UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Jelena M. Višnjić

ADITIVNE OSOBINE DRAZINOVOG INVERZA I DRAZINOV INVERZ BLOK MATRICA

Doktorska disertacija

Niš, 2014.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Jelena M. Višnjić

ADDITIVE PROPERTIES OF THE DRAZIN INVERSE AND THE DRAZIN INVERSE OF BLOCK MATRICES

PhD Thesis

Niš, 2014.

Mentor:

dr Dragana S. Cvetković-Ilić,

redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu

Članovi komisije:

1.

2.

Datum odbrane:

Mojim roditeljima,
Zlatici i Milanu Višnjić

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Јелена Вишњић
Ментор, **МН**:	Драгана С. Цветковић-Илић
Наслов рада, **НР**:	АДИТИВНЕ ОСОБИНЕ ДРАЗИНОВОГ ИНВЕРЗА И ДРАЗИНОВ ИНВЕРЗ БЛОК МАТРИЦА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2014
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	iv+94 стр.
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа
УДК	517.98 (043.3)
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Ова дисертација се бави Дразиновим инверзом квадратних комплексних матрица. Изучаване су адитивне особине Дразиновог инверза и представљени су оригинални резултати из ове области. Даље, изучаван је Дразинов инверз за 2x2 блок матрицу и дате су оригиналне формуле за његово израчунавање. Такође је изучаван и Дразинов инверз модификоване матрице.
Датум прихватања теме, **ДП**:	03.03.2014
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**: Председник:	
Члан:	
Члан, ментор:	

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Jelena Višnjić**
Mentor, **MN**:	**Dragana S. Cvetković-Ilić**
Title, **TI**:	ADDITIVE PROPERTIES OF THE DRAZIN INVERSE AND THE DRAZIN INVERSE FOR BLOCK MATRICES
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2014**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**iv+94 p.**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**mathematical analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**functional analysis**
UC	**517.98 (043.3)**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	In this dissertation, the Drazin inverse of a square complex matrix is studied. Additive properties of the Drazin inverse are investigated and some original results are presented. Also, representations of the Drazin inverse for 2x2 block matrix are considered and some original results on the subject are given. In addition, the Drazin inverse of a modified matrix is considered.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	03.03.2014
Defended on, **DE**:	
Defended Board, **DB**: President:	
Member:	
Member, Mentor:	

Sadržaj

Predgovor

Teorija generalisanih inverza ima svoj začetak u prvim godinama XX veka. Naime, 1903. godine švedski matematičar E. I. Fredholm [32] prvi uvodi pojam "pseudo–inverza" integralnog operatora. Koncept generalisanog inverza diferencijalnih operatora prvi pominje nemački matematičar, i jedan od osnivača funkcionalne analize, D. Hilbert [38]. Tokom narednih godina mnogi autori su proučavali generalisane inverze i dali svoj doprinos ovoj grani matematike.

Egzistenciju generalisanog inverza konačnih matrica prvi je uočio američki matematičar E. H. Moore. Njegova prva publikacija na ovu temu je apstrakt sa skupa Američkog matematičkog društva [48], gde Moore ovaj inverz naziva "general reciprocal". Smatra se da je Moore ove rezultate dobio mnogo ranije [40]. Međutim, Moore-ov rad ostaje nezapažen narednih tridesetak godina. A. Bjerhammar [4, 5, 6] je 1951. godine uočio vezu između Moor–ovog inverza i rešenja sistema linearnih jednačina. Engleski matematičar i fizičar R. Penrose [50] je 1955. godine proširio Bjerhammar–ove rezultate i dokazao jedinstvenost Moore–ovog inverza. Nakon Penrose–ovog otkrića, teorija generalisanih inverza matrica je krenula da se razvija i publikovan je veliki broj radova na ovu temu.

Godine 1958. publikovan je proslavljeni rad [30] američkog matematičara M.P. Drazina, gde on uvodi novi generalisani inverz (i to u klasi široj od klase matrica – u asocijativnim prstenima). On ovaj inverz naziva pseudo–inverz i definiše ga na sledeći način:

Definicija [30] *Neka je $\mathcal{R}$ asocijativni prsten i $x \in \mathcal{R}$ proizvoljan element. Ako postoji element $c \in \mathcal{R}$ koji zadovoljava jednačine*

(i) $cx = xc$,

(ii) $x^m = x^{m+1}c$, *za neki prirodan broj* m,

(iii) $c = c^2x$,

tada za element x kažemo da je pseudo–invertibilan u $\mathcal{R}$.

U pomenutom radu, Drazin dalje dokazuje da kada ovako definisan element c postoji onda je on jedinstven, označava ga sa x' i naziva pseudo–inverzom elementa x. Takođe, u ovom radu Drazin otvara problem aditivnosti ovako definisanog generalisanog inverza i dobija sledeći rezultat.

Teorema [30] *Ako su $x_1, ..., x_j$ pseudo–invertibilni elementi iz asocijativnog prstena $\mathcal{R}$, takvi da je $x_s x_t = 0$ $(s, t \in \{1, ..., j\},\ s \neq t)$, tada je i $x_1 + ... + x_j$ pseudo–invertibilan u $\mathcal{R}$ i važi $(x_1 + ... + x_j)' = x_1' + ... + x_j'$.*

U svom radu Drazin pominje da je ovako definisan pseudo–inverz primenljiv i na matrice. Krajem šezdesetih godina XX veka, ovaj pseudo–inverz razmatran je detaljnije i za matrice, kada je i nazvan Drazinov inverz [54, 52, 33, 34, 16, 2].

U ovoj doktorskoj disertaciji su izloženi novi i originalni rezultati vezani za Drazinov inverz kompleksnih matrica, koji su objavljeni u radovima [24], [42], [43] i [57]. Rezultati radova [42] i [43] prezentovani su na konferenciji "Workshop on Generalized Inverse and its Applications", 2-4.11.2012, Nanjing, Kina, kao i na konferenciji "XIII Srpski matematički kongres", 22-25.5.2014, Vrnjaka Banja, Srbija. Disertacija se sastoji iz tri glave.

Prva glava je uvodnog karaktera. U njoj su dati neki pojmovi i osobine matrica, kao i definicija Drazinovog inverza kvadratne kompleksne matrice i neka njegova svojstva koja se koriste tokom rada.

U drugoj glavi razmatrane su aditivne osobine Drazinovog inverza matrica. Naime, 2001. godine R.E. Hartwig, G. Wang i Y. Wei [37] postavljaju problem pronalaženja formule za $(P+Q)^d$, gde su P i Q kvadratne kompleksne matrice. Nakon pomenute publikacije ovaj problem počinje intenzivno da se izučava. Prva aditivna formula koja je predstavljena u drugoj glavi jeste rezultat iz rada [42], a data je pod uslovima $PQ\prod_{i=1}^{k}(P^{p_i}Q^{q_i}) = 0$, gde su $(p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_k, q_k) \in U_k$ i gde je za $k \in \mathbb{N}$, $U_k = \{(p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_k, q_k) : \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{i=1}^{k} q_i = k-1,\ p_i, q_i \in \{0, 1, ..., k-1\},\ i = \overline{1,k}\}$. Ova formula generalizuje formule za određivanje $(P+Q)^d$, koje su date pod sledećim uslovima:

(i) $PQ = QP = 0$ [30];

(ii) $PQ = 0$ [37];

(iii) $PQP = 0$, $PQ^2 = 0$ [63];

(iv) $QPQ = 0$, $QP^2Q = 0$, $P^3Q = 0$ [7].

Dalje su za $k \in \mathbb{N}$, razmatrane posledice pomenute formule, koje i same predstavljaju nove aditivne rezultate. U drugoj glavi je dalje izložena formula za $(P+Q)^d$, koja predstavlja originalan rezultat iz rada [57], a koja važi pod uslovima $P^2QP = 0$, $P^2Q^2 = 0$, $PQ^2P = 0$ i $PQ^3 = 0$. Ova formula predstavlja uopštenje rezultata iz radova [30, 37, 63] pomenutih u prethodnoj listi, kao i sledeća dva rezultata:

(i) $P^2Q = 0$, $Q^2 = 0$ [44];

(ii) $P^2Q = 0$, $PQ^2 = 0$ [12].

Kako još uvek ne postoji formula za $(P+Q)^d$ bez dodatnih uslova za matrice P i Q, ovaj problem ostaje otvoren i čini se da ga je teško rešiti. Međutim, zbog široke primene Drazinovog inverza matrica, kao i veze između pronalaženja Drazinovog inverza blok matrica i pronalaženja Drazinovog inverza zbira dve matrice, značajno je pronaći što više načina za izračunavanje Drazinovog inverza zbira dve matrice. Stoga svaka formula za $(P+Q)^d$, data pod određenim uslovima, predstavlja bitan rezultat u ovoj problematici.

Treća glava ove disertacije bavi se Drazinovim inverzom blok matrica. Glava je podeljena na četiri poglavlja.

U poglavlju 3.1 razmatran je Drazinov inverz anti–trougaonih blok matrica i predstavljene su formule za njegovo izračunavanje pod određenim uslovima, a koje su publikovane u radu [43]. Naime, u poglavlju 3.1 su izložene formule za određivanje Drazinovog inverza donje anti–trougaone blok matrice $\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}$, gde su 0 i D kvadratne matrice, i to pod uslovom $DCB = 0$, kao i pod uslovom $CBD = 0$. Pomenuti rezultati koriste se dalje prilikom dokazivanja nekih teorema u drugom poglavlju treće glave.

Poglavlje 3.2 bavi se reprezentacijama Drazinovog inverza za 2×2 blok matricu $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, gde su A i D kvadratne matrice, ne obavezno istih dimenzija. Naime, 1979. godine su S.L. Campbell i C.D. Meyer [11] postavili problem pronalaženja Drazinovog inverza blok matrice M, u funkciji blokova matrice M. Od tada je ovaj problem izučavao veliki broj naučnika i prezentovane su brojne formule za određivanje M^d, pod specijalnim uslovima za blokove matrice M. Iako problem još uvek nije rešen, zbog primene Drazinovog inverza u oblastima kao što su statistika i diferencijalne jednačine, značajna je svaka formula pomoću koje se određuje Drazinov inverz matrice M. U ovom poglavlju su izložene eksplicitne reprezentacije Drazinovog inverza blok matrice M pod određenim uslovima, koje su sastavni deo radova [42] i [43], a koje uopštavaju sledeće slučajeve:

(i) $BC = 0$, $DC = 0$ i $BD = 0$ [27];

(ii) $BC = 0$, $DC = 0$ (ili $BD = 0$) i D je nilpotentna matrica [35];

(iii) $BC = 0$ i $DC = 0$ [19];

(iv) $BC = 0$ i $BD = 0$ [28];

(v) $CA = 0$ i $CB = 0$ [20];

(vi) $AB = 0$ i $CB = 0$ [19];

(vii) $BD^{\pi}C = 0$, $BDD^d = 0$ i $DD^{\pi}C = 0$ [28];

(viii) $BD = 0$, $D^{\pi}CA = 0$ i $D^{\pi}CB = 0$ [28];

(ix) $BCB = 0$, $BCA = 0$, $DCB = 0$ i $DCA = 0$ [63];

(x) $BCA = 0$, $DC = 0$ i $BD = 0$ (ili D je nilpotentna matrica) [12];

(xi) $BCA = 0$, $BD = 0$ i BC je nilpotentna matrica [12];

(xii) $BCA = 0$ i $BD = 0$ [23];

(xiii) $ABC = 0$, $ABD = 0$, $CBC = 0$ i $CBD = 0$ [63];

(xiv) $ABC = 0$ i $BD = 0$ [8];

(xv) $ABC = 0$, $DC = 0$ i $BD = 0$ (ili BC je nilpotentna matrica, ili D je nilpotentna matrica) [17];

(xvi) $ABC = 0$ i $DC = 0$ [23].

U poglavlju 3.3 razmatrane su blok matrice čiji je uopšteni Šurov komplement $Z = D - CA^dB$ jednak nuli i izložene su formule za određivanje njihovog Drazinovog inverza, pod uslovima $ABCA^\pi A = 0$ i $ABCA^\pi B = 0$, kao i pod uslovima $AA^\pi BCA = 0$ i $CA^\pi BCA = 0$. Ove formule predstavljaju originalne rezultate rada [57], a generalizuju sledeće slučajeve:

(i) $CA^\pi = 0$, $A^\pi B = 0$ i $Z = 0$ [47];

(ii) $CA^\pi B = 0$, $AA^\pi B = 0$ (ili $CA^\pi A = 0$) i $Z = 0$ [35];

(iii) $CA^\pi BC = 0$, $AA^\pi BC = 0$ i $Z = 0$ [63];

(iv) $BCA^\pi B = 0$, $BCA^\pi A = 0$ i $Z = 0$ [63];

(v) $ABCA^\pi = 0$, BCA^π je nilpotenta matrica i $Z = 0$ [44];

(vi) $A^\pi BCA = 0$, $A^\pi BC$ je nilpotenta matrica i $Z = 0$ [44];

(vii) $ABCA^\pi = 0$, $A^\pi ABC = 0$ (ili $CBCA^\pi = 0$) i $Z = 0$ [7].

Poglavlje 3.4 predstavlja originalne rezultate rada [24], koji se tiču Drazinovog inverza modifikovane matriice, a koji uopštavaju rezultate koje je dao Y. Wei u radu [61].

Želim da izrazim zahvalnost svom mentoru, prof. dr Dragani S. Cvetković–Ilić, kako na nesebičnoj podršci i pomoći tokom mog naučnog rada, tako i na izuzetnom strpljenju i korisnim savetima tokom izrade ove doktorske disertacije. Takođe se zahvaljujem svom profesoru dr Vladimiru Rakočeviću, kao i profesorki dr Ljiljani Gajić, na dragocenim sugestijama prilikom izrade ovog rada.

1 Uvod

U ovoj glavi date su neke od osobina matrica, kao i bitnija svojstva Drazinovog inverza matrica. Teoreme koje su prezentovane u uvodnom delu date su bez dokaza, koji se mogu naći u [3], [39] i [58]. Takođe, u ovom delu disertacije uvodimo oznake i pojmove, koje koristimo tokom celog rada.

Skup svih kompleksnih matrica tipa $m \times n$ označavaćemo sa $\mathbb{C}^{m\times n}$. Za matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ kažemo da je kvadratna ako je $m = n$. U suprotnom kažemo da je matrica A pravougaona. Jediničnu matricu tipa n označavaćemo sa I_n, tj. sa I, kada je očigledna njena dimenzija. Nula matricu iz prostora $\mathbb{C}^{m\times n}$ označavamo sa $0_{m\times n}$ ili jednostavno sa 0, kada su očigledne njene dimenzije. Sa A^T označava se transponovana matrica matrice A, dok se sa A^* označava konjugovano–transponovana matrica matrice A. Idempotentnu matricu E definišemo kao kvadratnu matricu za koju važi $E^2 = E$. Za kvadratnu matricu A kažemo da je nilpotentna ako postoji pozitivan ceo broj k takav da je $A^k = 0$. Najmanji takav broj k naziva se indeks nilpotentnosti matrice A, a za matricu A kažemo da je k–nilpotentna.

Za datu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, sa $r(A)$ označavaćemo njen rang. Skup $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{C}^n\}$ naziva se slika matrice A i predstavlja potprostor u $\mathbb{C}^m$. Dimenzija slike upravo je jednaka rangu matrice, tj. važi $\dim \mathcal{R}(A) = r(A)$. Skup $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$ naziva se jezgro matrice A i predstavlja potprostor u $\mathbb{C}^n$. Za dimenzije ovih potprostora važi $\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n$.

Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Za matricu A kažemo da je regularna ili invertibilna ako je $r(A) = n$. U suprotnom, kažemo da je matrica A singularna. Inverzna matrica matrice A označava se sa A^{-1} i važi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Neke od osobina regularne matrice A i njenog inverza A^{-1} date su u sledećoj teoremi:

Teorema 1.1 *Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ regularne matrice. Tada važi:*

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$*;*

(ii) A^T *je regularna i važi* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$*;*

(iii) A^* *je regularna i važi* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$*;*

(iv) AB *i* BA *su regularne i važi* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Poznato je da se inverzne matrice koriste pri rešavanju mnogih matematičkih problema u raznim granama matematike kao što su linearna algebra, numerička analiza, statistika, diferencijalne jednačine, itd. Međutim, pri rešavanju nekih od problema nije neophodno da matrica pomoću koje dolazimo do rešenja poseduje sve osobine inverzne matrice, već samo neke od njih. Takođe, pri rešavanju nekog problema umesto inverzne matrice možemo iskoristiti matricu koja nije čak ni kvadratna, pa svakako ne može biti ni invertibilna, niti imati svojstva invertibilne matrice koja su usko vezana samo za kvadratne matrice, kao što su neke spektralne osobine, ali može imati neka druga svojstva invertibilne matrice. Sve ovo dovelo je do prirodne potrebe da se definišu matrice koje će na neki način "imitirati" inverznu matricu. Tako, u zavisnosti od problema koji se rešava, tj. od neophodnih osobina inverzne matrice, uvode se razne klase matrica sa nekim od osobina invertibilne matrice. Dakle, ovakve matrice predstavljaju nadklasu klase invertibilnih matrica.

Generalisani inverz date matrice A je matrica X koja jeste u nekoj vezi sa matricom A i taj inverz:

- postoji za klasu matrica veću od klase invertibilnih matrica,
- poseduje neka svojstva uobičajenog inverza,
- svodi se na uobičajeni inverz A^{-1} kada je matrica A invertibilna.

Drazinov inverz date matrice jeste generalisani inverz. Neke od elementarnih problema gde se primenjuje Drazinov inverz matrica dao je S.L. Campbell [9, 10]. Navodimo primenu Drazinovog inverza matrica u rešavanju sistema diferencijalnih jednačina.

Pretpostavimo da su E i F matrice tipa $n \times n$, gde je matrica E singularna i da postoji skalar μ takav da je matrica $\mu E + F$ regularna. Tada je opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$Ex'(t) + Fx(t) = 0, \quad t \geq t_0$$

dato sa

$$x(t) = e^{-\hat{E}^d \hat{F}(t-t_0)} \hat{E}^d \hat{E} q,$$

gde je

$$\hat{E} = (\mu E + F)^{-1} E, \quad \hat{F} = (\mu E + F)^{-1} F,$$

i q je proizvoljan vektor dimenzije n.

Kako bi uveli definiciju Drazinovog inverza, navodimo sledeću definiciju i teoremu.

Definicija 1.1 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Najmanji broj $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ za koji važi jednakost*

$$r(A^{k+1}) = r(A^k),$$

naziva se indeks matrice A, u oznaci $\mathrm{ind}(A) = k$.

Očigledno, ako je matrica A invertibilna, onda je $\mathrm{ind}(A) = 0$. U suprotnom, kada je A singularna matrica, $\mathrm{ind}(A) \geq 1$.

Teorema 1.2 *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

(i) Ako je $\mathrm{ind}(A) = k$, *tada važi sledeće:*

$$\begin{aligned} r(A^l) &= r(A^k), \ l \geq k; \\ \mathcal{R}(A^l) &= \mathcal{R}(A^k), \ l \geq k; \\ \mathcal{N}(A^l) &= \mathcal{N}(A^k), \ l \geq k. \end{aligned}$$

(ii) $\operatorname{ind}(A) = k \Leftrightarrow k$ *je najmanji broj iz skupa* $\{0, 1, 2, ...\}$ *za koji važi* $A^k = A^{k+1}X$, *za neku matricu* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(iii) $\operatorname{ind}(A) = k \Leftrightarrow \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^k) \oplus \mathcal{N}(A^k)$.

Drazinov inverz kvadratne kompleksne matrice uvodi se na sledeći način:

Definicija 1.2 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i* $\operatorname{ind}(A) = k$. *Ako matrica* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *zadovoljava jednakosti*

$$A^k XA = A, \tag{1^k}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$AX = XA, \tag{5}$$

tada se X *naziva Drazinov inverz matrice* A, *u oznaci* $X = A^d$.

Jednakosti (1^k), (2) i (5) označavamo na ovaj način zbog uobičajenih oznaka odgovarajućih jednačina pri definisanju Moore–Penrose–ovog inverza.

Očigledno, ako je matrica A regularna, onda je $A^d = A^{-1}$. U slučaju kada je $\operatorname{ind}(A) = 1$ Drazinov inverz matrice A naziva se grupni inverz i označava sa A^g.

Drazinov inverz postoji za svaku kvadratnu kompleksnu matricu, što govori sledeća teorema.

Teorema 1.3 *Za svaku matricu* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *indeksa* $\operatorname{ind}(A) = k$ *postoji jednistven Drazinov inverz* $A^d \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

U sledećoj teoremi izložena su neka svojstva Drazinovog inverza.

Teorema 1.4 *Neka je* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *i* $\operatorname{ind}(A) = k$. *Tada važi:*

(i) $\mathcal{R}(A^d) = \mathcal{R}(A^l),\ l \geq k$;

(ii) $\mathcal{N}(A^d) = \mathcal{N}(A^l),\ l \geq k$;

(iii) $AA^d = A^dA = P_{\mathcal{R}(A^d),\mathcal{N}(A^d)}$;

(iv) $A^\pi = I - AA^d = I - A^dA = P_{\mathcal{N}(A^d),\mathcal{R}(A^d)}$.

Još neke od često korišćenih osobina Drazinovog inverza date su u sledećoj teoremi.

Teorema 1.5 *Neka su* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Tada važi:*

(i) Ako su $l, m \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $l > m > 0$, *tada je* $A^m(A^d)^l = (A^d)^{l-m}$;

(ii) Ako su $l, m \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $m > 0$ *i* $l - m > \operatorname{ind}(A)$, *tada je* $A^l(A^d)^m = A^{l-m}$;

(iii) $(A^d)^l = (A^l)^d,\ l \in \mathbb{N}$;

(iv) $(A^d)^* = (A^*)^d$;

(v) $(A^d)^T = (A^T)^d$

(vi) $((A^d)^d)^d = A^d$;

(vii) *Ako je* P *regularna matrica, tada* $A = PBP^{-1} \Rightarrow A^d = PB^dP^{-1}$;

(viii) $AB = BA \Rightarrow A^dB = BA^d,\ AB^d = B^dA$;

(ix) $AB = BA \Rightarrow (AB)^d = B^dA^d = A^dB^d$;

(x) $(AB)^d = A((BA)^d)^2B = A((BA)^2)^dB$;

(xi) *Ako je* A *idempotnetna matrica, tada je* $A^d = A$;

(xii) *Ako je* A *nilpotentna matrica, tada je* $A^d = O$;

(xiii) $\mathrm{ind}(A^d) = \begin{cases} 1, & \mathrm{ind}(A) \geq 1, \\ 0, & \mathrm{ind}(A) = 0; \end{cases}$

(xiv) $(A^d)^d = A^2A^d$;

(xv) $A^d = (A^2A^d)^d$.

Drazinov inverz kvadratne kompleksne matrice poseduje još neka svojstva koje ima uobičajeni inverz. Na primer, Drazinov inverz matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ uvek može biti predstavljen u obliku polinoma od A. Takođe, Drazinov inverz date matrice ima neke spektralne osobine običnog inverza, pa se stoga često naziva i spektralni inverz. Više o Drazinovom inverzu kvadratnih kompleksnih matrica može se naći u [3] i [58].

2 Aditivnost Drazinovog inverza matrica

Problem aditivnosti Drazinovog inverza prvi pominje M.P. Drazin u radu [30] iz 1958. godine, koji se odnosi na asocijativne prstene i polugrupe. Kako je rezultat iz pomenutog rada primenljiv i na matrice, to je njegova formulacija za matrice data u sledećoj teoremi.

Teorema 2.1 [30] *Neka su matrice $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ako je $PQ = QP = 0$, tada je*

$$(P+Q)^d = P^d + Q^d.$$

Ovaj problem ostaje nezapažen sve do 2001. godine. Naime, 2001. godine R.E. Hartwig, G. Wang i Y. Wei [37] prvi izučavaju problem aditivnosti Drazinovog inverza matrica. Oni dolaze do rezultata koji generalizuje rezultat Teoreme 2.1:

Teorema 2.2 [37] *Neka su matrice $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $\mathrm{ind}(P) = r$ i $\mathrm{ind}(Q) = s$. Ako je $PQ = 0$, tada je*

$$(P+Q)^d = \sum_{i=0}^{s-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1} + \sum_{i=0}^{r-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Nakon toga, problem aditivnosti Drazinovog inverza je počeo intezivno da se izučava i publikovan je veliki broj radova na ovu temu. Izučavana je aditivnost Drazinovog inverza ne samo na prostorima matrica, već i na prostorima operatora, u prstenovima, itd. Jedan od radova gde je izučavan pomenuti problem je i rad [63], koji je publikovan 2011. godine. U ovom radu H. Yang i X. Liu daju formulu za $(P+Q)^d$ pod uslovima $PQP = 0$ i $PQ^2 = 0$ i na taj način uopštavaju pomenute rezultate radova [30, 37]:

Teorema 2.3 [63] *Neka su matrice $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $\mathrm{ind}(P) = r$ i $\mathrm{ind}(Q) = s$. Ako je $PQP = 0$ i $PQ^2 = 0$, tada je*

$$(P+Q)^d = Y_1 + Y_2 + \left(Y_1(P^d)^2 + (Q^d)^2 Y_2 - Q^d(P^d)^2 - (Q^d)^2 P^d\right) PQ,$$

gde su

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{s-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \ Y_2 = \sum_{i=0}^{r-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi. \tag{2.1}$$

Dalje, u pomenutom radu, H. Yang i X. Liu daju i simetričnu formulaciju Teoreme 2.3:

Teorema 2.4 [63] *Neka su matrice $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $\mathrm{ind}(P) = r$ i $\mathrm{ind}(Q) = s$. Ako je $QPQ = 0$ i $P^2Q = 0$, tada je*

$$(P+Q)^d = Y_1 + Y_2 + PQ\left(Y_1(P^d)^2 + (Q^d)^2 Y_2 - Q^d(P^d)^2 - (Q^d)^2 P^d\right),$$

gde su Y_1 and Y_2 dati u (2.1).

Još jedan od radova koji se bavi problemom aditivnosti Drazinovog inverza za matrice je rad C. Bu-a i C. Feng-a [7], koji je publikovan 2012. godine. U pomenutom radu data je formula za izračunavanje $(P+Q)^d$, koja važi pod uslovima $QPQ=0$, $QP^2Q=0$ i $P^3Q=0$. Očigledno, ovaj rezultat predstavlja uopštenje rezultata rada [63] izloženog u Teoremi 2.4.

Sada ćemo izložiti originalni rezultat iz rada [42], koji uopštava navedene rezultate radova [30, 37, 63, 7]. Ideja ovog rezultata proizašla je iz činjenice da su uslovi $PQP=0$ i $PQ^2=0$, pod kojim je data formula za $(P+Q)^d$ u Teoremi 2.3 [63], nastali množenjem uslova $PQ=0$ iz Teoreme 2.2 [37] sa P i sa Q, sa desne strane. Kako bi izložili naše rezultate, uvedimo prvo definiciju sledećeg skupa.

Za $j\in\mathbb{N}$, definišimo skup $U_j=\{(p_1,q_1,p_2,q_2,...,p_j,q_j):\sum_{i=1}^{j}p_i+\sum_{i=1}^{j}q_i=j-1,\ p_i,q_i\in\{0,1,...,j-1\},\ i=\overline{1,j}\}$.

Teorema 2.5 *Neka su $P,Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ takve da je $\operatorname{ind}(P)=r$ i $\operatorname{ind}(Q)=s$ and $k\in\mathbb{N}$. Ako je*

$$PQ\prod_{i=1}^{k}(P^{p_i}Q^{q_i})=0, \tag{2.2}$$

za svako $(p_1,q_1,p_2,q_2,...,p_k,q_k)\in U_k$, tada važi

$$(P+Q)^d=Y_1+Y_2+\sum_{i=1}^{k-1}\Big(Y_1(P^d)^{i+1}+(Q^d)^{i+1}Y_2-\sum_{j=1}^{i+1}(Q^d)^j(P^d)^{i+2-j}\Big)PQ(P+Q)^{i-1},$$

gde su Y_1 i Y_2 dati sa (2.1).

Dokaz. Izložićemo dva dokaza. Sama ideja dokaza ove teoreme svodi se na korišćenje indukcije. Kako ovakav način dokazivanja zahteva puno računanja, ovde izlažemo samo ključne korake dokaza, što je i publikovano u radu [42]. Drugi način dokazivanja ove teoreme je provera da li ovako definisan Drazinov inverz za $(P+Q)$ zadovoljava jednakosti (1^k), (2) i (5) Definicije 1.2 i ovaj način zahteva mnogo manje računanja.

Dokaz 1. Dokaz izvodimo indukcijom po k. Za $k=1$ teorema predstavlja Teoremu 2.2 [37], pa je tačna. Sada pretpostavimo da je teorema tačna za $k-1$ i dokažimo da važi i za k.
Primenom Teoreme 1.5,(x) imamo

$$\begin{aligned}(P+Q)^d &= \begin{bmatrix} I & Q \end{bmatrix}\left(\left(\begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Q \end{bmatrix}\right)^2\right)^d\begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} I & Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P^2+PQ & P^2Q+PQ^2 \\ P+Q & PQ+Q^2 \end{bmatrix}^d\begin{bmatrix} P \\ I \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Uvedimo oznake

$$M = \begin{bmatrix} P^2+PQ & P^2Q+PQ^2 \\ P+Q & PQ+Q^2 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} PQ & P^2Q+PQ^2 \\ 0 & PQ \end{bmatrix} \text{ i}$$
$$M_2 = \begin{bmatrix} P^2 & 0 \\ P+Q & Q^2 \end{bmatrix}.$$

Lako dokazujemo da za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ važi

$$M_1^n = \begin{bmatrix} (PQ)^n & W_n \\ 0 & (PQ)^n \end{bmatrix} \ \text{ i } \ M_2^n = \begin{bmatrix} P^{2n} & 0 \\ S_n & Q^{2n} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

gde je

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1}(PQ)^i P(P+Q)Q(PQ)^{n-1-i} \ \text{ i } \ S_n = \sum_{i=0}^{n-1} Q^{2i}(P+Q)P^{2(n-1-i)}.$$

Dakle, $M_1^n = 0$, za $n \geq \dfrac{k+1}{2}$. Takođe, izračunavanjem dobijamo

$$M_1M_2\prod_{i=1}^{k-1}(M_1^{p_i}M_2^{q_i}) = 0,$$

za svako $(p_1, q_1, p_2, q_2, ..., p_{k-1}, q_{k-1}) \in U_{k-1}$. Stoga, M_1 i M_2 zadovoljavaju uslove teoreme za $k-1$. Prema indukcijskoj hipotezi sada imamo

$$\begin{aligned}(M_1+M_2)^d &= Z_1 + Z_2 \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2}\Big(Z_1(M_1^d)^{i+1} + (M_2^d)^{i+1}Z_2 - \sum_{j=1}^{i+1}(M_2^d)^j(M_1^d)^{i+2-j}\Big)M_1M_2(M_1+M_2)^{i-1},\end{aligned}$$

gde su Z_1 i Z_2 definisani u (2.1), i to u funkciji matrica M_1 i M_2.

Kako je $M_1^d = 0$ i $M_1^\pi = I$, imamo da je $Z_1 = 0$ i

$$Z_2 = \sum_{i=0}^{[\frac{k+1}{2}]-1}(M_2^d)^{i+1}M_1^i.$$

Stoga dobijamo

$$(M_1+M_2)^d = Z_2 + \sum_{i=1}^{k-2}\Big((M_2^d)^{i+1}Z_2\Big)M_1M_2(M_1+M_2)^{i-1}. \tag{2.4}$$

Takođe,

$$(M_2^d)^n = \begin{bmatrix} (P^d)^{2n} & 0 \\ A_n & (Q^d)^{2n} \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

gde je

$$A_n = Y_1(P^d)^{2n} + (Q^d)^{2n}Y_2 - \sum_{i=1}^{2n}(Q^d)^i(P^d)^{2n+1-i}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Dalje,

$$(M_1 + M_2)^n = \begin{bmatrix} P(P+Q)^{2n-1} & P(P+Q)^{2n-1}Q \\ (P+Q)^{2n-1} & (P+Q)^{2n-1}Q \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Primenom (2.3), (2.5) i (2.6) u (2.4), dobijamo da važi tvrđenje teoreme.

Dokaz 2. Neka je

$$Z = Y_1 + Y_2 + \sum_{i=1}^{k-1}\Big(Y_1(P^d)^{i+1} + (Q^d)^{i+1}Y_2 - \sum_{j=1}^{i+1}(Q^d)^j(P^d)^{i+2-j}\Big)PQ(P+Q)^{i-1}.$$

Dokazaćemo da je $(P+Q)Z = Z(P+Q)$, $Z^2(P+Q) = Z$ i $(P+Q)^{l+1}Z = (P+Q)^l$, za neko $l \in \mathbb{N}$.
Uvedimo sledeću oznaku

$$Y_3 = \sum_{i=1}^{k-1}\Big(Y_1(P^d)^{i+1} + (Q^d)^{i+1}Y_2 - \sum_{j=1}^{i+1}(Q^d)^j(P^d)^{i+2-j}\Big)PQ(P+Q)^{i-1}.$$

Stoga imamo da je $Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$. Iz (2.2) sledi da važi $PQP^d = 0$ i $PQ^d = 0$. Takođe, važi

$$\begin{aligned} Y_1P &= QY_1 + Q^{\pi}PP^d, \\ QY_2 &= QQ^dP^{\pi} + Y_2P, \\ PY_1 &= PP^d, \\ PY_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Na osnovu toga važi

$$(P+Q)Z = PP^d + QY_1 + QQ^dP^{\pi} + Y_2P + (P+Q)Y_3$$

i

$$Z(P+Q) = Q^{\pi}PP^d + QY_1 + Y_2P + Y_1Q + Y_2Q + Y_3(P+Q).$$

Kako je

$$(P+Q)Y_3 = Y_3(P+Q) + Y_1P^dPQ + Q^dY_2PQ - Q^dP^dPQ,$$

upotrebom (2.7) dobijamo $(P+Q)Z = Z(P+Q)$.

Kako bi dokazali da važi $Z^2(P+Q) = Z$, primetimo da je $Y_1Y_2 = 0$, $Y_3Y_1 = 0$, $Y_3Y_2 = 0$ i $Y_3^2 = 0$. Dakle,

$$Z^2(P+Q) = (Y_1^2 + Y_2^2 + Y_2Y_1 + Y_1Y_3 + Y_2Y_3)(P+Q). \tag{2.8}$$

Važe i sledeće jednakosti:

$$
\begin{aligned}
&Y_1^2 = Y_1 P^d,\ Y_2^2 = Q^d Y_2,\ Y_2 Y_1 = -Q^d P^d,\\
&Y_1 Y_3 = \sum_{i=1}^{k-1} Y_1 (P^d)^{i+2} PQ(P+Q)^{i-1},\\
&Y_2 Y_3 = \sum_{i=1}^{k-1} \Big((Q^d)^{i+2} Y_2 - \sum_{j=1}^{i+2} (Q^d)^j (P^d)^{i+3-j}\Big) PQ(P+Q)^{i-1}.
\end{aligned}
$$

Primenom ovih jednakosti u (2.8), dobijamo da je $Z^2(P+Q) = Z$.

Neka su $l, i \in \mathbb{N}$ brojevi za koje važi $i \geq \max\{r, s\} - 1$ i $l \geq k + i - 1$. Dokazaćemo da je

$$Z(P+Q)^{l+1} = (P+Q)^l. \tag{2.9}$$

Kako je $Y_3(P+Q)^l = 0$, da bi dokazali (2.9), prvo moramo dokazati da važi $(Y_1 + Y_2)(P+Q)^{l+1} = (P+Q)^l$. Iz činjenice da je $PQ(P+Q)^j = 0$, za svako $j \geq k-1$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&Y_1 Q(P+Q)^j = 0,\\
&Y_2 Q(P+Q)^j = Q^d Q(P+Q)^j.
\end{aligned}
$$

Sada imamo

$$(Y_1 + Y_2)(P+Q)^{l+1} = Q^d Q(P+Q)^l + Y_1 P^{i+1}(P+Q)^{l-i},$$

te da bi dokazali (2.9), neophodno je dokazati

$$Y_1 P^{i+1}(P+Q)^{l-i} = Q^{\pi}(P+Q)^l. \tag{2.10}$$

Kako je

$$Y_1 P^{i+1}(P+Q)^{l-i} = Q^{\pi}(\sum_{j=0}^{s-1} Q^j P^{i-j})(P+Q)^{l-i}$$

i važi

$$
\begin{aligned}
Q^{\pi}(P+Q)^l &= Q^{\pi}(P^2 + QP + Q^2)(P+Q)^{l-2}\\
&= Q^{\pi}(P^3 + QP^2 + Q^2P + Q^3)(P+Q)^{l-3}\\
&= \dots\\
&= Q^{\pi}(\sum_{j=0}^{s-1} Q^j P^{i-j})(P+Q)^{l-i},
\end{aligned}
$$

to dobijamo da važi (2.10). Dakle, $(P+Q)^{l+1}Z = (P+Q)^l$, za neki broj $l \in \mathbb{N}$. Dokazali smo da je $Z = (P+Q)^d$. $\square$

U zavisnosti od broja k u uslovu (2.2), dobijamo puno posledica Teoreme 2.5. Za $k = 1$ uslov (2.2) postaje $PQ = 0$, pa kao posledicu dobijamo Teoremu 2.1. Za $k = 2$ uslov (2.2) postaje $PQP^d = 0$ i $PQ^d = 0$, pa kao posledicu dobijamo Teoremu 2.2. Za $k = 3$ dobijamo sledeću posledicu, koja je i sama novi aditivni rezultat:

Posledica 2.1 *Neka su* $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{ind}(P) = r$ *i* $\mathrm{ind}(Q) = s$. *Ako je* $PQP^2 = 0$, $PQPQ = 0$, $PQ^2P = 0$ *i* $PQ^3 = 0$, *tada je*

$$\begin{aligned}(P+Q)^d &= Y_1 + Y_2 + \left(Y_1(P^d)^2 + (Q^d)^2 Y_2 - \sum_{i=1}^{2}(Q^d)^i (P^d)^{3-i}\right) PQ \\ &\quad + \left(Y_1(P^d)^3 + (Q^d)^3 Y_2 - \sum_{i=1}^{3}(Q^d)^i (P^d)^{4-i}\right)(PQP + PQ^2),\end{aligned}$$

gde su Y_1 *i* Y_2 *dati u* (2.1).

Podrazumeva se da Teorema 2.5, pa samim tim i sve njene posledice, mogu biti predstavljene i u simetričnoj formulaciji. Tako je, na primer, simetrična formulacija Posledice 2.1 sledeći aditivni rezultat.

Posledica 2.2 *Neka su* $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathrm{ind}(P) = r$, $\mathrm{ind}(Q) = s$. *Ako važe uslovi* $Q^2PQ = 0$, $PQPQ = 0$, $QP^2Q = 0$ *i* $P^3Q = 0$, *tada je*

$$\begin{aligned}(P+Q)^d &= Y_1 + Y_2 + PQ\left(Y_1(P^d)^2 + (Q^d)^2 Y_2 - \sum_{i=1}^{2}(Q^d)^i (P^d)^{3-i}\right) \\ &\quad + (QPQ + P^2Q)\left(Y_1(P^d)^3 + (Q^d)^3 Y_2 - \sum_{i=1}^{3}(Q^d)^i (P^d)^{4-i}\right),\end{aligned}$$

gde su Y_1 *i* Y_2 *definisani kao u* (2.1).

Primetimo da je aditivni rezultat rada [7], dat pod uslovima $QPQ = 0$, $QP^2Q = 0$ i $P^3Q = 0$, samo specijalni slučaj rezultata izloženog u Posledici 2.2.
Aditivni rezultat Teoreme 2.5 proširen je u Banahovoj algebri sa jedinicom 1 u radu [23].

M.F. Martínez–Serrano i N. Castro–González su takođe izučavale problem aditivnosti Drazinovog inverza. Naime, 2009. godine ovi autori su publikovali rad [44], gde je formula za $(P+Q)^d$ data pod uslovima $P^2Q = 0$ i $Q^2 = 0$.

Teorema 2.6 [44] *Neka su* $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrice koje zadovoljavaju uslove* $P^2Q = 0$ *i* $Q^2 = 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned}(P+Q)^d &= \sum_{i=0}^{r-1}\Big(Q(PQ)^\pi (PQ)^i P^d + (PQ)^\pi (PQ)^i\Big)(P^d)^{2i+1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{t-1}\Big(Q((PQ)^d)^{i+1} + ((PQ)^d)^{i+1}P\Big)P^{2i}P^\pi,\end{aligned}$$

gde je $\mathrm{ind}(PQ) = r$ *i* $\mathrm{ind}(P^2) = t$.

Takođe, u radu [44] data je i simetrična fomrulacija Teoreme 2.6.

Posledica 2.3 [44] *Neka su* $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrice koje zadovoljavaju uslove* $PQ^2 = 0$ *i* $P^2 = 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned}(P+Q)^d &= \sum_{i=0}^{r-1}(Q^d)^{2i+1}\Big(Q^d(PQ)^\pi(PQ)^iP + (PQ)^\pi(PQ)^i\Big)\\ &+ \sum_{i=0}^{t-1}Q^\pi Q^{2i}\Big(Q((PQ)^d)^{i+1} + ((PQ)^d)^{i+1}P\Big),\end{aligned}$$

gde je $\mathrm{ind}(PQ) = r$ *i* $\mathrm{ind}(Q^2) = t$.

N. Castro–González, E. Dopazo i M. F. Martínez–Serrano [12] izučavali su aditivnost Drazinovog inverza ograničenih operatora na Banahovom prostoru. U pomenutom radu autori daju rezultat za formulu $(G+F)^d$ pod uslovima $GF^2 = 0$ i $G^2F = 0$, gde su $G, F \in B(\mathcal{X})$. Kako je ova formula primenljiva i na matrice, to je njena formulacija za matrice sledeća:

Teorema 2.7 [12] *Neka su* $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrice koje zadovoljavaju uslove* $PQ^2 = 0$ *i* $P^2Q = 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned}(P+Q)^d &= UP^\pi + Q^\pi V + X(I+YP)P^\pi + Q^\pi(I+QX) + QUV + UVP\\ &+ \sum_{i=0}^{2r+t-2}(Q^d)^{i+1}\Gamma_{i+2}P + \sum_{i=0}^{2r+s-2}Q\Phi_{i+2}(P^d)^{i+1},\end{aligned}$$

gde je $\mathrm{ind}(Q) = r$, $\mathrm{ind}(P) = t$, $\mathrm{ind}(PQ) = r$, *za* $k \geq 0$ *je* $k' = [(k-1)/2]$ *i* $\alpha = 0$ *ako je* k *paran broj, u suprotnom* $\alpha = 1$. *Takođe,*

$$X = \sum_{j=1}^{[s/2]}Q^{2j-1}Q^\pi((PQ)^d)^j, \quad U = \sum_{j=0}^{r-1}(Q^d)^{2j+1}(PQ)^j(PQ)^\pi,$$

$$Z_0 = 0; \quad Z_k = \sum_{j=0}^{k'}Q^\pi Q^{k-1-2j}(PQ)^j(PQ)^\pi, \ \textit{za } k \geq 1,$$

$$\Phi_{k+2} = -Q^kX - (Q^d)^\alpha U(PQ)^{k'+1} + Z_k,$$

$$Y = \sum_{j=1}^{[t/2]}((PQ)^d)^jP^{2j-1}P^\pi, \quad V = \sum_{j=0}^{r-1}(PQ)^\pi(PQ)^j(P^d)^{2j+1},$$

$$T_0 = 0; \quad T_k = \sum_{j=0}^{k'}(PQ)^\pi(PQ)^jP^{k-1-2j}P^\pi, \ \textit{za } k \geq 1,$$

$$\Gamma_{k+2} = -YP^k - (PQ)^{k'+1}V(P^d)^\alpha + T_k.$$

U sledećem delu izlažemo originalne aditivne rezultate Drazinovog inverza iz rada [57], koji su uopštenje prethodno navedenih rezultata iz radova [30, 37, 44, 12, 63].

Teorema 2.8 *Neka su $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrice koje ispunjavaju uslove $P^2QP = 0$, $P^2Q^2 = 0$, $PQ^2P = 0$ i $PQ^3 = 0$. Tada je*

$$\begin{aligned}
(P+Q)^d &= \left(\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}((P+Q)Q)-1} ((P+Q)Q)^\pi ((P+Q)Q)^i (((P+Q)P)^d)^{i+1} \right.\\
&+ \left. \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}((P+Q)P)-1} (((P+Q)Q)^d)^{i+1} ((P+Q)P)^i ((P+Q)P)^\pi \right) (P+Q),
\end{aligned}$$

gde za $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\begin{aligned}
(((P+Q)P)^d)^n &= \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(QP)-1} (QP)^\pi (QP)^i (P^d)^{2(i+n)} + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} ((QP)^d)^{i+n} P^{2i} P^\pi \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} ((QP)^d)^i (P^d)^{2(n-i)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(((P+Q)Q)^d)^n &= \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i} ((PQ)^d)^{i+n} + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(PQ)-1} (Q^d)^{2(i+n)} (PQ)^i (PQ)^\pi \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} (Q^d)^{2i} ((PQ)^d)^{n-i},
\end{aligned}$$

i važi

$$\begin{aligned}
((P+Q)P)^\pi &= (QP)^\pi P^\pi - \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(QP)-2} (QP)^\pi (QP)^{i+1} (P^d)^{2(i+1)} \\
&- \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-2} ((QP)^d)^{i+1} P^{2(i+1)} P^\pi, \\
((P+Q)Q)^\pi &= Q^\pi (PQ)^\pi - \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-2} Q^\pi Q^{2(i+1)} ((PQ)^d)^{i+1} \\
&- \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(PQ)-2} (Q^d)^{2(i+1)} (PQ)^{i+1} (PQ)^\pi.
\end{aligned}$$

Dokaz. Koristeći osobinu Drazinovog inverza (2) iz Definicije 1.2, imamo

$$(P+Q)^d = (P+Q)((P+Q)^d)^2 = (P+Q)(P(P+Q) + Q(P+Q))^d.$$

Ako uvedemo oznake $F = P(P+Q)$ i $G = Q(P+Q)$, dobijamo

$$(P+Q)^d = (P+Q)(F+G)^d$$

Kako je, prema uslovima teoreme, $FG = P^2Q^2 + P^2QP + PQ^3 + PQ^2P = 0$, to matrice F i G zadovoljavaju uslov Teoreme2.2 pa važi

$$(P+Q)^d = (P+Q)\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(G)-1} G^\pi G^i (F^d)^{i+1} + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(F)-1} (G^d)^{i+1} F^i F^\pi\right). \tag{2.11}$$

Štaviše, ako primenimo Teoremu 1.5, (x) na matrice F i G, dobijamo

$$F^d = P(((P+Q)P)^d)^2(P+Q) \ \text{ i } \ G^d = Q(((P+Q)Q)^d)^2(P+Q).$$

Uvedimo oznake $F_1 = (P+Q)P$ i $G_1 = (P+Q)Q$. Primenom Teoreme 1.5, (x) dobijamo:

$$\begin{aligned}
(P+Q)G^\pi &= (P+Q)(Q(P+Q))^\pi \\
&= (P+Q) - (P+Q)Q(P+Q)(Q(P+Q))^d \\
&= (P+Q) - (P+Q)Q(P+Q)Q(((P+Q)Q)^d)^2 \\
&= (I - (P+Q)Q(((P+Q)Q)^d))(P+Q) \\
&= ((P+Q)Q)^\pi(P+Q) = G_1^\pi(P+Q).
\end{aligned}$$

Analogno,

$$(P+Q)F^\pi = ((P+Q)P)^\pi(P+Q) = F_1^\pi(P+Q).$$

Upotrebom ovih jednakosti u (2.11) dobijamo

$$\begin{aligned}
(P+Q)^d = &\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(G)-1} (P+Q)(Q(P+Q))^\pi(Q(P+Q))^i((P(P+Q))^d)^{i+1} \\
+ &\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(F)-1} (P+Q)((P+Q)Q)^d)^{i+1}(P(P+Q))^i(P(P+Q))^\pi \\
= &\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(G)-1} G_1^\pi(P+Q)(Q(P+Q))^i((P(P+Q))^d)^{i+1} \\
+ &\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(F)-1} (P+Q)Q(((P+Q)Q)^d)^{i+2}(P+Q)(P(P+Q))^i F^\pi \\
= &\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(G)-1} G_1^\pi((P+Q)Q)^i(P+Q)P(((P+Q)P)^d)^{i+2}(P+Q) \\
+ &\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(F)-1} (((P+Q)Q)^d)^{i+1}((P+Q)P)^i(P+Q)F^\pi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(G)-1} G_1^{\pi}((P+Q)Q)^i(((P+Q)P)^d)^{i+1}(P+Q) \\
&+ \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(F)-1} (((P+Q)Q)^d)^{i+1}((P+Q)P)^i {F_1}^{\pi}(P+Q).
\end{aligned}
$$

Na osnovu prethodno dokazanog, formulu (2.11) možemo predstaviti na sledeći način

$$
(P+Q)^d = \left(\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(G_1)-1} {G_1}^{\pi} {G_1}^{i} ({F_1}^{d})^{i+1} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(F_1)-1} ({G_1}^{d})^{i+1} {F_1}^{i} {F_1}^{\pi} \right)(P+Q). \tag{2.12}
$$

Sada treba odrediti $(F_1^d)^n$ i $(G_1^d)^n$, za $n \in \mathbb{N}$.

Primetimo da je $F_1 = P^2 + QP$. Kako je $P^2QP = 0$, matrice P^2 i QP zadovoljavaju uslov Teoreme 2.2. Stoga imamo

$$
F_1^d = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(QP)-1} (QP)^{\pi}(QP)^i P^{d^{2i+2}} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P^2)-1} ((QP)^d)^{i+1} P^{2i} P^{\pi}.
$$

Jednostavnim računanjem i indukcijom dobijamo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$
\begin{aligned}
(F_1^d)^n = &\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(QP)-1} (QP)^{\pi}(QP)^i (P^d)^{2(i+n)} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P^2)-1} ((QP)^d)^{i+n} P^{2i} P^{\pi} \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} ((QP)^d)^i (P^d)^{2(n-i)}.
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Slično, iz uslova teoreme $PQ^3 = 0$ i činjenice da je $G_1 = PQ + Q^2$, imamo da matrice PQ i Q^2 ispunjavaju uslov Teoreme 2.2, pa je

$$
G_1^d = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^{\pi} Q^{2i} ((PQ)^d)^{i+1} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(PQ)-1} (Q^d)^{2(i+1)} (PQ)^i (PQ)^{\pi}.
$$

Jednostavnim računom i upotrebom indukcije, za $n \in \mathbb{N}$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
(G_1^d)^n = &\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^{\pi} Q^{2i} ((PQ)^d)^{i+n} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(PQ)-1} (Q^d)^{2(i+n)} (PQ)^i (PQ)^{\pi} \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} (Q^d)^{2i} ((PQ)^d)^{n-i}.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Izrazi za ${F_1}^{\pi}$ i ${G_1}^{\pi}$ se trivijalno dobijaju upotrebom izraza za F_1^d i G_1^d.
Primenom formula (2.13) i (3.32) u (2.12) dobijamo da je tvrđenje teoreme tačno. □

Sledeća teorema predstavlja simetričnu formulaciju Teoreme 2.8.

Teorema 2.9 *Neka su $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrice koje ispunjavaju uslove $PQP^2 = 0$, $Q^2P^2 = 0$, $PQ^2P = 0$ i $Q^3P = 0$. Tada je*

$$\begin{aligned}(P+Q)^d &= (P+Q)\left(\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q(P+Q))-1}((P(P+Q))^d)^{i+1}(Q(P+Q))^i(Q(P+Q))^\pi\right.\\ &+ \left.\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P(P+Q))-1}(P(P+Q))^\pi(P(P+Q))^i((Q(P+Q))^d)^{i+1}\right),\end{aligned}$$

gde je za $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}((P(P+Q))^d)^n &= \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(PQ)-1}(P^d)^{2(i+n)}(PQ)^i(PQ)^\pi + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1}P^\pi P^{2i}((PQ)^d)^{i+n}\\ &- \sum_{i=1}^{n-1}(P^d)^{2(n-i)}((PQ)^d)^i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((Q(P+Q))^d)^n &= \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1}((QP)^d)^{i+n}Q^{2i}Q^\pi + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(QP)-1}(QP)^\pi(QP)^i(Q^d)^{2(i+n)}\\ &- \sum_{i=1}^{n-1}((QP)^d)^{n-i}(Q^d)^{2i},\end{aligned}$$

i važi

$$\begin{aligned}(P(P+Q))^\pi &= P^\pi(PQ)^\pi - \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(PQ)-2}(P^d)^{2(i+1)}(PQ)^{i+1}(PQ)^\pi\\ &- \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-2}P^\pi P^{2(i+1)}((PQ)^d)^{i+1},\\ (Q(P+Q))^\pi &= (QP)^\pi Q^\pi - \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-2}((QP)^d)^{i+1}Q^{2(i+1)}Q^\pi\\ &- \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(QP)-2}(QP)^\pi(QP)^{i+1}(Q^d)^{2(i+1)}.\end{aligned}$$

Primetimo da je jedan specijalan slučaj Teoreme 2.8 kada matrice P i Q zadovoljavaju uslove $P^2QP = 0$ i $PQ^2 = 0$. Slično, specijalan slučaj Teoreme 2.9 je kada su matrice P i Q takve da za njih važi $PQP^2 = 0$ i $Q^2P = 0$. Naredne dve aditivne formule su posledice ovih specijalnih slučajeva, respektivno, koje ćemo koristiti u trećeoj glavi.

Posledica 2.4 *Neka su matrice $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takve da zadovoljavaju uslove $P^2QP = 0$ i $Q^2 = 0$. Tada je*

$$(P+Q)^d = \left(\sum_{i=0}^{r-1} \left(((PQ)^d)^{i+1} + ((QP)^d)^{i+1} \right) P^{2i} P^\pi \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{s-1} \left((PQ)^\pi (PQ)^i + (QP)^\pi (QP)^i \right) (P^d)^{2(i+1)} - (P^d)^2 \right) (P+Q),$$

gde je $r = \operatorname{ind}(P^2)$ i $s = \max\{\operatorname{ind}(PQ), \operatorname{ind}(QP)\}$.

Dokaz. Kako je $Q^2 = 0$, to je $(((P+Q)Q)^d)^n = ((PQ)^d)^n$ i $((P+Q)Q)^\pi = (PQ)^\pi$, pa formula za $(P+Q)^d$ iz Teoreme 2.8 postaje

$$(P+Q)^d = \left(\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(PQ)-1} (PQ)^\pi (PQ)^i (((P+Q)P)^d)^{i+1} \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}((P+Q)P)-1} ((PQ)^d)^{i+1} ((P+Q)P)^i ((P+Q)P)^\pi \right) (P+Q),$$

gde je

$$(((P+Q)P)^d)^{i+1} = \sum_{j=0}^{\operatorname{ind}(QP)-1} (QP)^\pi (QP)^j (P^d)^{2(i+j+1)} + \sum_{i=0}^{r-1} ((QP)^d)^{i+j+1} P^{2j} P^\pi$$
$$- \sum_{j=1}^{i} ((QP)^d)^j (P^d)^{2(i+1-j)} \qquad ,$$

$$((P+Q)P)^\pi = (QP)^\pi P^\pi - \sum_{j=0}^{\operatorname{ind}(QP)-2} (QP)^\pi (QP)^{j+1} (P^d)^{2(j+1)}$$
$$- \sum_{j=0}^{\operatorname{ind}(P^2)-2} ((QP)^d)^{j+1} P^{2(j+1)} P^\pi,$$

$$((P+Q)P)^i = \sum_{j=0}^{i} (QP)^j P^{2(i-j)}.$$

Sada razlaganjem, kao i upotrebom uslova $Q^2 = 0$, dobijamo

$$\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(PQ)-1} (PQ)^\pi (PQ)^i (((P+Q)P)^d)^{i+1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(PQ)-1} (PQ)^\pi (PQ)^i \left(\sum_{j=0}^{\operatorname{ind}(QP)-1} (QP)^\pi (QP)^j (P^d)^{2(i+j+1)} \right.$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{i=0}^{r-1}((QP)^d)^{i+j+1}P^{2j}P^\pi - \sum_{j=1}^{i}((QP)^d)^j(P^d)^{2(i+1-j)}\Bigg)\\
&= \sum_{j=0}^{\operatorname{ind}(QP)-1}(QP)^\pi(QP)^j(P^d)^{2(j+1)} + \sum_{j=0}^{r-1}((QP)^d)^{j+1}P^{2j}P^\pi\\
&\quad - (PQ)^dPQ(QP)^\pi(P^d)^2 + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(PQ)-1}(PQ)^\pi(PQ)^i(I-QP(QP)^d)(P^d)^{2(i+1)}\\
&= \sum_{j=0}^{\operatorname{ind}(QP)-1}(QP)^\pi(QP)^j(P^d)^{2(j+1)} + \sum_{j=0}^{r-1}((QP)^d)^{j+1}P^{2j}P^\pi\\
&\quad - (P^d)^2 + (PQ)^\pi(P^d)^2 + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(PQ)-1}(PQ)^\pi(PQ)^i(P^d)^{2(i+1)}\\
&= \sum_{j=0}^{\operatorname{ind}(QP)-1}(QP)^\pi(QP)^j(P^d)^{2(j+1)} + \sum_{j=0}^{r-1}((QP)^d)^{j+1}P^{2j}P^\pi\\
&\quad + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(PQ)-1}(PQ)^\pi(PQ)^i(P^d)^{2(i+1)} - (P^d)^2.
\end{aligned}
$$

Slično dobijamo i

$$
\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}((P+Q)P)-1}((PQ)^d)^{i+1}((P+Q)P)^i((P+Q)P)^\pi = \sum_{i=0}^{r-1}((PQ)^d)^{i+1}P^{2i}P^\pi.
$$

Na osnovu navedenih jednakosti zaključujemo da je tvrđenje posledice tačno. □

Sledeći aditivni rezultat predstavlja simetričnu formulaciju Posledice 2.4.

Posledica 2.5 *Neka su $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrice za koje važi $PQP^2 = 0$ i $Q^2 = 0$. Tada je*

$$
\begin{aligned}
(P+Q)^d =&(P+Q)\left(\sum_{i=0}^{r-1}P^\pi P^{2i}\left(((PQ)^d)^{i+1} + ((QP)^d)^{i+1}\right)\right.\\
&\left. + \sum_{i=0}^{s-1}(P^d)^{2(i+1)}\left((PQ)^i(PQ)^\pi + (QP)^i(QP)^\pi\right) - (P^d)^2\right),
\end{aligned}
$$

gde je $r = \operatorname{ind}(P^2)$ i $s = \max\{\operatorname{ind}(PQ), \operatorname{ind}(QP)\}$.

3 Drazinov inverz blok matrica

Drazinov inverz kvadratnih kompleksnih matrica ima široku primenu i to u oblastima ko što su diferencijalne jednačine, Markovi lanci, iterativni metodi itd. Neke od ovih primena date su u radovima [9, 11, 15, 27, 37, 56, 62]. Specijalno, primena Drazinovog inverza za 2×2 blok matrice data je u radovima [9, 10, 35, 64]. Ovde navodimo primenu Drazinovog inverza 2×2 blok matrice pri rešavanju sistema diferencijalnih jednačina:

Primer 3.1 [35] *Posmatrajmo sistem diferncijalnih jednačina drugog reda*

$$Ex''(t) + Fx'(t) + Gx(t) = 0, \tag{3.1}$$

gde je matrica E singularna. Pretpostavimo da postoji λ, tako da je matrica $\lambda^2 E + \lambda F + G$ invertibilna. Dalje, pretpostavimo da je matrica G invertibilna. Ako je $x = e^{\lambda t} y(t)$, sistem (3.1) *je ekvivalentan sistemu*

$$(\lambda^2 E + \lambda F + G)^{-1} E y''(t) + (\lambda^2 E + \lambda F + G)^{-1}(F + 2\lambda E) y'(t) + y(t) = 0.$$

Označimo sa $w(t) = y'(t)$. Prethodno navedeni sistem ekvivalentan je sledećem sistemu prvog reda

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ \tilde{E} & \tilde{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

gde je

$$\tilde{E} = (\lambda^2 E + \lambda F + G)^{-1} E \quad i \quad \tilde{F} = (\lambda^2 E + \lambda F + G)^{-1}(F + 2\lambda E).$$

Sledeći inverz postoji kada je $|\mu|$ značajno malo

$$\left(\mu \begin{bmatrix} 0 & -I \\ \widetilde{E} & \widetilde{F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)^{-1}.$$

Kako bi odredili rešenja jednačine (3.2) *u funkciji od $\tilde{E}$ i $\tilde{F}$, potrebno je naći Drazinov inverz 2×2 blok matrice*

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} I & -\mu I \\ \mu \tilde{E} & \mu \tilde{F} + I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\mu I \\ \mu \tilde{E} & \mu \tilde{F} \end{bmatrix}.$$

Formule za određivanje Drazinovog inverza zbira dve kvadratne kompleksne matrice, koje su date u drugoj glavi ovog rada, su veoma korisne u pronalaženju eksplicitne reprezentacije Drazinovog inveza 2×2 blok matrice. Zapravo, kako je

$$(P+Q)^d = \begin{bmatrix} I & P \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} Q & QP \\ I & P \end{bmatrix}^d \right)^2 \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix},$$

to je problem pronalaženja Drazinovog inverza zbira dve matrice u uskoj vezi sa određivanjem Drazinovog inverza 2×2 blok matrice.

3.1 Drazinov inverz anti–trougaonih blok matrica

R.E. Hartwig i J.M. Shoaf [36], kao i C.D. Meyer i N.D. Rose [45], su 1977. godine dali opštu formulu za izračunavanje Drazinovog inverza donje i gornje trougaone blok matrice. Ova fomula je izložena u sledećoj lemi, a poznata je kao Hartwig–Meyer–Rose formula.

Lema 3.1 [36, 45] *Neka su matrice M_1 i M_2 oblika*

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

gde su A i B kvadratne matrice sa indeksima $\mathrm{ind}(A) = k$, $\mathrm{ind}(B) = l$. *Tada je* $\max\{k,l\} \leq \mathrm{ind}(M_i) \leq k+l$, *za* $i \in \{1,2\}$ *i važi*

$$M_1^d = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ X & B^d \end{bmatrix}, \quad M_2^d = \begin{bmatrix} B^d & X \\ 0 & A^d \end{bmatrix},$$

gde je

$$X = X(B,C,A) = \sum_{i=0}^{l-1} (B^d)^{i+2} C A^i A^\pi + \sum_{i=0}^{k-1} B^\pi B^i C (A^d)^{i+2} - B^d C A^d. \tag{3.3}$$

Međutim, za anti–trougaonu blok matricu još uvek ne postoji opšti izraz za izračunavanje Drazinovog inverza. C. Deng i Y. Wei [25] su 2009. godine dali reprezentacije Drazinovog inverza za gornju anti–trougaonu blok matricu pod određenim uslovima. Pomenute formule iz rada [25] izložene su u naredne dve teoreme, ali i dodatne činjenice (formulisane kao posledice ovih teorema), koje ćemo koristiti u narednom poglavlju.
Neka je data kvadratna kompleksna blok matrica M oblika

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

gde su A i nula–matrica kvadratne matrice, ne obavezno istih dimenzija.

Teorema 3.1 [25] *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana kao u* (3.4). *Ako je $ABC = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} \Phi A & \Phi B \\ C\Phi & C\Phi^2 AB \end{bmatrix},$$

gde je

$$\Phi = (A^2 + BC)^d = \sum_{i=0}^{t_1-1} (BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1} ((BC)^d)^{i+1} A^{2i} A^\pi \tag{3.5}$$

i $t_1 = \mathrm{ind}(BC)$, $\nu_1 = \mathrm{ind}(A^2)$.

Posledica 3.1 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana kao u (3.4). Ako je $ABC = 0$, tada važe sledeće jednakosti.*

(i) Za stepene matrice M važi

$$M^{2k+1} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^k A & (A^2+BC)^k B \\ C(A^2+BC)^k & C(A^2+BC)^{k-1}AB \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 1,$$

i

$$M^{2k} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^k & (A^2+BC)^{k-1}AB \\ C(A^2+BC)^{k-1}A & C(A^2+BC)^{k-1}B \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 1.$$

(ii) $(A^2+BC)^k = \sum_{j=0}^{k} (BC)^{k-j} A^{2j}$, *za* $k \geq 0$.

(iii) $(A^2+BC)^\pi = A^\pi - BC\Phi = (BC)^\pi - \Phi A^2$.

(iv) $\Phi^k = \sum_{i=0}^{t_1-1} (BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+2k} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1} ((BC)^d)^{i+k} A^{2i} A^\pi - \sum_{i=1}^{k-1} ((BC)^d)^{k-i} (A^d)^{2i}$, *za* $k \geq 1$.

(v) Za stepene matrice M^d važi

$$(M^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} \Phi^{k+1}A & \Phi^{k+1}B \\ C\Phi^{k+1} & C\Phi^{k+2}AB \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 0,$$

i

$$(M^d)^{2k} = \begin{bmatrix} \Phi^k & \Phi^{k+1}AB \\ C\Phi^{k+1}A & C\Phi^{k+1}B \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 1.$$

Dokaz. Sve dokaze, osim dokaza dela (iii), izvodimo pomoću indukcije.

(i) Iz uslova posledice $ABC = 0$, množenjem matrica dobijamo

$$M^2 = \begin{bmatrix} A^2+BC & AB \\ CA & CB \end{bmatrix},$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} (A^2+BC)A + ABC & (A^2+BC)B \\ CA^2 + CBC & CAB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)A & (A^2+BC)B \\ C(A^2+BC) & CAB \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} M^4 &= \begin{bmatrix} (A^2+BC)A^2 + (A^2+BC)BC & (A^2+BC)AB \\ C(A^2+BC)A + CABC & C(A^2+BC)B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A^2+BC)^2 & (A^2+BC)AB \\ C(A^2+BC)A & C(A^2+BC)B \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$M^5 = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^2A + (A^2+BC)ABC & (A^2+BC)^2B \\ C(A^2+BC)A^2 + C(A^2+BC)BC & C(A^2+BC)AB \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (A^2+BC)^2A & (A^2+BC)^2B \\ C(A^2+BC)^2 & C(A^2+BC)AB \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da za određeno $k \in \mathbb{N}$ važi

$$M^{2k+1} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^kA & (A^2+BC)^kB \\ C(A^2+BC)^k & C(A^2+BC)^{k-1}AB \end{bmatrix}$$

i

$$M^{2k} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^k & (A^2+BC)^{k-1}AB \\ C(A^2+BC)^{k-1}A & C(A^2+BC)^{k-1}B \end{bmatrix}.$$

Sada, jednostavnim računanjem dobijamo da tvrđenje važi i za $k+1$.

$$M^{2k+3} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^kA & (A^2+BC)^kB \\ C(A^2+BC)^k & C(A^2+BC)^{k-1}AB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2+BC & AB \\ CA & CB \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{c}(A^2+BC)^kA^3 \\ +(A^2+BC)^kBCA\end{array} & \begin{array}{c}(A^2+BC)^kA^2B \\ +(A^2+BC)^kBCB\end{array} \\ C(A^2+BC)^{k+1} & C(A^2+BC)^kAB \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (A^2+BC)^{k+1}A & (A^2+BC)^{k+1}B \\ C(A^2+BC)^{k+1} & C(A^2+BC)^kAB \end{bmatrix},$$

$$M^{2k+2} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^k & (A^2+BC)^{k-1}AB \\ C(A^2+BC)^{k-1}A & C(A^2+BC)^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^2+BC & AB \\ CA & CB \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (A^2+BC)^{k+1} & (A^2+BC)^kAB \\ \begin{array}{c}C(A^2+BC)^{k-1}A(A^2+BC) \\ +C(A^2+BC)^{k-1}BCA\end{array} & \begin{array}{c}C(A^2+BC)^{k-1}A^2B \\ +C(A^2+BC)^{k-1}BCB\end{array} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (A^2+BC)^{k+1} & (A^2+BC)^kAB \\ C(A^2+BC)^{k-1}A^3 + C(A^2+BC)^{k-1}BCA & C(A^2+BC)^kB \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (A^2+BC)^{k+1} & (A^2+BC)^kAB \\ C(A^2+BC)^kA & C(A^2+BC)^kB \end{bmatrix}.$$

Ovim je tvrđenje dokazano.

(ii) Za $k=0$ i $k=1$, očigledno važi tvrđenje. Za $k=2$ imamo

$$(A^2+BC)^2 = A^2+A^2BC+BCA^2+(BC)^2 = A^2+BCA^2+(BC)^2 = \sum_{j=0}^{2}(BC)^{2-j}A^{2j}.$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za određeno $k \in \mathbb{N}$. Dokažimo da onda važi i za $k+1$. Iz uslova $ABC = 0$, jednostavnim računanjem dobijamo

$$\begin{aligned}(A^2+BC)^{k+1} &= (A^2+BC)^k(A^2+BC) = \sum_{j=0}^{k}(BC)^{k-j}A^{2j}A^2 + \sum_{j=0}^{k}(BC)^{k-j}A^{2j}BC \\ &= \sum_{j=0}^{k}(BC)^{k-j}A^{2(j+1)} + (BC)^kBC = \sum_{j=1}^{k+1}(BC)^{k-(j-1)}A^{2j} + (BC)^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1}(BC)^{k+1-j}A^{2j}.\end{aligned}$$

(iii) Kako je $(A^2+BC)^\pi = I - (A^2+BC)\Phi = I - \Phi(A^2+BC)$, iz uslova $ABC = 0$ dobijamo:

$$\begin{aligned}(A^2+BC)^\pi &= I - (A^2+BC)\Phi \\ &= I - (A^2+BC)\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1}A^{2i}A^\pi\right) \\ &= I - \left(A^2(BC)^{pi}(A^d)^2 + BC\Phi\right) = I - AA^d - BC\Phi = A^\pi - BC\Phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A^2+BC)^\pi &= I - \Phi(A^2+BC) \\ &= I - \left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1}A^{2i}A^\pi\right)(A^2+BC) \\ &= I - \Phi A^2 - (BC)^dA^\pi BC = I - \Phi A^2 - (BC)^dBC = (BC)^\pi - \Phi A^2.\end{aligned}$$

(iv) Za $k = 1$ očigledno važi tvrđenje, jer je suma kod koje je donja granica veća od gornje jednaka nuli, tj.

$$\Phi^1 = \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1}A^{2i}A^\pi.$$

Takođe imamo

$$\begin{aligned}\Phi^2 = &\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2}(BC)^\pi(A^d)^2 \\ &+ \left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1}A^{2i}A^\pi\right)\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2}\right) \\ &+ (BC)^dA^\pi\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1}A^{2i}A^\pi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+4}(BC)^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+2}A^{2i}A^\pi \\
&\quad + (BC)^d A^\pi (BC)^\pi (A^d)^2 + (BC)^d A^\pi \sum_{i=1}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1}A^{2i}A^\pi(BC)^\pi(A^d)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+4}(BC)^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+2}A^{2i}A^\pi \\
&\quad + (BC)^d(I - AA^d)(I - BC(BC)^d)(A^d)^2
\end{aligned}
$$

Računanjem dobijamo

$$
\Phi^2 = \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+4}(BC)^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+2}A^{2i}A^\pi - (BC)^d(A^d)^2.
$$

Dakle i za $k = 2$ važi tvrđenje. Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $k \in \mathbb{N}$, tj. neka važi

$$
\Phi^k = \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2k} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k-1}((BC)^d)^{k-i}(A^d)^{2i}.
$$

Dokažimo da onda važi i za $k+1$. Uvedimo sledeće oznake

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2k}, \\
X_2 &= \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k}A^{2i}A^\pi, \\
X_3 &= \sum_{i=1}^{k-1}((BC)^d)^{k-i}(A^d)^{2i}.
\end{aligned}
$$

Prema indukcijskoj hipotezi je $\Phi^{k+1} = (X_1 + X_2 - X_3)\Phi$. Dalje, imamo

$$
\begin{aligned}
X_1\Phi &= \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2k}(BC)^\pi(A^d)^2 \\
&= \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+1)},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
X_2\Phi &= \left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k}A^{2i}A^\pi\right)\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2}\right)\\
&\quad+((BC)^d)^kA^\pi\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1}A^{2i}A^\pi\\
&=((BC)^d)^kA^\pi(BC)^\pi(A^d)^2+((BC)^d)^kA^\pi\sum_{i=1}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k}A^{2i}A^\pi(BC)^\pi(A^d)^2+\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi\\
&=((BC)^d)^k\left(I-AA^d\right)\left(I-BC(BC)^d\right)(A^d)^2+\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi\\
&=\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi-((BC)^d)^k(A^d)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_3\Phi &= \sum_{i=1}^{k-1}((BC)^d)^{k-i}(A^d)^{2i}(BC)^\pi(A^d)^2\\
&=\sum_{i=1}^{k-1}((BC)^d)^{k-i}(A^d)^{2(i+1)}.
\end{aligned}$$

Iz ovih jednakosti imamo da je

$$\begin{aligned}
\Phi^{k+1} &= \sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+1)}+\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi\\
&\quad-((BC)^d)^k(A^d)^2-\sum_{i=1}^{k-1}((BC)^d)^{k-i}(A^d)^{2(i+1)}\\
&=\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+1)}+\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi\\
&\quad-((BC)^d)^k(A^d)^2-\sum_{i=2}^{k}((BC)^d)^{k-(i-1)}(A^d)^{2i}\\
&=\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+1)}+\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi\\
&\quad-\sum_{i=1}^{k}((BC)^d)^{k+1-i}(A^d)^{2i},
\end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano.

(v) Uočimo najpre da važi sledeće:

$$A\Phi^k = A(BC)^\pi (A^d)^2k = A(A^d)^2k, \quad \Phi^k BC = ((BC)^d)^k A^\pi BC = ((BC)^d)^k BC.$$

Na osnovu uslova $ABC = 0$, množenjem matrica dobijamo

$$(M^d)^2 = \begin{bmatrix} \Phi A\Phi A + \Phi BC\Phi & \Phi A\Phi B + \Phi BC\Phi^2 AB \\ C\Phi^2 A & C\Phi^2 B \end{bmatrix}.$$

Sada, nakon računanja dobijamo:

$$\begin{aligned} \Phi A\Phi A = \Phi AA^d &= \sum_{i=0}^{t_1-1} (BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+2} AA^d \\ &= \sum_{i=0}^{t_1-1} (BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi BC\Phi &= BC(BC)^d \sum_{i=0}^{\nu_1-1} ((BC)^d)^{i+1} A^{2i} A^\pi \\ &= \sum_{i=0}^{\nu_1-1} ((BC)^d)^{i+1} A^{2i} A^\pi. \end{aligned}$$

Dakle, važi $\Phi A\Phi A + \Phi BC\Phi = \Phi$. Slično dobijamo i

$$\begin{aligned} \Phi A\Phi B = \Phi A^d B &= \sum_{i=0}^{t_1-1} (BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+2} A^d B \\ &= \sum_{i=0}^{t_1-1} (BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+4} AB, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi BC\Phi^2 AB &= BC(BC)^d \left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1} ((BC)^d)^{i+2} A^{2i} A^\pi - (BC)^d (A^d)^2 \right) AB \\ &= \sum_{i=0}^{\nu_1-1} ((BC)^d)^{i+2} A^{2i} A^\pi - (BC)^d (A^d)^2 AB. \end{aligned}$$

Stoga je $\Phi A\Phi B + \Phi BC\Phi^2 AB = \Phi^2 AB$, pa imamo

$$(M^d)^2 = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^2 AB \\ C\Phi^2 A & C\Phi^2 B \end{bmatrix}.$$

Sada, za $(M^d)^3$ imamo

$$(M^d)^3 = \begin{bmatrix} \Phi^2 A & \Phi^2 B \\ C\Phi^2 A\Phi A + C\Phi^2 BC\Phi & C\Phi^2 A\Phi B + C\Phi^2 BC\Phi^2 AB \end{bmatrix}.$$

Računanjem dobijamo

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2 A\Phi A = C\Phi^2 A^d A &= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+2} - (BC)^d (A^d)^2\right) A^d A \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+2} - (BC)^d (A^d)^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2 BC\Phi &= C\Phi BC(BC)^d\Phi = C(BC)^d BC(BC)^d \Phi = \\
&= C(BC)^d \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+1} A^{2i} A^\pi = \sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+2} A^{2i} A^\pi.
\end{aligned}
$$

Dakle, $C\Phi^2 A\Phi A + C\Phi^2 BC\Phi = C\Phi^2$. Analogno dobijamo i

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2 A\Phi B = C\Phi^2 A^d B &= C\Phi^2 (A^d)^2 AB \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+4} - (BC)^d (A^d)^2\right)(A^d)^2 AB \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi (BC)^i (A^d)^{2i+6} - (BC)^d (A^d)^4\right) AB,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2 BC\Phi^2 AB &= C\Phi BC(BC)^d \Phi^2 AB = C(BC)^d BC(BC)^d \Phi^2 AB = C(BC)^d \Phi^2 AB \\
&= C(BC)^d \left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+2} A^{2i} A^\pi - (BC)^d (A^d)^2\right) AB \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+3} A^{2i} A^\pi - ((BC)^d)^2 (A^d)^2\right) AB.
\end{aligned}
$$

Na osnovu ovih jednakosti je $C\Phi^2 A\Phi B + C\Phi^2 BC\Phi^2 AB = C\Phi^3 AB$. Sada imamo

$$
(M^d)^3 = \begin{bmatrix} \Phi^2 A & \Phi^2 B \\ C\Phi^2 & C\Phi^3 AB \end{bmatrix}.
$$

Dakle, dokazali smo da tvrđenje važi za $k = 1$, i za parne i za neparne stepene matrice M^d. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za neko $k \in \mathbb{N}$. Dokažimo da važi i za $k + 1$.

$$
\begin{aligned}
(M^d)^{2(k+1)} &= (M^d)^2 (M^d)^k \\
&= \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^2 AB \\ C\Phi^2 A & C\Phi^2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^k & \Phi^{k+1} AB \\ C\Phi^{k+1} A & C\Phi^{k+1} B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Phi^{k+1} & \Phi^{k+2} AB \\ C\Phi^2 A\Phi^k + C\Phi^2 BC\Phi^{k+1} A & C\Phi^2 A\Phi^{k+1} AB + C\Phi^2 BC\Phi^{k+1} B \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(M^d)^{2(k+1)+1} &= (M^d)^2(M^d)^{2k+1}\\
&= \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^2AB \\ C\Phi^2A & C\Phi^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Phi^{k+1}A & \Phi^{k+1}B \\ C\Phi^{k+1} & C\Phi^{k+2}AB \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \Phi^{k+2}A & \Phi^{k+2}B \\ C\Phi^2A\Phi^{k+1}A + C\Phi^2BC\Phi^{k+1} & C\Phi^2A\Phi^{k+1}B + C\Phi^2BC\Phi^{k+2}AB \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Računanjem dobijamo sledeće jednakosti.

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2A\Phi^k &= C\Phi^2(A^d)^{2k}A\\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+4} - (BC)^d(A^d)^2\right)(A^d)^{2k}A\\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+2)} - (BC)^d(A^d)^2(k+1)\right)A,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2BC\Phi^{k+1}A &= CBC((BC)^d)^2\Phi^{k+1}A = C(BC)^d\Phi^{k+1}A\\
&= C(BC)^d\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k}((BC)^d)^{k+1-i}(A^d)^{2i}\right)A\\
&= C\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+2}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k}((BC)^d)^{k+2-i}(A^d)^{2i}\right)A.
\end{aligned}
$$

Stoga je $C\Phi^2A\Phi^k + C\Phi^2BC\Phi^{k+1}A = C\Phi^{k+2}A$.

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2A\Phi^{k+1}AB &= C\Phi^2(A^d)^{2(k+1)}A^2B = C\Phi^2(A^d)^{2k}B\\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+4} - (BC)^d(A^d)^2\right)(A^d)^{2k}B\\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+2)} - (BC)^d(A^d)^{2(k+1)}\right)B,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C\Phi^2BC\Phi^{k+1}B &= CBC((BC)^d)^2\Phi^{k+1}B = C(BC)^d\Phi^{k+1}B\\
&= C(BC)^d\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k}((BC)^d)^{k+1-i}(A^d)^{2i}\right)B\\
&= C\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+2}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k}((BC)^d)^{k+2-i}(A^d)^{2i}\right)B.
\end{aligned}
$$

Dakle, $C\Phi^2A\Phi^{k+1}AB + C\Phi^2BC\Phi^{k+1}B = C\Phi^{k+2}B$. Dalje imamo

$$\begin{aligned}
C\Phi^2A\Phi^{k+1}A &= C\Phi^2(A^d)^{2(k+1)}A^2 = C\Phi^2(A^d)^{2k} \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+4} - (BC)^d(A^d)^2\right)(A^d)^{2k} \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+2)} - (BC)^d(A^d)^{2(k+1)}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C\Phi^2BC\Phi^{k+1} &= CBC((BC)^d)^2\Phi^{k+1} = C(BC)^d\Phi^{k+1} \\
&= C(BC)^d\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+1}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k}((BC)^d)^{k+1-i}(A^d)^{2i}\right) \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+2}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k}((BC)^d)^{k+2-i}(A^d)^{2i}\right).
\end{aligned}$$

Sledi da je $C\Phi^2A\Phi^{k+1}A + C\Phi^2BC\Phi^{k+1} = C\Phi^{k+2}$. Slično dobjamo i

$$\begin{aligned}
C\Phi^2A\Phi^{k+1}B &= C\Phi^2(A^d)^{2(k+1)}AB \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+4} - (BC)^d(A^d)^2\right)(A^d)^{2(k+1)}AB \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{t_1-1}(BC)^\pi(BC)^i(A^d)^{2i+2(k+3)} - (BC)^d(A^d)^{2(k+2)}\right)AB,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C\Phi^2BC\Phi^{k+2}AB &= CBC((BC)^d)^2\Phi^{k+2}AB = C(BC)^d\Phi^{k+2}AB \\
&= C(BC)^d\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+2}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k+1}((BC)^d)^{k+2-i}(A^d)^{2i}\right)AB \\
&= C\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}((BC)^d)^{i+k+3}A^{2i}A^\pi - \sum_{i=1}^{k+1}((BC)^d)^{k+3-i}(A^d)^{2i}\right)AB.
\end{aligned}$$

Stoga je $C\Phi^2A\Phi^{k+1}B + C\Phi^2BC\Phi^{k+2}AB = C\Phi^{k+3}AB$. Primenom svih dobijenih jednakosti u $(M^d)^{2(k+1)}$ i $(M^d)^{2(k+1)+1}$ imamo

$$(M^d)^{2(k+1)} = \begin{bmatrix} \Phi^{k+1} & \Phi^{k+2}AB \\ C\Phi^{k+2}A & C\Phi^{k+2}B \end{bmatrix},$$

$$(M^d)^{2(k+1)+1} = \begin{bmatrix} \Phi^{k+2}A & \Phi^{k+2}B \\ C\Phi^{k+2} & C\Phi^{k+3}AB \end{bmatrix},$$

čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Teorema 3.2 [25] *Neka je* $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrica definisana kao u* (3.4). *Ako je* $BCA = 0$, *tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B \\ C\Omega & CA\Omega^2 B \end{bmatrix},$$

gde je

$$\Omega = (A^2+BC)^d = \sum_{i=0}^{t_1-1} (A^d)^{2i+2}(BC)^i(BC)^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i}((BC)^d)^{i+1} \tag{3.6}$$

i $t_1 = \mathrm{ind}(BC)$, $\nu_1 = \mathrm{ind}(A^2)$.

Posledica 3.2 *Neka je* $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrica definisana sa* (3.4). *Ako je* $BCA = 0$, *tada važe sledeće jednakosti.*

(i) Za stepene matrice M *važi*

$$M^{2k+1} = \begin{bmatrix} A(A^2+BC)^k & (A^2+BC)^k B \\ C(A^2+BC)^k & CA(A^2+BC)^{k-1}B \end{bmatrix}, \ \textit{za } k \geq 1,$$

i

$$M^{2k} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^k & A(A^2+BC)^{k-1}B \\ CA(A^2+BC)^{k-1} & C(A^2+BC)^{k-1}B \end{bmatrix}, \ \textit{za } k \geq 1.$$

(ii) $(A^2+BC)^k = \sum_{j=0}^{k} A^{2j}(BC)^{k-j}$, *za* $k \geq 0$.

(iii) $(A^2+BC)^\pi = A^\pi - \Omega BC = (BC)^\pi - A^2\Omega$.

(iv) $\Omega^k = \sum_{i=0}^{t_1-1} (A^d)^{2i+2k}(BC)^i(BC)^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i}((BC)^d)^{i+k} - \sum_{i=1}^{k-1} (A^d)^{2i}((BC)^d)^{k-i}$, *za* $k \geq 1$.

(v) Za stepene matrice M^d *važi*

$$(M^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} A\Omega^{k+1} & \Omega^{k+1}B \\ C\Omega^{k+1} & CA\Omega^{k+2}B \end{bmatrix}, \ \textit{za } k \geq 0$$

i

$$(M^d)^{2k} = \begin{bmatrix} \Omega^k & A\Omega^{k+1}B \\ CA\Omega^{k+1} & C\Omega^{k+1}B \end{bmatrix}, \ \textit{za } k \geq 1.$$

Dokaz. Dokaz se izvodi analogno dokazu Posledice 3.1. □

Pre nego što predstavimo originalne rezultate iz rada [43], dajemo sledeću pomoćnu lemu.

Lema 3.2 [14] *Neka je data matrica $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tako da je*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

gde je $B \in \mathbb{C}^{p\times(n-p)}$, $C \in \mathbb{C}^{(n-p)\times p}$. Tada je

$$M^d = \begin{bmatrix} 0 & B(CB)^d \\ (CB)^d C & 0 \end{bmatrix}.$$

Sledeće dve teoreme predstavljaju originalne rezultate iz rada [43]. U njima su date reprezentacije Drazinovog inverza za donju anti–trougaonu matricu, pod određenim uslovima.

Neka je data kvadratna kompleksna matrica M sledećeg oblika

$$M = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

gde su nula–matrica i D kvadratne matrice, ne obavezno istih dimenzija.

Teorema 3.3 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana sa* (3.7). *Ako je $DCB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} B\Psi^2 DC & B\Psi \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix},$$

gde je

$$\Psi = (D^2 + CB)^d = \sum_{i=0}^{t_2-1} (CB)^\pi (CB)^i (D^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} ((CB)^d)^{i+1} D^{2i} D^\pi \tag{3.8}$$

i $t_2 = \mathrm{ind}(CB)$, $\nu_2 = \mathrm{ind}(D^2)$.

Dokaz. Kako je $DCB = 0$, to matrice D^2 i CB zadovoljavaju uslov Teoreme 2.2, pa njenom primenom dobijamo

$$(D^2 + CB)^d = \sum_{i=0}^{t_2-1} (CB)^\pi (CB)^i (D^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} ((CB)^d)^{i+1} D^{2i} D^\pi.$$

Uvedimo oznake

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno, $M = P + Q$. Dalje, imamo da je

$$PQP = 0, \quad PQ^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & DCB \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, matrice Pi Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.3, pa je

$$M^d = Y_1 + Y_2 + Y_1 P^d Q + (Q^d)^2 Y_2 PQ - Q^d P^d Q - (Q^d)^2 P^d PQ, \tag{3.9}$$

gde je

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Očigledno je

$$P^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^k \end{bmatrix}, \quad (P^d)^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (D^d)^k \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1,$$

kao i

$$P^\pi = I - PP^d = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D^\pi \end{bmatrix}.$$

U radu [14] je dokazano, a lako se proverava da važi i

$$Q^{2k} = \begin{bmatrix} (BC)^k & 0 \\ 0 & (CB)^k \end{bmatrix}, \quad Q^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & B(CB)^k \\ (CB)^k C & 0 \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 0.$$

Prema Lemi 3.2, imamo da je

$$Q^d = \begin{bmatrix} 0 & B(CB)^d \\ (CB)^d C & 0 \end{bmatrix}.$$

Množenjem matrica dobijamo i

$$(Q^d)^2 = \begin{bmatrix} B((CB)^d)^2 C & 0 \\ 0 & (CB)^d \end{bmatrix}, \quad (Q^d)^3 = \begin{bmatrix} 0 & B((CB)^d)^2 \\ ((CB)^d)^2 C & 0 \end{bmatrix}.$$

Indukcijom dobijamo da za $k \in \mathbb{N}$ važi

$$(Q^d)^{2k} = \begin{bmatrix} B((CB)^d)^{k+1} C & 0 \\ 0 & ((CB)^d)^k \end{bmatrix}, \quad (Q^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & B((CB)^d)^{k+1} \\ ((CB)^d)^{k+1} C & 0 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno dobijamo i

$$Q^\pi = I - QQ^d = \begin{bmatrix} I - B(CB)^d C & 0 \\ 0 & (CB)^\pi \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo Y_1 i Y_2.

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i} (P^d)^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-2} Q^\pi Q^{2i+1} (P^d)^{2i+2} \\ &= \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (CB)^i (D^d)^{2i+1} \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-2} Q^\pi \begin{bmatrix} 0 & B(CB)^i (D^d)^{2i+2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{t_2-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (CB)^\pi (CB)^i (D^d)^{2i+1} \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-2} \begin{bmatrix} 0 & (I - B(CB)^d C) B (CB)^i (D^d)^{2i+2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & B\sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi (CB)^i (D^d)^{2i+2} \\ 0 & \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi (CB)^i (D^d)^{2i+1} \end{bmatrix}.$$

Takođe imamo i

$$\begin{aligned}
Y_2 &= \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi = \sum_{i=0}^{\nu_2-1} (Q^d)^{2i+1} P^{2i} P^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} (Q^d)^{2i+2} P^{2i+1} P^\pi \\
&= Q^d P + \sum_{i=1}^{\nu_2-1} (Q^d)^{2i+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{2i} D^\pi \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} (Q^d)^{2i+2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{2i+1} D^\pi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & B(CB)^d D^\pi \\ (CB)^d C & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B\sum_{i=1}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1} D^{2i} D^\pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1} D^{2i+1} D^\pi \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Stoga je

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & B\sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1} D^{2i} D^\pi \\ (CB)^d C & \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1} D^{2i+1} D^\pi \end{bmatrix}.$$

Računanjem dobijamo i sledeće jednakosti

$$Y_1 P^d Q = \begin{bmatrix} B\sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi (CB)^i (D^d)^{2i+3} C & 0 \\ \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi (CB)^i (D^d)^{2i+2} C & 0 \end{bmatrix},$$

$$(Q^d)^2 Y_2 P Q = \begin{bmatrix} B\sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+2} D^{2i+1} D^\pi C & 0 \\ \sum_{i=1}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1} D^{2i} D^\pi C & 0 \end{bmatrix},$$

$$-Q^d P^d Q = \begin{bmatrix} -B(CB)^d D^d C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad -(Q^d)^2 P^d P Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -(CB)^d D^d D C & 0 \end{bmatrix}.$$

Primenom ovih jednakosti u (3.9) dobijamo da je

$$M^d = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

gde je

$$M_{11}^d = B\left(\sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+4} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+2}D^{2i}D^\pi - (CB)^d(D^d)^2\right)DC,$$

$$M_{12}^d = B\left(\sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1}D^{2i}D^\pi\right),$$

$$\begin{aligned} M_{21}^d &= \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2}C + \sum_{i=1}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1}D^{2i}D^\pi C + (CB)^d C - (CB)^d D^d DC \\ &= \left(\sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1}D^{2i}D^\pi\right)C, \end{aligned}$$

$$M_{22}^d = \left(\sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1}D^{2i}D^\pi\right)D.$$

Ako uvedemo oznaku

$$\Psi = \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1}D^{2i}D^\pi,$$

zbog uslova $DCB = 0$ imamo

$$\begin{aligned} \Psi^2 &= \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2}(CB)^\pi(D^d)^2 + (CB)^d D^\pi \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1}D^{2i}D^\pi \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+1}D^{2i}D^\pi\right)\left(\sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+4} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+2}D^{2i}D^\pi \\ &\quad + (CB)^d D^\pi (CB)^\pi (D^d)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+4} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+2}D^{2i}D^\pi - (CB)^d(D^d)^2. \end{aligned}$$

Primenom ovih jednakosti u (3.10) dobijamo tvrđenje teoreme važi. □

Posledica 3.3 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana sa* (3.7)*. Ako je $DCB = 0$, tada važe sledeće jednakosti.*

(i) Za stepene matrice M važi

$$M^{2k+1} = \begin{bmatrix} B(D^2+CB)^{k-1}DC & B(D^2+CB)^k \\ (D^2+CB)^kC & (D^2+CB)^kD \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 1,$$

i

$$M^{2k} = \begin{bmatrix} B(D^2+CB)^{k-1}C & B(D^2+CB)^{k-1}D \\ (D^2+CB)^{k-1}DC & (D^2+CB)^k \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 1.$$

(ii) $(D^2+CB)^k = \sum_{j=0}^{k}(CB)^{k-j}D^{2j}$, *za* $k \geq 0$.

(iii) $(D^2+CB)^\pi = D^\pi - CB\Psi = (CB)^\pi - \Psi D^2$.

(iv) $\Psi^k = \sum_{i=0}^{t_2-1}(CB)^\pi(CB)^i(D^d)^{2i+2k} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1}((CB)^d)^{i+k}D^{2i}D^\pi - \sum_{i=1}^{k-1}((CB)^d)^{k-i}(D^d)^{2i}$, *za* $k \geq 1$.

(v) Za stepene matrice M^d važi

$$(M^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} B\Psi^{k+2}DC & B\Psi^{k+1} \\ \Psi^{k+1}C & \Psi^{k+1}D \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 0,$$

i

$$(M^d)^{2k} = \begin{bmatrix} B\Psi^{k+1}C & B\Psi^{k+1}D \\ \Psi^{k+1}DC & \Psi^k \end{bmatrix}, \ za\ k \geq 1.$$

Dokaz. Analogno dokazu Posledice 3.1, (i), (ii), (iv) i (v) dokazuju se indukcijom, dok se (iii) dokazuje direktnom proverom. □

Koristeći sličan metod kao u dokazu Teoreme 3.3, dobijamo sledeći rezultat iz rada [43].

Teorema 3.4 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana sa* (3.7)*. Ako je $CBD = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} BD\Gamma^2C & B\Gamma \\ \Gamma C & D\Gamma \end{bmatrix},$$

gde je

$$\Gamma = (D^2+CB)^d = \sum_{i=0}^{t_2-1}(D^d)^{2i+2}(CB)^i(CB)^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i}((CB)^d)^{i+1} \tag{3.11}$$

i $t_2 = \mathrm{ind}(CB)$, $\nu_2 = \mathrm{ind}(D^2)$.

Dokaz. Kako je $CBD = 0$, imamo da matrice CB iD^2 zadovoljavaju uslov Teoreme 2.2, te da važi (3.11). Dalje, ako uvedemo oznake

$$P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

imamo da je $M = P + Q$, kao i da važi $QPQ = 0$ i $P^2Q = 0$. Stoga matrice P i Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.4. Dakle,

$$M^d = Y_1 + Y_2 + PQY_1(P^d)^2 + PQ^dY_2 - PQ^dP^d - PQQ^d(P^d)^2, \tag{3.12}$$

gde su

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Trivijalno dobijamo da za $k \in \mathbb{N}$ važi

$$Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^k \end{bmatrix}, \quad (Q^d)^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (D^d)^k \end{bmatrix}, \quad Q^\pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D^\pi \end{bmatrix}.$$

Primenom Leme 3.2 na matricu P dobijamo:

$$P^{2k} = \begin{bmatrix} (BC)^k & 0 \\ 0 & (CB)^k \end{bmatrix} \text{ i } P^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & B(CB)^k \\ (CB)^kC & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 0,$$

$$(P^d)^{2k} = \begin{bmatrix} B((CB)^d)^{k+1}C & 0 \\ 0 & ((CB)^d)^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

$$(P^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & B((CB)^d)^{k+1} \\ ((CB)^d)^{k+1}C & 0 \end{bmatrix} \quad \text{za } k \geq 0,$$

$$P^\pi = \begin{bmatrix} I - B(CB)^dC & 0 \\ 0 & (CB)^\pi \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo sve elemente sume (3.12). Nakon računanja dobijamo

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & B(CB)^d \\ \sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i}((CB)^d)^{i+1}C & \sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+1}((CB)^d)^{i+1} \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{t_2-1} (D^d)^{2i+2}(CB)^i(CB)^\pi C & \sum_{i=0}^{t_2-1} (D^d)^{2i+1}(CB)^i(CB)^\pi \end{bmatrix},$$

$$PQY_1(P^d)^2 = \begin{bmatrix} B\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+1}((CB)^d)^{i+2}C & B\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+2}((CB)^d)^{i+2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$PQ^dY_2 = \begin{bmatrix} B\sum_{i=0}^{t_2-1}(D^d)^{2i+3}(CB)^i(CB)^\pi C & B\sum_{i=0}^{t_2-1}(D^d)^{2i+2}(CB)^i(CB)^\pi C \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-PQQ^d(P^d)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -BDD^d(CB)^d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad -PQ^dP^d = \begin{bmatrix} -BD^d(CB)^dC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primenom ovih jednakosti u (3.12) dobijamo da tvrđenje važi. □

Posledica 3.4 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana sa* (3.7)*. Ako je $CBD = 0$, tada važe sledeće jednakosti.*

(i) Za stepene matrice M važi

$$M^{2k+1} = \begin{bmatrix} BD(D^2+CB)^{k-1}C & B(D^2+CB)^k \\ (D^2+CB)^kC & D(D^2+CB)^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

i

$$M^{2k} = \begin{bmatrix} B(D^2+CB)^{k-1}C & BD(D^2+CB)^{k-1} \\ (D^2+CB)^{k-1}C & (D^2+CB)^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1.$$

(ii) $(D^2+CB)^k = \sum_{j=0}^{k} D^{2j}(CB)^{k-j}$, *za* $k \geq 0$.

(iii) $(D^2+CB)^\pi = D^\pi - \Gamma CB = (CB)^\pi - D^2\Gamma$.

(iv) $\Gamma^k = \sum_{i=0}^{t_2-1}(D^d)^{2i+2k}(CB)^i(CB)^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i}((CB)^d)^{i+k} - \sum_{i=1}^{k-1}(D^d)^{2i}((CB)^d)^{k-i}$, *za* $k \geq 1$.

(v) Za stepene matrice M^d važi

$$(M^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} BD\Gamma^{k+2}C & B\Gamma^{k+1} \\ \Gamma^{k+1}C & D\Gamma^{k+1} \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 0,$$

i

$$(M^d)^{2k} = \begin{bmatrix} B\Gamma^{k+1}C & BD\Gamma^{k+1} \\ D\Gamma^{k+1}C & \Gamma^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1.$$

Dokaz. Posledica se dokazuje analogno Posledici 3.1. □

3.2 Reprezentacije Drazinovog inverza za 2×2 blok matricu

Uočimo kvadratnu kompleksnu matricu

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

gde su A i D kvadratne matrice ne obavezno istih dimenzija. Problem pronalaženja eksplicitne reprezentacije Drazinovog inverza matrice M, bez dodatnih uslova za blokove od M, postavili su S.L. Campbell i C.D. Meyer [11], 1979. godine. Od tada, ovaj problem proučava veliki broj naučnika i publikovano je mnogo radova na ovu temu. Problem još uvek nije rešen, te i dalje predstavlja veoma aktuelnu temu u okviru teorije Drazinovog inverza.

Jedan od radova gde je proučavan ovaj problem je rad autora D.S. Djordjević i P.S. Stanimirović [27]. U ovom radu data je reprezentacija za Drazinov inverz matrice ograničenog operatora pod određenim uslovima. Mi navodimo ovu reprezentaciju, primenjenu na matrice.

Teorema 3.5 [27] *Neka je matrica M definisana sa* (3.13). *Ako je $BC = 0$, $DC = 0$ i $BD = 0$ tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2 B \\ C(A^d)^2 & D^d + C(A^d)^3 B \end{bmatrix}.$$

Godine 2006. R.E. Hartwig, X. Li i Y. Wei su u svom radu [35], između ostalog, predstavili reprezentaciju za M^d pod uslovima $BC = 0$, $DC = 0$ i D je nilpotentna matrica, tj zamenili su uslov $BD = 0$ Teoreme 3.5 [27] uslovom da je D nilpotentna matrica.

Teorema 3.6 [35] *Neka je matrica M definisana kao u* (3.13). *Ako je $BC = 0$, $DC = 0$ i D je nilpotentna matrica, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} A^d \begin{bmatrix} I & \sum\limits_{i=0}^{j-1} (A^d)^{i+1} B D^i \end{bmatrix},$$

gde je $j = \operatorname{ind}(D)$. Takođe važi i $\operatorname{ind}(M) \leq \operatorname{ind}(A) + \operatorname{ind}(D) + 1$.

U pomenutom radu [35], autori su dali i reprezentaciju za M^d pod uslovima $BC = 0$, $BD = 0$ i D je nilpotentna matrica, tj. zamenili su uslov $DC = 0$ Teoreme 3.5 [27] uslovom D je nilpotentna matrica.

Posledica 3.5 [35] *Ako je M matrica definisana kao u* (3.13), *čiji blokovi ispunjavaju uslove $BC = 0$, $BD = 0$ i D je nilpotentna matrica, onda je*

$$M^d = \begin{bmatrix} I \\ \sum\limits_{i=0}^{j-1} D^i C (A^d)^{i+1} \end{bmatrix} A^d \begin{bmatrix} I & A^d B \end{bmatrix},$$

gde je $j = \operatorname{ind}(D)$. Takođe važi i $\operatorname{ind}(M) \leq \operatorname{ind}(A) + \operatorname{ind}(D) + 1$.

D.S. Cvetković–Ilić je 2008. godine u radu [19] dala formulu za M^d koja važi samo pod uslovima $BC = 0$ i $DC = 0$, bez dodatnog uslova $BD = 0$ iz [27] ili D je nilpotentna matrica iz [35].

Teorema 3.7 [19] *Neka je matrica M definisana kao u* (3.13) *i* $\mathrm{ind}(A) = r$, $\mathrm{ind}(D) = s$. *Ako je $BC = 0$ i $DC = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d & X \\ C(A^d)^2 & D^d + CXD^d + CA^dX \end{bmatrix},$$

gde je X definisano kao u (3.3), *ali u funkciji matrica A, B, D, tj.*

$$X = X(A,B,D) = \sum_{i=0}^{s-1}(A^d)^{i+2}BD^iD^\pi + \sum_{i=0}^{r-1}A^\pi A^iB(D^d)^{i+2} - A^dBD^d$$

E. Dopazo i M.F. Martínez–Serrano su 2010. godine u svom radu [28] dale reprezentaciju za M^d pod uslovima $BC = 0$ i $BD = 0$, bez dodatnog uslova $DC = 0$ iz [27] ili D je nilpotentna matrica iz [35]. Ova reprezentacija dobijena je kao posledica teoreme koja važi pod uslovima $BC = 0$, $BDC = 0$ i $BD^2 = 0$.

Teorema 3.8 [28] *Neka je matrica M definisana sa* (3.13), *tako da je* $\mathrm{ind}(A) = r$, $\mathrm{ind}(D) = s$. *Ako je $BC = 0$, $BDC = 0$ i $BD^2 = 0$ tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^3(AB+BD) \\ \Sigma_0 & D^d + (D^d)^3CB + \Sigma_2(AB+BD) \end{bmatrix},$$

gde je

$$\begin{aligned} \Sigma_k = (D^d)^2\sum_{i=0}^{r-1}(D^d)^{i+k}CA^iA^\pi + D^\pi\sum_{i=0}^{s-1}D^iC(A^d)^{i+k}(A^d)^2 \\ - \sum_{i=0}^{k}(D^d)^{i+1}C(A^d)^{k-i+1},\ k \geq 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Posledica 3.6 [28] *Neka je M matrica definisana kao u* (3.13) *i* $\mathrm{ind}(A) = r$, $\mathrm{ind}(D) = s$. *Ako važi $BC = 0$ i $BD = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2B \\ \Sigma_0 & D^d + \Sigma_1B \end{bmatrix},$$

gde je Σ_k, $k \geq 0$, definisano kao u (3.14).

U sledećoj teoremi izlažemo originalan rezultat iz rada [42], a koji predstavlja uopštenje Posledice 3.6 [28], pa samim tim i Posledice 3.5 [35], kao i Teoreme 3.5 [27].

Teorema 3.9 *Neka je matrica M definisana sa* (3.13) *i neka je* $\operatorname{ind}(A) = r$, $\operatorname{ind}(D) = s$. *Ako je $BCA = 0$, $BCB = 0$, $ABD = 0$ i $CBD = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + B\Sigma_1 + ((A^d)^3 + B\Sigma_3)BC & \begin{matrix}(A^d)^2B + B(D^d)^2 + B\Sigma_2 B \\ +B\Sigma_3 BD\end{matrix} \\ \Sigma_0 + \Sigma_2 BC & D^d + \Sigma_1 B + \Sigma_2 BD \end{bmatrix},$$

gde je Σ_k, $k \geq 0$, definisano kao u (3.14).

Dokaz. Ako uvedemo oznake

$$P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

imamo da je $M = P + Q$. Očigledno je da je $Q^2 = 0$, te je $Q^d = 0$ i $Q^\pi = I$. Takođe, važi $PQ^2P = 0$ i $PQ^3 = 0$. Računanjem dobijamo

$$PQP^2 = \begin{bmatrix} ABCA + ABDC & ABD^2 \\ CBCA + CBDC & CBD^2 \end{bmatrix} = 0 \ \text{ i } \ PQPQ = \begin{bmatrix} 0 & ABCB \\ 0 & CBCB \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, imamo da matrice P i Q zadovoljavaju uslove Posledice 2.1, pa je

$$\begin{aligned} M^d &= Y_1 + Y_2 + \left(Y_1(P^d)^2 + (Q^d)^2 Y_2 - \sum_{i=1}^{2} (Q^d)^i (P^d)^{3-i} \right) PQ \\ &\quad + \left(Y_1(P^d)^3 + (Q^d)^3 Y_2 - \sum_{i=1}^{3} (Q^d)^i (P^d)^{4-i} \right) (PQP + PQ^2), \end{aligned}$$

gde je

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Kako je $Q^2 = 0$, to je $Y_1 = P^d + Q(P^d)^2$ i $Y_2 = 0$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} M^d &= Y_1 + \left(Y_1(P^d)^2\right) PQ + \left(Y_1(P^d)^3\right) PQP \\ &= P^d + Q(P^d)^2 + \left(P^d + Q(P^d)^2\right)(P^d)^2 PQ + \left(P^d + Q(P^d)^2\right)(P^d)^3 PQP \\ &= P^d + Q(P^d)^2 + (P^d)^3 PQ + Q(P^d)^4 PQ + (P^d)^4 PQP + Q(P^d)^5 PQP, \end{aligned}$$

pa stoga važi

$$M^d = P^d + Q(P^d)^2 + (P^d)^2 Q + Q(P^d)^3 Q + (P^d)^3 QP + Q(P^d)^4 QP. \tag{3.15}$$

Izračunajmo sada $(P^d)^k$, za $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Na osnovu Leme 3.1 imamo da je

$$P^d = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ X & D^d \end{bmatrix},$$

gde je gde je X definisano kao u (3.3), ali u funkciji matrica D, C, A, tj.

$$X = X(D,C,A) = \sum_{i=0}^{r-1} (D^d)^{i+2} C A^i A^\pi + \sum_{i=0}^{s-1} D^\pi D^i C (A^d)^{i+2} - D^d C A^d.$$

Očigledno je $X = \Sigma_0$, gde je Σ_k definisano u (3.14). Ako uvedemo oznake

$$X_1 = \sum_{i=0}^{s-1} D^\pi D^i C (A^d)^{i+2} \ \text{ i } \ X_2 = \sum_{i=0}^{r-1} (D^d)^{i+2} C A^i A^\pi,$$

imamo da je

$$\Sigma_k = X_1 (A^d)^k + (D^d)^k X_2 - \sum_{i=0}^{k} (D^d)^{i+1} C (A^d)^{k-i+1}, \quad \text{za } k \geq 0.$$

Očigledno je $D^d X_1 = 0$ i $X_2 A^d = 0$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
(P^d)^2 &= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & 0 \\ \Sigma_0 A^d + D^d \Sigma_0 & (D^d)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & 0 \\ X_1 A^d - D^d C (A^d)^2 + D^d X_2 - (D^d)^2 C A^d & (D^d)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & 0 \\ X_1 A^d + D^d X_2 - \sum_{i=0}^{1} (D^d)^{i+1} C (A^d)^{2-i} & (D^d)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^d)^2 & 0 \\ \Sigma_1 & (D^d)^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Slično dobijamo i

$$\begin{aligned}
(P^d)^3 &= \begin{bmatrix} (A^d)^3 & 0 \\ \Sigma_0 (A^d)^2 + D^d \Sigma_0 A^d + (D^d)^2 \Sigma_0 & (D^d)^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^3 & 0 \\ X_1 (A^d)^2 - D^d C (A^d)^3 - (D^d)^2 C (A^d)^2 + (D^d)^2 X_2 - (D^d)^3 C A^d & (D^d)^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^3 & 0 \\ X_1 (A^d)^2 + (D^d)^2 X_2 - \sum_{i=0}^{2} (D^d)^{i+1} C (A^d)^{2-i} & (D^d)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^d)^3 & 0 \\ \Sigma_2 & (D^d)^3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(P^d)^4 &= \begin{bmatrix} (A^d)^4 & 0 \\ \Sigma_0(A^d)^3 + D^d\Sigma_0(A^d)^2 + (D^d)^2\Sigma_0 A^d + (D^d)^3\Sigma_0 & (D^d)^4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^4 & 0 \\ \begin{array}{c} X_1(A^d)^3 - D^dC(A^d)^4 - (D^d)^2C(A^d)^3 \\ -(D^d)^3C(A^d)^2 + (D^d)^3X_2 - (D^d)^4CA^d \end{array} & (D^d)^4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^4 & 0 \\ X_1(A^d)^3 + (D^d)^3X_2 - \displaystyle\sum_{i=0}^{3}(D^d)^{i+1}C(A^d)^{4-i} & (D^d)^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^d)^4 & 0 \\ \Sigma_3 & (D^d)^4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dakle, za $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ važi

$$
(P^d)^k = \begin{bmatrix} (A^d)^k & 0 \\ \Sigma_{k-1} & (D^d)^k \end{bmatrix}.
$$

Sada možemo da izračunamo sve elemente sume (3.15).

$$
P^d = \begin{bmatrix} A^d & 0 \\ \Sigma_0 & D^d \end{bmatrix}, \quad Q(P^d)^2 = \begin{bmatrix} B\Sigma_1 & B(D^d)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
(P^d)^2Q = \begin{bmatrix} 0 & (A^d)^2B \\ 0 & \Sigma_1 B \end{bmatrix}, \quad Q(P^d)^3Q = \begin{bmatrix} 0 & B\Sigma_2 B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
(P^d)^3QP = \begin{bmatrix} (A^d)^3BC & 0 \\ \Sigma_2BC & \Sigma_2BD \end{bmatrix}, \quad Q(P^d)^4QP = \begin{bmatrix} B\Sigma_3BC & B\Sigma_3BD \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Primenom ovih jednakosti u (3.15) dobijamo

$$
M^d = \begin{bmatrix} M^d_{11} & M^d_{12} \\ M^d_{21} & M^d_{22} \end{bmatrix},
$$

gde je

$$M^d_{11} = A^d + B\Sigma_1 + (A^d)^3BC + B\Sigma_3BC,$$

$$M^d_{12} = B(D^d)^2 + (A^d)^2B + B\Sigma_2B + B\Sigma_2BD,$$

$$M^d_{21} = \Sigma_0 + \Sigma_2BC,$$

$$M^d_{22} = D^d + \Sigma_1B + \Sigma_2BD.$$

Ovim je teorema dokazana. □

U sledećem primeru posmatramo 2×2 blok matricu M čiji blokovi ne zadovoljavaju uslove Teoreme 3.5 [27], Teoreme 3.6 [35], Posledice 3.5 [35], Teoreme 3.7 [19], Teoreme 3.8 [28], pa samim tim ni Posledice 3.6 [28]. Drazinov inverz matrice M odredićemo primenom Teoreme 3.9.

Primer 3.2 *Neka je matrica M definisana sa (3.13), tako da su njeni blokovi sledeće matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jednostavnim računanjem dobijamo da je $BC \neq 0$, pa ne možemo primeniti ni jednu od pomenutih formula za M^d iz radova [27, 35, 19, 28]. Međutim, nakon računanja dobijamo da za blokove matrice M važi $BCA = 0$, $BCB = 0$, $ABD = 0$ i $CBD = 0$. Stoga su uslovi Teoreme 3.9 ispunjeni. Primenom ove teoreme dobijamo sledeću reprezentaciju za M^d.

$$M^d = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{7}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{7}{3} & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{11}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{9} & \frac{10}{3} & 0 & -\frac{10}{3} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{35}{9} & 0 & \frac{35}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{85}{27} & -\frac{1}{3} & 3 & \frac{4}{27} & \frac{52}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{46}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{35}{9} & 0 & \frac{35}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D.S. Cvetković–Ilić, J. Chen i Z. Xu su u radu [20] dali reprezentaciju za M^d pod uslovima $CA = 0$ i $CB = 0$. Sledeća teorema je originalan rezultat iz rada [42], a predstavlja uopštenje pomenutog rezultata iz [20], ali i rezultata Teoreme 3.5 [27].

Teorema 3.10 *Neka je matrica M definisana kao u (3.13) i neka je $\operatorname{ind}(A) = r$, $\operatorname{ind}(D) = s$. Ako je $BCA = 0$, $DCA = 0$, $CBC = 0$ i $CBD = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + Z_1 C + Z_2 CA & Z_0 + Z_2 CB \\ \begin{array}{c}(D^d)^2 C + C(A^d)^2 + CZ_2 C \\ +CZ_3 CA\end{array} & D^d + CZ_1 + ((D^d)^3 + CZ_3)CB \end{bmatrix},$$

gde je

$$\begin{aligned} Z_k = &\sum_{i=0}^{s-1}(A^d)^{i+k+2}BD^iD^\pi + \sum_{i=0}^{r-1} A^\pi A^i B(D^d)^{i+k+2} \\ &-\sum_{i=0}^{k}(A^d)^{i+1}B(D^d)^{k-i+1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo analogno dokazu Teoreme 3.9. Uvedimo sledeće oznake

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno je $M = P + Q$, kao i $Q^2 = 0$, te je $Q^d = 0$ i $Q^\pi = I$. Dalje, računanjem dobijamo

$$PQP^2 = \begin{bmatrix} BCA^2 & BCAB + BCBD \\ DCA^2 & DCAB + DCBD \end{bmatrix} = 0, \quad \text{i} \quad PQPQ = \begin{bmatrix} BCBC & 0 \\ DCBC & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, matrice P i Q zadovoljavaju uslove Posledice 2.1, te je

$$\begin{aligned} M^d &= Y_1 + Y_2 + \left(Y_1(P^d)^2 + (Q^d)^2 Y_2 - \sum_{i=1}^{2}(Q^d)^i(P^d)^{3-i}\right) PQ \\ &+ \left(Y_1(P^d)^3 + (Q^d)^3 Y_2 - \sum_{i=1}^{3}(Q^d)^i(P^d)^{4-i}\right)(PQP + PQ^2), \end{aligned}$$

gde je

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Kako je $Q^2 = 0$, to je $Y_1 = P^d +^Q (P^d)^2$, $Y_2 = 0$ i važi

$$M^d = P^d + Q(P^d)^2 + (P^d)^2 Q + Q(P^d)^3 Q + (P^d)^3 QP + Q(P^d)^4 QP. \tag{3.17}$$

Prema Lemi 3.1 imamo

$$P^d = \begin{bmatrix} A^d & X \\ 0 & D^d \end{bmatrix},$$

gde je

$$X = X(A, B, D) = \sum_{i=0}^{l-1}(A^d)^{i+2}BD^iD^\pi + \sum_{i=0}^{k-1} A^\pi A^i B(D^d)^{i+2} - A^dBD^d.$$

Primetimo da je $X = Z_0$. Ako uvedemo oznake

$$X_1 = \sum_{i=0}^{k-1} A^\pi A^i B(D^d)^{i+2}, \quad X_2 = \sum_{i=0}^{l-1}(A^d)^{i+2}BD^iD^\pi,$$

imamo da je $A^dX_1 = 0$ i $X_2D^d = 0$. Stoga važi

$$
\begin{aligned}
(P^d)^2 &= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & A^dZ_0 + Z_0D^d \\ 0 & (D^d)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & A^dX_2 - (A^d)^2BD^d + X_1D^d - A^dB(D^d)^2 \\ 0 & (D^d)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & Z_1 \\ 0 & (D^d)^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Analogno dobijamo i sledeće jednakosti

$$
(P^d)^3 = \begin{bmatrix} (A^d)^3 & Z_2 \\ 0 & (D^d)^3 \end{bmatrix}, \quad (P^d)^4 = \begin{bmatrix} (A^d)^4 & Z_3 \\ 0 & (D^d)^4 \end{bmatrix}.
$$

Nakon računanja svih elemenata sume (3.17) dobijamo:

$$
P^d = \begin{bmatrix} A^d & Z_0 \\ 0 & D^d \end{bmatrix}, \quad Q(P^d)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C(A^d)^2 & CZ_1 \end{bmatrix},
$$

$$
(P^d)^2Q = \begin{bmatrix} Z_1C & 0 \\ (D^d)^2C & 0 \end{bmatrix}, \quad Q(P^d)^3Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CZ_2C & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
(P^d)^3QP = \begin{bmatrix} Z_2CA & Z_2CB \\ 0 & (D^d)^3CB \end{bmatrix}, \quad Q(P^d)^4QP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CZ_3CA & CZ_3CB \end{bmatrix}.
$$

Primenom ovih jednakosti u (3.17) dobijamo da važi tvrđenje teoreme. □

Kao direktnu posledicu prethodne teoreme dobijamo pomenuti rezultat iz rada [20].

Posledica 3.7 [20] *Neka je matrica M definisana kao u* (3.13) *i* $\operatorname{ind}(A) = r$, $\operatorname{ind}(D) = s$. *Ako je $CA = 0$ i $CB = 0$, tada je*

$$
M^d = \begin{bmatrix} A^d + Z_1C & Z_0 \\ (D^d)^2C & D^d \end{bmatrix},
$$

gde je Z_k, $(k \geq 0)$ definisano kao u (3.16).

U narednom primeru data je 2×2 blok matrica M, čiji blokovi ne zadovoljavaju uslove Teoreme 3.5 [27], kao ni Posledice 3.7 [20], pa Drazinov inverz matrice M ne možemo odrediti prema ovim formulama. Reprezentaciju za M^d dobijamo pomoću originalnog rezultata izloženog u Teoremi 3.10.

Primer 3.3 *Neka je matrica M definisana kao u* (3.13)*, gde je*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednostavnim računom dobijamo da je $BC \neq 0$, kao i $CB \neq 0$, pa za M^d ne možemo primeniti pomenute formule iz radova [27, 20]*. Lako se proverava da za blokove matrice M važi $BCA = 0$, $DCA = 0$, $CBC = 0$ i $CBD = 0$. Stoga možemo primeniti Teoremu 3.10, pa dobijamo sledeću reprezentaciju za M^d.*

$$M^d = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{28}{9} & -\frac{77}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{134}{27} & \frac{8}{3} \\ 5 & 0 & -5 & 5 & -5 & 0 & 15 & 5 \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{28}{9} & -\frac{77}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{134}{27} & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Naredne dve teoreme su takođe originalni rezultati iz rada [42], a predstavljaju uopštenje formula za M^d iz rada [28].

Teorema 3.11 *Neka je matrica M definisana sa* (3.13)*, $\mathrm{ind}(A) = r$, $\mathrm{ind}(D) = s$. Ako je $BD^\pi C = 0$, $BDD^d = 0$, $DD^\pi CA = 0$ i $DD^\pi CB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + \sum_{i=0}^{s-1} (A^d)^{i+3} BD^i C & \sum_{i=0}^{s-1} (A^d)^{i+2} BD^i \\ \Phi_0 + \sum_{i=0}^{s-1} \Phi_{i+2} BD^i C & D^d + \sum_{i=0}^{s-1} \Phi_{i+1} BD^i \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

gde je, za $k \geq 0$,

$$\Phi_k = \sum_{i=0}^{r-1} (D^d)^{i+k+2} C A^i A^\pi + D^\pi C (A^d)^{k+2} - \sum_{i=0}^{k} (D^d)^{i+1} C (A^d)^{k-i+1}. \tag{3.19}$$

Dokaz. Primetimo najpre da iz uslova teoreme $BD^\pi C = 0$ i $BDD^d = 0$ imamo sledeće jednakosti.

$$\begin{aligned} BD^\pi &= B(I - DD^d) = B - BDD^d = B, \\ 0 &= BD^\pi C = B(I - DD^d)C = BC - BDD^d C = BC. \end{aligned}$$

Predstavimo matricu M u obliku $M = P + Q$, gde su

$$P = \begin{bmatrix} 0 & BDD^d \\ 0 & DD^\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & DD^\pi \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & BD^\pi \\ C & D^2 D^d \end{bmatrix}.$$

Dalje, za matricu P imamo da važi

$$P^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^k D^\pi \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1. \tag{3.20}$$

Kako je $D^s D^\pi = 0$, $s = \operatorname{ind}(D)$, to je očigledno matrica P s-nilpotentna. Stoga je $P^d = 0$ i $P^\pi = I$. Jednostavnim računanjem dobijamo

$$PQ^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ DD^\pi CA & DD^\pi CBD^\pi \end{bmatrix} = 0, \quad PQP = 0.$$

Dakle, matrice P i Q ispunjavaju uslove Teoreme 2.3, te je

$$(P+Q)^d = Y_1 + Y_2 + \left(Y_1 (P^d)^2 + (Q^d)^2 Y_2 - Q^d (P^d)^2 - (Q^d)^2 P^d\right) PQ,$$

gde su

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Kako je matrica P s-nilpotentna, to je $Y_1 = 0$ i $Y_2 = \sum_{i=0}^{s-1} (Q^d)^{i+1} P^i$. Stoga je

$$M^d = \sum_{i=0}^{s-1} (Q^d)^{i+1} P^i + \sum_{i=0}^{s-2} (Q^d)^{i+3} P^{i+1} Q. \tag{3.21}$$

Odredimo sada Q^d i stepene od Q^d. Kako je $BD^\pi C = 0$ i $BD^\pi D^2 D^d = 0$, to blokovi matrice Q ispunjavaju uslove Posledice 3.6, pa njenom primenom dobijamo

$$Q^d = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2 BD^\pi \\ \Sigma_0 & (D^2 D^d)^d + \Sigma_1 BD^\pi \end{bmatrix},$$

gde je Σ_k definisano u (3.14). Prema Teoremi **??**, (vi), imamo da je $(D^2D^d)^d = D^d$, te je i $(D^2D^d)^\pi = D^\pi$. Uvedimo oznaku $l = \mathrm{ind}(D^2D^d)$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\Sigma_k &= \sum_{i=0}^{r-1} \left((D^2D^d)^d\right)^{i+k+2} CA^iA^\pi + \sum_{i=0}^{l-1}(D^2D^d)^\pi(D^2D^d)^iC(A^d)^{i+k+2} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k} \left((D^2D^d)^d\right)^{i+1} C\left(A^d\right)^{k-i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \left(D^d\right)^{i+k+2} CA^iA^\pi + \sum_{i=0}^{l-1} D^\pi(D^2D^d)^iC(A^d)^{i+k+2} - \sum_{i=0}^{k} \left(D^d\right)^{i+1} C\left(A^d\right)^{k-i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} \left(D^d\right)^{i+k+2} CA^iA^\pi + D^\pi C(A^d)^{k+2} - \sum_{i=0}^{k} \left(D^d\right)^{i+1} C\left(A^d\right)^{k-i+1} \\
&= \Phi_k.
\end{aligned}$$

Dakle, imamo da je

$$Q^d = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2BD^\pi \\ \Phi_0 & D^d + \Phi_1BD^\pi \end{bmatrix},$$

gde je Φ_k definisano kao u (3.19). Kako je $BD^\pi C = 0$, to je $BD^\pi\Phi_k = 0$. Primenom ove jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
(Q^d)^2 &= \begin{bmatrix} (A^d)^2 + (A^d)^2BD^\pi\Phi_0 & (A^d)^3BD^\pi + (A^d)^2BD^\pi\left(D^d + \Phi_1BD^\pi\right) \\ \Phi_0A^d + \left(D^d + \Phi_1BD^\pi\right)\Phi_0 & \Phi_0(A^d)^2BD^\pi + \left(D^d + \Phi_1BD^\pi\right)^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & (A^d)^3BD^\pi \\ \Phi_0A^d + D^d\Phi_0 & (D^d)^2 + \left(\Phi_0(A^d)^2 + D^d\Phi_1\right)BD^\pi \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Izračunavanjem dobijamo

$$\begin{aligned}
\Phi_0A^d + D^d\Phi_0 &= D^\pi C(A^d)^3 - D^dC(A^d)^2 + \sum_{i=0}^{r-1}(D^d)^{i+3}CA^iA^\pi - (D^d)^2CA^d \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}(D^d)^{i+3}CA^iA^\pi + D^\pi C(A^d)^3 - \sum_{i=0}^{1}(D^d)^{i+1}C(A^d)^{2-i} \\
&= \Phi_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0(A^d)^2 + D^d\Phi_1 &= D^\pi C(A^d)^4 - D^dC(A^d)^3 \\
&\quad + \sum_{i=0}^{r-1}(D^d)^{i+4}CA^iA^\pi - (D^d)^2C(A^d)^2 - (D^d)^3CA^d \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}(D^d)^{i+4}CA^iA^\pi + D^\pi C(A^d)^4 - \sum_{i=0}^{2}(D^d)^{i+1}C(A^d)^{3-i} \\
&= \Phi_2.
\end{aligned}$$

Dakle, imamo da je

$$(Q^d)^2 = \begin{bmatrix} (A^d)^2 & (A^d)^3BD^\pi \\ \Phi_1 & (D^d)^2 + \Phi_2BD^\pi \end{bmatrix}.$$

Indukcijom dokazujemo da je

$$(Q^d)^k = \begin{bmatrix} (A^d)^k & (A^d)^{k+1}BD^\pi \\ \Phi_{k-1} & (D^d)^k + \Phi_kBD^\pi \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1. \tag{3.22}$$

Primenom jednakosti (3.20) i (3.22) u (3.21) dobijamo sledeće

$$\begin{aligned}
M^d &= \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2BD^\pi \\ \Phi_0 & D^d + \Phi_1BD^\pi \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{s-1} \begin{bmatrix} (A^d)^{i+1} & (A^d)^{i+2}BD^\pi \\ \Phi_i & (D^d)^{i+1} + \Phi_{i+1}BD^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^iD^\pi \end{bmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{s-2} \begin{bmatrix} (A^d)^{i+3} & (A^d)^{i+4}BD^\pi \\ \Phi_{i+2} & (D^d)^{i+3} + \Phi_{i+3}BD^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{i+1}D^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BD^\pi \\ C & D^2D^d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2BD^\pi \\ \Phi_0 & D^d + \Phi_1BD^\pi \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{s-1} \begin{bmatrix} 0 & (A^d)^{i+2}BD^\pi D^i \\ 0 & \Phi_{i+1}BD^\pi D^i \end{bmatrix} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{s-2} \begin{bmatrix} (A^d)^{i+4}BD^\pi D^{i+1}C & 0 \\ \Phi_{i+3}BD^\pi D^{i+1}C & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^d + \sum\limits_{i=0}^{s-2}(A^d)^{i+4}BD^\pi D^{i+1}C & \sum\limits_{i=0}^{s-1}(A^d)^{i+2}BD^\pi D^i \\ \Phi_0 + \sum\limits_{i=0}^{s-2} \Phi_{i+3}BD^\pi D^{i+1}C & D^d + \sum\limits_{i=0}^{s-1} \Phi_{i+1}BD^\pi D^i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Kako je $BD^\pi C = 0$, to imamo

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + \sum\limits_{i=0}^{s-1}(A^d)^{i+3}BD^\pi D^iC & \sum\limits_{i=0}^{s-1}(A^d)^{i+2}BD^\pi D^i \\ \Phi_0 + \sum\limits_{i=0}^{s-2} \Phi_{i+2}BD^\pi D^iC & D^d + \sum\limits_{i=0}^{s-1} \Phi_{i+1}BD^\pi D^i \end{bmatrix}.$$

Kako je $BD^\pi = B$, to je reprezentacija za M^d data u (3.18) tačna. □

Kao direktnu posledicu Teoreme 3.11 imamo sledeću reprezentaciju za M^d iz rada [28].

Posledica 3.8 [28] *Neka je matrica M definisana sa*(3.13), $\mathrm{ind}(A) = r$, $\mathrm{ind}(D) = s$.

Ako je $BD^\pi C = 0$, $BDD^d = 0$ i $DD^\pi C = 0$, tada je

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d & \sum_{i=0}^{s-1}(A^d)^{i+2}BD^i \\ \Phi_0 & D^d + \sum_{i=0}^{s-1}\Phi_{i+1}BD^i \end{bmatrix},$$

gde je za $k \geq 1$, Φ_k definisano kao u (3.19).

Teorema 3.12 *Neka je matrica M definisana kao u* (3.13), $\mathrm{ind}(A) = r$, $\mathrm{ind}(D) = s$. *Ako je $BD = 0$, $D^\pi CA^2 = 0$, $D^\pi CAB = 0$ i $D^\pi CBC = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + (A^d)^3BC + (A^d)^4BCA & (A^d)^2B + (A^d)^4BCB \\ \Psi_0 + \Psi_2BC + \Psi_3BCA & D^d + \Psi_1B + \Psi_3BCB \end{bmatrix}, \tag{3.23}$$

gde je, za $k \geq 0$,

$$\Psi_k = \sum_{i=0}^{r-1}(D^d)^{i+k+2}CA^iA^\pi - \sum_{i=0}^{k}(D^d)^{i+1}C(A^d)^{k-i+1}. \tag{3.24}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo analogno dokazu Teoreme 3.11. Primetimo najpre da iz uslova teoreme $BD = 0$ imamo $BD^\pi = B$, što ćemo koristiti tokom celog dokaza. Uvedimo oznake

$$P = \begin{bmatrix} 0 & BDD^d \\ D^\pi C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D^\pi C & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & BD^\pi \\ DD^dC & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ DD^dC & D \end{bmatrix}.$$

Očigledno je $M = P + Q$. Takođe, $P^2 = 0$, te je $P^d = 0$ i $P^\pi = I$. Primenom uslova teoreme dobijamo da matrice P i Q zadovoljavaju sledeće jednakosti

$$PQP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D^\pi CBD^\pi C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D^\pi CBC & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$PQ^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D^\pi CA^2 & D^\pi CABD^\pi + D^\pi CBD^\pi D \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, matrice P i Q ispunjavaju uslove Teoreme 2.3, te je

$$M^d = Y_1 + Y_2 + \left(Y_1(P^d)^2 + (Q^d)^2Y_2 - Q^d(P^d)^2 - (Q^d)^2P^d\right)PQ,$$

gde su

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i(P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1}P^iP^\pi.$$

Kako je $P^2 = 0$, to je $Y_1 = 0$ i $Y_2 = Q^d + (Q^d)^2P$, pa imamo da važi

$$M^d = Q^d + (Q^d)^2P + (Q^d)^3PQ. \tag{3.25}$$

Kako bi odredili Q^d, primetimo da blokovi matrice Q zadovoljavaju uslove Posledice 3.6. Primenom ove posledice dobijamo

$$Q^d = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2 BD^\pi \\ \Sigma_0 & D^d + \Sigma_1 BD^\pi \end{bmatrix},$$

gde je, za $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\Sigma_k &= \sum_{i=0}^{r-1} (D^d)^{i+k+2} DD^d CA^i A^\pi + \sum_{i=0}^{s-1} D^\pi D^i D^d DC (A^d)^{i+k+2} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k} (D^d)^{i+1} DD^d C (A^d)^{k-i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} (D^d)^{i+k+2} CA^i A^\pi - \sum_{i=0}^{k} (D^d)^{i+1} C (A^d)^{k-i+1} \\
&= \Psi_k.
\end{aligned}$$

Dakle, važi

$$Q^d = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2 BD^\pi \\ \Psi_0 & D^d + \Psi_1 BD^\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2 B \\ \Psi_0 & D^d + \Psi_1 B \end{bmatrix}.$$

Očigledno, $B\Psi_k = BD^\pi \Psi_k = 0$, pa na osnovu prethodne jednakosti imamo

$$\begin{aligned}
(Q^d)^2 &= \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2 BD^\pi \\ \Psi_0 & D^d + \Psi_1 BD^\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^d & (A^d)^2 B \\ \Psi_0 & D^d + \Psi_1 B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A^d)^2 & (A^d)^3 B \\ \Psi_0 A^d + D^d \Psi_0 & (D^d)^2 + \big(\Psi_0 (A^d)^2 + D^d \Psi_1\big) B \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Računanjem dobijamo

$$\begin{aligned}
\Psi_0 A^d + D^d \Psi_0 &= -D^d C (A^d)^2 + \sum_{i=0}^{r-1} (D^d)^{i+3} CA^i A^\pi - (D^d)^2 CA^d \\
&= \Psi_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_0 (A^d)^2 + D^d \Psi_1 &= -D^d C (A^d)^3 + \sum_{i=0}^{r-1} (D^d)^{i+4} CA^i A^\pi - (D^d)^3 CA^d - (D^d)^2 C (A^d)^2 \\
&= \Psi_2,
\end{aligned}$$

te je

$$(Q^d)^2 = \begin{bmatrix} (A^d)^2 & (A^d)^3 B \\ \Psi_1 & (D^d)^2 + \Psi_2 B \end{bmatrix}.$$

Slično dobijamo i

$$(Q^d)^3 = \begin{bmatrix} (A^d)^3 & (A^d)^4B \\ \Psi_2 & (D^d)^3 + \Psi_3 B \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo sve elemente sume (3.25)

$$(Q^d)^2P = \begin{bmatrix} (A^d)^3BD^\pi C & 0 \\ \Psi_2 BD^\pi C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^d)^3BC & 0 \\ \Psi_2 BC & 0 \end{bmatrix},$$

$$(Q^d)^3PQ = \begin{bmatrix} (A^d)^4BD^\pi CA & (A^d)^4BD^\pi CB \\ \Psi_3 BD^\pi CA & \Psi_3 BD^\pi CB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^d)^4BCA & (A^d)^4BCB \\ \Psi_3 BCA & \Psi_3 BCB \end{bmatrix}.$$

Primenom dobijenih jednakosti za Q^d, $(Q^d)^2P$ i $(Q^d)^3PQ$ u (3.25) dobijamo (3.23). □

Kao direktnu posledicu Teoreme 3.12 dobijamo sledeću reprezentaciju za M^d iz [28].

Posledica 3.9 [28] *Neka je M matrica definisana u* (3.13), $\mathrm{ind}(A) = r$ *i* $\mathrm{ind}(D) = s$. *Ako je $BD = 0$, $D^\pi CA = 0$ i $D^\pi CB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + (A^d)^3BC & (A^d)^2B \\ \Psi_0 + \Psi_2 BC & D^d + \Psi_1 B \end{bmatrix},$$

gde je, za $k \geq 0$, Ψ_k definisano kao u (3.24).

U narednom delu ovog poglavlja predstavljamo originalne rezultate iz rada [43].

H. Yang i X. Liu su 2011. godine dali reprezentaciju za M^d pod uslovima $BCB = 0$, $BCA = 0$, $DCA = 0$ i $DCB = 0$ (videti [63], Teorema 3.1), čime su generalizovali pomenute rezultate iz Teoreme 3.5 [27], Teoreme 3.6 [35] i Teoreme 3.7 [19]. U sledećoj teoremi data je reprezentacija za M^d koja važi samo pod uslovima $BCA = 0$, $DCA = 0$ i $DCB = 0$, bez dodatnog uslova $BCB = 0$ iz pomenutog rada [63].

Teorema 3.13 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana kao u* (3.13). *Ako je $BCA = 0$, $DCA = 0$ i $DCB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + \Sigma_0 C & B\Psi + A\Sigma_0 \\ \begin{array}{c} \Psi C + CA\Sigma_1 C + C(A^d)^2 \\ -CA^d(B\Psi^2 D + AB\Psi^2)C \end{array} & D^d + C\Sigma_0 \end{bmatrix},$$

gde je

$$\Sigma_k = \left(V_1\Psi^k + (A^d)^{2k}V_2\right)D + A\left(V_1\Psi^k + (A^d)^{2k}V_2\right), \ \textit{za } k = 0, 1, \tag{3.26}$$

$$V_1 = \sum_{i=0}^{\nu_1 - 1} A^\pi A^{2i} B\Psi^{i+2}, \tag{3.27}$$

$$V_2 = \sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+4}B(D^2+CB)^iD^\pi - \sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+2}B(CB)^i\Psi, \tag{3.28}$$

$\nu_1 = \mathrm{ind}(A^2)$, $\mu_1 = \mathrm{ind}(D^2+CB)$ *i* Ψ *je definisano kao u* (3.8).

Dokaz. Uvedimo oznake

$$P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno je $M = P + Q$. Množenjem matrica dobijamo da je $QPQ = 0$ i iz uslova $BCA = 0$ i $DCA = 0$ dobijamo

$$P^2Q = \begin{bmatrix} BCA & 0 \\ DCA & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, matrice P i Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.4, pa važi

$$(P+Q)^d = Y_1 + Y_2 + PQY_1(P^d)^2 + PQ^dY_2 - PQQ^d(P^d)^2 - PQ^dP^d, \tag{3.29}$$

gde su

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i(P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1}(Q^d)^{i+1}P^iP^\pi.$$

Trivijalno dobijamo da za $k \geq 1$ važi

$$Q^k = \begin{bmatrix} A^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (Q^d)^k = \begin{bmatrix} (A^d)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^\pi = \begin{bmatrix} A^\pi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Iz uslova $DCB = 0$ sledi da matrica P zadovoljava uslov Teoreme 3.3, pa njenom primenom dobijamo

$$P^d = \begin{bmatrix} B\Psi^2DC & B\Psi \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix}.$$

Primenom Posledice 3.3 na matricu P imamo

$$P^{2k} = \begin{bmatrix} B(CB+D^2)^{k-1}C & B(CB+D^2)^{k-1}D \\ (CB+D^2)^{k-1}DC & (CB+D^2)^k \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1,$$

$$P^{2k+1} = \begin{bmatrix} B(CB+D^2)^{k-1}DC & B(CB+D^2)^k \\ (CB+D^2)^kC & (CB+D^2)^kD \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1,$$

$$(P^d)^{2k} = \begin{bmatrix} B\Psi^{k+1}C & B\Psi^{k+1}D \\ \Psi^{k+1}DC & \Psi^k \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1,$$

$$(P^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} B\Psi^{k+2}DC & B\Psi^{k+1} \\ \Psi^{k+1}C & \Psi^{k+1}D \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 0,$$

$$P^\pi = \begin{bmatrix} I - B\Psi C & -B\Psi D \\ -CB\Psi^2DC - D\Psi C & I - (CB\Psi + D\Psi D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - B\Psi C & -B\Psi D \\ -\Psi DC & D^\pi - CB\Psi \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo sve elemente sume (3.29). Kako je

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i}(P^d)^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2},$$

i

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i}(P^d)^{2i+1} &= Q^\pi P^d + \sum_{i=1}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i}(P^d)^{2i+1} \\
&= \begin{bmatrix} A^\pi B\Psi^2DC & A^\pi B\Psi \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} \begin{bmatrix} A^\pi A^{2i}B\Psi^{i+2}DC & A^\pi A^{2i}B\Psi^{i+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i}B\Psi^{i+2}DC & \sum\limits_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i}B\Psi^{i+1} \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i}B\Psi^{i+2}DC & \sum\limits_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+2} + A^\pi B\Psi \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+2}C & \sum\limits_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+2}D \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

to, nakon upotrebe oznake $V_1 = \sum\limits_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i}B\Psi^{i+2}$ date u (3.27), imamo da je

$$Y_1 = \begin{bmatrix} (V_1D + AV_1)C & A^\pi B\Psi + A(V_1D + AV_1) \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix}.$$

Dalje, imamo da je

$$Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1}P^iP^\pi = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+1}P^{2i}P^\pi + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+2}P^{2i+1}P^\pi.$$

Sada, kako je $(D^2+CB)^\pi = D^\pi - CB\Psi$, imamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1}(Q^d)^{2i+1}P^{2i}P^\pi = Q^dP^\pi + \sum_{i=1}^{\mathrm{ind}(P^2)-1}(Q^d)^{2i+1}P^{2i}P^\pi\\
&= \begin{bmatrix} A^d - A^dB\Psi C & -A^dB\Psi D\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{\mu_1}\begin{bmatrix} (A^d)^{2i+1}B(D^2+CB)^{i-1}D^\pi C & (A^d)^{2i+1}B(D^2+CB)^{i-1}D^\pi D\\ -(A^d)^{2i+1}B(D^2+CB)^{i-1}CB\Psi C & -(A^d)^{2i+1}B(D^2+CB)^{i-1}CB\Psi D\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} A^d + \displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+3}B(D^2+CB)^iD^\pi C & \displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+3}B(D^2+CB)^iD^\pi D\\ -\displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+1}B(CB)^i\Psi C & -\displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+1}B(CB)^i\Psi D\\ 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1}(Q^d)^{2i+2}P^{2i+1}P^\pi = (Q^d)^2PP^\pi + \sum_{i=1}^{\mathrm{ind}(P^2)-1}(Q^d)^{2i+2}P^{2i+1}P^\pi\\
&= \begin{bmatrix} -(A^d)^2B\Psi DC & (A^d)^2BD^\pi - (A^d)^2BCB\Psi\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{\mathrm{ind}(P^2)-1}\begin{bmatrix} (A^d)^{2i+2}B(D^2+CB)^{i-1}DC & (A^d)^{2i+2}B(D^2+CB)^iD^\pi\\ -(A^d)^{2i+2}B(D^2+CB)^i\Psi DC & -(A^d)^{2i+2}B(D^2+CB)^iCB\Psi\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+4}B(D^2+CB)^iD^\pi DC & \displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+2}B(D^2+CB)^iD^\pi\\ -\displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+2}B(CB)^i\Psi DC & -\displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+2}B(CB)^{i+1}\Psi\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+4}B(D^2+CB)^iD^{pi}DC & \displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+2}B(D^2+CB)^iD^\pi\\ -\displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+2}B(CB)^i\Psi DC & -\displaystyle\sum_{i=1}^{\mu_1}(A^d)^{2i}B(CB)^i\Psi\\ 0 & 0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Sada, ako uvedemo oznaku $V_2 = \sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+4}B(D^2+CB)^iD^\pi - \sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+2}B(CB)^i\Psi$ kao u (3.28), imamo

$$Y_2 = \begin{bmatrix} A^d + (V_2D + AV_2)C & A(V_2D + AV_2) + AA^dB\Psi \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Dalje, imamo

$$PQY_1(P^d)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+2}DC & C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+1} \\ +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+2}C & +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+2}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B\Psi^2C & B\Psi^2D \\ \Psi^2DC & \Psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+2}CB\Psi^2C & C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+2}CB\Psi^2D \\ +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+3}DC & +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+2} \\ +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+2}D\Psi^2DC & +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+2}D\Psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+2}B\Psi^{i+3}C & C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i}B\Psi^{i+2}D - CA^\pi B\Psi^2D \\ +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+3}DC & +C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i+1}B\Psi^{i+2} \end{bmatrix}.$$

Upotrebom oznake V_1 date u (3.27) imamo

$$PQY_1(P^d)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA(AV_1\Psi + V_1\Psi D)C & C(V_1D + AV_1) - CA^\pi B\Psi^2D \end{bmatrix}.$$

Jednostavnim računanjem dobijamo sledeći izraz za PQ^dY_2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{array}{c} C(A^d)^2 + C\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+4}B(D^2+CB)^iD^\pi C \\ -C\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+2}B(CB)^i\Psi C \\ +C\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+5}B(D^2+CB)^iD^{pi}DC \\ -C\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+3}B(CB)^i\Psi DC \end{array} & \begin{array}{c} C\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+4}B(D^2+CB)^iD^\pi D \\ -C\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+2}B(CB)^i\Psi D \\ +C\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(A^d)^{2i+3}B(D^2+CB)^iD^\pi \\ -C\sum_{i=0}^{\mu_1}(A^d)^{2i+1}B(CB)^i\Psi + CA^dB\Psi \end{array} \end{bmatrix}.$$

Sada ako upotrebimo oznaku za V_2 datu u (3.28), imamo

$$PQ^dY_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C(A^d)^2 + CA((A^d)^2V_2D + A(A^d)^2V_2)C & C(V_2D + AV_2) + CA^dB\Psi \end{bmatrix}.$$

Računanjem dobijamo još preostala dva elementa sume (3.29):

$$-PQ^dP^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -CA^dB\Psi^2DC & -CA^dB\Psi \end{bmatrix},$$

$$-PQQ^d(P^d)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -CAA^dB\Psi^2C & -CAA^dB\Psi^2D \end{bmatrix}.$$

Sabiranjem svih elemenata sume (3.29) dobijamo da je

$$M^d = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix},$$

gde je

$$M_{11}^d = A^d + ((V_1+V_2)D + A(V_1+V_2))C,$$

$$M_{12}^d = B\Psi + A((V_1+V_2)D + A(V_1+V_2)),$$

$$\begin{aligned} M_{21}^d &= C(A^d)^2 + CA((A^d)^2V_2D + (A^d)^2AV_2)C + CA(AV_1\Psi + V_1\Psi D)C \\ &\quad - CA^dB\Psi^2DC - CA^dAB\Psi^2C + \Psi C \\ &= C(A^d)^2 + CA\left((V_1\Psi + (A^d)^2V_2)D + A(V_1\Psi + (A^d)^2V_2)\right)C \\ &\quad - CA^d(B\Psi^2D + AB\Psi^2) + \Psi C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{22}^d &= C\left((V_1+V_2)D + A(V_1+V_2)\right) - CB\Psi^2 D + \Psi D \\
&= C\left((V_1+V_2)D + A(V_1+V_2)\right) - \left(\Psi - D^2\Psi^2\right) D + \Psi D \\
&= C\left((V_1+V_2)D + A(V_1+V_2)\right) + D^d
\end{aligned}$$

Primenom oznake Σ_k date u (3.26) dobijamo da važi tvrđenje. □

Kao direktnu posledicu prethodne teoreme dobijamo sledeći originalan rezultat, takođe iz rada [43].

Posledica 3.10 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana sa* (3.13)*. Ako je $DCB = 0$ i $CA = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + \Sigma_0 C & B\Psi + A\Sigma_0 \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix},$$

gde je Σ_0 definisano kao u (3.26) *i Ψ je dato u* (3.8)*.*

Dokaz. Treba dokazati samo da je $D^d + \Sigma_0 = \Psi D$.

$$\begin{aligned}
D^d + \Sigma_0 &= D^d + C\left((V_1+V_2)D + A(V_1+V_2)\right) = D^d + CV_1 D + CV_2 D \\
&= D^d + CV_1 D = D^d + C\sum_{i=0}^{\nu_1-1} A^\pi A^{2i} B \Psi^{i+2} D = D^d + CB\Psi^2 D \\
&= D^d + \left(\Psi - D^2\Psi^2\right) D = D^d + \Psi D - (D^d)^2 D = \Psi D. \square
\end{aligned}$$

Očigledno je Posledica 3.10, pa samim tim i Teorema 3.13, generalizacija slučaja kada je $CB = 0$ i $CA = 0$ iz rada [20], koji smo predstavili u Posledici 3.7. Sledeći rezultat je takođe posledica Teoreme 3.13, a može se dobiti i kao samostalan rezultat.

Posledica 3.11 *Neka je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrica definisana kao u* (3.13)*. Ako je $BCA = 0$ i $DC = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B + RD \\ C\Omega & D^d + CR \end{bmatrix},$$

gde je

$$\begin{aligned}
R &= (R_1+R_2)D + A(R_1+R_2), \\
R_1 &= \sum_{i=0}^{\mu_2-1} A^\pi (A^2+BC)^i B (D^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_2} \Omega (BC)^i B (D^d)^{2i+2}, \\
R_2 &= \sum_{i=0}^{\nu_2-1} \Omega^{i+2} B D^{2i} D^\pi,
\end{aligned}$$

$\nu_2 = \operatorname{ind}(D^2)$, $\mu_2 = \operatorname{ind}(A^2+BC)$ i Ω je definisano kao u (3.6)*.*

Dokaz. Neka je
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$
Tada je $M = P + Q$. Kako važi
$$PQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ DC & 0 \end{bmatrix},$$
to matrice P i Q zadovoljavaju uslov Teoreme 2.2, pa važi
$$M^d = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi. \tag{3.30}$$

Trivijalno dobijamo da za $k \in \mathbb{N}$ važi
$$P^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^k \end{bmatrix}, \quad (P^d)^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (D^d)^k \end{bmatrix}, \quad P^\pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D^\pi \end{bmatrix}.$$

Kako je $BCA = 0$, to matrica Q zadovoljava uslov Teoreme 3.2, pa je
$$Q^d = \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B \\ C\Omega & CA\Omega^2 B \end{bmatrix}.$$

Takođe, matrica Q zadovoljava uslov Posledice 3.2, pa njenom primenom dobijamo sledeće jednakosti:
$$Q^{2k} = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^k & A(A^2+BC)^{k-1}B \\ CA(A^2+BC)^{k-1} & C(A^2+BC)^{k-1}B \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1,$$
$$Q^{2k+1} = \begin{bmatrix} A(A^2+BC)^k & (A^2+BC)^k B \\ C(A^2+BC)^k & CA(A^2+BC)^{k-1}B \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1,$$

$$(Q^d)^{2k} = \begin{bmatrix} \Omega^k & A\Omega^{k+1}B \\ CA\Omega^{k+1} & C\Omega^{k+1}B \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 1$$
$$(Q^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} A\Omega^{k+1} & \Omega^{k+1}B \\ C\Omega^{k+1} & CA\Omega^{k+2}B \end{bmatrix}, \quad \text{za } k \geq 0.$$

Na osnovu Posledice 3.2 imamo da je $(A^2+BC)^\pi = A^\pi - \Omega BC = (BC)^\pi - A^2\Omega$, pa je
$$Q^\pi = \begin{bmatrix} A^\pi - \Omega BC & -A\Omega B \\ -CA\Omega & I - C\Omega B \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo sve elemente sume (3.30). Kako je

$$\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1} = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i} (P^d)^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1} (P^d)^{2i+2},$$

i

$$\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+1} P^{2i} P^\pi + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+2} P^{2i+1} P^\pi,$$

to ćemo odrediti posebno svaku od ove četiri sume.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i} (P^d)^{2i+1} &= Q^\pi P^d + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i} (P^d)^{2i+1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -A\Omega B D^d \\ 0 & D^d - C\Omega B D^d \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} \begin{bmatrix} 0 & \begin{array}{c} A^\pi (A^2+BC)^{i-1} B (D^d)^{2i+1} \\ -A\Omega BC (A^2+BC)^{i-1} B (D^d)^{2i+1} \end{array} \\ 0 & \begin{array}{c} -CA\Omega A (A^2+BC)^{i-1} B (D^d)^{2i+1} \\ +C (A^2+BC)^{i-1} B (D^d)^{2i+1} \\ -C\Omega BC (A^2+BC)^{i-1} B (D^d)^{2i+1} \end{array} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \begin{array}{c} A \sum_{i=1}^{\mu_2} A^\pi (A^2+BC)^{i-1} B (D^d)^{2i+1} \\ -A\Omega B D^d - A \sum_{i=1}^{\mu_2} \Omega (BC)^i B (D^d)^{2i+1} \end{array} \\ 0 & \begin{array}{c} D^d + C \sum_{i=1}^{\mu_2} A^\pi (A^2+BC)^{i-1} B (D^d)^{2i+1} \\ -C\Omega B D^d - C \sum_{i=1}^{\mu_2} \Omega (BC)^i B (D^d)^{2i+1} \end{array} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & A \sum_{i=0}^{\mu_2-1} A^\pi (A^2+BC)^i B (D^d)^{2i+3} - A \sum_{i=0}^{\mu_2} \Omega (BC)^i B (D^d)^{2i+1} \\ 0 & D^d + C \sum_{i=0}^{\mu_2-1} A^\pi (A^2+BC)^i B (D^d)^{2i+3} - C \sum_{i=0}^{\mu_2} \Omega (BC)^i B (D^d)^{2i+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ako uprotrebimo oznaku $R_1 = \sum_{i=0}^{\mu_2-1} A^\pi (A^2+BC)^i B (D^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_2} \Omega (BC)^i B (D^d)^{2i+2}$, imamo da je

$$\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i} (P^d)^{2i+1} = \begin{bmatrix} 0 & AR_1 D \\ 0 & D^d + CR_1 D \end{bmatrix}.$$

Analogno dobijamo i

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2} &= Q^\pi Q (P^d)^2 + \sum_{i=1}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & A^\pi B(D^d)^2 - \Omega BCB(D^d)^2 \\ 0 & -CA\Omega B(D^d)^2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{\mu_2-1} A^\pi (A^2+BC)^i B(D^d)^{2i+2} - \sum_{i=1}^{\mu_2-1} \Omega BC(A^2+BC)^i B(D^d)^{2i+2} \\ 0 & CA\sum_{i=1}^{\mu_2} (A^2+BC)^\pi (A^2+BC)^{i-1} B(D^d)^{2i+2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \sum_{i=0}^{\mu_2-1} A^\pi (A^2+BC)^i B(D^d)^{2i+2} - \sum_{i=0}^{\mu_2-1} \Omega (BC)^{i+1} B(D^d)^{2i+2} \\ 0 & CA\sum_{i=0}^{\mu_2-1} A^\pi (A^2+BC)^i B(D^d)^{2i+4} - CA\sum_{i=0}^{\mu_2} \Omega (BC)^i B(D^d)^{2i+2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

pa upotrebom oznake za R_1 dobijamo

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega BDD^d + R_1 D^2 \\ 0 & CAR_1 \end{bmatrix}.$$

Na sličan način dobijamo i

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+1} P^{2i} P^\pi &= Q^d P^\pi + \sum_{i=1}^{\nu_2-1} (Q^d)^{2i+1} P^{2i} P^\pi \\
&= \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega BD^\pi \\ C\Omega & CA\Omega^2 BD^\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{\nu_2-1} \Omega^{i+1} BD^{2i} D^\pi \\ 0 & CA\sum_{i=1}^{\nu_2-1} \Omega^{i+2} BD^{2i} D^\pi \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega BD^\pi + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} \Omega^{i+2} BD^{2i+2} D^\pi \\ C\Omega & CA\sum_{i=0}^{\nu_2-1} \Omega^{i+2} BD^{2i} D^\pi \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

pa upotrebom oznake $R_2 = \sum_{i=0}^{\nu_2-1} \Omega^{i+2} BD^{2i} D^\pi$ imamo

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+1} P^{2i} P^\pi = \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega BD^\pi + R_2 D^2 \\ C\Omega & CAR_2 \end{bmatrix}.$$

Takođe, imamo

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+2} P^{2i+1} P^{\pi} = \begin{bmatrix} 0 & A \sum_{i=0}^{\nu_2 - 1} \Omega^{i+2} B D^{2i+1} D^{\pi} \\ 0 & C \sum_{i=0}^{\nu_2 - 1} \Omega^{i+2} B D^{2i+1} D^{\pi} \end{bmatrix},$$

pa primenom oznake za R_2 dobijamo

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+2} P^{2i+1} P^{\pi} = \begin{bmatrix} 0 & AR_2D \\ 0 & CR_2D \end{bmatrix}.$$

Sada, nakon sabiranja svih elemenata sume (3.30), dobijamo

$$\begin{aligned} M^d &= \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B + A(R_1 + R_2)D + (R_1 + R_2)D^2 \\ C\Omega & D^d + C(R_1 + R_2)D + CA(R_1 + R_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B + \left(A(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)D\right) D \\ C\Omega & D^d + C\left(A(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2)D\right) \end{bmatrix}. \square \end{aligned}$$

Ističemo da je Posledica 3.11, pa samim tim i Teorema 3.13, generalizacija rezultata iz rada [12], gde je pored uslova $BCA = 0$ i $DC = 0$ neophodan i uslov $BD = 0$ (videti [12], Teorema 4.4) ili uslov da je D nilpotentna matrica (videti [12], Teorema 4.5). Dakle, Teorema 3.13 je generalizacija slučajeva navedenih u sledećoj listi:

(i) $BC = 0$, $DC = 0$ i $BD = 0$ [27];

(ii) $BC = 0$, $DC = 0$ i D je nilpotentna matrica [35];

(iii) $BC = 0$ i $DC = 0$ [19];

(iv) $BCB = 0$, $BCA = 0$, $DCB = 0$ i $DCA = 0$ [63];

(v) $CA = 0$ i $CB = 0$ [20];

(vi) $BCA = 0$, $DC = 0$ i $BD = 0$ [12];

(vii) $BCA = 0$, $DC = 0$ i D je nilpotentna matrica [12].

U narednom primeru posmatramo matricu M oblika (3.13) čiji blokovi ne zadovoljavaju uslove date u prethodnoj listi, pa reprezentaciju za M^d ne možemo dobiti pomoću pomenutih rezultata. Međutim, blokovi matrice M zadovoljavaju uslove Posledice 3.11, pa samim tim i Teoreme 3.13, te njenom primenom dobijamo reprezentaciju za M^d.

Primer 3.4 *Neka je matrica M definisana kao u* (3.13), *gde je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $BC \neq 0$, $BCB \neq 0$, $CA \neq 0$, $BD \neq 0$ i D nije nilpotentna matrica, to formulu za M^d ne možemo dobiti primenom pomenutih rezultata iz radova [27, 35, 19, 63, 20, 12]. Kako je $BCA = 0$ i $DC = 0$, to su ispunjeni uslovi Posledice 3.11, pa njenom primenom možemo da dobijemo reprezentaciju za M^d.
Uočimo prvo da je D idempotentna matrica, pa je $\mathrm{ind}(D) = 1$, $D^d = D$. *Nakon računanja dobijamo* $\mathrm{ind}(A) = 1$, $\mathrm{ind}(BC) = 1$, $\mathrm{ind}(A^2 + BC) = 1$ *i*

$$A^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (BC)^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada, nakon primene Posledice 3.11 dobijamo sledeću reprezentaciju za M^d.

$$M^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

N. Castro–González, E. Dopazo i M.F. Martínez–Serrano dali su eksplicitnu reprezentaciju za M^d pod uslovima $BCA = 0$, $BD = 0$ i BC je nilpotentna matrica (videti [12], Teorema 4.2). Ovaj rezultat je uopštila D.S. Cvetković–Ilić i dala reprezentaciju za M^d samo pod uslovima $BCA = 0$ i $BD = 0$, bez dodatnog uslova da je BC nilpotentna matrica (videti [23], Teorema 2.1). Sledeća teorema predtavlja uopštenje ovih rezultata.

Teorema 3.14 *Neka je M matrica definisana kao u* (3.13). *Ako je $BCA = 0$, $ABD = 0$ i $CBD = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A\Omega + B(F_1 + F_2) & \begin{array}{c} \Omega B + BD(F_1\Omega + (D^d)^2 F_2)B \\ +B(D^d)^2 - BD^d(CA + DC)\Omega^2 B \end{array} \\ C\Omega + D(F_1 + F_2) & D^d + (F_1 + F_2)B \end{bmatrix},$$

gde je

$$F_1 = \sum_{i=0}^{\nu_2 - 1} D^\pi D^{2i}(CA + DC)\Omega^{i+2},$$
$$F_2 = \sum_{i=0}^{\mu_2 - 1}(D^d)^{2i+4}(CA + DC)(A^2 + BC)^i(BC)^\pi - \sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+2}(CA + DC)A^{2i}\Omega,$$

$\nu_2 = \mathrm{ind}(D^2)$, $\mu_2 = \mathrm{ind}(A^2 + BC)$ *i* Ω *je definisano kao u* (3.6).

Dokaz. Teorema se dokazuje analogno dokazu Teoreme 3.13. Ako uvedemo oznake

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

imamo da je $M = P + Q$. Takođe, imamo da je $QPQ = 0$ i $P^2 Q = 0$, pa matrice P i Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.4. Dakle, važi

$$M^d = Y_1 + Y_2 + PQY_1(P^d)^2 + PQ^d Y_2 - PQQ^d(P^d)^2 - PQ^d P^d, \tag{3.31}$$

gde su

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Trivijalno dobijamo da za $k \in \mathbb{N}$ važi

$$Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^k \end{bmatrix}, \quad (Q^d)^k = Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (D^d)^k \end{bmatrix}, \quad Q^\pi = Q^k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & DD^d \end{bmatrix}.$$

Kako je $BCA = 0$, matrica P ispunjava uslov Teoreme 3.2, te je

$$P^d = \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B \\ C\Omega & CA\Omega^2 B \end{bmatrix}.$$

Takođe, matrica P ispunjava uslov Posledice 3.2, pa stoga važi

$$P^{2k} = \begin{bmatrix} (A^2 + BC)^k & A(A^2 + BC)^{k-1}B \\ CA(A^2 + BC)^{k-1} & C(A^2 + BC)^{k-1}B \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

$$P^{2k+1} = \begin{bmatrix} A(A^2 + BC)^k & (A^2 + BC)^k B \\ C(A^2 + BC)^k & CA(A^2 + BC)^{k-1}B \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

i

$$(P^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} A\Omega^{k+1} & \Omega^{k+1}B \\ C\Omega^{k+1} & CA\Omega^{k+2}B \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 0,$$

$$(P^d)^{2k} = \begin{bmatrix} \Omega^{k} & A\Omega^{k+1}B \\ CA\Omega^{k+1} & C\Omega^{k+1}B \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

kao i

$$P^\pi = \begin{bmatrix} (A^2+BC)^\pi & -A\Omega B \\ -CA\Omega & I - C\Omega B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (BC)^\pi - A^2\Omega & -A\Omega B \\ -CA\Omega & I - C\Omega B \end{bmatrix}.$$

Nakon računanja, dobijamo sledeće jednakosti:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i} C\Omega^{i+1} + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+1} CA\Omega^{i+2} & \displaystyle\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i} CA\Omega^{i+2}B + \sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+1} C\Omega^{i+2}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A\Omega & \Omega B \\ DF_1 + D^\pi C\Omega & F_1 B \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{array}{c} \displaystyle\sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+3}CA(A^2+BC)^i(BC)^\pi \\ \displaystyle -\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+1}CA^{2i+1}\Omega \\ \displaystyle +\sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+2}C(A^2+BC)^i(BC)^\pi \\ \displaystyle -\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+2}CA^{2i+2}\Omega \end{array} & \begin{array}{c} \displaystyle D^d + \sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+3}C(A^2+BC)^i(BC)^\pi B \\ \displaystyle -\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+1}CA^{2i}\Omega B \\ \displaystyle +\sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+4}CA(A^2+BC)^i(BC)^\pi B \\ \displaystyle -\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+2}CA^{2i+1}\Omega B \end{array} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C\Omega - D^\pi C\Omega + DF_2 & D^d + F_2 B \end{bmatrix},$$

$$PQY_1(P^d)^2 = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} B\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+1}C\Omega^{i+2} \\ +B\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+2}CA\Omega^{i+3} \end{array} & \begin{array}{c} B\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+2}C\Omega^{i+3}B \\ +B\sum_{i=0}^{\nu_2-1} D^\pi D^{2i+1}CA\Omega^{i+3}B \end{array} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} BF_1 - BD^\pi CA\Omega^2 & BDF_1\Omega B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$PQ^dY_2 = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} B\sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+4}CA(A^2+BC)^i(BC)^\pi \\ -B\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+2}CA^{2i+1}\Omega \\ +B\sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+3}C(A^2+BC)^i(BC)^\pi \\ -B\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+3}CA^{2i+2}\Omega \end{array} & \begin{array}{c} B\sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+5}CA(A^2+BC)^i(BC)^\pi B \\ +B(D^d)^2 - B\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+3}CA^{2i+1}\Omega B \\ +B\sum_{i=0}^{\mu_2-1}(D^d)^{2i+4}C(A^2+BC)^i(BC)^\pi B \\ -B\sum_{i=0}^{\mu_2}(D^d)^{2i+2}CA^{2i}\Omega B \end{array} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} BF_2 + BD^dC\Omega & B(D^d)^2 + BD^dF_2B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-PQQ^d(P^d)^2 = \begin{bmatrix} -BDD^dCA\Omega^2 & -BDD^dC\Omega^2B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-PQ^dP^d = \begin{bmatrix} -BD^dC\Omega & -BD^dCA\Omega^2B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nakon sabiranja svih elemenata sume (3.31) dobijamo da tvrđenje teoreme važi. □

U sledećoj teoremi izložena je još jedna generalizacija slučaja $CB = 0$, $CA = 0$ [20].

Teorema 3.15 *Neka je M matrica definisana kao u* (3.13). *Ako je $BCA = 0$, $DCA = 0$ i $CBD = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + (G_1+G_2)C & B\Gamma + A(G_1+G_2) \\ \begin{array}{c} \Gamma C + CA(G_1\Gamma + (A^d)^2G_2)C \\ +C(A^d)^2 - CA^d(AB+BD)\Gamma^2C \end{array} & D\Gamma + C(G_1+G_2) \end{bmatrix},$$

gde je

$$G_1 = \sum_{i=0}^{\nu_1 - 1} A^\pi A^{2i}(AB + BD)\Gamma^{i+2}, \tag{3.32}$$

$$G_2 = \sum_{i=0}^{\mu_1 - 1} (A^d)^{2i+4}(AB+BD)(D^2+CB)^i(CB)^\pi - \sum_{i=0}^{\mu_1} (A^d)^{2i+2}(AB+BD)D^{2i}\Gamma, \tag{3.33}$$

$\nu_1 = \mathrm{ind}(A^2)$, $\mu_1 = \mathrm{ind}(D^2 + CB)$ *i* Γ *je definisano kao u* (3.11).

Dokaz. Ako uvedemo oznake

$$P = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

imamo da je $M = P + Q$. Trivijalno dobijamo $QPQ = 0$, $P^2Q = 0$, pa matrice P i Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.4. Iz uslova teoreme $CBD = 0$ imamo da matrica P zadovoljava uslov Teoreme 3.4, kao i Posledice 3.4. Primenom ovih tvrđenja i korišćenjem sličnog metoda kao u dokazu Teoreme 3.13, dobija se da važi tvrđenje teoreme. $\square$

Sledeći rezultat dobijamo kao direktnu posledicu Teoreme 3.15.

Posledica 3.12 *Neka je M matrica definisana sa* (3.13). *Ako je $CBD = 0$ i $CA = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + (G_1 + G_2)C & B\Gamma + A(G_1 + G_2) \\ \Gamma C & D\Gamma \end{bmatrix},$$

gde su Γ, G_1 i G_2 definisani kao u (3.11), (3.32) *i* (3.33) *respektivno.*

D.S. Cvetković–Ilić je 2008. godine dala reprezentaciju za M^d pod uslovima $AB = 0$ i $CB = 0$ (videti [19], Posledica 2.2). Ovaj rezultat su uopštili H. Yang i X. Liu 2011. godine i dali reprezentaciju za M^d pod uslovima $ABC = 0$, $ABD = 0$, $CBD = 0$ i $CBC = 0$ (videti [63], Teorema 3.2). U sledećoj Teoremi izlažemo reprezentaciju za M^d pod uslovima $ABC = 0$, $ABD = 0$ i $CBD = 0$, bez dodatnog uslova $CBC = 0$.

Teorema 3.16 *Neka je matrica M definisana kao u* (3.13). *Ako je $ABC = 0$, $ABD = 0$ i $CBD = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + B\Theta_0 & \begin{array}{c} B\Gamma + B\Theta_1 AB + (A^d)^2 B \\ -B(\Gamma^2 CA + D\Gamma^2 C)A^d B \end{array} \\ \Gamma C + \Theta_0 A & D^d + \Theta_0 B \end{bmatrix},$$

gde je

$$\Theta_k = \left(K_1 (A^d)^{2k} + \Gamma^k K_2\right) A + D\left(K_1 (A^d)^{2k} + \Gamma^k K_2\right), \ \textit{za } k = 0, 1, \tag{3.34}$$

$$K_1 = \sum_{i=0}^{\mu_1 - 1} D^\pi (D^2 + CB)^i C (A^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \Gamma (CB)^i C (A^d)^{2i+2}, \tag{3.35}$$

$$K_2 = \sum_{i=0}^{\nu_1-1} \Gamma^{i+2} C A^{2i} A^{\pi}, \tag{3.36}$$

$\nu_1 = \mathrm{ind}(A^2)$, $\mu_1 = \mathrm{ind}(D^2 + CB)$ i Γ je definisano kao u (3.11).

Dokaz. Ako predstavimo matricu M kao $M = P + Q$, gde su

$$P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

imamo da je $PQP = 0$ i $PQ^2 = 0$. Stoga matrice P i Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.3, pa važi

$$M^d = Y_1 + Y_2 + Y_1 P^d Q + (Q^d)^2 Y_2 PQ - Q^d P^d Q - (Q^d)^2 P^d PQ, \tag{3.37}$$

gde je

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q)-1} Q^{\pi} Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^{\pi}.$$

Trivijalno dobijamo da za $k \in \mathbb{N}$ važi

$$P^k = \begin{bmatrix} A^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (P^d)^k = \begin{bmatrix} (A^d)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{\pi} = \begin{bmatrix} A^{\pi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Kako je $CBD = 0$, to matrica Q zadovoljava uslov Teoreme 3.4, pa važi

$$Q^d = \begin{bmatrix} BD\Gamma^2 C & B\Gamma \\ \Gamma C & D\Gamma \end{bmatrix}.$$

Matrica Q zadovoljava i uslov Posledice 3.4, pa njenom primenom dobijamo:

$$Q^{2k} = \begin{bmatrix} B(D^2+CB)^{k-1}C & BD(D^2+CB)^{k-1} \\ (D^2+CB)^{k-1}C & (D^2+CB)^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

$$Q^{2k+1} = \begin{bmatrix} BD(D^2+CB)^{k-1}C & B(D^2+CB)^k \\ (D^2+CB)^k C & D(D^2+CB)^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

$$(Q^d)^{2k} = \begin{bmatrix} B\Gamma^{k+1}C & BD\Gamma^{k+1} \\ D\Gamma^{k+1}C & \Gamma^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

$$(Q^d)^{2k+1} = \begin{bmatrix} BD\Gamma^{k+2}C & B\Gamma^{k+1} \\ \Gamma^{k+1}C & D\Gamma^{k+1} \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 0,$$

i

$$Q^{\pi} = \begin{bmatrix} I - B\Gamma C & -BD\Gamma \\ -D\Gamma C & (D^2+CB)^{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - B\Gamma C & -BD\Gamma \\ -D\Gamma C & D^{\pi} - \Gamma CB \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da izračunamo sve elemente sume (3.37). Kako je

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i}(P^d)^{2i+1} + \sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2},$$

to imamo

$$\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i}(P^d)^{2i+1} = Q^\pi P^d + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i}(P^d)^{2i+1}$$

$$= \begin{bmatrix} A^d - B\Gamma C A^d & 0 \\ -D\Gamma C A^d & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} \begin{bmatrix} \begin{array}{c} B(D^2+CB)^{i-1}C(A^d)^{2i+1} \\ -B\Gamma CB(D^2+CB)^{i-1}C(A^d)^{2i+1} \\ -BD\Gamma D(D^2+CB)^{i-1}C(A^d)^{2i+1} \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c} -D\Gamma CB(D^2+CB)^{i-1}C(A^d)^{2i+1} \\ +D^\pi D(D^2+CB)^{i-1}C(A^d)^{2i+1} \end{array} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{c} A^d + B\sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^i C(A^d)^{2i+3} \\ -B\sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^i C(A^d)^{2i+1} \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c} D\sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^i C(A^d)^{2i+3} \\ -D\sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^i C(A^d)^{2i+1} \end{array} & 0 \end{bmatrix},$$

i

$$\sum_{i=0}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2} = Q^\pi Q(P^d)^2 + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} Q^\pi Q^{2i+1}(P^d)^{2i+2}$$

$$= \begin{bmatrix} -BD\Gamma C(A^d)^2 & 0 \\ D^\pi C(A^d)^2 - \Gamma CBC(A^d)^2 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\operatorname{ind}(Q^2)-1} \begin{bmatrix} \begin{array}{c} BD(D^2+CB)^{i-1}C(A^d)^{2i+2} \\ -BD\Gamma(D^2+CB)^i C(A^d)^{2i+2} \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c} D^\pi(D^2+CB)^i C(A^d)^{2i+2} \\ -\Gamma CB(D^2+CB)^i C(A^d)^{2i+2} \end{array} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{c} BD\sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^iC(A^d)^{2i+4} \\ -BD\sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^iC(A^d)^{2i+2} \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c} \sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^iC(A^d)^{2i+2} \\ -\sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^{i+1}C(A^d)^{2i+2} \end{array} & 0 \end{bmatrix},$$

pa je

$$Y_1 = \begin{bmatrix} \begin{array}{c} A^d + B\left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^iC(A^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^iC(A^d)^{2i+2}\right)A \\ +BD\left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^iC(A^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^iC(A^d)^{2i+2}\right) \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c} D\left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^iC(A^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^iC(A^d)^{2i+2}\right)A \\ +\left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1} D^\pi(D^2+CB)^iC(A^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_1}\Gamma(CB)^iC(A^d)^{2i+2}\right)A^2 + \Gamma CAA^d \end{array} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada, upotrebom oznake K_1 date u (3.35), imamo da je

$$Y_1 = \begin{bmatrix} A^d + B(K_1A + DK_1) & 0 \\ \Gamma C - \Gamma CA^\pi + (K_1A + DK_1)A & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogno imamo i za Y_2. Kako je

$$Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+1}P^{2i}P^\pi + \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+2}P^{2i+1}P^\pi,$$

i

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+1}P^{2i}P^\pi = Q^dP^\pi + \sum_{i=1}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+1}P^{2i}P^\pi$$

$$= \begin{bmatrix} BD\Gamma^2CA^\pi & B\Gamma \\ \Gamma CA^\pi & D\Gamma \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{\nu_1-1}\begin{bmatrix} BD\Gamma^{i+2}CA^{2i}A^\pi & 0 \\ \Gamma^{i+1}CA^{2i}A^\pi & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} BD\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i}A^\pi & B\Gamma \\ \sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i+2}A^\pi + \Gamma CA^\pi & D\Gamma \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P^2)-1} (Q^d)^{2i+2}P^{2i+1}P^{\pi} = \begin{bmatrix} B\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i+1}A^{\pi} & 0 \\ D\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i+1}A^{\pi} & 0 \end{bmatrix}$$

to je

$$Y_2 = \begin{bmatrix} B\left(D\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i}A^{\pi} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i+1}A^{\pi}\right) & B\Gamma \\ \left(D\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i}A^{\pi} + \sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Gamma^{i+2}CA^{2i+1}A^{\pi}\right)A + \Gamma CA^{\pi} & D\Gamma \end{bmatrix}.$$

Upotrebom oznake za K_2, date u (3.36), dobijamo

$$Y_2 = \begin{bmatrix} B(K_2A + DK_2) & B\Gamma \\ \Gamma CA^{\pi} + (K_2A + DK_2)A & D\Gamma \end{bmatrix}.$$

Nakon računanja dobijamo i preostale elemente sume (3.37):

$$Y_1P^dQ = \begin{bmatrix} 0 & (A^d)^2B + B\left(K_1A^d + DK_1(A^d)^2\right)AB \\ 0 & (K_1A + DK_1)B + \Gamma CA^dB \end{bmatrix},$$

$$(Q^d)^2Y_2PQ = \begin{bmatrix} 0 & B(\Gamma K_2A + D\Gamma K_2)AB \\ 0 & (K_2A + DK_2)B - D\Gamma^2CA^{\pi}B \end{bmatrix},$$

$$-Q^dP^dQ = \begin{bmatrix} 0 & -BD\Gamma^2CA^dB \\ 0 & -\Gamma CA^dB \end{bmatrix},$$

$$-(Q^d)^2P^dPQ = \begin{bmatrix} 0 & -B\Gamma^2CAA^dB \\ 0 & -D\Gamma^2CAA^dB \end{bmatrix}.$$

Nakon sabiranja svih elemenata sume (3.37) dobijamo da važi tvrđenje teoreme. □

Primetimo da je prethodna teorema generalizacija slučaja kada blokovi matrice M zadovoljavaju uslove $ABC = 0$ i $BD = 0$ (videti [8], Teorema 2.3).

Sledeći rezultat je direktna posledica Teoreme 3.16.

Posledica 3.13 *Neka je matrica M definisana sa* (3.13)*. Ako je $CBD = 0$ i $AB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + B\Theta_0 & B\Gamma \\ \Gamma C + \Theta_0A & D\Gamma \end{bmatrix},$$

gde su Γ i Θ_0 definisani kao u (3.11) *i* (3.34)*, respektivno.*

U sledećoj teoremi dajemo još jedno uopštenje slučaja kada blokovi matrice M zadovoljavaju uslove $AB = 0$ i $CB = 0$ [19].

Teorema 3.17 *Neka je matrica M definisana sa* (3.13). *Ako je $ABC = 0$, $ABD = 0$ i $DCB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + B(N_1 + N_2) & \begin{array}{c} B\Psi + B(N_1(A^d)^2 + \Psi N_2)AB \\ +(A^d)^2B - B\Psi^2(CA + DC)A^dB \end{array} \\ \Psi C + (N_1 + N_2)A & \Psi D + (N_1 + N_2)B \end{bmatrix}, \tag{3.38}$$

gde je

$$N_1 = \sum_{i=0}^{\mu_1 - 1} (CB)^\pi (D^2 + CB)^i (CA + DC)(A^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_1} \Psi D^{2i}(CA + DC)(A^d)^{2i+2}, \tag{3.39}$$

$$N_2 = \sum_{i=0}^{\nu_1 - 1} \Psi^{i+2}(CA + DC)A^{2i}A^\pi, \tag{3.40}$$

$\nu_1 = \mathrm{ind}(A^2)$, $\mu_1 = \mathrm{ind}(D^2 + CB)$ *i Ψ je dato u* (3.8).

Dokaz. Ako uvedemo oznake

$$P = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

imamo da je $M = P + Q$. Kako je $PQP = 0$ i $PQ^2 = 0$, to matrice P i Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.3, pa je

$$M^d = M^d = Y_1 + Y_2 + Y_1P^dQ + (Q^d)^2Y_2PQ - Q^dP^dQ - (Q^d)^2P^dPQ, \tag{3.41}$$

gde je

$$Y_1 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(Q)-1} Q^\pi Q^i (P^d)^{i+1}, \quad Y_2 = \sum_{i=0}^{\mathrm{ind}(P)-1} (Q^d)^{i+1} P^i P^\pi.$$

Za matricu P dobijamo trivijalno da za $k \in \mathbb{N}$ važi

$$P^k = \begin{bmatrix} A^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (P^d)^k = \begin{bmatrix} (A^d)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^\pi = \begin{bmatrix} A^\pi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Iz uslova teoreme $DCB = 0$ sledi da matrica Q zadovoljava uslove Teoreme 3.3, pa njenom primenom dobijamo

$$Q^d = \begin{bmatrix} B\Psi^2DC & B\Psi \\ \Psi C & \Psi D \end{bmatrix}.$$

Primenom Posledice 3.3 na matricu Q dobijamo:

$$Q^{2k} = \begin{bmatrix} B(D^2 + CB)^{k-1}C & B(D^2 + CB)^{k-1}D \\ (D^2 + CB)^{k-1}DC & (D^2 + CB)^k \end{bmatrix}, \text{ za } k \geq 1,$$

$$Q^{2k+1}=\begin{bmatrix} B(D^2+CB)^{k-1}DC & B(D^2+CB)^k \\ (D^2+CB)^kC & (D^2+CB)^kD \end{bmatrix},\ \text{za } k\geq 1,$$

$$(Q^d)^{2k}=\begin{bmatrix} B\Psi^{k+1}C & B\Psi^{k+1}D \\ \Psi^{k+1}DC & \Psi^k \end{bmatrix},\ \text{za } k\geq 1,$$

$$(Q^d)^{2k+1}=\begin{bmatrix} B\Psi^{k+2}DC & B\Psi^{k+1} \\ \Psi^{k+1}C & \Psi^{k+1}D \end{bmatrix},\ \text{za } k\geq 0,$$

$$Q^\pi=\begin{bmatrix} I-B\Psi C & -B\Psi D \\ -\Psi DC & (CB)^\pi-\Psi D^2 \end{bmatrix}.$$

Sada možemo da odredimo sve elemente sume (3.41). Nakon računanja dobijamo:

$$Y_1=\begin{bmatrix} \begin{array}{c} A^d+B\left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(CB)^\pi(D^2+CB)^i(CA+DC)(A^d)^{2i+4}\right. \\ \left.-\sum_{i=0}^{\mu_1}\Psi D^{2i}C(A^d)^{2i+2}\right) \end{array} & 0 \\ \begin{array}{c} \Psi CAA^d+\left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(CB)^\pi(D^2+CB)^i(CA+DC)(A^d)^{2i+4}\right. \\ \left.-\sum_{i=0}^{\mu_1}\Psi D^{2i}C(A^d)^{2i+2}\right)A \end{array} & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_2=\begin{bmatrix} B\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Psi^{i+2}(CA+DC)A^{2i}A^\pi\right) & B\Psi \\ \Psi CA^\pi+\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Psi^{i+2}(CA+DC)A^{2i}A^\pi\right)A & \Psi D \end{bmatrix},$$

$$Y_1P^dQ=\begin{bmatrix} 0 & \begin{array}{c} (A^d)^2B+B\left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(CB)^\pi(D^2+CB)^i(CA+DC)(A^d)^{2i+4}\right. \\ \left.-\sum_{i=0}^{\mu_1}\Psi D^{2i}C(A^d)^{2i+2}\right)A^dB \end{array} \\ 0 & \begin{array}{c} \left(\sum_{i=0}^{\mu_1-1}(CB)^\pi(D^2+CB)^i(CA+DC)(A^d)^{2i+4}\right. \\ \left.-\sum_{i=0}^{\mu_1}\Psi D^{2i}C(A^d)^{2i+2}\right)B+\Psi CA^dB \end{array} \end{bmatrix},$$

$$(Q^d)^2Y_2PQ = \begin{bmatrix} 0 & B\Psi\left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Psi^{i+2}(CA+DC)A^{2i}A^{\pi}\right)AB \\ 0 & \left(\sum_{i=0}^{\nu_1-1}\Psi^{i+2}(CA+DC)A^{2i}A^{\pi}\right)B+\Psi^2DCAA^dB \end{bmatrix},$$

$$-Q^dP^dQ = \begin{bmatrix} 0 & -B\Psi^2DCA^dB \\ 0 & -\Psi CA^dB \end{bmatrix},$$

$$-(Q^d)^2P^dPQ = \begin{bmatrix} 0 & -B\Psi^2CAA^dB \\ 0 & -\Psi^2DCAA^dB \end{bmatrix}.$$

Upotrebom oznaka za N_1 i N_2, koje su date u (3.39) i (3.40) redom, pa sabiranjem svih elemenata sume (3.41) dobijamo da je teorema tačna. □

Prethodna teorema jeste i generalizacija slučaja kada blokovi matrice M zadovoljavaju uslove $ABC = 0$, $BD = 0$ i $DC = 0$ (videti [17], Teorema 1).

Sledeći rezultat je direktna posledica Teoreme 3.17.

Posledica 3.14 *Neka je matrica M definisana sa* (3.13). *Ako je $DCB = 0$ i $AB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} A^d + B(N_1+N_2) & B\Psi \\ \Psi C + (N_1+N_2)A & \Psi D \end{bmatrix},$$

gde su Ψ, N_1 i N_2 definisani kao u (3.8), (3.39) *i* (3.40), *respektivno.*

A.S. Cvetković i G.V. Milovanović (videti [17]) su 2011. godine dali eksplicitnu reprezentaciju za M^d pod uslovima $ABC = 0$, $DC = 0$ i uslovom da je $BD = 0$ (ili da je BC nilpotentna, ili da je D nilpotentna matrica). D.S. Cvetković–Ilić je uopštila ove rezultate i predstavila reprezentaciju za M^d samo pod uslovima $ABC = 0$ i $DC = 0$, bez dodatnog uslova (videti [23], Teorema 2.2). U sledećoj teoremi izlažemo uopštenje pomenutih rezultata.

Teorema 3.18 *Neka je M matrica definisana sa* (3.13). *Ako je $ABC = 0$, $DCA = 0$ i $DCB = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} \Phi A + (U_1+U_2)C & \Phi B + (U_1+U_2)D \\ \begin{array}{c} C\Phi + C(U_1(D^d)^2 + \Phi U_2)DC \\ +(D^d)^2C - C\Phi^2(AB+BD)D^dC \end{array} & D^d + C(U_1+U_2) \end{bmatrix},$$

gde je

$$U_1 = \sum_{i=0}^{\mu_2-1}(BC)^{\pi}(A^2+BC)^i(AB+BD)(D^d)^{2i+4} - \sum_{i=0}^{\mu_2}\Phi A^{2i}(AB+BD)(D^d)^{2i+2}$$

$$U_2 = \sum_{i=0}^{\nu_2-1}\Phi^{i+2}(AB+BD)D^{2i}D^{\pi},$$

$\nu_2 = \text{ind}(D^2)$, $\mu_2 = \text{ind}(A^2 + BC)$ *i* Φ *je definisano kao u* (3.5).

Dokaz. Teorema se dokazuje analogno dokazu Teoreme 3.13. Naime, ako uvedemo oznake

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

imamo da je $M = P + Q$. Takođe je $PQP = 0$ i $PQ^2 = 0$, pa matrice P i Q zadovoljavaju uslove Teoreme 2.3. Kako je $ABC = 0$, to matrica Q zadovoljava uslov Teoreme 3.1 i Posledice 3.1. Nakon primene Teoreme 3.1, Posledice 3.1, Teoreme 2.3 i nakon računanja dobija se da je teorema tačna. $\square$

3.3 Drazinov inverz blok matrica čiji je Šurov komplement jednak nuli

Neka je matrica M definisana sa (3.13). Uopšteni Šurov komplement matrice A u matrici M definiše se kao matrica $Z = D - CA^dB$. Uopšteni Šurov komplement ima značajnu ulogu u reprezentacijama za M^d. Još 1989. godine J. Miao [47] dao je eksplicitnu reprezentaciju za M^d pod uslovima koji uključuju i uopšteni Šurov komplement, tj. pod uslovima $CA^\pi = 0$, $A^\pi B = 0$ i $Z = 0$.

Lema 3.3 [47] *Neka je M matrica definisana kao u* (3.13). *Ako je $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$ i $Z = 0$, tada je*

$$M^d = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} \left((AW)^d\right)^2 A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix},$$

gde je $W = AA^d + A^dBCA^d$.

Y. Wei [60] je 1998. godine dao reprezentaciju za M^d pod uslovima koji uključuju i nesingularni Šurov komplement, tj. pod uslovima $CA^\pi = 0$, $A^\pi B = 0$ i Z je invertibilna matrica. Nakon toga publikovano je mnogo radova gde su autori ponudili reprezentacije za M^d pod raznim uslovima koji uključuju i uopšteni Šurov komplement (videti [35, 41, 20, 21, 22, 26, 44, 13, 63, 7]). U ovom poglavlju izlažemo originalne rezultate iz rada [57], a koji su uopštenje sledećih slučajeva:

(i) $CA^\pi = 0$, $A^\pi B = 0$ i $Z = 0$ [47];

(ii) $CA^\pi B = 0$, $AA^\pi B = 0$ i $Z = 0$ [35];

(iii) $CA^\pi B = 0$, $CA^\pi A = 0$ i $Z = 0$ [35];

(iv) $CA^\pi BC = 0$, $AA^\pi BC = 0$ i $Z = 0$ [63];

(v) $BCA^\pi B = 0$, $BCA^\pi A = 0$ i $Z = 0$ [63];

(vi) $ABCA^\pi = 0$, BCA^π je nilpotenta matrica i $Z = 0$ [44];

(vii) $A^\pi BCA = 0$, $A^\pi BC$ je nilpotenta matrica i $Z = 0$ [44];

(viii) $ABCA^\pi = 0$, $A^\pi ABC = 0$ i $Z = 0$ [7];

(ix) $ABCA^\pi = 0$, $CBCA^\pi = 0$ i $Z = 0$ [7].

Teorema 3.19 *Neka je matrica M definisana sa* (3.13). *Ako je $ABCA^\pi A = 0$, $ABCA^\pi B = 0$ i $Z = 0$, tada je*

$$\begin{aligned}
M^d = \Bigg(& \begin{bmatrix} (BCA^\pi)^\pi & 0 \\ -(CA^\pi B)^d CA^\pi A & (CA^\pi B)^\pi \end{bmatrix} (P^d)^2 \\
&+ \sum_{i=0}^{t-1} \begin{bmatrix} (BCA^\pi)^\pi (BCA^\pi)^{i+1} & 0 \\ (CA^\pi B)^\pi (CA^\pi B)^i CA^\pi A & (CA^\pi B)^\pi (CA^\pi B)^{i+1} \end{bmatrix} (P^d)^{2i+4} \\
&+ \sum_{i=0}^{r-1} \begin{bmatrix} ((BCA^\pi)^d)^{i+1} & 0 \\ ((CA^\pi B)^d)^{i+2} CA^\pi A & ((CA^\pi B)^d)^{i+1} \end{bmatrix} P^{2i} P^\pi \Bigg) M,
\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} A & B \\ CA^d A & CA^d B \end{bmatrix}, \\
(P^d)^n &= \left(I + \sum_{j=0}^{l-1} \begin{bmatrix} 0 & A^j A^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (P_1^d)^{j+1} \right) (P_1^d)^n, \\
(P_1^d)^n &= \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} ((AW)^d)^{n+1} A \begin{bmatrix} I & A^d B \end{bmatrix}, \ W = AA^d + A^d BCA^d,
\end{aligned}$$

za $n \in \mathbb{N}$, i $r = \mathrm{ind}(P^2)$, $l = \mathrm{ind}(A)$, $t = \max\{\mathrm{ind}(CA^\pi B), \mathrm{ind}(BCA^\pi) - 1\}$.

Dokaz. Uvedimo sledeće oznake:

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ CA^d A & CA^d B \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi & 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno je $M = P + Q$. Takođe, $Q^2 = 0$ i

$$P^2 QP = \begin{bmatrix} ABCA^\pi A & ABCA^\pi B \\ CA^d ABCA^\pi A & CA^d ABCA^\pi B \end{bmatrix} = 0.$$

Dakle, matrice P i Q zadovoljavaju uslove Posledice 2.4, pa njenom primenom dobijamo

$$\begin{aligned}
M^d = \Bigg(& \sum_{i=0}^{r-1} \left(((PQ)^d)^{i+1} + ((QP)^d)^{i+1} \right) P^{2i} P^\pi \\
&+ \sum_{i=0}^{s-1} \left((PQ)^\pi (PQ)^i + (QP)^\pi (QP)^i \right) (P^d)^{2(i+1)} - (P^d)^2 \Bigg) M,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

gde je $r = \operatorname{ind}(P^2)$ i $s = \max\{\operatorname{ind}(PQ), \operatorname{ind}(QP)\}$.

Ako uvedemo oznake

$$P_1 = \begin{bmatrix} A^2A^d & AA^dB \\ CA^dA & CA^dB \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} AA^\pi & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dobijamo da je $P = P_1 + P_2$. Takođe, imamo da je $P_1P_2 = 0$, kao i

$$P_2^n = \begin{bmatrix} A^nA^\pi & A^{n-1}A^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N},$$

te je matrica P_2 $(l+1)$-nilpotentna. Jasno je da matrice P_1 i P_2 ispunjavaju uslove Teoreme 2.2, pa njenom primenom dobijamo

$$P^d = \sum_{j=0}^{l} P_2^j (P_1^d)^{j+1} = P_1^d + \sum_{j=0}^{l-1} P_2^{j+1}(P_1^d)^{j+2} = \left(I + \sum_{j=0}^{l-1} P_2^{j+1}(P_1^d)^{j+1} \right) P_1^d.$$

Nakon računanja i upotrebe indukcije, dobijamo da za $n \in \mathbb{N}$ važi

$$(P^d)^n = \sum_{j=0}^{l} P_2^j (P_1^d)^{j+n} = \left(I + \sum_{i=0}^{l-1} P_2^{j+1}(P_1^d)^{j+1} \right) (P_1^d)^n,$$

Uočimo da matrica P_1 zadovoljava uslove Leme 3.3, pa nakon njene primene dobijamo

$$P_1^d = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} \left((AW)^d\right)^2 A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix}, \quad W = AA^d + A^dBCA^d.$$

Nakon računanja i primenom indukcije, imamo da za $n \in \mathbb{N}$ važi

$$(P_1^d)^n = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} ((AW)^d)^{n+1} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} P_2^{j+1}(P_1^d)^{j+1} &= \begin{bmatrix} A^{j+1}A^\pi & A^jA^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} ((AW)^d)^{j+2} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{j+1}A^\pi + A^jA^\pi BCA^d \\ 0 \end{bmatrix} ((A^2A^d + AA^dBCA^d)^d)^{j+2} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^jA^\pi BCA^d \\ 0 \end{bmatrix} ((AW)^d)^{j+2} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & A^jA^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} ((AW)^d)^{j+2} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

to imamo

$$(P^d)^n = \left(I + \sum_{j=0}^{l-1} \begin{bmatrix} 0 & A^jA^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (P_1^d)^{j+1} \right) (P_1^d)^n, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Sada računanjem dobijamo da je

$$(PQ)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} BCA^\pi & 0 \\ CA^dBCA^\pi & 0 \end{bmatrix}, & \text{za } n = 1 \\ \\ \begin{bmatrix} (BCA^\pi)^i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{za } n \geq 2 \end{cases}$$

Kako bi odredili $(PQ)^d$ uvedimo oznake

$$T_1 = \begin{bmatrix} BCA^\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^dBCA^\pi & 0 \end{bmatrix}.$$

Jasno, $PQ = T_1 + T_2$, $T_2^2 = 0$ i $T_2^d = 0$. Dalje, imamo $T_1T_2 = T_2T_1 = 0$, pa matrice T_1 i T_2 zadovoljavaju uslov Teoreme 2.1. Primenom ove teoreme dobijamo da je $(T_1+T_2)^d = T_1^d + T_2^d = T_1^d$, tj.

$$(PQ)^d = \begin{bmatrix} (BCA^\pi)^d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Računanjem dobijamo

$$((PQ)^d)^n = \begin{bmatrix} ((BCA^\pi)^d)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ za } n \in \mathbb{N} \quad \text{i} \quad (PQ)^\pi = \begin{bmatrix} (BCA^\pi)^\pi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Dalje, imamo i

$$(QP)^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (CA^\pi B)^{n-1}CA^\pi A & (CA^\pi B)^n \end{bmatrix}.$$

Kako bi odredili $(QP)^d$, uvedimo oznake

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^\pi A & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CA^\pi B \end{bmatrix}$$

Očigledno je $QP = R_1 + R_2$, kao i $R_1^2 = 0$, $R_1^d = 0$, $R_1^\pi = I$. Takođe važi i $R_1R_2 = 0$, pa matrice R_1 i R_2 zadovoljavaju uslov Teoreme 2.2. Primenom ove teoreme dobijamo da je $(QP)^d = (R_1 + R_2)^d = R_2^d + (R_2^d)^2R_1$, tj.

$$(QP)^d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ((CA^\pi B)^d)^2CA^\pi A & (CA^\pi B)^d \end{bmatrix}.$$

Nakon računanja dobijamo da za $n \in \mathbb{N}$ važi

$$((QP)^d)^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ((CA^\pi B)^d)^{n+1}CA^\pi A & ((CA^\pi B)^d)^n \end{bmatrix},$$

kao i da važi

$$(QP)^\pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -(CA^\pi B)^dCA^\pi A & (CA^\pi B)^\pi \end{bmatrix}.$$

Sada nakon računanja dobijamo

$$\sum_{i=0}^{r-1}\big(((PQ)^d)^{i+1}+((QP)^d)^{i+1}P^{2i}P^{\pi}= \\ =\sum_{i=0}^{r-1}\begin{bmatrix} ((BCA^{\pi})^d)^{i+1} & 0 \\ ((CA^{\pi}B)^d)^{i+2}CAA^{\pi} & ((CA^{\pi}B)^d)^{i+1}\end{bmatrix}P^{2i}P^{\pi}. \tag{3.43}$$

Kako bi odredili i $\sum\limits_{i=0}^{s-1}((PQ)^{\pi}(PQ)^i+(QP)^{\pi}(QP)^i)\,(P^d)^{2(i+1)}$, uočimo sledeće:

$$(PQ)^{\pi}(PQ)^i=\begin{cases}\begin{bmatrix}(BCA^{\pi})^{\pi} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}, \text{ za } i=0;\\ \begin{bmatrix}BCA^{\pi}(BCA^{\pi})^{\pi} & 0\\ CA^dBCA^{\pi} & 0\end{bmatrix}, \text{ za } i=1;\\ \begin{bmatrix}(BCA^{\pi})^i(BCA^{\pi})^{\pi} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \text{ za } i\geq 2;\end{cases}$$

$$(QP)^{\pi}(QP)^i=\begin{cases}\begin{bmatrix}I & 0\\ -(CA^{\pi}B)^dCA^{\pi}A & (CA^{\pi}B)^{\pi}\end{bmatrix}, \text{ za } i=0;\\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ (CA^{\pi}B)^{\pi}(CA^{\pi}B)^{i-1}CA^{\pi}A & (CA^{\pi}B)^{\pi}(CA^{\pi}B)^i\end{bmatrix}, \text{ za } i\geq 1.\end{cases}$$

Sada imamo

$$\sum_{i=0}^{s-1}\big((PQ)^{\pi}(PQ)^i+(QP)^{\pi}(QP)^i\big)(P^d)^{2(i+1)}=\begin{bmatrix}I+(BCA^{\pi}) & 0\\ -(CA^{\pi}B)^dCA^{\pi}A & I+(CA^{\pi}B)^{\pi}\end{bmatrix}(P^d)^2$$

$$+\begin{bmatrix}(BCA^{\pi})^{\pi}BCA^{\pi} & 0\\ CA^dBCA^{\pi}+(CA^{\pi}B)^{\pi}CA^{\pi}A & (CA^{\pi}B)^{\pi}CA^{\pi}B\end{bmatrix}(P^d)^4$$

$$+\sum_{i=2}^{t}\begin{bmatrix}(BCA^{\pi})^{\pi}(BCA^{\pi})^i & 0\\ (CA^{\pi}B)^{\pi}(CA^{\pi}B)^{i-1}CA^{\pi}A & (CA^{\pi}B)^{\pi}(CA^{\pi}B)^i\end{bmatrix}(P^d)^{2i+2}$$

Kako je $CA^dBCA^{\pi}A=CA^dBCA^{\pi}B=0$, to je

$$\sum_{i=0}^{s-1}((PQ)^{\pi}(PQ)^i+(QP)^{\pi}(QP)^i(P^d)^{2(i+1)}=(P^d)^2 \\ +\begin{bmatrix}(BCA^{\pi}) & 0\\ -(CA^{\pi}B)^dCA^{\pi}A & (CA^{\pi}B)^{\pi}\end{bmatrix}(P^d)^2 \\ +\sum_{i=0}^{t-1}\begin{bmatrix}(BCA^{\pi})^{\pi}(BCA^{\pi})^{i+1} & 0\\ (CA^{\pi}B)^{\pi}(CA^{\pi}B)^iCA^{\pi}A & (CA^{\pi}B)^{\pi}(CA^{\pi}B)^i\end{bmatrix}(P^d)^{2i+4}. \tag{3.44}$$

Primenom (3.44) i (3.43) u (3.42) dobijamo da je tvrđenje teoreme tačno. □

Primedba 3.1 *C. Bu, C. Feng i S. Bai su dali reprezentaciju za* M^d *pod uslovima* $Z = 0$, $ABCA^\pi = 0$ *i* $A^\pi ABC = 0$ *[7, Teorema 4.1], kao i pod uslovima* $Z = 0$, $ABCA^\pi = 0$ *i* $CBCA^\pi = 0$ *[7, Teorema 4.3]. M.F. Martínez–Serrano i N. Castro-González dale su reprezentaciju za* M^d *pod uslovima* $Z = 0$, $ABCA^\pi = 0$ *i* BCA^π *je nilpotentna matrica [44, Teorema 3.3]. Primetimo da je specijalan slučaj Teoreme 3.19 kada važe uslovi* $Z = 0$ *i* $ABCA^\pi = 0$. *Stoga uslovi* $A^\pi ABC = 0$ *iz [7, Teorema 4.1],* $CBCA^\pi = 0$ *iz [7, Teorema 4.3] i* BCA^π *je nilpotentna matrica iz [44, Teorema 3.3] nisu neophodni za dobijanje formule za* M^d.

Primer 3.5 *Neka je matrica* M *definisana kao u* (3.13), *gde su*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nakon računanja dobijamo da je uopšteni Šurov komplement $Z = D - CA^dB$ *jednak nuli i da je* $ABCA^\pi = 0$. *Takođe, dobijamo da je* $A^\pi ABC \neq 0$, $CBCA^\pi \neq 0$ *i da matrica* BCA^π *nije nilpotentna, pa ne možemo da primenimo formule za* M^d *iz [7, Teorema 4.1], [7, Teorema 4.3] i [44, Teorema 3.3]. Međutim, kako su ispunjeni uslovi Teoreme 3.19, to njenom primenom možemo da dobijemo reprezentaciju za* M^d. *Imamo da je* $\operatorname{ind}(A) = 2$ *i*

$$A^d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Takođe, dobijamo da je $\operatorname{ind}(P) = 3$ *i*

$$P^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nakon primene Teoreme 3.19, dobijamo sledeći izraz za M^d:

$$M^d = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

H. Yang i X. Liu predstavili su eksplicitnu reprezentaciju za M^d kada su ispunjeni uslovi $Z = 0$, $CA^\pi BC = 0$ i $AA^\pi BC = 0$ [63, Teorema 3.3]. U sledećoj teoremi izlažemo uopštenje ovog slučaja.

Teorema 3.20 *Neka je matrica M definisana kao u (3.13). Ako je $Z = 0$, $AA^\pi BCA = 0$ i $CA^\pi BCA = 0$, tada je*

$$\begin{aligned} M^d =& M \Bigg((P^d)^2 \begin{bmatrix} (A^\pi BC)^\pi & -AA^\pi B(CA^\pi B)^d \\ 0 & (CA^\pi B)^\pi \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=0}^{t-1} (P^d)^{2i+4} \begin{bmatrix} (A^\pi BC)^{i+1}(A^\pi BC)^\pi & AA^\pi B(CA^\pi B)^i (CA^\pi B)^\pi \\ 0 & (CA^\pi B)^{i+1}(CA^\pi B)^\pi \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{i=0}^{r-1} P^\pi P^{2i} \begin{bmatrix} ((A^\pi BC)^d)^{i+1} & AA^\pi B((CA^\pi B)^d)^{i+2} \\ 0 & ((CA^\pi B)^d)^{i+1} \end{bmatrix} \Bigg), \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} P =& \begin{bmatrix} A & AA^d B \\ C & CA^d B \end{bmatrix}, \\ (P^d)^n =& (P_1^d)^n \left(I + \sum_{j=0}^{l-1} (P_1^d)^{j+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^j A^\pi & 0 \end{bmatrix} \right), \\ (P_1^d)^n =& \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} ((AW)^d)^{n+1} A \begin{bmatrix} I & A^d B \end{bmatrix}, \; W = AA^d + A^d BCA^d, \end{aligned}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, i $r = \mathrm{ind}(P^2)$, $l = \mathrm{ind}(A)$, $t = \max\{\mathrm{ind}(CA^\pi B), \mathrm{ind}(A^\pi BC) - 1\}$.

Dokaz. Teorema se dokazuje analogno dokazu Teoreme 3.19. Ako uvedemo oznake

$$P = \begin{bmatrix} A & AA^d B \\ C & CA^d B \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & A^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

imamo da je $M = P + Q$. Takođe, imamo i da je $PQP^2 = 0$ i $Q^2 = 0$, pa matrice P i Q zadovoljavaju uslove Posledice 2.5. Stoga je

$$\begin{aligned} M^d = M \Bigg(&\sum_{i=0}^{r-1} P^\pi P^{2i} \left(((PQ)^d)^{i+1} + ((QP)^d)^{i+1} \right) \\ &+ \sum_{i=0}^{s-1} (P^d)^{2(i+1)} \left((PQ)^i (PQ)^\pi + (QP)^i (QP)^\pi \right) - (P^d)^2 \Bigg), \end{aligned} \tag{3.45}$$

gde je $r = \text{ind}(P^2)$ i $s = \max\{\text{ind}(PQ), \text{ind}(QP)\}$.
Kako bi odredili P^d, uvedimo oznake:

$$P_1 = \begin{bmatrix} A^2A^d & AA^dB \\ CAA^d & CA^dB \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} AA^\pi & 0 \\ CA^{pi} & 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno je $P = P_1 + P_2$. Takođe, $P_2P_1 = 0$ i matrica P_2 je $l+1$ nilpotentna. Dakle, matrice P_1 i P_2 ispunjavaju uslove Teoreme 2.2, pa važi

$$P^d = \sum_{j=0}^{l} (P_1^d)^{j+1} P_2^j.$$

Primetimo da matrica P_1 ispunjava uslove Leme 3.3, pa nakon primene ove leme i računanja dobijamo

$$(P_1^d)^n = \begin{bmatrix} I \\ CA^d \end{bmatrix} ((AW)^d)^{n+1} A \begin{bmatrix} I & A^dB \end{bmatrix}, \quad \text{za } n \in N.$$

Sada za P^d imamo da važi sledeće:

$$(P^d)^n = (P_1^d)^n \left(I + \sum_{j=0}^{l-1} (P_1^d)^{j+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^jA^\pi & 0 \end{bmatrix} \right), \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Dalje, dobijamo da važi

$$(PQ)^n = \begin{bmatrix} 0 & AA^\pi B(CA^\pi B)^{n-1} \\ 0 & (CA^\pi B)^n \end{bmatrix}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Kako bi odredili $(PQ)^d$, uvedimo oznake

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & CA^\pi B \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & AA^\pi B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jasno, $PQ = R_1 + R_2$, $R_1R_2 = 0$ i $R_2^2 = 0$. Nakon primene Teoreme 2.2 imamo da važi $(R_1 + R_2)^d = R_1^d + R_2R_1^d$. Sada, nakon računanja dobijamo

$$((PQ)^d)^n = \begin{bmatrix} 0 & AA^\pi B((CA^\pi B)^d)^{n+1} \\ 0 & ((CA^\pi B)^d)^n \end{bmatrix}, \text{ za } n \in \mathbb{N} \text{ i } \ (PQ)^\pi = \begin{bmatrix} I & -AA^\pi B(CA^\pi B)^d \\ 0 & (CA^\pi B)^\pi \end{bmatrix}.$$

Dalje, imamo da je

$$(QP)^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} A^\pi BC & A^\pi BCA^dB \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{za } n = 1; \\ \begin{bmatrix} (A^\pi BC)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \text{za } n \geq 2. \end{cases}$$

Kako bi odredili $(QP)^d$, uvedimo oznake:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & A^\pi BCA^dB \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} A^\pi BC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očigledno je $QP = T_1 + T_2$, $T_1^2 = 0$. Kako je $T_1T_2 = 0$, to matrice T_1 i T_2 ispunjavaju uslov Teoreme 2.2, pa njenom primenom dobijamo $(QP)^d = T_2^d + (T_2^d)^2T_1$. Nakon računanja dobijamo

$$((QP)^d)^n = \begin{bmatrix} ((A^\pi BC)^d)^n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ za } n \in \mathbb{N} \text{ i } \quad (QP)^\pi = \begin{bmatrix} (A^\pi BC)^\pi & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Primenom ovako dobijenih jednakosti u (3.45) dobijamo da važi tvrđenje teoreme. □

Primedba 3.2 *M.F. Martínez–Serrano i N. Castro-González su dale eksplicitnu reprezentaciju za M^d pod uslovima $Z = 0$, $A^\pi BCA = 0$ i $A^\pi BC$ je nilpotentna matrica [44, Posledica 3.4]. Primetimo da je Teorema 3.20 uopštenje slučaja kada važi $Z = 0$ i $A^\pi BCA = 0$. Stoga uslov da je $A^\pi BC$ nilpotentna matrica iz [44, Posledica 3.4] nije neophodan za dobijanje formule za M^d.*

3.4 Drazinov inverz modifikovane matrice

Neka je matrica M definisana sa (3.13). Kao što smo videli u prethodnom poglavlju, uopšteni Šurov komplement matrice A u matrici M definiše se kao matrica

$$Z = D - CA^dB.$$

Uopšteni Šurov komplement matrice D u matrici M definiše se kao matrica

$$S = A - BD^dC.$$

Za neke interesantne osobine Šurovog komplementa preporučujemo čitaocu da pogleda radove [1, 18, 51, 53]. U ovom poglavlju izlažemo originalne rezultate iz rada [24], koji se tiču Drazinovog inverza uopštenog Šurovog komplementa. Kao posledice dobijamo izraze za Drazinov inverz modifikovane matrice $A-BC$. Interesantni rezultati vezani za Drazinov inverz modifikovane matrice mogu se naći u radovima [46, 61, 20, 29, 49, 55].

Još 1944. godine, W.J. Duncan [31] uočio je vezu između uopštenog Šurovog komplementa matrice D u matrici M i uopštenog Šurovog komplementa matrice A u matrici M. Naime, kada su M, A i D invertibilne matrice, onda su i $S = A - BD^{-1}C$ i $Z = D - CA^{-1}B$ invertibilne matrice i važi

$$S^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BZ^{-1}CA^{-1}.$$

U narednoj teoremi izlažemo analogni rezultat za Drazinov inverz uopštenog Šurovog komplementa S i Z.

Teorema 3.21 *Neka je $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$, $BD^\pi Z^d C = 0$, $BD^d Z^\pi C = 0$, $BZ^d D^\pi C = 0$ i $BZ^\pi D^d C = 0$. Tada je*

$$S^d = A^d + A^d BZ^d CA^d.$$

Dokaz. Označimo sa $X = A^d + A^d BZ^d CA^d$. Dokazaćemo da je $SX = XS$, $XSX = X$ i $S^{m+1}X = S^m$, za neko $m \in \mathbb{N}$. Računanjem dobijamo

$$\begin{aligned} SX &= (A - BD^dC)(A^d + A^dBZ^dCA^d) \\ &= AA^d + AA^dBZ^dCA^d - BD^dCA^d - BD^dCA^dBZ^dCA^d + A^\pi BZ^dCA^d \\ &= AA^d + BZ^dCA^d - BD^dCA^d - BD^d(D - Z)Z^dCA^d \\ &= AA^d + BZ^dCA^d - BD^dCA^d - BDD^dZ^dCA^d + BD^dZZ^dCA^d \\ &= AA^d + BD^\pi Z^dCA^d - BD^dZ^\pi CA^d \\ &= AA^d. \end{aligned}$$

Slično dobijamo i

$$\begin{aligned} XS &= (A^d + A^dBZ^dCA^d)(A - BD^dC) \\ &= AA^d - A^dBD^dC + A^dBZ^dCA^dA - A^dBZ^dCA^dBD^dC + A^dBZ^dCA^\pi \\ &= AA^d - A^dBD^dC + A^dBZ^dC - A^dBZ^d(D - Z)D^dC \\ &= AA^d - A^dBD^dC + A^dBZ^dC - A^dBZ^dDD^dC + A^dBZZ^dD^dC \\ &= AA^d - A^dBZ^\pi D^dC + A^dBZ^dD^\pi C \\ &= AA^d. \end{aligned}$$

Dakle važi $SX = XS$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} XSX &= AA^d(A^d + A^dBZ^dCA^d) \\ &= A^d + A^dBZ^dCA^d \\ &= X. \end{aligned}$$

Takođe,

$$\begin{aligned} S^2X &= (A - BD^dC)AA^d \\ &= A^2A^d - BD^dCAA^d - BD^dCA^\pi \\ &= A^2A^d - BD^dC + A - A \\ &= (A - BD^dC) + (A^2A^d - A). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da za neko $m > 2$ važi $S^m = S^{m-1} + (A^m A^d - A^{m-1})$. Dokažimo da onda važi i za $m+1$.

$$\begin{aligned}
S^{m+1}X &= S\left(S^{m-1} + (A^m A^d - A^{m-1})\right) \\
&= S^m + (A - BD^dC)(A^m A^d - A^{m-1}) \\
&= S^m + A^{m+1}A^d - A^m - BD^dCA^mA^d + BD^dCA^{m-1} \\
&= S^m + A^{m+1}A^d - A^m + BD^dCA^\pi A^{m-1} \\
&= S^m + A^{m+1}A^d - A^m.
\end{aligned}$$

Dakle, $S^{m+1}X = S^m$ za svako $m \geq \mathrm{ind}(A)$. Ovim smo dokazali da je $X = S^d$. $\square$

U slučaju kada je $D = I$, kao direktnu posledicu Teoreme 3.21 dobijamo rezultat [61, Teorema 2.1].

Posledica 3.15 [61] *Neka je $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$ i $BZ^\pi C = 0$. Tada je*

$$(A - BC)^d = A^d + A^dBZ^dCA^d,$$

gde je $Z = I - CA^dB$.

Kada je Z invertibilna matrica, kao direktnu posledicu Teoreme 3.21 imamo sledeći rezultat.

Posledica 3.16 *Neka je $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$, $BD^\pi Z^{-1}C = 0$ i $BZ^{-1}D^\pi C = 0$. Tada je*

$$S^d = A^dBZ^{-1}CA^d.$$

Pre nego što izložimo još jednu posledicu Teoreme 3.21, izlažemo pomoćnu lemu i njenu posledicu iz rada [59].

Lema 3.4 [59] *Neka je $B = A + E$, $E = AA^dEAA^d$ i $\|A^dE\| < 1$. Tada je*

$$B^d - A^d = -B^dEA^d = -A^dEB^d,$$

$$B^d = (I + A^dE)^{-1}A^d = A^d(I + EA^d)^{-1},$$

$$\frac{\|B^d - A^d\|}{\|A^d\|} \leq \frac{\|A^dE\|}{1 - \|A^dE\|}.$$

Posledica 3.17 [59] *Neka je $B = A + E$, $E = AA^dEAA^d$ i $\|A^d\| \cdot \|E\| \leq 1$. Tada je*

$$\frac{\|B^d - A^d\|}{\|A^d\|} \leq \frac{k_d(A)\|E\|/\|A\|}{1 - k_d(A)\|E\|/\|A\|},$$

gde je $k_d(A) = \|A\| \cdot \|A^d\|$.

Sada možemo da izložimo našu posledicu, koja sledi direktno iz navedenih rezultata i Teoreme 3.21 u slučaju kada je $B = I$.

Posledica 3.18 *Neka je* $CA^\pi = 0$, $A^\pi D^d = 0$ *i* $\|A^d\| \cdot \|D^d C\| \leq 1$. *Tada važi*

$$(A - D^d C)^d - A^d = (A - D^d C)^d D^d C A^d = A^d D^d C (A - D^d C)^d,$$

$$(A - D^d C)^d = (I - A^d D^d C)^{-1} A^d = A^d (I - D^d C A^d)^{-1},$$

$$\frac{\|(A - D^d C)^d - A^d\|}{\|A^d\|} \leq \frac{k_d(A)\|D^d C\|/\|A\|}{1 - k_d(A)\|D^d C\|/\|A\|},$$

gde je $k_d(A) = \|A\| \cdot \|A^d\|$.

Pre nego što damo još jedan originalan rezultat iz rada [24], uvedimo sledeće oznake:

$$K = A^d B, \quad H = CA^d, \quad G = HK = C(A^d)^2 B.$$

Teorema 3.22 *Neka je* $Z = 0$, $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$, $BD^\pi G^d C = 0$, $BD^d G^\pi C = 0$, $BG^d D^\pi C = 0$ *i* $BG^\pi D^d C = 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned} S^d &= (I - KG^d H) A^d (I - KG^d H) \\ &= (I - KH(KH)^d) A^d (I - KH(KH)^d). \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je $X = (I - KG^d H) A^d (I - KG^d H)$. Dokazaćemo da je $SX = XS$, $XSX = X$ i $S^{m+1} X = S^m$, za neko $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} SX &= (A - BD^d C)(I - KG^d H) A^d (I - KG^d H) \\ &= (A - BD^d C - AA^d BG^d CA^d + BD^d CA^d BG^d CA^d)(A^d - A^d KG^d H) \\ &= \big(A - BD^d C - (I - A^\pi) BG^d CA^d + BD^d DG^d CA^d\big)\big(A^d - (A^d)^2 BG^d CA^d\big) \\ &= \big(A - BD^d C - BG^d CA^d + B(I - D^\pi) G^d CA^d\big)\big(A^d - (A^d)^2 BG^d CA^d\big) \\ &= (A - BD^d C - BG^d CA^d + BG^d CA^d)\big(A^d - (A^d)^2 BG^d CA^d\big) \\ &= (A - BD^d C)\big(A^d - (A^d)^2 BG^d CA^d\big) \\ &= AA^d - A^d BG^d CA^d - BD^d CA^d + BD^d C (A^d)^2 BG^d CA^d \\ &= AA^d - KG^d H - BD^d CA^d + BD^d GG^d CA^d \\ &= AA^d - KG^d H - BD^d G^\pi CA^d \\ &= AA^d - KG^d H. \end{aligned}$$

Slično dobijamo i

$$\begin{aligned} XS &= (I - KG^d H) A^d (I - KG^d H)(A - BD^d C) \\ &= \big(A^d - A^d BG^d C (A^d)^2\big)(A - BD^d C - A^d BG^d CAA^d + A^d BG^d CA^d BD^d C) \\ &= \big(A^d - A^d BG^d C (A^d)^2\big)\big(A - BD^d C - A^d BG^d C (I - A^\pi) + A^d BG^d DD^d C\big) \\ &= \big(A^d - A^d BG^d C (A^d)^2\big)\big(A - BD^d C - A^d BG^d C + A^d BG^d (I - D^\pi) C\big) \\ &= \big(A^d - A^d BG^d C (A^d)^2\big)\big(A - BD^d C - A^d BG^d C + A^d BG^d C\big) \\ &= AA^d - A^d BD^d C - A^d BG^d C (A^d)^2 A + A^d BG^d C (A^d)^2 BD^d C \\ &= AA^d - A^d BD^d C - A^d BG^d CA^d + A^d BG^d GD^d C \\ &= AA^d - A^d BG^d CA^d - A^d BG^\pi D^d C \\ &= AA^d - KG^d H. \end{aligned}$$

Dakle, važi $SX = XS$. Dalje, imamo

$$\begin{aligned}
XSX &= (AA^d - KG^dH)(I - KG^dH)A^d(I - KG^dH) \\
&= (AA^d - KG^dH - AA^dKG^dH + KG^dHKG^dH)A^d(I - KG^dH) \\
&= (AA^d - KG^dH - AA^dA^dBG^dCA^d + KG^dGG^dH)A^d(I - KG^dH) \\
&= (AA^d - A^dBG^dCA^d)A^d(I - KG^dH) \\
&= (I - A^dBG^dCA^d)AA^dA^d(I - KG^dH) \\
&= (I - KG^dH)A^d(I - KG^dH) \\
&= X.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
S^2X &= (A - BD^dC)(AA^d - A^dBG^dCA^d) \\
&= A^2A^d - AA^dBG^dCA^d - BD^dCAA^d + BD^dCA^dBG^dCA^d \\
&= A^2A^d - (I - A^\pi)BG^dCA^d - BD^dC(I - A^\pi) + BD^dDG^dCA^d \\
&= A^2A^d - BG^dCA^d - BD^dC + BD^dDG^dCA^d \\
&= A^2A^d - BD^\pi G^dCA^d - BD^dC \\
&= A^2A^d - BD^dC + A - A \\
&= (A - BD^dC) + (A^2A^d - A),
\end{aligned}$$

to pretpostavimo da za neko $m > 2$ važi $S^mX = S^{m-1} + (A^mA^d - A^{m-1})$. Dokažimo da onda važi i za $m+1$.

$$\begin{aligned}
S^{m+1}X &= S\left(S^{m-1} + (A^mA^d - A^{m-1})\right) \\
&= S^m + (A - BD^dC)(A^mA^d - A^{m-1}) \\
&= S^m + A^{m+1}A^d - A^m - BD^dCA^mA^d + BD^dCA^{m-1} \\
&= S^m + A^{m+1}A^d - A^m + BD^dCA^\pi A^{m-1} \\
&= S^m + (A^{m+1}A^d - A^m).
\end{aligned}$$

Ovim smo dokazali da je $S^{m+1}X = S^m$ za svako $m \geq \mathrm{ind}(A)$. $\square$

Ako je u prethodnoj teoremi $D = I$, kao njenu direktnu posledicu dobijamo [61, Teorema 2.2].

Posledica 3.19 [61] *Neka je* $Z = 0$, $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$ *i* $BG^\pi C = 0$. *Tada je*

$$\begin{aligned}
(A - BC)^d &= (I - KG^dH)A^d(I - KG^dH) \\
&= (I - KH(KH)^d)A^d(I - KH(KH)^d).
\end{aligned}$$

Sledeća teorema i njena posledica takođe predstavljaju originalne rezultate iz rada [24].

Teorema 3.23 *Neka je* $\operatorname{ind}(Z) = 1$, $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$, $BD^\pi = 0$, $D^\pi C = 0$, $ZZ^gG = GZZ^g$, $BD = DB$, $CD = DC$ *i* $BG^\pi C = 0$. *Tada je*

$$S^d = (I - KZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H) + KZ^g H.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku $X = (I - KZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H) + KZ^g H$. Analogno kao u dokazu Teoreme 3.21 i 3.22, dokazaćemo da je $SX = XS$, $XSX = X$ i $S^{m+1}X = S^m$, za neko $m \in \mathbb{N}$. Kako važi

$$\begin{aligned}
SX &= (A - BD^dC)\big((I - KZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H) + KZ^g H\big)\\
&= (A - BD^dC - AKZ^\pi G^d H + BD^dCKZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H)\\
&\quad + AKZ^g H - BD^dCKZ^g H\\
&= (A - BD^dC - AA^dBZ^\pi G^d H + BD^dCA^dBZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H)\\
&\quad + AA^dBZ^g H - BD^dCA^dBZ^g H\\
&= (A - BD^dC - (I - A^\pi)BZ^\pi G^d H + BD^d(D - Z)Z^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H)\\
&\quad + (I - A^\pi)BZ^g H - BD^d(D - Z)Z^g H\\
&= (A - BD^dC - BZ^\pi G^d H + BD^dDZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H)\\
&\quad + BZ^g H - BD^dDZ^g H + BD^dZZ^g H\\
&= (A - BD^dC - BD^\pi Z^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H) + BD^\pi Z^g H + BD^dZZ^g H\\
&= (A - BD^dC)A^d(I - KZ^\pi G^d H) + BD^dZZ^g H\\
&= AA^d - BD^dCA^d - AA^dKZ^\pi G^d H + BD^dCA^dKZ^\pi G^d H + BD^dZZ^gCA^d\\
&= AA^d - BD^dZ^\pi CA^d - AA^dA^dBZ^\pi G^d H + BD^dCA^dA^dBZ^\pi G^d H\\
&= AA^d - BD^dZ^\pi CA^d - A^dBZ^\pi G^d H + BD^dGG^dZ^\pi CA^d\\
&= AA^d - BD^dG^\pi Z^\pi CA^d - KZ^\pi G^d H\\
&= AA^d - D^dBG^\pi Z^\pi CA^d - KZ^\pi G^d H\\
&= AA^d - KZ^\pi G^d H + D^dBG^\pi ZZ^gCA^d\\
&= AA^d - KZ^\pi G^d H
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
XS &= \big((I - KZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H) + KZ^g H\big)(A - BD^dC)\\
&= (A^d - KZ^\pi G^d HA^d)(A - BD^dC - KZ^\pi G^dCA^dA + KZ^\pi G^dCA^dBD^dC)\\
&\quad + KZ^gCA^dA - KZ^gCA^dBD^dC\\
&= (A^d - KZ^\pi G^d HA^d)(A - BD^dC - KZ^\pi G^dC(I - A^\pi) + KZ^\pi G^d(D - Z)D^dC)\\
&\quad + KZ^gC(I - A^\pi) - KZ^g(D - Z)D^dC\\
&= (A^d - KZ^\pi G^d HA^d)(A - BD^dC - KZ^\pi G^dC + KZ^\pi G^dDD^dC - KG^dZ^\pi ZD^dC)\\
&\quad + KZ^gC - KZ^gDD^dC + KZ^gZD^dC\\
&= (A^d - KZ^\pi G^d HA^d)(A - BD^dC - KZ^\pi G^dD^\pi C) + KZ^gD^\pi C + KZ^gZD^dC\\
&= (A^d - KZ^\pi G^d HA^d)(A - BD^dC) + KZ^gZD^dC
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= AA^d - A^dBD^dC - A^dBZ^\pi G^dCA^d + A^dBZ^\pi G^dGD^dC - A^dBZZ^gD^dC \\
&= AA^d - A^dBZ^\pi D^dC - A^dBZ^\pi G^dCA^d + A^dBZ^\pi GG^dD^dC \\
&= AA^d - A^dBZ^\pi G^\pi D^dC - KZ^\pi G^dH \\
&= AA^d - KZ^\pi G^dH + A^dBZZ^gG^\pi CD^d \\
&= AA^d - KZ^\pi G^dH
\end{aligned}
$$

to imamo da važi $SX = XS$. Dalje, imamo

$$
\begin{aligned}
XSX &= (AA^d - KZ^\pi G^dH)\big((I - KZ^\pi G^dH)A^d(I - KZ^\pi G^dH) + KZ^gH\big) \\
&= (I - A^dBZ^\pi G^dCA^d)AA^d\big((A^d - A^dBZ^\pi G^dHA^d)(I - KZ^\pi G^dH) + A^dBZ^gH\big) \\
&= (I - A^dBZ^\pi G^dCA^d)\big((I - A^dBZ^\pi G^dCA^d)A^d(I - KZ^\pi G^dH) + A^dBZ^gCA^d\big) \\
&= (I - A^dBZ^\pi G^dCA^d)(I - A^dBZ^\pi G^dCA^d)A^d(I - KZ^\pi G^dH) \\
&\quad + A^dBZ^gCA^d - A^dBZ^\pi G^dC(A^d)^2BZ^gCA^d \\
&= (I - 2A^dBZ^\pi G^dCA^d + A^dBZ^\pi G^dC(A^d)^2BZ^\pi G^dCA^d)A^d(I - KZ^\pi G^dH) \\
&\quad + A^dBZ^gCA^d - A^dBZ^\pi G^dGZ^gCA^d \\
&= (I - 2A^dBZ^\pi G^dCA^d + A^dBZ^\pi G^dGZ^\pi G^dCA^d)A^d(I - KZ^\pi G^dH) \\
&\quad + A^dBZ^gCA^d - A^dBG^dGZ^\pi Z^gCA^d \\
&= (I - 2A^dBZ^\pi G^dCA^d + A^dBZ^\pi G^dGG^dCA^d)A^d(I - KZ^\pi G^dH) + A^dBZ^gCA^d \\
&= (I - KZ^\pi G^dH)A^d(I - KZ^\pi G^dH) + KZ^gH \\
&= X.
\end{aligned}
$$

Nakon računanja dobijamo da važi

$$
\begin{aligned}
S^2X &= (A - BD^dC)(AA^d - KZ^\pi G^dH) \\
&= A^2A^d - AA^dBZ^\pi G^dCA^d - BD^dCAA^d + BD^dCA^dBZ^\pi G^dCA^d \\
&= A^2A^d - (I - A^\pi)BZ^\pi G^dCA^d - BD^dC(I - A^\pi) + BD^d(D - Z)Z^\pi G^dCA^d \\
&= A^2A^d - BZ^\pi G^dCA^d - BD^dC + BD^dDZ^\pi G^dCA^d \\
&= A^2A^d - BD^dC - BD^\pi Z^\pi G^dCA^d \\
&= A^2A^d - BD^dC + A - A \\
&= (A - BD^dC) + (A^2A^d - A) \\
&= S + (A^2A^d - A).
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da za neko $m > 2$ važi $S^m = S^{m-1} + (A^mA^d - A^{m-1})$. Dokažimo da onda važi i za $m+1$.

$$
\begin{aligned}
S^{m+1}X &= S(S^{m-1} + (A^mA^d - A^{m-1})) \\
&= S^m + (A - BD^dC)(A^mA^d - A^{m-1}) \\
&= S^m + (A^{m+1}A^d - A^m) - BD^dCA^mA^d + BD^dCA^{m-1} \\
&= S^m + (A^{m+1}A^d - A^m) - BD^dCA^\pi A^{m-1} \\
&= S^m + (A^{m+1}A^d - A^m).
\end{aligned}
$$

Dokazali smo da pomenuta jednakost važi za svako $m \in \mathbb{N}$. Stoga je $S^{m+1}X = S^m$ za $m \geq \mathrm{ind}(A)$. $\square$

Ako je u Teoremi 3.23 $D = I$, kao direktnu posledicu ove teoreme imamo sledeći rezultat.

Posledica 3.20 *Neka je* $\mathrm{ind}(Z) = 1$, $A^\pi B = 0$, $CA^\pi = 0$, $BG^\pi C = 0$ *i* $G^d Z^\pi = Z^\pi G^d$. *Tada je*

$$(A - BC)^d = (I - KZ^\pi G^d H)A^d(I - KZ^\pi G^d H) + KZ^g H.$$

Literatura

[1] T. Ando. *Generalized Schur complements*, Linear Algebra Appl. 27 (1979) 173–186.

[2] A. Ben-Israel. *On matrices of index zero or one*. SIAM J. Appl. Math. 17 (1969) 11181121.

[3] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville. *Generalized Inverses: Theory and Applications*, 2nd Edition, Springer Verlag, New York, 2003.

[4] A. Bjerhammar. *Application of calculus of matrices to method of least squares with special reference to geodetic calculations*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 49 (1951) 86.

[5] A. Bjerhammar. *Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations*, Bull. Géodésique (1951) 118–220.

[6] A. Bjerhammar. *A generalized matrix algebra*, Trans. Roy. Inst. Tech. Stockholm 124 (1958) 32.

[7] C. Bu, C. Feng, S. Bai. *Representations for the Drazin inverses of the sum of two matrices and some block matrices*, Appl. Math. Comput. 218 (2012) 10226-10237.

[8] C. Bu, K. Zhang. *The Explicit Representations of the Drazin Inverses of a Class of Block Matrices*, Electron. J. Linear Algebra, 20 (2010) 406–418.

[9] S.L. Campbell. *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

[10] S.L. Campbell. *The Drazin inverse and systems of second order linear differential equations*, Linear and Multilinear Algebra, 14 (1983) 195–198.

[11] S.L. Campbell, C.D. Meyer. *Generalized Inverse of Linear Transformations*, Pitman, London, 1979; Dover, New York, 1991.

[12] N. Castro–González, E. Dopazo, M.F. Martínez–Serrano. *On the Drazin Inverse of sum of two operators and its application to operator matrices*, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009) 207–215.

[13] N. Castro–González, M.F. Martínez–Serrano. *Drazin inverse of partitioned matrices in terms of Banachiewicz–Schur forms*, Linear Algebra Appl. 432 (2010) 1691–1702.

[14] M. Catral, D.D. Olesky, P. Van Den Driessche. *Block representations of the Drazin inverse of a bipartite matrix*, Electron. J. Linear Algebra, 18 (2009) 98-107.

[15] X. Chen, R.E. Hartwig. *The group inverse of a triangular matrix*, Linear Algebra Appl. 237/238 (1996) 97–108.

[16] R.E. Cline. *Inverses of rank invariant powers of a matrix*, SIAM J. Numer. Anal., 5 (1968) 182–197.

[17] A.S. Cvetković, G.V. Milovanović. *On Drazin inverse of operator matrices*, J. Math. Anal. Appl., 375 (2011) 331-335.

[18] D.S. Cvetković–Ilić, D.S. Djordjević, V. Rakočević. *Schur complement in C^*-algebras*, Mathematische Nachrichten, 278 (7–8) (2005) 808–814.

[19] D.S. Cvetković–Ilić. *A note on the representation for the Drazin inverse of* 2×2 *block matrices*, Linear Algebra Appl. 429 (2008) 242–248.

[20] D.S. Cvetković–Ilić, J. Chen, Z. Xu. *Explicit representation of the Drazin inverse of block matrix and modified matrix*, Linear and Multilinear Algebra, 57.4 (2009) 355–364.

[21] D.S. Cvetković–Ilić. *Expression of the Drazin and MP-inverse of partitioned matrix and quotient identity of generalized Schur complement*, App. Math. Comp. 213(1) (2009), 18-24.

[22] D.S. Cvetković–Ilić, Y. Wei. *Representation for the Drazin inverse of operators on Banach spaces*, Electronic Journal of Linear Algebra 18 (2009), 613-627.

[23] D.S. Cvetković–Ilić. *New additive results on Drazin inverse and its applications*, Appl. Math. Comput. 218 (2011) 3019–3024.

[24] D.S. Cvetković–Ilić, J. Ljubisavljević. *A note on the Drazin inverse of a modified matrix*, Acta Math. Sci. 32B(2) (2012) 483–487.

[25] C. Deng, Y. Wei. *A note on the Drazin inverse of an anti-triangular matrix*, Linear Algebra Appl. 431 (2009) 1910-1922.

[26] C. Deng. *A note on the Drazin inverses with Banachiewicz–Schur forms*, Appl. Math. Comput. 213 (2009) 230–234.

[27] D.S. Djordjević, P.S. Stanimirović. *On the generalized Drazin inverse and generalized resolvent*, Czechoslovak Math. J. 51(126)(2001) 617–634.

[28] E. Dopazo, M.F. Martínez–Serrano. *Further results on the representation of the Drazin inverse of a* 2×2 *block matrix*, Linear Algebra Appl. 432 (2010) 1896–1904.

[29] E. Dopazo, M.F. Martínez–Serrano. *On deriving the Drazin inverse of a modified matrix*, Linear Algebra Appl. 438 (2013) 1678–1687.

[30] M.P. Drazin. *Pseudoinverse in associative rings and semigroups*, Amer. Math. Monthly 65 (1958) 506–514.

[31] W.J. Duncan. *Some devices for the solution of large sets of simultaneous linear equations (with an appendix on the reciprocation of partitioned matrices)*, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Seventh Series, 35 (1944) 660–670.

[32] I. Fredholm. *Sur une classe d' équations fonctionnelles*, Acta Math. 27 (1903) 365–390.

[33] T.N.E. Greville. *Spectral generalized inverses of square matrices*, Proc. Symp. on Theory and Appl. of Generalized Inverses of Matrices, Texas Tech. College, Lubbock, Texas (1968).

[34] T.N.E. Greville. *Some new generalized inverses with spectral properties*, Proc. Of the Conf. On Generalized matrix inverses, Texas Tech. Univ. (March, 1968).

[35] R.E. Hartwig, X. Li, Y. Wei. *Representations for the Drazin inverse of* 2×2 *block matrix*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2006) 757–771.

[36] R.E. Hartwig, J.M. Shoaf. *Group inverses and Drazin inverses of bidiagonal and triangular Toeplitz matrices*, J. Austral. Math. Soc. 24A (1977) 10–34.

[37] R.E. Hartwig, G. Wang, Y. Wei. *Some additive results on Drazin inverse*, Linear Algebra Appl. 322 (2001) 207–217.

[38] D. Hilbert. *Grundzüge einer algemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig, 1912, (reprint šest članaka koji se pojavljuju originalno u Götingen Nachrichten (1904), 49–51; (1904), 213–25; (1905), 307–338; (1906), 157–227; (1906), 439–480; (1910) 355–417).

[39] Lj. Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija*, Drugo izdanje, Prosveta, Niš, 1997.

[40] S. Lanczos. *Linear systems in self–adjoint form*, Amer. Math. Monthly 65 (1958) 665–679.

[41] X. Li, Y. Wei. *A note on the representations for the Drazin inverse of* 2×2 *block matrices*, Linear Algebra Appl. 423 (2007) 332–338.

[42] J. Ljubisavljević, D.S. Cvetković–Ilić. *Additive results for the Drazin inverse of block matrices and applications*, J. Comput. Appl. Math. 235 (2011) 3683–3690.

[43] J. Ljubisavljević, D.S. Cvetković–Ilić. *Representations for Drazin inverse of block matrix*, J. Comput. Anal. Appl. 15(3) (2013) 481-497.

[44] M.F. Martínez–Serrano, N. Castro-González. *On the Drazin inverse of block matrices and generalized Schur complement*, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 2733–2740.

[45] C.D. Meyer, N.J. Rose. *The index and the Drazin inverse of block triangular matrices*, SIAM J. Appl. Math. 33 (1977) 1–7.

[46] C.D. Meyer, J.M. Shoaf. *Updating finite Markov chains by using techniques of group matrix inversion*, J. Statist. Comput. Simulat. 11 (1980) 163–181.

[47] J. Miao. *Results of the Drazin inverse of block matrices*, J. Shanghai Normal Univ. 18 (1989) 25–31 (in Chinese).

[48] E. H. Moore. *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920) 394–395.

[49] D. Mosić. *Some results on the Drazin inverse of a modified matrix*, Calcolo 50 (2013) 305–311.

[50] R. Penrose. *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955) 406–413.

[51] D.V. Quellette. *Schur complements and statistics*, Linear Algebra Appl. 36 (1981) 187–295.

[52] C.R. Rao. *Calculus of Generalized Inverses of Matrices Part I: General Theory.* Sankhya, 29(3) (1967) 317–342.

[53] I. Schur. *Uber Potenzreihen die im Innerr des Einheitskreises sind*, J.Reine Argew.Math. 147 (1917) 205–234.

[54] J.E. Scroggs, P.L. Odell. *An alternate definition of a pseudoinverse of a matrix*, SIAM J. Appl. Math. 14(4) (1966) 796–810.

[55] A. Shakoor, H. Yang, A. Ilyas. Some representations for the Drazin inverse of a modified matrix, Calcolo 51 (2014) 505–514.

[56] J.M. Shoaf. *The Drazin inverse of a rank–one modification of a square matrix*, Doktorska disertacija, North Carolina State University, 1975.

[57] J. Višnjić. *On additive properties of the Drazin inverse of block matrices and representations*, Appl. Math. Comput. 250 (2015) 444–450.

[58] G. Wang, Y. Wei, S. Qiao. *Generalized Inverses: Theory and Computations*, Science Press, Beijing, 2004.

[59] Y. Wei, G. Wang. The perturbation theory for the Drazin inverse and its applications, Linear Algebra Appl. 258 (1997) 179–186.

[60] Y. Wei. *Expressions for the Drazin inverse of a* 2×2 *block matrix*, Linear and Multilinear Algebra, 45 (1998) 131–146.

[61] Y. Wei. *The Drazin inverse of a modified matrix*, Appl.Math.Comput. 125 (2002) 295–301.

[62] Y. Wei, X. Li, F. Bu, F. Zhang. *Relative perturbation bounds for the eigenvalues of diagonalizable and singular matrices-application of perturbation theory for simple invariant subspaces*, Linear Algebra Appl. 419 (2006) 765-771.

[63] H. Yang, X. Liu. *The Drazin inverse of the sum of two matrices and its applications*, J. Comput. Appl. Math. 235 (2011) 1412-1417.

[64] N. Zhang, Y. Wei. *Solving EP singular linear systems*, Internat J. Comput. Math. 81 (2004) 1395–1405.

Biografija autora

Jelena Višnjić je rođena 8.2.1982. godine u Prokuplju. Osnovnu kolu "Ćele-kula" i srednju kolu "Bora Stanković" završila je u Nišu. Osnovne studije iz matematike (smer Diplomirani matematičar za računarstvo i informatiku), upisala je školske 2001/2002. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu. Diplomirala je 3.12.2008. godine. Doktorske akademske studije iz matematike upisala je kolske 2008/2009. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Nišu i položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom.

Jelena Višnjić je istraživač na projektu koji finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije: "Funkcionalna analiza, stohastička analiza i primene" (br. 174007). U periodu od 2009. do 2010. godine Jelena Višnjić je bila istraživač na projektu "Teorija operatora, stohastička analiza i primene" (br. 144003), koji je finansiralo isto ministarstvo. Osim toga, Jelena Višnjić je u 2009. godini bila stipendista ovog ministarstva.

Jelena Višnjić je bila saradnik u nastavi Medicinskog fakulteta u Nišu, na predmetima Matematika i Informatika, od 2009. do 2010. godine. Od 2010. godine do danas Jelena Višnjić je asistent Medicinskog fakulteta u Nišu, za užu naučnu oblast Matematika i informatika.

Jelena Višnjić je učestvovala na konferenciji "Workshop on Generalized Inverse and Its Applications", 2-4.11.2012, Nanjing, Kina, i na ovoj konferenciji je održala predavanje: The additivity of the Drazin inverse for block matrices. Osim toga, Jelena Višnjić je održala predavanje na Institutu za tehnologiju u Šangaju (Kina), pod nazivom: An introduction to the Drazin inverse. Takođe, učestvovala je na konferenciji "XIII Srpski matematički kongres", 22-25.5.2014, Vrnjačka Banja, Srbija, gde je prezentovala rad pod nazivom: Additive properties of the Drazin inverse for block matrix and representations.

Jelena Višnjić je recenzirala radove za naučne časopise od međunarodnog značaja: Filomat i Applied Mathematics and Computation.

Izjave autora

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Адитивне особине Дразиновог инверза и Дразинов инверз блок матрица

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 25.11.2014.

Аутор дисертације: Јелена Вишњић

Потпис докторанда:

ЈВишњић

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора: Јелена Вишњић

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Адитивне особине Дразиновог инверза и Дразинов инверз блок матрица

Ментор: Драгана С. Цветковић-Илић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 25.11.2014.

Аутор дисертације: Јелена Вишњић

Потпис докторанда:

ЈВишњић

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла" да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Адитивне особине Дразиновог инверза и Дразинов инверз блок матрица

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 25.11.2014.

Аутор дисертације: Јелена Вишњић

Потпис докторанда:

ЈВишњић