УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ,
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ,
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

Марина Миловановић

ИНТЕРАКТИВНА МУЛТИМЕДИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Докторска дисертација

Крагујевац, 2014.год.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор
Име и презиме: Марина Миловановић
Датум и место рођења: 16.07.1976.год., Ниш, Србија
Садашње запослење: Универзитет Унион „Никола Тесла”, Београд
II. Докторска дисертација
Наслов: Интерактивна мултимедија у настави математике
Број страница: 172
Број слика: 97
Број библиографских података: 101
Установа и место где је рад израђен: Универзитет Унион „Никола Тесла”, Београд
Научна област (УДК): Методика наставе математике
Ментор: др Марија Станић, ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу (Математичка анализа са применама)
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 21.01.2013.год.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације: 57/18, 13.02.2013.год.
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: др Ђурђица Такачи редовни професор ПМФ-а у Новом Саду (Математичка анализа и вероватноћа), др Бранислав Поповић ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу (Методика, историја и филозофија математике), др Марија Станић (ментор), ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу (Математичка анализа са применама)
Комисија за оцену докторске дисертације: др Ђурђица Такачи редовни професор ПМФ-а у Новом Саду (Математичка анализа и вероватноћа), др Бранислав Поповић ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу (Методика, историја и филозофија математике), др Марија Станић (ментор) ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу (Математичка анализа са применама), др Слађана Димитријевић, доцент ПМФ-а у Крагујевцу (Математичка анализа са применама)
Комисија за одбрану докторске дисертације: др Ђурђица Такачи редовни професор ПМФ-а у Новом Саду (Математичка анализа и вероватноћа), др Бранислав Поповић ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу (Методика, историја и филозофија математике), др Марија Станић (ментор), ванредни професор ПМФ-а у Крагујевцу (Математичка анализа са применама), др Слађана Димитријевић, доцент ПМФ-а у Крагујевцу (Математичка анализа са применама)
Датум одбране дисертације:

Захваљујем се:

др Марији Станић, свом ментору, која ми је помогла многобројним консултацијама, правим саветима, коректним примедбама и корисним предлозима да дисертацију учиним бољом и садржајнијом,

др Ђурђици Такачи, на дугогодишњој успешној сарадњи, пријатељству и интуицији да ме подржи у мом истраживању,

својим родитељима, посебно сестри Јасмини, без чије љубави, подршке и несебичне помоћи не бих успела,

зету Вељи, који је својим знањем и спремношћу увек кад је требало притекао у помоћ,

свом супругу Ивану, на љубави, размевању и безусловној подршци током свих ових година,

својој ћерци Ирис, која ме је учинила најсрећнијом особом на свету.

Садржај

Листа слика

Листа табела

Листа графикона

1. УВОД

Данас је употреба различитих видова мултимедија заступљена у области образовања и пружа све шири спектар могућности наставницима да предају и ђацима да уче. Визуелизација пружа велику помоћ у процесу представљања математичких идеја, апстрактних појмова, теорема, проблема, итд.

Искуство у раду са студентима је показало да су они јако заинтересовани за савремен вид наставе, који подразумева учење уз различите видове мултимедија, као што су: образовни софтвер, Интернет, итд.

Математичари – предавачи, такође, показују велико интересовање за визуелизацију математичких идеја и истичу да визуелно представљање градива пружа велику помоћ апстрактном мишљењу у математици (видети [13]). Велики број аутора у области математике се бави и истраживањем сложене везе између визуелизације градива, креирања менталне слике и процеса учења (видети [13], [22], [23], [31], [34], [45], [48], [73], [74], [75], [79], [88], [99], [100], [101]). Сматра се да је најважније да се постојеће слике, које ученици имају о одређеним појмовима, повежу и надограде и на тај начин прихвате математички појмови (видети [88]). Значи, приликом обраде математичких појмова потребно је комбиновати метод слике и метод дефиниције, о чему говори и когнитивна теорија мултимедијалног учења (видети [53], [55]). Новија истраживања у области математике у циљу успешније презентације градива тј. ради бољег разумевања градива од стране студената, испитују разлику у примени статичних примера, дводимензионалних и тродимензионалних анимација, итд. приликом мултимедијалног учења (видети [4], [56], [69], [77]).

Област математике у којој је визуелизација један од кључних елемената, како за разумевање уведених дефиниција и теорема, тако и за решавање задатака, је геометрија. Приликом рада са студентима приметили смо да им је најтеже да „замисле” слику проблема и ако им се он текстуално и визуелно адекватно представи, сам задатак ће лакше разумети. Ако још уместо слике имамо и мултимедијални приказ задатка, где проблем можемо сагледати у (тродимензионалном) простору, уз „покрет” кроз анимације, проблем постаје још једноставнији и интересантнији за решавање.

За наше истраживање и мултимедијални приказ из геометрије одабрали смо изометријске трансформације (осну и централну симетрију, транслацију и ротацију) и правилне полиедре, као области које се истичу по својој важности, као и по томе што су заступљене у настави математике у већини средњих школа, као и кроз њихову вишеструку примену на великом броју факултета. При одабиру и приказивању градива везаног за изометријске трансформације руководили смо се закључцима утемељеним на основу истраживања спроведених на Пенсилванијском државном универзитету о анализи интуитивне представе, визуелног разумевања и решавања проблема студената, везаних за осну, централну симетрију, ротацију и транслацију (видети [40]).

Одлучили смо се и за мултимедијални приказ градива о одређеном интегралу, који представља један од основних појмова математичке анализе, а заступљен је у плану и програму на сва три факултета на којима је спроведено наше истраживање. Приликом креирања мултимедијалних лекција о одређеном интегралу и њихове употребе у настави, руководили смо се сугестијама које је дао Тол (видети [89]). Овај аутор истиче важност коришћења рачунара приликом израчунавања површине, јер поред нумеричког приступа израчунавању, визуелни приказ нуди много више. Један од разлога одабира ове теме је, такође, што смо кроз рад са студентима запазили да они често решавају проблеме, механички пратећи алгоритме, а да суштински не разумеју шта они значе. Неки од основних проблема су, на примеру одређеног интеграла, што студенти алгоритамски израчунавају одређен интеграл, а да не разумеју његову дефиницију, појам доње и горње границе, везу одређеног интеграла и проблема површине и запремине, итд. Међутим, важно је управо супротно, да се при изучавању наставног градива математике избегне искључиво такозвано ,,примање знања (информација)”. Један од најважнијих циљева савремене наставе математике, па и овога рада, поред примања информација, је и такозвани ,,пренос знања” тј. стицање знања навођењем чињеница и описаним релацијама међу њима.

1.1 Мултимедија и мултимедијално учење

Термин ***мултимедија*** најчешће има вишеструко значење у различитим ситуацијама. На пример, ***мултимедија*** може бити асоцијација за одређени приказ на рачунару који садржи текст, графику и анимацију, уз звучну пратњу. Такође, мултимедију чини и презентација слика приказана на једном или више екрана, уз пратњу музике или неког другог звука. Гледање филма се исто тако може сматрати мултимедијом, јер укључује слике и звук. Још један пример мултимедијалне презентације је *PowerPoint* презентација уз слајдове или пројектор. Лекције у учионици могу бити мултимедијалне када је писање и цртање на табли пропраћено графиконима, анимацијама, итд. са пројектора.

По дефиницији, ***мултимедијално учење представља учење коришћењем слике и речи заједно*** (видети [53]). Битно је нагласити да се под ***речима*** подразумева нарација, текст и звук, тј. штампан или изговорен текст, а под ***сликама*** слике, графикони, анимација, односно, *статички графикони*, као што су дијаграми, слике, или мапе, или *динамички* као што су анимација или видео (видети [4]).

Мултимедијално учење математике можемо дефинисати и као „процес излагања материјала уз помоћ геометријских или графичких презентација математичких принципа, теорема или задатака, или уз помоћ компјутерских цртежа и анимација” (видети [4]).

Карактеристике и неке елементе мултимедијалног учења можемо сагледати и из табеле 1. Она описује све видове мултимедија, од мултимедијалних енциклопедија, до мултимедијалних лекција. На пример, у мултимедијалној енциклопедији, под речима подразумевамо текст на екрану или нарацију, а под сликом, графике, анимацију или видео. У мултимедијалним лекцијама одабраним за наше истраживање, заступљене су све мултимедијалне компоненете, а овај рад има за циљ да укаже на значај мултимедијалног учења, заснованог на коришћењу различитих видова мултимедија у настави математике.

Мултимедијално учење	Учење уз помоћ **слика** (*статички графикони*: дијаграми, слике, мапе или *динамички*: анимација, видео) и **речи** (нарација, текст и звук тј. *штампан* или *изговорен текст*).
Мултимедијална презентација	Презентација у коју су укључени слике и речи.
Мултимедијална порука	Презентација у коју су укључени слике и речи у циљу успешнијег учења.

Табела 1. Дефиниција мултимедијалног учења, презентације и поруке

1.2. Традиционално и мултимедијално учење у настави математике

Током процеса увођења мултимедија у наставу, јављају се многа питања и дилеме везане за учење уз мултимедије, а нека од њих су:

- да ли коришћење мултимедија у учионици и овакви видови презентације, додатни ефекти, помажу традиционалном учењу,
- да ли анимације, видео и звук, пружају ученицима додатну мотивацију, бољу моћ визуелизације, разумевања, схватања узрочно-последичних веза приликом учења?

Мултимедијални извори информација су све заступљенији, Интернет је пун сајтова који су комбинација свега наведеног. Али, ако користимо или сами креирамо лекције за наставу, постављају се и следећа питања:

- како дизајнирати мултимедијалне лекције,
- који су циљеви мултимедијалног учења?

Велики број истраживања у области математике показао је значајне предности мултимедијалног учења у односу на традиционално (видети [2], [55], [56]). Показало се да увођење коришћења рачунара у наставу математике доприноси вишем степену разумевања градива, мотивације и ангажовања ученика (видети [21], [36], [69]).

Различити аутори су истраживали колики утицај на значајност разлике учења уз рачунаре у односу на традиционално учење имају фактори мотивације, постојећег знања и пола ученика (видети [11], [76]). Важност анимације, као једног од најзначајнијих облика мултимедија, на динамичко учење, као и на мотивацију и разумевање истакли су многобројни аутори (видети [10]).

Предмет извесног броја истраживања био је и анализа различитих методичких приступа наставника приликом мултимедијалног учења математике. У овим студијама је истраживан утицај разноврсних фактора на учење: укључени примери из реалног живота, групни рад, мултимедијално окружење (видети [71]), итд. Вишартово (видети [97]) истраживање је резултирало скупом интервјуа са наставницима, ученицима и библиотекарима у осам средњих школа у Великој Британији о њиховом коришћењу мултимедијалних енциклопедија са CD-ова. Важност наведених истраживања је анализа коментара наставника и ученика о значају и променама у учењу применом мултимедија, као и о утицају извесних фактора на њега.

Када је настава математике у нашој земљи у питању, учење уз помоћ рачунара спроводи се на различитим образовним нивоима, са различитим степеном интерактивности и из разних области математике (видети [37], [60], [61], [62], [89], [90], [91], [92] и други). На пример, Д. Херцег и Ђ. Херцег (видети [37]) су спровели низ истраживања о учењу области одређеног интеграла (која за нас имају посебну важност, јер је ова област била и наша област истраживања), користећи програме *Mathematica* и *GeoGebra*.

У савременој литератури истичу се аутори, који користе различите мултимедијалне софтвере: *Macromedia Flash* (видети [26], [49]), *Scientific Workplace* (видети [89]), *Mathematica* (видети [37]), *GeoGebra* (видети [15]), *Geometers' Sketchpad*, (видети [70]), *Autograph* (видети [41]), *Cabri Geometry* (видети [32]), *Aplusix* (видети [33]), итд. Аутори се углавном баве предлозима како да се одређени софтверски пакети употребе у настави.

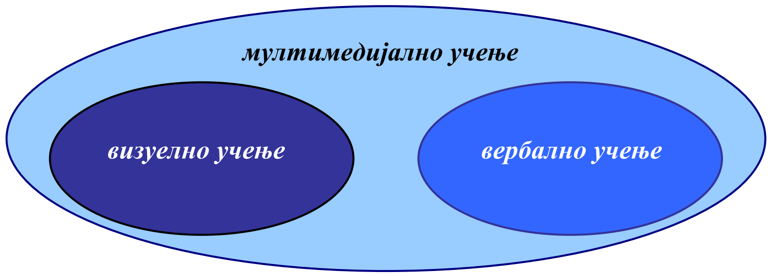
Оваква продукција нових дидактичких средстава одвија се брже него што се развија сама наука, дидактика математике. Често се сматра да мултимедијални садржаји за учење, због визуелизације, сами по себи подразумевају квалитет, што није увек случај. Због тога се јавља и известан раскорак између дидактичке теорије и наставне праксе. Значајан део оваквих нових мултимедијалних материјала нема дидактичку позадину (правила којима се руководи приликом дизајнирања мултимедијалног садржаја). Зато се аутори оваквих мултимедијалних лекција воде сопственом интуицијом у наставној пракси.

Из свега наведеног проистиче идеја о потреби продубљивања дидактичке теорије везане за учење савременим методима уз мултимедијалне садржаје, повезивања са наставном праксом, као и жеља да се направи апликативни софтвер који ће допринети модернијем и интересантнијем приступу настави математике у циљу унапређења квалитета знања која се односе на изучавање одабраних математичких поглавља.

Циљ нашег истраживања је и утврђивање значајности утицаја коришћења мултимедије на стицање знања студената у истраживаним областима, као и њихове реакције на учење уз мултимедију.

1.3 Когнитивна теорија мултимедијалног учења

Когнитивна теорија, теорија различитости слике и речи, заснива се на идеји да је концепција мултимедијалног учења направљена у складу са тим како људски мозак функционише (има и вербални и визуелни начин учења и памћења). Речи, са једне стране, омугућавају да опишемо материју, док слике, са друге стране, омогућавају да материју доживимо и на визуелан начин. Да су ова два начина учења комплементарна међу собом, а не искључива, закључак је многобројних студија. Истраживања су показала да капацитет задржавања информација зависи од чула која се при томе користе у следећем односу: човек је у стању да се сети 15% онога што чује и 25% онога што види, али је у могућности да задржи 60% од информација ако користи интеракцију ова два чула (видети [98]), па закључујемо да ученици приликом учења треба да повезују текст и слику и на тај начин лакше уче, што је и крајњи циљ. Ову терију подржава и Мајер (видети [55]), који у *когнитивној теорији*, посебно истиче важност визуелизације приликом учења, слика 1.



Слика 1. Мултимедијално учење

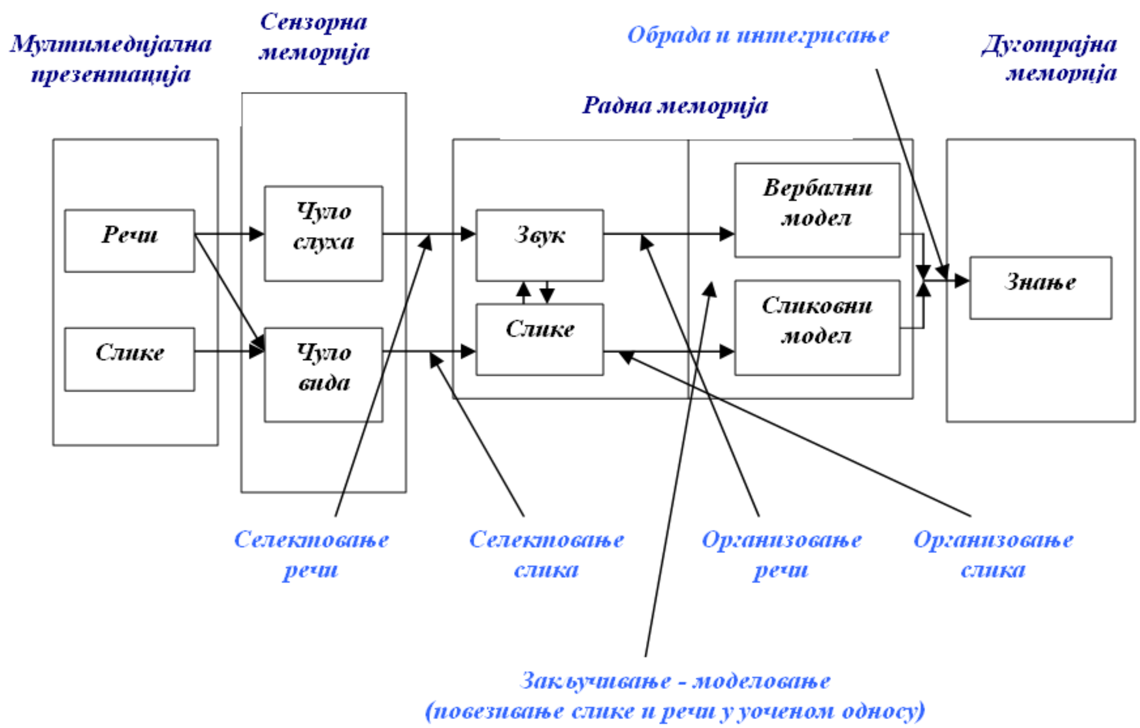
1.3.1 Модел обраде информација у когнитивној теорији мултимедијалног учења

Поставља се питање која је улога теорије мултимедијалног учења у мултимедијалном дизајну. Дизајнирање мултимедијалних порука мора бити усклађено са дизајнеровим концептом о томе како људски ум функционише. Мултимедијалне поруке, које су дизајниране на тај начин, допринеће квалитетнијем учењу, па закључујемо да се принципи о мултимедијалном дизајнирању морају поклапати са начином смештања информација у људску меморију.

На слици 2 представљен је модел когнитивне теорије мултимедијалног учења који предсавља илустрацију људског информационог система за обраду информација у мозгу. Правоугаоници представљају меморију, укључујући сензорну, радну и дуготрајну меморију. Објашњење когнитивне теорије заснива се на пет корака у процесу мултимедијалног учења:

- ***селектовање значајних речи из презентованог текста или нарације;***
- ***селектовање важних слика из презентоване илустрације;***
- ***организовање селектованих речи у кохерентну вербалну презентацију;***
- ***организовање селектованих слика у визуелну презентацију и***
- ***интегрисање визуелне и вербалне презентације са претходним знањем.***

Обрада сликовних информација се дешава углавном у визуелно-сликовном каналу, а изречених речи углавном у аудио-вербалном каналу, али обрада штампаних речи се дешава у визуелно-сликовном каналу, а затим се помера у аудио-вербални канал.



Слика 2. Модел обраде информација у когнитивној теорији мултимедијалног учења

Слике и речи, које долазе из спољног света, као мултимедијална презентација (приказане са леве стране слике 2), улазе у сензорну меморију кроз чуло вида и чуло слуха (приказане у правоугаонику као сензорна меморија). Сензорна меморија омогућава да слике и штампан текст буду сачувани као визуелне слике, за врло кратак временски период у визуално санзорној меморији и за изречене речи и друге звукове да буду сачувани као звучне слике, за кратак временски период у звучној сензорној меморији. Стрелица од слике ка чулу вида, одговара слици која је регистрована оком, а стрелица од речи ка чулу слуха, одговара изреченом тексту регистрованом у уху. И стрелица од речи ка чулу вида, одговара штампаном тексту регистрованом очима.

Главна обрада, при мултимедијалном учењу, догађа се у радној меморији. Она се користи за привремено складиштење и манипулисање знањем. На пример, у читању ове реченице можемо бити у могућности да се активно сконцентришемо на само неке речи у тренутку, или гледајући слику 2 можемо задржати слику неколико правоугаоника и стрелица за неко време. Ова врста памћења, које смо свесни, одиграва се у радној меморији. Лева страна правоугаоника, обележена као радна меморија на слици 2, представља сиров материјал који долази у радну меморију, па је процес заснован на двосензорном модалитету који називамо визуелни и звучни. Насупрот томе, десна страна (на слици 2) радне меморије, представља знање конструисано у радној меморији, визуелни и вербални модел, као и везе међу њима, што чини два репрезентациона модела, које називамо сликовни и вербални. Стрелица од звука до слика репрезентује мисаону конверзију звука у визуелну слику. На пример, када чујемо неку реч ми формирамо мисаону слику о значењу те речи. У радној меморији се дешава и врло битан процес логичког закључивања или повезивања слика и речи по уоченим релацијама. Главни когнитивни процес за мултимедијално учење је репрезентован стрелицом и представља селектовање слике, селектовање звука, организовање слике, организовање речи и интегрисање. Сензорна и радна меморија су подељене на два канала: први задужен за обраду *звука* и евентуално *вербалне презентације*, и други, који обрађује визуелне *слике* и евентуално *сликовне репрезентације*. Коначно, правоугаоник на десној страни, означен као дуготрајна или дугорочна меморија, одговара знању које ученик стекне. За разлику од радне меморије, дугорочна меморија може чувати велике количине знања на дужи временски период, али ако особа жели да активно размишља о материјалу који је складиштен у дугорочној меморији, материјал треба да буде пребачен у радну меморију (што је назначено стрелицом).

Сваки од пет наведених корака у процесу мултимедијалног учења се може догодити, и најчешће се и дешава, више пута током презентације. Кораци се примењују на део по део, не на целу мултимедијалну презентацију. У мултимедијалним лекцијама, на пример, ученик не селектује важне речи и слике из целе лекције, да би их затим организовао у вербални и визуелни модел целе поруке и да би их повезао. Напротив, ученик примењује процедуре на мањим сегментима. Он селектује важне делове из првог дела приче, из првих неколико секунди анимације, затим их организује и интегрише. Затим се овај процес примењује даље.

Укратко, мултимедијално учење је процес у коме је ученик активан, процес који има одвојене канале за визуелну и вербалну обраду података, са озбиљним ограничењима капацитета и који захтева координисане когнитивне процесе у сваком каналу да би се активно учење могло догодити. Практично, мултимедијално учење је захтеван процес, који захтева селектовање важних речи и слика и њихово организовање у кохерентну вербалну и сликовну репрезентацију и интегрисање те вербалне и сликовне репрезентације. Мултимедијалне поруке, које су дизајниране у складу са принципом функционисања људског мозга пре ће водити ка јасном и значајном учењу.

1.3.2 Три претпоставке у когнитивној теорији мултимедијалног учења

Когнитивна теорија се базира на три претпоставке мултимедијалног учења:

- ***претпоставка двојних канала;***
- ***претпоставка ограниченог капацитета и***
- ***претпоставка активног складиштења информација***.

Ове претпоставке са својим карактеристикама приказане су у табели 2.

Под ***претпоставком двојног канала*** подразумевамо хипотезу да човек поседује потпуно одвојене канале за смештање *визуелно* и *аудио* репрезентованог материјала. Ти канали се називају *вербално-слушни канал* и *визуелно-сликовни канал*. Када је информација примљена чулом вида (као што су слике, анимације, итд.), њена обрада почиње у визуелном каналу, а када је примљена чулом слуха (као што су нарација или други звуци), она се обрађује у вербалном каналу.

Постоје две концепције приступа разлици између два канала. Једна је заснована на сензорним модалитетима, а друга на презентационим модовима.

Концепт одвојених канала за обраду информација, одавно познат у когнитивној психологији је повезан са Павиовом теоријом двојног кодовања (видети [72]) и Баделејевим моделом радне меморије (видети [5], [6], [7]).

Претпоставка	Опис	Референце
Двојни канали	Човек поседује два одвојена канала за примање визуелних и звучних информација.	(видети [7], [72]).
Ограниченост капацитета	Само ограничена количина информација се може смештати или обрађивати у сваком од канала у исто време.	(видети [6], [18]).
Активна обрада	Човек се активно укључује у когнитивне процесе да би створио кохерентну менталну репрезентацију свог искуства.	(видети [52]).

Табела 2. Три претпоставке когнитивне теорије мултимедијалног учења

Сензорно модални приступ се фокусира на то којим чулом, вида (слика, видео, анимација, штампани текст) или слуха (нарација, звуци), ученици примају презентован материјал. Према овом приступу, један канал прима визуелно презентован материјал, а други канал слушно презентован материјал.

Са друге стране, *презентационо модални приступ* се базира на врсти презентованог материјала, вербалном (изговорен или штампан текст) или невербалном (слике, видео, анимација или позадински звуци). Према презентационо модалном приступу један канал прима вербални материјал, а други канал сликовни материјал и неговорне звуке. Ова концептуализација је у складу са Павиовом (видети [72]) разликом између вербалних и невербалних система и теоријом двојног кодовања.

Може се закључити да се сензорно модални приступ фокусира на разлику између слушне и визуелне презентације, а презентационо модални на разлику између говорне и неговорне презентације. Главна разлика ова два приступа теорији мултимедијалног учења лежи у обради штампаних речи (нпр. текст на екрану) и звукова у позадини. Текст на екрану се обрађује у вербалном каналу по приступу презентационог мода, а у визуелном каналу по сензорно модалном приступу. Позадински звуци, укључујући и музику без речи, се обрађују у неговорном каналу по приступу презентационог мода, а у слушном каналу по сензорно модалном приступу. Наравно, додатно истаживање је потребно да би се проучила природа разлике између ова два канала.

Иако информација улази у човеков информациони систем путем једног канала, ученици могу бити у могућности да конвертују репрезентацију из једног у други канал. На пример, текст на екрану може бити обрађен у визуелном каналу, зато што је примљен чулом вида, али искусан читач може мисаоно да конвертује слике у звуке, чија се обрада дешава у слушном каналу. Слично, илустрација објекта или догађаја може бити обрађена у визуелном каналу, али ученик може бити у могућности да ментално конструише одговарајући вербални опис у слушном каналу. С друге стране, прича која описује лекцију се спроводи у слушни канал зато што је примљена чулом слуха, али ученик може такође формирати одговарајућу слику о садржини лекције која се дешава у визуелном каналу. Ова репрезентација кроз више канала игра главну улогу у Павиовој теорији двојног кодовања (видети [72]).

Друга претпоставка, ***претпоставка ограниченог капацитета,*** је да се само ограничена количина информација може смештати или обрађивати у сваком од канала (*вербално-слушном каналу* и *визуелно-сликовном каналу*) у исто време. Када се приказује мултимедијална илустрација или анимација, ученик је у могућности да држи само неколико слика у радној меморији истовремено. Када се говори о речима, такође. Када се прича презентује, ученик је у могућности да држи само неколико речи у радној меморији за одређено време. Приликом наше мултимедијалне презентације градива (која ће бити детаљно описана у следећем поглављу), студенти су врло често захтевали да се кораци решења понове и анимацијом и речима. На пример, када је презентована анимација која је приказивала решење, код већине задатка се показало да ученици нису били у могућности да се фокусирају на стварање менталних слика свега изложеног одједном.

Концепција ограниченог капацитета у свести има дугу историју у психологији и неки модерни примери су Баделејева теорија радне меморије (видети [5], [6], [7]) и Свилерова когнитивна теорија оптерећења (видети [85]).

Ако претпоставимо да сваки канал има ограничења у капацитету, важно је знати колика количина информације може бити смештена у сваком каналу. Класичан начин за мерење нечијег когнитивног капацитета је да му се да тест меморијског распона (видети [59], [82]). На пример, у дигиталном тесту распона можете да читате листу бројева у ритму, један број за једну секунду, и тражити од ученика да их понови по редоследу. Најдужи низ који ученик може да понови без прављења грешке је његов *меморијски распон за бројеве*. Такође, може му се показати серија линијских цртежа простог објекта у ритму од једне секунде (круг, квадрат, правоугаоник, трапез, итд.), а затим га питати да понови у тачном редоследу. Најдужа листа коју може да понови без прављења грешке је његов *меморијски распон за слике*. Иако постоје индивидуалне разлике, просечни меморијски распон је око 5-7 објеката.

Пракса је показала да, наравно, људи могу да науче технике за повезивање елемената у целине. На овај начин когнитивни капацитет остаје исти, али више елемента може бити запамћено у ланцу. Постоје још многе различите технике које се непрекидно развијају, у циљу успешнијег памћења. Истраживачи су развили још поузданије методе за мерење *вербалног и визуелног капацитета радне меморије*, али то и даље показује да је људски капацитет меморисања врло ограничен.

Свилер (видети [85]) и Чендлер (видети [17], [18]) су направили разлику између *суштинских и ирелевантних извора когнитивног оптерећења* током учења.

Суштинско когнитивно оптерећење зависи од нераздвојиве сложености материјала – колико има елемената и како су међусобно повезани. Када има много елемената у материјалу и када су повезани међусобно на комплексан начин, суштинско когнитивно оптерећење је велико. С друге стране, то оптерећење је мало када материјал није компликован, односно када се сваки елемент у материјалу може научити одвојено.

Ирелевантно когнитивно оптерећење зависи од начина дизајнирања инструкционе поруке, односно од начина како је материјал организован и презентован. Када порука није јасно дизајнирана, ученици морају ангажовати ирелевантне или неефективне когнитивне процесе. Када је добро дизајнирана, ирелевантно когнитивно оптерећење је мало. Циљ овог рада је да истражи технике за минимизирање ирелевантног когнитивног оптерећења.

Ограничење нашег капацитета складиштења информација нам скреће пажњу на следеће ствари: на које делове информација да обратимо пажњу и на начин на који треба да градимо везе између делова информација и нашег постојећег знања. Метакогнитивна стратегија је техника за распоређивање, надгледање, координисање и подешавање ових ограничених когнитивних ресурса. Ове стратегије су суштина оног што Баделеј (видети [5], [6], [7]) зове централно извршавање – систем који контролише распоред когнитивних ресурса и игра главну улогу у модерној теорији интелигенције.

*Трећа претпоставка, **претпоставка активног процесирања***, је да се човек активно укључује у когнитивне процесе за стварање кохерентне менталне репрезентације информације које прима. Ови активни процеси укључују ***пажњу,*** *организовање долазних информација и интегрисање долазних информација са другим знањем*. Укратко, људи су активни процесори који формирају смисао мултимедијалних презентација. Ово теоријско гледиште на човека, као активног процесора, је у супротности са контрадикторном теоријом да је човек само пасивни процесор који тежи гомилању што више информација у меморији.

Активно учење се одвија када ученик примени тзв. *сазнајни процес* на долазни материјал (процес који има за циљ да помогне ученику да схвати смисао материјала који прима). Резултат активног когнитивног процеса је конструкција кохерентне менталне репрезентације, па се активно учење може назвати и *процес грађења модела*. Ментални модел (или структура знања) представља кључни део презентованог материјала и њихових релација. На пример, кроз наше мултимедијалне презентације трудили смо се да студента наведемо да покуша да направи узрочно последични систем онога што учи.

Као што је већ наведено, три кључна процеса за активно учење су: селектовање релевантног материјала, организовање селектованог материјала и интегрисање тог материјала са постојећим знањем. На пример, у мултимедијалној поруци, ученик мора да селектује одговарајуће речи и слике, да их организује у узрочно-последични ланац, интегришући их са знањем које већ има о тој материји.

1.4 Две методе мултимедијаног учења

Начин и принципи дизајнирања мултимедијалних лекција зависе од дизајнеровог (наставниковог) концепта о мултимедијалном учењу. Постоје два вида мултимедијалног учења: ***стицање знања гомилањем информација (примање информација)*** и ***стицање знања навођењем чињеница и описивањем релација међу њима (пренос знања)***. Ако мултимедијално учење посматрамо као усвајање информација, онда су мултимедијалне лекције само систем за њихову испоруку. Али, ако мултимедијално учење има за циљ, не само навођење чињеница, већ и описивање релација међу њима, онда је мултимедија сазнајни алат.

1.4.1 Мултимедијално учење као примање информација

Усвајање информација укључује просто додавање информација у људску меморију. Овакав вид мултимедијалног учења зависи од три фактора: природе *градива* које се учи, природе *ученика* и природе *наставника* (дизајнера мултимедијалних лекција). Као што се може закључити, мултимедијално учење као усвајање информација, се завршава само примањем информације од наставника. У том случају, циљ мултимедијалне презентације је што ефикаснија испорука информације. У суштини, мултимедија је само оруђе за ефикаснију испоруку информација ученику. Оваква врста мултимедијалног учења се често кроз метафору зове ефекат ”празног суда”. Учеников ум се посматра као празни суд који треба напунити тако што ће наставник ,,сипати” информације. Уобичајени називи су и ,,трансмисиони процес”, зато што наставник пребацује информације које ученик прима, као и ,,роба", зато што се информација посматра као ,,роба" која се преноси с једног места на друго.

Усвајање информација, као врста мултимедијалног учења, наравно, има пуно недостатака. Као што је већ споменуто у уводном делу, један од најважнијих циљева савремене наставе, па и нашег рада, је да се избегне искључиво такозвано ,,примање знања (информација)", а стави акценат на такозвани ,,пренос знања", тј. стицање знања навођењем чињеница и описивањем релација међу њима, као и интегрисање са већ постојећим знањем о тој материји.

У нашем истраживању, на пример, ако желимо да ученик само запамти неку дефиницију, овај вид мултимедијалног учења је у реду. Али, када је наш циљ да ученици примене научено градиво, на пример, за решавање неког задатка, овај метод учења нам не може превише помоћи. Напротив, у супротности је са истраживањима о томе како се учи комплексно градиво и како се научено градиво примењује за решавање неких будућих проблема.

1.4.2 Мултимедијално учење као пренос знања

Насупрот претходној методи учења, када ученик само прима информације, мултимедијално учење као стицање знања навођењем чињеница и описивањем релација међу њима**,** је активност при којој ученик тежи томе да направи кохерентну мисаону презентацију изложеног материјала. За разлику од информације која се прима у људску меморију онаква каква јесте, према овом виду учења, знање је лично конструисано од стране ученика и не може се испоручити у тачној форми (наравно, не може се променити ни суштина поруке). На овај начин, различитим ученицима може бити презентована иста мултимедијална порука, али они ће доћи до различитог схватања те поруке приликом учења. Сваки ученик даје свој смисао презентованом материјалу. Он покушава да организује и интегрише презентован материјал у кохерентну мисаону презентацију. Посао наставника је да помаже ученику у процесу схватања при учењу, дајући му упутства и водећи га ка решењу проблема. Циљ мултимедијалне презентације је не само презентовање информација, већ пружање упутства за њихову организацију и повезивање са претходним знањем. Овакво мултимедијално учење је помоћно средство у креирању схватања, односно водич у конструисању знања.

У табели 3 приказано је поређење две наведене методе мултимедијалног учења: ***примање информација*** (стицање знања гомилањем информација) и ***пренос знања*** (стицање знања навођењем чињеница и описивањем релација међу њима).

Вид мултимедијалног учења	***Дефиниција***	***Значење***	***Ученик***	***Наставник***	***Циљ***
Примање информација	Додавање информација у људску меморију	Информација	Пасиван прималац информација	Давалац информација	Пружити информацију
Пренос знања	Стварање мисаоне презентације	Знање	Активан учесник у конструисању знања	Водич у конструисању знања	Водити при конструисању знања

Табела 3. Две методе мултимедијалног учења

1.5 Циљеви мултимедијалног учења

Циљ мултимедијалне презентације није приказивање ученицима велике количине информација, већ помоћ у схватању важних аспеката презентованог материјала, као и памћење и разумевање изложеног градива. Под памћењем се подразумева могућност репродукције или препознавања изложеног градива, а под разумевањем способност коришћења наученог градива у новонасталим проблемима. Памћење изложеног градива проверава се такозваним – ***тестовима пажње***, а разумевање решавањем практичних проблема и примена на основу онога што је научено – ***тестовима трансфера***. Циљеви мултимедијалног учења са својим карактеристикама су приказани табелом 4.

У овој дисертацији се истиче важност мултимедијалног учења као преноса знања. Дисертација рефлектује идеју да се концепт учења све више шири са тачке ,,поновити информацију” на тачку ,,разумети и применити информацију”. Укратко, овај поглед нуди кориснију концепцију учења којој је циљ помоћ ученицима да схвате и да могу да искористе оно што су научили.

Неки од истраживача који су се бавили мултимедијалним учењем и дизајном су истакли значај и методичких фактора који такође утичу на учење уз медије (видети [25], [94]). Као најзначајније факторе Флеминг и Леви су истакли методичке и концептуалне, чија је суштина да учење зависи не само од квалитета мултимедијалне презентације већ и од методичког и концептуалног квалитета инструкционе поруке предавача. Циљ овог рада, такође, је да се истакне значај улоге мултимедије у настави, али само као подршке професору у учионици који и даље задржава своју примарну улогу.

Циљ	***Дефиниција***	***Тест***	***Пример теста***
Памћење	Могућност да се препозна или репродукује одређени материјал.	**Пажње**	Написати све што сте запамтили из одређене лекције.
Разумевање	Способност коришћења изложеног градива у новонасталим ситуацијама (новим задацима).	**Трансфера**	Решити задате задатке из одређене лекције.

Табела 4. Циљеви мултимедијалног учења

1.6 Основни принципи мултимедијалног учења

Мултимедијално учење може бити ефективно само ако су мултимедијалне лекције дизајниране на одговарајући начин, односно у складу са принципима мултимедијалног учења и дизајна. Дуги низ година истраживања о мултимедијалном учењу и њихови резултати су били доста неповезани и нису доносили конкретне закључке. Али данас постоји велики број њих који јасно дефинишу факторе који утичу на мултимедијално учење и принципе за успешан мултимедијални дизајн.

Постоји дванаест фактора, који су међусобно повезани и комплексно делују на мултимедијално учење и дизајн и од којих се сваки може дефинисати као појединачна варијабла. Стил ученика представља независну варијаблу, док учење зависну. Остали елементи су визуелно сазнање, звучно сазнање, контрола ученика, пажња, радна меморија, мотивација, сазнајно ангажовање, интелигенција, трансфер и дужина чувања података (видети [35]).

Значајне ***принципе о мултимедијалном учењу*** (њих седам) поставио је Мајер (видети [55]) и дати су у табели 5. Ови принципи формулисани су на основу многобројних Мајерових истраживања и његових колега са студентима из области физике, хемије и биологије, и о њима ће детаљно бити речи у следећем делу овог поглавља. Суштина ових принципа, може се свести на следеће четири карактеристике мултимедијалног учења, које утичу на успешност једне мултимедијалне презентације: ***мултимедијалност*** – треба приказати одговарајући текст и слику заједно, ***целовитост*** – приказати одговарајући текст и слику близу једне других, као целину, ***сажетост*** – вишак текста и слике искључити и ***структуралност*** – укључити текстуална и сликовна објашњења изложеног, корак по корак. Још једном наглашавамо да се под *речима* подразумева било кој вид нарације, текста или звука, тј. штампан или изговорен текст, а под *сликама, статички графикони*, као што су дијаграми, слике, или мапе, или *динамички* као што су анимација или видео.

1.6.1 Општи мултимедијални принцип

Општи мултимедијални принцип заснива се на теорији различитости слике и речи (когнитивној теорији). Главна идеја је да када се речи и слике представљају заједно ученици имају прилику да конструишу и вербалну и сликовну представу о томе шта се излаже на предавању, као и да све то повежу у целину.

Назив принципа	**Објашњење принципа**	**Тестови пажње**	**Тестови трансфера**
Општи мултимедијални принцип	Студенти уче боље користећи речи и слике заједно него само речи или само слике.	6 од 9 тестова успешније решено	9 од 9 тестова успешније решено
Просторни принцип	Студенти боље уче пратећи речи и слике приказане близу једне других, него ако су удаљене.	2 од 2 теста успешније решено	5 од 5 тестова успешније решено
Временски принцип	Студенти уче боље када се слике и речи презентују истовремено, него узастопно - једно за другим.	6 од 8 тестова успешније решено	8 од 8 тестова успешније решено
Принцип повезаности (складности)	Студенти боље уче када је небитан материјал искључен из презентације.	11 од 11 тестова успешније решено	10 од 11 тестова успешније решено
Принцип модалитета	Студенти боље уче из анимација и нарације него из анимација и написаног текста.	4 од 4 теста успешније решено	4 од 4 теста успешније решено
Принцип сувишности	Студенти боље уче из анимација и нарације, него из анимација, нарације и написаног текста.	2 од 2 теста успешније решено	2 од 2 теста успешније решено
Принцип индивидуалне разлике	Мултимедијални ефекти су јачи за студенте са нижим степеном знања, него за оне са високим и екстра високим степеном знања.	2 од 3 теста успешније решено	4 од 4 теста успешније решено

Табела 5. Седам принципа (на истраживањима заснованим) мултимедијалног учења (видети [55])

У Мајеровом (видети [55]) истраживању једна група ученика је учила уз помоћ „речи”, тј. штампаног или изговореног текста, а друга уз помоћ „слика”, тј. било ког облика слика, графика, илустрација, анимације. Трећа група ученика учила је различитим комбинацијама слика и речи. „Успешније учење” подразумева успешније памћење и разумевање, па су ученици после одслушаног градива тестирани ***тестовима пажње*** и ***тестовима трансфера***. Градиво је било везано за објашњења како неки систем функционише у смислу физике, механике или биологије. У шест од девет тестова пажње ученици који су учили уз помоћ текста и илустрација или нарације и анимација су боље урадили тестове од оних који су учили само причом или само текстом. И тестове трансфера успешније су решавали студенти који су учили из слика и речи заједно, девет од девет тестова. Питања су захтевала објашњења и креативна решења постављеног проблема повезаног са изложеном материјом. Посебно је интересантно да су у тестовима трансфера студенти са мултимедијалним лекцијама показали много више знања, у просеку 89%. Њихови одговори су били много потпунији, проблему су приступали са више аспеката, решавали га „корак по корак” и на више начина. Дакле, под ,,успешнијим учењем” није се сматрало ,,учити више”, већ ,,квалитет онога што је научено”.

Упутство за мултимедијални дизајн: удружити слику и речи на квалитетан начин, јер студенти боље разумеју материју приказану у две форме него у једној.

Резултати наведеног Мајеровог истраживања наводе на размишљање да материјал направимо прихватљивијим за учење. Да ли можемо да помогнемо студентима при учењу када им додамо визуелну презентацију градива? Који је најбољи начин да се комбинују визуелна и вербална презентација да би се унапредило учење? Ово су питања која покрећу овај рад.

Закључак о приказивању слике и речи заједно је јасан, али сада се постављају још нека питања. На који начин додати слике, тј. на ком месту и у ком временском размаку? Следећа правила о мултимедијалном учењу дају одговоре на претходно постављена питања.

1.6.2 Просторни принцип мултимедијалног учења

Када желимо да представимо мултимедијални материјал, на страници или екрану, простор је ограничен. Поставља се питање како га искористити, како распоредити текст и слике? У Мајеровом (видети [55]) истраживању половина расположивог простора од две стране (екрана) је била предвиђена за текст, а половина за слике. Материјал је распоређен на два начина. Први је био приказивање текстова и слика потпуно одвојено, на различитим странама, тј. екранима (тзв. „separation design"). На други начин је свака сликовна илустрација приказана заједно са одговарајућим параграфом који описује, на истој страни (тзв. „integration design"). Врло често су се упоредо са приказивањем илустрација појављивале и кључне речи из текстова које ближе описују илустрацију. Поставља се питање који од ова два начина је ефикаснији при мултимедијалном учењу. Груписане илустрације се заснивају на теорији различитости о визуелно-вербалном моделу учења (когнитивној теорији). Ученик истовремено прати градиво речима и сликама. Циљ је да их повезује и ствара менталну представу о томе шта учи. Сматра се да је то повезивање, тј. разумевање посебно битно за тест трансфера. Материјал приказан сликама и речима просторно близу, студенти лакше држе заједно у меморији и не морају да траже оно што повезују по различитим странама, тј. екранима. Тражењем по различитим странама, на пример, неке анимације и њеног објашњења, не губи се само на времену, већ се смањује могућност памћења и повезивања речи и слике.

Истраживање је показало да су у два од два теста пажње и у пет од пет тестова трансфера (видети [54], [55]), ученици показали боље резултате када су текстови и илустрације (или текст и анимације) били приказани на једној страни (на једном екрану).

Упутство за мултимедијални дизајн: истраживање специјалних просторних ефеката је показало да приказивање мултимедијалних презентација са сликама и текстом близу једне другима показују боље резултате него у супротном.

Студенти у нашем истраживању су изјавили да постоји доста уџбеника код којих одговарајуће текстове и илустрације треба тражити на различитим странама, што у великој мери узрокује заборављање прочитаног текста и смањену могућност повезивања текста и слика у целину. Потпуна аналогија постоји и са коришћењем рачунара у настави и приказивањем градива на екрану. Зато треба држати слике и речи просторно близу једне других.

1.6.3 Временски принцип мултимедијалног учења

У Мајеровом истраживању (видети [55]) градиво је испредавано на два начина. Једној групи студената материјал је презентован истовремено сликама и речима, а другој групи студената приказивани су одвојено текст и слике у различитим временским размацима.

На основу когнитивне теорије о мултимедијалном учењу, истовремена презентација градива дозвољава студентима да држе вербалну и визуелну слику у меморији заједно и да то повежу. *Истовременост* доприноси да студенти држе градиво у меморији и стварају *менталну везу* између вербалне и визуелне презентације.

Ученици су боље урадили три од пет тестова пажње, када су текст и слика приказани истовремено. Такође, у осам од осам тестова трансфера ученици су били бољи у случају када су текст и слика приказани истовремено (видети [55]). Интересантно је да када је узастопно приказивање било базирано на врло кратким временским размацима (пар секунди), онда разлике и нису биле баш толико изражене.

Упутство за мултимедијални дизајн: боље је презентовати речи и слике временски близу једне другима, тј. истовремено или узастопно, али у врло кратким временским размацима.

Закључци за мултимедијално учење на основу просторног и временског принципа су да је презентација градива у којој су заступљене *просторна и временска близина* (истовременост) веома важна јер пружа дуплу могућност памћења (кроз нарацију – за чуло слуха и анимацију – за чуло вида). Материјал презентован на овај начин смешта се у исти део људске меморије и пружа лаку могућност повезивања на основу визуелног и вербалног.

1.6.4 Принцип повезаности (складности)

У складу са когнитивном теоријом, неважан материјал се такмичи за сазнајне ресурсе у радној меморији и може да наруши пажњу ученика и омете учење битног материјала.

Од свих теорија које подржавају додавање интересантних слика и речи, као и звучних ефеката истиче се ***теорија изазова (arosal teory)***. Ова теорија истиче да интересантне слике и текст убачене у део градива изазивају емоционалне ефекте код студената и они обраћају више пажње на материју и боље уче. Звучни ефекти подижу расположење и дочаравају слику онога о чему се говори. Све ово доприноси повећању пажње презентованог садржаја и бољем учењу. Вајнер (видети [96]) је истакао појам *мотивације* као кључни појам за учење у теорији изазова, а Кинч (видети [44]) истакао важност „емотивног момента" при учењу, кроз назив ,,емоционални допринос". Теорија изазова је у супротности са когнитивном теоријом, по којој је мултимедијално учење један веома сложен процес стварања менталне слике на основу онога што се предаје и већ постојећег знања студента. Идеја о додатним интересантним текстовима, сликама и звуцима може да наруши овај процес.

У једанаест од једанаест тестова пажње и тестова трансфера ученици су показали боље резултате када су сувишни текстови и илустрације (или звук и анимације) избачени из предавања. Треба истаћи да им се при томе знатно смањила вербална пажња, а додатни интересантни текстови и слике су допринели брзом заборављању битног материјала (видети [55]).

У истраживањима, вршеним додавањем небитног, али занимљивог текста одређеним одељцима лекције, забележени су слични резултати. Студенти су доста пажње поклањали небитном тексту и слабије памтили оно што је кључно у том делу лекције (видети [27], [28], [39], [65], [80], [81], [95]).

Упутство за мултимедијални дизајн: искључити небитне информације из презентације градива.

Искуство приликом нашег истраживања је показало да су ,,небитне информације" релативан појам. У неким случајевима, као што су мултимедијалне лекције о изометријским трансформације (чији ће део приказа бити изложен у наредној глави), приказивање разних примера из живота о осној симетрији је студентима било интересантно, али поред тога и веома корисно. Доста су научили и изјавили су да су код ових примера уочили симетрију и тако где је до сад никада нису примећивали (на архитектонским грађевинама, у уметничким делима, на словима, религијским симболима, код животиња, итд.). Закључак је да ако убацујемо неки материјал, који није стриктно неопходан и везан за презентовано градиво, треба га на веома пажљив начин изабрати и убацити приликом предавања на право место (можда најбоље као уводни или закључни део, као што је то случај у нашим мултимедијалним лекцијама).

Упознали смо се са неким принципима о мултимедијалном учењу и дизајнирању мултимедијалне лекције. Сада је потребно пронаћи најбољи начин за излагање градива речима. Можемо их приказати на екрану као штампани текст, или као нарацију, изговорени текст. Да ли је ово уопште важно за мултимедијално учење? Истраживања наведена у следећем одељку дала су одговор на претходно постављено питање.

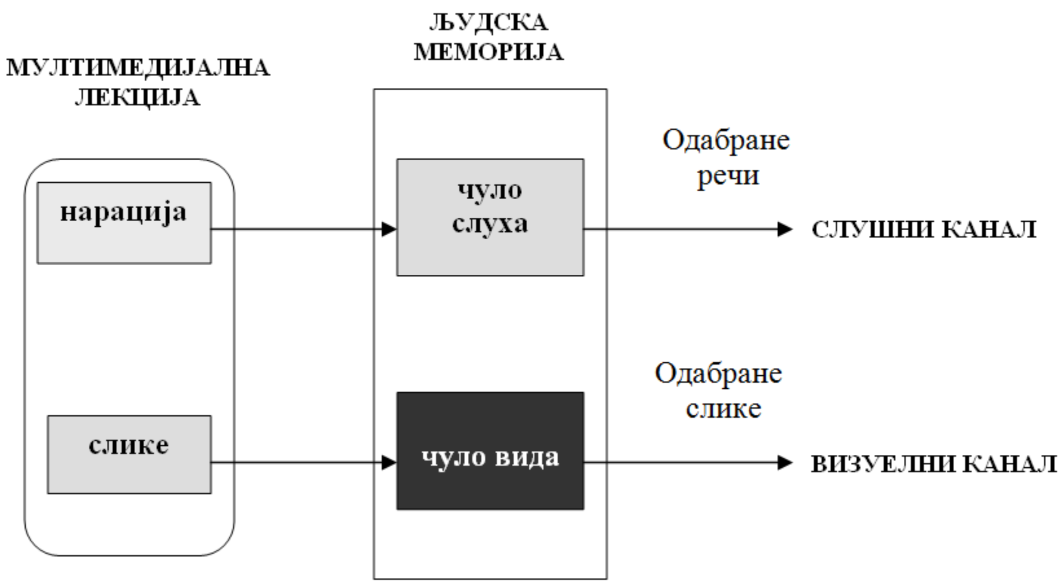
1.6.5 Принцип модалитета

На основу когнитивне теорије се закључује да када слике и речи заједно приказујемо визуелно (на пример као анимацију и текст), канал за примање визуелних информација (визуелни канал) постаје преоптерећен, а канал за примање звучних информација (вербални канал) остаје потпуно неискоришћен. Када речи представљамо звуком (нарацијом) звучни канал је активан и оставља простора и визуелном, за слику. На слици 3 илустративно је приказана ова хипотеза когнитивне теорије, која истиче да је комбинација анимације и текста (б) лошија по учење него анимација са нарацијом (а).

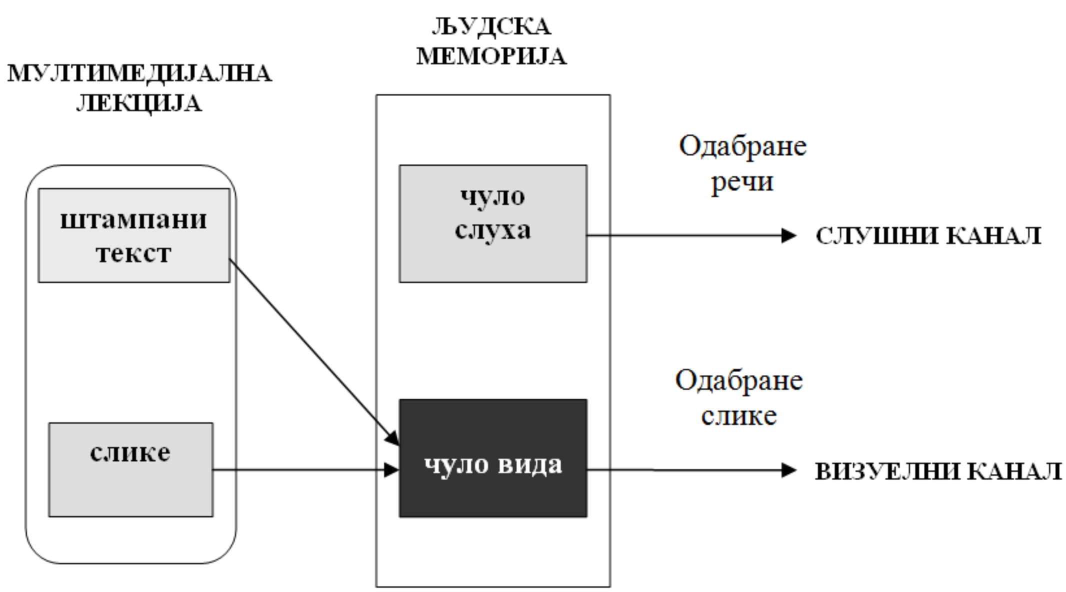
Истраживање принципа модалитета је показало да су четири од четири теста ученици који су учили уз помоћ нарације и анимација боље решавали од оних који су учили само текстом и анимацијама (видети [55]).

Упутство за мултимедијални дизајн: наставно градиво треба изложити, што је више могуће, нарацијом и анимацијом.

а) Нарација и анимација: само слике пролазе кроз визуелни канал



б) Штампани текст и анимација: речи и слике заједно пролазе кроз визуелни канал



Слика 3. Илустрација хипотезе когнитивне теорије да је комбинација анимације и штампаног текста (б) лошија по учење него анимација са нарацијом (а)

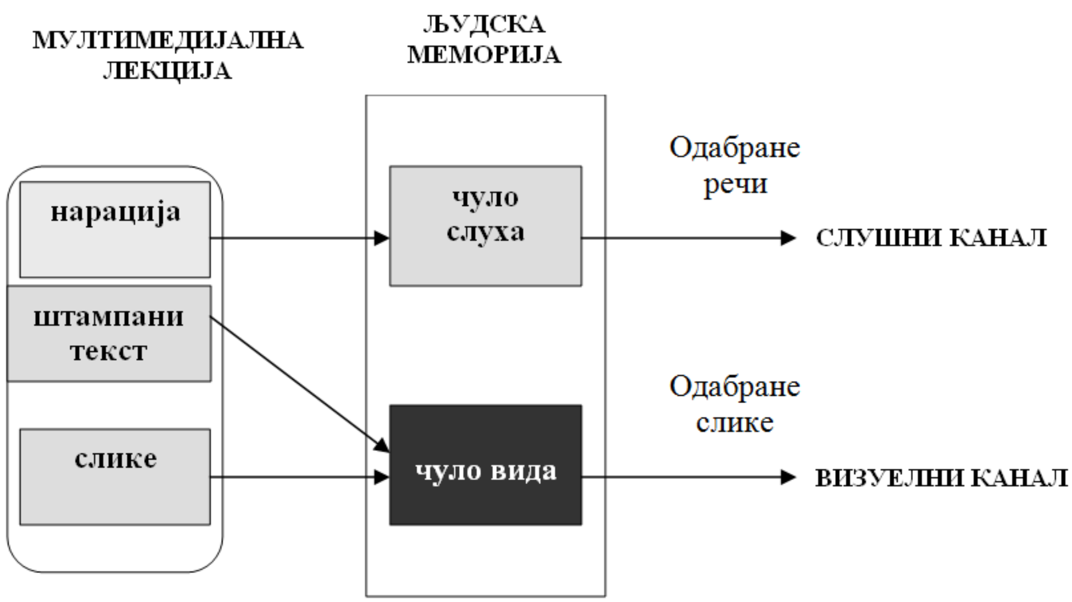
1.6.6 Принцип сувишности

Слично, као и код принципа модалитета, принцип сувишности, постављен је на основу хипотезе „***ограниченог капацитета учења***", која тврди да је човеково визуелно и чулно памћење ограничено. Када су слике и речи приказане визуелно (као анимација и текст) визуелни канал за примање информација је преоптерећен, дакле, учење није потпуно ефективно. Ова хипотеза се може се приказати сликом 4.

У два од два теста пажње и трансфера ученици који су учили уз помоћ нарације и анимација су боље урадили тестове од оних који су учили нарацијом, анимацијом и текстом (видети [55]).

Упутство за мултимедијални дизајн: приликом наставе боље је удружити анимације и нарацију, него анимацију, нарацију и текст.

Нарација, текст и анимација: слике и текст, заједно пролазе кроз визуелни канал



Слика 4. Илустрација хипотезе когнитивне теорије да је комбинација анимације, нарације и текста на приказаној слици лошија по учење него анимација са нарацијом (слика 3/а)

Искуство приликом нашег истраживања је показало супротно, тј. студенти који нису чули део предавања, могли су увек да га прочитају са екрана и текст су навели као врло користан вид излагања (уз нарацију и анимацију). Учењем кроз слике, нарацију и текст градиво је студентима приказано на више начина, па је свако од њих могао да прати излагање на себи одговарајућ начин.

1.6.7 Принцип индивидуалне разлике

I потпринцип. Мултимедијалне лекције имају већи ефекат код ученика са мањим предзнањем (из области из које су мултимедијална предавања), него код оних са бољим знањем.

II потпринцип. Мултимедијалне лекције имају већи ефекат код ученика који имају већу моћ закључивања и визуелног учења и запажања.

До сада је било речи о принципима који утичу на квалитет мултимедијалне презентације, тј. о томе како је што успешније креирати и олакшати учење. Али поред различитих фактора који утичу на квалитет саме презентације, поставља се питање да ли су при мултимедијалном учењу битне и индивидуалне разлике ученика, тј. да ли мултимедијалне лекције некима више помажу при учењу.

Навешћемо један од многобројних примера из спроведених истраживања о принципу индивидуалне разлике ученика (видети [55]). При спровођењу истраживања, узета је мултимедијална лекција у којој текст није пропраћен одговарајућим сликама. Показало се да су студенти са бољим предзнањем без проблема решавали проблем. Они су могли да на основу изложеног текста створе и сликовну и вербалну репрезентацију изложеног проблема, да је повежу и задрже у својој меморији, тј. успели су да на основу постојећег знања, а уз помоћ текстуалних инструкција изграде и сликовну представу онога што уче. Насупрот њима, ученици са лошијим предзнањем нису били у могућности да створе слику о изложеном градиву само на основу текстуалног предавања и у мањој мери су били у могућности да задрже и текстуалну и сликовну представу о градиву у својој меморији. Управо из ових разлога, студентима са лошијим предзнањем мултимедијална презентација са удруженим сликама и речима много више помаже у стварању, разумевању, као и памћењу вербалне и сликовне представе о ономе што уче.

У два од три теста пажње, а у четири од четири теста трансфера, ученици са нижим степеном знања су показали већи напредак у учењу уз помоћ мултимедијалних лекција од ученика са већим предзнањем (видети [55]).

Новија истраживања, спроведена са студентима који имају различите способности визуелизације, показала су да су успешнији приликом мултимедијалног учења били студенти који имају већу моћ закључивања, визуелног учења и запажања (видети [48]).

1.7 Основни принципи мултимедијалног учења у настави математике

Савременије студије у области математике у циљу успешније презентације градива, тј. ради бољег разумевања градива од стране студената, испитују разлику у примени типова визуелизације приликом мултимедијалног учења (статичних примера, дводимензионалних и тродимензионалних анимација).

Више истраживања у области мултимедијалног учења у настави математике допринела су постављању два нова, оригинална принципа независна од општих мултимедијалних принципа (видети [55]). Ова два принципа су, такође, у складу са когнитивном теоријом мултимедијалог учења и говоре о томе да комбиновање *речи* (нарација, текст, звук) са *сликама* (слике, графикони, анимација, видео) доводи до учења са разумевањем. Наведена истраживања у области математике су спроведена, пре свега, коришћењем комбинације ***статичких*** (као што су дијаграми, слике, или мапе) или ***динамичких графикона*** (као што су анимација или видео), са различитим облицима *текста* (писаног или изговореног, у смислу инструкција за решавање математичких проблема). Приказивање ***статичких графикона* са укљученим *писаним текстом*** приликом мултимедијалног учења математике показало се успешним у истраживањима [19], [83], [85], [93], и ***статичних графикона* и *изговореног текста*** у [42], [51]. Испитивана је и значајност разлике при коришћењу ***динамичких графикона* и *писаног текста*** и ***динамичких графикона* и *изговореног текста*** (видети [2], [3], [43], [54], [56], [67], [69]). Спроведена су многобројна истраживања на свим образовним нивоима, у основним и средњим школама (на пример [65]), као и на колеџима (на пример [2], [68]), тј. одржана су мултимедијална предавања и спроведени тестови знања после њих. До статистички најзначајнијих резултата, тј. најбоље показаног знања на тестовима, дошло се после предавања комбинацијом *динамичких графикона* (анимације) и *изговореног текста* (нарације), на основу чега су постављена два принципа мултимедијалног учења у настави математике:

- ***динамички принцип мултимедијалног учења и***
- ***принцип људског гласа.***

У складу са резултатима истраживања Мерил (видети [56]) је поставио ***динамички принцип мултимедијалног учења***. Приликом дизајнирања мултимедијаних лекција када користимо слике и нарацију, слике треба представити динамичким графиконима, тј. анимацијом, пре него статичким (*највећи ефекат остварујемо нарацијом у комбинацији са анимацијом*).

На основу истраживања, постављен је и ***принцип људског гласа*** (видети [52]). Предавачи мултимедијаних лекција из математике треба пре да користе људски глас него глас машине у кобинацији са анимацијом (*највећи ефекат остварујемо људском нарацијом у комбинацији са анимацијом*).

1.8 Закључак о дизајнирању мултимедијалних лекција

Приликом креирања мултимедијалне презентације треба се придржавати претходно наведених принципа за мултимедијално учење, тј. закључак је да се принципи мултимедијалног учења и дизајна не могу одвојено разматрати. Шта чини једну мултимедијалну презентацију ефективном укратко је приказано у табели 6.

Карактеристика	Опис
Мултимедија	Приказати одговарајући текст и слику заједно.
Целина	Приказати одговарајући текст и слику близу једне других (просторно и временски).
Сажетост	Вишак текста и слика искључити.
Структура	Укључити текстуална и сликовна објашњења изложеног, усклађене, корак по корак.
Динамичност	Користити пре анимацију (видео) него статичке графиконе, у комбинацији са нарацијом предавача (уместо глас машине).

Табела 6. Закључак о дизајнирању мултимедијалне лекције (њене карактеристике)

2. КОРИШЋЕЊЕ МУЛТИМЕДИЈА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ НА ПРИМЕРИМА ИНТЕРАКТИВНИХ ЛЕКЦИЈА ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ И МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛИЗЕ

Као примере мултимедијалних лекција из геометрије одабрали смо градиво изометријских трансформација (осну и централну симетрију, транслацију и ротацију) и правилних полиедара. Ово градиво је значајно јер је заступљено у настави математике већ у основној школи, као и у већини средњих школа. На неким факултетима се користи, како директно, тако и кроз вишеструку примену.

2.1 Мултимедијални приказ одабраних примера и проблема о изометријским трансформацијама

Изометрија (izos – исто, metrein – мерење) је пресликавање у равни које чува растојање између тачака (коолинеарност, распоред тачака и подударност).

Понекад у математици проучавамо нешто што је апстрактно и ученицима тешко за разумевање, али изометрија је свуда око нас. Оваква тема, која има широку примену и чије примере можемо, између осталог, свакодневно уочити у средини у којој се крећемо (делови кућног намештаја и кућних апарата, школска табла и сл.) је посебно занимљива ученицима.

Да би се ,,оживели" ликови, тј. да би се покренули, у рачунарским програмима се за цртање користе симетрије, ротације, транслације и хомотетије. Оне омогућавају да се одређена фигура обрне, да се пренесе, итд. Управо из тог разлога је коришћење рачунара, тј. мултимедијалног софтвера, за предавање и учење ове области јако интересантно. Уз анимацију, ученику се нуди много више него на класичној настави. Он може видети „покрет" и „оживљену" слику изометријског пресликавања, а не само приказ „решених" слика проблема.

Наше лекције о изометријским трансформацијама, чија је насловна страна приказана на слици 5, садрже четири целине: осну симетрију, централну симетрију, ротацију и транслацију.

За сваку од изометријских трансформација лекције су осмишљене као скуп поглавља у који спадају: ***појам, примери, неке од особина, вежбање, задаци и примери из свакодневног живота.*** На пример, за осну симетрију илустрација мултимедијалног садржаја приказана је на слици 6.

У поглављу „***Појам***" текстом и анимацијама су приказане дефиниције о осној симетрији (дефиниције симетрије тачке, симетрале, осне симетрије, осне симетрије фигура, итд.), о централној симетрији (дефиниције централне симетрије тачке, центра симетрије, централне симетрије фигура, итд.), о ротацији (дефиниције ротације тачке, угла ротације, ротације фигура, итд.), о транслацији (дефиниције транслације тачке, вектора транслације, транслације фигура).

Слика 5. Илустрација мултимедијалног приказа насловне стране лекција о изометријским трансформацијама

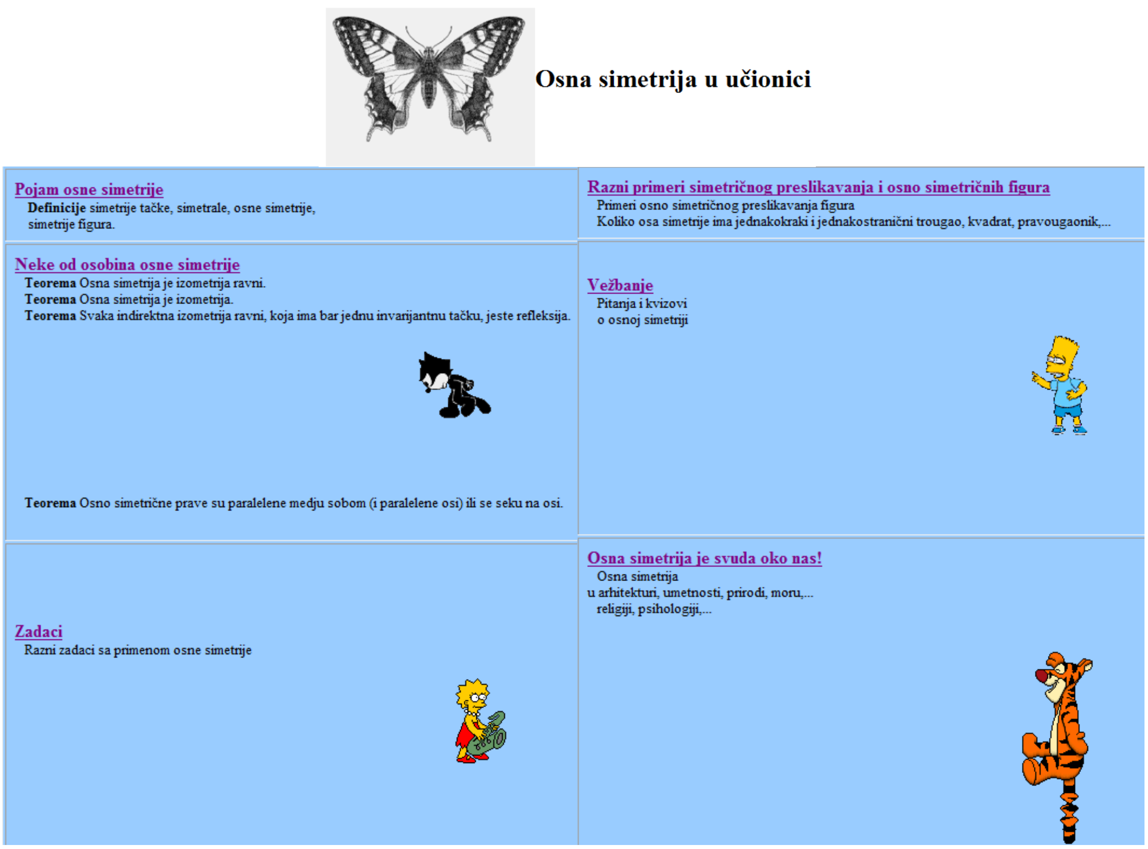
Кроз поглавље „***Примери***” су мултимедијално приказани многобројни примери осно и централно симетричних фигура, као и оних насталих ротацијом и транслацијом и њихове особине.

Као „***Неке од особина изометријеског пресликавања***” дате су важније теореме и неки од доказа.

У поглављу „***Вежбање***” изложени су питања, вежбе и квизови, који служе за обнављање градива.

У поглављу „***Задаци***”, задаци су изложени по тежини – од лакших ка тежим. Сви су задаци решени, највећи део детаљно, а мањи део садржи упутство за решавање. У већини случајева професор студента наводи на размишљање, да и сам открије решење пре наго што буде приказано на екрану. Међу задацима има типично школских, али и нестандардних.

Поглавље „***Примери из свакодневног живота***" је посебно намењено онима који воле математику, али и за разоноду. Дати су примери изометријских трансформација која је свуда око нас: у архитектури, уметности, природи, психологији, религији, итд.

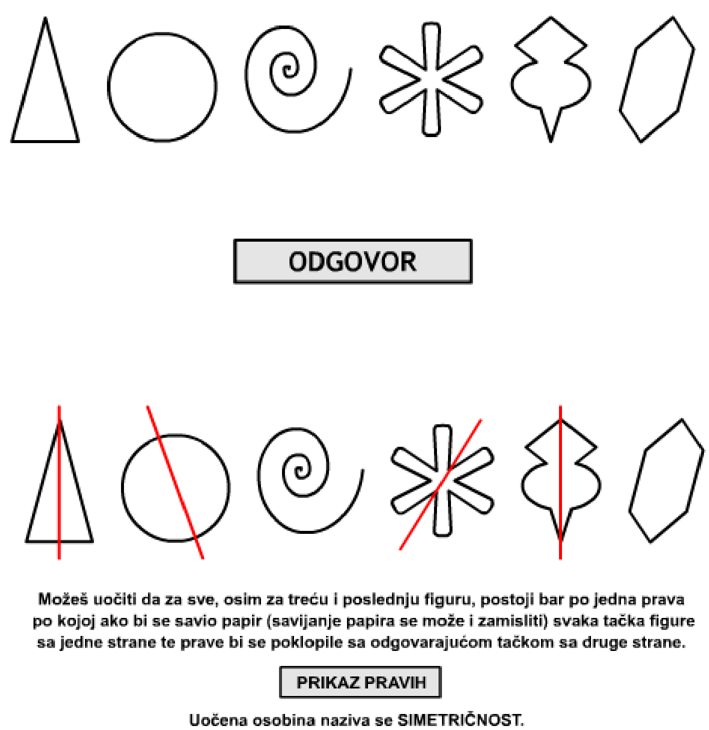


Слика 6. Приказ мултимедијалне стране са садржајем градива о изометријским трансформацијама (пример – осна симетрија)

2.1.1 Одабрани примери из поглавља „Појам“

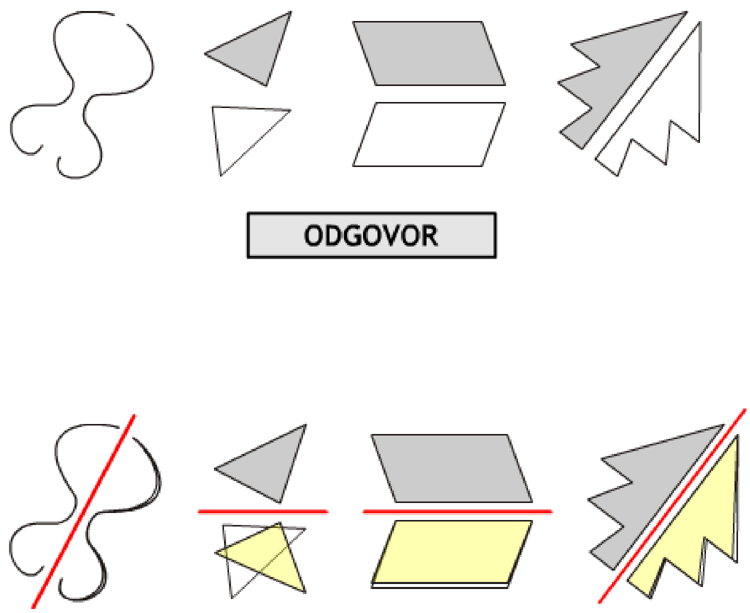
Навешћемо неке од занимљивијих примера из овог поглавља, који се односе на све подобласти (осну и централну симетрију, ротацију и транслацију).

Пример 1. Основна идеја у овом примеру је да се пре излагања дефиниције о осној симетрији, студентима помогне да је сами уоче, схвате и примене на разним фигурама. Применом анимација (визуелном методом) од њих се захтева да посматрају цртеже на слици 7 и да покушају да открију коју *заједничку особину* имају све фигуре осим две. Потом им је понуђено решење. За све фигуре, осим треће и последње, постоји бар по једна права по којој ако би се савио папир, свака тачка фигуре са једне стране би се поклопила са одговарајућом тачком са друге стране праве.



Слика 7. Део илустрације мултимедијалног приказа примера 1

Пример 2. Од студента се захтева да посматрају цртеже на слици 8 и открију да ли постоји оса симетрије за по две фигуре.

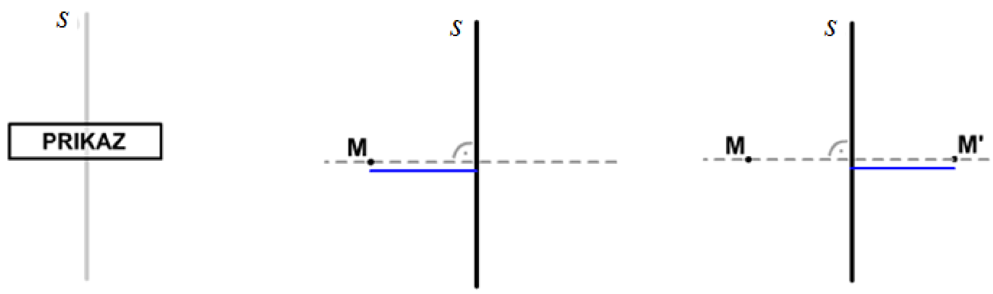


Слика 8. Део илустрације мултимедијалног приказа примера 2

Студентима су уведене одређене дефиниције за сваку изометријску трансформацију. За разлику од класичних предавања, дефиниције су илустроване и анимацијама и они су могли да виде сваки „покрет” изометријског пресликавања.

Пример 3. Тачке M и M' су осно симетричне у односу на праву s ако је права s нормална на дуж MM' у њеном средишту.

Анимацијом су најпре приказани права s и тачка M, затим је нацртана нормала из тачке M на праву. Растојање тачке M ће бити пренето на другу страну праве, чиме добијамо осно симетричну тачку M' (слика 9).

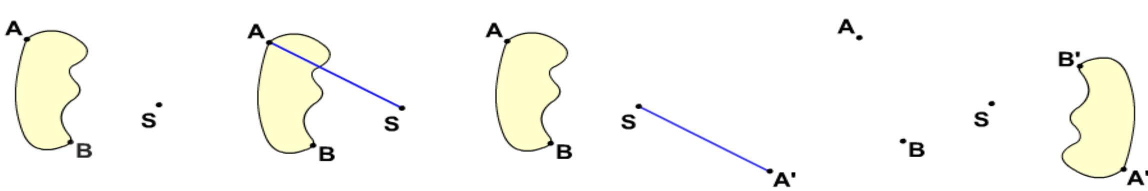


Слика 9. Део илустрације мултимедијалног приказа примера 3

Пошто смо увели дефиниције централне симетрије и транслације тачке, као и њихове ознаке, $I_s(F)=F'$ и $T_v(F)=F'$, уследио је мултимедијани приказ примера централне симетрије и транслације фигуре, чије илустрације можемо видети у примерима 4 и 5.

Пример 4. За две фигуре F и F' равни кажемо да су централно симетричне у односу на тачку S те равни, ако свакој тачки A фигуре F одговара тачка A' фигуре F', тако да је $I_s(A)=A'$, и обрнуто, свакој тачки C' фигуре F' одговара тачка C фигуре F, тако да је $I_s(C')=C$. Пишемо $I_s(F)=F'$.

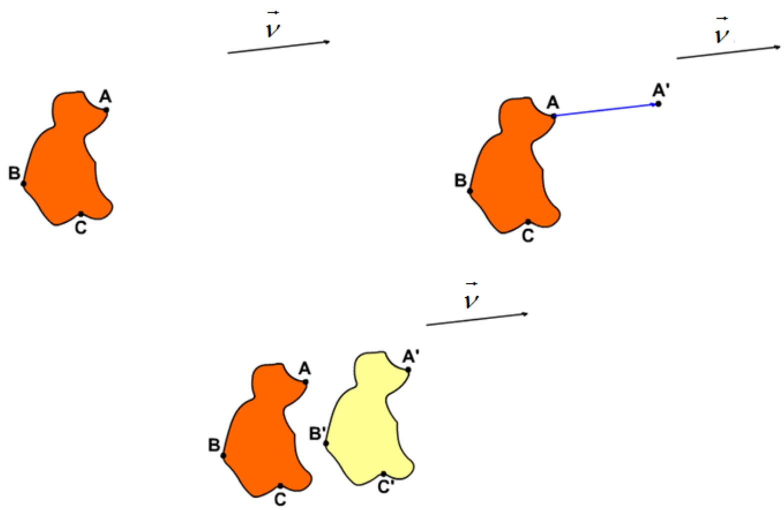
Кроз мултимедијални приказ студенти су могли да виде централно симетрично пресликавање тачке A у A' и B у B' у односу на центар S, а затим и целе фигуре (слика 10).



Слика 10. Део илустрације мултимедијалног приказа примера 4

Пример 5. Ако је дата фигура F у равни α и вектор $\vec{v}$ компланаран са α и ако је фигура F' скуп свих тачака које се транслацијом T_v пресликавају тачке фигуре F, тада кажемо да се фигура F пресликава на фигуру F' транслацијом T_v и пишемо $T_v(F) = F'$.

Кроз анимацију за приказ транслације фигуре вектор транслације се транслаторно „*померао*" у тачке A, B и C, чиме смо добијали њихове одговарајуће тачке A', B' и C' и коначно читаву фигуру (слика 11).

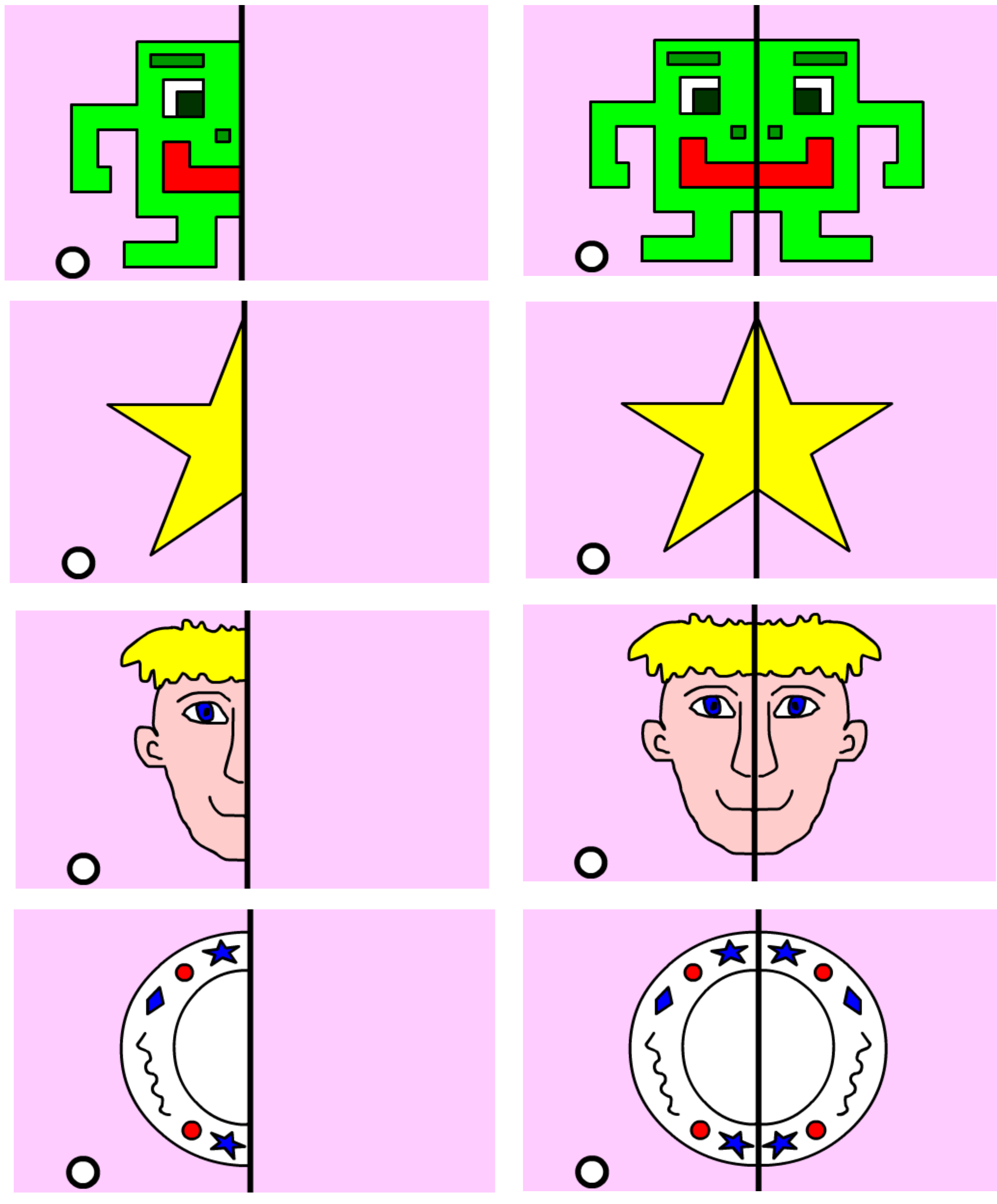


Слика 11. Део илустрације мултимедијалног приказа примера 5

2.1.2 Одабрани примери из поглавља „Разни примери изометријских пресликавања"

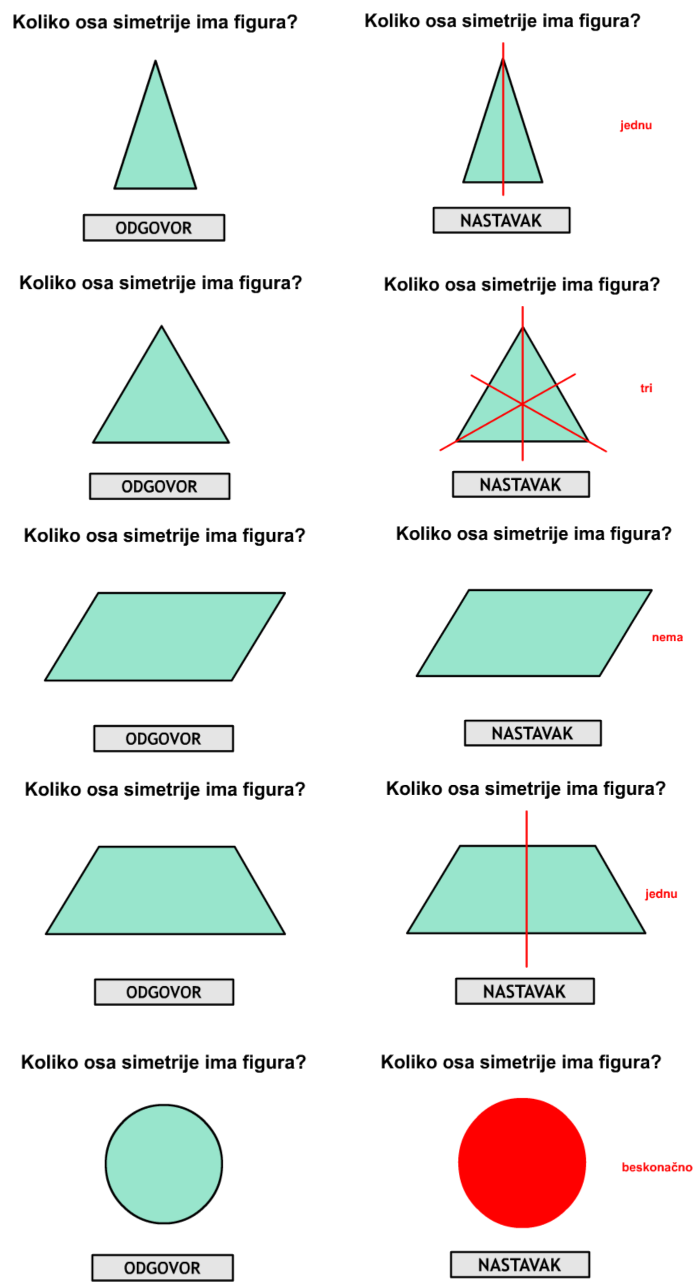
Уз примену мултимедија у поглављу „***Примери***" најпре се студентима, кроз анимацију, поставља питање (рецимо, који су примери осно симетричних фигура, колико оса симетрије имају разне фигуре, итд.), а затим даје одговор кроз комплетан мултимедијални приказ изометријског пресликавања.

Пример 6. Студенти су имали задатак да посматрају цртеже на левом делу слике 12 и замисле како би изгледале њихове осно симетричне фигуре. Мултимедијална анимација је на „клик дугмета" водила до пресликавања.



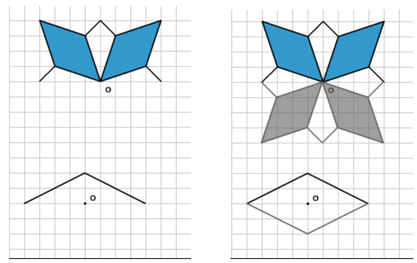
Слика 12. Део мултимедијалне илустрације примера осно симетричних фигура (пример 6)

Пример 7. На слици 13 су приказане неке од геометријских фигура, које је садржала наша анимација (једнакокраки и једнакостраничан троугао, квадрат, правоугаоник, паралелограм, трапез, круг, итд.). Питали смо студенте колико оса симетрије има свака од њих, а затим приказали решења (исцртане су тражене осе симетрије, ако их има).



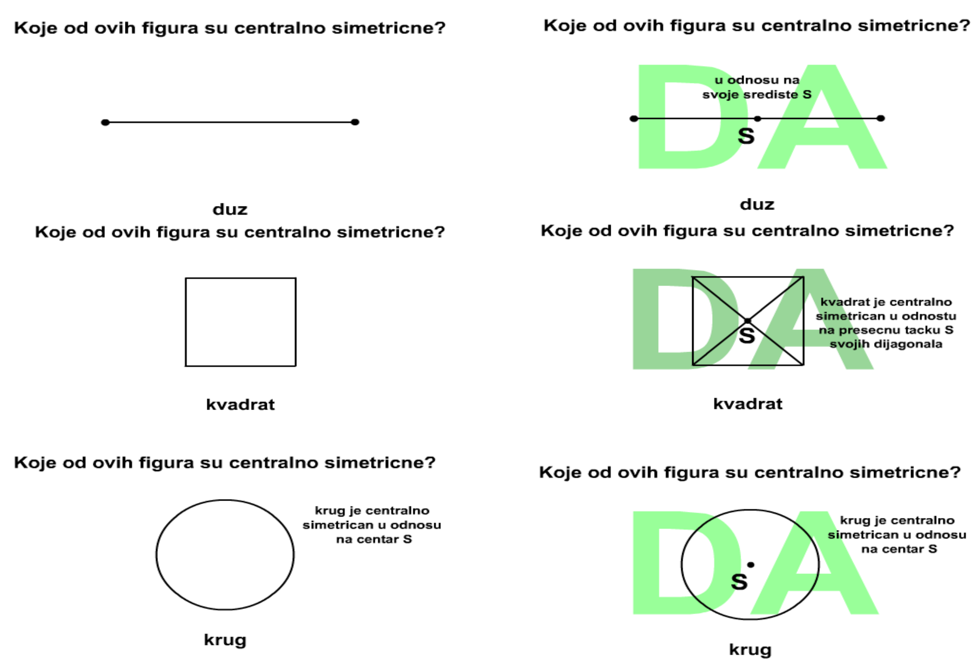
Слика 13. Део илустрације мултимедијалног приказа примера о броју осних симетрија одабраних фигура (пример 7)

Пример 8. Студенти су имали задатак да посматрају цртеже на левом делу слике 14 и замисле како би изгледале њихове централно-симетричне фигуре (у односу на центар O).

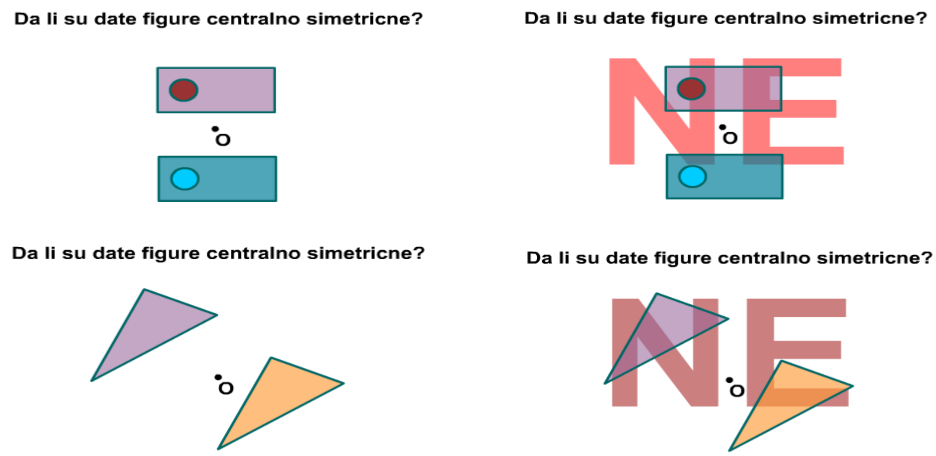


Слика 14. Део илустрације мултимедијалног приказа примера о централно симетричном пресликавању одабраних фигура (пример 8)

Пример 9. Поставља се питање да ли су дате фигуре централно симетричне (права, полуправа, дуж, троугао, квадрат, правоугаоник, трапез, круг, итд.) и ако јесу, који је њихов центар симетрије. У примеру датом на слици 16 је већ био задат центар пресликавања. Кроз мултимедијалну анимацију добија се одговор о централној симетричности фигура као и исцртавање центра симетрије у примеру приказаном на слици 15**.**

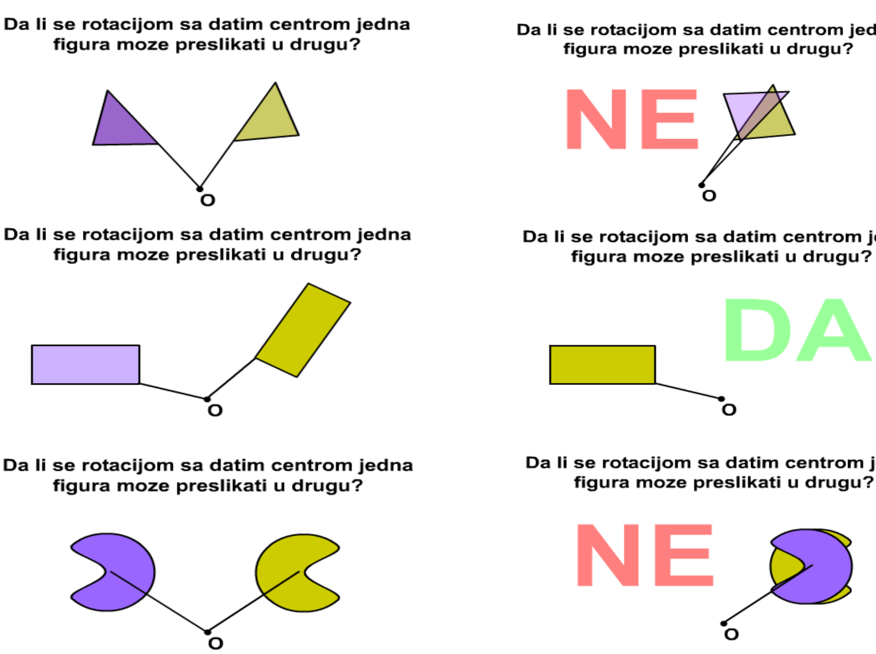


Слика 15. Део илустрације мултимедијалног приказа примера централно симетричних фигура (пример 9)



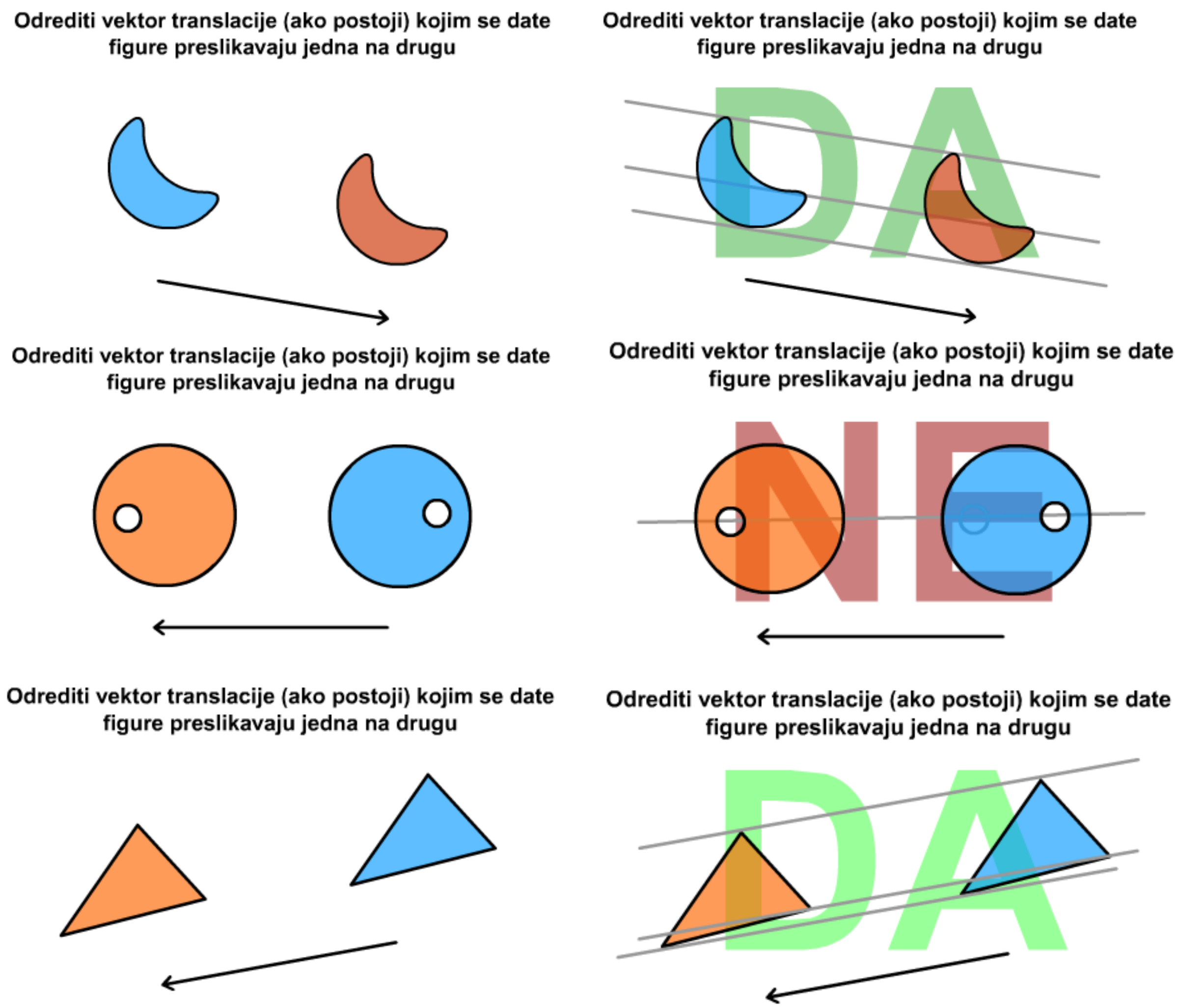
Слика 16. Део илустрације мултимедијалног приказа примера централно симетричних фигура (пример 9)

Пример 10. Студентима се у овом примеру поставља питање да ли се ротацијом са задатим центром једна, од задате две фигуре, може пресликати у другу, приказану на слици 17. Анимацијом се приказује ротација фигуре до преклапања са другом, ако је то могуће, чиме се и добија одговор на постављено питање.



Слика 17. Део илустрације мултимедијалног приказа примера ротације фигура (пример 10)

Пример 11. У овом примеру треба одредити вектор транслације (ако постоји) којим се дате фигуре пресликавају једна у другу (слика 18). Анимацијом је приказан најпре вектор транслације (ако постоји), а онда транслаторно пресликавање три тачке фигуре за одређени вектор и затим целе фигуре.



Слика 18. Део илустрације мултимедијалног приказа примера транслације фигура (пример 11)

2.1.3 Одабрани примери из поглавља „Неке од особина изометријског пресликавања”

Као „***Неке од особина изометријског пресликавања***” дате су важније теореме и неки од доказа. Наведене теореме су приказане текстом и анимацијама. Навешћемо два примера из овог поглавља који се односе на осну симетрију**.**

Пример 12. Теорема 1. *Осна симетрија (рефлексија) је изометрија равни.*

Доказ.

Нека су A и B две различите тачке посматране равни. Нека је $I_s(A) = A'$ и $I_s(B) = B'$. Треба доказати да је $AB = A'B'$.

I случај.

Ако су A и B тачке осе s, онда је $A' = A$ и $B' = B$, па је очигледно $A'B' = AB$ (слика 19).

Слика 19. Део мултимедијалне илустрације за случај када су A и B тачке осе s (пример 12, I случај)

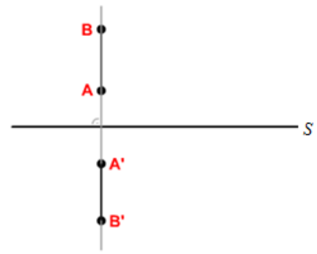
II случај.

Ако је AB паралелна са s и A и B нису тачке осе s, онда су и AB, s и $A'B'$ паралелне. Следи да је четвороугао $ABB'A'$ правоугаоник, а AB и $A'B'$, као његове наспрамне странице, су једнаке (слика 20).

Слика 20. Део мултимедијалне илустрације за случај ако је AB паралелна са s и A и B нису тачке осе s (пример 12, II случај)

III случај.

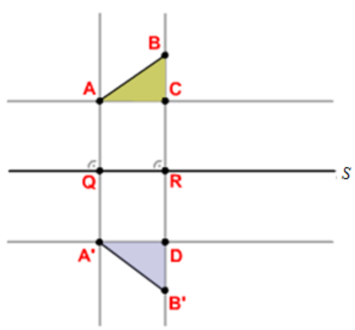
У случају да је AB нормална на s и из чињенице да је $I_s(A) = A'$ и $I_s(B) = B'$, имамо да су удаљености тачака A, A' и B, B' од осе симетрије подједнаке, па следи да су дужи AB и $A'B'$ међусобом једнаке (слика 21).



Слика 21. Део мултимедијалне илустрације за случај када је AB нормална на s (пример 12, III случај)

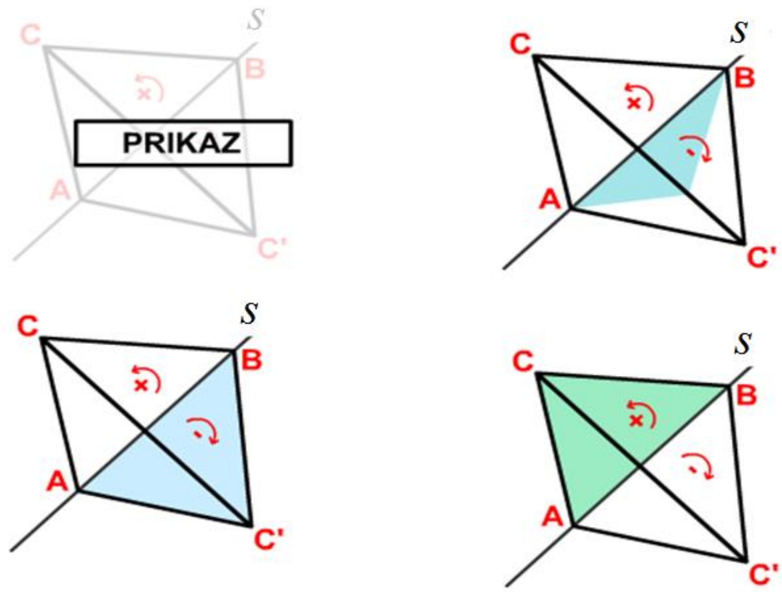
IV случај.

У случају када права AB сече s и није нормална на s и из чињенице да је $I_s(A) = A'$ и $I_s(B) = B'$ следује да је $AQ = QA'$ и $BR = RB',$ где је Q тачка у којој је AA' нормална на s и где је R тачка у којој је BB' нормална на s (слика 22). Кроз тачке A и A' конструисане су праве паралелне правој s које секу праву BB' редом у тачкама C и $D.$ Из чињенице да су AC и $A'D$ паралелне са s следи да су и AC и $A'D$ међусобом паралелне. Овим је доказано да је $ACDA'$ правоугаоник, тј. да су AC и $A'D$ једнаке дужине. Из свега наведеног следи подударност правоуглих троуглова ABC и $A'B'D,$ а самим тим и дужи AB и $A'B'$.



Слика 22. Део мултимедијалне илустрације за случај када права AB сече s и није нормална на s (пример 12, IV случај)

Пример 13. Теорема 2. *Рефлексија је индиректна изометрија.*



Слика 23. Део илустрације мултимедијалног приказа теореме 2 (пример 13)

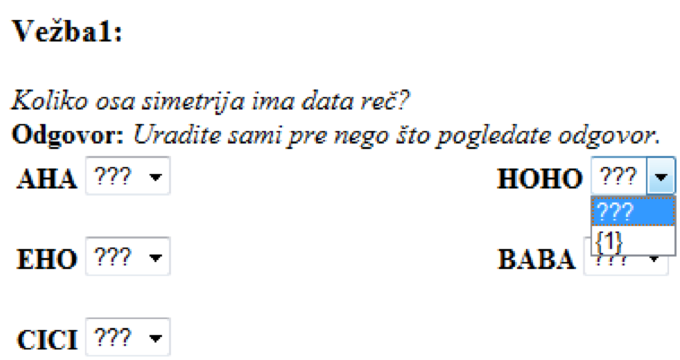
Доказ.

Нека су A и B различите тачке праве s, а C ван праве s и нека је $C' = I_s(C)$. По дефиницији су C и C' са разних страна праве s, па идући по дужи AB, остављамо површи ABC и ABC' са разних страна. То значи да су оријентисане површи ABC и ABC' различитих оријентација (слика 23).

2.1.4 Одабрани примери из поглавља „Вежбање"

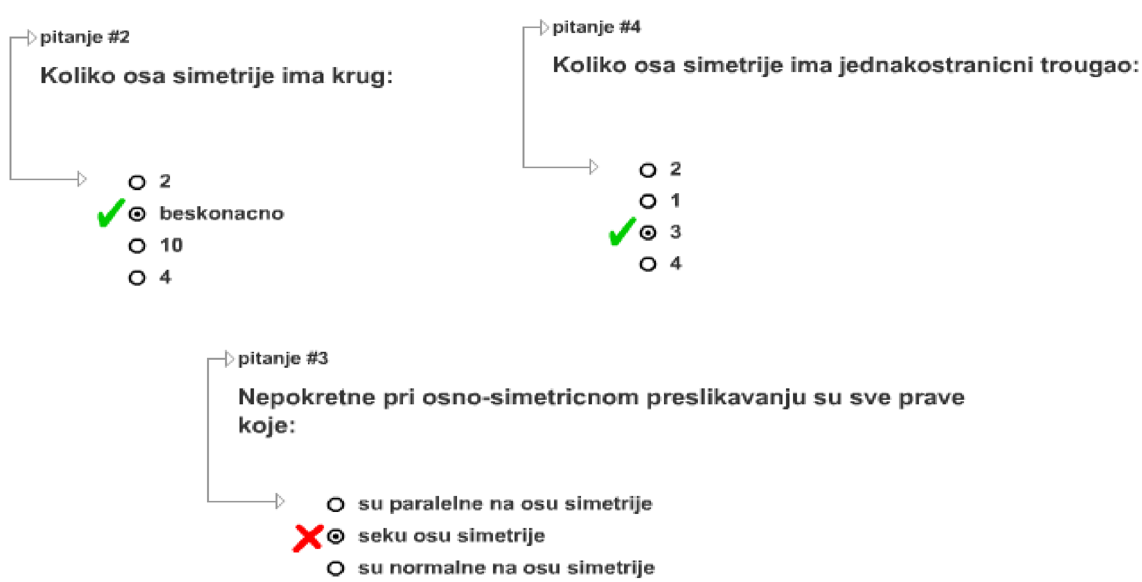
Кроз поглавље „***Вежбање***" мултимедијално су изложени: питања, квизови и тестови, чија је сврха обнављање и увежбавање градива.

Пример 14. У овој вежби студенти су наводили примере слова код којих постоје изометријска пресликавања. Затим су добили и конкретне примере речи за које смо их питали да ли су, на пример, осно симетричне (слика 24).



Слика 24. Део илустрације мултимедијалног примера вежбе (пример 14)

Пример 15. Кроз мултимедијални квиз постављена су питања о изометријским пресликавањима. Садржину квиза чинила су питања већ обрађеног градива, а њихов редослед се сваки пут приказује случајним избором, тј. сваки пут је различит. По завршетку квиза, на екрану рачунара можемо видети укупан број тачних одговора и време његовог трајања (слика 25).



Слика 25. Део илустрације мултимедијалног квиза (пример 15)

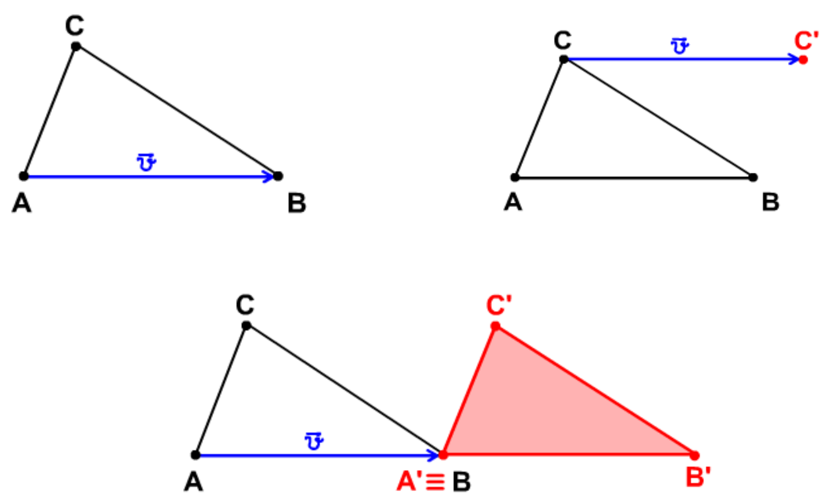
2.1.5 Одабрани примери из поглавља „Задаци”

У оквиру поглавља „***Задаци***”, задаци из сваке подобласти су изложени по тежини – од лакших ка тежим. Сви су задаци решени, највећи део детаљно, а мањи део садржи упутство за решавање. У већини случајева професор студента наводи на размишљање, да сам открије решење пре наго што буде приказано на екрану. На анимацијама се не приказује одмах читаво решење задатка, већ је сваки задатак решаван „корак по корак”. Неке од задатака, са објашњењем мултимедијалног приказа, изложићемо у следећим примерима.

Пример 16. Дат је троугао ABC. Одредити његову слику насталу транслациојом којој се теме A пресликава у B.

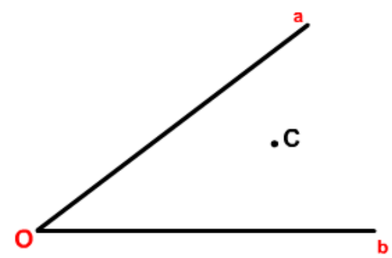
Решење.

Ово је пример типично школског задатка. Анимацијом је најпре приказан задати троугао, затим вектор транслације, а онда транслаторно пресликавање сваког темена троугла. На крају је исцртан и истакнут шрафуром троугао настао транслацијом задатог троугла (слика 26).



Слика 26. Део илустрације мултимедијалног приказа примера типично школског задатка (пример 16)

Пример 17. Дат је оштар угао Oab и у њему тачка C. Конструисати тачке A и B, такве да A припада a, B припада b и да обим троугла ABC буде најмањи (слика 27).



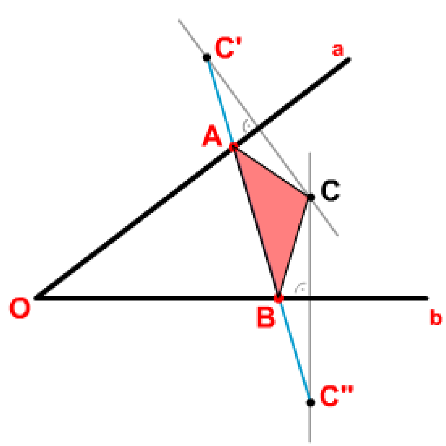
Слика 27. Поставка задатка из примера 17 – мултимедијални приказ

Решење.

Решење задатка је представљено анимацијом на екрану, корак по корак. Нека је $C' = I_a(C)$ и $C'' = I_b(C)$ и нека је тачка A пресечна тачка правих $C'C''$ и Oa, а тачка B пресечна тачка правих $C'C''$ и Ob. Троугао ABC је тражени. Његов обим је:

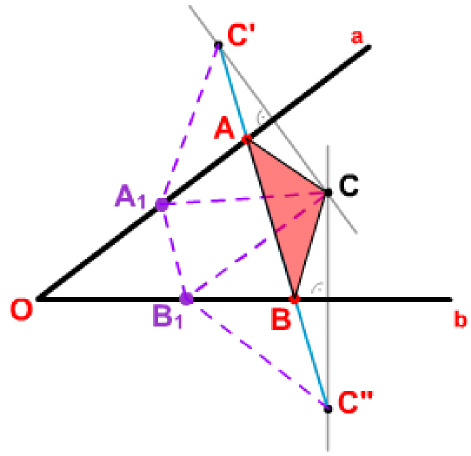
$$AB + BC + AC = AB + BC'' + AC' = C'C''.$$

Кроз мултимедијалну анимацију студенти могу видети свако наведено исцртавање правих, као и њихове пресеке, тј. добијене тачке, корак по корак (слика 28).



Слика 28. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 17

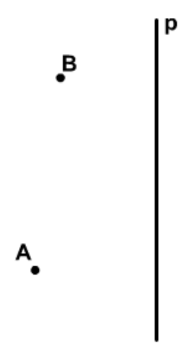
Ако бисмо изабрали било које две тачке A_1 и B_1, онда би обим троугла A_1B_1C био: $A_1B_1 + B_1C'' + A_1C'$ (дужина изломљене линије $C'A_1B_1C''$ већа је од дужине дужи $C'C''$). Кроз анимацију се јасно види да је обим троугла A_1B_1C већи од обима ABC (слика 29).



Слика 29. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 17

Пример 18. У једној равни налазе се права p и тачке A и B са исте стране праве p. Конструисати тачку P праве p, у коју треба да падне светлосни зрак из A, који после одбијања од праве p пролази кроз B (слика 30).

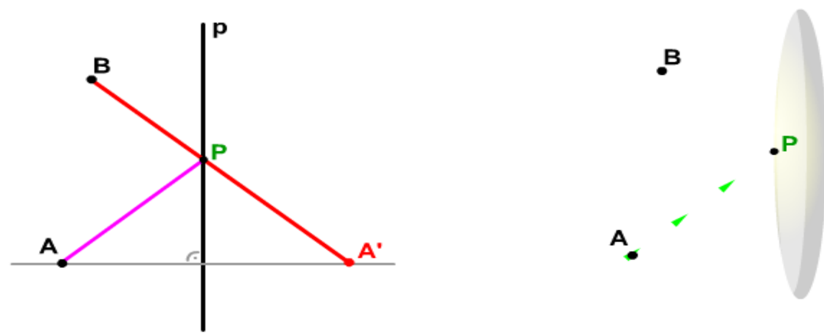
Напомена: користити чињеницу да је угао под којим зрак пада једнак углу под којим се одбија.



Слика 30. Поставка задатка из примера 18 – мултимедијални приказ

Решење.

Треба пресликати тачку A или тачку B (на анимацији је пресликана тачка A) симетрично у односу на p, $A' = I_p(A)$. Тачка P је пресечна тачка правих $A'B$ и p. Кроз мултимедије судентима је све наведено поступно приказано (слика 31).

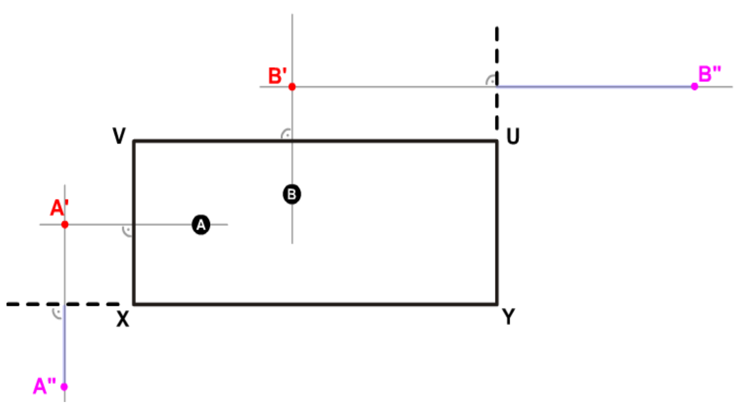


Слика 31. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 18

Пример 19. На правоуглом билијарском столу налазе се две лопте A и B. Како треба управити лопту A, да она, пошто удари у све четири ивице стола, удари у лорту B?

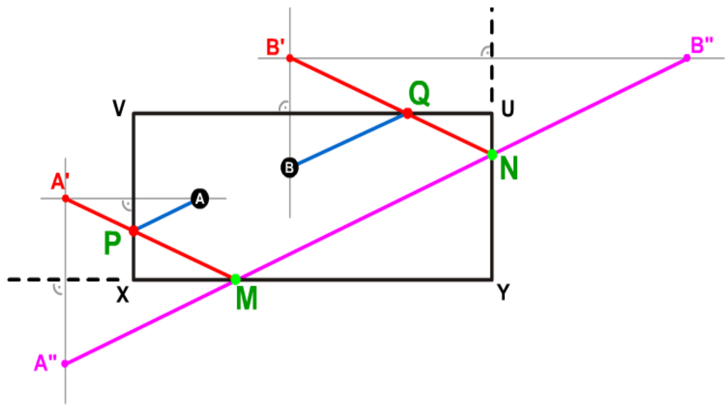
Решење.

Означимо са $XYUV$ правоугаоник (билијарски сто) и $A' = I_{XV}(A)$, $A'' = I_{XY}(A')$, $B' = I_{UV}(B)$, $B'' = I_{UY}(B')$. Кроз мултимедијални приказ судентима је изложено пресликавање сваке тачке, корак по корак (слика 32).



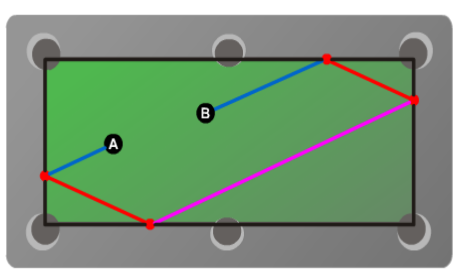
Слика 32. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 19

Нека је M пресек правих $A''B''$ и XY, N пресек правих $A''B''$ и UY, P пресек правих $A'M$ и XV и Q пресек правих $B'N$ и UV. Непосредно се види да је: $\sphericalangle APV = \sphericalangle A'PV = \sphericalangle XPM$, $\sphericalangle PMX = \sphericalangle XMA'' = \sphericalangle NMY$, $\sphericalangle MNY = \sphericalangle B''NU = \sphericalangle UNQ$, $\sphericalangle NQU = \sphericalangle B'QV = \sphericalangle VQB$. Кроз мултимедијалну анимацију студенти могу видети свако наведено исцртавање правих, као и њихове пресеке, тј. добијене тачке, корак по корак (слика 33).



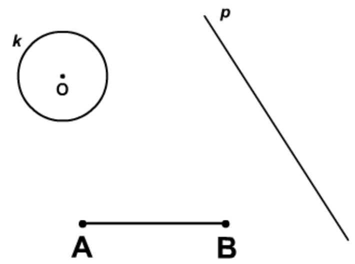
Слика 33. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 19

Дакле, лопту из тачке A треба тако управити да погоди тачку P, одакле ће се одбити, преко M, N и Q, до тачке B. Анимација показује како се лопта A креће добијеном путањом, кроз тачке P, M, N, Q и удара у лопту B (слика 34).



Слика 34. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 19

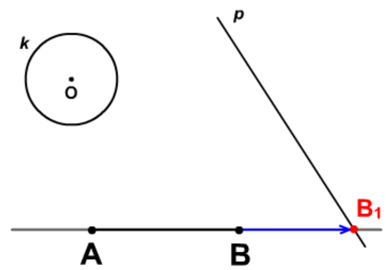
Пример 20. Дата је дуж $AB,$ права p и круг k (слика 35). Одредити тачке P која припада $p,$ и K која припада k тако да $ABPK$ буде паралелограм.



Слика 35. Поставка задатка из примера 20 – мултимедијални приказ

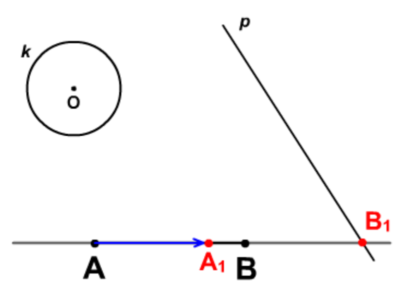
Решење.

Анимацијом је најпре приказан пресек праве AB и праве $p,$ који ћемо обележити са B_1 (слика 36).



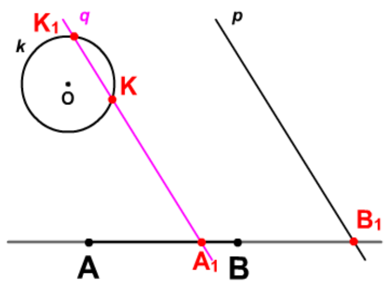
Слика 36. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 20

Пресликавамо транслацијом дуж AB за вектор BB_1 у $A_1B_1.$ Кроз анимацију се црта вектор транслације $BB_1,$ а затим се преноси у тачке A и $B,$ које транслаторно пресликава у одговарајуће A_1 и B_1 (слика 37).



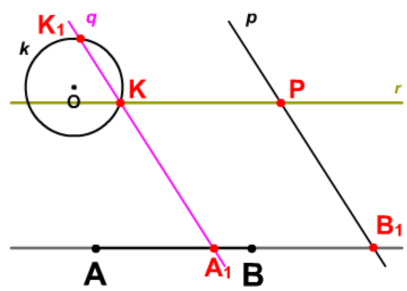
Слика 37. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 20

Кроз тачку A_1 повлачимо праву q паралелну са p. У пресеку са кружницом k добијамо тачку K (K_1, друго решење, у нашем случају), теме паралелограма (слика 38).



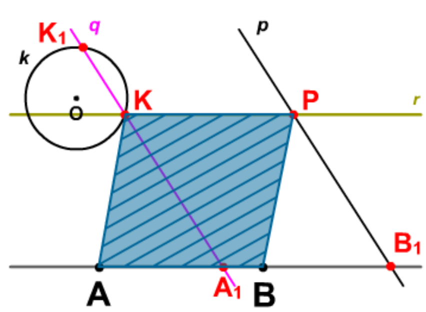
Слика 38. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 20

Из тачке K паралела са AB у пресеку са правом p даје и четврто теме P (слика 39).



Слика 39. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 20

Добили смо тражени паралелограм $ABPK$, који је на анимацији приказан шрафуром (слика 40).



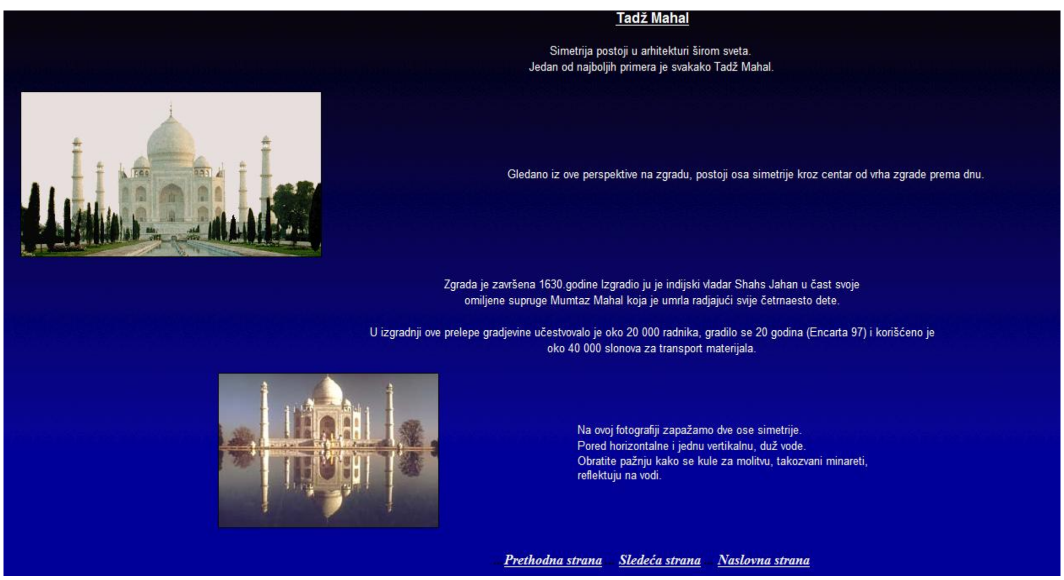
Слика 40. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 20

Напомена. Кружница k и права q, могу имати две, једну или ни једну заједничку тачку. У зависности од тога задатак ће имати два, једно или ни једно решење.

2.1.6 Одабрани примери из поглавља „Примери из реалног живота”

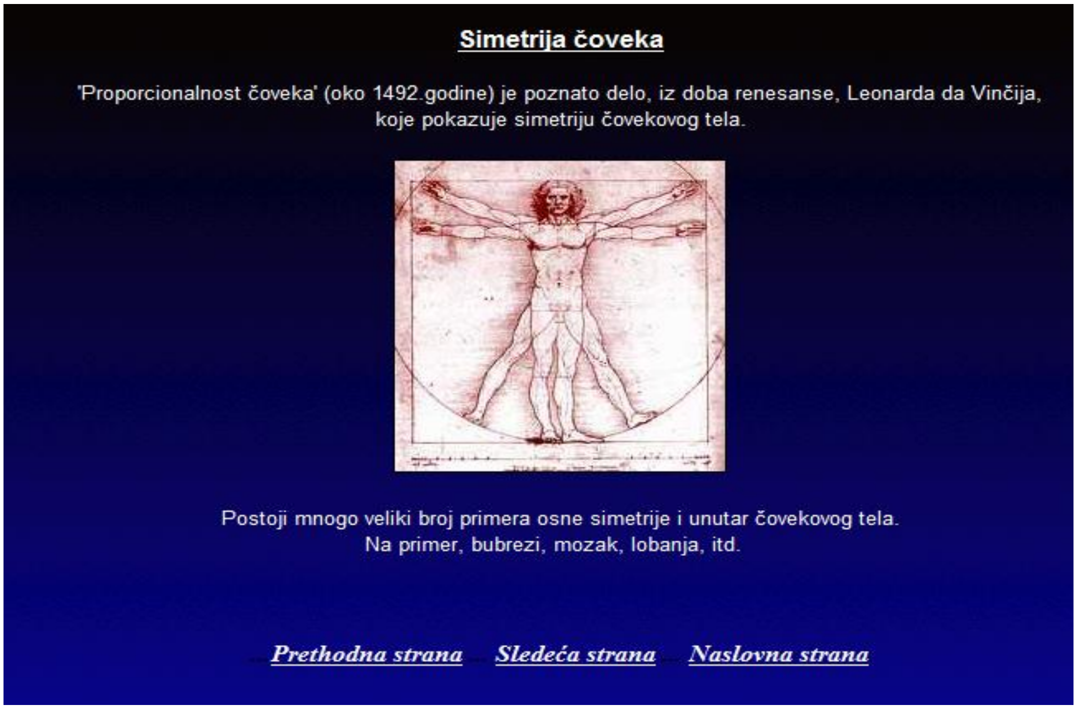
Ученици често траже потврду да оно што уче могу видети и применити у свакодневном животу. Потрудили смо се да наше мултимедијалне лекције о изометријским трансформацијама садрже разне примере са којима се свакодневно срећемо: у архитектури, уметности, природи, психологији, религији, итд.

Пример 21. На приказаној фотографији Таџ Махала (слика 41) запажамо две осе симетрије. Поред хоризонталне и једну вертикалну, дуж воде. Обратити пажњу како се куле за молитву, такозвани минарети, рефлектују на води.



Слика 41. Пример осне симетрије у архитектури – Таџ Махал – мултимедијални приказ

Пример 22. ,,Пропорционалност човека” (око 1492. године) је познато дело Леонарда Да Винчија које показује симетрију човековог тела (слика 42).

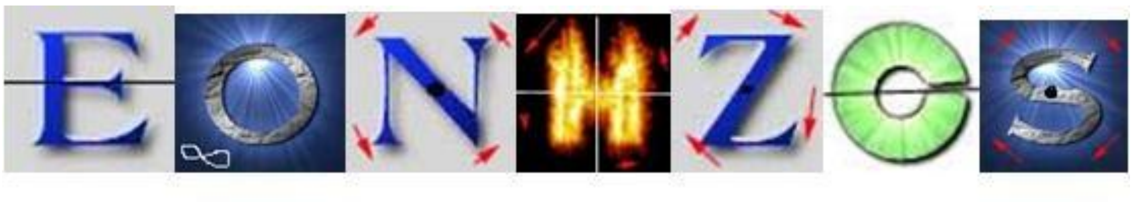


Слика 42. Пример осне симетрије у уметности – мултимедијални приказ

Пример 23. Питали смо студенте колико оса симетрије имају заставе на слици 43.

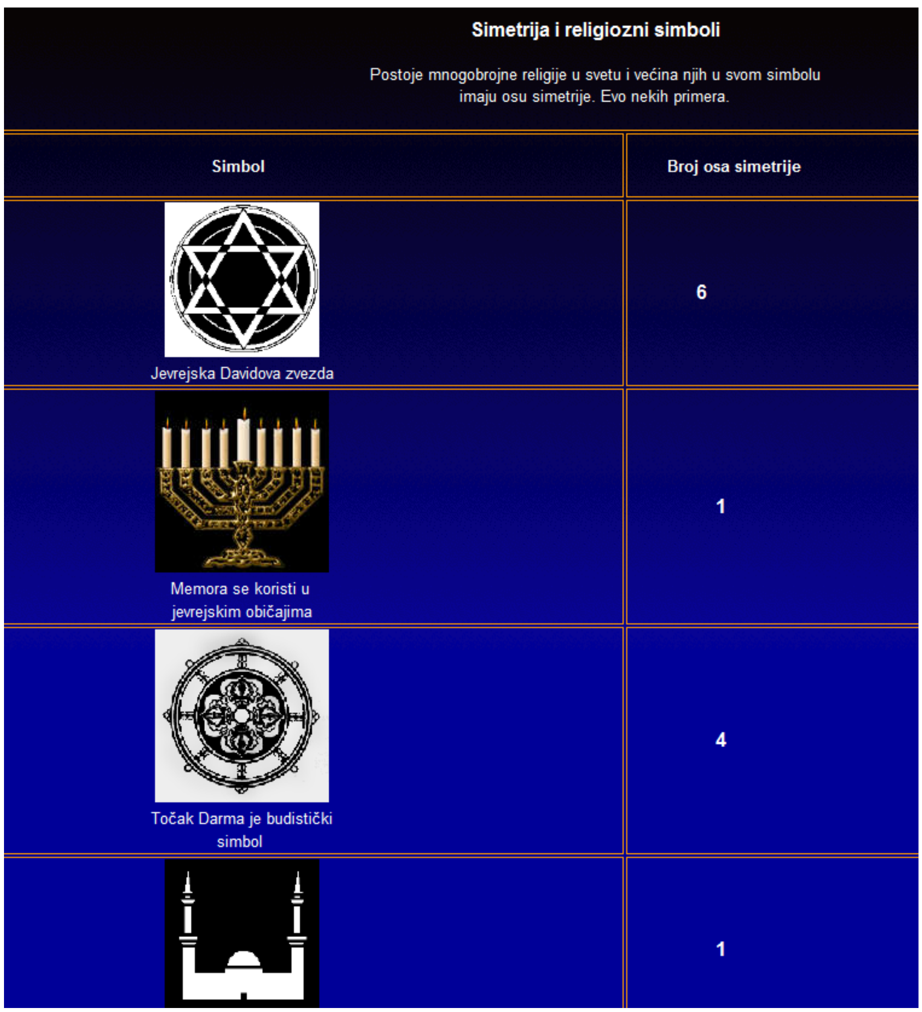
Слика 43. Пример осне симетрије на заставама – мултимедијални приказ

Пример 24. Колико оса симетрије имају одабрана слова на слици 44?



Слика 44. Пример осне симетрије на словима – мултимедијални приказ

Пример 25. Многи религиозни симболи имају осу симетрије. Колико оса симетрије имају симболи на слици 45?



Слика 45. Пример осне симетрије на религиозним симболима – мултимедијални приказ

2.2 Мултимедијални приказ одабраних примера и проблема о правилним полиедрима

Правилни полиедри су правилни ***конвексни полиедри*** чије су заједничке карактеристике:

- сваки правилни полиедар је омеђен површима истог облика;
- ове површи су правилни ***многоулгови***;
- из сваког темена једног правилног полиедра полази једнак број ивица;
- један правилни полиедар се не може добити спајањем више других.

Термин ***полиедар*** потиче од старих Грка, ***полу*** (више) и Индо-европске речи ***хедрон*** (место, центар). Овиx ***геометријских тела*** има свега пет: тетраедар, хексаедар (коцка), октаедар, додекаедар и икосаедар.

Правилни полиедри се још називају и Платонова[1] тела. Међу првима их је описао Платон у једном од својих дијалога (Тимаиос, 350. године пре нове ере). Он је наведене облике повезао са ,,елементима" зависно од њихове ,,покретљивости". ***Ватра*** је добила облик ***тетраедра***, ***земља*** облик ***коцке***, ***вода*** облик ***икосаедра***, ***ваздух*** облик ***октаедра***, док је ***додекаедар*** најсложенији па представља читав ***универзум***. Међутим, за Платонова тела се знало много пре Платона, тј. он није открио ни једно од њих. Материјални докази познавања неких од ових тела потичу још из древног Египта. Конструкције тетраедра, коцке и додекаедра приписују се Питагорејцима, док се конструкција преостала два тела приписује Теетету[2]. *Тринаесту* (последњу) књигу Елемената, Еуклид[3] је посветио правилним полиедрима, а приписује се Теетету. У њој се може наћи начин конструкције пет правилних полиедара. Правилне полиедре су поред Платона, још проучавали Еуклид, Архимед[4], Кеплер[5], итд.

Правилни полиедри су геометријска тела чији се облици јављају и у природи. Неки од правилних полиедара представљају облике кристала, други

---

[1] Платон – грчки филозоф (428-348. година пре нове ере)
[2] Теетет (414-369. година пре нове ере)
[3] Еуклид – антички грчки математичар (III век пре нове ере)
[4] Архимед – највећи антички математичар (287-212. година пре нове ере)
[5] Кеплер – немачки физичар (1571- 1630.)

вируса (откривених електронским микроскопом). На пример, кухињска со коју свакодневно користимо у исхрани је кристал у облику коцке. Пчеле су правиле своје кошнице још пре него што је човек постојао, а људи још у древним временима разноразне грађевине (као што су пирамиде) у облику полиедара.

Интересовање за полиедре се, како можемо закључити, јавља како код двогодишњег детета које се игра дрвеном коцком, тако и код најсавременијих математичара. Због свега напред наведеног правилни полиедри су и нама у настави математике важни, а и јако интересантни за мултимедијални приказ.

Слика 46. Илустрација мултимедијалног приказа насловне стране лекција о правилним полиедрима

Наше мултимедијалне лекције о правилним полиедрима на насловној страни садрже део наведене уводне приче о Платоновим телима (слика 46). Како можемо видети на слици 46 поред поглавља о Платоновим полиедрима лекције садрже део и о полуправилним полиедрима – Архимедовим полиедрима, Џонсоновим полиедрима, итд., као и о њиховом појављивању у уметности, током векова, што смо сматрали занимљивим за мултимедијални приказ, посебно за студенте Архитектонског факултета.

Што се тиче дела градива о правилним полиедрима, имамо следеће целине (слика 47): ***појам полиедра, папирнати модели правилних полиедара, дискусија о броју полиедара, закључци, задаци*** и ***вежбања.***

У поглављу „***Појам полиедра***” уведен је појам многоугла, полиедра, конвексног, конкавног и правилног многоугла.

Кроз поглавље „***Папирнати модели правилних полиедара***” смо приказали мреже пет правилних полиедара.

У поглављу „***Дискусија о броју полиедара***” је доказано да има тачно пет правилних полиедара.

Уз мултимедијални приказ у поглављу „***Закључци***” извели смо закључке о броју и врсти страна, броју и величини углова, итд. сваког правилног полиедра. Свако тело је кроз анимацију приказано заротирано у тродимензионалном простору.

Слика 47. Приказ мултимедијалне стране са садржајем градива о правилним полиедрима

У оквиру теме „***Задаци***” имамо примере разних задатака из ове области. Трудили смо се да изаберемо занимљиве примере, за које смо сматрали да би примена мултимедије допринела побољшању у њиховом разумевању и учењу.

Слично као и у претходном поглављу „***Вежбања***” имамо примере вежбања и утврђивања градива.

2.2.1 Одабрани примери из поглавља „Појам полиедра”

Кроз примере ћемо приказати само неке од уведених појмова из поглавља „***Појам полиедра***” и приказати поједине делове њихових мултимедијалних илустрација.

Пример 26. Правилни многоугао је многоугао чије су све странице једнаке дужине и сви углови једнаки.

У мултимедијалним лекцијама требало је да студенти одговоре на разна питања, на пример, да ли је могуће нацртати правилан многоугао који је конкаван (слика 48), итд.

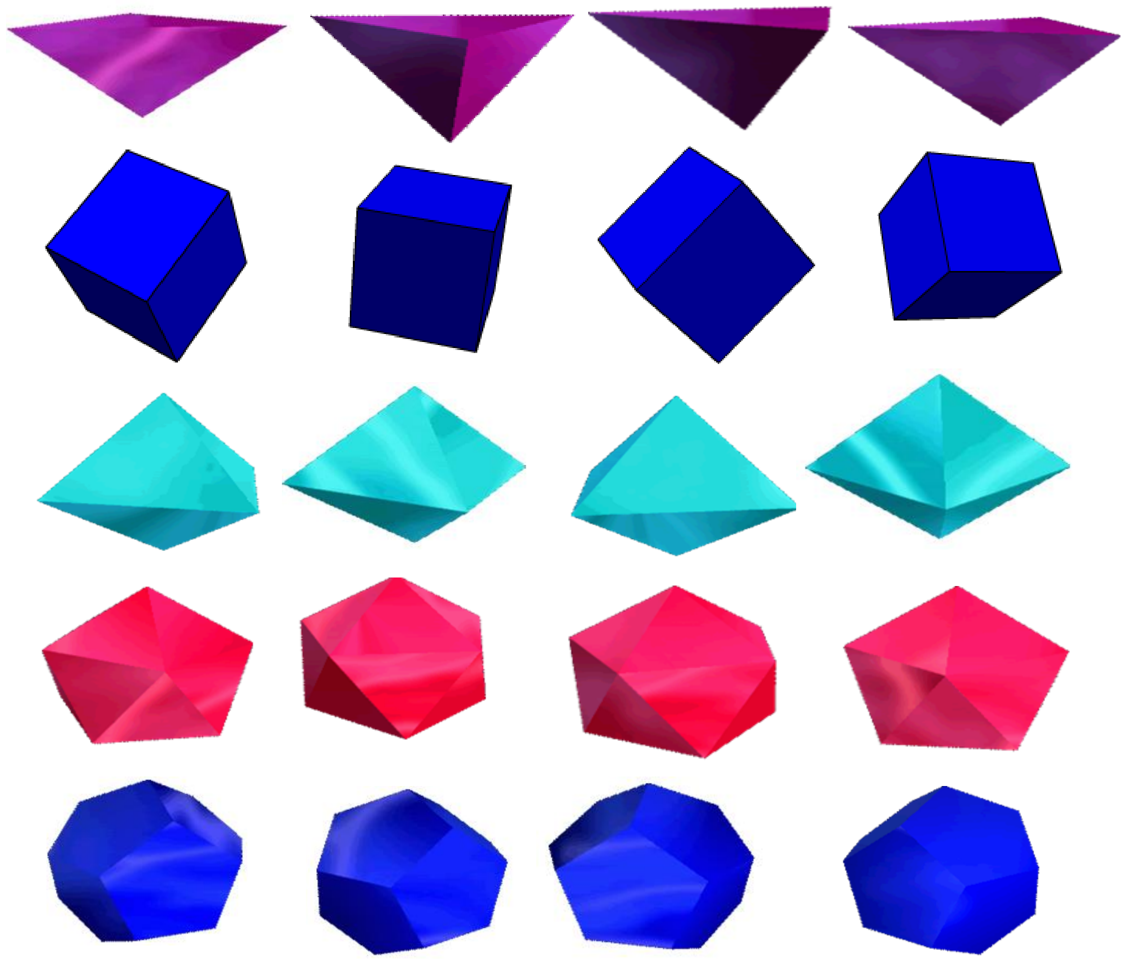
Слика 48. Део илустрације мултимедијалног приказа примера 26

Пример 27. Полиедар је тродимензионално тело чије су стране многоуглови, који се сустичу у његовим теменима. За конвексан полиедар се каже да је **правилан** ако су све његове стране међусобно подударни **правилни многоуглови**.

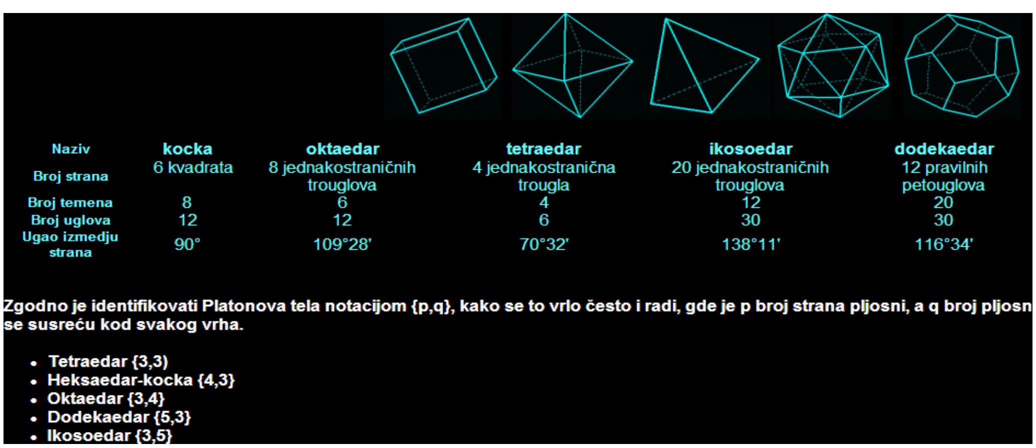
Још од времена старих Грка се зна да постоји само пет тела која могу бити састављена искључиво од правилних многоуглова који се сустичу у теменима тела и имају једнаке углове у њима, што ћемо касније и доказати. Згодно је идентификовати Платонова тела нотацијом $\{p, q\}$, како се то врло често и ради, где је p број страна (пљосни), а q број пљосни које се сусрећу код сваког темена:

- ***тетраедар*** има три једнакостранична троугла која се сустичу у сваком темену, $\{3,3\}$;
- ***коцка*** има три квадрата која се сустичу у сваком темену, $\{4,3\}$;
- са четири једнакостранична троугла у сваком темену добијамо ***октаедар***, $\{3,4\}$;
- са пет једнакостраничних троуглова у сваком темену добијамо ***икосоедар***, $\{3,5\}$;
- ***додекаедар*** има три правилна петоугла која се сустичу у сваком темену, $\{5,3\}$.

Кроз мултимедијалне лекције о правилним полиедрима студенти су имали прилике да посматрају свако од пет Платонових тела како се ротира и сами закључе колико свако има страна, ивица, темена, углова, итд. (слика 49). На следећој страни лекција приказали смо решења, тј. навели битне карактеристике правилних полиедара (слика 50).



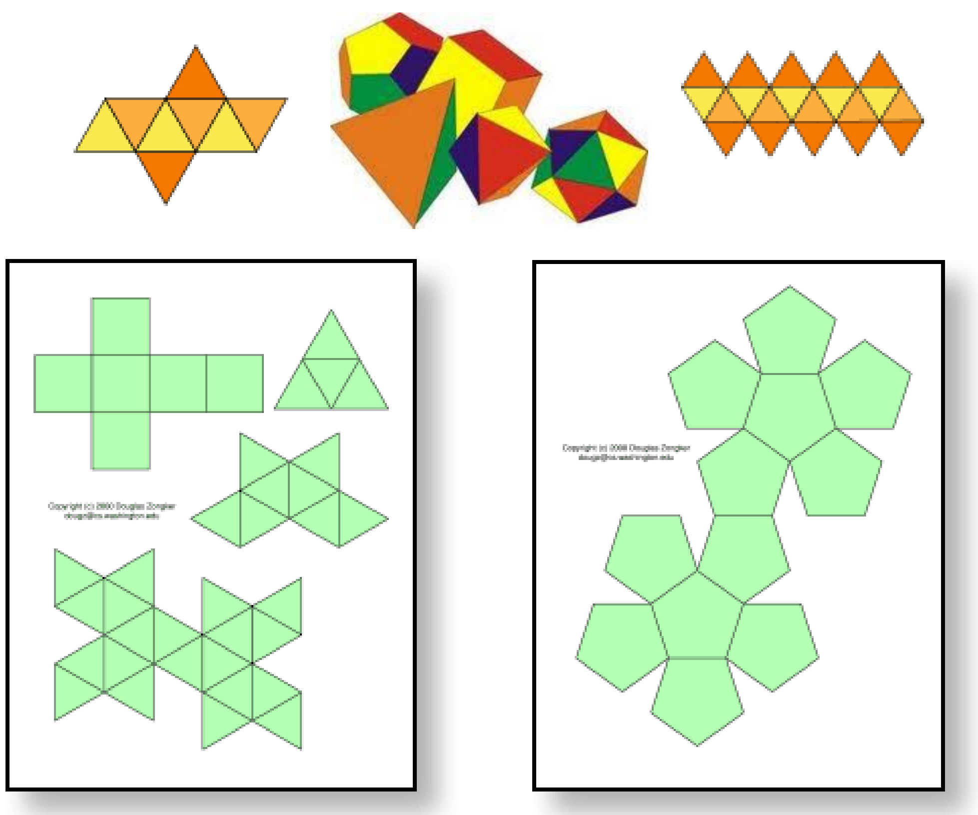
Слика 49. Део илустрације мултимедијалног приказа Платонових тела



Слика 50. Део илустрације мултимедијалног приказа особина пет Платонових тела

2.2.2 Одабрани примери из поглавља „Папирнати модели правилних полиедара”

Поглавље носи назив ***„Папирнати модели правилних полиедара”***, јер се врло често, ради јасније слике и бољег разумевања ученика, наставник служи методом демонстрације прављења правилних полиедара од папира и њиховим „развијањем”, тј. „пребацивањем” из тродимензионалног простора у дводимензионални. На овај начин ученик у равни врло једноставно може сагледати карактеристике сваког од тела (број страна, углова, итд.). У мултимедијалним лекцијама у овом поглављу студенти су добили на екрану приказ мрежа правилних полиедара на више начина и за кратко време (слика 51).



Слика 51. Део илустрације мултимедијалног приказа папирнатих модела правилних полиедара

2.2.3 Одабрани примери из поглавља „Дискусија о броју правилних полиедара”

Пример 28. Теорема 3. *Постоји само пет правилних полиедара.*

<u>Практичан начин</u>.

Доказ.

Ако покушамо да спојимо у једном заједничком темену једнакостраничне троуглове, квадрате, правилне петоуглове, итд. на различите начине да бисмо формирали правилне полиедре, имаћемо пет случајева.

I случај.

Узмимо у обзир да у сваком темену, најмање три пљосни морају да се сустигну. Ако спојимо две не можемо добити тело.

II случај.

Почнимо од једнакостраничног троугла, код кога је сваки унутрашњи угао $60°$. Можемо спојити 3, 4 или 5 оваквих троуглова код сваког темена. Ако спојимо три троугла у врху полиедра и допунимо тело (фигуру) додавањем још једног троугла приметићемо да се у сваком темену сустичу три троугла. Ово тело се назива ***тетраедар*** због броја својих страна. Спајањем 4 и 5 оваквих троуглова се добијају ***октаедар*** и ***икосоедар***.

III случај.

Сваки унутрашњи угао квадрата је $90°$, па можемо спојити само три квадрата у сваком темену, на овај начин добијамо ***коцку***. (Ако спојимо 4 квадрата, они ће лежати у једној равни па уместо тела добијамо теселацију равни).

IV случај.

Унутрашњи угао петоугла је $108°$, па можемо спојити само три петоугла код сваког темена, добијајући ***додекаедар***.

V случај.

Можемо користити правилан шестоугао за теселацију равни, али не и за прављење Платоновог тела. И очигледно, ниједан други правилан полигон са више од шест страница не можемо користити, јер су унутрашњи углови све већи.

Теоријски начин.

Доказ.

На основу чињенице да је збир углова конвексног рогља мањи од $360°$ можемо да утврдимо тачно колико различитих врста правилних полиедара постоји.
Заиста, ако је n број страница правилног многоугла (који чини страну полиедра), тада мера једног угла тог многоугла износи $\frac{(n-2)360°}{n}$. Даље, ако је m број ивица у једном темену полиедра, тада збир ивичних углова у темену полиедра износи $\frac{m(n-2)180°}{n}$, а тај збир мора бити мањи од $360°$. Из неједнакости $\frac{m(n-2)180°}{n} < 360°$ следи $mn - 2m < 2n$, тј.

(1) $$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}.$$

Из неједнакости (1) и из $n \geq 3$ следи да је $m < 6$, и обрнуто, ако је $m \geq 3$ имамо да је $n < 6$. Према томе, неједнакост (1) биће тачна само у једном од следећих пет случајева:

$$n = m = 3; \qquad n = 3, m = 4; \qquad n = 3, m = 5; \qquad n = 4, m = 3; \qquad n = 5, m = 3.$$

Ако s означава број страна, i број ивица и t број темена полиедра, тада као што знамо важи:

$$ns = 2i, \qquad mt = 2i, \qquad t + s = i + 2,$$

и према томе, можемо да израчунамо број страна, ивица и темена у сваком од наведених пет случајева.

I случај.

Ако је $n = m = 3$, тада је $s = 4$, $i = 6$, $t = 4$ и имамо правилан ***тетраедар*** који има 4 стране (све су једнакостранични троуглови).

II случај.

Ако је $n=3, m=4$, тада је $s=8,\ \ i=12,\ \ t=6$ и имамо правилан ***октаедар*** који има 8 страна (све су једнакостранични троуглови).

III случај.

Ако је $n=3, m=5$, тада је $s=20,\ \ i=30,\ \ t=12$ и имамо правилан ***икосоедар*** који има 20 страна (све су једнакостранични троуглови).

IV случај.

Ако је $n=4, m=3$, тада је $s=6,\ \ i=12,\ \ t=8$ и имамо правилан ***хексаедар*** (тј. коцку) који има 6 страна (све су квадрати).

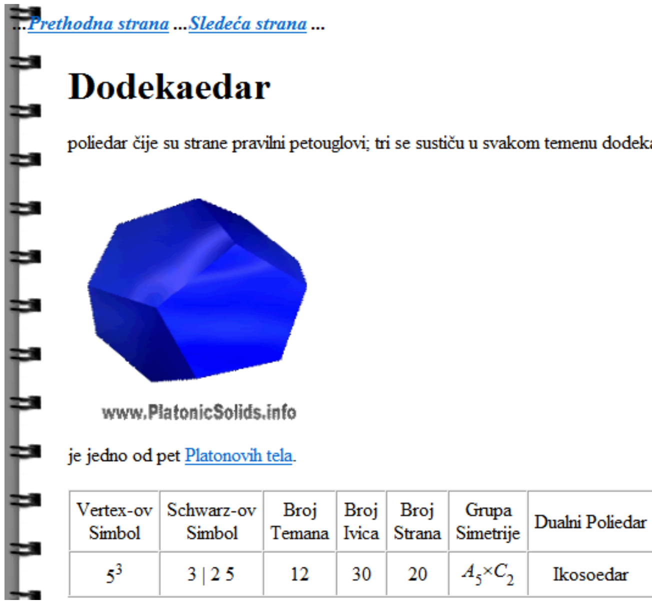
V случај.

Ако је $n=5, m=3$, тада је $s=12,\ \ i=30,\ \ t=20$ и имамо правилан ***додекаедар*** који има 12 страна (све су правилни петоуглови).

2.2.4 Одабрани примери из поглавља „Закључци”

Поглавље ***„Закључци”*** је имало за циљ да за свако од пет Платонових тела појединачно изведемо закључке о њиховим ознакама, врсти страна, броју темена, ивица, углова, страна, итд. Примери мултимедијалног приказа за октаедар и додекаедар су приказани на сликама 52 и 53.

Слика 52. Мултимедијални приказ октаедра и његових карактеристика



...Prethodna strana ...Sledeća strana ...

Dodekaedar

poliedar čije su strane pravilni petouglovi; tri se sustiču u svakom temenu dodekaedra.

www.PlatonicSolids.info

je jedno od pet Platonovih tela.

Vertex-ov Simbol	Schwarz-ov Simbol	Broj Temana	Broj Ivica	Broj Strana	Grupa Simetrije	Dualni Poliedar
5^3	3 | 2 5	12	30	20	$A_5 \times C_2$	Ikosoedar

Слика 53. Мултимедијални приказ додекаедра и његових карактеристика

2.2.5 Одабрани примери из поглавља „Задаци"

Задаци из области поледара су јако погодни за примену анимација, јер је у питању област геометрије коју треба сагледати у простору.

Пример 29. Пресећи коцку са равни тако да у пресеку буде:

а) разнострани троугао;

б) једнакостраничан троугао;

в) једнакокраки троугао.

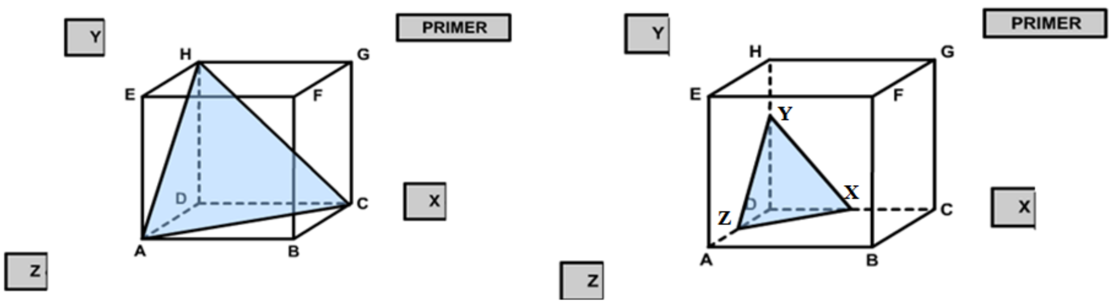
Решење.

Напомена: наведени су само примери неких решења троуглова добијених у пресеку коцке и равни.

а) Као што смо напоменули, приказаћемо само нека од могућих решења. На пример, нека су тачке X, Y и Z такве да X припада ивици коцке CD, Y припада DH, а Z ивици AD и важи $d(XY) \neq d(YZ) \neq XZ$. Тада је троугао XYZ тражени разнострани троугао. Анимацијом је најпре приказан једнакостраничан троугао

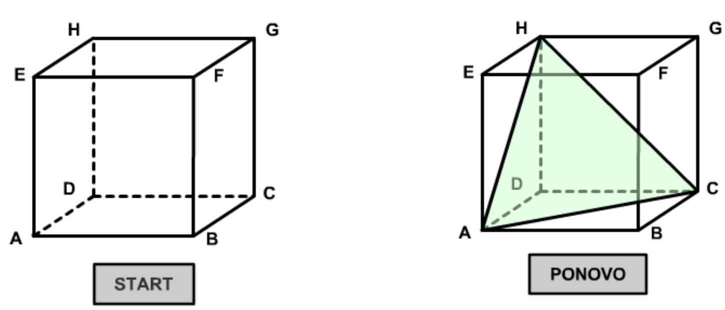
ACH, а затим смо „кликом” на дугме „ X ”, „Y ” и „ Z ”, померали тачке X, Y и Z по одговарајућим ивицама коцке којима припадају тачке и на тај начин добили могућа решења троуглова. ,,Кликом” на дугме ,,Пример” приказали смо, такође, једно од могућих решења разностраног троугла XYZ (слика 54).

Напомена. Наравно, оваквих троуглова, баш као и положаја тачака X, Y и Z, као што смо у анимацији видели, има бесконачно много.



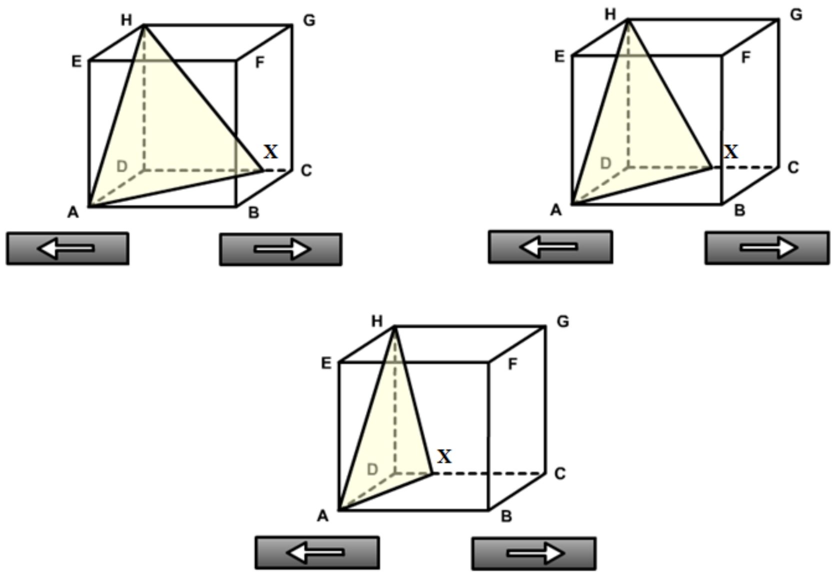
Слика 54. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 29/а

б) Ако је a дужина ивице коцке, тј. дужина странице квадрата (пљосни), тада је дужина дијагонале те пљосни $d = a\sqrt{2}$, па је троугао ACH, са страницама дужине дијагонеле d, тражени једнакостраничан троугао. Кликом на дугме ,,Старт” почиње анимација којом се приказује цртеж и шрафура траженог троугла на екрану (слика 55).



Слика 55. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 29/б

в) Нека тачка X припада ивици коцке CD таква да је $d(DX) < d(CD)$. Тада је троугао AHX једнакокрак. У анимацији, помоћу дугмића у облику стрелице, у лево и у десно, можемо мењати положај тачке X и на тај начин добити бесконачно много једнакокраких троуглова AHX (слика 56).



Слика 56. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 29/в

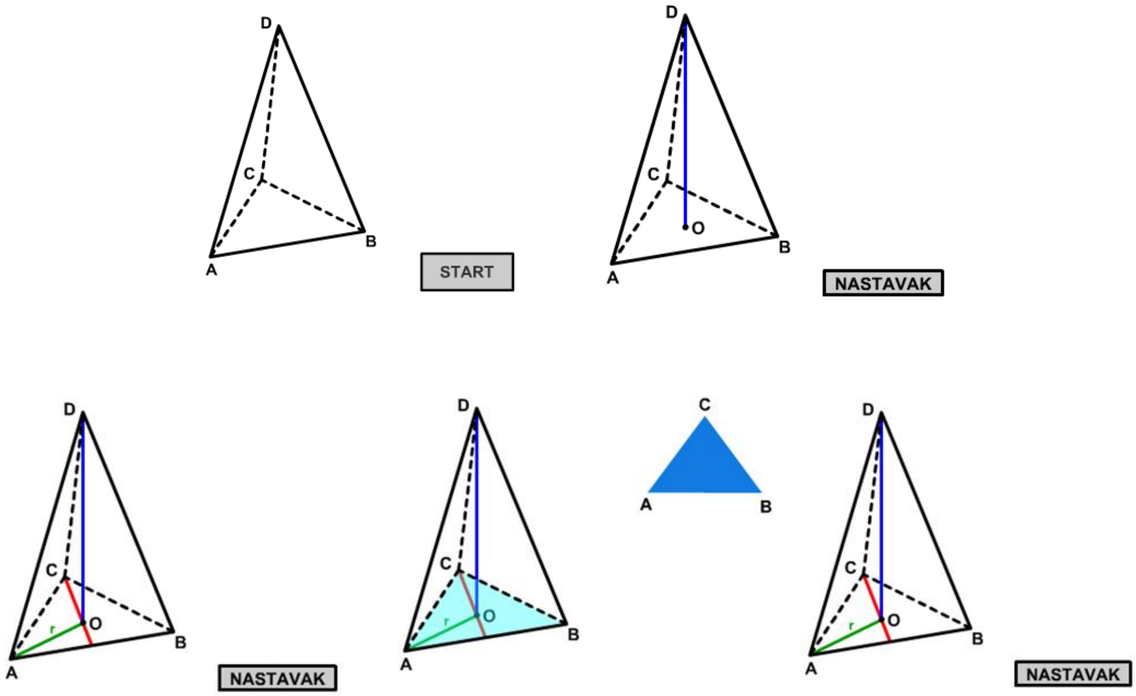
Доказ.

Троугао ADX је подударан троуглу HDX на основу става о подударности *СУС* (страница, угао, страница), јер су испуњени следећи услови: $d(AD) = d(DH)$ (ивице коцке), углови ADX и XDH су прави и самим тим и једнаки и DX је заједничка страница ова два троугла. Пошто су ова два троугла подударна, то су и њихове две одговарајуће странице AX и XH једнаке, па је троугао AHX једнакокрак.

Пример 30. Одредити запремину правилног тетраедра чије ивице имају дужину a.

Решење.

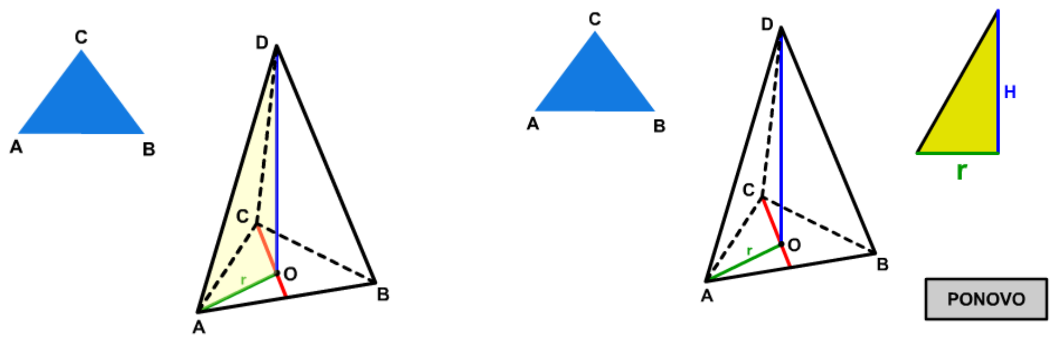
С обзиром да је у питању тетраедар, његова основа је *једнакостраничан троугао* чија је површина одређена формулом: $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Подножје висине из четвртог темена D тог тетраедра поклапа се са средиштем O његове основе и оно се у анимацији прво исцртава (као висина тетраедра) спуштајући се из темена D под правим углом на основу (слика 57).



Слика 57. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 30

Ако обележимо дужину дужи OA са r, тада је r дужина полупречника описаног круга основе (једнакостраничног троугла), па је он једнак две трећине његове висине која има дужину $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, онда ће његова дужина бити једнака $r=\dfrac{2}{3}h=\dfrac{2}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Анимација нам приказује исцртавање полупречника r, затим кроз шрафуру једнакостраничног троугла ABC истиче се његова значајност за израчунавање вредности полупречника (слика 57).

Ако дужину висине тетраедра обележимо са H, из правоуглог троугла OAD (који је у анимацији приказан шрафуром и издваја се са стране, слика 58), $a^2=H^2+r^2$, одакле добијамо $H=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Сада имамо све потребне податке за израчунавање тражене запремине тетраедра: $V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$.



Слика 58. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 30

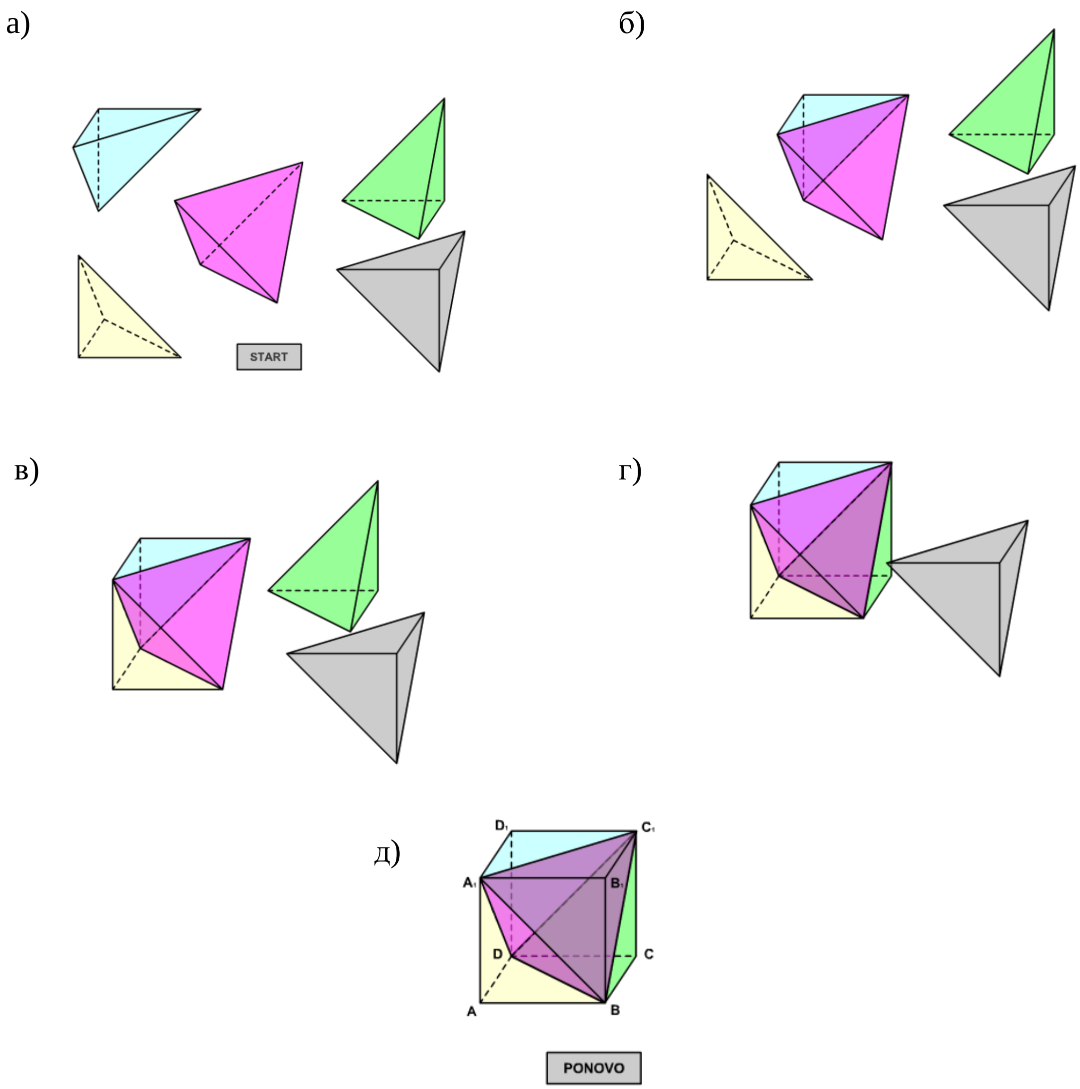
Пример 31. Дати су правилан тетраедар ивице дужине a и правилна четворострана пирамида, такође ивице дужине a. Разрезати оба тела тако да се од тих делова може саставити коцка.

Решење.

Од наведених тела се може саставити коцка ивице $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Треба разрезати четворострану пирамиду на четири једнака дела и добијене делове прислонити уз правилан тетраедар.

Објашњење и доказ.

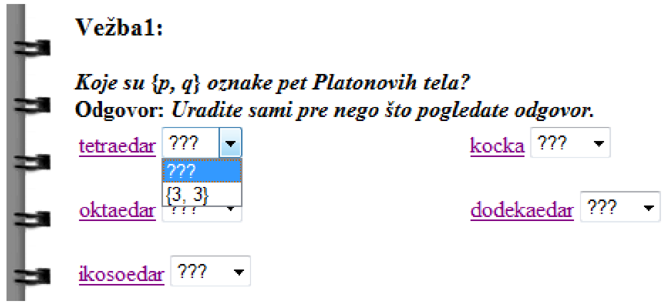
Ако је a дужина ивице коцке (странице квадрата), тада је дијагонала квадрата $d=a\sqrt{2}$. Треба разрезати четворострану пирамиду на четири дела – пирамиде, чије су основе четири дела основе полазне пирамиде. Основе добијених пирамида имају по једну страницу дужине a и две странице дужине једнаке половини дијагонале $b=c=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Слика 59. Део мултимедијалне илустрације решења из примера 31

2.2.6 Одабрани примери из поглавља „Вежбање“

Поглавље „***Вежбање***” има за циљ, као и код мултимедијалних лекција о изометријским трансформацијама, обнављање и утврђивање градива (видети пример на слици 60).



Слика 60. Део илустрације мултимедијалног примера вежбе

2.2.7 Архимедова тела (полуправилна)

Сматрали смо да би било корисно и занимљиво студентима у мултимедијалним лекцијама приказати и нека тела сродна правилним полиедрима, тј. тела која добијамо од Платонових. На пример, ако наставимо да захтевамо да сва темена буду идентична (по уведеној нотацији $\{p,q\}$, где је p број страна, а q број пљосни које се сусрећу код сваког врха) и да сва тела буду конвексна, али изоставимо услов да при прављењу тела користимо само једну врсту правилних полигона, добијамо фамилију од тринаест тела која се зову ***Архимедова тела***. Такође се користи назив и ***полуправилна тела***. Како су сва темена идентична (по наведеној нотацији), тела су у потпуности описана навођењем правилних полигона који окружују свако теме. На пример, зарубљена коцка има један троугао и два осмоугла код сваког темена, па имамо нотацију $\{3,8,8\}$.

Седам Архимедових тела добија се од Платонових тела „зарубљивањем” односно „сечењем ћошкова”. Пет овде приказаних настало је „дељењем” ивица Платонових тела на три дела и „одсецањем” темена у тим тачкама. У нашим мултимедијалним лекцијама (слика 61) редом су приказани:

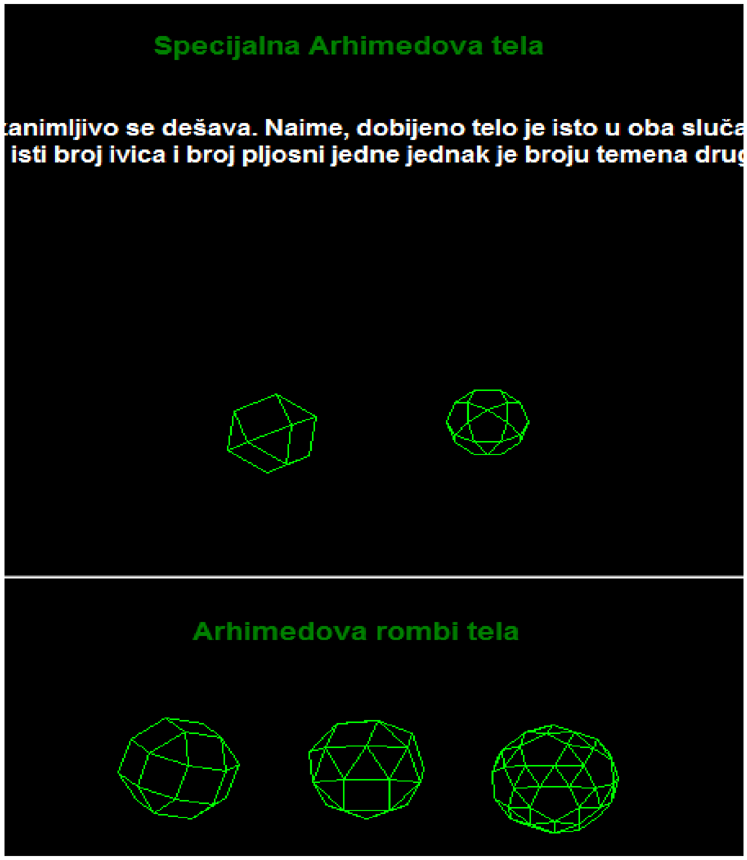
- зарубљени тетраедар $\{3,6,6\}$;
- зарубљени икосоедар $\{5,6,6\}$;
- зарубљена коцка $\{3,8,8\}$;
- зарубљени додекаедар $\{3,10,10\}$.

Слика 61. Архимедова тела – део илустрације мултимедијалног приказа

2.2.8 Специјална Архимедова тела

Ако ивице коцке или октаедра поделимо на пола и у тим тачкама „одсечемо" темена, нешто веома занимљиво се дешава. Наиме, добијено тело је исто у оба случаја. Иста ствар се дешава са додекаедром и икосоедром. Ова тела представљају посебну везу између коцке и октаедра и између додекаедра и икосоедра. Називају се „дуални парови" јер имају исти број ивица и број пљосни који је једнак броју темена друге. Ова дуалност је још очигледнија код тела које се састоји од коцке и октаедра или тела сачињеног од додекаедра и икосоедра. На слици 62 редом су приказани:

- кубиоктаедар $\{3,3,4,4\}$;
- икосидодекаедар $\{3,3,5,5\}$;
- ромбокубиоктаедар $\{3,4,4,4\}$;
- заобљена коцка $\{3,3,3,3,4\}$;
- заобљени додекаедар $\{3,3,3,3,5\}$.



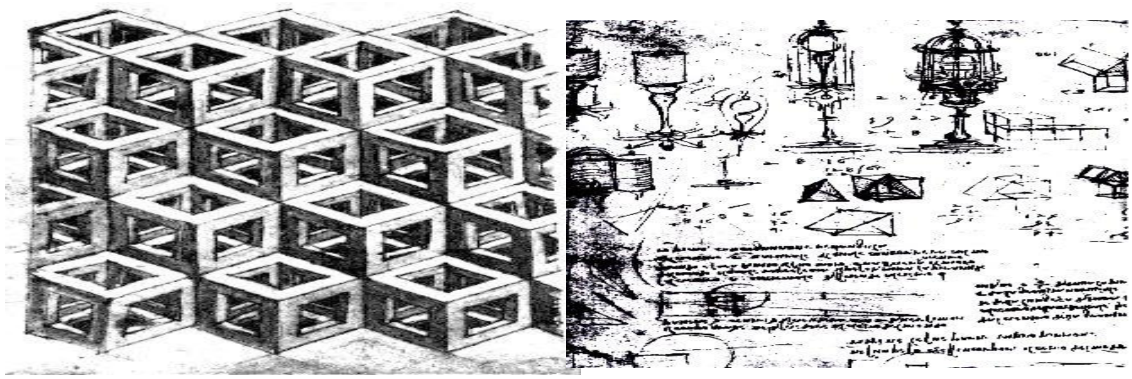
Слика 62. Специјална Архимедова тела – део илустрације мултимедијалног приказа

2.2.9 Полиедри у уметности

Кроз историју полиедар је био уско повезан са уметношћу. Врхунац ове везе је свакако у ренесанси. За неке ренесансне уметнике полиедар је представљао изазов пружајући доказ њихове овладаности перспективом. За друге, пак, полиедар је био симбол дубоких религиозних и филозофских истина.

На слици 63 су приказана дела Леонарда да Винчија [6] – Коцке и Скице.

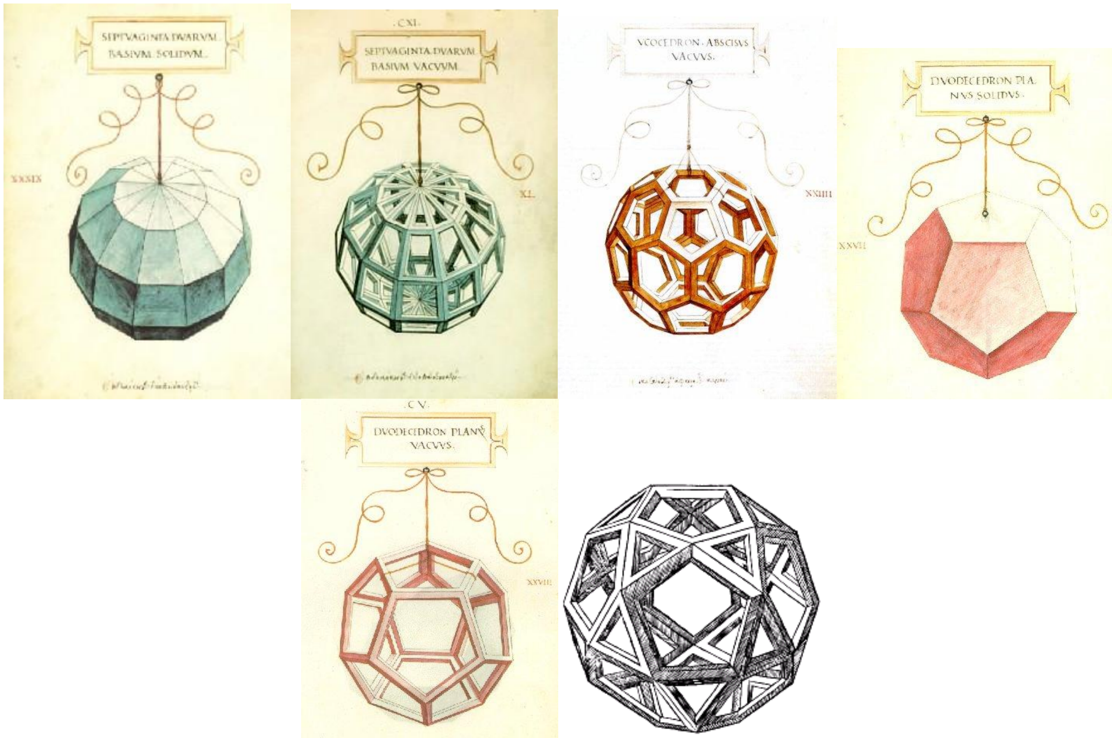
[6] Леонардо да Винчи – најистакнутији представник ренесансе: уметник, математичар, научник и инжењер (1452-1519)



Слика 63. Полиедри у уметности – део илустрације мултимедијалног приказа

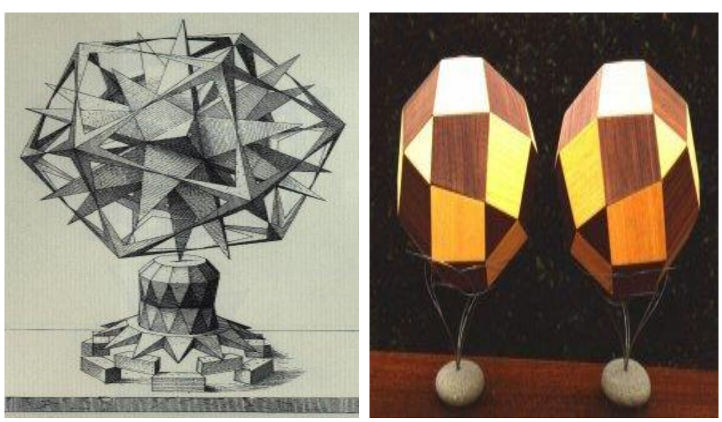
Леонардов инзванредан допринос у области полиедара су и илустрације за књигу Луке Паћолиа, ***Божанствена пропорција*** из 1509. године. Неке од илустрација из поменуте књиге су приказане на слици 64. Ово су прве илустрације полиедра у три димензије. Тродимензионалност омогућава да се јасно види која ивица је напред а која позади, за разлику од дводимензионалних цртежа на којима се припадност ивица различитим површима тешко разазнаје. Прозирност површи омогућава да се површи позади виде кроз структуру. То је брилијантан нов начин илустрације геометријских облика, начин вредан Леонардовог генија за адекватан графички приказ информација. Међутим, није познато да ли је Леонардо изумео овај нови приступ или је он једноставно скицирао низ тродимензионалних дрвених модела које је Паћоли дизајнирао. Ако је Паћоли креирао дрвене моделе, онда заслуга за настанак тродимензионалног приказа облика припада искључиво њему, али је вероватније да их је Леонардо креирао. У штампаној верзији књиге се налазе и прикази Леонардових цртежа изрезбарених у дрвету.

Платоново довођење у везу Платонових облика и елемената ватре, земље, ваздуха и воде (и универзума) у Тимају је имало снажан утицај. Полиедар је био везан са овладаношћу геометријом неопходном за перспективу и сугерисао је математичку основу као потврду уметничког талента, управо као што је ренесансна наука истраживала математичке принципе и визуелне форме као и разлоге због којих облике видимо како видимо, који нам помажу да разумемо и објаснимо физички свет, астрономију и анатомију.



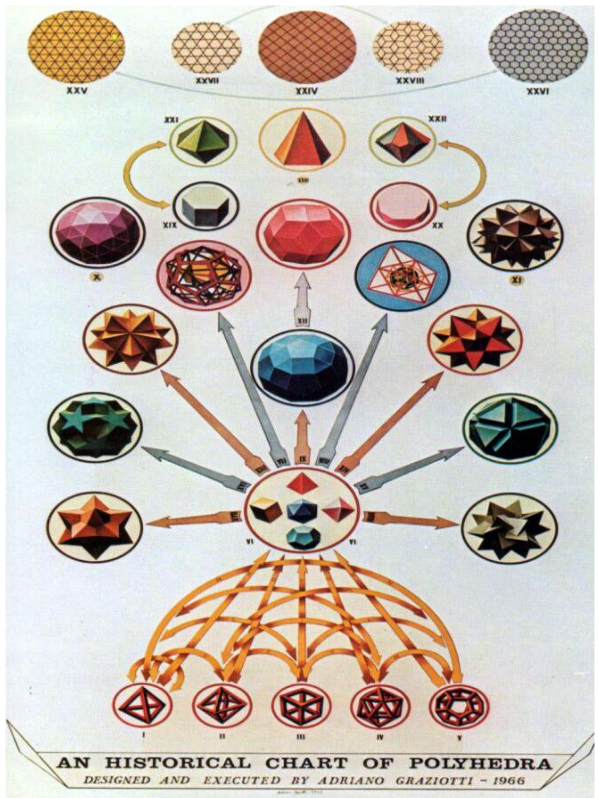
Слика 64. Божанствена пропорција Леонадрда да Винчија – део илустрације мултимедијалног приказа

На слици 65 су приказани велики икосоедар и велики додекаедар.



Слика 65. Велики икосоедар и велики додекаедар – део илустрације мултимедијалног приказа

За остале уметнике полиедар је једноставно представљао инспирацију и скуп облика са различитим симетријама у односу на које се може цртати. Ово је посебно изражено у скулптури двадесетог века, ослобођеној од ограничености материјала и прихватљивих облика којима су скулптуре претходно биле ограничене.



Слика 66. Полиедри у уметности – део илустрације мултимедијалног приказа

2.2.10 *Полиедри у свакодневном животу*

На слици 67/а, су приказане „коцкице” у облику правилних полиедара. Користе се за добијање случајних бројева у одређеном опсегу, за разнолике примене (између осталог за игру и забаву). На слици 67/б имамо Рубикову коцку, која служи такође за забаву.

а)

б)

Слика 67. Полиедри у свакодневном животу – део илустрације мултимедијалног приказа

2.3 Мултимедијални приказ одабраних примера и проблема о одређеном интегралу

Одређени интеграл представља један од основних појмова математичке анализе. Он се, у ствари, појавио знатно пре појма извода и још се Архимед[7] у суштини користио њиме, у неким специјалним случајевима. Наиме, било је познато како се одређују површине равних геометријских ликова који су ограничени линијама као што су, на пример, троугао, четвороугао, круг, итд. Међутим, потреба за израчунавањем површине лика који је ограничен неком „сложенијом” линијом, појавила се веома рано и вековима је заокупљала пажњу научника. Решавање тог проблема, а такође и разних проблема из механике и физике, довело је до појма одређеног интеграла.

Математичари прве половине XVII века користе у методи недељивих суму бесконачно малих елемената, док Њутн[8] и Лајбниц[9] избегавају ове методе дајући предност диференцијалном рачуну. Користећи данашњу терминологију, они траже примитивну функцију дате функције или неодређени интеграл дате функције, два

[7] Архимед – старогрчки математичар (око 287-212 п.н.е.),
[8] Њутн Исак – енглески физичар, математичар, астроном, алхемичар и филозоф природе (1642-1727)
[9] Лајбниц Готфрид Вилхелм – немачки филозоф и математичар (1646-1716)

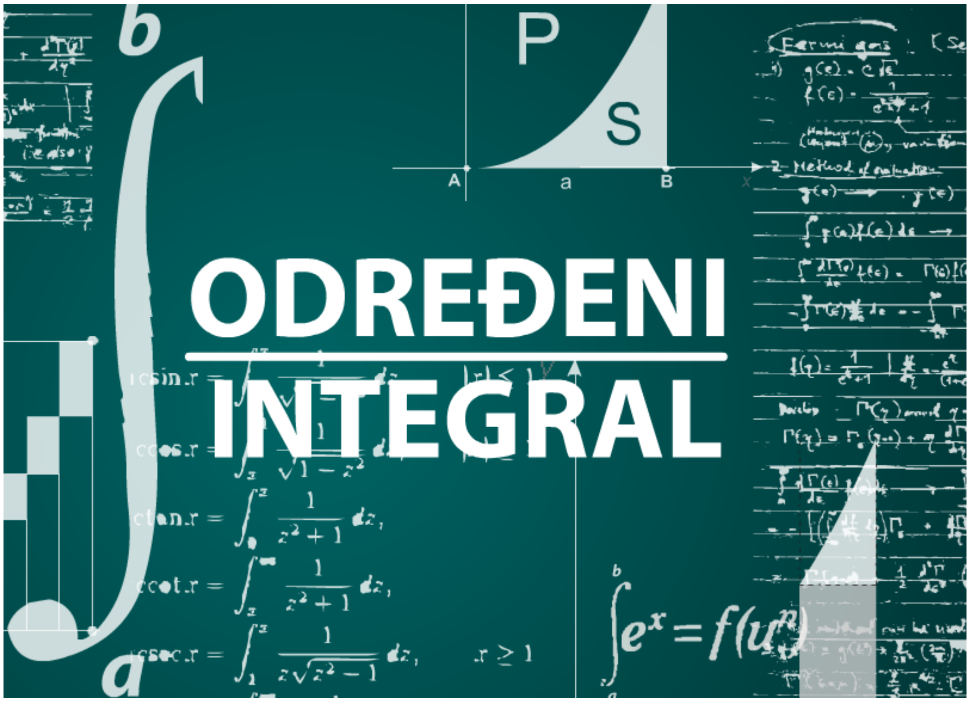
појма који имају исти смисао. Од 1823. године са Кошијем[10] се враћамо на старе концепције дефиниције интеграла. Оваква дефиниција интеграла, која се у основи везује за Архимедово проучавање, од посебног је значаја. Најпре Коши, а затим и Риман[11] је проширују 1854. године на одређене случајеве дисконтинуитета. Дарбу[12] је 1875. године проценио теорију „Римановог интеграла",. Стилтјес[13] 1894. и Лебег[14] 1902. дају два проширења појма одређеног интеграла. Лебегов интеграл се ослања на меру скупова тачака – теорију коју дугујемо Кантору[15], Жордану[16], Борелу[17] и самом Лебегу.

Одлучили смо се за мултимедијални приказ одређеног интеграла, због његове важне улоге и заступљености у настави математике у већини средњих школа и факултета. Такође, желели смо да градиво које је најчешће, због недостатка наставног времена, базирано на апстрактном и теоријском методичком приступу, прикажемо на другачији начин, визуелном методом. Кроз наставну праксу показало се, такође, да студенти овом градиву најчешће приступају без суштинског разумевања, како појма одређеног интеграла, тако и његове вишеструке примене у реалном свету и неким другим областима (на пример из физике и геометрије, на примерима пређеног пута, рада променљиве силе, проблема површине и запремине, дужине лука криве, итд.). Зато смо желели да на један другачији, визуелан начин, најпре уведемо појам одређеног интеграла, његову дефиницију, а затим прикажемо у мултимедијалним лекцијама и теореме, разнолику примену одређеног интеграла, итд.

Лекције о одређеном интегралу, чија је насловна страна приказана на слици 68, су осмишљене као скуп поглавља (слика 69) у који спадају: ***увод, одабрани проблеми из физике и геометрије, дефиниција орећеног интеграла, интеграбилност, основна својства одређеног интеграла, Њутн-Лајбницова***

[10] Коши Огистен Луј – француски математичар (1789-1857.)
[11] Риман Бернард – немачки математичар (1826-1866.)
[12] Дарбу Гастон – француски математичар (1842-1917.)
[13] Томас-Јан Стилтјес – немачки математичар (1856-1894.)
[14] Лебег Анри – француски математичар (1875-1941.)
[15] Кантор Георг – немачки математичар, руског порекла (1875-1918.)
[16] Жордан Камиј – француски математичар (1838-1922.)
[17] Борел Емил – француски математичар (1871-1956.)

формула, примене одређеног интеграла – израчунавање површина неких фигура у равни и израчунавање запремина неких тела у простору.



Слика 68. Илустрација мултимедијалног приказа насловне стране лекција о одређеном интегралу

Уводно поглавље садржи мултимедијални приказ проблема Архимедове квадратуре параболе, израчунавање површине фигура Архимедовом методом, повезивање проблема квадратуре параболе са појмом примитивне функције, као и примере израчунавања површина одређених фигура користећи се појмом примитивне функције.

Студентима је у другом поглављу, „***Одабрани проблеми из физике и геометрије***”, мултимедијално приказано израчунавање пређеног пута, рада променљиве силе и површине криволинијског трапеза преко одређеног интеграла – визуелном методом.

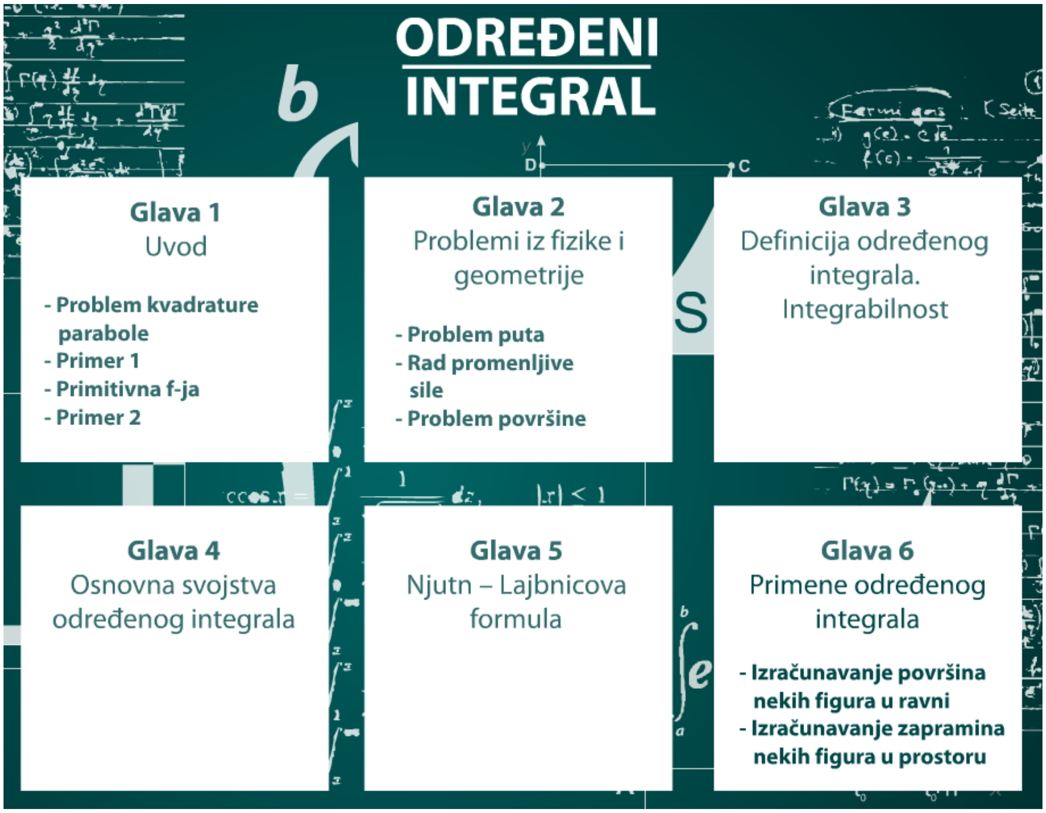
У поглављу „***Дефиниција ореџеног интеграла. Интеграбилност***” уводи се дефиниција одређеног интеграла преко интегралне суме и појам интеграбилности.

Уз помоћ анимација приказане су и многобројне теореме о интеграбилности и примери.

У поглављу „***Основна својства одређеног интеграла***” налазе се основне теореме и последице о одређеном интегралу приказане на мултимедијални начин.

Кроз мултимедијалне анимације Њутн-Лајбницова формула је изведена корак, по корак у одељку „***Њутн-Лајбницова формула***”**.**

У поглављу „***Примене одређеног интеграла – израчунавање површине неких фигура у равни и израчунавање запремине неких тела у простору***” имамо примену одређеног интеграла на израчунавање површине неких фигура у равни, као и израчунавање запремина неких тела у простору, што је приказано на врло илустративан начин, кроз разне анимације.

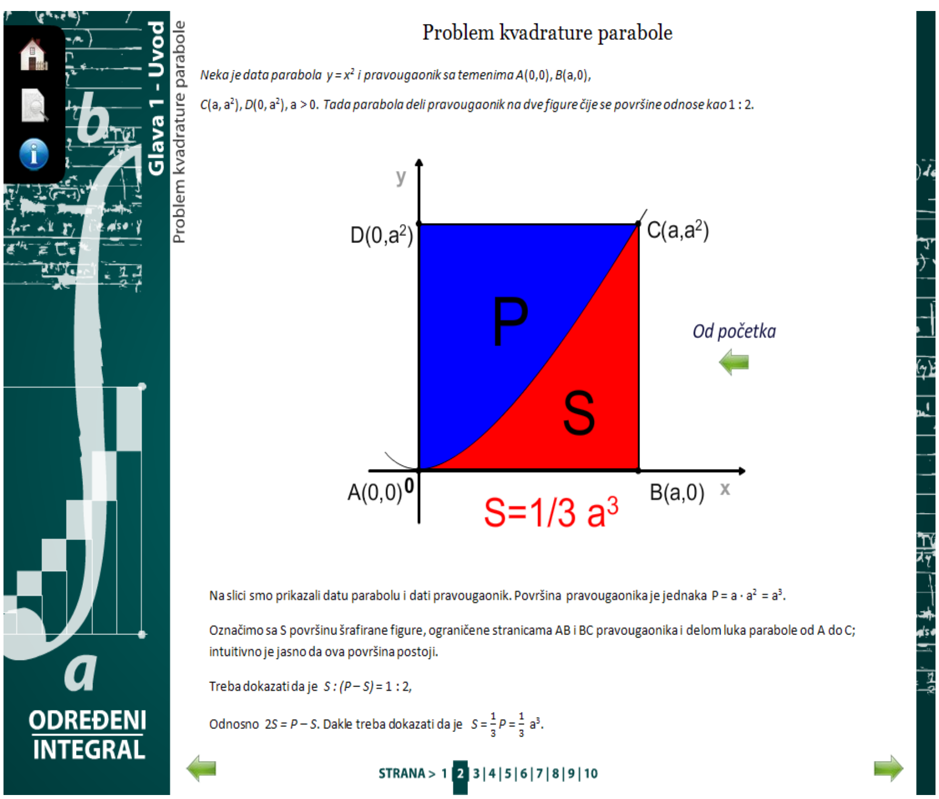


Слика 69. Приказ мултимедијалне стране са садржајем градива лекција о одређеном интегралу

2.3.1 Увод. Проблем квадратуре параболе уз мултимедијални приказ

У интегралном рачуну проблем израчунавања површине води нас ка дефиницији одређеног интеграла. Управо из ових разлога одлучили смо се за приказ студентима Архимедове квадратуре параболе, у осавремењеној интерпретацији и уз употребу савремених ознака, уз коришћење мултимедијалног софтвера. На почетку својих предавања сматрали смо појам површине фигуре у равни интуитивно јасним и користили се њиме. Касније смо строго дефинисали овај појам. Користићемо и већ познат појам лимеса низа реалних бројева.

Ако желимо да користимо рачунар приликом предавања, морамо се руководити сугестијама које је дао Тол (видети [86]). Он истиче важност коришћења рачунара приликом израчунавања површине, јер поред нумеричког приступа израчунавању, визуелни приказ нуди много више.



Слика 70. Део илустрације мултимедијалног приказа проблема квадратуре параболе

Проблем квадратуре параболе формулишемо на следећи начин**:** *нека је дата парабола* $y = x^2$ *и правоугаоник са теменима* $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(a,a^2)$, $D(0,a^2)$, $a > 0$. *Тада парабола дели правоугаоник на две фигуре чије се површине односе као* $1:2$.

На слици 70 смо приказали дату параболу и дати правоугаоник. Површина правоугаоника је једнака $P = a \cdot a^2 = a^3$. Означимо са S површину фигуре испод параболе, ограничену страницама AB и BC правоугаоника и делом лука параболе од A до C. Треба доказати да је

$$S:(P-S) = 1:2, \text{ тј. да је } S = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}a^3.$$

Нека је n природан број. Поделимо одсечак $[0,a]$ осе Ox на n једнаких одсечака: $\left[0,\frac{a}{n}\right],\left[\frac{a}{n},2\frac{a}{n}\right],...,\left[(n-1)\frac{a}{n},a\right]$. Сваки од ових одсечака има дужину $\frac{a}{n}$, што приказујемо студентима анимацијом корак по корак, као што је илустровано на слици 71/а. Над сваким од ових одсечака конструишемо два правоугаоника: „описани”, чије десно горње теме припада параболи (анимација је илустрована сликом 71/б) и „уписани”, чије лево горње теме припада параболи (анимација је илустрована сликом 71/в). Јасно је да над првим одсечком, $\left[0,\frac{a}{n}\right]$, нема уписаног правоугаоника. Висине описаних правоугаоника једнаке су, редом $\left(\frac{a}{n}\right)^2,\left(2\frac{a}{n}\right)^2,...,\left((n-1)\frac{a}{n}\right)^2,\left(n\frac{a}{n}\right)^2$ (слика 71/б), па су њихове површине једнаке, редом

$$\frac{a}{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^2,\frac{a}{n}\cdot\left(2\frac{a}{n}\right)^2,...,\frac{a}{n}\cdot\left((n-1)\frac{a}{n}\right)^2,\frac{a}{n}\cdot\left(n\frac{a}{n}\right)^2.$$

Одатле налазимо да је збир P_o површина описаних правоугаоника једнак (део анимације је илустрован сликом 71/г)

$$P_o = \left(\frac{a}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 + n^2).$$

Користећи се математичком индукцијом доказујемо да је за сваки природан број n,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Због тога је

$$P_o = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = a^3 \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

Површина сваког од уписаних правоугаоника једнака је разлици површина одговарајућег описаног правоугаоника и „додатог” (део анимације је илустрован сликама 71/г и 71/д). Сваки од додатих правоугаоника има једну од страница дужине $\frac{a}{n}$ (то су њихове „ширине”), док је збир дужина њихових других страница (то је збир њихових „висина”) једнак a^2. Због тога је збир P_D, површина тих додатих правоугаоника, једнак $\frac{a}{n} \cdot a^2 = \frac{a^3}{n}$. Онда је збир P_U, површина уписаних правоугаоника, једнак разлици $P_O - P_D$, односно

$$P_U = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} - \frac{a^3}{n} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

Очигледно је $P_U < S < P_O$, дакле:

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} < S < \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2},$$

због чега је

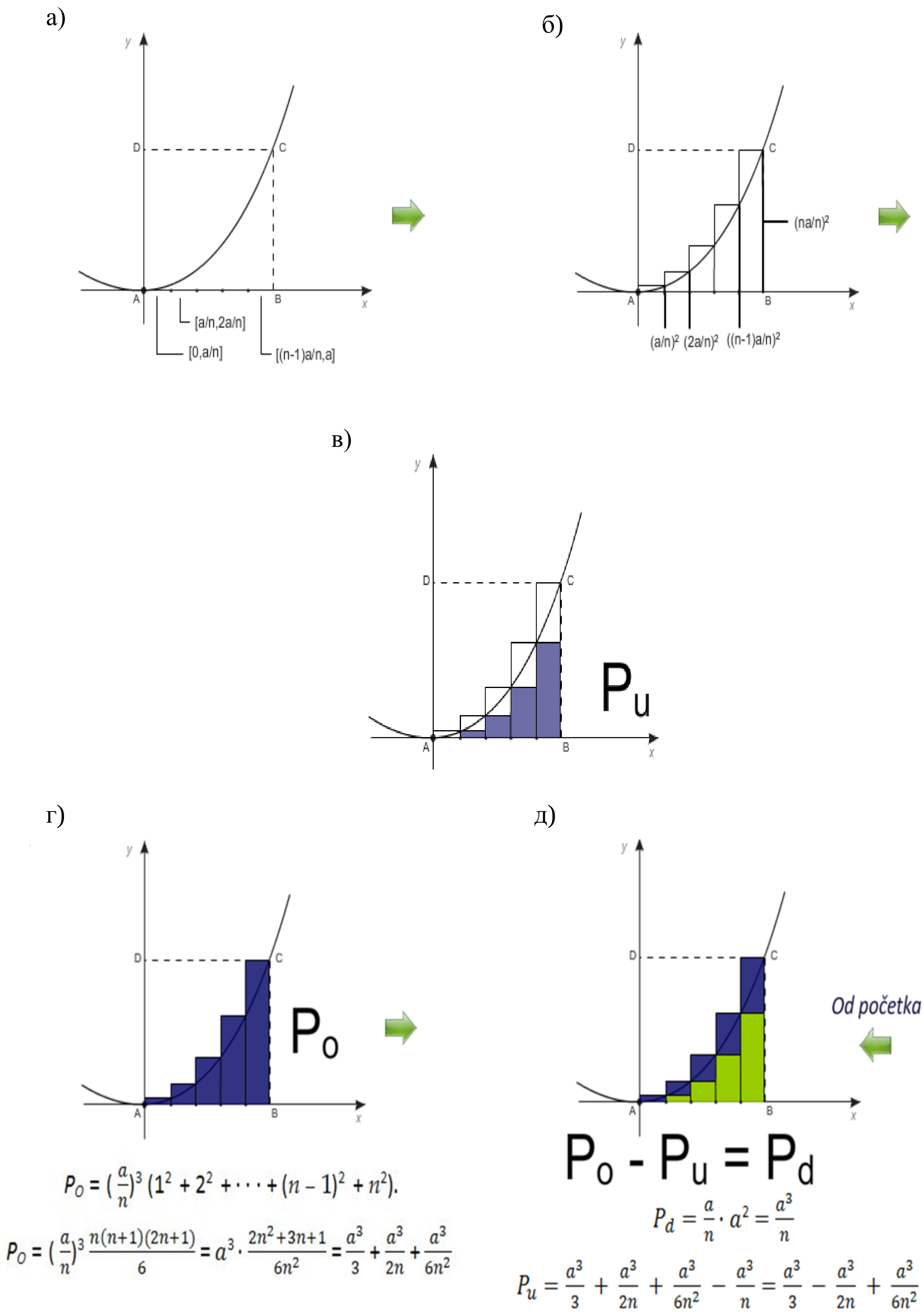
$$-\frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2} < S - \frac{a^3}{3} < \frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}.$$

Ове су неједнакости тачне за сваки природан број n. Пошто је

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^3}{2n} + \frac{a^3}{6n^2}\right) = 0$$

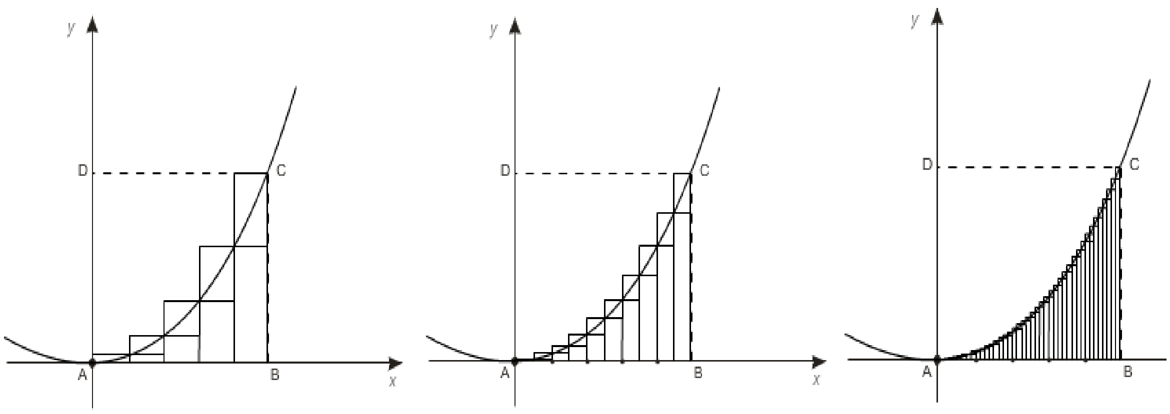
закључујемо да је

$$S = \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}a^3.$$



Слика 71. Део илустрације мултимедијалног приказа решења проблема квадратуре параболе, корак по корак (први део)

Дали смо решење проблема користећи нумеричку методу, али коришћењем мултимедијалних лекција можемо понудити много више. Уз анимацију (део на слици 72) студенти могу закључити да се повећавањем броја n, односно броја описаних и уписаних правоугаоника, ове површине све више изједначавају и сагласно нашим интуитивним и визуелним представама постају једнаке међу собом, као и траженој површини S.



Слика 72. Део илустрације мултимедијалног приказа решења проблема квадратуре параболе, корак по корак (други део)

2.3.2 Одабрани проблеми из физике и геометрије

Неки проблеми из физике и геометрије директно воде до појма одређеног интеграла, а и неминовно представљају његову широку примену. Зато смо желели да их кроз мултимедијалне лекције прикажемо студентима и њихов ћемо садржај описати у следећим потпоглављима.

2.3.2.1 Проблем пута

До појма извода функције, долази се израчунавањем брзине на основу пређеног растојања. Размотрићемо обрнут проблем, тј. израчунати пређени пут ако је дата брзина. На овај начин доћи ћемо до концепта одређеног интеграла.

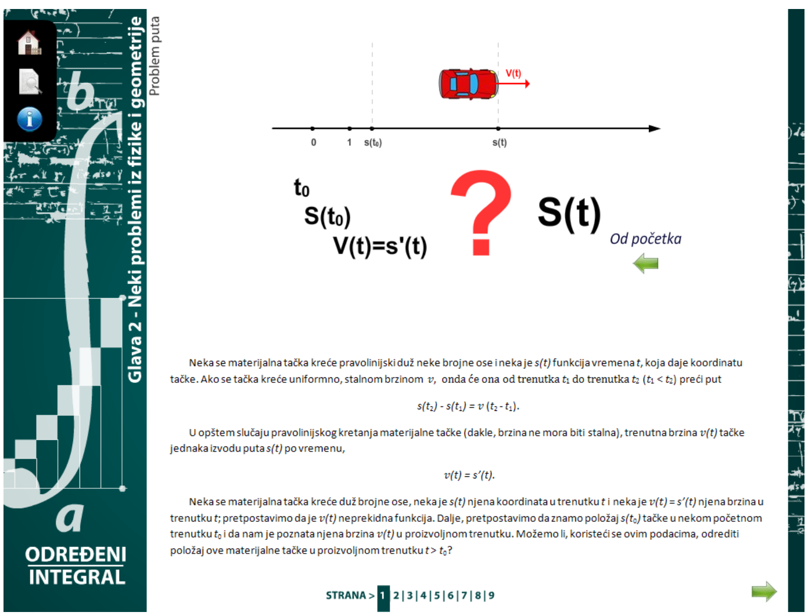
Нека се материјална тачка креће праволинијски дуж неке бројне осе и нека је $s(t)$ функција времена t, која даје координату тачке. Ако се тачка креће униформно, сталном брзином v, онда ће она од тренутка t_1 до тренутка t_2 ($t_1 < t_2$), прећи пут

$$s(t_2) - s(t_1) = v(t_2 - t_1).$$

У општем случају праволинијског кретања материјалне тачке (дакле, брзина не мора бити стална), тренутна брзина $v(t)$ тачке једнака је изводу пута $s(t)$ по времену,

$$v(t) = s'(t).$$

Нека се материјална тачка креће дуж бројне осе, нека је $s(t)$ њена координата у тренутку t и нека је $v(t) = s'(t)$ њена брзина у тренутку t. Претпоставимо да је $v(t)$ непрекидна функција. Даље претпоставимо да знамо положај $s(t_0)$ тачке у неком почетном тренутку t_0 и да нам је позната њена брзина $v(t)$ у произвољном тренутку. Можемо ли, користећи се овим подацима, одредити положај ове материјалне тачке у произвољном тренутку $t > t_0$?



Слика 73. Део илустрације мултимедијалног приказа проблема израчунавања пређеног пута преко одређеног интеграла

Део мултимедијалног приказа проблема израчунавања пређеног пута преко одређеног интеграла дат је на слици 73.

Ако је $\Delta t = t'' - t'$ $(t' < t'')$ интервал времена и τ нека изабрана тачка из интервала $[t', t'']$, онда производ $v(t)\Delta t$ представља пут који би материјална тачка прешла у интервалу Δt крећући се сталном брзином $v(\tau)$, па закључујемо да је

$$s(t'') - s(t') \approx v(\tau)\Delta t,$$

и да је ова апроксимација утолико боља уколико је интервал времена Δt краћи.

Посматрајмо сада интервал времена $[t_0, t]$ и уочимо на њему тренутке $t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = t$ који задовољавају

$$t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n$$

и такви су да су сви интервали времена $[t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, ..., n,$ кратки. Означимо $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ и нека је $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Онда ће сума

$$\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i$$

апроксимирати суму

$$\sum_{i=1}^{n} (s(t_i) - s(t_{i-1}))$$

пређених путева у интервалима $[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n]$. Дакле, због

$$\sum_{i=1}^{n} (s(t_i) - s(t_{i-1})) = s(t_1) - s(t_0) + s(t_2) - s(t_1) + ... + s(t_n) - s(t_{n-1})$$

$$= s(t_n) - s(t_0) = s(t) - s(t_0)$$

налазимо да је:

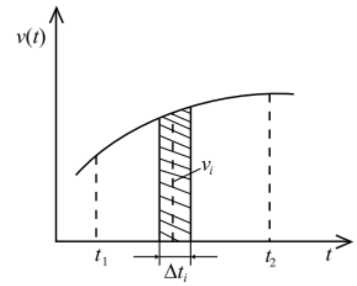
$$s(t) - s(t_0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \, .$$

Јасно је да ће се квалитет ове апроксимације побољшавати ако се интервал $[t_0, t]$ разбија тако да сви подинтервали постају ситнији. Ово се остварује ако се величина $d = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_{n-1}, \Delta t_n\}$ смањује и тежи нули (кад $n \to \infty$). Зато можемо усвојити

(2) $$s(t) - s(t_0) = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i \, ,$$

чиме је добијен потврдан одговор на постављено питање. Дакле, положај $s(t)$ ове материјалне тачке у произвољном тренутку t је одређен и дат је са

$$s(t) = s(t_0) + \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i .$$



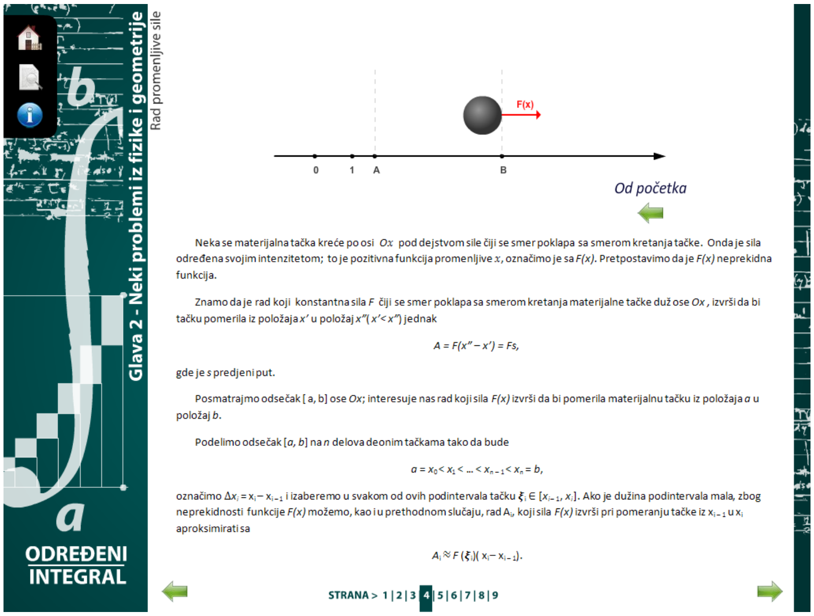
Слика 74. Део илустрације мултимедијалног приказа површине шрафиране области (приближно је једнака производу $v(t_i)\Delta t_i$)

На слици 74 пређени пут је приказан као област испод криве ограничене „одозго" временском осом, а „с лева и десна" правама $t = t_1$ и $t = t_2$. Површина шрафиране области једнака је производу $v(t_i)\Delta t_i$. Аналогно решавању проблема квадратуре параболе и анимацији приказаној на слици 74, поступамо и у примеру израчунавања пређеног пута, тј. при дељењу области испод криве на све ситније и ситније „траке" (подинтервале). Збир површина „трака" даје површину те области (за коју ћемо у наредном делу овог поглавља доказати да је одређени интеграл).

2.3.2.2 Рад променљиве силе

Одређени интеграл има једноставан геометријски смисао који се може лако применити и на примеру израчунавања рада променљиве силе.

Нека се материјална тачка креће по оси Ox под дејством силе чији се смер поклапа са смером кретања тачке. Онда је сила одређена својим интензитетом. То је позитивна функција променљиве x и означимо је са $F(x)$. Претпоставимо да је $F(x)$ непрекидна функција.



Слика 75. Део илустрације мултимедијалног приказа проблема израчунавања рада променљиве силе преко одређеног интеграла

Знамо да је рад који константна сила F, чији се смер поклапа са смером кретања материјалне тачке дуж осе Ox, изврши да би тачку померила из положаја x' у положај x'' $(x' < x'')$ једнак

$$A = F(x'' - x') = Fs,$$

где је s пређени пут.

Посматрајмо одсечак $[a,b]$ осе Ox. Интересује нас рад који сила $F(x)$ изврши да би померила материјалну тачку из положаја a у положај b.

Поделимо одсечак $[a,b]$ на n делова деоним тачкама тако да буде

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

означимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и изаберимо у сваком од ових подинтервала тачку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Ако је дужина подинтервала мала, због непрекидности функције $F(x)$, можемо рад A_i који сила $F(x)$ изврши при померању тачке из x_{i-1} у x_i апроксимирати са

$$A_i \approx F(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Због тога је

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$$

и опет на исти начин као у претходном случају (пређеног пута),

(3) $$A = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i \,,$$

где је $d = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$.

Очигледна је аналогија између два размотрена проблема из физике. Такође, као у претходном примеру и код израчунавања рада промењиве силе, апроксимација $A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$ утолико боље апроксимира рад A, уколико је број n већи, тј. уколико су мањи интервали на који је раздељен пут s.

2.3.2.3 Проблем површине уз мултимедијални приказ

Пошто смо кроз разне анимације студентима увели појам криволинијског трапеза и руководили се идејом из претходних примера из области физике, покушали смо да одредимо површину криволинијског трапеза у равни (приказану студентима анимацијом илустрованом низом слика 76, 77, итд.).

Изабрали смо у тој равни координатни систем xOy тако да страница тог трапеза, која се налази наспрам његове криволинијске странице, припада оси Ox и да се трапез налази „изнад" осе Ox (слика 76/а). Нека је $y = f(x), x \in [a,b]$, функција чији је график криволинијска страница трапеза, при чему су a и b апсцисе крајева странице трапеза која припада оси Ox.

Нека су $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ апсцисе тачака на оси Ox, такве да је

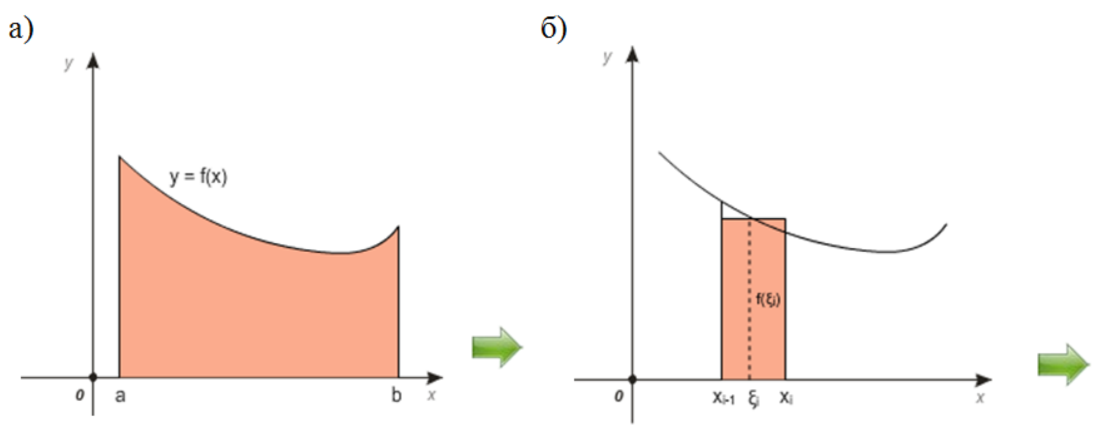
$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Тим тачкама смо поделили одсечак $[a,b]$ на n делова – на пододсечке

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n],$$

па уређену $(n+1)$-торку $(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ зовемо *подела одсечка* $[a,b]$. Једноставности писања ради, користићемо се ознаком $\prod = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$. Уочимо произвољан од тих пододсечака, рецимо $[x_{i-1}, x_i]$ и нека је ξ_i произвољна тачка тог пододсечка. Конструишимо правоугаоник чија је основа одсечак $[x_{i-1}, x_i]$, а висина $f(\xi_i)$ (слика 76/б). Површина P_i овог правоугаоника, на анимацији тј. слици, наранџасте боје, једнака је

$$P_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



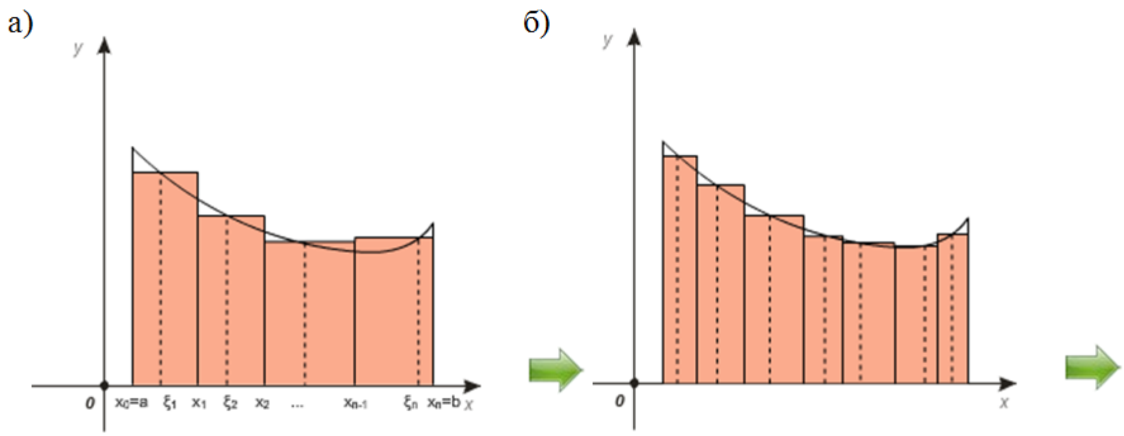
Слика 76. Део илустрације мултимедијалног приказа решења проблема израчунавања површине криволинијског трапеза, корак по корак (први део)

Ако овакву конструкцију извршимо над сваким од одсечака $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, добићемо наранџасто обојено „степенасту" фигуру S чија је површина једнака (слика 77/а)

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

За дати криволинијски трапез, дакле, за дати одсечак $[a,b]$ и дату функцију $f(x)$, облик „степенасте" фигуре S зависи од поделе $\Pi = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ одсечака и од избора тачака $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Означимо овај избор са $\xi = (\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n)$.

Ако су сви одсечци $[x_{i-1}, x_i]\,, i = 1, 2, ..., n,$ све ситнији, степенаста фигура S ће се све мање разликовати од наше фигуре F – криволинијског трапеза (што приказујемо анимацијом илустрованом сликом 77/б).



Слика 77. Део илустрације мултимедијалног приказа решења проблема израчунавања површине криволинијског трапеза, корак по корак (други део)

Означимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i - 1, 2, ...n.$ Онда скуп $\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$ представља коначан скуп позитивних реалних бројева, па он садржи свој највећи елемент. Означимо $d = d(\Pi) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}.$

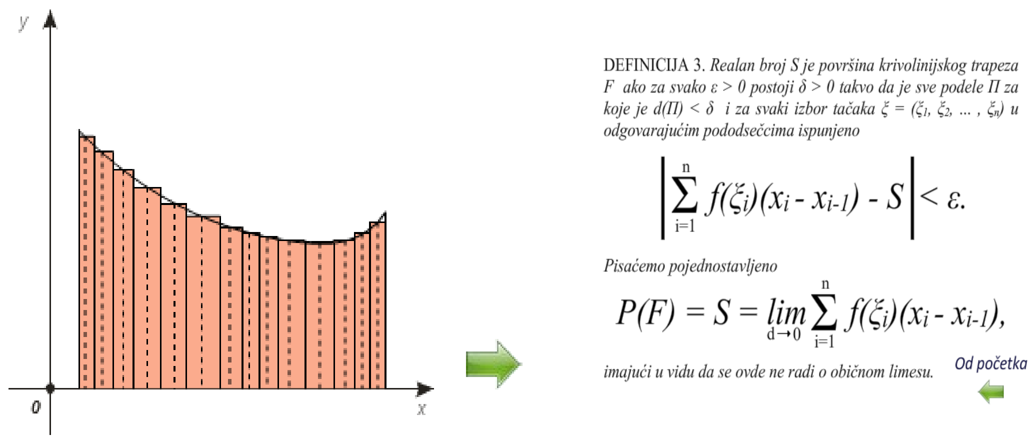
Ако се број d смањује увођењем нових подеоних тачака, подеоци се даље уситњавају и подела постаје све финија. При томе ће се, сагласно нашим интуитивним и визуелним представама кроз анимацију, степенаста фигура све мање разликовати од нашег криволинијског трапеза. На тај начин закључујемо да је оправдана следећа дефиниција површине криволинијског трапеза F, илустрована сликом 78.

Дефиниција 1. *Реалан број* S *је површина криволинијског трапеза* $F,$ *ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0,$ *такво да је за све поделе* Π *за које је* $d(\Pi) < \delta$ *и за сваки избор тачака* $\xi = (\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n)$ *у одговарајућим пододсечцима испуњено*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - S\right| < \varepsilon$$

Или, поједностављено,

(4) $$P(F) = S = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Слика 78. Део илустрације мултимедијалног приказа дефиниције израчунавања површине криволинијског трапеза

2.3.3 Дефиниција орећеног интеграла. Интеграбилност

У нашој мултимедијалној лекцији о одређеном интегралу одабрали смо примере израчунавања пређеног пута, рада промењљиве силе и површине, јер смо желели да студенти кроз нумеричку и визуелну интерпретацију ових проблема схвате очигледну аналогију формуле (4) са формулама (2) и (3). Уз помоћ анимација навели смо их да схвате, ако ,,забораве” на физички или геометријски садржај ових проблема, да се ради о истом апстрактном појму, који је у свакој од три формуле добио одређену физичку, односно геометријску интерпретацију. Имајући ово у виду дали смо дефиницију овог апстрактног појма.

У овом делу поглавља лекције о одређеном интегралу уводимо *појам интеграбилности, интегралне суме, подинтегралне функције, горње и доње* *границе интеграла,* итд. кроз мноштво визуелних приказа, анимација, илустрација, итд.

Дефиниција 2. *Нека је реална функција* f *дефинисана на одсечку* $[a,b]$. *Реалан број I је одређени интеграл функције* f *на* $[a,b]$ *ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0,$ *такво да је за сваку поделу П =* $(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n),$ $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ *за коју је* $d(\Pi) = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\} < \delta,$ *и за сваки избор* $\xi = (\xi_1, \xi_2 ..., \xi_n)$ *тачака* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$ $i = 1, 2, ..., n,$ *испуњено*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Ако за функцију f постоји њен одређени интеграл на $[a,b]$, онда кажемо да је f *интеграбилна* на $[a,b]$.

Дефиниција одређеног интеграла I функције f на одсечку $[a,b]$ записује се и на следећи начин

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Број I, ако постоји, зависи само од функције f и одсечка $[a,b]$. Означава се са

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Збир $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ који учествује у дефиницији одређеног интеграла зове се *интегрална сума* за функцију f на одсечку $[a,b]$, за поделу Π одсечка и избор ξ тачака које припадају пододсечцима. Означавамо је са

$$S(f, \Pi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Функција f је *подинтегрална функција*, одсечак $[a,b]$ је *одсечак интеграције*, број a је *доња граница*, а број b је *горња граница* тог одређеног интеграла.

2.3.4 Основна својства одређеног интеграла

У овом поглављу упознали смо студенте са неким основним својствима одређеног интеграла којима смо се даље користили. Одабрана својства приказана су и на мултимедијалан начин, тј. визуелном методом.

Теорема 4. *Ако је функција* $f(x)$ *интеграбилна на одсечку* $[a,b]$ *и* α *је реална константа, онда је функција* $\alpha f(x)$ *интеграбилна на* $[a,b]$ *и важи*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 5. *Ако су функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интеграбилне на одсечку* $[a,b]$ *онда је и функција* $f(x)+g(x)$ *интеграбилна на* $[a,b]$ *и важи*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

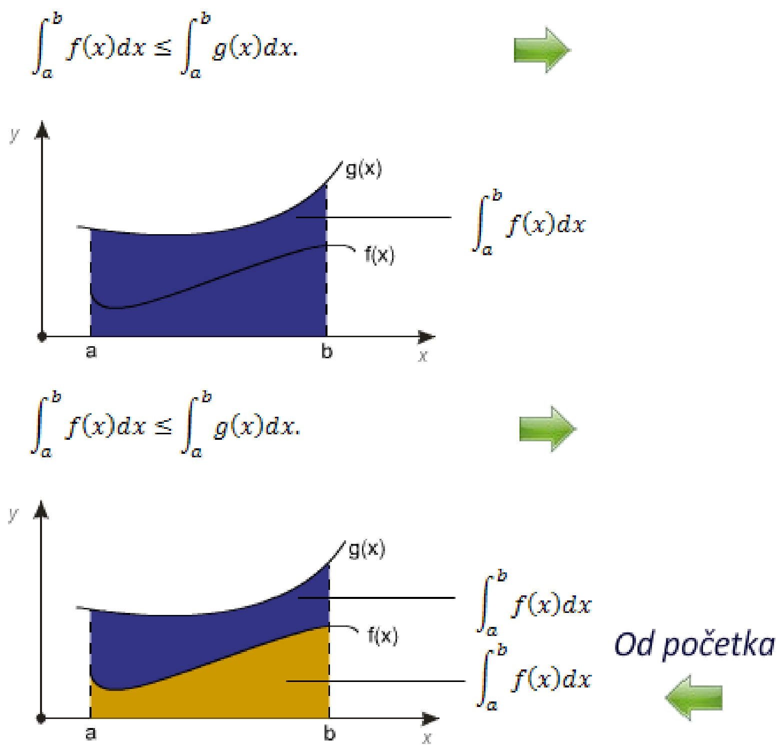
Последица *(линеарност одређеног интеграла). Ако су функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интеграбилне на одсечку*$[a,b]$ *и ако су* α *и* β *реалне константе, онда је функција* $\alpha f(x)+\beta g(x)$ *интеграбилна на* $[a,b]$ *и важи*

$$\int_a^b (\alpha f(x)\pm\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \pm \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Следеће својство одређеног интеграла изражава његову ,,монотоност”.

Теорема 6. *Нека су функције* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интеграбилне на одсечку* $[a,b]$ *и нека је, за свако* $x\in[a,b]$, *испуњено* $f(x)<g(x)$. *Онда је*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$



Слика 79. Део илустрације мултимедијалног приказа теореме 6

У првом кораку анимације, која представља теорему 6, приказане су функције $f(x)$ и $g(x)$ на одсечку $[a,b]$, тако да је $f(x) < g(x)$. Затим је у боји истакнут криволинијски трапез ограничен делом графика функције $y = f(x),\ \ x \in [a,b]$, правама $x = a$ и $x = b$ и делом x-осе, а затим и криволинијски трапез странице $y = g(x),\ \ x \in [a,b]$ чије су a и b апсцисе крајева странице трапеза која припада оси Ox. Покушали смо да уз помоћ анимације пружимо студентима могућност да уоче однос површина ова два трапеза, а самим тим и изведу визуелном методом доказ теореме 6 (слика 79).

Теорема 7. *Нека је функција* $f(x)$ *интеграбилна на одсечку* $[a,b]$ *и нека је за свако* $x \in [a,b]$ *испуњено* $m \le f(x) \le M$. *Онда је*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Теорема 8. *Ако је функција* $f(x)$ *непрекидна на одсечку* $[a,b],$ *онда постоји тачка* $c\in[a,b],$ *таква да је*

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Ово је теорема о средњој вредности за интеграле. Вредност $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ зовемо *интегрална средина* функције $f(x)$ на одсечку $[a,b].$

Теорема 9. *Ако је функција* $f(x)$ *интеграбилна на одсечку* $[a,b],$ *онда је и функција* $|f(x)|$ *интеграбилна на* $[a,b]$ *и важи*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx.$$

Дефиниција 3.

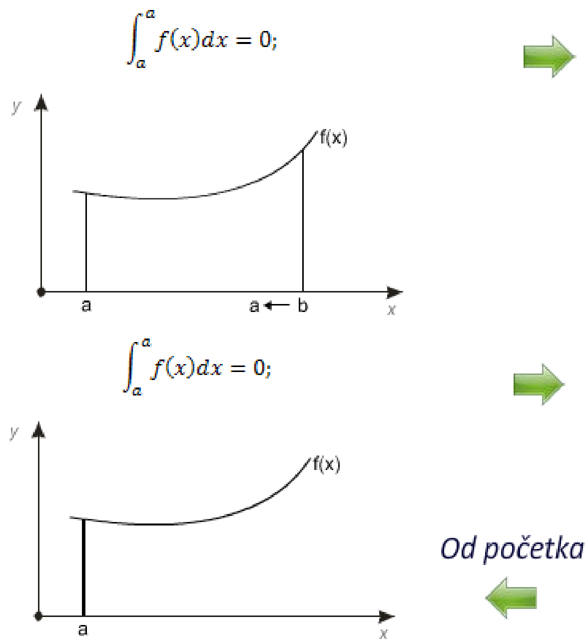
1^0 *Ако је функција* $f(x)$ *дефинисана у тачки* a*, онда је*

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

2^0 *Ако је функција* $f(x)$ *интеграбилна на одсечку* $[a,b],$ $a<b,$ *онда је*

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

Кроз анимацију најпре приказујемо функцију $f(x)$ на одсечку $[a,b],$ као и криволинијски трапез ограничен графиком ове функције, правама $x=a$ и $x=b$ и делом x-осе. Студенти даље могу видети приказ странице трапеза чија је апсциса $x=b$ како клизи дуж x-осе док се не поклопи са страницом трапеза апсцисе $x=a.$ Анимација им на визуелан начин помаже да уоче да када су доња и горња граница одређеног интеграла једнаке $(a=b),$ тј. када се поклапају, криволинијски трапез се дегенерише у дуж, па је његова површина једнака нули (слика 80).

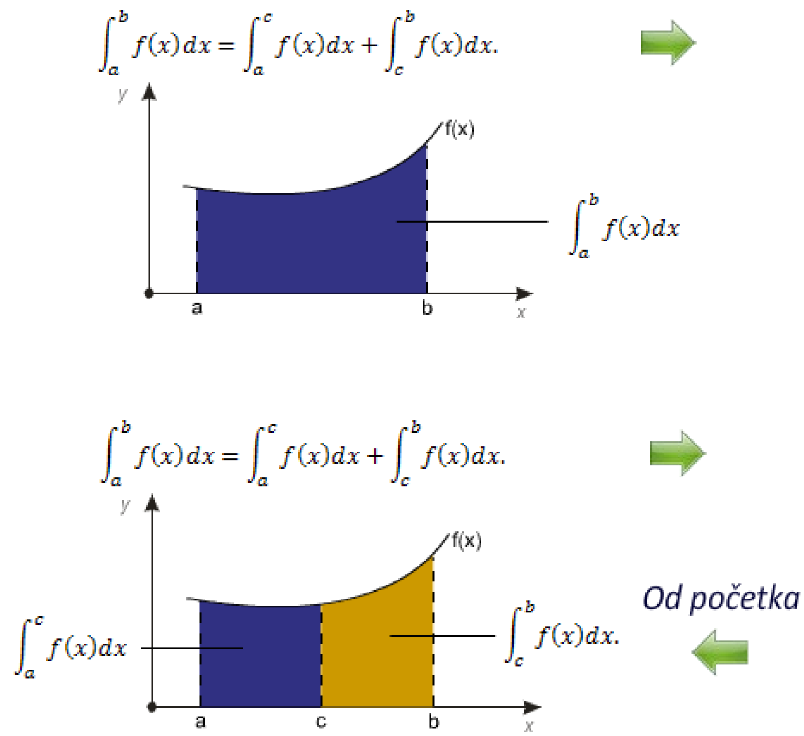


Слика 80. Део илустрације мултимедијалног приказа дефиниције 8

Теорема 10. *Нека је* $a<c<b$ *и нека је функција* $f(x)$ *интеграбилна на одсечку* $[a,c]$ *и интеграбилна на одсечку* $[c,b]$.. *Онда је* $f(x)$ *интеграбилна на одсечку* $[a,b]$ *и важи*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Анимацијом је студентима приказан најпре криволинијски трапез ограничен одсечком $[a,b]$, правама $x=a$ и $x=b$ и делом графика функције $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ чија је површина истакнута у плавој боји. У следећем кораку анимације произвољно је одабрана тачка c, која се налази између a и b. На анимацији даље студенти могу видети како се приказана површ разлаже на две ограничене правом $x=c$ и помаже им да уоче однос површина добијена два трапеза са почетним, а самим тим и изведу доказ теореме 10 (слика 81).



Слика 81. Део илустрације мултимедијалног приказа теореме 10

2.3.5 Њутн-Лајбницова формула

У уводном делу смо споменули имена математичара Њутна и Лајбница, великих математичара друге половине XVII и почетка XVIII века, који су крајем XVII века засновали диференцијални и интегрални рачун. Формула коју смо студентима извели носи имена ове двојице великих математичара, зове се често и *основна теорема математичке анализе*, што у потпуности одражава њен значај. Њутн-Лајбницову формулу су, независно један од другог, открили Њутн и Лајбниц, иако треба имати у виду да су многи математичари, почев од Архимеда, преко Кеплера[18], Кавалијерија[19], Фермаа[20], Барова[21] и других, својим резултатима дали значајне доприносе овој проблематици и овом епохалном резултату.

[18] Кеплер - немачки астроном, математичар и физичар (1571-1630)
[19] Кавалијери - италијански математичар (1598-1647)
[20] Пјер Ферма - француски математичар (1601-1665)
[21] Баров - енглески математичар, Њутнов учитељ (1630-1677)

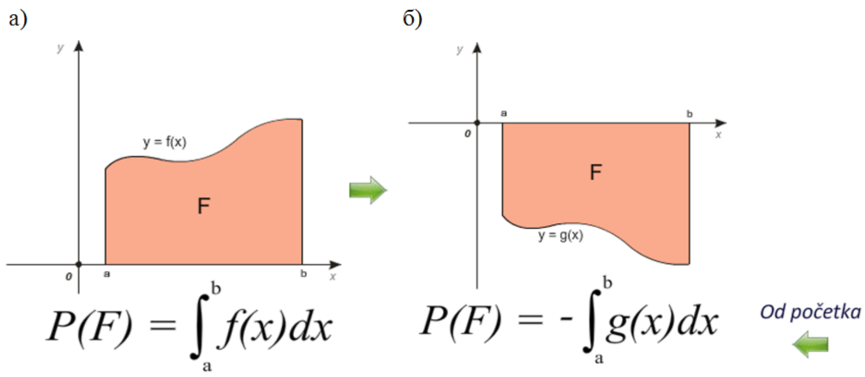
Слика 82. Део илустрације мултимедијалног приказа извођења Њутн-Лајбницове формуле

2.3.6 Примене одређеног интеграла

2.3.6.1 *Израчунавање површина неких фигура у равни уз мултимедијални приказ*

Увели смо појам криволинијског трапеза у равни и дефинисали површину такве фигуре. На основу дефиниције површине криволинијског трапеза и одређеног интеграла, закључили смо да ова фигура има површину $P(F)$ што је илустровано на слици 83/а и представља део мултимедијалне презентације приказане студентима.

Ако уведемо функцију $g(x)$ на одсечку $[a,b]$ која је непрекидна и непозитивна ($g(x) \le 0$ за све $x \in [a,b]$), онда ће, очигледно, криволинијски трапез F, одређен на сличан начин, имати површину $P(F)$ (део илустрације мултимедијалног приказа може се видети на слици 83/б).



Слика 83. Део илустрације мултимедијалног приказа дефиниције израчунавања површине криволинијског трапеза

Примери израчунавања површине.

Пример 32.

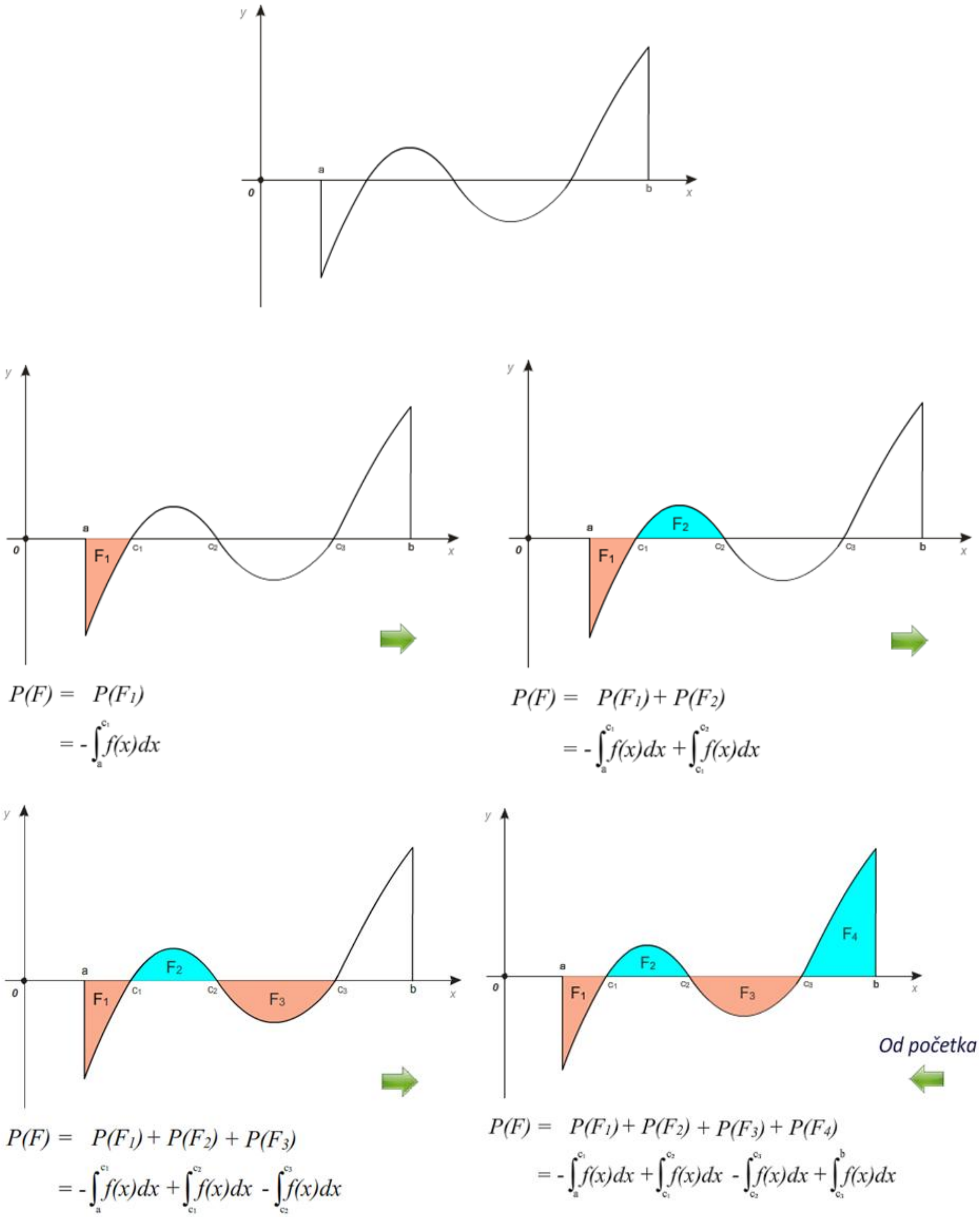
а) Применом анимација од студената се најпре захтевало да посматрају функцију $f(x)$ на одсечку $[a,b]$, која је на њему непрекидна и мења знак у тачкама c_1, c_2, и c_3. Онда фигура F, ограничена одсечком $[a,b]$, правама $x = a$ и $x = b$ и делом графика функције $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, има површину $P(F)$, коју рачунамо као збир површина криволинијских трапеза (у ствари дегенерисаних криволинијских трапеза) на које ту фигуру можемо разложити и који се уклапају у један од већ описаних случајева. Студенти су покушали (без унапред приказаног решења) да одговоре како се израчунава површина добијене фигуре. Мултимедијална лекција је ,,на клик стрелице”, корак по корак, водила до решења, слика 84.

б) Нека је, опет, у равни дат координатни систем xOy и нека су на одсечку $[a,b]$ осе Ox дате функције $f(x)$ и $g(x)$ које су непрекидне на $[a,b]$ и за свако $x \in [a,b]$ је $g(x) \le f(x)$. Нека је фигура F у тој равни дата са

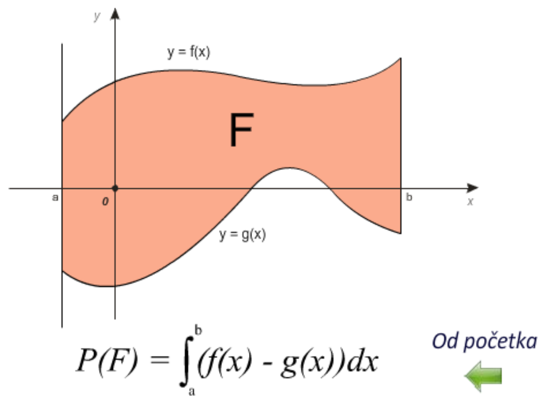
$$F = \{(x,y) | a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}.$$

Од студената се захтевало да на основу претходног примера и анимације илустроване сликом 85 изведу формулу за површину фигуре F.

Напомена: специјално, ако је $f(x) = 0$, $x \in [a,b]$,**,** односно, $g(x) = 0$, $x \in [a,b]$ добијамо неку од претходно наведених формула.



Слика 84. Део илустрације мултимедијалног приказа израчунавања површине фигуре (пример 32/а)



Слика 85. Део илустрације мултимедијалног приказа израчунавања површине фигуре (пример 32/б)

Пример 33. Израчунати површину фигуре у равни xOy ограничене луковима кривих $x-y=0,\ x-y^3=0.$

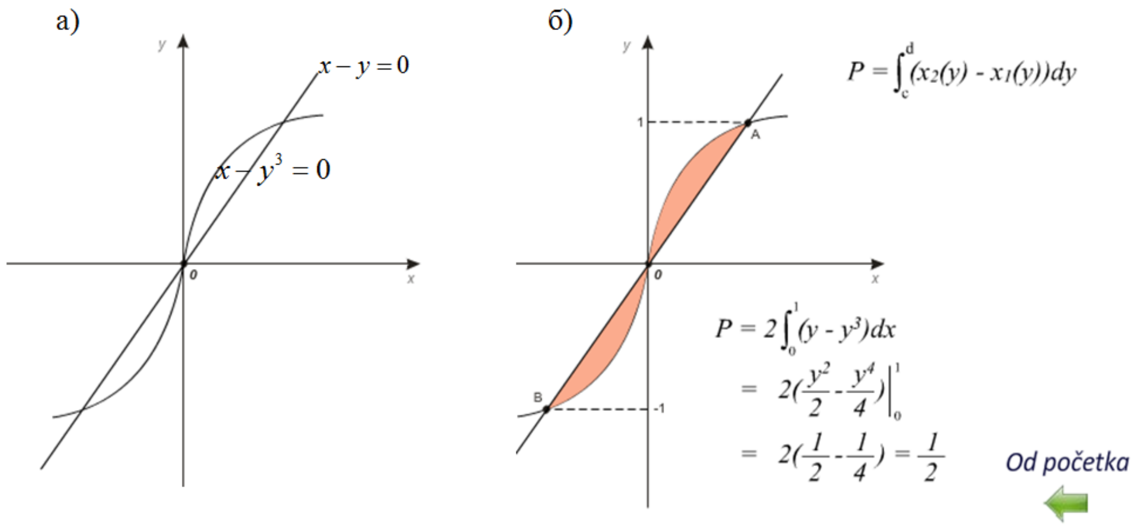
Решење.

Анимацијом је најпре приказана скица задате две криве, а затим њихове пресечне тачке $A(1,1),\ \ O(0,0),\ \ B(-1,-1)$ (нумерички и кроз слику 86/а), које израчунавамо као решења система једначина $x-y=0,\ x-y^3=0.$

Овај део анимације студентима је јако важан, како због дефинисања подинтегралне функције (преко изгледа фигуре), тако и због граница одређеног интеграла (преко пресечних тачака). Можемо уочити да се фигура чију површину тражимо састоји од две подударне фигуре, па је тражена површина једнака

$$P=2\int_0^1 (y-y^3)dx=2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Анимацијом затим приказујемо решење проблема корак по корак. Крајњи резултат анимације је илустрован (слика 86/б).



Слика 86. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 33

Пример 34. Израчунати површину фигуре F у равни ограничене осом y, делом графика функције $y=x^2$ и тангентом тог графика у тачки $(1,1)$.

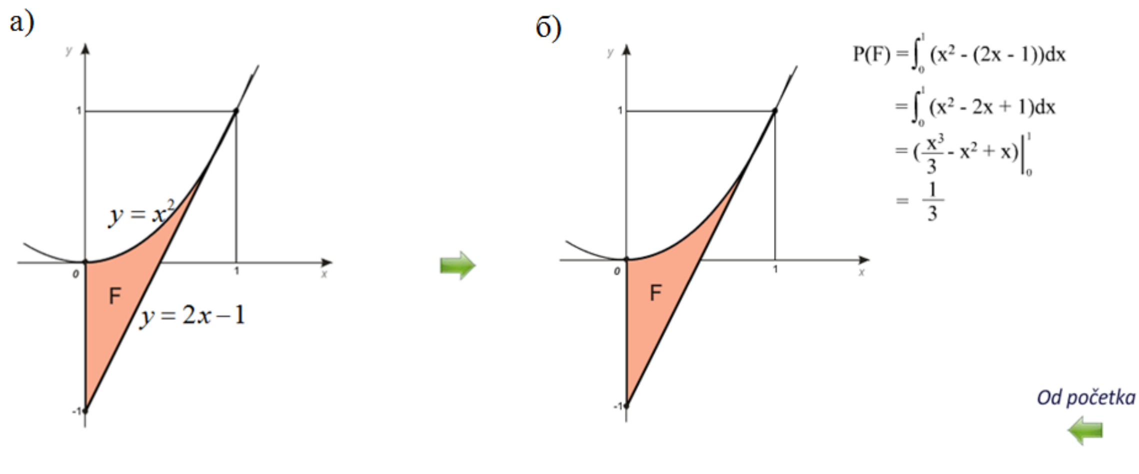
Решење.

Једначина тангенте параболе $y=x^2$ у произвољној тачки (x_0, y_0) гласи

$$y-y_0=2x_0(x-x_0).$$

За $x_0=1, y_0=1,$ налазимо једначину $y-1=2x-2,$ тј. $y=2x-1.$

Анимацијом је у првом кораку представљена скица задате параболе, затим њене тангенте у траженој тачки $(1,1),$ па шрафура тражене фигуре (слика 87/а). У следећем кораку су визуелно истакнути следећи елементи потребни за израчунавање површине тражене фигуре, тј. за израчунавање одређеног интеграла: подинтегрална функција и границе интеграла. Затим се, корак по корак, приказује његово израчунавање (слика 87/б).



Слика 87. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 34

Пример 35. Израчунати површину фигуре у равни ограничене елипсом са полуосама a и b. Нека је у равни елипсе дат координатни систем xOy тако да једначина елипсе буде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решење.

Одговарајућа крива „горње” половине елипсе има једначину (слика 88/а)

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

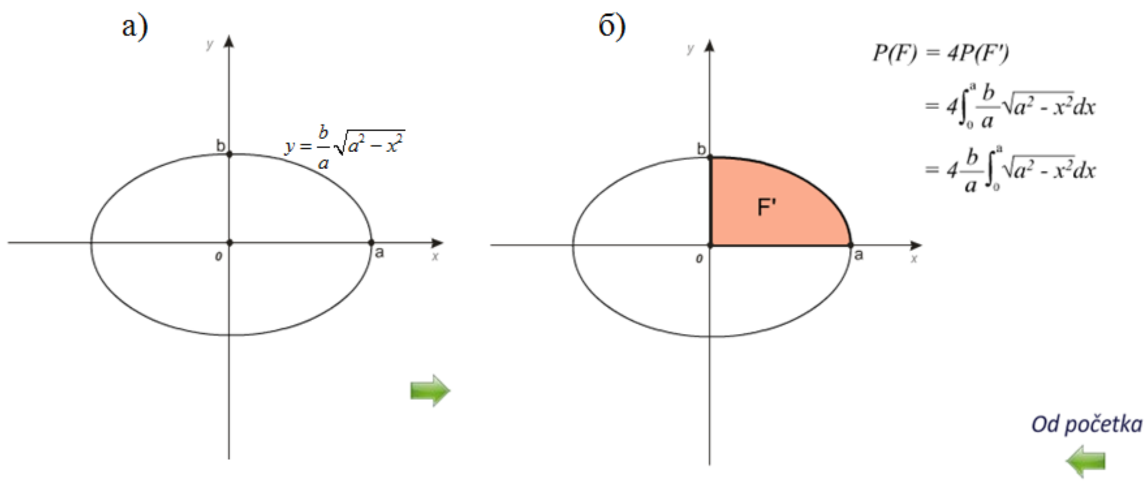
Због симетрије фигуре можемо израчунати површину једне њене четвртине, што се јасно види на илустрацији наше анимације (слика 88/б).

Користећи се сменом $x=a\sin t, dx=a\cos tdt$ (за $x=0$ је $t=0,$ а за $x=a$ је $t=\frac{\pi}{2}$),

налазимо

$$P(F)=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=4ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=ab\pi.$$



Слика 88. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 35

Напомена: ако је специјално $a=b=r$, одавде добијамо познату формулу за површину круга K_r (круг полупречника r), $P(K_r)=r^2\pi$.

2.3.6.2 Израчунавање запремина неких тела у простору уз мултимедијални приказ

Нека је у простору дата оса Ox и ограничена фигура Φ, као на слици 89 (илустрација странице мултимедијалних лекција приказаних студентима), која има својства:

(1) равни π_X нормалне на осу Ox секу је по равним фигурама које имају површину и при томе је и тело Φ смештено између равни π_a и π_b, $a<b$;

(2) површина пресека F_X тела Φ са равни π_X једнака је $S(x)$, где је $S(x)$ позната непрекидна функција координате x.

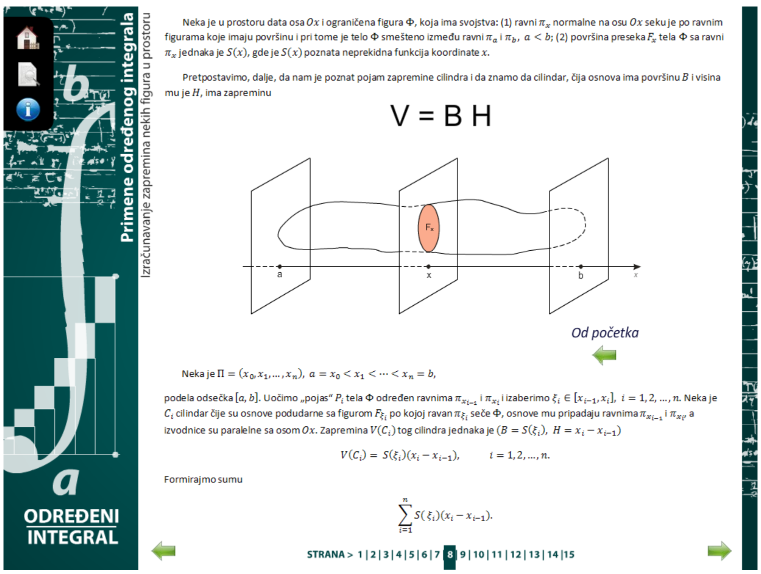
Претпоставимо, даље, да нам је познат појам запремине цилиндра и да знамо да цилиндар, чија основа има површину B и висина му је H, има запремину

$$V=B\cdot H.$$

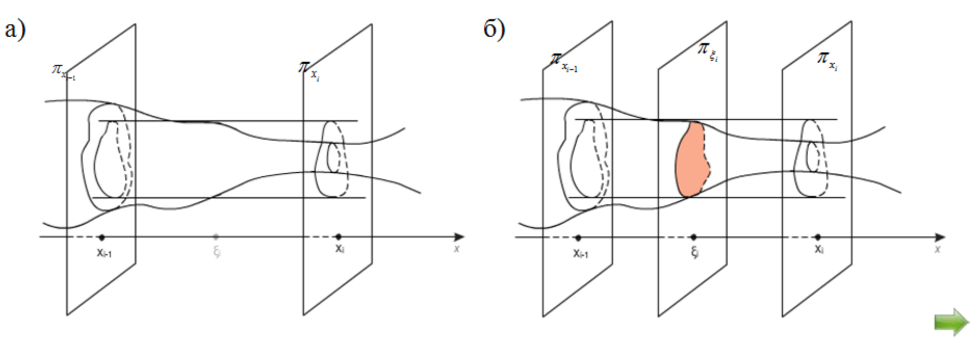
Нека је $\prod=(x_0,x_1,...,x_n)$, $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, подела одсечка $[a,b]$. Уочимо „појас” P_i тела Φ одређен равнима $\pi_{x_{i-1}}$ и π_{x_i} и изаберимо $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,

$i=1,2,...,n$ (део анимације је илустрован сликом 90/а). Нека је C_i цилиндар чије су основе подударне са фигуром F_{ξ_i}, по којој раван π_{ξ_i} сече Φ, основе му припадају равнима $\pi_{x_{i-1}}$ и π_{x_i}, а изводнице су паралелне са осом Ox (анимацијом је приказан пресек, илустрован сликом 90/б). Запремина $V(C_i)$ тог цилиндра једнака је ($B=S(\xi_i), H=x_i-x_{i-1}$)

$$V(C_i)=S(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\ i=1,2,...,n.$$



Слика 89. Део илустрације мултимедијалног приказа проблема израчунавања запремине преко одређеног интеграла



Слика 90. Мултимедијална илустрација решења проблема израчунавања запремине ротационог тела, корак по корак (први део)

Формирајмо суму

$$\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Сагласно нашим интуитивним представама о запремини, уводимо ознаку за запремину тела Φ, $V(\Phi)$. Она је дефинисана и једнака $V(\Phi)$ ако за свако $\xi > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да за све поделе Π за које је $d(\prod) < \delta$ и за сваки избор ξ тачака $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ важи

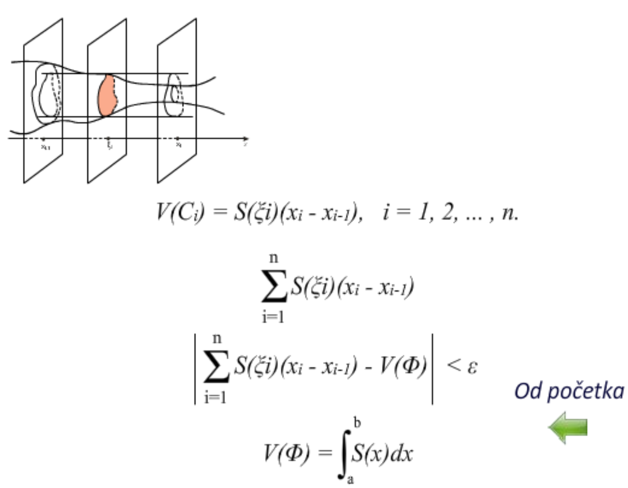
$$\left| \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - V(\Phi) \right| < \varepsilon.$$

Посматрана сума је интегрална сума за функцију $S(x)$ на одсечку $[a,b]$ при подели Π и избору ξ тачака. Због претпоставке да је $S(x)$ непрекидна функција на $[a,b]$, такав број $V(\Phi)$ постоји и важи

$$V(\Phi) = \int_a^b S(x)dx.$$

Из ове формуле следи, очигледно нама познати ***Кавалијеријев принцип.***

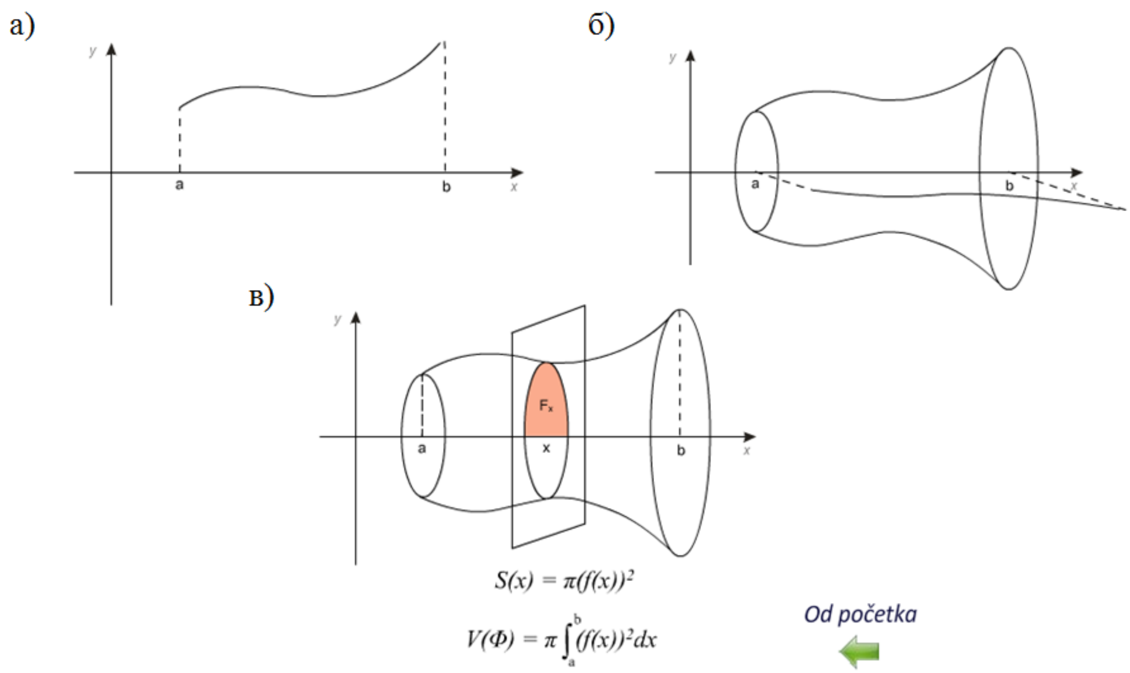
Ако се два тела могу поставити у такав положај да су пресеци оба тела са ма којом равни, паралелној једној датој равни, фигуре једнаких површина, онда су запремине тих тела међусобно једнаке.



Слика 91. Мултимедијална илустрација решења проблема израчунавања запремине ротационог тела, корак по корак (други део)

Нека је сада у равни xOy дат криволинијски трапез F, одређен графиком функције $f(x), f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ (слика 92/а, почетни део анимације) и нека тело Φ настаје обртањем трапеза F око осе Ox. Добијамо ротационо тело за које је површина $S(x)$ пресека са равни π_X у ствари површина круга полупречника $f(x)$, (што је приказано сликама 92/б и 92/в, кроз илустрацију анимације, која кроз покрет јасно приказује обртање трапеза око осе, добијање ротационог тела, као и пресек са равни). Дакле, $S(x) = \pi(f(x))^2$, па је

$$V(\Phi) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$



Слика 92. Мултимедијална илустрација решења проблема израчунавања запремине ротационог тела, корак по корак (трећи део)

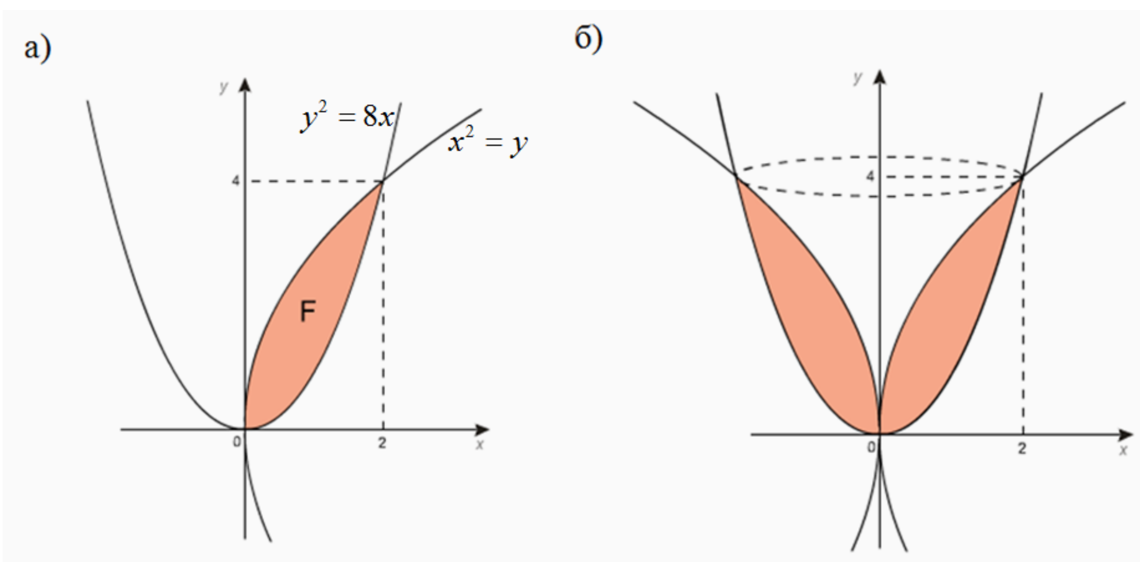
Примери израчунавања запремине.

Пример 36. Израчунати запремину тела које настаје обртањем око осе Oy фигуре F у равни xOy ограничене параболама $y^2 = 8x$ и $x^2 = y$.

Решење.

Анимацијом приказујемо решење задатка корак по корак (нумерички и кроз слику). Најпре је приказана скица посматране две параболе, затим њихове пресечне тачке, које су нам важне због дефинисања граница одређеног интеграла (слика 93/а). Пресечне тачке налазимо као реална решења система једначина $y^2 = 8x$ и $x^2 = y$, чија су решења $y_1 = 0, x_1 = 0$ и $y_2 = 4, x_2 = 2.$ Фигура која настаје у пресеку задатих парабола се обрће око осе Oy, што значи да променљиве x и y мењају улоге у одређеном интегралу. Уочавамо да тело добијамо ако из тела које настаје ротацијом сегмента параболе $y = x^2$ одстранимо тело које настаје ротацијом фигуре ограничене осом Oy, праве $y = 4$ и делом лука параболе $y^2 = 8x$, што је кроз анимацију приказано на врло илустративан начин (слика 93/б). Анимација приказује тело добијено ротацијом тражене фигуре, као и нумеричко израчување одређеног интеграла, који представља запремину траженог тела

$$V = V_1 - V_2 == \pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy - \pi\int_0^4 \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 dy == \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64}\right) dy = \frac{24\pi}{5}.$$



Слика 93. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 36

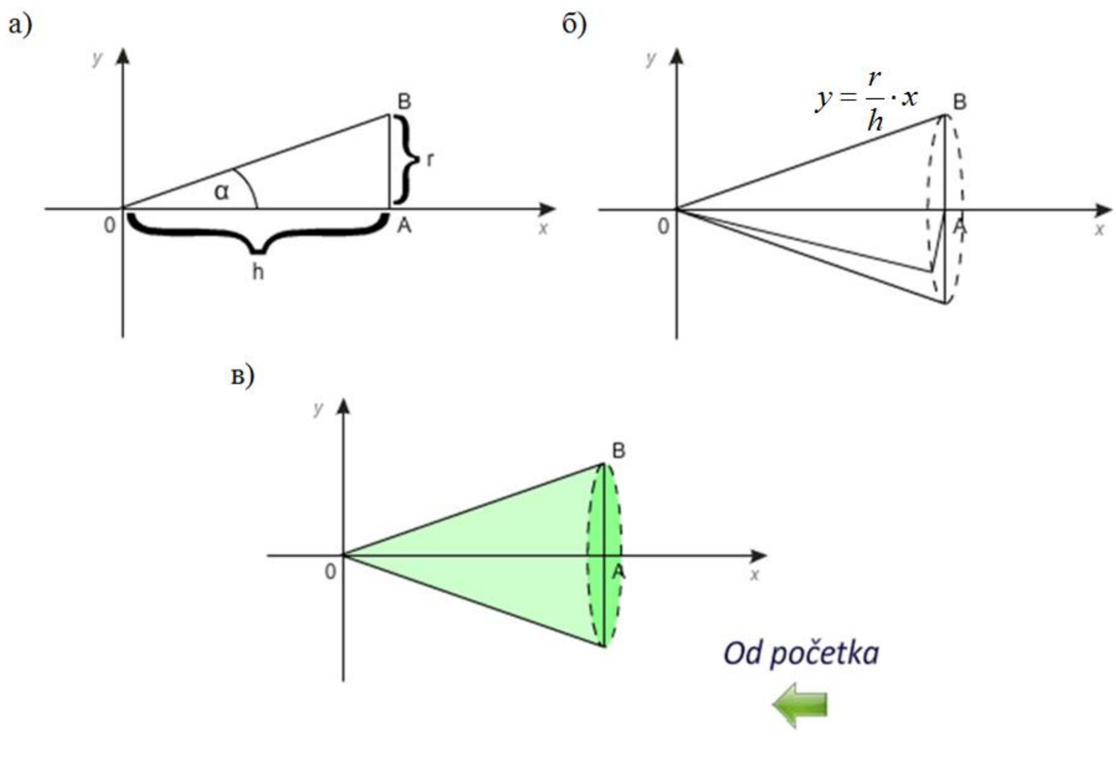
Пример 37. Одредимо запремину усправне кружне купе којој је радијус основе r, а висина h.

Решење.

На основу онога што су научили, навели смо студенте да сами закључе да се купа добија ротацијом око x осе правоуглог троугла OAB. Затим је анимацијом најпре приказана скица овог троугла и на слици су истакнути његови битни елементи за даље решавање задатка (израчунавање граница и одређивање подинтегралне функције): основица, висина и угао (слика 94/а). Одређена је једначина изводнице конуса $y = x \cdot tg\alpha = \frac{r}{h} \cdot x,$ што је подинтегрална функција. Анимацијом је приказана ротација трогла OAB око осе x, чиме се добија тражена купа (слика 94/б). Дакле,

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x \right)^2 dx = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^h = \frac{\pi \cdot h \cdot r^2}{3},$$

што је анимацијом приказано, део по део.

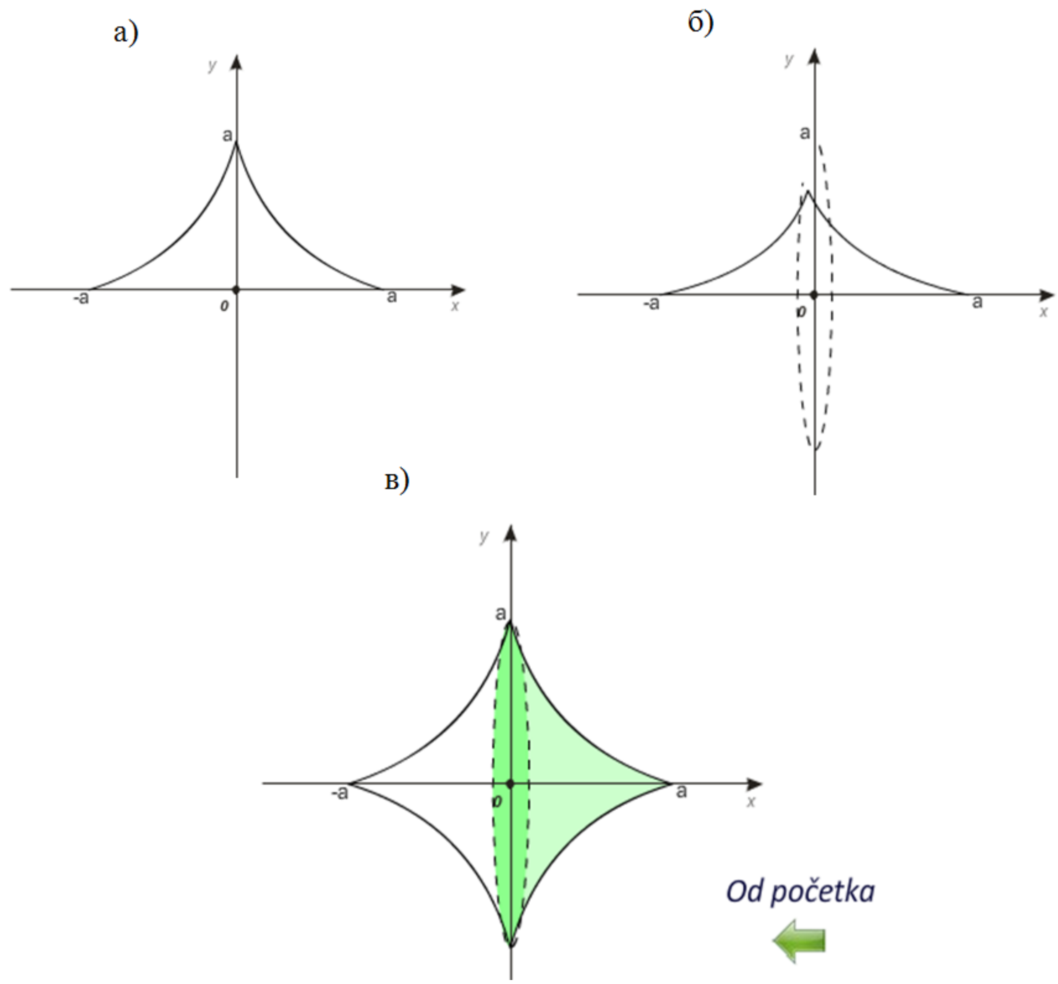


Слика 94. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 37

Пример 38. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око осе Ox равне фигуре ограничене следећим кривама

$$x = a\cos^3 t\,,\ \ y = a\sin^3 t.$$

Решење.



Слика 95. Део илустрације мултимедијалног приказа решења из примера 38

Из почетног дела анимације у којој је приказана задата фигура, студенти су закључили да се она састоји из две међусобно подударне фигуре, које се налазе у првом и другом квадранту (слика 95/а). Следећи део анимације илуструје ротацију ове фигуре (слика 95/б), па се аналогно доноси закључак да се запремина тела, V , коју тражимо састоји из два тела једнаких запремина V_1. Запремина тела које настаје ротацијом површи у првом квадранту, што је приказано мултимедијалном анимацијом (слика 95/в) је

$$V_1 = \pi\int_0^a y^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t \cdot (3a)\cos^2 t \sin t dt = 3a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \cdot \cos^2 t \cdot \sin t dt$$

$$= 3a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)^3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t dt.$$

После увођења смене $\cos t = z,$ одакле је $-\sin t dt = dz$ (за $t=0$ је $z=1$, а за $t=\frac{\pi}{2}$ је $z=0$), добија се да је

$$V_1 = 3a^3\pi\int_0^1 (1-z^2)^3 z^2 dz = \frac{16a^3\pi}{105}.$$

Запремина целог тела је, дакле,

$$V = 2V_1 = \frac{32}{105}a^3\pi.$$

3. МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

3.1 Предмет и питања истраживања

Под утицајем претходно наведених истраживања и резултата, нека од **питања нашег истраживања** су била следећа.

1. Да ли постоји разлика у резултатима тестова одабраних области (изометријских трансформација, правилних полиедара и одређеног интеграла) прве групе студената код које је настава извођена традиционалним наставним методама (контролна – *традиционална група*) и друге која је учила уз помоћ мултимедијалних лекција (експериментална – – *мултимедијална група*) на посматрана три факултета?

2. Ако постоји разлика, код којих задатака је она израженија?
3. Какво је мишљење студената, који су слушали мултимедијална предавања о учењу уз мултимедије? Да ли им се више допао овакав начин излагања или класичан? Из којих разлога?

3.2 Учесници истраживања

У истраживању је учествовало укупно сто педесет (150) студената, по педесет (50) на три факултета, подељених у две групе од по двадесет пет (25), на сваком од факултета, за свако од спроведених истраживања. У истраживању су учествовали студенти прве године Архитектонског факултета, Факултета за градитељски менаџмент (ФГМ) и Факултета за предузетнички бизнис, Универзитета Унион „Никола Тесла”, у Београду.

Студенти Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент били су укључени у истраживање везано за градиво из геометрије, јер су одабране области (изометријске трансформације и правилни полиедри) њима јако блиске и интересантне, а њихово познавање је кључно за многе предмете које имају на факултету (на пример, нацртну геометрију), а и неопходно у будућој пракси. Они су, такође, учествовали у истраживању које се односи на градиво одређеног интеграла (одређени интеграл – израчунавање површине и запремине), које је саставни део плана и програма предмета Математика (Архитектонски факултет) и Математика II (Факултет за градитељски менаџмент).

Студенти Факултета за предузетнички бизнис учествовали су само у истраживању о лекцијама о одређеном интегралу (градиво о одређеном интегралу, као и његовој примени за одређивање површине фигура у равни), пре свега због фонда часова на предмету Пословна математика.

Студенти на свим факултетима, за свако од спроведених истраживања, били су подељени у две групе, које су назване по методи учења која се у тој групи примењивала: I група, контролна – традиционална група (у којој су студенти учили на традиционалан начин) и II група, експериментална – мултимедијална група (у којој су студенти учили применом мултимедијалних метода). Изабрани су методом случајног избора, са приближно истим предзнањем из области изометријских трансформација и правилних полиедара, као и одређеног интеграла, што је утврђено пред-тестовима. *Пред-тест 1* који су студенти полагали се састоји од питања и задатака из области геометрије који су највећим делом изабрани из „Збирке решених задатака за припрему пријемног испита” (видети [63]). Овај пред-тест су полагали студенти Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџменти. *Пред-тест 2*, који се односио на одређени интеграл, су полагали студенти сва три факултета (за овај тест су коришћени задаци већином из [58]).

Изометријске трансформације и Полиедри – Пред-тест 1

1. Колико оса симетрије имају следеће фигуре:
   - круг;
   - паралелограм;
   - једнакокраки троугао;
   - једнакокраки трапез;
   - делтоид?
2. Доказати да фигура коју образују круг k и његова сечица p, која не садржи центар круга, има тачно једну осу симетрије.
3. Одредити неку равну фигуру која има више центара симетрије.
4. Дату дуж AB ротирати око дате тачке за $90°$.
5. Дата су два подударна круга $k_1(O_1, r)$ и $k_2(O_2, r)$. Одредити вектор транслације који круг k_1 пресликава у k_2.
6. Правилна четворострана призма има омотач површине 8m² и дијагоналу дужине 3m. Израчунати њену запремину.
7. Површина праве тростране призме једнака је 1440cm², а њена висина је 16 cm. Израчунати дужине основних ивица призме, ако се оне односе као 17:10:9.
8. Дате су основна ивица $a = 10\,\text{cm}$ и висина $H = 12\,\text{cm}$ правилне четворостране пирамиде. Одредити њену површину и запремину.

9. Дужине ивица, $a, b, c,$ правоуглог паралелепипеда, које полазе из једног темена, односе се као $m:n:p,$ а дужина дијагонале основе (a,b) је $d.$ Израчунати површину и запремину паралелепипеда.
10. Основа пирамиде је правоугаоник чија је површина S и угао између дијагонала $60°.$ Одредити запремину пирамиде ако су бочне ивице нагнуте према равни основе под углом од $45°.$

Студенти су на основу полагања *Пред-теста 1* оцењени бодовима од 0 до 100 (сваки задатак, од њих десет, је бодован са максимално 10 поена). На основу овог оцењивања подељени су у две групе (традиционалну и мултимедијалну), чији се просечан број бодова занемарљиво разликује (80.21 - I група и 78.92 - II група, на Архитектонском факултету и 72.35 - I група и 71.25 - II група, на Факултету за градитељски менаџмент). На овај начин расподељени у групе учествовали су у два истраживања везана за области геометрије (изометријске трансформације и правилни полиедри), тј. слушали су класична и мултимедијална предавања, а затим полагали *Тестове 1* и *2*.

Пред-тест 2 је садржао задатке из већ обрађене области на редовној настави о решавању неодређеног интеграла, као и задатке из области аналитичке геометрије у равни, чије је познавање неопходно за израчунавање површине фигура и запремине тела применом одређеног интеграла.

Одређени интеграл: Пред-Тест 2

1. Одредити интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$
2. Одредити интеграл $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$
3. Одредити интеграл $\int \ln(x^2+1) dx.$

4. Скицирати фигуру F у равни ограничену осом Oy, делом графика функције $y = x^2$ и тангентом тог графика у тачки $(1,1)$.
5. Скицирати тело које настаје ротацијом фигуре F око осе Ox у равни xOy ограничене кривама $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

На основу оцена на *Пред-тесту 2* у коме је сваки задатак, од њих пет, бодован са максимално 20 поена (тј. укупно максимално 100), студенте смо поделили у две групе (традиционалну и мултимедијалну) на сваком од факултета, тако да је њихово предзнање које је потребно за касније истраживање (учење одређеног интеграла, полагање *Тестова 3* и *4*) било приближно подједнако. Просечан број бодова студената на *Пред-тесту 2* износио је на Архитектонском факултету 65.21 у I групи и 64.17 у II групи, на Факултету за градитељски менаџмент 61.58 у I групи и 62.63 у II групи и на Факултету за предузетнички бизнис 60.33 у I групи и 59.29 у II групи.

Студенти мултимедијалне групе на сва три факултета су одговорили на питања анкете која су се односила на учење уз мултимедије.

3.3 Метод, технике и инструменти истраживања

Предавања из области које смо одабрали за наша истраживања су одржана са идентичним садржајем градива (који је детаљно описан у претходном поглављу), тј. аксиоме, теореме, примери и задаци су били потпуно идентични код групе код које су предавања извођена на традиционални начин и код групе код које су предавања извођена коришћењем мултимедија.

На пример, код области изометријских трансформација и правилних полиедара, које садрже приближно исте целине, у поглављу „***Појам***” код традиционалне групе студената дефиниције су представљене на класичан начин, уз текст и слику на табли и нарацију предавача. Код мултимедијалне групе смо текст и анимације приказали из мултимедијалног материјала, док је улога професора остала непромењена. У поглављу „***Примери***” питали смо студенте да нам наведу примере изометријских трансформација, правилних полиедара, итд. Наведене примере смо поткрепили цртежима на табли (код традиционалне групе) и анимацијама мултимедијалних лекција (код мултимедијалне групе). Као „***Неке од особина изометријеских трансформација***” дате су важније теореме и неки од доказа. Наведене теореме смо приказали текстом и цртежима на табли (код традиционалне групе) и текстом и анимацијама (код мултимедијалне групе). Кроз поглавље „***Вежбање***”, студенти традиционалне групе су одговарали на усмено постављана питања, а код мултимедијалне кроз интерактивне квизове знања. У оквиру сваке теме „***Задаци***”, задаци су изложени по тежини – од лакших ка тежим, у обе групе идентично. У већини случајева трудили смо се да најпре саслушамо идеје студената за решавање задатка, пре него што оно буде приказано на табли или екрану рачунара. На анимацијама се не приказује одмах читаво решење задатка, већ корак по корак. Кроз поглавље „***Примери из реалног живота***” навели смо студенте да се сете неких конкретних примера изометријских трансформација и полиедара из свакодневног живота (у архитектури, уметности, природи, психологији, религији, итд.). Студенти мултимедијалне групе имали су и визуелни приказ ових примера кроз разне анимације.

Што се тиче области одређеног интеграла, уводно поглавље ***о проблему Архимедове квадратуре параболе*** и ***израчунавање површине фигура Архимедовом методом*** је приказано код традиционалне групе уз цртање на табли, а студентима мултимедијалне групе кроз анимацију. Такође, градиво наведено у претходном поглављу смо представили на сличан начин: код прве групе студената на класичан начин, уз таблу и креду, а код мултимедијалне смо придружили и анимације.

Битно је нагласити да је приликом предавања предавач за обе групе, традиционалну и мултимедијалну, био исти, као и број изведених часова. За студенте Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент из области градива о изометријским трансформацијама, одржано је по осам часова за обе групе (по два, за осну симетрију, централну симетрију, ротацију и транслацију), по три за правилне полиедре и по шест за одређени интеграл (по три за израчунавање површине фигуре и три за одређивање запремине тела преко одређеног интеграла). Студенти обе групе Факултета за предузетнички бизнис имали су по три часа о одређеном интегралу.

Одабрано градиво код мултимедијалних група приказано је уз помоћ софтверског пакета направљеног у *Flash*-у (Macromedia Flash, верзија 10.0). *Macromedia Flash* се показао јако успешним и илустративним у изради мултимедијалних апликација примењених у настави математике (видети [8]). Наш едукативни мултимедијални материјал је израђен у складу са методичким приступом настави тј. когнитивном теоријом мултимедијалног учења (видети [53], [55]), као и принципима мултимедијалног учења и дизајна, заснованих на истраживањима у настави математике (видети [4], [56]), специјално у области геометрије (видети [47]). Материјал, као што је већ детаљно објашњено у претходном поглављу, садржи велики број динамичких и графичких приказа дефиниција, теорема, особина, примера, тестова, изведених и приказаних ,,корак по корак”, са стављањем акцента на ,,моћ визуелизације”. Предност израђивања ,,сопствених мултимедијалних лекција” је одабир њиховог садржаја, као и мутимедијална подршка управо оних делова критичних за разумевање, које наглашавамо као ,,слабу карику” (проблеме у тродимензионом простору, задатке у којима је битно видети покрет, дефиниције одређеног интеграла, повшине и запремине, итд.).

Након одржаних предавања студенти су полагали идентичан тест знања из области изометријских трансформација (*Тест 1*), правилних полиедара (*Тест 2*), одређеног интеграла – израчунавање површине и запремине (*Тест 3*) и одређеног интеграла – израчунавање запремине (*Тест 4*), без коришћења рачунара.

Изометријске трансформације – Тест 1

1. Које су од следећих фигура осно и централно симетричне:
    - полуправа;
    - круг;
    - права;
    - паралелограм;

- једнакокраки троугао;
- једнакокраки трапез;
- делтоид?

2. Транслација која дату праву a пресликава у дату праву b, постоји, ако су праве:

   а) нормалне; б) паралелене; в) секу се.

   Колико оса симетрије има круг?

   а) 2; б) 4; в) бесконачно.

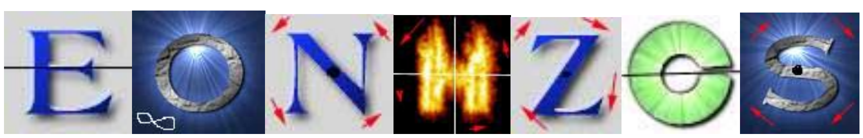
   Непокретни при централо симетричном пресликавању су:

   а) центар симетрије; б) тачке – резултати пресликавања; в) тачке које пресликавамо.

   Ротација је у потпуности одређена:

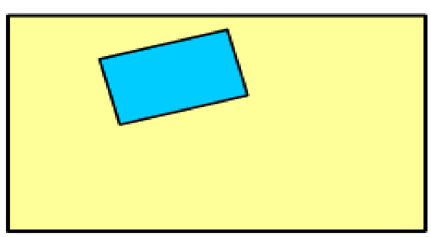
   а) центром ротације; б) углом ротације; в) центром и углом ротације.

3. Колико оса симетрије имају слова абецеде дата на слици 96?



Слика 96.

4. Из већег правоугаоника на слици 97 исечен је мањи правоугаоник. Конструисати праву p која ће остатак осенченог правоугаоника поделити на два дела једнаких повшина.



Слика 97.

5. У једној равни дата је права p и тачке A и B са исте стране праве p. Конструисати тачку P праве p у коју треба да падне светлосни зрак из A, који после одбијања од праве p пролази кроз B. (***Напомена***: користити чињеницу да је угао под којим зрак пада једнак углу под којим се одбија).

Правилни полиедри – Тест 2

1. За свако Платоново тело навести колико има:
   - ивица;
   - страница;
   - углова између страна;
   - темена?
2. Доказати да постоји тачно пет правилних полиедара.
3. Колико има једнакостраничних многоуглова који се сустичу у сваком темену: а) коцке; б) тетраедра; в) додекаедра; г) октаедра; д) икосоедра?
4. Пресећи коцку са равни тако да у пресеку буде:
   а) разнострани троугао;
   б) једнакостраничан троугао;
   в) једнакокраки троугао.
5. Одредити запремину правилног тетраедра чије ивице имају дужину a.

Одређени интеграл – израчунавање површине и запремине – Тест 3.

1. Користећи се Архимедовом методом одредити површину фигуре у равни ограничене осом Ox, правом $x = a$ и делом лука криве $y = x^3$ за $0 \le x \le a$.
2. Дефинисати одређени интеграл.
3. Израчунати одређени интеграл $\int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$.
4. Одредити површину фигуре F у равни ограничене осом Oy, делом графика функције $y = x^2$ и тангентом тог графика у тачки $(1,1)$.

5. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре F око осе y равни xOy ограничене параболама $y^2 = 8x$ и $x^2 = y.$

Одређени интеграл – израчунавање површине – Тест 4.

1. Користећи се Архимедовом методом одредити површину фигуре у равни ограничене осом Ox, правом $x = a$ и делом лука криве $y = x^3$ за $0 \le x \le a.$
2. Дефинисати одређени интеграл.
3. Израчунати одређени интеграл $\int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx.$
4. Одредити површину фигуре F у равни ограничене осом Oy, делом графика функције $y = x^2$ и тангентом тог графика у тачки $(1,1).$

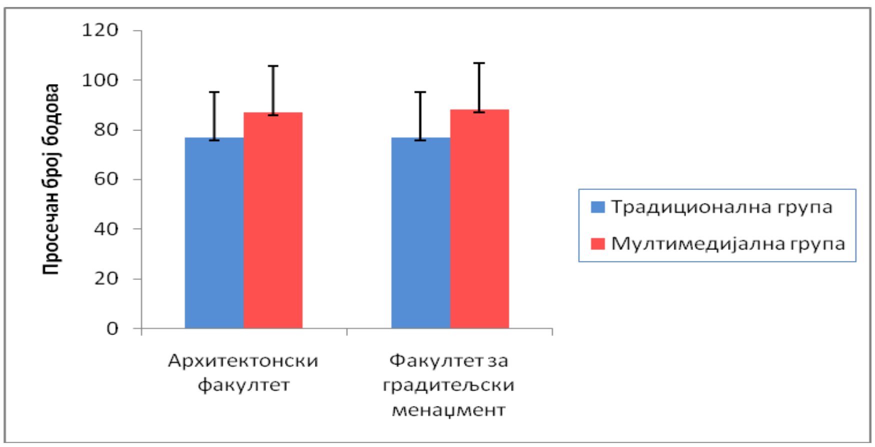
Тестови студената су вредновани бодовима од 0 до 100 (сваки задатак се вредновао са 20 бодова код *Теста 1*, *Теста 2* и *Теста 3* и са 25 бодова код *Теста 4*), по тесту, а затим је мерена просечна оцена мултимедијалне и традиционалне групе.

Резултати тестова су обрађени статистичком методом ***Студентов t-тест за независне узорке*** и ***Mann-Whitney-ев непараметарски тест за два независна узорка*** у програмском пакету *SPSS за Windows* (верзија 16.0). Резултат је сматран статистички значајним уколико је вероватноћа $p < 0,05.$

3.4 Резултати истраживања

3.4.1 Резултати истраживања у области изометријских трансформација

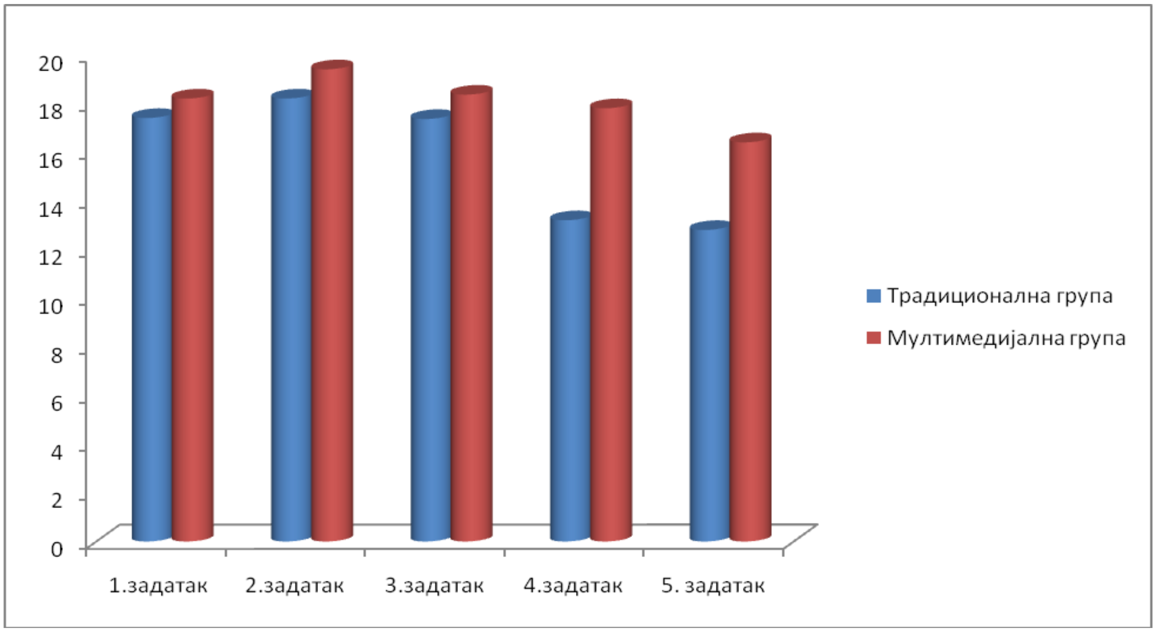
Након примене традиционалног и мултимедијаног приступа настави у области изометријских трансформација, студенти су полагали *Тест 1*. Просечан број бодова студената **традиционалне** групе Архитектонског факултета на ***Тесту 1*** износио је 76,56 са стандардном девијацијом од 18,64, а **мултимедијалне** 86,96 са стандардном девијацијом од 17,72 бодова. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова на тесту у односу на традиционалну групу ($t = -2,022$, $p = 0,049$). Средња вредност поена студената **традиционалне** групе Факултета за градитељски менаџмент на ***Тесту 1*** износио је 76,64 са стандардном девијацијом од 18,53, а **мултимедијалне** 88,12 са стандардном девијацијом од 18,11 бодова. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова на тесту у односу на традиционалну групу ($t = -2,216$, $p = 0,031$).



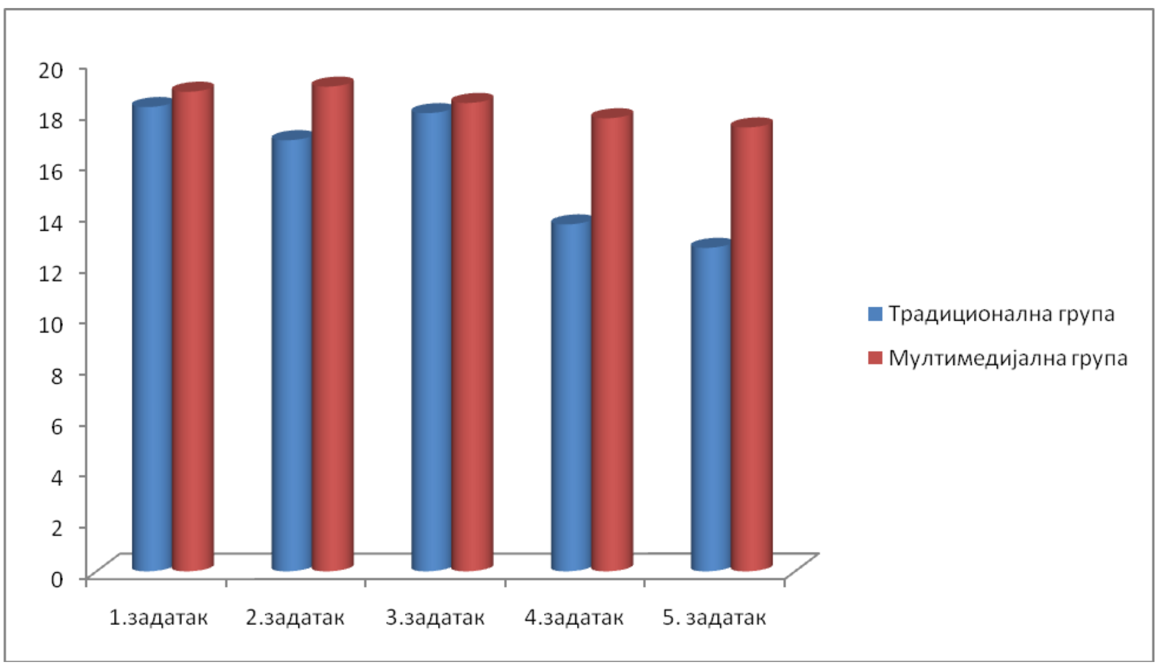
Графикон 1. Резултати ***Теста 1*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент

Резултати на ***Тесту 1*** традиционалне и мултимедијалне групе по факултетима су приказани графиконом 1, а појединачно по задацима и по факултетима графиконом 2 и графиконом 3.

У табели 7 приказани су резулати ***t-теста за два независна узорка*** за појединачне задатке ***Теста 1*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског и Факултета за градитељски менаџмент.



Графикон 2. Резултати ***Теста 1*** по бодовима на задацима традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета



Графикон 3. Резултати ***Теста 1*** по бодовима на задацима традиционалне и мултимедијалне групе студената Факултета за градитељски менаџмент

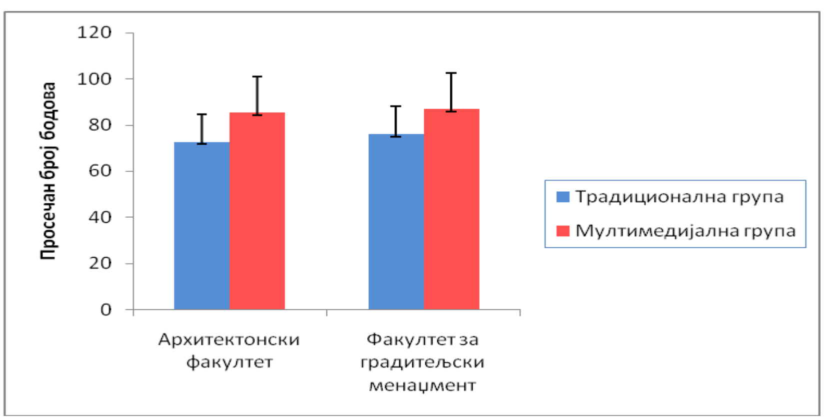
Задатак	Факултет	Група	N	Аритметичка средина	Стандардна девијација	*t* вредност	Значајност
1. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	17,4	2,55	-1,047	0,3
		Мултимедијална (експериментална)	25	18,2	2,84		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	18,2	2,45	-0,837	0,41
		Мултимедијална (експериментална)	25	18,8	2,61		
2. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	18,2	3,5	-1,55	0,128
		Мултимедијална (експериментална)	25	19,4	1,66		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	16,9	4,26	-2,43	**0,02**
		Мултимедијална (експериментална)	25	19	2,5		
3. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	17,36	3,83	-1,012	0,316
		Мултимедијална (експериментална)	25	18,36	2,12		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	17,96	3,8	-0,407	0,69
		Мултимедијална (експериментална)	25	18,36	3,12		
4. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	13,2	3,79	-4,265	**0,000**
		Мултимедијална (експериментална)	25	17,8	3,84		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	13,6	3,68	-3,918	**0,000**
		Мултимедијална (експериментална)	25	17,76	3,82		
5. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	12,8	4,58	-3,38	**0,001**
		Мултимедијална (експериментална)	25	16,4	2,71		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	12,68	4,33	-4,7	**0,000**
		Мултимедијална (експериментална)	25	17,4	2,55		

Табела 7. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** за појединачне задатке ***Теста 1*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент

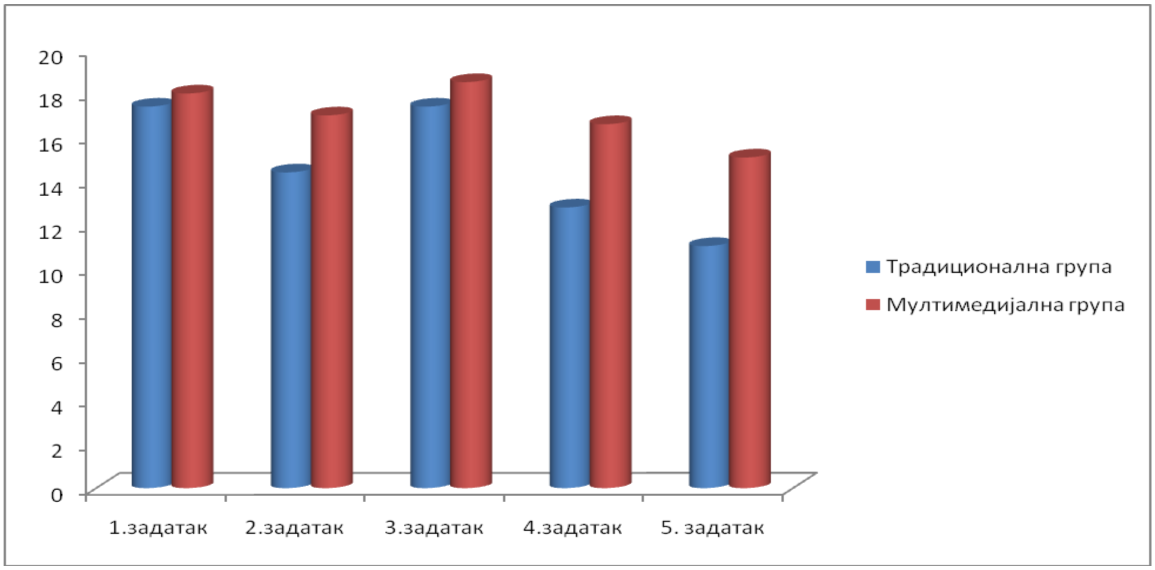
Резултати ***t-теста за два независна узорка*** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова у односу на традиционалну групу, на четвртом и петом задатку на оба факултета и на другом задатку на Факултету за градитељски менаџмент.

3.4.2 Резултати истраживања у области правилних полиедара

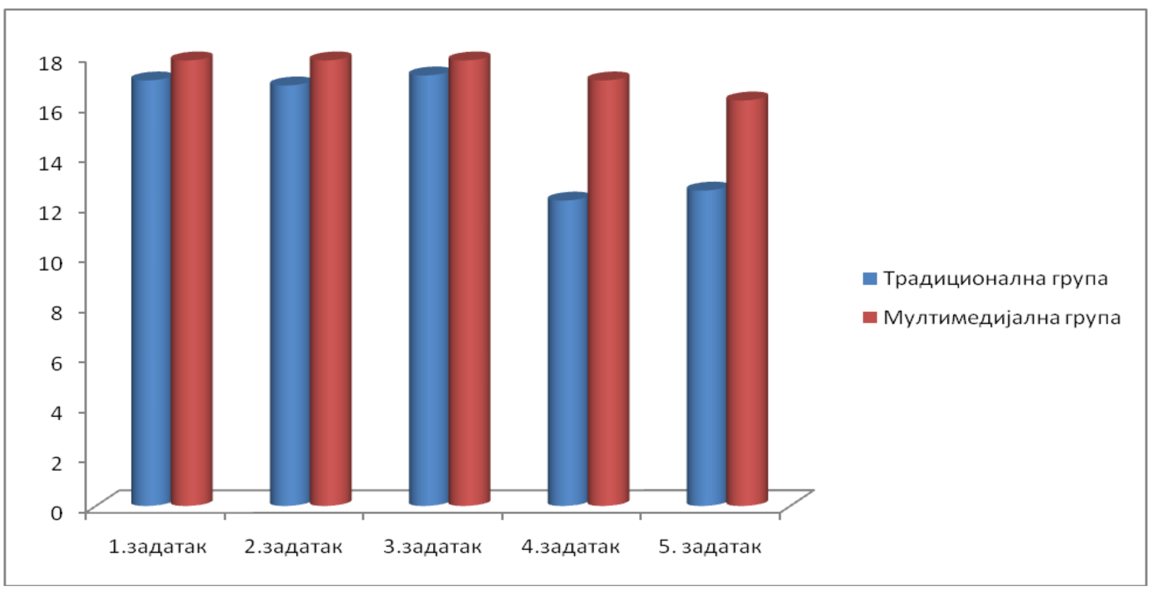
Након полагања ***Теста 2*** средња вредност броја бодова студената **традиционалне** групе Архитектонског факултета је износила 72,64 са стандардном девијацијом од 12,19, а **мултимедијалне** 85,20 са стандардном девијацијом од 13,11 бодова. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова на тесту у односу на традиционалну групу ($t = -3{,}508$, $p = 0{,}001$). Просечан број бодова студената **традиционалне** групе Факултета за градитељски менаџмент на ***Тесту 2*** је износио 75,80 са стандардном девијацијом од 15,59, а **мултимедијалне** 86,80 са стандардном девијацијом од 14,28 бодова. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова на тесту у односу на традиционалну групу ($t = -2{,}601$, $p = 0{,}002$).



Графикон 4. Резултати ***Теста 2*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент



Графикон 5. Резултати ***Теста 2*** по бодовима на задацима традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета



Графикон 6. Резултати ***Теста 2*** по бодовима на задацима традиционалне и мултимедијалне групе студената Факултета за градитељски менаџмент

Резултати ***Теста 2*** по просечном броју бодова традиционалне и мултимедијалне групе по факултетима приказани су графиконом 4, а појединачно по задацима графиконом 5 и графиконом 6.

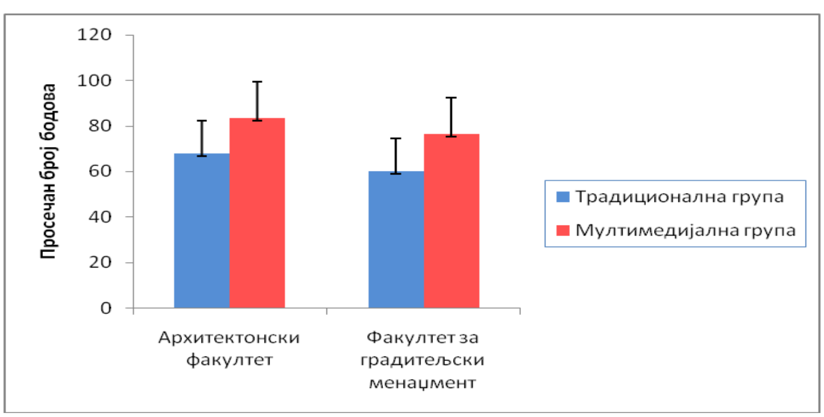
Задатак	Факултет	Група	N	Аритметичка средина	Стандардна девијација	t вредност	Значајност
1. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	17,4	2,55	-0,84	0,405
		Мултимедијална (експериментална)	25	18	2,5		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	17	2,89	-0,833	0,410
		Мултимедијална (експериментална)	25	17,8	3,84		
2. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	14,4	4,16	-2,677	**0,01**
		Мултимедијална (експериментална)	25	17	2,5		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	16,8	2,45	-1,42	0,162
		Мултимедијална (експериментална)	25	17,8	2,53		
3. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	17,4	2,93	-1,51	0,138
		Мултимедијална (експериментална)	25	18,52	2,28		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	17,2	4,35	-0,552	0,583
		Мултимедијална (експериментална)	25	17,8	3,25		
4. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	12,8	4,8	-3,212	**0,002**
		Мултимедијална (експериментална)	25	16,6	3,45		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	12,2	4,1	-4,023	**0,000**
		Мултимедијална (експериментална)	25	17	4,33		
5. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	11,04	5,14	-3,027	**0,004**
		Мултимедијална (експериментална)	25	15,08	4,25		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	12,6	5,79	-2,761	**0,009**
		Мултимедијална (експериментална)	25	16,2	2,99		

Табела 8. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** за појединачне задатке ***Теста 2*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент

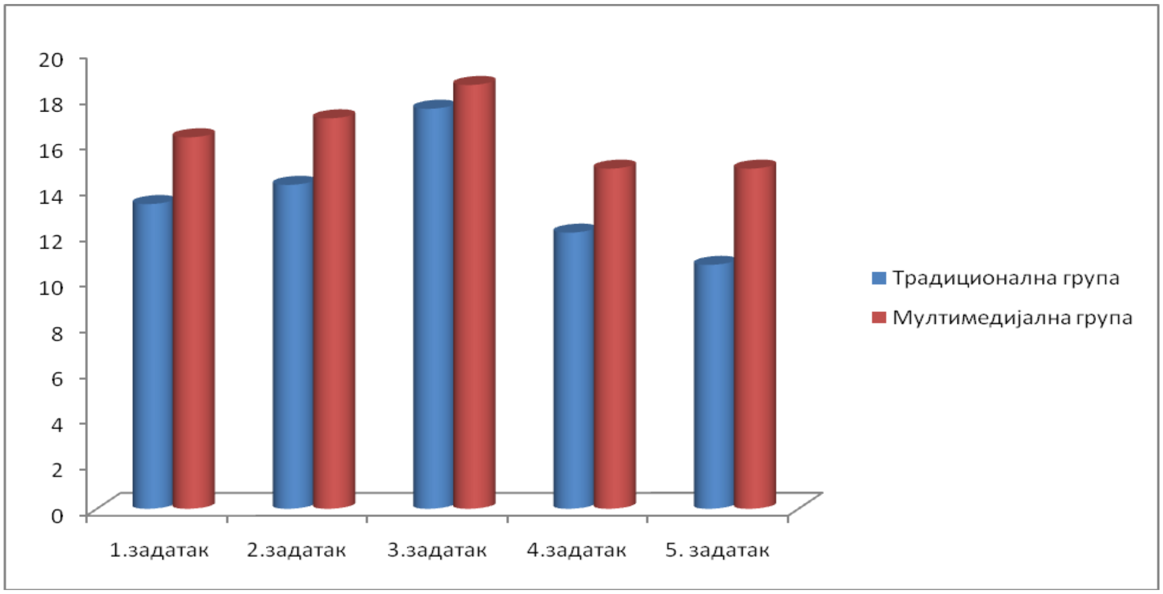
У табели 8 приказани су резулати ***t-теста за два независна узорка*** за појединачне задатке ***Теста 2*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског и Факултета за градитељски менаџмент. Ови резултати показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова у односу на традиционалну групу, на четвртом и петом задатку на оба факултета и на другом задатку на Архитектонском факултету.

3.4.3 Резултати истраживања у области одређеног интеграла

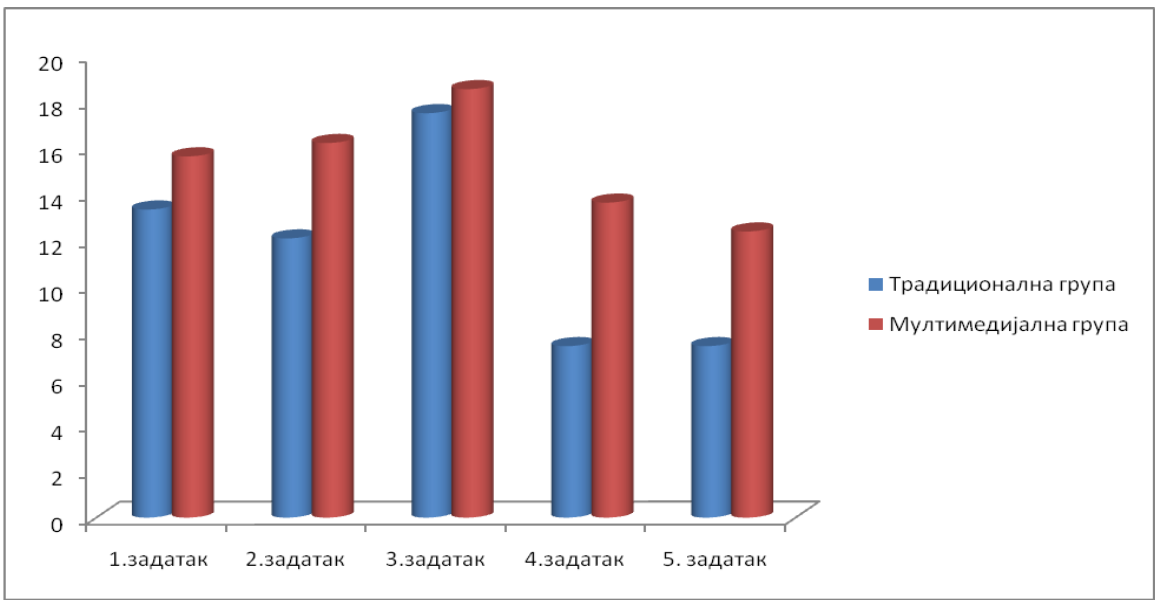
Студенти Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент полагали су ***Тест 3***. Просечан број бодова студената **традиционалне** групе Архитектинског факултета износи 67,75 са стандардном девијацијом од 14,51, а **мултимедијалне** 83,21 са стандардном девијацијом од 15,08 бодова. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова на тесту у односу на традиционалну групу ($t = -3,619$, $p = 0,001$). Средња вредност поена студената **традиционалне** групе Факултета за градитељски менаџмент на ***Тесту 3*** износи 60,04 са стандардном девијацијом од 16,20, а **мултимедијалне** 76,38 са стандардном девијацијом од 19,13 бодова. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова на тесту у односу на традиционалну ($t = -3,193$, $p = 0,003$).



Графикон 7. Резултати ***Теста 3*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент



Графикон 8. Резултати ***Теста 3*** по бодовима на задацима традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета



Графикон 9. Резултати ***Теста 3*** по бодовима на задацима традиционалне и мултимедијалне групе студената Факултета за градитељски менаџмент

Задатак	**Факултет**	**Група**	**N**	**Аритметичка средина**	**Стандардна девијација**	**t вредност**	**Значајност**
1. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	13,33	3,81	-2,429	**0,019**
		Мултимедијална (експериментална)	25	16,25	4,48		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	13,33	3,81	-1,967	0,055
		Мултимедијална (експериментална)	25	15,63	4,25		
2. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	14,17	4,08	-2,979	**0,017**
		Мултимедијална (експериментална)	25	17,08	2,52		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	12,08	3,88	-4,560	**0,000**
		Мултимедијална (експериментална)	25	16,21	2,15		
3. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	17,5	2,95	-1,360	0,181
		Мултимедијална (експериментална)	25	18,54	2,32		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	17,5	2,95	-1,360	0,181
		Мултимедијална (експериментална)	25	18,54	2,32		
4. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	12,08	5,3	-3,389	**0,01**
		Мултимедијална (експериментална)	25	16,46	3,45		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	9,71	5,43	-2,450	**0,018**
		Мултимедијална (експериментална)	25	13,63	5,65		
5. задатак	*Архитектонски*	Традиционална (контролна)	25	10,67	4,9	-3,191	**0,03**
		Мултимедијална (експериментална)	25	14,88	4,22		
	ФГМ	Традиционална (контролна)	25	7,42	5,74	-2,638	**0,011**
		Мултимедијална (експериментална)	25	12,38	7,20		

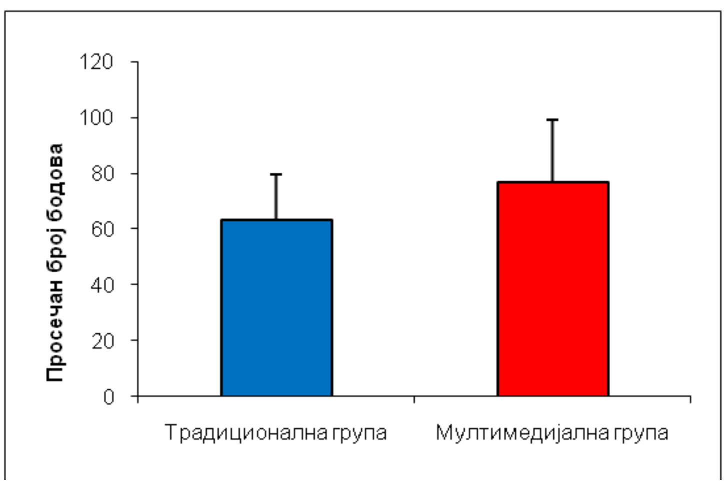
Табела 9. Резултати ***t-теста за два независна узорка*** за појединачне задатке ***Теста 3*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент

Резултати на тесту традиционалне и мултимедијалне групе по факултетима су приказани графиконом 7, а појединачно по задацима и по факултетима графиконом 8 и графиконом 9.

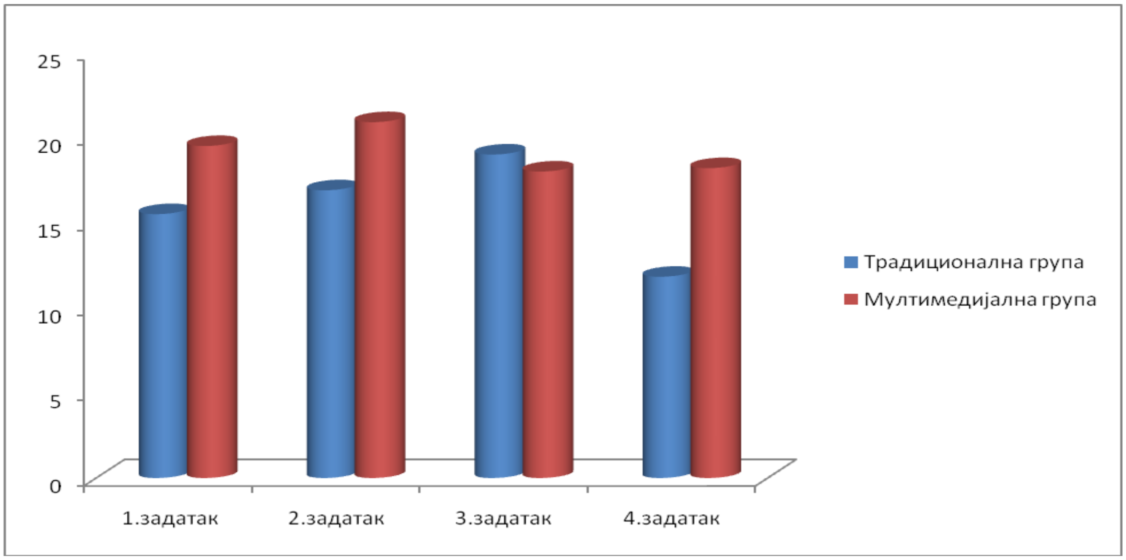
У табели 9 приказани су резулати ***t*-теста за два независна узорка** за појединачне задатке ***Теста 3*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент. Ови резултати показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова у односу на традиционалну групу, на другом, четвртом и петом задатку на оба факултета, као и на првом задатку на Архитектонском.

Студенти Факултета за предузетнички бизнис су након примене традиционалног и мултимедијаног приступа у настави, полагали ***Тест 4***. Просечан број бодова студената **традиционалне** групе Факултета за предузетнички бизнис на ***Тесту 4*** износио је 63,22 са стандардном девијацијом од 16,39, а **мултимедијалне** 76,6 са стандардном девијацијом од 22,43 бодова. Резултати ***t*-теста за два независна узорка** показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова на тесту у односу на традиционалну групу ($t = -2,408$, $p = 0,002$).

Резултати на тесту традиционалне и мултимедијалне групе по факултетима су приказани графиконом 10, а појединачно по задацима графиконом 11.



Графикон 10. Резултати ***Теста 4*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Факултета за предузетнички бизнис



Графикон 11. Резултати ***Теста 4*** по бодовима на задацима традиционалне и мултимедијалне групе студената Факултета за предузетнички бизнис

Задатак	Група	N	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Z вредност	Значајност
1. задатак	Традиционална (контролна)	25	15,5	7,14	-2,241	**0,025**
	Мултимедијална (експериментална)	25	19,5	9,6		
2. задатак	Традиционална (контролна)	25	16,9	7,04	-2,349	**0,019**
	Мултимедијална (експериментална)	25	20,9	5,68		
3. задатак	Традиционална (контролна)	25	19	7,32	-0,387	0,7
	Мултимедијална (експериментална)	25	18	8,13		
4. задатак	Традиционална (контролна)	25	11,82	7,58	-3,024	**0,002**
	Мултимедијална (експериментална)	25	18,20	7,48		

Табела 10. Резултати ***Mann-Whimney-евог теста за два независна узорка*** за појединачне задатке ***Теста 4*** традиционалне и мултимедијалне групе студената Факултета за предузетнички бизнис

У табели 10 приказани су резулати ***Mann-Whitney-евог непараметарског теста за два независна узорка*** за појединачне задатке ***Теста 4*** студената Факултета за предузетнички бизнис традиционалне и мултимедијалне групе студената. Добијени резултати показују да мултимедијална група студената има статистички значајно већи број бодова у односу на традиционалну групу, на првом, другом и четвртом задатку.

3.4.4 Резултати истраживања – мишљење студената о мултимедијалном приступу настави математике

Студенти мултимедијалне групе, на сва три факултета су изразили своје мишљење о мултимедијалном приступу настави математике.

На питање ***да ли им се више допада класичан или мултимедијални начин предавања*** 12% (3) студената је одговорило класични, а 82% (22) мултимедијални (студенти Архитектонског факултета), 20% (5) студената је одговорило класични, а 80% (20) мултимедијални (студенти Факултета за градитељски менаџмент) и 8% (2) студената би слушало предавања на класичан начин, док би 92% користило мултимедије (студенти Факултета за предузетнички бизнис). Као разлог за овакав одговор навели су следеће:

- приликом учења геометрије слика је најбитнија, а уз анимацију је још јаснија, уз покрет и у простору;
- неке ствари се много боље виде и разумеју, а и лакше се схвата решење проблема када је анимацијом приказано корак по корак;
- много је интересантније, држи пажњу, за разлику од монотоног приказивања градива статичним сликама;
- занимљивије је, неке ствари се много боље виде и разумеју, а и лакше се памте;
- много се лакше схвата градиво на овај начин, била би корисна оваква предавања и из других предмета, посебно из Нацртне геометрије;
- углавном је интересантније, али и класично предавање зна бити занимљивије, то зависи од професора;

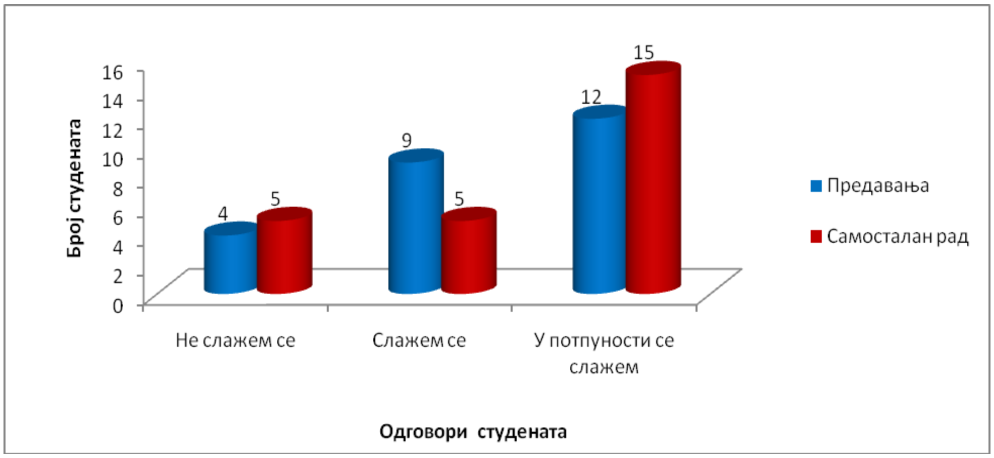
- лакше и брже се учи, боље разумеју математички проблеми за које је потребна и визуелност;
- најбоље је комбиновати класичан вид наставе и примене технологије, онда недостаци једног, допуњују друго;
- предност учења са *Flash* анимацијама је што се док решавамо задатак увек можемо вратити и на кораке уназад, итд.

Студенти Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент дали су своје коментаре и у којој области (анализи или геометрији) су им мултимедије више помогле:

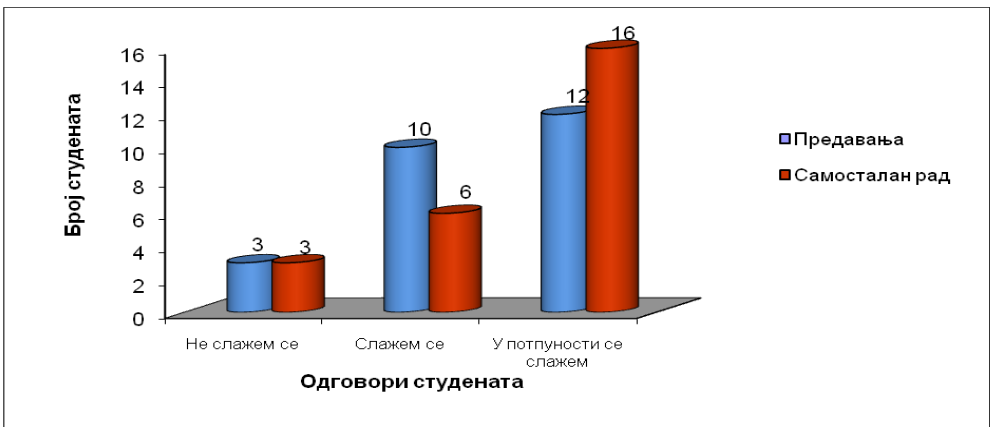
- мултимедије свакако олакшавају учење, посебно у областима које су апстрактне и које много лакше разумемо кроз слике, тј. анимације;
- интеграли су много јаснији сада уз мултимедијалне лекције, него када се уче у средњој школи на класичан начин, док мултимедије из области геометрије посебно олакшавају разумевање тежих примера;
- изометријске трансформације и полиедри су области које није тешко научити и разумети, али уз мултимедијалне лекције је то било уживање, интеграли који су били баук, сада могу да се суштински разумеју и кроз цртеж рачуна површина и запремина;
- најзанимљивији су примери и примена, посебно код одређеног интеграла, где су апстрактни проблеми из физике и геометрије добили геометријску интерпретацију, итд.

На питање ***да ли лакше уче, разумеју и решавају задатке користећи мултимедијално учење математике приликом предавања и самосталног рада*** студенти су дали следеће одговоре приказане графиконом 12.

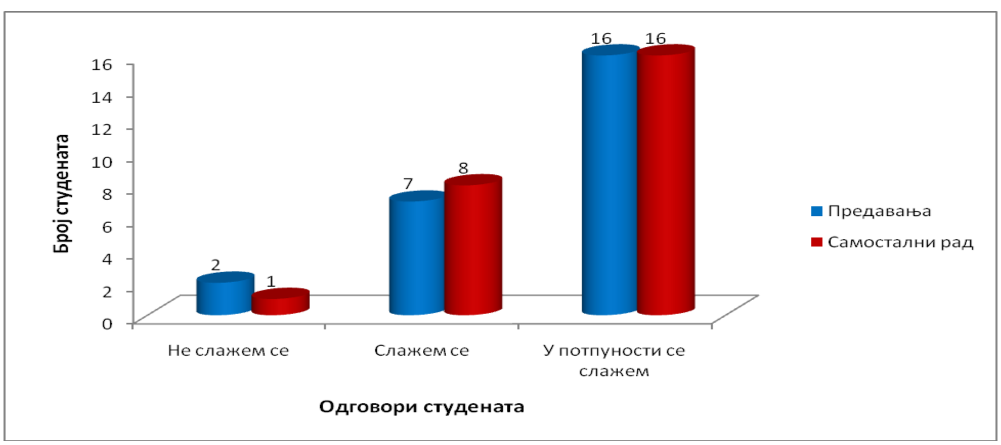
а)



b)



в)



Графикон 12. Одговори студената на питање: да ли би требало користити рачунар приликом учења математике на предавањима и приликом самосталног рада а) Архитектонски факултет
б) Факултета за градитељски менаџмент в) Факултет за предузетнички бизнис

4. ДИСКУСИЈА И ЗАКЉУЧЦИ

Учење уз мултимедије последњих година постаје све значајније поље у истраживањима која се баве методиком наставе. Нека од ових истраживања резултирала су постављањем веома значајних општих принципа о мултимедијалном учењу и дизајну (видети [4], [53], [55]), као и два принципа у области математике (видети [53], [56]), који су у великој мери потврђени и у нашем истраживању.

Закључци методичких студија ***у области геометрије*** (видети [29], [47]), па и наших одабраних тема (видети [40]), базирани на основу искуства у раду са студентима и њиховог интуитивног разумевања геометрије и простора, допринели су постављању методологије нашег истраживања, такође. Мултимедијално учење геометрије, уз лекције о изометријским трансформацијама и правилним полиедрима, у складу са наведеним методичким принципима и смерницама за разумевање геометријских проблема и дизајн анимација, у нашем раду се показало успешним.

Резултати нашег истраживања показују да су статистички значајно већи број бодова на тестовима из области геометрије имали студенти који су учили уз помоћ рачунара. Наше истраживање је показало да су студенти Архитектонског факултета код којих је примењено мултимедијално учење из области о ***изометријским трансформацијама*** имали просечно већу оцену за 10,4 поена и за 11,48 на Факултету за градитељски менаџмент у односу на студенте који су учили на класичан начин. На другом тесту знања, из области о ***правилним полиедрима***, студенти Архитектонског факултета који су учили уз мултимедијалне лекције су имали просечно већу оцену за 12,56 поена и за 11 на Факултету за градитељски менаџмент у односу на студенте са традиционалним начином учења.

За оба теста и факултета можемо закључити да су студенти мултимедијалне групе, значајно боље решавали задатке у којима је била важна визуелност приликом учења (четврти и пети задатак), док се просечан број бодова првог, другог и трећег задатка занемарљиво разликује код ове две групе. Ови резултати су додатно потврђени коришћењем ***t-теста за два независна узорка*** који (на основу вредности t и p) указује на високу статистичку разлику мултимедијалних група у односу на традиционалне код наведених задатака (четвртог и петог) за оба теста из области геометрије. Битно је нагласити да је за решавање четвртог и петог задатака било важно визуелно и просторно сагледавање проблема, а од кључне важности за њихово лакше решавање по мишљењу студената је то што су задате фигуре и тела, као и њихова пресликавања, пресеке, итд. кроз анимације приликом учења могли лакше да сагледају кроз покрет, простор, „из разних углова". Поред тога, студенти истичу важност *Flash-анимација* приликом примене стеченог визуелног искуства и интинуитивног разумевања геометрије и простора за решавање новонасталих проблема, што је у сагласности са резултатима из [29], [40], [47].

Примена анимација и овакве методологије у настави се показала јако успешном, како у нашој, тако и у многобројним студијама (видети [26]), а циљеви изведени из њихове анализе су подстицај наставницима да користе нове технологије у изради анимација. У многим истраживањима је, као и у нашем, коришћен, такође, *Macromedia Flash*. На пример, у Шпанији, на Универзитеу Овиедо (Департман за конструктивни инжењеринг) на узорку од 60 студената изведена је експериментална настава коришћењем *Flash-анимација* за учење дескриптивне геометрије. Иако већина студената који су учествовали у наведеном истраживању, њих 90%, сматра да су традиционалан начин учења и улога професора (који може помоћи око разумевања детаља) на часу незаменљиви, већина њих (81%) мисли да анимације треба укључити у класичну наставу, што и у нашем истраживању сматра 82% студената Архитектонског факултета, 80% студената Факултета за градитељски менаџмент и 92% студената Факултета за предузетнички бизнис. По речима студената, улога професора у настави је незаменљива, али већина њих сматра да интерактивне мултимедије играју, такође, веома значајну улогу у сазнајном процесу. Кроз групу питања, у наведеном истраживању у Шпанији, студенти су изразили своје мишљење и о разлици у степену пажње приликом класичне наставе и уз помоћ мултимедијалних анимација. Већи део студената (57%) је рекао да су им анимације, као новији и занимљивији вид наставе, држале већу пажњу неко класична настава. Као предности коришћења мултимедијаног учења и *Flash-анимација* најчешће су наводили да им одговара визуелни приказ проблема корак по корак, да је занимљиво и да им држи пажњу, што су били и најчешћи одговори студената из анкете спроведене у нашем истраживању. Ови одговори су, између осталог, у директној вези са могућношћу преузимања контроле брзине и бирања тренутка преласка на следећи корак у решавању проблема преко анимација. Већина анимација, као што смо и кроз наше примере видели у претходном поглављу, има „контролне дугмиће" који омогућавају кориснику да стане, настави, врати се на почетак, иде на крај, један корак напред или један корак уназад. На овај начин мултимедије омогућавају професору док предаје да контролише анимацију и прилагоди је потреби студента, у смислу визуелизације, разумевања, итд. Иако је наведена карактеристика *Flash-анимација* (контрола) једна од најважнијих карактеристика, показало се и да може бити контрапродуктивна, јер нису могућности свих студената исте. Приликом спровођења наших мултимедијалних предавања, дешавало се да се студенти жале да им је и сувише брзо или споро приказивање анимације, што је у сагласности са принципом индивидуалне способности ученика (видети [55]). Наравно, решење у првом случају је било понављање корака у анимацији, или читаве анимације, чиме можемо и закључити да овакав вид учења више помаже студентима са нижим степеном знања, као и лошијих визуелних способности, што оставља простора за нека даља истраживања. Студенти који су учествовали у нашем истраживању су као негативну страну, такође, истакли ограничену доступност мултимедијалног материјала за самостални рад. Наравно, сваки студент је могао да добије материјал који би му био доступан и код куће, уз инсталацију *Macromedia Flash*-а, али поједини нису имали ту могућност.

Док су неке научне студије истраживале искључиво значајност коришћења *Flash-анимација* у настави, код других је био циљ да се истражи утицај коришћења анимација, уопште (било које врсте), приликом учења природних наука. Једна од таквих, која се истиче по важности за наше истраживање, је спроведена у Израелу на 1335 ученика 11 основних школа (видети [10]). Поред фактора значајности утицаја анимација у овој студији се истиче и фактор мотивације за учење њиховом применом. Параметри мотивације и способности ученика су проверени посебним пре и пост тестовима, тзв. „Тестом способности мишљења за природне науке” (SMQ – Science Motivation Questionnaire), и „Тестом мотивације за учење природних наука” (Motivation to learn college science) (видети [30]). Истраживање је спроведено на 1335 ученика, који су били подељени у експерименталну (926 ученика) и контролну групу (409 ученика). Резултати указују да употреба анимиција узрокује боље решавање проблема и разумевање научних појмова. Резултати, такође, показују да су ученици који су учили уз помоћ анимација развили већу мотивацију за учење природних наука, у смислу самоефикасности, интересовања и задовољства, повезаности са свакодневним животом, у односу на контролну групу студената. У складу са дефиницијом мултимедија, студенти који уче уз анимиције, користе сва три стила учења: визуелни, аудио и аудиторни. Можемо закључити да анимација доприноси бољем разумевању наставних материјала на два начина. Прво, она омогућава креирање менталне слике концепата, појава и процеса. Друго, она може да се користи као замена или помоћ за неке когнитивне процесе који неким ученицима недостају, као што су апстракција, машта, креативност, итд. Истраживачи који анализирају значај употребе анимације међу ученицима, закључују да „више визуализује” приликом учења, омогућавају, „бољи процес учења”. Студија Најара (видети [68]) својим закључцима указује да је најбољи начин за учење динамичких процеса коришћењем компјутеризоване анимације. До сличних закључака дошли су и Барак и Дори, чији резултати истраживања указују да употреба анимације и визуелизације доприноси успешнијем концептуалном разумевању студената (видети [10]).

Наведени позитивни резултати увођења анимација у наставу указују на чињеницу да анимације узрокују успешније креирање менталне слике постављеног проблема међу ученицима, тј. његово брже и успешније решавање, што се поклапа са резултатима нашег истраживања.

У литератури се међу мултимедијама које се користе у настави математике истичу различити софтверски алати, од којих су због области нашег истраживања били најинтересантнији они за учење геометрије и математичке анализе.

Резултати истраживања приликом учења геометрије уз помоћ програмских пакета *Autograph* (видети [41]), *Cabri Geometry* (видети [32]), *Aplusix* (видети [33]), *GeoGebra* (видети [15]), *Geometer's Skechpad* (GSP) (видети [70]), итд. показују значајан утицај коришћења мултимедија на стицање знања студената.

Резултати наведених истраживања се у великој мери слажу са нашим резултатима приликом коришћења *Macromedia Flash*-а за креирање сопствених анимација, што показује универзалност значаја примене мултимедија у настави математике. На пример, Исиксал и Аскар (видети [41]) су у свом истраживању које су спровели у више различитих школа и у више разреда у области Анкаре, у Турској, користећи традиционални метод наставе и мултимедијални коришћењем динамичког софтвера *Autograph*, пре свега за учење одабраних поглавља геометрије, добили статистичи значајну разлику на тесту знања у корист мултимедијалног учења. Ученици су рекли да су научили много тога уз помоћ рачунара. Изјавили су да им је било јако забавно учити и играти се истовремено, а да је цртање разних графикона, фигура и тела на рачунару било веома живописно. Занимљивије им је било учествовање у читавом „дешавању”, него сувопарно слушање предавања наставника и решавања проблема у учионици. Рекли су да им је било олакшавајуће што је рачунар, само уз уношење извесних параметара, сам цртао графиконе, који су шарени – визуелно пријемчиви, прецизни и јасни.

Користећи мултимедијалне софтвере *GeoGebra*, *Cabri* и *Geometer's Sketchpad*, Гонзалес и Хербст (видети [32]) су приликом учења области подударности, такође, постигли значајне резултате. Студенти су након оваквог вида наставе изјавили да су уз помоћ коришћеног софтвера могли успешније да успоставе разумевање односа између геометријских објеката са теоријским појмовима у области геометрије. Поред тога, рекли су да су на основу провежбаних примера на рачунару стекли искуство за успешније решавање касније одабраних задатака (осетили помак у смислу апстракције и генерализације), као и да су им практични примери са геометријским објектима и њиховим релацијама омогућили лакше разумевање доказа теорема.

Многа истраживања из области математичке анализе, као и наше кроз један њен сегмент (одређени интеграл), показала су да софтверски алати, као што су

Macromedia Flash, GeoGebra, Scientific Workplace, Mathematica, итд. олакшавају процес учења.

Резултати нашег истраживања, такође, показују да су статистички значајно већи број бодова на тестовима из области ***одређеног интеграла*** на сва три факултета имали студенти који су учили уз помоћ мултимедијалних лекција. Наше истраживање је показало кроз ***Тест 3*** да су студенти Архитектонског факултета код којих је примењено мултимедијално учење имали просечно већу оцену за 15,46 поена и за 16,34 на Факултету за градитељски менаџмент у односу на студенте који су учили на класичан начин. На тесту знања – ***Тест 4*** студенти Факултета за предузетнички бизнис који су учили уз мултимедијалне лекције су имали просечно већу оцену за 13,38 бодова у односу на студенте традиционалне групе.

Још прецизнија статистичка анализа просечног броја бодова по задацима мултимедијалне и традиционалне групе на ***Тесту 3*** вршена је методом ***t-теста за два независна узорка*** и на ***Тесту 4 Mann-Whitney-евим непараметарским тестом за два независна узорка***. На основу ових резултата можемо закључити да су студенти мултимедијалне групе Архитектонског факултета и Факултета за градитељски менаџмент значајно боље решавали други, четврти и пети задатак, док се просечан број бодова код првог и трећег задатка занемарљиво разликује код ове две групе. Што се тиче студената Факултета за предузетнички бизнис, закључујемо да су студенти мултимедијалне групе значајно боље решавали први, други и четврти задатак, док се просечан број бодова на трећем задатку занемарљиво разликује код ове две групе. Наведени резултати потврђују нашу претпоставку да се употребом рачунара приликом дефинисања одређеног интеграла и израчунавања површине и запремине његовом применом, постижу бољи резултати, јер поред нумеричког приступа решавању, визуелни приступ (у нашем случају кроз анимације), нуди много више, што је у складу са резултатима истраживања које су спровели Тол ([86]) и Д. Херцег и Ђ. Херцег (видети [37]). Наши студенти су рекли да су им анимације помогле да лакше разумеју и повежу појмове који су им је били јако апстрактни (одређени интеграл, подинтегрална функција, појам доње и горње границе) са конкретним израчунавањима површине и запремине. Такође, изјавили су да им је био занимљив и јако користан Архимедов метод дефинисања одређеног интеграла преко површине.

Истраживање у области одређеног интеграла, такође, али уз помоћ програмских пакета *Mathematica* и *GeoGebra*, спровели су Д. Херцег и Ђ. Херцег (видети [37]). Резултати ове студије у раду са ученицима хемијске средње школе из Шапца, и студентима математике и информатике Природно-математичког факултета Универзитета у Новом Саду, показују да су статистички значајно већи број бодова на тесту имали студенти који су учили уз помоћ рачунара ($t = 2,77$, $p = 0,0067$). Резултати овог истраживања у којима су коришћене *Mathematica* и *GeoGebra* само потврђују наше резултате који су добијени коришћењем *Macromedia Flash*-а и показују универзалност принципа коришћења мултимедија за учење истих тема.

У области анализе, коришћени су мултимедијални алати за учење разних тема. На пример, Такачи, Стојковић и Радовановић (видети [92]), кроз своје истраживање спроведено у две средње школе у Новом Саду, на три групе студената, показују снажан утицај коришћења рачунара приликом учења тригонометријских функција, као и на схватања везе између графика функција и веома сложеног калкулуса. Такачи, Пешић и Татар (видети [89]) су применили програмски пакет *Scientific Workplace* приликом излагања градива о непрекидности функције и такође, кроз свој пример, показали значајаност мултимедијалног метода у настави математике.

На основу искуства у раду са ученицима гимназије из Новог Сада, и студентима математике и информатике Природно-математичког факултета у Новом Саду, Д. Херцег и Ђ. Херцег (видети [38]) су изложили један могући прилаз обради теме интерполације, уз помоћ софтвера *GeoGebra*. Резултати тестова који су рађени са ученицима више генерација, и обрађени статистичком методом ***t-тест за независне узорке***, показују статистичку значајност учења уз помоћ рачунара ($t = 2,05$, $p = 0,04$).

Многобројне студије о мултимедијалном учењу садрже и анализе коментара наставника о томе како мултимедије утичу на класичну наставу и рад ученика (видети [98]). Наставници закључују да мултимедије олакшавају рад и да кроз њих доста мотивишу ученике, а да мултимедијалне лекције у поређењу са традиционалним, кроз графике, анимацију и звук пружају визуелну представу о ономе шта уче, што је и један од најважнијих закључака наше студије.

Као један од закључака ове студије можемо навести и одговор једног студента на питање шта значи ,,учење уз мултимедије”. Он је одговорио да ,,учење уз мултимедије” значи употреба мултимедија као допуне класичном виду учења. Истакао је да мултимедије могу доста помоћи ученику да боље разуме многе математичке проблеме и да на њима експериментише. Конкретне анимације из мултимедијалних лекција, по реакцијама студената, најбоље говоре о томе да ,,једна слика говори више од хиљаду речи, а анимација уз покрет, још више”. Њихова примедба, а самим тим и закључак овог рада, је да би требало повећати број оваквих лекција у настави, тј. да мултимедије представљају важан фактор у настави и учењу.

У току нашег истраживања појавила су се нека нова питања која захтевају додатна истраживања: (а) у којим наставним областима мултимедијално учење даје боље резултате; (б) у којим областима математике је мултимедијално учење ефикасније (геометрији, анализи, итд.); (в) колико успех мултимедија зависи од индивидуалних способности ученика, а колико од наставника; (г) како побољшати разумевање наставног градива уз мултимедије, итд.? У неким истраживањима у области мултимедијалног учења поред предзнања студената (што је случај у нашем истраживању) истичу се и укључују у истраживање, као веома битни фактори, подаци о њиховим циљевима учења, начин и темпо стицања знања, понашање студената, начин интеракције и комуникације, итд. На основу наведених фактора формира се такозвани „модел ученика”, на основу кога се дефинишу одговарајуће групе студената и врши њихова класификација за даље мултимедијално учење (видети [1], [14]). Оваква персонализација при мултимедијалном учењу омогућава прилагођавање читавог система наставе конкретном појединцу. Персонализован систем наставе је велика предност за студента, јер поред креирања садржаја омогућава адаптивну интеракцију са њима, сарадњу, подршку, као и активну стратегију за контролисање садржаја, темпа и обима учења (видети [16]). За сваки уочен модел студената и одговарајуће формиране групе, прилагођавају се наставни материјали и активности, при чему се групна персонализација реализује пре почетка наставе. У литератури постоји неколико модела стилова учења (видети [46], [50], [80]). Један од најзначајнијих и најчешће коришћених модела, који би се могао применити и у будућем истраживању, развили су Фелдер и Силверман (видети [24]). Овај модел стилова учења дизајниран је тако да утврди најзначајнији стил учења и помогне наставницима у изради наставних стратегија и припреми материјала. По овом моделу студенти се класификују на основу начина на који прихватају, обрађују и прикупљају информације. На основу стилова учења врши се класификација наставних метода и активности. Модел стилова учења које су развили Фелдер и Силверман (видети [24]) описује сваког студента у складу са четири димензије: визуелност (студент боље памти слике, графиконе, анимације – мултимедијално предавање), вербалност (памте текст – усмено предавање), секвенцијалност (решавање проблема корак по корак), глобалност (решавање проблема у целини). Овакав модел класификације студената примењен је у многобројним студијама у настави. Једна од њих спроведена је и у нашој земљи на Факултету организационох наука на узорку од 318 студената на предмету Електронско пословање (видети [57]). Резултати добијени у овом истраживању показују да се прилагођавањем електронских курсева применом наведеног модела постижу бољи резултати и већа сатисфакција студената приликом учења.

Један од закључака ове дисертације је да усклађеност наставних ресурса и активности мултимедијалног курса са стиловима учења студената има значајан утицај на коначан резултат процеса учења. Зато у будућим истраживањима треба ставити акценат на центар интересовања ученика (очекивања, мотивацију, стилове учења, навике студената, итд.) као битан фактор у процесу учења, јер наш циљ је учење и разумевање, не мултимедија сама за себе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Y. Atif, R. Benlamri, J. Berri, *Dynamic Learning Modeler*, Journal of Educational Technology & Society, 6(4), pp. 60-72, 2003.

[2] R. Atkinson, *Optimizing learning from examples using animated pedagogical agents*, Journal of Educational Psychology, 94, pp. 416-427, 2002.

[3] R. Atkinson, R. Mayer, M. Merrill, *Fostering social agency in multimedia learning: Examining the impact of an animated agent's voice*, Contemporary Educational Psychology, 30, pp. 117-139, 2005.

[4] R. Atkinson, *Multimedia Learning of Mathematics* in R. Mayer, The Cambridge handbook of Multimedia Learning, Cambridge University Press, pp. 393-408, 2005.

[5] A.D. Baddeley, *Working memory*, Oxford, England: Oxford University Press, 1986.

[6] A.D. Baddeley, *Working memory*, Science, 255, pp. 556-559, 1992.

[7] A.D. Baddeley, *Human memory*, Boston: Allyn & Bacon, 1999.

[8] E. Bakhoum, *Animating an equation: a guide to using FLASH in mathematics education*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. Taylor & Francis, 39(5), pp. 637-655, 2008.

[9] M. Barak, Y.J. Dori, *Enhancing undergraduate students' chemistry understanding through project-based learning in an IT environment*, Science Education, 89(1), pp. 117-139, 2005.

[10] M. Barak, T.Ashkar, Y. Dori, *Learning science via animated movies: Its effect on students' thinking and motivation*, Computers & Education, 56(3), pp. 839-846, 2011.

[11] A. Barkatsas, K. Kasimatis, V. Gialamas, *Learning secondary mathematics with technology: Exploring the complex interrelationship between students' attitudes, engagement, gender and achievement*, Computers & Education, 52(3), pp. 562-570, 2009.

[12] N. Boz, *Dinamic visualization and software environments*, The Turkish Online Journal of Educational Technology – TOJET, 4(1), pp.26-33, 2005.

[13] A. Bishop, *Review of research on visualization in mathematics education*, Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1), pp. 7-16, 1989.

[14] P. Brusilovsky, *Adaptive Hypermedia*, User Modeling and User-Adapted Interaction, 11(1–2), pp. 87-110, 2001.

[15] M. Bulut, N. Bulut, *Pre service teachers' usage of dynamic mathematics software*, The Turkish Online Journal of Educational Technology, 10(4), pp. 294-299, 2011.

[16] D. Burgos , M. Specht, *Adaptive e-Learning Methods and IMS Learning Design: An Integrated Approach*, Paper presented at the Sixth International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT'06),Washington, DC, USA, 2006.

[17] P. Chandler, J. Sweller, *Cognitive load theory and the format of instruction*, Cognition and Instruction, 8(4), pp. 293-332, 1991.

[18] P. Chandler, J. Sweller, *The split-attention effect as a factor in the design of instruction*, British journal of Educational Psychology, 62(2), pp. 233-246, 1992.

[19] G. Cooper, J. Sweller, *The effect of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer*, Journal of Educational Psychology, 79(4), pp. 347-362, 1987.

[20] B. Damjanović, *Matematička analiza*, GND Produkt, Beograd, 2005.

[21] R. Deaney, K. Ruthven, S. Hennessy, *Pupil perspectives on the contribution of information and communication technology to teaching and learning in the secondary school*, Research Papers in Education, 18(2), pp. 141-165, 2003.

[22] T. Dreyfus, *On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education*, In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15 th PME conference, 1, pp. 33-48. Genova: University de Genova, 1991.

[23] S. M. Drake, *Guided Imagery and education: theory, practice and experience, Journal of Mental Imagery*, 20, pp.1-58, 1996.

[24] M. R. Felder, K. L. Silverman, *Learning and Teaching Styles in Engineering Education*, Journal of Engineering Education, *78*(7), pp. 674-681, 1998.

[25] M. Fleming, W. H. Levie (Eds.), *Instructional message design: Principles from behavioural and cognitive sciences (2nd ed)*, Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publications, 1993.

[26] R. Garcıa, J. S. Quiros, R. G. Santos, S. M. Gonzalez, *Interactive multimedia animation with Macromedia Flash in Descriptive Geometry teaching*, Computers & Education, 49(3), pp. 615-639, 2007.

[27] R. Garner, M. Gillingham, C. White, *Effects of seductive details on macroprocessing and microprocessing in adults and children*, Cognition and Instruction, 6(1), pp. 41-57, 1989.

[28] R. Garner, R. Brown, S.Sanders, D. Menke, Seductive details and learning from text. In K. A. Renninger, S. Hidi, & A. Krapp (Eds.), *The role of interest in learning and development*, pp. 239-254, Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1992.

[29] B. Glass, W. Deckert, *Making Better Use of Computer Tools in Geometry*, Mathematics teacher, 94(3), pp. 224, 2001.

[30] S.M. Glynn, T. R., Jr. Koballa, *Motivation to learn college science*, In J. J. Mintzes, W. H. Leonard (Eds.), Handbook of college science teaching, pp. 25-32, Arlington, VA: National Science Teachers Association Press, 2006.

[31] E. P. Goldenberg, P. Lewis, J. O' Keefe, *Dynamic representation and the development of a process understanding of function*, In G.Harel and E. Dubinsky (Eds.) The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes Number 25. Washington DC: Mathematical Association of America, 1992.

[32] G. Gonzalez, P.G. Herbst, *Students' Conceptions of Congruency Through the Use of Dynamic Geometry Software*, Int J Comput Math Learning, 14, pp. 153-182, 2009.

[33] S. Hadjerrouit, *Using the interactive learning environment Aplusix for teaching and learning school algebra: a research experiment in a middle school*, The Turkish Online Journal of Educational Technology, 10(4), 2011.

[34] O. Hazzan, P.E. Goldenberg, *Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments*, International Journal of Computers for Mathematical learning, 1(3), pp. 263-291, 1997.

[35] A. Hede, *Integrated Model of Multimedia Effects on Learning*, Journal of Educational Multimedia and Hypermedia, 11(2), pp, 177-191, 2002.

[36] S. Hennessy, K. Ruthven, S. Brindley, *Teacher perspectives on integrating ICT into subject teaching: commitment, constraints, caution, and change*, Journal of Curriculum Studies, 37(2), pp. 155-192, 2005.

[37] D. Herceg, Đ. Herceg, *The definite integral and computer*, The teaching of mathematics, 12(1), pp. 33-44, 2009.

[38] Д. Херцег, Ђ. Херцег, *Интерполација и Геогебра*, Педагошка стварност, 55(9-10), стр. 897-908, 2009.

[39] S. Hidi, W. Baird, *Strategies for increasing text – based interest and students' recall of expository text*, Reding Research Quartely, 23, 465-483, 1988.

[40] K. Hollebrands, *High School Students' Intuitive Understandings of Geometric Transformations*, Mathematics teacher, 97(3), pp. 207, 2004.

[41] M. Isiksal, P. Askar, *The effect of spreadsheet and dynamic geometry software on the achievement and self-efficacy of 7th-grade students*, Educational Research, 47(3), pp. 333-350, 2005.

[42] H. Jeung, P. Chandler, J. Sweller, *The role of visual indicators in dual sensory mode instruction*, Educational Psychology, 17(3), pp. 329-343, 1997.

[43] J. Kaput, *Technology and mathematics education*, In D.A. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematics and learning: A project of the National Council of Teachers in Mathematics, New York: Macmillian, pp. 515-556, 1992.

[44] W. Kintsch, *Learning from text, levels of comprehension, or: Why would anyone read a story anyway?* Poetics, 9(1-3), pp. 87-98, 1980.

[45] E.A. Klotz, *Visualization in geometry: A case study of a multimedia mathematics education project*, In W. Zimmerman, and S. Cunningham (Eds.) Visualization in teaching and learning mathematics. MAA Notes Number 19. Washington DC: Mathematical Association of America. pp. 95-104, 1991.

[46] A. Kolb, *Experimential Learning*, Englewood Cliffs, NJ.: Prentice Hall, 1984.

[47] R. Lehrer, D. Chazan, *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, 1998.

[48] G. Lean, M. A. Clements, *Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance*, Educational Studies in Mathematics, 12(3), pp. 267-299, 1981.

[49] L. Lin, R. Atkinson, *Using animations and visual cueing to support learning of scientific concepts and processes*, Computers & Education, 56(3), pp. 650-658, 2011.

[50] N. Manochehr, *The Influence of Learning Styles on Learners in E-Learning Environments: An Empirical Study*, Computers in Higher Education Economics Review, 18(1), pp. 10-14, 2006.

[51] R. Mayer, R. Anderson, *Animations need narrations: An experimental test of a dual-coding hypothesis*, Journal of Educational Psychology, 83(4), pp. 484-490, 1991.

[52] R. Mayer, *Multimedia Aids to Problem-Solving Transfer*, International Journal of Educational Research, 31(7), pp. 611-623, 1999.

[53] R. Mayer, *Multimedia Learning,* Cambridge University Press, 2001.

[54] R. Mayer, R. Moreno, *Animation as an aid to multimedia learning*, Educational Psychology Review, 14(1), pp. 87-99, 2002.

[55] R. Mayer, *The Cambridge handbook of Multimedia Learning*, Cambridge University Press, 2005.

[56] M. Merill, *The role of animated pedagogical agents in multimedia learning environments*, Annual meeting of the Mid-South Educational Research Association, Biloxi, MS, 2003.

[57] Đ. Mihailović, M. Despotović-Zrakić, Z. Bogdanović, D. Barać, V. Vujin, *Prilagođavanje Felder-Silverman modela stila učenja za primenu u adaptivnom elektronskom obrazovanju*, Psihologija, 45(1), str. 43-58, 2012.

[58] P. M. Miličić, M. P.Ušćumlić, *Zbirka zadataka iz više matematike I*, GK, Beograd, 2005.

[59] G. A. Miller, *The magic number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information*, Psychological Review, 63(2), pp. 81-97, 1956.

[60] М. Миловановић, *Коришћење мултимедија за учење изиметријских трансформација*, Магистарски рад, Математички факултет Универзитета у Београду, 2005.

[61] M. Milovanović, Đ. Takaci, A. Milajic, *Multimedia approach in teaching mathematics – examples of interactive lessons from mathematical analysis and geometry in Interactive Multimedia* , InTech, Croatia, 2011. ISBN: 979-953-307-623-1.

[62] M. Milovanović, Đ. Takaci, A. Milajic, *Multimedia Approach in Teaching Mathemathics – Example of Lesson about the Definite Integral Application for Determining an Area*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42(2), pp. 175-187., 2011.

[63] M. Milovanović, Z. Milovanović, *Zbirka rešenih zadataka za pripremu prijemnog ispita iz matematike*, Signature, Beograd, 2011.

[64] В. Мићић, З. Каделбург, П. Младеновић, *Математика за IV разред средњих школа*, Уџбеник са збирком задатака, Шип „Бакар”, Бор, 1991.

[65] P. Mohr, J. Glover, R. Ronning, *The effect of related and unrelated details on the recall of major ideas in prose*, Journal of Reading Behavior, 16, pp. 97-109, 1984.

[66] R. Moreno, R. Mayer, *Multimedia-supported metaphors for meaning making in mathematics*, Cognition and Instruction, 17(3), pp. 215-248, 1999.

[67] R. Moreno, R. Mayer, *A coherent effect in multimedia learning: The case for minimizing irrelevant sounds in the design of multimedia instructional messages*, Journal of Educational Psychology, 92(1), pp. 117-125, 2000.

[68] L. J. Najjar, *Principles of educational multimedia user interface design*, Human Factors, 41(2), pp. 311-323, 1998.

[69] M. Nathan, W. Kintsch, E. Young, *A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments*, Cognition and instruction, 9(4), pp. 329-389, 1992.

[70] N. Nordin, E. Zakaria, N. Mohamed, M. Embi, *Pedagogical usability of the Geometers' Sketchpad (GSP) digital module in the mathematics teaching*, The Turkish Online Journal of Educational Technology, 9(4), pp. 113-117, 2010.

[71] J. Offer, B. Bos, *The design and application of technology-based courses in the mathematics classroom*, Computers & Education, 53(4), pp. 1133-1137, 2009.

[72] A. Paivio, *Mental representations: A dual coding approach*, Oxford, England: Oxford University Press, 1986.

[73] N. Presmeg, *Visualization in high school mathematics*, For the Learning of Mathematics, 6(3), pp. 42-46, 1986.

[74] N. Presmeg, *Visualization and mathematical giftedness*, Educational Studies in Mathematics, 17(3), pp. 297-311, 1986.

[75] N. Presmeg, *Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics*, Educational Studies in Mathematics, 23(6), pp. 595-610, 1992.

[76] J. Reisslein, R. Atkinson, P. Seeling, M. Reisslein, *Encountering the expertise reversal effect with a computer-based environment on electrical circuit analysis*, Learning and Instruction, 16(2), pp. 92-103, 2006.

[77] M. R. Rias, B. H. Zaman, *Different visualization types in multimedia learning: a comparative study*, Proceeding of the second international conference on Visual informatics: sustaining research and innovations – Volume Part II, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, pp. 408-418, 2011.

[78] S. Richmond, R. Cummings, *Implementing Kolb's learning styles into online distance education*, International Journal of Technology in Teaching and Learning, 1(1), pp. 45-54, 2005.

[79] G. Shama, T. Dreyfus, *Visual, algebraic and mixed strategies in visually presented linear programming problems*, Educational Studies in Mathematics, 26(1), pp. 45-70, 1994.

[80] L. Shirey, *Importance, interest, and selective attention*, In K. A. Reninger, S. Hidi, A. Krapp (Eds.), The role of interest in learning and development, Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 255-277, 1992.

[81] L. Shirey, R. Reynolds, *Effect of interest on attention and learning*, Journal of Education Psychology, 80(2), pp. 159-166, 1988.

[82] H. A. Simon, *How big is a chunk?* Science, 183(4124), pp. 482-488, 1974.

[83] J. Sweller, G. Cooper, *The use of worked examples as a substitute for problem solving in the algebra*, Cognition and Instruction, 2(1), pp. 59-89, 1985.

[84] J. Sweller, P. Chandler, P. Tierney, M. Cooper, *Cognitive load as a factor in the structuring of technical material*, Journal of Experimental Psychology: General, 119(2), pp. 176-192, 1990.

[85] J. Sweller, *Instructional design in tehnical areas*, Camberwell, Australia: ACER Press, 1999.

[86] D. Tall, *A graphical to integration and fundamental theorem*, Mathematics teaching, 113, pp. 48-51, 1986.

[87] D. O. Tall, B. West, *Graphic insight into calculus and differential equations*, In A. G. Howson, and J. Kahane, The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching, ICMI Study Series. Strasbourg: Cambridge University Press. pp. 107-119, 1986.

[88] D. Tall, *Advanced mathematical thinking*, Springer, 1991.

[89] Đ. Takači, D. Pešić, J. Tatar, *An introduction to the Continuity of functions using Scientific Workplace*, The Teaching of Mathematics, Beograd, 51(2), pp. 105-112, 2003.

[90] Đ. Takači, D. Pešić, *Neprekidnost funkcije u nastavi matematike – metoda vizuelizacije,* The Teaching of Mathematics (Nastava matematike), Beograd, 49(3-4), стр. 30-40, 2004.

[91] Đ. Takači, D. Herceg, R. Stojković, *Possibilities and limitations of Scientific Workplace in studying trigonometric functions*, The Teaching of Mathematics, Beograd, 53(2), pp. 61-72, 2005.

[92] Đ. Takači, R. Stojković, J. Radovanovic, *The influence of computer on examining trigonometric functions*, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, Hungary, 6(1), pp. 111-123, 2008.

[93] R. Tarmizi, J. Sweller, *Guidance during mathematical problem solving*, Journal of Educational Psychology, 80(4), pp. 424-436, 1988.

[94] U. Unterbruner, *Research Project "Development and Evaluation of Multimedia Learning Material for the Biology Class" (Topic: The Ecology of the Forest)*, Institut für Didaktik der Naturwissenschaften an der Universität Salzburg, 1997.

[95] S. Wade, R. Adams, *Effects of importance and interest on recall of biographical text*, Journal of Reading Behavior, 22(4), pp. 331-353, 1990.

[96] B. Weiner, *History of motivational research in education*, Journal of Educational Psychology, 82(4), pp. 616-622, 1990.

[97] J. Wishart, *Students' and Teachers' Perceptions of Motivation and Learning Through the Use in Schools of Multimedia Encyclopedias on CD-ROM*, Journal of Educational Multimedia and Hypermedia, *9*(4), pp. 331-345, 2000.

[98] S. M. Glynn, T. R., Jr. Koballa, *Motivation to learn college science*, In J. J. Mintzes, W. H. Leonard (Eds.), Handbook of college science teaching, Arlington, VA: National Science Teachers Association Press, pp. 25-32, 2006.

[99] M. Yerushalmy, D. Chazan, *Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer*, Educational Studies in Mathematics, 21(3), pp. 199-219, 1990.

[100] R. Zazkis, E. Dubinsky, J. Dautermann, *Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4*, Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), pp. 435-457, 1996.

[101] W. Zimmerman, S. Cunningham, *Editor's introduction: What is mathematical visualization?* in *Visualization in teaching and learning mathemati*cs, W. Zimmerman and S. Cunningham, eds., DC: The Mathematical Association of America, Washington, pp. 1-8, 1991.

ДОДАТАК

SUMMARY

INTERACTIVE MULTIMEDIA IN TEACHING MATHEMATICS

This PhD thesis presents the benefits and importance of using multimedia in the math classes using selected examples of multimedia lessons from isometric transformations, regular polyhedral and definite integral. The research presented in the thesis was carried out among 150 first year students of the Faculty of Architecture, the Faculty of Civil Construction Management and the Faculty of Entrepreneurial Business of the UNION "Nikola Tesla" University, Belgrade, Serbia. Each group of 50 students was divided into two equal groups of students, one of which had the traditional lectures, while the other one had the interactive multimedia lessons. All three topics were presented to students of the Faculty of Architecture and the Faculty of Civil Construction Management while only definitive integral was presented to students of the Faculty of Entrepreneurial Business. The main source of information in multimedia lectures were the software’s created in Macromedia Flash, with the same definitions, theorems, examples and tasks as well as in traditional lectures but with emphasized visualization possibilities, animations, illustrations, etc. Both groups were tested after the lectures. In the multimedia groups students showed better theoretical, practical and visual knowledge. Besides that, survey carried out at the end of the research clearly showed that students from multimedia groups were highly interested in interactive multimedia learning.

Keywords: interactive multimedia, multimedia learning, multimedia lessons, isometric transformations, regular polyhedral, definite integral.

БИОГРАФИЈА

Марина Миловановић је рођена 16.07.1976. године у Нишу. Основну школу и гимназију је завршила у Јагодини са просеком 5,00.

Дипломирала је на Математичком факултету Универзитета у Београду 07.03.2000. године са просечном оценом 8,39 и стекла звање дипломирани математичар – професор математике и рачунарства.

Магистарску тезу „Коришћење мултимедија за учење изометријских трансформација” одбранила је 25.01.2005. године, под менторством др Душана Тошића, редовног професора Математичког факултета Универзитета у Београду.

У периоду од 2000. до 2001. године радила је на Математичком факултету, а од 2001. до 2006. на Шумарском факултету Универзитета у Београду као асистент. У том периоду држала је вежбе из предмета: Информатика, Информациони системи и Информатика у шумарству. Од 2006. године ради као асистент и наставник на факултетима Универзитета Унион „Никола Тесла” у Београду (на Факултету за градитељски менаџмент, Факултету за предузетнички бизнис, Факултету за менаџмент некретнина и Факултету за екологију и заштиту животне средине) на следећим предметима: Математика I, Математика II, Математика III, Математика, Пословна математика, Пословна статистика, Примена пословних софтвера, Коришћење мултимедија.

Аутор је 27 научних радова, од којих су 4 објављена у часописима међународног значаја. Учествовала је на 14 међународних скупова чија су саопштења штампана у целини и 6 чија су саопштења штампана у изводу. Аутор је две збирке задатака, као и поглавља у међународној монографији. Била је учесник на једном међународном и три научно-истраживачка пројекта Министарства за науку и заштиту животне средине Републике Србије. Учествовала је и била предавач на семинарима у Математичкој гимназији у Београду и математичком друштву „Архимедес”.