UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Marijan M. Marković

NEJEDNAKOSTI IZOPERIMETRIJSKOG TIPA U PROSTORIMA ANALITIČKIH FUNKCIJA

doktorska disertacija

Beograd, 2013

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Маријан М. Марковић

НЕЈЕДНАКОСТИ ИЗОПЕРИМЕТРИЈСКОГ ТИПА У ПРОСТОРИМА АНАЛИТИЧКИХ ФУНКЦИЈА

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Marijan M. Marković

ISOPERIMETRIC TYPE INEQUALITIES IN SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

Komisija:

(prof. dr Miodrag Mateljević, redovni profesor – mentor)

(prof. dr Miroljub Jevtić, redovni profesor)

(prof. dr David Kalaj, redovni profesor, PMF, Univerzitet Crne Gore)

(prof. dr Miloš Arsenović, vanredni profesor)

(prof. dr Vesna Manojlović, docent, FON, Univerzitet u Beogradu)

(datum odbrane)

Iskoristio bih priliku i zahvalio se profesorima Miodragu Mateljeviću i Davidu Kalaju za veliki broj diskusija o temama koje se pojavljuju u radu i značajnu podršku. Zahvalnost dugujem porodici na razumevanju i Ministarstvu nauke Crne Gore zbog finansijske podrške.

Beograd, mart 2013.
Marijan Marković

Naslov. Nejednakosti izoperimetrijskog tipa u prostorima analitičkih funkcija

Rezime. Rad se sastoji od tri glave. Prva glava sadrži dobro poznate činjenice o Hardijevim klasama harmonijskih, analitičkih i logaritamsko subharmonijskih funkcija u disku i njihove primene. Zatim kratko govorimo o harmonijskim i minimalnim površima i klasičnoj izoperimetrijskoj nejednakosti, kao i o rezultatima koji su povezani sa ovom nejednakošću. Jedan od najelegantnijih načina da se ustanovi izoperimetrijska nejednakost je preko Karlemanove nejednakosti za analitičke funkcije u disku. U drugoj glavi prezentujemo rezultate našeg skorijeg rada [29] koji se odnose na harmonijska preslikavanja diska na proizvoljnu Jordanovu površ. U ovoj glavi su klasični rezultati Karateodoria i Smirnova za konformna preslikavanja razmotreni za prethodni tip preslikavanja. Na kraju glave prethodne rezultate primenjujemo u cilju dokaza izoperimetrijske nejednakosti za Jordanove harmonijske površi omedjene rektificijabilnom krivom. U trećoj, prema [35], izvodimo dokaz jedne nejednakosti izoperimetrijskog tipa, slične Karlemanovoj, za analitičke funkcije više promenjivih. Prva verzija ove nejednakosti je za analitičke funkcije u proizvoljnoj Reinhardtovoj oblasti, a druga se odnosi na funkcije koje pripadaju Hardijevim prostorima na polidisku.

Ključne reči. Izoperimetrijska nejednakosti, Hardijevi prostori, Bergmanovi prostori, harmonijska preslikavanja.

Naučna oblast. Matematika.

Uža naučna oblast. Kompleksna analiza.

UDK broj. 517.547 (043.3)

Title. Isoperimetric Type Inequalities in Spaces of Analytic Functions

Abstract. This work consists of three chapters. The first one contains some well known facts about Hardy classes of harmonic, analytic, and logarithmically subharmonic functions in the unit disk, as well as their applications. Then we briefly talk about the harmonic and minimal surfaces, the classical isoperimetric inequality, and the more recent results related to this inequality. One of the most elegant way to establish the isoperimetric inequality is via Carleman's inequality for analytic functions in disks. In the second chapter we present the results from our recent work [29] for harmonic mappings of a disc onto a Jordan surface. In this chapter we establish the versions of classical theorems of Carathéodory and Smirnov for mappings of the previous type. At the end of the head we apply these results to prove the isoperimetric inequality for Jordan harmonic surfaces bounded by rectifiable curves. In the third chapter, according to the author paper [35], we prove an inequality of the isoperimetric type, similar to Carleman's, for functions of several variables. The first version of this inequality is for analytic functions in a Reinhardt domain. The second one concerns the functions that belong to Hardy spaces in polydiscs.

Key words. The Isoperimetric Inequality, Hardy Spaces, Bergman spaces, harmonic mappings.

Science area. Mathematics, Complex Analysis.

UDC number. 517.547 (043.3)

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Ovo poglavlje započinjemo sa poznatim tvrdjenjima o reprezentaciji harmonijskih funkcija. Posle dolazi kratka diskusija o subharmonijskim funkcijama. Obe teme su od fundamentalnog značaja za teoriju Hardijevih klasa analitičkih funkcija u jediničnom disku; navodimo zatim neke bitne primene ove teorije (teorema Smirnova za konformna preslikavanja). Potom uvodimo Hardijeve klase (logaritamsko) subharmonijskih funkcija, koje igraju važu ulogu u trećem poglavlju. U drugom odeljku navodimo činjenice vezane za površi smešete u $\mathbb{R}^n$ i preciziraćemo pojam harmonijske površi. Na kraju je reč o klasičnoj izoperimetrijskoj nejednakosti i novijim povezanim rezultatima.

1.1 Hardijeve klase i njihove primene

1.1.1 Harmonijske funkcije

Posledica Grinove teoreme je Grinov identitet:

$$\int_D (u\triangle v - v\triangle u)\, dA = \int_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds; \tag{1.1}$$

ovde je D unutašnjost glatke krive Γ, ds označava element dužine Γ, dA je Lebegova mera, $\partial/\partial n$ ima značenje izvoda u pravcu spoljne normale, a realno vrednosne funkcije u i v poseduju neprekidne izvode do drugog reda u $\overline{D}$ ($u,\ v \in C^2(\overline{D})$). Ukoliko je funkcija u harmonijska u D, odnosno ako se $\triangle u$ poništava u ovoj oblasti, uzimajući za v konstantnu funkciju u identitetu (1.1), neposredno nalazimo da se fluks za u poništava, odnosno

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \tag{1.2}$$

Iz (1.2) sledi da harmonijska funkcija u otvorenom skupu D poseduje svojstvo srednje vrednost – vredi

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta \tag{1.3}$$

za sve $z \in D$ i pogodne radijuse $r = r(z) > 0$. Više od toga, ovo svojstvo karakteriše harmonijske funkcije: neprekidna funkcija koja ima svojstvo srednje vrednosti mora biti harmonijska. Iz svojstva srednje vrednosti relativno brzo se dolazi do principa maksimuma – harmonijska funkcija u oblasti D (oblast je otvoren i povezan skup) ne može dostizati ni lokalni maksimum ni lokalni minimum u D, osim ako nije reč o funkciji koja je jednaka realnoj konstanti u celom domenu. Dakle, ako je funkcija harmonijska u ograničenoj oblasti D i neprekidna u $\overline{D}$, maksimum i minimum se dostižu na granici ∂D.

Dirihleov problem se sastoji u tome da se odredi funkcija harmonijska u zadatoj oblasti D, neprekidna u $\overline{D}$, koja se poklapa sa zadatom neprekidnom funkcijom na granici ∂D. Jedinstvenost rešenja za ograničene oblasti sledi iz principa maksimuma. Medjutim, egzistenciju rešenja nije uvek lako utvrditi. Ukoliko je granica ∂D dovoljno dobra, elegantan dokaz se može izvesti posredstvom familije subharmonijskih funkcija u D koje su na granici ∂D odozgo omedjene zadatom funkcijom; reč je o čuvenom Peronovom metodu [1].

Rešenje Dirihleovog problema uvek postoji ako je D Jordanova oblast. Medjutim, do ovog zaključka može se doći indirektno korišćenjem osobina harmonijskih funkcija. Pre svega, doboro je poznato da je realno vrednosna funkcija harmonijska u prosto povezanoj oblasti ako i samo ako je realan deo funkcije analitičke u istoj oblasti. Odavde sledi da konformna preslikavanja čuvaju harmonijske funkcije – ako je f konformno preslikavsnje oblasti D^* na D, tada je $u \circ f$ harmonijska funkcija u D^*, ako je u harmonijska u D. Imajući u vidu Rimanovu teoremu o konformnim preslikavanjima i Karateodorijevu teorema o ekstenziji, Dirihleov problem za Jordanove oblasti je dovoljno razmotriti za jedinični disk.

Kada je zadata oblast disk, Dirihleov problem može se rešiti eksplicitno. Uzmi-mo u razmatranje jedinični disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Neka je funkcija φ neprekidna u segmentu $[0, 2\pi]$ i neka je pri tome $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Puasonova ekstenzija (ili Puasonov integral) za φ je

$$u(z) = \mathrm{P}[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\varphi(t) dt, \quad z = re^{i\theta}, \tag{1.4}$$

gde je

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}, \quad 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Puasonovo jezgro.

Budući da konformna preslikavanja čuvaju harmonijske funkcije, relacija (1.4) se za $\varphi(t) = u(e^{it})$ može izvesti iz (1.3) za funkciju $u(z)$ harmonijsku u disku $|z| < 1$ i neprekidnu u zatvorenom disku $|z| \leq 1$. Drugim rečima, funkcija $u(z)$ harmonijska u $|z| < 1$ i neprekidna u $|z| \leq 1$ se može rekonstruisati iz svoje granične funkcije $\varphi(t) = u(e^{it})$ prema (1.4).

Obrnuto, $u(z)$ zadata Puasonovim integralom (1.4) je harmonijska u disku $|z| < 1$ i neprekidna u $|z| \leq 1$, pri tome je $u(e^{it}) = \varphi(t)$. Dakle, $u(z)$ je rešenje Dirihleovog problema za jedinični disk. U dokazu ove činjenice, izmedju ostalih, bitnu ulogu igraju naredna svojstva Puasonovog integrala:

$$P(r,\theta) > 0, \quad P(r,\theta) = P(r,-\theta)$$

i

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)dt = 1, \quad 0 \leq r < 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pretpostavimo sada da funkcija $\varphi(t)$ koja figuriše u (1.4) ima prekid prve vrste u θ. Dakle, neka u tački θ leva i desna granična vrednost $\varphi(\theta-)$ i $\varphi(\theta+)$ postoje, ali je $\varphi(\theta-) \neq \varphi(\theta+)$. Neka je još $\varphi(t) \in L^1$. Tada je $u(z) = \mathrm{P}[\varphi](z)$, harmonijska u disku $|z| < 1$ i poseduje radijalnu graničnu vrednost

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}(\varphi(\theta-) + \varphi(\theta+)).$$

Opštije, kada se tačka z unutar jediničnog diska približava $e^{i\theta}$ duž luka koji se završava u ovoj tački zahvatajući sa jediničnom kružnicom ugao α $(0 < \alpha < \pi)$, može se pokazati da $u(z)$ teži odgovarajućem usrednjenju

$$\frac{\alpha}{\pi}\varphi(\theta-) + \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\varphi(\theta+).$$

Uopštavajući dalje (1.4), dolazimo do Puason–Stiltjesovog integrala. Funkcija koja ima formu

$$u(z) = \mathrm{PS}[\mu](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)d\mu(t), \tag{1.5}$$

gde je $\mu(t)$ ograničene varijacije u $[0, 2\pi]$, je takodje harmonijska u disku $|z| < 1$. Posebno, za $\mu(t) = \int_0^t \varphi(t)dt$, gde je $\varphi(t) \in L^1$ i $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, imamo

$$\mathrm{PS}[\mu] = \mathrm{P}[\varphi].$$

Slična tvrdjenja koja smo ranije naveli o graničnom ponašanu mogu se pokazati i za klasu integrala (1.5). Simetrični izvod $\mu(t)$ u tački θ je

$$D\mu(\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(\theta + t) - \mu(\theta - t)}{2t}.$$

Teorema 1.1. *Neka je $u(z)$ harmonijska funkcija u disku $|z| < 1$ zadata Puason–Stiltjesovim integralom (1.5), pri čemu je $\mu(t)$ ograničene varijacije. Ako simetrični izvod $D\mu(\theta)$ postoji u tački θ, tada postoji i radijalna granična vrednost*

$$\lim_{r\to 1^-} u(re^{i\theta})$$

i jednaka je $D\mu(\theta)$.

Zapravo, moguće je ustanoviti da $u(z)$ teži ka $D\mu(\theta)$ duž proizvoljnog luka u jediničnom disku koji se završava u $e^{i\theta}$ i koji ne tangira jediničnu kružnicu u ovoj tački.

1.1.2 Klase harmonijskih funkcija

Realno vrednosna funkcija $u(z)$ harmonijska u $|z| < 1$ pripada Hardijevoj klasi h^p $(0 < p \leq \infty)$ ukoliko integralno usrednjene

$$M_p(r, u) = \left\{ \frac{1}{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \qquad (0 < p < \infty);$$

$$M_\infty(r, u) \;=\; \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |u(re^{i\theta})|$$

ostaje ograničeno pri $r \to 1^-$. Naprimer, jasno je da h^∞ obuhvata ograničene harmonijske funkcije, kao i da vredi $h^p \supseteq h^{p'}$ ako je $0 < p < p' \leq \infty$. Isto tako, nije teško proveriti da je h^p linearan prostor.

Naredna teorema o reprezentaciji igra veoma bitu ulogu.

Teorema 1.2. *Sledeće tri klase funkcija u jediničnom disku se poklapaju:*

1. *Puason–Stiltjesovi integli;*
2. *razlike pozitivnih harmonijskih funkcija;*
3. h^1.

Dokaz koji se bazira na Helijevoj teoremi o izboru izveden je u [16]. Teoremu o izboru navodimo niže, jer je reč o tvrdjenju koje će biti od koristi u narednoj glavi, takodje prilikom ustanovljenja jedne teoreme o reprezentaciji; dokaz se može videti, naprimer, u monografiji [40].

Lema 1.1 (Helijeva teorema o izboru)**.** *Neka je $\{\mu_n(t)\}$ niz funkcija uniformno ogranične varijacije u segmentu $[a,b]$ koji je još i uniformno ograničen. Tada postoji podniz $\{\mu_{n_k}(t)\}$ koji konvergira svuda u $[a,b]$ ka $\mu(t)$ takodje ograničene varijacije. Pri tome za svaku funkciju $\varphi(t)$ neprekidu u $[a,b]$ vredi*

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b \varphi(t)d\mu_{n_k}(t) = \int_a^b \varphi(t)d\mu(t).$$

Teorema 1.2 pripada Risu. Funkcija $\mu(t)$ ograničene variacije u $[0,2\pi]$ koja odgovara $u(z)\in h^1$ posredstvom Puason–Stiltjesovog integrala (1.5) je, u izvesnom smislu, jedinstvena. Posebno, svaka pozitivna harmonijska funkcija u jediničnom disku se može predstaviti u formi Puason–Stieltjesovog integrala neke neopadajuće funkcije $\mu(t)$.

Kako je funkcija ograničene varijacije s.s. (skoro svuda) diferencijabilna, imamo važnu posledicu: $u(z)\in h^1$ poseduje radijalnu (i netangencijalnu) graničnu vrednost u s.s. tačkama jedinične kružnice; meru koju podrazumevamo na kružnici $\mathbb{T}=\{|z|=1\}$ je normalizovana mera $dm(e^{i\theta})=d\theta/2\pi$.

Kako postoji obostrano jednoznačna korespodencija izmedju klase $\{\mu(\zeta)\}$ realnih Borelovih mera na jediničnoj kružnici i klase $\{\mu(t)\}$ normalizovanih funkcija ograničene varijacije u $[0,2\pi]$ ($\mu(t)$ je normalizovana u $[0,2\pi]$ ako vredi $\mu(t)=\mu(t+)$ za sve $0\le t<2\pi$), napomenimo da se Puason–Stiltjesov integal može predstaviti u formi

$$\mathrm{PS}[\mu(t)](z)=\mathrm{P}[\mu(\zeta)]=\int_{\mathbb{T}} P(z,\zeta)d\mu(\zeta),\quad |z|<1,$$

gde smo ozačili

$$P(z,\zeta)=P(r,\theta-t),\quad z=re^{i\theta},\ \zeta=e^{it}.$$

1.1.3 Subharmonijske funkcije

Subharmonijske funkcije smo pomenuli kod Peronovog metoda. Ovde ćemo prvo precizirati sam pojam. Odozgo poluneprekidna funkcija $-\infty\le u(z)<+\infty$ u oblasti D, koja nije jednaka $-\infty$ u celoj oblasti, je subharmonijska u D ako za svaku ogrničenu oblast B koji se komaktno sadrži u D (tj. $\overline{B}\subseteq D$) i za svaku harmonijsku funkciju $U(z)$ u B, neprekidnu u $\overline{B}$, za koju je $u(z)\le U(z)$ na granici ∂B, vredi $u(z)\le U(z)$ u celoj oblasti B.

Subharmonijske funkcije se mogu okarakterisati na ovaj način: neophodno i dovoljno da je odozgo poluneprekidna funkcija $u(z)$ (koja nije jednaka $-\infty$ svuda) bude subharmonijska u D jeste da ze sve $z_0\in D$ postoji $\rho_0=\rho_0(z_0)>0$ tako da se disk $|z-z_0|<\rho_0$

sadrži u D i da je ispunjeno

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \tag{1.6}$$

za sve $\rho < \rho_0$.

Naprimer, ako je funkcija $f(z)$ analitička u oblasti D i ako je $p > 0$, tada je $u(z) = |f(z)|^p$ subharmonijska u D; ako je $f(z)$ harmonijska u D i $p \geq 1$, tada je $|f(z)|^p$ subharmonijska u D.

Neka je

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & \text{ako je } x \geq 1, \\ 0, & \text{ako je } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Funkcija $u(z) = \log^+ |f(z)|$ je subharmonijska, ako je $f(z)$ analitička.

Teorema 1.3. *Neka je funkcija $u(z)$ subharmonijska u disku $|z| < 1$. Tada je*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

neopadajuća funkcije promenjive $0 \leq r < 1$.

1.1.4 Klase analitičkih funkcija

Hardijeva klasa analitičkih funkcija H^p $(0 < p \leq \infty)$ može se uvesti na sličan način kao i klasa h^p. Dakle, H^p sačinjavaju funkcije $f(z)$ analitičke u disku $|z| < 1$ za koje integralno usrednjenje $M_p(r, f)$ ostaje ograničeno pri $r \to 1^-$. Može se lako ustanoviti: $f \in H^p$ ako i samo ako $\Re f \in h^p$ i $\Im f \in h^p$.

Kako smo već naveli, funkcija koja pripada h^1 poseduje radijalnu (i netangencijalnu) graničnu vrednost u s.s. pravcu. Dakle, isto vredi i za elemente klase H^1 i, posebno, za elemente H^∞. Zapravo, isto svojstvo ostaje na snazi i za one funkcije koje pripadaju Hardijevom prostoru H^p kada je $p < 1$, uprkos činjenici da slično tvrdjenje nije na snazi za harmonijske Hardijeve klase. Medjutim, ovo se može utvrditi posmatrajući klasu Nevanline.

Klasa Nevanline N, ili klasa funkcija ograničene karakteristike, se definiše kako sledi. Analitička funkcija $f(z)$ u disku $|z| < 1$ pripada kalasi N ako je familija integrala

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta : 0 \leq r < 1 \right\}$$

ograničena. Kako je ovde $\log^+ |f|$ subharmonijska, integrali koji se pojavljuju u (1.1.4) rastu sa porastom r. Jasno je da N sadrži H^p za sve $0 < p \leq \infty$.

Teorema 1.4 (F. i R. Nevanlina; videti [16]). *Analitička funkcija u jediničnom disku pripada klasi N ako i samo ako se može predstavti kao količnik dve ograniče-ne analitičke funkcije.*

Bitnost ove teoreme se ogleda u tome da reprezentacija o kojoj je reč dozvoljava da se svojstva klase N izvedu iz odgovarajućih svojstava ograničenih analitičkih funkcija. Naprimer, oslanjajući se na teoremu 1.4 može se pokazati naredno tvrdjenje o graničnom ponašanju.

Teorema 1.5 (videti [16]). *Svaka funkcija $f \in N$ poseduje radijalnu (i netangencijalnu) graničnu vrednost $f(e^{i\theta})$ s.s., pri tome je $\log|f(e^{i\theta})| \in L^1$, osim u slučaju $f \equiv 0$. Ako $f \in H^p$ za izvesno $0 < p \leq \infty$, tada $f(e^{i\theta}) \in L^p$.*

Izmedju ostalog, teorema govori da ako za $f \in N$ vredi $f(e^{i\theta}) = 0$ na skupu pozitivne mere, tada je $f \equiv 0$. Drugim rečima, funkcija koja pripada klasi N je jedinstveno odredjena svojim graničnim vrednostima u proizvoljnom skupu pozitivne mere.

Uslov rasta koji je nametnut elementima Hardijevih prostora i klasi Nevanline se odražava na brzinu konvergencije nula ka granici: Neka je $f(z) \not\equiv 0$ analitička funkcija u disku $|z| < 1$ i neka su $z_1, \ z_2, \ldots$ sve njene nule, koje se zastupljene u nizu prema multiplicitetu. Upotrebljavajući Jensenovu formulu [1], moguće je pokazati da je

$$\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

ograničeno (u odnosu na $0 \leq r < 1$) ako i samo ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |z_n|) < \infty. \tag{1.7}$$

Kao posledicu imamo da nule funkcija koja pripada klasi N moraju zadovoljavati prethodni uslov. Na prvi pogled može se očekivati da vredi jači uslov od (1.7) za funkcije koje pripadaju Hardijevoj klasi, budući da je uslov rasta zahtevniji. Medjutim, i kada je $f \in H^\infty$, ništa više ne mora da važi.

Neka je $\{z_n\}$ proizvoljan niz brojeva u jediničnom disku takav da vredi uslov (1.7). Postoji ograničena analitička funkcija čije su nule, računajući multiplicitet tačno $\{z_n\}$. Neka je m nenegativan ceo broj koji predstavlja broj pojavljivanja nule u nizu $\{z_n\}$ i neka je $\{a_n\}$ niz koji se dobija iz $\{z_n\}$ tako što se precrtaju članovi koji su jednaki nuli; jasno je da $\{a_n\}$ takodje zadovoljava Blaškeov uslov. Beskonačni proizvod

$$B(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{z - a_n}{1 - \overline{a}_n z} \tag{1.8}$$

je analitička funkcija u disku $|z| < 1$. Svaki član niza $\{z_n\}$ je nula $B(z)$, računajuć multiplicitet, pri tome $B(z)$ nema drugih nula u jediničnom disku. štaviše, $B(z) \leq 1$ za sve $|z| < 1$ i $|B(e^{i\theta})| = 1$ s.s. Prethodne činjenice se mogu naći u [16]. Napomenimo da niz nula $\{z_n\}$ može biti konačan ili čak prazan. Ako je $\{z_n\}$ prazan, tada podrazumevamo $B(z) \equiv 1$. Funkcija oblika (1.8) naziva se Blaškeov proizvod.

Teorema 1.6 (F. Ris; videti [16]). *Svaka funkcija $f \not\equiv 0$ koja pripada prostoru H^p $(0 < p \leq \infty)$ može se faktorisati u formi $f = Bg$, gde je B Balaškeov proizvod, g pripada H^p i ne poništava se nigde u jediničnom disku.*

Teorema 1.7 (Konvergencija u srednjem; videti [16]). *Ako je $f \in H^p$, tada vredi*

$$\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \quad (0 < p \leq \infty)$$

i

$$\lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0 \quad (0 < p < \infty).$$

Neka $\mathcal{H}^p$ $(0 < p \leq \infty)$ označava klasu svih graničnih funkcija $f(e^{i\theta}),\ f \in H^p$. Naravno, identifikujemo granične funkcije koje se poklapaju s.s. Prema teoremi o konvergenciji u srednjem, imamo $\mathcal{H}^p \subseteq L^p$ za sve $0 < p \leq \infty$; lako se vidi da je $\mathcal{H}^p$ potprostor Lebegovog prostora.

Norma u H^p $(0 < p \leq \infty)$ se uvodi prvom relacijom koja sledi

$$\|f\|_p \ = \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta \right\}^{1/p};$$

druga jednakost sledi iz teoreme 1.7. Dakle, H^p je izometričan sa $\mathcal{H}^p$ posredstvom $f(z) \mapsto f(e^{i\theta})$. Sledi, ako je $1 \leq p \leq \infty,\ H^p$ je normiran prostor. Ako je $0 < p < 1$, tada $\|\cdot\|_p$ nije norma u strogim smislu, zapravo prostor H^p tada nije normabilan, ali je pogodno da se koristi reč "norma".

Teorema 1.7 se može pokazati upotrebom Risove teoreme o faktorizaciji, medjutim to se može izbeći pristupom koji koristi maksimalnu funkciju. Prema istoj teoremi, kod Risove faktorizacije sledi $\|f\|_p = \|g\|_p$.

Teorema 1.7 se može iskoristiti za novo tvrdjenje o reprezentaciji:

Teorema 1.8. *Funkcija $f(z)$ analitička u disku $|z| < 1$ može se predstaviti u formi Puasonovog integrala*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \varphi(t) dt, \quad z = re^{i\theta},$$

gde je $\varphi(t) \in L^1$, ako i samo ako je $f \in H^1$. Pri tome je $\varphi(t) = f(e^{it})$ s.s.

1.1.5 Primene

Sada ćemo se okrenuti nekim poznatim primenama teorije Hardijevih prostora; reč je o primenama u teoriji mere (teorema F. i M. Risa) i teoriji konformnih preslikavanja (teorema Smirnova).

Za kompleksno vrednosnu funkciju ograničene varijacije $\mu(t)$, Koši–Stiltjesov integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{1 - e^{-it}z} \tag{1.9}$$

odredjuje par analitičkih funkcija: jednu u disku $|z| < 1$ i drugu u oblasti $|z| > 1$.

Koši–Stiltjesov integral (1.9) je povezan sa Puason–Stiltjesovim integralom za istu funkciju $\mu(t)$ sledećim identitetom:

$$F(z) - F\left(1/\overline{z}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) d\mu(t), \tag{1.10}$$

gde je $z = re^{i\theta},\ 0 \leq r < 1$.

Može se pokazati $F(z) \in H^p$ za sve $0 < p < 1$. Zato prema teoremi 1.5, radijalna granična vrednost

$$\lim_{r \to 1^-} F(re^{i\theta}) \text{ postoji s.s.}$$

Medjutim, kada $r \to 1^-$, desna strana relacije (1.10) teži $\mu'(\theta)$ s.s. (prema teoremi 1.1). Dakle, i spoljna granična vrednost mora postojati s.s. Prema tome je

$$\lim_{r \to 1^-} F(re^{i\theta}) - \lim_{r \to 1^+} F(re^{i\theta}) = \mu'(\theta) \text{ s.s.}$$

Relacija (1.10) se može upotrebiti da se pokaže naredna

Lema 1.2. *Za kompleksno vrednosnu funkciju $\mu(t)$ ograničene varijacije, sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. $$\int_0^{2\pi} e^{int} d\mu(t) = 0 \quad \textit{za sve} \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

2. *Koši–Stiltjesov integral*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{1 - e^{-it}z}$$

se poništava u $|z| > 1$.

3. *Puason–Stiltjesov integral*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)d\mu(t)$$

je analitička funkcija u $|z| < 1$.

Oslanjajući se na lemu, pokazaćemo

Posledica 1.1. *Funkcija* $f(z)$ *analitička u disku* $|z| < 1$ *je Koši–Stiltjesov integral svoje granične funkcije:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})dt}{1 - e^{-it}z}.$$

gde je $\varphi(t) \in L^1$*, ako i samo ako je* $f \in H^1$*. Pri tome je* $\varphi(t) = f(e^{it})$ *s.s.*

Dokaz. Ranije smo ustanovili da se $f \in H^1$ može predstaviti u formi Puason–Stiltjesovog integrala:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta - t)f(e^{it})dt, \quad z = re^{i\theta}.$$

Kako je na levoj strani funkcija analitička u disku $|z| < 1$, na osnovu prethodne leme sledi da se Koši–Stiltjesov integral $F(z)$ za $d\mu(t) = f(t)dt$ poništava u oblasti $|z| > 1$. Tvrdjenje sada sledi na osnovu identiteta (1.10). □

Kako smo već rekli, kompleksno vrednosna funkcija $\mu(t)$ ograničene varijacije u $[0, 2\pi]$ je normalizovana ako vredi $\mu(\theta) = \mu(\theta+)$ za sve $0 \leq \theta < 2\pi$, odnosno, ako je μ neprekidna sa desne strane u svim tačkama segmenta. Prethodni rezultati se mogu upotrebita da se ustanove neki biti rezultati u teoriji mere.

Teorema 1.9 (F. i M. Ris). *Neka je* $\mu(t)$ *normalizovana kompleksno vrednosna funkcija ograničene varijacije u segmentu* $[0, 2\pi]$*, sa svojstvom*

$$\int_0^{2\pi} e^{int}d\mu(t) = 0 \quad \text{za sve} \quad n = 1,\ 2, \ldots$$

Tada je $\mu(t)$ *apsolutno neprekidna.*

Dokaz. Prema lemi 1.2 pretpostvaka u ovoj teoremi povlači da je funkcija zadata Puason–Stiltjesovim integralom $f(z) = PS[\mu(t)](z)$ analitička u $|z| < 1$. Dakle, $f \in H^1$. Sledi da se $f(z)$ može predstaviti u formi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta - t)f(e^{it})dt, \quad z = re^{i\theta}$$

(teorema 1.8). Kako je Puasonova reprezentacija jedinstvena, sledi

$$d\mu(t) = f(e^{it})dt.$$

$\square$

U opštem slučaju, neprekidna funkcija ograničene varijacije ne mora biti i apsolutno neprekidna. Poznat je primer Lebegove funkcije nad Kantorovim skupom koja je monotona, neprekidna i potpuno singularna. Za one funkcije koje su granične analitičkih u disku, neprekidnost je ekvivalentna sa absolutnom neprekidnoshću. Zapravo, moguće je pokazati i jače tvrdjenje:

Teorema 1.10. *Ako $f(z) \in H^1$ i ako se $f(e^{i\theta})$ s.s. poklapa sa funkcijom ograniče-ne varijacije, tada je $f(z)$ neprekidna u $|z| \leq 1$ i $f(e^{i\theta})$ je absolututno neprekidna.*

Klasa funkcija koja se upravo pojavila – analitičke funkcije sa apsolutnonepre-kidnom radijalnom graničnom funkcijom – može se okarakterisati jednostavnijim uslovom: $f' \in H^1$. Izraz $f'(e^{i\theta})$ ubuduće ima dva različita značenja. Može označavati radijalnu graničnu vrednost $f'(z)$ ili izvod u odnosu na promenjivu θ radijalne granične funkcije $f(e^{i\theta})$); ako se izuzme faktor $ie^{i\theta}$, reč je o istom:

Teorema 1.11. *Funkcija $f(z)$ analtička u $|z| < 1$ je neprekidna na $|z| \leq 1$ i apsolut-noneprekidna na $|z| = 1$ ako i samo ako $f \in H^1$. Ako $f' \in H^1$, tada je*

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} \lim_{r \to 1^-} f'(re^{i\theta}) \text{ s.s.} \tag{1.11}$$

Tvrdjenja koja su upravo navedena mogu se iskoristiti da se izvedu neki dublji rezultati u teoriji konformnih preslikavanja.

Jordanova kriva (prosta zatvorena kriva) Γ je slika neprekidne kompleksno vrednosne funkcije $\Gamma(t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ za koju još vredi $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$ i $\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2)$ za sve $0 \leq t_1 < t_2 \leq 2\pi$. Kriva Γ je rektificijabina ako je $\Gamma(t)$ ograničene varijacije. Dužina L se tada definiše kao totalna varijacija funkcije $\Gamma(t)$:

$$L = \sup \sum_{k=1}^{n} |\Gamma(t_k) - \Gamma(t_{k-1})|;$$

supremum se uzima po svim mogućim podelama $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi$ segmenta $[0, 2\pi]$. Lako se da utvrditi da L zaista zavisi samo od krive Γ, odnosno da je L invarijntno u odnosu na promenu parametrizacije. Ako je $\Gamma(t)$ apsolutnoneprekidna, dužina dela luka na Γ koji odgovara nekom segmentu $a \leq t \leq b$ je data sa

$$\int_a^b |\varphi'(t)|dt;$$

dokaz se može naći u monografiji [40]. Sledi da svaki skup $E \subseteq [0, 2\pi]$ merljiv u Lebegovom smislu ima sliku na Γ koja je mere

$$\int_E |\varphi'(t)|dt.$$

Zaista, formula je očito tačna za otvorene skupove E, i dakle za G_δ skupove (prebrojive preseke otvorenih skupove). Kako se proizvoljan merljiv skup E sadrži u nekom G_δ skupu iste mere, formula vredi u opštem slučaju.

Neka je $f(z)$ konformno preslikavanje $|z| < 1$ na unutrašnjost Jordanove krive Γ. Prema teoremi Karateodoria, $f(z)$ poseduje jednoznačnu neprekidnu ekstenziju na $|z| \leq 1$. Posebno, $\Gamma(t) = f(e^{it})$ je parametrizacija krive Γ.

Primenjujući teoremu 1.10 i teoremu 1.11, dolazimo do narednog bitnog rezultata.

Teorema 1.12 (Smirnov)**.** *Neka je $f(z)$ konformno preslikavanje diska $|z| < 1$ na unutrašnjost Jordanove krive Γ. Tada je Γ rektificijabilna ako i samo ako $f' \in H^1$.*

Teorema je "očigledna" kada se posmatra geometrijski. Ona govori da su dužine

$$L_r = r \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|d\theta$$

slike kružnice $|z| = r$ ogrnaničene ako i samo ako granica ima konačnu dužinu.

Ukoliko je granica rektificijabilna, radijalna granična funkcija $f'(e^{i\theta})$ postoji s.s. na granici jediničnog diska, pri tome je $f'(e^{i\theta})$ povezana za izvodom apsolutnoneprekidne granične funkcije $f(e^{i\theta})$ i $|f'(e^{i\theta})|$ je integrabilna. Merljiv skup E na jediničnoj kružnici se posredstvom f slika na podskup Γ koji ima meru

$$\int_E |f'(e^{i\theta})|d\theta.$$

Obrnuto, podskup $|z| = 1$ ima meru jednaku nuli ako i samo ako njegova slika na Γ ima meru nula. Dakle, skupovim mere nula na odgovarajućim granicama se čuvaju priliom konformnog preslikavanja.

Prethodni rezultati koji se tiču konformnih preslikavanja mogu se sumirati:

Posledica 1.2. *Neka je D prosto povezana oblast omedjena Jordanovom krivom Γ i neka je $f(z)$ konformno preslikavanje diska $|z| < 1$ na D. Označimo sa $\Gamma(\theta) = f(e^{i\theta})$ parametrizaciju krive Γ.*

Sledeći iskazi su ekvivalentnit:

1. $\Gamma(\theta)$ *je apsolutnoneprekidna;*

2. $f' \in H^1$*;*

3. *kriva* Γ *je rektificijabilna.*

Ako vredi neki od iskaza (1) – (3)*, tada je*

$$\Gamma'(\theta) = ie^{i\theta} f'(e^{i\theta}) \;\; s.s. \tag{1.12}$$

Dakle, u okviru posledice 1.2, teorema Smirnova govori da je iskaz (2) ekvivalentan iskazu (3). Odredjenu verziju teoreme Smirnova i posledice 1.2 pokazaćemo u narednom poglavlju za harmonijska preslikavanja.

1.1.6 Karakteristika analitičkih Hardijevih klasa

Kako smo već naveli, ako je $f(z)$ analitička u oblasti D, tada je $|f(z)|^p$ subharmonijska u D. Ovo znači da je za svaki disk koji se kompaktno sadrži u D, $|f(z)|^p$ natkrivena harmonijskom funkcijom – Puasonovim integralom granične funkcije na disku. Naravno, ne mora uvek postojati jedinstvena harmonijska funkcija koja natkriva $|f(z)|^p$ u celoj oblasti D. Uopšte, proizvoljna funkcija $g(z)$ poseduje harmonijsku majorantu u D ako postoji funkcija $U(z)$ harmonijska u D tako da vredi $g(z) \leq U(z)$ za sve $z \in D$. Ako je g odozgo poluneprekidna i ako poseduje harmonijsku majorantu, tada je ona očito subharmonijska u D; medjutim obrnuto nije na snazi.

Naredna nejednakost je od koristi:

$$\log|f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\log|f(e^{it})|dt, \tag{1.13}$$

za sve $f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$.

Neka je sada $f(z)$ analitička funkcija u disku $|z| < 1$ i neka je $U(z)$ harmonijska majorant za $|f(z)|^p$. Prema teoremi o srednjoj vrednosti, nalazimo

$$M_p^p(r, f) \leq U(0), \quad 0 \leq r < 1.$$

Obrnuto, ako $f \in H^p$, prema nejednakosti (1.13) i Jensenovoj nejednakosti (za konveksnu funkciju $t \mapsto \exp\{p \cdot t\}$) sledi

$$|f(z)|^p = \exp\{p \cdot \log|f(z)|\} \leq \exp\left\{p \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\log|f(e^{it})|dt\right\}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)|f(e^{it})|^p dt$$

Dakle, $|f(z)|^p$ je natkrivena Puasonovim integralom

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)|f(e^{it})|^p dt.$$

Zaprvo, može se proveriti, da je $U(z)$ najmanja harmonijska majoranta za $|f(z)|^p$. Naime, neka je $V(z)$ proizvoljna druga harmonijska majoranta za istu funkciju, tada je $U(z) \leq V(z),\ |z| < 1$. Za sve $0 < \rho < 1$ vredi

$$U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)|f(e^{it})|^p dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)V(\rho e^{it})dt = V(\rho z)$$

Puštajući $\rho \to 1^-$, nalazimo $U(z) \leq V(z)$.

Na osnovu prethodnog, imamo narednu karakteristiku Hardijevih prostora: Analitička funkcija $f(z)$ u disku $|z| < 1$ pripada prostoru H^p $(0 < p < \infty)$ ako i samo ako $|f(z)|^p$ poseduje harmonijsku majorantu u $|z| < 1$. Ako je $U(z)$ najmanja harmonijska majoranta za $|f|^p$, neposredno sledi

$$\|f\|_p = U(0)^{1/p}.$$

1.1.7 Kanonska faktorizacija

Vratimo se Risovoj teoremi o faktorizaciji (teorema 1.6). Posredstvom ove teoreme dolazi se do kanonske faktorizacije. Neka $f(z) \not\equiv 0$ pripada klasi H^p za izvesno $0 < p \leq \infty$. Prema teoremi 1.5, $f(e^{i\theta}) \in L^p$ i $\log|f(e^{i\theta})| \in L^1$. Razmotrimo narednu analitičku funkciju u jediničnom disku

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{i\theta})|dt\right\} \tag{1.14}$$

Neka je, prema teoremi1.6, $f(z) = B(z)g(z)$; dakle $g(z) \neq 0$ za sve $|z| < 1$ i $|g(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$ s.s. Prema nejednakosti (1.13), $|g(z)| \leq |F(z)|$ za sve $|z| < 1$. Takodje, $|g(e^{i\theta})| = |F(e^{i\theta})|$ s.s., prema posledici teoreme 1.1. Prema tome, ako je $e^{i\gamma} = g(0)/|g(0)|$, funkcija $S(z) = e^{-i\gamma}g(z)/F(z)$ je analitička u jediničnom disku i poseduje naredna svojstva

$$0 < |S(z)| \leq 1, \quad S(e^{i\theta}) = 1 \text{ s.s.}, \quad S(0) > 0.$$

Ovo pokazuje da je $-\log S(z)$ pozitivna harmonijska funkcija koja se poništava s.s. u jediničnoj kružnici. Prema Risovoj teoremi o reprezentaciji i prema teoremi 1.1, $-\log S(z)$ se može predstaviti u formi Puason–Stiltjesovog integrala izvesne neopadajuće funkcije $\mu(t)$, za koju još vredi $\mu'(t) = 0$ s.s. Kako je $S(0) > 0$, analitička dopuna

$$S(z) = \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)\right\}. \tag{1.15}$$

Sve zajedno, imamo narednu faktorizaciju

$$f(z) = e^{i\gamma} B(z) S(z) F(z).$$

Navedimo terminologiju koja se koristi. Spoljna funkcija za klasu H^p je funkcija koja ima formu

$$F(z) = e^{i\gamma} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(t) dt\right\},$$

gde je γ realan broj, $\psi(t) \geq 0$, $\log\psi(t) \in L^1$, i $\psi(t) \in L^p$. Dakle, funkcija koja se pojavljuje u (1.14) je spoljna za klasu H^p

Unutrašnja funkcija je proizvoljna funkcija $f(z)$ analitička u $|z| < 1$, koja poseduje naredne dve osobine $|f(z)| \leq 1$ i $|f(e^{i\theta})| = 1$ s.s. Primetimo da smo prethodno pokazali da se svaka unutrašnja funkcija može faktorisati u formi $e^{i\gamma}B(z)S(z)$, gde je $B(z)$ Blaškeov proizvod i gde je $S(z)$ funkcija koja ima formu (1.15), $\mu(t)$ ograničena neopadajuća singularna funkcija (tj. $\mu'(t) = 0$ s.s.). Takva $S(z)$ se naziva singularna unutrašnja funkcija.

1.1.8 Klase subharmonijskih funkcija

Na ovom mestu je pogodno da uvedemo Hardijeve klase logaritamsko subharmonijskih funkcija koje će kasinije igrati bitnu ulogu.

Funkcija $U(z)$ koja uzima nenegativne vrednosti je log. subharm. u oblasti D ako je $U \equiv 0$ ili ako je $\log U(z)$ subharmonijska u istoj oblasti. Može se lako proveriti da je suma ili proizvod log. subharm. funkcija takodje log. subharm. (pogledati i prvu lemu koja sledi). Slično, U^p je log. subharm. ako je to U, pri čemu je p proizvoljan pozitivan broj. Sledeći [3, 4], koristićemo oznaku PL za klasu svih neprekidnih log. subharm. funkcija u jediničnom disku.

Naredne dve leme se odnose na (logaritamsko) subharmonijske funkcije i biće kasnije od koristi. Dokazi se mogu videti, naprimer, u uvodnim delovima Ronkinove monografije [47]. Zapravo, imajući u vidu narednu činjenicu, dovoljno je obe leme razmotriti samo za subharmonijske funkcije: $U(z)$ je log. subharm. ako i samo ako je $e^{\alpha x+\beta y}U(z),\ z = x+iy$

subharmonijska za svaki izbor realnih brojeva α i β.

Lema 1.3 (videti [47]). *Neka je Λ neprazan skup i $\{U_\alpha(z),\ \alpha \in \Lambda\}$ familija (logaritamsko) subharmonijskih funkcija u oblasti D. Tada je*

$$U(z) = \sup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha(z)$$

takodje (logaritamsko) subharmonijska u D, ukoliko je odozgo poluneprekidna u istoj oblasti.

Lema 1.4 (videti [47]). *Neka je $U(z,x)$ odozgo poluneprekidna u $D \times X$, gde je D oblast i X topološki prostor. Pretpostavimo da je μ konačna mera na X. Tada je*

$$U(z) = \int_X U(z,x) d\mu(x)$$

(logaritamsko) subharmonijska u D, ukoliko isto svojstvo poseduje $U_x = U(x, \cdot\,)$ za s.s. (u odnosu na meru μ) $x \in X$.

Za proizvoljno $0 < p \leq \infty$ neka je PL_p podklasa PL koju sačinjavaju funkcije $U \in PL$ za koje integralno usrednjenje $M_p(U,r)$ ostaje ograničeno prilikom $r \to 1^-$.

Poznato je da $U(z) \in PL_p$ poseduje radijalnu (i netangencijalnu) graničnu vrednost u $e^{i\theta}$ za s.s. θ. Graničnu funkciju obeležavamo sa $U(e^{i\theta})$. Pokazuje se $\log U(e^{i\theta}) \in L^1$ kao i $U(e^{i\theta}) \in L^p$. Isto tako, moguće je pokazati da vredi konvergenciju u srednjem, drugim rečima na snazi je verzija teoreme 1.7 za klasu $PL_p,\ (0 < p < \infty)$.

Iako PL_p $(0 < p < \infty)$ nema strukturu linearnog prostora, uvodimo "normu" na sledeći način:

$$\|U\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(U,r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(e^{i\theta})^p d\theta \right\}^{1/p}$$

(druga jednakost sledi iz konvergencije u srednjem).

Klase PL_p $(0 < p \leq \infty)$ su izučavane, naprimer, od strane Privalova [46]; naprimer, u radu [59] je primećeno da neka svojstva analitičkih Hardjevih klasa vredi i za upravo uvedene Hardijeve klase logaritamsko subharmonijskih funkcija.

Naredno jednostavno tvrdjenje biće kasnije od koristi.

Lema 1.5. *Za sve $U(z) \in PL_p$ $(0 < p < \infty)$ postoji $F(z) \in H^p$ tako da vredi*

$$U(z) \leq |F(z)|, \quad |z| < 1$$

i

$$|F(e^{i\theta})| = U(e^{i\theta}) \ \text{s.s.}$$

Dokaz. Neka je $U(z) \in PL_p$ i bez umanjenja opštosti pretpostavimo $U \not\equiv 0$. Označimo $\psi(t) = U(e^{it})$. Kako je tada $\log \psi(t) \in L^1$ i $\psi(t) \in L^p$, uzmimo u obzir spolju funkciju

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \psi(t) dt\right\}.$$

za klasu H^p. Jasno je da vredi $|F(e^{i\theta})| = \psi(\theta) = U(e^{i\theta})$ s.s. Kako je $\log U(z)$ subharmonijska u disku $|z| < 1$, slično kao i (1.13) , može se pokazati

$$\log U(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \log U(e^{it}) dt = \log |F(z)|,$$

gde je $z = re^{i\theta}$. Dakle, $U(z) \leq |F(z)|$ za sve $|z| < 1$. □

1.1.9 Klase analitičkih funkcija u oblasti

U slučaju prosto povezane oblasti D sa najmanje dve tačke na granici, postoje dva "prirodna" načina da se uvedu klase analitičkih funkcija u tom domenu analogne Hardijevim klasama analitičkih funkcija u disku. Nevesćemo obe definicije i dati neophodan i dovoljan uslov za podudaranje.

Ne postoji bitna poteškoća kod definisanja klase $H^\infty(D)$, svih ograničenih analitičkih funkcija u D; reč je o linearnom prostoru sa normom

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Ako je p pozitivan broj, pojavljuju se najmanje dve alternative. Možemo zahtevati ograničenost familije integrala za $|f|^p$ duž krivih koje u izvesnom smislu konvergiraju granici, ili možemo zahtevati da $|f|^p$ poseduje harmonijsku majorantu. Poslednja definicija je daleko prostija.

Analitička funkcija $f(z)$ u oblasti D pripada klasi $H^p(D)$ ako subharmonijska funkcija $|f(z)|^p$ poseduje harmonijsku majoranu u D. Norma se može uvesti na način: $\|f\| = U(z_0)^{1/p}$, gde je z_0 proizvoljna fiksirana tačka u D i $U(z)$ najmanja harmonijska majoranta za $|f(z)|^p$ (u celoj oblasti). Lako je videti da je klasa $H^p(D)$ konformno invarijantna: ako $f \in H^p(D)$ i ako je $z = \varphi(w)$ konformno preslikavanje domena D^* na D, tada je $f \circ \varphi(w) \in H^p(D^*)$. Više od toga, ako je norma u $H^p(D^*)$ definisna posredstvom $w_0 = \varphi^{-1}(z_0)$, tada je $f \mapsto f \circ \varphi$ izometrični izomorfizam.

Funkcija f analitička u D pripada kalsi $E^p(D)$ (klasa Smirnova u oblasti D) ako postoji niz rektificijabilnih Jordanovih krivih $\Gamma_1, \ \Gamma_2, \ldots$ u D, koji konvergira granici domena u smislu da unutrašnjost Γ_n sadrži svaki kompaktan podskup oblasti D počevši od nekog indeksa, tako da je za sve n ispunjeno

$$\int_{\Gamma_n} |f(z)||dz| \leq M < \infty,$$

gde je M konstanta.

Na prvi pogled nije jasno ni da li se $E^p(D)$ podudara sa H^p kada je D jedinični disk. Ispostavlja se da je dovoljno uzeti u obzir krive Γ_n koje su nivo–krive proizvoljnog (ali istog) konformnog preslikavanja jediničnog diska na oblast D. Ovo izmedju ostalog obezbedjuje dokaz da je klasa $E^p(D)$ linearan prostor (što iz same definicije nije jasno).

Teorema 1.13 (Keldiš i Lavrentjev; videti [31]). *Neka je $\varphi(w)$ proizvoljno konformno preslikavanje diska $|w| < 1$ na D i neka je Γ_r kriva koja je slika kružnice $|w| = r$ posredstvom φ. Tada za svaku funkciju $f \in E^p(D)$ vredi*

$$\sup_{0<r<1} \int_{\Gamma_r} |f(z)|^p |dz| < \infty.$$

Kao neposrednu posledicu imamo

Posledica 1.3. *Naredni iskazi su ekvivalenti:*

1. *$f(z) \in E^p(D)$;*
2. *$F(w) = f \circ \varphi(w)\varphi'(w)^{1/p} \in H^p$ za izvesno konformno preslikavanje $\varphi(w)$ diska $|w| < 1$ na D;*
3. *$F(w) \in H^p$ za svako preslikavanje φ prethodnog tipa.*

Iz poslednjeg rezultata se nazire razlika izmedju $H^p(D)$ i $E^p(D)$. Naime, $f \in H^p(D)$ ako i samo ako $f \circ \varphi(w) \in H^p$, dok $f \in E^p(D)$ ako i samo ako

$$f \circ \varphi(w)\varphi'(w)^{1/p} \in H^p.$$

Dakle, klase $H^p(D)$ i $E^p(D)$ se poklapaju ako je $|\varphi'(w)|$ uniformno odvojeno od 0 i ∞ u oblasti D. Ovo će biti slučaj, naprimer, ako je D unutrašnjost anaitičke Jordanove krive, ili, opštije, prema [58], ako je ∂D glatka kriva u smislu Dini. Prema teoremi koja sledi, uslov koji se nametnuo kao dovoljan je i neophodan.

Teorema 1.14 (videti [16]). *Neka je D prosto povezana oblast čija je granica sastavljna od najmanje dve tačke. Tada se $H^p(D)$ i $E^p(D)$ podudaraju kao linearni prostori ako i samo ako postoje konstante a i b tako da vredi*

$$0 < a \leq |\varphi'(w)| \leq b, \quad w \in D, \tag{1.16}$$

gde je $\varphi(w)$ (proizvoljno) konformno preslikavanje diska $|w| < 1$ na oblast D.

Ako je $\varphi(z)$ konformno preslikavanje diska $|z| < 1$ na unutrašnjost rektificijabilne Jordanove krive Γ, tada je neprekidno proširenje na $|z| \leq 1$ konformno u s.s. tački $|z| = 1$. Preciznije, neka je γ luk u $|z| < 1$ koji se završava u $z_0 = e^{i\theta_0}$ i neka u ovoj tački ne tangira jediniču kružnicu, odnosno neka granična vrednost $\arg\{z - z_0\}$, $\gamma \ni z \to z_0$ postoji i neka je različita od $\theta_0 \pm \pi/2$. Slika luka γ je novi luk δ unutar krive Γ koji se završava u $\varphi(z_0)$. Kako $d\varphi(e^{i\theta})/d\theta$ postoji za s.s. $\theta = \theta_0$, sledi da u s.s. tačkama kriva Γ poseduje tangentu. Za s.s. θ_0 ugao izmedju δ i Γ u $\varphi(z_0)$ postoji i jednak je uglu izmedju γ i jedinične kružnice u tački z_0. Drugim rečima, preslikavanje φ čuva uglove u s.s. tačkama na granici jediničnog diska.

Vratimo se klasama $E^p(D)$ $(0 < p < \infty)$. Pretpostavimo sada da je D prosto povezana oblast omedjena rektificijabilnom Jordanovom krivom Γ. Na osnovu prethodne napomene o konformnim preslikavanjima i posledici 1.3, možemo govoriti o s.s. netangencijalnim pravcima za oblast D. Sledi: funkcija $f \in E^p(D)$ poseduje netangencijalne granične vrednosti s.s. tačkama na Γ, i one se ne poništavaju u skupu pozitivne mere, osim ako je $f \equiv 0$. Pri tome je

$$\int_\Gamma |f(\zeta)||d\zeta| < \infty \quad \text{ako i samo ako} \quad f \in E^p(D).$$

U klasi $E^p(D)$ $(0 < p < \infty)$ je prirodno uvesti normu na sledeći način

$$\|f\|_{p,D} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f(\zeta)||d\zeta| \right\}^{1/p}.$$

Nas će ubuduće zanimati klasa $E^p(D)$ kada je D prosto povezana oblast omedjena glatkom krivom u smislu Dini. U ovom slučaju harmonijska majoranta je obezbedjena zbog poklapanja sa klasom $H^p(D)$.

1.2 Površi

1.2.1 Regularne površi

Regularna površ Σ^2 smeštena u $\mathbb{R}^n$ je skup koji se može reprezentovati u formi

$$\Sigma^2 = X(D),$$

gde je

$$X(x, y) = (x_1(x, y), \ldots, x_n(x, y)), \quad (x, y) \in D$$

glatko (najmanje C^1-glatko) injektivno preslikavanje u prosto povezanoj oblasti D koje još zadovoljava

$$\sqrt{\langle X_x, X_x\rangle \langle X_y, X_y\rangle - \langle X_x, X_y\rangle^2} > 0 \text{ u celoj oblasti } D. \tag{1.17}$$

Uslov (1.17) govori da su tangentni vektori $X_x,\ X_y$ linearno nezavisi za sve $(x, y) \in D$, odnosno matrica

$$\begin{bmatrix} X_x \\ X_y \end{bmatrix}$$

ima rang dva za sve $(x, y) \in D$. Preslikavanje $X(x, y)$ se naziva parametrizaicja površi Σ^2. Naravno, parametrizacija površi nije jedinstvena; svaka nova parametrizacija ima formu $X \circ \phi$, gde je ϕ difeomorfno preslikavanje oblasti D^* na D.

Prva fundementalna forma površi Σ^2 je odredjena izrazom

$$ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2;$$

ovde

$$E = \langle X_x, X_x\rangle\,, \quad F = \langle X_x, X_y\rangle\,, \quad G = \langle X_y, X_y\rangle$$

zadovoljavaju $E > 0,\ F > 0$ i $EG - F^2 > 0$ svuda u D. Uslov (1.17) se može zameniti sa

$$\sqrt{EG - F^2} > 0.$$

Gausova krivina $K(x, y)$ površi $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ se obično uvodi preko prve i druge fundamentalne forme površi. Medjutim, za površi koje nisu smeštene u $\mathbb{R}^3$ druga fundamentalna forma se ne definiše, jer ona zavisi od Gausove normale koja nije definisana na očigledan način u $\mathbb{R}^n,\ n \geq 4$. Naredna relacija izražava Gausovu krivinu dovoljno glatke regularne površi posredstvom koeficjenata prve fundamentalne forme

$$\begin{aligned} K = (EG - F^2)^{-2} &\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} & \frac{1}{2}E_x & F_x - \frac{1}{2}Ey \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G \end{vmatrix} \\ - (EG - F^2)^{-2} &\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_x & F & G \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Odavde se vidi i alternativan način da se izrazi fundamentalna teorema Gausa (teorema Egregium) koja govori da Gausova krivina ne zavisi od toga da li je površ smeštena u $\mathbb{R}^3$ ili $\mathbb{R}^n,\ n \geq 4$.

1.2.2 Izotermna parametrizacija

Ako je $E = G$ i $F = 0$, tada parametrizacija X odredjuje izotermalne koordiante ili konformne koordinate na površi Σ^2; kažemo još da je X konformna parametrizacija površi Σ^2. Veoma opšta teorema govori da bilo koja regularna površ sa glatkom parametrizacijom (C^1-glatkost) poseduje izotermnu parametrizaciju (u globalu).

Ako je $E = F = \lambda$, tada se malo pre navedena formula za Gausovu krivinu znatno pojednostavljuje; naime, vredi

$$K = \frac{1}{2\lambda^3}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 - \lambda\triangle\lambda).$$

Sledi

$$\triangle \log \lambda = \frac{\lambda\triangle\lambda - (\lambda_x^2 + \lambda_y^2)}{\lambda^2},$$

odakle imamo važnu formulu

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\triangle \log \lambda.$$

1.2.3 Harmonijske i minimalne površi

Harmonijska površ smeštena $\mathbb{R}^n$ je slika vektorsko vrednosne injektivne funkcije $X = (x_1, \ldots, x_n)$ definisane u prosto povezanoj oblasti sa najmanje dve graniče tačke. Drugim rečima, površ Σ^2 je harmonijska površ ako postoji (neobavezno izotermna) parametrizacija čije su sve koordinate harmonijske funkcije. Kako je prosto povezana oblast sa najmanje dve tačke na granici konformno ekvivalenta jediničnom disku, dovoljno je razmotriti slučaj jediničnog diska kao parametarske oblasti. Harmonijska površ ne mora obavezno biti regularna, odnosno uslov (1.17) ne mora biti ispunjen, osim ako nije reč o ravnom slučaju tj. ako je $x_j \equiv 0$ za sve $j = 3, \ldots, n$ (prema Levijevoj teoremi [32]). Dakle, harmonijska površ u smislu naše definicije može imati tačke grananja, tj. tačke u kojima se izraz $EG - F^2$ poništava.

Postoji nekoliko ekvivalentnih načina da se uvede minimalna površ. Naprimer, dovoljno glatka površ smeštena u $\mathbb{R}^3$ je minimala ako je njena srednja krivina jednaka nuli; teorija minimalnih površi je, naprimer, izložena u Osermanovoj knjizi [42].

Naredna dve teoreme su dobro poznate.

Teorema 1.15 (Vajerštras; videti [6])**.** *Površ zadata u izotermnim koordinatama je minimalna ako i samo ako je harmonijska.*

Teorema 1.16 (videti [6])**.** *Harmonijska površ je minimalna ako i samo ako je zadata u izotermnim koordinatama.*

Svaka prosto povezana minimalna površ Σ^2 poseduje Eneper–Vajerštrasovu parameterizaciju:

$$X(x,y) = (x_1(x,y),\ldots,x_n(x,y)), \quad (x,y) \in D$$

za koju vredi

$$x_j(x,y) = \Re a_j(z), \quad z = x + iy,$$

gde je a_j $(j = 1,\ldots,n)$ analitička funkcija i pri tome je

$$\sum_{j=1}^{n} a_j'(z)^2 \equiv 0$$

u celom domenu D.

Svaka izotermna parametrizacija minimalne površi je harmonijska parametriza-cija i ona se poklapa sa Eneper–Vajerštrasovom. Ako je površ parametrizovana izotermnim kordiantama, ona je minimalna ako i samo su sve koordinate harmonijske funkcije. Dakle, pojam harmonijske površi je generalizacija minimalnih površi.

Napomenimo da izotermna parametrizacija mininalne površi uvek postoji, bez obzira na to što su dozvoljene izolovane tačke gde je narušena regularnost; lokalno gledano postoji eksplicitna konstrukcija izotermnih kooridanta u proizvoljnjoj tački površi koje teorema o uniformizacij dovodi do globalnih koordianta (Oserman [42]).

1.3 Izoperimetrijska nejednakost i povezani rezultati

Neka je D prosto povezana oblast omedjena rektificijabilnom krivom ∂D. Prema klasičnoj izoperimetrijskoj nejednakosti vredi

$$4\pi \cdot \text{Površina}(D) \leq \text{Dužina}(\partial D)^2, \tag{1.19}$$

pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako je D disk. Za obimnu diskusiju o nejednaksti (1.19) upućujemo na Osermanov pregledan rad [41] i na skoriji rad Gardnera [20]. Na oba mesta reč je povezanosti izoperimetrijske nejednakosti sa poznatim analitičkim nejednakostima. Jedna od njih je Karlemanova koju navodimo niže i kojom se detaljnije bavimo u trećem poglavlju.

1.3.1 Izoperimetrijska nejednakosti i klase analitičkih funkcija

Karleman [12] je prvi, i to veoma elegantno, izveo (1.19) u okviru teorije funkcija kompleksne promjenljive. Izmenom Karlemanovog pristupa, Strebel [54, str. 96–98] je uspostavio narednu nejednakost izoperimetrijskog tipa (verizija Karlemanove): ako $f(z)$ pripada Hardijevoj klasi H^p, gde je p pozitivan broj, tada $f(z)$ pripada i Bergmanovoj klasi L_a^{2p}, pri tome vredi

$$4\pi \int_{|z|<1} |f(z)|^{2p} dA(z) \le \left\{ \int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p}; \tag{1.20}$$

jednakost se dostiže u (1.20) ako i samo ako je

$$f(z) = \frac{\lambda}{(1 - z\overline{w})^{2/p}}$$

za izvesno $|w| < 1$ i konstantu λ.

Napomenimo da (težinsku) Bergmanovu klasu $L^p_{a,q-2}$ sačinjavaju funkcije $f(z)$ analitičke u disku $|z| < 1$ za koje je norma

$$\|f\|_{p,q-2} = \left\{ \int_{|z|<1} |f(z)|^p da_{q-2}(z) \right\}^{1/p}$$

kanačna; ovde je $0 < p < \infty,\ 1 < q < \infty$ i

$$da_{q-2}(z) = (q-1)\pi^{-1}(1 - |z|^2)^{q-2} dA(z)$$

normalizovana težinska mera u disku $|z| < 1$. Posebno, L_a^p je netežinska Bergma-nova klasa ($q = 2$).

Dakle, postoji elegantan dokaz (1.19) i jednakosti u okviru do sada izložene teorije. Interesantno je primetiti da taj dokaz povezuje klasične rezultate Rimana, Karateodoria i Smirnova za konformna preslikavanja i veriziju Karlemanove nejednakosti (1.20). Uz notaciju kao u posledici 1.2, neka je Γ rektificijabilna kriva. Prema teoremi Smirnova, $f' \in H^1$. Dalje, površina A oblasti D i dužina L krive Γ (videti (1.12)) su dati ovim izrazima:

$$A = \int_{|z|<1} |\varphi'(z)|^2 dA(z) = \pi \|\varphi'\|^2_{A^2}; \quad L = \int_{|z|=1} |\varphi'(z)||dz| = 2\pi \|\varphi'\|_{H^1}.$$

Izoperimetrijska nejednakost (1.19) sada sledi primenom (1.20) za $p = 1$ i $f = \varphi'$:

$$4\pi A = 4\pi^2 \|\varphi'\|_{A^2}^2 \leq 4\pi^2 \|\varphi'\|_{H^1}^2 = L^2. \tag{1.21}$$

Budući da su poznate sve ekstremalne funkcije za (1.20), to nam daje mogućnost da odredimo sve ekstremalne oblasti za izoperimetrijsku nejednakost. Jednakost vredi na drugom mestu u (1.21) ako i samo ako je

$$\varphi'(z) = \frac{\lambda}{(1 - z\overline{\zeta})^2},$$

gde je $|\zeta| < 1$ i $\lambda \neq 0$ (poslednja konstanta je različita od nule, jer je φ konformno preslikavanje). Ovo znači da je φ racionalna (Mebijusova) transformacija. Kako takva preslikavanja prevode jedinični disk na poluravan ili na novi disk, neposredno se zaključuje da ekstremalne oblasti moraju biti diskovi; obrnuto je jasno.

Dokaz (1.20) kao i odgovarajućeg tvrdjenja za jednakost je izveden takodje u [57], medjutim ovde je primećeno da Karlemanov pristup vodi i ka jednostavnijem dokazu jednog od rezultata Hardija i Litlvuda [23] o ograničenosti inkluzivnog operatora $H^p \mapsto L_a^{2p}$. Sličan pristup je dat mnogo ranije od strane Mateljevića [36]. Dokaz (1.20) može se takodje naći u trećem poglavlju ovog rada; videti teoremu 3.1. Zapravo, nejednakosti slične (1.20) su glavni objekti našeg proučavanja u tom poglavlju.

1.3.2 Izoperimetrijska nejednakost i minimalne površi

Nameće se pitanje da li (1.19) vredi za oblasti D koje leže na površi. U tom slučaju (1.19) treba razumeti u kontekstu unutrašnje geometrije. Istorijski gledano, prvi rezultat koji se tiče klasične izoperimetrijske nejednakosti za površi promenjive Gausove krivine se takodje duguje Karlemanu [12], gde je razmotren slučaj minimalne površi. Dokaz se bazirao na Vajerštrasovoj parametrizaciji i narednoj nejednakosti (koju takodje formulišemo u izmenjenom obliku): za sve $f_1 \in H^1$ i $f_2 \in H^1$ vredi

$$4\pi \int_{|z|<1} |f_1(z)||f_2(z)| dA(z) \leq \int_{|z|=1} |f_1(z)||dz| \int_{|z|=1} |f_2(z)||dz|, \tag{1.22}$$

pri čemu se jednakost dostiže ako i samo ako je ili $f_1 f_2 \equiv 0$ ili

$$f_1(z) = \frac{\lambda}{(1 - z\overline{\zeta})^2} \quad \text{i} \quad f_2(z) = \frac{\nu}{(1 - z\overline{\zeta})^2}$$

za izvesno $|\zeta| < 1$ i nenulte konstante λ i ν. Prethodna nejednakost je varijanta (1.20), kako će biti ustanovljeno u trećem poglavlju.

Ovde ćemo dati dokaz klasične izoperimetrijske nejednakosti za oblasti na minimalnoj površi koji se razlikuje od Karlemanovog pristupa po tome što umesto nejednakosti (1.22) koristi (1.20). Dakle, neka je minimalna površ Σ^2 smeštena u $\mathbb{R}^n$ odredjena preslikavanjem

$$X(x,y) = (x_1(x,y), \ldots, x_n(x,y)), \quad (x,y) \in D,$$

pri čemu oblast D sadrži jedinični disk (što ne umanjuje opštost), tako da je svaka koordinatna funkcija $x_k,\ k = 1, \ldots, n$ harmonijska u D i

$$a_k(z) = \frac{\partial x_k(z)}{\partial x} - i\frac{\partial x_k(z)}{\partial y} = 2\frac{\partial x_k(z)}{\partial z}, \quad z = x + iy$$

analitička u istoj oblasti, pri čemu još vredi

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(z)^2 \equiv 0.$$

U ovom okruženju, površina A domena koji je slika jediničnog diska i dužina L granice su dati relacijama

$$A = \int_{|z|<1} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|^2 dA(z), \qquad L = \int_{|z|=1} \left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|^2\right\}^{1/2} |dz|$$

Primenom nejednakosti (1.20) za $p = 1$ na svaku od koordiantnih funkcija $a_k(z)$ ponaosob, sumiranjem po svim $k = 1, \ldots, n$, potom primenom nejednakosti Minkovskog (videti, naprimer, [22], str. 146):

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\int g_k^{1/2}\right)^2 \leq \left\{\int \left(\sum_{k=1}^{n} g_k\right)^{1/2}\right\}^2$$

za $g_k = |a_k|^2$, dolazimo do (1.19).

1.3.3 Izoperimetrijska nejednakost i log. subharm. funkcije

Pitanje koje se sada prirodno nameće jeste da se odrede neophodni i dovoljni uslovi koje treba da zadovolji dovoljno glatka površ tako da izoperimetrijska nejednakost vredi za prosto povezane oblasti. Ovaj problem je rešen u radovima Bekenbaha i Radoa [3, 4].

Njihovi radovi uspostavljaju vezu izmedju Gausove krivine dovoljno glatke površi i subharmonijskih funkcija (videti izraz za Gausovu krivinu u izotermnim koordinatama). Potom je ustanovljeno da Karlemanova nejednakost vredi ako se $|f|$ zameni sa proizvoljnom nenegativnom funkcijom čiji je logaritam subharmonijska funkcija [4]. Kao posledica, u istom radu, je pokazano da izoperimetrijska nejednakost vredi za prosto povezane oblasti na površi nepozitivne Guasove krivine.

Obrnuto tvrdjenje je već bilo poznato u vremenu kada su nastajali malo pre pomenuti radovi: ako (1.19) vredi za sve prosto povezane oblasti D na povši Σ^2, tada njena Gausova krivina K nikada ne može biti pozitivna. Naime, neka je P proizvoljna tačka na Σ^2, neka je $L(r)$ dužina geodezijskog diska radijusa r sa centom u P i neka je $A(r)$ površina istog diska. Mogu se izvesti naredne relacije

$$L(r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3}K(p)r^3 + O(r^4); \quad A(r) = \pi r^2 - \frac{\pi}{12}K(p)r^4 + O(r^5).$$

Sledi

$$K(P) = -\lim_{r\to 0}\frac{L(r)^2 - 4\pi A(r)}{\pi^2 r^4}.$$

Dakle, vredi

Teorema 1.17 (Bekenbah i Rado; videti [4]). *Neka je Σ^2 dovoljno glatka površ sa Gausovom krivinom K. Neophodno i dovoljno da* (1.19) *vredi za sve prosto povezne oblasti D omedjene glatkom krivom jeste da Gausova krivina zadovoljava: $K \le 0$ svuda na Σ^2.*

Glatkost površi koju je zahtevalo izvodjenje od strane Bekenbaha i Radoa je glatkost do trećeg reda (što je i uobičajeno u geometriji površi); nešto kasnije Lozinski [33] je pokazao da je dovoljno pretpostaviti glatkost drugog reda.

Kasnije, Fiala [19] je posmatrala analitiče površi čija je krivina K nenegativna i potpuno različitim pristupom došla do nove izoperimetrijske nejednakosti

$$L^2 \ge 2A\left\{2\pi - \int_D K df\right\} \quad (df \text{ je element površine}).$$

Jednakost vredi ako i samo ako je $K \equiv 0$ i ako je D geodezijski krug.

Navodimo sada jedan rezultat koji se tiče (logaritamsko) subharmonijskih fu-nkcija i koji se duguje Huberu [26].

Teorema 1.18 (videti [26]). *Neka je funkcija $u(z)$ u zatvorenom disku $|z| \le 1$ razlika dve subharmonijske funkcije*

$$u(z) = u_1(z) - u_2(z).$$

Tada vredi

$$4\pi(1-\alpha)\int_{|z|<1} e^{2u(z)}dA(z) \le \left\{\int_0^{2\pi} e^{u(e^{i\theta})}d\theta\right\}^2,$$

gde je

$$\alpha = \int_{|z|<1} d\mu_2(z),$$

i gde $\mu_2(z)$ označava distribuciju korespodentu funkciji $u_2(z)$ (Risovo razlaganje subharmonijskih funkcija). Jednakost važi ako i samo ako $u(z)$ ima formu

$$u(z) = \log |F'(z)| + \alpha g(z, -\tilde{c}/\tilde{d}) \quad (0 \leq \alpha < 1),$$

pri čemu je $F(z) = (az+b)/(cz+d)$ linearna funkcija, analitička u $|z| \leq 1$; g označava Grinovu funkciju u $|z| < 1$.

Huber je potom primenio ovaj rezultat na dovoljno glatke površi i time uopštio ranije navedene rezultate:

Teorema 1.19 (videti [26])**.** *Ako rektificijabilna Jordanova kriva Γ dužine L obuhvata prosto povezanu oblast D čija je površina A, tada vredi*

$$2A(2\pi - J^+) \leq L^2$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako je $K \equiv 0$ u D i Γ je geodezijska kružica; ovde J^+ označava vrednost

$$J^+ = \int_D (\Delta u)^- dA; \quad u = \frac{1}{2}\log E = \frac{1}{2}\log\lambda.$$

Glava 2

Prilog teoriji harmonijskih preslikavanja

Ova glava je posvećena harmonijskim preslikavanjima. Jedan od motiva za izučavanje harmonijskih preslikavanja jeste njihova bliska veza sa minimalnim površima. Sledeći naš skoriji rad [29], izložićemo dve teoreme za harmonijska preslikavanja – verziju teoreme Karateodoria i Smirnova za harmonijska preslikavanja sa jediničnog diska na (otvorenu) Jordanovu površ. Preciznije, u nastavku pokazujemo da jedno takvo preslikavanje poseduje ekstenziju ograničene varijacije na granicu diska. Za istu klasu preslikavanja je pokazana teorema Smirnova, koja govori da ugaoni izvod pripada odgvarajućoj Hardijevoj klasi ako i samo ako je granica Joradanove površi rektificijabilna. Teoreme do kojih dolazimo u prvom delu glave uporedjujemo kasnije sa nekim dobro poznatim za minimalne površi. Posle toga izvodimo izoperimetrijsku nejednakost za Jordanove harmonijske površi.

2.1 Harmonijska preslikavanja

Pod harmonijskim preslikavanjem ovde podrazumevamo naredni tip preslikavanja. Neka je D oblast u ravni. Vektorsko vrednosna funkcija $F = (f^1, \dots, f^n) : D \mapsto \mathbb{R}^n$ je harmonijsko preslikavanje u D ukoliko je injektivno u ovoj oblasti i ako je svaka od koordinata f^j $(j = 1, \dots, n)$ (realno vrednosna) harmnonijska funkcija u D. Primetimo da odmah sledi da je kompozicija harmonijskog sa konformnim takodje harmonijsko preslikavanje: ako je g konformno preslikavanje oblasti D^* na D, tada je $f \circ g$ harmonijsko u D^*, ukoliko je f harmonijsko preslikavanje u D.

Pod h^p $(0 < p \leq \infty)$ ovde podrazumevamo klasu svih harmonijskih preslikavanja jedničnog diska (u gornjem smislu) koja zadovoljavaju odgovarajuće restrikcije koje se tiču srednjeg rasta prlikom približavanja granici; drugim rečima ako moduo preslikavanja pripada Hardijevoj klasi subharmonijskih funkcija. Lako se proverava: $F = (f^1, \ldots, f^n) \in h^p$ ako i samo ako $f^j \in h^p$ za sve $j = 1, \ldots, n$.

Neposredno se adaptira Risova teorema o reprezentaciji harmonijskih funkcija na harmonijska preslikavanja koja pripadaju h^p $(1 \le p \le \infty)$. Neka $\mathrm{BV}[a, b]$ označava klasu svih funkcija $[a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ koje su ograničene varijacije u ovom segmentu, odnosno klasu preslikavanja $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ takvih da je svaka od koordinatnih funkcija φ_j $(j = 1,\ 2, \ldots, n)$ (realno vrednosna) funkcija ograničene varijacije u $[a, b]$. Totalnu varijaciju $\Phi(t) \in \mathrm{BV}([a, b])$ obeležavamo sa $\mathrm{V}_a^b(\Phi(t))$.

Prema Risovoj teoremi, $F(z) \in h^1$ poseduje reprezentaciju u formi vektorskog Puason–Stiltjesovog integrala

$$F(z) = \mathrm{PS}[\Phi(t)](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) d\Phi(t), \quad z = re^{i\theta} \tag{2.1}$$

za izvesnu vektorsko vrednosu funkciju $\Phi(t)$ u segmentu $[0, 2\pi]$; slično tome, ako je harmonijsko preslikavanje $F(z)$ ograničeno u jediničnom disku, tada je

$$F(z) = \mathrm{P}[\Phi(t)](z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) \Phi(t) dt \tag{2.2}$$

za (s.s. odredjeno) $\Phi \in L^\infty,\ \Phi(0) = \Phi(2\pi)$.

2.2 Verzije klasičih rezultata za harmonijska preslikavanja

Ovde razmatramo harmonijska preslikavanja jediničnog diska na proizvoljnu Jordanovu površ smeštenu u $\mathbb{R}^n$; podskup $\overline{\Sigma}^2$ u $\mathbb{R}^n$ je zatvorena Jordanova površ (govorićemo još Jordanova površ smeštena u $\mathbb{R}^n$) ukoliko je homeomorfna slika zatvorenog jedničnog diska, odnosno ako je $\overline{\Sigma}^2$ moguće predstaviti u formi $\Sigma^2 = X(\overline{\mathbb{U}})$ za izvesno injektivno i neprekidno preslikavanje $X : \overline{\mathbb{U}} \mapsto \mathbb{R}^n$. Kažemo da je $\overline{\Sigma}^2$ omedjena Jordanovom krivom $\Gamma = X(\mathbb{T})$. Ako je pri tome Γ rektificijabilna kriva, govorimo da je Σ^2 zatvorena Jordanova površ sa rektificijabilnom granicom; u ovom slučaju, $\Sigma^2 = \overline{\Sigma}^2 \setminus \Gamma$ zovemo (otvorena) Jordanova površ sa rektificijabilnom granicom Γ.

2.2.1 Reprezentacija harmonijskih preslikavanja

Naredna teorema uspostavlja reprezentaciju harmonijskih preslikavanja posredstvom preslikavanja ograničene varijacije i biće kasnije od značajne koristi.

Teorema 2.1 (videti [29])**.** *Neka je Σ^2 Jordanova površ sa rektificijabilnom granicom Γ i neka je $F(z)$ harmonijsko preslikavanje jediničnog diska na Σ^2. Tada postoji funkcija ograničene varijacije $\Phi(t) : [0, 2\pi] \to \Gamma,\ \Phi(0) = \Phi(2\pi)$ tako da vredi $F(z) = \mathrm{P}[\Phi(t)]$.*

Dokaz. Neka je X homeomorfno preslikavanje zatvorenog diska $\overline{\mathbb{U}}$ na zatvorenu Jordanovu površ $\overline{\Sigma}^2$. Tada je $f = X^{-1} \circ F$ homeomorfizam jediničnog diska na sebe. Neka je $\{r_n\}$ niz strogo rastućih pozitivnih brojeva koji zadovoljava $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Označimo $D_n = f^{-1}(\mathbb{U}_{r_n})$ i neka je g_n konformno preslikavanje diska $\mathbb{U}$ na oblast D_n tako da vredi $g_n(0) = 0$ i $g_n'(0) > 0$. Bez gubljenja opštosti, možemo pretpostaviti $0 \in D_n$ za sve n. Tada je $f_n = r_n^{-1}(f \circ g_n)$ homeomorfizam zatvorenog jediničnog diska na sebe. Neka je $\varphi_n = f_n|_{\mathbb{T}}$. Postoji $\tilde{\varphi}_n$ tako da je $\varphi_n(e^{it}) = e^{i\tilde{\varphi}_n(t)}$ i tako da je $\tilde{\varphi}_n$ (striktno) monotona funkcija i $(F \circ g_n)|_{\mathbb{T}} = X \circ (r_n\varphi_n)$. Prema Helijevoj teoremi o izboru (videti lemu 1.1), postoji konvergentan podniz $\{\tilde{\varphi}_{n_k}\}$ niza $\{\tilde{\varphi}_n\}$. Neka je $\tilde{\varphi} = \lim_{k\to\infty} \tilde{\varphi}_{n_k}$ i $\varphi = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}$. Tada je $\tilde{\varphi}$ monotona i prema tom ograničene varijacije. Dakle, $r_{n_k}^{-1}(X^{-1} \circ F \circ g_{n_k})|_{\mathbb{T}} \to \varphi$. Sledi $\lim_{k\to\infty}(F \circ g_{n_k}) = (X \circ \varphi)$, jer je X^{-1} homeomorfizam $\overline{\Sigma}^2$ na $\overline{\mathbb{U}}$. Kako je Γ rektificijabilna kriva prema Šeferovoj teoremi [51], funkcija X je ograničene varijacije na $\mathbb{T}$. Dakle, kako je $\tilde{\varphi}$ monotona i prema tome ograničene varijacije, sledi da je preslikavanje $\Phi = X \circ \varphi$ takodje ograničene varijacije. Niz funkcija $\{F_k = (F \circ g_{n_k})|_{\mathbb{T}}\}$ je niz neprekidnih i uniformo ograničenih (sa $\|X\|_\infty$) funkcija i pri tome su $F \circ g_{n_m}$ harmonijske. Prema Lebegovoj teoremi o dominantnoj konvergenciji, nalazimo $\lim_{k\to\infty} F \circ g_{n_k} = \mathrm{P}[F_k] = \mathrm{P}[X \circ \varphi]$. Sledi da je niz $\{g_{n_m}\}$ konvergentan. Uvedimo oznaku $g = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}$. Kako je g konformno preslikavanje jedniničnog diska na sebe, koje zadovoljava $g(0) = 0$ i $g'(0) > 0$, sledi $g = \mathrm{Id}$. Dakle, $F = \mathrm{P}[\Phi]$ (gde smo stavili $\Phi = X \circ \varphi$). Konačno, kako je X neprekidno preslikavanje i funkcija $\tilde{\varphi}$ monotona, možemo zaključiti da je preslikavanje ϕ neprekidno izuzev u prebrojivo mnogo tačaka gde poseduje levu i desnu graničnu vrednost. □

2.2.2 Verzija teoreme Karateodori

Naredna teorema je adaptacija odgovarajućeg rezultata za harmonijske funkcije.

Teorema 2.2. *Neka je $F(z) = \mathrm{P}[\Phi(t)]$ harmonijska funkcija u jediničnom disku, pri čemu je $\Phi(t) \in L^1,\ \Phi(0) = \Phi(2\pi)$ i neka za izvesno $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ vredi*

$$\lim_{\theta\uparrow\theta_0} \Phi(\theta) = A_0$$

i

$$\lim_{\theta\downarrow\theta_0} \Phi(\theta) = B_0.$$

Za $\lambda \in [-1,1]$, neka je $\Gamma_\lambda(t) \subseteq \mathbb{U},\ 0 \le t < 1$ luk koji se završava u $\Gamma_\lambda(1) = e^{i\theta_0}$ i koji formira ugao $-\frac{\pi\lambda}{2}$ sa jediničnom kružnicom u $e^{i\theta_0}$. Tada imamo

$$\lim_{t\to 1^-} F(\Gamma_\lambda(t)) = \frac{1}{2}(1-\lambda)A_0 + \frac{1}{2}(1+\lambda)B_0.$$

Naravno, ako je $A_0 = B_0 = \Phi(\theta_0)$ (drugim rečima ako je Φ neprekidna u θ_0), tada je dobro poznato da F poseduje neprekidnu ekstenziju na $e^{i\theta_0} \cup \mathbb{U}$.

Ako je F definisana u jediničnom disku $\mathbb{U}$ i ako je $\zeta \in \mathbb{T}$, skup tačaka nagomilavanja $C_{\mathbb{U}}(F,\zeta)$ se definiše na sledeći način: $\omega \in C_{\mathbb{U}}(F,\zeta)$ ako postji niz $\{z_n\} \subseteq \mathbb{U}$ tako da je $\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$ i $\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \alpha$. Dobro je poznato da je za sve ζ i F skup $C_{\mathbb{U}}(F,\zeta)$ neprazan i zatvoren.

Teorema 2.3 (videti [29]). *Neka je Σ^2 Jordanova površ sa granicom Γ. Neka je $F(z)$ harmonijsko preslikavanje diska $|z| < 1$ na Σ^2 koje se može predstaviti u formi $F(z) = \mathrm{P}[\Phi](z)$, gde je Φ kao u teoremi 2.1. Tada imamo:*

1. *ako Γ ne sadrži deo neke prave, tada $F(z)$ poseduje neprekidnu ekstenziju na $|z| = 1$;*

2. *ako je $t_0 \in [0,2\pi]$ tačka prekida za Φ, tada postoje*

$$A_0 = \lim_{t\uparrow t_0} \varphi(t), \quad B_0 = \lim_{t\downarrow t_0} \varphi(t)$$

i

$$C_{\mathbb{U}}(f, e^{it_0}) = [A_0, B_0] \subseteq \Gamma.$$

Dokaz teoreme 2.3. Neka je $\theta_0 \in [0,2\pi]$ proizvoljno odabrano. Postoje leva i desna granična vrednost ϕ u tački θ_0. Neka je $\lim_{\theta\uparrow\theta_0} f(e^{i\theta}) = A_0$ i $\lim_{\theta\downarrow\theta_0} f(e^{i\theta}) = B_0$.

Za $R \ge 0$ i $-1 \le \lambda \le 1$ neka je

$$z_R = e^{i\theta_0}(1 - Re^{-i\frac{\lambda\pi}{2}}).$$

Tada $z_R \to e^{i\theta_0}$ ako $R \to 0$ i ugao izmedju poluprave $\Gamma_R = \{z_R : 0 \le R < \infty\}$ u $R = 0$ i tačke $e^{i\theta_0}$ jednaks je $-\lambda\pi/2$. Imajući u vidu teoremu 2.2, sledi

$$\lim_{R\to 0} f(z_R) = \frac{1}{2}(1-\lambda)A_0 + \frac{1}{2}(1+\lambda)B_0.$$

Dakle, $[A_0, B_0] \subseteq C_{\mathbb{U}}(f, e^{i\theta_0})$. Kako je $f : \mathbb{U} \to \Sigma^2$ homeomorfizam, imamo $C_{\mathbb{U}}(f, e^{i\theta_0}) \subseteq \Gamma$. Dakle, $[A_0, B_0] \subseteq \Gamma$.

Ako Γ ne sadrži nijedan segmenent tada je $A_0 = B_0$, drugim rečima φ je neprekidna u $e^{i\theta_0}$. Ovim je ustanovljeno (1).

Da pokažemo (2), pretpostavimo $[A_0, B_0] \not\subseteq C_{\mathbb{U}}(f, e^{i\theta_0})$. Tada postoji $\omega_0 \in C_{\mathbb{U}}(f, e^{i\theta_0}) \setminus [A_0, B_0]$. Možemo pretpostaviti da $\omega_0,\ A_0,\ B_0$ leže na granici Γ u pozitivnom smeru i neka je C luk na Γ od ω_0 do B_0. Prema teoremi 2.2 možemo odabrati Jordanov luk l u $\mathbb{U}$ takav da su granične tačke za $\bar{l}$ $e^{i\theta_1}$ i $e^{i\theta_2}$ i tako da $f|_l$ ima neprekidnu ekstenziju na $\bar{l}$ i $f(e^{i\theta_1}) \in \Gamma \setminus C$, $f(e^{i\theta_2})$ leži u unutrašnjosti luka od ω_0 do A_0. Neka je D Jordanov domen omedjen sa l i granicom jediničnog diska koji sadrži $e^{i\theta_0}$ na granici. Prema teoremi 2.2 i prema definiciji skupa $C_{\mathbb{U}}(f, e^{i\theta_0})$, postoje dva niza $\{\zeta_n\}$ i $\{z_n\}$ u D tako da je $\zeta_n \to e^{i\theta_0},\ z_n \to e^{i\theta_0},\ f(\zeta_n) \to$ tački $\omega_1 \in [A_0, B_0],\ f(z_n) \to \omega_0$. Tada su obe tačke ω_0 i ω_1 na granici za $f(D)$, što je protivrečnost. Dakle, $C_{\mathbb{U}}(f, e^{i\theta_0}) \subseteq [A_0, B_0]$. □

Prvi deo teoreme se može videti kao teorema Karateodori za harmonijska preslikavanja jediničnog diska na otvorenu Jordanovu površ omedjenu rektificijabilnom krivom. Teorema koju smo upravo pokalzali generalizuje glavni rezultat Hengartnera i Šobera [24], gde autori pokazuju istu teoremu ali za Jordanove oblasti u ravni.

2.2.3 Verzija teoreme Smirnova

Da ustanovimo verziju teoreme Smirnova za harmonijska preslikvanja (teorema 2.4), biće nam potrebna naredna dva rezultata.

Lema 2.1 (videti [29]). *Neka je Σ^2 Jordanova površ omedjena krivom Γ i pretpostavimo da je $F(z)$ harmonijsko preslikavanje diska $|z| < 1$ na Σ^2. Dalje, neka je $\Gamma_r = F(|z| = r),\ 0 < r < 1$ familija krivih na površi Σ^2. Tada je niz dužina $\{|\Gamma_r|\}$ rastući u odnosu na r i pri tome je*

$$|\Gamma_r| \leq |\Gamma|, \tag{2.3}$$

pri čemu podrazumevamo $|\Gamma| = \infty$ ako kriva Γ nije rektificijabilna.

Dokaz. Pretpostavićemo da je Γ rektificijabilna. Postoji $\Phi(t)$ ograničene varijacije tako da je $F(z) = \mathrm{P}[\Phi(t)]$ (prema teoremi 2.1). Imajući u vidu (2.2), upotrebom parcijalne integracije, sledi da se $\partial_\theta F(z)$ može napisati kao Puason–Stiltjesov integral za $\Phi(t)$:

$$\begin{aligned}
\partial_\theta F(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_\theta P(r, \theta - t)\Phi(t)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_t P(r, \theta - t)\Phi(t)dt \\
&= -(2\pi)^{-1} P(r, \theta - t)\Phi(t)\Big|_{t=0}^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)d\Phi(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)d\Phi(t) = \mathrm{PS}[\Phi(t)](z),
\end{aligned}$$

pri čemu je $z = re^{i\theta}$. Označimo sa $T_\Phi(t) = \mathrm{V}_0^t(\Phi(t))$ totalnu varijaciju funkcije $\Phi(t)$ u segmentu $[0, t]$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Dalje imamo

$$|\partial_\theta f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) dT_\Phi(t).$$

Kako je

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) d\theta = 1,$$

primenom Fubinijeve teoreme nalazimo

$$\begin{aligned}
|\Gamma_r| &= \int_0^{2\pi} |\partial_\theta F(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left| \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) d\Phi(t) \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) dT_\Phi(t) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) d\theta \right\} dT_\Phi(t) \\
&\leq \int_0^{2\pi} dT_\Phi(t) \leq \mathrm{V}_0^{2\pi}(\Phi(t)) \leq |\Gamma|;
\end{aligned}$$

zapravo, lako je proveriti da vredi

$$\mathrm{V}_0^{2\pi}(\Phi(t)) = |\Gamma|.$$

Medjutim, $|\Gamma| \neq \int_0^{2\pi} |\Phi'(t)| dt$, jer u opštem slučaju, Φ ne mora biti apsolutno neprekidna.

Kako je $\partial_t F(z)$ (vektorsko vrednosna) harmonijska funkcija, sledi da je $|\partial_t F|$ subharmonijska funkcija u jediničnom disku, prema tome $|\Gamma_r|$ raste sa porastom r. □

Lema 2.2 (videti [29]). *Neka je Σ^2 Jordanova površ omedjena krivom Γ i neka je $F(z)$ preslikavanje diska $|z| < 1$ na Σ^2. Pretpostavimo da $F(z)$ ima neprekidnu ekstenziju na $|z| = 1$, izuzev u najviše prebrojivo mnogo tačaka $\{a_n\}$, pri čemu je skup tačaka nagomilavanja $C_{\mathbb{U}}(F, a_n)$ segment. Dalje, pretpostavimo da su krive Γ_r, $0 < r < 1$ definisane na način $\Gamma_r = f(|z| = r)$ rektificijabilne. Tada je*

$$\limsup_{r \to 1} |\Gamma_r| \geq |\Gamma|,$$

pri čemu, ako Γ nije rektificijabilna, uzimao $|\Gamma| = \infty$.

Dokaz. Neka je $d(x, y) = |x - y|$ euklidsko rastojanje izmedju tačaka $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ i

$$E = \bigcup_{k \geq 1} C_{\mathbb{U}}(f, a_k).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ fiksirano i pretpostavimo da je Γ rektificijabilna (ako nije, dokaz je sličan).

Postoje $\omega_0,\ \omega_1,\dots,\omega_n \in \Gamma$ tako da vredi

$$\sum_{j=0}^{n} d(\omega_j, \omega_{j+1}) > |\Gamma| - \varepsilon/2,$$

gde smo stavili $\omega_{n+1} = \omega_0$. Možemo pretpostaviti, bez umanjena opštosti, da se nijedna od njih ne sadrži u E.

Budući da f poseduje neprekidnu ekstenziju na granicu površi Σ^2 isključujući segmente, možemo naći tačke $\zeta_j \in \mathbb{T}$ tako da je $f(\zeta_j) = \omega_j$ za sve $j = 0,\ 1,\dots,n$. Neka je $\omega_j' = f(r\zeta_j) \in \Gamma_r$. Rastojanje izmedju $r\zeta_j$ i ζ_j je $1-r$ za sve j. Kako je n fiksirano, postoji r dovoljno blisko 1 tako da vredi

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} d(\omega_j', \omega_j) < \varepsilon/4.$$

Primenjujući nejednakost trougla nalazimo

$$d(\omega_j, \omega_{j+1}) \le d(\omega_j, \omega_j') + d(\omega_j', \omega_{j+1}') + d(\omega_{j+1}', \omega_{j+1}).$$

Sledi

$$|\Gamma_r| \ge \sum_{j=0}^{n} d(\omega_j', \omega_{j+1}') \ge \sum_{j=0}^{n} d(\omega_j, \omega_{j+1}) - 2s_n > |\Gamma| - \varepsilon.$$

Kako ε možemo birati proizvoljno, imamo

$$\limsup_{r\to 1^-} |\Gamma_r| \ge |\Gamma|.$$

$\square$

Teorema 2.4 (videti [29]). *Neka je Σ^2 Jordanova površ omedjena krivom Γ i neka je $F(z)$ harmonijsko preslikavanje diska $|z|<1$ na Σ^2. Pretpostavimo da su $\Gamma_r,\ 0<r<1$ krive definisane na način $\Gamma_r = F(|z|=r)$. Tada $\partial_t F \in h^1$ ako i samo ako je Γ rektificijabilna. U ovom okruženju, $|\Gamma_r| \to |\Gamma|$ kada $r \to 1^-$.*

Dokaz teoreme 2.4. Ako je Γ rektificijabilna kriva, prema lemi 2.1 imamo $|\Gamma_r| \le |\Gamma|$, što znači

$$\int_0^{2\pi} |\partial_t f(re^{it})| dt \le |\Gamma| < \infty.$$

Dakle, $\partial_t f \in h^1$.

Obrnuto, ako $\partial_t f \in h^1$, tada postoji $\Phi(t)$ ograničene varijacije tako da je $\partial_t F(z) = \mathrm{PS}[\Phi(t)]$, odnosno vektorsko vrednosnom Puason–Stiltjesovom integralu za Φ. Neka je $U(z) = \mathrm{P}[\Phi(t)]$. Tada je $\partial_t U(z) = \partial_t F(z)$. Budući da je harmonijski konjugovana funkcija $\partial_t U(z) = \partial_t F(z)$ jedinstvena, sledi $r\partial_r U(z) = r\partial_r F(z)$. Prema tome, imamo $\partial_t U(z) = \partial_t F(z)$ i $\partial_r U(z) = \partial_r F(z)$. Dakle, postoji (vektorsko vrednosna) konstanta C koja zadovoljava $F(z) = U(z) + C = \mathrm{P}[\Phi + C](z)$. Sada je prema teoremi 2.3, $\Psi := \Phi + C$ preslikava $[0, 2\pi]$ u Γ i sve pretpostavke leme 2.2 su zadovoljne. Prema ovoj lemi i lemi 2.1, $|\Gamma|$ je konačno.

Budući da imamo harmonijsku parametrizaciju, $|\Gamma_r|$ je rastuća po $0 < r < 1$. Sledi $\lim_{r\to 1^-} |\Gamma_r| \leq |\Gamma|$ (prema lemi 2.1). Obrnutu nejednakost imamo prema drugoj lemi 2.2. Dakle, $\lim_{r\to 1^-} |\Gamma_r| = |\Gamma|$. □

Teorema Smirnova za konformna preslikavanja može se pokazati za odgovarajuću klasu analitičkih prelikavanja jediničnog diska u $\mathbb{C}^n$ zahtevajući da je slika diska razapeta rektificijabilnom Jordanovom konturom. Ovaj rezultat je ustanovljen od strane Globevnika i Stouta [21]. Teorema Smirnova se takodje može pokazati za klasu harmonijskih $K-$kvazikonformnih preslikavanja i klasu $(K, K')-$kvazikonformnih harmonijskih preslikavanja [30, 43]. Mi smo pokazali veriziju teoreme Smirnova za harmonijska preslikavanja, koja, naravno, nisu uvek kvazikonformna i prema tome, u izvesnom smislu, naše pretpostavke su optimalne.

Primetimo da sledi:

Posledica 2.1 (videti [29]). *Neka je Σ^2 Jordanova površ omedjena krivom Γ i $F(z)$ harmonijsko preslikavanje diska $|z| < 1$ na Σ^2.*

Ovi iskazi su medjusobno ekvivalentni:

1. *postoji funkcija $\Phi(t)$, $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ ograničene varijacije tako da vredi $F(z) = \mathrm{P}[\Phi(t)](z)$;*

2. $\partial_t F \in h^1$*;*

3. Γ *je rektificijabilna.*

Ako vredi neki od prethodnih uslova, tada je

$$|\Gamma| = \mathrm{V}_0^{2\pi}(\Phi(t)).$$

Prethodna posledica se može uporediti sa posledicom 1.2. Parametrizacija krive Γ koju inducira preslikavanje F nije uvek apsolutno neprekidno (ili čak neprekidna, naprimer ako Γ sadrži segmente). Medjutim, ako je $n = 2$ i ako je pri tome F konformno preslikavanje, tada ono indukuje na Γ apsolutno neprekidnu parametrizaciju krive Γ (posledica 1.2). Dakle, postoji razlika izmedju harmonijskih i konformnih preslikavanja u pogledu apsolutne neprekidnosti granične fu-nkcije.

Više od toga, ako je Σ^2 minimalma površ omedjena rektificijabilnom krivom Γ, tada je parametrizacija krive Γ inducirana izotermnim koordinatama površi Σ^2 takodje apsolutno neprekidna [55].

2.3 Izoperimetrijska nejednakost i harmonijske površi

2.3.1 Jordanove harmonijske površi

Jordanova površ Σ^2 je Jordanova harmonijska površ ako postoji harmonijska parametrizacija $X : \mathbb{U} \mapsto \Sigma^2$. Primetimo da poslednje preslikavanje ne mora posedovati homeomorfnu ekstenziju na $\overline{\mathbb{U}}$. Isto tako, ono ne mora biti regualrno preslikavanje. Za kontraprimer videti [17] kao i sledeći.

Primer 2.1 (videti [17])**.** Neka je $m > 2$ ceo broj, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{m+1} = 2\pi$ i definišimo

$$\varphi = \sum_{j=0}^{m} \theta_j \chi_{[\theta_j, \theta_{j+1}]}.$$

Tada je $f = \mathrm{P}[\phi]$, $\phi(t) = e^{i\varphi(t)}$ harmonijsko preslikavanje (difeomorfizam) jediničnog diska na Jordanovu oblast koju zatvaraju poligonlanle linije sa vrhovima u tačkama $e^{i\theta_j}$, $j = 0,\ 1,\ 2, \ldots, m$. Ovaj primer se može lako modifikovati do preslikavanja jediničnog diska na harmonijsku površ Σ^2, kako sledi. Neka je

$$F(z) = (h(z), \Re f(z), \Im f(z)),$$

gde je h proizvoljna realno vrednosna harmonijska funkcija koja je neprekidna do na granicu. Tada je skup tačaka nagomilavanja za F u $e^{i\theta_j}$ segment

$$[(h(e^{i\theta_j}), \cos\theta_j, \sin\theta_j), (h(e^{i\theta_j}), \cos\theta_{j+1}, \sin\theta_{j+1})].$$

Uzmimo, naprimer

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{-2\pi}{3}, & -\pi \le t \le -\frac{\pi}{3} \\ 0, & -\frac{\pi}{3} < t \le \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3}, & \frac{\pi}{3} < t \le \pi. \end{cases}$$

Neka je $\beta = e^{i\pi/3}$. Za $\phi(t) = e^{i\varphi(t)}$ imamo

$$f(z) = \mathrm{P}[\phi](z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2} \beta^{2k} \arg\left(\frac{z - \beta^{2k+1}}{z - \beta^{2k-1}}\right).$$

1. Neka je $F(z) = (5\Re z, \Re f(z), \Im f(z))$. Tada F odredjuje harmonijsku površ $\Sigma^2 = F(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{R}^3$. Granica ove površi se sastoji od šest segmenata koji ne prave poligon i homeomorfna je $\mathbb{T} \cup [0,1]$. Primetimo da je Σ^2 Jordanova površ sa zasekom duž segmenta.

2. Ako umesto F uzmemo $\tilde{F} = (\Re f(z), \Im f(z), \frac{1}{\pi}\arg(1+z))$, tada dolazimo do Jordanove harmonijske površi. Njena granica se sastoji od šest segmenata koji obrazuju poligon.

2.3.2 Izoperimetrijska nejednakost za Jordanove harmonijske povši

Ovde ćemo ustanoviti klasičnu izoperimetrijsku nejednakost za Jordanove harmonijske površi omedjene rektificijabilnom granicom. Rezultat koji je ključan u tom pravcu jeste konstatacija da je Gausova krivina (regularne) harmonijske površi nepozitivna, i to je sadržaj leme 2.4. Iako možda očekivan, izgleda da ovaj rezultat nikada nije bio publikovan. Sva je prilika da se nejednakost izoperimetrijskog tipa za harmonijska preslikavanja prvi put pojavila u poznatoj Kurantovoj monografiji [13], ali bez precizne konstante. Upućujemo takodje na Šifmanov rad [53] o sedlastim površima. Navedene reference su bile i motiv za rezultate koji slede.

Pre svega, naredna lema daje izraz za Gausovu krivininu regularne i dovoljno glatke površi koji nam je podesniji za naredna razmatranja.

Lema 2.3 (videti [29]). *Neka je Σ^2 površ smeštena u $\mathbb{R}^n$ i neka dopušta dovoljno glatku parametrizaciju*

$$X(x,y) = (X_1(x,y), \dots, X_n(x,y)), \quad (x,y) \in D.$$

Gausova krivina $K(x,y)$ površi Σ^2 može se izraziti na sledeći način

$$K = \frac{\det\{[X_{xx}, X_x, X_y] \times [X_{yy}, X_x, X_y]^t\} - \det\{[X_{xy}, X_x, X_y] \times [X_{xy}, X_x, X_y]^t\}}{(|X_x|^2|X_y|^2 - \langle X_x, X_y\rangle^2)^2}.$$

U ovoj lemi smo za vektore $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ i $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ sa $[A, B, C]$ označili matricu

$$[A,B,C] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}.$$

U standardnom izrazu za Gausovu krivinu (koji uključuje drugu fundamentalu formu površi) figurišu parcijalni izvodi parametrizacije do trećeg reda i obično se pretpostavlja njihova neprekidnost. Medjutim, u formuli za krivivnu koja se nalazi u lemi 2.3 imamo samo parcijalne izvode do drugog reda. Ipak, naš dokaz leme zahteva postojanje parcijalnih izvoda do trećeg reda parametrizacije X. Budući da je naša glavna primena za regularne harmonijske površi, ovo nam neće smetati.

Dokaz leme 2.3. Neposredno se proveravaju jednakosti:

$$E_y = 2\langle X_{xy}, X_x\rangle\,,\;\; E_{yy} = 2\langle X_{xyy}, X_x\rangle + 2\left|X_{xy}\right|^2,$$

$$F_x = \langle X_{xx}, X_y\rangle + \langle X_x, X_{xy}\rangle\,,$$

$$F_{xy} = \langle X_{xxy}, X_y\rangle + \langle X_{xx}, X_{yy}\rangle + \left|X_{xy}\right|^2 + \langle X_x, X_{xyy}\rangle\,,$$

$$G_x = 2\langle X_{xy}, X_y\rangle\,,\;\; G_{xx} = 2\langle X_{xxy}, X_y\rangle + 2\left|X_{xy}\right|^2$$

i

$$-\tfrac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \tfrac{1}{2}G_{xx} = \langle X_{xx}, X_{yy}\rangle - \left|X_{xy}\right|^2.$$

Na osnovu ovih relacija, nalazimo

$$\begin{aligned}
&\det\{[X_{xy}, X_x, X_y]\times[X_{xy}, X_x, X_y]^t\}\\
&\qquad= \begin{vmatrix} |X_{xy}|^2 & \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_x & F & G \end{vmatrix}\\
&\qquad= \begin{vmatrix} |X_{xy}|^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_x & F & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_x & F & G \end{vmatrix}\\
&\qquad= |X_{xy}|^2(EG - F^2) + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_y & \frac{1}{2}G_x \\ \frac{1}{2}E_y & E & F \\ \frac{1}{2}G_x & F & G \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

i

$$
\begin{aligned}
&\det\{[X_{xx}, X_x, X_y] \times [X_{yy}, X_x, X_y]^t\} \\
&= \begin{vmatrix} |X_{xy}|^2 - \frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} & \frac{1}{2}E_x & F_x - \frac{1}{2}E_y \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} |X_{xy}|^2 & 0 & 0 \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} & \frac{1}{2}E_x & F_x - \frac{1}{2}E_y \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G \end{vmatrix} \\
&= |X_{xy}|^2(EG - F^2) + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{yy} + F_{xy} - \frac{1}{2}G_{xx} & \frac{1}{2}E_x & F_x - \frac{1}{2}E_y \\ F_y - \frac{1}{2}G_x & E & F \\ \frac{1}{2}G_y & F & G \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Jednakost za Gausovu krivinu sada sledi iz (1.18). □

Lema 2.4 (videti [29]). *Ako je Σ^2 harmonijska površ koja dozvoljava regularnu harmonijsku parametrizaciju X, tada je Gausova krivina površi Σ^2 nepozivitna.*

Dokaz. Kako je $\triangle X = (0, \ldots, 0)$, sledi $X_{yy} = -X_{xx}$. Imajući u vidu ovu relaciju i lemu 2.3, nalazimo

$$
\begin{aligned}
&K = \\
&\frac{\det\{[X_{xx}, X_x, X_y] \times [X_{yy}, X_x, X_y]^t\} - \det\{[X_{xy}, X_x, X_y] \times [X_{xy}, X_x, X_y]^t\}}{(|X_x|^2|X_y|^2 - \langle X_x, X_y\rangle^2)^2} = \\
&\frac{-\det\{[X_{xx}, X_x, X_y] \times [X_{xx}, X_x, X_y]^t\} - \det\{[X_{xy}, X_x, X_y] \times [X_{xy}, X_x, X_y]^t\}}{(|X_x|^2|X_y|^2 - \langle X_x, X_y\rangle^2)^2} \\
&\leq 0,
\end{aligned}
$$

jer su obe matrice koje se pojavljuju simetrične. □

Kako je Gausova krivina unutrašnja invarijanta površi, iz upravo pokazane leme izvešćemo naredni rezultat koji govori o izoperimetrijskoj nejednakosti za Jordanove harmonijske površi omedjene rektificijabilnom krivom.

Teorema 2.5 (videti [29]). *Neka je Σ^2 Jordanova harmonijska površ sa rektificijabilnom granicom Γ, tada vredi klasična izoperimetrijska nejednakost*

$$4\pi|\Sigma^2| \leq |\Gamma|^2; \tag{2.4}$$

ovde $|\Sigma^2|$ označava površinu.

Dokaz. Neka je X harmonijska parametrizacija Jordanove harmonijske površi Σ^2. S obzirom da X nije nepohodno i regularna parametrizacija, kao i u [53], dodaćemo dve dodatne dimenzije ovoj parametrizaciji i time perturbovati površ Σ^2 u $\mathbb{R}^{n+2}$. Preciznije, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $0 < r < 1$ uzmimo u obzir harmonijsko preslikavanje

$$X_{\varepsilon,r}(x,y) = (X(rx, ry), \varepsilon x, \varepsilon y),$$

koje definiše regularnu harmonijsku parametrizaciju nove Jordanove harmonijske površi $\Sigma^2_{\varepsilon,r} = X_{\varepsilon,r}(\mathbb{U})$ (koja pri tome ima analitičku granicu). Kako je Gausova krivina za $\Sigma^2_{\varepsilon,r}$ nepozitivna (lema 2.4), primenom klasičnog rezultata Bekenbaha i Radoa, nalazimo

$$4\pi|\Sigma^2_{\varepsilon,r}| \leq |\Gamma_{\varepsilon,r}|^2. \tag{2.5}$$

Puštajući prvo $\varepsilon \to 0$, potom $r \to 1$, prema teoremi 2.4, dolazimo do (2.4).

Dajemo i drugi dokaz ove teoreme pozivajući se na glavni rezultat Besona [5] i našu teoremu 2.4. Kako X^ε_r konvergira ka X i kako $|\Gamma^2_{\varepsilon,r}|$ konvergira ka $|\Gamma|$, sledi da $|\Sigma^2_{\varepsilon,r}|$ teži $|\Sigma^2|$; imajući u vidu (2.5), nejednakost (2.4) sledi direktno. $\square$

Primedba 2.1. Teorema 2.5 se može videti kao varijacija jedne od teorema koja pripada Šifmanu [53]. U cilju uspostavljanja klasične izoperimetrijske nejednakosti za harmonijske površi, Šifman je za pretpostvaku uzeo da je harmonijska parametrizacija X homeomofizam tako da $X|_{\mathbb{T}} \in \mathrm{BV}$. Naš dokaz (videti teoremu 2.3) pokazuje da je ovaj uslov suvišan, ako razmatramo Jordanovu harmonijsku površ sa rektificijabilnom granicom.

Primedba 2.2. U Kurantovoj monografiji (videti dokaz [13, Teorema 3.7]), koja je publikovana nekoliko godina posle citiranog Šifmanovog rada, pokazuje se da za površ smeštenu u $\mathbb{R}^3$ vredi naredna nejednakost

$$4|\Sigma^2| \leq |\Gamma|^2,$$

uz uslov $\Sigma^2 = X(\mathbb{U})$, gde je X harmonijska parametrizacija sa apsolutno neprekidnim graničnim vrednostima.

Glava 3

Analitička izoperimetrijska nejednakost za funkcije na polidisku

Izložićemo prvo kratku pozadinu problema koji će nas zanimati u ovoj glavi. Ukratko, glavni objekti našeg daljeg istraživanja su generelizacije Karlemanove nejednakosti za analitičke funkcije više promenjivih, kao i ekstremalni problemi koji su povezani sa tim nejednakostima. Na kraju, sledeći [35], dolazimo do nove analitičke izoperimetrijske nejednakosti za funkcije na polidsiku.

3.1 Pozadina

Polazimo od jednog rezlutata koji su ustanovili Mateljević i Pavlović, kao i Burbea. Reč je o narednoj tačnoj nejednakosti

$$\frac{m-1}{\pi}\int_{|z|<1}|f(z)|^{mp}(1-|z|^2)^{m-2}dA(z)\le\|f\|_p^{mp};\tag{3.1}$$

ovde je $f\in H^p$, p je pozitivan, dok je $m\ge 2$ ceo broj. Ekstremalne funkcije su iste one koje se pojavljuju u posebnom slučaju $m=2$ prethodne nejednakosti, kada imamo modernu varijantu Karlemanove.

Interesantno je da postoji veza izmedju (3.1) i jednog Rudinovog problema, kako je to primećeno od strane Mateljevića i Pavlovića [39]. Pristup Burbee [11] u otktivanju (3.1) je drugačiji i bio je motivisan drugim razlozima.

Da bismo videli o čemu se radi, navešćemo prvo definiciju Hardijevih klasa na polidsku $\mathbb{U}^n$. Neka je dm_n normalizovana Lebegova mera na torusu $\mathbb{T}^n$. Za pozitivan broj p, Hardijeva klasa $H^p(\mathbb{U}^n)$ obuhvata funkcije $f(z)=f(z_1,\dots,z_n)$ analitičke u $\mathbb{U}^n$ koje zadovoljavaju

$$\|f\|_p \ = \sup_{0\le r<1} M_p(r,f) \ = \sup_{0\le r<1} \left\{ \int_{\mathbb{T}^n} |f(r\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right\}^{1/p} < \infty;$$

klasa $H^\infty(\mathbb{U}^n)$ se sastoji od svih ograničenih funkcija analitičkih u jediničnom polidisku. Za teoriju funkcija u polidisku upućujemo na Rudinovu monografiju [48].

Za konkretne vrednosti $n = 2$ i $p \in \{1,\ 2\}$, Rudin [48, str. 53 i 69] je pokazao da, ako $f \in H^p(\mathbb{U}^n)$, tada $g(z) = f(z,\dots,z)$ pripada Bergmanovom prostoru L^p_a. Na istom mestu je postavljen problem da se ovaj rezultat razmotri za druge vrednosti p i n. Kasnije, u [18] je pokazano sledeće: neka je $0 < p \le p' < \infty$ i $n \ge 2$, tada

$$\int_{|z|<1} |g(z)|^{p'}(1-|z|^2)^{np'/p-2} dA(z) < \infty$$

za sve $f \in H^p(\mathbb{U}^n)$. Zapravo, pokazano je mnogo više. Označimo sa

$$D_nF(z) = F(z,\dots,z)$$

dijagonalno preslikavanje; D_n prevodi analitičke funkcije u polidisku $\mathbb{U}^n$ u analitičke funkcije u disku $\mathbb{U}$. Za $0 < p < \infty$, D_n je ograničen linearan operator koji preslikava $H^p(\mathbb{U}^n)$ u $L^p_{a,n-2}$. Drugim rečima, postoji konstanta C tako da za sve $F \in H^p(\mathbb{U}^n)$ vredi

$$\|D_nF\|^p_{p,n-2} = \frac{n-1}{\pi}\int_{|z|<1} |(D_nF)(z)|^p(1-|z|^2)^{n-2} dA(z) \le C\|F\|^p_p. \tag{3.2}$$

Kako je pokazano u [25], $D_n : H^p(\mathbb{U}^n) \mapsto L^p_{a,n-2}$ je i sirjektivan operator za sve $p \ge 1$. Rezultati koje smo naveli ponovo su dobijeni novim pristupom od strane Šapiroa [52].

Mateljević i Pavlović [39] su izveli (3.1) razmatrajući Rudinov problem. Analizirajući stepeni red funkcije analitičke u jediničnom polidisku, uvideli su da je nejednakost (3.2) tačna za $C = 1$ i za paran ceo broj $p \ge 2$. Dalje su primetili da ako se za $f \in H^p$ postavi

$$F(z) = F(z_1,\dots,z_n) = f(z_1)\cdots f(z_n)$$

u (3.2), dolazimo upravo do (3.1) za $m = n$ i $p = 2$; $F \in H^p(\mathbb{U}^n)$ se može proveriti primenom Fubinijeve teoreme. Nejednakost (3.1), kao i njena tačnost, za ostale vrednosti p sada sledi prema Risovoj teoremi o faktorizaciji.

U [11], koji se uglavnom bazira na njegovom ranijem radu [9], Burbea je pimetio da je moguće izvesti (3.1), uz malo napora, iz njegovih ranijih rezultata. Interesantno je pomenuti da je incijalni Burbein motiv za radove koji su se pojavili početkom osamdesetih bio da se ustanovi višedimenzionalna verzija nejednakosti

$$\frac{q-1}{\pi}\int_{|z|<1}|\exp f(z)|^2(1-|z|^2)^{q-2}dA(z) \le \exp\left\{\frac{1}{q\pi}\int_{|z|<1}|f'(z)|^2 dA(z)\right\},$$

gde je $q > 1$ realan broj i $f(z)$ funkcija analitička u disku $|z| < 1$ sa konačnim Dirihleovim integralom koja još zadovoljava $f(0) = 0$. Jednakost vredi ako i samo ako je $f(z)$ moguće izraziti u formi

$$f(z) = q\log\frac{1}{1-z\overline{w}}$$

za izvesno $|w| < 1$. Upućujemo na rad Saitoa [50], gde se nejednakost pojavljuje prvi put. Medjutim, Saitov dokaz njegove nejednakosti (tačnije, dela koji se odnosi na jednakost) je bio krajnje složen; Burbein dokaz [9] je jednostavniji, u ovom radu je pokazana generalizacija i rešen je odgovarajući ekstremalni problem za višedimenzionalne Dirihleove prostore.

Dakle, nejednakost (3.1) i ekstremalne funkcije mogu se videti kao posledica narednog tvrdjenja.

Teorema 3.1 (videti [11]). *Neka je $m \ge 2$ ceo broj i $f_j(z) \in H^{p_j}$ $(0 < p_j < \infty)$ za sve $j = 1,\ 2,\dots,m$. Tada*

$$\prod_{j=1}^{m}|f_j|^{p_j} \in L^1_{m-2}$$

i

$$\int_{|z|<1}\left\{\prod_{j=1}^{m}|f_j(z)|^{p_j}\right\}da_{m-2}(z) \le \prod_{j=1}^{m}\|f_j\|_{p_j}^{p_j}.$$

Jednakost vredi ako i samo ako je ili $\prod_{j=1}^{m} f_j \equiv 0$ ili ako svaka od funkcija f_j $(j = 1,\ 2,\dots,m)$ ima formu

$$f_j(z) = c_j K_w(z)^{2/p_j}$$

za izvesno (zajedničko) $|w| < 1$ i $c_j \ne 0$; ovde $K(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-1}$ ima ulogu Koši–Segovog jezgra.

Slučaj u teoremi 3.1: ”$p_j = 2$ za sve $j = 1,\ 2,\dots,m$”, koji ćemo zvati Hilbertov, može se izvesti iz dosta opšteg razmatranja koje uključuje teoriju reproduktivnih jezgara. Ovo je razlog zbog kojeg se u formulaciji teoreme pojavljuje Koši–Segovo jezgro. Metod prezentujemo u narednom odeljku i to je ključni momenat u dokazu teoreme 3.1; teorema se potom pokazuje na način koji je uobičajen, primenom Risove teoreme o faktorizaciji – pristup koji je takodje upotrebio Burbea [11]. Kasnije, u četvrtom odeljku, prezentujemo pristup koji ne koristi faktorizaciju, uspostavljajući nejednakost u teoremi 3.1 za funkcije koje pripadaju Hardijevoj klasi subharmonijskih funkcija PL_1.

Od interesa je primetiti da je teorema 3.1, zapravo, ekvivalentna sa nejednakošću (3.1) uzeta sa odgovarajućim tvrdjenjem za jednakost. Ovo je primećemo i ukazano nam od strane profesora Pavlovića. Naime, neka je f_j $(j = 1,\ 2, \dots, m)$ kao u teoremi. Kako smo već rekli, dovoljno je razmotriti Hilbertov slučaj i možemo još pretpostaviti da se $f_j(z)$ $(j = 1,\ 2, \dots, m)$ ne poništava nigde u disku. Neka je

$$g(z) = (f_1(z)f_2(z)\cdots f_m(z))^{1/m},$$

pri čemu uzimamo neku granu korene funkcije. Primenom Holderove nejednakosti, nalazimo

$$\|g\|_2^m = \|g^m\|_{2/m} = \left\|\prod_{j=1}^m f_j\right\|_{2/m} \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_2 < \infty.$$

Dakle, $g \in H^2$. Primenom (3.1) za $p = 2$ i $f = g$, potom poslednje nejednakosti, sledi

$$\int_{|z|<1} \left\{\prod_{j=1}^m |f_j(z)|^2\right\} da_{m-2}(z) = \int_{|z|<1} |g(z)|^{2m} da_{m-2}(z) \leq \|g\|_2^{2m}$$
$$\leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_2^2.$$

Ako se jednakost dostiže na svakom mestu u gornjem nizu, tada se iz druge relacije može zaključiti da je to slučaj ako i samo ako je ili $g \equiv 0$ ili $g(z) = \lambda(1 - z\overline{w})^{-1} = \lambda\mathcal{K}_w(z)$ za $|w| < 1$ i nenultu konstantu λ, prema delu koji govori o jednakosti u (3.1). Ukoliko je $g \equiv 0$, jasno je da mora biti $f_j \equiv 0$ za isvesno $1 \leq j \leq m$. Imajući u vidu slučaj jednakosti u Holderovoj nejednakosti, povezanost izmedju g i f_j $(j = 1,\ 2, \dots, m)$ i činjenicu: ako su $\varphi(z)$ i $\psi(z)$ analitičke funkcije disku $|z| < 1$ i ako je $|\varphi(z)| = |\psi(z)|$ za sve $|z| < 1$, tada je $\varphi = \alpha\psi$ za izvesnu konstantu $|\alpha| = 1$, neposredno sledi da jednakost vredi na trećem mestu ako i samo ako je $f_j(z) = c_j K_w(z)$ za sve $j = 1,\ 2, \dots, m$, pri čemu je c_j nenulta konstanta. Dakle, ovim smo izveli teoremu 3.1 iz (3.1) i odgovarajućeg tvrdjenja za jednakost.

Prema samoj definiciji Bergmanovih prostora, (3.1) je moguće predstaviti u formi

$$\|f\|_{mp,m-2} \leq \|f\|_p, \quad f \in H^p. \tag{3.3}$$

Iz (3.3) sledi

$$H^p \subseteq L^{mp}_{a,m-2}. \tag{3.4}$$

Više od toga, sledi da je norma inkluzivnog operatora jednaka jedinici, budući da je nejednakost (3.3) tačna.

Inkluzija koja je nadjena nije iznenadjenje i ona sledi iz Djurenove generalizacije poznate Karlesonove teoreme [15, 16]. Informativno, neka je $0 < p \leq p' < \infty$ i μ konačna (pozitivna) mera na disku $|z| < 1$. Tada postoji konstanta $C = C(\mu)$ tako da vredi

$$\left\{\int_{|z|<1} |f(z)|^{p'} d\mu(z)\right\}^{1/p'} \leq \quad C\|f\|_p, \quad f \in H^p$$

ako i samo ako je μ $p'/p-$Karlesonova mera. Ako je $p = p'$, imamo Karlesonovu teoremu. Može se proveriti da je da_{m-2} $m-$Karlesonova za sve $m \geq 2$ i potom sledi (3.4). Medjutim, ovo razmatranje je veoma opšteg karaktera i nije od pomoći u nalaženju norme inkluzivnog operatora (ili što je isto, tačne izoperimetrijske konstante) i ekstremalnih funkcija.

Ovo poglavlje sadrži još tri odeljka. Drugi odeljak je posvećen prenošenju Hilbertovog slučaja Karlemanove nejednakosti u veoma opštem kontekstu. Pokazujemo verziju za funkcije analitičke u proizvoljnoj kompletnoj Reinhardtovoj oblasti u $\mathbb{C}^n$. Sledeći Burbein pristup [9], ovde pokazujemo nešto opštiju formu i dajemo jednostavniji dokaz. Burbea je upoterebio ovu formu nejednakosti zajedno sa jednim njenim analogom (videti takodje citiran radi) za izvodjene ineresnatnih nejednakosti izmedju funkcija koje pripadaju raznim prostorima analitičkih funkcija sa Hilbertovom strukturom (izmedju ostlog, Saitove nejednakosti). Posebno, jedna primena dovodi do nejednakosti izoperimetrijskog tipa za funkcije koje pripadaju $H^2(\mathbb{U}^n)$. U četvrtom odeljku naš cilj je pokazati novu formu i to za funkcije koje pripadaju $H^p(\mathbb{U}^n)$; takodje, cilj je odrediti sve ekstremalne funkcije za novu formu izoperimetrijske nejednakosti. Budući da ne postoji direktan analog Risove teoreme o faktorizaciji za Hardijeve prostore na polidisku, ovaj problem je nešto teži.

3.2 Karlemanova nejednakost i teorija reproduktivnih jezgara

Izložićemo prvo osnovne teorije reproduktivnih jezgara sledići Aronsajzov rad [2], gde je teorija dobila svoje uporište. Nama je ona potrebna radi odredjenih preliminarnih rezultata. Posle toga pokazujemo Karlemanovu nejednakosti u formi nejednakosti izmedju analitičkih funkcija u proizvoljnoj kompletnoj Reinhahdtovoj oblasti.

3.2.1 Reproduktivna jezgara

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor koji se sastoji od kompleksno vrednosnih funkcija definisanih u nekom nepraznom skupu X. Označimo sa $\langle f, g\rangle$, $f,\ g \in \mathcal{H}$ unutrašnji proizvod i neka je $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$ norma na $\mathcal{H}$ generisana skalarnim proizvodom. $K(x, y)$:

$X \times X \mapsto \mathbb{C}$ je reproduktivno jezgro za $\mathcal{H}$ ako vredi:

1. za sve $z \in X,\ K_z(w) = K(z, w)$, kao funkcija promenjive w, pripada $\mathcal{H}$;

2. svojstvo reproduktivnost; za sve $z \in X$ i sve $f \in \mathcal{H}$,

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle . \tag{3.5}$$

Primenom (3.5) za K_z i w, nalazimo

$$K_z(w) = \langle K_z, K_w \rangle , \quad z,\ w \in X.$$

Prema prvom svojstvu, imamo

$$K(z, w) = \langle K_z, K_w \rangle$$

za sve $z,\ w \in X$.

Prema prethodnoj relaciji, za sve $z \in X$ sledi

$$\|K_z\| = \langle K_z, K_z \rangle^{1/2} = K(z, z)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ koji se sastoji od funkcija definisanih u nepraznom skupu X naziva se Hilbertov prostor sa reproduktivnim jezgrom (HPRJ), ako postoji reproduktivno jezgero K za $\mathcal{H}$. Hilbertov prostor sa reproduktivnim jezgrom K označavamo sa $\mathcal{H}_K(X)$. Korespodentnu normu sa $\|\cdot\|_K$ (ili $\|\cdot\|_{H_K}$) i unutrašni proizvod sa $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ (ili eventualno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_K}$, ako je to potrebno radi jasnoće).

Ukoliko Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ funkcija na skupu X dopušta reproduktivno jezgro, tada je ono jedinstveno. Naime, neka je $K(z, w)$ reproduktivno jezgro za $\mathcal{H}$ i neka isto vredi za $K'(z, w)$. Tada, za sve $z \in X$, primenom drugog svojstva za K i K', nalazimo

$$\begin{aligned}
\|K_z - K'_z\|^2 &= \langle K_z - K'_z, K_z - K'_z \rangle \\
&= \langle K_z - K'_z, K_z \rangle - \langle K_z - K'_z, K'_z \rangle \\
&= (K_z - K'_z)(z) - (K_z - K'_z)(z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dakle, $K_z = K'_z$ ($K_z(y) = K'_z(w)$ za sve $w \in X$). Ovo znači $K(z, w) = K'(z, w)$ za sve $z,\ w \in X$.

Pokazuje se naredna fundamentalna činjenica:

Teorema 3.2. *Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ funkcija definisanih na X, poseduje reproduktivno* *jezgro K (odnosno $\mathcal{H}$ je HPRJ) ako i samo ako je funkcional evaluacije*

$$\mathcal{H} \ni f \mapsto f(z)$$

ograničen linearan funkcional za sve $z \in X$).

Neka je X proizvoljan skup i neka je $K : X \times X \to \mathbb{C}$ jezgro na X (tj. neka poseduje svojstva 1. i 2.). Jezgro K se naziva pozitivno definitno jezgro ako za proizviljan konačan skup tačaka $\{y_1, , \ldots, y_n\} \subseteq X$ i kompleksne brojeve $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ vredi

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} \varepsilon_i \overline{\varepsilon}_j K(y_i, y_j) \geq 0.$$

Još se kaže da je K pozitivno definitivna matrica u smislu Mura.

U teoriji reproduktvnih jezgrara pokazuju se naredna dva tvrdjenja.

Teorema 3.3. *Reproduktivno jezgro K za HPRJ $\mathcal{H}_K$ je pozitivno definitivna matrica (u smislu Mura). Vredi i obrnuto, za proizvoljno pozitivno definitno jezgro $K : X \times X \mapsto \mathbb{C}$, postoji jedinstven HPRJ H_K koji se sastoji od funkcija na X, čije je reproduktvno jezgro upravo K.*

Teorema 3.4. *HPRJ $H_K(D)$ se sastoji od analitičkih funkcija u oblasti D ako i samo ako je jezgro K je seskvi analitičko i lokalno ograničeno u D.*

3.2.2 Prostori analitičkih funkcija u kompletnoj Reinhardtovoj oblasti

Oblast $D \subseteq \mathbb{C}^n$ se naziva kompletna Reinhardtova oblast ako $z \in D$ povlači $z \cdot w \in D$ za sve $w \in \overline{\mathbb{U}}^n$; koristimo oznaku $\cdot$ za sledeću operaciju na $\mathbb{C}^n$:

$$z \cdot \overline{w} = (z_1 \overline{w}_1, , \ldots, z_n \overline{w}_n),$$

gde je

$$\overline{w} = (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n).$$

konjugovan vektor sa w; ovde su $z = (z_1, \ldots, z_n)$ i $w = (w_1, \ldots, w_n)$ koordinatne reprezentacije za z i w u standardnoj bazi prostora $\mathbb{C}^n$ (posmatran kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$). Iz same definicije sledi da je kompletna Reinhardtova oblast zvezdast skup koji sadrži $0 \in \mathbb{C}^n$. Jedno od dobro poznatih tvrdjenja u teoriji analitičkih funkcija više promenjivih jeste da se funkcija f analitička u takvom domenu D može predstaviti u formi stepenog reda

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_\alpha z^\alpha, \quad z \in D. \tag{3.7}$$

Pri tome podrazumevamo da je konvergencija uniforma (i absolutna) na kompaktnim podskupovima D. Dakle, prostor svih analitičkih funkcija u oblasti D, koji označavamo sa $H(D)$, može se videti kao zatvorenje (u lokalno uniformnoj topologiji D) linearnog prostora koji je generaisan skupom $\{z^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n\}$. Za koeficjente stepenog reda (3.7) vredi

$$a_\alpha = a_\alpha(f) = \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Do kraja ovog odeljka, ozanaka D biće rezervisana za Reinhardtov domen.

Uvedimo dve klase analitičkih funkcija u D, $\mathcal{P}(D)$ i $\mathcal{P}_\infty(D) \subseteq \mathcal{P}(D)$. Klasa $\mathcal{P}(D)$ se sastoji od svih ϕ čiji stepeni red

$$\phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z^\alpha, \quad z \in D,$$

ispunjava uslov

$$c_\alpha > 0 \quad \text{za sve} \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Podklasu $\mathcal{P}_\infty(D)$ definišemo zahtevom: $\phi \in \mathcal{P}(D)$ pripada $\mathcal{P}_\infty(D)$ ako je

$$\phi(\zeta \cdot \overline{\zeta}) = \infty \quad \text{za sve} \quad z \in \partial D.$$

Funkciji $\phi \in \mathcal{P}(D)$ pridružimo

$$K_\phi(z, w) = \phi(z \cdot \overline{w}), \quad z,\ w \in D.$$

Lako se proverava da $K_\phi(z, w)$ zadovoljava pretpostavke teoreme 3.3 i teoreme 3.4. Sledi da postoji jedinstven HPRJ za koje je K_ϕ reprodkutivno jezgro. Više od toga, kako je K_ϕ, prema teoremi 3.4, sledi da je prostor H_{K_ϕ} sastvaljen od analitičkih funkcija u oblasti D.

Sledeća lema bliže opisuje prostor $\mathcal{H}_{K_\phi}$, generisan jezgrom K_ϕ.

Lema 3.1. *Neka $\phi \in \mathcal{P}(D)$. Prostor $\mathcal{H}_{K_\phi}$ se poklapa sa Hilberovim prostorom*

$$\mathcal{H}_\phi = \{f \in H(D) : \|f\|_\phi < \infty\};$$

ovde smo za $f \in H(D)$, čiji je stepeni red $f(z) = \sum a_\alpha z^\alpha,\ z \in D$, označili

$$\|f\|_\phi^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha^{-1} |a_\alpha|^2, \tag{3.8}$$

normu generisanu unutrašnjim proizvodom

$$\langle f, g\rangle_\phi = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} c_\alpha^{-1} a_\alpha \overline{b}_\alpha, \tag{3.9}$$

pri čemu je $g(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} b_\alpha z^\alpha,\ z \in D$. *Zapravo, unutrašnji proizvod (i korespodentna norma) za* $\mathcal{H}_{K_\phi}$ *i* $\mathcal{H}_\phi$ *su isti.*

Dokaz. Lako se proverava da je $\mathcal{H}_\phi$ Hilbertov prostor sa unutrašnjim proizvodom (3.9). Proverimo da je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor sa reproduktivnim jezgrom; za sve $\zeta \in D$ i $f \in \mathcal{H}_\phi$ nalazimo

$$f(\zeta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} a_\alpha \zeta^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} c_\alpha^{-1}(a_\alpha c_\alpha \zeta^\alpha) = \left\langle f, \phi(\,\cdot\,\overline{\zeta})\right\rangle_\phi.$$

Dakle,

$$|f(\zeta)| \le \phi(\zeta\cdot\overline{\zeta})^{1/2}\|f\|_\phi \quad (\zeta \in D,\ \phi \in \mathcal{H}_\phi);$$

primenili smo Koši–Švarcovu nejednakosti i $\|\phi(\,\cdot\,\overline{\zeta})\|_\phi = \phi(\zeta\cdot\overline{\zeta})^{1/2}$. Ovo pokazuje da je funkcional evaluacije ograničen na $\mathcal{H}_\phi$. Sledi da $\mathcal{H}_\phi$ poseduje reproduktivno jezgro. Kako se reproduktivna jezgra poklapaju, $K_\phi = \phi(\,\cdot\,\overline{\zeta})$, sledi poklapanje i dva Hilbertova prostora. □

3.2.3 Karlemanova nejednakost

Dolazimo do glavnog dela ovog odeljka. Reč je o teoremi 3.6 koja uspostavlja tačnu nejednakost izmedju funkcija koje pripadaju različitim HPRJ analitičkih funkcija u proizvoljnoj Reinhardtovoj oblasti. Teoremu pokazujemo oslanjajući se na prethodno izloženo i primenom Karlemanove ideje [12]. Suština se nalazi u narednom rezultatu, koji je pogodniji za poredjenje sa originalnom Karlemanovom nejednakošću.

Primetimo prvo da $\phi,\ \psi \in \mathcal{P}(D)(\mathcal{P}_\infty(D))$ povlači $\phi\psi \in \mathcal{P}(D)(\mathcal{P}_\infty(D))$. Prema ovoj primedbi i lemi 3.1 imamo

Teorema 3.5 (videti [9, 10, 11]). *Neka je D Reinhardtova oblast, $\phi,\ \psi \in \mathcal{P}(D)$ i $f \in \mathcal{H}_\phi,\ g \in \mathcal{H}_\psi$. Tada*

$$fg \in \mathcal{H}_{\phi\psi}$$

i

$$\|fg\|_{\phi\psi} \le \|f\|_\phi \|g\|_\psi.$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako je ili $fg \equiv 0$ (odnosno $f \equiv 0$ ili $g \equiv 0$) ili f i g imaju formu

$$f = C_1 K_\phi^w, \qquad g = C_2 K_\psi^w$$

za isvesno (zajedničko) $w \in \mathbb{C}^n$ koje zadovoljava $\phi(w \cdot \overline{w}),\ \psi(w \cdot \overline{w}) < \infty$ i nenulte konstante $C_1,\ C_2$; ovde su $K_\phi(z,w) = \phi(z \cdot \overline{w})$ i $K_\psi(z,w) = \psi(z \cdot \overline{w})$ reproduktivna jezgra za $\mathcal{H}_\phi$ i $\mathcal{H}_\psi$, respektivno.

Ako pored gornjih pretpostvaki imamo $\phi \in \mathcal{P}_\infty(D)$ ili $\psi \in \mathcal{P}_\infty(D)$, tada se uslov za w može zameniti jednostavnijim: $w \in D$.

Naredna jednostavana lema biće od koristi prilikom našeg dokaza teoreme 3.5.

Lema 3.2. *Neka je $C \neq 0$ konstanta i $\{\lambda_\gamma : \gamma \in \mathbb{Z}_+^n\}$ niz kompeksnih brojeva koji zadovoljava*

$$\lambda_{\alpha+\beta} = C\lambda_\alpha\lambda_\beta$$

za sve $\alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Tada niz ima formu

$$\lambda_\gamma = C^{-1}\overline{w}^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}_+^n,$$

gde je $w \in \mathbb{C}^n$.

Dokaz. Neka je $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_j, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{Z}_+^n$. Ako postoji $1 \leq j \leq n$ tako da vredi $\gamma_j \neq 0$, tada je

$$\lambda_\gamma = \lambda_{\gamma - e_j}(C\lambda_{e_j}).$$

Imajući u vidu ovu relaciju, indukcijom po $|\gamma|$, neposredno se može proveriti da vredi

$$\lambda_\gamma = \lambda_0 \prod_{j=1}^n \overline{w}_j^{\gamma_j} = \lambda_0 \overline{w}^\gamma,$$

pri čemu smo uveli oznaku

$$w_j = \overline{C\lambda_{e_j}}$$

(za sve $j = 1,\ 2, \ldots, n$) i

$$w = (w_1, \ldots, w_n).$$

Kako je $\lambda_0 = C\lambda_0^2$, sledi $\lambda_0 = 0$ ili $\lambda_0 = C^{-1}$. U oba slučaja dolazimo do reprezentacije niza $\{\lambda_\gamma\}$ kao u lemi. $\square$

Dokaz teoreme 3.5. Ako je

$$\phi(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z^\alpha \quad \text{i} \quad \psi(z) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n} d_\beta z^\beta,$$

tada je stepeni red proizvoda $\phi\psi$:

$$\phi(z)\psi(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} M_\gamma z^\gamma, \quad z \in D,$$

gde je

$$M_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha d_\beta, \quad \gamma \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Napomenimo da se sumiranje odnosi na sve parove $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$ koji zadovoljavaju $\alpha + \beta = \gamma$.

Slično, ako je

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha z^\alpha \quad \text{i} \quad g(z) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n} b_\beta z^\beta,$$

tada vredi

$$f(z)g(z) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} A_\gamma z^\gamma, \quad z \in D,$$

gde je

$$A_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta, \quad \gamma \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Prema tome

$$\|f\|_\phi^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha^{-1} |a_\alpha|^2, \qquad \|g\|_\psi^2 = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n} d_\beta^{-1} |b_\beta|^2$$

i

$$\|fg\|_{\phi\psi}^2 = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} M_\gamma^{-1} |A_\gamma|^2.$$

Sada se vidi da je tvrdjenje ove teoreme (dakle, nejednakost

$$\|fg\|_{\phi\psi} \leq \|f\|_\phi \|g\|_\psi$$

i deo koji se odnosi na ekstremalne funkcije) ekivalento sa narednim koje se tiče isključivo koeficjenata u razalaganju svih funkcija:

Vredi

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} M_\gamma^{-1} |A_\gamma|^2 \leq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha^{-1} |a_\alpha|^2 \right\} \left\{ \sum_{\beta \in \mathbb{Z}_+^n} d_\beta^{-1} |b_\beta|^2 \right\} \tag{3.10}$$

sa jednakošću ako i samo ako je zadovoljen neki od sledeća dva nezavisna uslova:

1. $a_\alpha = 0$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ *ili* $b_\beta = 0$ *za sve* $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ *(imajući u vidu stepene razvoje za* f *i* g*, ovaj iskaz je ekvivalentan sa* $f \equiv 0$ *ili* $g \equiv 0$*);*

2. $a_\alpha = C_1 c_\alpha \overline{w}^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ *i* $b_\beta = C_2 d_\beta \overline{w}^\beta, \ \beta \in \mathbb{Z}_+^n$*, gde je* $w \in \mathbb{C}^n$ *i* $C_1, \ C_2$ *nenulte konstante (drugim rečima,* $f = C_1 K_\phi^w$ *i* $g = C_2 K_\psi^w$*).*

Pokažimo (3.10). Prema Koši–Švarcovoj nejednakosti, nalazimo

$$
\begin{aligned}
|A_\gamma|^2 &= \left|\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta\right|^2 = \left|\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{a_\alpha b_\beta}{(c_\alpha d_\beta)^{1/2}}(c_\alpha d_\beta)^{1/2}\right|^2 \\
&\le \left\{\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{|a_\alpha|^2}{c_\alpha}\frac{|b_\beta|^2}{d_\beta}\right\}\left\{\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha d_\beta\right\} = \left\{\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{|a_\alpha|^2}{c_\alpha}\frac{|b_\beta|^2}{d_\beta}\right\} M_\gamma
\end{aligned}
$$

za sve $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$. Dakle,

$$
M_\gamma^{-1}|A_\gamma|^2 \le \sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha^{-1}|a_\alpha|^2\, d_\beta^{-1}|b_\beta|^2. \tag{3.11}
$$

Sumirajući (3.11) po svim $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, dobijamo (3.10); naime,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}_+^n} M_\gamma^{-1}|A_\gamma|^2 &\le \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}_+^n}\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{|a_\alpha|^2}{c_\alpha}\frac{|b_\beta|^2}{d_\beta} \\
&= \left\{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^n} c_\alpha^{-1}|a_\alpha|^2\right\}\left\{\sum_{\beta\in\mathbb{Z}_+^n} d_\beta^{-1}|b_\beta|^2\right\},
\end{aligned}
$$

sto potvrdjuje nejednakost.

Ostatak ovog dokaza je posvećen ispitivanju jednakosti,odnosno nalaženju ekstremalnih funkcija. Prvo primetimo da ako je $0 \le A_\gamma \le B_\gamma$ za sve $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$, tada je $\sum_\gamma A_\gamma \le \sum_\gamma B_\gamma$; ako pri tome postoji γ_0 tako da je ispunjeno $A_{\gamma_0} < B_{\gamma_0}$, tada vredi striktna nejednakost $\sum_\gamma A_\gamma < \sum_\gamma B_\gamma$. Dakle, jednakost vredi u (3.10) ako i samo ako jednakosti vredi u (3.11) za sve $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$. Ovo je ekvivalentno postojanju $\lambda_\gamma \in \mathbb{C},\ \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ tako da vredi

$$
a_\alpha b_\beta = \lambda_\gamma c_\alpha d_\beta \tag{3.12}
$$

za sve parove $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$ koji zadovoljavaju $\alpha + \beta = \gamma$.

Uzmimo $\beta = 0$ i $\gamma = \alpha$, potom $\alpha = 0$ i $\gamma = \beta$ u (3.12). Nalazimo

$$
a_\alpha b_0 = \lambda_\alpha c_\alpha d_0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \quad \text{i} \quad a_0 b_\beta = \lambda_\beta c_0 d_\beta, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{3.13}
$$

Razmotrićemo u nastavku dva nezavisna slučaja $a_0b_0 = 0$ i $a_0b_0 \neq 0$.

Ako je $a_0b_0 = 0$, tada iz (3.13) imamo $\lambda_\gamma = 0$ za sve $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$. Naprimer, neka je $a_0 = 0$. Ako je $b_\beta = 0$ za sve β, tada vredi prvi iskaz. Ako postoji $b_{\beta_0} \neq 0$, u (3.12) uzmimo $\beta = \beta_0$, nalazimo $a_\alpha b_{\beta_0} = 0,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ i dakle $a_\alpha = 0$ za sve $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Dakle, nalazimo da prvi iskaz vredi takodje. Neka je sada $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$. Prema (3.13),

$$a_\alpha = (b_0^{-1} d_0)\lambda_\alpha c_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \text{i} \quad b_\beta = (a_0^{-1} c_0)\lambda_\beta d_\beta, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Prethodne dve relacije zamenimo u (3.12); nalazimo

$$\lambda_{\alpha+\beta} = C\lambda_\alpha \lambda_\beta, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

gde smo označili $C = (a_0^{-1} c_0 b_0^{-1} d_0)$. Prema lemi 3.2 imamo

$$\lambda_\gamma = C^{-1}\overline{w}^\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$$

za izvesno $w \in \mathbb{C}^n$. Dalje je

$$a_\alpha = C_1 c_\alpha \overline{w}^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \text{i} \quad b_\beta = C_2 d_\beta \overline{w}^\beta, \quad \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

pri čemu je

$$C_1 = a_0 c_0^{-1} \neq 0, \quad C_2 = b_0 d_0^{-1} \neq 0.$$

Ovim je pokazan drugi iskaz.

Konačno, ako $\phi \in \mathcal{P}_\infty$ ili $\psi \in \mathcal{P}_\infty$, tada $w \in D$. Naime, ako su f i g ekstremalne funkcije za nejednakost, tada

$$\|f\|_\phi^2 = |C_1|^2 \phi(w \cdot \overline{w}), \qquad \|f\|_\psi^2 = |C_2|^2 \psi(w \cdot \overline{w})$$

(ponovimo, $\|K_\phi^w\|_\phi = \phi(w \cdot \overline{w})^{1/2}$, $\|K_\psi^w\|_\psi = \psi(w \cdot \overline{w})^{1/2}$). Kako je oblast konvergencije za $\phi(w \cdot \overline{w})$ i $\psi(w \cdot \overline{w})$ tačno D, sledi $w \in D$. $\square$

Služeći se teoremom 3.5 i indukcijim, dolazimo do glavnog rezultata:

Teorema 3.6 (videti [9, 10, 11]). *Neka je $m \geq 2$ ceo broj i D Reinhardtova oblast. Neka $\phi_j \in \mathcal{P}(D)$ i $f_j \in \mathcal{H}_{\phi_j}$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Tada*

$$\prod_{j=1}^m f_j \in \mathcal{H}_{\phi_1\phi_2\cdots\phi_m}$$

i

$$\left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_{\phi_1\phi_2\cdots\phi_m} \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{\phi_j}.$$

Jednakost se dostiže ako i samo je ili $\prod_{j=1}^m f_j \equiv 0$ ili svaka funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$

ima formu

$$f_j = C_j K^w_{\phi_j}$$

za izvesno $w \in \mathbb{C}^n,\ \phi_j(w \cdot \overline{w}) < \infty$ *za sve* $j = 1,\ 2, \ldots, m$ *i nenultu konstanutu* C_j.

Ako postoji $1 \leq j \leq m$ *tako da* $\phi_j \in \mathcal{P}_\infty(D)$*, tada je prethodni uslov za* w *moguće zameniti sa:* $w \in D$.

Kao direktnu posledicu teoreme 3.6 imamo: Neka $\phi \in \mathcal{P}(D)$ i $f \in \mathcal{H}_\phi$, tada $f^m \in \mathcal{H}_{\phi^m}$ i

$$\|f^m\|_{\phi^m} \leq \|f\|^m_\phi\,,$$

pri tome jednakost vredi ako i samo ako je f do na multiplikativni faktor jednaka restrihovanom reproduktivnom jezgru K^w_ϕ za izvesno $w \in \mathbb{C}^n$ koje zadovoljava $\phi(w \cdot \overline{w}) < \infty$; posebno, ako $\phi \in \mathcal{P}_\infty(D)$, tada se uslov za w može zameniti sa $w \in D$.

Prethodna teorema je formulisana u Burbeinom radu [11]. Poseban slučaj dokaza se može videti u njegovim ranijim radovima [9, 10]. Mi smo donekle pojednostavili dokaz iz [9] uz primedbu da je u suštini isti dokaz primenjiv, uz odredjene korekcije, za analitičke funkcije u proizvoljnoj Reinhardtovoj oblasti (ne samo za jediničnu loptu i ceo prostor $\mathbb{C}^n$, kako je razmatrano u [9]).

3.3 Osobine funkcija u polidisku

Da bismo nastavili potrebno nam je da navedemo neke činjenice koje pripadaju teoriji funkcija u polidisku. Ovaj odeljak je posvećen tom cilju. Citiraćemo jednu teoremu o faktorizaciji i teoremu Kalderon–Zigmunda o iteriranim graničnim vrednostim. Sledimo, uglavnom, Rudinovu monografiju [48] i rad [14].

Ako je funkcija $f(z)$ odredjena u polidisku $\mathbb{U}^n$ i ako je $0 \leq r < 1$, $r-$dilatacija f je

$$f_r(z) = f(rz_1, \ldots, rz_n), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{U}^n.$$

Klasa Nevanline $N(\mathbb{U}^n)$ se sastoji od svih funkcija $f(z)$ analitičkih u $\mathbb{U}^n$ za koje vredi

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}^n} \log^+ |f_r(\zeta)| dm_n(\zeta) < \infty.$$

$f \in N(\mathbb{U}^n)$ pripada $N^*(\mathbb{U}^n)$ ako je familija

$$\{\log |f_r| : 0 \leq r < 1\}$$

uniformno integrabilna.

Neka je $\phi(t)$ strogo konveksna. Funkcija $f(z)$ analitička u polidisku $\mathbb{U}^n$ pripada klasi $H_\phi(\mathbb{U}^n)$, ukoliko je

$$\sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}^n}\phi(\log^+|f_r(\zeta)|)dm_n(\zeta)<\infty.$$

Može se pokazati da je prethodni uslov ekvivalentan zahtevu da $\phi(\log^+|f(z)|)$ poseduje $n-$harmonijsku majorantu u $\mathbb{U}^n$; napomenimo, neprekidna funkcija $u(z)=u(z_1,\dots,z_n)$ u polidisku $\mathbb{U}^n$ je $n-$harmonijska ako je harmonijska u odnosu na svaku promenjivu z_j $(j=1,\dots,n)$ ponaosob. Slično se definiše $n-$subharmonijska funkcija u polidisku.

Ako je $\phi(t)=\exp\{p\cdot t\}$, tada imamo ranije uvedene Hardijeve klase na polidisku. Klasa $N^*(\mathbb{U}^n)$ je unija svih klasa $H_\phi(\mathbb{U}^n)$ [48].

Za $f\in N(\mathbb{U}^n)$ neka je

$$f^*(\zeta)\;=\lim_{r\to 1^-}f(r\zeta_1,\dots,r\zeta_n)\quad\text{za s.s.}\quad\zeta\in\mathbb{T}^n$$

(videti [48]). Tada je $f^*(\zeta)$ merljiva na torusu $\mathbb{T}^n$ i pri tome je $\log^+|f^*(\zeta)|\in L^1(\mathbb{T}^n)$.

3.3.1 Teoreme o faktorizaciji

Ograničena funkcija $g(z)$ analitička u polidisku $\mathbb{U}^n$ je unutrašnja ako granična funkcija $g^*(\zeta)$ zadovoljava $|g^*(\zeta)|=1$ za s.s. $\zeta\in\mathbb{T}^n$. Unutrašnja funkcija g u $\mathbb{U}^n$ je pogodna ako je $U[g]\equiv 0$; ovde $U[g]$ označava najmanju $n-$harmonijsku majorantu za $\log|g|$ u polidisku $\mathbb{U}^n$. Kako je $\log|g^*|=0$ s.s. na $\mathbb{T}^n$ ako je g unutrašnja, onda je ona pogodna unutrašnja ako jednakost vredi u prethodnoj nejednakosti. Sledi da je unutrašnja funkcija g pogodna ako i samo ako je $U[g(z)](0)\equiv 0$.

U disku $\mathbb{U}$ svaka unutrašnja funkcija $g(z)$ ima formu $g(z)=B(z)S(z)$, gde je B Blaškeov proizvod i gde je

$$S(z)=\exp\left\{-\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\mu(t)\right\},\quad |z|<1$$

singularna funkcija (pri tome je μ neopadajuća i singularna). Kako je $U[B]\equiv 0$ i $U[S]=-\mathrm{PS}[d\mu]$, pogodna unutrašnja funkcija u disku $\mathbb{U}$ je Blaškeov proizvod.

Svakoj funkciji $f\in H^p$ pripada Blaškeov proizvod B za koji $h=f/B$ ne poseduje nule u $\mathbb{U}$, $h\in H^p(\mathbb{U})$ i pri tome je $\|h\|_p=\|f\|_p$. Ako se H^p zameni sa $H^p(\mathbb{U}^n)$, $n>1$, može se očekivati da ulogu Blaškeovih proizvoda preuzimaju pogodne unutrašnje funkcije. Ovo je tačno ali uz odgovarajuća ograničenja: analog vredi samo za one $f\in H^p(\mathbb{U}^n)$ za koje je najmanja $n-$harmonijska majoranta $U[f]$ (za $\log|f|$) realan deo neke analitičke funkcije, tj. $U[f]\in\mathrm{RP}(\mathbb{U}^n)$.

Precizirajmo, ako su f_1 i f_2 analitičke funkcije u polidisku $\mathbb{U}^n$, iskaz: "f_1 i f_2 imaju iste nule” znači: $f_2 = hf_1$, gde je h analitička u $\mathbb{U}^n$ i ne poništava se nigde u $\mathbb{U}^n$”. Naredne dve teoreme, koje dovode do faktorizacije slične Risovoj, mogu se naći u Rudinovoj monografiji.

Teorema 3.7 (videti [48]). *Neka $f \in N(\mathbb{U}^n)$, neka je g pogodna unutrašnja funkcija, h analitička u $\mathbb{U}^n$ i $f = gh$. Tada $h \in N(\mathbb{U}^n)$. Pri tome vredi:*

1. *ako $f \in N^*(\mathbb{U}^n)$, tada $h \in N^*(\mathbb{U}^n)$;*

2. *ako $f \in H^p(\mathbb{U}^n)$ $(0 < p < \infty)$, tada $h \in H^p(\mathbb{U}^n)$ i $\|h\|_p = \|f\|_p$.*

Teorema 3.8 (videti [48]). *Neka $f \in N(\mathbb{U}^n)$. Vredi:*

1. *ako $U[f]$ ne pripada $\mathrm{RP}(\mathbb{U}^n)$, tada ne postoji pogodna unutrašnja funkcija koja ima iste nula kao i f;*

2. *ako $U[f] \in \mathrm{RP}(\mathbb{U}^n)$, tada takva funkcija postoji (jedinstvena do na nenulti multiplikativni faktor).*

3.3.2 Iterirane granične vrednosti

Pretpostavimo $f \in N(\mathbb{U}^n)$ i $\zeta_1 \in \mathbb{T}$ i neka je

$$f_{\zeta_1}(z_2, \dots, z_n) = \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta_1, z_2, \dots, z_n),$$

ukoliko je reč o analitičkoj funkciji u polidisku $\mathbb{U}^{n-1}$. Zigmund [60] je pokazao: za $f \in N(\mathbb{U}^n)$ i s.s. $\zeta_1 \in \mathbb{T}$, $f_{\zeta_1} \in N(\mathbb{U}^{n-1})$. Prema tome, za $\zeta_1 \in \mathbb{T}$ koje zadovoljava prethodni uslov, možemo razmotriti funkciju

$$f_{\zeta_1\zeta_2}(z_3, \dots, z_n) = \lim_{r \to 1^-} f_{\zeta_1}(r\zeta_2, z_3, \dots, z_n) \in N(\mathbb{U}^{n-2}),$$

za s.s. $\zeta_2 \in \mathbb{T}$. Nastavljajući ovaj proces dolazimo do iterirane granične vrednosti

$$f_{\zeta_1 \dots \zeta_n} = \lim_{r \to 1^-} f_{\zeta_1 \dots \zeta_{n-1}}(r\zeta_n).$$

Davis [14] je pokazano da za $f \in N^*(\mathbb{U}^n)$ iterirana granična vrednost $f_{\zeta_1 \dots \zeta_n}$ postoji za s.s. $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n$ i da je nezavisna od poretka iteracije. Zapravo, iterirana i radijalna granična vrednost $f^*_{\zeta_1 \dots \zeta_n} = f^*(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ su s.s. jednake. Slična teorema vredi i za H_ϕ (kao posledica). Zigmund [60] je pre pokazao prethodno, ali za užu klasu $N_{n-1}(\mathbb{U}^n)$ od $N^*(\mathbb{U}^n)$. Potom su Kalderon i Zigmund postvili problem da se $N_{n-1}(\mathbb{U}^n)$ zameniti sa klasom Nevanline $N(\mathbb{U}^n)$. Ovaj problem je kasnije rešen u pozitivnom smislu.

Ukoliko $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) \in N(\mathbb{U}^n)$ $(H_\phi(\mathbb{U}^n))$ i $1 \leq k \leq n-1$ ceo broj, tada $f_{z_{n-k+1} \cdots z_n} = f(\cdot, \ldots, \cdot, z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \in N(\mathbb{U}^{n-k})$ $(H_\phi(\mathbb{U}^{n-k}))$. Ovo se može najjednostavnije pokazati upotrebom $n-$harmonijske majorante za moduo funkcija koje pripadaju klasi $N(\mathbb{U}^n)$ $(H_\phi(\mathbb{U}^n))$.

Nama će u narednom odeljku biti potrebna sledeća posledica čiji dokaz sledi neposredno iz navedenih rezultata.

Posledica 3.1. *Neka* $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) \in H^p(\mathbb{U}^n)$ $(0 < p \leq \infty)$. *Tada za ceo broj* $1 \leq k \leq n-1$ *i medjusobno različite cele brojeve* $\{j_1, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *imamo*

1. $f_{z_{j_1} \cdots z_{j_k}} \in H^p(\mathbb{U}^{n-k})$ *za sve* $(z_{j_1}, \ldots, z_{j_k}) \in \mathbb{U}^k$;

2. $f_{\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}} \in H^p(\mathbb{U}^{n-k})$ *za s.s.* $(\zeta_{j_1}, \ldots, \zeta_{j_k}) \in \mathbb{T}^k$.

Posebno, iterirana granična funkcija $f_{\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}}$ *se poistovećuje sa radijalnom (netangencijalnom) graničnom funkcijom* $f^*_{\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}}$ *za s.s.* $(\zeta_{j_1}, \ldots, \zeta_{j_k}) \in \mathbb{T}^k$. *Sledi da funkcija* $f_{\zeta_{j_1} \cdots \zeta_{j_k}}$ *ne zavisi od poretka po kojem se vrše iteracije, zato se može pretpostaviti uredjenje* $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$.

3.4 Novi oblik Karlemanove nejednakosti

Vratimo se Karlmanovoj nejednakosti u opštoj formi koju smo uspostavili u drugom odeljku ove glave. Teorema 3.6 je rezultat sa interesantnim primenam do koji se dolazi birajući za ϕ_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ konkretne funkcije koje pripadaju klasi $\mathcal{P}(D)$ (ili eventualtno užoj klasi $\mathcal{P}_\infty(D)$). Budući da je ovde naše interesovanje isključivo na funkcije analitičke u polidisku, mi ćemo izvesti samo jednu primenu. Reč je o niže formulisanoj posledici 3.2 za generalizovane Hardijeve klase na polidisku. Cilj ovog odeljka je pokazati nov oblik Karlemanove nejednakosti i to za funkcije koje pripadaju Hardijevim klasama koji nemaju obavezno Hilbertovu strukturu.

Za primene teoreme 3.6 na različite HPRJ analitičkih funkcija, kao što su, naprimer, generalizovani Fišerovi prostori, upućujemo na radove Burbee.

3.4.1 Generalizovane Hardijeve klase na polidisku

Neka je q proizvoljan i n nenegativan ceo broj. Tada je rastući faktorijel

$$(q)_n = \begin{cases} q(q+1)\cdots(q+n-1), & \text{ako je } n > 1, \\ 1, & \text{ako je } n = 0. \end{cases}$$

Pogodno je prethodnu definiciju proširiti: za $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{C}^n$ i $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ neka je

$$(q)_\alpha = \prod_{j=1}^{n} (q_j)_{\alpha_j}.$$

Za $q = (q_1, \dots, q_n) > 0$ (napomenimo da ovo znači: $q_j > 0$ za sve $j = 1, \dots, n$) uzmimo u obzir narednu funkciju

$$\phi_q(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j)^{-q_j}, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{U}^n$$

Lako se proverava

$$a_\alpha(\phi_q) = \frac{(q)_\alpha}{\alpha!}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n;$$

ponovimo da je $a_\alpha : H(D) \mapsto \mathbb{C}$ funkcional koji daje $\alpha-$koeficjenat u stepenom razvoju $f \in H(D)$, pri tome je D proizvoljna Reinhardtova oblast u $\mathbb{C}^n$. Odavde imamo

$$\phi_q \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{U}^n).$$

$q-$Hardijev prostor na polidisku $\mathbb{U}^n$ je HPRJ koji je generisan posredstvom $K_{\phi_q}(z, w)$; reč je prostoru $\mathcal{H}_{K_{\phi_q}}$, odnosno $\mathcal{H}_{\phi_q}$, prema oznakama iz drugog odeljka. Ovaj prostor u nastavku obeležavamo jednostavno sa $H_q(\mathbb{U}^n)$. Odgovarajuću normu $\| \cdot \|_{K_{\phi_q}}$ (odnosno $\| \cdot \|_{\phi_q}$) i repreoduktivno jezgro K_{ϕ_q} označavamo sa $\| \cdot \|_q$ i K_q, respektivno. Dakle,

$$K_q(z, w) = \phi_q(z \cdot \overline{w}) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j \overline{w}_j)^{-q_j}$$

za $z = (z_1, \dots, z_n),\ w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{U}^n$. Eksplicitno, norma je odredjena izrazom

$$\|f\|_q^2 = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\alpha!}{(q)_\alpha} |a_\alpha|^2, \qquad f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} a_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{U}^n).$$

Pod familijom generalizovanih Hardijevih prostora na polidisku podrazumevamo familiju svih $q-$Hardijevih prostora ($q > 0$).

Normalizovanu težinsku meru na polidisku uvodim na sledeći način Za $q = (q_1, \dots, q_n) > 1$ (što znači $q_j > 1$ za sve $j = 1, \dots, n$) neka je

$$da_{q-2} = da_{q_1-2} \times \dots \times da_{q_n-2}.$$

Za $q = 1$ pogodno je uvesti $da_{-1} = dm_n$.

Primetimo da se za $q \geq (1, \dots, 1)$, zbog lema 3.1 i Parsevalove teoreme, kvadrat norme $\|\cdot\|_q$ i skalarni proizvod $\langle\cdot,\cdot\rangle_q$ mogu izraziti integralnom reprezentacijom

$$\|f\|_q^2 = \int |f|^2 da_{q-2}, \quad \langle f, g\rangle_q = \int f\overline{g} da_{q-2}, \quad f,\ g \in H_q(\mathbb{U}^n). \tag{3.14}$$

U (3.14) podrazumevamo integraciju u odnosu na $\mathbb{U}^n$, ako je $q > 1$, i u odnosu na jedinični torus $\mathbb{T}^n$, ako je $q = 1$. U zadnjem slučaju objekat integracije su radijalne granične funkcije.

Zbog istovetnosti reproduktivnog jezgra, teoreme 3.3, teoreme 3.4 i leme 3.1, sledi da je $H_1(\mathbb{U}^n)$ Hardijev prostor $H^2(\mathbb{U}^n)$ i da je $H_q(\mathbb{U}^n),\ q > 1$ je težinski Bergmanov prostor $L^2_{a,q-2}(\mathbb{U}^n)$.

Za $0 < q < 1$ generalizovana Hardijeva kalsa $H_q(\mathbb{U}^n)$ je poznata pod nazivom Bergman–Selbergova.

Teorema 3.6, koju smo pokazali u drugom odeljku, ima narednu reformulaciju za generalizovane Hardijeve klase na polidisku.

Posledica 3.2 (videti [10, 11])**.** *Neka je $q_j > 0$ i $f_j \in H_{q_j}(\mathbb{U}^n)$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Označimo $q = \sum_{j=1}^m q_j$. Tada je*

$$\prod_{j=1}^m f_j \in H_q(\mathbb{U}^n)$$

i

$$\left\|\prod_{j=1}^m f_j\right\|_q \quad \leq \quad \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{q_j},$$

pri čemu jednakost vredi ako i samo ako je ili $\prod_{j=1}^m f_j \equiv 0$ ili svaka funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ ima formu

$$f_j = C_j K^w_{q_j}$$

za izvesno (zajedničko) $w \in \mathbb{U}^n$ i $C_j \neq 0$.

Dokaz. Dovoljno je da primetimo da je $\prod_{j=1}^m \phi_{q_j} = \phi_q$. Dakle,

$$\|\cdot\|_{\phi_{q_1}\phi_{q_2}\cdots\phi_{q_m}} = \|\cdot\|_{\phi_q}.$$

Primenom teoreme 3.6 dolazimo do konkretne nejednakosti u ovoj posledici. Kako svaka od funkcija ϕ_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ pripada klasi $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{U}^n)$, sledi $w \in \mathbb{U}^n$. $\square$

3.4.2 Glavna teorema i nejednakost

Pre formulacije našeg glavnog rezultata u ovom odeljku, reč je o teoremi 3.9, usvojićemo dogovor koji se tiče oznaka: $(q, \dots, q) \in \mathbb{R}^n$ obeležavamo kratko sa q; iz konteksta će biti jasno da li se radi o vektoru ili o broju. Slično, (težinski) Bergamnov prostor $L^p_{a,(q,\dots,q)}(\mathbb{U}^n)$, korespodentnu meru $da_{(q,\dots,q)}$ i normu $\|\cdot\|_{p,(q,\dots,q)}$ obeležavamo sa $L^p_{a,q}(\mathbb{U}^n)$, da_q i $\|\cdot\|_{p,q}$, respektivno. Imajući u vidu ove oznake, pokazaćemo u nastavku višedimenzionalnu varijantu Karlemanove nejednakosti:

Teorema 3.9 (videti [35]). *Neka je $m \geq 2$ ceo i $f_j(z) \in H^{p_j}(\mathbb{U}^n)$ $(0 < p_j < \infty)$ za sve $j = 1,\ 2, \dots, m$. Tada*

$$\prod_{j=1}^{m} |f_j|^{p_j} \in L^1_{m-2}(\mathbb{U}^n)$$

i

$$\int_{\mathbb{U}^n} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j(z)|^{p_j} \right\} da_{m-2}(z) \leq \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{p_j}^{p_j}.$$

Jednakost vredi ako i samo ako je ili $\prod_{j=1}^{m} f_j \equiv 0$ ili ako svaka funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \dots, m)$ ima formu

$$f_j(z) = c_j K_w(z)^{2/p_j}$$

za izvesno (zajedničko) $w \in \mathbb{U}^n$ i nenultu konstantu c_j; ovde $K(z, w)$ ima ulogu Koši–Segovog jezgra za polidisk $\mathbb{U}^n$.

Naredna posledica sledi direktno iz teoreme 3.9.

Posledica 3.3 (videti [35]). *Neka je p pozitivan broj i $f_j \in H^p(\mathbb{U}^n)$ za sve $j = 1,\ 2, \dots, m$. Tada*

$$\prod_{j=1}^{m} f_j \in L^p_{a,m-2}(\mathbb{U}^n)$$

i

$$\left\| \prod_{j=1}^{m} f_j \right\|_{p,m-2} \leq \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_p.$$

Jednakost vredi ako i samo ako je ili $\prod_{j=1}^{m} f_j \equiv 0$ ili ako je svaka funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \dots, m)$ nenulti multiplikativni faktor restihovanog jezgra $K_w^{2/p}$ za izvesno $w \in \mathbb{U}^n$.

Primedba 3.1. Prema posledici 3.3, polilinearan operator Π odredjen na sledeći način

$$\Pi(f_1, f_2, \dots, f_m) = f_1 f_2 \cdots f_m$$

je dobro definisan kao operator $m-$tostrukog proizvoda $H^p(\mathbb{U}^n)$ u $L^p_{a,m-2}(\mathbb{U}^n)$, neprekidan je i ima nornu jednaku jedinici. Ovo se može videti kao jednostavna reformulacija tačne nejednakosti koja se pojavljuje u posledici 3.3.

Primedba 3.2. Neka je sada $f \in H^p(\mathbb{U}^n)$ i u posledici 3.3 uzmimo $f_j = f$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Nalazimo $f \in L^{mp}_{a,m-2}(\mathbb{U}^n)$ i

$$\|f\|_{mp,m-2} \leq \|f\|_p.$$

Dakle,

$$H^p(\mathbb{U}^n) \subseteq L^{mp}_{a,m-2}(\mathbb{U}^n) \tag{3.15}$$

i pri tome je norma inkluzivnog operatora jednaka jedinici.

Ovde još dajemo dokaz Hilbertovog dela teoreme 3.9; opvsti slučaj dokazujemo niže.

Dokaz Hilbertovog dela teoreme 3.9. Ovde se naša teorema svodi na to da se pokaže posledica 3.3 za $p = 2$. Medjutum, ovaj deo teoreme je već pokazan; potrebno je samo detaljnije pogledati posledicu 3.2.

Dakle, pretpostavimo $f_j \in H^2(\mathbb{U}^n)$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. U posledici 3.2 uzmimo $q_j = 1$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Kako je $f_j \in H^2(\mathbb{U}^n) = H_1(\mathbb{U}^n)$, prvo sledi

$$\prod_{j=1}^{m} f_j \in H_m(\mathbb{U}^n) = L^2_{a,m-2}(\mathbb{U}^n).$$

Prema istoj posledici, imamo nejednakost

$$\left\|\prod_{j=1}^{m} f_j\right\|_{2,m-2} = \left\|\prod_{j=1}^{m} f_j\right\|_{(m,\ldots,m)} \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{(1,\ldots,1)} = \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_2.$$

Jednakost vredi ako i samo ako je ili $\prod_{j=1}^{m} f_j \equiv 0$ ili svaka funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ ima formu

$$f_j = c_j K_1^w$$

za izvesno $w \in \mathbb{U}^n$ i $c_j \neq 0$. Kako je

$$K_1(z, w) = \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j \overline{w}_j)^{-1},$$

sledi da je $K_1(z, w)$ Koši–Segovo jezgro, koje obeležavamo sa $K(z, w)$. □

3.4.3 Nekompletan dokaz teoreme 3.9

Skiciraćemo ovde jednostavan ali nekompletan dokaz teoreme 3.9 baziran na teoremama 3.7 i 3.8. Ovaj dokaz, motivisan standardnim pristupom; iako nekompletan za

$n > 1$, on dovodi do dokaza naše teoreme za $n = 1$, odnosno teoreme 3.1.

Dakle, pretpostavimo $f_j \in H^{p_j}(\mathbb{U}^n)$ i bez gubitka opštosti, neka je $f_j \not\equiv 0$ za sve $j = 1, 2, \dots, m$. Uvedimo dodatnu pretpostavku: svaka funkcija $\log|f_j|$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ poseduje $n-$harmonijsku majorantu koja pripada $\mathrm{RP}(\mathbb{U}^n)$. Neka je $f_j = g_j h_j$, gde je g_j pogodna unutrašnja funkcija u polidisku $\mathbb{U}^n$ sa istim nulama kao f_j; recimo da uzimamo $|g_j| \equiv 1$, ako f_j ne poseduje nule. Kako se h_j ne poništava nigde u $\mathbb{U}^n$, moguće je izdvojiti odredjenu granu $\tilde{h}_j(z) = h_j(z)^{p_j/2}$.

Budući da je modul unutranšne funkcije ≤ 1 svuda u polidisku $\mathbb{U}^n$, imamo

$$|f_j(z)| \le |h_j(z)|, \quad z \in \mathbb{U}^n. \tag{3.16}$$

Kako je $|g_j(\zeta)| = 1$ za s.s. $\zeta \in \mathbb{T}^n$, sledi

$$|h_j(\zeta)| = |f_j(\zeta)| \quad \text{za s.s.} \quad \zeta \in \mathbb{T}^n.$$

Dakle,

$$\|\tilde{h}_j\|_2^2 = \|f_j\|_{p_j}^{p_j}, \tag{3.17}$$

odakle imamo $\tilde{h}_j \in H^2(\mathbb{U}^n)$.

Prema (3.16), imamo

$$\prod_{j=1}^{m} |f_j(z)|^{p_j} \le \prod_{j=1}^{m} |\tilde{h}_j(z)|^2.$$

Dakle,

$$\int_{\mathbb{U}^n} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j(z)|^{p_j} \right\} da_{m-2}(z) \le \int_{\mathbb{U}^n} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |\tilde{h}_j(z)|^2 \right\} da_{m-2}(z). \tag{3.18}$$

Uzmimo $\tilde{h}_j$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ u pokazanom Hilbertovom slučaju naše teoreme. Prvo sledi

$$\prod_{j=1}^{m} \tilde{h}_j \in L^2_{a,m-2}(\mathbb{U}^n).$$

Ovo znači da su oba integrala u (3.18) konačna; sledi

$$\prod_{j=1}^{m} |f_j|^{p_j} \in L^1_{m-2}(\mathbb{U}^n).$$

Dalje imamo

$$\int_{\mathbb{U}^n} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |\tilde{h}_j(z)|^2 \right\} da_{m-2}(z) = \left\| \prod_{j=1}^{m} \tilde{h}_j \right\|^2_{2,m-2} \le \prod_{j=1}^{m} \|\tilde{h}_j\|_2^2, \tag{3.19}$$

takodje prema Hilbertovom slučaju naše teoreme. Imajući u vidu (3.17), nejednakost u teoremi sada sledi prema (3.18) i (3.19).

Razmotrimo sada ekstemalne funkcije. Ako se jednakost dostiže, tada jednakost mora vredeti u (3.18) i (3.19). Budući da su ekstremalne funkcije u Hilbertovom slučaju odredjene, sledi da jednakost vredi u (3.19) ako i samo ako je $\tilde{h}_j = \tilde{c}_j \mathcal{K}_w$ za izvesno $w \in \mathbb{U}$ i $\tilde{c}_j \neq 0$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Dakle, jednakost vredi u (3.18) ako i samo ako je $|g_j| \equiv 1$ za sve j. Ovo znači

$$f_j = c_j \mathcal{K}_w^{2/p_j},$$

gde je c_j nova nenulta konstante (za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$). Ovim je naš prvi dokaz kompletiran.

3.4.4 Dokaz teoreme 3.9

Za kompletan dokaz teoreme 3.9, koji nameravamo da izložimo u nastavku, biće nam potrebna dva pomoćna rezultata koji su možda od samostalnog interesa. Reč je o narednoj teoremi, koja uspostavlja izoperimetrijsku nejednakosti za logaritamsko subharmonijske funkcije Hardijeve klase PL_1, i teoremi 3.11.

Teorema 3.10 (videti [35]). *Neka je $m \geq 2$ ceo broj i $U_j(z) \in PL_1$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Tada*

$$\prod_{j=1}^{m} U_j(z) \in L^1_{m-2}$$

i

$$\int_{|z|<1} \left\{ \prod_{j=1}^{m} U_j(z) \right\} da_{m-2}(z) \leq \prod_{j=1}^{m} \|U_j\|_1.$$

Jednakost vredi ako i samo ako ili postoji $1 \leq j \leq m$ tako da je $U_j \equiv 0$ ili svaka funkcija U_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ ima formu

$$U_j(z) = \lambda_j |K_w(z)|^2$$

za izvesno $|w| < 1$ i $\lambda_j > 0$; ovde je $K(z,w) = (1 - z\overline{w})^{-1}$ Koši–Segovo jezgro.

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, preptostvaićemo dodatno da je $U_j \not\equiv 0$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Ovo tvrdjenje izvešćemo kao posledicu teoreme 3.1 (u vezi sa ovim, pogledati prvu primedbu posle ovog dokaza). Prema lemi 1.5, postoji (spoljna) funkcija $f_j(z)$ za klasu H^1 tako da vredi

$$U_j(z) \leq |f_j(z)|, \quad |z| < 1 \tag{3.20}$$

i

$$U_j(e^{i\theta}) = |f_j(e^{i\theta})| \text{ s.s.} \tag{3.21}$$

U teoremi 3.1 uzmimo gornje funkcije f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$. Primenom nejednakosti (3.20) i na kraju (3.21), nalazimo

$$\begin{aligned} \int_{|z|<1} \left\{ \prod_{j=1}^{m} U_j(z) \right\} da_{m-2}(z) &\leq \int_{|z|<1} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j(z)| \right\} da_{m-2}(z) \leq \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_1 \\ &= \prod_{j=1}^{m} \|U_j\|_1, \end{aligned} \tag{3.22}$$

čime je nejednakost u teoremi pokazana.

Kako je $f_j \not\equiv 0$ $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$, jednakost vredi na drugom mestu (3.22), imajući u vidu deo teoreme 3.1 koji se odnosi na jednakost, ako i samo ako svaka funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ ima formu $f_j = c_j K_w^2$ za izvesno $|w| < 1$ i nenultu konstantu c_j. U ovom slučaju $|f_j|$ se ne poništava nigde u jediničnom disku. Sada, prema (3.20), sledi da jednakost vredi na prvom mestu (3.22) ako i samo ako je $u_j = |f_j|$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$ (budući da su sve funkcije neprekidne). Sve zajedno, jednakost se dostiže na oba mesta (3.22) istovremeno ako i samo ako je

$$U_j = |f_j| = \lambda_j |K_w|^2$$

za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$; uveli smo oznaku $\lambda_j = |c_j| > 0$. □

Primedba 3.3. Primetimo prvo narednu činjenicu. Za pozitivan broj p vredi

$$U \in PL_p \Leftrightarrow U^p \in PL_1 \Leftrightarrow U^{p/2} \in PL_2. \tag{3.23}$$

Naravno, (3.23) nije tako jednostavno izraziti ako umesto Hardijeve klase PL_p figuriše klasa H^p.

Neka je $U \in PL_p$ i postavimo $U_j = U^p$ $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ u teoremi 3.10. Imajući u vidu (3.23), nalazimo

$$\frac{m-1}{\pi} \int_{|z|<1} U(z)^{mp} (1 - |z|^2)^{m-2} dA(z) \leq \|U\|_p^{mp}. \tag{3.24}$$

Jednakost vredi u (3.24) ako i samo ako je

$$U(z) = \lambda |K_w(z)|^{2/p} = \frac{\lambda}{|1 - z\overline{w}|^{2/p}}$$

za $|w| < 1$ i $\lambda \geq 0$.

Kako je

$$\{U = |f| : f \in H^p\} \subseteq PL_p,$$

nejednakost (3.24) se može videti kao uopštenje (3.1). Iz istog razloga teorema 3.10 može se uzeti kao uopštenje teoreme 3.1, jer se i ekstremalne funkcije koje se pojavljuju u teoremi 3.1 mogu odrediti iz korespodentnog dela teoreme 3.10.

Primetimo još da se teorema 3.10 može ustanoviti primenom samo Hilbertov dela teoreme 3.1; taj dokaz bi bio približno iste dužine kao i dokaz koji smo naveli, medjutim ovaj pristup ne koristi Risovu teoremu o faktorizaciji za Hardijeve klase analitičkih funkcija u jediničnom disku.

Primedba 3.4. Imajući u vidu Huberove rezultate [26], od interesa je da se uspostvi nejednakost izoperimetrijskog tipa i za superharmonijske funkcije.

Neka je D oblasti i $U \in C^2(D)$ superharmonijska funkcija u D koja svuda uzima pozitivne vrednosti. Neposredno se nalazi

$$\triangle \log U^{-1}(z) = \frac{-\triangle U(z)}{U(z)} + \frac{|\nabla U(z)|^2}{U^2(z)} \geq 0, \quad z \in D.$$

Sledi da je U^{-1} logaritamsko subharmonijska u oblasti D. Dakle, vredi: Neka je U dovoljno glatka, pozitivna i superharmonijska funkcija u disku $\mathbb{U}$ i neka $U^{-1} \in PL_p$. Tada imamo narednu striktnu nejednakost izoperimetrijskog tipa:

$$\frac{m-1}{\pi} \int_{|z|<1} U(z)^{-mp}(1-|z|^2)^{m-2} dA(z) \leq \|U^{-1}\|_p^{mp}.$$

gde je $m \geq 2$ ceo broj.

Teorema 3.11. *Za $f(z) = f(z_1, \dots, z_n) \in H^p(\mathbb{U}^n)$ i $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$, gde je $1 \leq k < n$ ceo broj, funkcija*

$$U(z_{j_1}, \dots, z_{j_k}) = \|f_{z_{j_1} \dots z_{j_k}}\|_p^p$$

je dobro definisana u polidisku $\mathbb{U}^k$. Više od toga, $U \in PL_1(\mathbb{U}^k)$ i norma funkcije U je data izrazom $\|U\|_1 = \|f\|_p^p$.

U dokazu ove teoreme upotrebićemo nekoliko rezultata koji slede.

Lema 3.3 (videti [56]). *Neka je p pozitivan broj. Za sve $z \in \mathbb{U}^n$ vredi naredna (optimalna) ocena modula*

$$|F(z)|^p \leq \frac{1}{(1-|z_1|^2)\cdots(1-|z_n|^2)} \|F\|_p,$$

gde je $F(z) = F(z_1, \dots, z_n) \in H^p(\mathbb{U}^n)$. Jednakost se dostiže ako i samo ako je

$$F(z) = \lambda K_w(z)^{2/p},$$

gde je $w \in \mathbb{U}^n$ i λ proizvoljna konstanta.

Lema 3.3 može se naći u radu [56] za Bergmanove prostore u jediničnoj lopti prostora $\mathbb{C}^n$. Medjutim, isti pristup je od koristi u dokazu prethodnog rezultata.

Lema 3.4. *Neka je D oblast, (X, μ) merljiv prostor i neka je funkcija $F(z, w)$ odredjena u $D \times X$ tako da je $F_z \in L^1(X, \mu)$ za sve $z \in D$ i $F_w \in C(D)$ za s.s. $w \in X$. Ako za svaki kompaktan skup $K \subseteq D$ postoji $G \in L^1(X, \mu)$ koja je natkivajuća za familiju*

$$\{F_z : z \in K\},$$

tada je

$$z \mapsto \int_X F(z, w) d\mu(w)$$

neprekidna u D.

Dokaz prethodne leme sledi neposredno iz Lebegove teoreme o dominantnoj konvergenciji. Napomenimo da ako je (X, μ) merljiv prostor i Λ neprazan skup indeksa, tada kažemo da je G natkrivajuća za familiju $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ realno vrednosnih merljivih funkcija u X ako je $G_\alpha(x) \le G(x)$ za s.s. $x \in X$ i sve $\alpha \in \Lambda$.

Dokaz teoreme 3.11. Samo radi jednostavnijeg zapisa, pretpostavićemo $j_1 = n - k + 1$ i prema tome $j_k = n$. Imajući u vidu prvi deo posledice 3.1, vrednost funkcije

$$\begin{aligned} U(z_{n-k+1}, \dots, z_n) &= \|f_{z_{n-k+1} \cdots z_n}\|_p^p \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n-k}} |f^*_{z_{n-k+1} \cdots z_n}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-k})|^p dm_{n-k}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-k}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n-k}} |f^*_{\zeta_1 \cdots \zeta_{n-k}}(z_{n-k+1}, \dots, z_n)|^p dm_{n-k}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-k}) \end{aligned}$$

je konačna za sve $(z_{n-k+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{U}^k$.

Neka je $z' = (z_1, \dots, z_{n-k})$ i $z'' = (z_{n-k+1}, \dots, z_n)$; slično tome, uvedimo oznake $\zeta' = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n-k})$ i $\zeta'' = (\zeta_{n-k+1}, \dots, \zeta_n)$.

Za sve $0 \le r < 1$ neka je

$$\tilde{U}_r(z'') = \int_{\mathbb{T}^k} |f_{r\zeta'}(z'')|^p dm_k(\zeta'), \quad z'' \in \mathbb{U}^k.$$

Primetimo da $\tilde{U}_r$ nije $r-$dilatacija funkcije U.

Imajući u vidu lemu 1.4, funkcija $\tilde{U}_r$ je $k-$logaritamsko subharmonijska u polidisku $\mathbb{U}^k$, jer isto vredi za

$$\mathbb{U}^k \ni z'' \mapsto |f_{r\zeta'}(z'')|^p,$$

za sve $\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-k}) \in \mathbb{T}^{n-k}$ i $0 \leq r < 1$. Konvergencija

$$\tilde{U}_r(z'') \to U(z''), \quad r \to 1^-$$

je neopadajuća u odnosu na r, ako je $z'' = (z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{U}^k$ fiksirano, jer je

$$\tilde{U}_r(z'') = M_p^p(f_{z''}, r)$$

i $f_{z''} \in H^p(\mathbb{U}^{n-k})$. Sledi

$$U(z'') = \sup_{0 \leq r < 1} \tilde{U}_r(z'')$$

za sve $z'' = (z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{U}^k$. Dakle, prema lemi 1.3, da ustanovimo da je funkcija U neprekidna $k-$logaritamsko subharmonijska u polidisku $\mathbb{U}^k$, odnosno, da pripada klasi $PL(\mathbb{U}^k)$, ostaje da se pokaže da je U neprekidna u istoj oblasti.

Da ustanovimo neprekidnost, primenićemo lemu 3.4. Neka je K proizvoljan kompaktan podskup polidiska $\mathbb{U}^k$. Potrebno je naći natkrivajuću funkciju za familiju

$$\left\{ |f^*_{z''}(\zeta')|^p : z'' = (z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \in K,\ \zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-k}) \in \mathbb{T}^{n-k} \right\}.$$

Postoji konstanta $C = C(K)$ tako da vredi

$$\frac{1}{(1 - |z_{n-k+1}|^2) \cdots (1 - |z_n|^2)} \leq C \tag{3.25}$$

za sve $z'' = (z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \in K$. Kako je $f^*_{\zeta_1 \ldots \zeta_{n-k}} \in H^p(\mathbb{U}^k)$ za s.s. $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-k}) \in \mathbb{T}^{n-k}$ (videti drugi deo posledice 3.1), prema lemi 3.3, nalazimo

$$|f^*_{\zeta_1 \ldots \zeta_{n-k}}(z_{n-k+1}, \ldots, z_n)|^p \leq \frac{\|f^*_{\zeta_1 \ldots \zeta_{n-k}}\|_p^p}{(1 - |z_{n-k+1}|^2) \cdots (1 - |z_n|^2)}, \tag{3.26}$$

za sve $(z_{n-k+1}, \ldots, z_n) \in \mathbb{U}^k$. Ocena rasta (3.26) dovodi do natkrivajuće funkcije. Neka je

$$\begin{aligned} G(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-k}) &= C \|f^*_{\zeta_1 \ldots \zeta_{n-k}}\|_p^p \\ &= C \int_{\mathbb{T}^n} |f^*_{\zeta_1 \ldots \zeta_{n-k}}(\zeta_{n-k+1}, \ldots, \zeta_n)|^p dm_k(\zeta_{n-k+1}, \ldots, \zeta_n) \end{aligned}$$

definisana za s.s. na torusu $\mathbb{T}^{n-k}$. Funkcija G je integrabilna, jer je prema Fubinijevoj teoremi i teoremi 3.1:

$$\int_{\mathbb{T}^{n-k}} G(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-k}) = C\int_{\mathbb{T}^n} |f^*(\zeta_1,\dots,\zeta_n)|^p dm_n(\zeta_1,\dots,\zeta_n) = C\|f\|_p^p < \infty.$$

Prema ocenama (3.26) i (3.25), sledi

$$|f^*_{z_{n-k+1}\dots z_n}(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-k})|^p \le G(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-k}),$$

za s.s. $(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-k}) \in \mathbb{T}^{n-k}$ i sve $(z_{n-k+1},\dots,z_n) \in K$. Kako je funkcija $|f^*_{\zeta'}(z'')|^p$ neprekidna (za s.s. $\zeta' = (\zeta_1,\dots,\zeta_{n-k}) \in \mathbb{T}^{n-k}$, kao moduo analitiçke funkcije, prema teoremi 3.1), na osnovu leme 3.4 sledi da je funkcija

$$U(z_{n-k+1},\dots,z_n) = \int_{\mathbb{T}^{n-k}} |f^*_{z_{n-k+1}\dots z_n}(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-k})|^p dm_{n-k}(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-k})$$

takodje neprekidna u polidisku $\mathbb{U}^k$.

Da bismo završili dokaz ove leme, potrebno je još da pokažemo $U \in PL_1(\mathbb{U}^k)$ i $\|U\|_1 = \|f\|_p^p$. Pre svega, za sve $0 \le r < 1$ vredi

$$\begin{aligned} & M_1(U,r) \\ &= \int_{\mathbb{T}^k} \|f_{r\zeta''}\|_p^p \, dm_k(\zeta'') = \int_{\mathbb{T}^k} \left\{ \int_{\mathbb{T}^{n-k}} |f^*_{r\zeta''}(\zeta')|^p dm_{n-k}(\zeta') \right\} dm_k(\zeta'') \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n-k}} \left\{ \int_{\mathbb{T}^k} |f^*_{r\zeta''}(\zeta')|^p dm_k(\zeta'') \right\} dm_{n-k}(\zeta') = \int_{\mathbb{T}^{n-k}} M_p^p(f^*_{\zeta'}, r)\, dm_{n-k}(\zeta') \\ &\le \int_{\mathbb{T}^{n-k}} \|f^*_{\zeta'}\|_p^p \, dm_{n-k}(\zeta') = \|f\|_p^p < \infty. \end{aligned}$$

Sledi

$$\|U\|_1 = \sup_{0\le r<1} M_1(U,r) \le \|f\|_p^p.$$

Dakle, $U \in PL_1(\mathbb{U}^k)$. Da bismo pokazali obrnutu nejednakost, treba samo primeniti lemu Fatua. Kako je $U \in PL_1$, radijlna granična vrednost $U(\zeta'')$ postoji u s.s. tačkama $\zeta'' = (\zeta_{n-k+1},\dots,\zeta_n) \in \mathbb{T}^k$ i pri tome imamo

$$\begin{aligned} U(\zeta_{n-k+1},\dots,\zeta_n) &= \lim_{r\to 1^-} U(r\zeta_{n-k+1},\dots,r\zeta_n) \\ &= \lim_{r\to 1^-} \|f_{(r\zeta_{n-k+1})\dots(r\zeta_n)}\|_p^p \ge \|f^*_{\zeta_{n-k+1}\dots\zeta_n}\|_p^p. \end{aligned}$$

Sada nalazimo

$$\|U\|_1 = \int_{\mathbb{T}^k} U(\zeta'')\, dm_k(\zeta'') \ge \int_{\mathbb{T}^k} \|f^*_{\zeta''}\|_p^p \, dm_k(\zeta'') = \|f\|_p^p.$$

čime je dokaz leme završen. □

Sledi dokaz teoreme 3.9 u opštem slučaju. Kako će se iz samog dokaza videti, koristićemo već ustanovljen Hilbertov slučaj naše teoreme prilikom dokaza drugog dela tvrdjenja koji se tiče ekstremalnih funkcija.

Dokaz teoreme 3.9. Primenićemo indukciju po dimenziji n. Za $n = 1$ naša teorema se reducira na teoremu 3.1. Pretpostavimo sada da teorema vredi za $n-1$. Pokazaćemo da vredi i za n. Neka je $f_j(z) = f_j(z', z_n) \in H^{p_j}(\mathbb{U}^n)$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots m$; napomenimo da smo uveli oznaku $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Kako je $f_j^{z_n} \in H^{p_j}(\mathbb{U}^{n-1})$ za proizvoljno $|z_n| < 1$, primenom induktivne hipoteze nalazimo

$$\int_{\mathbb{U}^{n-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j^{z_n}(z')|^{p_j} \right\} da_{m-2}(z') \leq \prod_{j=1}^{m} \|f_j^{z_n}\|_{p_j}^{p_j}. \tag{3.27}$$

Prema teoremi 3.11, neka je funkcija $U_j \in PL_1$ odredjena na sledeći način

$$U_j(z_n) = \|f_j^{z_n}\|_{p_j}^{p_j}. \tag{3.28}$$

Primenom logaritamsko subharmaonijske verzije Burbeine nejednakosti, odnosno teoreme 3.10, nalazimo

$$\int_{|z_n|<1} \left\{ \prod_{j=1}^{m} U_j(z_n) \right\} da_{m-2}(z_n) \leq \prod_{j=1}^{m} \|U_j\|_1. \tag{3.29}$$

Prema istoj lemi,

$$\|U_j\|_1 = \|f_j\|_{p_j}^{p_j} \tag{3.30}$$

(za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$). Kako je $da_{m-2}(z) = da_{m-2}(z') \times da_{m-2}(z_n)$, primenom Fubinijeve teoreme, potom (3.27) i (3.29), i konačno prethodne jednakosti, dolazimo do

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{U}^n} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j(z)|^{p_j} \right\} da_{m-2}(z) = \\
&\qquad \int_{|z_n|<1} \left\{ \int_{\mathbb{U}^{n-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j^{z_n}(z')|^{p_j} \right\} da_{m-2}(z') \right\} da_{m-2}(z_n) \\
&\qquad \leq \int_{|z_n|<1} \left\{ \prod_{j=1}^{m} U_j(z_n) \right\} da_{m-2}(z_n) \leq \prod_{j=1}^{m} \|U_j\|_1 \\
&\qquad = \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{p_j}^{p_j},
\end{aligned} \tag{3.31}$$

što potvrdjuje glavnu nejednakost.

Imajući u teoremu 3.10, lako je utvrditi da prethodna nejednakost ostaje na snazi ako imamo $U_j \in PL_1(\mathbb{U}^n)$ umesto $f_j \in H^1(\mathbb{U}^n)$ (za sve $j = 1, 2, \ldots, m$) sa $PL_1(\mathbb{U}^n)-$norma-ma odgovarajućih funkcija na desnoj strani. Ovo je bitno primetiti zbog nastavka dokaza koji se tiče ekstremalnih funkcija. Naime, da bi ustanovili samu nejednakost dovoljno je uzeti u obzir dilatacije $U_j(rz),\ 0 \le r < 1$ i potom pustiti $r \to 1^-$; za dilatacije funkcija U_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ može se utvrditi glavna nejednakost na sličan način kako je to urad-jeno gore za analitičke funkcije (zapravo, jednostavnije, jer su u ovom slučaju u pitanju ograničene funkcije).

Dakle, drugi deo ovog dokaza je posvećen ekstemalnim funkcijama. Medjutim, napravi-ćemo digresiju i pokazati da je funkcija

$$F(z_n) = \int_{\mathbb{U}^{n-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j^{z_n}(z')|^{p_j} \right\} da_{m-2}(z')$$

(koja se pojavljuje na početku ovog dokaza kao podintegralni izraz u (3.27)) neprekidna u svim tačkama $|z_n| < 1$. Imajući u vidu lemu 3.4, dovoljno je da ustanovimo da za proizvoljan kompaktan podskup K diska $\mathbb{U}$ postoji funkcija $G(z') \in L^1_{m-2}(\mathbb{U}^{n-1})$ dominantna za familiju

$$\left\{ \tilde{F}_{z_n}(z') = \prod_{j=1}^{m} |f_j^{z_n}(z')|^{p_j} : z_n \in K \right\}.$$

Da ovo ustanovimo, neka je $C = C(K)$ konstanta izabrana tako da vredi

$$\frac{1}{1 - |z_n|^2} \le C, \quad z_n \in K.$$

Kako je $f_j^{z'} \in H^{p_j}$ za $z' \in \mathbb{U}^{n-1}$, prema lemi 3.3, imamo ocenu

$$|f_j^{z'}(z_n)|^{p_j} \le \frac{1}{1 - |z_n|^2} \|f_j^{z'}\|_{p_j}^{p_j}, \quad |z_n| < 1.$$

Prema tome, za $z_n \in K$ vredi

$$\tilde{F}_{z_n}(z') = \prod_{j=1}^{m} |f_j(z', z_n)|^{p_j} \le C^m \prod_{j=1}^{m} \tilde{U}_j(z'), \quad z' \in \mathbb{U}^{n-1},$$

gde smo označili

$$\tilde{U}_j(z') = \|f_j^{z'}\|_{p_j}^{p_j}, \quad z' \in \mathbb{U}^{n-1}$$

(za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$). Dakle,

$$\tilde{F}_{z_n}(z') \leq G(z'),$$

za

$$G(z') = C^m \prod_{j=1}^{m} \tilde{U}_j(z'), \quad z' \in \mathbb{U}^{n-1}.$$

Ostaje da se pokaže $G \in L^1_{m-2}(\mathbb{U}^{n-1})$. Kako je $\tilde{U}_j \in PL_1(\mathbb{U}^{n-1})$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$, prema glavnoj nejednakosti za klasu $PL_1(\mathbb{U}^{n-1})$, nalazimo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{U}^{n-1}} G(z') da_{m-2}(z') &\leq C^m \int_{\mathbb{U}^{n-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{m} \tilde{U}_j(z') \right\} da_{m-2}(z') \\ &\leq C^m \prod_{j=1}^{m} \|\tilde{U}_j\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

Predjimo sada ne drugi deo teoreme koji se tiče ekstremalnih funkcija. Radi jasnoće, u nastavku pišemo K_n za Koši–Segovo jezgro za polidisk $\mathbb{U}^n$. Jednakost se dostiže u glavnoj nejednakosti ako i samo ako jednakost vredi na oba mesta u (3.31). Ako postoji $1 \leq j \leq m$ tako da je $f_j \equiv 0$, tada je jednakost očito ispunjena na svakom mestu. U nastavku uzimamo da to nije slučaj i pokazaćemo, prvo, da ako jednakost vredi, tada se nijeda funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ ne poništava u jediničnom polidisku. Na kraju, da bismo izveli ekstemalne funkcije, iskoristitićemo da su nam već poznate ekstemalne funkcije u Hilbertovom slučaju naše teoreme.

Prema (3.28) imamo $U_j \not\equiv 0$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$. Dakle, jednakost vredi na drugom mestu u (3.31) ako i samo ako postoji $\lambda_j > 0$ i (zajedničko) $|w''| < 1$ tako da je

$$U_j(z_n) = \lambda_j |K_1(z_n, w'')|^2$$

za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$ (videti kada vredi jednakost u teoremi 3.10). Ovo znači da se nijedna od funkcija U_j ne poništava nigde u jediničnom disku. Primetimo sada da se prva nejdnakost u (3.31) može napisati u sledećoj formi

$$\int_{|z_n|<1} F(z_n) da_{m-2}(z_n) \leq \int_{|z_n|<1} \left\{ \prod_{j=1}^{m} U_j(z_n) \right\} da_{m-2}(z_n).$$

Kako su funkcije $F(z_n)$ i $\prod_{j=1}^{m} U_j(z_n)$ neprekidne za sve $|z_n| < 1$, jednakost se pojavljuje u prethodnoj nejednakosti ako i samo ako je

$$F(z_n) = \prod_{j=1}^{m} U_j(z_n) \quad \text{za sve } \ |z_n| < 1.$$

Ovo znači da jednakost vredi u (3.27) takodje za sve $|z_n| < 1$, što je moguće (imajući sada u vidu slučaj jednakosti u indukcijskoj hipotezi) ako i samo ako je

$$f_j^{z_n}(z') = c_j(z_n) K_{n-1}(z', w'(z_n))^{2/p_j}$$

za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$; ovde je $w'(z_n) \in \mathbb{U}^{n-1}$ i $c_j(z_n) \neq 0$. Naime, kako se $U_j(z_n)$ ne poništava nigde u jediničnom disku, nije moguće da postoje $1 \leq j \leq m$ i $|z_n| < 1$ tako da je $f_j^{z_n} \equiv 0$ (videti (3.28)).

Dakle, ako jednakost vredi u glavnoj nejednakosti (i ako je pri tome $f_j \not\equiv 0$ za sve $j = 1,\ 2, \ldots, m$), tada se f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ ne poništava nigde u polidisku $\mathbb{U}^n$. Sledi da je moguće izdvojiti granu $f_j^{p_j/2} \in H^2(\mathbb{U}^n)$. Pozivajući se na deo tvrdjenja koji se odnosi na jednakost u Hilbervom slučaju naše teoreme i to za $f_j^{p_j/2}$, $j = 1,\ 2, \ldots, m$, nalazimo da jednakost vredi ako i samo ako svaka funkcija f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ ima formu $f_j^{p_j/2}(z) = \tilde{c}_j K_w(z)$, odnosno,

$$f_j(z) = c_j K_w(z)^{2/p_j}$$

za izvesno $w \in \mathbb{U}^n$ i konstane $\tilde{c}_j \neq 0,\ c_j = \tilde{c}_j^{2/p_j} \neq 0$. Ovim je pokazan deo tvrdjenja teoreme 3.9 koji se odnosi na jednakost. □

3.4.5 Karlemanova nejednakost i klase Smirnova

Polidisk je proizvod $D_1 \times \cdots \times D_n \subseteq \mathbb{C}^n$, gde je D_j $(j = 1, \ldots, n)$ prosto povezana oblast sa najmanje dve tačke na granici. Mi ćemo pretpostviti da je svaka oblast D_j omedjena kriviom Γ_j koja je u najmanju ruku rektificijablina. Granica polidiska D u smislu Šilova je $\Gamma = \Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_n$. Proizvod ovog tipa nazivamo polikriva.

Klasa $H^p(D_1 \times \cdots \times D_n)$ se definiše kako sledi. Analitička funkcija f u $D_1 \times \cdots \times D_n$ pripada $H^p(D_1 \times \cdots \times D_n)$ ako $|f|^p$ ($n-$subharmonijska u $\mathbb{U}^n$) poseduje $n-$harmonijsku majorantu u oblasti D. Lako se pokazuje da je $H^p(D)$ bi–analitičko invarijantan.

Niz $\{\Gamma^j = \Gamma_1^j \times \cdots \times \Gamma_n^j \subseteq D_1 \times \cdots \times D_n\}$ konvergira ka granici Šilova polidiska $D_1 \times \cdots \times D_n$ ako se svaki kompaktan podskup D se sadrži u unutrašnjosti Šilova polikrivih počevši od nekog indeksa. Analitička funkcija f u D pripada klasi Smirnova $E^p(D)$ ako postoji niz rektificijabilnih polikrivih Γ_j u D koji konvergira ka granici i konstanta M

tako da vredi
$$\int_{\Gamma_1^j\times\cdots\times\Gamma_n^j} |f(z_1,\ldots,z_n)|^p|dz_1\ldots|dz_n| \le M < \infty.$$

Ovde je bitno da istaknemo da je do na permutaciju koordianta $z_1,\ldots,z_n$, svako bi–analitičko preslikavanje $\Phi(z):\mathbb{U}^n \mapsto D = D_1\times\cdots\times D_n$ odredjeno konformnim preslikavanjima $\varphi_j:\mathbb{U}\mapsto D_j,\ (j=1,\ldots,n)$ u smislu $\Phi(z) = (\varphi_1(z_1),\ldots,\varphi_n(z_n)),\ z = (z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{U}^n$; videti [48, Teorema 7.3.3]. Zbog ovog tvrdjenja, kao i za $n=1$ vredi:

Teorema 3.12. *Neka je $\Phi:\mathbb{U}^n\to D_1\times\cdots\times D_n$ bi–analitičko preslikvanje i neka je $\Gamma_r,\ 0<r<1$ nivo–polikriva za Φ, odnosno $\Gamma_r = \Phi(|w|=r)$. Tada za $f\in E^p(D_1\times\cdots\times D_n)$ vredi*

$$\sup_{0<r<1}\int_{\Gamma_r}|f(z_1,\ldots,z_n)|^p|dz_1|\ldots|dz_n| < \infty.$$

Kako neposednu posledicu imamo ekvivalentnost iskaza:

1. $f\in E^p(D_1\times\cdots\times D_n)$;
2. $F = (f\circ\Phi)\left(\varphi_1'\right)^{1/p}\cdots\left(\varphi_n'\right)^{1/p}\in H^p(\mathbb{U}^n)$ za izvesno bi–analitičko preslikavanje $\Phi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$;
3. $F\in H^p(\mathbb{U}^n)$ za sva preslikavanja Φ gornjeg tipa.

Sledi: $f\in H^p(D)$ ako i samo ako $f\circ\Phi\in H^p(\mathbb{U}^n)$ i $f\in E^p(D)$ ako i samo ako

$$(f\circ\Phi)\left(\varphi_1'\right)^{1/p}\cdots\left(\varphi_n'\right)^{1/p}\in H^p(\mathbb{U}^n).$$

Dakle, dve klase se poistovećuju ako je jakobijan

$$|J_R\Phi(w)| = |\varphi_1'(w_1)|\cdots|\varphi_n'(w_n)|$$

uniformno odvojen on nule i beskonače tačke u celom polidisku D. Vredi i obrnuto: $H^p(D_1\times\cdots\times D_n) = E^p(D_1\times\cdots\times D_n)$ ako i samo ako postoje konstante a i b tako da vredi
$$0 < a \le |\varphi_1'(w_1)|,\ldots,|\varphi_n'(w_n)| \le b,$$

za sve $w=(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{U}^n$. Naprimer, uslov će biti ispunjen ako je granica polidiska (u smislu Šilova) glatka u smislu Dini; pod ovim podrazumevamo da kriva ∂D_j glatka u smislu Dini za sve $j=1,\ldots,n$.

Pretpostavimo sada da je $D = D_1\times\cdots\times D_n$ polidisk sa rektificijabilnom granicom Šilova $\Gamma = \Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_n$. Linearni izomorfizam koji postoji izmedju $E^p(D_\times\cdots\times D_n)$ i $H^p(\mathbb{U}^n)$ daje mogućnost da se norma na $E^p(D)$ uvede tako ako ovaj izomorfizam bude izometičan. Kako bi–analitičko preslikavanje $\Phi : \mathbb{U}^n \mapsto D_\times \cdots \times D_n$ čuva "uglove", možemo govoriti o "netangencijalnim" graničnim vrednostima za funkciju koja pridadaju klasi Smirnova. Normu u klasi Smirnova je moguće izraziti na sledeći način

$$\|f\|_{p,D} = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Gamma |f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)||d\zeta_1| \dots |d\zeta_n| \right\}^{1/p}.$$

Naime, ako je $\Phi : \mathbb{U}^n \to D$ bi–analitičko preslikavanje, tada je norma $f \in E^p(D)$ (prema definicji) jednaka $\|(f \circ \Phi)(\varphi_1')^{1/p} \cdots (\varphi_n')^{1/p}\|_p$; uvodeći smenu promenjive, nalazimo

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{E^p(\Omega)} &= \|(f \circ \Phi)(\varphi_1')^{1/p} \cdots (\varphi_n')^{1/p}\|_p^p \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(\Phi(\eta))|^p |\varphi'(\eta_1)| d\eta_1| \dots |d\eta_n| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Gamma |f(\zeta)|^p |d\zeta_1| \dots |d\zeta_n|.
\end{aligned}$$

Rezultate do kojih smo došli u prethodnim delovim, mogu se sada formulistati za prostore Smirnova na polidisku. Dokaze izostavljamo, jer su neposredni; videti [11] i tezu [34].

Pre formulacije, recimo da se Poenkare–Bergmanova metrika na prosto povezanoj oblasti D sa najmanje dve tačke na granici definiše na sledeći način

$$\lambda_D(z) = \frac{|\psi'(z)}{1 - |\psi(z)|^2}, \quad z \in D,$$

gde su $\varphi : \mathbb{U} \mapsto D$ i $\psi = \varphi^{-1} : D \mapsto \mathbb{U}$ konformna preslikvanja. Poenkare–Bergmanova metrika na polidisku $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ je

$$\lambda_D(z) = \lambda_D(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j=1}^n \lambda_{D_j}(z_j).$$

Uvedimo

$$da_{q-2,D}(z) = da_{q-2,D_1}(z_1) \times \cdots \times da_{q-2,D_n}(z_n),$$

gde je

$$da_{q-2,D}(z) = (q-1)\pi^{-1}\lambda^{-(q-2)}(z)dA(z)$$

za $n = 1$. Naprimer, lako je proveriti da je $da_{q-2,\mathbb{U}^n}$ normalizovana težinska mera na polidisku $\mathbb{U}^n$.

Teorema 3.13 (videti [35])**.** *Neka je $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ polidisk sa Dini glatkom grani-*

com i $f_j(z) = f_j(z_1, \ldots, z_n) \in E^{p_j}(D)$ *za sve* $j = 1,\ 2, \ldots, m$. *Tada*

$$\prod_{j=1}^{m} |f_j|^{p_j} \in L^1_{m-2}(D)$$

i naredna nejednakost izoperimetrijskog tipa vredi

$$\int_D \left\{ \prod_{j=1}^{m} |f_j(z)|^{p_j} \right\} da_{m-2,D}(z) \leq \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|^{p_j}_{p_j,D}.$$

Jednakost vredi ako i samo ako je ili $\prod_{j=1}^{m} f_j \equiv 0$ *ili svaka funkcija* f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ *ima formu*

$$f_j(z) = c_j \left\{ \prod_{j=1}^{n} \varphi'_j(z_j) \right\}^{1/p_j}$$

za izvesno (zajedničko) bi–analitičko preslikavanje $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : D_1 \times \cdots \times D_n \mapsto \mathbb{U}^n$ *i konstantu* $c_j \neq 0$.

Težinski Bergmanov prostor $L^p_{a,q-2}(D),\ 0 < p < \infty,\ 1 < q < \infty$ na polidisku $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ je prirodno definisati u odnosu na korespodentnu Poenkare–Bergmanovu metriku λ_D. Dakle, $f \in H(D)$ pripada $L^p_{a,q-2}(D)$, ako je norma

$$\|f\|_{p,q-2,D} = \left\{ \int_D |f(z)|^p da_{q-2,D}(z) \right\}^{1/p}$$

konačna. Drugim rečima, $L^p_{a,q-2}(D)$ je potprostor Lebegovog prostora $L^p_{q-2}(D) = L^p(D, da_{q-2,D})$ koji se sastoji od funkcija analitičkih u D.

Posledica 3.4. *Neka je* p *pozitivan broj i* $f_j(z) = f_j(z_1, \ldots, z_n) \in E^p(D)$ *za sve* $j = 1,\ 2, \ldots, m$. *Tada*

$$\prod_{j=1}^{m} f_j \in L^p_{a,m-2}(D)$$

i vredi

$$\left\| \prod_{j=1}^{m} f_j \right\|_{p,m-2,D} \leq \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{p,D}.$$

Jednakost se dostiže ako i samo ako je ili $\prod_{j=1}^{m} f_j \equiv 0$ *ili svaka funkcija* f_j $(j = 1,\ 2, \ldots, m)$ *ima formu*

$$f_j(z) = c_j \left\{ \prod_{j=1}^{n} \varphi'_j(z_j) \right\}^{1/p}.$$

Posledica 3.5. *Neka je $f \in E^p(D)$, gde je $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ polidisk sa Dini glatkom granicom u smislu Šilov. Tada*

$$f \in L^{mp}_{a,m-2}(D_1 \times \cdots \times D_n)$$

i

$$\|f\|_{mp,m-2,D} \leq \|f\|_{p,D},$$

pri čemu jednakost vredi ako i samo ako je

$$f(z_1, \dots, z_n) = \lambda \left\{ \prod_{j=1}^{n} \varphi_j'(z_j) \right\}^{1/p}$$

za izvesno bi–analitičko preslikavanje $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : D \mapsto \mathbb{U}^n$ i konstantu λ.

Primedba 3.5. Sledi inkluzija

$$E^p(D_1 \times \cdots \times D_n) \subseteq L^{mp}_{a,m-2}(D_1 \times \cdots \times D_n), \tag{3.32}$$

pri čemu je norma inkluzivnog operatora jednaka jedinici.

Primedba 3.6. Teorema 3.4 može se naći u [38] u posebnom slučaju; ovde su Mateljević i Pavlović, drugim pristupom, dobili isti rezultata za prosto povezane oblasti u ravni omedjene analitičkom krivom. Aronszajn [2] je primenio teoriju reproduktivnih jezgara i pokazao našu teoremu u slučaju $p_1 = p_2 = 2$ i za oblasti omedjene analitičkom krivom. Saito [49] je pokazao varijanu teoreme 3.4 za ravne oblasti koje nisu obavezno prosto povezane (takodje u Hilbertovom slučaju).

Literatura

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, third ed., McGraw–Hill, 1979.

[2] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[3] E. F. Beckenbach and T. Radó, *Subharmonic functions and minimal surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 648–661

[4] E. F. Beckenbach and T. Radó, *Subharmonic functions and surfaces of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 662–674.

[5] M. Beeson, *On the area of harmonic surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **69** (1978), 143–147.

[6] M. Beeson, *Notes on minimal murfaces*, preprint, 2011.

[7] J. Burbea, *Total positivity of certain reproducing kernels*, Pacific J. Math. **67** (1976), 101–130.

[8] J. Burbea, *Norm inequalities of exponential type for holomorphic functions*, Kodai Math. J. **5** (1982), 339–354.

[9] J. Burbea, *Inequalities for holomorphic functions of several complex variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), 247–266.

[10] J. Burbea, *Inequalities for reproducing kernel spaces*, Illinois J. Math. **27** (1983), 130–137.

[11] J. Burbea, *Sharp inequalities for holomorphic functions*, Illinois J. Math. **31** (1987), 248–264.

[12] T. Carleman, *Zur Theorie der Minimalflächen*, Math. Z. **9** (1921).

[13] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Springer–Verlag, New York–Heidelberg, 1977.

[14] C. S. Davis, *Iterated limits in* $N^*(\mathbb{U}^n)$, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 139–146.

[15] P. Duren, *Extension of a theorem of Carleson*, Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1969), 143–146.

[16] P. L. Duren, *Theory of* H^p *spaces*, Academic Press, New York and London, 1970.

[17] P. Duren, *Harmonic mappings in the plane*, Cambridge University Press, 2004.

[18] P. L. Duren and A. L. Shields, *Restrictions of Hp functions to the diagonal of the polydisc*, Duke Math. J. **42** (1975), 751–753.

[19] F. Fiala, *Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive*, Comment. Math. Helv., **13** (1940–41), 293–346

[20] R. J. Gardner, *The Brunn–Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 355–405.

[21] J. Globevnik and E. Stout, *Analytic discs with rectifiable simple closed curves as ends*, Ann. Math. **127** (1988), 389–401

[22] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, The University Press, Cambridge, 1959.

[23] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals*, II, Math. Z. **34** (1932), 403–439.

[24] W. Hengartner and G. Schober, *Harmonic mappings with given dilatation*, J. London Math. Soc. **33** (1986), 473–483.

[25] C. Horowitz and D. M. Oberlin, *Restriction of* H^p *functions to the diagonal of* $\mathbb{U}^n$, Indiana Univ. Math. J. **24** (1975), 767–772.

[26] A. Huber, *On the isoperimetric inequality on surfaces of variable Gaussian curvature*, Ann. Math. **60** (1954), 237–247.

[27] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957/58) 13–72.

[28] D. Kalaj, *On isoperimetric inequality for the polydisk*, Ann. Mat. Pura Appl. **190** (2011), 355–369.

[29] D. Kalaj, M. Marković and M. Mateljević, *Charathéodory and Smirnov type theorem for harmonic mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn., pojaviće se.

[30] D. Kalaj and M. Mateljević, $(K, K')-$*quasiconformal harmonic mappings*, Potential Analysis **36** (2012), 117–135.

[31] M. Keldysh and M. Lavrentiev, *Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **54** (1937), 1–38.

[32] H. Lewy, *On the non–vanishing of the Jacobian in certain in one–to–one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 689–692.

[33] S. Lozinsky, *On subharmonic functions and their application to the theory of surfaces*, Bull. Acad. Sci., SSSR. Sér. Math., **8** (1944), 175–194

[34] M. Marković, *Varijante Karlemanove nejednakosti*, magistarski rad, Beograd, 2012.

[35] M. Marković, *A Sharp inequality for holomorphic functions on the polydisc*, Proc. Amer. Math. Soc. (pojaviće se).

[36] M. Mateljević, *The isoperimetric inequality and some extremal problems in H^1*, in Analytic functions, Kozubnik 1979 (Proc. Seventh Conf., Kozubnik, 1979), 364–369, Lecture Notes in Math. **798**, Springer, Berlin 1980.

[37] M. Mateljević, *Quasiconformality of harmonic mappings between Jordan domains 2*, Filomat 26:3 (2012), 479–510.

[38] M. Mateljević and M. Pavlović, *New proofs of the isoperimetric inequality and some generalizations*, J. Math. Anal. Appl. **98** (1984), 25–30.

[39] M. Mateljević and M. Pavlović, *Some inequalities of isoperimetric type for the integral means of analytic functions*, Mat. Vesnik **37** (1985), 78–80.

[40] I. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Ungar, New York, 1955 and 1960.

[41] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), 1182–1238.

[42] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, 2nd edition, Dover Publ. Inc., New York, 1986.

[43] D. Partyka and K. Sakan, *On bi–Lipschitz type inequalities for quasiconformal harmonic mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **32** (2007), 579–594.

[44] M. Pavlović, usmena konverzacija.

[45] M. Pavlović and M. Dostanić, *On the inclusion $H^2(\mathbb{U}^n) \subseteq H^{2n}(\mathbb{B}_n)$ and the isoperimetric inequality*, J. Math. Anal. Appl. **226** (1998), 143–149.

[46] I. Privaloff, *Sur certaines classes de fonctions subharmoniques et leur représentation analytique*, Bulletin de l'academie des Sciences de l'URSS 1938.

[47] L. I. Ronkin, *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, American Mathematical Society, Providence, 1974.

[48] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, New York, 1969.

[49] S. Saitoh, *The Bergman norm and Szegö norm*, Trans. Amer. Math. Soc. **249** (1974), 79–82.

[50] S. Saitoh, *Some inequalities for analytic functions with a finite Dirichlet integral on the unit disc*, Math. Ann. **246** (1979/80), 69–77.

[51] L. Scheeffer, *Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven*, Acta Math. **5** (1885), 49–82.

[52] J. H. Shapiro, *Mackey topologies, reproducing kernels, and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces*, Duke Math. J. **43** (1976), 187–202.

[53] M. Shiffman, *On the isoperimetric inequality for saddle surfaces with singularities*, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, pp. 383–394. Interscience Publishers, Inc., New York, 1948.

[54] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer – Verlag, 1984.

[55] M. Tsuji, *On a theorem of F. and M. Riesz*, Proc. Imperial Acad. **18** (1942), 172–175.

[56] D. Vukotić, *A sharp estimate for A^p_α functions in $\mathbb{C}^n$*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 753–756

[57] D. Vukotić, *The isoperimetric inequality and a theorem of Hardy and Littlewood*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), 532–536.

[58] S. E. Warschawski, *On the differentiability at the boundary in conformal mapping*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 614–620.

[59] S. Yamashita, *Growth properties of subharmonic functions in the unit disk*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa **15** (1988), 515–527.

[60] A. Zygmund, *On the boundary values of functions of several complex variables*, I, Fund. Math. **36** (1949), 207–235.

Biografija autora

Marijan M. Marković je rodjen 21.04.1982. u Kotoru. Diplomirao je na Prirodno–matematičkom fakultetu, Univerziteta Crne Gore, 2005. godine. Zvanje magistra matematičkih nauka stekao je na Matematičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu, 2012. godine, na temu "Varijante Karlemanove nejednakosti", pod rukovodstvom prof. dr Miodraga Mateljevića i prof. dr Davida Kalaja. Od 2005. godine je zaposlen na Prirodno–matematičkom fakultetu, Univerziteta Crne Gore, prvo kao saradnik u nastavi, a potom kao saradnik na projektu. Oblasti naučnog interesovanja su: Kompleksna analiza, Geometrijska teorija funkcija, Diferencijalna geometrija.

Spisak publikovanih i radova prihvaćenih za stampu:

• D. Kalaj and M. Marković, *Optimal Estimates for the Gradient of Harmonic Functions in the Unit Disk*, Complex Analysis and Operator Theory 2011, DOI: 10.1007/s11785–011–0187–5

• D. Kalaj and M. Marković, *Optimal Estimates for Harmonic Functions in the Unit Ball*, Positivity 2011, DOI: 10.1007/s11117–011–0145–5

• M. Marković, *A Sharp Inequality for Holomorphic Functions on the Polydisc*, Proceedings of the American Mathematical Society (prihvaćen za štampu)

• D. Kalaj, M. Marković and M. Matelević, *Carathéodory and Smirnov Type Theorems for harmonic mappings onto surfaces*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ – Mathematica (prihvaćen za štampu)

• D. Kalaj and M. Marković, *Norm of the Bergman Projection*, Mathematica Scandinavica (prihvaćen za štampu)

Adresa: Cetinjski put bb, 81000 Podgorica, Crna Gora
Elektronska adresa: marijanmmarkovic@gmail.com

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Маријан Марковић

број индекса ____________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Неједнакости изопериметријског типа у просторима аналитичких функција

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 6. 3. 2013.

Маријан Марковић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Маријан Марковић

Број индекса

Студијски програм Математика

Наслов рада Неједнакости изопериметријског типа у просторима аналитичких функција

Ментор проф. др Миодраг Матељевић

Потписани/а Маријан Марковић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 6. 3. 2013

Маријан Марковић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Неједнакости изопериметријског типа у просторима аналитичких функција

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 6. 3. 2013

Маријан Марковић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.