УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

мр Јелена З. Вујаковић

НУЛЕ РЕШЕЊА КОМПЛЕКСНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

докторска дисертација

Косовска Митровица, 2012.

ИНДЕТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор

Име и презиме: **мр Јелена З. Вујаковић**

Датум и место рођења: **10.09.1972. Косовска Митовица**

Садашње запослење: **асистент-сарадник**,

Универзитет у Приштини, Природно-математички факултет, Косовска Митровица

II. Докторска дисертација

Наслов: **Нуле решења комплексних диференцијалних једначина**

Број страница**:162**

Број слика**: 6**

Број библиографских података**: 43**

Установа и место где је рад израђен**: Природно-математички факултет , Косовска Митровица**

Научна област **(УДК): 517 (043.3)**

Ментор: **др Милоје Рајовић, редовни професор, Машински факултет, Краљево**

III. Оцена и обрана

Датум пријаве теме: **14.01.2009.**

Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:

27.10.2009.

Комисија за оцену подобности теме и кандидата:

1. **др Милоје Рајовић, редовни професор, Машински факултет, Краљево**
2. **др Милена Лекић, доцент, Природно-математички факултет, Косовска Митровица**
3. **др Дојчин Петковић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Косовска Митровица**

Комисија за оцену докторске дисертације:

1. **др Милоје Рајовић, редовни професор, Машински факултет, Краљево**
2. **др Милена Лекић, доцент, Природно-математички факултет, Косовска Митровица**
3. **др Дојчин Петковић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Косовска Митровица**

	Комисија за одбрану докторске дисертације: 1. **др Милоје Рајовић, редовни професор, Машински факултет, Краљево** 2. **др Милена Лекић, доцент, Природно-математички факултет, Косовска Митровица** 3. **др Дојчин Петковић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Косовска Митровица,**	
	Датум одбране дисертације:**25.04.2012.**	

Захвалност

Осећам дубоку потребу да захвалим људима који су на разне начине помогли да овај посао буде започет, донесе резултате и да ти резултати буду уобличени у докторску дисертацију.

Захваљујем се ментору Проф. др Милоју Рајовићу, на свесрдној помоћи у изради дисертације и драгоценим упутствима и сугестијама.

Најискренију захвалност дугујем др Милени Лекић за преглед рукописа и цењене примедбе које су учиниле овај рад квалитетнијим и приступачнијим.

Проф. др Дојчину Петковићу захваљујем на несебичној помоћи, сарадњу, савет и охрабрење.

Такође желим да се захвалим и Проф. др Стојану Раденовићу на показаном интересовању током писања дисертације. Својим корисним идејама и објективним примедбама допринео је да рад напишем што је могуће боље.

Сматрам својом дужношћу да се захвалим и Проф. др Драгану Димитровском који ми је својом научном и људском снагом отворио нове погледе у научно-истраживачком раду.

Посебну захвалност дугујем својој породици, пријатељима и колегама на безграничној љубави, стрпљењу и подршци.

Извод

Проучавање комплексних диференцијалних једначина последњих година, отворило је бројна питања у вези одређивања фреквенција нула решења, расподеле нула решења, осцилаторности решења, асимптотског понашања, ранга раста и тако даље. Ова докторска дисертација представља резултат истраживачког трагања за моделом одређивања локација нула решења комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда и каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда са аналитичким коефицијентом. Помоћу методе редова-итерација, који је нама изгледао бољи у применама, развијен је нов приступ решавању проблема који је отворио перспективе у даљем истраживању.

Кључне речи:
Комплексне диференцијалне једначине, Нуле решења, Осцилаторна решења, Метод редова-итерација, Аналитичке функције

Abstract

The study of complex differential equations in recent years has open numerous questions regarding the determination of frequencies of zero solutions, dispositions of zero solutions, oscillatory of solutions, asymptotic behavior, growth rank and so on. This Doctoral Dissertation presents the result of research seeking for model of determination of location of zero solutions of complex homogenous differential equation of first order and canonic complex differential equation of second order with analytic coefficients. Using the sequence-iteration method, which seemed to us better in applications, the new approach to problem solving has been developed and opened the perspectives in further research.

Keywords:
Complex differential equations, Zero solutions, A series iteration method, Oscillatory solutions, Analytical functions

Садржај

Предговор

Теорија комплексних диференцијалних једначина представља важну математичку дисциплину како са теоријског аспекта, тако и због многобројних примена. Она обједињује готово све области математике, користећи разноврстан математички апарат. Њен развој су равноправно подстицали математичари, физичари и механичари.

Проучавање комплексних диференцијалних једначина, у смислу Неванлинове[1] теорије, постаје поново актуелно од 1982. године, објављивањем радова [3],[4],[5],[6], Бенк и Лејна. Они су проучавали комплексне диференцијалне једначине другог реда $f''+a(z)f=0$, где је $a(z)$ цела функција. До данашњих дана написан је значајан број истраживачких радова за ову специјалну област диференцијалних једначина. Најновија истраживања каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда са коефицијентом који је цела функција, концентришу се углавном на два општа проблема. Први укључује одређивање фреквенција нула решења $f(z)\neq 0$ док други проучава расподелу и асимптотско понашање нула. У односу на проблем расподеле нула решења комплексне диференцијалне једначине, случај када је $a(z)$ полином је доста јасан. Када је $a(z)$ трансцендентна функција ситуација је много сложенија. Преглед и најмодернија литература нам показује да су углавном третиране комплексне диференцијалне једначине са коефицијентима $a(z)=e^z$ и од њега изведеним коефицијентима, $e^z-k, k_{-2}-2e^{2z}+k_{-1}e^{-z}+k_0, k_1e^z-k_0, k+\dfrac{2e^{-z}-e^{-2z}}{4}$, $e^{kz}+P_n(z), P_n(e^z)$. То је због тога што се у Неванлиновој теорији као мера трансцендентности и бесконачног раста, узима функција e^z, па је $|e^z|=e^x, x\in\mathbb{R}$ и када $x\to\infty$ тада e^z тежи комплексној бескрајности трансцендентног типа.

За разлику од класичне Неванлинове теорије, [3]-[6],[9],[10], [17],[22],[23],[37],[39],[40], ми смо користећи идеју из [12],[24],[29]-[31] развили

[1] *Rolf Herman Nevanlinna (1895-1980), фински математичар*

нов приступ у локацији и одређивању броја нула, који је нама изгледао бољи у применама.

У овој дисертацији предмет нашег разматрања биле су комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда и каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда са аналитичким коефицијентом.

Докторски рад се састоји из четири дела.
У Глави 1, **Уводни појмови и основна тврђења** дате су неопходне особине аналитичких функција и између осталог проучене су нуле елементарних функција. Кроз примере одређивања нула комплексних хомогених линеарних диференцијалних једначина првог реда закључили смо да елементарне квадратуре у скупу комплексних аналитичких функција могу али и не морају увек имати нуле. Затим су наведена и одређена специјална својства неких комплексних хомогених линеарних диференцијалних једначина првог реда, где смо на основу теорема 1.4.1 и 1.4.2 видели да нетривијлно решење комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда нема нуле, нуле има само тривијално решење. Такође смо приметили да трансформација комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда на систем реалних парцијалних диференцијалних једначина првог реда, односно на систем од једне реалне парцијалне диференцијалне једначине другог реда и једне алгебарске једначине, није увек практична у одређивању нула решења.

У Глави 2, **Итерације у комплексном подручју**, детаљно смо описали итерације елементарне комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда и каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда са аналитичким коефицијентом. Кроз разне облике каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда, од једначине са чисто реалним делом, са чисто имагинарним делом, са регуларним и комплексним константним коефицијентом закључили смо да има основа да каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда назовемо "комплексним једначинама осцилација" другог реда. Чак и онда када та једначина није имала решења ми смо за неки избор интеграционих константи налазили партикуларни интеграл који је имао нула.

У Глави 3, **Теорема о средњој вредности**, објаснили смо зашто теорема о средњој вредности у кругу $|z| < R$ није могла да помогне да израчунамо итерације. Зато нам је била потребна нека формула помоћу које смо могли да израчунамо приближну вредност за интеграле $\int_L a(z)\,dz, \int_L \int_L a(z)\,dz^2, \int_L \int_L z a(z)\,dz^2$, за незатворену путању L. Имали смо основе да формулишемо теорему 3.1.1 о средњој вредности јер смо за разне случајеве добијали већ познате резултате: основну Кошијеву формулу, формулу за средњу вредност интеграла у реалној области, затим основну Кошијеву интегралну формулу, средњу вредност за хармонијски део аналитичке функције и тако даље. Ова теорема је послужила као идеја за још један оригинални резултат а то је Друга теорема о средњој вредности (Теорема 3.6.3), као уопштење теорема у реалном подручју.

У Глави 4, **Нуле решења каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда**, приметили смо да је након трансформације каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда на реалан систем линеарних парцијалних диференцијалних једначина другог реда, приликом елиминације једне функције $u(x,y)$ или $v(x,y)$ боље да останемо на систему од једне парцијалне диференцијалне једначине другог реда и друге алгебарске једначине која се решава без квадратура, него на систем од једне парцијалне диференцијалне једначине четвртог реда и једне алгебарске једначине. Остали смо дакле на парцијалној диференцијалној једначини нижег реда која је лакша за решавање и тражили смо одвојено нуле реалних функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$ по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$. Увели смо нове појмове: тачку прекида и критични правац. Осим тога, на основу поменутих резултата је урађена нова анализа нула каноничних комплексних диференцијалних једначина другог реда, за разне вредности аналитичке функције $a(z)$. Још један важан резултат је да за каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда, под одређеним условима, важи Продијева теорема.

У Закључку смо у кратким цртама описали шта је све постигнуто приложеним радом, при чему су дате и смернице будућег истраживања.

На крају је дата литература, списак радова и монографија, 43 референци, која је коришћена у писању ове дисертације.

Напоменимо да докази теорема почињу речју **Доказ**, а завршетак доказа је означен симболом ■.

Глава 1

УВОДНИ ПОЈМОВИ И ОСНОВНА ТВРЂЕЊА

Наведимо најпре неке појмове и ознаке које ћемо употребљавати убудуће. Крива одређена са $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то јест $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, где су x и y реалне непрекидне функције реалне променљиве t на сегменту $[a,b]$, зове се *непрекидна крива*. Непрекидна крива $z = z(t), t \in [a,b]$, зове се *Жорданова*[1] *крива* или проста крива ако разним вредностима $t_1, t_2 \in [a,b]$ параметра t одговарају разне тачке $z(t_1), z(t_2)$. Ако је, специјално $z(a) = z(b)$ реч је о *затвореној Жордановој кривој*. Жорданова или затворена Жорданова крива $x = x(t), y = y(t),\ t \in [a,b]$, назива се *глатком* ако су изводи x' и y' непрекидне функције на сегменту $[a,b]$ и ако је на том сегменту $x'^2(t) + y'^2(t) > 0$. За криву кажемо да је *део по део глатка* ако се састоји из коначног броја глатких кривих. Жорданова глатка или део по део глатка крива назива се *контура* (путања).

Отворен скуп тачака G зове се *област* (подручје, домен) ако се било које две његове тачке могу спојити полигоналном линијом која се састоји само од тачака скупа G. Када се области придруже све њене рубне тачке, добија се *затворена област*. Област G је *једноструко (просто) повезана* у коначној z-равни ако за сваку Жорданову криву $\Gamma \subset G$ важи $\operatorname{int}\Gamma \subset G$. Остале области су вишеструко повезане. Ако се граница једне области састоји из једне или више затворених Жорданових кривих, као позитивно обилажење границе области сматра се обилажење при коме област остаје слева. Уобичајено је да са $C(G)$ означавамо скуп функција дефинисаних и непрекидних у области G, а са $C^k(G), k \in \mathbb{N}$ скуп функција дефинисаних, непрекидних и са непрекидним парцијалним изводима до реда k у области G.

Општа комплексна диференцијална једначина је једначина облика

[1] *Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), француски математичар*

$$\Phi\left(z, w(z), w'(z), w''\left(z\right), \ldots, w^{(n)}\left(z\right)\right) = 0\,, \tag{1.1}$$

где је Φ дата функција, $w\left(z\right) = F(z) = u + iv$ комплексна функција комплексне промењљиве $z = x + iy$, где су $u = u\left(x, y\right)$ и $v = v\left(x, y\right)$ непрекидно диференцијабилне функције ма којег коначног реда. Јасно је да ова једначина не мора садржати независну промењљиву, непознату функцију, ни све изводе, али мора да садржи један извод n-тог реда. Решење комплексне диференцијалне једначине (1.1) је функција из неког допустивог скупа решења која ову једначину идентички задовољава. Посебну класу комплексних диференцијалних једначина чине квазилинеарне диференцијалне једначине - линеарне по изводима највишег реда. Ако су оне линеарне по свим изводима и по непознатој функцији називају се линеарне диференцијалне једначине.

Предмет даљег разматрања биће комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог и другог реда, то јест једначине

$$\Phi\left(z, w(z), w'(z)\right) = 0 \tag{1.2}$$

$$\Psi\left(z, w(z), w'(z), w''\left(z\right)\right) = 0 \tag{1.3}$$

у којима су Φ, Ψ дате функције, а $w\left(z\right)$ непозната функција.

Како извод функције $w(z)$ у принципу зависи од четири парцијална извода $u'_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u'_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}, v'_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}, v'_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ то се (1.2) трансформише у једначину

$$\Phi\left(x, y; u(x, y), v(x, y); u'_x, u'_y, v'_x, v'_y\right) = 0\,. \tag{1.4}$$

Одавде, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева добијамо

$$\begin{aligned} \Phi_1\left(x, y; u, v; u'_x, u'_y, v'_x, v'_y\right) = 0 \\ \Phi_2\left(x, y; u, v; u'_x, u'_y, v'_x, v'_y\right) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

реалан систем парцијалних диференцијалних једначина првог реда са две непознате реалне функције $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Систем (1.5) ће имати своју дефинициону област решења G, која зависи од области у z-равни, где (1.2) допушта решење, и од познатих теорема о егзистенцији решења (Коши[2], Пикара[3] и Поенкареа[4]), (видети [19],[20]).

[2] *Augustin Louis Baron de Cauchy (1789-1857), француски математичар*

У даљем тексту се диференцијална једначина краће означава са ДЈ, а парцијална диференцијална једначина са ПДЈ, без обзира на множину и промену именице.

Проблем нула решења комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда (1.2) као и комплексних хомогених линеарних ДЈ вишег реда $L(z) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k(z) w^{(k)} = 0$ је веома тежак и спада у теорију целих функција.

Познато је да за комплексну функцију, релације ">" или "<" имају смисла само за модуле $|z|, |w(z)|$. Нуле решења и сама решења зависе не само од модула, него и од његовог аргумента. Зато се једначина (1.2) може решити само квадратурама.

Код квадратурног решавања комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда (1.2) потребан нам је нормалан облик

$$w'(z) = F(z, w(z)). \tag{1.6}$$

Одавде следи комплексан интеграл $w(z) = \int_{z_0}^{z} F(z, w(z)) dz + c$, који у општем случају зависи од пута L, који повезује тачке z_0 и z. Независност од пута важи само ако је у (1.2) Ф аналитичка функција од својих аргумената. Тада за решење $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ мора унапред да важе Коши-Риманови[5] услови

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.7}$$

Наша идеја је да пођемо од система ПДЈ првог реда (1.5), и претпоставимо да је $w(z)$ аналитичка. Постављамо сасвим нетривијалан проблем, а то су нуле решења $w(z) = 0$ то јест нуле реалних функција $u(x, y) = 0$ и $v(x, y) = 0$, које су изоловане у некој области.

Нека је прво та област кружни сектор $|z| = R, 0 \le \arg z \le \alpha$. У њему може али и не мора да се налази известан број нула решења $w(z) = 0$. Те нуле можемо "обухватити", ако повучемо правац $y = kx, k = \tan\alpha$, где се k мења непрекидно. Правац $y = kx$ ће обухватити све нуле у области G. На неком правцу ће бити једна нула, на неком

---

[3] *Charles Èmile Picard (1856-1941), француски математичар*
[4] *Jules Henri Poincarré (1854-1912), француски математичар*
[5] *Bernhard G. Riemann (1826-1866), немачки математичар*

више нула, али изолованих и коначно много, на неком правцу нити једна нула. Дакле, број нула ће зависити од k, а локације нула од нула функција

$$u(x,y)=u(x,kx)=U(x), v(x,y)=v(x,kx)=V(x). \tag{1.8}$$

Из Коши-Риманових услова (1.7) и из реалних функција (1.8) заменом $y=kx$ добијамо једну потпуну реалну хомогену линеарну ДЈ другог реда

$$U''+A(x)U'+B(x)U\left(x\right)=0 \tag{1.9}$$

за коју важе Штурмове[6] теореме.

Решавањем (1.9), методом описаном у [12],[24], помоћу специјалних функција $\sin_{\phi(x)} x$, $\cos_{\phi(x)} x$ или $\sinh_{\phi(x)} x$, $\cosh_{\phi(x)} x$, $\phi\left(x\right)=B\left(x\right)-\frac{A'\left(x\right)}{2}+\frac{A^2\left(x\right)}{4}$ добијамо апсцисе $x=\xi$ нула решења, а из $y=kx$ налазимо и ординате $y=k\xi$ нул тачке $M\left(x,y\right)$. Број нула у области можемо изразити или оценити помоћу интеграла $N_D=\int\limits_0^{\alpha} N(kx)dk$, где је $N_k=N\left(kx\right)$ број изолованих нула само по произвољном правцу $y=kx$. Слично ће важити и за друге области, које често треба делити на подобласти, а затим треба узети њихову унију.

1.1 Врсте извода

Из класичне теорије аналитичких функција (видети [1],[7],[15],[27]), познато је да је потребан и довољан услов да једнозначна комплексна функција $w\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$, $z=x+iy$ дефинисана у некој околини тачке $z_0=x_0+iy_0, z, z_0\in G\subseteq\mathbb{R}^2$, где су изводи првог реда функција $u\left(x,y\right)$ и $v\left(x,y\right)$ непрекидни, буде аналитичка (диференцијабилна) јесте да у тој тачки важе Коши-Риманови услови (1.7). Ове једначине имају велики значај у теорији аналитичких функција и њеним применама у механици и физици.

Ако леву и десну страну прве једначине система (1.7) диференцирамо по x, а другу једначину по y, тада имамо $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$. Како су мешовити изводи непрекидни и једнаки следи да је

[6] *Charles François Sturm (1803-1855), швајцарски математичар немачког порекла*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1.1}$$

за свако $(x, y) \in G$, то јест, $u(x, y)$ је хармонијска функција у области G. Слично се добија и да је $v(x, y)$ хармонијска функција у G, то јест важи

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \ . \tag{1.1.2}$$

Једначине (1.1.1) и (1.1.2) су *Лапласове*[7] *ПДЈ другог реда*.

Ако је дата једнозначна хармонијска функција $u(x, y)$ у просто повезаној области G, може се наћи аналитичка функција $w(z)$ чији је реални део та функција. Ова аналитичка функција је одређена са тачношћу до једног сабирка који је имагинарна константа.

Формалан извод. Аналитичка функција $w(z)$ има *формалан (тотални) извод*

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Индукцијом се лако добија да је n-ти извод ове функције $\frac{d^n w}{dz^n} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i\frac{\partial^n v}{\partial x^n}$ такође аналитичка функција.

Ако $w(z)$ није аналитичка функција од z, у смислу да не важе Коши-Риманови услови, већ је само непрекидна, или у себи садржи и $\overline{z} = x - iy$ тада је формалан извод

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]\frac{\frac{dy}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

где је $\frac{dy}{dx}$ извод криве пута $L : y = y(x)$, по коме се крећемо, почев од тачке z_0 до тачке z.

[7] *Pierre-Simon Laplace (1749-1827), немачки математичар*

Уопштени извод. Нека су $u(x,y)$ и $v(x,y)$ само непрекидне функције, то јест не важе Коши-Риманови услови, и нека постоје сва четири парцијална извода u'_x, u'_y, v'_x, v'_y, опет без важења Коши-Риманових услова. Тада дефинишемо *уопштени извод*, то јест операцију

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(u'_x + v'_y\right) - \frac{i}{2}\left(u'_y - v'_x\right).$$

Очигледно, ако је $w(z) = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитичка функција, тада се уопштени извод поклапа са обичним изводом по комплексној независној промењљивој z.

Конјуговани извод је нова операција дефинисана са

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{dw}{d\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(u'_x - v'_y\right) + \frac{i}{2}\left(u'_y + v'_x\right).$$

Конјуговани извод аналитичке функције од z је идентички једнак нули.

У Анализи постоји још много извода: ареоларан извод, Шварцов[8] извод, извод у смислу Соболева[9], p-извод Положег[10], (p,q)-извод Положег, итд. Самим тим се подразумева да може бити веома много ДЈ у свим непрекидним просторима, у којима не фигуришу само обичан извод $y'(x)$ или парцијални изводи $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

1.2 Нуле елементарних функција

Нека је $w(z) = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитичка функција у области G. За нуле елементарних комплексних функција w комплексне промењљиве z, већим делом важе аналогије са нулама реалних функција једне промењљиве. Међутим, има и битних разлика, јер $w(z) = f(z) = 0$ значи да имамо систем реалних једначина $u(x,y) = 0$ и $v(x,y) = 0$, који може али и не мора да има решење или да има вишезначно решење. Осим тога особина изолованости нуле, која је честа код аналитичких функција, одржава се само код стандардних аналитичких операција. Тако, ако уведемо и прву неаналитичку операцију $\bar{z} = x - iy$, нуле не морају бити

---

[8] *Herman Amandus Schwarz (1843-1921), немачки математичар*
[9] *Сергей Львович Соболев (1908-1989), совјетски математичар*
[10] *Георгий Николаевич Положий ((1914-1968), совјетски математичар*

само у изолованим тачкама, већ и по читавим непрекидним линијама. Ту престаје аналогија са нулама реалне функције реалне променљиве. Проучимо прво нуле елементарних комплексних функција.

Полиноми. Функција $f(z)=P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, према основној теореми алгебре, има тачно n корена, у општем случају конјуговано-комплексних а и реалних. Они сви могу бити и вишеструки.

На пример, $f(z)=z^2+z+1$ има корене $z_{1/2}=\frac{1}{2}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right)$, док $f(z)=z^4-1$ има корене $z_{1/2}=\pm 1,\ z_{3/4}=\pm i$. Једначина трећег степена $z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ има увек један прост корен и два конјуговано комплексна (или специјално сва три реална). Једначина $z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$ има тачно четири корена: или два пара конјуговано-комплексних, а ако су коефицијенти реални може имати још и два реална и два конјуговано-комплексна или сва четири реална корена (могу бити прости, а могу бити и вишеструки).

Трансцендентне функције. Целе функције које нису полиноми називају се трансцедентне функције (такве су на пример $\exp, \cos, \sin$). Све трансцедентне целе функције имају есенцијални сингуларитет у $z=\infty$. Функција $e^z=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$ нема корена, ни реалних ни комплексних, јер је $e^x\neq 0$ и не важи истовремено $\cos y=\sin y=0$. Ни сложена експоненцијална аналитичка функција $w(z)=e^{f(z)}=e^{u(x,y)}\left(\cos v(x,y)+i\sin v(x,y)\right)$ нема нула. Са друге стране, логаритамска функција $\ln z$ има јединствену нулу $A(1,0)$ која се може понављати. Једначина $\cos z=0$ има безброј решења у тачкама $M_{2k-1}\left(\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2},0\right), k=1,2,\ldots$, на x-оси. И функција $f(z)=\sin z$ има безброј изолованих корена у тачкама $M_k\left(k\pi,0\right), k=0,1,\ldots$ на x-оси. Функција $\cosh z=\frac{1}{2}\left(e^z+e^{-z}\right)$ нема корена ни за какво комплексно z, док $\sinh z=\frac{1}{2}\left(e^z-e^{-z}\right)$ има корене по y-оси у тачкама $M_k\left(0,\frac{k\pi}{2}\right), k=0,1,\ldots$.

Алгебарске функције. Једина нула функције $f(z)=\sqrt{z}$ је $z=0$ јер је, на основу Моаврове[11] формуле, $\sqrt{z}=\sqrt{\rho}\exp\left(i\frac{\varphi+2k\pi}{2}\right)=0,\ k=0,1$ само за $\rho=0$. Из истог разлога и функција $f(z)=\sqrt[3]{z}$ не може имати других нула осим за $\rho=0$, то јест у тачки $M_0(0,0)$. Исто ће важити и за $f(z)=\sqrt[n]{z}, n\in\mathbb{N}$. Међутим, за $f(z)=$

[11] *Abraham de Moivre (1667-1754), француски математичар*

$= \sqrt[n]{a_m(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)} = \sqrt[n]{P_m(z)}$ имамо m нула, простих или вишеструких. Друго, постоји n грана функције, од којих је свака једнозначна и такође важи Моаврова формула, али у сложенијем облику.

Мероморфне функције. Функција $f(z)$ која у $\mathbb{C}$ нема других сингуларитета изузев полова, назива се мероморфна. Ако мероморфна функција $f(z)$ има отклоњив сингуларитет или пол у $z=\infty$, тада је $f(z)$ рационална функција (видети [18],[28]). Нула функције $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ је нула полинома $P_n(z)$, док је пол функције $f(z)$ нула полинома $Q_m(z)$. На пример, $f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ има нулу само у $z=\infty$, док за $x=0$ и $y=0$ функција није дефинисана. Функција $f(z)=\dfrac{(z-1)^2}{z^2+1}$ има једну нулу $z=1$ другог реда.

Мероморфне функције су аналитичке у некој области $|z|<R$, које искључују нуле имениоца. Тако у прстену, између две нуле имениоца, важи Лоранов[12] развој $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$, где је $c_{-1}=\lim_{z\to z_0} \dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)$ резидум. За контуру C која садржи више полова мероморфне функције важи Кошијева интегрална формула

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res} f(z).$$

1.3 Нуле комплексних квадратура

Најпростија комплексна диференцијална једначина првог реда, од непознате аналитичке функције $w(z)$ и задате функције $f(z)$ је облика

$$w'(z) = f(z). \tag{1.3.1}$$

Она се решава комплексним линијским интегралом, $w(z)=\int_L f(z)dz + c$, по некој кривој L која спаја z_0 са z и где је $c=\alpha+i\beta$ произвољна комплексна константа, видети [20]. Међутим, познато је да интеграл аналитичке функције $f(z)$ не зависи од

[12] *Pierre Alphonse Laurent (1813-1854), француски математичар*

L, већ само од почетне тачке z_0 и крајње тачке z и још важи да је $c = F(z_0)$, где је $F(z)$ примитивна аналитичка функција од $f(z)$. Тако за решење комплексне ДЈ (1.3.1) имамо

$$w(z) = F(z) - F(z_0),\ F'(z) = f(z).$$

Ако потражимо нуле решења $w(z)$, из $w(z) = 0$ добијамо једначину $F(z) - F(z_0) = 0$ или $F(z) = F(z_0) = A$. Приметимо да сада важи мала Пикарова теорема (*Једначина $f(z) = A$, где је $f(z)$ цела функција, A комплексна константа (најчешће $A \neq 0$) има решења.*).

Специјално, ако је $f(z)$ полином степена n, тада једначина има тачно n решења. За сваку другу целу функцију $f(z)$, број решења је бесконачан (осим некад за $A = 0$), и при томе тај број може да се рангира према реду величине бесконачности и пребројивости. Кажемо да има $\infty^1, \infty^2, \infty^3, \ldots$ нула, у неком бесконачном делу равни. Осим тога, ако је $f(z)$ аналитичка у односу на $z = x + iy$, нуле су изоловане.

Пример 1.1. За комплексну ДЈ $w'(z) = 2z + 1$, имамо $w(z) = \int (2z+1)dz + c = z^2 + z + c$. Одавде, из $w(z) = 0$ добијамо једначину за нуле: $z^2 + z + c = 0$ односно $z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-4c}\right)$. Решење има две изоловане нуле.

Пример 1.2. Комплексна ДЈ $w'(z) = P_n(z)$, где је $P_n(z)$ полином степена n, има решење $w(z) = Q_{n+1}(z) + c$, које даје $n+1$ комплексних нула.

Пример 1.3. За комплексну ДЈ $w'(z) = e^z$ из $w(z) = \int e^z dz = e^z + c = 0$ следи $e^x(\cos y + i \sin y) = \alpha + i\beta$. На основу дефиниције једнакости комплексних бројева имамо $e^x \cos y = \alpha$ и $e^x \sin y = \beta$. Одавде је $y = \arctan \dfrac{\beta}{\alpha}$. Како је $e^x = \dfrac{\alpha}{\cos y} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ то је $x = \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Нуле су тачке $z = x + iy =$ $= \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + i \arctan \dfrac{\beta}{\alpha}$, односно овде је $x = const = \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, а $y = \arctan \dfrac{\beta}{\alpha}$ је вишезначна. Према томе, нуле су на вертикалној правој $x = \ln \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Пример 1.4. Комплексна ДЈ $w'(z)=\dfrac{z}{1+z^2}$ има квадратурно решење које је једнако нули за $\ln\sqrt{1+z^2}=-c=\alpha+i\beta$. Следи, $1+z^2=e^{2\alpha}(\cos 2\beta+i\sin 2\beta)$. Одавде добијамо систем квадратних једначина $1+x^2-y^2=e^{2\alpha}\cos 2\beta$ и $2xy=e^{2\alpha}\sin 2\beta$. Заменом $y=\dfrac{1}{2x}e^{2\alpha}\sin 2\beta$, из друге једначине, у прву једначину добијамо биквадратну једначину $x^4+x^2\left(1-e^{2\alpha}\cos 2\beta\right)-\dfrac{1}{4}e^{4\alpha}\sin^2 2\beta=0$ чија су решења $x_{1,2}=$ $=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{e^{2\alpha}\cos 2\beta-1+\sqrt{1-2e^{2\alpha}\cos 2\beta+e^{4\alpha}}}=\pm\lambda$, λ нека константа. Одавде следи решење и за y: $y_{1,2}=\dfrac{1}{2x}e^{2\alpha}\sin 2\beta=\pm\dfrac{e^{2\alpha}\sin 2\beta}{\sqrt{2}\sqrt{e^{2\alpha}\cos 2\beta-1+\sqrt{1-2e^{2\alpha}\cos 2\beta+e^{4\alpha}}}}$. Према томе, имамо четири изоловане нуле решења $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_1,-y_1)$, $M_3(-x_2,y_2)$, $M_4(-x_2,-y_2)$.

Пример 1.5. Посматрајмо сада комплексну ДЈ $w'(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$. Растављањем на парцијалне разломке она постаје $w'(z)=-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$. Њено квадратурно решење је функција $w(z)=\ln\dfrac{z-1}{z}+c$. Одавде $w(z)=0$, даје $w(z)=\ln\left(1-\dfrac{1}{z}\right)=-c=\alpha+i\beta=0$ односно $1-\dfrac{1}{z}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)$. На основу дефиниције једнакости комплексних бројева следи систем једначина $1-\dfrac{x}{x^2+y^2}=e^{\alpha}\cos\beta$ и $\dfrac{y}{x^2+y^2}=e^{\alpha}\sin\beta$. Када прву једначину система помножимо са y а другу са x, па то саберемо добијамо $y=ye^{\alpha}\cos\beta+xe^{\alpha}\sin\beta$, а одавде је $x=\dfrac{y\left(1-e^{\alpha}\cos\beta\right)}{e^{\alpha}\sin\beta}$. Сада заменом ове вредности у другу једначину система имамо $y=\dfrac{e^{\alpha}\sin\beta}{e^{2\alpha}-2e^{\alpha}\cos\beta+1}$. Дакле, $M(x,y)=\left(\dfrac{1-e^{\alpha}\cos\beta}{e^{2\alpha}-2e^{\alpha}\cos\beta+1},\dfrac{e^{\alpha}\sin\beta}{e^{2\alpha}-2e^{\alpha}\cos\beta+1}\right)$ је решење једначине, које је једнозначно и јединствено.

Пример 1.6. Како је квадратура комплексне ДЈ $w'(z)=\cos z$ облика $w(z)=\int\cos z\,dz=$ $=\sin z+c=\alpha+i\beta$, то за $z=x+iy$ из $\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=\alpha+i\beta$ добијамо нуле

$\sin x \cosh y = \alpha$ и $\cos x \sinh y = \beta.$ Одавде, дељењем налазимо $\tan x = \dfrac{\alpha}{\beta} \tanh y.$

Заменом $\cosh y = \dfrac{\alpha}{\sin x}$, из прве једначине система, у другу добијамо биквадратну једначину $\sin^4 x - \left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right) \sin^2 x + \alpha^2 = 0,$ чија су решења дата са $\left(\sin x\right)_{1,2,3,4} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right) \pm \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right)^2 - 4\alpha^2}}$. Како је $\left|\sin x\right| \leq 1,$ то је квадрирањем $\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right) \pm \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right)^2 - 4\alpha^2} \leq 2.$ Даље, из $\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right)^2 - 4\alpha^2 \leq$ $\leq \left(1 - \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right)^2$, следи $\beta^2 \leq 0.$ Ово је задовољено само за $\beta = 0$, то јест $\operatorname{Im}\left(-c\right) = 0$. Сада почетне једначине гласе $\sin x \cosh y = \alpha$ и $\cos x \sinh y = 0.$ Из друге једначине имамо да је $\cos x = 0$ или $\sinh y = 0.$

Ако је $\cos x = 0$ следи $x = \left(2k-1\right)\dfrac{\pi}{2}, k = 1, 2, \ldots$, па из прве једначине добијамо $\cosh y = \mp \alpha$, односно $\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \mp \alpha$ то јест $e^{2y} \pm 2\alpha e^y + 1 = 0$. Следи, $\left(e^y\right)_{1,2} = \mp \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ односно $y = \ln\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}\right), \alpha \geq 1.$ Дакле, прве нуле су $M_k\left(\left(2k-1\right)\dfrac{\pi}{2},\ \ln\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)\right).$ Из $\sinh y = 0,$ добијамо $y = 0$. Тада прва једначина система даје, $\sin x = \alpha$, ако је $\left|\alpha\right| \leq 1,$ односно $x = \arcsin \alpha \pm k\pi.$ Дакле, постоји и друга серија нула у тачкама $P_k = \left(\arcsin \alpha \pm k\pi, 0\right),$ $\left|\alpha\right| \leq 1.$ Према томе, на правама $y = \ln\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}\right),$ $\alpha > 1$ лежи низ тачака M_k, а на $y = 0$ лежи низ $P_k.$

Пример 1.7. Потражимо сада нуле решења комплексне ДЈ $w'\left(z\right) = \sin z.$ Из $w\left(z\right) = \int \sin z dz + c = -\cos z + c = 0$ имамо $\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = c = \alpha + i\beta.$ Одавде добијамо систем једначина $\cos x \cosh y = \alpha$, $\sin x \sinh y = -\beta$. Када $\cos x = \dfrac{\alpha}{\cosh y}$ из прве једначине система заменимо у другу једначину, следи биквадратна једначина, $\cosh^4 y - \left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right) \cosh^2 y + \alpha^2 = 0$, чија су решења облика $\left(\cosh y\right)_{1,2,3,4} =$ $= \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right) \pm \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right)^2 - 4\alpha^2}}$. Због реалности корена мора да важи $\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right)^2 \geq 4\alpha^2$. Тада је $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right) \pm \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right)^2 - 4\alpha^2}} \geq 1,$ због

$\cosh y \ge 1$, односно $\left(\alpha^2+\beta^2+1\right) \pm \sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2+1\right)^2-4\alpha^2} \ge 2.$ Одавде, је $|\beta| \ge 0.$ Ово је друго ограничење. Прво даје $\alpha^2+\beta^2+1=\alpha^2+1 \ge 2|\alpha|,$ или $|\alpha|^2+1-2|\alpha| \ge 0$ односно $\left(|\alpha|^2-1\right)^2 \ge 0.$ Дакле, овде нема ограничења за α . Добијамо два решења за $\cosh y = 0$ које означавамо са $\left(\cosh y\right)_{1,2}=\lambda_1,\lambda_2.$ Тада је $\cos x=\dfrac{\alpha}{\cosh y}=\dfrac{\alpha}{\lambda_1}$ или $\dfrac{\alpha}{\lambda_2},$ и још важи $\left|\dfrac{\alpha}{\lambda_1}\right|<1$ и $\left|\dfrac{\alpha}{\lambda_2}\right|<1,$ или $|\lambda_1,\lambda_2| \ge |\alpha|.$ Дакле, имамо два низа тачака $M_k\left(x_1,y_1\right),$ $P_k\left(x_2,y_2\right),$ где је $x_1=\arccos\dfrac{\alpha}{\lambda_1}+2k\pi$ и $x_2=\arccos\dfrac{\alpha}{\lambda_2}+2k\pi$, $k=0,1,2,...$ и њима одговарајуће ординате $y_{1,2} = \operatorname{Ar}\cosh\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2+1\right)\pm\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2+1\right)^2-4\alpha^2}}.$

Пример 1.8. Нуле решења комплексне ДЈ $w'(z)=\dfrac{1}{\cos^2 z}$ налазимо на уобичајени начин. Наиме, из $dw=\dfrac{dz}{\cos^2 z}$ имамо $w(z)=\displaystyle\int\dfrac{dz}{\cos^2 z}+c=\tan z+c=0.$ Како је на основу мале Пикарове теореме $\tan z=-c=\alpha+i\beta,$ односно $\dfrac{\sin z}{\cos z}=\dfrac{\sin\left(x+iy\right)}{\cos\left(x+iy\right)}=\alpha+i\beta,$ следи

$$\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y=\alpha\cos x\cosh y+\beta\sin x\sinh y+i\left(\beta\cos x\cosh y-\alpha\sin x\sinh y\right).$$

Одавде, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева имамо систем реалних једначина

$$\sin x\left(\cosh y-\beta\sinh y\right)=\alpha\cos x\cosh y,\;\; \cos x\left(\sinh y-\beta\cosh y\right)=-\alpha\sin x\sinh y.$$

Множењем ових једначина добија се само једна једначина са хиперболичким функцијама

$$\sin x\cos x\left(\cosh y-\beta\sinh y\right)\left(\sinh y-\beta\cosh y\right)=-\alpha^2\sin x\cos x\sinh y\cosh y.$$

Како $\sin x$ и $\cos x$ не могу истовремено бити једнаки нули то дељењем са $\sin x\cos x$, добијамо једначину

$$\sinh y\cosh y-\beta\sinh^2 y-\beta\cosh^2 y+\beta^2\sinh y\cosh y=-\alpha^2\sinh y\cosh y.$$

После елементарних трансформација ову једначину можемо да трансформишемо на једначину четвртог степена $\sinh^4 y + \sinh^2 y - \frac{\beta^2}{\left(1+\alpha^2+\beta^2\right)^2 - 4\beta^2} = 0,$ чија су решења $\left(\sinh y\right)_{1,2,3,4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1 \pm \frac{1+\alpha^2+\beta^2}{\sqrt{\left(1+\alpha^2+\beta^2\right)^2 - 4\beta^2}}}$. Напоменимо да реални корен постоји ако је $\left(1+\alpha^2+\beta^2\right)^2 - 4\beta^2 > 0.$ Из прве једначине система, односно из $\tan x = \frac{\alpha\cosh y}{\cosh y - \beta\sinh y}$, налазимо x. Видимо да је x вишезначно јер зависи од α и β. Следи да постоје четири константне праве, на којима се налазе низови дискретних тачака M_k са апсцисама x_k, које су решења једначине $x_k = \arctan\frac{\alpha\cosh y_k}{\cosh y_k - \beta\sinh y_k}$.

На основу горњих примера можемо закључити да елементарне квадратуре у подручју комплексних аналитичких функција могу, али не морају увек имати нуле. Нула може бити коначно много (као код полинома), или постоје једна или две нуле, као код простијих комплексних логаритама. Затим, и интеграли (квадратуре) мероморфних функција могу имати нуле. Тада се наслућује важна веза између полова мероморфних функција и нула интеграла. Најчешћи су низови нула који се јављају на паралелним хоризонталним или вертикалним правама, или само на координатним осама.

1.4 КОМПЛЕКСНА ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА

Комплексна хомогена линеарна диференцијална једначина првог реда у нормалном облику (видети [20],[22]), је једначина која садржи дату аналитичку функцију $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y),$ једну линеарну непознату функцију $w = w(z)$ и њен непознат извод $w' = w'(z)$

$$\frac{dw}{dz} + a(z)w(z) = 0. \tag{1.4.1}$$

За ову једначину важе следеће теореме.

Теорема 1.4.1. *Нетривијално решење комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (1.4.1), са аналитичким коефицијентом* $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y),$ *нема нуле. Нуле има само тривијално решење* $w(z) = 0$.

Доказ: Раздвајањем променљивих из (1.4.1) имамо $\frac{dw}{w} = -a(z)dz$, $w = w(z) \neq 0$. Одавде, интеграљењем добијамо $\ln w = -\int a(z)\,dz + c_1$, где је $c_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ комплексна константа. На основу дефиниције природног логаритма долазимо до решења

$$w(z) = e^{-\int a(z)dz + c_1} = Ce^{-\int a(z)dz}. \tag{1.4.2}$$

Нуле решења (1.4.2) су корени једначине $w(z) = 0.$ Разликујемо случајеве

1. Нека је $C = \alpha_1 + i\beta_1 = 0,$ односно $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0.$ Добијамо такозвано тривијално решење $w(z) \equiv 0$, за свако z. Одавде је и $\frac{dw}{dz} = 0$, па је једначина (1.4.1) задовољена за свако $a(z)$.

2. Нека је сада $C \neq 0$. Тада из (1.4.2) следи да је $w(z) = 0$ за $e^{-\int a(z)dz} = 0$. Поставља се питање да ли је ово могуће? Како је интеграл аналитичке функције опет нека аналитичка функција, имамо да је $-\int a(z)dz = P(x, y) + iQ(x, y),$ где су P, Q реалне функције. Из

$$e^{-\int a(z)dz} = e^{P(x,y)}\left(\cos Q(x, y) + i\sin Q(x, y)\right) = e^{P(x,y)}\cos Q(x, y) + ie^{P(x,y)}\sin Q(x, y) = 0,$$

добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} e^{P(x,y)}\cos Q(x, y) &= 0 \\ e^{P(x,y)}\sin Q(x, y) &= 0 \end{aligned}. \tag{1.4.3}$$

Познато је да је $e^{P(x,y)} \neq 0$, као реална функција, па остаје да једначине $\cos Q(x, y) = 0$ и $\sin Q(x, y) = 0$ морају да важе истовремено. Међутим, из прве и друге једначине редом имамо $Q(x, y) = (2k-1)\frac{\pi}{2}, k = 1, 2, ...$ и $Q(x, y) = k\pi, k = 0, 1, ...$ што је противуречност. Дакле, систем (1.4.3) нема заједничког решења осим тривијалног. ■

Пример 1.9. Комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz} + w(z) = 0,$ са реалним константним коефицијентом $a(z) = 1$ на основу (1.4.2) има решење $w(z) = Ce^{-\int dz} = Ce^{-z} = u(x, y) + iv(x, y),$ $C = \alpha_1 + i\beta_1$ комплексна константа, односно

$$u(x,y)+iv(x,y)=(\alpha_1+i\beta_1)e^{-x}(\cos y-i\sin y)=$$
$$=e^{-x}(\alpha_1\cos y+\beta_1\sin y)+e^{-x}(\alpha_1\cos y+\beta_1\sin y)+ie^{-x}(\beta_1\cos y-\alpha_1\sin y).$$

Јасно је да је $w(z)=0$ за $u(x,y)=e^{-x}(\alpha_1\cos y+\beta_1\sin y)=0$ и $v(x,y)=$ $=e^{-x}(\beta_1\cos y-\alpha_1\sin y)=0$. Како је $e^{-x}\neq 0$, следи $\alpha_1\cos y+\beta_1\sin y=0$ и $\beta_1\cos y-\alpha_1\sin y=0$. Ово је реалан хомогени линеарни систем у односу на $\cos y$ и $\sin y$, који има нетривијална решења ако и само ако је детерминанта система $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \beta_1 & -\alpha_1\end{vmatrix}=-(\alpha_1{}^2+\beta_1^2)$ једнака нули. Одавде је $\alpha_1=0,\beta_1=0$. Дакле, $C=\alpha_1+i\beta_1=0$, па само тривијално решење $w(z)=0$ има нула.

Пример 1.10. Потражимо сада нуле решења комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}+2zw(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=2z$. Одавде је $w(z)=Ce^{-z^2}$, $C=\alpha_1+i\beta_1$ комплексна константа, односно

$$u(x,y)+iv(x,y)=(\alpha_1+i\beta_1)e^{-(x^2-y^2+2ixy)}=e^{y^2-x^2}(\alpha_1+i\beta_1)e^{-2ixy}=$$
$$=e^{y^2-x^2}(\alpha_1+i\beta_1)(\cos(2xy)-i\sin(2xy)).$$

Како је $e^{y^2-x^2}\neq 0$, то нуле решења $w(z)=0$ добијамо само ако је $\alpha_1=0$ и $\beta_1=0$, или $\cos(2xy)=0$ и $\sin(2xy)=0$. Познато је да синус и косинус немају никада заједничке нуле, па следи да нетривијално решење дате једначине нема нуле.

Посматрајмо сада најпростију комплексну хомогену линеарну диференцијалну једначину првог реда

$$\frac{dw}{dz}=0,\ a(z)=0. \tag{1.4.4}$$

Следи

Теорема 1.4.2. *Решење комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (1.4.4), где је $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ непозната аналитичка функција има само једну нулу у тачки $z=0$.*

Доказ: Из решења $w(z)=C$, где је $C=\alpha_1+i\beta_1$ комплексна константа, на основу дефиниције једнакости два комплексна броја, имамо да је $u(x,y)=\alpha_1$ и $v(x,y)=\beta_1$, α_1,β_1 су произвољни. Значи, свака комплексна константа је решење ове ДЈ. Што се тиче нула, из $w(z)=0$ имамо $\alpha_1=0$ и $\beta_1=0$. Према томе, решење дате једначине има једну јединствену нулу. ■

Примедба. Претходно разматрање

1) се лако уопштава и на случај комплексне хомогене линеарне ДЈ n-тог реда $\frac{d^n w}{dz^n}=0,$ јер после n узастопних интеграција

$$\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}=c_1,\ \frac{d^{n-2}w}{dz^{n-1}}=c_1 z+c_2,\ \frac{d^{n-3}w}{dz^{n-3}}=c_1\frac{z^2}{2}+c_2 z+c_3, \ldots\ w(z)=c_1\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+c_{n-1}z+c_n=0$$

добијамо полином $P_{n-1}(z)$, који има тачно $n-1$ нула, реалних или комплексних, простих или вишеструких.

2) можемо да повежемо са малом Пикаровом теоремом. Наиме, једначина $f(z)=A$, где је $f(z)$ аналитичка функција, A комплексна константа, има решење ако је $A=0$, то јест $A=0+i0=(0,0)$. Са друге стране, решење комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}=0$ је произвољна константа $w(z)=C=\alpha_1+i\beta_1$. Дакле, могућ је бесконачан број решења, за сваки реалан пар (α_1,β_1).

Ако комплексан број $z=x+iy$ напишемо у поларној форми $z=\rho e^{i\varphi}$,($\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$), тада једначина $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)=R\,e^{i\theta}=0$, односно $u(x,y)=$ $=R\cos\theta=0$ и $v(x,y)=R\sin\theta=0$, има решење само за $R=0$. Дакле, постоји једна једина нул тачка $O(0,0)$, док комплексна ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}=0$ има безброј решења $w(z)=C=\alpha_1+i\beta_1$, за произвољне α_1,β_1.

Тако, за комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}+w(z)=0$, $w(z)\neq 0$ имамо $\ln w(z)=-z+C, C=\alpha_1+i\beta_1$. Сада, користећи поларну форму функције $w(z)=Re^{i\theta}$, имамо $\ln R+i\theta=(\alpha_1-x)+i(\beta_1-y)$, или $\ln R=\alpha_1-x$ и $\theta=\beta_1-y$. Дакле, $\ln\sqrt{u^2+v^2}=\alpha_1-x$ и $\arctan\frac{v}{u}=\beta_1-y.$

Овај логаритамски прилаз се често примењује и код обичних и код комплексних диференцијалних једначина.

1.5 Упоређивање комплексног решења са решењима за реални и имагинарни део парцијалне диференцијалне једначине првог реда

Посматрајмо комплексну хомогену линеарну диференцијалну једначину првог реда (1.4.1) чије је решење дато са (1.4.2) и за коју је $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ тражена непозната аналитичка функција, $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ дата аналитичка функција и $C = \alpha_1 + i\beta_1$ произвољна комплексна константа. Следи

Теорема 1.5.1. *Нетривијална решења комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (1.4.1) у којој је* $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *непозната аналитичка функција и* $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ *аналитички коефицијент немају нула.*

Доказ. Из решења (1.4.2), након елементарних трансформација добијамо

$$\begin{aligned} w(z) &= u(x,y) + iv(x,y) = \\ &= e^{-\int \alpha(x,y)dx - \beta(x,y)dy} \cdot \Big\{\Big[\alpha_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) + \beta_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) + \\ &\quad + i\Big[\beta_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) - \alpha_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy)\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

Нуле решења $w(z)$ су решења једначина

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^{-\int \alpha(x,y)dx - \beta(x,y)dy} \cdot \\ &\cdot \Big[\alpha_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) + \beta_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy)\Big] = 0, \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= e^{-\int \alpha(x,y)dx - \beta(x,y)dy} \cdot \\ &\cdot \Big[\beta_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) - \alpha_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy)\Big] = 0. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Како је $e^{-\int \alpha(x,y)dx - \beta(x,y)dy} \neq 0$, за аналитичке функције $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$, следи систем трансцендентних једначина:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) + \beta_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) = 0 \\ \beta_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) - \alpha_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) = 0 \end{aligned}$$

односно

$$\alpha_1 \cos\lambda + \beta_1 \sin\lambda = 0$$
$$\beta_1 \cos\lambda - \alpha_1 \sin\lambda = 0 \qquad (1.5.3)$$

где је $\lambda = \int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) = \lambda(x,y)$. Ово је хомоген линеарни систем алгебарских једначина у односу на α_1 и β_1. Како је детерминанта система $\begin{vmatrix} \cos\lambda & \sin\lambda \\ -\sin\lambda & \cos\lambda \end{vmatrix} = \cos^2\lambda + \sin^2\lambda = 1 \neq 0$ систем има само тривијално решење $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Одавде је $C = \alpha_1 + i\beta_1 = 0$ односно из (1.4.2) имамо да је $w(z) = 0$. Ако сада систем (1.5.3) посматрамо у односу на непознате $\cos\lambda$ и $\sin\lambda$ добијамо да је детерминанта система $-\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2\right)$. Систем сада има нетривијална решења само ако је $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Дакле, $c = \alpha_1 + i\beta_1 = 0$, па је $w(z) = C\exp\left(-\int a(z)dz\right) = 0$, а ово је контрадикција. ■

Примедба. У решењу (1.4.2) имамо криволинијски интеграл аналитичке функције $w(z) = Ce^{-\int_L a(z)dz}$. Како је интеграл аналитичке функције $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ такође аналитичка функција, то интеграл не зависи од пута L. Да би важило $w(z) = C = \alpha_1 + i\beta_1$, треба да је $\int_L a(z)dz = 0$, односно $\int_L \alpha(x,y)dx - \beta(x,y)dy = 0$ и $\int_L \beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy$=0. Како имамо интеграле од диференцијала то следи $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ и $\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{\partial a}{\partial x}$. Ово је испуњено и због аналитичности $a(z)$.

Трансформација на реалан систем парцијалних диференцијалних једначина првог реда.

Нека је $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непозната аналитичка функција и (1.4.1) комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда, са аналитичким коефицијентом $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$. У секцији 1.2 смо видели да за решење $w(z)$, које је аналитичка функција, важи формалан извод $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Исто се добија и ако је $a(z)$ аналитичка функција. Узимајући све ово у обзир једначину (1.4.1) можемо написати у облику

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\alpha(x,y)u(x,y) - \beta(x,y)v(x,y)\right) + i\left(\beta(x,y)u(x,y) + \alpha(x,y)v(x,y)\right) = 0.$$

Одавде добијамо реалан систем ПДЈ првог реда

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\alpha(x,y)u(x,y)+\beta(x,y)v(x,y)\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\beta(x,y)u(x,y)-\alpha(x,y)v(x,y)\end{aligned}. \tag{1.5.4}$$

Он се може трансформисати на систем од једне ПДЈ другог реда и једне алгебарске једначине.

На пример, решимо прву једначину система (1.5.4) у односу на $v(x,y)$, потом потражимо њен извод, а затим све заменимо у другу једначину система. После сређивања добијамо систем једначина

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(2\alpha(x,y)-\frac{\beta_x'(x,y)}{\beta(x,y)}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\beta(x,y)\left(\frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)}\right)_x'+\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)u(x,y)=0$$

$$\beta(x,y)v(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(x,y)u(x,y). \tag{1.5.5}$$

На сличан начин добијамо и систем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(2\alpha(x,y)-\frac{\beta_x'(x,y)}{\beta(x,y)}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\beta(x,y)\left(\frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)}\right)_x'+\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)v(x,y)=0$$

$$\beta(x,y)u(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}-\alpha(x,y)v(x,y). \tag{1.5.6}$$

У оба случаја добијамо ПДЈ другог реда које су математички идентичне а у физичком смислу само аналогне, а у зависности од физичког значења функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$ описују различите физичке процесе.

Пример 1.11. Посматрајмо комплексну хомогену линеарну ДЈ (1.4.1) првог реда у којој је $a(z)=-1$ константан реалан коефицијент. Тада се решење комплексне ДЈ $\frac{dw}{dz}-w(z)=0$ налази једноставно и износи $w(z)=(c_1+ic_2)e^z$. Како је $a(z)=-1$ односно $\alpha(x,y)=-1$, $\beta(x,y)=0$ то систем (1.5.4) постаје: $\frac{\partial u}{\partial x}=u(x,y), \frac{\partial v}{\partial x}=v(x,y)$. Одавде је очигледно да је опште решење $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)=e^x\left(f(y)+ig(y)\right)$. Непознате функције $f(y)$ и $g(y)$ одређујемо из Коши-Риманових услова: $f(y)=g'(y)$ и $f'(y)=-g(y)$. Диференцирањем прве од ове две једначине па изједначавањем са другом добијамо једначину хармонијских осцилација $g''(y)+g(y)=0$, чије је решење $g(y)=c_1\cos y+c_2\sin y$. На крају следи

$$w(z)=u(x,y)+iv(x,y)=e^x\left[\left(-c_1\sin y+c_2\cos y\right)+i\left(c_1\cos y+c_2\sin y\right)\right]=$$
$$=e^x\left[c_1 i(\cos y+i\sin y)+c_2(\cos y+i\sin y)\right]=e^x e^{iy}\left(c_2+ic_1\right)=Ce^{x+iy}=Ce^z.$$

Приметимо још да како $\cos y$ и $\sin y$ никада нису истовремено једнаки нули, то је $w(z)=Ce^{x+iy}=0$ само за $C=0$.

Пример 1.12. Посматрајмо комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда $\dfrac{dw}{dz}-zw(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=-z$ и потражимо њено решење помоћу обичне квадратуре и директно.

У првом случају имамо: $w(z)=Ce^{\int zdz}=Ce^{\frac{z^2}{2}}=\left(c_1+ic_2\right)e^{\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)}\left(\cos 2xy+i\sin 2xy\right)$.

Директним поступком из $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=(x+iy)\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)$, добијамо реалан систем ПДЈ првог реда $\dfrac{\partial u}{\partial x}=xu(x,y)-yv(x,y),\dfrac{\partial v}{\partial x}=yu(x,y)+xv(x,y)$, односно трансформацијом добијамо систем једначина $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\left(-1+x^2+y^2\right)u(x,y)=0$, $yv(x,y)=-\dfrac{\partial u}{\partial x}+xu(x,y)$ чије је решавање много теже, него поступак помоћу квадратуре, јер се добијена ПДЈ другог реда своди на обичну ДЈ другог реда са функционалним коефицијентима.

Примедба. Решавање помоћу квадратуре не важи ако извод није аналитички, или ако $a(z)$ није аналитичка у смислу Коши-Риманових услова.

Пример 1.13. Посматрајмо комплексну хомогену диференцијалну једначину $\dfrac{dw}{dz}-\bar{z}w(z)=0$, где је $\dfrac{dw}{dz}$ операторски извод, а $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=\bar{z}=x-iy$ неаналитичка функција за коју не важе Коши-Риманови услови. Тада из $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)-\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)-(x-iy)\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)=0$ следи систем ПДЈ првог реда $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=xu(x,y)+yv(x,y),-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=-yu(x,y)+xv(x,y)$ чије решавање није лако. Међутим, како за аналитичку функцију $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ важе

Коши-Риманови услови, то операторски извод $\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{dw}{dz}$ прелази у обичан аналитички извод. Одавде је могућа обична комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}-\bar{z}w(z)=0$, за коју не можемо очекивати аналитичко решење. Овај пример не можемо решити помоћу квадратура, него помоћу парцијалних диференцијалних једначина. Наиме, из $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=(x-iy)\big(u(x,y)+iv(x,y)\big)$ добијамо реалан систем ПДЈ првог реда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xu(x,y)-yv(x,y)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=yu(x,y)+xv(x,y).$$

Решавањем прве једначине система по $v(x,y)$, па диференцирањем по x и на крају заменом у другој једначини система добијамо систем од једне ПДЈ другог реда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}+\left(x^2+y^2-1\right)u(x,y)=0$ (она садржи изводе по истој промењљивој па се може интегралити као обична ДЈ) и једне алгебарске једначине $yv(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}-xu(x,y)$.

На крају закључујемо да је код решавања комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда са аналитичким коефицијентом погодније користити само аналитички извод комплексне аналитичке функције.

1.6 Понашање решења комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда по правцу

Приметили смо у претходној секцији да се комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда (1.4.1), са аналитичким коефицијентом $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ у области G, трансформише на реалан систем ПДЈ првог реда (1.5.4), односно на систем једначина (1.5.5) или (1.5.6), од једне ПДЈ другог реда и једне алгебарске једначине. Такође смо показали да је решење једначине (1.4.1) облика (1.4.2), то јест облика $w(z)=Ce^{-\int a(z)dz}, C=\alpha_1+i\beta_1$, где су α_1 и β_1 произвољне константе. Одавде на основу дефиниције једнакости комплексних бројева добијамо да је

$$u(x,y) = e^{-\int \alpha(x,y)dx - \beta(x,y)dy}\left[\alpha_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) + \beta_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy)\right]$$

$$v(x,y) = e^{-\int \alpha(x,y)dx - \beta(x,y)dy}\left[\beta_1 \cos\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy) - \alpha_1 \sin\int(\beta(x,y)dx + \alpha(x,y)dy)\right].$$

Ако област G прекријемо полуправама (правцима) $y = kx, k = \tan\alpha$, тада се реалне функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$, решења $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, трансформишу у функције од x и параметра k. Природно је очекивати да се и одговарајуће ПДЈ трансформишу у обичне ДЈ, помоћу којих можемо лакше решити проблем. Следи

Теорема 1.6.1. *Реалан и имагинаран део решења* $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (1.4.1), са аналитичким коефицијентом* $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, *имају сваки за себе безброј нула. Те нуле, осим код тривијалног решења* $w(z) \equiv 0$, *нису никада заједничке. Нуле за* $u(x,y)$ *и за* $v(x,y)$, *су редом у решењима једначина*

$$\int(\beta(x,kx)dx + \alpha(x,kx)kdx) = -\arctan\frac{\alpha_1}{\beta_1} \tag{1.6.1}$$

$$\int(\beta(x,kx)dx + \alpha(x,kx)kdx) = \arctan\frac{\beta_1}{\alpha_1} \tag{1.6.2}$$

где су α_1, β_1 *произвољне константе које зависе од правца* $y = kx, 0 \le k < +\infty$.

Доказ: Из решења (1.4.2), $w(z) = Ce^{-\int a(z)dz}, C = \alpha_1 + i\beta_1$, комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда (1.4.1) са аналитичким коефицијентом, по произвољном правцу $y = kx$, имамо да је

$$u(x,kx) = e^{\int \beta(x,kx)dx - \alpha(x,kx)kdx}\cdot$$
$$\cdot\left[\alpha_1 \cos\int(\beta(x,kx)dx + \alpha(x,kx)kdx) + \beta_1 \sin\int(\beta(x,kx)dx + \alpha(x,kx)kdx)\right]$$
$$v(x,kx) = e^{\int \beta(x,kx)dx - \alpha(x,kx)kdx}\cdot$$
$$\cdot\left[\beta_1 \cos\int(\beta(x,kx)dx + \alpha(x,kx)kdx) - \alpha_1 \sin\int(\beta(x,kx)dx + \alpha(x,kx)kdx)\right].$$

Већ смо видели да функције $u(x,kx)$ и $v(x,kx)$, дате горњим једначинама, немају заједничких нула, али зато свака од њих може имати своје сопствене нуле. Оне су у решењима једначине

$$\alpha_1 \cos\int(\beta(x,kx)dx+\alpha(x,kx)kdx)+\beta_1 \sin\int(\beta(x,kx)dx+\alpha(x,kx)kdx)=0$$

и

$$\beta_1 \cos\int(\beta(x,kx)dx+\alpha(x,kx)kdx)-\alpha_1 \sin\int(\beta(x,kx)dx+\alpha(x,kx)kdx)=0,$$

или ако изразимо преко тангенса добијамо редом формуле (1.6.1) и (1.6.2). Како је тангес једнозначна функција, то се у оквиру једне периоде од $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, вредности тангенса у (1.6.1) или (1.6.2) јављају само једном, и оне се не могу поклопити у некој заједничкој тачки. Дакле, $u(x,y)$ и $v(x,y)$ могу имати свака своје нуле, али немају заједничке. Значи, $u(x,y)=v(x,y)$ само у $(0,0)$. ■

Теорема 1.6.2. *Нетривијално решење* $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда* $w'-w(z)=0$ *нема реалних нула за свако* z. *Нула има само тривијално решење* $w(z)\equiv 0$. *Функције* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *могу имати безброј нула у сектору* $0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

Доказ: За комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда $\dfrac{dw}{dz}-w(z)=0$ имамо да је $a(z)=-1$, односно $\alpha(x,y)=-1$ и $\beta(x,y)=0$. Нуле, за $u(x,y)$ и за $v(x,y)$ су редом у решењима једначина $\int(0+(-1)kdx)=-kx=-\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ и $\int(0+(-1)kdx)=-kx=$ $=\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$, или нуле по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ су за $u(x,y)$ и $v(x,y)$ редом у тачкама $x_u=\dfrac{1}{k}\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$, $x_v=-\dfrac{1}{k}\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$. По x-оси је $k=\tan\varphi=0$. Одавде, нуле функције $u(x,0)$ су у $x_u=\infty$, а нуле $v(x,0)$ су у $x_v=-\infty$, што значи да нема коначних нула. По правцу $y=x$, дакле по правој где је $k=1$, нуле за $u(x,x)$ су у $x_u=\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$, а за $v(x,x)$ у $x_v=-\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$. По y-оси је $k=\tan\varphi=+\infty$, па су нуле за u у $x_u=0$, а за v у $x_v=0$. Постоји дакле једна нула $O(0,0)$.

Посматрајмо сада сектор $|z|=R, 0\le\arg z\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, и нека су константе $\alpha_1,\beta_1>0$. Тада је $x_u=\dfrac{1}{\tan\varphi}\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$, $y_u=kx_u=\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ и $x_v=-\dfrac{1}{\tan\varphi}\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$, $y_v=kx_v=$

$=-\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$, па су нуле $u(x,y)$ у тачкама $M_u\left(\dfrac{1}{\tan\varphi}\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1},\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\right)$, а нуле $v(x,y)$ у тачкама $M_v\left(-\dfrac{1}{\tan\varphi}\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1},-\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\right)$. Дакле, у првом квадранту само функција $u(x,y)$ има нуле и то су тачке M_u. Функција $v(x,y)$ тада има нуле у трећем квадранту.

Ако је $0<x_u\le R$, тада је $0<\dfrac{1}{\tan\varphi}\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\le R$. Ако је ордината $y_u=\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\le R$, тада постоји само један пресек у тачки M_u. Дакле, за једно $k=\tan\varphi$, то јест за једно φ и за $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\le\tan(Rk)$, постоји само једна нула M_u. Међутим, ако $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ расте, на пример од R до $2R$, тада је ордината $y_u=\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ већа од R, а мање од $2R$, па за исто φ постоји још једна нула. Значи, нуле зависе и од R. Дакле, за једно φ, или $k=\tan\varphi$, односно за један правац $y=kx$, функција $u(x,y)$ има на њему безброј нула које зависе и од R. Има укупно nR нула, ако R расте до nR. Значи, ако $n\to\infty$, само функција $u(x,y)$ има бесконачно много нула за $R\to+\infty$. Нуле функције $v(x,y)$ су на супротном делу праве $y=kx,$ то јест на правцу $y=-kx$, али је хоризонтала којом сечемо круг $|z|=R$ сада $y_v=-\arctan\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$.

Закључујемо, за дато $k=\tan\varphi$, константно и позитивно, за дато R, које је променљив параметар и за α_1,β_1 позитивне и променљиве константе важи:

-за $0<\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\le R$, постоји једна нула x_u функције $u(x,y)$

-за $R<\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\le 2R$, постоје две нуле x_u и x_u' функције $u(x,y)$

-за $2R<\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\le 3R$, постоје три нуле x_u, x_u',x_u'' функције $u(x,y)$,

$\vdots$

-за $(n-1)R<\arctan\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}\le nR$, постоји n нула $x_u,x_u',x_u'',\ldots,x_u^{(n-1)}$ функције $u(x,y)$ и ниједне нуле функције $v(x,y)$. ■

Општи случај комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда. Видели смо да су нуле комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда (1.4.1) са аналитичким коефицијентом одређене интегралима (1.6.1) за $u(x,y)$ и (1.6.2) за

$v(x,y)$, и да никада није $u(x,y)=v(x,y)=0$ истовремено. Те нуле, по сектору $|z|=R, \arg z=\varphi$, зависе од R, од $k=\tan\varphi$, као и од константе $c=\alpha_1+i\beta_1$, и важи теорема 1.6.2. Ако посматрамо сектор $|z|=R, 0\le \arg z<\frac{\pi}{2}$, тада у општем случају $u(x,y)$ и $v(x,y)$ могу имати по било ком правцу $y=kx$, $k=\tan\varphi$ много нула, али се оне неће никада поклопити, осим у $O(0,0)$. Примећујемо да интеграли (1.6.1) и (1.6.2) зависе од две аналитичке функције $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$, две почетне вредности α_1 и β_1, за које је $c_0=\alpha_1+i\beta_1$ и од два промењива параметра φ и R, $\left(|z|=R,\ k=\arctan\varphi, 0\le\varphi<\frac{\pi}{2} \right)$.

Код непрекидног кретања φ, $0<\max\varphi<\frac{\pi}{2}$, по сваком правцу има коначно много нула само $u(x,y)$ и само $v(x,y)$, али у општем случају укупно ће их имати безброј. Ако је N_u број нула функције $u(x,y)$ по једном правцу $y=kx$, тада је због непрекидности померања угла φ укупан број нула дат са $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{\varphi=0}^{\max\varphi} N_u$. Слично се добија ако у (1.4.1), коефицијент $a(z)$ није константа, већ нека аналитичка функција.

Илуструјмо ово на примеру.

Пример 1.13. За комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}+(1-2z)w(z)=0$ имамо да је $a(z)=1-2z$ аналитичка функција од z. Из $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=(1-2x)-2iy$, следи $\alpha(x,y)=1-2x$ и $\beta(x,y)=-2y$. Решење једначине је

$$
\begin{aligned}
w(z)&=(\alpha_1+i\beta_1)e^{-\int a(z)dz}=\\
&=(\alpha_1+i\beta_1)e^{-\int[(1-2x)dx+2ydy]}\left[\cos\int\left[-(1-2x)dy+2ydx\right]+i\sin\int\left[-(1-2x)dy+2ydx\right]\right],
\end{aligned}
$$

па из (1.6.1) имамо да су нуле за $u(x,y)$ у решењима једначине $\int\left[-2kx+k(1-2x)\right]dx=-\arctan\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, или $-kx^2+k\left(x-x^2\right)=-\arctan\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, док из (1.6.2) следи, нуле за $v(x,y)$ су у решењима једначине $\int\left[-2kx+k(1-2x)\right]dx=\arctan\frac{\beta_1}{\alpha_1}$, или $-kx^2+k\left(x-x^2\right)=\arctan\frac{\beta_1}{\alpha_1}$. Одавде добијамо квадратне једначине за апсцисе нула, за $u\left(x,y\right)$ из $2kx^2-kx-\arctan\frac{\alpha_1}{\beta_1}=0$ имамо $x_{1|2}=\frac{1}{4k}\left(k\pm\sqrt{k^2+8k\arctan\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\right)$, а за $v\left(x,y\right)$ из $2kx^2-kx+\arctan\frac{\beta_1}{\alpha_1}=0$ добијамо $x_{3|4}=\frac{1}{4k}\left(k\pm\sqrt{k^2-8k\arctan\frac{\beta_1}{\alpha_1}}\right)$.

Ординате нула су редом $y_{1|2}=kx_{1|2}=\frac{1}{4}\left(k\pm\sqrt{k^2+8k\arctan\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\right)$ и $y_{3|4}=kx_{3|4}=\frac{1}{4}\left(k\pm\sqrt{k^2-8k\arctan\frac{\beta_1}{\alpha_1}}\right)$. Геометријски, нуле су у пресецима правих $y=kx$ са $u\left(x,y\right)$ или у пресецима правих $y=kx$ са $v\left(x,y\right)$.

Због једноставности коефицијента $a(z)=1-2z$, комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}+\left(1-2z\right)w\left(z\right)=0$ можемо решити и директно. Из

$$w\left(z\right)=Ce^{-\int a(z)dz}=Ce^{-\int(1-2z)dz}=Ce^{z^2-z}=Ce^{x^2-y^2-x}\left[\cos\left(2xy-y\right)+i\sin\left(2xy-y\right)\right]=0$$

имамо $\left|w\right|=e^{x^2-y^2-x}\neq 0$, па остаје $u\left(x,y\right)=0$ за $\cos\left(2xy-y\right)=0$ и $v\left(x,y\right)=0$ за $\sin\left(2xy-y\right)=0$. Одавде следи $y\left(2x-1\right)=\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2},k=1,2,...$ и $y\left(2x-1\right)=k\pi$, $k=0,1,...$. Дакле, нуле функције $u\left(x,y\right)$ леже на кривој $y_1=\frac{1}{2x-1}\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2},k=1,2,...$, док нуле функције $v\left(x,y\right)$ леже на кривој $y_2=\frac{1}{2x-1}k\pi\quad k=0,1,...$. Геометријски, ово су равнокраке хиперболе које се никада не секу. Закључујемо да нема заједничких нула за $u\left(x,y\right)$ и $v\left(x,y\right)$.

Случај комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда са константним коефицијентом.

За комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда (1.4.1) са константним коефицијентом $a\left(z\right)=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ имамо да су изводи $a'_x=a'_y=0,\ b'_x=b'_y=0$. Заменом ових вредности у реалан систем ПДЈ (1.5.4) за ДЈ (1.4.1) добијамо систем ПДЈ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha u(x, y) + \beta v(x, y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\beta u(x, y) - \alpha v(x, y).$$

Одавде елиминацијом једне реалне функције, на пример $v(x, y)$ добијамо мешовит систем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) u(x, y) = 0 \\ \beta v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u(x, y)\end{gathered} \tag{1.6.3}$$

од једне ПДЈ другог реда коју решавамо непосредно као обичну ДЈ са константним коефицијентима и једне алгебарске једначине. Познато је да се ДЈ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) u(x, y) = 0$ сменом $u = e^{-\frac{1}{2}\int 2a dx} \Pi(x, y) = e^{-ax} \Pi(x, y)$ трансформише у каноничну диференцијалну једначину другог реда

$$\frac{\partial^2 \Pi(x, y)}{\partial x^2} + b^2 \Pi(x, y) = 0$$

чије је опште решење $\Pi(x, y) = \phi_1(y) \cos bx + \phi_2(y) \sin bx$, где су $\phi_1(y)$ и $\phi_2(y)$ произвољне непрекидно диференцијабилне функције које зависе само од y. Одавде је $u(x, y) = e^{-\alpha x} \left(\phi_1(y) \cos bx + \phi_2(y) \sin bx\right)$, док $v(x, y)$ налазимо из друге једначине система (1.5.5).

На основу изложеног закључујемо да трансформација комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда (1.4.1) са аналитичким коефицијентом на систем реалних ПДЈ првог реда, односно на систем од једне ПДЈ другог реда и једне алгебарске једначине, није најсрећније решење у пракси, јер се морају задати допунски услови за одређивање функција $\phi_1(y)$ и $\phi_2(y)$. Зато нуле решења комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда (1.4.1) одређујемо непосредним свођењем комплексне ДЈ само на систем обичних ДЈ првог реда или на мешовити систем од једне обичне ДЈ другог реда и једне алгебарске једначине, све са циљем да избегнемо произвољне функције у општем решењу код ПДЈ првог и другог реда.

Глава 2

ИТЕРАЦИЈЕ У КОМПЛЕКСНОМ ПОДРУЧЈУ

У скупу комплексних бројева и функција познат је појам модула $|w|$, који изражава w кроз реалне бројеве. Ако $|w|$ има неке одређене особине: ограниченост, могућност упоређења, понашање,… тада кажемо да операција и оператор w конвергирају или теже ка неком резултату.

Комплексне диференцијалне једначине код којих се не могу применити квадратуре могу се решити методом аналитичке замене или методом итерације. Основа за ове методе је основни математички принцип, такозвани принцип фиксне тачке.

Нека је $f : X \to X$ пресликавање метричког простора X на самог себе. Тачка $x \in X$ је *фиксна тачка* пресликавања f ако важи $f(x) = x$.

Пресликавање $f : X \to X$ је *контрактивно* односно *контракција*, ако важи

$$(\exists q \in [0,1))(\forall x, y \in X): |f(x) - f(y)| \leq q|x - y| .$$

Број q се назива *коефицијент контракције* f .

Следећа теорема има примену у доказивању егзистенције и јединствености решења различитих једначина и система једначина, као и у доказивању конвергенције низова.

Банахова[1] **теорема о фиксној тачки**. *Нека је* X *комплетан метрички простор и* $f : X \to X$ *контрактивно пресликавање. Тада постоји тачно једна фиксна тачка пресликавања* f .

[1] *Stefan Banach (1892-1945), пољски математичар*

Приметимо да су услови из Банахове теореме о фиксној тачки довољни али не и потребни за егзистенцију и јединственост фиксне тачке.

Са друге стране, ако је x_n произвољна тачка из X, тада низ тачака $\{x_n\}: x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$ конвергира и његова гранична вредност $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ задовољава једначину $f(x) = x$. Осим тога, ако је $x' = f(x')$, тада је $x' = x$. Низ $\{x_n\}$ се зове *итерирани низ* са почетном тачком x_0, а начин на који се добија фиксна тачка познат је као *метод сукцесивних апроксимација* или *метод итерација*.

Код реалних обичних ДЈ у неким случајевима, ако су испуњени неки "блажи" услови, се не доказује да је интегрални оператор контрахирајући. На пример, реална ДЈ првог реда $y' = f(x, y)$ у области G има јединствено решење $y(x)$ које се може одредити итерацијама, само ако је f непрекидна функција која задовољава Липшицов[2] услов.

Функција $f(x, y)$ у области G задовољава *Липшицов услов* ако важи релација

$$\left| f(x, y) - f(x, Y) \right| \le k \left| y - Y \right|$$

за ма које две тачке тачке $M_1(x, y)$ и $M_2(x, Y)$ из области G. Константа $k > 0$ се зове *Липшицова константа*.

У даљем раду $f \in Lip$ у G означава функцију која у области G задовољава Липшицов услов. Ако је функција још и непрекидна или још и диференцијабилна класе C^1 онда пишемо $f \in (C, Lip)$ у G, или $f \in (C^1, Lip)$ у G.

Када се ради о обичним реалним ДЈ другог реда $y'' = f(x, y, y')$ да ли је довољна непрекидност или се мора доказати контракција интегралног оператора, зависи од облика ДЈ. Ако је ДЈ канонична, довољна је непрекидност и Липшицов услов за конвергенцију низа итерација. Али, ако имамо потпуну линеарну ДЈ или хомогену или нехомогену (принудне осцилације) морамо доказати контракцију интегралног оператора, без обзира да ли ДЈ директно решавамо итерацијама, или је трансформишемо на систем обичних ДЈ

$$\left.\begin{aligned} y' &= z \\ z' &= f(x, y, z) \end{aligned}\right\}$$

[2] *Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), немачки математичар*

а затим методом редова-итерација одређујемо решење.

Што се тиче итерација, са историјског аспекта, за решавање интегралних једначина, позната је Пикар-Линделефова метода сукцесивних апроксимација. Према овој методи, ако су сукцесивне апроксимације само непрекидне функције, укључујући и почетну апроксимацију коју бирамо произвољно, низ итерација $\left\{y^{[n]}(x)\right\}$, $n=1,2,...$ униформно конвергира ка решењу једначине.

Међутим, код комплексних функција нема релација “$>$” или “$<$”, модул се не може одредити независно, непрекидност је или појачана или ослабљена, па не можемо користити Пикар-Линделефову методу итерација за решавање комплексних ДЈ. Тако код комплексне ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz}=f(z,w)$, чији су коефицијенти $a_i(z)$ аналитичке функције, или код операторских једначина са изводима $\frac{\partial w}{\partial z}$ или $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ и са коефицијентима $A_i(z,\bar{z})$, или код Векуове[3] једначине $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=Aw+B\bar{w}+F$ где коефицијенти $A=A(z,\bar{z})$, $B=B(z,\bar{z})$, $F=F(z,\bar{z})$ припадају простору функције $L_p(G)$, за $p\geq 2$, могу се спроводити итерације, али за сваку једначину понаособ морамо доказати контракцију, а затим наћи коефицијент контракције q, који зависи само од броја поступака n и који тежи нули кад $n\to\infty$.

Дакле, код комплексних ДЈ се увек мора доказати да је интегрални оператор контрахирајући, док код реалних ДЈ то није случај.

2.1 Комплексна хомогена линеарна диференцијална једначина првог реда кроз итерације

Познато је, из Главе 1, да је комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда са аналитичким коефицијентом

$$\frac{dw}{dz}=a(z)w(z) \tag{2.1.1}$$

лако решива интегралним раздвајањем промењивих, $\frac{dw}{w}=a(z)dz,\ w(z)\neq 0$. Одавде је

[3] *Илья Не́сторович Ве́куа (1907-1977), грузијски математичар*

$$\ln w(z) = \int_{L\,:\,z_0}^{z} a(z)\,dz + C$$

где комплексни интеграл не зависи од пута L који повезује тачке z_0 и z, већ само од почетне и крајње тачке и где C одређујемо из услова $w(z_0) = w_0$. Тако из, $\ln w_0 = \int_{z_0}^{z} a(z)\,dz + C = 0 + C$, добијамо решење

$$w(z) = w_0 \exp\left(\int_{z_0}^{z} a(z)\,dz\right). \qquad (2.1.2)$$

За итерације дате једначине је важно да је $a(z)$ аналитичка, непрекидна функција по кривој L. Међутим, ако је L затворена крива унутар које функција $a(z)$ нема прекиде, тада постоји линијски интеграл (2.1.2) и на основу Кошијеве теореме важи

$$\oint_L a(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\xi} a(z).$$

Дакле, решење једначине по затвореној путањи је константа

$$w(z) = w_0 \exp\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\xi} a(z)\right).$$

Ако комплексна ДЈ има сингуларитет $z = \xi$ који лежи на кривој L, не можемо користити итерације и проблем се своди на решавање несвојствених криволинијских интеграла, заокруживањем сингуларитета круговима произвољно малог пречника.

Комплексна ДЈ (2.1.1) је еквивалентна са интегралном једначином

$$w(z) = \int_{z_0}^{z} a(z)\,w(z)\,dz + w_0 \qquad (2.1.3)$$

што значи да је $w(z)$ решење полазне једначине ако и само ако је решење интегралне једначине (2.1.3).

На основу интегралне једначине (2.1.3) дефинишемо низ итерација $\left\{w^{[n]}(z)\right\}$

$$w^{[n]}(z) = w_0 + \int_{z_0}^{z} a(z) w^{[n-1]}(z) dz, n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2.1.4)$$

са почетном апроксимацијом $w^{[0]}(z)$ за коју је $w^{[0]}(z_0) = w(z_0) = w_0$. Почетну апроксимацију бирамо произвољно али тако да је $w^{[0]}(z)$ непрекидна функција у области итерација која приближно задовољава једначину. Чланови низа (2.1.4) су редом

$$w^{[1]}(z) = \int_{z_0}^{z} a(z) w^{[0]}(z) dz + w_0 = w_0 \left[1 + \int_{z_0}^{z} a(z) dz \right]$$

$$w^{[2]}(z) = \int_{z_0}^{z} a(z) w^{[1]}(z) dz + w_0 = w_0 \left[1 + \int_{z_0}^{z} a(z)\, dz + \int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z)\, dz^2 \right]$$

$$w^{[3]}(z) = \int_{z_0}^{z} a(z) w^{[2]}(z)\, dz + w_0 = w_0 \left[1 + \int_{z_0}^{z} a(z) dz + \int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) dz^2 + \int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) dz^3 \right]$$

$\vdots$

Користећи принцип математичке индукције добијамо

$$w^{[n]}(z) = \int_{z_0}^{z} a(z) w^{[n-1]}(z) dz + w_0 = w_0 [1 + \int_{z_0}^{z} a(z) dz + \int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) dz^2 + \int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) dz^3 +$$

$$+ \ldots + \underbrace{\int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) \ldots \int_{z_0}^{z} a(z) dz^n}_{n\text{-интеграла}}]$$

или

$$w^{[n]}(z) = w_0 \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\int_{z_0}^{z} a(z) \int_{z_0}^{z} a(z) \ldots \int_{z_0}^{z} a(z) dz^k}_{k\text{-интеграла}} \qquad (2.1.5)$$

и тако даље.

Циљ нам је сада да покажемо да низ $w^{[0]}(z), w^{[1]}(z), \ldots, w^{[n]}(z), \ldots$ испуњава услове Пикарове теореме, јер тада низ итерација конвергира ка граничној функцији $w(z)$. Такође по Пикару, $w^{[n]}(z)$ је приближно решење чија се тачност повећава са повећањем броја итерација, па је

$$w(z)=w_0\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\int_{z_0}^{z}a(z)\int_{z_0}^{z}a(z)\ldots\int_{z_0}^{z}a(z)\,dz^k}_{k\text{-интеграла}} \tag{2.1.6}$$

решење интегралне једначине (2.1.3), а због еквиваленције и решење полазне комплексне ДЈ.

Проверимо да ли је интегрални оператор (2.1.4) контракција. Претпоставимо прво да се у области G, у z-равни, налази коначна крива L по којој интегралимо. Будући да је $a(z)$ аналитичка функција у G то је њен модул ограничен, односно $\exists M>0$ тако да је $|a(z)|\le M$, за $\forall z\in G$. Ради лакшег рачунања извршимо транслацију координатног система узимајући да је $z_0=0$. Како је

$$\left|w^{[1]}(z)-w^{[0]}(z)\right|=\left|w_0\int_0^z a(z)dz\right|\le|w_0|\Big(\max_{z\in G}|a(z)|\Big)|z|,$$

математичком индукцијом лако доказујемо да је

$$\left|w^{[n]}(z)-w^{[n-1]}(z)\right|=\left|w_0\underbrace{\int_0^z a(z)\int_0^z a(z)\ldots\int_0^z a(z)\,dz^n}_{n\text{-интеграла}}\right|=|w_0|\frac{\left|\int_0^z a(z)dz\right|^n}{n!}\le|w_0|\Big(\max_{z\in G}|a(z)|\Big)^n\frac{|z|^n}{n!}\le$$

$$\le|w_0|\frac{(M|z|)^n}{n!}\quad.$$

Конструишимо функционални ред

$$w^{[0]}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[w^{[n]}(z)-w^{[n-1]}(z)\right] \tag{2.1.7}$$

који је мајориран редом $\sum_{n=0}^{\infty}|w_0|\frac{(M|z|)^n}{n!}$. Како је мајориран ред конвергентан јер на основу Даламберовог[4] критеријума $D_n=\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\left|\frac{M^{n+1}\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{M^n\frac{|z|^n}{n!}}\right|=M\frac{|z|}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0,$ за свако $|z|$,

[4] *Jean le Rond d'Alembert (1717-1789), француски математичар*

то по Вајерштрасовом[5] критеријуму функционалнии ред (2.1.7) апсолутно и униформно конвергира ка функцији $w^*(z)$. Дакле, функционални ред (2.1.7) конвергира па конвергира и низ његових парцијалних сума, а n-та парцијална сума реда (2.1.7) је n-та итерација $w^{[n]}(z)$. Низ парцијалних сума конвергира истој функцији којој конвергира и функционални ред (2.1.7), па је $\lim\limits_{n\to\infty} w^{[n]}(z) = w^*(z)$. Из дефиниције низа итерација (2.1.4) преласком на граничну вредност добијамо

$$\lim_{n\to\infty} w^{[n]}(z) = w_0 + \int_0^z a(z) \lim_{n\to\infty} w^{[n-1]}(z)\, dz, n = 1,2,3,\dots,$$

односно $w^*(z) = w_0 + \int\limits_0^z a(z) w^*(z)\, dz, n = 1,2,3,\dots$. Значи, $w^*(z)$ је решење интегралне једначине (2.1.3), а због еквиваленције и решење полазне комплексне ДЈ (2.1.1).

Како је по Пикаровој теореми, гранична функција низа итерација $\left\{w^{[n]}(z)\right\}, n = 1,2,\dots$ јединствена, јединствено је и решење интегралне једначине и њој еквивалентне комплексне ДЈ, па је $w^*(z) = w(z)$ за $\forall z \in G$. На основу овога следи да решење комплексне ДЈ (2.1.1) има облик реда-итерација од вишеструких интеграла, то јест да је

$$w(z) = w_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\int_{z_0}^z a(z) \int_{z_0}^z a(z) \dots \int_{z_0}^z a(z)\, dz^k}_{k\text{-интеграла}}.$$

Решење (2.1.2) добијамо и ако трансформишемо чланове реда-итерација (видети [12],[41]).

Нека је $I_1 = \int\limits_0^z a(z)\, dz = \dfrac{\left(\int\limits_0^z a(z)\, dz\right)}{1!}$. Тада је $I_2 = \int\limits_0^z a(z) \left(\int\limits_0^z a(z)\, dz\right) dz = \int\limits_0^z a(z) I_1 dz$, односно решавањем помоћу парцијалне интеграције, за $u = I_1 = \int a(z)\, dz$ и $dv = a(z)\, dz$, добијамо $I_2 = I_1^2 - \int a(z) \int a(z)\, dz^2$, или $I_2 = I_1^2 - I_2$. Из ове једнакости следи $I_2 = \dfrac{I_1^2}{2} = \dfrac{\left(\int\limits_0^z a(z) dz\right)^2}{2!}$. Слично, за I_3 имамо

[5] *Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897), немачки математичар*

$$I_3 = \int_0^z a(z)\left(\int_0^z a(z)\int_0^z a(z)\ dz^2\right)dz = \int_0^z a(z) I_2 dz = \int_0^z a(z)\frac{\left(\int_0^z a(z)dz\right)^2}{2!}dz =$$

$$= \int_0^z \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{3!}\left(\int_0^z a(z)dz\right)^3\right) = \frac{1}{3!}\left(\int_0^z a(z)dz\right)^3 = \frac{I_1^3}{3!}$$

$$I_4 = \int_0^z a(z)\left(\int_0^z a(z)\int_0^z a(z)\int_0^z a(z)\ dz^3\right)dz = \int_0^z a(z) I_3 dz = \int_0^z a(z)\frac{\left(\int_0^z a(z)dz\right)^3}{3!}dz =$$

$$= \int_0^z \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4!}\left(\int_0^z a(z)dz\right)^4\right) = \frac{\left(\int_0^z a(z)dz\right)^4}{4!} = \frac{I_1^4}{4!}$$

$\vdots$

На крају, математичком индукцијом лако добијамо $I_n = \frac{I_1^n}{n!} = \frac{\left(\int_0^z a(z)dz\right)^n}{n!}$ и тако даље. Одавде је очигледно да је решење

$$w(z) = w_0\left[1 + \frac{\left(\int_0^z a(z)dz\right)^1}{1!} + \frac{\left(\int_0^z a(z)dz\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\int_0^z a(z)dz\right)^n}{n!} + \ldots\right] = w_0 \exp\left(\int_0^z a(z)dz\right).$$

2.2 Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда кроз итерације

У последње време, после 2000 године, посвећује се велика пажња проблему одређивања броја нула и локације нула решења каноничне комплексне ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2} + a(z)w(z) = 0, \tag{2.2.1}$$

где је $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непозната функција, $z = x + iy$ комплексна независна промењива, $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ аналитички коефицијент (видети [10],

[23],[26]). По Пикар-Поенкареовом принципу, једначина има аналитичко решење $w(z)$ које је непрекидна функција и које задовољава Коши-Риманове услове. Да бисмо одредили решење $w(z)$ а затим број нула и локације нула решења дате ДЈ, што је веома важно у техници, ДЈ решавамо методом редова-итерација тако што из нормалног облика $\frac{d^2w}{dz^2} = -a(z)w(z)$ одредимо прве интеграле $\frac{dw}{dz} = c_1 - \int_0^z a(z)w(z)dz$ и даље

$$w(z) = c_1 z + c_2 - \int_0^z\int_0^z a(z)w(z)dz^2, \tag{2.2.2}$$

где су интеграционе константе c_1 и c_2 комплексни бројеви. Ако нормирамо ово решење, тако да је $w(0)=1, w'(0)=0$ тада је $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$ и добијамо један партикуларан интеграл $w_1(z)$. За $w(0)=0, w'(0)=1$ је $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$ па добијамо још један партикуларни интеграл $w_2(z)$. Интеграли $w_1(z)$ и $w_2(z)$ су линеарно независни јер познато је да комплексна ДЈ другог реда има два линеарно независна партикуларна интеграла које редом означавамо са

$$w_1(z) = 1 - \int_0^z\int_0^z a(z)w_1(z)dz^2, \tag{2.2.3}$$

$$w_2(z) = z - \int_0^z\int_0^z a(z)w_2(z)dz^2. \tag{2.2.4}$$

Ако са

$$w_1^{[n]}(z) = 1 - \int_0^z\int_0^z a(z)w_1^{[n-1]}(z)dz^2,\ n = 1,2,... \tag{2.2.5}$$

$$w_2^{[n]}(z) = z - \int_0^z\int_0^z a(z)w_2^{[n-1]}(z)dz^2,\ n = 1,2,... \tag{2.2.6}$$

дефинишемо низове итерација $\{w_1^{[n]}(z)\}$ и $\{w_2^{[n]}(z)\}$, са почетним апроксимацијама $w_1^{[0]}(z)$ и $w_2^{[0]}(z)$ за које важи $w_1^{[0]}(0) = w_1(0) = 1$, $w_2^{[0]}(0) = w_2(0) = 0$, тада, на пример, из (2.2.5) лако добијамо чланове низа итерација

$$w_1^{[1]}(z) = 1 - \int_0^z\int_0^z a(z)w_1^{[0]}(z)dz^2 = 1 - \int_0^z\int_0^z a(z)dz^2,$$

$$w_1^{[2]}(z)=1-\int_0^z\int_0^z a(z)w_1^{[1]}(z)dz^2=1-\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2+\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2,$$

$$w_1^{[3]}(z)=1-\int_0^z\int_0^z a(z)w_1^{[2]}(z)dz^2=1-\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2+\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2-$$

$$-\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2$$

$\vdots$

Даље, математичком индукцијом налазимо

$$w_1^{[n]}(z)=1-\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2+\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2+\ldots+(-1)^n\underbrace{\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\ldots\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2}_{n-\text{двојних интеграла}},$$

или

$$w_1^{[n]}(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\underbrace{\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\ldots\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2}_{k-\text{двојних интеграла}} \tag{2.2.7}$$

и тако даље.

Сличним поступком, из (2.2.6) добијамо чланове другог низа итерација у облику

$$w_2^{[n]}(z)=z+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\underbrace{\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\ldots\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z za(z)dz^2}_{k-\text{двојних интеграла}}. \tag{2.2.8}$$

Ове математичке конструкције, имају смисла уколико низови итерација $\{w_1^{[n]}(z)\}$ и $\{w_2^{[n]}(z)\}$ конвергирају. Проучићемо прво конвергенцију низа $\{w_1^{[n]}(z)\}$. Проверимо да ли је интегрални оператор (2.2.5) контракција. Користићемо апарат модула, јер је једино тако могуће извршити оцене.

Претпоставимо најпре да се у области G, у z-равни, налази коначна крива L по којој интегралимо. Будући да је $a(z)$ аналитичка функција у G то је њен модул ограничен, односно $\exists M>0$ тако да је $|a(z)|\le M$, за $\forall z\in G$. Како је разлика првих итерација

$$\left|w_1^{[1]}(z)-w_1^{[0]}(z)\right|=\left|\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\right|\le\left(\max_{z\in G}|a(z)|\right)\int_0^z\int_0^z|dz|^2\le M\frac{|z|^2}{2!},$$

користећи принцип математичке индукције имамо оцену

$$\left|w_1^{[n]}(z)-w_1^{[n-1]}(z)\right| \le \left|\underbrace{\int_0^z\int_0^z a(z)\,dz^2 \ldots \int_0^z\int_0^z a(z)\,dz^2}_{n-\text{двојних интеграла}}\right| \le \underbrace{\int_0^z\int_0^z |a(z)||dz|^2 \ldots \int_0^z\int_0^z |a(z)||dz|^2}_{n-\text{двојних интеграла}} \le$$

$$\le \left(\max_{z\in G}|a(z)|\right)^n \underbrace{\int_0^z\int_0^z |dz|^2 \ldots \int_0^z\int_0^z |dz|^2}_{n-\text{двојних интеграла}} \le \frac{\left(M|z|^2\right)^n}{(2n)!}.$$

Конструишимо функционални ред

$$w_1^{[0]}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[w_1^{[n]}(z)-w_1^{[n-1]}(z)\right] \tag{2.2.9}$$

који је мајориран редом $\sum_{n=0}^{\infty}|w_0|\frac{\left(M|z|^2\right)^n}{(2n)!}$. На основу Даламберовог критеријума количник $D_n=\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\left|\frac{M^{n+1}\frac{|z|^{2n+2}}{(2n+2)!}}{M^n\frac{|z|^{2n}}{(2n)!}}\right|=M\,\frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)}\to 0$, када $n\to\infty$ за свако $|z|$, па следи да мајориран ред конвергира. Одавде функционални ред (2.2.9) по Вајерштрасовом критеријуму апсолутно и униформно конвергира ка функцији $w_1^*(z)$. Значи, функционални ред (2.2.9) конвергира, па конвергира ка истој граничној функцији и низ његових парцијалних сума, а његова n-та парцијална сума је n-та итерација $w_1^{[n]}(z)$. Одавде је $\lim_{n\to\infty}w_1^{[n]}(z)=w_1^*(z)$. Преласком на граничну вредност, из дефиниције низа итерација (2.2.5) добијамо

$$\lim_{n\to\infty}w_1^{[n]}(z)=1-\int_0^z\int_0^z a(z)\lim_{n\to\infty}w_1^{[n-1]}(z)\,dz\,, n=1,2,3,\ldots,$$

Односно $w_1^*(z)=1-\int_0^z\int_0^z a(z)w_1^*(z)\,dz$. Значи, $w_1^*(z)$ је решење интегралне једначине (2.2.3), а због еквиваленције и решење полазне ДЈ. Како је по Пикаровој теореми гранична функција низа итерација једнозначно одређена, једнозначно је и решење $w_1(z)$ дате једначине, па је $w^*_1(z)=w_1(z)$ за $\forall z\in G$. Дакле, $w_1(z)$ је сума реда-итерација од вишеструких интеграла, то јест

$$w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \underbrace{\int_0^z\int_0^z a(z)\,dz^2 \ldots \int_0^z\int_0^z a(z)\,dz^2}_{k-\text{двојних интеграла}} \quad .$$

Функција $w_1(z)$ је у области G аналитичко решење једначине (2.2.1). Све се потпуно аналогно може показати и за друго решење $w_2(z)$ комплексне ДЈ (2.2.1).

2.3 Комплексна једначина осцилација другог реда

Код комплексних функција није дефинисано $w(z)>0$ и $w(z)<0$, већ су функције $w(z)$ и $-w(z)$ равноправне, немају график, а заједничко им је то што је модуларна површина $F(x,y)=|w(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}$ једнака за обе. Она једино може бити једнака нули ако је њен модул једнак нули, $|w(z)|=0$. Егзистенција нула у комплексном подручју је замена за осцилаторност у реалном подручју. Ако је $f(z)$ аналитичка и има нуле, тада су оне изоловане, па када је $|f(z)|=\sqrt{u^2(x,y)+v^2(x,y)}=0$, за $u(x,y)=0$ и $v(x,y)=0$, тада $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ и $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ могу бити и негативне у некој околини те нуле. Тако, $|w(z)|=0$ значи да постоји могућност за неку делимичну осцилаторност, барем неког од делова: $u(x,y)$ или $v(x,y)$.

Важност нула комплексне функције није само у замени осцилаторности, већ много више у чињеници да је број нула еквивалентан рангу раста. Ово је познато из реалних осцилација, код каноничне ДЈ другог реда $y'' + a(x)y=0,\ a(x)>0, ya(x)\in(C,Lip)$ на $[0,+\infty)$ (видети [2],[6],[16],[23]). Веће $a(x)$ значи већу фреквенцију, а већа фреквенција одмах значи и већи број нула.

Код каноничне комплексне ДЈ другог реда (2.2.1), ако је $a(z)$ полином, можемо очекивати и n осцилација у зависности од степена полинома $a(z)$. Ако је $a(z)$ експоненцијална функција, тада у целој $z-$равни постоји безброј нула. Значи, у коначном делу $G,\ z-$равни, ДЈ (2.2.1) има више нула ако има експоненцијални коефицијент, него ако има полиномни.

Сада ћемо кроз разне облике каноничних комплексних ДЈ другог реда покушати да оправдамо назив "комплексна једначина осцилација" другог реда.

Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда са чисто реалним делом.

Нека је у каноничној комплексној ДЈ другог реда (2.2.1) са аналитичким коефицијентом решење $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ реално, то јест нека је облика $w(z)=u(x,y)$. Тада на основу Коши-Риманових услова имамо $\frac{\partial u}{\partial x}=0, \frac{\partial u}{\partial y}=0$. Одавде, на пример, из прве једначине налазимо $u(x,y)=\phi(y)$, где непознату функцију $\phi(y)$ одређујемо диференцирањем једначине $u(x,y)=\phi(y)$ по y и изједначавањем са једначином $\frac{\partial u}{\partial y}=0$. На крају добијамо да је решење комплексне ДЈ (2.2.1) константа.

Приметимо још да за аналитичан први и други извод функције $w(z)$ важи $\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, па се ДЈ (2.2.1) трансформише у једначину

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(z)u(x,y)=0 \tag{2.3.1}$$

где је $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=a(x,y)$ аналитичка функција од z. Да бисмо одржали реалност ове једначине узмимо да је $\beta(x,y)\equiv 0$. Разликујемо сада две могућности.

1° Нека је $y=0$. Тада једначина (2.3.1) није ПДЈ, већ је обична ДЈ, јер је $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2u}{dx^2}$.

Одавде имамо каноничну ДЈ осцилација другог реда $\frac{d^2u}{dx^2}+a(x)u(x)=0$, ако је $a(x)>0,\ \ ya(x)\in(C,Lip)$ у G.

2° Претпоставимо сада да је y параметар. Тада је (2.3.1) једначина осцилација другог реда са параметром. Она има осцилаторна решења на реалној полуоси. Нуле за косинусно решење, $u_1(x)=\cos_{a(x)}x$, су у решењима једначина $x\sqrt{a(x)}=(2n-1)\frac{\pi}{2}, n=1,2,3,\ldots$, а за синусно решење, $u_2(x)=\sin_{a(x)}x$, у решењима $x\sqrt{A(x)}=n\pi, n=0,1,2,\ldots$.

На крају, природно је посматрати и хармонијске осцилације. За $a(x)=1$ имамо каноничну ДЈ другог реда $y'' + y = 0$. Ове хармонијске осцилације имају решења (Еуклидов[6] аналитички $\sin x$ и $\cos x$) са еквидистантним нулама и једнаким амплитудама.

Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда са чисто имагинарним делом.
Канонична комплексна ДЈ другог реда (2.2.1) са аналитичким коефицијентом не може имати ни чисто имагинарно решење $w(z) = iv(x, y)$. Како је тада други извод $\frac{d^2w}{dz^2} = i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, добијамо једначину

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a(z)v(x, y) = 0.$$

Ово је контрадикција јер горња једначина не може имати комплексних решења ако је $a(z)$ комплексно. Међутим, претпоставка $\mathrm{Re}\,a(z) = 0$ противуречи аналитичности коефицијента $a(z)$. Чак и ако претпоставимо да је $a(z) = a(x)$ или $a(z) = a(x, y)$ и тада ово није аналитичка функција од z.

Регуларна аналитичка функција.
Ако је $a(z) = z = x + iy$ аналитичка функција, тада је канонична комплексна ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2} + zw(z) = 0 \qquad (2.3.2)$$

еквивалентна са интегралном једначином

$$w(z) = c_1 z + c_2 - \int_0^z\int_0^z zw(z)\,dz^2.$$

Избором константи c_1 и c_2 добијамо партикуларне интеграле

$$w_1(z) = 1 - \int_0^z\int_0^z zw_1(z)\,dz^2$$

и

$$w_2(z) = z - \int_0^z\int_0^z zw_2(z)\,dz^2.$$

За њих методом редова-итерација добијамо да важи

[6] *Euklid (323-283 п.н.е), грчки филозоф и математичар*

$$w_1(z)=1-\int_0^z\int_0^z z\,dz^2+\int_0^z\int_0^z zdz^2\int_0^z\int_0^z zdz^2-\int_0^z\int_0^z z\,dz^2\int_0^z\int_0^z z\,dz^2\int_0^z\int_0^z z\,dz^2+\dots$$
$$w_2(z)=z-\int_0^z\int_0^z z^2\,dz^2+\int_0^z\int_0^z zdz^2\int_0^z\int_0^z z^2\,dz^2-\int_0^z\int_0^z zdz^2\int_0^z\int_0^z zdz^2\int_0^z\int_0^z z^2\,dz^2+\dots.$$

Ако решимо све ове елементарне интеграле, имамо

$$w_1(z)=1-\frac{z^3}{3\cdot 2}+\frac{z^6}{(6\cdot 5)(3\cdot 2)}-\frac{z^9}{(9\cdot 8)(6\cdot 5)(3\cdot 2)}+\dots$$
$$w_2(z)=z-\frac{z^4}{4\cdot 3}+\frac{z^7}{(7\cdot 6)(4\cdot 3)}-\frac{z^{10}}{(10\cdot 9)(7\cdot 6)(4\cdot 3)}+\dots.$$

Примећујемо да у имениоцима чланова редова имамо непотпуне факторијале. Поставља се питање какве су функције $w_1(z)$ и $w_2(z)$ и да ли имају неке везе са функцијама $\sin z$ и $\cos z$, односно e^z, e^{iz}, јер је наш циљ да одредимо број нула и локације нула решења. Када методом редова-итерација не можемо да одредимо нуле решења и локације нула, јер не можемо да идентификујемо функције које су редовима-итерација дефинисани, прелазимо на други начин решавања комплексне ДЈ.

Пошто канонична комплексна ДЈ другог реда (2.3.2) има аналитичко решење, тада је и њен други извод аналитичан, па следи

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2v}{\partial x^2}=\big(-xu(x,y)+yv(x,y)\big)-i\big(xv(x,y)+yu(x,y)\big).$$

Одавде добијамо реалан систем ПДЈ другог реда

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=-xu(x,y)+yv(x,y)$$
$$\frac{\partial^2v}{\partial x^2}=-xv(x,y)-yu(x,y)$$

који није лако решив. Гледано партикуларно, само за $y=0$, имамо обичне изводе $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{d^2u}{dx^2}=u''(x)$ и $\frac{\partial^2v}{\partial x^2}=\frac{d^2v}{dx^2}=v''(x)$, а одавде и једначине $u''(x)=-xu(x,y)$ и $v''(x)=-xv(x,y)$. Добили смо једначине идентичне каноничној једначини другог реда $y''+xy=0$, чија решења методом редова-итерација гласе

$$y_1(x)=1-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^6}{(6\cdot 5)(3\cdot 2)}-\frac{x^9}{(9\cdot 8)(6\cdot 5)(3\cdot 2)}+\dots$$
$$y_2(x)=x-\frac{x^4}{4\cdot 3}+\frac{x^7}{(7\cdot 6)(4\cdot 3)}-\frac{x^{10}}{(10\cdot 9)(7\cdot 6)(4\cdot 3)}+\dots.$$

Познато је да за $x\geq 0$ ова решења дефинишу неелементарне функције $y_1(x)=\cos_x x$, $y_2(x)=\sin_x x$, које су према Штурмовим теоремама осцилаторне. Нуле, за $y_1(x)$ и $y_2(x)$, су редом у решењима једначина $x\sqrt{x}=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}, n=1,2,3,\dots$ и $x\sqrt{x}=n\pi, n=0,1,2,\dots.$ Како $a(x)=x\to+\infty$, ако x расте, то графици синуса и косинуса са базом x имају Продијевски карактер.

Узмимо сада и каноничну комплексну ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2}+e^z w(z)=0 \tag{2.3.3}$$

у којој је $a(z)=e^z$ аналитичка функција. Ако једначину решимо итерацијама за партикуларни интеграл $w_1(z)$ имамо

$$w_1(z)=\cos_{e^z} z=1-\int_0^z\int_0^z e^z dz^2+\int_0^z\int_0^z e^z dz^2\int_0^z\int_0^z e^z dz^2-\int_0^z\int_0^z e^z dz^2\int_0^z\int_0^z e^z dz^2\int_0^z\int_0^z e^z dz^2+\dots=$$
$$=1-\frac{e^z}{1!}+\frac{e^{2z}}{2^2}-\frac{e^{3z}}{2^2 3^2}-\frac{e^{4z}}{2^2 3^2 4^2}+\dots.$$

Из реда за $w_1(z)$ видимо да он брзо конвергира због $(n!)^2$ у имениоцу. Како више не можемо ништа да закључимо решавамо ДЈ на други начин. Елементарним трансформацијама из $\dfrac{d^2u}{dx^2}+i\dfrac{d^2v}{dx^2}+e^x(\cos y+i\sin y)\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]=0$, односно из система једначина

$$\frac{d^2u}{dx^2}+e^x\left[u(x,y)\cos y-v(x,y)\sin y\right]=0$$
$$\frac{d^2v}{dx^2}+e^x\left[u(x,y)\sin y+v(x,y)\cos y\right]=0$$

за $y=0$ добијамо нови систем

$$\frac{d^2u}{dx^2} + e^x u(x,y) = 0$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} + e^x v(x,y) = 0.$$

Како су парцијални изводи обични, то имамо математички идентичне обичне каноничне ДЈ другог реда за $u(x)$ и $v(x)$. Коефицијент e^x, који брзо расте, је непрекидан па из прве једначине система методом редова-итерација за партикуларне интеграле

$$u_1(x) = \cos_{e^x} x = 1 - \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 + \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 - \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 + \dots$$
$$u_2(x) = \sin_{e^x} x = x - \int_0^x\int_0^x xe^x dx^2 + \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 \int_0^x\int_0^x xe^x dx^2 - \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 \int_0^x\int_0^x e^x dx^2 \int_0^x x \int_0^x e^x dx^2 + \dots$$

добијамо фреквентне осцилације. За функције $u_1(x)$ и $u_2(x)$ важе приближне формуле

$$u_1(x) = \cos_{e^x} x \approx \cos x\sqrt{e^x},\ u_2(x) = \sin_{e^x} x \approx \frac{\sin x\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x}},$$

на основу којих следи да су нуле осцилација редом у решењима једначина $x\sqrt{e^x} = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1,2,3,\dots$ и $x\sqrt{e^x} = n\pi, n = 0,1,2,\dots$

На крају закључујемо да има основа да комплексну каноничну ДЈ другог реда (2.2.1) назовемо "комплексна једначина осцилација" другог реда зато што бар некада има реалне делове који имају осцилаторна решења.

Каноночна комплексна диференцијална једначина другог реда са реалним константним коефицијентом.

Нека је дата канонична комплексна ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2} + k^2 w(z) = 0, \tag{2.3.4}$$

где је $a(z) = k^2$ реална константа. Једначина (2.3.4) је специјалан случај каноничне комплексне ДЈ другог реда. Методом итерација добијамо да је

$$w_1(z)=1-\int_0^z\int_0^z k^2dz^2+\int_0^z\int_0^z k^2dz^2\int_0^z\int_0^z k^2dz^2-\int_0^z\int_0^z k^2dz^2\int_0^z\int_0^z k^2dz^2\int_0^z\int_0^z k^2dz^2+\ldots=$$
$$=1-\frac{(kz)^2}{2!}+\frac{(kz)^4}{4!}-\frac{(kz)^6}{6!}+\ldots$$
$$w_2(z)=z-\int_0^z\int_0^z zk^2dz^2+\int_0^z\int_0^z k^2dz^2\int_0^z\int_0^z zk^2dz^2-\int_0^z\int_0^z k^2dz^2\int_0^z\int_0^z k^2dz^2\int_0^z\int_0^z zk^2dz^2+\ldots=$$
$$=\frac{1}{k}\left[(kz)^1-\frac{(kz)^3}{3!}+\frac{(kz)^5}{5!}-\frac{(kz)^7}{7!}+\ldots\right].$$

Одавде је очигледно $w_1(z)=\cos(kz)$ и $w_2(z)=\frac{1}{k}\sin(kz)$. Како је по Ојлеровим[7] формулама

$$w_1(z)=\cos(kz)=\frac{e^{ikz}+e^{-ikz}}{2}=\frac{1}{2}\left[e^{-ky}(\cos kx+i\sin kx)+e^{ky}(\cos kx-i\sin kx)\right]=$$
$$=\cos kx\frac{e^{ky}+e^{-ky}}{2}+i\sin kx\frac{e^{-ky}-e^{ky}}{2}=\cos kx\cosh ky-i\sin kx\sinh ky$$
и
$$w_2(z)=\frac{1}{k}\sin(kz)=\frac{1}{k}\frac{e^{ikz}-e^{-ikz}}{2i}=\frac{1}{2ki}\left[e^{-ky}(\cos kx+i\sin kx)-e^{ky}(\cos kx-i\sin kx)\right]=$$
$$=\frac{1}{ki}\left[\cos kx\frac{e^{-ky}-e^{ky}}{2}+i\sin kx\frac{e^{-ky}+e^{ky}}{2}\right]=\frac{1}{k}(\sin kx\cosh ky+i\cos kx\sinh ky)$$

поставља се питање да ли $w_1(z)$ и $w_2(z)$ имају нула? Тада би требало за $w_1(z)=0$ истовремено да важи $u_1(x,y)=0$ и $v_1(x,y)=0$, односно у истим тачкама (x_k,y_k) да је $\cos kx\cosh ky=0$ и $\sin kx\sinh ky=0$. Како је у првој једначини овог система $\cosh ky\neq 0$ остаје да је $\cos kx=0$. Међутим, у нулама косинуса је синус различит од нуле, па остаје могућност $\sinh ky=0$, а то је само за $y=0$.

Дакле, решење $w_1(z)$ има изоловане нуле само на x-оси и то у тачкама $x=\frac{(2n-1)}{k}\frac{\pi}{2}$, $n=1,2,3,\ldots$, где је k дата константа. За нуле другог решења $w_2(z)$ треба да важи истовремено $u_2(x,y)=0$ и $v_2(x,y)=0$, односно $\sin kx\cosh ky=0$ и $\cos kx\sinh ky=0$. Одавде, на пример из прве једначине система имамо $\sin kx=0$ и $\cosh ky=0$, односно

[7] *Leonhard Euler (1707-1783), швајцарски математичар*

$x = \dfrac{n\pi}{k}, n = 0,1,2,\ldots$ и $y = 0$. Значи, нуле решења $w_2(z)$ су опет на x-оси и у тачкама $x = \dfrac{n\pi}{k}, n = 0,1,2,\ldots$. Очигледно, партикуларна решења каноничне комплексне ДЈ другог реда (2.2.1) немају заједничких нула.

Веома важно питање су и нуле општег решења $w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z) = 0$. Овај проблем има много могућности јер зависи и од интеграционих константи c_1, c_2. Понекад је важно наћи тачке или области где је само $u_1(x,y) = v_1(x,y) \neq 0$ или $u_2(x,y) = v_2(x,y) \neq 0$. У нашем случају то доводи до једначина $\cos kx \cosh ky = \sin kx \sinh ky$ и $\sin kx \cosh ky = -\cos kx \sinh ky$, то јест $\tanh ky = \cot kx$, $\tanh ky = -\tan kx$. Нуле се могу одредити ако експлицитно написане функције $ky = \operatorname{Artanh}(\cot kx)$ и $ky = -\operatorname{Artanh}(\tan kx)$ имају реалан смисао. Како је $-\infty < \cot kx < +\infty$, а Artanh има много грана, оваква питања нису тривијална.

Слично као код обичних ДЈ другог реда са константним коефицијентима, потражимо за једначину (2.3.4) решење у облику $w(z) = e^{rz}$, где је r комплексна константа коју треба одредити. Заменом $\dfrac{dw}{dz} = re^{rz}$, $\dfrac{d^2w}{dz^2} = r^2 e^{rz}$ у (2.3.4) добијамо карактеристичну једначину $e^{rz}(r^2 + k^2) = 0$. Следи да и поред тачака z, за које је $e^{rz} = 0$, (јер таквих може да има, иако их овде нема), преостаје да је $r^2 + k^2 = 0$, односно $r = \pm ki$. Одавде добијамо нови систем партикуларних интеграла $w_1^*(z) = e^{ikz}, w_2^*(z) = e^{-ikz}$. Како је $w_1^*(z) = = e^{-ky}(\cos kx + i \sin kx) \neq 0$ и $w_2^*(z) = e^{ky}(\cos kx - i \sin kx) \neq 0$, то $w_1^*(z)$ и $w_2^*(z)$ немају нуле. Међутим, можемо да одредимо једну линеарну комбинацију која би имала нуле. Из $c_1 e^{ikz} + c_2 e^{-ikz} = 0$, односно $e^{2ikz} = -\dfrac{c_2}{c_1}$, логаритмовањем добијамо $z = \dfrac{1}{2ik} \ln\left(-\dfrac{c_2}{c_1}\right)$. Одавде је $z = 0$ за $c_1 = -c_2$. Значи, из линеарне комбинације $w^*(z) = c_1 e^{ikz} - c_1 e^{-ikz} = 2ic_1 \sin kz$ добијамо решење које очигледно има нуле.

Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда са комплексним константним коефицијентом.

Нека је у каноничној комплексној ДЈ другог реда (2.2.1) аналитички коефицијент $a(z) = \alpha + i\beta = k = const$, $k \in \mathbb{C}, \alpha, \beta > 0$, то јест нека је

$$\frac{d^2w}{dz^2} + kw(z) = 0.$$

Диференцијална једначина тада остаје аналитичка. Ову једначину можемо решити методом редова-итерација, али и методом партикуларног интеграла $w(z)=e^{rz} \Rightarrow e^{rz}\left(r^2+k\right)=0 \Rightarrow r=\pm\sqrt{-k}$ где треба наћи квадратни корен комплексног броја. Знамо да је квадратни корен комплексног броја двозначан и да је по Моавровој формули

$$\sqrt{-k}=\sqrt{|k|}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan\tfrac{\beta}{\alpha}+n\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan\tfrac{\beta}{\alpha}+n\pi\right)\right],\ n=0,1.$$

Користећи познате тригонометријске идентитете за синус и косинус, имамо

$$\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan\frac{\beta}{\alpha}\right)=\pm\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\ ,\ \sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arc}\tan\frac{\beta}{\alpha}\right)=\pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Према томе, решења су $\left(\sqrt{-k}\right)_1=\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}$ и $\left(\sqrt{-k}\right)_2=-\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}$. Одавде имамо два решења за $w(z)$:

$$w_1(z)=e^{r_1 z}=\left(\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right)(x+iy)\right), w_2(z)=e^{r_2 z}=\left(\exp\left(-\frac{\alpha+i\beta}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right)(x+iy)\right),$$

или на основу дефиниције једнакости комплексних бројева

$$w_1(z)=\left(\exp\left(\frac{\alpha x-\beta y}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right)\right)\left(\cos(\beta x+\alpha y)+i\sin(\beta x+\alpha y)\right)$$
$$w_2(z)=\left(\exp\left(\frac{\alpha x-\beta y}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right)\right)\left(\cos(\beta x+\alpha y)-i\sin(\beta x+\alpha y)\right).$$

Како је $\exp\left(\frac{\alpha x-\beta y}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right)\neq 0$, то нуле $w_1(z)=0$ налазимо из услова $\cos(\beta x+\alpha y)+i\sin(\beta x+\alpha y)=0$, што није могуће истовремено. Нуле решења $w_2(z)=0$ налазимо из система $\cos(\beta x+\alpha y)=0$ и $\sin(\beta x+\alpha y)=0$, односно из система $\beta x+\alpha y=(2n-1)\frac{\pi}{2}, n=1,2,3,\ldots$ и $\beta x+\alpha y=n\pi,\ n=0,1,2,\ldots$, што је противуречно.

Други избор константи у општем решењу може дати нуле. Из $w(z)=c_1w_1(z)+c_2w_2(z)=0$ имамо $e^{(r_1-r_2)z}=-\dfrac{c_2}{c_1}$, $c_1\neq 0$ и c_2 комплексна константа. Логаритмовањем на крају добијамо $z=\dfrac{1}{r_1-r_2}\ln\left(-\dfrac{c_2}{c_1}\right)$. Дакле, постоји веза између c_1 и c_2 која даје партикуларни интеграл који има нула. Из $w(z)=c_1e^{r_1z}-c_1e^{(r_1-r_2)z}=0$ следи $z=\dfrac{2k\pi i}{2r_1-r_2}, k=0,1,2,\dots$.

Глава 3

ТЕОРЕМА О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ

У комплексном подручју не можемо посебно да формулишемо теорему о средњој вредности одређеног комплексног линијског интеграла $\int\limits_L f(z)dz$, јер нисмо у могућности да дамо одговарајућу геометријску интерпретацију интеграла преко површине испод неке криве L. Подсетимо се одговарајућих теорема у реалном случају.

Прва теорема о средњој вредности одређеног интеграла
Ако је функција f *непрекидна на сегменту* $[a,b]$*, тада постоји* $\xi \in (a,b)$ *за који важи једнакост*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Уопштење ове формуле о средњој вредности одређеног интеграла је:

Друга теорема о средњој вредности одређеног интеграла
Ако су функције f *и* g *интеграбилне на сегменту* $[a,b]$, f *непрекидна на* $[a,b]$*, то јест за свако* $x \in [a,b], m \le f(x) \le M$*, функција* g *сталног знака на поменутом сегменту, тада постоји* $\xi \in (a,b)$ *такав да је*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Приметимо да се ни Лагранжова теорема у комплексном подручју не дефинише у уобичајеној форми.

Ако функцију напишемо у облику $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, тада су $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрекидно-диференцијабилне функције, па за њих важи Тејлорова[1] формула, до другог члана,

$$\begin{aligned}
u(x+\Delta x, y+\Delta y) &= u(x,y)+\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0}{1!}\Delta x+\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0}{1!}\Delta y+ \\
&\quad +\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta y^2\right)\Bigg|_{x+\theta_1\Delta x,\, y+\theta_2\Delta y} \\
v(x+\Delta x, y+\Delta y) &= v(x,y)+\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0}{1!}\Delta x+\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0}{1!}\Delta y+ \\
&\quad +\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\Delta y^2\right)\Bigg|_{x+\theta_1\Delta x,\, y+\theta_2\Delta y}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где је $0<\theta_1,\theta_2<1$, а симбол $(\ )_0$ значи да је вредност узета у самој тачки (x,y). Одавде,

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\Delta y+R_1(x,y,\Delta x,\Delta y,\theta_1,\theta_2)$$

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\Delta x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\Delta y+R_2(x,y,\Delta x,\Delta y,\theta_1,\theta_2).$$

Како је $\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$, то с обзиром на аналитички извод $\frac{df}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ имамо

$$\Delta f(z)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+R_1+iR_2. \tag{3.2}$$

По самој конструкцији реалне Тејлорове формуле, остаци R_1 и R_2 су бесконачно мале величине вишег реда у односу на Δx и Δy, па укупни остатак

$$|R_1+iR_2|\le|R_1|+|R_2|=o(\Delta x,\Delta y)\to 0, \Delta x\to 0, \Delta y\to 0.$$

На основу (3.2), сада имамо приближну формулу

[1] *Brook Tayler (1685-1731), енглески математичар*

[2] *Николай Егорович Жуковский (1847-1921), руски физичар и математичар*

$$\Delta f(z) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\,. \tag{3.3}$$

Дефиниција 3.1. Формулу (3.1) и приближну формулу (3.3) зовемо *Лагранжовом формулом* за аналитичку функцију $f(z)$.

Користећи дефиницију извода сложене функције $f(z)$, за $z = x + iy$ имамо $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}\cdot 1$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{dz}\cdot i$, па из (3.2) добијамо формулу првог диференцијала

$$\Delta f(z) = \frac{df}{dz}\Delta x + i\frac{df}{dz}\Delta y = \frac{df}{dz}\left(\Delta x + i\Delta y\right) = f'(z)\Delta z\,.$$

На крају, ако узмемо да је $\Delta z = dz$, на основу (3.3) добијамо идентитет $\Delta f(z) \approx \frac{df}{dz}dz \approx df$, то јест коначан прираштај аналитичке функције мери се диференцијалом.

Главне особине аналитичких операција: гранична вредност, затим извод и интеграл, којим се врши приближавање од тачке z_0 до тачке z_1, најчешће зависи од пута којим се тачка креће. То не мора бити одсечак већ део било које криве $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in \left[t_1, t_2\right]$. Познато је да има природних процеса када ова промена не зависи од пута и једнака је за све путеве. Међутим, често је пресудан и сам пут, па тада постаје важна и његова дужина. Иако најкраћи путеви нису увек и најбољи, ипак се о њима мора водити рачуна. Зато је уведен појам геодезијске линије, као најкраће линије повезивања у простору.

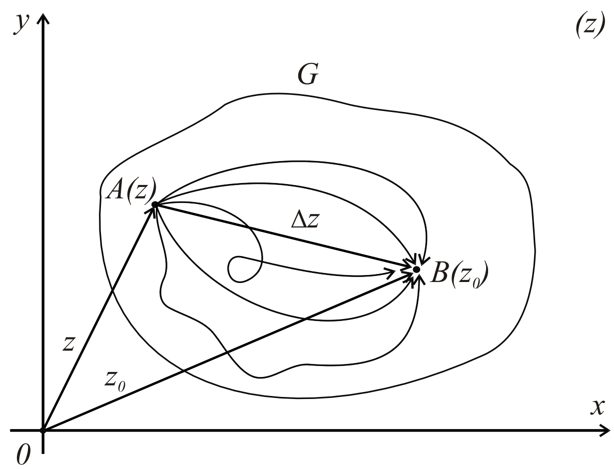
У равни, најкраћи путеви су праве, па је чак и у случају аналитичности, најоптималније ићи геодезијском линијом. Тада се сви могући путеви могу заменити најкраћим путем $\Delta z = z_0 - z = \min\limits_{G} AB$, где се помоћу вектора приказују комплексни бројеви и кретање (приближавање) од A до B. Ако уведемо ознаку $z_0 = z + \Delta z$, очигледно је да $z \to z_0$ ако $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$, односно ако $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Најпростије кретање је по одсечку $\overline{AB} = \left|\Delta z\right|$, где је $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Овај одсечак је део праве

$$ax + by + c = 0 \tag{3.4}$$

на којој леже тачке $A(z) = A(x,y)$ и $B(z_0) = B(z+\Delta z) = B(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Из услова да тачке A и B леже на правој (3.4) одређујемо реалне бројеве a,b,c. После елементарних трансформација на крају добијамо услов $a\Delta x + b\Delta y = 0$, или $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{a}{b} = k$, где је k коефицијент правца праве.

Ако једначину праве кроз једну тачку $A(x,y)$ напишемо у облику $Y - y = k(X-x)$ или $aX + bY - (by+ax) = 0$, добијамо облик (3.4), где је $c = -(by+ax)$.



Слика 3.1.

Како је $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ и $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, на крају имамо $(a-ib)z + (a+ib)\overline{z} - 2(by+ax) = 0$, комплексну једначину праве, кроз фиксирану тачку (x,y) и где је познат коефицијент правца k.

3.1 ТЕОРЕМА О СРЕДЊОЈ ВРЕДНОСТИ КОМПЛЕКСНОГ ЛИНИЈСКОГ ИНТЕГРАЛА

Теорема 3.1.1. *За комплексан интеграл аналитичке функције $f(z)$ важи формула средње вредности комплексног интеграла*

$$\int\limits_{L:z_0}^{z_1} f(z)\,dz = (z_1 - z_0)\int\limits_0^1 \varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

Она не зависи од пута L, *већ се увек може израчунати по одсечку* $\overline{AB}$, *само што "средња вредност"* $\int_0^1 \varphi(\lambda)\,d\lambda = f(\bar{\varsigma})$ *може бити комплексна константа. Тако имамо аналогију са реалним интегралом*

$$\int_{L:z_0}^{z_1} f(z)\,dz = (z_1 - z_0)\, f(\bar{\varsigma}) \ . \tag{3.1.1}$$

Доказ: се лако изводи на основу леме која следи.

Лема 3.1.2. *Линеарном заменом* $z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)$, *комплексан интеграл аналитичке функције* $f(z)$, *по било ком путу* AB *своди се на праволинијски интеграл, од примитивне функције* $F(\lambda) = \int_0^1 \varphi(\lambda)\,d\lambda$, λ *реална независна променљива,* $\varphi(\lambda)$ *комплексна функција на одсечку* $\overline{AB}$.

Доказ: Нека је у $z-$равни дата глатка крива L. Низом тачака (M_k): $M_0 = A, \ldots, M_n = B$ поделимо лук AB криве L на подлукове $M_{k-1}M_k$ и у сваком од њих изаберимо неку унутрашњу тачку ξ_k, $\xi_k \in M_{k-1}M_k, k = 1, 2, \ldots, n$. Нека је $w = f(z)$ непрекидна функција комплексне променљиве z. Ако постоји гранична вредност интегралне суме $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ тада се она зове криволинијски интеграл по луку, криве L између тачака A и B и означава се са

$$I = \int_L f(z)\,dz = \int_A^B f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \ . \tag{3.1.2}$$

Како је $f(z)$ аналитичка функција, то $\int_L f(z)\,dz$ не зависи од криве L већ само од почетне и крајње тачке A односно B. То значи да интеграл I има исту вредност по свакој кривој L

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_{L_2} f(z)\,dz = \ldots = \int_{L_n} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0) \tag{3.1.3}$$

где је $F(z)$ примитивна функција од $f(z)$.

Међутим, како је потребно да пронађемо најкраћи пут између z_0 и z_1, то користимо геодезијску линију $\overline{AB}$. Другим речима по одсечку $\overline{AB}$ је

$$(L)\int_A^B f(z)dz = \int_{\overline{AB}} f(z)dz = I = I(z_0, z_1). \tag{3.1.4}$$

У уводном делу ове Главе, ми смо са

$$z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \tag{3.1.5}$$

означили комплексну једначину праве L на којој лежи одсечак $\overline{AB}$, где су z_0 и z_1 фиксирани комплексни бројеви, а λ промењљиви скаларни параметар. За $\lambda = 0$ добијамо $z = z_0$, то јест почетну тачку A, за $\lambda = 1$ имамо $z = z_0 + z_1 - z_0 = z_1$, односно крајња тачка B, одсечка $\overline{AB}$. За $\lambda > 1$ имамо тачке десно од B, а за $\lambda < 0$ тачке лево од A. Из (3.1.5) за $z = x + iy$ и $z_0 = x_0 + iy_0$, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева добијамо систем једначина $x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0)$ и $y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0)$. Одавде, елиминацијом λ добијамо пропорционалност $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$, или $y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, што представља једначину праве кроз две тачке A и B.

Све ово нам сугерише да у интеграл (3.1.4) уведемо смену промењљиве (3.1.5), где комплексну промењљиву z замењујемо скаларном промењљивом $\lambda, 0 \le \lambda \le 1$, а комплексност се затим одржава преко броја i у константама z_0 и z_1. Тако из (3.1.4) имамо

$$I = \int_{\overline{AB}} f(z)dz = \int_0^1 f\left[z_0 + \lambda(z_1 - z_0)\right](z_1 - z_0)d\lambda = (z_1 - z_0)\int_0^1 f\left[z_0 + \lambda(z_1 - z_0)\right]d\lambda.$$

Нека је $F(\lambda)$ примитивна функција за $\varphi(\lambda)$. Тада је

$$I = (z_1 - z_0)\int_0^1 \varphi(\lambda)d\lambda = (z_1 - z_0)\left[F(z_1, z_0, \lambda = 1) - F(z_1, z_0, \lambda = 0)\right] = G(z_0, z_1). \tag{3.1.6}$$

Добили смо да интеграл зависи од почетне и крајње тачке, и од примитивне функције $F(z)$ за дату аналитичку функцију $f(z)$. Дакле, интеграл зависи и од $f(z)$ али неће зависити од пута који повезује тачке A и B. ■

Сада можемо да дамо дефиницију

Дефиниција 3.2. Интеграл $\int_0^1 \varphi(\lambda)\,d\lambda = f(\bar{\varsigma})$ зовемо *средња вредност функције* $f(z)$ по одсечку $\overline{AB}$, при чему је $\varphi(\lambda) = f\left[z_0 + \lambda(z_1 - z_0)\right]$.

Илуструјмо до сада написано на примеру. Решимо интеграл, $\int_L f(z)\,dz$, $f(z) = z^2$, по линијама: $L_1 : y = x, L_2 : y = x^2, L_3 : y = \sqrt{x}$ од тачке $z_0 = 0$ до $z_1 = 1 + i$, непосредно и применом теореме.

1) $\int\limits_{y=x} z^2 dz = \int\limits_{y=x} (x+ix)^2 (dx+idy) = (1+i)^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2i-2}{3}$
2) $\int\limits_{y=x^2} z^2 dz = \int_0^1 \left(x+ix^2\right)^2 (dx+i2xdx) = \frac{2i-2}{3}$
3) $\int\limits_{y=\sqrt{x}} z^2 dz = \int_0^1 \left(x+i\sqrt{x}\right)^2 \left(dx+i\frac{dx}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{2i-2}{3}$
4) $\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{2i-2}{3}$
5) Израчунајмо још и средњу вредност интеграла по формули (3.1.1).

Како је $f(z) = z^2$ и $z_1 - z_0 = 1 + i$, то је на основу смене (3.1.5), $z = \lambda(1+i)$ и $dz = (1+i)\,d\lambda$, па следи

$$\int_L f(z)\,dz = \int_0^1 \lambda^2 (1+i)^3 \,d\lambda = (1+i)\int_0^1 \lambda^2 (1+i)^2 \,d\lambda \overset{(3.1.1)}{=} (z_1 - z_0)\, f(\bar{\varsigma}) = (1+i)\, f(\bar{\varsigma}),$$

односно, $f(\bar{\varsigma}) = \int_0^1 \lambda^2 (1+i)^2 \,d\lambda = \frac{(1+i)^2}{3}$. На основу дефиниције функције $f(z)$ имамо на крају, $f(\bar{\varsigma}) = \frac{(1+i)^2}{3} = \bar{\varsigma}^2$, то јест средња вредност за z је $\frac{(1+i)}{\sqrt{3}} = \bar{\varsigma}$.

Приметимо да се формуле (3.1.5) и (3.1.1) односе на најкраћи, праволинијски пут (одсечак $\overline{z_0 z_1}$), па зато средња вредност аргумента $\bar{\varsigma}$ има једну специфичну вредност. Ако узмемо неки други, знатно дужи пут, интеграл може и мора остати исти, али ће пут интеграције, то јест лук криве S бити дужи. Зато је за дато $f(z)$, средња вредност $f(\bar{\varsigma})$ мања по модулу, односно могуће су разне вредности $\overline{\varsigma_1}$ и $\overline{\varsigma_2}$.

Веома је важно да нагласимо да је средња вредност вишезначна. Зато, за исту аналитичку функцију $f(z)$ и за исту почетну z_0 и крајњу тачку z_1 узмимо два различита пута, две Жорданове криве $L_1 : z_1 = \varphi_1(t) + i\psi_1(t)$ и $L_2 : z_2 = \varphi_2(t) + i\psi_2(t), t \in [t_0, t_1]$. Тада су, због аналитичности, интеграли

$$\int_{L_1} f(z_1)\,dz_1 = \int_{L_2} f(z_2)\,dz_2 \tag{3.1.7}$$

једнаки, без обзира на дужину самих лукова

$$L_1 = S_1 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\varphi}_1(t) + \dot{\psi}_1(t)}\,dt \neq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\varphi}_2(t) + \dot{\psi}_2(t)}\,dt = S_2 = L_2\ . \tag{3.1.8}$$

Упоређивањем формуле (3.1.1) са (3.1.7) и (3.1.8) видимо да се комплексан интеграл може написати као производ дужине пута са неком средњом вредношћу $f(\varsigma_1)$ или $f(\varsigma_2)$, који зависи од лука $S_1 = \int_{L_1} f(z)\,dz = L_1 f(\varsigma_1)$ или $S_2 = \int_{L_2} f(z)\,dz = L_2 f(\varsigma_2)$, редом кривих L_1 и L_2.

Међутим, како због аналитичности важи (3.1.7), то имамо $L_1 f(\varsigma_1) = L_2 f(\varsigma_2)$ или

$$\frac{f(\varsigma_1)}{f(\varsigma_2)} = \frac{L_2}{L_1}\ . \tag{3.1.9}$$

Следи

Теорема 3.1.3. *Средње вредности интеграла модула аналитичке функције обрнуто су пропорционалне луковима пута.*

Доказ: Узмимо два пута L_1, L_2 , то јест две Жорданове криве различите дужине, које спајају тачке z_0 и z_1. Тада увек постоји пресликавање $w = f(z)$ које пресликава L_1 и L_2 на исти одсечак $[x_0, x_1]$ осе Ox. Значи, постоји смена промењљивих која трансформише интеграле апсолутних вредности

$$\int_{L_1} |f(z)| dz = \int_{t_0}^{t_1} |f(\varphi_1(t) + i\psi_1(t))| \sqrt{\dot{\varphi}_1^{\,2}(t) + \dot{\psi}_1^{\,2}(t)} dt = \int_{x_0}^{x_1} |f(x)| dS_1$$

$$\int_{L_2} |f(z)| dz = \int_{t_0}^{t_1} |f(\varphi_2(t) + i\psi_2(t))| \sqrt{\dot{\varphi}_2^{\,2}(t) + \dot{\psi}_2^{\,2}(t)} dt = \int_{x_0}^{x_1} |f(x)| dS_2$$

на обичне криволинијске реалне интеграле по луковима разних кривих. За њих важи реална теорема о средњој вредности. Дакле, постоје реални $\overline{\varsigma_1}$ и $\overline{\varsigma_2}$ унутар $[x_0, x_1]$, $x_0 < \varsigma_1, \varsigma_2 < x_1$ тако да је $\int_{L_1} |f(z)| dz = |f(\varsigma_1)| S_1$ и $\int_{L_2} |f(z)| dz = |f(\varsigma_2)| S_2$. Одавде, за модуле $|f(z)|, |f(\varsigma_1)|, |f(\varsigma_2)|$ важи $\dfrac{\int_{L_1} |f(z)| dz}{\int_{L_2} |f(z)| dz} = \dfrac{S_1}{S_2}$. ■

Значи, (3.1.9) се не може доказати без модула. То је и природно јер су $f(\varsigma_1)$ и $f(\varsigma_2)$ комплексни бројеви, а $\dfrac{L_2}{L_1}$ је реалан број, па је мала вероватноћа да су они једнаки. Зато у општем случају важи:

Теорема 3.1.4. *Оцена модула криволинијског интеграла је*

$$\left| \int_L f(z) dz \right| \le \int_L |f(z)| |dz| < \max_L |f(z)| S(L) \tag{3.1.10}$$

где је S дужина лука L.

Доказ: Из $\int_L dz = \int_L (dx + idy) = \int_{t_0}^{t_1} [\dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t)] dt$, следи

$$\int_L |dz| = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} dt = \int_{t_0}^{t_1} dS(t) = S(L).$$

Како је минималан пут једнак одсечку дужине вектора, то за реалне модуле имамо

$$\min_L |f(z)| \int_L |dz| \le \int_L |f(z)| |dz| \le \max_L |f(z)| S(L)$$

или

$$\min_L |f(z)||z_1 - z_0| \le \int_L |f(z)||dz| \le \max_L |f(z)| S(L) . \ \blacksquare$$

Пример 3.1. Нека је $f(z) = z$ и L крива која спаја тачке $O(0,0)$ и $A(1,1)$. Геодезијска линија међу њима је права $y = x$ и $\min L = \overline{OA} = \sqrt{2}$. Све друге Жорданове криве $L = OA$ су дуже. Тако по кривој, $L_1 : y = x$, за $z = x + iy = x(1+i)$ имамо

$$I_1 = \int_{L_1} |zdz| = \int_{L_1} |z||dz| = \int_{y=x} \sqrt{x^2 + y^2}\,|dx + idy| = \int_0^1 x\sqrt{2}\,|1+i|\,dx = 2\int_0^1 xdx = 1 .$$

По кривој, рецимо $L_2 : y = x^2$ добијамо

$$I_2 = \int_{L_2} |zdz| = \int_{L_2} |z||dz| = \int_{y=x^2} \sqrt{x^2 + y^2}\,|dx + idy| = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+4x^2}\,dx .$$

Овај интеграл се решава сменом $x^2 = t$, па је очигледно да $I_2 \supset I_1 = 1$.

Дакле, средња вредност комплексног интеграла је везана за криву која је пут интеграције. При томе разликујемо два пута: средњу вредност $f(\varsigma)$ самог интеграла и средњу вредност ς аргумента z.

С обзиром да је $\int_L f(z)dz$ једнак за све аналитичке функције $f(z)$, без обзира на пут L, то није случај за $\int_L |f(z)||dz|$, па уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 3.3. Комплексан број ς, који је решење једначине

$$f(\varsigma) = \frac{\int_L f(z)dz}{S(L)} = \frac{\int_L f(z)dz}{\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}\,dt} \tag{3.1.11}$$

зовемо *средњом вредношћу аргумента* z по кривој L дужине S, за дату аналитичку функцију $f(z)$. ς не мора да је једнозначан и то зависи како од $f(z)$, тако и од лука S криве L.

3.2 ПРИНЦИП МАКСИМУМА МОДУЛА

Нека је G коначна затворена област и нека је у њој дата аналитичка функција $f(z)$, са изузетком коначног броја сингуларних тачака. Тада је свака тачка z области G "дохватљива" правцем $z = re^{i\varphi}$, па због аналитичности $f(z)$ ред

$$f(z) = f\left(re^{i\varphi}\right) = a_0 + a_1 re^{i\varphi} + a_2 r^2 e^{2i\varphi} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} \tag{3.2.1}$$

конвергира за свако r и за свако φ. Ако (3.2.1) апроксимирамо коначним полиномом

$$P_n(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k e^{ik\varphi} \tag{3.2.2}$$

очигледно је да ранг раста P_n неће бити исти по сваком правцу φ. Нека је $k\varphi = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \ldots$. Тада је $\cos k\varphi = 0$ и $\sin k\varphi = \pm 1$, па ранг раста не мора остати n, то јест $|P_n|$ је нижи него $|a_n| r^n$. Следи, за малу промену φ, правци $re^{i\varphi}$ доносе различити ранг. Уопштено, за све правце, $|P_n|$ расте ако n расте. Ово доводи до формулације следећег принципа.

Принцип максимума модула

Нека је $f(z)$ аналитичка функција за свако z за које је $|z-a| \le r$. Тада је према Кошијевој теореми

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz, \; \Gamma : |z-a| = r.$$

Ако је $M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$, тада је $|f(a)| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r} 2r\pi = M$. Према томе, реална функција $|f(z)|$ не може имати максималну вредност у било којој тачки у којој је $f(z)$ аналитичка функција, јер вредност у тачки z није већа од максималне вредности на сваком кругу око те тачке. Дакле, у свакој околини тачке $z = z_0$ постоје вредности које су толико велике као $|f(z)|$.

Општији и прецизнији облик принципа максимума модула тврди да *ако је* $f(z)$ *аналитичка функција на затвореној контури* Γ *и у* $\operatorname{int}\Gamma$ *и ако је* $M = \max_{z\in\Gamma} |f(z)|$, *тада је* $\left|f\left(z\right)\right| < M$ *, за свако* $z \in \operatorname{int}\Gamma$ *, осим ако је* $\left|f\left(z\right)\right| = const$ *када је* $\left|f\left(z\right)\right| = M$.

Овим принципом се не прецизира тачније у којим све смеровима φ, функција $f\left(z\right)$ достиже максимум. Као део одговора може помоћи и парцијални извод по φ, реда (3.2.1)

$$\frac{\partial f\left(z\right)}{\partial \varphi} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{ik\varphi}\left(ik\right) = 0 \tag{3.2.3}$$

као потребан услов екстрема, или ако има тешкоћа око израчунавање суме, приближно извод полинома

$$\frac{\partial P_n\left(r,\varphi\right)}{\partial \varphi} = 0 . \tag{3.2.4}$$

Пример 3.2. Функција Жуковског[2] $f\left(z\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ је важна у пракси, али и у теорији. Она има две сингуларне тачке $z = 0$ и $z = \infty$. Из $f\left(z\right) = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x+iy}\right) =$ $= \frac{1}{2}\left(x+iy\right) + \frac{1}{2}\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ на основу дефиниције једнакости комплексних бројева је $u\left(x,y\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $v\left(x,y\right) = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Одавде је модул $\left|f\left(z\right)\right| =$ $= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}}$, или користећи поларну форму $\left|f\left(R,\varphi\right)\right| = \frac{1}{2R}\sqrt{\left(R^2+\cos 2\varphi\right)^2+\sin^2 2\varphi}$. Очигледно је $\left|f\left(R,\varphi\right)\right| > 0$, осим у тачкама када је истовремено $\sin 2\varphi = 0$ и $R^2 + \cos 2\varphi = 0$, односно за $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$,... када је $\cos 2\varphi = -1$. Тада из $R^2 - 1 = 0$ имамо $R = 1$. Из парцијалног извода по правцу φ имамо $\frac{\partial\left|f\left(R,\varphi\right)\right|}{\partial\varphi} = \frac{-R\sin 2\varphi}{\sqrt{\left(R^2+\cos 2\varphi\right)^2+\sin^2 2\varphi}} = 0$, за $\varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$. За $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ следи $\left|f\left(R\right)\right| = \frac{1}{2R}\left(R^2+1\right)$ док за $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, и $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ добијамо $\left|f\left(R\right)\right| = \frac{1}{2R}\left|R^2-1\right|$,

[2] *Николай Егорович Жуковский (1847-1921), руски физичар и математичар*

што значи да екстреми нису исти. Постоји дакле додир са xOy-равни за $R=1$. Модуларна површина личи на дно пластичне флаше, али без једнаких ослонаца на дно. Модул има само два минимума једнака нули, а максимум је непрекидан у околини $z=0$ и свуда где $x,y\to\infty$.

Пример 3.3. Нешто је једноставније узети функцију $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$. Она има сингуларну тачку $z=1$, док је $z=\infty$ обична нула. Даље, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева добијамо да су реални и имагинарни део функције редом $u(x,y)=\dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$, $v(x,y)=\dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$, па је модул $|f(z)|=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}$.

Нивоске линије су криве $(1-x)^2+y^2=\dfrac{1}{c^2}$. Модуларна површина је усамљени високи врх са благим падинама. Екстреми су недостижни. Имамо само $\inf=0$ и $\sup=\infty$.

3.3 Линијски интеграл са промењивом горњом границом

У секцији 3.1 увођењем линеарне замене (3.1.5) у линијски комплексан интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ одредили смо да пут интеграције буде по правој, јер интеграл не зависи од пута. Тако су z_0 и z_1 остале константе, па смо за dz узели $d\lambda$ и добили комплексан интеграл, али сада по реалној промењивој λ.

Нека је, у истој замени, промењива z_1 горње границе једнака z. Како можемо узети да је $z_0=0$, што постижемо транслацијом координатног система, то имамо интеграл по кривој L, али са промењивом горњом границом z. Тада интеграл $\int\limits_{L:0}^{z} f(z)dz=F(z)$ дефинише неку примитивну функцију $F(z)$, такође аналитичку, за $f(z)$, али која не зависи од L већ само од особине $f(z)$. Сада значај линеарне замене (3.1.5) остаје неумањен, али се узима $z_0=0$ и λ се бира да буде константан коефицијент правца праве $L: y=\dfrac{b}{a}x$.

Осим овог, ми смо у претходним секцијама коментарисали и формуле: (3.1.1) по правој, (3.1.11) по луку и (3.1.10) по модулу и тада смо приметили вишезначност средње вредности $\bar{\varsigma}$ аргумента z, док је сама средња вредност интеграла $\int\limits_L f(z)dz$, то јест $f\left(\bar{\varsigma}\right)$ једна те иста. Иста појава постоји и код реалног интеграла. Ако је интеграл у поменутим формулама нееднозначан (рецимо да је неодређен), тада је и средња вредност нееднозначна. Следи

Теорема 3.3.1. *Средња вредност комплексног интеграла реалне константе једнака је апсолутној вредности саме константе.*

Доказ: Нека је $f\left(z\right)=\alpha=const,\alpha\in\mathbb{R}$ и L нека крива чија је дужина S. На основу теореме 3.1.4 следи оцена

$$\left|\int_L f\left(z\right)dz\right|\le\int_L\left|f\left(z\right)\right|\left|dz\right|=\left|\alpha\right|\int_L\left|dz\right|=\left|\alpha\right|S\left(L\right)$$

где је $S\left(L\right)=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{\varphi}^2\left(t\right)+\dot{\psi}^2\left(t\right)}dt$. На крају имамо $\left|\int_L\alpha dz\right|\overset{(3.1.10)}{\le}S\left(L\right)\left|f\left(\bar{\varsigma}\right)\right|=S\left(L\right)\left|\alpha\right|$. Дакле, $\left|f\left(\bar{\varsigma}\right)\right|=\left|\alpha\right|$. ■

Теорема 3.3.2. *Ако је $f\left(z\right)=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ комплексна константа тада је средња вредност интграла $\left|f\left(\bar{\varsigma}\right)\right|=\left|\alpha+iS\left(L\right)\right|$.*

Доказ: Из

$$\int_L f\left(z\right)dz=\int_L\left(\alpha+i\beta\right)\left(dx+idy\right)=\alpha x-\beta y+i\left(\beta x+\alpha y\right)=f\left(\bar{\varsigma}\right)S\left(L\right)=\left(\alpha+i\beta\right)S\left(L\right)$$

добијамо систем једначина

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x-\beta y=\alpha S\left(L\right)\\ \beta x+\alpha y=\beta S\left(L\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\left(\alpha^2+\beta^2\right)x=\left(\alpha^2+\beta^2\right)S\left(L\right)\\ \left(\alpha^2+\beta^2\right)y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\bar{x}=1\cdot S\left(L\right)\\ \bar{y}=0\cdot S\left(L\right)\end{array}\right\}.$$

Значи, читав процес се одвија по вертикалној правој $x=\alpha$ на којој се y мења са β, а лук AB је одсечак тако да је средина $\bar{\varsigma}=\alpha+iS\left(L\right)$. ■

На пример, за функцију $f\left(z\right)=z$ и криву $L:y=\frac{x^2}{2}$ на $\left[0,x\right]$ имамо једнозначну средњу вредност $f\left(\varsigma\right)$ интеграла и средњу вредност ς аргумента z тако да је

$\varsigma=\dfrac{\left(x+i\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\sqrt{1+x^2}}$. Или, ако је $f(z)=z^2$, по истој кривој L, тада имамо две комплексне вредности $\varsigma_{1/2}=\pm\sqrt{\dfrac{2x^3\left(1+i\dfrac{x}{2}\right)^3}{3\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\sqrt{1+x^2}\right]}}$. Експоненцијална функција $f(z)=e^z$ по правој $L: y=x, x\in[0,1]$ има безброј тачака у којима се постиже средња вредност аргумента $\varsigma=x+iy-\ln\sqrt{2}+2k\pi i, k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Са друге стране, из $f(z)=z^n, n\in\mathbb{N}$, $L: x=\varphi(t), y=\psi(t), t\in[t_0,t_1]$ добијамо n разних вредности аргумената $\varsigma=\sqrt[n]{\dfrac{z^{n+1}-z_0{}^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{1}{\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{\varphi}^2(t)+\dot{\psi}^2(t)}dt}}$, за једну средњу вредност интеграла $f(\varsigma)$. Што се тиче тригонометријских функција, очигледно је да функција $f(z)=\sin z$ по произвољној кривој L има безброј могућности за средњу вредност интеграла $f(\varsigma)$, јер је средња вредност аргумента $\varsigma=\arcsin\dfrac{\cos z_0-\cos z}{\int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{\varphi}^2(t)+\dot{\psi}^2(t)}dt}$. Исто важи и за средњу вредност интеграла од $f(z)=\mathrm{s}hz$.

У наредном делу излагања применићемо горње резултате на итерације.

Видели смо у Глави 2, да се код комплексних хомогених линеарних ДЈ првог реда $\dfrac{dw}{dz}=a(z)w(z)$ и другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}=a(z)w(z)$, код решавања помоћу итерација наилази на интеграле облика $\dfrac{1}{n!}\left(\int_L a(z)dz\right)^n, \int_L\int_L a(z)dz^2, \int_L\int_L za(z)dz^2, \dots,$ $\underbrace{\int_L\int_L\dots\int_L}_{k-\text{интеграла}} a(z)dz^k$. Тада смо имали проблем да их решимо или бар да их оценимо. За тај циљ је сада најприродније да користимо средњу вредност интеграла.

1. За $\int_L a(z)\,dz$ следи $\int_L a(z)\,dz = \int_L a(\varsigma)\,dz = a(\varsigma)S(L)$, па имамо да је средња вредност интеграла $a(\varsigma) = \dfrac{\int_L a(z)\,dz}{S(L)}$ и $\varsigma = a^{-1}\left(\dfrac{\int_L a(z)\,dz}{S(L)}\right)$ средња вредност аргумента. Због тешкоће око израчунавања интеграла по кривој L дужине лука $S(L)$, уобичајено је да користимо оцене по модулу

$$\left|\int_L a(z)\,dz\right| \le \int_L |a(z)||dz| \le \max_L |a(z)| S(L) = AS(L).$$

На исти начин израчунавамо

$$\left|\frac{1}{n!}\left(\int_L a(z)\,dz\right)^n\right| \le \frac{1}{n!}\int_L |a(z)|^n |dz|^n \le \frac{1}{n!}\max_L |a(z)|^n S^n(L) \le \frac{1}{n!}A^n S^n(L).$$

На овај начин добијамо оцену саставних интеграла у итерацијама помоћу реалних бројева $\max_L |a(z)| \le A$.

2. За $\int_L\int_L a(z)\,dz^2$ имамо оцену

$$\left|\int_L\int_L a(z)\,dz^2\right| \le \int_L \left|\int_L a(z)\,dz\right||dz| \le \int_L \left(\int_L |a(z)||dz|\right)|dz| \le \int_L AS(L)|dz| \le A\int_L S(L)\,dS(L) \le \frac{AS^2(L)}{2!}.$$

Даље, бисмо имали и оцену за интеграл $\left|\int_L\int_L a(z)\,dz^2 \int_L\int_L a(z)\,dz^2\right| \le \dfrac{A^2S^4(L)}{4!}$, и тако даље.

3. И за друге пратеће интеграле код итерација добијамо оцене

$$\left|\int_L\int_L za(z)\,dz^2\right| \le \int_L \left|\int_L za(z)\,dz\right||dz| \le \int_L \left(\int_L |z||a(z)||dz|\right)|dz| \le A\int_L \frac{|z|^2}{2!}|dz| \le \frac{AS^3(L)}{3!}$$

$$\left|\int\limits_L\int\limits_L a(z)\,dz^2 \int\limits_L\int\limits_L za(z)\,dz^2\right| \le \frac{A^2 S^5(L)}{5!}.$$

$\vdots$

Приметимо да иако интеграл аналитичке функције $\int\limits_L a(z)\,dz$ не зависи од криве L мајоранта $\left|\int\limits_L a(z)\,dz\right|$, која више није аналитичка функција у смислу Коши-РимановИх услова, зависи од пута $S(L)$.

4. На исти начин имамо за сваку итерацију

$$\left|\underbrace{\int\limits_L \dots \int\limits_L a(z)\,dz^k}_{k}\right| \le \left|\underbrace{\int\limits_L dz \left|\int\limits_L dz \dots \left|\int\limits_L a(z)\,dz\right|\right|}_{k}\right| \le \frac{AS^k(L)}{k!},\ \max_L |a(z)| \le A.$$

3.4 Осцилаторне функције са комплексним аргументом

Наш циљ је да проучимо особине решења каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2} + a(z)w(z) = 0 \tag{2.2.1}$$

где је $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ аналитичка функција у области G. У секцији 2.2 ми смо, по аналогији са реалним Штурмовим функцијама, када је $a(x)$ позитивно и $ya(x) \in (C, Lip)$ у G, исписали њена формална решења (2.2.7) и (2.2.8) у облику редова-итерација

$$w_1(z) = \cos_{a(z)} z = 1 - \int\limits_0^z\int\limits_0^z a(z)\,dz^2 + \int\limits_0^z\int\limits_0^z a(z)\,dz^2 \int\limits_0^z\int\limits_0^z a(z)\,dz^2 - \cdots$$

$$w_2(z) = \sin_{a(z)} z = z - \int\limits_0^z\int\limits_0^z za(z)\,dz^2 + \int\limits_0^z\int\limits_0^z a(z)\,dz^2 \int\limits_0^z\int\limits_0^z za(z)\,dz^2 - \cdots .$$

Познато нам је и да су решења одговарајуће каноничне реалне ДЈ другог реда осцилаторна на полуоси $\left[0,+\infty\right)$ и да имају безброј нула. Код каноничне комплексне ДЈ другог реда (2.2.1) није потребна никаква претпоставка за знак $a\left(z\right)$, јер он не постоји код комплексних функција. Ако је $w\left(z\right)=0$, тада је и модул $\left|w\left(z\right)\right|=0$. Одавде, за $y=0$ и $v\left(x,y\right)=0$, трансформација ДЈ (2.2.1), на каноничну реалну ДЈ другог реда $\frac{d^2u}{dx^2}+a\left(x\right)u\left(x\right)=0$ за $u\left(x\right)$ оправдава назив "комплексна једначина осцилација" другог реда.

У Глави 2, секција 2.3, видели смо да решења каноничне комплексне ДЈ другог реда (2.2.1) не морају увек да буду осцилаторна, чак и за $a\left(x\right)$ реално и позитивно. Одредимо најпре неке класе решења са нулама.

Класа 1

Нека је $a\left(z\right)=\alpha^2,\alpha\in\mathbb{R}$. Тада имамо каноничну комплексну ДЈ другог реда са константним реалним коефицијентом

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\alpha^2w\left(z\right)=0 \tag{3.4.1}$$

која се ни по чему не разликује од реалне једначине хармонијских осцилација, осим што се захтева да аргумент буде комплексан. Зато тражимо решење у облику комплексног броја $w\left(z\right)=e^{rz}$, где је r нека комплексна или реална константа коју треба одредити. Заменом $w\left(z\right)=e^{rz}$ у (3.4.1) добијамо карактеристичну једначину $r^2+\alpha^2=0\Leftrightarrow r_{1,2}=\pm i\alpha$ из које налазимо два партикуларна решења $w_1\left(z\right)=e^{i\alpha z}$ и $w_2\left(z\right)=e^{-i\alpha z}$. Међутим, тада су и њихове линеарне комбинације $w_3\left(z\right)=\frac{1}{2}\left(w_1+w_2\right)=\cos\alpha z$ и $w_4\left(z\right)=\frac{1}{2i}\left(w_1-w_2\right)=\sin\alpha z$ такође решења. Ово су осцилаторне функције а нуле $w_3\left(z\right)$ и $w_4\left(z\right)$ су редом у коренима једначина $\alpha z=\left(2n-1\right)\frac{\pi}{2},n=1,2,\ldots$ и $\alpha z=n\pi,n=0,1,2,\ldots$. Све ово нам је познато из реалних диференцијалних једначина.

Класа 2

Нека је у каноничној комплексној ДЈ другог реда (2.2.1), коефицијент $a\left(z\right)=e^{i\alpha}$ комплексна константа. Тада имамо ДЈ

$$\frac{d^2 w}{dz^2}+e^{i\alpha}w(z)=0 \tag{3.4.2}$$

чија су партикуларна решења добијена методом редова-итерација дата са

$$w_1(z)=\cos_{e^{i\alpha}} z=1-\int_0^z\int_0^z e^{i\alpha}dz^2+\int_0^z\int_0^z e^{i\alpha}dz^2\int_0^z\int_0^z e^{i\alpha}dz^2-\cdots=$$

$$=1-\frac{\left(ze^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{2!}+\frac{\left(ze^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{\left(ze^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^{2n}}{(2n)!}-...,n=0,1,\dots$$

$$w_2(z)=\sin_{e^{i\alpha}} z=z-\int_0^z\int_0^z ze^{i\alpha}dz^2+\int_0^z\int_0^z e^{i\alpha}dz^2\int_0^z\int_0^z ze^{i\alpha}dz^2-\cdots=$$

$$=e^{-i\frac{\alpha}{2}}\left[\left(ze^{i\frac{\alpha}{2}}\right)-\frac{\left(ze^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^3}{3!}+\frac{\left(ze^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^5}{5!}-\cdots+(-1)^{2n-1}\frac{\left(ze^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}-...\right],n=1,2,\dots\quad .$$

Решења $w_1(z)$ и $w_2(z)$ су очигледно осцилаторне функције. Нуле решења $w_1(z)$ су у коренима једначина $ze^{i\frac{\alpha}{2}}=(2n-1)\frac{\pi}{2},n=1,2,...$, односно у тачкама $M_n(x_n,y_n)=$ $=\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\cos\frac{\alpha}{2},-(2n-1)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. На исти начин имамо да су нуле за $w_2(z)$ у тачкама $P_m(x_m,y_m)=\left(m\pi\cos\frac{\alpha}{2},-m\pi\sin\frac{\alpha}{2}\right),m=0,1,...$. Како је $\frac{y_n}{x_n}=-\tan\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{y_m}{x_m}=-\tan\frac{\alpha}{2}$, то значи да се све нуле налазе у тачкама које леже на истој правој $y=\left(-\tan\frac{\alpha}{2}\right)x$, али су те тачке различите.

Одавде можемо наћи и тачан број нула у кругу $|z|\le R$ само једног или оба партикуларна решења, а такође и општег решења $w(z)=c_1w_1(z)+c_2w_2(z)$.

Пример 3.4. За $a(z)=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ комплексна константа, решења каноничне комплексне ДЈ другог реда (2.2.1) добијена методом редова-итерација су

$$w_1(z) = \cos_i z = 1 - \frac{\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{2!} + \frac{\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \cos\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right),$$

$$w_2(z) = \sin_i z = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left[\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right) - \frac{\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}{3!} + \frac{\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5}{5!} - \cdots + (-1)^{2n-1} \frac{\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right] = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sin\left(ze^{i\frac{\pi}{4}}\right).$$

Нуле партикуларних решења $w_1(z)$ и $w_2(z)$ су редом у тачкама

$$M_n(x_n, y_n) = \left((2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}, -(2n-1)\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right), n = 1, 2, \ldots,$$

$$P_m(x_m, y_m) = \left(m\pi\frac{\sqrt{2}}{2}, -m\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ m = 0, 1, \ldots.$$

Непосредне итерације ДЈ (2.2.1) у овом примеру, дају рецимо за $w_1(z)$

$$w_1(z) = \cos_i z = 1 - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{8!} - \frac{z^{12}}{12!} + \cdots - i\left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^{10}}{10!} + \frac{z^{14}}{14!} + \cdots\right).$$

Одавде, за $y = 0$, односно $z = x$ имамо

$$\cos_i x = 1 - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{12}}{12!} + \cdots - i\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{14}}{14!} + \cdots\right), \tag{3.4.3}$$

при чему су познате формуле $\cos x = 1 - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{12}}{12!} + \cdots$ и $\mathrm{c}hx = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{14}}{14!} + \cdots$. Помоћу (3.4.3) и сличних формула могу се комбиновати разне, мање познате, суме редова.

Класа 3

Нека је у каноничној комплексној ДЈ другог реда (2.2.1) коефицијент $a(z) = \alpha + i\beta$ комплексна константа произвољног модула. Видећемо како α и β посебно утичу на нуле решења. У Глави 2, секција 2.3, решили смо ДЈ (2.2.1) итерацијама и добили

$$w_1(z) = \cos_{\alpha+i\beta} z \approx 1 - \frac{\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right)^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$
$$= \cos\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right),$$
$$w_2(z) = \sin_{\alpha+i\beta} z \approx \frac{1}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\left[\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right) - \frac{\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right)^3}{3!} + \frac{\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right)^5}{5!} - \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + (-1)^{2n-1}\frac{\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right] = \frac{\sin\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\right)}{\sqrt{\alpha+i\beta}}.$$

Нуле решења су, очигледно, редом у тачкама $M_n(x_n, y_n) = \left((2n-1)\frac{\pi}{2}A_1, -(2n-1)\frac{\pi}{2}B_1\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ и $P_m(x_m, y_m) = (m\pi A_1, -m\pi B_1)$, $m = 0, 1, \ldots$ где A_1 и B_1 зависе од (α, β). Нула има пребројиво много, а за оба решења су различите и не поклапају се. Осим тога, како је

$$\sqrt{\alpha+i\beta} = \begin{cases} \sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{\beta}{\alpha}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{\beta}{\alpha}\right)\right] \\ \sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{\beta}{\alpha}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{\beta}{\alpha}+\pi\right)\right] \end{cases}$$

то $\sqrt{\alpha+i\beta}$ има две вредности, истог модула, чији се аргументи разликују за π. Нуле се налазе на истој правој али се ређају у супротним смеровима. Тако постоји само по једна линија изолованих нула.

Примедба. У општем решењу

$$w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z) = c_1 \cos pz + c_2 \sin pz = c_1 \frac{e^{ipz} + e^{-ipz}}{2} + c_2 \frac{e^{ipz} - e^{-ipz}}{2i} = k_1 e^{ipz} + k_2 e^{-ipz}$$

постоје и експоненцијалне функције, које знамо да немају нула осим одвојено реални и имагинарни делови.

Класа 4

Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда (2.2.1), са простим полиномним коефицијентом $a(z)$. Постепено ћемо повећавати ранг раста коефицијента $a(z)$.

1. Нека је $a(z)=z$. Тада методом редова-итерација добијамо партикуларне интеграле

$$w_1(z)=\cos_z z=1-\int_0^z\int_0^z zdz^2+\int_0^z\int_0^z zdz^2\int_0^z\int_0^z zdz^2-\cdots=1-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^6}{(2\cdot3)(5\cdot6)}-\frac{z^9}{(2\cdot3)(5\cdot6)(8\cdot9)}+\cdots$$

$$w_2(z)=\sin_z z=z-\int_0^z\int_0^z z^2dz^2+\int_0^z\int_0^z zdz^2\int_0^z\int_0^z z^2dz^2-\cdots=z-\frac{z^4}{3\cdot4}+\frac{z^7}{(3\cdot4)(6\cdot7)}-\frac{z^{10}}{(3\cdot4)(6\cdot7)(9\cdot10)}+\cdots$$

Добијени редови су за сада непознати јер у имениоцима имамо факторијал који није потпун. Можемо га множењем имениоца и бројиоца допунити до потпуног факторијала. Тада имамо

$$\cos_z z=1-\frac{z^3}{3!}+4\frac{z^6}{6!}-4\cdot7\frac{z^9}{9!}+4\cdot7\cdot10\frac{z^{12}}{12!}-\cdots$$
$$\sin_z z=z-2\frac{z^4}{4!}+2\cdot5\frac{z^7}{7!}-2\cdot5\cdot8\frac{z^{10}}{10!}+2\cdot5\cdot8\cdot11\frac{z^{13}}{13!}-\cdots.$$

Добили смо степене редове за $\cos_z z$ и $\sin_z z$, али не видимо да ли они имају икакве везе са обичним синусом и косинусом. Другим речима, не види се њихова основна карактеристика, а то су нуле.

Поставља се питање да ли су ова комплексна решења осцилаторна. Посматрајмо прво реални случај. На пример, за каноничну реалну ДЈ другог реда $y''+xy=0, a(x)=x>0$, $ya(x)\in(C,Lip)$ у G, у [23] је показано да је косинусно решење облика

$$y_1(x)=\cos_x x=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{2!}+\frac{2}{15}\cdot\frac{x^6}{4!}-\frac{7}{18}\cdot\frac{x^9}{6!}+\frac{4\cdot7\cdot10}{9\cdot10\cdot11\cdot12}\cdot\frac{x^{12}}{8!}-\cdots$$

и потврђена је Продијева теорема, то јест важи $\cos_x x\approx\cos\left(x\sqrt{x}\right)$. Ако упоредимо коефицијенте за $\cos_x x$ и $\cos\left(x\sqrt{x}\right)$ јасно је да се разлика између њих смањује како n расте, за свако x, али је највећа на почетку. Иако ово важи за реално x тешко га је доказати за комплексно z, јер се доказ у реалном случају заснива на геометријској средини и неједнакостима везаним за њу, а у комплексном случају геометријска средина због n-тог корена $q=\sqrt[n]{z_1z_2\ldots z_n}$ није једнозначна. Исто важи и за синусно решење

$$y_2(x)=\sin_x x=x-\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^7}{(3\cdot4)(6\cdot7)}-\frac{x^{10}}{(3\cdot4)(6\cdot7)(9\cdot10)}+\cdots.$$

Према Продијевој теореми је $\sin_x x \approx \frac{\sin\left(x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$. Упоређивањем њихових коефицијената примећујемо да се разлика $\sin_x x - \frac{\sin\left(x\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$ смањује када n расте. Све ово важи за реално x. За комплексно z тек треба одредити нуле решења $w_1(z)$ и $w_2(z)$ и ако је могуће лоцирати их.

2. Узмимо сада да је $a(z) = z^2$. Тада канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2 w}{dz^2} + z^2 w(z) = 0$ има решење $w(z)$ ако и само ако је оно решење интегралне једначине $w(z) = c_1 z + c_2 - \int_0^z\int_0^z z^2 w(z)\,dz^2$. На основу ове интегралне једначине дефинишемо итерације за партикуларни интеграл $w_1(z)$ помоћу рекурзивне формуле

$$w_1^{[n]}(z) = 1 - \int_0^z\int_0^z z^2 w_1^{[n-1]}(z)\,dz^2, n = 1, 2, \ldots$$

са почетном апроксимацијом $w_1^{[0]}(z)$ за коју је $w_1^{[0]}(0) = w_1(0) = 1$. Аналогно и за партикуларни интеграл $w_2(z)$ низ итерација се дефинише са

$$w_2^{[n]}(z) = z - \int_0^z\int_0^z z^2 w_2^{[n-1]}(z)\,dz^2, n = 1, 2, \ldots$$

са почетном апроксимацијом $w_2^{[0]}(z)$ за коју је $w_2^{[0]}(0) = w_2(0) = 0$.

Како низови итерација апсолутно и униформно конвергирају по Пикаровој теореми то за партикуларне интеграле $w_1(z)$ и $w_2(z)$ после комплетирања непотпуних факторијала у имениоцу добијамо

$$w_1(z) = 1 - \int_0^z\int_0^z z^2 dz^2 + \int_0^z\int_0^z z^2 dz^2 \int_0^z\int_0^z z^2 dz^2 - \cdots = 1 - 2\cdot\frac{z^4}{4!} + 2\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{z^8}{8!} - 2\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 10\cdot\frac{z^{12}}{12!} + \cdots$$

$$w_2(z) = z - \int_0^z\int_0^z z^3 dz^2 + \int_0^z\int_0^z z^2 dz^2 \int_0^z\int_0^z z^3 dz^2 - \cdots = z - 2\cdot 3\cdot\frac{z^5}{5!} + 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{z^9}{9!} -$$

$$- 2\cdot 3\cdot 6\cdot 7\cdot 10\cdot 11\cdot\frac{z^{13}}{13!} + \cdots.$$

По аналогији са Штурмовим реалним функцијама, које су осцилаторна решења каноничне реалне ДЈ другог реда $y'' + x^2 y = 0, a(x) = x^2 > 0$, $ya(x) \in (C, Lip)$ у G, решења $w_1(z)$ и $w_2(z)$, одговарајуће комплексне ДЈ су такође осцилаторне функције и нуле осцилација су редом решења једначина $z^2 = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \ldots$ и $z^2 = n\pi, n = 0, 1, \ldots$

3. Аналогно, ако је $a(z) = z^n$, за партикуларно решење $w_1(z)$ итерацијама добијамо

$$w_1(z) = 1 - \int_0^z \int_0^z z^n dz^2 + \int_0^z \int_0^z z^n dz^2 \int_0^z \int_0^z z^n dz^2 - \cdots = 1 - \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{z^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} - \cdots =$$
$$= 1 - n!\frac{z^{n+2}}{(n+2)!} + n!(n+3)(n+4)\ldots(2n+1)(2n+2)\frac{z^{2n+4}}{(2n+4)!} - \cdots \quad .$$

Итерацијама израчунавамо и партикуларно решење $w_2(z)$.

Примећујемо да се наизменично смењују знаци минуса и плуса, што је важно али само за реални случај Штурмових теорема. Затим, ако посматрамо коефицијенте, видимо да је бројилац увек мањи од имениоца барем за n^2, што обезбеђује конвергенцију по Даламберовом или Кошијевом критеријуму.

За произвољни полиномни коефицијент $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ каноничне комплексне ДЈ другог реда $\frac{d^2 w}{dz^2} + P_n(z) w(z) = 0$ добијамо итерацијама исту структуру редова од вишеструких интеграла за партикуларно решење $w_1(z)$

$$w_1(z) = 1 - \int_0^z \int_0^z P_n(z) dz^2 + \int_0^z \int_0^z P_n(z) dz^2 \int_0^z \int_0^z P_n(z) dz^2 - \cdots = 1 - Q_{n+2}(z) + R_{2n+4}(z) - S_{3n+6}(z) + \cdots$$

где су коефицијенти у полиномима $Q_{n+2}(z), R_{2n+4}(z), S_{3n+6}(z), \ldots$ још сложенији али се у сваком случају могу очекивати осцилаторна решења. Слично је и за партикуларни интеграл $w_2(z)$.

Класа 5

Посматрајмо сада каноничну комплексну ДЈ другог реда са експоненцијалним коефицијентом $a(z) = e^z$

$$\frac{d^2w}{dz^2}+e^z w(z)=0 .$$

Методом редова-итерација добијамо партикуларна решења

$$w_1(z)=1-\int_0^z\int_0^z e^z dz^2+\int_0^z\int_0^z e^z dz^2\int_0^z\int_0^z e^z dz^2-\ldots$$

$$w_2(z)=z-\int_0^z\int_0^z ze^z dz^2+\int_0^z\int_0^z e^z dz^2\int_0^z\int_0^z ze^z dz^2-\ldots \quad .$$

Како су двојни интеграли $\int_0^z\int_0^z e^z dz^2=e^z+P_1(z)$, $\int_0^z\int_0^z e^z dz^2\int_0^z\int_0^z ze^z dz^2=e^{2z}Q_1(z)+$ $+e^z R_1(z)+S_1(z),\ldots$ сложени то ће редови-итерације бити још сложенији. Из тог разлога, за ову комплексну ДЈ можемо очекивати осцилаторна решења са великим бројем нула осцилација.

За каноничне комплексне ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(\cos z)w(z)=0$, $\frac{d^2w}{dz^2}+(\sin z)w(z)=0$, $\frac{d^2w}{dz^2}+(\operatorname{ch} z)w(z)=0$ и $\frac{d^2w}{dz^2}+(\operatorname{sh} z)w(z)=0$, због веза функција $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{ch} iz$, e^z и e^{iz}, редови-итерације ће бити сложени, јер овде имамо виши ранг раста коефицијента $a(z)$ а са тим и више нула осцилација.

У новијој литератури, [10],[23],[25],[26], тренутно су актуелне каноничне комплексне ДЈ другог реда са аналитичким коефицијентима $a(z)=e^{kz}+P_n(z)$, $a(z)=k+\frac{2e^{-z}-e^{-2z}}{4}$, $a(z)=P(e^z),\ldots$. Међутим, још не постоји апарат редова-итерација који би нам омогућио брзу оцену општег члана итерација, ранга раста и његов утицај на нуле.

3.5 Прва теорема о средњој вредности линијског комплексног интеграла

Уобичајено је да се појам средње вредности комплексног интеграла уводи за затворене (путање) контуре, по којима је $f(z)$ аналитичка или барем непрекидна, док унутар контуре може бити и прекидна и чак не аналитичка функција. Ово је сугерисано основном Кошијевом теоремом

$$\oint_L f(z)\,dz = 0. \qquad (3.5.1)$$

Ако је z тачка из унутрашњости контуре L, тада функција $\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$ није аналитичка свуда унутар L, па важи основна Кошијева интегрална формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\,d\varsigma. \qquad (3.5.2)$$

Ако је $f(z)$ аналитичка на L, тада се L може заменити најпростијом затвореном контуром, кругом K радијуса R са центром у z. Тако општа формула (3.5.2) важи и за $L \equiv K$. Под средњом вредношћу функције подразумевамо вредност $\int_K \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}\,d\varsigma$ подељену са дужином лука круга $S = 2R\pi$. Заменом, $\varsigma = z + Re^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le 2\pi$, формула (3.5.2) постаје

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z + Re^{i\varphi}\right)d\varphi. \qquad (3.5.3)$$

Ако је $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитичка, тада су $u(x,y)$ и $v(x,y)$ хармонијске функције, па и за њих важи теорема о средњој вредности

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)d\varphi, v(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(z_0 + re^{i\varphi}\right)d\varphi\ . \qquad (3.5.4)$$

Овај важан појам су разматрали и наши математичари В. Дајовић [11], Б. Станковић [38], М. Матељевић [28] и други. На основу Кошијеве теореме о остацима развијена је примена овог поступка на комплексне, а посебно на реалне несвојствене интеграле.

Међутим, код решавања обичних реалних ДЈ, формуле (3.5.1) до (3.5.4) су од малог значаја, јер се не користи затворена контура. Зато се тражи неки метод за оцену реалног интеграла $\int_0^x a(x)\,dx$, а такође и линијског комплексног интеграла. $\int_{L:z_0}^{z} a(z)\,dz.$

За реалан интеграл, подсетили смо да је веома важна Прва теорема о средњој вредности одређеног интеграла. У секцијама 3.2 и 3.4 смо покушали да дефинишемо неку врсту средње вредности $a(z)$ по луку L, али смо тада били принуђени да узмемо модул од $f(z)$ чиме смо изгубили аналитичност функције, јер $|f(z)|$ није више аналитичка. Тада је линијски интеграл дуж L зависио од дужине лука $S(L)$, па он није остао једнозначан. Зато код метода редова-итерација морамо опстати на комплексном броју без модула.

Значи, нама треба, за незатворену путању L, приближна вредност интеграла $\int_{L:z_0}^{z} a(z)\,dz$, $\int_{L:z_0}^{z}\int_{L:z_0}^{z} a(z)\,dz^2$, $\int_{L:z_0}^{z}\int_{L:z_0}^{z} za(z)\,dz^2$ при чему ће се приближност проверавати модулом, иако се он неће користити код развијања у итерацијама, јер се губи аналитичност.

Тражимо, дакле, једноставну формулу средње вредности, као код реалног интеграла, где је ς нека врста средине између тачака z_0 и z, а $a(z)$ аналитичка функција. Водићемо рачуна да $a(\varsigma)$ не излази изван неких одређених граница, а то су кругови $\varepsilon < |z-\varsigma| < r$, са максималним радијусом r око тачке z. Због тога сматрамо да важи следећа

Хипотеза. Формула

$$\int_{L:z_0}^{z} a(z)\,dz = a(\varsigma)(z-z_0) \tag{3.5.5}$$

где је

1. $a(z)$ аналитичка функција у области G у којој се налази крива L, по којој се врши интеграција,
2. z_0 и z су почетна и крајња граница интеграла,
3. ς је нека тачка из G, не мора бити на L, али која задовољава неке стандарде приближности, најпре по модулу а затим по аргументу,
4. $A(z)$ примитивна функција за $a(z)$, коју је могуће наћи помоћу квадратуре,

се може усвојити као нека врста средње вредности интеграла ако је пут интеграције отворена линија L.

Основе за ову хипотезу су:

- Ако је $z = z_0$, то јест ако L постоји и затвара се, тада добијамо $\oint_L a(z)\,dz = 0$

што је основна Кошијева формула.

- За реално $z \equiv x$ имамо одсечак $L = [x_0, x]$, па формула (3.5.5) постаје формула за средњу вредност интеграла у реалној области то јест $\int_{x_0}^{x} a(x)dx = a(\varsigma)(x - x_0), x_0 \le \varsigma \le x$.
- Ако је $a(\varsigma) = \dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}$ прекидна у датој области G, у којој лежи путања L, тада

важи основна Кошијева теорема $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma$, или Кошијева теорема о остацима $\oint_L \dfrac{f(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\varsigma} a(z)$.

- Важе и формуле: (3.5.3) о средњој вредности аналитичке функције $a(z)$ и (3.5.4) за средњу вреност хармонијских функција $u(\varsigma) = \operatorname{Re} a(\varsigma), v(\varsigma) = \operatorname{Im} a(\varsigma)$.

Дакле, основна сазнања о аналитичности се уклапају у претпоставку (3.5.5), али њена конструкција захтева постојање сингуларних тачака аналитичке функције $a(z)$ које не морају да су на L. Тако, ако се L савије и затвори и ако је дужина њеног лука S, тада L постаје круг K дужине $S = 2R\pi$, па важи прва особина, ς мора бити изван круга K.

Сада наводимо испитивања основних случајева.

Теорема 3.5.1. *Интеграл од степене функције* $a(z) = z^n, n \ge 0$, *по Жорданоој кривој* L *унутар круга* $|z| \le R$ *се може заменити интегралом по најкраћем путу, то јест по правцу* Oz *па важи теорема о средњој вредности интеграла*

$$\int_{L:0}^{z} a(z)dz = a(\varsigma)z, \tag{3.5.7}$$

где је средња тачка на путу дата са

$$\varsigma = \frac{z}{\sqrt[n]{n+1}} \tag{3.5.8}$$

а средња вредност функције износи

$$a(\varsigma) = a\left(\frac{z}{\sqrt[n]{n+1}}\right) = \frac{z^n}{n+1}. \tag{3.5.9}$$

Доказ: Нека је $n=0$, односно нека је $a(z)=c$ комплексна константа. Пошто интеграл аналитичке функције не зависи од пута L, већ само од примитивне функције $A(z)=z$, за дату функцију $a(z)=c$ и од почетне и крајње тачке, следи

$$\int_{L:z_0}^{z} a(z)dz = \int_{L:z_0}^{z} cdz = c(z-z_0).$$

Одавде је $\int_{L:z_0}^{z} cdz = c(z-z_0) \overset{(3.1.1)}{=} a(\varsigma)(z-z_0)$, а ово је у ствари формула (3.5.5) у којој је $a(\varsigma)=c$ и ς било која тачка на одсечку $\overline{z_0 z}$.

Даље, за $n=1$ нека је $a(z)=z$. Тада је $\int_{L:z_0}^{z} zdz = \frac{1}{2}\left(z^2 - z_0^{\,2}\right) \overset{(3.1.1)}{=} a(\varsigma)(z-z_0)$. Одавде, из $a(\varsigma)=\varsigma$ следи $\varsigma = \frac{1}{2}\frac{z^2-z_0^{\,2}}{z-z_0} = \frac{z+z_0}{2}$. Дакле, ς је аритметичка средина крајњих тачака z_0 и z.

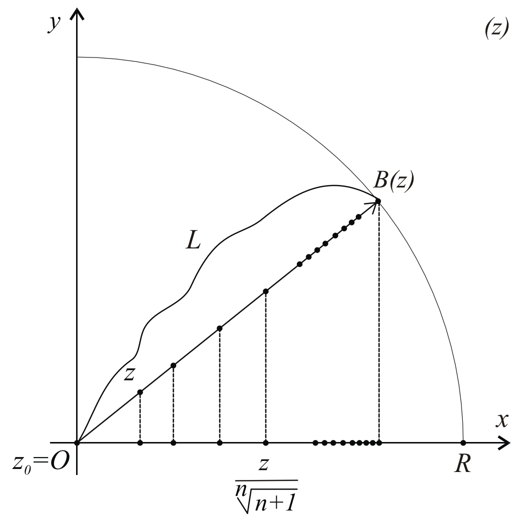
Размотримо даље случај $n=2$. Како је $a(z)=z^2$, тада је

$$\int_{L:z_0}^{z} a(z)dz = \int_{L:z_0}^{z} z^2dz \overset{(3.1.1)}{=} a(\varsigma)(z-z_0)$$

односно, $\frac{1}{3}\left(z^3-z_0^{\,3}\right) = a(\varsigma)(z-z_0)$, или $a(\varsigma) = \frac{1}{3}\left(z^2+z_0 z+z_0^{\,2}\right) = \varsigma^2$. Одавде, због вишезначности квадратног корена имамо две вредности за $\varsigma = \pm\sqrt{\frac{z^2+z_0 z+z_0^{\,2}}{3}}$. Приметимо да је ς^2 аритметичка средина од три квадрата $z^2, z_0^{\,2}, z_0 z$, узетим у почетној и крајњој тачки.

Нека је $n=3$, односно $a(z)=z^3$. Тада је, за $z_0=0$, $a(\varsigma) = \frac{1}{z}\int_{L:0}^{z} z^3 dz = \frac{z^3}{4} = \varsigma^3$, односно $\varsigma = \frac{z}{\sqrt[3]{4}}$. За $z_0 \neq 0$ добијамо $a(\varsigma) = \frac{1}{4}(z+z_0)\left(z^2+z_0^{\,2}\right) = \varsigma^3$, или $\varsigma = \sqrt[3]{\frac{(z+z_0)\left(z^2+z_0^{\,2}\right)}{4}}$. Поступак настављамо даље. Ако је $a(z)=z^n$, тада је $a(\varsigma) = \frac{1}{z-z_0}\int_{L:z_0}^{z} z^n dz$, или $\varsigma^n = \frac{1}{n+1}\left[z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} z_0 + \cdots + z_0^{\,n}\right]$. За $z_0=0$ следи

$\varsigma^n = \dfrac{z^n}{n+1}$, односно, $\varsigma = \dfrac{z}{\sqrt[n]{n+1}}$.



Слика 3.2.

Како је $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ то средња вредност $\varsigma = \dfrac{z}{\sqrt[n]{n+1}} \to z$, када $n \to \infty$ по одсечку $\overline{OB}$, а $a(\varsigma)$ тежи $a(z)$. Дакле, низ средњих тачака $\{\varsigma_n\} : \dfrac{z}{2}, \dfrac{z}{\sqrt{3}}, \dfrac{z}{\sqrt[3]{4}}, \ldots, \dfrac{z}{\sqrt[n]{n+1}}$, по одсечку $\overline{OB}$ тежи ка z. Са друге стране, математичком индукцијом лако доказујемо да је

$$\int_{L:0}^{z} c\,dz = cz = a(\varsigma) z \Rightarrow a(\varsigma) = c = const$$

$$\int_{L:0}^{z} z\,dz = \frac{z^2}{2} = a(\varsigma) z = \varsigma z \Rightarrow \varsigma = \frac{z}{2}$$

$$\int_{L:0}^{z} z^2 dz = \frac{z^3}{3} = a(\varsigma) z = \varsigma^2 z \Rightarrow \varsigma = \frac{z}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{L:0}^{z} z^3 dz = \frac{z^4}{4} = a(\varsigma) z = \varsigma^3 z \Rightarrow \varsigma = \frac{z}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\vdots$$

$$\int_{L:0}^{z} z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} = a(\varsigma) z = \varsigma^n z \Rightarrow \varsigma = \frac{z}{\sqrt[n]{n+1}}$$

и тако даље, што је требало доказати. ■

Нека је $a(z)$ произвољна аналитичка функција, дефинисана произвољним конвергентним степеним редом

$$a(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k + \cdots \ . \qquad (3.5.10)$$

Поставља се питање да ли важи формула (3.5.7) за средњу вредност интеграла или нека друга варијанта ове формуле, где се налази средња тачка ς и колико износи средња вредност $a(\varsigma)$. Следи

Теорема 3.5.2. *За произвољан полином* $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *степена* n, *важи формула (3.5.7) за средњу вредност интеграла, где је* ς *нека средња вредност аргумента* z *модула мањег од* $|z|=R$, *која зависи од* z *односно од* $P_n(a_n, z)$.

Доказ: За прост случај, када је $P_n(z)$ линеарна функција, $P_1(z)=a_0+a_1 z$, имамо интеграл

$$\int_{L:0}^{z} P_1(z)dz = \int_0^z (a_0 + a_1 z)dz = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} \overset{(3.5.7)}{=} P_1(\varsigma) z .$$

Одавде је $\varsigma = \frac{z}{2}$. Дакле, средња вредност постоји и тачно је на средини одсечка $\overline{z_0 z} = \overline{Oz}$. Осим тога, ς је унутар круга радијуса $R=|z|$. Из интеграла квадратне функције

$$\int_{L:0}^{z} P_2(z)dz = \int_0^z (a_0 + a_1 z + a_2 z^2)dz = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} \overset{(3.5.7)}{=} P_2(\varsigma) z$$

добијамо

$$a_1\varsigma + a_2\varsigma^2 = a_1 \frac{z}{2} + a_2 \frac{z^2}{3} . \qquad (3.5.11)$$

Одавде следи једнакост две комплексне функције са истим коефицијентима a_1, a_2 а са различитим комплексним аргументима

$$F(a_1, a_2, \varsigma) = a_1\varsigma + a_2\varsigma^2 \ , \quad G(a_1, a_2, z) = a_1 \frac{z}{2} + a_2 \frac{z^2}{3} .$$

На основу једнакости (3.5.11) добијамо $F(a_1,a_2,\varsigma)=G(a_1,a_2,z)$, а одавде имамо и једнакост њихових модула

$$\left|F(a_1,a_2,\varsigma)\right|=\left|G(a_1,a_2,z)\right|. \tag{3.5.12}$$

На овај начин можемо оценити и максимуме модула $\left|F(a_1,a_2,\varsigma)\right|\le|a_1||\varsigma|+|a_2|\left|\varsigma^2\right|$ и $\left|G(a_1,a_2,z)\right|\le|a_1|\left|\frac{z}{2}\right|+|a_2|\left|\frac{z^2}{3}\right|$. Овде су међе неки реални позитивни бројеви. Како су коефицијенти међа $|a_1|$ и $|a_2|$ заједнички, и како не знамо која од $\max\left|F(a_1,a_2,\varsigma)\right|$ и $\max\left|G(a_1,a_2,z)\right|$ је већа међа, да би важило (3.5.12) довољно је да у специјалном случају узмемо $|a_1|=|a_2|$. Тада је $|a_1|\left(|\varsigma|+\left|\varsigma^2\right|\right)=|a_1|\left(\left|\frac{z}{2}\right|+\left|\frac{z^2}{3}\right|\right)$, односно $|\varsigma|=\frac{|z|}{2}$ и $|\varsigma|=\frac{|z|}{\sqrt{3}}$. Како смо добили противречност, то је израз (3.5.12) истинит само ако је $|\varsigma|<|z|$.

Из интеграла кубне функције $a(z)=P_3(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3$ на основу (3.5.7) имамо

$$a_0z+a_1\frac{z^2}{2}+a_2\frac{z^3}{3}+a_3\frac{z^4}{4}=\left(a_0+a_1\varsigma+a_2\varsigma^2+a_3\varsigma^3\right)z$$

односно дељењем са $z\neq 0$

$$a_0+a_1\frac{z}{2}+a_2\frac{z^2}{3}+a_3\frac{z^3}{4}=a_0+a_1\varsigma+a_2\varsigma^2+a_3\varsigma^3.$$

Поново добијамо две различите комплексне функције са аргументима z и ς, а са истим коефицијентима

$$F(a_1,a_2,a_3,\varsigma)=a_1\varsigma+a_2\varsigma^2+a_3\varsigma^3 \quad , \quad G(a_1,a_2,a_3,z)=a_1\frac{z}{2}+a_2\frac{z^2}{3}+a_3\frac{z^3}{4}.$$

Из $F(a_1,a_2,a_3,\varsigma)=G(a_1,a_2,a_3,z)$ имамо једнакост модула $\left|F(a_1,a_2,a_3,\varsigma)\right|= =\left|G(a_1,a_2,a_3,z)\right|$, а из компарације коефицијената, како би специјалан случај $|a_1|=|a_2|=|a_3|$ био испуњен, $|\varsigma|=\frac{|z|}{2}$, $|\varsigma|=\frac{|z|}{\sqrt{3}}$, $|\varsigma|=\frac{|z|}{\sqrt[3]{4}}$. Следи, $|\varsigma|<|z|$.

Закључујемо да теорема важи за све облике комплексног полинома, јер у општем случају ако је L отворени лук неке криве, имамо

$$\int_{L:0}^{z} P_n(z)\,dz = \int_{L:0}^{z} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k dz = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{L:0}^{z} z^k dz = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} = a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} + \cdots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} =$$

$$\overset{(3.5.7)}{=} P_n(\varsigma) z = \left(a_0 + a_1\varsigma + a_2\varsigma^2 + \cdots + a_n\varsigma^n\right) z$$

Одавде, после дељења са $z \neq 0$ добијамо полиномну једначину

$$a_0 + a_1\varsigma + a_2\varsigma^2 + \cdots + a_n\varsigma^n - a_0 - a_1\frac{z}{2} - a_2\frac{z^2}{3} - \cdots - a_n\frac{z^n}{n+1} = 0\,.$$

Ако је $a_n \neq 0$ на основу класичне теореме линеарне алгебре, ова једначина има тачно n различитих корена $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots \varsigma_n$ реалних или комплексних. Сада, на исти начин као малопре формирамо функције

$$F(a_i,\varsigma) = a_1\varsigma + a_2\varsigma^2 + a_3\varsigma^3 + \cdots + a_n\varsigma^n\ ,\ G(a_i,z) = a_1\frac{z}{2} + a_2\frac{z^2}{3} + a_3\frac{z^3}{4} + \cdots + a_n\frac{z^n}{n+1}, i = \overline{1,n}\ .$$

Тада, из $F(a_i,\varsigma) = G(a_i,z)$ следи $\left|F(a_i,\varsigma)\right| = \left|G(a_i,z)\right|$. Ако уведемо међе

$$\max\left|F(a_i,\varsigma)\right| = |a_n||\varsigma|^n + \cdots + |a_1||\varsigma|, \quad \max\left|G(a_i,z)\right| = |a_n|\frac{|z|^n}{n+1} + \cdots + |a_1|\frac{|z|}{2}$$

тада из $\left|F(a_i,\varsigma)\right| = \left|G(a_i,z)\right|$, специјално за $|a_1| = |a_2| = \ldots = |a_n|$, следи да је $|\varsigma| = \frac{|z|}{2} =$ $= \frac{|z|}{\sqrt{3}} = \frac{|z|}{\sqrt[3]{4}} = \ldots = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n+1}}$, што је противречност. Дакле, важи $|\varsigma| < |z|$. ■

Аналитичку функцију $a(z)$ развили смо у степени ред (3.5.10) који конвергира по Кошијевом критеријуму конвергенције за свако z, јер је $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|} = \lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z|^k} = |z||q| \leq R$ за $|q| < 1$. То значи да ред (3.5.10) може да се интеграли члан по члан. Тако интеграцијом добијамо ред

$$\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz = \int_{L:0}^{z} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{L:0}^{z} z^k dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} =$$

$$= a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + a_2 \frac{z^3}{3} + \cdots + a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} + \cdots \tag{3.5.13}$$

чији је општи члан $A_k = \frac{a_k}{k+1}$. Добијени ред (3.5.13) конвергира јер исти Кошијев критеријум конвергенције даје $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|a_{k-1}||z|^k}{k}} < |z||q^*| \leq R$, јер је q^* још мањи од q, због $|A_k| \leq |a_k|$.

Јасно је на основу претходне теореме да су апсцисе ς_k средњих вредности интеграла унутар круга $|z| < R$, који садржи целу област G аналитичности функције $a(z)$.

Уместо редом (3.5.13), интеграл од аналитичке функције често можемо изразити квадратурама. Нека је $A(z)$ примитивна функција за $a(z)$ одређена у коначном облику. Како је

$$\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz = A(z) - A(0) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} \right) \overset{(3.5.7)}{=} a(\varsigma) z$$

то раздвајањем променљивих добијамо средњу вредност $a(\varsigma) = \frac{A(z) - A(0)}{z} = \varphi(z)$.

Из ове релације можемо израчунати ς и добијамо да је $\varsigma = a^{-1}\left(\frac{A(z) - A(0)}{z} \right)$.

На овај начин смо избегли појам монотоности функције $a(z)$, јер је познато да у скупу комплексних бројева монотоност не постоји.

3.6 Друга теорема о средњој вредности комплексног интеграла

Код реалних итерација користи се више врста средњих вредности одређеног интеграла. Ми смо у уводном делу ове главе навели само две. Заједно са теоремама из секције 3.5 оне су нам дале идеју да формулишемо аналогну Другу теорему за средњу вредност комплексног интеграла за производ аналитичких функција $f(z)$ и $g(z)$.

Међутим, за потребе итерација, нама је важан линијски интеграл по отвореном путу

$$I=\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz \tag{3.6.1}$$

где је $f(z)=a(z)$, а $g(z)=z$. Због једноставности, аналитичку функцију пишемо у облику степеног реда (3.5.10).

Теорема 3.6.1. *За интеграле типа (3.6.1), где је* $a(z)$ *аналитичка функција у кругу* $|z|\le R$*, важи формула средње вредности интеграла*

$$\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz = z^2 a(\varsigma), \tag{3.6.2}$$

где је ς *унутрашња тачка круга* $|\varsigma|<|z|=R$.

Доказ. Нека је $f(z)=a(z)$ аналитичка функција дата степеним редом (3.5.10). Како је

$$za(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{k+1} = a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \cdots + a_k z^{k+1} + \cdots$$

то овај ред због аналитичности можемо интегралити члан по члан и добијамо ред $z^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+2}z^k$. Са друге стране, применом теореме 3.5.1 о средњој вредности интеграла, односно формуле (3.5.7) добијамо једнакост

$$z^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+2}z^k = z^2\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\varsigma^k \quad . \tag{3.6.3}$$

Покушајмо да за сваки коефицијент a_k нађемо везу између средње вредности ς и аргумента z. Из једнакости (3.6.3)

$$z^2\left[\frac{a_0}{2}+\frac{a_1 z}{3}+\frac{a_2 z^2}{4}+\cdots+\frac{a_k z^k}{k+2}+\cdots\right] = z^2\left[a_0 + a_1\varsigma + a_2\varsigma^2+\cdots+a_k\varsigma^k+\cdots\right]$$

следи $\frac{a_0}{2}=a_0, \frac{a_1 z}{3}=a_1\varsigma, \frac{a_2 z^2}{4}=a_2\varsigma^2, \ldots, \frac{a_k z^k}{k+2}=a_k\varsigma^k$, односно $a_0=0, \varsigma=\frac{z}{3}=\frac{z}{2}=$ $=\cdots=\frac{z}{\sqrt[k]{k+2}}$. Како је ово противуречност, то морамо посматрати суме аналитичких редова $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+2}z^k$ и $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\varsigma^k$. Ако узмемо горње међе, као у секцији 3.5, примећујемо да су коефицијенти модуларног реда $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|a_k|}{k+2}|z^k|$ мањи од коефицијената реда $\sum_{k=0}^{+\infty}|a_k||\varsigma^k|$. Исто се може очекивати и за суме, јер коефицијенти a_k директно утичу на полупречник конвергенције. Да би се одржала једнакост редова, $|F(a_i,\varsigma)|=|G(a_i,z)|$, видели смо у секцији 3.5, између ς и z постоји веза $|z|>|\varsigma|$. Другим речима, вредности ς у овој релацији морају бити мање од z, унутар круга конвергенције $|z|=R$. ■

Теорема 3.6.2. *Средња вредност интеграла* $\int_{L:0}^{z} z^k a(z)\,dz, k\in\mathbb{N}$, *где је* $a(z)$ *аналитичка функција у кругу* $|z|\le R$,*(*$|\varsigma|\le R$*) је дата са*

$$\int_{L:0}^{z} z^k a(z)\,dz = z^{k+1}a(\varsigma). \tag{3.6.4}$$

Сама средња вредност $a(\varsigma)$ *је једнозначна, али се може поновити више пута или безброј пута.*

Доказ: Из развоја аналитичке функције $a(z)$ у степени ред (3.5.10) имамо

$$\int_{L:0}^{z} z^k a(z)\,dz = z^{k+1}\left[\frac{a_0}{k+1}+\frac{a_1 z}{k+2}+\frac{a_2 z^2}{k+3}+\cdots+\frac{a_n z^n}{k+n+1}+\cdots\right]\overset{(3.5.7)}{=} z^{k+1}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\varsigma^n .$$

Дељењем са $z^{k+1}\neq 0$ и изједначавајући множиоце уз a_k, имамо $a_0=0$, $\varsigma=\frac{z}{k+2}=\frac{z}{\sqrt{k+3}}=\ldots=\frac{z}{\sqrt[n]{k+n+1}}$. Одавде следи да је друга једнакост противуречност. Сличном дискусијом сума аналитичких редова добијамо да формула (3.6.4) важи ако је $|\varsigma|<|z|=R$. ■

Приметимо да последња особина важи и за мултиморфне аналитичке функције, $\sqrt{z},\sqrt[n]{z},\ln z, Ar\tanh z\ldots$ које су на неки начин једнозначне јер се средње вредности налазе унутар круга $|\varsigma|<|z|=R$.

За итерације је такође важно наћи неку формулу за интеграл $\int\limits_{L:0}^{z} f(z)g(z)dz$ производа две аналитичке функције. Претпоставимо да је $a(z)=f(z)g(z)$. Тада на основу формуле (3.5.7) имамо

$$\int\limits_{L:0}^{z} f(z)g(z)dz = f(\varsigma)\big(g(\varsigma)z\big), |\varsigma|<|z|=R. \tag{3.6.5}$$

Међутим, може да се деси да је део интеграла у формули (3.6.5) решив, на пример нека је то интеграл $\int\limits_{L} g(z)dz$. Тада нам треба нека врста Друге теореме о средњој вредности за комплексан интеграл.

Теорема 3.6.3 (Друга теорема о средњој вредности комплексног интеграла). *За интеграл производа две аналитичке функције* $f(z)$ *и* $g(z)$*, по отвореном путу* L *који повезује тачке* $z_0=0$ *и* z*, и који је садржан у кругу полупречника* $|z|\le R$*, важи формула*

$$\int\limits_{L:0}^{z} f(z)g(z)dz = f(\varsigma)\int\limits_{L:0}^{z_1} g(z)dz = g(\varsigma)\int\limits_{L:0}^{z_2} f(z)dz, \tag{3.6.6}$$

где су модули $|\varsigma|,|z_1|,|z_2|$ *унутар круга* $|z|\le R$.

Доказ: Ако у (3.6.5) извршимо груписање

$$\int\limits_{L:0}^{z} f(z)g(z)dz = f(\varsigma)\big(g(\varsigma)z\big), |\varsigma|<|z|$$

видимо да у загради имамо поново случај из теореме 3.5.5, али са неким ς који не одговара z. Нека је $f(z)=1$, тада је $g(\varsigma)z=\int\limits_{L:0}^{z_1} g(z)dz, |\varsigma|<|z_1|$. Следи

$$\int\limits_{L:0}^{z} f(z)g(z)dz = f(\varsigma)\int\limits_{L:0}^{z_1} g(z)dz,$$

где су $|\varsigma|,|z_1|<|z|=R$. Аналогно, ако у (3.6.5) извршимо груписање

$$\int\limits_{L:0}^{z} f(z)g(z)dz = g(\varsigma)\big(f(\varsigma)z\big), |\varsigma| < |z|$$

имамо поново у загради структуру средње вредности интеграла, али сада до неке тачке z_2 за коју такође важи $|z_2| < |z| = R$

$$\int\limits_{L:0}^{z} f(z)g(z)dz = g(\varsigma)\int\limits_{L:0}^{z_2} f(z)dz . \qquad \blacksquare$$

Примедба. Аналогно би важило и за вишеструки производ

$$\int\limits_{0}^{z} f(z)g(z)h(z)dz = f(\varsigma)g(\varsigma)h(\varsigma)z = f(\varsigma)\int\limits_{0}^{z_1} g(z)h(z)dz = f(\varsigma)g(\xi)\int\limits_{0}^{z_2} h(z)dz =$$
$$= f(\varsigma)g(\xi)h(\eta)z_2 = ...$$

где су сви међупродукти $\xi, \varsigma, \eta, z_1, z_2 \ldots$ по модулу мањи од $|z| \le R$.

Код решавања интеграла који се користе у итерацијама, коришћењем горе наведених теорема можемо да израчунамо узастопне двојне интеграле.

1. За $a(\varsigma)$ константно имамо

$$\int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)dz^2 = \int\limits_{L:0}^{z}\left(\int\limits_{L:0}^{z} a(z)dz\right)dz = \int\limits_{L:0}^{z} a(\varsigma)zdz = a(\varsigma)\frac{z^2}{2}, |\varsigma| < |z| \le R.$$

2. На основу претходног случаја имамо

$$\int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)dz^2 \int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)dz^2 = \int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)a(\varsigma)\frac{z^2}{2!}dz^2 .$$

Ако не мењамо горњу границу z, тада је ς константно, $a(\varsigma)$ је такође константно, па на основу Друге теореме о средњој вредности за $|\varsigma|, |\xi| < |z| \le R$ добијамо

$$\int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)a(\varsigma)\frac{z^2}{2!}dz^2 = a(\varsigma)\int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)\frac{z^2}{2!}dz^2 = a(\varsigma)a(\xi)\int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z}\frac{z^2}{2!}dz^2 = a(\varsigma)a(\xi)\frac{z^4}{4!}.$$

На овај начин се двојни интеграли код итерација третирају као у реалном подручју, само што аргументи средњих вредности нису на одсечку $\left[0,x\right]$, већ су у неком кругу $\left|z\right| \le R$.

3.7 Метод редова-итерација код комплексног интеграла

За каноничну комплексну ДЈ другог реда (2.2.1) са аналитичким коефицијентом $a(z)$

$$\frac{d^2w}{dz^2} + a(z)w(z) = 0$$

добили смо итерацијама два партикуларна решења (2.2.7) и (2.2.8)

$$w_1(z) = 1 - \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)dz^2 + \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)dz^2 \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)dz^2 - \ldots$$

$$w_2(z) = z - \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)dz^2 + \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)dz^2 \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)dz^2 - \ldots$$

у којима фигуришу линијски узастопни двојни интеграли $\int_L\int_L a(z)dz^2, \int_L\int_L za(z)dz^2$, као и интеграли $\underbrace{\int_L\int_L a(z)dz^2 \ldots \int_L\int_L a(z)dz^2}_{n-\text{двојних интеграла}}$ и $\underbrace{\int_L\int_L a(z)dz^2 \ldots \int_L\int_L za(z)dz^2}_{n-\text{двојних интеграла}}$, где је L незатворен лук пута интеграције који повезује тачке $z_0 = 0$ и z. Ако би L била контура, тада би због аналитичности и Кошијеве теореме сваки први интеграл по реду у горњим узастопним двојним интегралима био једнак нули, $\oint_L a(z)dz = 0, \oint_L za(z)dz = 0$, па су и све итерације једнаке нули, $\underbrace{\int_L\int_L a(z)dz^2 \ldots \int_L\oint_L a(z)dz^2}_{n-\text{двојних интеграла}} = 0$. У овом случају добијамо само тривијална решења $w_1(z) = w_2(z) = 0$.

Покушајмо сада на основу секције 3.4 и делимично класично помоћу степених редова да решимо интеграле у (2.2.7) и (2.2.8).

Теорема 3.7.1. *За "косинусно" и "синусно" решење комплексне једначине осцилација другог реда (2.2.1), са аналитичким коефицијентом $a(z)$, постоји алгоритам за решавање помоћу степених редова.*

Доказ: Ако користимо обичну аналитичност $a(z)$ и Маклоренов[3] ред, имамо

$$\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^k}{k+1} \tag{3.7.1}$$

где је a_k коефицијент у Маклореновом реду аналитичке функције, а z је крајња тачка лука L. Како је и интеграл аналитичке функције $\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz$ аналитичка функција то се примитивна функција може посматрати као интеграл са променљивом горњом границом. Ред (3.7.1) се може интегралити члан по члан, па за први линијски двојни интеграл у (2.2.7) имамо

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 = \int_{L:0}^{z}\left(\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz\right)dz = \int_{L:0}^{z}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^k}{k+1}\right)dz = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+1}\int_{0}^{z} z^k\,dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Како сада производ $a(z)\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2$ можемо представити у облику

$$a(z)\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{(k+1)^2}\right),$$

то за другу итерацију, после множења редова и интеграције чланова збира два пута члан по члан, добијамо

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\left(\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2\right)dz^2 = \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{(k+1)^2}\right)dz^2 = \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_k a_\nu \frac{z^{k+\nu+1}}{(\nu+1)^2}\,dz^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_k a_\nu \frac{z^{k+\nu+3}}{(\nu+1)^2(k+\nu+2)(k+\nu+3)}.$$

[3] *Colin MacLaurin (1813-1854), шкотски математичар*

Тако можемо добити и све итерације за решење $w_1(z)$. Слично, из линијског интеграла

$$\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz = \int_{L:0}^{z} z\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)dz = \int_{0}^{z}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{k+1}\right)dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{0}^{z} z^{k+1}dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+2}}{k+2}$$

добијамо двојни интеграл

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2 = \int_{L:0}^{z}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+2}}{k+2}\right)dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \int_{0}^{z} \frac{z^{k+2}}{(k+2)}dz = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+3}}{(k+2)(k+3)}.$$

Како је производ

$$a(z)\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+3}}{(k+2)(k+3)}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_k a_\nu \frac{z^{k+\nu+3}}{(\nu+2)(\nu+3)}$$

то је друга итерација облика

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\left(\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2\right)dz^2 = \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} a_k a_\nu \frac{z^{k+\nu+3}}{(\nu+2)(\nu+3)}dz^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{a_k a_\nu}{(\nu+2)(\nu+3)} \frac{z^{k+\nu+5}}{(k+\nu+4)(k+\nu+5)}.$$

Продужавајући овај поступак даље, кроз производ $a(z)\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)dz^2 \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2$ очигледно добијамо све сложеније степене редове, па тако остајемо у оквиру аналитичности.■

Теорема 3.7.1 потврђује принцип да канонична комплексна ДЈ другог реда има аналитичко решење. Она не даје одговор о нулама осцилаторности, рангу раста и тако даље. Зато се поставља питање да ли постоје и непосреднији, простији алгоритми за њено решавање.

Ако у каноничној комплексној ДЈ другог реда (2.2.1) са аналитичким коефицијентом $a(z)$ решење тражимо директно Маклореновим редом, тада нам не требају итерације, јер је то већ познати метод неодређених коефицијената. Да би смо остали на итерацијама за сада се не види бољи начин од средњих вредности и њихових теорема. На тај начин избегавајући модуле, долазимо до конвергенције.

Суштина метода редова-итерација је у примени и одрживости формуле

$$\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz = a(\varsigma)\,z \tag{3.7.2}$$

где је z стална тачка у области аналитичности коефицијента $a(z)$, а ς је нека средња тачка у тој области са особином да је $|\varsigma|<|z|$. Ако је z константо и ς ће бити константно и зависиће само од особине функције $a(z)$, а неће зависити од пута интеграције L који повезује тачке 0 и z, нити од лука $S=Oz$. Вредности ς могу бити и вишезначне, једанпут или безброј пута вишезначне, али су оне константне и све оне дефинишу $a(\varsigma)$ као јединствену средњу вредност интеграла функције $a(z)$.

Ситуација је иста и код реалног одређеног интеграла и његове средње вредности

$$\int_{0}^{x} f(x)\,dx = f(\xi)(x-0), 0<\xi<x$$

јер ξ зависи од x. Ако се x промени, промениће се и ξ, али горње формуле ипак остају. Зато се у свим итерацијама горња граница x (у реалном случају), или z (у комплексном случају), фиксира а променљив остаје индекс итерације $[n], n=1,2,\ldots$. Када се добије резултат итерације, тек тада се z да улога независне променљиве. У том смислу у формули (3.7.2) је ς константа, а такво је и $a(\varsigma)$, а сама формула игра улогу прве линеарне апроксимације. Дакле, имамо исту ситуацију као код итерација за реалне интеграле, без обзира што нема монотоности. Довољне су само итерације и неколико теорема о средњој вредности.

Тако код узастопног интегрирања у (2.2.7) имамо

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 = \int_{L:0}^{z}\left(\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz\right)dz = \int_{L:0}^{z}\left(a(\varsigma_1)z\right)dz = a(\varsigma_1)\int_{0}^{z} z\,dz = a(\varsigma_1)\frac{z^2}{2!},$$

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 = a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)\frac{z^4}{4!}$$

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 \int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2 = a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)a(\varsigma_3)\frac{z^6}{6!}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)dz^2 \int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)dz^2 \dots \int\limits_{L:0}^{z}\int\limits_{L:0}^{z} a(z)dz^2}_{n-\text{двојних интеграла}} = a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)\dots a(\varsigma_n)\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

и тако даље, где су $a(\varsigma_i)$ константе и где се сви ς_i налазе у истом кругу, $|\varsigma_i| < |z| \le R$, у којем могу имати различите аргументе. Осим тога, када $i \to +\infty$ свако ς_i својим путем тежи ка z, остајући у кругу полупречника R. Тако за (2.2.7) добијамо

$$w_1(z) = \cos_{a(z)} z = 1 - a(\varsigma_1)\frac{z^2}{2!} + a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)\frac{z^4}{4!} - a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)a(\varsigma_3)\frac{z^6}{6!} + \cdots$$

или

$$w_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \left(\prod_{i=1}^{k} a(\varsigma_i)\right)\frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad . \tag{3.7.3}$$

Приметимо да се у коефицијентима јавља геометријска средина у неким средњим тачкама ς_i унутар круга $|z| \le R$. Означимо ове средине редом са

$$\begin{aligned}
&g_0 = 1\\
&g_1 = a(\varsigma_1)\\
&g_2 = \sqrt{a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)}\\
&g_3 = \sqrt[3]{a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)a(\varsigma_3)}\\
&\vdots\\
&g_n = \sqrt[n]{a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)...a(\varsigma_n)}
\end{aligned}$$

и тако даље. Иако су корени комплексног броја мултиморфне функције, они су на неки начин једнозначни јер је свако ς_i унутар круга $|z| \le R$, то јест, ако $n \to +\infty$ тада ред (3.7.3) добија све више и више чланова, па $\varsigma_n \to z$. Одавде следи да $\sqrt[n]{a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)...a(\varsigma_n)} \to \sqrt[n]{a(z_1)} \to a(z)$ за било коју од грана функције $g_n = \sqrt[n]{a(z)}$. Дакле, важи $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} a(\varsigma_k)} = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n = a(z)$. Следи

$$w_1(z) = \cos_{a(z)} z = 1 - g_1\frac{z^2}{2!} + g_2{}^2\frac{z^4}{4!} - g_3{}^3\frac{z^6}{6!} + \cdots = 1 - \frac{\left(z\sqrt{g_1}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z\sqrt{g_2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(z\sqrt{g_3}\right)^6}{6!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\left(z\sqrt{g_k}\right)^{2k}}{(2k)!} \ .$$

Уведимо још и геометријску средину ових средина на следећи начин $g(\varsigma)=\sqrt[n]{g_1 g_2 \ldots g_n}$. Сада горња сума постаје

$$w_1(z)=\cos_{a(z)} z \approx 1-\frac{\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right)^2}{2!}+\frac{\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right)^4}{4!}-\frac{\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right)^6}{6!}+\ldots \tag{3.7.4}$$

односно

$$\cos_{a(z)} z \approx \cos\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right)$$

где знак приближно једнако важи због тога што смо увели једну средину уместо $g_1, g_2, \ldots, g_n$.

На основу теореме о средњој вредности, истим поступком израчунавамо итерације у партикуларном решењу $w_2(z)$

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2=\int_{L:0}^{z}\left(\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz\right)dz=\int_{L:0}^{z}\left(a(\varsigma_1)\frac{z^2}{2!}\right)dz=a(\varsigma_1)\int_{0}^{z}\frac{z^2}{2!}dz=a(\varsigma_1)\frac{z^3}{3!}$$

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2=a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)\frac{z^5}{5!}$$

$$\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2=a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)a(\varsigma_3)\frac{z^7}{7!}$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} a(z)\,dz^2\ldots\int_{L:0}^{z}\int_{L:0}^{z} za(z)\,dz^2}_{n-\text{двојних интеграла}}=a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)\ldots a(\varsigma_n)\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

и тако даље. Одавде налазимо синусно решење

$$w_2(z)=\sin_{a(z)} z=z-a(\varsigma_1)\frac{z^3}{3!}+a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)\frac{z^5}{5!}-a(\varsigma_1)a(\varsigma_2)a(\varsigma_3)\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

или

$$w_2(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\prod_{i=1}^{k}a(\varsigma_i)\right)\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{3.7.5}$$

Ако на исти начин као малопре уведемо геометријске средине, следи

$$w_2(z)=\sin_{a(z)} z = z - g_1\frac{z^3}{3!}+{g_2}^2\frac{z^5}{5!}-{g_3}^3\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^n {g_n}^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=$$

$$=z-g(\varsigma)\frac{z^3}{3!}+g^2(\varsigma)\frac{z^5}{5!}-g^3(\varsigma)\frac{z^7}{7!}+\ldots+(-1)^n g^n(\varsigma)\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\approx$$

$$\approx\frac{1}{\sqrt{g(\varsigma)}}\left[\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right)-\frac{\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right)^3}{3!}+\frac{\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right)^5}{5!}-\ldots\right].$$

Како у угластој загради имамо обичан синус у некој средњој тачки $z\sqrt{g(\varsigma)}$ то на крају имамо

$$\sin_{a(z)} z\approx\frac{1}{\sqrt{g(\varsigma)}}\sin\left(z\sqrt{g(\varsigma)}\right).$$

Дефиниција 3.4. Функције $w_1(z)$ и $w_2(z)$ дате редовима (3.7.3) и (3.7.5) зовемо *осцилаторним комплексним функцијама са базом* $a(z)$ која је аналитичка функција.

Разлике између Штурмових реалних и комплексних осцилаторних функција су у следећем:
-Реалне функције су једнозначне док комплексне нису.
-Код реалних функција је $a(x)$ позитивно, код комплексних је $a(z)$ цела функција.
-У реалном случају решења су цела, док у комплексном синусно решење може имати испуштене тачке.
-Решења су ограничена када $x\to+\infty$, а у комплексном не морају бити ограничена ако $z\to+\infty$.
-У реалном случају осцилаторна решења (за $a(x)>0, a(x)\in C$, за $\forall x\in[0,\infty)$, $\int_0^\infty a(x)\,dx=\infty$) су строго одвојена од монотоних (за $a(x)<0, \int_0^\infty a(x)\,dx<\infty$) док у комплекнсом случају, због непостојања релација “ $>$ ” и “ $<$ ” не постоји таква деоба.

Ова дефиниција је заснована на читавом нашем досадашњем тексту. У Глави 2 је доказана контракција оператора за каноничну комплексну ДЈ другог реда (2.2.1) и нађен је коефицијент контракције. У овој Глави је показана аналогија са аналитичким синусом и косинусом у реалном смислу. Остало је да покажемо осцилаторност решења, то јест егзистенцију нула и да нуле лоцирамо.

Глава 4

Нуле решења каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда

У Глави 2 смо видели да је једна од основних операција у каноничној комплексној ДЈ другог реда са аналитичким коефицијентом

$$\frac{d^2w}{dz^2}+a(z)w(z)=0 \tag{4.1}$$

операција $\sqrt{a(z)}$ која је двозначна. На основу Моаврове формуле лако налазимо вредности корена за различите случајеве комплексног броја $z=x+iy$. Тако за $z=\alpha+i\beta, \alpha, \beta\in\mathbb{R}^+$ комплексна константа имамо

$$\sqrt{z}=\sqrt{\alpha+i\beta}=\begin{cases}\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}\left(\sqrt{\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\right)\\ \sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}\left(-\sqrt{\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}\right)\end{cases}$$

под условом да су све вредности у првом квадранту. Ако је $z=x+iy$ независна комплексна промењива тада и $\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}$ има исто две вредности.

Канонична комплексна ДЈ другог реда са комплексним константним коефицијентом

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(\alpha+i\beta)w(z)=0, \alpha>0, \beta>0$$

видели смо, има решење $w(z) = c_1 \cos\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\ \right) + c_2 \sin\left(z\sqrt{\alpha+i\beta}\ \right)$.

Очигледно, нуле партикуларног решења $w_1(z)$ су нуле обичног косинуса $z_{w_1} = \frac{(2n-1)}{\sqrt{\alpha+i\beta}}\frac{\pi}{2}, n = 1,2,3,\dots$, док је партикуларно решење $w_2(z) = 0$ за $z_{w_2} = \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha+i\beta}}, n = 0,1,2,\dots$. У Гаусовој z-равни има безброј нула, све су изоловане, колинеарне и леже на једној правој, то јест вектору $\frac{z_{w_1}}{z_{w_2}} = \frac{(2n-1)}{2n} = \lambda$. Оне нису еквидистантне, а њихово растојање почиње од $\frac{1}{2}$ за $n = 1$ и тежи 1 када $n \to \infty$. Дакле, оне се постепено проређују.

Најпростија канонична комплексна ДЈ другог реда са чисто имагинарним константним коефицијентом $a(z) = i$ је једначина $\frac{d^2w}{dz^2} + iw(z) = 0$. Њена решења су $w_1(z) = \cos\left(z\sqrt{i}\right), w_2(z) = \sin\left(z\sqrt{i}\right)$. Како је $\sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, то у четвртом квадранту имамо нуле $z_1 = \frac{(2n-1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{i}} = \frac{(1-i)(2n-1)\pi}{2\sqrt{2}}, n = 1,2,3,\dots$ и $z_2 = \frac{n\pi}{\sqrt{i}} = \frac{(1-i)n\pi}{\sqrt{2}}$, $n = 0,1,2,\dots$. Одавде добијамо два низа тачака $\{z_1\} : (1-i)\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, (1-i)\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}, (1-i)\frac{5\pi}{2\sqrt{2}}, \dots$ и $\{z_2\} : (1-i)\frac{\pi}{\sqrt{2}},\ (1-i)\frac{2\pi}{\sqrt{2}},\ (1-i)\frac{3\pi}{\sqrt{2}}, \dots$.

Канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2} - iw(z) = 0$, такође чисто имагинарног константног коефицијента $a(z) = -i$, ће са друге стране имати нуле у сектору првог квадранта.

4.1 Функција фреквенције за каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда

Методом редова-итерација за каноничну комплексну ДЈ другог реда, са аналитиким коефицијентом $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, где су $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ хармонијске функције

$$\frac{d^2w}{dz^2}+a(z)w(z)=0 \tag{4.1.1}$$

добили смо два фундаментална решења

$$w_1(z)=\cos_{a(z)} z=1-\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2+\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2-\ldots\approx\cos\left(z\sqrt{a(z)}\right) \tag{4.1.2}$$

$$w_2(z)=\sin_{a(z)} z=\frac{1}{\sqrt{a(z)}}\left[z-\int_0^z\int_0^z za(z)dz^2+\int_0^z\int_0^z a(z)dz^2\int_0^z\int_0^z za(z)dz^2-\ldots\right]\approx$$
$$\approx\frac{\sin\left(z\sqrt{a(z)}\right)}{\sqrt{a(z)}}. \tag{4.1.3}$$

Функција фреквенције осцилаторних комплексних итерација је

$$F(z)=z\sqrt{a(z)}. \tag{4.1.4}$$

У погледу нула решења, веома је важно њихово познавање. Видели смо у секцији 3.7 да су Штурмове нуле решења (4.1.2) и (4.1.3) приближно у решењима једначина

$$\left.\begin{array}{l} w_1: z\sqrt{a(z)}=(2n-1)\dfrac{\pi}{2},\ n=1,2,3,\ldots \\ w_2: z\sqrt{a(z)}=n\pi, n=0,1,2,\ldots \end{array}\right\}. \tag{4.1.5}$$

Према томе, важно је знати понашање $\sqrt{a(z)}$ дате аналитичке функције $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$.

Теорема 4.1.1. *За дату аналитичку функцију* $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$*, у каноничној комплексној диференцијалној једначини другог реда (4.1.1), могуће је одредити једначине за нуле косинусног и синусног решења.*

Доказ: Из (4.1.5) је јасно да су за нуле решења важни реални делови функције $z\sqrt{a(z)}$. Из, на пример другог решења, $(x+iy)\sqrt{\alpha(x,y)+i\beta(x,y)}=n\pi, n=0,1,2,\ldots$ квадрирањем, множењем и на основу дефиниције једнакости комплексних бројева добијамо систем једначина за $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$

$$(x^2-y^2)\alpha(x,y)-2xy\beta(x,y)=n^2\pi^2$$

$$\left(x^2-y^2\right)\beta(x,y)+2xy\alpha(x,y)=0 \quad .$$

Елиминацијом $\beta(x,y)$ из друге једначине система и заменом у прву једначину система добијамо једначину за $\alpha(x,y)$, а затим следи систем једначина

$$\left.\begin{aligned}\alpha(x,y)&=n^2\pi^2\,\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \beta(x,y)&=-n^2\pi^2\,\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}\right\}. \tag{4.1.6}$$

Ако су $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ задани, то јест ако је познат коефицијент $a(z)$, то из (4.1.6) налазимо нуле (x_n,y_n) синусног решења $w_2(z)$ комплексне ДЈ другог реда (4.1.1). Тада је (4.1.6) систем биквадратних једначина, па из њега дељењем добијамо

$$\frac{x^2-y^2}{2xy}=-\frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)}.$$

Ово је лака елиминациона једначина само за константно $a(z)=c_1+ic_2$.
Нуле косинусног решења каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.1.1) налазимо на исти начин. Из (4.1.5) имамо $(x+iy)\sqrt{\alpha(x,y)+i\beta(x,y)}=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}, n=1,2,3,\dots$. На сличан начин као малопре добијамо систем једначина

$$\left.\begin{aligned}\alpha(x,y)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\,\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \beta(x,y)&=-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\,\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.1.7}$$

чије решење теоријски даје поменуте нуле. Ово решавање није тривијалан задатак за све облике $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$. Најбоље и најлакше је ако су нуле решења $w_1(z)=\cos\left(z\sqrt{a(z)}\right)$ и $w_2(z)=\sin\left(z\sqrt{a(z)}\right)$ на некој правилнијој геометријској линији, тако да постоји неки закон њиховог распореда. ■

Теорема 4.1.2. *Нуле осцилације* $w_1(z)=\cos\lambda z$ *(слично и за* $w_2(z)=\sin\lambda z$*) постоје ако је модул функције* $a(z)$ *право пропорционалан редоследу* $\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$ *нуле, (односно* n^2*) и обрнуто пропорционалан квадрату модула* ρ.

Доказ: Користећи поларне форме $z=\rho e^{i\varphi}$, на пример из система (4.1.7), добијамо

$$\left.\begin{aligned} \alpha=\alpha(\rho,\varphi)&=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2} \\ \beta=\beta(\rho,\varphi)&=-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (4.1.8)$$

Одавде имамо везу између α и β, без аргумента 2φ, односно $\alpha^2+\beta^2=\left(n-\frac{1}{2}\right)^4\frac{\pi^4}{\rho^4}$. Ако сада $a(z)$ напишемо у поларној форми $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)=Re^{i\theta}$ имамо $R=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{\rho^2}$. Осим тога, из $\tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$ следи $\tan\theta=-\tan 2\varphi=\tan(-2\varphi)$, или еквивалентно $\theta=-2\varphi+k\pi$.

Истим расуђивањем из система (4.1.6) доказујемо тврђење за $w_2(z)=\sin\lambda z$. ■

4.2 Број нула у сектору, за каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентом

Данас је веома актуелан проблем оцене броја нула у сектору $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\rho=R$, посебно за каноничну комплексну ДЈ другог реда (4.1.1) где је коефицијент $a(z)$ полином $P_n(z)$, или експоненцијална функција e^z, или збир $e^z+P_n(z)$, или производ $e^zP_n(z)$, (видети [9],[25],[26]). Дакле, случај када систематски расте ранг раста коефицијента $a(z)$.

За почетак је важно да одредимо број нула решења комплексне ДЈ другог реда (4.1.1) за константно $a(z)=c_1+ic_2$, или да покушамо да што боље оценимо нуле. Због вишезначних аналитичких функција најбоље је прво посматрати карактеристичне примере за ДЈ са константним коефицијентом

$$\frac{d^2w}{dz^2}+a(z)w(z)=0,\, a(z)=c_1+ic_2\ . \tag{4.2.1}$$

Проблем је у томе што унапред морамо знати за које $a(z)$, вредност $\sqrt{a(z)}=\sqrt{c_1+ic_2}$, која је двозначна, остаје у првом квадранту, а када га напушта. Зато посматрајмо четири основне једначине.

1. Претпоставимо најпре да је $a(z)=1$, чисто реалан константан коефицијент. Следи, $c_1=1>0, c_2=0$. Тада је $\sqrt{a(z)}=\pm 1$ и функција фреквенције $z\sqrt{a(z)}=\pm z$. Решења каноничне комплексне ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+w(z)=0$ су $w_1(z)=\cos z$, $w_2(z)=\sin z$. Нуле синусног решења $z=n\pi$, $n=0,1,...$ су на реалној оси (граница првог квадранта).

2. За реални константни коефицијент $a(z)=-1$ је $c_1=-1<0, c_2=0$. Тада је $\sqrt{a(z)}=\sqrt{-1}=\pm i$, а $z\sqrt{a(z)}=\pm iz$. Решења каноничне комплексне ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}-w(z)=0$ су $w_1(z)=\cos(iz)$, $w_2(z)=\sin(iz)$. Нуле синусног решења су решењима једначина $z=-in\pi, n=0,1,2,\dots$. Оне су на имагинарној оси и нису у првом квадранту, осим решења $z=0$.

3. Посматрајмо сада каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+iw(z)=0$, са имагинарним константним коефицијентом $a(z)=i$ где је $c_1=0, c_2=1>0$. Тада је $\sqrt{a(z)}=\sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, а функција фреквенције $z\sqrt{a(z)}=z\left(\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$. Решења комплексне ДЈ су $w_1(z)=\cos\left(\pm\frac{i+1}{\sqrt{2}}z\right)$, $w_2(z)=\sin\left(\pm\frac{i+1}{\sqrt{2}}z\right)$. Нуле синусног решења $z=\pm(1-i)\frac{n\pi}{\sqrt{2}}$, $n=0,1,2,\dots$ су у другом или у четвртом квадранту. Дакле, нема нула у првом квадранту.

4. За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}-iw(z)=0,$ са имагинарним константним коефицијентом $a(z)=-i$, је $c_1=0, c_2=-1<0$ и $\sqrt{a(z)}=\sqrt{-i}=\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Нуле синусног решења су $z=\pm(1+i)\frac{n\pi}{\sqrt{2}}, \quad n=0,1,2,\ldots$. Одавде закључујемо да постоје нуле у првом и трећем квадранту.

Овим елементарним испитивањем сазнајемо да само ако је $\operatorname{Im} a(z)=\operatorname{Im}(c_1+ic_2)<0$, има изгледа да нуле синусног решења буду у првом квадранту. Међутим, нама је потребан општији и сигурнији приступ решавању овог проблема, а не елементарни примери.

Теорема 4.2.1. *За каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда (4.2.1), са константним коефицијентом* $a(z)=c_1+ic_2$, *синусно решење има нула у првом квадранту ако је* $c_2<0$.

Доказ: За константно $a(z)=c_1+ic_2$, $z=x+iy$, нуле синусног решења су у коренима једначина $z\sqrt{a(z)}=n\pi, n=0,1,2,\ldots$. Одавде, на основу формуле (4.1.6), добијамо систем

$$\left.\begin{aligned} c_1&=n^2\pi^2\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ c_2&=-n^2\pi^2\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}\right\}. \tag{4.2.2}$$

Како желимо да $z=x+iy$ буде у првом квадранту, дакле да је $x>0, y>0$ то мора да је у $a(z)=c_1+ic_2$, $c_2<0$. Ако уз то важи још да је $x>y$ тада је $c_1>0$. У случају да је $x<y$ имамо да је $c_1<0$. ■

Вратимо се сада решавању система једначина (4.2.2). Преласком на поларне форме $z=\rho e^{i\varphi}$ из $c_1=n^2\pi^2\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2}$, $c_2=-n^2\pi^2\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}$ налазимо $\varphi=-\frac{1}{2}\arctan\frac{c_2}{c_1}$. Како сада из $c_1=n^2\pi^2\frac{\cos 2\varphi}{\rho^2}$ следи $\rho=\frac{n\pi}{\sqrt[4]{c_1{}^2+c_2{}^2}}$, то заменом ових вредности редом у $x=\rho\cos\varphi, y=\rho\sin\varphi$, после познатих тригонометријских идентитета за синус и косинус добијамо координате нула синусног решења каноничне комплексне ДЈ другог реда

$$x = x(n) = \frac{n\pi}{\sqrt[4]{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2} + c_1}{2\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}} \ , \ n = 0,1,2,\dots \tag{4.2.3}$$

$$y = y(n) = \frac{-n\pi}{\sqrt[4]{c_1^2 + c_2^2}} \sqrt{\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1}{2\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}} \ , \ n = 0,1,2,\dots \ . \tag{4.2.4}$$

Из једначина (4.2.4) је очигледно да је $y < 0$, а упоређивањем једначина (4.2.3) са (4.2.4) видимо да је $|x| > |y|$. Дељењем (4.2.4) са (4.2.3) добијамо једначину праве кроз други и четврти квадрант, $y = -\sqrt{\frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2} - c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2} + c_2}} x$.

Остало је још да одредимо колико нула има синусно односно косинусно решење каноничне комплексне ДЈ другог реда у сектору $|z| < R, 0 \le \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Теорема 4.2.2. *У каноничној комплексној диференцијалној једначини другог реда (4.2.1), са константним коефицијентом, број нула синусног решења се налази по формули* $N(z_k) = kE\left[\frac{\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2}}\right]$ *где је* E *цео део наведеног аргумента, а* k *је цео број јединица у* $|z| < R, 0 \le \arg z < \frac{\pi}{2}$. *Косинусно решење има једну нулу мање.*

Доказ: За каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha + i\beta) w(z) = 0$$

са константним коефицијентом $a(z) = \alpha + i\beta$, на основу теореме 4.2.1, следи да нуле синусног решења не постоје за свако α, β већ само за оне вредности $\alpha = c_1, \beta = c_2$, које задовољавају једначине (4.2.3) и (4.2.4). Тада добијамо тачке $z_n = x_n + iy_n$ области $|z| < R, 0 \le \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Из функције фреквенције $z\sqrt{a(z)} = n\pi, n = 0,1,2,\dots$ имамо $z_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\alpha + i\beta}}$, $n = 0,1,2,\dots$.

Видимо да је ово низ нула по неком правцу дужине $|z_n| = \frac{n\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2 + \beta^2}}$, који се протеже од $z=0$ до тачке на кругу радијуса R. Број нула је број одсечака по радијусу R дужине $\frac{n\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}$. Ако уведемо функцију $E(x)=[x]$, (цео део аргумента x), то на основу особине $E[nr]=nE[r]$, где је n природан број, имамо за број нула

$$N(z_n)=E\left[\frac{n\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right]=nE\left[\frac{\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right].$$

Приметимо да су синусне нуле еквидистантне, јер за два узастопна n и $n+1$ важи

$$\left|N(z_{n+1})-N(z_n)\right|=\left|(n+1)E\left[\frac{\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right]-nE\left[\frac{\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right]\right|=E\left[\frac{\pi}{\sqrt[4]{\alpha^2+\beta^2}}\right].$$

С обзиром на особину синуса да у оквиру једне периоде 2π има три нуле $0,\pi,2\pi$ и на особину косинуса да у истој периоди има само две нуле $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$, закључујемо да косинусно решење има једну нулу мање него синусно. ■

Илуструјмо ово на примерима.

Пример 4.1. Синусно решење каноничне комплексне ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(2-i)w(z)=0$, са константним коефицијентом $a(z)=2-i$, за које је $c_2<0$ и $|c_1|>|c_2|$, има нула у сектору $|z|<R, 0\le \arg z<\frac{\pi}{2}$. Број нула ће бити једнак $E\left[\frac{n\pi}{\sqrt[4]{2^2+(-1)^2}}\right]=nE\left[\frac{\pi}{\sqrt[4]{5}}\right]=nE\left[\frac{3{,}14}{1{,}5}\right]=nE[2{,}1]=2n$. Ако је на пример $R=10$, тада из $2n=10$ следи да има $n=5$ нула синуса.

Пример 4.2. Нека је дата канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(3-2i)w(z)=0$ са константним коефицијентом $a(z)=3-2i$. Овде је $c_1=3, c_2=-2$, па су услови $c_2<0$ и $|c_1|>|c_2|$ испуњени. Синусно решење у кругу, на пример радијуса $|z| = R = 100$, има 50 нула јер је $N\left(\sin_{(3-2i)} z\right) = E\left[\frac{n\pi}{\sqrt[4]{3^2+(-2)^2}}\right] = nE\left[\frac{\pi}{\sqrt[4]{13}}\right] = 2n = 100.$

4.3 Број нула осцилаторних решења неких каноничних комплексних диференцијалних једначина другог реда са промењљивим коефицијентом

У овој секцији видећемо да само директним решавањем једначине фреквенције $z\sqrt{a(z)} = n\pi, n = 0,1,2,\ldots$ за синусно решење, или $z\sqrt{a(z)} = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1,2,\ldots$ за косинусно решење можемо решити само мањи број каноничних комплексних диференцијалних једначина другог реда.

Први случај

После каноничне комплексне ДЈ другог реда са константним коефицијентом, најпростије је да посматрамо комплексну ДЈ

$$\frac{d^2w}{dz^2} + z^2w(z) = 0, a(z) = z^2 \tag{4.3.1}$$

јер је $\sqrt{a(z)} = \pm z$, па је двозначност корена најлакша. Ова једначина има решења добијена методом редова итерација која гласе

$$w_1(z) = \cos_{z^2} z = 1 - \int_0^z\int_0^z z^2dz^2 + \int_0^z\int_0^z z^2dz^2\int_0^z\int_0^z z^2dz^2 - \ldots = 1 - \frac{z^4}{(4\cdot3)} + \frac{z^8}{(8\cdot7)(4\cdot3)} - \ldots. \tag{4.3.2}$$

$$w_2(z) = \sin_{z^2} z = z - \int_0^z\int_0^z z^3dz^2 + \int_0^z\int_0^z z^2dz^2\int_0^z\int_0^z z^3dz^2 - \ldots = z - \frac{z^5}{(5\cdot4)} + \frac{z^9}{(9\cdot8)(5\cdot4)} - \ldots. \tag{4.3.3}$$

Решења могу имати нула у сектору $|z| = \rho, 0 \le \arg z < \frac{\pi}{2}$. Нуле синуса су у решењима једначина $z\sqrt{a(z)} = z(\pm z) = n\pi$, $n = 0,1,2,\ldots$, или $z_1 = \sqrt{n\pi}, z_2 = i\sqrt{n\pi}$. Прва серија нула лежи на Ox-оси, дакле на доњем краку сектора, док друга серија нула лежи на Oy-оси и она је ван сектора. Декартове криве кретања нула добијамо директно из једначине нула $(x+iy)^2 = n\pi$. Одавде, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева, следи систем једначина $x^2 - y^2 = n\pi,\ 2xy = 0$. Када из друге једначине изаберемо могућност $y=0$, тада је у првој једначини $x=\sqrt{n\pi}$, или ако је из друге једначине $x=0$, имамо у првој $y^2=-n\pi$, односно $y=i\sqrt{n\pi}$. У дати сектор се налазе само прве нуле, а друге не улазе у сектор јер су чисто имагинарне.

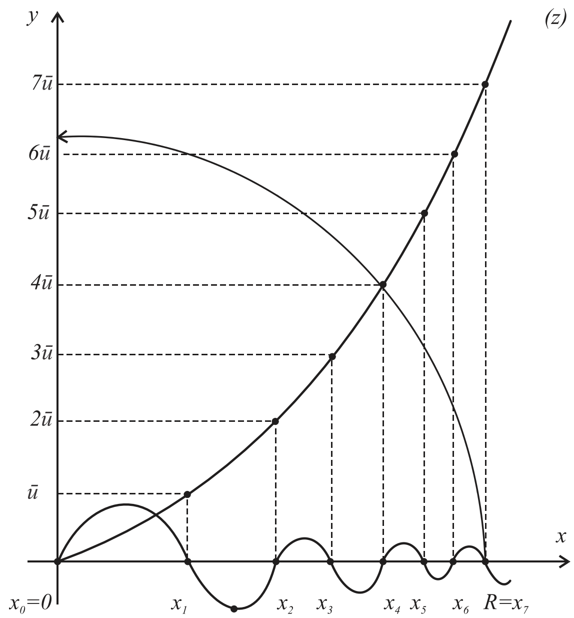
Дакле, нуле свих решења каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.3.1), са аналитичким коефицијентом, на доњем краку сектора, поклапају се са нулама обичне ДЈ осцилација другог реда $y''+x^2y=0$, а то су чворови таласа или нуле осцилација. Знамо да се оне и графички лако налазе ако се крива реалних фреквенција $F(x)=x\sqrt{a(x)}=x^2$ сече хоризонталним правама $y=0, y=\pi, y=2\pi,\dots$, а пројекције ових пресека на Ox-осу су нуле у сектору.

Нуле су на Ox-оси и када n расте и x_n расте, и густина нула се повећава. Како нуле нису еквидистантне, јер је $\Delta x_n = x_{n+1}-x_n=\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}}$, то њихов распоред није линеарна функција и не важи формула из претходне тачке. Број нула N расте непропорционално ако R расте.

Од давнина је познато да су нуле класичан Штурмов проблем, а у радовима [12],[24],[29]-[31],[34] је указано да број нула и локације нула, у великој мери зависе од монотоности реалног коефицијента $a(x)$. Зато у случају комплексне функције $a(z)$ и комплексне једначине осцилација другог реда, поступамо индуктивно.

Са слике видимо да се нуле x_0 и x_1 налазе у кругу радијуса $R_1=\sqrt{x_1{}^2+\pi^2}$. Три нуле се налазе у кругу радијуса $R_2=\sqrt{x_2{}^2+(2\pi)^2}$, ..., n нула се налази у кругу радијуса $R_{n-1}=\sqrt{x_{n-1}{}^2+(n-1)^2\pi^2}$. Одавде, ако је познат радијус круга можемо наћи и нулу $x_{n-1}=\sqrt{R_{n-1}{}^2-(n-1)^2\pi^2}$. Како за $n=1$ имамо $x_0=R_0$, а $x_0=0$ је нула свих синуса то подразумевамо да је у питању круг радијуса нула. Зато пишемо $R_n=\sqrt{x_n{}^2+n^2\pi^2}$. Дакле, до овог R_n имамо закључно $n+1$ нулу синусног решења. Међутим, како је $x_n=\sqrt{n\pi}$, то је $R_n=\sqrt{n\pi(1+n\pi)}$, па ако желимо да имамо пуних 49 осцилација синусног решења за то нам је потребно тачно 100 нула синуса. Значи, за $n=100$ имамо $R_{100}=17{,}8$ јединица.

Обрнуто, у кругу радијуса R, то јест у сектору $\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ налази се $n=\dfrac{\sqrt{1+4R^2}-1}{2\pi}$ нула.



Слика 4.1.

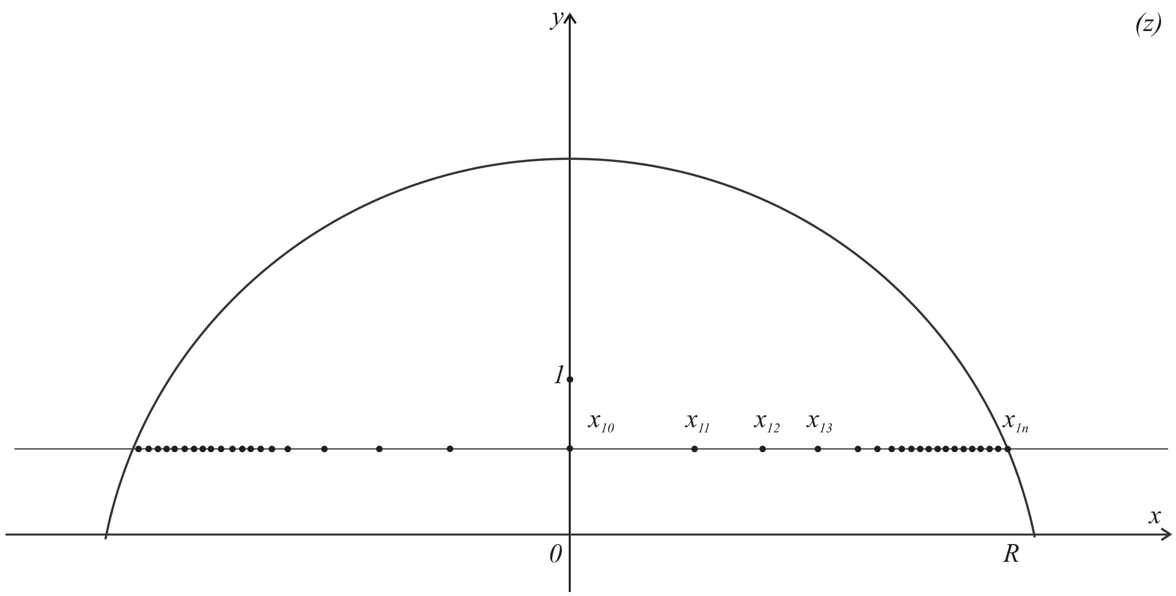
Не заборавимо да и на Oy-оси има нула облика $z_2 = i\sqrt{n\pi}$. Приметимо да су оне изван сектора, па ако су праве нуле треба их посебно испитати. Осим синусних и косинусно решење има нула, али једну мање.

Други случај

Нека је дата канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2} + (z+1)^2 w(z) = 0, a(z) = (z+1)^2$. Како је функција фреквенције $z\sqrt{a(z)} = \pm z(z+1)$ двозначна, то ако узмемо само прву вредност функције добијамо синусно решење $w_2(z) \approx \frac{\sin z(z+1)}{z+1}$. Нуле синуса су решења једначина $z^2 + z = n\pi, n = 0,1,2,\ldots$. Први низ нула је $z_{1n} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n\pi+1} - 1\right) = \frac{2n\pi}{\sqrt{4n\pi+1}+1}$. Оне су на реалној оси, а њихов број расте приближно брзином $n\pi$. Оне нису еквидистантне и згушњавају се као у претходном примеру. Други низ нула $z_{2n} = -\frac{2n\pi}{\sqrt{4n\pi+1}+1}$ се налази на негативној Ox-оси, што значи да су изван сектора. Друга вредност функције фреквенције даје решење $w_2'(z) \approx \frac{\sin(-z(z+1))}{-(z+1)} = \frac{\sin z(z+1)}{z+1}$ а то је исто $w_2(z)$.

Трећи случај

За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2} + (z-i)^2 w(z) = 0, a(z) = (z-i)^2$ имамо функцију фреквенције $z\sqrt{a(z)} = \pm z(z-i)$. За прву вредност функције фреквенције синусно решење је $w_2(z) \approx \frac{\sin z(z-i)}{z-i}$, а његове нуле су решења једначине $z^2 - iz = n\pi, n = 0,1,2,\dots$.



Слика 4.2.

Добијамо као и у прошлом примеру два низа корена $z_{1n} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n\pi - 1} + i\right)$ и $z_{2n} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{4n\pi - 1} + i\right)$. Како је $z_{1n} = x_{1n} + iy_{1n}$, следи $x_{1n} = \frac{1}{2}\sqrt{4n\pi - 1}$ и $y_{1n} = \frac{1}{2}$. Одавде је очигледно да се нуле налазе на паралели са Ox -осом на растојању $y = \frac{1}{2}$. Има их много у сектору $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$, у зависности од R. Други низ нула, $z_{2n} = x_{2n} + iy_{2n}$ даје $x_{2n} = -\frac{1}{2}\sqrt{4n\pi - 1}$ и $y_{2n} = \frac{1}{2}$. Он је дакле на левој половини исте праве, па је изван сектора.

Четврти случај

Канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+\left(z-a-ib\right)^2 w\left(z\right)=0, a\left(z\right)=\left(z-a-ib\right)^2$, a и b позитивни реални бројеви, има функцију фреквенције $z\sqrt{a\left(z\right)}=\pm z\left(z-a-ib\right)$. За прву вредност ове функције синусно решење $w_2\left(z\right)\approx\frac{\sin z\left(z-a-ib\right)}{z-a-ib}$ има нуле у коренима једначина $z^2-\left(a+ib\right)z=n\pi, n=0,1,2,\ldots$. Из, на пример, првог низа нула $z_{1n}=x_{1n}+iy_{1n}=\frac{1}{2}\left(a+ib\pm\sqrt{a^2-b^2+4n\pi+2iab}\right)$, дакле за $x_{1n}=A\left(n\right)$ и $y_{1n}=B\left(n\right)$ имамо однос $\frac{y}{x}=\frac{B\left(n\right)}{A\left(n\right)}=K\left(n\right)=K\left(a,b,n\right)$. Значи, низови нула леже на правцу $y=kx$ где је $k=K\left(a,b,n\right)$. Анализа нула зависи од три параметра. Као и у претходним случајевима и овде се може не само оценити, него и наћи тачан број нула у датом сектору.

Пети случај

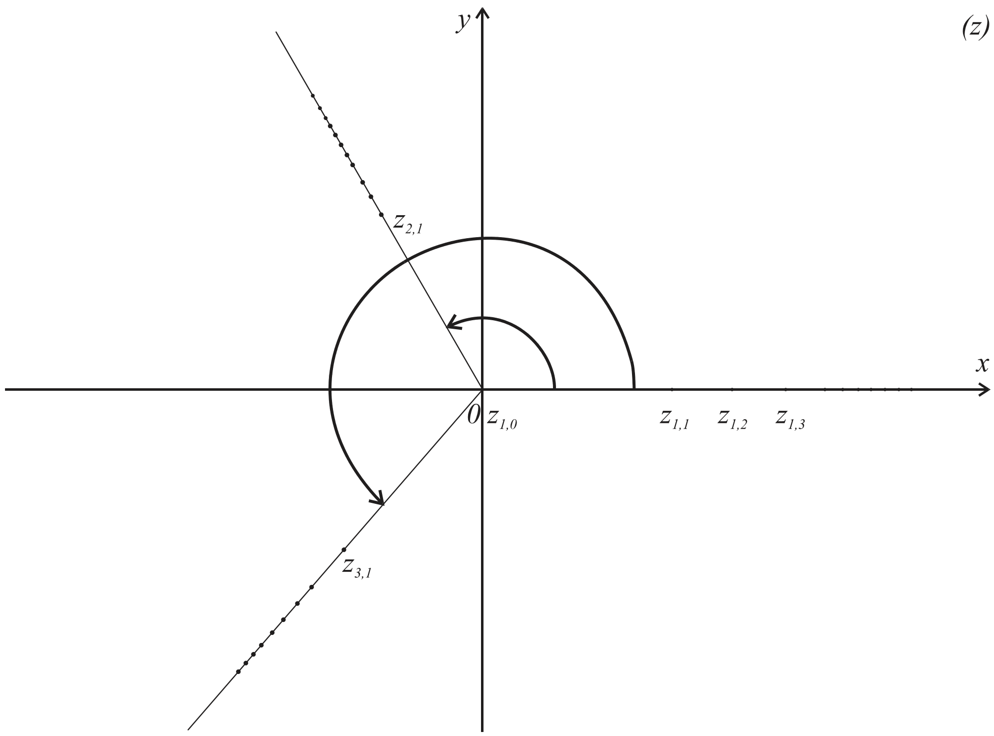
Канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+z^4w\left(z\right)=0, a\left(z\right)=z^4$ има функцију фреквенције осцилација $z\sqrt{a\left(z\right)}=\pm z^3$. Једно, на пример синусно решење $w_2\left(z\right)\approx\frac{\sin z\left(z+1\right)}{z+1}$, које је добијено за прву вредност функције фреквенције, има нуле у коренима једначине $z^3=n\pi, n=0,1,2,\ldots$, односно нуле су

$$z_k=\begin{cases}\sqrt[3]{n\pi} & ,k=0\\ \sqrt[3]{n\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}=\sqrt[3]{n\pi}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) & ,k=1\\ \sqrt[3]{n\pi}e^{i\frac{4\pi}{3}}=\sqrt[3]{n\pi}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right) & ,k=2.\end{cases}$$

Одавде је јасно да се нуле синуса, $z_{0,n}$ $z_{1,n}$ и $z_{2,n}$, налазе редом, на самој Ox-оси почев од $n=0$ на правцу $\left(\rho,\varphi\right)=\left(\sqrt[3]{n\pi},\frac{2\pi}{3}\right)$, као и на правцу $\left(\rho,\varphi\right)=\left(\sqrt[3]{n\pi},\frac{4\pi}{3}\right)$.

Нуле нису еквидистантне јер је $\Delta z_n = \sqrt[3]{(n+1)\pi} - \sqrt[3]{n\pi} = \dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}}$.

Оне се згушњавају, а тачка нагомилавања је $z=\infty$. За број нула важи $N = O\left(\sqrt[3]{n}\right)$. У на пример сасвим малом кругу $R=\varepsilon$ једина нула је $z_0 = 0$, док се у кругу радијуса $R=\sqrt[3]{\pi}$ налазе две нуле. У кругу већег радијуса R има $N = \dfrac{R^3}{\pi} + 1$ нула.



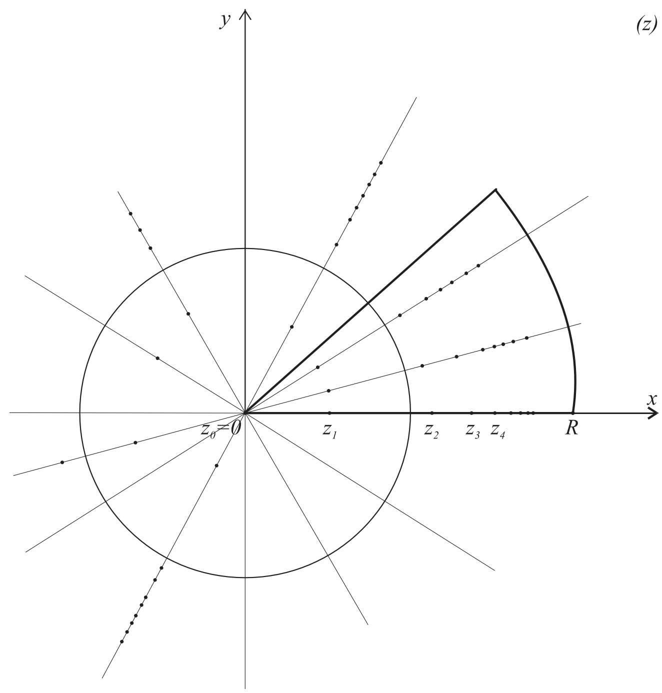
Слика 4.3.

Шести случај

За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2} + z^{2n}w(z) = 0, a(z) = z^{2n}, n \in \mathbb{N}$, функција фреквенције је вишезначна функција $z\sqrt{a(z)} = \pm z^{n+1}$. За прву позитивну вредност функције фреквенције, синусно решење $w_2(z) \approx \dfrac{\sin z^{n+1}}{z^n}$ има нуле $z^{n+1} = k\pi, k = 0,1,2,\ldots$, односно нуле су $z = \sqrt[n+1]{k\pi}$. На основу Моаврове формуле постоји $n+1$ нула $z_p = \sqrt[n+1]{k\pi}\left(\cos\dfrac{2p\pi}{n+1} + i\sin\dfrac{2p\pi}{n+1}\right), p = 0,1,2,\ldots,n$. Једноставности ради, нека је n непарно. Тада је $n+1$ парно, па за $p = 0,1,2,\ldots$ имамо низове нула:

$$\sqrt[n+1]{k\pi}, \sqrt[n+1]{k\pi}\left(\cos\frac{2\pi}{n+1}+i\sin\frac{2\pi}{n+1}\right), \ldots, \sqrt[n+1]{k\pi}\left(\cos\frac{2n\pi}{n+1}+i\sin\frac{2n\pi}{n+1}\right), \ldots.$$

Видимо да за велико n, нуле синусног решења прекривају читаву раван.
За $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{n+1} < \frac{\pi}{2}$ постоје најмање два правца у овом сектору на коме лежи безброј нула. Осим тога, број нула зависи од R. Констатујемо да што је n веће, или општије што је степен полинома $P_n(z)$ већи, то је и број нула свуда и у сектору већи. Узели смо минималан сектор јер се по Моавровој формули број нула понавља а самим тим и њихов распоред по разним правцима.



Слика 4.4.

Одредимо сада број нула. Прво посматрамо Ox-осу. У сасвим малом кругу радијуса $R=\varepsilon>0$ имамо само једну нулу $z_0=0$, за $k=1$ и $R \le \sqrt[n+1]{\pi}$ имамо две нуле z_0, z_1, за $k=2$ и $R \le \sqrt[n+1]{2\pi}$ имамо три нуле z_0, z_1, z_2 и тако редом, за $k=k$ и $R \le \sqrt[n+1]{k\pi}$ имамо $k+1$ нулу. Један минималан сектор има централни угао $\frac{2\pi}{n+1}$. Ако имамо q оваквих углова, добијамо сектор $\left(\frac{2\pi}{n+1}q, R\right)$. Пошто посматрамо први квадрант следи да је $\frac{2\pi}{n+1}q < \frac{\pi}{2}$ или $q < \frac{n+1}{4}$. Сада имамо $q(k+1)$ нула за $R \le \sqrt[n+1]{k\pi}$. Како је

$n+1$ стално, то R расте заједно са q и са k. Значи за последње R и дато q у овом сектору има $\frac{1}{4}(n+1)(k+1)$ нула синуса.

Седми случај

Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+zw(z)=0, a(z)=z$. Функција фреквенције је $z\sqrt{a(z)}=z\sqrt{z}$ а синусно решење је приближно $w_2(z)\approx\frac{\sin z\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$. Његове нуле $z\sqrt{z}=n\pi, n=0,1,2,\dots,$ формирају низ $z_n=(n\pi)^{2/3}$ комплексних бројева чији је модул $|z_n|=|n\pi|^{2/3}$. На основу Моаврове формуле, следи

$$z_k=\sqrt[3]{n^2\pi^2}=\begin{cases}\sqrt[3]{n^2\pi^2}, & k=0\\ \sqrt[3]{n^2\pi^2}e^{i\frac{2\pi}{3}}=\sqrt[3]{n^2\pi^2}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), & k=1\\ \sqrt[3]{n^2\pi^2}e^{i\frac{4\pi}{3}}=\sqrt[3]{n^2\pi^2}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), & k=2\end{cases}.$$

У првом квадранту имамо само реалне нуле, док у сектору радијуса $R=|z|=\sqrt[3]{n^2\pi^2}$ има n нула. Одавде је $n^2\pi^2=R^3$, а број нула $n=E\left[\frac{R^3}{\pi^2}\right]$.

Осми случај

Канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(1+z^2)w(z)=0, a(z)=1+z^2$ има функцију фреквенције $z\sqrt{a(z)}=z\sqrt{1+z^2}$ и синусно решење $w_2(z)\approx\frac{\sin z\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z^2}}$.

Нуле овог решења су у решењима једначина $z\sqrt{1+z^2}=n\pi, n=0,1,2,\dots$. Квадрирањем добијамо биквадратну једначину $z^4+z^2-n^2\pi^2=0$ са четири решења $z=\pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{1+4n^2\pi^2}}{2}}$. И овде су нуле по линеарним правцима.

Наредни случај показује да низови нула не морају бити по правцу чак и ако посматрамо линеарни низ.

За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+\left(z^2+z\right)w(z)=0, a(z)=z^2+z$ из $z\sqrt{a(z)}=z\sqrt{z^2+z}=n\pi, n=0,1,...$ добијамо једначину четвртог степена, $z^4+z^3-n^2\pi^2=0$ чије решавање није тривијално. Ако је и решимо низови нула не морају да су по правцу. Зато се поставља општи проблем локације нула.

За општи случај аналитичког коефицијента $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$, где реалне функције $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ задовољавају Коши-Риманове једначине и Лапласову ПДЈ другог реда, видели смо у секцији 4.1 да је најважнија функција фреквенције (4.1.4). На основу дефиниције једнакости комплексних бројева, из једначина $z\sqrt{a(z)}=n\pi, n=0,1,...$, које дају нуле синусног решења добили смо систем (4.1.6) обичних једначина у односу на координате $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$. Затим смо користећи поларне форме $z=\rho e^{i\varphi}$ и $a(z)=Re^{i\theta}$ добили једначине $R=\frac{n^2\pi^2}{\rho^2}$, $\theta=-2\varphi+k\pi, k=0,1,2,...$

На основу овога закључујемо да уколико нуле z_n синусног решења $w_2(z)$ леже у z-равни на неком кругу радијуса ρ и са аргументом φ то њихове слике трансформацијом $w(z)=a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ у w-равни леже такође у једном кругу обрнуто пропорционалног радијуса и аргумента $\theta=-2\varphi$. Предложени поступак не даје ништа конкретније у општем случају, нити даје број нула у сектору $|z|=R, 0\le\arg z\le\varphi<\frac{\pi}{2}$. Зато је проблем локације нула у комплексном подручју много тежи него локација реалних Штурмових нула.

Каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+e^{2z}w(z)=0$, $a(z)=e^{2z}$ и $\frac{d^2w}{dz^2}+\left(z^2+3z+2\right)w(z)=0,\quad a(z)=z^2+3z+2$, немају лако решиву једначину функције фреквенције, иако у реалном случају због лаког графичког приказа нема тешкоћа у одређивању Штурмових нула.

4.4 Метод тражења нула директно по правцу

Проблем локације нула решења каноничне комплексне ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2}+a(z)w(z)=0$$

за дату општу аналитичку функцију $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$, вероватно неће бити потпуно решен и зато се одавно прибегло оценама. Најлакше је ако су нуле на правцу као у претходној секцији 4.3, што је ретко. На основу изложеног у 4.3 можемо бити сигурни да између два правца нема других нула. Зато претпоставимо да нула има много и да их има практично на сваком правцу $y=kx$, $k=\tan\varphi$ сектора $0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$. У литератури, (видети [2]-[6],[23],[25],[26]) се ретко налази тачан број нула решења, већ се само доводи у везу ранг раста целе функције и број нула који скоро увек тежи бесконачности.

Ми ћемо сада покушати да по датом правцу $y=kx$, $0\le k<\infty$ фиксирамо нуле и видимо како оне зависе од $k=\tan\varphi,\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Покушаћемо дакле да на неки начин, помоћу интеграла и слично, оценимо њихову моћ. Најбоље је почети од каноничне комплексне ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2}+e^{2z}w(z)=0,a(z)=e^{2z} \quad . \tag{4.4.1}$$

Видели смо у секцији 4.3 да се нуле решења ове једначине не могу непосредно одредити помоћу функције фреквенције, за разлику од реалне каноничне ДЈ дугог реда. Међутим, ако све посматрамо по правцу $y=kx,\ \ 0\le k<\infty$, тада се помоћу функције фреквенције $F(z)=z\sqrt{a(z)}$ могу одредити нуле синусног решења. Следи

Теорема 4.4.1. а) *Број нула синусног решења каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда (4.4.1), на позитивном делу* Ox*-осе, до тачке* R *дат је са* $n=E\left[\frac{Re^R}{\pi}\right]$.

б) *Број нула синусног решења по сваком другом правцу* $y=kx$*, до тачке* $M(x_R,y_R)$ *пресека са кругом* $|z|=R$ *износи* $n=E\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{\pi}Re^R\right]$.

в) *Број нула је најмањи на* Ox*-оси, али се постепено повећава и за свако коначно* $k \neq \infty$ *постаје све већи, до у непосредну близину тачке* $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

г) *Најмањи број нула је на* Oy*-оси, и то је само тачка* $O(0,0)$.

д) *За свако* k, $0 \leq k < +\infty$ *ако* $R \to \infty$, *по сваком правцу* $y = kx$, *број нула* $n_k \to \infty$.

ђ) *И у најмањем сектору, за* $\varphi = \varepsilon$, *има безброј нула.*

Доказ: Због вишезначности квадратног корена $\sqrt{a(z)} = e^z = e^{z+2m\pi i}, m \in \mathbb{Z}$, нуле синусног решења морамо писати у облику $z\sqrt{a(z)} = ze^{z+2m\pi i} = n\pi, n = 0,1,2,..., m \in \mathbb{Z}$. Преласком на реалан систем једначина у односу на (x, y) добијамо

$$\begin{aligned} e^x\left[x\cos(y+2m\pi) - y\sin(y+2m\pi)\right] &= n\pi \\ e^x\left[y\cos(y+2m\pi) + x\sin(y+2m\pi)\right] &= 0 \end{aligned}.$$

Решавањем овог система, за $m = 0$ добијамо једну трансцендентну једначину $ye^{-y\cot y} = n\pi \sin y$ која се може решити ако се крива $f(y) = \frac{ye^{-y\cot y}}{\sin y}$ сече хоризонталама $n\pi$. Међутим, једноставније је ако горњи систем одмах посматрамо по правцу $y = kx$,

$$\begin{aligned} xe^x\left[\cos kx - k\sin kx\right] &= n\pi \\ xe^x\left[k\cos kx + \sin kx\right] &= 0 \end{aligned}.$$

Разликујемо случајеве: $x = 0$ и $x \neq 0$.

За $x = 0$ мора да је $n = 0$ па имамо само једну нулу $O(0,0)$.

Нека је сада $x \neq 0$. Тада из друге једначине система имамо једначину $\tan kx = -k$, чији се корени могу лако и графички и нумерички лоцирати (k, $0 \leq k < +\infty$ је реалан број). Са друге стране, дељењем са xe^x горњи систем постаје

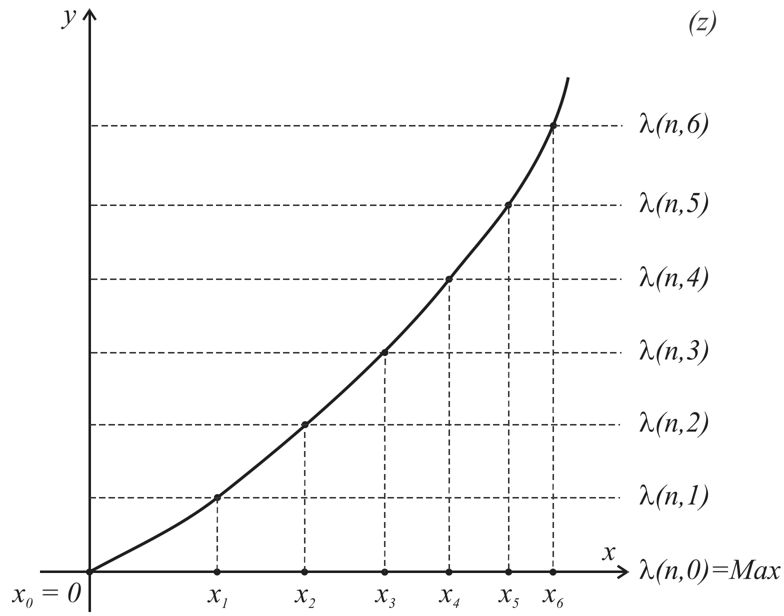
$$\begin{aligned} \cos kx - k\sin kx &= \frac{n\pi}{x}e^{-x} \\ k\cos kx + \sin kx &= 0 \end{aligned}.$$

Решавањем добијамо једноставну једначину

$$x^2 e^{2x} = \frac{n^2\pi^2}{1+k^2} \tag{4.4.2}$$

са три променљиве.

Графички, монотона крива x^2e^{2x} се сече хоризонталама $\dfrac{n^2\pi^2}{1+k^2}$. Нека је k фиксирано.



Слика 4.5.

Тада се број нула x_n повећава брзо како n расте. Ако уведемо ознаку $\dfrac{n^2\pi^2}{1+k^2}=\lambda(n,k)$ и повучемо хоризонтале $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,...$ имамо пресеке као на слици 4.5. Значи,

а) За $k=0$, по Ox-оси број нула је највећи. Како $k=\tan\varphi$ расте, то опада број нула све до $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ када је $k=\infty$, па остаје само једна нула $x=0$.

б) Како је n редослед синусних нула функције и $x=n\pi, n=0,1,2,...$ то је за свако следеће n број нула решења каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.4.1) све већи и већи и нуле су све гушће и гушће. Највише их има на Ox-оси, а затим се проређују по сектору, док их је најмање, само једна, по Oy-оси у $O(0,0)$.

в) Број нула на самој Ox-оси одређујемо на следећи начин. Нека је R нека далека апсциса на Ox-оси. Тада је $k=0$ и $\lambda(n,0)=\lambda_{\max}=n^2\pi^2$. Нека до R има n нула x_n, где су x_n апсцисе тачака криве $y=x^2e^{2x}$. Дакле, $\lambda(n,0)=n^2\pi^2=x_n{}^2e^{2x_n}$ и нека је R тачно у x_n а не између две нуле. Тада из једначине $R^2e^{2R}=n^2\pi^2$ следи тражени резултат.

г) Резонујући на исти начин можемо одредити и број нула на неком другом правцу $y=kx$. За ма који правац у првом квадранту, на основу показаног под в) следи тражени резултат.

д) За најмањи сектор, то јест ма какво било мало ε, у углу $\varphi=\varepsilon>0$, због непрекидности безброј праваца $y=kx$, има безброј нула. Нека је $R<\infty$, коначно или чак и мало. Тада је $\int_0^{\varepsilon} n(\varphi)\,d\varphi=\infty$, па праваца има безброј. ■

Примедба. Само прве нуле по правцу $y=kx$ ($k\in\mathbb{N}$, у скоковима $\Delta k=1$) гласе: $\frac{Re^R}{\pi}, \frac{\sqrt{2}Re^R}{\pi}, \frac{\sqrt{5}Re^R}{\pi}, \frac{\sqrt{10}Re^R}{\pi}, \frac{\sqrt{17}Re^R}{\pi}, \ldots$. Дакле, најближа нули $O(0,0)$ је прва од горњих нула. Све друге нуле се удаљавају, али их је све више и више.

Прву нулу добијамо и из једначине (4.4.2) за $n=1$ и $k=0$. Дакле, како је $x_1^2e^{2x_1}=\pi^2$ то је $x_1e^{x_1}=\pi$. Ако ову једначину напишемо у облику $e^{x_1}=\frac{\pi}{x_1}$, то процењујемо да је нула x_1 приближно 1, јер је $e^{x_1}\approx e\approx 2,71\approx\pi=3,14$. Дакле, x_1 је нешто мало веће од 1. Једначину положаја свих првих нула добијамо из једначине (4.4.2), па из једначине правца $y=kx$ после елиминације $k=\frac{y}{x}$, добијамо $x^2e^{2x}=\frac{n^2\pi^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{n^2\pi^2x^2}{x^2+y^2}$. Одавде следи фамилија нула $x^2+y^2=n^2\pi^2e^{-2x}$, $n\in\mathbb{N}_0$. Прве нуле имамо за $n=1$ и оне леже на кривој $y(n,x)=\sqrt{\frac{\pi^2n^2}{e^{2x}}-x^2}$, $xe^x<\pi$, коју још називамо и крива првих (минималних) нула.

Закључујемо да за $x<x_1$ нема нула у сваком малом сектору $R<x_1$, осим у $O(0,0)$. У сваком другом сектору $R>x_1$, за било које φ, има безброј нула јер и праваца има безброј. Број нула n по правцу $y=kx$, $0\le k<+\infty$ на основу теореме 4.4.1 б), одређује се функцијом $\frac{\sqrt{1+k^2}}{n}Re^R$, која је јача од експоненцијалне.

4.5 Полиномни коефицијент по правцу

У претходној секцији 4.4 видели смо да је функција фреквенције $F(z)$, каноничне комплексне ДЈ (4.4.1) другог реда са аналитичким коефицијентом $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$, дозвољавала синусне нуле решења по сваком правцу, и да је коефицијент $a(z)=e^{2z}$ неограничен за велико R по истом правцу. Претпостављамо да би ова метода могла важити и за каноничне комплексне ДЈ другог реда са полиномним коефицијентом од z

$$\frac{d^2w}{dz^2}+P_n(z)w(z)=0, a(z)=P_n(z) \tag{4.5.1}$$

и то по оном правцу $y=kx$, $0\le k<+\infty$ на којем $|F(z)|\to\infty$, или $F(z)$ дозвољава нуле реалних осцилација.

Почев од $n=0$ (секција 4.2), па онда преко претходне секције 4.4, користећи принцип математичке индукције, испитујемо разне случајеве.

Теорема 4.5.1. *Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда (4.5.1), где је коефицијент* $a(z)=P_1(z)=az+b,$ *полином првог степена и* $a,b\in\mathbb{R}^+, a\ne 0$, *има безброј нула у сектору* $0\le\varphi<\frac{\pi}{3}$, *за оне вредности* R *за које је испуњен услов*

$$4k^3b^3\left(1+k^2\right)^2=n^2\pi^2a^2k^3\left(3-k^2\right)^3. \tag{4.5.2}$$

Доказ: За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(az+b)w(z)=0,$ $a,b\in\mathbb{R}^+, a\ne 0$ функција фреквенције је $F(z)=z\sqrt{a(z)}=z\sqrt{az+b}$. Нуле синусног решења су решења једначина $z\sqrt{az+b}=n\pi,\ n=0,1,2,\ldots$. Једноставности ради, пређимо одмах на конкретан правац $y=kx, 0\le k<\infty$. Тада је $z=x(1+ik)$, па из $az^3+bz^2=n^2\pi^2$ на основу дефиниције једнакости комплексних бројева добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} ax^3\left(1-3k^2\right)+bx^2\left(1-k^2\right)&=n^2\pi^2 \\ ax^3\left(3k-k^3\right)+2kbx^2 \qquad &=0 \end{aligned}. \tag{4.5.3}$$

Разликујемо случајеве.
За $x=0$ је задовољена друга једначина система, па следи да је $y=kx=0$. Значи, имамо једну нулу $O(0,0)$.

Ако је $x\ne 0$, из друге једначине налазимо $x=\frac{-2kb}{a\left(3k-k^3\right)}$. Заменом у прву једначину система следи веза (4.5.2) између a и b да би канонична комплексна ДЈ другог реда

$\frac{d^2w}{dz^2} + P_1(z)w(z) = 0, \quad P_1(z) = az + b, \; a,b \in \mathbb{R}^+, a \neq 0$ имала осцилаторна решења.

Ако је $a = 0$ добијамо каноничну комплексну ДЈ другог реда (4.5.1) са реалним константним коефицијентом $P_1(z) = b,$ па из друге једначине система (4.5.3) добијамо $k = 0$, а из прве једначине система $x = \frac{n\pi}{\sqrt{b}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Добили смо координате синусних нула по Ox-оси као за решење ДЈ са константним коефицијентом у секцији 4.3. Следи, услов (4.5.2) је испуњен.

За $a \neq 0$ и $k = 0$, услов (4.5.2) је испуњен, па опет по Ox-оси има нула. Њихове апсцисе, које се одређују из једначине $ax^3 + bx^2 - n^2\pi^2 = 0$, дају везу x преко n, a, b.

За $a \neq 0$ и $k \neq 0$, услов (4.5.2) је $b^3 = n^2\pi^2 a^2 \frac{\left(3-k^2\right)^3}{4\left(1+k^2\right)^2}$. Специјално, за $k = 1$, то јест за $\varphi = \frac{\pi}{4}$ имамо једноставну релацију за број нула.

Важне рубне тачке за k, из услова (4.5.2), су: $0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}$. Очигледно, за $k > \sqrt{3}$ и $a,b \in \mathbb{R}^+ \; a \neq 0$, лева страна у (4.5.2) је позитивна, што је немогуће. Следи да нема нула за ово k. За оне вредности k, $0 < k = \tan\varphi < \sqrt{3}$, за које је могућ услов (4.5.2), постоји безброј нула. ■

Приметимо да смо у секцији 4.2. имали каноничну комплексну ДЈ другог реда са константним коефицијентом за коју је $a = 1$ и $b = 0$. Из улова (4.5.2) тада следи или $n = 0$ (тада је $O(0,0)$ нула) или $k = 0$ или $k = \pm\sqrt{3}$. Дакле, нуле можемо тражити само на Ox-оси.

Примедба. Канонична комплексна ДЈ другог реда (4.5.1), са коефицијентом $a(z) = az + b, \; a,b \in \mathbb{C}, a \neq 0$, који је полином првог степена, по правцу $y = kx, 0 \leq k < \infty$, за $x > 0$ може да има бесконачно нула синусног решења уколико између елемената $a = (a_1, b_1), b = (a_2, b_2), k$ и n важи услов

$$x_k^{\,3}\left[(a_1 - b_1 k)\left(1-k^2\right) - 2\left(b_1 + a_1 k\right)k\right] + x_k^{\,2}\left[a_2\left(1-k^2\right) - 2kb_2\right] = n^2\pi^2,$$

где је $x_k = x(a_1, b_1, a_2, b_2, k) = x = \frac{b_2 k^2 - 2ka_2 - b_2}{a_1 k\left(3-k^2\right) + b_1\left(1-3k^2\right)}$.

Број нула може бити коначан само на коначном интервалу за једно k. Локација нула решења није тривијалан задатак. На пример за $k=0$, (то јест за нуле на Ox-оси) имамо да је $x=-\frac{b_2}{b_1}$, док синусне нуле постоје ако постоји веза $a_1\left(-\frac{b_2}{b_1}\right)^3+a_2\left(-\frac{b_2}{b_1}\right)^2=n^2\pi^2$, $n\in\mathbb{N}_0$.

На основу претходних секција можемо закључити да је могуће одредити локације нула осцилација само оних каноничних комплексних ДЈ другог реда које могу да се реше методом редова-итерација.

4.6 Метод независних парцијалних диференцијалних једначина по правцу

Случај каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентом.

Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда са комплексним константним коефицијентом

$$\frac{d^2w}{dz^2}+a(z)w(z)=0,\, a(z)=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+ \quad . \tag{4.6.1}$$

Како је $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ непозната функција, то је из Главе 1 познато да важи

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial u}{dx}+i\frac{\partial v}{dx},\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{\partial^2u}{dx^2}+i\frac{\partial^2v}{dx^2}\,. \tag{4.6.2}$$

Заменом (4.6.2) у ДЈ (4.6.1) и користећи дефиницију једнакости комплексних бројева добијамо систем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\alpha u(x,y)-\beta v(x,y)=0\\&\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\beta u(x,y)+\alpha v(x,y)=0\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

линеарних ПДЈ другог реда са константним реалним коефицијентима. Познато је да је он еквивалентан систему од једне ПДЈ четвртог реда са константним коефицијентима и једне ПДЈ другог реда која се решава без квадратура. Заиста, елиминацијом једне функције, на пример $v(x,y)$, из прве једначине система (4.6.3) имамо

$$\beta v(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u(x,y). \tag{4.6.4}$$

Диференцирањем (4.6.4) још два пута по x, добијамо

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0\,. \tag{4.6.5}$$

Са друге стране, ако из друге једначине система (4.6.3) израчунамо $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ и искористимо $v(x,y)$ из (4.6.4), једначина (4.6.5) се трансформише у

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) u(x,y) = 0. \tag{4.6.6}$$

Ово је ПДЈ четвртог реда, за реални део $u(x,y)$ непознате функције $w(z)$. Њено опште решење садржи четири произвољне функције. Наводимо неке основне особине за решење каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.6.1) са константним коефицијентом.

Теорема 4.6.1. *Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда (4.6.1), са комплексним константним коефицијентом* $a(z) = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, по* Ox *-оси има за решење комплексну функцију*

$$w(z) = c_1^* e^{\sqrt{-\alpha - i\beta}z} + c_2^* e^{-\sqrt{-\alpha - i\beta}z} \tag{4.6.7}$$

где су c_1^* *и* c_2^* *реалне константе*.

Доказ: За $y = 0$, то јест када се крећемо по Ox -оси, је $u(x,y) = u(x,0) = u(x)$, па ПДЈ (4.6.6) постаје обична ДЈ

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2\alpha \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right) u(x) = 0.$$

Ако потражимо решење ове ДЈ сменом $u = e^{rx}, r = const$, добијамо реалну карактеристичну једначину $r^4 + 2\alpha r^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 0$, чије је решење $r = \pm\sqrt{-\alpha \pm i\beta}$. На овај начин добијмо четири партикуларна решења, а опште решење је

$$u(x) = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + c_4 u_4 = c_1 e^{\sqrt{-\alpha + i\beta}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\alpha + i\beta}x} + c_3 e^{\sqrt{-\alpha - i\beta}x} + c_4 e^{-\sqrt{-\alpha - i\beta}x}.$$

Друго решење $v(x,y)=v(x,0)=v(x)$ добијамо без квадратура из (4.6.4)

$$v(x)=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha u(x)\right)=i\left[c_1 e^{\sqrt{-\alpha+i\beta}x}+c_2 e^{-\sqrt{-\alpha+i\beta}x}-c_3 e^{\sqrt{-\alpha-i\beta}x}-c_4 e^{-\sqrt{-\alpha-i\beta}x}\right].$$

Дакле, решење каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.6.1) са комплексним константним коефицијентом $a(z)=\alpha+i\beta$ је комплексна функција реалне променљиве $w(z)=w(x)$, дата формулом (4.6.7). ■

Приметимо да су у (4.6.7) дата и осцилаторна решења.

Последица 4.6.2. *Реално решење каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда (4.6.1) са комплексним константним коефицијентом* $a(z)=\alpha+i\beta$ *се може у специјалном случају добити за* $\alpha<0, \beta=0$ *и за специјалан избор константи. Решење је тада облика* $w(x)=c_1^* e^{\sqrt{|\alpha|}x}+c_2^* e^{-\sqrt{|\alpha|}x}$*, и може дати функције* $e^{\sqrt{|\alpha|}x}, ch\sqrt{|\alpha|}x, sh\sqrt{|\alpha|}x$.

Како проучавамо само сектор који се налази у првом квадранту то је природно узети $\alpha>0$ и $\beta\geq 0$. Међутим, тада канонична комплексна ДЈ другог реда (4.6.1) нема решења у првом квадранту, већ само у другом и четвртом квадранту и она су осцилаторна. Наиме, на основу доказа теореме 4.6.1 видимо из (4.6.7) да радимо са комплексним бројем $-\alpha-i\beta$, чији је афикс у трећем квадранту. Како је $\sqrt{-\alpha-i\beta}$ двозначан, то је

$$\sqrt{-\alpha-i\beta}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}, & k=0\\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}, & k=1\end{cases}.$$

Локације нула решења каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентом по произвољном правцу.

Видели смо у Глави 1, да је по произвољном правцу $y=kx, 0\leq k<+\infty$ комплексна функција облика $w(z)=w(x+ikx)=U(x,kx)+iV(x,kx)$, где су $U(x,kx)=u(x,k)=$ $=U(x)$, $U(x)\neq u(x,0)$ и $V(x,kx)=v(x,k)=V(x), V(x)\neq v(x,0)$ нове функције. За каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда (4.6.1) са комплексним константним коефицијентом из $\frac{\partial^2 u}{dx^2}+i\frac{\partial^2 v}{dx^2}+$ $+(\alpha+i\beta)\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]=0$, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева добијамо систем реалних ПДЈ другог реда (4.6.3). Ако тражимо понашање само по правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, увођењем смене $y=kx$, парцијални изводи прелазе у обичне изводе, па систем (4.6.3) постаје

$$\begin{aligned}&\frac{d^2U(x,kx)}{dx^2}+\alpha U(x,kx)-\beta V(x,kx)=0\\&\frac{d^2V(x,kx)}{dx^2}+\beta U(x,kx)+\alpha V(x,kx)=0\end{aligned}. \tag{4.6.8}$$

Следи

Теорема 4.6.3. *За каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда (4.6.1) са комплексним константним коефицијентом* $a(z)=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$, *по произвољном правцу* $y=kx,\ 0\le k<+\infty$ *са*

$$\begin{aligned}U''(x)&=(1+k^2)u''_{xx}\\V''(x)&=(1+k^2)v''_{xx}\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

је дата веза између обичних и парцијалних извода, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx},\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=v''_{xx}$, *редом функција* $U(x),V(x)$.

Доказ: По правцу $y=kx, 0\le k<\infty$, имамо да је $u(x,y)=u(x,kx)=U(x,k)=U(x)$ и $v(x,y)=v(x,kx)=V(x,k)=V(x)$. Из Анализе је познато да је формалан извод сложене функције $u(x,y)=u(x,y(x))=u(x,kx)$ односно $v(x,y)=v(x,y(x))=v(x,kx)$ облика

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=u'_x+u'_y\frac{dy}{dx}=u'_x+u'_yk=U'(x)\\\frac{dv}{dx}&=v'_x+v'_y\frac{dy}{dx}=v'_x+v'_yk=V'(x).\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

Поновним диференцирањем (4.6.10) по x следи систем $U''(x)=u''_{xx}+u''_{xy}k+u''_{yx}k+u''_{yy}k^2$, $V''(x)=v''_{xx}+v''_{xy}k+v''_{yx}k+v''_{yy}k^2$. Сада треба повезати извод функције једне независне промењљиве $U''(x)$ или $V''(x)$, које нису аналитичке у смислу Коши-Римановых услова, са аналитичким решењем $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. На основу аналитичности функција $u(x,y)$ и $v(x,y)$ и на основу Лапласових ПДЈ другог реда, (1.1.1) и (1.1.2), добијамо једнакост других извода $u''_{xy}=u''_{yx}$ и $v''_{xy}=v''_{yx}$, па имамо на крају

$$\begin{aligned} U''(x) &= \left(1+k^2\right)u''_{xx} \\ V''(x) &= \left(1+k^2\right)v''_{xx} \end{aligned}. \tag{4.6.11}$$

Остало је још да мешовите изводе изразимо преко U''_{xx} или V''_{xx}. Како због аналитичности важи Кошијева теорема о мешовитим изводима, то диференцирањем прве једначине система (4.6.10) по x, следи $U''(x)=u''_{xx}+u''_{yx}k$, односно $u''_{yx}=\dfrac{U''(x)-u''_{xx}}{k}$. Заменом ове вредности у прву једначину система (4.6.11) добијамо прву једначину система (4.6.9).

Аналогно, диференцирањем друге једначине система (4.6.10) по x налазимо $v''_{yx}=\dfrac{V''(x)-v''_{xx}}{k}$, а онда елиминацијом v''_{xy} из друге једначине система (4.6.11) добијамо другу једначину система (4.6.9), односно везу између $V(x)$ и v''_{xx}. ■

Примедба. Систем (4.6.8) на основу (4.6.2) и (4.6.9) можемо написати у облику

$$\begin{aligned} &\frac{U''(x)}{1+k^2}+\alpha U(x)-\beta V(x)=0 \\ &\frac{V''(x)}{1+k^2}+\beta U(x)+\alpha V(x)=0 \end{aligned}. \tag{4.6.12}$$

Теорема 4.6.3 сада даје могућност да се проблем решавања ПДЈ пренесе на решавање обичне ДЈ.

Последица 4.6.4. *Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда (4.6.1), са комплексним константним коефицијентом* $a(z)=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ *, по правцу* $y=kx, 0\le k<+\infty$, *има решења која се налазе у другом и четвртом квадранту.*

Доказ: Диференцирањем два пута по x прву једначину система (4.6.12), добијамо ДЈ четвртог реда

$$U^{IV}(x)+\left(1+k^2\right)\left[\alpha U''(x)-\beta V''(x)\right]=0.$$

Елиминацијом $V''(x)$ из друге једначине система (4.6.12) и $V(x)$ из прве једначине истог система, на крају добијамо

$$U^{IV}(x)+2\alpha\left(1+k^2\right)U''(x)+\left(1+k^2\right)^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)U(x)=0\,, \tag{4.6.13}$$

хомогену линеарну ДЈ четвртог реда са константним коефицијентима. Решења њене карактеристичне једначине су $r_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{1+k^2}\sqrt{-\alpha\pm i\beta}$. Приметимо да се за $k=0$ она поклапају са r из доказа теореме 4.6.1. За $k\neq 0$, примењујући описани поступак следи да немамо решења у првом квадранту. ■

На крају можемо да закључимо, за број нула решења каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.6.1), са комплексним константним коефицијентом, битан је систем ДЈ другог реда (4.6.8) из којег добијамо систем од једне ДЈ четвртог реда (4.6.13) и једне ДЈ другог реда која се решава без квадратура. Нуле осцилаторних решења, у првом квадранту, постоје само за $\alpha<0$ и оне се налазе по сваком правцу $y=kx, 0\leq k<+\infty$. Нуле су изоловане и њихов број се повећава уколико $k=\tan\varphi$ расте то јест $\varphi\to\frac{\pi}{2}$. Најмањи број нула је на Ox-оси, за $k=0$, а затим их је све више и више на сваком следећем правцу. Прва синусна нула из

$$x_n=n\pi\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}}\,, n=0,1,2,...$$

је $x=0$, док број нула $n=E\left[\frac{R\sqrt{1+k^2}}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}\right]$ на одсечку правца $y=kx, 0\leq k<+\infty$, од $x=-R$ до $x=0$ зависи од четири променљиве $n=n(R,k,\alpha,\beta)$.

4.7 О РАЦИОНАЛНОСТИ ПОВЕЋАВАЊА РЕДА КОД РЕШАВАЊА СИСТЕМА ПАРЦИЈАЛНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

У досадашњем раду смо приметили да каноничну комплексну ДЈ другог реда веома ретко можемо директно да решимо. Још смо сложенији случај добијали када смо дату комплексну ДЈ, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева, трансформисали на систем од две реалне ПДЈ, а затим елиминацијом једне непознате функције, тај систем трансформисали на систем од једне ПДЈ, али вишег реда и једне једначине која се решавала без квадратура.

Зато сматрамо да је, приликом елиминације функције $u(x,y)$ или $v(x,y)$, боље не повећавати ред ДЈ, него треба остати на нижем реду и тражити одвојене нуле поменутих реалних функција, посебно по правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, или ако треба по некој кривој $y = \varphi(x)$.

У Глави 1, ми смо комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда

$$\frac{dw}{dz} + a(z)w(z) = 0 \tag{4.7.1}$$

са аналитичким коефицијентом $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, лако решили квадратурама, а и итерацијама. Тада смо приметили да само тривијално решење има нула. Осим тога, ДЈ (4.7.1) се трансформисала на систем ПДЈ првог реда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha(x,y)u(x,y) - \beta(x,y)v(x,y) = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial x} + \beta(x,y)u(x,y) + \alpha(x,y)v(x,y) = 0 \end{aligned}, \tag{4.7.2}$$

из којег смо елиминацијом $u(x,y)$ или $v(x,y)$ на крају добили систем од једне ПДЈ другог реда

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \left(2\alpha(x,y) - \frac{1}{\beta(x,y)}\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \\ &\quad + \left[\beta(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha(x,y)}{\beta(x,y)}\right) + \alpha^2(x,y) + \beta^2(x,y)\right]\Pi = 0, \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

за $\Pi = \Pi(x,y) = u(x,y)$ или $\Pi = \Pi(x,y) = v(x,y)$ и једне алгебарске једначине. Знајући да ће опште решење комплексне хомогене линеарне ДЈ првог реда (4.7.1), са аналитичким коефицијентом, зависити од две произвољне функције, покушаћемо сада да не повећавамо ред једначине.

Теорема 4.7.1. *Опште решење комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (4.7.1) са аналитичким коефицијентом је*

$$\Phi\left(\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)\right) = 0, \tag{4.7.4}$$

где је Φ *произвољна диференцијабилна функција а* φ_1 *и* φ_2 *линеарно независни први интеграли карактеристичног система једначина*.

Доказ: Помножимо прву једначину система (4.7.2) са $\alpha(x,y)$, а другу са $\beta(x,y)$ и саберимо их

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)u(x,y)=0 \quad .$$

Како је решење $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ аналитичка функција то важе Коши-Риманови услови, па последња једначина постаје

$$\alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}-\beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)u(x,y)=0 \,. \tag{4.7.5}$$

Ово је квазилинеарна ПДЈ првог реда која је еквивалентна у погледу решивости са системом обичних ДЈ у симетричном облику

$$\frac{dx}{\alpha(x,y)}=\frac{dy}{-\beta(x,y)}=\frac{du}{-\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)}. \tag{4.7.6}$$

Како су $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ задани, то су $\varphi_1(x,y,u)=c_1$ и $\varphi_2(x,y,u)=c_2$ два линеарно независна прва интеграла, који зависе од $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ па је опште решење ПДЈ (4.7.5) управо израз (4.7.4). Одавде не можемо експлицитно добити $u(x,y)$ јер она фигурише у оба прва интеграла. ■

Колику огромну предност, код решавања комплексних ДЈ, има операторски метод у односу на класично решавање помоћу ПДЈ видећемо на основу доле наведених случајева.

Случај решавања система диференцијалних једначина (4.7.6) помоћу квадратура

За систем (4.7.6) треба да одредимо квадратурама два линеарно независна прва интеграла. Једну интеграбилну комбинацију чине први и други разломак, па добијамо једначину $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}$. Како су $\alpha(x,y),\beta(x,y)$ делови дате аналитичке функције $a(z)$, добијена је обична ДЈ првог реда. За ову једначину су испуњени услови за егзистенцију и јединственост решења, па њеном интеграцијом добијамо први интеграл $\Phi(x,y)=c_1$. Ако је $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\neq 0$ онда имамо да је

$$y = \varphi(x, c_1). \tag{4.7.7}$$

Другу интеграбилну комбинацију чине први и трећи разломак, па следи још једна обична ДЈ првог реда

$$\frac{du(x,y)}{dx} = -\frac{\alpha^2(x, \varphi(x, c_1)) + \beta^2(x, \varphi(x, c_1))}{\alpha(x, \varphi(x, c_1))}.$$

Интеграцијом ове једначине добијамо још један линеарно независан први интеграл

$$u(x,y) + \int \frac{\alpha^2(x, \varphi(x, c_1)) + \beta^2(x, \varphi(x, c_1))}{\alpha(x, \varphi(x, c_1))} dx = c_2$$

где је c_2 интеграциона константа. Функцију $u(x,y)$ добијамо у експлицитном облику, јер фигурише само у другом првом интегралу. Имагинарни део $v(x,y)$ тражене аналитичке функције, одређујемо из прве једначине система (4.7.2) без квадратура.

Можемо да закључимо, класичан метод није толико једноставан за примену иако од аналитичности користи само Коши-Риманове услове и Лапласову ПДЈ другог реда.

Како комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда, са аналитичким коефицијентом, има аналитичко решење $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ то за $u(x,y)$ и $v(x,y)$ важе Коши-Риманови услови, па из система ПДЈ (4.7.2) добијамо аналоган систем за $v(x,y)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial y} + \alpha(x,y)u(x,y) - \beta(x,y)v(x,y) = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial x} + \beta(x,y)u(x,y) + \alpha(x,y)v(x,y) = 0.
\end{aligned}$$

Када прву једначину овог система помножимо са $\beta(x,y)$, а другу са $\alpha(x,y)$ и одузмемо, следи

$$\alpha(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} - \beta(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\alpha^2(x,y) + \beta^2(x,y)\right)v(x,y) = 0.$$

Ово је нова ПДЈ, али за имагинарни део решења комплексне ДЈ (4.7.1). Њој придружујемо карактеристични систем обичних ДЈ

$$\frac{dx}{\alpha(x,y)} = \frac{dy}{-\beta(x,y)} = \frac{dv}{-\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)}. \tag{4.7.8}$$

Упоређивањем са системом ДЈ (4.7.6) видимо да нема разлика, па можемо поновити исто резоновање као малопре.

Примедба. Видели смо у секцији 1.4 да комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда (4.7.1), са аналитичким коефицијентом, има опште решење $w(z) = ce^{-\int a(z)dz}$. Тако смо са пар операторских правила комплексне анализе заменили гломазни поступак скаларних ПДЈ описан горњим формулама.

Понашање по правцу
Вратимо се поново на систем обичних ДЈ (4.7.6). Следи

Теорема 4.7.2. *Опште решење* $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (4.7.1), са аналитичким коефицијентом* $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, *по произвољном правцу* $y = kx, 0 \le k < +\infty$ *дато је са*

$$w(z) = -(1+i)\int_0^x \frac{\alpha^2(x,kx)+\beta^2(x,kx)}{\alpha(x,kx)}dx + c_1 + ic_2. \tag{4.7.9}$$

Доказ: Из система (4.7.6), за $u(x,y)$ имамо ДЈ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}$. По произвољном правцу $y = kx$ је $\frac{dy}{dx} = k$, односно $k = -\frac{\beta(x,y)}{\alpha(x,y)}$. Из друге једначине система (4.7.6) добијамо ДЈ $\frac{dx}{\alpha(x,y)} = -\frac{du}{\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)}$ или $du = -\frac{\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)}{\alpha(x,y)}dx$.
Видели смо да ова једначина, али сада по правцу $y = kx$, има решење

$$u(x,kx) = -\int_0^x \frac{\alpha^2(x,kx)+\beta^2(x,kx)}{\alpha(x,kx)}dx + c_1. \tag{4.7.10}$$

Ова формула даје понашање реалног дела $u(x,y)$ решења $w(z)$. На исти начин, из друге једначине система (4.7.8) по правцу $y = kx$ имамо

$$v(x,kx) = -\int_0^x \frac{\alpha^2(x,kx)+\beta^2(x,kx)}{\alpha(x,kx)}dx + c_2.$$

За $x=0$ је очигледно $c_1 = u(0,0) = u_0$ и $c_2 = v(0,0) = v_0$. Како је опште решење $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то по правцу $y = kx$ добијамо тражени резултат. ■

Покушајмо сада да лоцирамо нуле решења по поменутом правцу. Следи

Последица 4.7.3. *Нуле реалног и имагинарног дела решења* $w(z)$, *комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (4.7.1), са аналитичким коефицијентом* $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ *, по произвољном правцу* $y = kx, 0 \le k < +\infty$, *дате су редом са*

$$\int_0^x \frac{\alpha^2(x,kx)+\beta^2(x,kx)}{\alpha(x,kx)}dx = u_0 \tag{4.7.11}$$

$$\int_0^x \frac{\alpha^2(x,kx)+\beta^2(x,kx)}{\alpha(x,kx)}dx = v_0. \tag{4.7.12}$$

Доказ: Нуле реалног дела $u(x,y)$ решења $w(z)$ се налазе из једначине $u(x,kx) \overset{(4.7.10)}{=} 0$. Аналогно добијамо нуле и за имагинарни део. ■

Показали смо у Глави 1, да функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ могу имати нуле посебно, али немају заједничке нуле, јер је опште решење $w(z) = ce^{-\int a(z)dz}$ нула само за $c=0$, а синус и косинус никада нису истовремено једнаки нули.

Теорема 4.7.4. *Само тривијално решење* $w(z) \equiv 0$ *комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (4.7.1), са аналитичким коефицијентом* $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ *, по произвољном правцу* $y = kx, 0 \le k < +\infty$ *има нула.*

Доказ: Како су леве стране једначина (4.7.11) и (4.7.12) идентичне, то постоји разлика у нулама само ако постоји разлика између u_0 и v_0. Међутим, из (4.7.10) за $z=0$ то јест за $x=0$ и $y=kx=0$, интеграл је једнак нули, па остаје да је $c_1 + ic_2 = u_0 + iv_0 = 0$. Одавде је $u_0 = v_0 = 0$, односно $w(0) = 0$.

Дакле, функције $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имају своје нуле, али заједничке нуле су могуће само за $u_0 = v_0 = 0$. Према томе, само тривијално решење $w(z) \equiv 0$ комплексне ДЈ (4.7.1) има нулу $z=0$ и других нула решење $w(z)$ нема. ■

На пример, комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz} + zw(z) = 0$, са аналитичким коефицијентом $a(z) = z = x+iy$, има опште решење

$$w(z) = c\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) = c\exp\left(-\frac{\left(x^2-y^2\right)}{2}\right)\left[\cos(xy) - i\sin(xy)\right],$$

или по правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, $w(x,kx) = c\exp\left(-\frac{x^2\left(1-k^2\right)}{2}\right)\left[\cos\left(kx^2\right) - i\sin\left(kx^2\right)\right]$.

Нуле синусног решења су $x = \pm\sqrt{\frac{n\pi}{k}}, n = 0,1,2,...$, а њихов број на правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, до тачке $x = R$ износи $n = E\left[\frac{k}{\pi}R^2\right]$. Нуле косинусног решења су $x = \pm\sqrt{(2n-1)\frac{\pi}{2k}}$, $n = 1,2,...$, а број нула до апсцисе $x = R$ је $n = E\left[\frac{1}{2} + \frac{k}{\pi}R^2\right]$. Видимо да је одвојених синусних и косинусних нула све више уколико k расте. Заједничка нула за $u(x,y)$ и $v(x,y)$, то јест нула за решење $w(z)$ је само $O(0,0)$.

Исто тако, за комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда $\frac{dw}{dz} + z^2 w(z) = 0$, са аналитичким коефицијентом $a(z) = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy$, имамо да је $\alpha(x,y) = x^2 - y^2$, $\beta(x,y) = 2xy$. Интеграл за нуле даје

$$I(x,kx) \overset{(4.7.12)}{=} \int_0^x \frac{x^4\left(1-k^2\right)^2 + 4k^2x^4}{x^2\left(1-k^2\right)}dx = \frac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1-k^2\right)}\frac{x^3}{3}.$$

Опште решење је облика

$$w(z) = c\exp\left(-\frac{z^3}{3}\right) = c\exp\left(-\frac{\left(x^3 - 3xy^2\right)}{3}\right)\left[\cos\frac{3x^2y - y^3}{3} - i\sin\frac{3x^2y-y^3}{3}\right].$$

По правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, синусно решење има нуле за $x = \sqrt[3]{\dfrac{3n\pi}{k\left(3-k^2\right)}}, n = 0,1,2,...$ у кругу радијуса R. Број нула синусног решења је $n = E\left[\dfrac{k\left|3-k^2\right|}{3\pi}R^3\right]$. Видимо да по бисектриси $y = \pm x$ нема нула, али ни по Ox-оси. Такође, број нула расте са кубом радијуса. Ово нам сугерише да број нула расте са растом полиномног коефицијента $P_n\left(z\right)$, то јест са рангом раста целе функције.

Остаје још да одредимо формулу за број нула по правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, до тачке $x = R, y = kR$, ако већ знамо локацију.

Теорема 4.7.5. *Број нула синусног решења комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине првог реда (4.7.1), са аналитичким коефицијентом* $a\left(z\right) = \alpha\left(x,y\right) + i\beta\left(x,y\right)$*, по произвољном правцу* $y = kx, 0 \le k < +\infty$*, од* $O\left(0,0\right)$ *до тачке* $\left(R,kR\right)$*, је* $n = E\left[\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^R\left[k\alpha\left(x,kx\right) + \beta\left(x,kx\right)\right]dx\right]$*, а број нула косинусног решења је за један мањи.*

Доказ: Из општег решења комплексне ДЈ првог реда (4.7.1), $w\left(z\right) = c\exp\left(-\int\limits_0^z a\left(z\right)dz\right)$, $a\left(z\right) = \alpha\left(x,y\right) + i\beta\left(x,y\right)$, након елементарних трансформација добијамо

$$w\left(z\right) = c\exp\left(-\int\limits_0^{(x,y)}\left(\alpha\left(x,y\right)dx - \beta\left(x,y\right)dy\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\left[\cos\left(\int\limits_0^{(x,y)}\left(\alpha\left(x,y\right)dy + \beta\left(x,y\right)dx\right)\right) - i\sin\left(\int\limits_0^{(x,y)}\left(\alpha\left(x,y\right)dy + \beta\left(x,y\right)dx\right)\right)\right].$$

Како је експоненцијална функција различита од нуле, то су нуле реалног односно имагинарног дела решења $w\left(z\right)$ могуће само ако редом важи: $\cos\left(\int\limits_0^{(x,y)}\left(\alpha\left(x,y\right)dy + \beta\left(x,y\right)dx\right)\right) = 0$, $\sin\left(\int\limits_0^{(x,y)}\left(\alpha\left(x,y\right)dy + \beta\left(x,y\right)dx\right)\right) = 0$. Одавде, нуле синусног и косинусног решења су одређене једначинама

$$\int_0^x \left[k\alpha(x,kx)+\beta(x,kx)\right]dx = n\pi, n = 0,1,2,...$$
$$\int_0^x \left[k\alpha(x,kx)+\beta(x,kx)\right]dx = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1,2,...$$

Број нула једног и другог решења се одавде налази на уобичајени начин. ■

Сингуларни правац.
Један важан правац, Oy-оса је до сада био искључен из посматраних праваца, јер због $\varphi = \frac{\pi}{2}$, односно за $k = +\infty$ он није могао бити обухваћен изразом $y = kx, 0 \le k < +\infty$. Овај правац назовимо *сингуларни правац*. По њему, комплексна хомогена линеарна ДЈ првог реда (4.7.1) са аналитичким коефицијентом може имати решење, чак и нуле решења.

Зато ћемо на најједноставнији начин проучити комплексну хомогену линеарну ДЈ првог реда (4.7.1) и наћи њено решење. Већ смо на почетку ове секције видели да се ДЈ (4.7.1) трансформисала на систем ПДЈ првог реда (4.7.2). Ако се сада крећемо по Ox-оси, тада је $z = x$, па је $w(z) = w(x) = u(x) + iv(x)$. Одавде, заменом у систем (4.7.2) добијамо обичан систем ДЈ, са две непознате функције u и v једне независне промењљиве x. Елиминацијом једне функције, на пример $v(x)$ из прве једначине система и заменом у другу једначину система, добијамо

$$u''(x) + \left[2\alpha(x) - \frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\right]u'(x) + \left[\alpha'(x) - \alpha(x)\frac{\beta'(x)}{\beta(x)} + \alpha^2(x) + \beta^2(x)\right]u(x) = 0. \quad (4.7.13)$$

Познато је да је ово потпуна линеарна хомогена ДЈ другог реда која се сменом

$$u(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\left[2\alpha(x) - \frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\right]dx\right)S(x) \quad (4.7.14)$$

где је $S(x)$ нова непозната функција трансформише на каноничну ДЈ другог реда

$$S''(x) + \Phi(x)S(x) = 0 \quad (4.7.15)$$

за коју важи Штурмова теорема, (видети [12],[24],[30],[31]). Ако је

$$\Phi(x)=\Phi(\alpha(x),\beta(x))=$$
$$=\alpha'(x)-\alpha(x)\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}+\alpha^2(x)+\beta^2(x)-\frac{1}{2}\left(2\alpha(x)-\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\right)'-\frac{1}{4}\left(2\alpha(x)-\frac{\beta'(x)}{\beta(x)}\right)^2>0$$

и $\Phi(x)S(x)\in(C,Lip)$ у G, тада ДЈ (4.7.15) има осцилаторна решења $S_1(x)=\sin_{\Phi(x)}x,\ S_2(x)=\cos_{\Phi(x)}x$, па на основу (4.7.14) имамо два осцилаторна решења за $u(x)$. Решења за $v(x)=\frac{1}{\beta(x)}\left[u'(x)+\alpha(x)u(x)\right]$ добијамо без квадратура.

Из претходног текста, а и из Главе 1 је познато да решење ДЈ (4.7.1) нема заједничке нуле, осим $w(z)=w(x)=0$, то јест само за $u(x)=0, v(x)=0$. Дакле, нуле на Ox-оси се могу наћи сасвим регуларно.

По Oy-оси је $x=0$, па комплексна ДЈ (4.7.1), написана у развијеном облику, мора да садржи изводе од y. Како комплексна ДЈ има аналитичко решење, односно важе Коши-Риманови услови, то систем (4.7.2) постаје

$$\begin{aligned}&\frac{dv}{dy}+\alpha(y)u(y)-\beta(y)v(y)=0\\&\beta(y)u(y)+\alpha(y)v(y)\qquad=0\end{aligned}. \tag{4.7.16}$$

Ово је мешовито алгебарско-диференцијални систем, који називамо и сингуларним. Елиминацијом $u(y)=-\frac{\alpha(y)}{\beta(y)}v(y)$ из друге једначине система, па заменом у прву, добијамо ДЈ првог реда $\frac{dv}{dy}=\frac{\alpha^2(y)+\beta^2(y)}{\beta(y)}v(y)$, са раздвојеним променљивама. Њено опште решење је $v(y)=c_1\exp\left(\int\frac{\alpha^2(y)+\beta^2(y)}{\beta(y)}dy\right)$. Решење за $u(y)$ добијамо без квадратура. Како је систем (4.7.16) мешовит, овај случај се третира посебно, ван сектора $0\le\varphi<\frac{\pi}{2}$. Приметимо још и да систем (4.7.16) има тривијално решење за $u(y)=v(y)=0$.

На крају се поставља питање, да ли је ова појава могућа и за каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда.

4.8 Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда са аналитичким коефицијентом по произвољном правцу

Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2}+a(z)w(z)=0, \tag{4.8.1}$$

где је $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ аналитичка функција у области која садржи сектор $|z|=R, 0\le \arg z<\frac{\pi}{2}$, а $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ је непозната комплексна функција. Познато је да она има аналитичко решење, а у Глави 2 и Глави 3, ми смо показали да се може решити и итерацијама. Тада смо са $w^{[n]}(z)=c_1z+c_2-\int\limits_0^z\int\limits_0^z a(z)w^{[n-1]}(z)dz^2$, $n=1,2,...$ дефинисали један оператор контракције и помоћу њега смо увели осцилаторне функције $w_1(z)=\cos_{a(z)}z$ и $w_2(z)=\sin_{a(z)}z$.

Проучимо сада локације нула решења по произвољном правцу $y=kx$, $0\le k<\infty$, односно у првом квадранту. У секцији 4.6 ми смо каноничну комплексну ДЈ другог реда (4.8.1), са аналитичким коефицијентом, трансформисали на систем линеарних ПДЈ другог реда

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\alpha(x,y)u(x,y)-\beta(x,y)v(x,y)=0\\&\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\beta(x,y)u(x,y)+\alpha(x,y)v(x,y)=0\end{aligned}. \tag{4.8.2}$$

Када прву једначину овог система помножимо са $\alpha(x,y)$, а другу са $\beta(x,y)$ и саберемо добијамо

$$\alpha(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\beta(x,y)\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)u(x,y)=0. \tag{4.8.3}$$

Канонична комплексна ДЈ другог реда (4.8.1) са аналитичким коефицијентом има аналитичко решење $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, па за $u(x,y)$ и $v(x,y)$ важе Коши-Риманови услови. На пример, из услова $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ диференцирањем по x, па заменом у (4.8.3) имамо

$$\alpha(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)u(x,y)=0, \qquad (4.8.4)$$

ПДЈ само по непознатој функцији $u(x,y)$. Када једначину (4.8.4) посматрамо по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, за $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=A(x)$, $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)==B(x)$ добијамо обичну ДЈ. На основу идентитета $U''(x)=u''_{xx}+ku''_{yx}$ и $U''(x)=\left(1+k^2\right)u''_{xx}$, (видети доказ теореме 4.6.6), налазимо да је мешовити извод $u''_{xy}=u''_{yx}=\frac{k}{1+k^2}U''(x)$. Заменом ових вредности у (4.8.4) добијамо ДЈ другог реда

$$\left[A(x)-kB(x)\right]U''(x)+\left(1+k^2\right)\left[A^2(x)+B^2(x)\right]U(x)=0$$

у којој сви коефицијенти зависе од x и од k. Одавде је

$$U''(x)+\frac{\left(1+k^2\right)\left[A^2(x)+B^2(x)\right]}{A(x)-kB(x)}U(x)=0 \qquad (4.8.5)$$

канонична реална ДЈ другог реда, за коју важе теореме из [12],[24],[30],[31], ако је:

1. $A(x)-kB(x)>0$,
2. функција $\Phi(x,k)=\frac{\left(1+k^2\right)\left[A^2(x)+B^2(x)\right]}{A(x)-kB(x)}$ је непрекидна и нема сингуларитета у области G,
3. интеграл од $\frac{\left(1+k^2\right)\left[A^2(x)+B^2(x)\right]}{A(x)-kB(x)}$ дивергира на $[0,+\infty)$.

На сличан начин из система једначина (4.8.2) извршимо елиминацију функције $u(x,y)$, тако што помножимо прву једначину са $-\beta(x,y)$ а другу са $\alpha(x,y)$ и саберемо. Следи

$$\alpha(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)v(x,y)=0.$$

Диференцирањем другог Коши-Римановог услова $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ по x и заменом у горњој једначини добијамо ПДЈ само по $v(x,y)$

$$\alpha(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\alpha^2(x,y) + \beta^2(x,y)\right)v(x,y) = 0. \tag{4.8.6}$$

По произвољном правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, заменом извода $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = v''(x) = \frac{V''(x)}{1+k^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{V''(x) - v''_{xx}}{k}$ у (4.8.6) имамо

$$\frac{\alpha(x,y) - k\beta(x,y)}{1+k^2}V''(x) + \left(\alpha^2(x,y) + \beta^2(x,y)\right)V(x) = 0. \tag{4.8.7}$$

Како је по правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, $\alpha(x,y) = \alpha(x,kx) = A(x,k) = A(x)$, $\beta(x,y) = $ $= \beta(x,kx) = B(x,k) = B(x)$, то за $A(x) - kB(x) \ne 0$ добијамо каноничну једначину осцилација другог реда за $V(x)$

$$V''(x) + \frac{\left(1+k^2\right)\left[A^2(x) + B^2(x)\right]}{A(x) - kB(x)}V(x) = 0 \tag{4.8.7}$$

ако важе исти услови као за малопре поменуту ДЈ (4.8.5).

Видимо да су ПДЈ (4.8.4) за $u(x,y)$ и (4.8.6) за $v(x,y)$ математички идентичне, па су такве и обичне ДЈ другог реда (4.8.5) за $U(x)$ и (4.8.7) за $V(x)$.

Примедба

1. У горњим формулама, коефицијенти $\alpha(x, y = kx) = \alpha(x,k) = A(x)$ и $\beta(x, y = kx) = $ $= \beta(x,k) = B(x)$ нису потпуно произвољне функције од x и $y = kx$, већ се они одређују из аналитичке функције $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$. Како за $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ важе Коши-Риманови услови и Лапласова ПДЈ другог реда, то на основу теорема о смени независних променљивих, код функција од две променљиве, важе следеће релације замена $A'(x) = \alpha'_x + k\alpha'_y, A''(x) = \alpha''_{xx} + 2k\alpha''_{xy} + k^2\alpha''_{yy}, \alpha''_{xx} + \alpha''_{yy} = 0$, односно $\alpha''_{xx} = \frac{A''(x)}{1+k^2}$, $\alpha''_{yy} = -\frac{A''(x)}{1+k^2}$, $\alpha''_{xy} = k\frac{A''(x)}{1+k^2}$. Аналогно се добија $\beta''_{xx} = \frac{B''(x)}{1+k^2}$,

$\beta''_{yy} = -\dfrac{B''(x)}{1+k^2}$, $\beta''_{xy} = k\dfrac{B''(x)}{1+k^2}$, а све то по произвољном правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$.

На основу класичне Кошијеве теорије аналитичких функција, ако је код аналитичке функције $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ познато на пример $\alpha(x,y)$, које је непрекидна и диференцијабилна функција, тада на основу познатог поступка, видети [32], лако израчунавамо имагинарни део $\beta(x,y) = c_1 - \int \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} dx$ аналитичке функције $a(z)$. На овај начин је одређена аналитичка функција $a(z)$.

2. Имагинарни део $v(x,y)$ аналитичког решења $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ канoничне комплексне ДЈ другог реда (4.8.1), са аналитичким коефицијентом $a(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$, се може наћи без квадратура. Из прве једначине система (4.8.2) је $v(x,y) = \dfrac{1}{\beta}\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x,y)u(x,y)\right]$. Са друге стране, по произвољном правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, на основу (4.6.9) и (4.8.2), добијамо

$$V(x) = V(x,kx) = -U(x)\frac{B(x)+kA(x)}{A(x)-kB(x)}. \tag{4.8.8}$$

3. Решења канoничне комплексне ДЈ другог реда (4.8.5) за $U(x)$, односно (4.8.7) за $V(x)$, су осцилаторна ако важе услови 1,2,3, док су нуле синусног и косинусног решења, решења једначина

$$\begin{aligned} &x\sqrt{\frac{(1+k^2)(A^2(x)+B^2(x))}{A(x)-kB(x)}} = n\pi, n = 0,1,2,... \\ &x\sqrt{\frac{(1+k^2)(A^2(x)+B^2(x))}{A(x)-kB(x)}} = (2n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1,2,... \end{aligned} \tag{4.8.9}$$

Нуле решења зависе од $\alpha(x,y) = \alpha(x,kx) = A(x)$, од $\beta(x,y) = \beta(x,kx) = B(x)$, од нагиба $0 \le k = \tan\varphi < \infty$ правца $y = kx$ и од броја n.

4. Из (4.8.8) је јасно да се нуле функција $U(x,kx) = U(x)$ и $V(x,kx) = V(x)$ не морају поклапати. Ако на пример $U(x)$ има нула има их и $V(x)$, али $V(x)$ може имати још нула ако их једначина $B(x) + kA(x) = 0$ даје за дати правац. И обрнуто, из

$$U(x) = -V(x)\frac{A(x) - kB(x)}{B(x) + kA(x)}$$

нуле $V(x)$ су нуле и $U(x)$, али $U(x)$ може имати још нула ако је $A(x) - kB(x) = 0$ за дато k.

Специјално, за $k = 0$ је $y = 0$, па по Ox-оси из (4.8.5) добијамо ДЈ осцилација другог реда

$$U''(x) + \frac{A^2(x) + B^2(x)}{A(x)}U(x) = 0,$$

за $U(x)$, ако важе услови 1,2,3. Тада на основу (4.8.9), по правцу $y = 0$, нуле синусног решења, за $U(x)$, исто важи и за $V(x)$, су решења једначина

$$x\sqrt{\frac{A^2(x) + B^2(x)}{A(x)}} = n\pi, n = 0,1,2,... \ .$$

Међутим, због (4.8.8), функција $V(x)$ може имати евентуално још нула ако је $B(x) + kA(x) = B(x) = 0$. Обрнуто, по Ox-оси, имамо из (4.8.5), једначину осцилација $U''(x) + A(x)U(x) = 0$ другог реда за $U(x)$. Нуле синусног решења су у коренима једначина $x\sqrt{A(x)} = n\pi, n = 0,1,2,...$.

Сада је остало да дамо прецизнију и потпунију теорему од теореме 4.2.1 у којој смо за каноничну комплексну ДЈ другог реда (4.8.1) са константним коефицијентом $a(z) = c_1 + ic_2$ постављали специјалне случајеве за c_1, c_2 да би било нула по произвољном правцу $y = kx, 0 \le k < +\infty$, у првом квадранту.

Теорема 4.8.1. *За каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда (4.8.1), са константним коефицијентом* $a(z)$*, по произвољном правцу* $y = kx, 0 \le k < +\infty$*, реални и имагинарни део решења* $w(z)$

$$\begin{aligned} U(x) &= c_1^{\,1}\cos_{\Phi(x)} x + c_2^{\,1}\sin_{\Phi(x)} x \\ V(x) &= c_1^{\,2}\cos_{\Phi(x)} x + c_2^{\,2}\sin_{\Phi(x)} x \end{aligned} \tag{4.8.10}$$

имају заједничке нуле ако су коефицијенти $c_i^k, i = 1,2, k = 1,2$ *пропорционални.*

Доказ: Претпоставимо да је аналитички коефицијент $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$, комплексне једначине осцилација другог реда (4.8.1), комплексна константа, то јест $a(z)=c_1+ic_2, c_1,c_2\in\mathbb{R}$. Тада, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ имамо $c_1=\alpha(x,kx)=A=const$ и $c_2=\beta(x,kx)=B=const$. Да би важиле Штурмове теореме, за ДЈ другог реда (4.8.9) и (4.8.8) и важиле једначине (4.8.7), поред услова 1, 2, 3 мора да важи $A-kB=c_1-kc_2>0$. Одавде, на основу теореме 4.2.1, за $c_1>0, c_2<0$ канонична комплексна ДЈ другог реда (4.8.1), са комплексним константним коефицијентом, има осцилаторна решења у првом квадранту. По произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, из (4.8.5) имамо да је $U(x)=U(x,k)=$ $=c_1^{\,1}\cos_{\Phi(x)}x+c_2^{\,1}\sin_{\Phi(x)}x$, где је $\Phi(x)=\Phi(x,k)=\dfrac{(1+k^2)(A^2+B^2)}{A-kB}, A-kB>0$ база. Како су по овом правцу ДЈ (4.8.5) и (4.8.7) математички идентичне то значи да аналогно за $V(x)=V(x,k)$, за други избор интеграционих константи добијамо $V(x)=V(x,k)=c_1^{\,2}\cos_{\Phi(x)}x+c_2^{\,2}\sin_{\Phi(x)}x$. Нуле $U(x)=U(x,k)$ су у нулама решења једначине $c_1^{\,1}\cos_{\Phi(x)}x+c_2^{\,1}\sin_{\Phi(x)}x=0$, или $\tan_{\Phi(x)}x=-\dfrac{c_1^{\,1}}{c_2^{\,1}}$. Нуле само за $V(x)=V(x,k)$ су дате другом трансцендентном једначином истог типа $\tan_{\Phi(x)}x=-\dfrac{c_1^{\,2}}{c_2^{\,2}}$. Да би се нуле поклапале, треба да важи услов пропорционалности $\dfrac{c_1^{\,1}}{c_2^{\,1}}=\dfrac{c_1^{\,2}}{c_2^{\,2}}$. ■

На овај начин ми нисмо одредили опште решење ПДЈ (4.8.4) и (4.8.6) већ смо нашли само делове комплексног решења $w(z)$ по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$. Опште решење каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.8.1) је дато у Глави 2, осцилаторним функцијама у комплексном облику, методом редова-итерација. Видимо да локације нула зависе од коефицијента $a(z)=c_1+ic_2\equiv\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ и правца $y=kx, 0\le k<+\infty$. Како $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=A(x)$ и $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=B(x)$ зависе од x и од k, то решења (4.8.10) зависе и од функција

$$\begin{aligned}\cos_{\Phi(x)}x&=1-\int_0^x\!\!\int_0^x\Phi(x,kx)\,dx^2+\int_0^x\!\!\int_0^x\Phi(x,kx)\,dx^2\int_0^x\!\!\int_0^x\Phi(x,kx)\,dx^2-\ldots\\ \sin_{\Phi(x)}x&=x-\int_0^x\!\!\int_0^x x\Phi(x,kx)\,dx^2+\int_0^x\!\!\int_0^x\Phi(x,kx)\,dx^2\int_0^x\!\!\int_0^x x\Phi(x,kx)\,dx^2-\ldots\end{aligned}.$$

4.9 Основне каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда и локације нула решења

На основу доказаног у претходној секцији, урадићемо сада нову анализу нула каноничних комплексних ДЈ другог реда (4.8.1), за разне вредности аналитичког коефицијента $a(z)$. Осим тога упознаћемо се и са појмовима *правац прекида, сингиларни правац и нагомилавање нула.*

Случај мономних коефицијената

Пример 4.3. Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+zw(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=z=x+iy$, коју смо до сада третирали непотпуним методама. Како је $\alpha(x,y)=x,\beta(x,y)=y$ то систем (4.8.2) постаје

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xu(x,y)-yv(x,y)=0,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+yu(x,y)+xv(x,y)=0.$$

Одавде, на основу познатог поступка елиминације једне функције, добијамо ПДЈ $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(x^2+y^2\right)u(x,y)=0$, за $u(x,y)$, док је одговарајућа осцилаторна једначина другог реда (4.8.5), по правцу $y=kx,0\le k<+\infty$ дата са

$$U''(x)+\frac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1-k^2\right)}xU(x)=0$$

и где су $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=A(x),\ \beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=B(x)$. Како функција $\Phi(x)=\Phi(x,k)=\frac{\left(1+k^2\right)^2}{\left(1-k^2\right)}x$ нема сингуларитете то по Штурму важи основна анализа.

1. $\Phi(x)$ је позитивно, за позитивно x и за $|k|<1$. Другим речима, позитивно је за $0<k<1$, односно за $0\le\varphi<\frac{\pi}{4}$.

2. За $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ је $k<0$, па је $\Phi(x)$ негативно, што значи да решење ДЈ за $U(x)$ је монотоно и има највише једну нулу.

3. Осцилаторна решења постоје само за $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{4}$.

4. Нуле синусног решења су у решењима једначина $x\sqrt{\Phi(x)} = n\pi, n = 0,1,\dots$, односно, то су тачке $x_n = \sqrt[3]{\dfrac{1-k^2}{\left(1+k^2\right)^2} n^2\pi^2}$, $n = 0,1,\dots$. Видимо да нула има и изван сектора, то јест ако је $|k| > 1$ тада је x негативно, док за $k = 1$ имамо нулу $O(0,0)$.

5. У каноничној ДЈ другог реда за $U(x)$, коефицијент $\Phi(x)$ има прекид за $k = 1$. Тада услов $A(x) - kB(x) > 0$ није испуњен за неколико вредности x и k, па постоји веза

$$A(x) - kB(x) = 0. \tag{4.9.1}$$

Како је израз $A(x) - kB(x)$ део имениоца у једначинама осцилација другог реда (4.8.5) и (4.8.7), то ћемо (4.9.1) назвати *једначином прекида коефицијента* $\Phi(x)$.

6. Из друге једначине система (4.8.9) налазимо и косинусно решење $\cos_{\Phi(x)} x$ функције $U(x)$. На крају, без квадратура, из (4.8.8) налазимо нуле функције $V(x) = V(x, kx)$.

7. Нуле $V(x)$ су нуле функције $U(x)$, због (4.8.8), и још и нуле једначине $B(x) + kA(x) = 0$, уколико постоје. То нису заједничке нуле. Како је у овом примеру $B(x) = y = kx, A(x) = x$ то је $B(x) + kA(x) = 2kx = 0$ ако је $x = 0$ или $k = 0$. Заједничке нуле $u(x,y)$ и $v(x,y)$, решења $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, су само синусне нуле, и то за $k = 0$. Тада по Ox-оси имамо нуле $x_n = \sqrt[3]{n^2\pi^2}, n = 0,1,\dots$. Како је $0 \le k < 1$ оне се проређују по закону $x_n = q\sqrt[3]{n^2\pi^2}, n = 0,1,\dots$, где је $q = \sqrt[3]{\dfrac{1-k^2}{\left(1+k^2\right)^2}}$ количник који се брзо смањује. За $k = 1$ имамо само једну нулу на почетку $O(0,0)$. Исто би било и ако бисмо третирали одговарајућу ПДЈ по $v(x,y)$.

Пример 4.4. Нека је сада у каноничној комплексној диференцијалној једначини другог реда (4.8.1) $a(z) = z^2$. Одавде је $\alpha(x,y) = x^2 - y^2$ и $\beta(x,y) = 2xy$. ПДЈ за реални део $u(x,y)$ решења $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ је

$\left(x^2-y^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(x^2+y^2\right)^2 u(x,y)=0.$ По произвољном правцу $y=kx,$ $0\le k<+\infty$, имамо каноничну ДЈ другог реда $U''(x)+\dfrac{\left(1+k^2\right)^3}{1-3k^2}x^2U(x)=0$, за $U(x)=U(x,kx)$. Функција фреквенције је $F(x)=x\sqrt{\Phi(x)}=x^2\sqrt{\dfrac{\left(1+k^2\right)^3}{1-3k^2}}$, а нуле синусног решења су лоциране у тачкама $x_n=\pm\sqrt[4]{\dfrac{\left(1-3k^2\right)n^2\pi^2}{\left(1+k^2\right)^3}}$, $n=0,1,2,\ldots$ За $0\le k<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ је дефинисана функција $\Phi(x)$, док за $k=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ имамо прекид. Сингуларни правац је $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$. Дакле, само у сектору $0\le\varphi<\dfrac{\pi}{3}$ има нула. Приметимо још и да је ред нуле $n^{1/2}$, за разлику од претходног примера где је $n^{2/3}$, што значи да су нуле нешто проређеније по сваком правцу када $n\to+\infty$. Заједничке нуле функција $U(x)$ и $V(x)$ зависе од $V(x)$, али видели смо да оне нису исте.

Пример 4.5. За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}+z^3w(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=z^3$, ПДЈ за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ је

$$\left(x^3-3xy^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(3x^2y-y^3\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[x^6+y^6+3x^2y^2\left(x^2+y^2\right)\right]u(x,y)=0.$$

Одавде, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ имамо каноничну ДЈ другог реда $U''(x)+\dfrac{\left(1+k^2\right)\left[1+k^6+3k^2\left(1+k^2\right)\right]}{1-6k^2+k^4}x^3U(x)=0$ за $U(x)=U(x,k)$, док је функција фреквенције $F(x)=x\sqrt{\Phi(x)}=x^{\frac{5}{2}}\sqrt{\dfrac{\left(1+k^2\right)\left[1+k^6+3k^2\left(1+k^2\right)\right]}{1-6k^2+k^4}}$. Нуле синусног решења су у тачкама $x_n=\sqrt[5]{\dfrac{1-6k^2+k^4}{\left(1+k^2\right)\left[1+k^6+3k^2\left(1+k^2\right)\right]}n^2\pi^2}$, $n=0,1,\ldots$ Правци прекида су дати биквадратном једначином $1-6k^2+k^4=0$ чија су решења $k=\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}$. Како је $2\sqrt{2}\approx 2,84$ то у два одвојена сектора има нула од $k=0$ до

$k=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ и од $k=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ до $k=+\infty$. Тачка $O(0,0)$ је више пута повратна нула. Нуле расту по локацијама брзином $F(x)$.

Пример 4.6. Посматрајмо сада каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+z^4w(z)=0$ са коефицијентом $a(z)=z^4$. ПДЈ за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ је

$$\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(4x^3y-4xy^3\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)^2+\left(4x^3y-4xy^3\right)^2\right]u(x,y)=0,$$

док је одговарајућа канонична ДЈ другог реда по правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$

$$U''(x)+\frac{\left(1+k^2\right)\left[\left(1-6k^2+k^4\right)^2+16\left(k-k^3\right)^2\right]}{1-10k^2+5k^4}x^4U(x)=0.$$

Знак коефицијента (функције) $\Phi(x)=\Phi(x,k)$ зависи од полинома $P_4(k)=1-10k^2+5k^4$, чије су нуле $k=\pm\sqrt{5\pm 2\sqrt{5}}$. Како је $2\sqrt{5}\approx 4,46$ то су сва четири корена реална. Графикон осцилаторне реалне функције фреквенције $F(x)=x\sqrt{\Phi(x)}$ не постоји свуда за свако k, већ све зависи од квадратног корена.
Унутар првог квадранта постоје два одвојена сектора са нулама $0\le\varphi<\arctan\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ и $\arctan\sqrt{5+2\sqrt{5}}<\varphi<+\infty$. По правцу $y=\sqrt{5\mp 2\sqrt{5}}x$ једина нула је $x=0$, то јест $O(0,0)$. Локације осцилаторних синусних нула дате су формулама $x_n=\sqrt[6]{\frac{\left(1-10k^2+5k^4\right)n^2\pi^2}{\left(1+k^2\right)\left[\left(1-6k^2+k^4\right)^2+16\left(k-k^3\right)^2\right]}}, n=0,1,\ldots$. Брзина ређања нула је $(n\pi)^{1/3}$, па се непотпуном индукцијом још увек не може предвидети закон раста. По реалној оси, за $k=0$ имамо обичну каноничну ДЈ другог реда $U''(x)+x^4U(x)=0$, чије су осцилаторне нуле $x_n=\sqrt[3]{n\pi}$ $n=0,1,\ldots$.

Пример 4.7. За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+z^5w(z)=0$, са коефицијентом $a(z)=z^4$, имамо по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, каноничну реалну ДЈ другог реда

$$U''(x)+\frac{\left(1+k^2\right)\left[\left(1-10k^2+5k^4\right)^2+\left(5k-10k^3+k^5\right)^2\right]}{1-15k^2+15k^4-k^6}x^5U(x)=0.$$

за $U(x)$. Како је $f(k)=\left(1+k^2\right)\left[\left(1-10k^2+5k^4\right)^2+\left(5k-10k^3+k^5\right)^2\right]$ позитивно, то предзнак функције фреквенције зависи само од полинома $P_6(k)=1-15k^2+15k^4-k^6$ који је лако решив. Његове нуле су реалне и позитивне. Нуле синусног решења постоје само у два одвојена сектора у првом квадранту: $\arctan\sqrt{7-4\sqrt{3}}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ и $\arctan\sqrt{7+4\sqrt{3}}<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Из ових примера закључујемо да са повећањем степена z^n ранг синусних нула опада $\sqrt[3]{(n\pi)^2}, \sqrt[3]{n\pi}, \sqrt[5]{(n\pi)^2},....$

Случај биномних коефицијената

У претходним секцијама смо видели да је скоро немогуће решити каноничне комплексне диференцијалне једначине другог реда (4.8.1), за сваки мало сложенији облик аналитичког коефицијента $a(z)$, на пример $a(z)=az+b,$ $a(z)=az^2+bz+c,\dots,a,b,c,\dots\in\mathbb{R}$, а да не говоримо о сложенијем, ако су $a,b,c,...$ комплексни коефицијенти. Зато се метод одређивања реалних функција $U(x)=U(x,kx)$ и $V(x)=V(x,kx)$, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, овде показао веома важним.

Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда са аналитичким коефицијентом $a(z)=az+b$, где су $a,b\in\mathbb{C}$ комплексни бројеви

$$\frac{d^2w}{dz^2}+(az+b)w(z)=0\ . \tag{4.9.2}$$

Интересантно је видети на који начин бројеви $a=a_1+ib_1, b=a_2+ib_2, a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$ утичу на нуле решења. Како је по правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$,

$\alpha(x,y)=\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=(a_1-kb_1)x+a_2$ и $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=$ $=(b_1+a_1k)x+b_2$ то ПДЈ другог реда за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ гласи

$$\left((a_1-kb_1)x+a_2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left((b_1+ka_1)x+b_2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$
$$+\left[\left((a_1-kb_1)x+a_2\right)^2+\left((b_1+ka_1)x+b_2\right)^2\right]u(x,y)=0.$$

Одговарајућа канонична ДЈ другог реда за $U(x)=U(kx)$ је

$$U''(x)+\Phi(x,k)U(x)=0,\ \Phi(x,k)=\frac{\left(1+k^2\right)\left[\left((a_1-kb_1)x+a_2\right)^2+\left((b_1+ka_1)x+b_2\right)^2\right]}{\left(a_1-2kb_1-k^2a_1\right)x+a_2-kb_2},$$

где у $x=x(k)=\dfrac{kb_2-a_2}{a_1-2kb_1-k^2a_1}$ постоји прекид коефицијента $\Phi(x,k)$.

У овом случају не важе Штурмове теореме па досадашњи метод одређивања броја нула и локација нула не можемо применити.

Приметили смо да и код најпростијег биномног коефицијента на овај начин нисмо могли да одредимо нуле нити да их лоцирамо. Илуструјмо ово конкретно на следећим примерима.

Пример 4.8. Нека је дата канонична комплексна ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}+(z+1)w(z)=0$ са аналитичким коефицијентом $a(z)=z+1$. По произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ је $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=x+1$, $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=$ $=kx$, а канонична реална ДЈ другог реда за $U(x)=U(kx)$ гласи

$$U''(x)+\Phi(x,k)U(x)=0,\Phi(x,k)=\frac{\left(1+k^2\right)\left[(x+1)^2+k^2x^2\right]}{x\left(1-k^2\right)+1}.$$

Видимо да постоји сингуларитет у тачки $x=\dfrac{1}{k^2-1}$ па не важи Штурмова анализа.

Пример 4.9. За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(z-i)w(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=z-i$, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, имамо $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=x$ и $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=kx-1$. Ни овде не можемо да применимо Штурмове теореме јер у каноничној ДЈ другог реда $U''(x)+\frac{(1+k^2)\left[x^2+(kx-1)^2\right]}{x(1-k^2)+k}U(x)=0$, за $U(x)=U(kx)$, функција $\Phi(x,k)$ има сингуларну тачку $x(k)=\frac{k}{k^2-1}$.

Пример 4.10. Канонична комплексна ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(z^2+z)w(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=z^2+z$, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, због $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=x^2(1-k^2)+x$, $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=$ $=kx(2x+1)$ се трансформише на каноничну ДЈ другог реда, за $U(x)$

$$U''(x)+\Phi(x,k)U(x)=0, \Phi(x,k)=\frac{(1+k^2)\left[\left(x(1-k^2)+1\right)^2+k^2(2x+1)^2\right]}{\left[x(1-3k^2)+(1-k^2)\right]}x.$$

Како коефицијент $\Phi(x,k)$ има сингуларну тачку $x=\frac{k^2-1}{1-3k^2}$ то не можемо применити Штурмове теореме.

Пример 4.11. За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\frac{d^2w}{dz^2}+(z^3+z)w(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=z^3+z$, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, имамо $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=x(x^2-3k^2x^2+1)$ и $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=$ $=B(x,k)=kx(3x^2-k^2x^2+1)=kx(3x^2-k^2x^2+1)$. Канонична ДЈ другог реда, за $U(x)$

$$U''(x)+\frac{(1+k^2)\left[\left(x^2(1-3k^2)+1\right)^2+k^2\left(x^2(3-k^2)+1\right)^2\right]}{\left[x^2(1-6k^2+k^4)+(1-k^2)\right]}xU(x)=0$$

има сингуларну тачку $x(k)=\pm\sqrt{\dfrac{k^2-1}{k^4-6k^2+1}}$, па не можемо применити Штурмове теореме.

Случај трансцендентних коефицијената

Пример 4.12. Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}+e^{iz}w(z)=0$, са аналитичким коефицијентом $a(z)=e^{iz}$. Овде је $\alpha(x,y)=e^{-y}\cos x$ и $\beta(x,y)=e^{-y}\sin x$. Из ПДЈ $\cos x\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\sin x\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+e^{-y}u(x,y)=0$, за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, имамо по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ каноничну ДЈ другог реда $U''(x)+\dfrac{(1+k^2)e^{-kx}}{\cos x-k\sin x}U(x)=0$ за $U(x)$. Примећујемо да њена функција $\Phi(x,k)$ има сингуларитет у $x=l\pi+\arctan\dfrac{1}{k}, l=0,1,...$ па и овде не важе Штурмове теореме.

Пример 4.13. За каноничну комплексну ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}+e^{z}w(z)=0$ из ПДЈ за $u(x,y)$, то јест из $\cos y\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\sin y\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+e^{x}u(x,y)=0$, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, добијамо каноничну ДЈ другог реда за $U(x)$, $U''(x)+\dfrac{(1+k^2)e^{x}}{\cos kx-k\sin kx}U(x)=0$, у којој функција $\Phi(x,k)$ има сингуларитете. И овде на важи Штурмова анализа.

Пример 4.14. Посматрајмо каноничну комплексну ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}+ze^{z}w(z)=0$. ПДЈ за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ је

$$(x\cos y-y\sin y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-(y\cos y+x\sin y)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+e^{x}\left(x^2+y^2\right)u(x,y)=0.$$

По произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ за $\alpha(x,y)=A(x,k)=A(x)=$ $=e^{x}(x\cos kx-kx\sin kx)$ и $\beta(x,y)=B(x,k)=B(x)=e^{x}(kx\cos kx+x\sin kx)$, канонична

ДЈ другог реда $U''(x)+\dfrac{\left(1+k^2\right)^2 xe^x}{\left(1-k^2\right)\cos kx-2k\sin kx}U(x)=0$ за $U(x)$, има коефицијент са сингуларитетима па не важе Штурмове теореме.

Случај мероморфних коефицијената

Пример 4.15. Покушајмо да одредимо нуле решења каноничне комплексне ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}+\dfrac{1}{z+1}w(z)=0$ у првом квадранту, $0\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. Коефицијент $a(z)=\dfrac{1}{z+1}$ има пол првог реда у $z=-1$ који не припада првом квадранту. ПДЈ за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ је $(x+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+u(x,y)=0.$ По произвољном правцу $y=kx, 0\le k=\tan\varphi<+\infty$ имамо $\alpha(x,y)=A(x,k)=A(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+k^2x^2}$ и $\beta(x,y)=B(x,k)=B(x)=\dfrac{-kx}{(x+1)^2+k^2x^2}$. Како одговарајућа канонична ДЈ другог реда за $U(x)$, $U''(x)+\dfrac{1+k^2}{x\left(1+k^2\right)+1}U(x)=0$, има сингуларитет у $x(k)=-\dfrac{1}{1+k^2}$ то не можемо да применимо Штурмове теореме.

Пример 4.16. У каноничној комплексној ДЈ другог реда $\dfrac{d^2w}{dz^2}+\dfrac{z^2}{z+1}w(z)=0$, аналитички коефицијент $a(z)=\dfrac{z^2}{z+1}$ има прост пол $z=-1$ који не припада првом квадранту. По произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ имамо да је $\alpha(x,y)=A(x,k)=A(x)==\dfrac{x^2\left(\left(1-k^2\right)(x+1)+2k^2x\right)}{(x+1)^2+k^2x^2}$ и $\beta(x,y)=B(x,k)=B(x)=$ $=\dfrac{x^2\left(2k(x+1)-kx\left(1-k^2\right)\right)}{(x+1)^2+k^2x^2}$. Одговарајућа канонична ДЈ другог реда за реални део $U(x)$ има сингуларитете па не важи Штурмова анализа.

На основу наведених примера закључујемо да само за каноничне комплексне ДЈ другог реда са константним коефицијентом $a(z)=\alpha+i\beta$ и коефицијентом у облику степене функције $a(z)=z^n$ можемо да одредимо осцилаторна решења не повећавајући ред одговарајуће ПДЈ.

4.10 Продијева теорема за каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда

Познато је да реална канонична ДЈ другог реда

$$y'' + a(x)y = 0 \tag{4.10.1}$$

има осцилаторна партикуларна решења y_1, y_2 ако је

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ a(x)\ \text{је позитивна на десној полуоси,} \\ 2.\ a(x)\ \text{је непрекидна у интервалу интеграције,} \\ 3.\ \text{несвојсвен интеграл } \int_0^{+\infty} a(x)\,dx \text{ дивергира.} \end{array}\right\} \tag{4.10.2}$$

Тада решења једначине (4.10.1) можемо да апроксимирамо и важе формуле

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \cos_{a(x)} x \approx \cos\left(x\sqrt{a(x)}\right) \\ y_2(x) &= \sin_{a(x)} x \approx \frac{\sin\left(x\sqrt{a(x)}\right)}{\sqrt{a(x)}} \end{aligned} \ . \tag{4.10.3}$$

Одавде се непосредно добија Продијева[1] теорема, за реални случај (*Ако је* $a(x)$ *позитивна функција и* $a(x) \to +\infty$ *тада једначина* $y'' + a(x)y = 0$ *има решење* y_1 *које осцилира али остаје ограничено када* $x \to +\infty$, *и решење* $y_2 \neq 0$ *које тежи 0 када* $x \to +\infty$. *Функција* $a(x)$ *не мора бити неопадајућа, већ само позитивна, непрекидна и чак коначно много пута немонотона или бесконачно много пута немонотона функција.*). На основу приближних формула (4.10.3) очигледно је да важи Продијева теорема.

Поставља се питање шта од горе наведеног важи за каноничну комплексну ДЈ другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2} + a(z)w(z) = 0 \tag{4.10.4}$$

[1] *Giovanni Prodi (1925-2010), италијански математичар*

где је $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ аналитичка функција**.**

Према резултату из секције 4.9, за реални део $u(x,y)$, решења аналитичке функције $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.10.4) важи ПДЈ другог реда

$$\alpha(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\beta(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)u(x,y)=0.$$

Осим тога, тамо смо показали да је по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=A(x)$ и $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=B(x)$, па на пример, за реално $U(x)=U(x,k)$, имамо реалну каноничну ДЈ другог реда

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\Phi(x)U(x)=0 \tag{4.10.5}$$

у којој функција $\Phi(x)=\Phi(x,k)=\dfrac{(1+k^2)\left(A^2(x)+B^2(x)\right)}{A(x)-kB(x)}$ нема сингуларитете у области G и где важе услови (4.10.2).

Приметимо још да канонична комплексна ДЈ другог реда (4.10.4) са аналитичким коефицијентом $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$, садржи не само осцилаторна решења $\sin z$ и $\cos z$, већ и експоненцијална решења e^z и e^{iz}, па у комплексном подручју нема тако велике разлике у одређивању и локацији нула решења. Илуструјмо ово на примерима.

Пример 4.16. Нека је у каноничној комплексној ДЈ другог реда (4.10.4) коефицијент $a(z)=z$. Тада је по произвољном правцу, $y=kx, 0\le k<+\infty$, $\alpha(x,y)=A(x)=x$ и $\beta(x,y)=B(x)=kx$, док је канонична ДЈ другог реда за на пример $U(x)$ облика $U''(x)+\dfrac{(1+k^2)^2x}{1-k^2}U(x)=0$. Услов $A(x)-kB(x)>0$ је испуњен за $x>0$ и $0\le k<1$, или $x<0$. Осим тога, интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{A^2(x)+B^2(x)}{A(x)-kB(x)}dx$ дивергира. Испуњени су сви услови, па закључујемо да ДЈ има осцилаторна решења само за $0\le k<1$, док за $k>1$ нема осцилаторног решења.

Пример 4.17. За коефицијент $a(z)=-iz$, каноничне комплексне ДЈ другог реда (4.10.4) по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, је $\alpha(x,y)=A(x)=kx$ и $\beta(x,y)=B(x)=-x$. Канонична ДЈ другог реда, за на пример $U(x)$ је $U''(x)+\dfrac{k^2+1}{2k}U(x)=0$. Услов $A(x)-kB(x)>0$ важи за $x>0$ и $k>0$. Несвојствен интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{A^2(x)+B^2(x)}{A(x)-kB(x)}dx$ дивергира, па су решења осцилаторна за свако $k>0$.

Као примери могу послужити и сви примери из секције 4.9 у којима функција $U(x)$ нема сингуларитете. Следи

Теорема 4.10.1 (Продијева теорема). *Канонична комплексна диференцијална једначина другог реда (4.10.4), у којој је* $a(z)$ *аналитичка функција а реални и имагинарни део решења* $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *су осцилаторне функције, има по произвољном правцу* $y=kx, 0\le k<+\infty$ *једно осцилаторно решење које је ограничено када* $x\to+\infty$ *и друго решење које тежи нули када* $x\to+\infty$.

Доказ:. По произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$, за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, из каноничне ДЈ другог реда (4.10.5) за $U(x)$, имамо решења $U_1(x)$ и $U_2(x)$ која се могу изразити приближним формулама

$$\begin{aligned} U_1(x) &\approx \cos\left(x\sqrt{\Phi(x)}\right) \\ U_2(x) &\approx \frac{\sin\left(x\sqrt{\Phi(x)}\right)}{\sqrt{\Phi(x)}}, \end{aligned} \tag{4.10.6}$$

и где је видели смо коефицијент $\Phi(x)=\Phi(x,k)=\dfrac{\left(1+k^2\right)\left(A^2(x)+B^2(x)\right)}{A(x)-kB(x)}$.

Осцилаторна решења (4.10.6) поред услова (4.10.2) постоје ако је $A(x)-kB(x)>0$. Одавде следи да је $U_1(x)$ ограничено као и сваки косинус. Међутим, ако у $U_2(x)$ заменимо $\Phi(x)=\Phi(x,k)$ имамо

$$U_2(x)=\frac{\sqrt{A(x)-kB(x)}}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{A^2(x)+B^2(x)}}\sin\left(\frac{x\sqrt{1+k^2}\sqrt{A^2(x)+B^2(x)}}{\sqrt{A(x)-kB(x)}}\right). \tag{4.10.7}$$

Видимо да његове амплитуде зависе од $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=A(x)$ и $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=B(x)$. Јасно је да је решење (4.10.7) ограничено. Остало је да се испита да ли друго решење тежи нули. Како се све посматра по произвољном правцу, то се проблем своди на питање односа ранга $A(x)$ и $B(x)$. Из поларне форме комплексних функција $a(z)=\rho e^{i\varphi}=\alpha+i\beta$ видимо да $\alpha(x,y)=A(x)$ и $\beta(x,y)=B(x)$ имају исти ранг R. Тада из (4.10.6) следи да је

$$U_2(x)\approx\frac{1}{\sqrt{A(x)}}\frac{\sqrt{1-k\dfrac{B(x)}{A(x)}}}{\sqrt{1+\dfrac{B^2(x)}{A^2(x)}}}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\sin\left(\frac{x\sqrt{1+k^2}\sqrt{A^2(x)+B^2(x)}}{\sqrt{A(x)-kB(x)}}\right)$$

или $U_2(x)\approx\dfrac{1}{\sqrt{A(x)}}O(x)\to 0, A(x)\to+\infty$, то јест важи Продијева теорема и за аналитичка осцилаторна решења комплексне ДЈ (4.10.1). ■

Пример 4.17. За $a(z)=\ln z, z\neq 0$, односно у поларној форми $a(z)=\ln\rho+i(\varphi+2k\pi), k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, имамо да је по произвољном правцу $y=kx, 0\leq k<+\infty$, ранг $\alpha(x,y)=\alpha(x,kx)=A(x,k)=A(x)=\ln\rho=\ln\left(x\sqrt{1+k^2}\right)$ већи од ранга $\beta(x,y)=\beta(x,kx)=B(x,k)=B(x)\approx\arctan k+const$. Одавде, $A(x)\to+\infty$ а синусно решење тежи 0.

ЗАКЉУЧАК

Питање локација нула и осцилаторности решења, асимптотике, ранга раста,... чак и најједноставнијих комплексних диференцијалних једначина је тешко и никако није елементарно. Осим тога, решено је за само неке класе диференцијалних једначина. Ми се у овом нашем кратком излагању нисмо могли бавити свим овим питањима, већ је наш циљ био одређивање броја нула и њихов распоред код решења комплексних линеарних хомогених диференцијалних једначина првог реда и каноничних комплексних диференцијалних једначина другог реда.

На основу Коши-Поенкаре-Пикаровог принципа познато је да свака комплексна диференцијална једначина, са аналитичким коефицијентима, има аналитичко решење. Важне одлике аналитичких функција $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ су још да важе Коши-Риманови услови и да функција $u(x,y)$, односно $v(x,y)$ задовољава Лапласову парцијалну диференцијалну једначину другог реда.

У овом раду смо констатовали следеће

1. Комплексна хомогена линеарна диференцијална једначина првог реда

$$\frac{dw}{dz}+a(z)w(z)=0 \tag{1}$$

за аналитичку функцију $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$, на основу дефиниције једнакости комплексних бројева, се трансформише на реалан систем парцијалних диференцијалних једначина првог реда

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(x,y)u(x,y)-\beta(x,y)v(x,y)=0\\&\frac{\partial v}{\partial x}+\beta(x,y)u(x,y)+\alpha(x,y)v(x,y)=0\end{aligned}. \tag{2}$$

Елиминацијом једне непознате функције $u(x,y)$ или $v(x,y)$ и њеног извода, систем (2) можемо да сведемо на систем од једне парцијалне диференцијалне једначине другог реда и једне једначине која се решава без квадратура.

Слично, из каномичне комплексне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2w}{dz^2}+a(z)w(z)=0 \tag{4}$$

за аналитички коефицијент $a(z)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y)$ добијамо реалан систем парцијалних диференцијалних једначина другог реда

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha(x,y)u(x,y)-\beta(x,y)v(x,y)=0\\&\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\beta(x,y)u(x,y)+\alpha(x,y)v(x,y)=0\end{aligned}. \tag{5}$$

Приметили смо да сада елиминацијом једне непознате функције, $u(x,y)$ или $v(x,y)$ и њеног извода добијамо не систем од једне парцијалне диференцијалне једначине четвртог реда и друге алгебарске једначине, која се решава без квадратура, већ опет систем од једне парцијалне диференцијалне једначине другог реда и друге алгебарске једначине. На пример, за реални део $u(x,y)$ решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ добили смо систем

$$\begin{gathered}\alpha(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}-\beta(x,y)\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}+\left(\alpha^2(x,y)+\beta^2(x,y)\right)u(x,y)=0\\\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha(x,y)u(x,y)-\beta(x,y)v(x,y)=0\end{gathered}. \tag{6}$$

На овај начин можемо да решимо и друге комплексне хомогене линеарне диференцијалне једначине вишег реда

$$\frac{d^3w}{dz^3}+a(z)w(z)=0,\frac{d^4w}{dz^4}+a(z)w(z)=0,...,\frac{d^nw}{dz^n}+a(z)w(z)=0..$$

Значи, елиминацијом једне непознате функције $u(x,y)$ или $v(x,y)$ добијамо не систем од једне парцијалне диференцијалне једначине реда $2n, n=1,2,...$, и друге алгебарске једначине, већ опет систем од једне парцијалне диференцијалне једначине реда n и друге једначине која се решава без квадратура. Ово је велика предност аналитичности.

2. Корисним се показала и идеја о локацији изолованих нула по произвољном правцу $y=kx$, $0\le k<+\infty$, у првом квадранту, где смо једноставном применом основних теорема о смени независних промењљивих проблем пренели на обичне диференцијалне једначине.

Тако, за комплексну хомогену линеарну диференцијалну једначину првог реда (1), са аналитичким коефицијентом, по произвољном правцу $y=kx, 0\le k<+\infty$ могли смо да израчунамо и одредимо тачан број нула реалног и имагинарног дела решења $w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

За каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда (4) по произвољном правцу $y=kx, 0\leq k<+\infty$ могли смо да одредимо једно решење, на пример $U(x)=U(x,kx)=u(x,kx)=u(x,y)$ из каноничне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}+\frac{(1+k^2)(A^2(x)+B^2(x))}{A(x)-kB(x)}U(x)=0 \tag{7}$$

под условима

1. $A(x)-kB(x)>0$
2. интеграл од $\dfrac{(1+k^2)\left[A^2(x)+B^2(x)\right]}{A(x)-kB(x)}$ дивергира на $[0,+\infty)$,
3. функција $\Phi(x,k)=\dfrac{(1+k^2)\left[A^2(x)+B^2(x)\right]}{A(x)-kB(x)}$ нема сингуларитета у области G.

На основу већ познатих резултата и теорема, оцена и њихових осцилаторних решења из радова [12],[24],[29]-[31], имали смо потребне податке о решавању и решењу датих диференцијалних једначина. Друго решење $V(x)$ смо налазили без квадратура.

3. За каноничну комплексну диференцијалну једначину другог реда (4), односно из каноничне диференцијалне једначине другог реда (7), по произвољном правцу $y=kx, 0\leq k<+\infty$ важи и Продијева теорема, односно диференцијална једначина (4) има једно решење w_1 које је ограничено када $x\to+\infty$ а друго решење $w_2\neq 0$ тежи нули када $x\to+\infty$.

4. Код комплексних диференцијалних једначина (1) и (4), код решавања помоћу итерација наилазили смо на интеграле облика $\int\limits_L a(z)\,dz, \int\limits_L\int\limits_L a(z)\,dz^2, \int\limits_L\int\limits_L za(z)\,dz^2$, за незатворену путању L. Зато смо показали да важи теорема о средњој вредности линијског комплексног интеграла јер теорема о средњој вредности интеграла у затвореној контури $L:|z|<R$ није могла да помогне да израчунамо или оценимо чланове низа итерација (на основу аналитичности и Кошијеве теореме сваки интеграл у узастопним интегралима био је једнак нули).

Сматрамо да је идеја даље разраде наше методе решавања специјалних случајева комплексних хомогених линеарних диференцијалних једначина првог реда и каноничних комплексних диференцијалних једначина другог реда, веома корисна и да се може корисно применити и на нехомогену линеарну диференцијалну једначину другог реда, затим на све хомогене линеарне диференцијалне једначине вишег реда које имају осцилаторна решења, на нехомегене линеарне и нелинеарне једначине: Бернулијеву[1], Рикатијеву[2], ... По нашим сазнањима за сада је отворен и проблем решавања комплексних диференцијалних једначина код којих су коефицијенти у нормалном облику прекидни. Све ово би биле идеје којима ћемо се позабавити у будућности.

[1]*Jacob Bernoulli (1654-1705), швајцарски математичар*
[2]*Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), италијански математичар*

Литература

[1] L. V. Ahlfors, Complex analysis, third edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1979

[2] W. O. Amrein, A. M. Hinz, D. B. Pearson, Sturm-Liouville Theory. Past and Present, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2000.

[3] S. Bank, On determining the location of complex zeros of solutions of certain linear differential equations, Ann. Mat. Pura Appl. 151 (1988) 67-96

[4] S. Bank and I. Laine, On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 351-363.

[5] S. Bank and I. Laine, On the zeros of meromorrphic solutions of second order linear differential equations, Comment. Math. Helv. 58 (1983), 656-677.

[6] S. Bank, I. Laine and J. K. Langley, Oscillation results for solutions of linear differential equations in the complex domain, Result. Math. 16 (1989), 3-15

[7] K. F. Barth, D. A. Brannan, W. K. Hayman, Research problems in complex analysis, Bull. London Math. Soc. , 16, (1984), 490-517

[8] M. Bertolino, Diferencijalne jednačine, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010

[9] Y. M. Chiang, On the complex oscillation of $y''+\left(e^z-K\right)y=0$ and result of Bank, Laine and Langley, In Computational Methods and Function Theory, Ser. Aprox. Decompos. 5, World Scientific, River Edge, NJ, (1995), 125-134

[10] Y. M. Chiang and Sh. A. Gao, On a problem in complex oscillation theory of periodic second order linear differential equations and some related perturbation results, Ann. Acad. Scien. Fenn. Math. Vol. 27, (2002), 273-290.

[11] V. Dajović, Teorija funkcija kompleksne promenljive sa primenama, Beograd, 1977

[12] D. Dimitrovski, M. Rajovic, R. Stojiljkovic, On types, form and supremum of the solutions of the linear differential equation of the second order with entire coefficients, App. Analy. And Disscrete Mathematics, 1 (2007), 360-370

[13] D. Dimitrovski and M. Mijatović, A series-Iteration Method in the Theory of Ordinary Differential Equations, Hadronic Press, Inc, 1998

[14] D. Dimitrovski, J. Vujaković, M. Rajović, On location of zeros solution of second order complex differential equation, Zbornik radova konferencije MIT 2009, 112-116

[15] M. A. Evgrafov, Analytic function, English Translation, Dover Publications, Inc., New York, 1978

[16] U. Elias, Oscillation Theory of Two-Term Differential Equations, Kluwer, Dordrecht, 1997

[17] G. G. Gundersen, On the real zeros of solutions of $f''+A(z)f=0$ where $A(z)$ is entire, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 11 (1986) 275-294

[18] W. K. Hayman, Meromorphic functions, Oxford at the Clarendon Press, 1964

[19] E. Hille, Lectures on Ordinary Differential Equations, Addition-Wesley, Reading, Mass., 1969

[20] E. Hille, Ordinary differential Equations in the Complex Domains, Wiley-Interscience, 1976

[21] J. Knežević Miljanović, S. Janković, J. Manojlović, V. Jovanović, Parcijalne diferencijalne jednačine. Teorija i zadaci, Univerzitetska štampa, Beograd, 2000

[22] I. Laine, Nevanlinna theory and complex differential equations, de Gruyter Studies in Math. 15, Walter de Gruyter, Berlin/New York 1993

[23] J. K. Langley, Linear differential equations with entire coefficients of small growth, Arch. Math. (Basel) 78 (2002), 291-296

[24] M. Lekić, Šturmove teoreme kroz iteracije, Doktorska disertacija, Kosovska Mitrovica, 2007

[25] C. Lei, Remarks on oscillation of second-order linear difference equation, Appl. Math. Comput. (2009), doi:10.1016/j.amc.2009.09.028.

[26] K. Liu and L. Z. Yang, Solutions of a pair of differential equations and their applications, Comm. In Math. Anal. Volume 3, Number 1, (2007), 45-52.

[27] I. Markushevich, Theory of Functions of a Complex Variable, Volume 2, translated by R. Silverman, Prenctice-Hall, Englewood Cliffs, 1965

[28] M. Mateljević, Kompleksne funkcije 1 & 2, Beograd, 2006

[29] M. Rajović and R. Stojiljković, The first, the second and the third Liouville formula and periodical solutions of linear differential equation of the second order, Kragujevac J. Math. 30 (2007) 131-139

[30] M. Rajović, R. Stojiljković and D. Dimitrovski, Transformation of linear non-homogeneous differential equations of the second order to homogeneous, Comp. and Math. With Appl. 57 (2009), 604-611.

[31] M. Rajović, D. Dimitrovski, N. Radenković, J. Vujaković, On Diferential Equation $y'' = \Psi(x)y$ with Irregular Oscillatory Coefficient $\Psi(x)$, Международная научни конференция, ''Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий 2008'', Красноярск, 2008, рад је презентован

[32] M. Rajović, J. Vujaković, Zbirka resenih zadataka iz kompleksne analize, Akademska misao, Beograd 2009

[33] M. Rajović, Amplitudes of linear oscillations determined by linear homogeneous differential equation of second order and Liouville-Besge formulae,12th Serbian Mathematical Congress,Novi Sad 2008, рад је презентован

[34] M. Rajović, R. Stojiljković, D. Dimitrovski D.,Transformation of linear non-homogeneous differential equations of the second order to homogeneous, Computers and Mathematics with Applications,Vol. 57 (2009) 604-611

[35] B. Rašajski, Teorija obicnih diferencijalnih jednacina, Beograd, 1970

[36] J. Rossi, Second order differential equations with transcendental coefficients, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 61-66.

[37] W. Shupei, On the sectorial oscillation theory of $f'' + A(z)f = 0$, Annales Acad. Scient. Fennice, Helsinki 1994

[38] B. Stanković, Teorija funkcije kompleksne promenljive, Beograd, 1972

[39] Y. Sibuya, Global Theory of the a Second order Linear Differential Equation with a Polynomial coefficient, North-Holland, Amsterdam, Oxford, 1975

[40] Y. Suyama, On the Zeros of Solutions of Second Order Linear Differential Equations,Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A 8 (1954), 201-205

[41] N. J. Vilenkin, Metoda sukcesivnih aproksimacija, Zagreb, 1980

[42] J. Vujaković, M. Rajovć, An idea for determination of zeros of complex differential equations, Zbornik radova konferencije MIT 2009, 426-431

[43] J. Vujaković, M. Rajović, D. Dimitrovski, Some new results on linear equation of the second order, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011), 1837-1843.

Биографија

Мр Јелена З. Вујаковић, рођена је 1972. године у Косовској Митровици. Основну школу је завршила у Звечану, а Гимназију природно-математичког смера у Косовској Митровици. Природно-математички факултет у Приштини, Одсек за математику, уписала је школске 1991/92. године, а дипломирала 1995. године. Академски степен, магистар математичких наука стекла је 2007. године, одбраном магистарског рада на тему: *Стабилни омотачи Хардијевих и Бергманових простора*, на Природно-математичком факултету у Нишу.

Објавила је у коауторству збирку задатака и 11 научних и стручних радова. Запослена је на Природно-математичком факултету у Косовској Митровици.

Списак објављених радова

[1] J. Vujaković, M. Rajović, D. Petković, Differential equations of amplitudes and frequencies of equally-amplitudinal oscillations of the second order, Theoretical Mathematics & Applications, Vol. 3, No. 1, 2012, 23-34, ISSN: 1792-9687, International Scientific Press, 2012

[2] J. Vujaković, D. Petković, Iterative aspects in conjugated Vekua equation, Matematičke i informacione tehnologije MIT 2011, Zbornik radova konferencije, 385-390

[3] J. Vujaković, M. Rajović, Zeros solutions of the complex Bernoulli equation, Matematičke i informacione tehnologije MIT 2011, Zbornik radova konferencije, 391-395

[4] J. Vujaković, M. Rajović, Some linearity characteristics for homogeneous Vekua equation with analytical coefficients, VII Triennial International Conference HEAVY MACHINERY-HM 2011, Volume 7 (2011), No 3, 63-66

[5] J. Vujaković, M. Rajović, D. Dimitrovski, Some new results on linear equation of the second order, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011), 1837-1843, doi: 10.1016/j.camwa.2011.02.012

[6] D. Dimitrovski, J. Vujaković, M. Rajović, On location of zeros solution of second order complex differential equation, Matematičke i informacione tehnologije MIT 2009, Zbornik radova konferencije, 112-116

[7] J. Vujaković, M. Rajovć, An idea for determination of zeros of complex differential equations, Matematičke i informacione tehnologije MIT 2009, Zbornik radova konferencije, 426-431

[8] Vujaković J., Application the Hardy-Littlewood theory on term of solid hull for Hardy space, IEE, International Scientific Conference, Gabrovo, Bulgaria, 2008, Vol. 3, 408-409

[9] Vujaković J., A short proof of an inclusion of Buckley, IEE, International Scientific Conference, Gabrovo, Bulgaria, 2008, Vol. 3, 410-411

[10] M. Rajović, D. Dimitrovski, N. Radenković, J. Vujaković, On Diferential Equation $y'' = \Psi(x)y$ with Irregular Oscillatory Coefficient $\Psi(x)$, Международная научни конференция, ’’Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий 2008’’, Красноярск, 2008, рад је презентован

[11] Rajović M., Petković D., Vujaković J., Radenković N., Suport of decision making by business intelligence tools, Международнои конференции "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании, Алматы-Новосибирск, 2008, том 13, Но3 (58), 75-81

[12] M. Rajović, J. Vujaković, Zbirka rešenih zadataka iz kompleksne analize, Akademska misao, Beograd 2009