



Универзитет у Крагујевцу  
Природно-математички факултет

Татјана Алексић

**ГРАФОВИ ЧИЈА ЈЕ НАЈМАЊА  
КАРАКТЕРИСТИЧНА ВРЕДНОСТ  
МИНИМАЛНА У НЕКИМ КЛАСАМА  
ГРАФОВА**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2012.

## ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

<b>I. Аутор</b>	
Име и презиме:	Татјана Алексић
Датум и место рођења:	17.06.1982. Крагујевац
Садашње запослење:	асистент на Природно-математичком факултету, Универзитет у Крагујевцу
<b>II. Докторска дисертација</b>	
Наслов:	Графови чија је карактеристична вредност минимална у неким класама графова
Број страница:	101
Број слика:	29
Број библиографских података:	49
Установа и место где је рад израђен:	Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Научна област (УДК):	Математика (Спектрална теорија графова)
Ментор:	Др Мирослав Петровић
<b>III. Оцена и одбрана</b>	
Датум пријаве теме:	10.06.2011.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:	
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:	
Др Мирослав Петровић - редовни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу	
Др Слободан Симић - научни саветник Математичког института у Београду	
Др Иван Гутман - редовни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу	
Др Мирко Леповић - ванредни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу	
Др Бојана Боровићанин - доцент Природно–математичког факултета у Крагујевцу	
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:	
Др Мирослав Петровић - редовни професор Државног универзитета у Новом Пазару	
Др Слободан Симић - научни саветник Математичког института у Београду	
Др Иван Гутман - редовни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу	
Др Мирко Леповић - ванредни професор Природно–математичког факултета у Крагујевцу	
Др Бојана Боровићанин - доцент Природно–математичког факултета у Крагујевцу	
Датум одбране дисертације:	08.10.2012.

# Предговор

Ова докторска дисертација је проистекла као резултат вишегодишњег рада под менторством др Мирослава Петровића, редовног професора на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу.

Тема истраживања докторске дисертације је карактеризација екстремалних графова у различитим класама повезаних графова. Под екстремалним графовима подразумевају се графови са минималном најмањом карактеристичном вредношћу, максималним индексом или максималним распоном у одређеним класама графова. У овој докторској дисертацији резултати су добијени у класама повезаних графова са фиксираним бројем чворова и грана (у класама уницикличних, бицикличних, трицикличних, тетрацикличних и пентацикличних графова), у класи кактуса са фиксираним бројем чворова и фиксираним бројем контура као и у класи кактуса са фиксираним бројем чворова.

У периоду од 2007. до 2011. године резултати овог истраживања објављени су у оквиру пројекта Теорија графова и математичко програмирање са применама у хемији и техничким наукама (финансираног од стране Министарства науке Републике Србије) под руководством академика Драгоша Цветковића, а затим од 2011. године у оквиру пројекта Теорија графова и математичко програмирање са применама у хемији и рачунарству (финансираног од стране Министарства просвете и науке Републике Србије) под руководством професора др Слободана Симића.

Овом приликом посебно се захваљујем свом ментору др Мирославу Петровићу на стручној помоћи и великој подршци коју ми је свакодневно пружао од почетка наше сарадње. Захвалност дугујем и академику др Ивану Гутману на сарадњи у току докторских студија, која ми је значајно помогла у разумевању читаве области. Желим да се захвалим академику др Драгошу Цветковићу и др Слободану Симићу са којима сам имала изузетну сарадњу у оквиру семинара САНУ, на пројектима под њиховим руководством. Такође, захваљујем се др Мирку Леповићу и др Бојани Боровићанин на одличној сарадњи, помоћи и корисним сугестијама током докторских студија.

На крају, најискреније се захваљујем својој породици, пријатељима и мени драгим људима који су од првог дана веровали у мене, на стрпљењу, пожртвованости и љубави које су ми несебично пружали свих ових година.

Крагујевац, април 2012.

Татјана Алексић

# Садржај

Предговор	2
Листа слика	5
Листа табела	6
<b>1 Увод</b>	<b>8</b>
<b>2 Спектар графа</b>	<b>12</b>
<b>3 О графовима чија је најмања карактеристична вредност минимална</b>	<b>20</b>
3.1 Структура екстремалних графова . . . . .	21
3.2 Структура екстремалних бипартитних графова . . . . .	28
<b>4 Графови са малим бројем контура и минималном најмањом карактеристичном вредношћу</b>	<b>37</b>
4.1 Унициклични графови фиксираног реда . . . . .	38
4.1.1 Бипартитни унициклични графови . . . . .	39
4.1.2 Небипартитни унициклични графови . . . . .	40
4.1.3 Структура екстремалног уницикличног графа . . . . .	41
4.2 Бициклични графови фиксираног реда . . . . .	42
4.2.1 Бипартитни бициклични графови . . . . .	43
4.2.2 Небипартитни бициклични графови . . . . .	47
4.2.3 Структура екстремалног бицикличног графа . . . . .	47
4.3 Трициклични, тетрациклични и пентациклични графови фиксираног реда . . . . .	49
4.3.1 Небипартитни графови са малим бројем контура . . . . .	49
4.3.2 Структура екстремалног графа са малим бројем контура	53
<b>5 Екстремални кактуси</b>	<b>56</b>
5.1 Екстремални графови у класи кактуса са фиксираним бројем чворова и фиксираним бројем контура . . . . .	57
5.2 Екстремални графови у класи кактуса са фиксираним бројем чворова . . . . .	67

---

<b>6</b>	<b>Графови са малим бројем контура и максималним распоном</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Додатне табеле</b>	<b>86</b>
A.1	Повезани графови са 2 до 5 чворова . . . . .	86
A.2	Повезани бициклични графови са 6 чворова . . . . .	90
<b>Б</b>	<b>Summary</b>	<b>93</b>
	<b>Литература</b>	<b>95</b>
	<b>Биографија</b>	<b>99</b>

# Листа слика

2.1	Графови $G$ и $G^*$ . . . . .	15
2.2	Граф $W_n$ . . . . .	17
2.3	Графови $A$ и $B$ . . . . .	18
3.1	Ланчани граф висине 1 . . . . .	29
3.2	Ланчани граф висине 2 . . . . .	30
3.3	Ланчани графови $D_1$ и $D_{k+1}$ . . . . .	34
3.4	Ланчани граф $G = D(1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3)$ . . . . .	35
4.1	Унициклични граф $U_1$ . . . . .	39
4.2	Унициклични граф $U_2$ . . . . .	40
4.3	Бициклични графови $B_1, B_2$ и $B_3$ . . . . .	43
4.4	Основа $G^0$ бицикличног графа . . . . .	44
4.5	Граф $H$ . . . . .	45
4.6	Бициклични граф $B_4$ . . . . .	47
4.7	Граф $G_q$ за $q > 0$ и $i < j$ . . . . .	50
4.8	Канонички граф графа $G_q$ за $q > 0$ и $i < j$ . . . . .	50
4.9	Граф $G_0$ . . . . .	51
5.1	Свежањ $G(C_1, \dots, C_k; r)$ . . . . .	57
5.2	Свежањ $B_{k,s}$ . . . . .	58
5.3	Графови $G_1, G_2$ и $G_3$ . . . . .	58
5.4	Дијаграм 1 . . . . .	69
6.1	Унициклични графови $U_1$ и $U_2$ . . . . .	75
6.2	Графови $B_4$ и $B'_4$ . . . . .	75
6.3	Графови $B_6, B'_6$ и $B''_6$ . . . . .	76
6.4	Граф $B_5$ . . . . .	77
6.5	Граф $G^0$ . . . . .	79
6.6	Граф $B_0$ . . . . .	80
6.7	Граф $B_2$ . . . . .	81
A.1	Повезани графови реда $2 \leq n \leq 5$ . . . . .	88
A.2	Повезани бициклични графови реда 6 . . . . .	91

## Листа табела

4.1	Вредности параметара $t_1$ и $n_0$ за $0 \leq k \leq 4$ . . . . .	55
5.1	Најмање сопствене вредности, индекси и распони свежњева $B_{k,s}$ за $3 \leq n \leq 14$ и $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(n-1)$ . . . . .	72
6.1	Распони графова $B_2$ и $B_4$ за $5 \leq n \leq 27$ . . . . .	84
A.1	Најмање сопствене вредности, индекси и распони повезаних графова реда $2 \leq n \leq 5$ . . . . .	89
A.2	Најмање сопствене вредности, индекси и распони повезаних бицикличних графова реда 6 . . . . .	92

*„Природа је о́громна књи́џа у којој је на́писана наука. Она је стално отворена  
п̀ред нашим очима, али је човек не може разумети́ уколико претходно не  
научи језик и слова којим је на́писана. А на́писана је она језиком ма̀тематике.“*

— Галилео Галилеј —



# Глава 1

## Увод

Графови представљају свеprisутне моделе, како природних структура, тако и структура које је креирао човек. Они се могу користити за представљање различитих врста релација и динамичких процеса у физици, хемији, биологији, економији, социолошким мрежама. Немогуће је утврдити када су људи почели да користе дијаграме, које данас називамо графовима, за моделирање различитих система из реалног живота. Математичари су, међутим, тек пре неколико векова почели да се баве њима, тако да је теорија графова релативно млада наука. Leonhard Euler је 1736. године објавио рад „*Седам мостова Кониџберџа*“\*, који се сматра првим радом у историји теорије графова. Као посебна математичка дисциплина теорија графова је заснована 1936. године када је Denes König објавио књигу „*Теорија коначних и бесконачних графова*“ † и тада почињу прва већа истраживања у овој теорији. Свој интензивни развој, велику популарност и примену, теорија графова је доживела са повећањем употребе рачунара, у другој половини двадесетог века. Од помоћног дијаграма за сликовит опис проблема, граф постаје један од основних математичких појмова.

Пре неколико деценија, математичари су увидели могућност да се резултати линеарне алгебре, која укључује теорију матрица, искористе у теорији графова и њеним применама. Тада, увођењем нових начина резоновања, дошло је до настанка спектралне теорије графова, која се данас сматра посебном математичком теоријом. Особине графа данас се изучавају помоћу сопствених вредности, односно спектра матрице придружене графу, као и њених сопствених вектора и сопствених потпростора. Показано је да спектар графа даје мноштво информација о структури графа, што је довело до његове велике примене, почев од примене у хемији, биологији, медицини, па све до примене у економији, операционим истраживањима, електротехници и све присутније примене у информатици. Најзначајнији резултати ове теорије сумирани су у монографијама [10, 11, 13].

---

\*Seven Bridges of Königsberg

†Theorie der endlichen und unendlichen Graphen

Једна од интересантних тема у спектралној теорији графова је изучавање графова са екстремалним (максималним или минималним) индексом, екстремалном најмањом карактеристичном вредношћу или максималним распоном<sup>‡</sup> међу графовима посматране класе. Графове са поменутих особинама називамо екстремалним графовима.

Проблем одређивања екстремалних графова увели су Collatz и Sinogovitz 1957. године [8] бавећи се проблемом индекса стабала. Lovasz и Pelikan [28] су, затим, показали да међу стаблима са фиксираним бројем чворова највећи индекс има звезда, а најмањи индекс има пут. До данас је познато много резултата о графовима који су екстремални у смислу индекса. Одређени су, на пример, графови са максималним индексом међу повезаним графовима [3], међу графовима са фиксираним бројем грана [36], бицикличним графовима фиксираног обима [48] као и графови са минималним индексом у разним класама графова [34, 46, 47]. У вези са најмањом карактеристичном вредношћу још увек није објављено много резултата. Истраживања се углавном свде на одређивање графа чија је најмања карактеристична вредност минимална у одређеној класи. Први радови на ову тему се појављују 2008. године. Резултати су добијени за уницикличне графове [16], компленте стабала [17], бицикличне графове [33], кактусе [32], графове са артикулационим чворовима [43], итд. Ова дисертација се највећим делом бави графовима који су екстремални у смислу минималне најмање карактеристичне вредности у одређеним класама, тако да су неки од поменутих резултата садржани у дисертацији. Поред тога, приказани су и резултати о графовима који имају максимални распон у неким класама графова. Дисертација се састоји из шест глава и додатка.

Прва глава је уводног карактера. У њој је представљен кратак историјат спектралне теорије графова као и мотивација за рад са екстремалним графовима.

У другој глави ове дисертације уведени су основни појмови и карактеристике графова, полинома и матрица и дефинисан је појам спектра графа и његове особине. Наведене су леме које су затим коришћене у доказима резултата осталих поглавља.

У трећој глави су представљени резултати у вези са структуром графа који има минималну најмању карактеристичну вредност у класи повезаних графова фиксираног реда и величине. Ова глава је инспирисана радовима чији су аутори Bell, Цветковић, Rowlinson и Симић [4, 5] а који су фундаментални за ову тематiku. Такође, представљени су резултати које је А. Sawikowska [37] добила бавећи се сличном тематиком. На крају поглавља, посебна пажња је посвећена екстремалним бипартитним графовима поменутих класа, базираним на резултатима рада [31].

Четврта глава дисертације се бави екстремалним графовима у класама повезаних графова са малим цикломатичним бројем. Добијени су јединствени

---

<sup>‡</sup>Распон графа се дефинише као разлика између највеће и најмање карактеристичне вредности графа.

графови који имају минималну најмању карактеристичну вредност међу уницикличним и бицикличним графовима а затим је извршено уопштење резултата на све  $c$ -цикличне графове за вредности  $1 \leq c \leq 5$ . Ово поглавље се ослања на радове [16, 31, 33], при чему су у неким резултатима технике доказивања измењене.

У петој глави, која садржи резултате радова [2] и [32] представљени су екстремални графови у класи кактуса. Наиме, међу свим кактусима фиксираних реда са фиксираним бројем контура описана је структура кактуса са максималним индексом, кактуса са минималном најмањом сопственом вредношћу и кактуса са максималним распоном. Неки резултати су затим проширени на класу свих кактуса фиксираних реда. Показано је да добијени кактуси имају облик свежња.

Шеста глава је базирана на радовима [1, 6, 12, 16, 31, 32, 33] и бави се графовима који су екстремални у смислу максималног распона. Овај проблем је решен у класама повезаних уницикличних и бицикличних графова, као и у класама трицикличних, тетрацикличних и пентацикличних графова довољно великог реда. Како је проблем одређивања максималног распона у блиској вези са проблемом одређивања максималног индекса и минималне најмање карактеристичне вредности у датој класи графова, у овом поглављу су коришћени резултати претходних поглавља.

Додатак А ове дисертације садржи слике свих повезаних графова са мање од шест чворова и табелу њихових индекса, најмањих карактеристичних вредности и распона. Такође, приказани су и сви повезани бициклични графови са шест чворова и њихови индекси, најмање карактеристичне вредности и распони. Неке од ових вредности коришћене су у доказима резултата у претходним главама.

У додатку Б, на крају докторске дисертације, на енглеском језику су укратко сумирани сви претходно приказани резултати.

Најважнији допринос аутора у овој дисертацији огледа се у следећим резултатима:

- карактеризација графова чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи повезаних бипартитних графова фиксираних реда и величине (секција 3.2, теореме 4 и 5, према резултатима рада [31]);
- карактеризација графова чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи повезаних бицикличних графова (секција 4.2, према резултатима рада [33]);
- карактеризација графова чија је карактеристична вредност минимална у класи повезаних графова са малим цикломатичним бројем (секција 4.3, према резултатима рада [31]);
- карактеризација графова чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи кактуса фиксираних реда са фиксираним бројем контура (секција 5.1, према резултатима рада [32]);

- карактеризација графова чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи кактуса фиксираног реда (секција 5.2, према резултатима рада [32]);
- карактеризација графова чији је распон максималан у класи кактуса фиксираног реда са фиксираним бројем контура (секција 5.1, према резултатима рада [2]);
- карактеризација графова чији је распон максималан у класама повезаних графова са малим бројем контура (глава 6, према резултатима рада [1]).

## Глава 2

# Спектар графа

Граф  $G$  се може дефинисати као уређени пар  $(V, E)$ , где је  $V$  коначан непразан скуп елемената који се називају *чворови* графа, а  $E$  скуп двочланих подскупова скупа  $V$  који се називају *гране* графа  $G$ . Овако дефинисан граф је коначан, неоријентисан, без петљи и вишеструких грана и називамо га простим графом. Граф се назива нетривијалним ако садржи бар два чвора. За граф  $G$  кажемо да је реда  $n = |V|$  и величине  $m = |E|$ . Два чвора графа  $G$  су суседна уколико постоји грана која их спаја. Број чворова који су суседни са чвором  $v$  назива се *степен чвора  $v$*  и означава се  $d(v)$ . Граф реда  $n$  чији су сви чворови степена  $n - 1$  називамо *комплетним графом* и означавамо са  $K_n$ . Чворови степена 0 и 1 у графу називају се *изоловани* и *висећи* чворови, респективно. За произвољан чвор  $v$  графа  $G$ , са  $N(v)$  означавамо скуп свих суседа чвора  $v$  у графу  $G$ .

Графу  $G = (V, E)$  са скупом чворова  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  се на природан начин може придружити  $(0, 1)$ -матрица *суседства*  $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$  која се дефинише на следећи начин

$$(2.1) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } v_i v_j \in E \\ 0, & \text{ако } v_i v_j \notin E \end{cases}.$$

Пошто је  $A(G)$  симетрична матрица њене карактеристичне вредности су реални бројеви и називамо их *карактеристичним (сопственим) вредностима* (енгл. eigenvalues) графа  $G$ . Без губитка општости, карактеристичне вредности графа  $G$  можемо писати у нерастућем поретку као

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G).$$

Највећу сопствену вредност графа  $G$  означавамо са  $\rho(G)$  и називамо је *индексом* или *спектралним радијусом* графа  $G$  (енгл. index, spectral radius). Најмању сопствену вредност графа  $G$  означавамо са  $\lambda(G)$ . *Распон графа* (енгл. spread) представља разлику између највеће и најмање карактеристичне вредности графа и означава се са  $s(G) = \rho(G) - \lambda(G)$ . Скуп свих карактеристичних вредности графа називамо *спектром* графа (енгл. spectrum).

*Карактеристични полином* графа  $G$  (енгл. eigenpolynomial) се дефинише као  $\det(\lambda I - A(G))$  и означава се  $\phi(G, \lambda)$ .

Повезан граф  $C_n$  са  $n$  чворова код кога су сви чворови степена 2 називамо *контуром* дужине  $n$  (енгл. cycle). Повезани графови који не садрже контуре су *стабла* (енгл. trees) и означавамо их са  $T_n$ , где је  $n$  број чворова стабла. Стабло са  $n$  чворова код кога је један чвор степена  $n - 1$  а сви остали чворови степена 1 називамо *звездом* (енгл. star), у ознаци  $S_{1,n-1}$ . Чвор степена  $n - 1$  назива се *центар звезде*. Повезан граф  $P_n$  са  $n$  чворова који не садржи контуре и у коме ниједан чвор није степена већег од 2 називамо *пућем* (енгл. path).

**Лема 1** ([11]). *Сектор пућа  $P_n$  се састоји из бројева облика  $2 \cos \frac{\pi}{n+1} k$  где је  $k = 1, \dots, n$ .*

Повезан граф  $G$  је *биартитан* ако се његови чворови могу поделити у два дисјунктна скупа  $U$  и  $V$  тако да свака грана у графу  $G$  повезује чвор из скупа  $U$  са чвором из скупа  $V$ . Бипартитан граф  $G$  је *комплетан биартитан* (енгл. complete bipartite) ако је сваки чвор из скупа  $U$  суседан са сваким чвором из скупа  $V$ . Комплетан бипартитан граф означавамо са  $K_{p,q}$ , где је  $p$  број елемената скупа  $U$  а  $q$  број елемената скупа  $V$ . Звезда  $S_{1,q}$  је такође комплетан бипартитан граф  $K_{1,q}$ . Граф  $G = G_1 \nabla G_2$  је *комплетан производ* (енгл. join) два дисјунктна графа  $G_1$  и  $G_2$  ако важи  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$  и  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E$ , где је  $E = \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ .

Нека је  $G$  неповезан граф са компонентама повезаности  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , које можемо посматрати и као самосталне графове. Нека су  $A_1, A_2, \dots, A_k$  матрице суседства редом графова  $G_1, G_2, \dots, G_k$ . Тада је матрица суседства графа  $G$  облика

$$A(G) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix}.$$

Очигледно, карактеристични полином графа  $G$  је

$$(2.2) \quad \phi(G, \lambda) = \phi(G_1, \lambda) \cdot \phi(G_2, \lambda) \cdot \dots \cdot \phi(G_k, \lambda),$$

одакле закључујемо да се спектар графа  $G$  добија обједињавањем спектра његових компоненти повезаности  $G_1, G_2, \dots, G_k$ .

Нека је  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  вектор колоне у  $\mathbb{R}^n$  и  $G$  граф са чворовима  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Тада се  $X$  може посматрати као функција дефинисана на скупу чворова графа  $G$  која произвољни чвор  $v_i$  пресликава у елемент  $x_i = X(v_i)$ . Кажемо да је  $x_i$  вредност чвора  $v_i$  дата функцијом  $X$ . Може се показати да је

$$(2.3) \quad X^T A(G) X = 2 \sum_{v_i v_j \in E(G)} x_i x_j$$

и да је  $\lambda$  карактеристична вредност графа  $G$  која одговара карактеристичном вектору  $X$  ако и само ако је  $X \neq 0$  и

$$(2.4) \quad \lambda x_i = \sum_{v_i v_j \in E(G)} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Једначине (2.4) називају се  $(\lambda, X)$ -карактеристичне једначине графа  $G$ .

Такође, за произвољни јединични вектор  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  испуњена је неједнакост

$$\lambda(G) \leq X^T A(G) X.$$

Једнакост се постиже ако и само ако је  $X$  карактеристични вектор матрице  $A(G)$  који одговара најмањој карактеристичној вредности  $\lambda(G)$  (видети [13]). Стога,

$$(2.5) \quad \lambda(G) = \min_{\|X\|=1} X^T A(G) X = \min_{\|X\|=1} 2 \sum_{v_i v_j \in E(G)} x_i x_j.$$

Слично,

$$(2.6) \quad \rho(G) = \max_{\|X\|=1} X^T A(G) X = \max_{\|X\|=1} 2 \sum_{v_i v_j \in E(G)} x_i x_j.$$

Спектрални радијус повезаног графа је проста карактеристична вредност и постоји јединствени карактеристични вектор који јој одговара и чије су све координате позитивне. Овај карактеристични вектор се назива *Перонов вектор* графа  $G$ .

**Лема 2** ([44]). *Нека је  $G$  произвољан граф реда  $n$  и  $X$  јединични вектор из  $\mathbb{R}^n$ . Ако је  $\rho(G) = X^T A(G) X$ , тада је  $A(G) X = \rho(G) X$ .*

**Лема 3** ([44]). *Нека је  $G$  повезан граф реда  $n$  и  $\rho(G)$  његов спектрални радијус. Нека су  $u, v$  два чвора графа  $G$  и  $d(v)$  степењен чвора  $v$ . Претпоставимо да  $v_1, v_2, \dots, v_s \in N(v) \setminus N(u)$  ( $1 \leq s \leq d(v)$ ) и да је  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  Перонов вектор графа  $G$ , где координате  $x_i$  одговара чвору  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Нека је  $G^*$  граф добијен из графа  $G$  уклањањем грана  $uv_i$  и додавањем грана  $vv_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Ако је  $x_v \leq x_u$ , тада је  $\rho(G) < \rho(G^*)$ .*

*Доказ.* Приметимо да је

$$X^T (A(G^*) - A(G)) X = 2 \sum_{i=1}^s x_i (x_u - x_v) \geq 0.$$

Сада је на основу (2.6)

$$(2.7) \quad \rho(G^*) = \max_{\|Y\|=1} Y^T A(G^*) Y \geq X^T A(G^*) X \geq X^T A(G) X = \rho(G),$$

односно  $\rho(G) \leq \rho(G^*)$ . Да бисмо доказали теорему претпоставимо супротно, тј.  $\rho(G^*) = \rho(G)$ . Тада у релацији (2.7) свуда важе једнакости и

$$\rho(G^*) = X^T A(G^*) X.$$

На основу леме 2 следи да је  $A(G^*)X = \rho(G^*)X$ , па добијамо

$$(2.8) \quad \rho(G^*)x_v = (A(G^*)X)_v = \sum_{v_i \in N_{G^*}(v)} x_i.$$

Такође, како је  $A(G)X = \rho(G)X$ , онда је

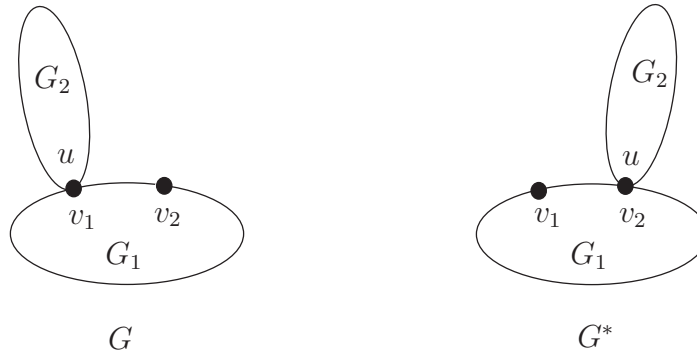
$$(2.9) \quad \rho(G)x_v = (A(G)X)_v = \sum_{v_i \in N_G(v)} x_i = \sum_{v_i \in N_{G^*}(v)} x_i + \sum_{i=1}^s x_i.$$

Пошто је  $X$  Перонов вектор графа  $G$  све његове координате су позитивне, па је и  $\sum_{i=1}^s x_i > 0$ . Из (2.8) и (2.9) сада добијамо

$$\rho(G^*)x_v < \rho(G)x_v.$$

Одавде је  $\rho(G^*) < \rho(G)$ , што је немогуће.  $\square$

Нека су  $G_1$  и  $G_2$  два различита повезана графа и нека су  $u$  и  $v$  њихови чворови, при чему  $u \in V(G_1)$  и  $v \in V(G_2)$ . За граф  $G$  кажемо да представља коалесценцију (енгл. coalescence) коренских графова  $G_1$  и  $G_2$ , и пишемо  $G = G_1(u) \cdot G_2(v)$ , уколико је  $G$  добијен из графова  $G_1$  и  $G_2$  преклапањем њихових корена  $u$  и  $v$ .



Слика 2.1. Графови  $G$  и  $G^*$

**Лема 4** ([16]). Нека су  $G_1$  и  $G_2$  два различита нејиривијална повезана графа и  $v_1, v_2 \in V(G_1)$ ,  $u \in V(G_2)$ . Нека је  $G = G_1(v_1) \cdot G_2(u)$  и  $G^* = G_1(v_2) \cdot G_2(u)$  (слика 2.1). Ако је  $X$  карактеристични вектор који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(G)$  и  $|x_{v_1}| \leq |x_{v_2}|$ , тада је

$$\lambda(G^*) \leq \lambda(G).$$

Једнакост је испуњена ако и само ако је  $X$  карактеристични вектор који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(G^*)$ ,  $x_{v_1} = x_{v_2}$  и  $\sum_{w \in N_{G_2}(u)} x_w = 0$ .



*Доказ.* Претпоставимо да је  $X$  јединични вектор и да је  $x_{v_2} \geq 0$ . Нека је  $\alpha = \sum_{w \in N_{G_2}(u)} x_w$ . Нека је даље  $E_1 = \{v_1 w \in E(G) \mid w \in N_{G_2}(u)\}$  и  $E_2 = \{v_2 w \in E(G^*) \mid w \in N_{G_2}(u)\}$ . Размотримо следећа два случаја, означавајући чвор  $v_i$  краће са  $i$ .

1°  $x_{v_1} \geq 0$

Када је  $\alpha \leq 0$ , добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda(G^*) &\leq \frac{1}{2}X^T A(G^*)X = \sum_{ij \in E(G^*)} x_i x_j = \sum_{ij \in E(G^*) \setminus E_2} x_i x_j + \sum_{ij \in E_2} x_i x_j \\ &= \sum_{ij \in E(G^*) \setminus E_2} x_i x_j + x_{v_2} \alpha \leq \sum_{ij \in E(G) \setminus E_1} x_i x_j + x_{v_1} \alpha \\ &= \sum_{ij \in E(G) \setminus E_1} x_i x_j + \sum_{ij \in E_1} x_i x_j = \sum_{ij \in E(G)} x_i x_j \\ &= \frac{1}{2}X^T A(G)X = \frac{1}{2}\lambda(G). \end{aligned}$$

Ако је  $\lambda(G^*) = \lambda(G)$ , тада је  $X$  такође карактеристични вектор графа  $G^*$  који одговара најмањој карактеристичној вредности  $\lambda(G^*)$ . Разматрањем једнакости (2.4) за  $\lambda(G^*)$  и вектор  $X$ , за произвољни чвор из  $N_{G_2}(u)$  и за чвор  $v_2$ , добијамо да је  $x_{v_1} = x_{v_2}$  и  $\alpha = 0$ , респективно. Да су дати услови довољни за једнакост  $\lambda(G^*) = \lambda(G)$  лако се проверава коришћењем горњих неједнакости.

Ако је  $\alpha > 0$ , са  $X^*$  означимо вектор који се добија из вектора  $X$  заменом сваке координате  $x_w$  са  $-x_w$  за  $w \in V(G_2) \setminus \{u\}$ , док остале координате остају непромењене. Сада имамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda(G^*) &\leq \frac{1}{2}(X^*)^T A(G^*)X^* = \sum_{ij \in E(G^*)} x_i^* x_j^* \\ &= \sum_{ij \in E(G^*) \setminus (E_2 \cup E(G_2 - u))} x_i^* x_j^* + \sum_{ij \in E_2} x_i^* x_j^* + \sum_{ij \in E(G_2 - u)} x_i^* x_j^*. \end{aligned}$$

Како је

$$\sum_{ij \in E_2} x_i^* x_j^* = x_{v_2} \cdot (-\alpha) \leq x_{v_1} \cdot \alpha = \sum_{ij \in E_1} x_i x_j$$

и

$$\sum_{ij \in E(G_2 - u)} x_i^* x_j^* = \sum_{ij \in E(G_2 - u)} x_i x_j,$$

добијамо

$$\frac{1}{2}\lambda(G^*) \leq \sum_{ij \in E(G)} x_i x_j = \frac{1}{2}X^T A(G)X = \frac{1}{2}\lambda(G).$$

Ако је  $\lambda(G^*) = \lambda(G)$ , онда је  $X^*$  карактеристични вектор графа  $G^*$  који одговара  $\lambda(G^*)$ . Разматрањем једнакости (2.4) за  $\lambda(G^*)$  и  $X^*$  за чвор  $v_2$ , добијамо да је  $\alpha = 0$ , што је немогуће. Дакле, важи да је  $\lambda(G^*) < \lambda(G)$ .

2°  $x_{v_1} < 0$

Ако је  $\alpha \leq 0$  ( $\alpha > 0$ ) доказ је веома сличан као у случају 1° за  $\alpha \leq 0$  ( $\alpha > 0$ ). У оба случаја се показује да једнакост не може бити испуњена.  $\square$

За граф  $H = (V_1, E_1)$  за који важи  $V_1 \subseteq V$  и  $E_1 \subseteq E$  кажемо да је *подграф* графа  $G = (V, E)$  (енгл. subgraph). Граф  $H$  је *индуковани подграф* графа  $G$  (енгл. induced subgraph) ако скуп  $E_1$  садржи све гране из  $E$  које повезују чворове из скупа  $V_1$ .

**Лема 5** ([11]). *Нека су  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  карактеристичне вредности графа  $G$  и  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$  карактеристичне вредности његовог индукованог подграфа  $H$ . Тада важе неједнакости*

$$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Означимо са  $G - v$  граф који се добија из графа  $G$  уклањањем чвора  $v \in V(G)$ . Следеће резултате ћемо користити за налажење карактеристичних полинома графова.

**Лема 6** ([38]). *Нека је  $v$  чвор графа  $G$  и  $\mathcal{C}(v)$  скуп свих контура у  $G$  које садрже чвор  $v$ . Тада важи*

$$\phi(G, \lambda) = \lambda \phi(G - v, \lambda) - \sum_{uv \in E(G)} \phi(G - u - v, \lambda) - 2 \sum_{Z \in \mathcal{C}(v)} \phi(G - V(Z), \lambda),$$

где је  $G - V(Z)$  граф добијен од графа  $G$ , уклањањем свих чворова који припадају скупу  $Z$ .

**Лема 7** ([38]). *Нека су  $H$  и  $G$  два коренска графа са коренима  $v_1$  и  $v_2$ , ресективно. Нека је  $H \cdot G$  коалесценција графова  $H$  и  $G$ . Карактеристични полином коалесценције  $H \cdot G$  задовољава релацију*

$$\begin{aligned} \phi(H \cdot G, \lambda) &= \phi(H - v_1, \lambda) \phi(G, \lambda) + \phi(H, \lambda) \phi(G - v_2, \lambda) \\ &\quad - \lambda \phi(H - v_1, \lambda) \phi(G - v_2, \lambda). \end{aligned}$$

Означимо сада са  $G_{u,v}$  граф добијен из повезаног графа  $G$  поделом гране  $uv \in E(G)$ , односно додавањем новог чвора  $w$  и грана  $wu$  и  $wv$  у граф  $G - uv$ . Hoffman и Smith у раду [20] дефинишу *унутрашњи пут* графа  $G$  као шетњу  $v_0 v_1 \dots v_s$  ( $s \geq 1$ ) такву да су чворови  $v_0, v_1, \dots, v_s$  различити,  $d(v_0) > 2$ ,  $d(v_s) > 2$  и  $d(v_i) = 2$ , за свако  $0 < i < s$ . Овде је  $s$  дужина унутрашњег пута. Унутрашњи пут је затворен ако је  $v_0 = v_s$ . Они су добили следећи резултат.



Слика 2.2. Граф  $W_n$

**Лема 8** ([20]). Нека је  $uv$   $\bar{z}$ рана у  $\bar{y}$ овезаном  $\bar{z}$ рафу  $G$  који садржи  $n$  чворова.

- (i) Ако  $\bar{z}$ рана  $uv$  не  $\bar{y}$ рипада унутрашњем  $\bar{y}$ у $\bar{y}$ у  $G$  и  $G \neq C_n$ ,  $\bar{y}$ ада је  $\rho(G_{u,v}) > \rho(G)$ .
- (ii) Ако  $\bar{z}$ рана  $uv$   $\bar{y}$ рипада неком унутрашњем  $\bar{y}$ у $\bar{y}$ у  $G$  и  $G \neq W_n$ ,  $\bar{z}$ де је  $W_n$   $\bar{z}$ раф  $\bar{y}$ риказан на слици 2.2,  $\bar{y}$ ада је  $\rho(G_{u,v}) < \rho(G)$ .

**Лема 9.** Нека је  $G$   $\bar{y}$ овезан коренски  $\bar{z}$ раф са најмање два чвора и кореном  $v$ . Ако су  $A$  и  $B$   $\bar{z}$ рафови са слике 2.3,  $\bar{y}$ ада је:

- (i)  $\rho(A) < \rho(B)$ ,
- (ii)  $\lambda(A) \geq \lambda(B)$ ,
- (iii)  $s(A) < s(B)$ .

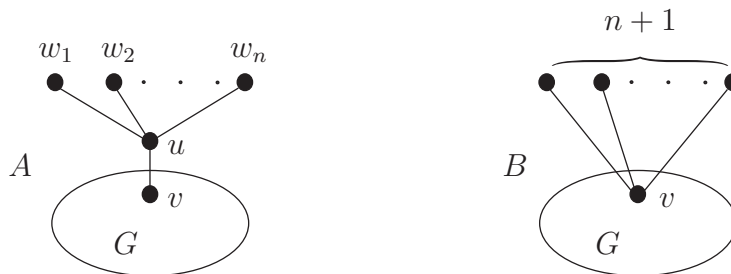
*Доказ.* Нека је  $G$  повезан коренски граф са најмање два чвора и кореном  $v$ .

(i) Означимо са  $u$  централни чвор звезде  $S_{1,n+1}$ , а са  $w_1, \dots, w_n$  и  $v$  њене чворове степена 1 (слика 2.3). Такође, означимо са  $v_1, \dots, v_s$  суседе чвора  $v$  у графу  $G$ . Нека је  $X$  Перонов вектор графа  $A$  са слике 2.3, а  $x_u$  и  $x_v$  његове координате које одговарају чворовима  $u$  и  $v$ , редом.

Ако је  $x_u \geq x_v$  означимо са  $G^*$  граф добијен из графа  $G$  уклањањем грана  $vv_i$  и додавањем грана  $uv_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ). Ако је пак  $x_u < x_v$ , нека је  $G^*$  граф добијен из графа  $G$  уклањањем грана  $uw_j$  и додавањем грана  $vw_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). У оба случаја добијени граф  $G^*$  је граф  $B$  са слике 2.3 и на основу леме 3 важи да је  $\rho(A) < \rho(B)$ .

(ii) Нека је  $H_1 = S_{1,n+1}$ ,  $H_2 = S_{1,n}$  и  $G_1$  граф индукован скупом чворова  $V(G) \cup \{u\}$ . Нека је даље  $X$  карактеристични вектор графа  $A$  са слике 2.3, који одговара сопственој вредности  $\lambda(G)$ , а  $x_u$  и  $x_v$  његове координате које одговарају редом чворовима  $u$  и  $v$ .

Ако је  $|x_u| \geq |x_v|$  граф  $A$  можемо посматрати као коалесценцију графова  $H_1(v)$  и  $G(v)$ , тј.  $A = H_1(v) \cdot G(v)$ . Нека је  $G^* = H_1(u) \cdot G(v)$ . Ако је пак  $|x_u| < |x_v|$ , граф  $A$  можемо посматрати као коалесценцију  $A = H_2(u) \cdot G_1(u)$ . Нека је сада  $G^* = H_2(u) \cdot G_1(v)$ . У оба случаја добијени граф  $G^*$  је граф  $B$  са слике 2.3 и на основу леме 4 је  $\lambda(A) \geq \lambda(B)$ .



Слика 2.3. Графови  $A$  и  $B$

(iii) Директном применом неједнакости (i) и (ii) долазимо до закључка да за графове  $A$  и  $B$  са слике 2.3 важи  $s(A) < s(B)$ .  $\square$

Неједнакости (i) и (ii) из претходне леме доказали су Симић [39], односно Fan, Wang и Gao [16], респективно. У њиховим доказима коришћена је другачија техника него у доказима представљеним у овој тези.

Као последицу леме 9 добијамо следећу лему.

**Лема 10.** Нека је  $G$  нећривијалан ѡвезан зраф,  $T_k$  сѡабло реда  $k$  и  $S_{1,k-1}$  звезда реда  $k$  са центром  $w$ . Нека је  $G_1 = G(u) \cdot T_k(v)$  и  $G_2 = G(u) \cdot S_{1,k-1}(w)$ , за ѡпроизвољне чворове  $u \in V(G)$  и  $v \in V(T_k)$ . Ако је  $T_k \neq S_{1,k-1}$ , ѡада је:

$$(i) \rho(G_1) < \rho(G_2),$$

$$(ii) \lambda(G_1) \geq \lambda(G_2),$$

$$(iii) s(G_1) < s(G_2).$$

Дефинишимо сада, у скупу чворова  $V$  графа  $G$ , бинарну релацију еквиваленције  $\sim$  на следећи начин: чворови  $u$  и  $v$  су еквивалентни ако и само ако имају исте суседе. Нека је  $V/\sim = \{V_1, V_2, \dots, V_r\}$  одговарајући количник скуп. Подскупови  $V_1, V_2, \dots, V_r$  (карактеристични подскупови графа  $G$ ) имају следећу особину: свака два чвора из истог подскупа су несуседна, а свака два подскупа су комплетно суседна или комплетно несуседна у графу  $G$ .

Индуковани подграф  $G'$  добијен избором по једног чвора из сваког карактеристичног подскупа назива се *канонички зраф* (енгл. canonical graph) графа  $G$ .

Нека је даље  $\eta(G)$  алгебарска вишеструкост нуле у спектру графа  $G$ , а  $\bar{\eta}(G)$  број од нуле различитих сопствених вредности графа  $G$ , рачунајући и њихове алгебарске вишеструкости. Очигледно,  $\eta(G) + \bar{\eta}(G) = n$ , где је  $n$  ред графа  $G$ .

**Лема 11** ([41, 42]). Ако је  $G$  зраф и  $G'$  његов канонички зраф, ѡада је  $\bar{\eta}(G) = \bar{\eta}(G')$ , ѡј. зрафови  $G$  и  $G'$  имају исти број ненула карактеристичних вредности.

## Глава 3

# О графовима чија је најмања карактеристична вредност минимална

У спектралној теорији графова проучавање индекса графа је важна и интересантна тема. Постоји много резултата у литератури који се тичу индекса простих графова. Проучавани су графови са максималним индексом у одређеним класама графова, затим графови са минималним индексом, поредак графова према њиховим индексима, примена индекса графа у хемији, рачунарству, економији и другим областима науке, итд.

Једнако интересантна тема јесте изучавање најмање карактеристичне вредности графа. За бипартитне графове, неке резултате у вези са индексом графа можемо пренети и на најмању карактеристичну вредност. Наиме, за сваки бипартитан граф  $G$  важи  $\lambda(G) = -\rho(G)$ . Много мање је, међутим, познато у вези са најмањом карактеристичном вредношћу осталих графова. Знамо да најмања карактеристична вредност графа није позитивна вредност. Она је једнака нули једино код графова који се састоје само од изолованих чворова. У супротном, код графова који садрже бар једну грану ова вредност је мања или једнака  $-1$ . То се може закључити на основу леме 5 имајући на уму да такав граф садржи пут  $P_2$  као индуковани подграф. За комплетне графове важи да им је најмања карактеристична вредност једнака  $-1$ , као и за неповезане графове чије су све компоненте комплетни графови. Код свих осталих графова ова вредност је мања или једнака  $-\sqrt{2}$  пошто они садрже граф  $S_{1,2}$  као индуковани подграф. Графови чија је најмања карактеристична вредност једнака  $-2$  детаљно су проучавани у монографији [14] чији су аутори Цветковић, Rowlinson и Симић.

У вези са најмањом карактеристичном вредношћу графова највише резултата је добијено о горњим и доњим границама ове вредности. Још 1985.

године, Constantine [9] доказује да за граф  $G$  реда  $n$  важи неједнакост

$$-\sqrt{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \leq \lambda(G),$$

при чему је једнакост испуњена ако и само ако је  $G$  комплетан бипартитан граф  $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ . Затим, Powers [35] објављује још једну доњу границу

$$-\sqrt{m} \leq \lambda(G),$$

где је  $m$  величина графа  $G$ . Касније су добијене још неке границе за најмању карактеристичну вредност некомплетних повезаних графова реда  $n$ , као на пример

$$(3.1) \quad -\frac{n}{2} \leq \lambda(G) < -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4n - 12}{n - 1}} \right).$$

Поред наведених резултата, једна од важнијих тема у спектралној теорији графова јесте изучавање графова са максималним или минималним индексом, односно максималном или минималном најмањом карактеристичном вредношћу међу повезаним графовима одређене класе.

У овом поглављу приказани су резултати у вези са најмањом карактеристичном вредношћу графова фиксираних реда и величине. Наиме, описана је структура графова чија је најмања карактеристична вредност минимална у овој класи графова. Такође, одређени су јединствени графови са минималном најмањом карактеристичном вредношћу у класи бипартитних графова реда  $n$  и величине  $n + k$  ( $n > k + 4$ ) за  $0 \leq k \leq 4$ .

### 3.1 Структура екстремалних графова

Нека је  $G$  прост граф реда  $n$  и величине  $m$  и нека је  $X$  јединични сопствени вектор графа  $G$  који одговара најмањој карактеристичној вредности  $\lambda(G)$ . Означимо са  $G'$  граф добијен из графа  $G$  померањем једне гране у позицију где претходно није било гране, а са  $A(G')$  његову матрицу суседства. На основу неједнакости (2.5) добијамо

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \lambda(G') - \lambda(G) &= \min_{\|Y\|=1} Y^T A(G') Y - X^T A(G) X \\ &\leq X^T (A(G') - A(G)) X. \end{aligned}$$

**Лема 12** ([4]). *Нека је  $G'$  граф добијен из графа  $G$  ротацијом гране  $rs$  (око чвора  $r$ ) у позицију  $rt$  где претходно није било гране. Тада је:*

- (i)  $\lambda(G') < \lambda(G)$  ако је  $x_r < 0$  и  $x_s \leq x_t$ , или  $x_r = 0$  и  $x_s \neq x_t$ , или  $x_r > 0$  и  $x_s \geq x_t$ ;
- (ii)  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$  ако је  $x_r = 0$  и  $x_s = x_t$ .

*Доказ.* Из релације (3.2) добијамо

$$(3.3) \quad \lambda(G') - \lambda(G) \leq X^T(A(G') - A(G))X = 2x_r(x_t - x_s).$$

У зависности од вредности координате  $x_r$  размотримо следећа два случаја.

$$1^\circ \quad x_r = 0$$

У овом случају је  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$ . Штавише, уколико је  $x_s \neq x_t$ , онда је  $\lambda(G') < \lambda(G)$ . У супротном, за  $\lambda(G') = \lambda(G) = \lambda$  из неједнакости (3.3) видимо да је  $X^T A(G')X = X^T A(G)X$ , па  $X$  мора бити карактеристични вектор графа  $G'$  који одговара карактеристичној вредности  $\lambda$ . Одатле, за граф  $G'$  (као и за граф  $G$ ) важи  $\lambda x_r = \sum_{vr \in E(G')} x_v$ . Ово је немогуће када је  $x_s \neq x_t$  пошто је чвор  $r$  у графу  $G$  суседан са чвором  $s$ , а у графу  $G'$  суседан са чвором  $t$ , док су сви остали суседи чвора  $r$  исти.

$$2^\circ \quad x_r \neq 0$$

У овом случају, без губитка општости, можемо претпоставити да је  $x_r > 0$  (у супротном, заменимо  $x_r$  са  $-x_r$ ). Ако је  $x_t < x_s$  онда из (3.3) следи да је  $\lambda(G') < \lambda(G)$ . Претпоставимо зато да је  $x_t = x_s$ . Тада је  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$ . Уколико је  $\lambda(G') = \lambda(G) = \lambda$ , онда, као и у случају  $1^\circ$ , вектор  $X$  мора бити карактеристични вектор графа  $G'$  који одговара карактеристичној вредности  $\lambda$ . Отуда, једнакост  $\lambda x_s = \sum_{us \in E(G)} x_u$  важи за графове  $G$  и  $G'$ . Ово није могуће пошто су чворови  $s$  и  $r$  суседни у графу  $G$ , али не и у графу  $G'$ .  $\square$

**Лема 13** ([4]). *Нека је  $G'$  граф добијен из графа  $G$  премешићањем зране  $ab$  у позицију  $cd$  где претходно није било зране, при чему је  $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ . Тада важи:*

- (i)  $\lambda(G') < \lambda(G)$  ако је  $x_c x_d < x_a x_b$ ;
- (ii)  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$  ако је  $x_c x_d = x_a x_b$ . Једнакост се постиже једино када је  $x_a = x_b = x_c = x_d = 0$ .

*Доказ.* Из релације (3.2) добијамо

$$\lambda(G') - \lambda(G) \leq X^T(A(G') - A(G))X = 2(x_c x_d - x_a x_b).$$

Одавде следи да је  $\lambda(G') < \lambda(G)$  када је  $x_c x_d < x_a x_b$ .

Претпоставимо сада да је  $x_c x_d = x_a x_b$ . Тада је, очигледно,  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$ . Слично као и у претходном доказу, ако је  $\lambda(G') = \lambda(G) = \lambda$  онда вектор  $X$  мора бити карактеристични вектор графа  $G'$  који одговара карактеристичној вредности  $\lambda$ . Сада видимо да све карактеристичне једначине  $\lambda x_u = \sum_{vu \in E(G)} x_v$  важе и за граф  $G$  и за граф  $G'$  једино у случају када је  $x_a = x_b = x_c = x_d = 0$ .  $\square$

Претходне леме подсећају на лему 3 која описује промене индекса графа након ротација грана у њему. У лемама 12 (ii) и 13 (ii), међутим, није утврђено да ли се може јавити строга неједнакост.

У наставку, са  $G$  ће бити означен нетривијалан повезан граф реда  $n$  и величине  $m$  чија је најмања карактеристична вредност минимална у овој класи графова. Граф  $G$  се краће зове екстремални граф и биће доказано да он има строго одређену структуру. С тим у вези, прво се мора дефинисати појам степенастог графа.

Граф  $H$  се назива *сплејенасни граф* (енгл. nested split graph) ако његови чворови могу бити уређени тако да  $jq \in E(H)$  условљава  $ip \in E(H)$ , за свако  $i \leq j$  и  $p \leq q$ . Оваквом графу одговара степенаста матрица суседства. Структура екстремалног графа  $G$  је описана у следећој теорему.

**Теорема 1** ([4]). *Нека је  $G$  повезан граф чија је најмања карактеристична вредност  $\lambda(G)$  минимална међу повезаним графовима реда  $n$  и величине  $m$  ( $m < \binom{n}{2}$ ). Тада је  $G$*

- (i) *бијартијалан граф, или*
- (ii) *комплетан производ два сплејенасна графа (од којих нису оба поједино повезана).*

Показује се да је структура графа  $G$  условљена знаком координата карактеристичног вектора који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(G)$ . Доказ ове теореме заснован је на лемама које су дате у наставку.

Нека је  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  сопствени вектор који одговара сопственој вредности  $\lambda(G)$ . Дефинишимо поделу скупа чворова  $V(G)$  индуковану поделом координата вектора  $X$  на негативне, нула и позитивне, на следећи начин:

$$\begin{aligned} V^-(X) &= \{u \in V(G) \mid x_u < 0\} - \text{скуп негативних чворова,} \\ V^0(X) &= \{u \in V(G) \mid x_u = 0\} - \text{скуп нула чворова,} \\ V^+(X) &= \{u \in V(G) \mid x_u > 0\} - \text{скуп позитивних чворова.} \end{aligned}$$

**Лема 14** ([4]). *Ако је  $V^0(X) \neq \emptyset$  онда је  $d(u) = n - 1$  за сваки чвор  $u \in V^0(X)$ .*

*Доказ.* Претпоставимо супротно, тј. да постоји чвор  $r$  из скупа  $V^0(X)$  такав да је  $d(r) < n - 1$ . Нека је  $S_r = \{s \in V(G) \mid sr \in E(G)\}$  скуп свих његових суседа у графу  $G$  и  $T_r$  скуп свих чворова који нису суседни са  $r$  у графу  $G$ , тј.  $T_r = \{t \in V(G) \mid tr \notin E(G), t \neq r\}$ . Приметимо да је  $S_r \neq \emptyset$ , пошто је граф  $G$  повезан и нетривијалан. Такође,  $T_r \neq \emptyset$ . Нека су  $s \in S_r$  и  $t \in T_r$  два произвољна чвора. Ротирајмо сада грану  $rs$  у графу  $G$  у позицију  $rt$  и тако добијени граф означимо са  $G'$ .

Претпоставимо прво, да је граф  $G'$  повезан за сваки избор чворова  $s$  и  $t$ . Ако је  $x_s \neq x_t$ , за неко  $s$  и  $t$ , онда применом леме 12 (i) добијамо да је  $\lambda(G') < \lambda(G)$ , што је у контрадикцији са избором графа  $G$ . Следи да је  $x_s = x_t$  за сваки избор чворова  $s$  и  $t$ . Стога,  $x_v = c$  за произвољан чвор



$v \neq r$  графа  $G$ , где је  $c$  реална константа. Сада је  $\lambda(G)x_r = \sum_{v \in S_r} x_v = d(r)c$ . Пошто је  $d(r) \neq 0$  и  $x_r = 0$ , закључујемо да је  $c = 0$  и отуда  $X = 0$ , што је немогуће.

Сада претпоставимо да је за неки избор чворова  $s$  и  $t$  граф  $G'$  неповезан. Тада грана  $rs$  мора бити мост у графу  $G$ , а чворови  $s$  и  $t$  се налазе у различитим компонентама  $G_s$  и  $G_t$  графа  $G'$ , респективно. Претпоставимо да постоји чвор  $t' \in G_s$  ( $t' \neq s$ ). Тада  $t' \in T_r$ , јер у супротном случају би у графу  $G$  постојао пут од чвора  $r$  до чвора  $s$  који избегава мост  $rs$ . Ако је  $x_s \neq x_{t'}$ , тада добијамо контрадикцију применом горњих аргумената на чвор  $t'$  уместо на чвор  $t$ . Приметимо да је одговарајући граф  $G'$  у овом случају повезан. Зато нека је  $x_u = x_s$  за сваки чвор  $u \in V(G_s)$ . Помоћу  $(\lambda, X)$ -карактеристичних једначина чвора  $s$ , примењених у графу  $G$ , добијамо  $\lambda(G)x_s = (d(s) - 1)x_s$ , одакле је  $x_s = 0$ . Због тога  $G_t$  мора да садржи чвор  $u$  такав да је  $x_u \neq 0$ . Означимо сада са  $G''$  граф добијен из графа  $G$  ротацијом гране  $sr$  у позицију  $su$ . Граф  $G''$  је повезан и применом леме 12 (i) долазимо до контрадикције  $\lambda(G'') < \lambda(G)$ .

Ако поменути чвор  $t'$  не постоји, тада је чвор  $s$  степена 1 и на основу карактеристичних једначина за чвор  $s$  закључујемо да је  $x_s = x_r = 0$ . Према томе, граф  $G_t$  садржи чвор  $u$  за који је  $x_u \neq 0$ . И у овом случају, са  $G''$  означимо граф добијен из графа  $G$  ротацијом гране  $sr$  у позицију  $su$ . Граф  $G''$  је повезан, па на основу леме 12 (i) добијамо  $\lambda(G'') < \lambda(G)$ , што је немогуће.  $\square$

**Лема 15** ([4]). *Нека је  $G$  повезан граф чија је најмања карактеристична вредност минимална међу повезаним графовима реда  $n$  и величине  $m < \binom{n}{2}$ . Тада је  $\lambda(G)$  јединствена карактеристична вредност графа  $G$ .*

*Доказ.* Претпоставимо да карактеристична вредност  $\lambda(G)$  има вишеструкост бар 2. Тада за сваки чвор  $u \in V(G)$  постоји карактеристични вектор  $X$  чија је  $u$ -та координата једнака нули. Дакле,  $u \in V^0(X)$  и  $V^0(X) \neq \emptyset$ . Пошто  $G$  није комплетан граф, можемо изабрати чвор  $u$  тако да је  $d(u) < n - 1$ , што је у контрадикцији са лемом 14.  $\square$

Као директна последица претходне леме изводи се закључак да ако  $G$  није комплетан граф онда је партиција скупа  $V(G)$ , која је индукована знаком координата произвољног карактеристичног вектора који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(G)$ , јединствена (приметимо да се само улога позитивних и негативних чворова може променити). Сходно томе, претпоставимо да је  $m < \binom{n}{2}$  и  $V(G) = V^+ \cup V^0 \cup V^-$ .

Означимо са  $\langle U \rangle$  подграф графа  $G$  индукован чворовима скупа  $U \subseteq V(G)$ , а са  $G \nabla H$  комплетан производ графова  $G$  и  $H$ . Коришћењем леме 14 може се описати структура графа  $G$ . Ако је  $V^0 \neq \emptyset$ , онда је  $K = \langle V^0 \rangle$  комплетан граф и  $G = K \nabla H$ , где је  $H = \langle V^+ \cup V^- \rangle$ .

Фокусирајмо се, у наставку, на граф  $H$ . Нека је  $H^- = \langle V^- \rangle$  и  $H^+ = \langle V^+ \rangle$ . Подграфови  $H^-$  и  $H^+$  графа  $G$  постоје, пошто су сопствени простори за  $\lambda(G)$

и  $\rho(G)$  међусобно ортогонални, а сопствени простор који одговара индексу  $\rho(G)$  је разапет позитивним карактеристичним вектором. Скуп  $V^0$  може бити и празан.

**Лема 16** ([4]). *Графови  $H^+$  и  $H^-$  су сипейенасити графови.*

*Доказ.* Нека је  $V^+ = \{1, 2, \dots, k\}$  при чему важи  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ . Треба доказати да ако граф  $G$  садржи грану  $jq$ , онда он садржи и грану  $ip$  за свако  $1 \leq i \leq j \leq k$  и  $1 \leq p \leq q \leq k$ .

Претпоставимо супротно, тј. нека  $jq \in E(G)$  и  $ip \notin E(G)$  за  $1 \leq i \leq j \leq k$  и  $1 \leq p \leq q \leq k$ . У графу  $G$  преместимо грану  $jq$  у позицију  $ip$  и нови граф означимо са  $G'$ . Како је најмања карактеристична вредност графа  $G$  минимална у посматраној класи, онда важе следеће неједнакости

$$0 \leq \lambda(G') - \lambda(G) \leq 2(x_i x_p - x_j x_q) = 2(x_i - x_j)x_p + 2(x_p - x_q)x_j \leq 0.$$

Одавде закључујемо да је  $x_i = x_j$  и  $x_p = x_q$ , као и да је  $X$  карактеристични вектор који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(G') = \lambda(G)$ . Ако поставимо карактеристичне једначине за чвор  $q$  у графовима  $G$  и  $G'$ , очигледно се долази до контрадикције, пошто је чвор  $q$  изгубио једног суседа у графу  $G'$ . Дакле,  $H^+$  је степенасти граф. Аналогно се доказује и да је граф  $H^-$  степенасти граф.  $\square$

**Лема 17** ([4]). *Ако скупи  $V^+$  или  $V^-$  индукује грану  $ij$ , онда граф  $G$  садржи грану  $pq$  за све  $p \in V^-$  и  $q \in V^+$ .*

*Доказ.* Претпоставимо да неки од скупова  $V^+$  или  $V^-$  индукује грану  $ij$  и да не важи тврђење леме. Тада грану  $ij$  можемо да преместимо у позицију  $pq$  ( $p \in V^-$ ,  $q \in V^+$ ). Како је  $x_i x_j > 0$ , а  $x_p x_q < 0$ , применом леме 13 (i) долазимо до контрадикције.  $\square$

На основу леме 17 долази се до следећег закључка.

**Лема 18** ([4]). *Ако бар један од графова  $H^+$  или  $H^-$  није пошйуно нејовезан, онда је  $H = H^+ \nabla H^-$ . У суйрошном,  $H$  је бийаршйиан граф (не обавезно комплешан бийаршйиан).*

У вези са структуром графа  $G$  важе и следећи резултати.

**Лема 19** ([4]). *Ако је  $V^0 \neq \emptyset$ , онда је  $H = H^+ \nabla H^-$ .*

*Доказ.* Претпоставимо да је  $H \neq H^+ \nabla H^-$ . Изаберимо четири чвора у графу  $G$  на следећи начин:  $a \in V^0$ ,  $b \in V^+ \cup V^-$ ,  $c \in V^+$  и  $d \in V^-$ , при чему су чворови  $c$  и  $d$  несуседни. На основу леме 14, чворови  $a$  и  $b$  су суседни у графу  $G$  и грана  $ab$  није мост. Штавише, важи да је  $x_a x_b > x_c x_d$ . Приметимо још да чвор  $b$  не може бити степена 1, јер се у том случају добија да  $b \in V^0$ . Ако сада грану  $ab$  заменимо граном  $cd$ , добићемо повезани граф  $G'$ . Применом леме 13 видимо да је  $\lambda(G') < \lambda(G)$ , што доводи до контрадикције. Дакле, сваки чвор графа  $H^+$  суседан је са сваким чвором графа  $H^-$ .  $\square$

Из лема 14 и 19 следи да ако је  $V^0 \neq \emptyset$ , онда посматрани граф  $G$  има облик  $K \nabla L$ , где су  $K$  и  $L$  степенести графови, чворови из  $K$  су ненегативни, а чворови из  $L$  су непозитивни. Дакле,  $V_K = V^+ \cup X$  и  $V_L = V^- \cup Y$ , где је  $X \cup Y$  произвољна партиција скупа  $V^0$ . Ово запажање у комбинацији са лемом 18 даје доказ теореме 1.

Теорема 1 је једна од кључних теорема у изучавању минималне најмање карактеристичне вредности неких класа графова. Она нам даје информације о структури посматраног графа  $G$ , где је  $G$  повезани граф. Ако, међутим, у обзир узмемо и неповезане графове са  $n$  чворова и  $m$  грана, и даље ћемо моћи да искористимо теорему 1. Наиме, показује се да екстремални граф садржи највише једну нетривијалну компоненту повезаности у којој се управо и постиже минимална најмања карактеристична вредност. На ову компоненту можемо применити теорему 1 и остале резултате који се односе на повезане графове. До овог закључка се долази на основу поступка описаног у наставку.

Нека је  $G$  произвољни граф реда  $n$  и величине  $m$  чије су нетривијалне компоненте повезаности  $G_1, G_2, \dots, G_k$  ( $k \geq 1$ ). На основу релације (2.2) видимо да је најмања карактеристична вредност графа  $G$  у ствари најмања карактеристична вредност неке од компоненти  $G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Како су графови  $G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) подграфови графа  $G$ , на основу леме 5, за произвољне две различите компоненте  $G_i$  и  $G_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, k\}$  и  $k \geq 2$ ) важи

$$(3.4) \quad \lambda(G_i \cdot G_j) \leq \min\{\lambda(G_i), \lambda(G_j)\} = \lambda(G_i \cup G_j).$$

Ако сада  $G_i \cup G_j$  у графу  $G$  заменимо са  $(G_i \cdot G_j) \cup K_1$  добијамо граф  $G'$ , који остаје у истој класи, а за који је  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$ . Ако исти поступак применимо на граф  $G'$ , а затим поступак понављамо све док не добијемо граф са само једном нетривијалном компонентом, на крају ћемо добити граф  $G^*$  са особином  $\lambda(G^*) \leq \lambda(G)$ . Према томе, потрага за екстремалним графом се може сузити на повезане графове, што можемо написати прецизније у виду тврђења које следи.

Нека је  $H(n, m)$  скуп свих графова реда  $n$  и величине  $m$ . Дефинишимо сада величине

$$f(n, m) = \min\{\lambda(G) \mid G \in H(n, m)\},$$

и

$$g(n, m) = \min\{\lambda(G) \mid G \in H(n, m) \text{ и } G \text{ је повезан}\}.$$

**Лема 20** ([4]).  $f(n, m) = \min\{g(k, m) \mid k \leq n \text{ и скупи } H(k, m) \text{ садржи бар један повезан граф}\}.$

Дакле, теорема 1 се у комбинацији са лемом 20 може применити и на неповезане графове. Ова теорема доста поједностављује проблем налажења екстремалног графа у класи графова фиксираних реда и величине. Она нас доводи до две поткласе: класе бипартитних графова и класе графова који

представљају комплетан производ два степенаста графа, са којима је даље лакше радити. У томе се, управо, и огледа важност ове теореме.

До сличног резултата је дошла и А. Sawikowska [37] у својој докторској дисертацији, изучавајући графове реда  $n$  и величине  $m$ , не обавезно повезане.

**Теорема 2** ([37]). *Нека је  $G$  граф чија је најмања карактеристична вредност  $\lambda(G)$  минимална међу графовима реда  $n$  и величине  $m$ . Тада је  $G$*

- (i) *бијартићан граф код кога неки чворови могу бити изоловани, или*
- (ii) *комплетан производ два графа.*

*Доказ.* Нека је  $G$  граф чија је најмања карактеристична вредност  $\lambda(G)$  минимална међу графовима реда  $n$  и величине  $m$  и нека је  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  карактеристични вектор који одговара најмањој сопственој вредности  $\lambda(G)$ . Без губитка општости, претпоставимо да је

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Како је  $A(G) \geq 0$  а  $\lambda(G) < 0$ , да би важило  $A(G)X = \lambda(G)X$ , карактеристични вектор  $X$  мора имати и негативне и позитивне координате. Због тога је  $x_1 < 0$ , а  $x_n > 0$ . Нека је  $p$  природан број такав да су све координате  $x_i < 0$  за  $i \leq p$ , а све координате  $x_i \geq 0$  за  $i > p$ . То значи да сопствени вектор  $X$  можемо представити у облику

$$X = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix},$$

где је  $x^{(1)}$  вектор димензије  $p$  чије су све координате негативне, а  $x^{(2)}$  вектор димензије  $n - p$  чије су све координате ненегативне.

Слично, матрицу суседства  $A(G)$  можемо написати као

$$A(G) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix},$$

где је  $A_{11}$  квадратна матрица димензије  $p$ , а  $A_{22}$  квадратна матрица димензије  $n - p$ . Размотримо сада производ  $X^T A(G) X$ . Наиме,

$$(3.5) \quad X^T A(G) X = x^{(1)T} A_{11} x^{(1)} + x^{(2)T} A_{22} x^{(2)} + 2x^{(1)T} A_{12} x^{(2)}.$$

На основу (2.5), видимо да је  $\lambda(G) = \min_{\|Y\|=1} Y^T A(G) Y = X^T A(G) X$ . Како су сви сабирци у прва два израза производа (3.5) ненегативни, матрице  $A_{11}$  и  $A_{22}$  морају бити 0-матрице или сви елементи матрице  $A_{12}$  морају бити јединице. Заиста, уколико матрица  $A_{12}$  (а тиме и  $A_{12}^T$ ) садржи нуле, онда на њихово место можемо преместити симетрично постављене јединице из  $A_{11}$  или  $A_{22}$ . На тај начин добијамо нову матрицу  $A' = A(G')$  која представља матрицу суседства одговарајућег графа  $G'$ , при чему је граф  $G'$  такође граф реда  $n$  и

величине  $m$ . Сада, производ  $X^T A(G')X$  има мању вредност од производа (3.5). Дакле  $\lambda(G') < \lambda(G)$ , што је у контрадикцији са избором графа  $G$ .

Ако су матрице  $A_{11}$  и  $A_{22}$  0-матрице, граф  $G$  је бипартитан, при чему неки његови чворови могу бити изоловани. Ако су, пак, сви елементи матрице  $A_{12}$  јединице онда граф  $G$  представља комплетан производ два графа, чија је структура одређена матрицама  $A_{11}$  и  $A_{22}$ .  $\square$

**Лема 21** ([37]). *Нека је  $G$  граф чија је најмања карактеристична вредност  $\lambda(G)$  минимална међу графовима реда  $n$  и величине  $m$ , за  $m \leq \frac{n^2}{4}$ ,  $m = fg$  ( $f, g \in \mathbb{N}$ ),  $f + g \leq n$ . Тада се граф  $G$  састоји од комплетног бипартитног графа и (могуће) неких изолованих чорова.*

Видимо да су у теорему 1 и теорему 2 добијени слични резултати. Значај теореме 2 се огледа у томе што она обухвата графове реда  $n$  и величине  $m$ , без ограничења за број грана и повезаност графа. У случају (ii), међутим, не добијамо никакву информацију о структури графова  $H_1$  и  $H_2$  који чине комплетан производ  $G = H_1 \nabla H_2$ . Са друге стране, теорема 1 даје прецизније информације о структури траженог графа  $G$ , мада је број грана ограничен ( $m < \binom{n}{2}$ ) и тек у комбинацији са лемом 20 се може применити на неповезане графове.

## 3.2 Структура екстремалних бипартитних графова

Нека је  $G$  повезан бипартитан граф, који садржи црне и беле чворове. Са  $U$  означимо скуп црних чворова, а са  $V$  скуп белих чворова графа  $G$ . Граф  $G$  називамо *ланчаним графом* (енгл. double nested graph или chain graph) уколико постоје партиције

$$U = U_1 \dot{\cup} U_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} U_h \quad \text{и} \quad V = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_h,$$

такве да је скуп суседа за сваки чвор из  $U_i$  скуп  $V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_{h-i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ).

Означимо са  $G = D(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$  ланчани граф кога је  $|U_i| = m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ) и  $|V_i| = n_i$  ( $i = 1, 2, \dots, h$ ). Параметар  $h$  још називамо и *висином* ланчаног графа  $G$ . Очигледно, за ланчани граф  $G$  важе једнакости

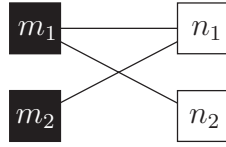
$$(3.6) \quad n(G) = m_1 + m_2 + \dots + m_h + n_1 + n_2 + \dots + n_h,$$

$$(3.7) \quad m(G) = m_1(n_1 + \dots + n_h) + m_2(n_1 + \dots + n_{h-1}) + \dots + m_h n_1.$$

Специјално, ако је висина  $h = 1$ , тада је  $G$  комплетан бипартитни граф  $K_{m_1, n_1}$  и његов карактеристични полином је

$$(3.8) \quad \phi(G, \lambda) = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - m(G)).$$

За  $h = 2$ , граф  $G = D(m_1, m_2; n_1, n_2)$  је приказан на слици 3.1, а његов канонички граф је  $G' = D(1, 1; 1, 1)$ . На основу леме 11 важи  $\bar{\eta}(G) = \bar{\eta}(G') = 4$ , па је  $\eta(G) = n - 4$ . Нека је  $X = (x_1, \dots, x_{m_1}, y_1, \dots, y_{n_1}, z_1, \dots, z_{m_2}, t_1, \dots, t_{n_2})$  карактеристични вектор који одговара ненула карактеристичној вредности графа  $G$ . Координате овог вектора одговарају редом чворовима  $v_1, \dots, v_{m_1}, u_1, \dots, u_{n_1}, v_{m_1+1}, \dots, v_{m_1+m_2}, u_{n_1+1}, \dots, u_{n_1+n_2}$ .



Слика 3.1. Ланчани граф висине 1

Користећи  $(\lambda, X)$ -карактеристичне једначине (2.4) графа  $G$ , закључујемо да је  $x_1 = \dots = x_{m_1}$ ,  $y_1 = \dots = y_{n_1}$ ,  $z_1 = \dots = z_{m_2}$  и  $t_1 = \dots = t_{n_2}$  и координате  $x_1, y_1, z_1$  и  $t_1$  задовољавају једнакости

$$\begin{aligned}\lambda x_1 &= n_1 y_1 + n_2 t_1, \\ \lambda y_1 &= m_1 x_1 + m_2 z_1, \\ \lambda z_1 &= n_1 y_1, \\ \lambda t_1 &= m_1 x_1.\end{aligned}$$

Добијени хомогени систем једначина има нетривијална решења (по  $x_1, y_1, z_1$  и  $t_1$ ) ако и само ако је његова детерминанта једнака нули, односно

$$(3.9) \quad \begin{vmatrix} \lambda & -n_1 & 0 & -n_2 \\ -m_1 & \lambda & -m_2 & 0 \\ 0 & -n_1 & \lambda & 0 \\ -m_1 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

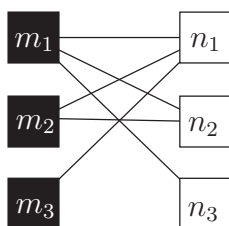
Дакле, ненула сопствене вредности графа  $G$  задовољавају једначину (3.9), а развојем последње детерминанте добијамо карактеристични полином

$$(3.10) \quad \phi(G, \lambda) = \lambda^{n-4}(\lambda^4 - m(G)\lambda^2 + m_1 m_2 n_1 n_2).$$

За  $h = 3$  граф  $G = D(m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3)$  је приказан на слици 3.2. Користећи поступак који је сличан поступку у случају  $h = 2$ , добија се да је карактеристични полином графа  $G$

$$(3.11) \quad \begin{aligned}\phi(G, \lambda) &= \lambda^{n-6}(\lambda^6 - m(G)\lambda^4 + (m_2 m_3 n_1 n_2 + m_1 m_2 (n_1 + n_2) n_3 \\ &\quad + m_1 m_3 n_1 (n_2 + n_3))\lambda^2 - m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 n_3).\end{aligned}$$

Показује се да ланчани графови имају исту улогу у скупу бипартитних графова (у односу на индекс), као степенасти графови у скупу небипартитних графова (у односу на најмању карактеристичну вредност).



Слика 3.2. Ланчани граф висине 2

**Теорема 3** ([5]). *Ако је  $G$   $\bar{z}$ граф за који је  $\lambda(G)$  минимално (односно  $\rho(G)$  максимално) међу свим  $\bar{y}$ овезаним бипартићним  $\bar{z}$ графовима реда  $n$  и величине  $m$ , онда је  $G$  ланчани  $\bar{z}$ граф.*

Доказ претходне теореме је заснован на лема 3 и лемама које наводимо у наставку.

Познато је да за сваки бипартитни граф  $G$  важи да је  $\lambda(G) = -\rho(G)$ . Отуда, проблем минималне најмање карактеристичне вредности еквивалентан је са проблемом максималног индекса у овој класи графова, тако да ћемо се у наставку фокусирати на индексе одговарајућих графова.

Следећа лема је веома корисна када се сусретнемо са мостом у графу чији је индекс по претпоставци максималан. Нека су  $P = P_u$  и  $Q = Q_v$  два коренска графа са коренима  $u$  и  $v$ , а  $G$  граф добијен из уније  $P \dot{\cup} Q$  додавањем гране  $uv$ . Нека је  $G'$  граф формиран од коалесценције графова  $P_u$  и  $Q_v$  додавањем слободне гране на чвор добијен поистовећивањем чворова  $u$  и  $v$ .

**Лема 22** ([5]). *У складу са наведеним ознакама, ако су  $P$  и  $Q$  нећривијални  $\bar{y}$ овезани  $\bar{z}$ графови, онда важи да је  $\rho(G') > \rho(G)$ .*

*Доказ.* Нека је  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  Перонов вектор графа  $G$ . Без губитка општости можемо претпоставити да је  $x_u \leq x_v$ . Нека је  $N_P(u) = \{w_1, \dots, w_k\}$  скуп свих чворова суседних са чвором  $u$  у графу  $P$ . Како је  $P$  нетривијалан граф очигледно је  $N_P(u) \neq \emptyset$ . Граф  $G'$  можемо добити из графа  $G$  премештањем грана  $uw_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) у позиције  $vw_i$ . На основу леме 3 следи да је  $\rho(G) < \rho(G')$ .  $\square$

У наставку претпоставимо да граф  $G$  има максимални индекс у скупу повезаних бипартитних графова фиксираног реда и величине.

**Лема 23** ([5]). *Нека  $\bar{z}$ граф  $G$  задовољава наведене  $\bar{y}$ рећривоставке и нека је  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  Перонов вектор  $\bar{z}$ графа  $G$ . Ако су  $v$  и  $w$  чворови исте боје  $\bar{y}$ акви да је  $x_v \geq x_w$ , онда је  $d(v) \geq d(w)$ .*

*Доказ.* Претпоставимо супротно. Нека је  $x_v \geq x_w$  и  $d(v) < d(w)$ . Тада важи да је  $1 < d(w)$ , односно постоји чвор  $u \in U$  који је суседан са  $w$  а није суседан са  $v$ . Ако у графу  $G$  грану  $uw$  ротирамо у положај  $uv$ , на основу леме 3 добијамо граф  $G'$  за који је  $\rho(G) < \rho(G')$ . Ако је грана  $uw$  мост онда из

леме 22 видимо да је  $d(u) = 1$ . Дакле, граф  $G'$  је у сваком случају повезан. Долазимо до контрадикције са претпоставком да је  $\rho(G)$  максимално.  $\square$

Нека је у посматраном бипартитном графу  $G$  скуп белих чворова означен са  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  а скуп црних чворова са  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ , где је  $x_{u_1} \geq x_{u_2} \geq \dots \geq x_{u_p}$  и  $x_{v_1} \geq x_{v_2} \geq \dots \geq x_{v_q}$ . На основу претходне леме може се закључити да оваквом уређењу координата вектора  $X$  одговара исто уређење степена чворова у обе класе.

Следећа лема даје неке последице претходних лема.

**Лема 24** ([5]). *Нека граф  $G$  задовољава наведене претпоставке укључујући и оне које се односе на уређење чворова графа. Тада важи:*

- (i) чворови  $u_1$  и  $v_1$  су суседни;
- (ii) чвор  $u_1$  је суседан са свим чворовима из класе  $V$  и чвор  $v_1$  је суседан са свим чворовима из класе  $U$ ;
- (iii) ако је чвор  $u$  суседан са чвором  $v_k$ , онда је  $u$  суседан и са свим чворовима  $v_j$  за  $j < k$ . Слично, ако је чвор  $v$  суседан са чвором  $u_k$ , онда је  $v$  суседан и са свим чворовима  $u_j$  за  $j < k$ .

*Доказ.* Размотримо прво мостове у графу  $G$ . На основу леме 22 сви мостови у графу морају бити висеће гране (иначе бисмо дошли до контрадикције са максималношћу индекса  $\rho(G)$ ). Помоћу леме 3 закључујемо да су сви висећи чворови суседни са чвором  $w$  за који важи да је  $x_w$  максимално у карактеристичном вектору  $X$ . Без умањења општости, претпоставимо да је  $x_{u_1} \geq x_{v_1}$  и  $w = u_1$ . Следи да резултат важи ако је  $G$  стабло, тј.  $G$  је звезда. Претпоставимо даље да  $G$  није стабло.

(i) Да бисмо доказали ово тврђење претпоставимо супротно, тј. да чворови  $u_1$  и  $v_1$  нису суседни. Тада је  $v_1$  суседан са неким другим чвором  $u \in U$  и  $uv_1$  није мост. Сада можемо ротирати грану  $uv_1$  у положај  $u_1v_1$  и добити повезан бипартитан граф  $G'$ . На основу леме 3 добијамо да је  $\rho(G) < \rho(G')$ , што доводи до контрадикције.

(ii) Претпоставимо да је  $u \in U$  чвор који није суседан са  $v_1$ . На основу (i), закључујемо да је  $u \neq u_1$ ,  $uv_1$  није мост и чвор  $u$  је суседан са неким чвором  $v \in V$  ( $v \neq v_1$ ). Грану  $uv$  можемо ротирати у положај  $uv_1$  и добити контрадикцију као у случају (i). Слично, претпоставимо да је  $v \in V$  чвор који није суседан са  $u_1$ . Поново, на основу (i) важи да је  $v \neq v_1$ , грана  $vu_1$  није мост и чвор  $v$  је суседан са неким чвором  $u \in U$ . Ротација гране око чвора  $v$  доводи до контрадикције.

(iii) Претпоставимо да је чвор  $u$  суседан са неким чвором  $v_k \in V$  и истовремено није суседан са  $v_j$  за неко  $j < k$ . Из (ii) следи да је  $u \neq u_1$  и грана  $uv_k$  није мост. Према томе, грану  $uv_k$  можемо ротирати у положај  $uv_j$ , чиме



долазимо до контрадикције. Слично, претпоставимо да је чвор  $v$  суседан са неким чвором  $u_k \in U$  и истовремено није суседан са  $u_j$ , за неко  $j < k$ . У овом случају  $vu_k$  није мост, пошто је  $k > 1$ . Ротација гране  $vu_k$  у положај  $vu_j$  доводи до контрадикције.  $\square$

Доказ теореме 3 сада следи директно из леме 24 и дефиниције ланчаног графа.

У наставку, пажња ће бити посвећена повезаним бипартитним графовима са  $n$  чворова и  $n + k$  грана ( $k \geq 0$ ). Приметимо да су за  $k = -1$  у питању стабла, па је звезда  $S_{1,n-1}$  ( $K_{1,n-1}$ ) екстремални граф у овој класи графова (видети [15]). Имајући на уму теорему 3, биће одређен јединствени граф са минималном најмањом карактеристичном вредношћу међу свим повезаним бипартитним графовима реда  $n$  и величине  $n + k$ , где је  $0 \leq k \leq 4$  и  $n > k + 4$ .

Да бисмо формулисали и доказали главну теорему овог поглавља, неопходно је доказати следећу лему.

**Лема 25.** Нека су  $n_1, n_2, m_2, m_3$  и  $k$  природни бројеви и нека је  $n_1 \geq 2$ . Тада важи импликација

$$(n_1 - 1)(m_2 + m_3) + n_2 m_2 \leq k + 1 \Rightarrow n_1 + n_2 + m_2 + m_3 \leq k + 3.$$

*Доказ.* Користећи закон контрапозиције довољно је доказати импликацију

$$n_1 + n_2 + m_2 + m_3 > k + 3 \Rightarrow (n_1 - 1)(m_2 + m_3) + n_2 m_2 > k + 1.$$

Приметимо да је за свака два природна броја  $a, b \geq 1$  испуњена неједнакост

$$(3.12) \quad ab \geq a + b - 1.$$

Претпоставимо да је  $n_1 + n_2 + m_2 + m_3 > k + 3$ . Користећи неједнакост (3.12) добијамо да је

$$\begin{aligned} (n_1 - 1)(m_2 + m_3) + n_2 m_2 &\geq n_1 - 1 + m_2 + m_3 - 1 + n_2 + m_2 - 1 \\ &\geq n_1 + n_2 + m_2 + m_3 - 2 \\ &> k + 1, \end{aligned}$$

чиме је доказ леме комплетиран.  $\square$

**Теорема 4.** Нека је  $G$  граф који има максимални индекс  $\rho(G)$  међу свим повезаним бипартитним графовима реда  $n$  и величине  $n + k$  ( $k \geq 0, n > k + 4$ ). Граф  $G$  је ланчани граф  $D(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$  са следећим особинама:

- (i)  $h > 1$ ;
- (ii) тачно један од параметара  $m_1$  и  $n_1$  је једнак 1;
- (iii) ако за граф  $G$  важи да је  $h = 2$ , тада је  $G = D(1, 1; k + 2, n - (k + 4))$ ;
- (iv)  $h \neq 3$ .

*Доказ.* Са  $G$  означимо граф који има максимални индекс  $\rho(G)$  међу свим повезаним бипартитним графовима реда  $n$  и величине  $n + k$  ( $k \geq 0, n > k + 4$ ). На основу теореме 3 закључујемо да је  $G$  ланчани граф  $D(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$  ( $h \geq 1$ ).

(i) Да бисмо доказали ову особину претпоставимо супротно, тј. да је  $h = 1$ . Тада је  $G$  комплетан бипартитан граф  $K_{t, n-t}$  ( $2 \leq t \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ), при чему је

$$m = t(n - t) \geq 2(n - 2).$$

Одатле добијамо

$$k = m - n \geq n - 4 > k,$$

што је очигледно контрадикција.

(ii) Нека је  $G = D(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$  ( $h \geq 2$ ),  $m_1 \geq 2$  и  $n_1 \geq 2$ . На основу дефиниције ланчаног графа закључујемо да броју грана највише доприносе првих  $m_1$  белих и  $n_1$  црних чворова. Зато, користећи једнакост (3.7), видимо да су задовољене следеће релације

$$m(G) \geq m(D(2, m_1 + m_2 - 2, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h))$$

и

$$m(G) \geq m(D(m_1, \dots, m_h; 2, n_1 + n_2 - 2, \dots, n_h)).$$

Ако је  $h = 2$ , тада из претходних неједнакости и (3.7) имамо

$$m(G) \geq m(D(2, m_1 + m_2 - 2; 2, n_1 + n_2 - 2)) = 2n - 4.$$

Такође, користећи исте неједнакости и (3.7), за  $h \geq 3$  добијамо

$$\begin{aligned} m(G) &\geq m(D(2, m_1 + m_2 - 2, \dots, m_h; 2, n_1 + n_2 - 2, \dots, n_h)) \\ &= 2(n_1 + n_2 + \dots + n_h) + (m_1 + m_2 - 2)(n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1}) \\ &\quad + m_3(n_1 + n_2 + \dots + n_{h-2}) + \dots + m_h n_1 \\ &= (m_1 + m_2)(n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1}) + m_3(n_1 + n_2 + \dots + n_{h-2}) \\ &\quad + m_4(n_1 + \dots + n_{h-3}) + \dots + m_h n_1 + 2n_h \\ &\geq (m_1 + m_2)(n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1}) + m_3 + m_4 + \dots + m_h + 2n_h \\ &= 2n + (m_1 + m_2)(n_1 + \dots + n_{h-1}) - 2(m_1 + m_2 + n_1 + \dots + n_{h-1}). \end{aligned}$$

Пошто је  $m_1 + m_2 \geq 3$  и  $n_1 + \dots + n_{h-1} \geq 3$  следи да је

$$(m_1 + m_2)(n_1 + \dots + n_{h-1}) - 2(m_1 + m_2 + n_1 + \dots + n_{h-1}) \geq -3.$$

Одатле је  $m(G) > 2n - 4$ .

У оба случаја добијамо контрадикцију  $k = m - n \geq n - 4 > k$ , што значи да је најмање један од параметара  $m_1$  и  $n_1$  једнак 1.

Претпоставимо сада да је  $m_1 = 1$  и  $n_1 = 1$ , односно  $G = D(1, m_2, \dots, m_h; 1, n_2, \dots, n_h)$ . Ако је  $h = 2$ , тада је граф  $G$  стабло, што је немогуће. За  $h \geq 3$ , на основу леме 3 имамо

$$\rho(G) < \rho(D(m_2 + 1, m_3, \dots, m_h + n_h; 1, n_2, \dots, n_{h-1}))$$

или

$$\rho(G) < \rho(D(1, m_2, \dots, m_{h-1}; n_2 + 1, n_3, \dots, m_h + n_h)),$$

што је у контрадикцији са чињеницом да  $\rho(G)$  мора бити максимално. На овај начин смо доказали да је тачно један од параметара  $m_1$  и  $n_1$  једнак 1.

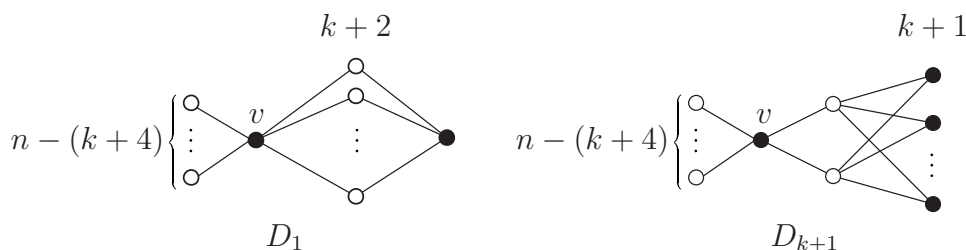
(iii) Нека је  $G = D(m_1, m_2; n_1, n_2)$ . Користећи особину (ii) претпоставимо да је  $m_1 = 1$  и  $n_1 > 1$ . Дакле,  $G = D(1, m_2; n_1, n_2)$ . Тада на основу (3.6) и (3.7) имамо  $n = m_2 + n_1 + n_2 + 1$  и  $m = n_1 + n_2 + n_1 m_2$ . Како је  $m = n + k$ , важи следећа једнакост

$$(3.13) \quad m_2(n_1 - 1) = k + 1.$$

Ако је  $k = 0$ , онда је  $m_2 = 1$  и  $n_1 = 2$  и граф  $D(1, 1; 2, n - 4)$  је једини ланчани граф за  $h = 2$ .

Претпоставимо даље да је  $k \geq 1$ . Ако је  $m_2 = 1$  тада из (3.13) добијамо  $n_1 = k + 2$  и  $n_2 = n - (k + 4)$ . Слично, ако је  $m_2 = k + 1$  тада је  $n_1 = 2$  и  $n_2 = n - (k + 4)$ . Нека је  $D_1 = D(1, 1; k + 2, n - (k + 4))$  и  $D_{k+1} = D(1, k + 1; 2, n - (k + 4))$  (слика 3.3). Упоредимо карактеристичне полиноме ова два графа. Из (3.10) добијамо

$$\begin{aligned} \phi(D_1, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - m(D_1)\lambda^2 + (k+2)(n - (k+4))), \\ \phi(D_{k+1}, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - m(D_{k+1})\lambda^2 + 2(k+1)(n - (k+4))). \end{aligned}$$



Слика 3.3. Ланчани графови  $D_1$  и  $D_{k+1}$

Дакле, за  $\lambda > 0$  важи  $\phi(D_1, \lambda) - \phi(D_{k+1}, \lambda) = -k(n - k - 4)\lambda^{n-4} < 0$ , па закључујемо да је  $\rho(D_{k+1}) < \rho(D_1)$ .

Ако је  $k + 1$  прост број, тада су графови  $D_1$  и  $D_{k+1}$  једини ланчани графови и доказ је комплетиран.

Претпоставимо даље да је  $k + 1$  сложен број. Нека је  $m_2$  његов делилац такав да је  $1 < m_2 < k + 1$ . Тада је  $2 < n_1 < k + 2$ . Такође, видимо да важи

$$(3.14) \quad \begin{aligned} m_2 + n_1 < k + 3 &\Leftrightarrow m_2 + n_1 < m_2(n_1 - 1) + 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}m_2(3 - n_1) + \frac{1}{2}(n_1 - 1)(2 - m_2) < 1. \end{aligned}$$

Пошто је у (3.14) последња неједнакост очигледно испуњена, добијамо да је  $m_2 + n_1 < k + 3$ . Одатле је  $n_2 = n - 1 - m_2 - n_1 > n - k - 4$ . Нека је сада  $D_{m_2} = D(1, m_2; n_1, n - (m_2 + n_1 + 1))$ . Тада је на основу (3.10)

$$\phi(D_{m_2}, \lambda) = \lambda^{n-4}(\lambda^4 - m(D_{m_2})\lambda^2 + m_2 n_1 (n - (m_2 + n_1 + 1))).$$

Како за  $\lambda > 0$  важи

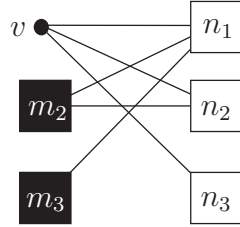
$$\begin{aligned}\phi(D_1, \lambda) - \phi(D_{m_2}, \lambda) &= \lambda^{n-4}((k+2)(n-k-4) - m_2 n_1 n_2) \\ &< \lambda^{n-4}((k+2)(n-k-4) - m_2 n_1 (n-k-4)) \\ &= -(m_2 - 1)(n-k-4)\lambda^{n-4} < 0,\end{aligned}$$

то је  $\rho(D_1) > \rho(D_{m_2})$ . Овим је доказ особине (iii) комплетиран.

(iv) Ако је  $G$  ланчани граф висине  $h = 3$ , тада је на основу особине (ii)  $G = D(1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3)$  где је  $n_1 \geq 2$ . Из једнакости (3.6) и (3.7) следи да параметри  $m_2, m_3, n_1$  и  $n_2$  задовољавају једнакост

$$(3.15) \quad (n_1 - 1)(m_2 + m_3) + n_2 m_2 = k + 1.$$

Користећи лему 25 закључујемо да  $n_1 + n_2 + m_2 + m_3 \leq k + 3$ . Отуда,  $n_3 = n - (n_1 + n_2 + m_2 + m_3 + 1) \geq n - (k + 4)$ .



Слика 3.4. Ланчани граф  $G = D(1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3)$

Посматрајмо граф  $G = D(1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3)$  са слике 3.4 као коалесценцију звезде  $H = S_{1, n-(k+4)}$  и графа  $G_1 = D(1, m_2, m_3; n_1, n_2, \bar{n}_3)$ , где је  $\bar{n}_3 = n_3 - n + k + 4$ . Приметимо да је  $\bar{n}_3 \geq 0$ ,  $|G_1| = k + 4$  и параметри графа  $G_1$  задовољавају особину (3.15). Такође, посматрајмо граф  $D_1 = D(1, 1; k+2, n-(k+4))$  (слика 3.3) као коалесценцију графова  $H = S_{1, n-(k+4)}$  и  $G_2 = K_{2, k+2}$ . На слици 3.4 и слици 3.3 са  $v$  је означен чвор добијен преклапањем корена графа  $H$  са коренима графова  $G_1$  и  $G_2$ , респективно. Дакле, како је  $G = H \cdot G_1$  и  $D_1 = H \cdot G_2$ , на основу леме 7, следи

$$(3.16) \quad \begin{aligned}\phi(G, \lambda) - \phi(D_1, \lambda) &= \lambda^{n-k-5}(\lambda(\phi(G_1, \lambda) - \phi(G_2, \lambda)) \\ &\quad - (n-k-4)(\phi(G_1 - v, \lambda) - \phi(G_2 - v, \lambda))).\end{aligned}$$

Користећи релације (3.10) и (3.11) видимо да је

$$\begin{aligned}\phi(G_1, \lambda) &= \lambda^{k-2}(\lambda^6 - m(G_1)\lambda^4 + (m_2 m_3 n_1 n_2 + m_2(n_1 + n_2)\bar{n}_3 \\ &\quad + m_3 n_1(n_2 + \bar{n}_3))\lambda^2 - m_2 m_3 n_1 n_2 \bar{n}_3)\end{aligned}$$

и

$$\phi(G_1 - v, \lambda) = \lambda^k(\lambda^4 - m(G_1 - v)\lambda^2 + m_2 n_1 n_2).$$

Слично, из (3.8) имамо

$$\phi(G_2, \lambda) = \phi(K_{2,k+2}\lambda) = \lambda^{k+2}(\lambda^2 - 2(k+2))$$

и

$$\phi(G_2 - v, \lambda) = \phi(K_{1,k+2}\lambda) = \lambda^{k+1}(\lambda^2 - (k+2)).$$

Одавде, помоћу (3.16) добијамо

$$\begin{aligned} \phi(G, \lambda) - \phi(D_1, \lambda) &= \lambda^{n-6}((m_2 m_3 n_1 n_2 + m_2(n_1 + n_2)\bar{n}_3 + m_3 n_1(n_2 + \bar{n}_3) \\ &+ (n - k - 4)(m(G_1 - v) - m(G_2 - v)))\lambda^2 - m_2 m_3 n_1 n_2 n_3). \end{aligned}$$

Како граф  $G$  садржи звезду  $S_{1,n_3}$  као индуковани подграф, онда на основу леме 5 важи  $\rho(G) > \sqrt{n_3}$ .

За вредност разлике  $\phi(G, \lambda) - \phi(D_1, \lambda)$  добијамо функцију која је растућа за позитивно  $\lambda$ . Према томе, за  $\lambda > \sqrt{n_3}$  имамо

$$\begin{aligned} \phi(G, \lambda) - \phi(D_1, \lambda) &> \phi(G, \sqrt{n_3}) - \phi(D_1, \sqrt{n_3}) = n_3^{\frac{n-4}{2}}(m_2(n_1 + n_2)\bar{n}_3 \\ &+ m_3 n_1(n_2 + \bar{n}_3) + (n - k - 4)(m(G_1 - v) - m(G_2 - v))) > 0. \end{aligned}$$

Одавде закључујемо да је  $\rho(G) < \rho(D_1)$ , што је у контрадикцији са чињеницом да  $\rho(G)$  мора бити максимално.  $\square$

**Теорема 5.** *Ако је  $0 \leq k \leq 4$ , тада је граф  $D(1, 1; k+2, n-k-4)$ , приказан на слици 3.3, јединствен граф са максималним индексом међу свим повезаним бијартићним графовима реда  $n$  и величине  $n+k$  ( $n > k+4$ ).*

*Доказ.* Нека је  $G$  граф са максималним индексом  $\rho(G)$  међу свим повезаним бијартићним графовима реда  $n$  и величине  $n+k$  ( $0 \leq k \leq 4$ ,  $n > k+4$ ). На основу теореме 3 закључујемо да је граф  $G$  ланчани граф  $D(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$ . Користећи особину (ii) теореме 4 видимо да је тачно један од параметара  $m_1$  и  $n_1$  једнак 1.

Ако је  $h > 3$ , тада је граф  $D_0 = D(1, 1, 1, 1; 2, 1, 1, 1)$  подграф графа  $G$  и долазимо до контрадикције

$$k = m(G) - n(G) \geq m(D_0) - n(D_0) = 5.$$

Тврђење теореме следи директно из теореме 4.  $\square$

У теореме 4 доказано је да за фиксирано  $k$  и довољно велико  $n$  максимални индекс, односно минималну најмању карактеристичну вредност, међу повезаним бијартићним графовима има или јединствени граф  $D_1$  (слика 3.3) или неки ланчани граф чија је висина већа од 3. Највероватније је да овај други случај није могућ. То је и доказано за  $k \leq 4$ , у теореме 5. За  $k \geq 5$  компјутерска израчунавања потврђују ову хипотезу али она још увек није доказана.

## Глава 4

# Графови са малим бројем контура и минималном најмањом карактеристичном вредношћу

Нека је  $G$  граф реда  $n$  и величине  $m$  са  $t$  компоненти повезаности. Број  $c = m - n + t$  назива се *цикломатични број* (енгл. cyclomatic number) графа  $G$ . Ако је  $G$  повезан граф, његов цикломатични број је  $c = m - n + 1$ . За граф са цикломатичним бројем  $c$  каже се да је  $c$ -*циклични граф*. Специјално, за  $c = 1, 2, 3, 4, 5$  ради се о уницикличним, бицикличним, трицикличним, тетрацикличним и пентацикличним графовима, респективно. Ако је  $G$  повезан граф за који је  $c = 0$ , онда је граф  $G$  стабло.

Карактеристика графова са малим цикломатичним бројем јесте да садрже мали број контура. Према томе, ови графови имају једноставнију структуру него графови чији је цикломатични број велики. Због те особине, за њих је испитан велики број спектралних инваријантни. Још 1987. године С. Симић објављује прве резултате у вези са спектралним радијусом уницикличних графова [39], а затим 1989. године и бицикличних графова [40]. Поред индекса, до данас су добијени резултати у вези са енергијом ових графова, главним карактеристичним вредностима, Лапласовим спектром, Лапласовим спектралним радијусом, Загреб индексом, Рандићевим индексом и многим другим карактеристикама ових графова [19, 23, 24, 25, 49]. Након једноставнијих класа, спектралне инваријанте и њихове особине се испитују и за сложеније класе графова, као што су трициклични, тетрациклични, а затим и сви повезани графови [3, 21, 29].

Основна тема овог поглавља је најмања карактеристична вредност графова са малим цикломатичним бројем. Наиме, прво ће бити представљено решење проблема минималне најмање карактеристичне вредности у класи уницикличних графова фиксираног реда. Истом тематиком бавили су се и Fan, Wang и Gao [16], али је овде приказана другачија техника за решавање овог проблема. Затим, иста тема ће бити разматрана у класи повезаних бицикличних графова са  $n$  чворова. Биће описана структура графа чија је

најмања карактеристична вредност минимална у овој класи и показано да је тај граф јединствен. На крају, проблем ће бити проширен на све повезане графове реда  $n$  и величине  $n+k$  за  $0 \leq k \leq 4$ . Описана је јединствена техника за одређивање екстремалног графа у свим поменутих класама графова. Под екстремалним графом сматраћемо повезани граф реда  $n$  и величине  $n+k$  чија је најмања карактеристична вредност минимална у посматраној класи графова, односно чији је индекс максималан уколико се ради о бипартитним графовима.

Да бисмо дошли до наведених резултата, у наставку ћемо користити следеће једноставно тврђење.

**Лема 26.** *Нека су  $n$  и  $k$  ненегативни цели бројеви такви да је  $0 \leq k \leq 4$  и  $n > k + 4$ . Тада за сваки природан број  $s$  такав да је  $2 \leq s \leq n - 2$  важи неједнакост*

$$s(n - s) > n + k.$$

*Доказ.* Неједнакост  $s(n - s) > n + k$  је еквивалентна са неједнакостју  $s^2 - ns + n + k < 0$ . Посматрајмо квадратну функцију  $f(s) = s^2 - ns + n + k$ . Ова функција има два позитивна корена

$$s_1 = \frac{n - \sqrt{n^2 - 4(n+k)}}{2} \quad \text{и} \quad s_2 = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4(n+k)}}{2},$$

при чему је  $s_1 < 2$ , а  $s_2 > n - 2$ . Због тога, за сваки природан број  $s$  такав да је  $2 \leq s \leq n - 2$  важи неједнакост  $f(s) = s^2 - ns + n + k < 0$ , чиме је лема доказана.  $\square$

Специјално, за  $k = 0$ , односно  $k = 1$  добијамо следећа тврђења.

**Последица 1.** *Нека је  $n$  природан број већи од 4. Тада за сваки природан број  $s$ , такав да је  $2 \leq s \leq n - 2$ , важи неједнакост  $s(n - s) > n$ .*

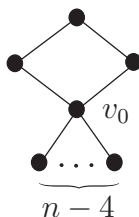
**Последица 2.** *Нека је  $n$  природан број већи од 5. Тада за сваки природан број  $s$ , такав да је  $2 \leq s \leq n - 2$ , важи неједнакост  $s(n - s) > n + 1$ .*

## 4.1 Унициклични графови фиксираних реда

Означимо са  $\mathcal{U}(n)$  класу повезаних уницикличних графова са  $n$  чворова. Графови ове класе су величине  $n$ . Класа  $\mathcal{U}(n)$  се може посматрати као унија две поткласе, класе повезаних бипартитних уницикличних графова са  $n$  чворова и класе повезаних небипартитних уницикличних графова са  $n$  чворова. Имајући у виду теорему 1, помоћу екстремалних графова ове две поткласе може се одредити екстремални граф у класи  $\mathcal{U}(n)$ , што ће у наставку и бити показано.

### 4.1.1 Бипартитни унициклични графови

Нека је са  $\mathcal{U}_1(n)$  означена класа повезаних бипартитних уницикличних графова са  $n$  чворова. С обзиром на то да је код бипартитних графова спектар симетричан, проблем налажења графа чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи  $\mathcal{U}_1(n)$  може се свести на проблем одређивања графа са максималним индексом у овој класи. На тај начин добијен је резултат приказан у следећој теорему.



Слика 4.1. Унициклични граф  $U_1$

**Теорема 6.** Нека је  $G$  повезан бипартитан унициклични граф са  $n$  ( $n > 3$ ) чворова. Тада је  $\rho(G) \leq \rho(U_1)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong U_1$  (слика 4.1).

*Доказ.* Претпоставимо да је граф  $G \in \mathcal{U}_1(n)$  граф са максималним индексом у посматраној класи. Нека је скуп чворова овог графа  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и нека је  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  Перонов вектор графа  $G$ , при чему координата  $x_i$  одговара чвору  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Прво ћемо доказати да се граф  $G$  састоји из једне контуре  $C_p$  и једног стабла  $T$  прикаченог за неки чвор  $v_0$  контуре  $C_p$ . У том циљу претпоставимо супротно. Нека постоје два различита чвора  $v_0$  и  $v_1$  контуре  $C_p$ , за које су прикачена стабла  $T_0$  и  $T_1$ , респективно. Означимо са  $z_1, \dots, z_s$  ( $s \geq 1$ ) чворове стабла  $T_0$  који су суседни са чвором  $v_0$ , а са  $w_1, w_2, \dots, w_t$  ( $t \geq 1$ ) чворове стабла  $T_1$  који су суседни са чвором  $v_1$ . Ако је  $x_0 \geq x_1$ , нека је

$$G^* = G - \{v_1 w_1, \dots, v_1 w_t\} + \{v_0 w_1, \dots, v_0 w_t\},$$

а ако је  $x_0 < x_1$ , нека је

$$G^* = G - \{v_0 z_1, \dots, v_0 z_s\} + \{v_1 z_1, \dots, v_1 z_s\}.$$

У оба случаја добијени граф  $G^*$  припада класи  $\mathcal{U}_1(n)$ . На основу леме 3, добијамо да је  $\rho(G^*) > \rho(G)$ , што је у супротности са избором графа  $G$ .

Пошто је  $G$  бипартитан граф, дужина  $p$  контуре  $C_p$  мора бити паран број. Сада ћемо показати да контура  $C_p$  садржи тачно 4 чвора. Претпоставимо супротно, тј. нека је  $p > 4$ . Са  $v_0, v_1, \dots, v_{p-1}$  означимо чворове контуре  $C_p$ . Очигледно  $G \neq W_n$  и  $v_0, v_1, \dots, v_{p-1}, v_0$  је затворен унутрашњи пут у графу  $G$ . Нека је

$$G^* = G - v_{p-2} v_{p-3} + v_0 v_{p-3}.$$



Тада  $G^* \in \mathcal{U}_1(n)$ . На основу лема 8 и 5 добијамо да је  $\rho(G^*) > \rho(G)$  што је немогуће, пошто је  $G$  граф са максималним индексом у посматраној класи. Одатле закључујемо да је  $p = 4$ .

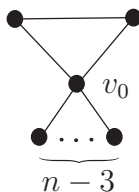
Овим је доказано да је  $G = C_4 \cdot T_{n-3}$ . Како је  $U_1 = C_4 \cdot S_{1,n-4}$ , онда на основу леме 10 следи да је граф  $U_1$  са слике 4.1 јединствен граф са максималним индексом у класи  $\mathcal{U}_1(n)$ .  $\square$

Коришћењем претходне теореме директно добијамо екстремални граф у класи бипартитних уницикличних графова фиксираниог реда.

**Теорема 7.** Нека је  $G$  повезан бипартитни унициклични граф са  $n$  ( $n > 3$ ) чворова чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи  $\mathcal{U}_1(n)$ . Тада је  $G \cong U_1$  (слика 4.1).

### 4.1.2 Небипартитни унициклични графови

Означимо са  $\mathcal{U}_2(n)$  класу повезаних уницикличних графова реда  $n$  који представљају комплетан производ два степенаста графа. Може се показати да је екстремални граф у овој класи граф са слике 4.2.



Слика 4.2. Унициклични граф  $U_2$

**Теорема 8.** Нека је  $G$  повезан небипартитни унициклични граф са  $n$  ( $n \geq 3$ ) чворова који представља комплетан производ два степенаста графа. Тада је  $\lambda(G) \geq \lambda(U_2)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong U_2$  (слика 4.2).

*Доказ.* Из табеле А.1 повезаних графова реда  $n \leq 5$ , лако је видети да за  $n = 3$  и  $n = 4$  једини графови који долазе у обзир су графови облика  $U_2$ , па теорема важи за ове графове.

Нека је даље  $G$  повезан небипартитни унициклични граф реда  $n$  ( $n > 4$ ) и нека је  $G = H_1 \nabla H_2$ , где су  $H_1$  и  $H_2$  степенасти графови. Нека је  $H_1$  граф реда  $s$  и  $H_2$  граф реда  $n - s$ , при чему је  $1 \leq s \leq n - 2$ . Тада је  $s = 1$ . У супротном, на основу последице 1 добијамо

$$|E(G)| = |E(H_1 \nabla H_2)| > s(n - s) > n,$$

што је контрадикција. Дакле, граф  $H_1$  је реда 1, а граф  $H_2$  је реда  $n - 1$ . Једини граф који задовољава ове услове у класи  $\mathcal{U}_2(n)$  је граф  $U_2$  (слика 4.2).  $\square$

### 4.1.3 Структура екстремалног уницикличног графа

На основу резултата приказаних у секцијама 4.1.1 и 4.1.2 може се описати структура графа чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи  $\mathcal{U}(n)$  повезаних уницикличних графова фиксираних реда. Како за екстремални граф  $G \in \mathcal{U}(n)$  важи да  $G \in \mathcal{U}_1(n) \cup \mathcal{U}_2(n)$  довољно је упоредити екстремалне графове класа  $\mathcal{U}_1(n)$  и  $\mathcal{U}_2(n)$ .

**Лема 27.** Нека је  $U_1$  граф реда  $n$  приказан на слици 4.1,  $U_2$  граф реда  $n$  приказан на слици 4.2.

(i) Ако је  $4 \leq n \leq 11$ , ваља је  $\lambda(U_1) < \lambda(U_2)$ .

(ii) Ако је  $n \geq 12$ , ваља је  $\lambda(U_2) < \lambda(U_1)$ .

*Доказ.* Из табеле А.1 повезаних графова реда  $n \leq 5$  (додатак А), очигледно је да лема важи за  $n = 4$  и  $n = 5$ . Претпоставимо да је у наставку  $n \geq 6$ . Одредимо прво карактеристичне полиноме графова  $U_1$  и  $U_2$ . Коришћењем леме 6 добијамо

$$(4.1) \quad \phi(U_1, \lambda) = \lambda^{n-4}(\lambda^4 - n\lambda^2 + 2(n-4)),$$

$$(4.2) \quad \phi(U_2, \lambda) = \lambda^{n-4}(\lambda^4 - n\lambda^2 - 2\lambda + n - 3).$$

Из (4.1) закључујемо да граф  $U_1$  има тачно две негативне карактеристичне вредности:  $\lambda_n \in (-\infty, -2)$  и  $\lambda_{n-1} \in (-2, 0)$ . Такође, из (4.2) закључујемо да и граф  $U_2$  има тачно две негативне карактеристичне вредности:  $\lambda_n \in (-\infty, -2)$  и  $\lambda_{n-1} \in (-2, 0)$ . Из карактеристичног полинома графа  $U_1$  очигледно је

$$\lambda(U_1) = -\sqrt{\frac{n + \sqrt{(n-4)^2 + 16}}{2}}.$$

Посматрајмо функцију  $f(\lambda) = \lambda^4 - n\lambda^2 - 2\lambda + n - 3$ . Ова функција има исте ненула корене као полином  $\phi(U_2, \lambda)$  и важи

$$f(\lambda(U_1)) = 5 - n + \sqrt{2(n + \sqrt{(n-4)^2 + 16})}.$$

Како је  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = +\infty$ , закључујемо да важе импликације

$$(4.3) \quad f(\lambda(U_1)) > 0 \Rightarrow \lambda(U_1) < \lambda(U_2),$$

$$(4.4) \quad f(\lambda(U_1)) < 0 \Rightarrow \lambda(U_2) < \lambda(U_1).$$

Испитајмо за које вредности природног броја  $n$  је испуњена неједнакост  $f(\lambda(U_1)) > 0$ . Заменом вредности за  $f(\lambda(U_1))$  добијамо

$$5 - n + \sqrt{2(n + \sqrt{(n-4)^2 + 16})} > 0,$$

односно

$$\sqrt{2(n + \sqrt{(n-4)^2 + 16})} > n - 5 > 0.$$

Након квадрирања и сређивања добијамо еквивалентну неједнакост

$$2\sqrt{(n-4)^2 + 16} > (n-6)^2 - 11.$$

Ова неједнакост је очигледно задовољена за  $(n-6)^2 - 11 < 0$ , односно за  $6 \leq n \leq 9$ . За  $n \geq 10$  добијамо еквивалентну неједнакост

$$(4.5) \quad (n-6)^4 - 26(n-6)^2 - 16(n-6) + 41 < 0.$$

Нека је  $x = n-6 \geq 4$ . Функција  $g(x) = x^4 - 26x^2 - 16x + 41$  има тачно један корен  $x = 5.2498$  на интервалу  $[4, +\infty)$  и негативна је на том интервалу ако и само ако је  $4 \leq x < 5.2498$ . Отуда, неједнакост (4.5) важи за  $4 \leq n-6 \leq 5$ , тј.  $10 \leq n \leq 11$ .

На овај начин смо доказали да је  $f(\lambda(U_1)) > 0$  ако и само ако је  $6 \leq n \leq 11$ . На основу (4.3) закључујемо да је  $\lambda(U_1) < \lambda(U_2)$ . Слично се доказује да је  $f(\lambda(U_1)) < 0$  ако и само ако је  $n \geq 12$ , па на основу импликације (4.4) важи  $\lambda(U_2) < \lambda(U_1)$ .  $\square$

Коришћењем претходне леме и теорема 7 и 8 можемо описати структуру екстремалног графа класе  $\mathcal{U}(n)$ . Наредна теорема представља најважнији резултат поглавља 4.1.

**Теорема 9.** Нека је  $G$  повезан унициклични граф реда  $n$ .

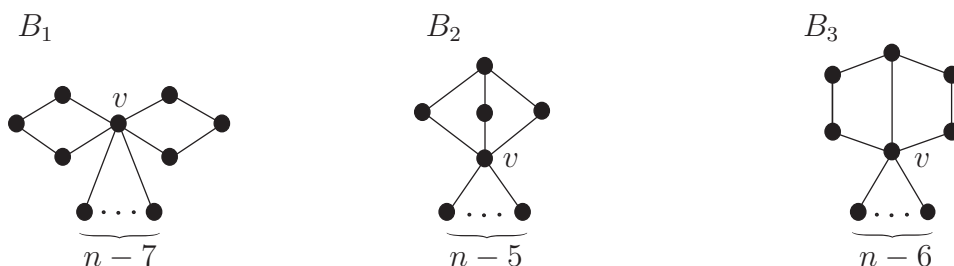
- (i) Ако је  $4 \leq n \leq 11$ , тада је  $\lambda(G) \geq \lambda(U_1)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong U_1$  (слика 4.2).
- (ii) Ако је  $n \geq 12$ , тада је  $\lambda(G) \geq \lambda(U_2)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong U_2$  (слика 4.1).

## 4.2 Бициклични графови фиксираних реда

Сличном техником као у секцији 4.1, у наставку ће бити описана структура графа чија је најмања карактеристична вредност минимална у класи  $\mathcal{B}(n)$  повезаних бицикличних графова са  $n$  чворова. Код оваквих графова број грана је  $m = n + 1$ . Имајући на уму теорему 1 овај проблем се може разложити на проблеме минималне најмање карактеристичне вредности у класи бипартитних бицикличних графова и у класи небипартитних бицикличних графова који представљају комплетан производ два степенаста графа.

### 4.2.1 Бипартитни бициклични графови

Означимо са  $\mathcal{B}_1(n)$  скуп свих повезаних бипартитних бицикличних графова. Како је спектар бипартитног графа симетричан у односу на нулу, проблем минималне најмање карактеристичне вредности у класи  $\mathcal{B}_1(n)$  је еквивалентан са проблемом максималног индекса у овој класи. Стога, у наставку пажња ће бити усмерена на индексе одговарајућих графова.



Слика 4.3. Бициклични графови  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$

Означимо са  $G - x$  и  $G - xy$  графове добијене из графа  $G$  уклањањем чвора  $x \in V(G)$ , односно гране  $xy \in E(G)$ , респективно. Слично, нека је  $G + xy$  граф добијен из графа  $G$  додавањем гране  $xy \notin E(G)$ , где  $x, y \in V(G)$ .

**Лема 28.** Нека је  $G$  повезан бипартитни бициклични граф реда  $n$  ( $n \geq 5$ ), при чему  $G \notin \{B_1, B_2, B_3\}$ . Тада је

$$(4.6) \quad \rho(G) < \max\{\rho(B_1), \rho(B_2), \rho(B_3)\},$$

где су  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  графови са слике 4.3.

*Доказ.* Из табеле повезаних графова реда  $n \leq 5$  и табеле повезаних бицикличних графова реда 6 види се да теорема важи за  $n = 5$  и  $n = 6$  (табеле А.1 и А.2). Претпоставимо сада да је  $n \geq 7$ . Изаберимо граф  $G \in \mathcal{B}_1(n)$  такав да је индекс графа  $G$  највећи могући у овој класи. Нека је  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  скуп чворова графа  $G$  и  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  Перонов вектор графа  $G$ , где координата  $x_i$  одговара чвору  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Прво ћемо доказати да сваке две контуре  $C_p$  и  $C_q$  графа  $G$  имају најмање један заједнички чвор. Претпоставимо супротно, тј. да постоји пут  $v_1, v_2, \dots, v_l$  који повезује контуре  $C_p$  и  $C_q$  ( $v_1 \in V(C_p)$ ,  $v_l \in V(C_q)$ ,  $l \geq 2$ ). Без губитка општости, претпоставимо да је  $x_1 \geq x_l$ . Означимо са  $v_{l+1}$  и  $v_{l+2}$  чворове контуре  $C_q$  који су суседни са чвором  $v_l$ . Тада чворови  $v_{l+1}$  и  $v_{l+2}$  нису суседни са чвором  $v_1$ , јер у супротном граф  $G$  није бицикличан. Нека је

$$G^* = G - \{v_l v_{l+1}, v_l v_{l+2}\} + \{v_1 v_{l+1}, v_1 v_{l+2}\}.$$

Очигледно,  $G^* \in \mathcal{B}_1(n)$ . На основу леме 3 добијамо да је  $\rho(G) < \rho(G^*)$ , што је у контрадикцији са избором графа  $G$ .

Слика 4.4. Основа  $G^0$  бицикличног графа

Дакле, сваке две контуре у графу  $G$  имају бар један заједнички чвор и можемо разликовати следећа два случаја.

1° У графу  $G$  две контуре  $C_p$  и  $C_q$  имају тачно један заједнички чвор.

У овом случају граф  $G$  садржи граф  $G_1^0$  са слике 4.4 као индуковани подграф. Приметимо да је граф  $G_1^0$  функција одговарајућих параметара  $p$  и  $q$ , тј.  $G_1^0 = G_1^0(p, q)$ , где параметри  $p$  и  $q$  представљају број чворова редом контура  $C_p$  и  $C_q$  и они су парни природни бројеви.

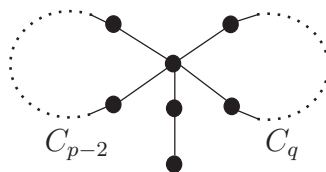
2° Постоје две контуре у графу  $G$  које имају више од једног заједничког чвора.

Тада у графу  $G$  постоји индуковани подграф  $G_2^0$ , који садржи три дисјунктна пута  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  са заједничким почетним чвором  $v_1$  и заједничким крајњим чвором  $v_2$  (слика 4.4). Највише један од ова три пута је дужине 1. Граф  $G_2^0$  је функција одговарајућих параметара  $p$ ,  $q$  и  $r$ , тј.  $G_2^0 = G_2^0(p, q, r)$ . Овде параметри  $p$ ,  $q$  и  $r$  представљају број чворова одговарајућих путева графа  $G_2^0$  и они су сви парни природни бројеви или су сви непарни природни бројеви.

На основу 1° и 2° закључујемо да граф  $G$  садржи један од графова  $G_1^0$  и  $G_2^0$  као индуковани подграф.

Означимо са  $\mathcal{B}_1^1(n) \subseteq \mathcal{B}_1(n)$  скуп свих бицикличних графова који садрже граф  $G_1^0$  као индуковани подграф, са  $\mathcal{B}_1^2(n) \subseteq \mathcal{B}_1(n)$  скуп свих бицикличних графова који садрже граф  $G_2^0$  као индуковани подграф при чему су параметри  $p$ ,  $q$  и  $r$  парни природни бројеви и са  $\mathcal{B}_1^3(n) \subseteq \mathcal{B}_1(n)$  скуп свих бицикличних графова који садрже граф  $G_2^0$  као индуковани подграф и параметри  $p$ ,  $q$  и  $r$  су непарни природни бројеви. Тада  $\mathcal{B}_1^i(n) \cap \mathcal{B}_1^j(n) = \emptyset$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ) и  $G \in \cup_{i=1}^3 \mathcal{B}_1^i(n)$ .

Претпоставимо прво да граф  $G$  припада скупу  $\mathcal{B}_1^1(n)$ . Тада је очигледно  $G = B_1$  за  $n = 7$  (слика 4.3). Нека је у наставку  $n > 7$ . Тада је  $n > p + q - 1$ . Заиста, у супротном случају је  $G = G_1^0(p, q)$  ( $p \geq q$ ) и постоји граф  $H \in \mathcal{B}_1^1(n)$  (слика 4.5) такав да је на основу лема 8 и 5  $\rho(G_1^0) < \rho(H)$ , што је немогуће. Нека је даље са  $v_1$  означен заједнички чвор контура  $C_p$  и  $C_q$  у графу  $G_1^0$  (слика 4.4). Доказаћемо да се граф  $G$  састоји из графа  $G_1^0$  са једним стаблом закаченим за чвор  $v_1$ . Претпоставимо супротно, тј. да постоји чвор  $v$  графа

Слика 4.5. Граф  $H$ 

$G_1^0$  такав да је  $v \neq v_1$  и постоји стабло  $T$  закачено за  $v$ . Уколико је  $x_1 \geq x_v$ , нека су  $z_1, \dots, z_s$  ( $s \geq 1$ ) чворови стабла  $T$  који су суседни са чвором  $v_i$  и нека је

$$G^* = G - \{vz_1, \dots, vz_s\} + \{v_1z_1, \dots, v_1z_s\}.$$

У случају када је  $x_1 < x_v$  означимо са  $w_1, w_2, \dots, w_t$  ( $t \geq 4$ ) чворове суседне са чвором  $v_1$  (слика 4.4). Ако је  $v$  чвор контуре  $C_p$ , нека је

$$G^* = G - \{v_1w_3, \dots, v_1w_t\} + \{vw_3, \dots, vw_t\}.$$

У оба случаја  $G^* \in \mathcal{B}_1^1(n)$ . На основу леме 3, добијамо да је  $\rho(G^*) > \rho(G)$ . Ово је немогуће с обзиром на то да  $G$  има максимални индекс у посматраној класи. Дакле, граф  $G$  има јединствено стабло прикачено за чвор  $v_1$  графа  $G_1^0$ . По дефиницији графа  $G_1^0$ , видимо да су  $p$  и  $q$  парни природни бројеви. Доказаћемо да је  $p = q = 4$ . Претпоставимо супротно, тј. да је  $p > 4$ . Означимо са  $v_1, v_2, \dots, v_p$  чворове контуре  $C_p$ , а са  $u$  чвор степена један стабла  $T$  прикаченог за чвор  $v_1$  графа  $G_1^0$ . Очигледно,  $G \neq C_n$ ,  $G \neq W_n$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_p, v_1$  је затворен унутрашњи пут и чвор  $u$  припада путу који није унутрашњи пут. Нека је

$$G^* = G - \{v_1v_p, v_{p-1}v_{p-2}\} + \{v_1v_{p-2}, uv_p\}.$$

Тада  $G^* \in \mathcal{B}_1^1(n)$ . Граф изоморфан графу  $G$  може се добити из графа  $G^*$  поделом гране  $v_1v_{p-2}$  графа  $G^*$  помоћу два нова чвора и брисањем чворова  $v_p$  и  $v_{p-1}$  из графа  $G^*$ . На основу лема 8 и 5, важи да је  $\rho(G^*) > \rho(G)$ , што је у контрадикцији са избором графа  $G$ . Дакле,  $p = 4$ . На сличан начин се доказује да је  $q = 4$ .

Коначно, доказаћемо да стабло  $T$ , које је закачено за чвор  $v_1$  графа  $G_1^0$ , садржи само чворове на удаљености један од корена  $v_1$ . У супротном постоји чвор стабла  $T$  чија је удаљеност од чвора  $v_1$  већа од један. Нека је  $v_j \in V(T)$  чвор који је најудаљенији од корена  $v_1$ . Тада је  $d(v_1, v_j) \geq 2$  и постоји пут  $v_1 \dots v_{j-2}v_{j-1}v_j$  дужине веће од један, који повезује чворове  $v_1$  и  $v_j$ . Посматрајмо сада чвор  $v_{j-2}$  као корен  $r$  графа  $A$  са слике 2.3. Применом леме 9 добијамо граф  $G^* \in \mathcal{B}_1^1(n)$ , такав да је  $\rho(G^*) > \rho(G)$ . Због избора графа  $G$  последња неједнакост је немогућа, па закључујемо да је  $G \cong B_1$  (слика 4.3).

Аналогно претходном поступку, показује се да ако граф  $G \in \mathcal{B}_1^2(n)$ , тада је  $G \cong B_2$ , а ако  $G \in \mathcal{B}_1^3(n)$ , тада је  $G \cong B_3$  (слика 4.3).

Како  $G \in \cup_{i=1}^3 \mathcal{B}_1^i(n)$  ( $\mathcal{B}_1^i(n) \cap \mathcal{B}_1^j(n) = \emptyset$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ ) закључујемо да важи неједнакост (4.6).  $\square$

Резултати претходне теореме указују на то да се приликом одређивања екстремалног графа у класи  $\mathcal{B}_1(n)$  разматрање може сузити на графове  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  приказане на слици 4.3. За добијање главног резултата потребно је упоредити најмање карактеристичне вредности ова три графа, односно њихове индексе.

**Лема 29.** Нека су  $B_1$ ,  $B_2$  и  $B_3$  графови реда  $n$  приказани на слици 4.3. Ако је  $n \geq 7$ , тада је  $\rho(B_2) > \rho(B_1)$  и  $\rho(B_2) > \rho(B_3)$ .

*Доказ.* Применом леме 6 на чвор  $v$  графа  $B_1$  добијамо

$$(4.7) \quad \phi(B_1, \lambda) = \lambda^{n-6}(\lambda^2 - 2)(\lambda^4 - (n-1)\lambda^2 + 2n - 14).$$

Истим поступком добијамо

$$(4.8) \quad \phi(B_2, \lambda) = \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 + 3n - 15),$$

$$(4.9) \quad \phi(B_3, \lambda) = \lambda^{n-6}(\lambda^2 - 1)(\lambda^4 - n\lambda^2 + 3n - 17).$$

Из (4.7) се лако закључује да за  $n = 7$  граф  $B_1$  има тачно две позитивне карактеристичне вредности:  $\rho \in (2, +\infty)$  и  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ , а за  $n > 7$  има тачно три позитивне карактеристичне вредности:  $\rho \in (2, +\infty)$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{2}$  и  $\lambda_3 \in (0, \sqrt{2})$ . Такође, из (4.8) се закључује да граф  $B_2$  има тачно две позитивне сопствене вредности:  $\rho \in (2, +\infty)$  и  $\lambda_2 \in (0, 2)$ . Из (4.9) следи да граф  $B_3$  има тачно три позитивне карактеристичне вредности:  $\rho \in (2, +\infty)$ ,  $\lambda_2 = 1$  и  $\lambda_3 \in (0, 1)$  за  $n = 7$ ;  $\rho \in (2, +\infty)$  и  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  за  $n = 8$ ;  $\rho \in (2, +\infty)$ ,  $\lambda_2 \in (1, 2)$  и  $\lambda_3 = 1$  за  $n > 8$ .

Из једнакости (4.8) и (4.9) лако се добија

$$\rho(B_1) = \sqrt{\frac{n-1 + \sqrt{(n-5)^2 + 32}}{2}} \quad \text{и} \quad \rho(B_3) = \sqrt{\frac{n + \sqrt{(n-6)^2 + 32}}{2}}.$$

Посматрајмо функцију  $f(\lambda) = \lambda^4 - (n+1)\lambda^2 + 3n - 15$ . Приметимо да ова функција има исте ненула корене као  $\phi(B_2, \lambda)$  и важи

$$f(\rho(B_1)) = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{(n-5)^2 + 32} \right) < 0,$$

$$f(\rho(B_3)) = -\frac{1}{2} \left( n - 4 + \sqrt{(n-6)^2 + 32} \right) < 0.$$

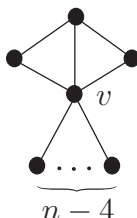
Пошто је  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = +\infty$ , закључујемо да је  $\rho(B_2) > \rho(B_1)$  и  $\rho(B_2) > \rho(B_3)$ . □

Применом леме 28 и леме 29 добијамо јединствен граф чија је најмања сопствена вредност минимална у класи  $\mathcal{B}_1(n)$ .

**Теорема 10.** Нека је  $G$  повезан бипартилни бициклични граф реда  $n$  ( $n \geq 5$ ). Тада је  $\lambda(B_2) \leq \lambda(G)$  и једнакост важи ако и само ако  $G \cong B_2$ .

### 4.2.2 Небипартитни бициклични графови

Означимо са  $\mathcal{B}_2(n)$  класу повезаних бицикличних графова реда  $n$  који представљају комплетан производ два степенаста графа. У наставку ће проблем минималне најмање карактеристичне вредности бити решен у класи  $\mathcal{B}_2(n)$ .



Слика 4.6. Бициклични граф  $B_4$

**Теорема 11.** Нека је  $G$  повезан небипартитни бициклични граф са  $n$  чворова ( $n \geq 5$ ) који је комплетан производ два степенаста графа и нека је  $B_4$  граф приказан на слици 4.6. Тада је  $\lambda(B_4) \leq \lambda(G)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong B_4$ .

*Доказ.* Из табеле А.1 повезаних графова реда  $n \leq 5$ , лако је видети да теорема важи за  $n = 5$ .

Нека је  $n \geq 6$  и  $G \in \mathcal{B}_2(n)$  такав да је  $G = H_1 \nabla H_2$ , где су  $H_1$  и  $H_2$  степенасти графови. Означимо са  $s$  ( $1 \leq s \leq n-2$ ) ред графа  $H_1$ . Очигледно, граф  $H_2$  је реда  $n-s$ . Доказаћемо да је  $s = 1$ . У супротном, на основу последице 2, добијамо

$$|E(G)| = |E(H_1 \nabla H_2)| > s(n-s) > n+1,$$

што је контрадикција. Дакле,  $|H_1| = 1$  и  $|H_2| = n-1$ . Једини граф који задовољава ове услове у класи  $\mathcal{B}_2(n)$  је граф  $B_4$  са слике 4.3.  $\square$

### 4.2.3 Структура екстремалног бицикличног графа

Коришћењем теорема 10 и 11 може се одредити јединствени граф са минималном најмањом карактеристичном вредношћу у класи свих повезаних бицикличних графова  $\mathcal{B}(n)$ . Наиме, довољно је упоредити најмање карактеристичне вредности екстремалних графова класа  $\mathcal{B}_1(n)$  и  $\mathcal{B}_2(n)$ .

**Лема 30.** Нека је  $B_2$  граф приказан на слици 4.3,  $B_4$  граф приказан на слици 4.6 и  $n$  број чворова ових графова.

- (i) Ако је  $5 \leq n \leq 27$ , тада је  $\lambda(B_2) < \lambda(B_4)$ .
- (ii) Ако је  $n \geq 28$ , тада је  $\lambda(B_4) < \lambda(B_2)$ .



*Доказ.* Из табеле А.1 повезаних графова реда  $n \leq 5$  и табеле А.2 повезаних бицикличних графова реда 6 лако је видети да лема важи за  $n = 5$  и  $n = 6$ . Претпоставимо сада да је  $n \geq 7$ . На основу леме 6 добијамо да је

$$\begin{aligned}\phi(B_2, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 + 3n - 15), \\ \phi(B_4, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 - 4\lambda + 2n - 8).\end{aligned}$$

Приметимо да граф  $B_2$  има тачно две негативне сопствене вредности:  $\lambda_n \in (-\infty, -2)$  и  $\lambda_{n-1} \in (-2, 0)$ . Граф  $B_4$  има такође тачно две негативне сопствене вредности:  $\lambda_n \in (-\infty, -2)$  и  $\lambda_{n-1} \in (-2, 0)$ . Очигледно,

$$\lambda(B_2) = -\sqrt{\frac{n+1 + \sqrt{(n-5)^2 + 36}}{2}}.$$

Нека је  $f(\lambda) = \lambda^4 - (n+1)\lambda^2 - 4\lambda + 2n - 8$ . Полином  $f(\lambda)$  има исте ненула корене као карактеристични полином  $\phi(B_4, \lambda)$  и

$$f(\lambda(B_2)) = -n + 7 + 4\sqrt{\frac{n+1 + \sqrt{(n-5)^2 + 36}}{2}}.$$

Како је  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = +\infty$  закључујемо да важе следеће импликације

$$\begin{aligned}f(\lambda(B_2)) > 0 &\Rightarrow \lambda(B_2) < \lambda(B_4), \\ f(\lambda(B_2)) < 0 &\Rightarrow \lambda(B_4) < \lambda(B_2).\end{aligned}$$

Испитајмо за које вредности природног броја  $n$  важи неједнакост

$$-n + 7 + 4\sqrt{\frac{n+1 + \sqrt{(n-5)^2 + 36}}{2}} > 0,$$

односно

$$4\sqrt{\frac{n+1 + \sqrt{(n-5)^2 + 36}}{2}} > n - 7 \geq 0.$$

Након квадрирања и сређивања добијамо еквивалентну неједнакост

$$8\sqrt{(n-5)^2 + 36} > (n-11)^2 - 80,$$

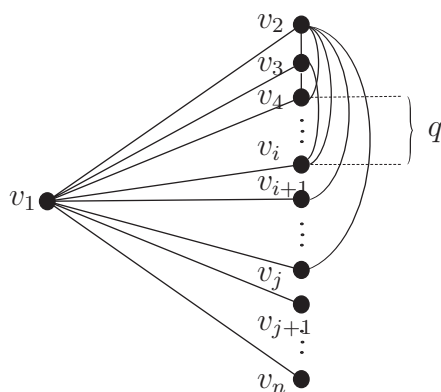
која је, очигледно, задовољена за  $(n-11)^2 - 80 < 0$ , односно за  $7 \leq n \leq 19$ . За  $n \geq 20$ , након квадрирања и сређивања добијамо неједнакост

$$(4.10) \quad (n-11)^4 - 224(n-11)^2 - 768(n-11) + 1792 < 0.$$

Нека је  $x = n - 11 \geq 9$ . Функција  $g(x) = x^4 - 224x^2 - 768x + 1792$  има тачно један корен  $x = 16.2619$  на интервалу  $[9, +\infty)$  и негативна је на том интервалу ако и само ако је  $x < 16.2619$ .

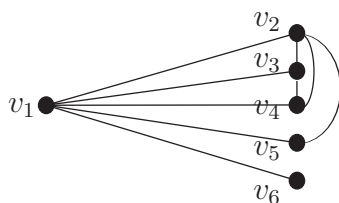
Дакле, неједнакост (4.10), која је еквивалентна са полазном неједнакошћу за  $n \geq 20$ , је задовољена у случају када је  $9 \leq n - 11 \leq 16$ , тј.  $20 \leq n \leq 27$ .  $\square$





Слика 4.7. Граф  $G_q$  за  $q > 0$  и  $i < j$

Његов канонички граф има тачно 6 нула карактеристичних вредности и приказан је на слици 4.8. На основу леме 11 закључујемо да и граф  $G_q$  у овом случају има тачно 6 нула карактеристичних вредности.



Слика 4.8. Канонички граф графа  $G_q$  за  $q > 0$  и  $i < j$

Нека је  $X = (x_1, y_1, z_1, r_1, \dots, r_q, s_1, \dots, s_{j-i}, t_1, \dots, t_{n-j})$  карактеристични вектор који одговара нула карактеристичној вредности  $\lambda$  графа  $G_q$ , при чему његове координате одговарају редом чворовима  $v_1, \dots, v_n$  (слика 4.7). Користећи  $(\lambda, X)$ -карактеристичне једначине графа  $G_q$  закључујемо да је  $r_1 = \dots = r_q, s_1 = \dots = s_{j-i}, t_1 = \dots = t_{n-j}$ . Такође закључујемо да координате  $x_1, y_1, z_1, r_1, s_1$  и  $t_1$  задовољавају следеће једнакости

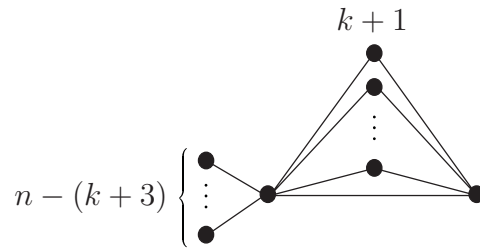
$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= y_1 + z_1 + qr_1 + (j - i)s_1 + (n - j)t_1, \\ \lambda y_1 &= x_1 + z_1 + qr_1 + (j - i)s_1, \\ \lambda z_1 &= x_1 + y_1 + qr_1, \\ \lambda r_1 &= x_1 + y_1 + z_1, \\ \lambda s_1 &= x_1 + y_1, \\ \lambda t_1 &= x_1. \end{aligned}$$

Добијени хомогени систем једначина има нетривијална решења (по  $x_1, y_1, z_1, r_1, s_1$  и  $t_1$ ) ако и само ако је његова детерминанта једнака нули, тј.

$$(4.11) \quad \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & -q & -j+i & -n+j \\ -1 & \lambda & -1 & -q & -j+i & 0 \\ -1 & -1 & \lambda & -q & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Дакле, ненула сопствене вредности графа  $G_q$  задовољавају једначину (4.11), а развојем последње детерминанте добија се

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \phi(G_q, \lambda) = & \lambda^{n-6}(\lambda^6 - (n+k)\lambda^4 - 2(k+q+1)\lambda^3 + (k(n+3q-4) \\ & + n - k^2 - 4q^2 - 2q - 3)\lambda^2 + 2q(n-q-3)\lambda \\ & + q(k-2q)(3+k-n-q)). \end{aligned}$$



Слика 4.9. Граф  $G_0$

Једнакост (4.12) даје вредност карактеристичног полинома графа  $G_q$  и у случајевима  $q = 0$ , односно  $i = j$ .

Граф  $G_0$  приказан је на слици 4.9, а његов карактеристични полином гласи

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \phi(G_0, \lambda) = & \lambda^{n-6}(\lambda^6 - (n+k)\lambda^4 - 2(k+1)\lambda^3 + (k(n-4) \\ & + n - k^2 - 3)\lambda^2). \end{aligned}$$

У вези са поменутиим графовима доказујемо следећу лему.

**Лема 31.** *Ако је  $k \geq 2$  и  $q \geq 1$ , тада је  $\lambda(G_0) < \lambda(G_q)$ .*

*Доказ.* Из једнакости (4.12) и (4.13) добијамо

$$\begin{aligned} \phi(G_q, \lambda) - \phi(G_0, \lambda) = & q\lambda^{n-6}(-2\lambda^3 + (3k - 4q - 2)\lambda^2 + 2(n - q - 3)\lambda \\ & - (k - 2q)(n + q - k - 3)). \end{aligned}$$

Нека је

$$f(\lambda) = -2\lambda^3 + (3k - 4q - 2)\lambda^2 + 2(n - q - 3)\lambda - (k - 2q)(n + q - k - 3).$$

Функција  $f(\lambda)$  има тачно један негативан корен  $\alpha_0$ . Она је позитивна и строго опадајућа на  $(-\infty, \alpha_0)$  и негативна на  $(\alpha_0, 0)$ .

Пошто је

$$f(-\sqrt{n-3}) = 2q\sqrt{n-3} + (k-2q)(k-q) + 2(k-q-1)(n-3) > 0,$$

закључујемо да  $-\sqrt{n-3} \in (-\infty, \alpha_0)$ . Такође, за  $\lambda < -\sqrt{n-3}$  важи

$$f(\lambda) > f(-\sqrt{n-3}) > 0.$$

Можемо разликовати следећа два случаја.

1°  $n$  – паран број

У овом случају, за  $\lambda < -\sqrt{n-3}$ , добијамо

$$\phi(G_q, \lambda) - \phi(G_0, \lambda) = q\lambda^{n-6}f(\lambda) > q\lambda^{n-6}f(-\sqrt{n-3}) > 0,$$

тј.  $\phi(G_q, \lambda) > \phi(G_0, \lambda)$ .

2°  $n$  – непаран број

Тада за  $\lambda < -\sqrt{n-3}$  имамо

$$\phi(G_q, \lambda) - \phi(G_0, \lambda) = q\lambda^{n-6}f(\lambda) < q\lambda^{n-6}f(-\sqrt{n-3}) < 0,$$

тј.  $\phi(G_q, \lambda) < \phi(G_0, \lambda)$ .

Пошто је звезда  $S_{1,n-3}$  индуковани подграф графа  $G_q$  ( $0 \leq q \leq \frac{k}{2}$ ), онда је  $\lambda(G_q) \leq \lambda(S_{1,n-3}) = -\sqrt{n-3}$ . Према томе, из 1° и 2° следи да је  $\lambda(G_0) < \lambda(G_q)$ .  $\square$

**Теорема 13.** *Ако је  $0 \leq k \leq 4$ , њада је граф  $G_0$  (слика 4.9) јединствени граф са минималном најмањом карактеристичном вредношћу међу свим повезаним графовима реда  $n$  и величине  $n+k$  ( $n > k+4$ ) који су комплетни производи два степенаста графа.*

*Доказ.* Нека је  $G$  граф са минималном најмањом сопственом вредношћу међу свим повезаним графовима реда  $n$  и величине  $n+k$  ( $0 \leq k \leq 4$ ,  $n > k+4$ ), који су комплетни производи два степенаста графа. Тада је  $G = H_1 \nabla H_2$ , где је  $|H_1| = s$  и  $|H_2| = n-s$  ( $1 \leq s \leq n-2$ ). Закључујемо да је  $s = 1$ , јер у супротном случају долазимо до контрадикције

$$|E(G)| = |E(H_1 \nabla H_2)| > s(n-s) \geq 2(n-2) > n+k.$$

Дакле,  $|H_1| = 1$  и  $|H_2| = n-1$ . Следи да је  $G \cong G_q$  ( $0 \leq q \leq \frac{k}{2}$ ), јер је у супротном  $|E(G)| \geq n+5 > n+k$ , што је немогуће. Дакле, за  $0 \leq k \leq 1$  тврђење је очигледно, а за  $2 \leq k \leq 4$  тврђење следи из леме 31.  $\square$

### 4.3.2 Структура екстремалног графа са малим бројем контура

Да бисмо одредили екстремални граф међу графовима фиксираних реда са малим бројем контура потребно је још упоредити екстремалне графове у класама бипартитних, односно небипартитних графова. У теоремама 5 и 13 је показано да су у питању графови  $D_1$  (слика 3.3) и  $G_0$  (слика 4.9). Стога, у наставку ће пажња бити посвећена овим графовима. Наиме, потребно је одредити који од њих има мању најмању карактеристичну вредност за произвољни избор параметара  $n$  и  $k$  ( $0 \leq k \leq 4$ ,  $n > k + 4$ ).

Нека је

$$Q(t) = t^4 - 2(k+1)^2(3k^2 + 12k + 13)t^2 - 8(k+1)^5(k+2)t - (k+1)^5(3k^3 + 5k^2 - 23k - 41).$$

Полином  $Q(t)$  има тачно два позитивна корена  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_1 > t_2$ ) за  $0 \leq k \leq 2$ , и има тачно један позитиван корен  $t_1$  за  $k \geq 3$ . Лако је проверити да за  $0 \leq k \leq 2$  важи следећа неједнакост

$$(4.14) \quad t_2 < (k+1)\sqrt{k^2 + 8k + 11}.$$

Нека је даље  $n_0 = k^2 + 4k + 6 + \lfloor t_1 \rfloor$ .

**Лема 32.** Нека су  $D_1$  и  $G_0$  графови реда  $n$  и величине  $n+k$  ( $k \geq 0$ ,  $n > k+4$ ) са слика 3.3 и 4.9, респективно.

- (i) Ако је  $n \leq n_0$ , тада је  $\lambda(D_1) < \lambda(G_0)$ .
- (ii) Ако је  $n > n_0$ , тада је  $\lambda(G_0) < \lambda(D_1)$ .

*Доказ.* Карактеристични полиноми графова  $D_1$  и  $G_0$  су

$$\begin{aligned} \phi(D_1, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+k)\lambda^2 + (k+2)(n-k-4)), \\ \phi(G_0, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+k)\lambda^2 - 2(k+1)\lambda + (k+1)(n-k-3)). \end{aligned}$$

Разлика ових полинома је

$$\phi(G_0, \lambda) - \phi(D_1, \lambda) = \lambda^{n-4}f(\lambda),$$

где  $f(\lambda) = -2(k+1)\lambda + 2k + 5 - n$ .

Лако је видети да је најмања карактеристична вредност графа  $D_1$

$$\lambda(D_1) = \lambda_0 = -\sqrt{\frac{n+k + \sqrt{(n-(k+4))^2 + 4(k+2)^2}}{2}}$$

и да је

$$f(\lambda_0) = 2k + 5 - n + \sqrt{2}(k+1)\sqrt{n+k + \sqrt{(n-(k+4))^2 + 4(k+2)^2}}.$$

Размотримо следеће две могућности.

1°  $f(\lambda_0) > 0$

За  $\lambda < \lambda_0$  и парно  $n$  важи

$$\phi(G_0, \lambda) - \phi(D_1, \lambda) = \lambda^{n-4} f(\lambda) > \lambda^{n-4} f(\lambda_0) > 0,$$

односно

$$(4.15) \quad \phi(G_0, \lambda) > \phi(D_1, \lambda).$$

Ако је, пак,  $\lambda < \lambda_0$  и  $n$  непарно, тада је

$$\phi(G_0, \lambda) - \phi(D_1, \lambda) = \lambda^{n-4} f(\lambda) < \lambda^{n-4} f(\lambda_0) < 0,$$

односно

$$(4.16) \quad \phi(G_0, \lambda) < \phi(D_1, \lambda).$$

На основу неједнакости (4.15) и (4.16) закључујемо да је  $\lambda(D_1) < \lambda(G_0)$ .

2°  $f(\lambda_0) < 0$

Посматрајмо разлику  $\phi(G_0, \lambda_0) - \phi(D_1, \lambda_0) = \lambda_0^{n-4} f(\lambda_0)$ . Видимо да је  $\phi(G_0, \lambda_0) < 0$  за парно  $n$ , и  $\phi(G_0, \lambda_0) > 0$  за непарно  $n$ . У сваком случају, закључујемо да је  $\lambda(G_0) < \lambda(D_1)$ .

Испитајмо сада за које вредности природног броја  $n$  је  $f(\lambda_0) > 0$ , а за које вредности је  $f(\lambda_0) < 0$ . Неједнакост  $f(\lambda_0) > 0$  може се написати у облику

$$(4.17) \quad \sqrt{2}(k+1)\sqrt{n+k+\sqrt{(n-(k+4))^2+4(k+2)^2}} > n-2k-5.$$

Ова неједнакост очигледно важи за  $k+4 < n \leq 2k+5$ . Нека је даље  $n > 2k+5$ . Након квадрирања и сређивања израза (4.17) добијамо еквивалентну неједнакост

$$2(k+1)^2\sqrt{(n-(k+4))^2+4(k+2)^2} > (n-(k^2+4k+6))^2-(k+1)^2(k^2+8k+11).$$

Очигледно, посматрана неједнакост је тачна за

$$2k+5 < n \leq k^2+4k+6+(k+1)\sqrt{k^2+8k+11}.$$

Због тога претпоставимо да је  $n > k^2+4k+6+(k+1)\sqrt{k^2+8k+11}$ .

Након квадрирања и сређивања добија се еквивалентна неједнакост

$$(4.18) \quad Q(t) < 0,$$

где је  $t = n - (k^2 + 4k + 6)$ .

Користећи неједнакост (4.14) и релацију

$$t > (k+1)\sqrt{k^2+8k+11} > 0$$

закључујемо да је неједнакост (4.18) задовољена за

$$k^2 + 4k + 6 + (k + 1)\sqrt{k^2 + 8k + 11} < n \leq n_0.$$

Према томе, за  $k + 4 < n \leq n_0$  добијамо да је  $f(\lambda_0) > 0$ , па је у овом случају  $\lambda(D_1) < \lambda(G_0)$ . Последња неједнакост употпуњује доказ теореме.  $\square$

Користећи софтвер Mathematica 7 добијамо највећи корен  $t_1$  полинома  $Q(t)$  за  $0 \leq k \leq 4$ . Следећа табела садржи добијене вредности параметара  $t_1$  и  $n_0 = k^2 + 4k + 6 + \lfloor t_1 \rfloor$  за  $0 \leq k \leq 4$ .

$k$	$t_1$	$n_0$
0	5.25	11
1	16.26	27
2	33.26	51
3	56.26	83
4	85.26	123

Табела 4.1. Вредности параметара  $t_1$  и  $n_0$  за  $0 \leq k \leq 4$

Имајући на уму теореме 1, 5 и 13 и лему 32, најважнији резултат овог поглавља се може сумирати у виду следеће теореме.

**Теорема 14.** *Постоји јединствени граф  $G$  са минималном најмањом карактеристичном вредношћу у класи повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + k$  ( $0 \leq k \leq 4$ ,  $n > k + 4$ ). Нека је  $n_0 = k^2 + 4k + 6 + \lfloor t_1 \rfloor$ , где је  $t_1$  највећи корен полинома  $Q(t)$  за  $0 \leq k \leq 4$  (табела 4.1). Тада је  $G \cong D_1$  за  $n \leq n_0$  и  $G \cong G_0$  за  $n > n_0$ .*

Знамо да добијени екстремални граф  $G_0$ , реда  $n$  и величине  $n + k$ , представља комплетан производ два степенаста графа, тј.

$$G_0 = K_1 \nabla (K_{1,k+1} \cup (n - k - 3)K_1).$$

Интересантно је, међутим, да је и сам граф  $G_0$  степенасти граф. Овај граф се добија из звезде  $S_{1,n-1}$  и то додавањем још  $k + 1$  грана на њу, које и саме индукују звезду над скупом висећих чворова у  $S_{1,n-1}$ .



## Глава 5

### Екстремални кактуси

За повезани граф кажемо да је *кактус* (енгл. cactus) ако сваке две контуре у њему имају највише један заједнички чвор. Стабла и унициклични графови, очигледно, припадају овој класи. У класи кактуса проучавано је више спектралних инваријанти. Петровић и Боровићанин [6] су одредили кактус са највећим спектралним радијусом међу кактусима фиксираних реда. Liu и Lu [27] су показали да тај кактус има исту или сличну структуру као кактуси који су екстремални у смислу Wiener–овог индекса, Merrifield-Simmons–овог индекса и Hosoya–иног индекса, у истој класи графова. Wu, Deng и Qin [45] су проучавали спектрални радијус кактуса са  $k$  висећих чворова. Изучавани су и спектрални радијус кактуса са савршеним спаривањем, тежинских кактуса, затим кактуси са одређеним спектралним особинама, итд. (видети [22, 34]).

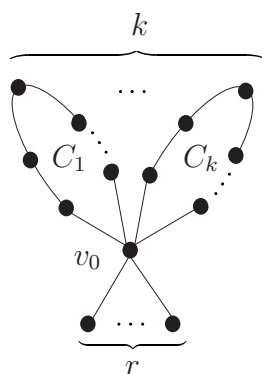
Минимална најмања сопствена вредност и распон кактуса, међутим, нису изучавани раније па ће у овом поглављу пажња бити посвећена овим двама спектралним инваријантама. Прецизније, тема овог поглавља су кактуси који су екстремални у смислу минималне најмање карактеристичне вредности, максималног индекса и максималног распона. Представљен је граф који има минималну најмању карактеристичну вредност међу свим кактусима са  $n$  чворова и  $k$  контура ( $k \geq 1$ ). Такође, у истој класи описана је и структура кактуса чији је индекс максималан, као и кактуса чији је распон максималан. Доказано је да су ови графови јединствени. Интересантно је да већина особина које се тичу структуре кактуса са минималном најмањом карактеристичном вредношћу важи и за кактус максималног распона.

Поглавље је завршено секцијом о кактусима фиксираних реда који садрже контуре. У овој класи добијен је јединствен граф са максималним индексом и јединствен граф са минималном најмањом карактеристичном вредношћу.

## 5.1 Екстремални графови у класи кактуса са фиксираним бројем чворова и фиксираним бројем контура

Нека је са  $C(n, k)$  означен скуп свих кактуса са  $n$  чворова и  $k$  контура. Ако све контуре у кактусу  $G$  имају тачно један заједнички чвор, рецимо  $v_0$ , онда кажемо да оне формирају *свежањ* (енгл. bundle). У том случају чвор  $v_0$  се назива *централни чвор свежња*.

Са  $B(n, k)$  означимо скуп свих свежњева са  $n$  чворова и  $k$  контура. Нека је  $G(C_1, \dots, C_k; r)$  ( $k \geq 1, r \geq 0$ ) граф приказан на слици 5.1, а  $S(n, k)$  скуп свих свежњева облика  $G(C_1, \dots, C_k; r)$  из  $B(n, k)$ .



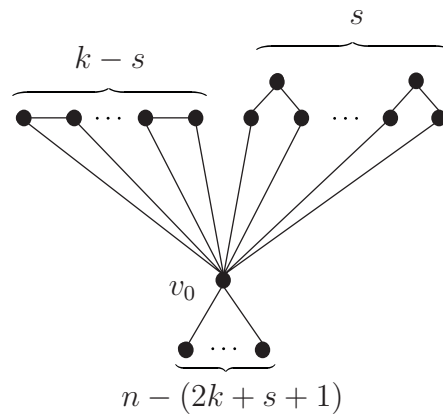
Слика 5.1. Свежањ  $G(C_1, \dots, C_k; r)$

Нека је са  $B^*(n, k)$  означен скуп свих свежњева из скупа  $S(n, k)$  код којих је дужина најдуже контуре мања или једнака од 4. Такође, нека је  $t$  максималан број контура дужине 4 у таквим графовима. Претпоставимо да у свежњу са  $n$  чворова имамо  $k - s$  контура дужине 3 и  $s$  контура дужине 4. Тада је  $n \geq 3s + 2(k - s) + 1$ , одакле је  $s \leq n - 2k - 1$ . Пошто посматрамо свежњеве са  $k$  контура очигледно је  $t = \min\{k, n - (2k + 1)\}$ .

Означимо са  $B_{k,s} = B(k - s, s, n - (2k + s + 1))$  ( $s = 0, 1, \dots, t$ ) свежањ из скупа  $B^*(n, k)$  који садржи  $k - s$  контура дужине 3,  $s$  контура дужине 4 и  $n - (2k + s + 1)$  чворова степена 1 прикачених за чвор  $v_0$  (слика 5.2). Тада је  $B^*(n, k) = \{B_{k,0}, \dots, B_{k,t}\}$ .

Нека је  $c(G)$  дужина најдуже контуре графа  $G$ . Величину  $c(G)$  називамо *обимом* (енгл. circumference) графа  $G$ .

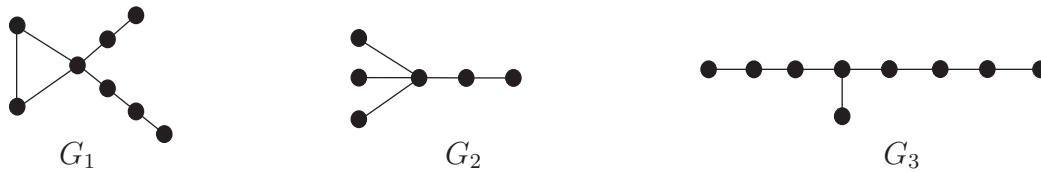
**Лема 33.** Нека је  $B$  свежањ облика  $G(C_1, \dots, C_k; r)$  ( $k \geq 1, r \geq 0$ ) приказан на слици 5.1, чији је обим  $c(B) \geq 5$ . Тада је  $\lambda(B) \geq -2$  ако и само ако је  $B = C_n$  или  $B = C_5 \cdot S_{1,1}$  или  $B = C_7 \cdot S_{1,1}$  или  $B = C_3 \cdot C_5$ .



Слика 5.2. Свежањ  $B_{k,s}$

Доказ. Коришћењем софтвера NewGraph добијамо да је  $\lambda(C_5 \cdot S_{1,1}) = -1.8608$ ,  $\lambda(C_7 \cdot S_{1,1}) = -1.9738$  и  $\lambda(C_3 \cdot C_5) = -1.9354$ .

Ако је  $B = C_n$  или  $B = C_5 \cdot S_{1,1}$  или  $B = C_7 \cdot S_{1,1}$  или  $B = C_3 \cdot C_5$ , очигледно је  $\lambda(B) \geq -2$ .



Слика 5.3. Графови  $G_1, G_2$  и  $G_3$

Нека је у наставку  $B$  свежањ облика  $G(C_1, \dots, C_k; r)$  ( $k \geq 1, r \geq 0$ ) приказан на слици 5.1 чији је обим  $c(B) \geq 5$  и нека је  $\lambda(B) \geq -2$ . Како је  $\lambda(G_1) = -2.0321$ ,  $\lambda(G_2) = -2.0743$  и  $\lambda(G_3) = -2.0153$ , онда на основу леме 5 закључујемо да граф  $B$  не садржи као индуковани подграф ниједан од графова  $G_1, G_2$  и  $G_3$  са слике 5.3.

Размотримо следеће могућности.

1°  $k = 1, r = 0$

У овом случају је  $B = C_n$  и  $\lambda(B) = \lambda(C_n) \geq -2$ .

2°  $k = 1, r = 1$

Тада је  $B = C_{n-1} \cdot S_{1,1}$ . За  $n \geq 10$  стабло  $G_3$  са слике 5.3 је индуковани подграф графа  $B$ , што је немогуће. Како је  $\lambda(C_8 \cdot S_{1,1}) = -2.0839 < -2$ ,  $\lambda(C_7 \cdot S_{1,1}) = -1.9738 > -2$ ,  $\lambda(C_6 \cdot S_{1,1}) = -2.1010 < -2$  и  $\lambda(C_5 \cdot S_{1,1}) = -1.8608 > -2$ , закључујемо да је  $B = C_5 \cdot S_{1,1}$  или  $B = C_7 \cdot S_{1,1}$ .

3°  $k = 1, r \geq 2$

У овом случају је  $B = C_{n-r} \cdot S_{1,r}$  и стабло  $G_2$  је индуковани подграф графа  $G$ , што није могуће.

4°  $k = 2, r = 0$

Тада је  $B = C_p \cdot C_{n-p+1}$  ( $n - p + 1 \geq 5$ ). Ако је  $p \geq 4$ , онда је стабло  $G_2$  индуковани подграф графа  $B$ , што је немогуће. Ако је пак  $p = 3$  и  $n - p + 1 \geq 7$ , тада је  $G_1$  (слика 5.3) индуковани подграф графа  $B$ , што је такође немогуће. Како је  $\lambda(C_3 \cdot C_6) = -2.1466 < -2$ , а  $\lambda(C_3 \cdot C_5) = -1.9354 > -2$ , закључујемо да је  $B = C_3 \cdot C_5$ .

5°  $k = 2, r > 0$  или  $k \geq 3$

У овом случају је стабло  $G_2$  индуковани подграф графа  $B$ , што није могуће.

На основу 1°, 2°, 3°, 4° и 5° закључујемо да је  $B = C_n$  или  $B = C_5 \cdot S_{1,1}$  или  $B = C_7 \cdot S_{1,1}$  или  $B = C_3 \cdot C_5$ .  $\square$

**Лема 34.** Нека је  $B$  свежањ облика  $G(C_1, \dots, C_k; r)$  ( $k \geq 1, r \geq 0$ ), приказан на слици 5.1. Ако је најмања карактеристична вредности  $\lambda(B) < -2$ , тада за сваки карактеристични вектор  $X = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(B)$  важи  $x_{v_0} = x_0 \neq 0$ . Такође, за сваку контуру  $C = v_0 v_1 \dots v_{l-1} v_0$  у графу  $B$  испуњене су следеће релације, при чему је  $s = \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ :

$$(5.1) \quad x_i = x_{l-i} \quad (i = 1, 2, \dots, l-1),$$

$$(5.2) \quad |x_0| > |x_1| > \dots > |x_{s-1}| > |x_s| > 0,$$

$$(5.3) \quad x_{i-1} x_i < 0 \quad (i = 1, \dots, s).$$

*Доказ.* Нека је  $\lambda(B) < -2$  и нека је  $X = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$  произвољан карактеристични вектор свежња  $B$  који одговара најмањој карактеристичној вредности  $\lambda = \lambda(B)$ . Такође, нека је  $C = v_0 v_1 \dots v_{l-1} v_0$  произвољна контура у кактусу  $B$ .

Претпоставимо обрнуто, да је  $x_{v_0} = 0$ . Помоћу  $(\lambda, X)$ -карактеристичних једначина (2.4) добијамо да су вредности чворова степена један, прикачених за  $v_0$  и одређене са  $X$ , једнаке 0. Такође, добијамо  $k$  система хомогених линеарних једначина облика

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= x_2 \\ \lambda x_i &= x_{i-1} + x_{i+1} \quad (i = 2, \dots, l-2) \\ \lambda x_{l-1} &= x_{l-2}, \end{aligned}$$

са детерминантом

$$(5.4) \quad D = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \Phi(P_{l-1}, \lambda).$$

Полином  $\Phi(P_{l-1}, \lambda)$  је карактеристични полином пута  $P_{l-1}$  па на основу леме 1 следи да је  $D \neq 0$  за  $\lambda < -2$ . Зато ови системи имају само тривијално решење. Због тога је  $X = \mathbf{0}$ , што је немогуће.

Докажимо прво особину (5.1). Приметимо да постоји аутоморфизам  $\varphi$  свежња  $B$  такав да за сваку контуру  $C = v_0v_1 \dots v_{l-1}v_0$  важи  $\varphi(v_i) = v_{l-i}$  ( $i = 1, \dots, l-1$ ) и  $\varphi(v) = v$  за остале чворове свежња  $B$ . Дефинишимо нови вектор  $Y = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  тако да је  $y_i = x_{\varphi(v_i)}$  за сваки чвор  $v_i \in V(B)$ . Вектор  $Y$  је карактеристични вектор који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(B)$  и при томе је  $Y = X$  из следећих разлога. Димензија сопственог простора карактеристичне вредности  $\lambda(B)$  је једнака 1. У супротном, за  $\lambda(B)$  можемо дефинисати карактеристични вектор  $Z$  за који је  $Z(v_0) = 0$ . Како је још  $\|Y\| = \|X\|$  то имамо  $Y = \pm X$ . Пошто је  $X(v_0) = Y(v_0) \neq 0$  онда је очигледно  $Y \neq -X$ . Дакле  $Y = X$ , па на основу дефиниције вектора  $Y$  закључујемо да су једнакости (5.1) задовољене.

Докажимо сада неједнакости (5.2) и (5.3). Користећи  $(\lambda, X)$ -карактеристичне једначине (2.4), за сваку контуру  $C = v_0v_1 \dots v_{l-1}v_0$  у кактусу  $B$  добијамо

$$(5.5) \quad \lambda x_s = 2x_{s-1}, \quad \text{за парно } l,$$

$$(5.6) \quad (\lambda - 1)x_s = x_{s-1}, \quad \text{за непарно } l.$$

Ако је  $x_s = 0$ , тада помоћу  $(\lambda, X)$ -карактеристичних једначина можемо закључити да је  $x_i = 0$  за свако  $i = 1, 2, \dots, l-1$  па је очигледно и  $x_0 = 0$ , што доводи до контрадикције.

Такође, из (5.5) и (5.6) видимо да је  $|x_s| < |x_{s-1}|$ , када је  $\lambda < -2$ . Да бисмо доказали (5.2) довољно је да докажемо импликације

$$|x_{i+1}| < |x_i| \quad \Rightarrow \quad |x_i| < |x_{i-1}| \quad (i = 1, \dots, s-1).$$

Претпоставимо да је  $|x_{i+1}| < |x_i|$ . Из једначине  $\lambda x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$ , за  $\lambda < -2$ , добијамо

$$|x_{i-1}| = |\lambda x_i - x_{i+1}| \geq |\lambda||x_i| - |x_{i+1}| > |\lambda||x_i| - |x_i| = (|\lambda| - 1)|x_i| > |x_i|.$$

Особина (5.2) очигледно важи.

Приметимо да из неједнакости (5.2) следи

$$|x_{i-1}x_i| = |x_{i-1}||x_i| > |x_i||x_{i+1}| = |x_ix_{i+1}| \quad (i = 1, \dots, s-1)$$

па су изрази  $x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1}$  и  $x_{i-1}x_i$  су истог знака. Користећи сада једначину  $\lambda x_i = x_{i-1} + x_{i+1}$  добијамо да је  $\lambda x_i^2 = x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} < 0$ . Због тога је  $x_{i-1}x_i < 0$  за  $i = 1, \dots, s$ , тј. неједнакости (5.3) су испуњене.  $\square$

**Лема 35.** *За сваки граф  $G \in C(n, k) \setminus S(n, k)$  постоји граф  $B \in S(n, k)$  такав да графови  $G$  и  $B$  имају исте дужине контура и важе неједнакости:*

- (i)  $\lambda(B) < \lambda(G)$ ,
- (ii)  $\rho(B) > \rho(G)$ ,
- (iii)  $s(B) > s(G)$ .

*Доказ.* Нека је  $G$  кактус из скупа  $C(n, k) \setminus S(n, k)$ . Тада  $G$  садржи  $m$  артикулационих чворова, при чему је  $m \geq 2$ .

(i) Нека су  $u$  и  $v$  два артикулациона чвора графа  $G$  и нека је  $X$  карактеристични вектор који одговара карактеристичној вредности  $\lambda(G)$ . Претпоставимо да је  $|x_u| \geq |x_v|$ . Приметимо да се  $G$  може посматрати као коалесценција два подграфа у чвору  $v$ , тј.  $G = G_1(v) \cdot G_2(v)$ , где  $u$  припада  $V(G_1)$  и  $v$  није артикулациони чвор у графу  $G_1$  ( $v$  је или висећи чвор или припада некој контури у  $G_1$ ). Нека је сада  $G^* = G_1(u) \cdot G_2(v)$ . Свакако,  $G^* \in C(n, k)$  и граф  $G^*$  садржи један артикулациони чвор мање него граф  $G$ . На основу леме 4 имамо

$$(5.7) \quad \lambda(G^*) \leq \lambda(G).$$

Када описани поступак и лему 4 поновимо  $m - 1$  пута, на сваки пар артикулационих чворова, на крају добијамо свежањ  $B \in S(n, k)$  који садржи тачно један артикулациони чвор  $v_0$ , такав да графови  $G$  и  $B$  имају исте дужине контура.

Ако је  $c(B) = 3$ , тада помоћу  $(\lambda, X)$ -карактеристичних једначина добијамо

$$\lambda x_v = x_{v_0}, \quad \text{за сваки висећи чвор } v$$

и

$$(\lambda - 1)x_v = x_{v_0}, \quad \text{за сваки чвор } v \neq v_0 \text{ са неке од контура.}$$

Одатле закључујемо да је  $x_{v_0} \neq x_v$  за сваки чвор  $v$  ( $v \neq v_0$ ) свежња  $B$ .

Нека је даље  $c(B) > 3$ . С обзиром на то да је свежањ  $B$  добијен из графа  $G$  са  $m \geq 2$  артикулационих чворова, следи да  $B$  садржи индуковани подграф  $G(C_1; 2)$ , где је контура  $C_1$  дужине веће од 3. Стога, на основу леме 5 важи  $\lambda(B) \leq \lambda(G(C_1; 2)) < -2$ . И у овом случају, користећи лему 34 и  $(\lambda, X)$ -карактеристичне једначине, добијамо да је  $x_{v_0} \neq x_v$  за сваки чвор  $v$  ( $v \neq v_0$ ) свежња  $B$ . Према томе, на основу леме 4 закључујемо да увек важи строга неједнакост у релацији (5.7) у последњем кораку описаног поступка. Због тога је  $\lambda(B) < \lambda(G)$ .

(ii) Фокусирајмо се сада на индекс кактуса  $G$ . Нека је  $Y$  Перонов вектор графа  $G$  и  $u$  и  $v$  два артикулациона чвора у  $G$ . Претпоставимо да је  $y_u \geq y_v$ . Поново, посматрајмо  $G$  као коалесценцију  $G = G_1(v) \cdot G_2(v)$ , где  $u \in V(G_1)$

и  $v$  није артикулациони чвор у графу  $G_1$  ( $v$  је или viseћи чвор или припада некој контури у  $G_1$ ) и нека је  $G' = G_1(u) \cdot G_2(v)$ . Видимо да  $G' \in C(n, k)$  и граф  $G'$  садржи један артикулациони чвор мање него граф  $G$ . На основу леме 3 добијамо  $\rho(G') > \rho(G)$ .

Када овај поступак и лему 3 поновимо  $m - 1$  пута, на сваки пар артикулационих чворова, добићемо свежањ  $B \in S(n, k)$  који садржи тачно један артикулациони чвор  $v_0$ , такав да графови  $G$  и  $B$  имају исте дужине контура и за који је  $\rho(B) > \rho(G)$ .

(iii) Приметимо да је у доказима под (i) и под (ii) добијен исти свежањ  $B$ , па је неједнакост  $s(B) > s(G)$  непосредна последица неједнакости добијених под (i) и (ii).  $\square$

Користећи претходну лему можемо одредити структуру кактуса који има максимални индекс у класи  $C(n, k)$ .

**Лема 36.** *Ако граф  $B^*$  има максимални индекс у скупу  $C(n, k)$  где је  $k \geq 1$  и  $n \geq 2k + 1$ , тада је  $c(B^*) = 3$ .*

*Доказ.* Нека је  $B^*$  кактус који има максимални индекс у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ). На основу леме 35, без губитка општости, можемо претпоставити да  $B^* \in S(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $r \geq 0$ ).

Претпоставимо супротно, тј. да је  $c(B^*) > 3$ . Тада у графу  $B^*$  постоји контура  $C_p = v_0v_1 \dots v_{p-1}v_0$  дужине  $p > 3$ , где је  $v_0$  централни чвор кактуса  $B^*$ . Нека је

$$B = B^* - v_1v_2 + v_0v_2.$$

Тада  $B \in S(n, k)$ . На основу лема 8 и 5 закључујемо да је  $\rho(B) > \rho(B^*)$ , што је у контрадикцији са избором графа  $B^*$ .  $\square$

**Последица 3.** *Граф  $B_{k,0} = B(k, 0, n - (2k + 1))$  (слика 5.2) је граф са највећим индексом у скупу свих повезаних кактуса са  $n$  чворова и  $k$  контура ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ).*

Исти резултат добили су и Боровићанин и Петровић у раду [6], користећи другачију технику.

У наставку, одредићемо кактусе који имају минималну најмању карактеристичну вредност и максимални распон у скупу  $C(n, k)$ .

**Лема 37.** *Нека је  $C(n, k)$  скуп свих повезаних кактуса са  $n$  чворова и  $k$  контура при чему је  $k \geq 1$  и  $n \geq 2k + 1$ .*

- (i) *Ако граф  $B^*$  има минималну најмању карактеристичну вредност у скупу  $C(n, k)$ , тада је  $c(B^*) \leq 4$ .*
- (ii) *Ако граф  $B^*$  има максимални распон у скупу  $C(n, k)$ , тада је  $c(B^*) \leq 4$ .*

*Доказ.* Са  $C(n, k)$  смо означили скуп свих повезаних кактуса са  $n$  чворова и  $k$  контура при чему је  $k \geq 1$  и  $n \geq 2k + 1$ .

(i) Нека је  $B^*$  кактус који има минималну најмању карактеристичну вредност у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1, n \geq 2k + 1$ ). На основу леме 35, можемо претпоставити да  $B^* \in S(n, k)$  ( $k \geq 1, r \geq 0$ ).

Да бисмо доказали тврђење претпоставимо супротно, да је  $c(B^*) \geq 5$ . Тада је  $n \geq 5$ . Довољно је да нађемо граф  $B \in B(n, k)$  за који важи  $\lambda(B) < \lambda(B^*)$ .

У скупу  $B^*(n, k)$  постоји свежањ  $H$  такав да је граф  $B(0, 1, 1)$  индуковани подграф свежања  $H$ . Користећи лему 5 и обзиром на то да кактус  $B^*$  има минималну најмању сопствену вредност у скупу  $C(n, k)$ , видимо да важи  $\lambda(B^*) \leq \lambda(H) \leq \lambda(B(0, 1, 1)) = -2.1358 < -2$ . Нека је  $X$  јединични сопствени вектор који одговара сопственој вредности  $\lambda(B^*)$ . На основу леме 34, особине (5.1) – (5.3) су испуњене за сваку контуру кактуса  $B^*$ .

Означимо сада са  $B$  граф добијен премештањем једне произвољне гране у графу  $B^*$ . Тада из (2.5) добијамо

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \lambda(B) - \lambda(B^*) &= \min_{\|Y\|=1} Y^T A(B)Y - X^T A(B^*)X \\ &\leq X^T (A(B) - A(B^*))X. \end{aligned}$$

Нека је са  $v_0$  означен централни чвор графа  $B^*$  и нека је  $C = v_0 v_1 \dots v_{l-1} v_0$  произвољна контура дужине  $l \geq 5$ . У зависности од дужине контуре  $C$  разликујемо два случаја.

1°  $l$  – непаран број ( $l = 2s + 1, s \geq 2$ )

У овом случају, са  $B$  означимо граф добијен из графа  $B^*$  ротирањем гране  $v_s v_{s+1}$  око чвора  $v_{s+1}$  у позицију  $v_{s-1} v_{s+1}$  где претходно није било гране. Тада  $B \in B(n, k)$ . На основу неједнакости (5.8) и леме 34 имамо

$$\begin{aligned} \lambda(B) - \lambda(B^*) &\leq X^T (A(B) - A(B^*))X = 2(x_{s-1}x_{s+1} - x_s x_{s+1}) \\ &= 2(x_{s-1}x_s - x_s^2) < 0, \end{aligned}$$

тј.  $\lambda(B) < \lambda(B^*)$ .

2°  $l$  – паран број ( $l = 2s, s \geq 3$ )

Овде, са  $B$  означимо граф добијен из графа  $B^*$  померањем гране  $v_{s-1} v_s$  у позицију  $v_{s-2} v_{s+1}$  где претходно није било гране. Поново важи  $B \in B(n, k)$ . На основу једнакости (5.8) и леме 34 добијамо

$$\begin{aligned} \lambda(B) - \lambda(B^*) &\leq X^T (A(B) - A(B^*))X = 2(x_{s-2}x_{s+1} - x_{s-1}x_s) \\ &= 2x_{s-1}(x_{s-2} - x_s) < 0, \end{aligned}$$

односно  $\lambda(B) < \lambda(B^*)$ .



(ii) Нека је  $B^*$  кактус који има максимални распон у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ). На основу леме 35 можемо претпоставити да  $B^* \in S(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $r \geq 0$ ).

Да бисмо доказали тврђење претпоставимо супротно, тј. да је  $c(B^*) \geq 5$ . Тада је  $n \geq 5$ . Слично као у доказу под (i), довољно је да нађемо граф  $B \in B(n, k)$  за који важи  $s(B) > s(B^*)$ . Разликоваћемо следећа два случаја.

$$1^\circ \quad \lambda(B^*) \geq -2$$

На основу леме 33 видимо да је  $B^* = C_n$  или  $B^* = C_5 \cdot S_{1,1}$  или  $B^* = C_7 \cdot S_{1,1}$  или  $B^* = C_3 \cdot C_5$ .

Ако је  $B^* = C_n$ , тада је  $B = C_4 \cdot S_{1, n-4}$  и важи

$$s(B^*) \leq 4 < 4.2716 = s(C_4 \cdot S_{1,1}) \leq s(B).$$

Ако је  $B^* = C_5 \cdot S_{1,1}$ , тада је  $B = C_4 \cdot S_{1,2}$  и

$$s(B^*) = 3.9757 < 4.5765 = s(B).$$

Ако је  $B^* = C_7 \cdot S_{1,1}$ , тада је  $B = C_4 \cdot S_{1,3}$  и

$$s(B^*) = 4.0650 < 4.8989 = s(B).$$

Ако је  $B^* = C_3 \cdot C_5$ , тада је  $B = C_4 \cdot S_{1,3}$  и

$$s(B^*) = 4.4083 < 4.8989 = s(B).$$

$$2^\circ \quad \lambda(B^*) < -2$$

На исти начин као у случају (i) ( $1^\circ$  и  $2^\circ$ ) конструишемо граф  $B$  за који је  $\lambda(B) < \lambda(B^*)$ . Како на основу лема 8 и 5 важи  $\rho(B) > \rho(B^*)$ , закључујемо да је  $s(B) > s(B^*)$ , што је немогуће.  $\square$

У складу са уведеним ознакама, коришћењем претходне леме, долазимо до следећих закључака.

**Последица 4.** *Ако је  $B^*$  граф који има минималну најмању карактеристичну вредност у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ), онда  $B^* \in B^*(n, k)$ .*

**Последица 5.** *Ако је  $B^*$  граф који има максималан распон у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ), онда  $B^* \in B^*(n, k)$ .*

У наставку ћемо одредити граф са минималном најмањом карактеристичном вредношћу у класи  $C(n, k)$  кактуса са  $n$  чворова и  $k$  контура. У вези са овим резултатом, у табели 5.1 на крају секције 5.1, приказана је листа свих свежњева из скупа  $B^*(n, k)$  ( $3 \leq n \leq 14$ ,  $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(n - 1)$ ) и њихове најмање карактеристичне вредности.

**Теорема 15.** Нека је  $B^*$  кактус који има минималну најмању сојствену вредност у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ) и нека је  $t = \min\{k, n - (2k + 1)\}$ . Такође, нека је  $n_0(k) = 12$  за  $1 \leq k \leq 2$ ,  $n_0(k) = 13$  за  $3 \leq k \leq 4$  и  $n_0(k) = 14$  за  $5 \leq k \leq 6$ .

(i) Ако је  $k \leq 6$  и  $n < n_0(k)$ , њага је  $B^* = B(k - t, t, n - (2k + t + 1))$ .

(ii) Ако је  $k \leq 6$  и  $n \geq n_0(k)$  или  $k \geq 7$ , њага је  $B^* = B(k, 0, n - (2k + 1))$ .

*Доказ.* Означимо са  $B^*$  кактус који има минималну најмању карактеристичну вредност у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ). На основу последице 4 видимо да  $B^* \in B^*(n, k)$ .

Уколико је  $n \leq 7$ , резултати следе из табеле 5.1. Претпоставимо да је у наставку  $n > 7$ . Ако је  $n = 2k + 1$ , тада је  $t = 0$  и у том случају је  $B^*(2k + 1, k) = \{B_{k,0}\}$ , па резултат директно следи. Нека је даље  $n > 2k + 1$ . Тада је  $t \geq 1$  и  $B^*(n, k) = \{B_{k,0}, \dots, B_{k,t}\}$ . Применом леме 6 на чвор  $v_0$  графа  $B_{k,s}$  добијамо карактеристични полином

$$(5.9) \quad \Phi(B_{k,s}, \lambda) = \lambda^{n-2k-2}(\lambda - 1)^{k-s-1}(\lambda + 1)^{k-s}(\lambda^2 - 2)^{s-1}Q(k, s, \lambda),$$

где је

$$(5.10) \quad Q(k, s, \lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - (n - s + 1)\lambda^3 + (n - 2k + s + 1)\lambda^2 + (2n - 6s - 2)\lambda - 2(n - 2k - s - 1).$$

Приметимо да за  $n > 7$  важи

$$Q(k, s, -2) = 2(2n - 15) + 2(n - 2k) + 10s > 0.$$

Са друге стране, пошто је  $Q(k, s, \lambda)$  полином непарног степена онда је

$$(5.11) \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} Q(k, s, \lambda) = -\infty.$$

Закључујемо да је најмањи корен полинома  $Q(k, s, \lambda)$  мањи од  $-2$ . Такође, најмања карактеристична вредност графа  $B_{k,s}$  једнака је најмањем корену полинома  $Q(k, s, \lambda)$ .

Разлика полинома  $Q(k, s + 1, \lambda)$  и  $Q(k, s, \lambda)$  не зависи од вредности параметра  $s$ , тј.

$$(5.12) \quad Q(k, s + 1, \lambda) - Q(k, s, \lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda + 2.$$

Означимо ову разлику са  $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda + 2$ . Користећи софтвер Mathematica 7 добијамо да полином  $f(\lambda)$  има тачно један негативан корен  $\lambda_0 = -3.1249$ . Пошто је функција  $f$  непарног степена изводимо следеће закључке.

Ако је  $\lambda < \lambda_0$ , онда је  $f(\lambda) < 0$  и важи

$$(5.13) \quad Q(k, s + 1, \lambda) < Q(k, s, \lambda).$$

Аналогно, за  $\lambda_0 < \lambda < -2$  важи да је  $f(\lambda) > 0$  па је

$$(5.14) \quad Q(k, s+1, \lambda) > Q(k, s, \lambda).$$

Такође, на основу (5.12) испуњене су једнакости

$$Q(k, 0, \lambda_0) = Q(k, 1, \lambda_0) = \cdots = Q(k, t, \lambda_0).$$

Из (5.11) видимо да уколико је  $Q(k, 0, \lambda_0) > 0$ , онда је најмањи корен полинома  $Q(k, s, \lambda)$  мањи од  $\lambda_0$ . У супротном, најмањи корен овог полинома је већи од  $\lambda_0$ .

Из неједнакости (5.13) закључујемо да за  $Q(k, 0, \lambda_0) > 0$  и  $\lambda < \lambda_0$  важе неједнакости

$$Q(k, 0, \lambda) > Q(k, 1, \lambda) > \cdots > Q(k, t, \lambda),$$

одакле је

$$(5.15) \quad \lambda(B_{k,0}) < \lambda(B_{k,1}) < \cdots < \lambda(B_{k,t}) < \lambda_0.$$

Слично, ако је  $Q(k, 0, \lambda_0) < 0$ , на основу (5.14) за  $\lambda_0 < \lambda < -2$  важе неједнакости

$$Q(k, 0, \lambda) < Q(k, 1, \lambda) < \cdots < Q(k, t, \lambda),$$

односно

$$(5.16) \quad \lambda(B_{k,0}) > \lambda(B_{k,1}) > \cdots > \lambda(B_{k,t}) > \lambda_0.$$

Да бисмо одредили тражени граф остаје још да проценимо знак израза  $Q(k, 0, \lambda_0)$ . Из (5.10) добијамо да је

$$(5.17) \quad Q(k, 0, \lambda_0) = 32.0295n - 15.5299k - 344.7960.$$

Имајући на уму да је  $k$  број контура у графу  $B_{k,0}$ , приметимо да за број чворова овог графа мора важити  $n \geq 2k + 1$ . На основу (5.17) закључујемо да је  $Q(k, 0, \lambda_0) > 0$  ако и само ако је

- 1°  $1 \leq k \leq 2, n \geq 12;$
- 2°  $3 \leq k \leq 4, n \geq 13;$
- 3°  $5 \leq k \leq 6, n \geq 14;$
- 4°  $k \geq 7, n \geq 2k + 1.$

У комбинацији са неједнакостима (5.15) и (5.16) овај резултат комплетира доказ теореме.  $\square$

Коришћењем претходних резултата једноставно се доказује да у скупу  $C(n, k)$  ( $k \geq 1, n \geq 2k + 1$ ) највећи распон има граф  $B_{k,0} = B(k, 0, n - (2k + 1))$ , осим у коначно много случајева.

**Теорема 16.** Нека  $\bar{g}$ раф  $G$  има највећи распон у класи кактуса са  $n$  чворова и  $k$  контура ( $k \geq 1$ ,  $n \geq 2k + 1$ ) и нека је  $t = \min\{k, n - (2k + 1)\}$ . Тада је  $G \cong B(k - t, t, n - (2k + t + 1))$  ако је  $n \in \{4, 5\}$  и  $k = 1$ , или  $n = 6$  и  $k = 2$ , а  $G \cong B(k, 0, n - (2k + 1))$  у свим осталим случајевима.

*Доказ.* Нека је  $n_0(k) = 12$  за  $1 \leq k \leq 2$ ,  $n_0(k) = 13$  за  $3 \leq k \leq 4$  и  $n_0(k) = 14$  за  $5 \leq k \leq 6$ . На основу теореме 15 и последице 3 закључујемо да је  $G \cong B_{k,0}$  ако је  $k \leq 6$  и  $n \geq n_0(k)$  или  $k \geq 7$ .

У преосталим случајевима, на основу последице 5, закључујемо да за кактусе максималног распона у посматраној класи у обзир долазе само кактуси  $B_{k,s}$  из скупа  $B^*(n, k)$ . Анализом резултата из табеле 5.1 показује се да је тврђење теореме тачно за све вредности  $n$  и  $k$ .  $\square$

## 5.2 Екстремални графови у класи кактуса са фиксираним бројем чворова

Нека је са  $C(n)$  означен скуп свих кактуса реда  $n$  који садрже контуре. Имајући на уму теорему 15, у овој класи је могуће одредити граф са максималним индексом, као и граф са минималном најмањом карактеристичном вредношћу.

**Теорема 17.** Нека је  $B^*$   $\bar{g}$ раф који има максимални индекс у скупу  $C(n)$  ( $n \geq 3$ ). Тада је  $B^* = B(m, 0, 0)$  ако је  $n = 2m + 1$  и  $B^* = B(m, 0, 1)$  ако је  $n = 2m + 2$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

*Доказ.* Означимо са  $B^*$  граф који има максимални индекс у скупу свих кактуса реда  $n$  ( $n \geq 3$ ). Тада је  $n = 2m + 1$  или  $n = 2m + 2$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), а максималан број контура графова скупа  $C(n)$  износи  $\lfloor \frac{1}{2}(n - 1) \rfloor = m$ . Због тога је

$$C(n) = \bigcup_{k=1}^m C(n, k).$$

На основу последице 3 закључујемо да за граф  $B^*$  важи

$$B^* \in \{B_{1,0}, B_{2,0}, \dots, B_{m,0}\}.$$

Приметимо да граф  $B_{k,0}$  ( $1 \leq k \leq m$ ) садржи контуру  $C_3$  као индуковани подграф, па је  $\rho(B_{k,0}) \geq \rho(C_3) = 2$ , на основу леме 5.

Користећи једнакости (5.9) и (5.10) закључујемо да карактеристични полином графа  $B_{k,0}$  гласи

$$\phi(B_{k,0}, \lambda) = \lambda^{n-2k-2}(\lambda - 1)^{k-1}(\lambda + 1)^k(\lambda^2 - 2)^{-1}Q(k, 0, \lambda),$$

где је

$$(5.18) \quad Q(k, 0, \lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - (n+1)\lambda^3 + (n-2k+1)\lambda^2 + (2n-2)\lambda - 2(n-2k-1).$$

Видимо да је индекс  $\rho(B_{k,0})$  највећа нула полинома  $Q(k, 0, \lambda)$ . Из једнакости (5.18) добијамо да за  $\lambda > 1.4142$  важи

$$Q(k, 0, \lambda) - Q(k+1, 0, \lambda) = 2(\lambda^2 - 2) > 0,$$

односно,

$$(5.19) \quad Q(1, 0, \lambda) > Q(2, 0, \lambda) > \dots > Q(m, 0, \lambda).$$

Користећи неједнакости (5.19) закључујемо да је

$$\rho(B_{1,0}) < \rho(B_{2,0}) < \dots < \rho(B_{m,0}).$$

Очигледно, у класи  $C(n)$  максимални индекс има граф  $B_{m,0} = B(m, 0, 0)$  ако је  $n = 2m + 1$ , односно  $B_{m,0} = B(m, 0, 1)$  ако је  $n = 2m + 2$ .  $\square$

Претходни резултат доказали су и Боровићанин и Петровић у раду [6], користећи другачију технику.

Поглавље 5 закључујемо резултатом о графу који има минималну најмању карактеристичну вредност у класи  $C(n)$ .

**Теорема 18.** Нека је  $B^*$  граф који има минималну најмању сојсџвену вредност у скупу  $C(n)$  ( $n \geq 3$ ).

- (i) Ако је  $n = 3$  или  $n \geq 12$ , тада је  $B^* = B(1, 0, n-3)$ .
- (ii) Ако је  $4 \leq n \leq 6$  или  $8 \leq n \leq 11$ , тада је  $B^* = B(0, 1, n-4)$ .
- (iii) Ако је  $n = 7$ , тада је  $B^* = B(0, 1, 3)$  или  $B^* = B(0, 2, 0)$ .

*Доказ.* Означимо са  $B^*$  граф чија је најмања карактеристична вредност минимална у скупу  $C(n)$  ( $n \geq 3$ ). Такође, нека је  $m = \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor$  и  $l = \lfloor \frac{1}{3}(n-1) \rfloor$ . Како је

$$C(n) = \bigcup_{k=1}^m C(n, k),$$

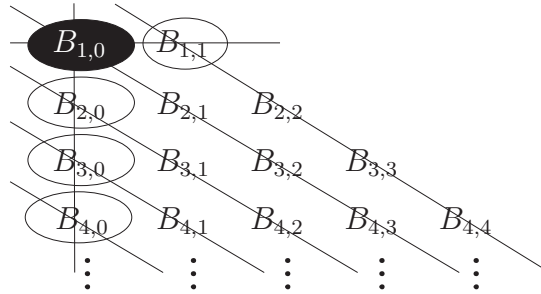
имајући у виду последицу 4, можемо претпоставити да важи

$$B^* \in \bigcup_{k=1}^m B^*(n, k).$$

Ако је  $n \leq 7$ , резултат следи из табеле 5.1. Нека је у наставку  $n \geq 8$ . Тада, у скупу  $B^*(n, k)$  постоји свежањ  $B$  такав да је граф  $B(0, 2, 1)$  индуковани подграф графа  $B$ . На основу леме 5 и с обзиром на то да кактус  $B^*$  има

минималну најмању карактеристичну вредност у скупу  $C(n)$ , закључујемо да  $\lambda(B^*) \leq \lambda(B) \leq \lambda(B(0, 2, 1)) = -2.5887$ .

Даље спроводимо идеју приказану у виду дијаграма 1 на слици 5.4. Прво ћемо упоредити најмање карактеристичне вредности графова из прве колоне. Затим, да бисмо доказали теорему, упоредићемо и најмање карактеристичне вредности графова који се налазе на истој дијагонали на дијаграму 1 и докажати да се екстремални графови ових дијагонала налазе у првој врсти или првој колони дијаграма.



Слика 5.4. Дијаграм 1

Дакле, користећи полином (5.18) добијамо да за  $\lambda < -1.4142$  важи

$$Q(k, 0, \lambda) - Q(k + 1, 0, \lambda) = 2(\lambda^2 - 2) > 0,$$

одакле следи да је

$$(5.20) \quad \lambda(B_{1,0}) < \lambda(B_{2,0}) < \dots < \lambda(B_{m,0}).$$

Слично, користећи полином (5.10) добијамо да је за  $\lambda < -2.4495$  испуњено

$$Q(k, s, \lambda) - Q(k + 1, s + 1, \lambda) = (\lambda - 1)(6 - \lambda^2) > 0.$$

Ако је  $2 \leq k \leq l$ , тада је  $t = k$  и за  $\lambda < -2.4495$  важи

$$Q(k, k, \lambda) < Q(k - 1, k - 1, \lambda) < \dots < Q(1, 1, \lambda).$$

Отуда,

$$(5.21) \quad \lambda(B_{k,k}) > \lambda(B_{k-1,k-1}) > \dots > \lambda(B_{1,1}).$$

Истом аргументацијом, и на основу (5.20), долазимо до закључка да за  $k > l$  и  $t > 0$  важе неједнакости

$$(5.22) \quad \lambda(B_{k,t}) > \lambda(B_{k-1,t-1}) > \dots > \lambda(B_{k-t,0}) \geq \lambda(B_{1,0}).$$

Из релација (5.21) и (5.22) закључујемо да  $B^* \in B^*(n, 1)$ . Користећи овај резултат и теорему 15 за  $k = 1$ , добијамо графове који су, у зависности од вредности броја  $n$ , екстремални у смислу индекса у скупу  $C(n)$ .  $\square$

На крају поглавља наводимо најмање сопствене вредности, индексе и распоне свих свежњева  $B_{k,s} \in B^*(n, k)$  (слика 5.2) за  $3 \leq n \leq 14$ , који су коришћени у доказима претходних теорема. Приказани резултати су добијени помоћу софтвера NewGraph.

$n$	$k$	Граф	Најмања сопствена вредност графа	Индекс графа	Распон графа
3	1	$B(1, 0, 0)$	-1.0000	2.0000	3.0000
4	1	$B(1, 0, 1)$	-1.4812	2.1701	3.6513
		$B(0, 1, 0)$	-2.0000	2.0000	4.0000
5	1	$B(1, 0, 2)$	-1.8136	2.3429	4.1565
		$B(0, 1, 1)$	-2.1358	2.1359	4.2717
	2	$B(2, 0, 0)$	-1.5615	2.5615	4.1231
6	1	$B(1, 0, 3)$	-2.0861	2.5141	4.6003
		$B(0, 1, 2)$	-2.2882	2.2882	4.5765
	2	$B(2, 0, 1)$	-1.9032	2.7093	4.6125
		$B(1, 1, 0)$	-2.1912	2.5035	4.6947
7	1	$B(1, 0, 4)$	-2.3234	2.6813	5.0047
		$B(0, 1, 3)$	-2.4495	2.4495	4.8990
	2	$B(2, 0, 2)$	-2.1774	2.8558	5.0332
		$B(1, 1, 1)$	-2.3527	2.6480	5.0006
		$B(0, 2, 0)$	-2.4495	2.4495	4.8990
	3	$B(3, 0, 0)$	-2.0000	3.0000	5.0000
8	1	$B(1, 0, 5)$	-2.5366	2.8434	5.3800
		$B(0, 1, 4)$	-2.6131	2.6131	5.2263
	2	$B(2, 0, 3)$	-2.4142	3.0000	5.4142
		$B(1, 1, 2)$	-2.5201	2.7936	5.3137
		$B(0, 2, 1)$	-2.5887	2.5887	5.1775
	3	$B(3, 0, 1)$	-2.2731	3.1326	5.4057
$B(2, 1, 0)$		-2.4219	2.9427	5.3647	
9	1	$B(1, 0, 6)$	-2.7320	3.0000	5.7320
		$B(0, 1, 5)$	-2.7752	2.7752	5.5503
	2	$B(2, 0, 4)$	-2.6262	3.1413	5.7675
		$B(1, 1, 3)$	-2.6876	2.9385	5.6261
		$B(0, 2, 2)$	-2.7320	2.7320	5.4641
	3	$B(3, 0, 2)$	-2.5079	3.2635	5.7714
		$B(2, 1, 1)$	-2.5947	3.0761	5.6708
		$B(1, 2, 0)$	-2.6533	2.8854	5.5387
4	$B(4, 0, 0)$	-2.3723	3.3723	5.7446	
10	1	$B(1, 0, 7)$	-2.9136	3.1511	6.0647
		$B(0, 1, 6)$	-2.9335	2.9335	5.8670

$n$	$k$	Граф	Најмања сопствена вредност графа	Индекс графа	Распон графа
10	2	$B(2, 0, 5)$	-2.8201	3.2790	6.099
		$B(1, 1, 4)$	-2.8518	3.0813	5.9332
		$B(0, 2, 3)$	-2.8766	2.8766	5.7532
	3	$B(3, 0, 3)$	-2.7177	3.3923	6.1101
		$B(2, 1, 2)$	-2.7652	3.2084	5.9735
		$B(1, 2, 1)$	-2.8005	3.0191	5.8196
	4	$B(0, 3, 0)$	-2.8284	2.8284	5.6569
		$B(4, 0, 1)$	-2.6039	3.4940	6.0978
11	1	$B(3, 1, 0)$	-2.6728	3.3209	5.9937
		$B(1, 0, 8)$	-3.0839	3.2971	6.3810
	2	$B(0, 1, 7)$	-3.0872	3.0872	6.1745
		$B(2, 0, 6)$	-3.0000	3.4142	6.4142
		$B(1, 1, 5)$	-3.0112	3.2214	6.2327
	3	$B(0, 2, 4)$	-3.0204	3.0204	6.0409
		$B(3, 0, 4)$	-2.9095	3.5188	6.4283
		$B(2, 1, 3)$	-2.9308	3.3388	6.2696
		$B(1, 2, 2)$	-2.9478	3.1523	6.1001
	4	$B(0, 3, 1)$	-2.9618	2.9618	5.9235
$B(4, 0, 2)$		-2.8108	3.6139	6.4247	
$B(3, 1, 1)$		-2.8453	3.4439	6.2893	
5	$B(2, 2, 0)$	-2.8718	3.2687	6.1405	
	$B(5, 0, 0)$	-2.7016	3.7016	6.4031	
12	1	$B(1, 0, 9)$	-3.2448	3.4381	6.6829
		$B(0, 1, 8)$	-3.2361	3.2361	6.4721
	2	$B(2, 0, 7)$	-3.1687	3.5456	6.7143
		$B(1, 1, 6)$	-3.1652	3.3584	6.5237
		$B(0, 2, 5)$	-3.1623	3.1623	6.3246
	3	$B(3, 0, 5)$	-3.0874	3.6428	6.7302
		$B(2, 1, 4)$	-3.0906	3.4671	6.5577
		$B(1, 2, 3)$	-3.0933	3.2842	6.3775
		$B(0, 3, 2)$	-3.0956	3.0956	6.1911
	4	$B(4, 0, 3)$	-3.0000	3.7320	6.7320
		$B(3, 1, 2)$	-3.0117	3.5654	6.5771
		$B(2, 2, 1)$	-3.0212	3.3930	6.4142
		$B(1, 3, 0)$	-3.0292	3.2158	6.2449
	5	$B(5, 0, 1)$	-2.9050	3.8148	6.7198
		$B(4, 1, 0)$	-2.9278	3.6557	6.5835
	13	1	$B(1, 0, 10)$	-3.3978	3.5745
$B(0, 1, 9)$			-3.3800	3.3800	6.7600



$n$	$k$	Граф	Најмања сопствена вредност графа	Индекс графа	Распон графа
13	2	$B(2, 0, 8)$	-3.3280	3.6737	7.0017
		$B(1, 1, 7)$	-3.3139	3.4921	6.8060
		$B(0, 2, 6)$	-3.3014	3.3014	6.6027
	3	$B(3, 0, 6)$	-3.2542	3.7644	7.0185
		$B(2, 1, 5)$	-3.2445	3.5929	6.8374
		$B(1, 2, 4)$	-3.2361	3.4142	6.6503
		$B(0, 3, 3)$	-3.2287	3.2287	6.4574
	4	$B(4, 0, 4)$	-3.1755	3.8482	7.0238
		$B(3, 1, 3)$	-3.1714	3.6851	6.8565
		$B(2, 2, 2)$	-3.1679	3.5159	6.6839
		$B(1, 3, 1)$	-3.1649	3.3412	6.5061
		$B(0, 4, 0)$	-3.1623	3.1623	6.3246
	5	$B(5, 0, 2)$	-3.0912	3.9265	7.0177
		$B(4, 1, 1)$	-3.0942	3.7703	6.8645
		$B(3, 2, 0)$	-3.0967	3.6091	6.7057
	6	$B(6, 0, 0)$	-3.0000	4.0000	7.0000
14	1	$B(1, 0, 11)$	-3.5440	3.7066	7.2506
		$B(0, 1, 10)$	-3.5193	3.5193	7.0385
	2	$B(2, 0, 9)$	-3.4795	3.7986	7.2781
		$B(1, 1, 8)$	-3.4573	3.6225	7.0798
		$B(0, 2, 7)$	-3.4373	3.4373	6.8746
	3	$B(3, 0, 7)$	-3.4117	3.8834	7.2951
		$B(2, 1, 6)$	-3.3926	3.7163	6.5561
		$B(1, 2, 5)$	-3.3756	3.5419	6.9175
		$B(0, 3, 4)$	-3.3603	3.3603	6.7206
	4	$B(4, 0, 5)$	-3.3402	3.9624	7.3026
		$B(3, 1, 4)$	-3.3248	3.8028	7.1277
		$B(2, 2, 3)$	-3.3113	3.6372	6.9485
		$B(1, 3, 2)$	-3.2993	3.4655	6.7648
		$B(0, 4, 1)$	-3.2886	3.2886	6.5773
	5	$B(5, 0, 3)$	-3.2642	4.0365	7.3007
		$B(4, 1, 2)$	-3.2535	3.8833	7.1368
		$B(3, 2, 1)$	-3.2442	3.7250	6.9692
		$B(2, 3, 0)$	-3.2361	3.5615	6.7976
	6	$B(6, 0, 1)$	-3.1830	4.1064	7.2894
		$B(5, 1, 0)$	-3.1781	3.9588	7.1369

Табела 5.1. Најмање сопствене вредности, индекси и распони свежњева  $B_{k,s}$  за  $3 \leq n \leq 14$  и  $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(n-1)$

## Глава 6

# Графови са малим бројем контура и максималним распоном

Распон графа  $G$  (енгл. spread), као што је већ поменуто, дефинише се као разлика највеће и најмање карактеристичне вредности графа  $G$ , односно  $s(G) = \rho(G) - \lambda(G)$ . Први резултати у вези ове спектралне инваријанте помињу се још 1983. године. Наиме, Петровић [30] одређује све графове чији распон није већи од 4. Последњих година, испитивање распона графа постаје све присутнија тема у спектралној теорији графова. Liu и Huo [26] као и Gregory, Hershkowitz и Kirkland [18] одређују неке горње и доње границе за распон графа, на пример

$$s(G) \leq \rho(G) + \sqrt{2m - \rho(G)^2} \leq 2\sqrt{m},$$

где је  $G$  граф фиксираног реда и величине  $m$ . Такође је доказано да је пут јединствени граф са минималним распоном међу повезаним графовима датог реда [18]. Графови са максималним распоном, међутим, још увек нису познати. Одређивање таквих графова, датог реда, је тежак проблем. Уколико се разматрање овог проблема сузи на неке класе графова, проблем постаје једноставнији а тематика је и даље интересантна. Овај проблем је, на пример, могуће посматрати у класи повезаних графова фиксираног реда и величине. Очигледно је да звезда и пут имају максимални, односно минимални распон међу свим стаблима датог реда, респективно.

У вези са графовима чији је распон максималан Gregory, Hershkowitz и Kirkland [18] износе следећу хипотезу.

**Хипотеза 1.** *Ако је  $G$  граф који има максимални распон међу свим графовима са  $n$  чворова и  $m < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$  ирана, тада он мора бити бијарнијан.*

Већ у класи уницикличних графова се, међутим, показује да наведена хипотеза не важи за сваки природан број  $n$ .

У овом поглављу, хипотеза 1 ће бити оповргнута и за неке друге класе графова. Приказаћемо графове са максималним распоном међу графовима фиксираног реда са малим бројем контура. Како је проблем одређивања

графа са максималним распоном у блиској вези са проблемом одређивања минималне најмање карактеристичне вредности у датој класи графова, то ће резултати добијени у поглављима 4 и 5 бити од велике користи.

У глави 4 (секција 4.3) доказано је да је граф  $G_0$  (слика 4.9) екстремални граф у смислу минималне најмање карактеристичне вредности у класи повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + k$  ( $0 \leq k \leq 4$ ,  $n > k + 4$ ) за довољно велико  $n$  (теорема 14).

Brualdi и Solheid [7] такође добијају граф  $G_0$ , али бавећи се проблемом графова са максималним индексом у класи повезаних графова са  $n$  чворова и  $n + k$  грана. Они су показали да је  $G_0$  јединствени граф са максималним индексом за  $0 \leq k < 2$ , као и за  $3 \leq k \leq 5$  и довољно велико  $n$ . Цветковић и Rowlinson [12] допуњују њихове резултате доказом да граф  $G_0$  има максимални индекс у класи свих повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + k$  за  $k \geq 3$  и довољно велико  $n$ .

**Теорема 19** ([7],[12]). *Граф  $G_0$  (слика 4.9) је јединствени граф са максималним индексом у класи повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ). Граф  $G_0$  је такође јединствени граф са максималним индексом у класи повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + k$  ( $k \geq 3$ ) за довољно велико  $n$ .*

Као непосредна последица теорема 14 и 19 добија се граф са максималним распоном у класи повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + k$  за  $k \in \{0, 1, 3, 4\}$  и довољно велико  $n$ .

**Теорема 20.** *Нека је  $G_0$  граф са слике (слика 4.9).*

- (i) *Граф  $G_0$  је јединствени граф са максималним распоном у класи повезаних уницикличних графова реда  $n$  за  $n > 11$ .*
- (ii) *Граф  $G_0$  је јединствени граф са максималним распоном у класи повезаних бицикличних графова реда  $n$  за  $n > 27$ .*
- (iii) *Постоји природан број  $n_0 \geq 83$  такав да је граф  $G_0$  јединствени граф са максималним распоном у класи повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + 3$  за  $n > n_0$ .*
- (iv) *Постоји природан број  $n_0 \geq 123$  такав да је граф  $G_0$  јединствени граф са максималним распоном у класи повезаних графова реда  $n$  и величине  $n + 4$  за  $n > n_0$ .*

Означимо са  $C(n, 1)$  скуп свих кактуса са  $n$  чворова и тачно једном контуром (видети главу 5). Како су повезани унициклични графови реда  $n$  ( $n \geq 4$ ) у ствари кактуси са тачно једном контуром, проблем графова са максималним распоном у класи повезаних уницикличних графова реда  $n$  је еквивалентан проблему графова са максималним распоном у класи  $C(n, 1)$  ( $n \geq 4$ ).

Означимо са  $U_1$  и  $U_2$  уницикличне графове приказане на слици 6.1. Приметимо да је  $U_1$  у ствари граф  $B_{1,1} = B(0, 1, n - 4)$  са слике 5.2, а граф  $U_2$  је граф  $G_0$  са слике 4.9 за  $k = 0$ , односно граф  $B_{1,0} = B(1, 0, n - 3)$  са слике 5.2.

Слика 6.1. Унициклични графови  $U_1$  и  $U_2$ 

Следећа теорема је део једног општијег резултата добијеног у глави 5 (теорема 16), а који се односи на проблем максималног распона у класи кактусса са  $n$  чворова и  $k$  контура.

**Теорема 21** ([16]). *Граф  $U_1$  је јединствени граф са максималним распоном у класи повезаних уницикличних графова реда  $n$  за  $4 \leq n \leq 5$ , а граф  $U_2$  јединствени граф са максималним распоном у истој класи за  $n \geq 6$ .*

До овог резултата дошли су и Fan, Wang и Gao [16] користећи другачију технику.

У наставку ћемо разматрати проблем графова са максималним распоном у класи повезаних бицикличних графова реда  $n$ . Да бисмо формулисали и доказали главну теорему, користећемо резултате које наводимо у следећим лемама.

Слика 6.2. Графови  $B_4$  и  $B'_4$ 

**Лема 38.** *Нека су  $B_4$  и  $B'_4$  графови реда  $n$  приказани на слици 6.2. Тада је  $\lambda(B_4) = \lambda(B'_4)$  за  $n = 6$ , и  $\lambda(B_4) < \lambda(B'_4)$  за  $n \geq 7$ .*

*Доказ.* Применом леме 6 добијамо карактеристичне полиноме

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \phi(B_4, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 - 4\lambda + 2n - 8), \\ \phi(B'_4, \lambda) &= \lambda^{n-5}(\lambda+1)(\lambda^4 - \lambda^3 - n\lambda^2 + (n-4)\lambda + 2(n-4)). \end{aligned}$$

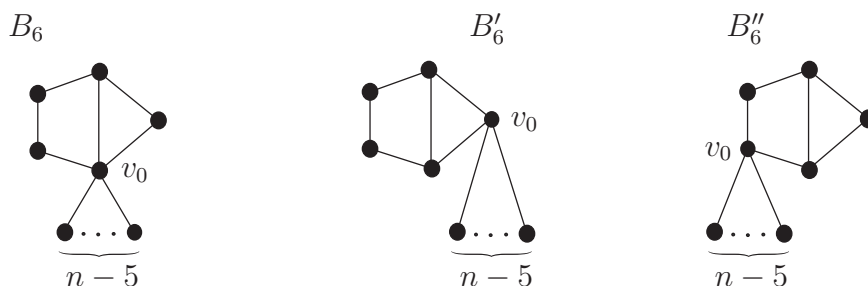
За  $n = 6$  је  $\lambda(B_4) = \lambda(B'_4) = -2$ . Ако је  $n \geq 7$  графови  $B_4$  и  $B'_4$  садрже граф  $C_3(v) \cdot S_{1,3}(v)$  као индуковани подграф, где је  $v$  централни чвор звезде  $S_{1,3}$ . Одатле, на основу леме 5 следи да је  $\lambda(B_4) \leq \lambda(C_3(v) \cdot S_{1,3}(v)) = -2.0861$  и  $\lambda(B'_4) \leq \lambda(C_3(v) \cdot S_{1,3}(v)) = -2.0861$ . Посматрајмо разлику

$$\phi(B_4, \lambda) - \phi(B'_4, \lambda) = -(n-4)\lambda^{n-5}(\lambda+2).$$

Приметимо да за  $n \geq 7$  и  $\lambda < -2$  важи

$$\begin{aligned} \phi(B_4, \lambda) &< \phi(B'_4, \lambda), & \text{када је } n \text{ паран број,} \\ \phi(B_4, \lambda) &> \phi(B'_4, \lambda), & \text{када је } n \text{ непаран број.} \end{aligned}$$

Закључујемо да је  $\lambda(B_4) < \lambda(B'_4)$  за  $n \geq 7$ . □



Слика 6.3. Графови  $B_6$ ,  $B'_6$  и  $B''_6$

**Лема 39.** Нека су  $B_6$ ,  $B'_6$  и  $B''_6$  графови приказани на слици 6.3 и нека је  $n \geq 6$ . Тада важи:

- (i)  $\lambda(B_6) < \lambda(B''_6) < \lambda(B'_6)$ ,
- (ii)  $\rho(B''_6) < \rho(B'_6) < \rho(B_6)$ .

*Доказ.* Применом леме 6 добијамо

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \phi(B_6, \lambda) &= \lambda^{n-6}(\lambda^6 - (n+1)\lambda^4 - 2\lambda^3 + (3n-11)\lambda^2 - (n-5)), \\ \phi(B'_6, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 - 2\lambda + 4(n-4)), \\ \phi(B''_6, \lambda) &= \lambda^{n-6}(\lambda^6 - (n+1)\lambda^4 - 2\lambda^3 + 4(n-4)\lambda^2 + 2(n-5)\lambda \\ &\quad - (n-5)). \end{aligned}$$

(i) Приметимо да графови  $B_6$  и  $B''_6$  садрже граф  $C_4 \cdot P_2$  као индуковани подграф. Одатле, на основу леме 5 важи да је  $\lambda(B_6) \leq \lambda(C_4 \cdot P_2) = -2.1358$  и  $\lambda(B''_6) \leq \lambda(C_4 \cdot P_2) = -2.1358$ . Слично, граф  $B'_6$  садржи контуру  $C_4$  као индуковани подграф па је  $\lambda(B'_6) \leq \lambda(C_4) = -2$ . Разлика полинома  $\phi(B_6, \lambda)$  и  $\phi(B''_6, \lambda)$  једнака је

$$\phi(B_6, \lambda) - \phi(B''_6, \lambda) = -\lambda^{n-5}(n-5)(\lambda+2).$$

Одатле закључујемо да је за  $\lambda < -2$  и  $n \geq 6$  испуњено

$$\begin{aligned} \phi(B_6, \lambda) &< \phi(B''_6, \lambda), & \text{када је } n \text{ паран број,} \\ \phi(B_6, \lambda) &> \phi(B''_6, \lambda), & \text{када је } n \text{ непаран број,} \end{aligned}$$

односно

$$(6.3) \quad \lambda(B_6) < \lambda(B''_6), \quad \text{за } n \geq 6.$$

Слично, разлика карактеристичних полинома графова  $B'_6$  и  $B''_6$  једнака је

$$(6.4) \quad \phi(B''_6, \lambda) - \phi(B'_6, \lambda) = \lambda^{n-6}(n-5)(2\lambda-1).$$

Видимо да за  $\lambda \leq -2$  и  $n \geq 6$  важе неједнакости

$$\begin{aligned} \phi(B''_6, \lambda) &< \phi(B'_6, \lambda), & \text{када је } n \text{ паран број,} \\ \phi(B''_6, \lambda) &> \phi(B'_6, \lambda), & \text{када је } n \text{ непаран број,} \end{aligned}$$

па је

$$(6.5) \quad \lambda(B''_6) < \lambda(B'_6), \quad \text{за } n \geq 6.$$

Из (6.3) и (6.5) добијамо да је  $\lambda(B_6) < \lambda(B''_6) < \lambda(B'_6)$  за  $n \geq 6$ .

(ii) Како графови  $B_6$ ,  $B'_6$  и  $B''_6$  садрже контуру  $C_4$  као индуковани подграф, онда на основу леме 5 важи  $\rho(B_6) \geq \rho(C_4) = 2$ ,  $\rho(B'_6) \geq \rho(C_4) = 2$  и  $\rho(B''_6) \geq \rho(C_4) = 2$ . Разлика карактеристичних полинома графова  $B_6$  и  $B'_6$  једнака је

$$\phi(B_6, \lambda) - \phi(B'_6, \lambda) = -\lambda^{n-6}(n-5)(\lambda^2+1).$$

Одатле је  $\phi(B_6, \lambda) < \phi(B'_6, \lambda)$  за  $\lambda \geq 2$  и  $n \geq 6$ , па закључујемо да је

$$(6.6) \quad \rho(B'_6) < \rho(B_6), \quad \text{за } n \geq 6.$$

Слично, на основу (6.4) знамо да је

$$\phi(B''_6, \lambda) - \phi(B'_6, \lambda) = \lambda^{n-6}(n-5)(2\lambda-1).$$

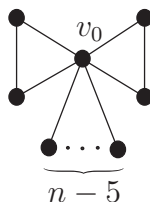
Одатле је  $\phi(B'_6, \lambda) < \phi(B''_6, \lambda)$  за  $\lambda \geq 2$  и  $n \geq 6$ , односно

$$(6.7) \quad \rho(B''_6) < \rho(B'_6), \quad \text{за } n \geq 6.$$

Из (6.6) и (6.7) следи да је  $\rho(B''_6) < \rho(B'_6) < \rho(B_6)$  за  $n \geq 6$ . □

**Лема 40.** Нека је  $B_4$  граф приказан на слици 6.2,  $B_5$  граф приказан на слици 6.4 и  $B_6$  граф приказан на слици 6.3. Тада важи:

- (i)  $\lambda(B_4) < \lambda(B_5)$  за  $n \geq 5$ ,
- (ii)  $\lambda(B_4) < \lambda(B_6)$  за  $n \geq 9$ .



Слика 6.4. Граф  $B_5$

*Доказ.* На основу (6.1), (6.2) и применом леме 6 добијамо полиноме

$$\begin{aligned}\phi(B_4, \lambda) &= \lambda^{n-4}(\lambda^4 - (n+1)\lambda^2 - 4\lambda + 2n - 8), \\ \phi(B_5, \lambda) &= \lambda^{n-6}(\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda^3 - \lambda^2 - (n-1)\lambda + n - 5), \\ \phi(B_6, \lambda) &= \lambda^{n-6}(\lambda^6 - (n+1)\lambda^4 - 2\lambda^3 + (3n-11)\lambda^2 - (n-5)).\end{aligned}$$

(i) Графови  $B_4$  и  $B_5$  садрже звезду  $S_{1,n-3}$  као индуковани подграф, па на основу леме 5 следи  $\lambda(B_4) \leq -\sqrt{n-3}$  и  $\lambda(B_5) \leq -\sqrt{n-3}$ . Посматрајмо разлику

$$(6.8) \quad \phi(B_4, \lambda) - \phi(B_5, \lambda) = -\lambda^{n-6}(3\lambda^2 + 4\lambda - n + 5).$$

Приметимо да је  $\lambda_0 = \frac{-2-\sqrt{3n-11}}{3}$  мања нула полинома  $P(\lambda) = 3\lambda^2 + 4\lambda - n + 5$ . Како за  $n \geq 5$  важи

$$-\sqrt{n-3} < \frac{-2 - \sqrt{3n-11}}{3},$$

добијамо да је  $P(\lambda) = 3\lambda^2 + 4\lambda - n + 5 > 0$  за свако  $\lambda \leq -\sqrt{n-3}$  и  $n \geq 5$ . На основу (6.8) закључујемо да је за  $\lambda \leq -\sqrt{n-3}$  и  $n \geq 5$

$$\begin{aligned}\phi(B_4, \lambda) &< \phi(B_5, \lambda), & \text{када је } n \text{ паран број,} \\ \phi(B_4, \lambda) &> \phi(B_5, \lambda), & \text{када је } n \text{ непаран број.}\end{aligned}$$

Дакле,  $\lambda(B_4) < \lambda(B_5)$  за  $n \geq 5$ .

(ii) Нека је у наставку  $n \geq 9$ . Разлика карактеристичних полинома графова  $B_4$  и  $B_6$  је

$$(6.9) \quad \phi(B_4, \lambda) - \phi(B_6, \lambda) = \lambda^{n-6}(\lambda+1)P(\lambda),$$

где је  $P(\lambda) = -2\lambda^2 - (n-5)\lambda + n - 5$ . Полином  $P(\lambda)$  има два корена:  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 = \frac{-n+5-\sqrt{n^2-2n-15}}{4} < -2$ . На основу (6.9) видимо да за свако  $\lambda \in (\lambda_2, -1)$  важи

$$(6.10) \quad \begin{aligned}\phi(B_4, \lambda) &< \phi(B_6, \lambda), & \text{када је } n \text{ паран број,} \\ \phi(B_4, \lambda) &> \phi(B_6, \lambda), & \text{када је } n \text{ непаран број.}\end{aligned}$$

Фокусирајмо се сада на најмање сопствене вредности ова два графа. На основу једнакости (6.1) знамо да је  $\phi(B_4, \lambda) = \lambda^{n-4}f_1(\lambda)$ , где је

$$f_1(\lambda) = \lambda^4 - (n+1)\lambda^2 - 4\lambda + 2(n-4).$$

Функција  $f_1(\lambda)$  има два негативна корена и мањи корен је најмања карактеристична вредност  $\lambda(B_4)$  графа  $B_4$ . Користећи софтвер Mathematica 7 добијамо да је  $f_1(\lambda_2) > 0$  за  $n \geq 9$ . Како је  $f_1(-2) = -2(n-6) < 0$  и

$f_1(0) = 2(n - 4) > 0$  закључујемо да граф  $B_4$  има тачно једну сопствену вредност мању од  $-2$  и да

$$(6.11) \quad \lambda(B_4) \in (\lambda_2, -2).$$

Слично, на основу једнакости (6.2) знамо да је  $\phi(B_6, \lambda) = \lambda^{n-6} f_2(\lambda)$ , где је

$$f_2(\lambda) = \lambda^6 - (n + 1)\lambda^4 - 2\lambda^3 + (3n - 11)\lambda^2 - (n - 5).$$

Функција  $f_2(\lambda)$  има три негативна корена и најмањи од њих представља најмању карактеристичну вредност  $\lambda(B_6)$  графа  $B_6$ . Користећи софтвер Mathematica 7 добијамо да је  $f_2(\lambda_2) > 0$  за  $n \geq 9$ . Како је  $f_2(-2) = -5(n - 5) < 0$ ,  $f_2(-1) = n - 4 > 0$  и  $f_2(0) = -n + 5 < 0$  закључујемо да граф  $B_6$  има тачно једну сопствену вредност мању од  $-2$  и да

$$(6.12) \quad \lambda(B_6) \in (\lambda_2, -2).$$

На основу (6.10), (6.11) и (6.12) следи да је  $\lambda(B_4) < \lambda(B_6)$  за  $n > 9$ .  $\square$

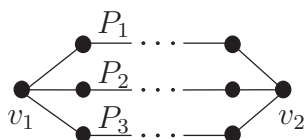
Граф са максималним распоном у класи бицикличних графова реда  $n > 27$  непосредно добијамо из теореме 20 (ii). Приметимо да је  $G_0 \cong B_4$  за  $k = 1$ . Преостаје још да овај проблем решимо за бицикличне графове реда  $4 \leq n \leq 27$ . При томе, користећемо неке графове који су већ приказани у секцији 4.2, па ће овде бити коришћене исте ознаке као у тој секцији.

Означимо са  $\mathcal{B}(n)$  скуп свих повезаних бицикличних графова са  $n$  чворова. Тада је

$$(6.13) \quad \mathcal{B}(n) = C(n, 2) \cup \widehat{\mathcal{B}}(n),$$

где је  $C(n, 2)$  скуп свих кактуса реда  $n$  са тачно две контуре, а  $\widehat{\mathcal{B}}(n)$  скуп свих повезаних бицикличних графова реда  $n$  који садрже две контуре које имају више од једног заједничког чвора. Очигледно,  $C(n, 2) \cap \widehat{\mathcal{B}}(n) = \emptyset$ .

Ако  $G \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ , тада у графу  $G$  постоји индуковани подграф  $G^0$  који садржи три дисјунктна пута  $P_1, P_2$  и  $P_3$  са заједничким почетним чвором  $v_1$  и заједничким крајњим чвором  $v_2$  (слика 6.5). Граф  $G^0$  називамо *основом* графа  $G$  и он је функција одговарајућих параметара, тј.  $G^0 = G^0(p, q, r)$  где је  $p = |V(P_1)|$ ,  $q = |V(P_2)|$  и  $r = |V(P_3)|$  ( $p \leq q \leq r$ ).

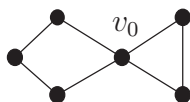


Слика 6.5. Граф  $G^0$

Проблем максималног распона разматраћемо одвојено у скуповима  $C(n, 2)$  и  $\widehat{\mathcal{B}}(n)$ .



Нека је  $B_0$  бициклични граф приказан на слици 6.6 а  $B_5$  бициклични граф приказан на слици 6.4. Приметимо да је  $B_0$  у ствари граф  $B_{1,1} = B(1, 1, 0)$  са слике 5.2, а  $B_5$  граф  $B_{2,0} = B(2, 0, n - 5)$  са слике 5.2. Следећи резултат је такође део теореме 16 добијене у глави 5, а која се односи на проблем максималног распона у класи кактуса са  $n$  чворова и  $k$  контура.

Слика 6.6. Граф  $B_0$ 

**Лема 41.** Граф  $B_0$  је јединствени граф са максималним распоном у класи  $\mathcal{C}(n, 2)$  за  $n = 6$ , а граф  $B_5$  јединствени граф са максималним распоном у истој класи за  $n \geq 5$  и  $n \neq 6$ .

Фокусирајмо се сада на класу  $\widehat{\mathcal{B}}(n)$ .

**Лема 42.** Ако граф  $G \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  садржи бар два стабла закачена за различите чворове основе  $G^0$ , онда постоје графови  $G', G'' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који се састоје из основе  $G^0$  и једног стабла закаченог за неки чвор основе, ипакви да је

- (i)  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$ ,
- (ii)  $\rho(G) < \rho(G'')$ .

*Доказ.* Нека је  $T_1$  стабло закачено за чвор  $u \in V(G^0)$ , а  $T_2$  стабло закачено за чвор  $v \in V(G^0)$ , у графу  $G \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ .

(i) Означимо са  $Y$  карактеристични вектор који одговара  $\lambda(G)$ , а са  $y_u$  и  $y_v$  његове координате које одговарају редом чворовима  $u$  и  $v$ . Претпоставимо да је  $|y_u| \geq |y_v|$ . Граф  $G$  се може посматрати као коалесценција  $G = B(v) \cdot T_2(v)$ . Нека је  $G^* = B(u) \cdot T_2(v)$ . Тада, на основу леме 4 важи  $\lambda(G^*) \leq \lambda(G)$ . Применом овог поступка на свака два стабла закачена за различите чворове основе  $G^0$ , добијамо граф  $G' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који се састоји из основе  $G^0$  и тачно једног стабла закаченог за неки чвор основе, за који је  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$ .

(ii) Нека је  $X$  Перонов вектор графа  $G$ , а  $x_u$  и  $x_v$  његове координате које одговарају редом чворовима  $u$  и  $v$ . Претпоставимо да је  $x_u \geq x_v$ . Као и у случају (i), нека је  $G = B(v) \cdot T_2(v)$  и  $G^* = B(u) \cdot T_2(v)$ . На основу леме 3 следи да је  $\rho(G) < \rho(G^*)$ . Понављајући овај поступак за свака два стабла закачена за различите чворове основе  $G^0$ , добијамо граф  $G'' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који се састоји из основе  $G^0$  и тачно једног стабла закаченог за неки чвор основе, за који важи  $\rho(G) < \rho(G'')$ .  $\square$

**Лема 43.** Ако је  $G \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  граф са основом  $G^0 = G^0(2, 3, r)$  ( $r \geq 4$ ), а  $B_6$  граф приказан на слици 6.3, тада је  $\rho(G) \leq \rho(B_6)$ . Једнакост је испуњена ако и само ако је  $G \cong B_6$ .

*Доказ.* Нека је  $G \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  граф са основом  $G^0 = G^0(2, 3, r)$  ( $r \geq 4$ ) и нека је  $P_3 = u_0u_1 \cdots u_{r-2}u_{r-1}$ , при чему је  $u_0 = v_1$  и  $u_{r-1} = v_2$ .

Ако граф  $G$  садржи бар два стабла закачена за различите чворове основе  $G^0$ , тада на основу леме 42 (ii) постоји граф  $G' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који садржи само једно стабло закачено за неки чвор  $u \in V(G^0)$  и за који је  $\rho(G) < \rho(G')$ .

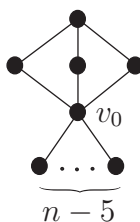
Уколико је  $r > 4$ , посматрајмо граф  $G'' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  дефинисан на следећи начин. Ако је  $u = u_i$  ( $1 \leq i \leq \frac{r}{2}$ ; симетрични случајеви се дефинишу аналогно), нека је  $G'' = G' - u_iu_{i-1} + u_iv_1 - u_{i+1}u_{i+2} + u_{i+1}v_2$ . Ако је  $u \neq u_i$  ( $1 \leq i \leq r-2$ ), нека је  $G'' = G' - u_2u_3 + u_2v_2$ . На основу лема 8 и 5 видимо да је  $\rho(G') < \rho(G'')$  и  $(G'')^0 = (G'')^0(2, 3, 4)$ . Граф  $G''$  се састоји из основе  $(G'')^0$  и највише три стабла закачена за различите чворове основе.

Ако граф  $G''$  садржи бар два стабла закачена за различите чворове основе, тада на основу леме 42 (ii) постоји граф  $G''' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који се може представити у облику  $G''' = (G'')^0(u) \cdot T(u)$ , за који је  $\rho(G'') < \rho(G''')$ . Нека је сада  $G^* = (G''')^0(u) \cdot S_{1,k-1}(u)$ , где је  $k$  ред стабла  $T$ . На основу леме 10 следи да је  $\rho(G''') \leq \rho(G^*)$  и једнакост важи ако и само ако је  $T \cong S_{1,k-1}$ .

На овај начин добили смо граф  $G^* \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  са основом  $(G^*)^0 = (G^*)^0(2, 3, 4)$ , такав да је  $G^* \cong B_6$  или  $G^* \cong B'_6$  или  $G^* \cong B''_6$  и  $\rho(G) \leq \rho(G^*)$ . Из ове неједнакости и леме 39 (ii) непосредно следи да је  $\rho(G) \leq \rho(B_6)$ . На основу описаног поступка може се закључити да је једнакост испуњена ако и само ако је  $G \cong B_6$ .  $\square$

У наставку ће нам бити потребна и следећа теорема.

**Теорема 22** ([7]). *Нека је  $G$  повезан бициклични граф са  $n$  чворова. Тада је  $\rho(G) \leq \rho(B_4)$  и једнакост важи ако и само ако  $G \cong B_4$  (слика 6.2).*



Слика 6.7. Граф  $B_2$

У наредној лемѝ долазимо да резултата који описује структуру графа који има максимални распон у класи  $\widehat{\mathcal{B}}(n)$ .

**Лема 44.** *Нека је  $G$  произвољан граф из скупиа  $\widehat{\mathcal{B}}(n)$ .*

- (i) *Ако је  $5 \leq n \leq 8$ , тада је  $s(G) \leq s(B_2)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong B_2$  (слика 6.7).*
- (ii) *Ако је  $n = 4$  или  $n \geq 9$ , тада је  $s(G) \leq s(B_4)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong B_4$  (слика 6.2).*

*Доказ.* За  $4 \leq n \leq 5$  доказ следи на основу табеле А.1 свих повезаних графова реда  $n \leq 5$  (додатак А). Наиме, постоји само један повезан бициклични граф реда 4 (граф  $B_4$ ) и пет повезаних бицикличних графова реда 5 од којих највећи распон има граф  $B_2$ .

Претпоставимо да је  $n \geq 6$  и да је  $X$  Перонов вектор произвољног графа  $G \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  са основом  $G^0 = G^0(p, q, r)$  ( $p \leq q \leq r$ ). Доказаћемо да за граф  $G \notin \{B_2, B_4\}$  важи

$$(6.14) \quad s(G) < \max\{s(B_2), s(B_4)\}.$$

Ако је  $G$  бипартитан граф и  $G \neq B_2$ , тада на основу теореме 10 важи  $\lambda(B_2) < \lambda(G)$ . Како је и граф  $B_2$  бипартитан, онда је  $\rho(G) < \rho(B_2)$ , одакле је  $s(G) < s(B_2)$ .

Нека је у наставку  $G$  небипартитан граф и  $G \neq B_4$ . Тада можемо разликовати следећа два случаја.

1°  $p = 2, q \geq 4, r \geq q$  или  $p \geq 3, q \geq 3, r \geq 3$  и параметри  $p, q$  и  $r$  нису исте парности.

2°  $p = 2, q = 3, r \geq 3$ .

Размотримо сваки случај посебно.

1° Претпоставимо да су  $p$  и  $q$  исте парности, а параметар  $r$  различите парности од  $p$  и  $q$ . Ако граф  $G$  садржи бар два стабла закачена за различите чворове основе  $G^0$ , тада на основу леме 42 (ii) постоји граф  $G' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који садржи тачно једно стабло закачено за неки чвор основе  $G^0$  и за који важи  $\rho(G) < \rho(G')$ .

У овом случају је  $r \geq 4$ . Нека је  $v \in V(P_3) \setminus \{v_1, v_2, u\}$  произвољан чвор, нека су чворови  $w_1, w_2 \in V(P_3)$  његови суседи и нека је  $G^* = G' - w_1v + w_1w_2$ . Видимо да  $G^* \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  и  $(G^*)^0 = (G^*)^0(p, q, r - 1)$ . На основу лема 8 и 5 добијамо да је  $\rho(G') < \rho(G^*)$ . Како је граф  $G^*$  бипартитан и  $G \neq B_2$ , онда је  $\rho(G^*) < \rho(B_2)$ . Одатле следи да је  $\rho(G) < \rho(B_2)$ , односно  $\lambda(B_2) = -\rho(B_2) < -\rho(G) < \lambda(G)$ . Дакле,  $s(G) < s(B_2)$ .

Слично, у случају када су  $p$  и  $r$ , или  $q$  и  $r$  исте парности можемо добити граф  $G' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који садржи само једно стабло закачено за основу. Затим, применом описаног поступка на један или два пута графа  $G'$  добија се бипартитан граф  $G^*$  ( $G^* \neq B_2$ ), за који је  $\rho(G) < \rho(G') < \rho(G^*) < \rho(B_2)$ . Одатле закључујемо да је  $s(G) < s(B_2)$ .

2° Нека је  $G$  небипартитан граф са основом  $G^0 = G^0(2, 3, r)$  ( $r \geq 3$ ). Ако граф  $G$  садржи бар два стабла закачена за различите чворове основе  $G^0$ , тада на основу леме 42 (i) постоји граф  $G' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  који садржи само једно стабло закачено за неки чвор  $u \in V(G^0)$  и за који је  $\lambda(G') \leq \lambda(G)$ . Граф  $G'$  можемо

посматрати као коалесценцију  $G' = G^0(u) \cdot T(u)$ , где је стабло  $T$  реда  $k$ . Нека је сада  $G'' = G^0(u) \cdot S_{1,k-1}(u)$ . Тада  $G'' \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$  и  $(G'')^0 = (G'')^0(2, 3, r)$ . На основу леме 10 важи  $\lambda(G'') \leq \lambda(G')$ .

Ако је  $r = 3$  или  $r = 4$ , нека је  $G^* = G''$ .

Ако је  $r > 4$ , нека је  $P_3 = u_0u_1 \cdots u_{r-2}u_{r-1}$  ( $u_0 = v_1, u_{r-1} = v_2$ ) и нека је  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  сопствени вектор који одговара  $\lambda(G'')$ . Тада се могу догодити следећа два случаја.

a) Постоји чвор  $u \in V(P_3)$  такав да је  $y_u = 0$ .

Нека је  $v \in V(P_3)$  чвор суседан са чвором  $u$ , а  $w \in V(P_3)$  чвор који није суседан са чвором  $u$ , при чему чворове  $v$  и  $w$  бирамо на следећи начин (симетрични случајеви се дефинишу аналогно). Ако је  $u = v_1$ , тада је  $v = u_1$  и  $w = u_{r-2}$ . Ако је  $u = u_i$  ( $1 \leq i \leq \frac{r}{2}$ ), тада је  $v = u_{i+1}$  и  $w = v_2$ . Ротацијом гране  $uv$  око чвора  $u$ , у позицију  $uw$ , добијамо граф  $G^* = G'' - uv + uw$  чија се најмања сопствена вредност не повећава, тј.  $\lambda(G^*) - \lambda(G'') = 2y_u(y_w - y_v) \leq 0$ . Видимо да  $G^* \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ ,  $(G^*)^0 = (G^*)^0(2, 3, r')$  ( $r' < r$ ) и  $\lambda(G^*) \leq \lambda(G'')$ .

b) За сваки чвор  $u \in V(P_3)$  важи  $y_u \neq 0$ . Тада можемо разликовати следеће две могућности.

b.1) У графу  $G''$ , на путу  $P_3$  постоје два суседна чвора  $u = u_i$  и  $v = u_{i+1}$  ( $i \in \{0, \dots, r-2\}$ ), за које важи  $y_u y_v > 0$ . Без губитка општости претпоставимо да је  $y_u \geq y_v > 0$ .

Тада, помоћу  $(\lambda, X)$ -карактеристичних једначина (2.4) закључујемо да постоји чвор  $w \in V(P_3)$  ( $w \neq u$  и  $w \neq v$ ) такав да је  $y_w < 0$ . Ако је  $w = u_j$  ( $j > i + 1$ ), онда ротацијом гране  $uv$  око чвора  $u$ , у позицију  $uw$ , добијамо граф  $G^* = G'' - uv + uw$ . Тада,  $G^* \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ ,  $(G^*)^0 = (G^*)^0(2, 3, r')$  ( $r' < r$ ) и имамо да је  $\lambda(G^*) - \lambda(G'') = 2y_u(y_w - y_v) < 0$ , тј.  $\lambda(G^*) < \lambda(G'')$ . Ако је  $w = u_j$  ( $j < i$ ), онда ротацијом гране  $uv$  око чвора  $v$ , у позицију  $vw$ , добијамо граф  $G^* = G'' - uv + vw$  за који је  $\lambda(G^*) - \lambda(G'') = 2y_v(y_w - y_u) < 0$ . Такође,  $G^* \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ ,  $(G^*)^0 = (G^*)^0(2, 3, r')$  ( $r' < r$ ) и  $\lambda(G^*) < \lambda(G'')$ .

b.2) У графу  $G''$  за свака два суседна чвора  $u, v \in V(P_3)$  важи  $y_u y_v < 0$ . Без губитка општости, претпоставимо да је  $y_{u_0} > 0$ . Следи да је  $y_{u_1} < 0$ ,  $y_{u_2} > 0$ ,  $y_{u_3} < 0$ ,  $y_{u_4} > 0, \dots$ . Ако је  $y_{u_3} \leq y_{u_1}$ , нека је  $G^* = G'' - u_0u_1 + u_0u_3$ . Слично, ако је  $y_{u_3} > y_{u_1}$ , нека је  $G^* = G'' - u_3u_4 + u_1u_4$ . У првом случају добијамо да је  $\lambda(G^*) - \lambda(G'') = 2y_{u_0}(y_{u_3} - y_{u_1}) \leq 0$ , а у другом  $\lambda(G^*) - \lambda(G'') = 2y_{u_4}(y_{u_1} - y_{u_3}) < 0$ . У оба случаја  $G^* \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ ,  $(G^*)^0 = (G^*)^0(2, 3, r')$  ( $r' < r$ ), и  $\lambda(G^*) \leq \lambda(G'')$ .

Граф  $G^*$ , добијен у случајевима a) и b), састоји се из основе  $(G^*)^0(2, 3, r')$  ( $r' < r$ ) и једног или два стабла прикачених за различите чворове основе. Описани поступак сада можемо поновити све док не добијемо граф  $G^* \in \widehat{\mathcal{B}}(n)$ ,

који се састоји из  $(G^*)^0 = (G^*)^0(2, 3, 3)$  или  $(G^*)^0 = (G^*)^0(2, 3, 4)$ , и једне звезде прикачене за неки чвор основе  $(G^*)^0$ , такав да је

$$(6.15) \quad \lambda(G^*) \leq \lambda(G).$$

Ако је  $G^* \cong B_4$  или  $G^* \cong B'_4$  тада из леме 38, и неједнакости (6.15) добијамо  $\lambda(B_4) \leq \lambda(G)$ . На основу теореме 22 видимо да је  $\rho(G) < \rho(B_4)$ , одакле следи да је  $s(G) < s(B_4)$ .

Ако је  $n \geq 9$  и  $G^* \cong B_6$  или  $G^* \cong B'_6$  или  $G^* \cong B''_6$ , онда на основу лема 39 (i) и 40 (ii) и неједнакости (6.15) закључујемо да је  $\lambda(G) < \lambda(B_4)$ . Такође, на основу теореме 22 је  $\rho(G) < \rho(B_4)$ , одакле следи  $s(G) < s(B_4)$ .

Ако је  $6 \leq n \leq 8$  и  $G^* \cong B_6$  или  $G^* \cong B'_6$  или  $G^* \cong B''_6$ , тада на основу леме 39 (i) и неједнакости (6.15) важи  $\lambda(B_6) \leq \lambda(G)$ . Слично, на основу леме 43 важи  $\rho(G) \leq \rho(B_6)$ , па закључујемо да је  $s(G) \leq s(B_6)$ . Како је  $s(B_6) = 4.7411$  за  $n = 6$ ,  $s(B_6) = 5.0325$  за  $n = 7$  и  $s(B_6) = 5.3378$  за  $n = 8$ , анализом вредности за  $s(B_4)$  приказаних у табели 6.1 видимо да је  $s(B_6) < s(B_4)$  за  $6 \leq n \leq 8$ . Стога,  $s(G) < s(B_4)$  за  $6 \leq n \leq 8$ .

$n$	5	6	7	8	9	10
$s(B_2)$	4.8990	5.1152	5.3525	5.6050	5.8670	6.1336
$s(B_4)$	4.4347	4.8136	5.1844	5.5350	5.8674	6.1839
$n$	11	12	13	14	15	16
$s(B_2)$	6.4008	6.6663	6.9282	7.1856	7.4380	7.6850
$s(B_4)$	6.4866	6.7773	7.0571	7.3272	7.5886	7.8418
$n$	17	18	19	20	21	22
$s(B_2)$	7.9267	8.1631	8.3942	8.6204	8.8417	9.0584
$s(B_4)$	8.0878	8.3269	8.5598	8.7869	9.0086	9.2251
$n$	23	24	25	26	27	—
$s(B_2)$	9.2708	9.4789	9.6830	9.8834	10.0800	—
$s(B_4)$	9.4370	9.6443	9.8475	10.0467	10.2422	—

Табела 6.1. Распони графова  $B_2$  и  $B_4$  за  $5 \leq n \leq 27$

На овај начин доказали смо неједнакост (6.14). У табели 6.1 приказани су распони графова  $B_2$  и  $B_4$  за  $5 \leq n \leq 27$ , добијени коришћењем софтвера NewGraph. Јасно је да је  $s(B_4) < s(B_2)$  за  $5 \leq n \leq 8$  и  $s(B_2) < s(B_4)$  за  $9 \leq n \leq 27$ . Такође, из теореме 20 (ii) видимо да је  $s(B_2) < s(B_4)$  за  $n \geq 28$ , што комплетира доказ теореме.  $\square$

На основу претходних резултата добијамо јединствени граф са највећим распоном у класи повезаних бицикличних графова реда  $n$ .

**Теорема 23.** Нека је  $G$  повезан бициклични граф реда  $n$ .

- (i) Ако је  $5 \leq n \leq 8$ , тада је  $s(G) \leq s(B_2)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong B_2$  (слика 6.7).
- (ii) Ако је  $n = 4$  или  $n \geq 9$ , тада је  $s(G) \leq s(B_4)$  и једнакост важи ако и само ако је  $G \cong B_4$  (слика 6.2).

*Доказ.* За  $n = 4$  постоји само један повезан бициклични граф реда 4 (граф  $B_4$ ) и тврђење теореме је тачно. Нека је даље  $n \geq 5$ .

Означимо са  $B^*$  граф са максималним распоном у класи  $\mathcal{B}(n)$ . На основу релације (6.13) и лема 41 и 44 долазимо до следећих закључака.

Ако је  $n = 6$ , тада  $B^* \in \{B_0, B_2\}$ . Како је  $s(B_0) = 4.6947 < 5.1152 = s(B_2)$ , очигледно је  $B^* \cong B_2$ .

Ако је  $n = 5$  или  $7 \leq n \leq 8$ , онда  $B^* \in \{B_2, B_5\}$ . На основу леме 40 (i) и теореме 22 следи да је  $s(B_5) < s(B_4)$ , а на основу резултата из табеле 6.1 добијамо да је  $s(B_4) < s(B_2)$ . Према томе,  $B^* \cong B_2$ .

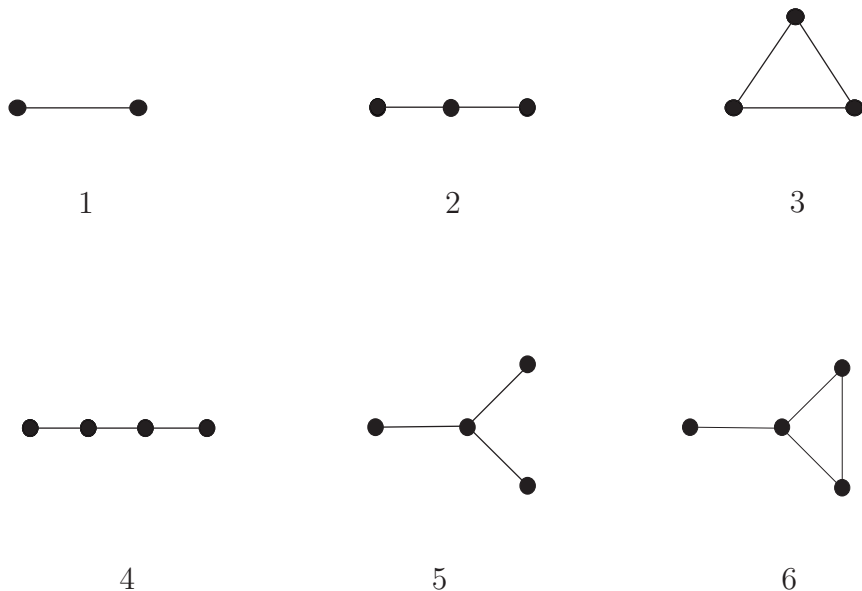
Ако је  $n \geq 9$ , тада  $B^* \in \{B_4, B_5\}$ . Како је  $s(B_5) < s(B_4)$  на основу леме 40 (i) и теореме 22, закључујемо да је  $B^* \cong B_4$ , што комплетира доказ ове теореме.  $\square$

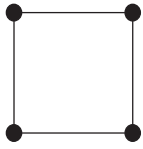
# Додатак А

## Додатне табеле

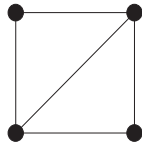
У спектралној теорији графова, често се дешава да се при доказивању неких особина графова, техника која се користи не може применити на графове са малим бројем чворова. То је био случај и у овој докторској дисертацији. Да би теза била комплетна, на крају наводимо све повезане графове реда  $n$  за  $2 \leq n \leq 5$ , њихове најмање карактеристичне вредности, индексе и распоне, као и све бицикличне графове реда  $n = 6$  и њихове карактеристике. Приказане спектралне инваријанте добијене су помоћу софтвера NewGraph.

### А.1 Повезани графови са 2 до 5 чворова

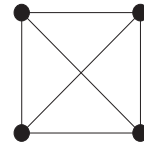




7



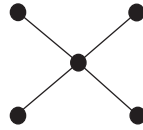
8



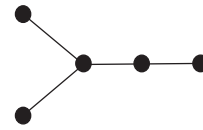
9



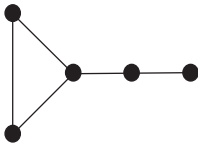
10



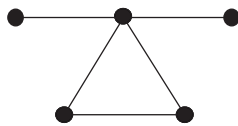
11



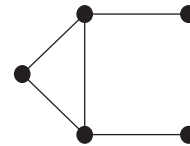
12



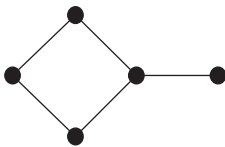
13



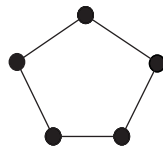
14



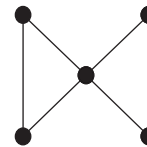
15



16

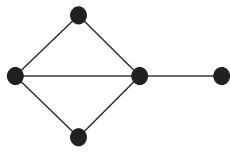


17

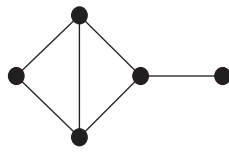


18

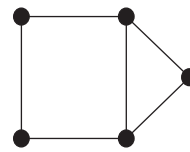




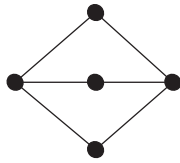
19



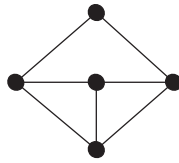
20



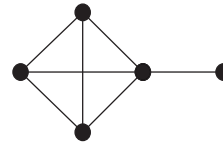
21



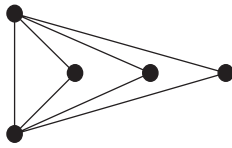
22



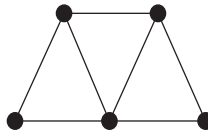
23



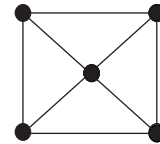
24



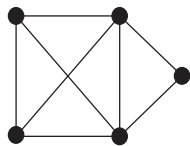
25



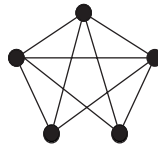
26



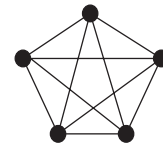
27



28



29



30

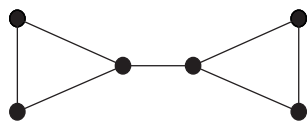
Слика А.1. Повезани графови реда  $2 \leq n \leq 5$

Са слике А.1 приметимо да међу повезаним графовима реда 4 графови 6 и 7 су унициклични, а граф 8 је бицикличан граф. Слично, међу повезаним графовима реда 5 графови 13, 14, 15, 16 и 17 су унициклични а графови 18, 19, 20, 21 и 22 су бициклични графови.

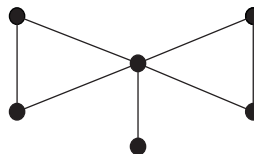
$n$	Редни број графа	Најмања сопствена вредност графа	Индекс графа	Распон графа
2	1	-1.000	1.000	2.000
3	2	-1.414	1.414	2.828
	3	-1.000	2.000	3.000
4	4	-1.618	1.618	3.236
	5	-1.732	1.732	3.464
	6	-1.481	2.170	3.651
	7	-2.000	2.000	4.000
	8	-1.562	2.562	4.123
	9	-1.000	3.000	4.000
5	10	-1.732	1.732	3.464
	11	-2.000	2.000	4.000
	12	-1.848	1.848	3.696
	13	-1.675	2.214	3.889
	14	-1.814	2.343	4.156
	15	-1.618	2.303	3.921
	16	-2.136	2.136	4.272
	17	-1.618	2.000	3.618
	18	-1.562	2.562	4.123
	19	-1.749	2.685	4.435
	20	-1.776	2.641	4.417
	21	-2.000	2.481	4.481
	22	-2.449	2.449	4.899
	23	-2.177	2.856	5.033
24	-1.514	3.086	4.600	
25	-2.000	3.000	5.000	
26	-1.618	2.935	4.553	
27	-2.000	3.236	5.236	
28	-1.681	3.323	5.005	
29	-1.000	4.000	5.000	
30	-1.646	3.646	5.292	

Табела А.1. Најмање сопствене вредности, индекси и распони повезаних графова реда  $2 \leq n \leq 5$

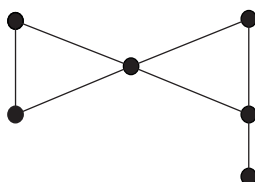
## А.2 Повезани бициклични графови са 6 чворова



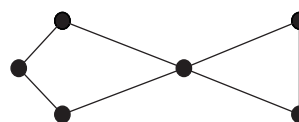
1



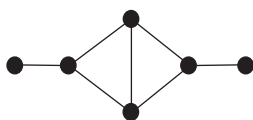
2



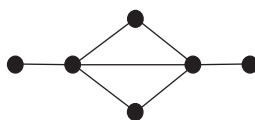
3



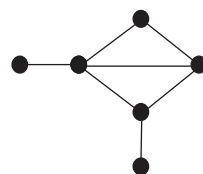
4



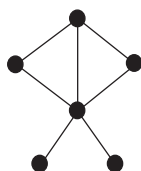
5



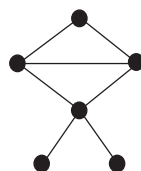
6



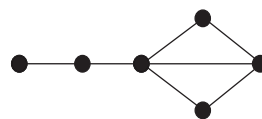
7



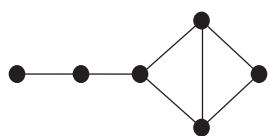
8



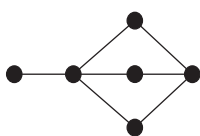
9



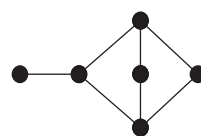
10



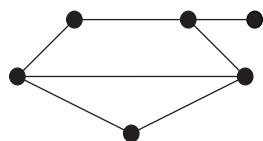
11



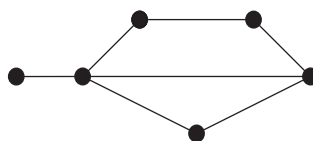
12



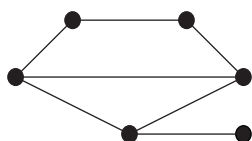
13



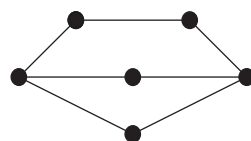
14



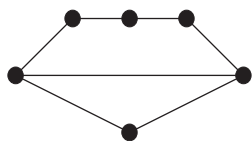
15



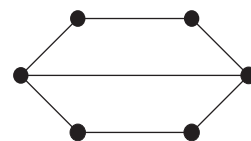
16



17



18



19

Слика А.2. Повезани бициклични графови реда 6

$n$	Редни број графа	Најмања сопствена вредност графа	Индекс графа	Распон графа
6	1	-1.732	2.414	4.146
	2	-1.903	2.709	4.612
	3	-1.678	2.628	4.306
	4	-2.191	2.503	4.694
	5	-1.903	2.709	4.612
	6	-1.791	2.791	4.582
	7	-1.894	2.753	4.647
	8	-2.000	2.813	4.813
	9	-2.000	2.732	4.732
	10	-1.851	2.705	4.556
	11	-1.866	2.655	4.521
	12	-2.557	2.557	5.114
	13	-2.524	2.524	5.048
	14	-2.136	2.539	4.675
	15	-2.141	2.599	4.740
	16	-2.000	2.561	4.561
	17	-2.164	2.391	4.555
	18	-1.756	2.438	4.194
	19	-2.414	2.414	4.828

Табела А.2. Најмање сопствене вредности, индекси и распони повезаних бицикличних графова реда 6

# Додатак Б

## Summary

*“The great book of Nature lies ever open before our eyes and the true philosophy is written in it. We cannot read it unless we have first learned the language and the characteristics in which it is written. And it is written in mathematical language.”*

— Galileo Galilei.

Spectral graph theory is an important interdisciplinary field of science and mathematics in which methods of linear algebra are used to solve problems in graph theory. It has numerous applications for modelling problems in chemistry, computers science, medicine, economy, and physics, to name just a few. By representing a graph as an adjacency matrix, matrix theory can be applied to graph theory. Features of the graph can be investigated using the eigenvalues and the eigenvectors of the adjacency matrix, and these give us information about the graph’s structure. The eigenvalues of a graph  $G$  can be ordered decreasingly, where the first is denoted by  $\rho(G)$  and is called the index of the graph and the least eigenvalue is denoted by  $\lambda(G)$ . A graph’s spread  $s(G)$  is defined as the difference between the greatest and the least eigenvalue of the graph’s adjacency matrix, i.e.  $s(G) = \rho(G) - \lambda(G)$ .

The principal topic of this doctoral thesis is the least eigenvalue of a graph. The structure of a graph  $G$  that has the minimum least eigenvalue within a certain class of graphs is determined. This graph is referred to as an extremal graph.

The first chapter of the thesis contains a short history of Spectral Graph Theory along with a motivation for the research that is presented within this thesis.

Definitions and features of a graph’s spectra are presented in the second chapter, as well as the lemmas that are used in subsequent chapters.

The third chapter presents and extends the latest results found in the literature concerning extremal graphs [4, 5, 37], specifically those found within the class of graphs that have a prescribed number of nodes and edges. These

---

results form a recent publication [31]. The sign pattern of an eigenvector that corresponds to  $G$  determines a partition of the vertex set, which affects the structure of the graph  $G$ . This graph is either bipartite or the join of two nested split graphs (also known as threshold graphs). A subsection of this chapter concerning the case of bipartite graphs is also presented (advances regarding threshold graphs are presented in subsequent chapters).

The fourth chapter investigates extremal graphs within the classes of connected unicyclic, bicyclic, tricyclic, tetracyclic and pentacyclic graphs. The unique extremal graphs of these classes are obtained. This chapter utilises existing results [16, 31, 33] and simplifies existing proofs.

The fifth chapter is based upon the results presented in published work derived from this thesis [2, 32]. It presents a study into the least eigenvalue, the index and the spread of cacti with a prescribed number of nodes and number of cycles. A cactus is a graph in which any two cycles have at most one mutual vertex. A unique cactus whose least eigenvalue is minimal, along with a unique cactus whose spread is maximal, is determined and it is shown that these two graphs are the same, except in a finite number of cases.

The sixth chapter of this thesis presents a study of the maximal spread within the classes of connected unicyclic, bicyclic, tricyclic, tetracyclic and pentacyclic graphs and the unique graphs with this property are obtained. The results of this chapter are based on work found in the literature [1, 6, 12, 16, 31, 32, 33].

Appendix A, presented at the end of this thesis, contains figures depicting all the connected graphs with less than six vertices and all the connected bicyclic graphs with six vertices, their indices, least eigenvalues and spreads. Some of these values are utilised within the proofs that are presented in the previous chapters.

Since new applications of spectral graph theory are constantly being discovered, the investigation into spectral properties of graphs has become an important topic in sciences and in mathematics. It is therefore hoped that the findings of this thesis will find application in these new fields.

# Литература

- [1] T. Aleksić and M. Petrović, “Bicyclic graphs whose spread is maximal,” *Linear Algebra and its Applications*, under review, 2012.
- [2] T. Aleksić and M. Petrović, “Cacti whose spread is maximal,” *Graphs and Combinatorics*, under review, 2012.
- [3] F. K. Bell, “On the maximal index of connected graphs,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 144, pp. 135–151, 1990.
- [4] F. K. Bell, D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. K. Simić, “Graphs for which the least eigenvalue is minimal, I,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 429, pp. 234–241, 2008.
- [5] F. K. Bell, D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. K. Simić, “Graphs for which the least eigenvalue is minimal, II,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 429, pp. 2168–2179, 2008.
- [6] B. Borovićanin and M. Petrović, “On the index of cactuses with  $n$  vertices,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 79, no. 93, pp. 13–18, 2006.
- [7] R. Brualdi and E. S. Solheid, “On the spectral radius of connected graphs,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 39, no. 53, pp. 45–54, 1986.
- [8] L. Collatz and U. Sinogowitz, “Spektren endlicher grafen,” *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 21, pp. 63–77, 1957.
- [9] G. Constantine, “Lower bounds on the spectra of symmetric matrices with nonnegative entries,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 65, no. 1, pp. 171–178, 1985.
- [10] D. Cvetković, M. Doob, I. Gutman, and A. Torgašev, *Recent Results in the Theory of Graph Spectra*. Amsterdam: Elsevier, 1988.
- [11] D. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Applications*, 3rd ed. Heidelberg, Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1995.



- 
- [12] D. Cvetković and P. Rowlinson, “On connected graphs with maximal index,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 44, no. 58, pp. 29–34, 1988.
- [13] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. K. Simić, *Eigenspaces of Graphs*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [14] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. K. Simić, *Spectral Generalizations of Line Graphs, On graphs with least eigenvalue  $-2$* . Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [15] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. K. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [16] Y.-Z. Fan, Y. Wang, and Y. B. Gao, “Minimizing the least eigenvalues of unicyclic graphs with application to spectral spread,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 429, pp. 577–588, 2008.
- [17] Y.-Z. Fan, F.-F. Zhang, and Y. Wang, “The least eigenvalue of the complements of trees,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 435, pp. 2150–2155, 2011.
- [18] D. A. Gregory, D. Hershkowitz, and S. J. Kirkland, “The spread of the spectrum of a graph,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 332, pp. 23–35, 2001.
- [19] C.-X. Hea, J.-Y. Shaob, and J.-L. Heb, “On the laplacian spectral radii of bicyclic graphs,” *Discrete Mathematics*, vol. 308, pp. 5981–5995, 2008.
- [20] A. J. Hoffman and J. H. Smith, “On the spectral radii of topologically equivalent graphs,” in *Recent Advances in Graph Theory*, M. Fiedler, Ed. New York: Academia Praha, 1975, pp. 273–281.
- [21] B. Horoldagva and S.-G. Lee, “Comparing zagreb indices for connected graphs,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 158, pp. 1073–1078, 2010.
- [22] Z. Huang, H. Deng, and S. K. Simić, “On the spectral radius of cactuses with perfect matchings,” *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 5, pp. 14–21, 2011.
- [23] B. Huoa, X. Li, and Y. Shi, “Complete solution to a conjecture on the maximal energy of unicyclic graphs,” *European Journal of Combinatorics*, vol. 32, pp. 662–673, 2011.
- [24] S. Li and M. Zhangb, “Sharp bounds on the zeroth-order general randić indices of conjugated bicyclic graphs,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 53, pp. 1990–2004, 2011.

- 
- [25] X. Li and J. Zhang, “On bicyclic graphs with maximal energy,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 427, pp. 87–98, 2007.
- [26] B. Liu and L. M.-Huo, “On the spread of the spectrum of a graph,” *Discrete Mathematics*, vol. 309, pp. 2727–2732, 2009.
- [27] H. Liu and M. Lu, “A unified approach to extremal cacti for different indices,” *Match, Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, vol. 58, pp. 183–194, 2007.
- [28] L. Lovasz and J. Pelikan, “On the eigenvalues of trees,” *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 3, pp. 175–182, 1973.
- [29] L. Pavlović, M. Lazić, and T. Aleksić, “More on “Connected  $(n, m)$ –graphs with minimum and maximum zeroth-order general randić index,”” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, pp. 2938–2944, 2009.
- [30] M. Petrović, “On graphs whose spectral spread does not exceed 4,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 34, no. 48, pp. 169–174, 1983.
- [31] M. Petrović, T. Aleksić, and S. K. Simić, “Further results on the least eigenvalue of connected graphs,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 435, pp. 2303–2313, 2011.
- [32] M. Petrović, T. Aleksić, and V. Simić, “On the least eigenvalue of cacti,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 435, pp. 2357–2364, 2011.
- [33] M. Petrović, B. Borovićanin, and T. Aleksić, “Bicyclic graphs for which the least eigenvalue is minimal,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 430, pp. 1328–1335, 2009.
- [34] S. Poljak, “Minimum spectral radius of a weighted graph,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 171, pp. 53–63, 1992.
- [35] D. L. Powers, “Bounds on graph eigenvalue,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 117, pp. 1–6, 1989.
- [36] P. Rowlinson, “On the maximal index of graphs with a prescribed number of edges,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 110, pp. 43–53, 1983.
- [37] A. Sawikowska, “Graphs with minimum eigenvalue for the number of vertices and edges,” Ph.D. dissertation, University in Poznan, Poland, 2009.
- [38] A. Schwenk, “Computing the characteristic polynomial of a graph,” in *Graphs and Combinatorics*, ser. Lecture Notes in Mathematics, R. Bari and F. Harary, Eds., vol. 406. New York: Springer Berlin/Heidelberg, 1974, pp. 153–172.

- 
- [39] S. K. Simić, “On the largest eigenvalue of unicyclic graphs,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 42, no. 56, pp. 13–19, 1987.
- [40] S. K. Simić, “On the largest eigenvalue of bicyclic graphs,” *Publications de l’Institut Mathématique*, vol. 46, no. 60, pp. 101–106, 1989.
- [41] A. Torgašev, “On infinite graphs with three and four nonzero eigenvalues,” *Bulletin de l’Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques*, vol. 76, no. 11, pp. 39–48, 1981.
- [42] A. Torgašev, “On infinite graphs with five nonzero eigenvalues,” *Bulletin de l’Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques*, vol. 79, no. 12, pp. 31–38, 1982.
- [43] Y. Wang and Y.-Z. Fan, “The least eigenvalue of a graph with cut vertices,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 433, pp. 19–27, 2010.
- [44] B. Wu, E. Xiao, and Y. Hong, “The spectral radius of trees on  $k$  pendant vertices,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 395, pp. 343–349, 2005.
- [45] J. Wu, H. Deng, and Q. Jiang, “On the spectral radius of cacti with  $k$ -pendant vertices,” *Linear and Multilinear Algebra*, vol. 58, pp. 391–398, 2010.
- [46] M. Xu, Y. Hong, J. Shu, and M. Zhai, “The minimum spectral radius of graphs with a given independence number,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 431, pp. 937–945, 2009.
- [47] X.-Y. Yuan, J.-Y. Shao, and Y. Liu, “The minimal spectral radius of graphs of order  $n$  with diameter  $n - 4$ ,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 428, pp. 2840–2851, 2008.
- [48] M. Zhai, Y. Wu, and J. Shu, “Maximizing the spectral radius of bicyclic graphs with fixed girth,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 431, pp. 716–723, 2009.
- [49] Q. Zhao and S. Li, “Sharp bounds for the zagreb indices of bicyclic graphs with  $k$ -pendant vertices,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 158, pp. 1953–1962, 2010.

# Биографија

Татјана Алексић је рођена 17.06.1982. године у Крагујевцу. Основну школу *Радоје Домановић* завршила је као носилац дипломе *Вук Караџић* и ђак генерације. Прву Крагујевачку гимназију, одељење за талентоване ученике за математику и програмирање завршила је 2001. године као носилац дипломе *Вук Караџић*.

Након тога, уписала је Природно-математички факултет у Крагујевцу, смер математика-информатика и дипломирала 2006. године са просечном оценом 9.88.

Током студија више пута је проглашена за најбољег студента Природно-математичког факултета и једног од пет најбољих студената Универзитета у Крагујевцу. Добитник је награде Краљевине Норвешке за 500 најбољих студената у Србији и Црној Гори, као и годишње плакете *Проф. др Војислав К. Стојановић* Удружења универзитетских професора и научника Србије за најбољег студента у Србији у области математичких наука у 2005. години. Била је стипендиста Републичке фондације за развој научног и уметничког подмлатка.

Докторске студије из математике на Природно-математичком факултету у Крагујевцу уписала је 2006. године и све предмете предвиђене планом и програмом положила са просечном оценом 10.

Године 2009. провела је три месеца на стручном усавршавању на Департману за компјутерске науке Универзитета у Јорку у Великој Британији, у групи проф. Edwin-а Hancock-а. Добитник је стипендије британске фондације British Scholarship Trust за студијски боравак у иностранству и добитник награде *Voya Kondic Prize* за постигнуте најбоље резултате у оквиру студијског боравка у иностранству.

На Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу била је ангажована као истраживач-приправник од 2007. до 2008. године, а затим је изабрана у звање асистента за ужу научну област Алгебра и логика. У досадашњем раду на Институту за математику и информатику изводила је вежбе из предмета: Дискретна математика, Нумеричка математика, Операциона истраживања, Специјални курс елементарне математике, Теоријске основе информатике 1, Теоријске основе информатике 3, Теорија графова и Основи програмирања. На Факултету инжењерских наука у Крагујевцу ангажована је на извођењу вежби из предмета: Математика 1 и Математика 2.

Татјана Алексић активно се бави научно–истраживачким радом из области спектралне теорије графова. У периоду од 2007. до 2011. године била је учесник пројекта *Теорија графова и математичко програмирање са применама у хемији и техничким наукама* финансираног од стране Министарства науке Републике Србије. Тренутно је ангажована на пројекту *Теорија графова и математичко програмирање са применама у хемији и рачунарству* који финансира Министарство просвете и науке Републике Србије.

Резултате истраживања објавила је у оквиру следећих научних радова:

1. T. Aleksić, I. Gutman, M. Petrović, “Estrada index of iterated line graphs,” *Bulletin de l’Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques*, vol. 134, no. 32, pp. 33–41, 2007;
2. B. Zhou, I. Gutman, T. Aleksić, “A note on Laplacian energy of graphs,” *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, vol. 60, no. 2, pp. 441–446, 2008;
3. T. Aleksić, “Upper bounds for Laplacian energy of graphs,” *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, vol. 60, no. 2, pp. 435–439, 2008;
4. M. Petrović, B. Borovićanin, T. Aleksić, “Bicyclic graphs for which the least eigenvalue is minimum,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 430, no. 4, pp. 1328–1335, 2009;
5. Lj. Pavlović, M. Lazić, T. Aleksić, “More on ‘Connected  $(n, m)$ -graphs with minimum and maximum zeroth-order general Randić index’,” *Discrete Applied Mathematics*, vol. 157, no. 13, pp. 2938–2944, 2009;
6. P. Ren, T. Aleksić, R. Wilson, E. Hancock, “Hypergraphs, characteristic polynomials and the Ihara zeta function,” *Computer Analysis of Images and Patterns*, vol. 5702 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, pp. 369–376, 2009;
7. P. Ren, E. Hancock, R. Wilson, T. Aleksić, “Ihara coefficients: a flexible tool for higher order learning,” *Structural, Syntactic, and Statistical Pattern Recognition*, vol. 6218 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, pp. 18–21, 2010;
8. P. Ren, T. Aleksić, R. Wilson, E. Hancock, “A polynomial characterization of hypergraphs using the Ihara zeta function,” *Pattern Recognition*, vol. 44, no. 9, pp. 1941–1957, 2011;
9. P. Ren, T. Aleksić, D. Emms, R. Wilson, E. Hancock, “Quantum walks, Ihara zeta functions and cospectrality in regular graphs,” *Quantum Information Processing*, vol. 10, no. 3, pp. 405–417, 2011;

10. M. Petrović, T. Aleksić, V. Simić, “On the least eigenvalue of cacti,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 435, no. 10, pp. 2357–2364, 2011;
11. M. Petrović, T. Aleksić, S. Simić, “Further results on the least eigenvalue of connected graphs,” *Linear Algebra and its Applications*, vol. 435, no. 9, pp. 2303–2313, 2011.

Добијене резултате излагала је на:

- 12-том Математичком конгресу (28. август – 2. септембар) 2008. године у Новом Саду;
- II Међународној конференцији СПММИ, Савремени проблеми математике, механике и информатике (17 – 19. јун) 2012. године у Новом Пазару.