



УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Александар Пејчев

**ОЦЕНЕ ГРЕШАКА
КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛА
ГАУСОВОГ ТИПА
ЗА АНАЛИТИЧКЕ ФУНКЦИЈЕ**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2012.

Мом деди и великом пријатељу

Милораду - Мићи Ђукићу

(01. 09. 1928. - 04. 01. 2012.)

Садржај

1. Уводно поглавље	1
1.1. Уопштено о нумеричкој интеграцији	1
1.2. Класе формула и степен тачности	3
1.3. <i>Gauss-Christoffel</i> -ове квадратурне формуле	4
1.4. Организација дисертације по поглављима	5
1.5. Захвалност	7
2. Оцене грешке квадратурних формула са <i>Bernstein-Szegő</i>-овим тежинским функцијама	9
2.1. Оцена грешке <i>Gauss</i> -ове квадратурне формуле са другом <i>Bernstein-Szegő</i> -овом тежинском функцијом	12
2.1.1. Максимум модула језгра <i>Gauss</i> -ове квадратурне формуле са другом <i>Bernstein-Szegő</i> -овом тежинском функцијом	12
2.1.2. Практично разматрање	20
2.1.3. Нумерички резултати	27
2.2. Оцена грешке <i>Gauss</i> -ове квадратурне формуле са првом <i>Bernstein-Szegő</i> -овом тежинском функцијом	33
2.2.1. Максимум модула језгра <i>Gauss</i> -ове квадратурне формуле са првом <i>Bernstein-Szegő</i> -овом тежинском функцијом	33
2.2.2. Практично разматрање	39
2.2.3. Нумерички резултати	43
2.3. Оцена грешке <i>Gauss</i> -ове квадратурне формуле са трећом <i>Bernstein-Szegő</i> -овом тежинском функцијом	47
2.3.1. Максимум модула језгра <i>Gauss</i> -ове квадратурне формуле са трећом <i>Bernstein-Szegő</i> -овом тежинском функцијом	47
2.3.2. Практично разматрање	54
2.3.3. Нумерички резултати	55
3. Gautschi-јева хипотеза	62
3.1. Опис проблема	62
3.2. Максимум модула језгра <i>Gauss-Radau</i> -ове квадратурне формуле са трећом <i>Chebyshev</i> -љевом тежинском функцијом	63
4. Прилог оцени грешке <i>Gauss-Turán</i>-ове квадратурне формуле са <i>Chebyshev</i>-љевом тежинском функцијом прве врсте	69
4.1. Увод	69

4.2. Горња граница за остатак <i>Gauss-Turán</i> -ове квадратурне формуле са <i>Chebyshev</i> -љевом тежинском функцијом прве врсте	70
5. Квадратурне формуле за рачунање Fourier-ових коефицијената	75
5.1. Оцене грешке <i>Micchelli-Rivlin</i> -ових квадратурних формула	75
5.1.1. Увод	75
5.1.2. Остатак <i>Micchelli-Rivlin</i> -ових квадратурних формула	77
5.1.3. L^∞ -оцена грешке базирана на анализи максимума модула језгра <i>Micchelli-Rivlin</i> -ове квадратурне формуле са првом <i>Chebyshev</i> -љевом тежинском функцијом	79
5.1.4. Оцена грешке базирана на развоју језгра <i>Micchelli-Rivlin</i> -ове квадратурне формуле (са првом <i>Chebyshev</i> -љевом тежинском функцијом) у ред и L^1 -оцена грешке	84
5.2. Оцена грешке код <i>Micchelli-Sharma</i> квадратурне формуле	89
5.2.1. Увод	89
5.2.2. О <i>Micchelli-Sharma</i> квадратурној формули	91
5.2.3. Остатак <i>Micchelli-Sharma</i> квадратурне формуле за аналитичке функције	94
5.2.4. Оцена грешке базирана на анализи максимума модула језгра <i>Micchelli-Sharma</i> квадратурне формуле	95
5.2.5. Нумерички резултати	97
Литература	99
Биографија кандидата	105
Summary	107

1. УВОДНО ПОГЛАВЉЕ

Докторска дисертација обрађује област Нумеричке интеграције (у шта спадају квадратурне и кубатурне формуле) и односи се на квадратурне формуле *Gauss*-овог типа.

Чувена *Gauss*-ова квадратурна формула која служи за приближно израчунавање одређеног интеграла, уведена од стране познатог математичара, тема је изучавања у последња два века. Неке њене генерализације са вишеструким чворовима су предложене средином прошлог века и интензивно истраживане у последњим деценијама. У дисертацији се анализирају остаци у наведеним квадратурним формулама када оне служе за апроксимацију интеграла функција које су аналитичке у некој околини која садржи интервал интеграције. Посебна пажња је посвећена *Gauss*-овим квадратурним формулама са једном прилично широком и компликованом класом тежинских функција *Bernstein-Szegő*-овог типа. Изучавају се три врсте оцена остатка у наведеним квадратурним формулама, што подразумева анализу језгра квадратура, тј. одређивање локације максимума модула језгра, израчунавање интеграла модула језгра по контури, као и развијање остатка квадратура у ред. Поред стандардних, разматрају се и одговарајуће квадратуре за апроксимацију *Fourier*-ових коефицијената.

1.1. Уопштено о нумеричкој интеграцији

Нумеричка интеграција функција састоји се у приближном израчунавању одређених интеграла на основу низа вредности подинтегралне функције по одговарајућој формули. Формуле за нумеричко израчунавање једноструких интеграла називају се квадратурне формуле (слично, формуле за рачунање двоструких и вишеструких интеграла називају се кубатурне формуле).

Потреба за нумеричком интеграцијом јавља се у великом броју случајева. Наиме, *Newton-Leibnitz*-ова формула

$$(1.1) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где је F примитивна функција функције f , не може се увек успешно применити (ако није другачије наглашено подразумевамо да је функција f непрекидна на интервалу интеграције). Наводимо неке од разлога за то.

1. Функција F се не може представити помоћу коначног броја елементарних функција (нпр. $f(x) = e^{-x^2}$).
2. Примена формуле (1.1) често доводи до врло сложеног израза, чак и код израчунавања интеграла једноставних функција, нпр.

$$\int_0^a \frac{dx}{1+x^3} = \ln \sqrt[3]{|a+1|} - \frac{1}{6} \ln(a^2 - a + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{3}}{2-a}.$$

3. Вредности подинтегралне функције f су познате само на дискретном скупу тачака (добијене, нпр. експериментално).

Велики број квадратурних формула има облик

$$(1.2) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

где су x_k тзв. чворови, а A_k тежински коефицијенти. Ако претпоставимо да је f елемент извесног простора X (нпр. $C[a, b]$ или $C^m[a, b]$), тада нумеричку интеграцију можемо третирати као апроксимацију функционеле $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ помоћу функционеле $K_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, где је

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx, \quad K_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Функционелу

$$R_n(f) = I(f) - K_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

називамо остатком квадратурне формуле (1.2) и она представља грешку која се чини при замени интеграла коначном сумом.

Чворови x_k су, у општем случају, комплексни бројеви. Међутим, код већине квадратурних формула чворови x_k су такви да сви припадају $[a, b]$, тј.

$$(1.3) \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b.$$

Овај услов је природан, јер се тада вредност функционеле K_n одређује на основу вредности функције f на дискретном скупу тачака $\{x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$. Ако је $x_1 = a$ и $x_n = b$, за квадратурну формулу кажемо да је затвореног типа, док у осталим случајевима кажемо да је отвореног типа.

Од интереса су и квадратурне формуле облика

$$(1.4) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f),$$

где је $p : [a, b] \rightarrow R^+$ дата тежинска функција.

У даљем тексту, ако није другачије наглашено, сматраћемо да је $X = C[a, b]$.

1.2. Класе формула и степен тачности

У простору функција X уочимо m линеарно независних елемената u_1, \dots, u_m . Са $X_m (\subset X)$ означимо линеал над овим елементима.

Проблем конструкције квадратурних формула састоји се у одређивању параметара x_k и A_k ($k = 1, \dots, n$), при чему су уобичајена два приступа.

а) Чворови x_k се унапред фиксирају, а параметри A_k одређују из тзв. „услова максималне тачности”, обзиром на изабрани потпростор X_m . Наиме, параметре A_k (уколико је то могуће) одређујемо из услова

$$(1.5) \quad R_n(f) = 0 \text{ за свако } f \text{ из } X_n.$$

С обзиром на то да је R_n линеарна функционела, услов (1.5) је испуњен ако је $R_n(u_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), тј. ако је

$$(1.6) \quad \sum_{k=1}^n u_i(x_k) A_k = I(u_i) \quad (i = 1, \dots, n),$$

где је функционела I , у општем случају,

$$I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx.$$

Интеграл $I(u_i)$ се називају моментима тежинске функције p у односу на базис $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. Јасно је да систем (1.6) има јединствено решење ако је B *Chebyshev*-љев систем.

б) Параметри A_k и x_k ($k = 1, \dots, n$) одређују се из услова „максималне могуће тачности”, тј. из услова

$$(1.7) \quad R_n(f) = 0 \text{ за све } f \text{ из } X_{2n},$$

или, што је еквивалентно, из $R_n(u_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$). Дакле, A_k и x_k су решења нелинеарног система од $2n$ једначина

$$(1.8) \quad \sum_{k=1}^n u_i(x_k) A_k = I(u_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 2n).$$

За квадратуре добијене на овај начин каже се да су *Gauss-Christoffel*-овог (*Gauss*-овог) типа.

Далеко најчешће се у применама користе квадратуре које поседују алгебарски степен тачности, тј. код којих је изабран систем функција $u_i(x) = x^{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$). У том случају потпростор X_m биће скуп свих алгебарских полинома степена највише $m - 1$. Означимо тај скуп са \mathcal{P}_{m-1} . Према томе, квадратурна формула (1.4) има алгебарски степен тачности $p = m - 1$ ако је $R_n(f) = 0$ за свако $f \in \mathcal{P}_{m-1}$ (тј. $R_n(x^{i-1}) = 0$, $i = 1, \dots, m$), а бар за једно $f \in \mathcal{P}_m$ $R_n(f) \neq 0$ (тј. $R_n(x^m) \neq 0$).

Јасно је да је алгебарски степен тачности квадратурних формула добијених приступом а) не мањи од $n - 1$, док код квадратурних формула *Gauss-Christoffel*-овог типа (приступ б)) максималан могући степен тачности износи $p = 2n - 1$ (видети (1.7), где је $X_{2n} = \mathcal{P}_{2n-1}$). С обзиром на то да је ова дисертација посвећена оцени остатка квадратурних формула *Gauss*-овог типа (и њихових уопштења), следи детаљнији приказ историје настанка истих.

1.3. *Gauss-Christoffel*-ове квадратурне формуле

Ова врста квадратурних формула заузима централно место у Нумеричкој интеграцији.

Посматрајмо општи случај интеграције са тежинском функцијом, тј. квадратурне формуле облика

$$(1.9) \quad \int_a^b p(x)f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f),$$

чији је алгебарски степен тачности $p = 2n - 1$. Дакле, $R_n(f) \equiv 0$ за свако $f \in \mathcal{P}_{2n-1}$.

Прве идеје о оваквим квадратурама потичу од *Newton*-а (1676). *Cotes* је, независно од *Newton*-а, такође користио сличне идеје. Ослањајући се на њихове радове и свој рад о хипергеометријским развојима, *Gauss* ([9]) је 1814. године развио фамозни метод за интеграцију, који значајно побољшава дотад познате *Newton-Cotes*-ове квадратурне формуле описане у приступу а) у претходном одељку. *Gauss* је разматрао случај $p(x) = 1$ и нумерички одредио параметре за $n \leq 7$. *Gauss*-ове резултате је поједноставио (по форми) *Jacobi* (1826). У току 19. века *Gauss*-ове квадратуре су детаљније разрађивали и даље развијали *Mehler* (1864), *Christoffel* (1858)

и други. Добијене резултате су систематизовали и уобличили у теорију *Christoffel* (1880) и *Heine* (1881). Овај метод интеграције данас се обично назива *Gauss-Christoffel*-ов метод. 1966. године појавила се књига *Stroud*-а и *Secrest*-а ([79]), у којој је дат један опширан преглед ових формула, укључујући и велики број нумеричких табела. Нови значајан прогрес у конструкцији *Gauss-Christoffel*-ових квадратурних формула учињен је у последњих неколико деценија. Овде треба поменути значајне резултате до којих су дошли *Gautschi* ([10]-[12]), *Golub* и *Welsch* ([21]), *Sack* и *Donovan* ([60]) и други. Такође, у литератури су разматране и тригонометријске, експоненцијалне, рационалне, сплајн и друге квадратуре *Gauss*-овог типа (нпр. *Crout* (1929/1930), *Newbery* (1969), *Tureckii* (1959, 1960), *Haris* и *Evans* (1977/1978) и други). Детаљније информације се могу наћи у раду *Gautschi*-ја [11].

Gauss-Christoffel-ове квадратуре могу се разматрати и за општије интеграле облика

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x),$$

где је $d\lambda(x)$ ненегативна мера на реалној правој \mathbb{R} са компактним или бесконачним носачем и за коју егзистира првих $2n$ момената

$$C_k = \int_{\mathbb{R}} x^k d\lambda(x) \quad (k = 0, 1, \dots, 2n - 1).$$

Случај (1.9) се добија када је $d\lambda(x) = p(x)dx$ ($x \in (a, b)$). Теорија *Gauss-Christoffel*-ових квадратура је у уској вези са теоријом ортогоналних полинома. Тачније речено, главно поље примене ортогоналних полинома су *Gauss*-ове квадратуре. Штавише, конструктивна теорија ортогоналних полинома је проистекла из конструкције *Gauss-Christoffel*-ових квадратура за неklasичне тежинске функције. Прве темеље уопштењима ове врсте квадратурних формула поставио је *Stancu* (видети [70]-[77]), док су њихове најновије генерализације изложене у радовима [32], [33] и [34].

1.4. Организација дисертације по поглављима

Дисертација се састоји од четири поглавља (ако изузмемо уводно), од којих је свако посвећено потпуно независној проблематици, при чему се у сваком од тих поглавља приступ заснива на чињеници да се остатак *Gauss*-ове квадратурне формуле (као и њених уопштења), ако је подинтегрална функција аналитичка у некој околини

интервала интеграције, може приказати у облику комплексног интеграла по произвољној контури која садржи интервал интеграције и у чијој унутрашњости и на граници је подинтегрална функција аналитичка. За поменуту контуру узима се елипса са центром у координатном почетку и чије полуосе припадају координатним осама. Таква репрезентација остатка омогућава да се на основу *Cauchy-Schwarz*-ове (у неким ситуацијама чак и *Hölder*-ове) неједнакости за модуле у комплексној равни, добију горња ограничења модула остатка за која се касније испоставља да су са практичног становишта веома јака.

Друго поглавље је посвећено оцени остатка *Gauss*-ових квадратурних формула у односу класу *Bernstein-Szegő*-ових тежинских функција. Састоји се од три независна одељка с обзиром на то да постоје три поткласе ових тежинских функција. *Gautschi* и *Notaris* су у свом раду [16] из 1989. године дошли до експлицитног израза за полиноме ортогоналне у односу на сваку од тих поткласа ове класе тежинских функција, што омогућава извођење свих потребних аналитичких формула. Одговарајућа извођења су у одређеном подслучају за сваку поткласу тежина комплетно спроведена у радовима [68], [69] и [65], док су у дисертацији иста комплетно спроведена и у општем случају. Део тих резултата је публикован у часопису *IMA Journal of Numerical Analyses* ([56]).

Треће поглавље је посвећено тврђењу познатом под називом „Осма (последња) *Gautschi*-јева хипотеза”. *Gautschi*-јеве хипотезе се односе на тзв. *Gauss-Radau* и *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле у случају *Chebyshev*-љевих тежинских функција. То су, заправо, *Gauss*-ове квадратурне формуле на интервалу $[-1, 1]$ код којих се бар један од крајева интервала јавља као фиксиран чвор. Неке од тих хипотеза је *Gautschi* доказао самостално, неке је доказао *Schira*, док је једна од две преостале (које су по структури и формулацији уједно и међусобно најсродније) доказана у раду Миловановића, Спалевића и Пранића [51] из 2008. године. Последња преостала хипотеза је комплетно доказана у овој дисертацији. Доказ је у облику рада прихваћен за штампу у часопису *Applied Mathematics and Computation* ([57]).

Преостала два поглавља посвећена су познатим класама тзв. квадратура повећане тачности (у циљу повећања тачности користе се вредности извода подинтегралне функције у чворовима интеграције).

Четврто поглавље се односи на *Gauss-Turán*-ове квадратурне формуле са вишеструким чворовима - доказује се да оцене грешке аналогне оценама изведеним у раду [40] за два специјална случаја вишеструкости важе и у случају било које вишеструкости чворова интеграције. Доказ је у облику рада прихваћен за штампу у ча-

сопису *FILOMAT* ([36]).

Пето поглавље је посвећено оцени остатка квадратурних формула за рачунање *Fourier*-ових коефицијената. Састоји се од два одељка: први се односи на *Micchelli-Rivlin*-ове, док се други односи на *Micchelli-Sharma* квадратурну формулу. У првом одељку се изводе три различите врсте оцене грешака квадратурних формула за рачунање *Fourier-Chebyshev*-љевих коефицијената - тзв. $L^{+\infty}$ и L^1 оцене грешке изведене су, на већ поменут начин, уз употребу *Hölder*-ове неједнакости, док је трећа оцена добијена на основу развијања одговарајућих аналитичких израза у ред. Други одељак је умногоме заснован на раду Бојанова и Петрове [2], у којем је спроведена подробна анализа квадратурних формула са вишеструким чворовима уопште и успостављена јасна веза између њих и квадратурних формула за рачунање *Fourier-Chebyshev*-љевих коефицијената. На основу тих резултата приступа се анализи *Micchelli-Sharma* квадратурне формуле са вишеструким чворовима коју су *Micchelli* и *Sharma* конструисали у раду [29] - уз одговарајућу претпоставку о аналитичности изводи се са практичног становишта веома повољна оцена остатка. Овај резултат, као и резултати из првог одељка су веома значајни јер имају баш директну примену (израчунавање *Fourier-Chebyshev*-љевих коефицијената развоја аналитичке функције у ред је од вишеструке важности).

1.5. Захвалност

На крају уводног текста хтео бих, пре свега, да изразим дубоку захвалност свом ментору, др Миодрагу М. Спалевећу, редовном професору Машинског факултета у Београду, на неизмерној и искреној подршци, помоћи и начину на који ме је упућивао пре и за време израде докторске дисертације.

Захвалност, такође, дугујем и осталим члановима Комисије за оцену и одбрану ове дисертације: академику др Градимиру В. Миловановићу, редовном професору Математичког института САНУ у Београду, на добронамерним примедбама и сугестијама општег типа, које су допринеле побољшању квалитета дисертације; др Марији Станић, доценту Природно - математичког факултета у Крагујевцу, на детаљној техничкој коректури целокупног текста и низу корисних примедби и сугестија; др Дејану Бојовићу, ванредном професору Природно - математичког факултета у Крагујевцу, на томе што је детаљно прочитао дисертацију и дао своје мишљење; др Мирославу Пранићу, доценту Природно - математичког факултета у Бањалу-

ци, на писменим и усменим дискусијама и изнетом мишљењу о дисертацији.

Хтео бих да се захвалим и једном од својих учитеља, а такође и колеги и пријатељу, др Ђорђу Кртинићу, доценту Математичког факултета у Београду, пре свега на константној помоћи и сугестијама везаним за употребу пакета L^AT_EX коришћеног за израду ове докторске дисертације, као и на свим врстама подршке коју ми је пружао током читавог средњег и академског школовања.

У Београду,
децембра 2012.

Александар Пејчев

2. ОЦЕНЕ ГРЕШКЕ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛА СА *VERSTEIN-SZEGŐ*-ОВИМ ТЕЖИНСКИМ ФУНКЦИЈАМА

Проучавамо језгро $K_n(z)$ у изразу за остатак $R_n(f)$ *Gauss*-ових квадратурних формула

$$(2.1) \quad \int_{-1}^1 f(t)w(t) dt = G_n[f] + R_n(f), \quad G_n[f] = \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu f(\tau_\nu) \quad (n \in \mathbb{N})$$

за аналитичке функције, на елиптичкој контури са фокусима ∓ 1 и збиром полуоса једнаким $\rho > 1$:

$$(2.2) \quad \mathcal{E}_\rho = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{1}{2} (\xi + \xi^{-1}), 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}, \quad \xi = \rho e^{i\theta},$$

где је w ненегативна и интеграбилна функција на интервалу $(-1, 1)$, које су тачне за све алгебарске полиноме степена највише $2n - 1$. Чворови τ_ν у (2.1) су нуле ортогоналних полинома π_n у односу на тежинску функцију w .

Када $\rho \rightarrow 1$ елипса (2.2) се дегенерише у интервал $[-1, 1]$, док са растом ρ добија све више облик кружнице. Предност елиптичких контура у односу на кружне је у томе што елиптичке захтевају аналитичност функције f у мањој области комплексне равни, посебно кад је вредност ρ блиска 1.

Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни која окружује интервал $[-1, 1]$ и $\mathcal{D} = \text{int } \Gamma$ њена унутрашњост. Ако је интегранд f аналитичка функција у \mathcal{D} и непрекидна на $\overline{\mathcal{D}}$, остатак $R_n(f)$ у (2.1) се може представити у облику контурног интеграла

$$(2.3) \quad R_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K_n(z) f(z) dz.$$

Тзв. *језгро* је дато са

$$K_n(z) \equiv K_n(z, w) = \frac{\varrho_n(z)}{\pi_n(z)}, \quad z \notin [-1, 1],$$

где је

$$\varrho_n(z) \equiv \varrho_{n,w}(z) = \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{z-t} w(t) dt.$$

Модуо језгра је симетричан у односу на реалну осу, тј. $|K_n(\bar{z})| = |K_n(z)|$. Ако је тежинска функција w у (2.1) парна, модуо језгра је симетричан у односу на обе осе, тј., $|K_n(-\bar{z})| = |K_n(z)|$ (видети [17]).

Интегрална репрезентација (2.3) нас доводи до оцене за грешку

$$(2.4) \quad |R_n(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right),$$

где је са $\ell(\Gamma)$ означена дужина контуре Γ . Узмимо да је $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$, где је елипса \mathcal{E}_ρ дата са (2.2). Оцена (2.4) се своди на

$$(2.5) \quad |R_n(f)| \leq \frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right).$$

Извођење адекватних оцена $|R_n(f)|$ на основу (2.5) могуће је само ако су нам доступне одговарајуће оцене за $\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)|$, посебно ако нам је познато $\eta \in \mathcal{E}_\rho$ за које $|K_n|$ достиже свој максимум. У том случају, уместо тражења горњег ограничења за $\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)|$ можемо једноставно покушати да израчунамо $|K_n(\eta, w)|$. У општем случају, ово може да не буде једноставно, али у случају квадратурних формула *Gauss*-овог типа (2.1) постоје ефективни алгоритми за изражавање $K_n(z)$ у било којој тачки z ван $[-1, 1]$ (видети [17]). Штавише, резултат (2.5) је разматран за *Gauss*-ове квадратурне формуле (2.1) у односу на *Chebyshev*-љеве тежинске функције (видети [17], [19])

$$w_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad w_2(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad w_3(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \quad w_4(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}},$$

а касније га је немачки математичар *Schira* проширио на симетричне тежинске функције уз нека ограничења по питању монотоности (да $w(t)\sqrt{1-t^2}$ расте на $(0, 1)$ или да $w(t)/\sqrt{1-t^2}$ опада на $(0, 1)$), укључујући одређене *Gegenbauer*-ове тежинске функције (видети [63]). Уопштење *Lobatto*-вог случаја је спроведено од стране *Hunter*-а и *Nikolova*-а (видети [25]). За различите оцене $R_n(f)$ видети [24].

Schira је доказао [63, теорема 3.2.(б), стр. 302] да језгро K_n *Gauss*-ове квадратурне формуле у односу на симетричну тежинску функцију w на $(-1, 1)$ задовољава следеће: ако $w(t)/\sqrt{1-t^2}$ опада на $(0, 1)$, онда је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = \left| K_n \left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right| \quad \text{за } \rho \geq \rho_n^*,$$

где је $\rho_n^* := 1 + \sqrt{2}$ ако је $n \geq 1$ непарно, док је ако је $n \geq 2$ парно, ρ_n^* највећа нула функције

$$d_n(\rho) := (\rho - \rho^{-1})^2 - 4 - (\rho^2 - \rho^{-2})^2 \left(\frac{(n+1)^2}{(\rho^{n+1} - \rho^{-n-1})^2} + \frac{(n+3)^2}{(\rho^{n+3} - \rho^{-n-3})^2} \right).$$

На основу вредности добијених за парне n у [63], табела 1 на стр. 302, ρ_n^* брзо конвергира здесна ка $1 + \sqrt{2}$ са растом броја n .

У овој тези ће бити описано истраживање спроведено на специјалним класама тежинских функција - *Bernstein-Szegő*-овим тежинским функцијама. Прво ћемо обрадити случај када w представља тзв. „другу” класу *Bernstein-Szegő*-ових тежинских функција

$$(2.6) \quad w_2(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\beta(\beta-2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta-\alpha)t + \alpha^2 + \delta^2}, \quad t \in (-1, 1),$$

при условима $0 < \alpha < \beta$, $\beta \neq 2\alpha$, $|\delta| < \beta - \alpha$, чији именилац је произвољан полином степена тачно 2 који је строго позитиван на интервалу $[-1, 1]$. Касније ће бити размотрене респективно „прва” и „трећа” класа *Bernstein-Szegő*-ових тежинских функција:

$$(2.7) \quad w_1(t) = \frac{(1-t^2)^{-1/2}}{\beta(\beta-2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta-\alpha)t + \alpha^2 + \delta^2}, \quad t \in (-1, 1),$$

$$(2.8) \quad w_3(t) = \frac{\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}{\beta(\beta-2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta-\alpha)t + \alpha^2 + \delta^2}, \quad t \in (-1, 1),$$

при чему параметри α , β и δ задовољавају исте услове као и у случају друге тежине.

Тежинске функције (2.6), (2.7) и (2.8) су интензивно проучаване у [16], где је одређена аналитичка форма одговарајућих ортогоналних полинома. Такође, у поменутом раду изведене су аналитичке формуле за коефицијенте у трочлавној рекурентној релацији, што омогућава нумерички стабилну конструкцију одговарајућих *Gauss*-ових квадратурних формула.

За *Chebyshev*-љеве тежинске функције, које се на неки начин могу сматрати специјалним случајевима *Bernstein-Szegő*-ових тежинских функција ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\delta = 0$), оцене типа (2.4) су разматране од стране *Gautschi*-ја прво за непарне n у [17], а затим за парне n у [19].

Класе тежинских функција

$$\begin{aligned} w_{2\gamma}(t) &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} t^2}, \\ w_{1\gamma}(t) &= \frac{(1-t^2)^{-1/2}}{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} t^2}, \\ w_{3\gamma}(t) &= \frac{\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}}{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2} t^2}, \end{aligned} \quad t \in (-1, 1), \quad \gamma \in (-1, 0),$$

од којих $w_{2\gamma}(t)$ припада класи разматраној у [63] ($w_{2\gamma}(t)/\sqrt{1-t^2}$ опада на $(0,1)$) и које чине поткласу класе тежинских функција (2.6), (2.7), (2.8) које разматрамо, разматране су детаљно у [68], [69], [65] респективно, где су нађени довољни услови за егзистенцију $\rho^* = \rho_n^*$ ($= \rho^*(n, \gamma)$) таквог да за свако $\rho \geq \rho_n^*$ модуо одговарајућег језгра достиже свој максимум у пресеку елипсе са имагинарном или реалном осом. У овим специјалним случајевима добијене су доста мање вредности за $\rho = \rho_n^*$ од оних које је добио *Schira* (осим евентуално кад је γ близу 0 а n парно), посебно за велике n .

Следи разматрање у којем ће, између осталог, у случају много општије класе тежинских функција (2.6), (2.7), (2.8) бити доказана егзистенција $\rho^* = \rho_n^*$ ($= \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta)$) таквог да за свако $\rho \geq \rho_n^*$ модуо одговарајућег језгра достиже свој максимум у пресеку елипсе са неком од координатних оса. Ово нас води ка ефективној оцени за грешку код *Gauss*-ових квадратура. Метод који је овде коришћен, а који се доста разликује од оног који је коришћен у [68], [69], [65], испоставља да су вредности $\rho^* = \rho_n^*$ ($= \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta)$) добијене врло прецизно (видети табеле 2.1, 2.2, 2.3, 2.8, 2.9, 2.10, 2.12, 2.13, 2.14 у тексту који следи).

Коначно, резултати добијени у [63] овде не могу бити коришћени у општем случају ($\delta \neq 0$), с обзиром на то да тежинска функција коју разматрамо није симетрична.

2.1. Оцена грешке *Gauss*-ове квадратурне формуле са другом *Bernstein-Szegő*-овом тежинском функцијом

2.1.1. Максимум модула језгра *Gauss*-ове квадратурне формуле са другом *Bernstein-Szegő*-овом тежинском функцијом

За тежинску функцију (2.6) коју овде разматрамо, одговарајући (монични) ортогонални полином $\pi_n(t)$ степена n је облика (видети [16]):

$$(2.9) \quad \pi_n(t) = \frac{1}{2^n} \left[U_n(t) + \frac{2\delta}{\beta} U_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) U_{n-2}(t) \right], \quad n \geq 2,$$

где U_n представља *Chebyshev*-љев полином друге врсте, дат са

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Користимо смену

$$(2.10) \quad z = \frac{1}{2}(\xi + \xi^{-1}), \quad \xi = \rho e^{i\theta}.$$

Позивајући се на добро познате чињенице (видети [17]) да је

$$U_n(z) = \frac{\xi^{n+1} - \xi^{-(n+1)}}{\xi - \xi^{-1}}$$

и

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(t)}{z-t} \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+1)\theta \sin \theta}{z - \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\xi^{n+1}},$$

директним рачуном добијамо да се за $n \geq 2$ језгро може изразити на следећи начин:

$$(2.11) \quad K_n(z) = \frac{4\pi}{\xi^{n+1}} \cdot \frac{(\beta + 2\delta\xi + (\beta - 2\alpha)\xi^2)(\xi - \xi^{-1})}{\beta(\beta - 2\alpha)(\xi + \xi^{-1})^2 + 4\delta(\beta - \alpha)(\xi + \xi^{-1}) + 4(\alpha^2 + \delta^2)} \\ \times \frac{1}{\beta(\xi^{n+1} - \xi^{-(n+1)}) + 2\delta(\xi^n - \xi^{-n}) + (\beta - 2\alpha)(\xi^{n-1} - \xi^{-(n-1)})}$$

Наиме,

$$\varrho_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{2^n \pi_n(t)}{z-t} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt.$$

Користимо декомпозицију

$$(2.12) \quad \frac{1}{(z-t)(\beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2)} \\ = \frac{A_1}{z-t} + \frac{A_2t + A_3}{\beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2},$$

где је

$$(2.13) \quad A_1 = \frac{1}{\beta(\beta - \alpha)z^2 + 2\delta(\beta - \alpha)z + \alpha^2 + \delta^2}, \\ A_2 = \frac{\beta(\beta - 2\alpha)}{\beta(\beta - 2\alpha)z^2 + 2\delta(\beta - \alpha)z + \alpha^2 + \delta^2}.$$

Множењем (2.12) са $2^n \pi_n(t) \sqrt{1-t^2}$, на основу (2.9), интеграцијом дуж интервала $[-1, 1]$ добијамо

$$\varrho_n(z) = A_1 \int_{-1}^1 \frac{\left[U_n(t) + \frac{2\delta}{\beta} U_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) U_{n-2}(t) \right]}{z-t} \sqrt{1-t^2} dt \\ + 2^n \int_{-1}^1 \pi_n(t) (A_2t + A_3) \frac{\sqrt{1-t^2}}{(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt.$$

Ако је $n \geq 2$, други интеграл у последњој једнакости је једнак нули због ортогоналности, тако да је

$$\rho_n(z) = \frac{\frac{\pi}{\xi^{n+1}} + \frac{2\delta}{\beta} \frac{\pi}{\xi^n} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) \frac{\pi}{\xi^{n-1}}}{\beta(\beta - \alpha) \left(\frac{\xi + \xi^{-1}}{2}\right)^2 + 2\delta(\beta - \alpha) \frac{\xi + \xi^{-1}}{2} + \alpha^2 + \delta^2}$$

и онда се формула (2.11) лако добија. Сличан резултат се добија и у случају $n = 1$ на основу неких резултата из [16].

Од сад па надаље ћемо користити стандардну нотацију (видети нпр. [17])

$$(2.14) \quad a_j = \frac{1}{2}(\rho^j + \rho^{-j}), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Комбинујући (2.11) са идентитетима:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} |\beta + 2\delta\xi + (\beta - 2\alpha)\xi^2| &= [\beta^2 + 4\delta^2\rho^2 + (\beta - 2\alpha)^2\rho^4 \\ &+ 4\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) \cos \theta + \beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \cos 2\theta]^{1/2} = \sqrt{a}, \\ |\xi - \xi^{-1}| &= \sqrt{2} (a_2 - \cos 2\theta)^{1/2} = \sqrt{2c}, \\ |\beta(\beta - 2\alpha)(\xi + \xi^{-1})^2 + 4\delta(\beta - \alpha)(\xi + \xi^{-1}) + 4(\alpha^2 + \delta^2)| &= \\ [2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2(a_4 + \cos 4\theta) + 32\delta^2(\beta - \alpha)^2(a_2 + \cos 2\theta) + (2\beta(\beta - 2\alpha) \\ &+ 4(\alpha^2 + \delta^2))^2 + 4(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2))(\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \cos 2\theta \\ &+ 4\delta(\beta - \alpha)a_1 \cos \theta) + 16\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)(a_3 \cos \theta + a_1 \cos 3\theta)]^{1/2} \\ &= \sqrt{b}, \end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned} &|\beta(\xi^{n+1} - \xi^{-(n+1)}) + 2\delta(\xi^n - \xi^{-n}) + (\beta - 2\alpha)(\xi^{n-1} - \xi^{-(n-1)})| \\ &= [2\beta^2(a_{2n+2} - \cos(2n+2)\theta) + 8\delta^2(a_{2n} - \cos 2n\theta) \\ &+ 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-2} - \cos(2n-2)\theta) \\ &+ 8\beta\delta(a_{2n+1} \cos \theta - a_1 \cos(2n+1)\theta) \\ &+ 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} \cos 2\theta - a_2 \cos 2n\theta) \\ &+ 8\delta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-1} \cos \theta - a_1 \cos(2n-1)\theta)]^{1/2} = \sqrt{d}, \end{aligned}$$

добијамо (за $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) да је

$$(2.16) \quad |K_n(z)|^2 = \frac{32\pi^2}{\rho^{2n+2}} \frac{ac}{bd}.$$

Кад је $\delta \neq 0$, нумерички експерименти показују да постоји $\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta) > 1$ такво да $|K_n(z)|$ достиже свој максимум на реалној оси, и то на њеном негативном делу кад је $\delta > 0$ и на позитивном делу кад је $\delta < 0$, за свако $\rho \geq \rho^*$. Формулисаћемо то у облику следеће теореме.

Теорема 2.1. За *Gauss*-ову квадратурну формулу (2.1), $n \in \mathbb{N}$, са тежинском функцијом (2.6), $0 < \alpha < \beta$, $\beta \neq 2\alpha$, $|\delta| < \beta - \alpha$, постоји $\rho^* \in (1, +\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta)$) такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ модуо језгра $|K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)|$ достиже максимум на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$) ако је $\delta > 0$, односно на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) ако је $\delta < 0$, тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

ако је $\delta > 0$ и

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

ако је $\delta < 0$.

Доказ. Нека је $n > 1$. Заправо, треба показати да постоји ρ^* такво да за свако $\rho > \rho^*$, $\theta \in [0, \pi]$, $\delta > 0$ ($\delta < 0$), при чему α, β, δ испуњавају почетне услове, важи неједнакост:

$$(2.17) \quad \frac{ac}{bd} \leq \frac{AC}{BD}.$$

A, B, C, D су вредности израза a, b, c, d за $\theta = \pi$ ($\theta = 0$).

Претпоставимо прво да је $\delta > 0$ и означимо $A_1 = a - A$, $B_1 = b - B$, $C_1 = c - C$, $D_1 = d - D$. Докажимо да је за довољно велико ρ испуњено

$$\frac{A + A_1}{B + B_1} \leq \frac{A}{B}, \quad \frac{C + C_1}{D + D_1} \leq \frac{C}{D},$$

односно

$$A_1 B \leq A B_1, \quad C_1 D \leq C D_1.$$

Да бисмо ово доказали, довољно је да упоредимо чланове који садрже највећи степен од ρ на левој и десној страни.

За $\theta = \pi$ имамо:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} A &= \beta^2 + 4\delta^2\rho^2 + (\beta - 2\alpha)^2\rho^4 - 4\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) + 2\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2, \\ C &= a_2 - 1, \\ B &= 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2(a_4 + 1) + 32\delta^2(\beta - \alpha)^2(a_2 + 1) \\ &\quad + (2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2))^2 \cdot 4(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2)) \\ &\quad + (\beta(\beta - 2\alpha)a_2 - 4\delta(\beta - \alpha)a_1) - 16\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)(a_3 + a_1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
D = & 2\beta^2(a_{2n+2} - 1) + 8\delta^2(a_{2n} - 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-2} - 1) \\
& + 8\beta\delta(-a_{2n+1} + a_1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} - a_2) \\
& + 8\delta(\beta - 2\alpha)(-a_{2n-1} + a_1).
\end{aligned}$$

Даље,

(2.19)

$$\begin{aligned}
A_1 = & 8\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) \cos^2 \frac{\theta}{2} - 4\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \sin^2 \theta, \\
C_1 = & 2 \sin^2 \theta, \\
B_1 = & -4\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 2\theta - 64\delta^2(\beta - \alpha)^2 \sin^2 \theta + 8(2\beta(\beta - 2\alpha) \\
& + 4(\alpha^2 + \delta^2)) (-\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \sin^2 \theta + 4\delta(\beta - \alpha)a_1 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\
& + 32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha) (a_3 \cos^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \cos^2 \frac{3\theta}{2})
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
D_1 = & 4\beta^2 \sin^2(n+1)\theta + 16\delta^2 \sin^2 n\theta + 4(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2(n-1)\theta \\
& + 16\beta\delta \left(a_{2n+1} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \cos^2 \frac{(2n+1)\theta}{2} \right) \\
& - 8\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} \sin^2 \theta - a_2 \sin^2 n\theta) \\
& + 16\delta(\beta - 2\alpha) \left(a_{2n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \cos^2 \frac{(2n-1)\theta}{2} \right).
\end{aligned}$$

Члан који садржи највећи степен од ρ у A_1B је

$$H_l = (8\delta(\beta - 2\alpha) \cdot 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^7,$$

а у AB_1

$$H_r = ((\beta - 2\alpha)^2 \cdot 32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^7.$$

Неједнакост $H_l < H_r$ је еквивалентна са $\beta(\beta - 2\alpha) < 2(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)$, односно $-(\beta - 2\alpha)^2 < 0$, што очито важи.

Члан са највећим степеном од ρ у C_1D је

$$(2\beta^2 \sin^2 \theta) \cdot \rho^{2n+2} = (8\beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^{2n+2},$$

а у CD_1

$$(4\beta\delta \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^{2n+3}.$$

Јасно је да овај други доминира.

Случај $\delta < 0$, $\theta = 0$ се супституцијом $\delta := -\delta$, $\theta := \theta - \pi$ своди на претходни с обзиром на то да је

$$\left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(\frac{1}{2} (\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}) \right) \right| = \left| K_{n,\alpha,\beta,-\delta} \left(\frac{1}{2} (\rho e^{i(\theta-\pi)} + \rho^{-1} e^{-i(\theta-\pi)}) \right) \right|$$

Доказ следи непосредно. \square

Цео овај проблем, за произвољне α, β, δ , може се свести на случај $\alpha = 1$, јер је

$$\begin{aligned} K_n(z) &= \frac{1}{\pi_n(z)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{z-t} w(t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\pi_n(z)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{z-t} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\beta_1(\beta_1-2)t^2 + 2\delta_1(\beta_1-1)t + 1 + \delta_1^2} dt, \end{aligned}$$

где је $\beta_1 = \beta/\alpha$ и $\delta_1 = \delta/\alpha$. Подслучај $\alpha = 1, \beta > 2, \delta = 0$ је комплетно испитан у раду [68]. Сада, делимично на основу резултата из тог рада, можемо формулисати следећу теорему.

Теорема 2.2. (а) За *Gauss*-ову квадратурну формулу (2.1), $n \in \mathbb{N}$, са тежинском функцијом (2.6), $0 < \alpha < \beta, \beta > 2\alpha, \delta = 0$, постоји $\rho^* \in (1, +\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta)$) такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ модуо језгра $|K_{n,\alpha,\beta,0}(z)|$ достиже свој максимум на позитивном делу имагинарне осе ($\theta = \pi/2$), односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,0}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,0} \left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right|.$$

(б) За *Gauss*-ову квадратурну формулу (2.1), $n \in \mathbb{N}$, са тежинском функцијом (2.6), $0 < \alpha < \beta < 2\alpha, \delta = 0$, постоји $\rho^* \in (1, +\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta)$) такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ модуо језгра $|K_{n,\alpha,\beta,0}(z)|$ достиже свој максимум на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$) ако је $\beta < \frac{4}{3}\alpha$, на позитивном делу имагинарне осе ($\theta = \pi/2$) ако је $\beta > \frac{4}{3}\alpha$, а на симетрали угла између координатних оса ($\theta = \pi/4$ и $\theta = 3\pi/4$) ако је $\beta = \frac{4}{3}\alpha$, тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,0}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,0} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за $\beta < \frac{4}{3}\alpha$,

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,0}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,0} \left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right|$$

за $\beta > \frac{4}{3}\alpha$,

$$\begin{aligned} \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,0}(z)| &= \left| K_{n,\alpha,\beta,0} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\rho + \rho^{-1}) + \frac{i}{2\sqrt{2}}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right| \\ &= \left| K_{n,\alpha,\beta,0} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\rho + \rho^{-1}) + \frac{i}{2\sqrt{2}}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right| \end{aligned}$$

за $\beta = \frac{4}{3}\alpha$.

Доказ. Опет треба показати неједнакост типа (2.17), односно, $\frac{ac}{bd} \leq \frac{AC}{BD}$, при чему a, b, c, d већ имамо израчунате, док су A, B, C, D вредности тих израза за одређене вредности θ . Иста неједнакост може бити написана у облику

$$(2.20) \quad I = CD(A_1B - AB_1) + C_1BD(A + A_1) - AC(B + B_1)D_1 \leq 0,$$

где ознаке A_1, B_1, C_1, D_1 имају исто значење као у ранијем разматрању.

Ако је $\beta < \frac{4}{3}\alpha$, за A, B, C, D имамо:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} A &= \beta^2 + (\beta - 2\alpha)^2\rho^4 + 2\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2, \\ C &= a_2 - 1, \\ B &= 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2(a_4 + 1) + (2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)^2 \\ &\quad + 4(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \end{aligned}$$

и

$$D = 2\beta^2(a_{2n+2} - 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-2} - 1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} - a_2),$$

а за A_1, B_1, C_1, D_1 имамо:

$$(2.22) \quad \begin{aligned} A_1 &= -4\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \sin^2 \theta, \\ C_1 &= 2 \sin^2 \theta, \\ B_1 &= -4\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 2\theta - 8(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D_1 &= 4\beta^2 \sin^2(n+1)\theta + 4(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2(n-1)\theta \\ &\quad - 8\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} \sin^2 \theta - a_2 \sin^2 n\theta). \end{aligned}$$

Коефицијент уз ρ^M (M овде и надаље представља највећи степен од ρ у $I = I(\rho)$) једнак је

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}2\beta^2 \cdot \frac{1}{2}(-16\beta(\beta - 2\alpha) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &\quad + (\beta - 2\alpha)^2 \cdot 8(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2) \cdot 4\beta(\beta - 2\alpha) \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\ &\quad + 8 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}2\beta^2 \cdot \frac{1}{2}(\beta - 2\alpha)^2 \\ &\quad - (\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}(-8\beta(\beta - 2\alpha) \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta) \cdot 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 8\beta^3(\beta - 2\alpha)^3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot (-\beta^2 + 2\beta(\beta - 2\alpha) \\ &\quad + 4\alpha^2 + \beta(\beta - 2\alpha) + (\beta - 2\alpha)^2) \\ &= 8\beta^3(\beta - 2\alpha)^3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot (3\beta^2 + 8\alpha^2 - 10\alpha\beta) \\ &= 8\beta^3(\beta - 2\alpha)^3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot (4\alpha - 3\beta)(2\alpha - \beta) \\ &= 8\beta^3(\beta - 2\alpha)^4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot (3\beta - 4\alpha) < 0 \end{aligned}$$

за $\theta \neq \pi$, одакле закључујемо да ће наш израз бити негативан за довољно велике ρ .

У случају $\beta > \frac{4}{3}\alpha$, имамо:

$$A = \beta^2 + (\beta - 2\alpha)^2 \rho^4 - 2\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2,$$

$$C = a_2 + 1,$$

$$B = 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2(a_4 + 1) + (2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)^2 \\ - 4(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)\beta(\beta - 2\alpha)a_2.$$

Даље је

$$D = 2\beta^2(a_{2n+2} + 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-2} + 1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(-a_{2n} - a_2)$$

за парне n и

$$D = 2\beta^2(a_{2n+2} - 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-2} - 1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(-a_{2n} + a_2)$$

за непарне n . Такође, имамо:

$$A_1 = 4\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \cos^2 \theta,$$

$$C_1 = -2 \cos^2 \theta,$$

$$B_1 = -4\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 2\theta + 8(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \cos^2 \theta$$

и

$$D_1 = -4\beta^2 \cos^2(n+1)\theta - 4(\beta - 2\alpha)^2 \cos^2(n-1)\theta \\ + 8\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} \cos^2 \theta + a_2 \sin^2 n\theta)$$

за парне n , као и

$$D_1 = 4\beta^2 \sin^2(n+1)\theta + 4(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2(n-1)\theta \\ + 8\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} \cos^2 \theta - a_2 \cos^2 n\theta)$$

за непарне n . Лако налазимо да је одговарајући коефицијент уз ρ^M једнак

$$2\beta^3(\beta - 2\alpha)^4 \cos^2 \theta \cdot (4\alpha - 3\beta),$$

дакле, опет негативан.

Када желимо да покажемо да одговарајући модуо језгра достиже свој максимум у $\theta = \pi/4$ (и $\theta = 3\pi/4$), A, B, C су једнаки

$$A = \beta^2 + (\beta - 2\alpha)\rho^4,$$

$$C = a_2,$$

$$B = 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2(a_4 - 1) + (2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)^2,$$

док израз D зависи од остатка који број n даје при деоби са 4. У сваком случају, одговарајући чланови у D који имају утицај на I по питању највећег степена од ρ су увек исти и појављују се у облику

$$2\beta^2 a_{2n+2} + 2(\beta - 2\alpha)^2 a_{2n-2}.$$

Члан a_{2n} се не појављује док a_2 нема никакав утицај, испоставиће се да га нема чак ни a_{2n-2} . Слично као у претходна два случаја, закључујемо да је коефицијент уз ρ^M (овде је $M = 2n + 10$) опет једнак

$$\beta^3(\beta - 2\alpha)^4 \cos 2\theta \cdot (4\alpha - 3\beta),$$

што је једнако 0 када је $4\alpha = 3\beta$. Ово значи да треба да израчунамо коефицијент уз ρ^M , где је M овај пут највећи степен од ρ мањи од $2n + 10$ који се јавља у изразу I . Можемо лако закључити да је $\rho^M = \rho^{2n+8}$ и да је одговарајући коефицијент једнак

$$\begin{aligned} SH &= \frac{1}{2}2\beta^2 \cdot \frac{1}{2}(-(\beta - 2\alpha)^2 4\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cos^2 2\theta) \\ &\quad - \cos 2\theta \cdot 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}2\beta^2 \cdot \frac{1}{2}2\beta(\beta - 2\alpha) \cos 2\theta \\ &\quad - (\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}4\beta(\beta - 2\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cos 2\theta \\ &\quad \times 4(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)\beta(\beta - 2\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cos 2\theta \\ &= (-2\beta^2(\beta - 2\alpha) - 2\beta^3 - 2(\beta - 2\alpha)(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)) \\ &\quad \times \beta^2(\beta - 2\alpha)^3 \cos^2 2\theta. \end{aligned}$$

Његов знак је исти као и знак израза

$$2\beta^2(\beta - 2\alpha) + 2\beta^3 + 2(\beta - 2\alpha)((2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)),$$

који је, с обзиром на то да је $\beta = \frac{4}{3}\alpha$, једнак $-\frac{8}{27}\alpha^3$ и очигледно негативан. \square

2.1.2. Практично разматрање

Са практичне тачке гледишта, битно нам је да ρ^* буде близу својој стварној вредности и да она буде што ближе броју 1. На основу резултата добијених у раду [68], закључујемо да за $\delta = 0$, у подслучају $2\alpha < \beta$, ρ^* неретко јесте близу 1. Нумерички експерименти који су накнадно спроведени показују да је у подслучају $2\alpha > \beta$, ρ^* близу 1 кад је β/α близу 1 или 2, тачније кад је β/α мање од 1.1 или веће од 1.7. Нумерички експерименти су такође показали да је, кад је $\delta \neq 0$, једини глобални случај у којем ρ^* није далеко од 1 - када је $|\delta|/(\beta - \alpha)$ близу 1.

Анализу која се тиче овога спроводимо разматрањем израза I датог у (2.20).

1. Прво ћемо анализирати случај $2\alpha > \beta$, $\delta = 0$ као природни наставак и комплемент случаја разматраног у [68].

(1.a) Прво претпоставимо да је $\beta < \frac{4}{3}\alpha$. Ако означимо $x = \sin^2 \frac{\theta}{2}$, добијамо изразе A_1, B_1, C_1 као полиноме по x :

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot 16\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= -(1 - x) \cdot 16\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 x \\
&= x(1 - x)A'_1, \\
C_1 &= 8 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 8x(1 - x) = x(1 - x)C'_1, \\
(2.23) \quad B_1 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(-64\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \theta \right. \\
&\quad \left. - 32(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
&= x(1 - x) \left\{ -64\beta^2(\beta - 2\alpha)^2(1 - 2x)^2 \right. \\
&\quad \left. - 32(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2) \cdot 4\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \right\} \\
&= x(1 - x)B'_1.
\end{aligned}$$

Користећи неједнакост

$$x^2 + y^2 \geq 2|xy| \geq \pm 2xy,$$

добијамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq -8\beta(2\alpha - \beta) \sin(n + 1)\theta \sin(n - 1)\theta \\
&\quad + 8\beta(2\alpha - \beta)(a_{2n} \sin^2 \theta - a_2 \sin^2 n\theta) \\
&= -8\beta(2\alpha - \beta)(\sin^2 \theta - \sin^2 n\theta) \\
&\quad + 8\beta(2\alpha - \beta)(a_{2n} \sin^2 \theta - a_2 \sin^2 n\theta) \\
&= 8\beta(2\alpha - \beta) \left((a_{2n} - 1) \sin^2 \theta - (a_2 - 1) \sin^2 n\theta \right).
\end{aligned}$$

Користећи добро познате неједнакости

$$\begin{aligned}
(2.24) \quad &\left| \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right| \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \\
&\left| \frac{\cos(n + 1)\theta}{\cos \theta} \right| \leq n + 1, \quad n \text{ парно,}
\end{aligned}$$

добијамо

$$D_1 \geq 8\beta(2\alpha - \beta) \left((a_{2n} - 1) - (a_2 - 1)n^2 \right) \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} (32\beta(2\alpha - \beta)((a_{2n} - 1) - (a_2 - 1)n^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\
&= (1 - x)x (32\beta(2\alpha - \beta)((a_{2n} - 1) - (a_2 - 1)n^2)) \\
&= x(1 - x)D'_1.
\end{aligned}$$

Од интереса нам је да важи неједнакост

$$\begin{aligned}
&CD(A'_1B - AB'_1) + C'_1BD(A + x(1 - x)A'_1) \\
&- AC(B + x(1 - x)B'_1)D'_1 \leq 0.
\end{aligned}$$

Полином са леве стране дате неједнакости је 4. степена по x . Занима нас када тај полином није позитиван на $[0, 1]$.

Најједноставнији начин да покажемо да неки полином није позитиван на коначном интервалу позитивног дела x -осе јесте да покажемо да му ниједан коефицијент није позитиван (ако је последње тачно, наравно, а у случају овог полинома се нумерички лако можемо уверити да то није случај). Ово је много јачи услов од негативности полинома на коначном интервалу. Дакле, било је за очекивати да то не важи у случају нашег полинома. Ако поменути услов важи за неки полином, онда тај полином неће бити позитиван ни за једно $x \geq 0$. То значи да је смисленије да овај проблем покушамо да сведемо на показивање да неки други полином, добијен од полазног одговарајућим трансформацијама, није позитиван на $[0, \infty)$ и да онда покушамо да се уверимо да му ниједан коефицијент није позитиван. Наиме, полином

$$P(x) = \alpha_4x^4 + \alpha_3x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0$$

није позитиван на $[0, 1]$ ако и само ако полином

$$P_1(x) = x^4P(1/x) = \alpha_0x^4 + \alpha_1x^3 + \alpha_2x^2 + \alpha_3x + \alpha_4$$

није позитиван на $[1, \infty)$, а ово важи ако и само ако полином

$$P_2(x) = P_1(x + 1) = \beta_4x^4 + \beta_3x^3 + \beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0$$

није позитиван на $[0, \infty)$. Коефицијенти полинома $P_2(x)$ зависе од $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= \alpha_0, \\
\beta_3 &= 4\alpha_0 + \alpha_1, \\
\beta_2 &= 6\alpha_0 + 3\alpha_1 + \alpha_2, \\
\beta_1 &= 4\alpha_0 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, \\
\beta_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.
\end{aligned}$$

Услов да ниједан од β -коэффицијената не буде позитиван је довољан услов да полином P_2 не буде позитиван на интервалу $[0, \infty)$. С обзиром на то да су коэффицијенти полинома $A_1'(x), B_1'(x), C_1'(x), D_1'(x), D_1''(x)$ полиноми по ρ подељени природним степеном од ρ , такви су α -коэффицијенти, а онда и β -коэффицијенти. Као што се може приметити, у сваком од полинома $A_1'(x), B_1'(x), C_1'(x), D_1'(x), D_1''(x)$ слободан члан садржи ρ степеновано највећим степеном (сви остали коэффицијенти садрже стриктно мање степене од ρ). Зато α_0 садржи стриктно највећи степен од ρ од свих α -коэффицијената ако их третирамо као полиноме по ρ подељене природним степеном од ρ . То ће (после евентуалног множења са 4 или 6) бити сабирак са највећим степеном од ρ и у свим β -коэффицијентима. Анализирамо сабирак са највећим степеном од ρ јер нас занима знак ових израза за довољно велике ρ . Коэффицијент којим је помножен највећи степен од ρ у α_0 ће износити

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\beta^2 \{16\beta(2\alpha - \beta) \cdot \beta^2(2\alpha - \beta)^2 \\ & - (2\alpha - \beta) (32(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2) \cdot \frac{1}{2}\beta(2\alpha - \beta))\} \\ & = 8\beta^3(2\alpha - \beta)^4(3\beta - 4\alpha). \end{aligned}$$

С обзиром на то да под датим условима добијени израз јесте негативан, закључујемо да постоје вредности ρ_i , $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ такве да за свако $\rho > \rho_i$ важи $b_i \leq 0$. Дакле, можемо узети

$$\rho^* = \max\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}.$$

(1.б) Ако је $\beta > \frac{4}{3}\alpha$, после замене $\sin^2 \theta = x$, добијамо

$$A_1 = 4\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2(1 - x) = A_1'(1 - x),$$

$$C_1 = -2(1 - x) = C_1'(1 - x),$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (-16\beta^2(\beta - 2\alpha)^2x + 8(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2)\beta(\beta - 2\alpha)a_2) \\ &\quad \times (1 - x) \\ &= B_1'(1 - x) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} D_1 &\geq -4(n+1)^2\beta^2\cos^2\theta - 4(\beta - 2\alpha)^2(n-1)^2\cos^2\theta \\ &\quad + 8\beta(\beta - 2\alpha) \left(a_{2n}\cos^2\theta + a_2 \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sin^2 2\theta \right) \\ &= (-4(n+1)^2\beta^2 - 4(\beta - 2\alpha)^2(n-1)^2 \\ &\quad + 8\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n} + a_2n^2x))(1 - x) = D_1'(1 - x) \end{aligned}$$

ако је n парно, као и

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq 8\beta(2\alpha - \beta) \sin(n+1)\theta \sin(n-1)\theta \\
&\quad + 8\beta(2\alpha - \beta)(a_2 \cos^2 \theta - a_{2n} \cos^2 n\theta) \\
&= 8\beta(2\alpha - \beta)(\cos^2 \theta - \cos^2 n\theta) \\
&\quad + 8\beta(2\alpha - \beta)(a_2 \cos^2 \theta - a_{2n} \cos^2 n\theta) \\
&= 8\beta(2\alpha - \beta)((a_2 + 1) \cos^2 \theta - (a_{2n} + 1) \cos^2 n\theta) \\
&\geq -8\beta(2\alpha - \beta)(a_{2n} + 1) \cos^2 \theta \\
&= -8\beta(2\alpha - \beta)(a_{2n} + 1)(1 - x) = D_1''(1 - x)
\end{aligned}$$

ако је n непарно.

За парне n поново добијамо да нам одговара да важи

$$CD(A'_1 B - AB'_1) + C'_1 BD(A + (1-x)A'_1) - AC(B + (1-x)B'_1)D'_1 \leq 0,$$

где је израз на левој страни полином трећег степена. За непарне n нам одговара да важи

$$CD(A'_1 B - AB'_1) + C'_1 BD(A + (1-x)A'_1) - AC(B + (1-x)B'_1)D''_1 \leq 0,$$

где је израз на левој страни полином другог степена, тј. квадратни трином. Остатак процедуре је аналоган као у претходном случају. Највећи степен од ρ који се појављује у слободном коефицијенту ових полинома је највећи степен од ρ који се појављује у свим коефицијентима полинома добијеног пресликавањем претходног на интервал $[0, \infty)$ (при чему су одговарајући најстарији коефицијенти истог знака). Коефицијент уз ρ^M у овом случају износи

$$2\beta^3(2\alpha - \beta)^4(4\alpha - 3\beta),$$

дакле, негативан је.

Квадратни трином, наравно, може бити прецизно третиран на друге познате начине, али у овом случају наш метод даје једнако добре резултате.

Као што ће се видети (табела 2.1), нумерички резултати показују да је ρ^* веома близу својој одговарајућој актуелној вредности за све n .

2. Нека је, коначно, $\delta \neq 0$. Као што је већ објашњено, довољно је анализирати случај $\delta > 0$. За $\sin^2 \frac{\theta}{2} = x$, имамо

$$A_1 = \cos^2 \frac{\theta}{2} (8\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) - 16\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

$$\begin{aligned}
&= (1-x) (8\rho\delta(\rho^2(\beta-2\alpha) + \beta) - 16\beta(\beta-2\alpha)\rho^2x) \\
&= (1-x)A'_1, \\
C_1 &= 8\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} = 8x(1-x) = (1-x)C'_1, \\
B_1 &= \cos^2\frac{\theta}{2} \left\{ -64\beta^2(\beta-2\alpha)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\theta - 256\delta^2(\beta-\alpha)^2\sin^2\frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. + 8(2\beta(\beta-2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2))(-4\beta(\beta-2\alpha)a_2\sin^2\frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. + 4\delta(\beta-\alpha)a_1) 32\beta\delta(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha) \left(a_3 + a_1 \left(1 - 4\sin^2\frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \right\} \\
&= (1-x) \left(-64\beta^2(\beta-2\alpha)^2x(1-2x)^2 - 256\delta^2(\beta-\alpha)^2x \right. \\
&\quad \left. + 8(2\beta(\beta-2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2))(-4\beta(\beta-2\alpha)a_2x + 4\delta(\beta-\alpha)a_1) \right. \\
&\quad \left. + 32\beta\delta(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)(a_3 + a_1(1-4x)^2) \right) \\
&= (1-x)B'_1.
\end{aligned}$$

Користећи добро познату неједнакост

$$(2.25) \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq |xy| + |yz| + |zx| \geq \pm xy \pm yz \pm zx,$$

добијамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq -8\beta\delta\sin(n+1)\theta\sin n\theta + 8\delta(2\alpha-\beta)\sin n\theta\sin(n-1)\theta \\
&\quad -4\beta(2\alpha-\beta)\sin(n+1)\theta\sin(n-1)\theta \\
&\quad +16\beta\delta\left(a_{2n+1}\cos^2\frac{\theta}{2} - a_1\cos^2\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) \\
&\quad +8\beta(2\alpha-\beta)(a_{2n}\sin^2\theta - a_2\sin^2n\theta) \\
&\quad -16\delta(2\alpha-\beta)\left(a_{2n-1}\cos^2\frac{\theta}{2} - a_1\cos^2\frac{(2n-1)\theta}{2}\right) \\
&= -8\beta\delta\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) \\
&\quad +8\delta(2\alpha-\beta)\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{(2n-1)\theta}{2}\right) \\
&\quad -4\beta(2\alpha-\beta)(\sin^2\theta - \sin^2n\theta) \\
&\quad +16\beta\delta\left(a_{2n+1}\cos^2\frac{\theta}{2} - a_1\cos^2\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) \\
&\quad +8\beta(2\alpha-\beta)(a_{2n}\sin^2\theta - a_2\sin^2n\theta) \\
&\quad -16\delta(2\alpha-\beta)\left(a_{2n-1}\cos^2\frac{\theta}{2} - a_1\cos^2\frac{(2n-1)\theta}{2}\right) \\
&= 8\beta\delta\left((2a_{2n+1}-1)\cos^2\frac{\theta}{2} - (2a_1-1)\cos^2\frac{(2n+1)\theta}{2}\right) \\
&\quad +4\beta(2\alpha-\beta)\left((2a_{2n}-1)\sin^2\theta - (2a_2-1)\sin^2n\theta\right) \\
&\quad -8\delta(2\alpha-\beta)\left((2a_{2n-1}-1)\cos^2\frac{\theta}{2} - (2a_1-1)\cos^2\frac{(2n-1)\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Користећи (2.24), ако је $2\alpha > \beta$ добијамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq 8\beta\delta((2a_{2n+1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n + 1)^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad + 4\beta(2\alpha - \beta)((2a_{2n} - 1) - (2a_2 - 1)n^2) \sin^2 \theta \\
&\quad - 8\delta(2\alpha - \beta)(2a_{2n-1} - 1) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} [8\beta\delta((2a_{2n+1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n + 1)^2) \\
&\quad + 16\beta(2\alpha - \beta)((2a_{2n} - 1) - (2a_2 - 1)n^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad - 8\delta(2\alpha - \beta)(2a_{2n-1} - 1)] \\
&= (1 - x) [8\beta\delta((2a_{2n+1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n + 1)^2) \\
&\quad + 16\beta(2\alpha - \beta)((2a_{2n} - 1) - (2a_2 - 1)n^2)x \\
&\quad - 8\delta(2\alpha - \beta)(2a_{2n-1} - 1)] = (1 - x)D'_1,
\end{aligned}$$

а ако је $2\alpha < \beta$ добијамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq 8\beta\delta((2a_{2n+1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n + 1)^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad + 4\beta(2\alpha - \beta)(2a_{2n} - 1) \sin^2 \theta \\
&\quad - 8\delta(2\alpha - \beta)((2a_{2n-1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n - 1)^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} (8\beta\delta((2a_{2n+1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n + 1)^2) \\
&\quad + 16\beta(2\alpha - \beta)(2a_{2n} - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad - 8\delta(2\alpha - \beta)((2a_{2n-1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n - 1)^2)) \\
&= (1 - x)[8\beta\delta((2a_{2n+1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n + 1)^2) \\
&\quad + 16\beta(2\alpha - \beta)(2a_{2n} - 1)x \\
&\quad - 8\delta(2\alpha - \beta)((2a_{2n-1} - 1) - (2a_1 - 1)(2n - 1)^2)] = (1 - x)D''_1
\end{aligned}$$

Остаје да се нађе кад важи неједнакост

$$CD(A'_1B - AB'_1) + C'_1BD(A + (1 - x)A'_1) - AC(B + (1 - x)B'_1)D'_1 \leq 0$$

за $2\alpha > \beta$, односно неједнакост

$$CD(A'_1B - AB'_1) + C'_1BD(A + (1 - x)A'_1) - AC(B + (1 - x)B'_1)D''_1 \leq 0$$

за $2\alpha < \beta$.

Оба полинома су 5. степена по x . За коефицијент који множи ρ^M у свим коефицијентима на крају добијеног полинома (примењује се опет иста процедура) добијамо

$$\begin{aligned}
&\beta^4(2\alpha - \beta)^2(-4\delta(2\alpha - \beta)) + \beta^2(2\alpha - \beta)^2 \cdot 8\beta\delta(\beta - \alpha)(2\alpha - \beta) \\
&- (2\alpha - \beta)^4\beta^2 \cdot 4\beta\delta = \delta\beta^3(2\alpha - \beta)^3(-4\beta + 8(\beta - \alpha) \\
&- 4(2\alpha - \beta)) = -8\delta\beta^3(2\alpha - \beta)^4 < 0
\end{aligned}$$

(ако изузмемо евентуално множење позитивном константом приликом преласка са α -коэффицијената на β -коэффицијенте, у складу са претходним ознакама). Наш метод поново даје добре резултате. Табеле 2.2 и 2.3 то потврђују.

2.1.3. Нумерички резултати

Последње разматрање је од практичног значаја. Наиме, на бази истог ми можемо одредити интервал $[\rho^*, +\infty)$ на којем модуо језгра $K_{n,\alpha,\beta,\delta}$ достиже свој максимум на реалној или имагинарној оси. За неке n, α, β, δ , вредности ρ^* су приказане у табелама 2.1, 2.2 и 2.3. Поред сваке вредности ρ^* приказана је и одговарајућа минимална нумерички нађена вредност ρ (названа ρ_{\min}), почев од које модуо језгра актуелно почиње да достиже максимум у $\theta = \pi$ или $\theta = \pi/2$. Као што се може видети, ове две вредности су врло близу једна другој. Приметимо да резултати постају врло задовољавајући са растом броја n . Експерименте смо ограничили на случај $\alpha = 1$ због претходног разматрања.

$(n, \beta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}
(10, 1.99)	1.331, 1.331	(10, 1.7)	1.411, 1.410	(10, 1.05)	1.209, 1.136
(30, 1.99)	1.144, 1.142	(30, 1.7)	1.177, 1.176	(30, 1.05)	1.134, 1.128
(100, 1.99)	1.055, 1.050	(100, 1.7)	1.069, 1.064	(100, 1.05)	1.130, 1.126
(500, 1.99)	1.014, 1.010	(500, 1.7)	1.020, 1.016	(10, 1.04)	1.187, 1.097
(1000, 1.99)	1.008, 1.004	(1000, 1.7)	1.015, 1.015	(30, 1.04)	1.111, 1.103
(9, 1.99)	1.004, 1.001	(9, 1.7)	1.024, 1.001	(100, 1.04)	1.103, 1.098
(99, 1.99)	1.001, 1.001	(49, 1.7)	1.008, 1.001	(10, 1.03)	1.165, 1.066
(10, 1.9)	1.349, 1.349	(10, 1.6)	1.474, 1.473	(30, 1.03)	1.090, 1.078
(30, 1.9)	1.150, 1.149	(30, 1.6)	1.254, 1.254	(100, 1.03)	1.076, 1.069
(100, 1.9)	1.057, 1.052	(100, 1.6)	1.250, 1.250	(10, 1.02)	1.142, 1.041
(500, 1.9)	1.015, 1.011	(9, 1.6)	1.244, 1.204	(30, 1.02)	1.071, 1.053
(1000, 1.9)	1.008, 1.005	(99, 1.6)	1.250, 1.250	(100, 1.02)	1.050, 1.040
(9, 1.9)	1.013, 1.001	(10, 1.5)	1.659, 1.659	(10, 1.01)	1.126, 1.019
(99, 1.9)	1.002, 1.001	(30, 1.5)	1.623, 1.623	(30, 1.01)	1.062, 1.013
(10, 1.8)	1.375, 1.374	(500, 1.5)	1.623, 1.623	(100, 1.01)	1.028, 1.001
(30, 1.8)	1.160, 1.159	(99, 1.5)	1.623, 1.623	(200, 1.01)	1.025, 1.006
(100, 1.8)	1.060, 1.055	(10, 1.1)	1.328, 1.307	(10, 1.005)	1.125, 1.009
(500, 1.8)	1.016, 1.011	(30, 1.1)	1.286, 1.283	(30, 1.005)	1.061, 1.002
(1000, 1.8)	1.009, 1.004	(100, 1.1)	1.285, 1.283	(100, 1.005)	1.027, 1.001
(49, 1.8)	1.004, 1.001	(10, 1.08)	1.276, 1.246	(200, 1.005)	1.016, 1.001
(199, 1.8)	1.016, 1.001	(30, 1.08)	1.219, 1.217	(500, 1.005)	1.013, 1.001

Табела 2.1: Вредности ρ^*, ρ_{\min} за неке $n, \beta/\alpha$ ($1 < \beta/\alpha < 2$), $\delta = 0$

$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}
(10,1.99,0.98)	1.345, 1.017	(30, 1.9, 0.7)	1.670, 1.668	(10, 1.4, 0.35)	1.352, 1.137
(30,1.99,0.98)	1.148, 1.012	(10, 1.8, 0.65)	1.509, 1.473	(30, 1.4, 0.35)	1.163, 1.129
(100,1.99,0.98)	1.057, 1.001	(30, 1.8, 0.65)	1.469, 1.467	(100, 1.4, 0.35)	1.131, 1.127
(200,1.99,0.98)	1.034, 1.006	(10, 1.8, 0.75)	1.361, 1.138	(10, 1.2, 0.1)	1.386, 1.308
(500,1.99,0.98)	1.025, 1.009	(30, 1.8, 0.75)	1.169, 1.130	(30, 1.2, 0.1)	1.287, 1.284
(10,1.9,0.85)	1.365, 1.138	(100, 1.8, 0.75)	1.132, 1.128	(100, 1.2, 0.1)	1.286, 1.284
(30,1.9,0.85)	1.170, 1.130	(10, 1.3, 0.2)	1.392, 1.308	(10, 1.02, 0.01)	1.350, 1.019
(100,1.9,0.85)	1.132, 1.128	(30, 1.3, 0.2)	1.287, 1.285	(30, 1.02, 0.01)	1.158, 1.013
(10,1.9,0.8)	1.413, 1.302	(10, 1.3, 0.25)	1.354, 1.137	(100, 1.02, 0.01)	1.063, 1.001
(30,1.9,0.8)	1.286, 1.283	(30, 1.3, 0.25)	1.161, 1.129	(200, 1.02, 0.01)	1.036, 1.006
(100,1.9,0.8)	1.285, 1.283	(100, 1.3, 0.25)	1.131, 1.127	(500, 1.02, 0.01)	1.025, 1.008
(10,1.8,0.78)	1.344, 1.040	(10, 1.3, 0.28)	1.356, 1.041	(10, 1.1, 0.08)	1.365, 1.041
(30,1.8,0.78)	1.149, 1.053	(30, 1.3, 0.28)	1.154, 1.053	(30, 1.1, 0.08)	1.159, 1.053
(100,1.8,0.78)	1.062, 1.041	(100, 1.3, 0.28)	1.059, 1.040	(100, 1.1, 0.08)	1.061, 1.040
(200,1.8,0.78)	1.050, 1.041	(200, 1.3, 0.28)	1.050, 1.040	(200, 1.1, 0.08)	1.050, 1.040
(10,1.6,0.57)	1.348, 1.065	(10, 1.5, 0.47)	1.351, 1.065	(10, 1.2, 0.18)	1.360, 1.041
(30,1.6,0.57)	1.150, 1.079	(30, 1.5, 0.47)	1.150, 1.078	(100, 1.2, 0.18)	1.156, 1.053
(100,1.6,0.57)	1.077, 1.070	(100, 1.5, 0.47)	1.077, 1.070	(30, 1.2, 0.18)	1.059, 1.040
(200,1.6,0.57)	1.076, 1.070	(200, 1.5, 0.47)	1.076, 1.070	(200, 1.2, 0.18)	1.050, 1.040
(10, 1.8, 0.7)	1.411, 1.303	(10, 1.4, 0.38)	1.354, 1.041	(10, 1.7, 0.5)	1.705, 1.699
(30, 1.8, 0.7)	1.286, 1.284	(30, 1.4, 0.38)	1.152, 1.053	(100, 1.7, 0.5)	1.700, 1.698
(100, 1.7, 0.2)	5.272, 5.270	(100, 1.4, 0.38)	1.060, 1.041	(30, 1.2, 0.15)	1.159, 1.129
(10, 1.9, 0.7)	1.676, 1.669	(200, 1.4, 0.38)	1.050, 1.041	(100, 1.2, 0.15)	1.131, 1.127

Табела 2.2: Вредности ρ^* , ρ_{\min} за неке n , β/α ($1 < \beta/\alpha < 2$), δ/α ($0 < \delta/\alpha < \beta/\alpha - 1$)

Остатак квадратурне формуле се по традицији изражава преко неког од извода вишег реда одговарајуће функције, што је врло неповољно у случају када тај извод није познат, не постоји или је превише компликовано одредити га (и није довољно само одредити га, потребно је контролисати његово понашање).

Размотримо нумеричко рачунање интеграла

$$(2.26) \quad I(f) = \int_{-1}^1 f(t) \frac{\sqrt{1-t^2}}{\beta(\beta-2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta-\alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt$$

са

$$f(t) = \frac{e^{et}}{(a+t)^k(b+t)^\ell(c+t)^m},$$

где је $c \leq b \leq a < -1$; $k \in \mathbb{N}$, $\ell, m \in \mathbb{N}_0$.

Под претпоставком да је функција f аналитичка унутар $\mathcal{E}_{\rho_{\max}}$, из (2.5) добијамо оцену за грешку

$$(2.27) \quad |R_n(f)| \leq \tilde{r}_n(f),$$

$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}
(10, 2.1, 1)	1.422, 1.298	(500, 2.01, 1)	1.025, 1.009	(100, 20, 18.9)	1.137, 1.134
(30, 2.1, 1)	1.284, 1.281	(30, 3.1, 2)	1.270, 1.266	(10, 20, 18)	1.633, 1.581
(100, 2.1, 1)	1.283, 1.281	(100, 3.1, 2)	1.268, 1.266	(30, 20, 18)	1.584, 1.583
(10, 2.7, 1.65)	1.416, 1.136	(10, 17.8, 16.77)	1.497, 1.064	(10, 100, 98.5)	1.513, 1.122
(30, 2.7, 1.65)	1.185, 1.129	(30, 17.8, 16.77)	1.213, 1.066	(30, 100, 98.5)	1.228, 1.152
(100, 2.7, 1.65)	1.131, 1.128	(100, 17.8, 16.77)	1.087, 1.066	(100, 100, 98.5)	1.155, 1.152
(10, 6.1, 5)	1.491, 1.218	(200, 17.8, 16.77)	1.085, 1.066	(10, 100, 95)	1.600, 1.511
(30, 6.1, 5)	1.245, 1.220	(10, 12.8, 11.75)	1.495, 1.082	(30, 100, 95)	1.516, 1.514
(10, 3.4, 2.33)	1.451, 1.195	(30, 12.8, 11.75)	1.213, 1.096	(10, 500, 450)	1.932, 1.929
(30, 3.4, 2.33)	1.211, 1.181	(100, 12.8, 11.75)	1.127, 1.097	(100, 500, 450)	1.930, 1.929
(100, 3.4, 2.33)	1.184, 1.181	(10, 22.8, 21.77)	1.499, 1.023	(10, 500, 490)	1.538, 1.303
(10, 10.06, 9)	1.492, 1.117	(30, 22.8, 21.77)	1.214, 1.050	(100, 500, 490)	1.322, 1.320
(30, 10.06, 9)	1.214, 1.122	(100, 22.8, 21.77)	1.083, 1.051	(10, 500, 498)	1.510, 1.067
(100, 10.06, 9)	1.153, 1.122	(200, 22.8, 21.77)	1.073, 1.051	(30, 500, 498)	1.221, 1.088
(10, 5.8, 4.79)	1.464, 1.014	(10, 22.8, 21.5)	1.519, 1.232	(100, 500, 498)	1.099, 1.092
(30, 5.8, 4.79)	1.194, 1.001	(30, 22.8, 21.5)	1.263, 1.252	(100, 1000, 800)	2.599, 2.598
(100, 5.8, 4.79)	1.072, 1.001	(100, 22.8, 21.5)	1.254, 1.252	(10, 1000, 900)	1.939, 1.936
(200, 5.8, 4.79)	1.041, 1.001	(10, 50, 48.9)	1.506, 1.068	(100, 1000, 900)	1.937, 1.936
(10, 14, 12)	1.749, 1.736	(30, 50, 48.9)	1.219, 1.081	(10, 1000, 998.9)	1.507, 1.001
(30, 14, 12)	1.738, 1.736	(100, 50, 48.9)	1.094, 1.085	(100, 100, 998.9)	1.084, 1.006
(100, 14, 12)	1.738, 1.736	(200, 50, 48.9)	1.090, 1.085	(200, 1000, 998.9)	1.058, 1.006
(10, 2.01, 1)	1.346, 1.017	(30, 10.1, 9)	1.227, 1.181	(10, 20.05, 19)	1.500, 1.067
(30, 2.01, 1)	1.148, 1.012	(100, 10.1, 9)	1.184, 1.181	(30, 20.05, 19)	1.215, 1.080
(100, 2.01, 1)	1.057, 1.001	(10, 20, 18.9)	1.503, 1.116	(100, 20.05, 19)	1.102, 1.082
(200, 2.01, 1)	1.034, 1.006	(30, 20, 18.9)	1.221, 1.133	(100, 20, 15)	2.630, 2.628

Табела 2.3: Вредности ρ^* , ρ_{\min} за неке n , β/α ($\beta/\alpha > 2$), δ/α ($0 < \delta/\alpha < \beta/\alpha - 1$)

где је

$$(2.28) \quad \tilde{r}_n(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left[\frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \right],$$

а ρ_n^* је дато у теорему 2.1 или теорему 2.2. У нашем случају ће бити $|a| = \frac{1}{2}(\rho_{\max} + \rho_{\max}^{-1})$.

Дужина елипсе \mathcal{E}_ρ може бити оцењена са (видети [61], једн. (2.2))

$$(2.29) \quad \ell(\mathcal{E}_\rho) \leq 2\pi a_1 \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{3}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6} \right),$$

где је $a_1 = (\rho + \rho^{-1})/2$.

Имамо (видети [68])

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} \left| \frac{e^{e^z}}{(a+z)^k (b+z)^\ell (c+z)^m} \right| = \frac{e^{e^{a_1}}}{|a+a_1|^k |b+a_1|^\ell |c+a_1|^m},$$

при чему се максимум достиже у $\theta = 0$. Сада, $r_n(f)$ ($\geq \tilde{r}_n(f)$) има облик

$$r_n(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{4\sqrt{2}\pi a_1}{\rho^{n+1}} \sqrt{\frac{AC}{BD}} \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{3}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6} \right) \times \frac{e^{e^{a_1}}}{|a + a_1|^k |b + a_1|^\ell |c + a_1|^m} \right\},$$

где су A, B, C, D дефинисани раније.

Нека је $-\sqrt{2} < a < -1$, $c \leq b \leq a$. Овај услов значи да је функција f аналитичка унутар елиптичке контуре $\mathcal{E}_{\rho_{\max}}$, где је $\rho_{\max} = 1 + \sqrt{2}$. Класичну оцену грешке је у овом случају немогуће спровести, с обзиром на то да је врло компликовано изразити изводе $f^{(2n)}(t)$ за веће вредности n . Али зато можемо спровести оцену (2.27) базирану на резултатима теорема 2.1 и 2.2.

Оцена грешке (2.27) је валидна за интегранде аналитичке у околини интервала интеграције и може се упоредити са другим оценама грешке изведеним за исту класу интегранада. Постоји неколико класичних оцена грешке за *Gauss*-ове квадратурне формуле за аналитичке функције (видети теорему 4 у [78] или теорему 1 у [81]), где је контура Γ елипса \mathcal{E}_ρ дата са (2.2). Такође узимамо у обзир оцену грешке дату у [55], где је контура Γ кружница $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ ($r > 1$). Дакле, оцена грешке $\hat{r}_n(f)$ ($|R_n(f)| \leq \hat{r}_n(f)$) за *Gauss*-ову квадратурну формулу (2.1) у односу на тежинску функцију (2.6), за дати интегранд f , може бити дата са (видети [78], једн. (38))

$$\begin{aligned} \hat{r}_n(f) &= \hat{r}_n^{(\text{Sten})}(f) \\ &= \inf_{1 < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{16\mu_0}{\pi\rho^{2n}} \cdot \frac{e^{e^{a_1}}}{|a + a_1|^k |b + a_1|^\ell |c + a_1|^m} \right\}, \end{aligned}$$

где је $\mu_0 = \pi/(\alpha\beta)$ (видети [16], једн. (2.24),(2.27)), са (видети [81], теорема 1)

$$\hat{r}_n(f) = \hat{r}_n^{(\text{Syd})}(f) = \inf_{1 < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{4\mu_0}{(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}} \cdot \frac{e^{e^{a_1}}}{|a + a_1|^k |b + a_1|^\ell |c + a_1|^m} \right\},$$

или са (видети [55], једн. (3.28))

$$\begin{aligned} \hat{r}_n(f) &= \hat{r}_n^{(\text{Not})}(f) \\ &= \inf_{1 < r < r_{\max}} \left\{ \frac{X}{Y} \cdot \frac{e^{e^r}}{|a + r|^k |b + r|^\ell |c + r|^m} \right\}, \end{aligned}$$

где је $X = 8\pi\tau^{2n+2} r\sqrt{r^2 - 1}$,

$$\begin{aligned}
Y &= [\beta(1 - \tau^{2n+2}) + 2\delta\tau(1 - \tau^{2n}) + (\beta - 2\alpha)\tau^2(1 - \tau^{2n-2})] \\
&\quad \times [(\beta - 2\alpha)\tau^2 + 2\delta\tau + \beta], \\
\tau &= r - \sqrt{r^2 - 1}, \\
r_{\max} &= |a|.
\end{aligned}$$

Посматрајмо интегранд f у специјалном случају $k = 1, \ell = 5, m = 10$ и

$$a = -1.40833333333333, \quad b = -1.89285714285714, \quad c = -2.40869565217391,$$

што значи $\rho_{\max} = 2.4$. Рачунали смо $\hat{r}_n^{(\text{Sten})}(f), \hat{r}_n^{(\text{Syd})}(f), \hat{r}_n^{(\text{Not})}(f), r_n(f)$ за одговарајући интеграл $I(f)$ дат са (2.26).

β	$\hat{r}_{35}^{(\text{Sten})}(f)$	$\hat{r}_{35}^{(\text{Syd})}(f)$	$\hat{r}_{35}^{(\text{Not})}(f)$	$r_{35}(f)$
1.02	1.10(-20)	1.05(-20)	5.99(-21)	5.12(-21)
1.03	1.09(-20)	1.04(-20)	5.82(-21)	4.98(-21)
1.05	1.07(-20)	1.02(-20)	5.52(-21)	4.72(-21)
1.08	1.04(-20)	9.94(-21)	5.10(-21)	4.36(-21)
1.2	9.33(-21)	8.95(-21)	3.92(-21)	3.26(-21)
1.5	7.46(-21)	7.16(-21)	2.14(-21)	2.07(-21)
1.7	6.59(-21)	6.32(-21)	1.57(-21)	1.70(-21)
1.8	6.22(-21)	5.96(-21)	1.37(-21)	1.56(-21)
1.9	5.89(-21)	5.65(-21)	1.20(-21)	1.42(-21)

Табела 2.4: Вредности $\hat{r}_{35}^{(\text{Sten})}(f), \hat{r}_{35}^{(\text{Syd})}(f), \hat{r}_{35}^{(\text{Not})}(f), r_{35}(f)$ за $\alpha = 1$ и неке β ($0 < \alpha < \beta, 2\alpha > \beta$), $\delta = 0$

β, δ	$\hat{r}_{15}^{(\text{Sten})}(f)$	$\hat{r}_{15}^{(\text{Syd})}(f)$	$\hat{r}_{15}^{(\text{Not})}(f)$	$r_{15}(f)$
1.1, 0.05	3.28(-6)	3.25(-6)	1.47(-6)	1.51(-6)
1.3, 0.2	2.78(-6)	2.75(-6)	7.60(-7)	1.20(-6)
1.4, 0.38	2.58(-6)	2.55(-6)	5.17(-7)	1.31(-6)
1.9, 0.85	1.90(-6)	1.88(-6)	1.93(-7)	9.27(-7)
1.6, 0.5	2.26(-6)	2.23(-6)	3.49(-7)	1.01(-6)
2.01, 1	1.80(-7)	1.78(-7)	1.59(-7)	9.33(-7)
2.1, 1	1.80(-6)	1.78(-6)	1.48(-7)	7.74(-7)
3.1, 2	1.17(-6)	1.15(-6)	5.12(-8)	4.98(-7)
9, 7	4.01(-7)	3.97(-7)	4.79(-9)	6.80(-8)

Табела 2.5: Вредности $\hat{r}_{15}^{(\text{Sten})}(f), \hat{r}_{15}^{(\text{Syd})}(f), \hat{r}_{15}^{(\text{Not})}(f), r_{15}(f)$ за $\alpha = 1$ и неке β, δ ($0 < \alpha < \beta, 0 < \delta < \beta - \alpha$)

β, δ	$\hat{r}_{35}^{(\text{Sten})}(f)$	$\hat{r}_{35}^{(\text{Syd})}(f)$	$\hat{r}_{35}^{(\text{Not})}(f)$	$r_{35}(f)$
1.1, 0.05	1.03(-20)	9.87(-21)	4.43(-21)	4.54(-21)
1.3, 0.2	8.70(-21)	8.35(-21)	2.36(-21)	3.63(-21)
1.4, 0.38	8.07(-21)	7.75(-21)	1.63(-21)	3.88(-21)
1.9, 0.85	5.95(-21)	5.71(-21)	6.27(-22)	2.71(-21)
1.6, 0.5	7.07(-21)	6.78(-21)	1.11(-21)	3.00(-21)
2.01, 1	5.62(-21)	5.40(-21)	5.19(-22)	2.70(-21)
2.1, 1	5.62(-21)	5.4(-21)	4.82(-22)	2.27(-21)
3.1, 2	3.65(-21)	3.50(-21)	1.70(-22)	1.43(-21)
9, 7	1.26(-21)	1.21(-21)	1.61(-23)	1.96(-22)

Табела 2.6: Вредности $\hat{r}_{35}^{(\text{Sten})}(f)$, $\hat{r}_{35}^{(\text{Syd})}(f)$, $\hat{r}_{35}^{(\text{Not})}(f)$, $r_{35}(f)$ за $\alpha = 1$ и неке β, δ ($0 < \alpha < \beta$, $0 < \delta < \beta - \alpha$)

β, δ	$\hat{r}_9^{(\text{Sten})}(\bar{f})$	$\hat{r}_9^{(\text{Syd})}(\bar{f})$	$\hat{r}_9^{(\text{Not})}(\bar{f})$	$r_9(\bar{f})$
1.1, 0.05	8.70(-10)	7.08(-10)	1.18(-9)	3.29(-10)
1.3, 0.2	7.36(-10)	6.00(-10)	7.62(-10)	2.52(-10)
1.4, 0.38	6.83(-10)	5.56(-10)	5.99(-10)	2.37(-10)
1.9, 0.85	5.04(-10)	4.10(-10)	2.81(-10)	1.45(-10)
1.6, 0.5	5.98(-10)	4.87(-10)	1.40(-10)	1.85(-10)
2.01, 1	4.76(-10)	3.88(-10)	2.43(-10)	1.35(-10)
2.1, 1	4.56(-10)	3.71(-10)	2.25(-10)	1.21(-10)
3.1, 2	3.08(-10)	2.51(-10)	9.13(-11)	6.34(-11)
9, 7	1.06(-10)	8.64(-11)	9.65(-12)	8.25(-12)

Табела 2.7: Вредности $\hat{r}_9^{(\text{Sten})}(\bar{f})$, $\hat{r}_9^{(\text{Syd})}(\bar{f})$, $\hat{r}_9^{(\text{Not})}(\bar{f})$, $r_9(\bar{f})$ за $\alpha = 1$ и неке β, δ ($0 < \alpha < \beta$, $0 < \delta < \beta - \alpha$)

Резултати показују ефикасност оцене (2.27). За $\alpha = 1$ и неке вредности β, δ добијени резултати су приказани у табелама 2.4, 2.5, 2.6 (бројеви у заградама означавају децималне експоненте).

Коначно, размотримо нумеричко израчунавање интеграла (2.26) када је

$$f(t) = \bar{f}(t) = e^{\cos t}.$$

Функција $\bar{f}(z) = e^{\cos z}$ је цела и лако се види да је

$$\max_{z \in C_r} |e^{\cos z}| = e^{\cosh(r)} \quad \text{и} \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |e^{\cos z}| = e^{\cosh(b_1)}, \quad b_1 = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}).$$

За $\alpha = 1$ и одређене вредности β, δ , добијене вредности $\hat{r}_9^{(\text{Sten})}(\bar{f})$, $\hat{r}_9^{(\text{Syd})}(\bar{f})$, $\hat{r}_9^{(\text{Not})}(\bar{f})$, $r_9(\bar{f})$ су приказане у табели 2.7.

2.2. Оцена грешке *Gauss*-ове квадратурне формуле са првом *Bernstein-Szegő*-овом тежинском функцијом

2.2.1. Максимум модула језгра *Gauss*-ове квадратурне формуле са првом *Bernstein-Szegő*-овом тежинском функцијом

За тежинску функцију (2.7), одговарајући (монични) ортогонални полином $\pi_n(t)$ степена n је облика (видети [16]):

$$(2.30) \quad \pi_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \left[T_n(t) + \frac{2\delta}{\beta} T_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) T_{n-2}(t) \right], \quad n \geq 2,$$

где је са T_n означен *Chebyshev*-љев полином прве врсте, дат са

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Уводећи поново смену (2.10), због (видети [17])

$$T_n(z) = \frac{1}{2}(\xi^n + \xi^{-n})$$

и

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{z-t} (1-t^2)^{-1/2} dt = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{z - \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi}{\xi^n(\xi - \xi^{-1})},$$

директним рачуном добијамо да за $n \geq 2$ језгро има следећи облик:

(2.31)

$$K_n(z) = \frac{1}{\beta(\xi^n + \xi^{-n}) + 2\delta(\xi^{n-1} + \xi^{-(n-1)}) + (\beta - 2\alpha)(\xi^{n-2} + \xi^{-(n-2)})} \\ \times \frac{16\pi(\beta + 2\delta\xi + (\beta - 2\alpha)\xi^2)}{(\xi^{n+1} - \xi^{n-1})(\beta(\beta - 2\alpha)(\xi + \xi^{-1})^2 + 4\delta(\beta - \alpha)(\xi + \xi^{-1}) + 4(\alpha^2 + \delta^2))}$$

Заиста,

$$\varrho_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{2^{n-1}\pi_n(t)}{z-t} \frac{(1-t^2)^{-1/2}}{\beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt.$$

Множећи разлагање (2.12) са $2^{n-1}\pi_n(t)(1-t^2)^{-1/2}$ (где су коефицијенти A_1 и A_2 дати са (2.13)), користећи (2.30), интеграцијом на $[-1, 1]$ добијамо

$$\varrho_n(z) = A_1 \int_{-1}^1 \frac{\left[T_n(t) + \frac{2\delta}{\beta} T_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) T_{n-2}(t) \right]}{z-t} (1-t^2)^{-1/2} dt \\ + 2^{n-1} \int_{-1}^1 \pi_n(t)(A_2 t + A_3) \frac{(1-t^2)^{-1/2}}{(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt.$$

Други интеграл у последњој једнакости је једнак нули за $n \geq 2$, одакле се формула (2.31) лако изводи.

Ако је $n = 1$, на основу резултата из [16] добијамо

$$\begin{aligned}
\varrho_1(z) &= \int_{-1}^1 \frac{t + \frac{\delta}{\beta - \alpha}}{z - t} \frac{(1 - t^2)^{-1/2}}{\beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt \\
&= A_1 \int_{-1}^1 \frac{t + \frac{\delta}{\beta - \alpha}}{z - t} (1 - t^2)^{-1/2} dt \\
&\quad + \int_{-1}^1 \left\{ \left(t + \frac{\delta}{\beta - \alpha} \right) (A_2 t + A_3) \right. \\
&\quad \quad \left. \times \frac{(1 - t^2)^{-1/2}}{(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} \right\} dt \\
&= A_1 \left(\frac{2\pi}{\xi(\xi - \xi^{-1})} + \frac{\delta}{\beta - \alpha} \cdot \frac{2\pi}{(\xi - \xi^{-1})} \right) \\
&\quad + \int_{-1}^1 \left\{ \left(t + \frac{\delta}{\beta - \alpha} \right) \left(A_2 t + \frac{A_2 \delta}{\beta - \alpha} + A_3 - \frac{A_2 \delta}{\beta - \alpha} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. \times \frac{(1 - t^2)^{-1/2}}{(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} \right\} dt \\
&= A_1 \frac{2\pi(\beta - \alpha + \delta\xi)}{(\beta - \alpha)\xi(\xi - \xi^{-1})} \\
&\quad + A_2 \int_{-1}^1 \left(t + \frac{\delta}{\beta - \alpha} \right)^2 \frac{(1 - t^2)^{-1/2}}{(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt \\
&= A_1 \frac{2\pi(\beta - \alpha + \delta\xi)}{(\beta - \alpha)\xi(\xi - \xi^{-1})} + A_2 \frac{\pi}{\beta(\beta - \alpha)}
\end{aligned}$$

и коначно

$$\begin{aligned}
K_1(z) &= \frac{8\pi(\beta + 2\delta\xi + (\beta - 2\alpha)\xi^2)}{\xi(\xi - \xi^{-1})((\beta - \alpha)(\xi + \xi^{-1}) + 2\delta)} \\
&\quad \times \frac{1}{[\beta(\beta - 2\alpha)(\xi + \xi^{-1})^2 + 4\delta(\beta - \alpha)(\xi + \xi^{-1}) + 4(\alpha^2 + \delta^2)]}.
\end{aligned}$$

Користећи (2.31), добијамо (за $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)

$$(2.32) \quad |K_n(z)|^2 = \frac{128\pi^2}{\rho^2} \frac{a}{bcd},$$

где су a, b, c дати са (2.15) и

(2.33)

$$\begin{aligned}
d &= \left| \beta(\xi^n + \xi^{-n}) + 2\delta(\xi^{n-1} + \xi^{-(n-1)}) + (\beta - 2\alpha)(\xi^{n-2} + \xi^{-(n-2)}) \right|^2 \\
&= 2\beta^2(a_{2n} + \cos 2n\theta) + 8\delta^2(a_{2n-2} + \cos(2n-2)\theta) \\
&\quad + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-4} + \cos(2n-4)\theta) + 8\beta\delta(a_{2n-1} \cos \theta \\
&\quad + a_1 \cos(2n-1)\theta) \\
&\quad + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-2} \cos 2\theta + a_2 \cos(2n-2)\theta) \\
&\quad + 8\delta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-3} \cos \theta + a_1 \cos(2n-3)\theta),
\end{aligned}$$

док за $n = 1$ добијамо

$$(2.34) \quad |K_1(z)|^2 = \frac{32\pi^2}{\rho^2} \frac{a}{bcd'},$$

где је

$$\begin{aligned}
d' &= \left| (\beta - \alpha)(\xi + \xi^{-1}) + 2\delta \right|^2 \\
&= 2(\beta - \alpha)^2(a_2 + \cos 2\theta) + 8\delta(\beta - \alpha)a_1 \cos \theta + 4\delta^2.
\end{aligned}$$

Када је $\delta \neq 0$, нумерички експерименти су показали да постоји $\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta) > 1$ такво да $|K_n(z)|$ своју максималну вредност достиже на реалној оси, тачније на негативном делу реалне осе за $\delta > 0$ и на позитивном делу реалне осе за $\delta < 0$, за свако $\rho \geq \rho^*$. Доказаћемо следећу теорему.

Теорема 2.3. За *Gauss*-ову квадратурну формулу (2.1), $n \in \mathbb{N}$, са тежинском функцијом (2.7), $0 < \alpha < \beta$, $\beta \neq 2\alpha$, $0 < |\delta| < \beta - \alpha$, постоји $\rho^* \in (1, +\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta)$) такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ модуо језгра $|K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)|$ достиже своју максималну вредност на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$) ако је $\delta > 0$ и на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) ако је $\delta < 0$, односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за $\delta > 0$ и

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за $\delta < 0$.

Доказ. Ако је $n > 1$, треба показати да постоји довољно велико ρ^* такво да за свако $\rho > \rho^*$, $\theta \in [0, \pi]$, $\delta > 0$ ($\delta < 0$), где α, β, δ задовољавају *Bernstein-Szegö*-ове услове, важи

$$(2.35) \quad \frac{a}{bcd} \leq \frac{A}{BCD},$$

где су A, B, C, D вредности израза a, b, c, d за $\theta = \pi$ ($\theta = 0$).

Претпоставимо прво да је $\delta > 0$. Уведимо поново ознаке $A_1 = a - A$, $B_1 = b - B$, $C_1 = c - C$, $D_1 = d - D$. Већ смо доказали да за довољно велико ρ важи

$$\frac{A + A_1}{B + B_1} \leq \frac{A}{B}.$$

Доказаћемо да важи и

$$\frac{1}{(C + C_1)(D + D_1)} \leq \frac{1}{CD},$$

тј.

$$C_1D + CD_1 + C_1D_1 \geq 0.$$

За $\theta = \pi$ A, B, C су нам дати са (2.18), док је

$$\begin{aligned} D = & 2\beta^2(a_{2n} + 1) + 8\delta^2(a_{2n-2} + 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-4} + 1) \\ & + \beta\delta(-a_{2n-1} - a_1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-2} + a_2) \\ & + 8\delta(\beta - 2\alpha)(-a_{2n-3} - a_1). \end{aligned}$$

Даље,

$$\begin{aligned} D_1 = & -4\beta^2 \sin^2 n\theta - 16\delta^2 \sin^2(n-1)\theta - 4(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2(n-2)\theta \\ & + 16\beta\delta \left(a_{2n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \cos^2 \frac{(2n-1)\theta}{2} \right) \\ & - 8\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-2} \sin^2 \theta + a_2 \sin^2(n-1)\theta) \\ & + 16\delta(\beta - 2\alpha) \left(a_{2n-3} \cos^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \cos^2 \frac{(2n-3)\theta}{2} \right), \end{aligned}$$

а A_1, B_1, C_1 су дати са (2.19). Члан са највећим степеном од ρ у C_1D је једнак $(2\beta^2 \sin^2 \theta) \cdot \rho^{2n}$, у CD_1 је једнак $(4\beta\delta \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^{2n+1}$, а у C_1D_1 је једнак $(16\beta\delta \sin^2 \theta \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^{2n-1}$, тако да је члан са највећим степеном од ρ у $C_1D + CD_1 + C_1D_1$ једнак $(4\beta\delta \cos^2 \frac{\theta}{2}) \cdot \rho^{2n+1}$ и очигледно позитиван.

Случај $\delta < 0$, $\theta = 0$, се своди на претходни уз помоћ супституције $\delta := -\delta$, $\theta := \theta - \pi$, с обзиром на то да важи

$$\left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(\frac{1}{2} (\rho e^{i\theta} + \rho^{-1} e^{-i\theta}) \right) \right| = \left| K_{n,\alpha,\beta,-\delta} \left(\frac{1}{2} (\rho e^{i(\theta-\pi)} + \rho^{-1} e^{-i(\theta-\pi)}) \right) \right|$$

Овим је део доказа за $n > 1$ комплетиран. Одговарајући део доказа који се тиче подслучаја $n = 1$ ће бити изостављен с обзиром на то да нема практичну важност. \square

На исти начин као и у случају друге тежине уверавамо се да се дати проблем за произвољне α, β, δ може свести на случај $1, \beta_1, \delta_1$ за $\beta_1 = \beta/\alpha$ и $\delta_1 = \delta/\alpha$.

Сада, на основу резултата из рада Спалевића, Пранића и Пејчева [68] можемо формулисати следећу теорему.

Теорема 2.4. За *Gauss*-ову квадратурну формулу (2.1), $n \in \mathbb{N}$, са тежинском функцијом (2.7), $0 < \alpha < \beta$, $\beta > 2\alpha$, $\delta = 0$, постоји $\rho^* \in (1, +\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta)$) такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ модуо језгра $|K_{n, \alpha, \beta, 0}(z)|$ свој максимум достиже:

а) на реалној оси ($\theta = 0$), односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n, \alpha, \beta, 0}(z)| = \left| K_{n, \alpha, \beta, 0} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|,$$

ако је

- 1) $\beta < 3\alpha$, $n = 2$,
- 2) $\beta < 4\alpha$, $n \geq 3$,
- 3) $\beta = 4\alpha$, $n \geq 5$;

б) на имагинарној оси ($\theta = \pi/2$), односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n, \alpha, \beta, 0}(z)| = \left| K_{n, \alpha, \beta, 0} \left(\frac{i}{2}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right|,$$

ако је

- 1) $\beta > 2\alpha$, $n = 1$,
- 2) $\beta > 3\alpha$, $n = 2$,
- 3) $\beta > 4\alpha$, $n \geq 3$,
- 4) $\beta = 4\alpha$, $n = 3, 4$;

в) и на правама $y = \pm x$ ($\theta = \pi/4$ и $\theta = 3\pi/4$), односно

$$\begin{aligned} \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n, \alpha, \beta, 0}(z)| &= \left| K_{n, \alpha, \beta, 0} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(\rho + \rho^{-1}) + \frac{i}{2\sqrt{2}}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right| \\ &= \left| K_{n, \alpha, \beta, 0} \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\rho + \rho^{-1}) + \frac{i}{2\sqrt{2}}(\rho - \rho^{-1}) \right) \right|, \end{aligned}$$

ако је $\beta = 3\alpha$, $n = 2$.

У случају $\beta < 2\alpha$, $\delta = 0$ такође можемо формулисати одговарајуће тврђење. Наиме, важи следећа теорема.

Теорема 2.5. За Gauss-ову квадратурну формулу (2.1), $n \in \mathbb{N}$, са тежинском функцијом (2.7), $0 < \alpha < \beta < 2\alpha$, $\delta = 0$, постоји $\rho^* \in (1, +\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta, 0)$) такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ модуо језгра $|K_{n,\alpha,\beta,0}(z)|$ своју максималну вредност достиже на негативном делу реалне осе ($\theta = \pi$), односно

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,0}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,0} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|.$$

Доказ. Доказ се односи на глобални случај $n > 1$. Поново треба доказати неједнакост облика

$$\frac{a}{bcd} \leq \frac{A}{BCD},$$

где a, b, c, d већ имамо израчунатим а A, B, C, D су њихове вредности за $\theta = \pi$.

Као што ће се испоставити, неједнакости

$$\frac{A + A_1}{B + B_1} \leq \frac{A}{B}, \quad \frac{1}{(C + C_1)(D + D_1)} \leq \frac{1}{CD},$$

односно

$$A_1 B \leq AB_1, \quad C_1 D + CD_1 + C_1 D_1 \geq 0,$$

кад је ρ довољно велико ће поново важити за A, B, C дате са (2.21),

$$D = 2\beta^2(a_{2n} + 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-4} + 1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-2} + a_2)$$

и $A_1 = a - A$, $B_1 = B - b$, $C_1 = c - C$ дате са (2.22), док је

$$\begin{aligned} D_1 = & -4\beta^2 \sin^2 n\theta - 4(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2(n - 2)\theta \\ & -8\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-2} \sin^2 \theta + a_2 \sin^2(n - 1)\theta). \end{aligned}$$

Члан са највећим степеном од ρ у $A_1 B$ је

$$H_l = (4\beta^3(2\alpha - \beta)^3 \sin^2 \theta) \cdot \rho^6,$$

а у AB_1

$$H_r = (8 [\beta(\beta - 2\alpha) + 2\alpha^2] \beta(2\alpha - \beta)^3 \sin^2 \theta) \cdot \rho^6.$$

Неједнакост $H_l < H_r$ је еквивалентна са $\beta^2 < 2(\beta(\beta - 2\alpha) + 2\alpha^2)$, односно са $\beta^2 < \beta^2 + (2\alpha - \beta)^2$, што јесте тачно.

Члан са највећим степеном од ρ у $C_1 D$ је једнак $(2\beta^2 \sin^2 \theta) \cdot \rho^{2n}$, у CD_1 је једнак $(2\beta(2\alpha - \beta) \sin^2 \theta) \cdot \rho^{2n}$, док је највећи степен од ρ у $C_1 D_1$ нижи од $2n$, тако да је члан са највећим степеном од ρ у $C_1 D + CD_1 + C_1 D_1$ једнак $(4\alpha\beta \sin^2 \theta) \cdot \rho^{2n}$ и очигледно позитиван. Овим је доказ комплетиран. \square

2.2.2. Практично разматрање

Најбитније је да ρ^* буде близу своје стварне вредности и да та вредност буде близу 1. На основу резултата добијених у раду [69], изводимо закључак да за $\delta = 0$, ако је $2\alpha < \beta$, ρ^* може бити близу 1. Када је $\delta = 0$ и $2\alpha > \beta$, нумерички експерименти показују да је ρ^* увек близу 1. Нумерички експерименти су такође потврдили да је за $\delta \neq 0$, ако је $2\alpha > \beta$, ρ^* увек 1, а ако је $2\alpha < \beta$, једини глобални случај кад ρ^* није далеко од 1 јесте кад је $|\delta|/(\beta - \alpha)$ близу 1.

1. Прво разматрамо случај $\delta = 0$, $2\alpha > \beta$. Ако означимо $\sin^2 \theta = x$, имамо

$$\begin{aligned} A_1 &= -4\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 x, \\ C_1 &= 2x, \\ B_1 &= -4\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot 4x(1 - x) - 8 [2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2] \\ &\quad \times \beta(\beta - 2\alpha)a_2 x. \end{aligned}$$

Користећи прву од неједнакости (2.24) и чињеницу да је $\sin^2(n-1)\theta \geq 0$, добијамо

$$\begin{aligned} D_1 &\geq -4\beta^2 n^2 \sin^2 \theta - 4(\beta - 2\alpha)^2 (n-2)^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + 8\beta(2\alpha - \beta)a_{2n-2} \sin^2 \theta \\ &= -4\beta^2 n^2 x - 4(\beta - 2\alpha)^2 (n-2)^2 x + 8\beta(2\alpha - \beta)a_{2n-2} x. \end{aligned}$$

Даље је

$$\begin{aligned} AB_1 - A_1 B &= x (-4\beta(2\alpha - \beta)\rho^2 B - 16\beta^2(2\alpha - \beta)^2 A(1 - x) \\ &\quad + 8 [2\beta(\beta - 2\alpha) + 4\alpha^2] \beta(2\alpha - \beta)a_2 A) = x f(x). \end{aligned}$$

Овај израз је ненегативан на $[0, 1]$ ако и само ако је израз у великим заградама ненегативан на истом интервалу. Тај израз је линеарна функција по x са позитивним коефицијентом правца, тј.

$$f(x) = kx + n,$$

где је $k = 16\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 A \geq 0$. Дакле, $f(x) \geq 0$ за $x \in [0, 1]$ ако и само ако важи $f(0) \geq 0$. Израз за $f(0)$ се може представити у облику

$$\frac{4\beta(2\alpha - \beta)(2\alpha\rho^2 - \beta - \beta\rho^2)^4}{\rho^2},$$

што је очигледно позитивно.

Даље,

$$C_1D_1 + CD_1 + C_1D \geq x \left[\{-4\beta^2n^2 - 4(\beta - 2\alpha)^2(n - 2)^2 + 8\beta(2\alpha - \beta)a_{2n-2}\} (a_2 + 2x - 1) + 2D \right] = xg(x).$$

Овај израз је ненегативан на $[0, 1]$ ако и само ако је $g(x)$ ненегативно на истом интервалу. Како је $g(x)$ линеарна функција, она је позитивна за $x \in [0, 1]$ ако и само ако је $g(0) \geq 0$ и $g(1) \geq 0$. Највећи степен од ρ (ρ^{2n}) је у оба израза помножен позитивним коефицијентом $2\beta(2\alpha - \beta) + 2\beta^2$, дакле, постојаће ρ_0 и ρ_1 такви да је $g(0) \geq 0$ за $\rho > \rho_0$ и $g(1) \geq 0$ за $\rho > \rho_1$. Као што ће се испоставити, понашање вредности $\rho^* = \max(\rho_0, \rho_1)$ је веома задовољавајуће са практичне тачке гледишта.

2. Нека је сада $\delta \neq 0$. Као што је већ раније објашњено, довољно је анализирати само случај $\delta > 0$.

Неједнакост (2.35) може бити дата у облику (2.36)

$$I = I(\rho) = A(B + B_1)(C_1D + CD_1 + C_1D_1) + CD(AB_1 - A_1B) \geq 0.$$

У општем случају третираћемо израз I , али ћемо у појединим случајевима бити у могућности да одређене кораке спроведемо на мање компликован начин.

Ако означимо $\sin^2(\theta/2) = x$, имамо

$$\begin{aligned} A_1 &= A'_1(1 - x), \\ B_1 &= B'_1(1 - x), \\ C_1 &= C'_1(1 - x), \end{aligned}$$

где су A'_1, B'_1, C'_1 дати са (2.23).

- (2.a) Нека је $2\alpha > \beta$. Прво ћемо комплетно теоријски доказати следеће тврђење.

Лема 2.6. Део $\frac{a}{b}$ израза за модуо језгра (2.32) (у већ уведеној нотацији) достиже свој максимум у $\theta = \pi$ за свако $\rho > 1$.

Доказ. Треба доказати да је за свако $\rho > 1$ вредност израза $A_1B - AB_1$ увек непозитивна за $\theta \in [0, \pi]$, тј. да је полином $A'_1B - AB'_1$ увек непозитиван на интервалу $[0, 1]$, где су A'_1 и B'_1 претходно уведени полиноми по x . Како је $A \geq 0$, имамо

$$\begin{aligned}
& A'_1 B - AB'_1 \leq B (8\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) - 16\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 x) \\
& - A [-64\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 x - 256\delta^2(\beta - \alpha)^2 x \\
& + 8(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2)) \\
& \times (-4\beta(\beta - 2\alpha)a_2 x + 4\delta(\beta - \alpha)a_1) \\
& + 32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)(a_3 + a_1(1 - 4x)^2)].
\end{aligned}$$

Десна страна последње неједнакости је квадратни трином по x . Означимо га $f(x)$. Његов водећи коефицијент је

$$A \cdot 32\beta\delta(\beta - \alpha)(2\alpha - \beta) \cdot 16a_1,$$

што је строго позитивно, дакле функција $f(x)$ је конвексна и стога на сваком коначном интервалу достиже свој максимум у једном од његових крајева. Имамо

$$\begin{aligned}
f(0) = & -\frac{8\delta}{\rho^3} (-2\alpha + \beta(\rho^2 + 1)) ((2\alpha - \beta)\rho^2 - \beta - 2\rho\delta)^2 \\
& \times ((2\alpha - \beta)\rho^2 - 2\rho\delta - \beta)^2 \leq 0
\end{aligned}$$

јер је

$$2\alpha - (\rho^2 + 1)\beta < 2\alpha - 2\beta < 0$$

и

$$\begin{aligned}
f(1) = & -\frac{8}{\rho^3} (4\alpha\rho\beta - 2\delta\alpha + \delta\rho^2\beta - 2\rho\beta^2 + \beta\delta) \\
& \times (2\rho^2\alpha - \beta - \rho^2\beta + 2\rho\delta)^4 \leq 0
\end{aligned}$$

пошто је

$$\begin{aligned}
4\alpha\rho\beta - 2\delta\alpha + \delta\rho^2\beta - 2\rho\beta^2 + \beta\delta & = \beta\delta(\rho^2 + 1) + 2\beta\rho(2\alpha - \beta) \\
-\delta(2\alpha - \beta) & > 2\beta(2\alpha - \beta) - \delta(2\alpha - \beta) > (2\beta - \delta)(2\alpha - \beta) > 0
\end{aligned}$$

Овим је доказ комплетиран. \square

Још је преостало да нађемо најмању вредност ρ почев од које израз $C_1 D_1 + C D_1 + C_1 D$ постаје увек позитиван. Нумерички експерименти су показали да ни та вредност није далеко од 1, посебно за вредности n веће од 50.

Користећи (2.24), добијамо:

$$\begin{aligned}
D_1 \geq & -4\beta^2 n^2 \sin^2 \theta - 16\delta^2 (n - 1)^2 \sin^2 \theta \\
& -4(\beta - 2\alpha)^2 (n - 2)^2 \sin^2 \theta \\
& + 16\beta\delta a_{2n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 8\beta(\beta - 2\alpha) a_{2n-2} \sin^2 \theta \\
& + 16\delta(\beta - 2\alpha) (a_{2n-3} + (2n - 3)^2 a_1) \cos^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-16\beta^2 n^2 x - 64\delta^2 (n-1)^2 x - 16(\beta - 2\alpha)^2 (n-2)^2 x \\
&\quad + 16\beta\delta a_{2n-1} - 32\beta(\beta - 2\alpha)a_{2n-2}x \\
&\quad + 16\delta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-3} + (2n-3)^2 a_1))(1-x) \\
&= D'_1(1-x).
\end{aligned}$$

Ово значи да је позитивност полинома

$$p(x) = C'_1 D'_1(1-x) + C'_1 D + C D'_1$$

на интервалу $[0, 1]$ довољан услов за позитивност израза $C_1 D_1 + C D_1 + C_1 D$. Полином $p(x)$ је трећег степена.

Поступамо на исти начин на који смо поступили у ситуацији попут оне у одговарајућој секцији која се тичала друге *Bernstein-Szegő*-ове тежине. Полином

$$p(x) = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

је ненегативан на $[0, 1]$ ако и само ако је

$$P_1(x) = x^3 P(1/x) = \alpha_0 x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$$

ненегативан на $[1, \infty)$, што важи ако и само ако је

$$P_2(x) = P_1(x+1) = \beta_3 x^3 + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0$$

ненегативан на $[0, \infty)$. Коефицијенти полинома $P_2(x)$ зависе $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на следећи начин

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \alpha_0, \\
\beta_2 &= 3\alpha_0 + \alpha_1, \\
\beta_1 &= 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2, \\
\beta_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.
\end{aligned}$$

Ненегативност β -коефицијената је довољан услов за ненегативност полинома P_2 на интервалу $[0, \infty)$. Поново у свим полиномима $A'_1(x), B'_1(x), C'_1(x), D'_1(x)$ слободан члан садржи ρ степеновано на највећи степен (сви остали њихови коефицијенти садрже ρ степеновано на строго мање степене), па је највећи степен од ρ у α_0 строго виши него у свим осталим α -коефицијентима (ако их третирамо као полиноме по ρ) подељене природним степеном од ρ . Коефицијент којим је помножен члан са највећим степеном од ρ у коефицијенту α_0 износи $4\beta\delta$, а самим тим ће и у свим β -коефицијентима износити $4\beta\delta$ или $12\beta\delta$. Та вредност је позитивна, што значи да постоје вредности $\rho_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$,

такве да за $\rho > \rho_i$ важи $\beta_i \geq 0$. Као што ће се испоставити, вредност

$$\rho^* = \max\{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$$

је врло блиска броју 1.

- (2.б) У случају $2\alpha < \beta$, $\delta > 0$ третираћемо комплетан израз (2.36). Лако се можемо уверити да је $J(\rho) = \rho^{2n+5}I(\rho)$ полином по ρ степена $4n+14$, чији су коефицијенти тригонометријске функције аргумента θ , тј.

$$J(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+14} \alpha_i(\theta)\rho^i.$$

Ако желимо да докажемо да је дати полином J ненегативан за свако ρ веће од неког ρ' , можемо га развити по степенима $\rho - \rho'$, односно

$$J(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+14} \beta_i(\theta)(\rho - \rho')^i$$

за неке коефицијенте $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{4n+14}$, који су такође тригонометријске функције од θ . Довољно је доказати да су ове функције ненегативне на интервалу $[0, \pi]$.

β -коефицијенти се могу изразити преко α -коефицијената уз помоћ биномне формуле, али то су веома дугачки изрази, па је практичније израчунати их корак по корак уз помоћ *Horner*-ове шеме.

Метод који ћемо користити у случају $2\alpha < \beta$, $\delta \neq 0$ се, дакле, заснива на налажењу најмањег ρ' таквог да када полином $J(\rho)$ напишемо као полином по $\rho - \rho'$, сви његови коефицијенти буду ненегативни. Нађена вредност ρ' ће бити тражено ρ^* . Нумерички резултати потврђују да овакав метод даје врло прецизне резултате у случају $2\alpha < \beta$, $\delta \neq 0$, али не и у претходним случајевима, дакле, могли смо га користити само у овом случају.

2.2.3. Нумерички резултати

За неке n, α, β, δ , одговарајуће вредности ρ^* су приказане у табелама 2.8, 2.9 и 2.10. Поред сваке вредности ρ^* дата је одговарајућа минимална експериментално нађена вредност ρ , названа ρ_{\min} ,

почев од које модуо језгра почиње да достиже максимум у $\theta = \pi$. Видимо да су те две вредности заиста врло близу једна другој, као и да се прецизност повећава са растом броја n . Добијено је да је $\rho_{\min} = 1.001$ кад год је $2\alpha > \beta$, тако да у табелама 2.8 и 2.9 не постоји колона намењена вредности ρ_{\min} .

$(n, \beta/\alpha)$	ρ^*	$(n, \beta/\alpha)$	ρ^*	$(n, \beta/\alpha)$	ρ^*
(10, 1.99)	1.355	(10, 1.7)	1.342	(30, 1.3)	1.138
(30, 1.99)	1.147	(30, 1.7)	1.143	(200, 1.3)	1.029
(100, 1.99)	1.055	(100, 1.7)	1.054	(30, 1.1)	1.137
(200, 1.99)	1.031	(200, 1.7)	1.030	(200, 1.04)	1.029
(10, 1.9)	1.351	(10, 1.5)	1.334	(10, 1.01)	1.323
(30, 1.9)	1.146	(30, 1.5)	1.140	(30, 1.01)	1.137
(100, 1.9)	1.054	(100, 1.5)	1.053	(100, 1.01)	1.052
(200, 1.9)	1.031	(200, 1.5)	1.030	(200, 1.01)	1.029

Табела 2.8: Вредности ρ^* за неке $1 < \beta/\alpha < 2$, $\delta = 0$

$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*	(n, β, δ)	ρ^*
(10, 1.99, 0.98)	1.408	(10, 1.8, 0.65)	1.394	(10, 1.4, 0.35)	1.367
(30, 1.99, 0.98)	1.162	(30, 1.8, 0.65)	1.157	(30, 1.4, 0.35)	1.152
(100, 1.99, 0.98)	1.059	(100, 1.8, 0.65)	1.057	(100, 1.4, 0.35)	1.057
(200, 1.99, 0.98)	1.033	(10, 1.8, 0.45)	1.388	(200, 1.4, 0.35)	1.032
(10, 1.99, 0.7)	1.404	(100, 1.8, 0.45)	1.057	(10, 1.4, 0.15)	1.359
(30, 1.99, 0.7)	1.161	(200, 1.8, 0.45)	1.032	(100, 1.4, 0.15)	1.057
(200, 1.99, 0.7)	1.033	(10, 1.8, 0.1)	1.380	(10, 1.02, 0.01)	1.446
(100, 1.9, 0.3)	1.058	(30, 1.8, 0.1)	1.153	(30, 1.02, 0.01)	1.183
(10, 1.9, 0.05)	1.390	(100, 1.8, 0.1)	1.056	(100, 1.02, 0.01)	1.068
(30, 1.9, 0.05)	1.160	(200, 1.8, 0.1)	1.032	(200, 1.02, 0.01)	1.038
(100, 1.9, 0.05)	1.057	(10, 1.6, 0.3)	1.372	(10, 1.5, 0.05)	1.353
(200, 1.9, 0.05)	1.033	(100, 1.6, 0.3)	1.055	(100, 1.5, 0.05)	1.055

Табела 2.9: Вредности ρ^* за неке $1 < \beta/\alpha < 2$, $0 < \delta < \beta - \alpha$

Посматрајмо нумеричко израчунавање интеграла

$$(2.37) \quad I(f) = \int_{-1}^1 f(t) \frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{\beta(\beta-2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta-\alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt$$

за

$$f(t) = f_0(t) = e^{t^2}.$$

Под условом да је f аналитичка у унутрашњости $\mathcal{E}_{\rho_{\max}}$, из (2.5) добијамо оцену за грешку дату са (2.27), (2.28), где је ρ_n^* дефинисано теоремом 2.3 или теоремом 2.5. Функција $f_0(z) = e^{z^2}$ је цела (аналитичка у целој комплексној равни), дакле $\rho_{\max} = +\infty$. Такође,

$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{min}
(10, 8, 3)	1.155, 1.083	(10, 50, 40)	1.212, 1.212	(10, 500, 300)	1.547, 1.546
(30, 8, 3)	1.155, 1.001	(30, 50, 40)	1.185, 1.183	(30, 500, 300)	1.547, 1.546
(100, 8, 3)	1.154, 1.001	(100, 50, 40)	1.185, 1.183	(100, 500, 300)	1.547, 1.546
(10, 10, 5)	1.118, 1.072	(10, 50, 47)	1.116, 1.116	(10, 500, 480)	1.164, 1.164
(30, 10, 5)	1.118, 1.001	(30, 50, 47)	1.059, 1.038	(30, 500, 480)	1.090, 1.088
(100, 10, 5)	1.116, 1.001	(100, 50, 47)	1.051, 1.007	(100, 500, 480)	1.089, 1.087
(10, 12, 7)	1.124, 1.124	(10, 100, 40)	2.064, 2.064	(10, 1000, 500)	1.782, 1.782
(30, 12, 7)	1.096, 1.001	(30, 100, 40)	2.064, 2.064	(30, 500, 300)	1.782, 1.782
(100, 12, 7)	1.095, 1.001	(100, 100, 40)	2.064, 2.064	(100, 1000, 500)	1.782, 1.782
(10, 20, 12)	1.281, 1.279	(10, 100, 70)	1.349, 1.349	(10, 1000, 900)	1.168, 1.168
(30, 20, 12)	1.268, 1.266	(30, 100, 70)	1.348, 1.348	(30, 1000, 900)	1.161, 1.159
(100, 20, 12)	1.268, 1.266	(100, 100, 70)	1.348, 1.349	(100, 1000, 900)	1.161, 1.159
(10, 20, 18)	1.061, 1.001	(10, 100, 96)	1.144, 1.140	(10, 1000, 975)	1.157, 1.147
(30, 20, 18)	1.059, 1.001	(30, 100, 96)	1.065, 1.052	(30, 1000, 975)	1.089, 1.071
(100, 20, 18)	1.059, 1.001	(100, 100, 96)	1.064, 1.049	(100, 1000, 975)	1.087, 1.069

Табела 2.10: Вредности ρ^* , ρ_{min} за неке $\beta/\alpha > 2$, $0 < \delta < \beta - \alpha$

лако се види да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |e^{z^2}| = e^{a_1^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}).$$

Користећи оцену (2.29), $r_n(f_0)$ ($\geq \tilde{r}_n(f_0)$) добијамо у облику

$$r_n(f_0) = \inf_{\rho_n^* < \rho < +\infty} \left\{ \frac{1}{\rho^n} 8\sqrt{2}\pi a_1 \sqrt{\frac{A}{BCD}} \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{3}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6} \right) \times e^{a_1^2} \right\},$$

где су A, B, C, D дефинисани теоремама 2.3 и 2.5.

Оцена *von Sidow*-а у овом случају има облик (видети [81], теорема 1)

$$\hat{r}_n(f_0) = \hat{r}_n^{(\text{Syd})}(f_0) = \inf_{1 < \rho < +\infty} \left\{ \frac{4\mu_0}{(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}} \cdot e^{a_1^2} \right\},$$

где је $\mu_0 = \pi \frac{\beta - \alpha}{\alpha[(\beta - \alpha)^2 - \delta^2]}$. За оцену *Stenger*-а је теоријски доказано (као што се може и приметити у резултатима оваквог типа датим у претходном одељку) да је у случају било које *Bernstein-Szegő*-ове тежине слабија од оцене *von Sidow*-а, те је више нећемо помињати. *Notaris*-ова оцена (видети [55], једн. (3.28)) гласи

$$\hat{r}_n(f) = \hat{r}_n^{(\text{Not})}(f) = \inf_{1 < r < +\infty} \left\{ \frac{X}{Y} \cdot e^{r^2} \right\},$$

где су изрази X и Y дати са

$$\begin{aligned}
X &= 8\pi\tau^{2n}, \\
Y &= [(\beta - 2\alpha)\tau^2 + 2\delta\tau + \beta] \cdot [\beta(1 + \tau^{2n}) + 2\delta\tau(1 + \tau^{2n-2}) \\
&\quad + (\beta - 2\alpha)\tau^2(1 + \tau^{2n-4})] \cdot \sqrt{r^2 - 1}, \\
\tau &= r - \sqrt{r^2 - 1}.
\end{aligned}$$

За $\alpha = 1$ и неке вредности β, δ , добијене вредности $\hat{r}_{55}^{(\text{Syd})}(f_0)$, $\hat{r}_{55}^{(\text{Not})}(f_0), r_{55}(f_0)$ су изложене у Табели 2.11. Колона *Error* се односи на актуелну оцену грешке рачунања датог интеграла.

β, δ	$\hat{r}_{55}^{(\text{Syd})}(f_0)$	$\hat{r}_{55}^{(\text{Not})}(f_0)$	$r_{55}(f_0)$	<i>Error</i>
1.01, 0	2.55(-57)	5.10(-59)	5.06(-59)	3.38(-60)
1.1, 0	2.55(-58)	4.29(-59)	4.26(-59)	2.84(-60)
1.3, 0	8.49(-59)	3.06(-59)	3.04(-59)	2.03(-60)
1.5, 0	5.09(-59)	2.29(-59)	2.28(-59)	1.52(-60)
1.6, 0	4.25(-59)	2.01(-59)	2.00(-59)	1.33(-60)
1.8, 0	3.18(-59)	1.57(-59)	1.57(-59)	1.05(-60)
1.9, 0	2.83(-59)	1.42(-59)	1.41(-59)	9.43(-61)
1.99, 0	2.57(-59)	1.30(-59)	1.29(-59)	8.59(-61)
1.1, 0.05	3.40(-58)	4.22(-59)	4.33(-59)	2.84(-60)
1.3, 0.2	1.53(-58)	2.91(-59)	3.20(-59)	2.03(-60)
1.4, 0.15	7.41(-59)	2.54(-59)	2.71(-59)	1.75(-60)
1.4, 0.38	6.53(-58)	2.41(-59)	2.87(-59)	1.76(-60)
1.52, 0.1	5.09(-59)	2.18(-59)	2.27(-59)	1.48(-60)
1.6, 0.3	5.66(-59)	1.89(-59)	2.13(-59)	1.34(-60)
1.7, 0.2	3.96(-59)	1.71(-59)	1.84(-59)	1.18(-60)
1.9, 0.65	5.92(-59)	1.27(-59)	1.59(-59)	9.52(-61)
1.95, 0.12	2.72(-59)	1.32(-59)	1.37(-59)	8.95(-61)
2.1, 0.5	2.92(-59)	1.07(-59)	1.25(-59)	7.75(-61)
3, 1	1.70(-59)	5.09(-60)	6.32(-60)	3.80(-61)
4.1, 0.2	8.25(-60)	2.98(-60)	3.06(-60)	2.01(-61)
10, 4	3.53(-60)	4.45(-61)	5.79(-61)	3.41(-62)
30, 10	9.97(-61)	5.04(-62)	6.27(-62)	3.77(-63)
30, 18	1.43(-60)	4.64(-62)	6.91(-62)	3.84(-63)
100, 40	3.07(-61)	4.44(-63)	5.77(-63)	3.40(-64)
100, 70	5.15(-61)	4.05(-63)	6.45(-63)	3.50(-64)
100, 95	3.25(-60)	3.76(-63)	7.11(-63)	3.62(-64)

Табела 2.11: Вредности $\hat{r}_{55}^{(\text{Syd})}(f_0)$, $\hat{r}_{55}^{(\text{Not})}(f_0)$, $r_{55}(f_0)$, *Error* за $\alpha = 1$ и неке β, δ

2.3. Оцена грешке *Gauss*-ове квадратурне формуле са трећом *Bernstein-Szegő*-овом тежинском функцијом

2.3.1. Максимум модула језгра *Gauss*-ове квадратурне формуле са трећом *Bernstein-Szegő*-овом тежинском функцијом

У случају тежинске функције (2.8), одговарајући монични ортогонални полином $\pi_n(t)$ степена n је облика (видети [16]):

$$(2.38) \quad \pi_n(t) = \frac{1}{2^n} \left[V_n(t) + \frac{2\delta}{\beta} V_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) V_{n-2}(t) \right], \quad n \geq 1,$$

где V_n представља *Chebyshev*-љев полином треће врсте, дат са

$$V_n(\cos \theta) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Поново, наравно, уводимо (2.10) и позивамо се на [17]:

$$V_n(z) = \frac{\xi^{n+1} + \xi^{-n}}{\xi + 1}$$

и

$$\int_{-1}^1 \frac{V_n(t)}{z-t} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt = \frac{2 \cos(n + \frac{1}{2})\theta \cos \frac{\theta}{2}}{z - \cos \theta} d\theta = \frac{2\pi(\xi + 1)}{(\xi - \xi^{-1})\xi^{n+1}}.$$

Ако је $n > 1$, језгро ће у овом случају бити облика:

$$(2.39) \quad K_n(z) = \frac{1}{\beta(\xi^{n+1} - \xi^{-n}) + 2\delta(\xi^n - \xi^{-(n-1)}) + (\beta - 2\alpha)(\xi^{n-1} - \xi^{-(n-2)})} \\ \times \frac{8\pi}{\xi^n} \cdot \frac{(\xi + 1)(\beta + 2\delta\xi + (\beta - 2\alpha)\xi^2)}{(\xi - 1)(\beta(\beta - 2\alpha)(\xi + \xi^{-1})^2 + 4\delta(\beta - \alpha)(\xi + \xi^{-1}) + 4(\alpha^2 + \delta^2))}.$$

Процедура извођења је у потпуности аналогна као у случајевима претходне две тежине:

$$\varrho_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{2^n \pi_n(t)}{z-t} \frac{\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}{\beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Множењем (2.12) са $2^n \pi_n(t) \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$, користећи (2.38), интеграцијом на

интервалу $[-1, 1]$ добијамо да за све $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ важи:

$$\begin{aligned} \varrho_n(z) &= A_1 \int_{-1}^1 \frac{\left[V_n(t) + \frac{2\delta}{\beta} V_{n-1}(t) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) V_{n-2}(t) \right]}{z-t} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt \\ &\quad + 2^n \int_{-1}^1 \pi_n(t) (A_2 t + A_3) \frac{\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}{(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt. \end{aligned}$$

Други интеграл у последњој једнакости је једнак нули, јер је $n > 1$, те је

$$\rho_n(z) = \frac{\frac{2\pi(\xi+1)}{(\xi-\xi^{-1})\xi^{n+1}} + \frac{2\delta}{\beta} \frac{2\pi(\xi+1)}{(\xi-\xi^{-1})\xi^n} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right) \frac{2\pi(\xi+1)}{(\xi-\xi^{-1})\xi^{n-1}}}{\beta(\beta - \alpha) \left(\frac{\xi+\xi^{-1}}{2}\right)^2 + 2\delta(\beta - \alpha) \frac{\xi+\xi^{-1}}{2} + \alpha^2 + \delta^2},$$

одакле формула (2.39) лако следи. Случај $n = 1$ не разматрамо.

Нотацију (2.14), наравно, користимо и овде. Користећи (2.39), модуо одговарајућег језгра добијамо у облику

$$(2.40) \quad |K_n(z)|^2 = \frac{64\pi^2}{\rho^{2n+1}} \frac{az}{bcd},$$

где су a и b дати у (2.15), док су c, d, z дати са:

$$\begin{aligned} |\xi - 1| &= \sqrt{2\rho} (a_1 - \cos \theta)^{1/2} = \sqrt{2\rho c}, \\ &|\beta(\xi^{n+1} - \xi^{-n}) + 2\delta(\xi^n - \xi^{-(n-1)}) + (\beta - 2\alpha)(\xi^{n-1} - \xi^{-(n-2)})| \\ &= \rho^{\frac{1}{2}} [2\beta^2(a_{2n+1} + \cos(2n+1)\theta) + 8\delta^2(a_{2n-1} + \cos(2n-1)\theta) \\ &\quad + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-3} + \cos(2n-3)\theta) + 8\beta\delta(a_{2n} \cos \theta + a_1 \cos 2n\theta) \\ &\quad + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-1} \cos 2\theta + a_2 \cos(2n-1)\theta) \\ &\quad + 8\delta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-2} \cos \theta + a_1 \cos(2n-2)\theta)]^{1/2} = \sqrt{\rho d}, \\ |\xi + 1| &= \sqrt{2\rho} (a_1 + \cos \theta)^{1/2} = \sqrt{2\rho z}. \end{aligned}$$

Експерименти указују да постоји $\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta) > 1$ такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ $|K_n(z)|$ свој максимум достиже на реалној оси, односно, на позитивном делу реалне осе кад је $\delta < \beta/2$ и на негативном делу реалне осе кад је $\delta > \beta/2$. Одговарајуће тврђење прецизно формулишемо кроз следећу теорему.

Теорема 2.7. За Gauss-ову квадратурну формулу (2.1), $n \in \mathbb{N}$, са тежинском функцијом (2.8), $0 < \alpha < \beta$, $\beta \neq 2\alpha$, $|\delta| < \beta - \alpha$, постоји

$\rho^* \in (1, +\infty)$ ($\rho^* = \rho_n^* = \rho^*(n, \alpha, \beta, \delta)$) такво да за свако $\rho \geq \rho^*$ модуо језгра $|K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)|$ достиже свој максимум на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) ако је $\delta < \beta/2$ и на њеном негативном делу ($\theta = \pi$) ако је $\delta > \beta/2$, тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за $\delta < \beta/2$, а

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n,\alpha,\beta,\delta}(z)| = \left| K_{n,\alpha,\beta,\delta} \left(-\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за $\delta > \beta/2$.

Доказ. Неједнакост

$$(2.41) \quad \frac{az}{bcd} \leq \frac{AZ}{BCD}$$

(A, B, C, D, Z су вредности a, b, c, d, z за $\theta = 0$, односно $\theta = \pi$), која доказујемо да ће важити за свако ρ веће од неког ρ^* , $\theta \in [0, \pi]$, $\delta < \beta/2$, односно $\delta > \beta/2$, при чему α, β, δ задовољавају услове наведене у теорему, еквивалентна је са:

$$(2.42) \quad I = ZA(C + C_1)B_1D + ZA(C + C_1)(B + B_1)D_1 + ABD(ZC_1 - Z_1C) - BCDA_1(Z + Z_1) \geq 0,$$

где смо стандардно увели ознаке $A_1 = a - A$, $B_1 = b - B$, $C_1 = c - C$, $D_1 = d - D$, $Z_1 = z - Z$.

1. Претпоставимо прво да је $\delta < \beta/2$. За $\theta = 0$, имамо

$$\begin{aligned} A &= \beta^2 + 4\delta^2\rho^2 + (\beta - 2\alpha)^2\rho^4 + 4\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) \\ &\quad + 2\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2, \\ B &= 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2(a_4 + 1) + 32\delta^2(\beta - \alpha)^2(a_2 + 1) \\ &\quad + (2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2))^2 \\ &\quad + 4(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2))(\beta(\beta - 2\alpha)a_2 + 4\delta(\beta - \alpha)a_1) \\ &\quad + 16\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)(a_3 + a_1), \\ C &= a_1 - 1, \\ D &= 2\beta^2(a_{2n+1} + 1) + 8\delta^2(a_{2n-1} + 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-3} + 1) \\ &\quad + 8\beta\delta(a_{2n} + a_1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-1} + a_2) \\ &\quad + 8\delta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-2} + a_1), \\ Z &= a_1 + 1. \end{aligned}$$

Даље, изражавамо A_1, B_1, C_1, D_1, Z_1 :

$$\begin{aligned}
A_1 &= -8\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \sin^2 \theta \\
&= \sin^2 \frac{\theta}{2} (-8\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) - 16\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\
&= A'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
B_1 &= -4\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 \theta - 2\theta - 64\delta^2(\beta - \alpha)^2 \sin^2 \theta - 8(2\beta(\beta - 2\alpha) \\
&\quad + 4(\alpha^2 + \delta^2)) (\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \sin^2 \theta + 4\delta(\beta - \alpha)a_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\
&\quad - 32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha) (a_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \sin^2 \frac{3\theta}{2}) \\
&= \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(-64\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1)^2 \right. \\
&\quad - 256\delta^2(\beta - \alpha)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 32(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2)) \\
&\quad - (\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \delta(\beta - \alpha)a_1) \\
&\quad \left. - 32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha) (a_3 + a_1 (4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1)^2) \right) \\
&= B'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
C_1 &= 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = C'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
D_1 &= -4\beta^2 \sin^2 \frac{(2n+1)\theta}{2} - 16\delta^2 \sin^2 \frac{(2n-1)\theta}{2} \\
&\quad - 4(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 \frac{(2n-3)\theta}{2} - 16\beta\delta (a_{2n} \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \sin^2 n\theta) \\
&\quad - 8\beta(\beta - 2\alpha) \left(a_{2n-1} \sin^2 \theta + a_2 \sin^2 \frac{(2n-1)\theta}{2} \right) \\
&\quad - 16\delta(\beta - 2\alpha) (a_{2n-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \sin^2 (n-1)\theta), \\
Z_1 &= -2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = Z'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

У изразу (2.42) оцене опет спроводимо уз помоћ неједнакости (2.24).

(1.a) Претпоставимо прво да је $\beta < 2\alpha$.

За $\delta \geq 0$, имамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq -4\beta^2(2n+1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 16\delta^2(2n-1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad - 4(\beta - 2\alpha)^2(2n-3)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad - 16\beta\delta (a_{2n} \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_1 n^2 \sin^2 \theta) \\
&\quad - 8\beta(\beta - 2\alpha)a_{2n-1} \sin^2 \theta - 16\delta(\beta - 2\alpha)a_{2n-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \sin^2 \frac{\theta}{2} (-4\beta^2(2n+1)^2 - 16\delta^2(2n-1)^2 \\
&\quad - 4(\beta - 2\alpha)^2(2n-3)^2 - 16\beta\delta (a_{2n} + 4a_1 n^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\
&\quad - 32\beta(\beta - 2\alpha)a_{2n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} - 16\delta(\beta - 2\alpha)a_{2n-2}),
\end{aligned}$$

док, у случају $\delta \leq 0$, израз D_1 одоздо оцењујемо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq -4\beta^2(2n+1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad -16\delta^2(2n-1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4(\beta-2\alpha)^2(2n-3)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad -16\beta\delta a_{2n} \sin^2 \frac{\theta}{2} - 8\beta(\beta-2\alpha)a_{2n-1} \sin^2 \theta \\
&\quad -16\delta(\beta-2\alpha) (a_{2n-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_1(n-1)^2 \sin^2 \theta) \\
&= \sin^2 \frac{\theta}{2} (-4\beta^2(2n+1)^2 - 16\delta^2(2n-1)^2 \\
&\quad - 4(\beta-2\alpha)^2(2n-3)^2 - 16\beta\delta a_{2n} \\
&\quad - 32\beta(\beta-2\alpha)a_{2n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad - 16\delta(\beta-2\alpha) (a_{2n-2} + 4a_1(n-1)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2})).
\end{aligned}$$

(2.б) Претпоставимо сада да је $2\alpha < \beta$.

У овом случају, ако је $0 \leq \delta < \beta/2$, имамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq -4\beta^2(2n+1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 16\delta^2(2n-1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad -4(\beta-2\alpha)^2(2n-3)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad -16\beta\delta (a_{2n} \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_1 n^2 \sin^2 \theta) \\
&\quad -8\beta(\beta-2\alpha) (a_{2n-1} \sin^2 \theta + a_2(2n-1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\
&\quad -16\delta(\beta-2\alpha) (a_{2n-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + a_1(n-1)^2 \sin^2 \theta) \\
&= \sin^2 \frac{\theta}{2} (-4\beta^2(2n+1)^2 - 16\delta^2(2n-1)^2 \\
&\quad - 4(\beta-2\alpha)^2(2n-3)^2 - 16\beta\delta (a_{2n} + 4a_1 n^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\
&\quad - 8\beta(\beta-2\alpha) (4a_{2n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} + a_2(2n-1)^2) \\
&\quad - 16\delta(\beta-2\alpha) (a_{2n-2} + 4a_1(n-1)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2})),
\end{aligned}$$

док, за $\delta \leq 0$, имамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq -4\beta^2(2n+1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 16\delta^2(2n-1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad -4(\beta-2\alpha)^2(2n-3)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 16\beta\delta a_{2n} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad -8\beta(\beta-2\alpha) (a_{2n-1} \sin^2 \theta + a_2(2n-1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\
&\quad -16\delta(\beta-2\alpha)a_{2n-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
&= \sin^2 \frac{\theta}{2} (-4\beta^2(2n+1)^2 - 16\delta^2(2n-1)^2 \\
&\quad - 4(\beta-2\alpha)^2(2n-3)^2 - 16\beta\delta a_{2n} \\
&\quad - 8\beta(\beta-2\alpha) (4a_{2n-1} \cos^2 \frac{\theta}{2} + a_2(2n-1)^2) \\
&\quad - 16\delta(\beta-2\alpha)a_{2n-2}).
\end{aligned}$$

2. Што се тиче случаја у ком треба да докажемо да се максимум модула језгра достиже у $\theta = \pi$ ($\delta > \beta/2$), имамо

$$\begin{aligned}
C &= a_1 + 1, \\
D &= 2\beta^2(a_{2n+1} - 1) + 8\delta^2(a_{2n-1} - 1) + 2(\beta - 2\alpha)^2(a_{2n-3} - 1) \\
&\quad + 8\beta\delta(-a_{2n} + a_1) + 4\beta(\beta - 2\alpha)(a_{2n-1} - a_2) \\
&\quad + 8\delta(\beta - 2\alpha)(-a_{2n-2} + a_1), \\
Z &= a_1 - 1,
\end{aligned}$$

док су A и B дати са (2.18). Изрази A_1 и B_1 су дати са (2.19), док за C_1, D_1 и Z_1 имамо

$$\begin{aligned}
A_1 &= 8\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) \cos^2 \frac{\theta}{2} - 4\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \sin^2 \theta \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} (8\rho\delta(\rho^2(\beta - 2\alpha) + \beta) - 16\beta(\beta - 2\alpha)\rho^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}), \\
B_1 &= -4\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 2\theta - 64\delta^2(\beta - \alpha)^2 \sin^2 \theta \\
&\quad + 8(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2)) \\
&\quad \times (-\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \sin^2 \theta + 4\delta(\beta - \alpha)a_1 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\
&\quad + 32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha) (a_3 \cos^2 \frac{\theta}{2} + a_1 \cos^2 \frac{3\theta}{2}) \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(-64\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1)^2 \right. \\
&\quad \left. - 256\delta^2(\beta - \alpha)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 32(2\beta(\beta - 2\alpha) + 4(\alpha^2 + \delta^2)) \right. \\
&\quad \left. \times (-\beta(\beta - 2\alpha)a_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \delta(\beta - \alpha)a_1) \right. \\
&\quad \left. + 32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha) \left(a_3 + a_1 (4 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 3)^2 \right) \right), \\
C_1 &= -2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\
D_1 &= 4\beta^2 \cos^2 \frac{(2n+1)\theta}{2} + 16\delta^2 \cos^2 \frac{(2n-1)\theta}{2} \\
&\quad + 4(\beta - 2\alpha)^2 \cos^2 \frac{(2n-3)\theta}{2} + 16\beta\delta (a_{2n} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \sin^2 n\theta) \\
&\quad + 8\beta(\beta - 2\alpha) (-a_{2n-1} \sin^2 \theta + a_2 \cos^2 \frac{2n-1}{2}) \\
&\quad + 16\delta(\beta - 2\alpha) (a_{2n-2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \sin^2 (n-1)\theta), \\
Z_1 &= 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Користећи (као у случају друге тежине) неједнакост (2.25), добијамо следећу оцену за D_1 :

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq -8\beta\delta \cos \frac{(2n+1)\theta}{2} \cos \frac{(2n-1)\theta}{2} - 8\delta(\beta - 2\alpha) \cos \frac{(2n-1)\theta}{2} \cos \frac{(2n-3)\theta}{2} \\
&\quad - 4\beta(\beta - 2\alpha) \cos \frac{(2n+1)\theta}{2} \cos \frac{(2n-3)\theta}{2} + 16\beta\delta (a_{2n} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \sin^2 n\theta) \\
&\quad + 8\beta(\beta - 2\alpha) (-a_{2n-1} \sin^2 \theta + a_2 \cos^2 \frac{2n-1}{2}) \\
&\quad + 16\delta(\beta - 2\alpha) (a_{2n-2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \sin^2 (n-1)\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -8\beta\delta \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 n\theta \right) - 8\delta(\beta - 2\alpha) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2(n-1)\theta \right) \\
&\quad - 4\beta(\beta - 2\alpha) \left(\cos^2 \frac{(2n-1)\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
&\quad + 16\beta\delta \left(a_{2n} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \sin^2 n\theta \right) \\
&\quad + 8\beta(\beta - 2\alpha) \left(-a_{2n-1} \sin^2 \theta + a_2 \cos^2 \frac{2n-1}{2} \right) \\
&\quad + 16\delta(\beta - 2\alpha) \left(a_{2n-2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - a_1 \sin^2(n-1)\theta \right) \\
&= 8\beta\delta \left((2a_{2n} - 1) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (2a_1 - 1) \sin^2 n\theta \right) \\
&\quad + 4\beta(\beta - 2\alpha) \left(-(2a_{2n-1} - 1) \sin^2 \theta + (2a_2 - 1) \cos^2 \frac{2n-1}{2} \right) \\
&\quad + 8\delta(\beta - 2\alpha) \left((2a_{2n-2} - 1) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (2a_1 - 1) \sin^2(n-1)\theta \right).
\end{aligned}$$

Користећи (2.24), с обзиром на то да је $2\alpha < \beta$ и $\delta > \beta/2 > 0$, добијамо

$$\begin{aligned}
D_1 &\geq 8\beta\delta \left((2a_{2n} - 1) \cos^2 \frac{\theta}{2} - n^2(2a_1 - 1) \sin^2 \theta \right) \\
&\quad + 4\beta(\beta - 2\alpha) \left(-(2a_{2n-1} - 1) \sin^2 \theta \right) \\
&\quad + 8\delta(\beta - 2\alpha) \left((2a_{2n-2} - 1) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (n-1)^2(2a_1 - 1) \sin^2 \theta \right) \\
&= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(8\beta\delta \left((2a_{2n} - 1) - 4n^2(2a_1 - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - 16\beta(\beta - 2\alpha)(2a_{2n-1} - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. + 8\delta(\beta - 2\alpha) \left((2a_{2n-2} - 1) - 4(n-1)^2(2a_1 - 1) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

У свим овим случајевима смо израз D_1 одоздо ограничили изразом облика $D'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ($D'_1 \cos^2 \frac{\theta}{2}$), где је D'_1 , заправо, полином по $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ ($\sin^2 \frac{\theta}{2}$) (исто као и A'_1, B'_1, C'_1 и Z'_1). У изразу (2.42) D_1 се појављује само у сабирку $ZA(B + B_1)(C + C_1)D_1$, а како $ZA(B + B_1)(C + C_1)$ не може бити негативно, добијамо да је дати израз већи од или једнак $J \sin^2 \frac{\theta}{2}$ ($J \cos^2 \frac{\theta}{2}$), где је

$$\begin{aligned}
(2.43) \quad J &= ZA \left(C + C'_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) B'_1 D + ZA \left(C + C'_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(B + B'_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) D'_1 \\
&\quad + ABD (ZC'_1 - Z'_1 C) - BCDA'_1 \left(Z + Z'_1 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
&\quad \left(ZA \left(C + C'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) B'_1 D + ZA \left(C + C'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(B + B'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) D'_1 \right. \\
&\quad \left. + ABD (ZC'_1 - Z'_1 C) - BCDA'_1 \left(Z + Z'_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

У случајевима у којима доказујемо да модуо језгра достиже свој максимум у $\theta = 0$, коефицијент уз ρ^M (M стандардно представља највећи степен од ρ у одговарајућем изразу (2.43)) једнак је

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}(-32\beta\delta(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)) \cdot \frac{1}{2}2\beta^2 \cdot \frac{1}{2}2\beta^2 \cdot \frac{1}{2} \\
&+ \frac{1}{2}(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}(-16\beta\delta) \cdot \frac{1}{2} \\
&+ (\beta - 2\alpha)^2 \cdot 2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2}2\beta^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \\
&- \frac{1}{2}2\beta^2(\beta - 2\alpha)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}2\beta^2(-8\delta(\beta - 2\alpha)) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \beta^3(\beta - 2\alpha)^3(-4\delta(\beta - \alpha) - 2(\beta - 2\alpha)\delta + 2\beta(\beta - 2\alpha) + 2\beta\delta) \\
&= 2(\beta - 2\alpha)^4(\beta - 2\delta),
\end{aligned}$$

што је позитивно управо онда кад је $\delta < \beta/2$. Кад је $2\alpha > \beta$, тај услов увек важи јер је $\delta < \beta - \alpha < \beta/2$.

У случајевима у којим доказујемо да модуо језгра достиже свој максимум у $\theta = \pi$, потпуно аналогно добијамо да је одговарајући коефицијент уз ρ^M једнак $2(\beta - 2\alpha)^4(2\delta - \beta)$ што очигледно употпуњује овај доказ. \square

2.3.2. Практично разматрање

Као и до сада, од практичне важности су нам случајеви у којима је ρ^* близу својој стварној вредности, а она што ближе броју 1. Нумеричке анализе су показале да случај $\beta > 2\alpha$, $\delta = \beta/2$ није интересантан са те тачке гледишта, тако да га нисмо анализирали ни теоријски.

Цео проблем се за било које α , β , δ на већ устаљен начин може свести на случај $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
K_n(z) &= \frac{1}{\pi_n(z)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{z-t} w(t) dt \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\pi_n(z)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{z-t} \frac{\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}{\beta_1(\beta_1 - 2)t^2 + 2\delta_1(\beta_1 - 1)t + 1 + \delta_1^2} dt,
\end{aligned}$$

где је $\beta_1 = \beta/\alpha$ и $\delta_1 = \delta/\alpha$.

Случај $\alpha = 1$, $\beta > 2$, $\delta = 0$ је комплетно испитан у раду [65] и на основу резултата из тог рада, сада можемо извести закључак да за $\delta = 0$, у подслучају $2\alpha < \beta$, ρ^* може бити близу 1. То се у поменутом раду догађа онда када је β/α релативно мало (не веће до 5), али метод који овде користимо даје једнако добре резултате на нешто ширем скупу вредности β/α . Спроведене нумеричке анализе показују да је, у случају $2\alpha < \beta$, $\delta \neq 0$, ρ^* близу 1 онда када је δ веома близу $\beta - \alpha$ за $\delta > 0$, односно када је $\delta/(\beta - \alpha)$ мање од -0.5

за $\delta < 0$. Поменути експерименти су такође показали да је у случају $2\alpha > \beta$ ρ^* увек близу 1.

Преостаје да се анализирају изрази (2.43), односно (2.42). Као што је већ речено, израз (2.43) може бити третиран као полином $J(x)$, где је $x = \cos^2 \frac{\theta}{2}$ за $\beta > 2\delta$ и $x = \sin^2 \frac{\theta}{2}$ за $\beta < 2\delta$ (полиноми $A'_1(x)$, $B'_1(x)$, $C'_1(x)$, $D'_1(x)$, $Z'_1(x)$ су описани раније). Јасно је да је степен полинома I једнак 6. Занима нас кад је овај полином ненегативан на $[0, 1]$. Метод који је у случају претходне две тежине коришћен у циљу доказивања константности знака полинома на интервалу $[0, 1]$ - у случају тренутно разматране тежинске функције захвално је применити у случајевима $\beta/\alpha < 2$ и $\beta/\alpha > 2$, $\delta > \beta/2$, док је у случају $\beta/\alpha > 2$, $\delta < \beta/2$ искоришћен метод који је презентован у случају $\beta > 2\alpha$ прве тежине (израз (2.42) је облика $J_1(\rho)/\rho^k$ за неки полином $J_1(\rho)$ и одређени природан број k , тражи се најмање ρ_0 за које су сви коефицијенти развоја полинома $J_1(\rho)$ по $\rho - \rho_0$ ненегативни - управо ту вредност ρ_0 узимамо за ρ^*). Та метода је први пут дала добре резултате у раду у *Gautschi*-јевој хипотези (видети наредно поглавље).

Табеле 2.12, 2.13 и 2.14 потврђују да се у свим поменутиим случајевима вредност ρ^* добија врло блиска својој актуелној вредности.

2.3.3. Нумерички резултати

За неке n , α , β , δ , одговарајуће вредности ρ^* су изложене у табелама 2.12, 2.13 и 2.14. Поред сваке вредности ρ^* опет је дата одговарајућа минимална експериментално нађена вредност ρ (ρ_{\min}) почев од које модуо језгра почиње да достиже максимум у одговарајућој вредности угла θ . Видимо да су, као и у одговарајућим табелама које се односе на прву и другу тежину, две поменуте вредности ρ заиста врло близу једна другој, као и да се прецизност повећава са растом броја n . Практични значај дотичних резултата је исти као у претходна одељка.

Слично као и у случају прве тежине, рачунали смо $\hat{r}_n^{(\text{Syd})}$, $\hat{r}_n^{(\text{Not})}$, r_n и актуелну оцену грешке *Error* израчунавања интеграла I датог са

$$(2.44) \quad I(f) = \int_{-1}^1 f(t) \frac{\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}}{\beta(\beta - 2\alpha)t^2 + 2\delta(\beta - \alpha)t + \alpha^2 + \delta^2} dt,$$

за неколико различитих примера функције f .

Оцена грешке која проистиче из (2.5) је наравно поново дата са (2.27), (2.28) док је ρ_n^* овај пут дефинисано у теорему 2.7.

$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}
(10, 1.01, 0)	1.538, 1.001	(10, 1.1, 0.8)	1.537, 1.001	(10, 1.5, -0.25)	1.429, 1.001
(30, 1.01, 0)	1.225, 1.001	(30, 1.1, 0.08)	1.223, 1.001	(30, 1.5, -0.25)	1.173, 1.001
(100, 1.01, 0)	1.085, 1.001	(100, 1.1, 0.08)	1.084, 1.001	(100, 1.5, -0.25)	1.063, 1.001
(200, 1.01, 0)	1.047, 1.001	(200, 1.1, 0.08)	1.047, 1.001	(200, 1.5, -0.25)	1.035, 1.001
(10, 1.1, 0)	1.515, 1.001	(10, 1.1 - 0.03)	1.508, 1.001	(10, 1.7, 0.5)	1.538, 1.001
(30, 1.1, 0)	1.212, 1.001	(30, 1.1, -0.03)	1.208, 1.001	(30, 1.7, 0.5)	1.213, 1.001
(100, 1.1, 0)	1.078, 1.001	(100, 1.1, -0.03)	1.076, 1.001	(100, 1.7, 0.5)	1.076, 1.001
(200, 1.1, 0)	1.043, 1.001	(200, 1.1, -0.03)	1.042, 1.001	(200, 1.7, 0.5)	1.042, 1.001
(10, 1.35, 0)	1.473, 1.001	(10, 1.3, 0.15)	1.512, 1.001	(10, 1.7, -0.2)	1.422, 1.001
(30, 1.35, 0)	1.191, 1.001	(30, 1.3, 0.15)	1.208, 1.001	(30, 1.7, -0.2)	1.170, 1.001
(100, 1.35, 0)	1.069, 1.001	(100, 1.3, 0.15)	1.076, 1.001	(100, 1.7, -0.2)	1.062, 1.001
(200, 1.35, 0)	1.038, 1.001	(200, 1.3, 0.15)	1.042, 1.001	(200, 1.7, -0.2)	1.034, 1.001
(10, 1.6, 0)	1.448, 1.001	(10, 1.4, -0.3)	1.433, 1.001	(10, 1.8, -0.75)	1.401, 1.001
(30, 1.6, 0)	1.180, 1.001	(30, 1.4, -0.3)	1.175, 1.001	(30, 1.8, -0.75)	1.162, 1.001
(100, 1.6, 0)	1.065, 1.001	(100, 1.4, -0.3)	1.063, 1.001	(100, 1.8, -0.75)	1.059, 1.001
(200, 1.6, 0)	1.036, 1.001	(200, 1.4, -0.3)	1.035, 1.001	(200, 1.8, -0.75)	1.033, 1.001
(10, 1.85, 0)	1.434, 1.001	(10, 1.4, 0.1)	1.485, 1.001	(10, 1.8, 0.3)	1.480, 1.001
(30, 1.85, 0)	1.174, 1.001	(30, 1.4, 0.1)	1.195, 1.001	(30, 1.8, 0.3)	1.190, 1.001
(100, 1.85, 0)	1.063, 1.001	(100, 1.4, 0.1)	1.070, 1.001	(100, 1.8, 0.3)	1.068, 1.001
(200, 1.85, 0)	1.035, 1.001	(200, 1.4, 0.1)	1.039, 1.001	(200, 1.8, 0.3)	1.038, 1.001
(10, 1.99, 0)	1.428, 1.001	(10, 1.5, 0.48)	1.575, 1.001	(10, 1.95, 0.5)	1.504, 1.001
(30, 1.99, 0)	1.171, 1.001	(30, 1.5, 0.48)	1.233, 1.001	(30, 1.95, 0.5)	1.198, 1.001
(100, 1.99, 0)	1.062, 1.001	(100, 1.5, 0.48)	1.086, 1.001	(100, 1.95, 0.5)	1.071, 1.001
(200, 1.99, 0)	1.034, 1.001	(200, 1.5, 0.48)	1.048, 1.001	(200, 1.99, 0.5)	1.039, 1.001

Табела 2.12: Вредности ρ^* , ρ_{\min} за неке $1 < \beta/\alpha < 2$, $\delta < |\beta - \alpha|$

Постоје два карактеристична примера израчунавања интеграла који се појављују у више радова везаних за ову проблематику. Веома су илустративни, тако да ће и овде такође бити анализирани. Али прво ћемо размотрити нумеричко израчунавање интеграла (2.44) за функцију $f(t) = f_0(t) = e^{t^2}$ већ размотрену у случају претходне тежине.

После стандардне оцене (2.29) дужине елипсе, $r_n(f) (\geq \tilde{r}_n(f))$ постаје

$$r_n(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < +\infty} \left\{ \frac{1}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} 8\pi a_1 \sqrt{\frac{AZ}{BCD}} \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{3}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6} \right) \times e^{a_1^2} \right\},$$

за одговарајуће A, B, C, D, Z из теореме 2.7.

Оцена *Von Sidow*-а и *Notaris*-ова оцена грешке ([81], [55]) у овом случају су облика

$$\hat{r}_n(f) = \hat{r}_n^{(\text{Syd})}(f) = \inf_{1 < \rho < +\infty} \left\{ \frac{4\mu_0}{(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}} \cdot e^{a_1^2} \right\},$$

$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}
(10, 2.1, 1.07)	1.583, 1.581	(10, 50, 45)	1.888, 1.879	(10, 500, 400)	3.077, 3.075
(100, 2.1, 1.07)	1.582, 1.582	(100, 50, 45)	1.880, 1.879	(100, 500, 400)	3.077, 3.075
(10, 2.1, 1.09)	1.375, 1.099	(10, 50, 48)	1.582, 1.325	(10, 500, 460)	1.870, 1.858
(100, 2.1, 1.09)	1.119, 1.119	(100, 50, 48)	1.343, 1.341	(100, 500, 460)	1.860, 1.859
(10, 5, 3.85)	1.552, 1.348	(10, 50, 48.9)	1.547, 1.068	(10, 500, 498)	1.551, 1.066
(100, 5, 3.85)	1.378, 1.350	(100, 50, 48.9)	1.095, 1.085	(100, 500, 498)	1.099, 1.093
(10, 5, 3.96)	1.502, 1.084	(10, 100, 90)	1.969, 1.963	(10, 1000, 960)	1.641, 1.521
(100, 5, 3.96)	1.102, 1.097	(100, 100, 90)	1.965, 1.963	(100, 1000, 960)	1.528, 1.526
(10, 10, 8)	2.088, 2.085	(10, 100, 95)	1.644, 1.529	(10, 1000, 996)	1.553, 1.085
(100, 10, 8)	2.087, 2.086	(100, 100, 95)	1.535, 1.534	(100, 1000, 996)	1.121, 1.117
(10, 10, 8.96)	1.529, 1.063	(10, 100, 98.95)	1.554, 1.121	(10, 1000, 997)	1.551, 1.066
(100, 10, 8.96)	1.093, 1.086	(100, 100, 98.95)	1.156, 1.153	(100, 1000, 997)	1.100, 1.093

Табела 2.13: Вредности ρ^* , ρ_{\min} за неке $2 < \beta/\alpha$, $\delta > \beta/2$

где је $\mu_0 = \pi/(\alpha(\beta - \alpha - \delta))$, односно

$$\hat{r}_n(f) = \hat{r}_n^{(\text{Not})}(f) = \inf_{1 < r < +\infty} \left\{ \frac{X}{Y} \cdot e^{r^2} \right\},$$

где је

$$\begin{aligned}
(2.45) \quad X &= 8\pi\tau^{2n+1} r \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}, \\
Y &= [\beta(1 + \tau^{2n+1}) - 2\delta\tau(1 + \tau^{2n-1}) + (\beta - 2\alpha)\tau^2(1 + \tau^{2n-3})] \\
&\quad \times [(\beta - 2\alpha)\tau^2 - 2\delta\tau + \beta], \\
\tau &= r - \sqrt{r^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Очигледно је да је $\max_{z \in C_r} |e^{z^2}| = e^{r^2}$. За $\alpha = 1$ и одређене вредности β, δ , добијене вредности $\hat{r}_{35}^{(\text{Syd})}(f_0)$, $\hat{r}_{35}^{(\text{Not})}(f_0)$, $r_{35}(f_0)$ су дате у табели 2.15.

Посматрајмо сада интеграл (2.44) са функцијом

$$f(t) = \frac{e^{e^t}}{(a+t)^k(b+t)^\ell(c+t)^m},$$

где је $c \leq b \leq a < -1$; $k \in \mathbb{N}$, $\ell, m \in \mathbb{N}_0$, разматраном у пододељку 2.1.3. Као што је већ речено, имамо

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} \left| \frac{e^{e^z}}{(a+z)^k(b+z)^\ell(c+z)^m} \right| = \frac{e^{e^{a_1}}}{|a+a_1|^k |b+a_1|^\ell |c+a_1|^m},$$

док се у овом случају тражени услов аналитичности своди на $|a| \geq \frac{1}{2}(\rho_{\max} + \rho_{\max}^{-1})$.

$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}	$(n, \beta/\alpha, \delta/\alpha)$	ρ^*, ρ_{\min}
(10, 5, 0)	1.291, 1.001	(10, 5, 1)	1.291, 1.001	(10, 50, -15)	1.532, 1.532
(100, 5, 0)	1.291, 1.001	(100, 5, 1)	1.288, 1.001	(100, 50, -15)	1.531, 1.531
(10, 7, 0)	1.184, 1.001	(10, 5, -3)	1.291, 1.001	(10, 50, -30)	1.301, 1.300
(100, 7, 0)	1.184, 1.001	(100, 5, -3)	1.291, 1.001	(100, 50, -30)	1.292, 1.292
(10, 8, 0)	1.155, 1.105	(10, 7, 2)	1.649, 1.648	(10, 50, -47)	1.103, 1.099
(100, 8, 0)	1.155, 1.001	(100, 7, 2)	1.648, 1.648	(100, 50, -47)	1.060, 1.005
(10, 10, 0)	1.390, 1.390	(10, 7, -2)	1.191, 1.001	(10, 100, 20)	2.731, 2.731
(100, 10, 0)	1.386, 1.385	(100, 7, -2)	1.191, 1.001	(100, 100, 20)	2.731, 2.731
(10, 12, 0)	1.512, 1.511	(10, 10, 4)	3.725, 3.725	(10, 100, -90)	1.130, 1.129
(100, 12, 0)	1.511, 1.510	(100, 10, 4)	3.725, 3.725	(100, 100, -90)	1.115, 1.113
(10, 15, 0)	1.627, 1.627	(10, 10, -3)	1.118, 1.059	(10, 100, -98.9)	1.195, 1.001
(100, 15, 0)	1.626, 1.626	(100, 10, -3)	1.115, 1.001	(100, 100, -98.9)	1.191, 1.001
(10, 25, 0)	1.807, 1.807	(10, 10, -8.5)	1.118, 1.001	(10, 500, -250)	1.443, 1.442
(100, 25, 0)	1.807, 1.807	(100, 10, -8.5)	1.117, 1.001	(100, 500, -250)	1.442, 1.441
(10, 40, 0)	1.909, 1.909	(10, 20, 5)	2.571, 2.570	(10, 500, -400)	1.236, 1.235
(100, 40, 0)	1.909, 1.909	(100, 20, 5)	2.571, 2.570	(100, 500, -400)	1.224, 1.224
10, 100, 0	2.013, 2.012	(10, 20, -12)	1.185, 1.185	(10, 500, -475)	1.148, 1.147
(100, 100, 0)	2.013, 2.012	(100, 20, -12)	1.150, 1.149	(100, 500, -475)	1.100, 1.096
(10, 500, 0)	2.069, 2.069	(10, 20, -18.9)	1.199, 1.001	(10, 500, -495)	1.175, 1.078
(100, 500, 0)	2.069, 2.069	(100, 20, -18.9)	1.184, 1.001	(100, 500, -495)	1.145, 1.031

Табела 2.14: Вредности ρ^* , ρ_{\min} за неке $2 < \beta/\alpha$, $\delta < \beta/2$

Израз $r_n(f)$ ($\geq \tilde{r}_n(f)$) постаје

$$r_n(f) = \inf_{\rho_n^* < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{1}{\rho^{n+\frac{1}{2}}} 8\pi a_1 \sqrt{\frac{AZ}{BCD}} \left(1 - \frac{1}{4}a_1^{-2} - \frac{3}{64}a_1^{-4} - \frac{5}{256}a_1^{-6} \right) \right. \\ \left. \times \frac{e^{e^{a_1}}}{|a + a_1|^k |b + a_1|^\ell |c + a_1|^m} \right\},$$

У овом случају је

$$\hat{r}_n(f) = \hat{r}_n^{(\text{Syd})}(f) = \inf_{1 < \rho < \rho_{\max}} \left\{ \frac{4\mu_0}{(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}} \right. \\ \left. \times \frac{e^{e^{a_1}}}{|a + a_1|^k |b + a_1|^\ell |c + a_1|^m} \right\}, \\ \hat{r}_n(f) = \hat{r}_n^{(\text{Not})}(f) = \inf_{1 < r < r_{\max}} \left\{ \frac{X}{Y} \cdot e^{r^2} \right\},$$

где су X и Y дати са (2.45) и $r_{\max} = |a|$.

Посматрајмо подинтегралну функцију f при конкретним вредностима параметара $k = 1, \ell = 5, m = 10$ и

$$a = -12.020833333333333, \quad b = -17.51428571428572, \\ c = -23.01086956521739,$$

β, δ	$\hat{r}_{35}^{(\text{Syd})}(f_0)$	$\hat{r}_{35}^{(\text{Not})}(f_0)$	$r_{35}(f_0)$	<i>Error</i>
1.2, 0	1.27(-58)	2.12(-59)	2.10(-59)	1.20(-60)
1.7, 0	3.64(-59)	1.05(-59)	1.04(-59)	5.94(-61)
1.3, 0.15	1.70(-58)	1.87(-59)	1.72(-59)	1.03(-60)
1.5, -0.3	3.18(-59)	1.26(-59)	1.43(-59)	7.59(-61)
1.6, 0.5	2.55(-58)	1.32(-59)	1.06(-59)	6.89(-61)
1.6, -0.5	2.32(-59)	1.07(-59)	1.31(-59)	6.65(-61)
1.8, 0.3	5.09(-59)	9.87(-60)	8.76(-60)	5.36(-61)
1.9, -0.7	1.59(-59)	7.41(-60)	9.44(-60)	4.71(-61)
2.1, 1	2.55(-58)	8.08(-60)	5.82(-60)	4.06(-61)
3, -1.5	7.28(-60)	2.84(-60)	3.95(-60)	1.88(-61)
5, -2.9	3.69(-60)	9.93(-61)	1.46(-60)	6.77(-62)
7, 5.8	1.27(-58)	8.22(-61)	5.82(-61)	3.83(-62)
10, 8.4	4.25(-59)	4.04(-61)	2.86(-61)	1.88(-62)
10, 3.5	4.63(-60)	3.37(-61)	2.64(-61)	1.74(-62)
10, -8.7	1.44(-60)	2.27(-61)	4.06(-61)	1.72(-62)
100, 95	6.37(-60)	4.21(-63)	2.98(-63)	1.91(-64)
100, 85	1.82(-60)	4.04(-63)	2.86(-63)	1.88(-64)
100, 27	3.54(-61)	3.26(-63)	2.70(-63)	1.73(-64)
100, -35	1.90(-61)	2.65(-63)	3.33(-63)	1.67(-64)
100, -50	1.71(-61)	2.53(-63)	3.52(-63)	1.68(-64)

Табела 2.15: Вредности $\hat{r}_{35}^{(\text{Syd})}(f_0)$, $\hat{r}_{35}^{(\text{Not})}(f_0)$, $r_{35}(f_0)$, *Error* за $\alpha = 1$ и неке β, δ

што значи да можемо узети $\rho_{\max} = 24$. У овом случају, за $\alpha = 1$ и неке вредности β, δ ($0 < \alpha < \beta$, $0 \leq \delta < \beta - \alpha$) добијени резултати су дати у табелама 2.16, 2.17.

Конечно, посматрајмо нумеричко рачунање интеграла (2.44) са

$$f(t) = \bar{f}(t) = e^{e^{\cos(\omega t)}},$$

где је $\omega > 0$. Функција $\bar{f}(z) = e^{e^{\cos(\omega z)}}$ је такође већ анализирана у пододељку 2.1.3, где смо се уверили да је

$$\max_{z \in C_r} \left| e^{e^{\cos(\omega z)}} \right| = e^{e^{\cosh(\omega r)}} \quad \text{и} \quad \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} \left| e^{e^{\cos(\omega z)}} \right| = e^{e^{\cosh(\omega b_1)}}, \quad b_1 = \frac{1}{2}(\rho - \rho^{-1}).$$

За $\alpha = 1$ и одређене вредности β, δ , вредности $\hat{r}_{29}^{(\text{Syd})}(\bar{f})$, $\hat{r}_{29}^{(\text{Not})}(\bar{f})$, $r_{29}(\bar{f})$, као и актуелна оцена грешке *Error* добијене за $\omega = 1$ и $\omega = 1.8$ су приказане у табелама 2.18 и 2.19 респективно.

β, δ	$\hat{r}_{15}^{(\text{Syd})}(f)$	$\hat{r}_{15}^{(\text{Not})}(f)$	$r_{15}(f)$	<i>Error</i>
1.2, 0	5.17(-34)	1.16(-34)	1.11(-34)	5.80(-37)
1.7, 0	1.48(-34)	5.53(-35)	5.31(-35)	2.77(-37)
1.3, 0.15	6.90(-34)	1.08(-34)	8.51(-35)	4.45(-37)
1.5, -0.3	1.29(-34)	6.13(-35)	8.24(-35)	4.29(-37)
1.6, 0.5	1.03(-33)	8.33(-35)	4.71(-35)	2.48(-37)
1.6, -0.5	9.40(-35)	4.91(-35)	7.99(-35)	4.15(-37)
1.8, 0.3	2.07(-34)	5.67(-35)	4.11(-35)	2.15(-37)
1.9, -0.7	6.46(-35)	3.29(-35)	5.86(-35)	3.04(-37)
2.1, 1	1.03(-33)	5.52(-35)	2.38(-35)	1.25(-37)
3, -1.5	2.95(-35)	1.17(-35)	2.58(-35)	1.33(-37)
5, -2.9	1.50(-35)	3.92(-36)	9.80(-36)	5.08(-38)
7, 5.8	5.17(-35)	6.80(-36)	2.81(-36)	8.59(-39)
10, 8.4	1.72(-34)	3.34(-36)	1.38(-36)	4.16(-39)
10, 3.5	1.88(-35)	1.99(-36)	1.08(-36)	5.70(-39)
10, -8.7	5.84(-36)	8.07(-37)	3.32(-36)	1.71(-38)
100, 95	2.59(-35)	3.74(-38)	1.55(-38)	3.86(-41)
100, 85	7.39(-36)	3.31(-38)	1.37(-38)	4.09(-41)
100, 27	1.44(-36)	1.82(-38)	1.13(-38)	5.96(-41)
100, -35	7.72(-37)	1.12(-38)	1.88(-38)	9.80(-41)
100, -50	6.94(-37)	1.01(-38)	2.17(-38)	1.13(-40)

Табела 2.16: Вредности $\hat{r}_{15}^{(\text{Syd})}(f)$, $\hat{r}_{15}^{(\text{Not})}(f)$, $r_{15}(f)$, *Error* за $\alpha = 1$ и неке β, δ

β, δ	$\hat{r}_{50}^{(\text{Syd})}(f)$	$\hat{r}_{50}^{(\text{Not})}(f)$	$r_{50}(f)$	<i>Error</i>
1.2, 0	8.56(-88)	1.66(-88)	1.62(-88)	4.93(-91)
1.7, 0	2.45(-88)	8.09(-89)	7.91(-89)	2.40(-91)
1.3, 0.15	1.14(-87)	1.51(-88)	1.28(-88)	3.90(-91)
1.5, -0.3	2.14(-88)	9.30(-89)	1.16(-88)	3.52(-91)
1.6, 0.5	1.71(-87)	1.11(-88)	7.48(-89)	2.27(-91)
1.6, -0.5	1.56(-88)	7.65(-89)	1.09(-88)	3.31(-91)
1.8, 0.3	3.43(-88)	7.97(-89)	6.38(-89)	1.94(-91)
1.9, -0.7	1.07(-88)	5.22(-89)	7.97(-89)	2.41(-91)
2.1, 1	8.16(-89)	7.14(-89)	3.93(-89)	1.19(-91)
3, -1.5	4.89(-89)	1.92(-89)	3.43(-89)	1.04(-91)
5, -2.9	2.48(-89)	6.57(-90)	1.29(-89)	3.90(-92)
7, 5.8	8.56(-88)	8.04(-90)	4.29(-90)	8.80(-93)
10, 8.4	2.85(-88)	3.96(-90)	2.11(-90)	4.27(-93)
10, 3.5	3.11(-89)	2.78(-90)	1.80(-90)	5.46(-93)
10, -8.7	9.68(-90)	1.41(-90)	3.96(-90)	1.19(-92)
100, 95	4.28(-89)	4.27(-92)	2.28(-92)	4.04(-95)
100, 85	1.22(-89)	3.95(-92)	2.10(-92)	4.23(-95)
100, 27	2.38(-90)	2.62(-92)	1.86(-92)	5.67(-95)
100, -35	1.28(-90)	1.82(-92)	2.70(-92)	8.19(-95)
100, -50	1.15(-90)	1.68(-92)	2.98(-92)	9.05(-95)

Табела 2.17: Вредности $\hat{r}_{50}^{(\text{Syd})}(f)$, $\hat{r}_{50}^{(\text{Not})}(f)$, $r_{50}(f)$, *Error* за $\alpha = 1$ и неке β, δ

β, δ	$\hat{r}_{29}^{(\text{Syd})}(\bar{f})$	$\hat{r}_{29}^{(\text{Not})}(\bar{f})$	$r_{29}(\bar{f})$	<i>Error</i>
1.2, 0	4.97(-27)	1.23(-24)	2.47(-20)	3.18(-25)
1.7, 0	3.53(-25)	1.10(-20)	1.46(-25)	2.67(-27)
1.3, 0.15	1.65(-24)	2.41(-20)	2.32(-25)	3.94(-27)
1.5, -0.3	3.08(-25)	1.13(-20)	2.47(-25)	3.68(-27)
1.6, 0.5	2.47(-24)	2.02(-20)	1.19(-25)	2.12(-27)
1.6, -0.5	2.24(-25)	8.62(-21)	2.50(-25)	3.33(-27)
1.8, 0.3	4.94(-25)	1.22(-20)	1.07(-25)	2.07(-27)
1.9, -0.7	1.54(-25)	5.55(-21)	1.84(-25)	2.43(-27)
2.1, 1	2.47(-24)	1.44(-20)	5.69(-26)	9.31(-28)
3, -1.5	7.05(-26)	1.83(-21)	8.30(-26)	1.01(-27)
5, -2.9	3.58(-26)	5.87(-22)	3.19(-26)	3.66(-28)
7, 5.8	1.23(-24)	2.19(-21)	7.54(-27)	1.55(-29)
10, 8.4	4.11(-25)	1.06(-21)	3.69(-27)	6.23(-30)
10, 3.5	4.49(-26)	4.17(-22)	2.55(-27)	5.76(-29)
10, -8.7	1.39(-26)	1.12(-22)	1.27(-26)	7.63(-29)
100, 95	6.17(-26)	1.31(-23)	4.39(-29)	3.59(-32)
100, 85	1.76(-26)	1.02(-23)	3.58(-29)	4.43(-32)
100, 27	3.43(-27)	3.55(-24)	2.68(-29)	6.81(-31)
100, -35	1.84(-27)	1.72(-24)	5.29(-29)	1.04(-30)
100, -50	1.66(-27)	1.49(-24)	6.50(-29)	1.00(-30)

Табела 2.18: Вредности $\hat{r}_{29}^{(\text{Syd})}(\bar{f})$, $\hat{r}_{29}^{(\text{Not})}(\bar{f})$, $r_{29}(\bar{f})$, *Error* за $\omega = 1$, $\alpha = 1$ и неке β, δ

β, δ	$\hat{r}_{29}^{(\text{Syd})}(\bar{f})$	$\hat{r}_{29}^{(\text{Not})}(\bar{f})$	$r_{29}(\bar{f})$	<i>Error</i>
1.2, 0	2.22(-13)	1.42(+07)	9.09(-14)	5.29(-16)
1.7, 0	6.35(-14)	3.74(+06)	3.60(-14)	3.17(-16)
1.3, 0.15	2.96(-13)	1.68(+07)	5.80(-14)	3.56(-16)
1.5, -0.3	5.56(-14)	3.19(+06)	7.72(-14)	4.93(-16)
1.6, 0.5	4.45(-13)	1.91(+07)	2.47(-14)	8.95(-17)
1.6, -0.5	4.04(-14)	2.01(+06)	8.67(-14)	4.68(-16)
1.8, 0.3	8.89(-14)	5.56(+06)	2.33(-14)	1.76(-16)
1.9, -0.7	2.78(-14)	1.10(+06)	6.33(-14)	3.58(-16)
2.1, 1	4.45(-13)	1.69(+07)	1.04(-14)	3.40(-17)
3, -1.5	1.27(-14)	2.79(+05)	2.88(-14)	1.55(-16)
5, -2.9	6.44(-15)	7.81(+04)	1.10(-14)	5.60(-17)
7, 5.8	2.22(-13)	5.45(+06)	1.78(-15)	1.61(-17)
10, 8.4	7.41(-14)	2.04(+06)	8.38(-16)	8.27(-18)
10, -8.7	2.51(-15)	1.26(+04)	7.10(-15)	8.91(-18)
100, 95	1.11(-14)	4.28(+04)	1.19(-17)	8.86(-20)
100, 85	3.18(-15)	1.09(+04)	1.68(-15)	9.08(-20)
100, -35	3.32(-16)	2.22(+02)	1.23(-17)	2.04(-19)
100, -50	2.98(-16)	1.81(+2)	1.73(-17)	1.76(-19)

Табела 2.19: Вредности $\hat{r}_{29}^{(\text{Syd})}(\bar{f})$, $\hat{r}_{29}^{(\text{Not})}(\bar{f})$, $r_{29}(\bar{f})$, *Error* за $\omega = 1.8$, $\alpha = 1$ и неке β, δ

3. GAUTSCHI-ЈЕВА ХИПОТЕЗА

3.1. Опис проблема

Нека је ω тежинска функција на интервалу $[-1, 1]$ (интеграбилна, ненегативна функција на $[-1, 1]$ која се анулира само у изолованим тачкама). У овом поглављу доказујемо хипотезу формулисану од стране *Gautschi*-ја ([13]) за *Gauss-Radau*-ове квадратурне формуле

$$(3.1) \quad \int_{-1}^1 f(t)\omega(t) dt = G_{n+1}[f] + R_{n+1}(f),$$
$$G_{n+1}[f] = \lambda_0 f(-1) + \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu f(\tau_\nu), \quad n \in \mathbb{N},$$

у односу на трећу *Chebyshev*-љеву тежинску функцију $\omega(t) = \omega_3(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ и са фиксираним чвором у -1 (или 1).

Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни таква да окружује интервал $[-1, 1]$ и $\mathcal{D} = \text{int } \Gamma$ њена унутрашњост. Ако је подинтегрална функција f аналитичка у \mathcal{D} и непрекидна на $\overline{\mathcal{D}}$, онда се остатак $R_{n+1}(f)$ у (3.1) добија у облику интеграла по затвореној кривој

$$(3.2) \quad R_{n+1}(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K_{n+1}(z) f(z) dz.$$

Језгро је дато са

$$K_{n+1}(z) \equiv K_{n+1}(z, \omega) = \frac{\varrho_{n+1}(z)}{(z+1)\pi_n(z)}, \quad z \notin [-1, 1],$$

где је π_n ортогонални полином n -тог степена у односу на тежинску функцију $\omega(t) = (1+t)^{3/2}(1-t)^{-1/2}$, а

$$\varrho_{n+1}(z) \equiv \varrho_{n+1}(z, \omega) = \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{z-t} \omega(t) dt.$$

Интегрална репрезентација (3.2) води ка оцени за грешку

$$(3.3) \quad |R_{n+1}(f)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_{n+1}(z)| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right),$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина контуре Γ .

За $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$, где је елипса \mathcal{E}_ρ дата са (2.2), оцена (3.3) се своди на

$$(3.4) \quad |R_{n+1}(f)| \leq \frac{\ell(\mathcal{E}_\rho)}{2\pi} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+1}(z)| \right) \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right).$$

У [13] *Gautschi*, је разматрао *Gauss-Radau*-ове и *Gauss-Lobatto*-ове квадратурне формуле у односу на све четири *Chebyshev*-љеве тежинске функције

$$\omega_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \omega_2(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad \omega_3(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \quad \omega_4(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

и добио експлицитне изразе за одговарајућа језгра $K(z; \omega_j)$, $j = 1, 2, 3, 4$, у функцији од $u = \rho e^{i\theta}$. За *Gauss-Lobatto* квадратурне формуле доказано је да на \mathcal{E}_ρ $|K_{n+2}(z; \omega_1)|$ достиже свој максимум на реалној осе (видети [13, теорема 4.1]). За ω_2, ω_3 и ω_4 се дошло до емпиријских резултата и хипотеза, које је касније доказао *Schira* у [62].

За *Gauss-Radau*-ову квадратурну формулу са фиксираним чвором у -1 , *Gautschi* је доказао да модуо одговарајућег језгра $K_{n+1}(z; \omega)$ у случају *Chebyshev*-љевих тежина $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_4$ на \mathcal{E}_ρ достиже свој максимум на негативном делу реалне осе (видети [13, теореме 4.4 и 4.5]). Накнадно су Миловановић, Спалевић и Пранић у [51] доказали и потврдили емпиријске резултате из [13] у случају $\omega = \omega_2$. За последњи преостали случај, $\omega = \omega_3$, је до скора постојала једино хипотеза у [13] базирана на емпиријским резултатима. Следи њен детаљан доказ.

3.2. Максимум модула језгра *Gauss-Radau*-ове квадратурне формуле са трећом *Chebyshev*-љевом тежинском функцијом

За $\omega = \omega_3$, у *Gauss-Radau*-овој квадратурној формули (3.1) постоје нумерички резултати (видети [13, стр. 224, 225]) који указују на то да се одговарајући максимум модула језгра достиже на негативном делу реалне осе за $1 < \rho < \rho_0(n)$ и на позитивном делу реалне осе за $\rho > \rho_0(n)$, где су вредности $\rho_0(n) = \rho_n$ приказане у [13, табела 4.3]. Како је $\rho_0 = \rho_0(n)$ веома близу 1, посебно када n расте, део хипотезе који се односи на $1 < \rho < \rho_0(n)$ је мање битан са практичне тачке гледишта јер тада одговарајући максимум тежи бесконачности

са растом броја n . Дакле, разматрана оцена грешке је безначајна у том случају. Због тога се усредсређујемо на случај $\rho > \rho_0(n)$.

Gautschi ([13, једн. (3.17)]) је извео експлицитни израз за језгро по \mathcal{E}_ρ :

$$(3.5) \quad K_{n+1}(z; \omega_3) = \frac{2\pi}{u^n} \frac{u+1}{u-1} \frac{u^{-1} + \frac{2n+3}{2n+1}}{u^{n+2} + u^{-n-1} + \frac{2n+3}{2n+1}(u^{n+1} + u^{-n})},$$

где је $z = (u + u^{-1})/2$ и $u = \rho e^{i\theta}$. Користећи (3.5) одређујемо модуо језгра на \mathcal{E}_ρ . Такође нас занима и израз за модуо језгра кад је $\theta = 0$, јер одговарајућа *Gautschi*-јева хипотеза тврди да модуо језгра достиже свој максимум у $\theta = 0$ за све $\rho > \rho_0 (> 1)$, где је ρ_0 веома близу 1. Лако изводимо

$$|u + 1|^2 = \rho(\rho + 2 \cos \theta + 1/\rho) = A + A_1,$$

$$|u - 1|^2 = \rho(\rho - 2 \cos \theta + 1/\rho) = B + B_1,$$

$$\begin{aligned} \left| u^{-1} + \frac{2n+3}{2n+1} \right|^2 &= \frac{1}{\rho^2} \frac{2n+3}{2n+1} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \rho^2 + 2 \cos \theta \cdot \rho + \frac{2n+1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{\rho^2} \frac{2n+3}{2n+1} (C + C_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| u^{n+2} + u^{-n-1} + \frac{2n+3}{2n+1}(u^{n+1} + u^{-n}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\rho^{2n+2}} \left(\rho^{4n+6} + 2 \frac{(2n+3)}{2n+1} \cos \theta \cdot \rho^{4n+5} + \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \rho^{4n+4} \right. \\ &\quad + 2 \frac{2n+3}{2n+1} \cos(2n+2)\theta \cdot \rho^{2n+4} \\ &\quad + 2 \left(\cos(2n+3)\theta + \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\theta \right) \rho^{2n+3} \\ &\quad + 2 \frac{2n+3}{2n+1} \cos(2n+2)\theta \cdot \rho^{2n+2} + \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \rho^2 \\ &\quad \left. + 2 \frac{(2n+3)}{2n+1} \cos \theta \cdot \rho + 1 \right) = \frac{1}{\rho^{2n+2}} (D + D_1), \end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned} A &= \rho^2 + 2\rho + 1 = (\rho + 1)^2, \\ B &= \rho^2 - 2\rho + 1 = (\rho - 1)^2, \\ C &= \frac{2n+3}{2n+1} \rho^2 + 2\rho + \frac{2n+1}{2n+3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \rho^{4n+6} + 2 \cdot \frac{2n+3}{2n+1} \rho^{4n+5} + \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \rho^{4n+4} \\
&+ 2 \cdot \frac{2n+3}{2n+1} \rho^{2n+4} + 2 \left(1 + \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \right) \rho^{2n+3} \\
&+ 2 \cdot \frac{2n+3}{2n+1} \rho^{2n+2} + \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \rho^2 + 2 \cdot \frac{2n+3}{2n+1} \rho + 1
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
A_1 &= -B_1 = C_1 = 2(\cos \theta - 1)\rho, \\
D_1 &= 2 \frac{(2n+3)}{2n+1} (\cos \theta - 1) \cdot \rho^{4n+5} + 2 \frac{2n+3}{2n+1} (\cos(2n+2)\theta - 1) \rho^{2n+4} \\
&+ 2 \left(\cos(2n+3)\theta - 1 + \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} (\cos(2n+1)\theta - 1) \right) \rho^{2n+3} \\
&+ 2 \frac{2n+3}{2n+1} (\cos(2n+2)\theta - 1) \rho^{2n+2} + 2 \frac{2n+3}{2n+1} (\cos \theta - 1) \rho.
\end{aligned}$$

Изрази A, B, C и D су строго позитивне функције по ρ и n , а A_1, B_1, C_1 и D_1 су такође функције које зависе од ρ и n , али и од θ и анулирају се за $\theta = 0$.

Сада можемо формулисати главно тврђење:

Теорема 3.1. За *Gauss-Radau*-ову квадратурну формулу са n чворова (и фиксираним чвором у -1) (3.1), $n \in \mathbb{N}$, са трећом *Chebyshev*-љевом тежинском функцијом, постоји $\rho_0 \in (1, +\infty)$ ($\rho_0 = \rho_0(n)$) такво да моду језгра $|K_{n+1}(z; \omega_3)|$ достиже свој максимум на позитивном делу реалне осе ($\theta = 0$) ако је $\rho > \rho_0$, тј.

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_{n+1}(z; \omega_3)| = |K_{n+1}\left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}), \omega_3\right)|$$

за $\rho > \rho_0$.

Доказ. Користећи претходно уведену нотацију, треба да покажемо да важи

$$\frac{(A + A_1)(C + C_1)}{(B + B_1)(D + D_1)} \leq \frac{AC}{BD},$$

односно

(3.6)

$$I = I(\rho) = \rho^{-1} [CD(A_1B - AB_1) + C_1BD(A + A_1) - AC(B + B_1)D_1] \leq 0,$$

за свако ρ веће од неког ρ_0 . Користимо фактор ρ^{-1} јер израз у средњој загради у (3.6) садржи ρ као свој чинилац.

Лако се уверавамо да је I полином по ρ степена $4n + 10$, чији коефицијенти зависе само од θ , тј.

$$(3.7) \quad I = I(\rho) = \sum_{i=0}^{4n+10} \alpha_i(\theta) \rho^i.$$

Да би се доказало да $I(\rho)$ постаје непозитиван за довољно велике ρ , потребно је анализирати знак његовог водећег коефицијента

$$\begin{aligned}\alpha_{4n+10} &= \frac{2n+3}{2n+1} \cdot (2(\cos\theta - 1) + 2(\cos\theta - 1)) \\ &\quad + 2(\cos\theta - 1) - \frac{2n+3}{2n+1} \cdot 2 \frac{(2n+3)}{2n+1} (\cos\theta - 1) \\ &= (\cos\theta - 1) \left(4 \frac{2n+3}{2n+1} + 2 - 2 \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^2 \right).\end{aligned}$$

Чињеница

$$\frac{2n+3}{2n+1} \leq \frac{5}{3} < 2$$

повлачи

$$4 \frac{2n+3}{2n+1} + 2 > 2 \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^2 + 2 > 2 \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^2,$$

одакле је негативност коефицијента α_{4n+10} очигледна због негативности израза $\cos\theta - 1$. \square

Наш задатак је да прецизно нађемо ρ_0 . Да је полином I непозитиван за свако ρ веће од $\rho_0 = \rho_0(n)$ доказујемо на начин већ описан у пододељцима 2.2.2 и 2.3.2 - напишемо га као полином по $\rho - \rho_0$, тј.

$$(3.8) \quad I = \sum_{i=0}^{4n+10} \beta_i(\theta) (\rho - \rho_0)^i,$$

за неке друге коефицијенте $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{4n+10}$, који су такође тригонометријске функције по θ , тј. $\beta_i = \beta_i(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, 4n+10$ и уверимо се да су те функције непозитивне кад θ припада интервалу $[0, 2\pi]$.

За $n = 1, 2, \dots, 10$ имамо дате вредности $\rho_0 = \rho_0(n)$ у формулацији хипотезе. У сваком од ових 10 случајева, када нацртамо графике свих β -коефицијената, видимо да се сви ти графици налазе испод x -осе.

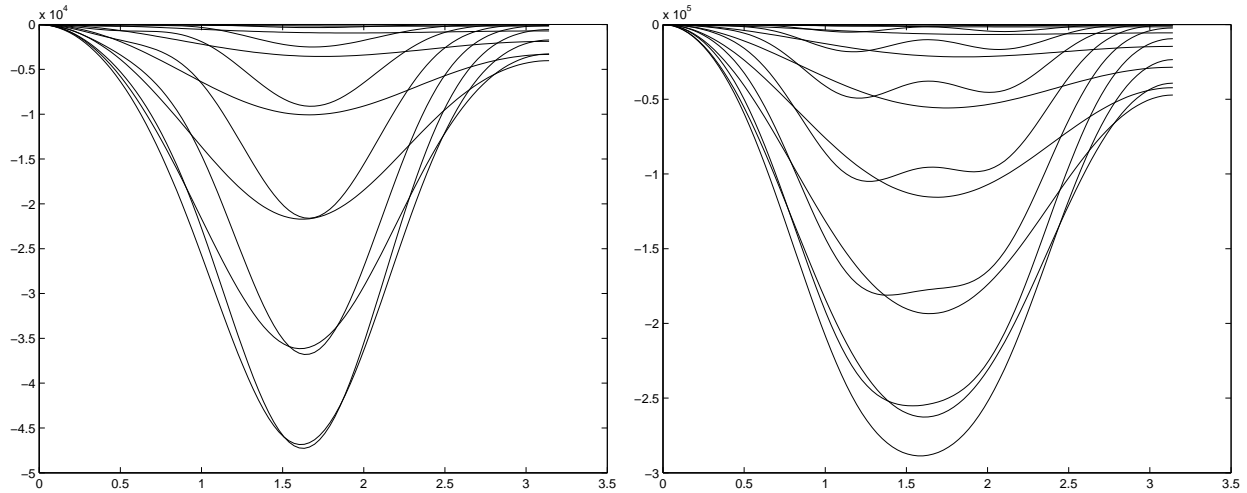
Као што се да приметити, међу ових 10 случајева (видети [13]), само за $n = 6$, $n = 9$ и $n = 10$ вредност добијена овом методом се комплетно не поклапа са ρ_n датим у [13, табела 4.3].

За остале n треба сами да „ухватимо” одговарајућу вредност пробањем (исто као што је било рађено за $n = 1, 2, \dots, 10$) и онда да проверимо да су за ту вредност сви коефицијенти $\beta_i(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, 4n+10$, непозитивни. Овде су дати неки примери. Рачунали смо ρ_0 на 5 значајних цифара. Када n постане веће од 20, у добијеној вредности ρ_0 прве четири цифре после децималног зареза постају 0.

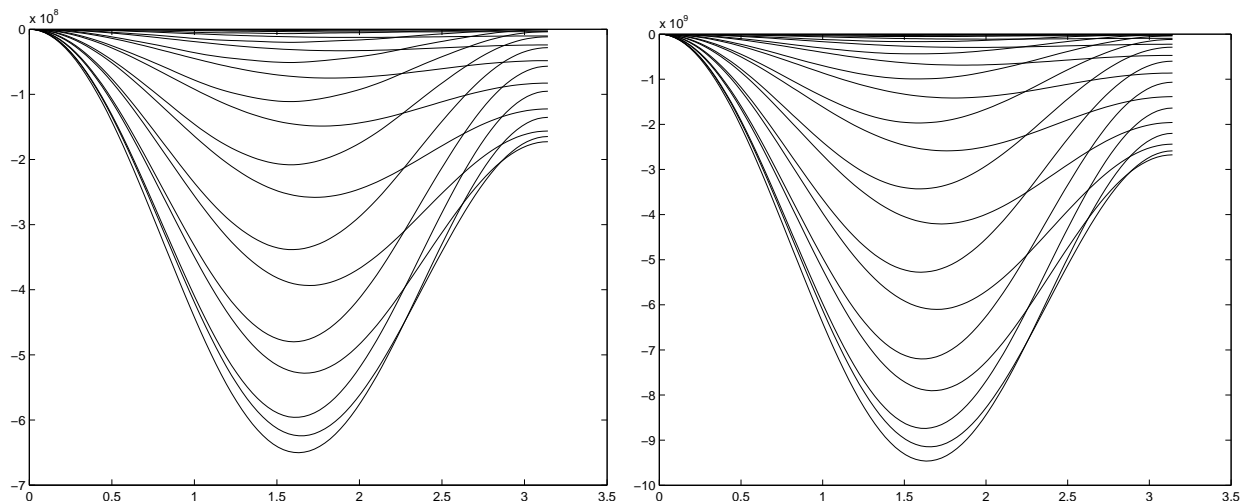
Напомена. Израз $I(\rho)$ у (3.6) је, као функција која зависи од $\theta \in [0, 2\pi]$, симетричан у односу на $\theta = \pi$. Али, с обзиром на то да (и

на графицима се то види) коефицијенти $\beta_i(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 10$, у општем случају нису симетрични у односу на $\theta = \pi$ ($\theta \in [0, 2\pi]$), разматрање које се тиче нашег метода не можемо свести на интервал $[0, \pi]$. Коначно, означавање функција $\beta_i(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 10$, на фигурама било би врло компликовано и нејасно, посебно за веће n . Зато смо од тога одустали. Сврха је приказати да сви графици $\beta_i(\theta)$, $i = 0, 1, \dots, 4n + 10$, постају непозитивни за $\theta \in [0, 2\pi]$.

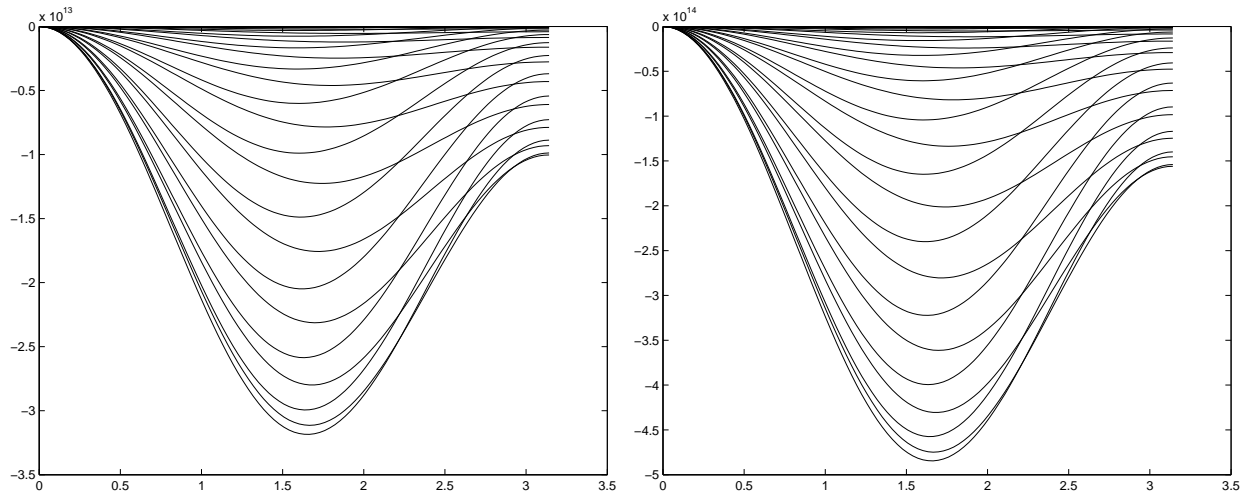
Слика 1: Функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{14}(\theta)$ у случају $n = 1$ за $\rho_0 = 1.1339$ (лево) и функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{18}(\theta)$ у случају $n = 2$ за $\rho_0 = 1.0318$ (десно).



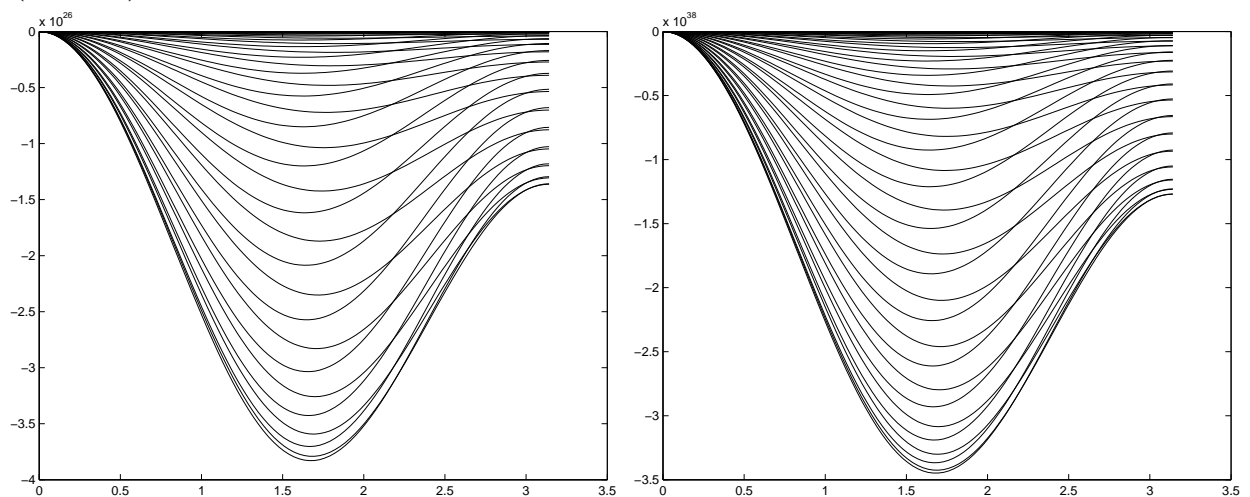
Слика 2: Функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{30}(\theta)$ у случају $n = 5$ за $\rho_0 = 1.0036$ (лево) и функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{34}(\theta)$ у случају $n = 6$ за $\rho_0 = 1.0023$ (десно).



Слика 3: Функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{46}(\theta)$ у случају $n = 9$ за $\rho_0 = 1.0010$ (лево) и функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{50}(\theta)$ у случају $n = 10$ за $\rho_0 = 1.0008$ (десно).



Слика 4: Функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{90}(\theta)$ у случају $n = 20$ за $\rho_0 = 1.00012$ (лево) и функције $\beta_0(\theta), \dots, \beta_{130}(\theta)$ у случају $n = 30$ за $\rho_0 = 1.00002$ (десно).



4. ПРИЛОГ ОЦЕНИ ГРЕШКЕ GAUSS-TURÁN-ОВЕ КВАДРАТУРНЕ ФОРМУЛЕ СА CHEBYSHEV-ЉЕВОМ ТЕЖИНСКОМ ФУНКЦИЈОМ ПРВЕ ВРСТЕ

4.1. Увод

Нека је стандардно Γ произвољна проста затворена крива у комплексној равни која окружује интервал $[-1, 1]$ и f функција аналитичка у њеној унутрашњости $\mathcal{D} = \text{int } \Gamma$ и $\bar{\mathcal{D}}$.

У овом поглављу разматрамо остатак $R_{n,s}(f)$ добро познате *Gauss-Turán*-ове квадратурне формуле са вишеструким чворовима

$$(4.1) \quad \int_{-1}^1 f(t)\omega(t)dt = \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^{2s} A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_{\nu}) + R_{n,s}(f) \quad (n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}_0).$$

За тежинску функцију ω се подразумева да је ненегативна и интегрбилна функција на интервалу $[-1, 1]$. *Gauss-Turán*-ова квадратура (4.1) има алгебарски степен тачности једнак $2n(s+1) - 1$. У случају $s = 0$ своди се на стандардну *Gauss*-ову квадратурну формулу.

Чворови τ_{ν} у (4.1) су нуле ортогоналних полинома $\pi_n(t) \equiv \pi_{n,s}(t)$, познатих као „*s*-ортогонални” полиноми у односу на тежинску функцију ω , који задовољавају

$$\int_{-1}^1 [\pi_n(t)]^{2s+1} t^k \omega(t) dt = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Користимо исту нотацију као у [40]. Од сад па надаље подразумевамо да Γ представља елиптичку контуру (2.2).

На основу [40, једн. (4.4)] (видети такође [7]), као и [40, једн. (3.8)], добијамо оцену за грешку

$$(4.2) \quad |R_{n,s}(f)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_{2n(s+1)+k}| |\varepsilon_{n,k}^{(s)}| \leq \frac{2}{\rho^{2n(s+1)}} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_{\rho}} |f(z)| \right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\varepsilon_{n,k}^{(s)}|}{\rho^k}.$$

Када ω представља *Chebyshev*-љеву тежинску функцију прве врсте, односно

$$(4.3) \quad \omega(t) = (1 - t^2)^{-1/2},$$

експлицитни израз за одговарајућу суму у (4.2) је изведен у случајевима $s = 1$ и $s = 2$ у [40, једн. (4.6), (4.5)]. Пре тога је *Hunter* извео одговарајући експлицитни израз за случај $s = 0$ у [24, једн. (4.4)] (видети такође [40, једн. (4.7)]). У складу са тим експлицитним изразима, наметнула се претпоставка ([40, примедба 4.2]) у вези са експлицитним изразом за ову суму у општем случају $s \in \mathbb{N}_0$ (видети такође (4.5) у тексту који следи). У следећем одељку је изложен њен доказ.

4.2. Горња граница за остатак *Gauss-Turán*-ове квадратурне формуле са *Chebyshev*-љевом тежинском функцијом прве врсте

Лема 4.1. За свако $t \in \mathbb{N}_0$ важи

$$(4.4) \quad \sum_{i=0}^t (-1)^i \binom{m+s+i}{2s} \binom{2s+1}{i} = (-1)^t \frac{2s+1}{m+s+1} \binom{m+s+t+1}{2s+1} \binom{2s}{t}.$$

Доказ. Тврђење ћемо доказати индукцијом по t . За $t = 0$ треба показати

$$\binom{m+s}{2s} \binom{2s+1}{0} = \frac{2s+1}{m+s+1} \binom{m+s+1}{2s+1} \binom{2s}{0},$$

што је очигледно.

Ако претпоставимо да (4.4) важи за неко $t \in \mathbb{N}_0$, да бисмо доказали да важи за $t+1$ треба да покажемо да важи идентитет

$$\begin{aligned} & (-1)^t \frac{2s+1}{m+s+1} \binom{m+s+t+1}{2s+1} \binom{2s}{t} + (-1)^{t+1} \binom{m+s+t+1}{2s} \\ & \times \binom{2s+1}{t+1} = (-1)^{t+1} \frac{2s+1}{m+s+1} \binom{m+s+t+2}{2s+1} \binom{2s}{t+1}, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} & -\frac{2s+1}{m+s+1} \frac{m+t+1-s}{2s+1} \binom{m+s+t+1}{2s} \binom{2s}{t} \\ & + \binom{m+s+t+1}{2s} \frac{2s+1}{t+1} \binom{2s}{t} = \\ & \frac{2s+1}{m+s+1} \frac{m+t+s+2}{2s+1} \binom{m+s+t+1}{2s} \frac{2s-t}{t+1} \binom{2s}{t}, \end{aligned}$$

што је еквивалентно са следећим низом једнакости

$$\begin{aligned}
& -\frac{m+t+1-s}{m+s+1} + \frac{2s+1}{t+1} = \frac{(m+t+s+2)(2s-t)}{(m+s+1)(t+1)}, \\
& -(m+t+1-s)(t+1) + (2s+1)(m+s+1) \\
& = (m+t+s+2)(2s-t), \\
& (-t^2 + (-m+s-2)t - m - 1 + s) \\
& + (2sm + 2s^2 + 2s + m + s + 1) \\
& = t^2 + (s-m-2)t + 2sm + 2s^2 + 4s,
\end{aligned}$$

од којих је последња очито идентитет. \square

Теорема 4.2. За *Gauss-Turán*-ову квадратурну формулу (4.1) са *Chebyshev*-љевом тежинском функцијом прве врсте (4.3), ако је функција f аналитичка у унутрашњости \mathcal{D} елипсе \mathcal{E}_ρ дате са (2.2) и непрекидна на $\overline{\mathcal{D}}$, важи следећа оцена грешке:

$$(4.5) \quad |R_{n,s}(f)| \leq 2\pi \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \frac{\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{2s+1}{s-k} \rho^{2n(s-k)}}{(\rho^{2n} - 1)^{2s+1}}.$$

Доказ. Прво изражавамо бројеве $\varepsilon_{n,k}^{(s)}$ дате са (3.9) (и (3.7), (4.2), (4.3)) у [40]. На основу (3.7), (4.2) и (4.3) из [40], имамо да за све $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\omega_{n,k}^{(s)} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2n} \rfloor} \overline{\beta}_{n,2nj}^{(s)} \overline{\gamma}_{n,k-2nj}^{(s)},$$

тј.

$$\omega_{n,k}^{(s)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \overline{\beta}_{n,2nj}^{(s)} \overline{\gamma}_{n,k-2nj}^{(s)}.$$

Ако дефинишемо $\overline{\gamma}_{n,l}^{(s)} = 0$ за $l < 0$ и $\omega_{n,k}^{(s)} = 0$ за $k < 0$, имамо

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n,k}^{(s)} &= \frac{1}{4}(\omega_{n,k}^{(s)} - \omega_{n,k-2}^{(s)}) = \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} \overline{\beta}_{n,2nj}^{(s)} \left[\overline{\gamma}_{n,k-2nj}^{(s)} - \overline{\gamma}_{n,k-2-2nj}^{(s)} \right] \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{+\infty} \overline{\beta}_{n,2nj}^{(s)} \left[\overline{\gamma}_{n,k-2nj}^{(s)} - \overline{\gamma}_{n,k-2-2nj}^{(s)} \right]
\end{aligned}$$

за све $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{Z}$. Лако се види на основу (4.3) из [40] да је $\overline{\gamma}_{n,k-2nj}^{(s)} \neq \overline{\gamma}_{n,k-2-2nj}^{(s)}$ ако и само ако је $k \equiv 0 \pmod{2n}$ и $0 \leq k - 2nj \leq 2sn$, тј. $k = 2nm$ за неко $m \in \mathbb{N}_0$, $j \leq m \leq j + s$.

Приметимо да се [40, једн. (4.3)] може модификовати на следећи начин:

$$(4.6) \quad \bar{\gamma}_{n,k}^{(s)} = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2s-1}} \sum_{\nu=0}^j \binom{2s+1}{s-\nu}, & k = 2nj, 2nj+2, \dots, 2n(j+1)-2, \quad j \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

с обзиром на то да је

$$\frac{\pi}{2^{2s-1}} \sum_{\nu=0}^s \binom{2s+1}{s-\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2^{2s-1}} \sum_{\nu=0}^{2s+1} \binom{2s+1}{s-\nu} \right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2^{2s-1}} 2^{2s+1} = 2\pi$$

(где узимамо да је $\binom{n}{k} = 0$ за $n \in \mathbb{N}_0$, $k < 0$). Дакле, за $j \in \mathbb{N}_0$, на основу (4.6),

$$\bar{\gamma}_{n,k-2nj}^{(s)} - \bar{\gamma}_{n,k-2-2nj}^{(s)} = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2s-1}} \binom{2s+1}{s-(m-j)}, & k = 2nm, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad m \geq j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

тј.

$$(4.7) \quad \bar{\gamma}_{n,k-2nj}^{(s)} - \bar{\gamma}_{n,k-2-2nj}^{(s)} = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2s-1}} \binom{2s+1}{s-(m-j)}, & k = 2nm, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad m \geq j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Коначно, на основу [40, једн. (4.2)] и (4.7) имамо

$$(4.8) \quad \varepsilon_{n,k}^{(s)} = \begin{cases} \pi \sum_{j=m-s}^m (-1)^j \binom{j+2s}{2s} \binom{2s+1}{s-(m-j)}, & k = 2nm, \quad m \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сума из (4.8) се може записати у облику

$$(4.9) \quad \pi \sum_{i=0}^s (-1)^{i+m-s} \binom{m+s+i}{2s} \binom{2s+1}{i}$$

и израчунати на основу (4.4) из претходне леме. Заменом $t = s$ у (4.4), добијамо да је (4.9) једнако

$$\pi (-1)^s \frac{2s+1}{m+s+1} \binom{m+2s+1}{2s+1} \binom{2s}{s},$$

после чега (4.8) постаје

$$\varepsilon_{n,k}^{(s)} = \begin{cases} \pi (-1)^m \frac{2s+1}{m+s+1} \binom{m+2s+1}{2s+1} \binom{2s}{s}, & k = 2nm, \quad m \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На основу овога, (4.2) добија облик

$$\begin{aligned}
|R_{n,s}(f)| &\leq \frac{2\pi}{\rho^{2n(s+1)}} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\frac{2s+1}{m+s+1} \binom{m+2s+1}{2s+1} \binom{2s}{s}}{\rho^{2mn}} \\
&= 2\pi \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) F(x),
\end{aligned}$$

где је $x = \rho^{-2n}$ (дакле $x \in (0, 1)$) и

$$F(x) = (2s+1) \binom{2s}{s} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+2s+1}{2s+1} \frac{x^{m+s+1}}{m+s+1}.$$

Даље, имамо

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (2s+1) \binom{2s}{s} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+2s+1}{2s+1} x^{m+s} \\
&= (s+1) \binom{2s+1}{s} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{2s+2+m-1}{m} x^{m+s} \\
&= (s+1) \binom{2s+1}{s} \frac{x^s}{(1-x)^{2s+2}}.
\end{aligned}$$

Десна страна неједнакости (4.5), изражена као функција аргумента x , једнака је

$$\begin{aligned}
&2\pi \left(\max_{z \in E_\rho} |f(z)| \right) \frac{\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{2s+1}{s-k} x^{s+k+1}}{(1-x)^{2s+1}} \\
&= 2\pi \left(\max_{z \in E_\rho} |f(z)| \right) \frac{\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{2s+1}{s+k+1} x^{s+k+1}}{(1-x)^{2s+1}}.
\end{aligned}$$

Дакле, треба проверити идентитет

$$(4.10) \quad \left[\frac{\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{2s+1}{s+k+1} x^{s+k+1}}{(1-x)^{2s+1}} \right]' = (s+1) \binom{2s+1}{s} \frac{x^s}{(1-x)^{2s+2}}.$$

Имамо

$$\left[\frac{\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{2s+1}{s+k+1} x^{s+k+1}}{(1-x)^{2s+1}} \right]' = \frac{(1-x)S_1 + (2s+1)S_2}{(1-x)^{2s+2}},$$

где је

$$S_1 = \sum_{k=0}^s (-1)^k (s+k+1) \binom{2s+1}{s+k+1} x^{s+k}, \quad S_2 = \sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{2s+1}{s+k+1} x^{s+k+1}.$$

За $0 \leq k \leq s-1$, коефицијент који множи x^{s+k+1} у бројиоцу последњег разломка једнак је

$$\begin{aligned}
& (-1)^{k+1}(s+k+2) \binom{2s+1}{s+k+2} - (-1)^k(s+1+k) \binom{2s+1}{s+k+1} \\
& + (2s+1)(-1)^k \binom{2s+1}{s+k+1} \\
= & (-1)^k \left(-(2s+1) \binom{2s}{s+k+1} + (s-k) \binom{2s+1}{s+k+1} \right) \\
= & (-1)^k \left(-(2s+1) \binom{2s}{s+k+1} + (s-k) \binom{2s+1}{s-k} \right) \\
= & (-1)^k \left(-(2s+1) \binom{2s}{s+k+1} + (2s+1) \binom{2s}{s-k-1} \right) \\
= & (-1)^k \left(-(2s+1) \binom{2s}{s+k+1} + (2s+1) \binom{2s}{s+k+1} \right) = 0,
\end{aligned}$$

док је коефицијент који множи x^s у истом изразу једнак

$$(s+1) \binom{2s+1}{s+1} = (s+1) \binom{2s+1}{s}.$$

Ово потврђује идентитет (4.10), одакле следи да је $F(x)$ облика

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^s (-1)^k \binom{2s+1}{s+k+1} x^{s+k+1}}{(1-x)^{2s+1}} + C,$$

где је C константа за коју лако закључујемо да је једнака 0 заменом $x \rightarrow 0+$ у једнакости

$$(2s+1) \binom{2s}{s} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+2s+1}{2s+1} \frac{x^{m+s+1}}{m+s+1} = F(x).$$

Овим је доказ теореме комплетиран. □

5. КВАДРАТУРНЕ ФОРМУЛЕ ЗА РАЧУНАЊЕ *FOURIER*-ОВИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА

5.1. Оцене грешке *Micchelli-Rivlin*-ових квадратурних формула

5.1.1. Увод

Micchelli и *Rivlin* су у [27] увели квадратурну формулу највишег алгебарског степена тачности за рачунање *Fourier-Chebyshev*-љевих коефицијената $a_k(f)$, која се базира на подељеним разликама функције f' у нулама *Chebyshev*-љевог полинома T_n . У овом одељку анализирамо остатак те врсте квадратурних формула у циљу добијања одговарајуће оцене за грешку када је f аналитичка функција.

Нека је $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ систем ортогоналних полинома у односу на тежинску функцију ω на интервалу $[a, b]$ (ненегативна функција на $[a, b]$ која се анулира само на скупу изолованих тачака). Апроксимација функције f у виду суме $S_n(f)$ одговарајућег реда,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)P_k(x),$$

у односу на дати систем ортогоналних полинома $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ је класичан начин репрезентовања функције f . Нумеричко израчунавање коефицијената $a_k(f)$, присутних у $S_n(f)$, је главни задатак ове процедуре. Израчунавање $a_k(f)$,

$$a_k(f) = \int_a^b P_k(t)f(t)\omega(t) dt,$$

захтева употребу квадратурних формула. Примена *Gauss*-ове квадратурне формуле на основу n вредности интегранта $P_k(t)f(t)$ (при услову $k < 2n - 1$) ће дати тачан резултат за све полиноме степена $2n - k - 1$. Да ли је могуће конструисати формулу која се заснива на n израчунавања вредности f или њених извода и која даје тачну вредност коефицијената $a_k(f)$ за полиноме f вишег степена? Који је

највећи степен тачности који се може достићи уз помоћ n израчунавања? Разматрајући ово питање за коефицијенте $a_k(f)$ функције f у односу на систем *Chebyshev*-љевих полинома прве врсте $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$, ортогоналних на $[-1, 1]$ у односу на тежинску функцију $\omega(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$,

$$T_k(t) = \cos(k \arccos t) = \frac{1}{2^{k-1}}(t - \xi_1) \cdots (t - \xi_k), \quad t \in (-1, 1),$$

Micchelli и *Rivlin* открили су у [27] важну чињеницу да је квадратурна формула

$$(5.1) \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t) f(t) dt \approx \frac{\pi}{n2^n} f'[\xi_1, \dots, \xi_n]$$

тачна за све алгебарске полиноме степена не већег $3n - 1$. Овде $g[x_1, \dots, x_m]$ означава подељене разлике функције g у тачкама x_1, \dots, x_m и стога формула (5.1) користи n вредности извода f' функције f и то $f'(\xi_1), \dots, f'(\xi_n)$. Јасно је да не постоји формула облика

$$(5.2) \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t) f(t) dt \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) + \sum_{k=1}^n b_k f'(x_k)$$

која је тачна за све полиноме степена $3n$. Полином

$$f(t) = T_n(t)(t - x_1)^2 \cdots (t - x_n)^2$$

је стандардан контрапример. Зато *Micchelli-Rivlin*-ова квадратурна формула има највећи степен тачности међу свим формулама типа (5.2). Питање јединствености ових квадратурних формула се своди на следећи проблем које је такође важан сам за себе: доказати да ако је Q полином степена n са n нула на интервалу $[-1, 1]$ и такав да је $|Q(\eta_j)| = 1$ у екстремалним тачкама $\eta_j = \cos(j\pi/n)$, $j = 0, 1, \dots, n$ *Chebyshev*-љевог полинома T_n , онда је $Q \equiv \pm T_n$. Ово својство је доказао *DeVore* ([5]), а самим тим је решено и питање јединствености *Micchelli-Rivlin*-ове квадратурне формуле (видети [28]). За више детаља на тему ове проблематике видети такође [1], [2].

Поглавље је организовано тако да је у одељку 5.1.2 добијен остатак *Micchelli-Rivlin*-ове квадратурне формуле (5.1) за аналитичку функцију. У одељку 5.1.3 изводимо ефективну L^∞ -оцену грешке (на основу (5.7) у тексту који следи) за квадратурне формуле (5.1). У одељку 5.1.4 користе се методе комплексне анализе у циљу добијања развоја грешке *Micchelli-Rivlin*-ове квадратурне формуле на интервалу $[-1, 1]$. Коначно, ефективне L^1 -оцене грешке (на основу (5.10) у тексту који следи) за квадратурну формулу (5.1) су такође добијене у одељку 5.1.4. Резултати добијени овде су аналог неких *Gautschi*-јевих резултата из [17] (видети такође [63], [25]) и *Hunter*-ових резултата из [24] у вези са *Gauss*-овим квадратурним формулама.

5.1.2. Остатак *Micchelli-Rivlin*-ових квадратурних формула

Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни која окружује интервал $[-1, 1]$ и \mathcal{D} њена унутрашњост. Претпоставимо да је функција f аналитичка у \mathcal{D} и непрекидна на $\overline{\mathcal{D}}$. Ако знамо вредности функције f и њеног првог извода f' у чворовима x_1, x_2, \dots, x_n из интервала $[-1, 1]$, онда се остатак *Hermite*-ове интерполације функције f може записати у облику (видети [22])

$$(5.3) \quad r_n(f; t) = f(t) - \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^1 \ell_{i,\nu}(t) f^{(i)}(x_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) \Omega_n(t)}{(z-t) \Omega_n(z)} dz,$$

где је $\ell_{i,\nu}$ фундаментални систем функција *Hermite*-ове интерполације и

$$\Omega_n(z) = \prod_{\nu=1}^n (z - x_\nu)^2.$$

Ако изаберемо x_ν да буду нуле *Chebyshev*-љевог полинома прве врсте, тј. $x_\nu = \xi_\nu$, множењем (5.3) са $\omega(t)T_n(t)$, где је $\omega(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ и интеграцијом по t на интервалу $(-1, 1)$, добијамо интегралну репрезентацију остатка квадратурне формуле (5.1), односно (5.2)

$$\begin{aligned} R_n(fT_n) &= \int_{-1}^1 r_n(f; t) \omega(t) T_n(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t) T_n(t) \omega(t) dt - \sum_{\nu=1}^n \sum_{i=0}^1 A_{i,\nu}(t) f^{(i)}(\xi_\nu), \end{aligned}$$

где је

$$A_{i,\nu} = \int_{-1}^1 \ell_{i,\nu}(t) T_n(t) \omega(t) dt.$$

Коначно, добијамо

$$(5.4) \quad R_n(fT_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K_n(z) f(z) dz,$$

где је језгро дато са

$$(5.5) \quad K_n(z) = \frac{\rho_n(z)}{T_n^2(z)}$$

и

$$(5.6) \quad \rho_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{\omega(t)}{z-t} T_n^3(t) dt.$$

Сада можемо добити различите врсте оцена. Интегрална репрезентација (5.4) води ка оцени за грешку

$$(5.7) \quad |R_n(fT_n)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right),$$

где је $\ell(\Gamma)$ дужина контуре Γ .

Још уопштеније, ако применимо *Hölder*-ову неједнакост на (5.4), добијамо

$$\begin{aligned} |R_n(fT_n)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\Gamma} K_n(z) f(z) dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\oint_{\Gamma} |K_n(z)|^r |dz| \right)^{1/r} \left(\oint_{\Gamma} |f(z)|^{r'} |dz| \right)^{1/r'}, \end{aligned}$$

односно

$$(5.8) \quad \|R_n(fT_n)\| \leq \frac{1}{2\pi} \|K_n\|_r \|f\|_{r'},$$

где је $1 \leq r \leq +\infty$, $1/r + 1/r' = 1$ и

$$\|f\|_r = \begin{cases} \left(\oint_{\Gamma} |f(z)|^r |dz| \right)^{1/r}, & 1 \leq r < +\infty, \\ \max_{z \in \Gamma} |f(z)|, & r = +\infty. \end{cases}$$

У случају $r = +\infty$, $r' = 1$, оцена (5.8) се своди на

$$(5.9) \quad |R(fT_n)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \right) \left(\oint_{\Gamma} |f(z)| |dz| \right),$$

што нас доводи до оцене за грешку (5.7) (видети [17], [63], [25]), на коју се позивамо приликом извођења L^∞ -оцене за грешку.

Са друге стране, за $r = 1$ ($r' = +\infty$) оцена (5.8) се своди на

$$(5.10) \quad |R_n(fT_n)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\oint_{\Gamma} |K_n(z)| |dz| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right),$$

која је очито строжија од оцене (5.7) због неједнакости

$$(5.11) \quad \oint_{\Gamma} |K_n(z)| |dz| \leq \ell(\Gamma) \left(\max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \right).$$

Позивамо се на (5.10) као L^1 -оцену грешке. Узимамо $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$, где је елипса \mathcal{E}_ρ стандардно дата са (2.2).

**5.1.3. L^∞ -оцена грешке базирана на анализи максимума модула
језгра *Micchelli-Rivlin*-ове квадратурне формуле са првом
Chebyshev-љевом тежинском функцијом**

Из (5.6), користећи супституцију $t = \cos \theta$, имамо

$$\begin{aligned}\rho_n(z) &= \int_0^\pi \frac{[\cos n\theta]^3}{z - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{1}{z - \cos \theta} (\cos 3n\theta + 3 \cos n\theta) d\theta,\end{aligned}$$

где смо користили адициону формулу за троструки аргумент. Дакле,

$$K_n(z) = \frac{\frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{1}{z - \cos \theta} (\cos 3n\theta + 3 \cos n\theta) d\theta}{[T_n(z)]^2},$$

односно

$$K_n(z) = \frac{\frac{1}{4} \frac{\pi}{\sqrt{z^2 - 1}} ((z - \sqrt{z^2 - 1})^{3n} + 3(z - \sqrt{z^2 - 1})^n)}{[T_n(z)]^2},$$

где смо користили

$$(5.12) \quad \int_0^\pi \frac{\cos m\theta}{z - \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{z^2 - 1}} (z - \sqrt{z^2 - 1})^m \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

из [17]. Заменом $z = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$ ($u = z + \sqrt{z^2 - 1}$), користећи

$$(5.13) \quad T_n(z) = (u^n + u^{-n}) / 2,$$

добијамо

$$K_n(z) = \frac{2\pi}{(u - u^{-1})u^n[u^n + u^{-n}]^2} \left(\frac{1}{u^{2n}} + 3 \right).$$

Користећи уобичајен запис,

$$a_j = a_j(\rho) = \frac{1}{2}(\rho^j + \rho^{-j}), \quad j \in \mathbb{N} \quad (\rho > 1),$$

где је $u = \rho e^{i\theta}$, имамо

$$\begin{aligned}|u^{-2n} + 3|^2 &= \rho^{-4n} + 9 + 6\rho^{-2n} \cos 2n\theta, \\ |u - u^{-1}|^2 &= 2(a_2 - \cos 2\theta), \\ |u^n + u^{-n}|^2 &= 2(a_{2n} + \cos 2n\theta)\end{aligned}$$

и

$$(5.14) \quad |K_n(z)|^2 = \frac{\pi^2}{2\rho^{2n}} \cdot \frac{\rho^{-4n} + 9 + 6\rho^{-2n} \cos 2n\theta}{(a_2 - \cos 2\theta)(a_{2n} + \cos 2n\theta)^2}.$$

Следи главно тврђење.

Теорема 5.1. За *Micchelli-Rivlin*-ову квадратурну формулу (5.1), односно (5.2), важи да за свако фиксирано $\rho > 1$, постоји $n_0 = n_0(\rho)$ такво да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = \left| K_n \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за све $n > n_0$.

Доказ. Неједнакост

$$\rho^{-4n} + 9 + 6\rho^{-2n} \cos 2n\theta \leq \rho^{-4n} + 9 + 6\rho^{-2n}$$

је очигледна, тако да је довољно да докажемо

$$\frac{1}{(a_2 - \cos 2\theta)(a_{2n} + \cos 2n\theta)^2} \leq \frac{1}{(a_2 - 1)(a_{2n} + 1)^2},$$

односно

$$(a_2 - \cos 2\theta)(a_{2n} + \cos 2n\theta)^2 \geq (a_2 - 1)(a_{2n} + 1)^2$$

за свако $n \in \mathbb{N}_0$ веће од неког $n_0 = n_0(\rho)$. Прво трансформишимо разлику квадрата на левој и десној страни:

$$\begin{aligned} (a_{2n} + 1)^2 - (a_{2n} + \cos 2n\theta)^2 &= (1 - \cos 2n\theta)(2a_{2n} + 1 + \cos 2n\theta) \\ &= 2 \sin^2 n\theta \cdot (2(a_{2n} + 1) - 2 \sin^2 n\theta) \\ &= 2 \sin^2 n\theta \cdot \Delta, \end{aligned}$$

где је $\Delta = 2(a_{2n} + 1) - 2 \sin^2 n\theta$.

Неједнакост коју је потребно доказати може бити написана у облику

$$(a_2 - 1 + 2 \sin^2 \theta)((a_{2n} + 1)^2 - 2 \sin^2 n\theta \cdot \Delta) \geq (a_2 - 1)(a_{2n} + 1)^2,$$

који се своди на

$$2 \sin^2 \theta (a_{2n} + 1)^2 - 2 \sin^2 n\theta (a_2 - 1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta \geq 0,$$

тј.

$$(a_{2n} + 1)^2 - \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2 \theta} (a_2 - 1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta \geq 0.$$

Пошто је

$$\Delta \geq 2(a_{2n} + 1) - 2 \sin^2 n\theta \geq 2(a_{2n} + 1) - 2 = 2a_{2n} > 0,$$

поступајући на већ уобичајен начин када су у питању изрази оваквог типа, добијамо

$$\begin{aligned} & (a_{2n} + 1)^2 - \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2 \theta} (a_2 - 1 + 2 \sin^2 \theta) \Delta \\ = & (a_{2n} + 1)^2 - \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2 \theta} (a_2 - 1) \Delta - 2 \sin^2 n\theta \cdot \Delta \\ \geq & (a_{2n} + 1)^2 - n^2 (a_2 - 1) \Delta - 2 \sin^2 n\theta \cdot \Delta \\ = & (a_{2n} + 1)^2 - (2(a_{2n} + 1) - 2 \sin^2 n\theta) (n^2 (a_2 - 1) + 2 \sin^2 n\theta) \\ = & (a_{2n} + 1)^2 - 2((a_{2n} + 1) - y) (n^2 (a_2 - 1) + 2y), \end{aligned}$$

где је $y = \sin^2 n\theta \in [0, 1]$. Дакле, све што треба да докажемо је позитивност квадратне функције

$$g(y) = (a_{2n} + 1)^2 - 2((a_{2n} + 1) - y) (n^2 (a_2 - 1) + 2y)$$

на интервалу $[0, 1]$ за довољно велике n .

Функцију $g(y)$ можемо записати у форми

$$g(y) = 4y^2 + By + C,$$

где је

$$\begin{aligned} B &= 2n^2(a_2 - 1) - 4(a_{2n} + 1), \\ C &= (a_{2n} + 1)^2 - 2n^2(a_{2n} + 1)(a_2 - 1). \end{aligned}$$

Дискриминанта је

$$D = B^2 - 4AC = 16n^2(a_{2n} + 1)(a_2 - 1) + 4n^4(a_2 - 1)^2 > 0,$$

дакле, корени тринома g ,

$$y_1 = \frac{-B - \sqrt{D}}{8}, \quad y_2 = \frac{-B + \sqrt{D}}{8},$$

су реални.

Како је најстарији коефицијент у $g(y)$ позитиван, g ће бити ненегативна на $[0, 1]$ ако и само ако је $y_1 > 1$ или $y_2 < 0$. Као што можемо видети, први услов је испуњен кад је n довољно велико (ρ је фиксирано). Наиме, тај услов добија облик

$$-B - 8 > \sqrt{D},$$

односно

$$(5.15) \quad 2(a_{2n} + 1) - n^2(a_2 - 1) - 4 > \sqrt{4n^2(a_{2n} + 1)(a_2 - 1) + n^4(a_2 - 1)^2}.$$

Приметимо да ће лева страна последње неједнакости бити позитивна за довољно велико n , с обзиром на то да експоненцијална функција аргумента n расте доста брже од квадратне функције истог аргумента. Дакле, можемо квадрирати обе стране последње неједнакости. Члан са леве стране који расте најбрже је ρ^{4n} , док је такав члан на десној страни $n^2\rho^{2n+2}$, што значи да ће лева страна заиста постати већа за довољно велике n ($n > 1$) (при фиксираним ρ). Доказ непосредно следи. \square

Са практичног становишта, занима нас вредност $n_0 = n_0(\rho)$ таква да је за свако $n > n_0$ функција добијена из (5.15),

$$F(n) \equiv F_\rho(n) = 2(a_{2n} + 1) - n^2(a_2 - 1) - 4 - \sqrt{4n^2(a_{2n} + 1)(a_2 - 1) + n^4(a_2 - 1)^2}$$

позитивна. Неке од добијених вредности n_0 су изложене у табели 5.1.

ρ	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.1	1.2
n_0	160	81	54	41	33	28	24	21	17	9

Табела 5.1: Најмања могућа вредност n_0 за коју оба корена тринома $g(y)$ постају већи или једнаки 1

На основу спроведеног доказа, јасно је да би био коректан и кад бисмо фиксирали $n \geq 2$ допуштајући да се вредност ρ мења. То значи да важи и следећа теорема.

Теорема 5.2. За *Micchelli-Rivlin*-ову квадратурну формулу (5.1), односно (5.2), важи да за свако фиксирано $n > 1$ постоји $\rho_0 = \rho_0(n)$ такво да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = \left| K_n \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за свако $\rho > \rho_0$.

Неке од добијених вредности ρ_0 се налазе у табели 5.2.

За $n = 1$ важи нешто другачије тврђење.

Теорема 5.3. За модуо језгра $K_1(z)$ остатка *Micchelli-Rivlin*-ове квадратурне формуле (5.1), односно (5.2), важи

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_1(z)| = \left| K_1 \left(\frac{i}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right| \quad \text{за свако } \rho > 1.$$

Доказ. Треба да докажемо да је

$$\frac{\rho^{-4} + 9 + 6\rho^{-2} \cos 2\theta}{(a_2 - \cos 2\theta)(a_{2n} + \cos 2\theta)^2} \leq \frac{\rho^{-4} + 9 - 6\rho^{-2}}{(a_2 + 1)(a_2 - 1)^2},$$

што после супституције $\cos 2\theta = x$, с обзиром на то да су сви изрази евидентно позитивни, постаје

$$(a_2 - x)(a_2 + x)^2(\rho^{-4} + 9 - 6\rho^{-2}) - (a_2 + 1)(a_2 - 1)^2(\rho^{-4} + 9 + 6\rho^{-2}x) \geq 0$$

за $x \in [-1, 1]$. Последњи израз се да раставити као

$$\frac{1}{2}(x + 1) \left((-18\rho^8 + 12\rho^6 - 2\rho^4)x^2 + (-9\rho^{10} + 24\rho^8 - 22\rho^6 + 8\rho^4 - \rho^2)x + 3\rho^{12} + 9\rho^{10} - 13\rho^8 + 10\rho^6 - \rho^4 + \rho^2 - 1 \right) / \rho^8.$$

Како је $x + 1 \geq 0$ за $x \in [-1, 1]$, остаје да се докаже позитивност квадратне функције

$$h(x) = (-18\rho^8 + 12\rho^6 - 2\rho^4)x^2 + (-9\rho^{10} + 24\rho^8 - 22\rho^6 + 8\rho^4 - \rho^2)x + 3\rho^{12} + 9\rho^{10} - 13\rho^8 + 10\rho^6 - \rho^4 + \rho^2 - 1.$$

Водећи коефицијент је негативан за $\rho > 1$ јер је

$$18\rho^8 + 2\rho^4 > 18\rho^8 > 12\rho^8 > 12\rho^6,$$

па је функција h конкавна и за доказ њене позитивности на интервалу $[-1, 1]$ довољно је доказати $h(1) \geq 0$ и $h(-1) \geq 0$. Налазимо

$$h(1) = (3\rho^4 - 1)(\rho - 1)^2(\rho + 1)^2(\rho^2 + 1)^2$$

и

$$h(-1) = (3\rho^8 + 24\rho^6 - 10\rho^4 - 1)(\rho - 1)^2(\rho + 1)^2.$$

Очигледно је да су оба израза позитивни за $\rho > 1$, тако да је доказ комплетиран.

n	2	5	10	20	30	50	100	200
ρ_0	2.5154	1.3841	1.1739	1.083	1.055	1.033	1.017	1.008

Табела 5.2: Најмања могућа вредност ρ_0 за коју оба корена тринома $g(y)$ постају већи или једнаки 1

**5.1.4. Оцена грешке базирана на развоју језгра
Micchelli-Rivlin-ове квадратурне формуле (са првом
Chebyshev-љевом тежинском функцијом) у ред и L^1 -оцена
 грешке**

Ако је функција f аналитичка у унутрашњости \mathcal{E}_ρ , може се разви-
 ти у ред

$$(5.16) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k T_k(z),$$

где је α_k дато са

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} f(t) T_k(t) dt.$$

Ред (5.16) конвергира за свако z из унутрашњости \mathcal{E}_ρ . Знак прим у
 одговарајућој суми означава да је први члан узет са фактором $1/2$.

Лема 5.4. Ако $z \notin [-1, 1]$, важи следећи развој:

$$(5.17) \quad \frac{1}{[T_n(z)]^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_{n,k} u^{-2n-k},$$

где је

$$(5.18) \quad \beta_{n,k} = \begin{cases} 4(-1)^j(j+1), & k = 2jn, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказ. Знамо да ако је $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, онда је

$$(5.19) \quad \frac{1}{(1-x)^{\nu+1}} = \sum_{k=\nu}^{+\infty} \binom{k}{\nu} x^{k-\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Користећи ту чињеницу и (5.13), са $u = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 1$, $z = (u + u^{-1})/2$,
 добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{[T_n(z)]^2} &= \left[\frac{1}{2}(u^n + u^{-n}) \right]^{-2} = 4u^{-2n} \left(\frac{1}{1 + u^{-2n}} \right)^2 \\ &= 4 \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j (j+1) u^{-2n-2nj}, \end{aligned}$$

што употпуњује доказ. □

Лема 5.5. Ако $|z| \notin [-1, 1]$, ρ_n се може развити као

$$(5.20) \quad \rho_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{n,k} u^{-n-k-1},$$

где је

$$(5.21) \quad \gamma_{n,k} = \begin{cases} \frac{3\pi}{2}, & k = 0, 2, \dots, 2n-2, \\ 2\pi, & k = 2n, 2n+2, \dots, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказ. Познато је да ако је ω тежинска функција, онда је $D_n(t) = [T_n(t)]^2 \omega(t)$, такође, тежинска функција (видети [8], стр. 214-226). Имамо

$$\rho_n(z) = \int_{-1}^1 D_n(t) \frac{T_n(t)}{z-t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{n,k} u^{-n-k-1},$$

где је

$$(5.22) \quad \gamma_{n,k} = 2 \int_{-1}^1 \omega(t) [T_n(t)]^3 U_{n+k}(t) dt \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Последњи израз је једнак

$$\gamma_{n,k} = 2 \int_0^\pi [\cos(n\theta)]^3 \frac{\sin(n+k+1)\theta}{\sin\theta} d\theta,$$

што може да се израчуна уз помоћ формула 1.320.5 и 1.320.7 из [23] и њиховим комбиновањем са

$$\frac{\sin(m+1)x}{\sin x} = 2 \sum_{k=0}^{[m/2]} \cos(m-2k)x,$$

где дупли прим означава да се последњи сабирак множи са $\frac{1}{2}$ ако је m паран број. На тај начин добијамо тачно шта је потребно. □

Сада, замењујући (5.17) и (5.20) у (5.5), добијамо

$$(5.23) \quad K_n(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{n,k} u^{-3n-k-1},$$

где је

$$(5.24) \quad \omega_{n,k} = \sum_{j=0}^k \beta_{n,j} \gamma_{n,k-j}.$$

Теорема 5.6. Остатак $R_n(f)$ се може представити у облику

$$(5.25) \quad R_n(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{3n+k} \epsilon_{n,k},$$

где коефицијенти $\epsilon_{n,k}$ не зависе од f . Даље, ако је f парна функција, онда је $\epsilon_{n,2j+1} = 0$ ($j = 0, 1, \dots$).

Доказ. Заменом (5.16) и (5.23) у (5.4) добијамо

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{E}_\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k T_k(z) \sum_{k=0}^{+\infty} \omega_{n,k} u^{-3n-k-1} \right) dz \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \int_{\mathcal{E}_\rho} T_j(z) u^{-3n-k-1} dz \right) \omega_{n,k}. \end{aligned}$$

Примењујући лему 5 из [24], ово се своди на (5.25) са

$$(5.26) \quad \epsilon_{n,0} = \frac{1}{4} \omega_{n,0}, \quad \epsilon_{n,1} = \frac{1}{4} \omega_{n,1}, \quad \epsilon_{n,k} = \frac{1}{4} (\omega_{n,k} - \omega_{n,k-2}), \quad k = 2, 3, \dots$$

Ако је k непарно, с обзиром на то да је $\omega(t) = \omega(-t)$, из (5.24) и претходне две леме следи да је $\omega_{n,k} = 0$ и стога $\epsilon_{n,k} = 0$. \square

1) Оцена грешке базирана на развоју у ред

У општем случају, *Chebyshev-Fourier*-ови коефицијенти α_k у (5.16) су непознати. *Elliott* је у [7] предложио више начина на које се они могу ограничити одозго, специјално

$$(5.27) \quad |\alpha_k| \leq \frac{2}{\rho^k} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right).$$

Користећи (5.18), (5.21), (5.24), ако и само ако је $k = 2jn$, $j \in \mathbb{N}_0$, имамо

$$\begin{aligned} \omega_{n,k} = \omega_{n,2jn} &= \beta_0 \gamma_{2jn} + \beta_{2n} \gamma_{(2j-2)n} + \dots + \beta_{(2j-2)n} \gamma_{2n} + \beta_{2jn} \gamma_0, \\ \omega_{n,k-2} = \omega_{n,2jn-2} &= \beta_0 \gamma_{2jn-2} + \beta_{2n} \gamma_{(2j-4)n} + \dots + \beta_{(2j-2)n} \gamma_{2n-2}, \end{aligned}$$

ШТО ПОВЛАЧИ

$$\begin{aligned} \epsilon_{n,k} = \omega_{n,2jn} - \omega_{n,2jn-2} &= \beta_{(2j-2)n} (\gamma_{2n} - \gamma_{2n-2}) + \beta_{2jn} \gamma_0 \\ &= 4(-1)^{j-1} j \frac{\pi}{2} + 4(-1)^j (j+1) \frac{3\pi}{2}, \end{aligned}$$

ОДНОСНО

$$\epsilon_{n,2jn} = (-1)^j \frac{\pi}{2}(-j + 3(j+1)) = (-1)^j \frac{\pi}{2}(2j+3).$$

Иначе, $\epsilon_{n,k} = 0$ за $k \neq 2jn$. Користећи добијене резултате, даље добијамо

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{3n+k} \epsilon_{n,k} \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{3n+2jn} \epsilon_{n,2jn} \right| \\ &\leq \frac{\pi}{\rho^{3n}} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2j+3}{\rho^{2jn}}. \end{aligned}$$

Сада треба да израчунамо суму:

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2j+3}{\rho^{2jn}}.$$

Можемо је написати у облику

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^{+\infty} j(\rho^{-2n})^{j-1} 2\rho^{-2n} + \sum_{j=0}^{+\infty} 3(\rho^{-2n})^j \\ &= 2\rho^{-2n} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} (\rho^{-2n})^j \right)' + \frac{3}{1-\rho^{-2n}} \\ &= 2\rho^{-2n} \left(\frac{1}{1-\rho^{-2n}} \right)' + \frac{3}{1-\rho^{-2n}} = 2\rho^{-2n} \frac{1}{(1-\rho^{-2n})^2} + \frac{3}{1-\rho^{-2n}} \\ &= \frac{2\rho^{-2n} + 3(1-\rho^{-2n})}{(1-\rho^{-2n})^2} = \frac{3-\rho^{-2n}}{(1-\rho^{-2n})^2}, \end{aligned}$$

где је први извод рачунат по $x = \rho^{-2n}$. Коначно,
(5.28)

$$|R_n(f)| \leq \frac{\pi}{\rho^{3n}} \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \frac{3-\rho^{-2n}}{(1-\rho^{-2n})^2} = \pi \left(\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)| \right) \frac{3\rho^{2n}-1}{\rho^n(\rho^{2n}-1)^2}.$$

2) L^1 -оцена грешке

Према (5.10), анализирамо

$$L_n(\mathcal{E}_\rho) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| |dz|,$$

где $|K_n(z)|$ може бити добијено из (5.14). С обзиром на то да је $z = (u + u^{-1})/2$, $u = \rho e^{i\theta}$ и $|dz| = (1/\sqrt{2}) \cdot \sqrt{a_2 - \cos 2\theta} d\theta$ (видети [24]),

$L_n(\mathcal{E}_\rho)$ се своди на

$$\begin{aligned} L_n(\mathcal{E}_\rho) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} |K_n(z)| (a_2 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\sqrt{\rho^{-4n} + 9 + 6\rho^{-2n} \cos 2n\theta}}{2\rho^n (a_{2n} + \cos 2n\theta)} d\theta = \int_0^\pi \frac{\sqrt{\rho^{-2n} + 9\rho^{2n} + 6 \cos 2n\theta}}{2\rho^{2n} (a_{2n} + \cos 2n\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Применом *Cauchy*-јеве неједнакости на последњи израз, добијамо

$$L_n(\mathcal{E}_\rho) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\rho^{2n}} \sqrt{\int_0^\pi \frac{\rho^{-2n} + 9\rho^{2n} + 6 \cos 2n\theta}{(a_{2n} + \cos 2n\theta)^2} d\theta}.$$

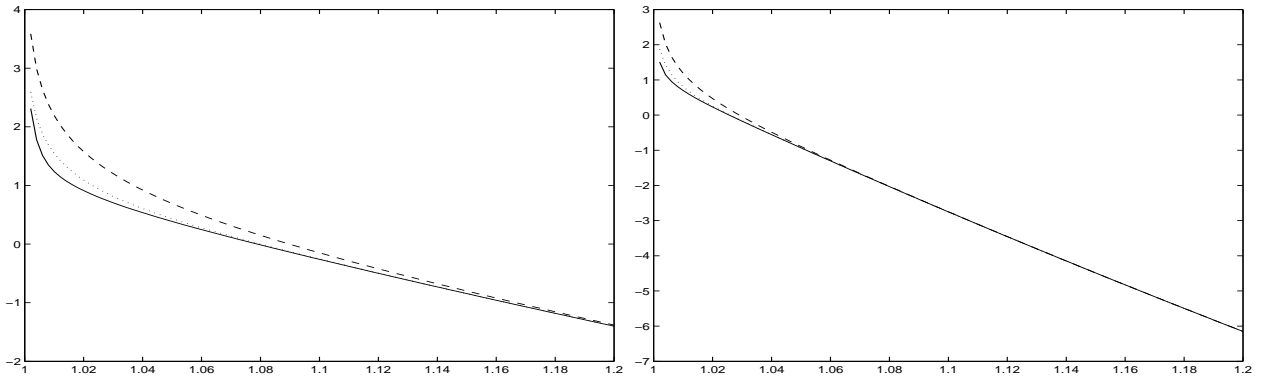
Уводећи ознаку $x = \rho^{4n}$ и користећи [23, једн. 3.616.7], имамо

$$\begin{aligned} &(\rho^{-2n} + 9\rho^{2n}) \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a_{2n} + \cos 2n\theta)^2} + 6 \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta d\theta}{(a_{2n} + \cos 2n\theta)^2} \\ &= (\rho^{-2n} + 9\rho^{2n}) \frac{4\pi x(x+1)}{(x-1)^3} - \frac{48\pi x^{3/2}}{(x-1)^3}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$\begin{aligned} L_n(\mathcal{E}_\rho) &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\rho^{2n}} \sqrt{(\rho^{2n} + 9\rho^{6n}) \frac{4\pi(\rho^{4n} + 1)}{(\rho^{4n} - 1)^3} - \frac{48\pi\rho^{6n}}{(\rho^{4n} - 1)^3}} \\ &= \frac{\pi}{\rho^n} \sqrt{\frac{9\rho^{8n} - 2\rho^{4n} + 1}{(\rho^{4n} - 1)^3}}. \end{aligned}$$

Цртали смо графике $L_n(\mathcal{E}_\rho)$ и његових оцена, логаритмоване за основу 10, као функције по ρ , за различите вредности n . Види се, да су са растом n , одговарајући графици све ближи један другом.



Слика 5: \log_{10} од вредности $L_n(\mathcal{E}_\rho)$ (пуна линија) и њихове границе дате са (5.28) (испрекидана линија) и (5.29) (испрекидана линија са тачкама) за $n = 10$ (лево) и $n = 30$ (десно).

5.2. Оцена грешке код *Micchelli-Sharma* квадратурне формуле

5.2.1. Увод

Нека је ω тежинска функција. Недавно су Бојанов и Петрова у [2] разматрали квадратурну формулу типа

$$(5.29) \quad \int_a^b \omega(t) P_k(t) f(t) dt \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{\nu_j-1} c_{ji} f^{(i)}(x_j), \quad a < x_1 < \dots < x_n < b,$$

где су ν_j дати природни бројеви (вишеструкости) и $P_k(t)$ монични полином степена k . Број ℓ је алгебарски степен тачности (*algebraic degree of precision - ADP*) формуле (5.29) ако је (5.29) тачна за све полиноме степена ℓ и постоји полином степена $\ell + 1$ за који она није тачна. Са $e(\nu)$ је означен најмањи ненегативан паран цео број не мањи од ν (јасно $e(\nu) = 0$ за $\nu \leq 0$), а са $\sigma(P_k)$ број нула непарне вишеструкости полинома P_k у интервалу (a, b) . Лако се види да *ADP* формуле (5.29) не прелази

$$e(\nu_1 - \tau_1) + \dots + e(\nu_n - \tau_n) + \sigma(P_k) - 1,$$

пошто формула није тачна за полином

$$(t - x_1)^{e(\nu_1 - \tau_1)} \dots (t - x_n)^{e(\nu_n - \tau_n)} (t - t_1) \dots (t - t_m),$$

где је $m = \sigma(P_k)$, $t_1, \dots, t_m \in (a, b)$ нуле полинома P_k непарне вишеструкости, $\tau_i := 1$ ако $x_i \in \{t_1, \dots, t_m\}$ и $\tau_i := 0$ иначе.

У [2], једноставности ради, Бојанов и Петрова дефинишу формулу (5.29) тако да буде *Gauss*-ова ако јој је *ADP* максималан, тј. ако је

$$ADP(5.29) = e(\nu_1 - \tau_1) + \dots + e(\nu_n - \tau_n) + \sigma(P_k) - 1.$$

Комплетна карактеризација *Gauss*-ове формуле (5.29) и експлицитна конструкција ове врсте формула у неколико партикуларних случајева су дате у [2].

Нека

$$\pi_n(\mathbb{R}) := \left\{ P(t) : P(t) = \sum_{k=0}^n d_k t^k, d_k \in \mathbb{R} \right\}$$

представља простор свих полинома једне променљиве степена највише n . Бојанов и Петрова [2, поглавље 2] дискутују генералне

примедбе везано за *Gauss*-ове квадратурне формуле са вишеструким чворовима, јер испитивање формула типа (5.29) за *Fourier*-ове коефицијенте може бити сведено на испитивање стандардних квадратура са вишеструким чворовима. Наводимо следећу теорему доказану од стране *Ghizzetti*-ја и *Ossicini*-ја [20].

Теорема 5.7. За било који скуп непарних вишеструкости ν_1, \dots, ν_n ($\nu_j = 2s_j + 1$, $s_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, n$), постоји јединствена квадратурна формула облика

$$(5.30) \quad \int_a^b \omega(t) f(t) dt \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{\nu_j-1} a_{ji} f^{(i)}(x_j), \quad a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b,$$

са $ADP = \nu_1 + \dots + \nu_n + n - 1$, добро позната као *Chakalov-Popoviciu*-ова квадратурна формула (видети [3], [59]). Чворови x_1, \dots, x_n ове квадратурне формуле су једнозначно одређени својством ортогоналности

$$\int_a^b \omega(t) \prod_{k=1}^n (t - x_k)^{\nu_k} Q(t) dt = 0, \quad \text{за све полиноме } Q \text{ из } \pi_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Одговарајући (монични) ортогонални полином $\prod_{k=1}^n (t - x_k)$ је познат као σ -ортогонални полином са $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$.

Квадратуре типа (5.30) са међусобно једнаким вишеструкостима $\nu_1 = \dots = \nu_n = \nu$, где је ν непаран природан број ($\nu = 2s + 1$, $s \in \mathbb{N}$), проучаване су од стране *Turán*-а у [80]. У овом случају, одговарајућа *Gauss*-ова квадратурна формула се зове *Gauss-Turán*-ова квадратурна формула типа ν ($= 2s + 1$), док се одговарајући (монични) ортогонални полином $\prod_{k=1}^n (t - x_k)$ зове s -ортогонални полином.

Бојанов и Петрова су у [2] описали везу између квадратурних формула са вишеструким чворовима и формула типа (5.29). За систем чворова $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$ са одговарајућим вишеструкостима $\bar{\nu} := (\nu_1, \dots, \nu_n)$, они дефинишу полиноме

$$\Lambda(t; \mathbf{x}) := \prod_{m=1}^n (t - x_m), \quad \Lambda_j(t; \mathbf{x}) := \frac{\Lambda(t; \mathbf{x})}{t - x_j}, \quad \Lambda^{\bar{\nu}}(t; \mathbf{x}) := \prod_{m=1}^n (t - x_m)^{\nu_m},$$

уводе $x_j^{\nu_j} := (x_j, \dots, x_j)$ [x_j се понавља ν_j пута], $j = 1, \dots, n$, где је са $g[x_1^{\nu_1}, \dots, x_m^{\nu_m}]$ означена подељена разлика функције g у тачкама $x_1^{\nu_1}, \dots, x_m^{\nu_m}$ и формулишу и доказују следећу важну теорему која даје везу између стандардних квадратурних формула и квадратурних формула за *Fourier*-ове коефицијенте.

Теорема 5.8. За свака два скупа вишеструкости $\bar{\mu} := (\mu_1, \dots, \mu_k)$ и $\bar{\nu} := (\nu_1, \dots, \nu_n)$ и чворове $y_1 < \dots < y_k$, $x_1 < \dots < x_n$, постоји

квадратурна формула облика

$$(5.31) \quad \int_a^b \omega(t) \Lambda^{\bar{\mu}}(t; \mathbf{y}) f(t) dt \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{\nu_j-1} c_{ji} f^{(i)}(x_j)$$

са $ADP = N$ ако и само ако постоји квадратурна формула облика

$$(5.32) \quad \int_a^b \omega(t) f(t) dt \approx \sum_{m=1}^k \sum_{\lambda=0}^{\mu_m-1} b_{m\lambda} f^{(\lambda)}(y_m) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{\nu_j-1} a_{ji} f^{(i)}(x_j)$$

са степеном тачности једнаким $N + \mu_1 + \dots + \mu_k$. У случају $y_m = x_j$ за неке m и j , одговарајући чланови у обе суме комбинују се са чланом облика

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu_m+\nu_j-1} d_{m\lambda} f^{(\lambda)}(y_m).$$

У [37] (видети такође и референце у оквиру истог) је објашњена нумеричка конструкција квадратурних формула типа (5.29).

Претпоставимо да су коефицијенти a_{ji} ($j = 1, \dots, n$; $i = 0, \dots, \nu_j - 1$) у (5.32) познати. Поступајући слично као у првом делу доказа теореме 2.1 у [2], можемо одредити коефицијенте c_{ji} ($j = 1, \dots, n$; $i = 0, \dots, \nu_j - 1$) у (5.31). Наиме, примењујући (5.32) на полином $\Lambda^{\bar{\mu}}(\cdot; \mathbf{y})f$, где $f \in \pi_N(\mathbb{R})$, прва сума у (5.32) се анулира (видети [2, једн. (2.4)]):

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega(t) \Lambda^{\bar{\mu}}(t; \mathbf{y}) f(t) dt &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{\nu_j-1} a_{ji} [\Lambda^{\bar{\mu}}(t; \mathbf{y}) f(t)]^{(i)} \Big|_{t=x_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{\nu_j-1} c_{ji} f^{(i)}(x_j), \end{aligned}$$

где је

$$(5.33) \quad c_{ji} = \sum_{s=i}^{\nu_j-1} a_{js} \binom{s}{i} [\Lambda^{\bar{\mu}}(t; \mathbf{y})]^{(s-i)} \Big|_{t=x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n; i = 0, 1, \dots, \nu_j - 1).$$

5.2.2 О *Micchelli-Sharma* квадратурној формули

У [29], за свако $s > 0$, *Micchelli* и *Sharma* су за израчунавање *Fourier-Chebyshev*-левих коефицијената функције f конструисали квадратурну формулу са вишеструким чворовима облика

$$(5.34) \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t) f(t) dt \approx \sum_{j=0}^s [A_j f^{(j)}(-1) + B_j f^{(j)}(1)] + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{2s} a_{ji} f^{(i)}(x_j),$$

са $ADP(5.34) = (2s + 3)n - 1$, која има максималну могућу тачност. Чворови њихове формуле су лоцирани у екстремалним тачкама $-1, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{n-1}, 1$ *Chebyshev*-љевог полинома прве врсте T_n . Приметимо да су $\{\tilde{\eta}_j\}_{j=1}^{n-1}$ истовремено и нуле *Chebyshev*-љевог полинома друге врсте U_{n-1} . Јединственост формуле (5.34) доказали су Бојанов и Петрова (видети [2, Теорема 2.6]).

Micchelli-Sharma квадратурна формула (5.34) се може представити у облику (видети [29], [2])

$$(5.35) \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t) f(t) dt \approx \frac{\pi}{2^n} \left\{ \mathcal{M}_1[f] + 2 \sum_{j=1}^s \frac{(-1)^j j a_j}{j+1} \mathcal{M}_{2j+1}[f] \right\},$$

где су a_j дефинисани својим генераторним функцијама

$$\sum_{j=0}^{\infty} j a_j t^j = \frac{1}{2} \left[(1 - 4^{-n+1} t)^{-1/2} - 1 \right]$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1[f] &= f[-1, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_{n-1}, 1], \\ \mathcal{M}_{2j+1}[f] &= f[(-1)^{j+1}, \tilde{\eta}_1^j, \dots, \tilde{\eta}_{n-1}^j, 1^{j+1}], \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Користећи малопре описану нумеричку методу, *Micchelli-Sharma* квадратурна формула (5.34) може бити изведена из квадратурне формуле (видети [2, доказ Теореме 2.6])

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2+s} f(t) dt \approx \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ji} f^{(i)}(x_j) + \sum_{j=1}^n \alpha_j f(\xi_j).$$

Овде користимо облик (5.35) *Micchelli-Sharma* квадратурне формуле и рачунамо је на следећи начин.

Ако означимо

$$x_0 := -1, \quad x_j := \tilde{\eta}_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad x_n = 1,$$

имамо (видети [58])

$$\mathcal{M}_1[f] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n] = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{u'(x_k)},$$

где је $u(t) = (t - x_0)(t - x_1) \cdots (t - x_n)$,

$$\mathcal{M}_{2j+1}[f] = f[x_0^{j+1}, x_1^j, \dots, x_{n-1}^j, x_n^{j+1}] = \frac{(Wf)(x_0^{j+1}, x_1^j, \dots, x_{n-1}^j, x_n^{j+1})}{V(x_0^{j+1}, x_1^j, \dots, x_{n-1}^j, x_n^{j+1})}$$

за све $j \in \{1, \dots, s\}$, где је

$$(Wf)(x_0^{j+1}, x_1^j, \dots, x_{n-1}^j, x_n^{j+1})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^j & \cdots & x_0^{M-1} & f(x_0) \\ 0 & 1 & \cdots & jx_0^{j-1} & \cdots & (M-1)x_0^{M-2} & f'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j! & \cdots & \prod_{k=1}^j (M-k)x_0^{M-j-1} & f^{(j)}(x_0) \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{j-1} & \cdots & x_1^{M-1} & f(x_1) \\ 0 & 1 & \cdots & (j-1)x_1^{j-2} & \cdots & (M-1)x_1^{M-2} & f'(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (j-1)! & \cdots & \prod_{k=1}^{j-1} (M-k)x_1^{M-j} & f^{(j-1)}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^j & \cdots & x_n^{M-1} & f(x_n) \\ 0 & 1 & \cdots & jx_n^{j-1} & \cdots & (M-1)x_n^{M-2} & f'(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j! & \cdots & \prod_{k=1}^j (M-k)x_n^{M-j-1} & f^{(j)}(x_n) \end{vmatrix},$$

($M := (n+1)j$) и

$$V(x_0^{j+1}, x_1^j, \dots, x_{n-1}^j, x_n^{j+1})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^j & \cdots & x_0^M \\ 0 & 1 & \cdots & jx_0^{j-1} & \cdots & Mx_0^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j! & \cdots & M(M-1)\cdots(M-j+1)x_0^{M-j} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{j-1} & \cdots & x_1^M \\ 0 & 1 & \cdots & (j-1)x_1^{j-2} & \cdots & Mx_1^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (j-1)! & \cdots & M(M-1)\cdots(M-j+2)x_1^{M-j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^j & \cdots & x_n^M \\ 0 & 1 & \cdots & jx_n^{j-1} & \cdots & Mx_n^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j! & \cdots & M(M-1)\cdots(M-j+1)x_n^{M-j} \end{vmatrix}.$$

5.2.3. Остатак *Micchelli-Sharma* квадратурне формуле за аналитичке функције

Нека је Γ проста затворена крива у комплексној равни која окружује интервал $[-1, 1]$ и \mathcal{D} њена унутрашњост. Претпоставимо да је функција f аналитичка у \mathcal{D} и непрекидна на $\overline{\mathcal{D}}$. Ако су нам познате вредности функције f и њених првих извода у чворовима x_1, x_2, \dots, x_n интервала $[-1, 1]$, тада се остатак *Hermite*-ове интерполације функције f може записати у облику (видети [22])

$$(5.36) \quad r_n(f; t) = f(t) - \sum_{j=0}^s [a_j f^{(j)}(-1) + b_j f^{(j)}(1)] - \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{2s} \ell_{i,\nu}(t) f^{(i)}(x_\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) \Omega_n(t)}{(z-t) \Omega_n(z)} dz,$$

где су $\ell_{i,\nu}$ фундаменталне функције *Hermite*-ове интерполације и

$$\Omega_n(z) = (1-t^2)^{s+1} \prod_{\nu=1}^{n-1} (z-x_\nu)^{2s+1} = (1-t^2)^{s+1} (U_{n-1}(z))^{2s+1}.$$

Ако изаберемо x_ν да буду нуле *Chebyshev*-љевог полинома друге врсте, тј. $x_\nu = \xi_\nu$, множењем (5.36) са $\omega(t)T_n(t)$ ($\omega(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$) и интеграцијом по t на $(-1, 1)$, добијамо остатак у (5.34), тј. (5.35), као

$$R_n(fT_n) = \int_{-1}^1 r_n(f; t) \omega(t) T_n(t) dt = \int_{-1}^1 f(t) \omega(t) T_n(t) dt - \sum_{j=0}^s [A_j f^{(j)}(-1) + B_j f^{(j)}(1)] - \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{2s} L_{i,\nu}(t) f^{(i)}(x_\nu),$$

где је

$$A_j = \int_{-1}^1 a_j(t) T_n(t) \omega(t) dt, \quad B_j = \int_{-1}^1 b_j(t) T_n(t) \omega(t) dt, \\ L_{i,\nu} = \int_{-1}^1 \ell_{i,\nu}(t) T_n(t) \omega(t) dt.$$

Коначно, добијамо репрезентацију у облику контурног интеграла

$$(5.37) \quad R_n(fT_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} K_n(z) f(z) dz,$$

где је језгро дато са

$$(5.38) \quad K_n(z) = \frac{\rho_n(z)}{(1-z^2)^{s+1}U_{n-1}^{2s+1}(z)}$$

и

$$(5.39) \quad \rho_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^{s+1/2}}{z-t} U_{n-1}^{2s+1}(t)T_n(t)dt.$$

Сада можемо добити различите врсте оцена. Интегрална репрезентација (5.37) води ка оцени грешке

$$(5.40) \quad |R_n(fT_n)| \leq \frac{\ell(\Gamma)}{2\pi} \left(\max_{z \in \Gamma} |K_n(z)| \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right),$$

где је $\ell(\Gamma)$, стандардно, дужина контуре Γ . Узимамо, као и обично $\Gamma = \mathcal{E}_\rho$, где је елипса \mathcal{E}_ρ дата са (2.2).

5.2.4. Оцена грешке базирана на анализи максимума модула језгра *Micchelli-Sharma* квадратурне формуле

Имамо на основу (5.39), после смене $t = \cos \theta$,

$$\rho_n(z) = \int_0^\pi \frac{[(\sin n\theta)^{2s+1} \cos n\theta \sin \theta]}{z - \cos \theta} d\theta.$$

Ако искористимо разлагање из [23],

$$\begin{aligned} \rho_n(z) &= \frac{1}{2^{2s}} \int_0^\pi \frac{\sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} \binom{2s+1}{k} \sin(2s+1-k)n\theta}{z - \cos \theta} \cos n\theta \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\sum_{k=0}^s (-1)^{s-k} \binom{2s+1}{k} (\sin(2s-2k)n\theta + \sin(2s-2k+2)n\theta)}{2^{2s+1}(z - \cos \theta)} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2^{2s+1}} \int_0^\pi \frac{\sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) \sin(2s-2k)n\theta \sin \theta}{z - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2^{2s+2}} \int_0^\pi \frac{\sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) \cos((2s-2k)n-1)\theta}{(z - \cos \theta)} d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2^{2s+2}} \int_0^\pi \frac{\sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) \cos((2s-2k)n+1)\theta}{(z - \cos \theta)} d\theta \\ &= \frac{\pi \sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) (v^{(2s-2k)n-1} - v^{(2s-2k)n+1})}{2^{2s+2} \sqrt{z^2 - 1}}, \end{aligned}$$

где је $v = z - \sqrt{z^2 - 1}$ (позвали смо се на (5.12)).

Заменом $z = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$ ($u = z + \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{v}$), користећи

$$(5.41) \quad T_n(z) = \frac{u^n + u^{-n}}{2}, \quad U_{n-1}(z) = \frac{u^n - u^{-n}}{u - u^{-1}},$$

добијамо

$$\begin{aligned} K_n(z) &= \frac{\pi \sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) \left(\frac{1}{u^{(2s-2k)n-1}} - \frac{1}{u^{(2s-2k)n+1}} \right)}{2^{2s+2} \frac{1}{2} (u - u^{-1}) \left(\frac{1}{2} (u - u^{-1}) \right)^{2s+2} \left(\frac{u^n - u^{-n}}{u - u^{-1}} \right)^{2s+1}} \\ &= \frac{2\pi \sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) u^{-(2s-2k)n}}{(u - u^{-1}) (u^n - u^{-n})^{2s+1}}. \end{aligned}$$

Уводећи (2.14) и $u = \rho e^{i\theta}$, имамо

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) u^{-(2s-2k)n} \right|^2 \\ &= \left(\sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) \rho^{-(2s-2k)n} \cos((2s-2k)n\theta) \right)^2 \\ & \quad + \left(\sum_{k=-1}^{s-1} (-1)^{s-k} \left(\binom{2s+1}{k} - \binom{2s+1}{k+1} \right) \rho^{-(2s-2k)n} \sin((2s-2k)n\theta) \right)^2, \\ & |u - u^{-1}|^2 = 2(a_2 - \cos 2\theta) = 2b, \\ & |u^n - u^{-n}|^2 = 2(a_{2n} - \cos 2n\theta) = 2c \end{aligned}$$

и

$$(5.42) \quad |K_n(z)|^2 = \frac{\pi^2}{2^{2s}} \cdot \frac{a}{bc^{2s+1}}.$$

Долазимо до главног тврђења.

Теорема 5.9. За свако фиксирано $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, постоји $\rho_0 = \rho_0(n)$ такво да је

$$\max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |K_n(z)| = \left| K_n \left(\frac{1}{2}(\rho + \rho^{-1}) \right) \right|$$

за све $\rho > \rho_0$.

Доказ. Треба доказати да важи неједнакост

$$\frac{a}{bc^{2s+1}} \leq \frac{A}{BC^{2s+1}},$$

ОДНОСНО

$$I = aBC^{2s+1} - Abc^{2s+1} \leq 0,$$

за свако ρ веће од неког $\rho_0 = \rho_0(n)$, где су A, B, C вредности a, b, c за $\theta = 0$. Израз $I = I(\rho)$ је рационалан по ρ и биће негативан за довољно велике ρ ако и само ако је коефицијент који множи највећи степен од ρ негативан. Овај коефицијент је једнак

$$\frac{1}{2^{2s+1}} \left(\binom{2s+1}{s} - \binom{2s+1}{s-1} \right)^2 (\cos \theta - 1)$$

и очигледно је да је негативан за свако $\theta \in (0, \pi)$. \square

Са практичног становишта нам је битно да ρ_0 буде што ближе својој актуелној вредности и да она буде што ближе 1. На основу нумеричких експеримената се види да је за све n (чак почев од 3) одговарајућа вредност $\rho_0(n)$ веома близу 1 (скоро увек мања од 1.001).

Најнижи степен од ρ који се појављује у изразу $I(\rho)$ износи $-(4s+3)n - 2$. То значи да је израз $J(\rho) = \rho^{(4s+3)n+2} I(\rho)$ полином по ρ , тј.

$$(5.43) \quad J = J(\rho) = \sum_{i=0}^d \alpha_i(\theta) \rho^i,$$

где је $d = (12s+4)n + 2$.

Користећи већ устаљену методу први пут примењену у доказу *Gautschi*-јеве хипотезе, добијамо да је за све n, s неједнакост која нам треба тачна за свако $\rho > 1$. Вредност ρ_0 смо рачунали на две значајне цифре, дакле $\rho_0 = 1.01$.

5.2.5. Нумерички резултати

После уобичајеног оцењивања дужине елипсе, (5.40) добија форму

$$(5.44) \quad |R_n(fT_n)| \leq \frac{\pi}{2^s} \cdot \sqrt{\frac{A}{BC^{2s+1}}} a_1 \left(1 - \frac{1}{4} a_1^{-2} - \frac{3}{64} a_1^{-4} - \frac{5}{256} a_1^{-6} \right) \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right).$$

За интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) T_3(t) dt$$

(значи фиксирали смо $n = 3$), где је $T_3(t) = 4t^3 - 3t$, добије се:

а) у случају када је $f(t) = f_1(t) = e^{10t}$, његова права вредност

$$I = 5524.115941518612650 \dots (+0);$$

Табела 5.3: Вредности $e_{3,s}(f_1T_3)$, $e_{3,s}(f_2T_3)$ за $s = 1, 2, 3$.

s	Error	$e_{3,s}(f_1T_3)$	Error	$e_{3,s}(f_2T_3)$
1	6.562(-1)	7.715(+0)	1.489(-16)	1.458(-15)
2	4.449(-4)	5.700(-3)	1.483(-25)	1.712(-24)
3	7.253(-8)	1.011(-6)	3.036(-35)	3.970(-34)

Табела 5.4: Вредности $e_{7,s}(f_0T_7)$, $e_{7,s}(f_1T_7)$, $e_{7,s}(f_2T_7)$ за $s = 1, 2$.

s	Error	$e_{7,s}(f_0T_7)$	Error	$e_{7,s}(f_1T_7)$	Error	$e_{7,s}(f_2T_7)$
1	8.891(-4)	1.530(-2)	3.521(-15)	5.443(-14)	1.782(-50)	2.650(-49)
2	1.839(-12)	3.491(-11)	7.545(-28)	1.354(-26)	4.610(-77)	8.105(-76)

б) у случају када је $f(t) = f_2(t) = e^t$, његова права вредност

$$I = 0.6964416088393797288074950433986415366353 \dots (-1).$$

Стварна (актуелна) грешка у односу на *Micchelli-Sharma* квадратуру за ове случајеве је дата у табели 5.3.

За интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t) T_7(t) dt$$

(значи фиксирани смо $n = 7$), где је $T_7(t) = 64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t$, добије се:

а) у случају када је $f(t) = f_0(t) = e^{20t}$, његова права вредност

$$I = 39467431.6804759993964555 \dots (+0);$$

б) у случају када је $f(t) = f_1(t) = e^{10t}$, његова права вредност

$$I = 747.7794284980112467528680420352411 \dots (+0);$$

в) у случају када је $f(t) = e^t$, његова права вредност

$$I = 0.50240922466279101524873837 \dots (-5).$$

Стварна (актуелна) грешка у односу на *Micchelli-Sharma* квадратуру за ове случајеве дата је у табели 5.4.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. Bojanov, *On a quadrature formula of Micchelli and Rivlin*, J. Comput. Appl. Math. **70** (1966) 349–356.
- [2] B. Bojanov, G. Petrova, *Quadrature formulae for Fourier coefficients*, J. Comput. Appl. Math. **231** (2009) 378–391.
- [3] L. Chakalov, *General quadrature formulae of Gaussian type*, Bulgar. Akad. Nauk. Izv. Mat. Inst. **1** (1954) 67–84. (Bulgarian)
- [4] A.S. Cvetković, G.V. Milovanović, *The Mathematica Package "Orthogonal Polynomials"*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **19** (2004) 17–36.
- [5] R. DeVore, *A property of Chebyshev polynomials*, J. Approx Theory **12** (1974) 418–419.
- [6] D. Elliott, *The evaluation and estimation of the coefficients in the Chebyshev series expansion of a functions*, Math. Comp. **18** (1964) 82–90.
- [7] D. Elliott, *The evaluation and estimation of the coefficients in the Chebyshev series expansion of a function*, Math. Comp. **18** (1968) 274–284.
- [8] H. Engels, *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, London, 1980.
- [9] C.F. Gauss, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, Commentataiones Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores, **1** (1814) [Werke III 123–162].
- [10] W. Gautschi, *On Generating Gaussian Quadrature Rules*, In: Numerische Integration ISNM 45 (Ed. by Hämmerlin, G.), 147–154, Birkhäuser, Basel, 1979.
- [11] W. Gautschi, *A Survey of Gauss-Christoffel Quadrature Formulae*, In: E.B.Christoffel - The influence of his work in mathematics and the physical sciences (P.L.Butzer, F.Fehér, eds.), 72–147, Birkhäuser, Basel, 1981.
- [12] W. Gautschi, *On generating orthogonal polynomials*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **3** (1982) 289–317.
- [13] W. Gautschi, *On the remainder term for analytic functions of Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadratures*, Rocky Mountain J. Math. **21** (1991) 209–226.

- [14] W. Gautschi, *Algorithm 726: ORTHPOL – A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules*, ACM Trans. Math. Software **20** (1994) 21–62.
- [15] W. Gautschi, *Orthogonal polynomials (in Matlab)*, J. Comput. Appl. Math. **178** (2005) 215–234.
- [16] W. Gautschi, S.E. Notaris, *Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight function of Bernstein-Szegő type*, J. Comput. Appl. Math. **25** 199–224; erratum in J. Comput. Appl. Math. **27** (1989) 429.
- [17] W. Gautschi, R.S. Varga, *Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983) 1170–1186.
- [18] W. Gautschi, F. Marcellan, L. Reichel, *Quadrature and orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001) 267–286.
- [19] W. Gautschi, E. Tychopoulos, R.S. Varga, *A note on the contour integral representation of the remainder term for a Gauss-Chebyshev quadrature rule*, SIAM J. Numer. Anal. **27** (1990) 219–224.
- [20] A. Ghizzetti and A. Ossicini, *Sull’ esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane*, Rend. Mat. **8** (1975) 1–15.
- [21] G.H. Golub, J.H. Welsch, *Calculation of Gauss quadrature rules*, Math. Comp. **23** (1966) 221–230.
- [22] V.L. Gončarov, *Theory of of Interpolation and Approximation of Functions*, GITTL, Moscow, 1954. (in Russian)
- [23] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products, 6th edn* (A. Jeffrey and D. Zwillinger, eds), Academic Press, San Diego, 2000.
- [24] D.B. Hunter, *Some error expansions for Gaussian quadrature*, BIT **35** (1995) 64–82.
- [25] D.B. Hunter, G. Nikolov, *On the error term of symmetric Gauss-Lobatto quadrature formulae for analytic functions*, Math.Comp. **69** (2000) 269–282.
- [26] G. Mastroianni, G.V. Milovanović, *Interpolation Processes - Basic Theory and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [27] C.A. Micchelli, T.J. Rivlin, *Turán formulae and highest precision quadrature rules for Chebyshev coefficients*, IBM J. Res. Develop. **16** (1972) 372–379.

- [28] C.A. Micchelli, T.J. Rivlin, *Some new characterizations of the Chebyshev polynomials*, J. Approx. Theory **12** (1974) 420–424.
- [29] C.A. Micchelli, A. Sharma, *On a problem of Turán: multiple node Gaussian quadrature*, Rend. Mat. **3** (1983) 529–552.
- [30] G. V. Milovanović, *Numerička Analiza II deo, treće izdanje*, IDP Naučna knjiga, Beograd, 1991.
- [31] G.V. Milovanović, *Quadrature with multiple nodes, power orthogonality, and moment-preserving spline approximation*, Numerical analysis 2000, Vol. V.
- [32] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, *Gaussian type quadrature rules for Müntz systems*, SIAM J. Sci. Comput. **27** (2005) 893–913.
- [33] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, *Nonstandard Gaussian quadrature formulae based on operator values*, Adv. Comput. Math. **32** (2010) 431–486.
- [34] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, *Gaussian quadrature rules using function derivatives*, IMA J. Numer. Anal. **31** (2011) 358–377.
- [35] G.V. Milovanović, A.S. Cvetković, *Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type*, Math. Balkanica **26** (2012), 169–184.
- [36] G. V. Milovanović, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *A note on an error bound of Gauss-Turán quadrature with the Chebyshev weight*, FILOMAT, (to appear).
- [37] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Kronrod extensions with multiple nodes of quadrature formulas for Fourier coefficients*, preprint.
- [38] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Error bounds for Gauss-Turán quadrature formulae of analytic functions*, Math. Comput. **72** (2003) 1855–1872.
- [39] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Error analysis in some Gauss-Turán-Radau and Gauss-Turán-Lobatto quadratures for analytic functions*, J. Comput. Appl. Math. **164-165** (2004) 569–586.
- [40] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *An error expansion for some Gauss-Turán quadratures and L^1 -estimates of the remainder term*, BIT Numer. Math. **45** (2005) 117–136.
- [41] G.V. Milovanović, M.M Spalević, *Bounds of the error of some Gauss-Turán-type quadratures*, J. Comput. Appl. Math. **178** (2005) 333–346.

- [42] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Quadrature rules with multiple nodes for evaluating integrals with strong singularities*, J. Comput. Appl. Math. **189** (2006) 689–702.
- [43] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Gauss-Turán quadratures of Kronrod type for generalized Chebyshev weight functions*, Calcolo **43** (2006) 171–195.
- [44] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *A note on the bounds of the error of Gauss-Turán-type quadratures*, J. Comput. Appl. Math. **200** (2007) 276–282.
- [45] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, *Monotonicity of the error term in Gauss-Turán quadratures for analytic functions*, ANZIAM J. **48** (2007) 567–581.
- [46] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, A.S. Cvetković, *Calculation of Gaussian type quadratures with multiple nodes*, Math. Comput. Modelling **39** (2004) 325 – 347.
- [47] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, Lj. Galjak, *Kronrod extensions of Gaussian quadratures with multiple nodes*, Comput. Methods Appl. Math. **6** (2006) 291–305.
- [48] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, *On maximum of the modulus of kernels in Gauss-Turán quadratures with Chebyshev weights: The cases $s=1,2$* , Facta Univ. Ser. Math. Inform **20** (2005) 123–128.
- [49] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, *Error bounds of some Gauss-Turán-Kronrod quadratures with Gori-Micchelli weights for analytic functions*, Kragujev. J. Math. **30** (2007) 221–234.
- [50] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, *Maximum of the modulus of kernels in Gauss-Turán quadratures*, Math. Comput. **77** (2008) 985–994.
- [51] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, *On the remainder term of Gauss-Radau quadratures for analytic functions*, J. Comput. Appl. Math. **218** (2008) 281–289.
- [52] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, *Error estimates for Gauss-Turán quadratures and their Kronrod extensions*, IMAJNA **29** (2009) 486–507.
- [53] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, *Error estimates for Gaussian quadratures of analytic functions*, J. Comput. Appl. Math **233** (2009) 802–807.

- [54] G.V. Milovanović, M.M. Spalević, M.S. Pranić, *Bounds of the error of Gauss-Turán-type quadratures II*, Appl. Numer. Math. **60** (2010) 1–9.
- [55] S.C. Notaris, *The error norm of Gaussian quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, Numer. Math. **57** (1983) 271–283.
- [56] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *Error bounds for Gaussian quadrature formulae with Bernstein-Szegő weights that are rational modifications of Chebyshev weight functions of the second kind*, IMA J. Numer. Anal. **32** (2012), 1733–1754.
- [57] A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *On the remainder term of Gauss-Radau quadrature with Chebyshev weight of the third kind for analytic functions*, Appl. Math. Comput. **219** (2012), 2760–2765.
- [58] O.T. Pop, D. Bărbosu, *Two dimensional divided differences with multiple knots*, An. Șt. Univ. Ovidius Constanța **17** (2009) 181–190.
- [59] T. Popoviciu, *Sur une généralisation de la formule d'intégration numérique de Gauss*, Acad. R. P. Romîne Fil. Iași Stud. Cerc. Ști. **6** (1955) 29–57. (Romanian)
- [60] R.A. Sack, A.F. Donovan, *An algorithm for Gaussian quadrature given modified moments*, Numer. Math. **18** (1971/72) 465–478.
- [61] R. Scherer, T. Schira, *Estimating quadrature errors for analytic functions using kernel representations and biorthogonal systems*, Numer. Math. **84** (2000) 497–518.
- [62] T. Schira, *The remainder term for analytic functions of Gauss-Lobatto quadratures*, J. Comput. Appl. Math. **76** (1996) 171–193.
- [63] T. Schira, *The remainder term for analytic functions of symmetric Gaussian quadratures*, Math. Comp. **66** (1997) 297–310.
- [64] Y.G. Shi, G. Xu, *Construction of sigma-orthogonal polynomials and gaussian quadrature formulas*, Adv. Comput. Math. **27** (2007) 79–94.
- [65] M.M. Spalević, *Error bounds of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weights*, Math. Comp. (to appear).
- [66] M.M. Spalević, *Error estimates of anti-Gaussian quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. **236** (2012) 3542–3555.
- [67] M.M. Spalević, M.S. Pranić, *The remainder term of Gauss-Turán quadratures for analytic functions*, In: Gautschi, W., Mastroianni, G., Rassias, Th.M. (eds.) Approximation and Computation – In Honor of Gradimir V. Milovanović Springer Optimization and Its Applications, vol. 42., pp. 253–266. Springer, New York (2011).

- [68] M.M. Spalević, M.S. Pranić, *Error bounds of certain Gaussian quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. **234** (2010) 1049–1057.
- [69] M.M. Spalević, M.S. Pranić, A.V. Pejčev, *Maximum of the modulus of kernels of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegő weight functions*, Appl. Math. Comput. **218** (2012) 5746–5756.
- [70] D.D. Stancu, *On a class of orthogonal polynomials and on some general quadrature formulas with minimal numbers of terms*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Romîne (N.S) 1 **49** (1957) 479–458.
- [71] D.D. Stancu, *On the interpolation formula of Hermite and some applications of it*, Acad. Romîne. Fil. Cluj Stud. Cerc. Mat. **8** (1957) 339–355 (Romanian).
- [72] D.D. Stancu, *Generalization of the quadrature formula of Gauss-Christoffel*, Acad. R.P. Romîne Fil. Iași Stud. Cerc. Ști. Mat. **8** (1957) 1–18 (Romanian).
- [73] D.D. Stancu, *A method for constructing quadrature formulas of higher degree of exactness*, Com. Acad. R. P. Romîne **8** (1958) 349–358 (Romanian).
- [74] D.D. Stancu, *On certain general numerical integration formulas*, Acad. R. P. Romîne. Stud. Cerc. Mat. **9** (1958) 209–216 (Romanian).
- [75] D.D. Stancu, *Sur quelques formules générales de quadrature du type Gauss-Christoffel*, Mathematica (Cluj) 1 **24** (1959) 167–182.
- [76] D.D. Stancu, *An extremal problem in the theory of numerical quadratures with multiple nodes*, In: Proceedings of the Third Colloquium on Operations Research (Cluj-Napoca, 1978), Univ. "Babes-Bolyai", Cluj-Napoca 1979 pp. 257–262.
- [77] D.D. Stancu, A.H. Stroud, *Quadrature formulas with simple Gaussian nodes and multiple fixed nodes*, Math. Comp. **17** (1963) 384–394.
- [78] F. Stenger, *Bounds on the error of Gauss-type quadratures*, Numer. Math. **8** (1966) 150–160.
- [79] A.H. Stroud, D. Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1966.
- [80] P. Turán, *On the theory of the mechanical quadrature*, Acta Sci. Math. (Szeged) **12** (1950) 30–37.
- [81] B. Von Sydow, *Error estimates for Gaussian quadrature formulae*, Numer. Math. **29** (1977) 59–64.

БИОГРАФИЈА КАНДИДАТА

Александар Пејчев је рођен 8.4.1985. године у Београду. Основну школу Петар Петровић Његош завршио је 2000. године као ученик генерације, када се уписао у Математичку гимназију, коју је завршио 2004. године матуриравши са просечном оценом 5.00. Као ученик 3. разреда гимназије, учествовао је на 44. Међународној математичкој олимпијади одржаној у Јапану 2003. године, где је освојио сребрну медаљу. Као матурант, учествовао је на 45. Међународној математичкој олимпијади одржаној у Грчкој 2004. године, где је освојио бронзану медаљу. Исте школске године освојио је прву награду на Републичком такмичењу из математике ученика средњих школа.

2004. године уписао је Математички факултет у Београду, на којем је дипломирао 2007. године са просечном оценом 9.73. Као студент 2. године, освојио је трећу награду на Међународном студентском такмичењу ИМС (International Mathematical Competition) одржаном у Украјини 2006. године.

2008. године уписао се на докторске студије математике из области Нумеричке анализе на Институту за математику и информатику при Природно - математичком факултету у Крагујевцу, на којима је до 2011. године положио све испите са просечном оценом 10.

2009. године уписао се на мастер-студије математике из области Методике наставе математике и рачунарства на Математичком факултету у Београду, које је завршио 2010. године одбранивши мастер-рад на тему „Квадратне конгруенције и Гаусов закон реципроцитета” са оценом 10.

2011. године уписао се на мастер-студије математике из области Примењене математике на Математичком факултету у Београду.

Запослен је на Машинском факултету у Београду, где је 2009. године изабран, а 2012. године реизабран на место асистента за ужу научну област Математика и држи вежбе из предмета: Математика 1, Математика 2, Математика 3. У периоду од 2009. до 2012. године држао је и на Математичком факултету у Београду вежбе из предмета Диференцијалне једначине. Од 2004. године активно учествује у припремама ученика средњих школа за домаћа и међународна математичка такмичења при Математичкој гимназији, где од 2007. године држи и редовну наставу (Вероватноћа и статистика, Дискретна математика, Анализа са алгебром, Геометрија).

Активно се бави научно-истраживачким радом у области Нумеричке анализе, посебно нумеричком интеграцијом. До сада су му објављени или прихваћени за штампу следећи научни радови:

- 1) M.M. Spalević, M.S. Pranić, A.V. Pejčev, *Maximum of the modulus of kernels of Gaussian quadrature formulae for one class of Bernstein-Szegö weight functions*, Appl. Math. Comput. **218** (2012) 5746–5756;
- 2) A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *Error bounds for Gaussian quadrature formulae with Bernstein-Szegö weights that are rational modifications of Chebyshev weight functions of the second kind*, IMA J. Numer. Anal. **32** (2012), 1733–1754;
- 3) A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *On the remainder term of Gauss-Radau quadrature with Chebyshev weight of the third kind for analytic functions*, Appl. Math. Comput. **219** (2012), 2760–2765;
- 4) G. V. Milovanović, A.V. Pejčev, M.M. Spalević, *A note on an error bound of Gauss-Turán quadrature with the Chebyshev weight*, FILOMAT, (to appear).

Један део резултата је предложен за штампу и у фази је процене у реномираним научним часописима за Примењену и Нумеричку математику, а један део је у припреми за слање. Његови научни резултати су презентовани на међународним конференцијама:

- 1) SAOTA (у Линцу, Аустрија, 2011.);
 - 2) SC COMPUTING (на Сардинији, Италија, 2011.);
 - 3) ISSAM 2012 (у Генту, Белгија, 2012.),
- као и на једној домаћој конференцији која је 31. маја 2012. године одржана на Машинском факултету у Београду.

SUMMARY

The field of research in this dissertation is concerned with numerical integration, i.e. with the derivation of error bounds for Gauss-type quadratures and their generalizations when we use them to approximate integrals of functions which are analytic inside an elliptical contour \mathcal{E}_ρ with foci at ∓ 1 and sum of semi-axes $\rho > 1$. Special attention is given to Gauss-type quadratures with the special kind of weight functions - weight functions of Bernstein–Szegő type. Three kinds of error bounds are considered in the dissertation, which means analysis of kernels of quadratures, i.e. determination of the location of the extremal point on \mathcal{E}_ρ at which the modulus of the kernels attains its maximum, calculation of the contour integral of the modulus of the kernel, and, also, series expansion of the kernel. Beyond standard, corresponding quadratures for calculation of Fourier expansion coefficients of an analytic function are also analysed in this dissertation.