



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ**  
**ФАКУЛТЕТ ИНЖЕЊЕРСКИХ НАУКА**

Драган Ракић

**РАЗВОЈ И ПРИМЕНА МАТЕРИЈАЛНИХ МОДЕЛА**  
**ПОРОЗНИХ МЕДИЈА У СТАТИЧКОЈ И**  
**ДИНАМИЧКОЈ АНАЛИЗИ НАСУТИХ БРАНА**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2014. година



---

## I. Аутор

---

Име и презиме: Драган Ракић

Датум и место рођења: 28.06.1979. године, Јагодина, Република Србија

Садашње запослење: Истраживач сарадник, Факултет инжењерских наука, Крагујевац

---

## II. Докторска дисертација

---

Наслов: Развој и примена материјалних модела порозних медија у статичкој и динамичкој анализи насутих брана

Број страница: 203

Број слика: 115

Број библиографских података: 120

Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука, Крагујевац

Научна област (УДК): Примењена информатика и рачунарско инжењерство (539.37)

Ментор: др Мирослав Живковић, редовни професор, Факултет инжењерских наука, Крагујевац

---

## III. Оцена и одбрана

---

Датум пријаве теме: 20. 01. 2012. године

Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 01-1/3401-8 од 20.12.2012. године

Комисија за оцену подобности теме и кандидата:

1. Др Борис Јеремић, редовни професор,  
Department of civil and environmental engineering, Davis, University of California; Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, California;
2. Др Радован Славковић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац;
3. Др Ненад Грујовић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац;
4. Др Дејан Дивац, научни саветник,  
Институт за водопривреду "Јарослав Черни";
5. Др Гордана Јовичић, ванредни професор,  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац;
6. Др Мирјана Вукићевић, доцент,  
Грађевински факултет у Београду;
7. Др Мирослав Живковић, редовни професор, ментор,  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац

Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:

1. Др Борис Јеремић, редовни професор,  
Department of civil and environmental engineering, Davis, University of California; Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, California;
2. Др Радован Славковић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац;
3. Др Ненад Грујовић, редовни професор,  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац;
4. Др Дејан Дивац, научни саветник,  
Институт за водопривреду "Јарослав Черни";
5. Др Гордана Јовичић, ванредни професор,  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац;
6. Др Мирјана Вукићевић, доцент,  
Грађевински факултет у Београду;
7. Др Мирослав Живковић, редовни професор, ментор;  
Факултет инжењерских наука, Крагујевац

Датум одбране дисертације:

---



## Резиме

Тло као основни материјала за израду насутих брана има изразито нелинеарно механичко понашање које се битно разликује од механичког понашања других инжењерских материјала. Како би спровођење детаљне анализе стабилности насутих брана применом методе коначних елемената било могуће, неопходно је коришћење материјалних модела за описивање механичког понашања материјала тла. Са тим циљем у оквиру ове дисертације су развијени алгоритми за интеграцију напона материјалних модела најчешћих типова тла. Развијени материјални модели су намењени статичкој и динамичкој анализи тла, односно насутих брана. Поред познатих материјалних модела за које су развијени алгоритми за интеграцију напона, развијен је и имплементиран нов материјални модел за симулацију механичког понашања грануларних материјала заснован на услову лома Максимовића. Верификација материјалних модела је извршена кроз више примера нумеричке симулације експерименталних испитивања узорака материјала тла као и кроз примере у којима су нумерички резултати поређени са теоријским решењима.

Развијен је и имплементиран алгоритам за динамичку анализу проблема механике тла са посебним освртом на примену у сеизмичкој анализи стабилности насутих брана.

Како би се анализирано реално понашање материјала тла као порозног медија чије су поре испуњене флуидом и у обзир узела интеракција ове две фазе, извршено је спрезање равнотежних једначина чврсте и течне фазе.

Са циљем редуковања домена нумеричке интеграције при анализи насутих брана изложених сеизмичком оптерећењу, развијене су и имплементирани апсорбујуће границе модела. Коришћењем ових граница спречава се појава рефлексije таласа од граница модела.

Извршена је анализа и систематизација критеријума за анализу стабилности насутих брана и предложене методе одређивања њихове стабилности применом развијених алгоритама. У оквиру овог дела је обрађена метода редуковања смичуће чврстоће применом материјалних модела развијених у оквиру дисертације.

Развијени софтвер и предложене методе анализе стабилности насутих брана су примењене у анализи стабилности бране Првонек.

**Кључне речи:** метода коначних елемената, материјални модели, насуте бране, анализа стабилности

# Abstract

Soil as a basic material for construction of embankment dams is of a very non-linear and fundamentally different mechanical behavior compared to mechanical behavior of other engineering materials. In order to enable performance of detailed stability analysis of this structure type using the finite element method, it is necessary to use constitutive models to describe mechanical behavior of soil. With such an objective, algorithms for integration of material model stress of most common soil types were developed in this thesis. Developed material models are applied in static and dynamic soil analysis especially in embankment dams. Apart from familiar material models with developed algorithms for stress integration, there is also a new material model developed and implemented to simulate mechanical behavior of granular materials based on Maksimovic's failure envelope. Verification of the material model was performed using a number of numerical simulations of experimental tests of soil material samples as well as examples in which numerical results were compared to theoretical solutions of the problems.

Algorithm for dynamic analysis of the soil mechanics problems was developed and implemented with a special emphasis on the application in embankment dam seismic stability analysis.

In order to analyze realistic behavior of soil materials as porous media whose pores are filled with fluid and to consider the interaction of these two phases, coupling of the equilibrium equations in solid and fluid phases was performed.

With the aim to reduce numerical integration domain in the analysis of embankment dams subjected to seismic loads, absorbing boundary conditions were developed and implemented. These boundaries prevent the occurrence of reflection waves from the artificial boundaries.

The analysis and systematization of stability analysis criteria for embankment dams were performed with suggested methods of their stability determination using developed algorithms. Sheer strength reduction method is also processed within this section using material models developed in the thesis.

Developed software and suggested methods of embankment dam stability analysis were applied in the Prvonek dam stability analysis.

**Key words:** finite element method, material models, embankment dams, analysis of stability

*Mojoj majci*

## САДРЖАЈ

<b>1</b>	<b>Увод.....</b>	<b>1</b>
1.1	Мотивација.....	1
1.2	Циљ рада.....	1
1.3	Садржај рада.....	2
1.4	Преглед литературе.....	3
<b>2</b>	<b>ОПШТЕ РАЗМАТРАЊЕ НАПОНСКО-ДЕФОРМАЦИЈСКОГ ПОНАШАЊА ТЛА.....</b>	<b>5</b>
2.1	Карактеристике тла.....	5
2.2	Напони у тлу.....	5
2.2.1	Принцип ефективног напона.....	8
2.3	Површ течења и пластично течење.....	9
2.4	Услов конзистентности.....	12
<b>3</b>	<b>МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛИ ЗА ТЛО И НУМЕРИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА КОНСТИТУТИВНИХ РЕЛАЦИЈА.....</b>	<b>13</b>
3.1	Конститутивне релације теорије пластичности.....	13
3.2	Решавање нелинеарних једначина равнотеже.....	17
3.3	Методе решавања нелинеарних једначина.....	19
3.4	Мор-Кулонов материјални модел.....	23
3.5	Мор-Кулонов материјални модел са ојачањем.....	27
3.6	Мацуока-Накаијев материјални модел.....	32
3.7	Дракер-Прагерев материјални модел.....	35
3.8	Максимовићев материјални модел.....	40
3.9	Хук-Браунов материјални модел.....	46
3.10	Генерализовани Хук-Браунов материјални модел.....	49
3.11	Пан-Хадсонов материјални модел.....	52
3.12	Модификовани Кем-Клеј материјални модел.....	55
3.13	Верификација материјалних модела.....	61
<b>4</b>	<b>ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА.....</b>	<b>71</b>
4.1	Увод.....	71
4.2	Методе директне интеграције.....	72
4.2.1	Имплицитна интеграција.....	72
4.2.2	Експлицитна интеграција.....	76
4.3	Израчунавање матрица крутости, пригушења и маса.....	81
4.4	Верификација алгоритма за интеграцију диференцијалних једначина кретања.....	86
<b>5</b>	<b>МКЕ ФОРМУЛАЦИЈА ПОРОЗНОГ ДВОФАЗНОГ МЕДИЈА.....</b>	<b>90</b>
5.1	Јако спрезање потпуно засићеног медија.....	90
5.1.1	Уводна разматрања.....	90
5.1.2	Једначина равнотеже чврсте фазе.....	91
5.1.3	Једначина равнотеже течне фазе.....	92
5.1.4	Једначина равнотеже мешавине.....	92
5.1.5	Закон о одржању масе флуида.....	93
5.1.6	Модификација водећих једначина.....	95
5.2	Нумеричко решење једначина $u$ - $p$ - $U$ формулације.....	97
5.2.1	Нумеричка интеграција једначине чврсте фазе.....	99



5.2.2	Нумеричка интеграција једначине течне фазе .....	100
5.2.3	Нумеричка интеграција једначине континуитета .....	101
5.3	Матрични облик једначина $u$ - $p$ - $U$ формулације .....	101
5.4	Јако спрезање делимично засићеног медија .....	103
5.4.1	Модификација једначина делимично засићеног медија .....	103
5.5	Верификација формулације порозних медија .....	105
<b>6</b>	<b>АПСОРБУЈУЋЕ ГРАНИЦЕ МОДЕЛА.....</b>	<b>108</b>
6.1	Вискозне границе модела.....	108
6.2	Апсорбујући бесконачни елементи.....	110
6.3	Верификација вискозних граница модела.....	112
<b>7</b>	<b>СТАБИЛНОСТ НАСУТИХ БРАНА .....</b>	<b>115</b>
7.1	Стабилност бране и узроци њеног рушења.....	115
7.2	Оптерећење бране .....	119
7.2.1	Сопствена тежина .....	119
7.2.2	Дејство акумулације на брану .....	119
7.2.3	Сеизмичко оптерећење.....	120
7.2.4	Комбинације оптерећења .....	120
7.3	Одређивање степена сигурности бране .....	120
7.3.1	Анализа стабилности бране применом методе редуковања смичуће чврстоће .....	122
7.3.2	Линеарне површи течења при одређивању степена сигурности.....	123
7.3.3	Нелинеарне површи течења при одређивању степена сигурности.....	124
7.4	Критеријуми за оцену стабилности насутих брана .....	128
7.5	Пример одређивања стабилности.....	129
<b>8</b>	<b>АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ БРАНЕ ПРВОНЕК.....</b>	<b>134</b>
8.1	Општи подаци о брани и акумулацији .....	134
8.1.1	Мрежа коначних елемената и гранични услови .....	135
8.2	Идентификација параметара материјала .....	136
8.2.1	Одређивање материјалних константи.....	136
8.3	Калибрација модела бране .....	139
8.3.1	Калибрација модела за статичку анализу стабилности.....	140
8.3.2	Калибрација модела за динамичку анализу стабилности .....	142
8.3.3	Усвојене вредности параметара након калибрације модела .....	143
8.4	Случајеви оптерећења и критеријуми стабилности .....	144
8.4.1	Вода на коти нормалног успора – стационарно струјање.....	144
8.4.2	Вода на коти максималног успора – стационарно струјање.....	144
8.4.3	Брзо пражњење акумулације .....	144
8.4.4	Сеизмичко оптерећење.....	144
8.4.5	Критеријуми стабилности и степени сигурности.....	145
8.5	Резултати напонско-деформацијске анализе бране.....	145
8.5.1	Вода на коти нормалног успора – стационарно струјање.....	145
8.5.2	Вода на коти максималног успора – стационарно струјање.....	150
8.5.3	Брзо пражњење акумулације .....	154
8.5.4	Сеизмичко оптерећење.....	159
8.6	Степен сигурности бране .....	164
<b>9</b>	<b>ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА .....</b>	<b>165</b>

<b>10</b>	<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>167</b>
<b>11</b>	<b>ДОДАТАК .....</b>	<b>176</b>

## ЛИСТА СЛИКА

Слика 2.1 Напон у 3Д простору .....	6
Слика 2.2 Интерпретација инваријанти напона у простору главних напона.....	7
Слика 2.3 Ојачање материјала: а) путања напона, б) зависност напон-деформација .....	10
Слика 2.4 Идеална пластичност ( $\kappa = \text{const}$ ): а) путања напона, б) зависност напон-деформација .....	10
Слика 2.5 Омекшавање материјала: а) путања напона, б) зависност напон-деформација .....	11
Слика 3.1 Еласто-пластично понашања материјала .....	14
Слика 3.2 Шематски приказ методе еластичног предиктора-пластичног коректора (Return mapping) .....	17
Слика 3.3 Илустрација Њутн-Рапсонове итерационе методе.....	19
Слика 3.4 Пост-критично понашање конструкције.....	21
Слика 3.5 Метода константне дужине лука .....	22
Слика 3.6 Површ течења Мор-Кулоновог материјалног модела .....	23
Слика 3.7 Угао унутрашњег трења у функцији ефективне пластичне деформације .....	29
Слика 3.8 Промена кохезије у функцији ефективне пластичне деформације .....	29
Слика 3.9 Површ течења Мацуока-Накаијевог материјалног модела .....	32
Слика 3.10 Површ течења Дракер-Прагеровог материјалног модела .....	35
Слика 3.11 Површ течења у девијаторској равни у случају постојања кинематског ојачања ..	37
Слика 3.12 Површ течења Максимовићевог материјалног модела .....	41
Слика 3.13 Параметри модела нелинеарне анvelope модела Максимовића.....	41
Слика 3.14 Површ течења модела и конверзија параметара модела .....	42
Слика 3.15 Површ течења Хук-Брауновог материјалног модела.....	46
Слика 3.16 Површ течења Пан-Хадсоновог материјалног модела .....	52
Слика 3.17 Модел глине (Кем-Клеј материјални модел) .....	55
Слика 3.18 Површ граничног стања модификованог Кем-Клеј модела .....	56
Слика 3.19 Понашање узорка глине при изотропној компресији .....	56
Слика 3.20 Понашање модела глине при ојачању .....	57
Слика 3.21 Понашање модела глине при омекшању.....	58
Слика 3.22 Модел за симулацију троосног теста.....	61
Слика 3.23 Функција оптерећења модела у троосном тесту .....	61

Слика 3.24 Површи течења и путања напонске тачке: а) Мор-Кулон, б) Дракер-Прагер, в) Максимовић, г) Хук-Браун [кРа].....	62
Слика 3.25 Модел за симулацију троосног теста и функције оптерећења.....	63
Слика 3.26 Резултати симулације троосног теста.....	64
Слика 3.27 Функција оптерећења модела.....	64
Слика 3.28 Резултати едометарског теста и резултати експеримента: а) аксијална деформација у функцији напона, б) порозност у функцији напона.....	65
Слика 3.29 Модел за симулацију теста чистог смицања и функција оптерећења.....	66
Слика 3.30 Естимација параметара материјала Мор-Кулоновог модела.....	66
Слика 3.31 Резултати симулације теста чистог смицања Мор-Кулоновог модел.....	67
Слика 3.32 Естимација параметара материјала Максимовићевог модел.....	67
Слика 3.33 Резултати симулације теста чистог смицања применом Максимовићевог модела.....	68
Слика 3.34 Геометрија тунела и модел коначних елемената.....	68
Слика 3.35 Радијални и тангенцијални напон а) $p=0\text{MPa}$ , б) $p=2.5\text{MPa}$ .....	69
Слика 3.36 Радијални и тангенцијални напон – параболички елементи а) $p=0\text{MPa}$ , б) $p=2.5\text{MPa}$ .....	69
Слика 4.1 Апроксимација генералисане брзине у временском кораку.....	73
Слика 4.2 Метода централних разлика са променљивим временским кораком.....	77
Слика 4.3 Шема израчунавања у методи централних разлика.....	77
Слика 4.4 Метода централних разлика са константним временским кораком.....	79
Слика 4.5 Алгоритам методе централних разлика.....	81
Слика 4.6 Еласто-пластична динамичка анализа сферне капе.....	86
Слика 4.7 Динамички одзив модела.....	87
Слика 4.8 Геометрија модела бране.....	87
Слика 4.9 Убрзање на темељној спојници.....	88
Слика 4.10 Расподела пластичних деформација пре дејства земљотреса.....	88
Слика 4.11 Расподела пластичних деформација након дејства земљотреса.....	88
Слика 4.12 Хоризонтално убрзање и хоризонтално померање круне бране.....	89
Слика 5.1 Механика флуида применом (а) Дарсијевог и (б) реалног струјања.....	95
Слика 5.2 Флуиди у порама солида: а) један флуид кваси површину солида, б) два флуида квасе површину солида.....	103
Слика 5.3 Зависност (а) степена засићења и (б) коефицијента релативне филтрације од дубине.....	104

---

Слика 5.4 Модел за анализу вертикалне консолидације.....	106
Слика 5.5 Расподела порних притисака у моделу .....	107
Слика 6.1 Еластични таласи у бесконачном медију .....	108
Слика 6.2 Простирање котрљајућег (Рејлијевог) таласа.....	108
Слика 6.3 Простирање попречног (Ловеовог) таласа.....	109
Слика 6.4 Тродимензионални бескначни елемент.....	111
Слика 6.5 Модел за анализу вискозних граница.....	113
Слика 6.6 Вертикална померања модела са крутим и апсорбујућим границама.....	114
Слика 7.1 Механизми рушења насуте бране .....	116
Слика 7.2 Клизање косине услед повећања порних притисака.....	116
Слика 7.3 Клизање узводне косине бране током брзог пражњења акумулације.....	117
Слика 7.4 Струјање кроз фундамент бране .....	117
Слика 7.5 Врсте слегања и појаве прслина у телу бране .....	118
Слика 7.6 Оштећење насуте бране услед ликвефакције .....	118
Слика 7.7 Оштећење тела насуте бране на чврстом фундаменту .....	118
Слика 7.8 Редуковање анвелопе Мор-Кулоновог модела.....	123
Слика 7.9 Редуковање анвелопе лома нелинеарних модела.....	125
Слика 7.10 Редукована и апроксимирана анвелопа лома нелинеарних модела .....	126
Слика 7.11 Редуковање смичуће чврстоће Кем-Клеј модела .....	128
Слика 7.12 Геометрија модела косине .....	129
Слика 7.13 Модел косине и гранични услови .....	129
Слика 7.14 Поље максималне смичуће деформације.....	130
Слика 7.15 Поље пластичне деформације .....	130
Слика 7.16 Геометрија модела бране .....	131
Слика 7.17 Модел насуте бране и гранични услови.....	132
Слика 7.18 Поље максималне смичуће деформације у моделу бране.....	132
Слика 7.19 Поље пластичне деформације у моделу бране .....	133
Слика 8.1 Преградно место бране Првонек.....	134
Слика 8.2 Геотехничке средине у попречном пресеку бране.....	134
Слика 8.3 Модел бране: а) поглед са низводне и, б) поглед са узводне стране.....	136
Слика 8.4 Резултат теста смицања и површ лома узводне спољне призме L-1u.....	137

---

Слика 8.5 Резултат теста смицања и површ лома узводне и низводне унутрашње призме L-2u(d) .....	137
Слика 8.6 Резултат теста смицања и површ лома низводне унутрашње призме P-4 .....	137
Слика 8.7 Резултат теста смицања и површ лома низводне спољашње призме L-1d .....	137
Слика 8.8 Шема калибрације модела .....	140
Слика 8.9 Позиције пресека са уграђеним давачима напона .....	140
Слика 8.10 Попречни пресек бране са позицијама уређаја за мерење порних и тоталних нормалних напона .....	141
Слика 8.11 Тотални напони у пресеку 11 .....	141
Слика 8.12 Хоризонтална компонента померања круне бране .....	142
Слика 8.13 Поље укупних померања модела [m] .....	146
Слика 8.14 Хоризонтална померања осе глиненог језгра у пресецима 7, 11 и 16 .....	146
Слика 8.15 Поље вертикалних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	147
Слика 8.16 Поље хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	148
Слика 8.17 Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16 .....	149
Слика 8.18 Поље укупних померања модела [m] .....	150
Слика 8.19 Хоризонтална померања осе глиненог језгра у пресецима 7, 11 и 16 .....	150
Слика 8.20 Поље вертикалних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	151
Слика 8.21 Поље хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	152
Слика 8.22 Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16 .....	153
Слика 8.23 Поље укупних померања модела на крају процеса пражњења [m] .....	154
Слика 8.24 Хоризонтална померања осе глиненог језгра на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16 .....	154
Слика 8.25 Поље вертикалних померања на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	156
Слика 8.26 Поље хоризонталних померања на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	157
Слика 8.27 Поље пластичних деформација на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16 .....	158
Слика 8.28 Поље укупних померања модела [m] .....	159
Слика 8.29 Хоризонтална померања осе глиненог језгра у пресецима 7, 11 и 16 .....	159
Слика 8.30 Поље вертикалних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	161
Слика 8.31 Поље хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m] .....	162

---

---

Слика 8.32 Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16.....	163
--	-----

## ЛИСТА ТАБЕЛА

Табела 3.1 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Мор-Кулоновог материјалног модела.....	26
Табела 3.2 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Мор-Кулоновог материјалног модела са ојачањем .....	31
Табела 3.3 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Мацуока-Накаијевог материјалног модела.....	34
Табела 3.4 Веза материјалних константи Дракер-Прагеровог и Мор-Кулоновог модела.....	35
Табела 3.5 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Дракер-Прагеровог материјалног модела.....	39
Табела 3.6 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Максимовићевог материјалног модела.....	45
Табела 3.7 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Хук-Брауновог материјалног модела.....	48
Табела 3.8 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона генерализованог Хук-Брауновог материјалног модела.....	51
Табела 3.9 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Пан-Хадсоновог материјалног модела.....	54
Табела 3.10 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона модификованог Кем-Клеј материјалног модела.....	60
Табела 3.11 Параметри материјала у симулацији троосног теста.....	62
Табела 3.12 Параметри материјала модификованог Кем-Клеј материјалног модела .....	63
Табела 3.13 Естимирани параметри материјала на основу едометарског теста.....	65
Табела 3.14 Измерене вредности напона при лому .....	66
Табела 3.15 Естимирани параметри материјала Мор-Кулоновог модела .....	66
Табела 3.16 Параметри материјала Максимовићевог материјалног модела.....	67
Табела 3.17 Материјалне константе модела тунела .....	69
Табела 4.1 Алгоритам за имплицитну и експлицитну интеграцију диференцијалних једначина кретања.....	83
Табела 4.2 Материјалне константе за модел сферне капе.....	86
Табела 4.3 Карактеристике материјала модела насуте бране.....	87
Табела 5.1 Материјалне константе за модел једнодимензионалне консолидације .....	106
Табела 6.1 Материјалне константе за анализу вискозних граничних услова .....	113
Табела 7.1 Минималне препоручене вредности степени сигурности насутих брана .....	121



---

---

Табела 7.2 Карактеристике материјала модела косине .....	130
Табела 7.3 Степен сигурности косине .....	131
Табела 7.4 Карактеристике материјала модела насуте бране .....	132
Табела 7.5 Степен сигурности насуте бране .....	133
Табела 8.1 Вредности параметара материјала за напонско-деформацијску анализу бране ...	138
Табела 8.2 Вредности параметара материјала које се не калибришу током прорачуна .....	139
Табела 8.3 Вредности тоталних напона у пресеку 11 .....	141
Табела 8.4 Вредности параметара модела за анализу стабилности бране .....	143
Табела 8.5 Минимални захтевани степени сигурности насутих брана .....	145
Табела 8.6 Добијени степени сигурности бране .....	164

## ЛИСТА ОЗНАКА

Ознака	Назив
$\sigma$	Тотални напон
$\sigma'$	Ефективни напон
$\sigma_m$	Средњи напон
$s$	Девијаторски напон
$I_1, I_2, I_3$	Прва, друга и трећа инваријанта напона
$J_{1D}, J_{2D}, J_{3D}$	Прва, друга и трећа инваријанта девијатора напона
$\theta$	Лодеов угао
$p$	Притисак
$K_s, K_f, K_t$	Запремински модул солида, флуида и мешавине
$\alpha, \kappa$	Унутрашњи параметри модела
$f$	Функција површи течења
$g$	Функција површи пластичног потенцијала
$d\lambda$	Пластични параметар
$e$	Укупна деформација
$e^E$	Еластична деформација
$e^P$	Пластична деформација
$e_m$	Средња деформација
$e_m^P$	Средња пластична деформација
$C^E$	Еластична конститутивна матрица
$C^{EP}$	Еластопластична конститутивна матрица
$\bar{e}^P$	Ефективна пластична деформација
$\tau$	Смичући напон
$E$	Јангов модул еластичности
$K$	Запремински модул
$\nu$	Поасонов коефицијент
$c$	Кохезија материјала
$\phi$	Угао унутрашњег трења

---

$\psi$	Угао дилатације
$H$	Параметар ојачања
$\alpha$	Материјална константа Дракер-Прагеровог модела
$\beta$	Материјална константа Дракер-Прагеровог модела
$k$	Материјална константа Дракер-Прагеровог модела
$\phi_B$	Материјална константа Максимовићевог модела
$\Delta\phi$	Материјална константа Максимовићевог модела
$p_N$	Материјална константа Максимовићевог модела
$\sigma_{ci}$	Једноосна притисна чврстоћа
$m_i$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
$m_b$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
$m_{dil}$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
$s$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
$a$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
$GSI$	Геолошки индекс чврстоће
$D$	Фактор поремећености стене
$M$	Нагиб линије критичног стања
$T$	Напон максималног затезања
$p_o$	Средњи напон примарне консолидације
$\lambda$	Нагиб линије нормалне компресије
$\kappa$	Нагиб линије бубрења
$e$	Коефицијент порозности
$v$	Специфична запремина
<b>M</b>	Матрица маса
<b>D</b>	Матрица пригушења
<b>K</b>	Матрица крутости
<b>R</b>	Вектор спољашњег оптерећења
<b>U</b>	Вектор померања чворова
$\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{V}$	Вектор брзина чворова
$\ddot{\mathbf{U}}, \mathbf{A}$	Вектор убрзања чворова

---

---

$\mathbf{F}_I$	Вектор инерционих сила
$\mathbf{F}_D$	Вектор сила пригушења
$\mathbf{F}_E$	Вектор еластичних сила
$\alpha, \delta$	Њумаркове константе
$t$	Време
$\mathbf{H}$	Матрица интерполационих функција
$\mathbf{B}$	Матрица извода интерполационих функција
$\alpha, \beta$	Коефицијенти Рејлијевог пригушења
$\mathbf{u}$	Померање чврсте фазе
$\mathbf{U}$	Померање течне фазе
$\mathbf{w}$	Релативно померање течне фазе
$p$	Порни притисак
$\rho, \rho_f, \rho_s$	Густина мешавине, течне и чврсте фазе
$n$	Порозност
$\mathbf{n}$	Јединични вектор нормале
$\mathbf{R}$	Вектор вискозних сила
$\mathbf{b}$	Запреминске силе
$\mathbf{k}$	Матрица коефицијената филтрације
$V_f$	Запремина течне фазе
$V_s$	Запремина чврсте фазе
$V$	Укупна запремина
$Q$	Стишљивост
$S_w$	Степен засићења пора водом
$S_a$	Степен засићења пора ваздухом
$\mathbf{D}_V$	Матрица вискозног пригушења
$\mathbf{D}_C$	Конститутивна матрица вискозног пригушења
$\mathbf{J}$	Матрица Јакобијана трансформације
$F$	Фактор редуковања смичуће чврстоће
$\tau_f$	Смичућа чврстоћа при лому

---

$\tau^{apr}$

Апроксимација смичуће чврстоће материјала

$\tau^{red}$

Редукована вредност смичуће чврстоће материјала

# 1 УВОД

## 1.1 Мотивација

Насуте бране за формирање акумулације на речним токовима представљају једну од најстаријих врста грађевина. Према ICOLD (*International Commission on Large Dams*) насуте бране чине 70% укупног броја брана у свету, док остатак чине бетонске бране (око 28%) и зидане бране (око 2%).

У погледу механичког оптерећења, брана и њена акумулација имају огроман утицај на околину, па би свако њихово оштећење имало катастрофалне последице. Из тог разлога се велика пажња посвећује анализама стабилности ових објеката, како у току изградње, тако и у току њихове експлоатације. Традиционалне, аналитичке методе анализе стабилности насутих брана се заснивају на одговарајућим апроксимацијама и претпоставкама и не узимају у обзир специфичности интеракције бране са околином.

Развој рачунарске технике и нумеричких метода, омогућује спровођење детаљне анализу стабилности са свим специфичностима објекта и уз далеко већу поузданост, па је анализа стабилности насутих брана применом нумеричких метода постала незаобилазна. Како би спровођење анализе стабилности применом нумеричких метода било могуће, неопходна је употреба материјалних модела који описују механичко понашање различитих врста средина. Тло има изразито нелинеарно механичко понашање, што захтева коришћење сложених конститутивних релација, односно развој сложених материјалних модела.

Тло у природи поред порозне чврсте фазе садржи течну фазу која испуњава његове поре које су делимично или потпуно испуњене флуидом (ваздухом, водом, итд.). Чврста и течна фаза имају различите механичке карактеристике, а самим тим и другачије понашање под дејством оптерећења, па се јавља међусобна интеракција. Ова интеракција је посебно изражена приликом дејства динамичких оптерећења (земљотреса), па је неопходно узети је у обзир приликом анализе.

## 1.2 Циљ рада

Циљ ове докторске дисертације је развој рачунарског програма за анализу стабилности насутих брана изложених дејству статичког и динамичког оптерећења. Како би се развио модул за нумеричку анализу геотехничких проблема (анализа порозних медија), развијени су и имплементирани алгоритми за интеграцију напона материјалних модела за симулацију механичког понашања различитих типова тла. Поред постојећих модела намењених симулацији механичког понашања различитих средина, развијен је и имплементиран нови материјални модел за симулацију механичког понашања грануларних материјала. Како би се анализирано понашање ових објекта изложених дејству сеизмичког оптерећења у временском домену, развијени су и имплементирани алгоритми за имплицитну и експлицитну, линеарну и нелинеарну динамичку анализу.

Као што је претходно речено, тло представља порозни медиј чије су поре делимично или потпуно испуњене флуидом. Течна и чврста фаза остварују међусобну интеракцију, што је посебно изражено при дејству динамичког (сеизмичког) оптерећења. Како би се ова интеракција узела у обзир при анализи стабилности објекта применом нумеричких симулација, неопходно је извршити спрезање једначина чврсте и течне фазе, односно формирати једначину мешавине.

Нумеричке анализе стабилности се врше на ограниченој величини модела уз примену одговарајућих граничних услова. Како би се утицај граничних услова свео на најмању могућу меру, односно како би се елиминисао њихов утицај на резултате нумеричке анализе, неопходно је да границе домена буду довољно далеко од анализираног објекта. Међутим, да би се ово остварило, неопходно је спровести анализе на великим моделима који имају велики број степени слободе кретања. Овим се повећавају захтеви за ресурсима рачунара и повећава време за спровођење анализа, што је посебно изражено у динамичкој анализи. Ефикасан начин за решавање овог проблема јесте увођење апсорбујућих граница. Задатак ових граница је да пропусте таласе настале услед динамичке побуде, односно да спрече његову рефлексију од граница модела. Рефлектовање таласа од граница модела доводи до појаве повратних таласа који не постоје у реалним условима и могу довести до нереалних решења. Из тог разлога у оквиру ове тезе ће бити прилагођене и имплементирани апсорбујуће границе модела.

Са циљем дефинисања јасних критеријума за процену статичке и динамичке стабилности насутих брана, неопходно је извршити анализу и систематизацију постојећих критеријума за оцену стабилности ових објеката. У складу са тим биће разрађени поступци за анализу стабилности косина применом методе редуковања смичуће чврстоће за све материјалне моделе обрађене у оквиру ове тезе.

### 1.3 Садржај рада

Ова докторска теза се састоји од укупно 11 поглавља и подељена је на две целине: у првој целини су приказане теоријске основе статичке и динамичке анализе стабилности насутих брана. У овој целини су садржани алгоритми за интеграцију напона применом више материјалних модела, алгоритми за интеграцију диференцијалних једначина кретања, алгоритми за решавање интеракције тла и порног флуида, алгоритам за имплементацију апсорбујућих граница, као и критеријуми за оцену стабилности насутих брана. Друга целина представља практичну примену развијене методологије у статичкој и динамичкој анализи стабилности бране Првонек.

У поглављу 1 су дата уводна разматрања проблема стабилности насутих брана и преглед литературе.

Поглавље 2 приказује преглед теорије пластичности тла, уводи појам напона, површи течења и пластичног потенцијала, појам пластичног течења и друге појмове неопходне за разумевање материјалних модела за тло, датих у наставку.

Поглавље 3 обрађује материјалне моделе за симулацију механичког понашања тла. Поред теоријских основа материјалних модела, у овом делу су дати и алгоритми за нумеричку

интеграцију напона за сваки од модела. Приказани алгоритми су имплементирани у програм за нумеричку анализу. Поред познатих материјалних модела за тло, развијен је и имплементиран нов материјални модел намењен симулацији механичког понашања грануларних материјала заснован на услову лома Максимовића.

Поглавље 4 обрађује интеграцију диференцијалних једначина кретања. Поред теоријских основа имплицитне и експлицитне интеграције једначина кретања, дати су и алгоритми за имплементацију ових једначина у програм за нумеричку анализу.

Поглавље 5 приказује формулацију порозних двофазних медија, која је прилагођена и имплементирана у програм за нумеричку анализу (ПАК). Поред једначина за случај потпуно засићених порозних медија, дата је и модификација водећих једначина за случај делимично засићених медија.

Поглавље 6 обрађује теоријске основе и нумеричку имплементацију апсорбујућих граница модела.

Поглавље 7 систематизује критеријуме за оцену стабилности насутих брана и методе за одређивање њихове стабилности. За одређивање стабилности насутих брана, обрађена је метода редуковања смичуће чврстоће. Приказана је њена примена за све материјалне моделе обрађене у поглављу 3.

Поглавље 8 приказује практичну примену теорије и алгоритама развијених у првом делу рада у анализи стабилности бране Првонек.

Поглавље 9 даје закључке до којих се дошло током израде дисертације.

Поглавље 10 приказује преглед коришћене литературе.

Поглавље 11 садржи додатак у коме су приказани формати за унос параметара материјалних модела обрађених у дисертацији

## 1.4 Преглед литературе

Изучавање интеракције чврсте и течне фазе потпуно и делимично засићених порозних средина састављених од деформабилне чврсте фазе и течне фазе која испуњава поре је од великог значаја у многим инжењерским областима, а посебно у механици тла. Математички модел вишефазне порозне средине која се састоји од једначина равнотеже и конститутивних релација је базиран на генерализованој Биотовој теорији [1, 2] проширеној тако да се у обзир узима нелинеарно понашање материјала за потпуно или делимично засићене услове.

У литератури је предложено више математичких модела за симулацију понашања потпуно [3, 4, 5, 6] или делимично засићених порозних медија [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Ови модели су генерално базирани на претпоставкама као што су недеформабилни чврсти скелет (нема деформација чврсте фазе) [15, 16], притисак гасовите фазе је једнак атмосферском притиску или је притисак потпуно занемарен [4, 12, 14, 17, 18, 19], занемаривање прелазне фазе [9, 10, 20, 21, 22] и квазистатички услови [4, 9, 10, 13, 14, 19, 21, 22]. Ове претпоставке и упрошћења у већини случајева мање или више одступају од услова који владају у реалним срединама. У овим моделима закон о одржању масе се углавном односи на течну фазу и не узима у обзир



одржање масе мешавине као целине [23]. Међутим, на овај начин, са довољном тачношћу, може бити анализиран само проблем струјања. У једначинама квазистатичких модела члан који представља утицај брзине и убрзања је једнак нули. Оваква упрошћења су једино прихватљива код веома спорих процеса, као што је на пример консолидација тла, док су за анализу других врста динамичких оптерећења, као што је земљотрес, недовољно тачна. У оквиру ове докторске дисертације нису коришћене претходно наведене претпоставке, већ је за симулацију понашања засићених порозних медија коришћен потпуно спрегнут нумерички модел. На тај начин је креиран рачунарски програм чијим коришћењем је могуће са већом тачношћу анализирати проблем стабилности насутих брана изложених дејству статичких и динамичких оптерећења која се јављају у експлоатационим условима ових објеката.

## 2 ОПШТЕ РАЗМАТРАЊЕ НАПОНСКО-ДЕФОРМАЦИЈСКОГ ПОНАШАЊА ТЛА

### 2.1 Карактеристике тла

При анализи чврстоће у структурној механици анализирана средина се најчешће посматра као једнофазна. Међутим, у механици тла разматрање неке средине као једнофазне, није довољно тачно. Ово важи за услове статичких, а посебно за услове динамичких оптерећења. Разлог за то лежи у чињеници да понашање тла и сличних материјала (бетон), чије поре могу бити испуњене неким флуидом, не може бити посматрано као једнофазни медиј, односно без узимања у обзир утицаја течне фазе [24]. Чврсти скелет тла садржи шупљине (поре), па флуид који испуњава поре утиче на оптерећења која делују између честица. Чврстоћа тла, као порозног материјала, са довољном тачношћу може једино бити анализирана уколико је познат притисак порног флуида.

Применом концепта ефективног напона проблем механике тла је могуће свести на анализу понашања једнофазног медија уколико је познат порни притисак. У случају стационарних услова струјања флуида кроз порозни медиј и када су оптерећења приближно непроменљива током времена или се мењају веома споро, деформација материјала не утиче на порне притиске, па проблем струјања и чврстоће скелета може бити анализиран независно, односно није неопходно спроводити спрегнуту анализу. Међутим, овакви услови се ретко јављају у пракси, чак и при анализи проблема који се могу сматрати статичким, где услед спорог кретања флуида кроз тло може бити потребан веома дуг временски интервал како би се достигло ово асимптотско стање. У веома финим грануларним материјалима као што су глина и муљ, могуће је да ови асимптотски услови не буду успостављени никада.

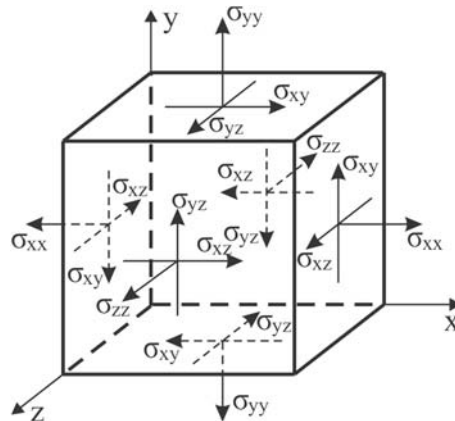
Из наведених разлога је за комплетно решавање проблема механике тла неопходно применити спрегнуту анализу, односно неопходно је извршити спрезање једначина чврсте и течне фазе.

### 2.2 Напони у тлу

На почетку овог поглавља, важно је дефинисати конвенцију о знаку напона која ће бити коришћена приликом извођења конститутивних релација у оквиру ове тезе. Како је у механици тла доминанто притискујуће напрезање, у великом броју радова из ове области се користи позитиван знак за притискујуће напоне. Међутим, како ће једначине изведене у оквиру ове тезе бити имплементиране у програмски модул за механику тла који је саставни део програма за анализу конструкција опште намене ПАК [25], при извођењу конститутивних релација ће за притискујуће напоне бити коришћен негативан знак, као што је то случај код већине инжењерских материјала. Ово правило ће бити узето у обзир приликом извођења свих конститутивних релација у оквиру ове тезе.

Приликом дефинисања функција течења и функције пластичног потенцијала материјалних модела, погодна је да оне буду дефинисане независно од материјалног координатног система.

Како би се ово реализовало, најподесније је да ове функције буду дефинисане применом инваријанти напона које су независне од координатног система у коме се проблем посматра.



Слика 2.1 Напон у 3Д простору

Тродимензионално напонско стање у материјалу, приказано на слици 2.1, се најчешће дефинише коришћењем тензора напона чије су компоненте дате у односу на усвојени координатни систем :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

где у случају изотропних материјала, који су овде разматрани, важи да је:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (2.2)$$

па уместо девет, колико је наведено у једначини (2.1), постоји шест независних компоненти, тензор напона може бити написан у векторском облику:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx} \} \quad (2.3)$$

За вектор напона се често користи и једно-индексна нотација облика:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_2 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6 \} \quad (2.4)$$

Тензор напона може бити подељен на два дела [26] и то: сферни део напона (назива се још и средњи напон):

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (2.5)$$

и девијаторски део напона:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

тако да важи следећа једнакост:

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + s_{ij} \quad (2.7)$$

где је  $\sigma_{ij}$  укупни тензор напона,  $\delta_{ij}$  Кронекеров оператор ( $\delta_{ij} = 1$  за  $i = j$ , док је  $\delta_{ij} = 0$  за  $i \neq j$ ).

Применом овако дефинисаног тензора напона, чије компоненте зависе од материјалног координатног система, могу бити израчунате инваријанте напона које не зависе од избора координатног система. Прва, друга и трећа инваријанта напона [27, 28] су дефинисане једначинама:

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (2.8)$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \left[ (tr \boldsymbol{\sigma})^2 - tr \boldsymbol{\sigma}^2 \right] = -(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \quad (2.9)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx} - (\sigma_x \sigma_{yz}^2 + \sigma_y \sigma_{zx}^2 + \sigma_z \sigma_{xy}^2) \quad (2.10)$$

На сличан начин су дефинисане и инваријанте девијатора напона:

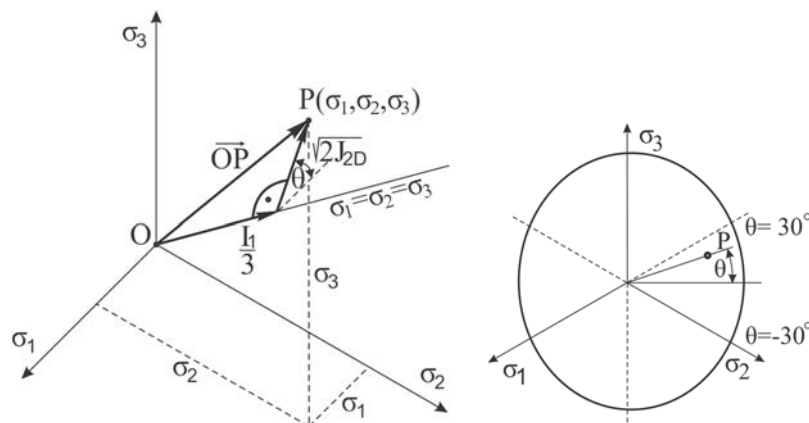
$$J_{1D} = tr(\mathbf{s}) = s_{ii} = 0 \quad (2.11)$$

$$J_{2D} = \frac{1}{2} \left[ (tr \mathbf{s})^2 - tr \mathbf{s}^2 \right] = I_2 + \frac{1}{3} I_1^2 \quad (2.12)$$

$$J_{3D} = \det(\mathbf{s}) = I_3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3 \quad (2.13)$$

У једначинама (2.8) до (2.13) ознака  $tr(\mathbf{s})$  представља траг матрице  $\mathbf{s}$ , док ознака  $\det(\mathbf{s})$  представља детерминанту матрице  $\mathbf{s}$ .

При дефинисању материјалних модела у механици тла, за описивање текућег напонског стања у простору главних напона, често се користи Лодеов угао (*eng. Lode's angle*), што је приказано на слици 2.2 [29].



Слика 2.2 Интерпретација инваријанте напона у простору главних напона

Овај угао може бити израчунат коришћењем напонских инваријанти (2.8) до (2.13) применом израза:

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left( -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \quad \text{za} \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (2.14)$$

Лодеов угао, дефинисан једначином (2.14), дефинише положај напонске тачке у девијаторској равни у односу на осу највећег или најмањег главног напона ( $\sigma_1$  или  $\sigma_3$ ).

За случај сферног напонског стања, односно за случај када је  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , напонска тачка се налази на хидростатичкој оси (слика 2.2). Вредност сферног притиска је директно пропорционална првој инваријанти напона, односно:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (2.15)$$

Уколико се напонска тачка не налази на хидростатичкој оси, кроз њу је могуће поставити раван која је управна на правац хидростатичке осе. Растојање напонске тачке од хидростатичке осе је директно пропорционално другој инваријанти девијатора напона и износи  $\sqrt{2J_{2D}}$ , док је њен положај у односу на осу најмањег или највећег главног напона, одређен Лодеовим углом.

### 2.2.1 Принцип ефективног напона

При дефинисању чврстоће и описивања механичког понашања материјала у механици тла користи се концепт ефективног напона [30]. Овај концепт се заснива на дефинисању укупног напона као збира напона у чврстој фази и напона (притиска) у течној фази. Чврстоћа тла зависи само од дела напона у чврстој фази. Однос између ефективног напона, тоталног напона и порних притисака је према [24] дефинисан следећим изразом:

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} + \alpha \delta_{ij} p \quad (2.16)$$

У једначини (2.16)  $\sigma_{ij}'$  представља тензор ефективног напона,  $\sigma_{ij}$  тензор тоталног напона,  $\delta_{ij}$  Кронекеров делта симбол, док  $p$  представља порни притисак. Скалар  $\alpha$  зависи од материјала и за изотропне материјале важи да је:

$$\alpha = 1 - K_t / K_s \quad (2.17)$$

Величина  $K_t$  представља тотални запремински модул мешавине, док је  $K_s$  запремински модул чврсте фазе. У проблемима механике тла, најчешће је запремински модул чврсте фазе много већи од запреминског модула мешавине, тако да важи  $\alpha \approx 1$ , па једначина (2.16) постаје:

$$\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p \quad (2.18)$$

Коришћењем овог приступа чврстоћа материјала тла је дефинисана применом ефективног напона, па се из тог разлога конститутивни модели у механици тла описују коришћењем ефективних напона.

## 2.3 Површ течења и пластично течење

Применом теорије пластичности, а на основу резултата експерименталних испитивања, неповратне или пластичне деформације у материјалу настају када напон достигне површ дефинисану једначином:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (2.19)$$

и ова површ се назива „површ течења“. За сва напонска стања унутар ове површи понашање материјала је чисто еластично, док напонска стања изван ове површи нису могућа [31]. У једначини (2.19) величина  $\boldsymbol{\sigma}$  представља тензор напона, док је  $\kappa$  такозвани унутрашњи параметар који може бити константа или може зависити од пластичне деформације.

У случају када је  $\kappa$  константа, уколико напонска тачка достигне површ дефинисану изразом (2.19), материјал није у стању да се супротстави даљем повећању оптерећења и долази до лома. Из тог разлога се површ течења често назива и површ лома [24]. Међутим, у случају када  $\kappa$  није константа, ради се о материјалу са карактеристиком ојачања, и у случају када напонска тачка достигне ову површ, неће доћи до лома у материјалу, већ до пластичног течења. У том случају се површ лома и површ течења разликују.

У случају изотропних материјала, какви ће у оквиру ове тезе бити разматрани, функција дефинисана претходним изразом може бити написана у скаларном облику коришћењем напонских инваријанти у облику:

$$f(I_1, J_{2D}, J_{3D}, \kappa) = 0 \quad (2.20)$$

што може бити упрошћено као:

$$f(I_1, J_{2D}, J_{3D}) - Y(\kappa) = 0 \quad (2.21)$$

где  $Y(\kappa)$  у општем случају представља меру јачине материјала. Величине  $I_1$ ,  $J_{2D}$  и  $J_{3D}$  представљају инваријанте напона дефинисане изразима (2.8), (2.12) и (2.13).

При дефинисању једначина површи течења неких материјалних модела у механици тла, често се уместо треће инваријанте девијатора напона (2.13) користи Лодеов угао (2.14), па једначина (2.21) може бити написана у облику:

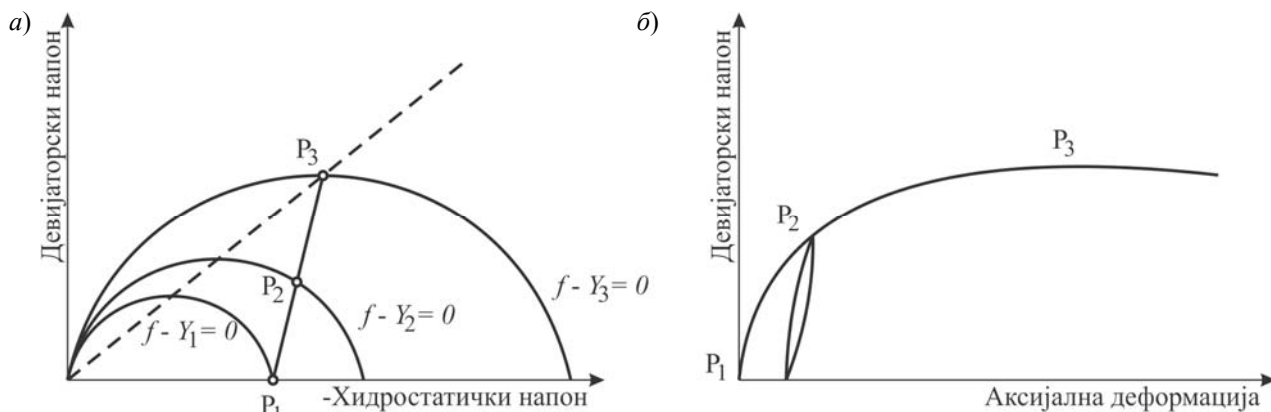
$$f(I_1, J_{2D}, \theta) - Y(\kappa) = 0 \quad (2.22)$$

Као илустрација површи течења и површи лома може бити размотрен случај материјала глине (слика 2.3) [24]. Модел је од почетног напонског стања  $P_1$  оптерећен до лома у тачки  $P_3$ . Параметар  $\kappa$  у овом случају представља пластичну запреминску деформацију и дефинисан је изразом:

$$d\kappa = -de_v^p \quad (2.23)$$

Површ течења је посматрана у простору прве инваријанте напона и друге инваријанте девијатора напона. Оптерећење је задато кроз три фазе  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  које одговарају повећању вредности  $\kappa$  као што је то приказано на слици 2.3. Треба приметити да се прва напонска тачка

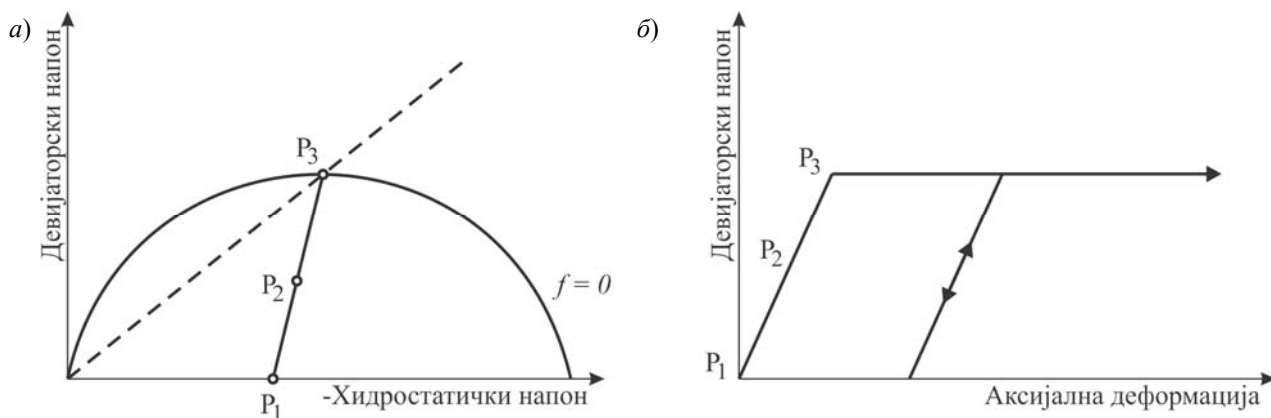
налази на површи течења, па се пластична деформација јавља од почетка процеса оптерећења. Уколико се модел растерети у тачки  $P_2$ , јављају се трајне деформације чак и у случају потпуног растерећења.



Слика 2.3 Ојачање материјала: а) путања напона, б) зависност напон-деформација

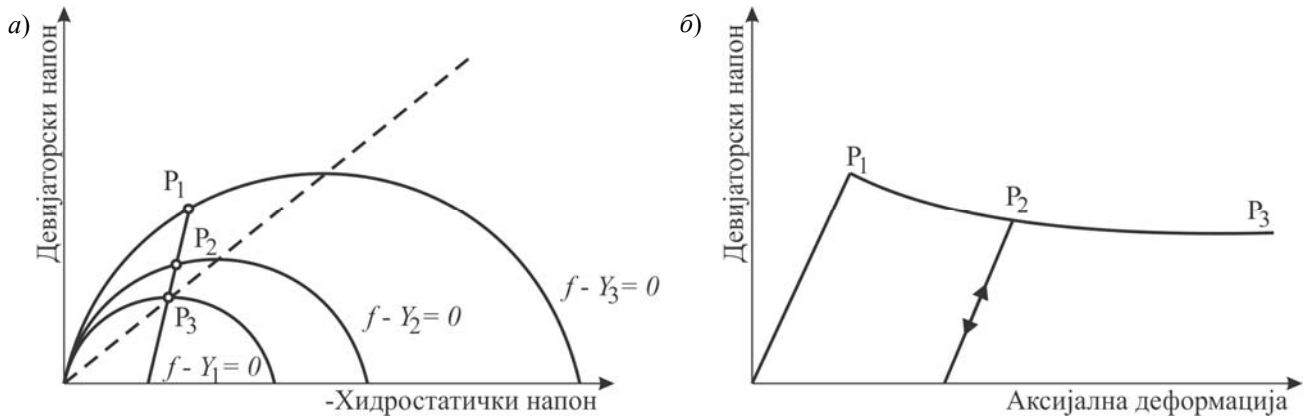
Упоређивањем стања  $P_1$  и  $P_2$ , еластична област се повећала и материјал је ојачао у том смислу, па је повећање величине површи течења познато као ојачање материјала.

Карактеристика ојачања није распрострањена код свих материјала. Овај случај је приказан на слици 2.4, где се величина површи течења не мења, па до лома у материјалу долази за напонска стања на површи која одговара површи течења. Ојачање може бити кинематско (када површ течења мења свој положај у простору главних напона), изотропно (уколико површ течења мења величину) и мешовито ојачање (када површ течења мења и положај и величину).



Слика 2.4 Идеална пластичност ( $k=const$ ): а) путања напона, б) зависност напон-деформација

У наредном случају понашања материјала, величина површи течења се може и смањивати, што је приказано на слици 2.5. Овакво понашање материјала представља омекшавање.



Слика 2.5 Омекшавање материјала: а) путања напона, б) зависност напон-деформација

На сличан начин као и површ течења, дефинисана је површ пластичног потенцијала:

$$g = g(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \quad (2.24)$$

Уколико се ова површ поклапа са површи течења, ради се о такозваном асоцијативном услову течења. Међутим, експерименти су показали да се у неким случајевима добијају боља поклапања резултата са експериментом када се ове две површи не поклапају, па се у том случају ради о такозваном неасоцијативном услову течења.

Као што је раније речено, површ течења ограничава област чисто еластичних деформација. Уколико се напонско стање нађе на површи течења, даљи прираштај оптерећења изазваће појаву пластичних деформација. Прираштај пластичне деформације има правац нормале на површ пластичног потенцијала и дефинисан је такозваним условом течења облика:

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.25)$$

где  $d\lambda$  представља фактор пропорционалности између градијента пластичног потенцијала и прираштаја пластичне деформације. Вредност овог скалара је непознат и потребно га је израчунати. У материјалним моделима тла овај скалар представља такозвани водећи параметар чијим израчунавањем се одређују све остале непознате величине, о чему ће бити више речи у поглављу 3.

У теорији малих деформација, укупна деформација у материјалу може се приказати као збир еластичног и пластичног дела деформације, што може бити представљено у облику:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^E + \mathbf{e}^P \quad (2.26)$$

Пластична деформација у некој тачки материјала зависи од историје деформације, односно представља збир свих прираштаја пластичне деформације (2.25), док еластични део деформације може бити израчунат коришћењем генерализованог Хуковог закона облика:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E \mathbf{e}^E \quad (2.27)$$

где  $\mathbf{C}^E$  представља еластичну конститутивну матрицу материјала. На основу израза (2.27), види се да напон у материјалу изазива само еластични део деформације.



## 2.4 Услов конзистентности

Раније је речено да при нееластичном деформисању материјала напонска тачка може да се нађе унутар површи течења, при чему постоје само еластичне деформације или на површи течења, када долази до појаве пластичних деформација. Напонска стања изван ове области нису могућа. Математички услов према коме, приликом појаве пластичних деформација, напонска тачка мора да остане на површи течења назива се услов конзистентности. Ово може бити дефинисано следећим изразом:

$$f + df = 0 \quad (2.28)$$

Дакле, функција течења може имати вредности  $f < 0$  приликом чисто еластичних деформација или  $f = 0$  у случају еласто-пластичних деформација. На основу тога, при појави пластичних деформација последња једначина може бити представљена као:

$$df = 0 \quad (2.29)$$

Како је функција течења  $f$  у општем случају функција напона ( $\sigma$ ) и унутрашњих параметара ( $\kappa$ ), једначина (2.29) може бити написана у облику:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (2.30)$$

у случају када постоји ојачање или

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \quad (2.31)$$

када не постоји ојачање материјала. Једначине (2.30) и (2.31) ће бити коришћене у оквиру поглавља 3 приликом израчунавања тангентне конститутивне матрице, која дефинише везу између прираштаја напона и прираштаја деформације.

### 3 МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛИ ЗА ТЛО И НУМЕРИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА КОНСТИТУТИВНИХ РЕЛАЦИЈА

Математичка релација која описује зависност између напона и деформација неког материјала назива се материјални или конститутивни модел. Механичко понашање материјала може бити описано применом материјалних модела различитих степена тачности, а најједноставнији начин је применом Хуковог закона. Међутим, линеарна зависност између напона и деформација представља превише упрошћен модел за симулацију механичког понашања материјала тла и може бити коришћена једино за круте елементе у тлу. За прецизно описивање механичког понашања тла неопходна је примена теорије пластичности, односно коришћење сложених еласто-пластичних материјалних модела. Како не постоји универзалан материјални модел којим је могуће описати механичко понашање тла, а који је дефинисан прихватљивим бројем материјалних константи, за различите врсте материјала тла је неопходно коришћење различитих материјалних модела.

Теоријске основе материјалних модела за описивање механичког понашања најчешћих типова материјала тла, као и алгоритми за њихову нумеричку имплементацију у програм за нумеричку анализу ПАК [25] су приказани у наставку.

#### 3.1 Конститутивне релације теорије пластичности

Применом дефиниције теорије пластичности, до пластичних деформација у материјалу ће доћи у случају када се напонска тачка нађе на површи течења. Уколико се напонска тачка налази унутар ове површи, у текућој конфигурацији постоји само прираштај еластичних деформација. У случају еласто-пластичних деформација, прираштаја укупне деформације може бити представљен као збир еластичног и пластичног прираштаја деформације:

$$de = de^E + de^P \quad (3.1)$$

где је  $de^E$  прираштај еластичног дела деформације, док је  $de^P$  прираштај пластичног дела деформације. Вектор прираштаја пластичне деформације има правац спољашње нормале на површ пластичног потенцијала и дефинисан је једначином (2.25). За случај када су површи течења и пластичног потенцијала једнаке ( $f = g$ ), односно у случају асоцијативног услова течења, прираштај пластичне деформације је управан и на површ течења, док је у случају неасоцијативног услова течења прираштај пластичне деформације управан само на површ пластичног потенцијала.

У инкременталној теорији пластичности у сваком тренутку важи:

$$f \leq 0, \quad d\lambda \geq 0 \quad \text{и} \quad f \cdot d\lambda = 0 \quad (3.2)$$

За случај када је напонска тачка у области еластичности, односно када нема пластичних деформација, важи да је:

$$f < 0 \quad \text{и} \quad d\lambda = 0 \quad (3.3)$$

У случају када се напонска тачка нађе на површи течења, односно када постоји пластично течење, важи да је:

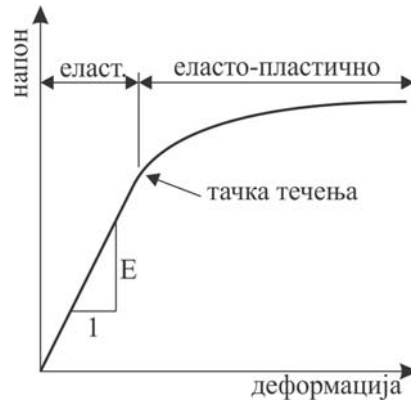
$$d\lambda > 0 \quad (3.4)$$

Како би трећа једнакост у (3.2) била задовољена, у случају када се напонска тачка нађе на површи течења, важе следеће једнакости:

$$f = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f^T}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (3.5)$$

што представља Прагеров услов конзистентности на основу кога може бити израчунат прираштај пластичне деформације.

Зависност између напона и деформација у случају еласто-пластичних деформација у материјалу је приказана на слици 3.1. Јасно је да је напон директно пропорционалан деформацији (линеарно понашање) све до тачке течења, након чега се јављају и пластичне деформације, па релација између напона и деформација постаје нелинеарна.



Слика 3.1 Еласто-пластично понашања материјала

Како појаву напона у материјалу изазива само еластични део деформације [32], у случају коришћења прираштаја напона и деформације, овај израз гласи:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E de^E \quad (3.6)$$

где  $\mathbf{C}^E$  представља еластичну конститутивну матрицу. Применом (3.1) и (3.6) добија се:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E (de - de^P) \quad (3.7)$$

За случај модела без ојачања, прираштај функције течења је дефинисан изразом (2.31), где је  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$  у општем случају:

$$\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yz}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zx}} \right] \quad (3.8)$$

док је  $d\boldsymbol{\sigma}$  прираштај напона који може бити представљен у векторском облику као:

$$d\boldsymbol{\sigma}^T = \left[ d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\sigma_{xy} \quad d\sigma_{yz} \quad d\sigma_{zx} \right] \quad (3.9)$$

Коришћењем једначина (2.25) и (3.7), једначина (2.30) постаје:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \mathbf{C}^E d\mathbf{e} - d\lambda \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) + d\lambda \frac{\partial f^T}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial d\mathbf{e}^P} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \quad (3.10)$$

где последњи члан у једначини представља модул ојачања или пластични модул:

$$H = - \frac{\partial f^T}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial d\mathbf{e}^P} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.11)$$

па једначина (3.10) може бити написана у облику:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \mathbf{C}^E d\mathbf{e} - d\lambda \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) - d\lambda H = 0 \quad (3.12)$$

одакле се може израчунати скалар  $d\lambda$  као

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.13)$$

Коначно, применом (3.13) и (2.25) прираштај напона (3.7) може бити израчунат као

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e} - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} d\mathbf{e} \quad (3.14)$$

што може бити записано и краће у облику

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{EP} d\mathbf{e} \quad (3.15)$$

Упоредивањем једначина (3.14) и (3.15) следи да је

$$\mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C}^E - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.16)$$

што представља еласто-пластичну конститутивну матрицу или тангентну матрицу [33].

Код неких материјалних модела област еластичних деформација је ограничена са више од једне површи. У таквим случајевима, проблем може представљати повратак напонске тачке на површ течења, у случају када се она нађе у области пресека. Када се напонска тачка нађе у области где су истовремено активне две површи течења, прираштај пластичне деформације (2.25) може према [34] бити израчунат у складу са:

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda_1 \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + d\lambda_2 \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.17)$$

где су градијентима  $\partial \mathbf{g}_1 / \partial \boldsymbol{\sigma}$  и  $\partial \mathbf{g}_2 / \partial \boldsymbol{\sigma}$  дефинисани правци нормала на површи пластичног потенцијала  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{g}_2$ . Следи да је уместо једног пластичног параметра  $d\lambda$  потребно

израчунати два параметра  $d\lambda_1$  и  $d\lambda_2$ . Ови параметри могу бити израчунати на сличан начин као и у случају једне површи течења, с тим што је неопходно да буду истовремено задовољена два услова, односно две функције течења из услова:

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad \text{и} \quad f_2(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (3.18)$$

па прираштај напона у том случају може бити израчунат у складу са (3.7) коришћењем израза:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e} - d\lambda_1 \mathbf{C}^E \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - d\lambda_2 \mathbf{C}^E \frac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.19)$$

У случају када се напонска тачка нађе у области затезућих напона тако да није могуће одредити нормалу на површ течења (такозвани Апекс проблем), проблем се решава враћањем напонске тачке у врх површи течења (апекс), уз коришћење услова:

$$\sigma_{ii} = \frac{T}{3} \quad \text{и} \quad \sigma_{ij} = 0 \quad (3.20)$$

где величина  $T$  представља максимални напон затезања у материјалу [33].

За одређивање равнотежне конфигурације у нелинеарној анализи најчешће се користи метода еластичног предиктора-пластичног коректора или метода повратног мапирања (*eng. Return Mapping Algorithm*). При коришћењу ове методе, први корак је одређивање такозваног пробног решења [26]. Полази се од претпоставке да у текућем кораку постоје само еластичне деформације, па се применом Хуковог закона израчунава пробни напон  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E$ . На основу (2.27) следи:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E = \mathbf{C}^E {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'' = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t}\mathbf{e} - {}^t\mathbf{e}^P) \quad (3.21)$$

где је  $\mathbf{C}^E$  еластична конститутивна матрица,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}''$  тензор еластичне деформације на крају временског корака (под претпоставком да у току прираштаја  $\Delta t$  није дошло до појаве пластичних деформација),  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$  тензор укупне деформације у тренутку  $t + \Delta t$ , док је  ${}^t\mathbf{e}^P$  тензор пластичне деформације у претходном кораку (тренутку  $t$ ). Након тога се, коришћењем пробних напона, израчунава вредност функције течења:

$${}^{t+\Delta t}f^E = {}^{t+\Delta t}f({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E, \boldsymbol{\kappa}^E) \quad (3.22)$$

Уколико је, применом пробних напона, задовољено:

$${}^{t+\Delta t}f^E \leq 0 \quad (3.23)$$

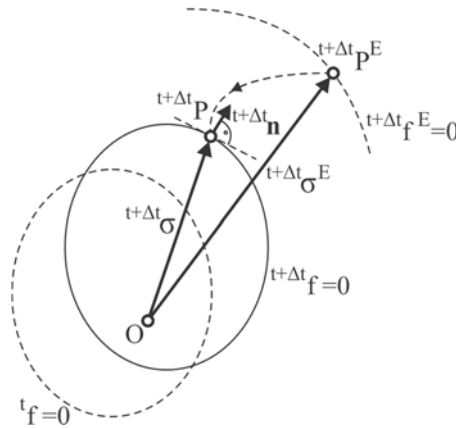
у текућем кораку постоје само еластичне деформације, односно није дошло до појаве пластичног течења и напон  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E$  се сматра тачним, након чега се прелази у следећи корак интеграције напона. Уколико је вредност функције течења:

$${}^{t+\Delta t}f^E > 0 \quad (3.24)$$

у текућем кораку, поред еластичних, постоје и пластичне деформације, односно дошло је до појаве пластичног течења, па је неопходно кориговати пробни напон у складу са изразом:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^E - \mathbf{C}^E de^P \quad (3.25)$$

тако да буде задовољена једначина (2.19).



Слика 3.2 Шематски приказ методе еластичног предиктора-пластичног коректора (Return mapping)

Шематски приказ методе еластичног предиктора-пластичног коректора је приказан на слици 3.2. Дакле, потребно је кориговати решење које одговара напонској тачки  ${}^{t+\Delta t}P^E$  и наћи ново решење које одговара тачки  ${}^{t+\Delta t}P$ , тако да буде задовољен услов на крају корака  ${}^{t+\Delta t}f = 0$ . За израчунавање прираштаја пластичне деформације користи се услов течења дефинисан једначином (2.25).

### 3.2 Решавање нелинеарних једначина равнотеже

При решавању проблема малих деформација за линеарно еластичан материјал и непроменљиве контурне услове у току оптерећења, спроводи се линеарна анализа. У том случају једначина равнотеже [33] има облик:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3.26)$$

где је  $\mathbf{K}$  матрица крутости коначног елемента,  $\mathbf{U}$  вектор чворних померања, а  $\mathbf{R}$  вектор спољашњих чворних сила. Уколико претходно наведени услови не важе, неопходно је спровести нелинеарну анализу.

Основни проблем нелинеарне анализе јесте налажење нове равнотежне конфигурације која одговара задатом оптерећењу. Под претпоставком да су спољашња оптерећења функције времена, равнотежна једначина коначног елемента може бити написана у облику:

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = 0 \quad (3.27)$$

где је  ${}^t\mathbf{R}$  вектор спољашњих чворних сила за конфигурацију у тренутку  $t$ , док  ${}^t\mathbf{F}$  представља вектор унутрашњих чворних сила у конфигурацији у тренутку  $t$ .

С обзиром да су решења нелинеарног проблема променљива током времена, јасно је да једначина (3.27) мора бити задовољена током целе историје оптерећења. У статичкој анализи проблема време нема значајну улогу осим приликом дефинисања промене оптерећења, где је погодна за описивање различитог нивоа оптерећења у различитим временским тренуцима. У динамичкој анализи време је променљива која је укључена у моделирање механичког

понашања. Уколико анализа укључује временски зависно нелинеарно понашање материјала или временски зависне феномене, неопходно је да једначина равнотеже (3.27) буде решена у целокупном посматраном временском домену.

За решавање овог проблема у нумеричкој анализи се најчешће користе инкрементални поступци за решавање корак-по-корак (*енг. step-by-step*). Приликом инкременталног решавања једначина равнотеже корак-по-корак, полази се од претпоставке да је решење у дискретном временском тренутку  $t$  познато и потребно је наћи ново решење у дискретном тренутку времена  $t + \Delta t$ , где је  $\Delta t$  изабрани временски прираштај (инкремент). У складу са претходним, једначина (3.27) написана у тренутку  $t + \Delta t$  има облик:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = 0 \quad (3.28)$$

Претпоставља се да је вектор спољашњих сила  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}$  независан од деформације. Како је решење у тренутку  $t$  познато, може бити написана следећа једнакост:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = {}^t \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F} \quad (3.29)$$

где је  $\Delta \mathbf{F}$  прираштај унутрашњих чворних сила које одговарају прираштају померања и прираштају напона у интервалу  $\Delta t$ . Овај прираштај може бити апроксимиран коришћењем такозване тангентне матрице крутости  ${}^t \mathbf{K}$  у облику:

$$\Delta \mathbf{F} \approx {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} \quad (3.30)$$

где је  $\Delta \mathbf{U}$  вектор прираштаја чворних померања, док матрица крутости представља:

$${}^t \mathbf{K} = \frac{\partial {}^t \mathbf{F}}{\partial {}^t \mathbf{U}} \quad (3.31)$$

Применом (3.30), једначина (3.29) може бити представљена у облику:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F} \approx {}^t \mathbf{F} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} \quad (3.32)$$

Из претходних једначина је јасно да тангентна матрица крутости одговара изводу унутрашњих сила по чворним померањима. Заменом (3.32) у (3.28) добија се:

$${}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} \quad (3.33)$$

одакле се израчунава прираштај померања  $\Delta \mathbf{U}$  на основу кога се добија померање у тренутку  $t + \Delta t$  применом једнакости:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} \approx {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U} \quad (3.34)$$

које представља апроксимацију стварног померања услед коришћења апроксимација (3.30). Након одређивања померања у тренутку  $t + \Delta t$ , израчунава се напон и одговарајуће чворне силе у тренутку  $t + \Delta t$ , након чега се прелази у следећи временски корак.

Услед коришћења апроксимације (3.30) овако добијена решења могу садржати грешку чија величина зависи од временског корака и прираштаја оптерећења. Овај проблем се решава применом итеративних поступака описаних у наставку, где се решење коригује све док једначина (3.28) не буде задовољена у оквиру унапред задате толеранције.

### 3.3 Методе решавања нелинеарних једначина

#### Њутн-Рапсонова метода

Најчешће коришћена итеративна метода у нелинеарној нумеричкој анализи јесте Њутн-Рапсонова метода интеграције [33]. Ова метода представља проширење инкременталне методе описане једначинама (3.33) и (3.34) где се након израчунавања прираштаја чворних померања, израчунава нови вектор укупног померања и понавља инкрементално решавање једначине равнотеже коришћењем померања из последње итерације, уместо померања у тренутку  $t$ .

Једначине (3.33) и (3.34) применом Њутн-Рапсонове методе за  $i = 1, 2, 3, \dots$ , гласе:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = \Delta \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (3.35)$$

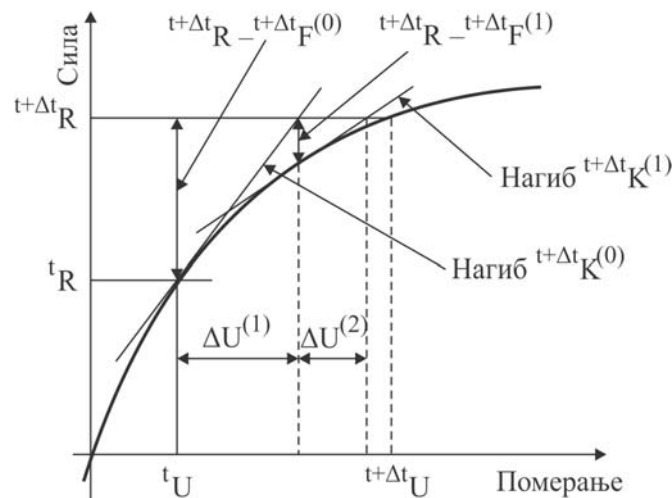
$$\Delta \mathbf{R}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3.36)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (3.37)$$

уз коришћење почетних услова:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} = {}^t\mathbf{K}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F} \quad (3.38)$$

Шематски приказ Њутн-Рапсонове итерационе методе је приказан на слици 3.3.



Слика 3.3 Илустрација Њутн-Рапсонове итерационе методе

Претходни изрази су добијени линеаризацијом одзива система за конфигурацију у тренутку  $t + \Delta t$ . У свакој итерацији се из једначине (3.36) израчунава вектор сила неравнотеже, проузрокован прираштајем померања из (3.35). Итерације се понављају све док вектор сила неравнотеже  $\Delta \mathbf{R}^{(i-1)}$  или вектор прираштаја померања  $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$  не буде довољно мали, након чега се прелази у следећи временски корак.

Приликом решавања проблема равнотеже потребно је наћи решење једначине облика:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = 0 \quad (3.39)$$

где је



$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}(\mathbf{U}^*) \quad (3.40)$$

где  $\mathbf{U}^*$  представља комплетан вектор решења једначине који може садржати и друге промелјиве осим померања, као што су притисци, ротације и слично.

Под претпоставком да је коришћењем једначине (3.39) потребно наћи решење  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}$ , развојем у Тејлоров ред уз занемаривање чланова вишег реда, ова једначина постаје:

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}^*) = \mathbf{f}\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}\right) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}\right]_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \left(\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}\right) \quad (3.41)$$

Заменом једначине (3.40) у (3.41) и применом (3.39), добија се једначина:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}\right]_{t+\Delta t, \mathbf{U}^{(i-1)}} \left(\mathbf{U}^* - {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)}\right) = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}(\mathbf{U}^*) - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}(\mathbf{U}^*) \quad (3.42)$$

која представља равнотежну једначину (3.35).

Поред описане Њутн-Рапсонове процедуре, често се користи и модификована Њутн-Рапсонова процедура, при чему се у равнотежној једначини (3.35) користи матрица крутости која одговара претходној конфигурацији, односно:

$$\tau \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3.43)$$

за почетне контурне услове  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}$ ,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}$ , где  $\tau$  одговара конфигурацији у тренутку  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$  или  $t$ . Предност модификоване Њутн-Рапсонове методе у односу на Њутн-Рапсонову методу јесте мањи број потребних израчунавања матрице крутости, што при решавању проблема са великим бројем коначних елемената може бити значајна предност.

### ***BFGS метода***

Ова метода представља алтернативни облик Њутн-Рапсонове методе, а позната је још и као метода кориговања матрице или квази-Њутнова метода и развијена је за итеративно решавање нелинеарног система једначина [33]. У оквиру ове методе врши се корекција коефицијената матрице крутости (или инверзне матрице) како би се добила секантна апроксимација матрице из итерације  $(i-1)$  у итерацији  $(i)$ , односно дефинисао прираштај померања у складу са:

$$\delta^{(i)} = {}^{t+t}\mathbf{U}^{(i)} - {}^{t+t}\mathbf{U}^{(i-1)} \quad (3.44)$$

и инкремент силе неравнотеже облика (3.36):

$$\gamma^{(i)} = \Delta \mathbf{R}^{(i-1)} - \Delta \mathbf{R}^{(i)} \quad (3.45)$$

тако да коригована матрица  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i)}$  задовољи једначину:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i)} \delta^{(i)} = \gamma^{(i)} \quad (3.46)$$

Корекција матрице крутости може бити изражена у облику производа:

$$\left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1}\right)^{(i)} = \mathbf{A}^{(i)T} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{-1}\right)^{(i-1)} \mathbf{A}^{(i)} \quad (3.47)$$

где матрица  $\mathbf{A}^{(i)}$  димензија  $n \times n$  има облик:

$$\mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{I} + \mathbf{v}^{(i)} \mathbf{w}^{(i)T} \quad (3.48)$$

Вектори  $\mathbf{v}^{(i)}$  и  $\mathbf{w}^{(i)}$  су израчунати коришћењем познатих чворних померања (3.44) и сила (3.45) према:

$$\mathbf{v}^{(i)} = - \left( \frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)}} \right)^{\frac{1}{2}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \boldsymbol{\delta}^{(i)} - \boldsymbol{\gamma}^{(i)} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{w}^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\delta}^{(i)}}{\boldsymbol{\delta}^{(i)T} \boldsymbol{\gamma}^{(i)}} \quad (3.50)$$

Ова метода представља компромис између попутног коригорања матрице крутости као у Њутн-Рапсоновој методи и коришћења матрице крутости из претходне конфигурације као у модификованој Њутн-Рапсоновој методи.

### Метода контролисаног померања/оптерећења

Један од често анализираних проблема у нелинеарној анализи јесте анализа слома конструкције као и понашање конструкције након достизања максималне силе. Одзив конструкције при слому је шематски приказан на слици 3.4, где се види да је за мале вредности оптерећења одзив приближно линеаран. При повећању оптерећења, одзив конструкције постаје изразито нелинеаран, након чега у тачки А долази до слома. Понашање конструкције након слома се назива пост-критично понашање. Како би се анализирано понашање конструкције и након њеног слома, односно пост-критично понашање, користи се метода контролисаног померања или контролисаног оптерећења [35].



Слика 3.4 Пост-критично понашање конструкције

Основна идеја ове методе јесте увођење множиоца којим се повећава или смањује интензитет задатог оптерећења са циљем постизања конвергенције у кораку. Водећа једначина ове методе гласи:

$${}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = 0 \quad (3.51)$$

где је  ${}^{t+\Delta t}\lambda$  множилац, односно скалар који је потребно израчунати, док је  $\mathbf{R}$  референтни вектор спољашњег оптерећења. Вектор  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$  представља вектор унутрашњих чворних сила.

Једначина (3.51) представља систем од  $n$  једначина са  $n+1$  непознатих, па је за израчунавање свих непознатих система неопходно увести допунску једначину. Уколико се примени нека од претходно описаних метода за решавање нелинеарних једначина, једначина (3.51) може бити представљена у облику:

$${}^t\mathbf{K} \Delta\mathbf{U}^{(i)} = \left( {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i-1)} + \Delta\lambda^{(i)} \right) \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (3.52)$$

где је  ${}^t\mathbf{K}$  матрица крутости дефинисана у претходном делу. Непознате које се могу израчунати из претходног система једначина су прираштаји померања  $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$  и прираштај множиоца  $\Delta\lambda^{(i)}$  уз коришћење допунске једначине облика:

$$f\left(\Delta\lambda^{(i)}, \Delta\mathbf{U}^{(i)}\right) = 0 \quad (3.53)$$

Корак оптерећења је дефинисан изразима

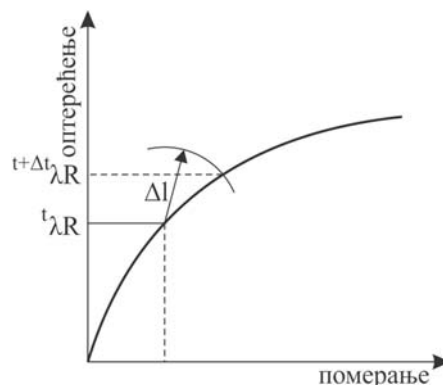
$$\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} - {}^t\mathbf{U} \quad (3.54)$$

$$\lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(i)} - {}^t\lambda \quad (3.55)$$

где  $\mathbf{U}^{(i)}$  представља укупан прираштај померања у кораку, док је  $\lambda^{(i)}$  одговарајући прираштај множиоца оптерећења. Ради повећања ефикасности решавања у пракси се често користи допунски услов у облику константне дужине лука [36]

$$\left(\lambda^{(i)}\right)^2 + \frac{\mathbf{U}^{(i)T} \mathbf{U}^{(i)}}{\beta} = (\Delta l)^2 \quad (3.56)$$

где је  $\Delta l$  дужина лука у кораку, док је  $\beta$  фактор нормализације (којим се обезбеђује услов бездимензионалности). Шематски приказ ове методе је дат на слици 3.5.



Слика 3.5 Метода константне дужине лука

Дужина лука у кораку се бира на основу дужине лука из претходног корака и редукује се у текућем кораку уколико се јави потешкоћа при постизању конвергенције [33].

### 3.4 Мор-Кулонов материјални модел

Мор-Кулонов материјални модел (*енг. Mohr-Coulomb*) представља један од најчешће коришћених модела за симулацију механичког понашања грануларних материјала [37, 38]. Овај модел дефинише директну зависност смичућег напона на површи течења  $\tau$  од нормалног напона  $\sigma$ . На основу ове законитости, до пластичног течења у материјалу ће доћи када смичући напон достигне вредност изражену једначином:

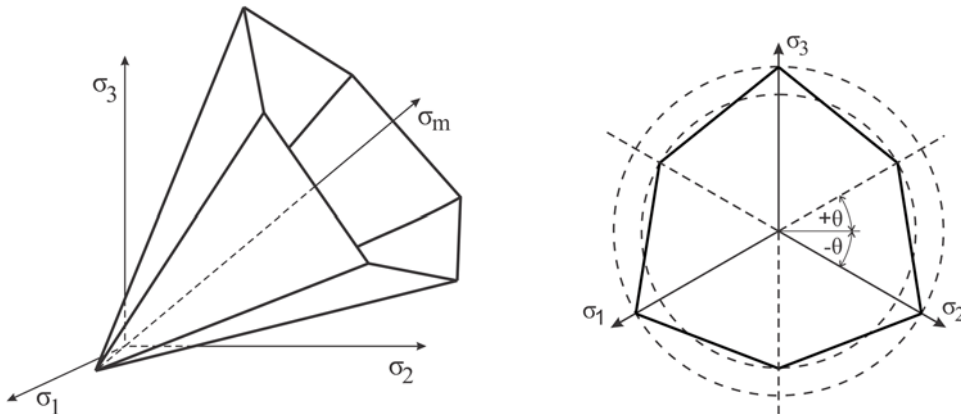
$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (3.57)$$

За дефинисање овог услова неопходна су три параметра: кохезија материјала ( $c$ ), угао унутрашњег трења ( $\phi$ ) и угао дилатанције ( $\psi$ ).

Максимални напон затезања у материјалу  $\sigma_t$  је, на основу [39], дефинисан изразом:

$$\sigma_t = \frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} \quad (3.58)$$

Површ течења овог модела има облик неправилне шестостране пирамиде чија се оса поклапа са хидростатичком осом у простору главних напона и приказана је на слици 3.6.



Слика 3.6 Површ течења Мор-Кулоновог материјалног модела

Једначина површи течења овог материјалног модела [37] изражена коришћењем инваријанти напона има облик:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi \quad (3.59)$$

док се једначина површи пластичног потенцијала у општем случају разликује од површи течења (неасоцијативни услов течења) и дефинисана је једначином:

$$g = \frac{I_1}{3} \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi \right) \quad (3.60)$$

Величине  $I_1$  и  $J_{2D}$  у једначинама (3.59) и (3.60) представљају прву инваријанту напона и другу инваријанту девијатора напона, дефинисане изразима (2.8) и (2.12), док величина  $\theta$  представља Лодеов угао, дефинисан једначином (2.14).

Еласто-пластична конститутивна матрица (3.16) неопходна за интеграцију конститутивних релација модела садржи изводе функције течења (3.59) и функције пластичног потенцијала (3.60) па их је неопходно израчунати. Како су функција течења и функција пластичног потенцијала сложене функције напона, односно напонских инваријанти, применом извода сложене функције [40], извод функције течења гласи:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.61)$$

док је извод функције пластичног потенцијала:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.62)$$

Извод прве инваријанте напона по компонентама напона је:

$$\frac{\partial I_1^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (3.63)$$

док је извод друге инваријанте девијатора напона по компонентама напона:

$$\frac{\partial J_{2D}^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \frac{1}{3}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \quad \frac{1}{3}(-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3) \quad \frac{1}{3}(-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3) \quad 2\sigma_4 \quad 2\sigma_5 \quad 2\sigma_6 \right] \quad (3.64)$$

Изводи функције течења по првој инваријанти напона, другој инваријанти девијатора напона и Лодеовом углу су:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{\sin \phi}{3} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right\} \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\sqrt{J_{2D}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \right] \quad (3.67)$$

док су изводи функције пластичног потенцијала по инваријантама напона и Лодеовом углу:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = \frac{\sin \psi}{3} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi \right\} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -\sqrt{J_{2D}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \sin \psi + \sin \theta \right] \quad (3.70)$$

Лодеов угао је такође сложена функција напона, па је применом правила извода сложене функције његов извод по напону:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} \frac{\partial J_{3D}}{\partial \sigma} \quad (3.71)$$

Коришћењем израза за израчунавање Лодеовог угла на основу инваријанти напона (2.14), поједини изводи једначине (3.71) гласе:

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} = \frac{3J_{3D}}{2J_{2D}^{5/2} \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{9J_{3D}^2}{J_{2D}^3}}} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} = -\frac{1}{J_{2D}^{3/2} \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{9J_{3D}^2}{J_{2D}^3}}} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial J_{3D}}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^* - \sigma_5^2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_m (\sigma_2 + \sigma_3) + 2\sigma_m^2 \\ \sigma^* - \sigma_6^2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_m (\sigma_1 + \sigma_3) + 2\sigma_m^2 \\ \sigma^* - \sigma_4^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_m (\sigma_1 + \sigma_2) + 2\sigma_m^2 \\ -2\sigma_3 \sigma_4 + 2\sigma_5 \sigma_6 - 2\sigma_4 \sigma_m \\ -2\sigma_1 \sigma_5 + 2\sigma_6 \sigma_4 - 2\sigma_5 \sigma_m \\ -2\sigma_2 \sigma_6 + 2\sigma_4 \sigma_5 - 2\sigma_6 \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

У једначини (3.74) променљива  $\sigma_m$  представља средњи напон дефинисан изразом (2.5), док је ради краћег представљања, уведена смена:

$$\sigma^* = \frac{1}{3} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_4^2 - \sigma_5^2 - \sigma_6^2) \quad (3.75)$$

Претходно дефинисани изрази за имплицитну интеграцију напона применом Мор-Кулоновог материјалног модела су сумирани у облику алгоритма датог у табели 3.1. Алгоритам је у приказаном облику имплементиран у програм за нумеричку анализу ПАК.

Табела 3.1 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Мор-Кулоновог материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$

**A.** Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = \frac{I_1}{3} \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi \right)$$

**B.** Провера услова течења:

IF ( $f < 0$ ) пробна решења су еластична (GOTO E)

IF ( $f \geq 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} \frac{\partial J_{3D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

**Ц.** Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi$$

**D.** IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на **Ц** са новим  $d\lambda$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

**E.** END:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$

### 3.5 Мор-Кулонов материјални модел са ојачањем

Мор-Кулонов материјални модел са ојачањем [41] представља модификацију Мор-Кулоновог материјалног модела описаног у претходном делу. Њему је додата карактеристика ојачања која зависи од акумулиране ефективне пластичне деформације [42, 43]. Акумулирана ефективна пластична деформација може бити израчуната применом следећег израза:

$$\kappa = \bar{e}^P = \sum d\bar{e}^P \quad (3.76)$$

док прираштај ефективне пластичне деформације може бити израчунат на основу:

$$d\bar{e}^P = d\lambda \sqrt{\frac{2}{3} \frac{dg^T}{d\boldsymbol{\sigma}} \frac{dg}{d\boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.77)$$

Код еласто-пластичних модела без ојачања, функција течења зависи само од напонског стања и не узима у обзир пластичну деформацију. Функција течења Мор-Кулоновог материјалног модела са ојачањем зависи и од акумулиране пластичне деформације, па једначина површи течења према [44] може бити написана у облику:

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, c(\kappa), \phi(\kappa)) \quad (3.78)$$

Према (2.28), прираштај функције течења, након достизања површи течења, је у сваком тренутку једнак нули, тако да важи једнакост:

$$df(\boldsymbol{\sigma}, c(\kappa), \phi(\kappa)) = 0 \quad (3.79)$$

Применом (2.30), претходни услов може бити представљен у облику:

$$df = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial c(\kappa)} dc(\kappa) + \frac{\partial f}{\partial \phi(\kappa)} d\phi(\kappa) = 0 \quad (3.80)$$

односно

$$\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial c(\bar{e}^P)} \frac{\partial c(\bar{e}^P)}{\partial \bar{e}^P} d\bar{e}^P + \frac{\partial f}{\partial \phi(\bar{e}^P)} \frac{\partial \phi(\bar{e}^P)}{\partial \bar{e}^P} d\bar{e}^P = 0 \quad (3.81)$$

где последња два члана, у складу са (3.11), представљају ојачање материјала, па следи:

$$-Hd\lambda = \frac{\partial f}{\partial c(\bar{e}^P)} \frac{\partial c(\bar{e}^P)}{\partial \bar{e}^P} d\bar{e}^P + \frac{\partial f}{\partial \phi(\bar{e}^P)} \frac{\partial \phi(\bar{e}^P)}{\partial \bar{e}^P} d\bar{e}^P, \quad (3.82)$$

где  $H$  представља параметар ојачања према [44], па важи следећа једнакост:

$$\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} - Hd\lambda = 0 \quad (3.83)$$

На основу једначина (3.77) до (3.83) следи:



$$H = - \left( \frac{\partial f}{\partial c(\bar{e}^P)} \frac{\partial c(\bar{e}^P)}{\partial \bar{e}^P} + \frac{\partial f}{\partial \phi(\bar{e}^P)} \frac{\partial \phi(\bar{e}^P)}{\partial \bar{e}^P} \right) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{d\mathbf{g}^T}{d\boldsymbol{\sigma}} \frac{d\mathbf{g}}{d\boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.84)$$

Заменом прираштаја пластичне деформације (2.25) у (3.7) добија се прираштај напона у кораку:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e} - d\lambda \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.85)$$

Множењем једначине (3.85) са  $(\mathbf{C}^E)^{-1}$  може бити израчунат прираштај укупне деформације:

$$d\mathbf{e} = (\mathbf{C}^E)^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.86)$$

Уколико се једначина (3.86) помножи са  $\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E$ , узимајући у обзир да је  $\mathbf{C}^E (\mathbf{C}^E)^{-1} = \mathbf{I}$ , где је

$\mathbf{I}$  јединична дијагонална матрица, следи:

$$\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E d\mathbf{e} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E d\lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.87)$$

Заменом једначине (3.83) у (3.87) може бити израчунат пластични скалар:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.88)$$

Коначно, заменом скалара  $d\lambda$  из (3.88) у једначини (3.85) добија се израз за прираштај напона  $d\boldsymbol{\sigma}$  у функцији прираштаја укупне деформације  $d\mathbf{e}$ :

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e} - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.89)$$

одакле следи:

$$\mathbf{C}^{EP} = \mathbf{C}^E - \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.90)$$

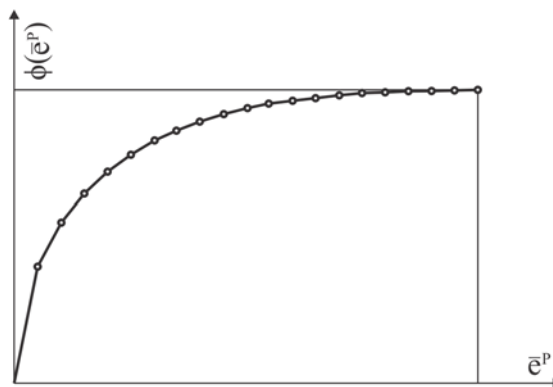
што представља еласто-пластичну конститутивну матрицу. Заменом (3.88) у (2.25) добија се прираштај пластичне деформације облика:

$$d\mathbf{e}^P = \frac{\mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\mathbf{e}}{H + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{C}^E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.91)$$

Ојачање услед унутрашњег трења у материјалу (фрикционо ојачање) је према [41, 45]:

$$\phi(\bar{e}^P) = \sin^{-1} \left( 2 \frac{\sqrt{\bar{e}^P \bar{e}_f^P} \sin(\phi_f)}{\bar{e}^P + \bar{e}_f^P} \right) \quad (3.92)$$

где је  $\bar{e}_f^P$  ефективна пластична деформација при максималном углу унутрашњег трења  $\phi_f$ , што је приказано на слици 3.7.



Слика 3.7 Угао унутрашњег трења у функцији ефективне пластичне деформације

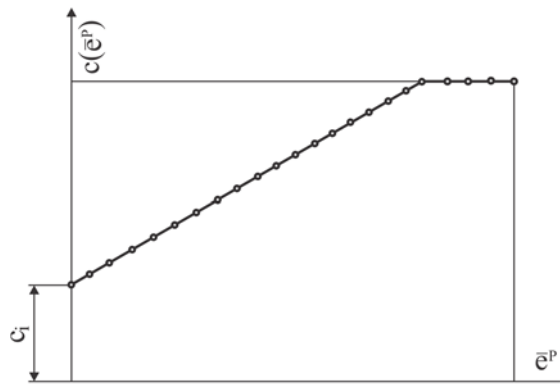
Кохезионо ојачање у материјалу је према [41] дефинисано изразом:

$$c(\bar{e}^P) = c_i + h_c \bar{e}^P \quad (3.93)$$

где је  $c_i$  почетна вредност кохезије, док је  $h_c$  параметар кохезионог ојачања. Вредност кохезије може да расте до максималне задате вредности, након чега има константну вредност:

$$c(\bar{e}^P) \leq c_f \quad (3.94)$$

као што је приказано на слици 3.8.



Слика 3.8 Промена кохезије у функцији ефективне пластичне деформације

Угао дилатанције је, као и угао унутрашњег трења, функција ефективне пластичне деформације и према [41] изражена је једначином:

$$\psi(\bar{\epsilon}^p) = \sin^{-1} \left( \sin \psi_i + (\sin \psi_f - \sin \psi_i) \frac{\sin \phi(\bar{\epsilon}^p) - \sin \phi_i}{\sin \phi_f - \sin \phi_i} \right) \quad (3.95)$$

где је  $\psi_i$  почетни угао дилатанције материјала,  $\phi_i$  почетни угао унутрашњег трења,  $\psi_f$  максимални угао дилатанције, док  $\phi_f$  представља максимални угао унутрашњег трења.

Кораци за имплицитну интеграцију напона Мор-Кулоновог модела са ојачањем су приказани у облику алгоритма представљеним у табели 3.2.

Табела 3.2 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Мор-Кулоновог материјалног модела са ојачањем

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$ ,  $\bar{e}^P$

А. Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

Кориговање параметара модела:

$$c(\bar{e}^P) = c_i + h_c \bar{e}^P \quad \text{за } c(\bar{e}^P) \leq c_f, \quad \phi(\bar{e}^P) = \sin^{-1} \left( 2 \frac{\sqrt{\bar{e}^P \bar{e}_f^P} \sin(\phi_f)}{\bar{e}^P + \bar{e}_f^P} \right),$$

$$\psi(\bar{e}^P) = \sin^{-1} \left( \sin \psi_i + \left( \sin \psi_f - \sin \psi_i \right) \frac{\sin \phi(\bar{e}^P) - \sin \phi_i}{\sin \phi_f - \sin \phi_i} \right)$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi(\bar{e}^P) + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi(\bar{e}^P) \right) - c(\bar{e}^P) \cos \phi(\bar{e}^P)$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = \frac{I_1}{3} \sin \psi(\bar{e}^P) + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi(\bar{e}^P) \right)$$

Б. Провера услова течења:

IF ( $f < 0$ ) пробна решења су еластична (GOTO Е)

IF ( $f \geq 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} \frac{\partial J_{3D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{H + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Ц. Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P,$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi(\bar{e}^P) + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi(\bar{e}^P) \right) - c(\bar{e}^P) \cos \phi(\bar{e}^P)$$

Д. IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на Ц са новим  $d\lambda$ :

$$d\bar{e}^P = d\lambda \sqrt{\frac{2}{3} \frac{dg^T}{d\boldsymbol{\sigma}} \frac{dg}{d\boldsymbol{\sigma}}}, \quad \bar{e}^P = \sum d\bar{e}^P,$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

Е. Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$ ,  $\bar{e}^P$

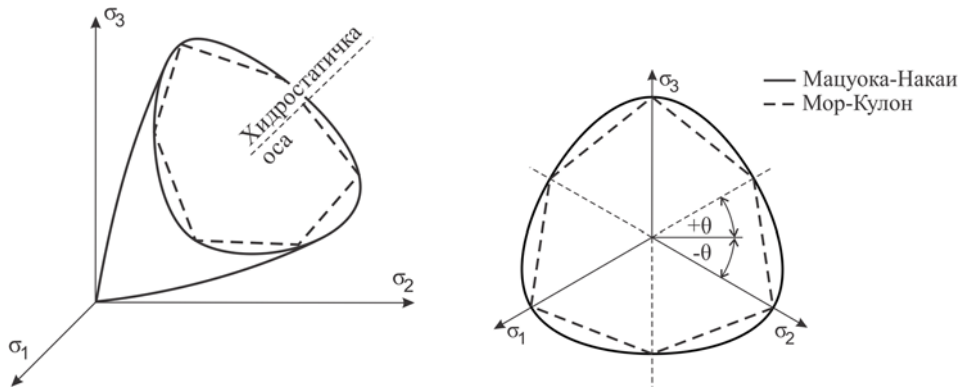
### 3.6 Мацуока-Накаијев материјални модел

При интеграцији конститутивних релација Мор-Кулоновог материјалног модела, један од основних нумеричких проблема представља налажење извода функције течења за граничне вредности Лодеовог угла ( $\theta = \pm 30^\circ$ ) када није могуће одредити јединствену нормалу на површ течења. Из тог разлога, далеко је погодније коришћење површи течења које не садрже ове дисконтинуитете, па је предложена употреба Мацуока-Накаијевог (енг. *Matsuoka-Nakai*) материјалног модела [46, 47, 48].

Једначина површи течења овог модела је функција напона изражена коришћењем инваријанти напона у облику:

$$f = I_3 + \frac{\cos^2 \phi}{9 - \sin^2 \phi} I_1 I_2 = 0 \quad (3.96)$$

где  $\phi$  представља угао унутрашњег трења материјала, док су  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  прва, друга и трећа инваријанта напона дефинисане једначинама (2.8) до (2.10). Површ течења овог модела у простору главних напона и девијаторској равни, упоредо са површи течења Мор-Кулоновог модела је приказана на слици 3.9.



Слика 3.9 Површ течења Мацуока-Накаијевог материјалног модела

Види се да је површ течења Мацуока-Накаијевог модела потпуно глатка за разлику од површи течења Мор-Кулоновог модела, што је, у нумеричком смислу, далеко погодније.

Површ пластичног потенцијала овог модела је према [46] дефинисана изразом:

$$g = I_3 + \frac{\cos^2 \psi}{9 - \sin^2 \psi} I_1 I_2 = 0 \quad (3.97)$$

где  $\psi$  представља угао дилатанције материјала.

Анализом једначине површи течења (3.96) јасно је да не постоји члан који узима у обзир кохезију материјала. Како би се она укључила неопходно је модификовати тензор напона. Према [49], тезор напона је модификован у складу са изразом:

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij} \quad (3.98)$$

где  $\delta_{ij}$  представља Кронекеров оператор, док је напон  $\sigma_0$  израчунат у складу са:

$$\sigma_0 = c \operatorname{ctg} \phi \quad (3.99)$$

где  $c$  представља кохезију материјала, док је  $\phi$  угао унутрашњег трења материјала. На овај начин је површ течења померена у негативном смеру дуж хидростатичке осе за вредност  $\sigma_0$ .

Како би се спровела интеграција напона, неопходно је одредити извод функције течења и пластичног потенцијала. Ове једначине су сложене функције напона, па применом правила извода сложене функције, њихови изводи гласе:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.100)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.101)$$

Изводи функције течења по инваријантама напона гласе:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{\cos^2 \phi}{9 - \sin^2 \phi} I_2 \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_2} = \frac{\cos^2 \phi}{9 - \sin^2 \phi} I_1 \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_3} = 1 \quad (3.104)$$

док су изводи функције пластичног потенцијала по инваријантама напона:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = \frac{\cos^2 \psi}{9 - \sin^2 \psi} I_2 \quad (3.105)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_2} = \frac{\cos^2 \psi}{9 - \sin^2 \psi} I_1 \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_3} = 1 \quad (3.107)$$

Извод прве инваријанте напона по напону је дефинисан изразом (3.63), док изводи друге и треће инваријанте напона гласе:

$$\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ -(\sigma_2 + \sigma_3) \quad -(\sigma_1 + \sigma_3) \quad -(\sigma_1 + \sigma_2) \quad 2\sigma_4 \quad 2\sigma_5 \quad 2\sigma_6 \right] \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left[ \sigma_2\sigma_3 - \sigma_5^2 \quad \sigma_1\sigma_3 - \sigma_6^2 \quad \sigma_1\sigma_2 - \sigma_4^2 \quad 2\sigma_5\sigma_6 - 2\sigma_3\sigma_4 \quad 2\sigma_4\sigma_6 - 2\sigma_1\sigma_5 \quad 2\sigma_4\sigma_5 - 2\sigma_2\sigma_6 \right] \quad (3.109)$$

Кораци имплицитне интеграције напона применом Мацуока-Накаијевог материјалног модела су сумирани у алгоритму приказаном у табели 3.3. Алгоритам је у приказаном облику имплементиран у програм ПАК.

Табела 3.3 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Мацуока-Накаијевог материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$

А. Пробно (еластично) решење:

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \sigma_0 = c \operatorname{ctg} \phi$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, I_2, I_3$$

Функција течења:

$$f = I_3 + \frac{\cos^2 \phi}{9 - \sin^2 \phi} I_1 I_2$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = I_3 + \frac{\cos^2 \psi}{9 - \sin^2 \psi} I_1 I_2 = 0$$

Б. Провера услова течења:

IF ( $f < 0$ ) пробна решења су еластична (GOTO E)

IF ( $f \geq 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Ц. Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, I_2, I_3$$

Функција течења:

$$f = I_3 + \frac{\cos^2 \phi}{9 - \sin^2 \phi} I_1 I_2$$

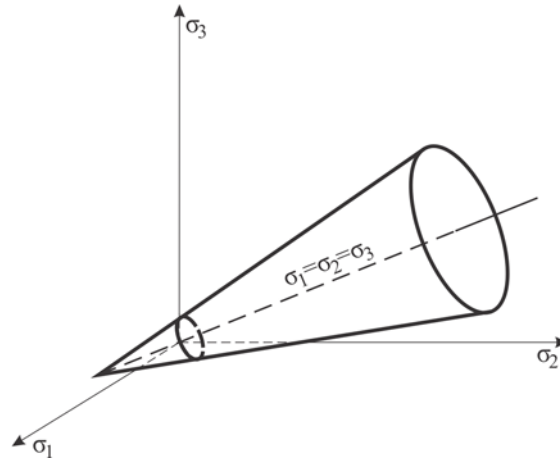
Д. IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на Ц са новим  $d\lambda$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

Е. Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$

### 3.7 Дракер-Прагеров материјални модел

Дракер-Прагеров материјални модел (*енг. Drucker-Prager*) представља један од најстаријих материјалних модела у механици тла [50, 51, 52, 53]. Настао је поједностављењем Мор-Кулоновог материјалног модела како би се превазишао проблем дисконтинуитета. Површ течења овог модела у напонском простору представља конус чија се оса поклапа са хидростатичком осом, као што је приказано на слици 3.10.



Слика 3.10 Површ течења Дракер-Прагеровог материјалног модела

Једначина површи течења овог модела је функција напона дефинисана једначином:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k \tag{3.110}$$

док је за случај неасоцијативног услова течења површ пластичног потенцијала дефинисана изразом:

$$g = \beta I_1 + \sqrt{J_{2D}} \tag{3.111}$$

где  $I_1$  представља прву инваријанту напона (2.8), док је  $J_{2D}$  друга инваријанта девијатора напона (2.12). Величине  $\alpha$ ,  $k$  и  $\beta$  представљају материјалне константе модела које ме могуће израчунати посредно коришћењем материјалних константи Мор-Кулоновог модела што је приказано у табели 3.4 [54].

Табела 3.4 Веза материјалних константи Дракер-Прагеровог и Мор-Кулоновог модела

$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$	$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)}$	Конус који пролази кроз спољашња темена Мор-Кулонове пирамиде
$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}$	$k = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)}$	Конус који пролази кроз унутрашња темена Мор-Кулонове пирамиде
$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{9 - \sin^2 \phi}$	$k = \frac{2\sqrt{3}c \cos \phi}{9 - \sin^2 \phi}$	Средњи конус
$\alpha = \frac{\tan \phi}{\sqrt{(9 + 12 \tan^2 \phi)}}$	$k = \frac{3c}{\sqrt{(9 + 12 \tan^2 \phi)}}$	Конус који тангира Мор-Кулонову пирамиду са унутрашње стране



Једначина Дракер-Прагерове површи течења представља сложену функцију напона, па применом правила извода сложене функције извод по напону гласи:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (3.112)$$

Извод једначине површи течења (3.110) по првој инваријанти напона је:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \alpha \quad (3.113)$$

док њен извод по другој инваријанти девијатора напона гласи:

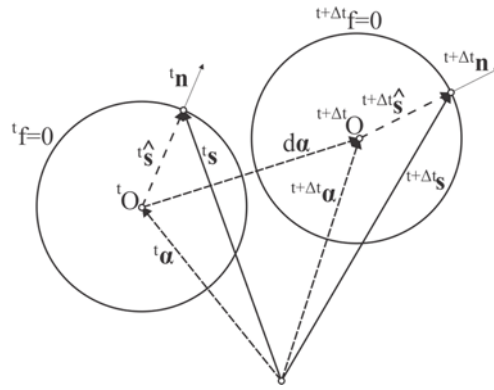
$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \quad (3.114)$$

Изводи прве инваријанте напона и друге инваријанте девијатора напона су дефинисани изразима (3.63) и (3.64).

Применом израза (3.63), (3.64), (3.113) и (3.114), једначина (3.112) може бити написана у векторском облику као:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \alpha + \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \alpha + \frac{-\sigma_1 + 2\sigma_2 - \sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \alpha + \frac{-\sigma_1 - \sigma_2 + 2\sigma_3}{6\sqrt{J_{2D}}} \\ \frac{\sigma_4}{\sqrt{J_{2D}}} \\ \frac{\sigma_5}{\sqrt{J_{2D}}} \\ \frac{\sigma_6}{\sqrt{J_{2D}}} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

У анализи понашања тла изложеног дејству цикличног оптерећења, какво је земљотрес, због карактеристике ојачања грануларних материјала изложених дејству ове врсте оптерећења, често се користе модели са кинематским ојачањем [55, 56]. Површ течења ових модела под дејством оптерећења мења положај у простору главних напона, док величина ове површи остаје непромењена. Изглед површи течења са кинематским ојачањем је приказана у девијаторској равни на слици 3.11.



Слика 3.11 Површи течења у девијаторској равни у случају постојања кинематског ојачања

Девијаторски напон у тренутку  $t + \Delta t$  за случај постојања кинематског ојачања, у складу са сликом 3.11, може бити изражен као:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{s}} + {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha} \quad (3.116)$$

где је  ${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{s}}$  радијус напон, док  ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha}$  представља положај центра површи течења (енг. *back-stress*):

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha} = {}^t\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\alpha} \quad (3.117)$$

У овом случају друга инваријанта девијатора напона изражена применом радијус напона је:

$$J_{2D} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.118)$$

Извод дуге инваријанте девијатора напона у једначини (3.112) у складу са (3.118) може бити израчунат применом правила изода сложене фукције као:

$$\frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial J_{2D}}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.119)$$

Друга инваријанта девијатора напона према [27, 28] коришћењем радијус напона може бити израчуната као:

$$J_{2D} = \hat{s}_1\hat{s}_2 + \hat{s}_2\hat{s}_3 + \hat{s}_3\hat{s}_1 - \hat{s}_4^2 - \hat{s}_5^2 - \hat{s}_6^2 \quad (3.120)$$

па први члан у једначини (3.119) гласи:

$$\frac{\partial J_{2D}}{\partial \hat{\mathbf{s}}}^T = [(\hat{s}_2 + \hat{s}_3) \quad (\hat{s}_1 + \hat{s}_3) \quad (\hat{s}_3 + \hat{s}_1) \quad -2\hat{s}_4 \quad -2\hat{s}_5 \quad -2\hat{s}_6] \quad (3.121)$$

Применом једначина (2.7) и (3.116) радијус напон може бити написан у облику:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{s}} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{m} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}_m - {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\alpha} \quad (3.122)$$

одакле следи други члан једначине (3.119) у облику:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{s}}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

За анализу понашања грануларних материјала изложених дејству непропорцијалног статичког оптерећења или цикличном оптерећењу у пракси се користи више типова кинематског ојачања. Најједноставни тип кинематског ојачања представља Дракерово линеарно кинематско ојачање [57], код кога је прираштај положајног напона  $d\boldsymbol{\alpha}$  колинеаран са вектором прираштаја пластичне деформације и има облик:

$$d\boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{3} C_1 d\mathbf{e}^P \quad (3.124)$$

где  $C_1$  редставља материјалну константу, док је  $d\mathbf{e}^P$  прираштај пластичне деформације. Далеко бољу дефиницију кинематског ојачања даје Амстронг-Фредрик кинематско ојачање [58, 59] увођењем члана који представља динамичку релаксацију. Прираштај положајног напона у том случају има облик:

$$d\boldsymbol{\alpha} = \frac{2}{3} C_1 d\mathbf{e}^P - C_2 {}^t\boldsymbol{\alpha} d\bar{\mathbf{e}}^P \quad (3.125)$$

где је  $C_2$  материјална константа, док  $d\bar{\mathbf{e}}^P$  представља прираштај еквивалентне пластичне деформације:

$$d\bar{\mathbf{e}}^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\mathbf{e}^P d\mathbf{e}^P} \quad (3.126)$$

Алгоритам за имплицитну интеграцију напона применом Дракер-Прагеровог материјалног модела са кинематским ојачањем је приказан у табели 3.5. На идентичан начин кинематско ојачање може бити имплементирано и у друге материјалне моделе намењене анализи понашања грануларних материјала.

Табела 3.5 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Дракер-Прагеровог материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$ ,  ${}^t \mathbf{a}$

А. Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e} \right), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{s} = {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{m} \, {}^{t+\Delta t} \sigma_m,$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D} = \frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{s} - {}^t \mathbf{a} \right) \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{s} - {}^t \mathbf{a} \right)$$

Функција течења:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = \beta I_1 + \sqrt{J_{2D}}$$

Б. Провера услова течења:

IF ( $f \leq 0$ ) пробна решења су еластична (GOTO К)

IF ( $f > 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Ц. Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\bar{\mathbf{e}}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} d\mathbf{e}^P d\mathbf{e}^P, \quad d\mathbf{a} = \frac{2}{3} C_1 d\mathbf{e}^P - C_2 {}^t \mathbf{a} d\bar{\mathbf{e}}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{a} = {}^t \mathbf{a} + d\mathbf{a}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D} = \frac{1}{2} \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{s} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{a} \right) \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{s} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{a} \right)$$

Функција течења:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k$$

Д. IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на Ц са новим  $d\lambda$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

К. Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{a}$

### 3.8 Максимовићев материјални модел

Због чињенице да грануларни невезани материјали немају кохезију, смичућа чврстоћа тла се према [60] може описати коришћењем ефективних напона у облику:

$$\tau_f = \sigma_n \tan \phi(\sigma_n) \quad (3.127)$$

при чему је максимална вредност угла унутрашњег трења у материјалу према [60] дефинисана изразом:

$$\phi_{\max} = \phi_{cv} + \psi \quad (3.128)$$

где је  $\psi$  допринос дилатанције. Угао унутрашњег трења у материјалу је функција нормалног ефективног напона представљена као:

$$\phi(\sigma_n) = \phi_B + \delta\phi(\sigma_n) \quad (3.129)$$

Други члан у изразу (3.129) према [60] може бити написан у облику:

$$\delta\phi(\sigma_n) = \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_n}{p_N}} \quad (3.130)$$

па је укупан угао унутрашњег трења у материјалу:

$$\phi(\sigma_n) = \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_n}{p_N}} \quad (3.131)$$

Смичућа чврстоћа тла, дефинисана изразом (3.127), применом (3.131) се може написати као:

$$\tau_f = \sigma_n \tan \left( \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_n}{p_N}} \right) \quad (3.132)$$

У изразима (3.129) до (3.132) величине које представљају материјалне константе су:

$\phi_B$  - базни угао трења

$\Delta\phi$  - максимална угаона разлика  $\phi_O - \phi_B$

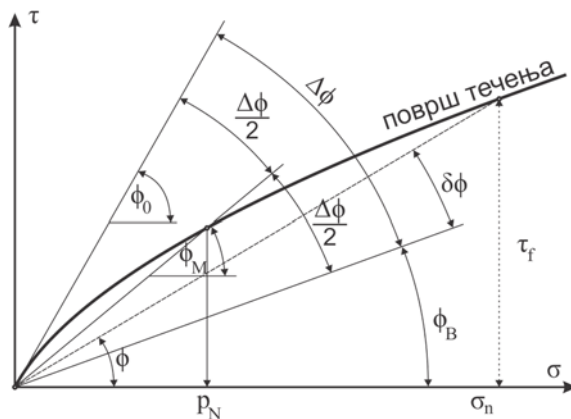
$p_N$  - нормални напон средњег секантног угла.

Површ течења модела Максимовића је приказана на слици 3.12 док је значење појединих материјалних константи приказано на слици 3.13. Као што види на слици, у случају  $\sigma_n \rightarrow 0$  нагиб тангенте на анвелопу у координатном почетку је једнак збиру  $\phi_B + \Delta\phi$ . За случај  $\sigma_n \rightarrow \infty$  угао унутрашњег трења  $\phi$  тежи вредности базног угла  $\phi_B$ . Материјална константа  $p_N$

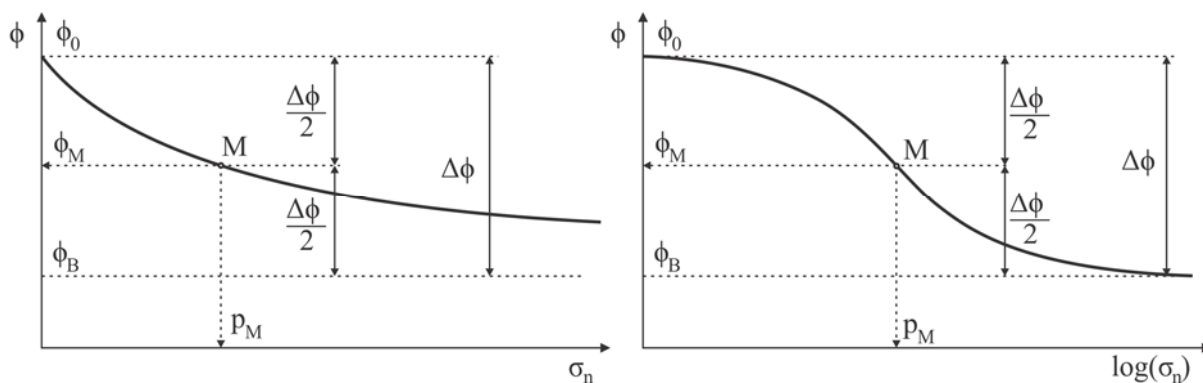
представља напон при коме угао унутрашњег има средњу вредност између углова  $\phi_B$  и  $\phi_O$ , односно

$$\phi_M = \phi_B + \Delta\phi/2 \tag{3.133}$$

Параметре овог модела је најједноставније одредити коришћењем теста директног смицања док је одређивање параметара применом тросног теста могуће извршити посредно.

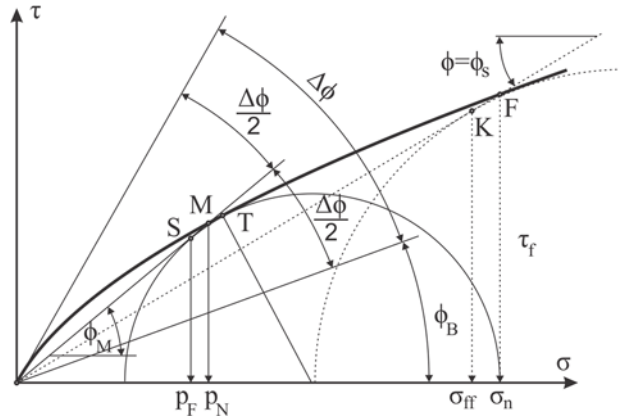


Слика 3.12 Површ течења Максимовићевог материјалног модела



Слика 3.13 Параметри модела нелинеарне анvelope модела Максимовића

При дефинисању површи течења овог модела у равни  $\sigma - \tau$  могуће је дефинисати Мороове кругове тако да тангирају површ течења. На ове кругове је могуће повући тангенту из координатног почетка. Очигледно је да се, услед закривљености површи течења, тачка у којој тангента додирује Мороов круг и заклапа угао  $\phi_s$  са осом  $\sigma$  не поклапа са тачком F (слика 3.14). Међутим, према [60], ово одступање је мало и може бити занемарено. Према аутору, такође може бити усвојено да је  $p_N \approx p_F$ .



Слика 3.14 Површи течења модела и конверзија параметара модела

На основу претходног, промена угла тангенте на Мороове кругове може бити изражена у функцији нормалног напона, па у складу са изразом (3.131), може бити представљено:

$$\phi_s = \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_{ff}}{p_F}} \quad (3.134)$$

где напон  $\sigma_{ff}$  (Слика 3.14) може бити израчунат према:

$$\sigma_{ff} = \sigma_3 (1 + \sin \phi_s) \quad (3.135)$$

док угао  $\phi_s$ , према аутору, може бити израчунат применом:

$$\sin \phi_s = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 + \sigma_3)_f} \quad (3.136)$$

Ради уопштавања модела и његовог прилагођавања нумеричкој имплементацији, угао унутрашњег трења може бити израчунат коришћењем средњег напона:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.137)$$

Коришћењем израза (3.137), угао унутрашњег трења (3.131) може бити представљен у облику:

$$\phi_s = \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_m}{p_{AV}}} \quad (3.138)$$

где, према [60], параметар  $p_{AV}$  може бити израчунат коришћењем израза:

$$p_{AV} = p_F \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{3 - \sin \phi_M}{1 - \sin^2 \phi_M} \right) \quad (3.139)$$

Треба нагласити да површи течења дефинисане угловима унутрашњег трења (3.131), (3.134) и (3.138) нису идентичне осим у случају када нормални напон тежи нули, када тежи

бесконачности и за напон који одговара средњем углу  $\phi_M$ . Међутим, према [60], разлике се крећу у границама  $\pm 0.2^\circ$ , а смањују са смањивањем максималне угаоне разлике  $\Delta\phi$ .

На основу дефинисаних теоријских основа, применом аналогije са Мор-Кулоновим моделом, јасно је да површ течења дефинисана изразом (3.127) одговара Мор-Кулоновом услову течења за случај одсуства кохезије материјала. Друга значајна разлика у односу на Мор-Кулонов услов течења јесте променљиви угао унутрашњег трења (3.138). На основу претходног, једначина површи течења модела Максимовића може по аналогiji са (3.59) бити дефинисана једначином:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) \quad (3.140)$$

Овде је разматран асоцијативни услов течења, па једначина површи пластичног потенцијала одговара овој функцији.

У једначини површи течења (3.140)  $I_1$  представља прву инваријанту напона,  $J_{2D}$  је друга инваријанта девијатора напона,  $\theta$  Лодеов угао, док  $\phi$  представља угао унутрашњег трења материјала који је дефинисан изразом (3.138).

Извод функције течења по напону може бити израчунат коришћењем правила извода сложене функције [40], па следи:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (3.141)$$

Изводи функције течења по инваријантама напона, Лодеовом углу и углу унутрашњег трења су:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{\sin \phi}{3} \quad (3.142)$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right\} \quad (3.143)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\sqrt{J_{2D}} \left( \sin \theta + \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.144)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \left( \frac{I_1}{3} - \sqrt{\frac{J_{2D}}{3}} \sin \theta \right) \cos \phi \quad (3.145)$$

док су изводи прве инваријанте напона и друге инваријанте девијатора напона дефинисани једначинама (3.63) и (3.64). Изводи угла унутрашњег трења и Лодеовог угла по напону су:

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} -\frac{3\Delta\phi p_{AV}}{(I_1 + 3p_{AV})^2} & -\frac{3\Delta\phi p_{AV}}{(I_1 + 3p_{AV})^2} & -\frac{3\Delta\phi p_{AV}}{(I_1 + 3p_{AV})^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.146)$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} \frac{\partial J_{3D}}{\partial \sigma} \quad (3.147)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} = \frac{3J_{3D}}{2J_{2D}^{5/2} \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{9J_{3D}^2}{J_{2D}^3}}} \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} = -\frac{1}{J_{2D}^{3/2} \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{9J_{3D}^2}{J_{2D}^3}}} \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial J_{3D}}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^* - \sigma_5^2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_m (\sigma_2 + \sigma_3) + 2\sigma_m^2 \\ \sigma^* - \sigma_6^2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_m (\sigma_1 + \sigma_3) + 2\sigma_m^2 \\ \sigma^* - \sigma_4^2 + \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_m (\sigma_1 + \sigma_2) + 2\sigma_m^2 \\ -2\sigma_3 \sigma_4 + 2\sigma_5 \sigma_6 - 2\sigma_4 \sigma_m \\ -2\sigma_1 \sigma_5 + 2\sigma_6 \sigma_4 - 2\sigma_5 \sigma_m \\ -2\sigma_2 \sigma_6 + 2\sigma_4 \sigma_5 - 2\sigma_6 \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

Ради краћег писања у једначини (3.150) је уведена смена:

$$\sigma^* = \frac{1}{3} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_4^2 - \sigma_5^2 - \sigma_6^2) \quad (3.151)$$

Кораци имплицитне интеграције напона применом материјалног модела Максимовића су сумирани у облику алгоритма приказаног у табели 3.6. Овај алгоритам је у приказаном облику имплементиран у програм за нумеричку анализу ПАК.

Табела 3.6 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Максимовићевог материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$

А. Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3}, \quad p_{AV} = p_F \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{3 - \sin \phi_M}{1 - \sin^2 \phi_M} \right), \quad p_F \approx p_N, \quad \phi_M = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{2}, \quad \phi = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{1 + \frac{\sigma_m}{p_{AV}}}$$

Функција течења и пластичног потенцијала (асоцијативни услов течења):

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right)$$

Б. Провера услова течења:

IF ( $f < 0$ ) пробна решења су еластична (иди на Е)

IF ( $f \geq 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Ц. Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3}, \quad p_{AV} = p_F \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{3 - \sin \phi_M}{1 - \sin^2 \phi_M} \right), \quad p_F \approx p_N, \quad \phi_M = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{2}, \quad \phi = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{1 + \frac{\sigma_m}{p_{AV}}}$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right)$$

Д. IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на Ц са новим  $d\lambda$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

Е. Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$

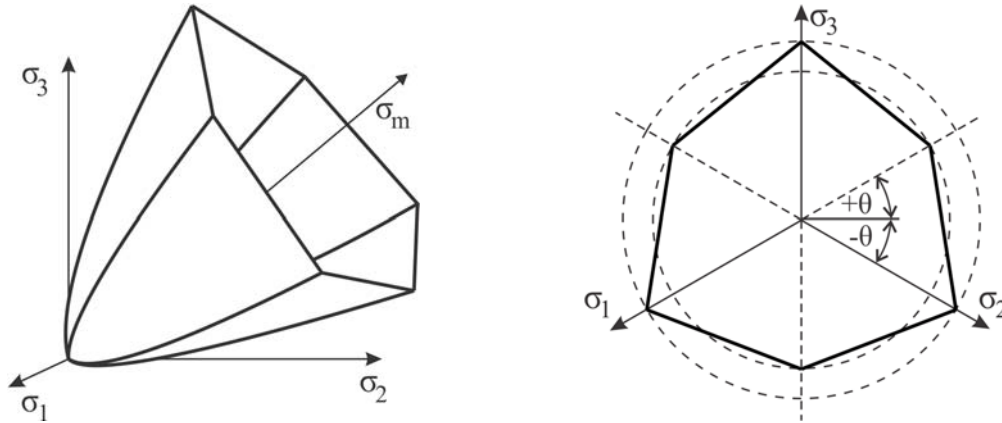
### 3.9 Хук-Браунов материјални модел

Хук-Браунов материјални модел (*енг. Hoek-Brown*) представља један од најважнијих и најчешће коришћених модела за описивање механичког понашања стенске масе. Први пут је уведен осамдесетих година прошлог века за описивање чврстоће непоремећене (интактне) стенске масе [61]. Овај модел дефинише зависност највећег и најмањег главног напона и има облик:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \sqrt{1 + m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}}} \quad (3.152)$$

где  $\sigma_{ci}$  представља једноосну притисну чврстоћу непоремећене стене док је  $m_i$  материјална константа која зависи од врсте стене.

Површ течења овог материјалног модела представља неправилну шестострану пирамиду хиперболоидних страница чија се оса, у простору главних напона, поклапа са хидростатичком осом, као што је приказано на слици 3.15.



Слика 3.15 Површ течења Хук-Брауновог материјалног модела

Једначина површи течења овог модела је функција напона и, применом инваријанти напона, гласи

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_{ci} + m_b \sigma_{ci} \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) - s \sigma_{ci}^2 + 4J_{2D} \cos^2 \theta \quad (3.153)$$

Једначина површи пластичног потенцијала у општем случају има другачији облик од једначина површи течења и према [61] има следећи облик:

$$g = \frac{I_1}{3} m_{dil} \sigma_{ci} + m_{dil} \sigma_{ci} \sqrt{J_{2D}} \frac{\sqrt{3}}{2} - s \sigma_{ci}^2 + 3J_{2D} \quad (3.154)$$

Величине  $I_1$  и  $J_{2D}$  у једначинама (3.153) и (3.154) представљају инваријанте напона, док је  $\theta$  Лодеов угао. Константе  $m_b$ ,  $m_{dil}$  и  $s$  представљају параметре материјала који се одређују експериментално. Параметар  $m_b$  може бити израчунат коришћењем параметра  $m_i$  дефинисаног претходно, применом следеће једначине:

$$m_b = m_i \cdot e^{\left(\frac{GSI-100}{28-14D}\right)} \quad (3.155)$$

док параметар  $s$  може бити израчунат коришћењем израза

$$s = e^{\left(\frac{GSI-100}{9-3D}\right)} \quad (3.156)$$

У једначинама (3.155) и (3.156) величина  $GSI$  представља геолошки индекс чврстоће, док је  $D$  фактор поремећености стене [62]. Фактор поремећености се креће у границама од 0 (за потпуно непоремећену стену) до 1 (за потпуно поремећену стену).

Како би се извршила имплицитна интеграција напона применом Хук-Брауновог модела, неопходно је израчунати чланове еласто-пластичне конститутивне матрице дефинисане изразом (3.16), односно неопходно је израчунати изводе функције течења (3.153) и функције пластичног потенцијала (3.154) овог модела. Како се ради о сложеним функцијама напона, неопходно је применити правило извода сложене функције, па ови изводи гласе:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (3.157)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (3.158)$$

Извод прве инваријанте напона и друге инваријанте девијатора напона по напону је дефинисан изразима (3.63) и (3.64), док је извод Лодеовог угла по напону дефинисан изразима (3.71) до (3.75). Изводи функције течења по првој инваријанти напона, другој инваријанти девијатора напона и Лодеовом углу су:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{m\sigma_{ci}}{3} \quad (3.159)$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = 4 \cos^2 \theta + \frac{m\sigma_{ci}}{2\sqrt{J_{2D}}} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right\} \quad (3.160)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -8J_{2D} \sin \theta \cos \theta - m\sigma_{ci} \sqrt{J_{2D}} \left( \sin \theta + \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.161)$$

док су изводи функције пластичног потенцијала по напонским инваријантама:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = \frac{m_{dil}\sigma_{ci}}{3} \quad (3.162)$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_{2D}} = 3 + \frac{\sqrt{3}m_{dil}\sigma_{ci}}{4\sqrt{J_{2D}}} \quad (3.163)$$

Кораци имплицитне интеграције напона применом Хук-Брауновог материјалног модела су приказани у облику алгоритма представљеном у табели 3.7. Приказани алгоритам је имплементиран у програм ПАК.

Табела 3.7 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Хук-Брауновог материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$

А. Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} m \sigma_{ci} + m \sigma_{ci} \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) - s \sigma_{ci}^2 + 4J_{2D} \cos^2 \theta$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = \frac{I_1}{3} m_{dil} \sigma_{ci} + m_{dil} \sigma_{ci} \sqrt{J_{2D}} \frac{\sqrt{3}}{2} - s \sigma_{ci}^2 + 3J_{2D}$$

Б. Провера услова течења:

IF ( $f < 0$ ) пробна решења су еластична (GOTO E)

IF ( $f \geq 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

дисконтинуитет површи течења

$$\text{IF} \left( \left| \frac{\pi}{6} - \theta \right| \leq \varepsilon \right) \rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{6} = \text{const.}, \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Ц. Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} m \sigma_c + m \sigma_c \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) - s \sigma_c^2 + 4J_{2D} \cos^2 \theta$$

Д. IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на Ц са новим  $d\lambda$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

Е. Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$

### 3.10 Генерализовани Хук-Браунов материјални модел

Генерализовани Хук-Браунов материјални модел (*енг. generalized Hoek-Brown*) на сличан начин као и Хук-Браунов материјални модел, дефинише зависност између највећег и најмањег главног напона у материјалу [63] једначином облика:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (3.164)$$

Површ течења овог модела је функција напонског стања и може бити изражена применом инваријанти напона у следећем облику:

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_{ci}^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left( \sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_b \sqrt{J_{2D}} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) \quad (3.165)$$

Према [63], једначина површи пластичног потенцијала има исти облик као и функција течења. У случају примене неасоцијативног услова течења уместо  $m_b$  користи параметар дилатанције  $m_{bdil}$ , који према [64] треба усвојити као  $m_{bdil} \leq m_b/4$ .

Једначина површи пластичног потенцијала гласи:

$$g = \frac{I_1}{3} m_{bdil} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_{ci}^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left( \sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_{bdil} \sqrt{J_{2D}} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) \quad (3.166)$$

Величине  $I_1$  и  $J_{2D}$  у једначинама (3.165) и (3.166) представљају инваријанте напона, док величина  $\theta$  представља Лодеов угао. Величине  $\sigma_{ci}$ ,  $m_b$ ,  $s$  и  $a$  су параметри материјалног модела. Параметри  $m_b$  и  $s$  се израчунавају коришћењем израза (3.155) и (3.156), док се параметар  $a$  израчунава применом једначине:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left( e^{\left(\frac{-GS}{15}\right)} - e^{\left(\frac{-20}{3}\right)} \right) \quad (3.167)$$

Изводи функција течења и пластичног потенцијала, применом правила извода сложених функција су:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad (3.168)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (3.169)$$

Изводи инваријанти напона су дефинисани изразима (3.63) и (3.64), док је извод Лодеовог угла дефинисан изразима (3.71) до (3.75).

Изводи функције течења по инваријантима напона и Лодеовом углу су:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{1}{3} m_b \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \quad (3.170)$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{\sqrt{J_{2D}}} \left\{ \frac{2^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \cos \theta (\cos \theta \sqrt{J_{2D}})^{\left(\frac{1}{a}-1\right)}}{a} + \frac{\left( \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} \right) m_b \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)}}{2} \right\} \quad (3.171)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{1}{3} \sqrt{J_{2D}} (\sqrt{3} \cos \theta + 3 \sin \theta) m_b \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - \frac{2^{\frac{1}{a}} (\sqrt{J_{2D}} \cos \theta)^{\frac{1}{a}}}{a} \tan \theta \quad (3.172)$$

док су изводи функције пластичног потенцијала по инваријантама напона:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = \frac{1}{3} m_{bdil} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \quad (3.173)$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{\sqrt{J_{2D}}} \left\{ \frac{2^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \cos \theta (\cos \theta \sqrt{J_{2D}})^{\left(\frac{1}{a}-1\right)}}{a} + \frac{\left( \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} \right) m_{bdil} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)}}{2} \right\} \quad (3.174)$$

Кораци имплицитне интеграције напона применом генерализованог Хук-Брауновог модела су систематизовани у облику алгоритма приказаном у табели 3.8 и у истом облику имплементирани у програм ПАК.

Табела 3.8 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона генерализованог Хук-Брауновог материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$

**A.** Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

Функција течења:

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_c^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left( \sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_b \sqrt{J_{2D}} \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = \frac{I_1}{3} m_{bdl} \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_c^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left( \sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_{bdl} \sqrt{J_{2D}} \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)$$

**B.** Провера услова течења:

IF (  $f < 0$  ) пробна решења су еластична (GOTO E)

IF (  $f \geq 0$  ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

**Ц.** Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D}, \theta$$

**Функција течења:**

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_c^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left( \sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_b \sqrt{J_{2D}} \sigma_c^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)$$

**Д.** IF (  $ABS(f) \geq TOL$  ) врати се назад на **Ц** са новим  $d\lambda$  :

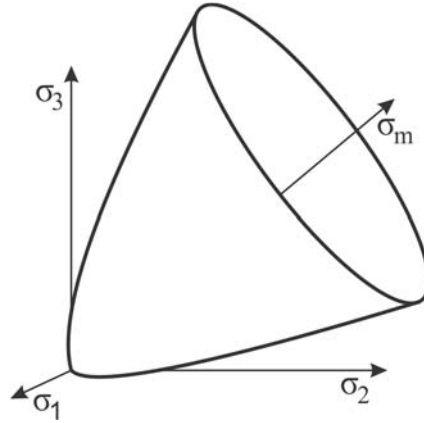
$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

**Е.** Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$



### 3.11 Пан-Хадсонов материјални модел

Пан-Хадсонов материјални модел (*енг. Pan-Hudson*) је настао упрошћавањем Хук-Брауновог материјалног модела [65] како би био избегнут проблем углова на површи течења. Површ течења овог модела представља средњу површ између описане и уписане површи Хук-Брауновог модела, па следи да је површ течења и овог модела параболична. (слика 3.16).



Слика 3.16 Површ течења Пан-Хадсоновог материјалног модела

Једначина површи течења Пан-Хадсоновог модела [65] је функција напона и има следећи облик:

$$f = \frac{m_b}{3} I_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_b \sqrt{J_{2D}} + \frac{3}{\sigma_{ci}} J_{2D} - s \sigma_{ci} \quad (3.175)$$

Једначина површи пластичног потенцијала има исти облик као и једначина површи течења, са том разликом што уместо параметра  $m_b$  фигурише параметар дилатације  $m_{bdil}$ :

$$g = \frac{m_{bdil}}{3} I_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{bdil} \sqrt{J_{2D}} + \frac{3}{\sigma_{ci}} J_{2D} - s \sigma_{ci} \quad (3.176)$$

Величине  $I_1$  и  $J_{2D}$  у једначинама (3.175) и (3.176) представљају инваријанте напона, док величине  $\sigma_{ci}$ ,  $m_b$ ,  $m_{bdil}$  и  $s$  представљају параметре материјала који имају исто значење као у случају Хук-Брауновог материјалног модела.

Како су функције течења и пластичног потенцијала сложене функције напона, коришћењем правила извода сложене функције, њихови изводи по напону су:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (3.177)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (3.178)$$

док су изводи функције течења по првој инваријанти напона и другој инваријанти девијатора напона:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{m_b}{3} \quad (3.179)$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{m_b}{\sqrt{J_{2D}}} + \frac{3}{\sigma_{ci}} \quad (3.180)$$

На сличан начин могу бити израчунати изводи функције пластичног потенцијала:

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = \frac{m_{bdil}}{3} \quad (3.181)$$

$$\frac{\partial g}{\partial J_{2D}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{m_{bdil}}{\sqrt{J_{2D}}} + \frac{3}{\sigma_{ci}} \quad (3.182)$$

Изводи инваријанти напона  $I_1$  и  $J_{2D}$  су дефинисани изразима (3.63) и (3.64).

Поступак имплицитне интеграције напона Пан-Хадсоновог материјалног модела је дат у облику алгоритма приказаног у табели 3.9 који је у приказаном облику имплементиран у програм ПАК.

Табела 3.9 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона Пан-Хадсоновог материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$

А. Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D}$$

Функција течења:

$$f = \frac{m_b}{3} I_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_b \sqrt{J_{2D}} + \frac{3}{\sigma_C} J_{2D} - s \sigma_{ci}$$

Функција пластичног потенцијала:

$$g = \frac{m_{bdil}}{3} I_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{bdil} \sqrt{J_{2D}} + \frac{3}{\sigma_C} J_{2D} - s \sigma_{ci}$$

Б. Провера услова течења:

IF ( $f < 0$ ) пробна решења су еластична (GOTO E)

IF ( $f \geq 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial g}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Ц. Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D}$$

Функција течења:

$$f = \frac{m_b}{3} I_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_b \sqrt{J_{2D}} + \frac{3}{\sigma_C} J_{2D} - s \sigma_{ci}$$

Д. IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на Ц са новим  $d\lambda$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

Е. Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$

### 3.12 Модификовани Кем-Клеј материјални модел

Кем-Клеј материјални модел (*енг. Cam-Clay*) представља модел глине и припада групи модела критичног стања [66]. Развијен је на Универзитету Кембриџ и првенствено је био намењен симулацији механичког понашања нормално консолидованих глина. Касније је предложена модификација овог модела, па је логаритамски облик површи течења замењен елиптичном површи. У овом облику је данас у широкој примени у симулацијама механичког понашања глине и познат је под називом модификовани Кем-Клеј модел [67]. Предност овог модела је његова једноставност и способност да реално опише понашање глине. Поред тога, материјалне константе овог модела је могуће одредити на основу конвенционалних лабораторијских тестова. Површ течења модификованог Кем-Клеј материјалног модела у простору  $\sigma_m - q$  је приказана на слици 3.17.



Слика 3.17 Модел глине (Кем-Клеј материјални модел)

Површ течења овог модела је функција напона описана једначином:

$$f = q^2 - M^2 \sigma_m (p_o - \sigma_m) \quad (3.183)$$

У претходној једначини,  $M$  представља материјалну константу која дефинише нагиб линије критичног стања (ЛКС) у  $\sigma_m - q$  простору. Ова константа може бити израчуната на основу угла унутрашњег трења применом следеће једнакости:

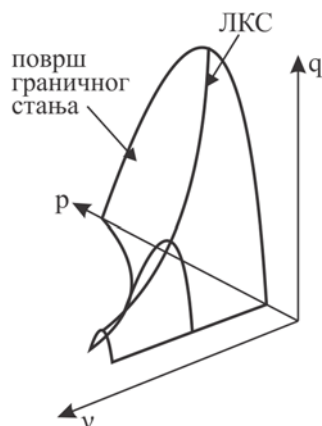
$$M = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad (3.184)$$

Основна карактеристика линије критичног стања је да пресеца криву течења у највишој тачки. Величина  $q$  може бити израчуната на основу друге инваријанте девијатора напона као:

$$q = \sqrt{3J_{2D}} \quad (3.185)$$

док  $\sigma_m$  представља средњи напон дефинисан једначином (2.5). Величина  $p_o$  у једначини (3.183) је средњи напон примарне консолидације и представља параметар изотропног ојачања који дефинише величину површи течења.

Површ течења модификованог Кем-Клеј модела може бити приказана у тродимензионалном простору  $v - \sigma_m - q$  и ова површ је позната као површ граничног стања (енг. *State Boundary Surface*), као што је приказано на слици 3.18.



Слика 3.18 Површ граничног стања модификованог Кем-Клеј модела

Величина  $v$  представља специфичну запремину материјала која може бити израчуната на основу порозности применом следећег израза

$$v = 1 + e \tag{3.186}$$

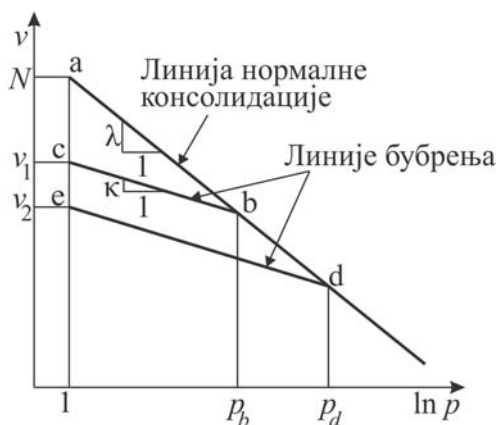
Параметри неопходни за дефинисање модификованог Кем-Клеј материјалног модела су:

$e_0$  - коефицијент почетне порозности,

$M$  - нагиб линије критичног стања у  $\sigma_m - q$  простору (слика 3.17),

$\lambda$  - нагиб линије нормалне консолидације у  $v - \ln \sigma_m$  простору (слика 3.19),

$\kappa$  - нагиб линије бубрења (оптерећење-растерећење) у  $v - \ln \sigma_m$  простору (слика 3.19).



Слика 3.19 Понашање узорка глине при изотропној компресији

Вредност параметра  $p_0$ , који дефинише величину површи течења, зависи од историје деформације и може бити израчунат на основу следеће једначине:

$${}^{t+\Delta t} p_o = {}^t p_o \exp\left(\frac{-\Delta e_m^p}{{}^{t+\Delta t} b_V}\right) \quad (3.187)$$

где је

$${}^{t+\Delta t} b_V = \frac{k_s}{3(1+{}^{t+\Delta t} e)} \quad (3.188)$$

док  $\Delta e_m^p$  представља прираштај средње пластичне деформације који може бити израчуната коришћењем компоненти прираштаја пластичне деформације. Параметар  $k_s$  у једначини (3.188) је израчунат као:

$$k_s = \lambda - \kappa \quad (3.189)$$

Текућа порозност материјала може бити израчуната коришћењем почетне порозности  ${}^0 e$  и запреминске деформације  $e_V$  коришћењем израза:

$${}^{t+\Delta t} e = (1 + {}^0 e) e^{t+\Delta t} e_V - 1 \quad (3.190)$$

Модул еластичности овог модела такође зависи од историје деформације и може бити израчунат на основу порозности коришћењем следеће једнакости:

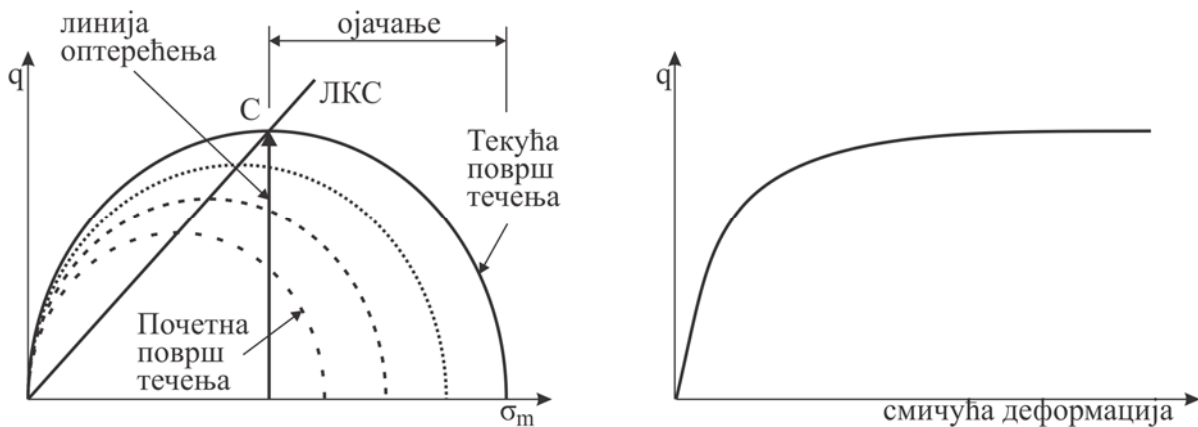
$${}^{t+\Delta t} E = 3(1-2\nu) {}^{t+\Delta t} K \quad (3.191)$$

где је

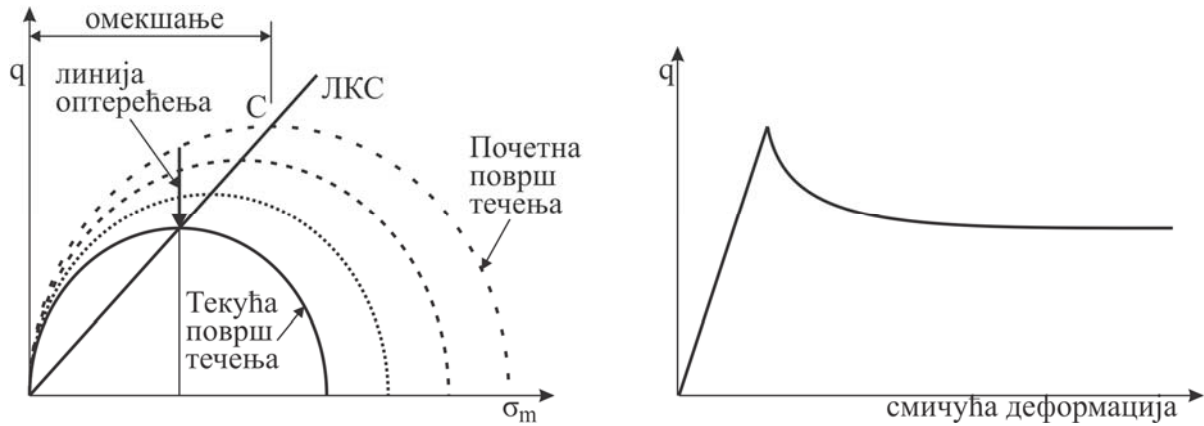
$${}^{t+\Delta t} K = \frac{1 + {}^{t+\Delta t} e}{\kappa} {}^{t+\Delta t} \sigma_m \quad (3.192)$$

Након достизања површи течења код Кем-Клеј модела разликујемо два карактеристична случаја:

1. у случају када се напонска тачка нађе на површи течења десно од тачке пресека са линијом критичног стања (слика 3.17), долази до ојачања у материјалу, односно долази до повећања површи течења, чиме се повећава еластична област.



Слика 3.20 Понашање модела глине при ојачању



Слика 3.21 Понашање модела глине при омекшању

2. у случају када се напонска тачка нађе на површи течења лево од тачке пресека са линијом критичног стања (слика 3.17), долази до омекшања у материјалу, односно до смањења величине површи течења, чиме се смањује еластична област.

На основу претходног, разликујемо следеће случајеве:

- a) Ојачање материјала (слика 3.20):  ${}^{t+\Delta t}\sigma_m^E > \frac{1}{2} {}^t p_0,$
- b) Омекшање материјала (слика 3.21):  ${}^{t+\Delta t}\sigma_m^E < \frac{1}{2} {}^t p_0,$
- c) Идеална пластичност:  ${}^{t+\Delta t}\sigma_m^E = \frac{1}{2} {}^t p_0, q = M \frac{p_0}{2}.$

У случају идеалне пластичности не долази нити до ојачања, нити до омекшања материјала, односно површ течења не мења величину, па важи следећа једнакост:

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m^E = \frac{1}{2} {}^t p_0 \tag{3.193}$$

Заменом једначине (3.193) у (3.183) добијамо вредност вертикалне полуосе елипсе:

$${}^{t+\Delta t}q^2 = \frac{1}{4} M^2 {}^t p_0^2 \tag{3.194}$$

односно

$${}^{t+\Delta t}q = \frac{1}{2} M {}^t p_0 \tag{3.195}$$

У случају идеалне пластичности такође важи услов:

$$de_V^p = 0 \tag{3.196}$$

што следи из услова да вектор прираштаја пластичне деформације у највишој тачки површи течења нема пројекцију на хоризонталну осу.

За израчунавање чланова еласто-пластичне конститутивне матрице (3.16) неопходно је израчунати изводе функције течења (3.183) која одговара и функцији пластичног потенцијала

(асоцијативни услов течења). Применом правила извода сложене функције, извод једначине површи течења модификованог Кем-Клеј материјалног модела по напону је:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} \quad (3.197)$$

Изводи функције течења по инваријантама напона су

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2q \quad (3.198)$$

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{1}{3} M^2 \left( \frac{2}{3} I_1 - p_o \right) = \frac{1}{3} M^2 (2\sigma_m - p_o) \quad (3.199)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_o} = -\frac{I_1 M^2}{3} = -\sigma_m M^2 \quad (3.200)$$

док извод инваријанте  $q$  по напону може бити израчунат као

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{\partial q}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} \quad (3.201)$$

$$\frac{\partial q}{\partial J_{2D}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_{2D}}} \quad (3.202)$$

Изводи прве инваријанте напона и друге инваријанте девијатора напона су дефинисани изразима (3.63) и (3.64).

Кораци имплицитне интеграције напона модификованог Кем-Клеј материјалног модела су сумирани у облику алгоритма приказаном у табели 3.10.



Табела 3.10 Алгоритам за имплицитну интеграцију напона модификованог Кем-Клеј материјалног модела

Познате величине:  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}$ ,  ${}^t \mathbf{e}$ ,  ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^t \mathbf{e}^P$

А. Пробно (еластично) решење:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E ({}^{t+\Delta t} \mathbf{e} - {}^t \mathbf{e}), \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање инваријанти напона:

$$I_1, J_{2D}$$

Функција течења и пластичног потенцијала (асоцијативни услов течења):

$$q = \sqrt{3J_{2D}}, \quad k_s = \lambda - \kappa, \quad e = (1 + {}^0 e) \exp(e_V) - 1$$

$$b_V = \frac{k_s}{3(1+e)}, \quad p_o = {}^t p_o \exp\left(\frac{\Delta e_m^P}{b_V}\right)$$

Функција течења:

$$f = g = q^2 - M^2 \sigma_m (p_o - \sigma_m)$$

Б. Провера услова течења:

IF ( $f < 0$ ) пробна решења су еластична (GOTO E)

IF ( $f \geq 0$ ) еласто-пластична решења (CONTINUE)

Провера области  ${}^{t+\Delta t} \sigma_m^E \leftrightarrow \frac{1}{2} {}^t p_o$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

Ц. Корекција  $d\lambda$  (локалне итерације):

$$d\mathbf{e}^P = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^P$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, \quad {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} = {}^t \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}$$

Израчунавање нових инваријанти:

$$I_1, J_{2D}$$

Функција течења:

$${}^{t+\Delta t} e = (1 + {}^0 e) \exp({}^{t+\Delta t} e_V) - 1, \quad {}^{t+\Delta t} b_V = \frac{k_s}{3(1 + {}^{t+\Delta t} e)}, \quad {}^{t+\Delta t} p_o = {}^t p_o \exp\left(\frac{\Delta e_m^P}{{}^{t+\Delta t} b_V}\right), \quad {}^{t+\Delta t} E = 3(1 - 2\nu) {}^{t+\Delta t} K$$

$$f = q^2 - M^2 \sigma_m (p_o - \sigma_m)$$

Д. IF ( $ABS(f) \geq TOL$ ) врати се назад на Ц са новим  $d\lambda$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P = {}^t \mathbf{e}^P + d\mathbf{e}^P$$

Е. Крај:  ${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^P$

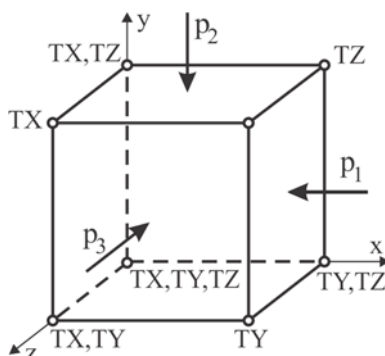
При интеграцији напона приказаној у оквиру ове тезе није неопходно раздвајање тензора напона и деформације на сферни и девијаторски део, као то је често случај при извођењу конститутивних релација теорије пластичности. Развијени алгоритми за интеграцију напона свих материјалних модела су прегледни, лаки за читање и једноставни за нумеричку имплементацију. Сви алгоритми за имплицитну интеграцију напона применом материјалних модела за механику тла су у приказаном облику имплементирани у програм ПАК.

### 3.13 Верификација материјалних модела

#### Симулација троосног теста

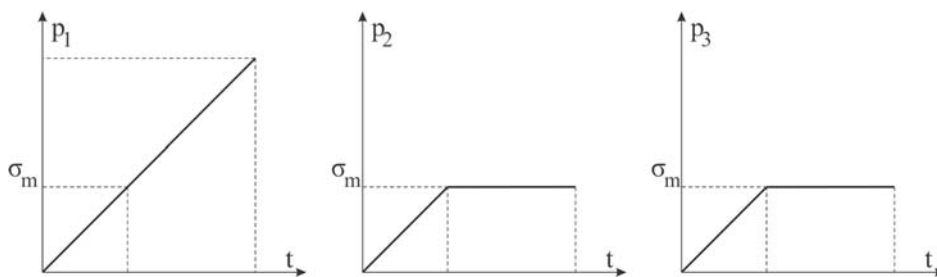
Нумеричка симулација троосног теста представља једноставан начин верификације имплементираних материјалних модела и провере да ли његова чврстоћа одговара усвојеном критеријуму за одговарајуће параметре модела. Поређење резултата добијених применом одговарајућег материјалног модела се врши са аналитичким решењима датог проблема или са решењима добијеним применом других софтвера.

За анализу троосног теста је коришћен модел који се састоји од једног коначног елемента јединичних димензија, са граничним условима и оптерећењима приказаним на слици 3.22. Услед постојања три равни симетрије, моделирана је једна осмина модела уз коришћење одговарајућих услова симетрије. Оптерећење је задато применом притисака на слободним површинама модела. По достизању одговарајућег сферног нопонског стања, вредности притисака у два правца су задржале константне вредности, уз повећање треће компоненте, све до слома. Како би се утврдило да ли модел даје аналитичке вредности напона при лому за различите нивое оптерећења поступак је поновљен за пет различитих нивоа сферног напона:  $\sigma_m = 0.05 \text{ MPa}$ ,  $1.10 \text{ MPa}$ ,  $5.20 \text{ MPa}$ ,  $10.1 \text{ MPa}$  и  $17.1 \text{ MPa}$ .



Слика 3.22 Модел за симулацију троосног теста

Оптерећење модела у три управна правца је вршено применом функција приказаних на слици 3.23. Материјалне константе сваког од анализираних материјалних модела су приказане у табели 6.35.

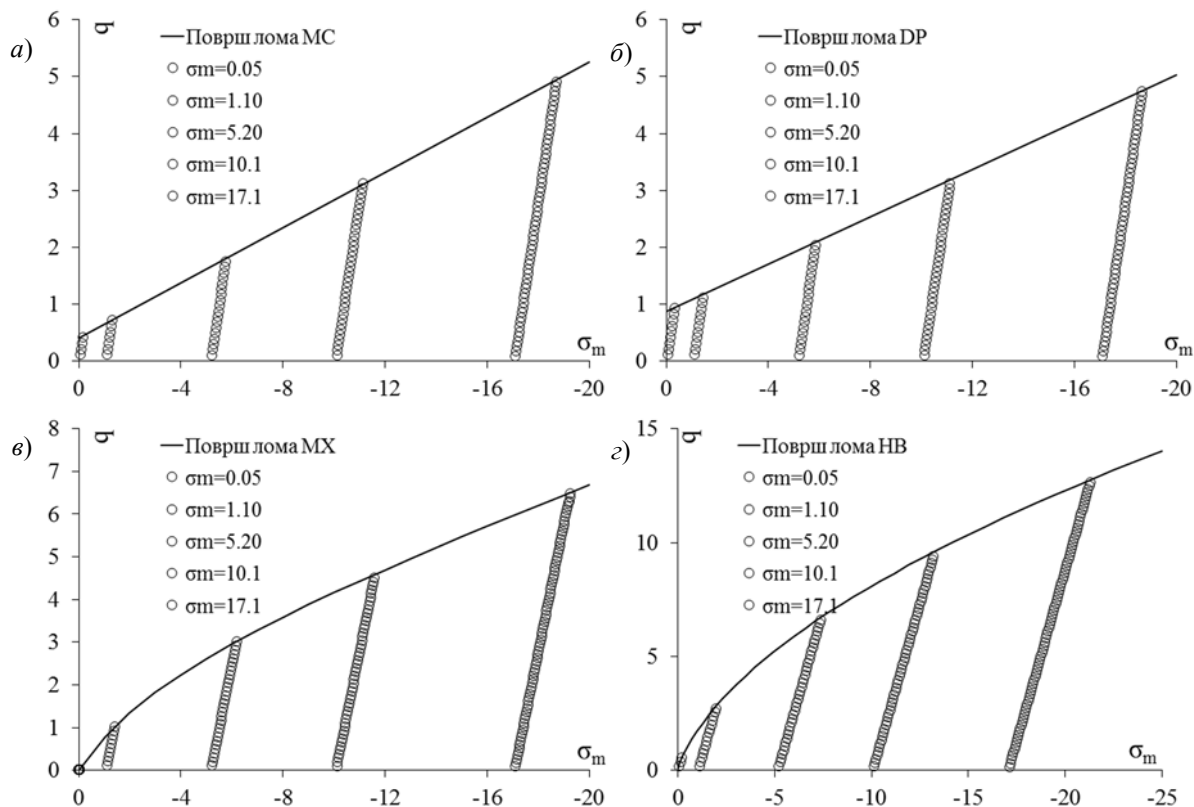


Слика 3.23 Функција оптерећења модела у троосном тесту

Резултати симулације троосног теста применом коришћених материјалних модела су приказани у облику дијаграма у  $\sigma_m - q$  простору и приказани су на слици 3.24. Анализом добијених резултата се види да развијени алгоритми коришћених материјалних модела дају теоријске вредности напона при лому.

Табела 3.11 Параметри материјала у симулацији троосног теста

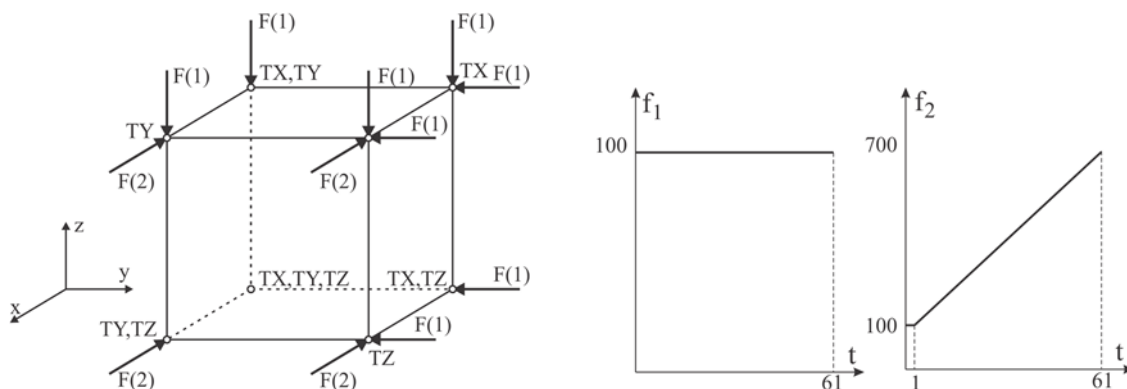
Назив параметра	Ознака	Вредност
<b>Мор-Кулонов материјални модел</b>		
Модул еластичности	E	100 kN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.25
Кохезија материјала	c	0.20 kN/m <sup>2</sup>
Угао унутрашњег трења	$\phi$	7.0°
<b>Дракер-Прагеров материјални модел</b>		
Модул еластичности	E	100 kN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.25
Материјална константа	k	0.5
Материјална константа	$\alpha$	0.04
<b>Максимовићев материјални модел</b>		
Модул еластичности	E	100 kN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.25
Материјална константа	$\phi_b$	6.2°
Материјална константа	$\Delta\phi$	15.8°
Материјална константа	$p_n$	4.8 kN/m <sup>2</sup>
<b>Генерализовани Хук-Браунов материјални модел</b>		
Модул еластичности	E	300 kN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.25
Једноосна притисна чврстоћа	$\sigma_{ci}$	23 kN/m <sup>2</sup>
Материјална константа	$m_b$	0.481
Материјална константа	s	$2.0 \times 10^{-4}$
Материјална константа	a	0.532



Слика 3.24 Површи течења и путања напонске тачке: а) Мор-Кулон, б) Дракер-Прагер, в) Максимовић, г) Хук-Браун [kPa]

### Симулација троосног теста применом Кем-Клеј модела

Верификација алгоритма за имплицитну интеграцију напона применом Кем-Клеј материјалног модела је такође извршена симулацијом троосног теста. Резултати нумеричке симулације применом развијеног алгоритма су поређени са резултатима добијеним применом методе водећег параметра доступним у литератури [26, 68]. За симулацију је коришћен модел јединичних димензија са једним коначним елементом. Геометрија модела, гранични услови и функције оптерећења су приказани на слици 3.25. Оптерећење модела је задато применом сила задатих у чворовима елемента у три координатна правца, као што је то приказано на слици.



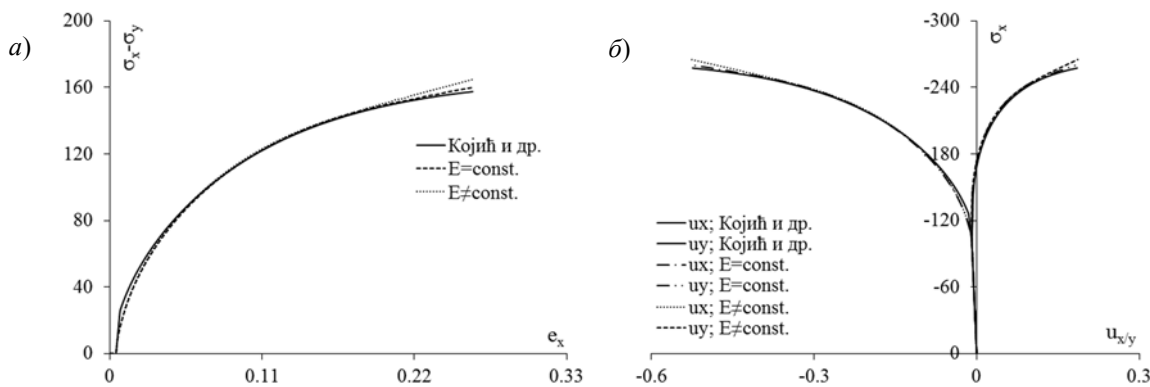
Слика 3.25 Модел за симулацију троосног теста и функције оптерећења

Параметри материјала модификованог Кем-Клеј модела коришћени у симулацији су приказани у табели 3.12. Проблем је решаван у 140 корака са прираштајем од 0.125 s, уз коришћење методе модификованог Њутна.

Табела 3.12 Параметри материјала модификованог Кем-Клеј материјалног модела

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	E	$9.0 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$
Пواسонов коефицијент	$\nu$	0.3
Напон максималног затезања	T	$11.4 \text{ kN/m}^2$
Нагиб ЛКС	M	1.0
Нагиб линије нормалне консолидације	$\lambda$	0.14
Нагиб линије бубрења	$\kappa$	0.026
Притисак преконсолидације	$p_0$	$114.0 \text{ kN/m}^2$
Почетни коефицијент порозности	$e_0$	1.08

Резултати анализе троосног теста су приказани у облику дијаграма напона  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  у функцији аксијалне деформације  $e_x$  као и аксијалног напона  $\sigma_x$  у функцији аксијалног и попречног померања  $u_x$  и  $u_y$  што је приказано на слици 3.26.



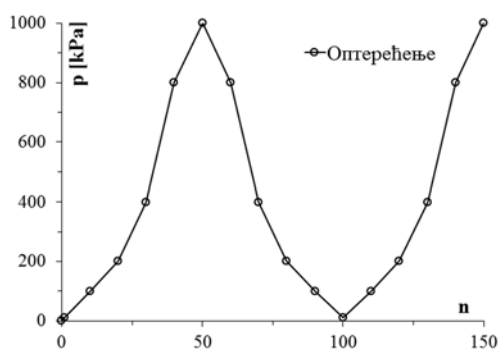
Слика 3.26 Резултати симулације троосног теста

Анализом добијених резултата уочавају се добра поклапања са резултатима добијеним применом методе водећег параметра [25], па развијени алгоритам за интеграцију напона применом овог модела може бити коришћен за симулацију механичког понашања материјала глине.

### Едометарски тест

Верификација алгоритма за интеграцију напона применом модификованог Кем-Клеј материјалног модела је такође спроведена нумеричком симулацијом едометарског теста. Параметри материјалног модела су одређени коришћењем резултата тестирања лапоровитих глина у оквиру испитивања материјала бране и опточног тунела хидроелектране Бочац. Нумеричка симулација је спроведена за један узорак (Vd-3 69, 50-70 m).

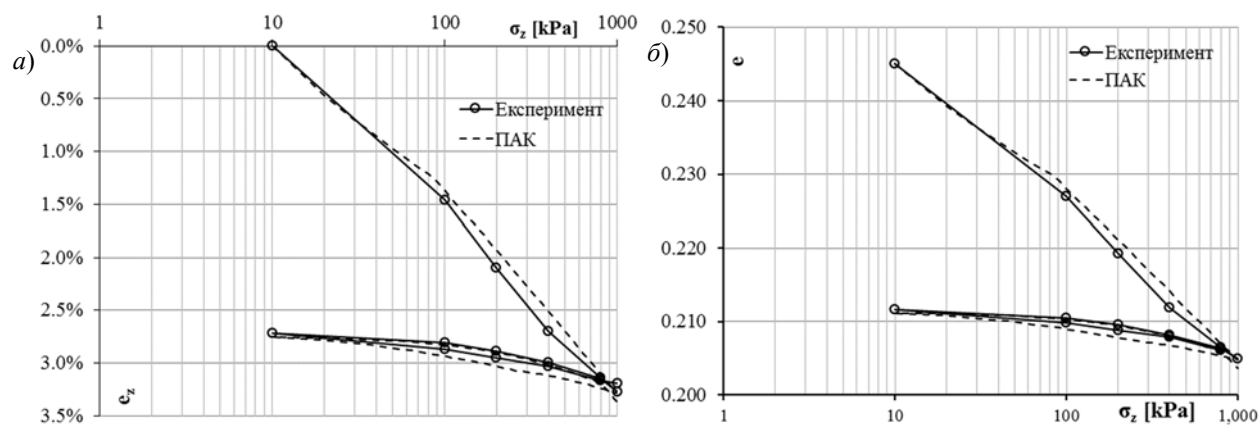
Креиран је модел који се састоји од једног коначног елемента јединичних димензија. Коришћени су гранични услови који владају у апарату за испитивање: спречена бочна померања модела и задат вертикални притисак према функцији приказаној на слици 3.27.



Слика 3.27 Функција оптерећења модела

Параметри материјалног модела су варирани у оквиру граничних вредности, док су резултати симулације упоређивани са резултатима испитивања, све док није добијен одзив нумеричког модела који одговара реалном понашању узорка.

Резултати испитивања у лабораторији и нумеричке симулације су представљени у облику дијаграма зависности аксијалне деформације у функцији аксијалног напона и поророзности у функцији аксијалног напона и приказани су на слици 3.28.



Слика 3.28 Резултати едометарског теста и резултати експеримента: а) аксијална деформација у функцији напона, б) порозност у функцији напона

Приказани резултати нумеричке симулације су добијени коришћењем естимираних вредности параметара модификованог Кем-Клеј материјалног модела датих у табели 3.13.

Табела 3.13 Естимирани параметри материјала на основу едометарског теста

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	$E$	550.0 kN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.3
Напон максималног затезања	$T$	50.0 kN/m <sup>2</sup>
Нагиб ЛКС	$M$	0.580
Нагиб линије нормалне консолидације	$\lambda$	0.0105
Нагиб линије бубрења	$\kappa$	0.004
Притисак преконсолидације	$p_0$	175.0 kN/m <sup>2</sup>
Почетни коефицијент порозности	$e_0$	0.245

Анализом резултата нумеричке симулације едометарског теста јасно је да развијени алгоритам даје веома добра поклапања са резултатима испитивања и може се користити за анализу механичког понашања материјала глине, односно за симулацију механичког понашања глинеог језгра насуте бране.

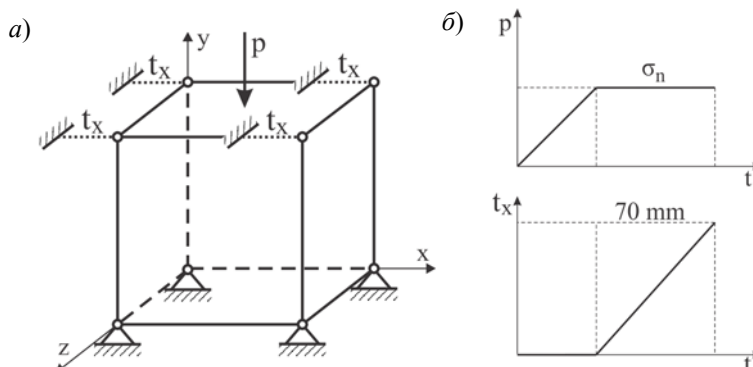
### Тест чистог смицања

Верификација развијених алгоритама за интеграцију напона је извршена и кроз нумеричку симулацију теста смицања у великој размери. Овај релативно једноставни тест се често користи за одређивање карактеристика материјала тла па је његова нумеричка симулација погодна за верификацију материјалних модела.

За естимацију су коришћени резултати испитивања материјала потпорног тела бране Првонек. Анализирана средина представља камени набачај за израду низводне косине бране L-1 (RPU-3/98), па су, у складу са тим, за нумеричку симулацију коришћени материјални модели за симулацију механичког понашања грануларних материјала (Мор-Кулонов и Максимовићев модел).

Нумерички модел се састоји од једног коначног елемента јединичних димензија, са граничним условима и оптерећењем приказаним на слици 3.29а (услови који владају у апарату за смицање).

У првој фази оптерећења је задат вертикални притисак до нивоа напона коришћеног у тесту. Након достизања задатог напона, вршено је смицање модела у хоризонталном правцу коришћењем задатих померања. Функције оптерећења су приказане на слици 3.29б.



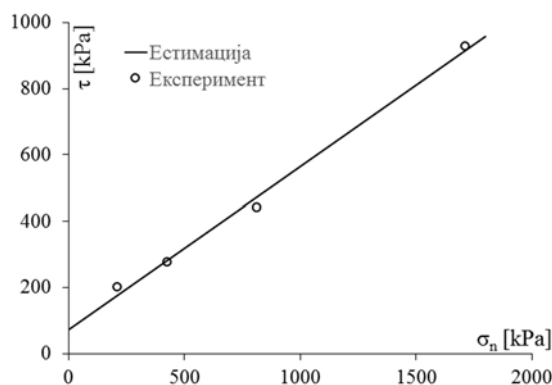
Слика 3.29 Модел за симулацију теста чистог смицања и функција оптерећења

Резултати испитивања анализираних узорака су приказани у табели 3.14 и представљају зависност смичућег напона при лому за одговарајуће вредности нормалних напона. Ове вредности нормалних напона су такође коришћене у нумеричкој симулацији теста смицања.

Табела 3.14 Измерене вредности напона при лому

Блок бр.	$\sigma_n$ [kPa]	$\tau$ [kPa]
1	209	200
2	426	276
3	813	440
4	1713	927

Коришћењем измерених вредности из табеле 3.14, извршена је естимација параметара модела. Резултат естимације применом Мор-Кулоновог материјалног модела је приказан на слици 3.30, док су параметри модела усвојени након естимације приказани у табели .

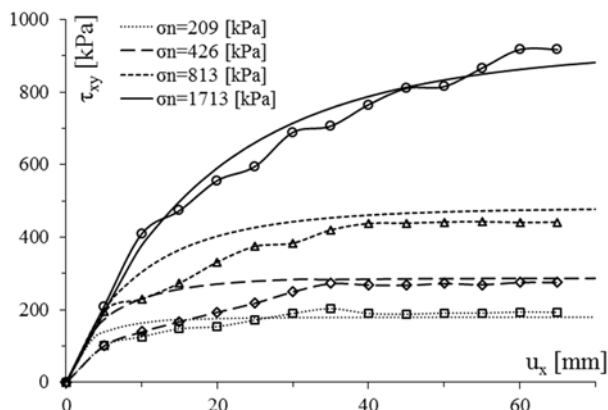


Слика 3.30 Естимација параметара материјала Мор-Кулоновог модела

Табела 3.15 Естимирани параметри материјала Мор-Кулоновог модела

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	E	100 MN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.3
Кохезија материјала	c	72.6 kN/m <sup>2</sup>
Угао унутрашњег трења	$\phi$	26.2°

Овако добијени параметри Мор-Кулоновог материјалног модела су коришћени у нумеричкој симулацији теста смицања и поређени са резултатима мерења, што је приказано на слици 3.31.

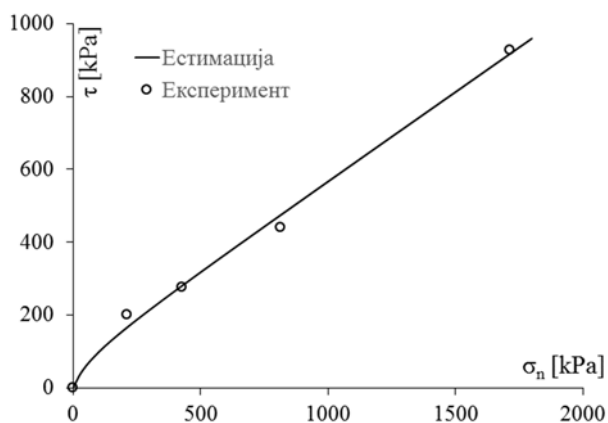


Слика 3.31 Резултати симулације теста чистог смицања Мор-Кулоновог модел

Резултати естимације параметара материјалног модела Максимовића коришћењем резултата теста смицања су приказани у табели 3.16, док је површ течења овог модела коришћењем естимираних параметара приказана на слици 3.32, заједно са резултатима испитивања.

Табела 3.16 Параметри материјала Максимовићевог материјалног модела

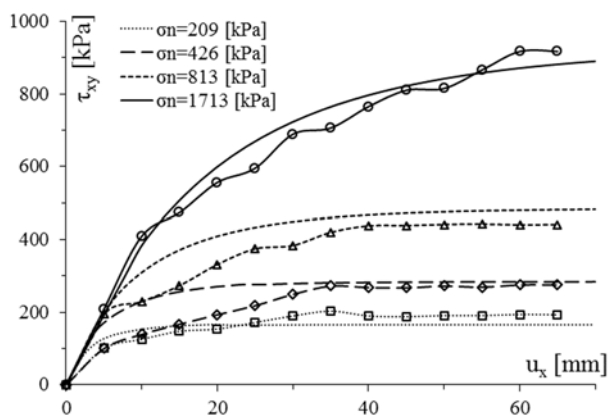
Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	$E$	100 MN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.3
Материјална константа	$\phi_b$	25.9°
Материјална константа	$\Delta\phi$	35.1°
Материјална константа	$p_n$	112.0 kN/m <sup>2</sup>



Слика 3.32 Естимација параметара материјала Максимовићевог модел

Естимирани параметри Максимовићевог материјалног модела су затим коришћени у нумеричкој симулацији теста смицања применом модела приказаног на слици 3.29. Резултати нумеричке симулације, заједно са резултатима испитивања, су приказани на слици 3.33.





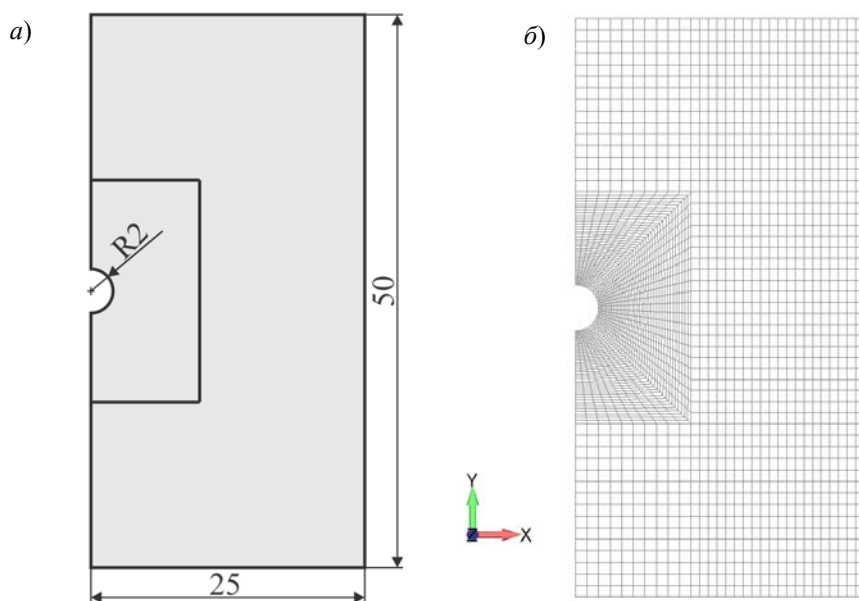
Слика 3.33 Резултати симулације теста чистог смицања применом Максимовићевог модела

Анализом добијених резултата добијени коришћењем Мор-Кулоновог и Максимовићевог материјалног модела може се уочити релативно добро поклапање са резултатима експерименталних испитивања узорака, за цео опсег нормалних напона коришћених при испитивању. Ово потврђује да се и на основу релативно једноставног теста смицања у великој размери могу одредити параметри материјалних модела за употребу у нумеричким симулацијама. Такође се види да развијени алгоритми материјалних модела добро описују механичко понашање анализираних узорака грануларних материјала.

Ради додатног повећања тачности нумеричких симулација, овако усвојене материјалне константе је могуће калибрисати. На тај начин се могу минимизовати одступања механичког понашања нумеричких модела од понашања реалних узорака материјала.

**Анализа кружног тунела оптерећеног хидростатичким притиском**

Верификација алгоритма генерализованог Хук-Брауновог модела имплементираног у програм ПАК је извршена поређењем нумеричких са аналитичким решењима анализе кружног тунела. Аналитичко решење овог проблема применом генерализованог Хук-Брауновог материјалног модела оптерећеног хидростатичким притиском је доступно у литератури [69].



Слика 3.34 Геометрија тунела и модел коначних елемената

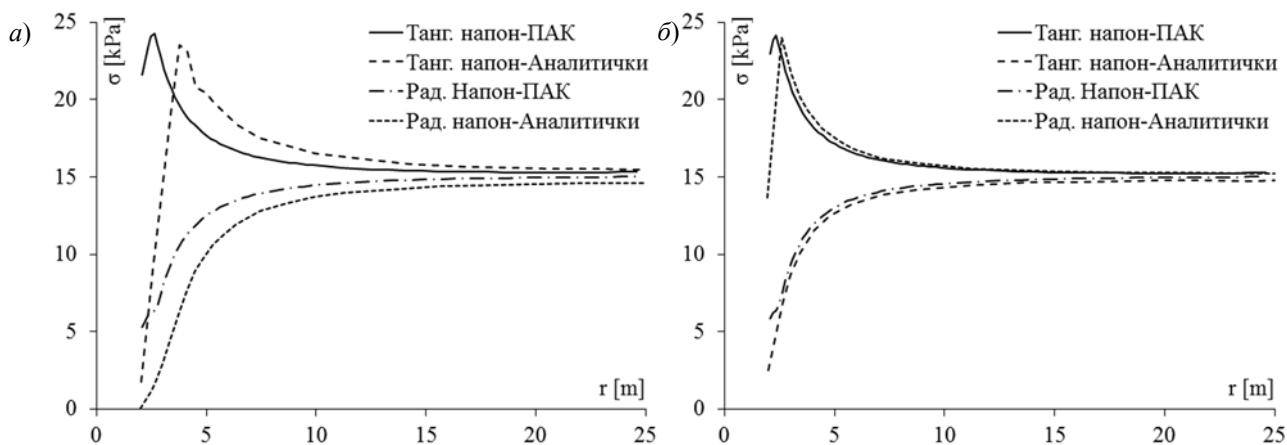
Разматрани модел цилиндричног тунела пречника 4 m, оптерећен је тако што му је саопштено униформно напонско стање интензитета  $\sigma_x = \sigma_x = \sigma_x = 15 \text{ MPa}$  и анализирана расподела напона у околини тунела, у радијалном и тангенцијалном правцу.

Нумерички модел је димензија 25x50 m и због постојања симетрије моделирана је једна половина модела уз коришћење одговарајућих граничних услова, као што је приказано на слици 3.34. Карактеристике материјала коришћене у анализи проблема су дате у табели 3.17.

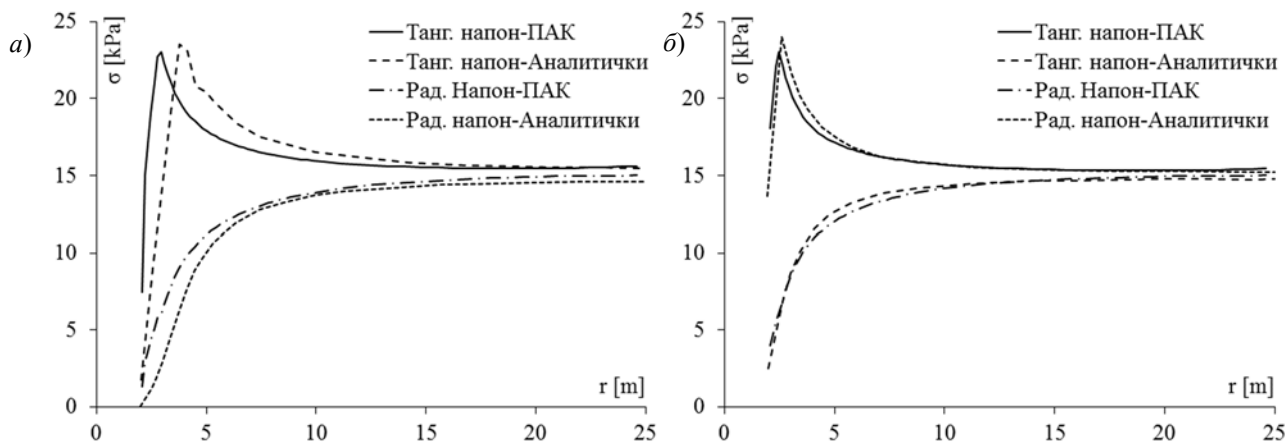
Табела 3.17 Материјалне константе модела тунела

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	E	$5.7 \times 10^3 \text{ MN/m}^2$
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.3
Једноосна притисна чврстоћа	$\sigma_{ci}$	$30.0 \text{ MN/m}^2$
Материјална константа	$m_b$	1.6767
Материјална константа	s	$3.8 \times 10^{-3}$
Материјална константа	a	0.5057

Разматрана су два случаја оптерећења: у првом случају на унутрашњој површини отвора нема притиска ( $p = 0 \text{ MPa}$ ), док је у другом случају задат притисак интензитета  $p = 2.5 \text{ MPa}$ . Расподела напона у радијалном и тангенцијалном правцу на хоризонталној оси тунела, за случај коришћења елемената без међучворова, је приказана на слици 3.35 (линеарни елементи), док је за случај коришћења елемената са међучворовима резултат анализе приказан на слици 3.36 (параболички елементи).



Слика 3.35 Радијални и тангенцијални напон а)  $p=0 \text{ MPa}$ , б)  $p=2.5 \text{ MPa}$



Слика 3.36 Радијални и тангенцијални напон – параболички елементи а)  $p=0 \text{ MPa}$ , б)  $p=2.5 \text{ MPa}$

Анализом нумеричких решења могу се уочити боља поклапања са аналитичким решењима за случај коришћења елемената са међучворовима. Ово би се могло постићи и применом линеарних елемената уз коришћење веће густине мреже у околини отвора.

Може се закључити да развијени алгоритам за интеграцију напона применом генерализованог Хук-Брауновог материјалног модела остварује добра поклапања са аналитичким решењима проблемима, па развијени алгоритам може бити коришћен у напонско-деформацијској анализи стенске масе.

## 4 ИНТЕГРАЦИЈА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА КРЕТАЊА

### 4.1 Увод

Све реалне конструкције изложене оптерећењима у облику сила или померања, у општем случају имају динамички одзив [70]. Додатне, инерционе силе, према другом Њутновом закону, су једнаке производу масе и убрзања. Уколико оптерећења на конструкцију делују веома споро, инерционе силе могу бити занемарене, па се може применити статичка анализа.

Како реалне конструкције имају бесконачан број степени слободе кретања, при нумеричкој анализи се тежи креирању модела са коначним бројем чворова и елемената како би се применом коначног броја степени слободе кретања што прецизније моделирало њено реално понашање. Ово је посебно важно у динамичкој анализи великих објеката какве су грађевинске конструкције.

Нумеричке апроксимације узрокују одређена одступања од реалног понашања конструкције. Како би се грешка услед коришћења ових апроксимација свела на најмању меру неопходно је спровести анализе применом различитих нумеричких модела, оптерећења и граничних услова. У оквиру овог поглавља ће бити сумиране неке од нумеричких метода за динамичку анализу. Такође ће бити приказани алгоритми за нумеричку интеграцију диференцијалних једначина кретања који су имплементирани у програм ПАК [25] као и примери за њихову верификацију.

Једначина равнотеже система под дејством динамичких оптерећења према [33] гласи:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (4.1)$$

где су  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{K}$  матрице маса, пригушења и крутости, респективно. Величина  $\mathbf{R}$  представља вектор спољашњег оптерећења, док су  $\ddot{\mathbf{U}}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  и  $\mathbf{U}$  вектори убрзања, брзина и померања чворова коначног елемената.

Динамичка једначина (4.1) је изведена коришћењем Даламберовог принципа за тренутак  $t$  [33] па може бити написана у другом облику као:

$$\mathbf{F}_I(t) + \mathbf{F}_D(t) + \mathbf{F}_E(t) = \mathbf{R}(t) \quad (4.2)$$

где је  $\mathbf{F}_I(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}$  вектор инерционих сила,  $\mathbf{F}_D(t) = \mathbf{D}\dot{\mathbf{U}}$  вектор сила пригушења,  $\mathbf{F}_E(t) = \mathbf{K}\mathbf{U}$  вектор еластичних сила. Све наведене силе су у општем случају функције времена.

Како једначина (4.1) представља систем линеарних диференцијалних једначина другог реда, оне могу бити решене применом стандардних поступака за решавање диференцијалних једначина са константним коефицијентима. За решавање практичних проблема динамике применом методе коначних елемената користи се неколико метода које се сврставају у две основне: метода директне интеграције и метода суперпозиције модова. Иако делују различито, ове две методе су у суштини уско повезане и њихов избор зависи само од ефикасности у конкретном случају.

При анализи конструкција применом методе коначних елемената користе се нумеричке методе директне интеграције система диференцијалних једначина које уместо континуалних решења

за било који временски тренутак дају решења у дискретним тренуцима времена  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ .

Применом методе директне интеграције се на основу познатог решења у тренутку  $t$  израчунавају решења у тренутку  $t + \Delta t$ . При томе се користе претпоставке за померања, брзине и убрзања унутар интервала  $\Delta t$ . Ове методе се у литератури најчешће називају методе „корак-по-корак“ (*eng. step-by-step*). За њих кажемо да представљају методе директне интеграције јер се интеграција система (4.1) врши без икаквих додатних трансформација уз коришћење одговарајућих почетних услова. Методе директне интеграције могу бити подељене на имплицитне и експлицитне методе.

Имплицитне методе интеграције подразумевају да су задовољене диференцијалне једначине кретања у тренутку  $t + \Delta t$ , тако да се на основу познатих решења у тренутку  $t$  одређују непозната решења у тренутку  $t + \Delta t$  са унапред дефинисаном тачношћу. Код имплицитних метода интеграције избор величине временског корака  $\Delta t$  утиче на тачност решења.

Експлицитне методе интеграције се заснивају на претпоставци да су диференцијалне једначине кретања задовољене у тренутку  $t$  како би се одредиле величине у тренутку  $t + \Delta t$  при чему се користе све величине и њихови изводи у тренутку  $t$ . Експлицитне методе захтевају знатно мањи корак интеграције  $\Delta t$  како би се осигурала стабилност решења и остварила задовољавајућа тачност. Под стабилношћу решења се подразумева да промена почетних услова неће довести до дивергенције решења у току решавања.

## 4.2 Методе директне интеграције

У оквиру метода имплицитне интеграције једначина кретања, у наставку ће бити изложена Њумаркова метода имплицитне интеграције, док ће у оквиру експлицитне интеграције бити изложена метода централних разлика као најчешће коришћене при интеграцији система диференцијалних једначина [71].

### 4.2.1 Имплицитна интеграција

#### 4.2.1.1 Њумаркова метода

##### *Интеграција диференцијалних једначина кретања на основу убрзања*

Применом Њумаркове методе директне интеграције система једначина кретања облика (4.1) је заснована на претпоставци да су генерализована убрзања у току временског корака  $\Delta t$  константна што према [33, 72] може бити представљено једначином:

$$\ddot{U}(\tau) = (1 - \delta)^t \ddot{U} + \delta^{t+\Delta t} \ddot{U} \quad (4.3)$$

где је  $\ddot{U}(\tau)$  убрзање у тренутку  $\tau$  које задовољава услов  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$  и у наставку ће бити означено са  $\ddot{U}$ . Параметар  $\delta$  се креће у границама  $0 \leq \delta \leq 1$ , док су  ${}^t\ddot{U}$  и  ${}^{t+\Delta t}\ddot{U}$  убрзања у тренуцима  $t$  и  $t + \Delta t$ .

Интеграцијом једначине (4.3) у интервалу  $\Delta t$  добијамо брзину у тренутку  $t + \Delta t$  у облику:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + [(1-\delta){}^t\ddot{\mathbf{U}} + \delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}]\Delta t \quad (4.4)$$

док се интеграцијом једначине (4.4) добија једначина за померање у тренутку  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \frac{1}{2}[(1-\delta){}^t\ddot{\mathbf{U}} + \delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}]\Delta t^2 \quad (4.5)$$

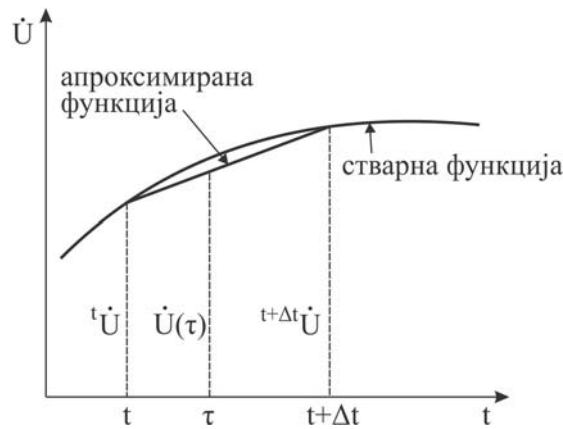
Како би се повећала стабилност и тачност нумеричких решења, уместо израза (4.5), према [72] чешће користи:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \alpha{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \right] \Delta t^2 \quad (4.6)$$

где је  $\alpha$  параметар који се уводи ради повећања тачности решења. Према [33, 73, 74]  $\alpha$  и  $\delta$  треба да испуне следеће услове:

$$\delta \geq \frac{1}{2}, \quad \alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2 \quad (4.7)$$

На слици 4.1 је приказана апроксимација брзине у интервалу  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$  у складу са претходним претпоставкама (константно убрзање у интервалу  $\Delta t$  сагласно једначини (4.3) и изражено на основу убрзања на почетку и на крају временског корака).



Слика 4.1 Апроксимација генералисане брзине у временском кораку

Уколико се у једначини (4.3) замени  $\delta = 0$ , добија се да је:

$$\ddot{\mathbf{U}} = {}^t\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.8)$$

док за  $\delta = 1$  једначина (4.3) постаје:

$$\ddot{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \quad (4.9)$$

За  $\delta = \frac{1}{2}$  иста једначина гласи:

$$\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2}({}^t\ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}) \quad (4.10)$$

Као што је раније речено, Њумаркова метода представља методу имплицитне интеграције једначина кретања, па једначина (4.1) написана у тренутку  $t + \Delta t$  гласи

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \quad (4.11)$$

Заменом (4.4) и (4.6) у равнотежну једначину (4.11) следи:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D} \left\{ {}^t \dot{\mathbf{U}} + \left[ (1-\delta) {}^t \ddot{\mathbf{U}} + \delta {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \right] \Delta t \right\} + \\ & + \mathbf{K} \left\{ {}^t \mathbf{U} + {}^t \dot{\mathbf{U}} \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{\mathbf{U}} + \alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} \right] \Delta t^2 \right\} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Груписањем чланова који садрже убрзање у тренутку  $t + \Delta t$  добија се једначина облика

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{M} + \delta \Delta t \mathbf{D} + \alpha \Delta t^2 \mathbf{K} \right] {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = \\ & = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{K} {}^t \mathbf{U} - \mathbf{D} \left[ {}^t \dot{\mathbf{U}} + (1-\delta) \Delta t {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] - \mathbf{K} \left[ \Delta t {}^t \dot{\mathbf{U}} + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \Delta t^2 {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

што може бити краће написано као:

$$\hat{\mathbf{M}}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} \quad (4.14)$$

Поређењем једначина (4.13) и (4.14) следи да члан у загради са леве стране знака једнакости представља ефективну матрицу маса

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \delta \Delta t \mathbf{D} + \alpha \Delta t^2 \mathbf{K} \quad (4.15)$$

или увођењем одговарајућих коефицијената:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + a_{10} \mathbf{D} + \frac{1}{a_0} \mathbf{K} \quad (4.16)$$

док десна страна једначине представља ефективни вектор сила:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{K} {}^t \mathbf{U} - \mathbf{D} \left[ {}^t \dot{\mathbf{U}} + (1-\delta) \Delta t {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] - \mathbf{K} \left[ \Delta t {}^t \dot{\mathbf{U}} + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \Delta t^2 {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (4.17)$$

или коришћењем одговарајућих коефицијената:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{K} {}^t \mathbf{U} - \mathbf{D} \left[ {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_9 {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] - \mathbf{K} \left[ \Delta t {}^t \dot{\mathbf{U}} + \frac{a_3}{a_0} {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] \quad (4.18)$$

где су  $a_0, a_3, a_9, a_{10}$  израчунате као:

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1; \quad a_9 = \Delta t (1 - \delta); \quad a_{10} = \delta \Delta t \quad (4.19)$$

### ***Интеграција диференцијалних једначина кретања на основу померања***

Уколико се из једначине (4.6) изрази убрзање у тренутку  $t + \Delta t$ , добија се једначина облика:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} - {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \right] \quad (4.20)$$

Заменом (4.20) у (4.4) добија се израз за брзину у тренутку  $t + \Delta t$  у функцији убрзања:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left\{ (1-\delta) {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \delta \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U} - {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \right] \right\} \Delta t \quad (4.21)$$

Груписањем чланова претходне једначине добија се:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{U}) \quad (4.22)$$

Заменом (4.20) и (4.22) у једначини кретања коначног елемента (4.11) и груписањем чланова који садрже померање у тренутку  $t + \Delta t$  на левој страни, добија се једначина:

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{M} \frac{1}{\alpha \Delta t^2} + \mathbf{D} \frac{\delta}{\alpha \Delta t} + \mathbf{K} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \right] + \mathbf{D} \left[ \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t\mathbf{U} - \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} - \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

што може бити краће написано као:

$$\left( \mathbf{M} \frac{1}{\alpha \Delta t^2} + \mathbf{D} \frac{\delta}{\alpha \Delta t} + \mathbf{K} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} \quad (4.24)$$

односно, применом одговарајућих коефицијената:

$$(a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{D} + \mathbf{K}) {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} \quad (4.25)$$

где је коефицијент  $a_0$  дефинисан једначином (4.19), док на основу (4.24) и (4.25) следи да је:

$$a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \quad (4.26)$$

Десна страна једнакости (4.25) представља ефективни вектор сила облика:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = & {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \left[ {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t^2 \right] + \\ & + \mathbf{D} \left[ \frac{\delta}{\alpha \Delta t} {}^t\mathbf{U} - \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) {}^t\dot{\mathbf{U}} - \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right) {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

што може бити краће написано у облику:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} [a_0 {}^t\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}] + \mathbf{D} [a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}] \quad (4.28)$$

Поређењем једначина (4.27) и (4.28) следи да су одговарајући коефицијенти израчунати као:



$$a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, a_5 = \left( \frac{\delta}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t \quad (4.29)$$

док је коефицијент  $a_1$  дефинисан једначином (4.19).

Члан у загради у једначини (4.25) представља ефективну матрицу крутости па ова једначина може бити краће написана у облику:

$$\hat{\mathbf{K}}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} \quad (4.30)$$

где је ефективна матрица:

$$\hat{\mathbf{K}} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D} + \mathbf{K} \quad (4.31)$$

Треба нагласити да су у случају линеарних проблема матрице система константне па је могуће је извршити факторизацију матрице  $\hat{\mathbf{K}}$  на почетку интеграције једначина кретања система, а затим за сваки временски корак израчунавати нов вектор десне стране  ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}$  па решења израчунавати методом замене уназад.

Њумаркова метода, као општа имплицитна метода, успешно се користи како за решавање линеарних, тако и за решавање нелинеарних проблема кретања система. У нелинеарној анализи, решавање система једначина (4.30) се врши итеративно. У складу са тим, померање  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)}$  које одговара  $i$ -тој итерацији може бити представљено коришћењем инкремента померања  $\Delta \mathbf{U}$  и има облик:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (4.32)$$

где је  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)}$  познато решење из претходне итерације.

Заменом једначине (4.32) у равнотежној једначини (4.30) добија се следећа једначина:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} \left( {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \right) = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)} \quad (4.33)$$

Пребацавањем непознатог инкремента померања  $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$  на леву страну једнакости, добија се:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}^{(i-1)} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} \quad (4.34)$$

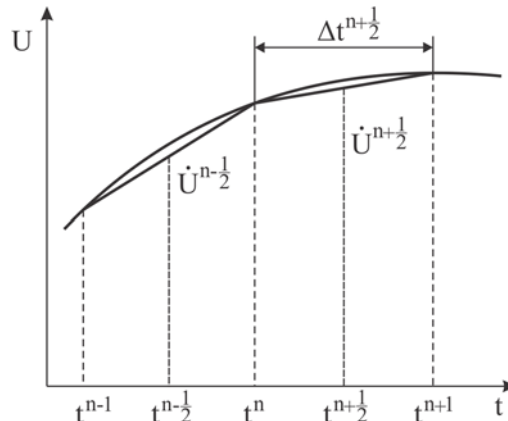
где су ефективна матрица крутости  ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}^{(i-1)}$  и ефективни вектор сила  ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)}$  решења из претходне итерације. Ове итерације се понављају све док равнотежна једначина (4.30) не буде задовољена у оквиру унапред задате толеранције.

## 4.2.2 Експлицитна интеграција

### 4.2.2.1 Метода централних разлика

Метода централних разлика представља најчешће коришћену методу експлицитне интеграције једначина кретања у рачунској механици и физици. Метода је развијена применом једначина централних разлика за брзину и убрзање према [75]. Овде ће бити разматрана њена примена код материјала на чије механичко понашање не утиче брзина деформације.

Геометријска и материјална нелинеарност су укључене у наредно извођење конститутивних релација, а разматра се и промена временског корака у току интеграције.



Слика 4.2 Метода централних разлика са променљивим временским кораком

При извођењу једначина експлицитне интеграције једначина кретања применом методе централних разлика, усвојено је да се време симулације  $t$  креће у границама  $0 \leq t \leq t_E$  и подељено је на временске кораке  $\Delta t^n$ . Кораци се крећу у границама  $0 \leq n \leq n_{TS}$ , где је  $n_{TS}$  број временских корака, док је  $t_E$  време завршетка симулације. Променљиве су у сваком временском кораку означене индексом, па тако на пример време  $t^n$  је време у кораку  $n$ .

Шема поступка експлицитне анализе применом методе централних разлика је приказана на слици 4.3.



Слика 4.3 Шема израчунавања у методи централних разлика

Временски кораци у методи централних разлика се према [59] дефинишу у полукораку и у складу са шематским приказом на слици 4.3 се израчунавају према:

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n+1} - t^n \tag{4.35}$$

$$\Delta t^{n-\frac{1}{2}} = t^n - t^{n-1} \quad (4.36)$$

$$t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t^n + t^{n+1}) \quad (4.37)$$

$$t^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t^{n-1} + t^n) \quad (4.38)$$

па је временски инкремент у кораку  $n$  коришћењем једначина (4.37) и (4.38):

$$\Delta t^n = t^{n+\frac{1}{2}} - t^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t^{n+1} + t^n) - \frac{1}{2}(t^n + t^{n-1}) = \frac{1}{2}(t^{n+1} - t^{n-1}) \quad (4.39)$$

На основу једначине (4.35) следи да је:

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

док из (4.36) следи:

$$t^{n-1} = t^n - \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \quad (4.41)$$

Применом једначина (4.40), (4.41) и (4.39), следи израз за прираштај времена у кораку  $n$  :

$$\Delta t^n = \frac{1}{2} \left( t^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - t^n + \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.42)$$

Брзина у полукораку  $n + 1/2$  применом методе централних разлика се дефинише применом следеће једначине :

$$\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} \equiv \dot{\mathbf{U}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{t^{n+1} - t^n} = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) \quad (4.43)$$

Прегруписавањем чланова једначине (4.43) се може написан израз за померање у кораку  $n + 1$  :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \dot{\mathbf{U}}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.44)$$

На сличан начин може бити представљена и једначина за израчунавање убрзања на основу брзина у полукораку:

$$\mathbf{A}^n \equiv \ddot{\mathbf{U}}^n = \frac{\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{V}^{n-\frac{1}{2}}}{t^{n+\frac{1}{2}} - t^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Delta t^n} \left( \mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{V}^{n-\frac{1}{2}} \right) \quad (4.45)$$

Коришћењем једначине (4.45) може бити приказан израз за брзине у полукораку:

$$\mathbf{V}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{V}^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{\mathbf{U}}^n \Delta t^n \quad (4.46)$$

Заменом израза за брзину (4.43) у израз за убрзање (4.45) добија се убрзање у функцији померања:

$$\mathbf{A}^n \equiv \ddot{\mathbf{U}}^n = \frac{1}{\Delta t^n} \left( \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) - \frac{1}{\Delta t^{n-\frac{1}{2}}} (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}) \right) \quad (4.47)$$

чијим се сређивањем долази до израза:

$$\mathbf{A}^n \equiv \ddot{\mathbf{U}}^n = \frac{\Delta t^{n-\frac{1}{2}} (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) - \Delta t^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1})}{\Delta t^n \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n-\frac{1}{2}}} \quad (4.48)$$

За случај непроменљивог временског корака током симулације, израз (4.48) има облик:

$$\mathbf{A}^n \equiv \ddot{\mathbf{U}}^n = \frac{\Delta t^n (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) - \Delta t^n (\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1})}{(\Delta t^n)^3} \quad (4.49)$$

односно

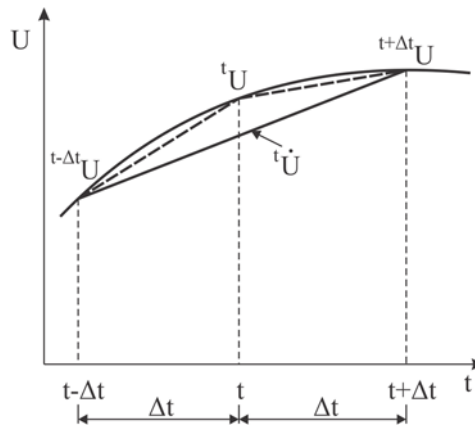
$$\mathbf{A}^n \equiv \ddot{\mathbf{U}}^n = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - 2\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{(\Delta t^n)^2} \quad (4.50)$$

Коришћењем времена  $t$  уместо корака  $n$ , једначина (4.50) може бити написана у облику:

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}) \quad (4.51)$$

као што је то приказано на слици 4.4, док брзина може бити написана у облику:

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}) \quad (4.52)$$



Слика 4.4 Метода централних разлика са константним временским кораком

Заменом убрзања (4.51) и брзине (4.52) у равнотежној динамичкој једначини (4.1) добија се:

$$\mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}) + \mathbf{D} \frac{1}{2\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}) + \mathbf{K} {}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R} \quad (4.53)$$

Груписањем чланова уз померања у тренуцима  $t - \Delta t$ ,  $t$  и  $t + \Delta t$  следи једначина:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{D}\right)^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{R} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}\right) {}^t \mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{D}\right) {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} \quad (4.54)$$

што може бити краће написано као:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{D}\right)^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \hat{\mathbf{R}} \quad (4.55)$$

или још краће:

$$\hat{\mathbf{M}}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \hat{\mathbf{R}} \quad (4.56)$$

Десна страна једнакости (4.55) односно (4.56) је израчуната према једначини:

$${}^t \hat{\mathbf{R}} = {}^t \mathbf{R} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M}\right) {}^t \mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{D}\right) {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} \quad (4.57)$$

док је еквивалентна матрица маса:

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{D} \quad (4.58)$$

Почетни услови се дефинишу за почетак симулације, односно за тренутак  $t = 0$  применом (4.51) и (4.52) и гласе:

$${}^0 \ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{\Delta t} \mathbf{U} - 2{}^0 \mathbf{U} + {}^{-\Delta t} \mathbf{U}) \quad (4.59)$$

$${}^0 \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} ({}^{\Delta t} \mathbf{U} - {}^{-\Delta t} \mathbf{U}) \quad (4.60)$$

Из последње једначине може бити написано:

$${}^{-\Delta t} \mathbf{U} = {}^{\Delta t} \mathbf{U} - 2\Delta t {}^0 \dot{\mathbf{U}} \quad (4.61)$$

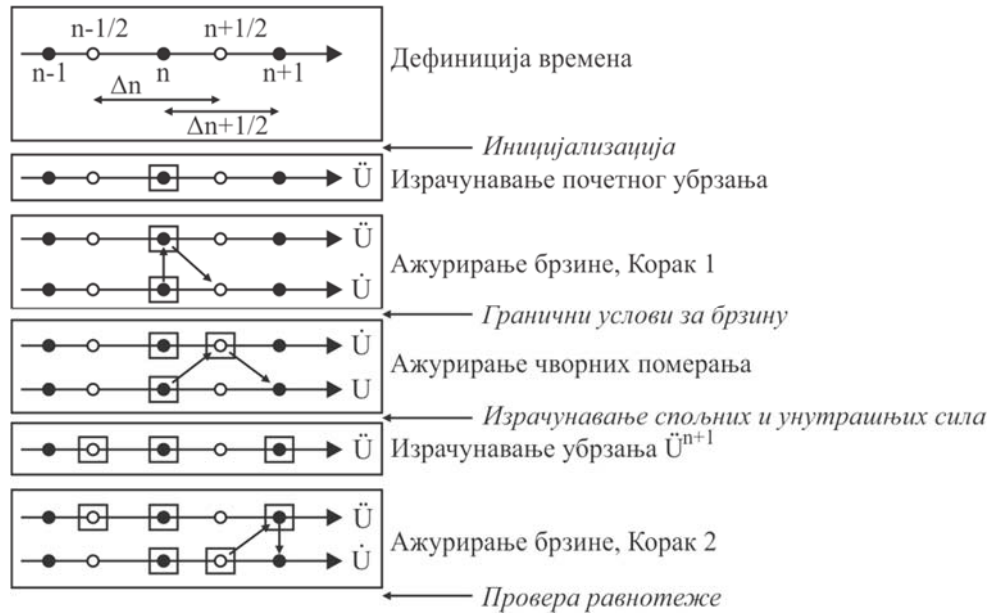
Заменом израза (4.61) у (4.59) добија се израз за убрзање на почетку симулације у облику:

$${}^0 \ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{\Delta t} \mathbf{U} - 2{}^0 \mathbf{U} + {}^{\Delta t} \mathbf{U} - 2\Delta t {}^0 \dot{\mathbf{U}}) \quad (4.62)$$

Одавде следи да је:

$${}^{\Delta t} \mathbf{U} = {}^0 \mathbf{U} + \Delta t {}^0 \dot{\mathbf{U}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0 \ddot{\mathbf{U}} \quad (4.63)$$

Алгоритам за интеграцију конститутивних релација применом методе централних разлика према [76] је шематски приказан на слици 4.5.



Слика 4.5 Алгоритам методе централних разлика

### 4.3 Израчунавање матрица крутости, пригушења и маса

При интеграцији конститутивних релација материјалних модела и решавању једначина равнотеже коначног елемента, било да се ради о имплицитној или експлицитној анализи, потребно је формирати матрице крутости, пригушења и маса. Матрица крутости коначног елемента [33] се формира на основу следећег израза:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (4.64)$$

где је матрица  $\mathbf{C}$  конститутивна матрица коначног елемента [72], док  $\mathbf{B}$  представља матрицу извода интерполационих функција  $\mathbf{H}$  (4.65) и дефинише везу чворних померања и деформација коначног елемента.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & \dots & h_N & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & \dots & 0 & h_N & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Матрица маса коначног елемента  $\mathbf{M}$  се формира у складу са једначином:

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.66)$$

где је  $\rho$  густина материјала, док  $V$  представља запремину коначног елемента.

Матрица пригушења коначног елемента се формира према:

$$\mathbf{D} = \int_V b \mathbf{H}^T \mathbf{H} dV \quad (4.67)$$

где  $b$  представља коефицијент пригушења.

Међутим, овако дефинисане коефицијенте пригушења материјала у пракси није једноставно одредити па је у механици тла чешћа употреба такозваног пропорционалног или Рејлијевог пригушења (*енг. Rayleigh damping*) [33] које се одређује коришћењем матрице крутости  $\mathbf{K}$  и матрице маса  $\mathbf{M}$  у складу са следећом једначином:

$$\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (4.68)$$

Величине  $\alpha$  и  $\beta$  у једначини (4.68) представљају коефицијенте Рејлијевог пригушења који се одређују експериментално, како је то детаљно приказано у [33].

Кораци имплицитне и експлицитне интеграције једначина кретања прилагођени нумеричкој имплементацији су систематизовани у облику алгорита приказаном у табели 4.1. Алгоритам је у приказаном облику имплементиран у програмски пакет ПАК. На тај начин је омогућено спровођење динамичке анализе проблема механике тла методом директне интеграције, односно могуће је анализирати одзив конструкција под дејством динамичких оптерећења у временском домену. Ово је веома битно у анализи стабилности насутих брана, јер омогућује анализу дејства земљотреса на брану коришћењем забележених убрзања у функцији времена.

Табела 4.1 Алгоритам за имплицитну и експлицитну интеграцију диференцијалних једначина кретања

**ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОЧЕТНИХ ВРЕДНОСТИ**

1. Формирање линеарне матрице крутости, матрице маса и матрице пригушења.

Израчунавање константи:

Њумаркова метода

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} & a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t} & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1 \\ a_4 &= \frac{\delta}{\alpha} - 1 & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) & a_6 &= a_0 & a_7 &= -a_2 \\ a_8 &= -a_3 & a_9 &= \Delta t (1 - \delta) & a_{10} &= \delta \Delta t \end{aligned}$$

$$\delta \geq \frac{1}{2} \quad \alpha \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \delta \right)^2$$

Метода централних разлика

$$a_0 = \frac{1}{\Delta t^2} \quad a_1 = \frac{1}{2\Delta t} \quad a_2 = 2a_0 \quad a_3 = \frac{1}{a_2}$$

2. Иницијализација  ${}^0\mathbf{U}$ ,  ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ ,  ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ :

За методу централних разлика израчунавање  ${}^{\Delta t}\mathbf{U}$  из почетних услова:

$${}^{\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} + \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^0\ddot{\mathbf{U}}$$

3. Формирање ефективне матрице крутости и маса:

за имплицитну временску интеграцију:

$$\hat{\mathbf{K}} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D} + \mathbf{K} \quad \text{- применом померања}$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + a_{10} \mathbf{D} + \frac{1}{a_0} \mathbf{K} \quad \text{- применом убрзања}$$

или за случај коришћења Рејлијевог пригушења:

$$\hat{\mathbf{K}} = (a_0 + a_1 \alpha) \mathbf{M} + (a_1 \beta + 1) \mathbf{K} \quad \text{- применом померања}$$

$$\hat{\mathbf{M}} = (1 + a_{10} \alpha) \mathbf{M} + \left( a_{10} \beta + \frac{1}{a_0} \right) \mathbf{K} \quad \text{- применом убрзања}$$

за експлицитну временску интеграцију:

$$\hat{\mathbf{M}} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D}$$

4. У линеарној динамичкој анализи применом имплицитне интеграције триангулизовати  $\hat{\mathbf{K}}$

**ЗА СВАКИ ВРЕМЕНСКИ КОРАК****А. ЛИНЕАРНА АНАЛИЗА**

(i) Формирање ефективног вектора оптерећења

За имплицитну временску интеграцију:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} \left[ a_0 {}^t\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] + \mathbf{D} \left[ a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \quad \text{- применом померања}$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \mathbf{K} {}^t\mathbf{U} - \mathbf{D} \left[ {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_9 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] - \mathbf{K} \left[ \Delta t {}^t\dot{\mathbf{U}} + \frac{a_3}{a_0} {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \quad \text{- применом убрзања}$$

или у случају коришћења Рејлијевог пригушења:

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M} \left[ (a_0 + \alpha a_1) {}^t\mathbf{U} + (a_2 + \alpha a_4) {}^t\dot{\mathbf{U}} + (a_3 + \alpha a_5) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] + \beta \mathbf{K} \left[ a_1 {}^t\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right]$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \mathbf{K} \left[ {}^t\mathbf{U} + (\Delta t + \beta) {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left( \frac{a_3}{a_0} + \beta a_9 \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] - \alpha \mathbf{M} \left[ {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_9 {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right]$$

За експлицитну временску интеграцију:

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} ({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}) + \hat{\mathbf{M}} {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{F}$$

$${}^t\hat{\mathbf{R}} = {}^t\mathbf{R} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} ({}^t\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U}) + \hat{\mathbf{M}} {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} - {}^t\mathbf{F}$$



(ii) Израчунавање инкремента померања

За имплицитну временску интеграцију:

$$\hat{\mathbf{K}}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}, \quad \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{U}$$

или

$$\hat{\mathbf{M}}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}$$

За експлицитну временску интеграцију:

$$\hat{\mathbf{M}}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \hat{\mathbf{R}}$$

(iii) Goto (C)

## Б. НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА

(i) За имплицитну временску интеграцију ако је потребно формирати нову матрицу крутости, извршити њену триангулацију

$${}^t \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$$

(ii) Формирање ефективног вектора оптерећења

За имплицитну временску интеграцију (нулта итерација):

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \mathbf{M} [a_2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t \ddot{\mathbf{U}}] + \mathbf{D} [a_4 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t \ddot{\mathbf{U}}] - {}^t \mathbf{F}$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{D} [{}^t \dot{\mathbf{U}} + a_9 {}^t \ddot{\mathbf{U}}] - \mathbf{K} \left[ \Delta t {}^t \dot{\mathbf{U}} + \frac{a_3}{a_0} {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] - {}^t \mathbf{F}$$

или у случају коришћења Рејлијевог пригушења:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \mathbf{M} [(a_2 + \alpha a_4) {}^t \dot{\mathbf{U}} + (a_3 + \alpha a_5) {}^t \ddot{\mathbf{U}}] + \beta \mathbf{K} [a_4 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t \ddot{\mathbf{U}}] - {}^t \mathbf{F}$$

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \alpha \mathbf{M} [{}^t \dot{\mathbf{U}} + a_9 {}^t \ddot{\mathbf{U}}] - \mathbf{K} \left[ (\Delta t + \beta) {}^t \dot{\mathbf{U}} + \left( \frac{a_3}{a_0} + \beta a_9 \right) {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] - {}^t \mathbf{F}$$

За експлицитну временску интеграцију:

$${}^t \hat{\mathbf{R}} = {}^t \mathbf{R} + a_2 \mathbf{M} ({}^t \mathbf{U} - {}^{t-\Delta t} \mathbf{U}) + \hat{\mathbf{M}} {}^{t-\Delta t} \mathbf{U} - {}^t \mathbf{F}$$

(iii) Израчунавање инкремента померања:

За имплицитну временску интеграцију:

$$\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T \Delta \mathbf{U} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}$$

За експлицитну временску интеграцију:

$$\hat{\mathbf{M}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \hat{\mathbf{R}}$$

(iv) Уколико је неопходно решавати итеративно једначине равнотеже (имплицитна временска интеграција)

$$\Delta \mathbf{U}^{(0)} = \Delta \mathbf{U}, \quad i = 0$$

(a)  $i = i + 1$

(б) Израчунавање  $i$ -те апроксимације за убрзање, брзину и померање:

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)} = -a_0 \Delta \mathbf{U}^{(i-1)} + a_2 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t \ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(i-1)} = -a_1 \Delta \mathbf{U}^{(i-1)} + a_4 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t \ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^{(i-1)}$$

или

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U} = {}^t \mathbf{U} + {}^t \dot{\mathbf{U}} \Delta t + \frac{a_3}{a_0} {}^t \ddot{\mathbf{U}} + \frac{1}{a_0} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}} = {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_9 {}^t \ddot{\mathbf{U}} + a_{10} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}$$

(ц) Израчунавање ефективне силе неравнотеже:

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}^{(i-1)} + \mathbf{D} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{U}}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}$$

или у случају коришћења Рејлијевог пригушења

$${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} + \mathbf{M} \left[ -(a_0 + \alpha a_1) \Delta \mathbf{U}^{(i-1)} + (a_2 + \alpha a_4) {}^t \dot{\mathbf{U}} + (a_3 + \alpha a_5) {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] + \beta \mathbf{K} \left( -a_1 \Delta \mathbf{U}^{(i-1)} + a_4 {}^t \dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right) - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}$$

(д) Израчунавање  $i$ -тог инкремента померања

$$\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}$$

(е) Провера конвергенције:

- уколико постоји конвергенција иди на Ц

- уколико не постоји конвергенција и  $i < i_{max}$  иди на (а)

У супротном, рестартовати прорачун коришћењем нове матрице крутости или мањи временски корак

### Ц. ИЗРАЧУНАВАЊЕ НОВОГ УБРЗАЊА, БРЗИНЕ И ПОМЕРАЊА

- Њумаркова метода

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = -a_0\Delta\mathbf{U} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = -a_1\Delta\mathbf{U} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}$$

или

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + a_9 {}^t\ddot{\mathbf{U}} + a_{10} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \frac{a_3}{a_0} {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \frac{1}{a_0} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}$$

- Метода централних разлика

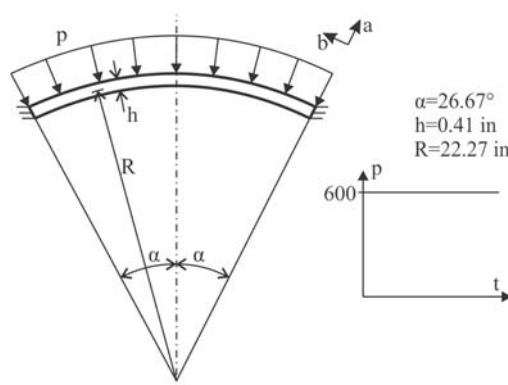
$${}^t\dot{\mathbf{U}} = a_1 \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right)$$

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = a_0 \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right)$$

## 4.4 Верификација алгоритма за интеграцију диференцијалних једначина кретања

### Анализа динамичког одзива модела сферне капе оптерећене притиском

Верификација алгоритма за интеграцију диференцијалних једначина кретања приказаног у табели 4.1 и имплементираног у програм ПАК је извршена кроз анализу динамичког одзива сферне капе оптерећене униформним притиском. Добијена решења су поређена са аналитичким решењима доступним у литератури [77]. Геометрија модела и гранични услови су приказани на слици 4.6, док су карактеристике материјала дате у табели 4.2.



Слика 4.6 Еласто-пластична динамичка анализа сферне капе

Услед симетрије проблема, моделирана је једна половина модела уз коришћење одговарајућих граничних услова. Коришћени су четворострани дводимензионални коначни елементи са међучворовима. Анализа је вршена у 50 корака са прираштајем времена  $10^{-5}$  s. Проблем је анализиран уз претпоставку великих померања и малих деформација коришћеерм Фон Мизесовог материјалног модела са изотропним ојачањем. За решавање је коришћена Њумаркова метода интеграције диференцијалних једначина кретања.

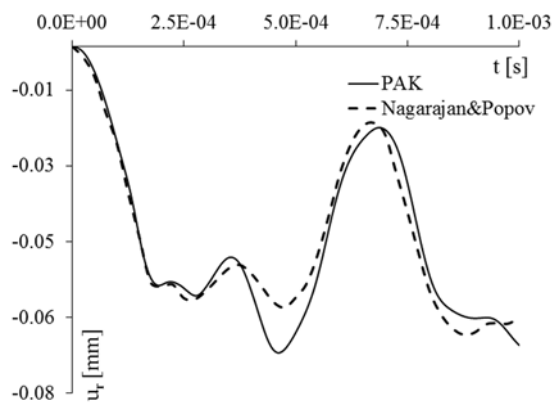
Табела 4.2 Материјалне константе за модел сферне капе

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	$E$	$1.05 \times 10^7$ kN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.3
Напон течења	$\sigma_y$	$2.4 \times 10^4$ kN/m <sup>2</sup>
Тангентни модул	$E_T$	$2.1 \times 10^5$ kN/m <sup>2</sup>
Густина	$\rho$	$2.54 \times 10^{-4}$ kg/m <sup>3</sup>

Како је дат модул еластичности и тангентни модул, применом релације доступне у литератури [28] може се израчунати пластични модул који је улаз за програм ПАК:

$$E_p = \frac{E E_T}{E - E_T} \quad (4.69)$$

Динамички одзив модела је поређен са аналитичким решењем доступним у литератури и приказан је на слици 4.7.

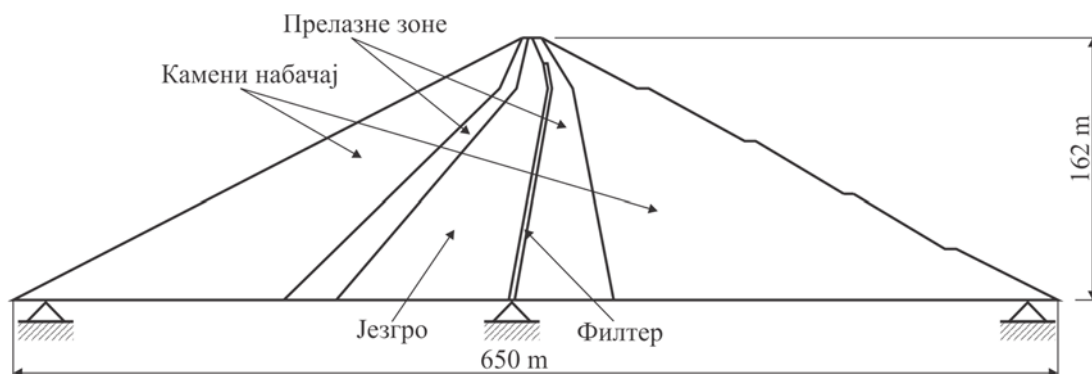


Слика 4.7 Динамички одзив модела

Анализом добијених резултата може се закључити да имплементирани алгоритам даје добра поклапања са аналитичким решењима датог проблема па се развијени алгоритам може користити у анализи понашања конструкција изложених дејству динамичких оптерећења.

**Анализа дејства земљотреса на насуту брану**

Развијени алогоритам за нелинеарну динамичку анализу проблема механике тла је употребљен за симулацију механичког понашања насуте бране изложене дејству сеизмичког оптерећења. Изглед модела бране и карактеристике материјала у анализи су преузете из литературе [78]. Геометрија модела, гранични услови и расподела квазихомогених зона су дати на слици 4.8.



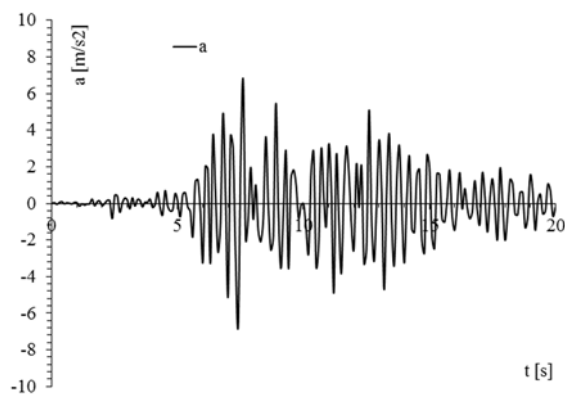
Слика 4.8 Геометрија модела бране

Карактеристике материјала бране у анализи дејства земљотреса су приказане у табели 4.3.

Табела 4.3 Карактеристике материјала модела насуте бране

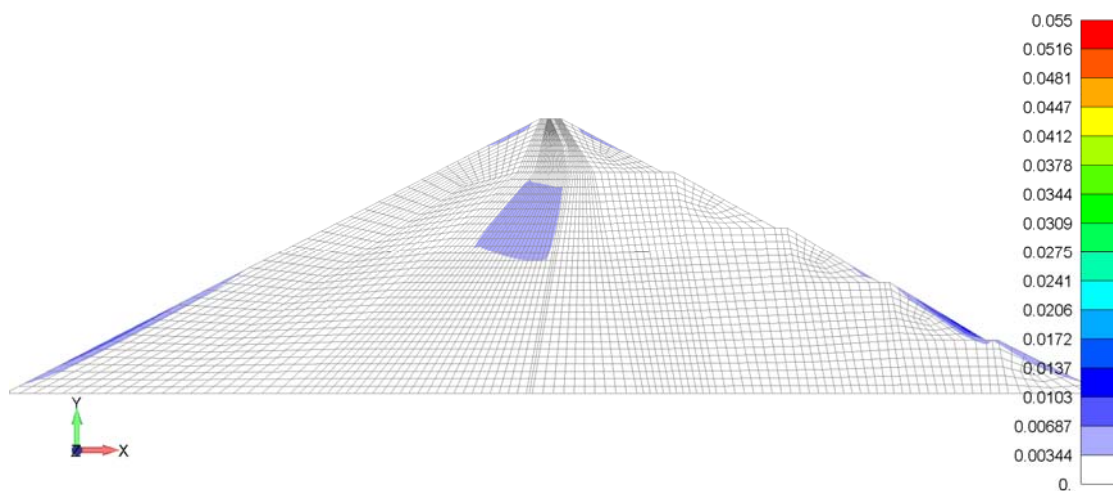
Зона	E [kN/m <sup>2</sup> ]	ν	γ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kN/m <sup>2</sup> ]	φ [°]	ψ [°]
Камени набачај	50x10 <sup>3</sup>	0.4	20.4	0	45	0
Прелазне зоне	50x10 <sup>3</sup>	0.4	20.4	0	45	0
Филтер	50x10 <sup>3</sup>	0.4	20.4	0	45	0
Језгро	50x10 <sup>3</sup>	0.4	18.1	85	23	0

Оптерећење модела је задато коришћењем временског записа убрзања приказаног на слици 4.9. Ово убрзање је саопштено у хоризонталном правцу по темељној спојници бране. Пре задавања сеизмичког генерисано је почетно напонско стање услед сопствене тежине бране.

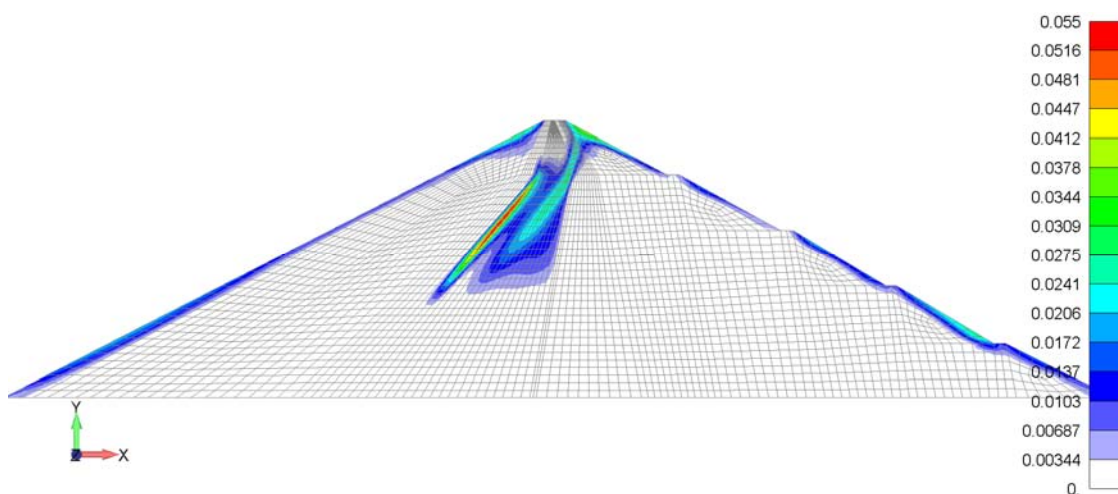


Слика 4.9 Убрзање на темељној спојници

Резултати нумеричке анализе су приказани на сликама 4.10 до 4.12. На сликама 4.10 и 4.11 је приказана расподела пластичних деформација у телу бране пре и после дејства земљотреса. Види се да су пре дејства земљотреса пластичне деформације мале и јављају су у површинским слојевима узводне и низводне косине и у глиненом језгру. Након дејства земљотреса пластичне деформације у глиненом језгру су велике, а значајне вредности се јављају у свим површинским слојевима бране.

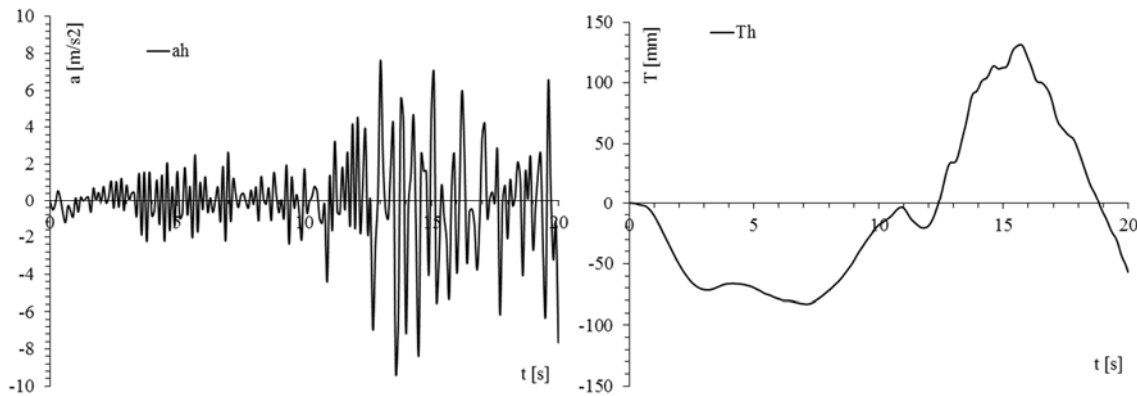


Слика 4.10 Расподела пластичних деформација пре дејства земљотреса



Слика 4.11 Расподела пластичних деформација након дејства земљотреса

Временски записи хоризонталног убрзања и хоризонталног померања круне бране у току дејства земљотреса су приказани у облику дијаграма на слици 4.12.



Слика 4.12 Хоризонтално убрзање и хоризонтално померање круне бране

Овим је потврђено да се развијени алгоритам за нелинеарну динамичку анализу проблема механике тла може користити при анализи дејства земљотреса на насуте бране.

## 5 МКЕ ФОРМУЛАЦИЈА ПОРОЗНОГ ДВОФАЗНОГ МЕДИЈА

### 5.1 Јако спрезање потпуно засићеног медија

#### 5.1.1 Уводна разматрања

Моделирање и симулација механичког понашања тла изложеног дејству сеизмичког оптерећења (земљотреса) представљају изазов за инжењере, како са истраживачког тако и са аспекта практичног решавања проблема. У материјалу тла изложеног дејству сеизмичког оптерећења може доћи до делимичног или потпуног губитка чврстоће, што у случају капиталних конструкција, какве су насуте бране, може довести до катастрофалних последица. Тло представља веома сложену врсту материјала па моделирање његовог механичког понашања под дејством динамичког оптерећења захтева примену формулације за решавање спрегнутих проблема, што укључује и коришћење материјалних модела за тло који су изложени у поглављу 3.

Тло се, као порозни медиј, у природи састоји од чврстог скелета чије су шупљине (поре) испуњене флуидом [79]. На механичко понашање потпуно или делимично засићених порозних медија у великој мери утиче интеракција чврстог скелета и течне фазе која испуњава његове поре. До међусобне интеракције ове две фазе долази како при дејству статичких, тако и при дејству динамичких оптерећења. Интеракција је нарочито изражена приликом дејства сеизмичких оптерећења када се услед великих убрзања јављају велики прираштаји порних притисака, што утиче на опадање ефективних напона на границама зрна [24, 80].

Најпознатији вид интеракције чврсте и течне фазе, под дејством статичког оптерећења, представља консолидација тла. Теорију једнодимензионалне консолидације је предложио Терзаги [30], док је генерализацију за општи 3Д случај извршио Биот [1, 2, 81]. Нумеричко решење овог проблема су извршили Габуси и Вилсон [82], а потом Зенкијевич и Бетес [83] и Зенкијевич и Шоми [3]. Зенкијевич је развио општи инкрементални облик који укључује велике деформације и нелинеарно понашање материјала у анализи ликвефакције [18]. Ликвефакција тла представља губитак смичуће чврстоће засићеног тла изложеног дејству цикличног оптерећења.

За моделирање спрегнутих проблема у механици тла под дејством динамичких оптерећења, развијене су три основне формулације [3]:  $u$ - $p$ ,  $u$ - $U$  и  $u$ - $p$ - $U$  формулација. Применом  $u$ - $p$  формулације добијају се померања чврсте фазе ( $u$ ) и расподела порних притисака у течној фази ( $p$ ). Ова формулација представља најједноставнију од наведених. Њеним коришћењем се не узима у обзир убрзање течне фазе и према [84] може довести до нумеричких проблема, односно закључавања елемената, тзв. локинга (*eng. locking*).

Применом  $u$ - $U$  формулације добијају се померања честица чврсте и течне фазе. Као и при коришћењу  $u$ - $p$  формулације, и овде се могу јавити нумерички проблеми у виду закључавања елемената у случајевима када је разлика компресибилности две фазе велика.

Увођењем  $u$ - $p$ - $U$  формулације елиминише се проблем нумеричког закључавања елемената јер је у анализу укључено израчунавање све три непознате: померања чврсте фазе ( $u$ ), померање течне фазе ( $U$ ) и порних притисака ( $p$ ).

Наведене формулације су развијене од стране Зенкијевича [3], док је њихову модификацију извршио Јеремих [54]. У оквиру ове тезе  $u$ - $p$ - $U$  формулација је прилагођена имплементацији у програм ПАК, у оквиру чега је развијен алгоритам [25]. Ова формулација може бити примењена у комбинацији са свим материјалним моделима за тло, чији су алгоритми развијени у оквиру ове тезе.

Приликом извођења конститутивних релација за спрезање једначина чврсте и течне фазе, коришћени су ефективни напони [24] о чему је било више речи у поглављу 2.

При извођењу једначина порозног медија коришћена је следећа нотација:

$\sigma$	- тотални напон у мешавини,
$\mathbf{u}$	- померање чврсте фазе,
$\mathbf{w}$	- релативно померање течне у односу на чврсту фазу,
$p$	- порни притисак,
$\rho, \rho_f, \rho_s$	- густина мешавине, течне и чврсте фазе,
$n$	- порозност,
$d\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{d}\mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{d}\mathbf{u})$	- прираштај деформације чврсте фазе,
$d\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{d}\mathbf{u} - \nabla^T \mathbf{d}\mathbf{u})$	- прираштај ротације чврсте фазе.

У претходним једначинама запета у индексу означава парцијални извод по одговарајућој координати, односно:

$$\nabla \mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.1)$$

При извођењу водећих једначина у оквиру ове формулације коришћена је претпоставка да је понашање течне фазе у порама потпуно еластично па је за нелинеарно понашање мешавине заслужна само чврста фаза.

На основу претходног, следи да механичко понашање мешавине може бити описано коришћењем конститутивног модела за чврсту фазу и равнотежних једначина течне фазе уз коришћење концепта ефективних напона.

### 5.1.2 Једначина равнотеже чврсте фазе

Водеће једначине засићеног порозног медија у чијим се порама налази један флуид изведене су коришћењем једначине баланса за мешавину, једначине баланса течне фазе (генерализован Дарсијев закон) и једначине одржања масе уз коришћење концепта ефективног напона [3, 84].



Једначина равнотеже чврсте фазе, за одговарајућу порозност  $n$  према [85] гласи:

$$(1-n)\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}' + (1-n)\rho_s \mathbf{b} + n\mathbf{R}_i - (1-n)\rho_s \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.2)$$

У једначини (5.2) величина  $\mathbf{S}$  представља оператор:

$$\mathbf{S}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

величина  $\mathbf{R}$  представља вектор вискозних или филтрационих сила, које применом Дарсијевог закона [24, 54] могу бити израчунате као:

$$\mathbf{R} = \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{w}} \quad (5.4)$$

док, величина  $\mathbf{b}$  представља вектор запреминских сила по јединици масе.

Заменом једначине (5.4) у једначини (5.2) се добија:

$$(1-n)\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}' + (1-n)\rho_s \mathbf{b} + \mathbf{k}^{-1} n \dot{\mathbf{w}} - (1-n)\rho_s \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.5)$$

У једначини (5.4) члан  $\mathbf{k}$  представља коефицијент филтрације материјала, има димензију [дужина]<sup>3</sup>[време]/[маса] и разликује се у односу на коефицијент филтрације која се обично користи у механици тла  $\mathbf{K}$  (Дарсијев коефицијент) који има димензију [дужина]/[време]. Према [24] веза ова два коефицијента гласи:

$$\mathbf{k} = \mathbf{K} / \rho_f g \quad (5.6)$$

где је  $\rho_f$  густина течне фазе и  $g$  гравитационо убрзање.

### 5.1.3 Једначина равнотеже течне фазе

Једначина равнотеже течне фазе која испуњава шупљине порозног медија према [24, 54] гласи:

$$-\nabla p - \mathbf{R} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \left[ \ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}} \right] / n + \rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.7)$$

Применом израза (5.4), једначина (5.7) постаје:

$$-\nabla p - \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{w}} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \left[ \ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}} \right] / n + \rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.8)$$

### 5.1.4 Једначина равнотеже мешавине

Сабирањем равнотежних једначина чврсте и течне фазе (5.5) и (5.8) и применом једначине (2.18) добија се једначина мешавине облика:

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} - \left[ (1-n)\rho_s + n\rho_f \right] \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \left[ \ddot{\mathbf{w}}_i + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}} \right] + \left[ (1-n)\rho_s + n\rho_f \right] \mathbf{b} = 0 \quad (5.9)$$

или краће

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \left[ \ddot{\mathbf{w}}_i + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}} \right] + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (5.10)$$

У једначинама (5.9) и (5.10)  $\ddot{\mathbf{u}}$  представља убрзање чврсте фазе, док је  $\ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}}$  релативно убрзање течне у односу на чврсту фазу ( $\ddot{\mathbf{w}}$  је локално убрзање, док  $\dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}}$  представља конвективни члан убрзања). Према [24] подвучени чланови у једначинама (5.7) до (5.10) су довољно мали да могу бити изостављени из даљег извођења.

За потпуно засићен порозни медиј важи следећа једнакост:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_s + M_f}{V} = \frac{\rho_s V_s + \rho_f V_f}{V} = \frac{\rho_s (V - V_f) + \rho_f V_f}{V} = \rho_s \frac{V - V_f}{V} + \rho_f \frac{V_f}{V} \quad (5.11)$$

Ако се у претходну једначину уврсти дефиниција порозности:

$$n = \frac{V_f}{V} \quad (5.12)$$

једначина (5.11) може бити представљена у облику

$$\rho = (1 - n) \rho_s + n \rho_f \quad (5.13)$$

што је и искоришћено у једначини (5.10).

### 5.1.5 Закон о одржању масе флуида

Приликом решавања спрегнутог проблема струјања флуида кроз порозну средину, допунска равнотежна једначина представља закон о одржању масе [24]:

$$\nabla^T \mathbf{w} + \mathbf{m} \dot{e} + \frac{n}{K_f} \dot{p} + \frac{1-n}{K_s} \dot{p} - \frac{K_t}{K_s} \left( \mathbf{m} \dot{e} + \frac{\dot{p}}{K_s} \right) + n \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f} + \dot{s}_0 = 0 \quad (5.14)$$

при чему је коришћена једнакост за ефективни напон чврсте фазе облика:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}^E (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) \quad (5.15)$$

где је  $\mathbf{C}^E$  еластична конститутивна матрица чврсте фазе,  $\mathbf{e}$  укупна деформација,  $\mathbf{e}^p$  деформација чврсте фазе изазвана дејством притиска флуида:

$$\mathbf{e}^p = -\frac{\mathbf{m}}{3K_s} p \quad (5.16)$$

док је:

$$\mathbf{m}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (5.17)$$

У једначини (5.14) поједини чланови су:

$\nabla^T \mathbf{w}$	-дивергенција флуида у јединичној запремини мешавине,
$\mathbf{m} \dot{e}$	-брзина запреминске деформације,

$$\begin{aligned} \frac{n}{K_f} \dot{p} & \quad \text{-промена запремине флуида услед промене притиска,} \\ \frac{1-n}{K_s} \dot{p} & \quad \text{-промена запремине чврсте фазе услед промене притиска,} \\ -\frac{\mathbf{m}}{3K_s} \boldsymbol{\sigma}' = -\frac{K_t}{K_s} \left( \mathbf{m}\dot{\mathbf{e}} + \frac{\dot{p}}{K_s} \right) & \quad \text{-стишљивост честица чврсте фазе услед дејства напона } \boldsymbol{\sigma}', \\ n \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f} & \quad \text{-промена густине течне фазе услед промене температуре,} \\ \dot{s}_0 & \quad \text{-брзина промене запремине чврсте фазе услед температуре.} \end{aligned}$$

У претходним изразима  $K_f$  представља запремински модул течне фазе,  $K_s$  запремински модул чврсте фазе, док је  $K_t$  запремински модул мешавине.

Коришћењем једнакости:

$$\alpha = 1 - \frac{K_t}{K_s} \quad (5.18)$$

на основу [24], једначина (5.14) постаје:

$$\nabla^T \dot{\mathbf{w}} + \alpha \mathbf{m}\dot{\mathbf{e}} + \frac{\dot{p}}{Q} + n \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f} + \dot{s}_0 = 0 \quad (5.19)$$

Трећи члан у претходној једначини представља компресибилност мешавине и израчунат је као:

$$\frac{1}{Q} \equiv \frac{n}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K_s} \cong \frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_s} \quad (5.20)$$

док подвучени чланови представљају промену густине и брзину промене запремине чврсте фазе под дејством температуре. Ови чланови су довољно мали у односу на остале чланове у једначини па могу бити занемарени у даљем извођењу.

Добијене једначине описују понашање мешавине изложене дејству како статичких, тако и динамичких оптерећења.

Уколико се у једначинама (5.8), (5.10) и (5.19) занемаре подвучени чланови, који представљају конвективно убрзање и промену густине и запремине услед промене температуре, ове једначине имају облик:

$$-\nabla p - \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{w}} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\rho_f \ddot{\mathbf{w}}}{n} + \rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.21)$$

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \ddot{\mathbf{w}}_i + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (5.22)$$

$$\nabla^T \dot{\mathbf{w}} + \alpha \mathbf{m} \dot{\epsilon} + \frac{\dot{p}}{Q} = 0 \quad (5.23)$$

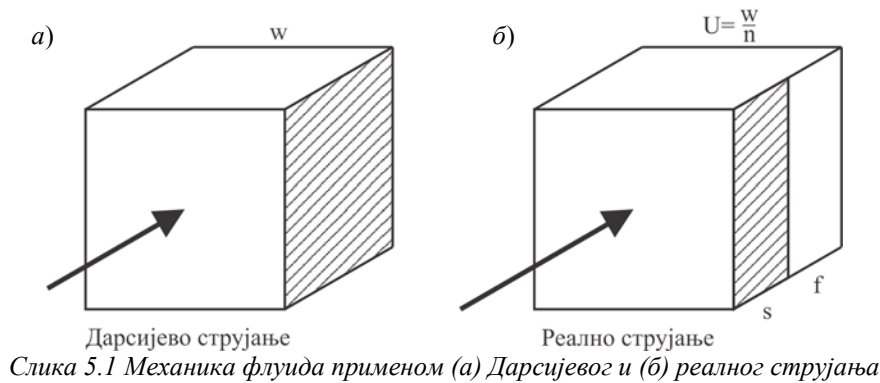
и представљају коначне једначине спрегнутог система солид-флуид.

## 5.1.6 Модификација водећих једначина

### 5.1.6.1 Једначина равнотеже чврсте фазе

Како би се дефинисала веза између Дарсијевог струјања и реалног струјања у порозној средини приказаних на слици 5.1, уместо релативног померања флуида у односу на солид  $\mathbf{w}$  уводи се променљива  $\mathbf{U}$  која представља апсолутно померање флуида [54]:

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{U}^R = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{w}}{n} \quad (5.24)$$



Уколико се једначина (5.21) помножи порозношћу  $n$ , ова једначина постаје:

$$-n\nabla p - n\mathbf{R} - n\rho_f \ddot{\mathbf{u}} + n\rho_f \mathbf{b} = \rho_f \ddot{\mathbf{w}} \quad (5.25)$$

Заменом израза (5.25) у једначини (5.22) овај израз постаје:

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}} + n\nabla p + n\mathbf{R} + n\rho_f \ddot{\mathbf{u}} - n\rho_f \mathbf{b} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (5.26)$$

Уколико се сада у израз (5.26) уведе дефиниција густине мешавине (5.13), следи:

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} - [\rho_s (1-n) + \rho_f n] \ddot{\mathbf{u}} + n\nabla p + n\mathbf{R} + n\rho_f \ddot{\mathbf{u}} - n\rho_f \mathbf{b} + [\rho_s (1-n) + \rho_f n] \mathbf{b} = 0 \quad (5.27)$$

па се груписањем чланова добија следећа једначина:

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} + n\nabla p + (1-n)\rho_s \mathbf{b} - (1-n)\rho_s \ddot{\mathbf{u}} + n\mathbf{R} = 0 \quad (5.28)$$

Коришћењем везе између тоталног и ефективног напона (2.18), једначина (5.28) може бити написана у облику:

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}' - (\alpha - n)\nabla p + (1-n)\rho_s \mathbf{b} - (1-n)\rho_s \ddot{\mathbf{u}} + n\mathbf{R} = 0 \quad (5.29)$$

### 5.1.6.2 Једначина равнотеже течне фазе

Груписањем чланова који садрже убрзања, једначина (5.25) може бити написана у облику:

$$-n\nabla p - n\mathbf{R} - n\rho_f \left( \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\ddot{\mathbf{w}}}{n} \right) + n\rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.30)$$

Коришћењем израза за померање флуида (5.24) може бити написан израз за убрзање флуида:

$$\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\ddot{\mathbf{w}}}{n} \quad (5.31)$$

и заменом ове једначине у једначину (5.30) она постаје:

$$-n\nabla p - n\mathbf{R} - n\rho_f \ddot{\mathbf{U}} + n\rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.32)$$

### 5.1.6.3 Једначина равнотеже мешавине

Диференцирањем једначине (5.24) по времену и израчунавањем извода по координатама, ова једначина постаје:

$$\nabla^T \dot{\mathbf{w}} = n\nabla^T \dot{\mathbf{U}} - n\nabla^T \dot{\mathbf{u}} \quad (5.33)$$

где се може искористити услов да је  $\mathbf{m}\dot{\mathbf{e}} = \nabla^T \dot{\mathbf{u}}$ , па да једначина (5.33) има следећи облик:

$$\nabla^T \dot{\mathbf{w}} = n\nabla^T \dot{\mathbf{U}} - n\mathbf{m}^T \dot{\mathbf{e}} \quad (5.34)$$

Заменом једначине (5.34) у (5.23) добија се једначина:

$$n\nabla^T \dot{\mathbf{U}} - n\mathbf{m}\dot{\mathbf{e}} + \alpha\mathbf{m}\dot{\mathbf{e}} + \frac{\dot{p}}{Q} = 0 \quad (5.35)$$

односно

$$-n\nabla^T \dot{\mathbf{U}} = (\alpha - n)\mathbf{m}\dot{\mathbf{e}} + \frac{\dot{p}}{Q} \quad (5.36)$$

Једначине (5.29), (5.32) и (5.36) су добијене модификовањем израза (5.21) до (5.23) у облик погоднији за нумеричку имплементацију. Још једанпут сумиране једначине за решавање спрегнутог проблема су:

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}' - (\alpha - n)\nabla p + (1 - n)\rho_s \mathbf{b} - (1 - n)\rho_s \ddot{\mathbf{u}} + n\mathbf{R} = 0 \quad (5.37)$$

$$-n\nabla p - n\mathbf{R} - n\rho_f \ddot{\mathbf{U}} + n\rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.38)$$

$$-n\nabla^T \dot{\mathbf{U}} = (\alpha - n)\mathbf{m}\dot{\mathbf{e}} + \frac{\dot{p}}{Q} \quad (5.39)$$

Анализом ових једначина, јасно је да се убрзање  $\ddot{\mathbf{u}}$  јавља само у првој, док се  $\ddot{\mathbf{U}}$  јавља само у другој једначини што чини одговарајући дијагонални облик дискретизације система. Коначне једначине садрже три променљиве, како је то на почетку и речено:

- апсолутно померање чврсте фазе  $\mathbf{u}$ ,

- порни притисак  $p$ ,
- апсолутно померања течне фазе  $\mathbf{U}$ .

Како би било могуће нумеричко решавање овог проблема, неопходно је дефинисати контурне услове: за једначину количине кретања (*енг. momentum balance*), на површини  $A_t$  је задата сила  $t_i(t)$  или  $\sigma_{ij}n_j$ , где је  $n_j$   $j$ -та компонента нормале на површину. На површини  $A_u$  је задато померање  $u_i$ . За течну фазу су контурни услови дефинисани из два дела: на површини  $A_p$  је задат притисак  $p$ , док је на површини  $A_w$  задата брзина протицања флуида  $\dot{w}_n$ . За непропусне границе важи да је  $\dot{w}_n = 0$ . Набројани контурни услови могу бити написани коришћењем следећих једначина:

$$A = A_t \cup A_u$$

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{на} \quad A = A_t$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{на} \quad A = A_u$$

као и

$$A = A_p \cup A_w$$

$$p = \bar{p} \quad \text{на} \quad A = A_p$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{w} = w_n \quad \text{на} \quad A = A_w$$

## 5.2 Нумеричко решење једначина $\mathbf{u}$ - $p$ - $\mathbf{U}$ формулације

Општи поступак дискретизације једначина применом методологије развијене од стране [84] први пут је уведен од стране истих аутора 1967. године. Решавање једначина облика (5.37) до (5.39) може бити извршено решавањем парцијалних диференцијалних једначина облика:

$$\mathbf{A}\ddot{\Phi} + \mathbf{B}\dot{\Phi} + \mathbf{L}(\Phi) = 0 \quad (5.40)$$

где су  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  матрице константи, док је  $\mathbf{L}$  оператор који укључује изводе по координатама облика  $\partial/\partial x$ ,  $\partial/\partial y$ ,  $\partial/\partial z$  који су најчешће нелинеарне функције. Нотација са тачком представља извод по времену следећег облика:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \dot{\Phi}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \equiv \ddot{\Phi} \quad (5.41)$$

У претходним једначинама  $\Phi$  представља вектор зависно променљивих, што је у овом случају вектор померања чврсте фазе  $\mathbf{u}$ , порни притисак  $p$  и вектор померања течне фазе  $\mathbf{U}$ .

Решење једначине (5.40) се према [24] може извршити кроз следеће кораке:

(i) непозната  $\Phi$  се дискретизује применом коначног броја параметара  $\bar{\Phi}_k$  и матрице интерполационих функција  $\mathbf{H}_k$ , па може бити написано:

$$\Phi \cong \Phi^h = \sum_{k=1}^n \mathbf{H}_k \bar{\Phi}_k \quad (5.42)$$

где су интерполационе функције дефинисане у функцији просторних координата, тј:

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_k(x, y, z) \quad (5.43)$$

док је непозната функција:

$$\bar{\Phi}_i \equiv \bar{\Phi}_i(t) \quad (5.44)$$

и садржи непознате величине у дискретним тачкама, односно чворовима коначних елемената које у општем случају могу да буду функције времена.

У складу са претходним, дискретизоване вредности померања чврсте и течне фазе као и притисци су

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}^u \bar{\mathbf{u}} \quad (5.45)$$

$$p = \mathbf{H}^p \bar{p} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{H}^U \bar{\mathbf{U}} \quad (5.47)$$

Величине  $\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{p}$  и  $\bar{\mathbf{U}}$  представљају чворне вредности померања чврсте фазе, порног притиска и померања течне течне фазе, респективно. На основу тога, сваки чвор коначног елемента има седам степени слободе: три померања чврсте фазе, један порни притисак и три померања течне фазе.

(ii) на основу вредности функције  $\hat{\Phi}$  у диференцијалним једначинама кретања одређује се величина остатка који је различит од нуле, који може бити представљен као систем једначина:

$$\int_V \mathbf{W}_j^T (\mathbf{A}\ddot{\Phi} + \mathbf{B}\dot{\Phi} + \mathbf{L}(\Phi)) dV = 0 \quad (5.48)$$

Након интеграције претходни систем постаје:

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{C}\dot{\Phi} + \mathbf{P}(\Phi) = 0 \quad (5.49)$$

где димензије  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{P}$  одговарају броју параметара у вектору  $\bar{\Phi}_k$ . При решавању овог система једначина као тежинске функције  $\mathbf{W}_j$  користе се интерполационе функције  $\mathbf{H}_j$ , односно важи да је:

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{H}_j \quad (5.50)$$

Према [86], коришћењем идентичних интерполационих функција за померања чврсте и течне фазе и притиске, неће доћи до појаве нумеричког закључавања елемената.

Описана метода је у литератури позната као Галеркинов поступак.

### 5.2.1 Нумеричка интеграција једначине чврсте фазе

Коришћењем тежинских функција уместо интерполационих према (5.50), интеграцијом првог члана једначине (5.29) добија се:

$$\int_V \mathbf{H}^{uT} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}' dV = \int_A \mathbf{H}^{uT} \mathbf{t}^{(n)} dA - \int_V \mathbf{B}^u \boldsymbol{\sigma}' dV = \mathbf{F}_1^u - \mathbf{K}^{EP} \bar{\mathbf{u}} \quad (5.51)$$

где је  $\mathbf{K}^{EP}$  матрица крутости чврсте фазе, док  $\mathbf{t}^{(n)}$  представља вектор напона на површини чија је нормала  $\mathbf{n}$ .

Интеграцијом осталих чланова једначине (5.29) у складу са (5.51), добија се :

$$\begin{aligned} -\int_V \mathbf{H}^{uT} (\alpha - n) \nabla p dV = \\ -\int_{A_p} \mathbf{H}^{uT} (\alpha - n) \mathbf{n} p dA + \int_V \mathbf{B}^{uT} (\alpha - n) \mathbf{m} p dV = -\mathbf{F}_4^u + \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\int_V \mathbf{H}^{uT} (1-n) \rho_s \mathbf{b} dV = \mathbf{F}_5^u \quad (5.53)$$

$$-\int_V \mathbf{H}^{uT} (1-n) \rho_s \ddot{\mathbf{u}} dV = -\left[ \int_V \mathbf{H}^{uT} (1-n) \rho_s \mathbf{H}^u dV \right] \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{H}^{uT} n \mathbf{R} dV = \\ \int_V \mathbf{H}^{uT} n \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{w}} dV = \int_V \mathbf{H}^{uT} n^2 \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{U}} dV - \int_V \mathbf{H}^{uT} n^2 \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{u}} dV = \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (5.55)$$

Коришћењем једначина (5.51) до (5.55), једначина (5.29) написана у матричном облику гласи:

$$-\mathbf{K}^{EP} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{F}}_1^u - \bar{\mathbf{F}}_4^u + \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{F}}_5^u - \mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.56)$$

Пребацивањем вектора сила на десну страну, ова једначина постаје:

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{EP} \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}}_s \quad (5.57)$$

где је:

$$\bar{\mathbf{F}}_s = \bar{\mathbf{F}}_1^u - \bar{\mathbf{F}}_4^u + \bar{\mathbf{F}}_5^u \quad (5.58)$$

Матрица маса у једначини (5.57) је израчуната према:

$$\mathbf{M}_s = \int_V \mathbf{H}^{uT} (1-n) \rho_s \mathbf{H}^u dV \quad (5.59)$$

док су матрице пригушења израчунате у складу са:

$$\mathbf{D}_1 = \int_V \mathbf{H}^{uT} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^u dV \quad (5.60)$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_V \mathbf{H}^{uT} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^U dV \quad (5.61)$$

матрица крутости:

$$\mathbf{K}^{EP} = \int_V \mathbf{B}^{uT} \mathbf{C} \mathbf{B}^u dV \quad (5.62)$$



док је матрица  $\mathbf{G}_1$ :

$$\mathbf{G}_1 = \int_V \mathbf{B}^{uT} (\alpha - n) \mathbf{m} \mathbf{H}^p dV \quad (5.63)$$

## 5.2.2 Нумеричка интеграција једначине течне фазе

Коришћењем једначине (5.4) и (5.24), вектор вискозних сила може бити израчунат као:

$$\mathbf{R} = n \mathbf{k}^{-1} (\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{u}}) \quad (5.64)$$

Заменом претходне једначине у једначини равнотеже течне фазе (5.32) добија се једначина:

$$-n \nabla p - n^2 \mathbf{k}^{-1} (\dot{\mathbf{U}} - \dot{\mathbf{u}}) - n \rho_f \ddot{\mathbf{U}} + n \rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.65)$$

Чланови једначине (5.65) помножени интерполационом функцијом  $\mathbf{H}^U$  као тежинском, применом Галеркиновог поступка и интеграцијом по запремини, гласе:

$$-\int_V n \mathbf{H}^{U^T} \nabla p dV = -\int_{A_p} n \mathbf{H}^{U^T} \mathbf{n} p dA + \int_V n \mathbf{B}^{U^T} \mathbf{m} p dV = -\bar{\mathbf{F}}_1^U + \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{p}} \quad (5.66)$$

$$\int_V n \mathbf{H}^{U^T} \rho_f \mathbf{b} dV = \bar{\mathbf{F}}_2^U \quad (5.67)$$

$$-\int_V \mathbf{H}^{U^T} n \rho_f \ddot{\mathbf{U}} dV = -\left[ \int_V \mathbf{H}^{U^T} n \rho_f \mathbf{H}^U dV \right] \ddot{\mathbf{U}} = -\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{U}} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} & -\int_V \mathbf{H}^{U^T} n^2 \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{U}} dV + \int_V \mathbf{H}^{U^T} n^2 \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{u}} dV = \\ & -\left[ \int_V \mathbf{H}^{U^T} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^U dV \right] \dot{\mathbf{U}} + \left[ \int_V \mathbf{H}^{U^T} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^u dV \right] \dot{\mathbf{u}} = \\ & -\mathbf{D}_3 \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_2^T \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (5.69)$$

Заменом једначина (5.66) до (5.69) у једначини (5.65) ова једначина записана матрично, гласи:

$$-\bar{\mathbf{F}}_1^U + \mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{F}}_2^U - \mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{U}} - \mathbf{D}_3 \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_2^T \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.70)$$

или краће:

$$-\mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_3 \dot{\mathbf{U}} - \mathbf{D}_2^T \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{F}}_f \quad (5.71)$$

Десна страна једначине (5.71) представља ефективни вектор сила израчунат према:

$$\bar{\mathbf{F}}_f = \bar{\mathbf{F}}_2^U - \bar{\mathbf{F}}_1^U \quad (5.72)$$

док је матрица  $\mathbf{G}_2$  израчуната као:

$$\mathbf{G}_2 = \int_V n \mathbf{B}^{U^T} \mathbf{m} \mathbf{H}^p dV \quad (5.73)$$

Матрица маса течне фазе је:

$$\mathbf{M}_f = \int_V \mathbf{H}^{U^T} n \rho_f \mathbf{m} \mathbf{H}^U dV \quad (5.74)$$

док су матрице пригушења у течной фази:

$$\mathbf{D}_3 = \int_V \mathbf{H}^{U^T} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^U dV \quad (5.75)$$

$$\mathbf{D}_2^T = \int_V \mathbf{H}^{U^T} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^u dV \quad (5.76)$$

Треба напоменути да је пригушење уведено директно коришћењем матрица пригушења облика  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{D}_3$ . Наведене матрице су функције порозности и пропусности чврсте фазе. Овако уведено пригушење настаје као последица дисипације енергије при интеракцији флуида у порама и чврстог скелета.

### 5.2.3 Нумеричка интеграција једначине континуитета

Интеграцијом једначине (5.36) по времену, ова једначина постаје:

$$-n \nabla \mathbf{U} = (\alpha - n) \mathbf{m}^T \mathbf{e} + \frac{p}{Q} \quad (5.77)$$

Уколико се ова једначина помножи интерполационом матрицом  $\mathbf{H}^p$  и њеном интеграцијом по запремини, уз примену једнакости  $\mathbf{m}^T \mathbf{e} = \nabla^T \mathbf{u}$  чланови једначине (5.77) гласе:

$$-\left[ \int_V \mathbf{H}^{p^T} n \mathbf{B}^U dV \right] \bar{\mathbf{U}} = -\mathbf{G}_2 \bar{\mathbf{U}}, \quad (5.78)$$

$$\int_V \mathbf{H}^{p^T} \mathbf{m}^T (\alpha - n) \nabla^T \mathbf{u} dV = \left[ \int_V \mathbf{H}^{p^T} \mathbf{m}^T (\alpha - n) \mathbf{B}^u dV \right] \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{G}_1 \bar{\mathbf{u}} \quad (5.79)$$

$$\left[ \int_V \mathbf{H}^{p^T} \frac{1}{Q} \mathbf{H}^p dV \right] \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{P} \bar{\mathbf{p}} \quad (5.80)$$

па једначина (5.77) написана у матричном облику гласи

$$\mathbf{G}_2^T \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{G}_1^T \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{p}} = 0 \quad (5.81)$$

## 5.3 Матрични облик једначина и-р-U формулације

Једначине за решавање спрегнутог проблема струјања кроз порозну средину (5.57), (5.71) и (5.81) написане матрично имају облик:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{p}}} \\ \ddot{\bar{\mathbf{U}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & -\mathbf{D}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{D}_2^T & 0 & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{p}}} \\ \dot{\bar{\mathbf{U}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{EP} & -\mathbf{G}_1 & 0 \\ -\mathbf{G}_1^T & -\mathbf{P} & -\mathbf{G}_2^T \\ 0 & -\mathbf{G}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_s \\ 0 \\ \bar{\mathbf{F}}_f \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Матрице маса чврсте и течне фазе у претходној једначини су израчунате као:

$$\mathbf{M}_s = \int_V \mathbf{H}^{u^T} (1-n) \rho_s \mathbf{H}^u dV \quad (5.83)$$

$$\mathbf{M}_f = \int_V \mathbf{H}^{U^T} n \rho_f \mathbf{H}^U dV \quad (5.84)$$

док су матрице пригушења:

$$\mathbf{D}_1 = \int_V \mathbf{H}^{uT} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^u dV \quad (5.85)$$

$$\mathbf{D}_2 = \int_V \mathbf{H}^{uT} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^U dV \quad (5.86)$$

$$\mathbf{D}_3 = \int_V \mathbf{H}^{UT} n^2 \mathbf{k}^{-1} \mathbf{H}^U dV \quad (5.87)$$

матрица крутости:

$$\mathbf{K}^{EP} = \int_V \mathbf{B}^{uT} \mathbf{C} \mathbf{B}^u dV \quad (5.88)$$

и еквиваленте матрице крутости израчунате као:

$$\mathbf{G}_1 = \int_V (\alpha - n) \mathbf{B}^{uT} \mathbf{m} \mathbf{H}^p dV \quad (5.89)$$

$$\mathbf{G}_2 = \int_V n \mathbf{B}^{UT} \mathbf{m} \mathbf{H}^p dV \quad (5.90)$$

$$\mathbf{P} = \int_V \mathbf{H}^{pT} \frac{1}{Q} \mathbf{H}^p dV \quad (5.91)$$

Ефективни вектори сила су израчунати у складу са:

$$\bar{\mathbf{F}}^s = \bar{\mathbf{F}}_1^u - \bar{\mathbf{F}}_4^u + \bar{\mathbf{F}}_5^u \quad (5.92)$$

$$\bar{\mathbf{F}}^f = -\bar{\mathbf{F}}_1^U + \bar{\mathbf{F}}_2^U \quad (5.93)$$

док су њихове компоненте:

$$\mathbf{F}_1^u = \int_{A_i} \mathbf{H}^{uT} \mathbf{t}^{(n)} dA \quad (5.94)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_4^u = \int_{A_p} \mathbf{H}^{uT} (\alpha - n) \mathbf{n} p dA \quad (5.95)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_5^u = \int_V \mathbf{H}^{uT} (1 - n) \rho_s \mathbf{b} dV \quad (5.96)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_1^U = \int_{A_p} n \mathbf{H}^{UT} \mathbf{n} p dA \quad (5.97)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_2^U = \int_V n \mathbf{H}^{UT} \rho_f \mathbf{b} dV \quad (5.98)$$

У претходним изразима  $\mathbf{H}^u$ ,  $\mathbf{H}^p$ ,  $\mathbf{H}^U$  представљају интерполационе функције за померање чврсте фазе, порне притиске и померање течне фазе, респективно, док су  $\rho$ ,  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  густине мешавине, чврсте и течне фазе. Скалар  $n$  у претходним једначинама представља порозност, вектор  $\mathbf{n}$  је нормала на границу.

Матрична једначина (5.82) представља општи облик и-р-У формулације за спрегнути систем и може бити написана краће у облику:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (5.99)$$

где  $\mathbf{x}$  представља вектор генерализованих непознатих величина:

$$\mathbf{x}^T = \{\bar{\mathbf{u}} \quad \bar{\mathbf{p}} \quad \bar{\mathbf{U}}\} \quad (5.100)$$

Решавањем једначине (5.99) за задате контурне услове, добијају се поља непознатих (5.100).

## 5.4 Јако спрезање делимично засићеног медија

### 5.4.1 Модификација једначина делимично засићеног медија

Порозни материјали у својим порама могу садржати један или више флуида. Овде ће бити размотрен случај када су у порама чврсте фазе садржана два флуида (вода и ваздух) што је чест случај у природи. Садржај флуида у порама ће бити узет у обзир кроз степен засићења који је пропорционалан садржају ових флуида у порама, тако да важи следећа једнакост:

$$S_w + S_a = 1 \quad (5.101)$$

где  $S_w$  представља степен засићења водом, док је  $S_a$  степен засићења ваздухом.

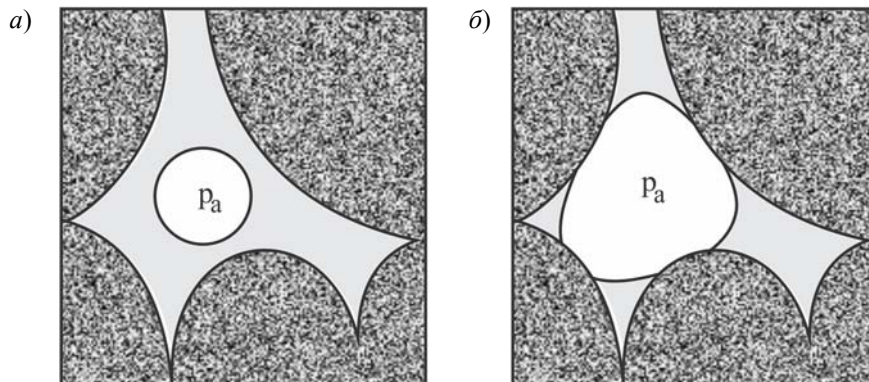
Према [24] неопходно је да ефективни напон (2.18) буде модификован увођењем појма ефективног притиска у складу са следећом једначином:

$$p = \chi_w p_w + (1 - \chi_w) p_a \approx \chi_w p_w \quad (5.102)$$

где такође важи једнакост:

$$\chi_w + \chi_a = 1. \quad (5.103)$$

Коефицијенти  $\chi_w$  и  $\chi_a$  представљају степене оквашености појединим флуидима, како је то приказано на слици 5.2.



Слика 5.2 Флуиди у порама солида: а) један флуид кваси површину солида, б) два флуида квасе површину солида

У случају постојања два флуида у порозном медију, једначина равнотеже мешавине је иста као у случају потпуног засићења, док је густину мешавине неопходно модификовати у складу са:

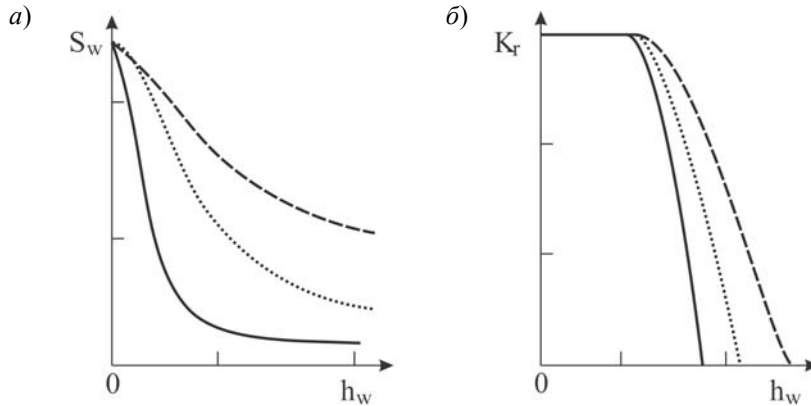
$$\rho = n S_w \rho_w + (1 - n) \rho_s \quad (5.104)$$

где је густина ваздуха занемарена.

Једначина равнотеже течне фазе сада гласи:

$$-\nabla p_w - \mathbf{k}^{-1} \dot{\mathbf{w}} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f [\ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}}] / n + \rho_f \mathbf{b} = 0 \quad (5.105)$$

где подвучени члан представља релативно убрзање течне фазе у односу на чврсту фазу и може бити занемарен, као што је то учињено у случају потпуно засићених медија.



Слика 5.3 Зависност (а) степена засићења и (б) коефицијента релативне филтрације од дубине

Коефицијент пропусности је у пракси најчешће дефинисан као изотропна величина, односно претпоставља се да порозни материјал има једнаку пропусност у свим правцима, па важи:

$$\mathbf{k} = k \mathbf{I} \quad (5.106)$$

Коефицијент пропусности зависи од засићења (слика 5.3), тако да важи једначина:

$$k = k(S_w) \quad (5.107)$$

Како би се степен засићења порозног медија узео у обзир, према [24], неопходно је модификовати једначину одржања масе (5.19), тако да она сада гласи:

$$\nabla^T \dot{\mathbf{w}} + \alpha m \dot{e} + \frac{n}{K_f} S_w \dot{p}_w + \frac{1-n}{K_s} \chi_w \dot{p}_w - \frac{K_t}{K_s} \left( \alpha m \dot{e} + \frac{\chi_w}{K_s} \dot{p}_w \right) + n \dot{S}_w + n S_w \frac{\dot{p}_w}{\rho_w} + \dot{s}_0 = 0 \quad (5.108)$$

где су:

- $\nabla^T \dot{\mathbf{w}}$  - дивергенција течне фазе у јединичној запремини мешавине у временском интервалу  $dt$ .
- $\dot{e}$  - брзина запреминске деформације
- $\frac{n}{K_f} S_w \dot{p}_w$  - промена запремине течне фазе у порама услед промене њеног притиска
- $\frac{1-n}{K_s} \chi_w \dot{p}_w$  - промена запремине честица чврсте фазе услед промене притиска у течној фази

$$-\frac{\mathbf{I}}{3K_s} \boldsymbol{\sigma}' = -\frac{K_t}{K_s} \left( \alpha \mathbf{m} \dot{\epsilon} + \frac{\chi_w}{K_s} \dot{p}_w \right) \quad - \text{стишљивост честица чврсте фазе услед дејства}$$

ефективног напона  $\sigma'_{ij}$

$$n \dot{S}_w \quad - \text{члан који узима у обзир промену засићења}$$

$$n S_w \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} \quad - \text{промена густине течне фазе при промени}$$

температуре

$$\dot{s}_0 \quad - \text{брзина промене запремине солида при промени}$$

температуре.

Применом израза (5.18) једначина (5.108) може бити написана у облику:

$$\nabla^T \dot{\mathbf{w}} + \alpha \mathbf{m} \dot{\epsilon} + \frac{1}{Q^*} \dot{p}_w + n S_w \frac{\dot{\rho}_w}{\rho_w} + \dot{s}_0 = 0 \quad (5.109)$$

где је искоришћена следећа једнакост:

$$\frac{1}{Q^*} \equiv C_s + \frac{n S_w}{K_f} + \frac{\alpha - n}{K_s} \chi_w \quad (5.110)$$

Као и у случају потпуно засићеног порозног медија, подвучени чланови представљају промену густине и брзину промене запремине чврсте фазе при промени температуре и довољно су мали у односу на остале чланове у једначини да могу бити изостављени из даљег извођења.

Основна модификација једначине (5.108) у односу на (5.14) се односи на увођење новог члана који узима у обзир промену засићења. Према [24], овај члан има облик:

$$n \frac{dS_w(p_w)}{dt} = n \frac{dS_w(p_w)}{dp_w} \frac{dp_w}{dt} = C_s \dot{p}_w \quad (5.111)$$

## 5.5 Верификација формулације порозних медија

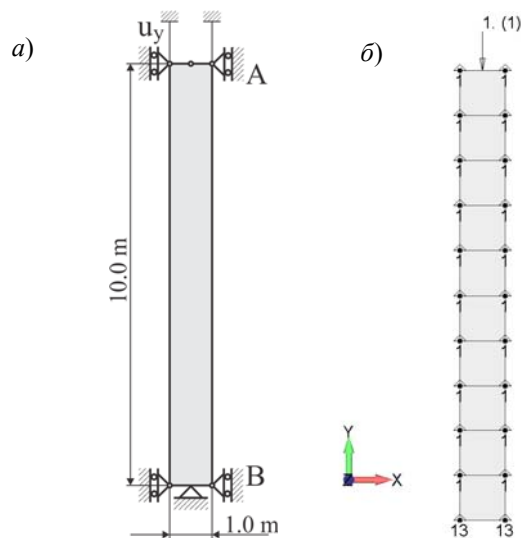
### *Вертикална консолидација тла*

Услед дејства неког спољашњег оптерећења на тло као порозни медиј, долази до повећања порних притисака као резултат отпора флуида дејству спољашњег оптерећења. Као последица повећања порних притисака јавља се струјање порне течности из области вишег у област нижег притиска, што је у овом случају консолидације слободна површина. При томе долази до постепеног смањења притиска у порном флуиду и преношења оптерећења на чврсти скелет, што доводи до постепеног слегања тла и овај процес се назива консолидацијом. Проблем консолидације тла представља један од кључних проблема у геотехничкој пракси.

Верификација алгорита за решавање спрегнутих проблема порозних засићених медија имплементираног у програм ПАК је спроведена на примеру нумеричке симулације вертикалне

консолидације тла. За случај линеарно еластичног изотропног материјала Терзаги [30] је извео аналитичко решење које је искоришћено за верификацију нумеричког решења датог проблема.

За нумеричку анализу проблема вертикалне консолидације коришћен је модел који се састоји од 10 тродимензионалних осмочворних коначних елемената. Задати су одговарајући гранични услови којима је симулирана једнодимензионална консолидација, односно дозвољено је померање свих чворова у вертикалном правцу док су померања у хоризонталном правцу ограничена. Чворовима на доњој ивици модела су ограничена сва померања, као што је приказано на слици 5.4.



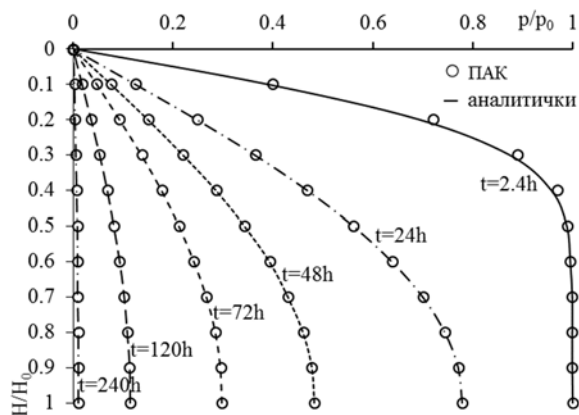
Слика 5.4 Модел за анализу вертикалне консолидације

Висина анализираниог модела је  $H_0=10$  m и на слободној површини је задато оптерећење у облику притиска  $p_0$ . Параметри материјала коришћени у анализи су приказани у табели 5.1.

Табела 5.1 Материјалне константе за модел једнодимензионалне консолидације

Назив параметра	Ознака	Вредност
Гравитационо убрзање	$g$	9.8 m/s <sup>2</sup>
Модул еластичности тла	$E$	2.0x10 <sup>7</sup> kN/m <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент тла	$\nu$	0.2
Густина матријала тла	$\rho_s$	2.0x10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>
Густина воде	$\rho_f$	1.0x10 <sup>3</sup> kg/m <sup>3</sup>
Коефицијент филтрације	$k$	1.0x10 <sup>-7</sup> m/s
Запремински модул тла	$K_s$	1.0x10 <sup>20</sup> kN/m <sup>2</sup>
Запремински модул воде	$K_f$	2.2x10 <sup>9</sup> kN/m <sup>2</sup>
Порозност	$n$	0.4

Аналитичко решење проблема је засновано на претпоставци да су чврста и течна фаза у потпуности инкопресибилне, док развијени нумерички модел узима у обзир компресибилност обе фазе. Међутим, како би се упоредила решења и симулирао случај инкопресибилности [79], усвојене су велике вредности запреминског модула чврсте и течне фазе.



Слика 5.5 Расподела порних притисака у моделу

Резултати нумеричке симулације и аналитичког решења процеса вертикалне консолидације су приказани на слици 5.5. Анализом добијених решења се види да је остварено добро поклапање са аналитичким решењима разматраног проблема. Незнатно одступање нумеричких решења од аналитичких се јавља на почетку симулације што је последица коришћења већег временског корака интеграције. Ово може бити превазиђено коришћењем мањег временског корака [86]. Међутим, одступања се јављају само на почетку симулације, па је за симулацију дуготрајних процеса ефикасније коришћење већег временског корака.

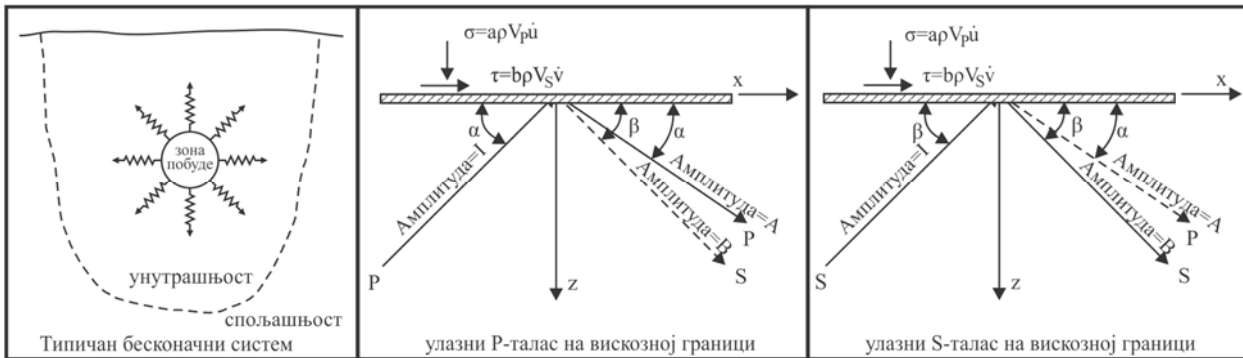


## 6 АПСОРБУЈУЋЕ ГРАНИЦЕ МОДЕЛА

### 6.1 Вискозне границе модела

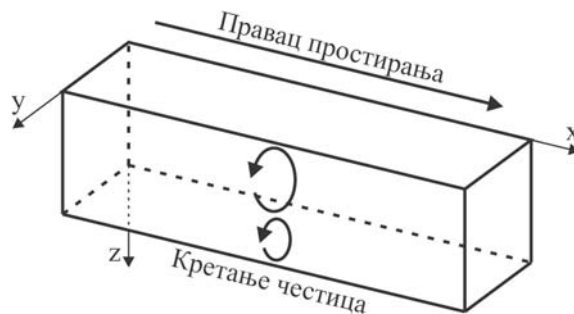
Један од основних проблема у динамичкој анализи интеракције структуре и тла јесте моделирање граница домена. Услед ограничености рачунарских ресурса и времена потребног за нумеричку анализу, неопходно је домен нумеричке интеграције свести на разумну меру. Ово се може постићи редуковањем домена нумеричке интеграције. Међутим, при редуковању домена долази до појаве рефлексije таласа од граница домена у динамичкој анализи, што може знатно да утиче на тачност нумеричких решења. Ова два супротстављена захтева могу бити испуњена увођењем граница које пропуштају таласе, односно апсорбују их тако да не долази до њихове рефлексije и стварања повратних таласа који не постоје у реалним условима. Због карактеристике апсорбовања таласа ове границе се називају апсорбујућим границама.

Простирање таласа у бесконачном полупростору је приказано на слици 6.1. Таласи који се овом приликом јављају се могу поделити на запреминске и површинске таласе [87].



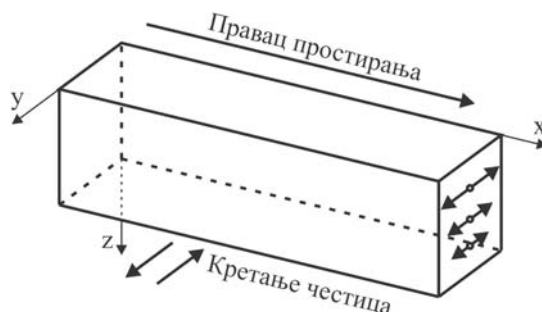
Слика 6.1 Еластични таласи у бесконачном медију

Запремински таласи се могу поделити на примарне или Р-таласе и секундарне или S-таласе. Под дејством Р-таласа долази до померања честица у правцу простирања таласа. Ови таласи се брже крећу кроз медиј, а познати су још и као компресиони или лонгитудинални таласи. С друге стране, S-таласи узрокују кретање честица у правцу управном на правац простирања таласа. Ови таласи су још познати као смичући или трансверзални таласи. Правац кретања честица под дејством секундарних таласа се може поделити на вертикалну компоненту (SV-талас) и хоризонталну компоненту (SH-талас).



Слика 6.2 Простирање котрљајућег (Рејлијевог) таласа

Површински таласи, као што им и име сугерише, су резултат интеракције запреминских таласа са слободном површином и могу бити подељени на котрљајуће или Рејлијеве таласе (слика 6.2) и попречне или Ловеове таласе (слика 6.3). Рејлијев талас може бити разматран као комбинација P и SV-таласа.



Слика 6.3 Простирање попречног (Ловеовог) таласа

У хомогеном полупростору се могу јавити само запремински и Рејлијеви таласи [76]. Међутим, уколико у тлу постоји више слојева различитих материјала, могу се јавити и попречни (Ловеови) таласи. Ови таласи се најчешће јављају у плитким слојевима тла који леже на материјалу веће крутости. Најчешће се састоје од SH-таласа који су заробљени између различитих слојева тла.

За апсорбовање нормалних и смичућих таласа Лајзмер и Кулмајер [87] су предложили вискозне границе. Ове границе у општем случају представљају три апсорбера: један у нормалном и два у тангенцијалном правцу у односу на границу модела [88]. Основна идеја при коришћењу ових граница јесте увођење пригушења које у потпуности апсорбује напоне настале услед дејства таласа на границу модела. Нормални и смичући напони на граници модела могу бити израчунати коришћењем следећих израза

$$\sigma = a\rho c_p \dot{u} \quad (6.1)$$

$$\tau = b\rho c_s \dot{v} \quad (6.2)$$

где су:  $\dot{u}$  и  $\dot{v}$  нормална и тангенцијална брзина честица,  $c_p$  и  $c_s$  су брзине примарног и секундарног таласа,  $\rho$  густина материјала, док су  $a$  и  $b$  бездимензионални параметри који у случају простирања таласа управно на границу модела имају вредност 1. У општем случају правац простирања таласа није управан на границу, па ефективне вредности фактора  $a$  и  $b$  за случај изотропних материјала могу бити одређене минимизацијом односа енергија рефлектованог и долазног таласа [89] према:

$$a = \frac{8}{15\pi} (5 + 2S - 2S^2) \quad (6.3)$$

$$b = \frac{8}{15\pi} (3 + 2S) \quad (6.4)$$

Брзине примарног и секундарног таласа су функције еластичних параметара материјала и могу бити израчунате према:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (6.5)$$

$$c_p = \frac{1}{S} V_s \quad (6.6)$$

где  $G$  представља модул смицања материјала, а величина  $S$  је одређена на основу Поасоновог коефицијента  $\nu$  у складу са изразом:

$$S^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (6.7)$$

Модул смицања материјала  $G$  може бити одређен на основу модула еластичности материјала и Поасоновог коефицијента као:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.8)$$

Динамичка једначина равнотеже у општем случају има облик (4.1) па је при имплементацији вискозних граница у програм за нумеричку анализу неопходно модификовати матрицу пригушења у складу са изразом:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + \mathbf{D}_V \quad (6.9)$$

где је  $\mathbf{D}$  матрица пригушења дефинисана једначином (4.67) или (4.68), док је  $\mathbf{D}_V$  матрица пригушења која представља допринос вискозних граница и израчуната је према:

$$\mathbf{D}_V = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{D}_C \mathbf{H} dV \quad (6.10)$$

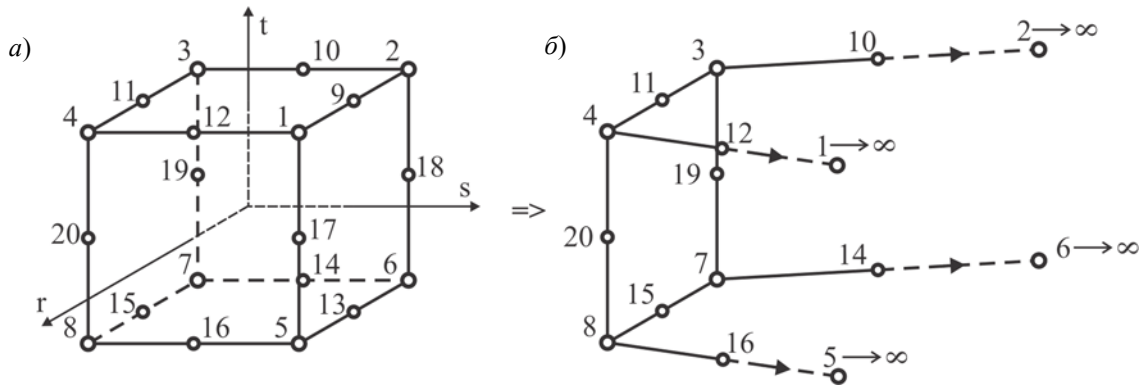
У претходној једначини  $\mathbf{H}$  представља матрицу интерполационих функција дефинисану једначином (4.65), док је  $\mathbf{D}_C$  матрица вискозног пригушења формирана у складу са изразима (6.1) и (6.2) и у општем тродимензионалном случају има облик:

$$\mathbf{D}_C = \rho \begin{bmatrix} ac_p & 0 & 0 \\ 0 & ac_s & 0 \\ 0 & 0 & bc_s \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

## 6.2 Апсорбујући бесконачни елементи

Појам бесконачних елемената је први пут уведен од стране Зенкијевича [90] како би се превазишао проблем рефлексије таласа од граница домена у динамичкој анализи интеракције структуре и тла. За ову врсту граница користе се коначни елементи који имају стандардне интерполационе функцијаме за померања [33] уз увођење нових функција за мапирање које се користе за интерполацију координата [90] у овим елементима. Употреба ових функција омогућује да границе коначног елемента које се налазе окренуте ка бесконачном полупростору теоријски имају координате које су бесконачно далеко од граница модела. На овај начин се

коришћењем функција мапирања добијају бесконачни елементи који су приказани на слици 6.4 за случај тродимензионалних елементата са међучворовима.



Слика 6.4 Тродимензионални бесконачни елемент

Померања у елементу се, како је то раније речено, израчунавају на уобичајени начин:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{U} \tag{6.12}$$

где  $\mathbf{H}$  представља матрицу интерполационих функција, док  $\mathbf{U}$  представља вектор чворних померања. Како су чворови коначног елемента на спољашњој граници модела теоријски у бесконачности вредности интерполационих функција на овим границама (случај  $s=1$  на слици 6.4) имају вредности једнаке нули [89], односно важи:

$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{12} + g_{17}) = 0 \\ h_2 &= g_2 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{10} + g_{18}) = 0 \\ h_3 &= g_3 - \frac{1}{2}(g_{10} + g_{11} + g_{19}) \neq 0 \\ h_4 &= g_2 - \frac{1}{2}(g_9 + g_{10} + g_{18}) \neq 0 \\ h_5 &= g_5 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{16} + g_{17}) = 0 \\ h_6 &= g_6 - \frac{1}{2}(g_{13} + g_{14} + g_{18}) = 0 \\ h_7 &= g_7 - \frac{1}{2}(g_{14} + g_{15} + g_{19}) \neq 0 \\ h_8 &= g_4 - \frac{1}{2}(g_{11} + g_{12} + g_{20}) \neq 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

$$h_k = g_k \quad \text{за } k = 9, \dots, 20 \tag{6.14}$$

$$h_9 = h_{13} = h_{17} = h_{18} = 0 \tag{6.15}$$

Функције  $g_i$  су израчунате према [33] коришћењем следећих једнакости:

$$g_i = G(r, r_i)G(s, s_i)G(t, t_i) \tag{6.16}$$

$$G(\beta, \beta_i) = \frac{1}{2}(1 + \beta_i \beta) \quad \text{за} \quad \beta_i = \pm 1 \quad \beta = r, s, t \quad (6.17)$$

$$G(\beta, \beta_i) = 1 - \beta^2 \quad \text{за} \quad \beta_i = 0 \quad (6.18)$$

За интерполацију координата коначног елемента који представља бесконачну границу, приказаног на слици 6.4 уводе се функције једно-димензионог мапирања. Интерполација координата унутар овог коначног елемента, слично једначини (6.12) користи се једначина:

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}\mathbf{X} \quad (6.19)$$

где је  $\mathbf{N}$  матрица која садржи функције мапирања, док је  $\mathbf{X}$  вектор координата чворова. Потребно је да функције мапирања испуне услов да су вредности координата на бесконачној граници (за случај  $s=+1$  приказан на слици 6.4) једнаке бесконачности [89]. Ове функције могу бити формиране применом интерполационих функција, тако да у случају  $s = +1$  гласе:

$$n_i = h_i \frac{4}{(1-s)^2} \quad \text{за} \quad i = 1, \dots, 8 \quad (6.20)$$

$$n_i = h_i \frac{1}{(1-s)^2} \quad \text{за} \quad i = 9, \dots, 20 \quad (6.21)$$

Уведене функције мапирања за интерполацију координата се користе само при израчунавању Јакобијана трансформације:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Имплементацијом апсорбујућих граница у програм ПАК омогућена је динамичка анализа интеракције структуре и тла коришћењем редукованог домена интеграције, при чему неће доћи до појаве рефлектованих таласа од граница домена. Другим речима, омогућена је динамичка анализа интеракције структуре и тла са смањеном величином модела без појаве рефлектованих таласа од граница модела, члиме се смањују потребни ресурси рачунара и скраћује времена потребно за анализу.

### 6.3 Верификација вискозних граница модела

#### *Једнодимензионално простирање таласа*

Верификација апсорбујућих граница је спроведена на примеру нумеричке симулације једнодимензионалног простирања таласа кроз тло чије решење је доступно у литератури [91, 92].

За анализу проблема је креиран модел коначних елемената димензија 10x0.25m, дискретизован са 50 коначних елемената са међучворовима, приказан на слици 6.5.

Оптерећење је задато коришћењем импулсне силе која изазива померање горње границе модела у вертикалном правцу за вредност  $1 \cdot 10^{-3}$  m. Задати гранични услови дозвољавају само вертикална померања чворова, док су за чворове на доњој граници модела коришћена два типа граничних услова: у првом случају су потпуно фиксирани чворови, док су у другом случају коришћење апсорбујуће границе. Геометрија и модел коначних елемената са задатим граничним условима и оптерећењем су приказани на слици 6.5.

За анализу проблема коришћењем линеарно еластичног материјала, могуће је одредити аналитичко решење [93]. Брзина примарног таласа који се простире кроз неку средину зависи од њене крутости и густине материјала и према [87, 94] може бити израчуната према:

$$E_{oed} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.23)$$

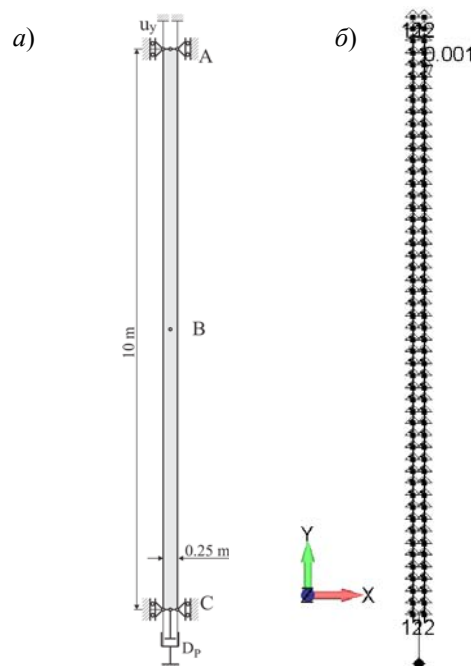
$$V_p = \sqrt{\frac{E_{oed}}{\rho}} \quad (6.24)$$

Карактеристике материјала коришћене у анализи простирања таласа су приказане у табели 6.1.

Табела 6.1 Материјалне константе за анализу вискозних граничних услова

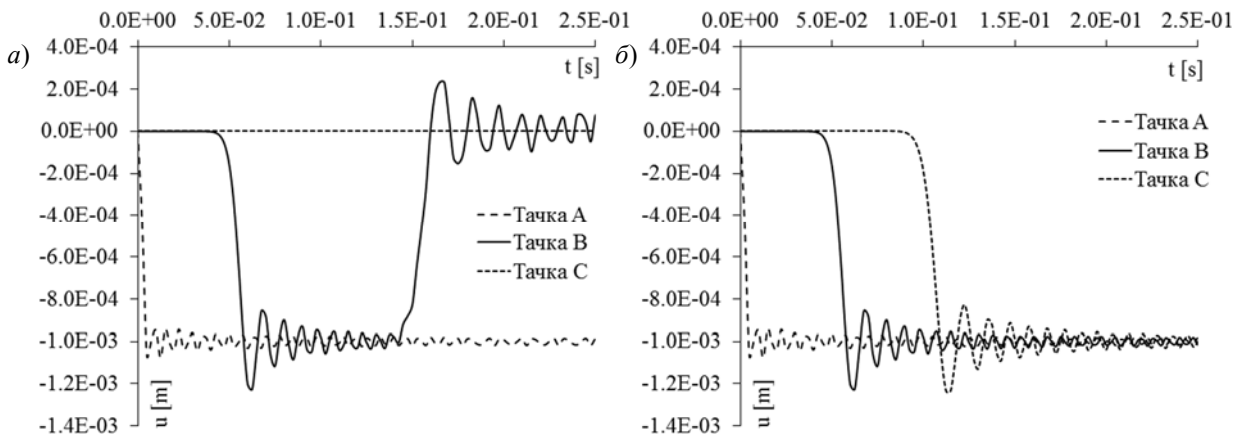
Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	$E$	$18.0 \times 10^3$ kN/m <sup>2</sup>
Густина материјала	$\rho$	2.04 t/m <sup>3</sup>
Гравитационо убрзање	$g$	9.81 m/s <sup>2</sup>
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.2

Применом једначина (6.23) и (6.24) се може израчунати брзина примарног таласа и за карактеристике материјала дате у табели износи  $V_p = 99$  m/s. На основу димензија модела следи да је потребно 0.05 s да талас стигне до тачке В на моделу, док до доње границе модела талас путује 0.1 s.



Слика 6.5 Модел за анализу вискозних граница

Резултати симулације простирања таласа за случај коришћења оба типа граница су приказани на слици 6.6. На слици 6.6а се види да померања тачака А и В одговарају задатим вредностима, док је померање тачке С једнако нули. До померања тачке В долази након 0.05 s што одговара аналитичком решењу. Након рефлектовања од доње границе модела талас почиње да се креће у супротном смеру и поново пролази кроз тачку В после 0.15 s. Након тога талас се враћа до горње границе модела, одбија се од површине и процес се понавља на исти начин.



Слика 6.6 Вертикална померања модела са крутим и апсорбујућим границама

У случају када се користи апсорбујућа граница, што је приказано на слици 6.6б, талас након проласка кроз тачку В стиже до доње границе модела (тачка С) након 0.1 s. У том тренутку граница С почиње да се креће у вертикалном правцу и апсорбује енергију таласа, па не долази до његовог рефлектовања. Овакво понашање одговара случају простирања таласа кроз бесконачни модел, тј. апсорбујући елемент има карактеристику бесконачног полупростора.

Поред приказаног примера коришћења једнодимензионалне апсорбујуће границе, могућа је њена примена и у општем, тродимензионалном случају простирања таласа, као што је приказано у теоријским основама ових елемената. Употреба ових граница је могућа и у случају коришћења нелинеарних материјалних модела тла описаних у поглављу 3.

## 7 СТАБИЛНОСТ НАСУТИХ БРАНА

### 7.1 Стабилност бране и узроци њеног рушења

Рушење или лом бране представља догађај при коме брана престаје да врши функцију задржавања воде у акумулацији па долази до неконтролисаног ослобађања воде. На основу тога, сигурност бране представља меру отпора против неконтролисаног изливања воде из акумулације. Механизми могућег рушења бране зависе од врсте бране, односно њене конструкције и материјала од којих је изграђена. Према материјалу од кога је изграђена и конструктивном систему, бране се могу поделити на:

- насуте бране,
- бетонске бране,
- зидане бране,
- остале бране.

Како је предмет ове тезе анализа стабилности насутих брана, у наставку ће бити речи само о анализи стабилности ове врсте брана.

До рушења насутих брана не долази тренутно нити у потпуности као што се често сматра приликом анализе ударног таласа насталог ломом бране. Зависно од висине бране, нивоа воде у акумулацији, материјала од којих је брана саграђена и слично, време потребно да материјал насуте бране довољно еродира мери се минутима или чак сатима.

Процена сигурности мора јасно идентификовати све потенцијалне механизме рушења и неопходно је спровести одговарајуће анализе како би се стабилност бране гарантовала. Насута брана се сматра сигурном уколико анализе потврде да неће доћи до клизања њених косина, прекорачења чврстоће конструкције бране или темеља, испирања и изношења материјала или било којег другог механизма лома [95, 96].

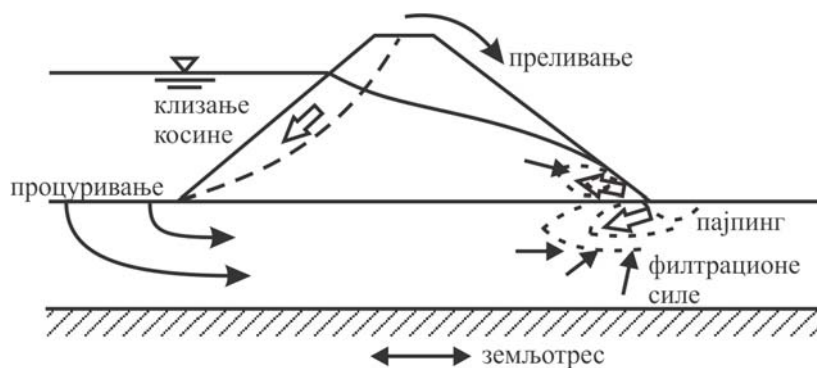
Могући узроци рушења насутих брана су:

- екстремни природни утицаји (поплаве, земљотреси, нео тектонска померања, таласи узроковани клизиштима и слично),
- деградација материјала бране или темеља (испирање материјала из тела или темеља бране, корозија стенских анкера и слично),
- квар опреме (квар дренажне опреме, квар затварача),
- екстремни утицаји које проузрокује човек (експлозије и слично).

Без обзира што су наведени узроци рушења брана углавном последица природних процеса, готово увек, главну одговорност за рушења брана носи човек (лоша конструкција, лоше одржавање).

Насуте бране нису пројектоване да се одупру ерозији услед преливања воде преко круне бране, па њихово рушење са најтежим последицама настаја управо услед ове појаве. Међутим, рушење насутих брана као последице преливања преко круне бране није предмет ове анализе.





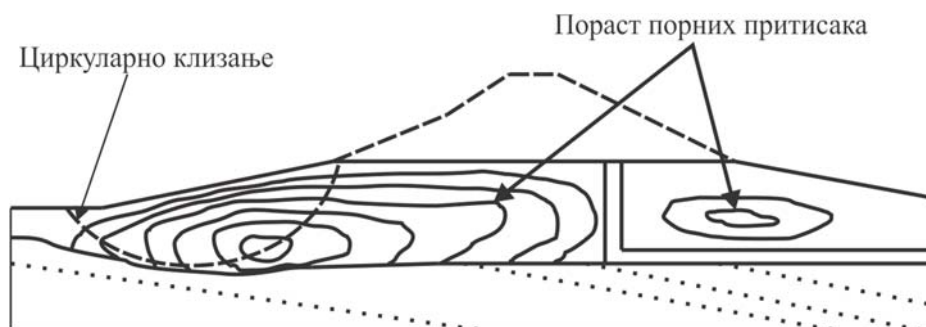
Слика 7.1 Механизми рушења насуте бране

Најчешћи механизми рушења насутих брана [97] су шематски приказани на слици 7.1 и према животном веку бране се деле на рушења која настају:

- током градње бране
  - повећање порних притисака током градње објекта,
  - редуковање смичуће чврстоће материјала бране;
- по завршетку градње бране
  - хидраулички лом, унутрашња ерозија, пајпинг,
  - заостали порни притисци услед наглог пражњења акумулације,
  - редуковање смичуће чврстоће услед дејства временских прилика и бубрења,
  - слегање и настајање прлина,
  - сеизмичко оптерећење.

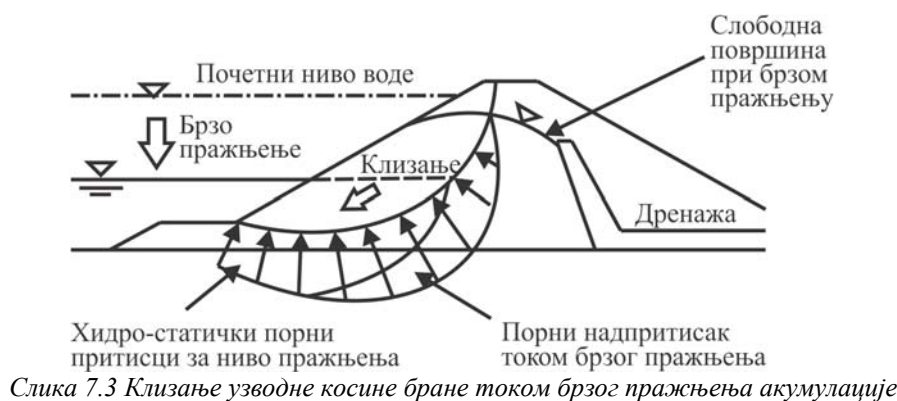
### Клизање косина услед повећања порних притисака

Нагло повећање порних притисака флуида заробљеног у телу бране током процеса изградње као и заостали порни притисци услед брзог пражњења акумулације могу узроковати смањење смичуће чврстоће материјала насуте бране, што може довести до клизања косина, односно до рушења бране, као што је шематски приказано на слици 7.2.



Слика 7.2 Клизање косине услед повећања порних притисака

Током процеса брзог пражњења акумулације, услед ограничене пропусности материјала тела насуте бране, део воде остаје „заробљен“ што може изазвати смањење ефективних напона на границама зрна у узводној косини бране, што за последицу има смањење смичуће чврстоће материјала и клизање ове косине (слика 7.3).

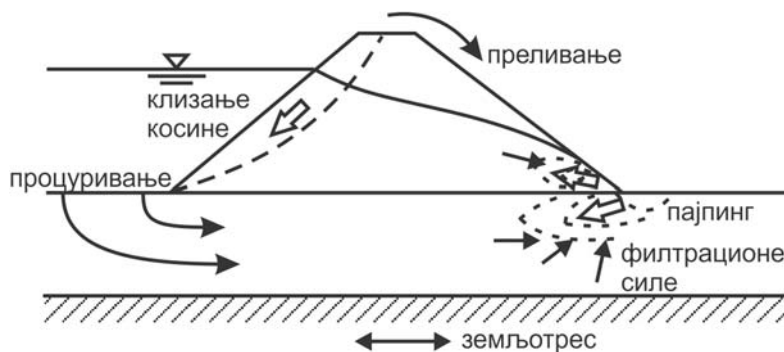


Слика 7.3 Клизање узводне косине бране током брзог пражњења акумулације

### Процуривање воде кроз тело и фундамент бране и настајање хидрауличког лома

Услед струјања воде кроз тело и фундамент бране као последица вискозности воде јављају се филтрационе силе које делују на скелет тла. Уколико су ове силе довољно велике у односу на силе проузроковане ефективним напонима, долази до испирања честица тла и развоја прогресивне ерозије, познатог још и као пајпинг. Шематски приказ процуривања кроз фундамент бране је приказан на слици 7.4.

У случају струјања воде кроз тело и фундамент бране, филтрационе силе су нарочито изражене у подножју низводне косине где услед веће концентрације струјница долази до повећања хидрауличких градијената, што узрокује смањење ефективних напона, а тиме и смањење смичуће чврстоће материјала.



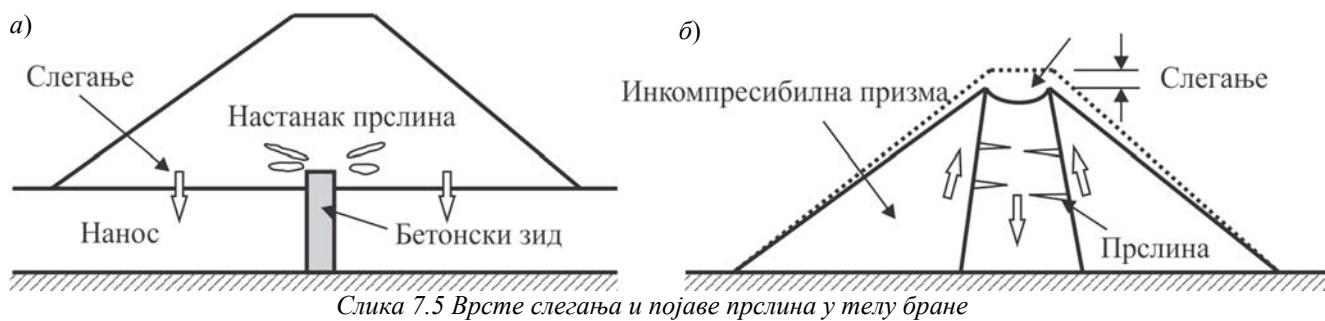
Слика 7.4 Струјање кроз фундамент бране

Појава већих вредност градијената представља могућност за настајање унутрашње ерозије и пајпинг, па је неопходно да се на овај механизам оштећења утиче у процесу пројектовања бране одабиром одговарајућих материјала за израду тела бране.

### Слегања тела бране

Као последица дејства оптерећења и различитих крутости материјала уграђених у тело бране, долази до слегања у појединим зонама ове конструкције. Слегање тла може изазвати појаву прлина у телу и фундаменту бране.

На слици 7.5 је приказан случај различитих крутости материјала у појединим зонама конструкције: (а) већа крутост средишњег дела фундамента бране, што може довести до настајања унутрашњих прлина; (б) већа крутост узводне и низводне призме у односу на језгро бране што може узроковати мање вредности вертикалног напона у језгру услед чега може доћи до појаве прлина у језгру насуте бране.



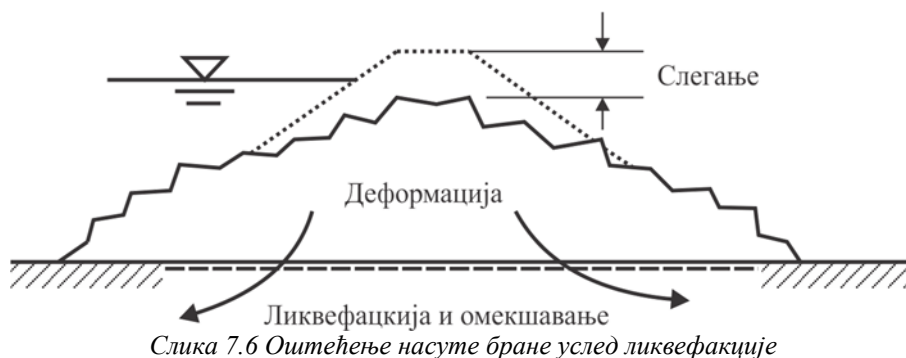
Слика 7.5 Врсте слегања и појаве прелина у телу бране

Применом нумеричких метода развијених у оквиру ове тезе могу бити анализирани механизми потенцијалних оштећења насутих брана па се њихова потенцијална појава може предупредити у фази пројектовања објекта.

### Оштећење услед дејства сеизмичких оптерећења

Оштећења насутих брана као последице дејства земљотреса се могу поделити у две групе:

- оштећења настала услед ликвифације или омекшања фундамента бране (слика 7.6),
- оштећења настала услед клизања косина бране (слика 7.7).



Слика 7.6 Оштећење насуте бране услед ликвифације

У првом случају, услед дејства сеизмичког убрзања, долази до циклочног померања тла, што узрокује повећање порних притиска и смањења ефективних напона на границама зрна, услед чега долази до превазилажења смичуће чврстоће материјала. Ово проузрокује омекшавање и пропадање фундамента, што изазива и вертикална померања тела бране. Овакве деформације могу имати катастрофалне последице по објекат и у великом броју случајева доводе до рушења насуте бране.



Слика 7.7 Оштећење тела насуте бране на чврстом фундаменту

Применом алгоритама за анализу спрегнутог понашања тла изложеног дејству статичких и динамичких оптерећења, развијених у оквиру ове тезе, могуће је анализирати ове механизме оштећења насуте бране.

## 7.2 Оптерећење бране

Основна подела оптерећења којима су изложене бране може бити извршена на статичка и динамичка. Статичка оптерећења не мењају свој интензитет и карактер или га мењају веома споро у односу на најнижи период сопственог осциловања бране. Овој врсти оптерећења брана се одупире својом крутошћу.

Динамичка оптерећења су променљива током времена. С обзиром на брзину промене ове врсте оптерећења, поред крутости конструкције, значајан утицај на понашање имају инерција и пригушење конструкције.

Неке врсте оптерећења, као што је дејство воде из акумулације, дејство леда, дејство узгона, могу имати и статичку и динамичку компоненту оптерећења.

### 7.2.1 Сопствена тежина

Избор материјала који могу бити коришћени за израду насутих брана је веома је широк. Из тог разлога неопходно је проценити запреминску тежину одабраног материјала узимајући у обзир жељени степен збијености. Под материјалом тла који се користи у изради насутих брана се сматрају и дробљени и сабијени чврсти материјали, попут неких стена.

### 7.2.2 Дејство акумулације на брану

С обзиром да специфична тежина воде незнатно варира у функцији температуре, при анализама се обично усваја  $\gamma_w=10 \text{ kN/m}^3$ . Хидростатичко дејство воде на брану се саопштава у виду притиска на оквашену површину који расте линеарно са повећањем дубине воде. Ово оптерећење се такође наноси и на све оквашене површине стенске масе. Утицај доње воде се такође наноси као хидростатички притисак на све површине које кваси доња вода. У случају када је висина доње воде испод 20% висине бране, њено дејство се најчешће занемарује. Ово занемаривање не важи при анализи утицаја доње воде на промену узгона.

Дејство наноса насталог вишегодишњим таложењем у акумулацији се обично занемарује уколико његова висина не прелази једну четвртину висине бране. Уколико је висина наноса већа, његово дејство се узима у обзир у облику оптерећења еквивалентног флуида. Присуство наноса у подножју бране може да делује као узводна преграда и да тако смањи вредност узгона на том месту. Ова редукација узгона се обично не примењује при анализи стабилности под дејством сеизмичког оптерећења уколико постоји могућност за појаву ликвификације [98].

Оптерећење дејством леда на брану настаје као последица термичког ширења леда и дејства ветра преко нагомиланог леда. Оптерећење настало термичким ширењем леда зависи од промене температуре, дебљине, коефицијента ширења, модула еластичности и тврдоће леда. Оптерећење услед дејства ветра зависи од величине и облика изложених области, храпавости површине леда, брзине и правца ветра.

### 7.2.3 Сеизмичко оптерећење

Приликом дејства сеизмичког оптерећења, поред померања бране и стенске масе, долази до померања и водене масе у акумулацији. Без обзира на то што је померање тла у контакту са браном практично исто као и померање дна акумулације, различите карактеристике материјала тла и воде доводе до различитих померања ове две фазе те појаве додатних, хидродинамичких притисака на контактної површини. Интеракција воде и бране изазива фреквентно зависне хидродинамичке притиске који делују као: додатна сила, додатна маса и додатно пригушење. Додатна маса повећава период осциловања бране што путем спектра одговора мења и сеизмичку силу. Додатно пригушење је последица просторног зрачења таласа кроз воду као и упијања или одбијања истих од дна акумулације. Оно смањује амплитуду осциловања конструкције, што је посебно изражено при вишим модовима осциловања.

Оптерећење узроковано дејством земљотреса се усваја након анализе убрзања која се очекују на пројектној локацији и која су одређена геологијом саме локације, близином већих тектонских раседа као и подацима о забележеним земљотресима у региону. У случају непостојања детаљне сеизмичке студије за пројектну локацију, могу се користити мапе за категоризацију сеизмички ризичних подручја. За ову анализу су пожељнији подаци о локалној сеизмичности добијени детаљним геолошким, сеизмолошким, геофизичким и геотехничким истраживањима.

Поред земљотреса изазваних тектонским поремећајима Земљине коре, могућа је и појава лакших потреса изазваних наглим пуњењем или пражњењем акумулације. Ефекти ових потреса су најчешће слабији од тектонских потреса, тако да се обично занемарују за бране ниже од 75m.

### 7.2.4 Комбинације оптерећења

У зависности од вероватноће настанка, у општем случају се разматрају три основне комбинације оптерећења и то:

- нормално,
- ванредно и
- изузетно оптерећење.

Под нормалним оптерећењем се сматра збир ефеката свих оптерећења која могу деловати на конструкцију током нормалног функционисања бране.

Ванредно оптерећење представља утицаје који настају током поплавног периода, док се под изузетним оптерећењем подразумева комбинација нормалног оптерећења и максимално вероватног земљотреса на пројектној локацији.

## 7.3 Одређивање степена сигурности бране

Степен сигурности неке конструкције се може дефинисати као мера резерве сигурности у односу на гранично стање при коме долази до лома или неприхватљивих вредности померања.

Ова дефиниција би била прецизна када би експлоатациони услови и гранично стање били потпуно познати.

Како је свака инжењерска процена оптерећена бројним неизвесностима, степен сигурности јесте и одређена мера резерве у односу на познавање и могућност квантификације свих релевантних својстава и процеса. Из тог разлога, приликом избора минималног степена сигурности, процену треба заснивати са извесним степеном уздржаности. Уколико се узроци несигурности могу елиминисати, мање вредности степена сигурности могу бити усвојене. Фактори који утичу на избор минималних степена сигурности су:

- последице евентуалног лома (по људске животе, имовину),
- степен поверења у расположиве инжењерске податке (лабораторијска и теренска испитивања, степен контроле приликом изградње и слично),
- нивои пажње и детаљност истраживања и анализе (познавање услова оптерећења, разумевање интеракције конструкције и стенске масе на локацији објекта, примењена методологија прорачуна и анализе, ниво поједностављивања и претпоставки и слично),
- претходна искуства.

На основу уобичајене праксе и правилника различитих земаља, анализом дефиниција степена сигурности, критеријума за дефинисање чврстоће на смицање, материјалних модела, комбинација оптерећења, као и других међусобно повезаних параметара сигурности брана, може се закључити да постоји велика разлика у вредностима минимално захтеваних степена сигурности насутих брана. Из овога следи да било какво прописивање минимално захтеваних степена сигурности без детаљног објашњења коришћених претпоставки и методологије анализе и поузданости улазних података, може довести до погрешних закључака.

Дакле, прописивање нижих вредности степена сигурности је оправдано уколико је могуће прецизније одређивање улазних параметара за детаљну и свеобухватну напонско-деформацијску анализу. Ово значи да уколико је степен сигурности неке бране већи у односу на другу брану, не мора се подразумевати да је брана са већим степеном сигурности и сигурнија, већ је битно како се до степена сигурности у конкретном случају дошло. Јасно је да анализа стабилности бране применом методе коначних елемената не може решити проблем лоше процене података о материјалу. Истовремено, прецизно одређени подаци о материјалу не могу решити проблем неодговарајуће процене оптерећења.

Минималне препоручене вредности степена сигурности насутих брана за различите врсте анализа према [99, 100] су сумиране у табели 7.1.

Табела 7.1 Минималне препоручене вредности степени сигурности насутих брана

Тип анализе	Захтевани минимални степен сигурности	Косина
Завршетак изградње	1.3	Узводна и низводна
Дугорочни степен сигурности	1.5	Низводна
Максимална висина воде у акумулацији	1.4	Низводна
Брзо пражњење акумулације	1.1-1.3	Узводна
Анализа дејства земљотреса	1.0	Узводна и низводна

За одређивање степена сигурности насутих брана најчешће се користе две методе:

- Прва метода представља постепено повећавање оптерећења до номиналног, а затим и преко номиналног (*енг. Gravity Increase method*). Применом ове методе, степен сигурности бране представља однос оптерећења при рушењу и номиналног оптерећења бране.
- Међутим, у анализи проблема механике тла није оправдано повећавати оптерећења преко номиналних вредности (дејство гравитације на пример). Из тог разлога се за одређивање степена сигурности у механици тла чешће користи метода редуковања смичуће чврстоће (*енг. Strength Reduction Method*). Применом ове методе, смичућа чврстоћа материјала се постепено редукује све до губитка стабилности објекта [101, 102]. Максимална вредност фактора редуковања смичуће чврстоће при којој је конструкција стабилна представља степен сигурности објекта.

### 7.3.1 Анализа стабилности бране применом методе редуковања смичуће чврстоће

Глобални степен сигурности објекта, применом методе редуковања смичуће чврстоће, као што је претходно истакнуто, представља однос смичуће чврстоће материјала и смичућих напона у материјалу [103, 104]. Другим речима, до губитка стабилности бране ће доћи у случају када смичући напони у материјалу  $\tau$  превазиђу вредност смичуће чврстоће материјала  $\tau_f$ , што може бити написано у облику:

$$F = \frac{\tau_f}{\tau} \quad (7.1)$$

При нумеричкој анализи стабилности насуте бране, најпре је неопходно одредити почетно напонско стање укључујући сва оптерећења која делују на брану. У том случају је вредност фактора редуковања смичуће чврстоће  $F = 1$  што одговара номиналној смичућој чврстоћи материјала бране. Фактор редуковања се постепено повећава, чиме се смањује смичућа чврстоћа материјала, све док не дође до губитка стабилности објекта. Губитак стабилности у нумеричким прорачунима представља немогућност постизања конвергенције решења у оквиру унапред задатих критеријума или се манифестује наглим повећањем прираштаја померања [105]. Глобални степен сигурности бране представља максимална вредност фактора редуковања смичуће чврстоће за који је објекат стабилан, односно за који постоји конвергенција нумеричких решења.

Као главне предности овог начина одређивања степена сигурности се могу издвојити:

- површ по којој долази до потенцијалног клизања косина услед губитка стабилности се одређује аутоматски, док се при коришћењу аналитичких метода њен облик усваја унапред,
- методу редуковања смичуће чврстоће је могуће примењивати за различите случајеве оптерећења, а не само за анализу дејства сопствене тежине,
- поље напона, деформација, померања и порних притисака се добијају аутоматски.

Треба напоменути да решења добијена применом методе редуковања смичуће чврстоће одговарају решењима добијеним применом традиционалних, аналитичких метода при коришћењу оптималног квалитета мреже коначних елемената. Другим речима, степен сигурности одређен применом ове методе зависи од квалитета мреже коначних елемената [106], па се коришћењем веће густине мреже у зонама модела где се очекује појава клизних површи, решења добијена применом ове методе приближавају аналитичким решењима.

Као што је раније речено, за прецизну напонско-деформацијску анализу насутих брана применом методе коначних елемената од кључног значаја је прецизно одређивање параметара материјалних модела коришћених при анализи. Поред ових параметара, неопходно је и прецизно одређивање Јанговог модула еластичности  $E$  и Поасоновог коефицијента  $\nu$ . Међутим, ове константе је готово немогуће прецизно одредити за материјал тла. Како константе  $E$  и  $\nu$  у највећој мери утичу на вредности померања при деформацијама у области еластичности, док је њихов утицај на понашање конструкције након појаве пластичних деформација мали, њихов утицај на степен сигурности је незнатан [105]. Из тог разлога, прецизно одређивање ових константи није од пресудног значаја у одређивању степена сигурности применом методе редуковања смичуће чврстоће.

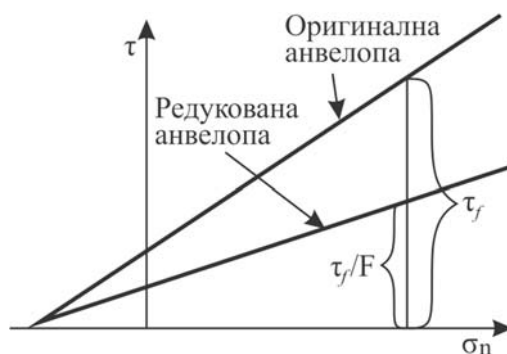
### 7.3.2 Линеарне површи течења при одређивању степена сигурности

#### 7.3.2.1 Мор-Кулонов модел

Смичући напон при настанку пластичних деформација за случај примене Мор-Кулоновог материјалног модела је описан једначином (3.57), док је површ течења овог модела применом инваријанти напона дефинисана једначином (3.59). Редукована смичућа чврстоћа овог модела може бити описана једначином:

$$\tau^{red} = \frac{\tau_f}{F} = \frac{c}{F} + \sigma \frac{\tan \phi}{F} \quad (7.2)$$

што је и шематски приказано на слици 7.8.



Слика 7.8 Редуковање анvelope Мор-Кулоновог модела

При одређивању степена сигурности бране неопходно је одредити максималну вредност фактора редуковања смичуће чврстоће  $F$  при којој је брана стабилна, односно за коју постоји конвергенција нумеричких решења у оквиру унапред задате толеранције. У случају превазилажења стабилности бране доћи ће до лома у материјалу, односно доћи ће до клизања



неке од косина, што се у нумеричким прорачунима манифестује дивергенцијом решења. Анализом једначине (7.2) јасно је да је при одређивању смичуће чврстоће применом овог модела неопходно одредити минималне вредности материјалних константи  $c$  и  $\phi$  у складу са:

$$c_r = \frac{c}{F}; \phi_r = \arctan\left(\frac{\tan \phi}{F}\right) \quad (7.3)$$

за које је задовољен услов стабилности, где су  $c_r$  и  $\phi_r$  редуковане вредности материјалних константи  $c$  и  $\phi$ . Због чињенице да је одређивање степена сигурности применом методе редуковања смичуће чврстоће коришћењем овог материјалног модела прилично једноставно, Мор-Кулонов материјални модел се најчешће примењује у овој врсти анализа.

### 7.3.2.2 Дракер-Прагеров модел

Одређивање степена сигурности применом методе редуковања смичуће чврстоће коришћењем Дракер-Прагеровог материјалног модела може бити изведено по аналогiji са Мор-Кулоновим моделом. Материјалне константе за описивање редуковане површи течења Дракер-Прагеровог материјалног модела  $k_r$  и  $\alpha_r$  је могуће израчунати коришћењем веза дефинисаних у табели 3.4 употребом материјалних константи Мор-Кулоновог модела (7.3).

При одређивању степена сигурности применом методе редуковања смичуће чврстоће у пракси се често користи комбинација претходна два модела, где се за описивање површи течења користи Мор-Кулонова функција, док се за површ пластичног потенцијала користи једначина Дракер-Прагерове површи [105, 107].

Поступак одређивања степена сигурности применом методе редуковања смичуће чврстоће коришћењем модела са нелинеарном површи течења је нешто сложенији и представљен је у наставку.

### 7.3.3 Нелинеарне површи течења при одређивању степена сигурности

Поступак одређивања смичуће чврстоће при коришћењу материјалних модела са нелинеарним површима течења према [108] може бити подељен на следеће кораке:

- редуковање номиналне анvelope лома фактором  $F$ ,
- одређивање нових константи модела које описују редуковану анvelope,
- коришћење нових константи у поновљеној напонско-деформацијској анализи.

Овај поступак се понавља до достизања граничне стабилности објекта, односно док постоји конвергенција нумеричких решења. Максимална вредност фактора редуковања смичуће чврстоће за коју је испуњен услов стабилности представља степен сигурности објекта.

#### 7.3.3.1 Хук-Браунов модел

У случају примене Хук-Брауновог модела, веза између главних напона  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и смичућег напона на површи течења  $\tau$  је према [108] дефинисана једначином:

$$\tau_f = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{1 + am_b \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}}}{2 + am_b \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}} \quad (7.4)$$

Ефективни нормални напон који одговара смичућем напону на површи течења је дефинисан:

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \frac{am_b \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}}{2 + am_b \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}} \quad (7.5)$$

Величине  $\sigma_{ci}$ ,  $m_b$ ,  $s$  и  $a$  у изразима (7.4) и (7.5) представљају константе Хук-Брауновог материјалног модела и дефинисане су у поглављу 3.

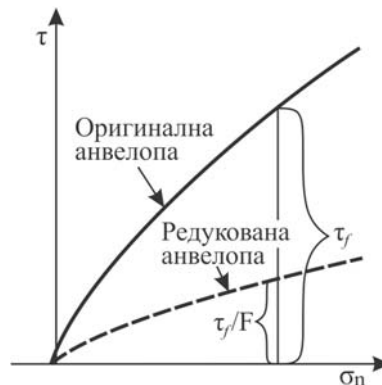
Редукована анвелопа лома Хук-Брауновог материјалног модела се добија редуковањем смичуће анвелопе дефинисане изразом (7.4) фактором редуковања смичуће чврстоће, према:

$$\tau^{red} = \frac{\tau_f}{F} = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{1 + am_b \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}}}{2 + am_b \left( m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^{a-1}} \cdot \frac{1}{F} \quad (7.6)$$

односно, коришћењем нових материјалних константи:

$$\tau^{red} = (\sigma_1 - \sigma_3) \frac{\sqrt{1 + a^{red} m_b^{red} \left( m_b^{red} \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}^{red}} + s^{red} \right)^{a^{red}-1}}}{2 + a^{red} m_b^{red} \left( m_b^{red} \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}^{red}} + s^{red} \right)^{a^{red}-1}} \quad (7.7)$$

Константе  $\sigma_{ci}^{red}$ ,  $m_b^{red}$ ,  $s^{red}$  и  $a^{red}$  у једначини (7.7) представљају параметре материјалног модела који описују нову, редуковану анвелопау Хук-Брауновог материјалног модела, што је шематски приказано на слици 7.9.



Слика 7.9 Редуковање анвелопе лома нелинеарних модела

Вредности материјалних константи које описују редуковану анвелопу лома се одређују такозваним фитовањем кривих, односно израчунавају се нове константе применом неке од метода за одређивање минималног одступања. Најпознатија међу њима је метода најмањих квадрата, при чему се одређују нови параметри материјалног модела који описују редуковану анвелопу уз критеријум да је грешка одступања двеју кривих минимална, што може бити записано једначином:

$$\varepsilon(\sigma_n) = (\tau^{apr} - \tau^{red})^2 \quad (7.8)$$

Редукована анвелоба овог модела и њена апроксимација се најчешће не поклапају у потпуности, као што је то приказано на слици 7.10, али је њихово одступање сведено на најмању меру.



Слика 7.10 Редукована и апроксимирана анвелоба лома нелинеарних модела

На исти начин могу бити израчунате и константе других материјалних модела са нелинеарним анвелобама (генерализовани Хук-Браун, Пан-Хадсон и други).

### 7.3.3.2 Максимовићев модел

Метода редуковања смичуће чврстоће применом модела Максимовића може бити спроведена по аналогији са применом ове методе коришћењем Мор-Кулоновог материјалног модела. Редукована анвелоба овог модела се може добити редуковањем смичућег напона на површи течења дефинисаног једначином (3.127) фактором редуковања смичуће чврстоће, што може бити представљено у облику:

$$\tau^{red} = \frac{\tau_f}{F} = \sigma \frac{\tan \phi(\sigma)}{F} \quad (7.9)$$

Применом једначине површи течења модела Максимовића (3.132), редукована анвелоба овог модела може бити представљена у облику:

$$\tau^{red} = \sigma \tan \left( \phi_B^{red} + \frac{\Delta \phi^{red}}{1 + \frac{\sigma}{p_N^{red}}} \right) \quad (7.10)$$

Редукована анвелопа модела (слика 7.9) је дефинисана новим константама  $\phi_B^{red}$ ,  $\Delta\phi^{red}$  и  $p_N^{red}$  које је потребно одредити. Одређивање материјалних константи којима је описана редукована анвелопа лома се врши применом метода за минимизацију грешке, што за случај примене методе најмањих квадрата може бити описано једначином:

$$\varepsilon(\sigma_n) = (\tau^{apr} - \tau^{red})^2. \quad (7.11)$$

Редукована анвелопа модела и њена апроксимација одговарају приказаним на слици 7.10.

### 7.3.3.3 Кем-Клеј модел

Површ течења Кем-Клеј материјалног модела је дефинисана једначином (3.183). Анализом једначине површи течења, уочава се да је смичућа чврстоћа материјала при истој вредности полупречника елипсе и исти нормални напона дефинисана нагибом линије критичног стања  $M$ . Нагиб линије критичног стања може бити израчунат коришћењем угла унутрашњег трења на основу једначине (3.184).

Из једначине површи течења (3.183) може се израчунати вредност девијатора напона на површи течења  $q_f$  за одговарајућу вредност средњег напона  $\sigma_m$  и одговарајући притисак преконсолидације  $p_o$  као:

$$q_f = M \sqrt{\sigma_m (p_o - \sigma_m)} \quad (7.12)$$

Како степен сигурности применом методе редуковања смичуће чврстоће представља однос смичућег напона на површи течења за номиналне карактеристике материјала и смичућег напона на редукованој анвелопи при којој долази до губитка стабилности, степен сигурности применом овог модела може бити представљен у облику:

$$F = \frac{q_f}{q} \quad (7.13)$$

По аналогiji са претходним материјалним моделима, смичућа чврстоћа материјала за редуковану анвелопу може бити израчуната у складу са изразом:

$$q_f^{red} = \frac{q_f}{F} \quad (7.14)$$

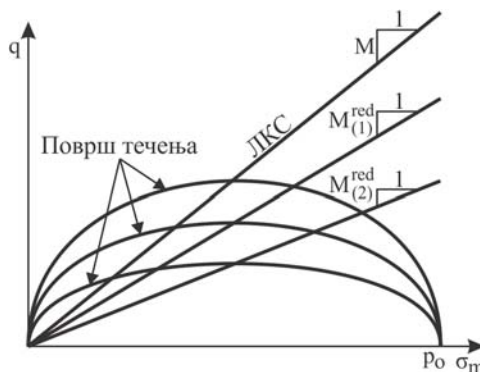
односно

$$q_f^{red} = M^{red} \sqrt{\sigma_m (p_o - \sigma_m)} \quad (7.15)$$

Из претходне једначине следи да се редукована анвелопа добија редуковањем нагиба линије критичног стања  $M$  у складу са изразом:

$$M^{red} = \frac{M}{F} \quad (7.16)$$

Редуковање нагиба линије критичног стања Кем-Клеј материјалног модела, односно редуковање смичуће чврстоће материјала применом овог модела шематски је приказано на слици 7.11.



Слика 7.11 Редуковање смичуће чврстоће Кем-Клеј модела

## 7.4 Критеријуми за оцену стабилности насутих брана

До губитка стабилности насутих брана долази услед превазилажења смичуће чврстоће материјала бране. У нумеричкој анализи стабилности косина применом методе редуковања смичуће чврстоће, најчешће се користе два критеријума:

- непостојање конвергенције и
- нагло повећање прираштаја померања.

Губитак стабилности у нумеричкој анализи одговара непостојања конвергенције решења, односно случају када није могуће наћи равнотежну конфигурацију и задовољити равнотежну једначину у оквиру задате толеранције и броја итерација.

Критеријум наглог повећања прираштаја померања јасно указује на појаву нестабилности, односно указује да је дошло до локализације пластичних деформација, што изазива нагли прираштај померања.

Од почетка процеса изградње до стабилног рада акумулације, на брану делују различита оптерећења. Са аспекта одржавања, интересантна су само оптерећења која делују након завршеног процеса изградње бране. Брана и њен фундамент трпе смичуће напрезање изазвано тежином насипа, колебањем нивоа акумулације са последичном филтрацијом и сеизмичким силама. До устаљене филтрације долази кад ниво воде у акумулацији има константан ниво дужи временски период, услед чега се кроз насип стабилизују линије zasiћења. Филтрационе силе које настају том приликом делују у низводном смеру и имају највећи утицај на низводну косину чија се стабилност у овом случају оптерећења и анализира.

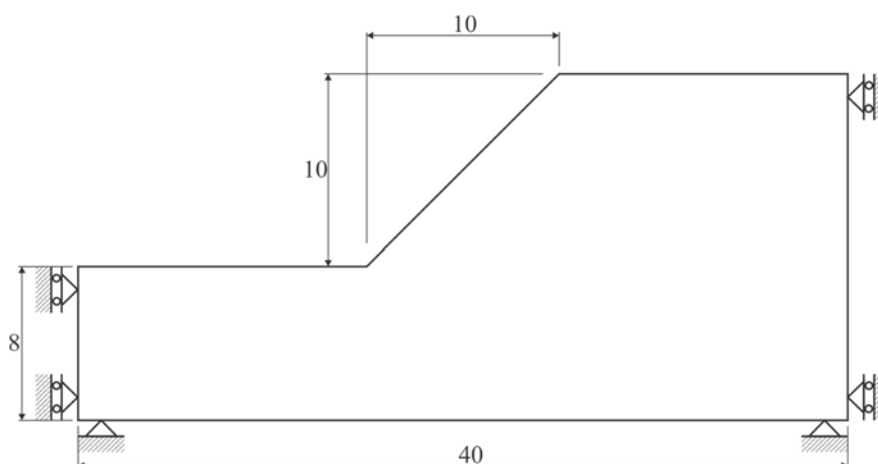
Порни притисци у телу бране су последица два дејства која се у пракси сматрају независним: гравитационог тока филтрације и промене запремине пора као последице промене оптерећења. Уколико се након постизања потпуног zasiћења материјала тла по завршеном процесу консолидације, акумулација нагло испразни тако да вода не стигне да истекне из пора, заробљена вода изазива порне притиске услед којих долази до смањења ефективних напона, а тиме и смањења смичуће чврстоће материјала.

## 7.5 Пример одређивања стабилности

Верификација методе редуковања смичуће чврстоће прилагођене и имплементиране у програм ПАК је извршена кроз два примера. Приказана је њена примена у анализе стабилности косине коришћењем Хук-Брауновог материјалног модела као и у анализи стабилности насуте бране применом Мор-Кулоновог материјалног модела. Решења добијена применом методе редуковања смичуће чврстоће су упоређена са резултатима добијеним применом метода граничних стања [109].

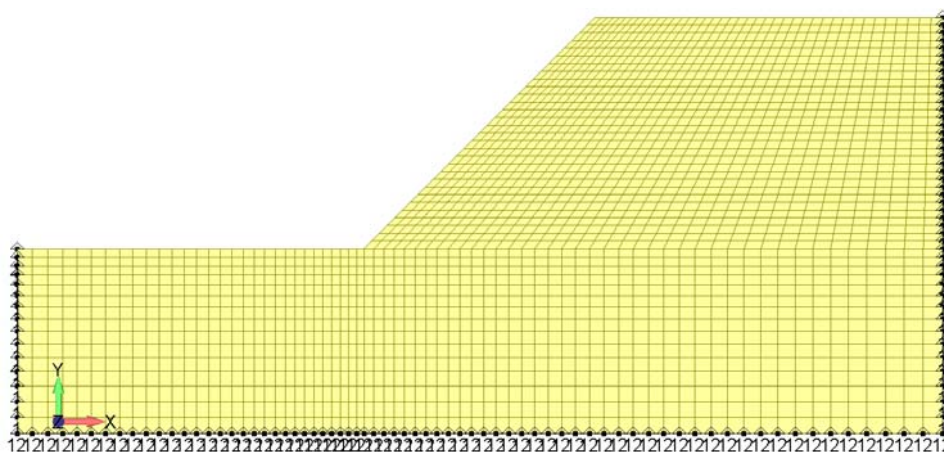
### *Стабилност косине применом Хук-Брауновог материјалног модела*

Анализирана је стабилност косине висине 10 метара, нагиба  $45^\circ$  чије су димензије и гранични услови приказани на слици 7.12, док су решења проблема су доступна у литератури [108, 110].



Слика 7.12 Геометрија модела косине

Модел је оптерећен сопственом тежином и садржи једну геотехничку средину. Састоји се од 2250 тродимензионалних осмочворних коначних елемената јединичне дебљине и са једним слојем елемената по дебљини модела. Анализирано је равно стање деформације што је остварено спречавањем померања у  $Z$  правцу. Изглед модела коначних елемената и коришћени гранични услови су приказани на слици 7.13.



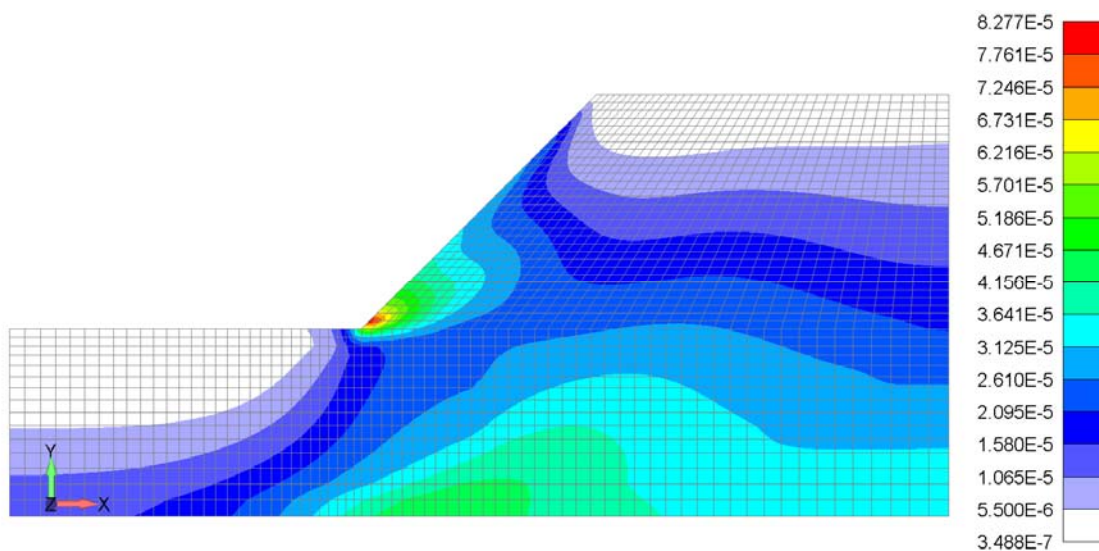
Слика 7.13 Модел косине и гранични услови

Коришћен је генерализовани Хук-Браунов материјални модел, са карактеристикама материјала приказаним у табели 7.2.

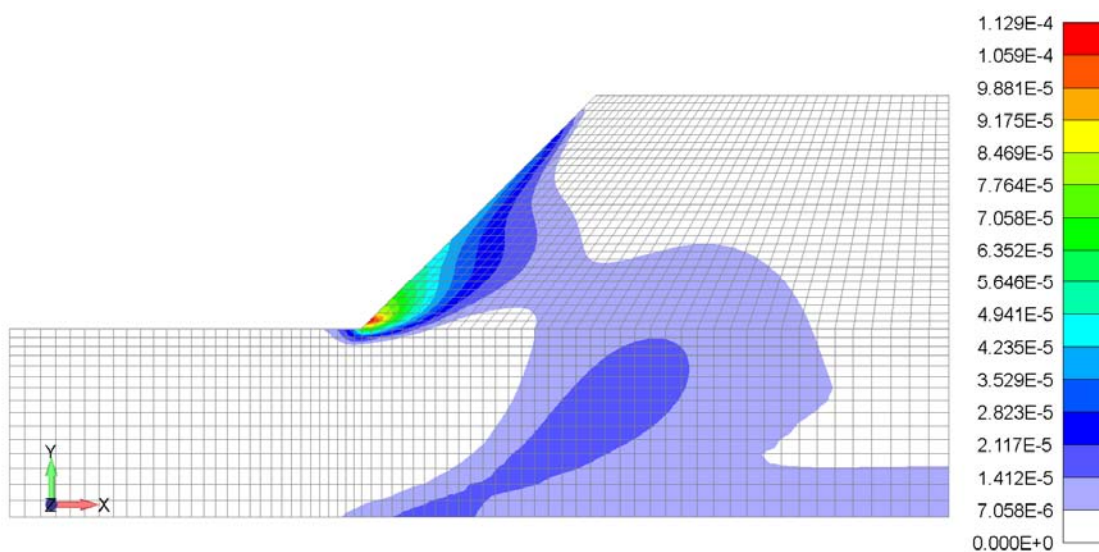
Табела 7.2 Карактеристике материјала модела косине

Назив параметра	Ознака	Вредност
Модул еластичности	$E$	$5.0 \times 10^6 \text{ MN/m}^2$
Поасонов коефицијент	$\nu$	0.3
Специфична тежина	$\gamma$	$25 \text{ kN/m}^3$
Једноосна притисна чврстоћа	$\sigma_{ci}$	$30.0 \text{ MN/m}^2$
Материјална константа	$m_b$	0.067
Материјална константа	$s$	$2.5 \times 10^{-5}$
Материјална константа	$a$	0.619

Резултати анализе стабилности косине су приказани на сликама 7.14 и 7.15. На слици 7.14 је приказано поље максималних смичућих деформација непосредно пре губитка стабилности, док је на слици 7.15 приказано поље пластичних деформација такође у тренутку пре рушења.



Слика 7.14 Поље максималне смичуће деформације



Слика 7.15 Поље пластичне деформације

Вредности степена сигурности косине одређене применом методе редуковања смичуће чврстоће су приказане заједно са резултатима добијеним применом метода граничног стања [109] у табели 7.3.

Табела 7.3 Степен сигурности косине

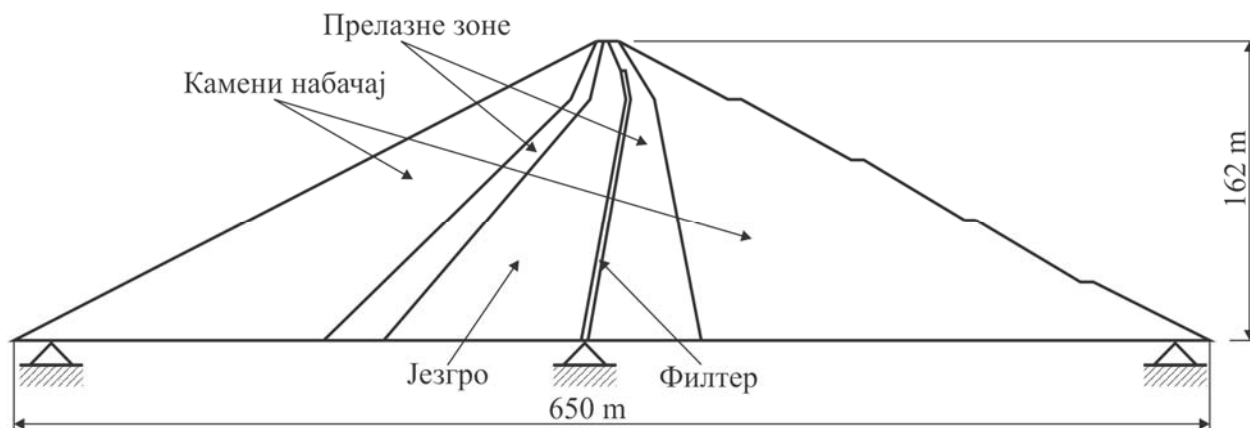
Метода	Степен сигурности
<i>Метода редуковања смичуће чврстоће (ПАК)</i>	
Генерализовани Хук-Браун	1.15
<i>Метода граничног стања (Limit equilibrium)</i>	
Бишопова метода	1.153
Спенсорова метода	1.152

Анализом резултата уочава се да су вредности степена сигурности добијене применом методе редуковања смичуће чврстоће веома блиске вредностима добијеним применом аналитичких метода.

Предности оваквог начина одређивања степена сигурности тродимензионалних проблема су огромне, као и случају када постоји више геотехничких средина у анализираном проблему, где је примена аналитичких метода готово немогућа без значајних упрошћења проблема.

### **Стабилност насуте бране применом Мор-Кулоновог материјалног модела**

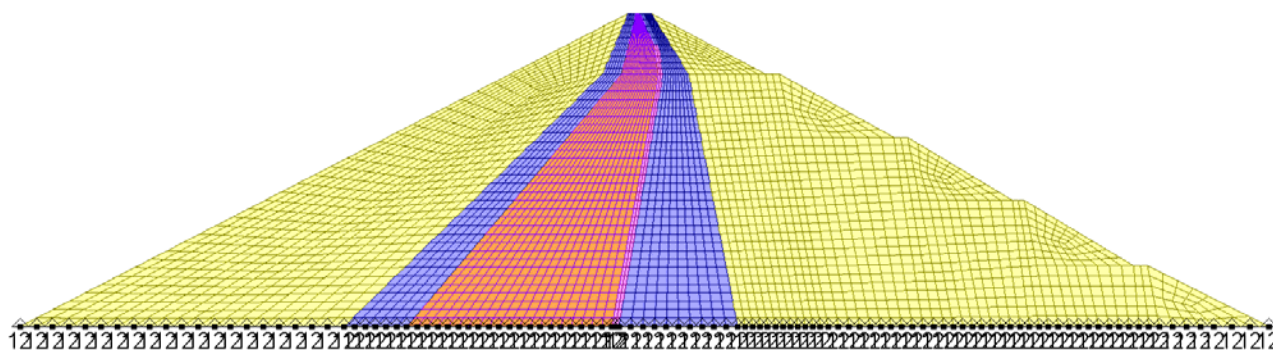
Верификација примене методе редуковања смичуће чврстоће коришћењем Мор-Кулоновог модела је извршена на примеру анализе стабилности насуте бране оптерећене сопственом тежином [78, 111]. Анализирана брана је висине 162 метара и ширине у основи 650 метара. Састоји се од четири геотехничке средине као што је приказано на слици 7.16.



Слика 7.16 Геометрија модела бране

Модел бране садржи 3318 тродимензионалних осмочворних коначних елемената са једним слојем елемената по дебљини модела. Коришћена је претпоставка равног стања деформације што је остварено ограничавањем померања у Z правцу. Изглед модела коначних елемената и коришћени гранични услови су приказани на слици 7.17.





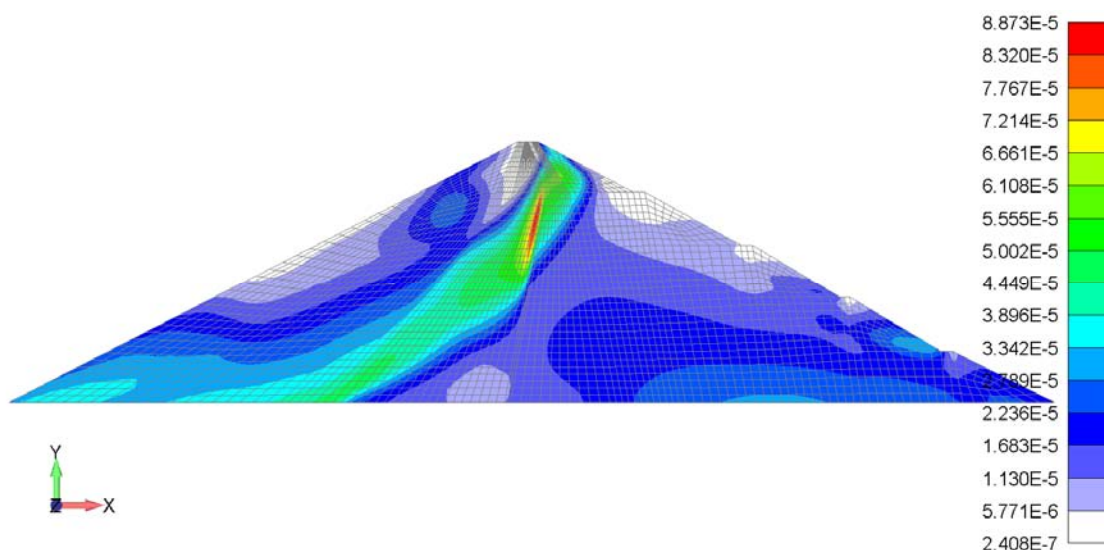
Слика 7.17 Модел насуте бране и гранични услови

Материјални параметри Мор-Кулоновог модела коришћени при анализи стабилности насуте бране су дати у табели 7.4.

Табела 7.4 Карактеристике материјала модела насуте бране

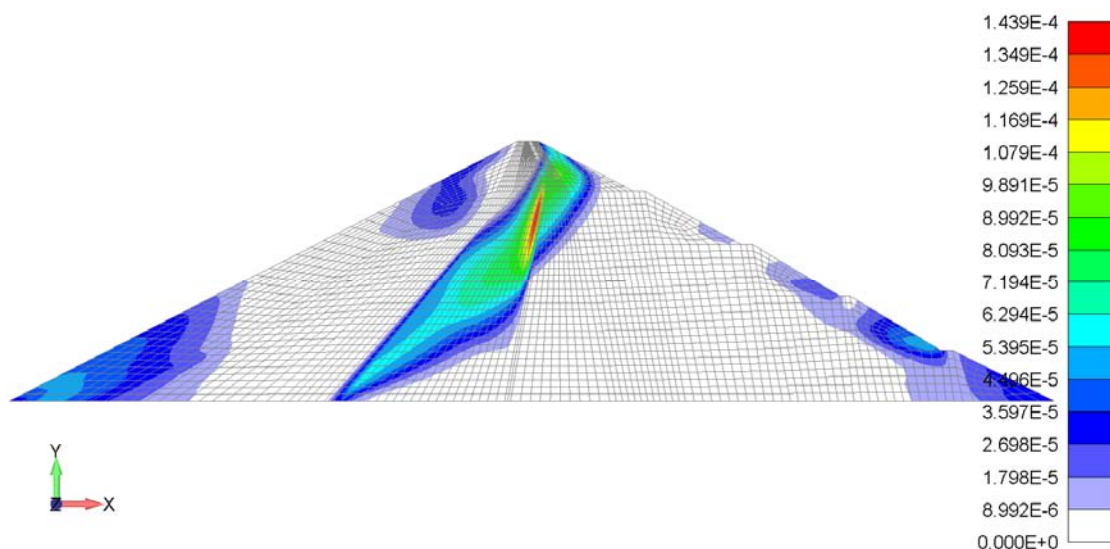
Зона	$E$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	$c$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$\phi$ [°]	$\psi$ [°]
Камени набачај	$50 \times 10^3$	0.4	20.4	0	45	0
Прелазне зоне	$50 \times 10^3$	0.4	20.4	0	45	0
Филтер	$50 \times 10^3$	0.4	20.4	0	45	0
Језгро	$50 \times 10^3$	0.4	18.1	85	23	0

Резултати анализе стабилности објекта су приказани на сликама 7.18 и 7.19. На слици 7.18 је приказано поље максималних смичућих деформација у моделу бране, док је на слици 7.19 приказано поље пластичних деформација непосредно пре губитка стабилности објекта.



Слика 7.18 Поље максималне смичуће деформације у моделу бране

На слици 7.18 је могуће уочити површ по којој долази до клизања узводне косине након прекорачења смичуће чврстоће материјала. Ово се такође може уочити на слици 7.19 где је приметна локализација пластичних деформација на потенцијалној клизној површи.



Слика 7.19 Поље пластичне деформације у моделу бране

Вредности степена сигурности добијене применом методе редуковања смичуће чврстоће, заједно са вредностима степена сигурности добијеним применом метода граничног стања, приказани су у табели 7.5.

Табела 7.5 Степен сигурности насуте бране

Метода	Степен сигурности
<i>Метода редуковања смичуће чврстоће (ПАК)</i>	
Мор-Кулон	1.98
<i>Метода граничног стања (Limit equilibrium)</i>	
Бишопова метода	1.948
Спенсорова метода	1.948

Вредност степена сигурности добијеног применом методе редуковања смичуче чврстоће је блиска вредностима степена сигурности добијених применом метода Бишоп и Спенсера [109]. Ово потврђује тачност развијеног алгоритма при одређивању степена сигурности применом методе редуковања смичуће чврстоће.

## 8 АНАЛИЗА СТАБИЛНОСТИ БРАНЕ ПРВОНЕК

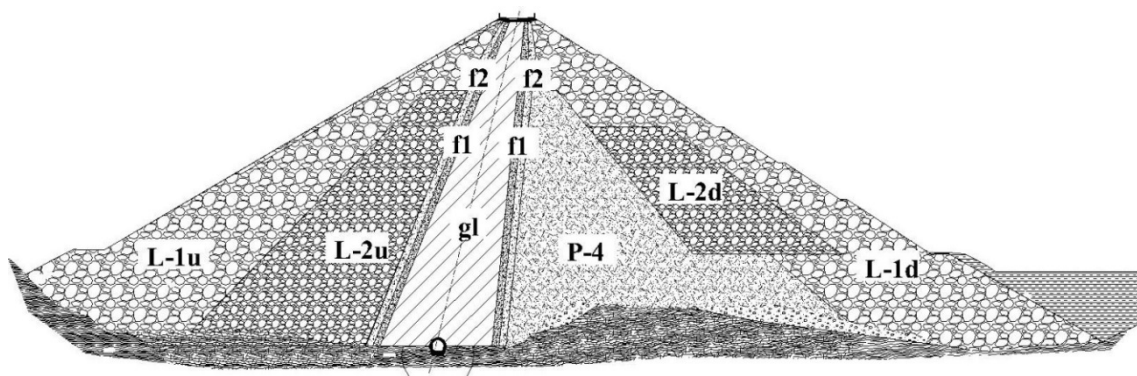
### 8.1 Општи подаци о брани и акумулацији

Брана Првонек на Бањској реци, десној притоци Јужне Мораве, је централни објекат система снабдевања града Врања висококвалитетном водом (слика 8.1). Преградно место је лоцирано на око 9 km узводно од ушћа у Јужну Мораву код села Првонек по чему је и добила име. Брана гради акумулацију чија је основна намена снабдевање водом индустрије и становништва града Врања, општина Бујановац и Прешево. Поред тога, брана служи за заштиту од поплава, а користи се и за производњу електричне енергије. Израдом бране формирана је акумулација велике дубине и запремине уз плављење релативно мале површине.



Слика 8.1 Преградно место бране Првонек

Преградну конструкцију бране чини насип од каменог набачаја са косим централним глиеним језгром и филтерским зонама, као што је приказано на слици 8.2. Глинено језгро, као и већи део бране, су фундирани на стени.



Слика 8.2 Геотехничке средине у попречном пресеку бране

У оси глиеног језгра бране, на контакту са стеном, налази се тзв. инјекциона галерија из које је вршена израда ињекционе завесе. Са узводне и низводне стране глиеног језгра налазе се две филтерске зоне. Потпорно тело бране израђено је од две врсте каменог гранулата:

гранодиорита и шкриљца. Унутрашњи део низводне косине изведен је од шкриљца и фундиран на наносу. Спољашњи део је изграђен од гранодиорита и фундиран на стени. Ослоначку стену бране чине кристаласти шкриљци (гнајсеви и микашисти) који су карактеристични по израженој прслинској и пукотинској порозности, веома хетерогеној по простору.

Основне карактеристике бране су:

- |                                     |          |
|-------------------------------------|----------|
| • кота круне бране                  | 620.0 mm |
| • кота максималног успора           | 617.7 mm |
| • кота нормалног успора             | 614.0 mm |
| • кота минималног радног нивоа      | 580.0 mm |
| • максимална грађевинска висина     | 92.9 m   |
| • максимална висина бране од терена | 78.0 m   |
| • дужина бране у круни              | 250.0 m  |
| • ширина бране у круни              | 10.0 m   |
| • максимална ширина у стопи         | 321.0 m  |
| • нагиб узводне косине              | 1:1.7    |
| • нагиб низводне косине             | 1:1.7    |

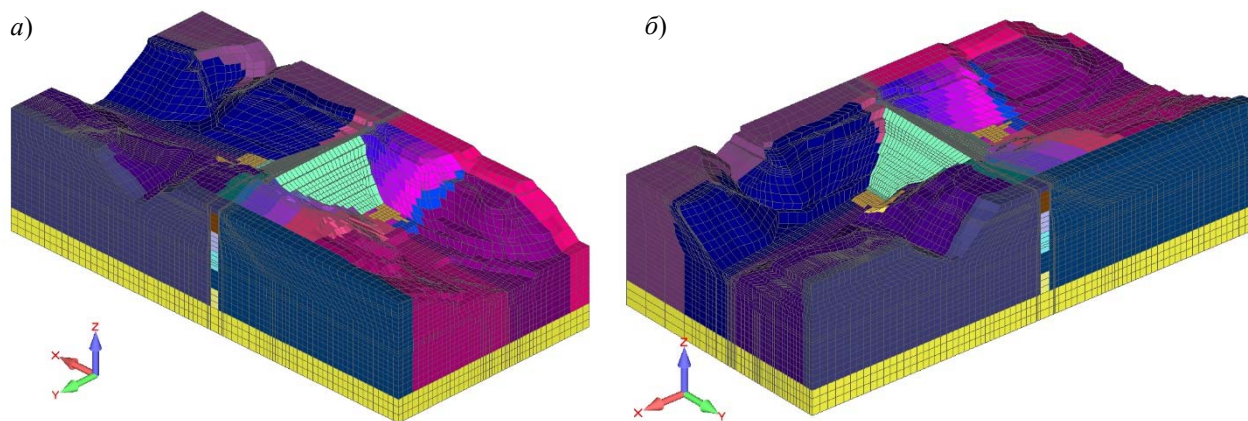
Брана формира акумулацију која при коти нормалног успора има запремину од 20 милиона метара кубних.

### 8.1.1 Мрежа коначних елемената и гранични услови

Како би се извршила напонско-деформацијска анализа бране и анализира њена стабилност, формиран је просторни модел са расподелом квазихомогених зона, као што је приказано на слици 8.2 за један попречни пресек. Модел бране је креиран коришћењем хоризонталних пресека са дефинисаним распоредом квазихомогених зона које су међусобно спојене.

Формирање модела бране спроведено је кроз следеће кораке:

- извршена је анализа ИГ карте, ИГ геолошких профила, резултата геофизичких и геомеханичких испитивања у погледу инжењерских својстава стенских маса заступљених на преградном месту,
- спроведено је груписање стенске масе у квазихомогене зоне на основу њихових инжењерских својстава,
- извршена је параметризација издвојених квазихомогених зона у погледу параметара за напонско-деформацијску анализу,
- одређени су гранични услови карактеристични за напонско-деформацијску и филтрациону анализу у 3Д простору.



Слика 8.3 Модел бране: а) поглед са низводне и, б) поглед са узводне стране

Моделиран је терен преградног места у околини бране димензија у основи 498 x 1000 m, од коте 370 mm (метара од нивоа мора) до коте 630 mm. Модел обухвата шири простор око бране у циљу успостављања реалних граничних услова, минимизације утицаја вештачких граница модела и обухвата све меродавне квазихомогене зоне.

За креирање модела бране са околином су коришћени тродимензионални осмочворни коначни елементи са побољшањем. Развијена мрежа коначних елемената садржи 94986 чворова и 87128 елемената (слика 8.3).

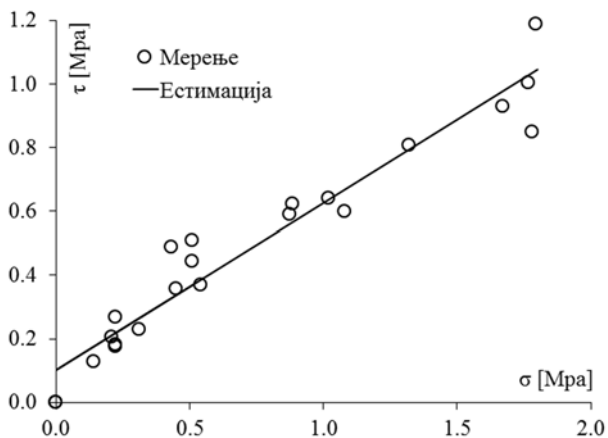
При напонско-деформацијској анализи бране су коришћени гранични услови по померањима. Бочним границама модела је спречено хоризонтално померање у правцу управном на границу, док је доњој граници модела спречено померање у сва три правца.

## 8.2 Идентификација параметара материјала

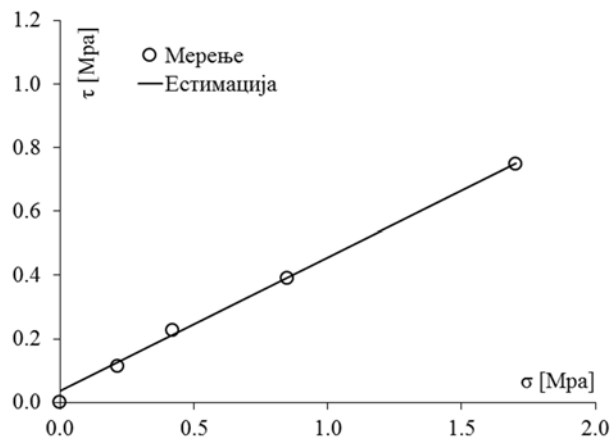
За симулацију механичког понашања бране неопходно је усвојити материјалне моделе који најбоље описују њено реално механичко понашање, а затим одредити њихове материјалне константе. За одређивање материјалних константи су коришћени резултати теста смицања материјала који чине тело бране. Анализом расположивих резултата усвојени су материјални модели за све квазихомогене зоне модела и одређене су њихове материјалне константе.

### 8.2.1 Одређивање материјалних константи

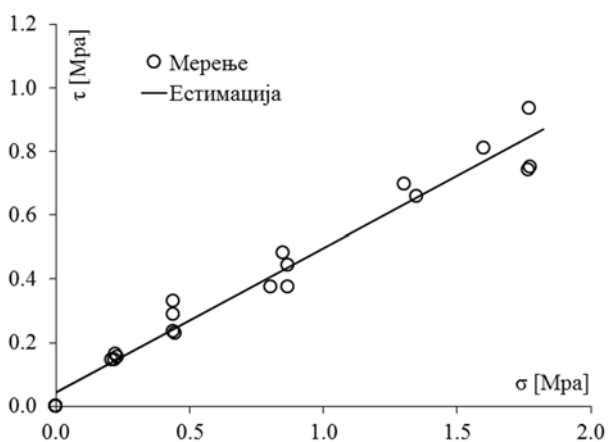
Резултати теста смицања са усвојеним површима течења за узводно и низводно потпорно тело бране су приказани на сликама 8.4 до 8.7. Анализом резултата испитивања квазихомогених зона, уочено је најбоље поклапање нумеричких резултата са резултатима испитивања материјала остварује применом Мор-Кулонове површи течења па је за симулацију механичког понашања потпорног тела бране усвојен овај модел, а затим одређене материјалне константе.



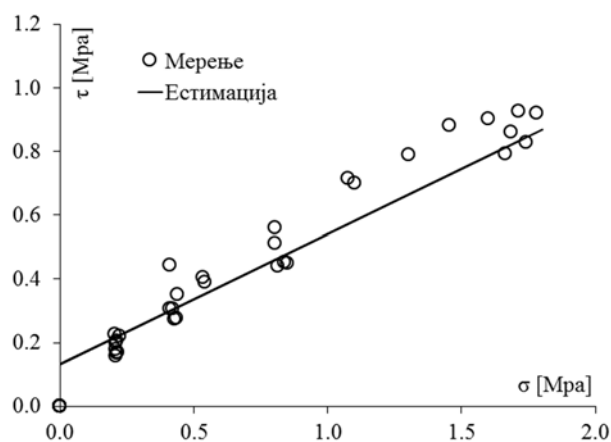
Слика 8.4 Резултат теста смицања и површ лома узводне спољне призме L-1u



Слика 8.5 Резултат теста смицања и површ лома узводне и низводне унутрашње призме L-2u(d)



Слика 8.6 Резултат теста смицања и површ лома низводне унутрашње призме P-4



Слика 8.7 Резултат теста смицања и површ лома низводне спољашње призме L-1d

Вредности параметара усвојених материјалних модела су одређене применом тзв. фитовања кривих лома, односно применом метода за минимизацију одступања кривих чији се параметри одређују. У овом случају је коришћена метода најмањих квадрата, односно фитовање кривих је извршено у складу са изразом (8.1) тако да збир квадрата разлике измерених вредности и вредности које описују површ течења буде минималан:

$$\varepsilon = (\tau^* - \tau_f)^2 \rightarrow \varepsilon_{\min} \tag{8.1}$$

У претходној једначини  $\tau^*$  представља измерени смичући напон при лому, величина  $\tau_f$  представља смичући напон при лому материјалног модела, док  $\varepsilon$  представља одступање ових вредности које треба минимизовати. Опсег вредности параметара анализираних материјала је приказан у табели 8.1.

За симулацију механичког понашања глиненог језгра усвојен је материјални модел глине (Кем-Клеј). Како за овај материјал нису били расположиви резултати експерименталних испитивања, почетне вредности материјалних константи су усвојене из литературе [112, 113]. Након тога, вредности материјалних константи су калибрисане како би се добио механички одзив модела који највише одговара одзиву реалне бране.

Табела 8.1 Вредности параметара материјала за напонско-деформацијску анализу бране

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Узводна спољна призма	L-1u	Гранодиорит	7.73e5	0.3	21.0	50.0	24.0
			-			-	-
			1.65e6			180.0	30.0
Узводна и низводна унутрашња призма	L-2u(d)	Гранодиорит	7.53e5	0.3	21.0	15.0	21.0
			-			-	-
			1.70e6			60.0	24.0
Низводна унутрашња призма	P-4	Микашист	6.67e5	0.3	21.5	10.0	22.0
			-			-	-
			1.50e6			130.0	27.0
Низводна спољна призма	L-1d	Гранодиорит	6.60e5	0.3	21.0	70.0	20.0
			-			-	-
			1.50e6			210.0	26.0
Обалоутврда	ob. L-1	Гранодиорит	1.67e6	0.3	20.5	80.0	26.0
			-			-	-
			3.77e6			150.0	31.0

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Филтер 1	f1	Песак	3.35e5	0.3	18.0	3.0	30.0
			-			-	-
			7.53e5			7.0	34.0
Филтер 2	f2	Песак + Шљунак	3.35e5	0.3	20.0	0.0	35.0
			-			-	-
			7.53e5			1.0	39.0

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Ињекциона завеса	Zavesa	Ињектована стена	6.00e6	0.2	26.0	115.0	38.0
Вештачки формиран терен по грађевинским и техничким условима	2	Преовлађује распаднут микашист	4.67e6	0.3	22.5	20.0	22.0
Нанос, наслаге	3	Алувијални нанос, делувијално алувијалне и пролувијално делувијалне наслаге	7.15e5	0.3	18.5	20.0	24.0
Околна стенска маса	5	Стенска маса (кварцити, кварцни шкриљци, микашист, гнајс)	6.00e6	0.2	26.0	115.0	38.0

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	T [MPa]	M	$\lambda$	$\kappa$	P <sub>0</sub> [MPa]	$\epsilon_e$	
Глинено језгро	gl	Глина	3.37e5	0.45	17.0	0	0.35	0.04	0.01	170.0	1.6	
			-							-		-
			7.58e5							0.6		0.09

Након усвојених почетних вредности параметара материјала, они су варирани у оквиру граничних вредности, односно вршена је калибрација модела. Кориговани су само параметри материјала који улазе у састав преградне конструкције, док су параметри материјала околне

стенске масе задржали почетно усвојене вредности [114]. Вредности параметара материјала који нису калибрисани су дате у табели 8.2.

Табела 8.2 Вредности параметара материјала које се не калибришу током прорачуна

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Узводна спољна призма	L-1u	Гранодиорит	-	0.3	21.0	-	-
Узводна и низводна унутрашња призма	L-2u(d)	Гранодиорит	-	0.3	21.0	-	-
Низводна унутрашња призма	P-4	Микашист	-	0.3	21.5	-	-
Низводна спољна призма	L-1d	Гранодиорит	-	0.3	21.0	-	-
Обалоутврда	ob. L-1	Гранодиорит	-	0.3	20.5	-	-

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Филтер 1	f1	Песак	-	0.3	18.0	-	-
Филтер 2	f2	Песак+Шљунак	-	0.3	20.0	-	-

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Ињекциона завеса	Zavesa	Ињектована стена	6.00e6	0.2	26.0	115.0	38.0
Вештачки формиран терен по грађевинским и техничким условима	2	Преовлађује распаднут микашист	4.67e6	0.3	22.5	20.0	22.0
Нанос, наслаге	3	Алувијални нанос, делувијално алувијалне и пролувијално делувијалне наслаге	7.15e5	0.3	18.5	20.0	24.0
Околна стенска маса	5	Стенска маса (кварцити, кварцни шкриљци, микашист, гнајс)	6.00e6	0.2	26.0	115.0	38.0

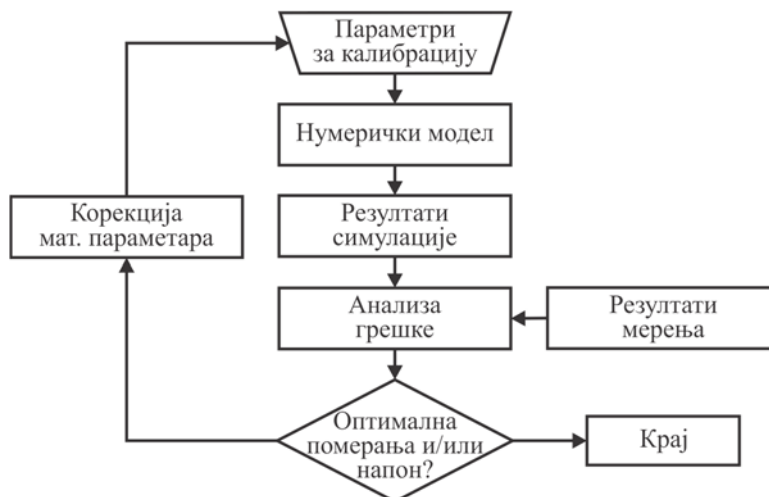
Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	T [MPa]	M	$\lambda$	$\kappa$	$P_0$ [MPa]	$\theta_e$
Глинено језгро	gl	Глина	-	0.45	17.0	0	-	-	-	-	1.6

### 8.3 Калибрација модела бране

Параметри материјала добијени на основу лабораторијских испитивања, како је описано у претходном делу, представљају само почетне вредности параметара у напонско-деформацијској анализи насуте бране. Како и поред овако одређених параметара материјала долази до одступања резултата нумеричке симулације у односу на измерене величине на брани и како би се та одступања свела на најмању меру, неопходно је кориговати почетне вредности



параметара, односно извршити калибрацију модела бране [115, 116]. Одступања вредности величина добијених применом нумеричке симулације од измерених величина могу бити последица више фактора: нехомогености материјала тела бране, деградације (испирања) материјала бране током времена, слегања материјала и слично. Поступак калибрације модела се врши коришћењем резултата мерења према шеми приказаној на слици 8.8.

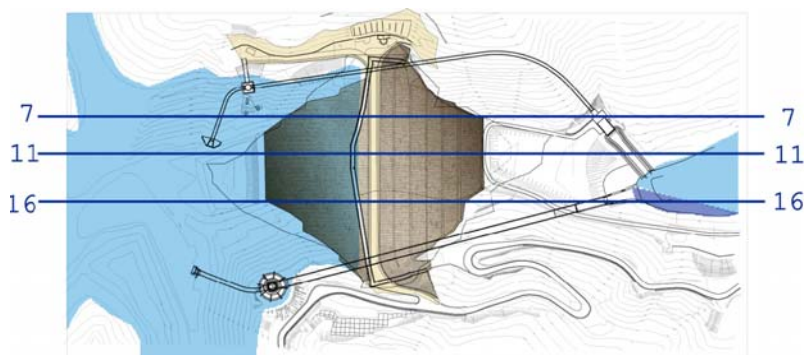


Слика 8.8 Шема калибрације модела

Калибрацију модела за напонско-деформацијску анализу се може вршити коришћењем измерених вредности напона и померања на односно у брани. Како би ово било могуће, неопходно је да на брани постоје уређаји за мерење ових величина, којима је брана Првонек и опремљена, па је могуће спровести поступак калибрације модела.

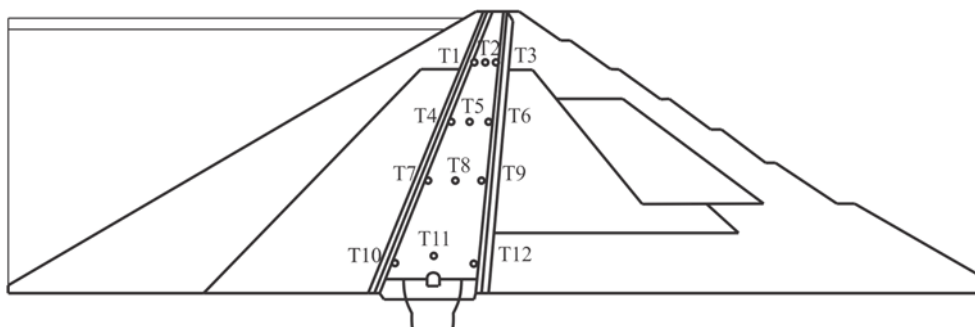
### 8.3.1 Калибрација модела за статичку анализу стабилности

Позиције попречних пресека у којима се налазе мерни уређаји инсталирани у процесу изградње бране су приказани на слици 8.9, док је распоред давача тоталних напона и порних притисака у једном од ових пресека приказан на слици 8.10.



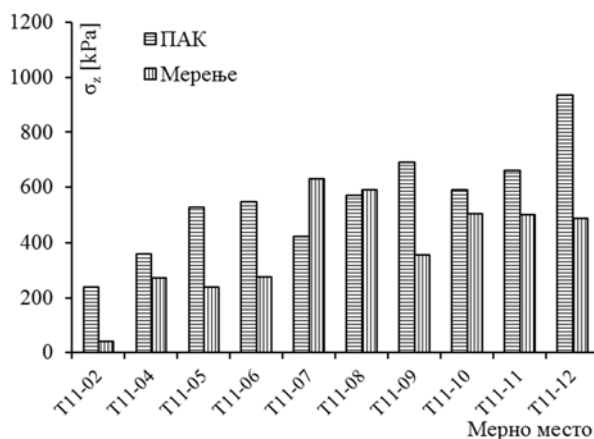
Слика 8.9 Позиције пресека са уграђеним давачима напона

Коришћењем измерених вредности померања, тоталног нормалног напона и порних притисака, за стационарне услове струјања спроводи се поступак калибрације модела бране.



Слика 8.10 Попречни пресек бране са позицијама уређаја за мерење порних и тоталних нормалних напона

За мерна места приказана на слици 8.10 измерене вредности тоталног напона и вредности добијене применом нумеричке симулације су приказане на слици 8.11. Уочава се да се вредности напона добијене применом нумеричке симулације повећавају са повећањем дубине мерног места што није увек случај са измереним вредностима ових величина, које се у неким случајевима смањују са повећањем дубине. Овакав карактер измерених вредности тоталних нормалних напона може бити последица неисправности, нетачне калибрације мерних уређаја или последица оштећења.



Слика 8.11 Тотални напони у пресеку 11

Измерене вредности тоталних напона су приказане и табеларно и дате су у табели 8.3.

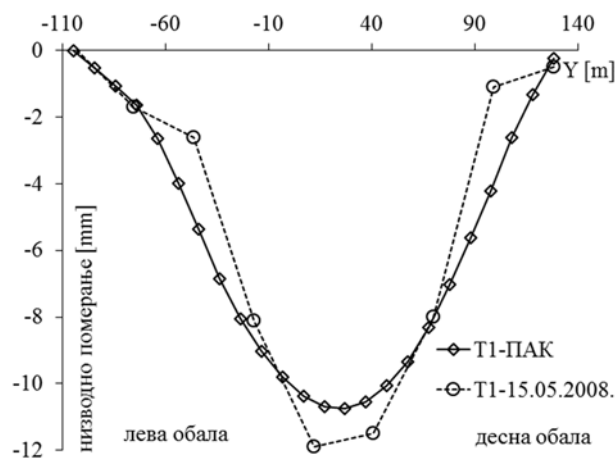
Табела 8.3 Вредности тоталних напона у пресеку 11

Мерно место	Елемент	МКЕ $\sigma_z$ [kPa]	Мерење $\sigma_z$ [kPa]
T11-02	199	240.02	40.43
T11-04	329	359.57	273.50
T11-05	359	527.10	240.05
T11-06	389	546.76	276.07
T11-07	493	424.00	631.89
T11-08	515	570.61	591.45
T11-09	537	690.26	357.84
T11-10	609	589.35	502.76
T11-11	601	660.89	499.79
T11-12	593	935.71	487.59

Као последица непоузданих резултата мерења тоталних напона и немогућности калибрације модела на основу њих, коришћене су просечне вредности параметара усвојених материјлних

модела, па је калибрација материјалних константи настављена коришћењем измерених вредности померања. Утврђено је да на вредности померања у највећој мери утичу Јангов модул еластичности  $E$  и Поасонов коефицијент  $\nu$ , па су у наставку ове константе и калибрисане.

Анализом измерених вредности померања круне бране, уочено је да у првој години након инсталације мерних уређаја (2007) није дошло до значајног прираштаја померања. У поменутом периоду мерења су вршена за приближно константан ниво воде у акумулацији (око 600 mm). У периоду 2008. до 2009. године уочава се значајан прираштај хоризонталних померања (у правцу водотока) при готово константном нивоу воде у акумулацији (око 614 mm). Разлог прираштаја хоризонталних померања круне бране при приближно константном нивоу воде у акумулацији је највероватније последица пузања материјала бране. Како материјални модели, чији су алгоритми развијени и имплементирани, не узимају у обзир ефекат пузања, калибрација модела бране је вршена на основу измерених вредности померања у првој години након инсталације мерних уређаја. Измерене вредности померања круне бране и резултати нумеричке симулације након поступка калибрације модела су приказане на слици 8.12.



Слика 8.12 Хоризонтална компонента померања круне бране

Анализом хоризонталних померања круне бране добијених применом нумеричке симулације и измерених вредности хоризонталних померања може се закључити да карактер и вредности нумеричких решења одговарају измереним вредностима. Може се закључити да нумерички модел бране Првонек након калибрације даје одзив који одговара понашању реалне бране.

### 8.3.2 Калибрација модела за динамичку анализу стабилности

Поред калибрације модела бране за статичку анализу стабилности, у општем случају, могуће је извршити калибрацију модела за динамичку анализу [117, 118]. Како би се ово реализовало, неопходно је да анализирана брана буде опремљена уређајима за мерење убрзања. За снимање одзива бране оптерећене динамичким оптерећењима, неопходно је да на брани буду инсталирана бар два мерна уређаја: један у фундаменту бране, који бележи убрзања која побуђују брану, и други уређај на круни бране, који бележи њен одзив на задату побуду. Коришћењем овако снимљених сигнала сеизмичких убрзања, спроводи се поступак калибрације модела за динамичку анализу.

Анализирана брана није опремљена овом врстом мерних уређаја, па је спроведена упрошћена сеизмичка анализа (квазистатичка анализа). За ову врсту анализе су коришћени параметри материјала усвојени након калибрације модела за статичку анализу стабилности бране. Оптерећење бране у упрошћеној сеизмичкој анализи је задато коришћењем максималне вредности хоризонталног убрзања у правцу водотока која је забележена у њеној околини.

### 8.3.3 Усвојене вредности параметара након калибрације модела

Након завршеног поступка калибрације модела бране, усвојене су вредности параметара материјала за све квазихомогене зоне. Усвојене вредности параметара су коришћене у анализи стабилности бране, односно при одређивању степена сигурности објекта. Коначно усвојене вредности параметара материјала за све квазихомогене зоне су дате у табели 8.4.

Табела 8.4 Вредности параметара модела за анализу стабилности бране

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Узводна спољна призма	L-1u	Гранодиорит	1.06e6	0.3	21.0	102.0	27.6
Узводна и низводна унутрашња призма	L-2u(d)	Гранодиорит	1.00e6	0.3	21.0	36.5	22.7
Низводна унутрашња призма	P-4	Микашист	1.00e6	0.3	21.5	43.5	24.4
Низводна спољна призма	L-1d	Гранодиорит	1.00e6	0.3	21.0	132.2	22.3
Обалоутврда	ob. L-1	Гранодиорит	2.51e6	0.3	20.5	112.2	29.4

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Филтер 1	f1	Песак	5.02e5	0.3	18.0	3.0	32.0
Филтер 2	f2	Песак+Шљунак	5.02e5	0.3	20.0	1.0	37.0

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	c [kPa]	$\phi$ (°)
Инјекциона завеса	Zavesa	Инјектована стена	6.00e6	0.2	26.0	115.0	38.0
Вештачки формиран терен по грађевинским и техничким условима	2	Преовлађује распаднут микашист	4.67e6	0.3	22.5	20.0	22.0
Нанос, наслаге	3	Алувијални нанос, делувијално алувијалне и пролувијално делувијалне наслаге	7.15e5	0.3	18.5	20.0	24.0
Околна стенска маса	5	Стенска маса (кварцити, кварцни шкриљци, микашист, гнајс)	6.00e6	0.2	26.0	115.0	38.0

Сегмент	Ознака	Материјал	E [kPa]	$\nu$	$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	T [MPa]	M	$\lambda$	$\kappa$	$p_0$ [MPa]	$\theta_e$
Глинено језгро	gl	Глина	5.02e5	0.45	17.0	0	0.57	0.06	0.02	800.0	1.6

## 8.4 Случајеви оптерећења и критеријуми стабилности

При анализи стабилности бране Првонек, усвојена су и анализирана четири случаја оптерећења. Анализирани случајеви оптерећења су приказани у наставку.

### 8.4.1 Вода на коти нормалног успора – стационарно струјање

Дејство акумулације је узето у обзир задавањем хидростатичког притиска горње воде на свим оквашеним површинама бране и стенске масе, до коте нормалног успора. Како би се добила расподела порних притисака у моделу, претходно је спроведен прорачун филтрације за разматране контурне услове.

### 8.4.2 Вода на коти максималног успора – стационарно струјање

Дејство акумулације је узето у обзир задавањем хидростатичког притиска горње воде на свим оквашеним површинама бране и стенске масе, до коте максималног успора. Као и у претходно усвојеном случају оптерећења, прво је спроведен прорачун филтрације како би се добила расподела порних притисака у моделу.

### 8.4.3 Брзо пражњење акумулације

Анализа брзог пражњења акумулације, од коте нормалног успора до коте минималног радног нивоа за период од 4.5 дана, представља трећи случај оптерећења. И у овом случају је прво спроведен прорачун филтрације како би се добила расподела порних притисака након чега су ова оптерећења укључена у напонско-деформацијску анализу.

### 8.4.4 Сеизмичко оптерећење

Анализа стабилности бране изложене дејству сеизмичког оптерећења извршена је при нивоу горње воде на коти нормалног успора. За успостављање почетних услова су коришћени резултати анализе филтрације за исти ниво воде у акумулацији. Након успостављених почетних услова извршена је квазистатичка анализа дејства земљотреса. Хоризонтално убрзање модела је задато у правцу водотока. Вредност задатог сеизмичког убрзања одговара максималној вредности убрзања забележеној у области у којој се налази брана (0.2g) и одговара VIII степену пројектне сеизмичности према МСЦ скали [119]. Хидро-динамичко дејство воде на брану је узето у обзир задавањем притиска на оквашеном лицу бране према Зангаровој параболу [76] према једначини:

$$p_{hyd} = C \cdot \alpha \cdot \gamma_w \cdot h \quad (8.2)$$

где је  $\alpha$  интензитет хоризонталног убрзања,  $\gamma_w$  је специфична тежина воде,  $h$  дубина воде, док је  $C$  коефицијент израчунат коришћењем израза:

$$C = \frac{C_m}{2} \left[ \frac{z}{h} \left( 2 - \frac{z}{h} \right) + \sqrt{\frac{z}{h} \left( 2 - \frac{z}{h} \right)} \right]. \quad (8.3)$$

Вредност константе  $C_m$  представља максималну вредност коефицијента  $C$  која зависи од нагиба оквашеног лица бране према вертикали, док  $z$  представља вертикалну координату.

### 8.4.5 Критеријуми стабилности и степени сигурности

Критеријуми стабилности бране су усвојени за узводну и низводну косину бране. Минималне захтеване вредности степена сигурности су усвојене према [99] и приказане су у табели 8.5.

Табела 8.5 Минимални захтевани степени сигурности насутих брана

Тип анализе	Минимални степен сигурности	Косина
Крај изградње бране	1.3	Узводна и низводна
Стационарно струјање кроз тело бране	1.5	Низводна
Максимална висина воде у акумулацији	1.4	Низводна
Брзо пражњење акумулације	1.1-1.3	Узводна

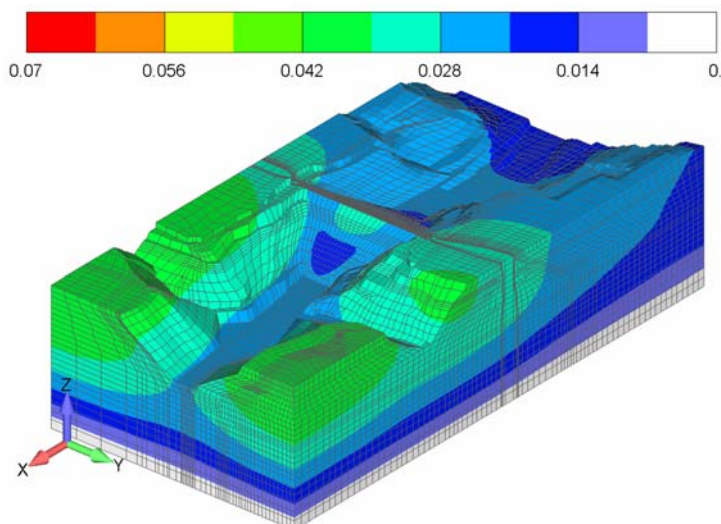
## 8.5 Резултати напонско-деформацијске анализе бране

Након спроведеног поступка калибрације модела коришћењем измерених вредности напона и померања и усвајања параметара материјала, спроведене су анализе стабилности за све дефинисане случајеве оптерећења. Анализе стабилности су спроведене применом методе редуковања смичуће чврстоће чије су теоријске основе изложене у поглављу 7.3. Вршено је редуковање чврстоћа свих материјала који чине тело бране, док смичућа чврстоћа материјала околне стенске масе није редукована.

Резултати анализе стабилности бране су приказани у облику поља померања и пластичних деформација у пресецима дефинисаним на слици 8.9. Хоризонтална померања осе глиненог језгра у функцији дубине су приказана у облику дијаграма за три дефинисана пресека.

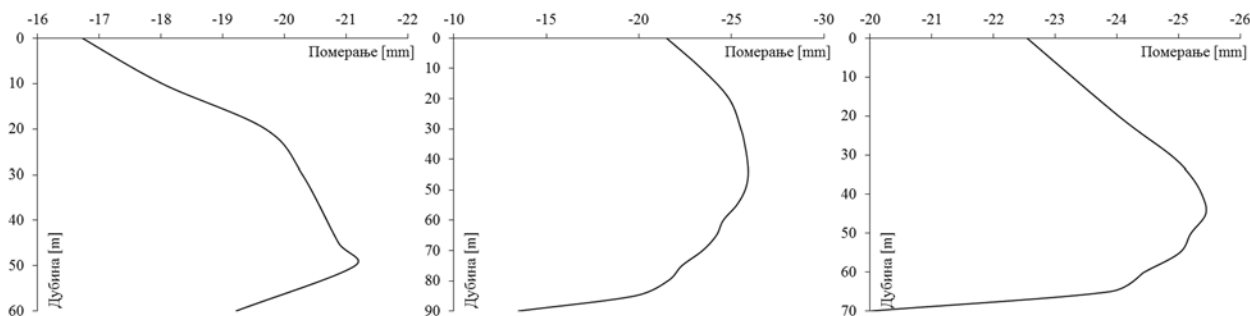
### 8.5.1 Вода на коти нормалног успора – стационарно струјање

Поље укупног померања за случај стационарног струјања при нивоу горње воде на коти нормалног успора је приказано на слици 8.13. Максимална вредност укупног померања бране износи 41.0 mm и јавља се у телу бране.



Слика 8.13 Поље укупних померања модела [m]

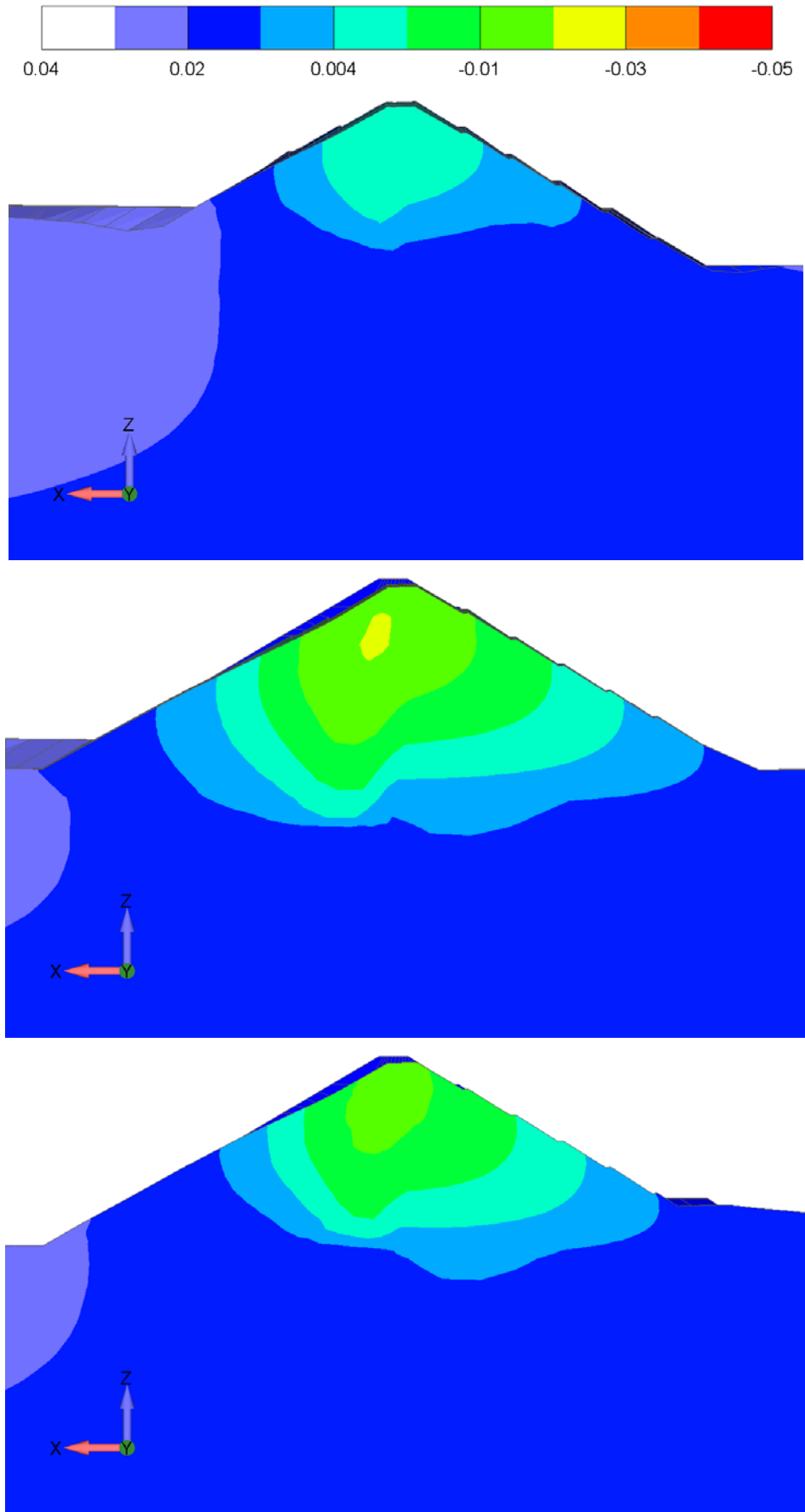
Хоризонтална померања вертикалне осе глинеог језгра за пресеке 7, 11 и 16 су приказана на слици 8.14. Негативне вредности померања одговарају померању у смеру водотока.



Слика 8.14 Хоризонтална померања осе глинеог језгра у пресецима 7, 11 и 16

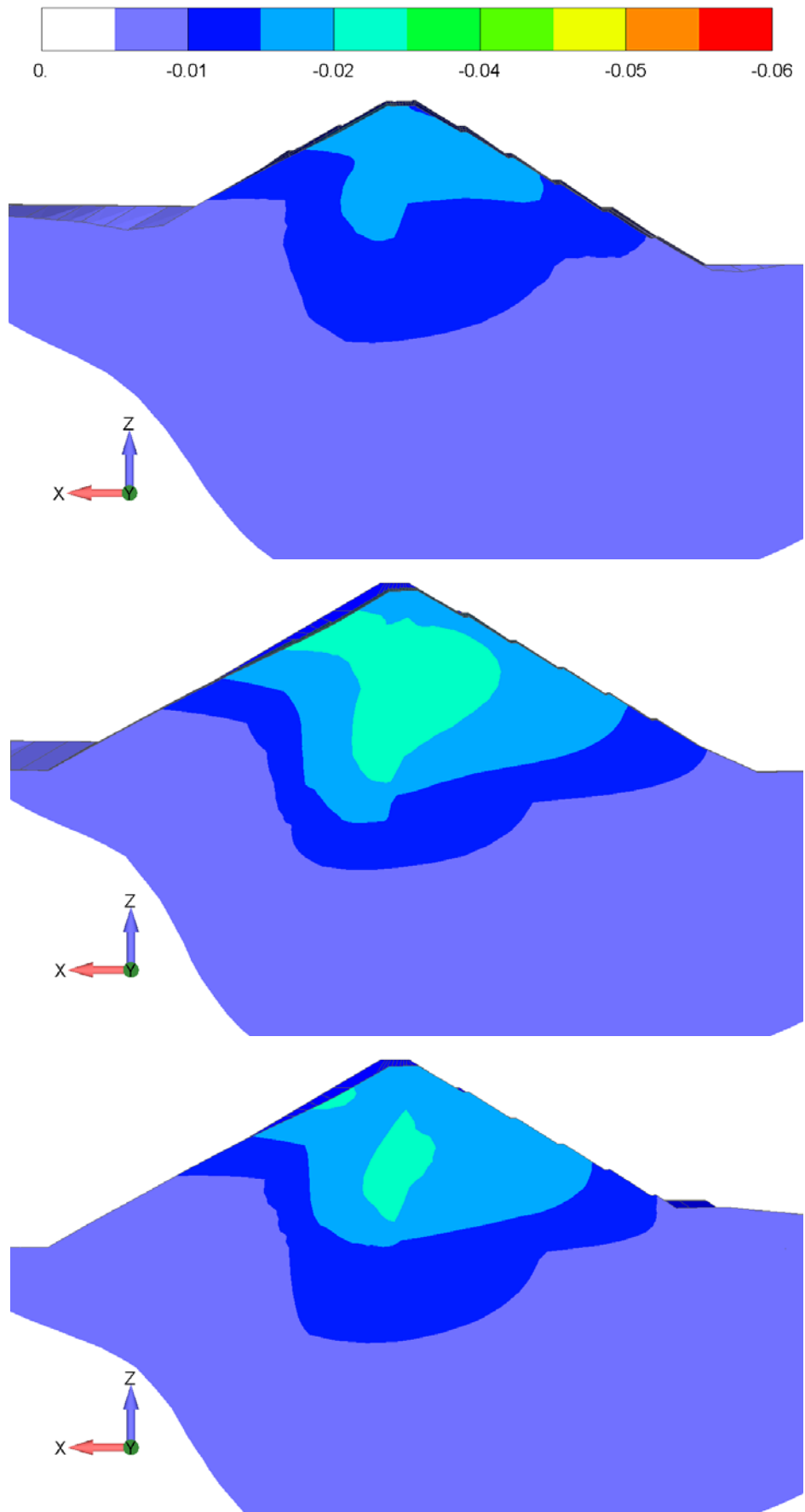
Поља вертикалних и хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 за случај стационарног струјања при нивоу горње воде на коти нормалног успора су приказана на сликама 8.15 и 8.16. Максималне вредности померања се јављају у пресеку 11 у зони глинеог језгра.

Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16 су приказани на слици 8.17. Максималне вредности пластичних деформација се такође јављају у зони језгра у пресеку 11 (0.084%). Значајније вредности пластичних деформација постоје и у узводној унутрашњој призми.

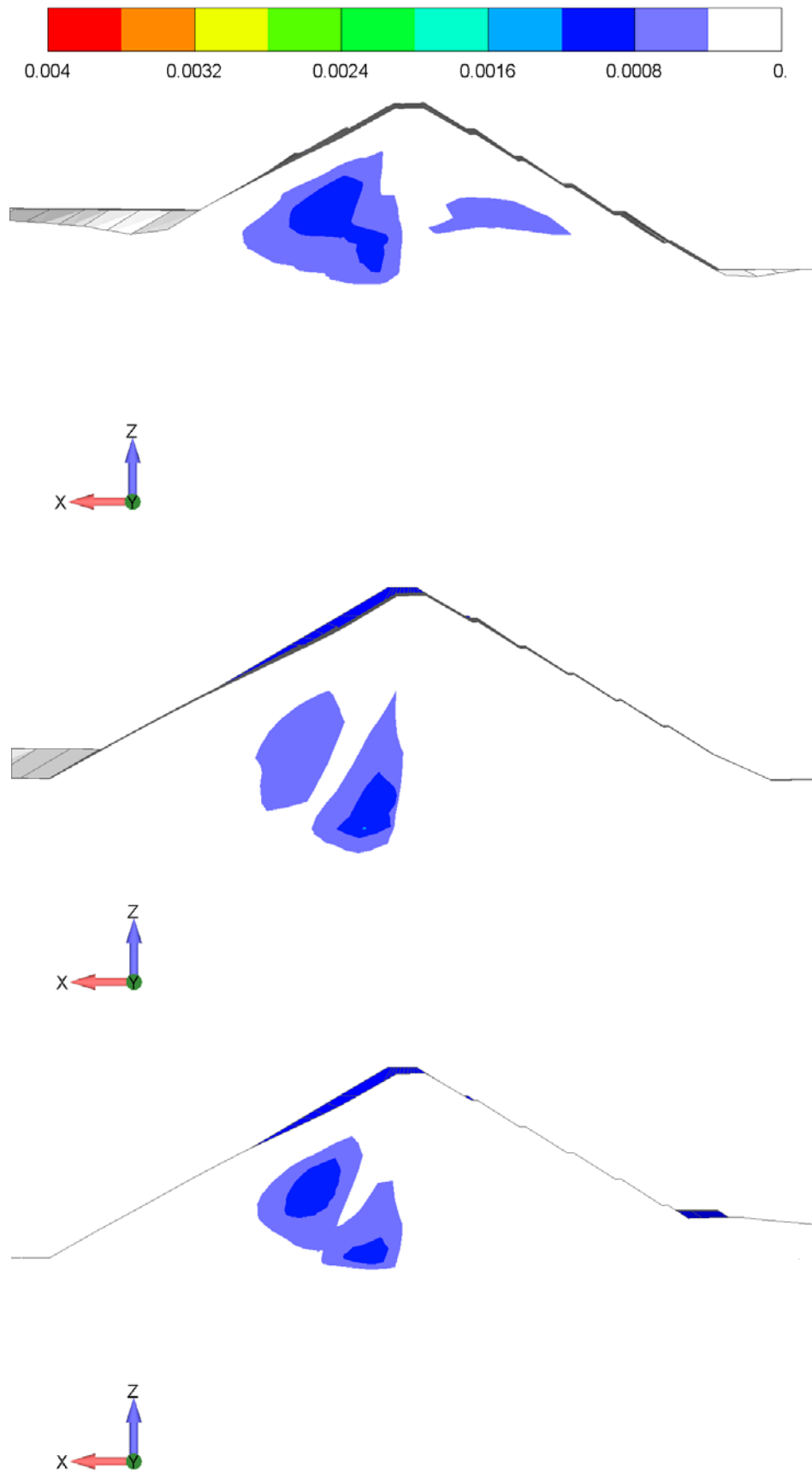


Слика 8.15 Поље вертикалних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m]





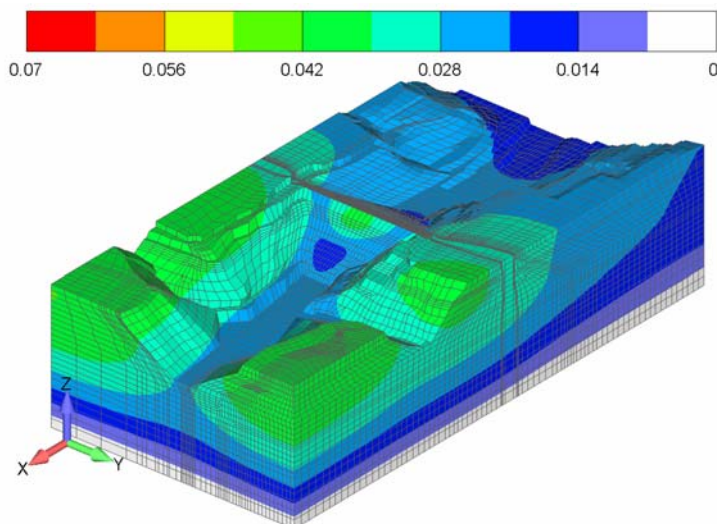
Слика 8.16 Поље хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m]



Слика 8.17 Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16

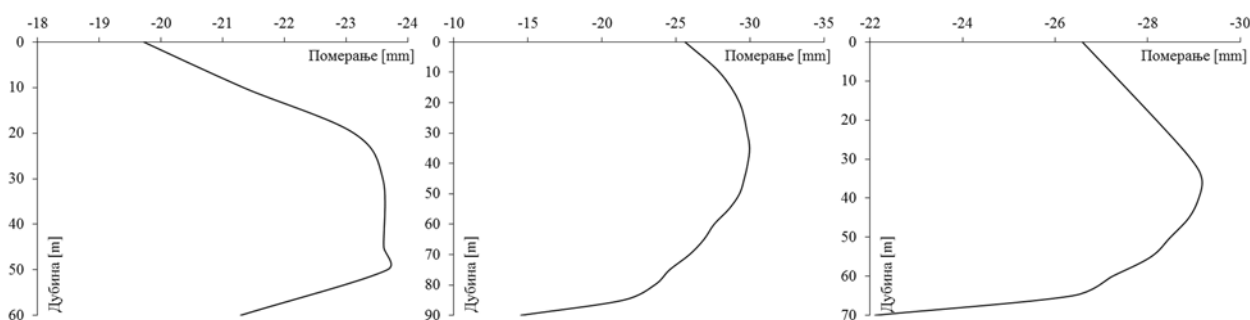
### 8.5.2 Вода на коти максималног успора – стационарно струјање

Поље укупног померања за случај стационарног струјања при висини горње воде на коти максималног успора је приказано на слици 8.18. Максимална вредност укупног померања бране износи 42.0 mm и јавља се у телу бране.



Слика 8.18 Поље укупних померања модела [m]

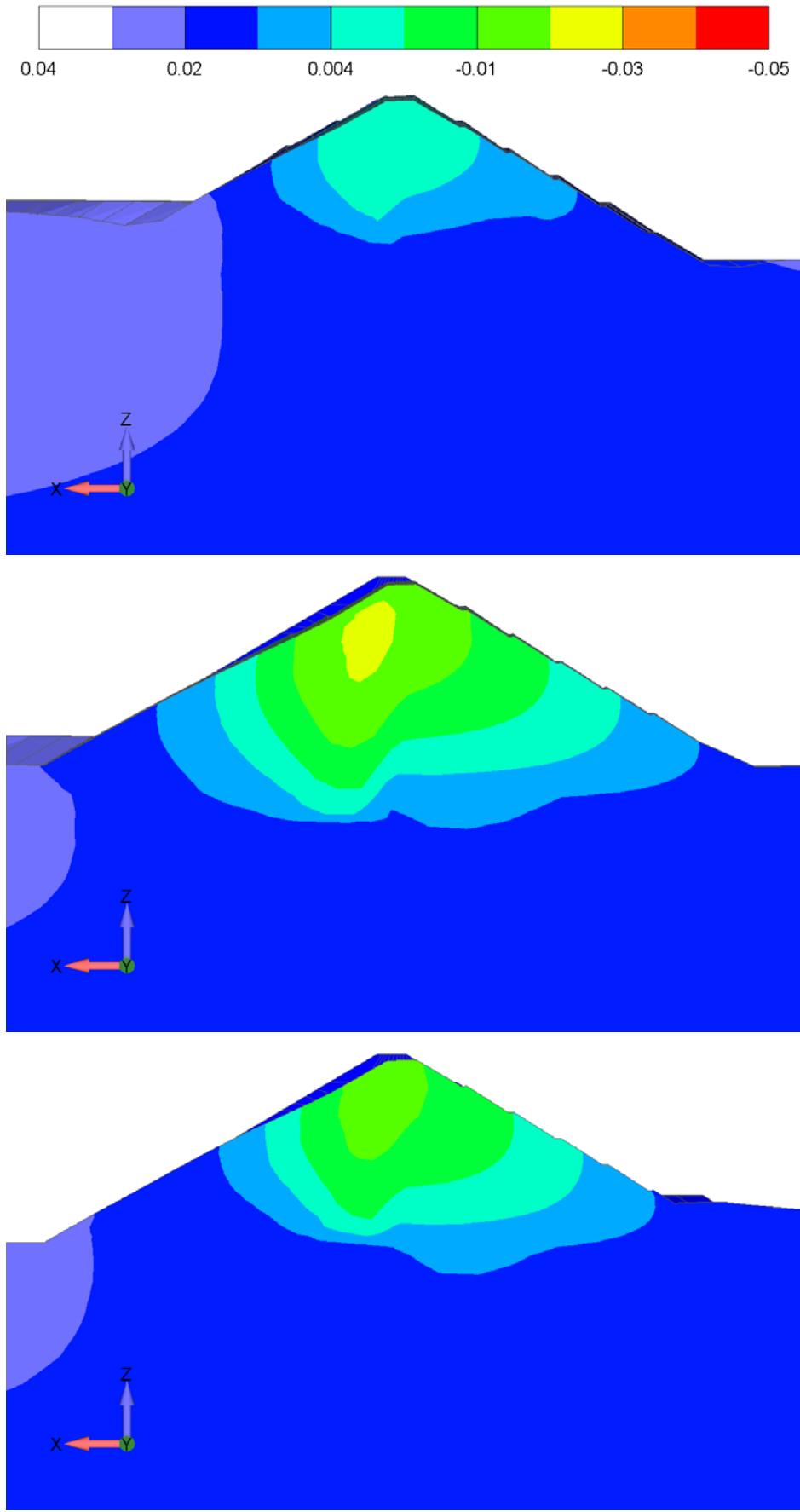
Хоризонтална померања вертикалне осе глиненог језгра, у функцији дубине, су приказана на слици 8.19. Негативне вредности померања одговарају померањима у смеру водотока.



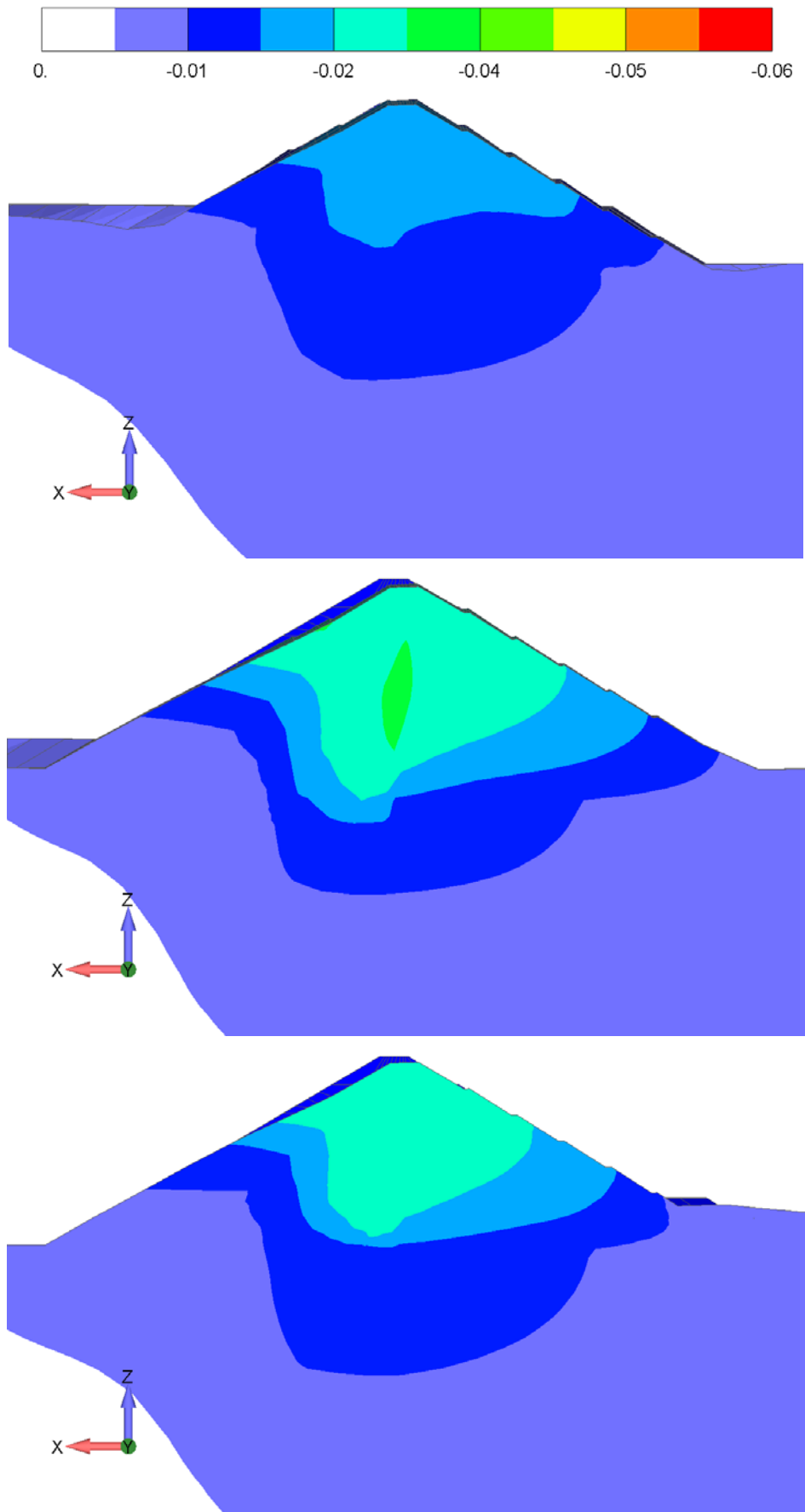
Слика 8.19 Хоризонтална померања осе глиненог језгра у пресецима 7, 11 и 16

Поља вертикалних и хоризонталних померања модела у пресецима 7, 11 и 16 су приказана на сликама 8.20 и 8.21. Максималне вредности померања за разматрани случај оптерећења се јављају у пресеку 11 у зони глиненог језгра. Исто се може уочити и на основу дијаграмског приказа хоризонталног померања осе глиненог језгра (слика 8.19).

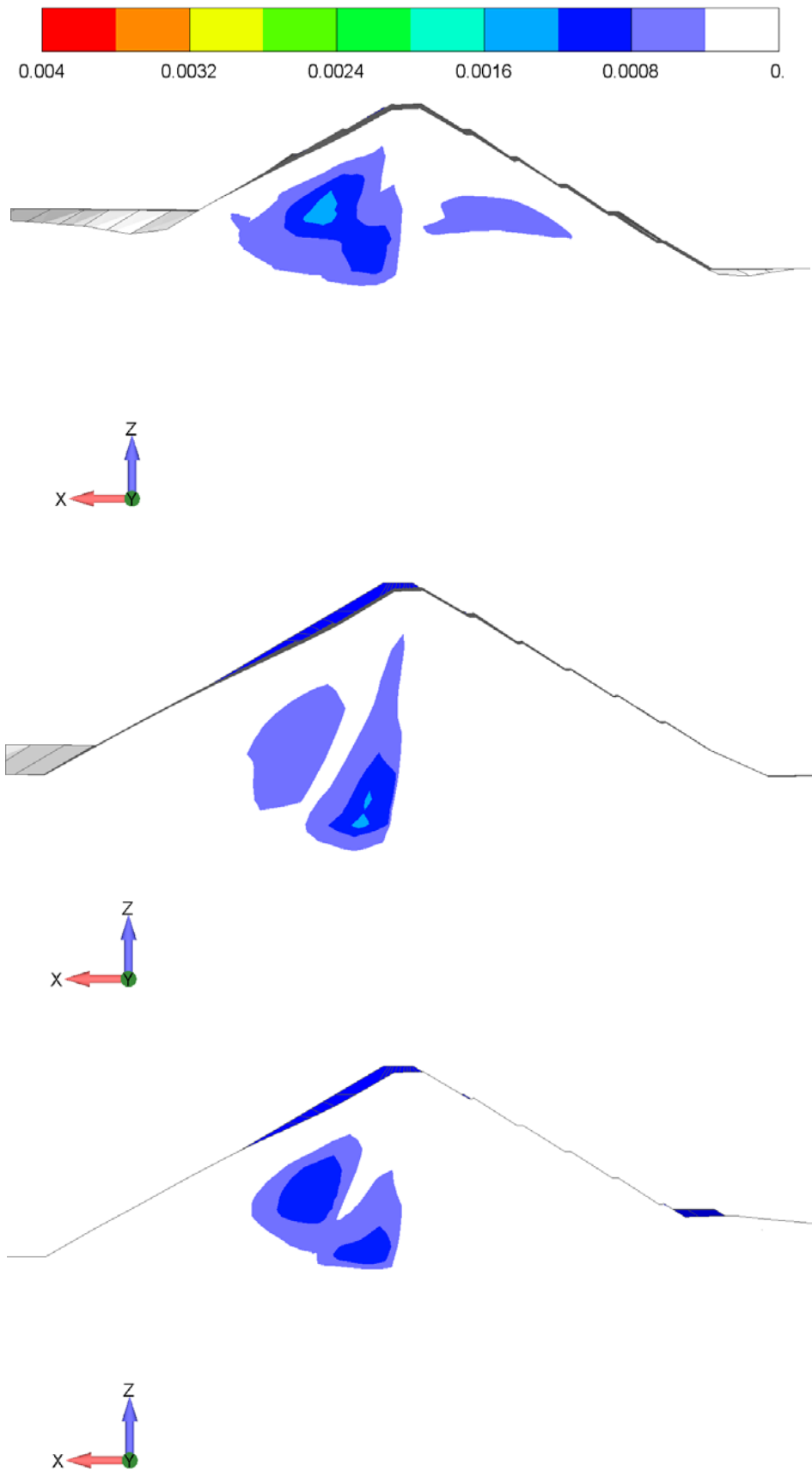
Поље пластичних деформација модела у пресецима 7, 11 и 16 је приказано на слици 8.22. Максималне вредности пластичних деформација се јављају у пресеку 11 и износе 0.093%. Значајније вредности пластичних деформација постоје и у узводној унутрашњој призми.



Слика 8.20 Поље вертикалних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m]



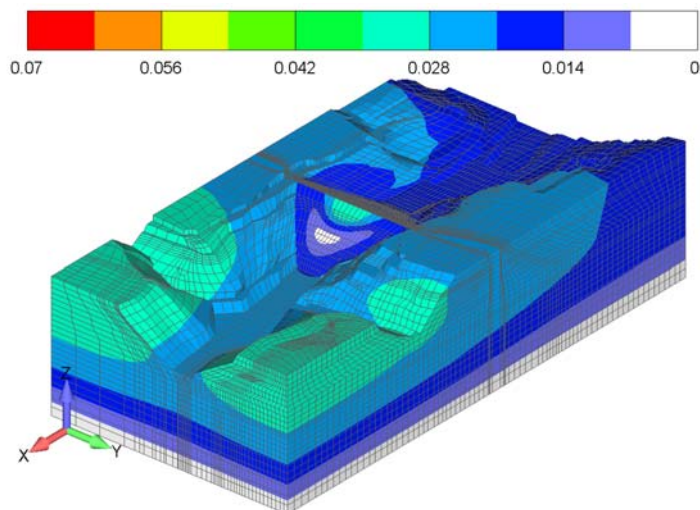
Слика 8.21 Поље хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m]



Слика 8.22 Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16

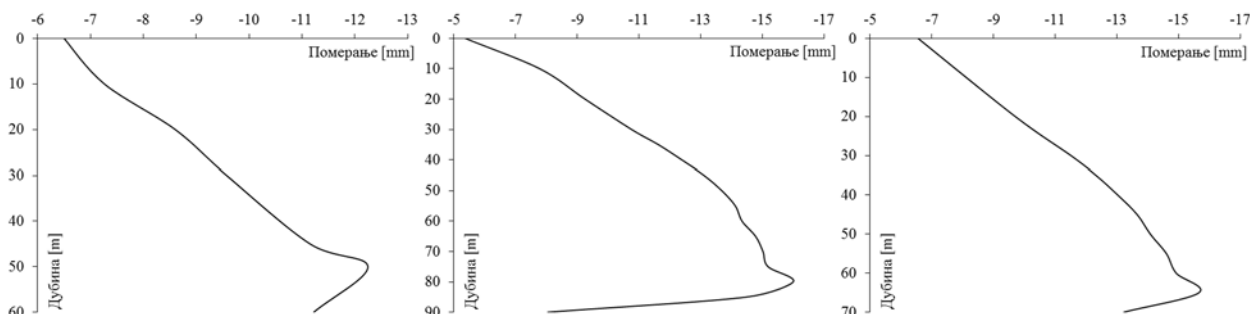
### 8.5.3 Брзо пражњење акумулације

Поље укупног померања при анализи брзог пражњења акумулације, од коте нормалног успора до минималног радног нивоа акумулације, на крају процеса пражњења је приказано на слици 8.23. Максимална вредност укупних померања на крају процеса пражњења износи 37.4 mm и јавља се у телу бране.



Слика 8.23 Поље укупних померања модела на крају процеса пражњења [m]

Хоризонтална померања вертикалне осе глиненог језгра у функцији дубине за пресеке 7, 11 и 16 на крају процеса пражњења акумулације су приказана на слици 8.24. Негативне вредности померања одговарају померањима у смеру водотока.



Слика 8.24 Хоризонтална померања осе глиненог језгра на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16

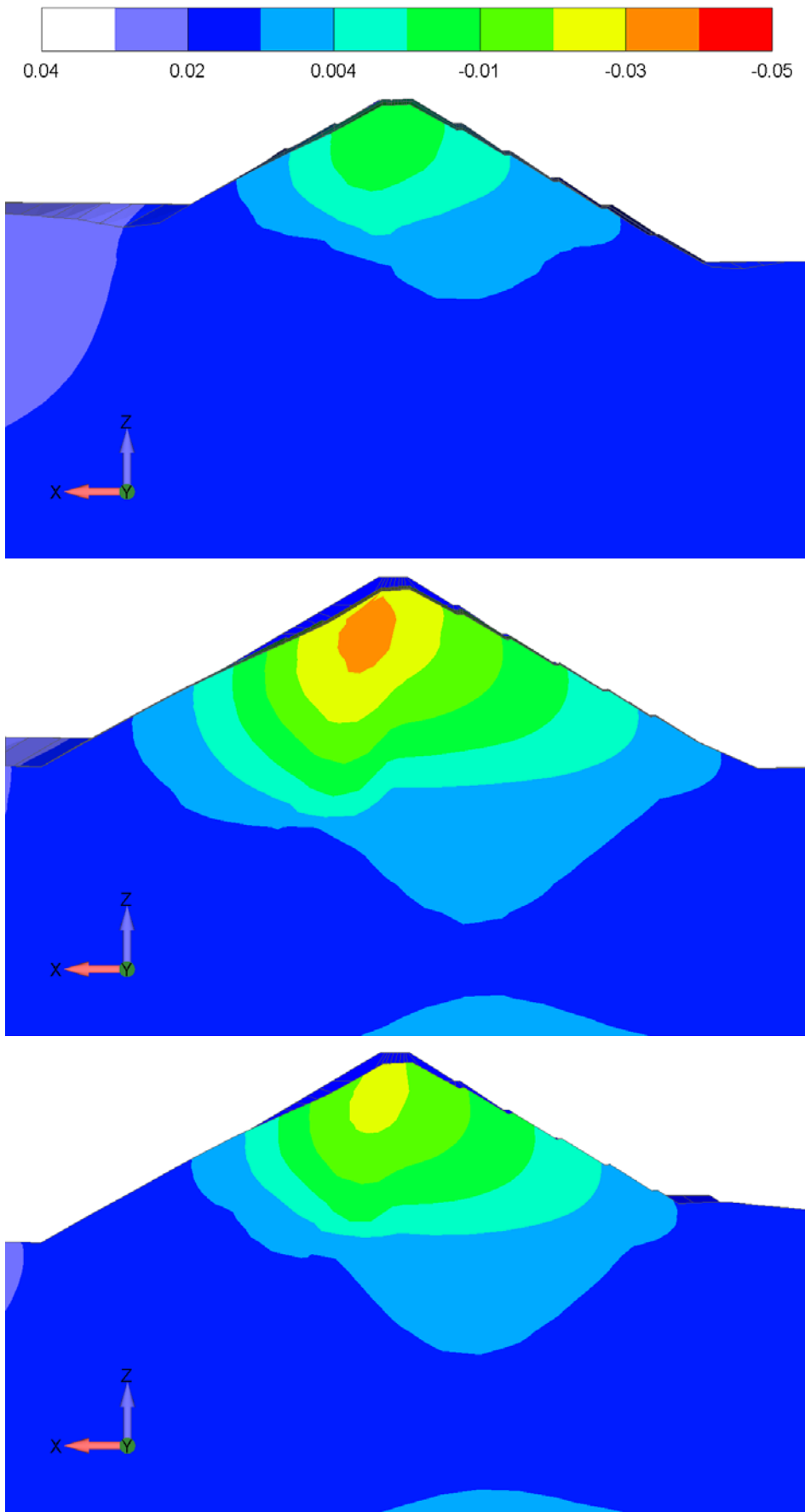
Хоризонтална померања осе глиненог језгра на почетку процеса брзог пражњења акумулације одговарају померањима у случају стационарног струјања при нивоу горње воде на коти нормалног успора. Исто важи и за поља померања и поља пластичних деформација (слике 8.15, 8.16 и 8.17). Поља вертикалних и хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 на крају процеса пражњења акумулације су приказана на сликама 8.25 и 8.26. За разматрани случај оптерећења, максималне вредности померања се јављају на почетку процеса брзог пражњења акумулације и смањују се са опадањем нивоа акумулације.

Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16 је приказано на крају процеса брзог пражњења на слици 8.27. Максимална вредност пластичне деформације (0.104%) се јављају у зони глиненог језгра у пресеку 11. Значајне вредности пластичних деформација постоје и у

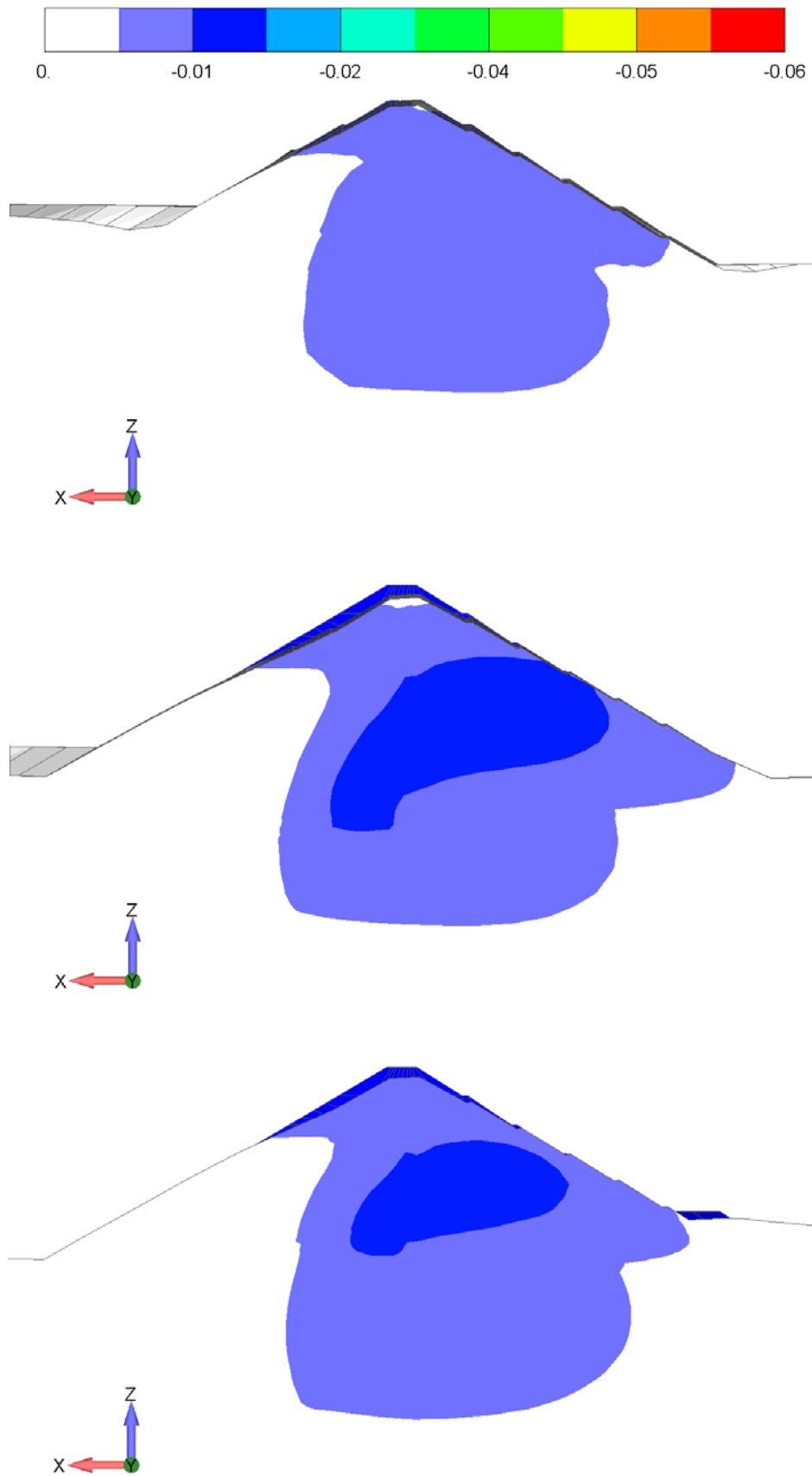
---

унутрашњој узводној призми, што је последица смањења ефективних напона услед великих вредности порних притисака које настају услед недовољне брзине истицања порне воде.

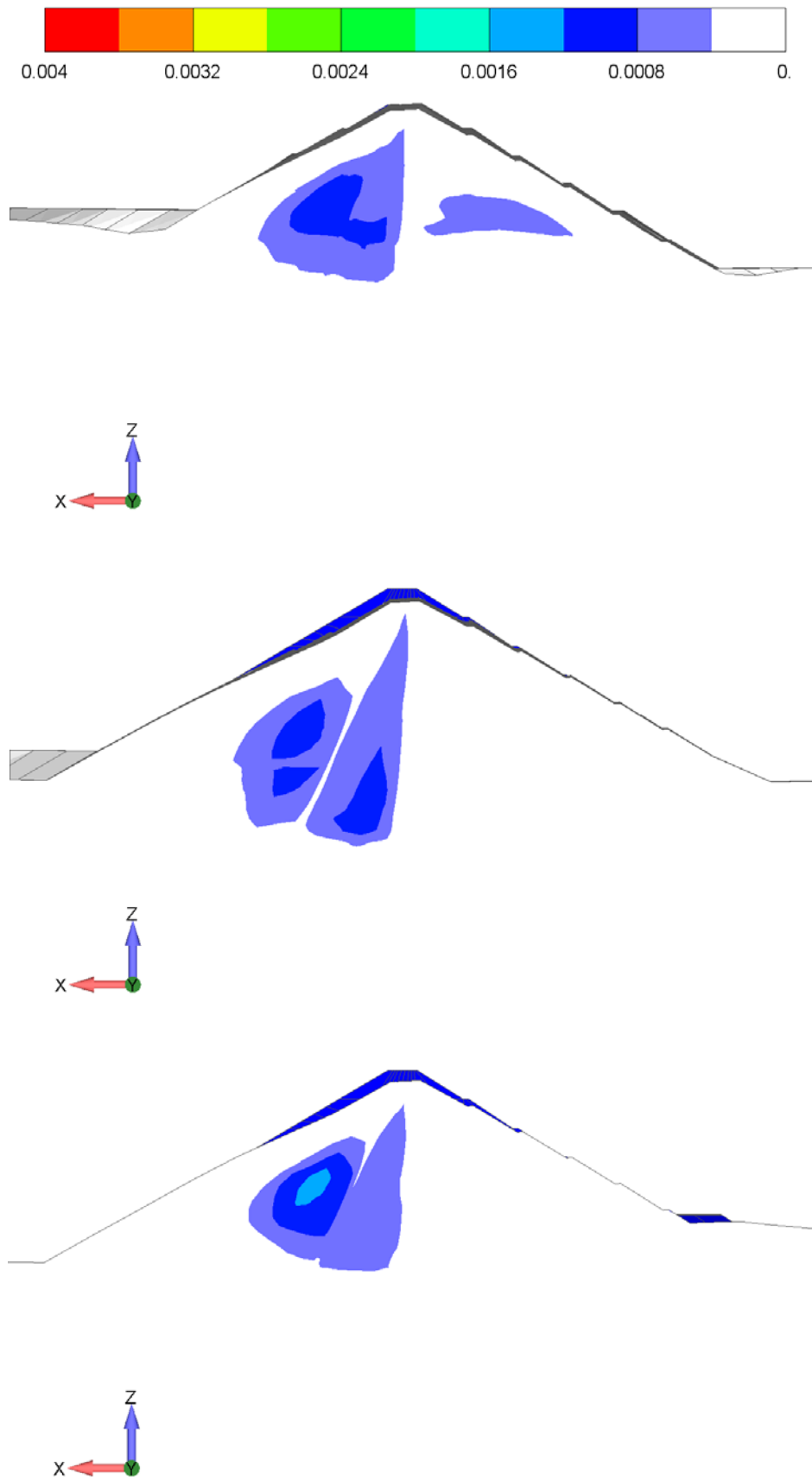




Слика 8.25 Поље вертикалних померања на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16 [m]



Слика 8.26 Поље хоризонталних померања на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16 [m]

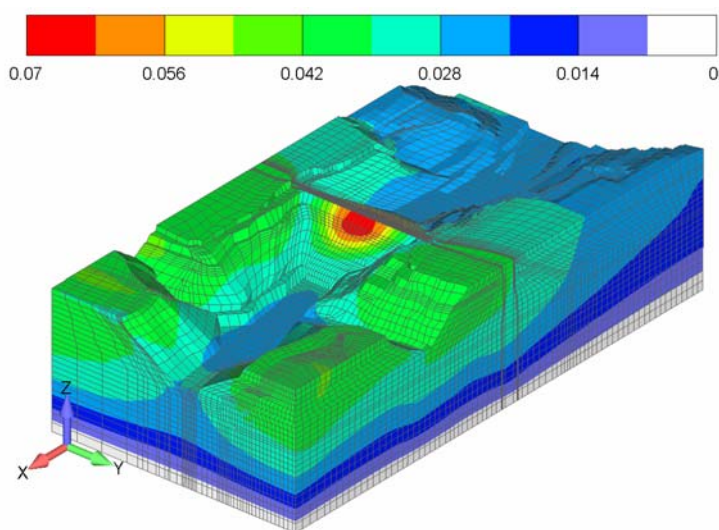


Слика 8.27 Поље пластичних деформација на крају процеса пражњења у пресецима 7, 11 и 16

### 8.5.4 Сеизмичко оптерећење

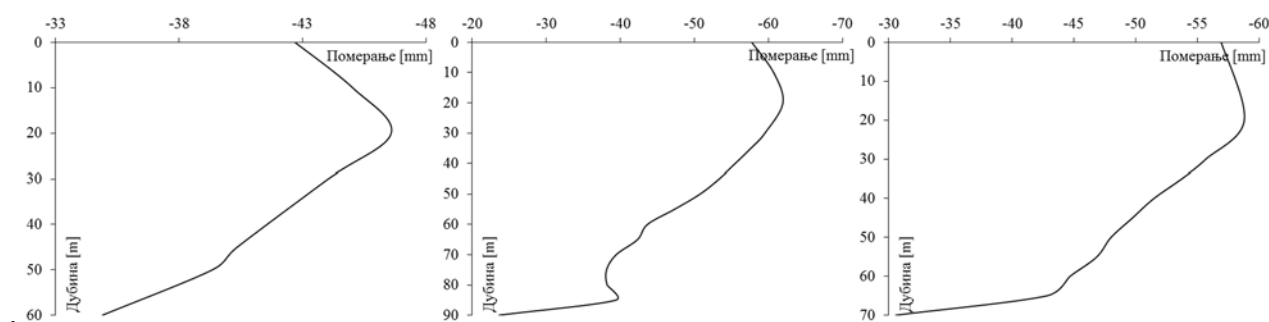
Анализа стабилности бране изложене дејству сеизмичког оптерећења је спроведена применом упрошћене динамичке анализе, као што је речено у уводном делу овог поглавља, односно спроведена је квазистатичка анализа стабилности објекта. Почетно напонско стање је успостављено за услове стационарног струјања при нивоу горње воде на коти нормалног успора. Након тога је анализирано дејство земљотреса задавањем хоризонталног убрзања у правцу водотока.

Поље укупних померања модела за овај случај оптерећења је приказано на слици 8.28. Максимална вредност померања износи 77.7 mm и јавља се у телу бране.



Слика 8.28 Поље укупних померања модела [m]

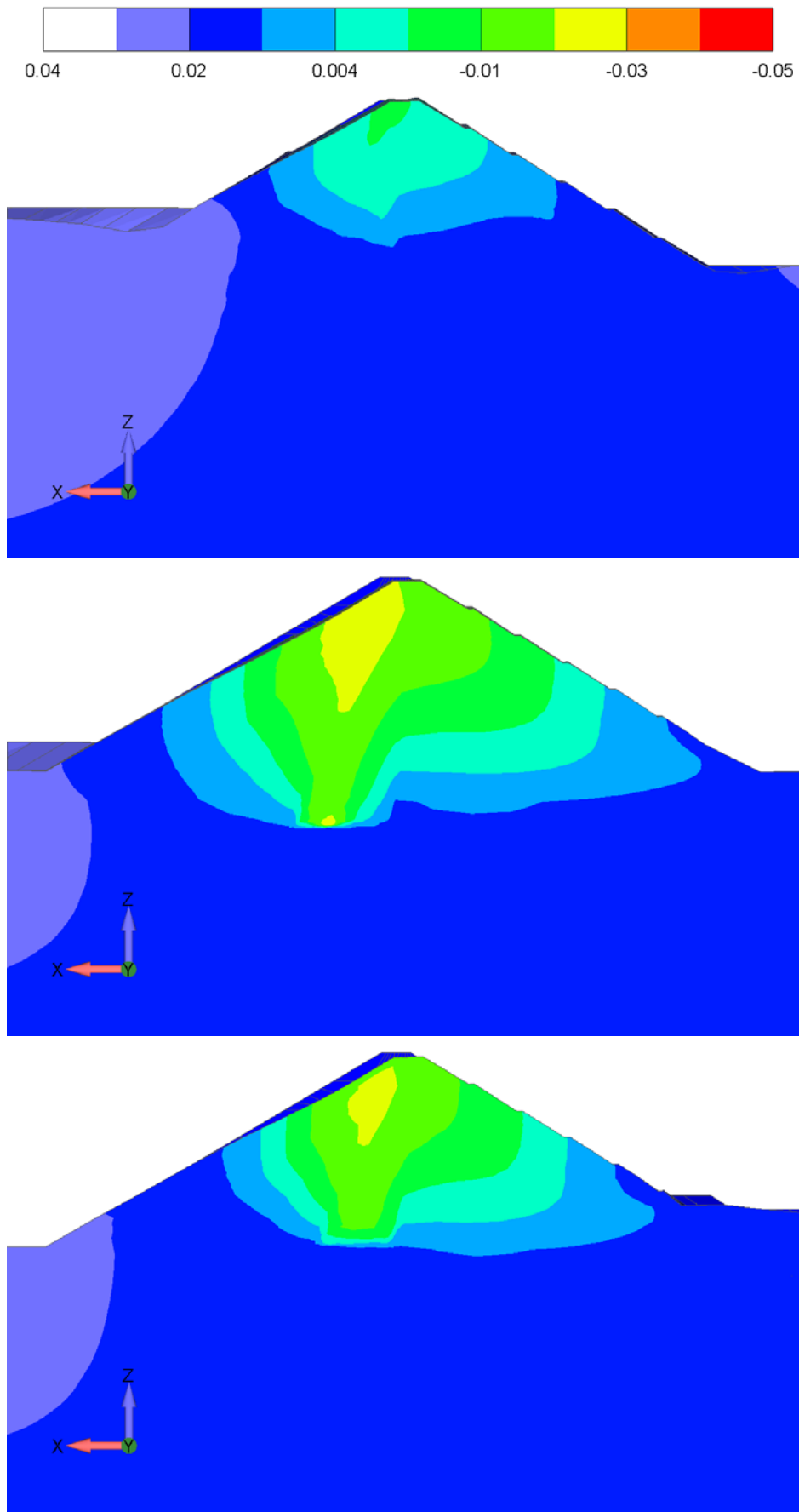
Хоризонтална померања вертикалне осе глиненог језгра у зависности од дубине у пресецима 7, 11 и 16 за случај дејства сеизмичког оптерећења су приказана на слици 8.29. Негативне вредности померања представљају померања у смеру водотока.



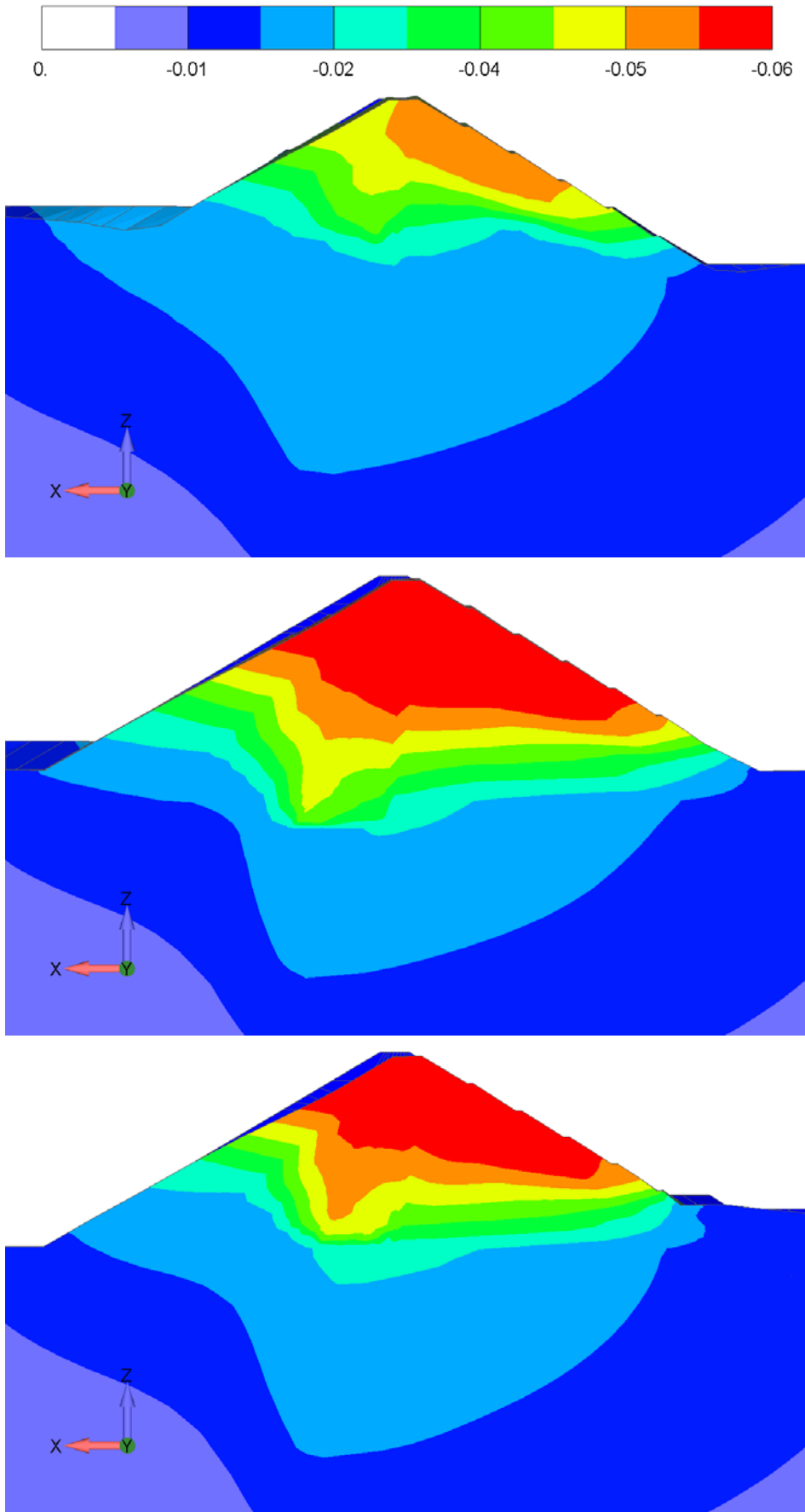
Слика 8.29 Хоризонтална померања осе глиненог језгра у пресецима 7, 11 и 16

Поља вертикалних и хоризонталних померања у моделу за случај сеизмичког оптерећења у пресецима 7, 11 и 16 су приказана на сликама 8.30 и 8.31. Максималне вредности померања се јављају у пресеку 11 у зони глиненог језгра (вертикално померање) као и целој горњој половини преградне конструкције (хоризонтално померање).

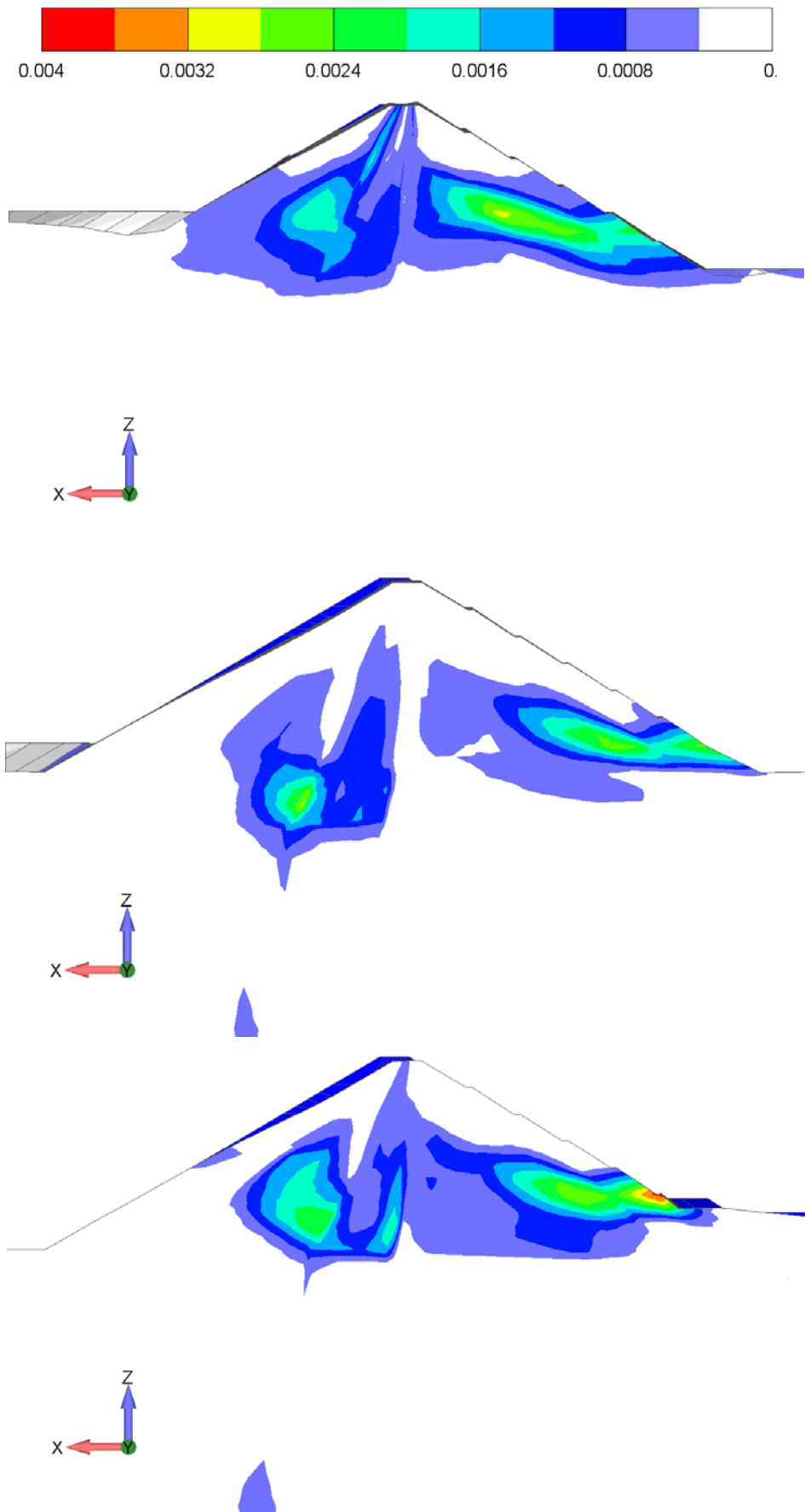
Поља пластичних деформација модела у пресецима 7, 11 и 16 су приказана на слици 8.22. Максималне вредности пластичних деформација се јављају у пресеку 16, односно ближе десној обали, у низводном делу каменог набачаја и износе 0.38%. Поред тога, значајне вредности пластичне деформације постоје у целом глиненом језгру.



Слика 8.30 Поље вертикалних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m]



Слика 8.31 Поље хоризонталних померања у пресецима 7, 11 и 16 [m]



Слика 8.32 Поље пластичних деформација у пресецима 7, 11 и 16



## 8.6 Степен сигурности бране

Након спроведене напонско-деформацијске анализе за све дефинисане случајеве оптерећења, извршено је одређивање степена сигурности бране применом методе редуковања смичуће чврстоће [120] према процедури описаној у поглављу 7. Редуковање смичуће чврстоће је вршено за све материјале који чине тело бране, док чврстоћа околне стенске масе није редукована.

Приликом одређивања степена сигурности бране, почетне вредности параметара материјала, усвојене након калибрације модела су постепено редуковане до губитка стабилности објекта, односно до вредности фактора редуковања када није могуће постићи конвергенцију нумеричких решења у оквиру унапред задате толеранције. Максимална вредност фактора редуковања смичуће чврстоће за коју је могуће остварити конвергенцију нумеричких решења представља степен сигурности бране за анализирани случај оптерећења. Добијене вредности степена сигурности за све разматране случајеве оптерећења су приказане у табели 8.6.

Табела 8.6 Добијени степени сигурности бране

Тип анализе	Минимални степен сигурности	Добијени степен сигурности
Завршетак изградње	1.3	-
Стационарно струјање кроз тело бране	1.5	2.2
Максимална висина воде у акумулацији	1.4	2.0
Брзо пражњење акумулације	1.1-1.3	1.6
Анализа дејства земљотреса	1.0	1.2

Све вредности добијених степена сигурности су веће од минимално захтеваних вредности па се може закључити да је брана Првонек стабилна.

## 9 ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Анализа стабилности брана као преградиних конструкција за формирање акумулације, а посебно насутих брана као најзаступљенијих, представља изазов за инжењере. У оквиру ове дисертације је развијен нумерички модул за симулацију механичког понашања материјала тла као основног материјала за израду насутих брана. Развијени су алгоритми за нумеричку интеграцију напона више материјалних модела. Поред познатих материјалних модела за које су развијени алгоритми, развијен је алгоритам за нумеричку интеграцију напона грануларних материјала применом аналитичког услова лома Максимовића. Алгоритми за имплицитну интеграцију напона материјалних модела су развијени применом методе инкременталне пластичности у комбинацији са методом водећег параметра. Развијени алгоритми су једноставни и погодни за имплементацију у програм за нумеричку анализу. Сви развијени алгоритми су имплементирани у програм ПАК.

Нумеричке анализе стабилности насутих брана подразумевају анализу утицаја дејства статичких и динамичких оптерећења на ове објекте. Како би било могуће спровођење динамичке анализе насутих брана, развијен је и имплементиран алгоритам за интеграцију диференцијалних једначина кретања. Тиме је омогућена анализа стабилности ових објеката применом реалних записа убрзања у временском домену.

Материјал тла од кога се израђују насуте бране представља порозан медиј чије су поре делимично или потпуно испуњене водом. Чврста и течна фаза у тлу под дејством оптерећења, врше међусобну интеракцију. Ову интеракцију је неопходно узети у обзир приликом анализе стабилности насутих брана, па је из тог разлога извршено спрезање једначина чврсте и течне фазе. Интеракција ове две фазе је посебно изражена при дејству динамичких оптерећења међу којима је, за ову врсту конструкција, најзначајније дејство земљотреса. За симулацију механичког понашања порозних двофазних медија је коришћена  $u$ - $p$ - $U$  формулација која је прилагођена и имплементирана у програм ПАК. Поред спрезања једначина потпуно засићених порозних медија, извршена је модификација водећих једначина кретања за случај делимично засићених порозних медија.

Како би се утицај граница модела под дејством динамичких оптерећења свео на најмању могућу меру, неопходно је да границе модела буду довољно удаљене од анализираног објекта (броне). Међутим, на овај начин се вишеструко повећавају димензије модела, а тиме и број коначних елемената модела, што доводи до повећања захтева за рачунарским ресурсима, као и повећања времена потребног за нумеричку симулацију проблема. Како би се ова два супротстављена захтева испунила, неопходно је редуковати границе домена нумеричке интеграције и спречити појаву рефлектовања таласа од граница модела. Рефлектовани таласи не постоје у реалним условима и њихова појава у нумеричкој анализи може довести до решења која у великој мери одступају од реалних услова. Како би спречило рефлектовање таласа од вештачких граница модела, прилагођене су и имплементиране апсорбујуће границе модела применом вискозног пригушења и бесконачних елемената.

Извршена је анализа и систематизација постојећих критеријума за анализу стабилности насутих брана. За све материјалне моделе изложене у првом делу детаљно је приказана

примена методе редуковања смичуће чврстоће и њена нумеричка имплементација при одређивању степена сигурности насутих брана.

Развијени и имплементирани алгоритми су коришћени у анализи стабилности бране Првонек. За одређивање параметара материјалних модела примењиваних у напонско-деформацијској анализи коришћена су експериментална испитивања узорака материјала од којих је изграђено тело бране. Како би се одступање резултата нумеричке анализе свело на најмању меру нумерички модел бране је калибрисан коришћењем измерених вредности напона и померања. Након поступка калибрације модела спроведена је анализа стабилности објекта применом методе редуковања смичуће чврстоће. Добијене вредности степена сигурности за све анализиране случајеве оптерећења су изнад минимално захтеваних вредности, па је закључено је да је брана Првонек стабилна.

Развијени нумерички модул за статичку и динамичку анализу стабилности насутих брана, може бити примењен и у анализама стабилности других проблема механике тла, као што су: насипи, тунели, косине и друге структуре направљене од материјала тла.

## 10 ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. A. Biot, "General Theory of Three-Dimensional Consolidation," *Journal of Applied Physics*, vol. 12, no. 2, pp. 155-164, 1941.
- [2] M. A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a water-saturated porous solid," *The Journal of the Acoustical Society of America*, pp. 168-178, 1956.
- [3] O. Zienkiewicz and T. Shiomi, "Dynamic behaviour of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 8, no. 1, pp. 71-96, 1984.
- [4] O. Zienkiewicz, M. Xie, B. Schrefler, A. Ledesma and N. Bicanic, "Static and Dynamic Behaviour of Soils: A Rational Approach to Quantitative Solutions. II. Semi-Saturated Problems," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 429, no. 1877, pp. 311-321, 1990.
- [5] B. Schrefler, W. Zhang, M. Pastor and O. Zienkiewicz, "Strain localisation modelling and pore pressure in saturated sand samples," *Computational Mechanics*, vol. 22, no. 3, pp. 266-280, 1998.
- [6] C. Li, R. Borja and R. Regueiro, "Dynamics of porous media at finite strain," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, p. 3837–3870, 2004.
- [7] X. Li, O. Zienkiewicz and M. Xie, "A numerical model for immiscible two-phase fluid flow in a porous medium and its time domain solution," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, no. 6, p. 1195–1212, 1990.
- [8] X. Li and O. Zienkiewicz, "Multiphase flow in deforming porous media and finite element solutions," *Computers and Structures*, vol. 45, no. 2, p. 211–227, 1992.
- [9] B. Schrefler and X. Zhan, "A fully coupled model for water flow and airflow in deformable porous media," *Water Resources Research*, vol. 29, no. 1, pp. 155-167, 1993.
- [10] B. Schrefler, X. Zhan and L. Simoni, "A coupled model for water flow, airflow and heat flow in deformable porous media," *International Journal for Numerical Methods in Heat Fluid Flow*, vol. 5, no. 6, pp. 531 - 547, 1995.
- [11] N. Rahman and R. Lewis, "Finite element modelling of multiphase immiscible flow in deforming porous media for subsurface systems," *Computers and Geotechnics*, vol. 24, no. 1, pp. 41-63, 1999.
- [12] D. Sheng, S. Sloan, A. Gens and D. Smith, "Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 27, no. 9, pp. 745-764, 2003.

- 
- [13] R. Stelzer and G. Hofstetter, "Adaptive finite element analysis of multi-phase problems in geotechnics," *Computers and Geotechnics*, vol. 32, no. 6, pp. 458-481, 2005.
- [14] W. Wang, G. Kosakowski and O. Kolditz, "A parallel finite element scheme for thermo-hydro-mechanical (THM) coupled problems in porous media," *Computers and Geosciences*, vol. 35, no. 8, pp. 1631-1641, 2009.
- [15] H. Morel-Seytoux and J. Billica, "A Two-Phase Numerical Model for Prediction of Infiltration: Applications to a Semi-Infinite Soil Column," *Water Resources Research*, vol. 21, no. 4, pp. 607-615, 1985.
- [16] Y. S. Wu and P. Forsyth, "On the selection of primary variables in numerical formulation for modeling multiphase flow in porous media," *Journal of Contaminant Hydrology*, vol. 48, no. 3-4, pp. 277-304, 2001.
- [17] D. Sheng, A. Gens, D. Fredlund and S. Sloan, "Unsaturated soils: From constitutive modelling to numerical algorithms," *Computers and Geotechnics*, vol. 35, no. 6, p. 810-824, 2008.
- [18] O. Zienkiewicz, Y. Xie, B. Schrefler, A. Ledesma and N. Bicanic, "Static and dynamic behaviour of soils: A rational approach to quantitative solutions. I. fully saturated problems," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 429, no. 1877, pp. 285-309, 1990.
- [19] E. Meroi, B. Schrefler and O. Zienkiewicz, "Large strain static and dynamic semisaturated soil behaviour," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 19, no. 2, pp. 81-106, 1995.
- [20] C. Callari and A. Abati, "Finite element methods for unsaturated porous solids and their application to dam engineering problems," *Computers and Structures*, vol. 87, no. 7-8, pp. 485-501, 2009.
- [21] B. Schrefler and R. Scotta, "A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, no. 24-25, p. 3223-3246, 2001.
- [22] L. Laloui, G. Klubertanz and L. Vulliet, "Solid-liquid-air coupling in multiphase porous media," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 27, no. 3, pp. 183-206, 2003.
- [23] A. Khoei and T. Mohammadnejad, "Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams," *Computers and Geotechnics*, vol. 38, no. 2, pp. 142-166, 2011.
- [24] O. Zienkiewicz, A. H. C. Chan, M. Pastor, B. A. Schrefler and T. Shiomi, *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*, John Wiley and Sons, 1999.
-

- 
- [25] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković and N. Grujović, "PAK-finite element program for linear and nonlinear structural analysis and heat transfer," University of Kragujevac, Faculty of Engineering, Kragujevac.
- [26] M. Kojic and K. J. Bathe, *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, 1 edition ed., Springer, 2004.
- [27] M. Mićunović, *Primenjena mehanika kontinuuma*, Beograd: Naučna knjiga, 1990.
- [28] M. Živković, *Nelinearna analiza konstrukcija*, Kragujevac: Univerzitet u Kragujevcu, Mašinski fakultet, 2006.
- [29] R. W. Lewis and B. A. Schrefler, *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, West Sussex P019 IUD, England: John Wiley & Sons Ltd, 1998.
- [30] K. Terzaghi, *Theoretical soil mechanics*, New York: Wiley, 1943.
- [31] H. S. Yu, *Plasticity and Geotechnics*, Springer, 2006.
- [32] GEO-SLOPE International Ltd, "Stress-Deformation Modeling with Sigma/W," GEO-SLOPE International Ltd, Canada, 2009.
- [33] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, USA: Massachusetts Institute of Technoogy, 1996.
- [34] W. Koiter, *General rheorems for elastic-plastic colids*, North-Holland, 1960.
- [35] E. Riks, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, no. 7, p. 529–551, 1979.
- [36] M. A. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through," *Computers & Structures*, vol. 13, no. 1-3, pp. 55-62, 1981.
- [37] I. Smith and V. Griffiths, *Programming the Finite Element Method*, England: John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- [38] G. Balmer, "A general analytical solution for Mohr's envelope," *Proceedings of American Society for Testing and Materials*, vol. 52, pp. 1260-1271, 1952.
- [39] S. Sandip, "A Study of the Behaviour of Jointed Rock Masses - PhD Thesis," University of Toronto, Toronto, 1992.
- [40] I. Bronshtein, K. Semendyayev, G. Musiol and H. Muehlig, *Handbook of Mathematics*, Frankfurt am Main: Wissenschaftlicher Verlag Harrz Deutch GmbH, 2005.
- [41] P. Vermeer and R. Borst, "Non-associated plasticity for soils, concrete and rock," *HERON*, vol. 29, no. 3, 1984.
-

- 
- [42] G. T. Dounias, D. M. Potts and V. P. R., "Finite element analysis of progressive failure: Two case studies," *Computers and Geotechnics*, pp. 155-175, 1988.
- [43] E. Conte, F. Silvestri and T. A., "Stability analysis of slopes in soils with strain-softening behaviour," *Computers and Geotechnics*, pp. 710-722, 2010.
- [44] R. Woods and A. Rahim, "CRISP2D Geotechnical finite element analysis software - Technical reference manual," The CRISP Consortium Limited, 2007.
- [45] B. Muhunthan and S. Murugaiah, "Numerical simulation of the performance of sand columns," Washington State University, Department of Civil & Environmental Engineering, Pullman, 2006.
- [46] H. Matsuoka and T. Nakai, "Stress–deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses," *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, vol. 232, pp. 59-70, 1974.
- [47] Rocscience inc, "Plasticity Models in Phase2," [Online]. Available: [http://www.rocscience.com/downloads/phase2/webhelp/phase2.htm#phase2\\_model/](http://www.rocscience.com/downloads/phase2/webhelp/phase2.htm#phase2_model/).
- [48] TNO DIANA BV, "DIANA - Finite Element Analysis," [Online]. Available: <http://tnodiana.com/upload/files/DIANA/942/HTML/GeoTech/GeoTech.html>.
- [49] H. Matsuoka, A. Sun and T. Konda, "A constitutive law from frictional to cohesive materials," in *Proceedings of XIII ICSMFE*, New Delhi, 1994.
- [50] D. Drucker and W. Prager, "Soil mechanics and plastic analysis for limit design," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 10, no. 2, pp. 157-165, 1952.
- [51] D. Drucker, "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations," *Proceedings of the First US National Congress of Applied Mechanics-ASME*, pp. 487-497, 1951.
- [52] D. Drucker, "Extension of the stability postulate with emphasis on temperature changes in plasticity," *Proceedings of the Second Symposium on Naval Structural Mechanics*, pp. 170-184, 1960.
- [53] D. Rakić, Razvoj Drucker-Prager materijalnog modela sa primenom u geomehanici- Magistarska teza, Kragujevac: Mašinski fakultet u Kragujevcu, 2009.
- [54] B. Jeremic, Lecture Notes on Computational Geomechanics, University of California at Davis, 2010.
- [55] N. Ohno and J. D. Wang, "Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part I: Formulation and basic features for ratchetting behaviour," *International journal of plasticity*, vol. 9, pp. 375-390, 1993.
- [56] J. L. Chaboche, "A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories," *International journal of plasticity*, vol. 24, pp. 1642-1693, 2008.
-

- [57] W. Prager, "Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity," *Journal of Applied Physics*, vol. 20, no. 3, pp. 235-241, 1949.
- [58] P. J. Armstrong and C. O. Frederick, "A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect," Central Electricity Generating Board [and] Berkeley Nuclear Laboratories, Research & Development Department, Great Britain, 1966.
- [59] A. H. Mahmoudi, S. M. Pezeshki-Najafabadi and H. Badnava, "Parameter determination of Chaboche kinematic hardening model using a multi objective Generic Algorithm," *Computational Materials Science*, vol. 50, pp. 1114-1122, 2011.
- [60] M. Maksimović, *Mehanika tla, četvrto izdanje*, Beograd: AMG knjiga, 2008.
- [61] E. Hoek and E. Brown, "Empirical Strength Criterion for Rock Masses," *Journal of the Geotechnical Engineering Division-ASCE*, vol. 106, no. 9, pp. 1013-1035, 1980.
- [62] E. Hoek, "Strength of rock and rock masses," *ISRM News Journal*, vol. 2, no. 2, pp. 4-16, 1994.
- [63] E. Hoek, C. Carranza-Torres and B. Corkum, "Hoek-Brown failure criterion - 2002 edition," in *Proceedings of the 5th North American Rock Mechanics Symposium and the 17th Tunnelling Association of Canada: NARMS-TAC 2002*, Toronto, Canada, 2002.
- [64] E. Hoek, *Practical rock engineering*, North Vancouver, Canada: Evert Hoek Consulting Engineer Inc., 2007.
- [65] D. Pan and A. Hudson, "A simplified three dimensional Hoek–Brown yield criterion," in *Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics and Power Plants*, Madrid, Spain, 1988.
- [66] A. Schofield and P. Wroth, *Critical State Soil Mechanics*, London: McGraw-Hill, 1968.
- [67] J. B. Burland, "The yealding and dilatation of clays (corenspondence)," *Geotechnique*, vol. 15, no. 2, pp. 211-214, 1965.
- [68] C. Desai and . H. Siriwardane, *Constitutive Laws for Engineering Materials: With Emphasis on Geologic Materials*, Prentice Hall, 1984.
- [69] C. Carranza-Torres, "Elasto-plastic solution of tunnel problem using the generalized form of the," *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 41, no. 3, pp. 480-1, 2004.
- [70] E. Wilson, *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures - A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering*, Berkeley, California, USA: Computers & Structures, Inc., 2002.
- [71] M. Kojić, *Dinamika. Teorija i primeri*, Beograd: Naučna knjiga, 1991.



- 
- [72] M. Kojić, R. Slavković, M. Živković and N. Grujović, *Metod konačnih elemenata I, Linearna analiza*, Kragujevac: Mašinski fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, 1998.
- [73] ADINA R & D, Inc., "ADINA - Theory and Modeling Guide; Volume I: ADINA Solids & Structures," ADINA R & D, Inc., U.S.A., 2010.
- [74] ADINA R & D, Inc., "ADINA User Manual," ADINA Engineering, Inc., USA, 1981.
- [75] T. Belytschko, W. K. Liu and B. Moran, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons, 2001.
- [76] V. Saouma, "MERLIN - Theory Manual," University of Colorado, Boulder, Boulder, 2006.
- [77] S. Nagarajan and E. Popov, "Non-linear dynamic analysis of axisymmetric shells," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 535-550, 1975.
- [78] I. B. Donald and P. S. Giam, "Example problems for testing soil slope stability programs-Civil Engineering Research Report No. 8/1989," Monash University, Melbourne, 1989.
- [79] O. Coussy, *Mechanics of Porous Continua*, John Wiley and Sons, 1995.
- [80] G. Oettl, R. Stark and G. Hofstetter, "Numerical simulation of geotechnical problems based on a multi-phase finite element approach," *Computers and Geotechnics*, vol. 31, no. 8, pp. 643-664, 2004.
- [81] M. A. Biot, "Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media," *Journal of Applied Physics*, vol. 33, pp. 1482-1498, 1962.
- [82] J. Ghaboussi and E. Wilson, "Flow of compressible fluid in porous elastic media," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 5, no. 3, pp. 419-442, 1973.
- [83] O. Zienkiewicz and P. Bettess, "Soils and other saturated media under transient dynamic conditions; General formulation and the validity of various simplifying assumptions," in *Soil mechanics - transient and cyclic loads*, 1982, p. chapter 1.
- [84] O. Zienkiewicz and R. Taylor, *Finite Element Method: Volume 1, Fifth Edition*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [85] M. Kojic, N. Filipovic and S. Mijailovic, "A large strain finite element analysis of cartilage deformation with electrokinetic coupling," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, pp. 2447-2464, 2001.
- [86] B. Jeremić, Z. Cheng, M. Taiebat and Y. Dafalias, "Numerical Simulation of Fully Saturated Porous Materials," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, pp. 1-47, 2008.
-

- 
- [87] J. Lysmer and R. Kuhlemayer, "Finite dynamic model for infinite media," *J. Eng. Mech. Div. ASCE* 95, pp. 859-877, 1969.
- [88] K. Edip, M. Garevski and V. Sesov, "Numerical simulation of wave propagation in soil media," in *Proceedings of the 21st European Young Geotechnical Engineers*, Rotterdam, 2011.
- [89] B. Haggblad and G. Nordgren, "Modeling nonlinear soil-structure interaction using interface elements, elastic-plastic soil elements and absorbing infinite elements," *Computers and Structures*, vol. 26, no. 1/2, pp. 307-324, 1987.
- [90] O. C. Zienkiewicz, C. Emson and P. Bettess, "A novel boundary infinite element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, no. 3, pp. 393-404, 1983.
- [91] Delft University of Technology & Plaxis bv, "Plaxis Version 8, Dynamics Manual," Delft University of Technology & Plaxis bv, Netherlands, 2002.
- [92] Delft University of Technology & Plaxis bv, "Plaxis - Scientific Manual," Delft University of Technology & Plaxis bv, Netherlands, 2010.
- [93] A. Gajo, "Influence of viscous coupling in propagation of elastic waves in saturated soil," *Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 121, no. 9, p. 636-644, 1995.
- [94] A. Gajo and L. Mongiovi, "An analytical solution for the transient response of saturated linear elastic porous media," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, no. 6, pp. 399-413, 1995.
- [95] J. Duncan and S. G. Wright, *Soil Strength and Slope Stability*, New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.
- [96] U.S. Army Corps of Engineers, "Engineering and Design-General Design and Construction Considerations For Earth and Rock-Fill Dams-EM 1110-2-2300," U.S. Army Corps of Engineers, Washington, DC, 2004.
- [97] K. Narita, "Design and Construction of Embankment Dams," Dept. of Civil Eng., Aichi Institute of Technology, Toyota City, Aichi, 2000.
- [98] M. Taiebat, B. Jeremić, Y. Dafalias, A. Kaynia and Z. Cheng, "Propagation of seismic waves through liquefied soils," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 30, no. 4, pp. 236-257, 2010.
- [99] U.S. Army Corps of Engineers, "Engineering and Design - Slope Stability - EM 1110-2-1902," U.S. Army Corps of Engineers, Washington DC, 2003.
- [100] U.S. Army Corps of Engineers, "Engineering and Design - Earthquake Design and Evaluation for Civil Works Projects - ER 1110-2-1806," U.S. Army Corps of Engineers, Washington, DC, 1995.
-

- 
- [101] Y. Zheng, X. Tang, S. Zhao, C. Deng and W. Lei, "Strength reduction and step-loading finite element approaches in geotechnical engineering," *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, vol. I, no. 1, p. 21–30, 2009.
- [102] M. Huang and C. Qin Jia, "Strength reduction FEM in stability analysis of soil slopes subjected to transient unsaturated seepage," *Computers and Geotechnics*, vol. 36, no. 1-2, p. 93–101, 2009.
- [103] T. Nian, J. Jiang, S. Wan and M. Luan, "Strength Reduction FE Analysis of the Stability of Bank Slopes Subjected to Transient Unsaturated Seepage," *EJGE*, vol. 16, pp. 165-177, 2011.
- [104] Rocscience Inc., "Strength Factor-Phase2 Theory," 2011. [Online]. Available: [http://www.rocscience.com/downloads/phase2/webhelp/pdf\\_files/theory/Strength\\_Factor.pdf](http://www.rocscience.com/downloads/phase2/webhelp/pdf_files/theory/Strength_Factor.pdf).
- [105] A. Nakamura, F. Cai and K. Ugai, "Embankment basal stability analysis using shear strength reduction finite element method," 2008.
- [106] W. B. Wei, Y. M. Cheng and L. Li, "Three-dimensional slope failure analysis by the strength reduction and limit equilibrium methods," *Computers and Geotechnics*, pp. 70-80, 2009.
- [107] Y. Yu, L. Xie and B. Zhang, "Stability of earth–rockfill dams: Influence of geometry on the three-dimensional effect," *Computers and Geotechnics*, vol. 32, no. 5, p. 326–339, 2005.
- [108] R. Hammah, T. Yacoub, B. Corkum and J. Curran, "The Shear Strength Reduction Method for the Generalized Hoek-Brown Criterion," in *The 40th U.S. Symposium on Rock Mechanics (USRMS): Rock Mechanics for Energy, Mineral and Infrastructure Development in the Northern Regions, held in Anchorage, Alaska, USA, 2005*.
- [109] A. Bishop, "The use of the Slip Circle in the Stability Analysis of Slopes," *Géotechnique*, vol. 5, no. 1, pp. 7-17, 1955.
- [110] W. Fu and Y. Liao, "Non-linear shear strength reduction technique in slope stability calculation," *Computers and Geotechnics*, vol. 37, pp. 288-298, 2010.
- [111] Rocscience Inc., "Phase2 - Slope Stability Verification Manual - Part I," Rocscience Inc., 2011.
- [112] G. Hunter and R. Fell, "The deformation behaviour of embankment dams," The University of New South Wales, Sydney, Australia, 2003.
- [113] Y. Z. Oral, "Deformation Behaviour of a Clay Cored Rockfill Dam in Turkey," School of Natural and Applied Sciences; Middle East Technical University, Ankara, 2010.
- [114] J. Trčková, V. Šrein, M. Štasnty and R. Živor, "The relationship between gneisses from the kola superdeep borehole and their surface analogues," *Acta Geodyn. Geomater.*, Vol. 5, No. 1, pp. 57-63, 2008.
-

- 
- [115] P. Pramthawee, P. Jongpradist and W. Kongkitkul, "Evaluation of hardening soil model on numerical simulation of behaviors of high rockfill dams," *Songklanakarinn Journal of Science and Technology*, vol. 33, no. 3, pp. 325-334, 2011.
- [116] H. Popa and L. Batali, "Using Finite Element Method in geotechnical design. Soil constitutive laws and calibration of the parameters. Retaining wall case study," *WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics*, vol. 5, no. 3, pp. 177-186, 2010.
- [117] J. Macedo and Z. Aguilar, "Calibration of a dynamic model for yuracmayo earth dam," in *5th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering*, Santiago, Chile, 2011.
- [118] A. Amorosi, G. Elia, A. H. C. Chan and M. J. Kavvadas, "Fully Coupled Dynamic Analysis of a Real Earth Dam Overlaying a Stiff Natural Clayey Deposit Using an Advanced Constitutive Model," in *The 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics (IACMAG)*, Goa, India, 2008.
- [119] "Pravilnik o tehničkim normativima za izgradnju objekata visokogradnje u seizmičkim područjima," Službeni list SFRJ, Beograd, 1995.
- [120] P. Pramthawee, P. Jongpradist and P. Kittiyodom, "3D numerical analysis of high rockfill dam construction with consideration of shear dilatancy," in *Rock Mechanics, Fuenkajorn & Phien-wej*, 2011.

## 11 ДОДАТАК

### Формати за дефинисање материјалних модела у програму ПАК

/12/ ОПШТИ ПОДАЦИ ЗА СВЕ МАТЕРИЈАЛЕ

(2I5.F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-5	MOD	Ознака материјалног модела за који се уносе физичке карактеристике
	6-10	MAT	Укупан број материјала дефинисаног материјалног модела (MOD)
	11-20	GUST	Густина материјала

## /12-9/ МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛ 9 (КЕМ-КЛЕЈ МОДЕЛ)

Картице се читају када (MOD.EQ.9); видети картицу /12/.

a1) Модул еластичности  $E$ , Поасонов коеф.  $\nu$  и максимално затезање  $AT$  (3F10.0, I5)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$E$	Модул еластичности
	11-20	$\nu$	Поасонов коефицијент
	21-30	$AT$	Граница максималног затезања
(1)	31-35	$IEL$	Индикатор типа модула еластичности: 0 – модул је константан 1 – модул зависи од деформације

## a2) МАТЕРИЈАЛНЕ КОНСТАНТЕ (5F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$AM$	Нагиб линије критичног стања $M$
	11-20	$ALAM$	Материјална константа $\lambda$
	21-30	$AKA$	Материјална константа $\kappa$
	31-35	$PO$	Средњи напон примарне преконсолидације $\sigma_p$
	41-45	$E$	Коефицијент почетне порозности $e_0$

## Напомена

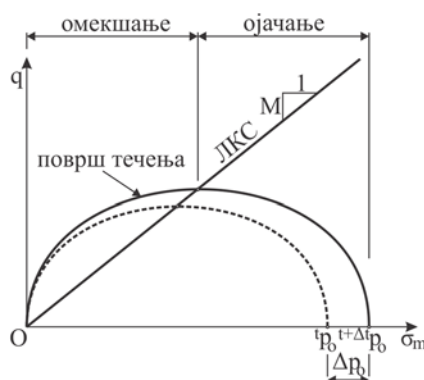
Све материјалне константе се читају коришћењем конвенције да је средњи напон позитиван за притисак као што је уобичајено у геомеханици, међутим у излазном фајлу средњи притискујући напон је негативан, као што је општи случај у структурној анализи.

(1) За  $IEL.EQ.0$  запремински и смичући модул су константни; модул еластичности  $E$  и Поасонов коефицијент се читају из картице a1.

(1) За  $IEL.EQ.1$  запремински модул се рачуна у складу са изразом:

$$K = \frac{1 + e}{KARA} \sigma_m$$

где је  $e$  коефицијент порозности,  $\sigma_m$  средњи напон и  $KARA$  ( $\kappa$ ) је материјална константа.



Слика /12-9/ Модификовани Кем-Клеј материјални модел

/12-9/

## /12-41/ МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛ 41 (ДРАКЕР-ПРАГЕРОВ МОДЕЛ)

**а) Модул еластичности  $E$ , Поасонов коефицијент  $\nu$  (2F10.0)**

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$E$	Модул еластичности
	11-20	$\nu$	Поасонов коефицијент

**б) Подаци за дефинисање површи течења  $f_1=0$  (6F10.0)**

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
(1)	1-10	$k$	Материјална константа $k$
	11-20	$C1$	Параметар кинематског ојачања $C1$
	21-30	$C2$	Параметар кинематског ојачања $C2$
	31-40	$ALFA$	Материјална константа $\alpha$
(2)	41-50	$AT$	Граница максималног затезања

**Напомена**

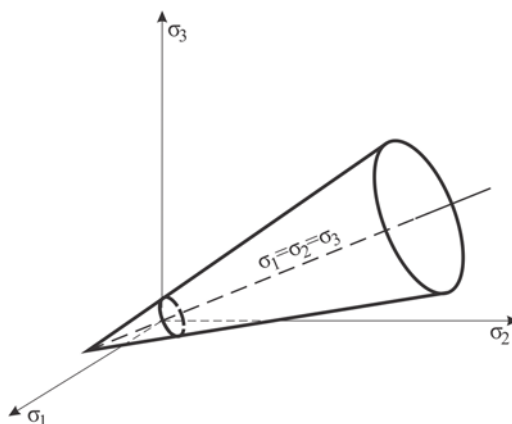
(1) Једначина површи течења:

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_{2D}} - k$$

Једначина површи пластичног потенцијала:

$$g = \beta I_1 + \sqrt{J_{2D}}$$

(2) Граница максималног затезања  $T$ .



Слика /12-41/ Дракер прагеров материјални модел

При дефинисању површи течења усвојено је да је притискујући напон негативан; материјалне константе  $k$ ,  $\alpha$  и  $T$  су позитивне.

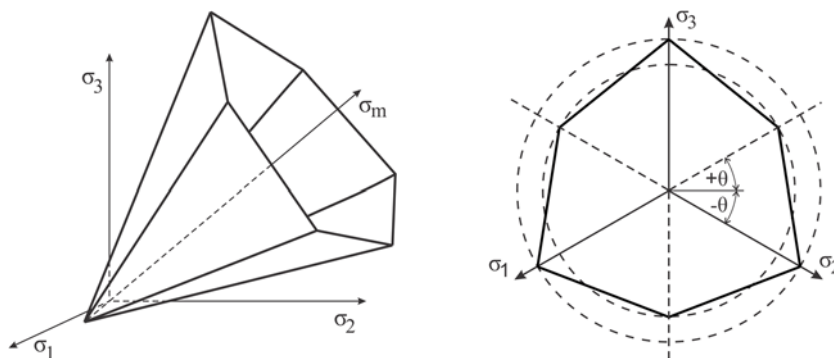
## /12-42/ МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛ 42 (МОР-КУЛОНОВ МОДЕЛ)

а) Модул еластичности  $E$ , Поасонов коефицијент  $\nu$  (2F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$E$	Модул еластичности
	11-20	$\nu$	Поасонов коефицијент

б) Подаци за дефинисање површи течења  $f=0$  (6F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$c$	Кохезија материјала
	11-20	$\phi$	Угао унутрашњег трења
	21-30	$\psi$	Угао дилатанције



Слика /12-42/ Мор-Кулонов материјални модел

**Напомена**

Једначина површи течења:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right) - c \cos \phi$$

Једначина површи пластичног потенцијала:

$$g = \frac{I_1}{3} \sin \psi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \psi \right)$$

Лодеов угао:

$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \right]$$

При дефинисању површи течења усвојено је да је притискујући напон негативан; материјалне константе  $c$ ,  $\phi$  и  $\psi$  су позитивне.



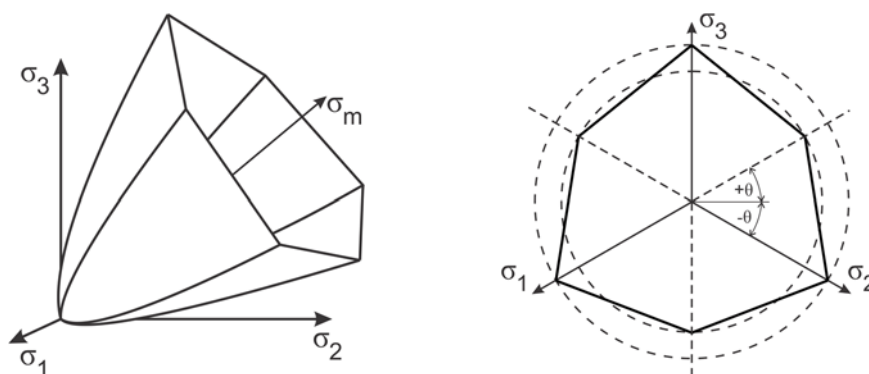
## /12-43/ МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛ 43 (ХУК-БРАУНОВ МОДЕЛ)

а) Модул еластичности  $E$ , Поасонов коефицијент  $\nu$  (2F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$E$	Модул еластичности
	11-20	$\nu$	Поасонов коефицијент

б) Подаци за дефинисање површи течења  $f=0$  (6F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$\sigma_c$	Чврстоћа интактне стене
	11-20	$m$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
	21-30	$m_{dil}$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
	31-40	$s$	Материјална константа Хук-Брауновог модела



Слика /12-43/ Хук-Браунов материјални модел

**Напомена**

Једначина површи течења:

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_{ci} + m_b \sigma_{ci} \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right) - s \sigma_{ci}^2 + 4J_{2D} \cos^2 \theta$$

Једначина површи пластичног потенцијала:

$$g = \frac{I_1}{3} m_{dil} \sigma_{ci} + m_{dil} \sigma_{ci} \sqrt{J_{2D}} \frac{\sqrt{3}}{2} - s \sigma_{ci}^2 + 3J_{2D}$$

Лодеов угао:

$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \right]$$

При дефинисању површи течења усвојено је да је притискујући напон негативан; материјалне константе  $\sigma_{ci}$ ,  $m$ ,  $m_{dil}$  и  $s$  су позитивне.

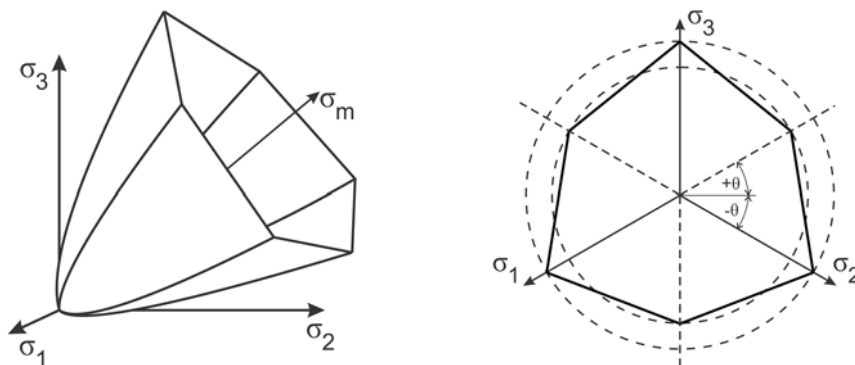
## /12-44/ МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛ 44 (ГЕНЕРАЛИЗОВАНИ ХУК-БРАНУНОВ МОДЕЛ)

а) Модул еластичности  $E$ , Поасонов коефицијент  $\nu$  (2F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$E$	Модул еластичности
	11-20	$\nu$	Поасонов коефицијент

б) Подаци за дефинисање површи течења  $f=0$  (6F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$\sigma_{ci}$	Чврстоћа интактне стене
	11-20	$m$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
	21-30	$m_{dil}$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
	31-40	$s$	Материјална константа Хук-Брауновог модела
	41-50	$a$	Материјална константа Хук-Брауновог модела



Слика /12-44/ Генерализовани Хук-Браунов материјални модел

## Напомена

Једначина површи течења:

$$f = \frac{I_1}{3} m_b \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_{ci}^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left( \sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_b \sqrt{J_{2D}} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)$$

Једначина површи пластичног потенцијала:

$$g = \frac{I_1}{3} m_{bdil} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} - s \sigma_{ci}^{\frac{1}{a}} + 2^{\frac{1}{a}} \left( \sqrt{J_{2D}} \cos \theta \right)^{\frac{1}{a}} + m_{bdil} \sqrt{J_{2D}} \sigma_{ci}^{\left(\frac{1}{a}-1\right)} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right)$$

Лодеов угао:

$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left[ \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \frac{J_{3D}}{J_{2D}^{3/2}} \right) \right]$$

При дефинисању површи течења усвојено је да је притискујући напон негативан; материјалне константе  $\sigma_{ci}$ ,  $m$ ,  $m_{dil}$ ,  $s$  и  $a$  су позитивне.

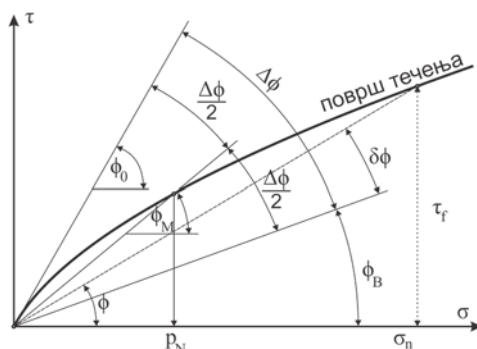
## /12-45/ МАТЕРИЈАЛНИ МОДЕЛ 45 (МАКСИМОВИЋЕВ МОДЕЛ)

а) Модул еластичности  $E$ , Поасонов коефицијент  $\nu$  (2F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
	1-10	$E$	Модул еластичности
	11-20	$\nu$	Поасонов коефицијент

б) Подаци за дефинисање површи течења  $f=0$  (6F10.0)

НАПОМЕНА	КОЛОНА	ОЗНАКА	ОПИС
(1)	1-10	$\bar{\phi}_b$	Базни угао
	11-20	$d\bar{\phi}$	Максимална угаона разлика $\phi_0 - \phi_b$
	21-30	$p_n$	Нормални напон секантног угла



Слика /12-45/ Максимовићев материјални модел

## Напомена

Једначина површи течења и пластичног потенцијала:

$$f \equiv g = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right)$$

(1) Угао унутрашњег трења:

$$\phi = \phi_b + \frac{\Delta \phi}{1 + \frac{\sigma_n}{p_n}}$$

При дефинисању површи течења усвојено је да притискујући напон има негативан знак; материјалне константе  $\phi_b$ ,  $\Delta \phi$ ,  $p_n$  су позитивне.