j}| \leq C(\eta_{1y}(q, \Delta) + \eta_{2y}(q, \Delta)), \quad (6.14)$$

gde je

$$\eta_{1y}(q, \Delta) = \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \frac{k_j^2}{16} |\delta_{yy} q_{i-1/2, j-1/2}|,$$

$$\eta_{2y}(q, \Delta) = \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \max\{|D_y^+ q_{i-1/2, j-1/2}|, |D_y^- q_{i-1/2, j-1/2}|\} \min\left\{k_j, \frac{k_j^2}{4\epsilon}\right\}.$$

Neka je, dalje,

$$I_{3x,i,j} = \int_{\Omega_{i,j}} \frac{1}{2} (\xi - x_{i-1/2})^2 (\eta - y_{j-1/2}) D_y^0 \delta_{xx} q_{i-1/2, j-1/2} \Gamma(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

Lako se dobija da je

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{3x,i,j}| \leq C\eta_{3x}(q, \Delta), \quad (6.15)$$

gde je

$$\eta_{3x}(q, \Delta) = \frac{1}{16} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} h_i^2 k_j |D_y^0 \delta_{xx} q_{i-1/2, j-1/2}|.$$

Slično, ako je

$$I_{3y,i,j} = \int_{\Omega_{i,j}} \frac{1}{2} (\xi - x_{i-1/2}) (\eta - y_{j-1/2})^2 D_x^0 \delta_{yy} q_{i-1/2, j-1/2} \Gamma(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

onda je

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{3y,i,j}| \leq C\eta_{3y}(q, \Delta), \quad (6.16)$$

gde je

$$\eta_{3y}(q, \Delta) = \frac{1}{16} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} h_i k_j^2 |D_x^0 \delta_{yy} q_{i-1/2, j-1/2}|.$$

Za integral

$$I_{4,i,j} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \frac{1}{4} (\xi - x_{i-1/2})^2 (\eta - y_{j-1/2})^2 \delta_{xx} \delta_{yy} q_{i-1/2, j-1/2} \Gamma(\xi, \eta) d\eta d\xi,$$

dobijamo

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{4,i,j}| \leq C\eta_4(q, \Delta), \quad (6.17)$$

gde je

$$\eta_4(q, \Delta) = \frac{1}{64} \max_{\substack{i=1,\dots,N \\ j=1,\dots,M}} h_i^2 k_j^2 |\delta_{yy} \delta_{xx} q_{i-1/2,j-1/2}|.$$

Dalje, razmotrimo

$$I_{5,i,j} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (\xi - x_{i-1/2})(\eta - y_{j-1/2}) D_x^0 D_y^0 q_{i-1/2,j-1/2} \Gamma(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (6.18)$$

Opet ćemo iskoristiti da je

$$\xi - x_{i-1/2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} - \frac{h_i^2}{8} \right],$$

pa se posle parcijalne integracije po  $\xi$ , dobija

$$I_{5,i,j} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left( \frac{(\xi - x_{i-1/2})^2}{2} - \frac{h_i^2}{8} \right) (\eta - y_{j-1/2}) D_x^0 D_y^0 q_{i-1/2,j-1/2} \Gamma_\xi(\xi, \eta) d\eta d\xi.$$

Prvo ograničenje za  $I_{5,i,j}$  je

$$|I_{5,i,j}| \leq \frac{h_i^2 k_j}{16} |D_x^0 D_y^0 q_{i-1/2,j-1/2}| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} |\Gamma_\xi(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (6.19)$$

Istom tehnikom, samo koristeći parcijalnu integraciju po promenljivoj  $\eta$ , dobijamo i drugo ograničenje

$$|I_{5,i,j}| \leq \frac{h_i k_j^2}{16} |D_x^0 D_y^0 q_{i-1/2,j-1/2}| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} |\Gamma_\eta(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (6.20)$$

Napokon, direktno iz (6.18) sledi

$$|I_{5,i,j}| \leq \frac{h_i k_j}{4} |D_x^0 D_y^0 q_{i-1/2,j-1/2}| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} |\Gamma(\xi, \eta)| d\eta d\xi. \quad (6.21)$$

Konačno, kombinacijom (6.19), (6.20) i (6.21) dobijamo

$$|I_{5,i,j}| \leq \frac{1}{4} \min \left\{ C_1 h_i k_j, \frac{C_2 h_i^2 k_j}{4\varepsilon}, \frac{C_2 h_i k_j^2}{4\varepsilon} \right\} |D_x^0 D_y^0 q_{i-1/2,j-1/2}| \int_{\Omega_{i,j}} \left( \frac{1}{C_1} |\Gamma(\xi, \eta)| + \frac{\varepsilon}{C_2} (|\Gamma_\xi(\xi, \eta)| + |\Gamma_\eta(\xi, \eta)|) \right) d\eta d\xi,$$

odnosno

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{5,i,j}| \leq C\eta_5(q, \Delta), \quad (6.22)$$

gde je

$$\eta_5(q, \Delta) = \frac{1}{2} \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \min \left\{ h_i k_j, \frac{h_i^2 k_j}{4\varepsilon}, \frac{h_i k_j^2}{4\varepsilon} \right\} |D_y^0 D_x^0 q_{i-1/2, j-1/2}|.$$

Iz (6.13) - (6.22) sledi

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{i,j}^{bq}| \leq C(\eta_{1x} + \eta_{1y} + \eta_{2x} + \eta_{2y} + \eta_{3x} + \eta_{3y} + \eta_4 + \eta_5)(q, \Delta). \quad (6.23)$$

Lako se vidi da iz

$$I_{i,j}^{int} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} (I^{bq} q(\xi, \eta) - q(\xi, \eta)) \Gamma(\xi, \eta) d\eta d\xi$$

dobijamo ograničenje

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |I_{i,j}^{int}| \leq \max_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, M}} \|I^{bq} q - q\|_{\infty, \Omega_{i,j}} \int_0^1 \int_0^1 |\Gamma(\xi, \eta)| d\eta d\xi \leq C\eta^I(q, \Delta). \quad (6.24)$$

Konačno, (6.23) i (6.24), zajedno sa (6.8) daju (6.10).  $\square$

Primetimo da su  $w_x(y) := \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_\Delta(x, y) \right)$  i  $w_y(x) := \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_\Delta(x, y) \right)$  kvadratne funkcije jedne promenljive  $y$  i  $x$ , redom. Odatle je  $\|I^{bq} q - q\|_{\Omega_{i,j}} = \|I^{bq} \hat{q} - \hat{q}\|_{\Omega_{i,j}}$ , gde je  $\hat{q} := ru - f$ , zbog linearnosti  $I^{bq}$ . Takođe, lako je uočiti da svi sabirci u  $\eta(q, \Delta)$  konvergiraju u supremum normi sa redom konvergencije najmanje dva.

## 6.4 Numerički rezultati

Dobijene teorijske rezultate u ovoj glavi potvrdićemo numerički na test primeru

$$-\varepsilon^2 \Delta u(x, y) + (1 + x^2 y^2 e^{xy}) u(x, y) = f(x, y) \quad \text{na } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad (6.25)$$

gde su funkcija  $f$  i granični uslovi izabrani tako da rešenje jednačine (6.25) bude

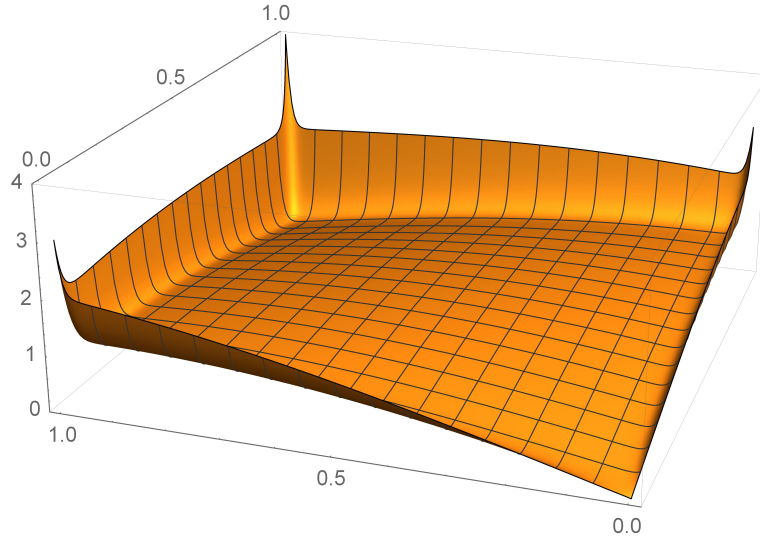
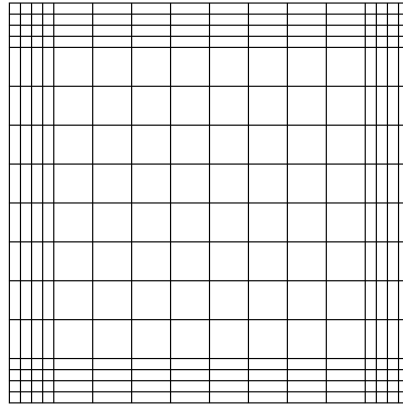
$$u(x, y) = \sin(x + y) \frac{\pi}{2} + (x + y) \left( e^{-x/\varepsilon} + e^{-(1-x)/\varepsilon} + e^{-2y/\varepsilon} + e^{-2(1-y)/\varepsilon} \right).$$

Rešenje  $u$  je prikazano na slici 6.1.

Grešku postupka u supremum normi aproksimiraćemo sa

$$\|u - u_\Delta\|_\infty \approx \chi_N = \max_{\substack{i,j=1, \dots, N \\ m,n=0, \dots, \bar{k}}} |(u - u_\Delta)(x_{i-1} + m\bar{k}^{-1}h_i, y_{j-1} + n\bar{k}^{-1}k_j)|.$$

U našim eksperimentima biramo  $\bar{k} = 7$  i  $N = M$ . Red konvergencije računamo na standardni način u oznaci  $p_N$ , kao i "Šiškinov" red  $s_N$ , videti njihove definicije u Glavi 5. Kolokacioni postupak ćemo primeniti na odgovarajućim mrežama koje su konstruisane kao direktni proizvod mreža za jednodimenzionalni problem reakcije-difuzije, videti Glavu 4. Slika 6.2 prikazuje standardnu Šiškinovu mrežu u dve dimenzije.


 Slika 6.1: Rešenje test primera (6.25),  $\varepsilon = 2^{-6}$ .

 Slika 6.2: Šiškinova mreža za  $N = M = 16$  i  $\sigma = 4$ ,  $\varrho = 1$ ,  $q = 1/4$ .

Aposteriorna ocena na Šiškinovoj mreži je prikazana u Tabeli 6.1. Prva kolona ove tabele daje vrednosti  $N$  za fiksno  $\varepsilon$ . Greška postupka  $\chi_N$  i redovi konvergencije se mogu pronaći u kolonama 2 do 4. Naredne tri kolone daju nam vrednosti za  $\eta$  i redove konvergencije  $p_N^\eta$  i  $s_N^\eta$  aposteriorne ocene. U poslednjoj koloni možemo naći koeficijent efikasnosti  $\chi_N/\eta$ .

 Tabela 6.1: Aposteriorne ocene na Šiškinovoj mreži; test primer (6.25);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 4$ ,  $q = 1/4$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta$	$p_N^\eta$	$s_N^\eta$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	2.374e-01	1.21	1.64	8.601e+00	1.02	1.51	2.760e-02
$2^6$	1.029e-01	1.56	2.00	4.228e+00	1.24	1.68	2.435e-02
$2^7$	3.498e-02	1.86	2.30	1.789e+00	1.42	1.83	1.956e-02
$2^8$	9.640e-03	1.70	2.05	6.686e-01	1.55	1.91	1.442e-02
$2^9$	2.971e-03	1.74	2.05	2.291e-01	1.63	1.96	1.297e-02
$2^{10}$	8.908e-04	—	—	7.399e-02	—	—	1.204e-02

Tabela 6.2 potvrđuje uniformnu konvergenciju i greške postupka  $\chi_N$  i aposteriorne ocene  $C\eta$  iz Teoreme 6.2 na standardnoj Šiškinovoj mreži u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$  sa redom konvergencije skoro dva. Za fiksno  $N$  u datoj tabeli uzimamo različite vrednosti parametra  $\varepsilon$ . Primitimo

da za  $\varepsilon = 1$  i  $\varepsilon = 10^{-1}$ , prema definiciji Šiškinove mreže, ona postaje ekvidistantna.

Tabela 6.2: Aposteriorne ocene na standardnoj Šiškinovoj mreži; test primer (6.25);  $N = 2^8$ ,  $\sigma = 4$ ,  $q = 1/4$ .

$\varepsilon$	$\chi_N$	$\eta$	$\chi_N/\eta$
1	1.239e-09	2.262e-04	5.477e-03
$10^{-1}$	1.287e-04	1.088e-02	1.183e-02
$10^{-2}$	9.743e-03	6.730e-01	1.448e-02
$10^{-3}$	9.650e-03	6.691e-01	1.442e-02
$10^{-4}$	9.641e-03	6.687e-01	1.442e-02
$10^{-5}$	9.640e-03	6.687e-01	1.442e-02
$10^{-6}$	9.640e-03	6.687e-01	1.442e-02
$10^{-7}$	9.640e-03	6.687e-01	1.442e-02
$10^{-8}$	9.640e-03	6.687e-01	1.442e-02

Tabela 6.3 prikazuje numeričke rezultate dobijene na rekurzivno generisanoj mreži. Kao i što je očekivano, kolokacioni postupak na rekurzivno generisanoj mreži daje značajno bolje numeričke rezultate nego na Šiškinovoj mreži.

Tabela 6.3: Aposteriorne ocene na rekurzivno generisanoj mreži; test primer (6.25);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta$	$p_N^\eta$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	1.551e-01	2.41	6.469e+00	1.99	2.397e-02
$2^6$	2.920e-02	2.69	1.630e+00	2.17	1.791e-02
$2^7$	4.528e-03	2.32	3.632e-01	2.08	1.247e-02
$2^8$	9.027e-04	2.14	8.607e-02	2.03	1.049e-02
$2^9$	2.048e-04	2.08	2.102e-02	2.02	9.741e-03
$2^{10}$	4.854e-05	—	5.176e-03	—	9.379e-03

Očekivano, mreže tipa Bahvalova pokazuju bolje osobine nego Šiškinova i rekurzivno generisana mreža, videti tabele 6.4 i 6.5.

Tabela 6.4: Aposteriorne ocene na mreži Bahvalova; test primer (6.25);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\sigma = 4$ ,  $\bar{q} = 0.4$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta$	$p_N^\eta$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	6.249e-03	2.17	6.123e-01	1.95	1.028e-02
$2^6$	1.398e-03	2.09	1.580e-01	1.98	8.850e-03
$2^7$	3.294e-04	2.04	4.008e-02	1.99	8.219e-03
$2^8$	8.010e-05	2.02	1.009e-02	2.00	7.940e-03
$2^9$	1.974e-05	2.01	2.530e-03	2.00	7.801e-03
$2^{10}$	4.900e-06	—	6.344e-04	—	7.724e-03

Tabela 6.6 potvrđuje da je kolokacioni postupak uniformno konvergentan u odnosu na perturbovani parametar  $\varepsilon$  i na R-mreži. U toj tabeli smo za različite vrednosti  $\varepsilon$  i fiksno  $N$  prikazali uniformnost i  $\chi_N$  i  $\eta$ . U svim tabelama se, takođe može videti da je indeks efikasnosti  $\chi_N/\eta$  nezavisan od diskretizacionog parametra  $N$ .

Tabela 6.7 daje numeričke rezultate za kolokacioni postupak (6.2) primenjen na ekvidistantnoj mreži. Očekivano, red konvergencije je skoro nula, a ni aposteriorna ocena ne opada sa povećanjem  $N$ .

Tabela 6.5: Aposteriorne ocene na R-mreži; test primer (6.25);  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $a = 4$ ,  $\bar{q} = 0.4$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta$	$p_N^\eta$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	4.788e-03	2.61	6.541e-01	2.00	7.320e-03
$2^6$	7.861e-04	2.18	1.631e-01	2.00	4.819e-03
$2^7$	1.729e-04	2.09	4.066e-02	2.00	4.252e-03
$2^8$	4.065e-05	2.04	1.015e-02	2.00	4.006e-03
$2^9$	9.864e-06	2.02	2.534e-03	2.00	3.892e-03
$2^{10}$	2.430e-06	—	6.351e-04	—	3.826e-03

Tabela 6.6: Aposteriorne ocene na R-mreži; test primer (6.25);  $N = 2^8$ ,  $a = 4$ ,  $\bar{q} = 0.4$ .

$\varepsilon$	$\chi_N$	$\eta$	$\chi_N/\eta$
$10^{-1}$	1.287e-04	1.088e-02	1.183e-03
$10^{-2}$	4.148e-05	1.020e-02	4.069e-03
$10^{-3}$	4.066e-05	1.014e-02	4.006e-03
$10^{-4}$	4.063e-05	1.015e-02	4.006e-03
$10^{-5}$	4.064e-05	1.015e-02	4.006e-03
$10^{-6}$	4.065e-05	1.015e-02	4.006e-03
$10^{-7}$	4.065e-05	1.015e-02	4.006e-03
$10^{-8}$	4.065e-05	1.014e-02	4.008e-03

Tabela 6.7: Aposteriorne ocene na ekvidistantnoj mreži; test primer (6.25);  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$\eta$	$\chi_N/\eta$
$2^5$	2.513e+00	2.521e+01	9.970e-02
$2^6$	2.514e+00	2.529e+01	9.950e-02
$2^7$	2.518e+00	2.533e+01	9.940e-02
$2^8$	2.518e+00	2.535e+01	9.936e-02
$2^9$	2.519e+00	2.536e+01	9.933e-02
$2^9$	2.519e+00	2.536e+01	9.932e-02

Naravno, i ova ocena greške pokazuje da su ekvidistantne mreže praktično neupotrebljive prilikom primene kolokacionog postupka na singularno perturbovane probleme.

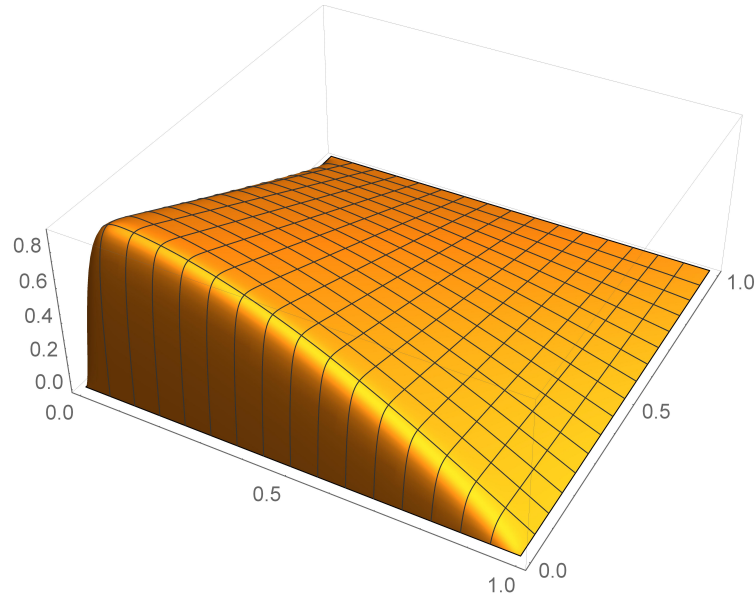
Na kraju, upoređićemo naš kolokacioni postupak sa jedinim poznatim postupkom za rešavanje problema (6.1), gde je aposteriorna ocena data u supremum normi [30]. Kopteva je u svom radu razmatrala standardnu diskretizaciju (označimo je sa SD-2D). Uporedna analiza ova dva postupka urađena je na test primeru upravo iz rada [30], tj. na problemu

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u(x, y) + u(x, y) &= f(x, y) \text{ na } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.26}$$

gde je  $f$  takva funkcija da je

$$u(x, y) = \left( \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{e^{-x/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right) \left( 1 - y - \frac{e^{-y/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right).$$

rešenje problema (6.26), koje je prikazano na Slici 6.3.

Slika 6.3: Rešenje test primera (6.26),  $\varepsilon = 2^{-6}$ .

Efikasnost ovih postupaka razmatramo na jednoj varijanti mreže tipa Bahvalova koja je takođe korišćena u radu [30]. Ova mreža je u jednoj dimenziji generisana sa  $x_i = \varphi(i/N)$ , za  $i = 1, 2, \dots, N$ , ako je  $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$  i gde je

$$\varphi(t) = \varepsilon \sigma \ln \frac{b}{b - \varepsilon}, \quad \text{za } t \in [0, \vartheta],$$

$\varphi(1) := 1$  i  $\varphi$  je neprekidna na  $[0, 1]$  i linearna na  $[\vartheta, 1]$ . U eksperimentima biramo

$$b = 1/2, \quad \bar{\varepsilon} = b/\sigma \quad \text{i} \quad \vartheta = b - \varepsilon \sigma.$$

Za  $\varepsilon > \bar{\varepsilon}$ , ovaj tip mreže Bahvalova se definiše kao ekvidistantna mreža. Označimo ovu mrežu sa  $mB$ .

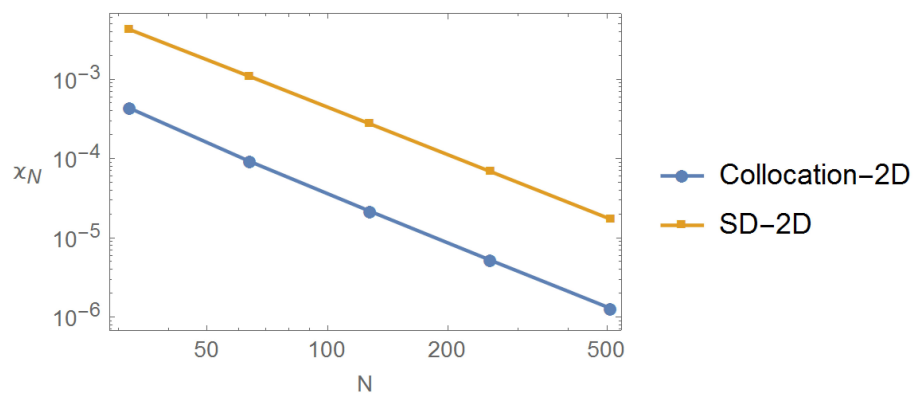
Tabela 6.8: Uporedna analiza dva postupka na  $mB$ -mreži u 2D,  $\sigma = 3$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	SD-2D		Collocation-2D	
	$\chi_N$	$p_N$	$\chi_N$	$p_N$
$2^5$	4.23e-03	1.97	4.30e-04	2.23
$2^6$	1.08e-03	1.99	9.15e-05	2.09
$2^7$	2.72e-04	2.00	2.15e-05	2.05
$2^8$	6.82e-05	2.00	5.20e-06	2.02
$2^9$	1.71e-05	—	1.28e-06	—

Možemo videti u Tabeli 6.8 da kolokacioni postupak (6.2) (u oznaci Collocation-2D) daje bolje numeričke rezultate nego postupak SD-2D. Takođe, naša aproksimacija, dobijena primenom  $C^1$ -bikvadratnog splajn kolokacionog postupka, je funkcija klase  $C^1$  na domenu  $\Omega$  nasuprot aproksimaciji koja je dobijena primenom SD-2D postupka u radu [30], koja je samo klase  $C^0$  na  $\Omega$ . Ova osobina je ujedno i značajna prednost našeg postupka. S druge strane, aposteriorna ocena iz rada [30] je dobijena za semilinearni 2D problem reakcije-difuzije, dok smo mi dobili samo ocenu za linearni problem (6.1).



Na Slici 6.4 su prikazana oba posmatrana postupka – kolokacioni postupak (6.2) i SD-2D postupak.



Slika 6.4: Usporedna analiza grešaka postupka SD-2D i kolokacionog postupka (6.2) na  $mB$  mreži.

# PRILOG A

## A.1 Baza za $C^1$ -kvadratne splajнове

U disertaciji koristimo prvi i drugi izvod kvadratnih splajnova, pa su nam neophodni isti izvodi i kvadratnih B-splajnova.

$$B'_{2,0}(x) = \begin{cases} \frac{2(x_1 - x)}{h_1^2} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B'_{2,1}(x) = \begin{cases} \frac{2(x_1 - x)}{h_1^2} - \frac{2(x - x_0)}{(h_1 + h_2)h_1} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ \frac{2(x - x_2)}{(h_1 + h_2)h_1} & \text{ako } x \in [x_1, x_2], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N - 1$ :

$$B'_{2,i}(x) = \begin{cases} \frac{2(x - x_{i-2})}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}} & \text{ako } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{x_i + x_{i-2} - 2x}{(h_{i-1} + h_i)h_i} + \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x}{(h_i + h_{i+1})h_i} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{2(x - x_{i+1})}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}} & \text{ako } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B'_{2,N}(x) = \begin{cases} \frac{2(x - x_{N-2})}{(h_{N-1} + h_N)h_{N-1}} & \text{ako } x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ \frac{2(x_{N-1} - x)}{h_N^2} - \frac{2(x - x_N)}{(h_N + h_{N-1})h_N} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B'_{2,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{2(x_{N-1} - x)}{h_N^2} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B''_{2,0}(x) = \begin{cases} \frac{2}{h_1^2} & \text{ako } x \in (x_0, x_1), \\ 0 & x \notin (x_0, x_1), \end{cases}$$

$$B''_{2,1}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{h_1^2} - \frac{2}{(h_1 + h_2)h_1} & \text{ako } x \in (x_0, x_1), \\ \frac{2}{(h_1 + h_2)h_1} & \text{ako } x \in (x_1, x_2), \\ 0 & x \notin [x_0, x_2], \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N - 1$ :

$$B''_{2,i}(x) = \begin{cases} \frac{2}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}} & \text{ako } x \in (x_{i-2}, x_{i-1}), \\ -\frac{2}{(h_{i-1} + h_i)h_i} - \frac{2}{(h_i + h_{i+1})h_i} & \text{ako } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{2}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}} & \text{ako } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0 & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

$$B''_{2,N}(x) = \begin{cases} \frac{2}{(h_{N-1} + h_N)h_{N-1}} & \text{ako } x \in (x_{N-2}, x_{N-1}), \\ -\frac{2}{h_N^2} - \frac{2}{(h_N + h_{N-1})h_N} & \text{ako } x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 & x \notin (x_{N-2}, x_N), \end{cases}$$

$$B''_{2,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{2}{h_N^2} & \text{ako } x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 & x \notin (x_N, x_N). \end{cases}$$

## A.2 Baza za kubne splajнове

Baza za kubne  $C^0$ -splajnovne data je u nastavku.

$$B_{3,0}(x) = \begin{cases} \frac{(x_1 - x)^3}{h_1^3} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B_{3,1}(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_0)^2(x_1 - x)}{h_1^3} + \frac{(x_2 - x)(x_1 - x)(x - x_0)}{(h_1 + h_2)h_1^2} + \frac{(x_3 - x)^2(x - x_1)}{(h_2 + h_3)^2h_2} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ \frac{(x_2 - x)^3}{(h_1 + h_2)^3h_2} & \text{ako } x \in [x_1, x_2], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B_{3,2}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2(x_1-x)}{(h_1+h_2)h_1^2} + \frac{(x-x_0)T_2}{(h_1+h_2)^2h_1} + \frac{(x_3-x)(x-x_0)}{R_2} & \text{ako } x \in [x_0, x_1], \\ \frac{(x-x_0)^2(x_2-x)}{(h_1+h_2)^2h_1} + \frac{(x_3-x)T_2}{P_3} + \frac{(x_3-x)^2(x-x_1)}{Q_3} & \text{ako } x \in [x_1, x_2], \\ \frac{(x_3-x)^3}{(h_1+h_2+h_3)(h_2+h_3)h_3} & \text{ako } x \in [x_2, x_3], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 3, \dots, N-1$ :

$$B_{3,i}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-3})^3}{R_i} & \text{ako } x \in [x_{i-3}, x_{i-2}], \\ \frac{(x-x_{i-3})^2(x_{i-1}-x)}{P_i} + \frac{(x-x_{i-3})T_i}{Q_i} + \frac{(x_{i+1}-x)(x-x_{i-2})^2}{R_{i+1}} & \text{ako } x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ \frac{(x-x_{i-3})(x_i-x)^2}{S_i} + \frac{(x_{i+1}-x)T_i}{P_{i+1}} + \frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_{i-1})}{Q_{i+1}} & \text{ako } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{(x_{i+1}-x)^3}{S_{i+1}} & \text{ako } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B_{3,N}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{N-3})^3}{R_N} & \text{ako } x \in [x_{N-3}, x_{N-2}], \\ \frac{(x-x_{N-3})^2(x_{N-1}-x)}{P_N} + \frac{(x-x_{N-3})T_N}{Q_N} + \frac{(x_N-x)^2(x-x_{N-2})}{(h_N+h_{N+1})^2h_{N-1}} & \text{ako } x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ \frac{(x-x_{N-3})(x_N-x)^2}{S_N} + \frac{(x_N-x)T_N}{(h_N+h_{N+1})^2h_N} & \text{ako } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$B_{3,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{N-2})^3}{(h_N+h_{N-1})^2h_{N-1}} & \text{ako } x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ T_{N+1} & \text{ako } x \in [x_{N-2}, x_{N-1}], \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

gde je

$$T_i = (x_i - x)(x - x_{i-2}), \quad i = 2, 3, \dots, N$$

i za  $i = 3, 4, \dots, N$  važi

$$P_i = (x_i - x_{i-3})(x_{i-1} - x_{i-3})(x_{i-1} - x_{i-2}), \quad Q_i = (x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})(x_{i-1} - x_{i-2})$$

$$R_i = (x_i - x_{i-3})(x_{i-1} - x_{i-3})(x_{i-2} - x_{i-3}), \quad S_i = (x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})$$

i

$$T_{N+1} = \frac{(x-x_{N-2})^2(x_N-x)}{(h_N+h_{N-1})^2h_N} + \frac{(x-x_{N-2})(x_N-x)(x-x_{N-1})}{(h_N+h_{N+1})h_N^2} + \frac{(x_N-x)^2(x-x_{N-1})}{h_N^3}.$$

Drugi izvod kubnih  $C^1$ -bazičnih splajnova sledi.

$$\varphi''_{3,1}(x) = \begin{cases} \frac{6(3x - 2x_1 - x_0)}{h_1^3} & \text{ako } x \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

$$\varphi''_{3,i}(x) = \begin{cases} \frac{6(x - x_{i-2})}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^2} & \text{ako } x \in (x_{i-2}, x_{i-1}), \\ \frac{2(3x - 2x_i - x_{i-2})}{(h_{i-1} + h_i)h_i^2} + \frac{4(3x - 2x_i - x_{i-1})}{h_i^3} & \text{ako } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\varphi''_{3,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{6(x - x_{N-1})}{h_N^3} & \text{ako } x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

i

$$\psi''_{3,1}(x) = \begin{cases} \frac{6(x_1 - x)}{h_1^3} & \text{ako } x \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

$$\psi''_{3,i}(x) = \begin{cases} \frac{4(x_{i-1} + 2x_{i-2} - 3x)}{h_{i-1}^3} + \frac{2(x_i + 2x_{i-2} - 3x)}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^2} & \text{ako } x \in (x_{i-2}, x_{i-1}), \\ \frac{6(x_i - x)}{(h_{i-1} + h_i)h_i^2} & \text{ako } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\psi''_{3,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{6(x_N + 2x_{N-1} - x)}{h_N^3} & \text{ako } x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

### A.3 Baza za splajnove stepena četiri

U nastavku je dat i drugi izvod bazičnih  $C^1$ -splajnova stepena četiri.

$$\varphi''_{4,1}(x) = \begin{cases} \frac{24(x - x_1)(x_1 + x_0 - 2x)}{h_1^4} & \text{ako } x \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

$$\varphi''_{4,i}(x) = \begin{cases} \frac{12(x - x_{i-2})^4}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^3} & \text{ako } x \in (x_{i-2}, x_{i-1}), \\ \frac{6(x_i - x)(2x - x_{i-2} - x_i)}{(h_{i-1} + h_i)h_i^3} + \frac{18(x_i - x)(2x - x_{i-1} - x + i)}{h_i^4} & \text{ako } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\varphi''_{4,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{12(x - x_{N-1})^2}{h_N^4} & \text{ako } x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

i

za  $i = 1, \dots, N$ :

$$\eta''_{4,i}(x) = \begin{cases} \frac{12(x - x_{i-1})^2}{h_i^4} - \frac{48(x - x_{i-1})(x_i - x)}{h_i^4} + \frac{12(x_i - x)^2}{h_i^4} & \text{ako } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

i

$$\psi''_{4,1}(x) = \begin{cases} \frac{12(x - x_1)^2}{h_1^4} & \text{ako } x \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

za  $i = 2, \dots, N$ :

$$\psi''_{4,i}(x) = \begin{cases} \frac{18(x - x_{i-2})(x_{i-1} + x_{i-2} - 2x)}{h_{i-1}^4} + \frac{6(x - x_{i-2})(x_i + x_{i-2} - 2x)}{(h_{i-1} + h_i)h_{i-1}^3} & \text{ako } x \in (x_{i-2}, x_{i-1}), \\ \frac{12(x_i - x)^2}{(h_{i-1} + h_i)h_i^3} & \text{ako } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ 0 & \text{inače,} \end{cases}$$

$$\psi''_{4,N+1}(x) = \begin{cases} \frac{24(x - x_{N-1})(x_N + x_{N-1} - 2x)}{h_N^4} & \text{ako } x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$



# PRILOG B

## B.1 Test primer 1

U prvom delu ovog priloga predstavimo numeričke rezultate dobijene na test primeru (5.41) - za kolokacione postupke sa  $C^1$ -splajnovima višeg stepena na različitim mrežama. Tabele B2, B4, B6, B8, B11 i B13 prikazuju numeričke rezultate dobijene za kolokacione postupke sa splajnovima stepena 4 do 10. Ove tabele potvrđuju sve naše teorijske rezultate – greške postupaka na Šiškinovoj mreži se ponašaju kao  $\mathcal{O}(N^{-k-2} \ln^{k+2} N)$ , dok je red konvergencije na mreži Bahvalova i rekurzivno generisanoj mreži isti i iznosi  $k + 2$ ,  $k = 2, 3, \dots, 9$ . U ovim eksperimentima, vidimo da odnos između greške postupka i aposteriorne ocene ne zavisi od diskretizacionog parametra  $N$ . Aposteriorona ocena je veća od 21 do 645 puta na Šiškinovoj mreži, od 2 do 34 puta veća na rekurzivno generisanoj mreži i od 1.5 do 625 puta veća na R-mreži – u odnosu na grešku  $\chi_N$ , a u zavisnosti od stepena splajna koji koristimo.

Rezultati kolokacionih postupaka na mrežama generisanim adaptivnim algoritmom su prikazane u tabelama B1, B3, B5, B7, B9, B10, B12 i B14. Prosečan red konvergencije koji se dobije na ovako izabranim mrežama je  $k + 2$ ,  $k = 2, 3, \dots, 9$ , kao što je i očekivano. Štaviše, greške kolokacionih postupaka na ovoj mreži su manje u odnosu na isti postupak na preostalim posmatranim mrežama.

U ovim eksperimentima za parametre Šiškinove i R-mreže biramo  $\sigma = k + 2$ ,  $q = 1/4$ ,  $a = 2$  i  $\bar{q} = 0.4$ .

Tabela B1: Adaptivni algoritam,  $k = 2$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{2,I}$	$\eta^{2,D}$	$\eta^2$	$\chi_N/\eta^2$	#iter
$2^5$	2.076e-04	4.23	1.395e-04	2.427e-03	2.566e-03	8.091e-02	7
$2^6$	1.107e-05	4.20	7.245e-06	9.208e-05	9.932e-05	1.115e-01	5
$2^7$	6.033e-07	3.46	3.593e-07	3.561e-06	3.921e-06	1.539e-01	4
$2^8$	5.476e-08	4.77	2.483e-08	1.158e-06	1.183e-06	4.628e-02	3
$2^9$	2.007e-09	4.07	1.416e-09	8.199e-09	9.615e-09	2.088e-01	3
$2^{10}$	1.194e-10	3.75	7.107e-11	5.109e-10	5.820e-10	2.052e-01	3
$2^{11}$	8.871e-12	4.20	5.279e-12	9.387e-11	9.915e-11	8.947e-02	2
$2^{12}$	4.815e-13	4.05	2.865e-13	2.118e-12	2.405e-12	2.002e-01	2
$2^{13}$	2.897e-14	—	1.724e-14	1.239e-13	1.411e-13	2.052e-01	2



Tabela B2: Aposteriorne ocene,  $k = 3$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^3$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^3$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^3$
$2^5$	3.683e-04	3.14	4.63	2.420e-02	2.734e-03	2.92	6.342e-02	2.317e-04	5.03	7.289e-04
$2^6$	4.170e-05	3.57	4.85	2.610e-03	3.622e-04	4.75	1.680e-03	7.078e-06	5.08	1.752e-05
$2^7$	3.503e-06	3.86	4.96	2.164e-04	1.346e-05	4.54	3.998e-05	2.090e-07	5.01	3.896e-07
$2^8$	2.416e-07	4.05	5.01	1.499e-05	5.799e-07	5.02	1.304e-06	6.465e-09	5.01	1.233e-08
$2^9$	1.461e-08	4.18	5.04	9.110e-07	1.788e-08	5.05	3.793e-08	2.013e-10	5.00	3.657e-10
$2^{10}$	8.045e-10	4.28	5.05	5.039e-08	5.401e-10	5.00	1.162e-09	6.293e-12	5.00	8.765e-12
$2^{11}$	4.141e-11	4.35	5.05	2.601e-09	1.684e-11	5.00	3.594e-11	1.967e-13	5.00	2.954e-13
$2^{12}$	2.024e-12	4.41	5.05	1.273e-10	5.261e-13	5.00	1.117e-12	6.145e-15	5.00	1.021e-14
$2^{13}$	9.504e-14	4.46	5.04	5.984e-12	1.646e-14	5.00	3.484e-14	1.920e-16	5.00	2.986e-16
$2^{14}$	4.318e-15	—	—	2.720e-13	5.318e-16	—	1.086e-15	6.002e-18	—	9.107e-18

Tabela B3: Adaptivni algoritam,  $k = 3$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\eta^3$	$\chi_N/\eta^3$	#iter
$2^5$	1.570e-05	4.77	1.453e-05	6.028e-05	7.481e-05	2.099e-01	7
$2^6$	5.773e-07	4.98	5.575e-07	1.869e-06	2.426e-06	2.380e-01	5
$2^7$	1.831e-08	5.18	1.786e-08	4.378e-08	6.164e-08	2.971e-01	4
$2^8$	5.056e-10	4.99	5.014e-10	4.160e-09	4.661e-09	1.085e-01	3
$2^9$	1.596e-11	5.08	1.595e-11	2.715e-11	4.310e-11	3.703e-01	3
$2^{10}$	4.719e-13	4.82	4.719e-13	7.997e-13	1.272e-12	3.711e-01	3
$2^{11}$	1.672e-14	5.15	1.672e-14	6.701e-14	8.373e-14	1.997e-01	2
$2^{12}$	4.706e-16	5.05	4.705e-16	8.709e-16	1.341e-15	3.508e-01	2
$2^{13}$	1.422e-17	—	1.422e-17	3.851e-17	3.851e-17	3.693e-01	2

Tabela B4: Aposteriorne ocene,  $k = 4$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^4$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^4$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^4$
$2^5$	5.414e-05	3.69	5.44	8.161e-03	1.010e-04	2.89	1.079e-02	1.586e-05	5.88	4.810e-05
$2^6$	4.194e-06	4.19	5.68	5.950e-04	1.360e-05	5.43	1.129e-04	2.699e-07	5.94	7.769e-07
$2^7$	2.302e-07	4.56	5.87	3.033e-05	3.162e-07	3.92	1.406e-06	4.391e-09	5.99	1.156e-08
$2^8$	9.753e-09	4.82	5.97	1.239e-06	2.094e-08	5.85	5.415e-08	6.915e-11	6.00	1.840e-10
$2^9$	3.457e-10	5.00	6.02	4.315e-08	3.624e-10	5.69	9.392e-10	1.084e-12	6.00	3.219e-12
$2^{10}$	1.083e-11	5.12	6.04	1.340e-09	7.040e-12	5.87	1.824e-11	1.694e-14	6.00	4.798e-14
$2^{11}$	3.107e-13	5.22	6.05	3.827e-11	1.205e-13	5.91	3.344e-13	2.647e-16	6.00	7.275e-16
$2^{12}$	8.345e-15	5.29	6.05	1.025e-12	1.998e-15	5.96	5.224e-15	4.137e-18	6.00	1.193e-17
$2^{13}$	2.131e-16	—	—	2.615e-14	3.125e-16	—	1.022e-16	6.463e-20	—	1.727e-19

Tabela B5: Adaptivni algoritam,  $k = 4$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{4,I}$	$\eta^{4,D}$	$\eta^4$	$\chi_N/\eta^4$	#iter
$2^5$	8.140e-07	5.89	7.044e-07	3.890e-06	4.595e-06	1.772e-01	7
$2^6$	1.376e-08	6.12	1.156e-08	7.774e-08	8.930e-08	1.541e-01	5
$2^7$	1.975e-10	6.31	1.644e-10	1.005e-09	1.170e-09	1.688e-01	4
$2^8$	2.498e-12	5.68	2.075e-12	5.493e-11	5.701e-11	4.381e-02	3
$2^9$	4.866e-14	6.28	4.442e-14	1.652e-13	2.096e-13	2.321e-01	3
$2^{10}$	6.256e-16	5.84	5.195e-16	2.366e-15	2.886e-15	2.168e-01	3
$2^{11}$	1.089e-17	6.12	9.043e-18	1.079e-16	1.169e-16	9.313e-02	2
$2^{12}$	1.562e-19	—	1.297e-19	6.772e-19	8.069e-19	1.936e-01	2

Tabela B6: Aposteriorne ocene,  $k = 5$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^5$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^5$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^5$
$2^5$	1.004e-05	4.37	6.44	2.353e-03	2.609e-05	3.89	1.528e-03	9.004e-07	6.98	3.019e-06
$2^6$	4.857e-07	4.95	6.72	1.275e-04	1.762e-06	6.69	1.215e-05	7.156e-09	7.02	2.695e-08
$2^7$	1.570e-08	5.36	6.89	3.990e-06	1.710e-08	6.03	1.015e-07	5.527e-11	7.00	2.016e-10
$2^8$	3.828e-10	5.64	6.99	9.608e-08	2.614e-10	7.01	9.092e-10	4.304e-13	7.00	1.541e-12
$2^9$	7.679e-12	5.84	7.03	1.918e-09	2.022e-12	7.03	6.889e-12	3.356e-15	7.00	1.191e-14
$2^{10}$	1.342e-13	5.98	7.05	3.344e-11	1.545e-14	7.00	5.333e-14	2.624e-17	7.00	9.254e-17
$2^{11}$	2.122e-15	6.09	7.06	5.283e-13	1.208e-16	7.00	4.163e-16	2.050e-19	7.00	7.210e-19
$2^{12}$	3.114e-17	6.17	7.06	7.748e-15	9.450e-19	7.00	3.250e-18	1.602e-21	7.00	5.626e-21
$2^{13}$	4.310e-19	—	—	1.072e-16	7.397e-21	—	2.541e-20	1.251e-23	—	4.392e-23

Tabela B7: Adaptivni algoritam,  $k = 5$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{5,I}$	$\eta^{5,D}$	$\eta^5$	$\chi_N/\eta^5$	#iter
$2^5$	5.022e-08	6.88	4.811e-08	2.708e-07	3.190e-07	1.575e-01	7
$2^6$	4.265e-10	7.04	4.220e-10	2.754e-09	3.176e-09	1.343e-01	5
$2^7$	3.235e-12	7.34	3.223e-12	1.732e-11	2.054e-11	1.575e-01	4
$2^8$	1.996e-14	6.84	1.994e-14	4.829e-13	5.028e-13	3.969e-02	3
$2^9$	1.740e-16	7.06	1.739e-16	7.009e-16	8.748e-16	1.989e-01	3
$2^{10}$	1.300e-18	6.86	1.300e-18	5.130e-18	6.429e-18	2.021e-01	3
$2^{11}$	1.117e-20	7.10	1.117e-20	1.180e-19	1.291e-19	8.653e-02	2
$2^{12}$	8.118e-23	—	8.118e-23	3.650e-22	4.462e-22	1.819e-01	2

Tabela B8: Aposteriorne ocene,  $k = 6$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^6$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^6$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^6$
$2^5$	2.627e-06	5.03	7.41	5.836e-04	1.178e-06	4.06	1.779e-04	6.388e-08	7.92	3.197e-07
$2^6$	8.062e-08	5.67	7.69	2.593e-05	7.067e-08	7.43	1.442e-06	2.632e-10	7.96	2.097e-09
$2^7$	1.585e-09	6.12	7.88	5.019e-07	4.101e-10	5.49	6.642e-09	1.056e-12	7.99	8.082e-12
$2^8$	2.272e-11	6.44	7.98	7.125e-09	9.117e-12	7.86	3.242e-11	4.145e-15	8.00	3.051e-14
$2^9$	2.611e-13	6.67	8.04	8.148e-11	3.924e-14	7.63	1.252e-13	1.622e-17	8.00	1.176e-16
$2^{10}$	2.562e-15	6.84	8.06	7.978e-13	1.983e-16	7.80	5.210e-16	6.339e-20	8.00	4.557e-19
$2^{11}$	2.243e-17	6.96	8.07	6.974e-15	8.921e-19	7.90	1.865e-17	2.477e-22	8.00	1.773e-21
$2^{12}$	1.801e-19	—	—	5.597e-17	3.730e-21	—	8.583e-21	9.675e-25	—	6.914e-24

Tabela B9: Adaptivni algoritam,  $k = 6$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{6,I}$	$\eta^{6,D}$	$\eta^6$	$\chi_N/\eta^6$	#iter
$2^5$	2.137e-09	7.81	1.969e-09	2.254e-08	2.451e-08	8.721e-02	7
$2^6$	9.503e-12	8.07	8.572e-12	1.116e-10	1.202e-10	7.908e-02	5
$2^7$	3.530e-14	8.48	3.167e-14	3.703e-13	4.020e-13	8.781e-02	4
$2^8$	9.900e-17	7.67	8.870e-17	5.886e-15	5.974e-15	1.657e-02	3
$2^9$	4.846e-19	8.10	4.525e-19	3.842e-18	4.295e-18	1.128e-01	3
$2^{10}$	1.766e-21	7.87	1.581e-21	1.328e-20	1.486e-20	1.188e-01	3
$2^{11}$	7.652e-24	—	6.772e-24	1.671e-22	1.739e-22	4.349e-02	2

Tabela B10: Adaptivni algoritam,  $k = 7$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{7,I}$	$\eta^{7,D}$	$\eta^7$	$\chi_N/\eta^7$	#iter
$2^5$	6.846e-11	8.83	6.710e-11	2.004e-09	2.071e-09	3.305e-02	7
$2^6$	1.501e-13	8.98	1.491e-13	4.580e-12	4.729e-12	3.174e-02	5
$2^7$	2.972e-16	9.62	2.968e-16	7.854e-15	8.151e-15	3.646e-02	4
$2^8$	3.782e-19	8.61	3.781e-19	6.846e-17	6.884e-17	5.494e-03	3
$2^9$	9.659e-22	5.92	9.658e-22	1.898e-20	1.995e-20	4.842e-02	3
$2^{10}$	1.592e-23	12.0	1.788e-24	1.677e-22	1.695e-22	9.391e-02	3
$2^{11}$	3.803e-27	—	3.803e-27	2.176e-25	2.214e-25	1.178e-02	2

Tabela B11: Aposteriorne ocene,  $k = 8$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^8$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^8$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^8$
$2^5$	1.100e-07	6.24	9.20	3.516e-05	3.268e-08	7.59	3.570e-06	1.268e-10	9.95	5.394e-09
$2^6$	1.458e-09	7.05	9.57	9.619e-07	1.695e-10	9.37	1.552e-08	1.278e-13	9.97	1.690e-11
$2^7$	1.100e-11	7.63	9.81	7.233e-09	2.570e-13	7.04	2.949e-11	1.276e-16	10.0	2.153e-14
$2^8$	5.549e-14	8.04	9.96	3.569e-11	1.954e-15	9.85	3.044e-14	1.250e-19	10.0	2.051e-17
$2^9$	2.108e-16	8.33	10.0	1.340e-13	2.116e-18	9.56	2.856e-17	1.222e-22	10.0	1.967e-20
$2^{10}$	6.547e-19	8.54	10.1	4.137e-16	2.809e-21	9.74	2.826e-20	1.194e-25	10.0	1.901e-23
$2^{11}$	1.728e-21	—	—	1.107e-18	3.294e-24	—	2.814e-23	1.166e-28	—	1.847e-26

Tabela B12: Adaptivni algoritam,  $k = 8$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{8,I}$	$\eta^{8,D}$	$\eta^8$	$\chi_N/\eta^8$	#iter
$2^5$	1.476e-12	9.74	1.406e-12	1.541e-10	1.555e-10	9.492e-03	7
$2^6$	1.727e-15	10.1	1.625e-15	2.077e-13	2.093e-13	8.251e-03	5
$2^7$	1.615e-18	10.2	1.514e-18	1.658e-16	1.673e-16	9.652e-03	4
$2^8$	1.340e-21	9.96	9.066e-22	8.436e-19	8.445e-19	1.586e-03	3
$2^9$	1.346e-24	4.92	1.260e-24	1.001e-22	1.014e-22	1.327e-02	3
$2^{10}$	4.445e-26	—	3.649e-28	2.792e-23	2.792e-23	1.592e-03	2

Tabela B13: Aposteriorne ocene,  $k = 9$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^9$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^9$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^9$
$2^5$	3.056e-08	6.85	10.1	8.572e-06	7.667e-09	8.52	3.543e-05	7.899e-12	11.1	1.620e-05
$2^6$	2.655e-10	7.74	10.5	1.770e-07	2.091e-11	10.6	5.598e-08	3.718e-15	10.9	2.941e-07
$2^7$	1.238e-12	8.39	10.8	8.392e-10	1.386e-14	9.11	7.390e-09	1.944e-18	11.0	3.949e-10
$2^8$	3.698e-15	8.84	10.9	2.442e-12	2.514e-17	11.0	9.735e-16	9.590e-22	11.0	9.154e-12
$2^9$	8.070e-18	9.16	11.0	5.253e-15	1.252e-20	10.9	4.567e-19	4.674e-25	11.0	3.052e-22
$2^{10}$	1.410e-20	9.39	11.1	9.105e-18	6.490e-24	11.0	2.206e-22	2.276e-28	11.0	1.472e-25
$2^{11}$	2.097e-23	—	—	1.348e-20	3.190e-27	—	1.078e-25	1.110e-31	—	7.143e-29

Tabela B14: Adaptivni algoritam,  $k = 9$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{9,I}$	$\eta^{9,D}$	$\eta^9$	$\chi_N/\eta^9$	#iter
$2^5$	7.025e-14	11.5	3.953e-14	1.272e-11	1.275e-11	5.508e-03	7
$2^6$	2.426e-17	11.1	2.416e-17	8.762e-15	8.786e-15	2.762e-03	5
$2^7$	1.142e-20	9.47	1.141e-20	3.329e-18	3.341e-18	3.418e-03	4
$2^8$	1.610e-23	12.7	3.383e-24	1.035e-20	1.036e-20	1.555e-03	3
$2^9$	2.463e-27	4.16	2.463e-27	5.068e-25	5.093e-25	4.836e-03	3
$2^{10}$	1.377e-28	—	3.274e-31	5.068e-25	8.826e-26	1.560e-03	2

## B.2 Test primer 2

U drugom delu ovog priloga predstavimo numeričke rezultate dobijene na test primeru (5.43) – za kolokacione postupke sa  $C^1$ -splajnovima višeg stepena na različitim mrežama. Tabele B15, B17, B19, B21, B23, B25 i B27 prikazuju numeričke rezultate dobijene za kolokacione postupke sa splajnovima stepena 3 do 10. Ove tabele potvrđuju sve naše teorijske rezultate - greške postupaka na Šiškinovoj mreži se ponašaju kao  $\mathcal{O}(N^{-k-2} \ln^{k+2} N)$ , dok je red konvergencije na mreži Bahvalova i rekurzivno generisanoj mreži isti i iznosi  $k + 2$ ,  $k = 2, 3, \dots, 9$ . U ovim eksperimentima, vidimo da odnos između greške postupka i aposteriorne ocene ne zavisi od diskretizacionog parametra  $N$ . Aposteriorna ocena je 25 do 650 puta veća na svim posmatranim mrežama – u odnosu na grešku  $\chi_N$ , a u zavisnosti od stepena splajna koji koristimo.

Rezultati kolokacionih postupaka na mrežama generisanim adaptivnim algoritmom su prikazane u tabelama B16, B18, B20, B22, B24, B26 i B28. Prosečan red konvergencije koji se dobije na ovako izabranim mrežama je  $k + 2$ ,  $k = 2, 3, \dots, 9$ , kao što je i očekivano. Štaviše, greške kolokacionih postupaka na ovoj mreži su manje u odnosu na isti postupak na preostalim posmatranim mrežama.

I u ovim eksperimentima za parametre Šiškinove i R-mreže biramo  $\sigma = k + 2$ ,  $q = 1/4$ ,  $a = 2$  i  $\bar{q} = 0.4$ .

Tabela B15: Aposteriorne ocene,  $k = 2$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^2$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^2$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^2$
$2^5$	2.763e-02	2.07	3.05	1.215e+00	1.451e-02	4.11	5.701e-01	1.292e-04	4.02	6.328e-03
$2^6$	6.595e-03	2.57	3.49	2.199e-01	8.383e-04	4.38	2.419e-02	7.991e-06	4.03	3.650e-04
$2^7$	1.110e-03	2.92	3.75	3.185e-02	4.038e-05	4.15	1.062e-03	4.875e-07	4.00	2.110e-05
$2^8$	1.468e-04	3.14	3.90	3.909e-03	2.268e-06	4.11	5.985e-05	3.045e-08	4.00	1.272e-06
$2^9$	1.660e-05	3.29	3.97	4.261e-04	1.315e-07	4.05	3.642e-06	1.900e-09	4.00	7.833e-08
$2^{10}$	1.692e-06	3.40	4.00	4.265e-05	7.963e-09	4.02	2.254e-07	1.187e-10	4.00	4.857e-09
$2^{11}$	1.608e-07	3.47	4.02	4.014e-06	4.910e-10	4.01	1.405e-08	7.412e-12	4.00	3.024e-10
$2^{12}$	1.454e-08	3.52	4.03	3.609e-07	3.046e-11	4.00	8.766e-10	4.631e-13	4.00	1.886e-11
$2^{13}$	1.266e-09	—	—	3.134e-08	1.898e-12	—	5.478e-11	2.894e-14	—	1.178e-12

Tabela B16: Adaptivni algoritam,  $k = 2$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{2,I}$	$\eta^{2,D}$	$\eta^2$	$\chi_N/\eta^2$	#iter
$2^5$	1.943e-04	6.41	1.152e-05	4.554e-03	4.566e-03	4.256e-02	6
$2^6$	2.278e-06	3.99	6.722e-07	5.099e-05	5.166e-05	4.410e-02	5
$2^7$	1.434e-07	3.21	4.164e-08	3.387e-06	3.429e-06	4.183e-02	4
$2^8$	1.548e-08	4.97	2.892e-09	3.307e-07	3.336e-07	4.641e-02	3
$2^9$	4.951e-10	4.12	1.573e-10	1.277e-08	1.293e-08	3.829e-02	3
$2^{10}$	2.847e-11	3.15	9.684e-12	7.675e-10	7.771e-10	3.664e-02	3
$2^{11}$	3.215e-12	4.64	6.810e-13	7.283e-11	7.352e-11	4.374e-02	2
$2^{12}$	1.287e-13	—	3.870e-14	3.456e-12	3.495e-12	3.682e-02	2

Tabela B17: Aposteriorne ocene,  $k = 3; \varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^3$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^3$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^3$
$2^5$	7.631e-03	2.88	4.25	5.975e-01	1.284e-03	5.07	9.341e-02	2.054e-05	4.82	1.274e-03
$2^6$	1.034e-03	3.42	4.64	7.334e-02	3.819e-05	5.09	3.167e-03	7.289e-07	5.01	5.355e-05
$2^7$	9.648e-05	3.78	4.86	6.626e-03	1.125e-06	4.97	8.509e-05	2.256e-08	5.00	1.515e-06
$2^8$	7.044e-06	4.00	4.96	4.849e-04	3.590e-08	5.02	2.613e-06	7.067e-10	5.00	4.544e-08
$2^9$	4.390e-07	4.16	5.01	3.049e-05	1.106e-09	5.00	7.928e-08	2.204e-11	5.00	1.392e-09
$2^{10}$	2.460e-08	4.27	5.03	1.720e-06	3.445e-11	5.00	2.452e-09	6.879e-13	5.00	4.307e-11
$2^{11}$	1.278e-09	4.35	5.04	8.977e-08	1.078e-12	5.00	7.646e-11	2.148e-14	5.00	1.339e-12
$2^{12}$	6.280e-11	4.41	5.04	4.423e-09	3.368e-14	5.00	2.385e-12	6.707e-16	5.00	4.174e-14
$2^{13}$	2.957e-12	—	—	2.086e-10	1.053e-15	—	7.454e-14	2.095e-17	—	1.303e-15

Tabela B18: Adaptivni algoritam,  $k = 3; \varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{3,I}$	$\eta^{3,D}$	$\eta^3$	$\chi_N/\eta^3$	#iter
$2^5$	5.048e-06	5.33	1.763e-07	3.075e-04	3.076e-04	1.641e-02	6
$2^6$	1.258e-07	6.14	5.447e-09	2.981e-06	2.986e-06	4.212e-02	5
$2^7$	1.790e-09	4.82	1.956e-10	7.467e-08	7.487e-08	2.391e-02	4
$2^8$	6.351e-11	5.98	7.480e-12	3.932e-09	3.940e-09	1.612e-02	3
$2^9$	1.009e-12	1.14	2.124e-13	7.117e-11	7.138e-11	1.413e-02	3
$2^{10}$	4.592e-13	8.08	6.721e-15	1.155e-11	1.156e-11	3.972e-02	8
$2^{11}$	1.695e-15	5.70	2.265e-16	1.113e-13	1.115e-13	1.520e-02	2
$2^{12}$	3.270e-17	—	6.630e-18	2.231e-15	2.237e-15	1.461e-02	2

Tabela B19: Aposteriorne ocene,  $k = 4; \varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^4$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^4$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^4$
$2^5$	1.521e-03	3.52	5.20	2.608e-01	1.212e-04	5.45	1.262e-02	3.124e-06	5.85	2.264e-04
$2^6$	1.322e-04	3.99	5.41	2.223e-02	2.771e-06	5.90	4.376e-04	5.415e-08	5.90	7.028e-06
$2^7$	8.340e-06	4.44	5.71	1.256e-03	4.641e-08	5.96	6.838e-06	9.088e-10	6.00	1.212e-07
$2^8$	3.846e-07	4.75	5.88	5.482e-05	7.444e-10	6.03	1.046e-07	1.424e-11	6.00	1.806e-09
$2^9$	1.432e-08	4.96	5.97	1.988e-06	1.140e-11	6.00	1.571e-09	2.221e-13	6.00	2.747e-11
$2^{10}$	4.610e-10	5.10	6.02	6.324e-08	1.780e-13	6.00	2.431e-11	3.464e-15	6.00	4.239e-13
$2^{11}$	1.342e-11	5.21	6.04	1.830e-09	2.788e-15	6.00	3.792e-13	5.406e-17	6.00	6.581e-15
$2^{12}$	3.636e-13	—	—	4.942e-11	4.357e-17	—	5.914e-15	8.441e-19	—	1.025e-16

Tabela B20: Adaptivni algoritam,  $k = 4; \varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{4,I}$	$\eta^{4,D}$	$\eta^4$	$\chi_N/\eta^4$	#iter
$2^5$	2.642e-07	8.31	5.496e-09	3.382e-05	3.383e-05	7.810e-03	6
$2^6$	8.341e-10	5.98	8.429e-11	1.059e-07	1.060e-07	7.869e-03	5
$2^7$	1.320e-11	5.12	1.344e-12	1.612e-09	1.613e-09	8.184e-03	4
$2^8$	3.789e-13	7.03	2.290e-14	4.715e-11	4.718e-11	8.033e-03	3
$2^9$	2.904e-15	2.15	3.218e-16	3.986e-13	3.990e-13	7.280e-03	3
$2^{10}$	6.563e-16	9.09	3.646e-18	8.399e-14	8.399e-14	7.814e-03	2
$2^{11}$	1.204e-18	—	8.411e-20	1.631e-16	1.632e-16	7.375e-03	2

Tabela B21: Aposteriorne ocene,  $k = 6$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^6$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^6$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^6$
$2^5$	1.252e-04	4.69	6.37	2.334e-03	2.135e-06	6.57	2.994e-04	1.495e-07	7.43	1.074e-05
$2^6$	4.843e-06	5.45	7.01	1.037e-04	2.251e-08	8.17	4.284e-06	8.668e-10	8.09	1.446e-07
$2^7$	1.108e-07	5.99	7.42	2.008e-06	7.839e-11	8.01	2.505e-08	3.188e-12	8.03	1.008e-09
$2^8$	1.745e-09	6.36	7.67	2.850e-08	3.050e-13	8.06	9.564e-11	1.221e-14	8.03	3.852e-12
$2^9$	2.119e-11	6.62	7.81	3.259e-10	1.144e-15	8.01	3.560e-13	4.654e-17	8.02	1.453e-14
$2^{10}$	2.147e-14	—	—	3.191e-12	4.423e-18	—	1.373e-15	1.795e-19	—	5.578e-17

Tabela B22: Adaptivni algoritam,  $k = 6$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{6,I}$	$\eta^{6,D}$	$\eta^6$	$\chi_N/\eta^6$	#iter
$2^5$	1.609e-09	6.56	1.760e-12	5.054e-07	5.054e-07	3.183e-03	6
$2^6$	1.704e-11	9.31	1.024e-14	3.361e-10	3.362e-10	5.069e-02	5
$2^7$	2.681e-14	10.1	4.230e-17	7.509e-13	7.509e-13	3.571e-02	4
$2^8$	2.505e-17	7.47	1.769e-19	6.405e-15	6.405e-15	3.911e-03	3
$2^9$	1.414e-19	5.72	6.284e-22	1.092e-17	1.092e-17	1.295e-02	3
$2^{10}$	2.678e-21	—	1.451e-24	9.057e-19	9.057e-19	2.957e-03	2

Tabela B23: Aposteriorne ocene,  $k = 7$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^7$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^7$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^7$
$2^5$	2.251e-06	5.61	8.27	5.745e-04	4.902e-07	7.82	4.790e-05	4.683e-08	8.66	2.035e-06
$2^6$	4.613e-08	6.34	8.61	2.017e-05	2.176e-09	9.17	5.843e-07	1.161e-10	8.89	1.762e-08
$2^7$	5.677e-10	6.87	8.83	2.442e-07	3.770e-12	8.89	1.653e-09	2.444e-13	9.04	8.762e-11
$2^8$	4.858e-12	7.24	8.96	2.044e-09	7.924e-15	9.05	3.362e-12	4.660e-16	9.00	2.035e-13
$2^9$	3.220e-14	7.50	9.03	1.339e-11	1.496e-17	9.01	1.169e-07	9.115e-19	9.01	3.841e-16
$2^{10}$	1.782e-16	7.69	9.07	7.362e-14	2.909e-20	9.00	1.202e-17	1.773e-21	9.00	7.364e-18
$2^{11}$	8.646e-19	—	—	3.561e-16	5.698e-23	—	2.346e-20	3.452e-24	—	1.425e-21

Tabela B24: Adaptivni algoritam,  $k = 7$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{7,I}$	$\eta^{7,D}$	$\eta^7$	$\chi_N/\eta^7$	#iter
$2^5$	1.350e-10	4.18	3.059e-14	5.758e-08	5.758e-08	2.344e-03	6
$2^6$	7.462e-12	17.2	4.545e-17	3.144e-09	3.144e-09	2.373e-03	4
$2^7$	4.943e-17	7.56	1.759e-19	1.558e-14	1.558e-14	3.173e-03	4
$2^8$	2.613e-19	10.1	3.849e-22	7.282e-17	7.282e-17	3.589e-03	3
$2^9$	2.417e-22	5.21	7.071e-25	5.591e-20	5.591e-20	4.323e-03	3
$2^{10}$	6.548e-24	—	7.971e-28	2.911e-21	2.911e-21	2.249e-03	2

Tabela B25: Aposteriorne ocene,  $k = 8$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^8$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^8$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^8$
$2^5$	4.407e-07	6.24	9.20	1.406e-04	1.114e-07	9.31	9.748e-06	1.956e-08	10.5	9.045e-07
$2^6$	5.838e-09	7.05	9.57	3.848e-06	1.749e-10	9.94	6.997e-08	1.352e-11	9.62	2.980e-09
$2^7$	4.404e-11	7.63	9.81	2.893e-08	1.775e-13	9.97	1.178e-10	1.718e-14	9.93	8.887e-12
$2^8$	2.221e-13	8.04	9.96	1.428e-10	1.774e-16	10.1	1.150e-13	1.766e-17	10.0	1.176e-14
$2^9$	8.435e-16	8.33	10.0	5.360e-13	1.671e-19	10.0	1.064e-16	1.720e-20	10.0	1.110e-17
$2^{10}$	2.620e-18	—	—	1.655e-15	1.623e-22	—	1.025e-19	1.667e-23	—	1.059e-20

Tabela B26: Adaptivni algoritam,  $k = 8$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{8,I}$	$\eta^{8,D}$	$\eta^8$	$\chi_N/\eta^8$	#iter
$2^5$	1.162e-11	12.2	1.036e-15	7.584e-09	7.584e-09	1.533e-03	6
$2^6$	2.464e-15	6.34	8.570e-19	3.346e-13	3.346e-13	7.365e-03	5
$2^7$	3.032e-17	12.7	1.075e-21	3.391e-16	3.391e-16	8.940e-02	4
$2^8$	4.643e-21	9.29	1.002e-24	8.143e-19	8.143e-19	5.702e-03	3
$2^9$	7.434e-24	—	8.833e-28	2.788e-22	2.788e-22	2.667e-02	3

Tabela B27: Aposteriorne ocene,  $k = 9$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	Šiškinova mreža				rekurzivno generisana mreža			R-mreža		
	$\chi_N$	$p_N$	$s_N$	$\eta^9$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^9$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^9$
$2^5$	1.223e-07	6.85	10.1	3.429e-05	3.020e-08	10.4	2.680e-06	7.180e-09	10.9	2.000e-06
$2^6$	1.062e-09	7.74	10.5	7.079e-07	2.162e-11	11.0	7.462e-09	3.721e-12	10.7	1.083e-09
$2^7$	4.954e-12	8.39	10.8	3.357e-09	1.092e-14	10.9	7.451e-12	2.194e-15	11.0	8.018e-13
$2^8$	1.480e-14	8.84	10.9	9.768e-12	5.759e-18	11.0	3.843e-15	1.050e-18	11.0	7.127e-16
$2^9$	3.229e-17	9.16	11.0	2.101e-14	2.719e-21	11.0	1.775e-18	5.192e-22	11.0	3.461e-19
$2^{10}$	5.641e-20	—	—	3.642e-17	1.326e-24	—	8.560e-22	2.531e-25	—	1.650e-22

Tabela B28: Adaptivni algoritam,  $k = 9$ ;  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

$N$	$\chi_N$	$p_N$	$\eta^{9,I}$	$\eta^{9,D}$	$\eta^9$	$\chi_N/\eta^9$	#iter
$2^5$	1.429e-12	5.69	1.223e-17	9.616e-10	9.616e-10	1.486e-03	6
$2^6$	2.775e-14	20.2	1.377e-19	1.836e-11	1.836e-11	1.512e-03	4
$2^7$	2.240e-20	7.59	5.222e-24	6.567e-18	6.567e-18	3.411e-03	4
$2^8$	1.165e-22	15.6	2.863e-27	9.000e-21	9.000e-21	1.294e-02	3
$2^9$	2.384e-27	—	1.299e-30	1.412e-24	1.412e-24	1.689e-03	3

## LITERATURA

- [1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, 1964.
- [2] M. Ainsworth and T. Vejchodsky. “Fully computable robust a posteriori error bounds for singularly perturbed reaction-diffusion problems”. *Numerische Mathematik* 119 (2) (2011), pp. 219–243.
- [3] N. S. Bakhvalov. “Towards optimization of methods for solving boundary value problems in the presence of boundary layers”. *Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* 9 (1969), pp. 841–859.
- [4] G. Birkhoff and C. De Boor. “Piecewise polynomial interpolation and approximation”. *Approximation of Functions, Elsevier* (1965), pp. 164–190.
- [5] N. Chadha and N. Kopteva. “A robust grid equidistribution method for a one-dimensional singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem”. *IMA Journal of Numerical Analysis* 31 (3) (2011), pp. 188–211.
- [6] C. C. Christara. “Quadratic spline collocation methods for elliptic partial differential equations”. *BIT Numerical Mathematics* 34 (1) (1994), pp. 33–61.
- [7] C. Clavero, J. L. Gracia, and E. O’Riordan. “A parameter robust numerical method for a two dimensional reaction-diffusion problem”. *Mathematics of Computation* 74 (252) (2005), pp. 1743–1758.
- [8] H. B. Curry and I. J. Schoenberg. “On Pólya frequency functions IV: the fundamental spline functions and their limits”. *Journal d’Analyse Mathématique* 17 (1966), pp. 71–107.
- [9] C. De Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag New York, 2001.
- [10] C. De Boor. “Good approximation by splines with variable knots”. *Spline Functions and Approximation Theory* 21 (1973), pp. 57–72.
- [11] C. De Boor. “On Calculating with B-Splines”. *Journal of Approximation Theory* 6 (1972), pp. 50–62.
- [12] C. De Boor. “Splines as linear combinations of B-splines. A Survey”. *Approximation Theory II* (G.G. Lorentz, C. K. Chui, and L. L. Schumaker, eds.), Academic Press, New York (1976), pp. 1–47.
- [13] C. De Boor and B. Swartz. “Collocation at Gaussian points”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 10 (1973), pp. 582–606.
- [14] R. Duran and A. Lombardi. “Finite element approximation of convection diffusion problems using graded meshes”. *Applied Numerical Mathematics* 56 (2006), pp. 1314–1325.



- [15] R. Duran, A. Lombardi, and M. Prieto. “Supercloseness on graded meshes for  $Q_1$  finite element approximation of a reaction-diffusion equation”. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 242 (2013), pp. 232–247.
- [16] J. Favard. “Sur l’interpolation”. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 67 (1939), pp. 102–113.
- [17] E. Gartland. “Graded-mesh difference schemes for singularly perturbed two-point boundary value problems”. *Mathematics of Computation* 51 (1988), pp. 631–657.
- [18] J. L. Gracia and C. Clavero. “A compact finite difference scheme for 2D reaction-diffusion singularly perturbed problems”. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 192 (1) (2006), pp. 152–167.
- [19] M. Greenberg. *Application of Green’s Functions in Science and Engineering*. Prentice-Hall, Inc., 1971.
- [20] D. Herceg. “Uniform fourth order difference scheme for a singular perturbation problem”. *Numerische mathematik* 56 (1990), pp. 675–693.
- [21] D. Herceg and Đ Herceg. *Numerička matematika*. Symbol, Novi Sad, 2009.
- [22] D. Herceg, N. Krejić, and H. Maličić. “On a finite difference analogue of a singular boundary value problem”. *Novi Sad Journal of Mathematics* 30 (1) (2000), pp. 23–31.
- [23] D. Herceg and N. Petrović. “On numerical solution of a singularly perturbed boundary value problem II”. *Zbornik radova PMF, Univerzitet u Novom Sadu* 17 (1) (1987), pp. 163–186.
- [24] D. Herceg, K. Surla, and S. Rapajić. “Cubic spline difference scheme on a mesh of Bakhavlov type”. *Novi Sad Journal of Mathematics* 28 (3) (1998), pp. 41–49.
- [25] D. Herceg, K. Surla, and Z. Uzelac. *Uniformno konvergentni metodi za singularno perturbovane probleme*. Symbol, Novi Sad, 2000.
- [26] D. Herceg et al. “Numerical experiments with different schemes for a singularly perturbed problem”. *Novi Sad Journal of Mathematics* 31 (1) (2001), pp. 93–101.
- [27] A. Il’in. “Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative”. *Mathematical Notes* 6 (2) (1969), pp. 596–602.
- [28] W. J. Kammerer, G. W. Reddien, and R. S. Varga. “Quadratic interpolatory splines”. *Numerische Mathematik* 22 (1974), pp. 241–259.
- [29] T. H. Koornwinder et al. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Ed. by W.J. Frank et al. Cambridge University Press, 2010.
- [30] N. Kopteva. “Maximum norm a posteriori error estimate for a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46 (2008), pp. 1602–1618.
- [31] N. Kopteva. “Maximum norm a posteriori error estimates for a 1D singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem”. *IMA Journal of Numerical Analysis* 27 (3) (2007), pp. 576–592.
- [32] N. Kopteva. “Maximum norm error analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem”. *Mathematics of Computation* 76 (2007), pp. 631–646.

- [33] N. Kopteva, N. Madden, and M. Stynes. “Grid equidistribution for reaction-diffusion problems in one dimension”. *Numerical Algorithms* 40 (3) (2005), pp. 305–322.
- [34] N. Kopteva and E. O’Riordan. “Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations”. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling* 7 (3) (2010), pp. 393–415.
- [35] N. Kopteva and M. Stynes. “A robust adaptive method for a quasi-linear one-dimensional convection-diffusion problem”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39 (4) (2011), pp. 1446–1467.
- [36] G. Kunert. “An note on the energy norm for a singularly perturbed model problem”. *Computing* 69 (2002), pp. 265–272.
- [37] R. Lin and M. Stynes. “A balanced finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems”. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50(5) (2012), pp. 2729–2743.
- [38] T. Linss. “A posteriori error estimation for arbitrary order FEM applied to singularly perturbed one-dimensional reaction-diffusion problem”. *Applications of Mathematics* 59 (3) (2014), pp. 241–256.
- [39] T. Linss. *Layer-adapted meshes for reaction-convection-diffusion problems*. Springer, 2009.
- [40] T. Linss. “Maximum-norm error analysis of a non-monotone FEM for a singularly perturbed reaction-diffusion problem”. *BIT Numerical Mathematics* 47 (2) (2007), pp. 379–391.
- [41] T. Linss. “Robust convergence of a compact fourth-order finite difference scheme for reaction-diffusion problems”. *Numerische Mathematik* 111 (2008), pp. 239–249.
- [42] T. Linss. “Sufficient condition for uniform convergence on layer-adapted meshes for one-dimensional reaction-diffusion problems”. *Numerical Algorithms* 40 (2005), pp. 23–32.
- [43] T. Linss and G. Radojev. “Robust a posteriori error bounds for spline collocation applied to singularly perturbed reaction-diffusion problems”. *Submitted* (2015).
- [44] T. Linss, G. Radojev, and H. Zarin. “Approximation of singularly perturbed reaction-diffusion problems by quadratic  $C^1$ -splines”. *Numerical Algorithms* 61 (1) (2012), pp. 35–56.
- [45] V. Liseikin. “The use of special transformations in the numerical solution of boundary layer problems (in Russian)”. *Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* 30 (1990), pp. 58–71.
- [46] F. Liu et al. “A two-scale sparse grid method for a singularly perturbed reaction-diffusion problem in two dimensions”. *IMA Journal of Numerical Analysis* 29 (4) (2009), pp. 986–1007.
- [47] M. Marsden. “Operator norm bounds and error bounds for quadratic spline interpolation”. *Approximation Theory, Banach Center Publications* 4 (1979), pp. 159–175.
- [48] M. Marsden. “Quadratic spline interpolation”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 80 (1974), pp. 903–906.
- [49] J. J. H. Miller, E. O’Riordan, and G. I. Shishkin. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems: Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions*. World Scientific, Singapore, 1996.

- [50] R. H. Nochetto. “Pointwise a posteriori error estimates for elliptic problems on highly graded meshes”. *Mathematics of Computation* 64 (209) (1995), pp. 1–22.
- [51] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Classics in Applied Mathematics, 2000.
- [52] L. Prandtl. “Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung (English translation)”. *III International Congress of Mathematicians, Heidelberg* (1904), pp. 484–491.
- [53] G. Radojev. “Povišenje tačnosti splajn diferencne šeme za rešavanje konturnih SPP”. Magistrarska teza. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2010.
- [54] G. Radojev and M. Brdar. “Collocation method for reaction-diffusion problem on a graded mesh”. *Submitted* (2015).
- [55] H. G. Roos and M. Schopf. “Convergence and stability in balanced norms of finite element methods on Shishkin meshes for reaction-diffusion problems”. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 95 (6) (2015), pp. 551–565.
- [56] H. G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [57] H. G. Roos, Lj. Teofanov, and Z. Uzelac. “Graded meshes for higher order FEM”. *Journal of Computational Mathematics* 33(1) (2015), pp. 1–16.
- [58] H. G. Roos and H. Zarin. “A second-order scheme for singularly perturbed differential equations with discontinuous source term”. *Journal of Numerical Mathematics* 10 (4) (2002), pp. 275–289.
- [59] I. J. Schoenberg. “Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions”. *Quarterly of Applied Mathematics* 4 (1946), pp. 45–99.
- [60] L. Schumaker. *Spline functions: Basic theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [61] G. Shishkin. “A difference scheme for a singularly perturbed equation of parabolic type with a discontinuous boundary condition”. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 28 (6) (1988), pp. 32–41.
- [62] K. Surla. “A uniformly convergent spline difference scheme for a self-adjoint singular perturbation problem”. *Zbornik radova PMF, Univerzitet u Novom Sadu* 17 (2) (1987), pp. 31–38.
- [63] K. Surla. *Numeričke i statističke metode u obradi eksperimentalnih podataka*. Institut za matematiku, Novi Sad, 1989.
- [64] K. Surla. “On modelling of semilinear singularly perturbed reaction-diffusion problem”. *Non-linear Analysis, Methods & Applications* 30 (1) (1997), pp. 61–66.
- [65] K. Surla. “The cubic spline difference scheme on non-uniform mesh”. *Novi Sad Journal of Mathematics* 28 (2) (1998), pp. 9–17.
- [66] K. Surla, D. Herceg, and Lj. Cvetković. “A family of exponential spline difference schemes”. *Zbornik radova PMF, Univerzitet u Novom Sadu* 20 (1) (1990), pp. 17–26.
- [67] K. Surla, D. Herceg, and H. Maličić. “Some comparisons of difference schemes on meshes of Shishkin and Bakhvalov type”. *Novi Sad Journal of Mathematics* 31 (1) (2001), pp. 133–140.

- [68] K. Surla, Lj. Teofanov, and Z. Uzelac. “Spline difference scheme and minimum principle for a reaction-diffusion problem”. *Novi Sad Journal of Mathematics* 37 (2) (2007), pp. 249–258.
- [69] K. Surla and Z. Uzelac. “A spline difference scheme on a piecewise equidistant grid”. *ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 77 (12) (1997), pp. 901–909.
- [70] K. Surla and Z. Uzelac. “A uniformly accurate spline collocation method for a normalized flux”. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 166 (2004), pp. 291–305.
- [71] K. Surla and V. Vukoslavčević. “A spline difference scheme for boundary value problem with small parameter”. *Zbornik radova PMF, Univerzitet u Novom Sadu* 25 (2) (1995), pp. 159–168.
- [72] Z. Uzelac. “Splajn diferencne šeme za rešavanje singularno perturbacionih problema”. Doktorska disertacija. Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1989.
- [73] Z. Uzelac, K. Surla, and Lj. Pavlović. “On collocation methods for singular perturbation problems”. *Novi Sad Journal of Mathematics* 30 (3) (2000), pp. 173–183.
- [74] A. Vasil’eva, V. Butuzov, and L. Kalachev. *The boundary function method for singular perturbation problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [75] R. Vulcanović. “A higher-order scheme for quasilinear boundary value problems with two small parameters”. *Computing* 67 (4) (2001), pp. 287–303.
- [76] R. Vulcanović. “An almost sixth-order finite-difference method for semilinear singular perturbation problems”. *Computational Methods in Applied Mathematics* 4 (3) (2004), pp. 368–383.
- [77] R. Vulcanović. “An exponential fitted scheme on a non-uniform mesh”. *Zbornik radova PMF, Univerzitet u Novom Sadu* 12 (1982), pp. 205–215.
- [78] R. Vulcanović. “Fourth order algorithms for a semilinear singular perturbation problem”. *Numerical Algorithms* 16 (2) (1997), pp. 117–128.
- [79] R. Vulcanović. “Konstrukcija mreža za diskretizaciju singularno perturbovanih problema”. Doktorska disertacija. Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1986.
- [80] R. Vulcanović. “Numeričko rešavanje konturnog problema drugog reda sa malim parametrom”. Magistarska teza. Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 1983.
- [81] R. Vulcanović. “On a numerical solution of a type of singularly perturbed boundary value problem by using a special discretization mesh”. *Zbornik radova PMF, Univerzitet u Novom Sadu* 13 (1983), pp. 187–201.
- [82] R. Vulcanović and Lj. Teofanov. “A modification of the Shishkin discretization mesh for one-dimensional reaction-diffusion problems”. *Applied Mathematics and Computation* 220 (2013), pp. 104–116.
- [83] R. Vulcanović and Lj. Teofanov. “A uniform numerical method for semilinear reaction-diffusion problems with a boundary turning point”. *Numerical Algorithms* 54 (2010), pp. 431–444.
- [84] X. Xu et al. “Convergence of de Boor’s algorithms of equidistributing meshes”. *IMA Journal of Numerical Analysis* 31 (2011), pp. 580–596.



## KRATKA BIOGRAFIJA

Goran Radojev je rođen 20. maja 1979. u Novom Sadu. Upisao je studije matematike 1998. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerziteta u Novom Sadu. Diplomirao je 2002. sa prosečnom ocenom 9.93. Od 2003. godine radi na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, prvo kao asistent-pripravnik, a potom i kao asistent na Katedri za numeričku matematiku Departmana za matematiku i informatiku. Držao je vežbe iz numeričke analize, softverskog praktikuma, projektivne geometrije, finansijske matematike I, itd. Od 2003. godine je i saradnik u Gimnaziji "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu.



Magistarski rad pod naslovom "Povišenje tačnosti splajn diferencne šeme za rešavanje konturnih SPP" odbranio je 2010. godine. Bio je učesnik više domaćih i međunarodnih konferencija. Takođe, učestvovao je i u više domaćih i međunarodnih projekata. Koautor je nekoliko naučnih radova.

Oženjen je i otac dvoje dece.



# KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:  
RBR

Identifikacioni broj:  
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija  
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal  
TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija  
VR

Autor: Goran Radojev  
AU

Mentor: Dr Dragoslav Herceg  
MN

Naslov rada: Kolokacioni postupci za rešavanje singularno perturbovanih problema  
NR

Jezik publikacije: engleski  
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski  
JI

Zemlja publikovanja: Srbija  
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina  
UGP

Godina: 2015  
GO

Izdavač: autorski reprint  
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4  
MA

Fizički opis rada: 6/126/84/69/22/0/2  
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)

FO

Naučna oblast: Matematika  
NO

Naučna disciplina: Numerička analiza  
ND

Predmetna odrednica,  
ključne reči: Singluarno perturbovani problemi, kolokacije, adaptivne mreže



PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

U disertaciji su razvijeni kolokacioni postupci sa  $C^1$ -splajnovima proizvoljnog stepena za rešavanje singularno-perturbovanih problema reakcije-difuzije u jednoj i dve dimenzije. U 1D, pokazano je da kolokacioni postupak sa kvadratnim  $C^1$ -splajnom na modifikovanoj Šiškinovoj mreži, konvergira uniformno, sa redom konvergencije skoro dva. Takođe, na gradi-ranim mrežama, ovaj metod ima red konvergencije dva – uniformno do na logaritamski faktor. Aposterirona ocena je postignuta za kolokacione postupke sa  $C^1$ - splajnovima proizvoljnog stepena na proizvoljnoj mreži. Ova ocena je iskorišćena i za kreiranje adaptivnih mreža. Numerički rezultati potvrđuju dobijene ocene. U 2D su razmatrane kolokacije sa bikvadratnim splajnovima. Aposterirona ocena greške je postignuta. Numerički rezultati potvrđuju dobijene teorijske rezultate.

IZ

Datum prihvatanja teme

od strane NN veća: 28. oktobar 2010.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije: (Naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)

KO

Predsednik: Dr Helena Zarin, redovni profesor,  
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: Dr Dragoslav Herceg, redovni profesor,  
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Ljiljana Teofanov, vanredni profesor,  
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr Torsten Linss, redovni profesor,  
Univerzitet u Hagenu

## KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:  
NO

Identification number:  
INO

Document type: Monograph documentation  
DT

Type of record: Textual printed material  
TR

Contents code: Doctoral dissertation  
CC

Author: Goran Radojev  
AU

Advisor: Dr Dragoslav Herceg  
MN

Title: Collocation methods for solving singular perturbation problems  
TI

Language of text: English  
LT

Language of abstract: Serbian/English  
LA

Country of publication: Serbia  
CP

Locality of publication: Vojvodina  
LP

Publication year: 2015  
PY

Publisher: Author's reprint  
PU

Publ. place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4  
PP

Physical description: 6/126/84/69/22/0/2  
(no. of chapters/pages/bib. refs/tables/figures/graphs/appendices)  
PO

Scientific field: Mathematics  
SF

Scientific discipline: Numerical analysis  
SD

Subject/Key words: Singular perturbation problem, collocation, layer-adaptive mesh

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

Collocations with arbitrary order  $C^1$ -splines for a singularly perturbed reaction-diffusion problem in one dimension and two dimensions are studied. In 1D, collocation with quadratic  $C^1$ -splines is shown to be almost second order accurate on modified Shishkin mesh in the maximum norm, uniformly in the perturbation parameter. Also, we establish a second-order maximum norm a priori estimate on recursively graded mesh uniformly up to a logarithmic factor in the singular perturbation parameter. A posteriori error bounds are derived for the collocation method with arbitrary order  $C^1$ -splines on arbitrary meshes. These bounds are used to drive an adaptive mesh moving algorithm. An adaptive algorithm is devised to resolve the boundary layers. Numerical results are presented. In 2D, collocation with biquadratic  $C^1$ -spline is studied. Robust a posteriori error bounds are derived for the collocation method on arbitrary meshes. Numerical experiments completed our theoretical results.

AB

Accepted by Scientific Board on: October 28, 2010.

AS

Defended:

DE

Dissertation Defense Board: (Degree/rst and last name/title/faculty)

DB

President: Dr. Helena Zarin, Full Professor,  
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Advisor: Dr. Dragoslav Herceg, Full Professor,  
Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Ljiljana Teofanov, Associate Professor,  
Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr. Torsten Linss, Full Professor,  
FernUniverität, Hagen