Univerzitet u Kragujevcu
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET

Dejan Bojović

DIFERENCIJSKE SHEME ZA PARABOLIČKE PROBLEME S GENERALISANIM REŠENJIMA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Kragujevac, 1999.

SADRŽAJ

UVOD

Metoda konačnih razlika je jedna od najznačajnijih metoda za približno rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina. Jedan od problema koji se javlja pri korišćenju ove metode je i problem konstrukcije konvergentnih diferencijskih shema. U okviru tog problema od interesa je uspostavljanje veze izmedju glatkosti ulaznih podataka i brzine konvergencije diferencijskih shema.

U slučaju linearnih parcijalnih jednačina drugog reda paraboličkog tipa izgradjena je kompletna teorija egzistencije i jedinosti rešenja osnovnih početno–graničnih problema u anizotropnim prostorima Soboljeva $W_2^{s,s/2}(Q)$. Zato možemo za ocenu brzine konvergencije koristiti diferencijske analoge ovakvih normi.

Neka je $u = u(x,t)$ rešenje početno–graničnog problema i v rešenje odgovarajuće diferencijske sheme. Za ocenu brzine kovergencije paraboličke diferencijske sheme oblika:

$$(1) \qquad \|u - v\|_{W_2^{r,r/2}(Q_{h\tau})} \leq C(h + \sqrt{\tau})^{s-r} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)} \quad , \quad s > r$$

reći ćemo da je saglasna sa glatkošću rešenja polaznog početno–graničnog problema. Ako koraci h i τ zadovoljavaju prirodnu relaciju:

$$k_1 h^2 \leq \tau \leq k_2 h^2 \quad , \quad k_1, k_2 = const > 0$$

ocena (1) se svodi na oblik:

$$(2) \qquad \|u - v\|_{W_2^{r,r/2}(Q_{h\tau})} \leq C h^{s-r} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)} \quad , \quad s > r.$$

U slučaju jednačina sa promenljivim koeficijentima konstanta C zavisi od normi koeficijenata. Ako koeficijenti ne zavise od t, dobijamo ocene oblika:

$$(3) \qquad \|u - v\|_{W_2^{r,r/2}(Q_{h\tau})} \leq C h^{s-r} \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_p^{s-1}(\Omega)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)} \quad , \quad s > r.$$

U slučaju da koeficijenti zavise i od t, što će posebno biti razmatrano, imamo ocenu oblika:

$$(4) \quad \|u - v\|_{W_2^{r,r/2}(Q_{h\tau})} \leq C h^{s-r} \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_p^{s-1,(s-1)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)} \quad , \quad s > r.$$

Ocene oblika (1)–(3) , najpre za celobrojne s, a zatim i za razlomljene s dobijene su u radovima [11],[17],[18],[19],[23],[26],[51]. Tehnika izvodjenja ovih ocena zasnovana je na lemi Bramble–Hilberta i njenim generalizacijama. Cilj ove disertacije je dobijanje ocena oblika (4), kao i uvodjenje alternativne tehnike izvodjenja ocena brzine konvergencije zasnovane na teoriji interpolacije [5],[29],[30],[56].

Prva glava sadrži osnovne pojmove i tvrdjenja potrebne za postavku početno–graničnih paraboličkih problema s generalisanim rešenjima i za ispitivanje brzine konvergencije odgovarajućih diferencijskih shema.

U drugoj glavi razmatramo problem s promenljivim operatorom $L = L(t)$, u oblasti $Q = (0,1)^n \times (0,T)$, $n = 1,2$. Uz pretpostavke da su koeficijenti monotono opadajuće funkcije po promenljivoj t i o jednačini bez mešovitih izvoda dobijamo "dobre" apriorne ocene u $W_2^{2,1}$–normi. Tehnikom zasnovanom na lemi Bramble–Hilberta izvodimo ocenu oblika (4), za $r = 2$ i $2 < s \leq 4$.

U trećoj glavi razmatramo problem s promenljivim operatorom $L = L(t)$, u oblasti $Q = (0,1)^2 \times (0,T)$, i izvodimo ocenu oblika (4) za $r = 1$ i $1 < s \leq 3$. Tehnika izvodjenja zasnovana je, takodje, na lemi Bramble–Hilberta . Primetimo da poseban problem predstavlja izvodjenje "dobre" apriorne ocene u $W_2^{1,1/2}$–normi.

U četvrtoj glavi dokazujemo konvergenciju diferencijske sheme paraboličkog tipa u L_2–normi. U konstrukciji diferencijske sheme koristimo nestandardni operator usrednjenja koji tačno aproksimira izvode po promenljivoj x. Izvodimo ocenu oblika (3) za $r = 0$ i $s = 2$.

U petoj glavi uvodimo interpolacionu tehniku izvodjenja ocena brzine konvergencije. Najpre izvodimo ocene oblika (3) za $s = 2$, $s = 3$ i $s = 4$, a zatim interpolacijom ovih ocena dobijajmo ocene razlomljenog reda za $2 < s < 3$ i $3 < s < 4$.

Konačno, zahvalio bih se profesoru Bošku Jovanoviću, kako na pomoći prilikom izrade ove disertacije, tako i na izuzetno korektnom odnosu u toku celih poslediplomskih studija. Nadam se da će se naša saradnja nastaviti.

I MATEMATIČKI APARAT

1. PROSTORI SOBOLJEVA

Uvedimo najpre pojmove i oznake koje ćemo koristiti u daljem radu.

Otvoren i povezan skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazivamo oblašću. Neka $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$. Nosačem funkcije f, u oznaci supp$f$, nazivaćemo zatvorenje skupa tačaka u kojima je $f(x) \neq 0$. Parcijalne izvode označavaćemo na sledeći način:

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

Koristićemo sledeće funkcionalne prostore:

$C^m(\Omega)$ = prostor funkcija neprekidnih u Ω, zajedno sa svim parcijalnim izvodima reda $\leq m$ $(m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$,

$C(\Omega) = C^0(\Omega)$,

$C_0^m(\Omega)$ = potprostor $C^m(\Omega)$ koji čine funkcije s kompaktnim nosačem u Ω ,

$C^m(\overline{\Omega})$ = prostor funkcija neprekidnih na $\overline{\Omega}$ zajedno sa svim parcijalnim izvodima reda $\leq m$, sa normom :

$$||f||_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)| \ ,$$

$L_p(\Omega)$ = Lebegov prostor merljivih funkcija na Ω, za koje je:

$$||f||_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad , \quad 1 \leq p < \infty \ ,$$

odnosno,

$$||f||_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \mathrm{ess} |f(x)| < \infty \, .$$

$L_{p,loc}(\Omega)$ = prostor lokalno integrabilnih funkcija:
$f(x) \in L_{p,loc}(\Omega)$ ako $f(x) \in L_p(\Omega')$ za svaku ograničenu podoblast $\Omega' \Subset \Omega$.

Za hiperpovrš $S \subset \mathbb{R}^n$ dimenzije $n-1$ kažemo da je klase C^m, u oznaci $S \in C^m$, ako se u okolini svake tačke $x_0 \in S$ može predstaviti jednačinom:

$$\varphi_{x_0}(x) = 0 ,$$

pri čemu $\varphi_{x_0} \in C^m$. Za hiperpovrš S kažemo da je neprekidna po Lipschitzu ako se može podeliti na konačno mnogo delova S_j od kojih se svaki može predstaviti jednačinom oblika:

$$x_{i_j} = \psi_j(x_1, \dots, x_{i_j-1}, x_{i_j+1}, \dots, x_n) ,$$

pri čemu je funkcija ψ_j neprekidna po Lipschitzu. Za oblast Ω kažemo da je Lipschitzova ako joj je granica neprekidna po Lipschitzu.

U skupu funkcija $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ definišimo konvergenciju na sledeći način.

Definicija 1. *Za niz funkcija $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ kažemo da konvergira ka funkciji $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

1. Postoji kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ takav da $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ za svako j,

2. Za svaki multiindeks α, niz $D^\alpha\varphi_j$ uniformno konvergira ka $D^\alpha\varphi$ na K, kad $j \to \infty$.

Prostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ snabdeven ovom topologijom nazivaćemo prostorom osnovnih funkcija i označavati sa $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ako je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ sa $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ označavaćemo skup osnovnih funkcija čiji su nosači u Ω.

Linearne neprekidne funkcionale na skupu $\mathcal{D}(\Omega)$ nazivamo distribucijama, a njihov skup označavamo sa $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vrednost distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ na osnovnoj funkciji $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ označavamo sa:

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}$$

Ako je $f(x) \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ tada je sa:

$$\varphi(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$$

definisan jedan linearan ograničen funkcional na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Drugim rečima, svaka lokalno integrabilna funkcija indukuje jednu distribuciju. Ovakve distribucije nazivamo regularnim. Svaku regularnu distribuciju izjednačavaćemo s lokalno integrabilnom funkcijom koja je indukuje i pisati:

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$$

Množenje distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ glatkom funkcijom $a \in C^\infty(\Omega)$ definiše se na sledeći način:

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,.$$

Diferenciranje distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiše se na sledeći način:

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,.$$

Primetimo da je svaka distribucija beskonačno puta diferencijabilna.

Definišimo sada prostor Soboljeva. Neka je $k \in \mathbb{N}_0$ i $1 \le p \le \infty$. Prostor Soboljeva $W_p^k(\Omega)$ definiše se na sledeći način:

$$W_p^k(\Omega) = \{ f \in L_p(\Omega) : D^\alpha f \in L_p(\Omega) \,,\ |\alpha| \le k \} \,.$$

Pri tome se izvodi shvataju u smislu distribucija. Specijalno, za $k = 0$, označavaćemo:

$$W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega).$$

Norma u $W_p^k(\Omega)$ definiše se na sledeći način:

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{k} |f|^p_{W_p^i(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \,, \ 1 \le p < \infty \,.$$

gde je:

$$|f|_{W_p^i(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=i} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \,,$$

odnosno:

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{0 \le i \le k} |f|_{W_\infty^i(\Omega)} \,,$$

gde je:

$$|f|_{W_\infty^i(\Omega)} = \max_{|\alpha|=i} \|D^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega)} \,.$$

$W_p^k(\Omega)$ je Banahov prostor. Specijalno, $W_2^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom:

$$(f, g)_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega D^\alpha f(x) D^\alpha g(x)\, dx \,.$$

Za $0 < \sigma < 1$ označimo:

$$|f|_{W_p^\sigma(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dx dy\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \le p < \infty \, ,$$

odnosno:

$$|f|_{W_\infty^\sigma(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\sigma} \, .$$

Prostor Soboljeva $W_p^s(\Omega)$ s razlomljenim pozitivnim indeksom $s = [s] + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, definiše se kao skup funkcija iz $W_p^{[s]}(\Omega)$, za koje je konačna norma:

$$\|f\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\|f\|^p_{W_p^{[s]}(\Omega)} + |f|^p_{W_p^s(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \le p < \infty \, ,$$

gde je:

$$|f|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=[s]} |D^\alpha f|^p_{W_p^{s-[s]}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \quad ,$$

odnosno:

$$\|f\|_{W_\infty^s(\Omega)} = \|f\|_{W_\infty^{[s]}(\Omega)} + |f|_{W_\infty^s(\Omega)} \, ,$$

gde je:

$$|f|_{W_\infty^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=[s]} |D^\alpha f|_{W_\infty^{s-[s]}(\Omega)} \, .$$

Zatvorenje skupa $\mathcal{D}(\Omega)$ u normi prostora $W_p^s(\Omega)$ predstavlja potprostor $W_p^s(\Omega)$ koji ćemo označavati sa $\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega)$.

U teoriji prostora Soboljeva fundamentalnu ulogu imaju teoreme potapanja.

Teorema 1. *Neka je $f \in W_p^s(\Omega)$, $s > 0$ i neka je granica oblasti Ω neprekidna po Lipschitzu. Tada važe sledeća potapanja:*

a) ako je $sp < n$ tada

$$W_p^s(\Omega) \subseteq L_q(\Omega) \quad , \quad p \le q \le \frac{np}{n - sp} \quad ,$$

b) ako je $sp = n$ tada

$$W_p^s(\Omega) \subseteq L_q(\Omega) \quad , \quad p \le q < \infty \quad ,$$

c) ako je $sp > n$ tada

$$W_p^s(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega}).$$

Teorema 2. *Neka je* $0 \leq t \leq s < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$ *i* $s - \frac{n}{p} \geq t - \frac{n}{q}$. *Tada važi:*

$$W_p^s(\Omega) \subseteq W_q^t(\Omega).$$

Teorema 3. *Neka* $f \in W_p^s(\Omega)$, $s > 1/p$, $s \neq$ *ceo broj* $+ 1/p$, *i neka je granica oblasti* Ω *dovoljno glatka* ($\Gamma \in C^{[s]^- +1}$). *Tada postoji trag funkcije* f *na granici* Γ *koji pripada prostoru* $W_p^{s-1/p}(\Gamma)$ *i važi ocena:*

$$\|f\|_{W_p^{s-1/p}(\Gamma)} \leq C\|f\|_{W_p^s(\Omega)} .$$

2. ANIZOTROPNI PROSTORI SOBOLJEVA

Često se pojavljuju funkcije koje imaju različitu glatkost po pojedinim promenljivim, kao, na primer, u slučaju rešenja paraboličkog problema. Prostori takvih funkcija nazivaju se anizotropnim.

Neka je $\mathbb{R}_+$ skup nenegativnih realnih brojeva. U ovom odeljku elemente skupa $\mathbb{R}_+^n$ nazivaćemo multiindeksima. Za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}_+^n$ označimo:

$$[\alpha] = ([\alpha_1], [\alpha_2], \ldots, [\alpha_n])^T \quad \text{i} \quad [\alpha]^- = ([\alpha_1]^-, [\alpha_2]^-, \ldots, [\alpha_n]^-)^T$$

gde je $[\alpha_i]$ = najveći ceo broj $\leq \alpha_i$ i $[\alpha_i]^-$ = najveći ceo broj $< \alpha_i$. Uvedimo i konačne razlike:

$$\Delta_{i,h} f(x) = f(x + hr_i) - f(x), \quad h \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

gde su $r_1, r_2, \ldots, r_n$ jedinični vektori koordinatnih osa u $\mathbb{R}^n$.

Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$, s granicom neprekidnom po Lipschitzu. Za $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ i $1 \leq p < \infty$ definišimo polunormu $|f|_{\alpha,p}$ na sledeći način:

$$|f|_{\alpha,p}^p = \|f\|_{L_p(\Omega)}^p, \quad \text{za } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

$$|f|_{\alpha,p}^p = \int_\Omega \int_{\Omega_i(x)} \frac{|\Delta_{i,h_i} f(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i}}\, dh_i dx, \quad \text{za } 0 < \alpha_i < 1, \; \alpha_k = 0, \; \forall k \neq i,$$

$$|f|_{\alpha,p}^p = \int_\Omega \iint_{\Omega_{ij}(x)} \frac{|\Delta_{i,h_i}\Delta_{j,h_j} f(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i}|h_j|^{1+p\alpha_j}}\, dh_i dh_j dx,$$

$$\text{za } 0 < \alpha_i, \alpha_j < 1, \; \alpha_k = 0, \; \forall k \neq i, j,$$

....

$$|f|_{\alpha,p}^p = \int_\Omega \int \cdots \int_{\Omega_{1\ldots n}(x)} \frac{|\Delta_{1,h_1} \cdots \Delta_{n,h_n} f(x)|^p}{|h_1|^{1+p\alpha_1} \cdots |h_n|^{1+p\alpha_n}}\, dh_1 \cdots dh_n dx,$$

$$\text{za } 0 < \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n < 1,$$

$$|f|_{\alpha,p}^p = |D^{[\alpha]} f|_{\alpha-[\alpha],p}^p, \quad \text{ako je neko } \alpha_k \geq 1.$$

Ovde je označeno:

$$\Omega_i(x) = \{h_i : \ x + h_i r_i \in \Omega\} \ ,$$
$$\Omega_{ij}(x) = \{(h_i, h_j)^T : \ x + c_i h_i r_i + c_j h_j r_j \in \Omega, \ c_i, c_j = 0, 1\} \ .$$

....

$$\Omega_{1 \ \ n}(x) = \{(h_1 \ldots, h_n)^T : \ x + \sum_{k=1}^{n} c_k h_k r_k \in \Omega, \ c_k = 0, 1\} \ .$$

Za $p = \infty$ integrali u definiciji se zamenjuju sa sup ess:

$$|f|_{\alpha,\infty} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \ , \qquad \text{za } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \ ,$$
$$|f|_{\alpha,\infty} = \sup_{x\in\Omega, h_i \in \Omega_i(x)} \text{ess} \frac{|\Delta_{i,h_i} f(x)|}{|h_i|^{\alpha_i}} \ , \text{ za } 0 < \alpha_i < 1, \ \alpha_k = 0, \ \forall\, k \neq i \ ,$$

itd.

Konačan skup multiindeksa $A \subset \mathbb{R}^n_+$ nazivaćemo regularnim ako važi: $0 = (0, 0, \ldots, 0)^T \in A$ i za svako $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in A$ postoje realni brojevi $\beta_k \geq \alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ takvi da $\beta_k r_k \in A$.

Ako je A regularan skup multiindeksa definišimo norme:

$$\|f\|_{W_p^A(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha\in A} |f|^p_{\alpha,p} \right)^{\frac{1}{p}} \ , \ 1 \leq p < \infty \ ,$$
$$\|f\|_{W_\infty^A(\Omega)} = \max_{\alpha\in A} |f|_{\alpha,\infty} \ .$$

Zatvorenje $C^\infty(\overline{\Omega})$ u normi $\|\cdot\|_{W_p^A(\Omega)}$ označavaćemo sa $W_p^A(\Omega)$.

Neka je, dalje, Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ i $\mathcal{H}$ proizvoljan Hilbertov prostor. Soboljevski prostori $W_p^s(\Omega, \mathcal{H})$ funkcija $f: \Omega \to \mathcal{H}$ definišu se analogno sa prostorima $W_p^s(\Omega)$, pri čemu se apsolutna vrednost zamenjuje sa normom prostora $\mathcal{H}$. Tako je, na primer:

$$\|f\|_{L_p(\Omega,\mathcal{H})} = \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p_{\mathcal{H}} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \leq p < \infty \ ,$$
$$|f|_{W_p^i(\Omega,\mathcal{H})} = \left(\sum_{|\alpha|=i} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(\Omega,\mathcal{H})} \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots \ ,$$
$$|f|_{W_p^\sigma(\Omega,\mathcal{H})} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_{L_p(\Omega,\mathcal{H})}}{|x-y|^{n+\sigma p}} \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 0 < \sigma < 1, \ \text{itd.}$$

Neka je $Q = \Omega \times I$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i $I = (0,T) \subset \mathbb{R}$. Ako su s i r nenegativni realni brojevi, anizotropni prostor Soboljeva $W_p^{s,r}(Q)$ definišemo na sledeći način (v. Jovanović [27]):

$$W_p^{s,r}(Q) = L_p(I, W_p^s(\Omega)) \cap W_p^r(I, L_p(\Omega)) \ ,$$

pri čemu se norma definiše sa:

$$\|f\|_{W_p^{s,r}(Q)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_{W_p^s(\Omega)}^p \, dt + \|f\|_{W_p^r(I,L_p(\Omega))}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \qquad 1 \le p < \infty \ ,$$

s odgovarajućom izmenom za $p = \infty$.

$W_p^{s,r}(Q)$ se svodi na prostor oblika $W_p^A(Q)$. Na primer, ako $s \in \mathbb{N}_0$ tada je:

$$\begin{aligned} A = \big\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0)^T : \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \ \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le s \big\} \\ \cup \big\{ (0, \ldots, 0, \beta)^T : \beta \in \mathbb{N}_0, \ \beta < r \big\} \cup \big\{ (0, \ldots, 0, r)^T \big\} \ . \end{aligned}$$

U daljem radu koristićemo prostor $W_2^{s,s/2}(Q) = L_2(I, W_2^s(\Omega)) \cap W_2^{s/2}(I, L_2(\Omega))$. Kod njega možemo izdvojiti najstariju polunormu, stavljajući:

$$|f|_{W_2^{s,s/2}(Q)} = \left(\int_0^T |f(t)|_{W_2^s(\Omega)}^2 \, dt + |f|_{W_2^{s/2}(I,L_2(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Anizotropni prostori takodje zadovoljavaju odredjene teoreme potapanja. U daljem radu biće nam potrebna sledeća tvrdjenja [3],[37],[50].

Teorema 1. *Neka* $f \in W_2^{s,r}(Q)$, $s, r > 0$ *i neka* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *i* $k \in \mathbb{N}_0$ *zadovoljavaju uslov* $\dfrac{|\alpha|}{s} + \dfrac{k}{r} \le 1$. *Tada* $D_x^\alpha D_t^k f \in W_2^{\mu,\nu}(Q)$, *gde je* $\dfrac{\mu}{s} = \dfrac{\nu}{r} = 1 - \left(\dfrac{|\alpha|}{s} + \dfrac{k}{r} \right)$, *a* D_x *i* D_t *parcijalni izvodi po* $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *odnosno* t.

Teorema 2. *Ako* $f \in W_2^{s,r}(Q)$, $s \ge 0$, $r > 1/2$, *tada za* $k < r - 1/2$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ *postoji trag* $\dfrac{\partial^k f(x,0)}{\partial t^k} \in W_r^q(\Omega)$, *gde je* $q = \dfrac{s}{r}\left(r - k - \dfrac{1}{2} \right)$.

Teorema 3. *a) ako je* $sp > n + 2$ *tada*

$$W_p^{s,s/2}(Q) \subseteq C(\overline{Q}) \ ,$$

b) ako je $1 \le p \le q \le \infty, 0 \le t \le s < \infty$ *i* $s - \dfrac{n+2}{p} \ge t - \dfrac{n+2}{q}$ *tada*

$$W_p^{s,s/2}(Q) \subseteq W_q^{t,t/2}(Q).$$

Uvedimo i prostor $\widehat{W}_2^{s,s/2}(Q) = W_2^{(s, \quad ,s,s/2)}(Q)$. Važi: $W_2^{s,s/2}(Q) = \widehat{W}_2^{s,s/2}(Q)$, uz ekvivalentnost normi [27].

3. LEMA BRAMBLE–HILBERTA

Lema Bramble–Hilberta [7],[8],[13] ima fundamentalnu ulogu za ocenjivanje linearnih funkcionala u prostorima Soboljeva.

Lema 1. *Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ s Lipschitzovom granicom, s–pozitivan realan broj i $\mathcal{P}_s$ skup polinoma (od n promenljivih) stepena $< s$. Tada postoji kostanta $C = C(\Omega, s, p)$ takva da je:*

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_s} \|f - P\|_{W_p^s(\Omega)} \leq C|f|_{W_p^s(\Omega)} \ , \ \forall f \in W_p^s(\Omega) \ .$$

Ova lema se lako prenosi na anizotropne prostore soboljevskog tipa. Neka je $A \subset \mathbb{E}_+^n$ regularan skup nenegativnih realnih multiindeksa. Sa $\kappa(A)$ označimo konveksan omotač skupa A u $\mathbb{R}^n$. Neka je $\partial_0\kappa(A)$ deo granice skupa $\kappa(A)$ koji ne pripada koordinatnim hiperravnima i $A_\partial = A \cap \overline{\partial_0\kappa(A)}$. Neka je B podskup od A_∂, takav da je $B \cup \{0\}$ regularan skup multiindeksa, i $\nu(B) = \{\beta \in \mathbb{N}_0^n \ : D^{[\alpha]^-} x^\beta \equiv 0, \ \forall \alpha \in B\}$. Sa $\mathcal{P}_B$ označimo skup polinoma oblika:

$$P(x) = \sum_{\alpha \in \nu(B)} p_\alpha x^\alpha \ .$$

Važe sledeći rezultati [11],[20]:

Lema 2. *Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ s Lipschitzovom granicom i neka skupovi multiindeksa A i B zadovoljavaju gornje uslove. Tada postoji konstanta $C = C(\Omega, A, B, p)$ takva da je:*

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_B} \|f - P\|_{W_p^A(\Omega)} \leq \sum_{\alpha \in B} |f|_{\alpha,p} \ , \ \forall f \in W_p^A(\Omega) \ .$$

Sledeća tvrdjenja su neposredna posledica leme 2.

Lema 3. *Neka je $\eta(f)$ ograničen linearan funkcional koji se anulira na $W_p^A(\Omega)$ kada je $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \nu(B)$. Tada postoji konstanta $C = C(\Omega, A, B, p)$ takva da za svako $f \in W_p^A(\Omega)$ važi nejednakost:*

$$|\eta(f)| \leq C \sum_{\alpha \in B} |f|_{\alpha,p} \ .$$

Lema 4. *Neka A_k, B_k i Ω_k u $\mathbb{R}^{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ zadovoljavaju iste uslove kao A, B i Ω. Neka je $\eta(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ ograničen polilinearan funkcional na $W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}^{A_2}(\Omega_2) \times \cdots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$, koji se anulira ako je neki od njegovih argumenata oblika $f_k = x^\alpha$, $x \in \Omega_k$, $\alpha \in \nu(B_k)$. Tada postoji konstanta $C = C(\Omega_1, A_1, B_1, p_1, \Omega_2, A_2, B_2, p_2, \ldots, \Omega_m, A_m, B_m, p_m)$ takva da za svako $(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}^{A_2}(\Omega_2) \times \cdots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$ važi nejednakost:*

$$|\eta(f_1, f_2, \ldots, f_m)| \leq C \prod_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \in B_k} |f_k|_{\alpha,p_k} \ .$$

4. MULTIPLIKATORI U PROSTORIMA SOBOLJEVA

Neka su V i W dva realna funkcionalna prostora sadržana u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Za funkciju a definisanu na Ω kažemo da je multiplikator iz V u W ako za svako $f \in V$ proizvod $a(x)f(x)$ pripada prostoru W. Skup ovakvih multiplikatora označavamo sa $M(V \to W)$. Specijalno, za $V = W$ stavljamo $M(V) = M(V \to V)$.

Ograničimo se na multiplikatore $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$, $1 \leq p < \infty$, $t \geq s \geq 0$. Navedimo neke osnovne rezultate o multiplikatorima u prostorima Soboljeva.

Lema 1. *Ako* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$, $t \geq s \geq 0$, *tada:*

$$\begin{aligned} a &\in M(W_p^{t-s}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)) , \\ a &\in M(W_p^{t-\sigma}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n)) \quad , \quad 0 < \sigma < s, \\ D^\alpha a &\in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)) \quad , \quad |\alpha| \leq s , \\ D^\alpha a &\in M(W_p^{t-s+|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)) \quad , \quad |\alpha| \leq s. \end{aligned}$$

Lema 2. *Neka je* $t \geq s \geq 0$. *Ako* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$ *tada* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^{n+k}) \to W_p^s(\mathbb{R}^{n+k}))$. *Takodje* $a \in M(W_p^{t,t/2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to W_p^{s,s/2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}))$.

Lema 3. *Ako* $a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$, $s \geq k$, *za svaki multiindeks* α, *tada diferencijalni operator:*

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

definiše neprekidno preslikavanje $W_p^s(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 4. *Neka operator (1) definiše neprekidno preslikavanje iz* $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ *u* $W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ *i neka je* $p(s-k) > n$, $p > 1$. *Tada* $a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$ *za svaki multiindeks* α.

Prethodni rezultati se mogu preneti i na prostore Soboljeva u oblasti. Preciznije, ako je Ω Lipschitzova oblast u $\mathbb{R}^n$ i a pripada prostoru $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$ tada postoji produženje $\tilde{a}$ na $\mathbb{R}^n$ koje pripada prostoru $M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$. Važi i obrnuto: suženje multiplikatora $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$ na Ω pripada prostoru $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$.

Lema 5. *Neka je* Ω *ograničena Lipschitzova oblast u* $\mathbb{R}^n$, $s > 0$ *i* $p > 1$. *Ako* $a \in W_q^t(\Omega)$, *gde je:*

$$\begin{aligned} &q = p \ , \quad t = s \ , && \textit{kada je} \quad sp > n, \quad \textit{odnosno} \\ &q \geq n/s \ , \ t = s + \varepsilon \notin \mathbb{N} \ , \ \varepsilon > 0 \ , && \textit{kada je} \quad sp \leq n \ , \end{aligned}$$

tada $a \in M(W_p^s(\Omega))$.

Lema 6. *Neka je Ω ograničena Lipschitzova oblast u $\mathbb{R}^n$, $s > 0$ i $p > 1$. Ako $a \in L_q(\Omega)$, gde je:*

$$\begin{aligned} &q = p\ , && \text{kada je} && sp > n\ , \\ &q > p\ , && \text{kada je} && sp = n\ ,\ i \\ &q \geq n/s\ , && \text{kada je} && sp < n\ , \end{aligned}$$

tada $a \in M(W_p^s(\Omega) \to L_p(\Omega))$.

5. ELEMENTI TEORIJE INTERPOLACIJE

Opisaćemo ukratko osnovnu ideju teorije interpolacije (v. Triebel [50]). Neka su A_1 i A_2 dva Banahova prostora linearno i neprekidno potopljeni u linearni topološki prostor $\mathcal{A}$, tj. $A_1 \subset \mathcal{A}$, $A_2 \subset \mathcal{A}$, gde simbol $\subset$ označava inkluziju u skupovno-topološkom smislu. Tada par $\{A_1, A_2\}$ nazivamo interpolacioni par. Neka je $\{B_1, B_2\}$ drugi interpolacioni par, pri čemu je $B_1 \subset \mathcal{B}$, $B_2 \subset \mathcal{B}$, gde je $\mathcal{B}$ linearni topološki prostor. Neka je dalje T linearni operator iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$, takav da su njegove restrikcije na A_i, $i = 1, 2$ linearni neprekidni operatori iz A_i u B_i.

Neka su dalje, A i B Banahovi prostori, i $A \subset \mathcal{A}$, $B \subset \mathcal{B}$. Prostori A i B raspolažu interpolacionim svojstvom ako je restrikcija svakog operatora T (sa gornjim osobinama), na A linearni neprekidni operator iz A u B.

Jedan od dva različita pristupa u teoriji interpolacije podrazumeva odredjivanje "preslikavanja" $\mathcal{F}$ koje svakom interpolacionom paru $\{A_1, A_2\}$ pridružuje Banahov prostor $\mathcal{F}(\{A_1, A_2\})$, tako da prostori $A = \mathcal{F}(\{A_1, A_2\})$ i $B = \mathcal{F}(\{B_1, B_2\})$ raspolažu interpolacionim svojstvom. Drugi pristup podrazumeva opisivanje "svih" prostora A i B sa interpolacionim svojstvom i svih "preslikavanja" $\mathcal{F}$.

Neka je $\{A_1, A_2\}$ interpolacioni par. Definišimo prostor $A_1 \cap A_2$ sa normom:

$$||a||_{A_1 \cap A_2} = \max\{||a||_{A_1}, ||a||_{A_2}\}$$

i prostor $A_1 + A_2 = \{a \in \mathcal{A} : a = a_1 + a_2,\ a_i \in A_i,\ i = 1, 2\}$ sa normom:

$$||a||_{A_1 + A_2} = \inf_{\substack{a = a_1 + a_2 \\ a_i \in A_i}} \{||a_1||_{A_1} + ||a_2||_{A_2}\}.$$

Jednostavno se pokazuje da su $A_1 \cap A_2$ i $A_1 + A_2$ Banahovi prostori i da važi:

$$A_1 \cap A_2 \subset A_i \subset A_1 + A_2\ ,\ i = 1, 2.$$

Uvedimo sada pojam kategorije, koju karakterišu sledeća dva svojstva :

1. Kategorija se sastoji od :

a) neke klase objekata $A, B, C, \ldots$

b) klase uzajamno disjunktnih nepraznih skupova $[A, B]$, pri čemu svakom uredjenom paru objekata (A, B) jednoznačno odgovara neki skup $[A, B]$. Elementi skupa $[A, B]$ nazivaju se morfizmi iz A u B.

2. Za svaku uredjenu trojku (A, B, C) definisana je kompozicija morfizama $[B, C] \times [A, B] \to [A, C]$.

Definicija 1. *Neka su Ξ_1 i Ξ_2 dve kategorije. Kovarijantni funktor je svako preslikavanje $\mathcal{F}$ Ξ_2 u Ξ_1, pri kome je slika $\mathcal{F}(A)$ objekta A iz Ξ_2 objekat u Ξ_1, a slika morfizma $f \in [A, B]$ iz Ξ_2– morfizam $\mathcal{F}(f) \in [\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)]$ iz Ξ_1.*

Uvedimo sada dve specijalne kategorije: kategoriju C_1 čiji su objekti Banahovi prostori $A, B, C, \ldots$, a morfizmi neprekidni linearni operatori $L \in \mathcal{L}(A, B)$, i kategoriju C_2 čiji su objekti interpolacioni parovi $\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}, \ldots$, a morfizmi $L \in \mathcal{L}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\})$, gde je $\mathcal{L}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\})$ skup neprekidnih linearnih operatora iz $A_1 + A_2$ u $B_1 + B_2$ čije restrikcije na A_i, $i = 1, 2$ pripadaju $\mathcal{L}(A_i, B_i)$, $i = 1, 2$.

Definicija 2. . *Kovarijantni funktor $\mathcal{F}: C_2 \rightarrow C_1$ naziva se interpolacionim funktorom ako važi:*
1. $A_1 \cap A_2 \subset \mathcal{F}(\{A_1, A_2\}) \subset A_1 + A_2$, za svaki interpolacioni par $\{A_1, A_2\}$,
2. za svaki morfizam $L \in \mathcal{L}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\})$, $\mathcal{F}(L)$ je restrikcija operatora L na $\mathcal{F}(\{A_1, A_2\})$.
Odgovarajući Banahov prostor $A = \mathcal{F}(\{A_1, A_2\})$ naziva se interpolacionim prostorom.

Primetimo da su $A_1 \cap A_2$ i $A_1 + A_2$ interpolacioni prostori.

Primedba. Može se pokazati da je ovakav pristup interpolaciji pomoću interpolacionog funktora dovoljno generalan, tj. da se svaki Banahov prostor sa interpolacionim svojstvom može predstaviti na pomenuti način.

Definicija 3. *$\mathcal{F}$ je interpolacioni funktor tipa θ, $0 < \theta < 1$, ako za sve interpolacione parove $\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}, \ldots$ i za svako $L \in \mathcal{L}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\})$ važi:*

$$\|L\|_{\mathcal{F}(\{A_1,A_2\}) \rightarrow \mathcal{F}(\{B_1,B_2\})} \leq C \|L\|_{A_1 \rightarrow B_1}^{1-\theta} \|L\|_{A_2 \rightarrow B_2}^{\theta}, \quad C = const \geq 1$$

($\|L\|_{A_i \rightarrow B_i}$ označava normu operatora $L: A_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$).
Ako je $C = 1$, $\mathcal{F}$ je tačan tipa θ.

Razmotrimo sada "K–metod" realne interpolacije.

Definicija 4. *Neka je $\{A_1, A_2\}$ interpolacioni par. Definišimo K–funkcional:*

$$K(t, a) = K(t, a, A_1, A_2) = \inf_{\substack{a \in A_1 + A_2 \\ a = a_1 + a_2 \\ a_i \in A_i}} \{\|a_1\|_{A_1} + t\|a_2\|_{A_2}\}$$

koji pri fiksiranom $t \in (0, \infty)$, predstavlja normu u prostoru $A_1 + A_2$ ekvivalentnu sa standardnom normom tog prostora.

Definicija 5. *Neka je* $\{A_1, A_2\}$ *interpolacioni par i* $0 < \theta < 1$. *Prostor* $(A_1, A_2)_{\theta,q}$ *definišemo na sledeći način:*

$$(A_1, A_2)_{\theta,q} = \left\{ a \in A_1 + A_2 : ||a||_{(A_1,A_2)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$
$$1 \leq q < \infty ,$$

odnosno:

$$(A_1, A_2)_{\theta,\infty} = \left\{ a \in A_1 + A_2 : ||a||_{(A_1,A_2)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,a) < \infty \right\} .$$

PRIMEDBA. Definicija prostora $(A_1, A_2)_{\theta,q}$ za $\theta \leq 0$ ili $\theta \geq 1$ i $q < \infty$ nema smisla jer je tada $(A_1, A_2)_{\theta,q} = \{0\}$. Takodje nema smisla ni slučaj $(A_1, A_2)_{\theta,\infty}$, $\theta < 0$ ili $\theta > 1$. Slučaj $(A_1, A_2)_{\theta,\infty}$, $\theta = 0$ ili $\theta = 1$ ima smisla ali ga nećemo razmatrati.

Sledeća teorema daje osnovna svojstva interpolacionih prostora dobijenih "K–metodom" interpolacije.

Teorema 1. *Neka je* $\{A_1, A_2\}$ *interpolacioni par. Tada važi:*

a) $(A_1, A_2)_{\theta,q}$ *za* $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ *je interpolacioni prostor za par* $\{A_1, A_2\}$, *a odgovarajući interpolacioni funktor je tačan tipa* θ, *tj.*

$$||L||_{(A_1,A_2)_{\theta,q} \to (B_1,B_2)_{\theta,q}} \leq ||L||_{A_1 \to B_1}^{1-\theta} ||L||_{A_2 \to B_2}^{\theta} ,$$

b) $(A_1, A_2)_{\theta,q} = (A_2, A_1)_{1-\theta,q}$,

c) Za $0 < \theta < 1$ *i* $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *važi:*

$$(A_1, A_2)_{\theta,1} \subset (A_1, A_2)_{\theta,q} \subset (A_1, A_2)_{\theta,p} \subset (A_1, A_2)_{\theta,\infty} ,$$

d) Ako je $A_1 \subset A_2$ *tada za* $0 < \theta < \eta < 1$, $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *važi :*

$$(A_1, A_2)_{\theta,q} \subset (A_1, A_2)_{\eta,p} ,$$

e) Ako je $A_1 = A_2$ *tada je:*

$$(A_1, A_2)_{\theta,q} = A_1 = A_2 ,$$

f) Postoji pozitivna konstanta $C_{\theta,q}$ *takva da za svako* $a \in A_1 \cap A_2$ *važi:*

$$||a||_{(A_1,A_2)_{\theta,q}} \leq C_{\theta,q} ||a||_{A_1}^{1-\theta} ||a||_{A_2}^{\theta} .$$

Može se pokazati da su prostori $W_2^s(\Omega)$ i $W_2^{s,s/2}(Q)$ interpolacioni prostori. Važe sledeće teoreme.

Teorema 2. *Za* $0 \le s_1, s_2 < \infty$, $s_1 \ne s_2$, $0 < \theta < 1$, $1 \le q < \infty$ *važi:*

$$(W_p^{s_1}(\mathbb{R}^n), W_p^{s_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)\ ,\ s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$$

gde je $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *prostor Besova* [14].

Za $q = p$ i razlomljene $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$, koristeći relaciju

$$B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = W_p^s(\mathbb{R}^n)$$

imamo

(1) $$(W_p^{s_1}(\mathbb{R}^n), W_p^{s_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = W_p^s(\mathbb{R}^n)\ ,\ s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$$

dok u slučaju p=2 relacija (1) važi bez ograničenja:

$$(W_2^{s_1}(\mathbb{R}^n), W_2^{s_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,2} = W_2^s(\mathbb{R}^n)$$

Iste relacije važe i za prostore Soboljeva u oblasti Ω s dovoljno glatkom granicom.

Teorema 3. *Neka je* $s_1, s_2, r_1, r_2 \ge 0$, $0 < \theta < 1$. *Tada je* [37]:

$$(W_2^{s_1,r_1}(Q), W_2^{s_2,r_2}(Q))_{\theta,2} = W_2^{s,r}(Q)\ ,$$

gde je $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$, $r = (1-\theta)r_1 + \theta r_2$.

Pored prethodnih teorema, od posebnog značaja za ovaj rad jeste i sledeća teorema

Teorema 4. *Neka su* A_1, A_2, B_1, B_2 *i* C_1, C_2 *tri para Banahovih prostora, takvih da je* $A_1 \subset A_2$, $B_1 \subset B_2$ *i* $C_1 \subset C_2$. *Neka je* $L(a,b)$ *neprekidan bilinearan operator iz* $A_2 \times B_2$ *u* C_2, *takav da njegova restrikcija na* $A_1 \times B_1$ *predstavlja neprekidan bilinearan operator iz* $A_1 \times B_1$ *u* C_1. *Tada je* L *neprekidan bilinearan operator iz* $(A_1, A_2)_{\theta,p} \times (B_1, B_2)_{\theta,q}$ *u* $(C_1, C_2)_{\theta,r}$, *gde je* $0 < \theta < 1$ *i* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ge 0$ *i važi:*

$$\|L\|_{(A_1,A_2)_{\theta,p}\times(B_1,B_2)_{\theta,q}\to(C_1,C_2)_{\theta,r}} \le \|L\|_{A_1\times B_1\to C_1}^{1-\theta}\|L\|_{A_2\times B_2\to C_2}^{\theta}.$$

Pored izloženog "K-metoda", pomenimo još i "J-metod" i "L-metod" realne interpolacije [2],[50], kao i metod kompleksne interpolacije [37],[50].

Za dalji rad biće nam potrebni i rezultati dobijeni interpolacijom pomoću pozitivnog operatora [37].

Neka su A_0 i A_1 dva separabilna Hilbert-ova prostora koji zadovoljavaju uslove:

i) $A_0 \subset A_1$ i

ii) A_0 je gust u A_1 sa neprekidnom injekcijom.

Neka je $\Lambda : A_0 \to A_1$ samokonjugovan operator, pozitivan u A_1, sa domenom $D(\Lambda) = A_0$, takav da je

$$(u, v)_{A_0} = (\Lambda u, \Lambda v)_{A_1}\ ,\quad \forall u, v \in A_0\ .$$

Definicija 6. *Neka su* A_0 *i* A_1 *napred uvedeni Hilbert-ovi prostori, a* Λ *gore definisani operator. Interpolacioni prostor* $[A_0, A_1]_\theta$, $0 \le \theta \le 1$, *definišemo kao domen operatora* $\Lambda^{1-\theta}$ *tj.:*

$$[A_0, A_1]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta})$$

sa normom

$$\|u\|_{[A_0, A_1]_\theta} = \left(\|u\|^2_{A_1} + \|\Lambda^{1-\theta} u\|^2_{A_1}\right)^{1/2} .$$

Teorema 5. *Interpolacioni prostori uvedeni definicijom 6 imaju sledeće osobine:*
a) $[A_0, A_1]_0 = A_0$ *i* $[A_0, A_1]_1 = A_1$,
b) A_0 *je gust u* $[A_0, A_1]_\theta$ *za* $\forall \theta \in [0, 1]$,
c) $\|u\|_{[A_0, A_1]_\theta} \le C \|u\|^{1-\theta}_{A_0} \|u\|^{\theta}_{A_1}$,
d) $[A_0, A_1]_{\theta_1} \subset [A_0, A_1]_{\theta_2}$ *za* $\theta_1 < \theta_2$,
e) $[A_0, A_1]_{\theta_1}$ *je gust u* $[A_0, A_1]_{\theta_2}$ *za* $\theta_1 < \theta_2$ *i*
f) $\big[[A_0, A_1]_{\theta_1}, [A_0, A_1]_{\theta_2}\big]_\theta = [A_0, A_1]_{(1-\theta)\theta_1 + \theta\theta_2}$.

Teorema 6. *Neka su* s_1 , s_2 , r_1 , $r_2 \ge 0$, $0 < \theta < 1$, *i* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Tada važi:*

$$\left[W_2^{s_1}\big((0,T); W_2^{r_1}(\Omega)\big), W_2^{s_2}\big((0,T); W_2^{r_2}(\Omega)\big)\right]_\theta = W_2^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}\big((0,T); W_2^{(1-\theta)r_1 + \theta r_2}(\Omega)\big).$$

6. EGZISTENCIJA GENERALISANIH REŠENJA

Razmotrimo prvi početno–granični problem za simetričnu linearnu paraboličku jednačinu, s promenljivim koeficijentima :

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f \quad &, \quad &(x,\, t) \in Q = \Omega \times (0,\, T] \quad , \\ &u = 0 \quad &, \quad &(x,\, t) \in \Gamma \times [0,\, T] \quad , \\ &u(x,\, 0) = u_0(x) \quad &, \quad &x \in \Omega \quad . \end{aligned}$$

gde je:

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,\, j=1}^{n} D_i \left(a_{ij}\, D_j u\right) + au\, .$$

Neka su ispunjeni sledeći uslovi (A):
I. Ω *je ograničena konveksna oblast u* $\mathbb{R}^n$, *s granicom* $\Gamma \in C^\infty$.
II. $a_{ij},\, a \in C^\infty(\overline{Q})$; $a_{ij} = a_{ji}$.
III. Operator $\mathcal{L}$ *je strogo eliptički u oblasti* $\overline{Q}$, *tj.*

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\, y_i\, y_j \ge c_0 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \quad , \quad c_0 > 0 \quad , \quad \forall\, (x,\, t) \in \overline{Q} \quad , \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad ,$$

$$a(x,\, t) \ge 0 \quad , \quad \forall\, (x,\, t) \in \overline{Q} \quad .$$

Uočimo takodje uslove saglasnosti:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\textit{Postoji funkcija } v \in W_2^{s,\,s/2}(Q) \textit{ takva da je:}\\
&v = 0 \quad , \quad (x,\,t) \in \Gamma \times [0,\,T] \quad ,\\
&v(x,\,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega \quad .\\
&\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{L}v\right)\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^k f(x,\,0)}{\partial t^k} \quad , \quad za \quad 0 \le k \le \left[\frac{s-3}{2}\right]^- \quad .
\end{aligned}
$$

Rešenje početno–graničnog problema (1) pripada prostoru $W_2^{s,\,s/2}(Q)$ pod sledećim uslovima [35],[37]:

a) Za $s \ge 2$, $s,\, s/2 \ne$ *ceo broj* $+ 1/2$:
ako $f \in W_2^{s-2,\,s/2-1}(Q)$, $u_0 \in W_2^{s-1}(\Omega)$ *i važe uslovi saglasnosti* (2).

b) Za $1 \le s < 3/2$:
ako $f \in \left(W_2^{2-s,\,1-s/2}(Q)\right)'$, $u_0 \in W_2^{s-1}(\Omega)$.

c) Za $0 < s < 1$:
ako $f \in \left(W_2^{2-s,\,1-s/2}(Q)\right)'$, $u_0 \in \left(W_2^{1-s}(\Omega)\right)'$.

d) Za $s \le 0$, $s \ne$ *ceo broj* $+ 1/2$:
ako $f \in \Xi^{s-2,\,s/2-1}(Q)$, $u_0 \in \Xi^{s-1}(\Omega)$,

gde je $\Xi^{s,s/2}(Q)$ prostor s težinom [27].

Rezultat se može proširiti i na interval $3/2 < s < 2$ ako ulazni podaci zadovoljavaju specijalne uslove saglasnosti.

Neki od uslova (A) mogu se oslabiti. Dovoljno je da koeficijenti jednačine (1) pripadaju odgovarajućim prostorima multiplikatora:

$$
\begin{gathered}
a_{ij} \in M\left(W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)\right) ,\\
a \in M\left(W_2^{s,s/2}(Q) \to W_2^{s-2,(s-2)/2}(Q)\right) .
\end{gathered}
$$

II PARABOLIČKI PROBLEMI S PROMENLJIVIM OPERATOROM: Konvergencija u $W_2^{2,1}$–normi

1. Postavka problema

Kao modelni zadatak, razmotrimo u oblasti $Q = \Omega \times (0,T] = (0,1) \times (0,T]$ prvi početno-granični problem za paraboličku jednačinu drugog reda s promenljivim koeficijentom:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\big(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\big) &= f\,, && (x,t) \in Q\,,\\
u &= 0\,, && (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]\,,\\
u(x,0) &= u_0(x)\,, && x \in \Omega\,.
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da generalisano rešenje problema (1) pripada anizotropnom prostoru Soboljeva $W_2^{s,s/2}(Q)$, $2 < s \leq 4$, da $f(x,t)$ pripada $W_2^{s-2,s/2-1}(Q)$ i da koeficijent $a = a(x,t)$ zadovoljava uslove:

$$
\begin{aligned}
&a \in W_{3/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)\,, \varepsilon > 0\,, && \text{za} \quad 2 < s \leq 5/2\,,\\
&a \in W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)\,, && \text{za} \quad 5/2 < s \leq 4\,.
\end{aligned}
$$

Ovi uslovi garantuju pripadnost koeficijenta $a(x,t)$ odgovarajućem prostoru multiplikatora $M\left(W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)\right)$. Pretpostavimo da je koficijent $a(x,t)$ monotono opadajuća funkcija po promenljivoj t i da je $a(x,t) \geq c_0 > 0$. Takodje ćemo smatrati da su ispunjeni i eventualni uslovi saglasnosti ulaznih podataka u tačkama (0,0) i (1,0) koji garantuju egzistenciju rešenja $u \in W_2^{s,s/2}(Q)$.

2. Diferencijska shema

Neka je ω uniformna mreža na $\Omega = (0,1)$ s korakom h, $\bar{\omega} = \omega \cup \{0,1\} = \omega \cup \gamma$, $\omega^+ = \omega \cup \{1\}$, $\omega^- = \omega \cup \{0\}$. Neka je θ_τ uniformna mreža na $(0,T)$ s korakom τ, $\theta_\tau^+ = \theta_\tau \cup \{T\}$, $\bar{\theta}_\tau = \theta_\tau \cup \{0,T\}$. Definišimo uniformnu mrežu u oblasti Q: $Q_{h\tau} = \omega \times \theta_\tau$, $Q_{h\tau}^+ = \omega \times \theta_\tau^+$ i $\overline{Q}_{h\tau} = \bar{\omega} \times \bar{\theta}_\tau$. Smatraćemo da je zadovoljen uslov:

$$k_1 h^2 \leq \tau \leq k_2 h^2\,, \qquad k_1, k_2 = const > 0\,.$$

Definišimo konačne razlike po x i t na uobičajen način:

$$v_x = \frac{v^+ - v}{h} = v_{\bar{x}}^+\,,$$
$$v_{x\bar{x}} = \frac{v^+ - 2v + v^-}{h^2}\,, \quad \text{gde je } v^\pm(x,t) = v(x \pm h, t)\,,$$
$$v_t(x,t) = \frac{v(x,t+\tau) - v(x,t)}{\tau} = v_{\bar{t}}(x, t+\tau).$$

Uvedimo i Steklovljeve operatore usrednjenja:

$$T_x^+ f(x,t) = \int_0^1 f(x + hx', t)\, dx' = T_x^- f(x+h, t)\,,$$
$$T_x^2 f(x,t) = T_x^+ T_x^- f(x,t) = \int_{-1}^1 (1 - |x'|) f(x + hx', t)\, dx'\,,$$
$$T_t^+ f(x,t) = \int_0^1 f(x, t + \tau t')\, dt' = T_t^- f(x, t+\tau)\,.$$

Ovi operatori su medjusobno komutativni i preslikavaju parcijalne izvode u konačne razlike, tj važi:

$$T_x^+ \left(D_x f(x,t)\right) = D_x \left(T_x^+ f(x,t)\right) = f_x(x,t)\,,$$
$$T_x^- \left(D_x f(x,t)\right) = D_x \left(T_x^- f(x,t)\right) = f_{\bar{x}}(x,t)\,,$$
$$T_x^2 \left(D_x^2 f(x,t)\right) = D_x^2 \left(T_x^2 f(x,t)\right) = f_{x\bar{x}}(x,t)\,,$$
$$T_t^- \left(D_t f(x,t)\right) = D_t \left(T_t^- f(x,t)\right) = f_{\bar{t}}(x,t)\,, \quad \text{itd.}$$

Početno-granični problem (1) aproksimirajmo na mreži $\overline{Q}_{h\tau}$ sledećom diferencijskom shemom:

(2)
$$\begin{aligned} v_{\bar{t}} + L_h v &= T_x^2 T_t^- f\,, && \text{u } Q_{h\tau}^+\,,\\ v &= 0\,, && \text{na } \gamma \times \bar{\theta}_\tau\,,\\ v &= u_0\,, && \text{na } \omega \times \{0\}\,,\end{aligned}$$

gde je

$$L_h v = -\frac{1}{2}((av_x)_{\bar{x}} + (av_{\bar{x}})_x) .$$

Shema (2) je standardna implicitna diferencijska shema s usrednjenom desnom stranom [27],[42]. Shema bez usrednjenja ne može se koristiti ako je $s \le 3.5$, jer tada $f(x,t)$ nije neprekidna funkcija.

Neka je u rešenje početno-graničnog problema (1) i v rešenje diferencijske sheme (2). Pošto je, na osnovu teoreme 1.2.3, $u(x,t)$ neprekidna funkcija za $2 < s \le 4$, definišimo grešku sa:

$$z = u - v .$$

Ovako definisana greška zadovoljava uslove:

$$(3) \qquad \begin{aligned} z_{\bar{t}} + L_h z &= \eta + \varphi , && \text{u} \quad Q_{h\tau}^+ , \\ z &= 0 , && \text{na} \quad \omega \times \{0\} , \\ z &= 0 , && \text{na} \quad \gamma \times \bar{\theta}_\tau , \end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned} \eta &= T_x^2 T_t^- \left(D_x(aD_x u)\right) - \frac{1}{2}\left((au_x)_{\bar{x}} + (au_{\bar{x}})_x\right) , \quad \text{i} \\ \varphi &= u_{\bar{t}} - T_x^2 u_{\bar{t}} . \end{aligned}$$

Definišimo diskretne skalarne proizvode:

$$(v, w)_\omega = (v, w)_{L_2(\omega)} = h \sum_{x \in \omega} v(\cdot, t) w(\cdot, t) ,$$

gde je $v(\cdot, t) = v(x, t)$, $(x, t) \in \omega \times \{t\}$, $t \in \theta_\tau^+$–fiksirano,

$$(v, w)_{Q_{h\tau}} = (v, w)_{L_2(Q_{h\tau})} = h\tau \sum_{x \in \omega} \sum_{t \in \theta_\tau^+} v(x,t) w(x,t) = \tau \sum_{t \in \theta_\tau^+} (v, w)_\omega ,$$

i diskretne norme:

$$\begin{aligned} &\|v\|_\omega^2 = (v, v)_\omega , \quad \|v\|_{Q_{h\tau}}^2 = (v, v)_{Q_{h\tau}} , \\ &\|v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})}^2 = \|v\|_{Q_{h\tau}}^2 + \|v_x\|_{Q_{h\tau}}^2 + \|v_{x\bar{x}}\|_{Q_{h\tau}}^2 + \|v_{\bar{t}}\|_{Q_{h\tau}}^2 , \\ &\|v\|_{L_h}^2 = (L_h v, v)_\omega , \end{aligned}$$

gde je $L_h \equiv L_h(t)$ vrednost operatora za fiksirano t iz mreže θ_τ^+.

Važi sledeće tvrdjenje:

Lema 1. *Diferencijska shema (3) zadovoljava apriornu ocenu*

$$\|z\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le C\big(\|\eta\|_{Q_{h\tau}} + \|\varphi\|_{Q_{h\tau}}\big)\,. \tag{4}$$

Dokaz. Množeći (3) sa $L_h z = \frac{1}{2}L_h(z+\check{z}) + \frac{\tau}{2}L_h z_{\bar{t}}$, gde je $\check{z} = z(x,t-\tau)$ i sumirajući po čvorovima mreže ω jednostavno dobijamo sledeće nejednakosti:

$$\frac{1}{2\tau}\left(\|z\|^2_{L_h} - \|\check{z}\|^2_{L_h}\right) + \frac{\tau}{2}\|z_{\bar{t}}\|^2_{L_h} + \|L_h z\|^2_\omega = (\eta+\varphi, L_h z)_\omega$$
$$\le \frac{1}{2}\|\eta+\varphi\|^2_\omega + \frac{1}{2}\|L_h z\|^2_\omega$$
$$\|z\|^2_{L_h} - \|\check{z}\|^2_{L_h} + \tau^2\|z_{\bar{t}}\|^2_{L_h} + \tau\|L_h z\|^2_\omega \le \tau\|\eta+\varphi\|^2_\omega$$
$$\|z\|^2_{L_h} - \|\check{z}\|^2_{\check{L}_h} + \|\check{z}\|^2_{\check{L}_h} - \|\check{z}\|^2_{L_h} + \tau^2\|z_{\bar{t}}\|^2_{L_h} + \tau\|L_h z\|^2_\omega \le \tau\|\eta+\varphi\|^2_\omega$$

gde je $\check{L}_h \equiv \check{L}_h(t) = L_h(t-\tau)$. Dokažimo da je ispunjen uslov:

$$\|\check{z}\|^2_{\check{L}_h} - \|\check{z}\|^2_{L_h} \ge 0\,. \tag{5}$$

Uslov (5) je ekvivalentan sa uslovom:

$$\left(\left(\check{L}_h - L_h\right)\check{z}, \check{z}\right)_\omega \ge 0\,.$$

Kako je:

$$(L_h z, z)_\omega = \frac{1}{2}((a z_x, z_x)_{\omega^-} + (a z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}})_{\omega^+})\,,$$

imamo da je:

$$\left(\left(\check{L}_h - L_h\right)\check{z}, \check{z}\right)_\omega = \frac{1}{2}(((\check{a}-a)\check{z}_x, \check{z}_x)_{\omega^-} + ((\check{a}-a)\check{z}_{\bar{x}}, \check{z}_{\bar{x}})_{\omega^+}) \ge 0\,,$$

gde je $a = a(x,t)$, $\check{a} = a(x,t-\tau)$. Poslednja nejednakost jasno važi, jer je po pretpostavci funkcija $a(x,t)$ monotono opadajuća funkcija po promenljivoj t.

Dakle, pokazali smo da važi uslov (5), pa dalje imamo:

$$\|z\|^2_{L_h} - \|\check{z}\|^2_{L_h} + \tau\|L_h z\|^2_\omega \le \tau\|\eta+\varphi\|^2_\omega\,.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže θ^+_τ dobijamo:

$$\|z(T)\|^2_{L_h(T)} - \|z(0)\|^2_{L_h(0)} + \tau\sum_{t\in\theta^+_\tau}\|L_h z\|^2_\omega \le \tau\sum_{t\in\theta^+_\tau}\|\eta+\varphi\|^2_\omega$$

Koristeći relacije $\|z(T)\|^2_{L_h(T)} \ge 0$ i $\|z(0)\|^2_{L_h(0)} = 0$ imamo:

$$\tau\sum_{t\in\theta^+_\tau}\|L_h z\|^2_\omega \le \tau\sum_{t\in\theta^+_\tau}\|\eta+\varphi\|^2_\omega\,. \tag{6}$$

Primenom nejednakosti $\|z_{\bar{t}}\| \le \|\eta + \varphi\| + \|L_h z\|$ i prethodne ocene sledi:

$$\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \|z_{\bar{t}}\|_\omega^2 \le 4\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \|\eta + \varphi\|_\omega^2 . \tag{7}$$

Konačno, pozivajući se na dobro poznate nejednakosti [34],[41]:

$$\begin{aligned} \|L_h z\|_{Q_{h\tau}} &\ge C\|z_{x\bar{x}}\|_{Q_{h\tau}} , \\ \|z\|_{Q_{h\tau}} &\le C\|z_x\|_{Q_{h\tau}} , \\ \|z_x\|_{Q_{h\tau}} &\le C\|z_{x\bar{x}}\|_{Q_{h\tau}} , \end{aligned}$$

i ocene (6) i (7) jednostavno dobijamo:

$$\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \left(\|z\|_\omega^2 + \|z_x\|_\omega^2 + \|z_{x\bar{x}}\|_\omega^2 + \|z_{\bar{t}}\|_\omega^2\right) \le C\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \|\eta + \varphi\|_\omega^2$$

odnosno:

$$\|z\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le C\left(\|\eta\|_{Q_{h\tau}} + \|\varphi\|_{Q_{h\tau}}\right) . \qquad \square$$

Na taj način je problem ocene brzine konvergencije diferencijske sheme (2) sveden na ocenu desne strane nejednakosti (4).

3. Ocena brzine konvergencije

Kao prvo, rastavimo η na sledeći način:

$$\begin{aligned} \eta &= \sum_{k=1}^{7} \eta_k , \qquad \text{gde je:} \\ \eta_1 &= T_x^2 T_t^-(a D_x^2 u) - (T_x^2 T_t^- a)(T_x^2 T_t^- D_x^2 u) , \\ \eta_2 &= (T_x^2 T_t^- a - a)(T_x^2 T_t^- D_x^2 u) , \\ \eta_3 &= a(T_x^2 T_t^- D_x^2 u - u_{x\bar{x}}) , \\ \eta_4 &= T_x^2 T_t^-(D_x a D_x u) - (T_x^2 T_t^- D_x a)(T_x^2 T_t^- D_x u) , \\ \eta_5 &= (T_x^2 T_t^- D_x a - 0.5(a_x + a_{\bar{x}}))(T_x^2 T_t^- D_x u) , \\ \eta_6 &= 0.5(a_x + a_{\bar{x}})(T_x^2 T_t^- D_x u - 0.5(u_{\bar{x}} + u_x)) , \\ \eta_7 &= 0.25(a_x - a_{\bar{x}})(u_{\bar{x}} - u_x) . \end{aligned}$$

Uvedimo elementarne pravougaonike $e = e(x,t) = \{(\xi,\nu) : \xi \in (x-h, x+h), \nu \in (t-\tau, t)\}$. Linearnim transformacijama $\xi = x + hx^*$, $\nu = t + \tau t^*$, uspostavlja se obostrano jednoznačno preslikavanje izmedju e i standardnog pravougaonika $E = \{(x^*, t^*) : |x^*| < 1, -1 < t^* < 0\}$. Označimo $u^*(x^*, t^*) = u(x+hx^*, t+\tau t^*)$, $a^*(x^*, t^*) = a(x+hx^*, t+\tau t^*)$ itd.

Vrednost η_1 u čvoru $(x,t) \in Q^+_{h\tau}$ može se predstaviti u obliku:

$$\eta_1(x,t) = \frac{1}{h^2}\left\{ \iint_E (1-|x^*|)a^*(x^*,t^*)D^2_{x^*}u^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \right.$$

$$\left. - \iint_E (1-|x^*|)a^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \times \iint_E (1-|x^*|)D^2_{x^*}u^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \right\}$$

Odavde, primenom nejednakosti Cauchy-Schwartza i Höldera, jednostavno sledi:

$$|\eta_1(x,t)| \le \frac{C}{h^2}\|a^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \lambda \ge 0, \ \mu \ge 2, \ q > 2.$$

Osim toga, $\eta_1 = 0$ ako je a^* konstanta ili ako je u^* polinom drugog stepena po x^* i prvog stepena po t^*. Primenom leme 1.3.4 dobijamo:

$$|\eta_1(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|a^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}; \quad 0 \le \lambda \le 1, \ 2 \le \mu \le 3, \ q > 2.$$

Vraćajući se na stare promenljive, uz uslov $k_1h^2 \le \tau \le k_2h^2$, dobijamo:

$$|a^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} \le Ch^{\lambda-\frac{3}{q}}|a|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(e)} \quad \text{i}$$

$$|u^*|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)} \le Ch^{\mu-\frac{3(q-2)}{2q}}|u|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(e)}$$

Sledi:

$$|\eta_1(x,t)| \le Ch^{\lambda+\mu-\frac{7}{2}}|a|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(e)}|u|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(e)}, \quad 0 \le \lambda \le 1, \ 2 \le \mu \le 3, \ q > 2.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q^+_{h\tau}$ dobijamo:

$$(8) \quad \|\eta_1\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(Q)}, \quad 0 \le \lambda \le 1, \ 2 \le \mu \le 3,$$

Neka je $q > 2$ i $5/2 < s \le 4$. Na osnovu teoreme 1.2.3 važe sledeća potapanja :

$$(9) \qquad W_2^{\lambda+\mu,(\lambda+\mu)/2}(Q) \subset W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(Q), \quad \text{za } \lambda \ge 3/q \quad \text{i}$$

$$W_2^{\lambda+\mu-1,(\lambda+\mu-1)/2}(Q) \subset W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q), \qquad \text{za } \mu \ge 5/2 - 3/q$$

Stavljajući $\lambda + \mu = s$, za neko λ, μ, i $q > 2$ važe prethodna potapanja. Tako, na primer za $3 < s \leq 4$ možemo staviti $q = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = s - 1$, dok za $5/2 < s \leq 3$ možemo staviti $q = 6$, $\lambda = 1/2$, $\mu = s - 1/2$. Konačno, dobijamo ocenu:

$$\|\eta_1\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2} \|a\|_{W_3^{s-1,(s-1)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \leq 4 \tag{10}$$

U slučaju $2 < s < 5/2$, stavljajući $q = 3/(s-2)$, $\lambda = s - 2$, $\mu = 2$, odnosno za $s = 5/2$, $q = 6$, $\lambda = 1/2$, $\mu = 2$, i koristeći potapanja:

$$\begin{aligned} &W_2^{\lambda+\mu,(\lambda+\mu)/2}(Q) \subset W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q), \quad \text{za } \lambda \geq 3/q \quad \text{i} \\ &W_{3/(\lambda+\mu-1)}^{\lambda+\mu-1+\varepsilon,(\lambda+\mu-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q), \quad \text{za } \lambda \leq 3/q + \varepsilon \end{aligned} \tag{11}$$

dobijamo:

$$\|\eta_1\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2} \|a\|_{W_{3/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 5/2 \tag{12}$$

Vrednost η_2 u čvoru $(x, t) \in Q_{h\tau}^+$ može se predstaviti u obliku:

$$\eta_2(x,t) = \frac{1}{h^2} \left\{ \iint\limits_E (1 - |x^*|) a^*(x^*, t^*)\, dt^* dx^* - a^*(0,0) \right\}$$
$$\times \int_{-1}^{0} (u^*(1, t^*) - 2u^*(0, t^*) + u^*(-1, t^*))\, dt^*$$

Odavde sledi:

$$\begin{aligned} |\eta_2(x,t)| &\leq \frac{C}{h^2} \|a^*\|_{C(\overline{E})} \|u^*\|_{C(\overline{E})} \\ &\leq \frac{C}{h^2} \|a^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} \|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \lambda > \frac{3}{q}, \ \mu > \frac{3(q-2)}{2q}, \ q > 2. \end{aligned}$$

Pored toga, $\eta_2 = 0$ ako je a^* polinom prvog stepena po x^* ili konstanta, a takodje ako je u^* polinom prvog stepena po x^* ili konstanta . Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$|\eta_2(x,t)| \leq \frac{C}{h^2} |a^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} |u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \frac{3}{q} < \lambda \leq 2, \ \frac{3(q-2)}{2q} < \mu \leq 2.$$

Sledi:

$$\|\eta_2\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{\lambda+\mu-2} \|a\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)} \|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}$$

U slučaju $2 < s \leq 5/2$, stavljajući $q = 3/(s-2)$, $\lambda = s - 2 + \varepsilon$, $\mu = 2 - \varepsilon$ i koristeći potapanja (11), dobijamo:

$$\|\eta_2\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2} \|a\|_{W_{3/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 5/2 \tag{13}$$

U slučaju $5/2 < s \le 4$, stavljajući $q = 6$, $\lambda = s - 2$, $\mu = 2$ važe potapanja (9), i dobijamo:

$$\|\eta_2\|_{Q_{h\tau}} \le C h^{s-2} \|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \le 4 \tag{14}$$

Dalje, ocenimo funkcional:

$$\eta_3 = a(T_x^2 T_t^- D_x^2 u - u_{x\bar{x}}) = a\beta$$

Vrednost $\beta = T_x^2 T_t^- D_x^2 u - u_{x\bar{x}}$ u čvoru $(x,t) \in Q_{h\tau}^+$ može se predstaviti u obliku:

$$\beta(x,t) = \frac{C}{h^2} \left\{ \iint\limits_E (1-|x^*|) D_{x^*}^2 u^*(x^*, t^*)\, dt^* dx^* - (u^*(1,0) - 2u^*(0,0) + u^*(-1,0)) \right\}$$

Sledi:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h^2} \|u^*\|_{C(\overline{E})} \le \frac{C}{h^2} \|u^*\|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad s > 2$$

Osim toga, $\beta = 0$ ako je u^* polinom trećeg stepena po x^* ili prvog stepena po t^*, pa primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h^2} |u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad 2 < s \le 4 .$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)} \le C h^{s-\frac{3}{2}} |u|_{W_2^{s,s/2}(e)},$$

pa dobijamo:

$$|\beta(x,t)| \le C h^{s-\frac{7}{2}} |u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 4 .$$

Dalje imamo:

$$|\eta_3(x,t)| \le C h^{s-\frac{7}{2}} \|a\|_{C(\overline{Q})} |u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 4 .$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}^+$ dobijamo:

$$\|\eta_3\|_{Q_{h\tau}} \le C h^{s-2} \|a\|_{C(\overline{Q})} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 4 .$$

Na osnovu teoreme 1.2.3 važe potapanja:

$$W_{3/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset C(\overline{Q}), \quad \text{za} \quad 2 < s \le 5/2, \quad \text{i}$$
$$W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q) \subset C(\overline{Q}), \quad \text{za} \quad 5/2 < s \le 4 .$$

Na taj način dobijamo ocene:

$$(15) \qquad \|\eta_3\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W^{s-1+\epsilon,(s-1+\epsilon)/2}_{3/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 5/2$$

odnosno:

$$(16) \qquad \|\eta_3\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \le 4$$

Vrednost η_4 u čvoru $(x,t) \in Q^+_{h\tau}$ može se predstaviti u obliku:

$$\eta_4(x,t) = \frac{1}{h^2}\left\{ \iint_E (1-|x^*|)D_{x^*}a^*(x^*,t^*)D_{x^*}u^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \right.$$
$$\left. - \iint_E (1-|x^*|)D_{x^*}a^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \times \iint_E (1-|x^*|)D_{x^*}u^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \right\}$$

Odavde jednostavno sledi:

$$|\eta_4(x,t)| \le \frac{C}{h^2}\|a^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \lambda \ge 1, \ \mu \ge 1, \ q > 2.$$

Osim toga, $\eta_4 = 0$ ako je a^* polinom prvog stepena po x^* ili konstanta a takodje ako je u^* polinom prvog stepena po x^* ili konstanta. Primenom leme 1.3.4 dobijamo:

$$|\eta_4(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|a^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad 1 \le \lambda \le 2, \ 1 \le \mu \le 2, \ q > 2.$$

Vraćajući se na stare promenljive, dobijamo:

$$|\eta_4(x,t)| \le Ch^{\lambda+\mu-\frac{7}{2}}|a|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(e)}|u|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(e)}, \quad 1 \le \lambda \le 2, \ 1 \le \mu \le 2, \ q > 2$$

Sledi:

$$\|\eta_4\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(Q)}, \quad 1 \le \lambda \le 2, \ 1 \le \mu \le 2.$$

U slučaju $2 < s \le 5/2$, stavljajući $q = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = s-1$ i koristeći potapanja (11), dobijamo:

$$(17) \qquad \|\eta_4\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W^{s-1+\epsilon,(s-1+\epsilon)/2}_{3/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 5/2$$

Neka je sada $q > 2$ i $5/2 < s \le 4$. Stavljajući za $3 < s \le 4$, $q = 3$, $\lambda = s/2$, $\mu = s/2$, odnosno za $5/2 < s \le 3$, $q = 3$, $\lambda = 1$, $\mu = s-1$, važe potapanja (9) i dobijamo ocenu:

$$(18) \qquad \|\eta_4\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \le 4$$

Dalje ocenimo:

$$\eta_5 = (T_x^2 T_t^- D_x a - 0.5(a_x + a_{\bar{x}}))(T_x^2 T_t^- D_x u) = \beta T_x^2 T_t^- D_x u$$

gde je $\beta = T_x^2 T_t^- D_x a - 0.5(a_x + a_{\bar{x}})$. Razmotrimo prvo slučaj $5/2 < s \leq 4$. Važi:

$$|\beta(x,t)| \leq \frac{C}{h} \|a^*\|_{C(\overline{E})} \leq \frac{C}{h} \|a^*\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(E)}.$$

Osim toga, $\beta = 0$ ako je a^* polinom drugog stepena po x^* ili prvog stepena po t^*, pa primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\beta(x,t)| \leq \frac{C}{h} |a^*|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(E)}.$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|a^*|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(E)} \leq C h^{s-\frac{5}{2}} |a|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(e)},$$

pa dobijamo:

$$|\beta(x,t)| \leq C h^{s-\frac{7}{2}} |a|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(e)}.$$

Na osnovu teorema 1.2.1 i 1.2.3 imamo da je $D_x u \in W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q) \subset C(\overline{Q})$, pa sledi:

$$|\eta_5(x,t)| \leq C h^{s-\frac{7}{2}} |a|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(e)} \|D_x u\|_{C(\overline{Q})}.$$

Dalje:

$$\text{(19)} \qquad \|\eta_5\|_{Q_{h\tau}} \leq C h^{s-2} \|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \leq 4.$$

Neka je sada $2 < s \leq 5/2$. Važi:

$$\begin{aligned}
|\eta_5(x,t)| &\leq \frac{C}{h^2} \|a^*\|_{C(\overline{E})} \|u^*\|_{C(\overline{E})} \\
&\leq \frac{C}{h^2} \|a^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} \|u^*\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \lambda > \frac{3}{q}, \ \mu > \frac{3(q-2)}{2q}, \ q > 2.
\end{aligned}$$

Pored toga, $\eta_5 = 0$ ako je a^* polinom drugog stepena po x^* ili prvog stepena po t^*, a takodje ako je u^* konstanta. Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$|\eta_5(x,t)| \leq \frac{C}{h^2} |a^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} |u^*|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \frac{3}{q} < \lambda \leq 3, \ \frac{3(q-2)}{2q} < \mu \leq 1.$$

Sledi:

$$\|\eta_5\|_{Q_{h\tau}} \leq C h^{\lambda+\mu-2} \|a\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)} \|u\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(Q)}$$

Stavljajući za $2 < s < 5/2$, $q = 3/(s-1)$, $\lambda = s - 1 + \varepsilon$, $\mu = 1 - \varepsilon$ odnosno za $s = 5/2$, $\lambda = 3/2$, $\mu = 1$, $q = 2 + \varepsilon$, i koristeći potapanja (11), dobijamo:

$$\|\eta_5\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W_{3/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 5/2 \tag{20}$$

Ocenimo funkcional:

$$\eta_6 = \frac{1}{2}(a_x + a_{\bar{x}})(T_x^2 T_t^- D_x u - 0.5(u_{\bar{x}} + u_x)) = \frac{1}{2}(a_x + a_{\bar{x}})\beta$$

gde je $\beta = T_x^2 T_t^- D_x u - 0.5(u_{\bar{x}} + u_x)$. U slučaju $2 < s \le 3$ važi:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \le \frac{C}{h}\|u^*\|_{W_2^{s,s/2}(E)}.$$

Osim toga, $\beta = 0$ ako je u^* polinom drugog stepena po x^* ili prvog stepena po t^*, pa primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h}|u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|\beta(x,t)| \le Ch^{s-\frac{5}{2}}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Dalje imamo:

$$|\eta_6(x,t)| \le Ch^{s-\frac{7}{2}}\|a\|_{C(\overline{Q})}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}^+$ dobijamo:

$$\|\eta_6\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{C(\overline{Q})}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Koristeći potapanja:

$$W_{3/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset C(\overline{Q}), \quad \text{za} \quad 2 < s \le 5/2, \quad \text{i}$$
$$W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q) \subset C(\overline{Q}), \quad \text{za} \quad s > 5/2.$$

dobijamo ocene:

$$\|\eta_6\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W_{3/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 5/2. \tag{21}$$

odnosno:

$$\|\eta_6\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \le 3. \tag{22}$$

U slučaju $3 < s \leq 4$ važi sledeće:

$$|\eta_6(x,t)| \leq \frac{C}{h^2}\|a^*\|_{C(\overline{E})}\|u^*\|_{C(\overline{E})}$$
$$\leq \frac{C}{h^2}\|a^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \lambda > \frac{3}{q}, \ \mu > \frac{3(q-2)}{2q}, \ q > 2.$$

Pored toga, $\eta_6 = 0$ ako je a^* konstanta, a takodje ako je u^* polinom drugog stepena po x^* ili prvog stepena po t^*. Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$|\eta_6(x,t)| \leq \frac{C}{h^2}|a^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \frac{3}{q} < \lambda \leq 1, \ \frac{3(q-2)}{2q} < \mu \leq 3.$$

Sledi:

$$\|\eta_6\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{\lambda+\mu-2}\|a\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(Q)}$$

Stavljajući $\lambda = 1$, $\mu = s-1$, $q = 6$, važe potapanja (9) i jednostavno dobijamo:

$$(23) \qquad \|\eta_6\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \leq 4$$

Ocenimo sada:

$$\eta_7 = \frac{1}{4}(a_x - a_{\bar{x}})(u_{\bar{x}} - u_x)$$

Važi:

$$|\eta_7(x,t)| \leq \frac{C}{h^2}\|a^*\|_{C(\overline{E})}\|u^*\|_{C(\overline{E})}$$
$$\leq \frac{C}{h^2}\|a^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \lambda > \frac{3}{q}, \ \mu > \frac{3(q-2)}{2q}, \ q > 2.$$

Pored toga, $\eta_7 = 0$ ako je a^* polinom prvog stepena po x^* ili konstanta, a takodje ako je u^* polinom prvog stepena po x^* ili konstanta. Primenom B-H leme imamo:

$$|\eta_7(x,t)| \leq \frac{C}{h^2}|a^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \frac{3}{q} < \lambda \leq 2, \ \frac{3(q-2)}{2q} < \mu \leq 2.$$

Sledi:

$$\|\eta_7\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{\lambda+\mu-2}\|a\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(Q)}$$

Birajući λ, μ i q isto kao u slučaju ocene funkcionala η_2, važe potapanja (9) i (11), i jednostavno dobijamo ocene:

$$(24) \qquad \|\eta_7\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|a\|_{W^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}_{3/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 5/2$$

odnosno:

$$(25) \qquad \|\eta_7\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \leq 4$$

Konačno. na osnovu izvedenih ocena funkcionala η_k imamo ocene funkcionala η :

$$(26) \qquad \|\eta\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}_{3/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 5/2$$

odnosno:

$$(27) \qquad \|\eta\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 5/2 < s \le 4$$

Ocenimo još funkcional:

$$\varphi = u_{\bar{t}} - T_x^2 u_{\bar{t}}$$

Važi:

$$|\varphi(x,t)| \le \frac{C}{\tau}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \le \frac{C}{h^2}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \le \frac{C}{h^2}\|u^*\|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad s > 2$$

Osim toga, $\varphi = 0$ ako je u^* polinom trećeg stepena po x^* ili prvog stepena po t^*. Primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\varphi(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad 2 < s \le 4 .$$

Dalje:

$$|\varphi(x,t)| \le Ch^{s-\frac{7}{2}}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 4 .$$

Sledi:

$$(28) \qquad \|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 4$$

Konačno, na osnovu apriorne ocene (4) i ocena (26),(27) i (28) dobijamo sledeći rezultat:

Teorema 1. *Diferencijska schema (2) konvergira u normi prostora $W_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ i, uz uslov $k_1 h^2 \le \tau \le k_2 h^2$, važe ocene:*

$$(29) \; \|u - v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}_{3/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \; 2 < s \le 5/2$$

$$(30) \; \|u - v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le Ch^{s-2}\|a\|_{W^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \qquad 5/2 < s \le 4$$

Dobijene ocene brzine konvergencije su saglasne s glatkošću podataka.

4. Dvodimenzioni slučaj

Razmotrimo sada u oblasti $Q = \Omega\times(0,T] = (0,1)^2\times(0,T]$ prvi početno-granični problem za paraboličku jednačinu drugog reda bez mešovitih izvoda s promenljivim koeficijentima:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) &= f\,, \qquad && (x,t)\in Q\,,\\
u &= 0\,, && (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]\,,\\
u(x,0) &= u_0(x)\,, && x\in\Omega\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Pretpostavimo da generalisano rešenje problema (1) pripada anizotropnom prostoru Soboljeva $W_2^{s,s/2}(Q)$, $2 < s \le 4$, da $f(x,t)$ pripada $W_2^{s-2,s/2-1}(Q)$ i da koeficijenti $a_i = a_i(x,t)$ zadovoljavaju uslove:

$$
\begin{aligned}
&a_i \in W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)\,, \ \varepsilon > 0\,, \quad && \text{za} \ \ 2 < s \le 3\,,\\
&a_i \in W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)\,, && \text{za} \ \ 3 < s \le 4\,.
\end{aligned}
$$

Ovi uslovi garantuju pripadnost koeficijenata $a_i(x,t)$ odgovarajućem prostoru multiplikatora $M\left(W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)\right)$. Pretpostavimo da su koficijenti $a_i(x,t)$ monotono opadajuće funkcije po promenljivoj t i da je $a_i(x,t) \ge c_0 > 0$. Takodje ćemo smatrati da su ispunjeni i eventualni uslovi saglasnosti ulaznih podataka na $\partial\Omega\times\{0\}$ koji garantuju egzistenciju rešenja $u \in W_2^{s,s/2}(Q)$.

Neka je $\bar\omega$ uniformna mreža na $\overline{\Omega} = [0,1]^2$ s korakom h, $\omega = \bar\omega\cap\Omega$, $\gamma = \bar\omega\cap\partial\Omega$. Neka je θ_τ uniformna mreža na $(0,T)$ s korakom τ, $\theta_\tau^+ = \theta_\tau\cup\{T\}$, $\bar\theta_\tau = \theta_\tau\cup\{0,T\}$. Definišimo uniformnu mrežu u oblasti Q: $Q_{h\tau} = \omega\times\theta_\tau$, $Q_{h\tau}^+ = \omega\times\theta_\tau^+$ i $\overline{Q}_{h\tau} = \bar\omega\times\bar\theta_\tau$. Smatraćemo da je zadovoljen uslov:

$$k_1h^2 \le \tau \le k_2h^2\,, \quad k_1, k_2 = const > 0\,.$$

Definišimo konačne razlike po x_i :

$$v_{x_i} = \frac{v^{+i} - v}{h} = v_{\bar x_i}^{+i}\,, \qquad v_{x_i\bar x_i} = \frac{v^{+i} - 2v + v^{-i}}{h^2}\,,$$

gde je $v^{\pm i}(x,t) = v(x \pm hr_i, t)$, i r_i jedinični vektor koordinatne ose x_i.

Uvedimo i Steklovljeve operatore usrednjenja po promenljivoj x_i:

$$
\begin{aligned}
T_i^+ f(x,t) &= \int_0^1 f(x + hx'r_i, t)\,dx' = T_i^- f(x + hr_i, t)\,,\\
T_i^2 f(x,t) &= T_i^+T_i^- f(x,t) = \int_{-1}^{1}(1 - |x'|)f(x + hx'r_i, t)\,dx'\,.
\end{aligned}
$$

Početno-granični problem (1) aproksimirajmo na mreži $\overline{Q}_{h\tau}$ sledećom diferencijskom shemom:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
v_{\bar t} + L_h v &= T_1^2 T_2^2 T_t^{-} f\,, &&\text{u}\quad Q_{h\tau}^{+}\,,\\
v &= 0\,, &&\text{na}\quad \gamma \times \bar\theta_\tau\,,\\
v &= u_0\,, &&\text{na}\quad \omega \times \{0\}\,,
\end{aligned}
$$

gde je

$$
L_h v = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}((a_i v_{x_i})_{\bar x_i} + (a_i v_{\bar x_i})_{x_i})\,.
$$

Shema (2) je standardna implicitna diferencijska shema s usrednjenom desnom stranom. Shema bez usrednjenja ne može se koristiti ako je $s \le 4$, jer tada $f(x,t)$ nije neprekidna funkcija.

Neka je u rešenje početno-graničnog problema (1) i v rešenje diferencijske sheme (2). Pošto je, na osnovu teoreme 1.2.3 $u(x,t)$ neprekidna funkcija za $2 < s \le 4$, definišimo grešku sa:

$$
z = u - v\,.
$$

Ovako definisana greška zadovoljava uslove:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
z_{\bar t} + L_h z &= \sum_{i=1}^{2}\eta_i + \varphi\,, &&\text{u}\quad Q_{h\tau}^{+}\,,\\
z &= 0\,, &&\text{na}\quad \omega \times \{0\}\,,\\
z &= 0\,, &&\text{na}\quad \gamma \times \bar\theta_\tau\,,
\end{aligned}
$$

gde je:

$$
\begin{aligned}
\eta_i &= T_1^2 T_2^2 T_t^{-}\,(D_i(a_i D_i u)) - \frac{1}{2}\left((a_i u_{x_i})_{\bar x_i} + (a_i u_{\bar x_i})_{x_i}\right)\,, \quad \text{i}\\
\varphi &= u_{\bar t} - T_1^2 T_2^2 u_{\bar t}\,.
\end{aligned}
$$

Definišimo diskretan skalarni proizvod:

$$
(v,w)_{Q_{h\tau}} = (v,w)_{L_2(Q_{h\tau})} = h^2\tau \sum_{x\in\omega}\sum_{t\in\theta_\tau^{+}} v(x,t)w(x,t) = \tau \sum_{t\in\theta_\tau^{+}} (v,w)_\omega\,,
$$

i diskretne norme:

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{Q_{h\tau}}^2 &= (v,v)_{Q_{h\tau}}\,,\\
\|v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})}^2 &= \|v\|_{Q_{h\tau}}^2 + \sum_{i=1}^{2}\|v_{x_i}\|_{Q_{h\tau}}^2 + \sum_{i=1}^{2}\|v_{x_i\bar x_i}\|_{Q_{h\tau}}^2 + \|v_{\bar t}\|_{Q_{h\tau}}^2\,,
\end{aligned}
$$

Važi sledeće tvrdjenje:

Lema 2. *Diferencijska shema (3) zadovoljava apriornu ocenu*

$$
\|z\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \leq C\Big(\sum_{i=1}^{2}\|\eta_i\|_{Q_{h\tau}} + \|\varphi\|_{Q_{h\tau}}\Big) . \tag{4}
$$

Dokaz leme 2 je analogan dokazu leme 1, pa ga zato nećemo navoditi. Primetimo samo da se uslov iz dokaza leme 1:

$$
\|\check{z}\|^2_{\check{L}_h} - \|\check{z}\|^2_{L_h} \geq 0 .
$$

svodi na:

$$
\big((\check{L}_h - L_h)\,\check{z}, \check{z}\big)_\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\big(((\check{a}_i - a_i)\check{z}_{x_i}, \check{z}_{x_i})_{\omega_i^-} + ((\check{a}_i - a_i)\check{z}_{\bar{x}_i}, \check{z}_{x_i})_{\omega_i^+}\big) \geq 0 .
$$

gde je $a_i = a_i(x,t)$, $\check{a}_i = a_i(x,t-\tau)$, ω_i^+, odnosno ω_i^-, mreža ω "proširena" za jedno polje "udesno", odnosno "ulevo" po i-toj koordinati. Poslednja nejednakost jasno važi, jer su po pretpostavci funkcije $a_i(x,t)$ monotono opadajuće funkcije po promenljivoj t. Primetimo, takodje da poslednja nejednakost važi jer u jednačini (1) ne figurišu mešoviti izvodi. U slučaju jednačine s mešovitim izvodima prethodna tehnika dokaza ne bi bila valjana.

Na taj način je problem ocene brzine konvergencije diferencijske sheme (2) sveden na ocenu desne strane nejednakosti (4).

5. Konvergencija diferencijske sheme

Rastavimo η_i na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\eta_i &= \sum_{k=1}^{7}\eta_{ik}, \qquad \text{gde je:}\\
\eta_{i1} &= T_1^2T_2^2T_t^-(a_iD_i^2u) - (T_1^2T_2^2T_t^-a_i)(T_1^2T_2^2T_t^-D_i^2u) ,\\
\eta_{i2} &= (T_1^2T_2^2T_t^-a_i - a_i)(T_1^2T_2^2T_t^-D_i^2u) ,\\
\eta_{i3} &= a_i(T_1^2T_2^2T_t^-D_i^2u - u_{x_ix_i}) ;\\
\eta_{i4} &= T_1^2T_2^2T_t^-(D_ia_iD_iu) - (T_1^2T_2^2T_t^-D_ia_i)(T_1^2T_2^2T_t^-D_iu) ,\\
\eta_{i5} &= (T_1^2T_2^2T_t^-D_ia_i - 0.5(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i}))(T_1^2T_2^2T_t^-D_iu) ,\\
\eta_{i6} &= 0.5(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i})(T_1^2T_2^2T_t^-D_iu - 0.5(u_{\bar{x}_i} + u_{x_i})) ,\\
\eta_{i7} &= 0.25(a_{i,x_i} - a_{i,\bar{x}_i})(u_{\bar{x}_i} - u_{x_i}) .
\end{aligned}
$$

Uvedimo elementarne paralelopipede $e = e(x,t) = \{(\xi_1, \xi_2, \nu) : \xi_i \in (x_i - h, x_i + h), \ i = 1,2, \ \nu \in (t-\tau, t)\}$. Linearnim transformacijama $\xi_i = x_i + hx_i^*$, $i = 1,2$, $\nu = t + \tau t^*$, uspostavlja se obostrano jednoznačno preslikavanje izmedju e i standardnog paralelopipeda $E = \{(x_1^*, x_2^*, t^*) : |x_i^*| < 1, \ i = 1,2, \ -1 < t^* < 0\}$. Označimo $u^*(x^*, t^*) \equiv u^*(x_1^*, x_2^*, t^*) = u(x_1 + hx_1^*, x_2 + hx_2^*, t + \tau t^*)$, itd.

Vrednost η_{i1} u čvoru $(x,t) \in Q_{h\tau}^+$ može se predstaviti u obliku:

$$\eta_{i1}(x,t) = \frac{1}{h^2}\Big\{ \iint_E k(x_1^*)k(x_2^*)a_i^*(x^*,t^*)D_i^2 u^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^*$$

$$- \iint_E k(x_1^*)k(x_2^*)a_i^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \times \iint_E k(x_1^*)k(x_2^*)D_i^2 u^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \Big\}$$

gde je:

$$k(x_i^*) = 1 - |x_i^*|.$$

Radi kraćeg zapisa $\iint_E \cdots dt^*dx^*$ označava $\iiint_E \cdots dt^*dx_2^*dx_1^*$.

Odavde jednostavno sledi:

$$|\eta_{i1}(x,t)| \le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \ \lambda \ge 0, \ \mu \ge 2, \ q > 2.$$

Osim toga, $\eta_{i1} = 0$ ako je a_i^* konstanta ili ako je u^* polinom drugog stepena po x_1^* i x_2^* i prvog stepena po t^*. Primenjujući lemu 1.3.4 dobijamo:

$$|\eta_{i1}(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|a_i^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \ 0 \le \lambda \le 1, \ 2 \le \mu \le 3, \ q > 2.$$

Vraćajući se na stare promenljive, uz uslov $k_1h^2 \le \tau \le k_2h^2$, dobijamo:

$$|a_i^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} \le Ch^{\lambda - \frac{4}{q}}|a_i|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(e)} \quad \text{i}$$

$$|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)} \le Ch^{\mu - \frac{2(q-2)}{q}}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(e)}.$$

Sledi:

$$|\eta_{i1}(x,t)| \le Ch^{\lambda+\mu-4}|a_i|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(e)}, \ 0 \le \lambda \le 1, \ 2 \le \mu \le 3, \ q > 2.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}^+$ dobijamo:

$$\|\eta_{i1}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a_i\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}, \ 0 \le \lambda \le 1, \ 2 \le \mu \le 3.$$

Neka je sada $q > 2$ i $3 < s \leq 4$. Na osnovu teoreme 1.2.3 važe sledeća potapanja:

$$
(5) \qquad W_2^{\lambda+\mu,(\lambda+\mu)/2}(Q) \subset W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q), \quad \text{za } \lambda \geq 4/q \quad \text{i}
$$

$$
W_2^{\lambda+\mu-1,(\lambda+\mu-1)/2}(Q) \subset W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q), \quad \text{za } \mu \geq 3 - 4/q
$$

Stavljajući $q = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = s - 1$, i koristeći prethodna potapanja dobijamo ocenu:

$$
(6) \qquad \|\eta_{i1}\|_{Q_{h\tau}} \leq C h^{s-2} \|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \leq 4
$$

U slučaju $2 < s \leq 3$, stavljajući $q = 4/(s-2)$, $\lambda = s - 2$, $\mu = 2$ i koristeći potapanja:

$$
(7) \qquad W_2^{\lambda+\mu,(\lambda+\mu)/2}(Q) \subset W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q), \quad \text{za } \lambda \geq 4/q \quad \text{i}
$$

$$
W_{4/(\lambda+\mu-1)}^{\lambda+\mu-1+\varepsilon,(\lambda+\mu-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q), \quad \text{za } \lambda \leq 4/q + \varepsilon
$$

dobijamo:

$$
(8) \qquad \|\eta_{i1}\|_{Q_{h\tau}} \leq C h^{s-2} \|a_i\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 3
$$

Ocenimo, dalje:

$$
\eta_{i2} = (T_1^2 T_2^2 T_t^- a_i - a_i)(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_i^2 u) = (T_1^2 T_2^2 T_t^- a_i - a_i)(T_{3-i}^2 T_t^- u_{x_i \bar{x}_i})
$$

Vrednost η_{i2} u čvoru $(x, t) \in Q_{h\tau}^+$ može se predstaviti u obliku:

$$
\eta_{i2}(x, t) = \frac{1}{h^2} \left\{ \iint_E k(x_1^*) k(x_2^*) a_i^*(x^*, t^*)\, dt^* dx^* - a_i^*(0, 0) \right\}
$$

$$
\times \iint_{E_1} (u^*(1_i, t^*) - 2u^*(0, t^*) + u^*(-1_i, t^*))\, dt^* dx_{3-i}^*
$$

gde je $u^*(\pm 1_1, t^*) = u^*(\pm 1, x_2^*, t^*)$, $u^*(\pm 1_2, t^*) = u^*(x_1^*, \pm 1, t^*)$, $E_1 = (-1, 1) \times (-1, 0)$. Odavde sledi:

$$
|\eta_{i2}(x, t)| \leq \frac{C}{h^2} \|a_i^*\|_{C(\overline{E})} \|u^*\|_{C(\overline{E})}
$$

$$
\leq \frac{C}{h^2} \|a_i^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} \|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \lambda > \frac{4}{q}, \quad \mu > \frac{2(q-2)}{q}, \quad q > 2.
$$

Pored toga, $\eta_{i2} = 0$ ako je a_i^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta, a takodje ako je u^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta. Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$
|\eta_{i2}(x, t)| \leq \frac{C}{h^2} |a_i^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)} |u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \frac{4}{q} < \lambda \leq 2, \quad \frac{2(q-2)}{q} < \mu \leq 2.
$$

Vraćajući se na stare promenljive, dobijamo:

$$|\eta_{i2}(x,t)| \le Ch^{\lambda+\mu-4}|a_i|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(e)}, \quad \frac{4}{q} < \lambda \le 2, \quad \frac{2(q-2)}{q} < \mu \le 2.$$

Sledi:

$$\|\eta_{i2}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a_i\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}$$

U slučaju $2 < s \le 3$, stavljajući $q = (4+\varepsilon)/(s-2)$, $\lambda = s-2$, $\mu = 2$ i koristeći potapanja (7) dobijamo:

$$\|\eta_{i2}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3. \tag{9}$$

U slučaju $3 < s \le 4$, stavljajući $q = 4$, $\lambda = 2$, $\mu = s-2$, i koristeći potapanja (5) dobijamo:

$$\|\eta_{i2}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \le 4. \tag{10}$$

Dalje, ocenimo funkcional:

$$\eta_{i3} = a_i(T_1^2T_2^2T_t^-D_i^2u - u_{x_i\bar{x}_i}) = a_i\beta.$$

Vrednost $\beta = T_1^2T_2^2T_t^-D_i^2u - u_{x_i\bar{x}_i}$ u čvoru $(x,t) \in Q_{h\tau}^+$ može se predstaviti u obliku:

$$\beta(x,t) = \frac{C}{h^2}\left\{\iint_E k(x_1^*)k(x_2^*)D_i^2u^*(x^*,t^*)dt^*dx^* - (u^*(r_i,0) - 2u^*(0,0) + u^*(-r_i,0))\right\}$$

Sledi:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h^2}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \le \frac{C}{h^2}\|u^*\|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad s > 2.$$

Osim toga, $\beta = 0$ ako je u^* polinom trećeg stepena po x_1^* i x_2^* ili prvog stepena po t^*, pa primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad 2 < s \le 4,$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)} \le Ch^{s-2}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)},$$

pa dobijamo:

$$|\beta(x,t)| \le Ch^{s-4}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 4.$$

Dalje imamo:

$$|\eta_{i3}(x,t)| \le Ch^{s-4}\|a_i\|_{C(\overline{Q})}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 4.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}^+$ dobijamo:

$$\|\eta_{i3}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{C(\overline{Q})}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 4 .$$

Na osnovu teoreme 1.2.3 važe potapanja:

$$W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset C(\overline{Q}), \quad \text{za} \quad 2 < s \le 3, \quad \text{i}$$
$$W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q) \subset C(\overline{Q}), \quad \text{za} \quad 3 < s \le 4 .$$

Na taj način dobijamo ocene:

$$\|\eta_{i3}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3, \tag{11}$$

odnosno:

$$\|\eta_{i3}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \le 4 . \tag{12}$$

Vrednost η_{i4} u čvoru $(x,t) \in Q_{h\tau}^+$ može se predstaviti u obliku:

$$\eta_{i4}(x,t) = \frac{1}{h^2}\Bigg\{ \iint\limits_E k(x_1^*)k(x_2^*)D_i a_i^*(x^*,t^*)D_i u^*(x^*,t^*)\, dt^* dx^*$$
$$- \iint\limits_E k(x_1^*)k(x_2^*)D_i a_i^*(x^*,t^*)\, dt^* dx^* \times \iint\limits_E k(x_1^*)k(x_2^*)D_i u^*(x^*,t^*)\, dt^* dx^* \Bigg\} .$$

Odavde jednostavno sledi:

$$|\eta_{i4}(x,t)| \le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \lambda \ge 1, \ \mu \ge 1, \ q > 2 .$$

Osim toga, $\eta_{i4} = 0$ ako je a_i^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta a takodje ako je u^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta. Primenom leme 1.3.4 dobijamo:

$$|\eta_{i4}(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|a_i^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad 1 \le \lambda \le 2, \ 1 \le \mu \le 2, \ q > 2 .$$

Vraćajući se na stare promenljive, dobijamo:

$$|\eta_{i4}(x,t)| \le Ch^{\lambda+\mu-4}|a_i|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(e)}|u|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(e)}, \quad 1 \le \lambda \le 2, \ 1 \le \mu \le 2, \ q > 2 .$$

Sledi:

$$\|\eta_{i4}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a_i\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}, \quad 1 \le \lambda \le 2, \ 1 \le \mu \le 2 .$$

U slučaju $2 < s \le 3$, stavljajući $q = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = s-1$ i koristeći potapanja (7) dobijamo:

$$(13) \qquad \|\eta_{i4}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W^{s-1+\epsilon,(s-1+\epsilon)/2}_{4/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Neka je sada $q > 2$ i $3 < s \le 4$. Stavljajući $q = 4/(s-2)$, $\lambda = s-2$, $\mu = 2$, važe potapanja (5) i imamo:

$$(14) \qquad \|\eta_{i4}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \le 4.$$

Dalje, ocenimo:

$$\eta_{i5} = (T_1^2T_2^2T_t^-D_ia_i - 0.5(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i}))(T_1^2T_2^2T_t^-D_iu) = \beta T_1^2T_2^2T_t^-D_iu$$

gde je $\beta = T_1^2T_2^2T_t^-D_ia_i - 0.5(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i})$. Razmotrimo prvo slučaj $3 < s \le 4$. Važi:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h}\|a_i^*\|_{C(\overline{E})} \le \frac{C}{h}\|a_i^*\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(E)}.$$

Osim toga, $\beta = 0$ ako je a_i^* polinom drugog stepena po x_1^* i x_2^* ili prvog stepena po t^*, pa primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h}|a_i^*|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(E)}.$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|a_i^*|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(E)} \le Ch^{s-3}|a_i|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(e)},$$

pa dobijamo:

$$|\beta(x,t)| \le Ch^{s-4}|a_i|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(e)}.$$

Na osnovu teorema 1.2.1 i 1.2.3 imamo da je $D_iu \in W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q) \subset C(\overline{Q})$, pa sledi:

$$|\eta_{i5}(x,t)| \le Ch^{s-4}|a_i|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(e)}\|D_iu\|_{C(\overline{Q})}.$$

Sledi:

$$(15) \qquad \|\eta_{i5}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \le 4.$$

Neka je sada $2 < s \le 3$. Važi:

$$\begin{aligned}|\eta_{i5}(x,t)| &\le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{C(\overline{E})}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \\ &\le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W^{\mu,\mu/2}_{2q/(q-2)}(E)}, \quad \lambda > \frac{4}{q}, \ \mu > \frac{2(q-2)}{q}, \ q > 2.\end{aligned}$$

Pored toga, $\eta_{i5} = 0$ ako je a_i^* polinom drugog stepena po x_1^* i x_2^* ili prvog stepena po t^*, a takodje ako je u^* konstanta. Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$|\eta_{i5}(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|a_i^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \frac{4}{q} < \lambda \le 3, \quad \frac{2(q-2)}{q} < \mu \le 1.$$

Sledi:

$$\|\eta_{i5}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a_i\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}.$$

Stavljajući $q = (4+\varepsilon)/(s-1)$, $\lambda = s-1$, $\mu = 1$, i koristeći potapanja (7), dobijamo:

$$\|\eta_{i5}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3. \tag{16}$$

Ocenimo funkcional:

$$\eta_{i6} = \frac{1}{2}(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i})(T_1^2T_2^2T_t^- D_i u - 0.5(u_{\bar{x}_i} + u_{x_i})) = \frac{1}{2}(a_{i,x_i} + a_{i,\bar{x}_i})\beta$$

gde je $\beta = T_1^2T_2^2T_t^- D_i u - 0.5(u_{\bar{x}_i} + u_{x_i})$. U slučaju $2 < s \le 3$ važi:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \le \frac{C}{h}\|u^*\|_{W_2^{s,s/2}(E)}.$$

Osim toga, $\beta = 0$ ako je u^* polinom drugog stepena po x_1^* i x_2^* ili prvog stepena po t^*, pa primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\beta(x,t)| \le \frac{C}{h}|u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|\beta(x,t)| \le Ch^{s-3}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Dalje imamo:

$$|\eta_{i6}(x,t)| \le Ch^{s-4}\|a_i\|_{C(\overline{Q})}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}^+$ dobijamo:

$$\|\eta_{i6}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{C(\overline{Q})}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Koristeći potapanje:

$$W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset C(\overline{Q}), \quad \text{za} \quad 2 < s \le 3,$$

dobijamo ocenu:

$$\|\eta_{i6}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3. \tag{17}$$

U slučaju $3 < s \le 4$ važi sledeće:

$$\begin{aligned} |\eta_{i6}(x,t)| &\le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{C(\overline{E})}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \\ &\le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \lambda > \frac{4}{q}, \quad \mu > \frac{2(q-2)}{q}, \quad q > 2. \end{aligned}$$

Pored toga, $\eta_{i6} = 0$ ako je a_i^* konstanta, a takodje ako je u^* polinom drugog stepena po x_1^* i x_2^* ili prvog stepena po t^*. Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$|\eta_{i6}(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|a_i^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \frac{4}{q} < \lambda \le 1, \quad \frac{2(q-2)}{q} < \mu \le 3.$$

Sledi:

$$\|\eta_{i6}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a_i\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}.$$

Stavljajući $\lambda = s-3$, $\mu = 3$, $q = (4+\varepsilon)/(s-3)$ i koristeći potapanja (5) jednostavno dobijamo:

$$\|\eta_{i6}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \le 4. \tag{18}$$

Ocenimo sada:

$$\eta_{i7} = \frac{1}{4}(a_{i,x_i} - a_{i,\bar{x}_i})(u_{\bar{x}_i} - u_{x_i}).$$

Važi:

$$\begin{aligned} |\eta_{i7}(x,t)| &\le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{C(\overline{E})}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \\ &\le \frac{C}{h^2}\|a_i^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}\|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \lambda > \frac{4}{q}, \quad \mu > \frac{2(q-2)}{q}, \quad q > 2. \end{aligned}$$

Pored toga, $\eta_{i7} = 0$ ako je a_i^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta, a takodje ako je u^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta. Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$|\eta_{i7}(x,t)| \le \frac{C}{h^2}|a_i^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(E)}|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(E)}, \quad \frac{4}{q} < \lambda \le 2, \quad \frac{2(q-2)}{q} < \mu \le 2.$$

Sledi:

$$\|\eta_{i7}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{\lambda+\mu-2}\|a\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)}\|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}.$$

Birajući λ, μ i q isto kao u slučaju ocene funkcionala η_{i2} važe potapanja (5) i (7), pa jednostavno dobijamo ocene:

$$\|\eta_{i7}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|a_i\|_{W^{s-1+\epsilon,(s-1+\epsilon)/2}_{4/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 3. \tag{19}$$

odnosno:

$$\|\eta_{i7}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \leq 4. \tag{20}$$

Konačno, na osnovu izvedenih ocena funkcionala η_{ik} imamo ocene funkcionala η_i :

$$\|\eta_i\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|a_i\|_{W^{s-1+\epsilon,(s-1+\epsilon)/2}_{4/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 3. \tag{21}$$

odnosno:

$$\|\eta_i\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \leq 4. \tag{22}$$

Ocenimo još funkcional:

$$\varphi = u_{\bar t} - T_1^2 T_2^2 u_{\bar t}.$$

Važi:

$$|\varphi(x,t)| \leq \frac{C}{\tau}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \leq \frac{C}{h^2}\|u^*\|_{C(\overline{E})} \leq \frac{C}{h^2}\|u^*\|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad s > 2.$$

Osim toga, $\varphi = 0$ ako je u^* polinom trećeg stepena po x_1^* i x_2^* ili prvog stepena po t^*. Primenom leme 1.3.3 imamo:

$$|\varphi(x,t)| \leq \frac{C}{h^2}|u^*|_{W_2^{s,s/2}(E)}, \quad 2 < s \leq 4.$$

Dalje:

$$|\varphi(x,t)| \leq Ch^{s-4}|u|_{W_2^{s,s/2}(e)}, \quad 2 < s \leq 4.$$

Sledi:

$$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^{s-2}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 4 \tag{23.}$$

Konačno na osnovu apriorne ocene (4) i ocena (21),(22) i (23) dobijamo sledeći rezultat:

Teorema 2. *Diferencijska schema (2) konvergira u normi prostora $W_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ i, uz uslov $k_1 h^2 \leq \tau \leq k_2 h^2$, važe ocene:*

$$\|u - v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \leq Ch^{s-2}\max_i \|a_i\|_{W^{s-1+\epsilon,(s-1+\epsilon)/2}_{4/(s-1)}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \leq 3,$$

$$\|u - v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \leq Ch^{s-2}\max_i \|a_i\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3 < s \leq 4.$$

Dobijene ocene brzine konvergencije su saglasne s glatkošću podataka.

III PARABOLIČKI PROBLEM S PROMENLJIVIM OPERATOROM: Konvergencija u $W_2^{1\,1/2}$–normi

1. Postavka problema i diferencijska shema

Kao modelni zadatak razmotrimo u oblasti $Q = \Omega \times (0, T] = (0, 1)^2 \times (0, T]$ prvi početno–granični problem za simetričnu linearnu paraboličku jednačinu drugog reda, s promenljivim koeficijentima:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f \quad , && (x, t) \in Q \quad , \\
&u = 0 \quad , && (x, t) \in \Gamma \times [0, T] = \partial\Omega \times [0, T] \quad , \\
&u(x, 0) = u_0(x) \quad , && x \in \Omega \quad ;
\end{aligned}
$$

gde je

$$
\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{2} D_i\left(a_{ij}(x, t)\, D_j u\right) \quad .
$$

Smatraćemo da generalisano rešenje problema (1) pripada anizotropnom prostoru Soboljeva $W_2^{s,\,s/2}(Q)$, $1 < s \le 3$, da $f(x, t)$ pripada $W_2^{s-2,\,s/2-1}(Q)$ i da koeficijenti $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$ pripadaju odgovarajućem anizotropnom prostoru Soboljeva:

$$
a_{ij} \in W^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}_{\frac{4}{s-1}}(Q) \, , \quad \varepsilon > 0 \, , \; 1 < s \le 3 \, .
$$

Ovaj uslov garantuje pripadnost koeficijenata odgovarajućem prostoru multiplikatora:

$$
a_{ij} \in M\left(W_2^{s-1,\,(s-1)/2}(Q)\right) .
$$

Takodje ćemo smatrati da su ispunjeni uslovi:

$$a_{ij} = a_{ji}\,, \quad 0 < k_0 < a_{ij}(x,t) < K_0\,,$$
$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, y_i\, y_j \ge c_0 \sum_{i=1}^{2} y_i^2 \quad, \quad c_0 > 0 \quad, \quad \forall\,(x,t) \in \overline{Q} \quad, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \quad,$$

kao i eventualni uslovi saglasnosti ulaznih podataka na $\partial\Omega \times \{0\}$ koji garantuju egzistenciju rešenja $u \in W_2^{s,\,s/2}(Q)$.

Najzad, smatraćemo da je rešenje $u(x,\,t)$ zadatka (1) produženo na oblast $(-d,\,1+d)^2 \times (-d,\,T]$, gde je $d > 0$, s očuvanjem klase.

Napomenimo da osnovu rezultata dobijenih u ovoj glavi čini rad B. Jovanovića [27] u kome je razmatran problem (1) s koeficijentima $a_{ij} = a_{ij}(x)$.

Neka je $\bar{\omega}$ uniformna mreža s korakom h u jediničnom kvadratu $\overline{\Omega} = [0,1]^2$. Neka je $\Gamma = \partial\Omega$ granica oblasti Ω i $\Gamma_{ik} = \{x \in \Gamma : x_i = k\,,\ 0 < x_{3-i} < 1\}$, $i = 1,2$, $k = 0,1$. Označimo: $\omega = \bar{\omega} - \Gamma$, $\gamma = \bar{\omega} - \omega$, $\gamma_{ik} = \Gamma_{ik} \cap \bar{\omega}$, $\omega_i = \omega \cup \gamma_{i0}$, $i = 1,2$. Neka je $m \in \mathbb{N}$, $\tau = T/m$ i θ_τ uniformna mreža s korakom τ na $(0,\,T)$. Označimo $\theta_\tau^- = \theta_\tau \cup \{0\}$, $\theta_\tau^+ = \theta_\tau \cup \{T\}$, $\overline{\theta}_\tau = \theta_\tau \cup \{0,\,T\}$, $Q_{h\tau} = \omega \times \theta_\tau$, $Q_{h\tau}^- = \omega \times \theta_\tau^-$, $Q_{h\tau}^+ = \omega \times \theta_\tau^+$ i $\overline{Q}_{h\tau} = \overline{\omega} \times \overline{\theta}_\tau$. Smatraćemo da je:

$$c_1\, h^2 \le \tau \le c_2\, h^2 \quad, \quad c_1,\, c_2 = const > 0$$

i $h,\,\tau < d$.

Početno-granični problem (1) aproksimirajmo na mreži $\overline{Q}_{h\tau}$ sledećom diferencijskom shemom:

$$(2)\qquad \begin{aligned} & v_{\bar{t}} + \mathcal{L}_h v = T_1^2 T_2^2 T_t^- f && \text{u} \quad Q_{h\tau}^+ \quad, \\ & v = 0 && \text{na} \quad \gamma \times \overline{\theta}_\tau \quad, \\ & v = P\, u_0 && \text{na} \quad \omega \times \{0\} \quad, \end{aligned}$$

gde je:

$$\mathcal{L}_h v = -\,0.5 \sum_{i,j=1}^{2} \left[(a_{ij}\, v_{\bar{x}_j})_{x_i} + (a_{ij}\, v_{x_j})_{\bar{x}_i} \right] \quad,$$

i

$$P\, u = \begin{cases} u & , \quad 2 < s \le 3 \\ T_1^2 T_2^2\, u\,, & \quad 1 < s \le 2 \end{cases} \quad .$$

Shema (2) predstavlja standardnu simetričnu implicitnu diferencijsku shemu s usrednjenom desnom stranom. Shema bez usrednjavanja ne može se koristiti ako je $s \le 4$, jer tada $f(x,\,t)$ nije neprekidna funkcija.

2. Apriorna ocena

Neka je u rešenje početno–graničnog problema (1) i v – rešenje diferencijske sheme (2). Za $1 < s \leq 2$, $u(x, t)$ nije obavezno neprekidna funkcija, ali ima integrabilne tragove za $t = const$. U daljem radu ćemo smatrati da je, za $1 < s \leq 2$, rešenje $u(x, t)$ neparno produženo po x_1 i x_2 van Q. (Za ukazane vrednosti s takvo produženje čuva klasu $W_2^{s, s/2}$).

Definišimo grešku na sledeći način:

$$z = P\, u - v \quad .$$

Tako definisana greška zadovoljava uslove:

$$(3) \qquad \begin{aligned} & z_{\bar{t}} + \mathcal{L}_h z = \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij,\bar{x}_i} + \psi_{\bar{t}} \quad \text{u} \quad Q_{h\tau}^{+} \quad , \\ & z = 0 \quad \text{na} \quad \omega \times \{0\} \quad , \\ & z = 0 \quad \text{na} \quad \gamma \times \overline{\theta}_\tau \quad , \end{aligned}$$

gde je:

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= T_i^{+} T_{3-i}^2 T_t^{-} \left(a_{ij}\, D_j u\right) - 0.5 \left[a_{ij}\, (P\, u)_{x_j} + a_{ij}^{+i}\, (P\, u)_{\bar{x}_j}^{+i}\right] \quad , \\ \psi &= P\, u - T_1^2 T_2^2\, u \quad . \end{aligned}$$

Uvedimo diskretne norme i polunorme:

$$\begin{aligned} \|v\|_{Q_{h\tau}}^2 &= (v,\, v)_{Q_{h\tau}} \quad , \\ \|v\|_i^2 &= h^2\, \tau \sum_{x \in \omega_i} \sum_{t \in \theta_\tau^{+}} v^2(x,\, t) \quad , \\ |v|_{1/2}^2 &= h^2\, \tau^2 \sum_{x \in \omega} \sum_{\substack{t,\, t' \in \overline{\theta}_\tau \\ t \neq t'}} \left[\frac{v(x,\, t) - v(x,\, t')}{t - t'}\right]^2 \quad . \end{aligned}$$

$$\|v\|_{W_2^{1,\,1/2}(Q_{h\tau})}^2 = \|v\|_{1,\,1/2}^2 = \sum_{i=1}^{2} \|v_{x_i}\|_i^2 + |v|_{1/2}^2 + \|v\|_{Q_{h\tau}}^2 \quad .$$

Važe sledeća tvrdjenja:

Lema 1. *Diferencijska shema*

$$(4)\qquad z_{\bar{t}} + \mathcal{L}_h z = \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij,\bar{x}_i} \quad \text{u} \quad Q_{h\tau}^{+} \quad , \qquad z = 0 \quad \text{na} \quad \gamma \times \overline{\theta}_\tau \quad ,$$

zadovoljava apriornu ocenu:

$$(5)\qquad \|z\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \le C\left(\|z(\,.\,,0)\|^2_\omega + \tau \sum_{i=1}^{2} \|z_{x_i}(\,.\,,0)\|^2_{\omega_i} + \sum_{i,j=1}^{2} \|\eta_{ij}\|^2_i\right) \quad .$$

Dokaz. Množeći jednačinu (4) sa τz i sumirajući po čvorovima mreže ω dobijamo:

$$\frac{1}{2}\left(\|z\|^2_\omega - \|\check{z}\|^2_\omega\right) + \frac{1}{2}\|z - \check{z}\|^2_\omega + \tau(\mathcal{L}_h z,\, z)_\omega = \sum_{i,j=1}^{2} \tau(\eta_{ij,\bar{x}_i},\, z)_\omega \,.$$

Koristeći relacije:

$$(\mathcal{L}_h z,\, z)_\omega \ge c_0 \sum_{i=1}^{2} \|z_{x_i}\|^2_{\omega_i} \quad , \quad \text{i}$$

$$(\eta_{ij\,\bar{x}_i},\, z)_\omega = -(\eta_{ij},\, z_{x_i})_{\omega_i} \le \frac{1}{c_0}\|\eta_{ij}\|^2_{\omega_i} + \frac{c_0}{4}\|z_{x_i}\|^2_{\omega_i}$$

odatle dobijamo:

$$\|z\|^2_\omega - \|\check{z}\|^2_\omega + c_0 \sum_{i=1}^{2} \tau\|z_{x_i}\|^2_{\omega_i} \le \frac{2}{c_0} \sum_{i,j=1}^{2} \tau\|\eta_{ij}\|^2_{\omega_i} \quad .$$

Najzad, sumiranjem po čvorovima mreže θ_τ^+, uz korišćenje diskretne nejednakosti Friedrichsa, dobijamo:

$$(6)\qquad \|z\|^2_{Q_{h\tau}} + \sum_{i=1}^{2} \|z_{x_i}\|^2_i \le C\left(\|z(\,.\,,0)\|^2_\omega + \sum_{i,j=1}^{2} \|\eta_{ij}\|^2_i\right) \quad .$$

Da bismo ocenili $|z|_{1/2}$ razložimo funkciju z u redove po sinusima i kosinusima promenljive t [27]:

$$z(x,\,t) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)\cos\frac{k\pi t}{T} + \frac{a_m(x)}{2}\cos\frac{m\pi t}{T} \quad , \quad t \in \overline{\theta}_\tau \quad ,$$

$$z(x,\,t) = \sum_{k=1}^{m-1} b_k(x)\sin\frac{k\pi t}{T} \quad , \quad t \in \theta_\tau \quad ,$$

gde je

$$a_k = a_k[z] = \frac{2}{T}\tau\left[\frac{z(x,0)}{2} + \sum_{t\in\theta_\tau} z(x,t)\cos\frac{k\pi t}{T} + \frac{z(x,T)}{2}(-1)^k\right] \quad .$$

$$b_k = b_k[z] = \frac{2}{T}\tau \sum_{t\in\theta_\tau} z(x,t)\sin\frac{k\pi t}{T} \quad .$$

Definišimo norme:

$$A(z) = \Big(\sum_{k=1}^{m-1} k\,\|a_k[z]\|_\omega^2 + \frac{1}{2}\,m\,\|a_m[z]\|_\omega^2\Big)^{1/2} \quad , \quad \text{i}$$

$$B(z) = \Big(\sum_{k=1}^{m-1} k\,\|b_k[z]\|_\omega^2\Big)^{1/2} \quad .$$

Važe sledeće ocene [27]:

$$c_3\,|z|_{1/2} \le A(z) \le c_4\,|z|_{1/2} \quad , \quad \text{i}$$

$$B(z) \le c_4\left[|z|_{1/2}^2 + \tau\sum_{t\in\theta_\tau}\Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{T-t}\Big)\|z(\,.\,,t)\|_\omega^2\right]^{1/2} \quad . \tag{7}$$

Takodje se neposredno proverava da je:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \|b_k[z]\|_\omega^2 = \frac{2}{T}\tau\sum_{t\in\theta_\tau}\|z(\,.\,,t)\|_\omega^2 \quad .$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|a_0[z]\|_\omega^2 + \sum_{k=1}^{m-1}\|a_k[z]\|_\omega^2 + \frac{1}{2}\|a_m[z]\|_\omega^2 \\ &= \frac{2}{T}\tau\left[\frac{1}{2}\|z(\,.\,,0)\|_\omega^2 + \sum_{t\in\theta_\tau}\|z(\,.\,,t)\|_\omega^2 + \frac{1}{2}\|z(\,.\,,T)\|_\omega^2\right] \quad . \end{aligned} \tag{8}$$

Pomnožimo jednačinu (4) sa $\dfrac{2}{T}\tau\sin\dfrac{k\pi(t-\tau/2)}{T}$ i sumirajmo po čvorovima mreže θ_τ^+. Koristeći parcijalnu sumaciju, adicione trigonometrijske formule i prethodne razvoje, dobijamo:

$$\begin{aligned} -\frac{\sin\dfrac{k\pi\tau}{2T}}{\dfrac{k\pi\tau}{2T}}\,\frac{\pi}{T}\,k\,a_k[z] &= \cos\frac{k\pi\tau}{2T}\Big\{-b_k[\mathcal{L}_h z] + \sum_{i,j=1}^{2} b_k[\eta_{ij,\bar{x}_i}]\Big\} \\ &-\sin\frac{k\pi\tau}{2T}\Big\{-a_k[\mathcal{L}_h z] + \sum_{i,j=1}^{2} a_k[\eta_{ij,\bar{x}_i}]\Big\} + \frac{\tau}{T}\sin\frac{k\pi\tau}{2T}\Big\{-\mathcal{L}_h z(x,0) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij,\bar{x}_i}(x,0) + (-1)^k\,\mathcal{L}_h z(x,T) - (-1)^k\sum_{i,j=1}^{2}\eta_{ij,\bar{x}_i}(x,T)\Big\} \quad . \end{aligned}$$

Množeći dobijenu relaciju sa $a_k[z]$, sumirajući po čvorovima mreže ω i po k, koristeći ograničenost funkcije $\dfrac{\sin t}{t}$ za $0 \le t \le \pi/2$, relacije (7) i (8), jednakosti:

$$\text{(8a)} \qquad \begin{aligned} &\big(a_k[\varphi_{\bar{x}_i}],\, a_k[z]\big)_\omega = -\big(a_k[\varphi],\, a_k[z_{x_i}]\big)_{\omega_i} \quad \text{i} \\ &\big(b_k[\varphi_{\bar{x}_i}],\, a_k[z]\big)_\omega = -\big(b_k[\varphi],\, a_k[z_{x_i}]\big)_{\omega_i} \end{aligned}$$

i nejednakost Cauchy–Schwartza, dobijamo:

$$\text{(9)} \qquad |z|_{1/2}^2 \le C\tau \sum_{t\in\bar{\theta}_\tau} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} \|\eta_{ij}\|_{\omega_i}^2 + \|z\|_\omega^2 + \sum_{i=1}^{2} \|z_{x_i}\|_{\omega_i}^2 \Big) \quad .$$

Pošto u (4) ne učestvuju vrednosti $\eta_{ij}(x,0)$, bez smanjenja opštosti možemo smatrati da su one jednake nuli. Tako iz (6) i (9) dobijamo traženu nejednakost (5). □

Lema 2. *Diferencijska shema*

$$\text{(10)} \qquad z_{\bar{t}} + \mathcal{L}_h z = \psi_{\bar{t}} \quad \text{u} \quad Q_{h\tau}^+ , \quad z = 0 \quad \text{na} \quad \gamma \times \bar{\theta}_\tau , \quad z = 0 \quad \text{na} \quad \omega \times \{0\}$$

zadovoljava apriornu ocenu:

$$\text{(11)} \qquad \|z\|_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})}^2 \le C\,\big(A^2(\psi) + B^2(\psi)\big) \quad .$$

Dokaz. Pomnožimo jednačinu (10) sa $\dfrac{2}{T}\tau \sin \dfrac{k\pi(t-\tau/2)}{T}$ i sumirajmo po čvorovima mreže θ_τ^+. Koristeći parcijalnu sumaciju, adicione trigonometrijske formule i prethodne razvoje, dobijamo:

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} \frac{\sin \frac{k\pi\tau}{2T}}{\frac{k\pi\tau}{2T}} \frac{\pi}{T} k\, a_k[z] &= \cos \frac{k\pi\tau}{2T}\, b_k[\mathcal{L}_h z] - \sin \frac{k\pi\tau}{2T}\, a_k[\mathcal{L}_h z] \\ &- \frac{\tau}{T} \sin \frac{k\pi\tau}{2T} (-1)^k \mathcal{L}_h z(x,T) + \frac{\sin \frac{k\pi\tau}{2T}}{\frac{k\pi\tau}{2T}} \frac{\pi}{T} k\, a_k[\psi] \quad . \end{aligned}$$

Primenom formula (8) i (8a), uzimajući u obzir ograničenost koeficijenata a_{ij}, dobijamo ocene:

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m-1} \big(b_k[\mathcal{L}_h z],\, a_k[z]\big)_\omega \le C\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \sum_{i=1}^{2} \|z_{x_i}\|_{\omega_i}^2 , \\ &\sum_{k=1}^{m-1} \big(a_k[\mathcal{L}_h z],\, a_k[z]\big)_\omega \le C\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \sum_{i=1}^{2} \|z_{x_i}\|_{\omega_i}^2 . \end{aligned}$$

Pomnožimo sada relaciju (12) sa $a_k[z]$, i sumirajmo po čvorovima mreže ω i po k. Koristeći ograničenost funkcije $\dfrac{\sin t}{t}$ za $0 \le t \le \pi/2$, relacije (13) i nejednakost Cauchy-Schwartza, dobijamo:

$$(14) \qquad \sum_{k=1}^{m}{}^{*} k\|a_k[z]\|_\omega^2 \le C\Big(\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \sum_{i=1}^{2} \|z_{x_i}\|_{\omega_i}^2 + \sum_{k=1}^{m}{}^{*} k\|a_k[\psi]\|_\omega^2\Big)$$

gde je $\sum_{k=0}^{m}{}^{*} c_k = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{k=1}^{m-1} c_k + \frac{1}{2}c_m$

Pomnožimo sada jednačinu (10) sa $2z$ i sumirajmo po čvorovima mreže ω. Sledi:

$$\frac{1}{\tau}(\|z\|_\omega^2 - \|\check z\|_\omega^2) + \frac{1}{\tau}\|z - \check z\|_\omega^2 + 2(\mathcal{L}_h z, z)_\omega = 2(\psi_{\bar t}, z)_\omega$$

Sumiranjem po čvorovima mreže θ_τ^+ dobijamo:

$$(15) \qquad \|z(T)\|_\omega^2 - \|z(0)\|_\omega^2 + \sum_{t\in\theta_\tau^+} \|z - \check z\|_\omega^2 + 2\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\mathcal{L}_h z, z)_\omega = 2\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z)_\omega .$$

Važi:

$$2\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z)_\omega = \tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z + \check z)_\omega + \tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z - \check z)_\omega .$$

Dalje je

$$\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z - \check z)_\omega \le \sum_{t\in\theta_\tau^+} \|z - \check z\|_\omega^2 + \frac{\tau^2}{4} \sum_{t\in\theta_\tau^+} \|\psi_{\bar t}\|_\omega^2 .$$

Važi:

$$\tau^2 \sum_{t\in\theta_\tau^+} \|\psi_{\bar t}\|_\omega^2 = \tau^2 \sum_{t\in\theta_\tau^+} \frac{\|\psi(t) - \psi(t-\tau)\|_\omega^2}{|t - (t-\tau)|^2} \le \tau^2 \sum_{\substack{t,t'\in\bar\theta_\tau \\ t\ne t'}} \frac{\|\psi(t) - \psi(t')\|_\omega^2}{|t - t'|^2} = |\psi|_{1/2}^2$$

Ocenimo izraz $\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z + \check z)_\omega$. Koristeći razvoj funkcije $\psi(t)$ u red po sinusima i $z(t)$ u red po kosinusima, imamo.

$$\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z + \check z)_\omega = \tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{m}{}^{*} (b_k[\psi], a_j[z])_\omega \frac{2}{\tau} \sin\frac{k\pi\tau}{2T} \cos\frac{k\pi(t-\tau/2)}{T}$$
$$\times 2\cos\frac{j\pi\tau}{2T} \cos\frac{j\pi(t-\tau/2)}{T} .$$

Primenom relacije:

$$\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} \cos\frac{k\pi(t-\tau/2)}{T}\cos\frac{j\pi(t-\tau/2)}{T} = \begin{cases} T/2\,, & j=k \\ 0\,, & j\neq k \end{cases}\,;$$

ε-nejednakosti i ograničenosti funkcije $\dfrac{\sin t}{t}$ za $0\le t\le \pi/2$, imamo:

$$\begin{aligned}
\tau \sum_{t\in\theta_\tau^+} (\psi_{\bar t}, z+\check z)_\omega &= 2T\sum_{k=1}^{m-1}(b_k[\psi],\, a_k[z])_\omega\,\frac{1}{\tau}\sin\frac{k\pi\tau}{2T}\cos\frac{k\pi\tau}{2T} \\
&= \pi\sum_k (b_k[\psi],\, a_k[z])_\omega\, k\,\frac{\sin\dfrac{k\pi\tau}{2T}}{\dfrac{k\pi\tau}{2T}}\cos\frac{k\pi\tau}{2T} \\
&\le \frac{C}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{m-1} k\,\|b_k[\psi]\|_\omega^2 + \frac{C\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{m}{}^{*}\, k\,\|a_k[z]\|_\omega^2\,.
\end{aligned}$$

Iz (15) i prethodnih ocena sledi:

$$(16)\qquad \tau\sum_{t\in\theta_\tau^+}\|z\|_{\mathcal{L}_h}^2 \le C\left(|\psi|_{1/2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{m-1} k\,\|b_k[\psi]\|_\omega^2 + \varepsilon\sum_{k=1}^{m}{}^{*}\, k\,\|a_k[z]\|_\omega^2\right).$$

Iz (14) i (16), za dovoljno malo ε, primenom (7), dobijamo ocene:

$$(17)\qquad \sum_{k=1}^{m}{}^{*}\, k\|a_k[z]\|_\omega^2 \le C\left(\sum_{k=1}^{m}{}^{*}\, k\|a_k[\psi]\|_\omega^2 + \sum_{k=1}^{m-1} k\|b_k[\psi]\|_\omega^2\right),$$

$$(18)\qquad \tau\sum_{t\in\theta_\tau^+}\sum_{i=1}^{2}\|z_{x_i}\|_{\omega_i}^2 \le C\left(\sum_{k=1}^{m}{}^{*}\, k\|a_k[\psi]\|_\omega^2 + \sum_{k=1}^{m-1} k\|b_k[\psi]\|_\omega^2\right).$$

Konačno, iz (17) i (18), primenom relacija (7) sledi apriorna ocena (11). □

Iz (5) i (11), korišćenjem relacija (7), zaključujemo da diferencijska shema (3) zadovoljava apriornu ocenu:

$$
\|z\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \le C\Big[\sum_{i=1}^{2} \|\eta_{ij}\|_i^2 + \|\eta\|^2_{Q_{h\tau}} + |v|^2_{1/2} + \tau \sum_{t\in\theta_-}\Big(\frac{1}{t}+\frac{1}{T-t}\Big)\|v(\,\cdot\,,t)\|^2_\omega\Big]. \tag{19}
$$

Primetimo da, za razliku od apriorne ocene u $W_2^{2,1}$–normi (ocena 2.5.4), apriorna ocena (19) važi bez dodatnih pretpostavki o monotonosti koeficijenata po promenljivoj t i o jednačini bez mešovitih izvoda.

3. Konvergencija diferencijske sheme

Problem ocene brzine konvergencije diferencijske sheme (2) je tako sveden na ocenu desne strane nejednakosti (19).

Kao prvo, rastavimo η_{ij} na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\eta_{ij} &= \eta_{ij1} + \eta_{ij2} + \eta_{ij3} + \eta_{ij4}\quad, \quad \text{gde je}\\
\eta_{ij1} &= T_i^+T_{3-i}^2T_t^-(a_{ij}D_ju) - (T_i^+T_{3-i}^2T_t^-a_{ij})(T_i^+T_{3-i}^2T_t^-D_ju)\quad,\\
\eta_{ij2} &= \big[T_i^+T_{3-i}^2T_t^-a_{ij} - 0.5(a_{ij}+a_{ij}^{+i})\big]\,(T_i^+T_{3-i}^2T_t^-D_ju)\quad,\\
\eta_{ij3} &= 0.5\,(a_{ij}+a_{ij}^{+i})\,\big\{T_i^+T_{3-i}^2T_t^-D_ju - 0.5\,\big[(Pu)_{x_j} + (Pu)_{\bar x_j}^{+i}\big]\big\}\quad,\\
\eta_{ij4} &= -0.25\,(a_{ij}-a_{ij}^{+i})\,\big[(Pu)_{x_j} - (Pu)_{\bar x_j}^{+i}\big]\quad.
\end{aligned}
$$

Uvedimo elementarne paralelopipede $g_i = g_i(x,t) = \{(\xi_1,\xi_2,\nu) : x_i < \xi_i < x_i + h,\ |\xi_{3-i} - x_{3-i}| < h,\ \nu \in (t-\tau,t)\}$, $i = 1,2$. Linearnim transformacijama $\xi_i = x_i + hx_i^*$, $i = 1,2$, $\nu = t + \tau t^*$, uspostavlja se obostrano jednoznačno preslikavanje izmedju g_i i standardnog paralelopipeda $G_i = \{(x_1^*,x_2^*,t^*) : 0 < x_i^* < 1,\ |x_{3-i}^*| < 1,\ -1 < t^* < 0\}$, $i = 1,2$ Označimo $u^*(x^*,t^*) \equiv u^*(x_1^*,x_2^*,t^*) = u(x_1 + hx_1^*, x_2 + hx_2^*, t + \tau t^*)$, itd.

Vrednost η_{ij1} u čvoru $(x,t) \in Q_{h\tau}^+$ može se predstaviti u obliku:

$$
\eta_{ij1}(x,t) = \frac{1}{h}\Bigg\{\iint_{G_i} k(x_{3-i}^*)a_{ij}^*(x^*,t^*)D_ju^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* - \iint_{G_i} k(x_{3-i}^*)a_{ij}^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^* \times \iint_{G_i} k(x_{3-i}^*)D_ju^*(x^*,t^*)\,dt^*dx^*\Bigg\}
$$

gde je:

$$
k(x_{3-i}^*) = 1 - |x_{3-i}^*|\,.
$$

Radi kraćeg zapisa $\iint\limits_{G_1} \cdots dt^* dx^*$ označava $\iiint\limits_{G_1} \cdots dt^* dx_2^* dx_1^*$.

Odavde jednostavno sledi:

$$|\eta_{ij1}(x,t)| \leq \frac{C}{h} \|a_{ij}^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(G_1)} \|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(G_1)}, \quad \lambda \geq 0, \ \mu \geq 1, \ q > 2.$$

Osim toga, $\eta_{ij1} = 0$ ako je a_{ij}^* konstanta ili ako je u^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta. Primenom leme 1.3.4 dobijamo:

$$|\eta_{ij1}(x,t)| \leq \frac{C}{h} |a_{ij}^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(G_1)} |u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(G_1)}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \ 1 \leq \mu \leq 2, \ q > 2.$$

Vraćajući se na stare promenljive, koristeći uslov $k_1 h^2 \leq \tau \leq k_2 h^2$, dobijamo:

$$|a_{ij}^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(G_1)} \leq C h^{\lambda - \frac{4}{q}} |a_{ij}|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(g_1)} \quad \text{i}$$

$$|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(G_1)} \leq C h^{\mu - \frac{2(q-2)}{q}} |u|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(g_1)}.$$

Sledi:

$$|\eta_{ij1}(x,t)| \leq C h^{\lambda+\mu-3} |a_{ij}|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(g_1)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(g_1)}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \ 1 \leq \mu \leq 2, \ q > 2.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}^+$ dobijamo:

$$\|\eta_{ij1}\|_i \leq C h^{\lambda+\mu-1} \|a_{ij}\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)} \|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \ 1 \leq \mu \leq 2.$$

Važe sledeća potapanja:

$$W_2^{\lambda+\mu,(\lambda+\mu)/2}(Q) \subset W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q), \quad \text{za } \lambda \geq 4/q \quad \text{i}$$

$$W_{4/(\lambda+\mu-1)}^{\lambda+\mu-1+\varepsilon,(\lambda+\mu-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q), \qquad \text{za } \lambda \leq 4/q + \varepsilon.$$

U slučaju $1 < s \leq 2$, stavljajući $q = 4/(s-1)$, $\lambda = s-1$, $\mu = 1$, odnosno za $2 < s \leq 3$, $q = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = s-1$, važe prethodna potapanja, pa jednostavno dobijamo:

(20) $$\|\eta_{ij1}\|_i \leq C h^{s-1} \|a_{ij}\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 1 < s \leq 3.$$

Ocenimo sada:

$$\eta_{ij2} = \left[T_i^+ T_{3-i}^2 T_t^- a_{ij} - 0.5(a_{ij} + a_{ij}^{+i})\right] (T_i^+ T_{3-i}^2 T_t^- D_j u).$$

Važi ocena:

$$\begin{aligned} |\eta_{ij2}(x,t)| &\leq \frac{C}{h} \|a_{ij}^*\|_{C(\overline{G}_i)} \|u^*\|_{W_2^{1,1/2}(G_1)} \\ &\leq \frac{C}{h} \|a_{ij}^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(G_1)} \|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{1,1/2}(E)}, \quad \lambda > \frac{4}{q}, \ q > 2. \end{aligned}$$

Pored toga, $\eta_{ij2} = 0$ ako je a^*_{ij} polinom prvog stepena po x^*_1 i x^*_2 ili konstanta, a takodje ako je u^* konstanta . Primenom leme 1.3.4 imamo:

$$|\eta_{ij2}(x,t)| \leq \frac{C}{h} |a^*_{ij}|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(G_i)} |u^*|_{W^{1,1/2}_{2q/(q-2)}(G_i)}\,, \quad \frac{4}{q} < \lambda \leq 2\,,\ q > 2\,.$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|\eta_{ij2}(x,t)| \leq C h^{\lambda-2} |a^*_{ij}|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(g_i)} |u^*|_{W^{1,1/2}_{2q/(q-2)}(g_i)}\,, \quad \frac{4}{q} < \lambda \leq 2\,,\ q > 2\,.$$

Sledi:

$$||\eta_{ij2}||_i \leq C h^{\lambda} ||a_{ij}||_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)} ||u||_{W^{1,1/2}_{2q/(q-2)}(Q)}$$

Stavljajući $\lambda = s-1$, $q = \dfrac{4+\varepsilon}{s-1}$, $q_1 \equiv \dfrac{2q}{q-2} = \dfrac{8+2\varepsilon}{6+\varepsilon-2s}$, $1 < s \leq 3$, i koristeći potapanja:

$$W_2^{s,s/2}(Q) \subset W_{q_1}^{1,1/2}(Q)\,, \qquad \text{i}$$
$$W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset W_q^{s-1,(s-1)/2}(Q)\,, \quad \text{za } 1 < s \leq 3$$

dobijamo:

$$||\eta_{ij2}||_i \leq C h^{s-1} ||a_{ij}||_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} ||u||_{W_2^{s,s/2}(Q)}\,, \quad 1 < s \leq 3\,. \tag{21}$$

Za $s > 1$, $\eta_{ij3}(x,t)$ je ograničen bilinearan funkcional od $(a_{ij},\, u) \in C(\overline{g}_i) \times W_2^{s,\,s/2}(g_i)$ koji se anulira ako je u polinom drugog stepena po x_1 i x_2 i proizvoljnog stepena po t (s konstantnim koeficijentima). Primenom leme 1.3.3 dobijamo ocenu:

$$|\eta_{ij3}(x,\,t)| \leq C\,h^{s-3}\,||a_{ij}||_{C(\overline{g}_i)}\,|u|_{\widehat{W}_2^{s,\,s/2}(g_i)}\,, \qquad 1 < s \leq 3\,.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q^+_{h\tau}$ dobijamo:

$$||\eta_{ij3}||_i \leq C\,h^{s-1}\,||a_{ij}||_{C(\overline{Q})}\,||u||_{W_2^{s,\,s/2}(Q)}\,, \qquad 1 < s \leq 3\,.$$

Koristeći potapanje:

$$W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2} \subset C(\overline{Q})\,, \quad 1 < s \leq 3\,,$$

dobijamo:.

$$||\eta_{ij3}||_i \leq C h^{s-1} ||a_{ij}||_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} ||u||_{W_2^{s,s/2}(Q)}\,, \quad 1 < s \leq 3 \tag{22}$$

Dalje, ocenimo:

$$\eta_{hj4} = -\,0.25\,(a_{ij} - a^{+i}_{ij})\,\left[(P\,u)_{x_j} - (P\,u)^{+i}_{\bar{x}_j}\right]\,.$$

Razmotrimo najpre slučaj $1 < s \leq 2$. Neka je:

$$\beta = (P\,u)_{x_i} - (P\,u)_{\bar{x}_i}^{+i}.$$

Važi ocena:

$$|\beta(x,t)| \leq \frac{C}{h}\|u^*\|_{W_2^{s,s/2}(G_{i,p})},$$

gde je $G_{i\,p} = \{(x_1^*, x_2^*, t^*) : -1 < x_i^* < 2,\ |x_{3-i}^*| < 2,\ -1 < t^* < 0\}$, $i = 1, 2$. Osim toga, $\beta = 0$ ako je u^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta pa primenom leme 1.3.3 sledi:

$$|\beta(x,t)| \leq \frac{C}{h}|u^*|_{W_2^{s,s/2}(G_{i,p})}.$$

Vraćajući se na stare promenljive imamo:

$$|\beta(x,t)| \leq Ch^{s-3}|u|_{W_2^{s,s/2}(g_{i,p})},$$

gde je $g_{i\,p} = \{(\xi_1, \xi_2, \nu) : x_i - h < \xi_i < x_i + 2h,\ |\xi_{3-i} - x_{3-i}| < 2h,\ \nu \in (t-\tau, t)\}$, $i = 1, 2$. Sledi:

$$|\eta_{ij4}(x,t)| \leq Ch^{s-3}\|a_{ij}\|_{C(\overline{Q})}|u|_{W_2^{s,s/2}(g_{i\,p})}.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}$, koristeći pretpostavku da je u slučaju $1 < s \leq 2$ rešenje $u(x,t)$ neparno produženo van oblasti Q s očuvanjem klase, jednostavno dobijamo:

$$\|\eta_{ij4}\|_i \leq C\,h^{s-1}\,\|a_{ij}\|_{C(\overline{Q})}\,\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}\quad,\quad 1 < s \leq 2\quad.$$

Koristeći potapanje:

$$W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2} \subset C(\overline{Q}),\quad 1 < s \leq 2,$$

dobijamo:.

$$\|\eta_{ij4}\|_i \leq Ch^{s-1}\|a_{ij}\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)},\quad 1 < s \leq 2 \tag{23}$$

U slučaju $2 < s \leq 3$ važi sledeće:

$$\begin{aligned}|\eta_{ij4}(x,t)| &\leq \frac{C}{h}\|a_{ij}^*\|_{C(\overline{G}_i)}\|u^*\|_{C(\overline{G}_i)}\\ &\leq \frac{C}{h}\|a_{ij}^*\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(G_i)}\|u^*\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(G_i)},\ \lambda > \frac{4}{q},\ \mu > \frac{2(q-2)}{q},\ q > 2.\end{aligned}$$

Osim toga, $\eta_{ij4} = 0$ ako je a_{ij}^* konstanta ili ako je u^* polinom prvog stepena po x_1^* i x_2^* ili konstanta. Primenom leme 1.3.4 dobijamo:

$$|\eta_{ij4}(x,t)| \leq \frac{C}{h}|a_{ij}^*|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(G_i)}|u^*|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(G_i)},$$

pri čemu je $4/q < \lambda \le 1$, $2(q-2)/q < \mu \le 2$, $q > 2$.

Vraćajući se na stare promenljive, dobijamo:

$$|\eta_{ij4}(x,t)| \le C h^{\lambda+\mu-3} |a_{ij}|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(g_i)} |u|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(g_i)} .$$

Sledi:

$$\|\eta_{ij4}\|_h \le C h^{\lambda+\mu-1} \|a_{ij}\|_{W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q)} \|u\|_{W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q)}$$

Važe sledeća potapanja:

$$W_2^{\lambda+\mu,(\lambda+\mu)/2}(Q) \subset W_{2q/(q-2)}^{\mu,\mu/2}(Q), \quad \text{za } \lambda \ge 4/q \quad \text{i}$$

$$W_{4/(\lambda+\mu-1)}^{\lambda+\mu-1+\varepsilon,(\lambda+\mu-1+\varepsilon)/2}(Q) \subset W_q^{\lambda,\lambda/2}(Q), \qquad \text{za } \lambda \le 4/q + \varepsilon .$$

Stavljajući $q = (4+\varepsilon)/(s-2)$, $\lambda = s-2$, $\mu = 2$ jednostavno dobijamo:

(24) $$\|\eta_{ij4}\|_h \le C h^{s-1} \|a_{ij}\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 2 < s \le 3 .$$

Konačno, na osnovu izvedenih ocena imamo:

(25) $$\|\eta_{ij}\|_h \le C h^{s-1} \|a_{ij}\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 1 < s \le 3 .$$

Predjimo sada na ocenjivanje ψ. Očigledno je:

(26) $$\psi = 0 \qquad \text{za} \qquad 1 < s \le 2 .$$

Za $2 < s \le 3$ je:

(27) $$|\psi|_{1/2} \le |T_t^- \psi|_{1/2} + |\psi - T_t^- \psi|_{1/2} .$$

Dalje je, za $0 < \lambda \le 1/2$:

$$|T_t^- \psi|_{1/2}^2 \le \tau^{2\lambda-1} \tau^2 h^2 \sum_{x\in\omega} \sum_{\substack{t,\, t' \in \bar{\theta}_\tau \\ t \ne t'}} \frac{\left[T_t^- \psi(x,t) - T_t^- \psi(x,t')\right]^2}{|t-t'|^{1+2\lambda}} .$$

Za $t, t' \in \bar{\theta}_\tau$ i $t \ne t'$ je:

$$|T_t^- \psi(x,t) - T_t^- \psi(x,t')| = \left| \tau^{-2} \int_{t-\tau}^{t} \int_{t'-\tau}^{t'} \left[\psi(x,\sigma) - \psi(x,\sigma')\right] d\sigma\, d\sigma' \right|$$

$$\le \left\{ \tau^{-2} 2^{1+2\lambda} |t-t'|^{1+2\lambda} \int_{t-\tau}^{t} \int_{t'-\tau}^{t'} \frac{\left[\psi(x,\sigma) - \psi(x,\sigma')\right]^2}{|\sigma-\sigma'|^{1+2\lambda}} d\sigma\, d\sigma' \right\}^{1/2} .$$

Iz poslednje dve nejednakosti dobijamo:

$$|T_t^- \psi|_{1/2}^2 \le 2^{1+2\lambda}\,\tau^{2\lambda-1}\,h^2 \sum_{x\in\omega} \int_0^T \int_{-\tau}^{T-\tau} \frac{\left[\psi(x,\,\sigma)-\psi(x,\,\sigma')\right]^2}{|\sigma-\sigma'|^{1+2\lambda}}\,d\sigma\,d\sigma' \quad .$$

Koristeći reprezentaciju:

$$\psi(x,\,t) = u(x,\,t) - T_1^2 T_2^2\,u(x,\,t)$$

$$= h^{-2} \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} \int\limits_{x_2-h}^{x_2+h} \left(1-\frac{|y_1-x_1|}{h}\right)\left(1-\frac{|y_2-x_2|}{h}\right)\left[u(x,\,t)-u(y,\,t)\right] dy_2\,dy_1$$

$$= h^{-2} \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} \int\limits_{x_2-h}^{x_2+h} \int\limits_{s_1}^{x_1} \int\limits_{s_2}^{x_2} \left(1-\frac{|s_1-x_1|}{h}\right)\left(1-\frac{|s_2-x_2|}{h}\right) \frac{\partial^2 u(y,\,t)}{\partial y_1\,\partial y_2}\,dy_2\,dy_1\,ds_2\,ds_1$$

$$- h^{-2} \int\limits_0^h \int\limits_0^s \int\limits_{x_1-r}^{x_1+r} \int\limits_{x_2-h}^{x_2+h} \left(1-\frac{s}{h}\right)\left(1-\frac{|y_2-x_2|}{h}\right) \frac{\partial^2 u(y,\,t)}{\partial y_1^2}\,dy_2\,dy_1\,dr\,ds$$

$$- h^{-2} \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} \int\limits_0^h \int\limits_0^s \int\limits_{x_2-r}^{x_2+r} \left(1-\frac{|y_1-x_1|}{h}\right)\left(1-\frac{s}{h}\right) \frac{\partial^2 u(y,\,t)}{\partial y_2^2}\,dy_2\,dr\,ds\,dy_1$$

i nejednakost Cauchy–Schwartza, odatle dalje dobijamo:

$$|T_t^- \psi|_{1/2} \le C\,h^{1+2\lambda}\,|u|_{\widehat{W}_2^{2+2\lambda,\,1+\lambda}(Q)} \quad , \quad 0<\lambda\le 1/2 \quad .$$

Najzad, stavljajući $s = 2+2\lambda$, dobijamo:

$$|T_t^- \psi|_{1/2} \le C\,h^{s-1}\,\|u\|_{W_2^{s,\,s/2}(Q)} \quad , \quad 2<s\le 3 \quad . \tag{28}$$

Drugi sabirak u (27) može se oceniti sa:

$$|\psi - T_t^- \psi|_{1/2}^2 \le \frac{4}{3}\,\pi^2\,h^2 \sum_{x\in\omega} \sum_{t\in\overline{\theta}_\tau} (\psi - T_t^- \psi)^2 \quad .$$

Primenom leme 1.3.3 dalje dobijamo:

$$|\psi - T_t^- \psi|_{1/2} \le C\,h^{s-1}\,|u|_{\widehat{W}_2^{s,\,s/2}(Q)} \quad , \quad 2<s\le 3 \quad . \tag{29}$$

Najzad, primenom leme 1.3.3 i teoreme o tragovima 1.2.2, dobijamo:

$$\begin{aligned} & h^2\,\tau \sum_{x\in\omega} \sum_{t\in\theta_\tau} \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{T-t}\right)\psi^2(x,\,t) \\ & \le C\,h^{2s-2}\,\tau \sum_{t\in\theta_\tau} \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{T-t}\right)|u(\,.\,,\,t)|_{W_2^{s-1}(\Omega)}^2 \\ & \le C\,h^{2s-2}\,\ln\frac{1}{h}\,\|u\|_{W_2^{s,\,s/2}(Q)}^2 \quad , \quad \text{za} \quad 2<s\le 3 \quad . \end{aligned} \tag{30}$$

Kombinujući (19) sa (25)–(30) dobijamo sledeći rezultat:

Teorema 1. *Diferencijska shema* (2) *konvergira u normi* $W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})$, *ako je zadovoljen uslov* $c_1 h^2 \leq \tau \leq c_2 h^2$, *i važe sledeće ocene:*

$$\|u - v\|_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \leq C\, h^{s-1} \Big(\max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} + \sqrt{\ln \tfrac{1}{h}} \Big) \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)} \,, \quad za \quad 2 < s \leq 3 \,, \tag{31}$$

i

$$\|T_1^2 T_2^2\, u - v\|_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \leq C\, h^{s-1} \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_{4/(s-1)}^{s-1+\varepsilon,(s-1+\varepsilon)/2}(Q)} \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)} \,, \quad za \quad 1 < s \leq 2 \,. \tag{32}$$

Ocena (32) *je saglasna s glatkošću podataka, dok je ocena* (31) *"skoro" saglasna – saglasnost narušava član* $\sqrt{\ln \frac{1}{h}}$, *koji sporo raste kad* $h \to 0$.

IV KONVERGENCIJA U L_2-NORMI

1. Diferencijska shema

U ovoj glavi pokazaćemo da se za odredjenu klasu diferencijskih shema paraboličkog tipa može dokazati konvergencija u L_2-normi.

Razmotrimo, kao modelni zadatak, početno-granični problem za jednačinu provodjenja toplote:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = f(x,\,t)\,, && (x,\,t)\in Q=(0,\,1)\times(0,\,T)\\
&u(x,\,0) = u_0(x)\,, && 0<x<1\,,\\
&u(0,\,t) = u(1,\,t) = 0\,. && 0<t<T\,.
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da rešenje problema (1) pripada prostoru Soboljeva $W_2^{2,\,1}(Q)$, $f\in L_2(Q)$ i $u_0\in W_2^1(0,\,1)$. Neka je, dalje koeficijent $a=a(x)\in W_2^1(0,\,1)$ i $0<c_0\le a(x)\le C_0$.

Mreže na Ω, $(0,T)$ i Q definisane su na isti način kao u §2.2. Definišimo i normu:

$$
\|[v\|]^2 = h\sum_{x\in\omega^-} v^2(\cdot,t)\,.
$$

Definišimo Steklovljev operator usrednjenja po promenljivoj x:

$$
T_x f(x,\,t) = \frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2} f(x',\,t)\,dx'\,.
$$

Definišimo, takodje operator usrednjenja tačne diferencijske sheme [42]:

$$
Sf(x,\,t) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} \kappa(x')\,f(x',\,t)\,dx'\,,
$$

gde je

$$\kappa(x') = \begin{cases} \left(\int_{x-h}^{x} \frac{d\eta}{a(\eta)}\right)^{-1} \left(\int_{x-h}^{x'} \frac{d\eta}{a(\eta)}\right), & x' \in (x-h,\, x)\,, \\ \left(\int_{x}^{x+h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\right)^{-1} \left(\int_{x'}^{x+h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\right), & x' \in (x,\, x+h)\,. \end{cases}$$

Na mreži $Q_{h\tau}$ važi jednakost:

$$S\frac{\partial}{\partial x}\Big(a\,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = (\dot{a}\, u_x)_{\bar{x}}\,, \qquad \text{gde je} \qquad \dot{a}(x) = \Big(\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)^{-1}.$$

Primetimo da je $S = T_x^2$, ako je $a = 1$. Označimo dalje:

$$b = b(x) = S(1) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} \kappa(x')\, dx'\,.$$

Problem (1) aproksimirajmo sledećom diferencijskom shemom [31]:

$$\text{(2)} \qquad \begin{gathered} b\, v_{\bar{t}} = (\dot{a}\, v_x)_{\bar{x}} + S T_t^- f \quad \text{u} \quad Q_{h\tau}\,, \\ bv = Su_0 \quad \text{na} \quad \omega \times \{0\}\,, \quad v = 0 \quad \text{na} \quad \gamma \times \bar{\theta}_\tau\,. \end{gathered}$$

Kako je rešenje u problema (1) neprekidna funkcija, definišimo grešku sa $z = u - v$. Ovako definisana greška zadovoljava uslove:

$$\text{(3)} \qquad \begin{gathered} b\, z_{\bar{t}} = (\dot{a}\, z_x)_{\bar{x}} + (\dot{a}\, \varphi_x)_{\bar{x}} + \psi_{\bar{t}} \quad \text{u} \quad Q_{h\tau}\,, \\ b\, z = \psi \quad \text{na} \quad \omega \times \{0\}\,, \quad z = 0 \quad \text{na} \quad \gamma \times \bar{\theta}_\tau\,. \end{gathered}$$

gde je $\varphi = T_t^- u - u$ i $\psi = bu - Su$.

Važe sledeća tvrdjenja:

Lema 1. *Diferencijska shema*

$$\text{(4)} \qquad \begin{gathered} z_{\bar{t}} = (\dot{a}\, z_x)_{\bar{x}} + (\dot{a}\, \varphi_x)_{\bar{x}} \quad u \quad Q_{h\tau}\,, \\ z = 0 \quad na \quad \omega \times \{0\}\,, \quad z = 0 \quad na \quad \gamma \times \bar{\theta}_\tau\,, \end{gathered}$$

zadovoljava apriornu ocenu

$$\text{(5)} \qquad \|z\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le C\, \|\varphi\|_{L_2(Q_{h\tau})}\,.$$

Dokaz. Neka je ζ – mrežna funkcija definisana relacijom:

$$-(\dot{a}\, \zeta_x)_{\bar{x}} = z \quad \text{u} \quad Q_{h\tau}^{+}\,, \qquad \zeta = 0 \quad \text{za} \quad x = 0,\, 1\,.$$

Pomnožimo (4) sa ζ, i sumirajmo po čvorovima mreže ω. Koristeći relacije:

$$((\dot{a}\varphi_x)_{\bar{x}},\zeta)_\omega = -(\dot{a}\varphi_x,\zeta_x)_{\omega^-} = -(\varphi_x,\dot{a}\zeta_x)_{\omega^-} = (\varphi,(\dot{a}\zeta_x)_{\bar{x}})_\omega = -(\varphi,z)_\omega\,.$$
$$((\dot{a}z_x)_{\bar{x}},\zeta)_\omega = -(z,z)_\omega\,,$$
$$(z_{\bar{t}},\zeta)_\omega = (\dot{a}\zeta_{\bar{t}x},\zeta_x)_{\omega^-} = \frac{\tau}{2}\|[\sqrt{\dot{a}}\,\zeta_{x\bar{t}}\|^2 + \frac{1}{2\tau}\left(\|[\sqrt{\dot{a}}\,\zeta_x\|^2 - \|[\sqrt{\dot{a}}\,\check{\zeta}_x\|^2\right).$$

gde je $\check{\zeta} = \zeta(t-\tau)$, dobijamo:

$$\frac{\tau}{2}\|[\sqrt{\dot{a}}\,\zeta_{x\bar{t}}\|^2 + \frac{1}{2\tau}\left(\|[\sqrt{\dot{a}}\,\zeta_x\|^2 - \|[\sqrt{\dot{a}}\,\check{\zeta}_x\|^2\right) + \|z\|^2 = -(\varphi,z)$$

Sumiranjem po čvorovima mreže θ_τ^+, i primenom relacija:

$$\|[\sqrt{\dot{a}}\,\zeta_x(0)\|^2 = 0\,,$$
$$-(\varphi,z)_{Q_{h\tau}} \le \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{Q_{h\tau}} + \frac{1}{2}\|z\|^2_{Q_{h\tau}}\,.$$

jednostavno dobijamo:

$$\|z\|^2_{Q_{h\tau}} \le \frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{Q_{h\tau}} + \frac{1}{2}\|z\|^2_{Q_{h\tau}}\,.$$

odakle sledi (5). □

Lema 2. *Diferencijska shema*

$$z_{\bar{t}} = (\dot{a}\,z_x)_{\bar{x}} + \psi_{\bar{t}} \quad u \quad Q_{h\tau}\,,$$
(6)
$$z = \psi \quad na \quad \omega\times\{0\}\,, \qquad z = 0 \quad na \quad \gamma\times\bar{\theta}_\tau\,.$$

zadovoljava apriornu ocenu

(7)
$$\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le C\,\|\psi\|_{L_2(Q_{h\tau})}\,.$$

Dokaz. Neka je η mrežna funkcija definisana sa:

$$-\eta_t = z \quad \text{u} \quad Q^+_{h\tau}\,, \qquad \eta = 0 \quad \text{za} \quad t = T+\tau\,.$$

Pomnožimo (6) sa η i sumirajmo po čvorovima mreže $Q^+_{h\tau}$. Primenom relacija:

$$(z_{\bar{t}},\eta)_{\theta^+_\tau} = -(z,\eta_t)_{\theta^+_\tau} - z(\cdot,0)\eta(\cdot,\tau)$$
$$(\psi_{\bar{t}},\eta)_{\theta^+_\tau} = -(\psi,\eta_t)_{\theta^+_\tau} - \psi(\cdot,0)\eta(\cdot,\tau)$$

i početnog uslova $z(\cdot,0) = \psi(\cdot,0)$ (bitna aproksimacija početnog uslova) dobijamo:

$$-h\sum_{x\in\omega}(z,\eta_t)_{\theta^+_\tau} = \tau\sum_{t=\tau}^{T}((\dot{a}\,z_x)_{\bar{x}},\eta)_\omega - h\sum_{x\in\omega}(\psi,\eta_t)_{\theta^+_\tau}\,.$$

Dalje, važi:

$$
\begin{aligned}
((\dot a\, z_x)_{\bar x},\, \eta)_\omega &= -(\dot a\, z_x,\, \eta_x)_{\omega^-} = (\sqrt{\dot a}\,\eta_{xt},\, \sqrt{\dot a}\,\eta_x)_{\omega^-} \\
&= \frac{1}{2\tau}\left(\|[\sqrt{\dot a}\,\hat\eta_x\|^2 - \|[\sqrt{\dot a}\,\eta_x\|^2\right) - \frac{\tau}{2}\,\|[\sqrt{\dot a}\,\eta_{xt}\|^2
\end{aligned}
$$

gde je $\eta = \eta(t+\tau)$. Sledi:

$$\|z\|^2_{Q_{h\tau}} - \frac{1}{2}\left(\|[\sqrt{\dot a}\,\eta_x(T)\|^2 - \|[\sqrt{\dot a}\,\eta_x(\tau)\|^2\right) + \frac{\tau^2}{2}\sum_{t=\tau}^{T}\|[\sqrt{\dot a}\,\eta_{xt}\|^2 = (\psi, z)_{Q_{h\tau}}$$

Primenom uslova $\|[\sqrt{\dot a}\,\eta_x(T)\| = 0$, jednostavno dobijamo:

$$\|z\|^2_{Q_{h\tau}} \le (\psi, z)_{Q_{h\tau}}\,,$$

odakle sledi ocena (7). $\square$

Primetimo da važe "dobre" apriorne ocene (5) i (7), jer su sheme (4) i (6) u "potpuno divergentnom" obliku.

Zapišimo sada shemu (3) u obliku:

$$
\begin{gathered}
z_{\bar t} = (\dot a\, z_x)_{\bar x} + (\dot a\,\varphi_x)_{\bar x} + \tilde\psi_{\bar t} \quad \text{u} \quad Q_{h\tau}\,, \\
z = \tilde\psi \;\; \text{na} \;\; \omega\times\{0\}\,, \qquad z = 0 \;\; \text{na} \;\; \gamma\times\bar\theta_\tau\,,
\end{gathered}
$$

gde je $\tilde\psi = \psi + (1-b)\,z$. Primenom lema 1. i 2. dobijamo ocenu:

$$\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le C\left[\|\varphi\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \|\psi\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \max_{x\in\omega}|1-b(x)|\,\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})}\right]. \tag{8}$$

Dalje važi:

$$
\begin{aligned}
b(x) - 1 &= \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\left[\kappa(x') - \left(1 - \frac{|x'-x|}{h}\right)\right]dx' \\
&= \frac{1}{h^2}\left(\int_{x-h}^{x}\frac{d\eta}{a(\eta)}\right)^{-1}\int_{x-h}^{x}\int_{x-h}^{x}\int_{x-h}^{x'}\int_{x'''}^{x''}\frac{a'(\eta)}{a(x'')\,a(x''')}\,d\eta\,dx'''\,dx''\,dx' \\
&\quad -\frac{1}{h^2}\left(\int_{x}^{x+h}\frac{d\eta}{a(\eta)}\right)^{-1}\int_{x}^{x+h}\int_{x}^{x+h}\int_{x'}^{x+h}\int_{x'''}^{x''}\frac{a'(\eta)}{a(x'')\,a(x''')}\,d\eta\,dx'''\,dx''\,dx'\,.
\end{aligned}
$$

Primenom nejednakosti Cauchy-Schwartza i ograničenosti funkcije $a(x)$, dobijamo:

$$|b(x) - 1| \le C\sqrt{h}\,\|a'\|_{L_2(i)} \le C\sqrt{h}\,\|a\|_{W_2^1(0,1)}\,, \qquad i = (x-h,\, x+h)\,.$$

Na taj način, pri dovoljno malom h, iz (8) sledi da shema (3) zadovoljava apriornu ocenu:

$$\|z\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le C\left(\|\varphi\|_{L_2(Q_{h\tau})} + \|\psi\|_{L_2(Q_{h\tau})}\right). \tag{9}$$

2. Konvergencija diferencijske sheme

Ocenimo sada desnu stranu u nejednakosti (9). Izraz φ zapišimo u obliku:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = T_x(T_t^- u - u) + \left[(T_t^- u - u) - T_x(T_t^- u - u)\right].$$

Ocenimo prvo φ_1. Važi reprezentacija:

$$\varphi_1(x,t) = \frac{1}{h\tau}\int_{x-h/2}^{x+h/2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t}^{t'} \frac{\partial u(x',t'')}{\partial t}\,dt''\,dt'\,dx'$$

Odavde jednostavno sledi:

$$|\varphi_1(x,t)| \le \frac{\tau}{\sqrt{h\tau}}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(e)}, \qquad \text{gde je} \qquad e = (x-h/2,\, x+h/2)\times(t-\tau,\, t).$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}$, dobijamo:

$$\|\varphi_1\|_{L_2(Q_{h\tau})} \le \tau\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_2(Q)} \tag{10}$$

Za ocenu φ_2 potrebna nam je sledeća lema [37]:

Lema 3. *Ako* $g \in W_2^\sigma(0,1)$, $0.5 < \sigma < 1$ *i* $g(0) = 0$, *tada je:*

$$\left(\int_0^1 \xi^{-2\sigma} g^2(\xi)\,d\xi\right)^{1/2} \le \frac{2\sigma+1}{2\sigma-1}\,|g|_{W_2^\sigma(0,1)}.$$

Neka je, dalje $\alpha(t) = T_x u - u$. Tada, za $1/2 < \sigma < 1$, primenom leme 3., imamo:

$$|\varphi_2(x,t)| = |\alpha - T_t^-\alpha| = \left|\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\left[\alpha(t) - \alpha(t')\right]dt'\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\tau}\left\{\int_{t-\tau}^{t}(t-t')^{-2\sigma}\left[\alpha(t)-\alpha(t')\right]^2 dt'\right\}^{1/2}\left\{\int_{t-\tau}^{t}(t-t')^{2\sigma}\,dt'\right\}^{1/2}$$

$$\le \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{2\sigma-1}\,\tau^{\sigma-1/2}\left(\int_{t-\tau}^{t}\int_{t-\tau}^{t}\frac{|\alpha(t')-\alpha(t'')|^2}{|t'-t''|^{1+2\sigma}}\,dt'\,dt''\right)^{1/2}.$$

Dalje:

$$|\alpha(t') - \alpha(t'')| = \left|\frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2}\left[u(x',t') - u(x,t') - u(x',t'') + u(x,t'')\right]dx'\right|$$

$$\le \frac{1}{h}\int_{x-h/2}^{x+h/2}|\beta(x') - \beta(x)|\,dx',$$

gde je

$$\beta(x) = u(x,\, t') - u(x,\, t'') .$$

Ocenjujući $\beta(x) - \beta(x')$ analognim postupkom, dobijamo:

$$|\varphi_2(x,\, t)| \leq \frac{C\, h^{\varrho-1/2}\, \tau^{\sigma-1/2}}{(\varrho - 1/2)\,(\sigma - 1/2)}\, |u|_{(\varrho,\, \sigma);\, e} ,$$

gde je

$$|u|^2_{(\varrho,\, \sigma)\; e} = \int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} \int\limits_{x-h/2}^{x+h/2} \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{t-\tau}^{t} \frac{|u(x',\, t') - u(x'', t') - u(x', t'') + u(x'', t'')|^2}{|x' - x''|^{1+2\varrho}\, |t' - t''|^{1+2\sigma}}\, dt\, dx\, ,$$

$dx = dx'dx''$, $dt = dt'dt''$ i $1/2 < \varrho,\, \sigma < 1$. Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}$ jednostavno dobijamo:

$$\|\varphi_2\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq C\, h^{\varrho}\, \tau^{\sigma}\, |u|_{(\varrho,\, \sigma),\, Q} . \tag{11}$$

Izaberimo $\sigma \in (1/2, 3/4)$ i stavimo $\varrho = 2\,(1 - \sigma)$. Tada je $\varrho + 2\,\sigma = 2$ i $h^{\varrho}\, \tau^{\sigma} \leq h^2 + \tau$. Primenom teoreme 1.5.6 imamo:

$$\left[W_2^0\big((0,T);\, W_2^2(0,1)\big),\, W_2^1\big((0,T);\, W_2^0(0,1)\big)\right]_{\sigma} = W_2^{\sigma}\big((0,T);\, W_2^{2-2\,\sigma}(0,1)\big) ,$$

odakle na osnovu teoreme 1.5.5 sledi:

$$\begin{aligned} |u|_{(2-2\,\sigma,\, \sigma);\, Q} &\leq \|u\|_{W_2^{\sigma}\left((0,T),\, W_2^{2-2\,\sigma}(0,1)\right)} \\ &\leq C\, \|u\|^{1-\sigma}_{W_2^0\left((0,T),\, W_2^2(0,1)\right)}\, \|u\|^{\sigma}_{W_2^1\left((0,T),\, W_2^0(0,1)\right)} \\ &\leq C\, \left(\|u\|^2_{W_2^0\left((0,T),\, W_2^2(0,1)\right)} + \|u\|^2_{W_2^1\left((0,T),\, W_2^0(0,1)\right)}\right)^{1/2} = C\, \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} . \end{aligned} \tag{12}$$

Na taj način, iz (10–12) sledi:

$$\|\varphi\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq C\, (h^2 + \tau)\, \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} . \tag{13}$$

Ocenimo sada ψ. Neka je

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \left[(bu - Su) - T_t^-(bu - Su)\right] + T_t^-(bu - Su) .$$

Kako je $\psi_1 = -b(T_t^- u - u) + S(T_t^- u - u) = -b\varphi + S\varphi$, primenom ocene (13) sledi:

$$\|\psi_1\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq C\, (h^2 + \tau)\, \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} . \tag{14}$$

Sabirak ψ_2 predstavimo u obliku:

$$-\psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22}\, ,$$

gde je

$$\psi_{21} = \int_0^1 \Big(\int_{x-h}^{x} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)^{-1} \Big(\int_{x-h}^{x-x'h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big) \big[\alpha(x+x'h) - 2\alpha(x) + \alpha(x-x'h)\big]\, dx'$$

$$\psi_{22} = \int_0^1 \Big[\Big(\int_{x}^{x+h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)^{-1} \Big(\int_{x+x'h}^{x+h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big) - \Big(\int_{x-h}^{x} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)^{-1} \Big(\int_{x-h}^{x-x'h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)\Big] \times$$
$$\times \big[\alpha(x+x'h) - \alpha(x)\big]\, dx'$$

i $\alpha = T_t^- u$. Koristeći relaciju

$$\alpha(x+x'h)-2\alpha(x)+\alpha(x-x'h) = \frac{x'h}{\tau} \int_{x-x'h}^{x+x'h} \int_{t-\tau}^{t} \Big(1 - \frac{|x''-x|}{x'h}\Big) \frac{\partial^2 u(x'',t')}{\partial x^2} dt' dx''$$

dobijamo:

$$|\psi_{21}| \leq \frac{\sqrt{2}h^2}{\sqrt{h\tau}} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L_2(e')}, \qquad e' = (x-h, x+h) \times (t-\tau, t).$$

Sledi:

(15) $$\|\psi_{21}\|_{Q_{h\tau}} \leq \sqrt{2}h^2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L_2(Q)}.$$

Sabirak ψ_{22} predstavimo u obliku:

$$\psi_{22} = \int_0^1 h^{-1} \Big(\int_{x-h}^{x} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)^{-1} \Big(\int_{x}^{x+h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)^{-1} \Big(\int_{x+x'h}^{x+h} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big) \times$$
$$\times \Big(\int_{x-h}^{x} \int_{x}^{x+h} \frac{a(\xi)-a(\eta)}{a(\xi)a(\eta)} d\xi d\eta\Big) \big[\alpha(x+x'h) - \alpha(x)\big]\, dx'$$
$$+ \int_0^1 h^{-1}(1-x')^{-1} \Big(\int_{x-h}^{x} \frac{d\eta}{a(\eta)}\Big)^{-1} \Big(\int_{x+x'h}^{x+h} \int_{x-h}^{x-x'h} \frac{a(\xi)-a(\eta)}{a(\xi)a(\eta)} d\xi d\eta\Big) \times$$
$$\times \big[\alpha(x+x'h) - \alpha(x)\big]\, dx'.$$

Odavde, koristeći nejednakost :

$$\int_0^{\varepsilon} |g(\eta)|^2\, dx \leq C\,\varepsilon \int_0^1 \big[|g(\eta)|^2 + |g'(\eta)|^2\big]\, d\eta, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

dobijamo:

$$|\psi_{22}(x,\, t)| \leq \frac{C\,h^2}{\sqrt{h\,\tau}} \|a'\|_{L_2(i)} \|u\|_{W_2^{2,0}(q)}, \qquad q = (0,\, 1) \times (t-\tau,\, t).$$

Sledi:

$$(16) \qquad \|\psi_{22}\|_{Q_{h\tau}} \leq C\,h^2\,\|a'\|_{L_2(0,\,1)}\,\|u\|_{W_2^{2,0}(Q)}\,.$$

Iz (14-16) imamo:

$$(17) \qquad \|\psi\|_{Q_{h\tau}} \leq C\,(h^2+\tau)\,\|a\|_{W_2^1(0,\,1)}\,\|u\|_{W_2^{2,0}(Q)}\,.$$

Konačno iz (9), (13) i (17) dobijamo sledeći rezultat:

Teorema 1. *Diferencijska shema (2) konvergira u diskretnoj L_2–normi i važi ocena:*

$$(18) \qquad \|u-v\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq C\,(h^2+\tau)\|a\|_{W_2^1(0,1)}\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}\,.$$

Dobijena ocena je saglasna s glatkošću podataka.

Primedba 1. Diferencijska shema (2) konvergira i ka rešenjima problema (1) manje glatkosti. Ako je $u \in W_2^{1,1/2+\varepsilon}(Q)$, $\varepsilon > 0$, uz uslov $C_0 < 9c_0$, važi ocena saglasna s glatkošu podataka:

$$\|(Su)/b - v\|_{L_2(Q_{h\tau})} \leq C(h+\tau^{1/2+\varepsilon})\|a\|_{L_\infty(0,1)}\|u\|_{W_2^{1,1/2+\varepsilon}(Q)}\,.$$

Primedba 2. Prethodna tehnika ne može se primeniti u slučaju kada koeficijent a zavisi i od promenljive t, tj. $a = a(x,t)$. Problemi se javljaju kod apriorne ocene (ne važi dokaz leme 1), kao i kod najmanje dopuštene glatkosti koeficijenta a.

V PRIMENA TEORIJE INTERPOLACIJE

1. Postavka problema

Cilj ove glave je uvodjenje alternativne tehnike izvodjenja ocena brzine konvergencije diferencijskih shema, zasnovane na teoriji interpolacije [5],[29],[30],[56].

Kao modelni zadatak, razmotrimo prvi početno–granični problem za paraboličku jednačinu s promenljivim koeficijentima u oblasti $Q = \Omega \times (0,T] = (0,1)^2 \times (0,T]$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} D_i(a_{ij} D_j u) = f\,, && (x,t) \in Q\,,\\
(1) \qquad &u = 0\,, && (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T]\,,\\
&u(x,0) = u_0(x)\,, && x \in \Omega\,,
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da rešenje problema (1) pripada anizotropnom prostoru Soboljeva:

$$
\begin{aligned}
&u \in W_2^{s,s/2}(Q)\,, && 2 < s \le 4\,,\\
&u \in W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)\,, && s = 2\,,
\end{aligned}
$$

da $f(x,t)$ pripada prostoru $W_2^{s-2,s/2-1}(Q)$ i da koeficijenti $a_{ij} = a_{ij}(x)$ pripadaju prostoru Soboljeva:

$$
\begin{aligned}
&a_{ij} \in W_2^{s-1}(\Omega)\,, && \text{for } \ 2 < s \le 4\,,\\
&a_{ij} \in W_2^{1+\delta}(\Omega)\,,\ \delta > 0\,, && \text{for } \ s = 2\,.
\end{aligned}
$$

Ovi uslovi garantuju pripadnost koeficijenata a_{ij} prostoru multiplikatora $M\left(W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q)\right)$. Smatraćemo, takodje da je $a_{ij} \ge a_0 > 0$, kao i da važe eventualni uslovi saglasnosti ulaznih podataka na $\partial\Omega \times \{0\}$ koji garantuju egzistenciju rešenja $u \in W_2^{s,s/2}(Q)$.

2. Ocene celobrojnog reda

Neka su mreže na Ω, $(0,T)$ i Q definisane na isti način kao u § 2.5. Pretpostavimo, takodje, da je ispunjen uslov:

$$k_1 h^2 \leq \tau \leq k_2 h^2, \quad k_1, k_2 = const > 0.$$

Aproksimirajmo problem (1) sledećom diferencijskom shemom:

$$\begin{aligned} v_{\bar t} + L_h v &= T_1^2 T_2^2 T_t^- f, && \text{u} \quad Q_{h\tau}^+, \\ v &= 0, && \text{na} \quad \gamma \times \bar\theta_\tau, \\ v &= u_0, && \text{na} \quad \omega \times \{0\}. \end{aligned} \tag{2}$$

gde je

$$L_h v = -0.5 \sum_{i,j=1}^{2} \left((a_{ij} v_{\bar x_j})_{x_i} + (a_{ij} v_{x_j})_{\bar x_i} \right).$$

Neka je u rešenje početno graničnog problema (1) i v rešenje diferencijske sheme (2). Greška

$$z = u - v$$

zadovoljava uslove:

$$\begin{aligned} z_{\bar t} + L_h z &= \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij} + \varphi, && \text{u} \quad Q_{h\tau}^+, \\ z &= 0, && \text{na} \quad \omega \times \{0\}, \\ z &= 0, && \text{na} \quad \gamma \times \bar\theta_\tau. \end{aligned} \tag{3}$$

gde je

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= T_1^2 T_2^2 T_t^- \left(D_i(a_{ij} D_j u)\right) - 0.5\left((a_{ij} u_{\bar x_j})_{x_i} + (a_{ij} u_{x_j})_{\bar x_i}\right), \text{ i} \\ \varphi &= u_{\bar t} - T_1^2 T_2^2 u_{\bar t}. \end{aligned}$$

Energetskom metodom [41] jednostavno se dokazuje sledeće tvrdjenje:

Lema 1. *Diferencijska shema (3) zadovoljava apriornu ocenu*

$$\|z\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \leq \sum_{i,j=1}^{2} \|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} + \|\varphi\|_{Q_{h\tau}}. \tag{4}$$

Dakle, problem ocene brzine konvergencije diferencijske sheme (2) svodi se na ocenu desne strane nejednakosti (4).

Osnovna ideja sastoji se u sledećem: prvo izvodimo ocene brzine konvergencije celobrojnog reda za $s = 2$, $s = 3$ i $s = 4$, a zatim, primenom teorije interpolacije, izvodimo ocene brzine konvergencije razlomljenog reda za $2 < s < 3$ i $3 < s < 4$.

Dakle, izvodimo ocene celobrojnog reda:

(5) $$\|z\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le C \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)} \|u\|_{W_2^{2+\epsilon,1+\epsilon/2}(Q)},$$

(6) $$\|z\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le Ch \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_2^{2}(\Omega)} \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)},$$

(7) $$\|z\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le Ch^2 \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{W_2^{3}(\Omega)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q)}.$$

Rastavimo η_{ij} na sledeći način:

$$\eta_{ij} = \sum_{k=1}^{7} \eta_{ijk}, \quad \text{gde je:}$$
$$\eta_{ij1} = T_1^2 T_2^2 (a_{ij} T_t^- D_i D_j u) - (T_1^2 T_2^2 a_{ij})(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_i D_j u),$$
$$\eta_{ij2} = (T_1^2 T_2^2 a_{ij} - a_{ij})(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_i D_j u),$$
$$\eta_{ij3} = a_{ij}(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_i D_j u - 0.5(u_{\bar{x}_i x_j} + u_{x_i \bar{x}_j})),$$
$$\eta_{ij4} = T_1^2 T_2^2 (D_i a_{ij} T_t^- D_j u) - (T_1^2 T_2^2 D_i a_{ij})(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_j u),$$
$$\eta_{ij5} = (T_1^2 T_2^2 D_i a_{ij} - 0.5(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar{x}_i}))(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_j u),$$
$$\eta_{ij6} = 0.5(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar{x}_i})(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_j u - 0.5(u_{x_j}^{-i} + u_{\bar{x}_j}^{+i})),$$
$$\eta_{ij7} = 0.25(a_{ij,x_i} - a_{ij,\bar{x}_i})(u_{x_j}^{-i} - u_{\bar{x}_j}^{+i}).$$

Vrednost η_{ij1} u čvoru $(\cdot, t) \in \omega \times \{t\}$ može se predstaviti u obliku:

(8) $$\eta_{ij1}(\cdot, t) = \frac{1}{h^2} \iint_e k(\xi_1, \xi_2) a_{ij}(\xi_1, \xi_2) T_t^- D_i D_j u(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2 -$$
$$-\frac{1}{h^2} \iint_e k(\sigma_1, \sigma_2) a_{ij}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 \times \frac{1}{h^2} \iint_e k(\xi_1, \xi_2) T_t^- D_i D_j u(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2$$

gde je $e = (x_1 - h, x_1 + h) \times (x_2 - h, x_2 + h)$ i

$$k(\xi_1, \xi_2) = \left(1 - \frac{|\xi_1 - x_1|}{h}\right)\left(1 - \frac{|\xi_2 - x_2|}{h}\right).$$

Odavde jednostavno sledi:

$$|\eta_{ij1}(\cdot, t)| \le \frac{C}{h} \|a_{ij}\|_{C(\overline{\Omega})} \|T_t^- u(\cdot, t)\|_{W_2^2(e)}$$

Sumiranjem po čvorovima mreže ω dobijamo:

$$||\eta_{ij1}(\cdot,t)||_\omega \le C||a_{ij}||_{C(\overline{\Omega})}||T_t^- u(\cdot,t)||_{W_2^2(\Omega)}$$

Dalje, sumiranjem po čvorovima mreže θ_τ^+ sledi:

$$||\eta_{ij1}||_{Q_{h\tau}} \le C||a_{ij}||_{C(\overline{\Omega})}||u||_{W_2^{2,1}(Q)}\,.$$

Koristeći potapanje $W_2^{1+\delta}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ dobijamo:

$$||\eta_{ij1}||_{Q_{h\tau}} \le C||a_{ij}||_{W_2^{1+\delta}(\Omega)}||u||_{W_2^{2,1}(Q)}\,. \tag{9}$$

Iz (8) sledi da se vrednost η_{ij1} u čvoru $(\cdot,t) \in \omega \times \{t\}$ može takodje predstaviti u obliku:

$$\begin{aligned}\eta_{ij1}(\cdot,t) = \frac{1}{2h^4}\iiiint\limits_{e\times e} & k(\xi_1,\xi_2)k(\sigma_1,\sigma_2)\left(\int_{\sigma_1}^{\xi_1} D_1 a_{ij}(\tau_1,\sigma_2)d\tau_1 + \int_{\sigma_2}^{\xi_2} D_2 a_{ij}(\xi_1,\tau_2)d\tau_2\right)\\ & \times T_t^- D_i D_j u(\xi_1,\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2 d\sigma_1 d\sigma_2\,. \end{aligned}\tag{10}$$

Odavde, primenom nejednakosti Cauchy-Schwartza i Höldera jednostavno dobijamo:

$$|\eta_{ij1}(\cdot,t)| \le C||a_{ij}||_{W_p^1(e)}||T_t^- u(\cdot,t)||_{W^2_{\frac{2p}{p-2}}(e)}\,, \quad p > 2\,.$$

Sledi:

$$||\eta_{ij1}(\cdot,t)||_\omega \le Ch||a_{ij}||_{W_p^1(\Omega)}||T_t^- u(\cdot,t)||_{W^2_{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)}\,, \quad p > 2\,.$$

Koristeći potapanja $W_2^2(\Omega) \subset W_p^1(\Omega)$ i $W_2^3(\Omega) \subset W^2_{2p/(p-2)}(\Omega)$, imamo:

$$||\eta_{ij1}(\cdot,t)||_\omega \le Ch||a_{ij}||_{W_2^2(\Omega)}||T_t^- u(\cdot,t)||_{W_2^3(\Omega)}\,.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže θ_τ^+ dobijamo:

$$||\eta_{ij1}||_{Q_{h\tau}} \le Ch||a_{ij}||_{W_2^2(\Omega)}||u||_{W_2^{3,3/2}(Q)}\,. \tag{11}$$

Ako u (10) promenljive ξ_i i σ_i zamene mesta, elementarnim transformacijama dobijamo reprezentaciju:

$$\begin{aligned}\eta_{ij1}(\cdot,t) = \frac{1}{2h^4}\iiiint\limits_{e\times e} & k(\xi_1,\xi_2)k(\sigma_1,\sigma_2)\left(\int_{\sigma_1}^{\xi_1} D_1 a_{ij}(\tau_1,\sigma_2)d\tau_1 + \int_{\sigma_2}^{\xi_2} D_2 a_{ij}(\xi_1,\tau_2)d\tau_2\right)\\ & \times (T_t^- D_i D_j u(\xi_1,\xi_2,t) - T_t^- D_i D_j u(\sigma_1,\sigma_2,t))d\xi_1 d\xi_2 d\sigma_1 d\sigma_2\,. \end{aligned}\tag{12}$$

Odavde, koristeći relaciju:

$$T_t^- D_i D_j u(\xi_1, \xi_2, t) - T_t^- D_i D_j u(\sigma_1, \sigma_2, t) =$$
$$= \int_{\sigma_1}^{\xi_1} T_t^- D_1 D_i D_j u(\rho_1, \sigma_2, t) d\rho_1 + \int_{\sigma_2}^{\xi_2} T_t^- D_2 D_i D_j u(\xi_1, \rho_2, t) d\rho_2 ,$$

jednostavno dobijamo:

$$|\eta_{ij1}(\cdot, t)| \le Ch \|a_{ij}\|_{W_p^1(e)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|_{W^3_{\frac{2p}{p-2}}(e)} , \quad p > 2 .$$

Sledi:

$$\|\eta_{ij1}(\cdot, t)\|_\omega \le Ch^2 \|a_{ij}\|_{W_p^1(\Omega)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|_{W^3_{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)} , \quad p > 2 .$$

Koristeći potapanja $W_2^3(\Omega) \subset W_p^1(\Omega)$ i $W_2^4(\Omega) \subset W^3_{2p/(p-2)}(\Omega)$, imamo:

$$\|\eta_{ij1}(\cdot, t)\|_\omega \le Ch^2 \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)} \|T_t^- u(\cdot, t)\|_{W_2^4(\Omega)} .$$

Dalje:

$$\|\eta_{ij1}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^2 \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q)} . \tag{13}$$

Ocenimo sada

$$\eta_{ij2} = (T_1^2 T_2^2 a_{ij} - a_{ij})(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_i D_j u) .$$

Vrednost η_{ij2} u čvoru $(\cdot, t) \in \omega \times \{t\}$ može se predstaviti u obliku:

$$\eta_{ij2}(\cdot, t) = \Big\{ \frac{1}{h^2} \iint_e k(\xi_1, \xi_2) a_{ij}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 - a_{ij}(x_1, x_2) \Big\}$$
$$\times \frac{1}{h^2} \iint_e k(\xi_1, \xi_2) T_t^- D_i D_j u(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2 \tag{14}$$

Sledi:

$$|\eta_{ij2}(\cdot, t)| \le \frac{C}{h} \|a_{ij}\|_{C(\overline{\Omega})} \|T_t^- u(\cdot, t)\|_{W_2^2(e)}$$

Istim postupkom kao u slučaju sabirka η_{ij1}, za $s = 2$, dobijamo ocenu:

$$\|\eta_{ij2}\|_{Q_{h\tau}} \le C \|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)} \|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} . \tag{15}$$

Iz (14) jednostavno sledi reprezentacija:

$$\eta_{ij2}(\cdot, t) = \frac{1}{2h^4} \iint_e k(\xi_1, \xi_2) \Big(\int_{x_1}^{\xi_1} D_1 a_{ij}(\tau_1, \xi_2) d\tau_1 + \int_{x_2}^{\xi_2} D_2 a_{ij}(x_1, \tau_2) d\tau_2 \Big) d\xi_2 d\xi_1$$
$$\times \iint_e T_t^- D_i D_j u(\xi_1, \xi_2, t) d\xi_1 d\xi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 . \tag{16}$$

Važi:

$$|\alpha_1| \le C\|a_{ij}\|_{W_p^1(e)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{\frac{2p}{p-2}}(e)}, \quad p>2\,.$$

Sledi:

$$\|\alpha_1\|_\omega \le Ch\|a_{ij}\|_{W_p^1(\Omega)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)}, \quad p>2\,.$$

Koristeći potapanja $W_2^2(\Omega)\subset W_p^1(\Omega)$ i $W_2^3(\Omega)\subset W^2_{2p/(p-2)}(\Omega)$, imamo:

$$\|\alpha_1\|_\omega \le Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^3(\Omega)}\,.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže θ_τ^+ dobijamo:

$$\|\alpha_1\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}\,.$$

Za sabirak α_2 važi:

$$\|\alpha_2\|_\omega \le Ch\max_{x_1}\|a_{ij}(x_1,\cdot)\|_{W_p^1(0,1)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^3(\Omega)}\,.$$

Na osnovu teoreme o tragu 1.1.3, za $s=3$, $a_{ij}(x_1,\cdot)\in W_2^{3/2}(0,1)$. Koristeći potapanje $W_2^{3/2}(0,1)\subset W_p^1(0,1)$, sumiranjem po čvorovima mreže θ_τ^+, dobijamo:

$$\|\alpha_2\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}\,.$$

Dakle, važi:

$$\|\eta_{ij2}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}\,. \tag{17}$$

Iz (16), jednostavnim transformacijama dobijamo reprezentaciju:

$$\begin{aligned}\eta_{ij2} = \frac{1}{2h^4}\iint_e k(\xi_1,\xi_2)\Big(\int_{x_1}^{\xi_1}\int_{x_1}^{\tau_1} D_1^2 a_{ij}(\sigma_1,\xi_2)d\sigma_1 d\tau_1 + \int_{x_2}^{\xi_2}\int_{x_2}^{\tau_2} D_2^2 a_{ij}(x_1,\sigma_2)d\sigma_2 d\tau_2\Big)d\xi_2 d\xi_1 \\ \times \iint_e T_t^- D_i D_j u(\xi_1,\xi_2,t)d\xi_1 d\xi_2 = \beta_1+\beta_2\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Važi:

$$|\beta_1(\cdot,t)| \le Ch\|a_{ij}\|_{W_p^2(e)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{\frac{2p}{p-2}}(e)}, \quad p>2\,.$$

Sledi:

$$\|\beta_1\|_\omega \le Ch^2\|a_{ij}\|_{W_p^2(\Omega)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W^2_{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)}, \quad p>2\,.$$

Koristeći potapanja $W_2^3(\Omega) \subset W_p^2(\Omega)$ i $W_2^4(\Omega) \subset W_{2p/(p-2)}^2(\Omega)$, imamo:

$$\|\beta_1\|_\omega \leq Ch^2 \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)} \|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^4(\Omega)} .$$

Dalje:

$$\|\beta_1\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^2 \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q)} .$$

Za sabirak β_2 važi:

$$\|\beta_2\|_\omega \leq Ch^2 \max_{x_1} \|a_{ij}(x_1,\cdot)\|_{W_p^2(0,1)} \|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^3(\Omega)} .$$

Na osnovu teoreme o tragu 1.1.3, za $s=4$, $a_{ij}(x_1,\cdot) \in W_2^{5/2}(0,1)$. Koristeći potapanje $W_2^{5/2}(0,1) \subset W_p^2(0,1)$, dobijamo:

$$\|\beta_2\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^2 \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q)} .$$

Dakle, važi:

$$\|\eta_{ij2}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^2 \|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)} \|u\|_{W_2^{4,2}(Q)} . \tag{19}$$

Za dalji rad biće nam potrebna ocena izraza oblika:

$$\alpha = a(x_1,x_2) - T_1^- T_2^- a(x_1,x_2) = \frac{1}{h^2} \int_{x_1-h}^{x_1} \int_{x_2-h}^{x_2} \left[a(x_1,x_2) - a(x_1',x_2')\right] dx_2' dx_1'$$

Rastavimo α na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 , \quad \text{gde je:} \\
\alpha_1 &= \frac{1}{h^2} \int_{x_1-h}^{x_1} \int_{x_2-h}^{x_2} \left[a(x_1,x_2) - a(x_1',x_2) - a(x_1,x_2') + a(x_1',x_2')\right] dx_2' dx_1' , \\
\alpha_2 &= \frac{1}{h^2} \int_{x_1-h}^{x_1} \int_{x_2-h}^{x_2} \left[a(x_1',x_2) - a(x_1',x_2')\right] dx_2' dx_1' , \\
\alpha_3 &= \frac{1}{h^2} \int_{x_1-h}^{x_1} \int_{x_2-h}^{x_2} \left[a(x_1,x_2') - a(x_1',x_2')\right] dx_2' dx_1' .
\end{aligned}$$

Važe ocene:

$$\begin{aligned}
|\alpha_2| &\leq C \|D_2 a\|_{L_2(e')} , \\
|\alpha_3| &\leq C \|D_1 a\|_{L_2(e')} , \quad e' = (x_1-h,x_1) \times (x_2-h,x_2) .
\end{aligned}$$

Primenom leme 4.2.3 dobijamo ocenu:

$$|\alpha_1| \leq \frac{\sqrt{2\sigma+1}}{2\sigma-1} \frac{\sqrt{2\rho+1}}{2\rho-1} h^{\sigma+\rho-1} |a|_{(\sigma,\rho);e'} ,$$

gde je $1/2 < \sigma, \rho < 1$, i

$$|a|^2_{(\sigma,\rho),e'} = \iiiint\limits_{e'\times e'} \frac{\left[a(x_1', x_2') - a(x_1', x_2'') - a(x_1'', x_2') + a(x_1'', x_2'')\right]^2}{|x_1' - x_2''|^{1+2\sigma}|x_2' - x_2''|^{1+2\rho}} dx_2'' dx_2' dx_1'' dx_1' .$$

Takodje važi [37]:

$$|a|_{(\sigma,\rho),\Omega} \le \|a\|_{W_2^\sigma\left((0,1),W_2^\rho(0,1)\right)} .$$

Za $\rho = \sigma$, na osnovu teoreme 1.5.5, imamo:

$$\begin{aligned} |a|_{(\sigma,\sigma),\Omega} &= \|a\|_{W_2^\sigma\left((0,1),W_2^\sigma(0,1)\right)} \le \|a\|^{1-\theta}_{L_2\left((0,1);W_2^{2\sigma}(0,1)\right)} \|a\|^{\theta}_{W_2^{2\sigma}\left((0,1);L_2(0,1)\right)} \\ &\le \left(\|a\|^2_{L_2\left((0,1);W_2^{2\sigma}(0,1)\right)} + \|a\|^2_{W_2^{2\sigma}\left((0,1),L_2(0,1)\right)} \right)^{1/2} \\ &= \|a\|_{W_2^{2\sigma,2\sigma}((0,1)\times(0,1))} \le \|a\|_{W_2^{2\sigma}(\Omega)} \end{aligned}$$

Na osnovu prethodnih ocena, stavljajući $\delta = 2\sigma - 1 > 0$, imamo:

$$|\alpha| \le C\left(\|D_1 a\|_{L_2(e')} + \|D_2 a\|_{L_2(e')} + \|a\|_{W_2^{1+\delta}(e')}\right) \le C\|a\|_{W_2^{1+\delta}(e')}$$

Ocenimo sada:

$$\eta_{ij3} = a_{ij}(T_1^2 T_2^2 T_t^- D_i D_j u - 0.5(u_{\bar{x}_i x_j} + u_{x_i \bar{x}_j})) .$$

Važi ocena:

$$|T_1^2 T_2^2 T_t^- D_i D_j u| \le \frac{C}{h^2}\|D_i D_j u\|_{L_2(g)} , \quad g = e \times (t-\tau, t) .$$

Dalje, rastavimo $u_{\bar{x}_i x_j}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} u_{\bar{x}_i x_j} &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 , \quad \text{gde je:} \\ \beta_1 &= T_1^- T_2^- T_t^- u_{\bar{x}_i x_j} , \\ \beta_2 &= T_t^- u_{\bar{x}_i x_j} - T_1^- T_2^- T_t^- u_{\bar{x}_i x_j} , \\ \beta_3 &= T_1^- T_2^- u_{\bar{x}_i x_j} - T_1^- T_2^- T_t^- u_{\bar{x}_i x_j} , \\ \beta_4 &= \left(u_{\bar{x}_i x_j} - T_1^- T_2^- u_{\bar{x}_i x_j}\right) - T_t^- \left(u_{\bar{x}_i x_j} - T_1^- T_2^- u_{\bar{x}_i x_j}\right) . \end{aligned}$$

Važe sledeće ocene:

$$\begin{aligned} |\beta_1| &\le \frac{C}{h^2}\|D_i D_j u\|_{L_2(g)} , \\ |\beta_2| &\le C\|T_t^- u_{\bar{x}_i x_j}\|_{W_2^{2\sigma}(e')} = C\|T_t^-(T_i^- D_i u)_{x_j}\|_{W_2^{2\sigma}(e')} \le \frac{C}{h}\|T_t^- u\|_{W_2^{2\sigma+1}(e)} , \\ |\beta_3| &\le C\tau^{\rho-1/2}|T_1^- T_2^- u_{\bar{x}_i x_j}|_{\rho;(t-\tau,t)} = C\tau^{\rho-1/2}|T_1^- T_2^- (T_i^- D_i u)_{x_j}|_{\rho;(t-\tau,t)} \\ &\le \frac{C\tau^{\rho-1/2}}{h^2}\|u\|_{W_2^\rho\left((t-\tau,t);W_2^1(e)\right)} \end{aligned}$$

gde je $1/2 < \sigma, \rho < 1$, i :

$$|u|^2_{\rho;(t-\tau,t)} = \int_{t-\tau}^{t}\int_{t-\tau}^{t} \frac{|u(t')-u(t'')|^2}{|t'-t''|^{1+2\rho}} dt'dt'' .$$

Dalje:

$$|\beta_4| \le C\tau^{\rho-1/2}|(u - T_1^- T_2^- u)_{x_i x_j}|_{\rho,(t-\tau,t)} \le \frac{C\tau^{\rho-1/2}h^{2\sigma-1}}{h^2}\|u\|_{W_2^\rho\left((t-\tau,t),W_2^{2\sigma}(e)\right)}$$

Analogno se ocenjuje i $u_{x_i \bar{x}_j}$. Stavimo $\rho = \sigma$. Važi :

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_2^\sigma\left((0,T);W_2^{2\sigma}(\Omega)\right)} &\le C\left(\|u\|^2_{L_2\left((0,T);W_2^{4\sigma}(\Omega)\right)} + \|u\|^2_{W_2^{2\sigma}\left((0,T),L_2(\Omega)\right)}\right)^{1/2} \\ &= C\|u\|_{W_2^{4\sigma,2\sigma}(Q)}\end{aligned}$$

Konačno, stavljajući $4\sigma = 2+\varepsilon$, sumirajući po čvorovima mreže $Q_{h\tau}$ i koristeći potapanje $W_2^{1+\delta}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, jednostavno dobijamo:

(20) $$\|\eta_{ij3}\|_{Q_{h\tau}} \le C\|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)}$$

Primenom leme 1.3.4, isto kao u §2.6 izvodimo ocene sabirka η_{ij3} za $s = 3$ i $s = 4$:

(21) $$\|\eta_{ij3}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)} ,$$

(22) $$\|\eta_{ij3}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^2\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)} .$$

Ocenimo sada

$$\eta_{ij4} = T_1^2T_2^2(D_i a_{ij} T_t^- D_j u) - (T_1^2T_2^2 D_i a_{ij})(T_1^2T_2^2T_t^- D_j u) .$$

U slučaju $s = 2$ važi:

$$|\eta_{ij4}(\cdot,t)| \le \frac{C}{h}\|a_{ij}\|_{W_2^1(e)}\|T_t^- D_j u(\cdot,t)\|_{C(\overline{\Omega})} .$$

Dalje je:

$$\|T_t^- D_j u(\cdot,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C\|T_t^- D_j u(\cdot,t)\|_{W_2^{1+\varepsilon}(\Omega)} \le C\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^{2+\varepsilon}(\Omega)}$$

Sumiranjem po čvorovima mreže ω imamo:

$$\|\eta_{ij4}\|_\omega \le C\|a_{ij}\|_{W_2^1(\Omega)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^{2+\varepsilon}(\Omega)} .$$

Sledi:

(23) $$\|\eta_{ij4}\|_{Q_{h\tau}} \le C\|a_{ij}\|_{W_2^1(\Omega)}\|u\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)} .$$

U slučajevima $s = 3$ i $s = 4$ η_{ij4} se ocenjuje istom tehnikom kao i η_{ij1}. Dakle, važe ocene:

$$\|\eta_{ij4}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}, \tag{24}$$

$$\|\eta_{ij4}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^2\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)}. \tag{25}$$

Ocenimo dalje:

$$\eta_{ij5} = (T_1^2T_2^2D_ia_{ij} - 0.5(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar{x}_i}))(T_1^2T_2^2T_t^-D_ju).$$

Važi ocena:

$$|T_1^2T_2^2D_ia_{ij}| \le \frac{C}{h}\|D_ia_{ij}\|_{L_2(e)}.$$

Dalje, a_{ij,x_i} zapišimo u obliku:

$$a_{ij,x_i} = \left(a_{ij,x_i} - T_1^-T_2^-a_{ij,x_i}\right) + T_1^-T_2^-a_{ij,x_i}$$

Jednostavno se dokazuju sledeće ocene:

$$|T_1^-T_2^-a_{ij,x_i}| = |T_i^2T_{3-i}^-D_ia_{ij}| \le \frac{C}{h}\|D_ia_{ij}\|_{L_2(e)},$$

$$|a_{ij,x_i} - T_1^-T_2^-a_{ij,x_i}| \le \|(D_1a_{ij})_{x_i}\|_{L_2(e')} + \|(D_2a_{ij})_{x_i}\|_{L_2(e')} + C_\sigma h^{2\sigma-1}|a_{ij,x_i}|_{(\sigma,\sigma);e'}$$

$$\le \frac{C}{h}\left\{\|D_1a_{ij}\|_{L_2(e)} + \|D_2a_{ij}\|_{L_2(e)} + C_\sigma h^{2\sigma-1}\|a_{ij}\|_{W_2^{2\sigma}(e)}\right\}$$

gde je $1/2 < \sigma < 1$. Ista ocena važi i za $a_{ij,\bar{x}_i}$. Takodje, važi ocena:

$$|T_1^2T_2^2T_t^-D_ju(\cdot,t)| \le \|T_t^-D_ju(\cdot,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \le \|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_2^{2+\epsilon}(\Omega)}$$

Konačno, stavljajući $2\sigma = \delta + 1$, sumiranjem po čvorovima mreže ω, dobijamo:

$$\|\eta_{ij5}\|_\omega \le C\|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)}\|T_t^-u(\cdot,t)\|_{W_2^{2+\epsilon}(\Omega)}.$$

Sledi:

$$\|\eta_{ij5}\|_{Q_{h\tau}} \le C\|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{2+\epsilon,1+\epsilon/2}(Q)}. \tag{26}$$

U slučaju $s = 3$ potrebna nam je reprezentacija izraza oblika:

$$\psi_i(a) = T_1^2T_2^2D_ia - \frac{1}{2}(a_{x_i} + a_{\bar{x}_i}) = (T_1^2T_2^2D_ia - T_2^2D_ia) +$$
$$+ \left(T_2^2D_ia - \frac{1}{2}T_2^2(a_{x_i} + a_{\bar{x}_i})\right) + \frac{1}{2}\left(T_2^2(a_{x_i} + a_{\bar{x}_i}) - (a_{x_i} + a_{\bar{x}_i})\right)$$

Ne umanjujući opštost stavimo $i = 1$. Važi reprezentacija:

$$\begin{aligned}\psi_1(a(x)) = \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{x_1}^{\xi_1} l(\xi_1)l(\xi_2)D_1^2a(\rho_1,\xi_2)d\rho_1 d\xi_2 d\xi_1 \\ + \frac{1}{2h^2}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{x_1}^{\xi_1} l(\xi_2)D_1^2a(\rho_1,\xi_2)d\rho_1 d\xi_2 d\xi_1 \\ + \frac{1}{2h^2}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{x_2}^{\xi_2} l(\xi_2)D_1D_2a(\xi_1,\rho_2)d\rho_2 d\xi_2 d\xi_1\end{aligned}$$

gde je $l(\xi_i) = 1 - |\xi_i - x_i|/h$. Sabirak η_{ij5} sada zapišimo u obliku:

$$\eta_{ij5} = \psi_i(a_{ij})(T_1^2T_2^2T_t^- D_j u).$$

Koristeći reprezentaciju izraza $\psi_i(a_{ij})$, jednostavno dobijamo ocenu:

$$|\eta_{ij5}| \leq C|a_{ij}|_{W_2^2(e)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_\infty^1(\Omega)} \leq C|a_{ij}|_{W_2^2(e)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^3(\Omega)}$$

Sledi:

(27) $$\|\eta_{ij5}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}.$$

Razmotrimo sada slučaj $s = 4$. Primenom poznate osobine operatora Steklova:

$$f(x) - T_x^2 f(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{\xi}^{x}(\xi-\eta)\left(1 - \frac{|\xi - x|}{h}\right)D^2 f(\eta)d\eta d\xi,$$

jednostavno dobijamo reprezentaciju:

$$\begin{aligned}\psi_1(a(x)) = \frac{1}{h^2}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{x_1}^{\xi_1} l(\xi_1)l(\xi_2)(\xi_1-\eta_1)D_1^3a(\eta_1,\xi_2)d\eta_1 d\xi_2 d\xi_1 \\ + \frac{1}{2h^2}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{x_1}^{\xi_1}\int_{x_1}^{\rho_1} l(\xi_2)D_1^3a(\sigma_1,\xi_2)d\sigma_1 d\rho_1 d\xi_2 d\xi_1 \\ + \frac{1}{2h^2}\int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{x_2}^{\xi_2} l(\xi_2)(\xi_2-\eta_2)D_1D_2^2a(\xi_1,\eta_2)d\eta_2 d\xi_2 d\xi_1\end{aligned}$$

Koristeći prethodnu reprezentaciju imamo:

$$|\eta_{ij5}| \leq Ch|a_{ij}|_{W_2^3(e)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_\infty^1(\Omega)} \leq C|a_{ij}|_{W_2^3(e)}\|T_t^- u(\cdot,t)\|_{W_2^3(\Omega)}$$

Dalje jednostavno sledi:

(28) $$\|\eta_{ij5}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^2\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)}.$$

Ocenimo dalje:

$$\eta_{ij6} = 0.5(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar{x}_i})(T_1^2T_2^2T_t^-D_ju - 0.5(u_{x_j}^{-i} + u_{\bar{x}_j}^{+i}))\,.$$

U oceni sabirka η_{ij5} dokazali smo ocenu:

$$|a_{ij,x_i}| \leq \frac{C}{h}\|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(e)}\,.$$

Takodje važi ocena:

$$|T_1^2T_2^2T_t^-D_ju| \leq \|T_t^-D_ju\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|T_t^-D_ju\|_{W_2^{2+\epsilon}(\Omega)}\,.$$

Dalje, zapišimo u_{x_j} na sledeći način:

$$u_{x_j} = (T_t^-u)_{x_j} + (u - T_t^-u)_{x_j}\,.$$

Važe ocene:

$$|(T_t^-u)_{x_j}| \leq C\|D_jT_t^-u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C\|T_t^-u\|_{W_2^{2+\epsilon}(\Omega)}$$

$$|(u - T_t^-u)_{x_j}| \leq C\frac{\tau^{\rho-1/2}}{h}|u|_{W_2^{\rho}((t-\tau,t),C(\bar{\Omega}))}$$

gde je $1/2 < \rho < 1$. Na isti način se ocenjuju $u_{x_j}^{-i}$ i $u_{\bar{x}_j}^{+i}$. Dalje, stavimo $4\rho = 2 + \varepsilon$. Važi:

$$\|u\|_{W_2^{\rho}((0,T);C(\bar{\Omega}))} \leq C\|u\|_{W_2^{\rho}((0,T),W_2^{2\rho}(\Omega))} \leq C\|u\|_{W_2^{4\rho,2\rho}(Q)}$$

Konačno, sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}$ imamo:

(29) $$\|\eta_{ij6}\|_{Q_{h\tau}} \leq C\|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{2+\epsilon,1+\epsilon/2}(Q)}$$

U slučajevima $s = 3$ i $s = 4$ rastavimo η_{ij6} na sledeći način:

$$\eta_{ij6} = \beta_1 + \beta_2\,, \quad \text{gde je}$$
$$\beta_1 = 0.5(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar{x}_i})(T_1^2T_2^2T_t^-D_ju - T_1^2T_2^2D_ju)\,,$$
$$\beta_2 = 0.5(a_{ij,x_i} + a_{ij,\bar{x}_i})(T_1^2T_2^2D_ju - 0.5(u_{x_j}^{-i} + u_{\bar{x}_j}^{+i}))\,.$$

Ocenimo sabirak β_1. Ne umanjujući opštost stavimo $i = j = 1$. Važi reprezentacija:

$$\beta_1(x,t) = \frac{1}{2h^3\tau}(a_{11}(x_1+h,x_2) - a_{11}(x_1-h,x_2))$$
$$\times \int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t}^{\nu} D_1D_tu(\xi_1,\xi_2,\nu_1)d\nu_1 d\nu d\xi_2 d\xi_1\,.$$

Odavde jednostavno dobijamo:

$$|\beta_1| \le \frac{C}{h}\|a_{11}\|_{C(\overline{\Omega})}\|D_1 D_t u\|_{L_2(g)}\,.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}$ dobijamo:

$$\|\beta_1\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{11}\|_{C(\overline{\Omega})}\|D_1 D_t u\|_{L_2(Q)}\,.$$

Na osnovu teoreme 1.2.1 važi:

$$\|D_1 D_t u\|_{L_2(Q)} \le C\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}\,.$$

Sledi:

$$\|\beta_1\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{11}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}$$

Takodje važi reprezentacija.

$$\beta_1(x,t) = \frac{1}{2h^3\tau}\int_{x_1-h}^{x_1+h} D_1 a_{11}(\xi_1, x_2)d\xi_1 \\ \times \int_{x_1-h}^{x_1+h}\int_{x_2-h}^{x_2+h}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t}^{\nu} D_1 D_t u(\xi_1,\xi_2,\nu_1)d\nu_1 d\nu d\xi_2 d\xi_1\,.$$

Sledi:

$$|\beta_1| \le C\|a_{11}(\cdot,x_2)\|_{W_\infty^1(0,1)}\|D_1 D_t u\|_{L_2(g)}\,.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}$ dobijamo:

$$\|\beta_1\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^2 \max_{x_2}\|a_{11}(\cdot,x_2)\|_{W_\infty^1(0,1)}\|D_1 D_t u\|_{L_2(Q)}\,.$$

Koristeći potapanja $W_2^3(\Omega) \subset W_2^{5/2}(0,1) \subset W_\infty^1(0,1)$, dobijamo:

$$\|\beta_1\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^2\|a_{11}\|_{W_2^3(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)}\,.$$

Sabirak β_2, u slučaju $i = j$, se ocenjuje primenom reprezentacije $\psi_i(u)$. U slučaju $i \ne j$ ocena se izvodi primenom leme 1.3.4, pri čemu je $u = u(\cdot,t) \in W_2^{s-1}(\Omega)$. Dakle, imamo ocene:

$$\|\eta_{ij6}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}\,, \tag{30}$$

$$\|\eta_{ij6}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^2\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)}\,. \tag{31}$$

Ocenimo sada:

$$\eta_{ij7} = \frac{1}{4}(a_{ij,x_i} - a_{ij,\bar{x}_i})(u_{x_j}^{-i} - u_{\bar{x}_j}^{+i})\,.$$

Ocenjujući a_{ij,x_i}, $a_{ij,\bar{x}_i}$, $u_{x_j}^{-i}$ i $u_{\bar{x}_j}^{+i}$ na isti način kao u slučaju ocena sabiraka η_{ij5} i η_{ij6} jednostavno dobijamo ocenu:

$$\|\eta_{ij7}\|_{Q_{h\tau}} \leq C\|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)} \tag{32}$$

U slučajevima $s = 3$ i $s = 4$, primenom leme 1.3.4, na isti način kao u §2.6, dobijamo ocene:

$$\|\eta_{ij7}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}, \tag{33}$$

$$\|\eta_{ij7}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^2\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)} \tag{34}$$

Konačno na osnovu dokazanih ocena (9)–(34) imamo ocene:

$$\|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} \leq C\|a_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)}; \tag{35}$$

$$\|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch\|a_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)}, \tag{36}$$

$$\|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} \leq Ch^2\|a_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)}. \tag{37}$$

Ocenimo sada izraz:

$$\varphi = u_{\bar{t}} - T_1^2T_2^2u_{\bar{t}}.$$

Koristeći reprezentaciju:

$$u_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}\Big\{\Big[u(\cdot,t) - \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} u(\cdot,t')dt'\Big] + \Big[\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} u(\cdot,t')dt' - u(\cdot,t-\tau)\Big]\Big\},$$

primenom leme 1.4.3, imamo:

$$|\varphi| \leq \frac{C}{\tau}\tau^{\rho-1/2}|u - T_1^2T_2^2u|_{\rho;(t-\tau,t)} \leq \frac{C}{\tau}\tau^{\rho-1/2}\|u\|_{W_2^\rho\left((t-\tau,t);W_2^{2\sigma}(e)\right)},$$

gde je $1/2 < \rho, \sigma < 1$. Sumiranjem po čvorovima mreže $Q_{h\tau}^+$ dobijamo:

$$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \leq C\tau^{\rho-1/2}\|u\|_{W_2^\rho\left((0,T);W_2^{2\sigma}(\Omega)\right)}.$$

Za $\rho = \sigma$ jednostavno dobijamo:

$$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \leq C\tau^{\sigma-1/2}\|u\|_{W_2^{4\sigma,2\sigma}(Q)}.$$

Stavljajući $4\sigma = 2 + \varepsilon$ dobijamo ocenu:

$$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \leq C\|u\|_{W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)}. \tag{38}$$

Istom tehnikom kao u §2.6 izvodimo ocene:

(39) $$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \le Ch\|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q)},$$

(40) $$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^2\|u\|_{W_2^{4,2}(Q)}.$$

Konačno, iz ocena (35)-(40) i apriorne ocene (4) dobijamo ocene celobrojnog reda (5)–(7).

3. Ocene razlomljenog reda

Sada ćemo, primenom teorije interpolacije izvesti ocene brzine konvergencije razlomljenog reda.

Definišimo operatore A_{ij} i B na sledeći način:

$$\eta_{ij} = A_{ij}(a_{ij}, u) \quad \text{i} \quad \varphi = B(u).$$

Iz (35) sledi da je A_{ij} ograničen bilinearni operator iz $W_2^{1+\delta}(\Omega)\times W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)$ u $L_2(Q_{h\tau})$, i važi ocena:

(41) $$\|A_{ij}\|_{W_2^{1+\delta}(\Omega)\times W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)\to L_2(Q_{h\tau})} \le C.$$

Iz (36) sledi da je A_{ij} ograničen bilinearni operator iz $W_2^2(\Omega)\times W_2^{3,3/2}(Q)$ u $L_2(Q_{h\tau})$, i važi:

(42) $$\|A_{ij}\|_{W_2^2(\Omega)\times W_2^{3,3/2}(Q)\to L_2(Q_{h\tau})} \le Ch.$$

Iz (37) sledi da je A_{ij} ograničen bilinearni operator iz $W_2^3(\Omega)\times W_2^{4,2}(Q)$ u $L_2(Q_{h\tau})$ i važi::

(43) $$\|A_{ij}\|_{W_2^3(\Omega)\times W_2^{4,2}(Q)\to L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^2.$$

Na osnovu teorema 1.5.2, 1.5.3 i 1.5.4, iz (41) i (42) sledi da je A_{ij} ograničen bilinearni operator iz

$$\left(W_2^2(\Omega),W_2^{1+\delta}(\Omega)\right)_{\theta,2}\times\left(W_2^{3,3/2}(Q),W_2^{2+\varepsilon,1+\varepsilon/2}(Q)\right)_{\theta,2}=$$
$$= W_2^{2+\theta(\delta-1)}(\Omega)\times W_2^{3-\theta(1-\varepsilon),(3-\theta(1-\varepsilon))/2}(Q)$$

1

$$(L_2(Q_{h\tau}),L_2(Q_{h\tau}))_{\theta,\infty} = L_2(Q_{h\tau}),$$

i važi:

$$\|A_{ij}\|_{W_2^{2+\theta(\delta-1)}(\Omega)\times W_2^{3-\theta(1-\varepsilon),(3-\theta(1-\varepsilon))/2}(Q)\to L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^{1-\theta}, \quad 0<\theta<1 .$$

Sledi:

$$\|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{1-\theta}\|a_{ij}\|_{W_2^{2+\theta(\delta-1)}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{3-\theta(1-\varepsilon),(3-\theta(1-\varepsilon))/2}(Q)}, \quad 0<\theta<1 .$$

Stavljajući $3-\theta=s$, $2<s<3$, dobijamo ocenu:

$$\|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_{ij}\|_{W_2^{s-1+\delta(3-s)}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{s+\varepsilon(3-s),(s+\varepsilon(3-s))/2}(Q)}, \quad 2<s<3 . \tag{44}$$

Slično, primenom teorema 1.5.2, 1.5.3 i 1.5.4, iz (42) i (43) sledi da je A_{ij} ograničen bilinearni operator iz

$$\left(W_2^3(\Omega), W_2^2(\Omega)\right)_{\theta,2} \times \left(W_2^{4,2}(Q), W_2^{3,3/2}(Q)\right)_{\theta,2} = W_2^{3-\theta}(\Omega) \times W_2^{4-\theta,2-\theta/2}(Q)$$

u

$$\left(L_2(Q_{h\tau}), L_2(Q_{h\tau})\right)_{\theta,\infty} = L_2(Q_{h\tau}),$$

i važi:

$$\|A_{ij}\|_{W_2^{3-\theta}(\Omega)\times W_2^{4-\theta,2-\theta/2}(Q)\to L_2(Q_{h\tau})} \le Ch^{2-\theta}, \quad 0<\theta<1 .$$

Sledi:

$$\|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{2-\theta}\|a_{ij}\|_{W_2^{3-\theta}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{4-\theta,2-\theta/2}(Q)}, \quad 0<\theta<1 .$$

Stavljajući $4-\theta=s$, $3<s<4$, dobijamo ocenu:

$$\|\eta_{ij}\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|a_{ij}\|_{W_2^{s-1}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3<s<4 . \tag{45}$$

Analogno, interpolacijom ocena (38) i (39), odnosno (39) i (40), dobijamo ocene izraza φ:

$$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3<s<4 . \tag{46}$$

$$\|\varphi\|_{Q_{h\tau}} \le Ch^{s-2}\|u\|_{W_2^{s+\varepsilon(3-s),(s+\varepsilon(3-s))/2}(Q)}, \quad 2<s<3 \tag{47}$$

Konačno, iz (4), (35)-(40) i (44)-(47) dobijamo sledeći rezultat:

Teorema 1. *Diferencijska shema (4) konvergira u normi prostora $W_2^{2,1}(Q_{h\tau})$ i, uz uslov $k_1h^2 \le \tau \le k_2h^2$, važe ocene:*

$$\|u-v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le Ch^{s-2}\max_{i,j}\|a_{ij}\|_{W_2^{s-1+\delta(3-s)}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{s+\varepsilon(3-s),(s+\varepsilon(3-s))/2}(Q)}, \quad 2\le s\le 3 .$$

$$\|u-v\|_{W_2^{2,1}(Q_{h\tau})} \le Ch^{s-2}\max_{i,j}\|a_{ij}\|_{W_2^{s-1}(\Omega)}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \quad 3\le s\le 4 .$$

Druga ocena je saglasna s glatkošću podataka, dok je prva ocena "skoro" saglasna s glatkošću podataka.

PRIMEDBA 1. Ocene razlomljenog reda (44)–(47) mogu se dobiti i primenom interpolacije pomoću pozitivnog operatora, koristeći relaciju $(A_0, A_1)_{\theta,2} = [A_0, A_1]_\theta$ [37] i analog teoreme 1.5.4.

PRIMEDBA 2. Napred izložena tehnika može se primeniti generalno, na široku klasu diferencijskih shema eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa [4],[5],[29],[30],[56]. U nekim slučajevima, pored izloženih interpolacionih metoda neophodno je koristiti i metod kompleksne interpolacije [37],[50]

PRIMEDBA 3 Interpolaciona tehnika je naročito podesna za ispitivanje brzine konvergencije diferencijskih shema definisanih na neravnomernim mrežama [31], [42], kada tehnika zasnovana na lemi Bramble–Hilberta nije valjana.

Literatura

[1] R.A. Adams: *Sobolev spaces.* Academic Press, New York 1975.

[2] J. Bergh. J. Löfström: *Interpolation spaces.* Springer, Berlin etc. 1976.

[3] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский: *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* Наука, Москва 1975.

[4] D. Bojović. B.S. Jovanović: *Application of interpolation theory to the analysis of the convergence rate for finite difference schemes of parabolic type.* Mat. Vesnik 49 (1997), 99-107.

[5] D. Bojović, B.S. Jovanović: *Convergence of a finite difference method for the heat equation–interpolation technique.* Mat. Vesnik 49 (1997), 257-264.

[6] D.Bojović, B.S. Jovanović: *Finite difference method for the heat equation with coefficient from anisotropic Sobolev space.* Facta Univ. (predat za štampu)

[7] J.H. Bramble, S.R. Hilbert: *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transform and spline interpolation.* SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970), 112–124.

[8] J.H. Bramble, S.R. Hilbert: *Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation.* Numer. Math. 16 (1971), 362–369.

[9] J. Douglas, T. Dupont: *A finite element collocation method for quasilinear parabolic equations.* Math. Comput. 27(1973), 17–28.

[10] J. Douglas, T. Dupont, M.F. Wheeler: *A quasi–projection analysis of Galerkin methods for parabolic and hyperbolic equations.* Math. Comput. 32 (1978). 345–362.

[11] M. Dražić: *Convergence rates of difference approximations to weak solutions of the heat transfer equation.* Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, Report No 86/22. Oxford 1986.

[12] M. Dražić: *Konvergencija diferencijskih shema ka slabim rešenjima paraboličkog graničnog zadatka.* Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu (1995).

[13] T. Dupont, R. Scott: *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*. Math. Comput. 34 (1980), 441–463.

[14] K.N. Godev, R.D. Lazarov: *Error estimates of finite-difference schemes in L_p-metrics for parabolic boundary value problems*. Comptes rendus Acad. Bulgar. Sci. 37 (1984), 565–568.

[15] W. Hackusch: *Optimal $H^{p,p/2}$ error estimates for a parabolic Galerkin method*. SIAM J. Numer. Anal. 18 (1981), 681–692.

[16] L.D. Ivanović, B.S. Jovanović: *Approximation and regularization of control problem governed by parabolic equation*. In: G.V. Milovanović (ed.), Numerical methods and approximation theory. Proc. Conf. held in Niš 1984, University of Niš, Niš 1984, 161–166.

[17] L.D. Ivanović, B.S. Jovanović, E.E. Süli: *On the rate of convergence of difference schemes for the heat transfer equation on the solutions from $W_2^{s,s/2}$*. Mat. vesnik 36 (1984), 206–212.

[18] Б.С. Йованович: *О сходимости проекционно-разностных схем для уравнения теплопроводности*. Mat. vesnik 6(19)(34) (1982), 279–292.

[19] B.S. Jovanović, L.D. Ivanović, E.E. Süli: *On the convergence rate of difference schemes for the heat transfer equation*. In: B. Vrdoljak (ed.), IV Conference on applied mathematics. Proc. Conf. held in Split 1984, University of Split, Split 1985, 41–44.

[20] B.S. Jovanović: *Jedno uopštenje leme Bramble–Hilberta*. Zbornik radova PMF u Kragujevcu 8 (1987), 81–87.

[21] Б.С. Йованович: *Аппроксимация обобщенных решений с помощью конечных разностей*. Arch. Math. (Brno) 23 (1987), 9–14.

[22] Б.С. Йованович: *О сходимости дискретных методов для нестационарных задач*. Вычисл. процессы сист. 6 (1988), 145–151.

[23] B.S. Jovanović: *On the convergence of finite-difference schemes for parabolic equations with variable coefficients*. Numer. Math. 54 (1989), 395–404

[24] B.S. Jovanović: *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina*. Savremena računska tehnika i njena primena 8. Mat. Institut, Beograd 1989.

[25] B.S. Jovanović: *Optimal error estimates for finite-difference schemes with variable coefficients*. Z. Angew. Math. Mech. 70 (1990), 640–642.

[26] B.S. Jovanović: *Convergence of finite-difference schemes for parabolic equations with variable coefficients*. Z. Angew. Math. Mech. 71 (1991), 647–650.

[27] B. S. Jovanović: *The finite difference method for boundary value problems with weak solutions*. Posebna izdanja Matematičkog instituta, No 16, Beograd 1993.

[28] B. S. Jovanović: *Parcijalne jednačine*. BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd 1993.

[29] B. S. Jovanović: *Interpolation of function spaces and the convergence rate estimates for the finite difference schemes.* Second International Colloquium on Numerical Analysis, Plovdiv 1993, (D. Bainov and V. Covachev, eds.), VPS, Utrecht 1994, 103–112.

[30] B. S. Jovanović: *Interpolation technique and convergence rate estimates for finite difference method.* Lect. Notes Comp. Sci. 1196 (1997), 200–211.

[31] Б. С. Йованович, П. П. Матус, В. С. Щеглик: *Оценки скорости сходимости разностных схем на неравномерных сетках для параболических задач с переменными коэффициентами и обобщенными решениями.* Сиб. Журн. Вычисл. Математики 2, No2, (1999), 123-136.

[32] Б. С. Йованович, П. П. Матус: *Сильная устойчивость операторно–разностных схем в интегральных по времени нормах.* Дифференциальные уравнения (1999), (predat za štampu)

[33] О.А. Ладыженская: *Краевые задачи математической физики.* Наука, Москва 1973.

[34] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева: *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* Наука, Москва 1964.

[35] О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева: *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, Москва 1967.

[36] Р.Д. Лазаров: *Сходимость разностных схем для параболических уравнений с обобщенными решениями.* Pliska Stud. Math. Bulgar. 5 (1983), 51-59.

[37] J.L. Lions, E. Magenes: *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Dunod, Paris 1968.

[38] V.G. Maz'ya, T.O. Shaposhnikova: *Theory of multipliers in spaces of differentiable functions.* Monographs and Studies in Mathematics 23. Pitman, Boston, Mass. 1985.

[39] B. Z. Popović, D. Bojović, B. S. Jovanović: *Convergence of finite difference method for the third BVP - Interpolation technique.* XIII Conference on Applied Mathematics PRIM'98, Igalo 1998. (to appear)

[40] W. Rudin: *Functional analysis.* McGraw–Hill, New York 1973.

[41] А.А. Самарский: *Теория разностных схем.* Наука, Москва 1983.

[42] А.А. Самарский, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров: *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.* Высшај школа, Москва 1987.

[43] L. Schwartz: *Théorie des distributions I, II.* Herman, Paris 1950/51.

[44] J.A. Scott, W.L. Seward: *Finite difference methods for parabolic problems with nonsmooth initial data.* Oxford University Computing Laboratory, Numerica

Analysis Group, Report No 86/22, Oxford 1987.

[45] С.Л. Соболев: *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Изд. СО АН СССР, Новосибирск 1962.

[46] E. Süli, B. Jovanović, L. Ivanović: *Finite difference approximations of generalized solutions.* Math. Comput. 45 (1985), 319–327.

[47] E.E. Süli, B.S. Jovanović, L.D. Ivanović: *On the construction of finite difference schemes approximating generalized solutions.* Publ. Inst. Math. 37(51) (1985), 123–128.

[48] V. Thomée: *Galerkin finite element methods for parabolic problems.* Lecture notes in mathematics 1054. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1984.

[49] V. Thomée, L.B. Wahlbin: *Maximum-norm stability and error estimates in Galerkin methods for parabolic equations in one space variable.* Numer. Math. 41 (1983), 345–371.

[50] H. Triebel: *Interpolation theory, function spaces, differential operators.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (DDR) 1978.

[51] В. Вайнельт, Р.Д. Лазаров, У. Штрайт: *О порядке сходимости разностных схем для слабых решений уравнения теплопроводности в анизотропной неоднородной среде.* Дифференциальные уравнения 20 (1984), 1144–1151.

[52] M. Zlamal: *Finite element methods for parabolic equations.* Math. Comput. 28 (1974), 393–404.

[53] С. Б. Зайцева, А. А. Злотник: *Оптимальные оценки погрешности одного локально-одномерного метода для многомерного уравнения теплопроводности.* Математические заметки 60, 2 (1996), 185–197.

[54] А.А. Злотник: *Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений.* Ж. вычисл. мат. мат. физ. 18 (1978), 1454–1465.

[55] А.А. Злотник: *Оценка скорости сходимости в $V_2(Q_T)$ проекционно-разностных схем для параболических уравнений.* Вестник Москов. Унив., Сер. 15 Вычисл. Мат. Кибернет. 1 (1980), 27–35.

[56] А.А. Злотник: *Оценки скорости сходимости проекционно-сеточных методов для гиперболических уравнений второго порядка.* Вычислительные процессы и системы 8 (под редакцией Г. И. Марчука), Наука, Москва, 1991