



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ  
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ КРАЉЕВО

Славиша М. Шалинић

**БРАХИСТОХРОНО КРЕТАЊЕ МЕХАНИЧКИХ  
СИСТЕМА СА РЕАЛНИМ ВЕЗАМА И ПРИМЕНЕ  
НА ТЕХНИЧКЕ ОБЈЕКТЕ**

Докторска дисертација

Краљево, 2009

## ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

<b><i>I. Аутор</i></b>	
Име и презиме: <i>Славиша Шалинић</i>	
Датум и место рођења: <i>11.08.1973. Краљево</i>	
Садашње запослење: <i>асистент на Машинском факултету у Краљеву</i>	
<b><i>II. Докторска дисертација</i></b>	
Наслов: <i>Брахистохроно кретање механичких система са реалним везама и примене на техничке објекте</i>	
Број страница: 106	
Број слика: 9	
Број библиографских података: 77	
Установа и место где је рад израђен: <i>Машински факултет, Краљево</i>	
Научна област (УДК): <i>Примењена механика</i>	
Ментор: <i>проф др Мирослав Весковић</i>	
<b><i>III. Оцена и одбрана</i></b>	
Датум пријаве теме: 11.04.2006.	
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 371, 08.06.2006.	
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: др Вукман Човић, ред. проф, др Драгомир Зековић, ред. проф, др Новак Недић, ред. проф, др Светислав Радовић, ред. проф, др Мирослав Весковић, ред. проф	
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: др Вукман Човић, ред. проф, др Драгомир Зековић, ред. проф, др Драган Милосављевић, ред. проф, др Новак Недић, ред. проф, др Мирослав Весковић, ред. проф	
Датум одбране дисертације:	

## ЗАХВАЛНОСТ

Најважнији резултати до којих сам дошао у овој дисертацији саопштени су на Одељењу за механику Математичког института САНУ у Београду. Чланови Одељења су ми упутили низ корисних примедби и сугестија на којима им се овом приликом захваљујем.

Посебну захвалност изражавам ментору проф. др Мирославу Весковићу и проф. др Вукману Човићу на несебичној помоћи у вези избора теме за докторску дисертацију као и на корисним примедбама и сугестијама које су ми упућивали током рада у циљу постизања бољег квалитета ове дисертације.

# БРАХИСТОХРОНО КРЕТАЊЕ МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА СА РЕАЛНИМ ВЕЗАМА И ПРИМЕНЕ НА ТЕХНИЧКЕ ОБЈЕКТЕ

## РЕЗИМЕ

Анализирано је брахистохроно кретање материјалне тачке и система крутих тела у присуству Кулонове силе трења применом варијационог рачуна. У случају брахистохроног кретања материјалне тачке разматран је случај када се материјална тачка креће у вертикалној равни у хомогеном гравитационом пољу дуж везе у облику храпаве линије са Кулоновим трењем при чему је почетна брзина тачке различита од нуле. Анализа брахистохроног кретања тачке је спроведена за случај када се веза третира као задржавајућа и за случај када се веза третира као незадржавајућа. Извршена је генерализација резултата из литературе, који су третирали ову проблематику применом варијационог рачуна у случају када је почетна брзина тачке једнака нули, увођењем претпоставке о знаку нормалне реакције везе као додатног ограничења у варијационој формулацији проблема. Добијене су једначине брахистохрононе у параметарском облику, где је за параметар узет угао нагиба тангенте на брахистохронону криву. Показано је да је брахистохронона у општем случају двосегментна крива са почетним линијским сегментом који представља параболу при косом хицу у неотпорној средини. Приказана је примена добијених резултата у проблемима оптимизације код постројења за транспорт грануластог материјала. Код овог техничког објекта аналитички је решен и проблем минимизације губитака механичке енергије услед дејства Кулонове силе трења при транспорту грануластог материјала. Код брахистохроног кретања везаног система крутих тела разматран је случај када се међу везама које су наметнуте на систем налази одређен број незадржавајућих веза које се третирају као реалне везе са Кулоновим трењем. Дат је општи приступ решавања применом методологије која је коришћена у проблему брахистохроног кретања материјалне тачке. У оквиру овог поглавља дисертације анализиран је и један специјалан тип механичког система са два степена слободе на коме је приказана аналогија решавања брахистохроног проблема овог система са брахистохроним проблемом материјалне тачке разматраним у прва два поглавља дисертације. Добијени су резултати у облику који је погодан за илустровање на конкретним техничким објектима или даљу нумеричку анализу. Указано је на примену диференцијалне еволуције, као оптимизационе методе, у решавању система нелинеарних алгебарских једначина.

**Кључне речи:** *брахистохроно кретање, Кулоново трење, материјална тачка, систем крутих тела, гравитациони одводни канали, варијациони рачун, оптимално управљање, диференцијална еволуција*

# BRACHISTOCHRONIC MOTION OF MECHANICAL SYSTEMS WITH NONIDEAL CONSTRAINTS AND APPLICATIONS TO TECHNICAL OBJECTS

## ABSTRACT

The brachistochrone motion of the particle and the rigid multibody systems in the presence of Coulomb friction was analyzed by the application of variational calculus. In case of the brachistochrone motion of the particle, the case when the particle moves in the vertical plane in the homogeneous gravitational field along the constraint in the form of a rough curve with Coulomb friction was considered, where the initial velocity of the particle was different from zero. The analysis of the brachistochrone motion of the particle was performed for the case when the constraint is treated as bilateral and for the case when the constraint is treated as unilateral. By introducing the assumption regarding the sign of the normal reaction of the constraint as an additional constraint in the variational formula of the problem, the results from the references treating these problems by variational calculus with the assumption that the initial velocity of the particle is equal to zero were generalized. The equations of the brachistochrone were obtained in their parameter form, where the slope angle of the tangent on the brachistochrone curve was taken as the parameter. It was shown that the brachistochrone in the general case is a two-segment curve with the initial line segment representing a free-fall parabola in nonresistant medium. The application of obtained results in the problems of optimization in a plant for transportation of granular material was presented. In this technical object, the problem of minimization of losses of mechanical energy due to the action of Coulomb friction during transportation of granular material was analytically solved. In the brachistochrone motion of a constrained system of rigid bodies, the case when a certain number of unilateral constraints treated as real constraints with Coulomb friction are found among the constraints imposed on the system. A general approach to solution by the application of the methodology used in the problem of brachistochrone motion of the particle was given. Within this chapter of the dissertation, a special type of the mechanical system with two degrees of freedom on which the analogy of solving the brachistochrone problem of this system with the brachistochrone problem of the particle considered in the first two chapters of the dissertation was analyzed. The results were obtained in the form which is suitable for illustration on specific technical objects and further numerical analysis. The application of differential evolution, as the optimization method, in solving systems of nonlinear algebraic equations was mentioned.

**Key words:** *brachistochronic motion, Coulomb friction, particle, rigid multibody system, gravity flow discharge chutes, calculus of variations, optimal control, differential evolution*

# Садржај

<b>1</b>	<b>УВОД</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>ПРОБЛЕМ БРАХИСТОХРОНЕ КАО ЗАДРЖАВАЈУЋЕ ВЕЗЕ СА КУЛОНОВИМ ТРЕЊЕМ У СЛУЧАЈУ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ</b>	<b>8</b>
2.1	Формулација проблема као задатка варијационог рачуна . . . . .	8
2.2	Решења Ојлер-Лагранжевих једначина . . . . .	13
2.2.1	Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \equiv 0, \lambda_4 \neq 0$ . . . . .	15
2.2.2	Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \neq 0, \lambda_4 \equiv 0$ . . . . .	16
2.3	Распоред линијских сегмената на екстремали . . . . .	18
2.4	Партикуларна решења . . . . .	19
2.5	Услови достижности . . . . .	25
2.6	Специјални случајеви . . . . .	26
2.7	Модификација брахистохроног проблема . . . . .	30
2.7.1	Услови достижности . . . . .	34
2.7.2	Специјални случајеви . . . . .	34
<b>3</b>	<b>ПРОБЛЕМ БРАХИСТОХРОНЕ КАО НЕЗАДРЖАВАЈУЋЕ ВЕЗЕ СА КУЛОНОВИМ ТРЕЊЕМ У СЛУЧАЈУ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ</b>	<b>37</b>
3.1	Формулација проблема . . . . .	37
3.2	Распоред линијских сегмената на екстремали . . . . .	38
3.3	Решење проблема . . . . .	39
3.3.1	Специјални случајеви . . . . .	41
3.4	Услови достижности . . . . .	44
3.4.1	Анализа понашања брахистохроних кривих за одређене вредности почетних и крајњих услова . . . . .	46
<b>4</b>	<b>О ОПТИМИЗАЦИЈИ ТРАНСПОРТА ГРАНУЛАСТИХ МАТЕРИЈАЛА</b>	<b>49</b>
4.1	Минимизација времена транспорта грануластог материјала дуж цеви	49

4.2	Минимизација губитака механичке енергије грануластог материјала услед Кулоновог трења у току транспорта дуж цеви . . . . .	51
4.2.1	Формулација проблема . . . . .	51
4.2.2	Решења Ојлер-Лагранжевих једначина . . . . .	54
4.2.2.1	Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \neq 0, \lambda_4 \equiv 0$	54
4.2.2.2	Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \equiv 0, \lambda_4 \neq 0$	55
4.2.3	Утврђивање распореда линијских сегмената на екстремали .	56
4.2.4	Коначно решење проблема за $v_0 = 0$ . . . . .	58
<b>5</b>	<b>БРАХИСТОХРОНО КРЕТАЊЕ СИСТЕМА КРУТИХ ТЕЛА СА КУЛОНОВИМ ТРЕЊЕМ</b>	<b>62</b>
5.1	Формулација проблема . . . . .	62
5.2	Ојлер-Лагранжеве једначине . . . . .	66
5.3	Специјалан случај механичког система са два степена слободe и једном реалном унилатералном везом . . . . .	70
5.3.1	Ојлер-Лагранжеве једначине . . . . .	74
5.3.1.1	Опште решење на линијском сегменту $N_n \geq 0$ . . .	75
5.3.1.2	Опште решење на линијском сегменту $N_n \equiv 0$ . . .	76
5.4	Структура екстремале . . . . .	78
<b>6</b>	<b>ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЕВОЛУЦИЈЕ ПРИ РЕШАВАЊУ НЕЛИНЕАРНИХ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА</b>	<b>81</b>
6.1	Мотивација . . . . .	81
6.2	Диференцијална еволуција . . . . .	82
6.2.1	Опис методе . . . . .	83
6.2.2	Нека од побољшања диференцијалне еволуције . . . . .	85
<b>7</b>	<b>ЗАКЉУЧАК</b>	<b>87</b>
<b>8</b>	<b>ПРАВЦИ ДАЉЕГ РАЗВОЈА</b>	<b>91</b>
<b>9</b>	<b>ДОДАЦИ</b>	<b>100</b>
9.1	ДОДАТАК А . . . . .	100
9.2	ДОДАТАК Б . . . . .	102

## СПИСАК ОЗНАКА

$m$	маса материјалне тачке
$\vec{g}$	убрзање Земљине теже
$t_f$	време брахистохроног кретања
$t$	време кретања
$t_p$	временски тренуци прелома екстремале
$S$	број тачака прелома екстремале
$v_0$	интензитет брзине тачке у почетном положају
$v_f$	интензитет брзине тачке у крајњем положају
$v$	пројекција брзине тачке на тангенту
$x, y$	координате произвољног положаја материјалне тачке
$x_0, y_0$	координате почетног положаја материјалне тачке
$x_f, y_f$	координате крајњег положаја материјалне тачке
$\vec{v}$	брзина материјалне тачке
$\vec{a}$	убрзање материјалне тачке
$\vec{N}$	нормална компонента реакције везе
$\vec{F}_\mu$	Кулонова сила трења
$\vec{t}$	јединични вектор тангенте
$\vec{u}$	јединични вектор
$\vec{n}$	јединични вектор главне нормале
$N_u$	пројекција нормалне компоненте реакције везе на вектор $\vec{u}$
$\mu$	кофицијент трења
$\varphi$	угао нагиба тангенте на брахистохрону криву
$\varphi_0$	угао нагиба тангенте на брахистохрону криву у почетном положају
$\varphi_f$	угао нагиба тангенте на брахистохрону криву у крајњем положају
$J$	функционал
$F$	подинтегрална функција
$f_i$	ограничења у варијационом проблему
$\lambda_i$	Лагранжеви множитељи веза
$z_i$	величине стања
$\Delta(\cdot)$	асинхрона варијација величине ( $\cdot$ )
$\dot{w}$	променљива слабљења
$C_{\lambda_i}, C_x, C_y, C_v, C_t$	интеграционе константе
$C_x^*, C_y^*, C_t^*, C_\varphi$	интеграционе константе
$SG1, SG2$	ознаке типа линијског сегмента



---

$N_{SG1}$	.....	укупан број линијских сегмената типа $SG1$
$N_{SG2}$	.....	укупан број линијских сегмената типа $SG2$
$T$	.....	кинетичка енергија
$\Pi$	.....	потенцијална енергија
$P_\mu$	.....	снага генералисаних сила трења
$q_i$	.....	генералисане координате
$\xi_1, \xi_2$	.....	ортогоналан систем генералисаних координата
$a_{ij}$	.....	кофицијенти метричког тензора
$Q_i^\mu$	.....	генералисана сила Кулоновог трења која одговара генералисаној координати $q_i$
$Q_i^u$	.....	генералисана сила управљања која одговара генералисаној координати $q_i$
$\vec{r}_i$	.....	вектор положаја тачке $M_i$
$Np$	.....	величина популације
$F$	.....	фактор мутације
$Cr$	.....	фактор укрштања
$G_{\max}$	.....	максималан број итерација
$\text{rand}_i()$	.....	генератор случајних бројева равномерно распоређених у интервалу $(0, 1)$
$\text{Rnd}_i()$	.....	генератор случајних целих бројева из скупа $\{1, 2, \dots, n\}$

# Глава 1

## УВОД

Предмет ове докторске дисертације је брахистохроно кретање механичких система и утицај који на овакву врсту кретања имају силе Кулоновог трења. Добијање нових резултата из ове проблематике има велики значај у практичним применама. Проблем о премештању система из једног задатог положаја у други за минимално време је чест случај код техничких објеката као што су роботи и дизалице (видети на пример [10, 37, 30, 72]). Овакво кретање се назива брахистохроно, а у литератури из оптималног управљања користи се и назив проблем временски минималног оптималног управљања. Брахистохрони проблем је први формулисао Johann Bernoulli 1696. године у часопису *Acta Eruditorum* (руски превод у [51]) у облику следећег задатка: одредити глатку линију по којој се материјална тачка спушта без почетне брзине из положаја А у положај Б под дејством сопствене тежине за најкраће време. Показало се да крива којој одговара најмање време спуштања представља циклоиду. Овај проблем се у литератури назива класичан проблем брахистохроне или Бернулијев случај брахистохроне. Формулисани проблем су независно један од другог решили Johann и Jakob Bernoulli, Newton, Leibniz, Huygens и L'Hospital. Бернулијево решење овог задатка дало је снажан подстицај развоју варијационог рачуна који је постао моћан алат за решавање свих оних проблема који захтевају минимизацију не само времена него и других параметара система.

Даља истраживања на овом пољу у суштини су се одвијала у два правца. С једне стране задржана је класична формулација а уопштавало се поље сила у коме се материјална тачка креће (референце [6, 27, 35, 43, 59, 60, 71, 75]), а с друге стране вршило се проширење класичног Бернулијевог случаја брахистохроне на системе материјалних тачака и крутих тела (референце [1, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 22])

и [23, 25, 48, 68, 69]). У последње време објављен је низ радова у којима је пажња усмерена на разматрање нумеричких метода за решавање класичног проблема брахистохроне ([2, 21, 26, 38, 55, 76]). Треба нагласити да се брахистохроно кретање врши под дејством додатних сила, тзв. управљачких сила. При решавању брахистохроног проблема у механици се на ове управљачке силе намеће услов да је њихова снага једнака нули у току брахистохроног кретања. На пример у случају Бернулијеве брахистохроне то је реакција глатке циклоиде. Међутим, има техничких објеката код којих снага управљачких сила није једнака нули. Пример за ово имамо код робота где се операција премештања роботске хваталке из задатог почетног положаја у задат крајњи положај за минимално време остварује управљачким силама које представљају погонске силе у зглобовима робота (видети на пример [10, 30, 72]). Поред примене варијационог рачуна у решавању брахистохроног проблема, у литератури се у решавању ове проблематике користи и теорија оптималног управљања. Тако се у [24, 43] класичан брахистохронички проблем формулише као задатак сингуларног оптималног управљања где је у [24] за управљачку величину узета реакција везе, а у [43] за величину управљања је узет извод угла нагиба тангенте на брахистохрону криву.

У [45] је решаван проблем оптималног кретања боба на стази као проблем брахистохроног кретања материјалне тачке на површи. Брахистохроно кретање материјалне тачке по храпавој површи са Кулоновим трењем је детаљно разматрано у референци [18] где је први пут решаван проблем брахистохроне са Кулоновим трењем при почетној брзини различитој од нуле. У [1] је показана аналогија између Бернулијевог брахистохроног проблема и проблема одређивања криве по којој, котрљајући се без клизања, диск стиже из задатог почетног положаја у задати крајњи положај за минимално време. Овој проблематици је сличан рад [8] код кога се диск котрља без клизања низ стрму равну а тражи се облик обода диска који омогућује да диск стигне из задатог почетног положаја у задати крајњи положај за минимално време. У [48] је разматран брахистохронички проблем у случају равног кретања крутог тела у оквирима теорије оптималног управљања. Бернулијев случај брахистохроне је у референцама [14, 15] проширен на систем крутих тела у облику затвореног кинематичког ланца без и са спољашњим везама, а у [20] је извршено проширење на слободан систем материјалних тачака. Резултати из референци [16, 17, 19, 20, 68, 69] представљају основу за даља истраживања на пољу брахистохроног кретања општих механичких система са холономним и нехолономним везама.

Модел материјалне тачке која се креће по храпавој кривој примењује се у

проблемима оптимизације код инсталација за транспорт грануластог материјала ([12, 13, 52, 56, 76, 77]). Код оваквих техничких објеката оптимизује се профил одводног канала којим се транспортује грануласти материјал са циљем да се минимизира време транспорта, губици механичке енергије материјала услед Кулоновог трења итд. Због тога је од великог практичног значаја проучавање брахистохроног кретања материјалне тачке у хомогеном гравитационом пољу у присуству Кулонове силе трења. Овај проблем је разматран у радовима [6, 35] коришћењем варијационог рачуна под претпоставком да је почетна брзина тачке једнака нули. Добијена су аналитичка решења у коначном облику. Случај када је почетна брзина различита од нуле није довољно истражен. Један поступак за решење овог проблема садржан је у раду [43] и он се базира на коришћењу теорије сингуларног оптималног управљања. Брахистохроно кретање система крутих тела са Кулоновим трењем је први пут детаљно обрађено у раду [19]. У овој референци је указано на један специјалан систем са два степена слободе код кога је могуће добити решење у аналитичком облику. Раније у литератури у третирању ове проблематике ефекат Кулоновог трења је занемариван или су вршена упрошћавања везана за утицај Кулонове силе трења. Тако се у референци [72] разматра проблем одређивања закона промене момената погонских спрегова у зглобовима робота ради његовог премештања из једне задате конфигурације у другу. При томе се у зглобовима узимао утицај Кулоновог трења али уз претпоставку да су силе трења константног интензитета у току кретања.

Имајући у виду изложени преглед проблематике у приказаној литератури, у овој докторској дисертацији даља разматрања су усмерена на уопштавање резултата код проблема брахистохроног кретања материјалне тачке са Кулоновим трењем у случају почетне брзине различите од нуле и проширивање резултата из референце [18]. Такође, извршиће се проширење резултата из [19] на случај реалних унилатералних веза са Кулоновим трењем и практичну примену добијених резултата. Претпоставља се да се брахистохроно кретање врши у хомогеном гравитационом пољу. Разматрања ће се базирати на принципима аналитичке механике и варијационом рачуну уз формирање једначина погодних за нумеричку обраду.

# Глава 2

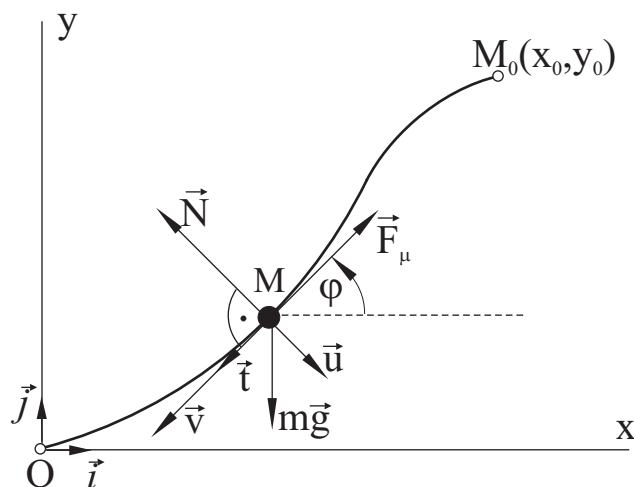
## ПРОБЛЕМ БРАХИСТОХРОНЕ КАО ЗАДРЖАВАЈУЋЕ ВЕЗЕ СА КУЛОНОВИМ ТРЕЊЕМ У СЛУЧАЈУ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

У овом делу дисертације разматран је проблем брахистохроног кретања материјалне тачке која се креће у вертикалној равни у хомогеном гравитационом пољу дуж задржавајуће везе у облику храпаве линије са Кулоновим трењем. Претпостављено је да је почетна брзина тачке различита од нуле. Добијена су решења за две варијанте граничних услова. У једној варијанти су задате координате почетног и крајњег положаја тачке, а у другој су задате координате почетног положаја а за крајњи положај се захтева да се налази на вертикалној правој. За обе варијанте добијене су једначине брахистохроне у параметарском облику, где је за параметар узет угао нагиба тангенте на брахистохрону. Добијена брахистохрона је у општем случају двосегментна крива са почетним сегментом који представља параболу при косом хицу у неотпорној средини. Показано је да се за специјалне вредности параметара система резултати рада своде на познате резултате из литературе.

### 2.1 Формулација проблема као задатка варијационог рачуна

Размотримо материјалну тачку  $M$  масе  $m$  која се креће у вертикалној равни у хомогеном пољу Земљине теже по храпавој кривој са Кулоновим трењем која се третира као задржавајућа веза (кретање тачке аналогно кретању прстена по жици). Тражи се једначина ове криве  $y = f(x) \in C^2[0, t_f]$  тако да материјална тачка  $M$  полазећи из положаја  $M_0(x_0, y_0)$  почетном брзином интензитета  $v_0 \neq 0$  стигне у положај  $O(0, 0)$  за минимално време  $t_f$ , где је са  $y$  означена вертикална оса усмерена навише а са  $x$  хоризонтална оса Декартовог координатног система.

Без губитка општости узима се да је  $x_0 > 0$  и  $y_0 > 0$ .



Слика 2.1: Анализа сила на путањи тачке

Диференцијална једначина кретања тачке  $M$  је

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\mu, \quad (2.1)$$

где је:  $\vec{N}$  нормална компонента реакције везе,  $\vec{F}_\mu = -\mu |\vec{N}| \vec{v}/|\vec{v}|$  Кулонова сила трења,  $\mu$  коефицијент трења,  $\vec{g} = -g\vec{j}$  убрзање Земљине теже,  $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$  и  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$  брзина и убрзање материјалне тачке, а  $\vec{i}$  и  $\vec{j}$  су јединични вектори оса  $x$  и  $y$ , респективно. По природи проблема је  $v \geq 0$ , где је  $v$  ознака за пројекцију брзине  $\vec{v}$  тачке на правац одређен јединичним вектором  $\vec{t}$  тангенте на тражену криву (видети сл.2.1), што значи да је  $v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ . Нека је  $\vec{u}$  јединични вектор облика

$$\vec{u} = -\frac{\dot{y}}{v}\vec{i} + \frac{\dot{x}}{v}\vec{j} \quad (2.2)$$

чији смер не зависи од конкавности (конвексности) криве. Из израза за векторе  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  следи да је  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Скаларним множењем леве и десне стране једначине (2.1) вектором  $\vec{u}$  добија се

$$m \left( -\frac{\ddot{x}\dot{y}}{v} + \frac{\ddot{y}\dot{x}}{v} \right) = -\frac{mg\dot{x}}{v} + N_u, \quad (2.3)$$

где је  $N_u = \vec{N} \cdot \vec{u}$  и сходно томе  $|\vec{N}| = |N_u|$ .

Теорема о промени кинетичке енергије материјалне тачке у диференцијалном облику гласи

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \left( m\vec{g} + \vec{F}_\mu \right) \cdot \vec{v} \quad (2.4)$$

или у експлицитној форми

$$f_1 \equiv m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) + mg\dot{y} + \mu |N_u| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0. \quad (2.5)$$

У почетној фази решавања проблема, тражену брахистохрону криву треба третирати као криву која у општем случају мења конкавност. На деловима криве који су конкавни надоле постоје две могућности за оријентацију вектора  $\vec{N}$  јер је претпостављено да тражена брахистохрона крива представља задржавајућу везу. Вектор  $\vec{N}$  може да буде оријентисан као вектор  $m\vec{g}$  или супротно од њега. Ове могућности за оријентацију вектора  $\vec{N}$  представљају разлог за увођење јединичног вектора  $\vec{u}$ . Наиме, из (2.2) произилази да јединични вектор  $\vec{u}$ , за разлику од јединичног вектора главне нормале  $\vec{n}$ , не мења оријентацију са променом конкавности криве и стално има исту оријентацију као и вектор  $m\vec{g}$ . С обзиром на ово, ако се претпостави да у току брахистохроног кретања тачке нормална компонента реакције везе  $\vec{N}$  не мења оријентацију у односу на силу тежине  $m\vec{g}$ , погодније је користити пројекцију  $N_u$  него пројекцију  $N_n = \vec{N} \cdot \vec{n}$  јер пројекција  $N_u$  неће мењати знак при промени конкавности криве.

Због присуства апсолутне вредности пројекције  $N_u$  у једначини (2.5) мора се извршити анализа знака ове пројекције. С тим у вези, надаље ће се претпоставити да је нормална компонента реакције везе  $\vec{N}$  стално усмерена у страну која је супротна од оне у коју је усмерена сила тежине што имплицира (видети сл. 2.1)

$$N_u \leq 0. \quad (2.6)$$

Исправност ове претпоставке може да се базира на услову да се резултати који из ње следе требају свести за  $\mu = 0$  на резултате који важе за класичну брахистохрону, а за  $\mu \neq 0$  и  $v_0 = 0$  на резултате из [6, 35]. Ради елиминације других извода у једначини (2.5) уведемо следеће релације

$$f_2 \equiv \dot{x} + v \cos \varphi = 0,$$

$$f_3 \equiv \dot{y} + v \sin \varphi = 0, \quad (2.7)$$

чије се значење види на сл.2.1. С обзиром на релације (2.3),(2.6) и (2.7), једначина

(2.5) сада добија следећи облик

$$f_1 \equiv \dot{v} - g \sin \varphi + \mu(-v\dot{\varphi} + g \cos \varphi) = 0. \quad (2.8)$$

Услов  $N_u \leq 0$ , на основу једначине (2.3) и трансформација (2.7), даје још једну релацију у разматраном проблему

$$v\dot{\varphi} - g \cos \varphi \leq 0. \quad (2.9)$$

Увођењем нове непознате функције  $\dot{w}(t)$  (видети [70]), која се у литератури назива и променљива слабљења (slack variable), неједнакост (2.9) се трансформише у једнакост

$$f_4 \equiv v\dot{\varphi} - g \cos \varphi + \dot{w}^2 = 0. \quad (2.10)$$

Постављени проблем може сада да се формулише као задатак варијационог рачуна

$$\int_0^{t_f} dt \longrightarrow \inf \quad (2.11)$$

уз ограничења (2.8), (2.7) и (2.10), при чему су почетни и крајњи услови

$$t_0 = 0 : x(0) = x_0, y(0) = y_0, v(0) = v_0; t = t_f : x(t_f) = 0, y(t_f) = 0. \quad (2.12)$$

Увођењем новог функционала

$$J = \int_0^{t_f} (1 + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i) dt, \quad (2.13)$$

где су  $\lambda_i$  Лагранжеви множитељи веза, и следећом трансформацијом величина стања (видети [33, 34])

$$z_1 \equiv x, z_2 \equiv y, z_3 \equiv \varphi, z_4 \equiv v, \dot{z}_5 \equiv \lambda_1, \dot{z}_6 \equiv \lambda_2, \dot{z}_7 \equiv \lambda_3, \dot{z}_8 \equiv \dot{w}, \dot{z}_9 \equiv \lambda_4, \quad (2.14)$$

постављени везани варијациони задатак може се преформулисати као слободан варијациони задатак облика

$$J = \int_0^{t_f} \{1 + \dot{z}_5 [\dot{z}_4 - \mu z_4 \dot{z}_3 + g(\mu \cos z_3 - \sin z_3)] + \dot{z}_6 (\dot{z}_1 + z_4 \cos z_3) +$$



$$+\dot{z}_7(\dot{z}_2 + z_4 \sin z_3) + \dot{z}_9(z_4 \dot{z}_3 - g \cos z_3 + \dot{z}_8^2)\} dt \rightarrow \inf,$$

$$t_0 = 0 : z_1(0) = x_0, \quad z_2(0) = y_0, \quad z_4(0) = v_0, \quad z_i(0) = 0 \quad (i = 5, \dots, 9),$$

$$t = t_f : z_1(t_f) = 0, \quad z_2(t_f) = 0. \quad (2.15)$$

Услов стационарности  $\Delta J = 0$  даје Ојлер-Лагранжеве једначине

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_k} \right) = 0, \quad k = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_j} \right) = 0, \quad j = 3, 4, \quad (2.16)$$

као и граничне услове:

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \Delta z_i \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad i = 1, \dots, 9, \quad \left[ \left( F - \sum_{i=1}^9 \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right) \Delta t \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad (2.17)$$

где се ознака  $\Delta(\cdot)$  користи за асинхрону варијацију [28, 32, 50] величине  $(\cdot)$ , а  $F$  представља подинтегралну функцију функционала  $J$ . Чињеница да величина  $z_3$  (угао  $\varphi$ ) није задата у почетном и крајњем положају тачке даје следеће природне граничне услове на левом и десном крају

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_3} \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0 \quad \rightarrow \quad [-\mu v \lambda_1 + v \lambda_4]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad (2.18)$$

а чињеница да величине  $z_i$  ( $i = 4, \dots, 9$ ) нису задате у крајњем положају даје на десном крају још шест природних граничних услова облика

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_4} \right]_{(t=t_f)} = 0 \quad \rightarrow \quad [\lambda_1]_{(t=t_f)} = 0, \quad (2.19)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_5} \right]_{(t=t_f)} = 0 \quad \rightarrow \quad [\dot{v} - \mu v \dot{\varphi} + g(\mu \cos \varphi - \sin \varphi)]_{(t=t_f)} = 0, \quad (2.20)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_6} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{x} + v \cos \varphi]_{(t=t_f)} = 0, \quad (2.21)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_7} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{y} + v \sin \varphi]_{(t=t_f)} = 0, \quad (2.22)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_8} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{w} \lambda_4]_{(t=t_f)} = 0, \quad (2.23)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_9} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [v \dot{\varphi} - g \cos \varphi + \dot{w}^2]_{(t=t_f)} = 0. \quad (2.24)$$

Због тога што време брахистохроног кретања  $t_f$  није задато, услов трансверзалности на десном крају гласи

$$\left[ F - \sum_{i=1}^9 \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right]_{(t=t_f)} = 0 \quad (2.25)$$

или у развијеном облику, након елиминације величина  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{w}$  посредством једначина (2.8), (2.7) и (2.10)

$$[1 + \lambda_1 g (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) + v (\lambda_2 \cos \varphi + \lambda_3 \sin \varphi) - \lambda_4 (\dot{w}^2 + g \cos \varphi)]_{(t=t_f)} = 0. \quad (2.26)$$

## 2.2 Решења Ојлер-Лагранжевих једначина

Ојлер-Лагранжеве једначине (2.16) по променљивама  $z_1$  и  $z_2$  (односно, променљивама  $x$  и  $y$ ) своде се на

$$\lambda_2 \equiv C_{\lambda_2}, \quad \lambda_3 \equiv C_{\lambda_3}, \quad C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3} = const., \quad (2.27)$$

а с обзиром на природне граничне услове (2.20)-(2.24) једначине по променљивама  $z_5$ ,  $z_6$ ,  $z_7$  и  $z_9$  имају облик једначина (2.8), (2.7)<sub>1</sub>, (2.7)<sub>2</sub> и (2.10), респективно, док се Ојлер-Лагранжева једначина по  $z_8$  своди на облик

$$\dot{w} \lambda_4 \equiv 0. \quad (2.28)$$

Ојлер-Лагранжеве једначине (2.16) по променљивама  $z_3$  и  $z_4$  (односно, променљивама  $\varphi$  и  $v$ ) гласе

$$\begin{aligned}
& -g\lambda_1 (\mu \sin \varphi + \cos \varphi) - v\lambda_2 \sin \varphi + v\lambda_3 \cos \varphi + \mu\dot{v}\lambda_1 + \mu v\dot{\lambda}_1 + \\
& + g\lambda_4 \sin \varphi - \dot{v}\lambda_4 - v\dot{\lambda}_4 = 0,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$-\mu\dot{\varphi}\lambda_1 + \lambda_2 \cos \varphi + \lambda_3 \sin \varphi - \dot{\lambda}_1 + \dot{\varphi}\lambda_4 = 0. \tag{2.30}$$

Из једначине (2.28) следи да се на интервалу  $[0, t_f]$  екстремала функционала  $J$  може састојати из линијских сегмената на којима је  $\dot{w} \equiv 0$ ,  $\lambda_4 \neq 0$  и линијских сегмената на којима је  $\dot{w} \neq 0$ ,  $\lambda_4 \equiv 0$ . Сходно томе, функционал  $J$  спада у групу функционала чије екстремале могу имати преломе (такозване угаоне тачке) у простору  $\mathbb{R}^9$  јер величина  $\dot{w}$  има прекиде прве врсте. Ако се са  $S$  означи укупан број тачака прелома екстремале којима одговарају временски тренуци  $t_p$  ( $p = 1, \dots, S$ ), онда у тим тачкама морају да буду задовољени Вајерштрас-Ердманови угаони услови [28, 32, 3]:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \right)_{t_p-0} = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \right)_{t_p+0}, \quad i = 1, \dots, 9; \quad p = 1, \dots, S, \tag{2.31}$$

$$\left( F - \sum_{i=1}^9 \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right)_{t_p-0} = \left( F - \sum_{i=1}^9 \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right)_{t_p+0}, \quad p = 1, \dots, S. \tag{2.32}$$

С обзиром на прве интеграле (2.8), (2.7), (2.10), (2.27) и (2.28), услови (2.31) ( $i = \{1, 2, 5, \dots, 9\}$ ;  $p = 1, \dots, S$ ) су идентички задовољени. Пошто подинтегрална функција  $F$  не зависи експлицитно од времена, једначине (2.16), с обзиром на услов трансверзалности (2.25), имају први интеграл облика [32]

$$F - \sum_{i=1}^9 \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \tag{2.33}$$

па су и услови (2.32) идентички задовољени. У тачкама прелома екстремале функционала  $J$ , величине  $x$ ,  $y$  и  $v$  треба да буду непрекидне што даје следеће услове

$$x(t_p-0) = x(t_p+0), \quad y(t_p-0) = y(t_p+0), \quad v(t_p-0) = v(t_p+0), \quad p = 1, \dots, S. \tag{2.34}$$

С обзиром на услов (2.34)<sub>3</sub>, Вајерштрас-Ердманови услови (2.31) ( $i = 3, 4$ ;  $p = 1, \dots, S$ ) своде се на облик

$$\lambda_1(t_p - 0) = \lambda_1(t_p + 0), \quad \lambda_4(t_p) = 0, \quad p = 1, \dots, S. \quad (2.35)$$

### 2.2.1 Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \equiv 0$ , $\lambda_4 \neq 0$

Комбиновањем једначина (2.8) и (2.10) добија се

$$\dot{\varphi} = \frac{g \cos \varphi}{v}, \quad \frac{dv}{d\varphi} = v \tan \varphi, \quad (2.36)$$

а одатле, након интеграције једначине (2.36)<sub>2</sub>

$$v = \frac{C_v}{\cos \varphi}, \quad (2.37)$$

где је  $C_v$  интеграциона константа. Коришћењем трансформације  $d(\cdot)/dt = (d(\cdot)/d\varphi)\dot{\varphi}$  и израза (2.7), (2.36)<sub>1</sub> и (2.37) добијају се следеће диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{C_v^2}{g(\cos \varphi)^2},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{C_v^2}{g(\cos \varphi)^2} \tan \varphi,$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{C_v}{g(\cos \varphi)^2}, \quad (2.38)$$

чија општа решења гласе

$$x = C_x^* - \frac{C_v^2}{g} \tan \varphi,$$

$$y = C_y^* - \frac{C_v^2}{2g} (\tan \varphi)^2, \quad (2.39)$$

$$t = \frac{C_v}{g} \tan \varphi + C_t^*, \quad (2.40)$$

где су  $C_x^*$ ,  $C_y^*$  и  $C_t^*$  интеграционе константе. Једначине (2.39) представљају параметарске једначине параболе при косом хицу у неотпорној средини. Коришћењем (2.36)<sub>1</sub>, (2.37) и трансформације  $d(\cdot)/dt = (d(\cdot)/d\varphi)\dot{\varphi}$ , из једначина  $\dot{\varphi}$  (2.29) и (2.30)

следи

$$\frac{d}{d\varphi} (\lambda_4 - \mu\lambda_1) = -\lambda_1 + \frac{C_v(-C_{\lambda_2} \sin \varphi + C_{\lambda_3} \cos \varphi)}{g(\cos \varphi)^2}, \quad (2.41)$$

$$\frac{d\lambda_1}{d\varphi} = (\lambda_4 - \mu\lambda_1) + \frac{C_v(C_{\lambda_2} \cos \varphi + C_{\lambda_3} \sin \varphi)}{g(\cos \varphi)^2}. \quad (2.42)$$

Решавањем добијеног система диференцијалних једначина по  $\lambda_1$  и  $\lambda_4 - \mu\lambda_1$  добија се следеће опште решење

$$\begin{aligned} \lambda_4 - \mu\lambda_1 &= C_{\lambda_1} \cos \varphi - C_{\lambda_4} \sin \varphi + \frac{C_v}{g} C_{\lambda_3} \sin \varphi - \frac{C_v}{g} C_{\lambda_2} \sin \varphi \tan \varphi, \\ \lambda_1 &= C_{\lambda_1} \sin \varphi + C_{\lambda_4} \cos \varphi + \frac{C_v}{g} C_{\lambda_2} \sin \varphi + \frac{C_v}{g} C_{\lambda_3} \sin \varphi \tan \varphi, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где су  $C_{\lambda_1}$  и  $C_{\lambda_4}$  интеграционе константе. Комбинација једначина (2.43) даје

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) C_{\lambda_1} + (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) C_{\lambda_4} + \frac{C_v}{g} C_{\lambda_3} \sin \varphi (1 + \mu \tan \varphi) + \\ &+ \frac{C_v}{g} C_{\lambda_2} \sin \varphi (\mu - \tan \varphi). \end{aligned} \quad (2.44)$$

### 2.2.2 Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \neq 0$ , $\lambda_4 \equiv 0$

Решавањем једначине (2.30) по  $\dot{\varphi}$  и једначине (2.29) по  $\lambda_1 \dot{v} + v \dot{\lambda}_1$  и сукцесивном заменом израза за ове величине у (2.8) добија се

$$v [C_{\lambda_2} (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) - C_{\lambda_3} (\cos \varphi + \mu \sin \varphi)] + \lambda_1 g \cos \varphi (1 + \mu^2) = 0. \quad (2.45)$$

Даље, једначине (2.33) и (2.45) могу се третирати као систем једначина по непознатим  $\lambda_1$  и  $v$  чијим се решавањем добија

$$v = \frac{1}{B} \frac{\sec \varphi}{(\sec \varphi)^2 - 2\mu (\tan \varphi + A)}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{g} \frac{\sec \varphi (\tan \varphi + A)}{(\sec \varphi)^2 - 2\mu (\tan \varphi + A)}, \quad (2.46)$$

где је

$$A = \frac{\mu C_{\lambda_2} + C_{\lambda_3}}{\mu C_{\lambda_3} - C_{\lambda_2}}, \quad B = \frac{\mu C_{\lambda_3} - C_{\lambda_2}}{1 + \mu^2}. \quad (2.47)$$

Сада, на основу претходних резултата, из једначине (2.8) следи

$$\dot{\varphi} = -gB \frac{(\cos \varphi)^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 - \mu^2 - 2\mu A]^2}{(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 - \mu^2 + 2\mu A + 4\mu \tan \varphi}. \quad (2.48)$$

Коришћењем трансформације  $d(\cdot)/dt = (d(\cdot)/d\varphi) \dot{\varphi}$ , једначине (2.7) заједно са изразима (2.46)<sub>1</sub> и (2.48) дају релације између координата  $x$  и  $y$  и угла  $\varphi$  у диференцијалном облику

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{[(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 - \mu^2 + 2\mu A + 4\mu \tan \varphi]}{gB^2(\cos \varphi)^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 - \mu^2 - 2\mu A]^3}, \quad (2.49)$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{[(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 - \mu^2 + 2\mu A + 4\mu \tan \varphi] \tan \varphi}{gB^2(\cos \varphi)^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 - \mu^2 - 2\mu A]^3}, \quad (2.50)$$

а након интеграције

$$x = \frac{1}{2gB^2} \left\{ b_1 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{a_2} \right) + \frac{a_2(\tan \varphi - \mu)}{(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2} \right] - \frac{2\mu(a_2^2 + (\tan \varphi - \mu)a_1)}{a_2^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2]^2} \right\} + C_x, \quad (2.51)$$

$$y = \frac{1}{2gB^2} \left\{ b_2 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{a_2} \right) + \frac{a_2(\tan \varphi - \mu)}{(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2} \right] - \frac{1}{(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2} - \frac{2\mu [(a_2^2 + \mu a_1)(\tan \varphi - \mu) + a_2^2(\mu - a_1)]}{a_2^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2]^2} \right\} + C_y, \quad (2.52)$$

где је:  $a_1 = -(A + \mu)$ ,  $a_2 = \sqrt{1 + \mu^2 + 2\mu a_1}$ ,  $b_1 = (a_2^2 - 3\mu a_1)/a_2^5$  и  $b_2 = \mu(2a_2^2 - 3\mu a_1)/a_2^5$ . Интеграција једначине (2.48) даје зависност времена  $t$  од угла  $\varphi$

$$t = C_t - \frac{1}{gB} \left\{ b_3 \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{a_2} \right) - \frac{2\mu [a_1(\tan \varphi - \mu) + a_2^2]}{a_2^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2]} \right\}, \quad (2.53)$$

где је  $b_3 = (a_2^2 - 2\mu a_1)/a_2^3$ . Да би једначине (2.51)-(2.53) имале физички смисао, константа  $a_2$  мора да буде реалан број различит од нуле, што даје следећи услов

$$1 - \mu^2 - 2\mu A > 0. \quad (2.54)$$

### 2.3 Распоред линијских сегмената на екстремали

Нека су  $SG1$  и  $SG2$  ознаке за линијске сегменте на којима је  $\dot{w} \equiv 0$ ,  $\lambda_4 \neq 0$  и  $\dot{w} \neq 0$ ,  $\lambda_4 \equiv 0$ , респективно, а  $N_{SG1}$  и  $N_{SG2}$  нека су укупни бројеви сегмената  $SG1$  и  $SG2$  на екстремали функционала  $J$ . Распоред сегмената на екстремали је имплициран условом да је укупан број непознатих интеграционих константи  $C_x^*$ ,  $C_y^*$ ,  $C_v$ ,  $C_{\lambda_1}$  и  $C_{\lambda_4}$  на сегментима  $SG1$ , интеграционих константи  $C_x$  и  $C_y$  на сегментима  $SG2$ , непознатих вредности углова  $\varphi_p = \varphi(t_p)$   $p = 1, \dots, S$  и непознатих константи  $C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$  једнак броју расположивих услова за њихово одређивање.

Нека екстремала функционала  $J$  има почетни и завршни линијски сегмент типа  $SG1$ . У овом случају је  $N_{SG1} = S/2 + 1$  и  $N_{SG2} = S/2$ . На основу услова (2.12) и једначина (2.37) и (2.39) интеграционе константе  $C_x^*$ ,  $C_y^*$  и  $C_v$  могу се на почетном линијском сегменту заменити функционалним зависностима од непознате  $\varphi_0 = \varphi(0)$ , а на завршном линијском сегменту функционалним зависностима од непознатих  $\varphi_f = \varphi(t_f)$  и  $v_f = v(t_f)$ . Сада постоји укупно  $9 + S + 5(N_{SG1} - 2) + 2N_{SG2} = 4 + 9S/2$  непознатих, а за њихово одређивање имамо на располагању природни гранични услови (2.18) и (2.19) и услови (2.34) и (2.35) што даје укупно  $3 + 5S$  услова. Из једнакости  $4 + 9S/2 = 3 + 5S$  следи да је за ову варијанту  $S = 2$ .

У случају када је почетни сегмент типа  $SG1$  а завршни типа  $SG2$  важи  $N_{SG1} = N_{SG2} = S/2 + 1/2$ . Константе  $C_x^*$ ,  $C_y^*$  и  $C_v$  се на почетном сегменту замењују функционалним зависностима од непознате  $\varphi_0$  као у претходном случају док се константе  $C_x$  и  $C_y$  на завршном сегменту на основу (2.51) и (2.52) замењују функционалним зависностима од  $\varphi_f$ . С обзиром на ово, сада треба одредити укупно  $5/2 + 9S/2$  непознатих. Пошто су у овом случају природни гранични услови (2.18) и (2.19) на десном крају еквивалентни, то на располагању за одређивање непознатих имамо  $2 + 5S$  услова. Из једнакости  $5/2 + 9S/2 = 2 + 5S$  следи да је за ову варијанту  $S = 1$ .

Сличним разматрањем као у претходна два случаја може се показати да за почетни сегмент  $SG2$  и завршни  $SG1$  важи  $S = -1$ , а за варијанту у којој је и почетни и завршни сегмент типа  $SG2$  важи  $S = -2$ . Због негативних вредности за  $S$  ове варијанте немају физички смисао.

Даље ће бити показано да се у општем случају варијанта

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\equiv 0, \lambda_4(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, t_1], \\ \dot{w}(t) &\neq 0, \lambda_4(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2], \\ \dot{w}(t) &\equiv 0, \lambda_4(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_2, t_f]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

редукује на варијанту

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\equiv 0, \lambda_4(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, t_1], \\ \dot{w}(t) &\neq 0, \lambda_4(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (t_1, t_f]. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Заиста, на основу  $v_f = v(t_f)$  и природних граничних услова (2.18) и (2.19) на десном крају, из једначина (2.37), (2.43) и (2.44) добија се

$$C_v = v_f \cos \varphi_f, \quad C_{\lambda_1} = -\frac{v_f C_{\lambda_3} \sin \varphi_f}{g}, \quad C_{\lambda_4} = -\frac{v_f C_{\lambda_2} \sin \varphi_f}{g}. \quad (2.57)$$

Сада, на основу (2.34)<sub>3</sub> ( $p = 2$ ), услови (2.35) ( $p = 2$ ) се свде на хомоген систем једначина по непознатим  $C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$ . Да би овај систем једначина имао нетривијална решења потребно је и довољно да је његова детерминанта једнака нули

$$\frac{v_f^2 (\sin(\varphi_2 - \varphi_f))^2}{g^2 (\cos \varphi_2)^2} = 0 \quad (2.58)$$

одакле следи да мора да важи  $\varphi_2 = \varphi_f$  јер случај  $v_f = 0$  нема физичког смисла. Коначно, тражена брахистохрона у општем случају представља двосегментну криву дуж које важи распоред сегмената дефинисан са (2.56). Преостале константе  $C_t$  и  $C_t^*$  као и време брахистохроног кретања  $t_f$  једноставно се одређују из једначина (2.53) и (2.40) на основу релација  $t(\varphi_0) = 0$ ,  $t(\varphi_f) = t_f$  и  $t(\varphi_1 - 0) = t(\varphi_1 + 0)$ .

## 2.4 Партикуларна решења

У даљим разматрањима уводе се ознаке  $(\cdot)_-$  и  $(\cdot)_+$  које указују да израз за величину  $(\cdot)$  важи на интервалу  $[0, t_1]$ , односно,  $(t_1, t_f]$ , респективно. На основу природног граничног услова на десном крају (2.18) и  $v_+(\varphi_f) = v_f$  из једначине (2.46) следи

$$A = -\tan \varphi_f, \quad B = \frac{\cos \varphi_f}{v_f}. \quad (2.59)$$



Сада, уврштавање ових релација у једначине (2.46) и (2.47) даје

$$C_{\lambda_2} = -\frac{1 + \mu \tan \varphi_f}{v_f \sec \varphi_f}, \quad C_{\lambda_3} = \frac{\mu - \tan \varphi_f}{v_f \sec \varphi_f}, \quad (2.60)$$

$$\lambda_{1+} = \frac{1}{g} \frac{\sec \varphi (\tan \varphi - \tan \varphi_f)}{(\sec \varphi)^2 - 2\mu (\tan \varphi - \tan \varphi_f)},$$

$$v_+ = \frac{v_f \sec \varphi_f \sec \varphi}{(\sec \varphi)^2 - 2\mu (\tan \varphi - \tan \varphi_f)}. \quad (2.61)$$

Узимањем у обзир претходних резултата, из једначина (2.51)-(2.53) за  $x_+(\varphi_f) = 0$ ,  $y_+(\varphi_f) = 0$  и  $t_+(\varphi_f) = t_f$  добијају се следећа партикуларна решења:

$$x_+ = \frac{v_f^2}{2g(\cos \varphi_f)^2} \left\{ b_1 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{a_2} \right) + \frac{a_2(\tan \varphi - \mu)}{(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2} - \tan^{-1} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) - \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right] - \frac{2\mu(a_2^2 + (\tan \varphi - \mu)a_1)}{a_2^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2]^2} + \frac{2\mu}{a_2^2 [a_1^2 + a_2^2]} \right\}, \quad (2.62)$$

$$y_+ = \frac{v_f^2}{2g(\cos \varphi_f)^2} \left\{ b_2 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{a_2} \right) + \frac{a_2(\tan \varphi - \mu)}{(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2} - \tan^{-1} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) - \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right] - \frac{1}{(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2} + \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{2\mu [(a_2^2 + \mu a_1) \tan \varphi - a_1 (\mu^2 + a_2^2)]}{a_2^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2]^2} + \frac{2\mu^2}{a_2^2 (a_1^2 + a_2^2)} \right\}, \quad (2.63)$$

$$t_+ = t_f - \frac{v_f}{g \cos \varphi_f} \left\{ b_3 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{a_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) \right] - \frac{2\mu [a_1 (\tan \varphi - \mu) + a_2^2]}{a_2^2 [(\tan \varphi - \mu)^2 + a_2^2]} + \frac{2\mu}{a_2^2} \right\}. \quad (2.64)$$

С обзиром на (2.59)<sub>1</sub>, услов (2.54) сада добија облик

$$1 - \mu^2 + 2\mu \tan \varphi_f > 0. \quad (2.65)$$

На интервалу  $[0, t_1]$ , с обзиром на  $x_-(\varphi_0) = x_0$ ,  $y_-(\varphi_0) = y_0$ ,  $v_-(\varphi_0) = v_0$ ,  $\lambda_{1-}(\varphi_0) = (\lambda_1)_0$  и  $t_-(\varphi_0) = 0$ , где је  $(\lambda_1)_0$  непозната, важе следећа партикуларна

решења

$$v_- = \frac{v_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi}, \quad (2.66)$$

$$x_- = x_0 - \frac{v_0^2 (\cos \varphi_0)^2}{g} (\tan \varphi - \tan \varphi_0), \quad (2.67)$$

$$y_- = y_0 - \frac{v_0^2 (\cos \varphi_0)^2}{2g} [(\tan \varphi)^2 - (\tan \varphi_0)^2], \quad (2.68)$$

$$t_- = \frac{v_0 \cos \varphi_0}{g} (\tan \varphi - \tan \varphi_0), \quad (2.69)$$

$$\lambda_{1-} = \frac{v_0}{v_f g} (\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \tan \varphi) [\cos(\varphi - \varphi_f) - \mu \sin(\varphi - \varphi_f)] + (\lambda_1)_0 \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (2.70)$$

$$\lambda_{4-} = -\frac{v_0 (1 + \mu^2)}{v_f g} [\sin \varphi_0 \sin(\varphi - \varphi_f) + \cos \varphi_0 \sin \varphi \sin \varphi_f -$$

$$- \cos \varphi_0 \sin \varphi \tan \varphi \cos \varphi_f] + (\lambda_1)_0 [\mu \cos(\varphi - \varphi_0) - \sin(\varphi - \varphi_0)]. \quad (2.71)$$

Пошто је по природи проблема  $0 \leq v < \infty$ , с обзиром на услов (2.65) именилац у изразу (2.61)<sub>2</sub> је позитиван за свако  $\varphi$ . На основу ових чињеница из израза (2.61)<sub>2</sub> и (2.66) произилази да  $\varphi$  мора да се креће у границама

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2. \quad (2.72)$$

Овај услов има јасну геометријску потврду на сл.2.1. Узимајући у обзир услов (2.72) при израчунавању вредности функције  $\tan^{-1}(\cdot)$  у изразима (2.62) и (2.63) и при њеном појављивању у даљим разматрањима треба узимати њену главну грану.

Непознате  $\varphi_0, \varphi_f, \varphi_1, v_f$  и  $(\lambda_1)_0$  морају да задовољавају услове (2.34) и Вајерштрас-Ердманове услове (2.35) који се сада могу записати у облику:

$$x_-(\varphi_1) = x_+(\varphi_1), \quad y_-(\varphi_1) = y_+(\varphi_1), \quad v_-(\varphi_1) = v_+(\varphi_1),$$

$$\lambda_{1-}(\varphi_1) = \lambda_{1+}(\varphi_1), \lambda_{4-}(\varphi_1) = 0. \quad (2.73)$$

Једноставно се може показати да једначине (2.73)<sub>4</sub> и (2.73)<sub>5</sub>, с обзиром на (2.73)<sub>3</sub>, представљају хомоген систем једначина по непознатим  $1/v_f$  и  $(\lambda_1)_0$ . Да би овај систем једначина имао нетривијално решење потребно је и довољно да је његова детерминанта једнака нули

$$\frac{v_0 \{ \cos \varphi_f [\cos 2(\varphi_0 - \varphi_1) - 2\mu \cos \varphi_0 \sin(\varphi_0 - 2\varphi_1) - 1] - 2\mu (\cos \varphi_1)^2 \sin \varphi_f \}}{2g(\cos \varphi_1)^2} = 0. \quad (2.74)$$

На бази услова  $t_-(\varphi_1) = t_+(\varphi_1)$ , време брахистохроног кретања  $t_f$  је дато изразом

$$t_f = \frac{v_f}{g \cos \varphi_f} \left\{ b_3 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_1 - \mu}{a_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{a_1}{a_2} \right) \right] - \frac{2\mu [a_1 (\tan \varphi_1 - \mu) + a_2^2]}{a_2^2 [(\tan \varphi_1 - \mu)^2 + a_2^2]} + \frac{2\mu}{a_2^2} \right\} + \frac{v_0 \cos \varphi_0}{g} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_0). \quad (2.75)$$

За случај  $v_0 \neq 0$ , једначине (2.73)<sub>1</sub> – (2.73)<sub>3</sub> и (2.74) се користе за одређивање непознатих  $\varphi_0, \varphi_f, \varphi_1$  и  $v_f$  а затим се добијене вредности ових параметара замењују у (2.73)<sub>4</sub> или (2.73)<sub>5</sub> ради одређивања непознате  $(\lambda_1)_0$ . За  $x_0 = \pi[m]$ ,  $y_0 = 2[m]$ ,  $v_0 = 4[m/s]$ ,  $g = 9.81[m/s^2]$  и разне вредности коефицијента трења  $\mu$ , као и за  $x_0 = \pi[m]$ ,  $y_0 = 2[m]$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $g = 9.81[m/s^2]$  и разне вредности почетне брзине  $v_0$ , нумеричко решавање система једначина (2.73)<sub>1</sub> – (2.73)<sub>3</sub> и (2.74) даје вредности параметара  $\varphi_0, \varphi_f, \varphi_1$  и  $v_f$ . Ове вредности су приказане у табелама 2.1 и 2.2. На бази ових вредности и једначина (2.62), (2.63), (2.67) и (2.68) на сл.2.2 и сл.2.3 су приказане брахистохроне криве. На овим сликама положај тачака  $(x(\varphi_1), y(\varphi_1))$  је назначен тачкастим линијама. На слици 2.2 се примећује да је смањење вредности коефицијента трења  $\mu$  праћено смањењем удела параболичког линијског сегмента на брахистохрони. Ово је и очекивано понашање будући да за  $\mu = 0$  брахистохрона представља циклоиду. Анализом података у табели 2.2 уочава се да са порастом вредности почетне брзине  $v_0$ , вредност угла  $\varphi_1$  тежи вредности угла  $\varphi_f$ , то јест, брахистохрона тежи да постане парабола. Такође, вредности угла  $\varphi_0$  у табели 2.1 указују да се за одређену вредност коефицијента трења може добити  $\varphi_0 = 0$ . Заиста, стављањем  $\varphi_0 = 0$  и узимањем коефицијента трења  $\mu$  као непознате уместо угла  $\varphi_0$ , решавање једначина (2.73)<sub>1</sub> – (2.73)<sub>3</sub> и (2.74) за  $x_0 = \pi[m]$ ,  $y_0 = 2[m]$ ,  $v_0 = 4[m/s]$ ,

$g = 9.81[m/s^2]$  даје  $\mu = 0.67318121365721$ . Да би се добила представа о времену брахистохроног кретања  $t_f$  у табелама 2.1 и 2.2 дато је поређење времена  $t_f$  са временом слободног пада  $t_{sp} = \sqrt{2y_0/g}$  тачке из положаја  $M_0(x_0, y_0)$  на  $x$ -осу. Интересантно је запазити да је у табелама 2.1 и 2.2 време брахистохроног кретања  $t_f$  доста блиско времену  $t_{sp}$ , а за неке вредности коефицијента трења  $\mu$  и почетне брзине  $v_0$  чак и мање од времена  $t_{sp}$ !

$\mu$	$\varphi_0$	$\varphi_1$	$\varphi_f$
0.1	0.58531127245408	0.84117455638771	0.22401024995530
0.3	0.28235958342084	0.78027892637736	0.30540274812492
0.5	0.10575791620352	0.77885729850727	0.39319970497597
0.7	-0.01373921733802	0.79564939443358	0.47323884833173
0.9	-0.09998594135303	0.81725104456084	0.54112903164358

$\mu$	$v_f [m/s]$	$t_f [s]/t_{sp} [s]$
0.1	6.73721842520438	0.660383/0.638551
0.3	5.77055051965695	0.704483/0.638551
0.5	5.15099759679747	0.738284/0.638551
0.7	4.73388728568082	0.765107/0.638551
0.9	4.43219537358280	0.786945/0.638551

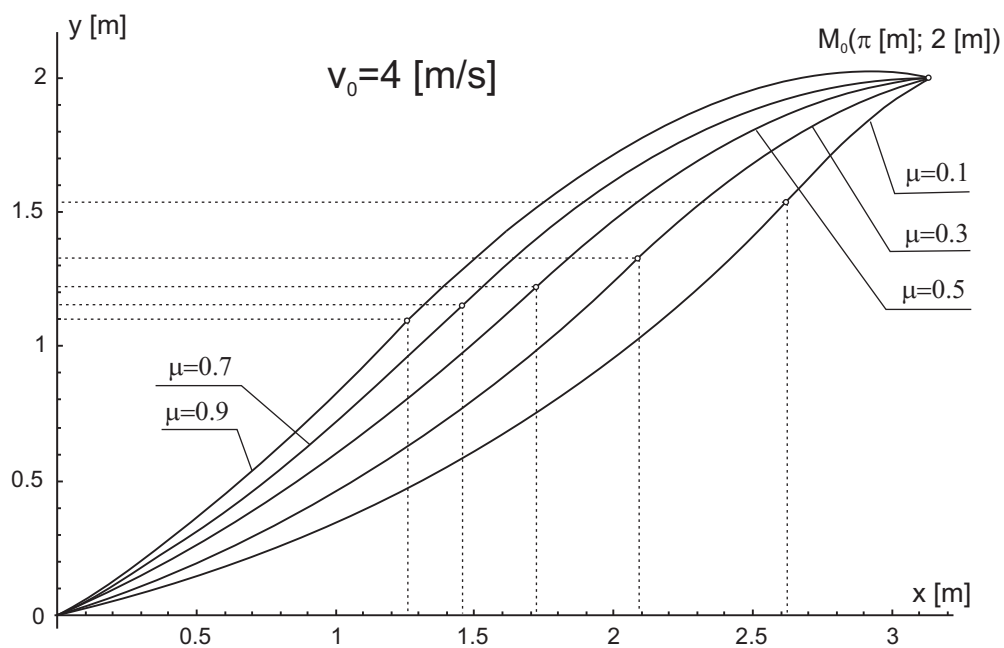
Табела 2.1: Нумеричке вредности параметара брахистохроних кривих ( $v_0 = 4[m/s]$ )

$v_0 [m/s]$	$\varphi_0$	$\varphi_1$	$\varphi_f$
2	0.24509068455450	0.91899705086443	-0.01004439564158
4	0.18453836454896	0.77585076195059	0.34970876377582
6	0.24973096435396	0.72875067194272	0.59261088139213
8	0.34913093489764	0.73378407987148	0.72957850623775

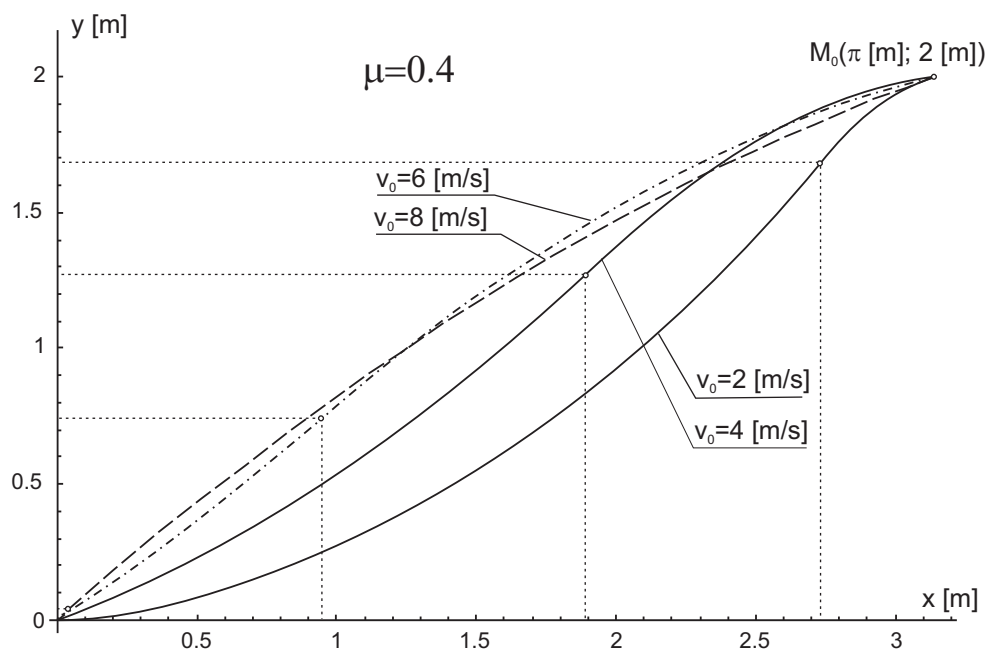
  

$v_0 [m/s]$	$v_f [m/s]$	$t_f [s]/t_{sp} [s]$
2	3.22263322540435	1.044554/0.638551
4	5.42815823131868	0.722413/0.638551
6	7.81923211356930	0.531104/0.638551
8	10.12665194266618	0.417899/0.638551

Табела 2.2: Нумеричке вредности параметара брахистохроних кривих ( $\mu = 0.4$ )



Слика 2.2: Брахистохроне криве за  $v_0 = 4$  [m/s]



Слика 2.3: Брахистохроне криве за  $\mu = 0.4$

## 2.5 Услови достижности

На основу претходних резултата се може закључити да величина  $\dot{\varphi}_+$ , дата изразом (2.48), има супротан знак од знака члана

$$(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 - \mu^2 + 2\mu A + 4\mu \tan \varphi \Leftrightarrow (\tan \varphi)^2 + 2\mu(\tan \varphi) + 1 - 2\mu(\tan \varphi_f). \quad (2.76)$$

Израз (2.76) представља квадратну функцију по  $\tan \varphi$ . Узимајући у обзир услов (2.65), анализа знака израза (2.76) показује да за  $(\mu^2 - 1)/(2\mu) < \tan \varphi_f < (1 - \mu^2)/(2\mu)$  важи  $\dot{\varphi}_+ < 0$  за свако  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Даље, за  $\tan \varphi_f \geq (1 - \mu^2)/(2\mu)$  важи  $\dot{\varphi}_+ < 0$  за свако  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \tan^{-1}(-\mu - \sqrt{\mu^2 - 1 + 2\mu \tan \varphi_f})] \cup (\tan^{-1}(-\mu + \sqrt{\mu^2 - 1 + 2\mu \tan \varphi_f}), \frac{\pi}{2}]$  и  $\dot{\varphi}_+ > 0$  за свако  $\varphi \in (\tan^{-1}(-\mu - \sqrt{\mu^2 - 1 + 2\mu \tan \varphi_f}), \tan^{-1}(-\mu + \sqrt{\mu^2 - 1 + 2\mu \tan \varphi_f}))$ . На основу извршене анализе знака величине  $\dot{\varphi}_+$  може се закључити да физички смисао има само случај када је

$$\varphi_1 > \varphi_f. \quad (2.77)$$

С обзиром на претходно, на интервалу  $(t_1, t_f]$  важи  $\dot{\varphi}_+ < 0$ . Слично као у [6], множећи једначину (2.8) са  $v dt$  и интегралећи је на интервалу  $(t_1, t_f]$  добијамо

$$\frac{v_f^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g x_1 \left( \mu - \frac{y_1}{x_1} \right) = \mu \int_{\varphi_1}^{\varphi_f} v^2 d\varphi \quad (2.78)$$

где је:  $x(\varphi_1) = x_1, y(\varphi_1) = y_1$  и  $v(\varphi_1) = v_1$ . Пошто је претходно показано да  $\varphi$  опада на интервалу  $(t_1, t_f]$ , десна страна једначине (2.78) је негативна па величине  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_f$  и  $v_f$  морају да имају такве вредности да лева страна једначине (2.78) буде негативна, односно, с обзиром на (2.66)-(2.68) и (2.73)<sub>1</sub>-(2.73)<sub>3</sub> неопходно је да буде испуњен следећи услов

$$v_f^2 - v_0^2 + 2g(\mu x_0 - y_0) + 2\mu v_0^2 \cos \varphi_0 \sec \varphi_1 \sin(\varphi_0 - \varphi_1) < 0. \quad (2.79)$$

Коначно, на основу (2.36)<sub>1</sub> и (2.72) угао  $\varphi$  расте дуж линијског сегмента  $SG1$  и сходно томе важи

$$\varphi_1 > \varphi_0. \quad (2.80)$$

Релације (2.65), (2.77), (2.79) и (2.80) представљају услове које морају да испу-

њавају параметри  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_f$  и  $v_f$  да би постојала брахистохрона, односно, да би крајњи положај  $O$  био достижан. У општем случају систем једначина из кога се одређују параметри  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_f$  и  $v_f$  може да има више решења. С обзиром на ово, услови (2.65), (2.77), (2.79) и (2.80) служе за избор оног решења које има физички смисао, односно, које одговара траженој брахистохрони.

## 2.6 Специјални случајеви

За  $\varphi_1 = \varphi_0$ , линијски сегмент  $SG2$  је тражена брахистохрона. С обзиром на ово, једначине (2.62) и (2.63) представљају параметарске једначине брахистохроме. Захтев за испуњеношћу Вајерштрас-Ердманових услова (2.73)<sub>4</sub> и (2.73)<sub>5</sub> има за последицу  $(\lambda_1)_0 = 0$  и  $\varphi_0 = \pi/2$  пошто није могуће  $\varphi_0 = \varphi_f$  јер је у делу 2.5 показано да угао  $\varphi$  опада дуж сегмента  $SG2$ . Најзад, за  $\varphi_0 = \pi/2$  из једначине (2.61)<sub>2</sub> добија се да мора бити  $v_0 = 0$ . Случај брахистохроме за  $\varphi_0 = \pi/2$  и  $v_0 = 0$  детаљно је обрађен у [6, 18, 35, 71]. Из услова достижности (2.79) за овај случај произилази да се почетни положај  $(x_0, y_0)$  не сме налазити испод праве  $y = \mu x$ .

За  $\varphi_1 = \varphi_f$  цела брахистохрона представља параболу при косом хицу у неотпорној средини. За овај случај из (2.74) се добија  $\varphi_f = \varphi_0 + \tan^{-1} \mu$ . Сада, из једначина (2.73)<sub>1</sub> и (2.73)<sub>2</sub> следе релације

$$x_0 = \frac{\mu v_0^2}{g(1 - \mu \tan \varphi_0)}, \quad y_0 = \frac{\mu v_0^2 [\mu + 2 \tan \varphi_0 - \mu (\tan \varphi_0)^2]}{2g(1 - \mu \tan \varphi_0)^2}, \quad (2.81)$$

одакле се добија квадратна једначина

$$\mu x_0 (\tan \varphi_0)^2 - 2(\mu y_0 + x_0) \tan \varphi_0 + 2y_0 - \mu x_0 = 0$$

чији су корени  $(\tan \varphi_0)_{1,2} = y_0/x_0 + 1/\mu \pm \sqrt{y_0^2/x_0^2 + 1 + 1/\mu^2}$ . Заменом ових корена у (2.81)<sub>1</sub> добија се  $v_0^2 = -gy_0 \mp \sqrt{y_0^2 g^2 + (1 + 1/\mu^2)x_0^2 g^2}$  одакле због претпоставке  $y_0 > 0$  следе изрази за вредност почетног угла нагиба и критичну вредност интензитета почетне брзине

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{\mu} - \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1 + \frac{1}{\mu^2}} \right),$$

$$(v_0)_{cr} = \sqrt{gx_0 \left( \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1 + \frac{1}{\mu^2}} - \frac{y_0}{x_0} \right)} \quad (2.82)$$

при којима цела брахистохрона има облик параболе при косом хицу у неотпорној средини. Изрази у једначини (2.82) поклапају се са одговарајућим изразима у [43] где су они дати у бездимензијском облику. Замењујући  $\varphi_1 = \varphi_f = \varphi_0 + \tan^{-1} \mu$  у једначину (2.75), први члан у (2.75) се поништава и с обзиром на (2.82) израз за време брахистохроног кретања постаје

$$t_f = \sqrt{\frac{x_0 \left[ 1 + \left( \frac{y_0}{x_0} + \frac{1}{\mu} - \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1 + \frac{1}{\mu^2}} \right)^2 \right]}{g \left( \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1 + \frac{1}{\mu^2}} - \frac{y_0}{x_0} \right)}}. \quad (2.83)$$

Према томе, у случају када је  $v_0 = (1 - \varepsilon)(v_0)_{cr}$ , где је  $0 < \varepsilon \ll 1$ , време  $t_f$  се може приближно срачунати помоћу израза (2.83).

Из претходног излагања је јасно да у случају  $v_0 > (v_0)_{cr}$  дуж екстремале функционала  $J$  важи  $\dot{w} \equiv 0, \forall t \in [0, t_f]$ , односно, параметарске једначине брахистохроне су одређене са (2.67) и (2.68). Другим речима, у овом случају не може да важи  $\lambda_4 \equiv 0, \forall t \in [0, t_f]$  јер би на основу једначине (2.46)<sub>2</sub> и природних граничних услова на левом и десном крају (2.18) и (2.19) важило  $A = -\tan \varphi_0$  и  $A = -\tan \varphi_f$ , што је еквивалентно релацији  $\varphi_0 = \varphi_f$ . Елиминација угла  $\varphi$  из једначина (2.67) и (2.68) посредством једначине (2.69) даје

$$x_- = x_0 - v_0 t \cos \varphi_0, \quad y_- = y_0 - v_0 t \sin \varphi_0 - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.84)$$

Замењујући  $t = t_f, x_-(t_f) = 0$  и  $y_-(t_f) = 0$  у (2.84) добија се систем једначина по непознатим  $t_f$  и  $\varphi_0$  чија су решења:

$$(\tan \varphi_0)_{1,2} = \frac{-v_0^2 x_0 \pm \sqrt{v_0^4 x_0^2 - g^2 x_0^4 + 2gv_0^2 x_0^2 y_0}}{gx_0^2}, \quad (t_f)_{1,2} = \frac{x_0}{v_0} \sqrt{1 + (\tan \varphi_0)_{1,2}^2}, \quad (2.85)$$

при чему се доњи индекси 1 и 2 односе на знаке  $-$  и  $+$ , респективно, испред корена у изразу (2.85)<sub>1</sub>. Добијени скуп решења указује да постоје две параболе као могуће брахистохроне. За брахистохрону се узима парабола којој одговара најмање време  $t_f$ . Једноставном провером се утврђује да важи  $(t_f)_1 > (t_f)_2$  тако да су за  $v_0 > (v_0)_{cr}$  параметарске једначине брахистохроне одређене једначинама (2.67) и (2.68) при чему важи

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{-v_0^2 x_0 + \sqrt{v_0^4 x_0^2 - g^2 x_0^4 + 2gv_0^2 x_0^2 y_0}}{gx_0^2} \right), \quad (2.86)$$



$$t_f = \frac{x_0}{v_0} \sqrt{1 + \left( \frac{-v_0^2 x_0 + \sqrt{v_0^4 x_0^2 - g^2 x_0^4 + 2g v_0^2 x_0^2 y_0}}{g x_0^2} \right)^2}. \quad (2.87)$$

Замењујући (2.82)<sub>2</sub> у (2.87) даје израз (2.83) што значи да се у случају  $v_0 = (1 + \varepsilon)(v_0)_{cr}$ , где је  $0 < \varepsilon \ll 1$ , време брахистохроног кретања може приближно срачунати помоћу израза (2.83).

У случају да је  $\mu = 0$  и  $v_0 = 0$  из услова (2.73)<sub>3</sub> следи  $\varphi_1 = \pi/2$  па као и у случају  $\mu \neq 0$  и  $v_0 = 0$  важи  $\varphi_1 = \varphi_0 = \pi/2$ . У разматраном случају из једначина (2.73)<sub>1</sub> и (2.73)<sub>2</sub> следи интензитет крајње брзине  $v_f = \sqrt{2gy_0}$  који је у сагласности са теоремом о одржању укупне механичке енергије, као и релација  $x_0 = y_0[(\pi/2 - \varphi_f)/(\cos \varphi_f)^2 - \tan \varphi_f]$  из које се одређује вредност угла  $\varphi_f$ . С обзиром на претходно одређене параметре, једначине (2.62) и (2.63) добијају следећи облик

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{y_0(\sec \varphi_f)^2}{2} [2(\varphi - \varphi_f) + \sin 2\varphi - \sin 2\varphi_f], \\ y(\varphi) &= \frac{y_0(\sec \varphi_f)^2}{2} (\cos 2\varphi_f - \cos 2\varphi), \end{aligned} \quad (2.88)$$

и представљају параметарске једначине циклоиде, а време брахистохроног кретања материјалне тачке из положаја  $M_0$  у положај  $O$  је

$$t_f = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \frac{1}{\cos \varphi_f} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_f \right). \quad (2.89)$$

Када је  $\mu = 0$  и  $v_0 \neq 0$ , из једначине (2.74) следи  $\cos 2(\varphi_0 - \varphi_1) = 1$ , односно,  $\varphi_1 = \varphi_0$ . То значи да и у овом случају важе једначине (2.88), а непознате  $v_f$ ,  $\varphi_0$  и  $\varphi_f$  се одређују из једначина (2.73)<sub>1</sub>-(2.73)<sub>3</sub> које се сада редукују на облик

$$\begin{aligned} \frac{v_f^2}{4g(\cos \varphi_f)^2} (\cos 2\varphi_f - \cos 2\varphi_0) &= y_0, \\ \frac{v_f^2}{4g(\cos \varphi_f)^2} [2(\varphi_0 - \varphi_f) + \sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_f] &= x_0, \end{aligned}$$

$$v_f \cos \varphi_0 - v_0 \cos \varphi_f = 0. \quad (2.90)$$

---

За вредности  $v_0 = 4$  [m/s],  $g = 9.81$  [m/s<sup>2</sup>],  $x_0 = \pi$  [m] и  $y_0 = 2$  [m] нумеричким решавањем система једначина (2.90) добија се  $\varphi_0 = 1.01490886543894$ ,  $\varphi_f = 0.19775875427255$  и  $v_f = 7.43236167042481$  [m/s]. Добијена вредност за  $v_f$  се поклапа са вредношћу  $v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gy_0}$  која произилази из теореме о одржању укупне механичке енергије.

## 2.7 Модификација брахистохроног проблема

Размотримо једну модификацију брахистохроног проблема из дела 2.1 која се састоји у томе што се сада тражи таква једначина храпаве криве да материјална тачка полазећи из положаја  $M_0(x_0, y_0)$  почетном брзином интензитета  $v_0 \neq 0$  стигне на осу  $y$  за минимално време  $t_f$ . Пошто сада  $y(t_f) = y_f$  није задато, то је  $[\Delta z_2]_{(t=t_f)} \neq 0$  што даје још један природни гранични услов на десном крају облика

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_2} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow \lambda_3(t_f) = 0, \quad (2.91)$$

због чега релација (2.27)<sub>2</sub> добија облик

$$\lambda_3 \equiv C_{\lambda_3} = 0. \quad (2.92)$$

Аналогним поступком као у делу 2.3 може се показати да је у овом случају брахистохрона двосегментна крива са распоредом сегмената дефинисаним са (2.56). Разматрања из дела 2.1 остају неизмењена, а код партикуларних решења из дела 2.4 имамо упрошћавања. На основу (2.92) из (2.47) следи

$$A = -\mu, \quad B = -\frac{C_{\lambda_2}}{1 + \mu^2}. \quad (2.93)$$

Сада, с обзиром на (2.27)<sub>1</sub>, (2.59) и (2.93) имамо да је

$$\lambda_2 \equiv C_{\lambda_2} = -\frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{v_f}, \quad \varphi_f = \tan^{-1} \mu. \quad (2.94)$$

Узимајући у обзир претходне резултате, једначине (2.61)-(2.69) своде се на облик

$$\lambda_{1+} = \frac{1}{g} \frac{\sec \varphi (\tan \varphi - \mu)}{(\sec \varphi)^2 - 2\mu (\tan \varphi - \mu)}, \quad v_+ = \frac{v_f \sqrt{1 + \mu^2} \sec \varphi}{(\sec \varphi)^2 - 2\mu (\tan \varphi - \mu)}, \quad (2.95)$$

$$x_+ = \frac{(1 + \mu^2) v_f^2}{2g} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(1 + \mu^2)^3}} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right) + \frac{\sqrt{1 + \mu^2} (\tan \varphi - \mu)}{(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 + \mu^2} \right] - \frac{2\mu}{[(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 + \mu^2]^2} + \frac{2\mu}{(1 + \mu^2)^2} \right\} \quad (2.96)$$

$$y_+ = y_f + \frac{(1 + \mu^2) v_f^2}{2g} \left\{ \frac{2\mu}{\sqrt{(1 + \mu^2)^3}} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right) + \frac{\sqrt{1 + \mu^2} (\tan \varphi - \mu)}{(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 + \mu^2} \right] + \frac{(\tan \varphi - \mu)^2}{(1 + \mu^2) [(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 + \mu^2]} - \frac{2\mu \tan \varphi}{[(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 + \mu^2]^2} + \frac{2\mu^2}{(1 + \mu^2)^2} \right\}, \quad (2.97)$$

$$t_+ = t_f - \frac{\sqrt{1 + \mu^2} v_f}{g} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi - \mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right) + \frac{2\mu (\tan \varphi - \mu)^2}{[(\tan \varphi - \mu)^2 + 1 + \mu^2] (1 + \mu^2)} \right]. \quad (2.98)$$

На интервалу  $[0, t_1]$  једначине (2.66)-(2.69) остају без промена, а једначине (2.70) и (2.71) свде се на

$$\lambda_{1-} = (\lambda_1)_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{v_0 \sqrt{1 + \mu^2}}{g v_f} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad (2.99)$$

$$\lambda_{4-} = (\lambda_1)_0 [\mu \cos(\varphi - \varphi_0) - \sin(\varphi - \varphi_0)] + \frac{v_0 \sqrt{1 + \mu^2}}{g v_f} (\tan \varphi - \mu) \sin(\varphi - \varphi_0). \quad (2.100)$$

Сада се, за разматрани случај, једначина (2.74) редукује на облик

$$\frac{v_0 [\cos 2(\varphi_0 - \varphi_1) - 2\mu \cos \varphi_0 \sin(\varphi_0 - 2\varphi_1) - 2\mu^2 (\cos \varphi_1)^2 - 1]}{2g (\cos \varphi_1)^2 \sqrt{1 + \mu^2}} = 0. \quad (2.101)$$

За  $x_0 = \pi[m]$ ,  $y_0 = 2[m]$ ,  $v_0 = 4[m/s]$ ,  $g = 9.81[m/s^2]$  и разне вредности коефицијента трења  $\mu$ , као и за случај  $x_0 = \pi[m]$ ,  $y_0 = 2[m]$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $g = 9.81[m/s^2]$  и разне вредности интензитета почетне брзине  $v_0$ , решавање система једначина (2.73)<sub>1</sub>-(2.73)<sub>3</sub> и (2.101) даје вредности параметара  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $y_f$  и  $v_f$  које су приказане у табелама 2.3 и 2.4. На бази ових података и једначина (2.67), (2.68), (2.96) и (2.97) на сл.2.4 и сл.2.5 су приказане брахистохроне криве. У табелама 2.3 и 2.4 дато је поређење времена  $t_f$  и времена слободног пада  $t_{sp} = \sqrt{2(y_0 - y_f)/g}$  материјалне тачке из положаја  $M_0(x_0, y_0)$  до на хоризонталну праву чија је једначина  $y - y_f = 0$ . На основу поређења ових вредности може се закључити да су времена  $t_f$  и  $t_{sp}$  доста блиска. Напоменимо да су тачке  $(x(\varphi_1), y(\varphi_1))$  назначене тачкастим линијама на

сл.2.4 и сл.2.5. Слично као у делу 2.4, за време брахистохроног кретања се добија следећи израз:

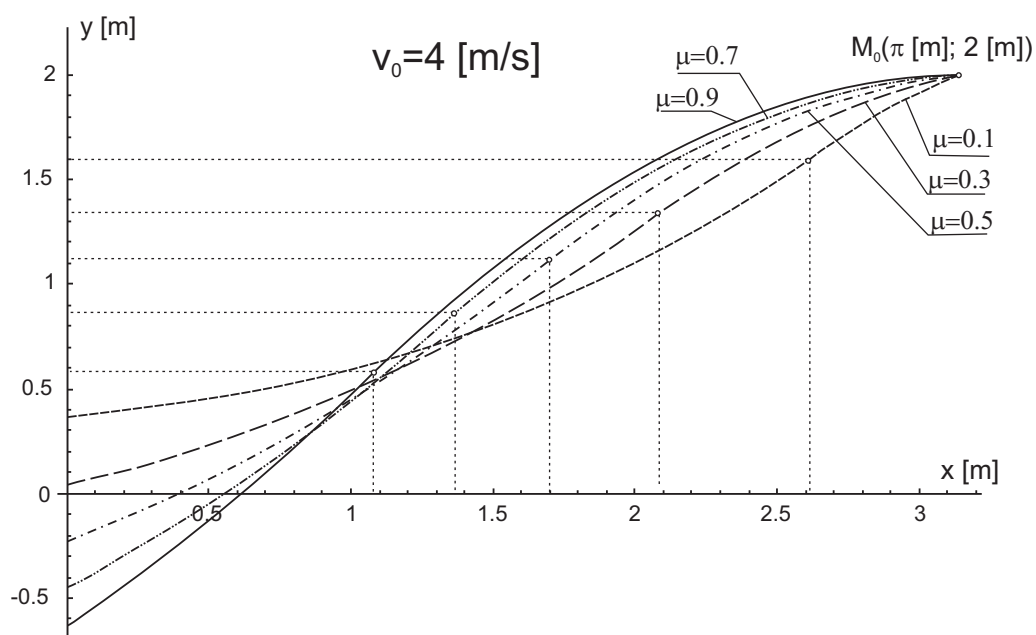
$$t_f = \frac{\sqrt{1 + \mu^2} v_f}{g} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_1 - \mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \right) + \frac{2\mu (\tan \varphi_1 - \mu)^2}{[(\tan \varphi_1 - \mu)^2 + 1 + \mu^2] (1 + \mu^2)} \right] + \frac{v_0 \cos \varphi_0}{g} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_0). \quad (2.102)$$

$\mu$	$\varphi_0$	$\varphi_1$	$y_f$ [m]
0.1	0.50389329351951	0.77252567345527	0.36858252086529
0.3	0.27211071350183	0.77232235733837	0.04307437457487
0.5	0.15993406120446	0.81881600321527	-0.22547700029464
0.7	0.09509292479804	0.87268020562648	-0.45057257369388
0.9	0.05538079545021	0.92333491937119	-0.63474985900535
$\mu$	$v_f$ [m/s]	$t_f$ [s]/ $t_{sp}$ [s]	
0.1	6.18630232397962	0.656797/0.576717	
0.3	5.69981384006614	0.704428/0.631637	
0.5	5.55929706359072	0.736630/0.673584	
0.7	5.64953563557170	0.757846/0.706829	
0.9	5.90284079514762	0.771090/0.732909	

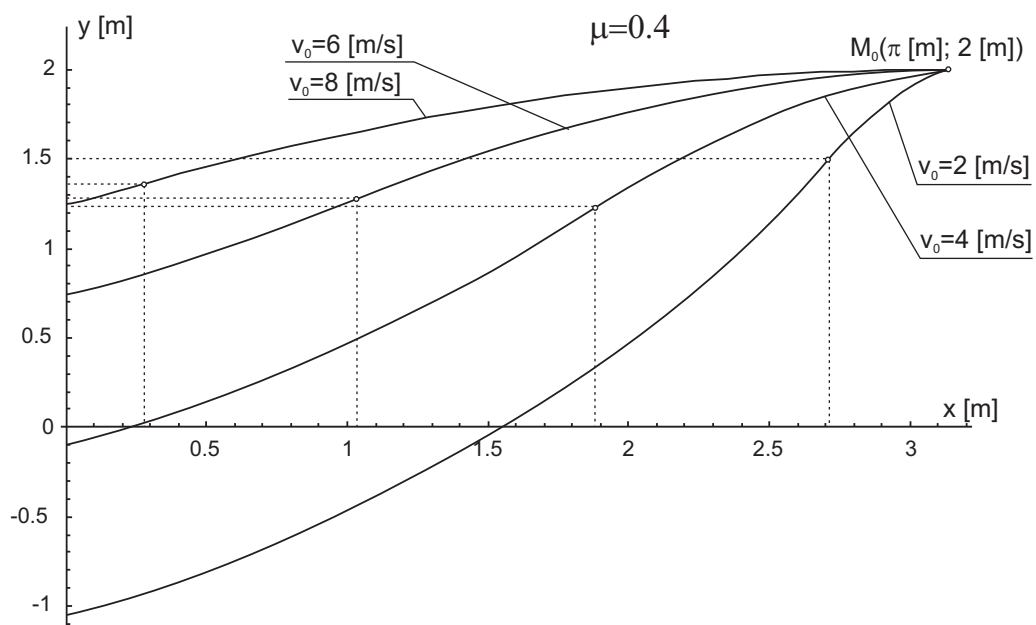
Табела 2.3: Нумеричке вредности параметара брахистохроних кривих модификованог брахистохроног проблема ( $v_0 = 4$ [m/s])

$v_0$ [m/s]	$\varphi_0$	$\varphi_1$	$y_f$ [m]
2	0.47110662220799	1.07004595651011	-1.05269009368873
4	0.20777161393425	0.79339962396564	-0.09695728766761
6	0.05582652535646	0.56310014048209	0.73877466739483
8	0.00311624714332	0.41592403130681	1.24560767454141
$v_0$ [m/s]	$v_f$ [m/s]	$t_f$ [s]/ $t_{sp}$ [s]	
2	5.28994154521823	0.993055/0.788900	
4	5.59502470188276	0.722122/0.653846	
6	6.74964525879815	0.519436/0.507080	
8	8.62913334381805	0.392666/0.392174	

Табела 2.4: Нумеричке вредности параметара брахистохроних кривих модификованог брахистохроног проблема ( $\mu = 0.4$ )



Слика 2.4: Брахистохроне криве модификованог брахистохроног проблема са Кулоновим трењем за  $v_0 = 4$  [m/s]



Слика 2.5: Брахистохроне криве модификованог брахистохроног проблема са Кулоновим трењем за  $\mu = 0.4$

### 2.7.1 Услови достижности

Анализа достижности крајњег положаја у овој варијанти брахистохроног проблема спроводи се даље аналогно као у делу 2.5. С обзиром да је сада  $\varphi_f = \tan^{-1} \mu$ , члан дефинисан са (2.76) своди се на облик  $(\tan \varphi)^2 + 2\mu \tan \varphi + 1 - 2\mu^2$ . Анализом знака овог члана добија се да за  $0 \leq \mu < \sqrt{3}/3$  важи  $\dot{\varphi}_+ < 0$  за свако  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Даље, за  $\sqrt{3}/3 \leq \mu \leq 1$  важи

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_+ < 0 \quad \forall \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \tan^{-1} \left( -\mu - \sqrt{3\mu^2 - 1} \right) \right) \cup \left( \tan^{-1} \left( -\mu + \sqrt{3\mu^2 - 1} \right), \frac{\pi}{2} \right], \\ \dot{\varphi}_+ > 0 \quad \forall \varphi \in \left( \tan^{-1} \left( -\mu - \sqrt{3\mu^2 - 1} \right), \tan^{-1} \left( -\mu + \sqrt{3\mu^2 - 1} \right) \right). \end{aligned}$$

На основу извршене анализе знака величине  $\dot{\varphi}_+$  и чињенице да је  $\varphi_f = \tan^{-1} \mu$  следи да има физичког смисла само случај када је  $\varphi_1 > \tan^{-1} \mu$ . При овоме је  $\dot{\varphi}_+ < 0$  па се аналогним поступком као у делу 2.5 долази до услова достижности дефинисаних релацијама (2.77), (2.79) и (2.80).

### 2.7.2 Специјални случајеви

Размотримо сада неке специјалне случајеве у оквиру разматране модификације брахистохроног проблема. За  $\varphi_1 = \varphi_0$  цела брахистохрона представља линијски сегмент  $SG2$  што значи да су параметарске једначине брахистохроне дате једначинама (2.96) и (2.97). У овом случају се аналогном процедуром као у делу 2.6 добија да је  $\varphi_0 = \pi/2$  и  $v_0 = 0$ . Овај случај је разматран у [6, 35].

За  $\varphi_1 = \varphi_f$  из (2.101) сада се добија  $v_0(\mu - \tan \varphi_0) \sin 2\varphi_0 = 0$ , одакле, одбацивањем случаја  $\varphi_0 = \varphi_f = \tan^{-1} \mu$ , следи да мора да важи  $\varphi_0 = 0$ . Према томе, брахистохрона у овом случају представља параболу при хоризонталном хицу у неотпорној средини. Сада једначине (2.73)<sub>1</sub> и (2.73)<sub>2</sub> дају критичну вредност интензитета почетне брзине и вредност апсцисе  $y_f$  крајњег положаја тачке за овај случај:

$$(v_0)_{cr} = \sqrt{\frac{gx_0}{\mu}}, \quad y_f = y_0 - \frac{\mu x_0}{2}. \quad (2.103)$$

Замењујући  $\varphi_1 = \varphi_f = \tan^{-1} \mu$  и  $\varphi_0 = 0$  у израз (2.102), први члан у (2.102) нестаје и израз за време  $t_f$  постаје

$$t_f = \sqrt{\frac{\mu x_0}{g}}. \quad (2.104)$$

Слично као у делу 2.6 показује се да брахистохрона за  $v_0 > (v_0)_{cr}$  представља параболу при косом хицу у неотпорној средини и да важе једначине (2.84). Замењујући  $t_- = t_f^*$  и  $x_-(t_f^*) = 0$  у (2.84)<sub>1</sub> добија се  $t_f^* = x_0 / (v_0 \cos \varphi_0)$ . При задатим вредностима параметара  $x_0$  и  $v_0$ , време  $t_f^*$  има минималну вредност за  $\varphi_0 = 0$  и оно износи

$$t_f = \frac{x_0}{v_0}. \quad (2.105)$$

На основу  $y(t_f) = y_f$  и  $\varphi_0 = 0$ , из једначине (2.84)<sub>2</sub> следи

$$y_f = y_0 - \frac{gx_0^2}{2v_0^2}, \quad (2.106)$$

а угао  $\varphi_f$  је одређен са

$$\varphi_f = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}_-(t_f)}{\dot{x}_-(t_f)} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{gx_0}{v_0^2} \right). \quad (2.107)$$

На основу претходних резултата, слично као у делу 2.6 показује се да се у случају  $v_0 = (1 \pm \varepsilon)(v_0)_{cr}$ , где је  $0 < \varepsilon \ll 1$ , време  $t_f$  може приближно срачунати помоћу израза (2.104).

За  $\mu = 0$  и  $v_0 = 0$  је  $\varphi_f = 0$ , а из једначине (2.73)<sub>3</sub> се добија  $\varphi_1 = \pi/2$  па је  $\varphi_0 = \varphi_1$ . Даље, једначине (2.73)<sub>1</sub>, (2.73)<sub>2</sub> и (2.98) за овај случај дају следеће вредности величина  $v_f$ ,  $y_f$  и  $t_f$ :

$$v_f = \sqrt{\frac{4gx_0}{\pi}}, \quad y_f = y_0 - \frac{2x_0}{\pi}, \quad t_f = \sqrt{\frac{\pi x_0}{g}}, \quad (2.108)$$

а одатле, с обзиром на (2.96) и (2.97), параметарске једначине брахистохроне су

$$x(\varphi) = \frac{x_0}{\pi} (2\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$y(\varphi) = y_0 - \frac{2x_0}{\pi} + \frac{x_0}{\pi} (1 - \cos 2\varphi). \quad (2.109)$$

Коначно, за  $\mu = 0$  и  $v_0 \neq 0$  важи  $\varphi_f = 0$ , а из (2.101) следи  $\cos 2(\varphi_0 - \varphi_1) = 1$ , односно,  $\varphi_1 = \varphi_0$ . С обзиром на ово, једначине (2.73)<sub>1</sub>-(2.73)<sub>3</sub> своде се на следећи систем једначина

$$\frac{v_f^2}{4g} (2\varphi_0 + \sin 2\varphi_0) = x_0,$$



$$y_f + \frac{v_f^2}{4g} [1 - \cos 2\varphi_0] = y_0,$$

$$v_f \cos \varphi_0 = v_0, \quad (2.110)$$

чијим се решавањем одређују непознате  $v_f$ ,  $\varphi_0$  и  $y_f$ . Из израза (2.98) следи време брахистохроног кретања

$$t_f = \frac{v_f \varphi_0}{g}, \quad (2.111)$$

а параметарске једначине брахистохроне имају сличан облик као у претходном случају и гласе

$$x(\varphi) = \frac{v_f^2}{4g} (2\varphi + \sin 2\varphi),$$

$$y(\varphi) = y_f + \frac{v_f^2}{4g} (1 - \cos 2\varphi). \quad (2.112)$$

# Глава 3

## ПРОБЛЕМ БРАХИСТОХРОНЕ КАО НЕЗАДРЖАВАЈУЋЕ ВЕЗЕ СА

## КУЛОНОВИМ ТРЕЊЕМ У СЛУЧАЈУ МАТЕРИЈАЛНЕ ТАЧКЕ

У овом делу дисертације, коришћењем методологије из главе 2, извршено је уопштавање резултата из референце [65] на случај брахистохроног проблема са Кулоновим трењем. Храпава линија по којој се креће тачка третира се као незадржавајућа веза. Показано је да су брахистохроне у општем случају тросегментне криве са почетним и завршним линијским сегментом у облику параболе при косом хицу у неотпорној средини. Извршена је дискусија у вези услова под којима се брахистохрона своди на двосегментну и једносегментну криву. Показано је да се за случај одсуства силе трења ( $\mu = 0$ ) резултати из ове тезе свде на облик који представља аналитичку интерпретацију резултата из референце [65] у којој су они добијени на бази квалитативне анализе проблема која се базирала на логичким и физичким аргументацијама без експлицитних математичких извођења.

### 3.1 Формулација проблема

Размотримо материјалну тачку  $M$  масе  $m$  која се креће у вертикалној равни у хомогеном пољу Земљине теже по храпавој кривој са Кулоновим трењем. Крива се третира као незадржавајућа веза. Тражи се једна чина ове криве  $y = f(x) \in C^2[0, t_f]$  тако да материјална тачка  $M$  полазећи из положаја  $M_0(x_0, y_0)$  почетном брзином задатог интензитета и правца стигне у положај  $O(0, 0)$  за минимално време  $t_f$  задатим правцем крајње брзине, где је са  $y$  означена вертикална оса усмерена навише а са  $x$  хоризонтална оса Декартовог координатног система (види сл.2.1). Без губитка општости узима се да је  $x_0 > 0$  и  $y_0 > 0$ .

Даље се проблем формулише слично као у делу 2.1, при чему услов (2.6), односно (2.9), представља сада услов о ненапуштању везе од стране материјалне тачке. Сходно томе, постављени проблем се формулише као везани варијациони задатак

$$\int_0^{t_f} dt \longrightarrow \inf \quad (3.1)$$

уз ограничења (2.8), (2.7) и (2.10), при чему су почетни и крајњи услови

$$t_0 = 0 : x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0;$$

$$t = t_f : x(t_f) = 0, \quad y(t_f) = 0, \quad \varphi(t_f) = \varphi_f . \quad (3.2)$$

Сва извођења из поглавља 2.1 и 2.2 остају иста а промена се дешава код природног граничног услова (2.18). Наиме, сада је задат угао нагиба вектора брзине на почетку и на крају па је гранични услов (2.18) тривијално задовољен. Величине  $z_i(t_f)$  ( $i = 4, \dots, 9$ ) нису задате па за разматрани проблем важе само природни гранични услови на десном крају дефинисани изразима (2.19)-(2.24).

## 3.2 Распоред линијских сегмената на екстремали

Нека су  $SG1$  и  $SG2$  ознаке за линијске сегменте на којима је  $\dot{w} \equiv 0$ ,  $\lambda_4 \neq 0$  и  $\dot{w} \neq 0$ ,  $\lambda_4 \equiv 0$ , респективно, а  $N_{SG1}$  и  $N_{SG2}$  нека су укупни бројеви сегмената  $SG1$  и  $SG2$  на екстремали функцијонала  $J$ . Одређивање распореда сегмената на екстремали врши се слично као у делу 2.3, односно, користи се услов да је укупан број непознатих интеграционих константи  $C_x^*$ ,  $C_y^*$ ,  $C_v$ ,  $C_{\lambda_1}$  и  $C_{\lambda_4}$  на сегментима  $SG1$ , интеграционих константи  $C_x$  и  $C_y$  на сегментима  $SG2$ , непознатих вредности углова  $\varphi_p = \varphi(t_p)$   $p = 1, \dots, S$  и непознатих  $C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$  једнак броју расположивих услова за њихово одређивање.

Нека екстремала функцијонала  $J$  има почетни и завршни линијски сегмент типа  $SG1$ . У овом случају је  $N_{SG1} = S/2 + 1$  и  $N_{SG2} = S/2$ . На основу услова (3.2) и једначина (2.37) и (2.39), интеграционе константе  $C_x^*$ ,  $C_y^*$  и  $C_v$  су на почетном сегменту одређене, а на завршном сегменту се могу заменити функционалним зависностима од непознате  $v_f = v(t_f)$ . Сада, с обзиром на (2.43), постоји укупно  $7 + S + 5(N_{SG1} - 2) + 2N_{SG2} = 2 + 9S/2$  непознатих, а за њихово одређивање

имамо на располагању природни гранични услов (2.19) и услове (2.34) и (2.35) што даје укупно  $1 + 5S$  услова. Из једнакости  $2 + 9S/2 = 1 + 5S$  следи да је за ову варијанту  $S = 2$ .

У случају када је почетни линијски сегмент типа  $SG1$  а завршни типа  $SG2$  важи  $N_{SG1} = N_{SG2} = S/2 + 1/2$ . На основу услова (3.2) и једначина (2.37), (2.39), (2.51) и (2.52), константе  $C_x^*$ ,  $C_y^*$  и  $C_v$  на почетном сегменту су потпуно одређене а константе  $C_x$  и  $C_y$  на завршном сегменту су одређене у функцији од константи  $C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$ . Сада треба одредити укупно  $5(N_{SG1} - 1) + 2(N_{SG2} - 1) + 4 + S = 1/2 + 9S/2$  непознатих. За одређивање непознатих на располагању, као и у претходном случају, стоји укупно  $1 + 5S$  услова. Из једнакости  $1/2 + 9S/2 = 1 + 5S$  следи да је за ову варијанту  $S = -1$ . Према томе ова варијанта нема физичког смисла.

Сличним разматрањем као у претходна два случаја може се показати да за почетни линијски сегмент  $SG2$  и завршни  $SG1$  важи  $S = -1$ , а за варијанту у којој су и почетни и завршни линијски сегмент типа  $SG2$  важи  $S = -4$ . Због негативних вредности за  $S$ , ни ове варијанте немају физичког смисла. Треба напоменути да се у ове две варијанте почетни услов  $v(0) = v_0$  сврстава у расположиве услове за одређивање непознатих константи.

Коначно, тражена брахистохрона у општем случају представља тросегментну криву дуж које важи распоред сегмената дефинисан са

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &\equiv 0, \lambda_4(t) \not\equiv 0 \quad \forall t \in [0, t_1], \\ \dot{w}(t) &\not\equiv 0, \lambda_4(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2], \\ \dot{w}(t) &\equiv 0, \lambda_4(t) \not\equiv 0 \quad \forall t \in (t_2, t_f]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Константе  $C_t$  и  $C_t^*$  на одговарајућим сегментима као и време брахистохроног кретања  $t_f$  једноставно се одређују из једначина (2.53) и (2.40) на основу релација  $t(\varphi_0) = 0$ ,  $t(\varphi_f) = t_f$ ,  $t(\varphi_1 - 0) = t(\varphi_1 + 0)$  и  $t(\varphi_2 - 0) = t(\varphi_2 + 0)$ .

### 3.3 Решење проблема

Уведимо у даљим разматрањима ознаке  $(\cdot)_-$  и  $(\cdot)_+$  које указују да израз за величину  $(\cdot)$  важи на линијском сегменту  $SG1$ , односно,  $SG2$ , респективно.

За интервале  $[0, t_1]$  и  $(t_2, t_f]$  и за  $x_-(\varphi_0) = x_0$ ,  $y_-(\varphi_0) = y_0$ ,  $v_-(\varphi_0) = v_0$ ,  $\lambda_{1-}(\varphi_0) = (\lambda_1)_0$ ,  $\lambda_{4-}(\varphi_0) = (\lambda_4)_0$ ,  $x_-(\varphi_f) = 0$ ,  $y_-(\varphi_f) = 0$ ,  $v_-(\varphi_f) = v_f$ ,  $\lambda_{1-}(\varphi_f) = 0$ ,  $\lambda_{4-}(\varphi_f) = \lambda_{4f}$ ,  $t(\varphi_0) = 0$  и  $t(\varphi_f) = t_f$ , из једначина (2.39), (2.40), (2.43) и (2.44) следи

$$v_- = \begin{cases} \frac{v_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi} & \forall t \in [0, t_1], \\ \frac{v_f \cos \varphi_f}{\cos \varphi} & \forall t \in (t_2, t_f], \end{cases} \quad (3.4)$$

$$x_- = \begin{cases} x_0 - \frac{v_0^2 (\cos \varphi_0)^2}{g} (\tan \varphi - \tan \varphi_0) & \forall t \in [0, t_1], \\ -\frac{v_f^2 (\cos \varphi_f)^2}{g} (\tan \varphi - \tan \varphi_f) & \forall t \in (t_2, t_f], \end{cases} \quad (3.5)$$

$$y_- = \begin{cases} y_0 - \frac{v_0^2 (\cos \varphi_0)^2}{2g} [(\tan \varphi)^2 - (\tan \varphi_0)^2] & \forall t \in [0, t_1], \\ -\frac{v_f^2 (\cos \varphi_f)^2}{2g} [(\tan \varphi)^2 - (\tan \varphi_f)^2] & \forall t \in (t_2, t_f], \end{cases} \quad (3.6)$$

$$t_- = \begin{cases} \frac{v_0 \cos \varphi_0}{g} (\tan \varphi - \tan \varphi_0) & \forall t \in [0, t_1], \\ t_f + \frac{v_f \cos \varphi_f}{g} (\tan \varphi - \tan \varphi_f) & \forall t \in (t_2, t_f], \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\lambda_{1-} = \begin{cases} (\lambda_4)_0 \sin(\varphi - \varphi_0) + \frac{v_0 C_{\lambda_2}}{g} \sin(\varphi - \varphi_0) + (\lambda_1)_0 (\cos(\varphi - \varphi_0) - \mu \sin(\varphi - \varphi_0)) + \\ \quad + \frac{v_0 C_{\lambda_3}}{g} \sin(\varphi - \varphi_0) \tan \varphi & \forall t \in [0, t_1], \\ \lambda_{4f} \sin(\varphi - \varphi_f) + \frac{v_f C_{\lambda_2}}{g} \sin(\varphi - \varphi_f) + \frac{v_f C_{\lambda_3}}{g} \sin(\varphi - \varphi_f) \tan \varphi & \forall t \in (t_2, t_f], \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\lambda_{4-} = \begin{cases} -(\lambda_1)_0 (1 + \mu^2) \sin(\varphi - \varphi_0) + (\lambda_4)_0 (\cos(\varphi - \varphi_0) + \mu \sin(\varphi - \varphi_0)) + \\ \quad + \frac{v_0 C_{\lambda_2}}{g \cos \varphi} (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) \sin(\varphi - \varphi_0) + \frac{v_0 C_{\lambda_3}}{g \cos \varphi} (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) \sin(\varphi - \varphi_0) & \forall t \in [0, t_1], \\ \lambda_{4f} (\cos(\varphi - \varphi_f) + \mu \sin(\varphi - \varphi_f)) + \frac{v_f C_{\lambda_2}}{g \cos \varphi} (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) \sin(\varphi - \varphi_f) + \\ \quad + \frac{v_f C_{\lambda_3}}{g \cos \varphi} (\cos \varphi + \mu \sin \varphi) \sin(\varphi - \varphi_f) & \forall t \in (t_2, t_f]. \end{cases} \quad (3.9)$$

Из природе разматраног проблема следи  $0 \leq v < \infty$ , а с обзиром на услов (2.54) именилац у изразу (2.46)<sub>1</sub> је позитиван за свако  $\varphi$ . На основу ових чињеница из израза (2.46)<sub>1</sub> и (3.4) произилази да је

$$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad B > 0. \quad (3.10)$$

Непознате  $\varphi_1, \varphi_2, v_f, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}, C_x, C_y, (\lambda_1)_0, (\lambda_4)_0$  и  $\lambda_{4f}$  се одређују решавањем система једначина који формирају услови (2.34) и (2.35) који се сада могу записати у облику

$$\begin{aligned} x_-(\varphi_i) &= x_+(\varphi_i), \quad y_-(\varphi_i) = y_+(\varphi_i), \quad v_-(\varphi_i) = v_+(\varphi_i), \\ \lambda_{1-}(\varphi_i) &= \lambda_{1+}(\varphi_i), \quad \lambda_{4-}(\varphi_i) = 0 \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Коначно, на основу израза (2.53) и (3.7), из једнакости  $t_-(\varphi_1) = t_+(\varphi_1)$  добија се интеграциона константа  $C_t$

$$C_t = \frac{v_0 \cos \varphi_0}{g} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_0) + \frac{1}{gB} \left\{ b_3 \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_1 - \mu}{a_2} \right) - \frac{2\mu [a_1 (\tan \varphi_1 - \mu) + a_2^2]}{a_2^2 [(\tan \varphi_1 - \mu)^2 + a_2^2]} \right\}, \quad (3.12)$$

а из једнакости  $t_-(\varphi_2) = t_+(\varphi_2)$  следи израз за време брахистохроног кретања

$$\begin{aligned} t_f &= -\frac{v_f \cos \varphi_f}{g} (\tan \varphi_2 - \tan \varphi_f) + \frac{v_0 \cos \varphi_0}{g} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{gB} \left\{ b_3 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_1 - \mu}{a_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_2 - \mu}{a_2} \right) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{2\mu}{a_2^2} \left[ \frac{a_1 (\tan \varphi_1 - \mu) + a_2^2}{(\tan \varphi_1 - \mu)^2 + a_2^2} - \frac{a_1 (\tan \varphi_2 - \mu) + a_2^2}{(\tan \varphi_2 - \mu)^2 + a_2^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.3.1 Специјални случајеви

За  $\varphi_1 = \varphi_2$  брахистохрона је једносементна крива која представља параболу при косом хицу у неотпорној средини. Из (3.11)<sub>3</sub> ( $i = 1, 2$ ) добија се  $v_f = v_0 \cos \varphi_0 / \cos \varphi_f$ . На основу овога, одузимањем једначине (3.11)<sub>1</sub> ( $i = 2$ ) од једначине (3.11)<sub>1</sub> ( $i = 1$ ) и једначине (3.11)<sub>2</sub> ( $i = 2$ ) од једначине (3.11)<sub>2</sub> ( $i = 1$ ) добијају се следеће релације

$$\begin{aligned} x_0 - \frac{v_0^2 (\cos \varphi_0)^2}{g} (\tan \varphi_f - \tan \varphi_0) &= 0, \\ y_0 - \frac{v_0^2 (\cos \varphi_0)^2}{2g} [(\tan \varphi_f)^2 - (\tan \varphi_0)^2] &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

које треба да задовољавају параметри (3.2) да би се остварио овај случај.

За  $\varphi_1 = \varphi_0$  и  $\varphi_2 = \varphi_f$  брахистохрона је једносементна крива чије су параметарске једначине дате са (2.51) и (2.52). Ова крива за  $\mu = 0$  представља циклоиду. Сада из (3.11)<sub>4</sub> ( $i = 2$ ) и (3.11)<sub>3</sub> ( $i = 1$ ) следи

$$A = -\tan \varphi_f, \quad B = \frac{\sec \varphi_0}{v_0 [(\sec \varphi_0)^2 - 2\mu (\tan \varphi_0 - \tan \varphi_f)]}, \quad (3.15)$$

што заједно са једначинама (3.11)<sub>1</sub>-(3.11)<sub>2</sub> ( $i = 1, 2$ ) даје следеће услове за параметре (3.2) који они морају да испуњавају да би се реализовао овај случај:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2gB^2} \left\{ b_1 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_0 - \mu}{a_2} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_f - \mu}{a_2} \right) + \frac{a_2(\tan \varphi_0 - \mu)}{(\tan \varphi_0 - \mu)^2 + a_2^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{a_2(\tan \varphi_f - \mu)}{(\tan \varphi_f - \mu)^2 + a_2^2} \right] - \frac{2\mu(a_2^2 + (\tan \varphi_0 - \mu)a_1)}{a_2^2 [(\tan \varphi_0 - \mu)^2 + a_2^2]^2} + \frac{2\mu(a_2^2 + (\tan \varphi_f - \mu)a_1)}{a_2^2 [(\tan \varphi_f - \mu)^2 + a_2^2]^2} \right\} = x_0, \\ & \frac{1}{2gB^2} \left\{ b_2 \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_0 - \mu}{a_2} \right) + \frac{a_2(\tan \varphi_0 - \mu)}{(\tan \varphi_0 - \mu)^2 + a_2^2} - \tan^{-1} \left( \frac{\tan \varphi_f - \mu}{a_2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{a_2(\tan \varphi_f - \mu)}{(\tan \varphi_f - \mu)^2 + a_2^2} \right] - \frac{1}{(\tan \varphi_0 - \mu)^2 + a_2^2} + \frac{1}{(\tan \varphi_f - \mu)^2 + a_2^2} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\mu [(a_2^2 + \mu a_1)(\tan \varphi_0 - \mu) + a_2^2(\mu - a_1)]}{a_2^2 [(\tan \varphi_0 - \mu)^2 + a_2^2]^2} + \frac{2\mu [(a_2^2 + \mu a_1)(\tan \varphi_f - \mu) + a_2^2(\mu - a_1)]}{a_2^2 [(\tan \varphi_f - \mu)^2 + a_2^2]^2} \right\} = y_0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

У случају  $\varphi_1 = \varphi_0$  брахистохрона је двосегментна крива са почетним линијским сегментом типа  $SG2$  и завршним линијским сегментом типа  $SG1$ , а у случају  $\varphi_2 = \varphi_f$  брахистохрона је такође двосегментна крива која почиње линијским сегментом типа  $SG1$  и завршава се линијским сегментом типа  $SG2$ . За  $\mu \neq 0$  је јако сложено одредити у аналитичком облику услове за реализацију ова два специјална случаја. Зато се ови случајеви анализирају нумеричким решавањем система једначина (3.11), тако што се узме да је  $\varphi_1 = \varphi_0$  или  $\varphi_2 = \varphi_f$  а један од параметара  $x_0, y_0, v_0, \varphi_0, \varphi_f$  прогласи за непознату.

Даље се за  $\mu = 0$  врши анализа претходно наведених специјалних случајева са циљем да се добију услови у аналитичком облику за њихову реализацију. Геометријска интерпретација ових услова је дата у референци [65].

За  $\varphi_1 = \varphi_0$  и  $\mu = 0$  из једначина (3.11)<sub>3</sub> ( $i = 1, 2$ ) следи

$$\lambda_2 = -\frac{\cos \varphi_0}{v_0}, \quad v_f = \frac{v_0(\cos \varphi_2)^2}{\cos \varphi_f \cos \varphi_0}, \quad C_y = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Заменом ових израза у једначину (3.11)<sub>2</sub>( $i = 1$ ) и њеним решавањем по  $\varphi_2$  добија се

$$\varphi_2 = \cos^{-1} \left( \sqrt[4]{(2gy_0 + v_0^2) \frac{(\cos \varphi_0)^2}{v_0^2 [1 + (\tan \varphi_f)^2]}} \right). \quad (3.17)$$

На основу претходног, разлика једначина (3.11)<sub>1</sub>( $i = 1, 2$ ) даје

$$\begin{aligned} & \frac{v_0^2}{4g(\cos \varphi_0)^2} [2(\varphi_0 - \varphi_2) + \sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_2] = \\ & = x_0 + \frac{2gy_0 + v_0^2}{g[1 + (\tan \varphi_f)^2]} (\tan \varphi_2 - \tan \varphi_f). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Релације (3.17) и (3.18) представљају услове које треба да испуњавају параметри из (3.2) да би се реализовао случај  $\varphi_1 = \varphi_0$  и  $\mu = 0$ .

За  $\varphi_2 = \varphi_f$  и  $\mu = 0$  из једначина (3.11)<sub>2</sub>( $i = 2$ ) и (3.11)<sub>3</sub>( $i = 1, 2$ ) следи

$$v_f = \frac{v_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi_f}{(\cos \varphi_1)^2}, \quad C_{\lambda_2} = -\frac{\cos \varphi_f}{v_f}, \quad C_y = \frac{v_f^2}{2g}.$$

Заменом ових израза у једначину (3.11)<sub>2</sub>( $i = 1$ ) и њеним решавањем по  $\varphi_1$  добија се

$$\varphi_1 = \cos^{-1} \left( \sqrt[4]{\frac{2gy_0 + v_0^2(\cos \varphi_0)^2 [1 + (\tan \varphi_0)^2]}{v_0^2(\cos \varphi_0)^2(\cos \varphi_f)^2}} \right). \quad (3.19)$$

На основу претходног, разлика једначина (3.11)<sub>1</sub>( $i = 1, 2$ ) даје

$$\begin{aligned} & \frac{v_0^4(\cos \varphi_0)^4(\cos \varphi_f)^2}{4g \{2gy_0 + v_0^2(\cos \varphi_0)^2 [1 + (\tan \varphi_0)^2]\}} [2(\varphi_1 - \varphi_f) + \sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_f] = \\ & = x_0 - \frac{v_0^2(\cos \varphi_0)^2}{g} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Релације (3.19) и (3.20) представљају услов који треба да испуњавају параметри (3.2) да би се реализовао случај  $\varphi_2 = \varphi_f$  и  $\mu = 0$ .

Досадашња анализа односила се на случај  $v_0 \neq 0$ . Када је  $v_0 = 0$ , из једначина



(3.11) ( $i = 1$ ) следи да је

$$\varphi_1 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad C_x = x_0 - \frac{\pi b_1}{4gB^2}, \quad C_y = y_0 - \frac{\pi b_2}{4gB^2}.$$

Ово значи да у овом случају брахистохрона почиње линијским сегментом типа  $SG2$  и да мора да буде  $\varphi_0 = \pi/2$ . Решавањем система једначина (3.11)( $i = 2$ ) добијају се преостале непознате  $\varphi_2, v_f, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}$  и  $\lambda_{4f}$ .

### 3.4 Услови достижности

На основу услова (3.10)<sub>1</sub> и израза (2.36)<sub>1</sub> јасно је да угао  $\varphi$  опада дуж линијских сегмената типа  $SG1$  што имплицира следећа ограничења:

$$\varphi_1 > \varphi_0, \quad \varphi_f > \varphi_2, \quad (3.21)$$

а из услова (3.10)<sub>2</sub> следи

$$\mu C_{\lambda_3} > C_{\lambda_2}. \quad (3.22)$$

Даље, из израза (2.48) следи да величина  $\dot{\varphi}_+$  има супротан знак од знака израза

$$(\tan \varphi)^2 + 2\mu \tan \varphi + 1 + 2\mu A. \quad (3.23)$$

Израз (3.23) представља квадратну функцију по  $\tan \varphi$ . С обзиром на (2.54), анализом знака овог члана добија се да за  $(\mu^2 - 1) / (2\mu) < A < (1 - \mu^2) / (2\mu)$  важи  $\dot{\varphi}_+ < 0$  за свако  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Даље, за  $A \leq (\mu^2 - 1) / (2\mu)$  важи

$$\dot{\varphi}_+ < 0 \quad \forall \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \tan^{-1} \left( -\mu - \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right) \right) \cup \left( \tan^{-1} \left( -\mu + \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right), \frac{\pi}{2} \right],$$

$$\dot{\varphi}_+ > 0 \quad \forall \varphi \in \left( \tan^{-1} \left( -\mu - \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right), \tan^{-1} \left( -\mu + \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right) \right). \quad (3.24)$$

Слично као у [6], множење једначине (2.8) са  $v dt$  и њеним интеграљењем на интервалу  $(t_1, t_2]$  добија се

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + g(y_2 - y_1) - \mu g(x_2 - x_1) = \mu \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} v^2 d\varphi \quad (3.25)$$

где је:  $x_+(\varphi_1) = x_-(\varphi_1) = x_1$ ,  $x_+(\varphi_2) = x_-(\varphi_2) = x_2$ ,  $y_+(\varphi_1) = y_-(\varphi_1) = y_1$ ,  $y_+(\varphi_2) = y_-(\varphi_2) = y_2$ ,  $v_+(\varphi_1) = v_-(\varphi_1) = v_1$  и  $v_+(\varphi_2) = v_-(\varphi_2) = v_2$ . На основу

једначина (3.11)<sub>1</sub>( $i = 1, 2$ )-(3.11)<sub>3</sub>( $i = 1, 2$ ), релација (3.25) се може записати у следећем облику:

$$\begin{aligned} & v_f^2 (\cos \varphi_f)^2 \left[ \frac{1 + (\tan \varphi_f)^2}{2} + \mu (\tan \varphi_2 - \tan \varphi_f) \right] - \\ & - v_0^2 (\cos \varphi_0)^2 \left[ \frac{1 + (\tan \varphi_0)^2}{2} + \mu (\tan \varphi_1 - \tan \varphi_0) \right] - g(y_0 - \mu x_0) = \\ & = \mu \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} v^2 d\varphi. \end{aligned} \quad (3.26)$$

С обзиром на спроведену анализу знака величине  $\dot{\varphi}_+$ , физички смисао имају следеће варијанте:

$$\varphi_1 > \varphi_2 \text{ за } (\mu^2 - 1) / (2\mu) \leq A < (1 - \mu^2) / (2\mu),$$

$$\varphi_1 > \varphi_2 \text{ за } \begin{cases} A \leq (\mu^2 - 1) / (2\mu) \\ \varphi_1, \varphi_2 \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \tan^{-1} \left( -\mu - \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right) \right) \vee \\ \varphi_1, \varphi_2 \in \left( \tan^{-1} \left( -\mu + \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right), \frac{\pi}{2} \right], \end{cases}$$

$$\varphi_1 < \varphi_2 \text{ за } \begin{cases} A \leq (\mu^2 - 1) / (2\mu) \\ \varphi_1, \varphi_2 \in \left( \tan^{-1} \left( -\mu - \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right), \tan^{-1} \left( -\mu + \sqrt{\mu^2 - 1 - 2\mu A} \right) \right). \end{cases} \quad (3.27)$$

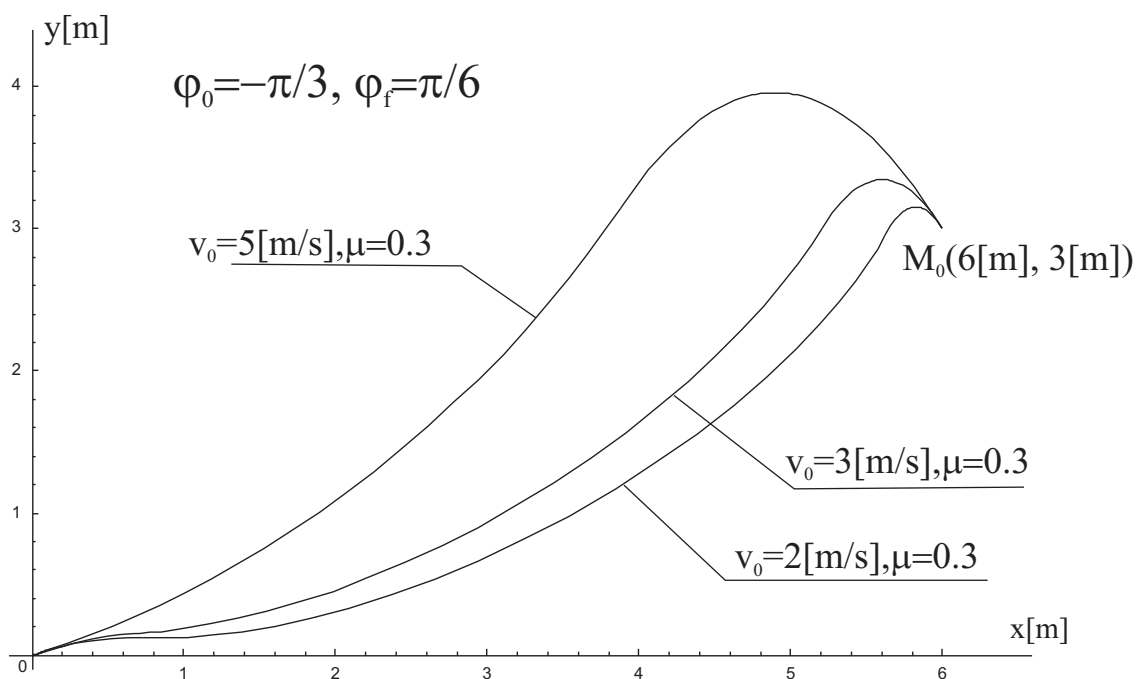
За  $\varphi_1 > \varphi_2$ , десна страна једначине (3.26) је негативна, а за  $\varphi_1 < \varphi_2$  је позитивна. С обзиром на претходно, нумерички одређене вредности величина  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $v_f$  треба да буду такве да обе стране једначине (3.26) имају исти знак. Овај услов заједно са условима (2.54), (3.21), (3.22) и (3.27) представља услове на основу којих се утврђује да ли за нумерички одређене вредности параметара  $\varphi_1, \varphi_2, v_f, C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$  тражена брахистохрона крива постоји, односно, да ли је крајњи положај достиган при задатим параметрима  $x_0, y_0, v_0, \varphi_0, \varphi_f$  и  $\mu$ .

### 3.4.1 Анализа понашања брахистохроних кривих за одређене вредности почетних и крајњих услова

За  $x_0 = 6[m]$ ,  $y_0 = 3[m]$ ,  $v_0 = 5[m/s]$ ,  $g = 9.81[m/s^2]$ ,  $\varphi_0 = -\pi/3$ ,  $\varphi_f = \pi/9$  и за разне вредности коефицијента трења  $\mu$  као и за  $x_0 = 6[m]$ ,  $y_0 = 3[m]$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $g = 9.81[m/s^2]$ ,  $\varphi_0 = -\pi/3$  и  $\varphi_f = \pi/9$  и разне вредности интензитета почетне брзине  $v_0$ , решавањем система једначина (3.11) добијају се вредности параметара  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $v_f$ ,  $C_{\lambda_2}$ ,  $C_{\lambda_3}$ ,  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $(\lambda_1)_0$ ,  $(\lambda_4)_0$  и  $\lambda_{4f}$  које су приказане у табелама 3.1 и 3.2. Из података у овим табелама се види да се удео завршног сегмента  $SG1$  на брахистохрони смањује (брахистохрона тежи двосегментној кривој типа  $SG1 - SG2$ ) са смањивањем коефицијента трења  $\mu$ , односно, са повећањем вредности интензитета почетне брзине. Тако се гранични случај  $\varphi_2 = \varphi_f$  за први скуп претходних параметара добија за  $\mu_g = 0.09628$ , а за други скуп претходних параметара добија за  $(v_0)_g = 5.16047 [m/s]$ . За вредности коефицијената трења мање од  $\mu_g$ , крајњи положај брахистохроне није достижан. Заиста, за  $\mu = 0.05$  се добија  $\varphi_1 = 1.03734707929081$ ,  $\varphi_2 = 0.35333030228809$ ,  $v_f = 8.74404375896680 [m/s]$ ,  $C_{\lambda_2} = -0.10908626581055 [s/m]$ ,  $C_{\lambda_3} = -0.03465854347348 [s/m]$  одакле се види да је нарушен услов (3.21). За вредности почетне брзине веће од  $(v_0)_g$ , крајњи положај брахистохроне такође није достижан. Тако се за  $(v_0)_g = 6 [m/s]$  добија  $\varphi_1 = 1.02593637720138$ ,  $\varphi_2 = 0.46176060168615$ ,  $v_f = 7.46031243981615 [m/s]$ ,  $C_{\lambda_2} = -0.12750533646466 [s/m]$ ,  $C_{\lambda_3} = -0.03654427542346 [s/m]$  одакле се види да је нарушен услов (3.21).

$\mu$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$v_f$ [m/s]
0.1	1.03286090683885	0.34871377100053	8.33472754637525
0.3	1.01139335703131	0.32743188982686	6.72245371302720
0.5	0.98168267310553	0.30024203589721	5.09865102019320
0.7	0.93614788939045	0.26298823251136	3.35287570815378
$\mu$	$C_{\lambda_2}$ [s/m]	$C_{\lambda_3}$ [s/m]	$C_x$ [m]
0.1	-0.11687698020469	-0.02968092969988	-0.99175423414038
0.3	-0.15739897396201	-0.00225626147907	1.16037242341583
0.5	-0.22571594014500	0.04849538088088	1.98653246554337
0.7	-0.37622353157407	0.17245960299360	2.42024706815624
$\mu$	$C_y$ [m]	$(\lambda_1)_0$ [s <sup>2</sup> /m]	$(\lambda_4)_0$ [s <sup>2</sup> /m]
0.1	3.26186964444173	-0.00104518445441	0.16859072353860
0.3	2.57328670726527	0.04709179113277	0.22133459698965
0.5	2.48817088892120	0.12811377597408	0.33197459995590
0.7	2.60833966014654	0.30625664282313	0.60470310886926
$\mu$	$t_f$ [s]	$\lambda_{4f}$ [s <sup>2</sup> /m]	
0.1	1.58583526292776	0.00000001358245	
0.3	1.66686630075477	0.00005605461276	
0.5	1.77705011658435	0.00033910464034	
0.7	1.94864154681165	0.00134633887232	

Табела 3.1: Нумеричке вредности параметара брахистохроних кривих ( $x_0 = 6$  [m],  $y_0 = 3$  [m],  $v_0 = 5$  [m/s],  $\varphi_0 = -\pi/3$ ,  $\varphi_f = \pi/9$ )



Слика 3.1: Брахистохроне криве

$v_0$ [m/s]	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$v_f$ [m/s]
2	1.10022404668107	-0.03147488828031	4.52833713217441
3	1.04272378218297	0.07245493736177	5.21165873045555
4	1.01544239669907	0.19499426244900	5.96354189742158
5	1.01139335703131	0.32743188982686	6.72245371302720
$v_0$ [m/s]	$C_{\lambda_2}$ [s/m]	$C_{\lambda_3}$ [s/m]	$C_x$ [m]
2	-0.25816581475212	0.18233928546986	2.78888953226770
3	-0.22531306487223	0.11132238415571	2.46197473689236
4	-0.19072943003625	0.04752611646660	1.93349156981994
5	-0.15739897396201	-0.00225626147907	1.16037242341583
$v_0$ [m/s]	$C_y$ [m]	$(\lambda_1)_0$ [s <sup>2</sup> /m]	$(\lambda_4)_0$ [s <sup>2</sup> /m]
2	1.88548390210110	0.06456780946392	0.21805792942493
3	2.09045100736660	0.07820469049305	0.23492127952316
4	2.33271746138706	0.06942591127030	0.23361639661946
5	2.57328670726527	0.04709179113277	0.22133459698965
$v_0$ [m/s]	$t_f$ [s]	$\lambda_{4f}$ [s <sup>2</sup> /m]	
2	1.87481844527841	0.01994331064836	
3	1.80120840205337	0.01030470313331	
4	1.72589281655416	0.00304920695666	
5	1.66686630075477	0.00005605461276	

Табела 3.2: Нумеричке вредности параметара брахистохроних кривих ( $x_0 = 6$  [m],  $y_0 = 3$  [m],  $\mu = 0.3$ ,  $\varphi_0 = -\pi/3$ ,  $\varphi_f = \pi/9$ )

# Глава 4

## О ОПТИМИЗАЦИЈИ ТРАНСПОРТА ГРАНУЛАСТИХ МАТЕРИЈАЛА

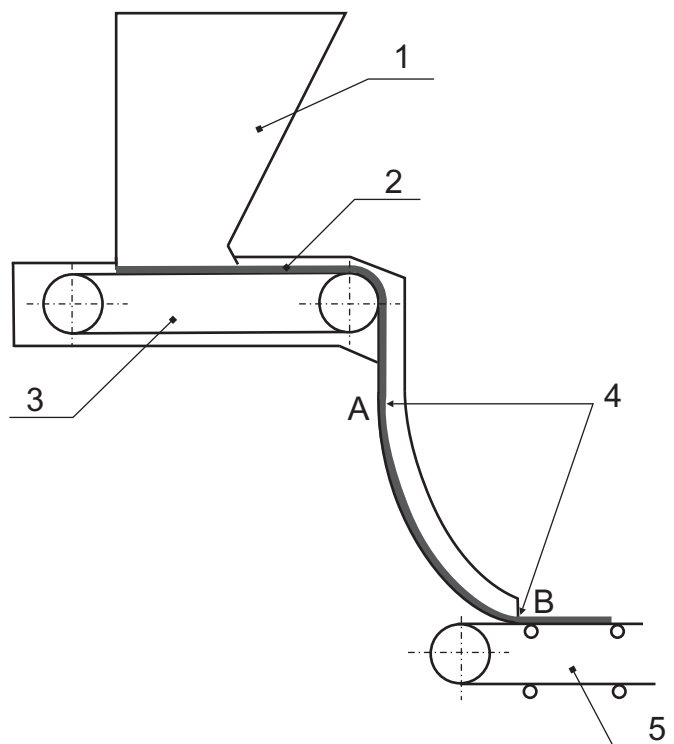
У овом делу дисертације указано је на примене резултата из глава 2 и 3 на проблеме оптимизације олука за одвод грануластог материјала. Решен је у аналитичком облику и проблем одређивања облика профила олука да би губици механичке енергије услед Кулонове силе трења при транспорту грануластог материјала били минимални.

### 4.1 Минимизација времена транспорта грануластог материјала дуж цеви

На сл.4.1 је приказана принципска шема једног типичног система за претовар грануластог (прашкастог, ситно зрнастог) материјала. Из коша за складиштење 1, материјал 2 се посредством траке за пренос материјала 3 помера у одводни олука (канал) 4 и коначно стиже на тракасти транспортер 5 (ова компонента система може да буде и други кош за складиштење, транспортни вагон и слично).

Материјал се дуж одводног олука креће под дејством сопствене тежине због чега се овакви олуци у литератури називају и гравитациони ( gravity flow chutes). Један од важних задатака оптимизације код ове врсте транспортних система је оптимизација профила одводног олука где се најчешће као критеријуми оптимизације узимају минимизација времена транспорта материјала олуком и минимизација губитака механичке енергије материјала услед дејства Кулонове силе трења. Често се овај последњи критеријум исказује и као максимизација брзине материјала на излазу одводног олука. Остали критеријуми оптимизације, који се могу срести код оптимизације конструкције разматраног транспортног система, анализирани су у [56, 77].

У раду [57] је показано да се у случају када се грануласти материјал креће кроз



Слика 4.1: Инсталација за транспорт грануластог материјала

канал у виду убрзаног протока (под овим условом дубина покретног слоја остаје мања од ширине попречног пресека канала а често и од половине ове ширине), кретање материјала кроз канал може моделирати као кретање материјалне тачке дуж хрпаве криве при чему је коефицијент трења константан. С обзиром на ово, брахистохроне криве добијене у главама 2 и 3 представљају оптималне облике профила одводног канала у аналитичком облику што представља побољшање резултата из [13] где се до оптималног облика канала дошло нумеричким путем за почетну брзину једнаку нули и уз значајна поједностављења везана за утицај силе трења. Међутим, на овом месту треба напоменути да се у складу са моделом материјалне тачке из глава 2 и 3, услов убрзаног протока изражава еквивалентним условом да тангенцијално убрзање  $\dot{v}_T$  материјалне тачке  $M$  у току кретања не буде негативно. С обзиром на ово све брахистохроне, осим оних на сл.2.2 које одговарају коефицијентима трења  $\mu = 0.7$  и  $\mu = 0.9$ , испуњавају овај услов и према томе представљају оптимални облик профила канала који обезбеђује минимално време транспорта грануластог материјала.

## 4.2 Минимизација губитака механичке енергије грануластог материјала услед Кулоновог трења у току транспорта дуж цеви

### 4.2.1 Формулација проблема

При решавању овог проблема, према [12, 13] користи се модел материјалне тачке  $M$  масе  $m$  која се креће у вертикалној равни у хомогеном пољу Земљине теже по храпавој кривој са Кулоновим трењем која се третира као незадржавајућа веза. Тражи се једначина ове криве тако да материјална тачка  $M$  полазећи из положаја  $M_0(x_0, y_0)$  почетном брзином различитом од нуле стигне у положај  $O(0, 0)$  при минималном губитку механичке енергије, где је са  $y$  означена вертикална оса усмерена навише а са  $x$  хоризонтална оса Декартовог координатног система (види сл.2.1). Без губитка општости узима се да је  $x_0 > 0$  и  $y_0 > 0$ . Диференцијална једначина кретања тачке  $M$  је одређена са (2.1). У даљим разматрањима ознаке које се поклапају са ознакама из глава 2 и 3, имају исто значење као у наведеним главама дисертације.

Нека је  $E = T + \Pi$  укупна механичка енергија материјалне тачке, где је  $T$  кинетичка енергија а  $\Pi$  потенцијална енергија материјалне тачке. Разматрани проблем се може формулисати као проблем минимизације следеће разлике

$$E(0) - E(t_f) = \int_0^{t_f} \mu |N_u| v dt, \quad (4.1)$$

где је горња граница интеграла  $t_f$  непозната. Неједнакост (2.6) сада представља услов да материјална тачка не напушта везу.

Аналогним разматрањима као у глави 2 уводе се релације (2.7), (2.8) и (2.10) које представљају ограничења у разматраном оптимизационом проблему. С обзиром на претходно, постављени проблем може сада да се формулише као следећи варијациони задатак

$$\int_0^{t_f} \mu (g \cos \varphi - v \dot{\varphi}) v dt \longrightarrow \inf \quad (4.2)$$

уз ограничења (2.7), (2.8) и (2.10), при чему су почетни и крајњи услови

$$t_0 = 0 : x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0; \quad t = t_f : x(t_f) = 0, \quad y(t_f) = 0. \quad (4.3)$$



Следећи општи поступак из [33, 34], увођењем новог функционала

$$J = \int_0^{t_f} [\mu (g \cos \varphi - v \dot{\varphi}) v + \sum_{i=1}^4 \lambda_i f_i] dt, \quad (4.4)$$

где су  $\lambda_i$  Лагранжеви множитељи веза, и трансформацијом величина стања (2.14), постављени везани варијациони задатак може се преформулисати као следећи слободан варијациони задатак

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_f} F dt \rightarrow \inf, \\ t_0 = 0 &: z_1(0) = x_0, \quad z_2(0) = y_0, \quad z_4(0) = v_0, \quad z_i(0) = 0 \quad (i = 5, \dots, 9), \\ t = t_f &: z_1(t_f) = 0, \quad z_2(t_f) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где је подинтегрална функција  $F$  дата у облику

$$\begin{aligned} F &= \mu z_4 (g \cos z_3 - z_4 \dot{z}_3) + \dot{z}_5 [\dot{z}_4 - \mu z_4 \dot{z}_3 + g(\mu \cos z_3 - \sin z_3)] + \dot{z}_6 (\dot{z}_1 + z_4 \cos z_3) + \\ &+ \dot{z}_7 (\dot{z}_2 + z_4 \sin z_3) + \dot{z}_9 (z_4 \dot{z}_3 - g \cos z_3 + \dot{z}_8^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

С обзиром на (4.6), Ојлер-Лагранжеве једначине разматраног варијационог задатка гласе

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_k} \right) &= 0, \quad k = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ \frac{\partial F}{\partial z_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_j} \right) &= 0, \quad j = 3, 4. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ове једначине као и сва остала извођења биће у даљим разматрањима третирану у првобитним променљивима. Чињеница да угао  $\varphi$  није задат у почетном и крајњем положају имплицира природне граничне услове облика

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_3} \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\mu v \lambda_1 - v \lambda_4 + \mu v^2]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0. \quad (4.8)$$

Даље, чињеница да величине  $z_i$ ,  $i = 4, \dots, 9$  нису задате у крајњем положају даје још шест природних граничних услова облика

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_4} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow \lambda_1(t_f) = 0, \quad (4.9)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_5} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{v} - \mu v \dot{\varphi} + g(\mu \cos \varphi - \sin \varphi)]_{(t=t_f)} = 0, \quad (4.10)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_6} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{x} + v \cos \varphi]_{(t=t_f)} = 0, \quad (4.11)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_7} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{y} + v \sin \varphi]_{(t=t_f)} = 0, \quad (4.12)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_8} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{w} \lambda_4]_{(t=t_f)} = 0, \quad (4.13)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_9} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [v \dot{\varphi} - g \cos \varphi + \dot{w}^2]_{(t=t_f)} = 0. \quad (4.14)$$

Време  $t_f$  није задато па важи услов трансверзалности на десном крају (2.25) или у развијеном облику, након елиминације величина  $\dot{z}_1$ ,  $\dot{z}_2$  и  $\dot{z}_4$  посредством једначина (2.7), (2.8) и (2.10),

$$[\lambda_1 g(\mu \cos \varphi - \sin \varphi) + v(\lambda_2 \cos \varphi + \lambda_3 \sin \varphi + \mu g \cos \varphi) - \lambda_4(\dot{w}^2 + g \cos \varphi)]_{(t=t_f)} = 0. \quad (4.15)$$

Из Ојлер-Лагранжевих једначина (4.7) по променљивима  $z_1$  и  $z_2$  добија се

$$\lambda_2 \equiv C_{\lambda_2}, \quad \lambda_3 \equiv C_{\lambda_3}, \quad C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3} = const., \quad (4.16)$$

а с обзиром на природне граничне услове (4.10)-(4.14), Ојлер-Лагранжева једначина по  $z_8$  има облик

$$\dot{w} \lambda_4 \equiv 0, \quad (4.17)$$

док се једначине по променљивима  $z_5$ ,  $z_6$ ,  $z_7$  и  $z_9$  свODE на једначине веза у смислу варијационог рачуна (2.8), (2.7)<sub>1</sub>, (2.7)<sub>2</sub> и (2.10), респективно. Даље, Ојлер-Лагранжеве једначине по променљивима  $z_3$  и  $z_4$  гласе

$$\begin{aligned} \dot{v}(-\lambda_4 + 2\mu v + \mu \lambda_1) + g \lambda_4 \sin \varphi + v \left[ \mu \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_4 + C_{\lambda_3} \cos \varphi - (\mu g + C_{\lambda_2}) \sin \varphi \right] - \\ - \lambda_1 g(\cos \varphi + \mu \sin \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$-\dot{\lambda}_1 + (\mu g + C_{\lambda_2}) \cos \varphi - \dot{\varphi} (\mu \lambda_1 - \lambda_4 + 2\mu v) + C_{\lambda_3} \sin \varphi = 0. \quad (4.19)$$

Пошто подинтегрална функција  $F$  не зависи експлицитно од времена, Ојлер-Лагранжеве једначине, с обзиром на (4.15), имају први интеграл (2.33) који у развијеном облику гласи

$$\lambda_1 g (\mu \cos \varphi - \sin \varphi) + v (C_{\lambda_2} \cos \varphi + C_{\lambda_3} \sin \varphi + \mu g \cos \varphi) - \lambda_4 (\dot{w}^2 + g \cos \varphi) = 0. \quad (4.20)$$

Из једначине (4.17) следи да се на интервалу  $[0, t_f]$  екстремала функционала  $J$  може састојати од линијских сегмената на којима је  $\dot{w} \equiv 0$ ,  $\lambda_4 \neq 0$  и линијских сегмената на којима је  $\dot{w} \neq 0$ ,  $\lambda_4 \equiv 0$ . С обзиром на ово, функционал  $J$  спада у групу функционала чије екстремале могу да имају преломе (такозване угаоне тачке) у простору  $\mathbb{R}^9$  јер извод  $\dot{z}_8$  има прекид прве врсте. Ако се са  $S$  означи укупан број тачака прелома екстремале којима одговарају временски тренуци  $t_p$  ( $p = 1, \dots, S$ ), онда се аналогним разматрањима као у глави 2 долази до услова (2.34) и (2.35).

## 4.2.2 Решења Ојлер-Лагранжевих једначина

### 4.2.2.1 Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \neq 0$ , $\lambda_4 \equiv 0$

Решавање једначине (4.19) по  $\dot{\varphi}$  и једначине (4.18) по  $2\mu v \dot{v} + \mu(\dot{v}\lambda_1 + v\dot{\lambda}_1)$  и сукцесивна замена израза за ове величине у (2.8) даје

$$g\lambda_1 (1 + \mu^2) \cos \varphi + v [(C_{\lambda_2} - \mu g - \mu C_{\lambda_3}) \sin \varphi - (C_{\lambda_3} - \mu^2 g + \mu C_{\lambda_2}) \cos \varphi] = 0. \quad (4.21)$$

На разматраном линијском сегменту, једначине (4.20) и (4.21) представљају хомоген систем једначина по непознатим  $\lambda_1$  и  $v$ . Да би овај систем имао нетривијална решења потребно је и довољно да је његова детерминанта једнака нули што даје следећи услов

$$C_{\lambda_2} (1 + \mu^2) + [\mu g + \mu (C_{\lambda_3} + \mu C_{\lambda_2})] \cos 2\varphi + \mu (\mu g - C_{\lambda_2} + \mu C_{\lambda_3}) \sin 2\varphi = 0. \quad (4.22)$$

Из горње једначине следи да на разматраном линијском сегменту важи

$$\varphi(t) \equiv C_\varphi, \quad C_\varphi = \text{const.}, \quad (4.23)$$

где константа  $C_\varphi$  представља решење једначине (4.22). Према томе, линијски сегмент  $\dot{w} \neq 0, \lambda_4 \equiv 0$  је права линија. С обзиром на (4.23), из једначина (2.7), (2.8) и (4.21) следи

$$x = -\frac{g}{2} (\sin C_\varphi - \mu \cos C_\varphi) t^2 \cos C_\varphi - C_v t \cos C_\varphi + C_x,$$

$$y = -\frac{g}{2} (\sin C_\varphi - \mu \cos C_\varphi) t^2 \sin C_\varphi - C_v t \sin C_\varphi + C_y,$$

$$v = g (\sin C_\varphi - \mu \cos C_\varphi) t + C_v,$$

$$\lambda_1 = \frac{[C_{\lambda_3} - \mu^2 g + \mu C_{\lambda_2} - (C_{\lambda_2} - \mu g - \mu C_{\lambda_3}) \tan C_\varphi] [g (\sin C_\varphi - \mu \cos C_\varphi) t + C_v]}{g (1 + \mu^2)}. \quad (4.24)$$

#### 4.2.2.2 Опште решење на линијском сегменту $\dot{w} \equiv 0, \lambda_4 \neq 0$

Из једначина (2.7), (2.8) и (2.10) се аналогним поступком као у глави 2 добијају следеће релације:

$$v = \frac{C_v^*}{\cos \varphi},$$

$$x = C_x^* - \frac{C_v^{*2}}{g} \tan \varphi,$$

$$y = C_y^* - \frac{C_v^{*2}}{2g} (\tan \varphi)^2,$$

$$t = \frac{C_v^*}{g} \tan \varphi + C_t^*, \quad (4.25)$$

где су  $C_v^*, C_x^*, C_y^*$  и  $C_t^*$  интеграционе константе, а једначине (4.25)<sub>2</sub> и (4.25)<sub>3</sub> пред-

стављају параметарске једначине параболе при косом хицу у неотпорној средини. Даље, коришћењем (2.36) и трансформације  $d(\cdot)/dt = (d(\cdot)/d\varphi)\dot{\varphi}$ , из једначина (4.18) и (4.19) следи

$$\frac{d}{d\varphi}(\mu\lambda_1 - \lambda_4) = \lambda_1 - \frac{C_v^*(C_{\lambda_3} \cos \varphi - C_{\lambda_2} \sin \varphi + \mu g \sin \varphi)}{g(\cos \varphi)^2}, \quad (4.26)$$

$$\frac{d\lambda_1}{d\varphi} = -(\mu\lambda_1 - \lambda_4) + \frac{C_v^*(C_{\lambda_2} \cos \varphi + C_{\lambda_3} \sin \varphi - \mu g \cos \varphi)}{g(\cos \varphi)^2}. \quad (4.27)$$

Решавањем добијеног система диференцијалних једначина по  $\lambda_1$  и  $\mu\lambda_1 - \lambda_4$ , добија се следеће опште решење

$$\mu\lambda_1 - \lambda_4 = C_{\lambda_1} \cos \varphi + C_{\lambda_4} \sin \varphi - \frac{C_v^* C_{\lambda_3}}{g} \sin \varphi + \frac{C_v^* C_{\lambda_2}}{g} \sin \varphi \tan \varphi - \mu C_v^* \sin \varphi \tan \varphi,$$

$$\lambda_1 = -C_{\lambda_1} \sin \varphi + C_{\lambda_4} \cos \varphi + \frac{C_v^* C_{\lambda_2}}{g} \sin \varphi + \frac{C_v^* C_{\lambda_3}}{g} \sin \varphi \tan \varphi - \mu C_v^* \sin \varphi, \quad (4.28)$$

где су  $C_{\lambda_1}$  и  $C_{\lambda_4}$  интеграционе константе. Комбинација једначина (4.28) даје

$$\begin{aligned} \lambda_4 = & C_{\lambda_4}(-\sin \varphi + \mu \cos \varphi) - C_{\lambda_1}(\cos \varphi + \mu \sin \varphi) + \frac{C_v^* C_{\lambda_2}}{g}(-\tan \varphi + \mu) \sin \varphi + \\ & + \frac{C_v^* C_{\lambda_3}}{g}(\mu \tan \varphi + 1) \sin \varphi + \mu C_v^* \sin \varphi(-\mu + \tan \varphi). \end{aligned} \quad (4.29)$$

### 4.2.3 Утврђивање распореда линијских сегмената на екстремали

Нека су  $SG1$  и  $SG2$  ознаке за линијске сегменте на којима је  $\dot{w} \neq 0$ ,  $\lambda_4 \equiv 0$  и  $\dot{w} \equiv 0$ ,  $\lambda_4 \neq 0$ , респективно. Распоред линијских сегмената на екстремали имплициран је условом да је укупан број непознатих интеграционих константи једнак броју расположивих услова за њихово одређивање. На екстремали може да постоји само један сегмент типа  $SG1$  јер би у супротном на основу (4.16), (4.22) и (4.23) сваки сегмент  $SG1$  морао да има исти угао нагиба  $C_\varphi$  што је физички немогуће остварити. Такође, екстремала се не може завршавати линијским сегментом  $SG1$  јер би у том случају на основу природних граничних услова (4.8) и (4.9) на десном крају важило  $v_f = v(t_f) = 0$  што није у духу разматраног оптимизационог задатка.

У случају распореда  $SG1 - SG2$ , на основу услова (4.3) константе  $C_v^*$ ,  $C_x^*$  и  $C_y^*$  се могу на сегменту  $SG2$  изразити преко непознатих  $\varphi_f = \varphi(t_f)$  и  $v_f = v(t_f)$ , а

константе  $C_{\lambda_1}$  и  $C_{\lambda_4}$  на основу природних граничних услова на десном крају (4.8) и (4.9) изражавају се преко непознатих  $C_{\lambda_2}$ ,  $C_{\lambda_3}$ ,  $\varphi_f$  и  $v_f$ . Даље, на основу услова (2.34)<sub>3</sub> у једначинама (2.34)<sub>1</sub>, (2.34)<sub>2</sub> и (2.35)<sub>1</sub> елиминише се временски тренутак  $t_1$ . Сада, преосталих осам непознатих константи треба у случају  $v_0 \neq 0$  да задовоље услове (4.3) (за  $t = 0$ ), (4.22), (2.34)<sub>1</sub>, (2.34)<sub>2</sub> и (2.35) и природни гранични услов на левом крају (4.8) што даје укупно девет услова. У случају  $v_0 = 0$  природни гранични услов (4.8) на левом крају је идентички задовољен па преостаје осам услова. Према томе, варијанта распореда  $SG1 - SG2$  важи када је  $v_0 = 0$ . За ову варијанту ће у наредном поглављу бити детаљно приказан поступак одређивања непознатих константи. Губитака механичке енергије нема у случају када цео профил канала представља линијски сегмент  $SG2$ . Да би положаји  $M_0$  и  $O$  могли да буду спојени параболом (линијским сегментом  $SG2$ ), интензитет почетне брзине  $v_0$  тачке мора да има довољно велику вредност. Ове вредности су одређене из услова да је поткорена величина у (2.85)<sub>1</sub> већа или једнака нули, односно,

$$v_0^2 \geq g(-y_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}). \quad (4.30)$$

У случају распореда  $SG2 - SG1 - SG2$ , који има смисла разматрати за  $v_0 \neq 0$ , на основу (4.3) и (4.25) на почетном сегменту  $SG2$  интеграционе константе  $C_v^*$ ,  $C_x^*$  и  $C_y^*$  могу се изразити преко непознате  $\varphi_0 = \varphi(0)$ , а на завршном сегменту  $SG2$  преко непознатих  $\varphi_f$  и  $v_f$ . Даље, на основу услова (2.34)<sub>3</sub> ( $p = 1, 2$ ) могу се у једначинама (2.34)<sub>1</sub>, (2.34)<sub>2</sub> и (2.35)<sub>1</sub> за  $p = 1, 2$  елиминисати временски тренуци  $t_1$  и  $t_2$ . Сада, за одређивање преосталих тринаест непознатих константи имамо дванаест услова одређених релацијама (4.8), (4.9), (4.22), (2.34)<sub>1</sub>, (2.34)<sub>2</sub> и (2.35) ( $p = 1, 2$ ). Често је у оптимизацији профила канала заступљен случај када је угао  $\varphi_0$  задат (видети [52]). Тада се изоставља природни гранични услов на левом крају (4.8) због тога што је сада  $[\Delta z_3]_{(t=0)} = 0$ . Сада имамо једанаест једначина за одређивање дванаест непознатих. На основу изложене анализе за вредности интензитета почетне брзине које задовољавају неједнакост

$$0 < v_0^2 < g(-y_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}) \quad (4.31)$$

важи само варијанта распореда  $SG2 - SG1 - SG2$ . Проблем разлике у броју непознатих константи и броју расположивих услова за њихово одређивање се може превазићи или нумеричким поступком из [52] или исписивањем расположивих услова за одређивање непознатих константи у облику функције (6.3) и одређивању њеног глобалног минимума применом диференцијалне еволуције.

#### 4.2.4 Коначно решење проблема за $v_0 = 0$

У претходном поглављу је показано да за  $v_0 = 0$  важи варијанта распореда  $SG1 - SG2$ . На основу услова (4.3) из једначина (4.24)<sub>1</sub> – (4.24)<sub>3</sub> и (4.25)<sub>1</sub> – (4.25)<sub>3</sub> следи да је  $C_x = x_0$ ,  $C_y = y_0$ ,  $C_v = 0$ ,  $C_v^* = v_f \cos \varphi_f$ ,  $C_x^* = (v_f^2 \sin \varphi_f \cos \varphi_f)/g$  и  $C_y^* = (v_f^2 (\sin \varphi_f)^2)/(2g)$ . Даље, на бази овако одређених константи, из услова (2.34)<sub>3</sub> се добија тренутак  $t_1$  преласка тачке са сегмента  $SG1$  на сегмент  $SG2$

$$t_1 = \frac{v_f \cos \varphi_f}{g(\sin C_\varphi - \mu \cos C_\varphi) \cos C_\varphi}, \quad (4.32)$$

а на основу природних граничних услова (4.8) и (4.9) на десном крају из израза (4.28) и (4.29) се добија

$$C_{\lambda_1} = -\mu v_f \cos \varphi_f + \frac{C_{\lambda_3} v_f \sin \varphi_f}{g}, \quad C_{\lambda_4} = -\frac{C_{\lambda_2} v_f \sin \varphi_f}{g}. \quad (4.33)$$

На основу ових израза и једначина (2.34)<sub>1</sub>, (2.34)<sub>2</sub>, (2.35) и (4.22) добија се систем једначина за одређивање непознатих  $C_\varphi, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}, \varphi_f$  и  $v_f$  који гласи

$$v_f^2 \left[ \frac{(\cos \varphi_f)^2}{\cos C_\varphi (\mu \cos C_\varphi - \sin C_\varphi)} + 2(\cos \varphi_f)^2 \tan C_\varphi - \sin 2\varphi_f \right] + 2gx_0 = 0,$$

$$v_f^2 \left[ \frac{(\cos \varphi_f)^2 \sin C_\varphi}{(\cos C_\varphi)^2 (\mu \cos C_\varphi - \sin C_\varphi)} + (\cos \varphi_f)^2 (\tan C_\varphi)^2 - (\sin \varphi_f)^2 \right] + 2gy_0 = 0,$$

$$C_{\lambda_2} (1 + \mu^2) + [\mu g + \mu (C_{\lambda_3} + \mu C_{\lambda_2})] \cos 2C_\varphi + \mu (\mu g - C_{\lambda_2} + \mu C_{\lambda_3}) \sin 2C_\varphi = 0,$$

$$(-C_{\lambda_2} + \mu C_{\lambda_3}) \cos(2C_\varphi - \varphi_f) + (C_{\lambda_2} - \mu C_{\lambda_3} - 2\mu g) \cos \varphi_f -$$

$$-2(C_{\lambda_3} + \mu C_{\lambda_2}) \cos C_\varphi \sin(C_\varphi - \varphi_f) = 0,$$

$$(1 + \mu^2) (C_{\lambda_2} \cos C_\varphi + C_{\lambda_3} \sin C_\varphi) \sin(C_\varphi - \varphi_f) -$$

$$- [C_{\lambda_3} - \mu^2 g + \mu C_{\lambda_2} - (C_{\lambda_2} - \mu g - \mu C_{\lambda_3}) \tan C_\varphi] \cos \varphi_f = 0. \quad (4.34)$$

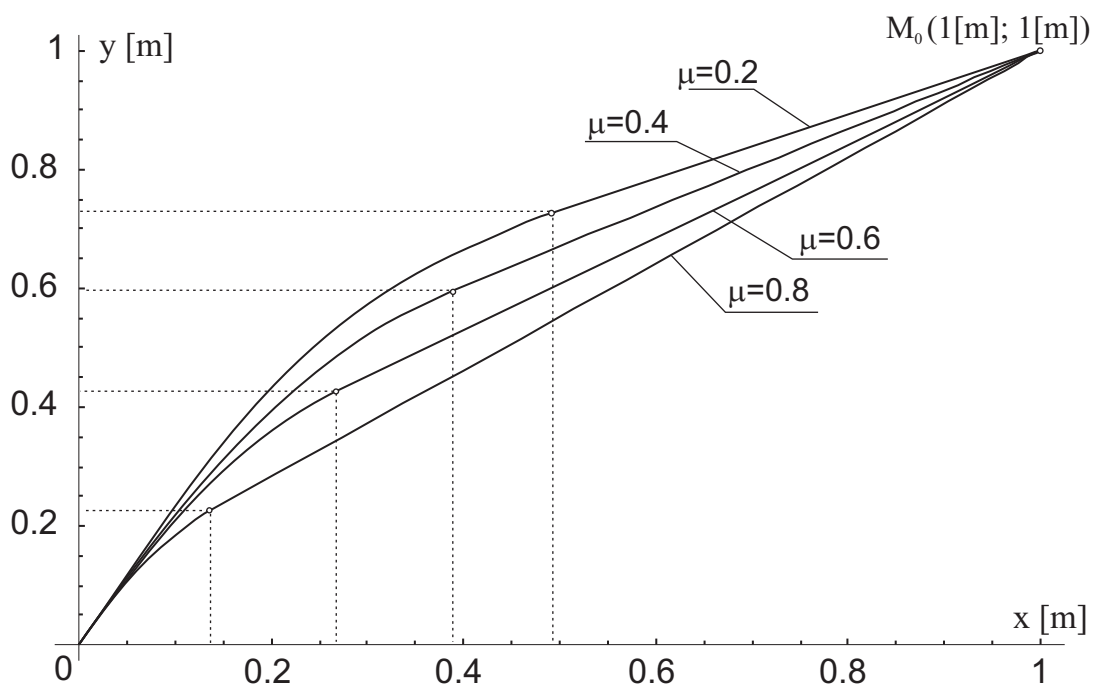
Нумеричким решавањем овог система за  $x_0 = 1[m]$ ,  $y_0 = 1[m]$ ,  $g = 9.81[m/s^2]$  и разне вредности коефицијента трења  $\mu$  добијају се нумеричке вредности параметара  $C_\varphi, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}, \varphi_f$  и  $v_f$  које су приказане у табели 4.1. На бази ових вредности и једначина (4.24)<sub>1</sub>, (4.24)<sub>2</sub>, (4.25)<sub>1</sub> и (4.25)<sub>2</sub> на сл.4.2 су приказане криве које обезбеђују минималан губитак механичке енергије услед дејства Кулонове силе трења.

$\mu$	$C_\varphi$	$\varphi_f$	$v_f [m/s]$
0.2	0.491396861623664	1.178097245096172	4.199685991660440
0.4	0.582952270254906	1.178097245096172	3.849485420067559
0.6	0.662908831834016	1.178097245096172	3.317806525034528
0.8	0.730069552810500	1.178097245096172	2.468364989320206
$\mu$	$x_1 [m]$	$y_1 [m]$	$t_1 [s]$
0.2	0.494740680058342	0.729593418142534	0.628764261333155
0.4	0.388192915304881	0.596576758926753	0.830619567326584
0.6	0.268419991298139	0.428799589808450	1.152394315945039
0.8	0.138176969960610	0.228631508012905	1.824731849947550
$\mu$	$C_{\lambda_2} [m/s^2]$	$C_{\lambda_3} [m/s^2]$	$t_f [s]$
0.2	-1.692287021429670	0.700968235704138	0.936601490623914
0.4	-4.098304170491403	1.697573170147756	1.094134521154282
0.6	-7.350938250915520	3.044858319696366	1.363803641363096
0.8	-11.54616547141186	4.782578331662735	1.971012414070354

Табела 4.1: Нумеричке вредности параметара екстремалних кривих

На сл.4.2 као и из нумеричких вредности у табели 4.1 види се да са порастом вредности коефицијента трења расте и удео праволинијског дела на оптималној кривој профила канала. Испрекиданим линијама су назначене тачке на кривама где се дешава прелазак са сегмента  $SG1$  на сегмент  $SG2$ . Карактер оптималних кривих добијен у [76] нумеричким путем, а које су овде ради поређења приказане на сл.4.3, у потпуности одговара добијеним аналитичким кривама у овом поглављу. Треба напоменути да се у референци [52] при решавању проблема минимизације губитака механичке енергије неједнакост (2.6) такође уводила као посебно ограничење али проблем није у потпуности аналитички решен. Наиме,





Слика 4.2: Оптимални облици профила канала за одвод расипног материјала

након формирања неопходних услова оптималности варијационим рачуном даље се спроводио нумерички алгоритам којим су се формирали оптимални облици профила канала на тај начин што се претпостављала почетна вредност за  $C_\varphi$ , и након формирања почетне криве и срачунавања губитака за њу настављало се мењање вредности за  $C_\varphi$  и срачунавање губитака механичке енергије све до достизања минималне вредности за губитке. За разлику од овог приступа, изложени поступак у овој дисертацији омогућава да се проблем потпуно аналитички реши што подразумева и формирање једначина за одређивање одговарајућих параметара тражених екстремала што омогућује једноставније, брже и прецизније решење проблема. Треба указати да се добијени резултати поклапају са резултатима из [74] где се такође разматрао модел из дела 4.2 са истим оптимизационим задатком али не у циљу решавања конкретног техничког проблема при чему се користио Понтрјагинов принцип максимума и уз услов да је почетна брзина тачке једнака нули.

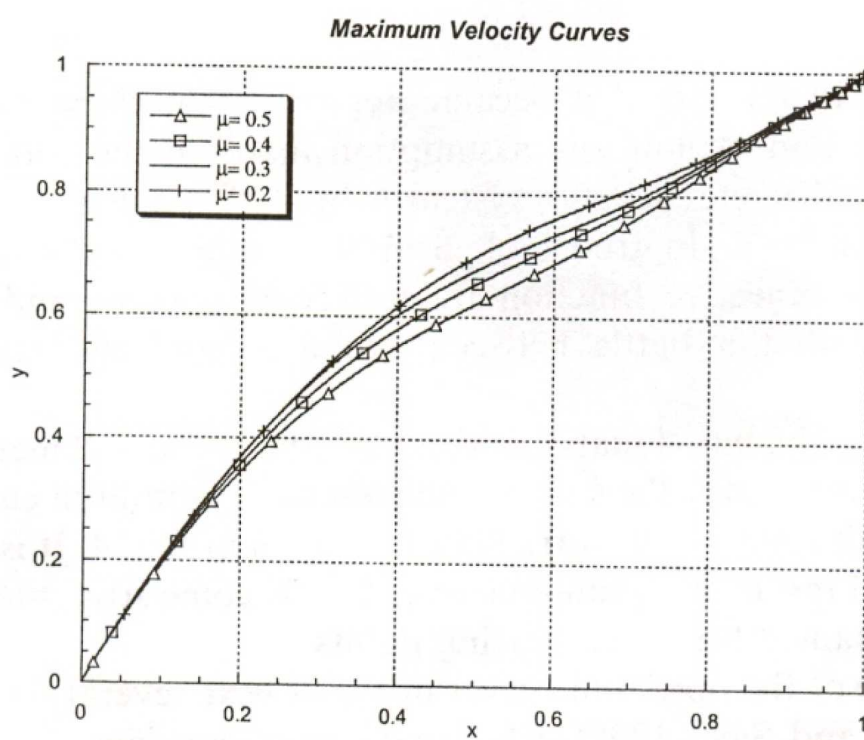


Fig. 5. Optimum curves to maximise the exit velocity of the bead.

Слика 4.3: Оптимални облици профила канала за одвод грануластог материјала из [76]

# Глава 5

## БРАХИСТОХРОНО КРЕТАЊЕ СИСТЕМА КРУТИХ ТЕЛА СА КУЛОНОВИМ ТРЕЊЕМ

У овом делу дисертације анализира се случај брахистохроног кретања везаног система крутих тела. Претпоставља се да се међу везама које су наметнуте на систем налази одређен број унилатералних (незадржавајућих) веза које се третирају као реалне везе са Кулоновим трењем. Након формирања опште методологије решавања постављеног проблема, која се базира на резултатима из референце [19], анализира се специјалан случај механичког система са једном реалном унилатералном везом на коме се демонстрира аналогија са решавањем проблема из поглавља 2 и 3. Резултати су добијени у облику који је погодан за илустровање на конкретним техничким објектима и даљу симболичку и нумеричку анализу. Добијени резултати представљају проширење резултата из референци [19, 25] на системе са реалним унилатералним везама.

### 5.1 Формулација проблема

Посматрајмо кретање система крутих тела са  $n$  степени слободe на који су наметнуте склерономне холономне везе међу којима се налази и одређен број реалних једнострано задржавајућих (унилатералних) веза са Кулоновим трењем. Нека је број унилатералних веза  $p$  и нека су оне реализоване тачкастим контактом између појединих тела система или тачкастим контактом тела система са неким непокретним храпавим површима. Претпоставља се да у току кретања система нема раздвајања код тела која формирају незадржавајуће везе. Систем се креће у хомогеном пољу Земљине теже. Нека су  $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n)^T$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_n)^T$  и  $\ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{q}_1 \ \ddot{q}_2 \ \dots \ \ddot{q}_n)^T$ , респективно, генералисане координате, генералисане брзине и други изводи генералисаних координата по времену. Диференцијалне једначине кретања разматраног система у облику Лагранжевих једначина друге врсте гласе

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^\mu + Q_i^u, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

где су  $Q_i^\mu = Q_i^\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$  генералисане силе Кулоновог трења, а  $Q_i^u = Q_i^u(t)$  генералисане силе управљања.

С обзиром на извршени опис, кинетичка и потенцијална енергија система су облика, респективно,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \Pi = \Pi(\mathbf{q}), \quad (5.2)$$

док се силе Кулоновог трења могу записати у облику

$$\vec{F}_{\mu\sigma} = -\mu_\sigma |N_{n\sigma}| \frac{\vec{v}_\sigma}{|\vec{v}_\sigma|}, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (5.3)$$

У изразима у (5.3),  $\vec{v}_\sigma$  је брзина клизања у тачки контакта,  $\mu_\sigma$  је коефицијент Кулоновог трења за који се претпоставља да је константан, а  $N_{n\sigma}$  представља пројекцију нормалне компоненте реакције  $\vec{N}_\sigma$ , којом у оквиру унилатералних веза једно тело делује на друго или храпава површ делује на тело, на правац одређен јединичним вектром  $\vec{n}_\sigma$  нормале у тачки контакта. У даљим разматрањима се узима да је вектор  $\vec{n}_\sigma$  усмерен тако да услови о одржању контакта између тела у оквиру унилатералних веза гласе

$$N_{n\sigma} = N_{n\sigma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \geq 0, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (5.4)$$

У случају једнакости претпоставља се да тела у оквиру унилатералних веза остају у контакту под дејством управљачких сила али не притискају једно друго. Неједнакости у (5.4) се увођењем нових непознатих функција  $\dot{w}_\sigma(t)$  ( $\sigma = 1, \dots, p$ ) трансформишу у следеће једнакости

$$N_{n\sigma}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) - \dot{w}_\sigma^2 = 0, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (5.5)$$

Осим тога, у току брахистохроног кретања механичког система претпоставља се да генералисане силе управљања  $Q_i^u(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) задовољавају следећи услов

$$\sum_{i=1}^n Q_i^u \dot{q}_i = 0. \quad (5.6)$$

С обзиром на овај услов, теорема о промени кинетичке енергије механичког система у диференцијалном облику гласи

$$\dot{T} = -\dot{\Pi} + P_\mu, \quad (5.7)$$

где се као у [19] претпоставља да снага генералисаних сила трења има облик

$$P_\mu = \sum_{i=1}^n Q_i^\mu \dot{q}_i = \Psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{q}_i; \quad \Psi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \Phi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in C^{(2)}. \quad (5.8)$$

Ради избегавања рада са другим изводима у даљим разматрањима, извршићемо њихову елиминацију као у [19] посредством следећих релација

$$f_{i+1} \equiv \dot{q}_i - u_i = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$f_{n+2} \equiv 2T - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_i u_j = 0. \quad (5.9)$$

С обзиром на (5.9), релације (5.5) и (5.7) се трансформишу у

$$f_1 \equiv \dot{T} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} u_i - \bar{\Psi} - \sum_{i=1}^n \bar{\Phi}_i \dot{u}_i = 0, \quad (5.10)$$

$$f_{n+2+\sigma} \equiv \Xi_\sigma - \dot{w}_\sigma^2 = 0, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad (5.11)$$

где су  $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \Psi(\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u})$ ,  $\bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \Phi_i(\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u})$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\Xi_\sigma = \Xi_\sigma(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = N_{n_\sigma}(\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, \ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{u}})$  ( $\sigma = 1, \dots, p$ ) и  $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)^T$ .

Проблем брахистохроног кретања разматраног система крутих тела састоји се у томе да се одреде силе управљања  $Q_i^u(t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) тако да се механички систем преведе из почетног стања у тренутку  $t_0 = 0$

$$q_1(0) = q_{1(0)}, \dots, q_n(0) = q_{n(0)}; \quad T(0) = T_0, \quad (5.12)$$

у крајње стање

$$q_1(t_f) = q_{1f}, \dots, q_n(t_f) = q_{nf} \quad (5.13)$$

за минимално време  $t_f$ . Постављени проблем може да се формулише као везани варијациони задатак

$$\int_0^{t_f} dt \rightarrow \inf \quad (5.14)$$

уз ограничења (5.9), (5.10) и (5.11) при чему су почетни и крајњи услови дати са (5.12) и (5.13).

Поступајући слично као у глави 2, увођењем новог функционала

$$J = \int_0^{t_f} \left(1 + \sum_{j=1}^{n+p+2} \lambda_j f_j\right) dt, \quad (5.15)$$

где су  $\lambda_j$  Лагранжеви множитељи веза, и следећом трансформацијом величина стања

$$\begin{aligned} z_1 &\equiv T, \quad z_{i+1} \equiv q_i, \quad z_{n+1+i} \equiv u_i, \quad \dot{z}_{2n+1+\sigma} \equiv \dot{w}_\sigma, \quad \dot{z}_{2n+p+1+j} \equiv \lambda_j, \\ i &= 1, \dots, n, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n+p+2 \end{aligned} \quad (5.16)$$

постављени везани варијациони задатак може се трансформисати у слободан варијациони задатак облика

$$\begin{aligned} J = \int_0^{t_f} \left[ 1 + \dot{z}_{2n+p+2} (\dot{z}_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial z_{i+1}} z_{n+1+i} - \bar{\Psi} - \sum_{i=1}^n \bar{\Phi}_i \dot{z}_{n+1+i}) + \sum_{i=1}^n \dot{z}_{2n+p+2+i} (\dot{z}_{i+1} - z_{n+1+i}) + \right. \\ \left. + \dot{z}_{3n+p+3} (2z_1 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} z_{n+1+i} z_{n+1+j}) + \sum_{\sigma=1}^p \dot{z}_{3n+p+3+\sigma} (\Xi_\sigma - \dot{z}_{2n+1+\sigma}^2) \right] dt \rightarrow \inf, \end{aligned}$$

$$t_0 = 0 : z_1(0) = T_0, z_{i+1}(0) = q_{i(0)} (i = 1, \dots, n), z_j(0) = 0 (j = 2n+2, \dots, 3n+2p+3),$$

$$t = t_f : z_{i+1}(t_f) = q_{if} (i = 1, \dots, n). \quad (5.17)$$

## 5.2 Ојлер-Лагранжеве једначине

Из услова стационарности  $\Delta J = 0$  следе Ојлер-Лагранжеве једначине разма-траног проблема

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, 2n + 1,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_k} \right) = 0, \quad k = 2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 2p + 3, \quad (5.18)$$

као и гранични услови:

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \Delta z_i \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad i = 1, \dots, 3n + 2p + 3, \quad (5.19)$$

$$\left[ \left( F - \sum_{i=1}^{3n+2p+3} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right) \Delta t \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad (5.20)$$

где је са  $F$  означена подинтегрална функција функционала  $J$ . Чињеница да величине  $z_\alpha (\alpha = n + 2, \dots, 2n + 1)$  нису задате у почетном и крајњем положају а величине  $z_1$  и  $z_\beta (\beta = 2n + 2, \dots, 3n + 2p + 3)$  у крајњем положају даје на основу (5.19) следеће природне граничне услове на левом и десном крају

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_\alpha} \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad \alpha = n + 2, \dots, 2n + 1, \quad (5.21)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_1} \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0 \rightarrow (\lambda_1)_{t_f} = 0, \quad (5.22)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_\beta} \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad \beta = 2n + 2, \dots, 3n + 2p + 3. \quad (5.23)$$

Даље, будући да време брахистохроног кретања  $t_f$  није дато то, на основу (5.20), услов трансверзалности на десном крају гласи

$$\left[ F - \sum_{i=1}^{3n+2p+3} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right]^{(t=t_f)} = 0. \quad (5.24)$$

Ојлер-Лагранжеве једначине по променљивима  $z_i (i = 1, \dots, 2n + 1)$  у експлицитном облику гласе

$$2\lambda_{n+2} - \dot{\lambda}_1 = 0,$$

$$\lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_\gamma} u_i - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial q_\gamma} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial q_\gamma} \dot{u}_i \right) - \lambda_{n+2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\gamma} u_i u_j + \sum_{\sigma=1}^p \lambda_{n+\sigma+2} \frac{\partial \Xi_\sigma}{\partial q_\gamma} - \dot{\lambda}_{1+\gamma} = 0, \quad \gamma = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_1 \left( \frac{\partial \Pi}{\partial q_\gamma} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial u_\gamma} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \bar{\Phi}_i}{\partial u_\gamma} \dot{u}_i - \frac{\partial \bar{\Phi}_\gamma}{\partial q_i} u_i - \frac{\partial \bar{\Phi}_\gamma}{\partial u_i} \dot{u}_i \right) \right) - \lambda_{1+\gamma} - \lambda_{n+2} \sum_{i=1}^n 2a_{i\gamma} u_i + \sum_{\sigma=1}^p \sum_{i=1}^n \lambda_{n+\sigma+2} \left( \frac{\partial \Xi_\sigma}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial^2 \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_\gamma \partial \dot{u}_i} \ddot{u}_i - \frac{\partial^2 \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_\gamma \partial u_i} \dot{u}_i - \frac{\partial^2 \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_\gamma \partial q_i} u_i \right) + \dot{\lambda}_1 \bar{\Phi}_\gamma - \sum_{\sigma=1}^p \dot{\lambda}_{n+\sigma+2} \frac{\partial \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_\gamma} = 0, \quad \gamma = 1, \dots, n. \quad (5.25)$$

С обзиром на (5.23), Ојлер-Лагранжеве једначине по променљивима  $z_k (k = 2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 2p + 3)$  свODE се на облик

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{z}_k} = 0, \quad k = 2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 2p + 3, \quad (5.26)$$

при чему за  $k = 2n + p + 2, \dots, 3n + 2p + 3$  Ојлер-Лагранжеве једначине представљају ограничења (5.9), (5.10) и (5.11), а за  $k = 2n + 2, \dots, 2n + p + 1$  ове једначине имају следећи експлицитан облик



$$\lambda_{n+2+\sigma}\dot{w}_\sigma \equiv 0, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (5.27)$$

Из (5.27) следи да се екстремала функционала  $J$  може састојати из линијских сегмената на којима је  $\dot{w}_\sigma \equiv 0$ ,  $\lambda_{n+2+\sigma} \neq 0$  и сегмената на којима је  $\dot{w}_\sigma \neq 0$ ,  $\lambda_{n+2+\sigma} \equiv 0$ . Сходно томе, функционал  $J$  спада у групу функционала чије екстремале могу имати преломе у простору  $\mathbb{R}^{3n+2p+3}$  због тога што величине  $\dot{w}_\sigma (\sigma = 1, \dots, p)$  имају прекиде прве врсте. Означимо са  $S$  укупан број тачака прелома екстремале којима одговарају временски тренуци  $t_k$  ( $k = 1, \dots, S$ ). У овим тачкама морају да буду задовољени Вајерштрас-Ердманови угаони услови:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \right)_{t_k-0} = \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \right)_{t_k+0}, \quad i = 1, \dots, 3n + 2p + 3; k = 1, \dots, S, \quad (5.28)$$

$$\left( F - \sum_{i=1}^{3n+2p+3} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right)_{t_k-0} = \left( F - \sum_{i=1}^{3n+2p+3} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i \right)_{t_k+0}, \quad k = 1, \dots, S. \quad (5.29)$$

С обзиром на једначине (5.26), услови (5.28) ( $i = 2n + 2, 2n + 3, \dots, 3n + 2p + 3; k = 1, \dots, S$ ) су идентички задовољени. Будући да подинтегрална функција  $F$  не зависи експлицитно од времена, Ојлер-Лагранжеве једначине (5.18), с обзиром на услов трансверзалности (5.24), имају први интеграл облика

$$F - \sum_{i=1}^{3n+2p+3} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.30)$$

па су и услови (5.29) идентички задовољени. У тачкама прелома екстремале функционала  $J$ , величине  $T$ ,  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и  $u_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) треба да буду непрекидне што се исказује кроз следеће услове

$$\begin{aligned} T(t_k - 0) &= T(t_k + 0), & q_i(t_k - 0) &= q_i(t_k + 0), \\ u_j(t_k - 0) &= u_j(t_k + 0), & i, j &= 1, \dots, n; k = 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (5.31)$$

На основу услова непрекидности (5.31), Вајерштрас-Ердманови угаони услови (5.28) ( $i = 1, \dots, 2n + 1; k = 1, \dots, S$ ) своде се на облик

$$\lambda_1(t_k - 0) = \lambda_1(t_k + 0),$$

$$\lambda_{i+1}(t_k - 0) = \lambda_{i+1}(t_k + 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\left( \sum_{\sigma=1}^p \lambda_{n+2+\sigma} \frac{\partial \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_i} \right)_{t_k-0} - (\lambda_1 \bar{\Phi}_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}))_{t_k-0} = \left( \sum_{\sigma=1}^p \lambda_{n+2+\sigma} \frac{\partial \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_i} \right)_{t_k+0} - (\lambda_1 \bar{\Phi}_i(\mathbf{q}, \mathbf{u}))_{t_k+0},$$

$$i = 1, \dots, n. \quad (5.32)$$

С обзиром на (5.31)<sub>1</sub> и (5.32)<sub>1</sub>, добијамо да се услови (5.32)<sub>3</sub> своче на следећи облик

$$\left( \sum_{\sigma=1}^p \lambda_{n+2+\sigma} \frac{\partial \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_i} \right)_{t_k-0} = \left( \sum_{\sigma=1}^p \lambda_{n+2+\sigma} \frac{\partial \Xi_\sigma}{\partial \dot{u}_i} \right)_{t_k+0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.33)$$

Након одређивања траженог брахистохроног кретања  $q_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , генералисане силе управљања  $Q_i^u$ ,  $i = 1, \dots, n$  одређују се из диференцијалних једначина кретања (5.1).

### 5.3 Специјалан случај механичког система са два степена слободe и једном реалном унилатералном везом

Размотримо механички систем са два степена слободe код кога важи

$$a_{ij} = \text{const.}, \quad i, j = 1, 2; \quad \Pi = c_1 q_1 + c_2 q_2, \quad c_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2. \quad (5.34)$$

Даље, претпоставимо да је на механички систем наметнута једна реална унилатерална веза са Кулоновом силом трења, да пројекција нормалне компоненте реакције унилатералне везе има следећи облик

$$N_n = b_1 + b_2 \ddot{q}_1, \quad b_i = \text{const.}, \quad i = 1, 2 \quad (5.35)$$

и да се брзина клизања у тачки контакта може изразити као

$$\vec{v}_r = \dot{q}_2 \vec{t}, \quad (5.36)$$

где је  $\vec{t}$  јединични вектор тангенте у тачки контакта. Напоменимо у вези претпоставке (5.36) да је у проучавању механичких система са Кулоновим трењем уобичајено да се клизање у тачки контакта тела описује променом само једне генералисане координате (видети [47]). С обзиром на (5.3), (5.4), (5.35) и (5.36) израз за снагу силе трења постаје

$$P_\mu = \vec{F}_\mu \cdot \vec{v}_r = -\mu b_1 \dot{q}_2 - \mu b_2 \dot{q}_2 \ddot{q}_1. \quad (5.37)$$

Уведимо сада ортогоналан систем генералисаних координата  $\xi_1$  и  $\xi_2$  који преводи квадратну форму кинетичке енергије у канонски облик

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2). \quad (5.38)$$

Према [19, 25], уведена трансформација генералисаних координата има облик

$$q_1 = \frac{\xi_1}{\sqrt{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}} + \frac{\xi_2}{\sqrt{a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22}}},$$

$$q_2 = \frac{\xi_1}{\sqrt{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}} + \frac{s\xi_2}{\sqrt{a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22}}}, \quad (5.39)$$

где је  $s = -(a_{11} + a_{12}) / (a_{22} + a_{12})$ ,  $a_{22} + a_{12} \neq 0$ . С обзиром на уведену трансформацију координата, потенцијална енергија добија облик

$$\Pi = c_1^* \xi_1 + c_2^* \xi_2, \quad c_i^* = \text{const.}, \quad i = 1, 2, \quad (5.40)$$

где је

$$c_1^* = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}}, \quad c_2^* = \frac{c_1 + sc_2}{\sqrt{a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22}}}, \quad (5.41)$$

а изрази (5.35) и (5.37) се трансформишу у

$$N_n = b_1 + b_2^{(1)} \ddot{\xi}_1 + b_2^{(2)} \ddot{\xi}_2, \quad (5.42)$$

$$P_\mu = b_1^{(1)} \dot{\xi}_1 + b_1^{(2)} \dot{\xi}_2 + \sum_{i,j=1}^2 b_2^{(ij)} \dot{\xi}_i \ddot{\xi}_j, \quad (5.43)$$

где је

$$b_1^{(1)} = -\frac{\mu b_1}{\sqrt{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}}, \quad b_1^{(2)} = -\frac{\mu s b_1}{\sqrt{a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22}}}, \quad b_2^{(1)} = \frac{b_2}{\sqrt{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}},$$

$$b_2^{(2)} = \frac{b_2}{\sqrt{a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22}}}, \quad b_2^{(11)} = -\frac{\mu b_2}{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}, \quad b_2^{(22)} = -\frac{\mu s b_2}{a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22}},$$

$$b_2^{(12)} = -\frac{\mu b_2}{\sqrt{(a_{11} + 2a_{12} + a_{22})(a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22})}},$$

$$b_2^{(21)} = -\frac{\mu s b_2}{\sqrt{(a_{11} + 2a_{12} + a_{22})(a_{11} + 2sa_{12} + s^2a_{22})}}. \quad (5.44)$$

Пошто је систем генерализаних координата  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ортогоналан, кретање разматраног механичког система можемо геометријски интерпретирати као кретање геометријске тачке  $M$  у односу на Декартов правоугли координатни систем  $O\xi_1\xi_2$ . Сходно оваквој интерпретацији, ради елиминације других извода у релацији (5.7), можемо слично као у глави 2 да уведемо следеће кинематичке релације

$$f_2 \equiv \dot{\xi}_1 - v \cos \varphi = 0,$$

$$f_3 \equiv \dot{\xi}_2 - v \sin \varphi = 0, \quad (5.45)$$

где је са  $\varphi$  означен угао нагиба тангенте на криву  $\xi_2 = f(\xi_1)$ , а са  $v$  означена пројекција брзине тачке  $M$  на ову тангенту. Посредством релација (5.45), израз (5.42) и теорема о промени кинетичке енергије (5.7) своче се коначно на следеће облике

$$N_n = b_1 + \Psi(\varphi)\dot{v} + \Psi'(\varphi)v\dot{\varphi}, \quad (5.46)$$

$$f_1 \equiv \Omega_1(\varphi)\dot{v} + v\dot{\varphi}\Omega_2(\varphi) + \Omega_3(\varphi) = 0, \quad (5.47)$$

где су:

$$\Psi(\varphi) = b_2^{(1)} \cos \varphi + b_2^{(2)} \sin \varphi,$$

$$\Omega_1(\varphi) = -1 + p_1 \sin 2\varphi + b_2^{(11)} (\cos \varphi)^2 + b_2^{(22)} (\sin \varphi)^2,$$

$$\Omega_2(\varphi) = p_2 \sin 2\varphi + b_2^{(12)} (\cos \varphi)^2 - b_2^{(21)} (\sin \varphi)^2,$$

$$\Omega_3(\varphi) = p_3 \cos \varphi + p_4 \sin \varphi,$$

$$p_1 = \left( b_2^{(12)} + b_2^{(21)} \right) / 2, \quad p_2 = \left( b_2^{(22)} - b_2^{(11)} \right) / 2,$$

$$p_3 = -c_1^* + b_1^{(1)}, \quad p_4 = -c_2^* + b_1^{(2)}, \quad (5.48)$$

и где ознака  $(\cdot)'$  указује на диференцирање по углу  $\varphi$ .

С обзиром на (5.46) и (5.4), услови (5.5) се редукују на

$$f_4 \equiv b_1 + \Psi(\varphi)\dot{v} + \Psi'(\varphi)v\dot{\varphi} - \dot{w}^2 = 0. \quad (5.49)$$

Поступајући даље као у глави 2 уводи се функционал (2.13) и трансформација величина стања

$$z_1 \equiv \xi_1, z_2 \equiv \xi_2, z_3 \equiv \varphi, z_4 \equiv v, \dot{z}_5 \equiv \lambda_1, \dot{z}_6 \equiv \lambda_2, \dot{z}_7 \equiv \lambda_3, \dot{z}_8 \equiv \dot{w}, \dot{z}_9 \equiv \lambda_4 \quad (5.50)$$

чиме се добија слободан варијациони задатак облика (2.15) чија подинтегрална функција гласи

$$F = 1 + \dot{z}_5 (\Omega_1 \dot{z}_4 + z_4 \dot{z}_3 \Omega_2 + \Omega_3) + \dot{z}_6 (\dot{z}_1 - z_4 \cos z_3) + \dot{z}_7 (\dot{z}_2 - z_4 \sin z_3) + \\ + \dot{z}_9 (b_1 + \dot{z}_4 \Psi + z_4 \dot{z}_3 \Psi' - \dot{z}_8^2) \quad (5.51)$$

и при чему су почетни и крајњи услови дефинисани као

$$t_0 = 0 : z_1(0) = 0, z_2(0) = 0, z_4(0) = v_0 = \sqrt{2T_0}, z_i(0) = 0 \quad (i = 5, \dots, 9), \quad (5.52)$$

$$t = t_f : z_1(t_f) = \xi_{1f}, z_2(t_f) = \xi_{2f}. \quad (5.53)$$

Природни гранични услови (2.18)-(2.24) се сада свODE на облик

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_3} \right]_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\lambda_1 v \Omega_2 + \lambda_4 v \Psi']_{(t=0)}^{(t=t_f)} = 0, \quad (5.54)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_4} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_4 \Psi]_{(t=t_f)} = 0, \quad (5.55)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_5} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\Omega_1 \dot{v} + v \dot{\varphi} \Omega_2 + \Omega_3]_{(t=t_f)} = 0, \quad (5.56)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_6} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{\xi}_1 - v \cos \varphi]_{(t=t_f)} = 0, \quad (5.57)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_7} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{\xi}_2 - v \sin \varphi]_{(t=t_f)} = 0, \quad (5.58)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_8} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [\dot{w}\lambda_4]_{(t=t_f)} = 0, \quad (5.59)$$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \dot{z}_9} \right]_{(t=t_f)} = 0 \rightarrow [b_1 + \dot{v}\Psi + v\dot{\varphi}\Psi' - \dot{w}^2]_{(t=t_f)} = 0, \quad (5.60)$$

а услов трансверзалности (2.25) на основу ограничења (5.47), (5.45) и (5.49) има следећи развијен облик

$$[1 - v(\lambda_2 \cos \varphi + \lambda_3 \sin \varphi) + \lambda_1 \Omega_3 + \lambda_4 (\dot{w}^2 + b_1)]_{(t=t_f)} = 0. \quad (5.61)$$

### 5.3.1 Ојлер-Лагранжеве једначине

На основу структуре подинтегралне функције  $F$  имамо да Ојлер-Лагранжеве једначине проблема имају општу структуру описану са (2.16). Из Ојлер-Лагранжевих једначина по променљивима  $z_1$  и  $z_2$  добија се

$$\lambda_2 \equiv C_{\lambda_2}, \quad \lambda_3 \equiv C_{\lambda_3}, \quad C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3} = const., \quad (5.62)$$

а с обзиром на (5.59), из Ојлер-Лагранжеве једначине по променљивој  $z_8$  следи

$$\dot{w}\lambda_4 \equiv 0. \quad (5.63)$$

Даље, с обзиром на природне граничне услове (5.56)-(5.58) и (5.60), Ојлер-Лагранжеве једначине по променљивима  $z_5, z_6, z_7$  и  $z_9$  свODE се на једначине (5.47), (5.45) и (5.49).

У разматраном случају први интеграл (2.33) се своди на

$$1 - v(\lambda_2 \cos \varphi + \lambda_3 \sin \varphi) + \lambda_1 \Omega_3 + \lambda_4 (\dot{w}^2 + b_1) = 0. \quad (5.64)$$

Коначно, Ојлер-Лагранжеве једначине по променљивима  $z_3$  и  $z_4$  гласе, респективно,

$$\dot{v}\lambda_1 (\Omega_1' - \Omega_2) + v(\lambda_2 \sin \varphi - \lambda_3 \cos \varphi) + \lambda_1 \Omega_3' - \dot{\lambda}_1 v \Omega_2 - \dot{\lambda}_4 v \Psi' = 0, \quad (5.65)$$

$$\dot{\lambda}_1 \Omega_1 - \lambda_1 \dot{\varphi} (\Omega_2 - \Omega_1') + \lambda_2 \cos \varphi + \lambda_3 \sin \varphi + \dot{\lambda}_4 \Psi = 0. \quad (5.66)$$

Према (5.63) брахистохрона се састоји из линијских сегмената на којима је  $N_n \equiv 0$  ( $\dot{w} \equiv 0, \lambda_4 \neq 0$ ) и линијских сегмената на којима је  $N_n \geq 0$  ( $\dot{w} \neq 0, \lambda_4 \equiv 0$ ). Даље се могу спровести аналогна разматрања као у делу 2.2 што доводи до следећих услова у тачкама преласка са једног типа линијског сегмента на други:

$$\xi_1(t_p - 0) = \xi_1(t_p + 0), \quad \xi_2(t_p - 0) = \xi_2(t_p + 0), \quad v(t_p - 0) = v(t_p + 0), \quad p = 1, \dots, S, \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \Omega_2 + \lambda_4 \Psi^i)_{t_p-0} &= (\lambda_1 \Omega_2 + \lambda_4 \Psi^i)_{t_p+0}, & (\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_4 \Psi)_{t_p-0} &= (\lambda_1 \Omega_1 + \lambda_4 \Psi)_{t_p+0}, \\ p &= 1, \dots, S. \end{aligned} \quad (5.68)$$

### 5.3.1.1 Опште решење на линијском сегменту $N_n \geq 0$

Спроведимо процедуру решавања Ојлер-Лагранжевих једначина на линијском сегменту  $\dot{w} \neq 0, \lambda_4 \equiv 0$  слично као у поглављу 2. Из (5.66) имамо да је

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon + \dot{\lambda}_1 \Omega_1}{\lambda_1 (\Omega_2 - \Omega_1^i)}, \quad (5.69)$$

а из једначине (5.65) следи

$$\dot{\lambda}_1 v \Omega_2 + \dot{v} \lambda_1 (\Omega_2 - \Omega_1^i) = -v \varepsilon^i + \lambda_1 \Omega_3^i, \quad (5.70)$$

где је  $\varepsilon = C_{\lambda_2} \cos \varphi + C_{\lambda_3} \sin \varphi$ . Сукцесивна замена ова два израза у израз (5.47) даје

$$\lambda_1 (-\Omega_1 \Omega_3^i + \Omega_3 \Omega_1^i - \Omega_2 \Omega_3) - v (\Omega_2 \varepsilon - \Omega_1 \varepsilon^i) = 0. \quad (5.71)$$

Једначине (5.64) и (5.71) представљају систем алгебарских једначина по непознатим  $v$  и  $\lambda_1$  чије је решење

$$\lambda_1 (\varphi, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}) = \frac{\varepsilon \Omega_2 - \varepsilon^i \Omega_1}{\varepsilon^i \Omega_1 \Omega_3 - \varepsilon (-\Omega_1^i \Omega_3 + 2\Omega_2 \Omega_3 + \Omega_1 \Omega_3^i)}, \quad (5.72)$$

$$v (\varphi, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}) = \frac{\Omega_3 (\Omega_1^i - \Omega_2) - \Omega_1 \Omega_3^i}{\varepsilon^i \Omega_1 \Omega_3 - \varepsilon (-\Omega_1^i \Omega_3 + 2\Omega_2 \Omega_3 + \Omega_1 \Omega_3^i)}. \quad (5.73)$$

Коришћењем трансформације  $d(\cdot)/dt = (\cdot)^i \dot{\varphi}$  из израза (5.47) следи



$$\dot{\varphi} = -\frac{\Omega_3}{\Omega_1 v' + \Omega_2 v}, \quad (5.74)$$

а из израза (5.45) се затим добијају следеће диференцијалне једначине

$$\frac{d\xi_1}{d\varphi} = -\frac{(\Omega_1 v' + \Omega_2 v) v \cos \varphi}{\Omega_3}, \quad (5.75)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\varphi} = -\frac{(\Omega_1 v' + \Omega_2 v) v \sin \varphi}{\Omega_3}, \quad (5.76)$$

чијим се интегралом добија

$$\xi_1 = -\int \frac{(\Omega_1 v' + \Omega_2 v) v \cos \varphi}{\Omega_3} d\varphi + C_{\xi_1} \equiv \Phi_{\xi_1}(\varphi, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}) + C_{\xi_1},$$

$$\xi_2 = -\int \frac{(\Omega_1 v' + \Omega_2 v) v \sin \varphi}{\Omega_3} d\varphi + C_{\xi_2} \equiv \Phi_{\xi_2}(\varphi, C_{\lambda_2}, C_{\lambda_3}) + C_{\xi_2}. \quad (5.77)$$

Интеграција једначине (5.74) даје зависност времена  $t$  од угла  $\varphi$

$$t(\varphi) = C_t - \int \frac{\Omega_1 v' + \Omega_2 v}{\Omega_3} d\varphi. \quad (5.78)$$

### 5.3.1.2 Опште решење на линијском сегменту $N_n \equiv 0$

У овом случају је  $\dot{w} \equiv 0$ ,  $\lambda_4 \neq 0$ . Дуж овог линијског сегмента снага силе трења је идентички једнака нули, односно,  $P_\mu \equiv 0$ . С обзиром на ову чињеницу, теорема о промени кинетичке енергије у диференцијалном облику (5.47) се своди на

$$\dot{v} + \Theta(\varphi) = 0, \quad (5.79)$$

где је  $\Theta(\varphi) = c_1^* \cos \varphi + c_2^* \sin \varphi$ . Упоредивањем израза (5.79) и (5.47) следи да у овом случају важи

$$\Omega_1 = 1, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = \Theta. \quad (5.80)$$

С обзиром на ове реалције и трансформацију  $d(\cdot)/dt = (\cdot)'\dot{\varphi}$ , једначине (5.49), (5.65) и (5.66) се редукују на

$$v(C_{\lambda_2} \sin \varphi - C_{\lambda_3} \cos \varphi) + \lambda_1 \Theta' - \lambda_4 \dot{\varphi} v \Psi' = 0, \quad (5.81)$$

$$C_{\lambda_2} \cos \varphi + C_{\lambda_3} \sin \varphi + \lambda_1' \dot{\varphi} + \lambda_4' \dot{\varphi} \Psi = 0, \quad (5.82)$$

$$b_1 - \Theta \Psi + v \dot{\varphi} \Psi' = 0. \quad (5.83)$$

Из једначине (5.83) следи

$$\dot{\varphi} = \frac{\Theta \Psi - b_1}{v \Psi'}. \quad (5.84)$$

Коришћењем трансформације  $d(\cdot)/dt = (\cdot)' \dot{\varphi}$  и израза (5.84) из једначине (5.79) следи

$$v = C_v e^{\int \frac{\Theta \Psi'}{b_1 - \Theta \Psi} d\varphi} \equiv C_v \Phi_v(\varphi). \quad (5.85)$$

На основу израза (5.84) и (5.85) из једначина (5.45) следи

$$\frac{d\xi_1}{d\varphi} = \frac{C_v^2 \Phi_v^2 \Psi' \cos \varphi}{\Theta \Psi - b_1}, \quad (5.86)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\varphi} = \frac{C_v^2 \Phi_v^2 \Psi' \sin \varphi}{\Theta \Psi - b_1}, \quad (5.87)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{C_v \Phi_v \Psi'}{\Theta \Psi - b_1}, \quad (5.88)$$

чијом се интеграцијом добија

$$\xi_1 = C_v^2 \int \frac{\Phi_v^2 \Psi' \cos \varphi}{\Theta \Psi - b_1} d\varphi + C_{\xi_1}^* \equiv C_v^2 \Phi_{\xi_1}^*(\varphi) + C_{\xi_1}^*, \quad (5.89)$$

$$\xi_2 = C_v^2 \int \frac{\Phi_v^2 \Psi' \sin \varphi}{\Theta \Psi - b_1} d\varphi + C_{\xi_2}^* \equiv C_v^2 \Phi_{\xi_2}^*(\varphi) + C_{\xi_2}^*, \quad (5.90)$$

$$t = C_v \int \frac{\Phi_v \Psi'}{\Theta \Psi - b_1} d\varphi + C_t^* \equiv C_v \Phi_t(\varphi) + C_t^*, \quad (5.91)$$

где су  $C_{\xi_1}^*$ ,  $C_{\xi_2}^*$  и  $C_t^*$  интеграционе константе.

Изражавањем  $\lambda_4'$  из (5.81) и замењивањем у (5.82) добија се следећа диференцијална једначина

$$\lambda_1' + \frac{\Psi\Theta'}{\Psi\Theta - b_1}\lambda_1 = \frac{C_v\Phi_v \left( b_2^{(1)}C_{\lambda_3} - b_2^{(2)}C_{\lambda_2} \right)}{\Psi\Theta - b_1} \quad (5.92)$$

чије се опште решење, сходно добро познатом поступку за решавање оваквог типа диференцијалних једначина (видети на пример [53]), може записати у следећем облику

$$\lambda_1 = C_{\lambda_1}\Phi_{\lambda_1}^{(1)}(\varphi) + C_v \left( b_2^{(1)}C_{\lambda_3} - b_2^{(2)}C_{\lambda_2} \right) \Phi_{\lambda_1}^{(2)}(\varphi). \quad (5.93)$$

Након замене овог израза за  $\lambda_1$  у једначину (5.81) добија се диференцијална једначина

$$\lambda_4' = \frac{C_v C_{\lambda_2} (\Phi_v \sin \varphi - b_2^{(2)} \Phi_{\lambda_1}^{(2)} \Theta')}{\Psi\Theta - b_1} + \frac{C_v C_{\lambda_3} (b_2^{(1)} \Phi_{\lambda_1}^{(2)} \Theta' - \Phi_v \cos \varphi)}{\Psi\Theta - b_1} + \frac{C_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_1}^{(1)} \Theta'}{\Psi\Theta - b_1}, \quad (5.94)$$

чије је опште решење облика

$$\lambda_4 = C_v C_{\lambda_2} \Phi_{\lambda_4}^{(1)}(\varphi) + C_v C_{\lambda_3} \Phi_{\lambda_4}^{(2)}(\varphi) + C_{\lambda_1} \Phi_{\lambda_4}^{(3)}(\varphi) + C_{\lambda_4}. \quad (5.95)$$

Параметри  $C_{\lambda_1}$  и  $C_{\lambda_4}$  у изразима (5.93) и (5.95) представљају интеграционе константе.

## 5.4 Структура екстремале

Распоред претходно наведених типова линијских сегмената се утврђује из услова да је укупан број непознатих интеграционих константи једнак броју расположивих услова за њихово одређивање. Применом овог правила може се показати, идентичном анализом као у делу 2.3, да у општем случају тражена брахистохрона  $\xi_2 = f(\xi_1)$  може да буде тросегментна крива са следећим распоредом сегмената на њој:

$$\dot{w}(t) \equiv 0, \lambda_4(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, t_1],$$

$$\dot{w}(t) \neq 0, \lambda_4(t) \equiv 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2],$$

$$\dot{w}(t) \equiv 0, \lambda_4(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_2, t_f], \quad (5.96)$$

где  $t_f$  представља време брахистохроног кретања, а  $t_1$  и  $t_2$  су временски тренуци прелазака са једног линијског сегмента на други.

Једноставно се показује да се природни гранични услови (5.54) и (5.55) с обзиром на релације (5.80) сведе на

$$(\lambda_4)_{t_0} = 0, \quad (5.97)$$

$$(\lambda_1)_{t_f} = 0, \quad (\lambda_4)_{t_f} = 0, \quad (5.98)$$

при чему је одбачена варијанта  $v_f = 0$ . Облици (5.97) и (5.98) су погоднији за коришћење у процесу одређивања интеграционих константи. Даље се показује да се анализа варијанте (5.96) своди на решавање система од десет нелинеарних једначина са десет непознатих  $\varphi_0 = \varphi(0)$ ,  $\varphi_f = \varphi(t_f)$ ,  $\varphi_1 = \varphi(t_1)$ ,  $\varphi_2 = \varphi(t_2)$ ,  $v_f = v(\varphi_f)$ ,  $\lambda_1(0) = (\lambda_1)_0$ ,  $C_{\xi_1}$ ,  $C_{\xi_2}$ ,  $C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$ .

На основу почетних услова (5.52) из израза (5.85), (5.89) и (5.90) следи

$$C_v = \frac{v_0}{\Phi_v(\varphi_0)}, \quad (5.99)$$

$$C_{\xi_1}^* = -\frac{v_0^2 \Phi_{\xi_1}^*(\varphi_0)}{\Phi_v^2(\varphi_0)}, \quad C_{\xi_2}^* = -\frac{v_0^2 \Phi_{\xi_2}^*(\varphi_0)}{\Phi_v^2(\varphi_0)}. \quad (5.100)$$

Даље, из крајњих услова (5.53) добија се

$$C_v = \frac{v_f}{\Phi_v(\varphi_f)}, \quad (5.101)$$

$$C_{\xi_1}^* = \xi_{1f} - \frac{v_f^2 \Phi_{\xi_1}^*(\varphi_f)}{\Phi_v^2(\varphi_f)}, \quad C_{\xi_2}^* = \xi_{2f} - \frac{v_f^2 \Phi_{\xi_2}^*(\varphi_f)}{\Phi_v^2(\varphi_f)}. \quad (5.102)$$

На основу природног граничног услова (5.97) и  $\lambda_1(0) = (\lambda_1)_0$  на почетном линијском сегменту  $SG1$  важи

$$C_{\lambda_1} = \frac{1}{\Phi_{\lambda_1}^{(1)}(\varphi_0)} \left( (\lambda_1)_0 - \frac{v_0}{\Phi_v(\varphi_0)} \left( b_2^{(1)} C_{\lambda_3} - b_2^{(2)} C_{\lambda_2} \right) \Phi_{\lambda_1}^{(2)}(\varphi_0) \right), \quad (5.103)$$

$$C_{\lambda_4} = -\frac{v_0}{\Phi_v(\varphi_0)} \left( C_{\lambda_2} \Phi_{\lambda_4}^{(1)}(\varphi_0) + C_{\lambda_3} \Phi_{\lambda_4}^{(2)}(\varphi_0) \right) -$$

$$-\frac{\Phi_{\lambda_4}^{(3)}(\varphi_0)}{\Phi_{\lambda_1}^{(1)}(\varphi_0)} \left( (\lambda_1)_0 - \frac{v_0}{\Phi_v(\varphi_0)} \left( b_2^{(1)} C_{\lambda_3} - b_2^{(2)} C_{\lambda_2} \right) \Phi_{\lambda_1}^{(2)}(\varphi_0) \right). \quad (5.104)$$

На завршном линијском сегменту  $SG1$  на основу природних граничних услова (5.98) важи

$$C_{\lambda_1} = -\frac{v_f}{\Phi_v(\varphi_f) \Phi_{\lambda_1}^{(1)}(\varphi_f)} \left( b_2^{(1)} C_{\lambda_3} - b_2^{(2)} C_{\lambda_2} \right) \Phi_{\lambda_1}^{(2)}(\varphi_f), \quad (5.105)$$

$$C_{\lambda_4} = -\frac{v_f}{\Phi_v(\varphi_f)} \left( C_{\lambda_2} \Phi_{\lambda_4}^{(1)}(\varphi_f) + C_{\lambda_3} \Phi_{\lambda_4}^{(2)}(\varphi_f) \right) + \\ + \frac{v_f \Phi_{\lambda_4}^{(3)}(\varphi_f)}{\Phi_v(\varphi_f) \Phi_{\lambda_1}^{(1)}(\varphi_f)} \left( b_2^{(1)} C_{\lambda_3} - b_2^{(2)} C_{\lambda_2} \right) \Phi_{\lambda_1}^{(2)}(\varphi_f). \quad (5.106)$$

Заменом израза (5.99)-(5.106) у Вајерштрас-Ердманове услове (5.67) и (5.68) добија се тражени систем једначина за одређивање непознатих  $\varphi_0, \varphi_f, \varphi_1, \varphi_2, v_f, (\lambda_1)_0, C_{\xi_1}, C_{\xi_2}, C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$ . С обзиром на изразе (5.105) и (5.106), Вајерштрас-Ердманови услови (5.68)( $p = 2$ ) представљају хомоген систем једначина по непознатим  $C_{\lambda_2}$  и  $C_{\lambda_3}$ . Да би овај систем имао нетривијална решења потребно је и довољно да детерминанта система буде једнака нули што значи да једну од једначина (5.68)( $p = 2$ ) треба заменити овим условом а другу једначину задржати.

# Глава 6

## ПРИМЕНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЕВОЛУЦИЈЕ ПРИ РЕШАВАЊУ

### НЕЛИНЕАРНИХ АЛГЕБАРСКИХ ЈЕДНАЧИНА

У овом делу дисертације разматрано је решавање система нелинеарних алгебарских једначина применом једне варијанте диференцијалне еволуције у којој су обједињена нека побољшања ове методе која су се појавила у литератури. Проблем решавања система нелинеарних алгебарских једначина се трансформише у проблем одређивања глобалног минимума одговарајуће функције циља.

#### 6.1 Мотивација

У овој дисертацији је за одређивање одговарајућих параметара брахистохроних кривих било потребно решавати системе нелинеарних алгебарских једначина који се одликују високим степеном нелинеарности. За нумеричко решавање ових система најчешће се користи Њутн-Рапсонова метода (видети на пример [11]). Међутим, често је код неких система нелинеарних алгебарских једначина конвергенција Њутн-Рапсонове методе јако осетљива на квалитет претпоставке траженог решења где се квалитет претпостављеног решења огледа у томе да претпостављено решење буде у што ужој околини тачног решења. Најчешће је ово тешко постићи па се дешава да се конвергенција не оствари или се не постигне жељена тачност у оквиру прописаног броја итерација. Тако се у [40] наводи интересантан пример следећег система нелинеарних једначина

$$f_i(w_1, \dots, w_4, x_1, \dots, x_4) \equiv \sum_{j=1}^4 w_j x_j^{i-1} - \int_{-1}^1 x^{i-1} dx = 0, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (6.1)$$

код кога је за 100 000 случајно претпостављених вредности непознатих, Њутн-Рапсоновом методом остварена конвергенција само 702 пута!

Због тога је у овој дисертацији у таквим случајевима коришћен алтернативни начин решавања система нелинеарних једначина који се базира на одређивању минимума одговарајуће функције циља. Наиме, нека је дат систем нелинеарних једначина облика

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

Као што је је показано у [36, 40, 46], дати проблем се може трансформисати у проблем оптимизације следеће функције циља

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_i^2 \quad (6.3)$$

одакле произилази да решење система једначина (6.2) представља глобални минимум функције (6.3). За налажење минимума ове функције стандардним методама потребно је да функција (6.3) буде непрекидна и диференцијабилна што често није испуњено. Због тога је за решавање овог задатка искоришћена једна алтернативна метода која се назива диференцијална еволуција. Даље се у кратким цртама даје опис ове методе.

## 6.2 Диференцијална еволуција

Диференцијална еволуција представља еволуциони алгоритам за оптимизацију функција циља (функција више променљивих). Она потиче из породице оптимизационих метода које се базирају на принципима Дарвинове теорије еволуције (као што су генетски алгоритам, еволуционо програмирање итд.). Диференцијална еволуција не користи изводе функције чији се минимум тражи. Она користи само вредности ове функције у коначном броју тачака које су случајно расуте у оквиру домена функције. Ове тачке чине популацију на којој диференцијална еволуција оперише због чега се назива још и популационом методом. Због коришћења популације потенцијалних могућности за решење оптимизационог

проблема, диференцијална еволуција врло ретко конвергира ка локалном оптимуму што је чини моћним алгоритмом за тражење глобалног оптимума разматраног оптимизационог проблема. Аутори ове методе су Rainer Storn и Kenneth Price (видети [66]). Даље се даје кратак опис диференцијалне еволуције и неких њених побољшања на примеру тражења минимума функције (6.3). За више детаља о овој методи видети у [54].

## 6.2.1 Опис методе

### Креирање почетне популације

У простору  $\mathbb{R}^n$  у оквиру домена функције  $f$  креира се популација од  $Np$  тачака  $M_j(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ ,  $j = 1, \dots, Np$  чије се координате формирају на следећи начин:

$$x_{i,j} = (x_i)_{\min} + \text{rand}_i() \cdot ((x_i)_{\max} - (x_i)_{\min}), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, Np \quad (6.4)$$

где је  $\text{rand}_i()$  генератор случајних бројева равномерно распоређених у интервалу  $(0, 1)$ . Граничним вредностима  $(x_i)_{\min}$  и  $(x_i)_{\max}$  се дефинишу границе почетне области у оквиру домена функције где се врши расејавање тачака  $M_j$ . Ове границе се могу узети по вољи водећи рачуна да област расејавања буде довољно велика ради обухватања траженог минимума. У току даљег рада ове границе се могу и нарушавати изузев у случајевима када су за поједине променљиве  $x_j$  наметнута ограничења оптимизационим задатком па се мора вршити провера њиховог задовољења и вршити интервенције ако се деси њихово нарушавање. Након креирања почетне популације, за сваку тачку популације  $M_j$  врше се операције мутације, укрштања и селекције.

### Мутација

Свакој тачки популације  $M_j$  придружује се мутирани вектор положаја  $\vec{r}_j^*$  на следећи начин

$$\vec{r}_j^* = \vec{r}_{w1} + F \cdot (\vec{r}_{w2} - \vec{r}_{w3}), \quad w1, w2, w3 \in \{1, \dots, Np\} \quad (6.5)$$

где су  $\vec{r}_{w1}$ ,  $\vec{r}_{w2}$  и  $\vec{r}_{w3}$  вектори положаја случајно изабраних тачака из популације  $M_{w1}$ ,  $M_{w2}$  и  $M_{w3}$  таквих да је  $M_{w1} \neq M_{w2} \neq M_{w3} \neq M_j$ , а  $F$  је фактор



мутације чија се вредност бира из интервала  $[0, 2]$ . Ова шема формирања вектора  $\vec{r}_j^* = (x_{1,j}^* \ x_{2,j}^* \ \dots \ x_{n,j}^*)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  је позната под ознаком  $DE/\text{rand}/1$  и једна је од најкоришћенијих у пракси због врло добрих карактеристика које је показала њена примена у решавању разноврсних оптимизационих проблема. За остале шеме видети [54].

### Укрштање

Креира се пробни вектор положаја  $\vec{r}_j^{**} = (x_{1,j}^{**} \ x_{2,j}^{**} \ \dots \ x_{n,j}^{**})^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , који се придружује тачки  $M_j$ , мешањем координата вектора  $\vec{r}_j^*$  и  $\vec{r}_j^{**}$  на следећи начин:

$$x_{i,j}^{**} = \begin{cases} x_{i,j}^*, & \text{ако је } \text{rand}_i() \leq Cr \quad \forall i = \text{Rnd}_i() \\ x_{i,j}^{**}, & \text{ако је } \text{rand}_i() > Cr \quad \forall i \neq \text{Rnd}_i() \end{cases} \quad (6.6)$$

где су  $\text{Rnd}_i()$  генератор случајних целих бројева из скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$ , а  $Cr$  је фактор укрштања чија се вредност бира из интервала  $[0, 1]$ . Описани поступак укрштања познат је у литератури као биномно укрштање и оно се најчешће користи. Осим њега постоји и експоненцијално укрштање које је детаљно описано у [67].

Нека су оптимизационим задатком ограничене следеће променљиве:

$$(x_i)_{\min} \leq x_i \leq (x_i)_{\max}, \quad i \in \{l_1, \dots, l_m\} \subset \{1, \dots, n\}. \quad (6.7)$$

Након операције укрштања, провера нарушавања ових граница и евентуална корекција вредности координата врши се по следећем правилу [54]:

$$x_{i,j}^{**} = \begin{cases} x_{i,j}^{**} + \text{rand}_i() \cdot ((x_i)_{\max} - x_{i,j}^{**}), & \text{ако је } x_{i,j}^{**} > (x_i)_{\max} \\ x_{i,j}^{**} - \text{rand}_i() \cdot (x_{i,j}^{**} - (x_i)_{\min}), & \text{ако је } x_{i,j}^{**} < (x_i)_{\min} \end{cases} \quad (6.8)$$

### Селекција

Ако се добије да је  $f(\vec{r}_j) < f(\vec{r}_j^{**})$  онда се тачка  $M_j$  задржава у популацији, а ако се добије  $f(\vec{r}_j) > f(\vec{r}_j^{**})$  онда се тачка  $M_j$  замењује тачком  $M_j^{**}$  која је одређена вектором положаја  $\vec{r}_j^{**}$ .

Као што се из наведеног описа види, диференцијална еволуција се контролише преко параметара  $Np$ ,  $F$  и  $Cr$ . Искуства из литературе у погледу примене диференцијалне еволуције говоре о томе да је она најмање осетљива на вредност  $Np$ , а највише осетљива на вредности фактора мутације  $F$  и фактора укрштања  $Cr$ . Теоријски, број јединки у популацији треба да буде  $Np \geq 4$ . У овој дисертацији је узето  $Np = 2n$ . Што се тиче вредности фактора  $F$  и  $Cr$ , према [54] добро је почети

са вредностима  $F = 0.5$  и  $Cr = 0.9$  које се према брзини конвергенције траженом решењу могу смањити или повећати приликом следећег покретања алгорита.

## 6.2.2 Нека од побољшања диференцијалне еволуције

У претходном делу је дат опис класичне варијанте диференцијалне еволуције. Међутим, у литератури су се појавили радови који су се бавили побољшањем карактеристика ове методе. Ми ћемо ова побољшања приказати на претходно коришћеном примеру минимизације функције  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

### Коришћење једне популације са тренутним ажурирањем

Уместо да се тачка  $M_j$ , односно,  $M_j^{**}$  депонује у нову популацију на којој ће се вршити операције мутације, укрштања и селекције након завршетка ових операција на члановима текуће популације, тачка  $M_j^{**}$  директно замењује тачку  $M_j$  у текућој популацији ако је  $f(M_j^{**}) < f(M_j)$ . На овај начин се стално ради са једном популацијом која се ажурира после операције селекције ако је претходна неједнакост задовољена. Када се на последњој тачки популације изврше операције мутације, укрштања и селекције прелази се на прву тачку и почиње се новим циклусом ових операција. Са понављањем се наставља све док се достигне задати број понављања  $G_{\max}$  операција диференцијалне еволуције на свим члановима популације или се достигне задата тачност  $f_{best} < 10^{-p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Овде је са  $f_{best}$  означена најмања вредност функције циља  $f$  која је достигнута на члановима популације. Ова варијанта побољшања диференцијалне еволуције је изложена у [7].

### Тригонометријска мутација

У референци [29] је уведена модификација операције мутације увођењем тако зване тригонометријске мутације. У [5] је на проблемима оптимизације у хемијском инжењерству показано побољшање перформанси диференцијалне еволуције оваквом варијантом мутације. Модификована варијанта мутације гласи

$$\vec{r}_j^* = \begin{cases} \text{ако је } \text{rand}() \geq Mt \\ \vec{r}_{w1} + F \cdot (\vec{r}_{w2} - \vec{r}_{w3}), \quad w1, w2, w3 \in \{1, \dots, Np\} \\ \text{ако је } \text{rand}() < Mt \\ \frac{\vec{r}_{w1} + \vec{r}_{w2} + \vec{r}_{w3}}{3} + (p_2 - p_1)(\vec{r}_{w1} - \vec{r}_{w2}) + (p_3 - p_2)(\vec{r}_{w2} - \vec{r}_{w3}) + \\ + (p_1 - p_3)(\vec{r}_{w3} - \vec{r}_{w1}) \end{cases} \quad (6.9)$$

где је:  $p^* = |f(\vec{r}_{w1}) + f(\vec{r}_{w2}) + f(\vec{r}_{w3})|$ ,  $p_1 = \frac{f(\vec{r}_{w1})}{p^*}$ ,  $p_2 = \frac{f(\vec{r}_{w2})}{p^*}$  и  $p_3 = \frac{f(\vec{r}_{w3})}{p^*}$ . Са  $Mt$  је означена вероватноћа модификоване мутације ( $0 \leq Mt \leq 1$ ).

#### **Аутоматски избор вредности параметара $F$ и $Cr$**

Због осетљивости диференцијалне еволуције на избор вредности за параметре  $F$  и  $Cr$ , у [39] је предложена варијанта диференцијалне еволуције у којој параметар  $F$  није константан у току коришћења диференцијалне еволуције већ се он при сваком новом формирању мутирајућег вектора генерише као случајан број по закону равномерне расподеле из опсега  $[-1, -0.4] \cup [0.4, 1]$ . Аутори референце [39] су посредством оваквог начина избора параметра  $F$  и модификацијом у процесу мутације, која се огледа у томе што се за  $\vec{r}_{w1}$  од три случајно изабрана вектора бира онај за који функција циља има најмању вредност, постигли значајно побољшање перформанси у односу на класичну варијанту диференцијалне еволуције. Даље, у [49] је предложено да параметар  $Cr$  буде самоприлагодљив на тај начин што се он при свакој итерацији израчунава као  $Cr = N(0.5, 0.15)$  где је  $N(0.5, 0.15)$  генератор нормално расподељених случајних бројева чија је средња вредност 0.5, а стандардно одступање 0.15.

У овој дисертацији формирана је и коришћена варијанта диференцијалне еволуције у којој су обједињене све претходно наведене модификације. Ова варијанта је означена са MTSA-DF. С обзиром на изложено, у Додатку А је дат псеудо код варијанте MTSA-DF диференцијалне еволуције, а у Додатку Б је приложен њен MATLAB код.

# Глава 7

## ЗАКЉУЧАК

У овој докторској дисертацији разматрано је брахистохроно кретање механичких система са реалним везама где се сила отпора моделирала Кулоновом силом трења. Тежиште разматрања је било на случају брахистохроног кретања материјалне тачке у присуству Кулонове силе трења и проширењу добијених резултата на случај везаног система крутих тела са реалним унилатералним везама. Након увода, у коме је дат преглед досадашњих резултата везаних за брахистохрони проблем, даља разматрања у дисертацији се могу поделити на три главне целине.

Прва целина обухвата главе 2 и 3 у којима је формулисан и решен у коначном облику (аналитичко решење изражено преко елементарних функција) брахистохрони проблем са Кулоновим трењем материјалне тачке која се креће дуж храпаве криве у хомогеном гравитационом пољу уз претпоставку да је почетна брзина материјалне тачке различита од нуле. У глави 2 се храпава крива дуж које се креће тачка третира као задржавајућа (билатерална) веза, а у глави 3 као незадржавајућа (унилатерална) веза. Проблем је решен применом варијационог рачуна. Новина у третирању ове проблематике варијационим рачуном, изложена у дисертацији, састоји се у увођењу претпоставке о знаку пројекције нормалне компоненте реакције криве на нормалу (случај билатералне везе), односно, услова о ненапуштању криве (случај унилатералне везе) као посебног додатног ограничења у виду неједнакости. Даље је ова неједнакост трансформисана у једнакост увођењем нове величине стања. Проблем се у почетној фази решавања формулише као везани варијациони проблем а затим се увођењем специјалне трансформације величина стања преводи у слободан варијациони проблем код кога се јављају екстремале са преломима. Једначине брахистохроне су добијене у параметарском облику где је за параметар узет угао нагиба тангенте на брахистохрону. У случају задржавајуће

везе показано је да је у општем случају брахистохрона двосегментна крива са почетним линијским сегментом у облику параболе при косом хицу у неотпорној средини. При томе су разматране две варијанте и то у првој варијанти је био задат почетни и крајњи положај тачке, а у другој је био задат почетни положај тачке а крајњи се налазио на зада тој вертикалној правој. У случају незадржавајуће везе са почетном брзином тачке задатог интензитета и правца и крајњом брзином задатог правца показано је да је у општем случају брахистохрона тросегментна крива са почетним и завршним линијским сегментом у облику параболе при косом хицу у неотпорној средини. Показано је да се добијени резултати за специјалне вредности параметара система свODE на познате резултате из литературе. У параметарским једначинама брахистохроне фигурише одређени број непознатих параметара који су одређени решавањем одговарајућег система нелинеарних алгебарских једначина. У ситуацијама када је тешко претпоставити почетно решење овог система за које ће Њутн-Рапсонова метода да конвергира указано је на један алтернативни метод решавања који се заснива на трансформацији проблема решавања система једначина у проблем тражења минимума одговарајуће функције циља применом диференцијалне еволуције која представља оптимизациону методу за одређивање глобалног екстремума функција. С тим у вези, у глави 6 је дат кратак опис ове методе и приказана једна побољшана варијанта за коју је у глави 9 приложен код у програмском језику Matlab.

У другој целини, која представља главу 4, илустрована је примена резултата из глава 2 и 3 на конкретном техничком објекту-инсталацији за транспорт грануластог материјала. Код овог техничког објекта оптимизује се облик профила канала дуж кога се под дејством силе тежине транспортује грануласти материјал. При томе, критеријуми оптимизације могу бити минимизација времена транспорта материјала, минимизација губитака механичке енергије током транспорта услед Кулонове силе трења итд. У литератури се у решавању ових оптимизационих проблема користио модел материјалне тачке представљен у главама 2 и 3 под претпоставком да се грануласти материјал током кретања каналом убрзава. Међутим добијени резултати у литератури у случају минимизације времена транспорта грануластог материјала базирани су на великим упрошћавањима везаним за утицај Кулонове силе трења а у случају мање рестриктивних поједностављења проблем се решавао нумерички. С обзиром на ово, резултати из глава 2 и 3 представљају потпуно аналитичко решење наведеног оптимизационог задатка. Осим тога, применом поступка из ових глава решен је у аналитичком облику и проблем оптималног облика профила одводног канала при коме су губици механичке

енергије услед Кулонове силе трећа минимални. Извршено је поређење добијених резултата са постојећим резултатима из литературе за овај оптимизациони задатак.

У трећој целини, која је представљена у виду главе 5, анализирано је брахистохроно кретање везаног система крутих тела код кога се јавља одређен број унилатералних веза које се третирају као реалне. У првом делу главе 5 разматра се систем са  $n$  степени слободе. Након формулације проблема у оквирима варијационог рачуна, приступа се његовом решавању општим техникама примењеним у [19] и главама 2 и 3. Претпоставља се да се израз за снагу сила Кулоновог трећа састоји од два члана при чему први члан представља једну функцију од генералисаних координата и генералисаних брзина а други члан се јавља у виду линеарне форме по другим изводима генералисаних координата чији су коефицијенти функције генералисаних координата и генералисаних брзина. Након формирања Ојлер-Лагранжевих једначина проблема и осталих неопходних релација за даље решавање проблема у облику погодном за примену на конкретним техничким објектима, даља анализа је усмерена на специјалан механички систем са два степена слободе и једном реалном унилатералном везом код кога у одговарајућим изразима за кинетичку енергију као и у изразу за снагу силе Кулоновог трећа не фигуришу генералисане координате. Уводе се нове генералисане координате које квадратну форму кинетичке енергије система свде на канонски облик. У односу на новоуведен ортоганалан систем генералисаних координата брахистохроно кретање механичког система се геометријски може интерпретирати као кретање једне геометријске тачке у дводимензионом Еуклидском простору. Сходно овоме трајекторија посматране геометријске тачке представља брахистохрону. Претходним поступцима је решавање проблема доведено на ниво потпуне аналогије са поступком решавања проблема брахистохроног кретања материјалне тачке из глава 2 и 3 ове дисертације. Детаљном анализом је показано да је брахистохрона у општем случају тросегментна крива.

Сходно изложеном, научни допринос докторске дисертације се може сажето изразити кроз следеће ставке:

- резултати из главе 2 представљају уопштење резултата из референци [6, 35, 71] коришћењем варијационог рачуна на случај почетне брзине различите од нуле; ови ауторови резултати су добили верификацију на међународном нивоу прихватањем за штампу у часопису са SCI листе (референца [64])
- резултати из главе 3 представљају уопштење резултата из референце [65] на

---

случај присуства Кулонове силе трења; показано је да је у општем случају брахистохрона тросегментна крива са почетним и завршним линијским сегментом у облику параболе при косом хицу у неотпорној средини; добијени резултати у овој глави представљају такође и проширење одређених резултата из референце [18]

- у глави 4 је указано на примену резултата из глава 2 и 3 на проблеме оптимизације код инсталација за одвод грануластог (ситнозрнастог) материјала и указано на побољшања у односу на резултате из референце [13]; у оквиру ове главе за разматрани технички објект је аналитички решен и проблем одређивања оптималног облика профила канала за одвод грануластог материјала из услова да губици механичке енергије материјала услед дејства Кулонове силе трења буду минимални. Указано је на предности примењеног поступка у односу на поступак решавања овог проблема у референци [52]
- резултати из главе 5 представљају проширење резултата из референци [19, 25] на случај брахистохроног кретања система крутих тела са реалним унилатералним везама; добијени резултати су погодни за даљу симболичку или нумеричку обраду за конкретне техничке објекте
- изнесен је један начин за превазилажење потешкоћа везаних за проблем нумеричког решавања нелинеарних система алгебарских једначина; дата је одговарајућа програмска подршка

# Глава 8

## ПРАВЦИ ДАЉЕГ РАЗВОЈА

Спроведеним истраживањима и добијеним резултатима у овој дисертацији створена је основа за даља истраживања у области брахистохроног кретања механичких система. Због високог степена нелинеарности једначина и израза који карактеришу ову проблематику, нарочито у присуству Кулонове силе трења, добијање аналитичког решења проблема је најчешће немогуће изузев у неким специјалним случајевима. Због тога је изузетно важно развијање ефикасних нумеричких поступака за решавање проблема брахистохроног кретања механичких система са реалним везама. У том смислу, имајући у виду тренутни тренд у литератури о све већој примени диференцијалне еволуције као оптимизационе методе у решавању проблема оптималног управљања, у даљим истраживањима треба усмерити пажњу на изналажење ефикасних начина примене диференцијалне еволуције у нумеричком третману брахистохроног проблема система крутих тела.

У глави 4 дисертације успешно је илустрована примена резултата и методологије из глава 2 и 3 на проблеме оптимизације код инсталација за транспорт грануластог материјала. Примена модела материјалне тачке која се креће по храпавој кривој у проучавању ове проблематике условљена је претпоставком да се грануласти материјал убрзава при транспорту дуж одводног канала. Сходно томе интересантно би било проучити какав би био утицај на оптималан облик профила одводног канала ако би се ова претпоставка укључила као посебно ограничење у варијационој формулацији проблема. С аспекта примене интересантна је и проблематика у референци [58]. Ту остаје да се размотри утицај силе трења на оптималан облик ротирајућег штапа који обезбеђује да алка клизећи по њему стигне на његов крај за најкраће време.

Даља истраживања у области брахистохроног кретања система крутих тела са



---

реалним везама помоћу варијационог рачуна требало би усмерити и на случајеве када генералисане силе управљања имају утицаја на закон о промени укупне механичке енергије система. Ово је чест случај у роботици где генералисане управљачке силе потичу од погонских сила и погонских спрегова сила у зглобовима робота. Описани поступак решавања проблема из главе 5 применом варијационог рачуна захтева одређивање распореда линијских сегмената на екстремали. У том смислу би за случајеве када се брахистохрона може састојати из више од два различита типа линијских сегмената требало усмерити истраживања на изналажење ефикасног метода за утврђивање структуре брахистохроне као вишесегментне криве.

Овим су наведени само неки од научних проблема које је аутор уочио у току израде ове дисертације, а који могу послужити као основа за даља истраживања. Наравно да је разноликост проблема из ове области много већа што чини област брахистохроног кретања механичких система врло актуелном и плодносном облашћу за даља истраживања.

# ЛИТЕРАТУРА

- [1] Akulenko, L. D.: An analog of the classical brachistochrone for a disk. **Doklady Physics**, **53**(3) (2008), pp.156-159.
- [2] Alipanah, A., Razzaghi, M., Dehghan, M.: Nonclassical pseudospectral method for the solution of brachistochrone problem. **Chaos, Solitons and Fractals**, **34** (2007), pp. 1622-1628.
- [3] Aljančić, S.: Matematika II (Varijacioni račun), Privredno finansijski vodič-OECONOMICA, Beograd, 1972.
- [4] Andjelić, T., Stojanović, R.: Racionalna mehanika, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1965.
- [5] Angira, R., Santosh, A.: Optimization of dynamic systems: A trigonometric differential evolution approach. **Computers and Chemical Engineering**, **31** (2007), pp. 1055-1063.
- [6] Ashby, N., Brittin, W. E., Love, W. F., Wyss, W.: Brachistochrone with Coulomb friction. **American Journal of Physics**, **43**(10) (1975), pp. 902-906.
- [7] Babu, B.V., Angira, R.: Modified differential evolution (MDE) for optimization of non-linear chemical processes. **Computers and Chemical Engineering**, **30** (2006), pp. 989-1002.
- [8] Bestle, D., Eberhard, P.: Optimizaton of a contact surface. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, **25** (2003), pp. 339-345.
- [9] Bryson, A.E., Ho, Y.C.: Applied optimal control, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1975.

- 
- [10] Черноусько, Ф.Л., Болотник, Н.Н., Градецкий, В.Г.: Манипуляционные роботы: Динамика, управление, оптимизация, Наука, Москва, 1989.
- [11] Chapra, S. C., Canale, R. P.: Numerical methods for engineers: with software and programming applications, 4th ed. New York: McGraw Hill 2002.
- [12] Charlton, W. H., Roberts, A. W.: Chute profile for maximum exit velocity in gravity flow of granular material. **Journal of Agricultural Engineering Research**, **15**(3) (1970), pp. 292-294.
- [13] Charlton, W. H., Chiarella, C., Roberts, A. W.: Gravity flow of granular materials in chutes: optimizing flow properties. **Journal of Agricultural Engineering Research**, **20** (1975), pp. 39-45.
- [14] Čović, V., Vesković, M.: Extension of the Bernoulli's case of brachistochronic motion to the multibody system having the form of a kinematic chain with external constraints. **European Journal of Mechanics A/Solids**, **21** (2002), pp. 347-354 .
- [15] Čović, V., Lukačević, M.: Extension of the Bernoulli's case of a brachistochronic motion to the multibody system in the form of a closed kinematic chain. **Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics**, **2**(9) (1999), pp. 973-982.
- [16] Čović, V., Lukačević, M.: On brachistochronic motions of non-conservative dynamical systems. **Theoretical and Applied Mechanics**, **7** (1981), pp. 41-50.
- [17] Čović, V., Lukačević, M.: O brahistohronom kretanju neholonomnih mehaničkih sistema. Zbornik radova: 16. JUGOSLOVENSKI KONGRES TEORIJSKE I PRIMENJENE MEHANIKE, Bečići, 28.maj-1. juni 1984., pp. 17-24.
- [18] Čović, V., Vesković, M.: Brachistochrone on a surface with Coulomb friction. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, **43**(5) (2008), pp. 437-450.
- [19] Čović, V., Vesković, M.: Brachistochronic motion of a multibody system with Coulomb friction. **European Journal of Mechanics A/Solids**, DOI:10.1016/j.euromechsol.2008.12.009 (in press)

- 
- [20] Čović, V., Lukačević, M., Vesković, M.: On brachistochronic motions, Monographical Booklets in Applied & Computers Mathematics, PMMM, Budapest, (2007).
- [21] Cruz, P.A.F., Torres, D.F.M.: Evolution strategies in optimization problems. **Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, Physics, Mathematics**, **56**(4) (2007), pp. 299-309.
- [22] Djukić, Dj.: The brachistochronic motion of a gyroscope mounted on the gimbals. **Theoretical and Applied Mechanics**, **2** (1976), pp. 37-40.
- [23] Djukić, Dj.: On the brachistochronic motion of a dynamic system. **Acta Mechanica**, **32** (1979), pp. 181-186.
- [24] Djukić, Dj., Atanacković, T. M.: A note on the classical brachistochrone. **Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)**, **27** (1976), pp. 677-681.
- [25] Djurić, D.: On brachistochronic motion of a multibody system with real constraints. **FME Transactions**, **35** (2007), pp. 183-187.
- [26] Dooren, R. V., Vlassenbroeck, J.: A new look at the brachistochrone problem. **Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)**, **31** (1980), pp. 785-790.
- [27] Drummond, J. E., Downes, G. L.: The brachistochrone with acceleration: A running track. **Journal of Optimization Theory and Applications**, **7**(6) (1971), pp. 444-449.
- [28] Эльсгольц, Л. Э.: Вариационное исчисление, Гостехтеориздат, Москва, 1958.
- [29] Fan, H.Y., Lampinen, J.: A trigonometric mutation operation to differential evolution. **Journal of Global Optimization**, **27** (2003), pp. 105-129.
- [30] Formal'skii, A. M.: The time-optimal control of the bending of a plane two-link mechanism. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)**, **60**(2) (1996), pp. 243-251.
- [31] Гантмахер, Ф. Р.: Лекции по аналитической механике, Наука, Москва, 1966.

- 
- [32] Гельфанд, И. М., Фомин, С. В.: Вариационное исчисление, Физматгиз, Москва, 1961.
- [33] Gregory, J., Lin, C.: An unconstrained calculus of variations formulation for generalized optimal control problems and for the constrained problem of Bolza. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, **187** (1994), pp. 826-841.
- [34] Gregory, J., Lin, C.: Constrained optimization in the calculus of variations and optimal control theory, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.
- [35] Hayen, J. C.: Brachistochrone with Coulomb friction. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, **40** (2005), pp.1057-1075.
- [36] Hirsch, M. J., Meneses, C. N., Pardalos, P. M., Resende, M. G. C.: Global optimization by continuous grasp. **Optimization Letters**, **1**(2) (2007), pp. 201-212.
- [37] Hu, G.S., Ong, C.J., Teo, C.L.: Minimum-time control of a crane with simultaneous traverse and hoisting motions. **Journal of Optimization Theory and Applications**, **120**(2) (2004), pp.395-416.
- [38] Julstrom, B. A.: Evolutionary Algorithms for Two Problems from the Calculus of Variations. In: Lecture Notes in Computer Science, Genetic and Evolutionary Computation-GECCO, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.,pp. 2402-2403.
- [39] Kaelo, P., Ali, M.M.: A numerical study of some modified differential evolution algorithms. **European Journal of Operational Research**, **169** (2006), pp. 1176-1184.
- [40] Karr, C. L., Weck, B., Freeman, I. M.: Solutions to systems of nonlinear equations via a genetic algorithm. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, **11** (1998), pp. 369-375.
- [41] Kirk, D. E.: Optimal control theory, Prentice-Hall, 1970.
- [42] Ланцош, К.: Вариационные принципы механики, Мир, Москва, 1965.
- [43] Lipp, S. C.: Brachistochrone with Coulomb friction. **SIAM Journal on Control and Optimization**, **35**(2) (1997), pp. 562-584.
- [44] Лурье, А. И.: Аналитическая механика, Физматгиз, Москва, 1961.

- 
- [45] Maisser, P.: Brachystochronen als zeitkürzeste Fahrspuren von Bobschlitten. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)**, **78**(5) (1998), pp. 311-319.
- [46] Martinez, J. M.: Algorithms for solving nonlinear systems of equations. In: Spedicato, E. (ed.) *Continuous Optimization: The State of the Art*, pp. 81–108, Kluwer 1994.
- [47] Matrosov, V. M., Finogenko, I. A.: The solvability of the equations of motion of mechanical systems with sliding friction. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)**, **58**(6) (1994), pp. 945-954.
- [48] Obradović, A., Marković, S.: Brahistohrono ravno kretanje krutog tela. Zbornik radova: SIMPOZIJUM IZ OPŠTE MEHANIKE, Novi Sad, 29. i 30. septembar 1994., pp. 115-122.
- [49] Omran, M.G.H., Salman, A., Engelbrecht, A.P.: Self-adaptive differential evolution. In: Hao, Y. et al.(Eds.) *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 3801 LNAI, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005., pp. 192-199.
- [50] Papastavridis, J. G.: On a Lagrangean action based kinetic instability theorem of Kelvin and Tait. **International Journal of Engineering Science**, **24**(1) (1986), pp. 1-17.
- [51] Вариационные принципы механики (сборник статей), Физматгиз, Москва, 1959.
- [52] Parbery, R.D.: Optimization of gravity flow discharge chutes for maximum exit velocity under Coulomb friction. **Engineering Optimization**, **10** (1987), pp.297-307.
- [53] Pejović, T.: Diferencijalne jednačine, Naučna knjiga, Beograd, 1979.
- [54] Price, K. V., Storn, R. M., Lampinen, J. A.: *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*, 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2005.
- [55] Razzaghi, M., Sepehrian, B.: Single-term walsh series direct method for the solution of nonlinear problems in the calculus of variations. **Journal of Vibration and Control**, **10** (2004), pp.1071-1081.

- 
- [56] Roberts, A. W.: Chute performance and design for rapid flow conditions. **Chemical Engineering and Technology**, **26**(2) (2003), pp.163-170.
- [57] Roberts, A. W.: An investigation of the gravity flow of noncohesive granular materials through discharge chutes. **Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry**, **91**(2) (1969), pp. 373-381.
- [58] Ribberfors, R., Rietz, A.: A study of a rotating rod carrying a collar using Lagrange's equation of motion and variational calculus. **European Journal of Physics**, **21** (2000), pp. 151-157.
- [59] Шевченко, К. Н.: Оптимальное по времени движение точки под действием системы центральных сил. *Механика Твёрдого Тела*, **19**(6) (1984), pp. 28-34.
- [60] Шевченко, К. Н.: Брахистохрона и принцип наименьшего действия. *Механика Твёрдого Тела*, **21**(2) (1986), pp. 40-46.
- [61] Šalinić, S.: Dynamics of elastic-properties-having interconnected bodies systems. Zbornik radova: Fourth International Conference Heavy Machinery-HM'02 Kraljevo, 27-30 Jun 2002., pp. F.53-F.56.
- [62] Šalinić, S.: Dinamika sistema krutih tela sa realnim vezama sa primenom na tehničke objekte, magistarska teza, Mašinski fakultet Beograd, 2003.
- [63] Šalinić, S.: Modelling of a light elastic beam by a system of rigid bodies. **Theoretical and Applied Mechanics**, **31**(3-4) (2004), pp. 395-410.
- [64] Šalinić, S.: Contribution to the brachistochrone problem with Coulomb friction. **Acta Mechanica**, DOI 10.1007/s00707-008-0134-3, (in press)
- [65] Stork, D.G., Yang, J.: The general unrestrained brachistochrone. **American Journal of Physics**, **56**(1) (1988), pp. 22-26.
- [66] Storn, R., Price, K.: Differential evolution-A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of Global Optimization**, **11** (1997), pp. 341-359.
- [67] Zaharie, D.: A comparative analysis of crossover variants in differential evolution. In: Ganzha, M., Paprzycki, M., Pelech-Pilichowski, T. (Eds.) Proceedings of the International Multiconference on Computer Science and Information Technology IMCSIT 2007, Wisla, Poland, 15-17 october 2007., pp.171-181.

- 
- [68] Зекович, Д.: О брахистохронном движении механической системы с неголономными нелинейными и нестационарными связями. Прикладная математика и механика 54(6) (1990), pp. 931-935.
- [69] Zeković, D., Čović, V.: On the brachistochronic motion of mechanical systems with linear nonholonomic nonhomogeneous constraints. **Mechanics Research Communications**, 20(1) (1993), pp. 25-35.
- [70] Valentine, F. A.: The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions. Contributions to the calculus of variations, 1933-1937, Univ. of Chicago Press 1937, pp. 407-448.
- [71] Van der Heijden, A. M. A., Diepstraten, J. D.: On the brachystochrone with dry friction. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 10 (1975), pp. 97-112.
- [72] Van Willigenburg, L. G., Loop, R. P. H.: Computation of time-optimal controls applied to rigid manipulators with friction. **International Journal on Control**, 54(5) (1991), pp. 1097-1117.
- [73] Vujanović, B.D., Spasić, D.T.: Metodi optimizacije, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1997.
- [74] Vuković, J.: О određivanju veza za kretanje sa minimalnim gubitkom mehaničke energije. Zbornik radova: SIMPOZIJUM IZ OPŠTE MEHANIKE, Novi Sad, 29. i 30. septembar 1994., pp. 31-38.
- [75] Vratanaar, B., Saje, M.: On the analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 33(3) (1998), pp. 489-505.
- [76] Wensrich, C. M.: Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction. **Mechanics Research Communications**, 31 (2004), pp. 151-159.
- [77] Wensrich, C. M.: Evolutionary optimisation in chute design, **Powder Technology**, 138 (2003), pp. 118-123.



# Глава 9

## ДОДАЦИ

### 9.1 ДОДАТАК А

Псеудо код *MTSA – DF*

**Улаз:**  $f, n, Np, (x_i)_{\min}, (x_i)_{\max}, \{l_1, \dots, l_m\}, Mt, G_{\max}$

**Стварање почетне популације**  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{Np}\}$

**for each**  $j \in \{1, \dots, Np\}$

$x_{i,j} = (x_i)_{\min} + rand_i() \cdot ((x_i)_{\max} - (x_i)_{\min}), i = 1, \dots, n$

**end for each**

**Одређивање вредности функције циља  $f$  у свакој тачки популације:**  $f(\vec{r}_j)$ ,  
 $\forall j \in \{1, \dots, Np\}$  као и  $f_{\min}$

$G = 1$

**while**  $G = G_{\max}$  **do**

**forall**  $j \leq Np$

*генерисање случајних бројева*  $r1, r2, r3 \in \{1, \dots, Np\}, j \neq r1 \neq r2 \neq r3$

*одређивање бројева*  $w1, w2, w3$  *таквих да је*

$(f(\vec{r}_{w1}) < f(\vec{r}_{w2}) < f(\vec{r}_{w3})) \wedge (w1, w2, w3 \in \{r1, r2, r3\})$

*генерисање случајног броја*  $i_{rand} \in \{1, \dots, n\}$

$F = sign((2 \cdot rand() - 1)) \cdot (0.6 \cdot rand() + 0.4)$

$Cr = 0.15 \cdot randn() + 0.5$

**if**  $rand_j() \geq Mt$

**forall**  $i \leq n$

---


$$x_{i,j}^{**} = \begin{cases} \text{ako je } rand_i() \leq Cr \quad \forall i = i_{rand} : \\ \quad x_{i,w1} + F \cdot (x_{i,w2} - x_{i,w3}); \\ \text{ako je } rand_i() > Cr \quad \forall i \neq i_{rand} : \\ \quad x_{i,j} \\ \quad \text{if } i \in \{l_1, \dots, l_m\} \wedge x_{i,j}^{**} > (x_i)_{max} \\ \quad \quad x_{i,j}^{**} = x_{i,j}^{**} + rand_i() \cdot ((x_i)_{max} - x_{i,j}^{**}) \\ \quad \text{end if} \\ \quad \text{if } i \in \{l_1, \dots, l_m\} \wedge x_{i,j}^{**} < (x_i)_{min} \\ \quad \quad x_{i,j}^{**} = x_{i,j}^{**} - rand_i() \cdot (x_{i,j}^{**} - (x_i)_{min}) \\ \quad \text{end if} \\ \quad \text{end forall} \\ \text{else} \\ \text{израчунавање вредности:} \\ p^* = |f(\vec{r}_{r1}) + f(\vec{r}_{r2}) + f(\vec{r}_{r3})|, \\ p_1 = \frac{f(\vec{r}_{r1})}{p^*}, p_2 = \frac{f(\vec{r}_{r2})}{p^*}, p_3 = \frac{f(\vec{r}_{r3})}{p^*} \\ \quad \text{forall } i \leq n \\ x_{i,j}^{**} = \begin{cases} \text{ako je } rand_i() \leq Cr \quad \forall i = i_{rand} : \\ \quad \frac{x_{i,r1} + x_{i,r2} + x_{i,r3}}{3} + (p_2 - p_1)(x_{i,r1} - x_{i,r2}) + (p_3 - p_2)(x_{i,r2} - x_{i,r3}) + \\ \quad \quad + (p_1 - p_3)(x_{i,r3} - x_{i,r1}); \\ \text{ako je } rand_i() > Cr \quad \forall i \neq i_{rand} : \\ \quad x_{i,j} \\ \quad \text{if } i \in \{l_1, \dots, l_m\} \wedge x_{i,j}^{**} > (x_i)_{max} \\ \quad \quad x_{i,j}^{**} = x_{i,j}^{**} + rand_i() \cdot ((x_i)_{max} - x_{i,j}^{**}) \\ \quad \text{end if} \\ \quad \text{if } i \in \{l_1, \dots, l_m\} \wedge x_{i,j}^{**} < (x_i)_{min} \\ \quad \quad x_{i,j}^{**} = x_{i,j}^{**} - rand_i() \cdot (x_{i,j}^{**} - (x_i)_{min}) \\ \quad \text{end if} \\ \quad \text{end forall} \\ \text{end if } rand_j() \geq Mt \\ \quad \text{if } f(\vec{r}_j^{**}) \leq f(\vec{r}_j) \\ \quad \quad \vec{r}_j = \vec{r}_j^{**}; f(\vec{r}_j) = f(\vec{r}_j^{**}); \\ \quad \text{end if} \\ \text{end forall } j \leq Np; \quad \text{одређивање } f_{min} \\ G = G + 1 \\ \text{end while } G = G_{max} \\ \text{Штампање резултата.} \end{cases} \end{cases}$$

## 9.2 ДОДАТАК Б

### Код у програмском језику Matlab

```

function [best,Xbest]=MTSA-DA(fname,n,Np,Mt,Gmax,Xmin,Xmax);
pop=zeros(Np,n(1));
X=zeros(1,n(1));
Xbest=zeros(1,n(1));
val=zeros(1,Np);
ibest=1;
r=zeros(1,3);
a=zeros(1,3);

for j=1:Np
    pop(j,:)=Xmin+rand(1,n(1)).*(Xmax-Xmin);
    val(j)=fnc(pop(j,:));
end

[bestval,ibest]=min(val);
Xbest=pop(ibest,:);
G=1;
while (G<Gmax)
    for j=1:Np
        r(1)=floor(rand*Np)+1;
        while r(1)==j
            r(1)=floor(rand*Np)+1;
        end
        r(2)=floor(rand*Np)+1;
        while ((r(2)==r(1))|(r(2)==j))
            r(2)=floor(rand*Np)+1;
        end
        r(3)=floor(rand*Np)+1;
        while ((r(3)==r(2))|(r(3)==r(2))|(r(3)==j))
            r(3)=floor(rand*Np)+1;
        end
        Rnd=floor(rand*n(1))+1;
    end
end

```

---

```
if val(r(1))<val(r(2))
    a(1)=r(2);
    if val(r(1))<val(r(3))
        a(2)=r(3);
        a(3)=r(1);
    else
        a(2)=r(1);
        a(3)=r(3);
    end
end
else
    a(1)=r(1);
    if val(r(2))<val(r(3))
        a(2)=r(3);
        a(3)=r(2);
    else
        a(2)=r(2);
        a(3)=r(3);
    end
end
end
F=sign((2*rand-1))*(0.6*rand+0.4);
Cr=0.15*randn+0.5;
if rand>Mt
for i=1:n(1)
    if ((rand<=Cr)|(Rnd==i))
        X(i)=pop(a(3),i)+F*(pop(a(1),i)-pop(a(2),i));
    else
        X(i)=pop(j,i);
    end
    if (i<=n(2))&(X(i)>Xmax(i))
        X(i)=Xmax(i)+rand*(pop(j,i)-Xmax(i));
    end
    if (i<=n(2))&(X(i)<Xmin(i))
        X(i)=Xmin(i)+rand*(pop(j,i)-Xmin(i));
    end
end
end
else
```

---

```

p4=abs(val(r(1))+val(r(2))+val(r(3)));
p1=val(r(1))/p4;
p2=val(r(2))/p4;
p3=val(r(3))/p4;
for i=1:n(1)
    if ((rand<=Cr)|(Rnd==i))
        X(i)=(pop(r(1),i)+pop(r(2),i)+pop(r(3),i))/3+(p2-p1)*...
(pop(r(1),i)-pop(r(2),i))+(p3-p2)*(pop(r(2),i)-pop(r(3),i))+...
(p1-p3)*(pop(r(3),i)-pop(r(1),i)));
    else
        X(i)=pop(j,i);
    end
    if (i<=n(2))&(X(i)>Xmax(i))
        X(i)=Xmax(i)+rand*(pop(j,i)-Xmax(i));

elseif (i<=n(2))&(X(i)<Xmin(i))
        X(i)=Xmin(i)+rand*(pop(j,i)-Xmin(i));
    end
end
end
f=fnc(X);
if f<val(j)
    pop(j,:)=X;
    val(j)=f;
    if f<=bestval
        ibest=j;
        bestval=f;
    end
end
end
G=G+1;
end

best=bestval;
Xbest=pop(ibest,:);

```

## Биографија

Славиша Шалинић рођен је 11.08.1973. године у Краљеву. Основну школу завршио је у ОШ "Вук Караџић" Рибница. Четврти степен стручне спреме за занимање "Електротехничар погона" стекао је у Електросаобраћајној школи "Никола Тесла" у Краљеву.

Студије на Машинском факултету у Краљеву уписао је школске 1992/93. године на групи за Производно машинство. Током студија остварио је средњу оцену 8,79. Дипломски рад из предмета Теорија осцилација одбранио је 22.10.1997. године са оценом 10 (десет). Последипломске студије уписао је школске 1997/98. године на Машинском факултету у Београду на групи за Примењену механику крутог тела у машинству. Магистарску тезу под називом "**Динамика система крутих тела са реалним везама са применом на техничке објекте**" одбранио је 07.07.2003. године. У периоду од 01.12.1997. године до 01.07.1998. године радио је као истраживач-приправник на Катедри за Механику Машинског факултета у Краљеву. У звање асистента-приправника за ужу научну област Механика на Машинском факултету у Краљеву изабран је 01.07.1998. године, а у звање асистента изабран је 2003. године.