UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Ivana V. Jovović

O redukcijama sistema linearnih operatorskih jednačina

Doktorska disertacija

Beograd 2013.

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Ivana V. Jovović

O redukcijama sistema linearnih operatorskih jednačina

Doktorska disertacija

Beograd 2013.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Ivana V. Jovović

On reduction formulas for linear systems of operator equations

Doctoral Dissertation

Belgrade 2013.

Podaci o mentoru i članovima komisije

Mentor: Vanredni profesor dr Branko Malešević

Elektrotehnički fakultet,

Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

Docent dr Dragana Todorić

Matematički fakultet,

Univerzitet u Beogradu

Vanredni profesor dr Gojko Kalajdžić

Matematički fakultet,

Univerzitet u Beogradu

Redovni profesor dr Žarko Mijajlović

Matematički fakultet,

Univerzitet u Beogradu

Datum odbrane:

... mojoj porodici

Vesni, Vladeti i Đorđu

Ove izjave zahvalnosti nisu prosto stvar kurtoazije, zapravo pisanje ovih nekoliko redova predstavlja mi prijatnu obavezu i veliko zadovoljstvo.

Pre svega iskrenu zahvalnost dugujem prof. dr Branku Maleševiću na poverenju koje mi je ukazao prihvativši se mentorstva ovog rada. Kao mentor pružio mi je nesebičnu pomoć, davao dragocene savete, dobronamerno me kritikovao i motivisao u nastajanju ove teze. Zahvaljujem se i na podršci i strpljenju koje mi je ukazao prilikom izrade disertacije.

Zahvalnost dugujem članovima komisije docentu dr Dragani Todorić, prof. dr Gojku Kalajdžiću i prof. dr Žarku Mijajloviću na korisnim sugestijama i svesrdnoj pomoći, ne samo pri izradi ove doktorske disertacije, već i u toku osnovnih i doktorskih studija.

Želela bih ovom prilikom da se zahvalim i prof. dr Aleksandru Lipkovskom što je doprineo profilisanju mojih matematičkih afiniteta.

Veliko hvala i mojoj porodici, Vesni, Vladeti i Đorđu, kojima je ova disertacija i posvećena, na bezrezervnoj podršci.

O redukcijama sistema linearnih operatorskih jednačina

Apstrakt:

Predmet izučavanja disertacije je primena nekih tehnika linearne algebre u rešavanju problema redukcije sistema linearnih operatorskih jednačina oblika

$$
\begin{aligned}
A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\
A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\
&\vdots \\
A(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n,
\end{aligned}
$$

gde je $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrica nad poljem K, A linearni operator vektorskog prostora V nad K i gde su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vektori iz V. Posebno se razmatra redukcija sistema dejstvom opšte linearne grupe $GL(n, K)$, kao i korišćenjem karakterističnog polinoma $\Delta_B(\lambda)$ matrice B i rekurentnih formula za koeficijente adjungovane matrice karakteristične matrice $\lambda \cdot I - B$ matrice B. Upotrebom kanonskih formi matrica, razmatramo transformacije polaznog sistema linearnih operatorskih jednačina u neke jednostavnije sisteme i takav tip transformacija određuje parcijalne redukcije polaznog sistema. Dobijeni rezultati o parcijalnoj redukciji sistema predstavljaju nove primene duple prateće matrice koje je uveo J.C. Butcher u [5]. Takođe, razmatramo transformacije polaznog sistema linearnih operatorskih jednačina prvog reda u sisteme operatorskih jednačina višeg reda po jednoj promenljivoj i takav tip transformacija određuje totalnu redukciju polaznog sistema. Dobijeni rezultati o totalnoj redukciji sistema biće povezani sa rezultatima rada T. Downsa [13].
Teza se sastoji iz dva dela. U prvom delu se bavimo racionalnom i Žordanovom kanonskom formom. Polazi se od osnovne strukturne teoreme za konačno generisane module nad glavnoidealskim prstenima. Primenom date teoreme na konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K koji posmatramo kao modul nad prstenom polinoma po jednoj promenljivoj $K[x]$ dobijamo osnovni rezultat o racionalnoj i Žordanovoj formi, koje zatim primenjujemo na transformacije linearnih sistema operatorskih jednačina. Izlaganje u uvodnoj glavi prati knjigu Abstract Algebra autora D. S. Dummit i R. M. Foote [14]. Neki dokazi su izmenjeni i prilagođeni radi lakšeg uklapanja u celinu i stavljanja akcenta na kanonske forme. Druga glava sa detaljno bavi normalnim formama, Ermitovom, Smitovom, racionalnom i Žordanovom, kao i vezom između njih. Eksplicitno su određene matrice transformacije polazne matrice na matricu u odgovarajućoj formi. Neke teoreme su razmatrane sa više aspekata. Dat je jedan sveobuhvatan prikaz teme prema knjigama [14, 19, 37, 34, 35, 20, 57] i [1, 22, 48, 52, 54, 60].

Drugi deo rada se odnosi na originalne rezultate. Okosnicu čine radovi [42, 43]. Ilustruju se metode parcijalne i totalne redukcije sistema dve ili tri promenljive. A zatim se razmatraju parcijalna i totalna redukcija za sisteme n promenljivih. Parcijalna redukcija se vrši prelaskom na novu bazu u kojoj je matrica sistema u Žordanovoj ili racionalnoj kanonskoj formi. Takođe se razmatra i totalna redukcija ovako dobijenih sistema. Podsekcija 4.4 „Totalna redukcija za linearne sisteme kod kojih je matrica sistema u formi prateće matrice" je jedan interesantan nastavak pomenutih radova. U datoj podsekciji se oslanjamo na radove L. Branda [3, 4]. Peta glava predstavlja uopštenje četvrte glave jer se razmatraju sistemi po n promenljivih sa n različitih operatora. Uvodi se pojam karakterističnog polinoma po više promenljivih - uopšteni karakteristični polinom, i u tom smeru se razmatra transformacija sistema. Šesta glava je skup primena i primera navednih teorema parcijalne i totalne redukcije. Dati su primeri za sisteme diferencijalnih jednačina prvog i višeg reda, kao i različiti pristupi za izračunavanje racionalne i Žordanove forme matrice. Poslednja glava se bavi diferencijalnom transcendentnošću rešenja linearnog sistema diferencijalnih jednačina prvog reda sa konstantnim koeficijentima nad poljem $\mathbb{C}$, gde su $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ meromorfne funkcije, u zavisnosti od diferencijalne transcendentnosti jedne od funkcija $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, korišćenjem metode totalne redukcije. Kratko je prvo dat pregled pojmova prema [45, 44, 39, 50, 7, 33, 15, 23, 36].

Ključne reči: totalna i parcijalna redukcija linearnih sistema operatorskih jednačina, prateća matrica, dupla prateća matrica, sume glavnih minora, karakteristični polinom, invarijantni faktori, racionalna kanonska forma, Žordanova kanonska forma, Smitova normalna forma, diferencijalna transcendentnost

Naučna oblast: Matematika

Uža naučna oblast: Algebra

UDK: 512.647(043.3)

On reduction formulas for linear systems of operator equations

Abstract:

This dissertation deals with an application of some linear algebra techniques for solving problems of reduction of system of linear operator equation of the form

$$\begin{aligned}
A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\
A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\
&\vdots \\
A(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n,
\end{aligned}$$

where $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ is matrix over the field K, A is linear operator on the vector space V over K and where $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ are vectors in V. In particular, we consider reduction of such system under the action of the general linear group $GL(n, K)$ and also reduction by using the characteristic polynomial $\Delta_B(\lambda)$ of the matrix B and recurrence for the coefficients of the adjugate matrix of the characteristic matrix $\lambda \cdot I - B$ of the matrix B. The idea is to use rational and Jordan canonical forms to reduce the linear system of operator equations to an equivalent partially reduced system, i.e. to decompose the initial system into several uncoupled systems. This represents a new application of doubly companion matrix introduced by J.C. Butcher in [5]. In this work we are also concerned with transformation of the linear system of operator equation into totally reduced system, i. e. completely decoupled system of higher order linear operator equations. This results are related to results given by T. Downs in [13].

The thesis consists of two parts. The first part deals with properties of rational and Jordan canonical form. We start with Fundamental Theorem of Finitely Generated Modules Over a Principle Ideal Domain. If we consider finite dimensional vector space V over K as module over the ring $K[x]$ of polynomials in x with coefficients in K, the Fundamental Theorem implies that there is a basis for V so that the associated matrix for B is in rational or Jordan form. The first section is adapted from Abstract Algebra of D. S. Dummit i R. M. Foote [14]. In the second section we look more closely at Hermite, Smith, rational and Jordan form and establish the relation between them. The structure of the similarity transformation matrix is also described. Some of theorem are considered from several aspects. This section provides a detailed exposition of normal forms using [14, 19, 37, 34, 35, 20, 57] and [1, 22, 48, 52, 54, 60].

The second part concerns with author's original contribution and it relies on papers [42, 43]. First we illustrate methods of the partial and the total reduction of systems in two or three unknowns and then we study reductions of systems in n unknowns. The partial reduction requests changing of basis so that the system matrix is in the rational or Jordan form. We also treat the total reduction of the obtained partially reduced systems in this manner. Subsection 4.4. "Total Reduction for Linear Systems of Operator Equations with System Matrix in Companion Form" is one interesting way to proceed consideration started in previously mentioned works. It is based on papers of L. Brand [3, 4]. The fifth section is generalization of the forth. Here we examine systems in n unknowns and with different linear operators. We introduce the notion of characteristic polynomial in more than one unknown - generalized characteristic polynomial and a method for total reduction by finding adjugate matrix of the generalized characteristic matrix of the system matrix. The sixth section is a summary of applications and examples of methods for partial and total reduction. There are some examples of the first and higher order linear systems of differential equations and different approaches for calculating rational and Jordan canonical forms. The last section is devoted to the study of differential transcendence of the solution of the first order linear system of differential equations with complex coefficients, where exactly one of the following meromorphic functions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ is differentially transcendental, using method of total reduction. We review some of the standard facts on differential transcendence following books [45, 44, 39, 50, 7, 33, 15, 23, 36].

Key words: Partial and total reduction for linear systems of operator equations, companion matrix, doubly companion matrix, sum of principal minors, characteristic polynomial, invariant factors, rational canonical forms, Jordan canonical form, Smith normal form, differential transcendence

Scientific field: Mathematics

Narrow scientific fields: Algebra

UDC: 512.647(043.3)

Sadržaj

1 Uvod

U uvodnoj glavi dajemo kratak pregled teorije prstena i modula prema knjigama [2], [58] i [14].

1.1 Prsteni i ideali

1.1.1 Prsteni i homomorfizmi prstena

Komutativan prsten sa jedinicom je neprazan skup R sa dve binarne operacije, tj. uređena trojka $(R, +, \cdot)$ takva da važi:

1. $(R, +)$ je Abelova grupa (neutralni element označavamo sa 0);
2. $(R, \cdot)$ je komutativan monoid (jedinični element označavamo sa 1);
3. operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na operaciju $+$.

Ako je $0 = 1$, onda je R nula prsten. Nula prsten ima samo jedan element 0.
Homomorfizam komutativnih prstena sa jedinicama $(R_1, +, \cdot)$ i $(R_2, \oplus, \odot)$ je preslikavanje $f : R_1 \to R_2$ takvo da važi:

1. $(\forall x, y \in R_1)\ f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$;
2. $(\forall x, y \in R_1)\ f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$;
3. $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$.

U daljem tekstu podrazumevaćemo da je prsten komutativan sa jedinicom, ako nije drugačije naglašeno. Ako je preslikavanje $f : R_1 \to R_2$ surjektivno, injektivno ili bijektivno, onda homomorfizam f nazivamo ***epimorfizmom***, ***monomorfizmom*** odnosno ***izomorfizmom***, respektivno. Ako su f i g homomorfizmi prstena, onda je $g \circ f$ homomorfizam prstena (ako je $g \circ f$ definisano).

1.1.2 Ideali i količnički prsteni

Potprsten S prstena R je uređena trojka $(S, +, \cdot)$, $\emptyset \neq S \subseteq R$, koja je komutativan prsten u odnosu na restrikcije binarnih operacija prstena R i za koju važi $1 \in S$, gde je 1 jedinični element prstena $(R, +, \cdot)$. Preslikavanje $f : S \to R$ definisano sa $(\forall x \in S) f(x) = x$ je homomorfizam prstena.
Ideal I prstena R je skup $I \subseteq R$ takav da važi:

1. $(I, +)$ je podgrupa grupe $(R, +)$;
2. $(\forall x \in R)(\forall y \in I)\ x \cdot y \in I$, tj. $R \cdot I \subseteq I$.

Ako je $f : R_1 \to R_2$ homomorfizam prstena, onda je

$$Ker\ f = f^{-1}(0_{R_2}) = \{\ x \in R_1 \mid f(x) = 0_{R_2}\}$$

ideal prstena R_1, a skup svih slika

$$Im\ f = f(R_1) = \{\ y \in R_2 \mid (\exists x \in R_1)\ y = f(x)\}$$

potprsten prstena R_2.

Neka je $(R, +, \cdot)$ komutativan prsten sa jedinicom i I ideal prstena R. Na skupu R definišemo relaciju $\sim$ sa: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I$. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Klasu ekvivalencije elementa $x \in R$ označavamo sa $x + I$. Na skupu svih klasa ekvivalencije R/I definišimo operacije $\oplus$ i $\odot$ sa:

$$(x + I) \oplus (y + I) = (x + y) + I;$$

$$(x + I) \odot (y + I) = (x \cdot y) + I.$$

Uređena trojka $(R/I, \oplus, \odot)$ je komutativan prsten sa jedinicom, koji nazivamo ***količničkim prstenom***. Neutralni element za operaciju $\oplus$ je $0 + I$. Suprotan element elementa $x + I$ je $-x + I$. Jedinični element za operaciju $\odot$ je $1 + I$. Preslikavanje $\pi : R \to R/I$, $\pi(x) = x + I$, je surjektivan homomorfizam prstena i nazivamo ga ***kanonskim*** ili ***prirodnim homomorfizmom***.

Kažemo da element $x \in R$ *deli* element $z \in R$ i pišemo $x \mid z$, ako postoji element $y \in R$ takav da važi $x \cdot y = z$.

Invertibilan element u prstenu R je element x *koji deli 1*, tj. element za koji postoji element y iz R takav da važi $x \cdot y = 1$. Element y je jedinstven i označava se sa x^{-1}. Skup svih invertibilnih elemenata u prstenu R obrazuje Abelovu grupu G u odnosu na operaciju $\cdot$. ***Polje*** je nenula prsten u kome je svaki nenula element invertibilan.

Karakteristika polja je najmanji prirodan broj n takav da je $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0$. Ako takav prirodan broj ne postoji kažemo da je polje karakteristike nula.

Delitelj nule u prstenu R je element x *koji deli 0*, tj. element za koji postoji element $y \neq 0$ iz R takav da važi $x \cdot y = 0$. ***Integralan domen*** je nenula prsten koji nema delitelja nule različitih od nule. Svako polje je integralan domen.

Ideal P nazivamo ***prostim*** ako važi $P \neq R$ i $x \cdot y \in P \Rightarrow x \in P \vee y \in P$. Ideal M nazivamo ***maksimalnim*** ako važi $M \neq R$ i ako ne postoji ideal I takav da važe stroge inkluzije $M \subset I \subset R$. Ideal P prstena R je prost ako i samo ako je R/P integralan domen. Ideal M prstena R je maksimalan ako i samo ako je R/M polje. Svaki maksimalan ideal je prost.

Umnošci $a \cdot x$ elementa $x \in R$ obrazuju ***glavni ideal*** prstena R, koji označavamo sa (x) ili Rx. Prema tome, $y \in (x)$ ako i samo ako $x \mid y$, odnosno ako i samo ako $(y) \subseteq (x)$. Glavni ideal je ideal. Takođe važi: element $x \in R$ je invertibilan ako i samo ako važi $(x) = R = (1)$. ***Glavnoidealski prsten*** je integralan domen u kome je svaki ideal glavni. U glavnoidealskom prstenu svaki nenula prost ideal je maksimalan.

Element $p \in R$ je ***prost*** ako važi $(\forall x, y \in R)\ p \mid x \cdot y \Rightarrow p \mid x \vee p \mid y$. Ideal (p) generisan prostim elementom p je prost. Važi i obrat. Element $a \in R$ je ***nesvodljiv*** ako iz $a = u \cdot v$ sledi u je invertibilan ili v je invertibilan. Svaki prost element prstena R je nesvodljiv. Obrat ne važi u proizvoljnom prstenu. U glavnoidealskim prstenima važi i obrat. Elementi $x, y \in R$ su ***asocirani*** ako je $y = u \cdot x$ za $u \in G$.

Prsten sa jednoznačnom faktorizacijom je integralan domen za koji važi:

1. svaki nenula element $x \in R$ se može predstaviti kao proizvod nesvodljivih elemenata $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$;
2. ako je $x = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$ drugo takvo predstavljanje, onda je $k = n$ i postoji permutacija $\sigma \in S_n$ za koju je $q_{\sigma(i)}$ asocirano sa p_i za svako $1 \leq i \leq n$.

Svaki glavnoidalski prsten je i prsten sa jednoznačnom faktorizacijom.

1.1.3 Kineska teorema o ostacima

Neka je R komutativan prsten sa jedinicom i $\mathcal{A}$ proizvoljan skup. Neka je $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ familija ideala prstena R indeksirana skupom $\mathcal{A}$.

Suma familije ideala $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha \mid (\forall \alpha \in \mathcal{A})\ x_\alpha \in I_\alpha \text{ i za konačno } x_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{A} \text{ važi } x_\alpha \neq 0 \right\},$$

je najmanji ideal prstena R koji sadrži sve ideale I_α, $\alpha \in \mathcal{A}$.

Presek familije ideala $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$,

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha = \{\ x \mid (\forall \alpha \in \mathcal{A})\ x \in I_\alpha\},$$

je najveći ideal prstena R koji je sadržan u svim idealima I_α, $\alpha \in \mathcal{A}$.

Proizvod konačne familije ideala $I_1, I_2, \ldots, I_n$,

$$\begin{aligned} I_1 \cdot I_2 \cdot \ldots \cdot I_n = \Big\{ & \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} x_{1\alpha} \cdot x_{2\alpha} \cdot \ldots \cdot x_{n\alpha} \mid x_{k\alpha} \in I_k,\ 1 \leq k \leq n \text{ i} \\ & \text{za konačno } \alpha \in \mathcal{A} \text{ važi } x_{1\alpha} \cdot x_{2\alpha} \cdot \ldots \cdot x_{n\alpha} \neq 0 \Big\}, \end{aligned}$$

definišemo kao ideal generisan proizvodima $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, $x_k \in I_k$, $1 \leq k \leq n$.

Lema 1.1 *Za ideale I, J i K prstena R važi:*

- $(I + J) \cdot K = I \cdot K + J \cdot K$;
- $I \cdot J \subseteq I \cap J$;
- $I + J = R \Rightarrow I \cdot J = I \cap J$.

Dokaz:

- Zaista, iz $I, J \subseteq I+J$, zaključujemo $I \cdot K, J \cdot K \subseteq (I+J) \cdot K$. Kako je $I \cdot K + J \cdot K$ najmanji ideal koji sadrži ideale $I \cdot K$ i $J \cdot K$ imamo $I \cdot K + J \cdot K \subseteq (I+J) \cdot K$. Za proizvoljan element ideala $(I + J) \cdot K$ važi
$$\sum_{\alpha=1}^{n}(i_\alpha + j_\alpha) \cdot k_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} i_\alpha \cdot k_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha \cdot k_\alpha \in I \cdot K + J \cdot K, i_\alpha \in I, j_\alpha \in J \text{ i } k_\alpha \in K.$$
- Zatim, $I \cdot J \subseteq I \wedge I \cdot J \subseteq J \Rightarrow I \cdot J \subseteq I \cap J$.
- I na kraju, $I + J = R \Rightarrow (\exists i \in I)(\exists j \in J)\ i + j = 1$. Za $x \in R$ važi $x = x \cdot 1 = x \cdot (i + j) = x \cdot i + x \cdot j$. Dalje, $x \in I \cap J$ povlači da je $x \in I$ i $x \in J$, pa imamo $x \cdot j \in I \cdot J$ i $x \cdot i \in I \cdot J$, odakle zaključujemo $x = x \cdot i + x \cdot j \in I \cdot J$.

$\square$

Radikal ideala I definišemo sa $r(I) = \{\ x \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x^n \in I\ \}$. Radikal ideala I, $r(I)$, je ideal prstena R.

Lema 1.2 *Za ideale I i J prstena R važi:*

- $I \subseteq r(I)$;
- $r(r(I)) = r(I)$;
- $r(I \cdot J) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$;
- $r(I) = (1) \Leftrightarrow I = (1)$;
- $r(I + J) = r(r(I) + r(J))$;
- *Ako je P prost ideal prstena R, onda je* $(\forall n \in \mathbb{N})\ r(P^n) = P$.

Dokaz:

- Prva konstatacija jasno važi, izaberimo $n = 1$.

- Kako je $r(I)$ ideal prstena R, inkluzija $r(I) \subseteq r(r(I))$ jasno važi. Ako je $x \in r(r(I))$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^n \in r(I)$, odnosno postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $(x^n)^m = x^{nm} \in I$. Odakle zaključujemo da je $x \in r(I)$ i $r(r(I)) \subseteq r(I)$.

- Dalje, za $x \in r(I \cdot J)$ postoji element $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^n \in I \cdot J$. Kako je $I \cdot J \subseteq I \cap J$ imamo $x^n \in I \cap J$, odnosno $x \in r(I \cap J)$. Odakle sledi da je $r(I \cdot J) \subseteq r(I \cap J)$. Zatim iz $x \in r(I \cap J)$ imamo prvo da postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da $x^n \in I \cap J$, pa zatim $x^n \in I$ i $x^n \in J$ odakle zaključujemo $x \in r(I)$ i $x \in r(J)$, odnosno $x \in r(I) \cap r(J)$. Iz $x \in r(I) \cap r(J)$ sledi $x \in r(I)$ i $x \in r(J)$ što povlači da postoje $n, m \in \mathbb{N}$ za koje važi $x^n \in I$ i $x^m \in J$, odakle dobijamo $x^n x^m = x^{n+m} \in I \cdot J$, tj. $x \in r(I \cdot J)$.

- Što se tiče suprotnog smera situacija je jasna. Za direktan smer, imamo da $r(I) = (1)$ povlači $1 \in r(I)$, pa postoji element $n \in \mathbb{N}$ takav da je $1^n = 1 \in I$, odakle zaključujemo $I = (1)$.

- Ako je $x \in r(I + J)$, onda postoji element $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^n \in I + J$. Kako je $I \subseteq r(I)$ i $J \subseteq r(J)$ imamo da je $x^n \in r(I) + r(J)$, odnosno važi da je $x \in r(r(I) + r(J))$. Obrnuto, za $x \in r(r(I) + r(J))$ postoji element $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^n \in r(I) + r(J)$. Postoje elementi $u \in r(I)$ i $v \in r(J)$ takvi da je $x^n = u + v$. Za elemente u i v postoje $m, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $u^m \in I$ i $v^k \in J$. Dalje, važi $(x^n)^{m+k} = (u+v)^{m+k} = \sum_{i=0}^{m+k} \binom{m+k}{i} u^{m+k-i} v^i$ i sabirci u kojima je $i \geq k$ pripadaju idealu J, a oni u kojima je $i < k$, odnosno $m + k - i > m$, pripadaju idealu I. Odakle zaključujemo $x^n \in I + J$ i $x \in r(I + J)$.

- I na kraju imamo $r(P^n) = r(P)$. Pokažimo da za prost ideal P važi $r(P) = P$. Jasno imamo $P \subseteq r(P)$. Za $x \in r(P)$, postoji element $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x^n \in P$. Kako je P prost ideal imamo $x \in P$. Odakle zaključujemo $r(P) = P$. $\square$

Za ideale I i J kažemo da su ***koprosti*** (***komaksimalni***) ako važi $I + J = R$.

Lema 1.3 *Neka su I i J ideali prstena R za koje važi $r(I) + r(J) = R$. Tada i za ideale I i J važi $I + J = R$.*

Dokaz: Iz $r(I) + r(J) = (1)$ sledi da je $r(r(I) + r(J)) = r(1) = (1)$. Na osnovu prethodne leme imamo da je $r(r(I) + r(J)) = r(I + J)$ što daje $r(I + J) = (1)$ i na kraju dobijamo da je $I + J = (1)$. $\square$

Neka su $R_1, R_2, \ldots, R_n$ komutativni prsteni sa jedinicama. Direktan proizvod prstena $R_1, R_2, \ldots, R_n$, u oznaci $R = \prod_{i=1}^n R_i$, je skup uređenih n-torki $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$x_i \in R_i$, $1 \leq i \leq n$. Na skupu R definišemo pokoordinatno sabiranje i množenje. Uređena trojka $(R, +, \cdot)$ je komutativan prsten sa jedinicom $(1, 1, \ldots, 1)$. Projekcije $\pi_i : R \to R_i$ date sa $\pi_i(x) = x_i$ su homomorfizmi prstena. Neka je R prsten i neka su $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ideali prstena R. Definišimo homomorfizam prstena $\phi : R \to \prod_{i=1}^{n} R/I_i$ sa $\phi(x) = (x + I_1, x + I_2, \ldots, x + I_n)$.

Teorema 1.4 *(Kineska teorema o ostacima)*

i) Ako su I_i i I_j koprosti ideali za $i \neq j$, onda je $\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

ii) Preslikavanje ϕ je surjektivno ako i samo ako su ideali I_i i I_j koprosti za $i \neq j$.

iii) Preslikavanje ϕ je injektivno ako i samo ako je $\bigcap_{i=1}^{n} I_i = 0$.

Dokaz: *i*) Dokaz izvodimo indukcijom po broju ideala n. Pokazali smo da tvrđenje važi za dva ideala. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$ ideala $I_1, I_2, \ldots I_{n-1}$ i dokažimo da važi za n ideala $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I_n$. Ideali I_i i I_n su koprosti za svako i, $1 \leq i \leq n-1$. Za svako i, $1 \leq i \leq n-1$, važi $I_i + I_n = R$, odnosno postoje elementi $x_i \in I_i$ i $y_i \in I_n$ takvi da važi $x_i + y_i = 1$. Element $\prod_{i=1}^{n-1} x_i \in \prod_{i=1}^{n-1} I_i$ možemo zapisati u obliku $\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1}(1-y_i) = 1+y$, za $y \in I_n$, odnosno $1 = \prod_{i=1}^{n-1} x_i - y$. Pa su ideali $\prod_{i=1}^{n-1} I_i$ i I_n koprosti. Odakle zaključujemo $\prod_{i=1}^{n} I_i = \prod_{i=1}^{n-1} I_i \cap I_n$. Na osnovu indukcijske hipoteze imamo $\prod_{i=1}^{n-1} I_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} I_i$ i kad to ubacimo u gornju jednakost dobijamo $\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

ii) $\Rightarrow$: Neka je preslikavanje ϕ surjektivno. Pokažimo da su ideali I_1 i I_2 koprosti. Postoji element $x \in R$ takav da važi $\phi(x) = (1 + I_1, I_2, \ldots, I_n)$. Odnosno $x - 1 \in I_1$ i $x \in I_i$, $2 \leq i \leq n$. Važi $1 = (1 - x) + x \in I_1 + I_2$, tj. $I_1 + I_2 = R$. Odakle zaključujemo da su ideali I_1 i I_2 koprosti. Na isti način zaključujemo da su i ostali ideali koprosti u paru.

$\Leftarrow$: Neka su I_i i I_j koprosti ideali za $i \neq j$. Pokažimo da postoji element $x \in R$ takav da važi $\phi(x) = (1 + I_1, I_2, \ldots, I_n)$. Kako je $I_1 + I_i = R$ za svako i, $2 \leq i \leq n$, postoje elementi $u_i \in I_1$ i $v_i \in I_i$ takvi da važi $u_i + v_i = 1$. Definišimo element x sa $x = \prod_{i=2}^{n} v_i$. Važi $x \in \prod_{i=2}^{n} I_i \subseteq I_i$ za svako i, $2 \leq i \leq n$. Takođe imamo $x = \prod_{i=2}^{n} v_i = \prod_{i=2}^{n}(1 - u_i) = 1 + u$ za $u \in I_1$. Odakle zaključujemo da je $\phi(x) = (1 + I_1, I_2, \ldots, I_n)$.

iii) Za jezgro homomorfizma ϕ važi $Ker\ \phi = \{\ x \in R \mid \phi(x) = (I_1, I_2, \ldots, I_n)\ \}$. Prema tome, element $x \in R$ pripada jezgru preslikavanja ϕ ako i samo ako x pripada svakom od ideala $I_1, I_2, \ldots, I_n$, odnosno ako i samo ako $x \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. $\square$

Lema 1.5 *Ako su I_i i I_j koprosti ideali za $i \neq j$, onda za ideale $J_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} I_j$ važi $J_1 + J_2 + \ldots + J_n = R$.*

Dokaz: Dokaz izvodimo indukcijom po broju ideala n. Za dva ideala tvrđenje jasno važi. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n-1$ ideala $I_1, I_2, \ldots I_{n-1}$ i dokažimo da važi za n ideala $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, I_n$. U okviru dokaza Kineske teoreme o ostacima pokazali smo da su ideali I_n i $\prod_{j=1}^{n-1} I_j$ koprosti. Na osnovu indukcijske hipoteze imamo $\sum_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} I_j = R$. Prema tome,

$$\begin{aligned} R &= I_n + \prod_{j=1}^{n-1} I_j = R \cdot I_n + \prod_{j=1}^{n-1} I_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} I_j \cdot I_n + \prod_{j=1}^{n-1} I_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} I_j + \prod_{j=1}^{n-1} I_j = J_1 + J_2 + \ldots + J_n. \end{aligned}$$ □

Napomena 1.6 *Prethodna lema je originalan doprinos autora.*

1.2 Moduli

1.2.1 Moduli i homomorfizmi modula

Neka je R komutativan prsten sa jedinicom. ***Modul nad prstenom*** R ili R***-modul*** M je Abelova grupa $(M, +)$ sa preslikavanjem $\cdot : R \times M \to M$ za koje važe aksiome:

1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$;
2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$;
3. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$;
4. $1 \cdot x = x$;

$a, b \in R$, $x, y \in M$.

Ako su zadovoljene gore navedene aksiome kažemo da prsten R *linearno dejstvuje* na M. Neka su M i N dva R-modula. ***Homomorfizam*** R***-modula*** ili R***-linearno preslikavanje*** iz M u N je preslikavanje f za koje važi:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$,

$a \in R, x, y \in M$.

Homomorfizam R-modula $f : M \to N$ je homomorfizam Abelovih grupa M i N koji komutira sa dejstvom svakog elementa $a \in R$. Ako je preslikavanje $f : M \to N$ surjektivno, injektivno ili bijektivno, homomorfizam f nazivamo ***epimorfizmom***, ***monomorfizmom*** i ***izomorfizmom***, respektivno. Činjenicu da su R-moduli M i N izomorfni označavamo sa $M \cong N$. Skup svih homomorfizama iz M u N je

R-modul, koji označavamo sa $Hom_R(M,N)$, gde su binarna operacija $+$ i linearno dejstvo $\cdot$ definisani sa:

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$.

Za proizvoljan R-modul M važi $Hom_R(R,M) \cong M$.

Primeri modula:

1. Svaki prsten je modul nad samim sobom.

   Homomorfizam R-modula $f : R \to M$ je jedinstveno određen vrednošću $f(1)$, jer je $(\forall a \in R)\ f(a) = a \cdot f(1)$.

2. Ideal I prstena R je modul nad prstenom R.

3. Modul V nad poljem K nazivamo ***vektorskim prostorom***.

   K-linearno preslikavanje iz V u V nazivamo ***linearnim operatorom***.

4. Dekartov proizvod R-modula M i N sa pokoordinatnim sabiranjem i množenjem elementima iz R je R-modul.

5. Svaka Abelova grupa $(G,+)$ je $\mathbb{Z}$-modul.

6. Neka je $R = K[x]$ prsten polinoma po promenljivoj x nad poljem K. Neka je V vektorski prostor nad poljem K i $L : V \to V$ fiksirani linearni operator. Tada je V modul nad prstenom R, gde je R-linearno dejstvo na V definisano sa $f(x) \cdot v = f(L)(v)$.

Podmodul N modula M je podgrupa grupe $(M,+)$ koja je zatvorena za množenje elementima iz R, odnosno skup $\emptyset \neq N \subseteq M$ koji je Abelova grupa u odnosu na restrikciju binarne operacije $+$ i za koju važi $(\forall a \in R)(\forall x \in N)\ a \cdot x \in N$. Svaki R-modul M ima najmanje dva podmodula, ceo modul M i trivijalni podmodul 0.

Količnički modul R-modula M po podmodulu N je Abelova grupa $(M/N, \oplus)$ za koju važi $(\forall a \in R)(\forall x \in M)\ a \cdot (x+N) = (a \cdot x) + N$. Preslikavanje $\pi : M \to M/N$, $\pi(x) = x + N$, je surjektivan homomorfizam R-modula i nazivamo ga ***kanonskim*** ili ***prirodnim homomorfizmom***. Ako je $f : M \to N$ homomorfizam R-modula, onda je jezgro od f, $Ker\ f = \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$, podmodul R-modula M. Slika od f, $Im\ f = f(M)$, je podmodul R-modula N. Kojezgro od f, $Coker\ f = N/Im\ f$, je količnički modul R-modula N i njegovog podmodula $Im\ f$. Neka je L podmodul R-modula M za koji važi $L \subseteq Ker\ f$. Tada homomorfizam $f : M \to N$

indukuje homomorfizam R-modula $\overline{f} : M/L \to N$, definisan sa $\overline{f}(x+L) = f(x)$. Činjenica da je $L \subseteq Ker\, f$ nam obezbeđuje dobru definisanost preslikavanja $\overline{f}$. Ako za L uzmemo baš $Ker\ f$ i ako izvršimo restrikciju po kodomenu homomorfizam $\overline{f} : M/Ker\ f \to Im\ f$ postaje izomorfizam i prema tome važi prva teorema o izomorfizmu za module tj. $M/Ker\, f \cong Im\, f$. Za R-module $L \subseteq N \subseteq M$, važi $(M/L)/(N/L) \cong M/N$. Dato tvrđenje se naziva treća teorema o izomorfizmu, a dokaz se izvodi primenom prve teoreme o izomorfizmu na homomorfizam R-modula $\theta : M/L \to M/N$.

1.2.2 Konačno generisani i slobodni moduli

Neka je R prsten i I proizvoljan skup. Označimo sa $R^{(I)}$ skup familija $(a_i)_{i\in I}$, indeksiranih skupom I, elemenata iz R takvih da je $a_i = 0$ osim za konačno koordinata $i \in I$. Prema tome, $R^{(I)}$ je podskup Dekartovog proizvoda R^I i takođe podmodul od R-modula R^I, ako pretpostavimo da je na skupu R^I definisana struktura R-modula sa pokoordinatnim sabiranjem i množenjem skalarima iz prstena R. Ukoliko je I konačan skup, važi $R^{(I)} = R^I$. Za $j \in I$, familiju $(\delta_{ij})_{i\in I}$, gde je $\delta_{jj} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$, označimo sa $e_j \in R^{(I)}$. Svaki element $(a_j)_{j\in I} \in R^{(I)}$ ima jedinstveno predstavljanje kao konačna linearna kombinacija elemenata e_j sa koeficijentima iz R, odnosno $(a_j)_{j\in I} = \sum_{j\in I} a_j e_j$. Familiju $(e_j)_{j\in I}$ nazivamo ***kanonskom bazom*** od $R^{(I)}$.

Neka je M modul nad prstenom R i neka je $(M_i)_{i\in I}$ familija podmodula od M. Skup svih suma $\sum_{i\in I} x_i$, $x_i \in M_i$ u kojima je samo konačno sabiraka različito od nule nazivamo ***sumom*** modula M_i, u oznaci $\sum_{i\in I} M_i$. Suma modula M_i je najmanji podmodul od M koji sadrži sve module M_i. Sumu konačno modula $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nazivamo ***direktnom*** ako je homomorfizam $f : \sum_{i=1}^n M_i \to M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ dat sa $f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ izomorfizam. Za $x \in M$, skup $\{ax \mid a \in R\}$ je podmodul R-modula M, koji označavamo sa Rx ili sa (x) i nazivamo ***cikličnim modulom***. Ako važi $M = \sum_{i\in I} Rx_i$, kažemo da je $\{x_i \mid i \in I\}$ ***skup generatora*** modula M. Svaki element iz M se može izraziti, ne obavezno na jedinstveni način, kao konačna linearna kombinacija elemenata x_i sa koeficijentima iz R. Za R-modul M kažemo da je ***konačno generisani*** ili da je ***konačnog tipa*** ako ima konačan skup generatora. Za proizvoljnu familiju $(x_i)_{i\in I}$ elemenata R-modula M definišemo linearno preslikavanje $\varphi : R^{(I)} \to M$ tako da svakom elementu $(a_i)_{i\in I} \in R^{(I)}$ pridružujemo element $\sum_{i\in I} a_i x_i \in M$. Jasno je da za kanonsku bazu $(e_j)_{j\in I}$ od $R^{(I)}$ važi $\varphi(e_j) = x_j$ za svako $i \in I$. Skup $\{x_i \mid i \in I\}$ je linearno nezavisan ako i samo ako je preslikavanje φ injektivno. Skup $\{x_i \mid i \in I\}$ generiše modul M ako i samo ako je preslikavanje φ surjektivno. Ako je preslikavanje φ bijektivno, onda skup $\{x_i \mid i \in I\}$ nazivamo ***bazom*** modula M. Modul koji ima bazu nazivamo ***slobodnim modulom***. Konačno generisan R-modul je izomorfan nekom količničkom modulu R-modula R^n. Konačno generisan slobodan R-modul je izomorfan sa R^n.

1.2.3 Neterini moduli

Lema 1.7 *Za parcijalno uređen skup $(\Sigma, \leq)$ sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

i) Svaki lanac $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$ u Σ je stacionaran, tj.
$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq m \Rightarrow x_n = x_m$.

ii) Svaki neprazan podskup od Σ ima maksimalan element.

Dokaz: $i) \Rightarrow ii)$ Pretpostavimo suprotno, da postoji skup $\emptyset \neq T \subseteq \Sigma$ koji nema maksimalan element. Tada je za svaki element $x \in T$ skup elemenata iz T koji su veći od x neprazan. Na osnovu aksiome izbora postoji preslikavanje $f : T \to T$ takvo da je $f(x) > x$ za svako $x \in T$. Za proizvoljno $x_0 \in T$ indukcijom definišemo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Dati niz je strogo rastući, pa samim tim ne može biti stacionaran.
$ii) \Rightarrow i)$ Neka je x_m maksimalan element rastućeg niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada za svako $n \geq m$ važi $x_n \geq x_m$ jer je niz rastući i $x_n \leq x_m$ jer je x_m maksimalan element niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Prema tome, za svako $n \geq m$ važi $x_n = x_m$, odnosno niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je stacionaran. $\square$

Ako je Σ skup podmodula R-modula M uređen inkluzijom $\subseteq$, onda uslov $i)$ nazivamo ***uslovom rastućih lanaca***, a uslov $ii)$ ***uslovom maksimalnosti***.

Teorema 1.8 *Za R-modul M sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

i) Svaki lanac $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ podmodula modula M je stacionaran.

ii) Svaka neprazna familija podmodula od M ima maksimalan element.

iii) Svaki podmodul R-modula M je konačno generisan.

Dokaz: $i) \Leftrightarrow ii)$ Sledi na osnovu leme 1.7.
$ii) \Rightarrow iii)$ Neka je N podmodul R-modula M i neka je Σ skup svih konačno generisanih podmodula od N. Skup Σ je neprazan jer je $0 \in \Sigma$. Prema tome, Σ ima maksimalan element, označimo ga sa N_0. Pokažimo da je $N = N_0$. Važi da je $N_0 \subseteq N$ i ako postoji $x \in N \setminus N_0$, onda je N_0 pravi podmodul konačno generisanog modula $N_0 + Rx$, što je suprotno činjenici da je N_0 maksimalan konačno generisan podmodul od N. Prema tome, $N = N_0$ i N je konačno generisan R-modul.

$iii) \Rightarrow i)$ Neka je $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ rastući lanac podmodula R-modula M. Tada je $N = \cup_{n=1}^{+\infty} M_n$ podmodul od M, koji je na osnovu uslova $iii)$ konačno generisan. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m$ generatori modula N. Za svako i, $1 \leq i \leq m$, postoji n_i takvo da je $x_i \in M_{n_i}$. Neka je $n = max\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$. Tada za svako i, $1 \leq i \leq m$, važi da je $x_i \in M_n$, odakle zaključujemo da je $N \subseteq M_n$. Kako je $N = \cup_{n=1}^{+\infty} M_n$, važi i da je $M_n \subseteq N$, odnosno $M_n = N$, pa samim tim je niz $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stacionaran. $\square$

Modul M koji zadovoljava ekvivalentne uslove $i)$, $ii)$ i $iii)$ nazivamo ***Neterinim***. Prsten R je ***Neterin*** ako je Neterin kao R-modul.

Posledica 1.9 *Svaki glavnoidealski prsten je Neterin.*

Dokaz: Ako prsten R razmatramo kao modul nad samim sobom, onda njegove ideale možemo posmatrati kao njegove podmodule. U glavnoidealskom prstenu svi ideali su konačno generisani, generisani su sa jednim elementom, pa na osnovu prethodne teoreme sledi tvrđenje. $\square$

1.2.4 Moduli nad glavnoidealskim prstenima

Neka je R integralan domen i K polje razlomaka od R. Slobodan R-modul izomorfan sa $R^{(I)}$ za neko I možemo utopiti u vektorski prostor $K^{(I)}$ nad poljem K. Isto važi i za podmodul M slobodnog R-modula. Dimenziju potprostora vektorskog prostora $K^{(I)}$ generisanog sa M nazivamo ***rangom od M***. Odnosno, rang R-modula M je maksimalan broj R-linearno nezavisnih elemenata od M. Ako je M slobodan i ako ima bazu sa n elemenata, onda je rang od M jednak n. Zaista, ako je M slobodan R-modul i ako ima bazu sa n elemenata, onda je $M \cong R^n$ i važi $M \subseteq K^n$. Kako K^n predstavlja n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K, svakih $n+1$ elemenata iz M je K-linearno zavisno. Množenjem jednakosti linearne zavisnosti sa proizvodom imenilaca koeficijenata iz K dobijamo jednakost linearne zavisnosti nad R. Prema tome, maksimalan broj R-linearno nezavisnih elemenata od M je n.

Teorema 1.10 *Neka je R glavnoidealski prsten, M slobodan R-modul ranga n i N podmodul od M. Tada važi:*

i) N je slobodan R-modul ranga m, $0 \leq m \leq n$;

ii) za podmodul $N \neq 0$, postoji baza $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ modula M i nenula elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$ takvi da je $(\, a_1y_1,\, a_2y_2,\, \ldots,\, a_my_m\,)$ baza od N i $a_i \mid a_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$.

Dokaz: Za $N = 0$ tvrđenje trivijalno važi. Neka je $N \neq 0$. Za svaki homomorfizam R-modula φ iz M u R slika $\varphi(N)$ od N je podmodul R-modula R, odnosno ideal prstena R. Prsten R je glavnoidealski, pa je ideal $\varphi(N)$ glavni i generisan npr. elementom $a_\varphi \in R$. Označimo sa $\Sigma = \{(a_\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M, R)\}$ familiju ideala prstena R koji su slike podmodula N pri homomorfizmima iz M u R. Familija Σ je neprazna jer je $0 \in \Sigma$ kao slika trivijalnog homomorfizma. Na osnovu Posledice 1.9 familija Σ ima maksimalan element, označimo ga sa (a_1). Prema tome, postoji homomorfizam ν iz M u R takav da je $\nu(N) = (a_\nu) = (a_1)$. Odakle zaključujemo da postoji element $y \in N$ takav da važi $\nu(y) = a_1$. Dokažimo da je $a_1 \neq 0$. Neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ proizvoljna baza slobodnog R-modula M i neka je $\pi_i \in Hom_R(M, R)$ prirodna projekcija na i-tu koordinatu u odnosu na datu bazu. Pošto je $N \neq 0$ postoji i, $1 \leq i \leq n$, takvo da je $\pi_i(N) \neq 0$, odakle zaključujemo da familija Σ sadrži netrivijalan ideal. Ideal (a_1) je maksimalan i prema tome $a_1 \neq 0$. Dokažimo i da za svaki homomorfizam $\varphi \in Hom_R(M, R)$ važi $a_1 \mid \varphi(y)$. Označimo sa d generator sume ideala (a_1) i $(\varphi(y))$. Postoje elementi $r_1, r_2 \in R$ takvi da je $d = r_1 a_1 + r_2 \varphi(y)$. Kako je $Hom_R(M, R)$ modul nad R zaključujemo da je $\psi = r_1\nu + r_2\varphi$ homomorfizam iz M u R. Važi $d = r_1 a_1 + r_2\varphi(y) = r_1\nu(y) + r_2\varphi(y) = \psi(y) \in \psi(N)$. Pa imamo $(d) \subseteq \psi(N)$. Na osnovu definicije ideala (d) važi $(a_1) \subseteq (d)$. Maksimalnost ideala (a_1) zajedno sa $(a_1) \subseteq (d) \subseteq \psi(N)$ daje $(a_1) = (d) = \psi(N)$. Odakle zaključujemo da je $\varphi(y) \in (a_1)$, odnosno $a_1 \mid \varphi(y)$, za svaki homomorfizam $\varphi \in Hom_R(M, R)$. Prema tome, $a_1 \mid \pi_i(y)$, odnosno postoje elementi $b_i \in R$ takvi da važi $\pi_i(y) = b_i a_1$ za svako i, $1 \leq i \leq n$. Definišimo element y_1 sa $y_1 = \sum_{i=1}^n b_i x_i$. Imamo $a_1 y_1 = a_1 \sum_{i=1}^n b_i x_i = \sum_{i=1}^n a_1 b_i x_i = \sum_{i=1}^n \pi_i(y) x_i = y$. Pošto je $a_1 = \nu(y)$, na osnovu prethodnog imamo $a_1 = \nu(y) = \nu(a_1 y_1) = a_1 \nu(y_1)$. Prsten R je integralan domen, odakle zaključujemo $\nu(y_1) = 1$. Pokažimo sada da važi:

(a) $M = Ry_1 \oplus Ker\ \nu$;

(b) $N = Ra_1 y_1 \oplus (Ker\ \nu\ \cap\ N)$.

Proizvoljan element $x \in M$ zapišimo u obliku $x = \nu(x)y_1 + (x - \nu(x)y_1)$ i pokažimo da $x - \nu(x)y_1 \in Ker\ \nu$. Zaista $\nu(x - \nu(x)y_1) = \nu(x) - \nu(x)\nu(y_1) = \nu(x) - \nu(x) = 0$. Svaki element $x \in M$ predstavili smo kao sumu jednog elementa iz Ry_1 i jednog elementa iz $Ker\ \nu$. Ostaje još da pokažemo da je suma direktna, odnosno da je $Ry_1 \cap Ker\ \nu = \{0\}$. Neka proizvoljan element ry_1 modula Ry_1 pripada modulu $Ker\ \nu$. Tada je $0 = \nu(ry_1) = r\nu(y_1) = r$, odnosno $ry_1 = 0$. Što se tiče dela (b), pošto je $\nu(N) = (a_1)$ za svaki element $x' \in N$ postoji element $b \in R$ takav da važi $\nu(x') = ba_1$. Zatim x' možemo zapisati u obliku sume $x' = \nu(x')y_1 + (x' - \nu(x')y_1)$, kao što smo to uradili u delu (a). Za $\nu(x')y_1$ važi $\nu(x')y_1 = ba_1 y_1 \in Ra_1 y_1$. Zatim

$\nu(x')y_1 = ba_1y_1 = by \in N$, odakle zaključujemo $x' - \nu(x')y_1 \in Ker\ \nu \cap N$. Suma u delu (b) je direktna kao posledica činjenice da je suma u delu (a) direktna. Dokažimo tvrđenje i) indukcijom po rangu m podmodula N. Ako je $m = 0$, tada za svaki element $x' \in N$ i za svako $r \in R$ važi $rx' = 0$, pa zaključujemo da je $N = 0$. Pretpostavimo sada da je $m > 0$. Pošto je suma u ii) direktna $Ker\ \nu \cap N$ je ranga $m - 1$. Na osnovu indukcijske hipoteze $Ker\ \nu \cap N$ je slobodan R-modul. Dodavanjem elementa a_1y_1 bazi modula $Ker\ \nu \cap N$ dobijamo bazu za N. Pa je N slobodan R-modul ranga m. I na kraju dokazujemo tvrđenje ii) indukcijom po rangu n modula M. Na osnovu tvrđenja i) zaključujemo da je podmodul $Ker\ \nu$ modula M slobodan, a na osnovu dela (a) da je ranga $n-1$ (suma u (a) je direktna). Primenimo indukcijsku hipotezu na slobodan R-modul $Ker\ \nu$ ranga $n - 1$ i njegov podmodul $Ker\ \nu \cap N$. Postoji baza $(y_2, \ldots, y_n)$ modula $Ker\ \nu$ takva da je $(a_2y_2, \ldots, a_my_m)$ baza za $Ker\ \nu \cap N$ i da važi $a_i \mid a_{i+1}$, $2 \leq i \leq m-1$. Pošto su sume u (a) i (b) direktne imamo baze $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ i $(a_1y_1, a_2y_2, \ldots, a_my_m)$ od M i N respektivno. Ostalo je još samo da pokažemo da $a_1 \mid a_2$. Definišimo homomorfizam R-modula φ iz M u R sa $\varphi(y_1) = 1$, $\varphi(y_2) = 1$ i $\varphi(y_i) = 0$ za $2 < i \leq n$. Važi $\varphi(a_1y_1) = a_1\varphi(y_1) = a_1$, odnosno a_1 pripada $\varphi(N)$, pa imamo $(a_1) \subseteq \varphi(N)$. Ali (a_1) je maksimalan element familije Σ, pa je $(a_1) = \varphi(N)$. Takođe, $a_2 = \varphi(a_2y_2) \in \varphi(N)$. Odakle zaključujemo $a_2 \in (a_1)$, tj. $a_1 \mid a_2$. $\square$

Neka su N i L dva podmodula R-modula M. Skup $(N : L)$ definisan sa

$$(N : L) = \{r \in R \mid (\forall x \in L)\ rx \in N\}$$

je ideal prstena R. Specijalno ideal $(0 : M) = \{r \in R \mid (\forall x \in M)\ rx = 0\}$ nazivamo ***anhilatorom*** R-modula M i označavamo sa $Ann(M)$. Za ciklični R-modul Rx i surjektivan homomorfizam $\pi : R \to Rx$ definisan sa $\pi(r) = rx$ imamo $R/Ker\ \pi \cong Rx$. Kako je $Ker\ f = \{r \in R \mid rx = 0\} = Ann(x)$ važi $R/Ann(x) \cong Rx$. Ukoliko je prsten R glavnoidealski, postoji element $a \in R$ takav da važi $Ker\ \pi = (a)$, odnosno $R/(a) \cong Rx$.

Posledica 1.11 *Neka je R glavnoidealski prsten i M konačno generisani R-modul. Tada je modul M izomorfan direktnoj sumi cikličnih modula $R/(a_i)$, $1 \leq i \leq n$, tj.*

$$M \cong R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_n),$$

gde za elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ važi $a_i \mid a_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Dokaz: Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konačan skup generatora R-modula M. Neka je $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ kanonska baza R-modula R^n. Homomorfizam R-modula $\varphi\colon R^n \to M$

dat sa $\varphi(e_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, je surjektivan. Na osnovu prve teoreme o izomorfizmu za module imamo $R^n/Ker\ \varphi \cong M$. Na osnovu Teoreme 1.10 postoji baza $(y_1, \ldots, y_n)$ od R^n i nenula elementi $a_1, \ldots, a_m \in R$ takvi da je $(a_1y_1, \ldots, a_my_m)$ baza od $Ker\ \varphi$ i $a_i \mid a_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. Neka je $a_j = 0$ za $m+1 \leq j \leq n$. Tada je

$$M \cong (Ry_1 \oplus Ry_2 \oplus \ldots \oplus Ry_n)/(Ra_1y_1 \oplus Ra_2y_2 \oplus \ldots \oplus Ra_ny_n).$$

Za kanonski homomorfizam $\pi : Ry_1 \oplus Ry_2 \oplus \ldots \oplus Ry_n \to R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_n)$ dat sa $\pi(\alpha_1y_1, \alpha_2y_2, \ldots, \alpha_ny_n) = (\alpha_1 + (a_1), \alpha_2 + (a_2), \ldots, \alpha_n + (a_n))$ imamo

$$\begin{aligned} Ker\ \pi &= \{(\alpha_1y_1, \alpha_2y_2, \ldots, \alpha_ny_n) \mid \alpha_i \in (a_i), 1 \leq i \leq n\} \\ &= Ra_1y_1 \oplus Ra_2y_2 \oplus \ldots \oplus Ra_ny_n. \end{aligned}$$

Prema tome, na osnovu prve teoreme o izomorfizmu za module zaključujemo

$$M \cong R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_n). \quad \square$$

Ako je $a = 0$, onda je $R/(a) = R$. Pa je $M \cong R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_m) \oplus R^{n-m}$. Ako je a invertibilan element prstena R, onda je $R/(a) = 0$. Ako pretpostavimo da je skup generatora $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ modula M najmanje kardinalnosti, onda je svaki od elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$ neinvertibilan. U suprotnom bismo dobili skup generatora koji ima manje elemenata od n.

Element m iz R-modula M nazivamo ***torzionim elementom*** ako postoji nenula element $r \in R$ takav da važi $rm = 0$, odnosno ako je $Ann(m) \neq 0$. Skup svih torzionih elemenata R-modula M označavamo sa $Tor\ M$, tj.

$$Tor\ M = \{m \in M \mid (\exists r \in R \setminus \{0\})\ rm = 0\}.$$

Ako je R integralan domen, onda je $Tor\ M$ podmodul R-modula M, koji nazivamo ***torzionim podmodulom***. Zaista, za elemente $m_1, m_2 \in Tor\ M$ postoje elementi $r_1, r_2 \in R \setminus \{0\}$ takvi da je $r_1m_1 = 0$ i $r_2m_2 = 0$. Dakle, za proizvoljne elemente $t_1, t_2 \in R$ važi da je $r_1r_2(t_1m_1 + t_2m_2) = 0$. Uslov da je prsten R integralan domen, obezbeđuje nam da je $r_1r_2 \neq 0$. Ako je $Tor\ M = M$, onda kažemo da je modul M ***torzioni modul***. Ako je $Tor\ M = 0$, onda kažemo da je modul M ***bez torzije***. Odnosno R-modul M je bez torzije ako $(\forall m \in M)(\forall r \in R)\ rm = 0 \Rightarrow r = 0 \vee m = 0$. Pokažimo još da je R-modul $M/Tor\ M$ bez torzije. Neka je $m + Tor\ M$ proizvoljan element modula $M/Tor\ M$ i neka je r nenula element prstena R. Tada iz niza jednakosti $r(m + Tor\ M) = rm + Tor\ M = Tor\ M$ zaključujemo da $rm \in Tor\ M$, odnosno da postoji nenula element s prstena R takav da je $srm = 0$. Prsten R je integralan domen, pa je $sr \neq 0$, odnosno $m \in Tor\ M$. Dakle $m + Tor\ M = Tor\ M$.

Posledica 1.12 *Neka je R glavnoidealski prsten i M konačno generisan R-modul bez torzije. Tada je R-modul M slobodan.*

Dokaz: Na osnovu Posledice 1.11 modul M je izomorfan direktnoj sumi cikličnih modula $R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_n)$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su svi elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neinvertibilni, tj. da za svako i, $1 \leq i \leq n$, $(a_i) \neq R$. U suprotnom odgovarajuće elemente možemo izbrisati iz sume. Kako važi da je $(a_1) \neq R$ postoji nenula element $x_1 \in R/(a_1)$. Ako pretpostavimo da je $a_1 \neq 0$, onda postoji i nenula element $a \in (a_1)$.
Za element $x = (x_1, 0, \ldots, 0) \in R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_n)$ važi $ax = 0$ i $a \neq 0$ i $x \neq 0$, odnosno x je torzioni element, što je u suprotnosti sa činjenicom da je R-modul M bez torzije. Prema tome, $a_1 = 0$. Slično pokazujemo da važi $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$. Odnosno R-modul M je izomorfan slobodnom modulu R^n, pa je i sam slobodan. $\square$

Posledica 1.13 *Neka je R glavnoidealski prsten i neka za R-modul M važi $M \cong R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_m) \oplus R^{n-m}$, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$ nenula elementi koji nisu invertibilni i za koje važi $a_i \mid a_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-1$. Tada je $Tor\ M \cong R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_m)$ i $Ann(Tor\ M) = (a_m)$.*

Dokaz: Ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konačan skup generatora R-modula M. Onda je $Ann(M) = \bigcap_{k=1}^{n} Ann(x_k)$. Kako je $Ann(R/(a)) = (a)$, imamo da je $Ann(M) = 0$ za $n \neq m$ i $Ann(M) = \bigcap_{k=1}^{m}(a_k) = (a_m)$ za $m = n$, jer važi $a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_m$. Prema tome, $Tor\ M \cong R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_m)$ i $Ann(Tor\ M) = (a_m)$. $\square$

Posledica 1.14 *Neka je R glavnoidealski prsten i M konačno generisan R-modul. Tada je R-modul M izomorfan direktnoj sumi R-modula M_i, gde je svaki od modula M_i jednak ili R ili $R/(p^{\alpha})$, za proste elemente $p \in R$.*

Dokaz: Neka je a nenula element glavnoidealskog prstena R. Pošto je R i domen sa jednoznačnom faktorizacijom element a je asociran sa proizvodom stepena neasociranih nesvodljivih elemenata, tj. postoji invertibilan element $u \in R$ takav da je $a = up_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$. Ideali $(p_i^{\alpha_i})$ generisani odgovarajućim elementima su jedinstveno određeni, jer je faktorizacija jedinstvena do na množenje invertibilnim elementom. Svaki nesvodljiv element u glavnoidealskom prstenu je prost. Radikali ideala $(p_i^{\alpha_i})$ i $(p_j^{\alpha_j})$ su prosti ideali (p_i) i (p_j), koji su za $i \neq j$ koprosti. Ako su radikali dva ideala koprosti, onda su i dati ideali koprosti. Pa na osnovu Kineske teoreme o ostacima

$R/(a) = R/(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k})$ i $R/(p_1^{\alpha_1}) \oplus R/(p_2^{\alpha_2}) \oplus \ldots \oplus R/(p_k^{\alpha_k})$ su izomorfni prsteni. Na osnovu posledice 1.11 modul M je izomorfan direktnoj sumi cikličnih modula $R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_n)$ i primenom prethodnog imamo da je modul M izomorfan direktnoj sumi R-modula M_i, gde je svaki od modula M_i jednak ili R ili $R/(p^\alpha)$, za proste elemente $p \in R$. $\square$

Neka je M modul nad prstenom R i a element od R. Tada je $aM = \{am \mid m \in M\}$ podmodul modula M.

Teorema 1.15 *(Teorema o primarnoj dekompoziciji za torzione module)*
Neka je R glavnoidealski prsten i M torzioni R-modul sa anhilatorom (a). Neka je $a = up_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ faktorizacija elementa a na proizvod invertibilnog elementa u i stepena neasociranih nesvodljivih elemenata. Neka je $N_i = \{m \in M \mid p_i^{\alpha_i} m = 0\}$, $1 \leq i \leq k$. Tada je N_i podmodul modula M sa anhilatorom $(p_i^{\alpha_i})$, i za svako $m \in N_i$, $Ann(m)$ je generisan nekim stepenom od p_i. Takođe važi $M \cong N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_k$.

Dokaz: Pokažimo da je $N_i = \{m \in M \mid p_i^{\alpha_i} m = 0\} = q_i M$, za svako i, $1 \leq i \leq k$, gde je $q_i = a/p_i^{\alpha_i}$. Kako je $Ann(M) = (a)$, za svako $m \in M$ važi $am = 0$, odnosno za svaki element $q_i m \in q_i M$ važi $p_i^{\alpha_i} q_i m = am = 0$. Pa imamo inkluziju $q_i M \subseteq N_i$. Pošto su ideali $(p_i^{\alpha_i})$ i $(p_j^{\alpha_j})$ koprosti za $i \neq j$, argument izložen u Kineskoj teoremi o ostacima obezbeđuje da su i ideali (q_i) i $(p_i^{\alpha_i})$ koprosti. Prema tome, postoje elementi $r, s \in R$ takvi da je $rq_i + sp_i^{\alpha_i} = 1$. Za proizvoljan element $m \in N_i$ imamo $m = 1 \cdot m = (rq_i + sp_i^{\alpha_i}) \cdot m = rq_i \cdot m + sp_i^{\alpha_i} \cdot m = rq_i \cdot m \in q_i M$. Pa važi i druga inkluzija, odnosno $N_i \subseteq q_i M$. Pokažimo da je $Ann(q_i M) = (p_i^{\alpha_i})$. Jasno važi $(p_i^{\alpha_i}) \subseteq Ann(q_i M)$. Neka je $r \in Ann(q_i M)$. Tada za svako $m \in M$ važi $rq_i \cdot m = 0$. Odnosno $rq_i \in Ann(M) = (a)$, pa $a \mid rq_i$. Kako je $a = p_i^{\alpha_i} q_i$ i kako je R integralan domen imamo $p_i^{\alpha_i} \mid r$, odnosno $r \in (p_i^{\alpha_i})$. Pa važi $Ann(q_i M) \subseteq (p_i^{\alpha_i})$. Za svako $m \in N_i$ imamo $(p_i^{\alpha_i}) = Ann(N_i) \subseteq Ann(m)$. Prsten R je glavnoidealski pa postoji $q \in R$ takvo da važi $Ann(m) = (q)$. Prema tome, $p_i^{\alpha_i} \in (q)$, odnosno $q \mid p_i^{\alpha_i}$. Jedini elementi prstena R koji dele $p_i^{\alpha_i}$ su stepeni od p_i. Na osnovu Leme 1.5 iz činjenice da su ideali $(p_i^{\alpha_i})$ i $(p_j^{\alpha_j})$ koprosti za $i \neq j$, zaključujemo da važi $(q_1) + (q_2) + \ldots + (q_n) = R$. Odnosno, postoje elementi $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takvi da je $1 = r_1 q_1 + r_2 q_2 + \ldots + r_n q_n$. Pa za svako $m \in M$ važi

$$m = 1 \cdot m = (r_1 q_1 + r_2 q_2 + \ldots + r_n q_n) \cdot m = r_1 q_1 \cdot m + r_2 q_2 \cdot m + \ldots + r_n q_n \cdot m.$$

Za svako i, $1 \leq i \leq n$, imamo $r_i q_i \cdot m \in N_i$. Pokažimo još da je suma R-modula N_i, $1 \leq i \leq n$, direktna, tj. da je $N_i \bigcap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} N_j = 0$. Proizvoljan element $m \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} N_j$

je oblika $m = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} q_j \cdot m_j$, za $m_j \in M$. Kako $p_i^{\alpha_i}$ deli q_j za svako $i \neq j$, element m možemo zapisati u obliku $m = p_i^{\alpha_i} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} q_j/p_i^{\alpha_i} \cdot m_j$. Ako element m pripada i modulu N_i zaključujemo da je $m = 0$. $\square$

Module N_i nazivamo ***p_i-primarnim komponentama*** R-modula M.

Ako je modul M konačno generisan torzioni modul onda je na osnovu Posledica 1.11 i 1.14 p_i-primarna komponenta N_i jednaka direktnoj sumi cikličnih modula

$$R/(p_i^{k_1}) \oplus R/(p_i^{k_2}) \oplus \ldots \oplus R/(p_i^{k_m}).$$

Za R-modul M kažemo da je ***p-primaran*** ako ima samo jednu komponentu, tj. ako mu je anhilator generisan stepenom prostog elementa p prstena R.

Teorema 1.16 *Primarna dekompozicija je jedinstvena do na raspored p_i-primarnih komponenata; tj. ako su q_j, $1 \leq j \leq k$, neasocirani nesvodljivi elementi prstena R i ako sa M_j označimo q_j-primarne module čiji su anhilatori generisani elementima $q_j^{\beta_j}$ i za koje važi $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_k$, onda je $k = n$ i postoji permutacija $\sigma \in S_n$ za koju je $N_i = M_{\sigma(i)}$, gde su sa N_i označene p_i-primarne komponente modula M. Takođe važi da su elementi p_i i $q_{\sigma(i)}$ asocirani i da je $\alpha_i = \beta_{\sigma(i)}$ za svako i, $1 \leq i \leq n$.*

Dokaz: Ideali $Ann(M_i) = (q_i^{\beta_i})$ i $Ann(M_j) = (q_j^{\beta_j})$ su koprosti za $i \neq j$, pa važi da je $Ann(M) = \bigcap_{j=1}^{k} Ann(M_j) = \prod_{j=1}^{k} Ann(M_j)$. Prema tome, za $b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_k^{\beta_k}$ važi $Ann(M) = (b)$. Odakle zaključujemo da su elementi a i b asocirani. Kako je R prsten sa jednoznačnom faktorizacijom važi $k = n$ i postoji permutacija $\sigma \in S_n$ za koju su p_i i $q_{\sigma(i)}$ asocirani i za koju je $\alpha_i = \beta_{\sigma(i)}$, $1 \leq i \leq n$. Prema tome, $Ann(M_{\sigma(i)}) = (q_{\sigma(i)}^{\beta_{\sigma(i)}}) = (p_i^{\alpha_i})$ pa važi $M_{\sigma(i)} \subseteq N_i$. Kako je $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_n$ imamo da važi $M_{\sigma(i)} = N_i$ za svako i, $1 \leq i \leq n$. $\square$

Lema 1.17 *Neka je R glavnoidealski prsten i neka je p nenula prost element prstena R. Označimo polje $R/(p)$ sa K.*

i) Ako je $M = R^k$, onda je $M/pM \cong K^k$.

ii) Ako je $M = R/(a)$, za nenula element $a \in R$, onda je

$$M/pM \cong \begin{cases} K, & p \mid a; \\ 0, & \textit{u suprotnom}. \end{cases}$$

iii) Ako je $M = R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_n)$*, gde* p *deli sve elemente* $a_1, a_2, \ldots, a_n$*, onda je* $M/pM \cong K^n$*.*

Dokaz: *i*) Za kanonski homomorfizam $\pi : R^k \to (R/(p))^k$ dat sa

$$\pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = (\alpha_1 + (p), \alpha_2 + (p), \ldots, \alpha_k + (p))$$

imamo $Ker\ \pi = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid\ p \mid \alpha_i, 1 \leq i \leq k\} = pR^k$. Pa na osnovu prve teoreme o izomorfizmu zaključujemo $R^k/pR^k \cong (R/(p))^k$.
ii) Za modul $M = R/(a)$ važi $pM = ((p)+(a))/(a)$. Zatim, $(p)+(a) = (p)$ ako p deli a. U suprotnom, $(p)+(a) = (1)$, jer je p prost element prstena R. Prema tome, ako p deli a imamo $((p)+(a))/(a) = (p)/(a)$, odnosno $M/pM = (R/(a))/((p)/(a))$, a na osnovu treće teoreme o izomorfizmu imamo $M/pM = (R/(a))/((p)/(a)) \cong R/(p)$. Ako p ne deli a imamo $((p)+(a))/(a) = R/(a)$, pa sledi $M/pM = 0$.
iii) Sledi na osnovu *ii*). □

Teorema 1.18 *(Osnovna strukturna teorema za konačno generisane module nad glavnoidealskim prstenima) Neka je* R *glavnoidealski prsten i* M *konačno generisan* R*-modul. Tada važe sledeća tvrđenja.*

i) Modul M *je izomorfan direktnoj sumi konačno cikličnih modula, tj.*

$$M \cong R^k \oplus R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_m),$$

za nenula elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *prstena* R *koji nisu invertibilni i za koje važi* $a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_m$*.*

ii) Modul M *je izomorfan konačnoj direktnoj sumi* R*-modula* M_i*, gde je svaki od modula* M_i *jednak ili* R *ili* $R/(p^\alpha)$*, za proste elemente* $p \in R$*. Preciznije,*

$$M \cong R^k \oplus R/(p_1^{\alpha_1}) \oplus R/(p_2^{\alpha_2}) \oplus \ldots \oplus R/(p_t^{\alpha_t}),$$

za stepene prostih, ne obavezno različitih, elemenata $p_1, p_2, \ldots, p_t$*.*

iii) Dekompozicija u delu i) je jedinstvena u sledećem smislu. Ako je

$$M \cong R^r \oplus R/(b_1) \oplus R/(b_2) \oplus \ldots \oplus R/(b_l),$$

za nenula elemente $b_1, b_2, \ldots, b_l$ *prstena* R *koji nisu invertibilni i za koje važi* $b_1 \mid b_2 \mid \ldots \mid b_l$*, onda je* $k = r$*,* $m = l$ *i* $(a_i) = (b_i)$*, za svako* i*,* $1 \leq i \leq m$*.*

iv) Dekompozicija u delu ii) je jedinstvena u sledećem smislu. Ako je

$$M \cong R^r \oplus R/(q_1^{\beta_1}) \oplus R/(q_2^{\beta_2}) \oplus \ldots \oplus R/(q_s^{\beta_s}),$$

za stepene prostih, ne obavezno različitih, elemenata $q_1, q_2, \ldots, q_s$, onda važi da je $k = r$, $t = s$ i postoji permutacija $\sigma \in S_t$ takva da je $(p_i^{\alpha_i}) = (q_{\sigma(i)}^{\beta_{\sigma(i)}})$, za svako i, $1 \leq i \leq t$.

Dokaz: Tvrđenja $i)$ i $ii)$ slede na osnovu Posledica 1.11 i 1.14.
Pokažimo da važe tvrđenja $iii)$ i $iv)$. Na osnovu Posledice 1.13 imamo da je $Tor\ M \cong R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \ldots \oplus R/(a_m)$ i $Tor\ M \cong R/(b_1) \oplus R/(b_2) \oplus \ldots \oplus R/(b_l)$. Pa su slobodni moduli $R^k \cong M/Tor\ M$ i $R^r \cong M/Tor\ M$ izomorfni. Neka je p nenula prost element prstena R. Tada iz $R^k \cong R^r$ dobijamo $R^k/pR^k \cong R^r/pR^r$. Na osnovu prethodne leme $R^k/pR^k \cong R^r/pR^r$ je izomorfizam konačno dimenzionalnih vektorskih prostora $K^k \cong K^r$, za $K = R/(p)$. Pa je $k = dim(K^k) = dim(K^r) = r$. Nadalje možemo pretpostaviti da je M torzioni modul, tj. $M = Tor\ M$. Na osnovu Teoreme 1.16 imamo da je dekompozicija torzionog modula M na sumu p_i-primarnih komponenata N_i jedinstvena do na njihovu permutaciju. Pa je dovoljno pokazati da je dekompozicija p_i komponenata $R/(p_i^{k_1}) \oplus R/(p_i^{k_2}) \oplus \ldots \oplus R/(p_i^{k_m})$ jedinstvena. Prema tome, bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je R-modul M p-primaran i neka su sa $R/(p^{\alpha_1}) \oplus R/(p^{\alpha_2}) \oplus \ldots \oplus R/(p^{\alpha_t})$ i $R/(p^{\beta_1}) \oplus R/(p^{\beta_2}) \oplus \ldots \oplus R/(p^{\beta_s})$ date dve njegove dekompozicije, pri čemu važi $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_t$ i $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_s$. Pokažimo da je $t = s$ i da je $\alpha_i = \beta_i$, za svako i, $1 \leq i \leq t$. Dokaz izvodimo indukcijom po stepenu α_t generatora p^{α_t} anhilatora modula M. Ako je dati stepen jednak 0, onda važi da je $M = 0$. Pretpostavimo da je $\alpha_t \neq 0$. Zatim neka važi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_g = 1$ i $2 \leq \alpha_{g+1} \leq \alpha_{g+2} \leq \ldots \leq \alpha_t$, neka još važi i da je $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_h = 1$ i $2 \leq \beta_{h+1} \leq \beta_{h+2} \leq \ldots \leq \beta_s$.
Za R-modul pM važe izomorfizmi $pM \cong R/(p^{\alpha_{g+1}-1}) \oplus R/(p^{\alpha_{g+2}-1}) \oplus \ldots \oplus R/(p^{\alpha_t - 1})$ i $pM \cong R/(p^{\beta_{h+1}-1}) \oplus R/(p^{\beta_{h+2}-1}) \oplus \ldots \oplus R/(p^{\beta_s - 1})$. Prema indukcijskoj pretpostavci $t - g = s - h$ i $\alpha_{g+i} - 1 = \beta_{h+i} - 1$, za $1 \leq i \leq t - g$. Pa zaključujemo da je $\alpha_{g+i} = \beta_{h+i}$, za $1 \leq i \leq t - g$. Na osnovu Leme 1.17 imamo da za količnički modul M/pM važe izomorfizmi $M/pM \cong K^t$ i $M/pM \cong K^s$, za $K = R/(p)$. Odakle dobijamo da je $t = s$. I na kraju $t = s$ i $t - g = s - h$ daju $g = h$, što pokazuje tvrđenje $iv)$. Faktorizacijom elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dobijamo dekompoziciju u $ii)$. Primetimo da iz relacija $a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_m$ sledi da je a_m proizvod invertibilnog elementa i prostih elemenata sa najvećim stepenima koji učestvuju u dekompoziciji $ii)$, zatim da je a_{m-1} proizvod invertibilnog elementa i prostih elemenata sa najvećim stepenima pošto izuzmemo one elemente čiji proizvod daje a_m. Ostali elementi se

formiraju na isti način. Takođe, faktorizacijom elemenata $b_1, b_2, \ldots, b_m$ na proizvode stepena prostih elemenata dobijamo još jednu dekompoziciju oblika *ii*). Kako je dekompozicija ovog oblika na osnovu *iii*) jedinstvena, i kako važi $b_1 \mid b_2 \mid \ldots \mid b_m$ zaključujemo da važi *iv*). $\square$

Prirodan broj k u Teoremi 1.18 nazivamo ***slobodnim rangom*** ili ***Beti brojem*** od M. Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R$ nazivamo ***invarijantnim faktorima***, a elemente $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_t^{\alpha_t} \in R$ nazivamo ***elementarnim deliteljima*** od M.

Napomena 1.19 *Neka je R glavnoidealski prsten i neka je M konačno generisan modul nad prstenom R. Tada su elementarni delitelji od M stepeni prostih faktora invarijantnih faktora od M i najveći invarijantni faktor od M je proizvod najvećih različitih stepena prostih elemenata iz skupa elementarnih delitelja modula M.*

2 Normalne forme linearnih operatora i matrica

U okviru ove glave izložene su standardne teoreme o Ermitovoj, Smitovoj, Žordanovoj i racionalnoj formi. Svaka matrica nad prstenom polinoma $K[x]$ može se elementarnim transformacijama vrsta redukovati na ekvivalentnu gornje trougaonu matricu. Zatim daljom primenom elementarnih transformacija vrsta možemo smanjiti stepene polinoma iznad glavne dijagonale traženjem ostatka pri deljenju svih elemenata u koloni sa odgovarajućim dijagonalnim elementom. Ovako dobijena matrica je matrica u ***Ermitovoj normalnoj formi*** i ima primene u rešavanju sistema diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima. Ermit je dokazao postojanje date forme za matrice nad prstenom celih brojeva 1851. godine u svom radu "Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres", [21]. Ako uz elementarne transformacije vrsta primenimo i elementarne transformacije kolona polaznu matricu sa koeficijentima u prstenu $K[x]$ možemo svesti na dijagonalnu matricu kod koje svaki element deli naredni element. Data matrica se naziva matricom u ***Smitovoj normalnoj formi***. U svom radu "On systems of linear indeterminate equations and congruences", [59], Smit je uveo pojam elementarnih delitelja i konstruisao je Smitovu normalnu formu za matrice nad prstenom celih brojeva. Pretpostavimo da je polje K algebarski zatvoreno, tj. da svaki polinom sa koeficijentima u K ima linearnu faktorizaciju u K. Tada postoji invertibilna $n \times n$ matrica P nad K takva da važi da je $P^{-1} \cdot B \cdot P$ blok dijagonalna matrici oblika

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_t \end{bmatrix},$$

a svaki od blokova J_k oblika

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Svaki od blokova odgovara jednom elementarnom delitelju matrice B. Žordan je 1870. godine u svojoj knjizi "Trait des substitutions et des quations algbriques", [29], opisao ***Žordanovu kanonsku formu*** matrica nad konačnim poljima nezavisno od Vajerštrasa koji je u svom radu "Zur Theorie des quadratischen und bilinearen

Formen", [63], to uradio dve godine ranije nad poljem kompleksnih brojeva. Još jedan blok dijagonalni oblik matrice je racionalna kanonska forma. ***Racionalna kanonska forma*** matrice B se sastoji iz blokova oblika

$$C_{a(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \dots & -d_1 \end{bmatrix},$$

gde su polinomi $a(x) = x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_{n-1}x + d_n$ invarijantni faktori matrice B. Invarijantne faktore uveo je Kroneker 1874. godine, a Frobenijus je u svojim radovima [17, 18] dao vezu invarijantnih faktora i racionalne kanonske forme. On je takođe uveo i pojam minimalnog polinoma i prvi je dokazao Kejli-Hamiltonovu teoremu za proizvoljno n.

2.1 Racionalna kanonska forma

Teoreme u ovoj sekciji preuzete su iz knjige [14].
Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K i neka je fiksiran linearni operator $T : V \to V$. Vektorski prostor V možemo posmatrati i kao $K[x]$-modul, gde je $K[x]$ prsten polinoma po promenljivoj x nad poljem K. Element x dejstvuje na V kao linearni operator T, prema tome polinom $f(x) \in K[x]$ dejstvuje na V kao operator $f(T)$, odnosno $f(x) \cdot v = f(T)(v)$ za svako $v \in V$. Prsten polinoma $K[x]$ je glavnoidealski prsten. Kako je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad K, odnosno konačno generisan K-modul, imamo da je V konačno generisan $K[x]$-modul. Prema tome, na $K[x]$-modul V možemo primeniti osnovnu strukturnu teoremu za konačno generisane module nad glavnoidealskim prstenima, tj. V je izomorfan direktnoj sumi cikličnih modula $K[x]^k \oplus K[x]/(a_1(x)) \oplus \ldots \oplus K[x]/(a_m(x))$, za polinome $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_m(x)$ čiji je stepen najmanje jedan i za koje važi $a_1(x) \mid a_2(x) \mid \ldots \mid a_m(x)$. Slobodan $K[x]$-modul $K[x]^k$ je beskonačno dimenzionalni vektorski prostor nad K, a po pretpostavci je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad K, pa važi da je $k = 0$, odnosno V je torzioni modul i

$$V \cong K[x]/(a_1(x)) \oplus K[x]/(a_2(x)) \oplus \ldots \oplus K[x]/(a_m(x)).$$

Invarijantni faktori $a_1(x), \ldots, a_m(x)$ su jedinstveni do na množenje invertibilnim elementima prstena $K[x]$, što su nenula elementi polja K. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su polinomi $a_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, monični. Pa uz datu dopunu imamo jedinstvenost invarijantnih faktora.

Neka je $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ jedna baza vektorskog prostora V i neka je $T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} e_j$ za svako i, $1 \leq i \leq n$. Tada je matrica $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ čija i-ta vrsta predstavlja koordinate vektora $T(e_i)$ u bazi $\mathcal{B}$ matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}$. Neka je $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ druga baza vektorskog prostora V i neka je $e_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e'_j$ reprezentacija vektora e_i u bazi $\mathcal{B}'$. Tada je matrica $P = [p_{ij}]_{n\times n}$ čija i-ta vrsta predstavlja koordinate vektora e_i u bazi $\mathcal{B}'$ matrica prelaska sa baze $\mathcal{B}$ na bazu $\mathcal{B}'$. Matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ jednaka je $P^{-1}BP$.

Vektorski potprostor V_1 od V je $K[x]$-podmodul od V ako je invarijantan u odnosu na linearni operator T, tj. ako za svako $v \in V_1$ važi $T(v) \in V_1$. Ako prvih k vektora baze $\mathcal{B}$ formira bazu vektorskog potprostora V_1, onda matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima oblik $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$. Ako je $V = V_1 \oplus V_2$, gde su vektorski potprostori V_1 i V_2 invarijantni u odnosu na linearni operator T i takvi da prvih k vektora baze $\mathcal{B}$ formira bazu od V_1 a ostalih $n-k$ bazu od V_2, onda matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima oblik $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$. Ako je $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$, gde su vektorski potprostori $V_1, V_2, \ldots V_m$ invarijantni u odnosu na linearni operator T i takvi da je baza $\mathcal{B}$ unija baza potprostora V_i, $1 \leq i \leq m$, onda matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ ima blok dijagonalni oblik $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C_m \end{bmatrix}$. Označimo sa T_i restrikciju preslikavanja T na potprostor V_i. U blok dijagonalnoj matrici C matrica C_i predstavlja matricu linearnog operatora T_i u odnosu na neku bazu. Pišemo $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_m$ da bismo naznačili da je V direktna suma T-invarijantnih prostora i da je T_i restrikcija preslikavanja T na invarijantni potprostor V_i. Takođe pišemo $C = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_m$ da naznačimo da je matrica C blok dijagonalna sa blokovima $C_1, C_2, \ldots, C_m$.

Za vektorski prostor $K[x]/(a(x))$, gde je $a(x) = x^n + d_1 x^{n-1} + \ldots + d_{n-1}x + d_n$, i linearni operator T koji dejstvuje na $K[x]/(a(x))$ kao množenje sa x važi da je $T(1) = x$, $T(x) = x^2, \ldots, T(x^{n-1}) = -d_n - d_{n-1}x - \ldots - d_1 x^{n-1}$. Matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ je

$$C_{a(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \ldots & -d_1 \end{bmatrix}.$$

Matricu $C_{a(x)}$ nazivamo ***pratećom matricom moničnog polinoma*** $\boldsymbol{a(x)}$. Za vektorski prostor $V \cong K[x]/(a_1(x)) \oplus K[x]/(a_2(x)) \oplus \ldots \oplus K[x]/(a_m(x))$ izaberimo bazu $\mathcal{B}$ da bude unija skupova $\mathcal{B}_i$ formiranih od elemenata iz V koji odgovaraju gore navedenim bazama cikličnih faktora $K[x]/(a_i(x))$ pri datom izomorfizmu. Matrica linearnog operatora T_i u odnosu na bazu $\mathcal{B}_i$ je prateća matrica $C_{a_i(x)}$ polinoma $a_i(x)$. Matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ je matrica

$$C = C_{a_1(x)} \oplus C_{a_2(x)} \oplus \ldots \oplus C_{a_m(x)}.$$

Matrica C je jedinstveno određena invarijantnim faktorima.
Matrica C je u ***racionalnoj kanonskoj formi*** ako je jednaka direktnoj sumi pratećih matrica $C_{a_i(x)}$ moničnih polinoma $a_i(x)$ stepena $deg(a_i(x)) \geq 1$, takvih da $a_i(x) \mid a_{i+1}(x)$ za sve i, $1 \leq i \leq m-1$, tj.

$$C = \begin{bmatrix} C_{a_1(x)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_{a_2(x)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C_{a_m(x)} \end{bmatrix}.$$

Polinome $a_i(x) = x^{n_i} + d_{i,1}x^{n_i-1} + \ldots + d_{i,n_i-1}x + d_{i,n_i}$ nazivamo ***invarijantnim faktorima*** matrice C. Matricu C nazivamo i blok dijagonalnom matricom sa blokovima koji su prateće matrice polinoma $a_i(x)$. ***Racionalna kanonska forma*** linearnog operatora T je matrica operatora T koja je u racionalnoj kanonskoj formi.
Videli smo da svaki linearni operator T ima racionalnu kanonsku formu. Pokažimo još da je ona jedinstvena. Neka su $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_l(x)$ monični polinomi stepena najmanje jedan za koje važi $b_j(x) \mid b_{j+1}(x)$, $1 \leq j \leq l-1$. Neka je C' matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}'$ u racionalnoj kanonskoj formi i neka su blokovi matrice C' prateće matrice $C'_{b_j(x)}$ polinoma $b_j(x)$, $1 \leq j \leq l$. Za vektorski prostor V važi $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_l$, gde su potprostori $U_1, U_2, \ldots, U_l$ invarijantni u odnosu na linearni operator T, takvi da je baza $\mathcal{B}'$ unija baza $\mathcal{B}'_j$ potprostora U_j i da je matrica restrikcije linearnog operatora T na U_j u odnosu na bazu $\mathcal{B}'_j$ blok $C'_{b_j(x)}$. Neka je $e'_{j,1}$ prvi element baze $\mathcal{B}'_j$. Tada za elemente baze $\mathcal{B}'_j$ važi

$$\begin{aligned} e'_{j,k} &= T(e'_{j,k-1}) = \ldots = T^{k-1}(e'_{j,1}), \quad 2 \leq k \leq n_j - 1, \quad \text{i} \\ T(e'_{j,n_j}) &= -d'_{j,n_j}e'_{j,1} - d'_{j,n_j-1}e'_{j,2} - \ldots - d'_{j,1}e'_{j,n_j-1} \\ &= -d'_{j,n_j}e'_{j,1} - d'_{j,n_j-1}T(e'_{j,1}) - \ldots - d'_{j,1}T^{n_j-1}(e'_{j,1}). \end{aligned}$$

Množenje elementom x dejstvuje kao linearni operator T. Pa imamo $e'_{j,k} = x^{k-1} \cdot e'_{j,1}$,

$2 \leq k \leq n_j - 1$ i $b_j(x) \cdot e'_{j,1} = (x^{n_j} + d'_{j,1}x^{n_j-1} + \ldots + d'_{j,n_j-1}x + d'_{j,n_j}) \cdot e'_{j,1} = 0$. Odnosno U_j je ciklični $K[x]$-modul sa anhilatorom $(b_j(x))$, tj. $U_j \cong K[x]/(b_j(x))$. Pa za $K[x]$-modul V važi $V \cong K[x]/(b_1(x)) \oplus K[x]/(b_2(x)) \oplus \ldots \oplus K[x]/(b_l(x))$. Na osnovu Teoreme 1.18 imamo da je $m = l$ i da su polinomi $a_i(x)$ i $b_i(x)$ asocirani, $1 \leq i \leq m$. Kako su polinomi $a_i(x)$ i $b_i(x)$ monični, zaključujemo $a_i(x) = b_i(x)$, $1 \leq i \leq m$. Prema tome, dokazali smo sledeću teoremu.

Teorema 2.1 *(Racionalna kanonska forma za linearne operatore) Neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K i neka je T linearni operator nad V.*

i) Postoji baza vektorskog prostora V takva da je matrica linearnog operatora T u odnosu na datu bazu u racionalnoj kanonskoj formi.

ii) Racionalna kanonska forma linearnog operatora T je jedinstvena.

Za linearne operatore $T_1 : V \to V$ i $T_2 : V \to V$ kažemo da su ***slični*** ako postoji izomorfizam $U : V \to V$ takav da važi $T_1 = U^{-1} \circ T_2 \circ U$.

Teorema 2.2 *Neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K i neka su T_1 i T_2 linearni operatori nad V. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

i) Linearni operatori T_1 i T_2 su slični.

ii) $K[x]$-moduli dobijeni od vektorskog prostora V pomoću linearnih operatora T_1 i T_2 su izomorfni.

iii) Linearni operatori T_1 i T_2 imaju iste racionalne kanonske forme.

Dokaz:
i) $\Rightarrow$ *ii)* Linearni operatori su slični ako postoji izomorfizam $U : V \to V$ takav da važi $T_1 = U^{-1} \circ T_2 \circ U$. Izomorfizam vektorskih prostora U možemo posmatrati i kao izomorfizam $K[x]$-modula, gde x dejstvuje na vektorski prostor V prvo kao T_1, a zatim i kao T_2, pa imamo $U(x \cdot v) = U(T_1(v)) = (U \circ T_1)(v) = (T_2 \circ U)(v) = T_2(U(v)) = x \cdot U(v)$.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Označimo sa V_1 $K[x]$-modul V gde x dejstvuje kao T_1, a sa V_2 $K[x]$-modul V gde x dejstvuje kao T_2. Izomorfni $K[x]$-moduli V_1 i V_2 imaju iste invarijantne faktore, pa linearni operatori T_1 i T_2 imaju iste racionalne kanonske forme.
iii) $\Rightarrow$ *i)* Neka linearni operatori T_1 i T_2 imaju iste racionalne forme. Odnosno, matrica linearnog operatora T_1 u odnosu na bazu $\mathcal{B}_1$ je jednaka matrici linearnog operatora T_2 u odnosu na $\mathcal{B}_2$. Prema tome, za izomorfizam U koji slika bazu $\mathcal{B}_1$ u bazu $\mathcal{B}_2$ važi $T_1 = U^{-1} \circ T_2 \circ U$. Pa zaključujemo da su linearni operatori T_1 i T_2 slični. $\square$

Neka je B matrica reda n nad poljem K. Neka je V vektorski prostor dimenzije n nad K. Definišimo linearni operator T nad vektorskim prostorom V sa $T(v) = B\,v$, za svako $v \in V$, gde vektor v sa desne strane jednakosti razmatramo kao kolonu $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]^T \in K^{n\times 1}$ koordinata vektora v u odnosu na fiksiranu bazu. Primetimo da je matrica linearnog operatora T u odnosu na datu bazu baš matrica B. Pa je svaka $n \times n$ matrica nad poljem K matrica nekog linearnog operatora u odnosu na standardnu bazu n dimenzionalnog vektorskog prostora nad poljem K. Neka su B_1 i B_2 dve matrice reda n nad poljem K. Matrice B_1 i B_2 su ***slične*** ako postoji invertibilna $n \times n$ matrica P nad poljem K takva da važi $B_1 = P^{-1} \cdot B_2 \cdot P$.

Teorema 2.3 *Neka je B matrica reda n nad poljem K.*

i) Matrica B je slična matrici u racionalnoj kanonskoj formi.

ii) Racionalna kanonska forma matrice B je jedinstvena.

Dokaz: Data teorema je direktna posledica Teoreme 2.1. $\square$

Invarijantni faktori matrice B su invarijantni faktori njoj slične matrice u racionalnoj kanonskoj formi.

Teorema 2.4 *Neka su B_1 i B_2 matrice reda n nad poljem K. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

i) Matrice B_1 i B_2 su slične.

ii) Matrice B_1 i B_2 imaju istu racionalnu kanonsku formu.

Dokaz: Data teorema je direktna posledica Teoreme 2.2. $\square$

Neka je K potpolje polja F. Matricu B nad poljem K možemo posmatrati i kao matricu nad poljem F.

Posledica 2.5 *Neka je K potpolje polja F i neka su B_1 i B_2 matrice reda n nad poljem K.*

i) Racionalna kanonska forma matrice B_1 je ista bez obzira da li se računa nad poljem K ili F. Invarijantni faktori matrice B_1 su isti bez obzira da li matricu B_1 posmatramo kao matricu nad K ili F.

ii) Matrice B_1 i B_2 su slične nad poljem K ako i samo ako su slične nad poljem F, tj. postoji invertibilna $n \times n$ matrica P nad poljem K takva da važi $B_1 = P^{-1} \cdot B_2 \cdot P$ ako i samo ako postoji invertibilna $n \times n$ matrica Q nad poljem F takva da važi $B_1 = Q^{-1} \cdot B_2 \cdot Q$.

Dokaz: i) Neka je C_1 racionalna kanonska forma matrice B_1 nad poljem K a C_2 racionalna kanonska forma nad poljem F. Kako C_1 možemo posmatrati i kao matricu nad poljem F i kako je i u racionalnoj kanonskoj formi nad F, na osnovu Teoreme 2.3 imamo da je $C_1 = C_2$. Pa su i invarijantni faktori matrice B_1 posmatrani nad K i F isti.
ii) Ako su matrice B_1 i B_2 slične nad poljem K, onda su one jasno slične i nad poljem F. Obrnuto, ako su matrice B_1 i B_2 slične nad poljem F, onda na osnovu Teoreme 2.4 one imaju istu racionalnu kanonsku formu nad F. Na osnovu i) imaju istu racionalnu kanonsku formu nad K, pa ponovo primenom Teoreme 2.4 zaključujemo da su matrice B_1 i B_2 slične i nad poljem K. $\square$

Racionalna kanonska forma matrice B je najbolji blok dijagonalni oblik koji možemo dobiti u polju koeficijenata date matrice. Kao što smo dokazali racionalna kanonska forma matrice ne zavisi od toga da li se računa nad poljem koeficijenata date matrice ili nad nekom njegovom ekstenzijom.

2.2 Minimalni i karakteristični polinom

Teoreme u ovoj sekciji preuzete su iz knjige [14].
Neka je V vektorski prostor dimenzije n nad poljem K i neka je dat linearni operator $T : V \to V$. Element $\lambda \in K$ nazivamo ***sopstvenom vrednošću*** linearnog operatora T ako postoji nenula vektor $v \in V$ takav da važi $T(v) = \lambda v$. Vektor v nazivamo ***sopstvenim vektorom*** linearnog operatora T koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Za sopstvenu vrednost λ skup svih vektora $v \in V$ za koje važi $T(v) = \lambda v$ čini potprostor vektorskog prostora V koji nazivamo ***sopstvenim prostorom*** linearnog operatora T. Skup svih sopstvenih vrednosti linearnog operatora T nazivamo ***spektrom*** linearnog operatora T.
Neka je B matrica reda n nad poljem K. ***Sopstvena vrednost*** matrice B je element $\lambda \in K$ za koji postoji nenula vektor $v = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T \in K^{n\times 1}$ takav da važi $Bv = \lambda v$. Vektor v nazivamo ***sopstvenim vektorom*** matrice B koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Za sopstvenu vrednost λ skup svih vektora $v \in K^{n\times 1}$ za koje važi $Bv = \lambda v$ čini vektorski prostor koji nazivamo ***sopstvenim prostorom*** matrice B. Skup svih sopstvenih vrednosti matrice B nazivamo ***spektrom*** matrice B. Neka je $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ fiksirana baza vektorskog prostora V. Tada svakom linearnom operatoru T možemo pridružiti $n \times n$ matricu B, čija i-ta vrsta predstavlja koordinate vektora $T(e_i)$ u bazi $\mathcal{B}$. Obrnuto, za proizvoljnu $n \times n$ matricu B definišemo linearni operator T nad vektorskim prostorom V sa $T(v) = B\,v$, za svako $v \in V$, gde vektor v sa desne strane jednakosti razmatramo

kao kolonu $v = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]^T \in K^{n\times 1}$ koordinata vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$. Prema tome, vektor $v \in V$ je sopstveni vektor linearnog operatora T koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ ako i samo ako je kolona $[v_1\, v_2 \dots v_n]$ koordinata vektora v u odnosu na bazu $\mathcal{B}$ sopstveni vektor matrice B koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Sopstvene vrednosti linearnog operatora T su iste kao i sopstvene vrednosti matrice B linearnog operatora T u odnosu na neku bazu vektorskog prostora V. Determinanta linearnog operatora T je determinanta matrice datog linearnog operatora u odnosu na bilo koju bazu vektorskog prostora V. Zaista, ako su B i B' dve matrice linearnog operatora T u odnosu na baze $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ vektorskog prostora V, onda postoji regularna $n \times n$ matrica P takva da važi $B' = P^{-1} \cdot B \cdot P$. Pa imamo $det(B') = det(P^{-1}BP) = (detP)^{-1} detB\, detP = detB$, odakle zaključujemo da determinanta linearnog operatora T ne zavisi od izbora baze.

Polinom $det(xI-T)$ nazivamo ***karakterističnim polinomom*** linearnog operatora T i označavamo ga sa $\Delta_T(x)$. Polinom $det(xI - B)$ nazivamo ***karakterističnim polinomom*** matrice B i označavamo ga sa $\Delta_B(x)$. Sopstveni vektori matrice B su nenula vektori za koje važi $Bv = \lambda v$, odnosno netrivijalna rešenja homogenog sistema $(B - \lambda I)v = \mathbb{O}$. Homogen sistem ima netrivijalno rešenje ukoliko je matrica sistema $B-\lambda I$ singularna, tj. ako je $det(B - \lambda I) = 0$. Karakteristični polinom linearnog operatora T (matrice B) je monični polinom stepena n i nule datog polinoma su upravo sopstvene vrednosti linearnog operatora T (matrice B).

Pokazali smo da je vektorski prostor V torzioni $K[x]$-modul i da je

$$V \cong K[x]/(a_1(x)) \oplus K[x]/(a_2(x)) \oplus \dots \oplus K[x]/(a_m(x)).$$

Minimalni polinom linearnog operatora T, u oznaci $\mu_T(x)$, je najveći invarijantni faktor $a_m(x)$. Polinom $\mu_T(x)$ je monični generator anhilatora $K[x]$-modula V, tj. $\mu_T(x)$ je monični polinom najmanjeg stepena koji pripada $Ann(V)$. Odnosno $\mu_T(x)$ je monični polinom najmanjeg stepena za koji važi $\mu_T(T) = 0$. ***Minimalni polinom*** matrice B, u oznaci $\mu_B(x)$, je monični polinom najmanjeg stepena za koji važi $\mu_B(B) = \mathbb{O}$.

Lema 2.6 *Karakteristični polinom prateće matrice $C_{a(x)}$ moničnog polinoma $a(x) \in K[x]$ je $a(x)$. Odnosno $det(xI - C_{a(x)}) = a(x)$.*

Dokaz: Dokaz izvodimo indukcijom po stepenu polinoma $a(x)$. Ako je $a(x) = x+d_1$, onda je $C_{a(x)}$ matrica oblika $[-d_1]$ i $det(xI - C_{a(x)}) = x + d_1$. Neka je

$$a(x) = x^n + d_1x^{n-1} + \dots + d_{n-1}x + d_n.$$

Laplasovim razvojem po prvoj koloni imamo

$$det(xI - C_{a(x)}) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & x+d_1 \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & x+d_1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} d_n \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Na osnovu indukcijske hipoteze važi

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \\ d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & x+d_1 \end{vmatrix} = x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \dots + d_{n-1},$$

pa zaključujemo $det(xI - C_{a(x)}) = x(x^{n-1} + d_1 x^{n-2} + \dots + d_{n-1}) + (-1)^{n+1}(-1)^{n-1} d_n = x^n + d_1 x^{n-1} + \dots + d_{n-1}x + d_n$. $\square$

Lema 2.7 *Karakteristični polinom matrice u racionalnoj kanonskoj formi*

$$C = C_{a_1(x)} \oplus C_{a_2(x)} \oplus \dots \oplus C_{a_m(x)}$$

jednak je proizvodu polinoma $a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)$.

Dokaz: Za kvadratne matrice $B_1, B_2, \dots, B_m$ i matricu $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_m$ važi $detB = \begin{vmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_m \end{vmatrix} = detB_1 \, detB_2 \dots detB_m$. Na osnovu prethodne leme imamo da je $det(xI - C_{a_i(x)}) = a_i(x)$, $1 \le i \le m$, pa zaključujemo $det(xI - C) = det(xI - C_{a_1(x)}) \, det(xI - C_{a_2(x)}) \dots det(xI - C_{a_m(x)}) = a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \dots \cdot a_m(x)$. $\square$

Lema 2.8 *Slične matrice imaju iste karakteristične polinome. Odnosno, ako su* B_1 *i* B_2 *slične* $n \times n$ *matrice nad poljem* K, *onda je* $\Delta_{B_1}(x) = \Delta_{B_2}(x)$.

Dokaz: Ako su B_1 i B_2 slične $n \times n$ matrice nad poljem K, onda postoji invertibilna $n \times n$ matrica P nad poljem K takva da važi $B_2 = P^{-1} \cdot B_1 \cdot P$. Pa imamo da je

$$\begin{aligned}\Delta_{B_1}(x) = det(xI - B_1) &= det(xI - P^{-1} \cdot B_2 \cdot P) = det(P^{-1} \cdot xI \cdot P - P^{-1} \cdot B_2 \cdot P) \\ &= det(P^{-1} \cdot (xI - B_2) \cdot P) = det(P^{-1})\, det(xI - B_2)\, det P \\ &= det(xI - B_2) = \Delta_{B_2}(x). \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.9 *Neka je B matrica reda n nad poljem K. Tada važe sledeća tvrđenja.*

i) Karakteristični polinom matrice B jednak je proizvodu invarijantnih faktora matrice B.

ii) Minimalni polinom matrice B deli karakteristični polinom matrice B.

iii) Minimalni i karakteristični polinom matrice B imaju iste korene, neračunajući njihovu višestrukost. Karakteristični polinom matrice B deli stepen minimalnog polinoma matrice B.

Dokaz: *i*) Označimo sa C matricu u racionalnoj kanonskoj formi koja je slična matrici B. Na osnovu prethodne leme matrice B i C imaju iste karakteristične polinome. Na osnovu Leme 2.7 karakteristični polinom matrice C je proizvod njenih invarijantnih faktora. Kako su invarijantni faktori matrica B i C isti, pokazali smo tvrđenje.

ii) Karakteristični polinom matrice B je jednak proizvodu invarijantnih faktora matrice B. Minimalni polinom matrice B je njen najveći invarijantni faktor. Pa prema tome, minimalni polinom matrice B deli njen karakteristični polinom.

iii)Za invarijantne faktore $a_1(x), \ldots, a_m(x)$ matrice B važi $a_1(x) \mid a_2(x) \mid \ldots \mid a_m(x)$. Zaključujemo da minimalni polinom $a_m(x)$ ima iste korene kao i proizvod $\prod_{i=1}^{m} a_i(x)$. Prema tome, minimalni i karakteristični polinom matrice B imaju iste korene i jasno je da karakteristični polinom matrice B deli m-ti stepen minimalnog polinoma. $\square$

Iz tvrđenja *ii*) prethodne teoreme sledi da matrica B anulira svoj karakteristični polinom, tj. $\Delta_B(B) = \mathbb{O}$. Ovu direktnu posledicu nazivamo Kejli-Hamiltonova teorema. Takođe na osnovu *ii*) jasno važi i da je stepen minimalnog polinoma $n \times n$ matrice B najviše n.

2.3 Smitova normalna forma

U ovoj glavi tvrđenja su preuzeta iz [22, 35, 48]

U daljem tekstu razmatramo matrice sa koeficijentima u prstenu polinoma $K[x]$, gde je K polje. Za kvadratnu matricu B nad prstenom $K[x]$ kažemo da je ***regularna*** ako polinom $det(B)$ nije identički jednak nuli, tj. ako mu nisu svi koeficijenti jednaki nuli. Za kvadratnu matricu B nad prstenom $K[x]$ kažemo da je ***unimodularna*** ako je $det(B)$ nenula element polja K. Neka je $B = [b_{ij}(x)]_{n\times n}$ kvadratna matrica nad prstenom $K[x]$. ***Algebarski kofaktor (komplement)*** elementa $b_{ij}(x)$ matrice B je polinom $B_{ij}(x) = (-1)^{i+j} D_{ij}(x)$, gde je $D_{ij}(x)$ minor reda $n-1$ koji dobijamo iz $det(B)$ izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone. ***Adjungovana matrica*** matrice B je matrica $adj(B) = [B_{ij}(x)]^T_{n\times n} = [B_{ji}(x)]_{n\times n}$. Za matricu B i njenu adjungovanu matricu $adj(B)$ važi $adj(B)\cdot B = B\cdot adj(B) = det(B)\ I$. Kvadratna $n\times n$ matrica B je ***invertibilna*** ako postoji kvadratna $n\times n$ matrica S takva da važi $B\cdot S = S\cdot B = I$.

Lema 2.10 *Kvadratna matrica B nad prstenom $K[x]$ je invertibilna ako i samo ako je unimodularna.*

Dokaz: $\Rightarrow$: Ako je $n\times n$ matrica B invertibilna, onda postoji $n\times n$ matrica S takva da je $B\cdot S = S\cdot B = I$. Pa imamo da je $det(S)\ det(B) = det(S\cdot B) = det(I) = 1$. Prema tome, $det(S)$ i $det(B)$ su invertibilni elementi prstena $K[x]$, tj. $det(S)$ i $det(B)$ su nenula elementi polja K.
$\Leftarrow$: Ako je $n\times n$ matrica B unimodularna, onda je $det(B)$ nenula element polja K. Iz $adj(B)\cdot B = B\cdot adj(B) = det(B)\ I$, zaključujemo da je

$$\frac{1}{det(B)}\,adj(B)\cdot B = B\cdot\frac{1}{det(B)}\,adj(B) = I,$$

odnosno da je matrica B invertibilna i njen inverz je $B^{-1} = \frac{1}{det(B)}adj(B)$. $\square$

Lema 2.11 *Neka su B i S matrice reda n nad prstenom $K[x]$. Ako je $S\cdot B = I$, onda je $B\cdot S = I$.*

Dokaz: Ako je $S\cdot B = I$, onda je $det(S)\ det(B) = det(S\cdot B) = det(I) = 1$. Prema tome, element $det(B)$ je invertibilan element prstena $K[x]$, odnosno nenula element polja K. Pa je B unimodularna matrica i na osnovu prethodne leme invertibilna matrica. Odakle sledi da postoji $n\times n$ matrica B^{-1} takva da važi $B\cdot B^{-1} = B^{-1}\cdot B = I$ i imamo $S = S\cdot I = S\cdot(B\cdot B^{-1}) = (S\cdot B)\cdot B^{-1} = I\cdot B^{-1} = B^{-1}$. Prema tome, važi $B\cdot S = B\cdot B^{-1} = I$. $\square$

Teorema 2.12 *(Kejli-Hamiltonova teorema) Matrica B nad poljem K anulira svoj karakteristični polinom, tj. za matricu B važi $\Delta_B(B) = \mathbb{O}$.*

Dokaz: Neka je $\Delta_B(x) = x^n + d_1x^{n-1} + \ldots + d_{n-1}x + d_n$ karakteristični polinom matrice B. Adjungovanu matricu $\widetilde{B}(x) = adj(xI - B)$ matrice $xI - B$ možemo posmatrati kao polinom po promenljivoj x čiji su koeficijenti matrice nad poljem K. Neka je $\widetilde{B}(x) = B_0x^k + B_1x^{k-1} + \ldots + B_{k-1}x + B_k$ i $B_0 \neq \mathbb{O}$. Prema tome, stepen polinoma $\widetilde{B}(x) \cdot (xI - B)$ je $k+1$. Iz jednakosti $\widetilde{B}(x) \cdot (xI - B) = \Delta_B(x)I$ zaključujemo da je $k + 1 = n$. Odnosno da je polinom $\widetilde{B}(x)$ stepena $n - 1$. Zatim, imamo da je

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(x) \cdot (xI - B) &= (B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}x + B_{n-1}) \cdot (xI - B) = \\ &= B_0x^n + (B_1 - B_0 \cdot B)x^{n-1} + \ldots + (B_{n-1} - B_{n-2}B)x - B_{n-1}B.\end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće stepene promenljive x u jednakosti $\widetilde{B}(x) \cdot (xI - B) = \Delta_B(x)I$ dobijamo veze između koeficijenata karakterističnog polinoma $\Delta_B(x)$ matrice B i koeficijenata adjungovane matrice $\widetilde{B}(x)$ matrice $xI-B$. Važi

$$\begin{aligned}&B_0 = I,\\ &B_1 - B_0 \cdot B = d_1I,\\ &\vdots\\ &B_{n-1} - B_{n-2} \cdot B = d_{n-1}I,\\ &-B_{n-1} \cdot B = d_nI.\end{aligned}$$

Množenjem prve jednakosti zdesna sa B^n, druge sa B^{n-1}, i tako dalje imamo

$$\begin{aligned}&B_0 \cdot B^n = B^n,\\ &B_1B^{n-1} - B_0 \cdot B^n = d_1B^{n-1},\\ &\vdots\\ &B_{n-1} \cdot B - B_{n-2} \cdot B^2 = d_{n-1}B,\\ &-B_{n-1} \cdot B = d_nI.\end{aligned}$$

Sabiranjem datih jednakosti zaključujemo

$$B^n + d_1B^{n-1} + \ldots + d_{n-1}B + d_nI = \mathbb{O}.$$

Odnosno $\Delta_B(B) = \mathbb{O}$. □

Istaknimo da za koeficijente matrice $\widetilde{B}(x) = adj(xI - B)$ važe rekurentne formule $B_0 = I$; $\quad B_k = B_{k-1}B + d_kI \quad$ za $\quad 1 \leq k < n$. Takođe, iz poslednje jednakosti možemo zaključiti da za adjungovanu matricu matrice B važi

$$adj(B) = (-1)^{n-1}(B^{n-1} + d_1B^{n-2} + \ldots + d_{n-1}I).$$

Pogledati i [54].

Elementarna matrica I tipa je $n \times n$ matrica koja na dijagonali ima sve elemente izuzev na poziciji (i, i), $1 \leq i \leq n$, jednake 1, na poziciji (i, i) je invertibilan element prstena $K[x]$, a elementi van dijagonale su jednaki 0; odnosno to je matrica koja se od jedinične matrice razlikuje samo u jednom elementu na dijagonali i koja je oblika

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica E invertibilna i da je njen inverz

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

takođe elementarna matrica I tipa. Množenje sleva proizvoljne $n \times k$ matrice B matricom E kao rezultat daje matricu B kod koje je i-ta vrsta pomnožena elementom u. Množenje zdesna proizvoljne $k \times n$ matrice B matricom E kao rezultat daje matricu B kod koje je i-ta kolona pomnožena elementom u. Jedinična matrica I je elementarna matrica I tipa, za invertibilan element u uzmimo 1. ***Elementarna operacija I tipa na vrstama*** matrice B je množenje jedne vrste matrice B invertibilnim elementom prstena $K[x]$. ***Elementarna operacija I tipa na kolonama*** matrice B je množenje jedne kolone matrice B invertibilnim elementom prstena $K[x]$. Izvršavanje elementarne operacije I tipa na vrstama (kolonama) matrice B je u stvari množenje matrice B sleva (zdesna) elementarnom matricom I tipa. Zatim, ***elementarna matrica II tipa*** je jedinična $n \times n$ matrica kod koje su i-ta i j-ta vrsta zamenile mesta, odnosno to je matrica oblika

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Datu matricu E možemo dobiti i zamenom mesta i-te i j-te kolone u jediničnoj matrici. Matrica E je invertibilna i njen inverz je ona sama. Množenje sleva proizvoljne $n \times k$ matrice B matricom E kao rezultat daje matricu B kod koje su i-ta i j-ta vrsta zamenile mesta. Množenje zdesna proizvoljne $k \times n$ matrice B matricom E kao rezultat daje matricu B kod koje su i-ta i j-ta kolona zamenile mesta. Otuda zaključujemo da je $E^2 = I$, tj. da je matrica E sama sebi inverz. ***Elementarna operacija II tipa na vrstama*** matrice B je zamena mesta dvema vrstama date matrice. ***Elementarna operacija II tipa na kolonama*** matrice B je zamena mesta dvema kolonama matrice B. Izvršavanje elementarne operacije II tipa na vrstama (kolonama) matrice B je množenje matrice B sleva (zdesna) elementarnom matricom II tipa. ***Elementarna matrica III tipa*** je $n \times n$ matrica koja na dijagonali ima sve elemente jednake 1, na poziciji (i, j) proizvoljan element prstena $K[x]$, koji je različit od 0, i sve ostale elemente jednake 0; odnosno to je matrica koja se od jedinične matrice razlikuje samo u jednom elementu van dijagonale i oblika je

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & f(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je matrica E invertibilna i da je njen inverz

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & -f(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

takođe elementarna matrica III tipa. Množenje sleva proizvoljne $n \times k$ matrice B matricom E kao rezultat daje matricu B kod koje je i-ta vrsta zamenjena zbirom i-te vrste i j-te vrste pomnožene sa $f(x)$. Množenje zdesna proizvoljne $k \times n$ matrice B matricom E kao rezultat daje matricu B kod koje je j-ta kolona zamenjena zbirom j-te kolone i i-te kolone pomnožene sa $f(x)$. ***Elementarna operacija III tipa na vrstama*** matrice B je zamena jedne vrste matrice B sa zbirom te vrste i neke druge vrste pomnožene sa polinomom iz $K[x]$. ***Elementarna operacija III tipa na kolonama*** matrice B je zamena jedne kolone matrice B sa zbirom te kolone i neke druge kolone pomnožene sa polinomom iz $K[x]$. Izvršavanje elementarne operacije III tipa na vrstama (kolonama) matrice B je u stvari množenje matrice B sleva (zdesna) elementarnom matricom III tipa. Elementarne matrice I, II ili III tipa dobijamo primenom elementarnih operacija I, II ili III tipa na vrste (kolone) jedinične matrice I. ***Elementarna matrica*** je elementarna matrica I, II ili III tipa. ***Elementarna operacija na vrstama*** je elementarna operacija I, II ili III tipa na vrstama. ***Elementarna operacija na kolonama*** je elementarna operacija I, II ili III tipa na kolonama. Matrice B_1 i B_2 su ***vrsta-ekvivalentne*** ako se matrica B_2 može dobiti iz matrice B_1 primenom konačnog broja elementarnih operacija na vrstama. Matrice B_1 i B_2 su ***kolona-ekvivalentne*** ako se matrica B_2 može dobiti iz matrice B_1 primenom konačnog broja elementarnih operacija na kolonama. Matrice B_1 i B_2 su ***ekvivalentne***, u oznaci $B_1 \cong B_2$, ako se matrica B_2 može dobiti iz matrice B_1 primenom konačnog broja elementarnih operacija na vrstama i kolonama. Odnosno, $n \times k$ matrice B_1 i B_2 su vrsta-ekvivalentne ako postoji konačan niz elementarnih $n \times n$ matrica $P_1, P_2, \ldots, P_r$ takvih da važi $B_2 = P_1P_2 \ldots P_rB_1$. Matrice B_1 i B_2 su kolona-ekvivalentne ako postoji konačan niz elementarnih $k \times k$ matrica $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$ takvih da važi $B_2 = B_1Q_1Q_2 \ldots Q_s$. I na kraju, matrice B_1 i B_2 su ekvivalentne ako postoje elementarne $n \times n$ matrice $P_1, P_2, \ldots, P_r$ i elementarne $k \times k$ matrice $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ takve da važi $B_2 = P_1P_2 \ldots P_rB_1Q_1Q_2 \ldots Q_s$. Vrsta-ekvivalencija, kolona-ekvivalencija i ekvivalencija su relacije ekvivalencije na skupu svih $n \times k$ matrica sa koeficijentima iz polja $K[x]$. Zaista, refleksivnost sledi iz činjenice da je jedinična matrica elementarna matrica. Simetričnost sledi iz činjenice da su elementarne matrice invertibilne. Pokažimo tranzitivnost. Neka za $n \times k$ matrice B_1, B_2 i B_3 važi $B_1 \cong B_2$ i $B_2 \cong B_3$. Tada postoje elementarne $n \times n$ matrice $P_1, P_2, \ldots, P_r, P'_1, P'_2, \ldots, P'_{r'}$ i elementarne $k \times k$ matrice $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s, Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_{s'}$ takve da važi $B_2 = P_1P_2 \ldots P_rB_1Q_1Q_2 \ldots Q_s$ i $B_3 = P'_1P'_2 \ldots P'_{r'}B_2Q'_1Q'_2 \ldots Q'_{s'}$. Pa imamo

$$B_3 = P'_1P'_2 \ldots P'_{r'}P_1P_2 \ldots P_rB_1Q_1Q_2 \ldots Q_sQ'_1Q'_2 \ldots Q'_{s'},$$

odnosno $B_1 \cong B_3$.

Teorema 2.13 *(Egzistencija Smitove normalne forme) Neka je B $n \times k$ matrica sa koeficijentima u prstenu polinoma $K[x]$, gde je K polje. Tada je matrica B ekvivalentna dijagonalnoj matrici oblika*

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_l(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $b_1(x), \dots, b_l(x)$ monični polinomi za koje važi $b_1(x) \mid b_2(x) \mid \dots \mid b_l(x)$.

Dokaz: Dokaz izvodimo indukcijom po zbiru broja vrsta i kolona matrice B. Ako je $n + k = 2$, onda je B matrica tipa 1×1. Množenjem matrice B sa nenula konstantom dobijamo matricu čiji je jedini član monični polinom. Neka je B matrica tipa $n \times k$ za $n + k > 2$ i neka je tvrđenje tačno za sve matrice tipa $n' \times k'$, gde je $n + k > n' + k'$. Ako je B nula matrica tvrđenje jasno važi. Pa prema tome, pretpostavimo da je $B \neq \mathbb{O}$. Neka je $\mathcal{A}$ skup svih nenula elemenata svih matrica ekvivalentnih sa matricom B i neka je $b_1(x) \in \mathcal{A}$ polinom najmanjeg stepena, tj. neka za svako $b(x) \in \mathcal{A}$ važi da je $deg(b_1(x)) \leq deg(b(x))$. Neka je B_1 matrica ekvivalentna matrici B čiji je $b_1(x)$ element. Ako je element $b_1(x)$ na poziciji (i, j), onda zamenom prve i i-te vrste matrice B_1, pa zatim zamenom prve i j-te kolone, dobijamo matricu B_2 ekvivalentnu matrici B_1 u kojoj je element $b_1(x)$ na poziciji $(1, 1)$. Matrica B_2 je oblika

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & b_{12}(x) & \dots & b_{1k}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & \dots & b_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{nk}(x) \end{bmatrix}.$$

Prsten polinoma $K[x]$ je Euklidov, pa postoje jedinstveni polinomi $q_2(x), \dots, q_n(x)$ i $r_2(x), \dots, r_n(x)$ takvi da važi $b_{i1}(x) = q_i(x)b_1(x) + r_i(x)$, gde je $r_i(x) = 0$ ili $deg(r_i(x)) < deg(b_1(x))$, $2 \leq i \leq n$. Tada je $r_i(x) = b_{i1}(x) - q_i(x)b_1(x)$. Množenjem prve vrste sa $-q_i(x)$ i dodavanjem i-toj vrsti za $2 \leq i \leq n$ dobijamo ekvivalentnu matricu B_3 matrici B_2. Matrica B_3 je oblika

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & b_{12}(x) & \dots & b_{1k}(x) \\ r_2(x) & b_{22}(x) - q_2(x)b_{12}(x) & \dots & b_{2k}(x) - q_2(x)b_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(x) & b_{n2}(x) - q_n(x)b_{12}(x) & \dots & b_{nk}(x) - q_n(x)b_{1k}(x) \end{bmatrix}.$$

Pošto je matrica B_3 ekvivalentna matrici B, elementi $r_2(x), \dots, r_n(x)$ pripadaju skupu $\mathcal{A}$. Polinom $b_1(x) \in \mathcal{A}$ je najmanjeg stepena, pa je $r_2(x) = \dots = r_n(x) = 0$.

Odnosno matrica B_3 je oblika

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & b_{12}(x) & \dots & b_{1k}(x) \\ 0 & b_{22}(x) - q_2(x)b_{12}(x) & \dots & b_{2k}(x) - q_2(x)b_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2}(x) - q_n(x)b_{12}(x) & \dots & b_{nk}(x) - q_n(x)b_{1k}(x) \end{bmatrix}.$$

Istim rezonovanjem, samo što umesto elementarnih operacija na vrstama vršimo elementarne operacije na kolonama, formiramo matricu B_4 koja je oblika

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22}(x) - q_2(x)b_{12}(x) & \dots & b_{2k}(x) - q_2(x)b_{12}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2}(x) - q_n(x)b_{12}(x) & \dots & b_{nk}(x) - q_n(x)b_{1k}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b'_{22}(x) & \dots & b'_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(x) & \dots & b'_{nk}(x) \end{bmatrix}.$$

Za $n = 1$ matrica B_4 je oblika $\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, pa je tvrđenje dokazano. Za $k = 1$ matrica B_4 je oblika $\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$, pa opet imamo da tvrđenje važi. Neka je $n \geq 2$ i $k \geq 2$. Pokažimo da polinom $b_1(x)$ deli sve elemente matrice B_4. Dokažimo da $b_1(x)$ deli proizvoljan element $b'_{ij}(x)$ matrice B_4 za $2 \leq i \leq n$ i $2 \leq j \leq k$. Dodavanjem i-te vrste prvoj vrsti matrice B_4 dobijamo matricu B_5 ekvivalentnu matrici B_4 koja je oblika

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & b'_{i2}(x) & \dots & b'_{ij}(x) & \dots & b'_{ik}(x) \\ 0 & b'_{22}(x) & \dots & b'_{2j}(x) & \dots & b'_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{i2}(x) & \dots & b'_{ij}(x) & \dots & b'_{ik}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(x) & \dots & b'_{nj}(x) & \dots & b'_{nk}(x) \end{bmatrix}.$$

Koristimo istu argumentaciju kao u prvom delu dokaza.
Kako postoje polinomi $q'_2(x), \dots, q'_k(x)$ i $r'_2(x), \dots, r'_k(x)$ takvi da važi da je $b'_{ij}(x) = q'_j(x)b_1(x) + r'_j(x)$, gde je $r'_j(x) = 0$ ili $deg(r'_j(x)) < deg(b_1(x))$, $2 \leq j \leq k$, imamo da je $r'_j(x) = b'_{ij}(x) - q'_j(x)b_1(x)$. Množenjem prve kolone sa $-q'_j(x)$ i dodavanjem j-toj koloni za $2 \leq j \leq n$ dobijamo ekvivalentnu matricu B_6 matrici B_5. Matrica B_6 je oblika

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & r'_2(x) & \dots & r'_j(x) & \dots & r'_k(x) \\ 0 & b'_{22}(x) & \dots & b'_{2j}(x) & \dots & b'_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{i2}(x) & \dots & b'_{ij}(x) & \dots & b'_{ik}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{n2}(x) & \dots & b'_{nj}(x) & \dots & b'_{nk}(x) \end{bmatrix}.$$

Pošto je matrica B_6 ekvivalentna matrici B, elementi $r'_2(x), \ldots, r'_k(x)$ pripadaju skupu $\mathcal{A}$. Polinom $b_1(x) \in \mathcal{A}$ je najmanjeg stepena, pa je $r'_2(x) = \ldots = r'_n(x) = 0$. Odnosno, polinom $b_1(x)$ deli polinom $b'_{ij}(x)$. Prema tome, postoje polinomi $c_{ij}(x)$ takvi da važi da je $b'_{ij}(x) = b_1(x)c_{ij}(x)$ za svako $2 \leq i \leq n$ i $2 \leq j \leq k$.

Označimo sa C $(n-1) \times (k-1)$ matricu čiji su elementi polinomi $c_{ij}(x)$. Matrica B_5 se može zapisati u blok dijagonalnom obliku

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 \\ 0 & b_1(x)C \end{bmatrix}.$$

Kako je matrica C formata $(n-1) \times (k-1)$ na osnovu indukcijske hipoteze ona je ekvivalentna matrici oblika

$$C' = \begin{bmatrix} c_2(x) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_3(x) & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_l(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $c_2(x), c_3(x), \ldots, c_l(x)$ nenula polinomi za koje važi $c_2(x) \mid c_3(x) \mid \ldots \mid c_l(x)$. Odnosno postoje matrice P i Q takve da važi $P \cdot C \cdot Q = C'$, gde je matrica P proizvod elementarnih $(n-1) \times (n-1)$ matrica, a matrica Q proizvod elementarnih $(k-1) \times (k-1)$ matrica. Pa imamo

$$P(b_1(x)C)Q = b_1(x)P \cdot C \cdot Q = b_1(x)C' = \begin{bmatrix} b_1(x)c_2(x) & 0 & \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_1(x)c_3(x) & \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_1(x)c_l(x) & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix}.$$

Blok matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$ su takođe proizvodi elementarnih $n \times n$ i $k \times k$ matrica pa važi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 \\ 0 & b_1(x)C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 \\ 0 & P(b_1(x)C)Q \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1(x)c_2(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_1(x)c_3(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1(x)c_l(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako je $b_j(x) = b_1(x)c_j(x)$ za $2 \leq j \leq l$, onda je matrica B ekvivalentna dijagonalnoj matrici

$$\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_l(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $b_1(x), b_2(x), \dots, b_l(x)$ monični polinomi za koje važi $b_1(x) \mid b_2(x) \mid \dots \mid b_l(x)$. $\square$

Matrica B je ekvivalentna matrici oblika $diag(1, \dots, 1, a_1(x), \dots, a_m(x), 0, \dots, 0) =$

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_2(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)$ monični polinomi čiji su stepeni najmanje jedan i za koje važi $a_1(x) \mid a_2(x) \mid \ldots \mid a_m(x)$ i koju nazivamo matricom u ***Smitovoj normalnoj formi***.

Posledica 2.14 *Neka je B kvadratna matrica nad prstenom polinoma $K[x]$, gde je K polje. Matrica B je invertibilna ako i samo ako je proizvod elementarnih matrica.*

Dokaz: $\Rightarrow$: Neka je B invertibilna matrica. Na osnovu Teoreme 2.13 matrica B je ekvivalentna matrici oblika $C = diag(1, \ldots, 1, a_1(x), \ldots, a_m(x), 0, \ldots, 0)$, odnosno postoje invertibilne $n \times n$ matrice P i Q takve da važi $P \cdot B \cdot Q = C$. Matrica C je proizvod invertibilnih matrica pa je i sama invertibilna. Na osnovu Leme 2.10 imamo da je $det(C)$ nenula element polja K. Odakle zaključujemo da je matrica C oblika $diag(1, \ldots, 1, a_1(x), \ldots, a_m(x))$. Determinanta dijagonalne matrice je jednaka proizvodu elemenata na dijagonali, pa imamo da je $det(C) = \prod_{i=1}^{m} a_i(x)$ nenula element polja K. I za svaki polinom $a_i(x)$ važi $a_i(x) \cdot (\frac{1}{det(C)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} a_j(x)) = 1$, $1 \leq i \leq m$. Prema tome, svaki od polinoma $a_i(x)$ je invertibilan element prstena $K[x]$. Pa je matrica C proizvod elementarnih matrica I tipa

$$\begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_i(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrice P i Q su proizvodi elementarnih matrica pa su i njhove inverzne matrice P^{-1} i Q^{-1} takođe proizvodi elementarnih matrica. Odakle zaključujemo da je i matrica $B = P^{-1} \cdot C \cdot Q^{-1}$ proizvod elementarnih matrica.
$\Leftarrow$: Elementarne matrice su invertibilne, pa je proizvod elementarnih matrica invertibilna matrica. $\square$

Neka je P $m \times n$ matrica, Q $n \times m$ matrica i $\phi : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ preslikavanje za koje važi $\phi(1) < \phi(2) < \ldots < \phi(m)$, $m \leq n$. Koristimo vrednosti $\phi(1), \phi(2), \ldots, \phi(m)$ da izaberemo m kolona matrice P i formiramo $m \times m$ matricu P_ϕ, zatim da izaberemo odgovarajućih m vrsta matrice Q pomoću kojih formiramo $m \times m$ matricu Q_ϕ. Za matrice P i Q važi $det(P \cdot Q) = \sum_\phi det(P_\phi) det(Q_\phi)$. Odnosno $det(P \cdot Q)$ je suma proizvoda svih minora maksimalnog reda m matrice P i odgovarajućih minora istog reda matrice Q. Navedeno tvrđenje nazivamo ***Bine--Košijevom teoremom***.

Takođe, važi i da je minor reda k matrice $P \cdot Q$ jednak sumi proizvoda odgovarajućih minora reda k matrica P i Q. Preciznije ako su $\psi_1 : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ i $\psi_2 : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \leq m$, dva preslikavanja za koja važi da je $\psi_1(1) < \psi_1(2) < \ldots < \psi_1(k)$ i $\psi_2(1) < \psi_2(2) < \ldots < \psi_2(k)$, onda minor R reda k matrice $P \cdot Q$ čije su vrste $\psi_1(1), \ldots, \psi_1(k)$ i kolone $\psi_2(1), \ldots, \psi_2(k)$ možemo predstaviti kao determinantu proizvoda $k \times n$ i $n \times k$ matrica P_{ψ_1} i Q_{ψ_2} koje dobijamo izabirom k vrsta, odnosno k kolona pomoću preslikavanja ψ_1 i ψ_2. Prema tome, primenom Bine-Košijeve teoreme imamo da je $R = \sum_\phi det((P_{\psi_1})_\phi)det((Q_{\psi_2})_\phi)$, gde je $\phi : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ proizvoljno preslikavanje za koje važi da je $\phi(1) < \phi(2) < \ldots < \phi(k)$.
Neka je B matrica nad prstenom polinoma $K[x]$, K je polje. ***Rang*** matrice B je red njene najveće regularne kvadratne submatrice. Kvadratna $n \times n$ matrica B je regularna ako i samo ako je njen rang jednak n.

Lema 2.15 *Rang matrice je invarijantan u odnosu na elementarne transformacije.*

Dokaz: Neka su $B_1(x)$ i $B_2(x)$ ekvivalentne matrice. Pokažimo da je rang r_1 od $B_1(x)$ jednak rangu r_2 od $B_2(x)$. Pošto su matrice $B_1(x)$ i $B_2(x)$ ekvivalentne na osnovu Teoreme 2.13 postoje invertibilne matrice $P(x)$ i $Q(x)$ takve da važi $B_1(x) = P(x)B_2(x)Q(x)$. Primenom Bine-Košijeve teoreme prvo na proizvod matrica $P(x)B_2(x)$, pa zatim na proizvod $P(x)B_2(x)Q(x)$, zaključujemo da se minor reda k matrice $B_1(x)$ može predstaviti kao sumu proizvoda odgovarajućih minora reda k matrica $P(x)$, $Q(x)$ i $B_2(x)$. Ako postoji minor reda k matrice $B_1(x)$ različit od nule, onda je bar jedan minor reda k matrice $B_2(x)$ koji učestvuje u sumi različit od nule, pa je $r_1 \leq r_2$. Pošto su matrice $P(x)$ i $Q(x)$ invertibilne važi da je $B_2(x) = P^{-1}(x)B_1(x)Q^{-1}(x)$. Istom argumentacijom zaključujemo da je i $r_2 \leq r_1$, odnosno da su matrice $B_1(x)$ i $B_2(x)$ istog ranga. $\square$

Neka je B matrica nad prstenom polinoma $K[x]$ ranga r, K je polje. Neka je $d_k(x)$ najveći zajednički delilac svih minora reda k matrice B, $1 \leq k \leq r$. Bez umanjenja opštosti možemo izabrati polinome $d_k(x)$ da budu monični. Svaki minor reda k, $k \geq 2$, možemo predstaviti kao linearnu kombinaciju minora reda $k-1$. Prema tome, $d_{k-1}(x)$ deli $d_k(x)$. Ako definišemo $d_0(x) = 1$, imamo niz moničnih polinoma $d_0(x), d_1(x), \ldots, d_r(x)$ za koji važi $d_0(x) \mid d_1(x) \mid d_2(x) \mid \ldots \mid d_r(x)$.

Lema 2.16 *Polinomi $d_0(x), d_1(x), \ldots, d_r(x)$ su invarijantni u odnosu na elementarne transformacije.*

Dokaz: Neka su $B_1(x)$ i $B_2(x)$ ekvivalentne matrice. Na osnovu Leme 2.15 matrice $B_1(x)$ i $B_2(x)$ su istog ranga r. Neka su $d_k(x)$ i $g_k(x)$, $1 \leq k \leq r$, najveći zajednički delioci svih minora reda k matrica $B_1(x)$ i $B_2(x)$ respektivno i neka je $d_0(x) = g_0(x) = 1$. Kako se proizvoljan minor reda k matrice $B_1(x)$ može predstaviti kao suma proizvoda odgovarajućih minora reda k matrica $P(x)$, $Q(x)$ i $B_2(x)$, zaključujemo da $g_k(x)$ deli sve minore reda k matrice $B_1(x)$, pa prema tome deli i $d_k(x)$. Takođe, proizvoljan minor reda k matrice $B_2(x)$ možemo predstaviti kao sumu proizvoda odgovarajućih minora reda k matrica $P^{-1}(x)$, $Q^{-1}(x)$ i $B_1(x)$, odakle dobijamo da $d_k(x)$ deli sve minore reda k matrice $B_2(x)$, pa prema tome deli i $g_k(x)$. Uz pretpostavku da su polinomi $d_k(x)$ i $g_k(x)$ monični zaključujemo da je $d_k(x) = g_k(x)$. Odnosno da su polinomi $d_0(x), d_1(x), \ldots, d_r(x)$ invarijantni u odnosu na elementarne transformacije. $\square$

Teorema 2.17 *(Jedinstvenost Smitove normalne forme) Neka je B matrica sa koeficijentima u prstenu polinoma $K[x]$, K je polje. Tada je matrica B ekvivalentna tačno jednoj matrici u Smitovoj normalnoj formi.*

Dokaz: Neka je matrica B ekvivalentna matricama u Smitovoj normalnoj formi $B_1 = diag(b_1(x), \ldots, b_r(x), 0, \ldots, 0)$ i $B_2 = diag(c_1(x), \ldots, c_l(x), 0, \ldots, 0)$. Ekvivalencija matrica je relacija ekvivalencije pa su i matrice B_1 i B_2 ekvivalentne i na osnovu Leme 2.15 imamo da je $r{=}l$. Neka su $d_k(x)$ i $g_k(x)$, $1{\leq}k{\leq}r$, najveći zajednički delioci svih minora reda k matrica $B_1(x)$ i $B_2(x)$ respektivno i neka je $d_0(x) = g_0(x) = 1$. Za matrice $B_1(x)$ i $B_2(x)$ važi da je

$$d_1(x) = b_1(x),\ d_2(x) = b_1(x)b_2(x),\ \ldots,\ d_r(x) = b_1(x)b_2(x)\ldots b_r(x) \text{ i}$$

$$g_1(x) = c_1(x),\ g_2(x) = c_1(x)c_2(x),\ \ldots,\ g_r(x) = c_1(x)c_2(x)\ldots c_r(x).$$

Na osnovu Leme 2.16 imamo da je $d_i(x) = g_i(x)$ za $0 \leq i \leq r$, odnosno $b_i(x) = c_i(x) = \frac{d_i(x)}{d_{i-1}(x)}$, za $1 \leq i \leq r$. Odakle zaključujemo da je Smitova forma matrice B jedinstvena. $\square$

Neka je B kvadratna matrica sa koeficijentima u polju K. Matricu $xI - B$ nazivamo ***karakterističnom matricom*** matrice B.

Lema 2.18 *Smitova normalna forma karakteristične matrice $B = xI - C_{a(x)}$ prateće matrice $C_{a(x)}$ moničnog polinoma $a(x) \in K[x]$ stepena n, je matrica*

$$S = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, a(x)).$$

Dokaz: Neka je $a(x) = x^n + d_1x^{n-1} + \ldots + d_{n-1}x + d_n$. Tada je

$$B = xI - C_{a(x)} = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & d_2 & x+d_1 \end{bmatrix}.$$

Množenjem poslednje kolone sa x i dodavanjem pretposlednjoj, pa zatim množenjem date kolone sa x i dodavanjem prethodnoj, i tako dalje nastavljajući ovaj postupak u kome već transformisanu kolonu množimo sa x i dodajemo prethodnoj dobijamo matricu B_1 ekvivalentnu polaznoj matrici koja je oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ a(x) & \frac{a(x)-d_n}{x} & \dots & x^2+d_1x+d_2 & x+d_1 \end{bmatrix}.$$

Množenjem i-te vrste matrice B_1 polinomom koji se nalazi u preseku $i+1$. kolone i n-te vrste i dodavanjem poslednjoj vrsti za $1 \leq i \leq n-1$ dobijamo matricu B_2 ekvivalentnu polaznoj matrici koja je oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ a(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Množenjem prvih $n-1$ vrsta matrice B_2 sa -1 i zamenom mesta kolonama dobijamo matricu u Smitovoj formi ekvivalentnu polaznoj matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a(x) \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Teorema 2.19 *Smitova normalna forma karakteristične matrice $xI - C$ matrice u racionalnoj kanonskoj formi $C = C_{a_1(x)} \oplus C_{a_2(x)} \oplus \ldots \oplus C_{a_m(x)}$ je matrica*

$$S = diag(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}, a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)),$$

gde je n zbir stepena polinoma $a_1(x), \dots, a_m(x)$.

Dokaz: Na osnovu Leme 2.18 svaki blok $xI - C_{a_i(x)}$ je ekvivalentan nad prstenom $K[x]$ matrici $S_i = diag(1, \dots, 1, a_i(x))$, $1 \leq i \leq m$. Pa je matrica $xI - C$ ekvivalentna matrici $S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_m$. Zamenom mesta vrstama dobijamo matricu $S = diag(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}, a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x))$. $\square$

Posledica 2.20 *Neka su polinomi $a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)$ invarijantni faktori $n \times n$ matrice B. Tada su polinomi $\underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $\dots$, $a_m(x)$ najveći zajednički delioci svih minora reda $1, 2, \dots, n$ matrice $xI - B$.*

Dokaz: Pošto su invarijantni faktori matrice B polinomi $a_1(x), \dots, a_m(x)$, racionalna kanonska forma matrice B je matrica $C = C_{a_1(x)} \oplus \dots \oplus C_{a_m(x)}$. Pa postoji invertibilna $n \times n$ matrica P takva da važi $C = P^{-1} \cdot B \cdot P$. Prema tome, imamo $P^{-1} \cdot (xI - B) \cdot P = xI - C$. Odakle zaključujemo da su matrice $xI - B$ i $xI - C$ ekvivalentne, pa su im, na osnovu Leme 2.16, najveće zajednički delioci minora istog reda jednaki. Na osnovu Teoreme 2.19 zaključujemo da su najveći zajednički delioci svih minora reda $1, 2, \dots, n$ matrice $xI - B$ polinomi $\underbrace{1, \dots, 1}_{n-m}, a_1(x), \dots, a_m(x)$. $\square$

Polinome $a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)$ nazivamo i ***invarijantnim faktorima*** karakteristične matrice matrice B.

Teorema 2.21 *Matrice B_1 i B_2 su slične ako i samo ako su njihove karakteristične matrice $xI - B_1$ i $xI - B_2$ ekvivalentne.*

Dokaz: $\Rightarrow$: Matrice B_1 i B_2 su slične ako postoji invertibilna $n \times n$ matrica P nad poljem K takva da važi $B_1 = P^{-1} \cdot B_2 \cdot P$. Pa prema tome, za matrice $xI - B_1$ i $xI - B_2$ važi $xI - B_1 = xI - P^{-1} \cdot B_2 \cdot P = P^{-1} \cdot (xI - B_2) \cdot P$. Odakle zaključujemo da su matrice $xI - B_1$ i $xI - B_2$ ekvivalentne.
$\Leftarrow$: Na osnovu Leme 2.16 ekvivalentne matrice xI–B_1 i xI–B_2 imaju iste invarijantne faktore. Pa su i invarijantni faktori matrica B_1 i B_2 isti, odnosno matrice B_1 i B_2 imaju iste racionalne forme. Na osnovu Teoreme 2.4 matrice B_1 i B_2 su slične. $\square$

Dokažimo na drugi način da iz ekvivalencije matrica $xI - B_1$ i $xI - B_2$ sledi sličnost matrica B_1 i B_2. Dati dokaz je preuzet iz [22] i njegov značaj je u eksplicitnom izračunavanju matrice T za koju važi $B_1 = T^{-1} \cdot B_2 \cdot T$.
Neka su $P(x)$ i $Q(x)$ invertibilne $n \times n$ matrice sa koeficijentima u prstenu $K[x]$ takve da važi $P(x) \cdot (xI - B_1) = (xI - B_2) \cdot Q(x)$. Neka je

$$P(x) = x^m P_m + x^{m-1} P_{m-1} + \dots x P_1 + P_0 \text{ i } Q(x) = x^k Q_k + x^{k-1} Q_{k-1} + \dots x Q_1 + Q_0$$

za $P_m \neq \mathbb{O}$ i $Q_k \neq \mathbb{O}$. Tada je

$$P(x) \cdot (xI - B_1) = x^{m+1} P_m + x^m (P_{m-1} - P_m \cdot B_1) + \ldots + x(P_0 - P_1 \cdot B_1) - P_0 \cdot B_1 \text{ i}$$

$$(xI - B_2) \cdot Q(x) = x^{k+1} Q_k + x^k (Q_{k-1} - B_2 \cdot Q_k) + \ldots + x(Q_0 - B_2 \cdot Q_1) - B_2 \cdot Q_0.$$

Odakle zaključujemo da je $m = k$ i da važi

$$\begin{aligned} P_m &= Q_m \\ P_{m-1} - P_m \cdot B_1 &= Q_{m-1} - B_2 \cdot Q_m \\ &\vdots \\ P_0 - P_1 \cdot B_1 &= Q_0 - B_2 \cdot Q_1 \\ -P_0 \cdot B_1 &= -B_2 \cdot Q_0. \end{aligned}$$

Množenjem zdesna prve jednakosti sa B_1^{m+1}, druge sa B_1^m, itd. dobijamo

$$\begin{aligned} P_m \cdot B_1^{m+1} &= Q_m \cdot B_1^{m+1} \\ (P_{m-1} - P_m \cdot B_1) \cdot B_1^m &= (Q_{m-1} - B_2 \cdot Q_m) \cdot B_1^m \\ &\vdots \\ (P_0 - P_1 \cdot B_1) \cdot B_1 &= (Q_0 - B_2 \cdot Q_1) \cdot B_1 \\ -P_0 \cdot B_1 &= B_2 \cdot Q_0. \end{aligned}$$

Sabiranjem datih jednakosti i grupisanjem elemenata uz B_2 imamo

$$\mathbb{O} = (Q_m \cdot B_1^{m+1} + Q_{m-1} \cdot B_1^m + \ldots + Q_0 \cdot B_1) - (B_2 \cdot Q_m \cdot B_1^m + \ldots + B_2 \cdot Q_1 \cdot B_1 + B_2 \cdot Q_0).$$

Odnosno dobijamo

$$(Q_m \cdot B_1^m + Q_{m-1} \cdot B_1^{m-1} + \ldots + Q_0) \cdot B_1 = B_2 \cdot (Q_m \cdot B_1^m + \ldots + Q_1 \cdot B_1 + Q_0).$$

Označimo sa T matricu $Q_m \cdot B_1^m + Q_{m-1} \cdot B_1^{m-1} + \ldots + Q_0$. Prema tome, važi $T \cdot B_1 = B_2 \cdot T$. Dokažimo još da je matrica T invertibilna. Iz jednakosti $T \cdot B_1 = B_2 \cdot T$ zaključujemo da važi $T \cdot B_1^2 = B_2 \cdot T \cdot B_1 = B_2^2 \cdot T$, odnosno da za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $T \cdot B_1^k = B_2^k \cdot T$. Označimo sa $G(x)$ inverznu matricu matrice $Q(x)$. Neka je $G(x) = x^l G_l + x^{l-1} G_{l-1} + \ldots + x G_1 + G_0$. Kako važi da je $G \cdot Q = I$, izjednačavanjem koeficijenata uz x^p na levoj i desnoj strani imamo da je

$$\sum_{i+j=p} G_i \cdot Q_j = \begin{cases} I, & p = 0; \\ \mathbb{O}, & p \neq 0. \end{cases}$$

Neka je $R = G_l \cdot B_2^l + G_{l-1} \cdot B_2^{l-1} + \ldots + G_1 \cdot B_2 + G_0$. Tada je

$$\begin{aligned}
R \cdot T &= (G_l \cdot B_2^l + G_{l-1} \cdot B_2^{l-1} + \ldots + G_1 \cdot B_2 + G_0) \cdot T \\
&= G_l \cdot B_2^l \cdot T + G_{l-1} \cdot B_2^{l-1} \cdot T + \ldots + G_1 \cdot B_2 \cdot T + G_0 \cdot T \\
&\underset{B_2^k \cdot T = T \cdot B_1^k}{=} G_l \cdot T \cdot B_1^l + G_{l-1} \cdot T \cdot B_1^{l-1} + \ldots + G_1 \cdot T \cdot B_1 + G_0 \cdot T \\
&\underset{T = \sum_{k=0}^m Q_k \cdot B_1^k}{=} \textstyle\sum_{k=0}^m G_l \cdot Q_k \cdot B_1^{k+l} + \sum_{k=0}^m G_{l-1} \cdot Q_k \cdot B_1^{k+l-1} + \ldots + \\
&\quad \textstyle\sum_{k=0}^m G_1 \cdot Q_k \cdot B_1^{k+1} + \sum_{k=0}^m G_0 Q_k \cdot B_1^k
\end{aligned}$$

Pregrupisavanjem sabiraka u prethodnoj jednakosti imamo da je

$$R \cdot T = \sum_{p=0}^{m+l} \sum_{i+j=p} G_i \cdot Q_j \cdot B_1^p = I.$$

Na osnovu Leme 2.11 zaključujemo da je i $T \cdot R = I$, odnosno da je matrica T invertibilna. Pa jednakost $T \cdot B_1 = B_2 \cdot T$ implicira da su matrice B_1 i B_2 slične, čime je dokaz završen.

Neka je $n \times n$ matrica B sa koeficijentima u polju K slična matrici C u racionalnoj kanonskoj formi. Označimo sa $S(x)$ Smitovu normalnu formu matrica $xI - B$ i $xI - C$. Neka su $P(x)$ i $Q(x)$ invertibilne $n \times n$ matrice sa koeficijentima u prstenu $K[x]$ takve da važi $P(x) \cdot (xI - B) \cdot Q(x) = S(x)$ i neka su $U(x)$ i $V(x)$ invertibilne $n \times n$ matrice sa koeficijentima u prstenu $K[x]$ takve da važi $U(x) \cdot (xI - C) \cdot V(x) = S(x)$. Tada važi $P(x) \cdot (xI - B) \cdot Q(x) = U(x) \cdot (xI - C) \cdot V(x)$, odnosno imamo da je $(xI - B) \cdot Q(x) \cdot V^{-1}(x) = P^{-1}(x) \cdot U(x) \cdot (xI - C)$. Neka je $Q(x) \cdot V^{-1}(x) = x^k T_k + x^{k-1} T_{k-1} + \ldots + x T_1 + T_0$. Na osnovu prethodno izloženog dokaza Teoreme 2.21 za matricu $T = T_k \cdot C^k + T_{k-1} \cdot C^{k-1} + \ldots + T_0$ važi $B \cdot T = T \cdot C$, odnosno $C = T^{-1} \cdot B \cdot T$. Odakle imamo da matrica T ostvaruje sličnost između matrice B i njene racionalne kanonske forme C. Matricu T nazivamo ***matricom transformacije***. Primetimo da matrica T nije jedinstveno određena.

2.4 Smitova i racionalna forma

Prateći elementarne operacije na vrstama i kolonama pri svođenju karakteristične matrice $xI - B$ proizvoljne matrice B nad poljem K na matricu u Smitovoj normalnoj formi dobijamo matricu transformacije P takvu da važi da je matrica $P^{-1} \cdot B \cdot P$ u racionalnoj kanonskoj formi. Neka je $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ baza vektorskog prostora V nad poljem K i neka je B matrica linearnog operatora $T : V \to V$ u bazi $\mathcal{B}$. Posmatramo vektorski prostor V kao $K[x]$-modul pri čemu važi $x \cdot v = T(v)$, za svako $v \in V$. Tada matrica P predstavlja matricu prelaska sa baze $\mathcal{B}$ na novu bazu u kojoj je matrica linearnog operatora T u racionalnoj kanonskoj formi, odnosno u kojoj je modul V direktna suma cikličnih $K[x]$-modula.

Prvo ćemo izložiti algoritam za određivanje generatorskog skupa u kome je proizvoljan konačno generisan modul nad glavnoidealskim prstenom suma cikličnih modula, a zatim ćemo dati algoritam primeniti na prsten polinoma $K[x]$ nad poljem K i konačno dimenzionalni vektorski prostor V nad poljem K koji razmatramo kao $K[x]$-modul. U narednom tekstu mi u stvari već poznate činjenice stavljamo u novi kontekst.

Neka je R glavnoidealski prsten i M konačno generisan R-modul. Neka je $\{m_1,\ldots,m_n\}$ konačan skup generatora modula M. Svaki element modula M možemo, ne obavezno na jedinstveni način, predstaviti kao R-linearnu kombinaciju elemenata $m_1,\ldots,m_n$. Neka je $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ kanonska baza R-modula R^n. Homomorfizam R-modula $\varphi : R^n \to M$ dat sa $\varphi(e_i) = m_i$, $1 \leq i \leq n$, je surjektivan. Na osnovu prve teoreme o izomorfizmu za module imamo $M \cong R^n/Ker\ \varphi$. Označimo $Ker\ \varphi$ sa N. Na osnovu Posledice 1.9 prsten R je Neterin. Direktna suma Neterinih R-modula je Neterin R-modul, pa je modul R^n Neterin [2, str.76]. Na osnovu Teoreme 1.8 imamo da je N konačno generisan modul, pa postoji konačan skup generatora $\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$ podmodula N. Za svaki element $r = (r_1, \ldots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i e_i$ podmodula N važi da je $\varphi(r) = \sum_{i=1}^n r_i m_i = 0$, pa elementi podmodula N daju relacije između generatora modula M. Neka je B matrica čije su vrste koordinate generatora $k_1, k_2, \ldots, k_p$ u bazi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Preciznije, ako je $k_j = (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jn}) = \sum_{i=1}^n b_{ji} e_i$, $1 \leq j \leq p$, onda je $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \ldots & b_{pn} \end{bmatrix}$. Tada je R-modul homomorfizam φ, pa samim tim i struktura modula M, određena bazom $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i matricom B. Matricu B nazivamo ***relacijskom matricom***, videti [52]. Primetimo da matrica B ne zavisi samo od generatora modula R^n i N već i od njihovog rasporeda, pa ćemo odgovarajuće skupove generatora nadalje tretirati kao uređene. Zamena mesta generatora e_i i e_j modula R^n implicira zamenu mesta i-te i j-te kolone matrice B. Zamena mesta generatora k_i i k_j modula N implicira zamenu mesta i-te i j-te vrste matrice B. Množenjem generatora e_i modula R^n sa invertibilnim elementom u prstena R dobijamo novu bazu $(e_1, \ldots, e_{i-1}, ue_i, e_{i+1}, \ldots, e_n)$ od R^n. Relacijska matrica u odnosu na novu bazu je matrica kod koje je i-ta kolona matrice B pomnožena sa u^{-1} a sve ostale kolone su kolone matrice B. Množenjem generatora k_i modula N sa invertibilnim elementom u prstena R dobijamo novi generatorski skup $\{k_1, \ldots, k_{i-1}, uk_i, k_{i+1}, \ldots, k_p\}$ od N. Relacijska matrica u odnosu na novi generatorski skup je matrica kod koje je i-ta vrsta matrice B pomnožena sa u a sve ostale vrste su vrste matrice B. Za proizvoljan element $a \in R$, zamenom generatora e_i sa $e_i - ae_j$ dobijamo novu bazu modula R^n. Relacijska matrica za novu bazu je ista kao matrica B osim što je j-ta kolona zbir i-te kolone pomnožene sa a i j-te kolone matrice B. Zamenom generatora k_i sa $k_i - ak_j$ dobijamo novi generatorski skup modula N. Relacijska matrica za novi generatorski skup je ista kao matrica B osim što je i-ta vrsta razlika i-te vrste i j-te vrste pomnožene sa a matrice B. Prema tome, možemo vršiti elementarne transformacije vrsta i kolona relacijske matrice biranjem različitih baza R-modula R^n i N.

Neka su P i Q invertibilne $p \times p$ i $n \times n$ matrice nad prstenom R.

- Vrste $k'_1, k'_2, \ldots, k'_p$ matrice $P \cdot B$ formiraju generatorski skup R-modula N, a matrica $P \cdot B$ je relacijska matrica u odnosu na dati generatorski skup.

- Ako je $Q^{-1} = [\beta_{ij}]_{n\times n}$, onda elementi $e'_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} e_j$ formiraju generatorski skup R-modula R^n, a matrica $B \cdot Q$ je relacijska matrica u odnosu na dati generatorski skup.

- Matrica $P \cdot B \cdot Q$ je relacijska matrica u odnosu na nove generatorske skupove R-modula R^n i N.

Ako je $P = [\alpha_{ij}]_{p\times p}$, onda je i-ta vrsta k'_i matrice $P \cdot B$ jednaka

$$(\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} b_{j1}, \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} b_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} b_{jn}).$$

Odnosno važi da je $k'_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} b_{j1} e_1 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} b_{j2} e_2 + \ldots + \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} b_{jn} e_n = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}(b_{j1}e_1 + b_{j2}e_2 + \ldots + b_{jn}e_n) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} k_j$. Elementi $k'_1, k'_2, \ldots, k'_p$ pripadaju podmodulu N pošto su R-linearne kombinacije baznih elemenata $k_1, k_2, \ldots, k_p$. Matrica P je invertibilna pa se elementi $k_1, k_2, \ldots, k_p$ mogu predstaviti kao R-linearne kombinacije elemenata $k'_1, k'_2, \ldots k'_p$. Odakle zaključujemo da je $\{k'_1, k'_2, \ldots k'_p\}$ generatorski skup od N. Kako su vrste matrice $P \cdot B$ koordinate generatora $k'_1, k'_2, \ldots, k'_p$ u bazi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, matrica $P \cdot B$ je relacijska matrica u odnosu na dati generatorski skup.

Pošto su vrste matrice Q^{-1} koordinate vektora $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ u bazi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, onda vrste matrice Q predstavljaju koordinate vektora $e_1, e_2, \ldots, e_n$ u odnosu na uređeni skup $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$. Odnosno elementi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ su predstavljeni kao R-linearne kombinacije elemenata $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Pa zaključujemo da je $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ generatorski skup od R^n. Matrica B je relacijska matrica u odnosu na generatorski skup $\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$ modula N i bazu $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ modula R^n. Prema tome važi $[k_1\, k_2\, \ldots\, k_n]^T = B \cdot [e_1\, e_2\, \ldots\, e_n]^T$. Odakle zaključujemo da je

$$[k_1\, k_2\, \ldots\, k_n]^T = B \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot [e_1\, e_2\, \ldots\, e_n]^T = B \cdot Q \cdot [e'_1\, e_2\, \ldots\, e'_n]^T.$$

Pa je $B \cdot Q$ relacijska matrica u odnosu na generatorski skup $\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$ modula N i generatorski skup $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ modula R^n.

Neka je B relacijska matrica homomorfizma $\varphi : R^n \to M$ u odnosu na standardnu bazu R-modula R^n. Ako postoje invertibilne matrice P i Q takve da je $P \cdot B \cdot Q$ dijagonalna matrica $D = diag(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0 \ldots, 0)$, $m \leq n$, onda je

$$M \cong R/(b_1) \oplus R/(b_2) \oplus \ldots \oplus R/(b_m) \oplus R^{n-m}.$$

Zaista, vrste matrice $P \cdot B \cdot Q$ su koordinate generatora $k'_1, k'_2, \ldots, k'_p$ modula N u bazi $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ modula R^n. Odnosno za generatore $k'_1, k'_2, \ldots, k'_p$ važi $k'_i = b_i e'_i$. Kako je $M \cong R^n/N$, na osnovu prethodnog imamo da je

$$M \cong (Re'_1 \oplus Re'_2 \oplus \ldots \oplus Re'_n)/(Rb_1e'_1 \oplus Rb_2e'_2 \oplus \ldots \oplus Rb_me'_m).$$

Za kanonski homomorfizam

$$\pi : Re'_1 \oplus Re'_2 \oplus \ldots \oplus Re'_n \to R/(b_1) \oplus R/(b_2) \oplus \ldots \oplus R/(b_m) \oplus R^{n-m}$$

dat sa $\pi(\alpha_1 e'_1, \alpha_2 e'_2, \ldots, \alpha_n e'_n) = (\alpha_1 + (b_1), \alpha_2 + (b_2), \ldots, \alpha_m + (b_m), \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n)$ imamo

$$\begin{aligned} Ker\ \pi &= \{(\alpha_1 e'_1, \alpha_2 e'_2, \ldots, \alpha_n e'_n) \mid \alpha_i \in (b_i), 1 \leq i \leq m, \alpha_j = 0, m+1 \leq j \leq n\} \\ &= Rb_1e'_1 \oplus Rb_2e'_2 \oplus \ldots \oplus Rb_me'_m. \end{aligned}$$

Prema tome, na osnovu prve teoreme o izomorfizmu modula zaključujemo

$$M \cong R/(b_1) \oplus R/(b_2) \oplus \ldots \oplus R/(b_m) \oplus R^{n-m}.$$

Primenimo prethodno razmatranje na prsten polinoma $K[x]$ nad poljem K i konačno dimenzionalni vektorski prostor V nad poljem K koji razmatramo kao $K[x]$-modul. Neka je $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ baza vektorskog prostora V nad poljem K i neka je $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrica linearnog operatora $T : V \to V$ u bazi $\mathcal{B}$. Posmatramo vektorski prostor V kao $K[x]$-modul, pri čemu važi $x \cdot v = T(v)$, za svako $v \in V$. Elementi $e_1, e_2, \ldots, e_n$ generišu V i kao $K[x]$-modul, pa imamo $x \cdot e_i = T(e_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} e_j$. Na osnovu Teoreme 2.13 postoje matrice P i Q sa koeficijentima u prstenu $K[x]$, takve da važi $P \cdot (xI - B) \cdot Q = diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-m}, a_1(x), a_2(x), \ldots, a_m(x))$. Elementi $f_1, f_2, \ldots, f_n$, za koje važi $[f_1\, f_2\, \ldots\, f_n]^T = Q^{-1}[e_1\, e_2\, \ldots\, e_n]^T$, formiraju generatorski skup $K[x]$-modula V, u kome dati modul V možemo predstaviti kao direktnu sumu cikličnih modula. Relacijska matrica u odnosu na novi generatorski skup je matrica $P \cdot (xI - B) \cdot Q$. Prema tome, imamo da je $f_i = 0$ za $0 \leq i \leq n-m$ i $a_j(x) f_{n-m+j} = 0$ za $1 \leq j \leq m$. Odakle zaključujemo da je $V = K[x]f_{n-m+1} \oplus \ldots \oplus K[x]f_n \cong K[x]/a_1(x) \oplus \ldots \oplus K[x]/a_m(x)$. Odgovarajuća vektorska baza za ciklične faktore

$K[x]/a_i(x), 1 \leq i \leq m$ je $f_{n-m+i},\ xf_{n-m+i},\ \dots\ ,\ x^{deg(a_i)-1}f_{n-m+i}$. Pa je nova baza vektorskog prostora V data sa

$$\mathcal{B}' = [f_{n-m+1}, T(f_{n-m+1}), \dots, T^{deg(a_1)-1}(f_{n-m+1}), \dots, f_n, T(f_n), \dots, T^{deg(a_m)-1}(f_n)].$$

Označimo sa S matricu čije vrste predstavljaju koordinate vektora nove baze $\mathcal{B}'$ u bazi $\mathcal{B}$. Tada je S matrica prelaska sa baze $\mathcal{B}'$ na bazu $\mathcal{B}$. Pa je $S \cdot B \cdot S^{-1}$ matrica u racionalnoj kanonskoj formi.

Ako primenimo prethodno razmatranje na vektorski prostor $V = K^n$ čiji su elementi $n \times 1$ kolone sa koeficijentima u polju K sa standardnom bazom $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ i linearni operator $T : V \to V$ čija je matrica u odnosu na bazu $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ matrica B, onda je $S \cdot B \cdot S^{-1}$ matrica u racionalnoj kanonskoj formi slična matrici B.

2.5 Ermitova normalna forma

Cilj ove sekcije je da odredimo matricu koja je vrsta-ekvivalentna datoj matrici nad prstenom $K[x]$ i koja je jednostavnijeg oblika. Dalje razmatranje prati knjigu [19].

Teorema 2.22 *(Ermitova normalna forma) Neka je B $n \times k$ matrica sa koeficijentima u prstenu polinoma $K[x]$, gde je K polje. Tada je matrica B vrsta-ekvivalentna matrici oblika*

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \dots & a_{1k}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \dots & a_{2k}(x) \\ 0 & 0 & a_{33}(x) & \dots & a_{3k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{za } n \geq k,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \dots & a_{1n}(x) & \dots & a_{1k}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \dots & a_{2n}(x) & \dots & a_{2k}(x) \\ 0 & 0 & a_{33}(x) & \dots & a_{3n}(x) & \dots & a_{3k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}(x) & \dots & a_{nk}(x) \end{bmatrix} \quad \textit{za } n \leq k,$$

gde su stepeni polinoma $a_{1i}(x), a_{2i}(x), \dots, a_{i-1\,i}(x)$ manji od stepena polinoma $a_{ii}(x)$, pod uslovom da važi $a_{ii}(x) \neq 0$ i $2 \leq i \leq min\{n, k\}$. Ako je $a_{ii}(x) = c \neq 0$, onda su polinomi $a_{1i}(x), a_{2i}(x), \dots, a_{i-1\,i}(x)$ identički jednaki nuli.

Dokaz: Pretpostavimo da prva kolona matrice $B = [b_{ij}(x)]_{n\times k}$ sadrži bar jedan element koji nije identički jednak nuli. Među elementima prve kolone različitim od nule izaberimo onaj element koji je najnižeg stepena $b_{i1}(x)$. Zamenom mesta prve i i-te vrste dobijamo matricu $B_1 = [b'_{ij}(x)]_{n\times k}$ koja je vrsta-ekvivalentna matrici B. Kako je prsten polinoma $K[x]$ Euklidov domen, postoje jedinstveni polinomi $q_2(x),\ldots,q_n(x)$ i $r_2(x),\ \ldots\ ,\ r_n(x)$ takvi da važi $b'_{i1}(x) = q_i(x)\,b'_{11}(x) + r_i(x)$, gde je $r_i(x) = 0$ ili $deg(r_i(x)) < deg(b'_{11}(x))$, $2 \le i \le n$. Tada je $r_i(x) = b'_{i1}(x) - q_i(x)b'_{11}(x)$. Množenjem prve vrste sa $-q_i(x)$ i dodavanjem i-toj vrsti za $2 \le i \le n$ dobijamo ekvivalentnu matricu B_2 matrici B_1. Matrica B_2 je oblika

$$\begin{bmatrix} b'_{11}(x) & b_{12}(x) & \ldots & b_{1k}(x) \\ r_2(x) & b_{22}(x) - q_2(x)b_{12}(x) & \ldots & b_{2k}(x) - q_2(x)b_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n(x) & b_{n2}(x) - q_n(x)b_{12}(x) & \ldots & b_{nk}(x) - q_n(x)b_{1k}(x) \end{bmatrix}.$$

Ako svi ostaci $r_2(x), r_3(x),\ldots,r_n(x)$ nisu identički jednaki nuli ponavljamo prethodno izložen postupak. Kako se u svakom koraku smanjuju stepeni polinoma prve kolone u jednom trenutku dobijamo matricu koja je vrsta-ekvivalentna polaznoj matrici i u kojoj su svi elementi prve kolone izuzev elementa na poziciji $(1,1)$ jednaki nuli. Isti postupak primenjujemo na podmatricu date matrice dobijenu izbacivanjem prve vrste i prve kolone. Na taj način dobijamo matricu koja i u drugoj koloni izuzev na prva dva mesta ima sve nule. Ponavljanjem ovog postupka dobijamo vrsta-ekvivalentnu matricu polaznoj matrici koja je jednog od sledeća dva oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \ldots & a_{1k}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \ldots & a_{2k}(x) \\ 0 & 0 & a_{33}(x) & \ldots & a_{3k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{kk}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \text{ za } n \ge k,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \ldots & a_{1n}(x) & \ldots & a_{1k}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \ldots & a_{2n}(x) & \ldots & a_{2k}(x) \\ 0 & 0 & a_{33}(x) & \ldots & a_{3n}(x) & \ldots & a_{3k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}(x) & \ldots & a_{nk}(x) \end{bmatrix} \text{ za } n \le k.$$

Ako je polinom $a_{22}(x)$ različit od nule nalaženjem količnika i ostatka pri deljenju polinoma $a_{12}(x)$ polinomom $a_{22}(x)$, i množenjem druge vrste sa datim količnikom i oduzimanjem od prve vrste na poziciji $(1,2)$ dobijamo ostatak pri ovom deljenju koji je stepena manjeg od stepena polinoma $a_{22}(x)$. Pri ovoj transformaciji element na poziciji $(1,1)$ se ne menja. Ako je polinom $a_{22}(x)$ konstanta različita od nule onda je element na poziciji $(1,2)$ jednak nuli. Istim rezonovanjem smanjujemo stepene svih polinoma na pozicijama iznad dijagonale. $\square$

Matricu oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \dots & a_{1k}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \dots & a_{2k}(x) \\ 0 & 0 & a_{33}(x) & \dots & a_{3k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{za } n \geq k, \text{ odnosno oblika}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \dots & a_{1n}(x) & \dots & a_{1k}(x) \\ 0 & a_{22}(x) & a_{23}(x) & \dots & a_{2n}(x) & \dots & a_{2k}(x) \\ 0 & 0 & a_{33}(x) & \dots & a_{3n}(x) & \dots & a_{3k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}(x) & \dots & a_{nk}(x) \end{bmatrix} \text{za } n \leq k,$$

gde su stepeni polinoma $a_{1i}(x), a_{2i}(x), \dots, a_{i-1\,i}(x)$ manji od stepena polinoma $a_{ii}(x)$, pod uslovom da važi $a_{ii}(x) \neq 0$ i $2 \leq i \leq min\{n,k\}$, nazivamo matricom u ***Ermitovoj normalnoj formi***.

2.6 Žordanova kanonska forma

Ovu sekciju izložićemo prema knjizi [14] i preuzećemo terminologiju koju smo uveli u odeljku o racionalnoj kanonskoj formi. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K i neka je fiksiran linearni operator $T : V \to V$. Vektorski prostor V možemo posmatrati i kao $K[x]$-modul, gde je $K[x]$ prsten polinoma po promenljivoj x nad poljem K. Element x dejstvuje na V kao linearni operator T, prema tome polinom $f(x) \in K[x]$ dejstvuje na V kao polinom $f(T)$, odnosno $f(x) \cdot v = f(T)(v)$ za svako $v \in V$.

U sekciji o racionalnoj kanonskoj formi primenili smo osnovnu strukturnu teoremu za konačno generisane module nad glavnoidealskim prstenima i pokazali smo da je $V \cong K[x]/(a_1(x)) \oplus K[x]/(a_2(x)) \oplus \ldots \oplus K[x]/(a_m(x))$, za polinome $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_m(x)$ čiji je stepen najmanje jedan i za koje važi $a_1(x) \mid a_2(x) \mid \ldots \mid a_m(x)$. Uz pretpostavku da su polinomi $a_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, monični imamo jedinstvenost invarijantnih faktora. Elementarni delitelji modula V su stepeni prostih faktora invarijantnih faktora od V, pa su jedinstveni do na množenje nenula elementom polja K. Ako kao u slučaju invarijantnih faktora pretpostavimo da su elementarni delitelji monični, dobijamo njihovu jedinstvenost.

U daljem tekstu pretpostavićemo da je polje K algebarski zatvoreno, tj. da za svaki polinom $p(x) \in K[x]$ postoji element $a \in K$ takav da je $p(a) = 0$. Jedini nesvodljivi polinomi u prstenu $K[x]$ su polinomi stepena 1, odnosno svaki polinom sa koeficijentima u polju K stepena većeg od 1 ima linearnu faktorizaciju. U stvari nama je potrebno da invarijantni faktori $a_1(x), \ldots, a_m(x)$ imaju linearnu faktorizaciju, odnosno da su elementarni delitelji modula V stepeni linearnih polinoma. Kako je karakteristični polinom operatora T proizvod invarijantnih faktora, dovoljno je da svi koreni karakterističnog polinoma linearnog operatora T pripadaju polju K. Uz datu pretpostavku na osnovu Teoreme 1.18 imamo da je $K[x]$-modul V izomorfan konačnoj direktnoj sumi cikličnih $K[x]$-modula oblika $K[x]/(x-\lambda)^k$, gde je λ sopstvena vrednost linearnog operatora T. Pokažimo da je $\{1, x-\lambda, (x-\lambda)^2, \ldots, (x-\lambda)^{k-1}\}$ baza vektorskog prostora $K[x]/(x-\lambda)^k$. Neka su vrste matrice P koordinate datih vektora u standardnoj bazi $(1, x, x^2, \ldots, x^{k-1})$. Matrica P je donje trougaona i na dijagonali ima sve elemente jednake 1, pa je $detP = 1$, odnosno P je invertibilna matrica. Odakle zaključujemo da elementi $1, x-\lambda, \ldots, (x-\lambda)^{k-1}$ čine bazu vektorskog prostora $K[x]/(x-\lambda)^k$. Operator T dejstvuje na $K[x]/(x-\lambda)^k$ kao množenje sa x pa imamo da je $T(1) = x = \lambda + (x-\lambda)$, $T(x-\lambda) = x(x-\lambda) = (x-\lambda+\lambda)(x-\lambda) = \lambda(x-\lambda) + (x-\lambda)^2, \ldots, T((x-\lambda)^{k-1}) = x(x-\lambda)^{k-1} = \lambda(x-\lambda)^{k-1} + (x-\lambda)^k = \lambda(x-\lambda)^{k-1}$. Matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $(1, x-\lambda, \ldots, (x-\lambda)^{k-1})$ je

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Matricu J nazivamo ***Žordanovim blokom*** dimenzije k ili ***elementarnom Žordanovom $k \times k$ matricom***. Neka je baza $\mathcal{B}$ vektorskog prostora V unija baza cikličnih faktora $K[x]/(x-\lambda)^k$. Matrica linearnog operatora T u odnosu na bazu $\mathcal{B}$

je direktna suma Žordanovih blokova koji odgovaraju elementarnim deliteljima od V, tj. $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_t$. Matrica J je jedinstveno određena, do na permutaciju Žordanovih blokova, elementarnim deliteljima.
Matrica J je u ***Žordanovoj kanonskoj formi*** ako je blok dijagonalna matrica sa Žordanovim blokovima duž dijagonale, tj.

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_t \end{bmatrix}.$$

Žordanova kanonska forma linearnog operatora T je matrica linearnog operatora T koja je u Žordanovoj kanonskoj formi.
Videli smo da svaki linearni operator T ima Žordanovu kanonsku formu. Kao i u slučaju racionalne kanonske forme, iz jedinstvenosti elementarnih delitelja linearnog operatora T sledi jedinstvenost Žordanove kanonske forme, do na permutaciju Žordanovih blokova.

Teorema 2.23 *(Žordanova kanonska forma za linearne operatore) Neka je V konačno dimenzionalni vektorski prostor nad poljem K i neka je T linearni operator nad V.*

i) Postoji baza vektorskog prostora V takva da je matrica linearnog operatora T u odnosu na datu bazu u Žordanovoj kanonskoj formi, odnosno matrica linearnog operatora u datoj bazi je blok dijagonalna matrica sa Žordanovim blokovima koji odgovaraju elementarnim deliteljima operatora T duž dijagonale.

ii) Žordanova kanonska forma linearnog operatora T je jedinstvena, do na permutaciju Žordanovih blokova.

Teorema 2.24 *Neka je B matrica reda n nad poljem K i neka polje K sadrži sve sopstvene vrednosti matrice B.*

i) Matrica B je slična matrici u Žordanovoj kanonskoj formi, tj. postoji invertibilna $n \times n$ matrica P nad poljem K takva da je $P^{-1} \cdot B \cdot P$ blok dijagonalna matrica sa Žordanovim blokovima koji odgovaraju elementarnim deliteljima matrice B duž dijagonale.

ii) Žordanova kanonska forma matrice B je jedinstvena, do na permutaciju Žordanovih blokova.

Matrica u Žordanovoj kanonskoj formi razlikuje se od dijagonalne matrice samo u eventualnim jedinicama duž dijagonale iznad glavne. Matrica u Žordanovoj kanonskoj formi je dijagonalna matrica samo ako su svi Žordanovi blokovi dimenzije 1.

Posledica 2.25 *Neka je B matrica reda n nad poljem K i neka polje K sadrži sve sopstvene vrednosti matrice B. Tada je matrica B slična dijagonalnoj matrici nad poljem F ako i samo ako minimalni polinom matrice B ima sve različite korene.*

Dokaz: $\Rightarrow$: Neka je matrica B slična dijagonalnoj matrici $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Elementarni delitelji matrice D su polinomi $x - \lambda_1, x - \lambda_2, \ldots, x - \lambda_n$. Minimalni polinom matrice D je njen najveći invarijantni faktor, pa je na osnovu Teoreme 1.18 minimalni polinom proizvod različitih elementarnih delitelja. Odnosno minimalni polinom ima sve različite korene. Slične matrice imaju iste invarijantne faktore, pa je minimalni polinom matrice B jednak minimalnom polinomu matrice D.
$\Leftarrow$: Pretpostavimo da minimalni polinom matrice B ima sve različite korene. Neka je J Žordanova kanonska forma matrice B. Matrica J je blok dijagonalna sa Žordanovim blokovima koji odgovaraju elementarnim deliteljima matrice B duž dijagonale. Minimalni polinom matrice B je njen najveći invarijantni faktor, pa je na osnovu Teoreme 1.18 proizvod najvećih različitih stepena linearnih polinoma iz skupa elementarnih delitelja. Pošto minimalni polinom ima sve različite korene, odgovarajući stepeni su jednaki 1. Pa su Žordanovi blokovi duž dijagonale dimenzije 1. Odnosno matrica J je dijagonalana. $\square$

Ako znamo racionalnu kanonsku formu linearnog operatora T, odnosno racionalnu kanonsku formu matrice B, lako možemo konstruisati Žordanovu kanonsku formu datog operatora, odnosno date matrice. I obrnuto.
Kao što smo već videli elementarni delitelji linearnog operatora T (matrice B) su stepeni nesvodljivih faktora invarijantnih faktora od T, odnosno od B. Prema tome, elementarne delitelje dobijamo iz invarijantnih faktora njihovom faktorizacijom na proizvod stepena različitih linearnih polinoma. Obrnuto, ako su poznati elementarni delitelji linearnog operatora T ili matrice B, invarijantne faktore računamo kao proizvode elementarnih delitelja. Najveći invarijantni faktor je proizvod najvećih različitih stepena nesvodljivih polinoma iz skupa elementarnih delitelja. Sledeći najveći invarijantni faktor je proizvod najvećih različitih stepena nesvodljivih polinoma iz skupa preostalih elementarnih delitelja, itd. Listu elementarnih delitelja delimo na k podlista, svaka podlista odgovara jednoj sopstvenoj vrednosti operatora T (matrice B). U okviru svake od podlista elementarne delitelje sortiramo po rastućim stepenima. Dodavanjem, ako je potrebno, konstantnih polinoma jednakih 1 na početak neke od podlista izjednačavamo broj elemenata u svim podlistama.

I na kraju, i-ti invarijantni faktor dobijamo kao proizvod i-tih elemenata u svim podlistama.

Neka je $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ polazna baza vektorskog prostora V nad poljem K. Vektorski prostor V možemo posmatrati i kao $K[x]$-modul, pa elementi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ čine i generatorski skup od V. Neka je $\{f_{n-m+1}, f_{n-m+2}, \ldots, f_n\}$ skup generatora cikličnih faktora u dekompoziciji na invarijantne faktore $K[x]$-modula V, tj. neka za elemente $f_{n-m+1}, f_{n-m+2}, \ldots, f_n$ važi $V = K[x]f_{n-m+1} \oplus \ldots \oplus K[x]f_n \cong K[x]/a_1(x) \oplus \ldots \oplus K[x]/a_m(x)$, gde su $a_1(x)$, $a_2(x), \ldots, a_m(x)$ invarijantni faktori. Dekompozicija na elementarne delitelje $K[x]$-modula V dobija se iz dekompozicije na invarijantne faktore primenom Kineske teoreme o ostacima na ciklične faktore $K[x]/a_1(x), \ldots, K[x]/a_m(x)$. Preciznije, neka je $a_i(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1}(x - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (x - \lambda_s)^{\alpha_s}$; $1 \leq i \leq m$, gde su $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$ različite sopstvene vrednosti operatora T koji dejstvuje na V kao množenje sa x i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{N}_0$. Tada je na osnovu Teoreme 1.15 generator cikličnog faktora $K[x]/(x - \lambda_j)^{\alpha_j}$ elementarnog delitelja $(x - \lambda_j)^{\alpha_j}$ invarijantnog faktora $a_i(x)$ element $g_{ij} = \frac{a_i(x)}{(x-\lambda_j)^{\alpha_j}} f_{n-m+i}$. Vektorska baza za ciklične faktore $K[x]/(x - \lambda_j)^{\alpha_j}$ je $(g_{ij}, (x - \lambda)g_{ij}, \ldots, (x - \lambda)^{\alpha_j - 1} g_{ij})$. Pa je nova baza vektorskog prostora V unija baza odgovarajućih cikličnih faktora. Označimo sa S matricu čije vrste predstavljaju koordinate vektora nove baze u bazi $\mathcal{B}$. Tada je S matrica prelaska sa nove baze na bazu $\mathcal{B}$. Pa je $S \cdot B \cdot S^{-1}$ matrica u Žordanovoj kanonskoj formi.

Ako primenimo prethodno razmatranje na vektorski prostor $V = K^n$ čiji su elementi $n \times 1$ kolone sa koeficijentima u polju K sa standardnom bazom $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ i linearni operator $T : V \to V$ čija je matrica u odnosu na bazu $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ matrica B, onda je $S \cdot B \cdot S^{-1}$ matrica u Žordanovoj kanonskoj formi slična matrici B.

2.7 Uopšteni sopstveni vektori

U ovoj sekciji uvešćemo algebarsku i geometrijsku višestrukost sopstvene vrednosti λ kvadratne matrice B, uopštene sopstvene vektore i uopšteni sopstveni prostor koji odgovaraju λ. Daćemo vezu između broja i dimenzije Žordanovih blokova koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ sa geometrijskom višestukošću i stepenima elementarnih delitelja pridruženih λ, kao i vezu uopštenog sopstvenog prostora sa stepenom odgovarajućeg faktora u minimalnom i karakterističnom polinomu. Takođe ćemo dati eksplicitan oblik matrice transformacije S matrice B u njenu Žordanovu formu J u zavisnosti od uopštenih sopstvenih vektora, prema [37, 1, 60].

Neka je B proizvoljna $n \times n$ matrica nad poljem K i neka je λ sopstvena vrednost matrice B. Nenula vektor $v = [\mathtt{v}_1 \mathtt{v}_2 \ldots \mathtt{v}_n]^T \in K^{n \times 1}$ za koji postoji $k \in \mathbb{N}$ takvo da

važi $(B-\lambda I)^k v = \mathbb{O}$, nazivamo ***uopštenim sopstvenim vektorom*** matrice B koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Najmanji takav broj k nazivamo ***indeksom*** uopštenog sopstvenog vektora. Primetimo da je svaki sopstveni vektor matrice B uopšteni sopstveni vektor čiji je indeks jednak 1. Za sopstveni vekor v važi da je $(B-\lambda I)^0 v = v \neq \mathbb{O}$ i imamo ekvivalenciju jednakosti $Bv = \lambda v$ i $(B-\lambda I)v = \mathbb{O}$.
Neka je $V_k = Ker(B-\lambda I)^k = \{v \in K^{n\times 1} \mid (B-\lambda I)^k v = \mathbb{O}\}$, za $k \in \mathbb{N}$. Ako su k i p prirodni brojevi za koje važi $k < p$, onda je $V_k \subseteq V_p$. Zaista, za $v \in V_k$ imamo da je $(B-\lambda I)^k v = \mathbb{O}$, pa važi $(B-\lambda I)^p v = (B-\lambda I)^{p-k}(B-\lambda I)^k v = (B-\lambda I)^{p-k}\mathbb{O} = \mathbb{O}$. Odakle zaključujemo $V_k \subseteq V_p$. Odnosno imamo da je $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_k \subseteq \ldots \subseteq K^{n\times 1}$. Kako je vektorski prostor $K^{n\times 1}$ konačno dimenzionalan dati rastući lanac vektorskih prostora je konačan. Važi i jače tvrđenje. Ako je $V_k = V_{k+1}$, onda je $V_{k+1} = V_{k+2}$. Za $v \in V_{k+2}$ važi $(B-\lambda I)^{k+2} v = (B-\lambda I)^{k+1}(B-\lambda I)v = \mathbb{O}$, odakle zaključujemo da je $(B-\lambda I)v \in V_{k+1} = V_k$. Pa je $(B-\lambda I)^k(B-\lambda I)v = \mathbb{O}$ odakle dobijamo da je $v \in V_{k+1}$. Prema tome, imamo $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_k$.
Skup V_λ svih vektora $v \in K^{n\times 1}$ za koje postoji $j \in \mathbb{N}$ takvo da važi $(B-\lambda I)^j v = \mathbb{O}$ čini vektorski prostor koji nazivamo ***uopštenim sopstvenim prostorom*** sopstvene vrednosti λ matrice B. Za vektorski prostor V_λ važi $V_\lambda = \bigcup_{j=1}^{k} V_j = V_k$. Primenimo Teoremu 1.15 na vektorski prostor $K^{n\times 1}$ koji razmatramo kao $K[x]$-modul, gde x dejstvuje na $K^{n\times 1}$ kao množenje sa matricom B, odnosno za svako $v \in K^{n\times 1}$ važi $x \cdot v = B \cdot v$. Anhilator $K[x]$-modula $K^{n\times 1}$ je generisan minimalnim polinomom

$$\mu_B(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\ldots(x-\lambda_t)^{m_t}$$

matrice B. Kako su $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ različite sopstvene vrednosti matrice B, imamo da su $(x-\lambda_1)^{m_1}, \ldots, (x-\lambda_t)^{m_t}$ stepeni neasociranih nesvodljivih polinoma i da je $K^{n\times 1} \cong V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_t}$. Vektorski prostori V_{λ_i} su $(x-\lambda_i)$-primarne komponente čiji su anhilatori generisani polinomima $(x-\lambda_i)^{m_i}$, $1 \leq i \leq t$. Odakle zaključujemo da niz vektorskih prostora $V_1 \subset \ldots \subset V_k$ pridruženih sopstvenoj vrednosti λ ima onoliko članova koliki je stepen sopstvene vrednosti λ u minimalnom polinomu, tj. $k = m_\lambda$, gde je m_λ višestrukost korena λ u minimalnom polinomu matrice B.
Zatim, ako su dimenzije vektorskih prostora V_1 i V_2 jednake redom n_1 i n_2 onda je $n_2 - n_1 \leq n_1$. Pretpostavimo suprotno da je $n_2 - n_1 > n_1$. Neka je $(v_1, \ldots, v_{n_1})$ baza vektorskog prostora V_1, a $(v_1, \ldots, v_{n_1}, v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_2})$ baza vektorskog prostora V_2. Za svako i, $1 \leq i \leq n_2 - n_1$ važi $(B-\lambda I)^2 v_{n_1+i} = \mathbb{O}$, odnosno $(B-\lambda I)v_{n_1+i} \in V_1$. Ali kako je dimenzija od V_1 jednaka n_1 i kako je $n_2 - n_1 > n_1$, vektori $(B-\lambda I)v_{n_1+1}, \ldots (B-\lambda I)v_{n_2}$ su linearno zavisni. Pa postoje elementi $c_1, \ldots c_{n_2-n_1} \in K$ takvi da je

$$c_1(B-\lambda I)v_{n_1+1} + \ldots + c_{n_2-n_1}(B-\lambda I)v_{n_2} = \mathbb{O},$$

odnosno $(B - \lambda I)(c_1 v_{n_1+1} + \ldots + c_{n_2-n_1} v_{n_2}) = \mathbb{O}$. Odakle zaključujemo da je $c_1 v_{n_1+1} + \ldots + c_{n_2-n_1} v_{n_2} \in V_1$. Prema tome, postoje elementi $d_1, \ldots d_{n_1} \in K$ takvi da je $c_1 v_{n_1+1} + \ldots + c_{n_2-n_1} v_{n_2} = d_1 v_1 + \ldots + d_{n_1} v_{n_1}$, što je suprotno činjenici da su elementi $v_1, \ldots, v_{n_1}, v_{n_1+1}, \ldots v_{n_2}$ linearno nezavisni, odnosno da čine bazu za V_2. Ova činjenica važi za svaka dva uzastopna prostora.

Uopšteni sopstveni prostori V_{λ_i}, $1 \leq i \leq t$, su invarijantni u odnosu na množenje sa matricom B. Neka je $v \in V_{\lambda_i}$. Tada je $(B - \lambda_i I)^{m_i} v = \mathbb{O}$. Matrice B i $(B - \lambda_i I)^{m_i}$ su permutabilne jer su $(B - \lambda_i I)^{m_i}$ matrični polinomi m_i-tog stepena po B. Pa je $(B - \lambda_i I)^{m_i}(Bv) = B((B - \lambda_i I)^{m_i} v) = B \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$. Odakle zaključujemo da je $Bv \in V_{\lambda_i}$. Označimo sa S matricu reda n čije su kolone bazni vektori prostora V_{λ_i}, $1 \leq i \leq t$. Matrica S je invertibilna, jer su joj kolone linearno nezavisni vektori. Matrica $\widetilde{B} = S^{-1} \cdot B \cdot S$ je blok dijagonalna matrica oblika $B_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus B_{\lambda_t}$, gde su blokovi B_{λ_i} matrice reda k_i čije su kolone koordinate baznih vektora pomnožene sleva sa B u datoj bazi i k_i je dimezija vektorskog prostora V_{λ_i}, , $1 \leq i \leq t$. Jasno je iz definicije matrice $\widetilde{B}$ da su matrice B i $\widetilde{B}$ slične. Na osnovu Teoreme 2.8 slične matrice imaju iste karakteristične polinome. Karakteristični polinom matrice $\widetilde{B}$ jednak je proizvodu karakterističnih polinoma njenih blokova B_{λ_i}, $1 \leq i \leq t$. Pa karakteristični polinom matrice B_{λ_i} deli karakteristični polinom matrice B. Pokažimo da matrica B_{λ_i} ima samo jednu sopstvenu vrednost λ_i. Pretpostavimo suprotno da matrica B_{λ_i} ima sopstvenu vrednost λ_j različitu od λ_i. Tada postoji nenula vektor $u \in K^{k_i \times 1}$ takav da važi $B_{\lambda_i} u = \lambda_j u$. Definišimo vektor $\widetilde{u} \in K^{n \times 1}$ blokovski $\widetilde{u} = [\underbrace{\mathbb{O}}_{k_1} \ldots \underbrace{\mathbb{O}}_{k_{i-1}} u \underbrace{\mathbb{O}}_{k_{i+1}} \ldots \underbrace{\mathbb{O}}_{k_t}]^T$. Tada je $S \cdot \widetilde{u}$ linearna kombinacija baznih vektora vektorskog prostora V_{λ_i}. Sa druge strane imamo

$$\widetilde{B} \cdot \widetilde{u} = [\mathbb{O} \ldots \mathbb{O}\, B_{\lambda_i} u\, \mathbb{O} \ldots \mathbb{O}]^T = [\mathbb{O} \ldots \mathbb{O}\, \lambda_j u\, \mathbb{O} \ldots \mathbb{O}]^T = \lambda_j \widetilde{u}.$$

Kako je $B \cdot S = S \cdot \widetilde{B}$, imamo da je $(B \cdot S) \cdot \widetilde{u} = (S \cdot \widetilde{B}) \cdot \widetilde{u}$, odnosno $B \cdot (S \cdot \widetilde{u}) = \lambda_j (S \cdot \widetilde{u})$. I zaključujemo da je $S \cdot \widetilde{u}$ sopstveni vektor matrice B pridružen sopstvenoj vrednosti λ_j. Pa $S \cdot \widetilde{u}$ pripada V_{λ_j}, što je kontradikcija sa činjenicom da je $S \cdot \widetilde{u} \in V_{\lambda_i}$. Kako je λ_i jedina sopstvena vrednost matrice B_{λ_i} imamo da je karakteristični polinom date matrice $\Delta_{B_{\lambda_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{k_i}$. Ako označimo karakteristični polinom matrice B sa $\Delta_B(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \ldots (x - \lambda_t)^{n_t}$, onda za svako i, $1 \leq i \leq t$, važi $k_i \leq n_i$. Kako je $k_1 + k_2 + \ldots + k_t = n = n_1 + n_2 + \ldots n_t$, zaključujemo $k_i = n_i$, $1 \leq i \leq t$. Dimenzije uopštenih sopstvenih prostora jednake su višestrukostima korena λ_i u karakterističnom polinomu matrice B i u daljem tekstu ćemo ih nazivati ***algebarske višestrukosti*** sopstvenih vrednosti λ_i. Dimenzije sopstvenih prostora nazivamo ***geometrijskim višestrukostima*** od λ_i.

Broj Žordanovih blokova koji su pridruženi sopstvenoj vrednosti λ jednak je geometrijskoj višestrukosti od λ, njihove dimenzije su jednake stepenima odgovarajućih elementarnih delitelja, a zbir im je jednak algebarskoj višestrukosti od λ.
Za konkretnu sopstvenu vrednost λ razmotrimo oblik Žordanovih blokova pridruženih λ u zavisnosti od njene algebarske i geometrijske višestrukosti. Ako je algebarska višestrukost jednaka geometrijskoj, onda je uopšteni sopstveni prostor jednak sopstvenom prostoru i odgovarajuća baza je sačinjena od sopstvenih vektora, pa je matrica B_λ skalarna matrica λI i svi blokovi pridruženi sopstvenoj vrednost λ su dimenzije 1. Ako je geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti λ jednaka 1, a algebarska višestrukost jednaka k, onda postoji samo jedan sopstveni vektor koji odgovara λ i samo jedan Žordanov blok dimenzije k. Neka je v_k uopšteni sopstveni vektor indeksa k. Tada je $v_{k-1} = (B-\lambda I)v_k$ uopšteni sopstveni vektor indeksa $k-1$. Za vektor v_{k-1} važi da je

$$(B-\lambda I)^{k-1}v_{k-1} = (B-\lambda I)^{k-1}((B-\lambda I)v_k) = (B-\lambda I)^k v_k = \mathbb{O} \ \text{ i}$$

$$(B-\lambda I)^{k-2}v_{k-1} = (B-\lambda I)^{k-2}((B-\lambda I)v_k) = (B-\lambda I)^{k-1} v_k \neq \mathbb{O}.$$

Ovim postupkom možemo definisati i vektore $v_{k-2}, \ldots, v_1$ sa

$$\begin{array}{lclcl}
v_{k-2} & = & (B-\lambda I)v_{k-1} & = & (B-\lambda I)^2 v_k \\
v_{k-3} & = & (B-\lambda I)v_{k-2} & = & (B-\lambda I)^3 v_k \\
\vdots & & & & \\
v_2 & = & (B-\lambda I)v_3 & = & (B-\lambda I)^{k-2} v_k \\
v_1 & = & (B-\lambda I)v_2 & = & (B-\lambda I)^{k-1} v_k.
\end{array}$$

Vektori $v_k, \ldots, v_1$ su uopšteni sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ koji redom imaju indekse $k, \ldots, 1$. Odgovarajući skup $\{v_k, \ldots, v_1\}$ nazivamo ***lancem uopštenih sopstvenih vektora***, vektor v_k nazivamo ***vrhom lanca***, a v_1 ***dnom***. Lanac $\{v_k, \ldots, v_1\}$ je jedinstveno određen izborom vektora v_k. Razmotrimo uopštene sopstvene vektore Žordanove $k \times k$ matrice

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je

$$J - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je e_j kolona čija je j-ta komponenta jednaka 1 a sve ostale su 0 i gde je $1 \leq j \leq k$. Za vektore $e_k, e_{k-1}, \dots, e_2, e_1$ važi

$$\begin{aligned} e_{k-1} &= (J - \lambda I)e_k \\ e_{k-2} &= (J - \lambda I)e_{k-1} \\ &\vdots \\ e_2 &= (J - \lambda I)e_3 \\ e_1 &= (J - \lambda I)e_2 \\ \mathbb{O} &= (J - \lambda I)e_1. \end{aligned}$$

Odakle zaključujemo da je uopšteni sopstveni prostor koji odgovara jedinoj sopstvenoj vrednosti λ matrice J jednak K^k. Neka je B matrica reda k koja je slična matrici J. Interesuje nas da odredimo matricu transformacije S za koju važi $J = S^{-1} \cdot B \cdot S$ uz pomoć uopštenih sopstvenih vektora matrice B. Pokažimo da su vektori $v_k, \dots, v_1$, koji čine lanac uopštenih sopstvenih vektora, linearno nezavisni, odnosno ukoliko je $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k = \mathbb{O}$, za $c_1, \dots, c_k \in K$, da je $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Kako je $v_i = (B - \lambda I)^{k-i}v_k$, $1 \leq i \leq k-1$, imamo da je

$$c_1(B - \lambda I)^{k-1}v_k + c_2(B - \lambda I)^{k-2}v_k + \ldots + c_{k-1}(B - \lambda I)v_k + c_kv_k = \mathbb{O}.$$

Množenjem date jednakosti sa $(B - \lambda I)^{k-1}$ dobijamo

$$c_1(B-\lambda I)^{2k-2}v_k + c_2(B-\lambda I)^{2k-3}v_k + \ldots + c_{k-1}(B-\lambda I)^k v_k + c_k(B-\lambda I)^{k-1}v_k = \mathbb{O}.$$

Kako je k najmanji prirodan broj za koji važi $(B - \lambda I)^k v_k = \mathbb{O}$, zaključujemo da je $(B-\lambda I)^{k-1}v_k \neq \mathbb{O}$. Zatim za svako i, $k \leq i \leq 2k-2$, imamo da je $(B - \lambda I)^i v_k = \mathbb{O}$, pa se prethodna jednakost svodi na $c_k(B - \lambda I)^{k-1}v_k = c_kv_1 = \mathbb{O}$ i kako je $v_1 \neq \mathbb{O}$ zaključujemo da je $c_k = 0$. Prema tome, polazna jednakost je oblika

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{k-1}v_{k-1} = \mathbb{O}.$$

Izražavanjem vektora $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$ u funkciji od v_k, množenjem date jednakosti sa

$(B-\lambda I)^{k-2}$ i sličnim razmatranjem prethodno izloženom dobijamo da je $c_{k-1}v_1 = \mathbb{O}$, odnosno $c_{k-1} = 0$. Nastavljajući u ovom duhu zaključujemo da je $c_1 = \ldots = c_k = 0$. Kako su vektori $v_1, \ldots, v_k$ linearno nezavisni, $k \times k$ matrica S čije je i-ta kolona vektor v_i je invertibilna. Pokažimo još da je $J = S^{-1} \cdot B \cdot S$, odnosno da je $S \cdot J = B \cdot S$. Označimo sa $(B \cdot S)_{\downarrow j}$ j-tu kolonu matrice $B \cdot S$. Tada imamo da je $(B \cdot S)_{\downarrow j} = B \cdot v_j = (B-\lambda I) \cdot v_j + \lambda v_j = v_{j-1} + \lambda v_j$. Primetimo da je proizvod matrice $S = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, \ldots \,|\, v_k \,]$ i matrice $J - \lambda I = [\, 0 \,|\, e_1 \,|\, \ldots \,|\, e_{k-1} \,]$ jednak $S \cdot (J - \lambda I) = [\, 0 \,|\, v_1 \,|\, \ldots \,|\, v_{k-1} \,]$. Pa imamo da je $S \cdot J = S \cdot \lambda I + S \cdot (J - \lambda I) = [\, \lambda v_1 \,|\, \lambda v_2 \,|\, \ldots \,|\, \lambda v_k \,] + [\, 0 \,|\, v_1 \,|\, \ldots \,|\, v_{k-1} \,] = [\, \lambda v_1 \,|\, \lambda v_2 + v_1 \,|\, \ldots \,|\, \lambda v_k + v_{k-1} \,]$ Ako označimo sa $(S \cdot J)_{\downarrow j}$ j-tu kolonu matrice $S \cdot J$, onda je $(S \cdot J)_{\downarrow j} = \lambda v_j + v_{j-1}$, za $v_0 = \mathbb{O}$. Čime je leva strana jednakosti $S \cdot J = B \cdot S$ jednaka desnoj.

Razmotrimo poslednju mogućnost. Neka je algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ veća od geometrijske i neka je geometrijska višestrukost veća od 1. Neka je $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_m$ rastući lanac vektorskih prostora, za $V_i = Ker\{v \,|\, (B-\lambda I)^i v = \mathbb{O}\}$. Neka je dimenzija vektorskog prostora V_i jednaka n_i, $1 \leq i \leq m$. Tada je uopšteni sopstveni prostor jednak V_m i algebarska višestrukost je jednaka n_m. Vektorski prostor V_1 je sopstveni prostor i geometrijska višestrukost je jednaka njegovoj dimenziji n_1. Formirajmo n_1 lanaca uopštenih sopstvenih vektora na sledeći način. Za svaki od uopštenih sopstvenih vektora indeksa m sopstvene vrednosti λ formirajmo lanac uopštenih vektora. Takvih lanaca imamo $n_m - n_{m-1}$. Zatim formiramo lance uopštenih sopstvenih vektora indeksa $m-1$ od vektora koji ne učestvuju u lancima dužine m. Datih lanaca ima $n_{m-1} - n_{m-2} - (n_m - n_{m-1}) = 2n_{m-1} - n_m - n_{m-2}$. Nastavljajući ovaj postupak stižemo do lanaca dužine 1. Neka su v_k i u_p dva uopštena sopstvena vektora indeksa redom k i p koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti λ. Neka su $\{v_k, \ldots, v_1\}$ i $\{u_p, \ldots, u_1\}$ lanci uopštenih sopstvenih vektora čiji su vrhovi vektori v_k i u_p. Ako su sopstveni vektori v_1 i u_1 linearno nezavisni onda su i vektori $v_k, \ldots, v_1, u_p, \ldots, u_1$ linearno nezavisni. Odnosno, ako je $c_1v_1 + \ldots + c_kv_k + d_1u_1 + \ldots + d_pu_p = \mathbb{O}$, za $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_p \in K$, onda je $c_1 = \ldots = c_k = d_1 = \ldots = d_p = 0$. Kako je $v_i = (B-\lambda I)^{k-i}v_k$, $1 \leq i \leq k-1$, i $u_i = (B-\lambda I)^{p-i}u_p$, $1 \leq i \leq p-1$, imamo da je

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1(B-\lambda I)^{k-1}v_k & + & \ldots & + & c_{k-1}(B-\lambda I)v_k & + & c_kv_k & + & \\ d_1(B-\lambda I)^{p-1}u_p & + & \ldots & + & d_{p-1}(B-\lambda I)u_p & + & d_pu_p & = \mathbb{O}. & \end{array}$$

Neka je $k \geq p$. Množenjem date jednakosti sa $(B-\lambda I)^{k-1}$ dobijamo

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1(B-\lambda I)^{2k-2}v_k & + & \ldots & + & c_{k-1}(B-\lambda I)^kv_k & + & c_k(B-\lambda I)^{k-1}v_k & + & \\ d_1(B-\lambda I)^{k+p-2}u_p & + & \ldots & + & d_{p-1}(B-\lambda I)^ku_p & + & d_p(B-\lambda I)^{k-1}u_p & = \mathbb{O}. & \end{array}$$

Data jednačina se svodi za $k > p$ na $c_k v_1 = \mathbb{O}$, odakle zaključujemo da je $c_k = 0$. Za $k = p$ dobijamo $c_k v_1 + d_p u_1 = \mathbb{O}$. Kako su vektori v_1 i u_1 linearno nezavisni dobijamo $c_k = d_p = 0$. Naša jednačina sada postaje za $k > p$

$$\begin{array}{lllllllll} c_1(B-\lambda I)^{k-1}v_k & + & \dots & + & c_{k-1}(B-\lambda I)v_k & + & & & \\ d_1(B-\lambda I)^{p-1}u_p & + & \dots & + & d_{p-1}(B-\lambda I)u_p & + & d_p u_p & = \mathbb{O}, \end{array}$$

odnosno za $k = p$

$$\begin{array}{llllll} c_1(B-\lambda I)^{k-1}v_k & + & \dots & + & c_{k-1}(B-\lambda I)v_k & + \\ d_1(B-\lambda I)^{p-1}u_p & + & \dots & + & d_{p-1}(B-\lambda I)u_p & = \mathbb{O}. \end{array}$$

Množenjem datih jednakosti sa $(B-\lambda I)^{k-2}$ dobijamo za $k-1 > p$ da je $c_{k-1} = 0$, za $k-1 = p$ imamo $c_{k-1}v_1 + d_p u_1 = \mathbb{O}$, odakle iz linearne nezavisnosti vektora v_1 i u_1 zaključujemo $c_{k-1} = d_p = 0$, i na kraju za $k = p$ imamo $c_{k-1} = d_{p-1} = 0$. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo $c_1 = \ldots = c_k = d_1 = \ldots = d_p = 0$.
Ako formiramo $n \times n$ matricu S od lanaca uopštenih sopstvenih vektora koji odgovaraju svim sopstvenim vrednostima matrice B dobijamo da je $B \cdot S = S \cdot J$, za $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_t$, gde je t broj linearno nezavisnih sopstvenih vektora matrice B. Pošto su vektori koji formiraju matricu S linearno nezavisni matrica S je invertibilna.

3 Parcijalna redukcija linearnih sistema operatorskih jednačina

U okviru ove sekcije prikazaćemo primenu Žordanove i racionalne kanonske forme na redukciju linearnih sistema operatorskih jednačina. Promenom baze dobijamo jednostavniji oblik sistema, odnosno sistem kod koga su promenljive razdvojene u podsisteme koji odgovaraju blokovima u Žordanovoj i racionalnoj kanonskoj formi. Promenljive u različitim podsistemima su međusobno nezavisne. U slučaju Žordanove forme sve jednačine su linearne operatorske jednačine prvog reda po najviše dve promenljive, a u slučaju racionalne forme svaki podsistem se sastoji od jedne linearne operatorske jednačine višeg reda po samo jednoj promenljivoj i linearnih operatorskih jednačina prvog reda po dve promenljive. Žordanova kanonska forma zahteva da je polje nad kojim radimo algebarski zatvoreno, dok kod racionalne kanonske forme nemamo nikakve dodatne uslove. Prvo ćemo ilustrovati metodu parcijalne redukcije za linearne sisteme operatorskih jednačina po dve ili tri promenljive, a zatim ćemo prikazati opšti slučaj.

3.1 Parcijalna redukcija linearnih sistema dve operatorske jednačine

Neka je K algebarski zatvoreno polje, V vektorski prostor nad poljem K, i neka je $A : V \to V$ linearni operator. Linearni sistem operatorskih jednačina sa konstantnim koeficijentima po promenljivim x_1 i x_2 je sistem oblika

$$\begin{aligned} A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \varphi_1 \\ A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \varphi_2, \end{aligned}$$

gde su $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in K$ i $\varphi_1, \varphi_2 \in V$. Dati sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku $\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$, gde je vektorski operator $\vec{A} : V^2 \to V^2$ definisan pokoordinatno sa $\vec{A} = [A\ A]^T$, $\vec{x} = [x_1\ x_2]^T$ kolona nepoznatih, a $\vec{\varphi} = [\varphi_1\ \varphi_2]^T$ kolona slobodnih članova. Interesuje nas Žordanova kanonska forma matrice sistema $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Neka su λ_1 i λ_2, ne obavezno različite, sopstvene vrednosti matrice B. Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onda je na osnovu Teoreme 2.9 minimalni polinom matrice B jednak karakterističnom, a na osnovu Posledice 2.25, pošto minimalni polinom ima različite korene, imamo da je matrica B slična dijagonalnoj matrici $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$. Za $\lambda_1 = \lambda_2$ imamo dve mogućnosti. Prvo ukoliko je minimalni polinom matrice B jednak karakterističnom na osnovu posledice 2.25 zaključujemo da je Žordanova forma matrice B oblika $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Zatim neka je minimalni polinom oblika $x - \lambda_1$, na osnovu posledice 2.25 dobijamo da je Žordanova kanonska forma matrice B dijagonalna matrica $D = diag(\lambda_1, \lambda_1)$. Neka za invertibilnu 2×2 matricu S važi da je $J = S \cdot B \cdot S^{-1}$ matrica u Žordanovoj kanonskoj formi. Tada dati sistem možemo svesti na sistem oblika $\vec{A}(\vec{y}) = J\vec{y} + \vec{\psi}$, gde je $\vec{y} = S\vec{x}$ i $\vec{\psi} = S\vec{\varphi}$. Ako je matrica J jednaka dijagonalnoj $diag(\lambda_1, \lambda_2)$ polazni sistem se svodi na totalno redukovani sistem, tj. sistem u kome su sve promenljive razdvojene jednačinama sistema i koji je oblika

$$\begin{aligned} A(y_1) &= \lambda_1 y_1 + \psi_1 \\ A(y_2) &= \lambda_2 y_2 + \psi_2. \end{aligned}$$

Ako je matrica J oblika $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$, onda se sistem svodi na sistem oblika

$$\begin{aligned} A(y_1) &= \lambda_1 y_1 + y_2 + \psi_1 \\ A(y_2) &= \lambda_1 y_2 + \psi_2, \end{aligned}$$

koji je ekvivalentan polaznom sistemu. Označimo sa $\Delta_B(x)$ karakteristični polinom matrice B. Promenljivu y_2 možemo izraziti u funkciji od y_1 koristeći prvu jednačinu $y_2 = (A - \lambda_1)(y_1) - \psi_1$. Zamenom dobijenog izraza u drugu jednačinu dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B(A)(y_1) &= (A - \lambda_1)(\psi_1) + \psi_2 \\ y_2 &= (A - \lambda_1)(y_1) - \psi_1. \end{aligned}$$

Dejstvom operatora $A - \lambda_1$ na drugu jednačinu i zamenom izraza $\Delta_B(A)(y_1)$ iz prve jednačine u datu dobijamo totalno redukovani sistem oblika

$$\begin{aligned} \Delta_B(A)(y_1) &= \psi_2 + (A - \lambda_1)(\psi_1) \\ (A - \lambda_1)(y_2) &= \psi_2. \end{aligned}$$

Razmotrimo sada racionalnu kanonsku formu matrice B. Ako je minimalni polinom matrice B jednak njenom karakterističnom, onda je racionalna kanonska forma C matrice B sastavljena iz samo jednog bloka, odnosno $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -d_2 & -d_1 \end{bmatrix}$, gde je $\Delta_B(x) = x^2 + d_1 x + d_2$. Ako je minimalni polinom matrice B stepena 1, onda je $\lambda_1 = \lambda_2$ i matrica B ima dva jednaka invarijantna faktora, pa je racionalna kanonska forma sastavljena iz dva bloka i važi $C = diag(\lambda_1, \lambda_1)$. Kao i u slučaju Žordanove forme, postoji invertibilna 2×2 matrica T takva da je $C = T \cdot B \cdot T^{-1}$ matrica u racionalnoj kanonskoj formi. Polazni sistem svodimo na sistem oblika $\vec{A}(\vec{z}) = C\vec{z} + \vec{\nu}$, gde je $\vec{z} = T\vec{x}$ i $\vec{\nu} = T\vec{\varphi}$. Ako je matrica C jednaka dijagonalnoj $diag(\lambda_1, \lambda_1)$ polazni sistem se svodi na totalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} A(z_1) &= \lambda_1 z_1 + \nu_1 \\ A(z_2) &= \lambda_1 z_2 + \nu_2. \end{aligned}$$

Ako je matrica C sastavljena iz samo jednog bloka odgovarajući sistem je oblika

$$\begin{aligned} A(z_1) &= z_2 + \nu_1 \\ A(z_2) &= -d_2 z_1 - d_1 z_2 + \nu_2. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine dobijamo da je $z_2 = A(z_1) - \nu_1$, i zamenom datog izraza u drugu jednačinu dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B(A)(z_1) &= A(\nu_1) + d_1\nu_1 + \nu_2 \\ z_2 &= A(z_1) - \nu_1. \end{aligned}$$

Primetimo da je $A(\nu_1)$ glavni minor reda 1 koji sadrži prvu vrstu i kolonu matrice $\begin{bmatrix} A(\nu_1) & 1 \\ A(\nu_2) & -d_1 \end{bmatrix}$, a $-(d_1\nu_1 + \nu_2)$ glavni minor reda 2 matrice $\begin{bmatrix} \nu_1 & 1 \\ \nu_2 & -d_1 \end{bmatrix}$.

3.2 Parcijalna redukcija linearnih sistema tri operatorske jednačine

Razmotrimo sada linearni sistem operatorskih jednačina sa konstantnim koeficijentima po promenljivim x_1, x_2 i x_3 oblika

$$\begin{aligned} A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \varphi_1 \\ A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \varphi_2 \\ A(x_3) &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \varphi_3. \end{aligned}$$

Neka su λ_1, λ_2 i λ_3 sopstvene vrednosti matrice sistema B i neka je $\Delta_B(x) = x^3 + d_1x^2 + d_2x + d_3$ karakteristični polinom od B. Neka su S i T invertibilne 3×3 matrice nad poljem K takve da je $J = S \cdot B \cdot S^{-1}$ Žordanova, a $C = T \cdot B \cdot T^{-1}$ racionalna kanonska forma matrice B. Odgovarajući redukovani sistemi polaznog sistema su $\vec{A}(\vec{y}) = J\vec{y} + \vec{\psi}$, odnosno $\vec{A}(\vec{z}) = C\vec{z} + \vec{\nu}$, gde je $\vec{y} = S\vec{x}$, $\vec{\psi} = S\vec{\varphi}$, $\vec{z} = T\vec{x}$ i $\vec{\nu} = T\vec{\varphi}$.

Razmotrimo oblike datih sistema u zavisnosti od oblika Žordanove i racionalne kanonske forme matrice B. Neka su λ_1, λ_2 i λ_3 različiti elementi polja K. Tada je minimalni polinom matrice B jednak njenom karakterističnom polinomu. Svi koreni minimalnog polinoma su različiti i Žordanova forma je dijagonalna matrica

$diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Minimalni polinom u ovom slučaju je jedini invarijantni faktor, pa je racionalna kanonska forma C matrice B matrica oblika $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d_3 & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix}$.
Sistem koji odgovara Žordanovoj formi je totalno redukovani sistem oblika

$$\begin{aligned} A(y_1) &= \lambda_1 y_1 + \psi_1 \\ A(y_2) &= \lambda_2 y_2 + \psi_2 \\ A(y_3) &= \lambda_3 y_3 + \psi_3. \end{aligned}$$

Odgovarajući sistem za racionalnu kanonsku formu je

$$\begin{aligned} A(z_1) &= z_2 + \nu_1 \\ A(z_2) &= z_3 + \nu_2 \\ A(z_3) &= -d_3 z_1 - d_2 z_2 - d_1 z_3 + \nu_3. \end{aligned}$$

Iz prve dve jednačine dobijamo da je $z_2 = A(z_1) - \nu_1$ i $z_3 = A(z_2) - \nu_2$, i zamenom u treću jednačinu dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B(z_1) &= A^2(\nu_1) + A(\nu_2) + d_1 A(\nu_1) + d_2 \nu_1 + d_1 \nu_2 + \nu_3 \\ z_2 &= A(z_1) - \nu_1 \\ z_3 &= A(z_2) - \nu_2. \end{aligned}$$

Primetimo da je

$$A^2(\nu_1) + A(\nu_2) + d_1 A(\nu_1) + d_2 \nu_1 + d_1 \nu_2 + \nu_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{A^2(\nu_1)} & 1 & 0 \\ A^2(\nu_2) & 0 & 1 \\ A^2(\nu_3) & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\nu_1) & 1 & 0 \\ A(\nu_2) & 0 & 1 \\ A(\nu_3) & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 & 1 & 0 \\ \nu_2 & 0 & 1 \\ \nu_3 & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix},$$

pri čemu su uokvireni minori čije sume računamo.
Neka je $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Ako je minimalni polinom matrice B jednak njenom karakterističnom polinomu, onda Žordanova kanonska forma J matrice B ima dva bloka jedan dimenzije 2, drugi dimenzije 1, koji odgovaraju sopstvenim vrednostima λ_1 i λ_3, odnosno $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$. Odgovarajući sistem u ovom slučaju je sistem u

kome su promenljive razdvojene po blokovima (parcijalno redukovani sistem) oblika

$$\begin{aligned} A(y_1) &= \lambda_1 y_1 + y_2 + \psi_1 \\ A(y_2) &= \lambda_1 y_2 + \psi_2 \\ A(y_3) &= \lambda_3 y_3 + \psi_3. \end{aligned}$$

Dejstvom linearnog operatora $A-\lambda_1$ na prvu jednačinu dobijenog sistema i zamenom $(A-\lambda_1)(y_2)$ sa ψ_2 dobijamo totalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1)^2(y_1) &= \psi_2 + (A-\lambda_1)(\psi_1) \\ (A-\lambda_1)\ (y_2) &= \psi_2 \\ (A-\lambda_3)\ (y_3) &= \psi_3. \end{aligned}$$

Racionalna kanonska forma C matrice B ima jedan blok i razmatranje sistema je isto kao u slučaju različitih sopstvenih vrednosti. Ako je minimalni polinom matrice B polinom stepena 2 čiji su koreni različiti koreni karakterističnog polinoma, odnosno ako je minimalni polinom $\mu_B(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_3)$, onda je Žordanova forma matrice B dijagonalna matrica $diag(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3)$. I kao u slučaju različitih sopstvenih vrednosti jednostavno formiramo totalno redukovani sistem. Racionalna kanonska forma C matrice B ima dva bloka i oblika je $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -g_2 & -g_1 \end{bmatrix}$, gde je $\mu_B(x) = x^2 + g_1 x + g_2$. Prema tome, polazni sistem se transformiše u sistem oblika

$$\begin{aligned} A(z_1) &= \lambda_1 z_1 + \nu_1 \\ A(z_2) &= z_3 + \nu_2 \\ A(z_3) &= -g_2 z_2 - g_1 z_3 + \nu_3. \end{aligned}$$

Dati sistem se sastoji od dva nezavisna podsistema, prvi koji sadrži samo jednu jednačinu po z_1 i drugi koji sadrži dve jednačine po promenljivim z_2 i z_3. Podsistem po promenljivim z_2 i z_3 je oblika kao poslednji sistem koji smo razmatrali u slučaju dve promenljive. Odgovarajućim transformacijama dobijamo

$$\begin{aligned} (A-\lambda_1)(z_1) &= \nu_1 \\ \mu_B(A)(z_2) &= A(\nu_2) + g_1\nu_2 + \nu_3 \\ z_3 &= A(z_2) - \nu_2. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Ako je minimalni polinom matrice B jednak karakterističnom polinomu, onda je Žordanova forma matrice B sastavljena iz jednog bloka, odnosno $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$. Promenom baze pomoću matrice transformacije S dobijamo sistem

$$\begin{aligned} A(y_1) &= \lambda_1 y_1 + y_2 + \psi_1 \\ A(y_2) &= \lambda_1 y_2 + y_3 + \psi_2 \\ A(y_3) &= \lambda_1 y_3 + \psi_3. \end{aligned}$$

Dejstvom operatora $A - \lambda_1$ na drugu jednačinu i operatora $(A - \lambda_1)^2$ na prvu i eliminacijom promenljive y_3 iz druge i y_2 iz prve jednačine dobijamo sistem

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1)^3(y_1) &= \psi_3 + (A - \lambda_1)(\psi_2) + (A - \lambda_1)^2(\psi_1) \\ (A - \lambda_1)^2(y_2) &= \psi_3 + (A - \lambda_1)(\psi_2) \\ (A - \lambda_1)\ (y_3) &= \psi_3. \end{aligned}$$

U ovom slučaju je i racionalna kanonska forma C matrice B sastavljena iz jednog bloka i dobijamo jedan od slučajeva koji smo već razmatrali. Neka za minimalni polinom μ_B matrice B važi $\mu_B(x) = (x - \lambda_1)^2$. Tada i Žordanova i racionalna kanonska forma imaju po dva bloka. Pa se razmatranje svodi na jedan od prethodnih slučajeva. Ako je minimalni polinom matrice B oblika $\mu_B(x) = x - \lambda_1$. Onda matrica B ima tri invarijantna faktora i tri elementarna delitelja koji su jednaki $x - \lambda_1$. Pa su i Žordanova i racionalna forma jednake dijagonalnoj matrici $diag(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)$, a odgovarajući totalno redukovani sistem je

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1)(y_1) &= \psi_1 \\ (A - \lambda_1)(y_2) &= \psi_2 \\ (A - \lambda_1)(y_3) &= \psi_3. \end{aligned}$$

3.3 Parcijalna redukcija linearnih sistema - opšti slučaj

Uvedimo osnovne pojmove i notaciju potrebnu za dalje razmatranje. Neka je V vektorski prostor nad poljem K i neka je $A : V \to V$ linearni operator. ***Linearni sistem operatorskih jednačina*** sa konstantnim koeficijentima po promenljivim x_i, $1 \leq i \leq n$, je sistem oblika

$$\begin{aligned} A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\ A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\ &\vdots \\ A(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n, \end{aligned}$$

gde su $b_{ij} \in K$ i $\varphi_i \in V$. Matrica $B = [b_{ij}]_{n\times n} \in K^{n\times n}$ je ***matrica sistema***, a $\vec{\varphi} = [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n]^T \in V^{n\times 1}$ je ***kolona slobodnih članova***. Ukoliko je $\vec{\varphi} = \vec{0}$ sistem nazivamo ***homogenim***. U suprotnom kažemo da je sistem ***nehomogen***. Neka je $\vec{x} = [x_1 \ \dots \ x_n]^T$ ***kolona nepoznatih vektora***, i neka je ***vektorski operator*** $\vec{A} : V^{n\times 1} \to V^{n\times 1}$ definisan pokoordinatno sa $\vec{A}(\vec{x}) = [A(x_1) \ \dots \ A(x_n)]^T$. Tada dati sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}.$$

Prvo ćemo razmatrati transformaciju datog sistema prelaskom na novu bazu u kojoj je matrica sistema u Žordanovoj kanonskoj formi, a zatim ćemo se baviti redukcijom sistem korišćenjem racionalne kanonske forme.

Lema 3.1 *Neka je J Žordanova kanonska forma matrice B, tj. neka postoji $n \times n$ invertibilna matrica S takva da važi $J = S \cdot B \cdot S^{-1}$. Tada se sistem*

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$$

može svesti na sistem

$$\vec{A}(\vec{y}) = J\vec{y} + \vec{\psi},$$

po nepoznatoj koloni $\vec{y} = S\vec{x}$, za kolonu vektora $\vec{\psi} = S\vec{\varphi}$.

Dokaz: Pošto je operator $A : V \to V$ linearan, važi $S\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}(S\vec{x})$. Množenjem jednačine $\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x}+\vec{\varphi}$ sleva matricom S dobijamo $\vec{A}(S\vec{x}) = S\vec{A}(\vec{x}) = S(B\vec{x}+\vec{\varphi}) = S \cdot B \cdot S^{-1} \cdot S\vec{x} + S\vec{\varphi}$. Kako je $J = S \cdot B \cdot S^{-1}$, zaključujemo $\vec{A}(\vec{y}) = J\vec{y} + \vec{\psi}$, za $\vec{y} = S\vec{x}$ i $\vec{\psi} = S\vec{\varphi}$. $\square$

Teorema 3.2 *Pretpostavimo da se Žordanova kanonska forma J matrice B sastoji iz samo jednog bloka, tj.*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Tada se linearni sistem operatorskih jednačina

$$\begin{aligned}
A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\
A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\
&\vdots \\
A(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n
\end{aligned}$$

svodi na parcijalno redukovani sistem

$$\begin{aligned}
A(y_1) &= \lambda y_1 + y_2 + \psi_1 \\
A(y_2) &= \lambda y_2 + y_3 + \psi_2 \\
&\vdots \\
A(y_{n-1}) &= \lambda y_{n-1} + y_n + \psi_{n-1} \\
A(y_n) &= \lambda y_n + \psi_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

odnosno na totalno redukovani sistem

$$\begin{aligned}
(A-\lambda)^n \quad (y_1) &= \psi_n + (A-\lambda)(\psi_{n-1}) + \ldots + (A-\lambda)^{n-1}(\psi_1) \\
(A-\lambda)^{n-1}(y_2) &= \psi_n + (A-\lambda)(\psi_{n-1}) + \ldots + (A-\lambda)^{n-2}(\psi_2) \\
&\vdots \\
(A-\lambda)^2(y_{n-1}) &= \psi_n + (A-\lambda)(\psi_{n-1}) \\
(A-\lambda) \quad (y_n) &= \psi_n,
\end{aligned} \tag{2}$$

gde su $\vec{y}=[y_1 \ \ldots \ y_n]^T$ *i* $\vec{\psi}=[\psi_1 \ \ldots \ \psi_n]^T$ *određeni sa* $\vec{y}=S\vec{x}$ *i* $\vec{\psi}=S\vec{\varphi}$ *za invertibilnu matricu* S *takvu da je* $J=S\cdot B\cdot S^{-1}$.

Dokaz: Sistem (1) dobijamo iz polaznog sistema primenom Leme 3.1. Sistem (2) dobijamo dejstvom operatora $(A-\lambda)^{n-1},\ldots,(A-\lambda)^2, A-\lambda$ redom na jednačine sistema (1) i zamenom izraza $(A-\lambda)^{n+1-i}(y_i)$ koji se pojavljuju na desnoj strani jednakosti sa $\sum_{j=i}^{n}(A-\lambda)^{n-j}(\psi_j)$, za $2 \le i \le n$, gde je $(A-\lambda)^0$ identično preslikavanje. $\square$

Teorema 3.3 *Pretpostavimo da je Žordanova kanonska forma matrice* B *matrica*

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_t \end{bmatrix} \qquad (2 \le t \le n),$$

gde su matrice J_i Žordanovi blokovi dimenzija $k_i \geq 1$ koji odgovaraju ne obavezno različitim sopstvenim vrednostima λ_i, $1 \leq i \leq t$. Neka je $\ell_1 = 0$ i $\ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} k_j$ za $2 \leq i \leq t$. Tada se linearni sistem operatorskih jednačina

$$\begin{array}{rcl} A(x_1) & = & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\ A(x_2) & = & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\ & \vdots & \\ A(x_n) & = & b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n \end{array}$$

svodi na parcijalno redukovani sistem $\bigwedge\limits_{i=1}^{t} (\mathcal{P}_{J_i})$, gde je svaki podsistem $(\mathcal{P}_{J_i})$ oblika

$$\begin{array}{rcl} A(y_{\ell_i+1}) & = & \lambda_i y_{\ell_i+1} + y_{\ell_i+2} + \psi_{\ell_i+1} \\ A(y_{\ell_i+2}) & = & \lambda_i y_{\ell_i+2} + y_{\ell_i+3} + \psi_{\ell_i+2} \\ & \vdots & \\ A(y_{\ell_i+k_i-1}) & = & \lambda_i y_{\ell_i+k_i-1} + y_{\ell_i+k_i} + \psi_{\ell_i+k_i-1} \\ A(y_{\ell_i+k_i}) & = & \lambda_i y_{\ell_i+k_i} + \psi_{\ell_i+k_i}, \end{array}$$

odnosno na totalno redukovani sistem $\bigwedge\limits_{i=1}^{t} (\mathcal{T}_{J_i})$, gde je svaki podsistem $(\mathcal{T}_{J_i})$ oblika

$$\begin{array}{rcl} (A-\lambda_i)^{k_i} \quad (y_{\ell_i+1}) & = & \psi_{\ell_i+k_i} + (A-\lambda_i)(\psi_{\ell_i+k_i-1}) + \ldots + (A-\lambda_i)^{\ell_i+k_i-1}(\psi_{\ell_i+1}) \\ (A-\lambda_i)^{k_i-1}(y_{\ell_i+2}) & = & \psi_{\ell_i+k_i} + (A-\lambda_i)(\psi_{\ell_i+k_i-1}) + \ldots + (A-\lambda_i)^{\ell_i+k_i-2}(\psi_{\ell_i+2}) \\ & \vdots & \\ (A-\lambda_i)^2(y_{\ell_i+k_i-1}) & = & \psi_{\ell_i+k_i} + (A-\lambda_i)(\psi_{\ell_i+k_i-1}) \\ (A-\lambda_i) \quad (y_{\ell_i+k_i}) & = & \psi_{\ell_i+k_i}, \end{array}$$

Kolone $\vec{y} = [y_1 \ \ldots \ y_n]^T$ i $\vec{\psi} = [\psi_1 \ \ldots \ \psi_n]^T$ su određene sa $\vec{y} = S\vec{x}$ i $\vec{\psi} = S\vec{\varphi}$ za invertibilnu matricu S takvu da je $J = S \cdot B \cdot S^{-1}$.

Dokaz: Prema Lemi 3.1 polazni sistem je ekvivalentan sistemu

$$\bigwedge_{i=1}^{t} \Big(\vec{A}(\vec{y}_i) = J_i \vec{y}_i + \vec{\psi}_i \Big),$$

gde je $\vec{y}_i = [y_{\ell_i+1} \ldots y_{\ell_i+k_i}]^T$ i $\vec{\psi}_i = [\psi_{\ell_i+1} \ldots \psi_{\ell_i+k_i}]^T$. Podsistemi $\vec{A}(\vec{y}_i) = J_i\vec{y}_i + \vec{\psi}_i$

koji odgovaraju blokovima Žordanove forme matrice sistema su baš sistemi $(\mathcal{P}_{J_i})$, pa je dobijeni ekvivalentni sistem ustvari $\bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathcal{P}_{J_i})$. Na osnovu Teoreme 3.2 svaki od podsistema ovog sistema možemo svesti na totalno redukovani sistem $(\mathcal{T}_{J_i})$, pa se dati sistem transformiše u sistem $\bigwedge\limits_{i=1}^{t}(\mathcal{T}_{J_i})$. $\square$

Neka je M proizvoljna kvadratna matrica reda n sa koeficijentima u polju K. Sumu glavnih minora matrice M reda k, $1 \le k \le n$, označavamo sa $\delta_k = \delta_k(M)$. Sumu glavnih minora matrice M reda k koji sadrže i-tu kolonu označavamo sa $\delta_k^i = \delta_k^i(M)$, $1 \le i, k \le n$. Koeficijente karakterističnog polinoma $\Delta_M(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_n$, matrice M možemo izraziti u terminima suma njenih glavnih minora. Preciznije imamo da je $d_k = (-1)^k\delta_k(M)$, za $1 \le k \le n$. Zaista, ako sa S_n označimo skup svih permutacija brojeva $1, 2, \ldots, n$ i ako je $p(\phi)$ broj inverzija permutacije $\phi \in S_n$ onda imamo $\Delta_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \sum\limits_{\phi\, \in\, S_n}(-1)^{p(\phi)}(\lambda\delta_{1\phi_1} - a_{1\phi_1})\ldots(\lambda\delta_{n\phi_n} - a_{n\phi_n})$, gde je $\delta_{i\phi_i} = \begin{cases} 1, & i = \phi_i \\ 0, & i \ne \phi_i \end{cases}$. Koeficijent uz λ^r u polinomu $\Delta_M(\lambda)$ je suma izraza oblika $(-1)^{n-r}\sum\limits_{\phi\, \in\, S_n}(-1)^{p(\phi)}\,\delta_{\psi_1\phi_{\psi_1}}\delta_{\psi_2\phi_{\psi_2}}\ldots\delta_{\psi_r\phi_{\psi_r}}a_{\psi_{r+1}\phi_{\psi_{r+1}}}a_{\psi_{r+2}\phi_{\psi_{r+2}}}\ldots a_{\psi_n\phi_{\psi_n}}$. Data suma je determinanta matrice koja se dobija od matrice M zamenom vrsta $\psi_1, \ldots, \psi_r$ vrstama čija je ψ_j-ta komponenta 1, a sve ostale su 0. Množenjem ovih vrsta odgovarajućim brojevima i dodavanjem preostalim vrstama, dobijamo matricu kod koje su elementi na pozicijama $(\psi_1, \psi_1), (\psi_2, \psi_2), \ldots, (\psi_r, \psi_r)$ jednaki 1 i koja u vrstama i kolonama $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ ima sve ostale elemente jednake 0, ostali elementi date matrice jednaki su elementima polazne matrice M. Odnosno dobijamo glavni minor reda $n-r$ matrice M. Pa zaključujemo da je koeficijent d_{n-r} jednak sumi svih glavnih minora reda $n-r$ pomnoženih sa $(-1)^{n-r}$. Neka su $v_1, \ldots, v_n$ elementi polja K. Matricu koja se dobija zamenom i-te kolone matrice M kolonom $\vec{v} = [v_1 \ldots v_n]^T$ označavamo sa $M^i(v_1, \ldots, v_n)$. Suma glavnih minora matrice $M^i(v_1, \ldots, v_n)$ koji sadrže i-tu kolonu je $\delta_k^i(M; \vec{v}) = \delta_k^i(M; v_1, \ldots, v_n) = \delta_k^i(M^i(v_1, \ldots, v_n))$.

Naredna lema je izložena i u radu [42].

Lema 3.4 *Za matricu M oblika*

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \end{bmatrix}$$

važi sledeća jednakost

$$\delta_k^1(M) = (-1)^k \Big(\sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{k-j} - b_k \Big) \qquad (1 \le k \le n).$$

Dokaz: Koristeći linearnost preslikavanja $\delta_k^1(M)$ po prvoj koloni $[\,b_1, \ldots, b_n\,]^T = \sum_{j=1}^n b_j\,\vec{e}_j$, gde $\vec{e}_j$ označava kolonu čija je j-ta komponenta 1, a sve ostale su 0, dobijamo $\delta_k^1(M) = \sum_{j=1}^n b_j \delta_k^1(M; \vec{e}_j)$. Potrebno je još dokazati da važi

$$\delta_k^1(M; \vec{e}_j) = \begin{cases} 0, & k < j \\ -(-1)^k, & k = j \\ (-1)^k a_{k-j}, & k > j. \end{cases}$$

Neka je $\alpha_{k,j}$ proizvoljan nenula minor u sumi $\delta_k^1(M; \vec{e}_j)$. Kako je to glavni minor koji sadrži prvu kolonu, on mora sadržati i prvu vrstu. Dati minor je nenula, pa mora sadržati 1 iz prve vrste i druge kolone. Ovaj minor mora sadržati i drugu vrstu, tj. 1 iz druge vrste i treće kolone. Ponavljanjem postupka zaključujemo da minor $\alpha_{k,j}$ sadrži 1 iz i-te vrste i $i+1$. kolone za $i \in \{2, \ldots, j-2\}$. Dakle, minor $\alpha_{k,j}$ mora sadržati prvih $j-1$ jedinica iznad glavne dijagonale. Za $k < j$ takav nenula minor ne postoji. Za $k = j$ jedini nenula minor mora sadržati prvih j kolona (odnosno vrsta) i jednak je $(-1)^{k-1}$. Neka je $k > j$, zaključili smo da $\alpha_{k,j}$ mora sadržati prvih j kolona (odnosno vrsta). Pretpostavimo da je $l+1$ najmanji indeks veći od j, takav da $\alpha_{k,j}$ sadrži $l+1$. kolonu (odnosno vrstu). Prema tome, on mora da sadrži element a_{n-l} iz $l+1$. kolone. Ponavljamo prethodno cik-cak rezonovanje. Opet moramo uzeti $n-l-1$ jedinica iznad glavne dijagonale počev od $l+1$. vrste. Jedini nenula minor reda k mora sadržati prvih j i poslednjih $n-l$ kolona (odnosno vrsta), pa važi da je $k = j+n-l$ i $\alpha_{k,j} = (-1)^{j-1} \cdot (-1)^{n-l-1} a_{n-l} = (-1)^k a_{k-j}$. $\square$

Matricu M oblika

$$\begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \end{bmatrix}$$

nazivamo ***duplom pratećom matricom***. Dati pojam je uveo Butcher, [5]. Ako je $b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0$ dobijamo prateću matricu polinoma $\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \ldots - a_{n-1}\lambda - b_n$

oblika

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}.$$

Ako je $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ dobijamo prateću matricu polinoma $\lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - \ldots - b_n$ oblika

$$M = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

U radovima [6] i [62] od interesa je između ostalog bilo i izračunati karakteristični polinom duple prateće matrice. U okviru naredne leme dajemo još jedan metod za njegovo izračunavanje.

Lema 3.5 *Karakteristični polinom matrice* $M = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ b_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}$ *je polinom*

$$\Delta_M(\lambda) = \lambda^n - (b_1 + a_1)\lambda^{n-1} + (b_1a_1 - b_2 - a_2)\lambda^{n-2} + \ldots + b_1a_{n-1} + b_2a_{n-2} + \ldots b_{n-1}a_1 - b_n.$$

Odnosno, za koeficijente d_k *karakterističnog polinoma* $\Delta_M(\lambda)$ *matrice* M *važi*

$$d_k = \sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{k-j} - b_k - a_k,$$

za $1 \leq k \leq n$ *i* $a_n = 0$.

Dokaz: Za koeficijente karakterističnog polinoma $\Delta_M(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_n$ matrice M važi $d_k = (-1)^k\delta_k(M)$, za $1 \leq k \leq n$, gde je $\delta_k(M)$ suma glavnih minora matrice M reda k. Važi da je $\delta_k(M) = \delta_k^1(M) + \delta_k(\widetilde{M})$, gde je $\delta_k^1(M)$ suma glavnih minora matrice M reda k koji sadrže prvu kolonu, a $\delta_k(\widetilde{M})$ suma glavnih minora matrice M reda k koji ne sadrže prvu kolonu. Na osnovu Leme 3.4 imamo da je $\delta_k^1(M) = (-1)^k \sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{k-j} - b_k$. Dok $\delta_k(\widetilde{M})$ predstavlja sumu glavnih minora reda k matrice $\widetilde{M}$ koja je oblika $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}$. Matrica $\widetilde{M}$ je prateća matrica polinoma $a(\lambda) = \lambda^{n-1} - a_1\lambda^{n-2} - \dots a_{n-2}\lambda - a_{n-1}$. Na osnovu Leme 2.6 imamo da je karakteristični polinom matrice $\widetilde{M}$ jednak $a(\lambda)$. Prema tome, važi da je $-a_k = (-1)^k\delta_k(\widetilde{M})$, za $1 \leq k \leq n-1$. Uz pretpostavku da je $a_n = 0$ imamo da je

$$d_k = (-1)^k\delta_k(M) = (-1)^k(\delta_k^1(M) + \delta_k(\widetilde{M})) = \sum_{j=1}^{k-1} b_j a_{k-j} - b_k - a_k$$

za svako k, $1 \leq k \leq n$. $\square$

Lema 3.6 *Neka je C racionalna kanonska forma matrice B, tj. neka postoji $n \times n$ invertibilna matrica P takva da važi $C = P \cdot B \cdot P^{-1}$. Tada se sistem*

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$$

može svesti na sistem

$$\vec{A}(\vec{z}) = C\vec{y} + \vec{\nu},$$

po nepoznatoj koloni $\vec{z} = P\vec{x}$, za kolonu vektora $\vec{\nu} = P\vec{\varphi}$.

Dokaz: Dokaz se izvodi isto kao i u slučaju Žordanove kanonske forme. $\square$

Naredna teorema je navedena i u radu [42].

Teorema 3.7 *Pretpostavimo da se racionalna kanonska forma C matrice B sastoji iz samo jednog bloka, tj. da je matrica C jednaka pratećoj matrici karakterističnog polinoma $\Delta_B(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \dots + d_{n-1}\lambda + d_n = \Delta_C(\lambda)$. Tada se linearni sistem operatorskih jednačina*

$$\begin{aligned} A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\ A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\ &\vdots \\ A(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n + \varphi_n \end{aligned}$$

svodi na parcijalno redukovani sistem

$$
\begin{aligned}
\Delta_C(A)(z_1) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\delta_k^1(C; A^{n-k}(\nu_1), \ldots, A^{n-k}(\nu_n)) \\
z_2 &= A(z_1) - \nu_1 \\
z_3 &= A(z_2) - \nu_2 \\
&\vdots \\
z_n &= A(z_{n-1}) - \nu_{n-1},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

gde su vektori $\vec{z} = [z_1 \ldots z_n]^T$ *i* $\vec{\nu} = [\nu_1 \ldots \nu_n]^T$ *određeni sa* $\vec{z} = P\vec{x}$ *i* $\vec{\nu} = P\vec{\varphi}$ *za invertibilnu matricu* P *takvu da je* $C = P \cdot B \cdot P^{-1}$.

Dokaz: Prema Lemi 3.6 sistem $\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$ se transformiše u ekvivalentan sistem $\vec{A}(\vec{z}) = C\vec{z} + \vec{\nu}$ koji se može zapisati u razvijenom obliku

$$
\begin{aligned}
A(z_1) &= z_2 + \nu_1 \\
A(z_2) &= z_3 + \nu_2 \\
&\vdots \\
A(z_{n-1}) &= z_n + \nu_{n-1} \\
A(z_n) &= -d_n z_1 - d_{n-1} z_2 - \ldots - d_1 z_n + \nu_n.
\end{aligned}
$$

Iz prve jednačine sistema imamo $z_2 = A(z_1) - \nu_1$, zamenom datog izraza u drugu jednačinu dobijamo $z_3 = A^2(z_1) - A(\nu_1) - \nu_2$. Zatim važi $z_4 = A(z_3) - \nu_3 = A^3(z_1) - A^2(\nu_1) - A(\nu_2) - \nu_3$. Pa svako z_k, $2 \leq k \leq n$, možemo izraziti u funkciji od z_1 sa $z_k = A^{k-1}(z_1) - \sum_{j=1}^{k-1} A^{k-1-j}(\nu_j)$, gde je A^0 identično preslikavanje. Zamenom datih izraza u poslednju jednačinu dobijamo

$$
\begin{aligned}
A^n(z_1) + d_1 A^{n-1}(z_1) + \ldots &+ d_{n-1}A(z_1) + d_n z_1 = \\
&+ d_{n-1}\nu_1 \\
&+ d_{n-2}\Big(A(\nu_1) + \nu_2\Big) \\
&\vdots \\
&+ d_2\Big(A^{n-3}(\nu_1) + \ldots + A(\nu_{n-3}) + \nu_{n-2}\Big) \\
&+ d_1\Big(A^{n-2}(\nu_1) + \ldots + A(\nu_{n-2}) + \nu_{n-1}\Big) \\
&+ \quad A^{n-1}(\nu_1) + \ldots + A^2(\nu_{n-2}) + A(\nu_{n-1}) + \nu_n.
\end{aligned}
$$

Ako označimo sa $\Delta_C(A)$ linearni operator $A^n + d_1A^{n-1} + \ldots + d_{n-1}A + d_n$ i ako pregrupišemo elemente na desnoj strani dobijamo operatorsku jednačinu

$$\begin{aligned}
\Delta_C(A)(z_1) &= \Big(A^{n-1}(\nu_1)\Big) \\
&+ \Big(A^{n-2}(\nu_2) + d_1A^{n-2}(\nu_1)\Big) \\
&+ \Big(A^{n-3}(\nu_3) + d_1A^{n-3}(\nu_2) + d_2A^{n-3}(\nu_1)\Big) \\
&\vdots \\
&+ \Big(A(\nu_{n-1}) + d_1A(\nu_{n-2}) + d_2A(\nu_{n-3}) + \ldots + d_{n-2}A(\nu_1)\Big) \\
&+ \Big(\nu_n + d_1\nu_{n-1} + d_2\nu_{n-2} + \ldots + d_{n-2}\nu_2 + d_{n-1}\nu_1\Big).
\end{aligned}$$

Na osnovu Leme 3.4 sledi da je

$$\Delta_C(A)(z_1) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\delta_k^1(C; A^{n-k}(\nu_1), \ldots, A^{n-k}(\nu_n)).$$

Odakle zaključujemo da važi tvrđenje. $\square$

Dobijeni sistem nazivamo ***parcijalno redukovanim***, jer je samo jedna promenljiva razdvojena od ostalih linearnom operatorskom jednačinom n-tog reda. Primetimo da je redukcija iz prethodne teoreme reverzibilna, odnosno polazni i dobijeni sistem su ekvivalentni.

Naredna teorema je navedena i u radu [42].

Teorema 3.8 *Pretpostavimo da je racionalna kanonska forma matrice B matrica*

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C_m \end{bmatrix} \qquad (2 \leq m \leq n),$$

gde su matrice C_i prateće matrice polinoma

$$\Delta_{C_i}(\lambda) = \lambda^{n_i} + d_{i,1}\lambda^{n_i-1} + \ldots + d_{i,n_i-1}\lambda + d_{i,n_i}$$

stepena $n_i \geq 1$ i neka $\Delta_{C_i} \mid \Delta_{C_{i+1}}$ za sve i, $1 \leq i < m$. Neka je $\ell_1 = 0$ i $\ell_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j$

za $2 \leq i \leq m$. Tada se linearni sistem operatorskih jednačina

$$
\begin{array}{rcl}
A(x_1) & = & b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\
A(x_2) & = & b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\
 & \vdots & \\
A(x_n) & = & b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n
\end{array}
$$

svodi na parcijalno redukovani sistem $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} (\mathcal{P}_{C_i})$, gde je svaki podsistem $(\mathcal{P}_{C_i})$ oblika

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta_{C_i}(A)(z_{\ell_i+1}) & = & \sum\limits_{k=1}^{n_i}(-1)^{k+1}\delta_k^1(C_i; A^{n_i-k}(\nu_{\ell_i+1}), \ldots, A^{n_i-k}(\nu_{\ell_i+n_i})) \\
z_{\ell_i+2} & = & A(z_{\ell_i+1}) - \nu_{\ell_i+1} \\
z_{\ell_i+3} & = & A(z_{\ell_i+2}) - \nu_{\ell_i+2} \\
\vdots & & \\
z_{\ell_i+n_i} & = & A(z_{\ell_i+n_i-1}) - \nu_{\ell_i+n_i-1}.
\end{array}
$$

Kolone $\vec{z}=[z_1 \ldots z_n]^T$ i $\vec{\nu}=[\nu_1 \ldots \nu_n]^T$ su određene sa $\vec{z} = P\vec{x}$ i $\vec{\nu} = P\vec{\varphi}$ za regularnu matricu P takvu da je $C = P \cdot B \cdot P^{-1}$.

Dokaz: Prema Lemi 3.6 polazni sistem je ekvivalentan sistemu

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \Big(\vec{A}(\vec{z}_i) = C_i\vec{z}_i + \vec{\nu}_i\Big),$$

gde je $\vec{z}_i = [z_{\ell_i+1}\, z_{\ell_i+2}\, \ldots\, z_{\ell_i+n_i}]^T$ i $\vec{\nu}_i = [\nu_{\ell_i+1}\, \nu_{\ell_i+2}\, \ldots\, \nu_{\ell_i+n_i}]^T$. Na osnovu Teoreme 3.7 podsistemi $\vec{A}(\vec{z}_i) = C_i\vec{z}_i + \vec{\nu}_i$ koji odgovaraju blokovima C_i racionalne forme matrice sistema su ekvivalentni parcijalno redukovanim sistemima $(\mathcal{P}_{C_i})$, gde je $\Delta_{C_i}(A) = A^{n_i} + d_{i,1}A^{n_i-1} + \ldots + d_{i,n_i-1}A + d_{i,n_i}$. Polazni sistem je ekvivalentan sistemu $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} (\mathcal{P}_{C_i})$. $\square$

Primetimo da se svaki podsistem $(\mathcal{P}_{C_i})$ sastoji od linearne operatorske jednačine višeg reda, po jednoj promenljivoj, i linearnih operatorskih jednačina prvog reda, po dve promenljive.

4 Totalna redukcija linearnih sistema operatorskih jednačina

Osnovni cilj ove sekcije je svođenje linearnih sistema operatorskih jednačina prvog reda na sisteme linearnih operatorskih jednačina n-tog reda, kod kojih su promenljive razdvojene. Dobijeni sistem nazivamo ***totalno redukovanim***. Totalno redukovani sistem eksplicitno zavisi od polaznog sistema, ima simetrični oblik ali mu nije ekvivalentan. Prednost ove metode je i što ne zahteva promenu baze, te nije potrebno računati matricu transformacije. Kao i u slučaju parcijalne redukcije, prvo ćemo ilustrovati metodu totalne redukcije za linearne sisteme operatorskih jednačina po dve ili tri promenljive, a zatim ćemo prikazati opšti slučaj.

4.1 Totalna redukcija linearnih sistema dve operatorske jednačine

Kao i u slučaju parcijalne redukcije neka je dat sistem

$$\begin{aligned} A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \varphi_1 \\ A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \varphi_2, \end{aligned}$$

gde su $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$ elementi polja K, φ_1, φ_2 elementi vektorskog prostora V nad poljem K, a $A : V \to V$ linearni operator. Dati sistem možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} A - b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & A - b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Označimo sa $B(A)$ karakterističnu matricu $\lambda I - B$ matrice sistema B kod koje smo λ zamenili sa linearnim operatorom A. Dati sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku $B(A)\ \vec{x} = \vec{\varphi}$, gde je $\vec{x} = [x_1\ x_2]^T$ kolona nepoznatih, a $\vec{\varphi} = [\varphi_1\ \varphi_2]^T$ kolona slobodnih članova. Množenjem date vektorske jednačine adjungovanom matricom $\widetilde{B}(A)$ matrice $B(A)$ dobijamo $(\Delta_B(A)I)\ \vec{x} = \widetilde{B}(A)\ \vec{\varphi}$, gde je $\Delta_B(\lambda)$ karakteristični polinom matrice B. Kako je $\widetilde{B}(A) = \begin{bmatrix} A - b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & A - b_{11} \end{bmatrix}$, imamo

$$\begin{bmatrix} \Delta_B(A) & 0 \\ 0 & \Delta_B(A) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & A - b_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta_B(A)(x_1) &= A(\varphi_1) - b_{22}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 \\ \Delta_B(A)(x_2) &= A(\varphi_2) - b_{11}\varphi_2 + b_{21}\varphi_1. \end{aligned}$$

Primetimo da važi

$$A(\varphi_1) - b_{22}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 = \begin{bmatrix} \boxed{A(\varphi_1)} & b_{12} \\ A(\varphi_2) & b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \varphi_1 & b_{12} \\ \varphi_2 & b_{22} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$A(\varphi_2) - b_{11}\varphi_2 + b_{21}\varphi_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & A(\varphi_1) \\ b_{21} & \boxed{A(\varphi_2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \varphi_1 \\ b_{21} & \varphi_2 \end{matrix}} \end{bmatrix},$$

pri čemu u obzir uzimamo samo uokvirene glavne minore.
Ako definišemo vektorski operator $\vec{\Delta}_B$ sa $\vec{\Delta}_B = [\Delta_B \ \Delta_B]^T$, i ako označimo sa B_i matricu dobijenu od matrice B zamenom i-te kolone sa kolonom slobodnih članova $\vec{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$, $1 \le i \le 2$, dobijeni sistem možemo zapisati u vektorskom obliku

$$\vec{\Delta}_B(\vec{x}) = \vec{A}(\vec{\varphi}) - \begin{bmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \end{bmatrix}.$$

4.2 Totalna redukcija linearnih sistema tri operatorske jednačine

Razmotrimo linearni sistem tri operatorske jednačine sa konstantnim koeficijentima po promenljivim x_1, x_2 i x_3 oblika

$$\begin{aligned} A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \varphi_1 \\ A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \varphi_2 \\ A(x_3) &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \varphi_3. \end{aligned}$$

Dati sistem možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} A - b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & A - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & A - b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Označimo, kao i u slučaju linearnog sistema dve operatorske jednačine, sa $B(A)$ karakterističnu matricu $\lambda I - B$ matrice sistema B kod koje je λ zamenjeno sa A, a sa $\widetilde{B}(A)$ adjungovanu matrice date matrice. Ako označimo algebarske kofaktore matrice $\widetilde{B}(A)$ sa $\widetilde{B}_{ij}$, $1 \le i, j \le 3$, imamo da važi

$$\widetilde{B}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} A - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{32} & A - b_{33} \end{vmatrix}, \quad \widetilde{B}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{32} & A - b_{33} \end{vmatrix}, \quad \widetilde{B}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -b_{12} & -b_{13} \\ A - b_{22} & -b_{23} \end{vmatrix},$$

$$= (A - b_{22})(A - b_{33}) - b_{23}b_{32} \qquad = b_{12}A + B_{21} \qquad = b_{13}A + B_{31}$$

$$= A^2 - (b_{22} + b_{33})A + B_{11}$$

$$\widetilde{B}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-b_{21} & -b_{23}\\ -b_{31} & A-b_{33}\end{vmatrix},\ \widetilde{B}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}A-b_{11} & -b_{13}\\ -b_{31} & A-b_{33}\end{vmatrix},\ \widetilde{B}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}A-b_{11} & -b_{13}\\ -b_{21} & -b_{23}\end{vmatrix},$$

$$= b_{21}A+B_{12} \qquad = (A-b_{11})(A-b_{33})-b_{13}b_{31} \qquad = b_{23}A+B_{32}$$

$$= A^2-(b_{11}+b_{33})A+B_{22}$$

$$\widetilde{B}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-b_{21} & A-b_{22}\\ -b_{31} & -b_{32}\end{vmatrix},\ \widetilde{B}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}A-b_{11} & -b_{12}\\ -b_{31} & -b_{32}\end{vmatrix},\ \widetilde{B}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}A-b_{11} & -b_{12}\\ -b_{21} & A-b_{22}\end{vmatrix},$$

$$= b_{31}A+B_{13} \qquad = b_{32}A+B_{23} \qquad = (A-b_{11})(A-b_{22})-b_{12}b_{21}$$

$$= A^2-(b_{11}+b_{22})A+B_{33}$$

gde su B_{ij}, $1\leq i,j\leq 3$ algebarski kofaktori matrice sistema B. Množenjem sistema datog u matričnom obliku sa adjungovanom matricom dobijamo

$$\begin{bmatrix}\Delta_B(A) & 0 & 0\\ 0 & \Delta_B(A) & 0\\ 0 & 0 & \Delta_B(A)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}A^2-(b_{22}+b_{33})A+B_{11} & b_{12}A+B_{21} & b_{13}A+B_{31}\\ b_{21}A+B_{12} & A^2-(b_{11}+b_{33})A+B_{22} & b_{23}A+B_{32}\\ b_{31}A+B_{13} & b_{32}A+B_{23} & A^2-(b_{11}+b_{22})A+B_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix},$$

gde je $\Delta_B(\lambda)$ karakteristični polinom matrice B. Odnosno važi

$$\begin{aligned}\Delta_B(A)(x_1) &= A^2(\varphi_1)-(b_{22}+b_{33})A(\varphi_1)+B_{11}\varphi_1\\ &+ b_{12}A(\varphi_2)+B_{21}\varphi_2+b_{13}A(\varphi_3)+B_{31}\varphi_3\\ &= A^2(\varphi_1)-[b_{22}A(\varphi_1)-b_{12}A(\varphi_2)]-[b_{33}A(\varphi_1)-b_{13}A(\varphi_3)]\\ &+ B_{11}\varphi_1+B_{21}\varphi_2+B_{31}\varphi_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_B(A)(x_2) &= b_{21}A(\varphi_1)+B_{12}\varphi_1+b_{23}A(\varphi_3)+B_{32}\varphi_3\\ &+ A^2(\varphi_2)-(b_{11}+b_{33})A(\varphi_2)+B_{22}\varphi_2\\ &= A^2(\varphi_2)-[b_{11}A(\varphi_2)-b_{21}A(\varphi_1)]-[b_{33}A(\varphi_2)-b_{23}A(\varphi_3)]\\ &+ B_{12}\varphi_1+B_{22}\varphi_2+B_{32}\varphi_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_B(A)(x_3) &= b_{31}A(\varphi_1) + B_{13}\varphi_1 + b_{32}A(\varphi_2) + B_{23}\varphi_2 \\
&+ \; A^2(\varphi_3) - (b_{11} + b_{22})A(\varphi_3) + B_{33}\varphi_3 \\
&= A^2(\varphi_3) - [b_{11}A(\varphi_3) - b_{31}A(\varphi_1)] - [b_{22}A(\varphi_3) - b_{32}A(\varphi_2)] \\
&+ \; B_{13}\varphi_1 + B_{23}\varphi_2 + B_{33}\varphi_3.
\end{aligned}
$$

Što možemo vizuelno predstaviti u obliku sistema

$$
\begin{aligned}
\Delta_B(A)(x_1) &= \begin{bmatrix} A^2(\varphi_1) & b_{12} & b_{13} \\ A^2(\varphi_2) & b_{22} & b_{23} \\ A^2(\varphi_3) & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A(\varphi_1) & b_{12} & b_{13} \\ A(\varphi_2) & b_{22} & b_{23} \\ A(\varphi_3) & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1 & b_{12} & b_{13} \\ \varphi_2 & b_{22} & b_{23} \\ \varphi_3 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\
\Delta_B(A)(x_2) &= \begin{bmatrix} b_{11} & A^2(\varphi_1) & b_{13} \\ b_{21} & A^2(\varphi_2) & b_{23} \\ b_{31} & A^2(\varphi_3) & b_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & A(\varphi_1) & b_{13} \\ b_{21} & A(\varphi_2) & b_{23} \\ b_{31} & A(\varphi_3) & b_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \varphi_1 & b_{13} \\ b_{21} & \varphi_2 & b_{23} \\ b_{31} & \varphi_3 & b_{33} \end{bmatrix} \\
\Delta_B(A)(x_3) &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & A^2(\varphi_1) \\ b_{21} & b_{22} & A^2(\varphi_2) \\ b_{31} & b_{32} & A^2(\varphi_3) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & A(\varphi_1) \\ b_{21} & b_{22} & A(\varphi_2) \\ b_{31} & b_{32} & A(\varphi_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \varphi_1 \\ b_{21} & b_{22} & \varphi_2 \\ b_{31} & b_{32} & \varphi_3 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

pri čemu u razmatranje uzimamo samo uokvirene glavne minore.

4.3 Totalna redukcija linearnih sistema - opšti slučaj

Razmatramo ***linearni sistem operatorskih jednačina*** oblika

$$
\begin{aligned}
A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\
A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\
&\vdots \\
A(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n,
\end{aligned}
$$

gde su $b_{ij} \in K$ i $\varphi_i \in V$. Sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi},$$

gde je $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrica sistema, $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ldots x_n]^T$ kolona nepoznatih, $\vec{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ldots \varphi_n]^T$ kolona slobodnih članova i $\vec{A}$ vektorski operator definisan sa $\vec{A}(\vec{x}) =$

$[A(x_1)\ A(x_2)\ldots A(x_n)]^T$. Neka je karakteristični polinom $\Delta_B(\lambda)$ matrice B jednak

$$\Delta_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n.$$

Pokazali smo da je $d_k = (-1)^k\delta_k(B)$, gde je $\delta_k(B)$ suma glavnih minora reda k matrice B, $1 \le k \le n$. Označimo sa $\widetilde{B}(\lambda)$ adjungovanu matricu karakteristične matrice $\lambda I - B$ matrice B i sa $B_0, B_1, \ldots, B_{n-2}, B_{n-1}$ kvadratne matrice reda n nad poljem K koje su određene sa

$$\widetilde{B}(\lambda) = adj(\lambda I - B) = \lambda^{n-1}B_0 + \lambda^{n-2}B_1 + \ldots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}.$$

U okviru Kejli-Hamiltonove teoreme dobili smo sledeće rekurentne veze

$$B_0 = I; \quad B_k = B_{k-1}\cdot B + d_k I \quad \text{za} \quad 1 \le k < n.$$

Sva tvrđenja u okviru ove glave su izložena i u radu [43].

Teorema 4.1 *Neka je dat linearni sistem operatorskih jednačina prvog reda u vektorskom obliku*

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$$

i neka su matrice $B_0, \ldots, B_{n-1}$ koeficijenti matričnog polinoma $\widetilde{B}(\lambda)$. Tada važi

$$\vec{\Delta}_B(A)(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}\cdot \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi}).$$

Dokaz: Ako u jednakosti $\Delta_B(\lambda)I = \widetilde{B}(\lambda)\cdot(\lambda I - B)$ umesto λ stavimo A dobijamo

$$\begin{aligned}
\Delta_B(A)I &= \widetilde{B}(A)\cdot B(A)\\
\vec{\Delta}_B(A)(\vec{x}) &= \widetilde{B}(A)\cdot((\vec{A}-B)(\vec{x}))\\
&= \widetilde{B}(A)\cdot(\vec{A}(\vec{x}) - B\vec{x})\\
&= \widetilde{B}(A)\cdot\vec{\varphi}\\
&= \sum_{k=1}^{n} B_{k-1}\cdot\vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi}). \square
\end{aligned}$$

Lema 4.2 *Za sume glavnih minora reda k, $1 \le k \le n$, matrice B i proizvoljnu kolonu $[v_1 \ldots v_n]^T \in K^{n\times 1}$ važi*

$$\delta_k^i(B; \sum_{j=1}^{n} b_{1j}v_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} b_{nj}v_j) + \delta_{k+1}^i(B; v_1, \ldots, v_n) = \delta_k(B)\cdot v_i.$$

Napomena 4.3 Prethodni rezultat možemo zapisati i vektorski

$$\delta_k^i(B; B\vec{v}) + \delta_{k+1}^i(B; \vec{v}) = \delta_k(B) \cdot v_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\vec{\delta}_k(B; B\vec{v}) + \vec{\delta}_{k+1}(B; \vec{v}) = \delta_k(B) \cdot \vec{v}$$

za $\vec{\delta}_k(B;\vec{v}) = [\delta_k^1(B;\vec{v}) \ldots \delta_k^n(B;\vec{v})]^T$.

Dokaz: Neka je $\vec{e}_s \in K^{n\times 1}$ kolona čija je s-ta komponenta 1, a sve ostale su 0. Dalje, $B_{\downarrow s}$ je oznaka za s-tu kolonu matrice B, a $[B]_{\hat{s}}$ označava kvadratnu matricu reda $n-1$ koja nastaje od matrice B brisanjem s-te vrste i s-te kolone. Onda, s obzirom na uvedene oznake, imamo da $[B^i(B_{\downarrow s})]_{\hat{s}}$ označava matricu reda $n-1$ koja se od matrice B dobija tako što se prvo i-ta kolona zameni s-tom kolonom $B_{\downarrow s}$, a zatim se u toj matrici izbrišu s-ta vrsta i s-ta kolona. Koristeći da je $\vec{\delta}_k(B;\vec{v})$ linearno po $\vec{v}$ i sređivanjem izraza dobijamo

$$\begin{aligned}
\delta_k^i(B; B\vec{v}) + \delta_{k+1}^i(B; \vec{v}) &= \delta_k^i(B; \sum_{s=1}^n v_s B_{\downarrow s}) + \delta_{k+1}^i(B; \sum_{s=1}^n v_s \vec{e}_s) \\
&= \sum_{s=1}^n v_s \delta_k^i(B; B_{\downarrow s}) + \sum_{s=1}^n v_s \delta_{k+1}^i(B; \vec{e}_s) \\
&= \sum_{s=1}^n v_s(\delta_k^i(B; B_{\downarrow s}) + \delta_{k+1}^i(B; \vec{e}_s)) = \\
v_i(\delta_k^i(B; B_{\downarrow i}) + \delta_{k+1}^i(B; \vec{e}_i)) &+ \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq i}}^n v_s(\delta_k^i(B; B_{\downarrow s}) + \delta_{k+1}^i(B; \vec{e}_s)).
\end{aligned}$$

Računamo prvi sabirak

$$v_i(\delta_k^i(B; B_{\downarrow i}) + \delta_{k+1}^i(B; \vec{e}_i)) = v_i(\delta_k^i(B) + \delta_k([B]_{\hat{i}})) = v_i \delta_k(B).$$

Ostaje još da pokažemo da je drugi sabirak jednak nuli. Dovoljno je pokazati da za $s \neq i$ važi

$$\delta_k^i(B; B_{\downarrow s}) + \delta_{k+1}^i(B; \vec{e}_s) = 0.$$

Posmatramo minore koji su sabirci u $\delta_k^i(B; B_{\downarrow s})$. Oni koji sadrže s-tu kolonu su jednaki nuli, pa je dovoljno posmatrati samo one minore koji ne sadrže s-tu kolonu. Otuda je

$$\delta_k^i(B; B_{\downarrow s}) = \delta_k^i(B^i(B_{\downarrow s})) = \delta_k^i([B^i(B_{\downarrow s})]_{\hat{s}}).$$

Nenula minori u $\delta_{k+1}^i(B; \vec{e}_s)$ moraju da sadrže i-tu kolonu i s-tu vrstu, odnosno kolonu. Permutovanjem i-te i s-te kolone dobijamo minore suprotnog znaka od polaznih, i razvojem dobijenih minora po s-toj koloni, dobijamo glavne minore reda k matrice $B^i(B_{\downarrow s})$ koji ne sadrže s-tu kolonu. Odakle zaključujemo da je

$$\delta^i_{k+1}(B;\vec{e}_s) = -\delta^i_k([B^i(B_{\downarrow s})]_{\hat{s}}). \square$$

Naredna lema daje vezu između koeficijenata B_k matričnog polinoma $\widetilde{B}(\lambda) = adj(\lambda I - B)$ i suma glavnih minora $\vec{\delta}_{k+1}(B;\vec{v})$.

Lema 4.4 *Za proizvoljnu kolonu* $[v_1 \dots v_n]^T \in K^{n\times 1}$ *važi*

$$B_k \cdot \vec{v} = B_k \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = (-1)^k \begin{bmatrix} \delta^1_{k+1}(B;v_1,\dots,v_n) \\ \delta^2_{k+1}(B;v_1,\dots,v_n) \\ \vdots \\ \delta^n_{k+1}(B;v_1,\dots,v_n) \end{bmatrix} = (-1)^k\vec{\delta}_{k+1}(B;\vec{v}).$$

Dokaz: Tvrđenje dokazujemo indukcijom po k.
Ako je $k = 0$, neposredno se proverava da jednakost važi.
Neka, po indukcijskoj hipotezi (IH), tvrđenje važi za $k-1$.
Množenjem relacije $B_k = B_{k-1} \cdot B + d_k I$, vektorom $\vec{v}$ zdesna, dobijamo

$$\begin{aligned} B_k \cdot \vec{v} &= B_{k-1} \cdot (B \cdot \vec{v}) + d_k\vec{v} \\ &\underset{\text{(IH)}}{=} (-1)^{k-1}\vec{\delta}_k(B; B\cdot\vec{v}) + d_k\vec{v} \\ &= (-1)^{k-1}(\vec{\delta}_k(B; B\cdot\vec{v}) - \delta_k\vec{v}) \\ &\underset{4.2}{=} (-1)^k\vec{\delta}_{k+1}(B;\vec{v}). \square \end{aligned}$$

Napomena 4.5 Primenom Leme 4.4 na $\vec{v} = \vec{e}_j$, $1 \le j \le n$, i računanjem i-te komponente leve i desne strane dobijamo formule 8-10 iz rada [13].

Teorema 4.6 *Linearni sistem operatorskih jednačina prvog reda, dat u vektorskom obliku*

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$$

svodi se na totalno redukovani sistem operatorskih jednačina n-tog reda, u vektorskom obliku

$$\vec{\Delta}_B(A)(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\vec{\delta}_k(B;\vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi})).$$

Dokaz: Teorema sledi primenom Teoreme 4.1 i Leme 4.4

$$\begin{aligned}\vec{\Delta}_B(A)(\vec{x}) &\underset{4.1}{=} \sum_{k=1}^{n} B_{k-1} \cdot \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi}) \\ &\underset{4.4}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\vec{\delta}_k(B; \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi})). \quad \square\end{aligned}$$

Prethodna teorema je ekvivalentna sledećem tvrđenju.

Teorema 4.7 *Linearni sistem operatorskih jednačina*

$$\begin{aligned} A(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\ A(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\ &\vdots \\ A(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n, \end{aligned}$$

svodi se na totalno redukovani sistem operatorskih jednačina n-tog reda

$$\begin{aligned} &\Delta_B(A)(x_1) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^1(B; \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi})) \\ &\vdots \\ &\Delta_B(A)(x_i) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^i(B; \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi})) \qquad (4) \\ &\vdots \\ &\Delta_B(A)(x_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^n(B; \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi})). \end{aligned}$$

Napomena 4.8 Dobijeni sistem nazivamo ***totalno redukovanim*** zato što su sve promenljive razdvojene. Odnosno, svaka jednačina sistema je operatorska jednačina n-tog reda po jednoj promenljivoj. Date jednačine se razlikuju samo po promenljivoj i slobodnom članu.

Posledica 4.9 *U slučaju kada je A nula operator prethodna teorema je ekvivalentna Kramerovoj teoremi.*

4.4 Totalna redukcija linearnih sistema kod kojih je matrica sistema u formi prateće matrice

U okviru ove sekcije bavimo se linearnim sistemima operatorskih jednačina oblika

$$\begin{array}{rcl} A(x_1) & = & x_2 + \varphi_1 \\ A(x_2) & = & x_3 + \varphi_2 \\ \vdots & & \\ A(x_{n-1}) & = & x_n + \varphi_{n-1} \\ A(x_n) & = & -d_n x_1 - d_{n-1} x_2 - \ldots - d_1 x_n + \varphi_n, \end{array}$$

gde je $[x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^T$ kolona nepoznatih, $[\varphi_1 \; \varphi_2 \; \ldots \; \varphi_n]^T$ kolona slobodnih članova, $A : V \to V$ linearni operator vektorskog prostora V nad poljem K i gde je matrica sistema C prateća matrica polinoma

$$\Delta_C(\lambda) = \lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n.$$

Dati sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\vec{A}(\vec{x}) = C\vec{x} + \vec{\varphi}.$$

Videli smo u okviru sekcije o parcijalno redukovanim sistemima kako sistem ovog oblika svodimo na sistem koji ima jednu jednačinu višeg reda po samo jednoj promenljivoj i $n-1$ jednačinu prvog reda po dve promenljive. Primenom Teoreme 4.1 želimo da transformišemo dati sistem na sistem u kome su sve promenljive razdvojene. Na osnovu Leme 2.6 imamo da je karakteristični polinom matrice

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \ldots & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix}$$

jednak $\Delta_C(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n$. Kako je minor reda $n-1$ matrice C dobijen brisanjem n-te vrste i prve kolone jednak 1, na osnovu Posledice 2.20 i Teoreme 2.9 zaključujemo da je i minimalni polinom matrice C jednak $\Delta_C(\lambda)$. Determinanta matrice C jednaka je $(-1)^n d_n$, pa je matrica C invertibilna ukoliko je $d_n \neq 0$.

Sva tvrđenja u ovoj sekciji su izložena i radu [26].

Lema 4.10 *Neka je $d_n \neq 0$. Inverzna matrica matrice C je matrica*

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{d_{n-1}}{d_n} & -\frac{d_{n-2}}{d_n} & -\frac{d_{n-3}}{d_n} & \dots & -\frac{d_1}{d_n} & -\frac{1}{d_n} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Označimo sa $G_{\to j}$ j-tu vrstu inverzne matrice $G = [g_{ij}]_{n\times n}$ matrice C, za $1 \leq j \leq n$. Koeficijente g_{ij} matrice G dobijamo iz jednakosti $C \cdot G = I$. Zaista, imamo da je

$$C \cdot G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \dots & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_{\to 1} \\ G_{\to 2} \\ \vdots \\ G_{\to n-1} \\ G_{\to n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\to 2} \\ G_{\to 3} \\ \vdots \\ G_{\to n} \\ H \end{bmatrix},$$

gde je $H = [h_1\, h_2\, \dots\, h_n] \in K^{1\times n}$ vrsta čiji su elementi oblika $h_j = -\sum_{i=1}^{n} d_{n+1-i} g_{ij}$, $1 \leq j \leq n$. Kako je $G_{\to j+1} = \vec{e}_j$, gde je $\vec{e}_j \in K^{1\times n}$ vrsta čija je j-ta komponenta 1, a sve ostale su 0, zaključujemo da je $g_{j+1,j} = 1$ i $g_{j+1,k} = 0$, za $j \neq k$, $1 \leq j \leq n-1$ i $1 \leq k \leq n$. Zamenom datih vrednosti u jednakost $h_j = 0$, za $1 \leq j \leq n-1$ i $h_n = 1$ dobijamo i elemente prve vrste $g_{1j} = -\frac{d_{n-j}}{d_n}$ i $g_{1n} = -\frac{1}{d_n}$, $1 \leq j \leq n-1$. $\square$

Adjungovana matrica matrice C je

$$adj(C) = (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} d_{n-1} & d_{n-2} & d_{n-3} & \dots & d_1 & 1 \\ -d_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -d_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -d_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredimo koeficijente C_k adjungovane matrice

$$\widetilde{C}(\lambda) = \lambda^n C_0 + \lambda^{n-1} C_1 + \ldots + \lambda C_{n-2} + C_{n-1}$$

karakteristične matrice $\lambda I - C$ pomoću rekurentnih veza koje smo dobili u Kejli-Hamiltonovoj teoremi $C_0 = I$ i $C_k = C \cdot C_{k-1} + d_k I$ za $1 \leq k \leq n-1$.

Lema 4.11 *Koeficijenti* C_k, $1 \le k \le n-1$, *adjungovane matrice* $\widetilde{C}(\lambda)$ *su matrice oblika*

$$\begin{bmatrix}
d_k & d_{k-1} & d_{k-2} & \dots & d_2 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & d_k & d_{k-1} & \dots & d_3 & d_2 & d_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & d_k & \dots & d_4 & d_3 & d_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & d_k & d_{k-1} & d_{k-2} & \dots & d_2 & d_1 & 1 \\
-d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \dots & -d_{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_{k+2} & -d_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -d_n & \dots & -d_{k+3} & -d_{k+2} & -d_{k+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & & \ddots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & -d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \dots & -d_{k+1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_{k+2} & -d_{k+1} & 0
\end{bmatrix}.$$

Dokaz: Koeficijente C_k matrice $\widetilde{C}(\,\lambda\,)$ računamo pomoću rekurentnih veza $C_k = C \cdot C_{k-1} + d_k I$. Imamo da je $C_0 = I$. Za koeficijent C_1 važi $C_1 = C \cdot I + d_1 I$, odnosno

$$C_1 = \begin{bmatrix}
d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & d_1 & 1 \\
-d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \dots & -d_2 & 0
\end{bmatrix}.$$

Neka je

$$C_{k-1} = \begin{bmatrix}
d_{k-1} & d_{k-2} & \dots & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & d_{k-1} & \dots & d_2 & d_1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & d_{k-1} & d_{k-2} & \dots & d_1 & 1 \\
-d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -d_n & \dots & -d_{k+1} & -d_k & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_k & 0
\end{bmatrix}.$$

Označimo sa $(C_{k-1})_{\to j}$ j-tu vrstu matrice C_{k-1}, a sa $(C \cdot C_{k-1})_{\to j}$ j-tu vrstu proizvoda matrica C i C_{k-1}. Tada je $(C \cdot C_{k-1})_{\to j} = (C_{k-1})_{\to j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. I imamo da je

$$
\begin{aligned}
&(C_{k-1})_{\to n} \cdot C = \\
&= [\,\underbrace{0 \dots 0}_{k-2}\; -d_n \; -d_{n-1} \dots -d_{k+1} \; -d_k \;\; 0\,] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \dots & -d_2 & -d_1 \end{bmatrix} \\
&= [\,\underbrace{0 \dots 0}_{k-1}\; -d_n \; -d_{n-1} \dots -d_{k+1} \; -d_k\,].
\end{aligned}
$$

Kako je $C \cdot C_{k-1} = C_{k-1} \cdot C$, dobijena kolona predstavlja poslednju kolonu traženog proizvoda. Odakle zaključujemo

$$
C \cdot C_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & d_{k-1} & \dots & d_2 & d_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{k-1} & d_{k-2} & \dots & d_1 & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -d_n & \dots & -d_{k+1} & -d_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d_n & \dots & -d_{k+1} & -d_k \end{bmatrix}.
$$

Dodavanjem matrice $d_k I$ na proizvod $C \cdot C_{k-1}$ dobijamo da je

$$
C_k = \begin{bmatrix} d_k & d_{k-1} & \dots & d_2 & d_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_k & \dots & d_3 & d_2 & d_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_k & d_{k-1} & d_{k-2} & \dots & d_1 & 1 \\ -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -d_n & \dots & -d_{k+2} & -d_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -d_{k+3} & -d_{k+2} & -d_{k+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d_n & -d_{n-1} & \dots & -d_{k+1} & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square
$$

Teorema 4.12 *Linearni sistem operatorskih jednačina oblika*

$$\begin{aligned}
A(x_1) &= x_2 + \varphi_1\\
A(x_2) &= x_3 + \varphi_2\\
&\vdots\\
A(x_{n-1}) &= x_n + \varphi_{n-1}\\
A(x_n) &= -d_n x_1 - d_{n-1} x_2 - \ldots - d_1 x_n + \varphi_n,
\end{aligned}$$

svodi se na totalno redukovani sistem operatorskih jednačina oblika

$$\begin{aligned}
&\Delta_C(A)(x_1) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} d_j A^{n-k}(\varphi_{k-j})\\
&\vdots\\
&\Delta_C(A)(x_i) = \sum_{k=1}^{n+1-i}\sum_{j=0}^{k-1} d_j A^{n-k}(\varphi_{i-1+k-j}) - \sum_{k=n+2-i}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j A^{n-k}(\varphi_{i-1+k-j})\\
&\vdots\\
&\Delta_C(A)(x_n) = A^{n-1}(\varphi_n) - \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j A^{n-k}(\varphi_{n-1+k-j}),
\end{aligned}$$

gde je $d_0 = 1$.

Dokaz: Na osnovu Teoreme 4.1 imamo $\Delta_C(\vec{A})(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \cdot \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi})$. Zatim važi

$$C_{k-1} \cdot \vec{A}^{n-k}(\vec{\varphi}) =$$

$$\begin{bmatrix}
d_{k-1} & d_{k-2} & \ldots & d_1 & 1 & \ldots & 0 & 0\\
0 & d_{k-1} & \ldots & d_2 & d_1 & \ldots & 0 & 0\\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & d_{k-1} & d_{k-2} & \ldots & d_1 & 1\\
-d_n & -d_{n-1} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
0 & -d_n & \ldots & -d_k & 0 & \ldots & 0 & 0\\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & \vdots\\
0 & 0 & \ldots & -d_n & -d_{n-1} & \ldots & -d_k & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
A^{n-k}(\varphi_1)\\
A^{n-k}(\varphi_2)\\
\vdots\\
A^{n-k}(\varphi_{k-1})\\
A^{n-k}(\varphi_k)\\
A^{n-k}(\varphi_{k+1})\\
\vdots\\
A^{n-k}(\varphi_n)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum_{j=0}^{k-1} d_j A^{n-k}(\varphi_{k-j})\\
\vdots\\
\sum_{j=0}^{k-1} d_j A^{n-k}(\varphi_{n-j})\\
-\sum_{j=k}^{n} d_j A^{n-k}(\varphi_{n+1-j})\\
\vdots\\
-\sum_{j=k}^{n} d_j A^{n-k}(\varphi_{n+k-1-j})
\end{bmatrix}.$$

Odakle zaključujemo da je

$$\Delta_C(A)(x_1) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} d_j A^{n-k}(\varphi_{k-j})$$

$$\vdots$$

$$\Delta_C(A)(x_i) = \sum_{k=1}^{n+1-i}\sum_{j=0}^{k-1} d_j A^{n-k}(\varphi_{i-1+k-j}) - \sum_{k=n+2-i}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j A^{n-k}(\varphi_{i-1+k-j})$$

$$\vdots$$

$$\Delta_C(A)(x_n) = A^{n-1}(\varphi_n) - \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j A^{n-k}(\varphi_{n-1+k-j}). \square$$

Drugi način da se polazni sistem svede na totalno redukovani sistem zahteva prelazak na novu bazu u kojoj je matrica sistema u Žordanovoj formi i da se primeni Teorema 3.3. U radovima [3] i [4] dat je postupak za određivanje matrice transformacije S koja ostvaruje sličnost između matrice C i njene Žordanove kanonske forme J. Neka je $v(\lambda) = [1\ \lambda \ldots \lambda^{n-1}]^T \in K^{n\times 1}$. Karakterističnu jednačinu $\Delta_C(\lambda) = 0$, možemo zapisati u matričnom obliku

$$(\lambda I - C)\cdot v(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & -1 \\ d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \ldots & d_2 & \lambda + d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_C(\lambda) \end{bmatrix} = \mathbb{O}.$$

Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ različite sopstvene vrednosti matrice C. Za svaku od sopstvenih vrednosti λ_i, $1 \le i \le t$, važi $\Delta_C(\lambda_i) = 0$ pa iz prethodne matrične jednačine zaključujemo da su $v(\lambda_1), v(\lambda_2), \ldots, v(\lambda_t)$ sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenim vrednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$. Kako je rang matrica $\lambda_i I - C$ jednak $n-1$ svakoj sopstvenoj vrednosti odgovara tačno jedan sopstveni vektor. Pa zaključujemo da je geometrijska višestrukost svake sopstvene vrednosti jednaka 1, te Žordanova forma J matrice C ima t blokova. Odredimo uopštene sopstvene vektore koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ_i. Broj uopštenih sopstvenih vektora koji odgovaraju λ_i je jednak višestrukost sopstvene vrednosti λ_i u karakterističnom polinomu. Označimo sa k_i višestrukost korena λ_i u polinomu $\Delta_C(\lambda)$. Tada je

$$\Delta_C(\lambda_i) = \Delta'_C(\lambda_i) = \ldots = \Delta_C^{(k_i-1)}(\lambda_i) = 0 \ \text{ i } \ \Delta_C^{(k_i)}(\lambda_i) \neq 0.$$

Diferenciranjem odgovarajuće matrične jednačine po λ dobijamo

$$((\lambda I - C)\cdot v(\lambda))' = v(\lambda) + (\lambda I - C)\cdot v'(\lambda) = \mathbb{O},$$

odakle zaključujemo da je $v'(\lambda_i) = [0\ 1\ 2\lambda_i \ldots (n-1)\lambda_i^{n-2}]^T$ uopšteni sopstveni vektor. Zatim iz

$$((\lambda I - C)\cdot v(\lambda))'' = 2v'(\lambda) + (\lambda I - C)\cdot v''(\lambda) = \mathbb{O},$$

zaključujemo da je $\frac{1}{2}v''(\lambda_i) = \frac{1}{2}[0\ 0\ 2\ 6\lambda_i \ldots (n-1)(n-2)\lambda^{n-3}]^T$ sledeći uopšteni sopstveni vektor. Nastavljajući ovaj postupak iz jednakosti

$$((\lambda I - C)\cdot v(\lambda))^{(k_i-1)} = (k_i-1)v^{(k_i-2)}(\lambda) + (\lambda I - C)\cdot v^{(k_i-1)}(\lambda) = \mathbb{O},$$

i činjenice da je $\frac{1}{(k_i-2)!}v^{(k_i-2)}(\lambda_i)$ uopšteni sopstveni vektor zaključujemo da je i $\frac{1}{(k_i-1)!}v^{(k_i-1)}(\lambda_i)$ uopšteni sopstveni vektor. Neka je S matrica čije su kolone ovako konstruisani uopšteni sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenim vrednostima λ_i, $1 \le i \le t$. Tada je $J = S^{-1}\cdot C\cdot S$ matrica u Žordanovoj formi, koja ima t blokova, po jedan za svaku sopstvenu vrednost i dimenzija svakog bloka je algebarska višestrukost odgovarajuće sopstvene vrednosti.

Na osnovu Leme 3.6 sistem

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$$

možemo svesti na sistem

$$\bigwedge_{i=1}^{k}\Big(\vec{A}(\vec{z}_i) = C_i\vec{z}_i + \vec{\nu}_i\Big),$$

gde je $C = C_1\oplus\ldots\oplus C_k$ racionalna kanonska forma matrice B, $\vec{\nu}_i = [\nu_{\ell_i+1}\ldots\nu_{\ell_i+n_i}]^T$ i $\vec{z}_i = [z_{\ell_i+1}\ldots z_{\ell_i+n_i}]^T$, za $l_1 = 0$ i $l_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j$, $2 \le i \le k$. Na osnovu Teoreme 4.12 podsisteme $\vec{A}(\vec{z}_i) = C_i\vec{z}_i + \vec{\nu}_i$ koji odgovaraju pratećim matricama C_i polinoma $\Delta_{C_i}(\lambda) = \lambda^{n_i} + d_{i,1}\lambda^{n_i-1} + \ldots + d_{i,n_i-1}\lambda + d_{i,n_i}$ možemo transformisati u totalno redukovane sisteme

$$\begin{aligned}
\Delta_{C_i}(A)(z_{l_i+1}) &= \sum_{k=1}^{n_i}\sum_{j=0}^{k-1} d_{i,j}A^{n_i-k}(\nu_{l_i+k-j})\\
&\vdots\\
\Delta_{C_i}(A)(z_{l_i+t}) &= \sum_{k=1}^{n_i+1-t}\sum_{j=0}^{k-1} d_{i,j}A^{n_i-k}(\nu_{l_i+t-1+k-j}) - \sum_{k=n_i+2-t}^{n_i}\sum_{j=k}^{n_i} d_{i,j}A^{n_i-k}(\nu_{l_i+t-1+k-j})\\
&\vdots\\
\Delta_{C_i}(A)(z_{l_i+n_i}) &= A^{n_i-1}(\nu_{l_i+n_i}) - \sum_{k=2}^{n_i}\sum_{j=k}^{n_i} d_{i,j}A^{n_i-k}(\nu_{l_i+n_i-1+k-j}),
\end{aligned}$$

gde je $d_{i,0} = 1$. Odakle dobijamo još jedan oblik totalne redukcije polaznog sistema.

Zaista, promenom baze sistem transformišemo na sistem sa matricom u racionalnoj kanonskoj formi, a zatim primenjujemo metod totalne redukcije na podsisteme koji odgovaraju blokovima racionalne forme i dobijamo sistem čije su jednačine operatorske jednačine višeg reda po jednoj promenljivoj. Homogeni delovi datih jednačina odgovaraju invarijantnim faktorima matrice B.

Takođe svaki od podsistema $\vec{A}(\vec{z}_i) = C_i\vec{z}_i + \vec{\nu}_i$, možemo prelaskom na novu bazu transformisati u sistem sa matricom u Žordanovoj formi. Neka su S_i matrice konstruisane kao u prethodnom delu pomoću uopštenih sopstvenih vektora matrice C_i. Tada je $J_i = S_i^{-1} \cdot C_i \cdot S_i$ matrica u Žordanovoj formi i $J_i = J_{i,1} \oplus J_{i,2} \oplus \ldots \oplus J_{i,t_i}$. Blokovi $J_{i,1}, J_{i,2}, \ldots, J_{i,t_i}$ odgovaraju različitim korenima polinoma $\Delta_{C_i}(\lambda)$, a njihove dimenzije su jednake višestrukostima datih korena. Ako označimo sa S direktnu sumu matrica S_i, odnosno ako je $S = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_k$, onda je $J = S^{-1} \cdot C \cdot S$ Žordanova kanonska forma matrica B. Primenom Teoreme 3.3. dobijamo totalno redukovani sistem.

5 Parcijalna i totalna redukcija linearnih sistema sa različitim operatorima

U ovom poglavlju proširićemo istraživanje i na sisteme linearnih operatorskih jednačina sa konstantnim koeficijentima u kojima figurišu različiti operatori. Koristićemo slične tehnike kao i u prethodnim sekcijama. Prvo ćemo skicirati slučajeve sa dve i tri operatorske jednačine, a zatim ćemo prikazati opšti slučaj totalne redukcije. Takođe ćemo prikazati i metod parcijalne redukcije za sisteme kod kojih je matrica sistema u formi prateće matrice.

5.1 Totalna redukcija linearnih sistema dve operatorske jednačine

Neka je K polje i V vektorski prostor nad poljem K, neka su $A_1 : V \longrightarrow V$ i $A_2 : V \longrightarrow V$ linearni operatori za koje važi $A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1$. Razmatramo linearne sisteme operatorskih jednačina po promenljivim x_1 i x_2 oblika

$$\begin{aligned} A_1(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \varphi_1 \\ A_2(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \varphi_2, \end{aligned}$$

za $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in K$ i $\varphi_1, \varphi_2 \in V$. Dati sistem možemo zapisati u vektorskom obliku $\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$, gde je $\vec{x} = [x_1\ x_2]^T$ kolona nepoznatih, $\vec{A} : V^2 \longrightarrow V^2$ vektorski operator definisan pokoordinatno $\vec{A} = [A_1\ A_2]^T$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ matrica sistema i $\vec{\varphi} = [\varphi_1\ \varphi_2]^T$ kolona slobodnih članova. Od interesa nam je i matrični zapis polaznog sistema

$$\begin{bmatrix} A_1 - b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & A_2 - b_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}.$$

Označimo sa $B(\vec{A}) = B(A_1, A_2)$ matricu $\begin{bmatrix} A_1 - b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & A_2 - b_{22} \end{bmatrix}$.

Množenjem prethodne jednačine adjungovanom matricom $\widetilde{B}(\vec{A})$ matrice $B(\vec{A})$ dobijamo $(\Delta_B(\vec{A})I)\ \vec{x} = \widetilde{B}(\vec{A}) \cdot \vec{\varphi}$, gde je $\Delta_B(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1\lambda_2 - (b_{22}\lambda_1 + b_{11}\lambda_2) + detB$. Polinom $\Delta_B(\lambda_1, \lambda_2)$ nazivamo ***uopštenim karakterističnim polinomom*** matrice B po dve promenljive. Pa kako je $\widetilde{B}(\vec{A}) = \begin{bmatrix} A_2 - b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & A_1 - b_{11} \end{bmatrix}$, imamo

$$\begin{bmatrix} \Delta_B(\vec{A}) & 0 \\ 0 & \Delta_B(\vec{A}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 - b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & A_1 - b_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{aligned} \Delta_B(\vec{A})(x_1) &= A_2(\varphi_1) - b_{22}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 \\ \Delta_B(\vec{A})(x_2) &= A_1(\varphi_2) - b_{11}\varphi_2 + b_{21}\varphi_1. \end{aligned}$$

Primetimo da važi

$$A_2(\varphi_1) - b_{22}\varphi_1 + b_{12}\varphi_2 = \begin{bmatrix} \boxed{A_2(\varphi_1)} & b_{12} \\ A_2(\varphi_2) & b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \varphi_1 & b_{12} \\ \varphi_2 & b_{22} \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$A_1(\varphi_2) - b_{11}\varphi_2 + b_{21}\varphi_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & A_1(\varphi_1) \\ b_{21} & \boxed{A_1(\varphi_2)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \varphi_1 \\ b_{21} & \varphi_2 \end{matrix}} \end{bmatrix},$$

pri čemu u obzir uzimamo samo uokvirene glavne minore. Ako definišemo vektorski operator $\vec{\Delta}_B$ sa $\vec{\Delta}_B = [\Delta_B \ \Delta_B]^T$ i ako označimo sa B_i matricu dobijenu od matrice B zamenom i-te kolone sa kolonom slobodnih članova $\vec{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$, $1 \leq i \leq 2$, dobijeni sistem možemo zapisati u vektorskom obliku

$$\vec{\Delta}_B(\vec{x}) = \begin{bmatrix} A_2(\varphi_1) \\ A_1(\varphi_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \end{bmatrix}.$$

Matricu $\widetilde{B}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \lambda_2 - b_{22} & b_{12} \\ b_{21} & \lambda_1 - b_{11} \end{bmatrix}$ možemo zapisati i kao polinom po promenljivim λ_1 i λ_2 sa matričnim koeficijentima. Odnosno važi da je

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(\lambda_1, \lambda_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_2 - \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & adj[b_{22}] \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} adj[b_{11}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_2 - adjB. \end{aligned}$$

Dato razmatranje se može naći i u radu [25].

5.2 Totalna redukcija linearnih sistema tri operatorske jednačine

Razmotrimo sada totalnu redukciju linearnog sistema tri operatorske jednačine sa konstantnim koeficijentima po promenljivim x_1, x_2 i x_3

$$\begin{aligned} A_1(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \varphi_1 \\ A_2(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + \varphi_2 \\ A_3(x_3) &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + \varphi_3, \end{aligned}$$

uz pretpostavku da su linearni operatori A_1, A_2 i A_3 komutativni. Dati sistem možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} A_1 - b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & A_2 - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & A_3 - b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Označimo sa $B(\vec{A}) = B(A_1, A_2, A_3)$ matricu $\begin{bmatrix} A_1 - b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & A_2 - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & A_3 - b_{33} \end{bmatrix}$, a sa $\widetilde{B}(\vec{A}) = \widetilde{B}(A_1, A_2, A_3)$ adjungovanu matrice date matrice. Množenjem prethodne jednačine sa $\widetilde{B}(\vec{A})$ dobijamo $(\Delta_B(\vec{A})I)\ \vec{x} = \widetilde{B}(\vec{A})\ \vec{\varphi}$, gde je $\Delta_B(\vec{A}) = \Delta_B(A_1, A_2, A_3)$ linearni operator dobijen zamenom promenljivih λ_1, λ_2 i λ_3 redom sa operatorima A_1, A_2 i A_3 u polinomu

$$\begin{aligned} \Delta_B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - (b_{33}\lambda_1\lambda_2 + b_{22}\lambda_1\lambda_3 + b_{11}\lambda_2\lambda_3) \\ &+ \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} \lambda_2 + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \lambda_3 - detB. \end{aligned}$$

Polinom $\Delta_B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ nazivamo ***uopštenim karakterističnim polinomom*** matrice B po tri promenljive. Primetimo da su koeficijenti uopštenog karakterističnog polinoma glavni minori matrice B, i to uz monome stepena k imamo glavne minore reda $3 - k$, $1 \leq k \leq 3$, koje dobijamo izbacivanjem onih vrsta i kolona u kojima se nalaze promenljive koje čine dati monom. Ako označimo algebarske kofaktore matrice $\widetilde{B}(\vec{A})$ sa $B_{ij}(\vec{A})$, $1 \leq i, j \leq 3$, imamo da važi

$$B_{11}(\vec{A}) = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} A_2 - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{32} & A_3 - b_{33} \end{vmatrix},\ B_{21}(\vec{A}) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{32} & A_3 - b_{33} \end{vmatrix},\ B_{31}(\vec{A}) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -b_{12} & -b_{13} \\ A_2 - b_{22} & -b_{23} \end{vmatrix},$$

$$= (A_2 - b_{22})(A_3 - b_{33}) - b_{23}b_{32} \qquad = b_{12}A_3 + B_{21} \qquad = b_{13}A_2 + B_{31}$$

$$= A_3 \circ A_2 - (b_{22}A_3 + b_{33}A_2) + B_{11}$$

$$B_{12}(\vec{A})=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-b_{21} & -b_{23}\\ -b_{31} & A_3-b_{33}\end{vmatrix},\quad B_{22}(\vec{A})=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}A_1-b_{11} & -b_{13}\\ -b_{31} & A_3-b_{33}\end{vmatrix},\quad B_{32}(\vec{A})=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}A_1-b_{11} & -b_{13}\\ -b_{21} & -b_{23}\end{vmatrix},$$

$$=b_{21}A_3+B_{12}\qquad =(A_1-b_{11})(A_3-b_{33})-b_{13}b_{31}\qquad =b_{23}A_1+B_{32}$$

$$=A_3\circ A_1-(b_{11}A_3+b_{33}A_1)+B_{22}$$

$$B_{13}(\vec{A})=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-b_{21} & A_2-b_{22}\\ -b_{31} & -b_{32}\end{vmatrix},\quad B_{23}(\vec{A})=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}A_1-b_{11} & -b_{12}\\ -b_{31} & -b_{32}\end{vmatrix},\quad B_{33}(\vec{A})=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}A_1-b_{11} & -b_{12}\\ -b_{21} & A_2-b_{22}\end{vmatrix},$$

$$=b_{31}A_2+B_{13}\qquad =b_{32}A_1+B_{23}\qquad =(A_1-b_{11})(A_2-b_{22})-b_{12}b_{21}$$

$$=A_2\circ A_1-(b_{11}A_2+b_{22}A_1)+B_{33}$$

gde su B_{ij}, $1\leq i,j\leq 3$ algebarski kofaktori matrice sistema B. Množenjem sistema datog u matričnom obliku sa adjungovanom matricom dobijamo

$$\begin{bmatrix}\Delta_B(\vec{A}) & 0 & 0\\ 0 & \Delta_B(\vec{A}) & 0\\ 0 & 0 & \Delta_B(\vec{A})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}(\vec{A}) & B_{21}(\vec{A}) & B_{31}(\vec{A})\\ B_{12}(\vec{A}) & B_{22}(\vec{A}) & B_{32}(\vec{A})\\ B_{13}(\vec{A}) & B_{23}(\vec{A}) & B_{33}(\vec{A})\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \varphi_3\end{bmatrix}.$$

Odakle dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta_B(\vec{A})(x_1) &= B_{11}(\vec{A})\varphi_1+B_{21}(\vec{A})\varphi_2+B_{31}(\vec{A})\varphi_3\\ &= A_3\circ A_2(\varphi_1)-(b_{22}A_3(\varphi_1)+b_{33}A_2(\varphi_1))+B_{11}\varphi_1\\ &+ b_{12}A_3(\varphi_2)+B_{21}\varphi_2+b_{13}A_2(\varphi_3)+B_{31}\varphi_3\\ &= A_3\circ A_2(\varphi_1)-[b_{22}A_3(\varphi_1)-b_{12}A_3(\varphi_2)]-[b_{33}A_2(\varphi_1)-b_{13}A_2(\varphi_3)]\\ &+ B_{11}\varphi_1+B_{21}\varphi_2+B_{31}\varphi_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_B(\vec{A})(x_2) &= B_{12}(\vec{A})\varphi_1+B_{22}(\vec{A})\varphi_2+B_{32}(\vec{A})\varphi_3\\ &= b_{21}A_3(\varphi_1)+B_{12}\varphi_1+b_{23}A_1(\varphi_3)+B_{32}\varphi_3\\ &+ A_3\circ A_1(\varphi_2)-(b_{11}A_3(\varphi_2)+b_{33}A_1(\varphi_2))+B_{22}\varphi_2\\ &= A_3\circ A_1(\varphi_2)-[b_{11}A_3(\varphi_2)-b_{21}A_3(\varphi_1)]-[b_{33}A_1(\varphi_2)-b_{23}A_1(\varphi_3)]\\ &+ B_{12}\varphi_1+B_{22}\varphi_2+B_{32}\varphi_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_B(\vec{A})(x_3) &= B_{13}(\vec{A})\varphi_1+B_{23}(\vec{A})\varphi_2+B_{33}(\vec{A})\varphi_3\\ &= b_{31}A_2(\varphi_1)+B_{13}\varphi_1+b_{32}A_1(\varphi_2)+B_{23}\varphi_2\\ &+ A_2\circ A_1(\varphi_3)-(b_{11}A_2(\varphi_3)+b_{22}A_1(\varphi_3))+B_{33}\varphi_3\\ &= A_2\circ A_1(\varphi_3)-[b_{11}A_2(\varphi_3)-b_{31}A_2(\varphi_1)]-[b_{22}A_1(\varphi_3)-b_{32}A_1(\varphi_2)]\\ &+ B_{13}\varphi_1+B_{23}\varphi_2+B_{33}\varphi_3.\end{aligned}$$

Što možemo vizuelno predstaviti u obliku sistema

$$\Delta_B(x_1) = \begin{bmatrix} \boxed{A_3 \circ A_2(\varphi_1)} & b_{12} & b_{13} \\ A_3 \circ A_2(\varphi_2) & b_{22} & b_{23} \\ A_3 \circ A_2(\varphi_3) & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} A_3(\varphi_1) & b_{12} & b_{13} \\ A_3(\varphi_2) & b_{22} & b_{23} \\ A_3(\varphi_3) & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_2(\varphi_1) & b_{12} & b_{13} \\ A_2(\varphi_2) & b_{22} & b_{23} \\ A_2(\varphi_3) & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \varphi_1 & b_{12} & b_{13} \\ \varphi_2 & b_{22} & b_{23} \\ \varphi_3 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_B(x_2) = \begin{bmatrix} b_{11} & A_3 \circ A_1(\varphi_1) & b_{13} \\ b_{21} & \boxed{A_3 \circ A_1(\varphi_2)} & b_{23} \\ b_{31} & A_3 \circ A_1(\varphi_3) & b_{33} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} b_{11} & A_3(\varphi_1) & b_{13} \\ b_{21} & A_3(\varphi_2) & b_{23} \\ b_{31} & A_3(\varphi_3) & b_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & A_1(\varphi_1) & b_{13} \\ b_{21} & A_1(\varphi_2) & b_{23} \\ b_{31} & A_1(\varphi_3) & b_{33} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} b_{11} & \varphi_1 & b_{13} \\ b_{21} & \varphi_2 & b_{23} \\ b_{31} & \varphi_3 & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_B(x_3) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & A_2 \circ A_1(\varphi_1) \\ b_{21} & b_{22} & A_2 \circ A_1(\varphi_2) \\ b_{31} & b_{32} & \boxed{A_2 \circ A_1(\varphi_3)} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & A_2(\varphi_1) \\ b_{21} & b_{22} & A_2(\varphi_2) \\ b_{31} & b_{32} & A_2(\varphi_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & A_1(\varphi_1) \\ b_{21} & b_{22} & A_1(\varphi_2) \\ b_{31} & b_{32} & A_1(\varphi_3) \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \varphi_1 \\ b_{21} & b_{22} & \varphi_2 \\ b_{31} & b_{32} & \varphi_3 \end{bmatrix},$$

pri čemu u razmatranje uzimamo samo uokvirene glavne minore. Adjungovanu matricu $\widetilde{B}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ matrice

$$B(\vec{\lambda}) = B(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ -b_{21} & \lambda_2 - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & \lambda_3 - b_{33} \end{bmatrix}$$

možemo zapisati kao polinom po tri promenljive λ_1, λ_2 i λ_3 sa matričnim koeficijentima u obliku

$$\begin{aligned} \widetilde{B}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \;\; = \;\; & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_1\lambda_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_2\lambda_3 \\ & - \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{33} & -b_{23} \\ 0 & -b_{32} & b_{22} \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} b_{33} & 0 & -b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -b_{31} & 0 & b_{11} \end{bmatrix} \lambda_2 + \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} & 0 \\ -b_{21} & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda_3 \right) \\ & + \;\; adjB. \end{aligned}$$

Primetimo da su koeficijenti matrice $\widetilde{B}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ posmatrane kao polinom po tri promenljive formirani pomoću adjungovanih matrica podmatrica matrice polaznog sistema B dobijenih brisanjem onih vrsta i onih kolona u kojima se nalaze promenljive koje sačinjavaju dati monom, i to tako što odgovarajuću adjungovanu matricu proširujemo nula vrstama i nula kolonama do dimenzije 3.
Dato razmatranje se može naći i u radu [25].

5.3 Totalna redukcija linearnih sistema sa različitim operatorima - opšti slučaj

U okviru ove sekcije razmatramo sistem operatorskih jednačina oblika

$$\begin{aligned}
A_1(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1\\
A_2(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2\\
&\vdots\\
A_n(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n,
\end{aligned}$$

uz pretpostavku da linearni operatori $A_1, A_2, \ldots, A_n$ komutiraju, tj. da važi $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$, za $1 \leq i, j \leq n$, gde su $b_{ij} \in K$ i $\varphi_i \in V$. Sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi},$$

gde je $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrica sistema, $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ldots x_n]^T$ kolona nepoznatih, $\vec{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ldots \varphi_n]^T$ kolona slobodnih članova i $\vec{A}$ vektorski operator definisan sa $\vec{A}(\vec{x}) = [A_1(x_1) \ A_2(x_2) \ldots A_n(x_n)]^T$. Matricu oblika

$$B(\vec{\lambda}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 - b_{11} & -b_{12} & \ldots & -b_{1n}\\ -b_{21} & \lambda_2 - b_{22} & \ldots & -b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -b_{n1} & -b_{n2} & \ldots & \lambda_n - b_{nn} \end{bmatrix}$$

nazivamo ***uopštenom karakterističnom matricom*** matrice B. Determinantu matrice $B(\vec{\lambda})$ nazivamo ***uopštenim karakterističnim polinomom*** i označavamo sa $\Delta_B(\vec{\lambda}) = \Delta_B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. U radu [55] može se naći slično uopštenje karakterističnog polinoma na polinom po dve promenljive. Ako uopšteni karakteristični polinom razmatramo kao polinom po promenljivim $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, onda je koeficijent uz monom $\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2}\ldots\lambda_{\psi_r}$, $1 \leq r \leq n$, $\psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_r$, jednak proizvodu $(-1)^{n-r}$ i glavnog minora matrice B koji se dobija izbacivanjem vrsta i kolona $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$. Zaista, ako sa S_n označimo skup svih permutacija brojeva $1, 2, \ldots, n$ i ako je $p(\phi)$ broj inverzija permutacije $\phi \in S_n$ onda imamo

$$\Delta_B(\vec{\lambda}) = \sum_{\phi \,\in\, S_n} (-1)^{p(\phi)} (\lambda_1 \delta_{1\phi_1} - b_{1\phi_1}) \ldots (\lambda_n \delta_{n\phi_n} - b_{n\phi_n}),$$

gde je $\delta_{i\phi_i} = \begin{cases} 1, & i = \phi_i\\ 0, & i \neq \phi_i \end{cases}$. Koeficijent uz $\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2}\ldots\lambda_{\psi_r}$ u polinomu $\Delta_B(\vec{\lambda})$ je izraz oblika $(-1)^{n-r} \sum\limits_{\phi \,\in\, S_n} (-1)^{p(\phi)}\, \delta_{\psi_1\phi_{\psi_1}} \delta_{\psi_2\phi_{\psi_2}} \ldots \delta_{\psi_r\phi_{\psi_r}} b_{\psi_{r+1}\phi_{\psi_{r+1}}} b_{\psi_{r+2}\phi_{\psi_{r+2}}} \ldots b_{\psi_n\phi_{\psi_n}}$.
Data suma je determinanta matrice koja se dobija od matrice B zamenom vrsta $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ vrstama čija je ψ_j-ta komponenta 1, a sve ostale su 0. Množenjem

ovih vrsta odgovarajućim brojevima i dodavanjem preostalim vrstama, dobijamo matricu kod koje su elementi na pozicijama $(\psi_1,\psi_1),(\psi_2,\psi_2),\ldots(\psi_r,\psi_r)$ jednaki 1 i koja u vrstama i kolonama $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_r$ ima sve ostale elemente jednake 0, ostali elementi date matrice jednaki su elementima polazne matrice B. Odnosno dobijamo glavni minor reda $n-r$ matrice B.

Označimo sa $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ adjungovanu matricu uopštene karakteristične matrice $B(\vec{\lambda})$ matrice B, a sa $\widetilde{B}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}$ koeficijent uz monom $\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2}\ldots\lambda_{\psi_r}$ u $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$, gde je $\psi_1<\psi_2<\ldots<\psi_r$, $\psi_{r+1}<\psi_{r+2}<\ldots<\psi_n$. Za matricu $B(\vec{\lambda})$ važi $B(\vec{\lambda})=\lambda_1E_{11}+\lambda_2E_{22}+\ldots+\lambda_nE_{nn}-B$, gde je E_{ii} matrica čiji su svi elementi jednaki 0 izuzev elementa na poziciji (i,i) koji je jednak 1.

Zaista, ako je $B=[b_{ij}]_{4\times4}$ proizvoljna 4×4 matrica sa koeficijentima u polju K, onda je $B(\vec{\lambda})=[\delta_{ij}\lambda_i-b_{ij}]_{4\times4}=\lambda_1E_{11}+\lambda_2E_{22}+\lambda_3E_{33}+\lambda_4E_{44}-B$ i

$$
\begin{aligned}
\Delta_B(\vec{\lambda}) &= \begin{vmatrix} \lambda_1-b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & -b_{14}\\ -b_{21} & \lambda_2-b_{22} & -b_{23} & -b_{24}\\ -b_{31} & -b_{32} & \lambda_3-b_{33} & -b_{34}\\ -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} & \lambda_4-b_{44}\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & -b_{14}\\ 0 & \lambda_2 & 0 & -b_{24}\\ 0 & 0 & \lambda_3 & -b_{34}\\ 0 & 0 & 0 & -b_{44}\end{vmatrix}\\
&+ \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & -b_{13} & 0\\ 0 & \lambda_2 & -b_{23} & 0\\ 0 & 0 & -b_{33} & 0\\ 0 & 0 & -b_{43} & \lambda_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & -b_{12} & 0 & 0\\ 0 & -b_{22} & 0 & 0\\ 0 & -b_{32} & \lambda_3 & 0\\ 0 & -b_{42} & 0 & \lambda_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & 0 & 0 & 0\\ -b_{21} & \lambda_2 & 0 & 0\\ -b_{31} & 0 & \lambda_3 & 0\\ -b_{41} & 0 & 0 & \lambda_4\end{vmatrix}\\
&+ \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & -b_{13} & -b_{14}\\ 0 & \lambda_2 & -b_{23} & -b_{24}\\ 0 & 0 & -b_{33} & -b_{34}\\ 0 & 0 & -b_{43} & -b_{44}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & -b_{12} & 0 & -b_{14}\\ 0 & -b_{22} & 0 & -b_{24}\\ 0 & -b_{32} & \lambda_3 & -b_{34}\\ 0 & -b_{42} & 0 & -b_{44}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & -b_{12} & -b_{13} & 0\\ 0 & -b_{22} & -b_{23} & 0\\ 0 & -b_{32} & -b_{33} & 0\\ 0 & -b_{42} & -b_{43} & \lambda_4\end{vmatrix}\\
&+ \begin{vmatrix} -b_{11} & 0 & 0 & -b_{14}\\ -b_{21} & \lambda_2 & 0 & -b_{24}\\ -b_{31} & 0 & \lambda_3 & -b_{34}\\ -b_{41} & 0 & 0 & -b_{44}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & 0 & -b_{13} & 0\\ -b_{21} & \lambda_2 & -b_{23} & 0\\ -b_{31} & 0 & -b_{33} & 0\\ -b_{41} & 0 & -b_{43} & \lambda_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & 0 & 0\\ -b_{21} & -b_{22} & 0 & 0\\ -b_{31} & -b_{32} & \lambda_3 & 0\\ -b_{41} & -b_{42} & 0 & \lambda_4\end{vmatrix}\\
&+ \begin{vmatrix} \lambda_1 & -b_{12} & -b_{13} & -b_{14}\\ 0 & -b_{22} & -b_{23} & -b_{24}\\ 0 & -b_{32} & -b_{33} & -b_{34}\\ 0 & -b_{42} & -b_{43} & -b_{44}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & 0 & -b_{13} & -b_{14}\\ -b_{21} & \lambda_2 & -b_{23} & -b_{24}\\ -b_{31} & 0 & -b_{33} & -b_{34}\\ -b_{41} & 0 & -b_{43} & -b_{44}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & 0 & -b_{14}\\ -b_{21} & -b_{22} & 0 & -b_{24}\\ -b_{31} & -b_{32} & \lambda_3 & -b_{34}\\ -b_{41} & -b_{42} & 0 & -b_{44}\end{vmatrix}\\
&+ \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & 0\\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & 0\\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & 0\\ -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} & \lambda_4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} & -b_{14}\\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & -b_{24}\\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & -b_{34}\\ -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} & -b_{44}\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 - \gamma_4\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \gamma_3\lambda_1\lambda_2\lambda_4 - \gamma_2\lambda_1\lambda_3\lambda_4 - \gamma_4\lambda_2\lambda_3\lambda_4\\
&+ \gamma_{34}\lambda_1\lambda_2 + \gamma_{24}\lambda_1\lambda_3 + \gamma_{23}\lambda_1\lambda_4 + \gamma_{14}\lambda_2\lambda_3 + \gamma_{13}\lambda_2\lambda_4 + \gamma_{12}\lambda_3\lambda_4\\
&- \gamma_{234}\lambda_1 - \gamma_{134}\lambda_2 - \gamma_{124}\lambda_3 - \gamma_{123}\lambda_4 + \gamma_{1234},
\end{aligned}
$$

gde su γ_i glavni minori prvog reda matrice B koji sadrže i-tu vrstu i kolonu, γ_{ij} glavni minori drugog reda matrice B koji sadrže i-tu i j-tu vrstu i kolonu, γ_{ijk} glavni minori trećeg reda matrice B koji sadrže i-tu, j-tu i k-tu vrstu i kolonu i gde je γ_{1234} determinanta matrice B, za $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ i $i \neq j \neq k$.
Iz jednakosti $B(\vec{\lambda})\cdot\widetilde{B}(\vec{\lambda}) = \Delta_B(\vec{\lambda})I$ zaključujemo da je adjungovana matrica uopštene karakteristične matrice 4×4 matrice B oblika

$$
\begin{aligned}
\widetilde{B}(\vec{\lambda}) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\widetilde{B}_0 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4\widetilde{B}_1 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\widetilde{B}_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4\widetilde{B}_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\widetilde{B}_4\\
&+ \lambda_3\lambda_4\widetilde{B}_{12} + \lambda_2\lambda_4\widetilde{B}_{13} + \lambda_2\lambda_3\widetilde{B}_{14} + \lambda_1\lambda_4\widetilde{B}_{23} + \lambda_1\lambda_3\widetilde{B}_{24} + \lambda_1\lambda_2\widetilde{B}_{34}\\
&+ \lambda_4\widetilde{B}_{123} + \lambda_3\widetilde{B}_{124} + \lambda_2\widetilde{B}_{134} + \lambda_1\widetilde{B}_{234} + \widetilde{B}_{1234},
\end{aligned}
$$

Dalje imamo

$$
\begin{aligned}
B(\vec{\lambda})\cdot\widetilde{B}(\vec{\lambda}) &= \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3\lambda_4E_{11}\cdot\widetilde{B}_0 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3\lambda_4E_{22}\cdot\widetilde{B}_0 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2\lambda_4E_{33}\cdot\widetilde{B}_0 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_0\\
&+ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4(E_{11}\cdot\widetilde{B}_1 + E_{22}\cdot\widetilde{B}_2 + E_{33}\cdot\widetilde{B}_3 + E_{44}\cdot\widetilde{B}_4 - B\cdot\widetilde{B}_0)\\
&+ \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3E_{11}\cdot\widetilde{B}_4 + \lambda_1^2\lambda_2\lambda_4E_{11}\cdot\widetilde{B}_3 + \lambda_1^2\lambda_3\lambda_4E_{11}\cdot\widetilde{B}_2 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3E_{22}\cdot\widetilde{B}_4\\
&+ \lambda_1\lambda_2^2\lambda_4E_{22}\cdot\widetilde{B}_3 + \lambda_2^2\lambda_3\lambda_4E_{22}\cdot\widetilde{B}_1 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2E_{33}\cdot\widetilde{B}_4 + \lambda_1\lambda_3^2\lambda_4E_{33}\cdot\widetilde{B}_2\\
&+ \lambda_2\lambda_3^2\lambda_4E_{33}\cdot\widetilde{B}_1 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_3 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_2 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_1\\
&+ \lambda_1\lambda_2\lambda_3(E_{11}\cdot\widetilde{B}_{14} + E_{22}\cdot\widetilde{B}_{24} + E_{33}\cdot\widetilde{B}_{34} - B\cdot\widetilde{B}_4)\\
&+ \lambda_1\lambda_2\lambda_4(E_{11}\cdot\widetilde{B}_{13} + E_{22}\cdot\widetilde{B}_{23} + E_{44}\cdot\widetilde{B}_{34} - B\cdot\widetilde{B}_3)\\
&+ \lambda_1\lambda_3\lambda_4(E_{11}\cdot\widetilde{B}_{12} + E_{33}\cdot\widetilde{B}_{23} + E_{44}\cdot\widetilde{B}_{24} - B\cdot\widetilde{B}_2)\\
&+ \lambda_2\lambda_3\lambda_4(E_{22}\cdot\widetilde{B}_{12} + E_{33}\cdot\widetilde{B}_{13} + E_{44}\cdot\widetilde{B}_{14} - B\cdot\widetilde{B}_1)\\
&+ \lambda_1^2\lambda_2E_{11}\cdot\widetilde{B}_{34} + \lambda_1^2\lambda_3E_{11}\cdot\widetilde{B}_{24} + \lambda_1^2\lambda_4E_{11}\cdot\widetilde{B}_{23} + \lambda_1\lambda_2^2E_{22}\cdot\widetilde{B}_{34}\\
&+ \lambda_2^2\lambda_3E_{22}\cdot\widetilde{B}_{14} + \lambda_2^2\lambda_4E_{22}\cdot\widetilde{B}_{13} + \lambda_1\lambda_3^2E_{33}\cdot\widetilde{B}_{24} + \lambda_2\lambda_3^2E_{33}\cdot\widetilde{B}_{14}\\
&+ \lambda_3^2\lambda_4E_{33}\cdot\widetilde{B}_{12} + \lambda_1\lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_{23} + \lambda_2\lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_{13} + \lambda_3\lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_{12}\\
&+ \lambda_1\lambda_2(E_{11}\cdot\widetilde{B}_{134} + E_{22}\cdot\widetilde{B}_{234} - B\cdot\widetilde{B}_{34}) + \lambda_1\lambda_3(E_{11}\cdot\widetilde{B}_{124} + E_{33}\cdot\widetilde{B}_{234} - B\cdot\widetilde{B}_{24})\\
&+ \lambda_1\lambda_4(E_{11}\cdot\widetilde{B}_{123} + E_{44}\cdot\widetilde{B}_{234} - B\cdot\widetilde{B}_{23}) + \lambda_2\lambda_3(E_{22}\cdot\widetilde{B}_{124} + E_{33}\cdot\widetilde{B}_{134} - B\cdot\widetilde{B}_{14})\\
&+ \lambda_2\lambda_4(E_{22}\cdot\widetilde{B}_{123} + E_{44}\cdot\widetilde{B}_{134} - B\cdot\widetilde{B}_{13}) + \lambda_3\lambda_4(E_{33}\cdot\widetilde{B}_{123} + E_{44}\cdot\widetilde{B}_{124} - B\cdot\widetilde{B}_{12})\\
&+ \lambda_1^2E_{11}\cdot\widetilde{B}_{234} + \lambda_2^2E_{22}\cdot\widetilde{B}_{134} + \lambda_3^2E_{33}\cdot\widetilde{B}_{124} + \lambda_4^2E_{44}\cdot\widetilde{B}_{123}\\
&+ \lambda_1(E_{11}\cdot\widetilde{B}_{1234} - B\cdot\widetilde{B}_{234}) + \lambda_2(E_{22}\cdot\widetilde{B}_{1234} - B\cdot\widetilde{B}_{134})\\
&+ \lambda_3(E_{33}\cdot\widetilde{B}_{1234} - B\cdot\widetilde{B}_{124}) + \lambda_4(E_{44}\cdot\widetilde{B}_{1234} - B\cdot\widetilde{B}_{123}) - B\cdot\widetilde{B}_{1234}.
\end{aligned}
$$

Upoređivanjem koeficijenata na levoj i desnoj strani jednakosti $B(\vec{\lambda})\cdot\widetilde{B}(\vec{\lambda}) = \Delta_B(\vec{\lambda})I$ i $\widetilde{B}(\vec{\lambda}) \cdot B(\vec{\lambda}) = \Delta_B(\vec{\lambda})I$ i činjenice da u uopštenom karakterističnom polinomu nema monoma koji ima promenljivu stepena većeg od jedan zaključujemo da je $E_{\psi_i\psi_i}\widetilde{B}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\dots\psi_n} = \mathbb{O}$ i $\widetilde{B}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\dots\psi_n}E_{\psi_i\psi_i} = \mathbb{O}$ za $1 \leq i \leq r \leq n$. Pa dobijamo da su svi elementi vrsta i kolona $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ matrice $\widetilde{B}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\dots\psi_n}$ jednaki nula. Upoređivanjem koeficijenata u slučaju $n = 4$ imamo da je

- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_0 = \mathbb{O}$, $E_{22} \cdot \widetilde{B}_0 = \mathbb{O}$, $E_{33} \cdot \widetilde{B}_0 = \mathbb{O}$ i $E_{44} \cdot \widetilde{B}_0 = \mathbb{O}$;
- $E_{22} \cdot \widetilde{B}_1 = \mathbb{O}$, $E_{33} \cdot \widetilde{B}_1 = \mathbb{O}$ i $E_{44} \cdot \widetilde{B}_1 = \mathbb{O}$;
- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_2 = \mathbb{O}$, $E_{33} \cdot \widetilde{B}_2 = \mathbb{O}$ i $E_{44} \cdot \widetilde{B}_2 = \mathbb{O}$;
- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_3 = \mathbb{O}$, $E_{22} \cdot \widetilde{B}_3 = \mathbb{O}$ i $E_{44} \cdot \widetilde{B}_3 = \mathbb{O}$;
- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_4 = \mathbb{O}$, $E_{22} \cdot \widetilde{B}_4 = \mathbb{O}$ i $E_{33} \cdot \widetilde{B}_4 = \mathbb{O}$;
- $E_{33} \cdot \widetilde{B}_{12} = \mathbb{O}$ i $E_{44} \cdot \widetilde{B}_{12} = \mathbb{O}$;
- $E_{22} \cdot \widetilde{B}_{13} = \mathbb{O}$ i $E_{44} \cdot \widetilde{B}_{13} = \mathbb{O}$;
- $E_{22} \cdot \widetilde{B}_{14} = \mathbb{O}$ i $E_{33} \cdot \widetilde{B}_{14} = \mathbb{O}$;
- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_{23} = \mathbb{O}$ i $E_{44} \cdot \widetilde{B}_{23} = \mathbb{O}$;
- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_{24} = \mathbb{O}$ i $E_{33} \cdot \widetilde{B}_{24} = \mathbb{O}$;
- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_{34} = \mathbb{O}$ i $E_{22} \cdot \widetilde{B}_{34} = \mathbb{O}$;
- $E_{44} \cdot \widetilde{B}_{123} = \mathbb{O}$;
- $E_{33} \cdot \widetilde{B}_{124} = \mathbb{O}$;
- $E_{22} \cdot \widetilde{B}_{134} = \mathbb{O}$;
- $E_{11} \cdot \widetilde{B}_{234} = \mathbb{O}$;

Pa za koeficijente adjungovane matrice $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ važi

- matrica $\widetilde{B}_0$ je nula matrica;
- sve vrste izuzev prve matrice $\widetilde{B}_1$ su nula vrste;
- sve vrste izuzev druge matrice $\widetilde{B}_2$ su nula vrste;
- sve vrste izuzev treće matrice $\widetilde{B}_3$ su nula vrste;

- sve vrste izuzev četvrte matrice $\widetilde{B}_4$ su nula vrste;
- treća i četvrta vrsta matrice $\widetilde{B}_{12}$ su nula vrste;
- druga i četvrta vrsta matrice $\widetilde{B}_{13}$ su nula vrste;
- druga i treća vrsta matrice $\widetilde{B}_{14}$ su nula vrste;
- prva i četvrta vrsta matrice $\widetilde{B}_{23}$ su nula vrste;
- prva i treća vrsta matrice $\widetilde{B}_{24}$ su nula vrste;
- prva i druga vrsta matrice $\widetilde{B}_{34}$ su nula vrste;
- četvrta vrsta matrice $\widetilde{B}_{123}$ je nula vrsta;
- treća vrsta matrice $\widetilde{B}_{124}$ je nula vrsta;
- druga vrsta matrice $\widetilde{B}_{134}$ je nula vrsta;
- prva vrsta matrice $\widetilde{B}_{234}$ je nula vrsta.

Pošto važi i da je $\widetilde{B}(\vec{\lambda}) \cdot B(\vec{\lambda}) = \Delta_B(\vec{\lambda})I$ zaključujemo da su i odgovarajuće kolone koeficijenata adjungovane matrice $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ uopštene karakteristične matrice $B(\vec{\lambda})$ polazne matrice B nula kolone.

Ostale koeficijente matrice $\widetilde{B}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}$ dobijamo izdvajanjem koeficijenata uz monom $\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2}\ldots\lambda_{\psi_r}$ u algebarskim kofaktorima matrice $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$. Kako su algebarski kofaktori matrice $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ linearni po svakoj koloni, imamo da će element na poziciji (i,j) matrice $\widetilde{B}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}$ biti jednak algebarskom kofaktoru elementa na poziciji (j,i) matrice kod koje su kolone $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ matrice $-B$ zamenjene kolonama $\vec{e}_{\psi_1}, \vec{e}_{\psi_2}, \ldots, \vec{e}_{\psi_n}$, gde je $\vec{e}_{\psi_i}$ kolona čija je ψ_i-ta komponenta 1, a sve ostale su 0, $1 \leq i \leq r$. Algebarski kofaktor elementa na poziciji (j,i) date matrice koji sadrži vrste i kolone $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ je jednak algebarskom kofaktoru elementa na poziciji $(j-l, i-k)$ matrice koja se dobija od matrice $-B$ izbacivanjem vrsta i kolona $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$. Brojevi k i l predstavljaju broj kolona, odnosno vrsta iz skupa $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ za koje važi redom $\psi_s < i$ i $\psi_t < j$, $1 \leq s, t \leq r$. Prema tome, ako matricu $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ posmatramo kao polinom sa matričnim koeficijentima po promenljivim $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, onda koeficijent matrice $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ uz monom $\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2}\ldots\lambda_{\psi_r}$ formiramo pomoću adjungovane matrice podmatrice matrice $-B$ dobijene brisanjem vrsta i kolona $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$, i to tako što odgovarajuću adjungovanu matricu proširujemo nula vrstama i nula kolonama na pozicijama $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$.

Ilustrujmo prethodno razmatranje u slučaju $n = 4$ na koeficijentu $\widetilde{B}_{24}$ uz monom $\lambda_1\lambda_3$ adjungovane matrice uopštene karakteristične matrice matrice B. Pokazali smo da su prva i treća vrsta, kao i prva i treća kolona date matrice nula vrste, odnosno nula kolone. Ostalo je još da odredimo elemente na pozicijama $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,2)$ i $(4,4)$. To ćemo uraditi određivanjem odgovarajućih algebarskih kofaktora matrice $B(\vec{\lambda})$ i izdvajanjem koeficijenata uz monom $\lambda_1\lambda_3$. Za algebarski kofaktor $B_{22}(\vec{\lambda})$ matrice $B(\vec{\lambda})$ elementa na poziciji $(2,2)$ važi

$$\begin{aligned}
B_{22}(\vec{\lambda}) &= \begin{vmatrix} \lambda_1 - b_{11} & -b_{13} & -b_{14} \\ -b_{31} & \lambda_3 - b_{33} & -b_{34} \\ -b_{41} & -b_{43} & \lambda_4 - b_{44} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & -b_{14} \\ 0 & \lambda_3 & -b_{34} \\ 0 & 0 & -b_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & -b_{13} & \\ 0 & -b_{33} & \\ 0 & -b_{43} & \lambda_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & 0 & 0 \\ -b_{31} & \lambda_3 & 0 \\ -b_{41} & 0 & \lambda_4 \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} \lambda_1 & -b_{13} & -b_{14} \\ 0 & -b_{33} & -b_{34} \\ 0 & -b_{43} & -b_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & 0 & -b_{14} \\ -b_{31} & \lambda_3 & -b_{34} \\ -b_{41} & 0 & -b_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{13} & 0 \\ -b_{31} & -b_{33} & 0 \\ -b_{41} & -b_{43} & \lambda_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{13} & -b_{14} \\ -b_{31} & -b_{33} & -b_{34} \\ -b_{41} & -b_{43} & -b_{44} \end{vmatrix} \\
&= \lambda_1\lambda_3\lambda_4 - b_{44}\lambda_1\lambda_3 - b_{33}\lambda_1\lambda_4 - b_{11}\lambda_3\lambda_4 \\
&+ \begin{vmatrix} -b_{33} & -b_{34} \\ -b_{43} & -b_{44} \end{vmatrix} \lambda_1 + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{14} \\ -b_{41} & -b_{44} \end{vmatrix} \lambda_3 + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{13} \\ -b_{31} & -b_{33} \end{vmatrix} \lambda_4 + \begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{13} & -b_{14} \\ -b_{31} & -b_{33} & -b_{34} \\ -b_{41} & -b_{43} & -b_{44} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Prema tome, koeficijent matrice $B_{22}(\vec{\lambda})$ na poziciji $(2,2)$ jednak je koeficijentu $-b_{44}$ uz monom $\lambda_1\lambda_3$, što je takođe koeficijent adjungovane matrice matrice $\begin{bmatrix} -b_{22} & -b_{24} \\ -b_{42} & -b_{44} \end{bmatrix}$ na poziciji $(1,1)$. Sličnim razmatranjem možemo zaključiti da će koeficijenti na pozicijama $(2,4)$, $(4,2)$ i $(4,4)$ matrice $\widetilde{B}_{24}$ biti redom jednaki determinantama

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -b_{14} \\ 0 & 0 & -b_{24} \\ 0 & 1 & -b_{34} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -b_{12} & 0 \\ 0 & -b_{32} & 1 \\ 0 & -b_{42} & 0 \end{vmatrix} \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & -b_{12} & 0 \\ 0 & -b_{22} & 0 \\ 0 & -b_{32} & 1 \end{vmatrix}.$$

Odnosno imamo da su odgovarajući koeficijenti jednaki redom b_{24}, b_{42} i $-b_{22}$ i to su koeficijenti adjungovane matrice matrice $\begin{bmatrix} -b_{22} & -b_{24} \\ -b_{42} & -b_{44} \end{bmatrix}$ na pozicijama $(1,2)$, $(2,1)$ i $(2,2)$.

Naredna teorema je uopštenje Teoreme 4.1.

Teorema 5.1 *Neka je dat sistem operatorskih jednačina u vektorskom obliku*

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$$

i neka je matrica $B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\dots\psi_n}$ koeficijent uz monom $\lambda_{\psi_1}\lambda_{\psi_2}\dots\lambda_{\psi_r}$ adjungovane matrice $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ uopštene karakteristične matrice $B(\vec{\lambda})$ matrice B predstavljene kao poli-

nom po promenljivim $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Tada važi

$$\vec{\Delta}_B(\vec{A})(\vec{x}) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1\le\psi_1<\ldots<\psi_r\le n} B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n} A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi}).$$

Dokaz: Ako u jednakosti $\Delta_B(\vec{\lambda})I = \widetilde{B}(\vec{\lambda}) \cdot B(\vec{\lambda})$ umesto $\vec{\lambda}$ stavimo $\vec{A}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\Delta_B(\vec{A})I &= \widetilde{B}(\vec{A}) \cdot B(\vec{A}) \\
\vec{\Delta}_B(\vec{A})(\vec{x}) &= \widetilde{B}(\vec{A}) \cdot (B(\vec{A})(\vec{x})) \\
&= \widetilde{B}(\vec{A}) \cdot (\vec{A}(\vec{x}) - B\vec{x}) \\
&= \widetilde{B}(\vec{A}) \cdot \vec{\varphi} \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1\le\psi_1<\ldots<\psi_r\le n} B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n} A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi}). \square
\end{aligned}$$

Matricu koja se dobija zamenom i-te kolone matrice B kolonom $\vec{v} = [v_1 \ldots v_n]^T$ označavamo sa $B^i(v_1, \ldots, v_n)$. Glavni minor matrice $B^i(v_1, \ldots, v_n)$ koji sadrži kolone $\psi_{r+1}, \psi_{r+2}, \ldots, \psi_n$ i za koji postoji j, $1 \le j \le n - r$, takvo da važi $i = \psi_{r+j}$, označavamo sa

$$\delta^i_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;\vec{v}) = \delta^i_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;v_1,\ldots,v_n) = \delta^i_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B^i(v_1,\ldots,v_n)),$$

$\psi_{r+1} < \psi_{r+2} < \ldots < \psi_n$. Ako je $i \ne \psi_{r+j}$, za svako j, $1 \le j \le n-r$, onda definišemo $\delta^i_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;\vec{v})$ sa $\delta^i_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;\vec{v}) = 0$.
Naredna lema daje vezu između koeficijenata $B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}$ matričnog polinoma $\widetilde{B}(\vec{\lambda}) = adj(B(\lambda))$ i glavnih minora $\delta^i_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;\vec{v})$.

Lema 5.2 *Za proizvoljnu kolonu $\vec{v} = [v_1\, v_2\, \ldots\, v_n]^T \in K^{n\times 1}$ važi*

$$B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n} \cdot \vec{v} = B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = (-1)^{n-r-1} \begin{bmatrix} \delta^1_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;\vec{v}) \\ \delta^2_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;\vec{v}) \\ \vdots \\ \delta^n_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B;\vec{v}) \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Adjungovana matrica podmatrice reda $n - r$ matrice $-B$ jednaka je proizvodu konstante $(-1)^{n-r-1}$ i adjungovane matrice odgovarajuće podmatrice matrice B. Laplasovim razvojem po i-toj koloni imamo da je proizvod adjungovane matrice matrice B i proizvoljne kolone $\vec{v}$ jednak koloni čija je i-ta komponenta jednaka determinanti date matrice kod koje je i-ta kolona zamenjena sa kolonom $\vec{v}$. Kako je matrica $B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}$ jednaka adjungovanoj matrici matrice dobijene od matrice $-B$ brisanjem vrsta i kolona $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ imamo da je i-ta komponenta proizvoda $B_{\psi_{r+1},\psi_{r+2},\ldots,\psi_n} \cdot \vec{v}$ jednaka proizvodu konstante $(-1)^{n-r-1}$ i determinante podmatrice matrice B koja sadrži vrste i kolone $\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n$ i kod koje je i-ta kolona zamenjena sa kolonom koju dobijamo od kolone $\vec{v}$ kod koje su izbrisanje vrste $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$. Odnosno imamo da je i-ta komponenta proizvoda $B_{\psi_{r+1},\psi_{r+2},\ldots,\psi_n} \cdot \vec{v}$ jednaka proizvodu konstante $(-1)^{n-r-1}$ i minora $\delta^i_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; \vec{v})$. $\square$

Napomena 5.3 *Za $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$ imamo da je zbir matrica koje predstavljaju koeficijente uz monome totalnog stepena r u adjungovanoj matici $\widetilde{B}(\vec{\lambda})$ jednak koeficijentu B_{n-r-1} adjungovane matrice karakteristične matrice $\lambda I - B$ matrice sistema B. Odakle zaključujemo da je Lema 4.4 specijalan slučaj prethodne leme.*

Naredne dve teoreme su uopštenja Teorema 4.6 i 4.7.

Teorema 5.4 *Sistem operatorskih jednačina dat u vektorskom obliku*

$$\vec{A}(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{\varphi}$$

svodi se na totalno redukovani sistem operatorskih jednačina u vektorskom obliku

$$\Delta_B(\vec{A})(\vec{x}) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1 \le \psi_1 < \ldots < \psi_r \le n} (-1)^{n-r-1} \vec{\delta}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})),$$

gde je

$$\vec{\delta}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})) = \begin{bmatrix} \delta^1_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})) \\ \delta^2_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})) \\ \vdots \\ \delta^n_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})) \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Teorema sledi primenom Teoreme 5.1 i Leme 5.2

$$\begin{aligned} \Delta_B(\vec{A})(\vec{x}) &\underset{5.1}{=} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1 \le \psi_1 < \ldots < \psi_r \le n} B_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n} A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi}) \\ &\underset{5.2}{=} \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1 \le \psi_1 < \ldots < \psi_r \le n} (-1)^{n-r-1} \vec{\delta}_{\psi_{r+1},\psi_{r+2},\ldots,\psi_n}(B; A_{\psi_1} \circ A_{\psi_2} \circ \ldots \circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})). \end{aligned}$$

$\square$

Prethodna teorema je ekvivalentna sledećem tvrđenju.

Teorema 5.5 *Linearni sistem operatorskih jednačina*

$$\begin{aligned} A_1(x_1) &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + \varphi_1 \\ A_2(x_2) &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + \varphi_2 \\ &\vdots \\ A_n(x_n) &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + \varphi_n, \end{aligned}$$

svodi se na totalno redukovani sistem operatorskih jednačina

$$\begin{aligned} &\Delta_B(\vec{A})(x_1) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1\le\psi_1<\ldots<\psi_r\le n} (-1)^{n-r-1}\delta^1{}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1}\circ A_{\psi_2}\circ\ldots\circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})) \\ &\vdots \\ &\Delta_B(\vec{A})(x_i) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1\le\psi_1<\ldots<\psi_r\le n} (-1)^{n-r-1}\delta^i{}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1}\circ A_{\psi_2}\circ\ldots\circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})) \\ &\vdots \\ &\Delta_B(\vec{A})(x_n) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{1\le\psi_1<\ldots<\psi_r\le n} (-1)^{n-r-1}\delta^n{}_{\psi_{r+1}\psi_{r+2}\ldots\psi_n}(B; A_{\psi_1}\circ A_{\psi_2}\circ\ldots\circ A_{\psi_r}(\vec{\varphi})). \end{aligned}$$

Prethodna teorema se može primeniti na probleme razmatrane u radovima [10, 11, 12, 30].

5.4 Parcijalna redukcija linearnih sistema sa različitim operatorima kod kojih je matrica sistema u formi prateće matrice

U okviru ove sekcije bavimo se sistemima operatorskih jednačina oblika

$$\begin{aligned} A_1(x_1) &= x_2 + \varphi_1 \\ A_2(x_2) &= x_3 + \varphi_2 \\ &\vdots \\ A_{n-1}(x_{n-1}) &= x_n + \varphi_{n-1} \\ A_n(x_n) &= -d_n x_1 - d_{n-1}x_2 - \ldots - d_1 x_n + \varphi_n, \end{aligned}$$

gde je $\vec{x} = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]^T \in K^{n\times1}$ kolona nepoznatih, $\vec{\varphi} = [\varphi_1\ \varphi_2\ \ldots\ \varphi_n]^T \in V^{n\times1}$ kolona slobodnih članova, $\vec{A}(\vec{x}) = [A_1(x_1)\, A_2(x_2)\, \ldots\, A_n(x_n)]^T$ vektorski operator definisan pokoordinatno pomoću linearnih operatora $A_i : V \to V$ vektorskog prostora V nad poljem K, $1 \le i \le n$, i gde je matrica sistema C prateća matrica polinoma

$$\Delta_C(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n.$$

Dati sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\vec{A}(\vec{x}) = C\vec{x} + \vec{\varphi}.$$

Naredna teorema se može naći i u radu [27].

Teorema 5.6 *Linearni sistem operatorskih jednačina*

$$\begin{array}{lcl} A_1(x_1) & = & x_2 + \varphi_1 \\ A_2(x_2) & = & x_3 + \varphi_2 \\ \vdots & & \\ A_{n-1}(x_{n-1}) & = & x_n + \varphi_{n-1} \\ A_n(x_n) & = & -d_nx_1 - d_{n-1}x_2 - \ldots - d_1x_n + \varphi_n, \end{array}$$

se svodi na parcijalno redukovani sistem

$$\begin{array}{rcl} L(\vec{A})(x_1) & = & \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\delta_k^1(C; \underbrace{A_{n-k+1}\circ\ldots\circ A_2}_{n-k}(\varphi_1), \ldots, \underbrace{A_{n-k}\circ\ldots\circ A_1}_{n-k}(\varphi_n)) \\ x_2 & = & A_1(x_1) - \varphi_1 \\ x_3 & = & A_2(x_2) - \varphi_2 \\ \vdots & & \\ x_{n-1} & = & A_{n-2}(x_{n-2}) - \varphi_{n-2} \\ x_n & = & A_{n-1}(x_{n-1}) - \varphi_{n-1}, \end{array}$$

gde je

$$L(\vec{A})(x_1) = A_n\circ A_{n-1}\circ\ldots\circ A_1(x_1) + d_1A_{n-1}\circ A_{n-2}\circ\ldots\circ A_1(x_1) + \ldots + d_{n-1}A_1(x_1) + d_nx_1$$

i gde je $\delta_k^1(C; A_{n-k+1}\circ\ldots\circ A_2(\varphi_1), \ldots, A_{n-k}\circ\ldots\circ A_1(\varphi_n))$ *suma glavnih minora reda* *k koji sadrže prvu kolonu matrice*

$$\begin{bmatrix} A_{n-k+1}\circ A_{n-k} \circ\ldots\circ A_2(\varphi_1) & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A_{n-k+2}\circ A_{n-k+1}\circ\ldots\circ A_3(\varphi_2) & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n\circ A_{n-1}\circ\ldots\circ A_{k+1}(\varphi_k) & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A_1\circ A_n \circ\ldots\circ A_{k+2}(\varphi_{k+1}) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_2\circ A_1 \circ\ldots\circ A_{k+3}(\varphi_{k+2}) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ A_{n-k-1}\circ A_{n-k-2}\circ\ldots\circ A_n(\varphi_{n-1}) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ A_{n-k} \circ A_{n-k-1}\circ\ldots\circ A_1(\varphi_n) & -d_{n-1} & -d_{n-2} & \ldots & -d_{n-k} & -d_{n-k-1} & -d_{n-k-2} & \ldots & -d_1 \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Iz prve jednačine sistema imamo $x_2 = A_1(x_1) - \varphi_1$, zamenom datog izraza u drugu jednačinu dobijamo $x_3 = A_2(x_2) - \varphi_2 = A_2 \circ A_1(x_1) - A_2(\varphi_1) - \varphi_2$. Zatim važi $x_4 = A_3 \circ A_2 \circ A_1(x_1) - A_3 \circ A_2(\varphi_1) - A_3(\varphi_2) - \varphi_3$. Pa svako x_k, $2 \le k \le n$, možemo izraziti u funkciji od x_1 sa

$$x_k = A_{k-1} \circ A_{k-2} \circ \ldots \circ A_1(x_1) - \sum_{j=1}^{k-1} \underbrace{A_{k-1} \circ A_{k-2} \circ \ldots \circ A_{j+1}}_{k-1-j}(\varphi_j).$$

Zamenom datih izraza u poslednju jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} A_n\circ A_{n-1}\circ\ldots\circ A_1(x_1) \;&+\; d_1 A_{n-1}\circ A_{n-2}\circ\ldots\circ A_1(x_1) + \ldots + d_{n-1}A_1(x_1) + d_n x_1 = \\ &+\; d_{n-1}\varphi_1 \\ &+\; d_{n-2}\Big(A_2(\varphi_1) + \varphi_2\Big) \\ &\;\;\vdots \\ &+\; d_2\Big(A_{n-2} \circ A_{n-3} \circ \ldots \circ A_2(\varphi_1) + \ldots + A_{n-2}(\varphi_{n-3}) + \varphi_{n-2}\Big) \\ &+\; d_1\Big(A_{n-1} \circ A_{n-2} \circ \ldots \circ A_2(\varphi_1) + \ldots + A_{n-1}(\varphi_{n-2}) + \varphi_{n-1}\Big) \\ &+\; d_0\Big(A_n \circ A_{n-1} \circ \ldots \circ A_2(\varphi_1) + \ldots + A_n(\varphi_{n-1}) + \varphi_n\Big), \end{aligned}$$

gde je $d_0 = 1$. Ako pregrupišemo elemente na desnoj strani jednakosti dobijamo operatorsku jednačinu

$$
\begin{aligned}
L(\vec{A})(x_1) &= \Big(d_0 A_n \circ A_{n-1} \circ \ldots \circ A_2(\varphi_1)\Big) \\
&+ \Big(d_0 A_n \circ A_{n-1} \circ \ldots \circ A_3(\varphi_2) + d_1 A_{n-1} \circ A_{n-2} \circ \ldots \circ A_2(\varphi_1)\Big) \\
&\vdots \\
&+ \Big(d_0 A_n(\varphi_{n-1}) + d_1 A_{n-1}(\varphi_{n-2}) + d_2 A_{n-2}(\varphi_{n-3}) + \ldots + d_{n-2} A_2(\varphi_1)\Big) \\
&+ \Big(d_0 \varphi_n + d_1 \varphi_{n-1} + d_2 \varphi_{n-2} + \ldots + d_{n-2}\varphi_2 + d_{n-1}\varphi_1\Big).
\end{aligned}
$$

Imamo da je $L(\vec{A})(x_1) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} d_{k-j} \underbrace{A_{n-k+j} \circ A_{n-k+j-1} \circ \ldots \circ A_{j+1}}_{n-k}(\varphi_j)$.

Na osnovu Leme 3.4 sledi da je

$$
\begin{aligned}
&\delta_k^1(C; A_{n-k+1} \circ \ldots \circ A_2(\varphi_1), \ldots, A_{n-k} \circ \ldots \circ A_1(\varphi_n)) = \\
&(-1)^{k+1} \textstyle\sum_{j=1}^{k} d_{k-j} A_{n-k+j} \circ A_{n-k+j-1} \circ \ldots \circ A_{j+1}(\varphi_j),
\end{aligned}
$$

odakle dobijamo da je

$$
L(\vec{A})(x_1) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \delta_k^1(C; A_{n-k+1} \circ \ldots \circ A_2(\varphi_1), \ldots, A_{n-k} \circ \ldots \circ A_1(\varphi_n)).
$$

Prema tome, zaključujemo da važi tvrđenje. $\square$

Operator L možemo dobiti i pomoću uopštenog karakterističnog polinoma matrice sistema C. Uopšteni karakteristični polinom matrice C jednak je

$$
\Delta_C(\vec{\lambda}) = \begin{vmatrix}
\lambda_1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & -1 \\
d_n & d_{n-1} & \ldots & d_2 & \lambda_n + d_1
\end{vmatrix}.
$$

Označimo sa $L(\vec{\lambda})$ polinom $\lambda_n \lambda_{n-1} \ldots \lambda_1 + d_1 \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \ldots \lambda_1 + \ldots + d_{n-1}\lambda_1 + d_n$. Množenjem poslednje kolone sa λ_{n-1} i dodavanjem pretposlednjoj, zatim množenjem tako dobijene kolone sa λ_{n-2}, i tako dalje nastavljajući ovaj postupak dobijamo da je

$$\Delta_C(\vec{\lambda}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ L(\vec{\lambda}) & \frac{L(\vec{\lambda})-d_n}{\lambda_1} & \dots & \lambda_n\lambda_{n-1}+d_1\lambda_{n-1}+d_2 & \lambda_n+d_1 \end{vmatrix},$$

a Laplasovim razvojem date determinante po prvoj koloni dobijamo da je $\Delta_C(\vec{\lambda}) = L(\vec{\lambda})$. Odavde zaključujemo i da je jedini glavni minor reda $n-r$ matrice C različit od nule jednak $(-1)^{n-r}d_{n-r}$.

6 Primena metoda redukcije na linearne sisteme diferencijalnih jednačina

U ovoj sekciji bavićemo se metodama rešavanja linearnih sistema diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima. Prvo ćemo prikazati standardnu metodu matričnog rešavanja linearnih sistema diferencijalnih jednačina, a zatim ćemo ilustrovati datu metodu i metode parcijalne i totalne redukcije izvedene u prethodnim sekcijama na konkretnim primerima.

Neka je $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ niz matrica, gde su $B_k = [b_{ij}^{(k)}]_{n\times n}$ matrice sa koeficijentima u polju $\mathbb{C}$. ***Matrični red*** $\sum_{k=0}^{+\infty} B_k$ je matrica $[\sum_{k=0}^{+\infty} b_{ij}^{(k)}]_{n\times n}$. Ako svaki od redova $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{ij}^{(k)}$, $1 \le i,j \le n$, konvergira i ako je $\sum_{k=0}^{+\infty} b_{ij}^{(k)} = b_{ij}$, onda kažemo da matrični red $\sum_{k=0}^{+\infty} B_k$ ***konvergira*** ka matrici $B = [b_{ij}]_{n\times n}$, i pišemo $\sum_{k=0}^{+\infty} B_k = B$.

Eksponent matrice B je kvadratna $n\times n$ matrica definisana sa $e^B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k$. Matrični red e^B je konvergentan za svaku matricu B. Navedimo i dokažimo neke od osobina eksponenta $n \times n$ matrice B, prema knjigama [34, 24] i [64, 65].

- Za matricu $\mathbb{O}$ važi $e^{\mathbb{O}} = I$.
- Ako za kvadratne $n\times n$ matrice A i B važi $A\cdot B = B\cdot A$,
  onda je $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.
- Za svaku $n\times n$ matricu B matrica e^B je invertibilna, tj. $(e^B)^{-1} = e^{-B}$.
- Ako je P invertibilna $n\times n$ matrica, onda je $P\cdot e^B \cdot P^{-1} = e^{P\cdot B\cdot P^{-1}}$.
- Ako je $D = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, onda je $e^D = diag(e^{d_1}, e^{d_2}, \ldots, e^{d_n})$.
- Ako je $n\times n$ matrica Q oblika

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  onda je

$$e^Q = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} Q^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \ldots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{1}{(n-4)!} & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ne obavezno različite, sopstvene vrednosti $n \times n$ matrice B, onda su $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ sopstvene vrednosti matrice e^B.
- Ako je $tr(B) = 0$, onda je $det(e^B) = 1$.
- Izvod matrice $M(t) = [m_{ij}(t)]_{n\times n}$ definišemo kao $M'(t) = \frac{d}{dt}M(t) = [m'_{ij}(t)]_{n\times n}$. Za matricu e^{tB} važi $(e^{tB})' = \frac{d}{dt}e^{tB} = Be^{tB}$.

Dokažimo gore navedene osobine.

- Sledi na osnovu definicije eksponenta matrice.
- Kako matrice A i B komutiraju važi binomna formula

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j \cdot B^{k-j}.$$

  Zatim imamo

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j \cdot B^{k-j} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} A^j \cdot B^{k-j} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{j!} A^j \cdot \frac{1}{i!} B^i \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} A^j \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} B^j = e^A\, e^B. \end{aligned}$$

- Kako matrice B i $-B$ komutiraju na osnovu prethodnog imamo

$$I = e^{\mathbb{O}} = e^{B-B} = e^B e^{-B} = e^{-B} e^B.$$

  Pa je matrica e^{-B} inverz matrice e^B.

- Kako je $P \cdot B^k \cdot P^{-1} = \underbrace{P \cdot B \cdot P^{-1}} \cdot \underbrace{P \cdot B \cdot P^{-1}} \cdots \underbrace{P \cdot B \cdot P^{-1}} = (P \cdot B \cdot P^{-1})^k$, imamo da je

$$P\cdot e^B \cdot P^{-1} = P \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k \cdot P^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P \cdot B^k \cdot P^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (P \cdot B \cdot P^{-1})^k = e^{P\cdot B\cdot P^{-1}}.$$

- Za matricu D važi da je $D^k = diag(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k)$ i za svako i, $1 \le i \le n$, imamo da je $e^{d_i} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_i^k}{k!}$, pa iz $e^D = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k$ sledi $e^D = diag(e^{d_1}, e^{d_2}, \ldots, e^{d_n})$.
- Za elemente $q_{ij}^{(k-1)}$ matrice Q^{k-1} važi $q_{ij}^{(k-1)} = 1$, za $j = i+k-1$ i $q_{ij}^{(k-1)} = 0$, za $j \ne i+k-1$, $1 \le i, j, k \le n$. Odnosno matrica Q^{k-1} ima sve jedinice na k-toj dijagonali iznad glavne i sve ostale elemente jednake nuli. Pa odatle direktno sledi da je $e^Q = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} Q^k$ datog oblika.

- Na osnovu Teoreme 2.24 svaka matrica B je slična matrici u Žordanovoj formi J, tj. postoji invertibilna $n \times n$ matrica P takva da je $B = P \cdot J \cdot P^{-1}$. Za matricu e^B važi $e^B = e^{P \cdot J \cdot P^{-1}} = P \cdot e^J \cdot P^{-1}$. Slične matrice imaju iste sopstvene vrednosti, pa imamo da su sopstvene vrednosti matrica e^B i e^J iste. Matrica J je blok dijagonalna,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_t \end{bmatrix},$$

gde je svaki od blokova J_i oblika

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad (1 \leq i \leq t).$$

Matricu J_i reda s možemo predstaviti kao sumu skalarne matrice $\lambda_i I$ i nilpotentne matrice Q, pa imamo

$$\begin{aligned} e^{J_i} &= e^{\lambda_i I + Q} = e^{\lambda_i I} e^Q = \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \lambda_i^k I \ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} Q^k \\ &= e^{\lambda_i} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(s-2)!} & \frac{1}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(s-3)!} & \frac{1}{(s-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(s-4)!} & \frac{1}{(s-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Za matricu e^J važi

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_t} \end{bmatrix},$$

odnosno imamo da je e^J gornje trougaona matrica sa elementima na dijagonali $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_t}$. Prema tome, sopstvene vrednosti date matrice i matrice e^B su $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_t}$.

- Neka je $\Delta_B(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n$ karakteristični polinom matrice B i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ne obavezno različite, sopstvene vrednosti matrice B. Tada je $d_1 = -tr(B)$ i $d_n = (-1)^n det(B)$, jer je $tr(B)$ suma glavnih minora reda 1 matrice B, a $det(B)$ suma glavnih minora reda n. Kako su koreni karakterističnog polinoma matrice B njene sopstvene vrednosti imamo da je $tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$ i $det(B) = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$. Prema tome, pošto su sopstvene vrednosti matrice e^B jednake $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$ imamo $det(e^B) = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\ldots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} = e^{tr(B)} = 1$, jer je $tr(B) = 0$ po pretpostavci.

- I na kraju imamo da važi

$$\begin{aligned}
(e^{tB})' &= \tfrac{d}{dt}e^{tB} = \tfrac{d}{dt}\textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{k!}(tB)^k \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty}\tfrac{1}{k!}\tfrac{d}{dt}(tB)^k = \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{1}{k!}kB(tB)^{k-1} \\
&= B\textstyle\sum_{k=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(k-1)!}(tB)^{k-1} = Be^{tB}.
\end{aligned}$$

Homogen linearni sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima po promenljivoj t je sistem oblika

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) + \ldots + b_{1n}x_n(t) \\
x_2'(t) &= b_{21}x_1(t) + b_{22}x_2(t) + \ldots + b_{2n}x_n(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= b_{n1}x_1(t) + b_{n2}x_2(t) + \ldots + b_{nn}x_n(t),
\end{aligned}$$

gde su $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ proizvoljan broj puta diferencijabilne funkcije. Sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\vec{x}\,'(t) = B\vec{x}(t),$$

gde je $\vec{x}(t) = [x_1(t)\ x_2(t) \ldots x_n(t)]^T$, $\vec{x}\,'(t) = [x_1'(t)\ x_2'(t) \ldots x_n'(t)]^T$ i $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ matrica sistema. Opšte rešenje datog sistema možemo izraziti u terminu eksponenta matrice sistema. Odnosno, kako za matricu sistema B važi $(e^{tB})' = Be^{tB}$, zaključujemo da je sa

$$\vec{x}(t) = e^{tB}C$$

dato opšte rešenje sistema, gde je $C = [C_1C_2 \ldots C_n]^T$ kolona konstanata. Prema tome, problem određivanja opšteg rešenja datog sistema je ekvivalentan određivanju eksponenta matrice sistema. Ako je $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \ldots \oplus J_k$ Žordanova kanonska forma matrice B, tj. ako postoji invertibilna $n \times n$ matrica P takva da važi $B = P \cdot J \cdot P^{-1}$, imamo da je opšte rešenje datog sistema

$$\vec{x}(t) = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} \cdot C,$$

gde za matricu e^{tJ} važi

$$e^{tJ} = e^{tJ_1} \oplus e^{tJ_2} \oplus \ldots \oplus e^{tJ_k} = e^{\lambda_1 t} e^{tQ_1} \oplus e^{\lambda_2 t} e^{tQ_2} \oplus \ldots \oplus e^{\lambda_k t} e^{tQ_k}$$

i

$$e^{tQ_i} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{s_i-2}}{(s_i-2)!} & \frac{t^{s_i-1}}{(s_i-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{s_i-3}}{(s_i-3)!} & \frac{t^{s_i-2}}{(s_i-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{t^{s_i-4}}{(s_i-4)!} & \frac{t^{s_i-3}}{(s_i-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

za $s_1 + s_2 + \ldots + s_t = n$.

Rešenje Košijevog problema

$$\vec{x}\,'(t) = B\vec{x}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,$$

gde je $\vec{x}_0 = [x_{01}\ x_{02}\ \ldots\ x_{0n}]^T$, je dato sa

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)B}\vec{x}_0.$$

Zaista, množenjem sleva jednakosti $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0) = e^{t_0 B}C$ sa $e^{-t_0 B}$ dobijamo da je $C = e^{-t_0 B}\vec{x}_0$, odakle je $\vec{x}(t) = e^{tB}C = e^{tB}e^{-t_0 B}\vec{x}_0 = e^{(t-t_0)B}\vec{x}_0$. Dato Košijevo rešenje možemo zapisati i na sledeći način

$$\vec{x}(t) = P \cdot e^{(t-t_0)J} \cdot P^{-1} \cdot \vec{x}_0$$

Nehomogen linearni sistem diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima po promenljivoj t je sistem oblika

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) + \ldots + b_{1n}x_n(t) + \varphi_1(t) \\ x_2'(t) &= b_{21}x_1(t) + b_{22}x_2(t) + \ldots + b_{2n}x_n(t) + \varphi_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= b_{n1}x_1(t) + b_{n2}x_2(t) + \ldots + b_{nn}x_n(t) + \varphi_n(t), \end{aligned}$$

gde su $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ i $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ proizvoljan broj puta diferencijabilne funkcije. Sistem možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\vec{x}\,'(t) = B\vec{x}(t) + \vec{\varphi}(t),$$

gde je $\vec{\varphi}(t) = [\varphi_1(t)\ \varphi_2(t) \ldots \varphi_n(t)]^T$.
Za proizvoljnu kolonu $\vec{v}(t) = [v_1(t)\, v_2(t)\ \ldots\ v_n(t)]^T$ važi $\vec{v}\,'(t) = [v_1'(t)\, v_2'(t)\ \ldots\ v_n'(t)]^T$ i

$$\int_{t_0}^{t} \vec{v}(s)ds = \int_{t_0}^{t} [v_1(s)\, v_2(s)\ \ldots\ v_n(s)]^T ds = \left[\int_{t_0}^{t} v_1(s)ds \int_{t_0}^{t} v_2(s)ds \ldots \int_{t_0}^{t} v_n(s)ds\right]^T.$$

Opšte rešenje sistema $\vec{x}\,'(t) = B\vec{x}(t) + \vec{\varphi}(t)$ je oblika

$$\vec{x}(t) = e^{tB}\Big(C + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)B}\varphi(s)ds\Big).$$

Zaista, množenjem sleva matrične jednačine $\vec{x}\,'(t) - B\vec{x}(t) = \vec{\varphi}(t)$ sa e^{-tB} dobijamo

$$e^{-tB}\vec{x}\,'(t) - Be^{-tB}\vec{x}(t) = (e^{-tB}\vec{x}(t))' = e^{-tB}\vec{\varphi}(t),$$

i integracijom date jednakosti na intervalu $[t_0, t]$ dobijamo

$$\int_{t_0}^{t} (e^{-sB}\vec{x}(s))'ds = \int_{t_0}^{t} e^{-sB}\vec{\varphi}(s)ds,$$

odnosno

$$e^{-tB}\vec{x}(t) - e^{-t_0B}\vec{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-sB}\vec{\varphi}(s)ds$$

Odakle zaključujemo da je

$$\vec{x}(t) = e^{tB}\Big(C + \int_{t_0}^{t} e^{-sB}\vec{\varphi}(s)ds\Big).$$

Takođe, opšte rešenje možemo izraziti i sa

$$\vec{x}(t) = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}\Big(C + \int_{t_0}^{t} P \cdot e^{-sJ} \cdot P^{-1}\vec{\varphi}(s)ds\Big).$$

Rešenje Košijevog problema

$$\vec{x}\,'(t) = B\vec{x}(t) + \vec{\varphi}(t), \;\; \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,$$

gde je $\vec{x}_0 = [x_{01}\ x_{02}\ \ldots\ x_{0n}]^T$, je dato sa

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)B}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)B}\vec{\varphi}(s)ds$$

ili sa

$$\vec{x}(t) = P \cdot e^{(t-t_0)J} \cdot P^{-1}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} P \cdot e^{(t-s)J} \cdot P^{-1}\vec{\varphi}(s)ds.$$

Ako rešavamo Košijev problem

$$\vec{x}\,'(t) = B\,\vec{x}(t) + \vec{\varphi}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,$$

metodom totalna redukcije, dodatnih $(n-1)^2$ početnih uslova dobijamo iz jednakosti

$$\vec{x}^{\,(i)}(t_0) = B^i\,\vec{x}(t_0) + \sum_{k=0}^{i-1} B^k \vec{\varphi}^{\,(i-1-k)}(t_0).$$

U narednim primerima koristićemo sledeću notaciju za elementarne transformacije na vrstama i kolonoma. Neka je $M(t)$ kvadratna $n \times n$ matrica sa koeficijentima u prstenu polinoma $\mathbb{C}[t]$.

- Množenje i-te vrste matrice $M(t)$ invertibilnim elementom u prstena $\mathbb{C}[t]$, odnosno nenula elementom u polja $\mathbb{C}$ ćemo označavati sa uR_i.
- Zamenu mesta i-toj i j-toj vrsti matrice $M(t)$ ćemo označavati sa $R_i \leftrightarrow R_j$.
- Zamenu i-te vrste matrice $M(t)$ sa zbirom i-te vrste i j-te vrste pomnožene sa $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ ćemo označavati sa $R_i + f(t)R_j \to R_i$.
- Množenje i-te kolone matrice $M(t)$ invertibilnim elementom u prstena $\mathbb{C}[t]$, odnosno nenula elementom u polja $\mathbb{C}$ ćemo označavati sa uC_i.
- Zamenu mesta i-toj i j-toj koloni matrice $M(t)$ ćemo označavati sa $C_i \leftrightarrow C_j$.
- Zamenu i-te kolone matrice $M(t)$ sa zbirom i-te kolone i j-te kolone pomnožene sa $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ ćemo označavati sa $C_i + f(t)C_j \to C_i$.

Primer 6.1 *Odrediti opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & 2x_1 & + & x_2 & + & 2e^t \\ x_2' & = & x_1 & + & 2x_2 & - & 3e^{4t}. \end{array}$$

Matrica sistema je $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom matrice B je $\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 - 1 = (\lambda-3)(\lambda-1)$. Kako B ima dve različite sopstvene vrednosti njena Žordanova kanonska forma je dijagonalna matrica $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Sopstveni vektori matice B su $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, pa je matrica transformacije $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, a njena inverzna matrica $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešavanje sistema nalaženjem eksponenta matrice sistema

Opšte rešenje polaznog sistema je dato formulom

$$\vec{x}(t) = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}\Big([\,C_1\; C_2\,]^T + \int_{t_0}^{t} P \cdot e^{-sJ} \cdot P^{-1} \cdot [\,2e^s \;\; -3e^{4s}\,]^T ds\Big).$$

Kako je

$$P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{bmatrix}$$

i kako je

$$[\,C_1\; C_2\,]^T + \int_{t_0}^{t} P \cdot e^{-sJ} \cdot P^{-1} \cdot [\,2e^s \;\; -3e^{4s}\,]^T\, ds =$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-3s}+e^{-s} & e^{-3s}-e^{-s} \\ e^{-3s}-e^{-s} & e^{-3s}+e^{-s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^s \\ -3e^{4s} \end{bmatrix} ds =$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} (2+2e^{-2s}+3e^{3s}-3e^s)\, ds \\ \int_{t_0}^{t} (-2+2e^{-2s}-3e^{3s}-3e^s)\, ds \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \widehat{C}_1 + 2t - e^{-2t} + e^{3t} - 3e^t \\ \widehat{C}_2 - 2t - e^{-2t} - e^{3t} - 3e^t \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)e^t + (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2)e^{3t} + (4t-2)e^t - 4e^{4t} \\ (-\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2)e^t + (\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2)e^{3t} - (4t+2)e^t - 8e^{4t} \end{bmatrix},$$

odnosno da je

$$\begin{aligned} x_1 &= -\widetilde{C}_1 e^t + \widetilde{C}_2 e^{3t} + (t - \tfrac{1}{2})e^t - e^{4t} \\ x_2 &= \widetilde{C}_1 e^t + \widetilde{C}_2 e^{3t} - (t + \tfrac{1}{2})e^t - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u Žordanovoj kanonskoj formi

Na osnovu Leme 3.1 dati sistem je ekvivalentan sistemu dve linearne diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivim

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^{4t} \end{bmatrix},$$

gde je $\vec{y} = [y_1 \; y_2]^T = P^{-1}[x_1 \; x_2]^T = P^{-1}\vec{x}$. Odnosno imamao da je

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - \tfrac{1}{2}(\;\;2e^t + 3e^{4t}) \\ y_2' &= 3y_2 - \tfrac{1}{2}(-2e^t + 3e^{4t}). \end{aligned}$$

Odakle zaključujemo da je

$$\begin{aligned} y_1 &= e^t\Big(C_1 - \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(2 + 3e^{3s})\,ds\Big) &&= e^t\Big(\widehat{C}_1 - \tfrac{1}{2}(2t + e^{3t})\Big) \\ y_2 &= e^{3t}\Big(C_2 - \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(-2e^{-2s} + 3e^{s})\,ds\Big) &&= e^{3t}\Big(\widehat{C}_2 - \tfrac{1}{2}(e^{-2t} + 3e^{t})\Big). \end{aligned}$$

Zatim imamo da je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widehat{C}_1e^t + \widehat{C}_2e^{3t} + \frac{1}{2}(2t-1)e^t - \;\; e^{4t} \\ \widehat{C}_1e^t + \widehat{C}_2e^{3t} - \frac{1}{2}(2t+1)e^t - 2e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u racionalnoj kanonskoj formi

Kako matrica B ima dve različite sopstvene vrednosti njena racionalna kanonska forma je prateća matrica karakterističnog polinoma $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Odredimo invertibilne matrice $P(t)$ i $Q(t)$ za koje važi da je $P(t)(tI-B)Q(t)$ Smitova normalna forma karakteristične matrice $tI - B$ matrice B, a zatim i matricu transformacije T koja ostvaruje sličnost između matrice B i njene racionalne forme C.
Nizom elementarnih transformacija vrsta i kolona $R_1 \leftrightarrow R_2$, $(t-2)R_1 + R_2 \to R_2$, $(t-2)C_1 + C_2 \to C_2$ i $-C_1 \to C_1$ matricu $tI - B$ svodimo na ekvivalentnu matricu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (t-1)(t-3) \end{bmatrix}$. Za matrice $P(t)$ i $Q(t)$ važi $P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t-2 \end{bmatrix}$ i $Q(t) = \begin{bmatrix} -1 & t-2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatim imamo da je $Q^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -1 & t-2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & t-2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_1 + (t-2)e_2 \\ e_2 \end{bmatrix}.$$

Odnosno $f_1 = -e_1 + (t-2)e_2 = -e_1 + e_2B - 2e_2 = -e_1 + (e_1 + 2e_2) - 2e_2 = 0$. Dalje imamo da je $t\,f_2 = t\,e_2 = e_1 + 2e_2$ odakle dobijamo matricu transformacije

$$T = \begin{bmatrix} f_2 \\ t\,f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_1 + 2e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

za koju važi $C = T \cdot B \cdot T^{-1}$. Na osnovu Leme 3.6 dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^{4t} \end{bmatrix},$$

gde je $\vec{z} = [z_1\ z_2]^T = T \cdot [x_1\ x_2]^T = T\vec{x}$. Odnosno dobijamo sistem

$$\begin{aligned} z_1' &= \qquad\qquad z_2 \qquad - 3e^{4t} \\ z_2' &= -3z_1 + 4z_2 + 2e^t - 6e^{4t}. \end{aligned}$$

Primenom Teoreme 3.7 dati sistem transformišemo u parcijalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B\left(\tfrac{d}{dt}\right)(z_1) &= \begin{bmatrix} \boxed{(-3e^{4t})'} & 1 \\ (2e^t - 6e^{4t})' & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -3e^{4t} & 1 \\ 2e^t - 6e^{4t} & 4 \end{matrix}} \end{bmatrix} \\ z_2 &= z_1' + 3e^{4t}, \end{aligned}$$

pri čemu u razmatranje uzimamo samo uokvirene minore. Dakle dobijamo

$$\begin{aligned} z_1'' - 4z_1' + 3z_1 &= \quad - \ 6e^{4t} + 2e^t \\ z_2 &= z_1' + \ 3e^{4t}. \end{aligned}$$

Opšte rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine $z_1'' - 4z_1' + 3z_1 = 0$ je $z_{1h} = C_1e^t + C_2e^{3t}$, a partikularno rešenje polazne jednačine $z_1'' - 4z_1' + 3z_1 = -6e^{4t} + 2e^t$ je oblika $z_{1p} = Ate^t + Be^{4t}$. Imamo

$$\begin{aligned} z_{1p} &= Ate^t + Be^{4t} \\ z_{1p}' &= (At + A)e^t + 4Be^{4t} \\ z_{1p}'' &= (At + 2A)e^t + 16Be^{4t}, \end{aligned}$$

odnosno

$$Ate^t + 2Ae^t + 16Be^{4t} - 4(Ate^t + Ae^t + 4Be^{4t}) + 3(Ate^t + Be^{4t}) = -6e^{4t} + 2e^t.$$

Odakle zaključujemo da je $A = -1$ i $B = -2$, tj. $z_1 = C_1e^t + C_2e^{3t} - te^t - 2e^{4t}$.

Zatim imamo da je $z_2 = C_1e^t + 3C_2e^{3t} - te^t - e^t - 5e^{4t}$. Sada vraćamo smenu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z_1 + z_2 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

i dobijamo

$$\begin{aligned} x_1 &= -C_1e^t + C_2e^{3t} + (t-1)e^t - e^{4t} \\ x_2 &= C_1e^t + C_2e^{3t} - te^t - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Rešavanje sistema primenom metode totalne redukcije

Na osnovu Teoreme 4.7 dati sistem se svodi na sistem dve diferencijalne jednačine drugog reda sa razdvojenim promenljivim

$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_1) = \left[\begin{array}{cc} \boxed{(2e^t)'} & 1 \\ (-3e^{4t})' & 2 \end{array}\right] - \left[\boxed{\begin{array}{cc} 2e^t & 1 \\ -3e^{4t} & 2 \end{array}}\right]$$

$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_2) = \left[\begin{array}{cc} 2 & (2e^t)' \\ 1 & \boxed{(-3e^{4t})'} \end{array}\right] - \left[\boxed{\begin{array}{cc} 2 & 2e^t \\ 1 & -3e^{4t} \end{array}}\right].$$

Odnosno imamo

$$\begin{aligned} x_1'' - 4x_1' + 3x_1 &= -2e^t - 3e^{4t} \\ x_2'' - 4x_2' + 3x_2 &= 2e^t - 6e^{4t}. \end{aligned}$$

Odakle dobijamo

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t} \\ x_2 &= C_3e^t + C_4e^{3t} - te^t - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Ostalo je još da nađemo vezu između konstanata C_1, C_2, C_3 i C_4. Iz prve jednačine polaznog sistema dobijamo

$$C_1e^t + 3C_2e^{3t} + te^t + e^t - 4e^{4t} = 2C_1e^t + 2C_2e^{3t} + 2te^t - 2e^{4t} + C_3e^t + C_4e^{3t} - te^t - 2e^{4t} + 2e^t,$$

odakle sledi $C_1 + C_3 + 1 = 0$ i $C_2 - C_4 = 0$. Prema tome, dobijamo opšte rešenje

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t - e^{4t} \\ x_2 &= -C_1e^t + C_2e^{3t} - (1+t)e^t - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Primer 6.2 *Odrediti opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 + 2\sin t \\ x_2' &= 2x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Matrica sistema je $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom matrice B je $\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2 = (\lambda - i)(\lambda + i)$. Kako B ima dve različite sopstvene vrednosti njena Žordanova kanonska forma je dijagonalna matrica $J = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$. Sopstveni vektori matice B su $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$, pa je matrica transformacije $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$, a njena inverzna matrica $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & i \\ 1+i & -i \end{bmatrix}$.

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u Žordanovoj kanonskoj formi

Na osnovu Leme 3.1 dati sistem je ekvivalentan sistemu dve linearne diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivim

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & i \\ 1+i & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\sin t \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde je $\vec{y} = [y_1 \; y_2]^T = P^{-1}[x_1 \; x_2]^T = P^{-1}\vec{x}$. Odnosno imamao da je

$$\begin{aligned} y_1' &= iy_1 + (1-i)\sin t \\ y_2' &= -iy_2 + (1+i)\sin t. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} \int \sin u \; e^{-iu}\, du &= -\frac{1}{2}iu - \frac{1}{4}e^{-2iu} + const \\ \int \sin u \; e^{iu} \;\; du &= \;\; \frac{1}{2}iu - \frac{1}{4}e^{2iu} \;\; + const, \end{aligned}$$

zaključujemo da je

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{it}\left(C_1 + (1-i)\int_{t_0}^{t} \sin u \; e^{-iu}\, du\right) &= e^{it}\left(\widehat{C}_1 - \tfrac{i+1}{2}t + \tfrac{i-1}{4}e^{-2it}\right) \\ y_2 &= e^{-it}\left(C_2 + (1+i)\int_{t_0}^{t} \sin u \; e^{iu}\, du\right) &= e^{-it}\left(\widehat{C}_2 + \tfrac{i-1}{2}t - \tfrac{i+1}{4}e^{2it})\right). \end{aligned}$$

Zatim imamo da je

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_1 e^{it} + \widehat{C}_2 e^{-it} + (\sin t - \cos t)(t + \frac{1}{2}) \\ (1-i)\widehat{C}_1 e^{it} + (1+i)\widehat{C}_2 e^{-it} - 2t\,\cos t + \sin t \end{bmatrix}.$$

Odakle za $\widetilde{C}_1 = \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2$ i $\widetilde{C}_2 = i(\widehat{C}_1 - \widehat{C}_2)$ dobijamo opšte rešenje

$$x_1 = \widetilde{C}_1 \cos t + \widetilde{C}_2 \sin t + (\sin t - \cos t)(t + \tfrac{1}{2})$$

$$x_2 = (\widetilde{C}_1 - \widetilde{C}_2)\cos t + (\widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2)\sin t - 2t\,\cos t + \sin t.$$

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u racionalnoj kanonskoj formi

Kako matrica B ima dve različite sopstvene vrednosti njena racionalna kanonska forma je prateća matrica karakterističnog polinoma $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Odredimo invertibilne matrice $P(t)$ i $Q(t)$ za koje važi da je $P(t)(tI - B)Q(t)$ Smitova normalna forma karakteristične matrice $tI - B$ matrice B, a zatim i matricu transformacije T koja ostvaruje sličnost između matrice B i njene racionalne forme C.
Nizom elementarnih transformacija vrsta i kolona $C_1 \leftrightarrow C_2$, $-(t+1)R_1 + R_2 \to R_2$, $-(t-1)C_1 + C_2 \to C_2$ i $-R_2 \to R_2$ matricu $tI - B$ svodimo na ekvivalentnu matricu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2+1 \end{bmatrix}$. Za matrice $P(t)$ i $Q(t)$ važi $P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & -1 \end{bmatrix}$ i $Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix}$.
Zatim imamo da je $Q^{-1}(t) = \begin{bmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t-1)e_1 + e_2 \\ e_1 \end{bmatrix}.$$

Odnosno $f_1 = (t-1)e_1 + e_2 = e_1 B - e_1 + e_2 = (e_1 - e_2) - e_1 + e_2 = 0$. Dalje imamo da je $t\,f_2 = t\,e_1 = e_1 - e_2$ odakle dobijamo matricu transformacije

$$T = \begin{bmatrix} f_2 \\ t\,f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_1 - e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

za koju važi $C = T \cdot B \cdot T^{-1}$. Na osnovu Leme 3.6 dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2\sin t \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde je $\vec{z} = [z_1\ z_2]^T = T \cdot [x_1\ x_2]^T = T\vec{x}$. Odnosno dobijamo sistem

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 + 2\sin t \\ z_2' &= -z_1 + 2\sin t. \end{aligned}$$

Primenom Teoreme 3.7 dati sistem transformišemo u parcijalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B(\tfrac{d}{dt})(z_1) &= \begin{bmatrix} \boxed{2\cos t} & 1 \\ 2\cos t & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2\sin t & 1 \\ 2\sin t & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \\ z_2 &= z_1' - 2\sin t, \end{aligned}$$

pri čemu u razmatranje uzimamo samo uokvirene minore.

Dakle dobijamo

$$\begin{aligned} z_1'' + z_1 &= 2\cos t + 2\sin t \\ z_2 &= z_1' - 2\sin t. \end{aligned}$$

Opšte rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine $z_1'' + z_1 = 0$ je $z_{1h} = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, a partikularno rešenje polazne jednačine $z_1'' + z_1 = 2(\sin t + \cos t)$ je oblika $z_{1p} = At \sin t + Bt \cos t$. Imamo

$$\begin{aligned} z_{1p} &= At\sin t + Bt\cos t \\ z_{1p}' &= (At + B)\cos t - (Bt - A)\sin t \\ z_{1p}'' &= -(At + 2B)\sin t - (Bt - 2A)\cos t, \end{aligned}$$

odnosno

$$-(At + 2B)\sin t - (Bt - 2A)\cos t + At\sin t + Bt\cos t = 2(\sin t + \cos t).$$

Odakle zaključujemo da je $A = 1$ i $B = -1$, tj. $z_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t + t \sin t$. Zatim imamo da je $z_2 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + t \sin t + t \cos t - \cos t - \sin t$. Sada vraćamo smenu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix}$$

i dobijamo

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - t \cos t + t \sin t \\ x_2 &= (C_1 - C_2)\cos t + (C_2 + C_1)\sin t - 2t \cos t + \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Rešavanje sistema primenom metode totalne redukcije

Na osnovu Teoreme 4.7 dati sistem se svodi na sistem dve diferencijalne jednačine drugog reda sa razdvojenim promenljivim

$$\Delta_B\left(\tfrac{d}{dt}\right)(x_1) = \begin{bmatrix} \boxed{2\cos t} & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \left[\boxed{\begin{matrix} 2\sin t & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix}}\right]$$

$$\Delta_B\left(\tfrac{d}{dt}\right)(x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2\cos t \\ 2 & \boxed{0} \end{bmatrix} - \left[\boxed{\begin{matrix} 1 & 2\sin t \\ 2 & 0 \end{matrix}}\right].$$

Odnosno imamo

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1 &= 2\cos t + 2\sin t \\ x_2'' + x_2 &= 4\sin t. \end{aligned}$$

Odakle dobijamo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\,\cos t + t\,\sin t\\
x_2 &= C_3 \cos t + C_4 \sin t - 2t\,\cos t.
\end{aligned}
$$

Ostalo je još da nađemo vezu između konstanata C_1, C_2, C_3 i C_4. Iz prve jednačine polaznog sistema dobijamo

$$
\begin{aligned}
&-C_1 \sin t + C_2 \cos t - \cos t + t\,\sin t + \sin t + t\,\cos t =\\
&\quad C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\,\cos t + t\,\sin t - C_3 \cos t - C_4 \sin t + 2t\,\cos t + 2\sin t,
\end{aligned}
$$

odakle sledi $C_4 = C_1 + C_2 + 1$ i $C_3 = C_1 - C_2 + 1$. Prema tome, dobijamo opšte rešenje

$$
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\,\cos t + t\,\sin t\\
x_2 &= (C_1 - C_2 + 1)\cos t + (C_1 + C_2 + 1)\sin t - 2t\,\cos t.
\end{aligned}
$$

U narednom primeru ilustrovaćemo metod totalne redukcije na određivanju rešenja sistema dve diferencijalne jednačine sa početnim uslovima.

Primer 6.3 *Rešiti Košijev problem*

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + 2x_2 + e^{-t}\\
x_2' &= 2x_1 + x_2
\end{aligned}
\qquad x_1(0) = 1,\ x_2(0) = -1.
$$

Matrica sistema je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom matrice B je $\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 = (\lambda-3)(\lambda+1)$. Na osnovu Teoreme 4.7 dati Košijev problem se svodi na sistem dve diferencijalne jednačine drugog reda sa razdvojenim promenljivim sa četiri početna uslova

$$
\begin{aligned}
\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_1) &= \begin{bmatrix} \boxed{-e^{-t}} & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left[\boxed{\begin{matrix} e^{-t} & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\right]\\
\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_2) &= \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2 & \boxed{0} \end{bmatrix} - \left[\boxed{\begin{matrix} 1 & e^{-t} \\ 2 & 0 \end{matrix}}\right]\\
\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Odnosno imamo

$$\begin{aligned} x_1'' - 2x_1' - 3x_1 &= -2e^{-t}, \qquad x_1(0) = 1, \quad x_1'(0) = 0 \\ x_2'' - 2x_2' - 3x_2 &= 2e^{-t}, \qquad x_2(0) = -1, \quad x_2'(0) = 1. \end{aligned}$$

Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $x_1'' - 2x_1' - 3x_1 = 0$ je dato sa $x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$. Partikularno rešenje jednačine $x_1'' - 2x_1' - 3x_1 = -2e^{-t}$ je oblika $x_p = Ate^{-t}$. Odakle dobijamo opšte rešenje datog sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + \tfrac{1}{2} t e^{-t} \\ x_2 &= C_3 e^{-t} + C_4 e^{3t} - \tfrac{1}{2} t e^{-t}. \end{aligned}$$

Konstante C_1, C_2, C_3 i C_4 određujemo iz početnih uslova

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -C_1 + 3C_2 + \tfrac{1}{2} &= 0 \\ C_3 + C_4 &= -1 \\ -C_3 + 3C_4 - \tfrac{1}{2} &= 1. \end{aligned}$$

Dobijamo da je $C_1 = \frac{7}{8}$, $C_2 = \frac{1}{8}$, $C_3 = -\frac{9}{8}$ i $C_4 = \frac{1}{8}$. Prema tome, zaključujemo da je Košijevo rešenje polaznog sistema

$$x_1 = \tfrac{7}{8} e^{-t} + \tfrac{1}{8} e^{3t} + \tfrac{1}{2} t e^{-t}$$

$$x_2 = -\tfrac{9}{8} e^{-t} + \tfrac{1}{8} e^{3t} - \tfrac{1}{2} t e^{-t}.$$

Primer 6.4 *Odrediti opšte rešenje homogenog sistema diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' &= x_1 + x_3. \end{aligned}$$

Matrica sistema je $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom matrice B je $\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 1 & 0 \\ -3 & \lambda-1 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$.

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u racionalnoj kanonskoj formi

Odredimo Smitovu normalnu formu karakteristične matrice tI–B matrice sistema B.

Nizom elementarnih transformacija vrsta i kolona $R_1 \leftrightarrow R_3$, $-3R_1 + R_2 \to R_2$, $(t-4)R_1 + R_3 \to R_3$, $(t-1)C_1 + C_3 \to C_3$, $-R_1 \to R_1$, $R_2 \leftrightarrow R_3$, $(1-t)R_2 + R_3 \to R_3$, $-(t-1)(t-4)C_2 + C_3 \to C_3$, $-R_3 \to R_3$ matricu $tI - B$ svodimo na matricu $S(t)$ u Smitovoj normalonj formi

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)^3 \end{bmatrix}.$$

Invertibilne matrice $P(t)$ i $Q(t)$ za koje važi da je $S(t) = P(t)(tI - B)Q(t)$ su oblika $P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & t-4 \\ t-1 & -1 & t^2-5t+7 \end{bmatrix}$ i $Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t-1 \\ 0 & 1 & -(t-1)(t-4) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Zatim imamo da je $Q^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(t-1) \\ 0 & 1 & (t-1)(t-4) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i važi da je

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(t-1) \\ 0 & 1 & (t-1)(t-4) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - (t-1)e_3 \\ e_2 + (t-1)(t-4)e_3 \\ e_3 \end{bmatrix}.$$

Odnosno $f_1 = e_1 - (t-1)e_3 = e_1 - e_3B + e_3 = e_1 - (e_1 + e_3) + e_3 = 0$ i $f_2 = e_2 + (t-1)(t-4)e_3 = e_2 + e_3(B-I)(B-4I) = e_2 - e_2 = 0$. Dalje imamo da je $t\,f_3 = t\,e_3 = e_1 + e_3$ i $t^2\,f_3 = 5e_1 - e_2 + e_3$ odakle dobijamo matricu transformacije

$$T = \begin{bmatrix} f_3 \\ t\,f_3 \\ t^2\,f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_1 + e_3 \\ 5e_1 - e_2 + e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

za koju važi $C = T \cdot B \cdot T^{-1}$, gde je C racionalna kanonska forma matrice B. Na osnovu Leme 3.6 dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

gde je $\vec{z} = [z_1\ z_2\ z_3]^T = T \cdot [x_1\ x_2\ x_3]^T = T\vec{x}$. Primenom Teoreme 3.7 dati sistem transformišemo u parcijalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B(\tfrac{d}{dt})(z_1) &= 0 \\ z_2 &= z_1' \\ z_3 &= z_2'. \end{aligned}$$

Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $z_1''' - 6z_1'' + 12z_1' - 8z_1 = 0$ je $z_1 = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3t^2e^{2t}$. Zatim imamo da je

$$
\begin{aligned}
z_1 &= C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3t^2e^{2t}\\
z_2 &= (2C_1 + C_2)e^{2t} + (2C_2 + 2C_3)te^{2t} + 2C_3t^2e^{2t}\\
z_3 &= (4C_1 + 4C_2 + 2C_3)e^{2t} + (4C_2 + 8C_3)te^{2t} + 4C_3t^2e^{2t}.
\end{aligned}
$$

Sada vraćamo smenu

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ z_1 + z_2 \\ -4z_1 + 5z_2 - z_3 \\ z_1 \end{bmatrix}
$$

i dobijamo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (C_1 + C_2)e^{2t} + (C_2 + 2C_3)te^{2t} + C_3t^2e^{2t}\\
x_2 &= (2C_1 + C_2 - 2C_3)e^{2t} + (2C_2 + 2C_3)te^{2t} + 2C_3t^2e^{2t}\\
x_3 &= C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3t^2e^{2t}.
\end{aligned}
$$

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u Žordanovoj kanonskoj formi

Žordanova kanonska forma J matrice sistema B ima jedan blok reda 3 koji odgovara sopstvenoj vrednosti 2. Vrste matrice transformacije P su vektori $g_1 = f_3 = e_3$, $g_2 = (t-2)g_1 = e_3B - 2e_3 = e_1 - e_3$ i $g_3 = (t-2)g_2 = (e_1 - e_3)B - 2e_1 + 2e_3 = e_1 - e_2 + e_3$, tj. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Na osnovu Leme 3.1 dati sistem je ekvivalentan parcijalno redukovanom sistemu

$$
\begin{aligned}
y_1' &= 2y_1 + y_2\\
y_2' &= 2y_2 + y_3\\
y_3' &= 2y_3.
\end{aligned}
$$

Zatim imamo da je

$$
\begin{aligned}
y_3 &= C_1e^{2t} && \text{odnosno} && \\
y_2' &= 2y_2 + C_1e^{2t} && && y_2 = C_2e^{2t} + C_1te^{2t}\\
y_1' &= 2y_1 + C_2e^{2t} + C_1te^{2t} && && y_1 = C_3e^{2t} + C_2te^{2t} + \tfrac{C_1}{2}t^2e^{2t}.
\end{aligned}
$$

Vraćanjem smene dobijamo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

odnosno da je

$$x_1 = (C_2 + C_3)e^{2t} + (C_1 + C_2)te^{2t} + \tfrac{C_1}{2}t^2e^{2t}$$

$$x_2 = (-C_1 + C_2 + 2C_3)e^{2t} + (C_1 + 2C_2)te^{2t} + C_1t^2e^{2t}$$

$$x_3 = C_3e^{2t} + C_2te^{2t} + \tfrac{C_1}{2}t^2e^{2t}.$$

Rešavanje sistema primenom metode totalne redukcije

Na osnovu Teoreme 4.7 polazni sistem se svodi na sistem tri diferencijalne jednačine trećeg reda sa razdvojenim promenljivim

$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_1) = 0$$

$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_2) = 0$$

$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_3) = 0.$$

Odakle dobijamo

$$x_1 = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3t^2e^{2t}$$

$$x_2 = C_4e^{2t} + C_5te^{2t} + C_6t^2e^{2t}$$

$$x_3 = C_7e^{2t} + C_8te^{2t} + C_9t^2e^{2t}.$$

Ostalo je još da nađemo vezu između konstanata $C_1, \ldots, C_9$. Iz prve jednačine polaznog sistema dobijamo

$$(2C_1+C_2)e^{2t}+(2C_2+2C_3)te^{2t}+2C_3t^2e^{2t} = (4C_1-C_4)e^{2t}+(4C_2-C_5)te^{2t}+(4C_3-C_6)t^2e^{2t}$$

odakle sledi $C_4 = 2C_1 - C_2$, $C_5 = 2C_2 - 2C_3$ i $C_6 = 2C_3$. Iz treće jednačine polaznog sistema dobijamo

$$(2C_7+C_8)e^{2t}+(2C_8+2C_9)te^{2t}+2C_9t^2e^{2t} = (C_1+C_7)e^{2t}+(C_2+C_8)te^{2t}+(C_3+C_9)t^2e^{2t}$$

odakle dobijamo vezu između preostalih konstanata $C_9 = C_3$, $C_8 = C_2 - 2C_3$ i

$C_7 = C_1 - C_2 + 2C_3$. Prema tome, dobijamo opšte rešenje

$$x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} + C_3 t^2 e^{2t}$$

$$x_2 = (2C_1 - C_2)e^{2t} + (2C_2 - 2C_3)te^{2t} + 2C_3 t^2 e^{2t}$$

$$x_3 = (C_1 - C_2 + 2C_3)e^{2t} + (C_2 - 2C_3)te^{2t} + C_3 t^2 e^{2t}.$$

Primer 6.5 *Odrediti opšte rešenje homogenog sistema diferencijalnih jednačina*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1' & = & & & x_2 & & \\ x_2' & = & -4x_1 & + & 4x_2 & & \\ x_3' & = & -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3. \end{array}$$

Matrica sistema je $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Karakteristični polinom matrice B je $\Delta_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^3$.

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u racionalnoj kanonskoj formi

Odredimo Smitovu normalnu formu karakteristične matrice $tI - B$ matrice sistema B. Nizom elementarnih transformacija vrsta i kolona $C_1 \leftrightarrow C_2$, $(t-4)R_1 + R_2 \to R_2$, $-R_1 + R_3 \to R_3$, $C_2 + C_3 \to C_2$, $tC_1 + C_2 \to C_2$, $-C_1 \to C_1$, $R_2 \leftrightarrow R_3$, $C_2 \leftrightarrow C_3$ matricu $tI - B$ svodimo na matricu $S(t)$ u Smitovoj normalonj formi

$$S(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)^2 \end{bmatrix}.$$

Invertibilne matrice $P(t)$ i $Q(t)$ za koje važi da je $S(t) = P(t)(tI - B)Q(t)$ su oblika $P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ t-4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Zatim imamo da je $Q^{-1}(t) = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i važi da je

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te_1 - e_2 \\ -e_1 + e_3 \\ e_1 \end{bmatrix}.$$

Imamo da je $f_1 = te_1 - e_2 = e_1 B - e_2 = e_2 - e_2 = 0$ i $t\, f_3 = t\, e_1 = e_2$ odakle dobijamo matricu transformacije

$$T = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ t\, f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_1 + e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

za koju važi $C = T \cdot B \cdot T^{-1}$, gde je C racionalna kanonska forma matrice B. Na osnovu Leme 3.6 dati sistem je ekvivalentan sistemu

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

gde je $\vec{z} = [z_1\ z_2\ z_3]^T = T \cdot [x_1\ x_2\ x_3]^T = T\vec{x}$. Primenom Teoreme 3.7 dati sistem transformišemo u parcijalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} z_1' - 2z_1 &= 0 \\ z_2'' - 4z_2' + 4z_2 &= 0 \\ z_3 &= z_2'. \end{aligned}$$

Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $z_1' - 2z_1 = 0$ je $z_1 = C_1 e^{2t}$, a jednačine $z_2'' - 4z_2' + 4z_2 = 0$ je $z_2 = C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t}$. Zatim imamo da je

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 e^{2t} \\ z_2 &= C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ z_3 &= (2C_2 + C_3) e^{2t} + 2C_3 t e^{2t}. \end{aligned}$$

Sada vraćamo smenu

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

i dobijamo

$$\begin{aligned} x_1 &= C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ x_2 &= (2C_2 + C_3) e^{2t} + 2C_3 t e^{2t} \\ x_3 &= (C_1 + C_2) e^{2t} + C_3 t e^{2t}. \end{aligned}$$

Rešavanje sistema svođenjem matrice sistema na matricu u Žordanovoj kanonskoj formi

Žordanova kanonska forma J matrice sistema B ima dva bloka, jedan reda 1, drugi reda 2, koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti 2. Matrica transformacije S za koju važi da je $J = S^{-1} \cdot C \cdot S$ dobija se određivanjem uopštenih sopstvenih vektora blokova racionalne kanonske forme, tj. $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Primetimo da je $[1]$ sopstveni vektor matrice $[2]$, a da su uopšteni sopstveni vektori matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ određeni metodom koja je izložena u sekciji o totalnoj redukciji linearnih sistema kod kojih je matrica sistema u formi prateće matrice dati ca $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matrica koja ostvaruje sličnost između matrice sistema B i njene Žordanove kanonske forme J jednaka je proizvodu $S^{-1} \cdot T$. Na osnovu Leme 3.1 dati sistem je ekvivalentan parcijalno redukovanom sistemu

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= 2y_2 + y_3 \\ y_3' &= 2y_3. \end{aligned}$$

Zatim imamo da je

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2t} & \text{i} \qquad y_3 &= C_2 e^{2t} \\ y_2' &= 2y_2 + C_2 e^{2t} & y_2 &= C_3 e^{2t} + C_2 t e^{2t}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene dobijamo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 2y_2 + y_3 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

odnosno da je

$$\begin{aligned} x_1 &= C_3 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \\ x_2 &= (C_2 + 2C_3) e^{2t} + 2C_2 t e^{2t} \\ x_3 &= (C_1 + C_3) e^{2t} + C_2 t e^{2t}. \end{aligned}$$

Rešavanje sistema primenom metode totalne redukcije

Na osnovu Teoreme 4.7 polazni sistem se svodi na sistem tri diferencijalne jednačine trećeg reda sa razdvojenim promenljivim

$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_1) = 0$$
$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_2) = 0$$
$$\Delta_B(\tfrac{d}{dt})(x_3) = 0.$$

Odakle dobijamo

$$x_1 = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3t^2e^{2t}$$
$$x_2 = C_4e^{2t} + C_5te^{2t} + C_6t^2e^{2t}$$
$$x_3 = C_7e^{2t} + C_8te^{2t} + C_9t^2e^{2t}.$$

Ostalo je još da nađemo vezu između konstanata $C_1, \dots, C_9$. Iz prve jednačine polaznog sistema dobijamo

$$(2C_1 + C_2)e^{2t} + (2C_2 + 2C_3)te^{2t} + 2C_3t^2e^{2t} = C_4e^{2t} + C_5te^{2t} + C_6t^2e^{2t},$$

odakle sledi $C_4 = 2C_1+C_2$, $C_5 = 2C_2+2C_3$ i $C_6 = 2C_3$. Iz druge jednačine polaznog sistema dobijamo

$$\begin{aligned}&(2C_4 + C_5)e^{2t} + (2C_5 + 2C_6)te^{2t} + 2C_6t^2e^{2t} =\\ &(4C_4 - 4C_1)e^{2t} + (4C_5 - 4C_2)te^{2t} + (4C_6 - 4C_3)t^2e^{2t},\end{aligned}$$

odakle vidimo da je $C_3 = 0$. Iz treće jednačine polaznog sistema dobijamo

$$\begin{aligned}&(2C_7 + C_8)e^{2t} + (2C_8 + 2C_9)te^{2t} + 2C_9t^2e^{2t} =\\ &(-2C_1 + C_4 + 2C_7)e^{2t} + (-2C_2 + C_5 + 2C_8)te^{2t} + (-2C_3 + C_6 + 2C_9)t^2e^{2t}\end{aligned}$$

odakle dobijamo vezu između preostalih konstanata $C_8 = C_2$, $C_9 = C_3 = 0$. Prema tome, dobijamo opšte rešenje

$$\begin{aligned}x_1 &= C_1e^{2t} + C_2te^{2t}\\ x_2 &= (2C_1 + C_2)e^{2t} + 2C_2te^{2t}\\ x_3 &= C_7e^{2t} + C_2te^{2t}.\end{aligned}$$

Naredna dva primera možemo naći i u radu [25].

Primer 6.6 *Rešiti homogen sistem diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned}x'' + x' + y' - 2y &= 0\\ x' - y' + x &= 0.\end{aligned}$$

Standardna metoda za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina ovog oblika je transformacijom sistema korišćenjem Ermitove forme. Dati sistem možemo zapisati u matričnom oblik

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} & \frac{d}{dt} - 2 \\ \frac{d}{dt} + 1 & -\frac{d}{dt} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zamenom mesta vrstama, a zatim dodavanjem prve vrste pomnožene sa operatorom $-\frac{d}{dt}$ drugoj u matrici $\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} & \frac{d}{dt} - 2 \\ \frac{d}{dt} + 1 & -\frac{d}{dt} \end{bmatrix}$, dobijamo matricu u Ermitovoj formi $\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} + 1 & -\frac{d}{dt} \\ 0 & \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 2 \end{bmatrix}$ i ekvivalentni sistem

$$x' - y' + x = 0$$

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Rešenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda $y'' + y' - 2y = 0$ je $y = C_1e^t + C_2e^{-2t}$. Zamenom datog rešenja u prvu jednačinu sistema dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda čije je rešenje $x = C_3e^{-t} + 2C_2e^{-2t} + \frac{C_1}{2}e^t$. Prema tome, opšte rešenje sistema je

$$x = \frac{C_1}{2}e^t + 2C_2e^{-2t} + C_3e^{-t}$$

$$y = C_1e^t + C_2e^{-2t}.$$

Uvođenjem smene $z = y - x$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} x'' + 2x' &= x + 2z \\ z' &= x. \end{aligned}$$

Dati sistem možemo transformisati na totalno redukovani sistem koristeći metodu izloženu u sekciji totalna redukcija linearnih sistema sa različitim operatorima sa dve promenljive za operatore $A_1 = \frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt}'$ i $A_2 = \frac{d}{dt}$. Matrica sistema je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a odgovarajući uopšteni karakteristični polinom je

$$\Delta_B(\lambda_1, \lambda_2) \begin{vmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 \\ -1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2 - 2.$$

Prema tome, sistem možemo da transformišemo na totalno redukovani sistem

$$\Delta_B(A_1, A_2)(x) = A_1 \circ A_2(x) - A_2(x) - 2x = x''' + 2x'' - x' - 2x = 0$$

$$\Delta_B(A_1, A_2)(z) = A_1 \circ A_2(z) - A_2(z) - 2z = z''' + 2z'' - z' - 2z = 0.$$

Rešenje totalno redukovanog sistema je

$$\begin{aligned} x &= C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t} \\ z &= C_4e^t + C_5e^{-t} + C_6e^{-2t}. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine sistema po promenljivim x i z nalazimo vezu između konstanata $C_1, \ldots, C_6$ i dobijamo

$$\begin{aligned} x &= C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t} \\ z &= C_1e^t - C_2e^{-t} - \tfrac{1}{2}C_3e^{-2t}. \end{aligned}$$

Vraćanjem smene $y = x + z$ dobijamo opšte rešenje

$$\begin{aligned} x &= \ \ C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{-2t} \\ y &= 2C_1e^t + \tfrac{1}{2}C_3e^{-2t}. \end{aligned}$$

Primer 6.7 *Rešiti sistem diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned} y'' &= -2y' - 5x + 3t - 1 \\ x' &= \quad y' + 2y + e^t. \end{aligned}$$

Dati sistem možemo zapisati i na sledeći način

$$\begin{aligned} 5x\ + y'' + 2y' &= 3t - 1 \\ x' - y'\ - 2y &= e^t. \end{aligned}$$

ili u matričnom oblik

$$\begin{bmatrix} 5 & \frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t-1 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Dodavanjem prve vrste matrice $\begin{bmatrix} 5 & \frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} \\ \frac{d}{dt} & -\frac{d}{dt} - 2 \end{bmatrix}$ pomnožene sa operatorom $-\frac{1}{5}\frac{d}{dt}$ drugoj, dobijamo matricu u Ermitovoj formi $\begin{bmatrix} 5 & \frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt} \\ 0 & -\frac{1}{5}\left(\frac{d^3}{dt^3} + 2\frac{d^2}{dt^2} + 5\frac{d}{dt} + 10\right) \end{bmatrix}$.
Ekvivalentan sistem je

$$\begin{aligned} 5x + y'' + 2y' &= 3t - 1 \\ -\tfrac{1}{5}(y''' + 2y'' + 5y' + 10y) &= -\tfrac{1}{5}(3t-1)' + e^t. \end{aligned}$$

Rešenje linearne diferencijalne jednačine drugog reda $y''' + 2y'' + 5y' + 10y = 3 - 5e^t$ je $y = C_1e^{-2t} + C_2sin(\sqrt{5}t) + C_3cos(\sqrt{5}t) + \frac{3}{10} - \frac{5}{18}e^t$. Zamenom datog rešenja u prvu jednačinu sistema dobijamo opšte rešenje sistema

$$x = (C_2 + \tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_3)sin(\sqrt{5}t) + (C_3 - \tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_2)cos(\sqrt{5}t) + \tfrac{3}{5}t - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}e^t$$
$$y = C_1e^{-2t} + C_2sin(\sqrt{5}t) + C_3cos(\sqrt{5}t) + \tfrac{3}{10} - \tfrac{5}{18}e^t.$$

Sa druge strane uvođenjem smene $z = x - y$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned} y'' + 2y' &= -5y - 5z + 3t - 1 \\ z' &= 2y + e^t. \end{aligned}$$

Dati sistem možemo transformisati na totalno redukovani sistem koristeći metodu izloženu u sekciji totalna redukcija linearnih sistema sa različitim operatorima sa dve promenljive za operatore $A_1 = \frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt}$ i $A_2 = \frac{d}{dt}$. Matrica sistema je $B = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, a kolona slobodnih članova je $\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t-1 \\ e^t \end{bmatrix}$. Odgovarajući uopšteni karakteristični polinom je

$$\Delta_B(\lambda_1, \lambda_2) \begin{vmatrix} \lambda_1 + 5 & 5 \\ -2 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2 + 10.$$

Prema tome, sistem možemo da transformišemo na totalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B(A_1, A_2)(y) &= \begin{bmatrix} \boxed{\frac{d}{dt}(3t-1)} & -5 \\ \frac{d}{dt}e^t & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3t-1 & -5 \\ e^t & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix} \\ \Delta_B(A_1, A_2)(z) &= \begin{bmatrix} -5 & (\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt})(3t-1) \\ 2 & \boxed{(\frac{d^2}{dt^2} + 2\frac{d}{dt})(e^t)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -5 & 3t-1 \\ 2 & e^t \end{matrix}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Odnosno, dobijamo sistem dve diferencijalne jednačine trećeg reda sa razdvojenim promenljivim

$$\begin{aligned} y''' + 2y'' + 5y' + 10y &= 3 - 5e^t \\ z''' + 2z'' + 5z' + 10z &= 6t - 2 + 8e^t. \end{aligned}$$

Rešenje totalno redukovanog sistema je

$$y = C_1e^{-2t} + C_2\sin(\sqrt{5}t) + C_3\cos(\sqrt{5}t) + \tfrac{3}{10} - \tfrac{5}{18}e^t$$

$$z = C_4e^{-2t} + C_5\sin(\sqrt{5}t) + C_6\cos(\sqrt{5}t) + \tfrac{3}{5}t - \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{9}e^t.$$

Iz druge jednačine sistema po promenljivim y i z nalazimo vezu između konstanata

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_1 \\ C_5 &= \tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_3 \\ C_6 &= -\tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_2 \end{aligned}$$

i dobijamo

$$\begin{aligned} y &= \quad C_1e^{-2t} + C_2\sin(\sqrt{5}t) + C_3\cos(\sqrt{5}t) + \tfrac{3}{10} - \tfrac{5}{18}e^t \\ z &= -C_1e^{-2t} + \tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_3\sin(\sqrt{5}t) - \tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_2\cos(\sqrt{5}t) + \tfrac{3}{5}t - \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{9}e^t. \end{aligned}$$

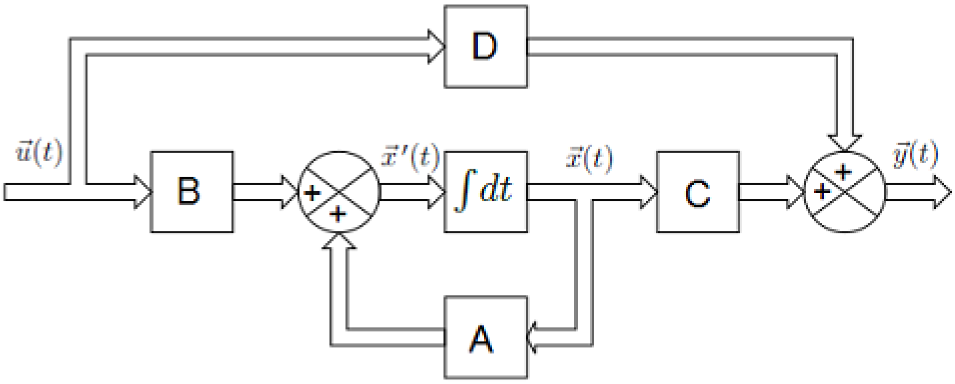
Vraćanjem smene $x = y + z$ dobijamo rešenje polaznog sistema

$$\begin{aligned} x &= (C_2 + \tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_3)\sin(\sqrt{5}t) + (-\tfrac{2\sqrt{5}}{5}C_2 + C_3)\cos(\sqrt{5}t) + \tfrac{3}{5}t - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}e^t \\ y &= C_1e^{-2t} + C_2\sin\sqrt{5}t + C_3\cos\sqrt{5}t + \tfrac{3}{10} - \tfrac{5}{18}e^t. \end{aligned}$$

Prokomentarišimo prednosti i mane izloženih pristupa u rešavanju sistema linearnih diferencijalnih jednačina. Standardne metode nalaženjem eksponenta matrice sistema i svođenjem matrice sistema na matricu u Žordanovoj kanonskoj formi, ukoliko polazno polje nije algebarski zatvoreno, zahtevaju proširenje datog polja na algebarsku ekstenziju koja sadrži sve korene karakterističnog polinoma. To u nekim slučajevima može dovesti do komplikovanijih izračunavanja. Racionalna kanonska forma je najbolji blok dijagonalni oblik koji možemo postići nad polaznim poljem. Prema tome, metod rešavanja sistema linearnih diferencijalnih jednačina svođenjem matrice sistema na matricu u racionalnoj kanonskoj formi bez obzira na podizanje stepena jedne diferencijalne jednačine može biti tehnički lakši. U sve tri metode izračunamo matricu transformacije matrice sistema na njenu Žordanovu, odnosno racionalnu kanonsku formu. Prednosti metode totalne redukcije su u činjenici da nema transformacije baze, pa nema potrebe da se računa matrica transformacije i njena inverzna matrica. Sve jednačine totalno redukovanog sistema su reda stepena karakterističnog polinoma, ali se razlikuju samo u nehomogenom delu. Mana ove metode je što naknadno moramo naći vezu između konstanata koje figurišu u rešenju. Kod rešavanja Košijevog problema homogenog sistema diferencijalnih jednačina dati metod je vrlo efikasan, jer se svodi na rešavanje jedne homogene diferencijalne jednačine višeg reda i zamenu početnih uslova.
Razmatranje izloženo u drugoj i trećoj sekciji ima primenu i u Teoriji linearnih kontrolnih sistema, pogledati [8, 53, 16, 61]. U naredna dva primera razmatraćemo linearne vremenski nepromenljive kontrolne sisteme (LTI sisteme) oblika

$$\begin{aligned} \vec{x}\,'(t) &= A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t) \\ \vec{y}(t) &= C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t), \end{aligned}$$

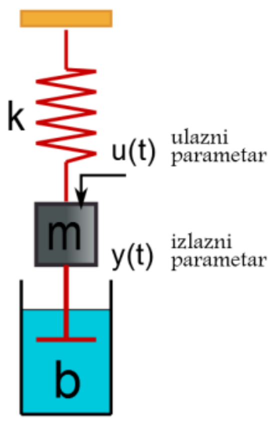
gde je $\vec{x}(t) = [x_1(t)\,x_2(t)\,\ldots\,x_n(t)]^T$ vektor stanja, $\vec{u}(t) = [u_1(t)\,u_2(t)\,\ldots\,u_m(t)]^T$ vektor ulaza ili upravljanja i $\vec{y}(t) = [y_1(t)\,y_2(t)\,\ldots\,y_r(t)]^T$ vektor merenja ili opservacije. Matricu A tipa $n \times n$ nazivamo matricom stanja, matricu B tipa $n \times m$ nazivamo matricom ulaza, matricu C tipa $r \times n$ matricom izlaza, a matricu D tipa $r \times m$ matricom direktnog prenosa. Kod većine realnih sistema matrica D je jednaka nula matrici. Prvu matričnu jednačinu navedenog sistema nazivamo jednačinom stanja sistema, drugu jednačinu nazivamo jednačinom merenja ili opservacije. Dati sistem možemo predstaviti blok-dijagramom promenljivih stanja.



Slika 1.

Stanje sistema $\vec{x}(t)$ predstavlja minimum informacija o sistemu koje treba poznavati, tako da se uz poznati ulaz u sistem $\vec{u}(t)$ može jednoznačno odrediti buduće ponašanje sistema.
Naredni primer je preuzet iz knjige [53].

Primer 6.8 *Razmotrimo mehanički sistem koji se sastoji od tela mase* $m = 1\,kg$ *koje visi na elastičnoj žici sa koeficijentom elastičnosti* $k = 2\,N/m$ *utopljene u viskozni fluid sa koeficijentom prigušenja* $b = 3\,kg/s$*, dat na Slici 2. Pretpostavljamo da je sistem linearan. Spoljnja sila* $u(t)$ *je ulazni parametar, a elongacija (udaljenost tela od ravnotežnog položaja)* $y(t)$ *je izlazni parametar. Prema tome, dati sistem ima jedan ulaz i jedan izlaz.*



Slika 2.

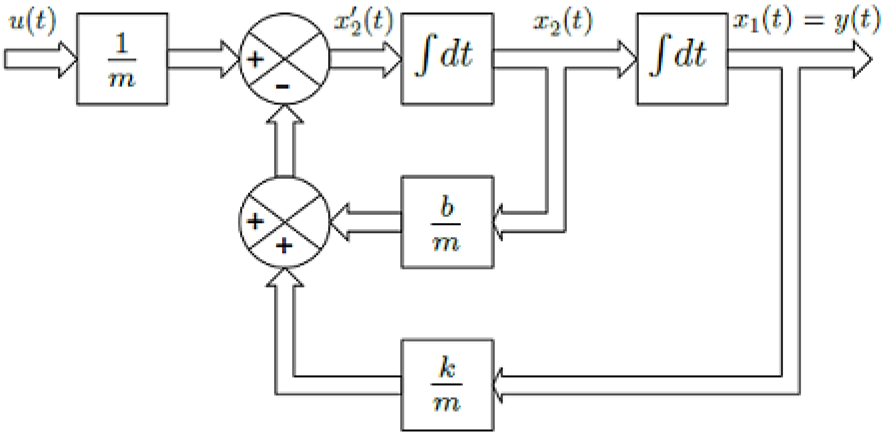
Jednačina koja opisuje prigušeno oscilovanje, na osnovu Njutnovog zakona glasi $my''(t) + by'(t) + ky(t) = u(t)$, sa početnim uslovima $y(0) = y_0$ i $y'(0) = y_1$. Definišimo komponente vektora stanja sa $x_1(t) = y(t)$ i $x_2(t) = y'(t)$. Prema tome, dobijamo LIT sistem sa početnim uslovima

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) & x_1(0) &= y_0 \\ x_2'(t) &= -\tfrac{k}{m}x_1(t) - \tfrac{b}{m}x_2(t) + \tfrac{1}{m}u(t) \qquad & x_2(0) &= y_1, \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

koji možemo zapisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix},$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Dati sistem možemo predstaviti blok-dijagramom promenljivih stanja.



Slika 3.

Za konkretne vrednosti $m = 1\,kg$, $k = 2\,N/m$ i $b = 3\,kg/s$ dobijamo sistem

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix},$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Kako je matrica sistema A prateća matrica polinoma $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, čiji su koreni $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -2$, imamo da su sopstveni vektori matrice A dati sa $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, i da je Žordanova kanonska forma matrice A matrica $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Rešenje odgovarajućeg Košijevog problema je dato sa

$$\vec{x}(t) = S \cdot e^{tJ} \cdot S^{-1}[y_0\ y_1]^T + \int_0^t S \cdot e^{(t-s)J} \cdot S^{-1}[0\ 1]^T u(s)ds,$$

gde je $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ i $S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Prema tome, imamo da je

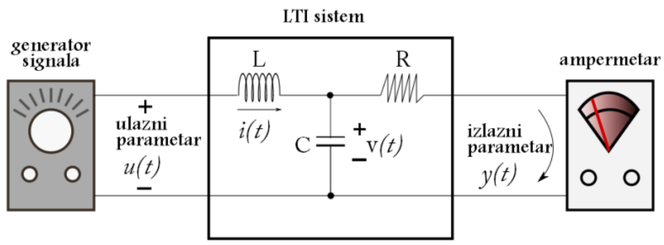
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2y_0+y_1)e^{-t} - (y_0+y_1)e^{-2t} + e^{-t}\int_0^t e^s u(s)ds - e^{-2t}\int_0^t e^{2s}u(s)ds \\ -(2y_0+y_1)e^{-t} + 2(y_0+y_1)e^{-2t} - e^{-t}\int_0^t e^s u(s)ds + 2e^{-2t}\int_0^t e^{2s}u(s)ds \end{bmatrix}.$$

Kako je $y(t) = x_1(t)$, dobijamo vrednost izlaznog parametra $y(t)$ u zavisnosti od ulaznog parametra $u(t)$

$$y(t) = (2y_0+y_1)e^{-t} - (y_0+y_1)e^{-2t} + e^{-t}\int_0^t e^s u(s)ds - e^{-2t}\int_0^t e^{2s}u(s)ds.$$

Naredni primer je preuzet iz knjige [16].

Primer 6.9 *Razmotrimo RLC kolo koje se sastoji od otpornika otpornosti* $R = \frac{1}{3}\,\Omega$*, kalema induktivnosti* $L = \frac{1}{2}\,H$ *i kondenzatora kapacitivnosti* $C = 1\,F$*, koje je prestavljeno na Slici 4. Napon koji je generisan signalom generatora* $u(t)$ *je ulazni parametar, a struja koja se meri ampermetrom* $y(t)$ *je izlazni parametar. Dati sistem ima jedan ulaz i jedan izlaz.*



Slika 4.

Označimo sa $i_L(t) = i(t)$, $i_C(t)$ i $i_R(t) = y(t)$ struje kroz kalem L, kondezator C i otpornik R. Na osnovu prvog Kirhofovog zakona za gornji čvor dobijamo da je $i_L(t) = i_C(t) + i_R(t)$.

Označimo sa $v_L(t)$, $v_C(t) = v(t)$ i $v_R(t)$ napon na kalemu L, kondezatoru C i otporniku R. Struju u kondezatoru možemo izraziti sa $i_C(t) = Cv'(t)$, a struju u otporniku sa $i_R(t) = \frac{1}{R}v_R(t)$. Na osnovu drugog Kirhofovog zakona za desnu petlju imamo da je $-v_C(t) + v_R(t) = 0$, odakle zaključujemo da je $v_R(t) = v(t)$. Zamenom datih izraza u jednačinu $i_L(t) = i_C(t) + i_R(t)$ dobijamo prvu jednačinu LTI sistema $v'(t) = -\frac{1}{CR}v(t) + \frac{1}{C}i(t)$. Na osnovu drugog Kirhofovog zakona za levu petlju imamo da je $-u(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$. Napon na kalemu možemo izraziti sa $v_L(t) = Li'(t)$. Odakle dobijamo drugu jednačinu LTI sistema $i'(t) = -\frac{1}{L}v(t) + \frac{1}{L}u(t)$. Jednačina merenja data je sa $y(t) = \frac{1}{R}v(t)$. Prema tome, dobijamo sistem

$$\begin{aligned} v'(t) &= -\tfrac{1}{CR}v(t) + \tfrac{1}{C}i(t) \\ i'(t) &= -\tfrac{1}{L}v(t) + \tfrac{1}{L}u(t), \\ y(t) &= \tfrac{1}{R}v(t) \end{aligned}$$

koji možemo zapisati matrično

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v'(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Za konkretne vrednosti $R = \frac{1}{3}\,\Omega$, $L = \frac{1}{2}\,H$ i $C = 1\,F$ dobijamo sistem

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v'(t) \\ i'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Karakteristični polinom matrice stanja $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ je $\Delta_B(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$, pa je odgovarajući totalno redukovani sistem

$$\begin{aligned}
v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) &= \left[\begin{array}{cc} \boxed{0} & 1 \\ 2u'(t) & 0 \end{array} \right] - \left[\boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2u(t) & 0 \end{array}} \right] \\
i''(t) + 3i'(t) + 2i(t) &= \left[\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ -2 & \boxed{2u'(t)} \end{array} \right] - \left[\boxed{\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ -2 & 2u(t) \end{array}} \right],
\end{aligned}$$

pri čemu u obzir uzimamo samo uokvirene glavne minore. Zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) &= 2u(t) \\
i''(t) + 3i'(t) + 2i(t) &= 2u'(t) + 6u(t).
\end{aligned}$$

Kako je $y(t) = 3v(t)$, dobijamo diferencijalnu jednačinu drugog reda koja opisuje zavisnost izlazne struje od ulaznog napona

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 6u(t).$$

Za početne uslove $y(0) = y_0$ i $y'(0) = y_1$, dobijamo rešenje

$$y(t) = (2y_0 + y_1)e^{-t} - (y_0 + y_1)e^{-2t} + 6e^{-t} \int_0^t e^s u(s) ds - 6e^{-2t} \int_0^t e^{2s} u(s) ds.$$

Za detaljniji prikaz pojmova korišćenih u ovom primeru preporučujemo [56].

7 Diferencijalna transcendentnost i redukcija linearnih sistema diferencijalnih jednačina

U ovoj sekciji razmatramo linearne sisteme diferencijalnih jednačina prvog reda sa koeficijentima u polju kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ nad vektorskim prostorom meromorfnih funkcija $\mathcal{M}$ oblika

$$\begin{aligned}
x_1'(z) &= b_{11}x_1(z) + b_{12}x_2(z) + \ldots + b_{1n}x_n(z) + \varphi_1(z)\\
x_2'(z) &= b_{21}x_1(z) + b_{22}x_2(z) + \ldots + b_{2n}x_n(z) + \varphi_2(z)\\
&\vdots\\
x_n'(z) &= b_{n1}x_1(z) + b_{n2}x_2(z) + \ldots + b_{nn}x_n(z) + \varphi_n(z),
\end{aligned}$$

kod kojih je tačno jedna koordinata kolone slobodnih članova $\vec{\varphi} = [\varphi_1\,\varphi_2\,\ldots\,\varphi_n]^T$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$.

7.1 Diferencijalni prsteni i diferencijalna transcendentnost

Prvo ćemo dati kratak pregled teorije diferencijalnih prstena i diferencijalne transcendentnosti prema [39] i [45].

7.1.1 Diferencijalni prsteni i homomorfizmi diferencijalnih prstena

Diferencijalni prsten R je komutativan prsten sa jedinicom sa preslikavanjem $D : R \to R$ za koje važe aksiome:

1. $(\forall x, y \in R)\, D(x + y) = D(x) + D(y)$;
2. $(\forall x, y \in R)\, D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y)$.

Preslikavanje $D : R \to R$ sa datim osobinama nazivamo ***izvodom***.

Diferencijalno polje K je polje sa izvodom $D : K \to K$.

Homomorfizam diferencijalnih prstena $(R_1, +, \cdot\ , D_1)$ i $(R_2, \oplus, \odot, D_2)$ je homomorfizam prstena $f : R_1 \to R_2$ takav da važi $(\forall x \in R) f(D_1(x)) = D_2(f(x))$.

Diferencijalni potprsten S diferencijalnog prstena R je potprsten prstena R takav da je S diferencijalni prsten u odnosu na restrikciju izvoda D.
Neka je $(R, +, \cdot)$ integralan domen. Na skupu $R \times R$ definišemo relaciju $\sim$ sa:

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow a \cdot t - b \cdot s = 0, \quad a, b, s, t \in R, s, t \neq 0.$$

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Klasu ekvivalencije elementa $(a,s) \in R \times R$ označavamo sa $\dfrac{a}{s}$. Na skupu svih klasa ekvivalencije $R \times R/\sim$ definišimo operacije $\oplus$ i $\odot$ sa:

$$\frac{a}{s} \oplus \frac{b}{t} = \frac{a \cdot t + b \cdot s}{s \cdot t} \quad \text{i} \quad \frac{a}{s} \odot \frac{b}{t} = \frac{a \cdot b}{s \cdot t}.$$

Uređena trojka $(R\times R/\sim, \oplus, \odot)$ je polje, koje nazivamo ***poljem razlomaka*** prstena R. Neutralni element za operaciju $\oplus$ je $\dfrac{0}{s}$. Suprotan element elementa $\dfrac{a}{s}$ je $\dfrac{-a}{s}$. Jedinični element za operaciju $\odot$ je $\dfrac{s}{s}$. Inverzni element elementa $\dfrac{a}{s}$, $a \neq 0$ je $\dfrac{s}{a}$. Preslikavanje $f : R \to R \times R/\sim$ dato sa $f(a) = \dfrac{a}{1}$ je monomorfizam prstena. Pa možemo element $a \in R$ identifikovati sa njegovom slikom $f(a) = \dfrac{a}{1}$ u polju $R\times R/\sim$.

Lema 7.1 *Neka je R diferencijalni prsten sa izvodom $D : R \to R$. Ako je R integralan domen, onda se izvod $D : R \to R$ može na jedinstveni način produžiti na polje razlomaka prstena R.*

Dokaz. Neka je $D : R \to R$ izvod u prstenu R. Definišimo izvod u polju razlomaka K prstena R sa:

$$D\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D(a)\cdot b - a \cdot D(b)}{b^2}, \quad b \neq 0.$$

Pokažimo prvo da je ovako definisan izvod u polju K dobro definisan, tj. da ne zavisi od izbora predstavnika. Ako je $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ imamo $a_1 \cdot s_2 - a_2 \cdot s_1 = 0$. Zatim, važi $D(0) = D(0+0) = D(0) + D(0)$, odakle zaključujemo da je $D(0) = 0$. Pa prema tome, primenom izvoda na jednakost $a_1 \cdot s_2 - a_2 \cdot s_1 = 0$ dobijamo da važi $D(a_1)\cdot s_2 + a_1 \cdot D(s_2) - D(a_2)\cdot s_1 - a_2 \cdot D(s_1) = 0$, a množenjem date jednakosti sa $s_1 \cdot s_2$ imamo $D(a_1)\cdot s_1 \cdot s_2^2 + (a_1 \cdot s_2)\cdot D(s_2)\cdot s_1 - D(a_2)\cdot s_2 \cdot s_1^2 - (a_2 \cdot s_1)\cdot D(s_1)\cdot s_2 = 0$. Kako važi da je $a_1 \cdot s_2 = a_2 \cdot s_1$, zamenom izraza $a_1 \cdot s_2$ izrazom $a_2 \cdot s_1$ i obrnuto u prethodnoj jednakosti dobijamo $(D(a_1)\cdot s_1 - a_1 \cdot D(s_1))\cdot s_2^2 - (D(a_2)\cdot s_2 - a_2 \cdot D(s_2))\cdot s_1^2 = 0$. Odnosno važi $(D(a_1)\cdot s_1 - a_1 \cdot D(s_1), s_1^2) \sim (D(a_2)\cdot s_2 - a_2 \cdot D(s_2), s_2^2)$. Dalje, treba pokazati da je ovako definisan izvod aditivna funkcija. Zaista imamo da je

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{a}{s} \oplus \frac{b}{t}\right) &= D\left(\frac{a\cdot t + b \cdot s}{s \cdot t}\right) \\
&= \frac{D(a\cdot t + b\cdot s)\cdot s \cdot t - (a \cdot t + b \cdot s)\cdot D(s\cdot t)}{s^2 \cdot t^2} \\
&= \frac{(D(a)\cdot s - a \cdot D(s))\cdot t^2 + (D(b)\cdot t - b \cdot D(t))\cdot s^2}{s^2 \cdot t^2} \\
&= \frac{D(a)\cdot s - a\cdot D(s)}{s^2} \oplus \frac{D(b)\cdot t - b \cdot D(t)}{t^2} \\
&= D\left(\frac{a}{s}\right) \oplus D\left(\frac{b}{t}\right).
\end{aligned}$$

I na kraju, treba pokazati da važi i druga aksioma iz definiciji izvoda.

$$\begin{aligned} D\left(\frac{a}{s}\odot\frac{b}{t}\right) &= D\left(\frac{a\cdot b}{s\cdot t}\right)\\ &= \frac{D(a\cdot b)\cdot s\cdot t-(a\cdot b)\cdot D(s\cdot t)}{s^2\cdot t^2}\\ &= \frac{D(a)\cdot b\cdot s\cdot t+a\cdot D(b)\cdot s\cdot t-(a\cdot b\cdot D(s)\cdot t+a\cdot b\cdot D(t)\cdot s)}{s^2\cdot t^2}\\ &= \frac{(D(a)\cdot s-a\cdot D(s))\cdot b\cdot t+(D(b)\cdot t-b\cdot D(t))\cdot a\cdot s}{s^2\cdot t^2}\\ &= \left(D\left(\frac{a}{s}\right)\odot\frac{b}{t}\right)\oplus\left(\frac{a}{s}\odot D\left(\frac{b}{t}\right)\right).\ \Box \end{aligned}$$

Neka je R diferencijalni prsten sa izvodom $D : R \to R$. Skup

$$C = \{a \in R \mid D(a) = 0\}$$

nazivamo ***jezgrom*** izvoda D, a njegove elemente nazivamo ***konstantama*** u R. Skup svih konstanata C u R obrazuje diferencijalni potprsten diferencijalnog prstena R. Ako je R diferencijalno polje, onda je i C diferencijalno polje. Izvod $D : R \to R$ je C-linearno preslikavanje. Za svako $a \in C$ i $x \in R$ imamo da je $D(a \cdot x) = D(a) \cdot x + a \cdot D(x) = a \cdot D(x)$.

Primeri diferencijalnih prstena i polja:

1. Neka je K polje i neka je izvod $D : K \to K$ definisan sa $(\forall x \in K) D(x) = 0$. Tada je K diferencijalno polje. Dato diferencijalno polje nazivamo trivijalnim.

2. Neka je $K[x]$ prsten polinoma po promenljivoj x sa koeficijentima u polju K i neka je izvod $D : K[x] \to K[x]$ definisan sa $D(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$. Tada je $K[x]$ diferencijalni prsten.

3. Neka je $K(x) = \left\{\frac{p(x)}{q(x)} \mid p(x), q(x) \in K[x]\right\}$ polje racionalnih funkcija po promenljivoj x sa koeficijentima u polju K i neka je izvod $D : K(x) \to K(x)$ definisan kao produženje izvoda $D : K[x] \to K[x]$, tj. neka je $D\left(\dfrac{p(x)}{q(x)}\right) = \dfrac{D(p(x)) \cdot q(x) - p(x) \cdot D(q(x))}{q^2(x)}$. Tada je $K(x)$ diferencijalno polje.

4. Neka je $w \in \mathbb{C}$ proizvoljan kompleksan broj i neka je $r \in \mathbb{R}$ pozitivan realan broj. ***Otvoren krug*** $B(w; r)$ sa centrom u tački w poluprečnika r je skup svih tačaka $z \in \mathbb{C}$ takvih da važi $|z - w| < r$, tj. $B(w; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}$. ***Probušen krug*** $B'(w; r)$ sa centrom u tački w poluprečnika r je skup svih

tačaka $z \in \mathbb{C}$ takvih da važi $0 < |z - w| < r$, odnosno imamo da je $B'(w;r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z - w| < r\}$.

Za skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je ***otvoren skup*** ako za svaku tačku $z \in \Omega$ postoji $r > 0$ takvo da je $B(z;r) \subseteq \Omega$. Za skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ kažemo da je ***povezan skup*** ako se ne može predstaviti kao unija dva svoja neprazna disjunktna otvorena podskupa. Otvoren i povezan skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nazivamo ***oblašću***.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ oblast. Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ kažemo da je ***holomorfna*** na skupu Ω ako za svako $z \in \Omega$ postoji granična vrednost $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Dati limes označavamo sa $\dfrac{df}{dz}$. Označimo sa $\mathcal{H}(\Omega)$ skup svih holomorfnih funkcija na Ω. Skup $\mathcal{H}(\Omega)$ obrazuje diferencijalni prsten sa izvodom $D = \dfrac{d}{dz}$. Pokažimo da je prsten $\mathcal{H}(\Omega)$ integralan domen. Neka su f i g dve holomorfne funkcije na skupu Ω takve da za svako $z \in \Omega$ važi da je $f(z) \cdot g(z) = 0$. Ako za svako $z \in \Omega$ važi $f(z) = 0$ pokazali smo da je prsten $\mathcal{H}(\Omega)$ integralan domen. Pretpostavimo sada da postoji element $w \in \Omega$ takav da je $f(w) \neq 0$. Pošto je svaka holomorfna funkcija u tački w i neprekidna u w, postoji otvoren krug $B(w,r) \subseteq \Omega$ sa centrom u tački w takav da za svako $z \in B(w,r)$ važi $f(z) \neq 0$. Prema tome, za svako $z \in B(w,r)$ važi da je $g(z) = 0$. Na osnovu teoreme o jedinstvenosti zaključujemo da je $g(z) = 0$ za svako $z \in \Omega$. Više detalja može se naći u knjigama [15, 33]. Polje razlomaka prstena $\mathcal{H}(\Omega)$ nazivamo ***poljem meromorfnih funkcija*** i označavamo sa $\mathcal{M}(\Omega)$. Neka je izvod $D\!:\!\mathcal{M}(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ definisan kao produženje izvoda $D\!:\!\mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$. Tada je $\mathcal{M}(\Omega)$ diferencijalno polje, (videti [7]).

7.1.2 Diferencijalna transcendentnost

Neka je K diferencijalno polje sa izvodom $D : K \to K$.

Diferencijalni polinom reda n po promenljivoj x je polinom

$$p(x) \in K[x, D(x), D^2(x), \ldots, D^n(x)] \setminus K[x, D(x), D^2(x), \ldots, D^{n-1}(x)],$$

tj. to je polinom oblika

$$p(x) = p_0(x) \cdot (D^n(x))^k + p_1(x) \cdot (D^n(x))^{k-1} + \ldots + p_{k-1}(x) \cdot D^n(x) + p_k(x),$$

za $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_k(x) \in K[x, D(x), D^2(x), \ldots, D^{n-1}(x)]$ i $p_0(x) \neq 0$.

Red diferencijalnog polinoma $\boldsymbol{p(x)}$ je najveći prirodan broj n takav da se $D^n(x)$ pojavljuje u polinomu $p(x)$. Ako je $p(x) \in K$, kažemo da je red diferencijalnog polinoma $p(x)$ jednak -1.

Stepen diferencijalnog polinoma $\boldsymbol{p(x)}$ je najveći prirodan broj k takav da se $(D^n(x))^k$ pojavljuje u polinomu $p(x)$.

Diferencijalni prsten polinoma po promenljivoj $\boldsymbol{x}$, u oznaci $K\{x\}$, je najmanji diferencijalni prsten koji sadrži diferencijalno polje K i element x, odnosno $K\{x\} = K[x, D(x), \ldots, D^{(n)}(x), \ldots]$ je skup svih diferencijalnih polinoma po promenljivoj x.

Za diferencijalni polinom $p(x) \in K\{x\}$ kažemo da je ***jednostavniji*** od diferencijalnog polinoma $q(x) \in K\{x\}$, ako je red diferencijalnog polinoma $p(x)$ manji od reda diferencijalnog polinoma $q(x)$, ili ako su redovi diferencijalnih polinoma $p(x)$ i $q(x)$ jednaki, a stepen diferencijalnog polinoma $p(x)$ je manji od stepena diferencijalnog polinoma $q(x)$.

Diferencijalni ideal I diferencijalnog prstena $K\{x\}$ je ideal datog prstena za koji važi $p(x) \in I \Rightarrow D(p(x)) \in I$.

Diferencijalni ideal prstena $K\{x\}$ generisan elementom $p(x)$, u oznaci $\langle p(x) \rangle$, je najmanji diferencijalni ideal koji sadrži diferencijalni polinom $p(x)$, tj. $\langle p(x) \rangle = \{p_0(x) \cdot p(x) + p_1(x) \cdot D(p(x)) + \ldots + p_n(x) \cdot D^n(x) \mid p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x) \in K\{x\}\}$.

Neka je $p(x)$ diferencijalni polinom reda n, tj.

$$p(x) = p_0(x) \cdot (D^n(x))^k + p_1(x) \cdot (D^n(x))^{k-1} + \ldots + p_{k-1}(x) \cdot D^n(x) + p_k(x),$$

za $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_k(x) \in K[x, D(x), D^2(x), \ldots, D^{n-1}(x)]$ i $p_0(x) \neq 0$.

Separant diferencijalnog polinoma $p(x)$, u oznaci $s(x)$, je diferencijalni polinom

$$s(x) = k \cdot p_0(x) \cdot (D^n(x))^{k-1} + (k-1) \cdot p_1(x) \cdot (D^n(x))^{k-2} + \ldots + p_{k-1}(x).$$

Preciznije, separant diferencijalnog polinoma $p(x)$ reda n je diferencijalni polinom $D_0(p(x))$, gde je izvod $D_0 : K[x, \ldots, D^{n-1}(x)][D^n(x)] \to K[x, \ldots, D^{n-1}(x)][D^n(x)]$, definisan sa $D_0(D^n(x)) = 1$ i za svako $q(x) \in K[x, D(x), \ldots, D^{n-1}(x)]$ važi $q(x) = 0$. Separant $s(x)$ diferencijalnog polinoma $p(x)$ je jednostavniji od diferencijalnog polinoma $p(x)$.

Neka je $p(x) \in K\{x\}$ diferencijalni polinom i $s(x)$ njegov separant. Definišimo skup $I(p(x)) = \{q(x) \in K\{x\} \mid (\exists k \in \mathbb{N})(s(x))^k \cdot q(x) \in \langle p(x) \rangle\}$. Skup $I(p(x))$ je diferencijalni ideal diferencijalnog prstena $K\{x\}$.

Teorema 7.2 *Neka je K diferencijalno polje karakteristike nula. Za nesvodljiv diferencijalni polinom $p(x) \in K\{X\} \setminus \{0\}$, diferencijalni ideal $I(p(x))$ je prost.*

Obrnuto, svaki nenula prost diferencijalni ideal u diferencijalnom prstenu $K\{X\}$ je oblika $I(p(x))$ za neki nenula nesvodljiv diferencijalni polinom $p(x) \in K\{X\}$.

Dokaz date teoreme može se naći u [39, 45].

Diferencijalni polinom $p(x) \in K\{x\}$ nazivamo ***minimalnim diferencijalnim polinomom*** prostog diferencijalnog ideala $I(p(x))$.

Rang prostog diferencijalnog ideala $I(p(x))$, u oznaci $RD(I(p(x)))$, jednak je redu minimalnog diferencijalnog polinoma $p(x)$. Specijalno, za nula ideal $I(0)$ definišemo $RD(I(0)) = \infty$.

Neka je K diferencijalno polje karakteristike nula sa izvodom $D : K \to K$. Neka je K diferencijalno potpolje polja F i $\alpha \in F \backslash K$. Označimo sa $I(\alpha/K)$ skup svih diferencijalnih polinoma iz $K\{X\}$ koje element α anulira. Preciznije, imamo da je $I(\alpha/K) = \{q(x) \in K\{X\} \mid q(\alpha) = 0\}$. Pokažimo da je $I(\alpha/K)$ prost diferencijalni ideal diferencijalnog prstena $K\{X\}$. Preslikavanje $f : K\{X\} \to F$ dato sa $f(q(x)) = q(\alpha)$ je homomorfizam diferencijalnih prstena. Jezgro datog preslikavanja je skup svih diferencijalnih polinoma $q(x) \in K\{X\}$ takvih da je $f(q(x)) = q(\alpha) = 0$, tj. $Ker\, f = I(\alpha/K)$. Odakle zaključujemo da je $I(\alpha/K)$ ideal prstena $K\{x\}$. Slika datog preslikavanja $Im\, f$ je potprsten polja F, pa je $Im\, f$ integralan domen. Na osnovu prve teoreme o izomorfizmu imamo da je $K\{x\}/I(\alpha/K) \cong Im\, f$, i kako je $Im\, f$ integralan domen zaključujemo da je $I(\alpha/K)$ prost ideal. Ostalo je još da pokažemo da je $I(\alpha/K)$ diferencijalni ideal diferencijalnog prstena $K\{x\}$. Zaista, za svaki diferencijalni polinom $q(x) \in I(\alpha/K)$ važi da je $f(D(q(x))) = D(f(q(x))) = D(q(\alpha)) = D(0) = 0$. Odakle zaključujemo da je $D(q(x)) \in I(\alpha/K)$. Prema tome, $I(\alpha/K)$ je prost diferencijalni ideal diferencijalnog prstena $K\{x\}$. Na osnovu prethodne teoreme postoji diferencijalni polinom $p(x) \in K\{x\}$ takav da je $I(\alpha/K) = I(p(x))$. Ako je $I(\alpha/K) \neq \langle 0 \rangle$, onda element $\alpha \in F \backslash K$ nazivamo ***diferencijalno-algebarskim nad*** K. Ako je $I(\alpha/K) = \langle 0 \rangle$, onda element $\alpha \in F \backslash K$ nazivamo ***diferencijalno-transcendentnim nad*** K.

Ukoliko je element $\alpha \in F \backslash K$ diferencijalno-transcendentan nad K, preslikavanje $f : K\{x\} \to F$ indukuje izomorfizam između diferencijalnih prstena $K\{x\}$ i $K\{\alpha\}$, gde je $K\{\alpha\}$ najmanji diferencijalni prsten koji sadrži diferencijalni prsten K i element α. Najmanje diferencijalno polje koje sadrži diferencijalni prsten K i element α, u oznaci $K\langle \alpha \rangle$, je baš polje razlomaka prstena $K\{\alpha\}$. Neka je sada element $\alpha \in F \backslash K$ diferencijalno-algebarski nad K. Na količničkom prstenu $K\{x\}/I(\alpha/K)$ definišimo izvod $D_0 : K\{x\}/I(\alpha/K) \to K\{x\}/I(\alpha/K)$ sa:

$$D_0(q(x) + I(\alpha/K)) = D(q(x)) + I(\alpha/K).$$

Količnički prsten $K\{x\}/I(\alpha/K)$ je integralan domen i diferencijalni prsten izomorfan sa najmanjim diferencijalnim potprstenom polja F koje sadrži K i α. Polje razlomaka datog diferencijalnog prstena je diferencijalno polje $K\langle\alpha\rangle$. Za detalje pogledati [44].

7.1.3 Stepen transcendentnosti i rang prostog diferencijalnog ideala

Za polje F kažemo da je ***ekstenzija*** polja K, ako je K potpolje polja F.

Neka je F ekstenzija polja K i neka je S podskup od F. Za skup S kažemo da je ***algebarski zavisan*** nad K, ako za neko $n \in \mathbb{N}$ postoji nenula polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa koeficijentima u polju K takav da je $f(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0$ za neke međusobno različite elemente $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$. Za skup S kažemo da je ***algebarski nezavisan*** nad K, ako nije algebarski zavisan nad K, tj. ako za svako $n \in \mathbb{N}$, svaki polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ i različite elemente $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ važi implikacija $f(s_1, s_2, \ldots, s_n) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. Svaki podskup algebarski nezavisnog skupa je algebarski nezavisan. Prazan skup je algebarski nezavisan. Svaki podskup polja K je algebarski zavisan nad K. Skup $\{\alpha\}$ je algebarski zavisan nad K ako i samo ako je element α ***algebarski*** nad K, tj. ako i samo ako postoji polinom $f(x) \in K[x]$ takav da je $f(\alpha) = 0$. Svaki element algebarski nezavisnog skupa je ***transcendentan*** nad K, tj. ne postoji polinom po promenljivoj x sa koeficijentima u polju K koji anulira dati element. Ako je svaki element iz F algebarski nad K, onda ekstenziju F nazivamo ***algebarskom ekstenzijom*** nad K. Ako je ekstenzija F algebarska nad K, onda je jedini algebarski nezavisan podskup od F prazan skup. Ekstenziju F koja nije algebarska nad K nazivamo ***transcendentnom ekstenzijom*** nad K. ***Transcendentna baza*** od F nad K je maksimalan u odnosu na inkluziju algebarski nezavisan podskup S od F.

Teorema 7.3 *Neka je F ekstenzija polja K, S algebarski nezavisan podskup od F nad K i neka je $\alpha \in F \setminus K(S)$, gde je $K(S)$ skup svih racionalnih funkcija po promenljivim iz skupa S sa koeficijentima u polju K. Tada je skup $S \cup \{\alpha\}$ algebarski nezavisan nad K ako i samo ako je α transcendentan nad $K(S)$.*

Dokaz: $\Leftarrow$: Ako postoje međusobno različiti elementi $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \in S$ i polinom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takav da je $f(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \alpha) = 0$, onda je α koren polinoma $f(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, x_n) \in K(S)[x_n]$. Pošto je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ element prstena $K[x_1, x_2, \ldots, x_n] = K[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}][x_n]$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ možemo zapisati kao polinom po promenljivoj x_n sa koeficijentima u prstenu $K[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]$, tj. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{k} h_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})x_n^i$. Kako je po pretpostavci element

α transcendentan nad $K(S)$ iz $f(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \alpha) = 0$ zaključujemo da je za svako i, $0 \leq i \leq k$, $h_i(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}) = 0$. Algebarska nezavisnost skupa S nad poljem K implicira da je $h_i \equiv 0$ za svako i, $0 \leq i \leq k$. Odakle sledi da je $f \equiv 0$. Prema tome, skup $S \cup \{\alpha\}$ je algebarski nezavisan nad K.

$\Rightarrow$: Neka je $f(\alpha) = 0$, za $f(x) = \sum_{i=0}^{k} h_i x^i \in K(S)[x]$. Postoji konačan podskup $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ skupa S takav da je za svako i, $0 \leq i \leq k$, $h_i \in K(s_1, s_2, \ldots s_n)$. Odnosno za svako i, $0 \leq i \leq k$, postoje polinomi $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ po promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sa koeficijentima u polju K takvi da važi da je $h_i = \frac{f_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)}{g_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)}$. Neka je $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{k} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i neka je

$$\overline{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

za svako i, $0 \leq i \leq k$. Tada je

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} h_i x^i = \sum_{i=0}^{k} \frac{f_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)}{g_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)} x^i = g(s_1, s_2, \ldots, s_n)^{-1} \sum_{i=0}^{k} \overline{f}_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) x^i.$$

Označimo sa $h(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$ polinom $\sum_{i=0}^{k} \overline{f}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) x^i$ po promenljivim $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ sa koeficijentima u polju K. Kako je $f(\alpha) = 0$ i $g(s_1, s_2, \ldots, s_n)^{-1}$ invertibilan element u polju $K(S)$, zaključujemo da je $h(s_1, s_2, \ldots, s_n, \alpha) = 0$. Algebarska nezavisnost skupa $S \cup \{\alpha\}$ implicira da je $h \equiv 0$. Odnosno da je za svako i, $0 \leq i \leq k$, $\overline{f}_i \equiv 0$. Odakle dobijamo da je za svako i, $0 \leq i \leq k$, $h_i = 0$, što povlači i da je $f \equiv 0$. $\square$

Posledica 7.4 *Neka je F ekstenzija polja K i S algebarski nezavisan podskup od F nad K. Tada je S transcendentna baza od F nad K ako i samo ako je polje F algebarsko nad $K(S)$.*

Dokaz: Dokaz direktno sledi na osnovu prethodne teoreme. $\square$

Polje F se naziva ***čisto transcendentnom ekstenzijom*** polja K, ako je $F = K(S)$, gde je S algebarski nezavisan podskup od F nad K. U ovom slučaju S je transcendentna baza od F nad K, na osnovu Posledice 7.4. Neka je F proizvoljna ekstenzija polja K i neka je S transcendentna baza od F nad K. Označimo sa E polje $K(S)$. Na osnovu Posledice 7.4 polje F je algebarsko nad E i E je čisto transcendentna ekstenzija od K. I na kraju polje F je algebarsko nad K ako i samo ako je prazan skup transcendentna baza od F nad K.

Može se pokazati da svake dve transcendentne baze od F nad K imaju istu kardinalnost. Za detalje pogledati [23, 36]. Prema tome, možemo definisati ***stepen***

transcendentnosti od F nad K kao broj elemenata transcendentne baze od F nad K ukoliko je taj skup konačan, odnosno kao ∞ ukoliko je taj skup beskonačan. Stepen transcendentnosti od F nad K označavamo sa $tr.deg(F/K)$. Jasno je da je $tr.deg(F/K) = 0$ ako i samo ako je ekstenzija F algebarska nad K.

Teorema 7.5 *Neka je F ekstenzija polja E i neka je E ekstenzija polja K. Tada je $tr.deg(F/K) = tr.deg(F/E) + tr.deg(E/K)$.*

Dokaz: Neka je S transcendentna baza od E nad K i neka je T transcendentna baza od F nad E. Pokažimo da je $S \cup T$ transcendentna baza od F nad K. Pošto je S transcendentna baza od E nad K, na osnovu Posledice 7.4, svaki element iz E je algebarski nad $K(S)$, pa je i algebarski nad $K(S \cup T)$. Iz činjenice da je polje E algebarsko nad $K(S \cup T)$ zaključujemo da je i polje $K(S \cup T)(E)$ algebarsko nad $K(S \cup T)$. Kako je $K(S \cup T) = K(S)(T) \subset E(T) \subset K(S \cup T)(E)$ imamo da je polje $E(T)$ algebarsko nad $K(S \cup T)$. Na osnovu Posledice 7.4 ekstenzija F je algebarska nad $E(T)$. A na osnovu „Toranj teoreme” [23, 36], koja kaže da ako je K_3 algebarska ekstenzija nad K_2 i ako je K_2 algebarska ekstenzija nad K_1, onda je K_3 algebarska ekstenzija nad K_1, zaključujemo da je F algebarska ekstenzija nad $K(S \cup T)$. Na osnovu Posledice 7.4, ostalo je još pokazati da je skup $S \cup T$ algebarski nezavisan nad K. Neka je $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ polinom po $n+m$ promenljivih sa koeficijentima u polju K za koji postoje međusobno različiti elementi $s_1, \ldots, s_n \in S$ i $t_1, \ldots, t_m \in T$ takvi da važi da je $f(s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_m) = 0$. Neka je $g(y_1, \ldots, y_m) = f(s_1, \ldots, s_n, y_1, \ldots, y_m)$ polinom po m promenljivih sa koeficijentima u polju $K(S)$. Kako je $K(S) \subset E$, polinom $g(y_1, \ldots, y_m)$ možemo razmatrati i kao polinom sa koeficijentima u polju E. Iz činjenice da je $g(t_1, \ldots, t_m) = 0$ i da je T transcendentna baza od F nad E zaključujemo da je $g \equiv 0$. Zatim, polinom $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ predstavljamo u obliku $\sum_{i=1}^{r} h_i(x_1, \ldots, x_n) f_i(y_1, \ldots, y_m)$, za $h_i(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ i $f_i(y_1, \ldots, y_m) \in K[y_1, \ldots, y_m]$, $1 \leq i \leq r$. Kako je $0 \equiv g(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{r} h_i(s_1, \ldots, s_n) f_i(y_1, \ldots, y_m)$, zaključujemo da za svako i, $1 \leq i \leq r$, važi $h_i(s_1, \ldots, s_n) = 0$. Skup S je transcendentna baza od E nad K, pa iz $h_i(s_1, \ldots, s_n) = 0$ zaključujemo da je $h_i \equiv 0$ za svako i, $1 \leq i \leq r$. Odakle dobijamo da je $f \equiv 0$. Pa je skup $S \cup T$ algebarski nezavisan nad K. Pošto je skup $S \cup T$ algebarski nezavisan nad K i pošto je F algebarska ekstenzija nad $K(S \cup T)$, na osnovu Posledice 7.4, zaključujemo da je $S \cup T$ transcendentna baza od F nad K i $tr.deg(F/K) = |S \cup T|$. Skup T je algebarski nezavisan nad E, a za skup S važi da je $S \subset E$, pa je $S \cap T = 0$. Što povlači

$$tr.deg(F/K) = |S \cup T| = |S| + |T| = tr.deg(F/E) + tr.deg(E/K). \qquad \square$$

Lema 7.6 *Neka je $p(x)$ diferencijalni polinom reda n i neka je $s(x)$ njegov separant. Tada je $D^k(p(x)) = s(x)D^{n+k}(x) + q_k(x)$, za $q_k(x) \in K[x, D(x), \ldots, D^{n+k-1}(x)]$ i $k \geq 1$.*

Dokaz: Dokaz izvodimo indukcijom po $k \in \mathbb{N}$.
Neka je $p(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i(x)(D^n(x))^i$, gde su diferencijalni polinomi $p_i(x)$ najviše reda $n-1$. Tada je $s(x) = \sum_{i=0}^{m} ip_i(x)(D^n(x))^{i-1}$ i imamo

$$\begin{aligned} D(p(x)) &= \sum_{i=0}^{m} (ip_i(x)(D^n(x))^{i-1}D^{n+1}(x) + D(p_i(x))(D^n(x))^i) \\ &= s(x)D^{n+1}(x) + \sum_{i=0}^{m} D(p_i(x))(D^n(x))^i, \end{aligned}$$

gde je $\sum_{i=0}^{m} D(p_i(x))(D^n(x))^i$ diferencijalni polinom reda najviše n. Prema tome, pokazali smo da tvrđenje važi za $k = 1$. Pokažimo da iz činjenice da tvrđenje važi za neko k sledi da važi i za $k + 1$. Neka za polinom $D^k(p(x))$ važi $D^k(p(x)) = s(x)D^{n+k}(x) + q_k(x)$, gde je $q_k(x)$ diferencijalni polinom najviše reda $n + k - 1$. Tada je $D^{k+1}(p(x)) = D(s(x))D^{n+k}(x) + s(x)D^{n+k+1}(x) + D(q_k(x))$. Označimo sa $q_{k+1}(x)$ diferencijalni polinom $D(s(x))D^{n+k}(x)+D(q_k(x))$ koji je najviše reda $n+k$. Imamo da je $D^{k+1}(p(x)) = s(x)D^{n+k+1}(x) + q_{k+1}(x)$. Što je trebalo i pokazati. $\square$

Teorema 7.7 *Neka je F diferencijalna ekstenzija polja K i $\alpha \in F \backslash K$. Tada je rang prostog diferencijalnog ideala $I(\alpha/K)$ jednak stepenu transcendentnosti polja $K\langle\alpha\rangle$ nad K, tj. $RD(I(\alpha/K)) = tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K)$.*

Dokaz: Neka je $I(\alpha/K) = \langle 0 \rangle$. Tada je $RD(I(\alpha/K)) = \infty$ i diferencijalno polje $K\langle\alpha\rangle$ je izomorfno sa poljem razlomaka diferencijalnog prstena $K\{x\}$ koje je oblika $K(x, D(x), \ldots, D^n(x), \ldots)$ i ima stepen transcendentnosti ∞. Prema tome, važi $RD(I(\alpha/K)) = tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K) = \infty$.
Neka je sada $I(\alpha/K) = I(p(x))$, za neki nesvodljiv diferencijalni polinom $p(x)$ reda $RD(I(\alpha/K)) = n$. Tada je $p(\alpha) = 0$ i elementi $\alpha, D(\alpha), \ldots, D^{n-1}(\alpha)$ su algebarski nezavisni nad K. Jasno je i da su elementi $\alpha, D(\alpha), \ldots, D^{n-1}(\alpha), D^n(\alpha)$ algebarski zavisni nad K. Pokažimo i da su za svako $k \geq 0$ elementi $\alpha, \ldots, D^{n-1+k}(\alpha), D^{n+k}(\alpha)$ algebarski zavisni nad K. Kako je $I(p(x))$ diferencijalni ideal imamo da i za svako $k \geq 1$ važi $D^k(p(x)) \in I(p(x))$, odnosno imamo da je $D^k(p(\alpha)) = 0$. Na osnovu prethodne leme za diferencijalni polinom $D^k(p(x))$ važi

$$D^k(p(x)) = s(x)D^{n+k}(x) + q_k(x),$$

gde je $s(x)$ separant polinoma $p(x)$ i $q_k(x) \in K[x, D(x), \ldots, D^{n+k-1}(x))]$. Pa važi $0 = D^k(p(\alpha)) = s(\alpha)D^{n+k}(\alpha) + q_k(\alpha)$. Kako je red separanta $s(x)$ diferencijalnog polinoma $p(x)$ manji od reda datog diferencijalnog polinoma, imamo da je $s(\alpha) \neq 0$. Odakle zaključujemo da su elementi $\alpha, D(\alpha), \ldots, D^{n-1+k}(\alpha), D^{n+k}(\alpha)$ algebarski zavisni nad K. Pošto prethodno razmatranje važi za svako $k \geq 0$, dobijamo da je skup $\alpha, D(\alpha), \ldots, D^{n-1}(\alpha)$ transcendentna baza od $K\langle\alpha\rangle$ nad K. Prema tome, $tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K) = n$. $\square$

Posledica 7.8 *Neka je F diferencijalna ekstenzija polja K i $\alpha \in F\backslash K$. Tada je element α diferencijalno-algebarski nad K ako i samo ako je $tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K) < \infty$.*

Dokaz: $\Rightarrow$: Neka je element α diferencijalno-algebarski nad K. Tada postoji nenula diferencijalni polinom $p(x)$ takav da važi $I(\alpha/K) = I(p(x))$. Na osnovu prethodne teoreme važi da je $tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K) = RD(I(\alpha/K)) < \infty$.
$\Leftarrow$: Neka je $tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K) < \infty$. Na osnovu prethodne teoreme važi $RD(I(\alpha/K)) = tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K) < \infty$. Pa prema tome, postoji nenula diferencijalni polinom $p(x)$ takav da je $I(\alpha/K) = I(p(x))$. Odakle zaključujemo da je element α diferencijalno--algebarski nad K. $\square$

Posledica 7.9 *Neka je F diferencijalna ekstenzija polja K i $\alpha, \beta \in F\backslash K$. Neka je β diferencijalno-algebarski element nad $K\langle\alpha\rangle$ i α diferencijalno-algebarski element nad K. Tada je β diferencijalno-algebarski element nad K.*

Dokaz: Kako je β diferencijalno-algebarski nad $K\langle\alpha\rangle$, postoji diferencijalni polinom $p(x)$ reda n sa koeficijentima u diferencijalnom polju $K\langle\alpha\rangle$ takav da je $I(\beta/K\langle\alpha\rangle) = I(p(x))$. Pošto je α diferencijalno-algebarski nad K, postoji diferencijalni polinom $q(x)$ reda m sa koeficijentima u diferencijalnom polju K takav da je $I(\alpha/K) = I(q(x))$. Na osnovu Teoreme 7.7 i Teoreme 7.5 imamo da je

$$\begin{aligned}
RD(I(\beta/K)) &= tr.deg(K\langle\beta\rangle/K) \\
&= tr.deg(K\langle\alpha,\beta\rangle/K) - tr.deg(K\langle\alpha,\beta\rangle/K\langle\beta\rangle) \\
&\leq tr.deg(K\langle\alpha,\beta\rangle/K) \\
&= tr.deg(K\langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle/K\langle\alpha\rangle) + tr.deg(K\langle\alpha\rangle/K) \\
&= RD(I(\beta/K\langle\alpha\rangle)) + RD(I(\alpha/K)) = n + m < \infty.
\end{aligned}$$

Na osnovu prethodne posledice zaključujemo da je element β diferencijalno-algebarski nad K. $\square$

Posledica 7.10 *Neka je F diferencijalna ekstenzija polja K i $\alpha, \beta \in F \backslash K$. Neka su α i β diferencijalno-algebarski elementi nad K. Tada su $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ i $D(\alpha)$ diferencijalno-algebarski elementi nad K.*

Dokaz: Za elemente $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ važi da je

$$RD(I((\alpha+\beta)/K)) = tr.deg(K\langle \alpha+\beta \rangle /K) \leq tr.deg(K\langle \alpha, \beta \rangle /K) < \infty \text{ i}$$

$$RD(I((\alpha \cdot \beta)/K)) = tr.deg(K\langle \alpha \cdot \beta \rangle /K) \leq tr.deg(K\langle \alpha, \beta \rangle /K) < \infty.$$

Prema tome, elementi $\alpha + \beta$ i $\alpha \cdot \beta$ su diferencijalno-algebarski nad K. Pokažimo i da je element $D(\alpha)$ diferencijalno-algebarski nad K. Za element α postoji nenula diferencijalni polinom $p(x, D(x), \ldots, D^n(x))$ po promenljivim $x, D(x), \ldots, D^n(x)$ sa koeficijentima u polju K za koji važi $p(\alpha, D(\alpha), \ldots, D^n(\alpha)) = 0$. Formirajmo novi diferencijalni polinom $q(D(x), \ldots, D^n(x))$ po promenljivim $D(x), D^2(x), \ldots, D^n(x)$ sa koeficijentima u polju $K\langle \alpha \rangle$ za koji važi

$$q(D(x), \ldots, D^n(x)) = p(\alpha, D(x), \ldots, D^n(x)).$$

Prema tome, važi da je $q(D(\alpha), \ldots, D^n(\alpha)) = 0$. Pošto je $q \not\equiv 0$, zaključujemo da je element $D(\alpha)$ diferencijalno-algebarski nad $K\langle \alpha \rangle$. Kako je element α diferencijalno--algebarski nad K, prethodna posledica implicira da je i element $D(\alpha)$ diferencijalno--algebarski nad K. $\square$

7.2 Diferencijalna transcendentnost i redukcija linearnih sistema diferencijalnih jednačina

U ovoj sekciji razmatramo linearne sisteme diferencijalnih jednačina prvog reda po promenljivoj z sa koeficijentima u polju kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ nad vektorskim prostorom meromorfnih funkcija $\mathcal{M}$ oblika

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= b_{11}x_1(z) + b_{12}x_2(z) + \ldots + b_{1n}x_n(z) + \varphi_1(z) \\ \frac{dx_2}{dz} &= b_{21}x_1(z) + b_{22}x_2(z) + \ldots + b_{2n}x_n(z) + \varphi_2(z) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dz} &= b_{n1}x_1(z) + b_{n2}x_2(z) + \ldots + b_{nn}x_n(z) + \varphi_n(z), \end{aligned} \tag{1}$$

kod kojih je tačno jedna koordinata kolone slobodnih članova $\vec{\varphi}(z) = [\varphi_1(z) \ldots \varphi_n(z)]^T$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Na osnovu Teoreme 4.7 dati sistem se svodi na totalno redukovani sistem

$$
\begin{aligned}
\Delta_B(\tfrac{d}{dz})(x_1(z)) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^1(B;\vec{\varphi}^{(n-k)}(z))\\
&\vdots\\
\Delta_B(\tfrac{d}{dz})(x_i(z)) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^i(B;\vec{\varphi}^{(n-k)}(z)) \qquad (2)\\
&\vdots\\
\Delta_B(\tfrac{d}{dz})(x_n(z)) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^n(B;\vec{\varphi}^{(n-k)}(z)),
\end{aligned}
$$

gde je $\Delta_B(\frac{d}{dz})(x(z)) = x^{(n)}(z) - \delta_1(B)x^{(n-1)}(z) + \ldots + (-1)^n\delta_n(B)x(z)$, $\delta_k(B)$ suma glavnih minora reda k matrice B, a $\delta_k^i(B;\vec{\varphi}^{(n-k)}(z))$ suma glavnih minora reda k matrice kod koje je i-ta kolona matrice B zamenjena sa kolonom $\vec{\varphi}^{(n-k)}(z) = [\varphi_1^{(n-k)}(z)\ \varphi_2^{(n-k)}(z)\ \ldots\ \varphi_n^{(n-k)}(z)]^T$, za $1 \leq k \leq n$.

Teorema 7.11 *Neka je $x_0(z) \in \mathcal{M}$ rešenje diferencijalne jednačine*

$$x^{(n)}(z) + d_1x^{(n-1)}(z) + \ldots + d_{n-1}x'(z) + d_nx(z) = \varphi(z),$$

za $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{C}$ i $\varphi(z) \in \mathcal{M}$. Tada je $x_0(z)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako je $\varphi(z)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$.

Dokaz: $\Rightarrow$: Ako je funkcija $x_0(z)$ diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$, onda je i funkcija $g(x_0(z)) = x_0^{(n)}(z)+d_1x_0^{(n-1)}(z)+\ldots+d_nx_0(z)$ diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$, pa je i $\varphi(z)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. U suprotnom bi postojao nenula diferencijalni polinom $p(f(z), f'(z), \ldots, f^{(k)}(z))$ sa koeficijentima u polju $\mathbb{C}$ po promenljivim $f(z), f'(z), \ldots, f^{(k)}(z)$, za neko $k \geq 0$, takav da je $p(\varphi(z), \varphi'(z), \ldots, \varphi^{(k)}(z)) = 0$, odnosno da je $p(g(x_0(z)), g'(x_0(z)), \ldots, g^{(k)}(x_0(z))) = 0$, odakle sledi da je $x_0(z)$ diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$.
$\Leftarrow$: Ako je funkcija $x_0(z)$ diferencijalno-algebarska nad $\mathbb{C}$, onda je na osnovu Posledice 7.10 i funkcija $g(x_0(z)) = x_0^{(n)}(z)+d_1x_0^{(n-1)}(z)+\ldots+d_nx_0(z)$ diferencijalno-algebarska nad $\mathbb{C}$, pa je samim tim i funkcija $\varphi(z)$ diferencijalno-algebarska nad $\mathbb{C}$. $\square$

Napomena 7.12 *Jedno interesantno uopštenje prethodnog tvrđenja je Teorema 2.8 iz rada* [50]*. U radovima* [38, 40, 41, 49, 51] *razmatrane su razne primene Teorema 2.8 iz rada* [50].

Teorema 7.13 *Neka su funkcije $\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z) \in \mathcal{M}$ diferencijalno-algebarske nad $\mathbb{C}$. Tada je funkcija $\varphi(z) \in \mathcal{M}$ diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$ ako i samo* *ako je diferencijalni polinom sa koeficijentima u polju* $\mathbb{C}$

$$p(\varphi(z), \ldots, \varphi^{(k)}(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_1^{(k_1)}(z), \ldots, \psi_n(z), \ldots, \psi_n^{(k_n)}(z))$$

(*u kome obavezno figuriše funkcija* $\varphi(z)$ *ili neki od njenih izvoda* $\varphi'(z) \ldots, \varphi^{(k)}(z)$) *diferencijalno-transcendentna funkcija nad* $\mathbb{C}$.

Dokaz: $\Rightarrow$: Dokaz izvodimo kontrapozicijom. Neka je diferencijalni polinom

$$p(\varphi(z), \ldots, \varphi^{(k)}(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_1^{(k_1)}(z), \ldots, \psi_n(z), \ldots, \psi_n^{(k_n)}(z))$$

diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$. Tada postoji nenula diferencijalni polinom $q(f(z), f'(z), \ldots, f^{(m)}(z))$ sa koeficijentima u polju $\mathbb{C}$ takav da je $q(p, p', \ldots, p^{(m)}) = 0$. Iz date jednakosti možemo zaključiti da je funkcija $\varphi(z)$ diferencijalno-algebarska nad $\mathbb{C}\langle\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z)\rangle$. Uzastopnom primenom Posledice 7.9 dobijamo da je $\varphi(z)$ diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$.
$\Leftarrow$: Neka je funkcija $\varphi(z)$ diferencijalno-algebarska nad $\mathbb{C}$. Kako su $\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$ diferencijalno-algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$, na osnovu Posledice 7.10 zaključujemo da je i diferencijalni polinom

$$p(\varphi(z), \ldots, \varphi^{(k)}(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_1^{(k_1)}(z), \ldots, \psi_n(z), \ldots, \psi_n^{(k_n)}(z))$$

diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$. $\square$

Naredna teorema se može naći i u radu [43].

Teorema 7.14 *Neka su elementi kolone slobodnih članova sistema* (1)

$$\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{i-1}(z), \varphi_{i+1}(z), \ldots \varphi_n(z) \in \mathcal{M}$$

diferencijalno-algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$ *i neka je funkcija* $\varphi_i(z) \in \mathcal{M}$ *diferencijalno--transcendentna nad* $\mathbb{C}$. *Tada je* i*-ta koordinata rešenja* $\vec{x}_0(z)$ *sistema* (2) *takođe diferencijalno-transcendentna funkcija nad* $\mathbb{C}$.

Dokaz: Na osnovu Teoreme 7.13 slobodni član i-te jednačine totalno redukovanog sistema (2) je diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. A na osnovu Teoreme 7.11 imamo da je i rešenje date diferencijalne jednačine diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Pošto su jednačine u totalno redukovanom sistemu nezavisne, dato rešenje predstavlja i-tu koordinatu rešenja sistema (2). $\square$

Naredna teorema je uopštenje prethodne i može se naći u radu [28].

Teorema 7.15 *Neka su elementi kolone slobodnih članova sistema* (1)

$$\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{i-1}(z), \varphi_{i+1}(z), \ldots \varphi_n(z) \in \mathcal{M}$$

diferencijalno-algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$ *i neka je funkcija* $\varphi_i(z) \in \mathcal{M}$ *diferencijalno--transcendentna nad* $\mathbb{C}$*. Tada je* j*-ta koordinata rešenja* $\vec{x}_0(z)$ *totalno redukovanog sistema* (2) *diferencijalno-algebarska funkcija nad* $\mathbb{C}$ *ako i samo ako se u sumi* $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^j(B;\vec{\varphi}^{(n-k)}(z))$ *ne pojavljuje funkcija* $\varphi_i(z)$.

Dokaz: Data teorema je direktna posledica Teorema 7.11 i 7.13. □

Ilustrujmo prethodnu teoremu u slučaju sistema sa dve ili tri diferencijalne jednačine. Linearni sistem dve diferencijalne jednačine prvog reda po promenljivoj z oblika

$$\begin{aligned} x_1'(z) &= b_{11}x_1(z) + b_{12}x_2(z) + \varphi_1(z) \\ x_2'(z) &= b_{21}x_1(z) + b_{22}x_2(z) + \varphi_2(z), \end{aligned}$$

transformišemo na totalno redukovani sistem

$$\begin{aligned} \Delta_B\left(\frac{d}{dz}\right)(x_1(z)) &= \varphi_1'(z) - b_{22}\varphi_1(z) + b_{12}\varphi_2(z) \\ \Delta_B\left(\frac{d}{dz}\right)(x_2(z)) &= \varphi_2'(z) - b_{11}\varphi_2(z) + b_{21}\varphi_1(z). \end{aligned}$$

Na osnovu Teoreme 7.14 zaključujemo da ako je funkcija $\varphi_i(z)$ jedina diferencijalno--transcendentna nad $\mathbb{C}$, onda je i-ta koordinata rešenja totalno redukovanog sistema takođe diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$, za $1 \le i \le 2$. Zatim ukoliko je $\varphi_1(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$, potreban i dovoljan uslov da druga koordinata rešenja totalno redukovanog sistema bude diferencijalno--algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ jeste da je $b_{21} = 0$. I na kraju, ukoliko je funkcija $\varphi_2(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$, potreban i dovoljan uslov da prva koordinata rešenja totalno redukovanog sistema bude diferencijalno-algebarska nad $\mathbb{C}$ jeste da je $b_{12} = 0$.
Linearni sistem tri diferencijalne jednačine prvog reda po promenljivoj z oblika

$$\begin{aligned} x_1'(z) &= b_{11}x_1(z) + b_{12}x_2(z) + b_{13}x_3(z) + \varphi_1(z) \\ x_2'(z) &= b_{21}x_1(z) + b_{22}x_2(z) + b_{23}x_3(z) + \varphi_2(z) \\ x_3'(z) &= b_{31}x_1(z) + b_{32}x_2(z) + b_{33}x_3(z) + \varphi_3(z), \end{aligned}$$

transformišemo na totalno redukovani sistem oblika

$$\begin{aligned}
\Delta_B\left(\frac{d}{dz}\right)(x_1(z)) &= \varphi_1''(z) - (b_{22}+b_{33})\varphi_1'(z) + B_{11}\varphi_1(z)\\
&+ b_{12}\varphi_2'(z) + B_{21}\varphi_2(z) + b_{13}\varphi_3'(z) + B_{31}\varphi_3(z)\\
\Delta_B\left(\frac{d}{dz}\right)(x_2(z)) &= b_{21}\varphi_1'(z) + B_{12}\varphi_1(z) + b_{23}\varphi_3'(z) + B_{32}\varphi_3(z)\\
&+ \varphi_2''(z) - (b_{11}+b_{33})\varphi_2'(z) + B_{22}\varphi_2(z)\\
\Delta_B\left(\frac{d}{dz}\right)(x_3(z)) &= b_{31}\varphi_1'(z) + B_{13}\varphi_1(z) + b_{32}\varphi_2'(z) + B_{23}\varphi_2(z)\\
&+ \varphi_3''(z) - (b_{11}+b_{22})\varphi_3'(z) + B_{33}\varphi_3(z).
\end{aligned}$$

Kao i u slučaju sistema sa dve diferencijalne jednačine, zaključujemo da ako je funkcija $\varphi_i(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$, onda je i-ta koordinata rešenja totalno redukovanog sistema takođe diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$, za $1 \leq i \leq 3$. Neka je sada $\varphi_1(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Tada je druga koordinata rešenja totalno redukovanog sistema diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako važi $b_{21} = 0$ i $B_{12} = 0$. Treća koordinata rešenja totalno redukovanog sistema je diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako važi $b_{31} = 0$ i $B_{13} = 0$. Ukoliko je $\varphi_2(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$ imamo da je prva koordinata rešenja totalno redukovanog sistema diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako važi $b_{12} = 0$ i $B_{21} = 0$, kao i da je treća koordinata rešenja totalno redukovanog sistema diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako važi $b_{32} = 0$ i $B_{23} = 0$. I na kraju, ako je $\varphi_3(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$ važi da je prva koordinata rešenja totalno redukovanog sistema diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako važi $b_{13} = 0$ i $B_{31} = 0$, kao i da je druga koordinata rešenja totalno redukovanog sistema diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako važi $b_{23} = 0$ i $B_{32} = 0$.

Razmotrimo uslove pod kojima se funkcija $\varphi_i(z) \in \mathcal{M}$ ne pojavljuje u sumi

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^j(B;\vec{\varphi}^{\,(n-k)}(z)), \text{ za proizvoljno } n \in \mathbb{N}.$$

Koristeći linearnost preslikavanja $\delta_k^j(B;\vec{\varphi}^{\,(n-k)}(z))$ po j-toj koloni $\vec{\varphi}^{\,(n-k)}(z)$ dobijamo $\delta_k^j(B;\vec{\varphi}^{\,(n-k)}(z)) = \sum_{s=1}^{n}\varphi_s^{(n-k)}(z)\delta_k^j(B;\vec{e_s})$, gde $\vec{e_s}$ označava kolonu čija je s-ta komponenta 1, a sve ostale su 0. Zatim, pošto svaki nenula minor u sumi $\delta_k^j(B;\vec{e_s})$ sadrži j-tu vrstu i kolonu, kao i s-tu vrstu i kolonu, imamo da važi $\delta_k^j(B;\vec{e_s}) =$

$-\delta_{k-1}^{j'}([B^j(B_{\downarrow j})]_{\widehat{s}})$, gde je $[B^j(B_{\downarrow s})]_{\widehat{s}}$ matrica reda $n-1$ koja se od matrice B dobija tako što se prvo j-ta kolona matrice B zameni s-tom, a zatim se u toj matrici izbriše s-ta kolona i s-ta vrsta, $j' = \begin{cases} j, & j < s \\ j-1, & j > s \end{cases}$. Prema tome, važi sledeće tvrđenje.

Teorema 7.16 *Funkcija $\varphi_i(z) \in \mathcal{M}$ se ne pojavljuje u sumi*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\delta_k^j(B;\vec{\varphi}^{(n-k)}(z)),\ i \neq j,$$

ako i samo ako su sume svih glavnih minora reda k, $1 \leq k \leq n-1$, koje sadrže j-tu kolonu za $j < i$, odnosno $j-1$. kolonu za $j > i$, matrice koja se dobija od matrice B zamenom j-te kolone i-tom, a zatim izbacivanjem i-te vrste i kolone, jednake nuli.

Razmotrimo sada vezu parcijalne i totalne redukcije linearnog sistema diferencijalnih jednačina prvog reda kod kojih je matrica sistema u formi prateće matrice polinoma $\Delta_C(\lambda) = \lambda^n + d_1\lambda^{n-1} + \ldots + d_{n-1}\lambda + d_n$ i koji je oblika

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dz} &= x_2(z) + \varphi_1(z) \\ \frac{dx_2}{dz} &= x_3(z) + \varphi_2(z) \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dz} &= x_n(z) + \varphi_{n-1}(z) \\ \frac{dx_n}{dz} &= -d_n x_1(z) - d_{n-1}x_2(z) - \ldots - d_1 x_n(z) + \varphi_n(z) \end{aligned} \tag{3}$$

i diferencijalne-transcendentnosti koordinata rešenja datog sistema u zavisnosti od diferencijalne-transcendentnosti jedne koordinate $\varphi_i(z)$ kolone slobodnih članova $\vec{\varphi}(z) = [\varphi_1(z)\ldots\varphi_n(z)]^T$, $1 \leq i \leq n$. Koeficijenti polinoma $d_1, \ldots, d_n$ su elementi polja $\mathbb{C}$, a funkcije $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ su elementi vektorskog prostora meromorfnih funkcija $\mathcal{M}$.

Na osnovu Teoreme 3.7 dati sistem je ekvivalentan parcijalno redukovanom sistemu oblika

$$\begin{aligned} \Delta_B\left(\frac{d}{dz}\right)(x_1(z)) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\delta_k^1(C;\varphi_1^{(n-k)}(z)\ldots\varphi_n^{(n-k)}(z)) \\ x_2(z) &= \frac{dx_1}{dz} - \varphi_1(z) \\ x_3(z) &= \frac{dx_2}{dz} - \varphi_2(z) \\ &\vdots \\ x_n(z) &= \frac{dx_{n-1}}{dz} - \varphi_{n-1}(z). \end{aligned} \tag{4}$$

1. Neka je funkcija $\varphi_1(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna koordinata kolone slobodnih članova $\vec{\varphi}(z) = [\varphi_1(z) \ldots \varphi_n(z)]^T$. Tada je na osnovu Teoreme 7.13 i funkcija

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \delta_k^1(C; \varphi_1^{(n-k)}(z) \ldots \varphi_n^{(n-k)}(z))$$

diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$, jer funkcija $\varphi_1(z)$ figuriše u datoj sumi i to u obliku diferencijalnog polinoma $\varphi_1^{(n-1)}(z) + d_1\varphi_1^{(n-2)}(z) + \ldots + d_{n-1}\varphi_1(z)$. Na osnovu Teoreme 7.11 zaključujemo da je prva koordinata $x_{01}(z)$ rešenja polaznog sistema diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Zatim, iz činjenice da je $x_{01}(z)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$ direktno sledi i da je $x'_{01}(z)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Za ostale koordinate rešenja sistema (3) postoje dve mogućnosti u zavisnosti od toga da li je razlika $x'_{01}(z) - \varphi_1(z)$ diferencijalno-algebarska ili diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Ako je $x'_{01}(z) - \varphi_1(z)$ diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$, onda je i druga koordinata $x_{02}(z)$ rešenja sistema (3) diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$. Zatim, na osnovu Leme 7.10 zaključujemo da su funkcije $x'_{02}(z)$ i $x'_{02}(z) - \varphi_2(z)$ diferencijalno-algebarske nad $\mathbb{C}$. Odakle sledi da je i treća koordinata $x_{03}(z)$ rešenja polaznog sistema diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$. Istim rezonovanjem zaključujemo da su i ostale koordinate rešenja sistema (3) diferencijalno-algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$. Ukoliko je razlika $x'_{01}(z)-\varphi_1(z)$ diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$ imamo da je druga koordinata $x_{02}(z)$ rešenja sistema (3) diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Pošto je $\varphi_2(z)$ diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ imamo i da je funkcija $x'_{02}(z)-\varphi_2(z)$ diferencijalno-transcendenta nad $\mathbb{C}$, kao razlika diferencijalno-transcendentne i diferencijalno-algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$. Prema tome, i treća koordinata $x_{03}(z)$ rešenja polaznog sistema je diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. Sličnim rezonovanjem zaključujemo da su i ostale koordinate rešenja sistema (3) diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathbb{C}$.

2. Neka je sada $\varphi_i(z)$, $1 < i < n$, jedina diferencijalno-transcendentna koordinata kolone slobodnih članova. Sličnim razmatranjem prethodnom zaključujemo da su koordinate $x_{01}(z), \ldots, x_{0i}(z)$ rešenja polaznog sistema diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathbb{C}$. Što se tiče $i+1$. koordinate, ona može biti ili diferencijalno-algebarska ili diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$ u zavisnosti od toga kakva je razlika diferencijalno-transcendentnih funkcija $x'_{0i}(z)$ i $\varphi_i(z)$. Ako je $i+1$. koordinata rešenja sistema (3) diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$, onda su i preostale koordinate datog rešenja diferencijalno-algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$. Ako je $i+1$. koordinata rešenja polaznog sistema diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$, onda su i preostale koordinate diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathbb{C}$.

3. Ako je $\varphi_n(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna koordinata kolone slobodnih članova, onda su sve koordinate rešenja sistema (3) diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathbb{C}$.

Zatim, na osnovu Teoreme 4.12 sistem (3) se svodi na totalno redukovani sistem

$$\begin{aligned}
&\Delta_C(\tfrac{d}{dz})(x_1(z)) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} d_j \varphi_{k-j}^{(n-k)}(z)\\
&\vdots\\
&\Delta_C(\tfrac{d}{dz})(x_i(z)) = \sum_{k=1}^{n+1-i}\sum_{j=0}^{k-1} d_j \varphi_{i-1+k-j}^{(n-k)}(z) - \sum_{k=n+2-i}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j \varphi_{i-1+k-j}^{(n-k)}(z)\\
&\vdots\\
&\Delta_C(\tfrac{d}{dz})(x_n(z)) = \varphi_n^{(n-1)}(z) - \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j \varphi_{n-1+k-j}^{(n-k)}(z),
\end{aligned} \tag{5}$$

gde je $d_0 = 1$.

1. Ako je funkcija $\varphi_1(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna koordinata kolone slobodnih članova $\vec{\varphi}(z) = [\varphi_1(z) \ldots \varphi_n(z)]^T$, onda je na osnovu Teoreme 7.13 i funkcija $\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{k-1} d_j \varphi_{k-j}^{(n-k)}(z)$ diferencijalno-transcendentna nad $\mathbb{C}$, jer funkcija $\varphi_1(z)$ figuriše u datoj sumi i to u obliku diferencijalnog polinoma

$$\varphi_1^{(n-1)}(z) + d_1\varphi_1^{(n-2)}(z) + \ldots + d_{n-1}\varphi_1(z).$$

Na osnovu Teoreme 7.11 zaključujemo da je prva koordinata $x_{01}(z)$ rešenja sistema (5) diferencijalno-transcendentna funkcija nad $\mathbb{C}$. U sumi

$$\sum_{k=1}^{n+1-i}\sum_{j=0}^{k-1} d_j \varphi_{i-1+k-j}^{(n-k)}(z) - \sum_{k=n+2-i}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j \varphi_{i-1+k-j}^{(n-k)}(z),$$

za $1 < i \leq n$, funkcija $\varphi_1(z)$ figuriše u obliku $-d_n\varphi_1^{(i-2)}(z)$, odakle zaključujemo da je data suma diferencijalno-algebarska funkcija ako i samo ako je $d_n = 0$. Teorema 7.11 implicira da su koordinate $x_{02}(z), \ldots, x_{0n}(z)$ rešenja sistema (5) diferencijalno--algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako je $d_n = 0$.

2. Neka je sada $\varphi_m(z)$, $1 < m < n$, jedina diferencijalno-transcendentna koordinata kolone slobodnih članova. Nehomogen deo

$$\sum_{k=1}^{n+1-i}\sum_{j=0}^{k-1} d_j \varphi_{i-1+k-j}^{(n-k)}(z) - \sum_{k=n+2-i}^{n}\sum_{j=k}^{n} d_j \varphi_{i-1+k-j}^{(n-k)}(z),$$

i-te jednačine sistema (5), za $1 \leq i \leq m$, sadrži funkciju $\varphi_m(z)$ u obliku diferencijalnog polinoma

$$\varphi_m^{(n-m+i-1)}(z) + d_1\varphi_m^{(n-m+i-2)}(z) + \ldots + d_{n-m}\varphi_m^{(i-1)}(z).$$

Prema tome, Teorema 7.13 implicira da su dati nehomogeni delovi diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathbb{C}$, za $1 \leq i \leq m$, a na osnovu Teoreme 7.11 imamo i da su koordinate $x_{01}(z), \ldots, x_{0m}(z)$ rešenja sistema (5) diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathbb{C}$. Funkcija $\varphi_m(z)$ figuriše u nehomogenom delu i-te jednačine sistema (5), za $m+1 \leq i \leq n$, u obliku diferencijalnog polinoma

$$-(d_{n-m+1}\varphi_m^{(i-2)}(z) + d_{n-m+2}\varphi_m^{(i-3)}(z) + \ldots + d_n\varphi_m^{(i-1-m)}(z)).$$

Odakle zaključujemo da je nehomogen deo i-te jednačine sistema (5) diferencijalno-algebarska funkcija nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako je $d_{n-m+1} = d_{n-m+2} = \ldots = d_n = 0$, gde je $m+1 \leq i \leq n$. Na osnovu Teoreme 7.11 zaključujemo da su koordinate $x_{0\,m+1}(z), \ldots, x_{0\,n}(z)$ rešenja sistema (5) diferencijalno-algebarske funkcije nad $\mathbb{C}$ ako i samo ako je $d_{n-m+1} = d_{n-m+2} = \ldots = d_n = 0$.

3. Ako je $\varphi_n(z)$ jedina diferencijalno-transcendentna koordinata kolone slobodnih članova, onda su sve koordinate rešenja sistema (5) diferencijalno-transcendentne funkcije nad $\mathbb{C}$, jer $\varphi_n^{(i-1)}(z)$ učestvuje u nehomogenom delu i-te jednačine sistema (5), za $1 \leq i \leq n$.

Primetimo da razmatranje diferencijalne transcendentnosti rešenja sistema, kod kog je matrica sistema u formi prateće matrice, u zavisnosti od diferencijalne transcendentnosti jedne koordinate kolone slobodnih članova, korišćenjem metode totalne redukcije sistema, precizira isto razmatranje metodom parcijalne redukcije sistema.

Ukoliko je više koordinata kolone slobodnih članova diferencijalno-transcendentno nad $\mathbb{C}$, diferencijalna transcendentnost koordinata rešenja razmatranih sistema zavisi i od diferencijalne zavisnosti datih funkcija, pogledati [46].

Interesantna razmatranja diferencijalne transcendentnosti koordinata vektora stanja linearno vremenski nepromenljivih kontrolnih sistema u zavisnosti od diferencijalne transcendentnosti vektora upravljanja razmatrana su u radovima [47, 9].

Prirodan nastavak navedenog proučavanja bi bilo razmatranje veze diferencijalne transcendentnosti i metode totalne redukcije linearnih sistema sa različitim operatorima.

Indeks pojmova

Literatura

[1] D. Allen, Lectures on Linear Algebra, Chapter 8: Jordan Normal Form, http://www.math.tamu.edu/∼dallen/m640_03c/lectures/chapter8.pdf

[2] M. F. Atiyah, I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley publishing company, 1969.

[3] L. Brand, The Companion Matrix and Its Properties, The American Mathematical Monthly, Volume 71 (1964), Number 6, pp. 629 - 634.

[4] L. Brand, Applications of the Companion Matrix, The American Mathematical Monthly, Volume 75 (1968), Number 2, pp. 146 - 152.

[5] J.C. Butcher, A Mathematical Miniature, NZMS Newsletter (1996), Number 68, http://www.math.auckland.ac.nz/ butcher/miniature/miniatureAndApology.html

[6] J.C. Butcher, P. Chartier, The effective order of singly-implicit Runge-Kutta methods, Numerical Algorithms, Volume 20 (1999), Number 4, pp. 269 - 284.

[7] A. Chambert-Loir, A Field Guide To Algebra, Springer, New York, 2005.

[8] D. Christiansen, C. Alexander, Standard Handbook of Electronic Engineering, fifth edition, McGraw-Hill Companies, New York, 2004. (glava 19 P. Antsaklis, Z. Gao, Control System Design).

[9] J. C. Cruz-Victoria, R. Martínez-Guerra, and J. J. Rincón-Pasaye, On nonlinear systems diagnosis using differential and algebraic methods, Journal of the Franklin Institute, Volume 345 (2008), Number 2, pp. 102 - 118.

[10] N. A. Dokukova, P. N. Konon, General Laws Governing in Mechanical Vibratory Systems, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Volume 79 (2006), Number 4, pp. 824-831.

[11] N. A. Dokukova, P. N. Konon, E. N. Kaftaikina, Nonnatural Vibrations of Hydraulic Shock-Absorbers, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Volume 81 (2008), Number 6, pp. 1191-1196.

[12] N. A. Dokukova, E. N. Kaftaikina, V.V. Zenkovich, General patterns of improper vibrations of dynamical systems with an arbitrary number of degrees of freedom, News on the scientific progression - 2011: The material for the 7-and international scientific and practical conference, Sofia, 17. - 25. August 2011.

[13] T. Downs, Properties of the Souriau - Frame Algorithm with Application to the Inversion of Rational Matrices, SIAM Journal on Applied Mathematics, Volume 28 (1975), Number 2, pp. 237 - 251.

[14] D. S. Dummit, R. M. Foote, Abstract Algebra, third edition, Johan Wiley & Sons, Hoboken, 2004.

[15] W. Ebeling, Functions of Several Complex Variables and Their Singularities, Graduate Studies in Mathematics, Volume 83, American Mathematical Society, 2007.

[16] T. E. Fortmann, K. L. Hitz, An Introduction to Linear Control Systems, Marcel Dekker, New York, 1977.

[17] F. G. Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal fr die reine und angewandte Mathematik, Volume 84 (1877), pp. 343 - 405.

[18] F. G. Frobenius, Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten, Journal fr die reine und angewandte Mathematik, Volume 86 (1879), pp. 482 - 544.

[19] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, издание четвертое, Наука, Москва, 1988.

[20] F. M. Goodman, Algebra: abstract and concrete, Semisimple Press, Iowa City, 1998.

[21] C. Hermite, Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik,Volume 41 (1851), pp. 191 - 216.

[22] R. Howard, Rings, Determinants and the Smith Normal Form, http://www.math.sc.edu/∼howard/Classes/700b/notes.pdf

[23] T. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

[24] S. Janković, J. Knežević-Miljanović, Diferencijalne jednačine II, zadaci sa elementima teorije, Matematički fakultet, Beograd, 2003.

[25] I. Jovović, Formulae of reduction for some systems of operator equations, Proceedings of International Conference Mathematical and Informational Technologies, MIT-2011, pp. 161 - 165.

[26] I. Jovović, Total Reduction of Linear Systems of Operator Equations with the System Matrix in the Companion Form, prihvaćeno u Publications de l'Institut Mathématique

[27] I. Jovović, Partial Reduction for Linear Systems of Operator Equations with System Matrix in Companion Form, na recenziji

[28] I. Jovović, Total Reduction of Linear Systems of Operator Equations with Distinct Operators and Differential Transcendence, na recenziji

[29] C. Jordan, Trait Des Substitutions Et Des quations Algbriques, Gauthier-Villars, Paris, 1870.

[30] E. N. Kaftaikina, N. A. Dokukova, V.V. Zenkovich, P.N. Konon, General characteristic equation of dynamic multielement system www.rusnauka.com/28_PRNT_2011/Matemathics/1_94612.doc.htm

[31] G. Kalajdžić, Linearna algebra, Matematički fakultet, Beograd, 1998.

[32] G. Kalajdžić, Algebra, Matematički fakultet, Beograd, 2000.

[33] L. Kaup, B. Kaup , Holomorphic Functions of Several Variables: An Introduction to the Fundamental Theory, de Gruyter Studies in Mathematics 3, Walter de Gruyter and Co. Berlin, 1983.

[34] J. Kečkić, Linearna algebra teorija i zadaci, Matematički problemi i ekspozicije 10, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[35] P. Lancaster, M. Tismenetsky, The Theory of Matrices, Second Edition, with Applications, Academic Press, San Diego, 1985.

[36] S. Lang, Algebra, Revised Third Edition, Springer Science+Business Media, New York, 2002.

[37] A. Lipkovski, Linearna algebra i analitička geometrija, Zavod za udžbenike, Beograd, 2007.

[38] B. Malešević, Some considerations in connection with Kurepa's function, Univerzitet u Beogradu, Publikacije Elektrotehničkog Fakulteta, Serija Matematika, Volume 14 (2003), pp. 26-36.

[39] B. Malešević, O transcendentalnim raširenjima diferencijalnih polja, Doktorska disertacija, Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[40] B. Malešević, Some considerations in connection with alternating Kurepa's function, Integral Transforms and Special Functions, Volume 19 (2008), Number 10, pp. 747-756.

[41] B. Malešević, A note about the $\{K_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$ functions, Rocky Mountain Journal of mathematics, Volume 40 (2010), Number 5, pp. 1645-1648.

[42] B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, S. Telebaković, Formulae of Partial Reduction for Linear Systems of First Order Operator Equations, Applied Mathematics Letters, Volume 23 (2010), Number 1, pp. 1367 - 1371.

[43] B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, S. Telebaković, Differential Transcendency in the Theory of Linear Differential Systems with Constant Coefficients, ISRN Mathematical Analysis, Volume 2012 (2012), pp. 1 - 8.

[44] A. Marcja, C. Toffalori, A Guide to Classical and Modern Model Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[45] D. Marker, M. Messmer, A. Pillay, Model Theory of Fields, Association for Symbolic Logic, Springer, New York, 2006.

[46] L. Markus, Differential independence of Γ and ζ, Journal of Dynamics and Differential Equations, Volume 19 (2007), Number 1, pp. 133 - 154.

[47] R. Martínez-Guerra, R. González-Galan, A. Luviano-Juárez, J. Cruz-Victoria, Diagnosis for a class of non-differentially flat and Liouvillian systems, IMA Journal of Mathematical Control and Information, Volume 24 (2007), Number 2, pp. 177 - 195.

[48] K. R. Matthews, Linear Algebra Notes, http://www.numbertheory.org/courses/MP274/smith.pdf

[49] Ž. Mijajlović, B. Malešević, Analytical and differential - algebraic properties of Gamma function, International Journal of Applied Mathematics and Statistics, Volume 11 (2007), Number 7, pp. 118-129.

[50] Ž. Mijajlović, B. Malešević, Differentially transcendental functions, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, Volume 15 (2008), Number 2, pp. 193-201.

[51] Ž. Mijajlović, Z. Marković, Some recurrence formulas related to differential operator θD, Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, Volume 13 (1998), pp. 7-17.

[52] P. Morandi, The Smith Normal Form of a Matrix, http://sierra.nmsu.edu/morandi/notes/SmithNormalForm.pdf

[53] K. Ogata, Modern Control Engineering, fourth edition, Prentice Hall, New Jersey, 2002.

[54] A. G. Oliveira, On the adjugate of a matrix, http://cmup.fc.up.pt/cmup/v2/include/filedb.php?id=109&table=publicacoes&field=file

[55] W. Plesken, G. Hartjen, Constructing Matrices with Given Generalized Characteristic Polynomial, Multidimensional Systems, 2005, NDS 2005, The Fourth International Workshop on, pp. 59-64.

[56] M. Popović, Osnovi elektrotehnike, http://tnt.etf.rs/∼si1oe/Predavanja/Osnovi_elektronike_kompletna_predavanja.pdf

[57] S. Roman, Advanced Linear Algebra, third edition, Springer, New York, 2008.

[58] P. Samuel, Algebraic Theory of Numbers, Hermann, Paris, 1970.

[59] H.J.S. Smith, On systems of linear indeterminate equations and congruences, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Volume 151 (1861), pp. 293 - 326.

[60] J. Stensby, Lecture notes in Analitical and Computational Methods in Electrical Engineering I, Chapter 9: Eigenvalues, Eigenvectors and Canonical Forms Under Similarity, http://www.ece.uah.edu/courses/ee448/chapter9.pdf

[61] W. Terrell, Some Fundamental Control Theory I: Controllability, Observability and Duality, The American Mathematical Monthly, Volume 106 (1999), Number 8, pp. 705 - 719.

[62] W. Wanicharpichat, Nonderogatory of Sum and Product of Doubly Companion Matrices, Thai Journal of Mathematics Volume 9 (2011), Number 2, pp. 361 - 372.

[63] K. Weierstrass, Zur Theorie des quadratischen und bilinearen Formen, Monatsberichte der Akademieder Wiss. Berlin, (1868), pp. 311 - 338.

[64] S. Weintraub, Jordan Canonical Form: Application to Differential Equations, Morgan and Claypool, 2008.

[65] S. Weintraub, Jordan Canonical Form: Theory and Practice, Morgan and Claypool 2009.

Podaci o autoru

Ivana V. Jovović rođena je 30. 07. 1981. godine u Beogradu. Osnovnu školu „Braća Baruh” u Beogradu završila je 1996. godine. Iste godine upisuje Prvu beogradsku gimnaziju koju sa odličnim uspehom završava četiri godine kasnije. Školske 2000/01. godine upisuje Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, smer Teorijska matematika i primene. Diplomirala je 04. 12. 2006. godine sa srednjom ocenom 9,25.
Školske 2006/07. godine upisala je doktorske studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer Algebra. Položila je sledeće ispite:

- Algebru 3 (30 bodova) sa ocenom 10 kod prof. dr Žarka Mijajlovića;
- Univerzalne algebre (30 bodova) sa ocenom 10 kod prof. dr Milana Božića;
- Teoriju skupova (30 bodova) sa ocenom 10 kod docenta dr Aleksandra Perovića;
- Teoriju modela (30 bodova) sa ocenom 10 kod prof. dr Žarka Mijajlovića;
- Algebarsku teoriju brojeva (15 bodova) sa ocenom 10 kod prof. dr Gojka Kalajdžića;
- Specijalni kurs: Komutativna algebra (15 bodova) sa ocenom 10 kod prof. dr Aleksandar Lipkovski.

Od 2007. godine zaposlena je kao asistent na Katedri za primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, gde je držala vežbe na predmetima „Matematika 1”, „Matematika 2” „Praktikum iz matematike 1a”, „Praktikum iz računarskih alata u matematici”, „Složenost algoritama i odabrane metode optimizacije” i „Numerička analiza i diskretna matematika” osnovnih studija i predmetu „Simbolička algebra” na master studijama. Od 2008. do 2011. godine je učestvovala na projektu „Analitičke i algebarske metode i primene u geometriji, topologiji i teoriji brojeva”, Ministarstva za nauku i zaštitu životne sredine. Od 2011. godine angažovana je na projektu „Analiza i algebra sa primenama”, osnovnih istraživanja Ministarstva nauke i tehnološkog razvoja. Ivana Jovović je jedan od realizatora na projektu „Vizuelno predstavljanje nekih matematičkih sadržaja pomoću računara”, programa stručnog usavršavanja Zavoda za unapređenje i vaspitanje. Učestvovala je na sedam naučnih skupova u zemlji i u inostranstvu. Koautor je osam stručnih i naučnih radova, od kojih je jedan u časopisu sa SCI liste, jedan je prihvaćen za štampanje u časopisu sa SCIe liste, dva su u međunarodnim časopisima i tri su objavljena u zborniku međunarodnih ili domaćih konferencija. Ivana Jovović je jedan od recezenata za Mathematical Reviews.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Ивана Јововић

број уписа 2006

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

О редукцијама система линеарних операторских једначина

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 20.03.2013.

Ivana Jovović

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Ивана Јововић

Број уписа 2006

Студијски програм Алгебра

Наслов рада О редукцијама система линеарних операторских једначина

Ментор др Бранко Малешевић

Потписани Ивана Јововић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 20.03.2013.

Ivana Jovović

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

О редукцијама система линеарних операторских једначина

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1 Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 20.03.2013.

Ivana Jovović